Cálculo de Programas
Trabalho Prático
LEI+MiEI — 2021/22

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Fevereiro de 2022

Grupo nr.	26
a89528	Luís Magalhães
a85829	Meriam Khammassi
a89578	Patícia Pereira
a88220	Xavier Mota

1 Preâmbulo

Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em Haskell (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

Antes de abodarem os problemas propostos no trabalho, os grupos devem ler com atenção o anexo A onde encontrarão as instruções relativas ao sofware a instalar, etc.

Problema 1

Num sistema de informação distribuído, uma lista não vazia de transações é vista como um *blockchain* sempre que possui um valor de *hash* que é dado pela raiz de uma Merkle tree que lhe está associada. Isto significa que cada *blockchain* está estruturado numa Merkle tree. Mas, o que é uma Merkle tree?

Uma Merkle tree é uma *FTree* com as seguintes propriedades:

1. as folhas são pares ($hash$, transação) ou simplesmente o $hash$ de uma transação;
2. os nodos são $hashes$ que correspondem à concatenação dos $hashes$ dos filhos;
3. o $hash$ que se encontra na raiz da árvore é designado $Merkle\ \ Root$; como se disse acima, corresponde ao valor de $hash$ de todo o bloco de transações.

(1)

Assumindo uma lista não vazia de transações, o algoritmo clássico de construção de uma $Merkle\ \ Tree$ é o que está dado na Figura 1. Contudo, este algoritmo (que se pode mostrar ser um hilomorfismo de listas não vazias) é demasiadamente complexo. Uma forma bem mais simples de produzir uma $Merkle\ \ Tree$ é através de um hilomorfismo de *LTree*s. Começa-se por, a partir da lista de transações, construir uma *LTree* cujas folhas são as transações:

$$list2LTree :: [a] \to LTree\ a$$

- *Se a lista for singular, calcular o $hash$ da transação.*
- *Caso contrário,*
  1. *Mapear a lista com a função $hash$.*
  2. *Se o comprimento da lista for ímpar, concatenar a lista com o seu último valor (que fica duplicado). Caso contrário, a lista não sofre alterações.*
  3. *Agrupar a lista em pares.*
  4. *Concatenar os $hashes$ do par produzindo uma lista de (sub-)árvores nas quais a cabeça terá a respetiva concatenação.*
  5. *Se a lista de (sub-)árvores não for singular, voltar ao passo 2 com a lista das cabeças como argumento, preservando a lista de (sub-)árvores. Se a lista for singular, chegamos à $Merkle\ \ Root$. Contudo, falta compor a $Merkle\ \ Tree$ final. Para tal, tendo como resultado uma lista de listas de (sub-)árvores agrupada pelos níveis da árvore final, é necessário encaixar sucessivamente os tais níveis formando a $Merkle\ \ Tree$ completa.*

Figura 1: Algoritmo clássico de construção de uma Merkle tree [4] .

Depois, o objetivo é etiquetar essa árvore com os $hashes$,

$$lTree2MTree :: Hashable\ a \Rightarrow LTree\ a \rightarrow \underbrace{FTree\ \mathbb{Z}\ (\mathbb{Z}, a)}_{Merkle\ tree}$$

formando uma Merkle tree que satisfaça os três requisitos em (1). Em suma, a construção de um blockchain é um hilomorfismo de *LTree*s

$$computeMerkleTree :: Hashable\ a \Rightarrow [a] \rightarrow FTree\ \mathbb{Z}\ (\mathbb{Z}, a)$$
$$computeMerkleTree = lTree2MTree \cdot list2LTree$$

1. Comece por definir o gene do anamorfismo que constrói *LTree*s a partir de listas não vazias:

   $$list2LTree :: [a] \rightarrow LTree\ a$$
   $$list2LTree = [\![g\_list2LTree]\!]$$

   NB: para garantir que $list2LTree$ não aceita listas vazias deverá usar em $g\_list2LTree$ o inverso $outNEList$ do isomorfismo

   $$inNEList = [singl, cons]$$

2. Assumindo as seguintes funções $hash$ e $concHash$:[1]

   $$hash :: Hashable\ a \Rightarrow a \rightarrow \mathbb{Z}$$
   $$hash = toInteger \cdot (Data.Hashable.hash)$$
   $$concHash :: (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$
   $$concHash = add$$

   defina o gene do catamorfismo que consome a *LTree* e produz a correspondente Merkle tree etiquetada com todos os $hashes$:

   $$lTree2MTree :: Hashable\ a \Rightarrow LTree\ a \rightarrow FTree\ \mathbb{Z}\ (\mathbb{Z}, a)$$
   $$lTree2MTree = (\!|\ g\_lTree2MTree\ |\!)$$

3. Defina g_mroot por forma a

   $$mroot :: Hashable\ b \Rightarrow [b] \rightarrow \mathbb{Z}$$
   $$mroot = (\!|\ g\_mroot\ |\!) \cdot computeMerkleTree$$

   nos dar a Merkle *root* de um qualquer bloco $[b]$ de transações.

[1] Para invocar a função $hash$, escreva $Main.hash$.

4. Calcule $mroot\ trs$ da sequência de transações trs da no anexo e verifique que, sempre que se modifica (e.g. fraudulentamente) uma transação passada em trs, $mroot\ trs$ altera-se necessariamente. Porquê? (Esse é exactamente o princípio de funcionamento da tecnologia blockchain.)

Valorização (não obrigatória): implemente o algoritmo clássico de construção de Merkle trees

$$classicMerkleTree :: Hashable\ a \Rightarrow [a] \to FTree\ \mathbb{Z}\ \mathbb{Z}$$

sob a forma de um hilomorfismo de listas não vazias. Para isso deverá definir esse combinador primeiro, da forma habitual:

$$hyloNEList\ h\ g = cataNEList\ h \cdot anaNEList\ g$$

etc. Depois passe à definição do gene $g\_pairsList$ do anamorfismo de listas

$$pairsList :: [a] \to [(a, a)]$$
$$pairsList = [\![g\_pairsList]\!]$$

que agrupa a lista argumento por pares, duplicando o último valor caso seja necessário. Para tal, poderá usar a função (já definida)

$$getEvenBlock :: [a] \to [a]$$

que, dada uma lista, se o seu comprimento for ímpar, duplica o último valor.

Por fim, defina os genes $divide$ e $conquer$ dos respetivos anamorfismo e catamorfimo por forma a

$$classicMerkleTree = (hyloNEList\ conquer\ divide) \cdot (\mathsf{map}\ \ Main.hash)$$

Para facilitar a definição do $conquer$, terá apenas de definir o gene $g\_mergeMerkleTree$ do catamorfismo de ordem superior

$$mergeMerkleTree :: FTree\ a\ p \to [FTree\ a\ c] \to FTree\ a\ c$$
$$mergeMerkleTree = (\!|\ g\_mergeMerkleTree\ |\!)$$

que compõe a *FTree* (à cabeça) com a lista de *FTree*s (como filhos), fazendo um "merge" dos valores intermédios. Veja o seguinte exemplo de aplicação da função $mergeMerkleTree$:

```
> l = [Comp 3 (Unit 1, Unit 2), Comp 7 (Unit 3, Unit 4)]
>
> m = Comp 10 (Unit 3, Unit 7)
>
> mergeMerkleTree m l
Comp 10 (Comp 3 (Unit 1,Unit 2),Comp 7 (Unit 3,Unit 4))
```

NB: o *classicMerkleTree* retorna uma Merkle Tree cujas folhas são apenas o $hash$ da transação e não o par ($hash$, transação).

