目　　录

第二部分　各种微分方程

第一部分　一般解法[1]

第一章　线性与拟线性微分方程

§1. 引　言

1.1. 一般概念. 记号及术语. n 个自变量的一个未知函数 $z=z(x_1,\cdots,x_n)$ 的一阶偏微分方程，其一般(未解出导数)形式是

$$F\left(x_1,\cdots,x_n,z,\frac{\partial z}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0,\qquad(1)$$

其中 F 是 $2n+1$ 个变量的已知函数. 任一个函数 $z=\psi(x_1,\cdots,x_n)$，如果它在区域 $\mathfrak{G}(x_1,\cdots,x_n)$ 内具有连续的一阶偏导数[2]，而且它同它的导数能满足方程 (1)，则称它为微分方程 (1) 的解，也称它为方程 (1) 的积分或积分曲面.

所谓一阶偏微分方程的标准(或典则)形式，就是从方程 (1) 对其中一个偏导数解出的显式：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(x,y_1,\cdots,y_n,z,\frac{\partial z}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial z}{\partial y_n}\right);\qquad(2)$$

---

1) [第一部分中所讨论的问题可在下列作者的著作中找到本手册参考文献中采用的缩写列于书末. Гюнтер; Степанов; Трикоми; Петровский; Курант; Смирнов; Эльсгольц; Рашевский. ——俄译本编者注]

2) 对于显式的常微分方程，从方程右端的连续性，立刻可以看出这方程的每一个解的导数的连续性；然而对于偏微分方程，这是不可能的. 所以偏微分方程 (1) 或 (2) 的解的偏导数的连续性，是作为解的定义中一个特殊规定而提出的.

这里 f 是 $2n+2$ 个变量的已知函数[1]；自变量现在用 $x, y_1, \cdots, y_n$ 来表示，$z=z(x, y_1, \cdots, y_n)$ 是未知函数.

我们将时常采用缩写记号：

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad p_\nu=\frac{\partial z}{\partial x_\nu},\quad q_\nu=\frac{\partial z}{\partial y_\nu},\ \nu=1, \cdots, n; \tag{3}$$

于是微分方程 (1) 和 (2) 分别呈下面形状

$$F(x_1, \cdots, x_n, z, p_1, \cdots, p_n)=0, \tag{1'}$$

与

$$p=f(x, y_1, \cdots, y_n, z, q_1, \cdots, q_n). \tag{2'}$$

这两个方程可简写成向量形式

$$F(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p})=0 \tag{1''}$$

与

$$p=f(x, \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q}). \tag{2''}$$

其中 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{q}$ 分别表示下列向量：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=(x_1, \cdots, x_n),\quad \boldsymbol{p}=(p_1, \cdots, p_n),\\ \boldsymbol{y}&=(y_1, \cdots, y_n),\quad \boldsymbol{q}=(q_1, \cdots, q_n).\end{aligned} \tag{3'}$$

一个偏微分方程，如果关于未知函数 z 及其偏导数是线性的，则称它是**线性的**；如果关于偏导数是线性的(这里不要求关于 z 是线性的)，则称它是**拟线性的**. 拟线性方程的一般形式是

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\boldsymbol{r}, z)p_\nu=g(\boldsymbol{r}, z), \tag{4}$$

---

1) 这里把方程中的自变量分为 x 同 $y_1, \cdots, y_n$ 两类；而把解的偏导数分为 p 同 $q_1, \cdots, q_n$ 两类，其用意是为了区别在方程中已解出的那个偏导数 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ 同尚未解出的那些偏导数 $q_\nu=\frac{\partial z}{\partial y_\nu}$, $\nu=1, 2, \cdots, n$. ——译者注

线性方程的一般形式是

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\mathbf{r})p_\nu + f_0(\mathbf{r})z = f(\mathbf{r}). \tag{5}$$

这里已采用了缩写记号(3)和(3′). 在后一式中，如果还有 $f_0 = f = 0$，则该微分方程称为齐次的.

1.2. 解的性态预述. 每个一阶偏微分方程都同某个常微分方程组（所谓这偏微分方程的特征方程组）紧密地联系着. 偏微分方程的解是由特征方程组的解(叫做特征线)构造而成的.

当偏微分方程(1)的解的初始曲线

$$x_1 = x_1(t), \cdots, x_n = x_n(t), z = z(t) \tag{6}$$

已给定时，如果这曲线处处不与特征线相切[1]，而且又设在这曲线上给有各一阶偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

的值，则一般说，可以确定这偏微分方程的唯一的解. 对于线性(或拟线性)方程，只须给出初始曲线(6)，就可以定出唯一的解.

这个基本命题的严格叙述将在以后给出，其中还给出一系列的补充假设. 所考虑的区域的形状对于解的性态(尤其是解的唯一性)有重大的影响(参看 §2.6(e)). 因此在以后的一般定理中，必须同时指出所考虑的区域. 在那些定理中通常不能考虑最一般的区域，而只考虑其形状尽可能简单的区域(例如整个空间，平行带形或长方形). 对于一些特殊解法，我们将不再给出所考虑的区域，因为应用这些方法于具体例子时，比一般情况将得到更精确的区域.

---

1) "处处不与特征线相切"这句话，德文本原作"初始曲线处处横截(*quer*)于特征线". ——校者注

§ 2. 两个自变量的齐次线性方程：$f(x, y)p+g(x, y)q=0$[1]

2.1. 几何解释. 一阶偏微分方程的最简单的类型是两个自变量的一个未知函数 $z=z(x, y)$ 的齐次线性微分方程

$$f(x, y)\frac{\partial z}{\partial x}+g(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{1}$$

即

$$f(x, y)p+g(x, y)q=0. \tag{1'}$$

这里已采用缩写

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

一个微分方程总是在某个区域 $\mathfrak{G}(x, y)$ 上来考察的[2]. 在这区域上系数 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 有定义且连续[3].

当我们想象五个数 x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 被 x, y, z 空间的一个平面

$$z-z_0=p_0(x-x_0)+q_0(y-y_0)$$

所形象化时，于是，这五个数可以看作是面元素. 这平面所经过的点 (x_0, y_0, z_0) 称为面元素的承载点，数 p_0, q_0 称为面元素的方向系数. 具有公共承载点 (x_0, y_0, z_0) 的面元素显然构成一族经过点 (x_0, y_0, z_0) 的平面（当然要除去垂直于坐标平面 XOY 的平面的例外情况）. 如果 $z=\phi(x, y)$ 是连续可微曲面，则面元素

$$x, y, \phi(x, y), \phi_x(x, y), \phi_y(x, y)$$

---

1) 叙述按照 Kamke 的书DGlen, p. 296—321.

2) 方程的解的形态同所考虑的区域的形状有重大的关系. 参看 §2.6(d), (e).

3) 以后还要时常补充一些其它假设. 这里所述的关于系数的连续性的假定，对于方程的可解性是不充分的. 参看 O. Perron, *Math. Zeitschrift* 27 (1928), p. 549—550.

对于 x 和 y 的允许值确定了与该曲面相切的切平面[1]（图 1）.

借助于偏微分方程 (1) 或 (1′)，每一点 (x_0, y_0, z_0) 对应着一组面元素 x_0, y_0, z_0, p, q，其中的方向数 p 与 q 必须满足方程

$$f(x_0, y_0)p + g(x_0, y_0)q = 0.$$

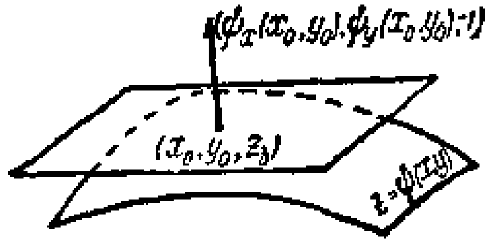

图 1

于是我们得到[2] 通过水平直线

$$x - x_0 = f(x_0, y_0)t, \quad y - y_0 = g(x_0, y_0)t, \quad z = z_0$$

的平面束(除去与 XOY 平面正交的平面)，其中 t 是参数(图 2). 这样一来，利用微分方程 (1)，每一点都对应着一个平面束[3]. 从几何观点来看，方程(1)的积分就是任一连续可微的曲面 $z = \phi(x, y)$，在它的每一点 (x_0, y_0, z_0) 处，在与该点对应的平面束之中有一个平面作为该曲面的切平面.

2.2. 关于积分和等高线的注记.

(a) 任一微分方程 (1) 显然有平凡解 $z =$ 常数. 下面我们只对非平凡解感兴趣.

(b) 如果 $z = \phi(x, y)$ 是方程(1)在区域$\mathfrak{G}$内的积分，而且 $A < \phi(x, y) < B$[4]，则对任一在区间 $A < u < B$ 上的连

1) [注意，如果曲面用方程 $z = \phi(x, y)$ 给定，则在某点 $(x_0, y_0, z_0 = \phi(x_0, y_0))$ 处与它相切的切平面方程具有下列形式:
$$\phi_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \phi_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$
亦即 $(\phi_x(x_0, y_0), \phi_y(x_0, y_0), -1)$ 是已给曲面在所考察的点处的法向量. ——俄译本编者注]

2) 假设 $|f(x_0, y_0)| + |g(x_0, y_0)| > 0$，即所考察的是正则点 (参看 §2.8 (e)).

3) [这些束及其轴分别称为蒙日束及蒙日轴; 空间中的一点连同经过该点的蒙日轴的方向一起称为特征线性元素. ——俄译本编者注]

4) 不排除 $A = -\infty$, $B = +\infty$ 时的情况

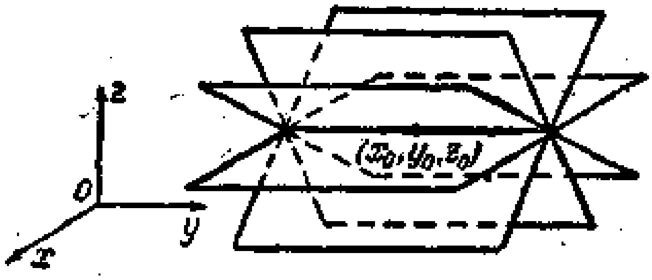

图 2

续可微函数 $\Omega(u)$，复合函数 $\chi(x, y) = \Omega(\phi(x, y))$ 也是方程 (1) 的积分 (因为 $f\chi_x + g\chi_y = \Omega'(\phi)(f\phi_x + g\phi_y) = 0$).

类似地，我们推得：如果 $\phi_1(x, y), \cdots, \phi_m(x, y)$ 都是方程 (1) 在 $\mathfrak{G}$ 内的积分，而 $\Omega(u_1, \cdots, u_m)$ 是某个任意函数，它对于 $\phi_\nu(\nu = 1, \cdots, m)$ 的值有定义而且有一阶连续偏导数，则复合函数

$$\chi(x, y) = \Omega(\phi_1(x, y), \cdots, \phi_m(x, y))$$

也是方程 (1) 的积分. 特别地，由方程 (1) 的积分乘以常数所得到的函数以及这些积分的线性组合[1] 仍是所考察的方程的积分.

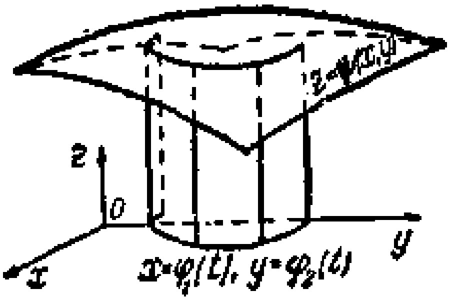

图 3

(c) 一阶偏微分方程的特点在于它们的解被某些常微分方程组的积分曲线所完全确定. 对于偏微分方程 (1) 可用下面方法得到这一结果.

任一个解 $z = \phi(x, y)$ 可用 x, y, z 空间中在 XOY 平面上的一个单叶曲面[2]来表示. 这

1) 带有常数 $A_1, \cdots, A_m$ 的形如 $A_1\phi_1 + \cdots + A_m\phi_m$ 的表达式称为函数 $\phi_1, \cdots, \phi_m$ 的线性组合.

2) "单叶"的德文是 Schlicht, 也可译为"单值". 所谓"在 XOY 平面上的单叶曲面"是指这样的曲面: 任一条垂直于 XOY 平面的直线同这曲面至多相交于一点. ——校者注

曲面在平面 XOY 上具有相同高度 c 的所有点，亦即这个函数 $\phi(x, y)$ 等于固定值 c 的所有的点，构成某一条称为**等高线**的曲线(图 3)。等高线的方程为

$$x = \varphi_1(t), \ y = \varphi_2(t), \ z = c,$$

其中 t 是参数，函数 φ_1 和 φ_2 连续可微，且使

$$\phi(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = c.$$

对 t 微分这个关系式，得

$$\phi_x(\varphi_1, \varphi_2)\varphi_1' + \phi_y(\varphi_1, \varphi_2)\varphi_2' = 0.$$

因为函数 ϕ 满足方程(1)，所以有

$$f(\varphi_1, \varphi_2)\phi_x(\varphi_1, \varphi_2) + g(\varphi_1, \varphi_2)\phi_y(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

如果处处有 $|\phi_x| + |\phi_y| > 0$，则从上面两个关系式推得

$$\varphi_1'(t)g(\varphi_1, \varphi_2) - \varphi_2'(t)f(\varphi_1, \varphi_2) = 0. \qquad (i)$$

作自变量 t 的适当变换后，可以从上式(i)推得[1]微分方程组

---

1) 在 $\varphi_1'(t)$ 与 $\varphi_2'(t)$ 不能同时等于零的假设下，我们来证这个断语。因假设 f 与 g 不能同时等于零，不妨设

$$f(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)) \neq 0.$$

于是 $\varphi_1'(t_0) \neq 0$. 这是因为，如果 $\varphi_1'(t_0) = 0$，则从 $\varphi_1' g - \varphi_2' f = 0$ 将推得 $\varphi_2'(t_0) = 0$. 与假设矛盾。

由于连续性，故可以假设在 t_0 的某一个邻域 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 上都有

$$\frac{\varphi_1'(t)}{f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))} \neq 0,$$

变量 t 变到变量 τ 的变换式由下式给出

$$\tau = \tau(t) = \int_{t_1}^{t} \frac{\varphi_1'(t)dt}{f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))}.$$

由于 $\tau'(t) \neq 0$，这个变换显然是一对一的变换。从

$$\varphi_1'(t) = \frac{d\varphi_1}{d\tau}\tau'(t) = \frac{d\varphi_1}{d\tau} \cdot \frac{\varphi_1'(t)}{f(\varphi_1, \varphi_2)}$$

约去 $\varphi_1'(t)$，则证得 $\frac{d\varphi_1}{d\tau} = f(\varphi_1, \varphi_2)$. 再把

$$\varphi_2'(t) = \frac{d\varphi_2}{d\tau}\tau'(t) = \frac{d\varphi_2}{d\tau} \cdot \frac{\varphi_1'(t)}{f(\varphi_1, \varphi_2)}$$

代入 $\varphi_1' g - \varphi_2' f = 0$ 中，化简后，便得 $\frac{d\varphi_2}{d\tau} = g(\varphi_1, \varphi_2)$. ——校者注

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau}=f(\varphi_1,\varphi_2),\quad \frac{d\varphi_2}{d\tau}=g(\varphi_1,\varphi_2). \tag{ii}$$

于是等高线在 XOY 平面上的投影就由这两个不依赖于 ϕ 的微分方程给出. 因此，对于所有的积分曲面来说，等高线的投影都是相同的.

根据前面所说的，现在可以提出寻求积分曲面的下述方法：求出常微分方程组

$$x'(t)=f(x,y),\quad y'(t)=g(x,y)$$

的积分曲线(它们就是待求曲面的等高线的投影)，并把这些曲线的每一条都升高到适当的高度，使得它们组成一个连续可微曲面 $z=\phi(x,y)$. 这个原则在构造积分曲面时是最重要的，亦即可用这种方式实际构造(参看 §2.3，§2.4，及 §2.5)微分方程 (1) 的积分曲面. 对上述方法作必要的推广，我们同时还可得到某些更一般的方程的解法.

2.3. 特征线与积分曲面. 沿着 §2.2(c) 中的思想线索，可得下述的概念与定理. 在 §2.1 的关于函数 f,g 的连续性假定下，则至少有这样一条"曲线"

$$x=\varphi_1(t),\quad y=\varphi_2(t) \tag{2}$$

它通过区域 $\mathfrak{G}$ 的任一点 (ξ,η)；它是常微分方程组

$$x'(t)=f(x,y),\quad y'(t)=g(x,y) \tag{3}$$

的积分曲线.[1]

这样的曲线 (2)，同对应于曲线 (2) 而且带有任意常数 c 的一条空间曲线

$$x=\varphi_1(t),\quad y=\varphi_2(t),\quad z=c \tag{4}$$

都称为偏微分方程 (1) 的**特征线**.[2),3)]

1) 这"曲线"可以只包含一点，即(2)式中的 φ_1，φ_2 都可以恒等于常数.

2) 有时为了区别曲线 (2) 同曲线 (4)，我们把平面曲线 (2) 称为**特征底线**(德文原文是 Charakteristische Grundkurve).

3) 特征底线 (2) 是特征线 (4) 在 x，y 平面上的正投影.——校者注

常微分方程组(3)称为偏微分方程(1)的**特征方程组**(又名**拉格朗日方程组**).

下面的论断都是正确的:

(a) 方程(1)的每一积分 $z=\phi(x,y)$ 沿每一特征底线(2)等于常数,亦即 $\phi(\varphi_1(t),\varphi_2(t))=$ 常数[1]. 这个常数可以随着所选取的特征底线而改变.

(b) 每一特征线(4),如果它和方程(1)的积分曲面有一个公共点,则它就整段地属于这曲面. 因此,每一积分曲面都由特征线所构成.

(c) 如果方程(1)的两个积分曲面有一个公共点,则这两个曲面就有通过该点的公共的整段特征线.

下面的定理对于求方程的解是很重要的.

(d) 一个函数 $\phi(x,y)$,如果

　　(α) 它在 $\mathfrak{G}$ 中连续可微;

　　(β) 它沿每一特征底线(2)等于常数,

则它显然是方程(1)的一个积分[2].

由(a)和(d)推出

(e) 方程(1)的积分就是那些连续可微函数 $z=\phi(x,y)$,

1) 因为 φ_1,φ_2 满足方程组(3),因而有

$$\frac{d}{dt}\phi(\varphi_1(t),\varphi_2(t))=\phi_x\varphi_1'+\phi_y\varphi_2'$$
$$=\phi_x(\varphi_1,\varphi_2)f(\varphi_1,\varphi_2)+\phi_y(\varphi_1,\varphi_2)g(\varphi_1,\varphi_2)\equiv 0$$

最末一个等号是由于 $z=\phi$ 为方程(1)的解. 故

$$\phi(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\equiv\text{常数}.$$

2) 定理(d)的证明. 设 x_0,y_0 是区域 $\mathfrak{G}$ 的任一点,于是,有一条特征底线当 $t=t_0$ 时通过该点 x_0,y_0. 因为,据假设 $\phi(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ 沿着这曲线等于常数,对 t 求导,而且考虑到(3)式,则得

$$0=\phi_x\varphi_1'+\phi_y\varphi_2'=\phi_x(\varphi_1,\varphi_2)f(\varphi_1,\varphi_2)+\phi_y(\varphi_1,\varphi_2)g(\varphi_1,\varphi_2)$$

所以,对于 $t=t_0$ 有

$$0=\phi_x(x_0,y_0)f(x_0,y_0)+\phi_y(x_0,y_0)g(x_0,y_0).$$

这就证明了 $\phi(x,y)$ 在任一点 (x_0,y_0) 处满足方程(1).

它们在自己的定义域内沿每一特征底线取常数值.

2.4. 利用特征线求方程的解. 如果已知特征底线，则在一系列的情况下，很容易由命题 § 2.3(e) 推得积分曲面的全貌. 我们将用几个例子来说明这一点.

(a) $ap+bq=0$.

由特征方程 $x'=a, y'=b$ 得

$$x=at+A,\quad y=bt+B,$$

其中 A 和 B 是任意常数. 这样，特征底线和特征线构成平行直线族. 因此，以这些平行直线作为母线的所有可能的光滑柱面就是所给方程的积分曲面(图 4).

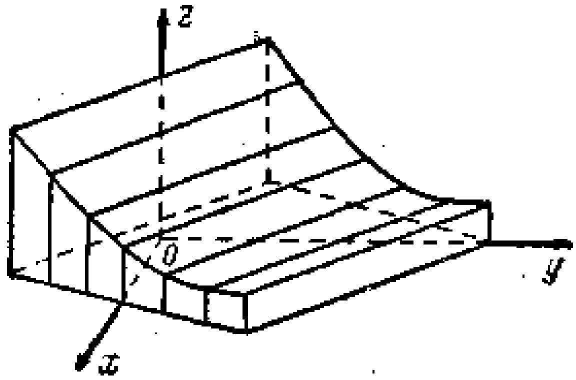

图 4

(b) $xp+yq=0$.

由特征方程 $x'=x, y'=y$ 得

$$x=Ae^t,\quad y=Be^t.$$

此处 A 和 B 是任意常数. 因此特征底线是在 XOY 平面上自坐标原点发出的一族射线. 那些能由这族射线沿 z 轴作平行移动而构成的连续可微曲面就是积分曲面(图 5). 平面 $z=$ 常数，是唯一的这样的积分曲面，它存在于包含坐标原点 $x=0, y=0$ 的区域 $\mathfrak{G}(x, y)$ 中. 在 XOY 平面上不包含坐标原点的任一区域内还有另外一些积分曲面(劈锥曲面，图 5).

(c) $yp - xq = 0$.

由特征方程 $x' = y, y' = -x$ 得

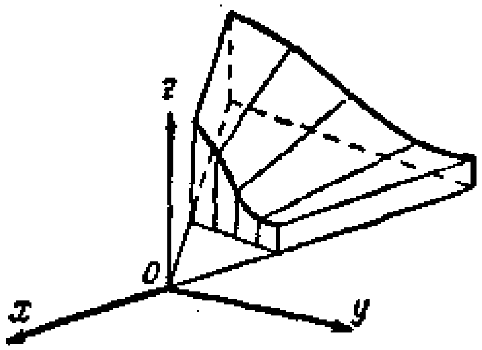

图 5

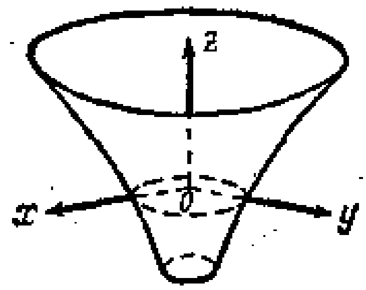

图 6

$$xx' + yy' = 0$$

或

$$x^2 + y^2 = \text{常数},$$

亦即所有的特征底线是以坐标原点为中心的同心圆. 积分曲面是那样一些可微曲面，它们是从这些圆沿 z 轴作平行移动而构成的，也就是以 z 轴为迴转轴且在任一点处都没有垂直切平面的所有光滑迴转曲面[1](图 6).

2.5. 借助于特征方程的组合求解方程. 用两个例子来说明这个方法.

(a) $ayp + bxq = 0$.

对于特征方程组

$$x' = ay, \quad y' = bx$$

的每一个解 $x = x(t), y = y(t)$，关系式

$$bxx' - ayy' = 0 \quad 即 \quad \frac{d}{dt}(bx^2 - ay^2) = 0$$

1) [在这个例子中，坐标原点本身也是特征方程组的积分"曲线". 象在前一例子中那样，这里所考察的方程在包含坐标原点的区域 $\mathfrak{G}(x, y)$ 中没有非平凡光滑解. 后两个例子表明，解是实质上依赖于在其中求解的区域的形状. 进一步可参看 §2.6(d), §2.6(e) 及§2.8(e). —— 俄译本编者注]

成立. 它表明函数 $\phi(x, y) = bx^2 - ay^2$ 沿每一特征底线等于常数. 而且这个函数连续可微. 由 § 2.3(d) 知，曲面 $z = bx^2 - ay^2$ 就是积分曲面.

(b) $axp + byq = 0$.

特征方程

$$x' = ax, \quad y' = by$$

表明，对于 $x \neq 0, y \neq 0$，亦即对于 XOY 平面上四个象限中的任一个，关系式

$$b\frac{x'}{x} - a\frac{y'}{y} = 0 \text{ 即 } \frac{d}{dt}\ln(|x|^b|y|^{-a}) = 0$$

成立. 这样，函数 $\phi(x, y) = \ln(|x|^b|y|^{-a})$ 沿任一特征底线取常数值，而且这个函数连续可微. 因此，由 § 2.3(d)，它就是所给方程的积分. 根据 § 2.2(b)，由这个积分可得到更简单的积分：设 $\Omega(u) = e^u$，我们求得 $\chi(x, y) = |x|^b|y|^{-a}$.

(c) 从前面的例子可看出，这个解法是：把特征方程进行适当的组合，如果我们能从组合所得的方程用积分法求出一个不依赖于 t 的原函数，则这原函数就是方程 (1) 的一个积分. 这方法在许多情况下是有用的，然而它不包含解的一般的存在定理的证明. 此外，从一个已知的积分求出所有的积分的问题仍没有解决. 关于这些问题，参看 § 2.8.

(d) 如果需要求出方程 (1) 的通过给定空间曲线的积分曲面(柯西问题)，则可利用注记 § 2.2(b).

例如，若在例 (a) 中，需要求出通过抛物线 $z=4x^2$, $y=x$ 的积分曲面，则可以寻求这样的连续可微函数 $\Omega(u)$，使得等式

$$z = \Omega(bx^2 - ay^2)$$

当 $z = 4x^2, y = x$ 时成立. 这个代换给出

$$4x^2 = \Omega((b-a)x^2) \text{ 即 } \Omega(u) = \frac{4u}{b-a}.$$

于是所求积分[1]可表为

$$z = \frac{4}{b-a}(bx^2 - ay^2).$$

如果在例 (*b*) 中需要求出通过同一抛物线的积分曲面，则函数 $\Omega(u)$ 可以这样选取，使得 (设 $x>0, y>0$) 等式

$$z = \Omega(x^b y^{-a})$$

当 $z=4x^2$, $y=x$ 时成立. 将这些值代入上述等式，即得 $4x^2=\Omega(u)$, 此处 $u=x^{b-a}$. 由此得到

$$\Omega(u) = 4u^{\frac{2}{b-a}}.$$

因此，所求积分当 $a \neq b$ 时由公式

$$z = 4x^{\frac{2b}{b-a}} y^{\frac{2a}{a-b}}$$

给出.

2.6. 特殊情况：$p + f(x, y)q = 0$. 如果在所考察的整个区域 $\mathfrak{G}$ 中，系数 $f \neq 0$，则将微分方程 (1) 除以 f，并以 f 记 $\frac{g}{f}$，便得特殊形状的方程

$$p + f(x, y)q = 0. \tag{5}$$

在这种情况下，特征方程组 (3) 中的第一个方程具有形状 $x'(t) = 1$; 可以取 $x = t$ 作为它的解. 于是 (3) 的第二个特征方程可以写为

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{6}$$

直到本段结束，我们都假定函数 $f(x, y)$ 在区域 $\mathfrak{G}(x, y)$ 中有连续偏导数 f_y.

---

1) [必须假定 $a \neq b$, 否则本问题不可解. ——俄译本编者注] 当 $a=b$ 时，特征方程组是 $x'=a$, $y'=b=a$, 故 $x=y$ 是特征底线. 据定理，积分 $z=\Omega$ 沿着特征底线的值应该恒等于常数，所以，当 $y=x$ 时，$z=4x^2$ 是不可能的. ——校者注

(a) 基本存在定理. 设 $\varphi(x, \xi, \eta)$ 是微分方程 (6) 的特征函数[1],即 $y=\varphi(x, \xi, \eta)$ 是方程 (6) 的经过点 (ξ, η) 的积分曲线，则对当 x_0 固定时所有使函数 $\varphi(x_0, \xi, \eta)$ 存在的点 (ξ, η)，关系式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+f(\xi, \eta)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=0$$

成立，即函数 $\psi(x, y)=\varphi(x_0, x, y)$ 当 x_0 固定时是方程 (5) 在函数 $\varphi(x_0, x, y)$ 存在的区域中的积分，而且 $\psi_y>0$.

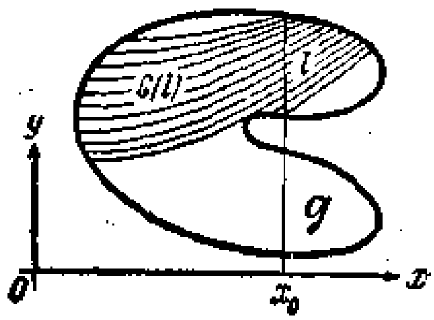

图 7

设 l 是在区域 $\mathfrak{G}$ 中的直线 $x=x_0$ 的一段，用 $G(l)\subset\mathfrak{G}$ 记函数 $\varphi(x_0, x, y)$ 的存在区域. 显然，区域 $G(l)$ 是 $\mathfrak{G}$ 的这样的子域，它被方程 (6) 的经过 l 的积分曲线所遮盖(图 7). 区域 $G(l)$ 称为偏微分方程(5)的(或方程(6)的)特征场.

(b) 柯西问题. 设已给定一条曲线[2]

$$x=x_0,\quad y=\eta,\quad z=\omega(\eta)\quad(\alpha<\eta<\beta), \tag{7}$$

它在 XOY 平面上的投影为 l. 微分方程(5)的柯西问题(带有初始数据的问题)就是求通过已给初始曲线 (7) 的积分曲面.

如果在特征场 $G(l)$ 中，不等式 $A<\varphi<B$ 成立，而且函数 $\omega(u)$ 当 $A<u<B$ 时连续可微，则包含初始曲线 (7)

---

1) 关于特征函数，参看张鸿林译的 Kamke，常微分方程手册(科学出版社，1977.)，§5.4，46—47 页. 以后将把这本手册简称为"手册 I". ——译者注

2) [这是平行于 YOZ 平面的平面 $x=x_0$ 上的平面曲线. 对于这样的曲线，德文原文中使用术语 Normalkurve (正则曲线). ——俄译本编者注]

的积分曲面存在，而且只有一个这样的曲面[1]，它就是

$$\phi(x, y) = \omega(\varphi(x_0, x, y)) \qquad (*)$$

可以从数学分析推得上述的结论. 据§2.2(b)，$\varphi(x_0, x, y)$是在特征场$G(l)$的一个积分，而且因$\varphi(x_0, x_0, y) = y$，所以，(*)式的$\phi(x, y)$不但是一个积分，而且满足条件

$$\phi(x_0, y) = \omega(y).$$

也可以从几何求出这个积分曲面：从初始曲线(7)的各点(x_0, η)引出特征线

$$y = \varphi(x, x_0, \eta), \quad z = \omega(\eta),$$

再消去η. 因为从上式中第一式$y = \varphi(x, x_0, \eta)$立刻得到$\eta = \varphi(x_0, x, y)$[2]；把所得的$\eta = \varphi(x_0, x, y)$代入$z = \omega(\eta)$后，就得到所求的积分

$$z = \omega(\varphi(x_0, x, y)).$$

例. $p + 2xq = 0$.

特征方程(6)是$\dfrac{dy}{dx} = 2x$. 求出经过(x_0, η)点的解$y = x^2 - x_0^2 + \eta$. 把(x_0, η)同(x, y)互换[2]，则得$\eta = x_0^2 - x^2 + y$. 故得所求的积分

$$z = \omega(\eta) = \omega(x_0^2 - x^2 + y)$$

如果在特征场$G(l)$内还有任意一个积分$\phi(x, y)$，$\phi_y > 0$，则所有的积分都可以由公式$\chi(x, y) = \omega(\phi(x, y))$得出，

---

1) 此处只考虑这样的积分曲面，假设它的定义域同方程(5)的特征场重合，如果区域$\mathfrak{G}$与$G(l)$象图7中那样，虽然有时也可以把积分曲面延拓到特征域$G(l)$的界外，然而，通过曲线(7)的积分曲面已经不能唯一地确定.

2) 这里用到常微分方程的特征函数对于两个点(ξ, η)与(x, y)的可互易性，即两个关系式

$$y = \varphi(x, \xi, \eta), \quad \xi = \varphi(\eta, x, y)$$

中，如果其中有一个成立，则其他一个也一定成立. 因为特征函数$y = \varphi(x, \xi, \eta)$实际上是表示一条积分曲线的两个点$(x, y)$与$(\xi, \eta)$间的相互关系，所以它具有互易性是显然的. ——校者注

此处的 $\omega(u)$ 遍历对于 ϕ 值有定义的全部连续可微函数.

如果 $\mathfrak{G}$ 是一带形域[1]

$$a < x < b, \quad -\infty < y < +\infty,$$

并且函数 f 或 f_y 在 $\mathfrak{G}$ 中有界，则 $G(l)$ 和 $\mathfrak{G}$ 重合. 这时，可以规定积分在任一直线 $x = x_0(a < x_0 < b)$ 上的值，从而它将被单值地确定，且在整个区域 $\mathfrak{G}$ 内存在.

(c) 广义柯西问题. 特殊形式的初始曲线 (7) 可代以任意的空间曲线

$$\xi = u(s), \quad \eta = v(s), \quad z = w(s),$$

作为初始曲线，其中 s 是参数，函数 u, v, w 连续可微，且满足不等式[2]

$$|u'| + |v'| > 0, \quad v' \neq f(u, v)u'. \tag{8}$$

为求解这个问题(就是求通过这空间曲线的积分曲面)，可仿照 (b) 中所述的几何方法：在曲线 $x = u(s)$, $y = v(s)$ 的充分小邻域内，积分能用参数式写成

$$y = \varphi(x, u(s), v(s)), \ z = w(s).$$

例. 对于 (b) 的例中的微分方程，设已给初始曲线

$$\xi = s, \quad \eta = 2s, \quad z = w(s).$$

(8) 中的第一个不等式对于所有的 s 都成立；第二个不等式对于 $s \neq 1$ 时成立. 因为 $\varphi(x, \xi, \eta) = x^2 - \xi^2 + \eta$，于是积分的参数写法给出

$$y = x^2 - s^2 + 2s, \quad z = w(s).$$

由第一个方程，得

$$s = 1 \pm \sqrt{x^2 - y + 1}$$

上式当 $s > 1$ 时，即当 $x > 1$ 时取正号；当 $s < 1$，即 $x < 1$ 时取负号. 最后，对于 $y < x^2 + 1$ 有

$$z = w(1 \pm \sqrt{x^2 - y + 1}).$$

---

1) 允许 $a = -\infty$, $b = +\infty$. 即整个 XOY 平面或半平面可以作为 $\mathfrak{G}$.

2) 这些条件的意义是，所给的曲线在 XOY 平面上的投影 $x = u(s)$, $y = v(s)$ 为一条没有奇点且到处不与方程 (5) 的特征底线相切的曲线.

(d) 关于任意区域内非平凡积分的存在. 在整个区域 $\mathfrak{G}$ 内,微分方程(5)可能没有非平凡积分(参看 § 2.2(a)),甚至当函数 $f(x, y)$ 在这区域内有对于 x, y 的任意高阶的导数,而区域本身是单连通时,也是这样[1]. 然而下列诸命题成立:

(d_1) 如果区域 $\mathfrak{G}$ 单连通且有界,函数 $f(x, y)$ 和 $f_y(x,y)$ 当接近区域 $\mathfrak{G}$ 的边界时连续,则微分方程(5)在整个区域 $\mathfrak{G}$ 内有积分 $\phi(x, y)$,并且在这区域内处处有 $\phi_y > 0$[2].

(d_2) 设函数 $f(x, y)$ 在区域 $\mathfrak{G}$ (在图 8 中,这区域用实线围着)内有界,a 和 b 分别是点 $(x, y) \in \mathfrak{G}$ 的横坐标 x 的下确界和上确界(允许 $a = -\infty$, $b = +\infty$),则在属于带形域 $a < x < b$, $-\infty < y < +\infty$ 内部的区域 $\mathfrak{G}$ 的每一子域 $\mathfrak{g}$ 内(在图 8 上它用虚线围着),存在方程(5)的积分 $\phi(x, y)$,且在这子域内处处有 $\phi_y > 0$[3].

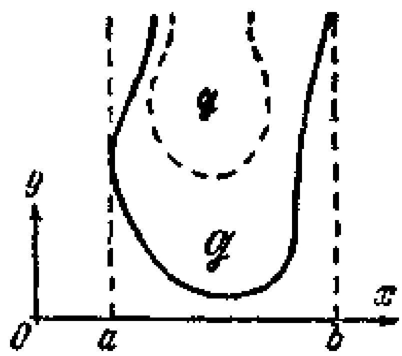

图 8

我们可以通过两种方法构造这样的解:我们把各个特征场组成 $\mathfrak{g}$,并在各个特征场中构造非平凡积分,把这些积分联合成为在整个 $\mathfrak{g}$ 内有意义的一个积分[3];或者,在整个 x, y 平面上这样扩大 f 的定义域,使得情况(b)成立(参看 § 3.6(c)).

(e) 关于积分曲面的可延拓性. 对于带有连续右端的常微分方程 $y' = f(x, y)$,其任一积分曲线在任意小区间内给定后,允许向两边延拓,一直到函数 $f(x, y)$ 的连续性区域的

1) 参看 T. Wazewski, *Mathematica*, 8 (1933), p. 103—116.

2) 参看 L. D. Rodabaugh, *Duke Math. Journal*, 6 (1940), p. 362—374; 那里还考察多连通域的情形.

3) 参看 E. Kamke, *Jahresbericht DWV*, 44 (1934), p. 156—161; 也可参看 §3.6(c) 及 E. Kamke, *Math. Annalen*, 99 (1928), p. 602—615.

边界. 对于偏微分方程，相应的问题可以这样提出：是否允许方程(5)的给定在区域 $\mathfrak{G}$ 的子域 $\mathfrak{g}$ 内的积分延拓到区域 $\mathfrak{G}$ 的更大的子域? 一般地说，关于这个问题的回答是否定的.

事实上，例如假设给定微分方程

$$p + xq = 0,$$

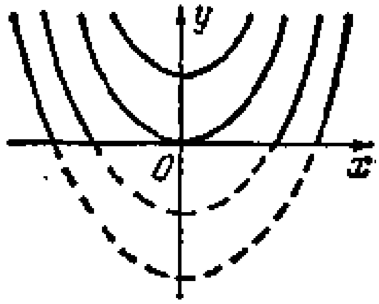

图 9

它的特征曲线是抛物线 $2y = x^2 + C$ (图 9). 如果起初在半平面 $y > 0$ 内来考察这个方程，则可以这样构造解案，使得它在位于抛物线 $2y = x^2$ 下面的每一抛物线的左半段和右半段取不同的值(在图 9 上，这些曲线段用实线描画，而这些抛物线在下半平面 $y < 0$ 中的部分用虚线描画). 用这种方式在 $y > 0$ 内所得到的积分不可以延拓为整个平面上的积分，因为在整个平面情况下，积分沿抛物线族 $2y = x^2 + C$ 中的每一条抛物线应该取常数值.

所以，如果要想寻找方程(5)在某一个区域内的解，倘使我们首先在一个小子域内成功地构造出一个解，将收效甚微(除非(这解)在这个区域内是解析函数)[1].

2.7. 函数相关性和雅可比行列式(附录). 在线性常微分方程中有函数线性相关概念(参看 Kamke 手册 I 第一部分 § 9.1). 在偏微分方程中，则要用一般的函数相关概念，以及在这更一般意义下的函数相关性判别准则[2),3)].

1) 从一个小子域的解出发，逐步延拓，一般地说，不可能达到求得整个区域的解的目的，因为各子域的解的值很可能不一样. 当然，对于解析的解又另当别论.——校者注

2) 参看菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》，第一卷第二分册，482—488 页.

3) 本书所讲的函数相关性定义以及判别准则是引用 Knopp 等人的论文中的结果；同一般的微积分教本中所阐述的不完全一样，参看 Kamke, DGlen, p.302—309.——校者注

对于两个连续可微函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$，如果存在这样一个连续可微函数 $\Omega(u)$，使得关系式

$$v(x, y)=\Omega(u(x, y))$$

成立，则称它们是函数相关的．更一般地[1]，对于这两个函数，恒等式

$$F(u(x, y), v(x, y))\equiv 0 \tag{9}$$

成立，其中假设 $F(u, v)$ 具有一阶连续偏导数，而且

$$|F_u|+|F_v|>0, \tag{10}$$

则从 (9) 式求导数，得

$$F_u u_x+F_v v_x=0, \quad F_u u_y+F_v v_y=0.$$

由 (10) 式，我们得到

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=0. \tag{11}$$

反之，如果对于函数 $u(x, y)$, $v(x, y)$，条件 (11) 成立，则它们是函数相关的．这里函数相关的概念应适当地加以定义．为了以后的应用，现在就讲多变量函数的函数相关性概念．

定义 1. 假设函数

$$u_1(x_1, \cdots, x_q), \cdots, u_p(x_1, \cdots, x_q) \tag{12}$$

在某一 q 个变量 $x_1, \cdots, x_q$ 的空间的有界闭域 $\mathfrak{B}(x_1, \cdots, x_q)$ 内有定义．如果存在具有下面诸性质的函数 $F(u_1, \cdots, u_p)$：

(α) F 在变量 $u_1, \cdots, u_p$ 的整个空间中有定义，并有一阶连续偏导数；

(β) F 在变量 $u_1, \cdots, u_p$ 的空间的任何子域内不恒等于零；

1) 当 $F(u, v)\equiv v-\Omega(u)$ 时，关系式 (9) 就变为前面的式子．

(γ) 在区域 $\mathfrak{B}$ 内有

$$\Phi(x_1,\cdots,x_q)=F(u_1(x_1,\cdots,x_q),\cdots,u_p(x_1,\cdots,x_q))\equiv 0.$$

则称函数组 (12) 在闭域 $\mathfrak{B}$ 内是函数相关的.

定义 2. 如果给定在开域 $\mathfrak{G}(x_1, \cdots, x_n)$ 内的函数组 (12) 按定义 1 的意义在开域 $\mathfrak{G}$ 的任一有界闭子域内相关，则称它们在这开域内是函数相关的.

定义 3. 如果 n 个自变量的 n 个函数

$$u_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, u_n(x_1, \cdots, x_n) \tag{13}$$

在某区域 $\mathfrak{G}(x_1, \cdots, x_n)$ 内具有一阶连续偏导数，则称行列式

$$J(x_1, \cdots, x_n)=\frac{\partial(u_1, \cdots, u_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial u_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}$$

为函数组 (13) 的雅可比式，雅可比行列式或函数行列式.

利用这些概念，我们有如下的关于判别函数组相关性的雅可比准则:

(a) 如果给定在开域 $\mathfrak{G}(x_1, \cdots, x_n)$ 内的函数组 (13) 具有一阶连续偏导数，则它们为函数相关的充要条件是

$$J(x_1, \cdots, x_n)\equiv 0^{1)}.$$

附注: 1) 函数组 (13) 是否相关，容易用上述准则来判定. 然而，实际上要确定出它们的相关方式，例如通过函数的显式表示，在一般情况下是相当困难的.

2) 一般地说，即使定理 (a) 成立，也不可放弃相关性的

---

1) 虽然这个准则早已为人所知，但首先明确叙述和严格证明它的是 K. Knopp 和 R. Schmidt, *Math. Zeitschrift*, **25** (1926), p. 373—381; 也可参看 A. Ostrowski, *Jahresbericht DMV*, **36** (1927), p. 129—134.

复杂定义，特别是不可以把定义 1 和定义 2 混为一谈[1]. 我们来考查 $n=2$ 时的一个例子：

$$\begin{cases} u(x, y) = \sin x, \\ v(x, y) = \sin x^2. \end{cases} \tag{*}$$

显然，它们的函数行列式恒等于零. 如果认为 u, v 在整个 x, y 平面上是函数相关，则在 x, y 平面上，定义 1 中的条件 (γ) 应被满足，即有一个连续函数 $F(u, v)$，能使

$$\Phi(x, y) = F(u(x, y), v(x, y)) \equiv 0$$

在整个 x, y 平面上成立. 于是 $F(u, v) \equiv 0$ 必须在正方形 $|u| \leqslant 1, |v| \leqslant 1$ 上成立. 这是因为(*)式所给定的点 (u, v) 在这正方形内构成一个处处稠密集；由于 $F(u, v)$ 的连续性，推得在这正方形内有 $F(u, v) \equiv 0$. 即 F 不能满足条件 (β).

校者注：将证如下断语：

由(*)式所给定的点集 (u, v) 在正方形 $|u|<1, |v|<1$ 内是一个处处稠密集.

为此，先证如下引理：对于任给的 $\delta>0$，令

$$a = x_0 + 2N\pi, \quad b = x_0 + 2N\pi + \frac{\delta}{2}, \tag{i}$$

此处 x_0 是一个给定的数 $\left(|x_0| < \frac{\pi}{2}\right)$.

将证：不管 δ 给得怎样小，总可以定出一个足够大的正整数 N，使函数 $v = \sin x^2$ 在区间 $a < x < b$ 取 -1 与 1 之间的任一个中间值.

这因为当 x 从 a 变到 b 时，$X = x^2$ 将从 a^2 变到 b^2，所以取足够大

---

1) 当定理 (a) 成立时，那么函数组按照本段的定义 2 的意义下函数相关，即它们在开域 $\mathfrak{G}$ 的任一个有界闭子域内函数相关. 但应注意：这定理没有断定这函数组一定在整个开域 $\mathfrak{G}$ 内函数相关，参看下例. 虽然定理 (a) 对这例中的函数组成立，然而它们在整个 x, y 平面(无界区域)仍然不是函数相关.——校者注

的正整数 N，能使 $X = x^2$ 的变化区间长度(参看(i)式)

$$b^2 - a^2 = \delta(x_0 + 2N\pi) + \frac{\delta^2}{4} > \delta\left(2N\pi - \frac{\pi}{2}\right) > 2\pi,$$

故 $v = \sin X = \sin x^2$ 能取 -1 与 1 之间的所有中间值.

现在来证这断语.为此,只需证,对于这正方形内任一定点 (u_0, v_0) 的任一个 δ 邻域 $|u - u_0| < \delta$, $|v - v_0| < \delta$ 内必存在着由(*)式所给定的点集 (u, v) 中一点 (u_1, v_1)。

为此,令

$$x_0 = \operatorname{Arcsin} u_0, \quad \left(|x_0| < \frac{\pi}{2}\right),$$

故

$$u_0 = \sin x_0. \tag{ii}$$

对于已给定的 δ，定出引理中的足够大的 N. 据引理，在区间 (a, b)，即在

$$a = x_0 + 2N\pi < x < x_0 + 2N\pi + \frac{\delta}{2} = b$$

中,必有一个 x_1，满足关系式

$$v_0 = \sin x_1^2. \tag{iii}$$

现在令

$$u_1 = \sin x_1, \quad v_1 = \sin x_1^2. \tag{iv}$$

将证：这点 (u_1, v_1) 必在前述的 δ 邻域内. 这因为，据(iii)，(iv)式有

$$|v_1 - v_0| = |\sin x_1^2 - \sin x_1^2| = 0 < \delta,$$

又因,据(iv)，(ii)，(i)式,有

$$\begin{aligned}|u_1 - u_0| &= |\sin x_1 - \sin x_0| \\ &= |\sin x_1 - \sin(x_0 + 2N\pi)| \leqslant |x_1 - a| < \frac{\delta}{2}.\end{aligned}$$

(证毕)

还可以举出另一个例子：

$$u = \sin(x + y),\ v = \sin(x + y)^2, -\infty < x, y < \infty \tag{**}$$

显然它们的 $J(x, y) \equiv 0$，然而它们在整个 x, y 平面上却不是函数相关

的。

为了证明，只需证明由(**)式所确定的(u, v)点集(**)是在这正方形内的处处稠密集. 我们可以把点集(*)看作这点集(**)的子集，这是因为在(**)式中，令$y=0$，就可以得(*)式。既然点集(*)是处处稠密集，显然点集(**)也是这样.

这个例子特别表明为什么要对闭集和开集分别给出不同的定义 1 和定义 2.

对于q个自变量的p个函数(12)，则有

(b) 当$p>q$时，如果函数组(12)在$\mathfrak{G}(x_1, \cdots, x_q)$内有一阶连续偏导数，则它们函数相关.

(c) 当$p \leqslant q$时，如果函数矩阵[1)]

$$\frac{\partial(u_1, \cdots, u_p)}{\partial(x_1, \cdots, x_q)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_1}{\partial x_q} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial u_p}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_p}{\partial x_q}\end{pmatrix}$$

在$\mathfrak{G}$内的秩为p，即在$\mathfrak{G}$中存在即使一个点使得这个矩阵至少有一个p阶子式异于零时，则函数组(12)在$\mathfrak{G}$中函数无关.

(d) 设函数$u_1(x_1, \cdots, x_{n+1}), \cdots, u_n(x_1, \cdots, x_{n+1})$在区域$\mathfrak{G}(x_1, \cdots, x_{n+1})$内有一阶和二阶连续偏导数. 如果函数矩阵

$$\frac{\partial(u_1, \cdots, u_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_{n+1})}$$

在区域$\mathfrak{G}$内每一点的秩最高是$n-1$，即这矩阵的每一个n

---

1) 当$p=q=n$时，下面的式子左端按照定义 3 有两种意义，即它有时表示函数矩阵，有时表示函数行列式. 然而在以后提到它时，所指的那一种意义总是显见的.

阶子行列式在整个区域中都等于零[1]，则它们函数相关.

2.8. 主积分. 存在定理. 柯西问题. 回到一般微分方程(1). 同前面一样，我们假设函数 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 在区域 $\mathfrak{G}(x, y)$ 内连续，而且它们在 $\mathfrak{G}$ 的任何子域中不同时为零. 在这些假设下，于是有:

(a) 方程(1)的任意两个积分都在区域 $\mathfrak{G}$ 内函数相关.

(b) 方程(1)在区域 $\mathfrak{G}$ 的任一子域内都不等于常数的积分，称为这区域内的主积分. 下面的命题成立:

如果 $\phi(x, y)$ 是方程(1)在区域 $\mathfrak{G}$ 内的一个主积分，则 $\mathfrak{G}(x, y)$ 内的全部积分的集合恰由那些在 $\mathfrak{G}$ 内具有一阶连续偏导数并和 ϕ 函数相关的函数 $\chi(x, y)$ 所组成.

如果 $\mathfrak{G}$ 是特征场，且 $\phi_y \neq 0$，则所有的积分可由公式

$$\chi(x, y) = \omega(\phi(x, y))$$

得到. 这里 $\omega(u)$ 遍历一切对 ϕ 值有定义的连续函数.

(c) 如果函数 f 和 g 在单连通域 $\mathfrak{G}$ 内 k 次连续可微 $(k \geqslant 1)$，且 $|f| + |g| > 0$，则同 $\mathfrak{G}$ 的边界没有公共点的每一有界子域 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{G}$ 内，微分方程(1)有主积分 $\phi(x, y)$; 函数 $\phi(x, y)$ 是 k 次连续可微的，且满足不等式 $|\phi_x| + |\phi_y| > 0$[2].

(d) 如果要寻求方程(1)的通过给定的连续可微初始曲线

$$x = u(s), \quad y = v(s), \quad z = w(s) \tag{14}$$

的积分曲面(柯西问题)，则(参看 §2.6(b))仅当曲线(14)在 XOY 平面的投影

---

1) 参看 G. Doetsch, *Math. Annalen*, **99** (1928), p. 590—601; A. B. Brown, *Transactions Amer. Math. Soc.*, **38** (1935); p. 379—394; A. Sard, *Bulletin Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), p. 883—890; M. Kneser, *Math. Zeitschrift*, **54** (1951), p. 34—51, **55** (1951/52), p. 400; E. Kamke, *Math. Zeitschrift*, **39** (1935), p. 672—676.

2) E. Kamke, *Math. Zeitschrift*, **42** (1937), p. 287—294; **41** (1936), p. 56—66.

$$x = u(s), \quad y = v(s) \tag{15}$$

无论在何处都不同特征底线相切时，亦即当不等式

$$u'(s)g(u, v) - v'(s)f(u, v) \neq 0$$

成立时，才能求得唯一解.

如果这个假设满足，则经过曲线(15)的每一点都有特征底线

$$x = \varphi_1(t, u(s), v(s)), \quad y = \varphi_2(t, u(s), v(s))^{1)}$$

通过. 它就是特征方程组(3)的积分曲线，它当 $t = 0$ 时通过 $x = u(s), y = v(s)$. 这些特征底线构成特征场. 现在这三个方程

$$x=\varphi_1(t, u(s), v(s)), \; y=\varphi_2(t, u(s), v(s)), \; z=w(s) \tag{16}$$

给出了在上述包含曲线(15)的特征场中的所求积分曲面的参数表示式. (16)的前两个方程确定了连续可微函数 $t = t(x, y)$, $s = s(x, y)$; 而 $s = s(x, y)$ 和(16)中的第三个方程共同给出了积分曲面的**显式方程**.

例. 求方程

$$yp + xq = 0$$

的经过初始曲线

$$x = s, \quad y = \alpha s, \quad z = \omega(s) \quad (\alpha \neq \pm 1)$$

的积分曲面. 由特征方程

$$x'(t) = y, \quad y'(t) = x$$

我们立刻求得当 $t = 0$ 时经过任意点 $x = \xi, y = \eta$ 的解:

$$x = \frac{\xi + \eta}{2} e^t + \frac{\xi - \eta}{2} e^{-t}, \quad y = \frac{\xi + \eta}{2} e^t - \frac{\xi - \eta}{2} e^{-t}.$$

因此，(16)的前两个方程的形状为

---

1) [关于记号 φ_1, φ_2 可参看 §2.6(a)，或参看 Kamke，手册 I，§5.4. 因为特征方程(3)的右端不依赖于 t，所以特征函数就刚好是这里所写的形式. 为了使本段所述的结论正确，必须假定方程(1)的系数是连续可微的——俄译本编者注]

$$x = \frac{1+\alpha}{2} se^t + \frac{1-\alpha}{2} se^{-t}, \quad y = \frac{1+\alpha}{2} se^t - \frac{1-\alpha}{2} se^{-t}.$$

由此得

$$x + y = (1+\alpha)se^t, \quad x - y = (1-\alpha)se^{-t}.$$

于是

$$x^2 - y^2 = (1-\alpha^2)s^2.$$

最后，由 (16) 的第三个方程，当 $(y^2 - x^2)(\alpha^2 - 1) > 0$ 时，我们得到所求积分曲面的方程为

$$z = \omega\left(\pm\sqrt{\frac{y^2 - x^2}{\alpha^2 - 1}}\right),$$

上式当 $s > 0$ 时应取正号；当 $s < 0$ 时取负号。

(c) 带有一个奇点的微分方程. 如果在点 (x_0, y_0) 处有 $f = g = 0$，则称该点为微分方程 (1) 的奇点；如果在该点处有 $|f| + |g| > 0$，则称它为微分方程 (1) 的正则点（参看 §8.6）. 假设在坐标原点的某个邻域 $\mathfrak{U}$ 内函数 f 和 g 有定义且连续；又设 $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$，但在 $\mathfrak{U}$ 的其它各点有 $|f| + |g| > 0$. 因此坐标原点是方程 (1) 的弧立奇点，是特征方程组 (3) 的驻点[1]. 如果方程组 (3) 的异于驻点的不同轨线在 XOY 平面上坐标原点的某个特别适当选取的邻域 $\mathfrak{U}$ 中都是封闭曲线，则微分方程 (1) 在 $\mathfrak{U}$ 内有主积分 $\phi(x, y)$，并且在坐标原点外的点都有 $|\phi_x| + |\phi_y| > 0$[2].

2.9. 关于利用级数展开的注记. 为了证明解的存在，可

---

1) [特征方程组 (3) 是自治的，因为它的右端 f 和 g 显然不依赖于自变量 t. 在 x, y 平面上使两个右端同时等于零的点称为该方程组的驻点（平衡位置）. 如果自治方程组的解 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 描述 x, y 平面上的曲线（t 看作参数），则这条曲线称为轨线. 详见 Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, «Наука», 1965（有 1961 年版中译本，Л. С. 庞特里雅金，常微分方程，李训经，金福临译，上海科学技术出版社，1962）.——俄译本编者注]

2) 参看 H. H. Alden, *Amer. Journ. Math.*, **56** (1934), p. 593—612; E. Digel, *Math. Zeitschrift*, **42** (1937), p. 231—237.

以用幂级数或更一般形式的级数(参看§5.7和§10.5).然而,在常微分方程中所使用的卓有成效的迭代法(参看手册I,A§2.2),对偏微分方程未必能达到(求解)目的. 以后在§4.4及§12.11中还要阐述(求近似解的方法).

2.10. 解法概述. 求偏微分方程(1)的解有下列各种方法:

(a) 特征线方法(参看§2.4).

(b) 利用特征方程的组合求得个别的积分,特别是求出一个主积分(参看§2.5).按照§2.8(b),由所求得的主积分可以求得所有的积分.

(c) 如果需要确定经过已给初始曲线的积分曲面(亦即要解柯西问题),那末,若已知主积分(或容易求得这样的积分),则可按§2.5(d)的例子进行;若特征方程组(3)容易求积分,则可依§2.6(b),§2.6(c)及§2.8中诸例求解.

(d) 利用幂级数展开(参看§2.9).

(e) 如果由于不可克服的解析的困难,上述各种方法都不能达到(求解)目的,则可用近似方法求特征方程组(3)或(6)的解,然后按照§2.8(d)中的方法便可得到已给偏微分方程(1)的近似数值解.

§3. 一般的 n 个自变量的齐次线性方程:

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\mathbf{r})p_\nu=0$$[1]

3.1. 定义和注记. n个自变量的一个未知函数$z=z(x_1,\cdots,x_n)$的一阶齐次线性偏微分方程有如下形状(试与§1.1比

1) 叙述根据 Kamke 的书 DGlen, p. 321—330 [也请参看列于书末的参考文献.——俄译本编者注]

较）

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_\nu} = 0, \tag{1}$$

若引用记号 $\boldsymbol{r}$ 代替分量为 $x_1, \cdots, x_n$ 的向量及 $p_\nu = \dfrac{\partial z}{\partial x_\nu}$，则为

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\boldsymbol{r})p_\nu = 0. \tag{1'}$$

我们总是仅在 $x_1, \cdots, x_n$ 空间的这样一个区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ 内来考察微分方程，假设系数 $f_\nu(\boldsymbol{r})$ 在该区域内连续.

每一个微分方程 (1) 显然有平凡解 z = 常数；异于平凡解的积分称为非平凡解.

如果 $\phi_1(\boldsymbol{r}), \cdots, \phi_m(\boldsymbol{r})$ 是方程 (1) 在 $\mathfrak{G}$ 内的积分，$\Omega(u_1, \cdots, u_m)$ 是定义在函数 ϕ_ν 的值域中的函数，并有一阶连续偏导数，则容易证明，复合函数

$$\chi(\boldsymbol{r}) = \Omega(\phi_1(\boldsymbol{r}), \cdots, \phi_m(\boldsymbol{r}))$$

也是方程 (1) 的一个积分.

3.2. 特征线与积分曲面.

(a) 常微分方程组

$$x'_\nu(t) = f_\nu(\boldsymbol{r}) \quad (\nu = 1, \cdots, n) \tag{2}$$

称为对应于偏微分方程 (1) 的特征方程(特征组). 这个方程组的每一积分曲线

$$x_1 = \varphi_1(t), \cdots, x_n = \varphi_n(t) \tag{3}$$

或与它对应的曲线

$$x_1 = \varphi_1(t), \cdots, x_n = \varphi_n(t), z = c \tag{4}$$

(式中 c 是任意常数) 称为微分方程 (1) 的特征底线或特征线[1].

---

1) 为了同特征线(4)有区别，我们称积分曲线 (3) 为特征底线.

(b) 在微分方程(1)的积分和特征线之间存在下列重要联系：

在 $\mathfrak{G}$ 内具有一阶连续偏导数的函数 $\phi(\boldsymbol{r})$，当且仅当它沿特征底线(3)取常值，即对任何曲线(3)有

$$\phi(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)) = \text{常数}$$

时，它才是微分方程(1)的一个积分。

由此推得

(c) 如果方程(1)的两个积分曲面有一个公共点 $(\boldsymbol{r}_0, z = c)$，则它们也有通过该点的公共的整段特征线。

3.3. 借助于特征方程的组合求解方程. 利用 § 3.2(b) 的定理，在一系列情况下能顺利求得具体的(1)型微分方程的解。我们用两个例子来说明这个方法。

(a) $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + (x^2 + y^2)\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

这里 $w(x, y, z)$ 是未知函数，特征方程有下列形式

$$x'(t) = x,\ y'(t) = y,\ z'(t) = x^2 + y^2.$$

从前两个特征方程推得，沿每一特征底线有

$$yx' - xy' = 0 \text{ 即 } \frac{x}{y} = \text{常数}.$$

因此，函数 $\phi_1 = \dfrac{x}{y}$ 是在每一个半平面 $y > 0$ 或 $y < 0$ 的积分。由三个特征方程，我们推得沿特征底线有

$$2xx' + 2yy' - 2z' = 0,$$

所以

$$x^2 + y^2 - 2z = \text{常数}.$$

因此，函数 $\phi_2 = x^2 + y^2 - 2z$ 也是一个积分。这样，函数 ϕ_1, ϕ_2 组成一个积分基底(参看 § 3.4)。

(b) $xz\dfrac{\partial w}{\partial x} - yz\dfrac{\partial w}{\partial y} + (y^2 - x)\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

特征方程组

$$x'(t)=xz,\ y'(t)=-yz,\ z'(t)=y^2-x$$

中的前两个沿每一特征线给出关系式

$$yx'+xy'=0 \text{ 即 } xy=\text{常数};$$

全部三个方程沿每一特征线给出另一关系式

$$x'+yy'+zz'=0 \text{ 即 } 2x+y^2+z^2=\text{常数}.$$

因此，$\phi_1=xy$ 和 $\phi_2=2x+y^2+z^2$ 是所给微分方程的构成积分基底的两个积分(参看 § 3.4).

所举的例子表明，有时能顺利地组合这些特征方程，得到一个可积的组合式，它的原函数不依赖于参数 t.

3.4. 积分的基本组. 柯西问题.

(a) 设微分方程(1)在区域 $\mathfrak{G}$ 内的一组 $n-1$ 个积分为

$$\phi_1(\boldsymbol{r}),\ \cdots,\ \phi_{n-1}(\boldsymbol{r}). \tag{5}$$

如果函数矩阵(参看 § 2.7(c))

$$\frac{\partial(\phi_1,\ \cdots,\ \phi_{n-1})}{\partial(x_1,\ \cdots,\ x_n)} \tag{5'}$$

在区域 $\mathfrak{G}$ 的每一子域内其秩为 $n-1$，亦即至少有一个 $n-1$ 阶行列式在那里至少有一点异于零，则称该组积分为方程(1)的一个积分的基本组(积分基底).

于是，根据 § 2.7(c)，函数 $\phi_1,\cdots,\phi_{n-1}$ 在区域 $\mathfrak{G}$ 的每一子域内彼此函数无关；反过来说，由 § 2.7(d) 推出，在每一子域内彼此无关的 $n-1$ 个两次连续可微积分，组成这区域 $\mathfrak{G}$ 内的一个积分基底.

如果函数组(5)在区域 $\mathfrak{G}$ 内是这微分方程(1)的一个积分基底，则方程(1)在这区域内的所有的积分的集合是由所有那些在 $\mathfrak{G}$ 内连续可微而且与函数组(5)函数相关的函数所组成.

关于用某特征场内的一个积分基底表示任一积分，参看 § 3.6(b).

如果(5)是方程(1)的积分的基本组，它的函数矩阵(5′)在区域$\mathfrak{G}$的每一点的秩为$n-1$，并且ψ_ν两次连续可微，则

$$\psi=\sum_{\nu=1}^{n-1}a_\nu\psi_\nu+a_n$$

是在§12.1意义下的一个完全积分.

(b) 假设要找方程(1)的这样一个积分，它当$x_1=\xi$时等于一个已知函数$\omega(x_2,\cdots,x_n)$(柯西问题). 如果已知该方程的一组积分基底(5)，则可寻求一个连续可微函数$\Omega(u_1,\cdots,u_{n-1})$，使得当$x_1=\xi$时，具有性质

$$\Omega(\psi_1,\cdots,\psi_{n-1})=\omega(x_2,\cdots,x_n).$$

于是(参看§3.1)

$$\psi(\mathfrak{r})=\Omega(\psi_1(\mathfrak{r}),\cdots,\psi_{n-1}(\mathfrak{r}))$$

就是满足条件的一个积分(参看§3.1的最末一行). 这一方法也可应用于满足更一般的初始条件的问题.

