

Cálculo de Programas

Trabalho Prático

MiEI+LCC — 2020/21

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Junho de 2021

Grupo nr.	79
a85829	Meriem Khammassi
a89482	Simão Paulo da Gama Castel-Branco e Brito
a89578	Patrícia Gonçalves Pereira

1 Preâmbulo

Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em **Haskell** (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em **Haskell**. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita “*literária*” [1], cujo princípio base é o seguinte:

Um programa e a sua documentação devem coincidir.

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2021t.pdf` que está a ler é já um exemplo de **programação literária**: foi gerado a partir do texto fonte `cp2021t.lhs`¹ que encontrará no **material pedagógico** desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2021t.zip` e executando:

```
$ lhs2TeX cp2021t.lhs > cp2021t.tex
$ pdflatex cp2021t
```

em que **lhs2tex** é um pre-processor que faz “pretty printing” de código Haskell em **L^AT_EX** e que deve desde já instalar executando

```
$ cabal install lhs2tex --lib
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2021t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em **Haskell**, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2021t.lhs
```

¹O suffixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

Abra o ficheiro `cp2021t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo **GHCi** para ser executado.

3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 (ou 4) alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na [página da disciplina](#) na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo **D** com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com **BibTeX**) e o índice remissivo (com **makeindex**),

```
$ bibtex cp2021t.aux
$ makeindex cp2021t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário **QuickCheck**, que ajuda a validar programas em **Haskell** e a biblioteca **Gloss** para geração de gráficos 2D:

```
$ cabal install QuickCheck gloss --lib
```

Para testar uma propriedade **QuickCheck** *prop*, basta invocá-la com o comando:

```
> quickCheck prop
+++ OK, passed 100 tests.
```

Pode-se ainda controlar o número de casos de teste e sua complexidade, como o seguinte exemplo mostra:

```
> quickCheckWith stdArgs { maxSuccess = 200, maxSize = 10 } prop
+++ OK, passed 200 tests.
```

Qualquer programador tem, na vida real, de ler e analisar (muito!) código escrito por outros. No anexo **C** disponibiliza-se algum código **Haskell** relativo aos problemas que se seguem. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

3.1 Stack

O **Stack** é um programa útil para criar, gerir e manter projetos em **Haskell**. Um projeto criado com o Stack possui uma estrutura de pastas muito específica:

- Os módulos auxiliares encontram-se na pasta *src*.
- O módulo principal encontra-se na pasta *app*.
- A lista de dependências externas encontra-se no ficheiro *package.yaml*.

Pode aceder ao **GHCi** utilizando o comando:

```
stack ghci
```

Garanta que se encontra na pasta mais externa **do projeto**. A primeira vez que correr este comando as dependências externas serão instaladas automaticamente.

Para gerar o PDF, garanta que se encontra na diretoria *app*.

Problema 1

Os tipos de dados algébricos estudados ao longo desta disciplina oferecem uma grande capacidade expressiva ao programador. Graças à sua flexibilidade, torna-se trivial implementar DSLs e até mesmo linguagens de programação.

Paralelamente, um tópico bastante estudado no âmbito de Deep Learning é a derivação automática de expressões matemáticas, por exemplo, de derivadas. Duas técnicas que podem ser utilizadas para o cálculo de derivadas são:

- *Symbolic differentiation*
- *Automatic differentiation*

Symbolic differentiation consiste na aplicação sucessiva de transformações (leia-se: funções) que sejam congruentes com as regras de derivação. O resultado final será a expressão da derivada.

O leitor atento poderá notar um problema desta técnica: a expressão inicial pode crescer de forma descontrolada, levando a um cálculo pouco eficiente. *Automatic differentiation* tenta resolver este problema, calculando o valor da derivada da expressão em todos os passos. Para tal, é necessário calcular o valor da expressão e o valor da sua derivada.

Vamos de seguida definir uma linguagem de expressões matemáticas simples e implementar as duas técnicas de derivação automática. Para isso, seja dado o seguinte tipo de dados,

```
data ExpAr a = X
  | N a
  | Bin BinOp (ExpAr a) (ExpAr a)
  | Un UnOp (ExpAr a)
  deriving (Eq, Show)
```

onde *BinOp* e *UnOp* representam operações binárias e unárias, respectivamente:

```
data BinOp = Sum
  | Product
  deriving (Eq, Show)
data UnOp = Negate
  | E
  deriving (Eq, Show)
```

O construtor *E* simboliza o exponencial de base *e*.

Assim, cada expressão pode ser uma variável, um número, uma operação binária aplicada às devidas expressões, ou uma operação unária aplicada a uma expressão. Por exemplo,

Bin Sum X (N 10)

designa $x + 10$ na notação matemática habitual.

1. A definição das funções *inExpAr* e *baseExpAr* para este tipo é a seguinte:

```
inExpAr = [X, num_ops] where
  num_ops = [N, ops]
  ops = [bin, Un]
  bin (op, (a, b)) = Bin op a b
baseExpAr f g h j k l z = f + (g + (h × (j × k) + l × z))
```

Defina as funções *outExpAr* e *recExpAr*, e teste as propriedades que se seguem.

Propriedade [QuickCheck] 1 *inExpAr* e *outExpAr* são testemunhas de um isomorfismo, isto é, *inExpAr* · *outExpAr* = *id* e *outExpAr* · *inExpAr* = *id*:

