概率论与数理统计

——副标题

Dylaaan

2024 年 4 月 12 日

前言

这是笔记的前言部分.

Dylaaan

2024 年 4 月 12 日

目录

第一章 概率论的基本概念 **1**

第二章 随机变量及其分布 **2**

2.1 随机变量 2

2.2 离散型随机变量及其分布 2

2.3 随机变量的分布函数 2

2.4 连续性随机变量及其密度函数 2

2.5 随机变量函数的分布 2

第三章 多元随机变量及其分布 **3**

3.1 二元离散型随机变量 3

3.2 二元随机变量的分布函数 5

3.3 二元连续性随机变量 6

3.4 随机变量的独立性 9

3.5 二元随机变量函数的分布 14

第四章 随机变量的数字特征 **15**

4.1 数学期望 15

4.2 方差 16

4.3 协方差、相关系数 16

4.4 其它数字特征 16

第一章　概率论的基本概念

第二章　随机变量及其分布

2.1　随机变量

2.2　离散型随机变量及其分布

2.3　随机变量的分布函数

2.4　连续性随机变量及其密度函数

2.5　随机变量函数的分布

第三章　多元随机变量及其分布

3.1　二元离散型随机变量

联合概率分布律的性质：

1. $p_{ij} \geq 0$, i,j = 1,2, ...
2. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

例 1.1 设随机变量 X 在 1、2、3、4 四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量 Y 在 1 $\sim$ X 中等可能地曲一整数值，试求 (X,Y) 的联合概率分布。

(X,Y) 的联合概率分布为：

X \ Y	1	2	3	4
1	1/4	0	0	0
2	1/8	1/8	0	0
3	1/12	1/12	1/12	0
4	1/16	1/16	1/16	1/16

(二) 边际分布

对于离散型随机变量 (X,Y)，联合分布律为

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},i,j=1,2,...$$

X,Y 的边际 (边缘) 分布律为：

$$P(Y=y_j)=P(X<+\infty,Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}\text{ j=1,2,...}$$

$$P(X=x_i)=P(X=x_i,Y<+\infty)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}\text{ i=1,2,...}$$

3.2　二元随机变量的分布函数

(一) 联合分布函数

定义：设 (X,Y) 是二元随机变量，对于任意实数 x,y, 二元函数 $F(x,y) = P\{(X \le x) \cap (Y \le y)\} = P(X \le x, Y \le y)$ 称为二元随机变量 (X,Y) 的联合分布函数。

分布函数 F(X,Y) 的性质

1° F(x,y) 关于 x,y 单调不减，即：

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1, y) \le F(x_2, y)$$

$$y_1 < y_2 \Rightarrow F(x, y_1) \le F(x, y_2)$$

2° $0 \le F(x,y) \le 1$，

对任意 x,y，$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$

3° F(x,y) 关于 x,y 右连续，即：

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} F(x+\epsilon, y) = F(x,y)$$

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} F(x, y+\epsilon) = F(x,y)$$

4° 若 $x_1 < x_2$，$y_1 < y_2 \Rightarrow F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1) \ge 0$

(二) 边际 (边缘) 分布函数

二元随机变量 (X,Y) 作为整体，有分布函数 F(x,y).X 和 Y 都是随机变量，它们的分布函数分别记为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，称为边际分布函数.

$$F_X(x) = F(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y)$$

3.3　二元连续性随机变量

(一) 联合概率密度函数

定义：对于二元随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$, 如果存在非负函数 f 使对于任意 x,y，有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$$

称 (X,Y) 为二元连续型随机变量，称 $f(x,y)$ 为二元随机变量 (X,Y) 的 (联合) 概率密度函数

联合密度函数性质

1. $f(x,y)\geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$
3. 设 G 是平面上区域，(X,Y) 落在 G 内的概率 $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G}f(x,y)dxdy$
4. 在 $f(x,y)$ 的连续点 (x,y)，有 $\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

(二) 边际 (边缘) 概率密度函数

设连续性随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)$，则 X,Y 的边际概率密度函数为别为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

(三) 条件分布函数

定义：若 $P(Y=y)>0$，则在 $\{Y=y\}$ 条件下，X 的条件分布函数为：

$$F_{X|Y}(x|y)=P(X\leq x|Y=y)=\frac{P(X\leq x,Y=y)}{P(Y=y)}$$

若 $P(Y=y)=0$，但对任给 $\epsilon>0, P(y<Y+\epsilon\le y+\epsilon)>0$，则在 $\{Y=y\}$ 条件下，X 的条件分布函数为：

$$F_{X|Y}(x|y)=\lim_{\epsilon\to 0^+}P(X\le x|y<Y\le y+\epsilon)=\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{P(X\le x, y<Y\le y+\epsilon)}{P(y<Y\le y+\epsilon)}$$

仍记为 $P(X\le x|Y=y)$

事实上，

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dv]du=\int_{-\infty}^{x}f_X(u)du$$

同理：

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)du]dv=\int_{-\infty}^{y}f_Y(v)dv$$