如果在§3.3(b)的例子中需要求出当$x=y$时取值

$$w(x,y,z)=y^2-z^2$$

的积分$w(x,y,z)$，则这样确定函数$\Omega(u,v)$，使得当$x=y$时，有

$$\Omega(\psi_1,\psi_2)=y^2-z^2,$$

亦即对于$u=y^2$, $v=2y+y^2+z^2$，有

$$\Omega(u,v)=y^2-z^2. \tag{*}$$

由前两个方程解出y和z，并将结果代入方程(*)，则得函数Ω的表达式为

$$\Omega(u,v)=2(u\pm\sqrt{u})-v.$$

于是，对于$xy>0$的所求积分具有如下形状

$$w(x,y,z)=\Omega(\psi_1,\psi_2)=2(xy\pm\sqrt{xy})-2x-y^2-z^2.$$

符号+或−按照y取正或负而选定.

3.5. 特积分已知时方程的简化. 如果已经求得微分方程(1)的某些特积分，则可把方程化为自变量个数较少的方程.

(a) 设在区域 $\mathfrak{G}$ 内已知方程(1)的 $k(<n-1)$ 个积分

$$\phi_1(\boldsymbol{r}),\ \cdots,\ \phi_k(\boldsymbol{r}), \tag{6}$$

并设函数行列式在这个区域内处处不等于零：

$$\frac{\partial(\phi_1,\ \cdots,\ \phi_k)}{\partial(x_1,\ \cdots,\ x_k)} \neq 0. \tag{6'}$$

则自变量代换

$$\begin{aligned}
&y_1=\phi_1(x_1,\ \cdots,\ x_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&y_k=\phi_k(x_1,\ \cdots,\ x_n),\\
&y_{k+1}=x_{k+1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&y_n=x_n
\end{aligned} \tag{7}$$

将区域 $\mathfrak{G}$ 一对一[1]地映射到区域 $\overline{\mathfrak{G}}(y_1,\ \cdots,\ y_n)$ 上.同时，依赖于 x_ν 的函数 $f_{k+1},\ \cdots,\ f_n$ 转变为依赖于 y_ν 的函数 $\bar{f}_{k+1},\ \cdots,\ \bar{f}_n$.

经代换后可得关于函数 ζ 的方程

$$\sum_{\nu=k+1}^{n} \bar{f}_\nu(y_1,\ \cdots,\ y_n)\frac{\partial\zeta}{\partial y_\nu}=0, \tag{8}$$

并且这里 $y_{k+1},\ \cdots,\ y_n$ 是自变量，而 $y_1,\ \cdots,\ y_k$ 是参数. 如果

$$\bar{\Phi}_{k+1}(y_1,\ \cdots,\ y_n),\ \cdots,\ \bar{\Phi}_{n-1}(y_1,\ \cdots,\ y_n) \tag{9}$$

是方程(8)在 $\overline{\mathfrak{G}}$ 内的这样一些积分，它们关于所有变量有连续偏导数，并且它们的雅可比式在这区域内处处不等于零：

1) 一对一性从条件(6′)推出。

$$\frac{\partial(\Phi_{k+1}, \cdots, \Phi_{n-1})}{\partial(y_{k+1}, \cdots, y_{n-1})} \neq 0,$$

则由函数组 (9) 利用化回到 (7) 的变换所得到的函数 $\phi_{k+1}, \cdots, \phi_{n-1}$, 与函数组 (6) 一起，在 $\mathfrak{G}$ 内构成方程 (1) 的一组积分基底;换句话说,在区域 $\mathfrak{G}$ 的所有点处,有

$$\frac{\partial(\phi_1, \cdots, \phi_{n-1})}{\partial(x_1, \cdots, x_{n-1})} \neq 0.$$

关于利用乘子的简化，参看 § 3.8 及 Serret-Scheffers, Differential- und Integralrechnung III, p.563 及以下各页。

(b) **例.** $\dfrac{\partial w}{\partial x} + xz\dfrac{\partial w}{\partial y} - xy\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

特征方程组

$$x' = 1, \quad y' = xz, \quad z' = -xy$$

中后两个方程给出沿每一特征线的关系式

$$yy' + zz' = 0 \text{ 即 } y^2 + z^2 = \text{常数}.$$

因此,由 §3.2(b) 知, $\phi_1 = y^2 + z^2$ 是一个积分.

再作变量代换(参看 (7) 式)

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y^2 + z^2, \quad \bar{z} = z.$$

在这变换下,半空间 $y > 0$ 一对一地被映射到抛物柱体 $\bar{y} > z^2$ 的内部,而且在柱体内恒有 $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial y} \neq 0$, 因此,可采用 (a) 中所述的方法.

方程 (8) 现在具有如下形状

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} - \bar{x}\sqrt{\bar{y} - \bar{z}^2}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0; \qquad (*)$$

其特征方程(参看 § 2.6)

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}} = -\bar{x}\sqrt{\bar{y} - \bar{z}^2}$$

其中的 $\bar{y}$ 看作参数.它是一个可分离变量的常微分方程,把它

积分，就得方程(*)的另一个积分，

$$\operatorname{Arcsin}\frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{y}}}+\frac{1}{2}\bar{x}^2\,[1].$$

由§3.1知，积分的每一连续可微函数又是一个积分，所以这函数的正弦又是一个积分，即

$$\bar{\phi}=\frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{y}}}\cos\frac{\bar{x}^2}{2}+\sqrt{1-\frac{\bar{z}^2}{\bar{y}}}\sin\frac{\bar{x}^2}{2}$$

是方程(*)的一个积分.

化回到变量 x，y，z，我们得到原微分方程的一个积分

$$\phi=\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\left(y\sin\frac{x^2}{2}+z\cos\frac{x^2}{2}\right).$$

根据§3.1，积分 ϕ 和 ϕ_1 的任一连续可微函数还是一个积分，特别是，函数

$$\phi_2=\phi\sqrt{\phi_1}=y\sin\frac{x^2}{2}+z\cos\frac{x^2}{2}$$

也是原微分方程的一个积分.

容易证明，函数 ϕ_1 和 ϕ_2 在整个空间内构成所给微分方程的一个积分基底.

(c) 对于实际计算来说，简化方法的另一形式是较方便的. 我们来考察 (b) 中的同一例子.

从特征方程求得：对每一条特征线有

$$y^2+z^2=C_1^2\,[2],$$

即

$$y=\sqrt{C_1^2-z^2}.$$

其次，从第一个特征方程可得 $t=x$.

---

1) 这里，Arcsin u 表示主值，即它的绝对值 $\leqslant\frac{\pi}{2}$.——译者注

2) 参看本段(b)中的推导.——校者注

利用这个结果，我们把第二个特征方程 $z'=-xy$ 写成可分离变量形式

$$z'=-x\sqrt{C_1^2-z^2}.$$

于是沿每一条特征底线有

$$\operatorname{Arcsin}\frac{z}{C_1}+\frac{x^2}{2}=C_2,$$

亦即函数

$$\psi^*(x,y,z)=\operatorname{Arcsin}\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{x^2}{2}$$

沿每一条特征底线为常数. 因此，ψ^* 是所给微分方程的一个积分. 所以函数

$$\psi=\sin\psi^*=\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\left(y\sin\frac{x^2}{2}+z\cos\frac{x^2}{2}\right)$$

也是一个积分. 这样，我们再次得到在 (b) 中已求得的函数 ψ.

3.6. 特殊情况：$p+\sum_{\nu=1}^{n}f_\nu(x,y)q_\nu=0$. 如果方程 (1)的某个系数在整个所考察的区域内不等于零，则用这个系数除该方程的所有的项，再稍加变形，可把微分方程 (1) 化为如下形状

$$p+\sum_{\nu=1}^{n}f_\nu(x,y)q_\nu=0. \tag{10}$$

其中 $z=z(x,y)$ 是未知函数，$p=\frac{\partial z}{\partial x}$，$q_\nu=\frac{\partial z}{\partial y_\nu}$，而$y$表示分量为 $y_1,\cdots,y_n$ 的向量. 既然可以选择 $t=x$，对应于微分方程 (10) 的特征方程组显然是

$$y_\nu'(x)=f_\nu(x,y)\quad(\nu=1,\cdots,n) \tag{11}$$

在本段中，假设系数 $f_\nu(x,y)$ 在区域 $\mathfrak{G}(x,y)$ 内具有关于 $y_\mu(\mu=1,\cdots,n)$ 的连续偏导数.

(a) 基本存在定理. 在上述假设下，方程组(11)的特征函数[1] $\varphi_\nu(x, \xi, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ 在整个存在域中具有对于所有 $n+2$ 个变量的连续偏导数，并且根据 E. 林德略夫定理，φ_k 应满足方程.

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi} + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta_\nu} = 0,$$

同时

$$\frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{\partial(\eta_1, \cdots, \eta_n)} > 0.$$

当 x_0 固定时，这些特征函数

$$\varphi_k(x, y_1, \cdots, y_n) = \varphi_k(x_0, x, y_1, \cdots, y_n) \quad (12)$$
$$(k = 1, \cdots, n)$$

构成微分方程(10)在这些函数存在的每一区域内的积分基底[2].

设 l 是平面 $x = x_0$ 的一个开的连通分片，它完全在区域 $\mathfrak{G}$ 内[3]。于是，特征函数组(12)的一个存在区域 $G(l)$ 就是 $\mathfrak{G}$ 的这样的子域，它是由那些通过 l 的特征线所构成，$G(l)$ 称为方程(10)的特征场.

(b) 带有给定初始值的积分(柯西问题). 柯西问题所指的是：需要求出在平面[4] $x = x_0$ 上取给定值 $\omega(y)$ 的积分 $z = \psi(x, y)$，即 $\psi(x_0, y) = \omega(y)$[5].

---

1) 参看 Kamke 的手册 1，中译本 47 页 § 5.4.
2) 当方程系数还依赖于参数时的更一般的存在定理，参看 § 4.3.
3) 这里的 l 实际上就是区域 $\mathfrak{G}$ 与平面 $x=x_0$ 的交集的一个连通分支(Connected Component). 参看江泽涵著《拓扑学引论》(64 页). ——校者注
4) [作者称这平面为 Normalebene (正规平面). ——俄译本编者注]
5) 初值不给定在平面 $x = x_0$ 上，而是给定在一般的区域内的情况，可参看 § 3.7. ——校者注

如果特征函数(12)在区域 $G(l)$ 内满足不等式 $A_\nu<\varphi_\nu<B_\nu$，且 $\omega(\boldsymbol{y})$ 当 $A_\nu<y_\nu<B_\nu(\nu=1,\cdots,n)$ 时连续可微，则在区域 $G(l)$ 内存在柯西问题的唯一解，即

$$\phi(x,\boldsymbol{y})=\omega(\varphi_1(x_0,x,\boldsymbol{y}),\cdots,\varphi_n(x_0,x,\boldsymbol{y})).\quad(13)$$

容易解析地证明，等式(13)的右端对于 x 和 y_ν 连续可微，并且 $\varphi_\nu(x_0,x_0,\boldsymbol{y})=y_\nu$. 因此，当 $x=x_0$ 时这个等式的右端取值 $\omega(\boldsymbol{y})$. 几何上，可以这样构造积分曲面：通过初始曲面的每一点

$$(x_0,\eta_1,\cdots,\eta_n,\zeta=\omega(\eta_1,\cdots,\eta_n))$$

画出特征线

$$\begin{aligned}&y_\nu=\varphi_\nu(x,x_0,\eta_1,\cdots,\eta_n)\ (\nu=1,\cdots,n),\\&z=\omega(\eta_1,\cdots,\eta_n),\end{aligned}\quad(14)$$

并消去 η_ν. 为此，由(14)的确定特征底线的前 n 个方程求得

$$\eta_\nu=\varphi_\nu(x_0,x,y_1,\cdots,y_n),$$

代入(14)的最后一个方程，则恰好给出关系式(13).

设 $\mathfrak{G}$ 是带形[1]

$$a<x<b,\ -\infty<y_1,\cdots,y_n<+\infty,$$

且所有 f_ν 或 $\dfrac{\partial f_\nu}{\partial y_\mu}$ 在 $\mathfrak{G}$ 内有界. 于是若 l 是任意一个平面 $x=x_0(a<x_0<b)$，则 $G(l)$ 和 $\mathfrak{G}$ 重合[2]. 在这种情况下，可以给定在任意平面 $x=x_0(a<x_0<b)$ 上的积分值，而这样的积分在整个带形域 $\mathfrak{G}$ 内存在而且唯一地被确定.

(c) 关于在任意区域内的非平凡积分的存在. 正如§2.6(d)已经指出的，微分方程(10)可能在整个区域 $\mathfrak{G}$ 内不存在非平凡积分. 然而下面的存在定理成立[3]:

---

1) 允许 $a=-\infty$, $b=+\infty$.

2) 关于记号 $G(l)$ 可参看§3.6(a). 这里的 $G(l)$ 是指那些从平面 $x=x_0$ 作出的特征线(14)所构成的区域

3) 参看 E. Kamke, *Jahresbericht, DMV*, 44 (1934), p.156—161.

设函数 $f_\nu(x, y)(\nu = 1, \cdots, n)$ 在 $\mathfrak{G}(x, y)$ 内有界，并有对于 y_μ 的连续偏导数. 又设 a 是点 $(x, y) \in \mathfrak{G}$ 的坐标 x 的下确界，b 是其上确界(允许 $a = -\infty, b = +\infty$). 则在区域 $\mathfrak{G}$ 的属于开带形

$$a < x < b, -\infty < y_1, \cdots, y_n < +\infty$$

的每一子域 $\mathfrak{g}$ 内存在方程 (10) 的一组积分基底 $\psi_\nu(x, y)$, $\nu = 1, \cdots, n$. 对于这组基底，在整个区域 $\mathfrak{G}$ 内函数行列式为正:

$$\frac{\partial(\psi_1, \cdots, \psi_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)} > 0.$$

上面这个存在定理,可以从下述的引理推得:

引理 1[1]. 设 $\mathfrak{G}(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $x_1, \cdots, x_n$ 空间内一个开集,而 $\bar{\mathfrak{g}}(x_1, \cdots, x_n)$ 是它的闭子集. 则存在着一个这样的函数 $\theta(x_1, \cdots, x_n)$: 它在整个 $x_1, \cdots, x_n$ 空间内具有各阶连续偏导数; 它满足不等式 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, 而它在闭集 $\bar{\mathfrak{g}}$ 上的值等于 1, 在不属于 $\mathfrak{G}$ 的点上的值等于零.

从引理 1 又可推得:

引理 2. 设 $\mathfrak{G}(x, y)$ 是在 $x, y_1, \cdots, y_n$ 空间内的一个开集,又设函数 $f(x, y)$ 在 $\mathfrak{G}$ 内的绝对值 $\leqslant A$, 而且它有对于 y_ν 的 r 阶 ($r \geqslant 1$) 连续偏导数. 又设 $\mathfrak{g}(x, y)$ 是 $\mathfrak{G}$ 的一个开子集，它同 $\mathfrak{G}$ 没有公共边界点. 则存在着这样的函数 $F(x, y)$, 具有下列性质: i) 它在整个 $x, y_1, \cdots, y_n$ 空间有定义; ii) 它的绝对值 $\leqslant A$; iii) 它在整个空间具有对于 y_ν 的 r 阶连续偏导数; iv) 它在开集 $\mathfrak{g}$ 的值同 f 的值一样.

证 令 $\bar{\mathfrak{g}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的闭包,又令 $\mathfrak{G}$ 是包含 $\bar{\mathfrak{g}}$ 的一个开集,而且它本身又被包含在 $\mathfrak{G}$ 中. 现在又令

$$F = \begin{cases} \theta f, & \text{对于 } \mathfrak{G} \text{中的点}, \\ 0, & \text{对于不属于 } \mathfrak{G} \text{ 中的点}. \end{cases}$$

这个函数 F 具有上述各性质. (引理 2 证毕.)

现在来证上述存在定理. 把方程 (10) 中的 f_ν 换成引理 2 中的对

---

1) 参看 Bielecki, *Annales Soc. Polon. Math.*, **10** (1933), p.34~35.(校者按: 引理 1 的证明通常可以在广义函数论中找到.)

应函数 F_ν，在 $a=-\infty$，$b=+\infty$ 的情况下，则方程（10）将变为 f_ν 被 F_ν 所代替的一个方程，对于新方程可用（b）中的最末一段的存在定理。因而这个新方程在整个 $x, y_1, \cdots, y_n$ 空间具有性质（14）的积分基底。所以原来的方程（10）特别地在 $\mathfrak{G}$ 内也具有这个性质的积分基底。不是 $a=-\infty$，$b=+\infty$ 的情况，把引理 2 略加推广也可同样地证明。

3.7. 积分的存在. 柯西问题的解.

(a) 对于一般的微分方程 (1)，没有类似于 §2.8(c) 那样的存在定理。

例. 考察方程(参看本书第二部分的 3.45 题)

$$[(x^2+y^2-1)x+y]\frac{\partial w}{\partial x}+[(x^2+y^2-1)y-x]$$

$$\times\frac{\partial w}{\partial y}+2z\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

在从 x, y, z 空间中除去 z 轴上 $z\leqslant 0$ 的点所得到的单连通域 $\mathfrak{G}$ 中，系数可微任意次，且处处不同时变为零。但是，包含特征线 $x^2+y^2=1$，$z=0$ 的每一区域都有这样的子域，在这子域中所给微分方程的任一积分都是常数。

(b) 广义柯西问题(初值问题)所指的是：需要求出方程 (1) 的这样的积分，它在以参数形式

$$x_\nu=u_\nu(t_1,\cdots,t_{n-1})(\nu=1,\cdots,n)$$

给定的(初值)底域 $\mathfrak{g}(\boldsymbol{r})$ 中取给定的值

$$z=u(t_1,\cdots,t_{n-1}). \tag{15}$$

在下述假设下，问题可解[1]。

---

1) 参看 Courant-Hilbert, [illegible]—63 (1962 年英文改写版中译本：R. 柯朗，D. 希尔伯特，数学物理方法 II，熊振翔，杨应辰译，科学出版社，1977年，p.54—59. [以后将在括号中简注为(中译本：数学物理方法 II，p.x—k)。——译者注] 在那里也研究行列式 (16) 变为零时的情况。

设系数 $f_\nu(\mathfrak{r})$ 在区域 $\mathfrak{G}(\mathfrak{r})$ 内连续可微，又设函数 u_ν 和 u 在区域 $T(t_1, \cdots, t_{n-1})$ 内连续可微. 区域 $\mathfrak{g}$ 的点必须属于 $\mathfrak{G}$; 又设在区域 T 内，行列式

$$\begin{vmatrix} f_1(u_1, \cdots, u_n) \cdots f_n(u_1, \cdots, u_n) \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t_1} \quad \cdots \quad \dfrac{\partial u_n}{\partial t_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t_{n-1}} \quad \cdots \quad \dfrac{\partial u_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{16}$$

通过区域 $\mathfrak{g}$ 的点引出特征底线[1)]

$$x_\nu = \varphi_\nu(t, \tau, u_1, \cdots, u_n)\ (\nu = 1, \cdots, n), \tag{17}$$

它们在区域 $\mathfrak{G}$ 内确定出一个特征子域 $G(T)$. 于是方程 (17) 和 (15) 在 $G(T)$ 的每一部分[2)]中给出所求积分的一个参数表达式，这部分包含 $\mathfrak{g}$，且在其中解出方程 (17) 时，将给出 t, $t_1, \cdots, t_{n-1}$ 作为 $x_1, \cdots, x_n$ 的连续可微函数. 由于(16)式，在区域 $\mathfrak{g}$ 的充分小的邻域内这显然是可能的.

3.8. 雅可比乘子[3)]. 虽然雅可比乘子理论通常是对微分方程 (1) 来考察的，但要假设该方程的一个系数不为零. 因此，从一开始我们就把所考察的方程写为 (10) 形.

设函数 $M = M(\mathfrak{x}, y)$ 在某个区域 $\mathfrak{G}(\mathfrak{x}, y)$ 内连续且恒不等于零. 如果存在这样的连续可微函数 $\psi_1(\mathfrak{x}, y), \cdots, \psi_n(\mathfrak{x}, y)$，使得对于任何连续可微函数 $z(\mathfrak{x}, y)$，等式

---

1) 参看手册 I, A §5.4 及 §7.1. 因为特征方程组 (2) 的右端不依赖于 t, 所以可得该方程组的当 $t = \tau$ 时通过点 $(u_1, \cdots, u_n)$ 的积分曲线
$\varphi_\nu(t, \tau, u_1, \cdots, u_n) = \varphi_\nu(t - \tau, 0, u_1, \cdots, u_n), (\nu = 1, \cdots, n)$.
在上面的正文的 φ_ν 中已弃去 0, 并令 $\tau = 0$.

2) 这里的"$G(T)$ 的每一部分"是指 $G(T)$ 的每一个连通分支. ——校者注

3) 例如参看 Serret-Scheffers, Differential-und Integralrechnung III, 及 E. Kamke, *Journal für Math.*, **161**(1929), p.195—197. 因为雅可比乘子对于实际求解方程(1)没有多大意义，所以这里仅限于作某些指示.

$$M\left\{\frac{\partial z}{\partial x}+\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x,y)\frac{\partial z}{\partial y_\nu}\right\}=\frac{\partial(z,\phi_1,\cdots,\phi_n)}{\partial(x,y_1,\cdots,y_n)} \tag{18}$$

恒成立，则称 $M=M(x,y)$ 为微分方程(10)的雅可比乘子. 容易证明

$$M=\frac{\partial(\phi_1,\cdots,\phi_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)} \tag{19}$$

因 $M\neq 0$，所以函数 $\phi_\nu(\nu=1,\cdots,n)$ 构成方程（10）的一组积分基底[1]. 反之，对于方程（10）的每一组积分基底 $\phi_1,\cdots,\phi_n$ 的雅可比行列式(19)都是方程(10)的雅可比乘子，亦即(18)式恒成立[2].

---

1) 这结论的证明如下：令 $z=x$，则从(18)式推得(19)式. 又在(18)式中令 $z=\phi_k(x,y)$，$k=1,2,\cdots,n$，则(18)式的右端由于行列式性质而等于零. 又因 $M\neq0$，不但推得 $z=\phi_k$ 是积分，而且推得它们构成积分基底. ——校者注

2) 这断语的证明如下： 设 $\phi_1,\cdots,\phi_n$ 是方程(10)的积分基底. 由方程(10)得

$$\frac{\partial\phi_k}{\partial x}=-\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\frac{\partial\phi_k}{\partial y_\nu},\quad k=1,\cdots,n.$$

考虑雅可比行列式

$$\frac{\partial(z,\phi_1,\cdots,\phi_n)}{\partial(x,y_1,\cdots,y_n)}=\left|\begin{array}{c|ccc}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial y_n}\\ \hline \frac{\partial\phi_1}{\partial x} & & & \\ \vdots & & M & \\ \frac{\partial\phi_n}{\partial x} & & & \end{array}\right|$$

上式中 M 是(19)式的行列式. 把这行列式的第一列的元素 $\frac{\partial\phi_k}{\partial x}$ 用上面的和式来代替后，再用行列式性质，就可以把这行列式的第一列各元素都化为零，只有第一列第一行的元素是例外，它等于

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\frac{\partial z}{\partial y_\nu}$$

把变换所得的行列式按第一列的元素展开，就证明了(18)式. ——校者注

可以与积分基底无关地陈述关于微分方程 (10) 的雅可比乘子的下列命题：

如果系数 $f_\nu(x, y)$ 在区域 $\mathfrak{G}(x, y)$ 内对于 y_μ 连续可微，则

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial(M f_\nu)}{\partial y_\nu} = 0 \tag{20}$$

是在 $\mathfrak{G}$ 内连续可微函数 $M(x, y)$ 为方程 (10) 的雅可比乘子的必要条件.

反之，如果诸系数 f_ν 在整个 x, y 空间内有界，连续且关于 y_μ 两次连续可微，则任何满足关系式 (20) 的处处连续可微函数 $M(x, y)$ $(\neq 0)$ 都是方程 (10) 的雅可比乘子. 特别地，如果诸系数 f_ν 在区域 $\mathfrak{G}$ 内关于 y_μ 连续可微，且在方程 (10) 的某个特征场 $G(l)$ 内等式

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\nu} = 0$$

成立，则方程 (10) 在 $G(l)$ 中有雅可比乘子 $M = 1$.

如果已知一个雅可比乘子，则可用它来求下述的积分基底中所缺的一个积分. 事实上，设已知方程 (10) 的 $n-1$ 个积分[1]

$$\phi_1(x, y), \cdots, \phi_{n-1}(x, y),$$

这里

$$\frac{\partial(\phi_1, \cdots, \phi_{n-1})}{\partial(y_1, \cdots, y_{n-1})} \neq 0,$$

又设 $M(x, y)$ 是 (10) 的一个已知的雅可比乘子. 我们引入新变量(试与 § 3.5(a) 比较)

$$\bar{z}(\bar{x}, \bar{y}) = z(x, y), \ \bar{x} = x,$$

$$\bar{y}_1 = \phi_1(x, y), \cdots, \bar{y}_{n-1} = \phi_{n-1}(x, y), \bar{y}_n = y_n.$$

1) 这里没有叙述精确的假设. 通常的陈述都是不完全的.

于是微分方程(10)具有特殊形状

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}}+g(\bar{x},\bar{y})\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}_n}=0.$$

对应的特征方程

$$\bar{y}_n'(\bar{x})=g(\bar{x},\bar{y})$$

(其中 $\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_{n-1}$ 看作是参数)具有积分因子(欧拉乘子)(参看手册 I, A § 4.13)M: $\frac{\partial(\phi_1,\cdots,\phi_{n-1})}{\partial(y_1,\cdots,y_{n-1})}$. 因此,在引入新变量 $\bar{y}$,之后,方程(10)可经求积分而解出.

3.9. 其它注记. 关于这些,参看 § 2.9.

3.10. 解法概述. 求解方程(1)有下列各种方法:

(a) 借助于特征线研究积分曲面(参看 § 2.4).

(b) 按照 § 3.3,利用特征方程的组合可以求得一些个别积分或一组积分基底. 如果求得一个或多个函数无关的积分,则由 § 3.5(a)知,所给微分方程可以化为含有自变数个数较少的方程. 有时为了得到整个积分基底,可以利用雅可比乘子(参看 § 3.8). 根据 § 3.4,由积分基底可以得到所有的积分.

(c) 如果需要确定带有已知初值的积分(柯西问题),若已知一组积分基底,或者能容易求得它,则可按 § 3.4(b)中的例子那样处理. 也可以利用 § 3.6 和 § 3.7 中的方法,因为在那些存在定理的证明中也包含有构造出解的方法(参看 § 2.6(b),(c)及 § 2.8(d)中的例子).

(d) 利用幂级数展开式(参看 § 2.9).

(e) 如果由于不可克服的解析的困难,前述任一方法都不能达到(求解)目的,则可利用 Kamke 的手册 I 第八章中所叙述的近似方法解特征方程(2)或(11),然后再用初始条件求得这偏微分方程的近似数值解.

§ 4. 一般线性方程:

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\boldsymbol{r})p_\nu + f_0(\boldsymbol{r})z = f(\boldsymbol{r})$$

4.1. 定义. n 个自变量、一个未知函数 $z = z(x_1, \cdots, x_n)$ 的一阶非齐次线性偏微分方程的一般形式为(参看 § 1.1)

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_\nu} + f_0(x_1, \cdots, x_n)z = f(x_1, \cdots, x_n), \tag{1}$$

或利用缩写记号 $p_\nu = \dfrac{\partial z}{\partial x_\nu}$, 并以 $\boldsymbol{r}$ 代替 $x_1, \cdots, x_n$, 即为

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\boldsymbol{r})p_\nu + f_0(\boldsymbol{r})z = f(\boldsymbol{r}). \tag{1'}$$

如果 $f(\boldsymbol{r}) = 0$, 则称这个线性方程为缩短方程, 也称广义的齐次方程[1]. 如果此外还有 $f_0(\boldsymbol{r}) = 0$, 则称这个方程为在§3.1 的意义下的狭义齐次方程(参看 § 1.1).

下列命题显然是正确的:

如果 $\psi_1(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi_2(\boldsymbol{r})$ 是方程(1)的任意两个解, 则 $z = \psi_1 - \psi_2$ 就是对应的缩短方程的解; 如果 ψ_0 是方程(1)的任一个解, 而 ψ 遍历对应的缩短方程的所有的解, 则 $z = \psi_0 + \psi$ 遍历方程(1)的全部解.

4.2. 化一般线性方程为齐次线性方程.

(a) 化为一个 $n+1$ 项的齐次方程.

因为方程(1)是 § 5 中拟线性方程(1)的特殊情况, 所以根据 § 5.4, 它可归结为 $n+1$ 项的齐次线性方程

---

1) 在文献中, 几乎没有单独地讨论方程(1), 所以在文献中所谓齐次方程的缩短方程, 应该理解为狭义的齐次方程.

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\boldsymbol{r})\frac{\partial w}{\partial x_\nu} + [f(\boldsymbol{r}) - f_0(\boldsymbol{r})z]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

其特征方程组是

$$\begin{cases} x_\nu'(t) = f_\nu \quad (\nu = 1, \cdots, n), \\ z'(t) = f - zf_0. \end{cases}$$

这个方程组也称为方程 (1) 的**特征方程组**. 如果它的前 n 个方程可解，则最后一个方程的解可由求积分得到[1].

(b) **化为 n 项的齐次方程.**

对应于方程 (1) 的 n 项的齐次线性方程的形状是

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\boldsymbol{r}) p_\nu = 0. \tag{2}$$

根据 §3，可在区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ 内求得它的一组积分基底 $\psi_1(\boldsymbol{r}), \cdots, \psi_{n-1}(\boldsymbol{r})$. 因为在区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ 内有

$$\frac{\partial(\psi_1, \cdots, \psi_{n-1})}{\partial(x_1, \cdots, x_{n-1})} \neq 0,$$

所以在作变换(试与 §3.5(a) 比较)

$$y_1 = \psi_1(\boldsymbol{r}), \cdots, y_{n-1} = \psi_{n-1}(\boldsymbol{r}), \ y_n = x_n \tag{3}$$

之后，区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ 一对一地被映射到区域 $\bar{\mathfrak{G}}(\boldsymbol{y})$ 上. 而方程 (1) 的积分是满足下列微分方程的关于所有 y_ν 连续可微的函数 $z(\boldsymbol{r}) = \zeta(\boldsymbol{y})$:

$$g_n(\boldsymbol{y})\zeta_{y_n} + g_0(\boldsymbol{y})\zeta = g(\boldsymbol{y}), \tag{4}$$

式中 g_n, g_0, g 分别是由 f_n, f_0, f 经变换 (3) 所得到的函数. 方程 (4) 是含自变量 y_n 和参数 $y_1, \cdots, y_{n-1}$ 的一阶非齐次线性常微分方程. 因此可从它求积分而解出. 其推导如下: 应用变换 (3)，方程 (1) 的左端的变化是

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\boldsymbol{r})p_\nu + f_0(\boldsymbol{r})z = \sum_{k=1}^{n-1}\zeta_{y_k}\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\frac{\partial\psi_k}{\partial x_\nu} + g_n\zeta_{y_n} + g_0\zeta,$$

1) 要解一个以 $z(t)$ 为未知函数的一阶线性常微分方程而求得 $z(t)$. ——校者注

据 ϕ_k 的定义，上式右端中的第二个和式 $\sum_{\nu=1}^{n}$ 的值等于零．所以方程（1）经变换后变为方程（4）．

应指出，（a）和（b）这两种方法，将得到一样的答案．关于这样例子，参看第二部分的方程 2.14 与 2.20．

4.3. 存在性与唯一性定理． 这样的定理仅当系数 f_ν 中有一个在一个已给的大区域内恒不等于零时方能证明[1]． 当用这个系数去除所有项之后，则可得有一个系数等于 1 的方程． 如果诸系数还依赖于参数（有时会遇到这样的方程，参看 §6.4），则可将原方程写成如下形状

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda}) \frac{\partial z}{\partial y_\nu}+f_0(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda}) z = f(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda}), \tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{y}$ 表示 $y_1, \cdots, y_n$，而 $\boldsymbol{\lambda}$ 表示 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$．

假设．在区域

$a \leqslant x \leqslant b$[2]，$-\infty < y_1, \cdots, y_n < +\infty$，$\Lambda_\mu \leqslant \lambda_\mu \leqslant \Lambda_\mu^*$[3]

内，函数 $f_\nu(\nu \geqslant 1)$ 对于每一固定的 λ 有界[3]，所有的 f_ν 和 f 都连续． 其次，偏导数 $\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\mu}, \frac{\partial f_\nu}{\partial \lambda_\kappa}$ $(\nu=0, 1, \cdots, n)$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y_\kappa}, \frac{\partial f}{\partial \lambda_\kappa}$ 存在，连续，而且 $k-1$ $(k \geqslant 1)$ 次对于它们的所有 $m+n+1$ 个变量连续可微．最后，在区域

$-\infty < y_1, \cdots, y_n < +\infty$，$\Lambda_\mu \leqslant \lambda_\mu \leqslant \Lambda_\mu^*$[4]

内考察对于所有 $m+n$ 个变量 k 次连续可微的函数 $\omega(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda})$．

1）但是，$n=2$ 时的情况参看 §5.6(b)．

2）在这不等式中的一个或两个等号可以去掉；不排除 $a=-\infty$，$b=+\infty$ 的情况．

3）这个假设也可用下面的代替：当 λ 的值固定时，偏导数 $\frac{\partial f_\nu}{\partial y_k}$ $(\nu \geqslant 1)$ 有界．

4）参看脚注 2）．

结论. 对于区间

$$a \leqslant \xi \leqslant b^{1)}, \quad \Lambda_\mu \leqslant \lambda_\mu \leqslant \Lambda_\mu^{*1)}$$

上的任何 ξ, λ, 方程 (5) 在区域

$$a \leqslant x \leqslant b, -\infty < y_1, \cdots, y_n < +\infty$$

内有满足初值条件

$$\psi(\xi, y; \xi, \lambda) = \omega(y, \lambda)$$

的唯一积分

$$z = \psi(x, y; \xi, \lambda),$$

它对于所有 $m + n + 2$ 个变量都是 k 次连续可微的。

如果

$$y_\nu = \varphi_\nu(x, \xi, \eta_1, \cdots, \eta_n, \lambda) (\nu = 1, \cdots, n)$$

是方程组

$$y_\nu'(x) = f_\nu(x, y, \lambda) \ (\nu = 1, \cdots, n) \tag{6}$$

的特征函数[2],则积分的参数表达式为

$$y_\nu = \varphi_\nu(x, \xi, \eta_1, \cdots, \eta_n, \lambda) \quad (\nu = 1, \cdots, n),$$

$$z = e^{-F_0}\left\{\omega(\eta_1, \cdots, \eta_n, \lambda) + \int_\xi^x f(x, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, \lambda) e^{F_0} dx\right\}.$$

式中

$$F_0 = F_0(x, \xi, \eta_1, \cdots, \eta_n, \lambda) = \int_\xi^x f_0(x, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, \lambda) dx$$

是已知函数[3].

4.4. 哈尔不等式. 设在棱锥区域

$$\mathfrak{G}: \ \xi \leqslant x < c; \ \alpha_\nu + A(x - \xi) \leqslant y_\nu \leqslant \beta_\nu - A(x - \xi),$$

$$\beta_\nu - \alpha_\nu > 2A(c - \xi) \quad (\nu = 1, \cdots, n)$$

给定一个连续可微函数 $z = z(x, y)$, 它满足不等式

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \leqslant A \sum_{\nu=1}^{n} \left|\frac{\partial z}{\partial y_\nu}\right| + B|z| + C, \ A > 0, \ B > 0, \ C \geqslant 0;$$

---

1) 参看上页脚注2).

2) 亦即方程 (6) 的通过点$(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n)$的积分曲线. 参看手册 I, A § 5.4.

3) 参看 E. Kamke, *Math. Zeitschrift*, 49(1943), p.275.

$$-\omega(\mathbf{y}) \leqslant z(\xi, \mathbf{y}) \leqslant \omega(\mathbf{y}),$$

其中函数 $\omega(\mathbf{y})$ 当 $\alpha_\nu \leqslant y_\nu \leqslant \beta_\nu$ $(\nu = 1, \cdots, n)$ 时连续可微，而且满足不等式

$$\omega \geqslant 0, \quad \omega_{y_\nu} \geqslant 0 \quad (\nu = 1, \cdots, n).$$

则在区域 $\mathfrak{G}$ 内成立**哈尔不等式**[1]

$$|z(x, \mathbf{y})| \leqslant \frac{C}{B}\left[e^{B(x-\xi)} - 1\right] + e^{B(x-\xi)}\omega(\bar{\mathbf{y}}),$$

其中 $\bar{y}_\nu = y_\nu + A(x - \xi)$, $\nu = 1, \cdots, n$.

4.5. $n = 2$ 的情况(补充定理).

(a) 设在其边平行于坐标轴的矩形 $ABCD$ (图 10) 中考察连续可微函数 $f(x, y)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$, 此处 $f \geqslant 0$ ($f \leqslant 0$). 其次设 L 是连接 B 和 D (A 和 C) 的连续可微曲线，其斜率是负(正)的，最后，假设在曲线 L 上给定连续可微函数 $\omega(x)$. 则微分方程

$$p + f(x, y)q = g(x, y)z + h(x, y)$$

在矩形 $ABCD$ 中有唯一的在 L 上取 ω 值的解[2]. 这结论很容

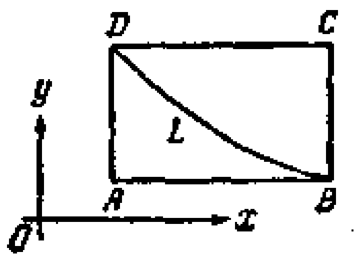

图 10

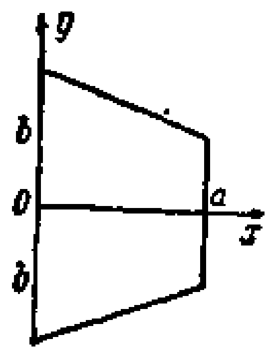

图 11

1) 参看 A. Haar, *Acta Szeged*, 4(1928), p.103, Atti Congresso Intern. *Bologna*, 1928, III, p.5—10(在那里 ω 是一正常数); Nagumo, *Journal of Math.*, 15 (1938), p.51—56; J. Szarski, *Annales Soc. Polon*, 21 (1948), p.7—25. 哈尔定理是本书 § 12.11 中的一个特例.

2) 参看 A. Colucci, *Atti Torino*, 64(1928—1929), p.219—234.

易理解,因为由 L 作出的特征底线是下降(上升)的.

(b) 设在梯形 $0 \leqslant x \leqslant a$, $|y| + Ax \leqslant b$ (图 11) 中,函数 $f(x, y)$, $g(x, y)$, f_y, g_y 连续,且

$$|f| \leqslant A, \quad |f_y| \leqslant B, \quad |g| \leqslant \frac{Cx^k}{k!}, \quad |g_y| \leqslant \frac{Dx^l}{l!}$$
$$(k, l \geqslant 0).$$

则[1]方程

$$p = f(x, y)q + g(x, y)$$

在这梯形内有唯一的积分,它当 $x = 0$ 时取零值. 对于这个积分,下列估计式正确:

$$|z| \leqslant \frac{Cx^{k+1}}{(k+1)!}, \quad |z_y| \leqslant \frac{De^{aB}x^{l+1}}{(l+1)!}.$$

(c) 考察[2]方程

$$f(x, y)p + g(x, y)q = [\rho h(x, y) + k(x, y, \rho)]z,$$

其中假设函数 f 和 g 在点 $x = a$, $y = b$ 的某个邻域内是正则解析的,此外,假设函数 $k(x, y, \rho)$ 被展成下列渐近级数

$$k \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu(x, y)\rho^{-\nu},$$

其中系数 $\gamma_\nu(x, y)$ 在同一邻域内是正则解析的. 如果置

$$z = u(x, y, \rho)e^{\varphi(x,y)\rho},$$

则从已给方程推得

$$u\rho(f\varphi_x + g\varphi_y - h) + fu_x + gu_y - ku = 0.$$

如果选取 φ 作为线性方程

$$f\varphi_x + g\varphi_y = h$$

的解,则得方程

$$fu_x + gu_y = ku.$$

---

1) 参看 O. Perron, *Math. Zeitschrift*, **27**(1928), p.554.

2) 参看 W. Sternberg, Sitzungsberichte Heidelberg, 1920, p.11.

建立特征方程，就可求得这个方程的解的渐近表达式。

§5. 拟线性方程：$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\mathfrak{r}, z)p_\nu = g(\mathfrak{r}, z)$[1]

5.1. 几何解释. n 个自变量、一个未知函数 $z=z(x_1,\cdots,x_n)$ 的一阶拟线性[2]偏微分方程具有下列形式(参看 §1.1)

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x_1, \cdots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_\nu} = g(x_1, \cdots, x_n, z). \qquad (1)$$

或用记号 $p_\nu = \dfrac{\partial z}{\partial x_\nu}$，$\mathfrak{r}$ 表示分量为 $x_1, \cdots, x_n$ 的向量，则为

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\mathfrak{r}, z)p_\nu = g(\mathfrak{r}, z). \qquad (1')$$

显然，它关于未知函数的导数是线性的，而对函数 z 本身来说，是非线性的。

下面，我们总是仅在 $n+1$ 维 $\mathfrak{r}$，z 空间的这样的区域 $\mathfrak{G}_{n+1}(\mathfrak{r}, z)$ 内来考察微分方程(1)，系数 f_ν，g 在这区域内连续。

足够直观的几何解释仅在 $n=2$ 时是可能的. 在这种情况下，如果将 (1) 型的微分方程写为

$$f(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = h(x, y, z),$$

$$|f| + |g| > 0.$$

则空间的每一点 (x_0, y_0, z_0) 通过这个方程将对应于面元素

---

1) 叙述按照 Kamke, DGlen, p.330—341. [也请参看列于书末的文献. ——俄译本编者注]

2) 我同意 Courant-Hilbert, Methoden math. Physik II, p.57 (中译本：数学物理方法 II, p.55) 中的名称. 从前这方程被称为线性的. [可是有时称 (1) 型方程为几乎线性的(如果函数 f_ν 不依赖于 z) 或甚至简称为线性非齐次的. 例如参看 Петровский, Степанов. 术语“拟线性方程”常用于表示更广一类的方程。——俄译本编者注]

x_0, y_0, z_0, p, q. 它的方向系数 p, q 满足方程

$$f(x_0, y_0, z_0)p + g(x_0, y_0, z_0)q = h(x_0, y_0, z_0).$$

这个方程确定了通过直线

$$\begin{aligned} x - x_0 &= f(x_0, y_0, z_0)t, \\ y - y_0 &= g(x_0, y_0, z_0)t, \\ z - z_0 &= h(x_0, y_0, z_0)t, \end{aligned}$$

的平面集合（其中 t 是参数），但垂直于 x, y 平面的平面除外．因此，象在 § 2.1 中那样，每一点 (x_0, y_0, z_0) 由于该微分方程将对应于一个平面束．然而，一般地说，这些平面的公共直线现在已经不平行于 x, y 平面了（与 §2.1 不同）．

5.2. 特征线与积分曲面.

(a) 拟线性方程 (1) 的特征方程定义为由 $n+1$ 个常微分方程所组成的方程组

$$\begin{cases} x_\nu'(t) = f_\nu(\boldsymbol{r}, z) \ (\nu = 1, \cdots, n), \\ z'(t) = g(\boldsymbol{r}, z). \end{cases} \tag{2}$$

应该注意，最后一个方程中是 g，不是 $-g$．这个方程组的每一个解

$$x_1 = \varphi_1(t), \cdots, x_n = \varphi_n(t), z = \varphi(t) \tag{3}$$

称为微分方程 (1) 的特征线．在 $\boldsymbol{r}$ 空间中由 (3) 的前 n 个方程所确定的曲线称为特征底线．

(b) 方程 (1) 的积分和特征线之间存在下述联系（试与 § 3.2 比较）．

设 $\chi(\boldsymbol{r})$ 是在区域 $\mathfrak{G}_n(\boldsymbol{r})$ 内连续可微的函数，又设点 $(\boldsymbol{r}, \chi(\boldsymbol{r}))$ 属于区域 $\mathfrak{G}_{n+1}$．在这些假设下，函数 $z = \chi(\boldsymbol{r})$ 在 $\mathfrak{G}_n$ 内是方程 (1) 的一个积分的必要条件是：经过曲面 $z = \chi(\boldsymbol{r})$ 的任一点 $(\xi_1, \cdots, \xi_n, \zeta)$ 至少有一段特征线通过，这段特征线必须整段属于这曲面．换句话说，对于通过这曲面的任意一点的特征线 (3) 在区域 $\mathfrak{G}_{n+1}$ 的一段，恒等式

$$\varphi(t) = \chi(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))$$

必须成立.

5.3. 利用积分曲面的几何特性求解微分方程的例子.

根据 § 5.2(b), 方程 (1) 的积分是由特征线构成的连续可微曲面. 如果能一目了然地观察出某个方程所有的特征线的形状, 则可根据这个事实来构造积分曲面. 我们用几个例子来说明这个方法.

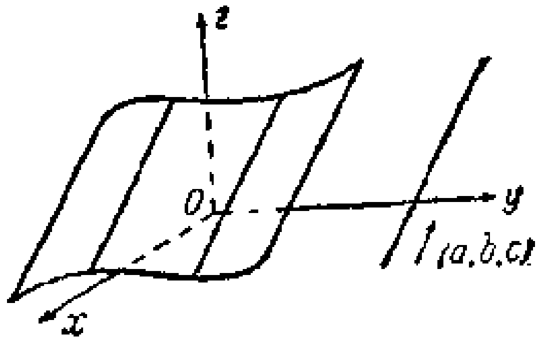

图 12

(a) $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} = c$.

其中 $|a| + |b| > 0$. 特征方程

$$x'(t) = a, \quad y'(t) = b, \quad z'(t) = c$$

表明特征线是直线

$$x = \xi + at, \ y = \eta + bt, \ z = \zeta + ct.$$

其中 t 是参数, ξ, η, ζ 可以任意取. 换句话说, 所有特征线构成了一族平行直线. 由于条件 $|a| + |b| > 0$, 它们不垂直于 x, y 平面. 于是积分曲面就是所有可能的连续可微柱面, 其母线平行于该族直线[1](图 12); 试与 § 2.4(a) 比较一下.

(b) $(x-a)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y-b)\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - c$.

1) [亦即平行于向量 (a, b, c). ——俄译本编者注]

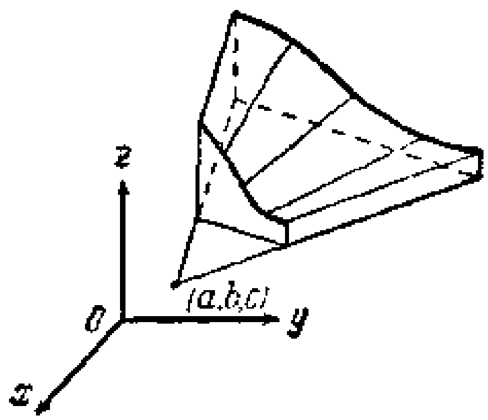

图 13

特征方程

$$x'(t)=x-a,\ y'(t)=y-b,\ z'(t)=z-c$$

给出下列特征线族

$$x-a=C_1e^t,\ y-b=C_2e^t,\ z-c=C_3e^t,$$

其中 C_1, C_2, C_3 是任意常数．亦即特征线族是自点 (a,b,c) 出发的射线集合．因此，积分曲面是所有可能的连续可微锥面，其顶点在 (a,b,c)（图 13）；试与 § 2.4(b) 比较一下．

(c) $(bz-cy)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(cx-az)\dfrac{\partial z}{\partial y}=ay-bx,$

$|a|+|b|+|c|>0.$

特征方程是

$$x'(t)=bz-cy,\ y'(t)=cx-az,\ z'(t)=ay-bx.$$

由此推得沿每一特征线有

$$ax'+by'+cz'=0 \text{ 即 } ax+by+cz=\text{常数},$$

而且还有

$$xx'+yy'+zz'=0 \text{ 即 } x^2+y^2+z^2=\text{常数}^{1)}.$$

于是，每一特征线既属于平面

$$ax+by+cz=C_1,$$

1) 由此，从 § 5.4 或 § 5.2 推得 $z=\sqrt{C^2-x^2-y^2}$ 及 $z=\dfrac{C-ax-by}{c}$（若 $c\neq0$）都是这个方程的积分．

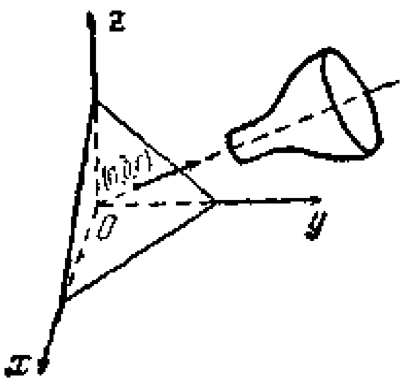

图 14

同时又属于球面

$$x^2+y^2+z^2=C_2^2.$$

因此，它是位于该平面上的一个圆(可能退化为一个点)．于是，积分曲面是所有可能的连续可微旋转曲面(或其一部分)．它们的旋转轴通过坐标原点且垂直于平面 $ax+by+cz=0$[1] (图 14)；试与 § 2.4(c) 比较．

(d) $$(bz-cy+A)\frac{\partial z}{\partial x}+(cx-az+B)\frac{\partial z}{\partial y}=ay-bx+C.$$

积分曲面是螺旋曲面．这可以模仿例 (c) 来证明．由于在向量记法下进行计算较简单，所以我们设

$$\boldsymbol{v}=(a,b,c),\ \boldsymbol{V}=(A,B,C),\ \boldsymbol{r}=(x,y,z).$$

于是特征方程取如下形式

$$\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}. \qquad (*)$$

为了使特殊情况((a) 或 (b)中的情况)不发生，只要假设 $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{V}\neq\boldsymbol{0}$ 即可．

现在来证明每一特征线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 是螺旋线，它的轴平行于向量 $\boldsymbol{v}$，并通过自坐标原点出发的向量 $\dfrac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{V}}{v^2}$ 的终点 Q (图 15)．对特征线的任一点 $P=P(\boldsymbol{r})$，我们作向量

$$\boldsymbol{w}=\overrightarrow{QP}=\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{V}}{v^2}.$$

如果用 ρ 表示动点 P 到轴 l 的距离，则由图 15 易知

1) [换句话说，旋转轴通过坐标原点且平行于向量 (a,b,c)．—— 俄译本编者注]

$$v^2\rho^2 = (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})^2.$$ [1]

把前面的 $\boldsymbol{w}$ 表达式代入上式得

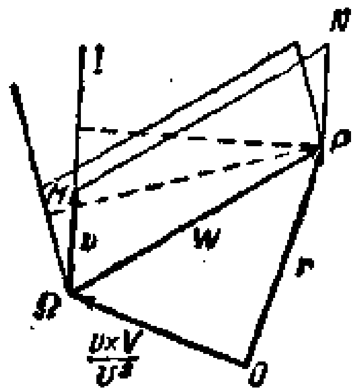

图 15

$$\begin{aligned}
v^2\rho^2 &= (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})^2\\
&= \left(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}\times\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{V}}{v^2}\right)^2\\
&= (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})^2-2(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})\\
&\quad\cdot\left(\boldsymbol{v}\times\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{V}}{v^2}\right)\\
&\quad+\left(\boldsymbol{v}\times\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{V}}{v^2}\right)^2 \quad (**)\\
&= (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})^2-2(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})\frac{1}{v^2}\cdot[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V})-\boldsymbol{V}v^2]+\text{常数}
\end{aligned}$$ [2]

---

1) 如所周知，向量积 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$ 的模等于 $vw\sin\theta$（这里的 θ 是向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 间的夹角），即平行四边形 ΩMNP 的面积；又因距离 $\rho = w\sin\theta$，故有

$$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})^2 = v^2\rho^2.$$

2) 这里要用到向量运算中的两条规则

(i) $$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A} = 0,$$

(ii) $$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}.$$

参看斯米尔诺夫的《高等数学教程》第二卷第二分册四章，公式(18)，(20)。

德文原著的本段的推导过于简短，很难了解，校阅者对这证明作了一些补充与修改，并添了一些注解．俄译本这里有一脚注是错误的，已删。

用规则(ii)于(**)式的中间项的第二个乘数，则得

$$\begin{aligned}
&-2(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})\cdot\left(\boldsymbol{v}\times\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{V}}{v^2}\right)\\
&= -2\frac{(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})}{v^2}\cdot[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{v}-v^2\boldsymbol{V}]\\
&= -2\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V})}{v^2}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{v}+2(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V},
\end{aligned}$$

再用规则(i)于上式第一项，则得

$$\text{上式} = 2(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}.$$

把上式代(*)式中的中间项，又因 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 是常数向量，故

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})^2 &= (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})^2+2(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}+\text{常数}\\
&= (\boldsymbol{V}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})^2+\text{常数}.
\end{aligned}$$

——校者注

$$=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})^2+2(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}+\text{常数}.$$

故得

$$v^2\rho^2=(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})^2+\text{常数}. \qquad (***)$$

把所得的上式对 t 求导，并从特征方程(*)得

$$v^2\frac{d}{dt}\rho^2=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})^2=2(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}')$$

$$=2\boldsymbol{r}'\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}')=0^{1)}.$$

由上式推得距离平方 ρ^2 沿一条特征线保持常数值，即一条特征线上的所有点都与这轴 l 等距离. 其次我们有

$$\boldsymbol{r}'^2=(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})^2=\text{常数}^{2)}$$

及

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V}=\text{常数}.$$

所以在曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 的任一点处的切线向量 $\boldsymbol{r}'$ 和向量 $\boldsymbol{v}$ 成固定角[2]. 故特征线就是具有固定轴 l 的螺旋线，其轴 l 平行于向量 $\boldsymbol{v}$ 且通过点 Ω. 因此，所有积分曲面是由这些螺旋线构成的螺旋曲面.

5.4. 化拟线性方程为齐次线性方程. 利用 §12.3(a) 中的简化方法，由微分方程(1)可得齐次线性方程[3]

---

1) 用上页脚注 1) 中的规则 (i).——校者注

2) 把(***)式移项，并因 $v^2=$ 常数，$\rho^2=$ 常数，推得 $\boldsymbol{r}'^2=(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})^2=$ 常数，故 $|\boldsymbol{r}'|=$ 常数.

又因 $\boldsymbol{v}=(a,b,c)$ 是常向量，所以从

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}'=v|\boldsymbol{r}'|\cos\varphi=\text{常数}$$

推得向量 $\boldsymbol{v}$ 同向量 $\boldsymbol{r}'$ 之间的夹角 φ 为

$$\varphi=\text{常数}.$$

原书关于例(d)的解法的阐述过于简略、 为了减轻读者困难起见，校订者作了一些修改与补充. 修改如有不妥之处，其责任由校订者承担.——校者注

3) 注意，函数 $g(\boldsymbol{r},z)$ 被写在方程的左端中且带有正号.

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\boldsymbol{r}, z) \frac{\partial w}{\partial x_\nu} + g(\boldsymbol{r}, z) \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

其中 $w = w(\boldsymbol{r}, z)$ 为未知函数. 如果 $w(\boldsymbol{r}, z)$ 是这个方程的一个积分,从方程 $w = 0$ 中解出 z, 在一些必要的假设下,可得方程 (1) 的一个解 z.

确切地说,下列命题成立:

设 $w = \psi(\boldsymbol{r}, z)$ 是齐次方程(4)在 $\mathfrak{G}_{n+1}(\boldsymbol{r}, z)$ 内的一个积分;其次设 $\chi(\boldsymbol{r})$ 是 $\mathfrak{G}_n(\boldsymbol{r})$ 内具有下列性质的一个函数:

α) 它在 $\mathfrak{G}_n(\boldsymbol{r})$ 内连续可微;

β) 点 $(\boldsymbol{r}, z = \chi(\boldsymbol{r}))$ 属于区域 $\mathfrak{G}_{n+1}$;

γ) 在任何子域 $\mathfrak{G}_n$ 内都有 $\psi_z(\boldsymbol{r}, \chi(\boldsymbol{r})) \not\equiv 0$;

δ) 函数 $\psi(\boldsymbol{r}, \chi(\boldsymbol{r}))$ 在区域 $\mathfrak{G}_n$ 内为常数.

则 $\chi(\boldsymbol{r})$ 是拟线性方程 (1) 在区域 $\mathfrak{G}_n$ 内的一个积分[1].

根据 § 3.2, 拟线性方程 (1) 的特征方程 (2) 是线性微分方程 (4) 的特征方程.

例. $(y + z)^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} - x(y + 2z) \dfrac{\partial z}{\partial y} = xz.$

试求这个方程通过曲线 $z = x^2$, $y = 0$ 的一个积分曲面.

首先,我们试图求出对应的齐次线性方程

$$(y + z)^2 \frac{\partial w}{\partial x} - x(y + 2z) \frac{\partial w}{\partial y} + xz \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{*}$$

的一个积分. 这个方程的特征方程

$$x'(t) = (y + z)^2, \quad y'(t) = -x(y + 2z), \quad z'(t) = xz$$

给出关系式

$$(y + z)z' + (y' + z')z = 0, \quad xx' + yy' - zz' = 0,$$

---

1) 关于可否利用这个方法变易方程 (4) 的积分 ψ 从而得到方程 (1) 的全部积分的问题,参看 Kamke, DGlen, p. 333.

亦即，根据 §3.3，方程(*)有积分

$$\phi_1(x,y,z)=(y+z)z,\quad \phi_2(x,y,z)=x^2+y^2-z^2.$$

并且它们构成一组积分基底：对于任意连续可微函数 $\Omega(u,v)$，表达式

$$\phi(x,y,z)=\Omega(\phi_1(x,y,z),\phi_2(x,y,z)) \qquad (**)$$

也是方程(*)的一个积分.

如果现在从 $\phi=0$ 中能解出 z，并且它的解 $z=\chi(x,y)$ 满足前述假设，则 χ 就是原拟线性微分方程的一个积分，这个积分当 $y=0$ 时应该取值 $z=x^2$. 亦即 z 应该满足 $\Omega(u,v)=0$. 因此，特别地，这个方程当

$$u=\phi_1(x,0,x^2)=x^4,\qquad v=\phi_2(x,0,x^2)=x^2-x^4$$

时应该满足. 由这些关系式推出：$(u+v)^2=u$. 于是对于 $\Omega(u,v)=(u+v)^2-u$，初始条件被满足，且由(**)得

$$\phi=(x^2+y^2+yz)^2-(y+z)z.$$

关于 z 解方程 $\phi=0$ 即可得到原方程的积分.

5.5. 特殊情况：$p+\sum\limits_{\nu=1}^{n}f_\nu(x,y,z)q_\nu=g(x,y,z)$.

(a) 如果方程(1)的系数 f_ν 中至少有一个在整个所考察的区域内不为零，则除以这个系数并经不复杂的计算后，我们得到形如

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\sum_{\nu=1}^{n}f_\nu(x,\boldsymbol{y},z)\frac{\partial z}{\partial y_\nu}=g(x,\boldsymbol{y},z) \qquad (5)$$

的方程，其中 $\boldsymbol{y}$ 表示分量为 $y_1,\cdots,y_n$ 的向量，$z=z(x,\boldsymbol{y})$ 是未知函数. 方程(5)的特征方程组可写成

$$\begin{cases} y_\nu'(x)=f_\nu(x,\boldsymbol{y},z) \quad (\nu=1,\cdots,n),\\ z'(x)=g(x,\boldsymbol{y},z). \end{cases} \qquad (6)$$

其中设 $t=x$.

(b) 下述柯西问题的解的存在定理成立[1]。

我们在区域

$$|x-\xi|<a;\ y, z \text{ 任意}$$

内考察对于 y_μ 和 z 有一阶有界偏导数的连续可微函数 f_1, $\cdots$, f_n, g. 假设所有这些导数的绝对值总起来以常数 A 为界；其次设 $\omega(y)$ 对于所有的 y_μ 有一阶有界连续偏导数，它们的绝对值总起来以常数 C 为界．置

$$\alpha=\frac{1}{(n+1)A}\ln\left[1+\frac{n+1}{n(C+1)}\right],$$

则微分方程 (5) 在区域

$$|x-\xi|<\min(a,\alpha),\ y \text{ 任意}$$

内有唯一的积分 $z=\chi(x,y)$，它满足初值条件

$$\chi(\xi,y)=\omega(y).$$

这个积分在以 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 为参数的参数记法下呈如下形状

$$z=\varphi(x,\xi,\eta_1,\cdots,\eta_n,\omega(\eta_1,\cdots,\eta_n)),$$

$$y_\nu=\varphi_\nu(x,\xi,\eta_1,\cdots,\eta_n,\omega(\eta_1,\cdots,\eta_n))\ (\nu=1,\cdots,n),$$

其中

$$y_\nu=\varphi_\nu(x,\xi,\eta_1,\cdots,\eta_n,\zeta)\quad(\nu=1,\cdots,n),$$

$$z=\varphi(x,\xi,\eta_1,\cdots,\eta_n,\zeta).$$

是方程组 (6) 的通过点 $(\xi,\eta_1,\cdots,\eta_n,\zeta)$ 的一条积分曲线 (参看手册 I, A § 5.4).

对于拟线性方程 (5)，使用 § 12.2 中的方法，得到 $2n+1$ 个特征方程，则不难证明前面所引入的数 α 可以放大，亦即可置[2]

$$\alpha=\frac{1}{A(C+1)},\ \text{当 } n=1 \text{ 时};$$

---

1) 参看 Kamke, DGlen, p.335—340，以及其中的附录．

2) 参看 J. Perausówna, *Annales Soc. Polon.*, 12(1934), p.1—5; T. Ważewski, *Annales Soc. Polon.*, 12 (1934), p.6—15; E. Kamke *Publications* de l'Institut Math. de l'Acad. Serbe., 4(1952), p.61—68.

$$\alpha = \frac{1}{(n-1)A}\ln\frac{n(C+1)}{nC+1}，\text{当 } n \geqslant 2 \text{ 时}.$$

在存在定理的假设下，虽然容易看出那些特征线在整个区域 $|x-\xi|<a$ 内是存在的，然而必须引进这样一个数 α. 这从 $n=1$ 的情况可以看出. 在这种情况下，那些特征线所组成的带形[1]最初在 x，y 平面上是单叶的（Schlicht）. 然而这带形在 $x=\xi$ 的远距离处可能被弯曲，以致它在 x，y 平面上不再是单叶的了（图 16）.

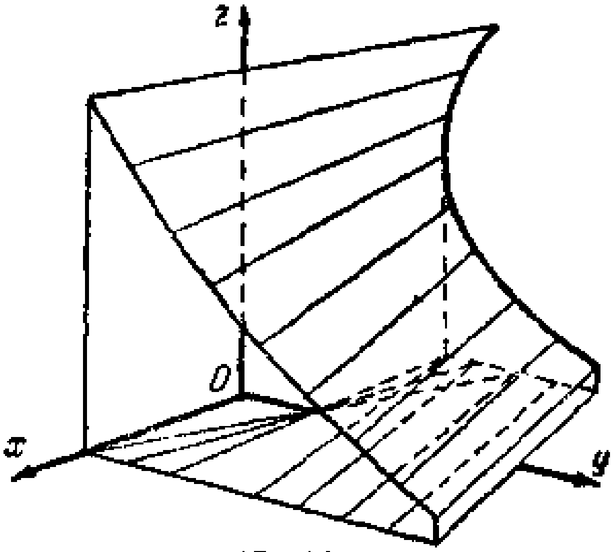

图 16

(c) 如果微分方程 (5) 不是给定在特殊的区域 (7) 内，而是给定在某个更一般的区域 $\mathfrak{G}_{n+2}(x, y, z)$ 内，则按 § 3.6(c) 那样，可把区域 (7) 甚或整个 x，y，z 空间作为诸系数的定义域. 这样，就可利用 (b) 中的方法导出对于区域 $\mathfrak{G}_{n+2}$ 的子域的存在定理[2].

(d) **例.** 设有方程

---

1) “特征线所组成的带形”的德文是 charakteristiken Band，即英文的 characteristic manifold（特征流形）. 关于 schlicht 这字的解释已见第 6 页脚注 2. ——校者注

2) 参看 O. Perron, *Math. Zeitschrift*, **27**(1928), p.557.

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

需要求出当给定函数ω时，满足初值条件 $z(0, y)=\omega(y)$ 的一个积分.

特征方程是

$$y'(x)=1, \quad z'(x)=z.$$

通过点 (ξ, η, ζ) 的特征线的表达式为

$$y=\varphi_1(x, \xi, \eta, \zeta)=x-\xi+\eta,$$

$$z=\varphi(x, \xi, \eta, \zeta)=\zeta e^{x-\xi}.$$

因此，由初始条件，有

$$y=x+\eta, \quad z=e^x\omega(\eta).$$

这就是所求积分的参数表达式. 此处还可以消去参数 η, 得

$$z=e^x\omega(y-x).$$

即使函数ω不全满足存在定理中的假设，它也给出所求积分.