```
prop_in_out_idExpAr :: (Eq a) => ExpAr a -> Bool
prop_in_out_idExpAr = inExpAr · outExpAr == id
prop_out_in_idExpAr :: (Eq a) => OutExpAr a -> Bool
prop_out_in_idExpAr = outExpAr · inExpAr == id
```

2. Dada uma expressão aritmética e um escalar para substituir o X , a função

$$eval_exp :: Floating a \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr a) \rightarrow a$$

calcula o resultado da expressão. Na página 13 esta função está expressa como um catamorfismo. Defina o respectivo gene e, de seguida, teste as propriedades:

Propriedade [QuickCheck] 2 A função *eval_exp* respeita os elementos neutros das operações.

$$\begin{aligned} prop_sum_idr &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_sum_idr a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} sum_idr \textbf{ where} \\ sum_idr &= eval_exp a (Bin Sum exp (N 0)) \\ prop_sum_idl &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_sum_idl a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} sum_idl \textbf{ where} \\ sum_idl &= eval_exp a (Bin Sum (N 0) exp) \\ prop_product_idr &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_product_idr a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} prod_idr \textbf{ where} \\ prod_idr &= eval_exp a (Bin Product exp (N 1)) \\ prop_product_idl &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_product_idl a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} prod_idl \textbf{ where} \\ prod_idl &= eval_exp a (Bin Product (N 1) exp) \\ prop_e_id &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow Bool \\ prop_e_id a &= eval_exp a (Un E (N 1)) \equiv expd 1 \\ prop_negate_id &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow Bool \\ prop_negate_id a &= eval_exp a (Un Negate (N 0)) \equiv 0 \end{aligned}$$

Propriedade [QuickCheck] 3 Negar duas vezes uma expressão tem o mesmo valor que não fazer nada.

$$\begin{aligned} prop_double_negate &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_double_negate a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} eval_exp a (Un Negate (Un Negate exp)) \end{aligned}$$

3. É possível otimizar o cálculo do valor de uma expressão aritmética tirando proveito dos elementos absorventes de cada operação. Implemente os genes da função

$$optimize_eval :: (Floating a, Eq a) \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr a) \rightarrow a$$

que se encontra na página 13 expressa como um hilomorfismo² e teste as propriedades:

Propriedade [QuickCheck] 4 A função *optimize_eval* respeita a semântica da função *eval*.

$$\begin{aligned} prop_optimize_respects_semantics &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_optimize_respects_semantics a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} optimize_eval a exp \end{aligned}$$

4. Para calcular a derivada de uma expressão, é necessário aplicar transformações à expressão original que respeitem as regras das derivadas:³

- Regra da soma:

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x))$$

²Qual é a vantagem de implementar a função *optimize_eval* utilizando um hilomorfismo em vez de utilizar um catamorfismo com um gene "inteligente"?

³Apesar da adição e multiplicação gozarem da propriedade comutativa, há que ter em atenção a ordem das operações por causa dos testes.

- Regra do produto:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x)) + \frac{d}{dx}(f(x)) \cdot g(x)$$

Defina o gene do catamorfismo que ocorre na função

$$sd :: Floating a \Rightarrow ExpAr a \rightarrow ExpAr a$$

que, dada uma expressão aritmética, calcula a sua derivada. Testes a fazer, de seguida:

Propriedade [QuickCheck] 5 A função *sd* respeita as regras de derivação.

```
prop_const_rule :: (Real a, Floating a) => a -> Bool
prop_const_rule a = sd (N a) == N 0

prop_var_rule :: Bool
prop_var_rule = sd X == N 1

prop_sum_rule :: (Real a, Floating a) => ExpAr a -> ExpAr a -> Bool
prop_sum_rule exp1 exp2 = sd (Bin Sum exp1 exp2) == sum_rule where
  sum_rule = Bin Sum (sd exp1) (sd exp2)

prop_product_rule :: (Real a, Floating a) => ExpAr a -> ExpAr a -> Bool
prop_product_rule exp1 exp2 = sd (Bin Product exp1 exp2) == prod_rule where
  prod_rule = Bin Sum (Bin Product exp1 (sd exp2)) (Bin Product (sd exp1) exp2)

prop_e_rule :: (Real a, Floating a) => ExpAr a -> Bool
prop_e_rule exp = sd (Un E exp) == Bin Product (Un E exp) (sd exp)

prop_negate_rule :: (Real a, Floating a) => ExpAr a -> Bool
prop_negate_rule exp = sd (Un Negate exp) == Un Negate (sd exp)
```

5. Como foi visto, *Symbolic differentiation* não é a técnica mais eficaz para o cálculo do valor da derivada de uma expressão. *Automatic differentiation* resolve este problema calculando o valor da derivada em vez de manipular a expressão original.

Defina o gene do catamorfismo que ocorre na função

$$ad :: Floating a \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow a$$

que, dada uma expressão aritmética e um ponto, calcula o valor da sua derivada nesse ponto, sem transformar manipular a expressão original. Testes a fazer, de seguida:

Propriedade [QuickCheck] 6 Calcular o valor da derivada num ponto *r* via *ad* é equivalente a calcular a derivada da expressão e avalia-la no ponto *r*.

```
prop_congruent :: (Floating a, Real a) => a -> ExpAr a -> Bool
prop_congruent a exp = ad a exp == eval_exp a (sd exp)
```

Problema 2

Nesta disciplina estudou-se como fazer **programação dinâmica** por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.⁴

Para o caso de funções sobre os números naturais (\mathbb{N}_0 , com functor $F X = 1 + X$) é fácil derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado **Cálculo de Programas**. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema

$$\begin{aligned} fib\ 0 &= 1 \\ fib\ (n + 1) &= f\ n \end{aligned}$$

⁴Lei (3.94) em [2], página 98.

$$f\ 0 = 1$$

$$f\ (n + 1) = fib\ n + f\ n$$

Obter-se-á de imediato

$$fib' = \pi_1 \cdot \text{for loop init where}$$

$$\text{loop } (fib, f) = (f, fib + f)$$

$$\text{init} = (1, 1)$$

usando as regras seguintes:

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.⁵
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável *n*.
- Em *init* colecionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios do segundo grau $ax^2 + bx + c$ em \mathbb{N}_0 . Seguindo o método estudado nas aulas⁶, de $f\ x = ax^2 + bx + c$ derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$f\ 0 = c$$

$$f\ (n + 1) = f\ n + k\ n$$

$$k\ 0 = a + b$$

$$k\ (n + 1) = k\ n + 2\ a$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$f'\ a\ b\ c = \pi_1 \cdot \text{for loop init where}$$

$$\text{loop } (f, k) = (f + k, k + 2 * a)$$

$$\text{init} = (c, a + b)$$

O que se pede então, nesta pergunta? Dada a fórmula que dá o *n*-ésimo **número de Catalan**,

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)} \quad (1)$$

derivar uma implementação de C_n que não calcule factoriais nenhuns. Isto é, derivar um ciclo-for

$$cat = \dots \cdot \text{for loop init where } \dots$$

que implemente esta função.

Propriedade [QuickCheck] 7 A função proposta coincide com a definição dada:

$$prop_cat = (\geq 0) \Rightarrow (catdef \equiv cat)$$

Sugestão: Começar por estudar muito bem o processo de cálculo dado no anexo B para o problema (semelhante) da função exponencial.

Problema 3

As **curvas de Bézier**, designação dada em honra ao engenheiro **Pierre Bézier**, são curvas ubíquas na área de computação gráfica, animação e modelação. Uma curva de Bézier é uma curva paramétrica, definida por um conjunto $\{P_0, \dots, P_N\}$ de pontos de controlo, onde N é a ordem da curva.

O algoritmo de *De Casteljau* é um método recursivo capaz de calcular curvas de Bézier num ponto. Apesar de ser mais lento do que outras abordagens, este algoritmo é numericamente mais estável, trocando velocidade por correção.

⁵Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeira leitura dá jeito usarem-se tais nomes.

⁶Secção 3.17 de [2] e tópico **Recursividade mútua** nos vídeos das aulas teóricas.



Figura 1: Exemplos de curvas de Bézier retirados da [Wikipedia](#).

De forma sucinta, o valor de uma curva de Bézier de um só ponto $\{P_0\}$ (ordem 0) é o próprio ponto P_0 . O valor de uma curva de Bézier de ordem N é calculado através da interpolação linear da curva de Bézier dos primeiros $N - 1$ pontos e da curva de Bézier dos últimos $N - 1$ pontos.

A interpolação linear entre 2 números, no intervalo $[0, 1]$, é dada pela seguinte função:

```
linear1d :: Q → Q → OverTime Q
linear1d a b = formula a b where
  formula :: Q → Q → Float → Q
  formula x y t = ((1.0 :: Q) - (toQ t)) * x + (toQ t) * y
```

A interpolação linear entre 2 pontos de dimensão N é calculada através da interpolação linear de cada dimensão.

O tipo de dados *NPoint* representa um ponto com N dimensões.

```
type NPoint = [Q]
```

Por exemplo, um ponto de 2 dimensões e um ponto de 3 dimensões podem ser representados, respetivamente, por:

```
p2d = [1.2, 3.4]
p3d = [0.2, 10.3, 2.4]
```

O tipo de dados *OverTime a* representa um termo do tipo a num dado instante (dado por um *Float*).

```
type OverTime a = Float → a
```

O anexo C tem definida a função

```
calcLine :: NPoint → (NPoint → OverTime NPoint)
```

que calcula a interpolação linear entre 2 pontos, e a função

```
deCasteljau :: [NPoint] → OverTime NPoint
```

que implementa o algoritmo respectivo.

1. Implemente *calcLine* como um catamorfismo de listas, testando a sua definição com a propriedade:

Propriedade [QuickCheck] 8 Definição alternativa.

```
prop_calcLine_def :: NPoint → NPoint → Float → Bool
prop_calcLine_def p q d = calcLine p q d ≡ zipWithM linear1d p q d
```

2. Implemente a função *deCasteljau* como um hilomorfismo, testando agora a propriedade:

Propriedade [QuickCheck] 9 *Curvas de Bézier são simétricas.*

```
prop_bezier_sym :: [[Q]] → Gen Bool
prop_bezier_sym l = all (<Δ) · calc_difs · bezs ($) elements ps where
  calc_difs = (λ(x, y) → zipWith (λw v → if w ≥ v then w - v else v - w) x y)
  bezs t = (deCasteljau l t, deCasteljau (reverse l) (fromQ (1 - (toQ t))))
  Δ = 1e-2
```

3. Corra a função `runBezier` e aprecie o seu trabalho⁷ clicando na janela que é aberta (que contém, a verde, um ponto inicial) com o botão esquerdo do rato para adicionar mais pontos. A tecla `Delete` apaga o ponto mais recente.

Problema 4

Seja dada a fórmula que calcula a média de uma lista não vazia x ,

$$\text{avg } x = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i \quad (2)$$

onde $k = \text{length } x$. Isto é, para sabermos a média de uma lista precisamos de dois catamorfismos: o que faz o somatório e o que calcula o comprimento a lista. Contudo, é fácil de ver que

$$\begin{aligned} \text{avg } [a] &= a \\ \text{avg } (a : x) &= \frac{1}{k+1} (a + \sum_{i=1}^k x_i) = \frac{a + k(\text{avg } x)}{k+1} \text{ para } k = \text{length } x \end{aligned}$$

Logo `avg` está em recursividade mútua com `length` e o par de funções pode ser expresso por um único catamorfismo, significando que a lista apenas é percorrida uma vez.

1. Recorra à lei de recursividade mútua para derivar a função `avg_aux = ([b, q])` tal que `avg_aux = (avg, length)` em listas não vazias.
2. Generalize o raciocínio anterior para o cálculo da média de todos os elementos de uma `LTree` recorrendo a uma única travessia da árvore (i.e. catamorfismo).

Verifique as suas funções testando a propriedade seguinte:

Propriedade [QuickCheck] 10 *A média de uma lista não vazia e de uma `LTree` com os mesmos elementos coincide, a menos de um erro de 0.1 milésimas:*

```
prop_avg :: Ord a ⇒ [a] → Property
prop_avg = nonempty ⇒ diff ≤ 0.000001 where
  diff l = avg l - (avgLTree · genLTree) l
  genLTree = ([lsplit])
  nonempty = (>[])
```

Problema 5

(NB: Esta questão é **opcional** e funciona como **valorização** apenas para os alunos que desejarem fazê-la.)

Existem muitas linguagens funcionais para além do `Haskell`, que é a linguagem usada neste trabalho prático. Uma delas é o `F#` da Microsoft. Na directoria `fsharp` encontram-se os módulos `Cp`, `Nat` e `LTree` codificados em `F#`. O que se pede é a biblioteca `BTree` escrita na mesma linguagem.

Modo de execução: o código que tiverem produzido nesta pergunta deve ser colocado entre o `\begin{verbatim}` e o `\end{verbatim}` da correspondente parte do anexo `D`. Para além disso, os grupos podem demonstrar o código na oral.

⁷A representação em Gloss é uma adaptação de um `projeto` de Harold Cooper.

Anexos

A Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:⁸

$$\begin{aligned}
 id &= \langle f, g \rangle \\
 &\equiv \{ \text{universal property} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
 &\equiv \{ \text{identity} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
 &\square
 \end{aligned}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* L^AT_EX *xymatrix*, por exemplo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
 \downarrow \langle g \rangle & & \downarrow id + \langle g \rangle \\
 B & \xleftarrow{g} & 1 + B
 \end{array}$$

B Programação dinâmica por recursividade múltipla

Neste anexo dão-se os detalhes da resolução do Exercício 3.30 dos apontamentos da disciplina⁹, onde se pretende implementar um ciclo que implemente o cálculo da aproximação até $i = n$ da função exponencial $\exp x = e^x$, via série de Taylor:

$$\exp x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad (3)$$

Seja $e\ x\ n = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$ a função que dá essa aproximação. É fácil de ver que $e\ x\ 0 = 1$ e que $e\ x\ (n+1) = e\ x\ n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Se definirmos $h\ x\ n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ teremos $e\ x$ e $h\ x$ em recursividade mútua. Se repetirmos o processo para $h\ x\ n$ etc obteremos no total três funções nessa mesma situação:

$$\begin{aligned}
 e\ x\ 0 &= 1 \\
 e\ x\ (n+1) &= h\ x\ n + e\ x\ n \\
 h\ x\ 0 &= x \\
 h\ x\ (n+1) &= x / (s\ n) * h\ x\ n \\
 s\ 0 &= 2 \\
 s\ (n+1) &= 1 + s\ n
 \end{aligned}$$

Segundo a *regra de algibeira* descrita na página 3.1 deste enunciado, ter-se-á, de imediato:

$$\begin{aligned}
 e'\ x &= prj \cdot \text{for loop init where} \\
 init &= (1, x, 2) \\
 loop\ (e, h, s) &= (h + e, x / s * h, 1 + s) \\
 prj\ (e, h, s) &= e
 \end{aligned}$$

⁸Exemplos tirados de [2].

⁹Cf. [2], página 102.

C Código fornecido

Problema 1