Problema 2

Se se digitar *man wc* na shell do Unix (Linux) obtém-se:

```
NAME
     wc -- word, line, character, and byte count

SYNOPSIS
     wc [-clmw] [file ...]

DESCRIPTION
    The wc utility displays the number of lines, words, and bytes contained in
    each input file,  or standard input (if no file is specified) to the stan-
    dard  output.  A line is defined as  a string of characters delimited by a
    <newline> character.  Characters beyond the final <newline> character will
    not be included in the line count.
    (...)
```

```
The following options are available:
(...)
    -w   The number of words in each input file is written to the standard
         output.
(...)
```

Se olharmos para o código da função que, em C, implementa esta funcionalidade [1] e nos focarmos apenas na parte que implementa a opção `-w`, verificamos que a poderíamos escrever, em Haskell, da forma seguinte:

$$
\begin{array}{l}
wc\_w :: [Char] \to Int \\
wc\_w\ [\,] = 0 \\
wc\_w\ (c : l) = \\
\quad \textbf{if}\ \neg\ (sep\ c) \wedge lookahead\_sep\ l\ \textbf{then}\ wc\_w\ l + 1\ \textbf{else}\ wc\_w\ l \\
\quad\ \textbf{where} \\
\qquad sep\ c = (c \equiv \texttt{' '} \vee c \equiv \texttt{'\textbackslash n'} \vee c \equiv \texttt{'\textbackslash t'}) \\
\qquad lookahead\_sep\ [\,] = True \\
\qquad lookahead\_sep\ (c : l) = sep\ c
\end{array}
$$

Por aplicação da lei de recursividade mútua

$$
\left\{\begin{array}{l} f \cdot \mathsf{in} = h \cdot \mathsf{F}\ \langle f, g\rangle \\ g \cdot \mathsf{in} = k \cdot \mathsf{F}\ \langle f, g\rangle \end{array}\right. \quad \equiv \quad \langle f, g\rangle = (\!|\langle h, k\rangle|\!) \tag{2}
$$

às funções wc_w e $lookahead\_sep$, re-implemente a primeira segundo o modelo $worker/wrapper$ onde $worker$ deverá ser um catamorfismo de listas:

$$
\begin{array}{l}
wc\_w\_final :: [Char] \to Int \\
wc\_w\_final = wrapper \cdot \underbrace{(\!|[g1, g2]|\!)}_{worker}
\end{array}
$$

Apresente os cálculos que fez para chegar à versão wc_w_final de wc_w, com indicação dos genes h, k e $g = [g1, g2]$.

Problema 3

Neste problema pretende-se gerar o HTML de uma página de um jornal descrita como uma agregação estruturada de blocos de texto ou imagens:

$$\textbf{data}\ Unit\ a\ b = Image\ a \mid Text\ b\ \textbf{deriving}\ Show$$

O tipo *Sheet* (="página de jornal")

$$\textbf{data}\ Sheet\ a\ b\ i = Rect\ (Frame\ i)\ (X\ (Unit\ a\ b)\ (Mode\ i))\ \textbf{deriving}\ Show$$

é baseado num tipo indutivo X que, dado em anexo (pág. 10), exprime a partição de um rectângulo (a página tipográfica) em vários subrectângulos (as caixas tipográficas a encher com texto ou imagens), segundo um processo de partição binária, na horizontal ou na vertical. Para isso, o tipo

$$\textbf{data}\ Mode\ i = Hr\ i \mid Hl\ i \mid Vt\ i \mid Vb\ i\ \textbf{deriving}\ Show$$

especifica quatro variantes de partição. O seu argumento deverá ser um número de 0 a 1, indicando a fracção da altura (ou da largura) em que o rectângulo é dividido, a saber:

- `Hr i` — partição horizontal, medindo i a partir da direita
- `Hl i` — partição horizontal, medindo i a partir da esquerda
- `Vt i` — partição vertical, medindo i a partir do topo
- `Vb i` — partição vertical, medindo i a partir da base

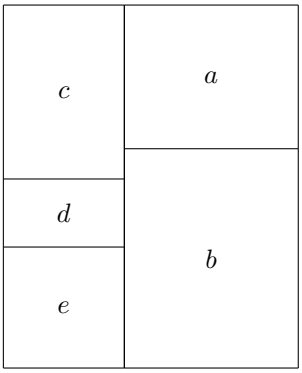
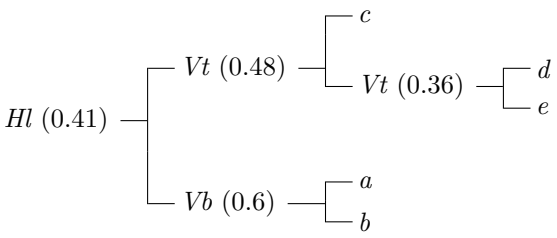


Figura 2: Layout de página de jornal.

Por exemplo, a partição dada na figura 2 corresponde à partição de um rectângulo de acordo com a seguinte árvore de partições:



As caixas delineadas por uma partição (como a dada acima) correspondem a folhas da árvore de partição e podem conter texto ou imagens. É o que se verifica no objecto *example* da secção B que, processado por *sheet2html* (secção B) vem a produzir o ficheiro `jornal.html`.

O que se pretende O código em Haskell fornecido no anexo B como "kit" para arranque deste trabalho não está estruturado em termos dos combinadores *cata-ana-hylo* estudados nesta disciplina. O que se pretende é, então:

1. A construção de uma biblioteca "pointfree" [2] com base na qual o processamento ("pointwise") já disponível possa ser redefinido.
2. A evolução da biblioteca anterior para uma outra que permita partições n-árias (para *qualquer* n finito) e não apenas binárias. [3]

Problema 4

Este exercício tem como objectivo determinar todos os caminhos possíveis de um ponto A para um ponto B. Para tal, iremos utilizar técnicas de *brute force* e *backtracking*, que podem ser codificadas no mónade das listas (estudado na aulas). Comece por implementar a seguinte função auxiliar:

1. $pairL :: [a] \to [(a, a)]$ que dada uma lista l de tamanho maior que 1 produz uma nova lista cujos elementos são os pares (x, y) de elementos de l tal que x precede imediatamente y. Por exemplo:

   $pairL\ [1, 2] \equiv [(1, 2)]$,
   $pairL\ [1, 2, 3] \equiv [(1, 2), (2, 3)]$ e
   $pairL\ [1, 2, 3, 4] \equiv [(1, 2), (2, 3), (3, 4)]$

   Para o caso em que $l = [x]$, i.e. o tamanho de l é 1, assuma que $pairL\ [x] \equiv [(x, x)]$. Implemente esta função como um *anamorfismo de listas*, atentando na sua propriedade:

[2] A desenvolver de forma análoga a outras bibliotecas que conhece (*eg.* *LTree*, etc).
[3] Repare que é a falta desta capacidade expressiva que origina, no "kit" actual, a definição das funções auxiliares da secção B, por exemplo.

- *Para todas as listas l de tamanho maior que 1, a lista* `map` π_1 $(pairL\ l)$ *é a lista original l a menos do último elemento. Analogamente, a lista* `map` π_2 $(pairL\ l)$ *é a lista original l a menos do primeiro elemento.*

De seguida necessitamos de uma estrutura de dados representativa da noção de espaço, para que seja possível formular a noção de *caminho* de um ponto A para um ponto B, por exemplo, num papel quadriculado. No nosso caso vamos ter:

$$\textbf{data}\ Cell = Free \mid Blocked \mid Lft \mid Rght \mid Up \mid Down\ \textbf{deriving}\ (Eq, Show)$$
$$\textbf{type}\ Map = [[Cell]]$$

O terreno onde iremos navegar é codificado então numa *matriz* de células. Os valores *Free* and *Blocked* denotam uma célula como livre ou bloqueada, respectivamente (a navegação entre dois pontos terá que ser realizada *exclusivamente* através de células livres). Ao correr, por exemplo, $putStr\ \$\ showM\ \$\ map_1$ no interpretador irá obter a seguinte apresentação de um mapa:

```
_ _ _
_ X _
_ X _
```

Para facilitar o teste das implementações pedidas abaixo, disponibilizamos no anexo B a função $testWithRndMap$. Por exemplo, ao correr $testWithRndMap$ obtivemos o seguinte mapa aleatoriamente:

```
_ _ _ _ _ _ X _ _ X
_ X _ _ _ X _ _ _ _
_ _ _ _ _ X _ _ _ _
_ X _ _ _ _ _ _ _ X
_ _ _ _ _ _ X _ X _
_ _ _ _ _ _ _ _ _ _
_ X X _ _ X _ _ _ _
_ _ _ _ _ _ _ _ X _
_ _ _ _ _ X _ _ X _
_ _ X _ _ _ _ _ _ X
Map of dimension 10x10.
```

De seguida, os valores *Lft*, *Rght*, *Up* e *Down* em $Cell$ denotam o facto de uma célula ter sido alcançada através da célula à esquerda, direita, de cima, ou de baixo, respectivamente. Tais valores irão ser usados na representação de caminhos num mapa.