定义：条件概率密度函数

设二元随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)$，X,Y 的边际密度函数为 $f_X(x),f_Y(y)$，则在 $\{Y=y\}$ 条件下 X 的条件密度函数为：

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},f_Y(y)>0$$

在 $\{X=x\}$ 条件下，Y 的条件密度函数为：

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)},f_X(x)>0$$

即 $F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$

$$\begin{aligned}\because F_{X|Y}(x|y)&=\lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{P(X\le x,y<Y\le y+\Delta y)}{P(y<Y\le y+\Delta y)}\\&=\lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{\frac{1}{\Delta y}\int_{-\infty}^{x}ds\int_{y}^{y+\Delta y}f(u,v)dv}{\frac{1}{\Delta y}\int_{y}^{y+\Delta y}f_Y(t)dt}\\&=\frac{\int_{-\infty}^{x}f(u,y)du}{f_Y(y)}\\&=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du\end{aligned}$$

$$\therefore F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$$

(四) 二元均匀分布与二元正太分布

二元均匀分布：

若二元随机变量 (X,Y) 在二维有界区域 D 上取值，且具有概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\text{D 的面积}}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

若 D_1 是 D 的子集，则

$$P\{(X,Y)\in D_1\}=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy=\frac{D_1\text{的面积}}{D\text{的面积}}$$

二元正太分布：

设二元随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot exp\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

$(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ 都是常数，且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1$

称 (X,Y) 为服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二元正太分布，记为：

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

$$\begin{aligned}f_{Y|X}(y|x)&=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot exp\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}[y-(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1))]^2\}\end{aligned}$$

即在 $\{X=x\}$ 条件下，Y 的条件分布是正太分布

$$N(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),(1-\rho^2)\sigma_2^2)$$

同理，在 $\{Y=y\}$ 条件下，X 的条件分布是正太分布

$$N(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),(1-\rho^2)\sigma_1^2)$$

3.4　随机变量的独立性

定义：设 $F(x,y)$ 及 $F_X(x),F_Y(y)$ 分别是随机变量 (X,Y) 的联合分布函数及边际分布函数，若对所有实数 x,y 有

$$P(X\leq x,Y\leq y)=P(X\leq x)P(Y\leq y)$$

即：

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

称随机变量 X,Y 相互独立

若 (X,Y) 是离散型随机变量，则 X,Y 相互独立的条件等价于：$P(X=x_i,Y=y_j)$，即：$p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$ 对一切 i,j 都成立.

若 (X,Y) 是连续型随机变量，$f(x,y),f_X(x),f_Y(y)$ 分别是 (X,Y) 的联合密度函数和边缘密度函数，则 X,Y 相互独立的条件等价于：$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 几乎处处成立；即平面上除去零“面积”集外，处处成立

X、Y 独立 $\iff \forall x,y,F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

X、Y 离散：$\iff P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$

$\iff P(Y=y_j|X=x_i)=P(Y=y_j)$

X、Y 连续：$\iff f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

$\iff f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y),\forall x,y$

定理 3.4.1：连续型随机变量 X,Y 相互独立的充分必要条件是：

$$f(x,y)=m(x)\cdot n(y),|x|<+\infty,|y|<+\infty$$

即：

1. f 可以拆成分别关于 x,y 的两个函数的积

2. x,y 积分区域没有关联

例 4.5 证明：对于二维正态随机变量 (X, Y)，X 与 Y 相互独立的充要条件是参数 $\rho = 0$

因为 (X, Y) 的概率密度函数为：

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot exp\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

又其边际密度函数的乘积为：

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot exp\{-\frac{1}{2}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

$\Leftarrow$：如果 $\rho = 0$, 则对 $\forall x, y$, 有 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$，即 X, Y 相互独立

$\Rightarrow$：反之，若 X, Y 相互独立, 由于 $f(x, y), f_X(x), f_Y(y)$ 都是连续函数，

故对 $\forall x, y$, 有 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$

特别的，有 $f(\mu_1, \mu_2) = f_X(\mu_1)f_Y(\mu_2)$,

即：$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}$

一般 n 元随机变量的一些概念和结果

n 元随机变量定义：

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S = \{e\}$; 设 $X_1 = X_1(e), X_2 = X_2(e), ..., X_n = X_n(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的一个 n 元向量 $(X_1, X_2, ...X_n)$ 称为 n 元随机变量

n 元随机变量分布函数：

对于任意 n 个实数 $x_1, x_2, ..., x_n$,n 元函数：

$F(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, ..., X_n \le x_n)$

称为 n 元随机变量 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 的分布函数

离散型随机变量的分布律、连续型随机变量的概率密度函数与之前的定义相同。

多元随机变量相互独立：

若对于所有的 $x_1, x_2, ..., x_n$, 有：

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)...F_{X_n}(x_n)$$

则称 $X_1, X_2, ..., X_n$ 是相互独立的

$(X_1, X_2, ..., X_m)$ 与 $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ 的独立性