5.6. 柯西问题的解.

(a) 对于微分方程 (1) 的广义柯西问题的表述，可以象§3.7(b) 中那样逐字逐句地叙说，即在由参数方程

$$x_\nu=u_\nu(t_1, \cdots, t_{n-1}) \ (\nu=1, \cdots, n)$$

给定的底域 $\mathfrak{g}(\boldsymbol{r})$ 内，需要求出方程(1)的取给定值

$$z=u(t_1, \cdots, t_{n-1}) \tag{8}$$

的一个积分.

这个问题在下列假设下是可解的[1].

设系数 $f_\nu(\boldsymbol{r}, z)$ 和 $g(\boldsymbol{r}, z)$ 在区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}, z)$ 内连续可微；函数 u_ν 和 u 在某个区域 $H(t_1, \cdots, t_{n-1})$ 内连续可微；点集 $\mathfrak{H}(\boldsymbol{r}, z)$ ($\boldsymbol{r}\in\mathfrak{g}$, z 由 (8) 式确定) 应属于 $\mathfrak{G}$；最后假定在区域 H 内有

1) 参看 Courant-Hilbert, Methoden math. Physik II, p.57—63 (中译本：数学物理方法 II, p.54—59). 那里也研究行列式 (9) 等于零时的情况.

$$\begin{vmatrix} f_1(u_1,\cdots,u_n,u)\cdots f_n(u_1,\cdots,u_n,u) \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t_1} \quad \cdots \quad \dfrac{\partial u_n}{\partial t_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t_{n-1}} \quad \cdots \quad \dfrac{\partial u_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (9)$$

通过点集 $\mathfrak{H}$ 的点作出特征线

$$\begin{cases} x_\nu = \varphi_\nu(t,u_1,\cdots,u_n,u) \ (\nu=1,\cdots,n), \\ z=\varphi(t,u_1,\cdots,u_n,u), \end{cases} \qquad (10)$$

其中前 n 个方程确定一个特征线底域 $G(H)$. 则方程(10)在 $G(H)$ 的每个这样的区域内提供了所求积分的一种参数表达式,该区域包含 $\mathfrak{g}$ 且具有下述性质: 点 $(\mathfrak{r}, z)\in\mathfrak{G}$, 并在这区域中把(10)的前 n 个方程关于 $t_1,\cdots t_{n-1}, t$ 解出,可得作为变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的连续可微函数的诸参数. 由于(9)式,这样的解出在区域 $\mathfrak{G}$ 的充分小的邻域内显然是可能的.

(b) 对于微分方程

$$f(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+g(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{h(x,y)}{\lambda'(z)}$$

下述命题也是正确的.[1]

设系数 f, g, h 在 $\mathfrak{G}(x,y)$ 内连续可微,且 $|f|+|g|>0$; 其次设函数 $\lambda(u)$ 当 $u_1<u<u_2$ 时遍历一切实数,并有异于零的连续导数. 则前述微分方程在区域 $\mathfrak{G}$ 的任一单连通子域 $\mathfrak{g}$ 内有一积分,子域 $\mathfrak{g}$ 和区域 $\mathfrak{G}$ 在 x, y 平面的有限部分内没有公共边界点,且函数 f 和 g 在其中有界.

对于 $\lambda(u)=u, \ln u, \operatorname{tg} u, \operatorname{ctg} u$, 所给方程的右端分别等于 $h, zh, h\cos^2 z, -h\sin^2 z$.

---

1) 参看 E. Kamke, *Math. Zeitschrift*, 41(1936), p.66; M. Cibrario, *Atti Accad. Lincei* (6), 13(1931), p.26—31.

5.7. 展成幂级数求解. 如果允许变量取复数值，则下述存在定理正确.

设微分方程(5)中诸系数 $f_\nu(x, y, z)$ 与 $g(x, y, z)$ 在点 $(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n, \zeta)$ 的某个邻域内是变量 $x, y_1, \cdots, y_n, z$ 的正则函数，亦即它们在这邻域内可展为关于 $x-\xi$, $y_\nu-\eta_\nu$, $z-\zeta$ 的绝对收敛的幂级数；此外，设 $\omega(y)$ 是 $y_1, \cdots, y_n$ 的已知函数，它在点 $(\eta_1, \cdots, \eta_n)$ 的某个邻域内正则，且

$$\omega(\eta_1, \cdots, \eta_n) = \zeta.$$

则微分方程(5)具有唯一的积分，它在点 $(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ 的某个充分小的邻域内是 $y_1, \cdots, y_n$ 的正则函数，并且当 $x = \xi$ 时取值[1)]

$$z(\xi, y) = \omega(y).$$

为了求幂级数

$$z = \sum_{\nu, \nu_1, \cdots, \nu_n} C_{\nu, \nu_1, \cdots, \nu_n}(x-\xi)^\nu (y_1-\eta_1)^{\nu_1} \cdots (y_n-\eta_n)^{\nu_n}$$

的系数，可将这级数代入微分方程(5)，考虑到初始条件，令对应的幂相等即可确定.

5.8. 解法概述. 在一系列情况下，利用 § 5.3 和 § 5.4 中所述的方法可以达到求解目的. 如果用这些方法不能得到解，则在给定积分的初值情况下，可以用手册 *I*, *A* § 6 中的方法近似地解对应的特征方程，然后再按 § 5.5 或 § 5.6 中的方法求得参数形式的近似数值解.

---

1) 参看 Courant-Hilbert, Methoden math. Physik II, p.31—34 (中译本：数学物理方法 II, p.30—42). Forsyth, Diff. Equations V, 第1章. Goursat, Équations du premier ordre, 第1章. [这是一般的柯娃列夫斯卡娅定理的特殊情况. 参看 Степанов, p.335 (中译本：微分方程教程, p.323). И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961, p.22 (中译本：И. Г. 彼得罗夫斯基，偏微分方程讲义，段虞荣译，人民教育出版社，1978, p.15—23). ——俄译本编者注]

§6. 线性方程组[1]

6.1. 特殊情况：$p_\nu=f_\nu(r)$，$(\nu=1,\cdots,n)$. n 个自变量、一个未知函数的最简单的一阶偏微分方程组有如下形状

$$\frac{\partial z}{\partial x_\nu}=f_\nu(r)\quad(\nu=1,\cdots,n).$$

式中仍假设 r 代表分量为 $x_1,\cdots,x_n$ 的向量，而 $z=z(r)$ 是未知函数. 如果函数 f_ν 在区域 $\mathfrak{G}(r)$ 内连续可微，则这方程组的每个解是两次连续可微的函数. 因为[2]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_\mu\partial x_\nu}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_\nu\partial x_\mu},$$

所以等式(可积性条件)

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}=\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\ (\mu,\nu=1,\cdots,n)$$

必然满足.

如果这个条件成立，则在每一单连通域 $\mathfrak{G}$ 内原方程组可解，而且还可满足预先提出的初始条件：函数 z 在区域 $\mathfrak{G}$ 的某一点 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 处取值 ζ. 于是该方程组在这种情况下的解呈如下形状

$$z=\zeta+\int_{(\xi_1,\cdots,\xi_n)}^{(x_1,\cdots,x_n)}(f_1dx_1+\cdots+f_ndx_n).$$

其中的积分是沿任一[3]整个位于 $\mathfrak{G}$ 中且连接点 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$

---

1) 叙述按照 Forsyth, Diff. Equations V, 第 3 章. Goursat, Équations du premier ordre, 第 2 章.

2) [根据分析的已知定理. 例如参看菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》，第一卷第二分册. ——俄译本编者注]

3) [这个积分的值仅依赖于起点和终点，而与积分路径无关. (参看《微积分学教程》，第三卷第一分册，路见可译，人民教育出版社, 1978). ——俄译本编者注]

和 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的连续可求长曲线而取的.

当给定一个具体方程组时，可能还有另外一些解法：首先确定满足组中第一个方程的函数集合，然后确定这些函数的满足第二个方程的子集，如此等等.

例. 设有方程组

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=x_2,\ \frac{\partial z}{\partial x_2}=x_1.$$

它满足可积性条件. 由第一个方程(把 x_2 作为参数)求得

$$z=x_1x_2+\varphi(x_2).$$

这里 φ 是任意光滑函数；其次，由第二个方程得 $\varphi'(x_2)=0$. 因此

$$z=x_1x_2+C.$$

6.2. 一般线性方程组：定义和记号.

(a) 一般线性方程组形如[1]

$$\sum_{k=1}^{n} f^{\mu,k}(\boldsymbol{r})\frac{\partial z}{\partial x_k}+f^{\mu,0}(\boldsymbol{r})z=g^{\mu}(\boldsymbol{r})(\mu=1,\cdots,m), \quad (1)$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 仍表示分量为 $x_1, \cdots, x_n$ 的向量，而 $z=z(\boldsymbol{r})$ 是待求函数. 如果 F^{μ} 定义为算子[2]

$$F^{\mu}=\sum_{k=1}^{n} f^{\mu,k}\frac{\partial}{\partial x_k}+f^{\mu,0},$$

则方程组 (1) 可简写为

$$F^{\mu}z=g^{\mu}\quad(\mu=1,\cdots,m). \quad (1')$$

特别在科技文献中，我们不说 (1′) 是方程组，而称它为偶合 (gekoppelten) 方程.

如果方程组 (1) 对于任意 m 个导数可解，则用 $x_1, \cdots,$

---

1) 在专讲方程组的各节里，给方程组 (1) 中的各个系数适当地增添上指标，而把自变量放在下边，表示对它们作微分运算. 例如 $f^{\mu,k}_{x_p}=\frac{\partial f^{\mu,k}}{\partial x_p}$.

2) 显然，$F^{\mu}(uv)=vF^{\mu}u+uF^{\mu}v-f^{\mu,0}uv$.

x_m; $y_1, \cdots, y_s (m + s = n)$ 表示自变量时，可将方程组 (1) 改写为

$$\frac{\partial z}{\partial x_\mu} = \sum_{k=1}^{s} f^{\mu,k}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) \frac{\partial z}{\partial y_k} + f^{\mu,0}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) z + g^{\mu}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$$
$$(\mu = 1, \cdots, m). \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 分别表示分量为 $x_1, \cdots, x_m$ 和 $y_1, \cdots, y_s$ 的向量．方程组 (2) 称为线性微分方程的**显式**或**典则形式**．

方程组中所有微分方程的任一公共积分称为该方程组的一个积分．于是方程组的积分的集合是其每一单个方程的积分的子集．因此，它可由所有单个方程的积分的集合经缩小而得(参看 § 6.7(b))．

下面各段中将假设方程组 (1) 或 (2) 的系数分别在所考察的区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ 或 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ 内连续可微．

对于方程组 (1) 的每一个积分 z 都有

$$F^{\nu}(F^{\mu}z - g^{\mu}) - F^{\mu}(F^{\nu}z - g^{\nu}) = 0 \tag{3}$$
$$(1 \leqslant \mu, \nu \leqslant m),$$

这因为 (1′) 式，上面的括号中的式子等于零．应该注意，对于任意的二次连续可微函数 z，作算子 F 中的微分运算后，(3) 式中的二阶导数将互相抵消(而遗留下来的，仅是 z 以及 z 的一阶导数)．所以详细写出 (3) 式是

$$\sum_{\rho=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(f^{\mu\rho}_{x_k} f^{\nu k} - f^{\nu\rho}_{x_k} f^{\mu k}\right)\frac{\partial z}{\partial x_\rho} + \left(f^{\mu 0}_{x_\rho} f^{\nu\rho} - f^{\nu 0}_{x_\rho} f^{\mu\rho}\right) z\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(g^{\mu}_{x_k} f^{\nu k} - g^{\nu}_{x_k} f^{\mu k}\right) + g^{\mu} f^{\nu 0} - g^{\nu} f^{\mu 0}, \tag{4}$$

[1]

这个式子同方程 (1) 一样，仍然是一阶线性方程．

---

1) 现在来从 (3) 式推导出 (4) 式．从 (3) 式得

$$F^{\nu}F^{\mu}z - F^{\mu}F^{\nu}z = F^{\nu}g^{\mu} - F^{\mu}g^{\nu}. \tag{i}$$

从算子 F 的定义极易看出

我们将称方程 (4) 是从方程组 (1) 的第 μ 个和第 ν 个方程利用构成 $[\mu, \nu]$ 括号[1]而得的方程.

(b) 下述基本事实成立[2]: 方程组 (1) 的每一积分对于

---

1) 由于利用构成 $[\mu, \nu]$ 括号和 $[\nu, \mu]$ 括号所得到的方程仅有正负号的不同,又因构成 $[\mu, \mu]$ 括号所得到的方程是恒等式 $0=0$, 所以方程 (4) 仅对 $1 \leqslant \mu < \nu \leqslant m$ 的情况来考察就够了.我们指出,方程 (4) 不是 §14.6 中的方程 (14) 的特例;而下面导出的方程 (5) 是 §14.1 中的方程 (2) 的特例. 关于例子,参看第二部分的 5.6 和 5.11 题.

2) 这个事实不仅对于两次连续可微函数 z 正确, 而且对于仅一次连续可微的函数也真实. 参看 E. Schmidt, *Monatshefte f. Math.*, **48** (1939), p. 426—432; O. Perron, *Math. Annalen*, **117** (1941), p.687—693; A. Ostrowski, *Commentarii math. Helvetici*, **15**(1942), p 217—221. 在这些论文中都假设 $g^\mu = f^{\mu,0} = 0$. 蒙 O. Perron 告知, 这些结论对于一般的 g^μ 与 $f^{\mu,0}$ 亦成立.

$$(4)\text{ 式的右端} = F^\nu g^\mu - F^\mu g^\nu. \tag{ii}$$

所以只需证明

$$(4)\text{式的左端} = F^\nu F^\mu z - F^\mu F^\nu z, \tag{iii}$$

就证得 (4) 式. 为了证明,设算子是

$$F^\nu = \sum_{k=1}^{n} f^{\nu,k} \frac{\partial}{\partial x_k} + f^{\nu,0}, \quad F^\mu = \sum_{\rho=1}^{n} f^{\mu,\rho} \frac{\partial}{\partial x_\rho} + f^{\mu,0}$$

据算子的定义,于是有

$$F^\nu F^\mu z = \sum_{k=1}^{n} f^{\nu,k} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{\rho=1}^{n} f^{\mu,\rho} \frac{\partial z}{\partial x_\rho} + f^{\mu,0} z\right)$$

$$+ f^{\nu,0}\left(\sum_{\rho=1}^{n} f^{\mu,\rho} \frac{\partial z}{\partial x_\rho} + f^{\mu,0} z\right)$$

用求导数法则于上式,计算出后,把其中的一重和式 $\sum_{k=1}^{n}$ 中的各项的标号 k 都改为 ρ, 适当地整理得

$$F^\nu F^\mu z = \sum_{\rho=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f^{\mu,\rho}_{x_k} f^{\nu,k} z_{x_\rho} + \underline{\sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} f^{\nu,k} f^{\mu,\rho} z_{x_\rho x_k}}$$

$$+ \sum_{\rho=1}^{n}\left[\underline{(f^{\mu,0} f^{\nu,\rho} + f^{\nu,0} f^{\mu,\rho}) z_{x_\rho}} + f^{\mu,0}_{x_\rho} f^{\nu,\rho} z\right] + \underline{f^{\nu,0} f^{\mu,0} z}.$$

为了求 $F^\mu F^\nu z$, 只需把上面的 $F^\nu F^\mu z$ 中的标号 μ, ν 对调即得. 上式中的某些项(下面划有线条)不受 μ, ν 对调而变,因此它们在 $F^\nu F^\mu z - F^\mu F^\nu z$ 式中互相抵消. 这样推得 (iii) 式,也就是证得 (4) 式. ——校者注

$1 \leqslant \mu, \nu \leqslant m$ 也应满足方程 (4).

对于方程组 (2)，方程 (4) 具有如下形状

$$\sum_{\rho=1}^{s}\left[\sum_{k=1}^{s}(f_{y_k}^{\mu\rho}f^{\nu k}-f_{y_k}^{\nu\rho}f^{\mu k})-f_{x_\nu}^{\mu\rho}+f_{x_\mu}^{\nu\rho}\right]\frac{\partial z}{\partial y_\rho}$$
$$+\left[\sum_{k=1}^{s}(f_{y_k}^{\mu 0}f^{\nu k}-f_{y_k}^{\nu 0}f^{\mu k})-f_{x_\nu}^{\mu 0}+f_{x_\mu}^{\nu 0}\right]z$$
$$+\sum_{k=1}^{s}(g_{y_k}^{\mu}f^{\nu k}-g_{y_k}^{\nu}f^{\mu k})-g_{x_\nu}^{\mu}+g_{x_\mu}^{\nu}+g^{\mu}f^{\nu 0}-g^{\nu}f^{\mu 0}$$
$$=0. \tag{5}$$

6.3. 对合组与完全组.

(a) 如果对于一切连续可微函数 z，与方程组 (1) 对应的方程 (4) 被满足，亦即如果方程组 (1) 的系数满足所谓**可积性条件**

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(f_{x_k}^{\mu\rho}f^{\nu k}-f_{x_k}^{\nu\rho}f^{\mu k})=0(\mu,\nu=1,\cdots,m;\rho=0,1,\cdots,n),\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(g_{x_k}^{\mu}f^{\nu k}-g_{x_k}^{\nu}f^{\mu k})=f^{\mu 0}g^{\nu}-f^{\nu 0}g^{\mu}(\mu,\nu=1,\cdots,m),\end{cases} \tag{6}$$

则称方程组 (1) 为**对合组**. 特别地，如果对应于方程组 (2) 的可积性条件

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{s}(f_{y_k}^{\mu\rho}f^{\nu k}-f_{y_k}^{\nu\rho}f^{\mu k})=f_{x_\nu}^{\mu\rho}-f_{x_\mu}^{\nu\rho}\\ \qquad\qquad(\mu,\nu=1,\cdots,m;\ \rho=0,1,\cdots,s),\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{s}(g_{y_k}^{\mu}f^{\nu k}-g_{y_k}^{\nu}f^{\mu k})=g_{x_\nu}^{\mu}-g_{x_\mu}^{\nu}+f^{\mu 0}g^{\nu}-f^{\nu 0}g^{\mu}\\ \qquad\qquad(\mu,\nu=1,\cdots,m)\end{cases} \tag{7}$$

成立，则方程组 (2) 也称为**对合组**. 这时，方程组 (2) 也称为**雅可比组**.

把完全组变到对合组的问题，参看 §6.5(c).

(b) 如果方程组 (1) 由括号构成的方程组 (4) 中每一个方程，对任何函数 z 都是方程组 (1) 中诸方程的线性组合，即

对任意的连续可微函数 z 及适当选取（依赖于 μ 和 ν）的函数 $\lambda_k(\boldsymbol{r})$，而有

$$F^\mu(F^\nu z-g^\nu)-F^\nu(F^\mu z-g^\mu)=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(\boldsymbol{r})(F^k z-g^k),\quad(7')$$

则称方程组（1）是完全组.[1]

（c）为解方程组（1）作预备工作，而且为了取得解集的概观，可将它变为下述完全组形式。

如果组（1）中任何一个方程在 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ 内对于任意的连续可微函数 z 是其余的线性组合，例如对某些函数 $\lambda_\rho(\boldsymbol{r})$，有

$$F^\mu z-g^\mu=\sum_{\rho\neq\mu}\lambda_\rho(\boldsymbol{r})(F^\rho z-g^\rho),$$

则这个方程可删去. 这样做下去，方程组（1）可以化到方程个数尽可能少的线性独立的方程组. 我们称它为简化组[2].

1）将证一个断语：如果方程组（1）是完全组，则同它对应的齐次方程组也是完全组.

证 把函数 $z\equiv 0$ 代入（7'）式，则得

$$F^\mu g^\nu-F^\nu g^\mu\doteq\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(r)g^k$$

再把上式同（7'）相加，则推得齐次方程组的完全性：

$$F^\mu F^\nu z-F^\nu F^\mu z=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(r)F^k z.$$

——校者注

2）在文献中（例如参看 Goursat, Équations du premier ordre, p.66; Serret-Scheffers, Differential-und Integralrechnung III, p.566, 569; Carathéodory, Variationsrechnung, p.33）有这样论断：每一简化组至少包含 $(n+2)$ 个方程式. 但在证明时没有谈到在怎样的区域能使结论成立. 在证明中通常断定，对于任何 $n+3$ 个方程的方程组，它的系数矩阵

$$(f^{\mu 0},f^{\mu 1},\cdots,f^{\mu n},g^\mu)\quad(\mu=1,\cdots,n+3),$$

所包含的行数多于列数，故某一行可由其它行的线性组合得到. 这样，对于 $m\geqslant n+3$，方程（1）的某些行可以删去. 对这 $m\geqslant n+3$ 的情况下的每一固定点 r_0，某些行是其它的行的线性组合，这当然是对的；然而，在整个区域 $\mathfrak{G}(r)$，甚至仅在固定的（一般说是任意的）点 r_0 的充分小邻域内，同样那些行也是另外某些行的线性组合，这就不正确了. 但是，若该矩阵在点 r_0 具有的秩是点 r_0 的某个邻域内该矩阵的秩中最大者，则后一个结论也就正确了.

据 § 6.2(b)，方程组(1)的每个解应满足方程(4)．因此，方程组 (1) 可用方程 (4) 中不是方程 (1) 的线性组合的那些方程来补充，从而重新得到 (1) 形的方程组．然而这时已有 m_1 个方程．如果 $m_1 > m$，则将所述论断(假设方程组 (1) 的系数足够光滑)再应用到所得到的方程组上，如此继续下去．若在有限步之后，已不再得到新的方程[1]，则所得方程组就是完全的了．根据 § 6.5(c)，这个方程组可变成对合组．关于例子，见第二部分第五章．

所得完全组和原方程组可解的必要条件在任何情况下都是：它们作为量 z，$\frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ 的代数方程组来考察时必须是可解的．如果在这种情况下所有的 z_{x_ν} 都等于零，则该方程组除去平凡解 $z =$ 常数外，没有任何解．

6.4. 解雅可比组的梅耶方法． 设在区域

$$a_\rho \leqslant x_\rho \leqslant b_\rho \ (\rho = 1, \cdots, m)^{2)},\ y \text{ 任意} \tag{8}$$

内方程组 (2) 的诸系数 $f^{\mu k}(k \geqslant 1)$ 有界[3]，所有的 $f^{\mu k}$ 和 g^μ 连续可微，又设可积性条件 (7) 成立(即 (2) 是雅可比组，参看 §6.3(a))．其次设已给关于任何 y_μ 连续可微的函数 $\omega(y)$．则雅可比组 (2) 在区域 (8) 内有满足初始条件

$$\phi(\xi_1, \cdots, \xi_m, y) = \omega(y)$$

的唯一的积分，其中 $\xi_\rho(\rho = 1, \cdots, m)$ 是各个区间 $a_\rho \leqslant$

---

1) 在文献中（例如，在前页脚注中所给出的文献中）有这样的断言"方程组 (1) 都可以化为一个简化的完全组，这组至多包含 $n+2$ 个方程"．这样的不正确的话是根据前页脚注中已指出的错误结论而推得的．

2) 在这不等式中，单方或双方等号可以去掉；不排除 $a_\rho = -\infty$，$b_\rho = +\infty$ 的情况．

3) 这个假设也可用所有导数 $f^{\mu k}_{y_\rho}(k \geqslant 1)$ 的有界性要求来代替．

$\xi_\rho \leqslant b_\rho$ 上的任一个值[1].

最简捷的证明是采用梅耶方法[2]. 在这方法中，将自变量 x_ρ 表为 $m+1$ 个变量 $u, u_1, \cdots, u_m$ 的函数，即

$$x_\rho = \xi_\rho + u u_\rho \quad (\rho = 1, \cdots, m) \tag{9}$$

(梅耶变换). 于是由方程组 (2)，我们得到关于 $Z(u, u_1, \cdots, u_m, y) = z(r, y)$ 的方程

$$Z_u = \sum_{k=1}^{s} F^k Z_{y_k} + F^0 Z + G, \tag{10}$$

其中

$$F^k = \sum_{\rho=1}^{m} u_\rho f^{\rho k} \ (k = 0, 1, \cdots, s),$$

$$G = \sum_{\rho=1}^{m} u_\rho g^\rho;$$

而由关于 z 的初始条件推得

$$Z(0, u_1, \cdots, u_m, y) = \omega(y). \tag{11}$$

方程 (10) 是关于 Z 的线性微分方程，其中 u, y 当作自变量，$u_1, \cdots, u_m$ 作为参数.

可用 §4 中的方法来求问题 (10)—(11)的解. 如果求得这问题的解 Z 是对于所有的 $m+s+1$ 个变量连续可微的，则

$$z(r, y) = Z(1, x_1 - \xi_1, \cdots, x_m - \xi_m, y)$$

就是所求的方程组 (2) 的解.

---

1) 关于更一般的定理，参看 E. Kamke, *Math. Zeitschrift*, **49**(1943), p.275.

2) 参看 A. Mayer, *Mathem. Annalen*, **5**(1872), p.459. 在该论文中，令 $x_\nu - \xi_\nu = u_1 h_\nu(u_1, \cdots, u_m)$，而在 460 页中特别地选 $x_1 - \xi_1 = u_1$. 而当 $\nu > 1$ 时，$x_\nu - \xi_\nu = u_1 u_\nu$ (没有脚标的 u 在这里不出现). 以后的作者也采用这样变换. 然而这里忽略了从这种变换不能得到 $(\xi_1, \cdots, \xi_m)$ 点的整个邻域. 这是因为当 $x_1 = \xi_1$ 时，必然地有 $x_\nu = \xi_\nu$. 上述的梅耶变换可以在 Carathéodory 的 Variationsrechnung (26 页)找到.

这样，雅可比组 (2) 经梅耶变换可以化为一个线性微分方程. 理论上这个方法很方便，但在求具体问题的解时，却不一定是这样；尤其当方程组在开始时不是显式 (2) 的情况.

例. $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}=z+\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x_2}=z+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

这是关于未知函数 $z=z(x_1, x_2, y)$ 的方程组. 它是对合组. 对于 $Z(u, u_1, u_2, y)$，可得线性微分方程

$$Z_u=(u_1+u_2)(Z_y+Z). \qquad (*)$$

关于 $W=W(u, y, Z)$ 的对应的三项线性齐次微分方程（参看 § 4.2 或 § 5.4）是

$$W_u-(u_1+u_2)W_y+(u_1+u_2)ZW_Z=0.$$

对于这个方程，函数

$$Ze^y, \ (u_1+u_2)u+y$$

组成它的一组积分基底. 因此，函数

$$W=Ze^y-\Omega[(u_1+u_2)u+y]$$

就是方程 $(*)$ 的解. 最后，当选取 $\xi_1=\xi_2=0$ 时，我们得到原方程组的积分

$$z=e^{-y}\Omega(x_1+x_2+y).$$

6.5. 完全组的性质[1].

(a) 如果函数组 $\chi_\nu(x_1, \cdots, x_n)$, $(\nu=1, \cdots, n)$ 在区域 $\mathfrak{G}(r)$ 内两次连续可微，又设经过变换

$$z(x_1, \cdots, x_n)=\zeta(y_1, \cdots, y_n),$$
$$y_\nu=\chi_\nu(x_1, \cdots, x_n) \ (\nu=1, \cdots, n),$$

区域 $\mathfrak{G}(r)$ 一对一地映射到 $y_1, \cdots, y_n$ 空间内的某一区域，而

---

1) 这里所援引的结果可在下列书中找到： Forsyth, Diff. Equations V; Goursat, Équations du premier ordre; Serret-Scheffers, Differential-und Integralrechnung III. 也可以参看斯米尔诺夫，高等数学教程，第四卷第一分册，§119—120, p.371—374.

$$\frac{\partial(\chi_1, \cdots, \chi_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} \neq 0,$$

则每一个完全组 (1)(参看 §6.3(b)) 经过变换后仍变为一个完全组. 如果 (1) 是对合组，则经上述变换后所得的组也是对合组.

(b) 每一与完全组代数等价的方程组也是完全组. 精确地说，设 (1) 是一完全组，函数 $A_{\mu\nu}(\boldsymbol{r})(\mu, \nu = 1, \cdots, m)$ 在 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ 内连续可微，且 $\det|A_{\mu\nu}| \neq 0$. 于是，若定义算子和函数

$$G^\mu = \sum_{k=1}^{m} A_{\mu k} F^k, \quad h^\mu(\boldsymbol{r}) = \sum_{k=1}^{m} A_{\mu k} g^k(\boldsymbol{r})$$
$$(\mu = 1, \cdots, m),$$

则方程组

$$G^\mu z = h^\mu(\boldsymbol{r}) \ (\mu = 1, \cdots, m)$$

也是一个完全组.

(c) 设在区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ 内给定完全组 (1)，其中 $m \leqslant n$. 如果在整个区域 $\mathfrak{G}$ 内系数矩阵

$$(f^{\mu\nu}) \quad (\mu = 1, \cdots, m; \nu = 1, \cdots, n)$$

的某个固定的 m 阶子式异于零，例如说

$$\det|f^{\mu\nu}| \neq 0 \quad (\mu, \nu = 1, \cdots, m),$$

则方程组 (1) 对于 $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial x_m}$ 单值可解，而且这样解得的方程组是一个对合组.

6.6. 齐次组. 如果所有的 $f^{\mu 0}$ 及 g^μ 皆为零: $f^{\mu 0} = 0$, $g^\mu = 0$，亦即方程组形如

$$\sum_{\nu=1}^{n} f^{\mu\nu}(\boldsymbol{r}) \frac{\partial z}{\partial x_\nu} = 0 \quad (\mu = 1, \cdots, m), \tag{12}$$

则称组 (1) 为齐次组. 关于系数 $f^{\mu\nu}$，暂且假设它们在区域

$\mathfrak{G}(r)$ 内连续.

(a) 如果 $\phi^1(r), \cdots, \phi^k(r)$ 是方程组(12)的积分，则对 ϕ^μ 的定值域有定义的任意可微函数 $\Omega(u_1, \cdots, u_k)$，复合函数 $\Omega(\phi^1, \cdots, \phi^k)$ 也是方程组(12)的一个积分.

(b) 设 $m < n$，又设在 $\mathfrak{G}$ 的任一个子域内至少有这样一点，使系数矩阵 $(f^{\mu\nu})$ 在该点上的秩等于 m[1]，则对方程组(12)的任何 $n-m+1$ 个积分，矩阵[2]

$$\frac{\partial(\phi^1, \cdots, \phi^{n-m+1})}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}$$

的所有 $n-m+1$ 阶行列式在区域 $\mathfrak{G}$ 内都恒等于零.

校者注：将证明上述的结论. 由于 $(f^{\mu\nu})$ 仅包含 m 行，所以它的秩至多等于 m. 据对于 $\mathfrak{G}$ 的子域的假定，易推得如下的断言：在 $\mathfrak{G}$ 内存在着一个处处稠密集 S，它的点的秩等于 m.

现在在 S 中任一定点上来考虑方程组(12). 矩阵 $(f^{\mu\nu})$ 在该点的秩是 m；据线性代数，组(12)的解向量

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

所构成的线性空间的维数是 $n-m$. 因此，$(n-m+1)$ 个解向量

$$\frac{\partial \phi^k}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial \phi^k}{\partial x_n}, \quad k = 1, \cdots, n-m+1$$

是线性相关的. 故上述的函数矩阵的任一个 $(n-m+1)$ 行的行列式在属于 S 的任一定点上等于零.

既然这些行列式在一个处处稠密集 S 的任一点上等于零，由于连续性，证得这些行列式在区域 $\mathfrak{G}$ 内恒等于零(证毕).

为了保证这 $n-m+1$ 个积分在 §2.7 的意义下是函数

---

1) 这里关于矩阵 $(f^{\mu\nu})$ 的秩的假定，德文本原作"设 $\mathfrak{G}$ 没有任何子域，能使 $(f^{\mu\nu})$ 的秩在这子域内处处小于 m". 这里所述关于 $(f^{\mu\nu})$ 的秩的假设是与德文本中的假设等价的. 这个假设是校者参照俄译本而提出的. ——校者注

2) 关于矩阵的这种记法，参看 §2.7(c).

相关，对于这些积分还须添“连续可微”的假定．参看第 24 页上关于 §2.7(d)的脚注 1 中的文献，又参看 §6.6(f)．

(c) 设 $m<n$，而且设区域 $\mathfrak{G}$ 没有这样的子域，能使系数矩阵 $(f^{\mu\nu})$ 的秩在该子域内到处都 $<m$，又设函数矩阵

$$\frac{\partial(\phi^1,\cdots,\phi^{n-m})}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$$

的秩在区域 $\mathfrak{G}$ 的每一点上都不小于 $n-m$，则方程组(12)的 $n-m$ 个积分 $\phi^1(\boldsymbol{r}),\cdots,\phi^{n-m}(\boldsymbol{r})$ 称为它的一组积分基底(积分的基本组)．

(d) 如果方程组 (12) 在区域 $\mathfrak{G}$ 内有积分基底 $\phi^1,\cdots,\phi^{n-m}$，于是这方程组的积分全体就是这样的连续可微的函数 $\phi(\boldsymbol{r})$ 的集合，属于这集合的函数 ϕ 使矩阵

$$\frac{\partial(\phi,\phi^1,\cdots,\phi^{n-m})}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$$

的秩在区域 $\mathfrak{G}$ 内处处不超过 $n-m$．也可参看 (f)．

(e) 积分基底的存在． 对于齐次雅可比组 (2) (其中 $f_{\mu0}=g^{\mu}=0$)，在 §6.4 的假设下，在区域 (8) 内存在一组积分基底 $\phi^1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y}),\cdots,\phi^s(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})$，它们的函数行列式异于零：

$$\frac{\partial(\phi^1,\cdots,\phi^s)}{\partial(y_1,\cdots,y_s)}\neq 0. \tag{13}$$

这结论从 §6.4 的证明可以推出，因为由 §3.6(a)知，齐次方程 (10) 有积分基底．

(f) 从积分基底求所有积分．设在 §6.4 的假定下，给有齐次组 (2) (即 $f^{\mu0}=g^{\mu}=0$)． 如果积分 $\phi^1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y}),\cdots,\phi^s(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})$ 是一组 k 次连续可微的积分基底，因而不等式 (13) 成立，且对于固定的 $\boldsymbol{r}_0(\xi_1,\cdots,\xi_m)$ 和任意的 η_ν，方程组

$$\eta_\nu=\phi^\nu(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{y})\quad(\nu=1,\cdots,s) \tag{14}$$

对 y_κ 单值可解，则该方程组的 k 次连续可微积分 $\phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})$ 的

集合是由公式

$$\phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = \Omega(\phi^1, \cdots, \phi^r)$$

给出，其中 $\Omega(u_1, \cdots, u_r)$ 遍历所有对 ϕ^ν 的定值域有定义的 k 次连续可微函数. 特别地，如果 $\phi^\nu(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{y}) = y_\nu$，则关于方程组 (14) 的可解性假设成立；在此情况下，这些积分也称为**主积分**.

6.7. 齐次组的简化.

(a) 设在区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ 内，对于给定的有连续可微系数 $f^{\mu\nu}$ 的齐次组 (12)，已知 h 个特积分 $\phi^1(\boldsymbol{r}), \cdots, \phi^h(\boldsymbol{r})$，且

$$\frac{\partial(\phi^1, \cdots, \phi^h)}{\partial(x_1, \cdots, x_h)} \neq 0.$$

则可用引入新自变量

$$\begin{aligned} &y_1 = \phi^1(\boldsymbol{r}), \cdots, y_h = \phi^h(\boldsymbol{r}), \\ &y_{h+1} = x_{h+1}, \cdots, y_n = x_n \end{aligned} \tag{15}$$

的方法来简化该方程组.

区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ 经变换 (15) 一对一地映射到 $\bar{\mathfrak{G}}(\boldsymbol{y})$ 上；同时函数 $f^{\mu\nu}(\boldsymbol{r})$ 变换为函数 $\bar{f}^{\mu\nu}(\boldsymbol{y})$. 于是满足方程组

$$\sum_{\nu=h+1}^{n} \bar{f}^{\mu\nu}(\boldsymbol{y}) \frac{\partial\zeta}{\partial y_\nu} = 0 \quad (\mu = 1, \cdots, m) \tag{16}$$

(其中 $y_1, \cdots, y_h$ 作为参数)的连续可微函数 $z(\boldsymbol{r}) = \zeta(\boldsymbol{y})$ 就是方程组 (12) 的解[1].

如果 (12) 是完全组或对合组，则据 § 6.5，当函数 ϕ^ν 两次连续可微时，对于方程组 (16) 的同样结论也是正确的.

例. $p_1 + p_2 - 2p_3 = 0,$

$$x_1p_1 + x_2p_2 - (x_1 + x_2)p_3 + x_4p_4 = 0.$$

---

1) 参看 Goursat, Équations du premier ordre, p.89, 或 Kamke, DGlen, 1930, p.324.

这个方程组是完全的．函数 $\psi=x_1+x_2+x_3$ 显然是一积分．在作变量代换

$$z(x_1,\cdots,x_4)=\zeta(y_1,\cdots,y_4),$$

$$y_1=x_1+x_2+x_3,\ y_2=x_2,\ y_3=x_3,\ y_4=x_4$$

后，则得方程组

$$\zeta_{y_2}-2\zeta_{y_3}=0,$$

$$y_2\zeta_{y_1}+(y_3-y_1)\zeta_{y_3}+y_4\zeta_{y_4}=0.$$

由此(例如按照 (b)) 求得积分 $\dfrac{2y_2+y_3-y_1}{y_4}$．因此，可求出原方程组的积分基底为

$$x_1+x_2+x_3,\quad \frac{x_2-x_1}{x_4}.$$

(b) 缩小解集的方法．假设对于微分方程组 (12) 中的任一个方程，例如第 m 个方程，已知它的一组积分基底 $\phi^1(\boldsymbol{r}),\ \cdots,\ \phi^{n-1}(\boldsymbol{r})$，则对任意的连续可微函数 $\zeta(y_1,\cdots,y_{n-1})$，函数 $\zeta(\phi^1,\cdots,\phi^{n-1})$ 也是这同一方程的积分．我们可以设法缩小这样的函数 ζ 的集合，使得表达式 $\zeta(\phi^1,\cdots,\phi^{n-1})$ 也满足方程组 (12) 的其余方程．为此，将 $z(\boldsymbol{r})=\zeta(y_1,\cdots,y_{n-1})$ (其中的 $y_\nu=\phi^\nu(\boldsymbol{r})$)，代入方程组 (12)，并研究用这种方式得到的关于 $\zeta(y_1,\cdots,y_{n-1})$ 的微分方程组．

更精确地说，下述事实成立．设在区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ 内给定对合组 (12)，其系数连续可微；又设，例如对于第 m 个方程，两次连续可微函数 $\phi^1(\boldsymbol{r}),\cdots,\phi^{n-1}(\boldsymbol{r})$ 组成一组积分基底：

$$\frac{\partial(\phi^1,\cdots,\phi^{n-1})}{\partial(x_1,\cdots,x_{n-1})}\neq 0.$$

区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ 经自变量代换

$$y_1=\phi^1(\boldsymbol{r}),\cdots,y_{n-1}=\phi^{n-1}(\boldsymbol{r}),\ y_n=x_n \tag{17}$$

映射到区域 $\bar{\mathfrak{G}}(y_1,\cdots,y_n)$，并且任两点 $(y_1,\cdots,y_{n-1},y_n)$

与 $(y_1, \cdots, y_{n-1}, y_n^*)$ 和连接它们的直线段都属于区域 $\mathfrak{G}$[1]；最后，设系数 f^{mn} 无论在 $\mathfrak{G}$ 的什么子域内都不恒为零，则 $z(r) = \zeta(\phi^1, \cdots, \phi^{n-1})$ 是方程组 (12) 的一个积分，此处函数 $\zeta(y_1, \cdots, y_{n-1})$ 是方程组

$$\sum_{k=1}^{n-1} g^{\mu k} \frac{\partial \zeta}{\partial y_k} = 0 \quad (\mu = 1, \cdots, m-1) \tag{18}$$

的解，式中

$$g^{\mu k} = \sum_{\nu=1}^{n} f^{\mu\nu} \phi^k_{x_\nu} (\mu = 1, \cdots, m-1; k = 1, \cdots, n-1).$$

并且这些方程在作变换 (17) 后仅依赖于 $y_1, \cdots, y_{n-1}$. 方程组 (18) 也是一个对合组[2]. 作为例子，参看第二部分的5.2题.

(c) 设已知方程组 (12) 的一个方程的一个积分，则根据 §3.5，可设法求得这个方程的一组积分基底，并接着应用方法 (b). 也可以尝试地采用雅可比方法. 这方法是从方程组 (12) 的一个方程的一个(已知)解出发，来寻找这整个方程组的一个公共解；接着就可以用方法(a).

为此，把方程组 (12) 写成简写形式

$$F^\mu z = 0 \quad (\mu = 1, \cdots, m), \tag{19}$$

其中

$$F^\mu = \sum_{\nu=1}^{n} f^{\mu\nu}(r) \frac{\partial}{\partial x_\nu}.$$

设方程组 (19) 是对合组，即等式

$$F^\rho F^\sigma z = F^\sigma F^\rho z \quad (1 \leqslant \rho, \sigma \leqslant m) \tag{20}$$

对于所有两次连续可微函数 $z(r)$ 成立. 其次，设 $\phi^1(r)$ 是

1) 如果开始时不是这样，则区域 $\mathfrak{G}$ 应该适当地缩小.

2) 参看 Serret-Scheffers, Differential-und Integralrechnung III, p.574—577；在 Goursat, Équations du premier ordre, p.70 中也有证明梗概.

(19) 中第一个方程的可微足够次数的一个积分[1]。

现在我们将用雅可比方法[2]寻找方程组 (19) 的前两个方程的公共解．由可积性条件 (20)，有

$$F^1F^2\phi^1 - F^2F^1\phi^1 = 0,$$

因为据假设有 $F^1\phi^1 = 0$．因此，函数 $\phi^2 = F^2\phi^1$ 也满足方程组 (19) 的第一个方程．同理可证：这样逐步地构造出的所有函数

$$\phi^2 = F^2\phi^1,\ \phi^3 = F^2\phi^2,\ \phi^4 = F^2\phi^3, \cdots$$

都满足方程组 (19) 的第一个方程．据 § 6.6(b) 和 (f) 便能断定，可以求出这样的数 $j \leqslant n-1$，使得函数 ϕ^{j+1} 能表为 $\phi^1, \cdots, \phi^j$ 的连续可微函数，即

$$\phi^{j+1}(r) = U(\phi^1, \cdots, \phi^j), \tag{21}$$

其中

$$\frac{\partial(\phi^1, \cdots, \phi^j)}{\partial(x_1, \cdots, x_j)} \neq 0.$$

现在来确定这样的连续可微函数 $\Psi(y_1, \cdots, y_j)$，使复合函数

$$\chi(r) = \Psi(\phi^1, \cdots, \phi^j) \tag{22}$$

能满足 (19) 的第二个方程[3]，亦即使

$$\sum_{\nu=1}^{n} f^{2,\nu} \sum_{\rho=1}^{j} \Psi_{y_\rho} \phi^\rho_{x_\nu} = 0.$$

这个微分方程可重新写为如下形状

$$\sum_{\rho=1}^{j} \Psi_{y_\rho} F^2 \phi^\rho = 0,$$

据 ϕ^ρ 的定义，又可写为

---

1) 下述的雅可比方法在一些假设下方能达到求解目的．此处省略了这些假设的正确叙述．

2) 参看 Goursat, Équations du premier ordre, p.77—81.

3) 据 §6.6(a)，函数 $\chi(r)$ 满足 (19) 的第一个方程．

$$\sum_{\rho=1}^{j} \phi^{\rho+1}\Psi_{y_\rho} = 0;$$

最后，由(21)式，我们有

$$\sum_{\rho=1}^{j-1} \phi^{\rho+1}\Psi_{y_\rho} + U(\phi^1, \cdots, \phi^j)\Psi_{y_j} = 0.$$

如果设

$$\phi^1(r) = y_1, \cdots, \phi^j(r) = y_j,$$

则该方程可写为

$$\sum_{\rho=1}^{j-1} y_{\rho+1}\Psi_{y_\rho} + U(y_1, \cdots, y_j)\Psi_{y_j} = 0.$$

如果求出这个线性齐次方程[1]的非平凡解 $\Psi(y_1, \cdots, y_j)$，则函数(22)就是方程组(19)的前两个方程的公共解.

现在从已知的函数 χ 来求方程组(19)的前三个方程的公共解. 象前面那样，第一步，由关系式(20)推知，函数

$$\chi^1 = \chi, \ \chi^2 = F^3\chi^1, \ \chi^3 = F^3\chi^2, \ \cdots$$

同时满足(19)的前两个方程. 设 k 是这样的最小数，使得

$$\chi^{k+1} = V(\chi^1, \cdots, \chi^k)$$

是前 k 个积分 $\chi^\rho(\rho = 1, \cdots, k)$ 的一个连续可微函数. 我们来求这样一个函数 $\Phi(y_1, \cdots, y_k)$，使得 $\Phi(\chi^1(r), \cdots, \chi^k(r))$ 也满足(19)的第三个方程. 于是又得到关于 Φ 的某个齐次线性微分方程. 如此继续进行下去.

如果这个过程不中断得太早，最后将得到方程组(19)的一个非平凡解. 这个方法很麻烦，然而时常很有用，因为只需知道方程组(19)(即方程组(12))的一个方程的一个解，就

---

1) 它的特征方程组

$y_1'(t) = y_2, \ y_2'(t) = y_3, \ \cdots, \ y_{j-1}'(t) = y_j, \ y_j'(t) = U(y_1, \cdots, y_j)$

与一个 j 阶微分方程

$$y_1^{(j)}(t) = U(y_1, y_1', \cdots, y_1^{(j-1)})$$

等价.

可采用该方法来试求全组的解.

例. 假设已给对合组[1]

$$p_3 + x_1p_4 = 0,\ p_2 + x_2p_4 = 0,\ p_1 + (3x_1^2 + x_3)p_4 = 0.$$

直接看出，函数 $\psi^1 = x_1x_3 - x_4$ 是第一个方程的一个解. 其次，我们有

$$\psi^2 = F^2\psi^1 = -x_2,\ \psi^3 = F^2\psi^2 = -1;$$

于是 $j = 2$，$U = -1$. 因而得到关于函数 $\Psi(y_1, y_2)$ 的微分方程

$$y_2\Psi_{y_1} - \Psi_{y_2} = 0,$$

它有解 $\Psi = 2y_1 + y_2^2$. 所以前两个方程的一个公共解为

$$\chi = \chi^1 = 2(x_1x_3 - x_4) + x_2^2.$$

其次，我们求得

$$\chi^2 = F^3\chi^1 = -6x_1^2, \chi^3 = F^3\chi^2 = -12x_1 = -\sqrt{-24\chi^2}.$$

因此，$k = 2$，$\chi^3 = V(\chi^1, \chi^2) = -\sqrt{-24\chi^2}$. 于是关于 Φ 的微分方程就是

$$y_2\Phi_{y_1} - \sqrt{-24y_2}\Phi_{y_2} = 0.$$

它有解

$$\Phi(y_1, y_2) = y_1 + \frac{1}{3\sqrt{6}}(-y_2)^{3/2}.$$

因此，这方程组的公共解为

$$\Phi(\chi^1, \chi^2) = 2(x_1x_3 - x_4) + x_2^2 + 2x_1^3.$$

6.8. 一般方程组的简化. 假设一般的线性方程组 (1) 在区域 $\mathfrak{G}(r)$ 内具有连续可微系数，且在该区域内是完全组. 于是，对应于组 (1) 的齐次方程组(12)也是完全组(参看 6.3(b) 的脚注)；再设已知这齐次组的积分基底是 $\psi^{m+1}(r)$，$\cdots$，

---

[1] 关于这个例子，再参看第二部分 5.18 题.

$\psi^n(\boldsymbol{r})$，其函数行列式

$$\frac{\partial(\psi^{m+1}, \cdots, \psi^n)}{\partial(x_{m+1}, \cdots, x_n)} \neq 0.$$

又设区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ 经变换

$$y_1 = x_1, \cdots, y_m = x_m, y_{m+1} = \psi^{m+1}(\boldsymbol{r}), \cdots, y_n = \psi^n(\boldsymbol{r}) \quad (23)$$

一对一地映射到区域 $\overline{\mathfrak{G}}(\boldsymbol{y})$. 最后设在区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ 内有

$$\det|f^{\mu\nu}(\boldsymbol{r})| \neq 0(\mu, \nu = 1, \cdots, m). \quad (24)$$

则微分方程组(1)的积分是满足方程组

$$\sum_{\nu=1}^{m} g^{\mu\nu}(\boldsymbol{y}) \frac{\partial \zeta}{\partial y_\nu} + g^{\mu 0}(\boldsymbol{y})\zeta = h^\mu(\boldsymbol{y})(\mu = 1, \cdots, m) \quad (25)$$

的连续可微函数 $z(\boldsymbol{r}) = \zeta(\boldsymbol{y})$，式中 $g^{\mu\nu}$ 和 h^μ 是从 $f^{\mu\nu}$ 和 g^μ 利用变量代换 (23) 所得到的函数. 如果 ψ^μ 是两次连续可微函数，据 §6.5(a)，则方程组 (25) 也是完全组，由于 (24) 式，由方程组 (25) 又可以求出如下形式的方程组

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y_\mu} = \gamma^\mu(\boldsymbol{y})\zeta + \delta^\mu(\boldsymbol{y})(\mu = 1, \cdots, m).$$

根据 §6.5(c)，这是一个对合组. 如果对于一切 μ，有 $\gamma^\mu = 0$，则得

$$\zeta = \int \sum_{\mu=1}^{m} \delta^\mu(\boldsymbol{y}) dy_\mu + \Omega(y_{m+1}, \cdots, y_n),$$

其中 Ω 是一任意连续可微函数.

6.9. 解法概述. 如果给定方程组 (1)，则首先应该确定它是否是完全的. 如果不是完全组，则根据 § 6.3(c)，将它补足成某个完全组，然后解对应的齐次方程组. 对此，我们可用 § 6.6 中的方法和梅耶方法(参看 § 6.4). 当需要求出带有初始条件的解时，这后一方法特别有用. 如果所给的方程组不是齐次的，则根据 § 6.8，可以利用齐次方程组的解法.

§ 7. 拟线性方程组

7.1. 特殊情况.

(a) 假设给定关于函数 $z = z(\boldsymbol{r})$ 的方程组

$$\frac{\partial z}{\partial x_\nu} = f^\nu(\boldsymbol{r}, z) \quad (\nu = 1, \cdots, n)^{1)}, \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 仍表示 $x_1, \cdots, x_n$, 系数 f^ν 在所考察的区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}, z)$ 内连续可微. 于是 (1) 的每一个积分是两次连续可微的. 因此有关系式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_\nu \partial x_\mu} \quad (\mu, \nu = 1, \cdots, n).$$

注意到方程组(1), 由此推出, 对于方程组 (1) 的每一积分 z, 等式

$$f^\mu_{x_\nu} + f^\mu_z f^\nu = f^\nu_{x_\mu} + f^\nu_z f^\mu \; (1 \leqslant \mu, \nu \leqslant n) \tag{2}$$

成立. 如果这些等式对于 $\boldsymbol{r}$ 和 z 恒满足, 则称 (1) 为对合组. 等式 (2) 称为方程组 (1) 的可积性条件.

如果函数 f^ν 在区域

$$|x_\nu - \xi_\nu| < a \leqslant \infty \quad (\nu = 1, \cdots, n),$$
$$|z - \zeta| < b \leqslant \infty$$

(其中 $(\xi_1, \cdots, \xi_n, \zeta)$ 是固定点) 内连续可微, 有界, 例如

1) 方程组 (1) 有时也写成一个微分方程形式

$$dz = \sum_{\nu=1}^{n} f^\nu(\boldsymbol{r}, z) dx_\nu.$$

但是应该注意到, 这个方程通常取为方程

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} f^\nu(\boldsymbol{r}, z) \frac{dx_\nu}{dt}$$

的简化记法. 对于这后一方程, 需要确定满足它的函数 $z(t), x_1(t), \cdots, x_n(t)$.

$|f^\nu| \leqslant A$，且可积性条件 (2) 成立，则方程组 (1) 在区域

$$|x_\nu - \xi_\nu| < \alpha \quad (\nu = 1, \cdots, n)$$

$\left(\text{式中 } \alpha = \min\left(a, \frac{b}{nA}\right)\right)$内有满足初值

$$\phi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \zeta \tag{1'}$$

的一个积分 $z = \phi(\boldsymbol{r})$[1]。

(b) 这个积分可以用方程的逐次解法构造出来。为此，首先考察方程 (1) 的在特殊形式下的第一个方程

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f^1(x_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, z),$$

它满足初始条件

$$z(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = \zeta.$$

这是一个常微分方程；设它的解 $z = \varphi^1(x_1)$ 已经求得。第二步是解带有初值条件

$$z(x_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n) = \varphi^1(x_1)$$

的第二个方程

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = f^2(x_1, x_2, \xi_3, \cdots, \xi_n, z).$$

现在，其中的 x_1 看作参数。这又是一个常微分方程。假设 $z = \varphi^2(x_1, x_2)$ 是它的解。在下一步，求解问题

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = f^3(x_1, x_2, x_3, \xi_4, \cdots, \xi_n, z),$$

$$z(x_1, x_2, \xi_3, \cdots, \xi_n) = \varphi^2(x_1, x_2).$$

其中 x_1、x_2 看作为参数。如此继续下去。最后一步是求解问

1) 参看 A. J. Macintyre, *Proceedings Edinburgh math. Soc.* (2), **4**(1935), p.112—117; L. Bruwier, *Bulletin Liège*, **8**(1939), p.105—116; T. Y. Thomas, *Annals of Math.*, **35**(1934), p.730—734; W. Mayer, T. Y. Thomas, *Math. Zeitschrift*, **40**(1936), p.658—661; P. Gillis, *Bulletin Liège*, **9**(1940), p.197—212; W. Wirtinger, *Monatschefte f. Math.*, **34**(1926), p.81—88.

题

$$\frac{\partial z}{\partial x_n}=f^n(x_1,\cdots,x_n,z),$$
$$z(x_1,\cdots,x_{n-1},\xi_n)=\varphi^{n-1}(x_1,\cdots,x_{n-1}),$$

式中 $x_1,\cdots,x_{n-1}$ 是参数. 它的解 $z=\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 用可积性条件来证实，也是方程组 (1) 的所求积分.

(c) 方程组 (1) 的满足条件 (1′) 的积分可用梅耶方法 (参看 § 6.4) 求出. 如果设

$$Z(u,u_1,\cdots,u_n)=z(\boldsymbol{r}),$$
$$x_\nu=\xi_\nu+uu_\nu(\nu=1,\cdots,n),$$

则从方程组 (1) 得

$$\frac{\partial Z}{\partial u}=\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu f^\nu, \tag{3}$$

而从初始条件推得

$$Z(0,u_1,\cdots,u_n)=\zeta. \tag{4}$$

方程 (3) 可看作是含有参数 $u_1,\cdots,u_n$ 的一个常微分方程. 如果 Z 是它的满足初始条件 (4) 的解，则

$$z=Z(1,x_1-\xi_1,\cdots,x_n-\xi_n)$$

就是方程组 (1) 的所求积分.

7.2. 一般拟线性方程组. 它具有下列形式

$$\sum_{\nu=1}^{n}f^{\mu\nu}(\boldsymbol{r},z)\frac{\partial z}{\partial x_\nu}=g^\mu(\boldsymbol{r},z)\ (\mu=1,\cdots,m), \tag{5}$$

且是 § 14 的一个特例. 于是那里所得到的结论此处也成立. 利用 § 12.3(a) 中所述的变换，方程组 (5) 可化为齐次方程组

$$\sum_{\nu=1}^{n}f^{\mu\nu}(\boldsymbol{r},z)\frac{\partial w}{\partial x_\nu}+g^\mu(\boldsymbol{r},z)\frac{\partial w}{\partial z}=0$$
$$(\mu=1,\cdots,m). \tag{6}$$

设函数 $f^{\mu\nu}(\boldsymbol{r},z)$，$g^\mu(\boldsymbol{r},z)$ 在 $\mathfrak{G}_{n+1}(\boldsymbol{r},z)$ 内连续，$w=$

$\psi(\boldsymbol{r}, z)$ 是齐次方程组 (6) 在 $\mathfrak{G}_{n+1}$ 内的一个积分。 其次设 $\chi(\boldsymbol{r})$ 是区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ 内的使点 $(\boldsymbol{r}, z = \chi(\boldsymbol{r}))$ 属于 $\mathfrak{G}_{n+1}$ 的一个连续函数。如果 $\boldsymbol{r}$ 属于 $\mathfrak{G}_n$，且使

$$\psi(\boldsymbol{r}, \chi(\boldsymbol{r})) = \text{常数};$$

又在区域 $\mathfrak{G}_n$ 的任一子域内有 $\psi_z(\boldsymbol{r}, \chi(\boldsymbol{r})) \not\equiv 0$，则 $z = \chi(\boldsymbol{r})$ 就是方程组 (5) 的一个积分[1] (试与 § 5.4 比较)。换句话说，方程组 (5) 的积分可以由方程组 (6) 的积分 $w = \psi(\boldsymbol{r}, z)$ 利用方程 $\psi = 0$ 解出 z 而得到。

1) 参看 Forsyth, Diff. Equations V, p.97～99. Goursat, Équations du premier ordre, p.94.

第二章 两个自变量的非线性微分方程

§ 8. 一般概念、记号及术语[1]

8.1. 方程的几何解释. 两个自变量、一个未知函数 $z=z(x,y)$ 的一阶(非线性)偏微分方程的一般形式为

$$F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0. \tag{1}$$

如果再利用记号 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$, 就是

$$F(x,y,z,p,q)=0, \tag{1'}$$

其中 $F=F(x,y,z,p,q)$是一已知函数,假设它在 x,y,z,p,q 空间的区域 $\mathfrak{G}(x,y,z,p,q)$ 内具有关于所有的五个变量的一阶连续偏导数.

已解出一个导数的方程

$$p=f(x,y,z,q)\text{或}q=f(x,y,z,p) \tag{2}$$

称为显式方程;导数未解出的方程 (1) 称为隐式方程.

关于积分曲面的定义,参看 § 1.1 及 § 8.8.

x,y,z 空间中的每一点 (x_0,y_0,z_0) 根据微分方程 (1) 对应着一族面元素 x_0,y_0,z_0,p,q (试与 § 2.1 比较), 其方

1) 参看 Courant-Hilbert, Methoden math. Physik II, p. 63—81 (中译本:数学物理方法 II, p. 59—76); Bieberbach, DGlen, 第 3 版, p.267—290; Forsyth, Diff. Equations V; Goursat, Équations du premier ordre; Horn, Partielle DGlen, p. 161—191; Kamke, DGlen, p. 342—377. Serret-Scheffers, Differential-und Integralrechnung III, p. 591—646.

向系数 p, q 由关系式

$$F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0$$

联系着.

借助于这个方程与点 (x_0, y_0, z_0) 对应的面元素确定一个单参数平面族，其包络面一般是以 (x_0, y_0, z_0) 为顶点的非退化[1]锥面(图 17). 这个锥面[2] 称为微分方程 (1) 在所给点

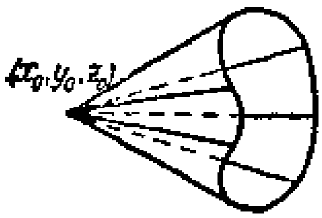

图 17

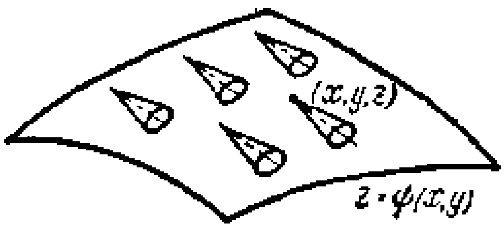

图 18

处的蒙日锥(方向锥面，面元素锥面(T 锥)).

于是，通过微分方程 (1) 或方程 (2)，每一点(当然假设方程(1′)在此点有实解 p, q[3]) 都对应于一个方向锥面. 微分方程 (1) 本身在几何上表示 x, y, z 空间中的一个锥面场(类似于常微分方程情况下平面上的方向场)(图 18).

---

1) 要区别两种情况:

i) 拟线性方程情况: 在这情况下，在一定点 (x_0, y_0, z_0) 处的积分面元素构成一个蒙日平面束，其轴就是该点的唯一的特征方向.

ii) 非线性方程情况: 在这情况下，在一定点 (x_0, y_0, z_0) 处的积分面元素族的包络面是锥面，它的无穷个母线给出该点处的无穷个特征方向. 仅当积分曲面在该点的切平面

$$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0)$$

已给定时，才能唯一地定出特征方向. ——校者注

2) 严格地说，在非线性方程 $F(x, y, z, p, q) = 0$ 情况下，当 x, y, z 已给定时，一般说，q 是 p (或 p 是 q)的多值函数. 所以，按照 $q = q(p)$ 的各种不同的值，在该点处的蒙日锥面可以分解为若干个蒙日锥面. ——校者注

3) 举例说，方程 $F = p^2 + q^2 + 1 = 0$ 没有(实)的面元素. 为了直观起见，通常不考虑这种情况. 然而在本章中的不包含存在定理的各段中，如果不考虑偶然性的限制外，绝对不排除这种情况. 又应注意: $F \equiv 0$ 的情况到现在为止也未排除.

在这种几何解释下，解微分方程(1)的问题可表述为：要找出这样的连续可微曲面 $z=\phi(x,y)$，在它的每一点处的面元素 $x, y, z=\phi(x,y)$，$p=\phi_x(x,y)$，$q=\phi_y(x,y)$ 满足方程(1′)．换句话说，在积分曲面的每一点 (x,y,z) 处的切平面应该同时是该点的方向锥面的切平面(图18)．

设所给微分方程(1)是拟线性的：

$$f(x,y,z)p+g(x,y,z)q=h(x,y,z), \qquad (3)$$

式中 $|f|+|g|>0$，则属于点 (x_0, y_0, z_0) 的方向锥面退化成一条直线

$$x-x_0=f_0t,\ y-y_0=g_0t,\ z-z_0=h_0t, \qquad (3')$$

其中 t 是参数，f_0, g_0, h_0 分别是函数 f, g, h 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的值．方向锥面的切平面族在拟线性情况下退化成通过这条直线的平面束(除去垂直于 x, y 平面的平面)(参看§2.1及§5.1)．

8.2. 特征(条)的几何解释．一阶线性和拟线性偏微分方程可归结为常微分方程组，因为它们的积分曲面可由特征线构造出来(参看§2.3及§5.2)．类似的推导对方程(1)也是可能的．

正如刚才所讲的，拟线性方程(3)的每一条特征线在它的任一点处都以该点的蒙日平面束的轴作为切线，也就是在 x, y, z 空间的每一点都对应着一个确定的方向(即束轴的方向)，而这方向场在分析上可用特征方程组来描述[1]．然而转到非线性方程(1)的情况时，首先将碰到这样的困难，即 x, y, z 空间的每一点对应着一个方向锥(它有无穷个母线方

1) [事实上，方程(3)的特征方程组

$x'(t)=f(x,y,z)$，$y'(t)=g(x,y,z)$，$z'(t)=h(x,y,z)$

表明：特征线在任一点 (x_0, y_0, z_0) 的切线方向就是向量 $(f(x_0, y_0, z_0), g(x_0, y_0, z_0), h(x_0, y_0, z_0))$，它同时是在该点的蒙日平面束(3′)的轴的方向向量．——俄译本编者注]

向)．但是，当已给有非线性方程(1)的一个积分曲面 $z=\phi(x, y)$ 时，则这曲面的一点 (x_0, y_0, z_0) 是对应着唯一的一个这样的直线方向，这积分曲面 $z=\phi(x, y)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的切平面沿着该直线同这点的蒙日锥相切．所以这直线的方向起着在线性情况时的特征方向所起的作用．这特征方向仅当方向系数 $p=\phi_x(x_0, y_0)$, $q=\phi_y(x_0, y_0)$ 为已知时，或一般情况下，仅当对应于点 (x_0, y_0, z_0) 的两个方向系数为已知时，才能确定．所以，在非线性方程(1)的情况下，方向系数也应当确定．亦即除了三个函数 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 之外，还须确定两个函数 $p(t)$, $q(t)$.