2. Implemente agora a função $markMap :: [Pos] \to Map \to Map$, que dada uma lista de posições (representante de um *caminho* de um ponto A para um ponto B) e um mapa retorna um novo mapa com o caminho lá marcado. Por exemplo, ao correr no interpretador,

$$putStr\ \$\ showM\ \$\ markMap\ [(0,0),(0,1),(0,2),(1,2)]\ map_1$$

deverá obter a seguinte apresentação de um mapa e respectivo caminho:

```
>  _  _
^  X  _
^  X  _
```

representante do caso em que subimos duas vezes no mapa e depois viramos à direita. Para implementar a função $markMap$ deverá recorrer à função $toCell$ (disponibilizada no anexo B) e a uma função auxiliar com o tipo $[(Pos, Pos)] \to Map \to Map$ definida como um *catamorfismo de listas*. Tal como anteriormente, anote as propriedades seguintes sobre $markMap$:[4]

- *Para qualquer lista l a função $markMap\ l$ é idempotente.*
- *Todas as posições presentes na lista dada como argumento irão fazer com que as células correspondentes no mapa deixem de ser $Free$.*

[4] Ao implementar a função $markMap$, estude também a função $subst$ (disponibilizada no anexo B) pois as duas funções tem algumas semelhanças.

Finalmente há que implementar a função $scout :: Map \to Pos \to Pos \to Int \to [[Pos]]$, que dado um mapa m, uma posição inicial s, uma posição alvo t, e um número inteiro n, retorna uma lista de caminhos que começam em s e que têm tamanho máximo $n + 1$. Nenhum destes caminhos pode conter t como elemento que não seja o último na lista (i.e. um caminho deve terminar logo que se alcança a posição t). Para além disso, não é permitido voltar a posições previamente visitadas e se ao alcançar uma posição diferente de t é impossivel sair dela então todo o caminho que levou a esta posição deve ser removido (*backtracking*). Por exemplo:

$scout\ map_1\ (0,0)\ (2,0)\ 0 \equiv [[(0,0)]]$
$scout\ map_1\ (0,0)\ (2,0)\ 1 \equiv [[(0,0),(0,1)]]$
$scout\ map_1\ (0,0)\ (2,0)\ 4 \equiv [[(0,0),(0,1),(0,2),(1,2),(2,2)]]$
$scout\ map_2\ (0,0)\ (2,2)\ 2 \equiv [[(0,0),(0,1),(1,1)],[(0,0),(0,1),(0,2)]]$
$scout\ map_2\ (0,0)\ (2,2)\ 4 \equiv [[(0,0),(0,1),(1,1),(2,1),(2,2)],[(0,0),(0,1),(1,1),(2,1),(2,0)]]$

3. Implemente a função

   $$scout :: Map \to Pos \to Pos \to Int \to [[Pos]]$$

   recorrendo à função $checkAround$ (disponibilizada no anexo B) e de tal forma a que $scout\ m\ s\ t$ seja um catamorfismos de naturais *monádico*. Anote a seguinte propriedade desta função:

   - *Quanto maior for o tamanho máximo permitido aos caminhos, mais caminhos que alcançam a posição alvo iremos encontrar.*

Anexos

A Documentação para realizar o trabalho

Para cumprir de forma integrada os objectivos Rdo trabalho vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [2], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2122t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp2122t.lhs`[5] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2122t.zip` e executando:

```
$ lhs2TeX cp2122t.lhs > cp2122t.tex
$ pdflatex cp2122t
```

em que `lhs2tex` é um pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que deve desde já instalar executando

```
$ cabal install lhs2tex --lib
$ cabal install --ghc-option=-dynamic lhs2tex
```

NB: utilizadores do macOS poderão instalar o *cabal* com o seguinte comando:

```
$ brew install cabal-install
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2122t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2122t.lhs
```

Abra o ficheiro `cp2122t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo GHCi para ser executado.

A.1 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 (ou 4) alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo em todos os exercícios do trabalho, para assim poderem responder a qualquer questão colocada na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo C com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTeX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
$ bibtex cp2122t.aux
$ makeindex cp2122t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário QuickCheck, que ajuda a validar programas em Haskell:

```
$ cabal install QuickCheck --lib
```

Para testar uma propriedade QuickCheck *prop*, basta invocá-la com o comando:

[5] O sufixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

```
> quickCheck prop
+++ OK, passed 100 tests.
```

Pode-se ainda controlar o número de casos de teste e sua complexidade, como o seguinte exemplo mostra:[6]

```
> quickCheckWith stdArgs { maxSuccess = 200, maxSize = 10 } prop
+++ OK, passed 200 tests.
```

Qualquer programador tem, na vida real, de ler e analisar (muito!) código escrito por outros. No anexo B disponibiliza-se algum código Haskell relativo aos problemas que se seguem. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Stack O Stack é um programa útil para criar, gerir e manter projetos em Haskell. Um projeto criado com o Stack possui uma estrutura de pastas muito específica:

- Os módulos auxiliares encontram-se na pasta *src*.
- O módulo principal encontra-se na pasta *app*.
- A lista de dependências externas encontra-se no ficheiro *package.yaml*.

Pode aceder ao GHCi utilizando o comando:

```
stack ghci
```

Garanta que se encontra na pasta mais externa **do projeto**. A primeira vez que correr este comando as depêndencias externas serão instaladas automaticamente. Para gerar o PDF, garanta que se encontra na diretoria *app*.

A.2 Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:[7]

$$
\begin{array}{ll}
 & id = \langle f, g\rangle \\
\equiv & \quad \{\ \text{universal property}\ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{identity}\ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
\Box &
\end{array}
$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* LaTeX xymatrix, por exemplo:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\ \mathsf{in}\ } & 1 + \mathbb{N}_0 \\
{\scriptstyle (\!|g|\!)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id + (\!|g|\!)} \\
B & \xleftarrow[\ g\ ]{} & 1 + B
\end{array}
$$

[6] Como já sabe, os testes normalmente não provam a ausência de erros no código, apenas a sua presença (cf. arquivo online). Portanto não deve ver o facto de o seu código passar nos testes abaixo como uma garantia que este está livre de erros.

[7] Exemplos tirados de [3].

B Código fornecido

Problema 1

Sequência de transações para teste:

```
trs = [("compra", "20211102", -50),
  ("venda",   "20211103", 100),
  ("despesa", "20212103", -20),
  ("venda",   "20211205", 250),
  ("venda",   "20211205", 120)]
```

```
getEvenBlock :: [a] -> [a]
getEvenBlock l = if (even (length l)) then l else l ++ [last l]
firsts = [π1, π1]
```

Problema 2

```
wc_test = "Here is a sentence, for testing.\nA short one."
sp c = (c ≡ ' ' ∨ c ≡ '\n' ∨ c ≡ '\t')
```

Problema 3

Tipos:

```
data X u i = XLeaf u | Node i (X u i) (X u i) deriving Show
data Frame i = Frame i i deriving Show
```

Funções da API[8]

```
printJournal :: Sheet String String Double -> IO ()
printJournal = write . sheet2html
write :: String -> IO ()
write s = do writeFile "jornal.html" s
  putStrLn "Output HTML written into file `jornal.html'"
```

Geração de HTML:

```
sheet2html (Rect (Frame w h) y) = htmlwrap (x2html y (w, h))
x2html :: X (Unit String String) (Mode Double) -> (Double, Double) -> String
x2html (XLeaf (Image i)) (w, h) = img w h i
x2html (XLeaf (Text txt)) _ = txt
x2html (Node (Vt i) x1 x2) (w, h) = htab w h (
  tr (td w (h * i) (x2html x1 (w, h * i))) ++
  tr (td w (h * (1 - i)) (x2html x2 (w, h * (1 - i))))
  )
x2html (Node (Hl i) x1 x2) (w, h) = htab w h (
  tr (td (w * i) h (x2html x1 (w * i, h)) ++
    td (w * (1 - i)) h (x2html x2 (w * (1 - i), h)))
  )
x2html (Node (Vb i) x1 x2) m = x2html (Node (Vt (1 - i)) x1 x2) m
x2html (Node (Hr i) x1 x2) m = x2html (Node (Hl (1 - i)) x1 x2) m
```

