微积分

——副标题

LXY

2024 年 4 月 10 日

前言

这是笔记的前言部分.

Dylaaan

2024 年 4 月 10 日

目录

第一章　重积分

第二章　习题

2.1　级数

20-21 期中

12. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p-(-1)^n})(0<p<1)$ 的敛散性 (要讨论是绝对收敛、条件收敛还是收敛)

$$\begin{aligned}\because \ln[1+\frac{(-1)^n}{n^p-(-1)^n}] &= \ln\frac{n^p}{n^p-(-1)^n} = -\ln[1-\frac{(-1)^n}{n^p}] \\ &= \frac{(-1)^n}{n^p}+\frac{1}{2n^{2p}}+o(\frac{1}{n^{2p}})\end{aligned}$$

且 $\dfrac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛

当 $\dfrac{1}{2}<p<1$ 时 $\dfrac{1}{2n^{2p}}$ 绝对收敛，则原级数条件收敛；

当 $0<p\leq\dfrac{1}{2}$ 时 $\dfrac{1}{2n^{2p}}$ 发散，则原级数发散

注：此处用到了二级结论：条件收敛 + 绝对收敛 = 条件收敛，证明如下：

设级数 $\sum a_n$ 条件收敛，级数 $\sum b_n$ 绝对收敛，下证级数 $\sum(a_n+b_n)$ 条件收敛

反证法：假设级数 $\sum(a_n+b_n)$ 绝对收敛，

由题知：级数 $\sum a_n$ 收敛，级数 $\sum|a_n|$ 发散，级数 $\sum b_n$ 收敛，级数 $\sum|b_n|$ 收敛

由绝对值不等式：

$$|a_n + b_n| \geq |b_n| - |a_n|$$

即：

$$|b_n| \leq |a_n + b_n| + |a_n|$$

$\because$ 级数 $\sum |a_n + b_n|$ 收敛，级数 $\sum |a_n|$ 收敛

$\therefore$ 级数 $\sum |b_n|$ 收敛，矛盾，则假设不成立

$\therefore$ 级数 $\sum (a_n + b_n)$ 条件收敛