这五个函数

$$x=x(t),\ y=y(t), z=z(t),\ p=p(t),\ q=q(t) \quad (4)$$

在非线性方程(1)的情况下起着拟线性方程(3)的特征线相类似的作用[1]．按照前述，为了确定它们，我们必须有如下条件：

(α) 在空间曲线 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ 的每一点 $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$, $z_0=z(t_0)$ 处的切线必须是该点 (x_0, y_0, z_0) 的蒙日锥的母线，而 $t=t_0$ 时的面元素(4)必须沿着这切线与蒙日锥相切．

既然积分曲面必须由特征(条)所组成，所以还要引入如下条件：

---

1) 记号 z, p, q 具有各种不同意义，在开始时也许会引起读者的困难．它们的各种意义是：

i) 它们作为自变量．当我们说到函数 $F(x, y, z, p, q)$ 或区域 $\mathfrak{G}(x, y, z, p, q)$ 时，就用这个意义．

ii) z, p, q 作为方程(1)中的 x, y 的函数，此处的 $p=z_x, q=z_y$.

iii) z, p, q 同 x, y 一样，都看作方程(4)中的以 t 为自变量的函数．

读者不久就可以看出，z, p, q 具有各种不同的意义不会造成困难．如果采用不同记号来区别它们的各种意义，反而会带来不必要的麻烦．

(β) 面元素 (4) 必须属于一个积分曲面[1](即可嵌入某一个积分曲面).

当以后叙述特征条的分析定义时，可用较弱的如下的条件来代替：

(β^*) 面元素 (4) 应属于使 $F(x, y, \phi, \phi_x, \phi_y)$ 取常数值的连续可微的曲面 $z = \phi(x, y)$.

8.3. 条形的定义. 设面元素 (4) 属于任一连续可微曲面 $z = \phi(x, y)$. 将函数 (4) 代入等式 $z = \phi(x, y)$, 得

$$z(t) = \phi(x(t), y(t)).$$

把这恒等式对 t 求导，于是得下述称为条形条件的等式

$$z'(t) = p(t)x'(t) + q(t)y'(t). \tag{5}$$

这使我们得到了不再依赖任一曲面 $z = \phi(x, y)$ 的条形定义：如果在 (4) 式中已给定在区间 $\alpha < t < \beta$ 内连续可微的五个函数，设它们满足条件 (5)，面元素 (4) 的这样集合就称为一个条形；而 (4) 式的前三个方程确定的一条空间曲线，称为这条形的承载曲线(参看图 19). 当 x, y, z 恒等于常数时，则承载曲线退化为一点.

8.4. 特征方程组的导出[2].

特征条定义.

(a) 在必要的可微性的进一步假设及条件 $|F_p| + |F_q| > 0$ 下，我们来考察一般的非线性微分方程 (1). 由 § 8.2 的

1) 如果条件

$$z(t) = \phi(x(t), y(t)), \quad \phi'_x(x(t), y(t)) = p(t),$$
$$\phi'_y(x(t), y(t)) = q(t)$$

成立，则说面元素 (4) 属于曲面 $z = \phi(x, y)$. 换句话说，曲线 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ 位于 $z = \phi(x, y)$ 上，而在这曲线的每一点处切于曲面的切平面以 $p(t)$, $q(t)$ 的值作为方向系数.

2) 关于特征方程组的推导，可参看柯朗的数学物理方法 II, 第二章 §3. 应指出，推导时要用到 $p_y = q_x$. 所以先要假设条形所属的积分曲面 $z=\phi(x, y)$ 的两次连续可微性.

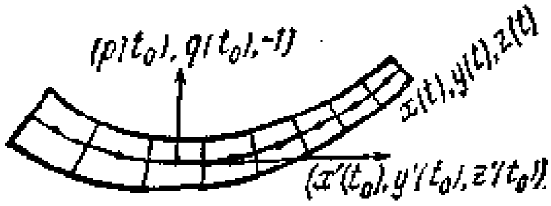

图 19

条件 (α) 可得关系式

$$x'(t):y'(t):z'(t)=F_p:F_q:(pF_p+qF_q),$$

其中在 F_p, F_q 中已将函数 (4) 代入. 如果这个关系式成立，则与曲线 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ 相切的切线就是对应的蒙日锥母线. 由此，借助于参数 t 的适当选取，我们推得后面的 (6) 的前三个方程[1]. 由于条件 (β), 有积分曲面 $z=\phi(x, y)$ 使 $F(x, y, \phi, \phi_x, \phi_y)\equiv 0$. 把它对 x, 对 y 求导，可推得 (6) 的后两个方程. 这样便推得特征方程组 (6). 现在不考虑在推导时所用的假设，而直接地给出不依赖于积分曲面的特征条形的定义如下:

假设函数 $F(x, y, z, p, q)$ 在 x, y, z, p, q 空间的区域 $\mathfrak{G}(x, y, z, p, q)$ 内具有一阶连续偏导数，如果在区域 $\mathfrak{G}$ 内取值而当 $\alpha<t<\beta$ 时连续可微的函数 (4) 满足由五个常微分方程所组成的方程组

$$\begin{cases}x'(t)=F_p,\ y'(t)=F_q,\ z'(t)=p(t)F_p+q(t)F_q,\\ p'(t)=-F_x-p(t)F_z,\ q'(t)=-F_y-q(t)F_z.\end{cases}\tag{6}$$

(其中函数 (4) 作为变量已被代入 F 的导数中)，则函数 (4) 称为微分方程 (1) 的一个**特征条**，或简称**特征**；方程组 (6) 称为偏微分方程 (1) 的**特征方程组**(或**特征组**).

从 F 的一次连续可微的假定，仅能断定方程组 (6) 右端

1) 推导下面的 (6) 的前两个方程时，可参看 §2.2 的注；(6) 的第三个方程就是条形条件 (α)；而 (6) 的后两个方程的推导，可参看柯朗的数学物理方法 II. ——校者注

的连续性，所以方程 (1) 通过始值 x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 的特征条可能不只一条. 然而如果假定 F 是两次连续可微，则通过始值仅有唯一的特征条. 关于特征条的其他事项，参看 §8.6.

在 Courant-Hilbert, Methoden math. Physik II, p. 64 (中译本：数学物理方法 II, p. 60–61) 上还出现如下一些术语：在任意一组函数 x, y, z, p, q 中，由 (6) 的前三个方程在空间中所确定的每一方向，称为一个特征方向. 一条在其上每一点都具有特征方向的空间曲线称为焦线或蒙日曲线，每一满足 (6) 的前三个方程和条件 $F=0$ 的条形称为焦条形.

(b) 如果已知 (2) 型的显式微分方程，例如

$$p = f(x, y, z, q), \tag{7}$$

则由 (6) 的五个特征方程组成的方程组就缩减到三个方程. 因为，由第一个特征方程 $x'(t)=1$，允许我们取 $t=x$；为了以后从特征条构造积分曲面的目的，仅需考察满足原微分方程 (7) 的那些面元素 (4)，所以在 (6) 的第三个方程中可以用 f 代替 p. 于是得到为确定 $y(x), z(x), q(x)$ 的三个方程

$$y'(x) = -f_q,\ z'(x) = f - qf_q,\ q'(x) = f_y + qf_z, \tag{8}$$

称它们为微分方程 (7) 的特征方程组.

为了确定特征条，还需补充一个方程

$$p(x) = f(x, y(x), z(x), q(x)). \tag{9}$$

(c) 对于拟线性微分方程 (3)，方程组 (6) 的前三个方程具有如下形状

$$x'(t) = f,\quad y'(t) = g,\quad z'(t) = pf + qg.$$

其中最后一个方程的右端 $pf+qg$ 可用 h 来代替. 所以在拟线性方程 (3) 的情况下，只需考虑 §5.2 中的特征方程组.

8.5. 推导特征方程组的其它方法. 利用 §8.2 中的条件 (α) 和 (β) 或 (β^*) 所确定的特征条具有直观上的优点. 但这样定义特征条有个缺点，就是它很难推广到一般情况(自变量多

于两个的多未知函数及更高阶的微分方程）．因此，这里再简述三个其它方法． 其中的第三个最简捷，并且容易推广到一般情形．

(a) 寻找同时属于几个积分曲面的条形(4)． 例如说要寻找同时属于两个积分曲面 $z=\phi(x, y)$ 与 $z=\chi(x, y)$ 的条形．设这些积分两次连续可微，又设三个差

$$\phi_{xx}-\chi_{xx},\ \phi_{xy}-\chi_{xy},\ \phi_{yy}-\chi_{yy}$$

当 $x(t), y(t)$ 代人后，在区间 $\alpha<t<\beta$ 的任一子区间内不是都恒等于零的(即至少有一个差必须不恒等于零)．

于是，把积分 $z=\phi$ 代入方程(1)后，对 x 又对 y 求导得两个式子

$$\begin{cases}F_x+F_z\phi_x+F_p\phi_{xx}+F_q\phi_{yx}=0,\\F_y+F_z\phi_y+F_p\phi_{xy}+F_q\phi_{yy}=0.\end{cases}\tag{10}$$

再将积分 $z=\chi$ 代入方程(1)，类似地得

$$\begin{cases}F_x+F_z\chi_x+F_p\chi_{xx}+F_q\chi_{yx}=0,\\F_y+F_z\chi_y+F_p\chi_{xy}+F_q\chi_{yy}=0.\end{cases}\tag{10'}$$

现在再把两个积分曲面的公共的条形(4)中的函数代入(10)式同(10′)式．据假设，易推得在(10)式中出现的 F_x, F_y, F_z, F_p, F_q, ϕ_x, ϕ_y 的值，是同(10′)式中所出现的 F_x, $\cdots$, F_q, χ_x, χ_y 的值一样． 所以把(10)式同(10′)式的对应式相减，则得用(4)代入后的方程组

$$\begin{cases}(\phi_{xx}-\chi_{xx})F_p+(\phi_{yx}-\chi_{yx})F_q=0,\\(\phi_{xy}-\chi_{xy})F_p+(\phi_{yy}-\chi_{yy})F_q=0.\end{cases}\tag{11}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}z&=\phi(x(t), y(t)),\\p&=\phi_x(x(t), y(t)),\\q&=\phi_y(x(t), y(t)).\end{aligned}\tag{12}$$

(还有用 χ 代替 ϕ 仍然成立的与(12)式类似的三个方程)．把

上式对 t 求导，则得条形条件

$$z' = px' + qy'. \tag{13}$$

再把(12)的后面两个式子对 t 求导，又得两个关系式

$$p' = \phi_{xx}x' + \phi_{xy}y', \quad q' = \phi_{yx}x' + \phi_{yy}y'. \tag{14}$$

同样地，可求得用 χ 代替 ϕ 的类似于(14)的两个关系式．从这四个关系式推得

$$\begin{aligned}(\phi_{xx} - \chi_{xx})x' + (\phi_{xy} - \chi_{xy})y' = 0,\\ (\phi_{yx} - \chi_{yx})x' + (\phi_{yy} - \chi_{yy})y' = 0.\end{aligned} \tag{14'}$$

据假设上式中的四个括号中的式子在区间 (α, β) 的任一子区间内不能同时都恒等于0．于是从方程组(14′)与方程组(11)推得[1]

$$y'F_p - x'F_q \doteq 0.$$

如果 $|x'| + |y'| > 0$，则可以作适当的自变量变换能使(6)的前两个方程被满足[2]．然而那时由于条形条件方程组(6)的第三个方程也将满足．最后，将函数(4)代入方程(10)，便推出关系式[3]

$$p'(t) = \frac{d}{dt}\phi_x(x(t), y(t)) = -F_x - pF_z,$$

$$q'(t) = \frac{d}{dt}\phi_y(x(t), y(t)) = -F_y - qF_z.$$

---

1) 据假设，前述的三个差

$u = \phi_{xx} - \chi_{xx}$, $v = \phi_{xy} - \chi_{xy} = \phi_{yx} - \chi_{yx}$, $w = \phi_{yy} - \chi_{yy}$

中至少有一个异于零．如果说 u, v 中有一个不等于零，于是从方程组(11)与方程组(14′)中都抽出第一个方程，而得方程组

$$\begin{cases} uF_p + vF_q = 0 \\ ux' + vy' = 0 \end{cases}$$

由于 u, v 不同时等于零，从线性代数熟知的定理即推得(15)式．

如果 $w \neq 0$，则可改考虑组(11)与(14′)中的第二个方程．——校者注

2) 关于证明，可参看§2.2的脚注．——校者注

3) 关于下面的 $p'(t)$, $q'(t)$ 的方程推导，可参看斯米尔诺夫的«高等数学教程»，IV卷，2分册，p.334—335.——校者注

这正是方程(6)的后两个方程.

(b) 设 $z=\phi(x, y)$ 是微分方程(1)的两次连续可微曲面,(4)是属于这个积分曲面的一个条形. 如果将 $z=\phi$ 代入方程 (1), 则象(a)中那样, 得到关系式(10)和(12)—(14). 现在将条形函数(4)代入方程(10), 然后, 将方程(14)加到对应的方程(10)上去,移项得

$$\begin{cases} p'+F_x+pF_z=\phi_{xx}(x'-F_p)+\phi_{xy}(y'-F_q), \\ q'+F_y+qF_z=\phi_{yx}(x'-F_p)+\phi_{yy}(y'-F_q). \end{cases} \tag{15}$$

方程(13)和(15)对每一属于积分曲面的条形都正确. 当条形中选取 $x'=F_p$, $y'=F_q$ 时,就使方程组(15)得到很大的简化,这时恰好得到特征方程组(6).

(c) 设已给空间曲线 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$. 于是就产生这样的问题: 什么时候能把它以唯一的方式补充为一个条形(4), 使得它的每一个面元素都满足方程(1)? 这就是能唯一地选为这样的连续可微函数 $p(t)$, $q(t)$ 使得条形条件

$$px'+qy'-z'=0$$

成立并满足方程

$$F(x, y, z, p, q)=0$$

的那种情况.

如果数 $p_0=p(t_0)$, $q_0=q(t_0)$ 满足刚才写出的两个方程, 则由隐函数定理知,当

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ F_p & F_q \end{vmatrix} \neq 0 \tag{16}$$

时,在 t_0 值的某个邻域内存在连续函数 $p(t)$, $q(t)$, 满足这两个方程. 相反地,当条件(16)不满足时,如果沿着这条形(4)恒有

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ F_p & F_q \end{vmatrix} = 0; \tag{17}$$

又设 $|F_p|+|F_q|>0$ 或者设 $|x'|+|y'|>0$，则适当选取参数 t 后，就有

$$x'=F_p,\quad y'=F_q.$$

于是，与不等式(16)相反的条件就直接导出特征方程组(6)的前两个. (6)的第三个方程就是条形条件. 最后两个方程可以如同 §8.4 中那样得到.

8.6. 正常面元素．奇异面元素． 对于微分方程(1)而言，面元素 x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 称为正常的(正则的，正规的)或奇异的(非正则的)，根据在点 $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ 处有 $|F_p|+|F_q|>0$ 还是 $|F_p|+|F_q|=0$ 而定.

对于至少包含一个正常面元素的任一特征条来说，无论是承载曲线还是它在 x, y 平面上的投影，都不是仅由一个点所组成，这可以从方程组(6)的前两个方程来证明. 如果特征条包含奇异面元素，则它可以有各种不同的性质，如同下面的例子所表明的那样.

在下列诸例中，0, 0, 0, 0, 0 是奇异面元素. 我们来研究当 $t=0$ 时通过该点的特征条.

(a) $p^2+q^2=x+y$.

特征方程是

$$x'=2p,\ y'=2q,\ z'=2p^2+2q^2,\ p'=1,\ q'=1.$$

由后两个方程推得 $p=q=t$. 于是由前二方程我们得到 $x=y=t^2$. 因此，承载曲线不是由一点组成.

(b) $(p+1)x+(q+1)y=z$.

特征方程是

$$x'=x,\ y'=y,\ z'=xp+yq,\ p'=-1,\ q'=-1.$$

由前两个方程推得 $x=y=0$，因此，由第三个方程求得 $z=0$；后两个方程给出 $p=q=-t$. 这里，承载曲线仅由一个点组成. 然而与它对应的却是无穷多的方向系数 p, q.

(c) $p^2+q^2-xp-yq+z=0$ (§11.12，克莱罗方程).

特征方程是

$$x' = 2p - x, y' = 2q - y, z' = 2p^2 + 2q^2 - xp - yq,$$
$$p' = 0, \quad q' = 0.$$

由最后两个方程得 $p = q = 0$，于是由前三个方程求得 $x = y = z = 0$。特征条由唯一的面元素组成。

(d) $p^2 + q^2 + x^2 + y^2 = 0$。

特征方程为

$$x' = 2p,\ y' = 2q,\ z' = 2p^2 + 2q^2,\ p' = -2x,\ q' = -2y.$$

由它们推得关系式

$$xx' + yy' + pp' + qq' = 0,$$

于是

$$x^2 + y^2 + p^2 + q^2 = 0,$$

即 $x = y = p = q = 0$。由第三个特征方程求得 $z = C$，C 是任意常数。因此，奇异面元素是

$$x = 0,\ y = 0,\ z = C,\ p = 0,\ q = 0.$$

同时这也是唯一的积分元素。因此，正象从这偏微分方程看到的那样，积分曲面不存在。

8.7. 特征条．积分条与积分曲面． 如果面元素 x, y, z, p, q 使 $F(x, y, z, p, q)=0$，则称它为微分方程(1)的一个积分元素。若条形(4)仅由积分元素所组成，则称它为积分条形或积分条。

(a) 函数 $F(x, y, z, p, q)$ 沿微分方程(1)的每个特征条取常数值，即

$$F(x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)) = \text{常数},$$

因此，特征条若包含即使一个积分元素，它也是积分条。

对于已解出导数的微分方程(7)，每一特征条总是一个积分条。因为在这情况下(参看 §8.4(b)) 和方程(8)，(9)成立。

(b) 如果函数 $z = \phi(x, y)$ 在区域 $\mathfrak{G}(x, y)$ 内是微分方程(1)的两次连续可微积分，且

$$x_0,\ y_0,\ z_0,\ \phi(x_0,\ y_0),\ \phi_x(x_0,\ y_0),\ \phi_y(x_0,\ y_0) \tag{18}$$

是该积分曲面的任一面元素，则方程(1)的任何包含这个面元素的特征条[1]属于曲面 $z=\phi(x, y)$，如果特征条的前两个坐标 (x, y) 是区域 $\mathfrak{G}$ 的点的话.

因此，两次连续[2]可微积分曲面能由特征条组成. 对于显式微分方程(7)有类似结论.

(c) 如果 $z=\phi(x, y)$ 和 $z=\chi(x, y)$ 是方程(1)的具有一个公共面元素(18)的两个积分曲面，它们在区域 $\mathfrak{G}(x, y)$ 内两次连续可微，则方程(1)的包含该面元素的特征条全部都同时属于这两个积分曲面，只要 $(x(t), y(t))$ 是区域 $\mathfrak{G}$ 的点.

如果这公共面元素是正常的，则由 §8.6 知，这两个积分曲面就具有不退化为一点的公共曲线.

8.8. 特积分. 奇积分. 全积分. 通积分.

我们要使用关于方程(1)的一系列术语，其中一部分术语确实是必不可省的.

(a) 方程(1)的**特积分**不是别的，就是该微分方程的一个积分，亦即满足方程(1)的某个函数 $z=\phi(x, y)$. 因此，术语"特积分"通常与简称的"一个积分"表示同样的意思. 因而"特积分"这个术语是多余的.

(b) 如果微分方程(1)的一个积分 $z=\phi(x, y)$ 仅包含奇异积分元素(试与 § 8.6 和 § 8.7 比较)，即当三个方程

$$F(x, y, z, p, q)=0,\ F_p=0,\ F_q=0 \tag{19}$$

对于

1) 如果函数 F 两次连续可微，或由于任何其它条件能保证特征方程(6)在已给的初值条件下的解的唯一性，则仅存在唯一的这种条形.

2) 关于减弱可微性条件的问题，参看 A. Haar, *Acta Szeged*, **4**(1928), 103—114; T. Ważewski, *Annales Soc. Polon. Math.*, **13** (1934), 10—12; *Math. Zeitschrift*, **43** (1938), 521—532.

$$z=\phi,\ p=\phi_x,\ q=\phi_y \tag{20}$$

同时成立时，则称它为该方程的奇积分．如果将(20)式代入(19)式，则求偏导后可得对两次连续可微的奇积分成立的关系式

$$F_x+pF_z=0,\quad F_y+qF_z=0. \tag{21}$$

不含奇异积分元素的积分完全可以称为正常的积分．当然，任意一个积分可能既包含正常的也包含奇异的面元素．

求方程(1)的奇积分的两种方法：i) 从方程(19)得到；或 ii) 当所求的奇积分是两次连续可微的情况时，先从(19)，(21)定出所有的面元素 x, y, z, p, q，再研究由这些面元素是否可组成一个连续可微的曲面 $z=\phi(x,y)$．

例． $pq=z$．

奇异面元素由关系式

$$z=pq,\ q=0,\ p=0$$

得到．因此，对任何 x, y 有 $z=p=q=0$，且这些元素都包含在奇异积分曲面 $z=0$ 上．

(c) 微分方程(1)的一个全积分是指双参数的积分族

$$z=\phi(x,y,a,b), \tag{22}$$

其中函数 ϕ 和 ϕ_x，ϕ_y 一起在 x, y, a, b 空间的某个区域内，应对所有四个变量连续可微，且函数矩阵（关于这记号参看 § 2.7(c)）

$$\frac{\partial(\phi,\phi_x,\phi_y)}{\partial(a,b)}$$

在这区域的每一点处其秩应是 2[1]．

全积分绝对不是由方程(1)唯一地确定的，它的作用是：只要单纯地利用微分法与消去法就可从它得到该方程的其它

1) 在定义中还要求通过 $x, y, \phi, \phi_x, \phi_y$ 同时给出方程 (1) 的所有积分元素．但是这个要求也许始终没有在任何一本书中一贯地实施，因为它将使全积分的实际应用变得过分复杂．

积分(参看 §9.5). 粗糙地说,全积分大致地相当于齐次线性方程的积分基底(参看 §3.4).

(d) 方程 (1) 的依赖于一个任意函数的积分称为通积分. 这里的依赖性通常这样地理解:在 (c) 的 (22) 式中,可用任意函数 $b=\varphi(a)$ 代入. 应该指出,通积分的更适当的定义是:通积分是依赖于任给的初始条形的积分(校者注:参看 §9.6). 通积分这个术语并无采用的必要.

§9. 拉格朗日方法[1)]

9.1. 首次积分. 设给定拟线性方程

$$f(x,y,z)p+g(x,y,z)q=h(x,y,z), \qquad (*)$$

如果 $w=\phi(x,y,z)$ 是对应的齐次方程

$$f(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial x}+g(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial y}+h(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (**)$$

的一个积分,则按 §5.4,在一些假设下,方程(*)的一个积分 $z=\chi(x,y)$ 可由方程 $\phi=0$ 解出 z 而得到,并且方程 (**) 的积分 ϕ 是沿该方程的每一特征线(或同样的,沿方程 (*) 的每一特征线)取常数值的连续可微函数.

方程

$$F(x,y,z,p,q)=0 \qquad (1)$$

的拉格朗日方法,就是把上述方法移用到这个方程.

(a) 假设下面出现的函数 $F(x,y,z,u,v)$, $G(x,y,z,u,v)$, $H(x,y,z,u,v)$ 都在区域 $\mathfrak{G}(x,y,z,u,v)$ 内连续可微.

如果函数 $G(x,y,z,u,z)$ 沿方程 (1) 的每一特征条,

1) 关于文献,参看对于 §8 的脚注.

即沿特征方程组(参看 § 8.4)

$$\begin{cases} x'(t)=F_u,\ y'(t)=F_v,\ z'(t)=uF_u+vF_v, \\ u'(t)=-F_x-uF_z,\ v'(t)=-F_y-vF_z \end{cases} \quad (2)$$

的每一解取常数值，则称它为方程(1)的一个**首次积分**.

根据 §3.2，这就是说，函数 G 是齐次线性微分方程

$$F_u\frac{\partial w}{\partial x}+F_v\frac{\partial w}{\partial y}+(uF_u+vF_v)\frac{\partial w}{\partial z}$$
$$-(F_x+uF_z)\frac{\partial w}{\partial u}-(F_y+vF_z)\frac{\partial w}{\partial v}=0 \quad (3)$$

的一个积分. 将积分 G 代入(3)式，在 $\mathfrak{G}$ 内我们得到关系式

$$[F(x,y,z,u,v),G(x,y,z,u,v)]=0. \quad (4)$$

表达式

$$[F,G]=-[G,F]=(F_x+uF_z)G_u+(F_y+vF_z)G_v$$
$$-(G_x+uG_z)F_u-(G_y+vG_z)F_v \quad (5)$$

称为 F 与 G 的**雅可比括号**. 对于满足关系式(4)的函数 F 与 G，我们就说它们是**彼此对合**的.

根据 § 8.7(a)，函数 $F(x,y,z,u,v)$ 是方程(1)的一个明显的首次积分[1]. 为了得到它的其它的首次积分，必须解线性齐次微分方程(3)(参看 § 3).

(b) 为了实际地求方程(1)的解，把首次积分概念推广是很有用的. 如果函数 $G(x,y,z,u,v)$ 沿方程(1)的每一特征积分条形取常数值，则称它为方程(1)的一个**广义首次积分**[2]. 函数 G 当且仅当关系式(4)对方程(1)的每一积

1) 可以直接地从方程组(3)推证 F 是首次积分.显然 $w=F$ 满足方程组(3).

2) 根据定义，有

常义(广义)首次积分沿着任一(积分)特征条形保持常数值. 所以，一个常义的首次积分必定是广义的首次积分. 反过来说，就不一定成立. 又应指出：求广义首次积分时，除了使用特征方程组(2)，还可以利用偏微分方程(1)；而求常义首次积分时，不能利用方程(1). 参看下例. ——校者注

分元素 x, y, z, u, v 都满足时，它是该方程的一个广义首次积分.

例. $(xp+yq-z)^2=(p^2+q^2)f(x^2+y^2)$.

特征方程是

$$x'=2x(xp+yq-z)-2pf,$$

$$y'=2y(xp+yq-z)-2qf,$$

$$z'=2(xp+yq)(xp+yq-z)-2(p^2+q^2)f,$$

$$p'=2x(p^2+q^2)f',$$

$$q'=2y(p^2+q^2)f'.$$

由前两个方程得

$$y'p-x'q=2(yp-xq)(xp+yq-z),$$

而由后两个方程得

$$yp'-xq'=0.$$

所以我们得到

$$\frac{(yp-xq)'}{yp-xq}=2(xp+yq-z). \tag{*}$$

若只限于特征积分条，利用原微分方程还可将特征方程变形，即原方程和第三个特征方程给出关系式

$$z'=2z(xp+yq-z).$$

因此，方程(*)取如下形式

$$\frac{(yp-xq)'}{yp-xq}=\frac{z'}{z}.$$

由此可以看出

$$\ln|yp-xq|-\ln|z| \text{ 或 } \frac{yp-xq}{z}$$

是一个广义首次积分，因为求出这个积分时，曾利用微分方程本身.

(c) 如果函数 G 是微分方程 (1) 的一个广义首次积分，且 $p=U(x,y,z)$ 和 $q=V(x,y,z)$ 在区域 $\mathfrak{G}(x,y,z)$ 内同时是两个方程 $F=0$ 和 $G=0$ 的公共连续可微解，则在 $\mathfrak{G}$ 内当雅可比括号对 $p=U$, $q=V$ 来计算时，就有

$$[F,G]=0.$$

如果 G 和 H 是微分方程(1)的广义首次积分，且函数 $z=\phi(x, y)$，$p=U(x, y)$，$q=V(x, y)$ 同时是三个方程 $F=0$，$G=0$，$H=0$ 在区域 $\mathfrak{G}(x, y)$ 内的公共解，则在 $\mathfrak{G}$ 内当雅可比括号对于 $z=\phi$，$p=U$，$q=V$ 来计算时，就有

$$[F, G]=0 \quad \text{及} \quad [F, H]=0.$$

因此，为解微分方程(1)，可视不同情况试着寻找两个或仅一个广义首次积分(显见的首次积分除外)。

9.2. 由两个非显见的首次积分求全积分. 除去微分方程(1)的显见首次积分 F 之外，如果还知道两个广义首次积分 G 和 H，则我们可以根据 § 9.1 中所拟定的方法按下列步骤进行.

从方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z, u, v)=0, \\ G(x, y, z, u, v)=0, \\ H(x, y, z, u, v)=0 \end{cases} \tag{6}$$

解出 z, u, v. 如果这时得到连续函数 $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$ 及连续可微函数 $z=z(x, y)$，则检查一下是否有 $z_x=u$，$z_y=v$. 如果是这样，则函数 $z=z(x, y)$ 显然是方程(1)的一个解，而且 $z=z(x, y)$ 也是三个方程

$$\begin{cases} F(x, y, z, p, q)=0, \\ G(x, y, z, p, q)=0, \\ H(x, y, z, p, q)=0 \end{cases} \tag{7}$$

的一个公共解.

(a) 可是形如(1)的两个方程并不是总有公共解，正如显然的例子 $p=0$，$p=1$ 所表明的那样. 下述定理是正确的[1]:

---

1) 这里的定理的证明以及下面的定理(b)的证明，可参看 Kamke, DGlen, p. 364—367.——校者注

如果定义在区域 $\mathfrak{G}(x, y)$ 内的函数 $\phi(x, y)$ 是两个微分方程

$$F(x, y, z, p, q)=0, \quad G(x, y, z, p, q)=0 \tag{8}$$

的两次连续可微的积分，则 ϕ 在 $\mathfrak{G}$ 内也满足微分方程

$$[F(x, y, z, p, q), \ G(x, y, z, p, q)]=0. \tag{9}$$

因此，(8) 和 (9) 中的三个方程有公共解，是 (8) 中两个方程同时可解的必要条件[1]。

(b) 为施行前面所拟定的方案，还应要求关于函数 F, H 和 G, H 的(类似于条件 (9) 的)相应条件，以及 (6) 的三个方程在 F, G, H 关于 z, u, v 的函数行列式异于零的意义下的函数无关性. 这时，下述定理成立：

设函数

$$z=\phi(x, y), \ u=U(x, y), \ v=V(x, y) \tag{10}$$

在区域 $\mathfrak{G}(x, y)$ 内连续可微，而且它们在这区域满足方程组 (6). 其次，对于函数 (10) 的雅可比括号在 $\mathfrak{G}(x, y)$ 内等于零：

$$[F, G]=0, \ [F, H]=0, \ [G, H]=0, \tag{11}$$

而在 $\mathfrak{G}$ 的每一子域内，有

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(z, u, v)} \neq 0. \tag{12}$$

则

$$U(x, y)=\phi_x(x, y), \ V(x, y)=\phi_y(x, y).$$

于是函数 $\phi(x, y)$ 是方程 (7) 在区域 $\mathfrak{G}(x, y)$ 内的一个公共积分，特别地，也是微分方程 (1) 的一个积分.

如果我们分别用 $G-a$ 及 $H-b$ 代替 G 及 H，此处 a, b 为

1) 和 (8) 中两个方程在一起的方程(9)决不是新的条件. 这是因为，若 G (例如说)是方程 (1) 的一个首次积分，则据 §9.1，方程 (4) 甚至对于所有五个变量恒满足.

任意常数，则假设 (11) 和 (12) 仍满足．在这种情况下，可通过解方程组

$$
\begin{cases}
F(x, y, z, u, v) = 0, \\
G(x, y, z, u, v) = a, \\
H(x, y, z, u, v) = b,
\end{cases}
\tag{13}
$$

得到函数 (10)．这样，在某个区域内就可得到方程 (1) 的一个全积分 $z = \phi(x, y, a, b)$．

(c) 方法指示．用 (b) 的方法求方程 (1) 的解时，首先要列出特征方程组 (2)，即写成 § 8.4 中的 (6) 式的形式，但其中的字母 p, q 要用 u, v 代替，然后有目的地组合这些方程，以便得到沿每一特征条或每一特征积分条取常数值的两个连续可微函数 G 和 H，也就是要得到两个（常义的或广义的）首次积分．并且要注意到三个函数 F, G, H 彼此函数无关．(11) 的前两个方程显然对方程 (1) 的正常首次积分以及广义首次积分关于 x, y, z, u, v 恒满足．最后，从方程组(6)解出 z, u, v，或更一般地，解方程组 (13)．用所求得的函数 $z = \phi(x, y)$ 代入方程 (1) 中，或用验证 (b) 中所有其余假设是否满足的方法，可以断定函数 $z = \phi(x, y)$ 是否是微分方程 (1) 的一个积分．

例．对于方程

$$pq = z, \tag{14}$$

其特征方程是

$$x'(t) = v, y'(t) = u, z'(t) = 2uv, u'(t) = u, v'(t) = v.$$

由它们得出关系式

$$u' - y' = 0, \quad v' - x' = 0, \quad u'v - uv' = 0.$$

因此，函数 $u - y$，$v - x$ 及 $\frac{u}{v}$（对于最后一个，限于使 $v \neq 0$ 的区域内）就是沿方程 (14) 的每一特征条取常数值的连续可微函数，即这三个函数是其首次积分．此外，方程 (14) 有显见的首次积分 $z = uv$．这些首

次积分的任何连续可微函数又都是该方程的首次积分。

现在如果设

$$F = z - uv,\ G = u - y,\ H = \frac{u}{v} - 1,$$

则方程(6)有解 $z = y^2$。但它不是方程(14)的积分。其实，这与(b)中定理并不矛盾，因为这里 $[G, H] = \frac{u}{v^2} \neq 0$。

如果选择

$$F = z - uv,\ G = x - v,\ H = y - u,$$

则由方程(13)得到全积分

$$z = (x - a)(y - b).$$

如果我们取首次积分

$$F = z - uv,\ G = a(x - v) + y - u,\ H = \frac{u}{v},$$

则由方程(13)得到全积分

$$z = \frac{1}{4a}(ax + y - b)^2.$$

9.3. 由一个非显见的首次积分求全积分. 如果对微分方程(1)，只求得在正常或推广的意义下的不依赖于显见积分的一个首次积分，则也可以得到全积分。为此，设 a 为任意常数，从方程组

$$F(x, y, z, u, v) = 0,\ G(x, y, z, u, v) = a. \quad (15)$$

解出 u, v。一般地说，这给出满足该二方程的数组 x_0, y_0, z_0, u_0, v_0，并且在该点的邻域内有

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \neq 0.$$

在这种情况下，(15)的两个方程在点 (x_0, y_0, z_0) 的邻域内有连续可微解 $u = U(x, y, z)$，$v = V(x, y, z)$。利用这组解构成微分方程组

$$\frac{\partial z}{\partial x} = U(x, y, z),\quad \frac{\partial z}{\partial y} = V(x, y, z), \quad (16)$$

并且要找它的解 $z=\phi(x,y)$. 因为从假设可推得在点 (x_0, y_0, z_0) 的邻域内的可积性条件[1]

$$U_y+VU_z=V_x+UV_z,$$

所以方程组(16)的解 $z=\phi(x,y)$ 存在（参看 §7.1），并且对 $\phi(x_0,y_0)$ 可在 z_0 的足够小的邻域内再选一个任意值 b. 于是函数 $z=\phi(x,y;a,b)$ 是方程组(16)的一个公共积分，并且是方程(1)的一个全积分. 一般地说，这个积分的存在区域是比假设所预料的要大.

例 1. $pq=z$.

在 §9.2(c) 中已求得首次积分 $u-y$, $v-x$, $\frac{u}{v}$. 如果设 $G=u-y$, 则方程组(15)在这情况下具有下列形式

$$uv=z,\qquad u-y=b,$$

亦即要解方程组(参看(16)式)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y+b,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y+b}.$$

我们求得

$$z=(x+a)(y+b).$$

若用首次积分中的第二个，可得同样结果；现在用第三个首次积分，于是得如下形式的一个全积分

$$z=\frac{1}{4}\left(ax+\frac{y}{a}+b\right)^2.$$

例 2. $(xp+yq-z)^2=(p^2+q^2)f(x^2+y^2)$.

在 §9.1(b) 中已经求得广义首次积分 $\frac{yp-xq}{z}$. 如果令它等于 A, 则对所得方程和原方程解出 p 和 q，便得

$$\frac{\partial \ln z}{\partial x}=\frac{Ay}{r^2}+\frac{x}{r^2-f}\pm\frac{x}{r^2(r^2-f)}\sqrt{R},$$

$$\frac{\partial \ln z}{\partial y}=-\frac{Ax}{r^2}+\frac{y}{r^2-f}\pm\frac{y}{r^2(r^2-f)}\sqrt{R}.$$

---

1) 从假设推导可积性条件，可参看 Kamke, DGlen, p. 369 (定理4). ——校者注

其中 $r^2 = x^2 + y^2$, $R = (A^2 + 1)r^2 f - A^2 f^2$ [1]. 由此引入极坐标代替 x, y, 可求得 $\ln z$（参看本书第二部分中 6.107 题）.

9.4. 由两个非显见的首次积分求单参数积分族. 可能发生这种情况：在显见的首次积分之外，虽然求得两个广义首次积分 G, H, 但它们并不是彼此对合. 这时，利用 (13) 中常数 a 和 b 的特殊选择，有时能顺利地得到原方程(1)的一个单参数积分族.

例. $pq = x + y + z$.

由特征方程

$$x' = q, y' = p, z' = 2pq, p' = p + 1, q' = q + 1.$$

我们求得首次积分

$$p - q + x - y, \quad \frac{p+1}{q+1}.$$

但是它们不是彼此对合. 虽然如此，如果写出方程(13):

$$pq = x + y + z, \quad p - q + x - y = 2a, \quad p + 1 = b(q + 1),$$

则由后两个方程得

$$\begin{aligned} (b-1)p &= b(y-x) + 2ab - b + 1, \\ (b-1)q &= y - x + 2a - b + 1. \end{aligned} \qquad (*)$$

由于 $p = z_x$, $q = z_y$, 所以应有 $p_y = q_x$; 将这个条件[2] 应用于方程 $(*)$, 得 $b = -1$. 对于这个值，我们有

$$2z_x = y - x + 2a - 2, \quad 2z_y = x - y - 2a - 2.$$

因此有

$$z = -\frac{(x-y)^2}{4} + a(x-y) - (x+y) + (1 - a^2).$$

---

1) 德文第 3 版中, $R = (A^2 + 1)r^2 - A^2 f$; 俄译本中, $R = (A^2 + r^2)f - A^2 f^2$. 经验算，两者均错. ——译者注

2) 原文中“由于 $p = z_x$, $q = z_y$, 所以应有 $p_y = q_x$”这话欠妥当. 这是因为这两个首次积分既然不是彼此对合，从它们解得的 p、q 不一定能满足可积性条件 $p_y = q_x$.

应该这样说：可以在上式中适当选取任意常数 a, b, 使条件 $p_y = q_x$ 被满足. ——校者注

这就求得了所给偏微分方程的一个单参数积分族.

9.5. 由一个全积分求其它积分.

(a) 设

$$z=\phi(x, y; a, b) \tag{17}$$

是微分方程 (1) 在点 (x_0, y_0, a_0, b_0) 的邻域内[1] 的一个全积分. 从它构造出其它积分的方法, 几何上归结为构造出这个全积分的积分曲面的整个集合或某一子集合的包络面; 分析上, 这个方法用变易常数来实现.

如果

$$a=\alpha(x, y), \quad b=\beta(x, y) \tag{18}$$

是连续可微函数, 则由 (17) 式求偏导, 得

$$z_x=\phi_x+\phi_a\alpha_x+\phi_b\beta_x, \quad z_y=\phi_y+\phi_a\alpha_y+\phi_b\beta_y,$$

如果

$$\phi_a\alpha_x+\phi_b\beta_x=0, \quad \phi_a\alpha_y+\phi_b\beta_y=0, \tag{19}$$

则将 (18) 中的两个函数代入 (17), 便给出微分方程 (1) 的积分.

(b) 如果 $\phi_a=\phi_b=0$, 则方程 (19) 显然被满足. 如果这些方程关于 x, y 恒满足, 则得作为积分曲面集合的包络的一个奇异积分曲面. 可是, 为了得到这些积分曲面, 直接法 (参看 § 8.6(b)) 一般说来更方便.

(c) 下述情况是更重要的情况[2]:

如果 $\Phi(a, b)$, $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ 是连续可微函数, 且条件

---

1) 假设下面的所有论证都在这点的某个充分小的邻域内进行.

2) 用下述方式得到本情况. 如果 $\alpha_x\beta_y-\alpha_y\beta_x\neq 0$, 则从齐次线性方程组 (19) 只能得到零解 $\phi_a=\phi_b=0$. 因此, 发生情况 (b). 反之, 若 $\alpha_x\beta_y-\alpha_y\beta_x=0$, 则由 §2.7 (a) 知, 函数 $\alpha(x, y)$ 与 $\beta(x, y)$ 函数相关. 如果这相关性通过一个函数 $\Phi(a, b)$ 来实现, 则恰好得到在假设 (20) 下的情况 (c).

$$\begin{cases} |\Phi_a| + |\Phi_b| > 0, \ \Phi(\alpha(x, y), \beta(x,y)) = 0, \\ \phi_a(x, y; \alpha, \beta)\Phi_b(\alpha, \beta) - \phi_b(x, y; \alpha, \beta)\Phi_a(\alpha, \beta) = 0 \end{cases} \tag{20}$$

成立，则函数

$$z = \phi(x, y; \alpha(x, y), \beta(x, y))$$

也是方程 (1) 的一个积分. 它是带有补充条件 $\Phi(a, b) = 0$ 的曲面 (17) 的包络面. 如果已给定函数 Φ, 则 (20) 的两个方程可用来计算函数 α, β. 当然假设这两个方程的(公共)解存在.

例. $pq = z$.

根据 §9.2(c)，函数

$$z = (x - a)(y - b)$$

是一个全积分. 如果取

$$\Phi(a, b) = \lambda a + \mu b \ (|\lambda| + |\mu| > 0),$$

则 (20) 的第一个条件被满足. 在所给情况下，(20) 中的方程具有如下形状

$$\lambda\alpha + \mu\beta = 0, \quad \lambda(x - \alpha) - \mu(y - \beta) = 0.$$

由此得

$$\alpha = \frac{\lambda x - \mu y}{2\lambda}, \ \beta = -\frac{\lambda x - \mu y}{2\mu}.$$

因此，若 $\lambda\mu \neq 0$，则得积分

$$z = \frac{1}{4\lambda\mu}(\lambda x + \mu y)^2.$$

(d) 从一个全积分所确定的积分中寻找已给的一个积分. 设 $\chi(x, y)$ 是微分方程 (1) 的一个积分. 如果适当地选取连续可微函数 $\alpha(x, y), \beta(x, y)$, 使得

$$\phi(x, y; \alpha, \beta) = \chi, \quad \phi_x = \chi_x, \ \phi_y = \chi_y \tag{21}$$

及

$$\phi_a\alpha_x + \phi_b\beta_x = 0, \quad \phi_a\alpha_y + \phi_b\beta_y = 0, \tag{22}$$

则由 (a), $\chi(x, y)$ 可由全积分 (17) 得到. 实践中，为计算函数 α, β, 可先利用关系式 (21)，而后验证这些函数是否也满

足方程(22).

我们来考察(c)中已解过的例子. 假设

$$\psi(x, y; a, b) = (x-a)(y-b), \quad \chi(x, y) = \frac{(\lambda x+\mu y)^2}{4\lambda\mu}.$$

于是方程(21)取下列形式

$$(x-a)(y-b) = \frac{(\lambda x+\mu y)^2}{4\lambda\mu},$$

$$y-b = \frac{\lambda x+\mu y}{2\mu}, \quad x-a = \frac{\lambda x+\mu y}{2\lambda}.$$

结果得到

$$a = \alpha(x, y) = \frac{\lambda x-\mu y}{2\lambda}, \quad b = \beta(x, y) = \frac{\mu y-\lambda x}{2\mu}.$$

这两个函数也满足方程(22).

9.6. 通过已给定的初始条形的积分曲面(柯西问题)[1]. 设在点τ_0的邻域内给定积分条形

$$x = \omega_1(\tau), \quad y = \omega_2(\tau), \quad z = \omega_3(\tau), \quad p = \omega_4(\tau),$$
$$q = \omega_5(\tau). \tag{23}$$

这就是说,下列等式是正确的:

$$\omega_3' = \omega_4\omega_1' + \omega_5\omega_2' \text{(条形条件)} \tag{24}$$

与

$$F(\omega_1, \cdots, \omega_5) = 0. \tag{25}$$

我们将要找包含条形(23)的积分曲面[2].

我们将从全积分的表达式(17)来求出这个积分曲面. 引入这样的函数$t(x, y)$, 使得

$$a = \alpha(t), \quad b = \beta(t), \quad t = t(x, y),$$

---

1) 参看 Goursat, Équations du premier ordre, p. 150; G. Hoheisel, 100. Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für Vaterländische Kultur, 1927, p.10.

2) 如果代替初始条形,而给定积分曲面的初始曲线,则可以把它补足成为初始条形(23),使得等式(24)及(25)都成立(参看§8.5(c), 并参看下面的例2. ——校者注)

此处三个函数都假定是连续可微的．当

$$\psi_a(x, y; \alpha, \beta)\alpha' + \psi_b(x, y; \alpha, \beta)\beta' = 0 \tag{26}$$

对于函数 $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $t(x, y)$ 成立时，把这些函数代入 §9.5的全积分 (17) 式后，则所得的函数 $\psi(x, y)$ 仍为方程 (1) 的一个积分(参看 §9.5)．如果

$$\begin{cases}\omega_3(\tau) = \psi(x, y; \alpha(\tau), \beta(\tau)),\\ \omega_4(\tau) = \psi_x(x, y; \alpha(\tau), \beta(\tau)),\\ \omega_5(\tau) = \psi_y(x, y; \alpha(\tau), \beta(\tau))\end{cases} \tag{27}$$

对于 $x = \omega_1(\tau)$, $y = \omega_2(\tau)$ 及

$$t(\omega_1, \omega_2) = \tau \tag{28}$$

成立，则 $\psi(x, y)$ 包含初始条形 (23)．方程 (27) 可用来确定函数 $\alpha(t)$, $\beta(t)$; 方程 (26) 和 (28) 可用来确定函数 $t(x, y)$.

如果关系式 (27) 对于 $\tau = \tau_0$, $x = \omega_1(\tau_0)$, $y = \omega_2(\tau_0)$ 以及仅对代替 $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ 的任意两个数 a_0, b_0 被满足；此外，当 $x = \omega_1(\tau_0)$, $y = \omega_2(\tau_0)$, $a = a_0$, $b = b_0$ 时，有

$$F_p(\omega_1(\tau_0), \cdots, \omega_5(\tau_0)) \neq 0,$$
$$\psi_a \neq 0, \psi_b \neq 0, \psi_a\psi_{yb} - \psi_b\psi_{ya} \neq 0$$

或

$$F_q(\omega_1(\tau_0), \cdots, \omega_5(\tau_0)) \neq 0,$$
$$\psi_a \neq 0, \psi_b \neq 0, \psi_a\psi_{xb} - \psi_b\psi_{xa} \neq 0,$$

则函数 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 单值地由 (27) 式确定为在 τ_0 的邻域内的连续可微函数，且满足条件 $\alpha(\tau_0) = a_0$, $\beta(\tau_0) = b_0$. 其次，还要由 (26) 确定 $t(x, y)$. 于是 (28) 自然被满足.

例 1. $pq = z$.

由 § 9.2(c) 知，$z = (x - a)(y - b)$ 是一个全积分．现在来求包含积分条形

$$x = 0, \quad y = t, \quad z = t^2, \quad p = \frac{t}{2}, \quad q = 2t$$

的积分曲面．这条形满足(24)，(25)．而方程(27)具有下列形式

$$t^2 = -a(t-b),\quad \frac{t}{2} = t-b,\quad 2t = -a.$$

并且给出

$$\alpha(t) = -2t,\quad \beta(t) = \frac{t}{2}.$$

方程(26)现在是

$$2\left(y-\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}(x+2t) = 0.$$

它给出

$$t = y - \frac{x}{4}.$$

于是

$$\alpha = \frac{x}{2} - 2y,\quad \beta = \frac{y}{2} - \frac{x}{8}.$$

由此我们得到所求积分

$$z = \left(y + \frac{x}{4}\right)^2.$$

例 2[1]．$pq = axy$.

这个微分方程的变量可以分离(参看§11.5)；用这方法可求得一个全积分

$$z = Ax^2 + \frac{a}{4A}y^2 + B. \qquad (*)$$

现在来求包含初始曲线

$$x = \xi,\ y = \eta,\ z = \omega(\eta),\ -\infty < \eta < +\infty$$

因而(参看 112 页上的脚注 2)包含初始条形

$$x = \xi,\ y = \eta,\ z = \omega(\eta),\ p = \frac{a\xi\eta}{\omega'(\eta)},\ q = \omega'(\eta)$$

的积分曲面，其中假设$\omega'(\eta) \neq 0$.

若用 A, B 代替 α, β, 则方程(27)取下列形式：

$$\omega(\eta) = A\xi^2 + \frac{a}{4A}\eta^2 + B,$$

---

1) Goursat, Équations du premier ordre, p.153.

$$\frac{a\xi\eta}{\omega'(\eta)} = 2A\xi,\ \omega'(\eta) = \frac{a}{2A}\eta.$$

于是

$$A = \frac{a\eta}{2\omega'(\eta)},\quad B = \omega(\eta) - \frac{a\xi^2\eta}{2\omega'(\eta)} - \frac{\eta}{2}\omega'(\eta). \qquad (**)$$

方程(26)可写为

$$(\eta\omega'' - \omega')[a\eta^2(x^2 - \xi^2) - (y^2 - \eta^2)\omega'^2] = 0. \qquad (***)$$

如果 $\eta\omega'' - \omega' \neq 0$，则应由

$$a\eta^2(x^2 - \xi^2) = (y^2 - \eta^2)\omega'^2$$

确定 η 为 x，y 的函数，并将它代入 (**) 和 (*)；这样，例如对于 $\omega(\eta) \equiv \eta$，则得

$$z = v\sqrt{a(x^2 - \xi^2) + 1}.$$

如果 $\eta\omega'' - \omega' = 0$，则 $\omega = \alpha\eta^2 + \beta$ 含有任意常数 α，β. 微分方程(***)在这里不能用来确定 $\eta = \eta(x, y)$. 然而现在由(**)可得

$$A = \frac{a}{4\alpha},\ B = \beta - \frac{a}{4\alpha}\xi^2.$$

因此，如同验算所证实的那样，函数

$$z = \frac{a}{4\alpha}(x^2 - \xi^2) + \alpha y^2 + \beta$$

就是所求的积分.

§ 10. 存在定理和某些其它解法

10.1. 正规柯西问题[1]. 微分方程

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \qquad (1)$$

的柯西问题就是：寻求包含已给积分条形

$$x = \omega_1(s),\ y = \omega_2(s),\ z = \omega_3(s),\ p = \omega_4(s),$$
$$q = \omega_5(s) \qquad (2)$$

的积分曲面 $z = \phi(x, y)$ 的问题. 其中 $\omega_\nu(s)$ 当 $\alpha < s < \beta$

1) 参看 Goursat, Équations du premier ordre, p.20.

时是连续可微函数. 关于函数 F 再作 § 8.1 中所述的假设. 其次, 设

$$F_p(\omega_1, \cdots, \omega_5)\omega_2' - F_q(\omega_1, \cdots, \omega_5)\omega_1' \neq 0. \quad (3)$$

这个不等式表示, 若将条形 (2) 的承载曲线同 §8 中特征条 (6) 的承载曲线投影到 x, y 平面上, 则第一条曲线的投影不应与第二条的投影相切. 最后, 规定用 x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 记当 $s = s_0$ 时条形 (2) 所确定的积分元素.

特别地, 由条件 (3) 得知, 条形 (2) 只包含正规积分元素 (参看 § 8.6), 且 $|\omega_1'| + |\omega_2'| > 0$. 假设 $\omega_2'(s_0) \neq 0$[1], 且这个不等式在该点的邻域内也成立, 则可把柯西问题 (1), (2) 变为特殊形式的"正规柯西问题"[2]:

$$\begin{aligned} &p = f(x, y, z, q), \\ &x = 0,\ y = \eta,\ z(0, y) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

为完成这个变换, 从方程 $\eta = \omega_2(s)$ 解出 s, 并选 η 作为自变量. 于是原来的条件 (2) 可改写为

$$x = \rho(\eta),\ y = \eta,\ z = \sigma(\eta),\ p = \tau(\eta),\ q = \omega(\eta). \quad (5)$$

现在若对连续可微函数 $z(x, y)$ 施行变换

$$Z(X, Y) = z(x, y) - \sigma(y),\ X = x - \rho(y),\ Y = y,$$

则由微分方程 (1) 得到关于 Z 的方程

$$\begin{aligned} &F(X + \rho(Y), Y, Z + \sigma(Y), Z_X, \\ &Z_Y - Z_X\rho'(Y) + \sigma'(Y)) = 0. \end{aligned}$$

由条件 (3), 它可以对 Z_X 解出, 并且得到用大写字母代替小写字母的 (4) 中第一个方程. 由 (5) 的前三个方程可得到 (4) 的后三个方程; (5) 的最后一个方程转变为由 (4) 的最后

---

1) 如果 $\omega_1'(s_0) \neq 0$ 而 $\omega_2'(s_0) = 0$, 则可类似地处理.

2) 正规问题理解为这样的初值问题, 它包括显形式的微分方程 $p = f(x, y, z, q)$ 本身及当 ξ 固定而 η 为变量时的某个初始条件 $x = \xi,\ y = \eta,\ z(\xi, \eta) = \omega(\eta)$; 或同样的, $q = f(x, y, z, p)$ 及当 η 固定而 ξ 为变量时的条件 $x = \xi,\ y = \eta,\ z(\xi, \eta) = \omega(\xi)$.

一个方程所导出的方程 $Z_Y(0,Y)=0$; (5) 的倒数第二个方程乃是(4)的第一个方程的结果.

10.2. 一般存在定理. 柯西特征方法[1]. 在 §9 中我们已经叙述了一些可在一系列情况下用来求解微分方程 (1) 的方法. 但在那里一点也没有谈到在什么样的条件下这个方程的积分存在.

下述存在定理是对于柯西问题来说的.

设方程 (1) 的左端在区域 $\mathfrak{G}(x, y, z, p, q)$ 内两次连续可微,并且当 $\alpha < s < \beta$ 时,函数

$$x = x_0(s),\ y = y_0(s),\ z = z_0(s),\ p = p_0(s),\ q = q_0(s) \quad (6)$$

是微分方程 (1) 的一个已给的积分条形[2],对于它,有

$$F_p y_0'(s) - F_q x_0'(s) \neq 0, \quad (7)$$

并且在 F_p 及 F_q 中已将(6)式代入[3]. 这时,寻求方程(1)的包含条形(6)的积分曲面问题"局部地"可解; 而且所得到的积分甚至两次连续可微[4].

为了得到这个积分——柯西问题的解——可用下述方法: 既然 F 两次连续可微,所以§ 8 中特征组 (6) 的右端连续可微; 于是它的解由 $t=0$ 时的某些初值 x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 唯一地确定. 假设这些解是

---

1) 参看 Bieberbach, DGlen, 第 3 版, p.295—299; Courant-Hilbert, Methoden math. Physik II, p.66—68 (中译本: 数学物理方法 II, p.63—64). [也可参看 Степанов p.393—406 (中译本: 微分方程教程, p.383—396). ——俄译本编者注.]

2) 也可以从某条连续可微的空间曲线 $x=x_0(s)$, $y=y_0(s)$, $z=z_0(s)$ 出发. 如果这能实现, 则再补充连续可微函数 $p_0(s)$, $q_0(s)$, 使得函数 (6) 满足条形条件和方程 (1).

3) 关于 (7) 的几何解释参看 § 10.1. 从不等式 (7) 推得初始条形 (6) 仅包含正则面元素.

4) 是否只存在一个积分,这依赖于区域的形状.

$$x = x(t, x_0, \cdots, q_0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$q = q(t, x_0, \cdots, q_0).$$

选取已给的积分条形 (6) 的元素作为初始值，亦即造出函数

$$X(s, t) = x(t, x_0(s), \cdots, q_0(s));$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Q(s, t) = q(t, x_0(s), \cdots, q_0(s)).$$

可以证明上面的这些函数在存在区域内所给出的都是方程 (1) 的积分元素. 由条件 (7), 方程

$$x = X(s, t), \quad y = Y(s, t)$$

在每一子区间 $\alpha < \alpha_0 \leqslant s \leqslant \beta_0 < \beta$ 内对于所有充分小的 t 可以单值地解出 s, t. 我们得到两个函数 $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$. 将这两个函数代入到关系式 $z = Z(s, t)$ 中，则就得到微分方程 (1) 的所求积分[1].

例. $pq = 1$.

对于这个§11.2 型的微分方程，假设给定初始积分条

$$x = s, \ y = s^3, \ z = 2s^2, \ p = s, \ q = \frac{1}{s} (s > 0).$$

由特征方程

$$x'(t) = q, \ y'(t) = p, \ z'(t) = 2pq, \ p'(t) = 0, \ q'(t) = 0$$

不难确定带有 $t = 0$ 时的初始值 $x_0, \cdots, q_0$ 的特征条

$$x = x_0 + q_0 t, \ y = y_0 + p_0 t, \ z = z_0 + 2p_0 q_0 t, \ p = p_0, \ q = q_0.$$

将它们代入初始条形的方程后，得

$$x = \frac{t}{s} + s, \quad y = st + s^3, \quad z = 2t + 2s^2,$$

$$p = s, \quad q = \frac{1}{s}.$$

---

1) 关于这存在定理的证明，参看柯朗、希尔伯特的《数学物理方法》II 二章 §3. 也可参看斯米尔诺夫的《高等数学教程》，第四卷第二分册 § 106.
——校者注

从第二、第三个方程我们得到关系式 $z=\frac{2y}{s}$，而从前两个方程推得 $y=xs^2$。因此，所求的积分是

$$z=2\sqrt{xy}\quad (x>0,\ y>0).$$

10.3. 特殊情况：$p=f(x,y,z,q)$. 如果给定对于一个导数 p 已解出的微分方程

$$p=f(x,y,z,q), \tag{8}$$

要寻求它的通过在平行于 y，z 平面的平面上一条已给曲线的积分曲面，则在适当假设下，可以给出积分的存在区域的一个估计.

(a) 设在区域

$$|x-\xi|<a,\ y,\ z,\ q\ \text{任意} \tag{9}$$

内函数 $f(x,y,z,q)$ 两次连续可微；其次，设它的导数的绝对值不超过 $A(A>1)$；最后，设函数 $\omega(\eta)$ 对一切 η 有定义，连续可微，且满足不等式

$$|\omega'(\eta)|+|\omega''(\eta)|\leqslant B,$$

则微分方程 (8) 恰有一个包含初始曲线

$$x=\xi,\ y=\eta,\ z=\omega(\eta),\ -\infty<\eta<+\infty$$

的积分曲面 $z=\phi(x,y)$. 这曲面至少在区域

$$|x-\xi|<\min\left(a,\ \frac{1}{3A(B+1)}\right),\ -\infty<y<+\infty$$

内存在，且在其中两次连续可微.

这个积分曲面可用柯西特征方法得到. 对于特征方程

$$y'(x)=-f_q,\ z'(x)=f-qf_q,\ q'(x)=f_y+qf_z, \tag{10}$$

我们来确定通过初始点 $(x=\xi,\ y=\eta,\ z=\omega(\eta),\ q=\omega'(\eta))$ 的积分曲线

$$y=Y(x,\eta),\ z=Z(x,\eta),\ q=Q(x,\eta), \tag{11}$$

并从 (11) 的第一个方程中解出 η，得 $\eta=\chi(x,y)$. 于是 $z=Z(x,\chi(x,y))$ 即为所求积分. 换句话说，(11) 的前两个方

程给出了这个积分的参数表达式[1].

(b) 如果函数 f 不是给定在区域(9)中，而是给定在任一有限区域内，则可以证明这样的类似的存在定理，即当函数 f 的定义域能如此延拓到形如(9)的区域，使得定理(a)的假设在那里成立[2].

(c) 在很多情况下，用(a)中所述方法甚至能在更广阔的区域内得到积分，虽然关于函数 f 和 ω 的导数的相当强的限制有时不满足.

例 1. $p = q^2$; $\omega(\eta) = \eta^2$.

从特征方程

$$y' = -2q, \quad z' = -q^2, \quad q' = 0$$

得

$$q = 2\eta, \quad z = \eta^2 - 4(x-\xi)\eta^2, \quad y = \eta - 4(x-\xi)\eta.$$

由最后一个方程，对于 $x - \xi < \frac{1}{4}$，我们得到

$$\eta = \frac{y}{1 - 4(x-\xi)}$$

所以

$$z = \phi(x, y) = \frac{y^2}{1 - 4(x-\xi)}.$$

例 2. $p = \ln q (q > 0)$; $\omega(\eta) = \eta^2 (\eta > 0)$.

由特征方程

---

1) Kamke, DGlen, p.352—358; 在那里还假设 $|f| < A$; 这是不必要的，因为函数 f 通过导数按中值定理来估值.

关于积分存在域的其它结果参看 T. Ważewski, *Annales Soc. Polon. Math.*, **13**(1934), p.1—9; **14**(1935), p.149—177. 关于函数 f 和 ω 的可微性假设的讨论，参看同一杂志 **13**(1934), p.10—12; *Math. Zeitschrift*, **43**(1938), p.521—532. 关于积分的单值性问题，参看 A. Haar, *Acta Szeged*, **4**(1928), p.103—114. 一些历史注记，参看 Serret-Scheffers, Differential-und Integralrechnungen III, p.719.

2) 参看 Kamke, DGlen, p.359—362; T. Ważewski, *Annales Soc. Polon. Math.*, **14**(1935), p.149—177.

$$y' = -\frac{1}{q}, \quad z' = \ln q - 1, \quad q' = 0$$

得

$$q = 2\eta, \quad z = (\ln 2\eta - 1)(x - \xi) + \eta^2,$$
$$y = \frac{\xi - x}{2\eta} + \eta.$$

从最后一个方程，对于$|x - \xi| < \frac{y^2}{2}$，得

$$\eta = \frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{x - \xi}{2}}$$

(平方根前应取正号，以便使$x = \xi$时有$y = \eta$)．由此，对于$|x - \xi| < \frac{y^2}{2}$，我们求得这个方程的积分表示式

$$z = (\ln 2\eta - 1)(x - \xi) + \eta^2, \quad y = \frac{\xi - x}{2\eta} + \eta.$$

10.4. 解析函数情况下用幂级数求解[1]． 我们再来考察微分方程(8)的带有初始条件的问题．现在所遇到的函数和自变量允许取复数值．

假设在点(x_0, y_0, z_0, q_0)的邻域内函数$f(x, y, z, q)$是复变量x, y, z, q的解析函数，亦即它能展为绝对收敛的幂级数

$$f(x, y, z, q) = \sum_{\kappa, \lambda, \mu, \nu} a_{\kappa, \lambda, \mu, \nu}(x - x_0)^\kappa (y - y_0)^\lambda (z - z_0)^\mu (q - q_0)^\nu.$$

其次，假设$\omega(y)$在值$y = y_0$的邻域内是复变量y的正则函数，且

$$\omega(y_0) = z_0, \quad \omega'(y_0) = q_0.$$

于是微分方程(8)在点(x_0, y_0)的充分小的邻域内恰有一个解$z = \phi(x, y)$，它在这个邻域内是解析函数，亦即可用绝对

---

1) 参看 Horn, Partielle DGlen, 第2版, p. 161–166. Goursat, Équation du premier ordre, p.2—6. O. Perron, *Math. Zeitschrift*, **5**(1919), 154–160；那里还有一些历史注记.

收敛的幂级数

$$\phi(x, y)=\sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu}(x-x_0)^{\mu}(y-y_0)^{\nu}$$

来表示，且当 $x=x_0$ 时取值[1]

$$\phi(x_0, y)=\omega(y).$$

未知函数 z 的系数 $c_{\mu,\nu}$ 可以表为

$$c_{\mu,\nu}=\frac{1}{\mu!\nu!}\left(\frac{\partial^{\mu+\nu}z}{\partial x^{\mu}\partial y^{\nu}}\right)_0, \quad \mu, \nu=0, 1, 2, \cdots,$$

其中足标“0”表示导数的值是在 $x=x_0$, $y=y_0$ 处计算的。于是，若计算出导数值，则 $c_{\mu,\nu}$ 是已知的。由初始条件(12)推得

$$\left(\frac{\partial^{\nu}z}{\partial y^{\nu}}\right)_0=\omega^{(\nu)}(y_0);$$

由方程(8)得

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0=f(x_0, y_0, z_0, q_0),$$

或在对于 y 求偏导 ν 次后，得

$$\left(\frac{\partial^{1+\nu}z}{\partial x\partial y^{\nu}}\right)_0=\left(\frac{\partial^{\nu}}{\partial y^{\nu}}f\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right)\right)_0,$$

$$\nu=1, 2, \cdots.$$

把方程(8)先对 x 求导，然后对于 y 再求导 ν 次，得

$$\left(\frac{\partial^{2+\nu}z}{\partial x^2\partial y^{\nu}}\right)_0, \quad \nu=0, 1, 2, \cdots.$$

于是可以得到函数 z 的所有导数在点 (x_0, y_0) 处的值。这样，我们就求出了积分 $\phi(x, y)$ 的展开式中的所有系数 $c_{\mu,\nu}$.