Funções auxiliares:

[8] API (="Application Program Interface").

```
twoVtImg a b = Node (Vt 0.5) (XLeaf (Image a)) (XLeaf (Image b))
fourInArow a b c d =
  Node (Hl 0.5)
    (Node (Hl 0.5) (XLeaf (Text a)) (XLeaf (Text b)))
    (Node (Hl 0.5) (XLeaf (Text c)) (XLeaf (Text d)))
```

HTML:

```
htmlwrap = html . hd . (title "CP/2122 - sheet2html") . body . divt
html = tag "html" [] . ("<meta charset=\"utf-8\" />"++)
title t = (tag "title" [] t++)
body = tag "body" ["BGCOLOR" ↦ show "#F4EFD8"]
hd = tag "head" []
htab w h = tag "table" [
  "width" ↦ show2 w, "height" ↦ show2 h,
  "cellpadding" ↦ show2 0, "border" ↦ show "1px"]
tr = tag "tr" []
td w h = tag "td" ["width" ↦ show2 w, "height" ↦ show2 h]
divt = tag "div" ["align" ↦ show "center"]
img w h i = tag "img" ["width" ↦ show2 w, "src" ↦ show i] ""
tag t l x = "<" ++ t ++ " " ++ ps ++ ">" ++ x ++ "</" ++ t ++ ">\n"
  where ps = unwords [concat [t, "=", v] | (t, v) ← l]
a ↦ b = (a, b)
show2 :: Show a ⇒ a → String
show2 = show . show
```

Exemplo para teste:

```
example :: (Fractional i) ⇒ Sheet String String i
example =
  Rect (Frame 650 450)
    (Node (Vt 0.01)
      (Node (Hl 0.15)
        (XLeaf (Image "cp2122t_media/publico.jpg"))
        (fourInArow "Jornal Público" "Domingo, 5 de Dezembro 2021" "Simulação para efe
      (Node (Vt 0.55)
        (Node (Hl 0.55)
          (Node (Vt 0.1)
            (XLeaf (Text
            "Universidade do Algarve estuda planta capaz de eliminar a doença do so
            (XLeaf (Text
              "Organismo (semelhante a um fungo) ataca de forma galopante os montado
          (XLeaf (Image
              "cp2122t_media/1647472.jpg")))
        (Node (Hl 0.25)
          (twoVtImg
              "cp2122t_media/1647981.jpg"
              "cp2122t_media/1647982.jpg")
          (Node (Vt 0.1)
              (XLeaf (Text "Manchester United vence na estreia de Rangnick"))
              (XLeaf (Text "O Manchester United venceu, este domingo, em Old Trafford,
```

Problema 4

Exemplos de mapas:

$$map_1 = [[Free, Blocked, Free], [Free, Blocked, Free], [Free, Free, Free]]$$
$$map_2 = [[Free, Blocked, Free], [Free, Free, Free], [Free, Blocked, Free]]$$
$$map_3 = [[Free, Free, Free], [Free, Blocked, Free], [Free, Blocked, Free]]$$

Código para impressões de mapas e caminhos:

```
showM :: Map → String
showM = unlines · (map showL) · reverse

showL :: [Cell] → String
showL = (|[f1, f2]|) where
  f1 = ""
  f2 = (++) · (fromCell × id)

fromCell Lft = " > "
fromCell Rght = " < "
fromCell Up = " ^ "
fromCell Down = " v "
fromCell Free = " _ "
fromCell Blocked = " X "

toCell (x, y) (w, z) | x < w = Lft
toCell (x, y) (w, z) | x > w = Rght
toCell (x, y) (w, z) | y < z = Up
toCell (x, y) (w, z) | y > z = Down
```

Código para validação de mapas (útil, por exemplo, para testes QuickCheck):

```
ncols :: Map → Int
ncols = [0, length · π1] · outList

nlines :: Map → Int
nlines = length

isValidMap :: Map → Bool
isValidMap = (∧) · ⟨isSquare, sameLength⟩ where
  isSquare = (≡) · ⟨nlines, ncols⟩
  sameLength [] = True
  sameLength [x] = True
  sameLength (x1 : x2 : y) = length x1 ≡ length x2 ∧ sameLength (x2 : y)
```

Código para geração aleatória de mapas e automatização de testes (envolve o mónade IO):

```
randomRIOL :: (Random a) ⇒ (a, a) → Int → IO [a]
randomRIOL x = (|[f1, f2]|) where
  f1 = return []
  f2 l = do r1 ← randomRIO x
            r2 ← l
            return $ r1 : r2

buildMat :: Int → Int → IO [[Int]]
buildMat n = (|[f1, f2]|) where
  f1 = return []
  f2 l = do x ← randomRIOL (0 :: Int, 3 :: Int) n
            y ← l
            return $ x : y

testWithRndMap :: IO ()
testWithRndMap = do
  dim ← randomRIO (2, 10) :: IO Int
  out ← buildMat dim dim
  map ← return $ map (map table) out
  putStr $ showM map
  putStrLn $ "Map of dimension " ++ (show dim) ++ "x" ++ (show dim) ++ "."
```

```
    putStr "Please provide a target position (must be different from (0,0)): "
    t ← readLn :: IO (Int, Int)
    putStr "Please provide the number of steps to compute: "
    n ← readLn :: IO Int
    let paths = hasTarget t (scout map (0, 0) t n) in
      if length paths ≡ 0
      then putStrLn "No paths found."
      else putStrLn $ "There are at least " ++ (show $ length paths) ++
      " possible paths. Here is one case: \n" ++ (showM $ markMap (head paths) map )
table 0 = Free
table 1 = Free
table 2 = Free
table 3 = Blocked
hasTarget y = filter (λl → elem y l)
```

Funções auxiliares $subst :: a \to Int \to [a] \to [a]$, que dado um valor x e um inteiro n, produz uma função $f : [a] \to [a]$ que dada uma lista l substitui o valor na posição n dessa lista pelo valor x:

```
subst :: a → Int → [a] → [a]
subst x = (|[f1, f2]|) where
  f1 = λl → x : tail l
  f2 f (h : t) = h : f t
```

$checkAround :: Map \to Pos \to [Pos]$, que verifica se as células adjacentes estão livres:

```
type Pos = (Int, Int)
checkAround :: Map → Pos → [Pos]
checkAround m p = concat $ map (λf → f m p)
  [checkLeft, checkRight, checkUp, checkDown]
checkLeft :: Map → Pos → [Pos]
checkLeft m (x, y) = if x ≡ 0 ∨ (m !! y) !! (x − 1) ≡ Blocked
  then [] else [(x − 1, y)]
checkRight :: Map → Pos → [Pos]
checkRight m (x, y) = if x ≡ (ncols m − 1) ∨ (m !! y) !! (x + 1) ≡ Blocked
  then [] else [(x + 1, y)]
checkUp :: Map → Pos → [Pos]
checkUp m (x, y) = if y ≡ (nlines m − 1) ∨ (m !! (y + 1)) !! x ≡ Blocked
  then [] else [(x, y + 1)]
checkDown :: Map → Pos → [Pos]
checkDown m (x, y) = if y ≡ 0 ∨ (m !! (y − 1)) !! x ≡ Blocked
  then [] else [(x, y − 1)]
```

QuickCheck

Lógicas:

```
infixr 0 ⇒
(⇒) :: (Testable prop) ⇒ (a → Bool) → (a → prop) → a → Property
p ⇒ f = λa → p a ⇒ f a
infixr 0 ⇔
(⇔) :: (a → Bool) → (a → Bool) → a → Property
p ⇔ f = λa → (p a ⇒ property (f a)) .&&. (f a ⇒ property (p a))
infixr 4 ≡
(≡) :: Eq b ⇒ (a → b) → (a → b) → (a → Bool)
f ≡ g = λa → f a ≡ g a
```

```
infixr 4 ⩽
(⩽) :: Ord b ⇒ (a → b) → (a → b) → (a → Bool)
f ⩽ g = λa → f a ⩽ g a
infixr 4 ∧
(∧) :: (a → Bool) → (a → Bool) → (a → Bool)
f ∧ g = λa → ((f a) ∧ (g a))
instance Arbitrary Cell where
    -- 1/4 chance of generating a cell 'Block'.
  arbitrary = do x ← chooseInt (0, 3)
    return $ f x where
      f x = if x < 3 then Free else Blocked
```

