Description：

我们设 $f[i]$ 表示 i 个点的环，每个点染 k 种颜色之一，旋转同构算一种方案的不同的染色方案数，求：

$$\sum_{i=1}^{n} i \times f[i]$$

Solution：

对于 20% 的数据：$1 \leqslant n \leqslant 5, 1 \leqslant k \leqslant 5$

直接爆搜即可。

对于 20% 的数据：$1 \leqslant n \leqslant 50000, 1 \leqslant k \leqslant 10^9$

~~这部分是给根号算法留的，但是由于出题人没有仔细想怎么做，所以就当送分好了。~~

对于 20% 的数据：$1 \leqslant n \leqslant 10^6, 1 \leqslant k \leqslant 10^9$

根据 pólya 定理我们可以知道：

$$f[n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k^{\gcd(i,n)}$$

经过简单的推导可以得到：

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} i \times f[i] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{d=1}^{i} k^{\gcd(d,i)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} k^d \sum_{x=1}^{i} [\gcd(x,i) = d] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} k^d \sum_{x=1}^{\frac{i}{d}} [\gcd(x, \frac{i}{d}) = 1] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} k^d \varphi(\frac{i}{d}) = \sum_{d=1}^{n} k^d \sum_{d|i}^{n} \varphi(\frac{i}{d}) \\
&= \sum_{d=1}^{n} k^d \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \varphi(i)
\end{aligned}$$

根据这个式子就可以线性筛 φ 并预处理前缀和计算，时间复杂度 $O(n)$ 。

对于 20% 的数据：$1 \leqslant n \leqslant 10^9, 1 \leqslant k \leqslant 10^9$

$$\sum_{i=1}^{n} i \times \frac{1}{i} \sum_{d=1}^{i} k^{\gcd(d,i)} = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k^{\gcd(i,j)} + \sum_{i=1}^{n} k^i)$$

后面是一个等比数列求和，于是我们只要解决括号内的前半部分即可。

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k^{\gcd(i,j)} = \sum_{d=1}^{n} k^d \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [\gcd(i,j) = d]$$

后面那部分可以莫比乌斯反演，得到：

$$\sum_{d=1}^{n} k^d \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{d'|i,d'|j} \mu(d') = \sum_{d=1}^{n} k^d \sum_{d'=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \mu(d') \left\lfloor \frac{n}{dd'} \right\rfloor^2$$

设：

$$g[n] = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$$

那么：

$$\sum_{d=1}^{n} k^d g[\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor]$$

如果我们用除法分块求g的话，会发现我们要用到的μ的前缀和的位置一定可以表示成$\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$的形式，这些位置的前缀和可以用杜教筛$O(n^{\frac{2}{3}})$一次性预处理出来，那么$g[n]$可以$O(\sqrt{n})$计算，外面再套一个除法分块复杂度是$O(n^{\frac{3}{4}})$的，这个复杂度的证明可以看：这里

对于 20% 的数据：$1 \leqslant n \leqslant 10^{11}, 1 \leqslant k \leqslant 10^9$

考虑 $1 \leqslant n \leqslant 10^6$ 那部分的做法，求 φ 的前缀和可以杜教筛，然后求和用除法分块优化即可。

时间复杂度 $O(n^{\frac{2}{3}})$ 。