10.5. 用更一般的级数求解[2]. 现在变量重又假设取实

---

1) 关于积分的解析延拓的讨论，参看 Coursat, Équations du premier ordre, p.11.

2) 参看 O. Perron, Sitzungsberichte, Heidelberg, 1920, Abh. 9. 也可参看手册 I, A§2.4.(中译本 8—11 页).

值. 设给定的微分方程已经对导数 p 解出

$$p=\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}f_{\mu,\nu}(x, y)z^{\mu}q^{\nu}, \tag{13}$$

可以求出这个方程的一个积分，它当 $x=0$ 时等于已知函数 $\omega(y)$.

形式上的求解过程如下进行. 假设这形式解是

$$z=\sum_{\rho=1}^{\infty}\varphi_{\rho}(x, y), \tag{14}$$

代入微分方程(13)，并设

$$\varphi_1(0, y)=\omega(y);\ \varphi_{\rho}(0, y)=0\ \ (\rho\geqslant 2). \tag{15}$$

于是函数 z 确实满足初始条件. 将(14)代入(13)，并乘出乘幂后，我们得到

$$\sum_{\rho=1}^{\infty}\frac{\partial\varphi_{\rho}}{\partial x}=\sum\frac{\mu!}{\mu_1!\cdots\mu_r!}\ \frac{\nu!}{\nu_1!\cdots\nu_s!}f_{\mu,\nu}\varphi_1^{\mu_1}\cdots\varphi_r^{\mu_r}$$
$$\times\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^{\nu_1}\cdots\left(\frac{\partial\varphi_s}{\partial y}\right)^{\nu_s}. \tag{16}$$

这里求和按所有的数 $\mu\geqslant 0$, $\nu\geqslant 0$ 进行，且

$$\mu_1+\cdots+\mu_r=\mu,\quad \nu_1+\cdots+\nu_s=\nu.$$

方程(16)右端经整理后化为一重的无穷级数，于是方程变为

$$\sum_{\rho=1}^{\infty}\frac{\partial\varphi_{\rho}}{\partial x}=\sum_{\rho=1}^{\infty}\omega_{\rho}(x, y). \tag{17}$$

上式的被加项 ω_{ρ} 应该这样地汇集这方程(16)右端中有限个或无限个项，使得 ω_1 不含 φ_{ρ} (故 $\omega_1=f_{00}$)，而其它的 ω_{ρ} 至多包含 $\varphi_1, \cdots, \varphi_{\rho-1}$.

当函数 φ_{ρ} 这样选取，使得

$$\frac{\partial\varphi_{\rho}}{\partial x}=\omega_{\rho}\quad(\rho=1, 2, \cdots)$$

时，方程(17)(方程(13)与它同时)形式地被满足. 首先我

们有

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \omega_1(x, y),$$

上式的 $\omega_1(x, y) = f_{00}(x, y)$，所以据 (15) 式得

$$\varphi_1(x, y) = \int_0^x f_{00}(x, y)dx + \omega(y).$$

现在根据 (16) 式，可以求得函数 ω_2；它只依赖于 $\varphi_1(x, y)$，因而提供了确定

$$\varphi_2(x, y) = \int_0^x \omega_2 dx$$

的可能性．其次，可以算出 ω_3．由于它最多依赖于现在已求得的 φ_1，φ_2，所以可求得

$$\varphi_3 = \int_0^x \omega_3 dx.$$

继续这样做下去．我们便得到形式解 (14).

如果满足下列条件，则这方法给出真正解，亦即级数(14)在区域

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b \tag{18}$$

内一致收敛[1]且满足方程 (13)：

(α) 假设函数 $f_{\mu,\nu}(x, y)$ 和 $F_{\mu,\nu}(x, y)$ 在区域 (18) 内连续，且具有关于 y 的任何阶的连续偏导数，同时对于它们，不等式

$$\left|\frac{\partial^n f_{\mu,\nu}}{\partial y^n}\right| \leqslant \frac{\partial^n F_{\mu,\nu}}{\partial y^n} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

成立，而且在上式右端的导数当 y 固定时对 x 单调增加(或取常数值)；

---

1) 它满足等式

$$\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = \sum_\rho \frac{\partial^n \varphi_\rho}{\partial y^n}, \quad \frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^n \partial x} = \sum_\rho \frac{\partial^{n+1} \varphi_\rho}{\partial y^n \partial x};$$

位于它们右端的级数同样一致收敛.

(β) 假设函数 $\omega(y)$, $\Omega(y)$ 当 $0 \leqslant y \leqslant b$ 时连续可微任意次，且满足不等式

$$|\omega^{(n)}(y)| \leqslant \Omega^{(n)}(y) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots);$$

(γ) 假设微分方程

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} F_{\mu,\nu}(x, y) Z^{\mu}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^{\nu}$$

在区域(18)内有一积分 $Z(x, y)$，它有连续偏导数

$$\frac{\partial^n Z}{\partial y^n}, \ \frac{\partial^n}{\partial y^n}\frac{\partial Z}{\partial x} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

且满足条件

$$Z(0, y) = \Omega(y),$$

$$\frac{\partial^n Z}{\partial y^n} \geqslant 0, \ \frac{\partial^n}{\partial y^n}\frac{\partial Z}{\partial x} \geqslant 0 \ (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

几个特殊情况.

(a) 对于特殊形式的函数

$$F_{\mu,\nu}(x, y) = \binom{\mu+\nu}{\nu}\frac{Ab^{\nu}}{c^{\mu+\nu}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right)^{\mu+1}},$$

我们推得：如果系数 $f_{\mu,\nu}(x, y)$ 在区域(18)内连续，且具有对于 y 的任意阶连续偏导数；此外，对于 $c > 0$ 及 $A > 0$，不等式

$$\left|\frac{\partial^n f_{\mu,\nu}}{\partial y^n}\right| \leqslant \binom{\mu+\nu}{\nu}\binom{\mu+n}{n}\frac{An!\,b^{\nu-n}}{c^{\mu+\nu}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right)^{\mu+n+1}}$$

成立，则前面所描述的方法当 $\omega(y) \equiv 0$ 时给出积分(14)，它当 $x = 0$ 时变为零，且在下列区域内存在：

$$0 \leqslant x < \alpha(y), \quad 0 \leqslant y < b,$$

其中

$$\alpha(y)=\min\left\{a,\ \frac{c}{8A}\left(1-\frac{y}{b}\right)^2\right\}.$$

(b) 如果系数 $f_{\mu\nu}$ 有展开式

$$f_{\mu\nu}(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}f_{\mu\nu}^{(k)}(x)y^k,$$

其中

$$|f_{\mu\nu}^{(k)}|\leqslant\binom{\mu+\nu}{\nu}\binom{\mu+k}{k}\frac{Ab^{\nu-k}}{c^{\mu+\nu}},$$

则前面所提到的假设被满足.

(c) 关于 $\omega(y)\neq 0$ 情况，可参看本段脚注已引的 O. Perron 的书 22—27 页. 在 21—22 页可找到关于级数 (14) 的余项估值.

例. $p=q^2$; $z(0,y)=e^y$.

如果寻求形如

$$z=\sum_{\nu=0}^{\infty}\omega_\nu(y)x^\nu;\quad \omega_0=e^y$$

的积分 z，则得级数

$$z=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu x^\nu e^{(\nu+1)y},\tag{19}$$

其中

$$c_0=c_1=1,\ c_2=2,\ c_3=\frac{16}{3},\ c_4=\frac{50}{3},\ \cdots,$$

$$(\nu+1)c_{\nu+1}=\sum_{r+s=\nu}(r+1)(s+1)c_rc_s,$$

级数 (19) 至少当 $|xe^y|<\frac{1}{8}$ 时收敛.

10.6. 不等式与估值. 可参看 § 12.11.

10.7. 解法概述.

(a) 如果没有给出任何附加条件，则为了寻求方程 (1) 的积分，可以采用拉格朗日方法. 这就是设法求得非平凡的首次积分(参看 § 9.1)，随后照 § 9.3 做下去；或者，若能顺利地

得到两个这样的首次积分，则按 § 9.2 进行．用这个方法甚至可以得到一个全积分，再按照 § 9.5 中的方法，又可得其他积分．对于特殊形状的方程可以应用 § 11 中所叙述的方法．用各种方法处理的例子可在第二部分的 6.36 题中找到．

(b) 如果需要求出通过给定初始曲线或初始条形的曲面，则如下进行：

(α) 如果已知一个全积分，则按 § 9.6 进行．

(β) 也可以用 § 10 的方法．在某些情况下只能求特征方程组的近似解，用 § 10.2 或 § 10.3 的方法可以近似地得到所求的积分曲面．

(γ) 如果给定一个隐式微分方程，则可按照 § 8.8(b) 求奇积分．

(δ) 也可利用 § 10.4 和 § 10.5 中的级数展开法求近似解．

§ 11. 两个自变量的特殊形状的非线性方程的解法

11.1. $F(x, y, z, p) = 0$ **或** $F(x, y, z, q) = 0$． 第一个方程可作为含有自变量 x 及参数 y 的常微分方程来处理[1]．在这情况下，代替积分常数，解的表达式中出现含 y 的任意连续可微函数．第二个方程可以与此类似地处理．

11.2. $F(p, q) = 0$． 对于每一对满足方程 $F(a, b) = 0$ 的数 a 和 b，平面

$$z = ax + by + c, \quad c\text{ 是任意常数}$$

都是积分曲面． 如果函数 F 在点 $p = a_0$, $q = b_0$ 的邻域内两

1) 这里要用"未解出导数"的常微分方程的解法． 参看 Kamke, 手册 I, A§3.1 (中译本 16—17 页)．

次连续可微，此外还有$|F_p|+|F_q|>0$，则这些平面对充分接近(a_0, b_0)的所有a, b的值，组成所考察的微分方程的全积分．

从特征方程

$$x'(t)=F_p,\ y'(t)=F_q,\ z'(t)=pF_p+qF_q,$$
$$p'(t)=0,\quad q'(t)=0,$$

我们求得通过当$t=0$时的面元素x_0, y_0, z_0, a, b的特征条是

$$\begin{cases} p=a,\ q=b, \\ x-x_0=F_p(a,b)t, \\ y-y_0=F_q(a,b)t, \\ z-z_0=(aF_p+bF_q)t. \end{cases} \tag{1}$$

如果$|F_p(a,b)|+|F_q(a,b)|>0$，则特征线是一直线，它属于平面

$$z-z_0=a(x-x_0)+b(y-y_0). \tag{*}$$

而这特征承载线的所有的点都对应着相同的方向数a, b；因而一个特征线的各点所对应的那些平面$z=ax+by+c$是彼此平行的[1]．

所以，正则的积分曲面就是这样的连续可微曲面$z=\phi(x, y)$，它是由特征直线族(1)所构造而成（设满足条件$F(a,b)=0$）．因此，积分曲面就是可展曲面[2]．如果我们只

---

1) 同一特征(直)线的各点所对应的各平面，不但彼此平行，还可以证明它们彼此重合．由此得出结论：积分曲面在它的特征(直)线的各点上只有一个公共的切平面．

应该指出：这里的两个参数a, b因受条件$F(a,b)=0$的限制，实际上是一个参数．——校者注

2) 关于可展曲面的定义及性质，参看斯米尔诺夫的《高等数学教程》第二卷第二分册第五章§141．从这定义与性质，并参看脚注1)的结论，再据§8.7(b)，易推得：方程$F(p,q)=0$的正则的积分曲面是而且仅是可展曲面．——校者注

考虑两次连续可微的积分曲面，则根据 § 8.7，不可能再有其它种类的正则的积分曲面[1]。

这方程是否有奇异积分曲面或者是否包含一些奇异面元素，这问题需按照各个情况来研究。

11.3. $F(z, p, q) = 0$[1]。 对于任意的满足条件 $|a| + |b| > 0$ 的 a 和 b，我们作变换

$$z = \zeta(\xi), \quad \xi = ax + by.$$

于是 $p = a\zeta'(\xi)$，$q = b\zeta'(\xi)$。因此，由所给的偏微分方程得到常微分方程

$$F(\zeta, a\zeta', b\zeta') = 0.$$

从这个方程解出 ζ'，得 $\zeta' = f(\zeta)$；此时，当 $f \neq 0$ 时，原方程的一个全积分为

$$\int \frac{d\zeta}{f(\zeta)} = \xi + C = ax + by + C.$$

也可用 § 9.3 中的方法得到这个全积分。

所得到的解是母线平行于 x，y 平面的柱面，这是因为解 z 仅是 $ax + by$ 的函数。如果置

$$\xi = ax + by, \quad \eta = bx - ay,$$

则从 x，y 坐标系通过旋转 $\operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}$ 的角度，并以比值 $\sqrt{a^2+b^2} : 1$ 来伸长就得到 ξ，η 坐标系。因此，函数 $z = \zeta(\xi)$ 是一母线平行于 η 轴的柱面。

例. $9(p^2z + q^2) = 4$.

前面所提到的代换给出

$$3\zeta'\sqrt{a^2\zeta + b^2} = \pm 2.$$

由此，我们得到

1）参看 Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p.382—384.

当 $a \neq 0$ 时，$(a^2\zeta + b^2)^{3/2} = \pm a^2(\xi + C)$；

当 $a = 0$ 时，$\zeta = \pm \frac{2}{3b}\xi + C$。

于是原方程的解分别具有下列形式

$$(a^2 z + b^2)^3 = a^4(ax + by + C)^2;$$

$$z = \pm\frac{2}{3}y + C.$$

11.4. $\boldsymbol{p = f(x, q)}$ **或** $\boldsymbol{q = g(y, p)}$[1]. 如果在第一个方程中把 q 看作参数：$q = a$，则得全积分

$$z = \int f(x, a)dx + ay + b.$$

类似地，第二个方程的全积分可写为

$$z = \int g(y, a)dy + ax + b.$$

这两个全积分分别是母线平行于 y, z 平面及 x, z 平面的柱面.

11.5. $\boldsymbol{f(x, p) = g(y, q)}$ **与** $\boldsymbol{F[f(x, p\varphi(z)), g(y, q\varphi(z))] = 0}$; 它们是可分离变量方程.

解第一个微分方程时，假设对于一个任意常数 a，有

$$f(x, p) = a, \quad g(y, q) = a.$$

解出这个微分方程组(注. 在求得 p, q 后再积分)，即得原方程的全积分. 这个方法的另一形式是假设 $z = u(x) + v(y)$，于是得到关于 u 及 v 的两个常微分方程

$$f(x, u') = a, \quad g(y, v') = a.$$

应用 § 9.3 中的方法，可得同一结果.

关于第二个更一般的微分方程的求解，参看 § 13.3.

11.6. $\boldsymbol{f(x, p) + g(y, q) = z}$. 假设 $z = u(x) + v(y)$，得

---

1) 参看 Goursat, Équations du premier ordre, p.141.

$$f(x, u'(x)) - u(x) = v(y) - g(y, v'(y)).$$

解含有任意常数 a 的常微分方程

$$f(x, u') - u = a, \quad v - g(y, v') = a.$$

则可得所给微分方程的全积分.

11.7. $p = f\left(\dfrac{y}{x}, q\right)$, $F\left(\dfrac{y}{x}, p, q, xp + yq - z\right) = 0$[1].

第一个微分方程是第二个的特例. 从微分方程的特征方程得

$$xp'(t) + yq'(t) = 0.$$

其次又有

$$\frac{d}{dt}(z - xp - yq) = 0,$$

即 $z - xp - yq$ 是一个首次积分. 因此按 § 9.3, 由两个方程

$$xp + yq = z + a \text{ 及 } F\left(\frac{y}{x}, p, q, a\right) = 0,$$

解出 p 及 q, 并由它们计算出 z, 则得所给微分方程的积分.

11.8. $F(xp + yq, z, p, q) = 0$[2].

由这个微分方程的特征方程组得一个首次积分 $\dfrac{q}{p}$. 因此, 据 § 9.3, 解微分方程组

$$F(p(x + ay), z, p, ap) = 0, \quad q = ap,$$

则得所给微分方程的全积分.

11.9. $p^2 + q^2 = f(x^2 + y^2, yp - xq)$[3].

由特征方程推出, $yp - xq$ 是一个首次积分. 依 § 9.3, 假设 $yp - xq = a$, 可以由关系式

1) Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 174—178.
2) Julia, Exercices d'Analyse IV, p.169—171.
3) Goursat, Équations du premier ordre, p.148.

$$p = \frac{ay}{r} + \frac{xR}{r},\ q = -\frac{ax}{r} + \frac{yR}{r}$$

确定 z，其中

$$r = x^2 + y^2,\quad R^2 = rf(r, a) - a^2.$$

由此得到全积分

$$z = -a\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \int\frac{R}{2r}dr + b.$$

假设

$$z(x, y) = \zeta(\rho, \theta),\ x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,$$

则所考察的微分方程也可以变换到极坐标 ρ, θ 情形，此时得 § 11.4 型的微分方程

$$\zeta_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\zeta_\theta^2 = f(\rho^2, -\zeta_\theta).$$

由此，当 $\zeta_\theta = -a$ 时，我们求得

$$\zeta = -a\theta \pm \int\frac{1}{\rho}\sqrt{\rho^2 f(\rho^2, a) - a^2}\,d\rho + b.$$

11.10. $F[f(x)p, g(y)q, z] = 0$.

在这方程中作变量代换

$$z(x, y) = \zeta(\xi, \eta),\ \xi = \int\frac{dx}{f(x)},\ \eta = \int\frac{dy}{g(y)}, \qquad (2)$$

后，我们得到 § 11.3 型的微分方程

$$F(\zeta_\xi, \zeta_\eta, \zeta) = 0.$$

(a) $\sum_{\nu=1}^{n}[f(x)p]^{\alpha_\nu}[g(y)q]^{\beta_\nu}h_\nu(z) = 0.$

利用变量代换 (2)，这个方程化为下形

$$\sum_{\nu=1}^{n}\zeta_\xi^{\alpha_\nu}\zeta_\eta^{\beta_\nu}h_\nu(\zeta) = 0.$$

例. $\left(\frac{p}{\cos^2 x}\right)^a + \left(\frac{q}{\sin^2 y}\right)^b z^c = z^{\frac{ac}{a-b}}$.

变量代换

$$z(x, y) = \zeta(\xi, \eta),$$

$$\xi = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x, \quad \eta = \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\sin 2y$$

将方程化为

$$\zeta_\xi^a + \zeta_\eta^b \zeta^c = \zeta^{\frac{ac}{a-b}}. \tag{3}$$

(b) $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu p^{\alpha_\nu} q^{\beta_\nu} z^{\gamma_\nu} = 0$[1]，$(\alpha_\nu + \beta_\nu + \gamma_\nu)\lambda - (\alpha_\nu + \beta_\nu) = \delta$. 其中 λ 和 δ 是不依赖于 ν 的固定数.

这是齐次方程. 如果 a_ν 是常数，变换 $z = u^\lambda$ 将方程化为 § 11.2 型

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \lambda^{\alpha_\nu+\beta_\nu} u_x^{\alpha_\nu} u_y^{\beta_\nu} = 0;$$

但若 $a_\nu = a_\nu(x, y)$，则同一变换将把它化为不含未知函数的 § 11.13 型.

例. 前面所写的微分方程 (3) 正是所考察的类型. 若置

$$\lambda = \frac{a-b}{a-b-c}, \quad \delta = \frac{ac}{a-b-c} \quad 及 \quad \zeta = u^\lambda,$$

我们得到

$$\lambda^a u_\xi^a + \lambda^b u_\xi^b = 1.$$

(c)[2] 对于 (b) 中的微分方程，如果 $\alpha_\nu + \beta_\nu + \gamma_\nu = \delta$ 是不依赖于 ν 的一个固定数，则这方程可经代换 $z = e^u$ 化为 § 11.2 型:

$$\sum a_\nu u_x^{\alpha_\nu} u_y^{\beta_\nu} = 0.$$

11.11. $f(p,q) = xp + yq$; f 关于 p 及 q 是齐次的[3].

设 $f(p, q)$ 是一个 n 次齐次函数. 所给微分方程的形如

---

1) §13.4 中的方程是这个方程的推广.

2) 本情况的推广，参看 §13.4.

3) 参看 Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p.398，例 2; p.828.

§ 8 中 (6) 的后两个特征方程具有形状：$p' = p, q' = q$. 由此推出 $\frac{q}{p}$ 是一首次积分. 对于 $q = ap$，由所给微分方程得到关系式

$$f(p, ap) = xp + ayp,$$

亦即

$$p^{n-1}f(1, a) = x + ay.$$

所以

$$q = ap, \quad p = \left[\frac{x + ay}{f(1, a)}\right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

因此，这方程的一个全积分为

$$z = \frac{n-1}{n}\left[\frac{x + ay}{f(1, a)}\right]^{\frac{n}{n-1}} f(1, a) + b.$$

11.12. $z = xp + yq + f(p, q)$ 与 $F(p, q, z - xp - yq) = 0$. 克莱罗方程[1].

如果函数 $F(u, v, w)$ 在点 (a, b, c) 处有定义，并设在该点的值等于零：$F(a, b, c) = 0$，则 $z = ax + by + c$ 显然是上面的第二个微分方程的一个解.

如果第二个微分方程对于 $z - xp - yq$ 解出，则它就化为第一个方程.

微分方程

$$z = xp + yq + f(p, q) \tag{4}$$

对于每两个使 $f(a, b)$ 有确定值的数 a 和 b，显然有积分

$$z = ax + by + f(a, b). \tag{5}$$

1) 参看 Serret-Scheffers, Differential-und Integralrechnung III, p.631. Kamke, DGlen, p.375—377. Couran-Hilbert, Methoden math. Physik II, p.79 (中译本：数学物理方法 II, p.74).

如果函数 f 两次连续可微，则这些平面就组成一个全积分．由此，按照 § 9.5，可以导出其它积分．

(a) 如果当 a 固定时，在某个区间 $v_1 < v < v_2$ 中有 $f_{vv}(a, v) \neq 0$，则

$$y = -f_v(a, v), \quad z = ax + vy + f(a, v)$$

是所求积分的参数表达式；如果当 b 固定时，在某个区域 $u_1 < u < u_2$ 内有 $f_{uu}(u, b) \neq 0$，则积分具有如下形状

$$x = -f_u(u, b), \quad z = ux + by + f(u, b).$$

(b) 设函数 $f(u, v)$ 在区域 $\mathfrak{G}(u, v)$ 内连续可微；又设

$$\frac{\partial(f_u, f_v)}{\partial(u, v)} \neq 0,$$

且区域 $\mathfrak{G}(u, v)$ 由函数变换

$$x = -f_u(u, v), \quad y = -f_v(u, v)$$

单值地映射到区域 $\overline{\mathfrak{G}}(x, y)$，则微分方程 (4) 在区域 $\overline{\mathfrak{G}}(x, y)$ 内有一非线性积分，它的参数表达式由下列函数

$$x = -f_u(u, v), \quad y = -f_v(u, v)$$
$$z = ux + vy + f(u, v).$$

给出(奇积分)[1]．但是它有时不存在(参看第二部分 6.7 题中的例子)．

如果一个可展曲面的每一条母线（直线）都有这样的点，它是这可展曲面与克莱罗方程的奇异积分曲面的切点，则这

1) 克莱罗方程的奇积分可以在几何上看作含两个参数 u, v 的平面族

$$z = ux + vy + f(u, v)$$

的包络面．参看斯米尔诺夫的《高等数学教程》，第二卷 §140．——校者注

可展曲面也是积分曲面[1]。

经过已给定的初始曲线的积分曲面，在几何上可以这样求得：先定出这样的平面族，使其中的每一平面既同初始曲线相切，又同这奇异曲面相切；再求这平面族的包络面，就得到所求的积分曲面[2]。

11.13. $\boldsymbol{F(x, y, p, q) = 0}$.

§ 8 中缺中间一个方程的特征方程组 (6) 具有如下形状

$$x'(t) = F_p,\ y'(t) = F_q,\ p'(t) = -F_x,$$
$$q'(t) = -F_y, \tag{6}$$

这是所谓典则方程（参看 § 12.10）；它们构成可解的方程组。如果求得方程组 (6) 的解，则由条形条件

$$z'(t) = p(t)x'(t) + q(t)y'(t)$$

可用求积分得到所缺少的函数 $z(t)$.

如果已知单参数积分族 $z = \phi(x, y, a)$，它关于所有三个变量两次连续可微．又设

$$|\phi_{ax}| + |\phi_{ay}| > 0,$$

则函数

$$z = \phi(x, y, a) + b$$

1) 校证：上述的可展曲面也是克莱罗方程的积分曲面．据假设，这奇异积分曲面同这可展曲面必定在任一母线 l 上的一定点 (x_0, y_0, z_0) 相切．现设这可展曲面与这平面族中的一个平面

$$z = u_0x + v_0y + f(u_0, v_0) \tag{*}$$

在点 (x_0, y_0, z_0) 相切．据可展曲面性质，（参看斯米尔诺夫同书 § 141），一条母线上的所有的点 (x, y, z) 有同一的切平面 (*)，因此这可展曲面在 l 上各点 (x, y, z) 的偏导数是

$$p(x, y, z) = u_0,\quad q(x, y, z) = v_0.$$

把上式代入方程(*)后，就证得这可展曲面在 l 上的各点都满足克莱罗方程．又因可展曲面的每一点都在一条母线上，所以证得结论．——校者注

2) 为了证明这个论断，只需指出这里所定出的平面族是依赖一个参数的平面族，它的包络面是可展曲面（参看前书 § 141）．根据正文前段的结论，就可证明．——校者注

显然是一个全积分.

特征底线 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 满足方程

$$\phi_a = 常数; \tag{7}$$

因为有

$$F(x, y, \phi_x, \phi_y) = 0,$$

从上式对 a 求导得

$$F_p\phi_{ax} + F_q\phi_{ay} = 0.$$

所以把方程组 (6) 的一个解代入上式,则得

$$\phi_{ax}x' + \phi_{ay}y' = 0.$$

这正是论断 (7). 这个性质在求解力学运动方程中找到了应用(参看第二部分的 6.65 题).

11.14. $F(x, y, z, p, q) = 0$. 勒让德变换[1].

设函数 $z(x, y)$ 在区域 $\mathfrak{G}(x, y)$ 内两次连续可微, 且在区域 $\mathfrak{G}$ 的任何子域内有

$$\frac{\partial(z_x, z_y)}{\partial(x, y)} \neq 0; \tag{8}$$

又设区域 $\mathfrak{G}(x, y)$ 经函数变换

$$X = z_x(x, y), \quad Y = z_y(x, y) \tag{9}$$

一对一地映射到区域 $\overline{\mathfrak{G}}(X, Y)$. 作变换

$$Z(X, Y) = xz_x + yz_y - z, \tag{10}$$

则 Z 将在区域 $\overline{\mathfrak{G}}$ 内有二阶连续偏导数. 由 (9) 和 (10) 可推得

$$x = Z_X, \ y = Z_Y, \ z = XZ_X + YZ_Y - Z. \tag{11}$$

这称为勒让德变换(对偶变换).

借助于这个变换,当关于积分的前述假设被满足时,则微

1) 参看 Serret-Scheffers, Differential-und Integralrechnung III, p.632 [或参看 R. Courant, D. Hilbert, Methods of math. physics II (中译本: 数学物理方法 II, p.25--30).——译者注]

分方程

$$F(x, y, z, p, q)=0 \tag{12}$$

就变为

$$F(Z_X, Z_Y, XZ_X+YZ_Y-Z, X, Y)=0. \tag{13}$$

它有时比原微分方程(12)简单. 如果 $Z=Z(X, Y)$ 是方程(13)的一个积分,则关系式(11)给出微分方程(12)的对应积分 $z(x, y)$ 的参数表达式.

在变换(11)下某些积分可能失掉(请注意假设). 例如,在 § 11.12 的克莱罗微分方程(4)中失掉平面积分曲面,因为它们不满足不等式(8). 因为同一理由,在 § 11.12(a)中失掉了[1]可展曲面. 反之,在 § 11.12(b)中采用勒让德变换. 变换后的方程是

$$Z=-f(X, Y).$$

它已不是一个微分方程,但它直接给出了解. 化回到原变量,我们便得克莱罗微分方程在参数形式下的解

$$x=-f_X(X, Y), \quad y=-f_Y(X, Y),$$
$$z=xX+yY+f(X, Y).$$

这与 § 11.12(b)中所述的一致.

11.15. $F(x, y, z, p, q)=0$. 欧拉变换[2].

设函数 $z(x, y)$ 在区域 $\mathfrak{G}(x, y)$ 内两次连续可微, $z_{xx}\neq 0$, 且区域 $\mathfrak{G}(x, y)$ 可借助于一对一变换

$$X=z_x(x, y), \quad Y=y$$

映射到区域 $\bar{\mathfrak{G}}(X, Y)$. 令

$$Z(X, Y)=xz_x-z,$$

它在区域 $\bar{\mathfrak{G}}$ 内两次连续可微. 变换

$$X=z_x, \ Y=y, \ Z=xz_x-z, \ Z_Y=-z_y$$

1) 关于如何得到在这方法下所失掉的解,参看第二部分 6.36 题.
2) 参看 Serret-Scheffers, Differential-und Integralrechnung III, p.634.

及其逆变换

$$x = Z_X,\ y = Y,\ z = XZ_x - Z,\ z_y = -Z_Y$$

称为欧拉变换.

利用这个变换，只要积分满足上述假设，则微分方程

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

变为

$$F(Z_X, Y, XZ_X - Z, X, -Z_Y) = 0.$$

它有时比原方程简单.

如果将这变换应用于克莱罗微分方程(4)，则失掉平面积分曲面(5)，因为它们不满足不等式$z_{xx} \neq 0$(或$z_{yy} \neq 0$)。反之，在§ 11.12(a) 中采用欧拉变换，则原方程变为

$$Z = YZ_Y - f(X, -Z_Y).$$

它可看作为含有参数X的常微分克莱罗方程，且有解

$$Z = -bY - f(X, b).$$

此解导出表达式

$$z = xX + bY + f(X, b),\ x = -f_X(X, b).$$

作为克莱罗方程的积分，它与§ 11.12(a) 中所述的第二个解是一致的.

11.16. $\boldsymbol{F(xp - z, y, p, q) = 0}$.

变换 $z = Cx + u(y)$ 将它化为关于函数 $u(y)$ 的常微分方程

$$F(-u(y), y, C, u'(y)) = 0.$$

为了求出满足条件 $z_{xx} \neq 0$ 的解，利用欧拉变换可将该微分方程变为

$$F(Z, Y, X, -Z_Y) = 0.$$

它是§ 11.1 型的.

11.17. $\boldsymbol{xf(y, p, xp - z) + qg(y, p, xp - z) = h(y, p, xp - z)}$.

利用欧拉变换，可从所给非线性微分方程得到拟线性方程

$$f(Y, X, Z)Z_X - g(Y, X, Z)Z_Y = h(Y, X, Z).$$

11.18. $qf(u) = xp - yq,$

$$xqf(u) = xp - yq,$$

$$xf(u, p, q) + yg(u, p, q) = h(u, p, q),$$

其中 $u = xp + yq - z.$

利用勒让德变换，从这些非线性微分方程可以分别得到拟线性方程

$$Yf(Z) - XZ_X + YZ_Y = 0,$$

$$YZ_X f(Z) - XZ_X + YZ_Y = 0,$$

$$f(Z, X, Y)Z_X + g(Z, X, Y)Z_Y = h(Z, X, Y).$$

第三章 n个自变量的非线性微分方程与方程组

§12. n 个自变量的非线性方程：$F(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p})=0$[1]

12.1. 一般概念．记号及术语． n 个自变量、一个未知函数$z=z(x_1, \cdots, x_n)$的一阶（非线性）偏微分方程的一般形式为

$$F\left(x_1, \cdots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0. \tag{1}$$

已解出一个导数的方程可写为[2]

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(x, y_1, \cdots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right). \tag{2}$$

利用缩写记号

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad p_\nu=\frac{\partial z}{\partial x_\nu}, \quad q_\nu=\frac{\partial z}{\partial y_\nu},$$

并用 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}$ 及 $\boldsymbol{q}$ 分别表示分量为 $x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n; p_1, \cdots, p_n$ 及 $q_1, \cdots, q_n$ 的向量，于是方程(1)及(2)可分别简写为

1) 参看第二章中关于特殊情况 $F(x, y, z, p, q)=0$ 的详细讨论．此外，参看 Carathéodory, Variationsrechnung, p. 36—53. Courant-Hilbert, Methoden math. Physik, II, p. 82—95（中译本：数学物理方法 II, p. 76—90）. Forsyth, Diff. Equations V, p. 171—186. Goursat, Équations du premier ordre, p. 184—201.

2) 参看第 4 页上的注 1)．——译者注

$$F(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p}) = 0 \tag{1'}$$

及

$$p = f(x, y, z, q). \tag{2'}$$

其中假设函数 F 与 f 在所考察的 $2n+1$ 与 $2n+2$ 个变量的区域内连续可微.

这里，$n+1$ 维空间中的面元素定义为一组 $2n+1$ 个数

$$x_1, \cdots, x_n, z, p_1, \cdots, p_n, \tag{3}$$

或简记为

$$\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p}. \tag{3'}$$

前 $n+1$ 个数称为面元素的承载点，后 n 个数称为方向系数或方向元素(试与 §8.2 比较).

面元素(3)或(3')称为正常的(正则的，正规的)或奇异的(非正则的)，是按照微分方程 (1) 在点 $(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p})$ 处有 $\sum_{\nu=1}^{n}|F_{p_\nu}| > 0$ 还是 $F_{p_1} = \cdots = F_{p_n} = 0$ 而定. 显然，微分方程(2)只有正规面元素.

如果面元素(3')满足方程(1')，则称它是方程(1)的一个积分元素(试与 §8.7 比较). 如果函数 $z = \phi(\boldsymbol{r})$ 连续可微，且由它所组成的全部面元素

$$x_1, \cdots, x_n, \phi, \phi_{x_1}, \cdots, \phi_{x_n} \tag{4}$$

即简写的面元素[1)]

$$\boldsymbol{r}, \phi, \mathrm{grad}_x\phi \tag{4'}$$

都是方程(1)的积分元素，则 $z = \phi(\boldsymbol{r})$ 是方程(1)的一个积分.

关于特积分及通积分的定义，参看 §8.8.

如果方程(1)的一个积分 $z = \phi(\boldsymbol{r})$ 仅包含奇异的积分

1) [若给定函数 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$，则 $\mathrm{grad}_x F = (F_{x_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \cdots, F_{x_n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$ 是它的关于 $\boldsymbol{x}$ 的向量梯度. ——俄译本编者注]

元素(4)，即变量(4)同时满足 $n+1$ 个方程[1]

$$F=0,\ F_{p_1}=0,\ \cdots,F_{p_n}=0, \tag{5}$$

则称它为奇积分. 将函数 ϕ 代入方程(1)，并对所得到的关系式关于 x_ν 求偏导，于是得知，两次连续可微的奇积分除满足 $n+1$ 个方程(5)之外，还应该再满足 n 个方程

$$F_{x_\nu}+p_\nu F_z=0\quad(\nu=1,\cdots,n). \tag{6}$$

这样，求出满足方程(5)的连续可微函数 $z=\phi$，或求出满足 $2n+1$ 个方程(5)和(6)的两次连续可微函数 $z=\phi$ 就可得到微分方程(1)的奇积分.

方程(1)的一个全积分是 n 个参数的积分族

$$z=\phi\ (x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)=\phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{a}), \tag{7}$$

这里 $\boldsymbol{a}$ 表示分量为这样的 $a_1,\cdots,a_n$ 的向量，使得函数 ϕ 和导数 ϕ_{x_μ} 一起在 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{a}$ 空间的某个区域内具有对于所有 $2n$ 个变量 x_ν 及 a_ν 的连续偏导数，且函数矩阵[2]

$$\frac{\partial(\phi,\phi_{x_1},\cdots,\phi_{x_n})}{\partial(a_1,\cdots,a_n)} \tag{8}$$

在所考察的区域的每一点的秩为 n.

12.2. 特征条形与积分曲面[3]. 条形(试与§8.3比较)定义为这样的单参数 t 的面元素族

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\ z=z(t),\ \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(t), \tag{9}$$

这里的这些向量函数在区间 $\alpha<t<\beta$ 内假设是连续可微的，而且满足条形条件[4]:

$$z'(t)=\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{p}(t), \tag{10}$$

---

1) 因此，显式微分方程(2)不存在奇积分.

2) 关于这矩阵的记号参看§2.7(c).

3) 参看 Goursat, Équations du premier ordre, p. 185.

4) [这条件对于面元素(9)属于某个连续可微的曲面 $z=\phi(\boldsymbol{r})$ 是必要的条件. ——俄译本编者注]

说得详细些，就是满足条件

$$z'(t) = \sum_{\nu=1}^{n} x'_\nu(t) p_\nu(t). \tag{10'}$$

如果条形仅由积分元素组成，则称它是微分方程(1)的积分条形(试与§8.7比较)。

如果条形(9)满足所谓特征方程(特征组)

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{P},\ z'(t) = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{p}'(t) = -\boldsymbol{X} - F_z\boldsymbol{p}, \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} &= (F_{p_1}, \cdots, F_{p_n}) = \operatorname{grad}_p F,\\ \boldsymbol{X} &= (F_{x_1}, \cdots, F_{x_n}) = \operatorname{grad}_x F,\end{aligned} \tag{12}$$

则称它为(试与§8.4及§8.5比较)微分方程(1)的特征条。这些方程的前 n 个按照§8中(6)式那样构成；第 $n+1$ 个方程是条形条件(10)；后 n 个方程可由条形(4)属于积分曲面 $z=\phi$ 的条件而得到(试与§8.4比较)。

对于显式微分方程(2)，可取

$$\boldsymbol{y}'(x) = -\boldsymbol{Q},\ z'(x) = f - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{q}'(x) = \boldsymbol{Y} + f_z\boldsymbol{q} \tag{13}$$

作为特征方程(参看§8.4)，其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q} &= (f_{q_1}, \cdots, f_{q_n}) = \operatorname{grad}_q f,\\ \boldsymbol{Y} &= (f_{y_1}, \cdots, f_{y_n}) = \operatorname{grad}_y f.\end{aligned}$$

(a) 函数 $F(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p})$ 沿方程(1)的每一特征条取常数值。如果特征条包含一积分元素，则它是一积分条(试与§8.7比较)。函数 F 是方程(1)的(显见的)首次积分(参看§12.8，并与§9.1比较)。

(b) 如果 $z=\phi(\boldsymbol{r})$ 是方程(1)在区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ 内的两次连续可微的积分，而且

$$\boldsymbol{r}_0,\ z_0 = \phi(\boldsymbol{r}_0),\ \boldsymbol{p}_0 = (\operatorname{grad}\phi)_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0} \tag{14}$$

是这积分的任一面元素，则包含这面元素的所有的特征条全部都属于这积分曲面，只要这条形上的点属于区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$。

因此，两次连续可微积分曲面能由特征条构成. 对于显式微分方程 (2) 及其由 (13) 所确定的特征条，也有同样结论.

由此直接推得

(c) 如果 $z=\psi(\mathfrak{r})$ 和 $z=\chi(\mathfrak{r})$ 在区域 $\mathfrak{G}(\mathfrak{r})$ 内是微分方程 (1) 的具有一个公共面元素 (14) 的两个积分，且设函数 ψ 和 χ 是两次连续可微，只要当点 $\mathfrak{r}$ 属于区域 $\mathfrak{G}$ 时，则方程 (1) 的包含面元素 (14) 的所有特征条同时属于这两个积分曲面.

如果这个公共面元素是正则的，则这两个积分曲面具有不退化为一点的公共曲线.

12.3. 化方程为仅含有未知函数的导数的方程.

(a) 第一种方法. 设 $w=\varphi(\mathfrak{r}, z)$ 是 $n+1$ 个自变量 $x_1, \cdots, x_n, z$ 的一个连续可微函数，$z=\phi(\mathfrak{r})$ 是使

$$\varphi(\mathfrak{r}, \phi(\mathfrak{r}))=0 \text{ 及 } \varphi_z(\mathfrak{r}, \phi(\mathfrak{r}))\neq 0^{1)}$$

的一个连续可微函数. 如果 $z=\phi(\mathfrak{r})$ 是微分方程 (1) 的一个积分，则由关系式 $\varphi(\mathfrak{r}, \phi(\mathfrak{r}))=0$ 求偏导后，得

$$\varphi_{x_\nu}+\varphi_z\phi_{x_\nu}=0 \quad (\nu=1, \cdots, n),$$

即对 $z=\phi$，下列恒等式成立:

$$F\left(x_1, \cdots, x_n, z, -\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi_z}, \cdots, -\frac{\varphi_{x_n}}{\varphi_z}\right)=0.$$

反之，如果 $w=\varphi(\mathfrak{r}, z)$ 当 $\varphi_z\neq 0$ 时是微分方程

$$F\left(x_1, \cdots, x_n, z, -\frac{w_{x_1}}{w_z}, \cdots, -\frac{w_{x_n}}{w_z}\right)=0 \qquad (15)$$

的一个积分，且等式 $\varphi=0$ 对于连续可微函数 $z=\phi(\mathfrak{r})$ 恒成立，即 $\varphi(\mathfrak{r}, \phi(\mathfrak{r}))=0$，则 ϕ 就是方程 (1) 的一个积分 (关

1) 对于每一积分 $z=\phi$，具有这种性质的函数总是存在的，例如 $\varphi=z-\phi$.

于例子，参看 § 5.4)。

因此，求出方程 (15) 的满足条件 $\varphi_z \neq 0$ 的积分 $\varphi(r, z)$，并从方程 $\varphi = 0$ 解出 z，我们就可得到方程 (1) 的积分[1]。

微分方程 (15) 已不再含有未知函数 w 本身。

例. $xypq = z$.

微分方程 (15) 具有如下形状

$$xyw_x w_y - zw_z^2 = 0.$$

由特征方程得到首次积分 xw_x 及 yw_y。于是利用这两个积分及上述方程，可组成对合组

$$w_x = \frac{A}{x}, \quad w_y = \frac{B}{y}, \quad w_z = \sqrt{\frac{AB}{z}}$$

由这个对合组求得

$$w = A\ln|x| + B\ln|y| + 2\sqrt{ABz} + C$$

于是所求积分为

$$z = \frac{1}{4AB}(A\ln|x| + B\ln|y| + C)^2.$$

(b) 雅可比-梅耶方法. 设 $u = u(r, t)$ 是满足关系式

$$u = tu_t + c \quad (c \text{ 是常数}) \tag{16}$$

的 $n+1$ 个自变量的连续可微函数，且

$$u_t = z$$

是方程 (1) 的一个积分[2]，则函数 u 满足微分方程

$$F\left(x_1, \cdots, x_n, u_t, \frac{u_{x_1}}{t}, \cdots, \frac{u_{x_n}}{t}\right) = 0.$$

函数 u 本身没有出现在这方程中[3]. 反之，如果 u 是这个方程

---

1) 用这方法能否得到方程 (1) 的所有的积分，显然决定于这样的存在定理对于方程 (15) 是否成立，按照该定理，对于每一连续可微函数 $z = \psi(r)$ 存在方程 (15) 的一个积分 $w = \varphi(r, z)$，它当 $z = \psi(r)$ 时等于零.

2) 如果 $z(r)$ 是方程 (1) 的一个积分，则函数 $u = tz(r) + c$ 显然具有所需要的性质.

3) 将方程 (1) 化为不含未知函数的方程的这个方法，称为雅可比-梅耶方法.

的一个积分，且方程(16)有连续可微的解 $t=\chi(r)$，则 $z=u_t(r,\chi(r))$ 就是方程(1)的一个积分。

例. 对于(a)中所举的例子，变换后的方程现在是

$$xyu_xu_y-t^2u_t=0.$$

它又有首次积分 xu_x 及 yu_y，于是可组成对合组

$$u_x=\frac{A}{x},\quad u_y=\frac{B}{y},\quad u_t=\frac{AB}{t^2}.$$

由此我们求得

$$u=A\ln|x|+B\ln|y|-\frac{AB}{t}+C.$$

方程(16)具有如下形状

$$A\ln|x|+B\ln|y|+C=2\frac{AB}{t}.$$

如果现在将由此所得到的 t 代入关系式 $z=u_t=\frac{AB}{t^2}$，则重新得到前面(a)中所写的关于 z 的表达式。

12.4. 在解析函数情况下用幂级数求解. 如果所出现的函数及变量都是复数，则 § 10.4 中的定理的推广对于显式微分方程(2)也成立。

设在点 $(x_0, \mathbf{y}_0, z_0, \mathbf{q}_0)$ 的邻域内给定 $2n+2$ 个变量的解析函数 $f(x,\mathbf{y},z,\mathbf{q})$. 其次设 $\omega(\mathbf{y})$ 是 $\mathbf{y}_0$ 的邻域内的解析函数，且

$$z_0=\omega(\mathbf{y}_0),\quad \mathbf{q}_0=(\mathrm{grad}\,\omega)_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0},$$

则微分方程(2)在点 $(x_0,\mathbf{y}_0)$ 的充分小的邻域内恰有一个解析解 $z=\phi(x,\mathbf{y})$，它当 $x=x_0$ 时取值 $\phi(x_0,\mathbf{y})=\omega(\mathbf{y})$.

对 ϕ 应用通常的幂级数方法，即考虑到初始条件，并使对应的幂的系数相等，可得 ϕ 的幂级数的系数[1]。

12.5. 一般存在定理. 柯西特征方法. 对于微分方程

1) 参看 O. Perron, *Math. Zeitschrift*, 5(1919), p. 154—160. Goursat, Équations du premier ordre, p. 2, p. 11.

(1)，利用柯西特征方法可以一目了然地证明一般的存在定理[1]（试与§10.2比较）。推广§12.2中所给出的条形概念对此是有用的。

(a) 所谓k维（$k \leqslant n$）的条形，就是含k个参数的面元素族

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t_1,\cdots,t_k),\quad z=z(t_1,\cdots,t_k),$$
$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(t_1,\cdots,t_k),\tag{17}$$

该族具有下列性质

(α) 函数$\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p}$在区域$T=T(t_1,\cdots,t_k)$内连续可微；

(β) 条形条件成立

$$\frac{\partial z}{\partial t_\nu}=\boldsymbol{p}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t_\nu}\ (\nu=1,\cdots,k);\tag{18}$$

(γ) 矩阵

$$\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(t_1,\cdots,t_k)}$$

的秩在区域T的每一点上都等于k.

最后一个条件表示这条形实质上是k维的。条件(18)对于面元素(17)属于一个连续可微曲面$z=z(\boldsymbol{r})$是必要条件。如果k维条形仅含方程(1)的积分元素，则称它为方程(1)的k维积分条形.

(b) n维积分条形（"微型地"）确定了方程(1)的两次连续可微积分。因为对于它，行列式

$$\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(t_1,\cdots,t_n)}\neq 0,$$

1) 参看 Bieberbach, DGlen, 第3版，p. 294—299. [也可参看 Курант, p. 105—111 (或 Courant-Hilbert, Methoden math. Physik II (中译本：数学物理方法 II, p. 76—81).——译者注); Степанов, 406—420 (中译本：微分方程教程，p. 396—410).——俄译本编者注]

所以(17)的前 n 个方程在每一点 $(t_{10},\cdots,t_{n_0})$ 的邻域内可以单值地解出 $t_1,\cdots,t_n$. 因此, $z(t_1,\cdots,t_n)$ 变为以 $x_1,\cdots,x_n$ 为自变量的连续函数. 由于(18), 它具有偏导数 $p_1,\cdots,p_n$, 它们也是连续可微的.

这样, 微分方程(1)的积分的存在性"微型地"由 n 维积分条形的存在而推出.

(c) 设函数 $F(\boldsymbol{r},z,\boldsymbol{p})$ 在区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r},z,\boldsymbol{p})$ 内两次连续可微. 其次设

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0(t_1,\cdots,t_{n-1}),\quad z=z_0(t_1,\cdots,t_{n-1}),$$
$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0(t_1,\cdots,t_{n-1}) \tag{19}$$

是微分方程(1)的已知 $n-1$ 维条形, 它在区域 $T_{n-1}=T_{n-1}(t_1,\cdots,t_{n-1})$ 内确定; 按公式(19)所得的数值应该属于区域 $\mathfrak{G}$. 最后设

$$\begin{vmatrix} F_{p_1} & \cdots & F_{p_n} \\ \dfrac{\partial x_{01}}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{0n}}{\partial t_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_{01}}{\partial t_{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial x_{0n}}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{20}$$

其中第一行的函数 F_{p_ν} 中已将函数(19)代入, 而 $x_{0\nu}$ 是向量

$$\boldsymbol{r}_0(t_1,\cdots,t_{n-1})=(x_{01},\cdots,x_{0n})^{1)}$$

的分量.

由于函数 F 两次连续可微, 所以特征方程(11)的右端连续可微. 于是它们的解 $\boldsymbol{r}(t)$, $z(t)$, $\boldsymbol{p}(t)$ 由 $t=0$ 时所取的初始值 $\boldsymbol{r}_0$, z_0, $\boldsymbol{p}_0$ 所单值地确定. 其次, 我们定义函数(置 $t_n=t$):

1) 俄译本、德文版均误作 $\boldsymbol{r}_0(t_1,\cdots,t_n)=(x_{01},\cdots,x_{0n})$. ——译者注

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{R}(t_1, \cdots, t_n) = \boldsymbol{r}(t, \boldsymbol{r}_0(t_1, \cdots, t_{n-1}), \quad z_0(t_1, \cdots, t_{n-1}), \\
\qquad\qquad \boldsymbol{p}_0(t_1, \cdots, t_{n-1})), \\
Z(t_1, \cdots, t_n) = z(t, \boldsymbol{r}_0(t_1, \cdots, t_{n-1}), \quad z_0(t_1, \cdots, t_{n-1}), \\
\qquad\qquad \boldsymbol{p}_0(t_1, \cdots, t_{n-1})), \\
\boldsymbol{P}(t_1, \cdots, t_n) = \boldsymbol{p}(t, \boldsymbol{r}_0(t_1, \cdots, t_{n-1}), \quad z_0(t_1, \cdots, t_{n-1}), \\
\qquad\qquad \boldsymbol{p}_0(t_1, \cdots, t_{n-1})).
\end{cases}
\tag{21}
$$

这些函数 $\boldsymbol{R}, Z, \boldsymbol{P}$ 构成区域 $T_n(t_1, \cdots, t_n)$ 中的一个 n 维积分条形，此处 T_n 和 $t_n = 0$ 时的区域 T_{n-1} 一致．区域 T_n 是确定的，因为对于 T_{n-1} 的每一点 $(t_1, \cdots, t_{n-1})$ 可以确定变量 t_n 的变化区间，它包含值 $t_n = 0$，且在这区间中特征方程 (11) 的解 (21) 存在．

12.6. 显式微分方程的解的存在性与唯一性定理． 存在区域的估计． 如果给定显式微分方程 (2)，则在适当假设下可以给出关于解的存在区域(最小区域)的某些估计，而且可证唯一性(试与 § 10.3 比较)．

(a) 设函数 $f(x, \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q})$ 在区域

$$
|x - \xi| \leqslant a; \quad \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q} \text{ 任意} \tag{22}
$$

内关于所有 $2n + 2$ 个变量两次连续可微，且在这区域内有

$$
\left.\begin{matrix}
|f_x|, |f_{y_\nu}|, |f_z|, |f_{q_\nu}| \\
|f_{y_\mu y_\nu}|, |f_{y_\mu z}|, |f_{y_\mu q_\nu}|, |f_{zz}|, |f_{zq_\nu}|, |f_{q_\mu q_\nu}|
\end{matrix}\right\} \leqslant A. \tag{23}
$$

其次，设函数 $\omega(\boldsymbol{y})$ 关于所有 y_ν 两次连续可微，且满足不等式

$$
|\omega_{y_\mu}| + \sum_{\nu=1}^{n} |\omega_{y_\mu y_\nu}| \leqslant B \quad (\mu = 1, \cdots, n). \tag{24}
$$

最后，设

$$
0 < \beta < \frac{1}{A} \ln\left[1 + \frac{\ln 3}{2n(B+1)}\right], \quad \alpha = \min(a, \beta). \tag{25}
$$

则微分方程 (2) 在区域

$$|x-\xi|\leqslant a;\quad y\ \text{任意} \tag{26}$$

内恰有一个两次连续可微积分 $z=\psi(x,y)$，它当 $x=\xi$ 时，取值

$$\psi(\xi,y)=\omega(y). \tag{27}$$

证明过程同时将给出实际构造积分的方法．求出微分方程 (2) 的特征条，亦即求出方程组

$$\begin{aligned}
y_\nu'(x) &= -f_{q_\nu}\quad (\nu=1,\cdots,n),\\
z'(x) &= f-\sum_{\mu=1}^{n} q_\mu f_{q_\mu},\\
q_\nu'(x) &= f_{y_\nu}+q_\nu f_z\quad (\nu=1,\cdots,n)
\end{aligned}$$

当 $x=\xi$ 时通过点

$$(\eta_1,\cdots,\eta_n,\omega(\eta_1,\cdots,\eta_n),\omega_{\eta_1},\cdots,\omega_{\eta_n})$$

的积分曲线．对于区间 $|x-\xi|\leqslant a$ 中的任何 η_ν，这积分曲线都存在；我们用

$$\begin{aligned}
y_\nu &= Y_\nu(x,\eta_1,\cdots,\eta_n),\\
z &= Z(x,\eta_1,\cdots,\eta_n),\\
q_\nu &= Q_\nu(x,\eta_1,\cdots,\eta_n)
\end{aligned}$$

来表示．可以证明，其中前 n 个方程对于任何 y_ν 可单值地解出 η_ν，这 $2n+1$ 个方程给出了所求积分 $z=\psi(x,y)$ 及其导数 $\psi_{y_\nu}=Q_\nu$ 的参数表达式(含有参数 $\eta_1,\cdots,\eta_n$)．

(b) 如果 f 不是在整个区域 (22) 内而是 (例如) 在有限立方体内满足假设，则可象在 § 10.3 中所拟定的那样进行．然而对于一个双叶角锥体的区域，也可直接得到存在性与唯一性定理(参看本页注 1) 中的第一篇文献)．

(c) 在 (a) 中所作的关于函数 f 和 ω 的假设可以减弱[1]．

1) 参看 T. Ważewski, *Annales Soc. Polon. Math.*, **14** (1935), p. 149—177; *Math. Zeitschrift*, **43** (1938), p. 521—532; E. Digel, *Math. Zeitschrift*, **44** (1938), p. 445—451.

(d) 如果函数 f 和 ω 还依赖于参数 $\lambda_\mu(\mu=1,\cdots,m)$，则可证明下述命题[1]：

设函数[2] $f(x, \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\lambda})$ 在区域[3]

$$|x-\xi| \leqslant a;\ \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q} \text{ 任意};\ \Lambda_\mu \leqslant \lambda_\mu \leqslant \Lambda_\mu^*$$

内对于所有 $2n+m+2$ 个变量 $x, y_\mu, z, q_\mu, \lambda_\mu$ 是 $k(\geqslant 1)$ 次连续可微的. 其次，设满足条件 (23)，且在区域

$$\boldsymbol{y} \text{ 任意};\ \Lambda_\mu \leqslant \lambda_\mu \leqslant \Lambda_\mu^* \tag{28}$$

内函数 $\omega(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda})$ 对于 y_μ, λ_μ 是 k 次连续可微的. 最后设不等式 (24) 成立，且数 α, β 按 (25) 式选取.

于是微分方程

$$p=f(x, \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\lambda})$$

(当 $\boldsymbol{\lambda}$ 已给时) 在区域 (26) 内恰有一个两次连续可微的积分 $z=\phi(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda})$，它当 $x=\xi$ 时取值 $\phi(\xi, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda})=\omega(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda})$. 而函数 $\phi(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda})$ 同导数 ϕ_x, ϕ_{y_ν} 在区域

$$|x-\xi| \leqslant \alpha;\ \boldsymbol{y} \text{ 任意};\ \Lambda_\mu \leqslant \lambda_\mu \leqslant \Lambda_\mu^* \tag{29}$$

内对于所有 $n+m+1$ 个变量 x, y_μ, λ_μ 都是 k 次连续可微的.

12.7. 全积分的存在定理. 由全积分求其它的积分.

(a) 全积分的存在[4]. 设函数 $f(x, \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q})$ 在区域

$$|x-\xi| \leqslant a;\quad \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q} \text{ 任意}$$

内两次连续可微，并满足不等式 (23). 则对任何 $b>0$，可求得这样的 α，使得方程 (2) 在区域

$$|x-\xi| \leqslant \alpha,\ |y_\nu| \leqslant b\ (\nu=1,\cdots,n)$$

---

1) 参看 E. Kamke, *Math. Zeitschrift*, 49(1943), p. 256—284.

2) 按照早先所采用的记法，$\boldsymbol{\lambda}$ 表示分量为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 的向量.

3) 这里以及不等式 (26), (28), (29) 中，如无任何补充声明，等号可以去掉.

4) 参看 Goursat, Équations du premier ordre, p. 192 (附注 II), p. 259—262; Bieberbach, DGlen, 第 3 版, p. 301—314.

内有一个全积分.

如果认为 § 12.6(d) 中的函数 f 不依赖于 λ，并设

$$\omega(y,\lambda)=\lambda_0+\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu y_\nu,$$

则这结论可由 § 12.6(d) 推得. 如果 $\phi(x,y,\lambda)$ 是据 §12.6(d) 而存在的积分，则在 $x=\xi$ 处有

$$\frac{\partial(\phi,\phi_{y_1},\cdots,\phi_{y_n})}{\partial(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}=\begin{vmatrix}1 & y_1 & \cdots & y_n\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=1.$$

因此，在点 $x=\xi$ 的某个邻域内，雅可比式也异于零.

如果仅知道函数 f 在点 (ξ,y_0,z_0,q_0) 的邻域内两次连续可微，则可证明微分方程 (2) 在点 (ξ,y_0) 的充分小的邻域内有一个全积分.这是因为，我们对于 f 可以造出一个 f^*，而使 f^* 仍满足前述对于 f 的条件，而且使 f^* 的值在 ξ,y_0,z_0,q_0 的邻域内同 f 的值一样. 于是上述的结论可以对 $p=f^*$ 应用，这样便推得一个全积分的存在定理，这全积分在 ξ,y_0 的足够小的邻域内也是方程 (2) 的全积分.

对于隐式微分方程 (1)，如果函数 F 在每一正则面元素的邻域内两次连续可微，则它在这邻域内有一全积分.

(b) 由一个全积分求其他的积分. 设 $\phi(r,a)$ 是微分方程 (1) 的一个全积分，此处 $a=(a_1,\cdots,a_n)$. 我们用连续可微函数 $\alpha^\nu(r)$ 代替常数 a_ν[1]，并设[2]

$$\Psi(r)=\phi(r,\alpha^1(r),\cdots,\alpha^n(r)),$$

---

1) 右上指标用来编号，右下角添写要对它求导的变量，例如 $\alpha^k_{x_\nu}=\frac{\partial\alpha^k}{\partial x_\nu}$.

2) 结果将在某点的充分小的邻域内成立；在每一具体例子中，函数 $\alpha^k(r)$ 的允许值域需要单独研究.

则

$$\Psi_{x_\nu}=\psi_{x_\nu}+\sum_{k=1}^{n}\psi_{a_k}\alpha^k_{x_\nu}\quad(\nu=1,\cdots,n).$$

因此，若

$$\sum_{k=1}^{n}\psi_{a_k}\alpha^k_{x_\nu}=0\quad(\nu=1,\cdots,n),\tag{30}$$

其中已将函数 $a_k=\alpha^k(\boldsymbol{r})$ 代入到导数 ψ_{a_k} 中，则 Ψ 是方程(1)的一个积分．这样一来，如果选取满足条件(30)的连续可微函数 $\alpha^k(\boldsymbol{r})$，则上述方法就给出了方程(1)的一个积分．

如果对所有 $k=1,2,\cdots,n$，有

$$\psi_{a_k}(\boldsymbol{r},\alpha^1(\boldsymbol{r}),\cdots,\alpha^n(\boldsymbol{r}))=0^{1)},\tag{31}$$

则 Ψ 是方程(1)的一个奇积分．

(b) 假设对于 $m(m<n)$ 个连续可微函数 $\Phi^\rho(\alpha)(\rho=1,\cdots,m)$ 及 n 个连续可微函数 $\alpha^\nu(\boldsymbol{r})(\nu=1,\cdots,n)$ 有等式

$$\Phi^\rho(\alpha^1,\cdots,\alpha^n)=0\quad(\rho=1,\cdots,m),\tag{32}$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n}\Phi^\rho_{a_k}\alpha^k_{x_\nu}=0\quad(\nu=1,\cdots,n)\tag{33}$$

其中已将值 $a_k=\alpha^k$ 代入函数 $\Phi^\rho_{a_k}$．其次，设对 m 个函数 $\lambda_\rho(\boldsymbol{r})$ $(\rho=1,\cdots,m)$ 等式

$$\psi_{a_k}(\boldsymbol{r},\alpha^1,\cdots,\alpha^n)=\sum_{\rho=1}^{m}\lambda_\rho\Phi^\rho_{a_k}\quad(k=1,\cdots,n)\tag{34}$$

成立，则方程(30)是(33)的一个推论．因此，函数 Ψ 是方程(1)的一个积分．

对于实际应用，当给定 Φ^ρ 时，可从关于 $n+m$ 个函数 α^k，

---

1) 如果等式(30)成立，且 $\dfrac{\partial(\alpha^1,\cdots,\alpha^n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\neq0$，则(31)式正确；但是条件(31)比这联立的条件简单．

λ_ρ 的 $n+m$ 个方程 (32) 和 (34) 出发. 如果从这些方程求得连续可微函数 α^k, 则只需把它们代入函数 ψ 以代替变量 a_k, 便得方程 (1) 的一个积分.

例. 再考察 § 9.5(c) 中的例子:

$$pq = z, \quad \psi = (x-a)(y-b).$$

设 $m=1$, $\Phi(a,b) = aA + bB$, 其中 A 和 B 是不等于零的任意常数. 这时方程 (32) 和 (34) 呈下形

$$\alpha A + \beta B = 0, \ \beta - y = \lambda A, \ \alpha - x = \lambda B.$$

因此

$$\alpha = \frac{Ax - By}{2A}, \ \beta = -\frac{Ax - By}{2B}.$$

于是积分是

$$\Psi = \frac{1}{4AB}(Ax + By)^2.$$

(c) 一个给定的积分在全积分所确定的那些积分中的出现. 设 $z = \chi(\boldsymbol{r})$ 是微分方程 (1) 的一个已给定的积分. 如果适当地选取连续可微函数 $\alpha^k(\boldsymbol{r})$, 使关系式

$$\begin{cases} \psi(\boldsymbol{r}, \alpha^1, \cdots, \alpha^n) = \chi(\boldsymbol{r}), \\ \psi_{x_\nu}(\boldsymbol{r}, \alpha^1, \cdots, \alpha^n) = \chi_{x_\nu}(\boldsymbol{r}) \ (\nu = 1, \cdots, n) \end{cases} \tag{35}$$

成立, 而且能使 (30) 式成立. 则该积分就在由全积分 $\psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\alpha})$ 利用 (b) 中方法所确定的那些积分之中.

实际应用时这样进行: 从方程 (35) 算出函数 α^k, 并研究它们是否满足方程 (30). 关于这方面的一个例子, 参看 § 9.5 (d).

12.8. 雅可比解法[1]. 设 F^1 是微分方程 (1) 的左端, 它两次连续可微. 我们用彼此不依赖的同样类型的方程

$$F^2 = 0, \cdots, F^k = 0$$

将这方程补充成 k 个方程的对合组[2]. 在一般情况下, 可选

1) 详见 § 14.

2) 关于定义, 参看 § 14.1(b).

$k=n$ 或 $n+1$；如果 z 本身在方程中不出现，则 $k=n$. 这个方程组可用 § 14 中所述的方法构成.这里所讲的同 § 14.9(d) 比较起来，没有什么不同. 只是 § 14.9(d) 所研究的是原来有 m 个方程的方程组，而这里所讲的仅有一个方程.

为了得到 k 个方程的方程组，首先找出一个两次连续可微函数 F^2，它和函数 F^1 彼此对合，亦即它是齐次线性微分方程

$$[F^1, Z]=0$$

的解(参看 § 9.1 和 § 14.4)，或同样的，它沿方程 (1) 的每一特征条形取常数值. 这样的函数称为方程 (1) 的**首次积分**. 将特征方程进行组合，时常能求得首次积分，这就象解偏微分方程时经常试着做的那样. 如果这时能顺利得到甚至更多的彼此对合的函数 $F^2, \cdots, F^\nu$，如果它们是函数无关，则所有这些函数可用来构造对合组[1].