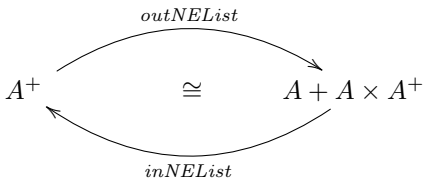
C Soluções dos alunos

Problema 1

Para grarantir que *list2LTree* não aceita listas vazias é pedido para definir *outNEList*. Uma vez que conhecemos o *inNEList* podemos calcular o seu inverso da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
& outNEList \cdot inNEList = id \\
\equiv & \quad \{ \text{ inNEList } \} \\
& outNEList \cdot [single,\ cons] = id \\
\equiv & \quad \{ \text{ Fusão-+ (20) } \} \\
& [outNEList \cdot single,\ outNEList \cdot cons] = id \\
\equiv & \quad \{ \text{ Universal-+ (17) } \} \\
& \begin{cases} id \cdot i_1 = outNEList \cdot single \\ id \cdot i_2 = outNEList \cdot cons \end{cases} \\
\equiv & \quad \{ \text{ Natural-id (1), Igualdade Extensional (69), Def-comp (70) } \} \\
& \begin{cases} outNEList\ (single\ a) = i_1\ a \\ outNEList\ (cons\ (h, t)) = i_2\ (h, t) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Assim o tipo do *outNEList* é:

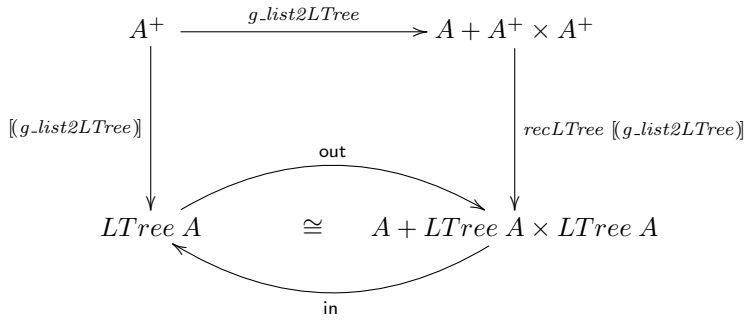


Listas não vazias:

$$
\begin{aligned}
& outNEList\ [a] = i_1\ a \\
& outNEList\ (h : t) = i_2\ (h, t) \\
& baseNEList\ f\ g = f + (f \times g) \\
& recNEList\ \ f = baseNEList\ id\ f \\
& cataNEList\ g = g \cdot recNEList\ (cataNEList\ g) \cdot outNEList \\
& anaNEList\ g = inNEList \cdot recNEList\ (anaNEList\ g) \cdot g \\
& hyloNEList\ h\ g = cataNEList\ h \cdot anaNEList\ g
\end{aligned}
$$

Gene do anamorfismo:

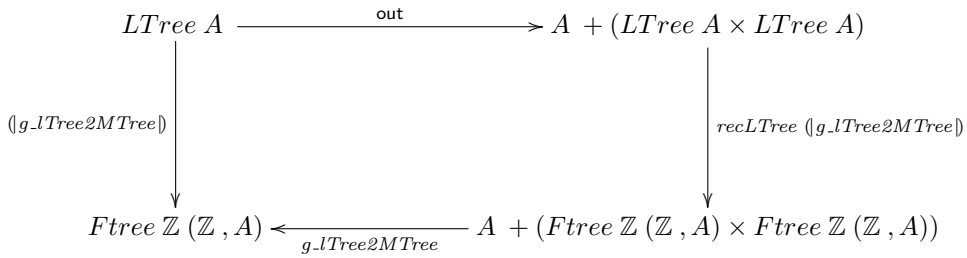
Para descobrir o gene do anamorfismo, recorremos ao diagrama do anamorfismo das *LTree*.



Primeiramente percebemos que o gene recebe uma lista não vazia e produz duas listas não vazias, ou no caso da lista singular devolve o elemento. Uma vez que estamos a trabalhar com listas não vazias resolvemos aplicar o *outNElist* que definimos anteriormente. Assim ficamos com o tipo $A + A \times A\hat{}+$. Para ficar com o tipo pretendido, à direita, definimos uma função auxiliar, *splitHalf* que, com o auxilio da função pré-definida, *splitAt*, divide recebe um par elemento lista e divide a meio a lista, produzindo um par com as duas metades da lista.

```
g_list2LTree = (id + splitHalf) · outNEList where
  splitHalf (a, b) = splitAt ((length b + 1) `div` 2) (a : b)
```

Gene do catamorfismo:



Da análise do diagrama retiramos que, este gene, no caso de receber um único elemento, produz um Unit, ou seja, uma folha, com um par em que o segundo elemento é a transação e o primeiro o seu valor de *hash*, que calculamos com a auxiliar fornecida *hash*. No caso de receber duas *FTree* necessitamos as juntar e concatenar os hashs com outra auxiliar fornecida, a *concHash*.

Após estudar o conteúdo do ficheiro *FTree.hs* e o enunciado concluimos que, em *FTree* a c, o a é concatenação dos *hash* e o c o par (hash,transação).

Para encontrar o valor de hash de uma *FTree* precisamos de definir as seguintes auxiliares:

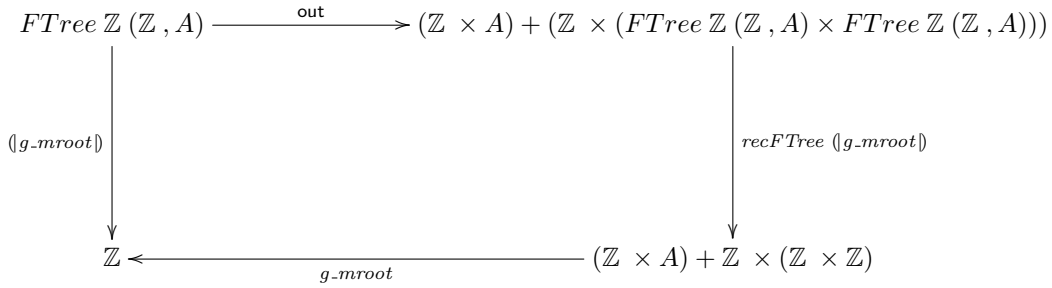
Assim para obter o resultado pretendido usando o in das *FTree* que recebe o tipo:

$(\mathbb{Z} \times A) + (\mathbb{Z} \times (Ftree\ \mathbb{Z}\ (\mathbb{Z}\ ,A) \times Ftree\ \mathbb{Z}\ (\mathbb{Z}\ ,A)))$

```
g_lTree2MTree :: Hashable c ⇒ c + (FTree ℤ (ℤ, c), FTree ℤ (ℤ, c)) → FTree ℤ (ℤ, c)
g_lTree2MTree = in · (⟨Main.hash, id⟩ + ⟨calcHash, id⟩) where
  getHash (Unit c) = π1 c
  getHash (Comp a _) = a
  calcHash (t1, t2) = concHash (getHash t1, getHash t2)
```

Gene de *mroot* ("get Merkle root"):

Uma vez que *computeMerkleTree* produz uma *MerkleTree* temos que o diagrama de *mroot* é:



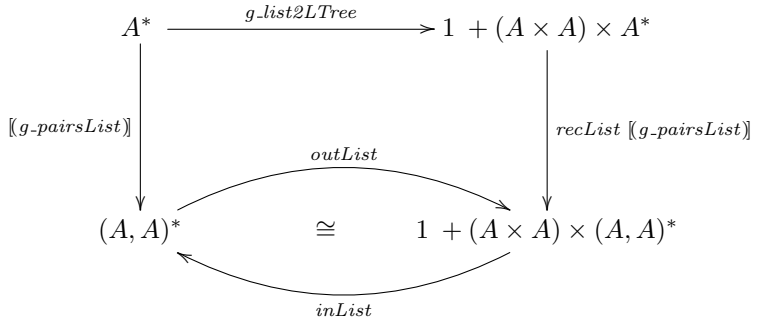
Sendo a *Merkle Root* o valor de *hash* de todo o bloco, no caso de ser uma àrvore singular o resultado será a hash da transação, caso contrário a hash do nodo mais exterior, ou seja a raiz. Como podemos verificar pelo diagrama, o gene será um either dos primeiros elementos, pelo que podemos usar a auxiliar fornecida *firts*.

$$g\_mroot = firsts$$

Quando executamos *mroot trs* o valor obtido é -13593070566482620546, correspondente ao valor de hash da *Merkle Root*, ou seja o valor de hash mais exterior ao executar *computeMerkleTree trs*. Ao alterar uma transação, este valor vai alterado, conforme a diferença entre os valores de hash que a mudança na transação causou.