```
expd :: Floating a => a -> a
expd = Prelude.exp
type OutExpAr a = () + (a + ((BinOp, (ExpAr a, ExpAr a)) + (UnOp, ExpAr a)))
```

Problema 2

Definição da série de Catalan usando factoriais (6):

$$\text{catdef } n = (2 * n)! \div ((n + 1)! * n!)$$

Oráculo para inspecção dos primeiros 26 números de Catalan¹⁰:

```
oracle = [
  1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845,
  35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020,
  91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452
]
```

Problema 3

Algoritmo:

```
deCasteljau :: [NPoint] -> OverTime NPoint
deCasteljau [] = nil
deCasteljau [p] = p
deCasteljau l = λpt -> (calcLine (p pt) (q pt)) pt where
  p = deCasteljau (init l)
  q = deCasteljau (tail l)
```

Função auxiliar:

```
calcLine :: NPoint -> (NPoint -> OverTime NPoint)
calcLine [] = nil
calcLine (p : x) = g p (calcLine x) where
  g :: (Q, NPoint -> OverTime NPoint) -> (NPoint -> OverTime NPoint)
  g (d, f) l = case l of
    [] -> nil
    (x : xs) -> λz -> concat $ (sequenceA [singl · linear1d d x, f xs]) z
```

2D:

```
bezier2d :: [NPoint] -> OverTime (Float, Float)
bezier2d [] = (0, 0)
bezier2d l = λz -> (fromQ × fromQ) · (λ[x, y] -> (x, y)) $ ((deCasteljau l) z)
```

Modelo:

```
data World = World { points :: [NPoint]
  , time :: Float
  }
initW :: World
initW = World [] 0
```

¹⁰Fonte: [Wikipedia](#).

```

tick :: Float → World → World
tick dt world = world { time = (time world) + dt }

actions :: Event → World → World
actions (EventKey (MouseButton LeftButton) Down _ p) world =
  world { points = (points world) ++ [(λ(x,y) → map toQ [x,y]) p] }
actions (EventKey (SpecialKey KeyDelete) Down _ _) world =
  world { points = cond (≡ []) id init (points world) }
actions _ world = world

scaleTime :: World → Float
scaleTime w = (1 + cos (time w)) / 2

bezier2dAtTime :: World → (Float, Float)
bezier2dAtTime w = (bezier2dAt w) (scaleTime w)

bezier2dAt :: World → OverTime (Float, Float)
bezier2dAt w = bezier2d (points w)

thicCirc :: Picture
thicCirc = ThickCircle 4 10

ps :: [Float]
ps = map fromQ ps' where
  ps' :: [Q]
  ps' = [0, 0.01 .. 1] -- interval

```

Gloss:

```

picture :: World → Picture
picture world = Pictures
  [ animateBezier (scaleTime world) (points world)
  , Color white · Line · map (bezier2dAt world) $ ps
  , Color blue · Pictures $ [ Translate (fromQ x) (fromQ y) thicCirc | [x,y] ← points world ]
  , Color green $ Translate cx cy thicCirc
  ] where
  (cx, cy) = bezier2dAtTime world

```

Animação:

```

animateBezier :: Float → [NPoint] → Picture
animateBezier _ [] = Blank
animateBezier _ [_] = Blank
animateBezier t l = Pictures
  [ animateBezier t (init l)
  , animateBezier t (tail l)
  , Color red · Line $ [a, b]
  , Color orange $ Translate ax ay thicCirc
  , Color orange $ Translate bx by thicCirc
  ] where
  a@(ax, ay) = bezier2d (init l) t
  b@(bx, by) = bezier2d (tail l) t

```

Propriedades e main:

```

runBezier :: IO ()
runBezier = play (InWindow "Bézier" (600,600) (0,0))
  black 50 initW picture actions tick

runBezierSym :: IO ()
runBezierSym = quickCheckWith (stdArgs { maxSize = 20, maxSuccess = 200 }) prop_bezier_sym

```

Compilação e execução dentro do interpretador:¹¹

```

main = runBezier
run = do { system "ghc cp2021t"; system "./cp2021t" }

```

¹¹Pode ser útil em testes envolvendo **Gloss**. Nesse caso, o teste em causa deve fazer parte de uma função *main*.

QuickCheck

Código para geração de testes:

```
instance Arbitrary UnOp where
  arbitrary = elements [Negate, E]
instance Arbitrary BinOp where
  arbitrary = elements [Sum, Product]
instance (Arbitrary a)  $\Rightarrow$  Arbitrary (ExpAr a) where
  arbitrary = do
    binop  $\leftarrow$  arbitrary
    unop  $\leftarrow$  arbitrary
    exp1  $\leftarrow$  arbitrary
    exp2  $\leftarrow$  arbitrary
    a  $\leftarrow$  arbitrary
    frequency  $\cdot$  map (id  $\times$  pure) $ [(20, X), (15, N a), (35, Bin binop exp1 exp2), (30, Un unop exp1)]

infixr 5  $\stackrel{?}{=}$ 
( $\stackrel{?}{=}$ ) :: Real a  $\Rightarrow$  a  $\rightarrow$  a  $\rightarrow$  Bool
( $\stackrel{?}{=}$ ) x y = (to $_{\mathbb{Q}}$  x)  $\equiv$  (to $_{\mathbb{Q}}$  y)
```

Outras funções auxiliares

Lógicas:

```
infixr 0  $\Rightarrow$ 
( $\Rightarrow$ ) :: (Testable prop)  $\Rightarrow$  (a  $\rightarrow$  Bool)  $\rightarrow$  (a  $\rightarrow$  prop)  $\rightarrow$  a  $\rightarrow$  Property
p  $\Rightarrow$  f =  $\lambda a \rightarrow$  p a  $\Rightarrow$  f a
infixr 0  $\Leftrightarrow$ 
( $\Leftrightarrow$ ) :: (a  $\rightarrow$  Bool)  $\rightarrow$  (a  $\rightarrow$  Bool)  $\rightarrow$  a  $\rightarrow$  Property
p  $\Leftrightarrow$  f =  $\lambda a \rightarrow$  (p a  $\Rightarrow$  property (f a)) .&&. (f a  $\Rightarrow$  property (p a))
infixr 4  $\equiv$ 
( $\equiv$ ) :: Eq b  $\Rightarrow$  (a  $\rightarrow$  b)  $\rightarrow$  (a  $\rightarrow$  b)  $\rightarrow$  (a  $\rightarrow$  Bool)
f  $\equiv$  g =  $\lambda a \rightarrow$  f a  $\equiv$  g a
infixr 4  $\leq$ 
( $\leq$ ) :: Ord b  $\Rightarrow$  (a  $\rightarrow$  b)  $\rightarrow$  (a  $\rightarrow$  b)  $\rightarrow$  (a  $\rightarrow$  Bool)
f  $\leq$  g =  $\lambda a \rightarrow$  f a  $\leq$  g a
infixr 4  $\wedge$ 
( $\wedge$ ) :: (a  $\rightarrow$  Bool)  $\rightarrow$  (a  $\rightarrow$  Bool)  $\rightarrow$  (a  $\rightarrow$  Bool)
f  $\wedge$  g =  $\lambda a \rightarrow$  ((f a)  $\wedge$  (g a))
```

D Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto, diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes.

Problema 1

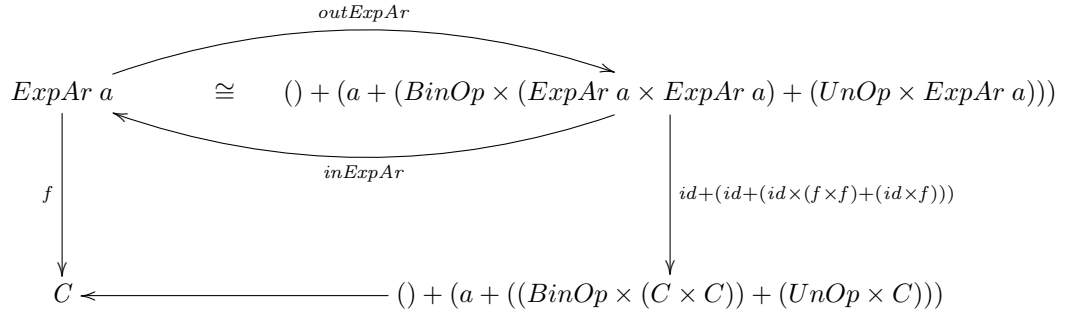
São dadas:

$$\begin{aligned} cataExpAr\ g &= g \cdot recExpAr\ (cataExpAr\ g) \cdot outExpAr \\ anaExpAr\ g &= inExpAr \cdot recExpAr\ (anaExpAr\ g) \cdot g \\ hyloExpAr\ h\ g &= cataExpAr\ h \cdot anaExpAr\ g \\ eval_exp &:: Floating\ a \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr\ a) \rightarrow a \\ eval_exp\ a &= cataExpAr\ (g_eval_exp\ a) \\ optimize_eval &:: (Floating\ a, Eq\ a) \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr\ a) \rightarrow a \\ optimize_eval\ a &= hyloExpAr\ (gopt\ a)\ clean \\ sd &:: Floating\ a \Rightarrow ExpAr\ a \rightarrow ExpAr\ a \\ sd &= \pi_2 \cdot cataExpAr\ sd_gen \\ ad &:: Floating\ a \Rightarrow a \rightarrow ExpAr\ a \rightarrow a \\ ad\ v &= \pi_2 \cdot cataExpAr\ (ad_gen\ v) \end{aligned}$$

outExpAr

$$\begin{aligned} &outExpAr \cdot inExpAr = id \\ \equiv &\{ \text{inExpAr} \} \\ &outExpAr \cdot [\underline{X}, num_ops] = id \\ \equiv &\{ \text{Fusão-+ (20)} \} \\ &[outExpAr \cdot \underline{X}, outExpAr \cdot num_ops] = id \\ \equiv &\{ \text{Universal-+ (17)} \} \\ &\begin{cases} id \cdot i_1 = outExpAr \cdot \underline{X} \\ id \cdot i_2 = outExpAr \cdot num_ops \end{cases} \\ \equiv &\{ \text{Natural-id (1), Igualdade Extensional (69), Def-comp (70)} \} \\ &\begin{cases} outExpAr\ X = i_1\ () \\ outExpAr\ (N\ a) = i_2\ (i_1\ a) \\ outExpAr\ (Bin\ op\ a\ b) = i_2\ (i_2\ (i_1\ (op, (a, b)))) \\ outExpAr\ (Un\ op\ a) = i_2\ (i_2\ (i_2\ (op, a))) \end{cases} \end{aligned}$$

recExpAr



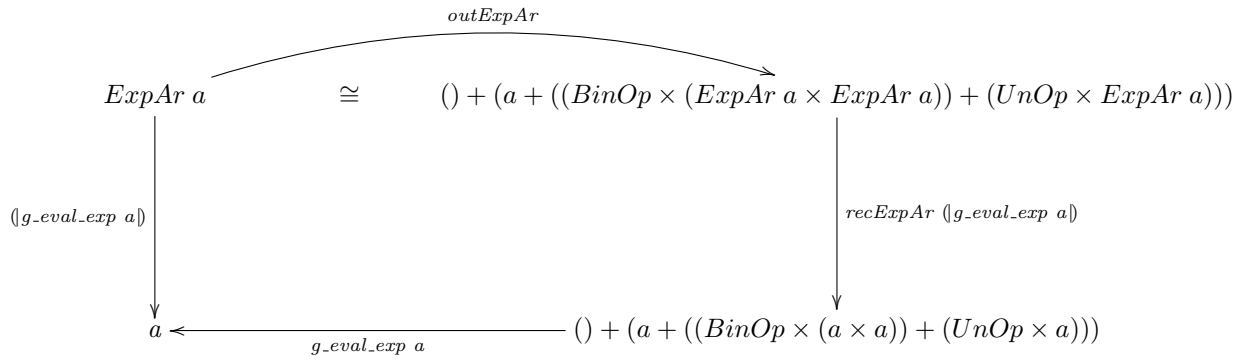
$$\begin{aligned}
 \text{recExpr } f &= \text{id} + (\text{id} + (\text{id} \times (f \times f) + \text{id} \times f)) \\
 &\equiv \{ \text{Aplicando a definição dada de baseExpAr} \} \\
 \text{recExpr } f &= \text{baseExpAr id id id } f f \text{ id } f
 \end{aligned}$$

g_eval_exp

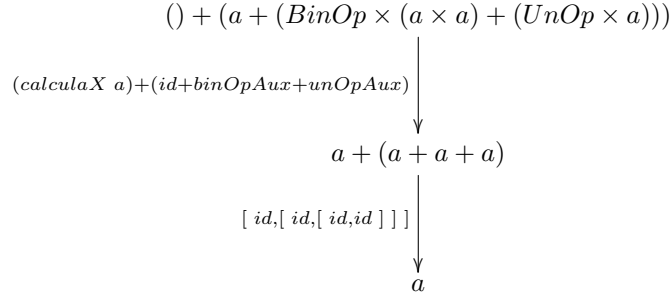
De forma a obter o valo final de uma expressão Aritmética, podemos recorrer ao uso do catamorfismo de *ExprAr*.

$$\begin{aligned}