如果求得了函数 $F^2, \cdots, F^k$ (此处 $k=n$ 或 $k=n+1$)，则对 $\nu \geqslant 2$ 的每个函数 F^ν 可用带有任意常数 A_ν 的 $F^\nu - A_\nu$ 来代替. 于是根据 § 14.3(e)，连方程 (1) 的全积分也得到了[2].

12.9. 特殊情况: $p=f(x, y, q)$.

(a) 对于微分方程

$$p=f(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{q}), \tag{36}$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 仍表示 $y_1, \cdots, y_n$; $\boldsymbol{q}$ 表示 $q_1, \cdots, q_n$; $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$; $q_\nu=\dfrac{\partial z}{\partial y_\nu}$，而未知函数 $z=z(x, \boldsymbol{y})$ 本身不出现. 于是全积分概念可以加强. 也就是说，全积分这里定义为依赖于参数 a 和 $\boldsymbol{\alpha}=$

1) 亦即满足 § 14 中的必要条件 (21) 及 (24).

2) 关于例子，参看 § 14.8(c).

$(a_1, \cdots, a_n)$ 的积分

$$z = \phi(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}) + a,$$

它在所考察的区域内对于所有 $2n+1$ 个变量 $x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}$ 两次连续可微，且满足不等式

$$\frac{\partial(\phi_{y_1}, \cdots, \phi_{y_n})}{\partial(a_1, \cdots, a_n)} \neq 0. \tag{37}$$

(b) 如果函数 $f(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{q})$ 在点 $(x_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{q}_0)$ 的邻域内两次连续可微，则方程 (36) 在点 $(x_0, \boldsymbol{y}_0)$ 的邻域内具有前述意义下的全积分.

可用下述方法得到这个积分. 按 § 12.2 中的 (13) 式，方程 (36) 的特征方程组是

$$y_\nu'(x) = -f_{q_\nu}(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{q}), \quad q_\nu'(x) = f_{y_\nu}(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{q})$$
$$(\nu = 1, \cdots, n), \tag{38}$$

$$z'(x) = f - \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu f_{q_\nu}. \tag{39}$$

方程 (38) 是可解的. 假设 $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ 是点 $(\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{q}_0)$ 的充分小的邻域内的一个任意点，设方程 (38) 的当 $x=x_0$ 时取值 $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ 的解是

$$y_\nu = Y_\nu(x, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}), \quad q_\nu = Q_\nu(x, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \ (\nu = 1, \cdots, n). \tag{40}$$

如果设 $z(x_0) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$，则由 (39) 式得

$$z = Z(x, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{\nu=1}^{n} Q_\nu F_{q_\nu} - F \right) dx. \tag{41}$$

其中大写字母 F 及 F_{q_ν} 分别表示函数 f 及 f_{q_ν} 当把 Y_ν 和 Q_ν 代入后的值. 对于 $\boldsymbol{b}$ 解 (40) 的前 n 个方程，对属于点 $(x_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{q}_0)$ 的充分小邻域内的值 $x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}$，我们得到完全确定的两次连续可微函数 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a})$. 利用它，我们从 (41) 求得方程 (36) 的全积分

$$z = \psi(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}) + a = Z(x, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{a}) + a,$$
对这积分有 $\psi(x_0, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}) = a + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}$[1]

(c) 由全积分求出特征条. 如果已经求得方程(36)的一个全积分[2],则对它仅用微分法与消去法就可得到特征方程组(38)的解.

设 $f(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{q})$ 是点 $(x_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{q}_0)$ 的邻域内两次连续可微函数, $z = \psi(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}) + a$ 在点 $(x_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{a}_0)$ 的邻域内是方程(36)的关于 $x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}$ 两次连续可微的全积分, 且在点 $(x_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{a}_0)$ 满足条件

$$\psi_{y_\nu} = q_{0\nu} \quad (\nu = 1, \cdots, n),$$
$$\frac{\partial(\psi_{y_1}, \cdots, \psi_{y_n})}{\partial(a_1, \cdots, a_n)} \neq 0.$$

在点 $(x_0, \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b}_0)$ 的某个邻域内对于 $\boldsymbol{y}$ 解方程

$$\psi_{a_\nu}(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}) = b_\nu \quad (\nu = 1, \cdots, n), \tag{42}$$

其中

$$b_{0\nu} = \psi_{a_\nu}(x_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{a}_0) \quad (\nu = 1, \cdots, n).$$

假设结果是 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Y}(x, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. 又设

$$Q_\nu(x, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \psi_{y_\nu}(x, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{a}),$$

则函数

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Y}(x, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q}(x, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

是方程(38)的解. 这样就得到了方程组(38)的所有的积分曲线, 它们通过点 $(x_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{q}_0)$ 的充分小的邻域[3].

12.10. 在力学中的应用[4]. 在有限个质点的质点系力学

---

1) 参看 Goursat, Équations du premier ordre, p. 259—262.

2) 根据 §13, 在一系列情况下,不解特征方程组也能办到.

3) 参看 Courant-Hilbert, Methoden math. Physik II, p. 91, p. 87 (中译本: 数学物理方法 II, p. 84—86).

4) [参看 Степанов, p. 412—416 (中译本: 微分方程教程, p. 402—406); Курант, p. 111—138 (或 Courant-Hilbert, Methoden math. Physik II (中译本: 数学物理方法 II, p. 85—104)); Ф. Р. Гантмахер, Лекции

中，特征方程组(38)(所谓哈密顿方程或典则方程)的形状如下[1]

$$\frac{dq_\nu}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_\nu},\quad \frac{dp_\nu}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \tag{43}$$

$$(\nu=1,\cdots,n),$$

其中的哈密顿函数

$$H=H(t,q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n)$$

是已给函数，而 $q_\nu=q_\nu(t)$, $p_\nu=p_\nu(t)$ 是待求函数. 由 §12.9，从对应的偏微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial t}+H\left(t,q_1,\cdots,q_n,\frac{\partial z}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial z}{\partial q_n}\right)=0 \tag{44}$$

的全积分，可以得到典则方程组的解.这个偏微分方程在力学中称为哈密顿-雅可比方程，在几何光学中称为程函方程[2].

例[3]. 设质点 (x,y) 在 x,y 平面上受来自固定于坐标原点的某质量的引力作用而运动. 这个运动按照方程[4]

$$x''(t)=U_x,\quad y''(t)=U_y$$

$\left(\text{其中 } U=\dfrac{k^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ 进行. 借助于哈密顿函数

$$H(x,y,p,q)=\frac{1}{2}(p^2+q^2)-U(x,y),$$

---

1) 这里，字母 p_ν, q_ν 已不再有以前所赋予的含义.

2) 参看 M. Born & E. Wolf, Principles of optics, 5 th ed., Pergamon Press, 1975, §3.1 (中译本: M. 玻恩, E. 沃耳夫，光学原理，上册，杨葭荪等译校，科学出版社，1978, p. 149—154).——译者注

3) 参看 Courant-Hilbert, Methoden math. Physik II, p. 92—94. (中译本: 数学物理方法 II, p. 86—88).

4) [设质量是单位的. ——俄译本编者注]

по аналитической механике, Физматгиз, 1960 (中译本: Φ. P. 甘特马赫，分析力学讲义，钟奉俄等译，人民教育出版社，1963); И. М. Гельфанд и С. В. Фомин, Вариационное исчисление, Физматгиз, 1961. ——俄译本编者注]

该方程组可化为典则形式

$$x'(t)=H_p,\qquad y'(t)=H_q,$$
$$p'(t)=-H_x,\quad q'(t)=-H_y.$$

关于函数 $z=z(t,x,y)$ 的偏微分方程(44)具有如下形状

$$z_t+\frac{1}{2}(z_x^2+z_y^2)=\frac{k^2}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

或者,若作变量代换

$$\zeta(t,\rho,\theta)=z(t,x,y),\quad x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta.$$

便为

$$\zeta_t+\frac{1}{2}\left(\zeta_\rho^2+\frac{1}{\rho^2}\zeta_\theta^2\right)=\frac{k^2}{\rho}.$$

根据§13.3,这个微分方程有全积分

$$\zeta=-At+B\theta\pm\int_{\rho_0}^{\rho}\sqrt{2A+\frac{2k^2}{\rho}-\frac{B^2}{\rho^2}}\,d\rho+C.\quad (*)$$

现在解方程

$$\frac{\partial\zeta}{\partial A}=\text{常数}\quad 及\quad \frac{\partial\zeta}{\partial B}=\text{常数},$$

我们得到所求的函数

$$x(t)=\rho\cos\theta,\quad y(t)=\rho\sin\theta.$$

如果在 ζ 的表达式(*)中取+号,则当 $t=t_0$ 时通过点 (ρ_0,θ_0) 的曲线可写成下列形式

$$t-t_0=\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{R}},\qquad \theta-\theta_0=B\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{R}},$$

其中

$$R=2A+\frac{2k^2}{\rho}-\frac{B^2}{\rho^2}.$$

这两个方程中的第二个确定路径轨线,第一个确定运动时间. 如果积分第二个方程,对于 $B\neq 0$,则得

$$\theta-\theta_0=\arcsin\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{B^2}{k^2\rho}-1\right)+\text{常数},$$

其中 $\varepsilon^2=1+\frac{2AB^2}{k^4}$. 因此轨线是二次曲线

$$\rho=\frac{B^2}{k^2[1+\varepsilon\sin(\theta-\alpha)]}.$$

12.11. 不等式与估计.

(a) 南云道夫估计定理[1]. 设函数 $f(x,y,z,q)$ 定义在区域 $\mathfrak{G}(x,y,z,q)$ 内，且在其中满足李普希茨条件

$$|f(x,y,z,\bar{q})-f(x,y,z,q)|\leqslant A\sum_{\nu=1}^{n}|\bar{q}_\nu-q_\nu|;\quad(45)$$

对于一切 $\nu=1,\cdots,n$, 函数 $a_\nu(x)$, $b_\nu(x)$ 在区间 $\xi\leqslant x<c$ 内连续可微，$a_\nu(x)<b_\nu(x)$, 并且[2]

$$a_\nu'\geqslant A,\quad b_\nu'\leqslant -A.$$

我们用 $\mathfrak{g}$ 来记棱锥形区域

$$\xi\leqslant x<c,\ a_\nu(x)\leqslant y_\nu\leqslant b_\nu(x)\quad(\nu=1,\cdots,n).\quad(46)$$

又设函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在 $\mathfrak{g}$ 中连续可微，且当 $z=u$, $q_\nu=u_{y_\nu}$ 及 $z=v$, $q_\nu=v_{y_\nu}$ 时，数值组 x,y,z,q 属于区域 $\mathfrak{G}$. 最后，假设

$$u_x\geqslant f(x,y,u,u_{y_1},\cdots,u_{y_n}),$$
$$v_x\leqslant f(x,y,v,v_{y_1},\cdots,v_{y_n}).$$

同时在区域 $\mathfrak{g}$ 的每一点，这两个不等式中最多一个等号成立。又设对于 $a_\nu(\xi)\leqslant y_\nu\leqslant b_\nu(\xi)$, 有

$$u(\xi,y)>v(\xi,y).$$

则在整个区域 $\mathfrak{g}$ 内有所谓南云道夫不等式

$$u(x,y)>v(x,y).$$

---

1) 参看 M. Nagumo, *Japanese Journal of Math.*, **15** (1938), p. 51—56; J. Szarski, *Annales Soc. Polon Math.*, **22** (1950), p. 1—34.

2) 实质上，这里的李普希茨常数 A 恰好是 (45) 式中的那个 A.

(b) 南云道夫不等式对于估计微分方程(2)的解的应用。

设微分方程(2)的右端定义在区域 $\mathfrak{G}$ 内，并在其中满足不等式(45)，且区域 $\mathfrak{g}$ 由条件(46)确定。我们假设在区域 $\mathfrak{G}$ 内已知带有初值 $\phi(\xi, y)=\omega(y)$ 的一个积分 $\phi(x, y)$ 的存在，但计算函数 ϕ 本身很复杂，或者我们不知道它。

如果我们能断定函数 $f_\nu(x, y, z, q)$ 和 $\omega_\nu(y)$ 之间的函数 f 和 ω 是这样的：

$$f_1<f<f_2, \quad \omega_1<\omega<\omega_2,$$

而且假定对微分方程

$$p=f_1, \quad p=f_2$$

能求出积分 $\phi_1(x, y)$, $\phi_2(x, y)$，它们满足初值条件

$$\phi_1(\xi, y)=\omega_1(y), \quad \phi_2(\xi, y)=\omega_2(y),$$

则在区域 $\mathfrak{g}$ 中有估计式

$$\phi_1(x, y)<\phi(x, y)<\phi_2(x, y).$$

由此进一步可得 §4.4 中的哈尔不等式。

§13. n 个自变量的特殊形状的非线性方程的解法[1]

13.1. $F(p)=0$. 如果常数 A_ν 使

$$F(A_1, \cdots, A_n)=0,$$

其中 F 连续可微，且 $\sum_{\nu=1}^{n}|F_{p_\nu}| \neq 0$，则

$$z=A_0+A_1x_1+\cdots+A_nx_n$$

是所给方程的一个全积分[2]。

1) 关于这节，也可参看 §11。

2) Goursat, Équations du premier ordre, p. 156.

13.2. $F(z, p) = 0$. 如果作变换

$$z = \zeta(\xi), \quad \xi = A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n,$$

则由已给的偏微分方程可得关于 $\zeta = \zeta(\xi)$ 的常微分方程

$$F(\zeta, A_1\zeta', \cdots, A_n\zeta') = 0.$$

13.3. $F[f_1(x_1, p_1\varphi(z)), \cdots, f_n(x_n, p_n\varphi(z))] = 0$. **可分离变量方程**. 选取常数 A_ν, 使

$$F(A_1, \cdots, A_n) = 0.$$

从方程

$$f_\nu(x_\nu, p_\nu\varphi) = A_\nu$$

解出 $p_\nu\varphi$, 假设得到

$$p_\nu\varphi(z) = g_\nu(x_\nu, A_\nu),$$

则

$$\int \varphi(z)dz = \sum_{\nu=1}^{n} \int g_\nu(x_\nu, A_\nu)dx_\nu + A_0$$

是所给微分方程的一个(全)积分.

我们来考察特例.

(a) $f_1(x_1, p_1)f_2(x_2, p_2)\cdots f_n(x_n, p_n) = a$.

当 $a = 0$ 时,这个微分方程对所有满足方程

$$f_k(x_k, p_k) = 0 \tag{1}$$

中的无论哪一个的解 z 都成立. 如果在这方程中解出 p_k:

$$p_k = \varphi_k(x_k),$$

则

$$z = \int \varphi_k(x_k)dx_k + \Omega(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n)$$

就是方程(1)的一个解. 其中 Ω 是任意的连续可微函数.

当 $a \neq 0$ 时, 我们这样选取 A_ν, 使 $A_1\cdots A_n = a$. 如果在方程

$$f_\nu(x_\nu, p_\nu) = A_\nu$$

中解出 p_ν:

$$p_\nu = \varphi_\nu(x_\nu, A_\nu),$$

则

$$z = A_0 + \sum_{\nu=1}^{n}\int \varphi_\nu(x_\nu, A_\nu)dx_\nu$$

是一个全积分[1].

(b) $f_1(x_1, p_1) + f_2(x_2, p_2) + \cdots + f_n(x_n, p_n) = 0$.

设常数 A_ν 这样选取,使得 $\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu = 0$. 于是从方程

$$f_\nu(x_\nu, p_\nu) = A_\nu,$$

中解出 p_ν:

$$p_\nu = \varphi_\nu(x_\nu, A_\nu),$$

我们就有形如

$$z = \sum_{\nu=1}^{n}\int \varphi_\nu(x_\nu, A_\nu)dx_\nu + A_0$$

的一个全积分.

13.4. 齐次方程[2].

(a) 设方程

$$F(\mathbf{r}, z, \mathbf{p}) = 0$$

中,若 z 用适当选取的幂 z^a 来代替,则其左端关于 $z, p_1, \cdots, p_n$ 是齐次的.

如果 $a \neq 1$, 则作变换 $z = w^\lambda$, 此处 $\lambda = \dfrac{a}{a-1}$. 我们得到方程

$$F(x_1, \cdots, x_n, \lambda^{-a}, w_{x_1}, \cdots, w_{x_n}) = 0.$$

它不含未知函数.

1) Goursat, Équations du premier ordre, p. 160.

2) 也可参看 § 11.10.

如果 $a=1$，则设 $z=e^{w}$，我们得到

$$F(x_1, \cdots, x_n, 1, w_{x_1}, \cdots, w_{x_n})=0.$$

(b) 方程 $F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})=z^{c}$，其左端是关于 $p_1, \cdots, p_n$ 的 m 次齐次函数。

这是(a)中齐次方程当 $a=\frac{m}{c}$ 时的一个特例。

13.5. $F(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p})=0$. 勒让德变换. 设在区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ 内函数 $z(\boldsymbol{r})$ 两次连续可微. 对于 $1 \leqslant k \leqslant n$，可用变换

$$\begin{aligned} &X_1=x_1, \cdots, X_{k-1}=x_{k-1}, \\ &X_k=z_{x_k}(\boldsymbol{r}), \cdots, X_n=z_{x_n}(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{2}$$

将区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ 一对一地映射到区域 $\overline{\mathfrak{G}}(\boldsymbol{X})$. 最后，设在区域 $\mathfrak{G}$ 内有

$$\det|z_{x_\mu x_\nu}| \neq 0 \quad (\mu, \nu \geqslant k).$$

如果置

$$Z(\boldsymbol{X})=\sum_{\rho=k}^{n} x_\rho z_{x_\rho}-z(\boldsymbol{r}), \tag{3}$$

则与已引入的关系式(2)，(3)并列地，我们还可以推导得方程

$$z_{x_\nu}=-Z_{X_\nu}(\nu=1, \cdots, k-1), \tag{4}$$

$$\begin{cases} x_\nu=X_\nu \quad (\nu=1, \cdots, k-1), \\ x_\nu=Z_{X_\nu}(\boldsymbol{X}) \quad (\nu=k, \cdots, n), \\ z(\boldsymbol{r})=\sum\limits_{\rho=k}^{n} X_\rho Z_{X_\rho}-Z(\boldsymbol{X}). \end{cases} \tag{5}$$

这变换称为勒让德变换[1]。

利用这个变换，如果积分满足上述假设，则微分方程

$$F(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p})=0 \tag{6}$$

---

1) 它是一种接触变换. 在上述表示下，§11.15 中的欧拉变换也包括在勒让德变换之中.

变为

$$F(X_1,\cdots,X_{k-1},Z_{X_k},\cdots,Z_{X_n},\sum_{\rho=k}^{n}X_\rho Z_{X_\rho}-Z,$$

$$-Z_{X_1},\cdots,-Z_{X_{k-1}},X_k,\cdots,X_n)=0. \qquad (7)$$

它有时比原方程简单. 如果能求得方程(7)的积分 $Z(X)$, 则(5)式就是方程(6)的一个积分的参数表达式.

在这变换下,某些积分可能失掉. 就是说,它们不满足开头所述的假设. 因此还需要研究是否存在这样的积分.

如果代替(6),我们考察不含未知函数 z 的微分方程

$$F(r,p)=0,$$

则对应的变换后的方程具有下列形状

$$F(X_1,\cdots,X_{k-1},Z_{X_k},\cdots,Z_{X_n},-Z_{X_1},\cdots,$$

$$-Z_{X_{k-1}},X_k,\cdots,X_n)=0.$$

如果 F 对自变量的关系比较复杂,而对偏导数的关系却不复杂,采用这个变换总是有益的.

13.6. $\sum_{\nu=1}^{k-1}p_\nu f_\nu=\sum_{\nu=k}^{n}x_\nu f_\nu-f_{n+1}$, **其中** $1\leqslant k\leqslant n$,

$$f_\nu=f_\nu(x_1,\cdots,x_{k-1},p_k,\cdots,p_n,\sum_{\nu=k}^{n}x_\nu p_\nu-z).$$

采用勒让德变换(4)和(5),原来的微分方程变成拟线性微分方程

$$\sum_{\nu=1}^{n}F_\nu\frac{\partial Z}{\partial X_\nu}=F_{n+1},$$

其中 $F_\nu=f_\nu(X_1,\cdots,X_n,Z)$.

特别地,对于方程

$$\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu f_\nu=f_{n+1},\quad f_\nu=f_\nu\left(p_1,\cdots,p_n,\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu p_\nu-z\right),$$

前面所述的一切都成立. 它是前述方程当 $k=1$ 时的特例.

13.7. $z = x_1p_1 + \cdots + x_np_n + f(p_1, \cdots, p_n)$. **克莱罗方程.** 如果 f 在点 $(A_1, \cdots, A_n)$ 处有定义且两次连续可微，则

$$z = A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + f(A_1, \cdots, A_n)$$

是全积分. 其它积分可按 § 12.7(b) 导得，或用 § 13.5 的勒让德变换 (4) 和 (5). 也可参看 § 11.12.

§ 14. 非线性方程组

14.1. 显式方程组. 可积性条件. 设已给关于 m 个导数解出的 m 个微分方程所组成的显式(即典则)方程组[1]

$$p_\nu = f^\nu(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q}) \quad (\nu = 1, \cdots, m), \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{r} = (x_1, \cdots, x_m)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_s)$, $\boldsymbol{q} = (q_1, \cdots, q_s)$[2], $p_\nu = \dfrac{\partial z}{\partial x_\nu}$, $q_\mu = \dfrac{\partial z}{\partial y_\mu}$, 而 $z = z(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ 是未知函数.

(a) 如果函数 f^ν 在所考察的区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q})$ 内关于变量 x_ν, y_ν, z, q_ν 连续可微，则每一个两次连续可微积分 $z = \phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ 满足 $\dfrac{m(m-1)}{2}$ 个方程

$$f^\mu_{x_\nu} + f^\mu_z f^\nu + \sum_{\sigma=1}^{s} f^\mu_{q_\sigma}(f^\nu_{y_\sigma} + q_\sigma f^\nu_z)$$

$$= f^\nu_{x_\mu} + f^\nu_z f^\mu + \sum_{\sigma=1}^{s} f^\nu_{q_\sigma}(f^\mu_{y_\sigma} + q_\sigma f^\mu_z) \quad (1 \leqslant \mu, \nu \leqslant m), \tag{2}$$

其中 $z = \phi$, $q_\sigma = \phi_{y_\sigma}$.

因此，对于已给方程组 (1)，如果它具有两次连续可微的

---

1) 这儿用上指标来标记函数有时是方便的. 因此可将偏导数，例如 $\dfrac{\partial f^\nu}{\partial x_\mu}$, 简记成 $f^\nu_{x_\mu}$.

2) 其中允许 $s = 0$. 这表明 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 均不出现.

一个解，则总可以再列出一些方程 (2)，而方程组 (1) 的解也应满足那些方程 (2).

(b) 如果对应于方程组 (1) 的方程组 (2) 是变量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{q}$ 的恒等式，则方程组 (1) 称为**显式对合组**，也可以称为**雅可比组**或**完全可积组**. 方程组 (2) 称为方程组 (1)的**可积性条件**. 只对于这种(显式)对合组可以一般地证明它的解的存在性.

14.2. 解析函数范围内雅可比组的解的存在与唯一性定理.

设函数 $f^\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{q})$ 在点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, z^0, \boldsymbol{q}^0)$ 处是正则解析的，且在该点的邻域内满足可积性条件 (2). 其次，设给定在点 $\boldsymbol{y}^0$ 处正则解析的函数 $\omega(\boldsymbol{y})$，它满足诸关系式

$$\omega(\boldsymbol{y}^0) = z^0, \quad \omega_{y_\mu}(\boldsymbol{y}^0) = q_\mu^0 \quad (\mu = 1, \cdots, s)$$

则方程组 (1) 在点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$ 的充分小的邻域内恰有一个满足初值条件 $\phi(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}) = \omega(\boldsymbol{y})$ 的正则解析积分 $z = \phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$[1].

14.3. 雅可比组在实函数范围内的解的存在与唯一性定理. 用梅耶变换化雅可比组为一个方程.

(a) 设在固定 ξ_ν 时，函数 $f^\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q})$ 在区域

$$|x_\nu - \xi_\nu| \leqslant a, \quad \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q} \text{ 任意} \tag{3}$$

内两次连续可微，且成立不等式

$$\left.\begin{cases} |f^\rho_{x_\nu}|, |f^\rho_{y_\nu}|, |f^\rho_z|, |f^\rho_{q_\nu}|, \\ |f^\rho_{y_\mu y_\nu}|, |f^\rho_{y_\mu z}|, |f^\rho_{y_\mu q_\nu}|, |f^\rho_{zz}|, |f^\rho_{z q_\nu}|, |f^\rho_{q_\mu q_\nu}| \end{cases}\right\} \leqslant A. \tag{4}$$

并设可积性条件 (2) 满足. 其次，设函数 $\omega(\boldsymbol{y})$ 关于任何 y_μ 连续可微，并满足不等式

$$|\omega_{y_\mu}| + \sum_{\nu=1}^{s} |\omega_{y_\mu y_\nu}| \leqslant B \quad (\mu = 1, \cdots, s) \tag{5}$$

1) 参看 Goursat, Équations du premier ordre, p. 35—38.

最后，选取 β 及 α，它们满足条件

$$0<\beta<\frac{1}{mA}\ln\left[1+\frac{\ln 3}{2s(B+1)}\right], \quad \alpha=\min(a,\beta). \tag{6}$$

则方程组 (1) 在区域

$$|x_\nu-\xi_\nu|\leqslant\alpha;\ \boldsymbol{y}\text{任意} \tag{7}$$

内恰有一个两次连续可微积分 $z=\phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})$，它满足初值条件 $\phi(\xi_1,\cdots,\xi_m,\boldsymbol{y})=\omega(\boldsymbol{y})$[1].

(b) 为实际求解方程组(1)，常可成功地利用梅耶方法而化为一个方程式. 梅耶变换（参看 § 6.4）就是：m 个自变量 $x_1,\cdots,x_m$ 利用变换

$$x_\rho-\xi_\rho=uu_\rho\ (\rho=1,\cdots,m) \tag{8}$$

表示为 $m+1$ 个自变量 $u,u_1,\cdots,u_m$ 的函数，并且 $|u|\leqslant 1$，$|u_\rho|\leqslant\alpha$，x_ρ 取（甚至多次地取）这区间 $|x_\rho-\xi_\rho|<\alpha$ 的所有的值. 代替方程组 (1)，现在将考虑一个方程式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial u}=\sum_{\rho=1}^{m}u_\rho f^\rho\Big(&uu_1+\xi_1,\cdots,uu_m\\&+\xi_m;\boldsymbol{y},Z,\frac{\partial Z}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial Z}{\partial y_s}\Big),\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $u,y_1,\cdots,y_s$ 是自变量，而 $u_1,\cdots,u_m$ 是参数. 如果

$$Z=\Psi(u,\boldsymbol{y};u_1,\cdots,u_m)$$

是微分方程 (9) 的按 § 12.6(a) 中结论而存在的一个积分，它满足不依赖于 u_ν（这很重要！）的初值条件

$$\Psi(0,\boldsymbol{y};u_1,\cdots,u_m)=\omega(\boldsymbol{y}),$$

则

$$z(\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})=\Psi(1,\boldsymbol{y};x_1-\xi_1,\cdots,x_m-\xi_m)$$

就是所求的方程组 (1) 的积分.

---

1) 参看 Kamke, *Math. Zeitschrift*, 49(1943), p. 267—275. 在该书的 269—270 页还有其它的参考文献指示.

(c) 例. $p_1 = q^2 + y$, $p_2 = q^2 + y$.

这个方程组是对合组. 如果取 $\xi_1 = \xi_2 = 0$, 且设 $x_\nu = uu_\nu$, 则方程(9)取如下形状

$$Z_u = (u_1 + u_2)(Z_y^2 + y).$$

从这个方程的特征方程求出积分

$$Z = A(u_1 + u_2)u - \frac{2}{3}(A - y)^{3/2} + B.$$

若 A, B 不依赖于 u_1, u_2, 则正如所需要的一样, 当 $u = 0$ 时, Z 不依赖于 u_1, u_2. 如作变换 $uu_\nu = x_\nu$, 则得原方程组的积分

$$z = A(x_1 + x_2) - \frac{2}{3}(A - y)^{3/2} + B.$$

(d) 设函数 $f^\nu(\mathbf{r}, \mathbf{y}, z, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda})$ (这里 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_h)$) 在区域

$$|x_\nu - \xi_\nu| \leqslant a; \quad \mathbf{y}, z, \mathbf{q} \text{ 任意}; \ \Lambda_\mu \leqslant \lambda_\mu \leqslant \Lambda_\mu^*$$

内关于所有 $m + 2s + h + 1$ 个变量 x_ν, y_ν, z, q_ν, λ_ν 是 k 次连续可微的 ($k \geqslant 1$). 按假设, 函数 $f_{y_\mu}^\nu$, f_z^ν, $f_{q_\mu}^\nu$ 也都具有这同一性质. 其次, 设不等式(4)及可积性条件(2)都满足. 又设函数 $\omega(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda})$ 在区域

$$\mathbf{y} \text{ 任意}; \quad \Lambda_\mu \leqslant \lambda_\mu \leqslant \Lambda_\mu^* \tag{10}$$

内有连续偏导数 ω_{y_μ}, 并且它们和 ω 本身对于 y_ν, λ_ν 是 k 次连续可微的, 此外, 还满足(5)式. 最后, 设 β, α 仍按(6)式那样选取.

于是, 当 λ_ν 固定时, 方程组

$$p_\nu = f^\nu(\mathbf{r}, \mathbf{y}, z, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}) \quad (\nu = 1, \cdots, m)$$

在区域(7)内恰有一个两次连续可微积分 $z = \phi(\mathbf{r}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda})$, 它具有初值

$$\phi(\xi_1, \cdots, \xi_m, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}) = \omega(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}),$$

函数 $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda})$ 和它的导数 ϕ_{x_ν}, ϕ_{y_ν} 都在区域

$$|x_\nu - \xi_\nu| \leqslant \alpha; \quad \mathbf{y} \text{ 任意}; \quad \Lambda_\mu \leqslant \lambda_\mu \leqslant \Lambda_\mu^* \tag{11}$$

内对于所有 $m+s+h$ 个变量 $x_\nu, y_\nu, \lambda_\nu$ 是 k 次连续可微的。

(e) 如果

$$\omega(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 + \sum_{\sigma=1}^{s} \lambda_\sigma y_\sigma,$$

则将 (d) 中结论应用到方程组 (1)，它的右端不依赖于 $\boldsymbol{\lambda}$，我们就在值 $x_\rho = \xi_\rho (\rho = 1, \cdots, m)$ 的充分小的邻域内得到这个方程组的一个全积分 $z = \phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda})$，即这样一个积分，对于它，有

$$\frac{\partial(\phi, \phi_{y_1}, \cdots, \phi_{y_s})}{\partial(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_s)} \neq 0.$$

(f) 如果方程组 (1) 不是给定在区域 (3) 内，则试着扩展函数 f^ν 和 ω 的存在区域，使得定理 (a) 也能适用.

14.4. 雅可比括号. 泊松括号. 对于更一般的非线性方程组 (12)，§ 14.5 中的方程组 (13) 将起着可积性条件 (2) 的作用. 我们将预先说明方程 (13) 的某些性质.

设函数 $F(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{y})$, $G(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{y})$, $H(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{y})$ 在区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{y})$ 内是它们的 $2n+1$ 个变量 $\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{y}$[1] 的连续可微函数.

(a) 雅可比括号 $[F, G]$ 是这样定义的[2]:

$$[F, G] = \sum_{\nu=1}^{n} \{(F_{x_\nu} + y_\nu F_z) G_{y_\nu} - (G_{x_\nu} + y_\nu G_z) F_{y_\nu}\},$$

若利用简缩记号

$$\frac{dF}{dx_\nu} = F_{x_\nu} + y_\nu F_z,$$

则为

---

1) 这里再次设 $\boldsymbol{r} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)$.

2) Forsyth, Diff. Equations V, p. 102. $[F, G]$ 时常写为 $[G, F]$；例如参看 Goursat, Équations du premier ordre, p. 257.

$$[F, G] = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{dF}{dx_\nu}G_{y_\nu} - F_{y_\nu}\frac{dG}{dx_\nu}\right).$$

(b) 显然，对于任何常数 C，有 $[F, C] = 0$；又有

$$[F, F] = 0; \quad [F, G] = -[G, F].$$

(c) 对于两次连续可微函数 F, G, H，有关系式[1]

$$[[F, G], H] + [[G, H], F] + [[H, F], G]$$
$$= F_z[G, H] + G_z[H, F] + H_z[F, G].$$

(d) 当已给函数 F 时，根据 (a)，关系式

$$[F, Z] = 0$$

是未知函数 $Z = Z(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{y})$ 的一个线性齐次微分方程。

(e) 如果函数 F, G, H 不依赖于变量 z，亦即所讨论的函数是 $F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$, $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$, $H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$，则雅可比括号 $[F, G]$ 变为泊松括号 (F, G)，它是这样定义的[2]：

$$(F, G) = \sum_{\nu=1}^{n}(F_{x_\nu}G_{y_\nu} - F_{y_\nu}G_{x_\nu}) = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial(F, G)}{\partial(x_\nu, y_\nu)}.$$

(f) 由 (c) 得关系式[3]

$$((F, G), H) + ((G, H), F) + ((H, F), G) = 0.$$

(g) 如果 F 是两次连续可微函数，且 $\phi_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$, $\phi_2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ 是微分方程 $(F, Z) = 0$ 的两次连续可微积分，则泊松括号 (ϕ_1, ϕ_2) 也是这个微分方程的一个积分[4]。

14.5. 一般非线性方程组. 设给定非线性微分方程组

$$F^\nu(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p}) = 0 \quad (\nu = 1, \cdots, n). \tag{12}$$

象往常一样，这里 $\boldsymbol{r} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_n)$，而

---

1) Goursat, Équations du premier ordre, p. 258. (也可以参看前引的 Carathéodory 的书，§57, p. 57—58.——校者注)

2) Goursat, Équations du premier ordre, p. 254.

3) Goursat, Équations du premier ordre, p. 255.

4) 泊松定理. 参看 Goursat, Équations du premier ordre, p. 256. Whittaker, Analytische Dynamik, p. 340—341.

$z = z(r)$ 是 m 个方程 (12) 的待求公共积分. 假设函数 F^ν 在所考察的区域 $\mathfrak{G}(r, z, p)$ 内是其 $2n+1$ 个变量的连续可微函数.

方程组 (12) 的每一个两次连续可微积分也满足构成括号时所建立的方程

$$[F^\mu, F^\nu] = 0 \quad (1 \leqslant \mu, \nu \leqslant m). \tag{13}$$

这里的

$$F^{\mu,\nu}(r, z, p) = [F^\mu, F^\nu]$$

是按 § 14.4(a) 中所定义的雅可比括号. 这断语的证明同 §14.1(a) 的证明类似.

因此, 如果所给方程组 (12) 确实是可解的, 则它常常可用来构成另外的必须满足的方程组 (13).

14.6. 对合组与完全组.

(a) 如果方程组 (12) 的左端对于 r, z, p 的一切值有

$$[F^\mu, F^\nu] = 0 \quad (1 \leqslant \mu, \nu \leqslant m), \tag{14}$$

则称方程组(12)为**对合组**,而称方程组(14)为 (12) 的**可积性条件**.对于显式方程组 (1), 这个定义仅当该方程组的所有右端 f^ν 都不依赖于 z 时,才与 § 14.1(b) 中所给出的定义一致.

(b) 如果对于满足 m 个方程 (12) 的所有**数组** (r, z, p) 有

$$[F^\mu, F^\nu] = 0 \quad (1 \leqslant \mu, \nu \leqslant m),$$

则称 (12) 为**完全组**.

(c) 为了得到方程组 (12) 的积分, 需要用方程组 (13) (精确地说,仅是 (13) 中在 (b) 的意义下不是方程组 (12) 的"代数结果"的那些方程)将该组补充成完全组 (试与 § 6.3(c) 比较). 补成这样的完全组之后,再采用构成括号的方法, 等等. 显然,所给方程组可解的必要条件是: 若把 r, z, p 看作为数时,每一扩大了的方程组"代数上可解".

例. $p_1p_2 = x_3x_4$, $p_3p_4 = x_1x_2$.

这里所求的函数 z 没有出现，所以雅可比括号化为泊松括号. 利用构成泊松括号的方法得到方程

$$x_1p_1 + x_2p_2 - x_3p_3 - x_4p_4 = 0.$$

现在三个方程构成完全组. 如果仍然继续前面的过程，而且构成(例如)第一和第三个方程的泊松括号

$$2(x_3x_4 - p_1p_2) = 0,$$

则容易看出这个方程可以从第一个方程推得.

(d) 化完全组为对合组. 假设当 $m \leqslant n$ 时的方程组(12)是完全组，并能解出 $p_1, \cdots, p_m$，即在区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}, z, p_{m+1}, \cdots, p_n)$ 内存在并在其中连续可微的函数组

$$p_\mu = f_\mu(\boldsymbol{r}, z, p_{m+1}, \cdots, p_n) \quad (\mu = 1, \cdots, m) \tag{15}$$

使(12)的诸方程变为恒等式. 其次，假设把(15)代入行列式

$$\frac{\partial(F^1, \cdots, F^m)}{\partial(p_1, \cdots, p_m)}$$

后，此行列式在区域 $\mathfrak{G}$ 的任一子域内都不恒等于零. 则(15)是在 § 14.1(b) 的意义下的对合组[1].

(e) 如果方程组(12)在区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p})$ 内在(a)的意义下是对合组，且函数 F^ν 在区域 $\mathfrak{G}$ 内两次连续可微，则齐次线性微分方程

$$[F^\mu, Z] = 0 \quad (\mu = 1, \cdots, m)$$

构成 § 6.3(b) 的意义下的一个完全组[2].

14.7. 不依赖于 z 的对合组的雅可比解法. 所要谈的是方程组

$$F^\nu(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = 0 \quad (\nu = 1, \cdots, m) \tag{16}$$

---

1) 参看 Forsyth, Diff. Equations V, p. 118—120.

2) 参看 Forsyth, Diff. Equations V, p. 135. Goursat, Équations du premier ordre, p. 289.

$(m \leqslant n)$，其中不明显含有待求的函数 z，并在区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ 内它是一个对合组.假设我们能对这个方程组补充 $n-m$ 个方程

$$F^{m+1}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})=0, \cdots, F^{n}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})=0, \qquad (17)$$

使所得的 n 个方程的方程组是对合的． 又设这新的方程组 (16) 和 (17) 对于变量 $p_1, \cdots, p_n$ 可以解出

$$p_{\nu}=f^{\nu}(\boldsymbol{r}) \quad (\nu=1, \cdots, n); \qquad (18)$$

并且将 (18) 代入后，在所考察的任一子域内都有

$$\frac{\partial(F^1, \cdots, F^n)}{\partial(p_1, \cdots, p_n)} \neq 0. \qquad (19)$$

根据 § 14.6(d)，方程组 (18) 是对合组，于是 $f^{\mu}_{x_\nu}=f^{\nu}_{x_\mu}$ 因此可以应用 § 6.1 中的方法．这时，特别地，方程组 (18) 的每一个解都是方程组 (16) 的一个解． 由于对任意常数 A_ν，方程

$$F^{m+1}=A_{m+1}, \cdots, F^{n}=A_{n}$$

连同 (16) 的诸方程一起构成对合组，所以代替 (18)，我们得到依赖于 A_ν 的方程组

$$p^{\nu}=f^{\nu}(\boldsymbol{r}; A_{m+1}, \cdots, A_{n}) \quad (\nu=1, \cdots, n). \quad (18')$$

其积分依赖于 A_ν． 由这些积分可以得到方程组 (16) 的一个全积分．

因此，实质上只要求出方程 (17)，即要找出两次连续可微函数 $F^{m+1}, \cdots, F^{n}$． 这可逐步做到． 其前提是假设函数 F^{μ} 两次连续可微． 首先，要找出这样的 $Z=F^{m+1}$，使得可积性条件

$$(F^1, Z)=0, \cdots, (F^m, Z)=0$$

对于 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}$ 恒满足． 根据 § 14.4(d)，这些方程构成关于 Z 的一个齐次线性微分方程组，而且按照 § 14.6(e)，它还是一个

完全组。为了得到这方程组的一个非平凡解[1]，可利用 §6 中的方法。如果求出一个这样的解 $Z = F^{m+1}$，则再解线性方程组

$$(F^\mu, Z) = 0 \quad (\mu = 1, \cdots, m+1),$$

等等。然而必须注意，最后要使行列式条件(19)满足。

例. 在 §14.6(c) 中已经知道方程组

$$p_1 p_2 - x_3 x_4 = 0,$$
$$p_3 p_4 - x_1 x_2 = 0,$$
$$x_1 p_1 + x_2 p_2 - x_3 p_3 - x_4 p_4 = 0$$

是完全组。从这方程组解出 p_1, p_2, p_3，根据 §14.6(d) 及 (a)，我们得到一个对合组，即

$$p_1 = \frac{x_2 x_3}{p_4}, \quad p_2 = \frac{x_4 p_4}{x_2}, \quad p_3 = \frac{x_1 x_2}{p_4}, \qquad (*)$$

以及由 (*) 用 $x_2 p_2$ 代替 $x_1 p_1$，用 $x_1 p_1$ 代替 $x_2 p_2$ 所得到的第二个对合组。因此，只要考察前述对合组(*)就够了。

现在我们来解线性微分方程组

$$\left(p_1 - \frac{x_2 x_3}{p_4}, Z\right) = 0,$$
$$\left(p_2 - \frac{x_4 p_4}{x_2}, Z\right) = 0,$$
$$\left(p_3 - \frac{x_1 x_2}{p_4}, Z\right) = 0.$$

它们具有下列形式

$$Z_{x_1} + \frac{x_2 x_3}{p_4^2} Z_{x_4} + \frac{x_3}{p_4} Z_{p_2} + \frac{x_2}{p_4} Z_{p_3} = 0,$$
$$Z_{x_2} - \frac{x_4}{x_2} Z_{x_4} - \frac{x_4 p_4}{x_2^2} Z_{p_2} + \frac{p_4}{x_2} Z_{p_4} = 0,$$
$$Z_{x_3} + \frac{x_1 x_2}{p_4^2} Z_{x_4} + \frac{x_2}{p_4} Z_{p_1} + \frac{x_1}{p_4} Z_{p_2} = 0.$$

$Z = \frac{p_4}{x_2} - A$ 显然是这个线性方程组的一个积分。将由此所产生的方

1) 只需要一个这样的解。

程 $Z=0$ 并到三个方程(*)中去，我们得到

$$p_1=\frac{x_3}{A},\ p_2=Ax_4,\ p_3=\frac{x_1}{A},\ p_4=Ax_2.$$

最后，由此求得全积分

$$z=Ax_1x_3+\frac{1}{A}x_2x_4+B.$$

同样地，用 x_2 代替 x_1，用 x_1 代替 x_2 可得到另一个全积分。

14.8. 勒让德变换的应用.

(a) 有时自变量和导数在适当编号下能这样分成两组:

$x_1,\cdots,x_{k-1},p_1,\cdots,p_{k-1}$ 与 $x_k,\cdots,x_n,p_k,\cdots,p_n$，使得方程组(16)的左端 F^ν 对 $p_1,\cdots,p_{k-1}$ 的依赖性比对 $x_1,\cdots,x_{k-1}$ 的依赖性要简单；相反地，F^ν 对 $x_k,\cdots,x_n$ 的依赖性比对 $p_k,\cdots,p_n$ 的要简单。在这样情况下，最好采用 § 13.5 的勒让德变换. 应用这变换之后，方程组(16)变为

$$F^\nu(X_1,\cdots,X_{k-1},P_k,\cdots,P_n,-P_1,\cdots,\\ -P_{k-1},X_k,\cdots,X_n)=0.$$

这些方程现在依赖于导数 P_μ 的方式比依赖于 X_μ 的简单些，这有利于求解.

(b) 用 § 14.7 中的雅可比方法求解时，我们须假设行列式(19)不为零. 可能有这样情况，当用方程组(17)来补充(16)使它成为 n 个方程的对合组时，然而并不满足每一个假设. 但若

$$\frac{\partial(F^1,\cdots,F^m)}{\partial(p_1,\cdots,p_m)}\neq 0,$$

则方程组(16)和(17)有时利用勒让德变换(参看 § 13.5)可化为使条件(19)成立的那样的方程组[1].

这就是说，如果对适当选取的 $k>m$，使不等式

1) 参看 Forsyth, Diff. Equations V, p. 127—133. Goursat, Équations du premier ordre, p. 281—285.

$$\frac{\partial(F^1,\cdots,F^n)}{\partial(p_1,\cdots,p_{k-1},x_k,\cdots,x_n)}\neq 0$$

成立，则方程组（16）和（17）经勒让德变换后变为对合组

$$\Phi^1(X,P)=0,\cdots,\Phi^n(X,P)=0,$$

对这方程组，现在有

$$\frac{\partial(\Phi^1,\cdots,\Phi^n)}{\partial(P_1,\cdots,P_n)}\neq 0.$$

用这变换时，应注意：由于§13.5中所述的假设，可能失去一些积分.

(c) **例.**

$$y^2p^3+xp+3yq=0. \tag{*}$$

这个微分方程可看作为方程组（16）当 $m=1$, $n=2$ 时的情形. 由§14.7，可求得和第一个一起彼此对合的第二个方程. 从所给方程(*)的特征组可求得首次积分(试与§12.8比较)

$$yp^3=\text{常数},\quad \frac{x}{yp^2}-y=\text{常数}. \tag{**}$$

根据§12.8，这两个方程中的每一个都和所给方程一起构成对合组.

如果取所得关系式(**)中的第一个，则得方程组

$$p=\frac{A}{\sqrt[3]{y}},\quad q=-\frac{A}{3}xy^{-4/3}-\frac{A^3}{3},$$

由此我们求得所给微分方程的一个全积分

$$z=Axy^{-1/3}-\frac{A^3}{3}y+B.$$

如果取所得关系式(**)中的第二个，则得方程组

$$\frac{x}{yp^2}-y=A,\quad y^2p^3+xp+3yq=0. \tag{***}$$

从这方程组解出 p, q 的式子是复杂的. 如果利用勒让德变换引入 p, q 作新自变量，即令

$$x=P,\ p=X,\ y=Y,\ q=-Q,\ z=XP-Z,$$

则从方程(***)我们得到

$$\frac{P}{X^2Y} - Y = A, \quad Y^2X^3 + XP - 3YQ = 0,$$

由此求得

$$P = X^2Y(Y + A), \quad Q = \frac{1}{3}X^3(2Y + A).$$

由第一个方程，我们有

$$Z = \frac{1}{3}X^3Y(Y + A) + \Omega(Y).$$

由第二个方程得 $\Omega'(Y) = 0$. 因此

$$Z = \frac{1}{3}X^3Y(Y + A) + B, \quad x = P = X^2Y(Y + A).$$

最后，作逆变换，我们求得

$$z = \frac{2}{3}x^{3/2}(y^2 + Ay)^{-1/2} + B.$$

14.9. 一般方程组的雅可比解法.

(a) 如果给定一般的方程组

$$F^\nu(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p}) = 0 \quad (\nu = 1, \cdots, m), \tag{12}$$

则它可用 § 12.3 中的变换化为不明显含有未知函数的方程组，然后经 § 14.5(c) 中类型的变换，再应用 § 14.7 中的方法. 在所得到的方程中不含有未知函数的优点，却带来一个缺点，这就是自变量的个数增加一个.

但是，我们也可把 § 14.7 中的雅可比方法直接转用到对合组 (12) 上. 先处理两个特殊情况 (b), (c).

(b) 假设方程组 (12) 是完全组，且 $m = n + 1$. 其次设方程组 (12) 为函数

$$z = \phi(\boldsymbol{r}), \quad p_\nu = \phi_\nu(\boldsymbol{r}) \ (\nu = 1, \cdots, n) \tag{20}$$

所满足，它们在区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ 内连续可微，并经这个代换后，在区域 $\mathfrak{G}$ 的任一子域内都有

$$\frac{\partial(F^1, \cdots, F^{n+1})}{\partial(z, p_1, \cdots, p_n)} \neq 0. \tag{21}$$

于是函数 ϕ 两次连续可微，且 $\phi_{x_\nu} = \psi_\nu(\nu = 1, \cdots, n)$. 因此，$\phi$ 是方程组(12)的一个积分.

当 $m \leqslant n+1$ 时，下述推广定理成立[1]：设方程组(12)是完全组，而且在区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}, p_m, \cdots, p_n)$ 内被连续可微的函数组

$$z = \phi(\boldsymbol{r}), \quad p_\mu = \phi_\mu(\boldsymbol{r}, p_m, \cdots, p_n) \qquad (\mu = 1, \cdots, m-1) \tag{22}$$

所满足，而且对于这些函数，行列式

$$\frac{\partial(F^1, \cdots, F^m)}{\partial(z, p_1, \cdots, p_{m-1})}$$

经表达式(22)的代换后，在区域 $\mathfrak{G}$ 的任一子域内不恒等于零，则 $z=\phi(\boldsymbol{r})$ 是方程组(12)的一个积分.

(c) 设方程组(12)是完全的，且 $m = n$；在区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}, z)$ 内存在且在其中连续可微的函数组

$$p_\nu = f_\nu(\boldsymbol{r}, z) \quad (\nu = 1, \cdots, n) \tag{23}$$

将方程组(12)变为恒等式. 其次设行列式

$$\frac{\partial(F^1, \cdots, F^n)}{\partial(p_1, \cdots, p_n)}$$

经表达式(23)的代换后，在区域 $\mathfrak{G}$ 的任一子域内不恒等于零，则由 § 14.6(d) 知，方程组(23)是一个对合组，而且具有 § 7.1 中的特殊形状.

(d) 雅可比解法[2]. 假设方程组(12)在区域 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p})$ 内是一个对合组，$m \leqslant n$；又设这方程组可以用方程

$$F^\nu(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p}) = 0 \quad (\nu = m+1, \cdots, n \text{ 或 } n+1) \tag{25}$$

这样来补充，使所得到的对合组(12)，(25)具有 n 或 $n+1$ 个方程，则该方程组可以利用(c)或(b)中的方法来求解(当然假设那里所述的其余条件都满足)，并且还可以用任意常数代替(25)诸式右端中的零，从而得到方程组(12)的一个全

1) 参看 C. Russyan, *Communications Kharkoff*, (4) 8 (1934), p. 57—60.
2) 参看 Forsyth, Diff. Equations V, p. 134—137, 146—154.

积分.

因此，在这方法中重要的是能求得方程组(25)的 $n-m$ 或 $n-m+1$ 个左端 F^{ν}. 这可以逐步做到，如同 § 14.7 中所叙述的那样. 只不过那里所出现的泊松括号，现在要用雅可比括号来代替.

第二部分　各种微分方程

引　言

常微分方程（参看 Kamke 的手册 I，第三部分）中所使用的相当严格的字典式编排原则，对本手册是无益的。我们将用下述原则来代替：在极易区别的各种类型中收集了同类的偏微分方程，类型的编排同前书的编排原则有轻微的联系（参看本手册卷首 viii—x 页的目录）。

作为线性方程的解答，我们将给出一组基底（主积分）；作为非线性方程的解答，通常是给出一个全积分．$\Omega(u_1,\cdots,u_r)$ 总是表示任意的连续可微函数．关于三个自变量的函数的线性和拟线性方程，始终用 x，y，z 表示自变量，用 $w(x,y,z)$ 表示未知函数．在其它情况下，用 x，y 或 x_1，$\cdots$，x_n 表示自变量，用 z 表示未知函数，而它的导数则用 p，q 或 p_1，$\cdots$，p_n 来表示．

[某些具体方程的解法的详细解释，可以在本手册第一部分和那里的俄译本编者注以及下列著作中找到：

Э. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939（译自 E. L. Ince, Ordinary Differential Equations, London, 1927）;

Н. М. Матвеев, Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, Л., 1955;

И. М. Гюнтер и Р. О. Кузьмин. Сборник задач по высшей математике, Т. II, М., 1959（1949 年第 12 版中译本：И. М.

肯杰尔，P. O. 库兹明，高等数学习题集，第二卷，郑醒华等译，高等教育出版社，1957 年新一版)；

A. Ф. Филиппов, Сборник задач по дифференциальным уравнениям, M., 1961.

在编制本手册的这一部分时，作者引用了下列著作：

A. R. Forsyth, W. Jacobsthal, Lehrbuch der Differential gleichungen, 2Aufl, Braunschweg, 1912; A. R. Forsyth, Theory of Differential Equations, Vol. 2-4, Cambridge, 1900—1902; E. Goursat, Leçons sur l'integration des équations aux dérivées, partielles du premier ordre, 2Edit., Paris, 1921; G. Julia, Exercices d'Analyse, t. 3-4, Paris, 1933, 1935; M. Morris, O. E. Brown, Differential Equations, New York, 1935; 以及许多相当老的而且很难找到的其它外国出版物. 有关这些著作和文章的引证，我们一般都删去了. ——俄译本编者注.][1]

1) 考虑到我国某些图书馆或单位中可能藏有这些出版物，所以为了查阅方便和深入研究，除去太陈旧的(譬如 19 世纪的)以外，我们又参照德文原版补上了一些. ——译者注

第一章　仅含一个偏导数的微分方程

1.1. $F(x, y, z, p) = 0.$

因为这个方程中只出现一个偏导数 z_x，所以它可看作为关于函数 $z(x, y)$ 的一个常微分方程，其中 y 起参数作用。

[为了求解，必须采用未解出导数的一阶常微分方程的解法，参看 Kamke 手册 I（即中译本：常微分方程手册），第一部分 § 3；第三部分第一章。——俄译本编者注]

1.2. $p = f(x).$

$$z = \int f(x)dx + \Omega(y).$$

1.3. $p = f(y).$

$$z = xf(y) + \Omega(y).$$

[**1.3a.** $p = f(x, y, z).$

求解问题归结为研究已解出导数的一阶常微分方程；y 应作为参数。如果方程

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y, z)$$

能以求积式或已知函数积出，则解能明显地写出。

参看 Kamke 手册 1，第一部分 § 4；第三部分第一章。——俄译本编者注]

[**1.3b.** $p = f(x, y)$

$$z = \int f(x, y)dx + \Omega(y).$$

积分时 y 看成参数。——俄译本编者注]

1.4. $xp = y$.

$$z = y\ln x + \Omega(y).$$

1.5. $(ax + by + cz + d)p = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$.

根据 1.1 题，解一个常微分方程．【参看 Kamke 手册 I，第一部分 § 4.6(c)．——俄译本编者注】

1.6. $(ax + by + cz)^n p = 1$; $a \neq 0$, $c \neq 0$, $n > -1$.

寻求当 $|x| + |y| \to 0$ 时也趋于零的一个积分．由该微分方程可得关于新未知函数 $u(x, y) = ax + by + cz(x, y)$ 的方程

$$\frac{u^n u_x}{au^n + c} = 1.$$

考虑到初始条件，从上式推得

$$\int_0^u \frac{u^n du}{au^n + c} = x + \Phi(y). \qquad (*)$$

其中 $\Phi(y)$ 是满足条件 $\Phi(0) = 0$ 的一个任意连续可微函数．对于充分小的 $|u|$，将被积函数展为级数，就给出下列积分

$$\frac{u^{n+1}}{(n+1)c} + \cdots = x + \Phi(y).$$

由此可见，从 (*) 式事实上得到所希望的形式的积分．Forsyth, Diff. Equations V, p. 158—160 (在该书中有更详细的讨论)．

第二章　两个自变量的线性与拟线性微分方程

1—12. $f(x,y)p+g(x,y)q=0$

2.1. $ap+bq=0.$

解法参看第一部分 § 2.4(a). 也可以作变换

$z(x,y)=\zeta(\xi,\eta)$, $\xi=ax+by$, $\eta=bx-ay$;

于是得到方程 $\zeta_\xi=0$. 因此

$$\zeta=\Omega(\eta) \quad 即 \quad z=\Omega(bx-ay).$$

2.2. $axp+byq=0.$

$z=|x|^b|y|^{-a}$ 是一主积分;参看第一部分 § 2.4(b), § 2.5(b).

2.3. $ayp+bxq=0.$

$z=bx^2-ay^2$ 是一主积分;参看第一部分 § 2.4(a), § 2.5(a).

2.4. $(a_1x+b_1y+c_1)p+(a_2x+b_2y+c_2)q=0.$

特征方程是

$$x'(t)=a_1x+b_1y+c_1,\ y'(t)=a_2x+b_2y+c_2.$$

由此,对于任何常数 λ, μ, 得

$$\lambda x'+\mu y'=(a_1\lambda+a_2\mu)x+(b_1\lambda+b_2\mu)y+c_1\lambda+c_2\mu. \tag{1}$$

可以这样确定数 λ, μ, 使得对于一适当的数 s, 它们是方程组

$$a_1\lambda + a_2\mu = s\lambda, \quad b_1\lambda + b_2\mu = s\mu \tag{2}$$

的一组非零解. 于是由 (1) 得

$$\lambda x' + \mu y' = s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu. \tag{3}$$

这里的数 s 要这样选取,使得它是方程

$$\begin{vmatrix} a_1 - s & a_2 \\ b_1 & b_2 - s \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

的一个根.

(A) $(a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 \neq 0$. 于是方程 (4) 有两个不同的根 s_1, s_2. 它们之中的每一个根 s_ν 对应于方程组 (2) 的一组非零解 λ_ν, μ_ν. 又设

(Aa) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, 则 $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$. 并由方程 (3) 得

$$\frac{\lambda_1 x' + \mu_1 y'}{s_1(\lambda_1 x + \mu_1 y) + c_1\lambda_1 + c_2\mu_1} = \frac{\lambda_2 x' + \mu_2 y'}{s_2(\lambda_2 x + \mu_2 y) + c_1\lambda_2 + c_2\mu_2}.$$

这个方程可以求积, 并可得到沿每一特征线取常数值的函数;于是可得积分

$$z = \frac{|s_1(\lambda_1 x + \mu_1 y) + \lambda_1 c_1 + \mu_1 c_2|^{s_2}}{|s_2(\lambda_2 x + \mu_2 y) + \lambda_2 c_1 + \mu_2 c_2|^{s_1}}.$$

(Ab) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, 则方程 (4) 有根 $s_1 = a_1 + b_2$ 及 $s_2 = 0$, 而方程 (3) 具有如下形状

$$\begin{cases} \lambda_1 x' + \mu_1 y' = s_1(\lambda_1 x + \mu_1 y) + \lambda_1 c_1 + \mu_1 c_2, \\ \lambda_2 x' + \mu_2 y' = \lambda_2 c_1 + \mu_2 c_2. \end{cases} \tag{5}$$

如果 $\lambda_2 c_1 + \mu_2 c_2 = 0$, 则后一方程给出积分

$$z = \lambda_2 x + \mu_2 y.$$

如果 $\lambda_2 c_1 + \mu_2 c_2 \neq 0$, 则 (5) 的两个方程可除以各自的右端. 于是新的右端都等于 1, 并组成一个可积方

程．由此可得积分

$$z = s_1 \frac{\lambda_2 x + \mu_2 y}{\lambda_2 c_1 + \mu_2 c_2} - \ln |s_1(\lambda_1 x + \mu_1 y) + \lambda_1 c_1 + \mu_1 c_2|.$$

(B) $(a_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_1 = 0$． 方程 (4) 具有等根 $s = \frac{1}{2}(a_1 + b_2)$；对于 s 的这个值，我们有含对应的不同时等于零的数 λ，μ 的方程 (2) 和 (3)．

(Ba) $s \neq 0$．此时可以这样选取线性函数 $\alpha x+\beta y+\gamma$，使得对于每一特征底线都有

$$\frac{d}{dt} \frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu} = 1. \tag{6}$$

由于 (3)，这时有

$$(\lambda x' + \mu y')(\alpha x' + \beta y') - s(\alpha x + \beta y + \gamma)(\lambda x' + \mu y')$$
$$= (\lambda x' + \mu y')[s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu];$$

如果

$$\alpha x'+\beta y'-s(\alpha x+\beta y + \gamma) = s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu,$$

则前一关系式成立，把特征方程代人上式后，得

$$\alpha(a_1 x + b_1 y + c_1) + \beta(a_2 x + b_2 y + c_2)-s(\alpha x+\beta y+\gamma)$$
$$= s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu$$

比较上式两端的系数，则得 α，β，γ 的方程

$$\begin{cases}(a_1 - s)\alpha + a_2\beta = \lambda s, \\ b_1\alpha + (b_2 - s)\beta = \mu s, \\ c_1\alpha + c_2\beta - s\gamma = c_1\lambda + c_2\mu.\end{cases} \tag{7}$$

由于 $s \neq 0$，所以，如果前两个方程对于 α，β 可解，由最后一个方程就得出 γ．(7)的前两个方程的左端系数行列式等于零，左端诸系数之间存在着和右端诸系数之

间同样的依赖性，即[1]

$$(a_1 - s)\mu = b_1\lambda, \quad a_2\mu = (b_2 - s)\lambda. \tag{8}$$

由于 $2s = a_1 + b_2$，所以，这两个方程刚好就是方程 (2)。因为数 α, β, γ 可以这样选取，使它们不为零并且满足方程 (7)，于是由 (3) 及 (6) 式，我们有

$$\frac{\lambda x' + \mu y'}{s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu} = \frac{d}{dt}\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu}.$$

因此

$$z = \ln|s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu| - s\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu}$$

是一积分。

(Bb) $s = 0$. 在这情况下，方程的主积分是容易求得的不超过二次的多项式。

2.5. $x^2p + y^2q = 0$.

$$z = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}.$$

2.6. $(x^2 - y^2)p + 2xyq = 0$.

方程的特征底线是圆周 $x^2 + y^2 = cy$，主积分是

$$z = \frac{x^2 + y^2}{y}.$$

---

1) 对这里的阐述，略加补充说明如下：在条件 (4) 下，为了使方程组 (7) 前两个方程对 α, β 有解，其充要条件是两个方程的相对应项的系数必须成比例，即必须有

$$(a_1 - s):b_1 = a_2:(b_2 - s) = \lambda s:\mu s,$$

故有

$$(a_1 - s):b_1 = \lambda:\mu, \quad a_2:(b_2 - s) = \lambda:\mu.$$

从上式推得这里的方程 (8)。

又因重根 $s = \dfrac{a_1 + b_2}{2}$，将它代入方程组 (8) 与方程组 (2) 后，再利用重根条件

$$(a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 = 0,$$

就可以证明方程组 (8) 就是方程组 (2)。——校者注

2.7. $(A_0x - A_1)p + (A_0y - A_2)q = 0$.

其中 $A_\nu = a_\nu + b_\nu x + c_\nu y$，参看后面的 4.9 题.

2.8. $ax^m p + by^n q = 0$.

主积分是

$$z = b(n-1)x^{1-m} - a(m-1)y^{1-n},$$

当 $m \neq 1, n \neq 1$ 时；

$$z = b\ln|x| + \frac{a}{n-1}y^{1-n},\quad \text{当 } m = 1, n \neq 1 \text{ 时}$$

以及对应于 $m \neq 1, n = 1$ 情况的一个积分.

2.9. $p\cos y + q\sin x = 0$.

$$z = \cos x + \sin y.$$

2.10. $\sqrt{f(x)}\,p + \sqrt{f(y)}\,q = 0,\quad f(t) = \sum_{\nu=0}^{4} a_\nu t^\nu$.

这方程是下面的题 2.11 及 4.12 的特例（也可参看 Kamke 手册 I（中译本 354 页）的 1.71 题）.

$$z = \left[\frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}}{x-y}\right]^2 - a_4(x+y)^2 - a_3(x+y).$$

变换 $z(x,y) = \zeta(\xi,\eta)$，$\xi = \frac{1}{x}$，$\eta = \frac{1}{y}$ 将这个方程变为以 ξ, η, ζ 代替 x, y, z，且 $f(t) = a_0t^4 + \cdots + a_4$ 的同一方程. 因此

$$z = \left[\frac{x^2\sqrt{f(y)} + y^2\sqrt{f(x)}}{xy(x-y)}\right]^2 - a_0\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 - a_1\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

也是原方程的一个积分，它当然依赖于前一积分.

2.11. $f(x)p + g(y)q = 0$.

对于 $f \neq 0, g \neq 0$，有

$$z = \int \frac{dx}{f(x)} - \int \frac{dy}{g(y)}.$$

2.12. $f_y p - f_x q = 0$, $f = f(x, y)$.