Valorização:

Para descobrir o gene do anamorfismo *pairsList* recorremos ao seu diagrama.



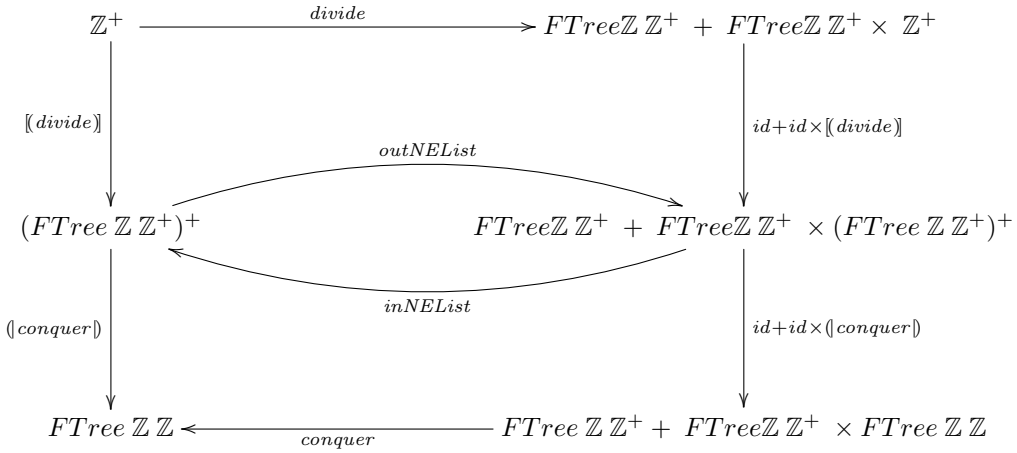
Pela análise do diagrama, concluimos que o gene *g_pairsList* recebe uma lista e produz, ou uma lista vazia ou um par e uma lista. Tendo em conta que a lista tem de ser par, o primeiro passo foi utilizar a auxiliar *getEvenBlock*. Em seguida utilizamos o *outList*, olhando para o segundo elemento do either produzido por este, concluimos para obter o par precisavamos de mais um elemento da lista pelo que utilizamos um split, ficando com o tipo: $(A \times (A \times A\hat{}*))$

Com este tipo simplesmente nos basta um passo para produzir o pretendido, sendo que usamos a *assocl* estudada nas aulas.

$pairsList :: [a] \to [(a, a)]$
$pairsList = [\![g\_pairsList]\!]$

$$g\_pairsList = (id + assocl \cdot (id \times \langle head, tail \rangle)) \cdot outList \cdot getEvenBlock$$

Mais uma vez recorremos a um diagrama para compreender os genes pedidos e os seus tipos. Para chegar à sua versão final tivemos de compreender o *conquer*, que é um either, em que o lado esquerdo é a *head* de uma lista, que tendo em conta o problema, será uma lista com uma *MerkleTree* singular. Conhecendo o tipo da *joinMerkleTree* foi possivel chegar ao tipo do lado direito do either, e assim obter o resto do diagrama.



Distinto da primeira parte deste problema, em *FTree* $a\ c$, c corresponde ao valor de hash de uma folha, da *Unit*, e o a corresponde à concatenação dos filhos.

Para resolver estes genes tivemos de perceber em que fase do algoritmo estes se encontram. Sendo que já temos a uma lista de pares a ser produzida, com a *pairsList*, resta-nos os passos 4 e 5 do algoritmo.

$$
\begin{aligned}
&classicMerkleTree :: Hashable\ a \Rightarrow [a] \to FTree\ \mathbb{Z}\ \mathbb{Z} \\
&classicMerkleTree = (hyloNEList\ conquer\ divide) \cdot (\mathsf{map}\ \ Main.hash)
\end{aligned}
$$

Pelo diagrama anterior, concluimos que o divide irá juntar os passos 1 ao 4.

Sendo assim, o nosso objetivo seria, partindo de uma lista não vazia, criar no caso de uma lista singular, um *Unit*, correspondendo ao valor da *MerkleTree Root*, e no caso de uma lista não singular, fazer os passos 3 e 4. Isto é, primeiro criar pares, com o auxilio da anteriormente definida *pairsList*, de seguida criar uma lista de (sub)-*MerkleTree* definindo, para isto uma auxiliar *concPair*.

Tendo em conta o inicio do passo 5, caso a lista não seja singular, necessitamos de voltar ao passo 2 com a lista das cabeças como argumento. Assim sendo, definimos a *concPair* e a *concH* que, partindo de uma lista de pares produzem uma lista de sub-àrvores e uma lista com as concatenações, respetivamente.

$$
\begin{aligned}
&divide = ((singl \cdot Unit) + \langle concPair, concH\rangle \cdot (pairsList \cdot cons)) \cdot outNEList\ \mathbf{where} \\
&\quad concPair = (\!|inList \cdot (id + aux \times id)|\!) \\
&\quad aux\ (a,b) = Comp\ (concHash\ (a,b))\ (Unit\ a, Unit\ b) \\
&\quad concH = (\!|inList \cdot (id + concHash \times id)|\!)
\end{aligned}
$$

O passo 5 e final do algoritmo, compõe a *MerkleTree*. Para tal precisamos de definir o *conquer*. Foi-nos já fornecida parte da definição deste, sendo que apenas tinhamos de definir o gene do catamorfismo de *mergeMerkleTree*, que recebe uma *MerkleTree* e uma lista par.

No caso de receber um *Unit* e a lista, isto significa que que a list apenas terá um elemento, pelo que retornamos a *merkleTree* dentro da lista, que tem como valor de hash o valor do *Unit* e as suas folhas.

O h_2 recebe o tipo $(Inteiro, (f,g))\ l$, onde f e g são a *mergeMerkleTree* das folhas. Chegando a esta conclusão, e analizando o resultado do $anaNEList\ divide$, percebemos que tinhamos de dividir a lista recebida a meio e atribuir cada uma como argumento às folhas. Para dividir a lista em 2 definimos uma auxiliar *splitHalf*.

$$
\begin{aligned}
&conquer = [head, joinMerkleTree]\ \mathbf{where} \\
&\quad joinMerkleTree\ (l,m) = mergeMerkleTree\ m\ (evenMerkleTreeList\ l) \\
&\quad mergeMerkleTree = (\!|\,[h_1, h_2]\,|\!) \\
&\quad h_1\ c\ l = head\ l \\
&\quad h_2\ (c,(f,g))\ l = Comp\ c\ (f\ (\pi_1\ (splitHalf\ l)), g\ (\pi_2\ (splitHalf\ l)))
\end{aligned}
$$

$splitHalf\ l = splitAt\ ((length\ l)\ `div`\ 2)\ l$
$evenMerkleTreeList = getEvenBlock$

Problema 2

Para resolver este problema, resolvemos começar desenvolver o sistema resultante da aplicação da lei de recursividade mútua, em que o f é o wc_w e o g o $lookahead\_sep$

$$\begin{cases} wc\_w \cdot \mathsf{in} = h \cdot \mathsf{F}\ \langle wc\_w, lookahead\_sep\rangle \\ lookahead\_sep \cdot \mathsf{in} = k \cdot \mathsf{F}\ \langle wc\_w, lookahead\_sep\rangle \end{cases}$$