 \text{eval_exp } a &= \text{cataExpAr } (g_eval_exp \ a) \\
 &\equiv \{ \text{Aplicando a definição dada de cataExpAr} \} \\
 \text{eval_exp } a &= (g_eval_exp \ a) . \text{recExpAr } (\text{cataExpAr } (g_eval_exp \ a)) . \text{outExprAr}
 \end{aligned}$$

Definindo o diagrama de *eval_exp*, podemos obter a expressão pretendida *g_eval_exp*.



Neste caso, percorremos todas as expressões, de modo a determinar o valor de cada uma, aplicando posteriormente a cada par de valores a operação determinada pelo *BinOp*, emparelhando inicialmente, com cada par de expressões. Ou seja, o gene de *eval_exp* pode ser representado pelo seguinte diagrama:



Onde *binOpAux* é a função que dada uma operação *Sum* ou *Product* e dois *float* realiza a operação (+) ou (*). A função *unOpAux* é a função que dada um *Negate* ou um *E* e um *Floating a* devolve o simétrico ou o mesmo número. O *()* é substituído pelo escalar *a* aplicando a função *calculaX a*. Assim sendo:

$$g_eval_exp\ a = [id, [id, [id, id]]] \cdot ((calculaX\ a) + (id + binOpAux + unOpAux)) \quad (4)$$

$$\equiv \{ \text{Absorção-+ (22) ; Natural-id (1)} \}$$

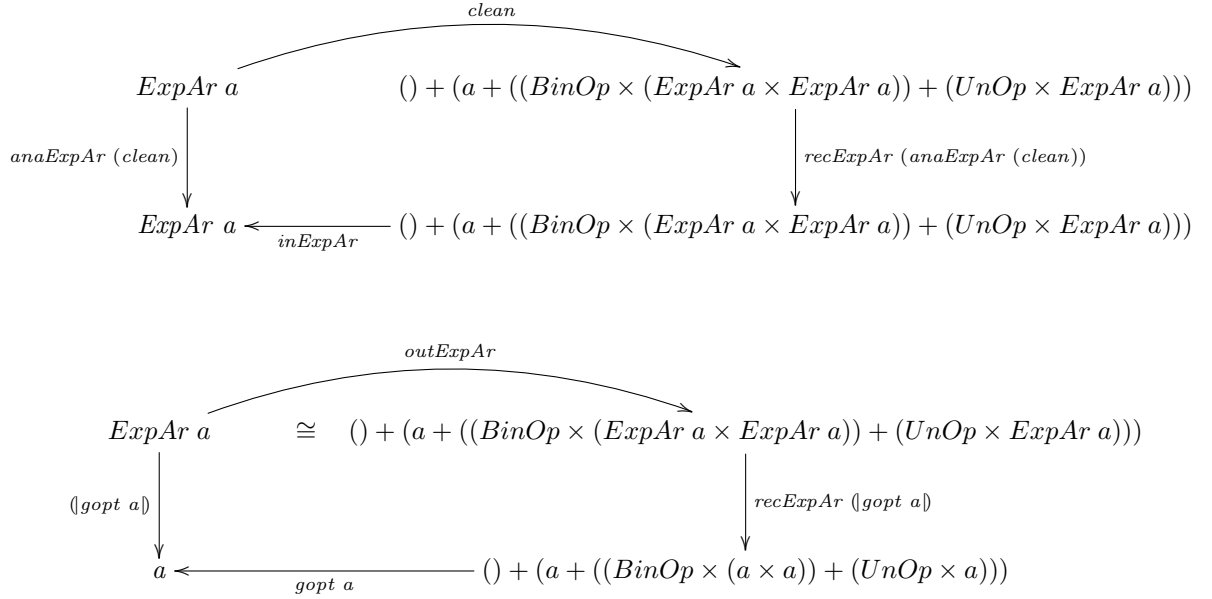
$$g_eval_exp\ a = [calculaX\ a, [id, [binOpAux, unOpAux]]] \quad (5)$$

clean e gopt

Com o objetivo de otimizar o cálculo do valor de uma expressão Aritmética, tirando proveito dos elementos absorventes das operações, recorremos ao uso do hilomorfismo de *ExprAr*.

$$\begin{aligned}
 optimize_eval\ a &= hyloExpAr\ (gopt\ a)\ clean \\
 \equiv \{ \text{Aplicando a definição dada de hyloExpAr} \} \\
 optimize_eval\ a &= cataExpAr(gopt\ a) \cdot anaExpAr(clean) \\
 \equiv \{ \text{Cancelamento-cata (44); Cancelamento-ana(53)} \} \\
 optimize_eval\ a &= (gopt\ a).F(\backslash gopt\ a).inExpr.outExpr.F[\![clean]\!].clean \\
 \equiv \{ \text{in.out = id; Aplicando as definições em Haskell já determinadas} \} \\
 optimize_eval\ a &= (gopt\ a).recExpAr(cataExpAr(gopt\ a)).recExpAr(anaExpArclean).clean
 \end{aligned}$$

De seguida definimos os diagramas de $cataExpAr(gopt\ a)$ e de $anaExpAr(clean)$ de forma a obter os genes $clean$ e $gopt\ a$:



Deste modo chegamos às expressões dos genes $clean$ e $gopt\ a$, presentes na area Soluções desta secção. Estes têm o propósito de eliminar os as somas ou os produtos onde se possa aplicar as propriedades absorventes detas, de forma a otimizar o calculo das expressões aritméticas.

sd_gen e ad_gen

$$\begin{aligned}
 sd &= \pi2. \text{cataExpAr } sd_gen \\
 \equiv & \quad \{ \text{Aplicando a definição dada de cataExpAr} \} \\
 sd &= \pi2. sd_gen . \text{recExpAr } (\text{cataExpAr } sd_gen) . \text{outExpAr}
 \end{aligned}$$

sd_gen é o gene da função sd que calcula a derivada de uma função. O gene tem como resultado $(ExpAr\ a, ExpAr\ a)$, sendo o primeiro elemento do par a expressão que pretendemos derivar e o segundo a sua derivada.

$$\begin{aligned}
 ad &= \pi2. \text{cataExpAr } (ad_gen\ v) \\
 \equiv & \quad \{ \text{Aplicando a definição dada de cataExpAr} \} \\
 ad &= \pi2. (ad_gen\ v). \text{recExpAr } (\text{cataExpAr } (ad_gen\ v)) . \text{outExpAr}
 \end{aligned}$$

ad_gen é o gene da função ad que calcula a derivada num ponto de uma função. O gene tem como resultado (a,a) , sendo o primeiro elemento do par a solução da função no ponto e o segundo a derivada no mesmo. As soluções dos dois encontram-se abaixo, na área soluções.

Solução:

```

outExpAr X = i1 ()
outExpAr (N a) = i2 (i1 a)
outExpAr (Bin op a b) = i2 (i2 (i1 (op, (a, b))))
outExpAr (Un op a) = i2 (i2 (i2 (op, a)))
--
recExpAr f = baseExpAr id id id f f id f
--
g_eval_exp a = [calculaX a, [id, [binOpAux, unOpAux]]]
calculaX a () = a
binOpAux (Sum, (a, b)) = (+) a b
binOpAux (Product, (a, b)) = (*) a b
unOpAux (Negate, a) = -a
unOpAux (E, a) = expd a
--
clean (Bin Product (N 0) a) = i2 (i1 0)
clean (Bin Product a (N 0)) = i2 (i1 0)
clean (Bin Sum (N 0) a) = clean a
clean (Bin Sum a (N 0)) = clean a
clean (Bin Product (N 1) a) = clean a
clean (Bin Product a (N 1)) = clean a
clean (Un E (N 0)) = i2 (i1 1)
clean a = outExpAr a
--
gopt a = [calculaX a, [id, [goptAux, unOpAux]]]
goptAux (Sum, (0, a)) = a
goptAux (Sum, (a, 0)) = a
goptAux (Product, (1, a)) = a
goptAux (Product, (a, 1)) = a
goptAux a = binOpAux a
--
sd_gen :: Floating a =>
  () + (a + ((BinOp, ((ExpAr a, ExpAr a), (ExpAr a, ExpAr a))) + (UnOp, (ExpAr a, ExpAr a)))) -> (ExpAr a
sd_gen = [sdAuxX, [sdAuxN, [sdAuxB, sdAuxU]]]
sdAuxX () = (X, N 1)
sdAuxN a = (N a, N 0)
sdAuxB (Sum, ((a, b), (c, d))) = (Bin Sum a c, Bin Sum b d)
sdAuxB (Product, ((a, b), (c, d))) = (Bin Product a c, Bin Sum (Bin Product a d) (Bin Product b c))
sdAuxU (Negate, (a, b)) = (Un Negate a, Un Negate b)
sdAuxU (E, (a, b)) = (Un E a, Bin Product (Un E a) b)

ad_gen v = [adAuxX v, [adAuxN, [adAuxB, adAuxU]]]
adAuxX v () = (v, 1)
adAuxN a = (a, 0)
adAuxB (Sum, ((a, b), (c, d))) = ((+) a c, (+) b d)
adAuxB (Product, ((a, b), (c, d))) = ((*) a c, (+) ((*) a d) ((*) b c))
adAuxU (Negate, (a, b)) = (-a, -b)
adAuxU (E, (a, b)) = (expd a, (*) (expd a) b)

```

Problema 2

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} f\ 0 &= 1 \\ f\ (n+1) &= \frac{(2\ (n+1))!}{((n+1)+1)!(n+1)!} = \frac{(2\ n+2)!}{(n+2)!(n+1)!} = \frac{(2\ n+2)\ (2\ n+1)\ (2\ n)!}{(n+2)\ (n+1)\ (n)!(n+1)!} = \frac{2\ (n+1)\ (2\ n+1)\ (2\ n)!}{(n+2)\ (n+1)\ (n)!\ (n+1)!} = \\ &= \frac{2\ (2\ n+1)\ (2\ n)!}{(n+2)\ (n)!\ (n+1)!} = \frac{(2\ n)!}{(n+1)!(n)!} \cdot \frac{4\ n+2}{n+2} = f\ n \cdot \frac{k\ n}{s\ n} \end{aligned}$$

$$k\ n = 4\ n + 2$$

$$k\ 0 = 1$$

$$k\ (n+1) = (4\ (n+1) + 2) = 4\ n + 6 = k\ n + 4$$

$$s\ n = n + 2$$

$$s\ 0 = 2$$

$$s\ (n+1) = n + 1 + 2 = s\ n + 1$$

Solução:

```
cat = prj · for loop inic
loop (f, k, s) = (f * k ÷ s, k + 4, s + 1)
inic = (1, 2, 2)
prj (f, k, s) = f
```

Problema 3

$$\begin{array}{ccc} NPoint & \xrightarrow{\text{outList}} & () + (\mathbb{Q} \times NPoint) \\ \text{calcLine} \downarrow & & \downarrow \text{recList } (|h|) \\ ((OverTime\ NPoint) \uparrow NPoint) & \xleftarrow{h} & () + (\mathbb{Q} \times (OverTime\ NPoint \uparrow NPoint)) \end{array}$$

Analisando o tipo da função calcLine podemos concluir que o nosso objetivo final deve ser retornar uma função que dado Resolvemos trabalhar os dois pontos como elementos separados e não um par, podendo saber qual elemento à cabeça do NPoint, o que nos permite avançar. Feita alguma pesquisa

concluimos que a interpolação dada entre dois pontos pode é a soma da multiplicação de todas as coordenadas do primeiro ponto por (1-t) com a do segundo por t.

Retorna 2 pontos? Solução: retornar uma função