这个方程表明，要找那些连续可微函数 $z(x, y)$，它们能使下列行列式等于零：

$$\frac{\partial(z, f)}{\partial(x, y)} = 0.$$

这些函数 $z(x, y)$ 就是所给方程的解。根据第一部分 §2.7，这是一些与 f 函数相关的函数，即所有形如 $\Omega(f(x, y))$ 的函数。

13—19. $f(x, y)p + g(x, y)q = h(x, y)$

2.13. $ap + bq = c$；柱面微分方程(参看第一部分 §5.3(a))。

2.14. $ap + bq = x^2 - y^2$.

如果按照第一部分 §5.4 中的方法，构造出对应的三项齐次方程，则

$$bx - ay, \quad 3abz - bx^3 + ay^3$$

是一组积分基底。由此，我们得到这已给的非齐次方程的积分

$$z = \frac{1}{3ab}(bx^3 - ay^3) + \Omega(bx - ay).$$

如果按照第一部分 §4.2(b) 中的方法，构造出对应的二项齐次方程，则 $bx - ay$ 是它的一个主积分。现在若采用变换

$$z(x, y) = \zeta(\bar{x}, \bar{y}), \ \bar{x} = bx - ay, \ \bar{y} = y,$$

则得常微分方程

$$b\zeta_{\bar{y}} = \frac{(\bar{x} + a\bar{y})^2}{b^2} - \bar{y}^2.$$

由此

$$b\zeta = \frac{(\bar{x} + a\bar{y})^3}{3ab^2} - \frac{1}{3}\bar{y}^3 + \Omega(\bar{x}),$$

从而又得到前面已求得的积分.

2.15. $ap + bq = f(x)$.

积分是下列的函数

$$z = \frac{1}{a}\int f(x)dx + \Omega(bx - ay)$$

当 $x = y$ 时等于 0 的积分是:

$$z = \frac{1}{a}\int_{\frac{bx-ay}{b-a}}^{x} f(t)\,dt.$$

K. Herzfeld, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.*, 4 (1924), p. 407.

2.16. $xp + yq = ax$.

$$z = ax + \Omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

2.17. $xp + yq = a\sqrt{x^2 + y^2}$;方程 2.18 的特例.

特征线是直线 $y = Ax$, $z = a\sqrt{x^2 + y^2} + B$.

利用这些直线中的任一条围绕 z 轴作螺旋运动可得积分曲面

$$z = a\sqrt{x^2 + y^2} + \Omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

2.18. $xp + yq = \sqrt{x^2 + y^2}f'(\sqrt{x^2 + y^2})$.

特征线是

$$y = Ax, \quad z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) + B.$$

积分曲面有方程

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) + \Omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

2.19. $yp - xq = ye^{x^2+y^2}$.

利用变换 $z(x, y) = \zeta(\xi, \eta)$, $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = y$. 由所给微分方程可得常微分方程

$$\zeta_\eta = \pm\frac{\eta}{\sqrt{\xi - \eta^2}}e^{\xi}.$$

因此

$$z = xe^{x^2+y^2} + \Omega(x^2 + y^2).$$

20—31. $f(x, y)p+g(x, y)q = h_1(x, y)z+h_0(x, y)$

2.20. $p + q = az$.

如果按照第一部分 §4.2(a) 中的方法构造对应的三项方程，则 ze^{-ax}, ze^{-ay} 是一组积分基底. 因此，所给非齐次方程的解可由方程

$$\Omega(ze^{-ax}, ze^{-ay}) = 0$$

解出 z 而得到. 对于具体函数：

例如 $\Omega(u, v) = \dfrac{A}{u} + \dfrac{B}{v} - 1$, 则有 $z = Ae^{ax} + Be^{ay}$;

而 $\Omega(u, v) = Au + Bv - 1$, 则有 $\dfrac{1}{z} = Ae^{-ax} + Be^{-ay}$.

如果采用第一部分 § 4.2(b) 中的方法，则借助于对应的齐次方程的解 $x - y$ 及变换

$$z(x, y) = \zeta(\bar{x}, \bar{y}),\quad \bar{x} = x - y,\quad \bar{y} = y,$$

我们得到常微分方程

$$\zeta_{\bar{y}} = a\zeta \quad 即 \quad \zeta = \Omega(\bar{x})e^{a\bar{y}}.$$

因此

$$z = \Omega(x - y)e^{ay}.$$

2.21. $p - yq = -z$; 方程 2.23 的特例.

通过曲线

$$2(y+z)\operatorname{ch}x = z^2 + y^2 + 1,$$
$$2(y+z)\operatorname{sh}x = z^2 + y^2 - 1,$$

或同样的，通过曲线

$$yz = 0, \quad y + z = e^x$$

的积分曲面是 $z = 0$.

Morris-Brown, Diff. Equations, p.275(7), 392.

2.22. $2p - yq = -z$; 方程 2.23 的特例.

如果按照第一部分 §4.2(a) 中的方法构造对应的三项齐次方程，则 $e^x y^2$, $e^x z^2$ 是它的积分基底. 所给方程的解可从方程

$$\Omega(e^x y^2, e^x z^2) = 0 \tag{1}$$

解出 z 得到.

如果寻求通过曲线

$$y = xz, \quad x = \ln y \tag{2}$$

的积分曲面，则特别地，方程 (1) 应为曲线 (2) 所满足，即应有

$$\Omega(y^3, y^3 \ln^{-2} y) = 0. \tag{3}$$

而

$$\Omega(u, v) = -3\sqrt{\frac{u}{v}} + \ln u$$

是满足条件 (3) 的情况. 把 $u = e^x y^2$, $v = e^x z^2$ 代入上式后，解出 z 即得

$$z = \frac{3y}{x + 2\ln y}.$$

Morris-Brown, Diff. Equations, p.275(4), 392.

2.23. $ap + yq = bz$.

$$z = |y|^b \Omega(|y|^a e^{-x}).$$

2.24. $x(p-q) = yz$.

如果按照第一部分 § 4.2(a) 的方法，构造对应的三项齐次方程，则

$$x+y, \quad z\exp[x-(x+y)\ln x]$$

是一积分基底. 因此所给微分方程的积分就是

$$z = \Omega(x+y)\exp[(x+y)\ln x - x].$$

2.25. $xp+yq = az$; 两个自变量的 a 阶齐次函数微分方程（试与 4.8 题比较）

对于 $a=2$，函数 $z = Ax^2+Bxy+Cy^2$ 是积分，然而还有仅是一次连续可微的函数的积分，例如函数

$$z = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2}, & \text{当 } x^2+y^2 \neq 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x=y=0 \text{ 时.} \end{cases}$$

2.26. $xp+yq = z-x^2-y^2+1$.

如果按照第一部分 §4.2(a) 中的方法构造对应的三项齐次方程，则

$$\frac{y}{x}, \ \frac{z+x^2+y^2+1}{x} \quad \left(\text{或 } \frac{z+x^2+y^2+1}{y}\right)$$

是一组积分基底. 因此，所给方程有积分

$$z = -x^2-y^2-1+x\Omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

参看 Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p.388, 例 2(2), p.823.

2.27. $(x-a)p+(y-b)q = z-c$; 顶点在 (a, b, c) 的圆锥面微分方程. 参看第一部分 § 5.3(b).

2.28. $x(y+1)p+(y^2-x)q = yz$; 参看 4.9 题中的例 2.

2.29. $x(2y-x+1)p-y(2x-y+1)q = (y-x)z$.

如果利用第一部分 § 4.2(a) 中的方法构造对应的三

项齐次方程，则

$$\frac{z}{x+y-1}, \quad \frac{(x+y-1)^3}{xy}$$

是它的一组积分基底，由此我们得到所给方程的积分

$$z=(x+y-1)\Omega\left(\frac{(x+y-1)^3}{xy}\right).$$

2.30. $xy^2p+x^2yq=(x^2+y^2)z.$

其特征方程是

$$x'(t)=xy^2,\ y'(t)=x^2y,\ z'(t)=(x^2+y^2)z.$$

如果按照第一部分 §4.2(a) 中的方法构造对应的三项齐次方程，则

$$x^2-y^2, \quad \frac{z}{xy}$$

是它的一组积分基底．由此得积分曲面

$$z=xy\Omega(x^2-y^2)$$

这方程以特征线为渐近线的积分曲面是

$$z=Cxy(x^2-y^2).$$

［这里的渐近线是微分几何的曲面论中的渐近线，它同曲面的切平面有高阶接触度．——校者注］

Julia, Exercices d'Analyse, p.41—43.

2.31. $x(x^2+3y^2)p+y(y^2+3x^2)q=2z(x^2+y^2).$

如果模仿第一部分 §4.2(a) 中的方法构作对应的三项齐次方程，则

$$\frac{xy}{z^2}, \quad \frac{x^2-y^2}{z}$$

是它的一组积分基底．所给微分方程的积分由方程

$$\Omega\left(\frac{xy}{z^2}, \frac{x^2-y^2}{z}\right)=0$$

解出 z 而得．

为求出通过圆周 $x^2+y^2=r^2$, $z=a$ 的积分曲面，函数 $\Omega(u,v)$ 要这样确定，使得对于

$$u=\frac{xy}{z^2},\quad v=\frac{x^2-y^2}{z},\quad x^2+y^2=r^2,\quad z=a$$

有 $\Omega(u,v)=0$. 由此求得

$$\Omega(u,v)=4a^4u^2+a^2v^2-r^4.$$

因此，所求积分可从下列方程

$$4a^4x^2y^2+a^2(x^2-y^2)^2z^2=r^4z^4$$

解出 z 而得到.

32—43. $f(x,y)p+g(x,y)q=h(x,y,z)$

2.32. $\boldsymbol{p+q=e^z\sin(x+y)}$.

如果按照第一部分 § 5.4 中的方法构造对应的齐次方程，则

$$x-y,\quad 2e^{-z}-\cos(x+y)$$

是它的一组积分基底. 所给方程的积分可利用解方程

$$2e^{-z}=\cos(x+y)+\Omega(x-y)$$

而得到. 通过曲线 $x+y=0$, $e^z\cos^2x=1$ 的积分曲面具有如下形状

$$e^{-z}=\cos x\cos y.$$

Nouvelles Annales Math., (6) 2 (1927) 28, p. 119.

2.33. $\boldsymbol{p+2q=1+\sqrt{y-x-z}}$.

如果按照第一部分 § 5.4 中的方法构造对应的齐次方程，则

$$\phi_1(x,y,z)=2x-y,$$
$$\phi_2(x,y,z)=x+2\sqrt{y-x-z}$$

是它的一组积分基底.

如果对所给微分方程需要求出带有初值 $\chi_1(x, x)=0$ 的积分 $z=\chi_1(x, y)$，则仿照第一部分 § 5.4 的例题可以这样确定函数 $\Omega(u, v)$，使得对于 $u=\phi_1(x, x, 0)=x$，$v=\phi_2(x, x, 0)=x$，有

$$\Omega(u, v)=0.$$

$\Omega=v-u$ 就是一个这样的函数. 为了得到所求积分，我们对于 z 解方程

$$\phi_2-\phi_1=y-x+2\sqrt{y-x-z}=0,$$

得

$$z=\chi_1(x, y)=y-x-\left(\frac{y-x}{2}\right)^2.$$

而这个函数对于区域 $x \geqslant y$ 实际上是满足所提条件的一个积分，虽然我们容易看出当计算开始时甚至需要 $x>y$.

将要找这个方程的满足初始条件 $\chi(0, y)=y$ 的一个积分 $\chi_2(x, y)$. 从 $\phi_2=0$ 中解出 z 可以求得这样的积分. 我们求得

$$\chi_2(x, y)=y-x-\frac{x^2}{4}, \ (x \leqslant 0)$$

然而 $\chi(x, y)=y-x$ 也是这偏微分方程的一个积分，它也满足前述的两种情况下的初始条件. 于是在两种情况下都有满足所提条件的两种不同的积分. 但是，这与第一部分 §5.4—§5.6 的一般定理并不矛盾，因为那里需要初值和函数 $z=\chi(x, y)$ 本身属于 x, y, z 空间的那样区域，在其中所给微分方程的系数具有一阶连续偏导数. 而此处这些条件不满足

参看 Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p.378.

2.34. $p+kq=(ax+by+cz)^n$.

代换

$$u(x, y)=ax+by+cz(x, y)$$

使方程变为微分方程 2.35

$$u_x+ku_y=cu^n+a+b.$$

2.35. $ap+bq=z^n+c.$

如果按照第一部分 § 5.4 中的方法构造对应的齐次微分方程，则

$$bx-ay,\quad a\int\frac{dz}{z^n+c}-x$$

是它的一组积分基底. 如果 $z=\varphi(x)$ 是方程

$$a\int_0^z\frac{dz}{z^n+c}=x \tag{1}$$

的一个连续可微的解，则

$$z=\varphi(x+\Omega(bx-ay)) \tag{2}$$

就是所给微分方程的一个解. 如果 $m=-n$ 是一个正偶数，而且假设 $c>0$，则由 (1) 推得 x 是 z 的一个函数，其导数异于零，且当 $z=0$ 时取零值. 于是 $\varphi(0)=0$.

因此，适当选取函数 Ω，可由公式 (2) 得到任意多个积分，它们当 $|x|+|y|\to 0$ 时趋于零.

2.36. $xp+yq=z-a\sqrt{z^2-x^2-y^2},\ x^2+y^2<z^2.$

由特征方程

$$x'(t)=x,\quad y'(t)=y,$$
$$z'(t)=z-a\sqrt{z^2-x^2-y^2}$$

推得 $\dfrac{y}{x}=C_1$. 将这个关系式代入第三个方程，于是当 $x>0$ 时，我们有

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z'(t)}{x'(t)}=\frac{z}{x}-a\sqrt{\left(\frac{z}{x}\right)^2-1-C_1^2}.$$

由此得到关于函数 $u(x)=\frac{z}{x}$ 的可分离变量的常微分方程

$$xu'+a\sqrt{u^2-C_1^2-1}=0.$$

积分得

$$x^a(u+\sqrt{u^2-C_1^2-1})=C_2.$$

若将 C_1 和 u 的表达式代入此式，则可得按第一部分 §5.4 所述的与所给方程对应的齐次方程的积分基底

$$\phi_1=\frac{y}{x},\quad \phi_2=x^{a-1}(z+\sqrt{z^2-x^2-y^2}).$$

曲线 $\phi_1=C_1$，$\phi_2=C_2$ 是已给微分方程的特征线。当 $a=1$ 时，这是一些抛物线．它们与圆锥面 $z^2=x^2+y^2$ 互相接触(即两者既相交又相切)．该圆锥面也是这偏微分方程的一个积分曲面，但不再属于使系数在其中有连续偏导数的区域 $z^2>x^2+y^2$.

Goursat, Équations du premier ordre, p. 63

2.37. $x^2(p-q)=(z-x-y)^2$.

如果按第一部分 § 5.4 中的方法构造对应的齐次微分方程，则

$$x+y,\quad \frac{x(z-x-y)}{z-2x-y}$$

是它的一组积分基底．因而所给微分方程的积分是函数

$$z=\frac{(2x+y)\Omega(x+y)-x(x+y)}{\Omega(x+y)-x};$$

此外，$z=2x+y$ 也是所给方程的一个积分．

2.38. $(x^2+1)p+(y^2+1)q=-y(y^2+1)z^2$.

如果按第一部分 § 5.4 中的方法构造对应的齐次方程，则

$$\frac{x-y}{1+xy}, \qquad \frac{2}{z}-y^2$$

是它的一组积分基底．因此，所给微分方程的积分可由下列关系式得到

$$\frac{2}{z}=y^2+\Omega\left(\frac{x-y}{1+xy}\right).$$

2.39. $ax^2p+by^2q=cz^2, \quad abc\neq 0.$

如果按照第一部分 § 5.4 中的方法构成对应的齐次微分方程，则

$$\frac{1}{ax}-\frac{1}{by}, \quad \frac{1}{ax}-\frac{1}{cz}$$

是它的积分基底．因此所给微分方程的积分是

$$z=\frac{1}{c}\left[\frac{1}{ax}+\Omega\left(\frac{1}{by}-\frac{1}{cz}\right)\right]^{-1}.$$

2.40. $(A_1-A_0x)p+(A_2-A_0y)q=f(z),$

$A_\nu=a_\nu+b_\nu x+c_\nu y.$

在第一部分 § 5.4 意义下与所给方程对应的齐次微分方程，其解参看方程 4.11．

2.41. $xy^2p+2y^3q=2(yz-x^2)^2.$

在第一部分 § 5.4 意义下，对应的齐次方程是方程 3.47，它有积分基底

$$\frac{x^2}{y}, \quad y\exp\frac{y}{yz-x^2}.$$

因此，由方程

$$\Omega\left(\frac{x^2}{y},\ y\exp\frac{y}{yz-x^2}\right)=0$$

在 § 5.4 中所述的假定下解出 z，则得所给微分方程的解．此外，函数 $z=\frac{x^2}{y}$ 也是一个解．

Forsyth, Diff. Equations V, p.69.

2.42. $(xy+a^2)(xp-yq)=a(x^2+y^2)z^2$.

对于在第一部分§5.4意义下的对应的齐次方程，函数

$$xy, \qquad \frac{1}{z}+\frac{a(x^2-y^2)}{2(xy+a^2)}$$

是积分基底. 因此，所给微分方程的积分可由关系式

$$\frac{1}{z}=\frac{a(y^2-x^2)}{2(xy+a^2)}+\Omega(xy)$$

得到. 通过圆周 $x^2+y^2=r^2$, $z=c$ 的积分曲面是

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{c}+\frac{a(y^2-x^2)}{2(xy+a^2)}\pm\frac{a}{2(xy+a^2)}\sqrt{r^4-4x^2y^2}.$$

2.43. $fp+gq=Az^2+Bz+C$，其中 f, g, A, B, C 都是 x, y 的已知函数.

如果 z_1, z_2, z_3, z_4 是四个积分，则它们的交比

$$w=\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}:\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4}$$

是方程

$$fw_x+gw_y=0$$

的一个解.

Julia, Exercices d'Analyse IV, p.71.

44—59. $f(x,y,z)p+g(x,y,z)q=h(x,y,z)$，函数 f, g 关于 z 是线性的

2.44. $p+zq=0$.

对于在第一部分§5.4意义下的对应的齐次方程，函数 $xz-y$, z 组成一组积分基底. 因此，所给微分方程的解由关系式

$$\Omega(xz-y, z)=0$$

得到.

例如，若 $\Omega(u, v)=av-u-b$ 或 $\Omega(u, v)=v^2+u$，则积分分别是

$$z=\frac{y-b}{x-a}, \quad z=-\frac{x}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4y}。$$

2.45. $zp+q=a$.

这个方程的特征线是抛物线

$$z-ay=A, \quad z^2-2ax=B.$$

由关系式

$$\Omega(z^2-2ax, z-ay)=0$$

解出 z 即得积分.

例如，取线性函数 $\Omega(u, v)$[1]，由此可得作为全积分的抛物柱面

$$(z+A)^2=2a(x+Ay)+B.$$

2.46. $zp+aq=x$.

对于在第一部分 §5.4 意义下对应的齐次方程，函数

$$(x+z)e^{-\frac{y}{a}}, \ (x-z)e^{\frac{y}{a}}$$

组成一组积分基底. 所给方程的积分由下列关系式得到

$$\Omega((x+z)e^{-\frac{y}{a}}, (x-z)e^{\frac{y}{a}})=0.$$

Forsyth, Diff. Equations V, p.162.

2.47. $(1-z)p+(1+z)q=0$.

特征线是直线

$$(A+1)x+(A-1)y=B, \quad z=A.$$

利用第一部分 §5.4 中的方法，由关系式

$$\Omega(z, x(z+1)+y(z-1))=0$$

---

1) 可取 $\Omega=u+2Av+C$，而令 $B=A^2-C$.——校者注

解出 z 即得所求积分. 因此,例如函数

$$z=\frac{y-x+c}{y+x}$$

就是一个积分.

2.48. $(z+e^x)p+(z+e^y)q=z^2-e^{x+y}$.

作变换

$$z(x,y)=\zeta(\xi,\eta),\ \xi=e^x,\ \eta=e^y,$$

则得方程 2.56:

$$\xi(\zeta+\xi)\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}+\eta(\zeta+\eta)\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}=\zeta^2-\xi\eta.$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p.426, 1(2), p.835.

2.49. $(bz-cy+A)p+(cx-az+B)q=ay-bx+C$;

这是螺旋面和旋转面微分方程. 参看第一部分§5.3(c), (d).

2.50. $[b(x+y)-c(x+z)]p+[c(y+z)-a(y+x)]q=a(z+x)-b(z+y)$.

对于在第一部分§5.4意义下的对应的齐次微分方程,函数

$$ax+by+cz \quad 和 \quad xy+yz+zx$$

组成一组积分基底. 因此,从方程

$$\Omega(ax+by+cz,\quad xy+yz+zx)=0,$$

解出 z, 可得所给微分方程的解.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p.426, 1(1), p.835.

2.51. $p-4xzq=2x$.

对于在第一部分§5.4意义下的对应的齐次微分方程,函数

$$y+z^2,\quad x^2-z$$

组成一组积分基底. 因此,从方程

$$\Omega(y + z^2, x^2 - z) = 0$$

解出 z，可得所给方程的解。

现在来求通过双曲线

$$y + z = 5, \quad x^2 - z^2 = 9$$

的积分曲面。由于双曲线应该满足上述方程，所以我们得到关系式

$$\Omega(z^2 - z + 5, \quad z^2 - z + 9) = 0.$$

这个方程为 $\Omega(u, v) = v - u - 4$ 所满足。所求的解由方程

$$x^2 - z^2 - y - z = 4$$

确定。

Morris Brown, Diff. Equations, p. 275(6), p. 392.

2.52. $xzp + yzq = xy$.

对于在第一部分 § 5.4 意义下的对应的齐次方程，函数

$$\frac{y}{x}, \quad z^2 - xy$$

组成一组积分基底。因此，所给方程的积分可由关系式

$$z^2 = xy + \Omega\left(\frac{y}{x}\right)$$

得到。

2.53. $xzp + yzq = -x^2 - y^2$.

对于在第一部分 § 5.4 意义下的对应的齐次方程，函数

$$\frac{y}{x}, \quad x^2 + y^2 + z^2$$

组成一组积分基底。因此，从方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = \Omega\left(\frac{y}{x}\right)$$

解得 z，可得所给方程的积分.

2.54. $xzp + yzq = x^2 + y^2 + z^2$.

对于在第一部分 § 5.4 意义下的对应的齐次方程，函数

$$\phi_1(x, y, z) = \frac{y}{x}, \quad \phi_2(x, y, z) = \frac{1}{x^2}[z^2 - 2(x^2 + y^2)\ln x]$$

组成一组积分基底.

为得到所给方程的带有初值

$$x = 1 \text{ 时}, \qquad z = y^2$$

的积分，现在这样来确定函数 $\Omega(u, v)$（参看第一部分 § 5.4 的例子），使得对于

$$u = \phi_1(1, y, y^2) = y, \quad v = \phi_2(1, y, y^2) = y^4,$$

有

$$\Omega(u, v) = 0.$$

这样，使得 $\Omega(u, v) = u^4 - v$. 因此所求积分就是

$$z^2x^2 = y^4 + 2x^2(x^2 + y^2)\ln x.$$

Kamke, DGlen, p.340.

2.55. $2xzp + 2yzq = z^2 - x^2 - y^2$.

对于在第一部分 § 5.4 意义下的对应齐次微分方程，函数

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x}, \qquad \frac{y}{x}$$

组成一组积分基底. 因此，所给微分方程的解由下列关系式得到.

$$x^2 + y^2 + z^2 = x\Omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

Julia, Exercices d'Analyse IV, p.85.

2.56. $x(z + x)p + y(z + y)q = z^2 - xy$.

对于在第一部分 § 5.4 意义下的对应齐次方程，函数

$$\frac{z}{x}+\ln|y|, \quad \frac{z}{y}+\ln|x|$$

组成一组积分基底。因此，从关系式

$$\Omega\left(\frac{z}{x}+\ln|y|, \frac{z}{y}+\ln|x|\right)=0$$

解出 z，可得所给方程的积分。

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 835, 1(2).

2.57. $(A_0x-A_1)p+(A_0y-A_2)q=A_0z-A_3$;

$A_\nu=a_\nu+b_\nu x+c_\nu y+d_\nu z$; 参看 4.10 题。

2.58. $x^2zp+ye^xq=0$.

对于在第一部分 § 5.4 意义下的对应的齐次方程，函数

$$z, \quad z\ln y-\int\frac{e^x}{x^2}dx$$

组成一组积分基底。因此，所给方程的积分可从方程

$$\Omega\left(z, z\ln y-\int\frac{e^x}{x^2}dx\right)=0$$

解出 z 而得到。

2.59. $x^2(y-z)p+y^2(z-x)q=z^2(x-y)$.

对于在第一部分 § 5.4 意义下的对应的齐次方程，函数

$$xyz, \quad xy+yz+zx$$

组成一组积分基底。因此，所给方程的积分可从方程

$$\Omega(xyz, xy+yz+zx)=0$$

解出 z 而得到。

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p.426, 1(3), p.836.

60—65. $f(x,y,z)p+g(x,y,z)q=h(x,y,z)$，函数 f,g 关于 z 不高于二次

2.60. $(2y^2+z^2)xp-(z+3x^3)yq=(3x^3z-2y^2)z$.

由特征方程容易得知，表达式 x^3+y^2-z 沿每一特征线取常数值. 因此

$$z=x^3+y^2-C$$

是所给方程的一个积分.

通过抛物线 $x=a$，$z=y^2$ 的积分曲面可以令 $C=a^3$，代入上式而得到

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 275(5), 392.

2.61. $(x^2-y^2-z^2)p+2xyq=2xz$.

对于在第一部分 §5.4 意义下的对应的齐次方程，函数

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{y},\qquad \frac{z}{y}$$

组成一组积分基底. 因此，从关系式

$$\Omega\left(\frac{z}{y},\quad \frac{x^2+y^2+z^2}{y}\right)=0$$

解出 z，即可得所给方程的积分.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p.842.

2.62. $(3x^2+y^2+z^2)yp-2x(x^2+z^2)q=2xyz$.

在第一部分 §5.4 意义下的对应齐次方程的一组积分基底 u，v，在 3.44 题中给出. 因此所给方程的积分可从方程 $\Omega(u,v)=0$ 解出 z 而得到.

2.63. $(xy-yz-z^2)p+(xz-xy-y^2)q=xy+yz+zx+y^2-x^2$.

对于在第一部分 § 5.4 意义下的对应的齐次方程，函数

$$x^2+y^2+2yz, \quad x^2+z^2+2xy$$

组成一组积分基底. 因此，所给方程的积分可从方程

$$\Omega(x^2+y^2+2yz, x^2+z^2+2xy)=0$$

解出 z 而得到.

2.64. $x^2z^2p+y^2z^2q=x^2y^2$.

从关系式

$$z^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^3-3\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right)+6\ln\left|\frac{y}{x}\right|$$
$$=\Omega\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right),$$

解出 z，即得所给方程的积分. 这个关系式的左端和右端函数 Ω 中的变量组成在第一部分 § 5.4 意义下的对应齐次方程的一组积分基底.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p.824.

2.65. $xy(xy+2z^2)p+yz(yz-x^2)q=z^2(yz-x^2)$.

从关系式

$$\Omega\left(\frac{z}{y}, \frac{z^2}{x}+\frac{xz}{y}+y\right)=0$$

解出 z，即得所求积分. 函数 Ω 的两个变量组成在第一部分 § 5.4 意义下的对应齐次方程的一组积分基底.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p.521, 75.

66—71. 其它拟线性方程

2.66. $(1+\sqrt{z-x-y})p+q=2$.

从

$$\Omega(2y - z,\quad y + 2\sqrt{z - x - y}) = 0$$

解出 z，即得所求积分．对于在第一部分 § 5.4 意义下的对应的齐次方程，函数 Ω 的两个变量组成它的一组积分基底．函数 $z = x + y$ 也是一个解．(参看题 2.33．)

2.67. $(x^2 + z^2 - 1)p + (xy + \sqrt{1-z^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1})q = 0$.

诸系数在区域

$$x^2 + y^2 + z^2 > 1,\qquad z^2 < 1 \tag{1}$$

内有定义且连续可微．对于在第一部分 § 5.4 意义下的对应的齐次方程，函数

$$\phi_1(x, y, z) = z,$$

$$\phi_2(x, y, z) = \frac{xy + \sqrt{1 - z^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}}{x^2 + z^2 - 1}$$

组成它的一组积分基底．

如果需要求出通过圆周 $x=0$，$y^2 + z^2 = 1$ 的积分曲面，则应用第一部分 § 5.4 中的例子所示范的方法（在理论上）是不可靠的，因为这个圆周属于区域 (1) 的边界．如果仍然按照这个方法进行，则由于曲面 $\phi_2 = 0$ 满足初值条件，从 $\phi_2 = 0$ 可得所求积分

$$z^2 = 1 - y^2 \quad (xy < 0).$$

$z^2 = 1 - x^2 - y^2$ 也是问题的一个解．

2.68. $p + (az^n + b)q = c$.

从

$$\Omega\left(z - cx,\ a\frac{z^{n+1}}{n+1} + bz - cy\right) = 0$$

解出 z，即得所求积分．对于在第一部分 § 5.4 意义下的对应的齐次方程，Ω 的两个变量组成它的一组积分基底．

对于 $c = b$ 时的解法讨论，参看 S. Finsterwalder, *Zeitschrift* *für Gletscherkunde*. 2 (1908), p.81—103.

2.69. $(p+kq)(ax+by+cz)^n=1$，参看方程 2.34.

2.70. $[yf(z)-x]p+yq=0$.

从

$$\Omega(z,\ 2xy-y^2f(z))=0,$$

解出 z，即得所求积分。对于在第一部分 § 5.4 意义下的对应的齐次微分方程，函数 Ω 的两个变量组成它的一组积分基底.

2.71. $f_y(x,y,z)p-f_x(x,y,z)q=0$，$|f_x|+|f_y|>0$.

从方程

$$\Omega(z,\ f(x,\ y,\ z))=0 \tag{*}$$

解出 z，即得所求积分．对于在 § 5.4 意义下的对应的齐次微分方程，函数 Ω 的两个变量组成它的一组积分基底．

还可以提出另一求解途径：根据第一部分 § 2.7，所给方程表明，待求积分 $z(x,\ y)$ 的函数 $z(x,\ y)$ 和 $f(x,y,z(x,\ y))$ 应该是函数相关的，因为

$$\frac{\partial(z,\ f)}{\partial(x,\ y)}=z_x(f_y+f_zz_y)-z_y(f_x+f_zz_x)$$

$$=f_yz_x-f_xz_y.$$

于是又重新得到前面已求出的积分的关系式(*)。

第三章 三个自变量的线性与拟线性微分方程

1—19. $f(x,y,z)w_x+g(x,y,z)w_y+h(x,y,z)w_z=0$，函数 f,g,h 的次数不超过 1

1—6. 单项系数

3.1. $aw_x+bw_y+cw_z=0.$

$bx-ay$，$cx-az$ 是一组积分基底。

3.2. $aw_x+byw_y+czw_z=0.$

$y^a e^{-bx}$，$z^a e^{-cx}$ 是一组积分基底。

3.3. $w_x+bzw_y+cyw_z=0.$

cy^2-bz^2 和下列函数之一组成一组积分基底：

$(cy+Az)e^{-Ax}$，若 $bc>0$，$A=\sqrt{bc}$；

$cy\cos Ax+Az\sin Ax$，若 $bc<0$，$A=\sqrt{-bc}$.

3.4. $xw_x+byw_y+czw_z=0.$

一组积分基底是 $\frac{x^b}{y}$，$\frac{x^c}{z}$. 特别地，如果 $b=c=1$，则它们是零阶齐次函数. 此时，$\frac{y}{x}$，$\frac{z}{x}$ 是一组积分基底。

3.5. $xw_x+bzw_y+cyw_z=0.$

cy^2-bz^2 和下列函数之一组成一组积分基底：

$$\frac{cy+\alpha z}{x^{\alpha}}, \qquad \text{若 } bc>0,\ \alpha=\sqrt{bc};$$

$$x^{\alpha}\exp\left(-\operatorname{arctg}\frac{\alpha z}{cy}\right), \text{ 若 } bc<0,\ \alpha=\sqrt{-bc}.$$

3.6. $zw_x - xw_y + yw_z = 0$.（可参看 3.19 题）

特征方程为

$$x'(t)=z,\quad y'(t)=-x,\quad z'(t)=y.$$

特征行列式

$$\begin{vmatrix} -s & 0 & 1 \\ -1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & -s \end{vmatrix} = -s^3-1$$

有不同的根：-1, $\frac{1}{2}\pm\frac{i}{2}\sqrt{3}$。因此，原偏微分方程可用和方程 3.19 同样的方法求解。

7—11. 二项系数

3.7. $yw_x + xw_y - (x+y)w_z = 0$

积分基底：$x+y+z$, x^2-y^2.

3.8. $xw_x + (y+z)(w_y - w_z) = 0$.

积分基底：$y+z$, $x\exp\left(-\frac{y}{y+z}\right)$.

3.9. $xw_x + (y+z)w_y + (y-z)w_z = 0$; 方程 3.19 的特例.

特征方程为

$$x'(t)=x,\ y'(t)=y+z,\ z'(t)=y-z.$$

特征行列式

$$\begin{vmatrix} 1-s & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & 1 \\ 0 & 1 & -1-s \end{vmatrix} = (1-s)(s^2-2)$$

有三个不同的根．应用解方程 3.19 的方法，可得积分基底：

$$[y+(\sqrt{2}-1)z]x^{-\sqrt{2}},\ [y-(\sqrt{2}+1)z]x^{\sqrt{2}}.$$

特别地，函数 $w=y^2-2yz-z^2$ 是一积分．

3.10. $(y-2z)w_x+(3z-x)w_y+(2x-3y)w_z=0.$

积分基底：$3x+2y+z,\ x^2+y^2+z^2.$

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 274 (1f), 391.

3.11. $bc(y-z)w_x+ca(z-x)w_y+ab(x-y)w_z=0.$

积分基底：$ax+by+cz,\ ax^2+by^2+cz^2.$

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 280 (2), 393.

12—19. 三项系数

3.12. $xw_x+(ax+by)w_y+(cx+dy+fz)w_z=0$，方程 3.19 的特例．

特征方程为

$$x'(t)=x,\quad y'(t)=ax+by,\quad z'(t)=cx+dy+fz.$$

特征行列式

$$\begin{vmatrix} 1-s & 0 & 0 \\ a & b-s & 0 \\ c & d & f-s \end{vmatrix} = (1-s)(b-s)(f-s)$$

有根 $1, b, f$．其它运算参看 3.19 题．

3.13. $czw_x+(ax+by)w_y+(ax+by+cz)w_z=0$; 3.19 题的特例．

特征方程为

$$x'(t) = cz,\ y'(t) = ax + by,\ z'(t) = ax + by + cz.$$

由它们推得

$$x' + y' - z' = 0.$$

因此 $\phi_1 = x + y - z$ 是这偏微分方程的一个积分． 为了应用第一部分 § 3.5(c)中所叙述的方法，我们假设 $z - x - y = C$． 于是由前面所写的特征方程可得下列方程

$$x' = c(x + y + C),\quad y' = ax + by.$$

它是偏微分方程

$$c(x + y + C)\frac{\partial w}{\partial x} + (ax + by)\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

的特征方程． 按照 2.4 题的方法，可以求它的解． 然后再将 $C = z - x - y$ 代到这解中，则又得到一个不依赖于 ϕ_1 的积分．

如果 $\rho^2 = 4ac + (b - c)^2 \neq 0$，则我们求得，例如，若 $a \neq b$，有

$$\phi_2 = \frac{2acz + (b - c - \rho)(ax + by)}{2acz + (b - c + \rho)(ax + by)}$$

$$\times [acz^2 + (b - c)(ax + by)z - (ax + by)^2]^{\frac{\rho}{b+c}};$$

若 $a = b$，则得

$$\phi_2 = [a(x + y) + cz]\exp\left[\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)\frac{cy - ax}{z - x - y}\right].$$

参看 Morris-Brown, Diff. Equations, p. 274 (1e), 391.

3.14. $2(x - y)w_x - (x - y - z)w_y - (x - y - 3z)w_z = 0$; 方程 3.19 的特例．

特征方程为

$$x'(t) = 2x - 2y,\quad y'(t) = -x + y + z,$$
$$z'(t) = -x + y + 3z.$$

特征行列式

$$\begin{vmatrix} 2-s & -2 & 0 \\ -1 & 1-s & 1 \\ -1 & 1 & 3-s \end{vmatrix} = -s(s-2)(s-4)$$

有三个不同的根．其余运算参看 3.19 题．

3.15. $2(y-z)w_x-(4x-3y-z)w_y+(12x-3y-9z)w_z=0$; 3.19 题的特例．

积分基底：

$$3x-3y-z,\ \frac{(8x-5y-3z)^2}{2x-y-z}.$$

Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 33—36.

3.16. $(6x-4y+2z)w_x-(4x-10y+6z)w_y+(2x-6y+11z)w_z=0$; 3.19 题的特例．

特征方程是

$$\begin{cases} x'(t)=6x-4y+2z, \\ y'(t)=-4x+10y-6z, \\ z'(t)=2x-6y+11z. \end{cases}$$

特征行列式

$$\begin{vmatrix} 6-s & -4 & 2 \\ -4 & 10-s & -6 \\ 2 & -6 & 11-s \end{vmatrix} = -(s-3)(s-6)(s-18)$$

有不同的根．因此对这些根 s 的每一个可以这样确定数 α, β, γ，使得从前面所写的特征方程能推得

$$\frac{d}{dt}(\alpha x+\beta y+\gamma z)=s(\alpha x+\beta y+\gamma z).$$

这样，我们便得到常微分方程组

$$\frac{2x'+2y'+z'}{3(2x+2y+z)}=\frac{-2x'+y'+2z'}{6(-2x+y+2z)}$$
$$=\frac{x'-2y'+2z'}{18(x-2y+2z)}.$$

积分这些方程，可得一组积分基底

$$\frac{(2x+2y+z)^2}{2x-y-2z},\quad \frac{(2x-y-2z)^3}{x-2y+2z}.$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 376, 例3(8), p. 818.

3.17. $(ax+y-z)w_x-(x+ay-z)w_y+(a-1)(y-x)w_z=0$; 方程 3.19 的特例.

特征方程是

$$\begin{cases}x'(t)=ax+y-z,\\ y'(t)=-x-ay+z,\\ z'(t)=(1-a)x+(a-1)y.\end{cases}$$

特征行列式为

$$\begin{vmatrix}a-s & 1 & -1\\ -1 & -a-s & 1\\ 1-a & a-1 & -s\end{vmatrix}=-s[s^2-(a+3)(a-1)].$$

其余运算参看 3.19 题.

另外，表达式 $x+y+z$ 显然是一个积分. 因此，也可应用本书第一部分 §3.5 中的简化方法.

3.18. $(Ax+cy+bz)w_x+(cx+By+az)w_y+(bx+ay+Cz)w_z=0$; 3.19 题的特例.

特征方程是

$$\begin{cases}x'(t)=Ax+cy+bz,\\ y'(t)=cx+By+az,\\ z'(t)=bx+ay+Cz.\end{cases}$$

特征行列式为

$$\begin{vmatrix}A-s & c & b\\ c & B-s & a\\ b & a & C-s\end{vmatrix}=(A-s)(B-s)(C-s)$$

$$-[a^2(A-s)+b^2(B-s)+c^2(C-s)]+2abc.$$

其余运算参看 3.19 题.

3.19. $(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)w_x+(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)w_y+(a_3x+b_3y+c_3z+d_3)w_z=0.$

试与 2.4 题比较. 特征方程为

$$\begin{cases} x'(t)=a_1x+b_1y+c_1z+d_1, \\ y'(t)=a_2x+b_2y+c_2z+d_2, \\ z'(t)=a_3x+b_3y+c_3z+d_3. \end{cases}$$

根据 Kamke 手册 I, 第一部分 § 13, 这个方程组的解依赖于特征行列式

$$\begin{vmatrix} a_1-s & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2-s & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3-s \end{vmatrix}$$

的根[1]. 如果 s 是它的一个根, 则可求得不同时为零的数 α, β, γ, 对于这些数, 有

$$\alpha a_1+\beta a_2+\gamma a_3=\alpha s,$$
$$\alpha b_1+\beta b_2+\gamma b_3=\beta s,$$
$$\alpha c_1+\beta c_2+\gamma c_3=\gamma s.$$

于是由特征方程推得

$$\alpha x'+\beta y'+\gamma z'=s(\alpha x+\beta y+\gamma z)+D, \tag{1}$$

其中

$$D=\alpha d_1+\beta d_2+\gamma d_3.$$

如果 $s=D=0$, 则由此可得偏微分方程的一个积分 $\alpha x+\beta y+cz$.

如果特征行列式有两个彼此不同且异于零的根 s_1 和 s_2, 则得两个 (1) 型的方程, 由它们可求得关系式

$$\frac{\alpha_1x'+\beta_1y'+\gamma_1z'}{s_1(\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z)+D_1}=\frac{\alpha_2x'+\beta_2y'+\gamma_2z'}{s_2(\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z)+D_2},$$

1) [参看 Петровский, p. 170—174; Степанов, p. 283—297; Kamke, p. 90.——俄译本编者注]

从上式得到

$$\frac{\left(\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z+\frac{D_1}{s_1}\right)^{s_2}}{\left(\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z+\frac{D_2}{s_2}\right)^{s_1}}=\text{常数}.$$

于是这个等式的左端就是偏微分方程的一个积分.

如果特征行列式有三个不同的根，则可用这种方式求得一组积分基底. 如果有重根，则这时可应用 2.4 题中的方法，或者求特征方程组的解，且从解式中消去 t，从而求得这个偏微分方程的积分.

20—41. $f(x, y, z)w_x+g(x, y, z)w_y+h(x, y, z)w_z=0$，函数 f, g, h 的次数不超过 2

20—27. 单项系数

3.20. $aw_x+xzw_y-xyw_z=0$.

利用本书第一部分 § 3.5(b) 中所引入的方法，可求得一组积分基底

$$y^2+z^2,\quad y\sin\frac{x^2}{2a}+z\cos\frac{x^2}{2a}.$$

第二个积分也可以用 $x^2+2a\operatorname{arctg}\frac{z}{y}$ 代替.

参看 Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 27.

3.21. $x^2w_x-xyw_y-y^2w_z=0$.

积分基底: xy, $3xyz-y^3$.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 376, 例 3(1), p.817.

3.22. $ax^2w_x+by^2w_y+cz^2w_z=0$

函数

$$\frac{1}{by}-\frac{1}{ax},\ \frac{1}{ax}-\frac{1}{cz},\ \frac{1}{cz}-\frac{1}{by}$$

中的任意两个都组成一组积分基底.

3.23. $x^2w_x + z^2w_y + 2xzw_z = 0$.

积分基底: $\frac{x^2}{z}$, $y-\frac{z^2}{3x}$.

Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 40.

3.24. $xyw_x + yzw_y + y^2w_z = 0$.

积分基底: y^2-z^2, $\frac{y+z}{x}$.

3.25. $xzw_x + yzw_y + xyw_z = 0$.

积分基底: $\frac{y}{x}$, z^2-xy.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 376, 例 3(2), p. 817.

3.26. $y^2w_x - xyw_y + 3xzw_z = 0$.

积分基底: x^2+y^2, y^3z.

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 275 (1k), 392.

3.27. $yzw_x - 2xzw_y - 2xyw_z = 0$.

积分基底: $2x^2+y^2$, $2x^2+z^2$.

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 274 (1b), 391.

28—38. 二项系数

3.28. $xw_x + yw_y + (x^2+y^2)w_z = 0$.

积分基底: x^2+y^2-2z, $\frac{y}{x}$.

Kamke, DGlen, 1930, p.330, 430.

3.29. $3zw_x - (2x-1)yw_y + (2x-1)zw_z = 0$.

积分基底: yz, x^2-x-3z.

3.30. $xyw_x + x^2w_y - (2x + z)yw_z = 0$.

积分基底：$x^2 - y^2$，　$x^2 + xz$.

3.31. $xyw_x + y(y - a)w_y + z(y - a)w_z = 0$.

积分基底：$\dfrac{y}{z}$，$\dfrac{y - a}{x}$.

Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 37.

3.32. $xzw_x + 2xyw_y - (2x + z)zw_z = 0$.

积分基底：$x(x + z)$，　xyz.

3.33. $xzw_x - yzw_y + (y^2 - x)w_z = 0$；参看第一部分§3.3 (b).

3.34. $2xzw_x - 2yzw_y + (3y^2 - x)w_z = 0$.

积分基底：xy，　$2x + 3y^2 + 2z^2$.

3.35. $x(y - z)w_x + y(z - x)w_y + z(x - y)w_z = 0$.

积分基底：$x + y + z$，　xyz.

3.36. $(xz + y^2)w_x + (yz - 2x^2)w_y - (2xy + z^2)w_z = 0$.

积分基底：$2xz - y^2$，　$x^2 + yz$.

3.37. $bc(x^2 - a^2)w_x + c(bxy + acz)w_y + b(cxz + aby)w_z = 0$.

积分基底是

$$\frac{by + cz}{x - a}, \qquad \frac{by - cz}{x + a}.$$

方程的特征线是由

$by + cz = C_1(x - a)$，　$by - cz = C_2(x + a)$

所给出的 x，y，z 空间内的双参数直线族.

参看 Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 522, 78 和 81.

3.38. $a(y^2 + z^2)w_x + x(bz - ay)w_y - x(by + az)w_z = 0$.

积分基底：$x^2 + y^2 + z^2$，　$2a\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + b\ln(y^2 + z^2)$.

Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 29.

39—41. 三项系数

3.39. $xzw_x + yzw_y + (ax^2 + ay^2 + bz^2)w_z = 0$.

由特征方程推得关系式

$$xy' - x'y = 0 \text{ 及 } \frac{xx' + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{zz'}{ax^2 + ay^2 + bz^2}.$$

如果作变换

$$x^2 + y^2 = u, \quad z^2 = v,$$

则第二个方程容易积出. 于是得原偏微分方程的积分基底

$$\frac{y}{x}, \qquad \frac{a(x^2 + y^2) + (b-1)z^2}{(x^2 + y^2)^b}.$$

第二个函数中的分母也可用 x^{2b} 来代替.

Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 30.

3.40. $2xzw_x + 2yzw_y + (z^2 - x^2 - y^2)w_z = 0$; 3.39 题的特例.

积分基底: $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{x}$, $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{y}$.

Julia, Exercices d'Analyse, p. 31; Serret-Scheffers, Differential- und Integralrechnung III, p. 547.

3.41. $(A_0x - A_1)w_x + (A_0y - A_2)w_y + (A_0z - A_3)w_z = 0$, $A_\nu = a_\nu + b_\nu x + c_\nu y + d_\nu z$; 参看 4.9 题.

42—59. $f(x, y, z)w_x + g(x, y, z)w_y + h(x, y, z)w_z = 0$, 其它情况

3.42. $y^2zw_x + xz^2w_y - xy^2w_z = 0$.

积分基底: $x^2 + z^2$, $y^3 + z^3$.

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 275 (1j), 392.

3.43. $x(by^2-cz^2)w_x+y(cz^2-ax^2)w_y+z(ax^2-by^2)w_z=0$.

积分基底：$ax^2+by^2+cz^2$，xyz.

3.44. $(3x^2+y^2+z^2)yw_x-2(x^2+z^2)xw_y+2xyzw_z=0$.

积分基底：$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{z}$，$\dfrac{2x^2+y^2}{z^2}$.

参看 Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 84.

3.45. $[(x^2+y^2-1)x+y]w_x+[(x^2+y^2-1)y-x]w_y+2zw_z=0$.

这个例子有着原则上的意义．如果这个方程乘以-1，则可得在形式上有微小简化的方程．此时，特征方程取如下形状

$$\begin{cases}x'(t)=(1-x^2-y^2)x-y,\\ y'(t)=(1-x^2-y^2)y+x,\\ z'(t)=-2z.\end{cases}\tag{1}$$

这个方程组的驻点是 $x=y=z=0$．除去这个平凡解之外，方程组 (1) 还有其它解，例如它有这样的解

$$x=y=0,\quad z=Ce^{-2t}.$$

它们就是 z 轴的正(或负)半轴．如果不考虑这两个解，则对于每一个解将成立不等式 $x^2+y^2\neq 0$．于是我们可引进极坐标，即对 (1) 的前两个方程的每一个解选取这样的连续可微函数 $r(t)>0$，$\theta(t)$，使得

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.$$

于是由 (1) 我们得到新的方程组

$$r'=(1-r^2)r,\ \theta'=1,\ z'=-2z.\tag{2}$$

因而可以取 $\theta=t$．所以，方程组 (2) 的所有的解都具有下列形状：

$$1-\frac{1}{r^2}=C_1e^{-2t},\quad z=C_2e^{-2t}.$$

当 $C_1=C_2=0$ 时，这是一个圆周：$r=1, z=0$。若 $C_1\neq 0$，则每一条积分曲线(即特征底线)当 $t\to\infty$ 时象螺旋线那样渐近地趋于圆周。具有 $C_1<0, C_2>0$ 的那些曲线当 $t\to-\infty$ 时无限接近 z 的正半轴。

如果从整个 x，y，z 空间中将 z 的负半轴连同原点一起去掉，则原偏微分方程没有奇点，即它的三个系数到处都不同时变为零，但是这个微分方程除去平凡积分 $z=$ 常数外，连一个存在于整个刚才所述的单连通域内的积分都没有。

事实上，每一积分沿每一特征线取常数值。如果一个积分在圆周 $r=1$ 上取值 C，则由于螺旋线或螺线任意接近这个圆周，所以它在所有这些曲线上也应有同一值 C。因而在 z 轴的正半轴上也同样。就是说，这个积分在所考察的区域内的所有特征线上都具有值 C，因而在这整个区域内亦如此。

这个例子(其作者是 E. Digel) 发表在 E. Kamke, *Math. Zeitschrift*, **42** (1937), p. 288 上。T Ważewski 构造了另一类似的例子，见 *Mathematica*, **9**(1935), p. 179.

3.46. $2xzw_x+y(z^2+1)w_y+xy(z+1)^2w_z=0$.

设 $w(x,y,z)=\zeta(x,s,z)$，其中 $s=xy$. 于是关于 ζ 的微分方程有解 $z-s$. 第一部分 § 3.5 中的简化方法现在给出原方程的积分基底：

$$z-xy,$$

$$\frac{z-xy}{(z-xy+1)^2}\ln\frac{xy}{z+1}-\frac{1}{(z+1)(z-xy+1)}-\frac{1}{2}\ln x.$$

3.47. $xy^2w_x + 2y^3w_y + 2(yz - x^2)^2w_z = 0.$

$\dfrac{x^2}{y}$ 是一个特解。如果将第一部分 § 3.5 中的简化方法应用到这个方程，且作变换

$$w(x, y, z) = v(x, \eta, z), \quad \eta = \frac{x^2}{y},$$

则它变为方程

$$xv_x + 2(z - \eta)^2 v_z = 0.$$

它有解 $x^2\exp\dfrac{1}{z-\eta}$。因此原方程具有积分基底

$$\frac{x^2}{y}, \qquad y\exp\frac{y}{zy - x^2}.$$

Forsyth, Diff. Equations V, p. 69.

3.48. $x(y^3 - 2x^3)w_x + y(2y^3 - x^3)w_y + 9z(x^3 - y^3)w_z = 0.$

积分基底：x^3y^3z，$\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2}$。

Forsyth-Jacobsthal, DGlcn, p.376, 例 3(6), p. 818.

3.49. $x^2(xy - z^2)w_x + xy(xy - z^2)w_y + yz(yz + 2x^2)w_z = 0.$

$$积分基底：\frac{y}{x}, \quad \frac{x^2y + y^2z + z^2x}{yz}.$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlcn, p. 521, 75.

3.50. $x(z^4 - y^4)w_x + y(x^4 - 2z^4)w_y + z(2y^4 - x^4)w_z = 0.$

积分基底：$x^4 + y^4 + z^4$，x^2yz。

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 275 (11), 392.

3.51. $x(y^n - z^n)w_x + y(z^n - x^n)w_y + z(x^n - y^n)w_z = 0,$

积分基底：xyz，$x^n + y^n + z^n$。

3.52. $xw_x + yw_y + a\sqrt{x^2 + y^2}\,w_z = 0.$

积分基底：$\dfrac{y}{x}$，$a\sqrt{x^2+y^2}-z$。

Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 26 开始。

3.53. $xw_x+yw_y+(z-a\sqrt{x^2+y^2+z^2})w_z=0$.

特征方程

$$x'(t)=x,\quad y'(t)=y,\quad z'(t)=z-a\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

的前两个给出 $\dfrac{y}{x}=C_1$，即 $\phi_1=\dfrac{y}{x}$ 是所给偏微分方程的一个积分．如果将 $y=C_1x$ 代入第三个特征方程，则对于 $x>0$，我们得到

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z'(t)}{x'(t)}=\frac{z}{x}-a\sqrt{C_1^2+1+\left(\frac{z}{x}\right)^2}.$$

由此，设 $z=xu(x)$，便得可分离变量的常微分方程

$$xu'+a\sqrt{u^2+C_1^2+1}=0.$$

由这方程得

$$x^a(u+\sqrt{u^2+C_1^2+1})=C_2$$

将 C_1 和 u 的表达式代入上式，则得积分

$$\phi_2=x^{a-1}(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

ϕ_1 和 ϕ_2 组成一组积分基底．

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 376, 例 3(4), p. 817.

3.54. $z\sqrt{y^2+z^2}\,w_x+az\sqrt{x^2+z^2}\,w_y-(x\sqrt{y^2+z^2}$
$+ay\sqrt{x^2+z^2})w_z=0$.

由特征方程求得

$$xx'+yy'+zz'=0.$$

因而

$$\phi_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

是一个积分．现在如果作变换 $x^2+y^2+z^2=r^2$（参看

第一部分 § 3.5(c))，并从特征方程中消去 z，则得方程

$$\frac{ax'}{\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{y'}{\sqrt{r^2-y^2}}.$$

由此得到积分

$$\psi_2=a\arcsin\frac{x}{r}-\arcsin\frac{y}{r},$$

其中 $r^2=x^2+y^2+z^2$. 所求得的这两个积分 ψ_1 和 ψ_2 组成一组积分基底.

Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 94.

3.55. $w_x-yw_y\mathrm{ctg}x+zw_z\mathrm{ctg}x=0.$

积分基底: yz, $y\sin x$.

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 275 (1a), 392.

3.56. $w_x\mathrm{tg}x+w_y\mathrm{tg}y+w_z\mathrm{tg}z=0.$

积分基底: $\dfrac{\sin x}{\sin y}$, $\dfrac{\sin y}{\sin z}$.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 376, 例 3(7), p. 818.

3.57. $w_x\mathrm{ctg}x+w_y\mathrm{ctg}y+w_z\mathrm{ctg}z=0.$

积分基底: $\dfrac{\cos x}{\cos y}$, $\dfrac{\cos y}{\cos z}$.

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 275 (1i), 391. 这个方程显然可以化为 3.56 题中的方程.

3.58. $xw_x+yw_y+[z+f(x,y)]w_z=0.$

由特征方程

$$x'(t)=x,\quad y'(t)=y,\quad z'(t)=z+f(x,y)$$

首先得到 $\dfrac{y}{x}=C_1$, 因此 $\psi_1(x,y,z)=\dfrac{y}{x}$ 是一个积分.

于是从第三个方程我们有

$$z'(t)=z+f(x,C_1x).$$

将第一个方程与这个方程结合起来，我们得到线性微分

方程

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z'(t)}{x'(t)} = \frac{z}{x} + \frac{f(x, C_1x)}{x}.$$

由此得

$$z = C_2x + x\int_a^x \frac{f(t, C_1t)}{t^2}dt,$$

因而若再代入 C_1 的表达式，则有

$$z = C_2x + x\int_a^x f\left(t, \frac{y}{x}t\right)t^{-2}dt. \qquad (*)$$

从上式对 C_2 解出，所得到的函数 ψ_2 就是原方程的第二个积分。

例如，若

$$f(x, y) = \frac{cxy}{\sqrt{(c^2+x^2)(c^2+y^2)}},$$

则当 $a = 0$ 时，前式(＊)有如下形状

$$z = C_2x + cy\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(c^2+t^2)\left(c^2+\frac{y^2t^2}{x^2}\right)}},$$

作变量代换 $t = x\xi$ 后，有

$$z = C_2x + cxy\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(c^2+x^2\xi^2)(c^2+y^2\xi^2)}}.$$

这是一个含有常数积分限的椭圆积分.

Serret-Scheffers, Differential-und Integralrechnung III, p. 547.

3.59. $(y-z)\sqrt{f(x)}w_x + (z-x)\sqrt{f(y)}w_y$

$$+ (x-y)\sqrt{f(z)}w_z = 0, f(t) = \sum_{\nu=0}^{6} a_\nu t^\nu.$$

函数

$$w = \left[\frac{(y-z)\sqrt{f(x)} + (z-x)\sqrt{f(y)} + (x-y)\sqrt{f(z)}}{(y-z)(z-x)(x-y)}\right]^2$$

$$- a_6(x+y+z)^2 - a_5(x+y+z)$$

是一个积分．变换

$$w(x,y,z)=W(\xi,\eta,\zeta),\quad \xi=\frac{1}{x},$$

$$\eta=\frac{1}{y},\ \zeta=\frac{1}{z}$$

将原方程化为以 ξ,η,ζ,W 代替 x,y,z,w 的同一个方程，且 $f^*(t)=a_0t^6+\cdots+a_6$．因此，函数

$$w=\left\{\left[y^2z^2(y-z)\sqrt{f(x)}+z^2x^2(z-x)\sqrt{f(y)}\right.\right.$$
$$\left.\left.+x^2y^2(x-y)\sqrt{f(z)}\right]\Big/\left[xyz(y-z)(z-x)(x-y)\right]\right\}^2$$
$$-a_0\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2-a_1\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

也是原微分方程(一般地说，不依赖于前一个)的一个积分．在这公式中，$f(t)$又具有原先的意义．参看 4.12 题．

60—64. 一般线性与拟线性微分方程

3.60. $\boldsymbol{2xw_x+3yw_y+6zw_z=6.}$

$\ln|z|$是一特解． 把对应的齐次微分方程的一切解加到这个解上去，则得所有的解．函数

$$\frac{x^3}{z},\quad \frac{y^2}{z}$$

是齐次方程的一组积分基底．

3.61. $\boldsymbol{x^2w_x+y^2w_y+z^2w_z=xyz.}$

对应的齐次方程的一组积分基底是

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y},\qquad \frac{1}{x}-\frac{1}{z}.$$

根据第一部分 § 4.2，原偏微分方程的一个特解具有如下形状

$$w = xyz\left[\frac{x\ln x}{(x-y)(x-z)} + \frac{y\ln y}{(y-x)(y-z)} + \frac{z\ln z}{(z-x)(z-y)}\right].$$

将齐次方程的一切解与这个特解加在一起，即得原方程的所有的解。

3.62. $xw_x + yw_y + zw_z = aw + f(x, y, z).$

函数 $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$ 组成对应的齐次方程的一组积分基底。因此，若(试与第一部分 § 4.2 比较)作变换

$$w(x, y, z) = W(\xi, \eta, \zeta), \quad \xi = x, \quad \eta = \frac{y}{x}, \quad \zeta = \frac{z}{x},$$

则从原方程可得常微分方程

$$W_\xi - \frac{a}{\xi}W = \frac{1}{\xi}f(\xi, \xi\eta, \xi\zeta).$$

因此

$$W = \xi^a\left[\Omega(\eta, \zeta) + \int \xi^{-a-1} f(\xi, \xi\eta, \xi\zeta)d\xi\right]$$

Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 63.

3.63. $(y + z + w)w_x + (z + x + w)w_y + (x + y + w) \times w_z = 0.$

在第一部分 § 5.4 意义下对应的关于 $W = W(x, y, z, w)$ 的齐次微分方程具有如下形状

$$(y + z + w)W_x + (z + x + w)W_y + (x + y + w)W_z = 0. \tag{1}$$

它的特征方程

$$x'(t) = y + z + w, \quad y'(t) = z + x + w,$$

$$z'(t) = x + y + w, \quad w'(t) = 0$$

给出可积方程组

$$-\frac{x'+y'+z'+\frac{3}{2}w'}{x+y+z+\frac{3}{2}w}=2\frac{x'-y'}{x-y}=2\frac{y'-z'}{y-z}.$$

因为 $W=w$ 显然也是一个积分，所以函数

$$W=\Omega\left(\frac{x-y}{y-z},\ w,\ (x-y)^2\left(x+y+z+\frac{3}{2}w\right)\right)$$

是齐次微分方程 (1) 的积分. 从方程 $W=0$ 解出 w，则得原微分方程的解.

3.64. $(zw-xy^2)w_x+yzw_y+z^2w_z=zw.$

在第一部分 § 5.4 意义下的对应的齐次方程是题 4.5 中的方程. 因此，对 w 解方程

$$\Omega\left(\frac{w}{y},\ \frac{z}{y},\ \left(x-\frac{zw}{y^2}\right)\exp\frac{y^2}{z}\right)=0,$$

则得原方程的积分. 函数 $w=\frac{xy^2}{z}$ 也是一个积分，它是原方程的第一个系数变为零时的积分.

Forsyth, Diff. Equations V, p. 68.

第四章 四个和更多个自变量的线性与拟线性微分方程

4.1. $p_1+(x_3-x_4)p_2+(x_1+x_2+x_3)p_3+(x_1+x_2+x_4)\times p_4=0.$

积分基底:

$$x_2-x_3+x_4,\qquad (x_3-x_4)e^{-x_1},$$
$$(x_1x_3-x_1x_4-x_1-x_2-x_4-1)e^{-x_1}.$$

Morris Brown, Diff. Equations, p. 280(1), 393.

4.2. $x_1p_1+(x_3+x_4)p_2+(x_2+x_4)p_3+(x_2+x_3)p_4=0.$

积分基底:

$$x_1(x_2-x_3),\quad x_1(x_2-x_4),\quad \frac{x_2+x_3+x_4}{x_1^2}.$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 376, 例 3(9), p. 819.

4.3. $(x_2+x_3+x_4)p_1+(x_1+x_3+x_4)p_2+(x_1+x_2+x_4)p_3+(x_1+x_2+x_3)p_4=0.$

积分基底:

$$\frac{x_4-x_2}{x_4-x_1},\ \frac{x_4-x_3}{x_4-x_1},\ (x_4-x_1)^3(x_1+x_2+x_3+x_4).$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 376, 例 4; 也可以参看 4.7 题.

4.4. $x_1x_3p_1+x_2x_3p_2+x_3^2p_3+(x_1x_2+ax_3x_4)p_4=0.$

积分基底:

$$\frac{x_2}{x_1},\ \frac{x_3}{x_1},\ x_1^{1-a}\frac{x_2}{x_3}+(a-1)x_4x_1^{-a}.$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 377, 例 6(2), p. 819.

4.5. $(x_3x_4-x_1x_2^2)p_1+x_2x_3p_2+x_3^2p_3+x_3x_4p_4=0.$

$\dfrac{x_3}{x_2}$，$\dfrac{x_4}{x_2}$ 显然是积分，其次，利用第一部分 § 3.5 中的简化方法，我们求得另一个积分

$$\left(x_1-\frac{x_3x_4}{x_2^2}\right)\exp\frac{x_2^2}{x_3}.$$

所求得的三个积分组成一组积分基底。

Forsyth, Diff. Equations V, p. 68.

4.6. $x_2x_3x_4p_1+x_3x_4x_1p_2+x_4x_1x_2p_3+x_1x_2x_3p_4=0.$

积分基底：$x_1^2-x_2^2,\quad x_2^2-x_3^2,\quad x_3^2-x_4^2.$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 377, 例 6(3), p. 819.

4.7. $(x_2+x_3+x_4+x_5)p_1+(x_3+x_4+x_5+x_1)p_2$
$+(x_4+x_5+x_1+x_2)p_3+(x_5+x_1+x_2+x_3)p_4$
$+(x_1+x_2+x_3+x_4)p_5=0.$

积分基底：

$$\frac{s-5x_\nu}{s-5x_{\nu+1}}\quad(\nu=1,2,3,4),$$

其中 $s=x_1+\cdots+x_5$.

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 280(3), 393. 也可参看 4.3 题.

4.8. $\sum\limits_{\nu=1}^{n}x_\nu p_\nu=az$，齐次函数微分方程.

在区域 $\mathfrak{G}(x_1,\cdots,x_n)$ 内的那些积分是在该区域内有一阶连续偏导数的 a 阶齐次函数 $z=\phi(x_1,\cdots,x_n)$.