$\equiv$ { h=[h1,h2], k=[k1,k2], F-Lists, Absorsão-+ (22), Natural-id (1) }

$$\begin{cases} wc\_w \cdot \mathsf{in} = [h_1, h_2 \cdot (id \times \langle wc\_w, lookahead\_sep\rangle)] \\ lookahead\_sep \cdot \mathsf{in} = [k_1, k_2 \cdot (id \times \langle wc\_w, lookahead\_sep\rangle)] \end{cases}$$

$\equiv$ { inList, Fusão-+ (20), Eq-+ (27) }

$$\begin{cases} wc\_w \cdot nil = h_1 \\ wc\_w \cdot cons = h_2 \cdot (id \times \langle wc\_w, lookahead\_sep\rangle) \end{cases}$$
$$\begin{cases} lookahead\_sep \cdot nil = k_1 \\ lookahead\_sep \cdot cons = k_2 \cdot (id \times \langle wc\_w, lookahead\_sep\rangle) \end{cases}$$

$\equiv$ { Pelas definições fornecidas podemos definirmo h e k }

$$\begin{cases} wc\_w\ [\,] = 0 \\ wc\_w\ (c : l) = (((\neg \cdot sp \cdot \pi_1) \wedge (\pi_2 \cdot \pi_2)) \to (\mathsf{succ}\ \cdot \pi_1 \cdot \pi_2), (\pi_1 \cdot \pi_2)) \cdot (id \times \langle wc\_w, lookahead\_sep\rangle)\ (c, l) \end{cases}$$
$$\begin{cases} lookahead\_sep\ [\,] = True \\ lookahead\_sep\ (c : l) = (sp \cdot \pi_1) \cdot (id \times \langle wc\_w, lookahead\_sep\rangle)\ (c, l) \end{cases}$$

$\equiv$ { Natural-p1 (12) }

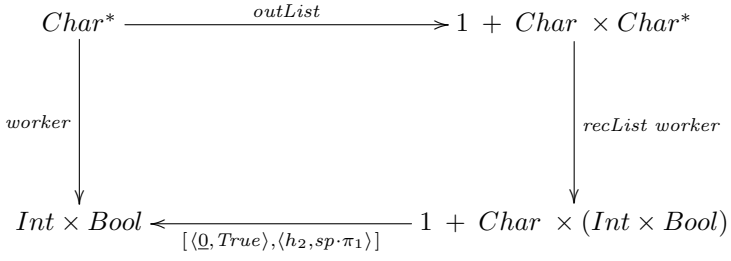
$$\begin{cases} wc\_w\ [\,] = 0 \\ wc\_w\ (c : l) = \mathbf{if}\ \neg \cdot (sep\ c) \wedge lookahead\_sep\ l\ \mathbf{then}\ wc\_w\ l + 1\ \mathbf{else}\ wc\_w\ l \end{cases}$$
$$\begin{cases} lookahead\_sep\ [\,] = True \\ lookahead\_sep\ (c : l) = sp\ c \end{cases}$$

Para definir o h_2, uma vez que se trata de uma condicional, recorremos à função pré-definiada $Cond$.

Na fórmula condicional $p \to f, g$ o nosso p será a condição $sp\ c \wedge lookahead\_sep\ l$, o f é o caso da condição ser verdadeira, $wc\_w\ l + 1$, e o g, a a condição ser falsa $wc\_w\ l$. Como o p são duas condições utilizamos um split para obter um par $sp\ c$ e $lookahead\_sep\ l$. De seguida definimos uma auxiliar que recebe o resultado do split e retorna o valor da condição.

Para o definir o wc_w_final, tivemos de perceber a transformação $Wrapper\ /\ Worker$, que, tal como sugere o nome, o $Worker$ produz o resultado e o $Wrapper$, desse resultado, devolve o pretendido.

Percebendo isto, recorremos ao diagrama do caratmotfismo de listas do Worker.



Analisando o diagrama, e tendo em consideração os genes h e k já definidos, percebemos que o $Worker$, é o $\langle wc\_w, lookahead\_sep\rangle$, ou seja pela aplicação da lei de recursividade mútua, $(\!|\langle h, k\rangle|\!)$, sendo o wc_w_final o primeiro valor do split produzirdo pelo $worker$.

$$
\begin{aligned}
&wc\_w\_final :: [Char] \to Int\\
&wc\_w\_final = wrapper \cdot worker\\
&worker = (\!|[g1, g2]|\!)\\
&wrapper = \pi_1
\end{aligned}
$$

Gene de $worker$:

$$
\begin{aligned}
&g1 = \langle h_1, k_1\rangle\\
&g2 = \langle h_2, k_2\rangle
\end{aligned}
$$

Genes $h = [h_1, h_2]$ e $k = [k_1, k_2]$ identificados no cálculo:

$$
\begin{aligned}
&h_1 = \underline{0}\\
&h_2 = cond\ (testaCond \cdot \langle \neg \cdot sp \cdot \pi_1, \pi_2 \cdot \pi_2\rangle)\ (\mathsf{succ}\ \cdot \pi_1 \cdot \pi_2)\ (\pi_1 \cdot \pi_2)\ \textbf{where}\\
&\quad testaCond\ (c1, c2) = c1 \wedge c2\\
&k_1 = \underline{True}\\
&k_2 = sp \cdot \pi_1
\end{aligned}
$$

Problema 3

A primeira fase deste problema é definir os contrutores da biblioteca de uma $XLeaf$. Primeiro tivemos de compreender o tipo X, para fazer o either inX.

Se o elemento da direita for um u, o X vai ser uma folha, ou seja $XLeaf\ u$. No caso de ser do tipo $(i, (X\ u\ i, X\ u\ i)$ presisamos de fazer uncurry duas vezes após usar a auxiliar $assocl$:

$$(i, (Xui, Xui) \xrightarrow{\quad assocl \quad} ((i, Xui), Xui) \xrightarrow{\quad \widehat{\widehat{Node}} \quad} Xui$$

$$
\begin{aligned}
&inX :: u + (i, (X\ u\ i, X\ u\ i)) \to X\ u\ i\\
&inX = [XLeaf, \widehat{\widehat{Node}} \cdot assocl]\\
&outX\ (XLeaf\ u) = i_1\ u\\
&outX\ (Node\ i\ l\ r) = i_2\ (i, (l, r))\\
&baseX\ f\ h\ g = f + (h \times (g \times g))\\
&recX\ f = baseX\ id\ id\ f\\
&cataX\ g = g \cdot (recX\ (cataX\ g)) \cdot outX\\
&anaX\ f = inX \cdot (recX\ (anaX\ f)) \cdot f\\
&hyloX\ f\ g = cataX\ f \cdot anaX\ g
\end{aligned}
$$

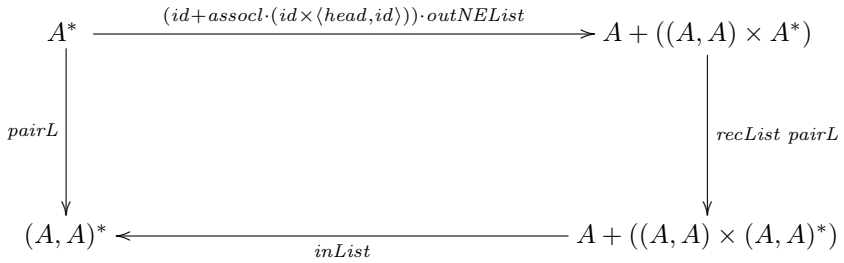
De seguida foi preciso atualizara biblioteca anterior para uma outra que permita partições n-árias.

$$
\begin{aligned}
&\textbf{data}\ Xn\ u\ i = XLeafn\ u \mid Noden\ i\ [Xn\ u\ i]\ \textbf{deriving}\ Show\\
&inXn :: u + (i, [Xn\ u\ i]) \to Xn\ u\ i\\
&inXn = [XLeafn, \widehat{Noden}]\\
&outXn\ (XLeafn\ u) = i_1\ u\\
&outXn\ (Noden\ i\ l) = i_2\ (i, l)\\
&baseXn\ f\ h\ g = f + (h \times \mathsf{map}\ g)\\
&recXn\ f = baseXn\ id\ id\ f\\
&cataXn\ g = g \cdot recXn\ (cataXn\ g) \cdot outXn\\
&anaXn\ f = inXn \cdot (recXn\ (anaXn\ f)) \cdot f\\
&hyloXn\ f\ g = cataXn\ f \cdot anaXn\ g
\end{aligned}
$$

Problema 4

PairL

Sendo o $pairL$ um anamorfismo de listas, podemos representa-lo pelo diagrama abaixo.