设 $(X_1, X_2, ..., X_m)$ 的分布函数为 $F_1(x_1, x_2, ..., x_m)$, $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ 的分布函数为 $F_2(y_1, y_2, ..., y_n)$, $(X_1, X_2, ..., X_n, Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ 的分布函数为：

$$F(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n)$$

若 $F(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n) = F_1(x_1, x_2, ..., x_n)F_2(y_1, y_2, ..., y_n)$,

称 $(X_1, X_2, ..., X_m)$ 与 $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ 相互独立

定理:设 $(X_1, X_2, ..., X_m)$ 与 $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ 相互独立,则 $X_i(i = 1, 2, ..., m)$ 与 $Y_j(j = 1, 2, ..., n)$ 相互独立

若 $h(x_1, x_2, ..., x_m)$ 与 $g(y_1, y_2, ..., y_n)$ 是连续函数，则 $h(X_1, X_2, ..., X_m)$ 和 $g(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ 相互独立

(一)$Z = X + Y$ 的分布

设 (X, Y) 为离散型随机变量，分布律为 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, ...$ 设 Z 的可能取值为 $z_1, z_2, ..., z_k, ...$, 则 $Z = X + Y$ 的分布律为

$$P(Z = z_k) = P(X + Y = z_k) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = x_i, Y = z_k - x_i), k = 1, 2, ...$$

或 $P(Z=z_k)=\sum\limits_{j=1}^{+\infty}P(X=z_k-y_j,Y=y_j),k=1,2,...$

特别的，当 X 与 Y 相互独立时，

$$P(Z=z_k)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(X=x_i)P(Y=z_k-x_i),k=1,2,...$$

或

$$P(Z=z_k)=\sum_{j=1}^{+\infty}P(X=z_k-y_j)P(Y=y_j),k=1,2,...$$

设连续型随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)$，则 $Z=X+Y$ 的分布函数为：

$$\begin{aligned}F_Z(z)=P(Z\leq z)&=\iint\limits_{x+y\leq z}f(x,y)dxdy\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)dx]dy\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{z}f(u-y,y)du]dy\\&=\int_{-\infty}^{z}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u-y,y)dy]du\\&=\int_{-\infty}^{z}f_Z(u)du\end{aligned}$$

固定 z,y, 令 $u=x+y$

故 Z 的密度函数为：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy$$

由 X,Y 的对称性：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$$

当 X 与 Y 相互独立时，

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

称为卷积公式

(二)$M=max\{X,Y\},N=min\{X,Y\}$ 的分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，记 M,N 的分布函数分别为 $F_{max}(z)$ 和 $F_{min(z)}$，则

$$F_{max}(z)=P(M\leq z)=P(X\leq z,Y\leq z)=P(X\leq z)P(Y\leq z)$$

即

$$F_{max}(z)=F_X(z)F_Y(z)$$

$$\begin{aligned}F_{min}(z)&=P(N\leq z)=1-P(N>z)=1-P(X>z,Y>z)\\&=1-P(X>z)P(Y>z)\end{aligned}$$

即

$$F_{min}(z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$$

推广到 n 元随机变量：

$max\geq z\iff$ 所有都大于等于 z

$min\leq z\iff$ 用 $1-$ 转化为 max

设 $M=max(X_1,X_2,...,X_n)$，则

$$F_M(z)=P(M\leq z)=P(X_1\leq z,X_2\leq z,...,X_n\leq z)$$

若 $X_1,X_2,...,X_n$ 相互独立：

$$=P(X_1\leq z)P(X_2\leq z)...P(X_n\leq z)=F_{X_1}(z)...F_{X_n}(z)$$

若 $X_1,X_2,...,X_n$ 同分布：

$$=[F_{X_1}(z)]^n$$

设 $N=min(X_1,X_2,...,X_n)$，则

$$1-F_N(z)=1-P(N\leq z)=P(N>z)=P(X_1>z,X_2>z,...,X_n>z)$$

若 $X_1, X_2, ..., X_n$ 独立，

$$= P(X_1 > z)...P(X_n > z) = (1 - F_{X_1}(z))...(1 - F_{X_n}(z))$$

若 $X_1, ..., X_n$ 同分布，

$$= [1 - F_{X_1}(z)]^2$$

3.5 二元随机变量函数的分布

第四章　随机变量的数字特征

4.1　数学期望

(一) 数学期望定义

定义：设离散型随机变量 X 的分布律为：$P(X=x_k)=p_k, k=1,2,...$ 若级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|x_k|p_k<\infty$，则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}x_kp_k$ 的值为 X 的数学期望，记为 $E(X)$，即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}x_kp_k$$

定义:设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$,若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx<\infty$，则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ 的值为 X 的数学期望，记为 $E(X)$，即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

数学期望简称期望，又称均值

例 1.4: 设 $X\sim P(\lambda)$，$E(X)=\lambda$

例 1.5: 设 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布，则 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

4.2　方差

4.3　协方差、相关系数

4.4　其它数字特征