```
calcLine :: NPoint → (NPoint → OverTime NPoint)
calcLine = cataList h where
  h = ⊥
  linear = ⊥
deCasteljau :: [NPoint] → OverTime NPoint
deCasteljau = hyloAlgForm alg coalg where
  coalg = ⊥
  alg = ⊥
hyloAlgForm g h = g · recList (cataList g) · recList (anaList h) · h
```

Problema 4

$$\begin{aligned} avg_aux &= ([b, q]) \\ \equiv & \quad \{ \text{Aplicando a definição dada de } avg_aux \} \\ \langle avg, length \rangle &= ([b, q]) \\ \equiv & \quad \{ \text{Univelsal-cata} \} \\ \langle avg, length \rangle &= [b, q] . recList ([b, q]) . outList \end{aligned}$$

Solução para listas não vazias:

$$\begin{aligned} avg &= \pi_1 \cdot avg_aux \\ avg_aux &= cataList [b, q] \\ b &= \perp \\ q &= \perp \end{aligned}$$

Solução para árvores de tipo **LTree**:

$$\begin{aligned} avgLTree &= \pi_1 \cdot ([gene]) \text{ where} \\ gene &= \perp \end{aligned}$$

Problema 5

Encontra-se em baixo o código **F#** desenvolvido:

```
// (1) Datatype definition -----  
  
type BTree<'a> = Empty | Node of a * of BTree<'a> * BTree<'a>  
  
let inBtree x = either (const Empty) Node x  
  
let outBTree x =  
    match x with  
    | Empty -> left ()  
    | Node (a,t1,t2) -> Righth (a,t1,t2)  
  
// (2) Ana + cata + hylo -----  
  
let baseBTree g f = g -|- (g >< (f >< f))  
  
let recBTree f = baseBTree id f  
  
let rec cataBTree g = g << (recBTree (cataBTree g)) << outBTree  
  
let rec anaBTree g = inBTree << (recBTree (anaBTree g) ) << g  
  
let hyloBTree h g = cataBTree h << anaBTree g  
  
// (3) Map -----  
  
//instance Functor BTree  
//      where fmap f = cataBTree ( inBTree . baseBTree f id )  
let fmap f = cataBTree ( inBTree << baseBTree f id )  
  
// (4) Examples -----  
  
// (4.1) Inversion (mirror) -----
```

```

let invBTree x = cataBTree (inLTree << (id -|- id >> swap)) x

(* Recall the pointwise version:
invBTree () = Empty
invBTree (Node (a,(b,c))) = Node (a, (invBTree c,invBTree b))
*)

// (4.2) Counting -----

let countBTree x = cataBTree (either (const 0) (succ . (uncurry (+)) . p2)) x

// (4.3) Serialization -----
let inordt x = cataBTree inord x

let inordt x = either nil join x
  where join (x,(l,r)) = l @ [x] @ r

let preordt x = cataBTree preord

let preord = (either nil f)
  where f(x,(l,r)) = x: l @ r

postordt = cataBTree (either nil f)
  where f(x,(l,r)) = l @ r @ [x]

// (4.4) Quicksort -----

let qSort = hyloBTree inord qsep

let qsep [] = Left ()
let qsep (h:t) = Right (h,(s,l))
  where (s,l) = part (<h) t

let part p [] = ([],[])
let part p (h:t) | p h = let (s,l) = part p t in (h:s,l)
  | otherwise = let (s,l) = part p t in (s,h:l)

// (4.5) Traces -----

let traces x = cataBTree (either (const [[]]) tunion) x

let tunion (a,(l,r)) = union (map (a:) l) (map (a:) r)

// (4.6) Towers of Hanoi -----

let hanoi x = hyloBTree present strategy x

let present x = inord x

strategy (d,0) = Left ()
strategy (d,n+1) = Right ((n,d),((not d,n),(not d,n)))

-- (5) Depth and balancing (using mutual recursion) -----

balBTree = p1.baldepth

depthBTree = p2.baldepth

```

```

baldepth = cataBTree g where
  g = either (const(True,1)) (h.(id><f))
  h(a,((b1,b2),(d1,d2))) = (b1 && b2 && abs(d1-d2)<=1,1+max d1 d2)
  f((b1,d1),(b2,d2)) = ((b1,b2),(d1,d2))

// (6) Going polytipic -----

let tnat f = either (const mempty) (theta << (f >< theta))
  where theta = uncurry mappend

let monBTree f = cataBTree (tnat f)

// alternative to (4.2) serialization -----

let preordt' = monBTree singl

// alternative to (4.1) counting -----

countBTree' = monBTree (const (Sum 1))

// (7) Zipper -----

let plug [] t = t
let plug ((Dr False a l):z) t = Node (a,(plug z t,l))
let plug ((Dr True a r):z) t = Node (a,(r,plug z,t))

```

Índice

L^AT_EX, [1](#)

bibtex, [2](#)

 lhs2TeX, [1](#)

 makeindex, [2](#)

Combinador “pointfree”

 cata, [8](#), [9](#), [14](#)

 either, [3](#), [8](#), [15](#)

Curvas de Bézier, [6](#), [7](#)

Cálculo de Programas, [1](#), [2](#), [5](#)

 Material Pedagógico, [1](#)

 BTree.hs, [8](#)

 Cp.hs, [8](#)

 LTree.hs, [8](#), [16](#)

 Nat.hs, [8](#)

Deep Learning), [3](#)

DSL (linguagem específica para domínio), [3](#)

F#, [8](#), [16](#)

Functor, [5](#), [11](#)

Função

π_1 , [6](#), [9](#), [15](#), [16](#)

π_2 , [9](#), [13](#), [15](#)

 for, [6](#), [9](#), [16](#)

 length, [8](#)

 map, [11](#), [12](#)

 uncurry, [3](#)

Haskell, [1](#), [2](#), [8](#)

 Gloss, [2](#), [11](#)

 interpretador

 GHCi, [2](#)

 Literate Haskell, [1](#)

 QuickCheck, [2](#)

 Stack, [2](#)

Números de Catalan, [6](#), [10](#)

Números naturais (N), [5](#), [6](#), [9](#)

Programação

 dinâmica, [5](#)

 literária, [1](#)

Racionais, [7](#), [8](#), [10–12](#)

U.Minho

 Departamento de Informática, [1](#)

Referências

- [1] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.
- [2] J.N. Oliveira. *Program Design by Calculation*, 2018. Draft of textbook in preparation. viii+297 pages. Informatics Department, University of Minho.