Para obter a solução, utilizamos o $outNEList$. Sendo que o lado esquerdo será o elemento único que irá ser ignorado, uma vez que o problema se aplica a listas de tamanho maior que 1, No lado direito, aplicamos um split para por no tipo $A \times (A \times A*)$, em que o segundo A é a $head$ da $tail$ da lista original, e a lista é essa mesma $tail$. Após ter este tipo utilizamos a $assocl$ para produzir o resultado pretendido.

$$
\begin{array}{l}
pairL :: [a] \to [(a,a)] \\
pairL = [\![g]\!] \ \textbf{where} \\
\quad g = (id + assocl \cdot (id \times \langle head, id \rangle)) \cdot outNEList
\end{array}
$$

markMap

Para conseguir chegar ao resutado de f_2 precisamos de perceber o que um mapa representa e como modificá-lo. A primiera conclusão a que chegamos, analisando o exemplo apresentado no problema 4 do Capitulo 1, foi que a posição (0,0) é a última à esquerda, posição (0,1) a acima dessa, e a posição (1,0) a da direita do mapa. Ou seja uma posição é do tipo (coluna,linha).

De seguida, pela análise dos mapas fornecidos, percebemos que, na matriz, o primeiro elemento diz respeito à linha inferior do mapa, a segunda a linha a cima e assim adiante.

resolvemos desenvolver o catamorfismo pela aplicação da $Lei\ Universal\ dos\ Catamorfismos$:

$$
\begin{array}{ll}
 & markMap\ l = (\!|[\underline{id}, f_2]|\!)\ (pairL\ l) \\
\equiv & \quad \{ \text{ Universal-cata (45) } \} \\
 & markMap \cdot inList\ l = [\underline{id}, f_2] \cdot F\ markMap\ (pairL\ l) \\
\equiv & \quad \{ \text{ inList, F markMap, Fusão-+ (20), Absorção-+ (22), Eq-+ (27) } \} \\
 & \begin{cases} markMap \cdot nil\ l = \underline{id} \\ markMap \cdot cons\ l = f_2 \cdot (id \times markMap)\ (pairL\ l) \end{cases} \\
\equiv & \quad \{ \text{ nil, cons } \} \\
 & \begin{cases} markMap\ [\,] = [\,] \\ markMap\ (pt1 : pt2 : t) = f_2 \cdot (id \times markMap)\ ((pt1, pt2), t) \end{cases} \\
\equiv & \quad \{ \text{ f2 } \} \\
 & \begin{cases} markMap\ [\,] = [\,] \\ markMap\ (pt1 : pt2 : t) = aux \cdot (substMatriz \cdot \langle \widehat{toCell}, \pi_1 \rangle\ (pt1, pt2) \times markMap\ t) \end{cases} \\
\equiv & \quad \{\ \} \\
 & \begin{cases} markMap\ [\,] = [\,] \\ markMap\ (pt1 : pt2 : t) = (substMatriz \cdot \langle \widehat{toCell}\ (pt1, pt2), pt1 \rangle) \cdot markMap\ t \end{cases}
\end{array}
$$

Assim conseguimos definir o $MarkMap$ utilizando a auxiliar fornecida $subst$ e a $toCell$.

$$markMap :: [Pos] \to Map \to Map$$
$$markMap\ l = (|[\underline{id}, f_2]|)\ (pairL\ l)\ \textbf{where}$$

$$f_2 = aux \cdot (substMatriz \cdot \langle \widehat{toCell}, \pi_1 \rangle \times id)$$
$$substMatriz\ (c, (x, y))\ m = subst\ (subst\ c\ x\ (m\ !!\ y))\ y\ m$$
$$aux\ (f, g) = f \cdot g$$

Neste momento é nos pedido para definir $scout$, que é um catamorfismo natural, cujo gene é um either composto por f_1 e o $bind$ de $f_2\ m\ s$

Primeiramente usamos a auxuliar $checkAround$ que nos retorna uma lista com as posições válidas, em seguida...

$$scout :: Map \to Pos \to Pos \to Int \to [[Pos]]$$
$$scout\ m\ s\ t = (|[f_1, (\gg\!= f_2\ m\ s)]|)\ \textbf{where}$$
$$f_1 = singl \cdot singl \cdot \underline{s}$$
$$f_2 = \bot \quad \text{-- checkAround}$$

Valorização Completar as seguintes funções de teste no QuickCheck para verificação de propriedades das funções pedidas, a saber:

Propriedade [QuickCheck] 1 *A lista correspondente ao lado esquerdo dos pares em $(pairL\ l)$ é a lista original l a menos do último elemento. Analogamente, a lista correspondente ao lado direito dos pares em $(pairL\ l)$ é a lista original l a menos do primeiro elemento:*

$$prop\_reconst\ l = (\mathsf{map}\ \ \pi_1\ (pairL\ l) \equiv (init\ l)) \wedge ((\mathsf{map}\ \ \pi_2\ (pairL\ l)) \equiv (tail\ l))$$

Propriedade [QuickCheck] 2 *Assuma que uma linha (de um mapa) é prefixa de uma outra linha. Então a representação da primeira linha também prefixa a representação da segunda linha:*

$$prop\_prefix2\ l\ l' = prefixes\ l \equiv l'$$

Propriedade [QuickCheck] 3 *Para qualquer linha (de um mapa), a sua representação deve conter um número de símbolos correspondentes a um tipo célula igual ao número de vezes que esse tipo de célula aparece na linha em questão.*

$$prop\_nmbrs\ l\ c = count\ (fromCell\ (head\ l))\ c \equiv count\ (head\ c)\ c$$
$$count :: (Eq\ a) \Rightarrow a \to [a] \to Int$$
$$count = aux\ \textbf{where}$$
$$aux\ x = length \cdot filter\ (\equiv x)$$

Propriedade [QuickCheck] 4 *Para qualquer lista l a função $markMap\ l$ é idempotente.*

$$inBounds\ m\ (x, y) = (nlines\ m) \geqslant x \wedge (ncols\ m) \geqslant y$$
$$prop\_idemp2\ l\ m = isValidMap\ m \wedge isValidMap\ (markMap\ l\ m) \wedge (and\ (\mathsf{map}\ \ (inBounds\ m)\ l))$$
$$\wedge\ (ncols\ m) \equiv (ncols\ (markMap\ l\ m)) \wedge (nlines\ m) \equiv (nlines\ (markMap\ l\ m))$$

Propriedade [QuickCheck] 5 *Todas as posições presentes na lista dada como argumento irão fazer com que as células correspondentes no mapa deixem de ser Free.*

$$prop\_extr2\ l\ m = ((m\ !!\ (\pi_1\ (head\ l)))\ !!\ (\pi_2\ (head\ l)) \not\equiv Free) : prop\_extr2\ (tail\ l)\ m$$

Propriedade [QuickCheck] 6 *Quanto maior for o tamanho máximo dos caminhos mais caminhos que alcançam a posição alvo iremos encontrar:*

$$prop\_reach\ m\ t\ n\ n' = (n > n') \wedge (length\ (scout\ m\ (0,0)\ t\ n) > length\ (scout\ m\ (0,0)\ t\ n'))$$

Índice

Referências

[1] B.W. Kernighan and D.M. Richtie. *The C Programming Language*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1978.

[2] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.

[3] J.N. Oliveira. *Program Design by Calculation*, 2018. Draft of textbook in preparation. viii+297 pages. Informatics Department, University of Minho.

[4] SelfKey. What is a Merkle tree and how does it affect blockchain technology?, 2015. Blog: https://selfkey.org/what-is-a-merkle-tree-and-how-does-it-affect-blockchain-techno
Last read: 7 de Fevereiro de 2022.