如所周知，所谓函数 $\phi(x_1,\cdots,x_n)$ 是在区域 $\mathfrak{G}$ 内的 a 阶齐次函数，就是说，等式

$$\phi(tx_1,\cdots,tx_n)=t^a\phi(x_1,\cdots,x_n)$$

成立．这里的点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 与点 $(tx_1,\cdots,tx_n)$ 假定是属于区域 $\mathfrak{G}$ 的任意两个点，而且假设连接这两个点的线段也属于 $\mathfrak{G}$.

不是多项式的一阶齐次函数的一个例子是

$$\psi(x, y) = x \sin \frac{y}{x}.$$

关于齐次函数，可参看斯米尔诺夫的《**高等数学教程**》第一卷，§154（中译本368页）。——校者注

4.9. $\sum_{\nu=1}^{m}(A_0x_\nu - A_\nu)p_\nu = 0$，$A_\nu = a_{\nu 0} + \sum_{k=1}^{m} a_{\nu k}x_k$；海色方程.

这个方程可化为 $m+1$ 个自变量而以线性函数作为系数的方程. 就是说，作变换（引进齐次坐标）

$$z(x_1, \cdots, x_m) = \zeta(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m),$$

其中

$$x_1 = \frac{\xi_1}{\xi_0}, \cdots, x_m = \frac{\xi_m}{\xi_0}, \tag{1}$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x_\nu} = \xi_0 \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_\nu} \quad (\nu = 1, \cdots, m),$$

$$\sum_{\nu=1}^{m} x_\nu \frac{\partial z}{\partial x_\nu} = -\xi_0 \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_0}.$$

因而原方程化为如下的方程

$$\sum_{\nu=0}^{m} A_\nu^* \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_\nu} = 0, \tag{2}$$

这里 $A_\nu^* = \sum_{k=0}^{m} a_{\nu k}\xi_k$，而 $A_0^* = A_0$.

于是原方程的每一个解都给出方程（2）的特殊种类的一个解 $\zeta(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m)$，即零阶齐次函数的解；这因原方程的解 $\psi(x_1, \cdots, x_m)$ 经变换（1）后，将变成方程（2）的这样函数的解. 反过来说，方程(2)的每一个具

有零阶齐次函数性质的解 ζ 经变换 (1) 可给出原方程的一个积分. 关于方程 (2) 的解法参看 3.19 题.

例 1.

$$(x+1)yp+(y^2-x)q=0. \tag{3}$$

这里 $x_1=x$, $x_2=y$, $A_0=x_2$, $A_1=-x_2$, $A_2=x_1$. 方程 (2) 具有如下形状

$$\xi_2\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_0}-\xi_2\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_1}+\xi_1\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_2}=0.$$

它的一组积分基底是 $\xi_0+\xi_1$, $\xi_1^2+\xi_2^2$; 所有形如 $\zeta=\Omega(\xi_0+\xi_1,\ \xi_1^2+\xi_2^2)$ 的函数都是它的积分.

现在要这样选取函数 Ω, 使得由 ζ 经变换 (1) 得到仅为 x_1, x_2 的函数. 函数 $\Omega(u,v)=\dfrac{u^2}{v}$ 是满足这个要求的. 最后我们得到

$$\zeta=\frac{(\xi_0+\xi_1)^2}{\xi_1^2+\xi_2^2},$$

因此

$$z=\frac{(x+1)^2}{x^2+y^2}.$$

例 2.

$$x(y+1)p+(y^2-x)q=yz.$$

若用 x_1, x_2, x_3 代替 x, y, z, 则在第一部分 § 4.2 意义下的对应的齐次方程具有如下形状

$$x_1(x_2+1)p_1+(x_2^2-x_1)p_2+x_2x_3p_3=0. \tag{4}$$

这是一个 4.9 型的方程, 此处 $A_0=x_2$, $A_1=-x_1$, $A_2=x_1$, $A_3=0$. 微分方程 (2) 在这里是

$$\xi_2\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_0}-\xi_1\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_1}+\xi_1\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_2}+0\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_3}=0.$$

由它的特征方程, 得到积分基底

$\zeta_1 = \xi_3, \zeta_2 = \xi_1 + \xi_2, \zeta_3 = \xi_0 - \xi_1 + (\xi_1 + \xi_2)\ln|\xi_1|$.
每一连续可微函数 $\zeta = \Omega(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ 又是一个积分.

现在需要求出这样的函数 Ω，它通过变换 (1) 仅为 x_1, x_2, x_3 的一个函数，例如令

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \frac{\xi_3}{\xi_1 + \xi_2} = \frac{x_3}{x_1 + x_2},$$

这样得 x_1, x_2, x_3 的函数，又令

$$-\frac{\zeta_3}{\zeta_2} = \frac{\xi_1 - \xi_0}{\xi_1 + \xi_2} - \ln|\xi_1|.$$

由于有对数项，它不是零阶齐次函数. 但是，这里若再添加 $\ln|\zeta_2|$，便可以使它成为零阶齐次函数. 这样求出一个积分

$$\frac{\xi_1 - \xi_0}{\xi_1 + \xi_2} + \ln\left|\frac{\xi_1 + \xi_2}{\xi_1}\right| = \frac{x_1 - 1}{x_1 + x_2} + \ln\left|\frac{x_1 + x_2}{x_1}\right|.$$

结论是：方程 (4) 具有积分基底

$$\frac{z}{x + y}, \frac{x - 1}{x + y} + \ln\left|\frac{x + y}{x}\right|.$$

而对原来的非齐次方程，则有积分

$$z = (x + y)\Omega\left(\frac{x - 1}{x + y} + \ln\left|\frac{x + y}{x}\right|\right).$$

4.10. $\sum\limits_{\nu=1}^{m-1}(A_0x_\nu - A_\nu)p_\nu = A_0z - A_m,$

$$A_\nu = a_{\nu 0} + \sum_{k=1}^{m-1}a_{\nu k}x_k + a_{\nu n}z.$$

根据第一部分 § 4.2，这个非齐次线性方程可变换为 4.9 题的齐次方程.

4.11. $\sum\limits_{\nu=1}^{m}(A_\nu - A_0x_\nu)\dfrac{\partial z}{\partial x_\nu} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} f_\nu(y_1, \cdots, y_n)\dfrac{\partial z}{\partial y_\nu} = 0.$

$$A_\nu = a_{\nu 0} + \sum_{k=1}^{m} a_{\nu k} x_k.$$

这里利用海色方法(参看 4.9 题)也可使方程左端第一部分的诸系数变成线性函数. 如果设

$$z(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n) = \zeta(\xi_0, \cdots, \xi_m, y_1, \cdots, y_n),$$

其中

$$x_1 = \frac{\xi_1}{\xi_0}, \cdots, x_m = \frac{\xi_m}{\xi_0},$$

则由所给方程可得

$$\sum_{\nu=0}^{m} A_\nu^* \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(y_1, \cdots, y_n) \frac{\partial \zeta}{\partial y_\nu} = 0,$$

其中

$$A_\nu^* = \sum_{k=0}^{m} a_{\nu k} \xi_k.$$

特别地,如果 $n = 1$, $f_1 = 1$, 则在特征方程中可选取 $y = y_1$ 作为自变量. 于是特征方程构成线性方程组

$$\xi_\nu'(y) = A_\nu^* \quad (\nu = 1, \cdots, m).$$

对于这个特例,参看 Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 427, 6 及 p. 839.

在 R. H. J. Germay, *Annales Bruxelles*, 59(1939), p. 139—144 中提到,这简化方法也适用于 $a_{\nu k}$ 为 y_ν 的函数的情况.

4.12. $$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sqrt{f(x_\nu)}}{F'(x_\nu)} p_\nu = 0, \ f(t) = \sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu t^\nu,$$

$$F(t) = (t - x_1)\cdots(t - x_n).$$

通过变换

$$z(x_1, \cdots, x_n) = \zeta(\xi_1, \cdots, \xi_n),$$

$$\xi_\nu = \frac{1}{x_\nu},$$

原方程变为以 ξ_ν，ζ 代替 x_ν，z 的同样类型的方程，但 $f(t)$ 变为 $f^*(t)=a_0t^{2n}+\cdots+a_{2n}$。如果能求得原方程的任一个积分，则用 $\frac{1}{x_\nu}$ 代替 x_ν，用 $a_{2n},\cdots,a_0$ 分别代替 $a_0,\cdots,a_{2n}$，就可得到第二个积分。

函数

$$z=\left[\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sqrt{f(x_\nu)}}{F'(x_\nu)}\right]^2-a_{2n}\left(\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\right)^2-a_{2n-1}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu$$

是一个积分；当 α，β 是 $f(x)$ 的两个零点时，则函数

$$z=\sqrt{F(\alpha)F(\beta)}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sqrt{f(x_\nu)}}{(x_\nu-\alpha)(x_\nu-\beta)F'(x_\nu)}$$

也是一个积分；对于任意的 C，函数

$$z=F(C)\left[\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sqrt{f(x_\nu)}}{(C-x_\nu)F'(x_\nu)}\right]^2-\frac{f(C)}{F(C)}-a_{2n}F(C)$$

也是一个积分。

第五章　线性与拟线性微分方程组

1—2. 两个自变量

5.1. $yp = xq,\quad xp + yq = z.$

对 p, q 解这两个方程，得

$$\frac{p}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{q}{z} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

因此

$$z = C\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 427(8), p. 841.

5.2. $[x(x-a) - z - c]p + y(x-a)q = (x-2a)z - cx,$

$x(y-b)p + [y(y-b) - z - c]q = (y-2b)z - cy.$

这个方程组还可以写成另一形状

$$\begin{cases}(x-a)(xp + yq - 2z) = (z+c)(p-x),\\(y-b)(xp + yq - 2z) = (z+c)(q-y).\end{cases} \tag{1}$$

由此得

$$(z+c)[(y-b)(p-x) - (x-a)(q-y)] = 0.$$

由于 $c \neq 0$ 时，$z = -c$ 显然不是方程组的解，所以方括号中的式子应该等于零，即

$$(y-b)p - (x-a)q = ay - bx.$$

因此，原方程组可用这个方程和 (1) 的第一个方程来代替.

现在转到按第一部分 § 7.2 意义下的对应的齐次方程

$$(y-b)w_x-(x-a)w_y+(ay-bx)w_z=0, \tag{2}$$

$$[x(x-a)-z-c]w_x+y(x-a)w_y$$
$$+[(x-2a)z-cx]w_z=0. \tag{3}$$

由特征方程可得方程(2)的一组积分基底

$$(x-a)^2+(y-b)^2, \quad z-ax-by,$$

如果应用第一部分 §6.7(b) 中的方法，作变换

$$w(x,y,z)=\zeta(\xi_1,\xi_2,\xi_3),$$
$$\xi_1=(x-a)^2+(y-b)^2,$$
$$\xi_2=z-ax-by, \quad \xi_3=z,$$

则方程(2)变为 $\zeta_{\xi_3}=0$. 因此，这同一变换将方程(3)变为方程 2.4:

$$2(\xi_1-\xi_2-a^2-b^2-c)\zeta_{\xi_1}+(\xi_2-c)\zeta_{\xi_2}=0.$$

容易求得它的积分基底是

$$\frac{\xi_1-2\xi_2-a^2-b^2}{(\xi_2-c)^2}.$$

于是，关于 z 解方程

$$C_1(z-ax-by-c)^2=C_2(2z-x^2-y^2),$$

我们就得到原方程组的解.

Julia. Exercices d'Analyse IV, p. 99—102 (还有其它解法).

3—9. 三 个 自 变 量

5.3. $p_1-p_2=z$, $p_1-p_3=z$; 参看第一部分 §6.4.

5.4. $x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3=0$, $x_2p_1-x_1p_2-x_3p_3=0$.

这是对合组. 函数 $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ 组成第一个方程的积分基底. 如果我们用第一部分 §6.7(b) 中的方法，作变换

$$z(x_1,x_2,x_3)=\zeta(y_1,y_2,y_3),$$

$$y_1 = \frac{x_1}{x_3}, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_3}, \quad y_3 = x_3,$$

则得方程

$$(y_2 + y_1)\zeta_{y_1} + (y_2 - y_1)\zeta_{y_2} = 0.$$

它有积分

$$\zeta = \operatorname{arctg}\frac{y_2}{y_1} + \ln\sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

因此，函数

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{2}\ln\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2}$$

是所给方程组的一个积分基底.

Serret-Scheffers, D.-u. I-Rechnung III, p. 579.

5.5. $3x_1p_1 + 4x_2p_2 + 5x_3p_3 = 0, \quad x_1p_2 + 2x_2p_3 = 0.$

这是个完全组. 函数

$$x_2x_1^{-\frac{4}{3}}, \quad x_3x_1^{-\frac{5}{3}}$$

组成第一个方程的一组积分基底. 由此，运用第一部分§6.7(b)中的方法，我们得到所给方程组的一个积分基底

$$(x_1x_3 - x_2^2)^{-\frac{8}{3}}.$$

5.6. $(x_2 - x_3)p_1 + (x_3 - x_1)p_2 + (x_1 - x_2)p_3 = 0,$

$x_2x_3p_1 + x_3x_1p_2 + x_1x_2p_3 = 0.$

当构成括号[1]时，得另一个方程

$$(x_2-x_3)(x_2 + x_3 - 2x_1)p_1 + (x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - 2x_2)p_2$$
$$+ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2x_3)p_3 = 0.$$

这三个方程的系数行列式等于

$$3(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1),$$

它在任一区域内不恒等于零. 因此 $p_1 = p_2 = p_3 = 0$.

1) 指构成 $[\mu, \nu]$ 括号. 参看第一部分§6.2. 下同. ——译者注

于是所给方程组仅有平凡解 $z=$ 常数.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 428 (14), p. 844.

5.7. $(x_1-x_2)p_1-2(x_1-x_2)p_2+3(x_1+x_2+2x_3)p_3=0$,
$(x_2+x_3)p_1+2(2x_1-3x_2-x_3)p_2-3(2x_1+x_2+3x_3)p_3=0$.

这是个完全组. 函数

$$2x_1+x_2, \qquad \frac{x_1+2x_2+3x_3}{(x_1-x_2)^2}$$

组成第一个方程的一组积分基底. 如果采用第一部分 § 6.7(b) 中的方法,即将

$$z(x_1, x_2, x_3)=\zeta(y_1, y_2),$$

$$y_1=2x_1+x_2, \quad y_2=\frac{x_1+2x_2+3x_3}{(x_1-x_2)^2}$$

代入第二个方程,则得

$$2\zeta_{y_1}-y_2^2\zeta_{y_2}=0.$$

由此

$$\zeta=y_1-\frac{2}{y_2}.$$

于是得到所给方程组的一个积分基底

$$z=\frac{3x_1x_2+2x_1x_3+x_2x_3}{x_1+2x_2+3x_3}.$$

5.8. $x_1(x_1+x_2)p_1+(x_2x_3+x_2^2-x_1^2)p_3+2(x_1+x_2)=0$,
$x_2(x_1+x_2)p_2+(x_1x_3+x_1^2-x_2^2)p_3+2(x_1+x_2)=0$.

这是个完全组. 每一个在第一部分 § 6.8 意义下的对应的齐次方程都可容易地求解. 如果采用第一部分 § 6.7(b) 中的方法,则可得到齐次方程组的积分基底

$$\frac{(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2)}{x_1x_2}.$$

如果利用第一部分 § 6.8 中的变换

$$z(x_1, x_2, x_3) = \zeta(y_1, y_2, y_3),$$

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2)}{x_1 x_3}$$

将原方程组化简，则得

$$y_1\zeta_{y_1} + 2 = 0, \quad y_2\zeta_{y_2} + 2 = 0.$$

由此 $\zeta = -\ln(y_1^2 y_2^2)$. 于是所给方程组的解就是

$$z = -\ln(x_1^2 x_2^2) + \text{齐次方程组的解}.$$

5.9. $x_1p_1 + x_2p_2 - x_3p_3 + z = 0$, $x_2p_1 - x_1p_2 + zp_3 + x_3 = 0$.

就第一部分 § 7.2 的意义来说，对应的关于函数 $w(x_1, x_2, x_3, x_4)$（其中 $x_4 = z$）的齐次方程组

$$x_1w_{x_1} + x_2w_{x_2} - x_3w_{x_3} - x_4w_{x_4} = 0,$$

$$x_2w_{x_1} - x_1w_{x_2} + x_4w_{x_3} - x_3w_{x_4} = 0$$

是个完全组. 除去记号不同外，它正是方程组 5.12. 这里的 w_{x_ν} 相当于那里的 p_ν. 函数

$$x_1x_3 + x_2x_4, \quad -x_2x_3 + x_1x_4$$

是它的一组积分基底. 从方程

$$\Omega(x_1z - x_2x_3, x_2z + x_1x_3) = 0,$$

中解出 z，即得原方程的解.

Forsyth, Diff. Equations V, p. 99.

10—17. 四个自变量，两个方程

5.10. $p_1 + p_2 - 2p_3 = 0$, $x_1p_1 + x_2p_2 - (x_1 + x_2)p_3 + x_4p_4 = 0$; 参看第一部分 § 6.7(a).

5.11. $x_1p_1 + x_2p_2 = 0$, $p_1 + p_2 + x_1(p_3 + p_4) = 0$.

当构成括号时，得方程

$$p_1 + p_2 - x_1(p_3 + p_4) = 0.$$

利用这三个方程的线性组合，我们得到

$$p_1 + p_2 = 0, \quad x_1p_1 + x_2p_2 = 0.$$

对于 $x_1 \neq 0$，还有

$$p_3 + p_4 = 0.$$

从所得到的前两个方程推出，当 $x_1 \neq x_2$ 时，有

$$p_1 = p_2 = 0,$$

即所求的解不依赖于 x_1, x_2. 所得到的第三个方程是容易求解的. 最后我们得到

$$z = \Omega(x_3 - x_4)$$

作为原方程组的解.

Serret-Scheffers, D-u. I-Rechnung III, p. 568.

5.12. $x_1p_1 - x_2p_2 + x_3p_3 - x_4p_4 = 0,$

$x_3p_1 + x_4p_2 - x_1p_3 - x_2p_4 = 0.$

这是个对合组. 函数

$$x_1x_2, \quad x_2x_3, \quad x_3x_4$$

组成第一个方程的一组积分基底. 如果按照第一部分 § 6.7(b) 中的方法，作变换

$$z(x_1, \cdots, x_4) = \zeta(y_1, \cdots, y_4),$$

$$y_1 = x_1x_2, \quad y_2 = x_2x_3, \quad y_3 = x_3x_4, \quad y_4 = x_4,$$

则由第一个方程得 $\zeta_{y_4} = 0$；而由第二个方程得

$$(y_2^2 + y_1y_3)(\zeta_{y_1} - \zeta_{y_3}) + y_2(y_3 - y_1)\zeta_{y_2} = 0.$$

这后一方程有一组积分基底

$$y_1 + y_3, \quad \frac{y_1y_3}{y_2} - y_2.$$

因此，原方程组以函数

$$x_1x_2 + x_3x_4, \quad x_1x_4 - x_2x_3$$

作为积分基底.

5.13. $-x_1p_1 + x_2p_2 + x_4p_3 + x_3p_4 = 0,$

$2(x_3 + x_4)p_2 + x_2(p_3 + p_4) = 0.$

这是个对合组. 函数

$$x_1, \quad x_3 - x_4, \quad x_2^2 - 4x_3x_4$$

是第二个方程的一组积分基底. 如果应用第一部分 §6.7 (b) 中的方法,即把

$$z(x_1, \cdots, x_4) = \zeta(y_1, y_2, y_3),$$

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_3 - x_4, \quad y_3 = x_2^2 - 4x_3x_4$$

代入第一个方程,则得

$$y_1\zeta_{y_1} + y_2\zeta_{y_2} + (4y_2^2 - 2y_3)\zeta_{y_3} = 0.$$

它有积分基底

$$\frac{y_2}{y_1}, \qquad y_1^2(y_3 - y_2^2).$$

于是得原方程组的积分基底

$$\frac{x_3 - x_4}{x_1}, \quad x_1^2[x_2^2 - (x_3 + x_4)^2].$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 525(92).

5.14. $x_3p_1 + x_4p_2 - x_1p_3 - x_2p_4 = 0,$

$x_4p_1 + x_3p_2 - x_2p_3 - x_1p_4 = 0.$

这是个对合组. 函数

$$x_1x_2 + x_3x_4, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

是一组积分基底.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 429(18β), p. 847—849.

5.15. $(x_1x_4 + x_2x_3)p_1 + (x_3x_4 - x_1x_2)p_3 - (x_2^2 + x_4^2)p_4 = 0,$

$(x_1x_4 + x_2x_3)p_2 - (x_1^2 + x_3^2)p_3 + (x_3x_4 - x_1x_2)p_4 = 0.$

用 x_1 乘第一个方程, 用 $-x_2$ 乘第二个方程, 然后将两个方程相加,当略去乘数 $x_1x_4 + x_2x_3$ 不计时,可得 5.12 题的第一个方程. 类似地,从所给方程组可得到 5.12 题的第二个方程. 因此, 前面所写的方程组可用方程组 5.12 来代替.

5.16. $(x_4^2 - x_3^2)p_1 + (x_1x_3 - x_2x_4)p_3 + (x_2x_3 - x_1x_4)p_4 = 0,$

$(x_4^2 - x_3^2)p_2 + (x_2x_3 - x_1x_4)p_3 + (x_1x_3 - x_2x_4)p_4 = 0.$

当 $x_4^2 - x_3^2 \neq 0$ 时，这个方程组与方程组 5.14 等价。

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 429 (18α), p. 847—849, 该书中的积分形式过于冗长。

5.17. $p_1 + (x_2 + x_4 - 3x_1)p_3 + (x_1x_2 + x_1x_4 + x_3)p_4 = 0,$

$p_2 + (x_3x_4 - x_2)p_3 + (x_1x_3x_4 + x_2 - x_1x_2)p_4 = 0.$

构成括号并约去多余的因子后，得方程

$$p_3 + x_1p_4 = 0. \tag{1}$$

因此，所给方程组可化简为

$$p_2 + x_2p_4 = 0, \quad p_1 + (3x_1^2 + x_3)p_4 = 0. \tag{2}$$

所写的这三个方程 (1) 和 (2) 组成方程组 5.18.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 426, 例 3(1) p. 834.

18—23. 四个自变量，三个方程

5.18. $p_1 + (3x_1^2 + x_3)p_4 = 0, p_2 + x_2p_4 = 0,$

$p_3 + x_1p_4 = 0.$

这是个对合组. 作梅耶变换

$$x_1 = uu_1, \quad x_2 = uu_2, \quad x_3 = uu_3,$$

我们得到关于函数 $z(x_1, \cdots, x_4) = Z(u, u_1, \cdots, u_4)$ 的线性微分方程

$$Z_u + (3u^2u_1^3 + 2uu_1u_3 + uu_2^2)Z_{x_4} = 0.$$

函数

$$\Omega\left(u^3u_1^3 + u^2u_1u_3 + \frac{1}{2}u^2u_2^2 - x_4\right)$$

是该方程的积分. 因此，原方程组有积分

$$\Omega\left(x_1^3 + x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_4\right).$$

关于文献，参看 5.17 题，也可参看第一部分 § 6.7(c)。

5.19. $x_1p_1 - x_2p_2 + x_3p_3 - x_4p_4 = 0$, $x_3p_1 - x_1p_3 = 0$, $x_4p_2 - x_2p_4 = 0$.

这是个对合组. 函数 x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4 组成第一个方程的一组积分基底. 如果按照第一部分 § 6.7(b)，作变换

$$z(x_1, \cdots, x_4) = \zeta(y_1, \cdots, y_4),$$

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_1x_2, \quad y_3 = x_2x_3, \quad y_4 = x_3x_4,$$

则第一个方程变为 $\zeta_{y_1} = 0$；而另二个分别变为

$$y_3^2\zeta_{y_1} - y_2y_3\zeta_{y_3} - y_2y_4\zeta_{y_4} = 0,$$

$$y_2y_4\zeta_{y_2} + y_3y_4\zeta_{y_3} - y_3^2\zeta_{y_4} = 0.$$

这两个方程中的第一个有一组积分基底

$$y_2^2 + y_3^2, \quad \frac{y_3}{y_4}.$$

如果再次运用同一变换，则最后可得原方程组的积分基底

$$(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_4^2).$$

Forsyth, Diff. Equations V, p. 95.

5.20. $2x_1p_1 + 3x_2p_2 + 4x_3p_3 + 5x_4p_4 = 0$,

$p_1 + 4x_1p_3 + 5x_2p_4 = 0$, $x_2p_3 + (2x_3 - 4x_1^2)p_4 = 0$.

这是个完全组. 可求得第二个方程的一组积分基底(它继续用 y_2, y_3, y_4 来表示)，如果遵循第一部分 § 6.7(b) 中的方法，引入

$$z(x_1, \cdots, x_4) = \zeta(y_1, \cdots, y_4),$$

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3 - 2x_1^2, \quad y_4 = x_4 - 5x_1x_2,$$

则由方程组的第二个方程可得 $\zeta_{y_1} = 0$，而由另外两个可得

$$3y_2\zeta_{y_2} + 4y_3\zeta_{y_3} + 5y_4\zeta_{y_4} = 0,$$

$$y_2\zeta_{y_3}+2y_3\zeta_{y_4}=0,$$

亦即我们得到了以 ζ，y_ν 代替 z，$x_{\nu-1}$ 的方程组 5.5.

5.21. $\boldsymbol{x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4=0,}$

$\boldsymbol{x_2p_2+2x_3p_3+3x_4p_4=0,}$

$\boldsymbol{3x_1^2p_2+10x_1x_2p_3+(15x_1x_3+10x_2^2)p_4=0.}$

这是个完全组．函数

$$\frac{x_2}{x_1},\quad \frac{x_3}{x_1},\quad \frac{x_4}{x_1}$$

组成第一个方程的一组积分基底． 如果按照第一部分§6.7(b)，设

$$z(x_1,\cdots,x_4)=\zeta(y_1,\cdots,y_4),$$

$$y_1=x_1,\quad y_2=\frac{x_2}{x_1},\quad y_3=\frac{x_3}{x_1},\quad y_4=\frac{x_4}{x_1},$$

则方程组的第一个方程变为 $\zeta_{y_1}=0$，而另外两个变为

$$\begin{aligned}&y_2\zeta_{y_2}+2y_3\zeta_{y_3}+3y_4\zeta_{y_4}=0,\\&3\zeta_{y_2}+10y_2\zeta_{y_3}+(15y_3+10y_2^2)\zeta_{y_4}=0.\end{aligned}\qquad(1)$$

函数

$$3y_3-5y_2^2,\quad 9y_4-45y_2y_3+40y_2^3$$

组成所得方程组 (1) 中后一个方程的一组积分基底．再次作第一部分 §6.7(b) 中的变换，即设

$$\zeta=u(s_1,s_2,s_3,s_4),\quad s_1=y_1,\quad s_2=y_2,$$

$$s_3=3y_3-5y_2^2,\quad s_4=9y_4-45y_2y_3+40y_2^3,$$

则由 (1) 的后一个方程可得 $u_{s_2}=0$；而由前一个得

$$2s_3u_{s_3}+3s_4u_{s_4}=0,$$

它有积分 $\dfrac{s_4^2}{s_3^3}$. 由此可得原方程组的积分基底

$$\frac{(9x_1^2x_4-45x_1x_2x_3+40x_2^3)^2}{(3x_1x_3-5x_2^2)^3}.$$

5.22. $\boldsymbol{2x_2x_1^2p_1+x_3^2x_4p_4=x_3^2,\quad 2x_2p_2-x_4p_4=1,}$

$$x_2x_4^2p_3 + x_1x_3x_4p_4 = x_1x_3.$$

参看 5.23 题.

5.23. $2x_2x_4^2p_1 + x_3^2x_4p_4 = x_3^2z,\quad 2x_2p_2 - x_4p_4 = z,$

$x_2x_4^2p_3 + x_1x_3x_4p_4 = x_1x_3z.$

这是个完全组. 利用变换 $u(x_1,\cdots,x_4)=\ln|z|$, 它可变为以未知函数 u 代替 z 的方程组 5.22. 为求解两种形状的每一个方程组,当它关于导数解出(显形式)后,可用第一部分 § 6.4 的简化为一个微分方程的梅耶方法.

也可用雅可比的首次积分法解这个方程组. 如果按照第一部分 § 7.2 中的方法,将所给方程组变为齐次方程组. 则可得到以 z, w_z 代替 x_5, p_5 的方程组 5.30; 原方程组的解可由方程

$$w(x_1,\cdots,x_4,z)=0$$

解出 z 而得到:

$$z = x_2x_4\Omega(x_1x_3^2 - x_2x_4^2).$$

24—29. 五个自变量,两个方程

5.24. $x_1^2p_1 - 2x_5p_2 + (x_1^2x_4 - 2x_5)p_3 - 2x_1x_4p_4 = 0,$

$2x_5p_4 + x_1^2p_5 = 0.$

构成括号时,得方程

$$x_1p_2 + x_1(1-x_5)p_3 + 2x_5p_4 + x_1^2p_5 = 0.$$

这里约去了因子 $2x_1$. 根据所给的第二个方程,它可用

$$p_2 + (1-x_5)p_3 = 0$$

来代替. 因此,整个方程组可用

$$x_1^2p_1 + (x_1^2x_4 - 2x_5^2)p_3 - 2x_1x_4p_4 = 0,$$

$$2x_5p_4 + x_1^2p_5 = 0,\quad p_2 + (1-x_5)p_3 = 0$$

来代替. 现在构成括号仅得到一个本质上是新的方程,

即 $p_3=0$. 因而也应有 $p_2=0$. 于是剩下方程

$$x_1p_1-2x_4p_4=0,\quad 2x_5p_4+x_1^2p_5=0.$$

它们组成一个对合组，且有积分基底 $x_1^2x_4-x_5^2$.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 426, 例 3(2), p. 835.

5.25. $[(x_1x_4+x_2x_5)x_5+x_2]p_1-[(x_1x_4+x_2x_5)x_4+x_1]p_2+(x_2x_4-x_1x_5)p_3=0,\quad x_2p_4-x_1p_5=0.$

构成括号，我们得到

$$(x_1x_4+x_2x_5)(x_1p_1+x_2p_2)-(x_1^2+x_2^2)p_3-[(x_1x_4+x_2x_5)x_4+x_1]p_4-[(x_1x_4+x_2x_5)x_5+x_2]p_5=0.$$

由这三个方程所组成的方程组是完全组. 对于第一个方程，可用通常方法求得一组积分基底

$$x_1x_4+x_2x_5-x_3,\quad (x_1x_4+x_2x_5)^2+x_1^2+x_2^2.$$

容易验证，它同时是整个方程组的积分基底.

5.26. $x_1p_1+x_2p_2+(x_1x_4+x_2x_5)p_3=0,$

$[(x_1x_4+x_2x_5)x_4+x_1]p_4+[(x_1x_4+x_2x_5)x_5+x_2]p_5=0.$

构成括号后，如果注意到第二个方程，则可得 $p_3=0$. 容易验证，$p_3=0$, $x_1p_1+x_2p_2=0$ 和所给方程的第二个构成完全组. 这些方程可以分别求解. 函数

$$\frac{x_1}{x_2},\qquad \frac{(x_2x_4-x_1x_5)^2}{x_4^2+x_5^2+1}$$

是所给方程组的积分基底.

5.27. $[(x_1x_5-x_2x_4)x_5+x_3x_4+x_1]p_1+[(x_2x_4-x_1x_5)x_4+x_3x_5+x_2]p_2+[(x_4^2+x_5^2)x_3+x_1x_4+x_2x_5]p_3=0,\quad (x_3x_4+x_1)p_4+(x_3x_5+x_2)p_5=0.$

构成括号，将第一个方程乘以 $2x_3$, 加到乘以 $-(x_4^2+x_5^2+1)$ 的第二个方程上去，则给出

$[(x_2x_4-x_1x_5)x_2+(x_3x_4+x_1)x_3]p_1+[(x_1x_5-x_2x_4)x_1$

$$+(x_3x_5+x_2)x_3]p_2-[(x_1x_4+x_2x_5)x_3+x_1^2+x_2^2]p_3=0.$$

由这三个方程所组成的方程组是完全组，因而积分基底由两个函数组成．对于第二个方程，容易求得积分

$$\frac{x_3x_4+x_1}{x_3x_5+x_2},$$

它满足第一个方程，因而也满足第三个方程．如果现在运用第一部分 §6.7(a) 中的简化方法，则还可求得一个积分

$$\frac{x_1x_5-x_2x_4}{x_3x_5+x_2}.$$

所写出的这两个函数组成一组积分基底．

5.28. $(x_3x_5+x_2)p_1-(x_3x_4+x_1)p_2+(x_2x_4-x_1x_5)p_3=0,$

$[x_4(x_2x_4-x_1x_5)+x_3x_5+x_2]p_4-[x_5(x_1x_5-x_2x_4)+x_3x_4+x_1]p_5=0.$

构成括号，并减去乘以 $(x_1x_5-x_2x_4)$ 的第一个方程，则得

$$(x_3x_4+x_1)x_3p_1+(x_3x_5+x_2)x_3p_2+(x_2x_4-x_1x_5)\times(x_2p_1-x_1p_2)-[x_1^2+x_2^2+(x_1x_4+x_2x_5)x_3]p_3-(x_4^2+x_5^2+1)[(x_3x_4+x_1)p_4+(x_3x_5+x_2)p_5]=0.$$

由这三个方程所组成的方程组是完全组．容易求得第一个方程的解．

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2,\quad x_1x_4+x_2x_5-x_3,$$

及第二个方程的解：

$$\frac{(x_1x_4+x_2x_5-x_3)^2}{x_4^2+x_5^2+1}.$$

这后一个解也满足第一个方程．因此，原方程组有积分基底

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2,\quad \frac{(x_1x_4+x_2x_5-x_3)^2}{x_4^2+x_5^2+1}.$$

5.29. $x_2p_1 - x_1p_2 + 2x_4p_3 + (x_5 - x_3)p_4 - 2x_4p_5 = 0,$

$$x_1x_2p_1 + (x_2^2+1)p_2 + (2x_1x_4 + x_2x_3)p_3 + (2x_2x_4 + x_1x_5)p_4 + 3x_2x_5p_5 = 0.$$

构成括号，得方程

$$(x_1^2+1)p_1 + x_1x_2p_2 + 3x_1x_3p_3 + (2x_1x_4 + x_2x_3)p_4 + (2x_2x_4 + x_1x_5)p_5 = 0.$$

由这三个方程所组成的方程组是完全组．函数

$$x_1^2 + x_2^2,\quad x_3 + x_5,\quad x_3x_5 - x_4^2,$$
$$x_1^2x_3 + 2x_1x_2x_4 + x_2^2x_5$$

组成第一个方程的一组积分基底． 如果应用第一部分§6.7(b)中的变换，且设

$$z(x_1, \cdots, x_5) = \zeta(y_1, \cdots, y_5),$$
$$y_1 = x_1,\ y_2 = x_1^2 + x_2^2,\ y_3 = x_3 + x_5,\ y_4 = x_3x_5 - x_4^2$$
$$y_5 = x_1^2x_3 + 2x_1x_2x_4 + x_2^2x_5,$$

则由三个方程可得 $\zeta_{y_1} = 0$ 及

$$2x_2(y_2+1)\zeta_{y_2} + [2(x_1x_4 + x_2x_5) + x_2y_3]\zeta_{y_3} + 4x_2y_4\zeta_{y_4} + [2(x_1x_4 + x_2x_5)(y_2+1) + 3x_2y_5]\zeta_{y_5} = 0, \tag{1}$$

$$2x_1(y_2+1)\zeta_{y_2} + [2(x_1x_3 + x_2x_4) + x_1y_3]\zeta_{y_3} + 4x_1y_4\zeta_{y_4} + [2(x_1x_3 + x_2x_4)(y_2+1) + 3x_1y_5]\zeta_{y_5} = 0. \tag{2}$$

我们首先把方程(1)乘以 x_1，方程(2)乘以 $-x_2$，并把两个结果相加； 其次，用 x_2 乘方程(1)，用 x_1 乘方程(2)，并再次相加．最后我们得到

$$\zeta_{y_3} + (y_2+1)\zeta_{y_5} = 0. \tag{3}$$

如果从第二个方程减去乘以 $2y_5$ 的方程(3)，则我们得到

$$2(y_2+1)\zeta_{y_2} + y_3\zeta_{y_3} + 4y_4\zeta_{y_4} + 3y_5\zeta_{y_5} = 0. \tag{4}$$

由此可得它的积分基底

$$\frac{y_3^2}{y_2+1},\quad \frac{y_4}{(y_2+1)^2},\quad \frac{y_5^2}{(y_2+1)^3}.$$

利用第一部分 §6.7(b)中的变换，可得方程(3)，(4)所构成的方程组的积分基底

$$\frac{y_4}{(y_2+1)^2},\quad \frac{y_3(y_2+1)-y_5}{\sqrt{(y_2+1)^3}}$$

因此，函数

$$\frac{x_3x_5-x_4^2}{(x_1^2+x_2^2+1)^2},$$

$$\frac{(x_1^2+1)x_5+(x_2^2+1)x_3-2x_1x_2x_4}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2+1)^3}}$$

是所给方程组的积分基底.

30—32. 五个自变量，三个或四个方程

5.30. $2x_1p_1-x_3p_3=0,\quad 2x_2p_2-x_4p_4+x_5p_5=0,$

$2x_2x_1^2p_1+x_3^2x_4p_4+x_3^2x_5p_5=0.$

这是个完全组. 对于由前两个方程组成的部分组，利用特征方程可得积分基底

$$x_1x_3^2,\quad x_2x_4^2,\quad x_4x_5.$$

如果现在把

$z=\zeta(y_1,y_2,y_3),\ y_1=x_1x_3^2,\ y_2=x_2x_4^2,\ y_3=x_4x_5$

代入第三个方程，则得

$$y_2(\zeta_{y_1}+\zeta_{y_2})+y_3\zeta_{y_3}=0.$$

它有积分基底 $y_1-y_2,\ \dfrac{y_3}{y_2}$. 因此，原方程组有积分基底

$$x_1x_3^2-x_2x_4^2,\quad \frac{x_5}{x_2x_4}.$$

5.31. $2x_2x_1^2p_1+x_3^2x_4p_4+x_3^2x_5p_5=0,$

$2x_2p_2-x_4p_4+x_5p_5=0,$

$x_2x_1^2p_3+x_1x_3x_4p_4+x_1x_3x_5p_5=0.$

这方程组是完全组．第一和第三个方程的线性组合可以将方程组化为 5.30 形。

Goursat, Équations du premier ordre, p. 96(1), 那里称 Collet 为这问题的作者。

5.32. $p_1+2x_1p_2+3x_2p_3+4x_3p_4+5x_4p_5=0,$

$$x_1p_1+2x_2p_2+3x_3p_3+4x_4p_4+5x_5p_5=0,$$

$$x_1p_2+3x_1^2p_3+(7x_1x_2-x_3)p_4+(8x_1x_3-2x_4+4x_2^2)p_5=0,$$

$$p_2+3x_1p_3+(4x_2+2x_1^2)p_4+5(x_3+x_1x_2)p_5=0.$$

这个方程组是完全组．容易求得第一个方程的积分基底 $y_2, \cdots, y_5$。其次，还能应用第一部分 §6.7(b) 中的方法，即设

$$z(x_1, \cdots, x_5)=\zeta(y_1, \cdots, y_5),$$

$$y_1=x_1,\quad y_2=x_2-x_1^2,\quad y_3=x_3-3x_1x_2+2x_1^3,$$

$$y_4=x_4-4x_1x_3+6x_1^2x_2-3x_1^4,$$

$$y_5=x_5-5x_1x_4+10x_1^2x_3-10x_1^3x_2+4x_1^5,$$

则第一个方程取形状 $\zeta_{y_1}=0$；如果再通过线性组合，则其余方程可简化为

$$2y_2\zeta_{y_2}+3y_3\zeta_{y_3}+4y_4\zeta_{y_4}+5y_5\zeta_{y_5}=0,$$

$$\zeta_{y_2}+4y_3\zeta_{y_4}+5y_3\zeta_{y_5}=0,$$

$$y_3\zeta_{y_4}+(2y_4-4y_2^2)\zeta_{y_5}=0.$$

此即方程组 5.20。

33—36. 其它方程组

5.33. $(x_1-x_6)p_1+(x_5-x_1)p_2+(x_6-x_5)p_5=0,$

$$(x_2-x_6)p_1+(x_5-x_2)p_2+(x_6-x_5)p_6=0,$$

$$(x_3-x_6)p_1+(x_5-x_3)p_2+(x_6-x_5)p_4=0,$$

$$(x_4 - x_6)p_1 + (x_5 - x_4)p_2 + (x_6 - x_5)p_3 = 0.$$

这个方程组是完全的. 它的一组积分基底是

$$x_1 + \cdots + x_6, \; x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_4.$$

5.34. $$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 + x_5p_5 + x_6p_6 = 0,$$

$$x_1p_2 + 2x_2p_3 + 3x_3p_4 + 4x_4p_5 + 5x_5p_6 = 0,$$

$$x_2p_2 + 2x_3p_3 + 3x_4p_4 + 4x_5p_5 + 5x_6p_6 = 0,$$

$$x_1x_2p_3 + 3x_2^2p_4 + (7x_2x_3 - x_1x_4)p_5 + (8x_2x_4 - 2x_1x_5 + 4x_3^2)p_6 = 0.$$

只有第二和第四个方程在构造括号时能得到一个本质上是新的方程，即

$$x_1^2p_3 + 3x_1x_2p_4 + (4x_1x_3 + 2x_2^2)p_5 + (5x_1x_4 + 5x_2x_3)p_6 = 0.$$

由这五个方程构成的方程组是完全组. 它可重复应用第一部分 § 6.7(b) 中的方法求解. 函数 $\frac{x_\nu}{x_1}$ $(\nu = 2, \cdots, 6)$ 组成第一个方程的积分基底. 其次，若设

$$z(x_1, \cdots, x_6) = \zeta(y_1, \cdots, y_6),$$

$$y_1 = x_1, \quad y_\nu = \frac{x_\nu}{x_1} \quad (\nu = 2, \cdots, 6),$$

则由该完全组得 $\zeta_{y_1} = 0$ 及

$$\zeta_{y_2} + 2y_2\zeta_{y_3} + 3y_3\zeta_{y_4} + 4y_4\zeta_{y_5} + 5y_5\zeta_{y_6} = 0,$$

$$y_2\zeta_{y_2} + 2y_3\zeta_{y_3} + 3y_4\zeta_{y_4} + 4y_5\zeta_{y_5} + 5y_6\zeta_{y_6} = 0,$$

$$y_2\zeta_{y_3} + 3y_2^2\zeta_{y_4} + (7y_2y_3 - y_4)\zeta_{y_5} + (8y_2y_4 - 2y_5 + 4y_3^2)\zeta_{y_6} = 0,$$

$$\zeta_{y_3} + 3y_2\zeta_{y_4} + (4y_3 + 2y_2^2)\zeta_{y_5} + (5y_4 + 5y_2y_3)\zeta_{y_6} = 0.$$

此即方程组 5.32.

5.35. $\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = 0, \; \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 p_\nu = 0.$

构成括号后，得到方程组 5.36.

5.36. $\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = 0,\ \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu p_\nu = 0,\ \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 p_\nu = 0.$

这是个完全组． 函数 $x_\nu - x_n (\nu = 1, \cdots, n-1)$ 是第一个方程的一组积分基底．如果按照第一部分 § 6.7 (b)，设

$$z(x_1, \cdots, x_n) = u(y_1, \cdots, y_{n-1}),$$
$$y_\nu = x_\nu - x_n \ (\nu = 1, \cdots, n-1),$$

则由所给方程组的第二个方程可得

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} y_\nu u_{y_\nu} = 0,$$

它有积分基底 $\dfrac{y_\nu}{y_{n-1}} (\nu = 1, \cdots, n-2)$． 于是函数

$$\frac{x_\nu - x_n}{x_{n-1} - x_n} \quad (\nu = 1, \cdots, n-2)$$

是前两个方程的一组积分基底．

现在如果设

$$z(x_1, \cdots, x_n) = \zeta(\xi_1, \cdots, \xi_{n-2}),$$
$$\xi_\nu = \frac{x_\nu - x_n}{x_{n-1} - x_n} \quad (\nu = 1, \cdots, n-2),$$

则由第三个方程，我们得到

$$\sum_{\nu=1}^{n-2} \xi_\nu(\xi_\nu - 1)\zeta_{\xi_\nu} = 0.$$

函数

$$\frac{\xi_\nu - 1}{\xi_\nu} \cdot \frac{\xi_{n-2}}{\xi_{n-2} - 1} \ (\nu = 1, \cdots, n-3)$$

组成这个方程的一组积分基底．

因此，对于所给方程组，交比

$$\frac{x_\nu - x_{n-1}}{x_\nu - x_n} : \frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{x_{n-2} - x_n} \quad (\nu = 1, \cdots, n-3)$$

组成积分基底。

如果对所给方程组再添加一个方程 $\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^3 p_\nu = 0$，则所得的四个方程的方程组将只有平凡积分 $z=$ 常数。参看 Serret-Scheffers, D-u. I-Rechnung III, p. 579. 也可参看 G. Pfeiffer, Giornale Mat., **69**(1931), p. 232—236。

第六章　两个自变量的非线性微分方程

1—13. $ap^2+\cdots$

6.1. $p^2 = aq + b$; $F(p, q) = 0$ 型的方程.

一个全积分是

$$z = Ax + \frac{A^2 - b}{a} y + B.$$

关于由这全积分求出其它积分，参看第一部分 § 9.5.

如果 $a = 1$，$b = 0$，则通过抛物线 $z = x^2$，$y = 0$ 的积分曲面是

$$z = \frac{x^2}{1 - 4y}, \quad \text{其中 } y < \frac{1}{4}.$$

6.2. $p^2 + q + z + x = 0$. 这是以 $z + x$ 作为未知函数的第一部分 § 11.3 型的方程.

因此，如果作变换

$$x + z(x, y) = \zeta(\xi), \quad \xi = x + 2Ay,$$

则我们得到常微分方程

$$\zeta' = 1 - A \pm \sqrt{A^2 - 2A - \zeta};$$

由此可得确定全积分的方程

$$R + (A - 1)\ln|1 - A + R| + \frac{x}{2} + Ay = B,$$

其中 $R^2 = A^2 - 2A - z - x$.

6.3. $p^2 + aq = bx + cy$; 可分离变量方程.

一个全积分是

$b \neq 0$ 时，$z = \pm\frac{2}{3b}(bx+A)^{\frac{3}{2}} + \frac{cy^2}{2a} - \frac{A}{a}y + B$；

$b = 0$ 时，$z = Ax + \frac{cy^2}{2a} - \frac{A^2}{a}y + B$。

6.4. $p^2 = axq + bxy$；可分离变量方程.

$$z = \pm\frac{2x}{3}\sqrt{Ax} + \frac{2Ay - by^2}{2a} + B.$$

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 293 (24), 394 中的一个特例.

6.5. $p^2 + xp = q$；可分离变量方程.

$$z = \frac{A^2}{4}y - \frac{x^2}{4} \pm \frac{x}{4}\sqrt{x^2 + A^2} \pm \frac{A^2}{4}\operatorname{Arsh}\frac{x}{A} + B;$$

对于 $|x| > A > 0$，有

$$z = -\frac{A^2}{4}y - \frac{x^2}{4} \pm \frac{x}{4}\sqrt{x^2 - A^2} \mp (\operatorname{sign} x)\frac{A^2}{4}\operatorname{Arch}\left|\frac{x}{A}\right| + B,$$

其中 $\operatorname{Arch}\left|\frac{x}{A}\right|$ 的值应选为正的.

6.6. $p^2 + xp - yq + 2z = 0$.

由特征方程得首次积分 $p = 2Ay^3$；由此得

$$z = 2Axy^3 + \varphi(y).$$

如果把这关系式代入所给方程，则可确定 φ. 因此

$$z = 2Axy^3 + A^2y^6 + By^2.$$

函数

$$z = Ay^2 - \left(x + \frac{B}{y}\right)^2$$

也是一个全积分.

6.7. $3p^2 + xp + (y+2)q = z$；克莱罗方程.

一个全积分是

$$z = Ax + By + 3A^2 + 2B.$$

函数

$$z=-\frac{x^2}{12}+B(y+2)$$

也是一个积分. 这里没有奇积分.

6.8. $\boldsymbol{p^2+ayp+bq=c}$; 第一部分 § 11.4 型的方程.

$$z=Ax+\frac{c-A^2}{b}y-\frac{aA}{2b}y^2+B.$$

6.9. $\boldsymbol{p^2+ay^2q+ayz+by^4=0}$.

假设 $u(x, y)=yz(x, y)$, 则得可分离变量方程

$$u_x^2=-ay^3u_y-by^6,$$

由此得一全积分

$$yz=-\frac{b}{4a}y^4+Ax+\frac{A^2}{2ay^2}+B.$$

函数

$$yz=-\frac{b}{4a}y^4-\frac{a}{2}y^2(x+A)^2+B$$

也是一个全积分.

一个特例参看 Morris-Brown, Diff. Equations, p. 293 (40), 395.

6.10. $\boldsymbol{p^2+ay^2q=b}$. 可分离变量方程.

$$z=Ax+\frac{A^2-b}{ay}+B.$$

6.11. $\boldsymbol{p^2-y^3q=x^2-y^2}$; 可分离变量方程.

一个全积分是

$$z=\pm\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+A}+\frac{A}{2}\varphi(x)\right]$$

$$-\frac{A}{2y^2}+\ln|y|+B,$$

其中

$$\varphi(x)=\begin{cases}\operatorname{Arsh}\dfrac{x}{\sqrt{A}}, & A>0,\\ \operatorname{sign}x\cdot\operatorname{Arch}\dfrac{|x|}{\sqrt{-A}}, & A<0,\ \text{且}\ |x|>|A|,\\ 0, & A=0.\end{cases}$$

并且 Arch u 应理解为正分支.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 385, 例 2(5), p. 822.

6.12. $p^2+azq=bz^2$; 第一部分 § 11.3 型的方程.

$$z=B\exp[(x+Ay)R],$$

其中 $R=-\frac{aA}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2A^2+4b}$. 函数

$$z=Ae^{\frac{b}{a}y}$$

也是一个积分.

6.13. $p^2+az(yq-z)=0$.

作变换

$$\ln|z(x,y)|=\zeta(x,\eta),\qquad \eta=\ln|y|,$$

由已给方程得到第一部分 § 11.2 型的方程

$$\zeta_x^2+a(\zeta_\eta-1)=0.$$

它有全积分

$$\zeta=Ax+\left(1-\frac{A^2}{a}\right)\eta+B.$$

参看 Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 196.

14—20. $f(x,y,z)p^2+\cdots$

6.14. $xp^2=q$; 可分离变量方程.

$$z=2\sqrt{Ax}+Ay+B.$$

6.15. $x^2p^2-y^2q=z$; 第一部分 § 11.6 型的方程.

设 $z=u(x)+v(y)$，我们得到

$$x^2u'^2-u=y^2v'+v.$$

如果左端和右端都等于零，则这个方程被满足．由此求得全积分

$$z=Ae^{\frac{1}{y}}+\frac{1}{4}(\ln x+B)^2.$$

6.16. $(xp+z)^2=q.$

设 $w(x,y)=xz$，我们得到方程 6.14

$$xw_x^2=w_y.$$

于是

$$z=2\sqrt{\frac{A}{x}}+\frac{Ay+B}{x}$$

是一个全积分．如果将

$$z=u(x)+v(y)$$

代入所给方程，则得

$$v'(y)=[xu'(x)+u(x)+v(y)]^2.$$

它当

$$xu'+u=0,\quad v'=v^2$$

时被满足．由此得到全积分

$$z=\frac{A}{x}-\frac{1}{y+B}$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 822.

6.17. $x^2p^2+ayzq=bz^2$；齐次方程．

设

$$z(x,y)=\zeta(\xi,\eta),\quad \xi=\ln x,\quad \eta=\ln y,$$

则得方程 6.12

$$\zeta_\xi^2+a\zeta\zeta_\eta=b\zeta^2.$$

6.18. $x(x+1)p^2-2xzp-y^2q+z^2=0.$

重新组合方程的各项，得

$$(xp-z)^2+xp^2-y^2q=0.$$

这是第一部分 § 11.17 型的方程. 借助于欧拉变换(参看第一部分 § 11.15),由它可得拟线性方程

$$X^2Z_X+Y^2Z_Y=-Z^2.$$

其解可由方程

$$\frac{1}{Z}=-\frac{1}{X}+\Omega\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{Y}\right)$$

求得. 由此可得原方程的积分 z 的参数表达式

$$z=xX-Z,\quad x=\frac{Z^2}{X^2}\left[\Omega'\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{y}\right)-1\right],$$

$$\frac{1}{Z}=-\frac{1}{X}+\Omega\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{y}\right).$$

特别地,对于 $\Omega(u)=(A+1)u+B$, 得全积分

$$\left(\frac{A+1}{y}-B\right)z=(1\pm\sqrt{|Ax|})^2.$$

参看 Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 388, 例 4, p. 825.

6.19. $y(y^2+1)(xp-z)^2+x(p^2+1)=(y^2+1)q.$

利用第一部分 § 11.15 中的欧拉变换,由这个方程得到拟线性方程

$$(X^2+1)Z_X+(Y^2+1)Z_Y=-Y(Y^2+1)Z^2.$$

由这个方程的解

$$\frac{2}{Z}=Y^2+\Omega\left(\frac{X-Y}{1+XY}\right)$$

我们得到原方程的用参数表示的解

$$x=-\frac{Z^2(1+y^2)}{2(1+Xy)^2}\Omega'(u),\quad z=xX-Z,$$

其中

$$Z=\frac{2}{y^2+\Omega(u)},\quad u=\frac{X-y}{1+Xy}.$$

6.20. $z^2p^2 + azq = bx + cy$.

设 $u(x, y) = z^2$，得可分离变量方程

$$u_x^2 - 4bx = 4cy - 2au_y.$$

由此我们求得全积分

$$z^2 = \frac{1}{6b}(4bx + A)^{\frac{3}{2}} + \frac{c}{a}y^2 - \frac{A}{2a}y + B.$$

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 293 (42), 395.

21—33. $apq + \cdots$

6.21. $pq = a$.

这个方程的特征线是直线．一个全积分是

$$z = aAx + \frac{y}{A} + B.$$

参看 Courant-Hilbert, Methoden math. Physik II, p. 77（中译本：数学物理方法 II, p. 72）.

6.22. $pq = axy + b$.

从特征方程得到首次积分

$$p^2 - ay^2, \quad q^2 - ax^2.$$

由 $q^2 - ax^2 = A$ 我们有

$$z = y\sqrt{ax^2 + A} + b\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + A}} + B.$$

对于 $b = 0$，也可参看第一部分 § 9.6 中的例 2.

6.23. $pq = z^a$；第一部分 § 11.3 型的方程.

一个全积分是：

$a \neq 2$ 时， $z = \left[\frac{2-a}{2A}(A^2x + y + B)\right]^{\frac{2}{2-a}}$,

$a = 2$ 时， $z = Be^{Ax+\frac{y}{A}}$.

对于 $a=1$ 的情况，也可参看第一部分 § 9.2(c)，§ 9.3，§ 9.5(c)．

6.24. $\boldsymbol{pq=Ax^ay^bz^c}$；齐次方程．

设 $z(x,y)=\zeta(\xi,\eta)$ 及

$$\xi=\begin{cases}\dfrac{x^{a+1}}{a+1}, & a\neq-1,\\ \ln x, & a=-1;\end{cases}\qquad \eta=\begin{cases}\dfrac{y^{b+1}}{b+1}, & b\neq-1,\\ \ln y, & b=-1.\end{cases}$$

我们得到

$$p=x^a\zeta_\xi,\quad q=y^b\zeta_\eta.$$

因此(参看第一部分 § 11.3) 有

$$\zeta_\xi\zeta_\eta=A\zeta^c.$$

其次，如果 $c\neq2$，则此方程经变换 $\zeta=u^{\frac{2}{2-c}}$ 变为方程 6.21

$$u_\xi u_\eta=A\left(1-\frac{c}{2}\right)^2.$$

如果 $c=2$，则作变换 $u=\ln\zeta$ 后，得方程

$$u_\xi u_\eta=A.$$

6.25. $\boldsymbol{pq+ap=bz}$；第一部分 § 11.3 型的方程．

假设 $z(x,y)=\zeta(\xi)$，$\xi=x+Ay$，则得常微分方程

$$2A\zeta'=-a\pm\sqrt{4Ab\zeta+a^2}.$$

因此，由

$$b(x+Ay)+B=R+a\ln|R-a|$$

(其中 $R^2=4Abz+a^2$) 可得一个全积分．

6.26. $\boldsymbol{pq=ap+bq}$；　$F(p,q)=0$ 型的方程．

$$z=Ax+By+C,$$

其中 $AB=aA+bB$．

6.27. $\boldsymbol{pq=xp+yq}$．

从特征方程得首次积分

$$\frac{q}{p}, \quad p^2-2yp, \quad q^2-2xq,$$

$$(p\pm q)^2\pm 2(x\pm y)(p\pm q).$$

由此得到几个不同形式的全积分

$$z=\frac{(x+Ay)^2}{2A}+B,$$

$$z=xy+x\sqrt{y^2+A}+B,$$

$$z=xy+y\sqrt{x^2+A}+B,$$

$$z=xy+\frac{1}{2}\int\sqrt{\xi^2+A}\ d\xi+\frac{1}{2}\int\sqrt{\eta^2+A}d\eta+B$$

其中 $\xi=x+y$, $\eta=x-y$.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 427, 7(3), p. 840.

6.28. $pq+xp+yq=z$; 克莱罗方程.

一个全积分是

$$z=ax+by+ab.$$

奇积分是 $z=-xy$.

6.29. $pq+ayp+bxq=0,\quad ab\neq 0.$

我们可以求得不同形式的全积分.

(a) 在所给方程中变量可以分离. 于是作变换

$$\frac{p+bx}{bx}=A, \quad \frac{q+ay}{ay}=\frac{1}{A},$$

可得积分

$$z=\frac{A-1}{2}\left(bx^2-\frac{a}{A}y^2\right)+B.$$

(b) 如果所给方程写成如下形状

$$\frac{p}{x}\frac{q}{y}+a\frac{p}{x}+b\frac{q}{y}=0,$$

可见这是齐次方程．于是作变换

$$z(x, y) = \zeta(\xi, \eta), \quad \xi = x^2, \quad \eta = y^2,$$

我们得到方程 6.26

$$2\zeta_\xi\zeta_\eta + a\zeta_\xi + b\zeta_\eta = 0.$$

由此可得全积分

$$z = A\left(x^2 - \frac{a}{b + 2A}y^2\right) + C.$$

亦即和 (a) 中所求得的相同．

(c) 如果 $ab > 0$，则可这样确定 α, β，使得

$$a = \pm\alpha^2, \quad b = \pm\beta^2,$$

并且同时取正号或同时取负号．若设

$$z(x, y) = \zeta(\xi, \eta), \quad \xi = \beta x + \alpha y, \quad \eta = \beta x - \alpha y,$$

则得方程 6.85

$$\zeta_\xi^2 \pm \xi\zeta_\xi = \zeta_\eta^2 \pm \eta\zeta_\eta.$$

从而可得另一个全积分．

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 427, 7(3), p. 841.

6.30. $(p + a)(q + bz) = c$；第一部分 § 11.3 型的方程．

也可利用 $\frac{q}{p}$ 是一首次积分，而后按照第一部分 §9.3 进行．

6.31. $p(q - \sin y) = \sin x$；可分离变量方程．

$$z = A\cos x - \cos y - \frac{y}{A} + B.$$

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 293 (26), 394.

6.32. $2(pq + yp + xq) + x^2 + y^2 = 0.$

由特征方程得到首次积分 $p + q + x + y$，然后应用第一部分 § 9.3 中的方法．如果作变换

$$\zeta(\xi, \eta) = z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}, \quad \xi = \frac{x - y}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{x + y}{\sqrt{2}},$$

则得方程 6.74

$$\zeta_\xi^2 - \zeta_\eta^2 = 2\zeta^2.$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 395, 例 2(2), p. 827.

6.33. $p(kq + ax + by + cz) = 1, \quad c \neq 0.$

置

$$u(x, y) = -\frac{bk}{c} + ax + by + cz(x, y),$$

可得方程 6.30

$$(u_x - a)(cu + ku_y) = c^2.$$

参看 Forsyth, Diff. Equations V, p. 160.

34—42. $f(x, y)pq + \cdots$

6.34. $2xpq - zq = a.$

$$z^2 = 2(y - A)(Bx - a).$$

Forsyth, Diff. Equations V, p. 161.

6.35. $2xpq - zq + ap = 0.$

从特征方程可得首次积分 pq. 如果从原方程和方程 $pq = A$ 解出 p, q, 则得

$$ap = -Ax + \sqrt{aAz + A^2x^2},$$

$$zq = Ax + \sqrt{aAz + A^2x^2}.$$

对于这两个方程先用变换 $z = x^2u(x, y)$, 又用变换 $v^2 = aAu + A^2$, 它们容易求解，结果我们求得全积分的关系式

$$(aAz + A^2x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}aA^2(xz + ay) = A^3x^3 + B.$$

参看 Forsyth, Diff. Equations V, p. 161.

6.36. $ypq - zp + aq = 0, \ a \neq 0.$

函数 $z=$ 常数 显然是解. 为了得到与这平凡解不同的各种解，我们把不同的方法应用到这个方程上.

(a) 写出特征方程

$$\begin{cases}x'(t)=yq-z, \quad y'(t)=yp+a,\\ z'(t)=2ypq-zp+aq, \quad p'(t)=p^2, \quad q'(t)=0.\end{cases} \tag{1}$$

由此可得首次积分 q. 若令 $q=A$, 由原方程确定 p, 然后再积分，则可得全积分

$$z=Ay\pm\sqrt{2aAx+B}. \tag{2}$$

(b) 如果采用第一部分 § 11.14 中的勒让德变换，则得关于 Z 的线性常微分方程

$$Z_X-\frac{Z}{X}=\frac{aY}{X^2}$$

(Y 是参数). 求得 Z 后，再用勒让德逆变换，则得到这积分的参数表达式

$$x=\Omega(Y)+\frac{aY}{2X^2}, \quad y=X\Omega'(Y)-\frac{a}{2X},$$

$$z=XY\Omega'(Y)+\frac{aY}{2X}. \tag{3}$$

当然，这时假设 $X\neq 0$, 即 $z_x\neq 0$. 但是若在有限区域内解 $z_x=0$, 则由所给微分方程也推出 $z_y=0$. 因此，只得到平凡解 $z=$ 常数.

其次，假设在勒让德变换下，有

$$\frac{\partial(z_x, z_y)}{\partial(x, y)}\neq 0 \text{ 即 } z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2\neq 0,$$

因为，若在有限区域有 $z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=0$, 则由所给方程对于 x 和 y 求导后，得

$$z_{xx}(yz_y-z)+z_{xy}(yz_x+a)=z_x^2,$$
$$z_{xy}(yz_y-z)+z_{yy}(yz_x+a)=0.$$

由此 $z_x^2 z_{yy}=0$，$z_x^2 z_{xy}=0$．若在这区域内有 $z_x=0$，则这是早先已考察过的特例． 反之，如果 $z_x^2\neq 0$，则有 $z_{yy}=z_{yx}=0$．由此 $z_y=$ 常数．亦即 $z=Ay+\varphi(x)$．如果将它代入微分方程，则可确定 φ，并且重又得到全积分 (2)．

如果在(3)式中设 $\Omega(Y)=\frac{A}{2}Y+B$，则可从 (3) 中消去参数 X，Y，而得到全积分

$$z=\frac{x-B}{A}(y\pm\sqrt{y^2+aA}).$$

(c) 第一部分 § 11.15 中的欧拉变换可在两种形式下达到求解目的：

$$x=Z_X,\ y=Y,\ z=XZ_X-Z,\ z_x=X,\ z_y=-Z_Y \tag{c_1}$$

及

$$\begin{gathered}x=X,\ y=Z_Y,\ z=YZ_Y-Z,\\ z_x=-Z_X,\ z_y=Y.\end{gathered} \tag{c_2}$$

(c_1) 借助于这个变换，由所给方程可得线性微分方程

$$X^2Z_X+(XY+a)Z_Y=XZ,$$

它有积分

$$Z=X\Omega\left(\frac{2XY+a}{X^2}\right).$$

利用逆变换，可得原方程的以参数表示的积分

$$x=\Omega(u)-\left(u+\frac{a}{X^2}\right)\Omega'(u),\quad z=xX-X\Omega(u),$$

其中 $u=\frac{2yX+a}{X^2}$.

如果研究由于假设 $X\neq 0$ (亦 $z_x\neq 0$) 及 $z_{xx}\neq 0$ 到

底失掉了什么样的积分，则可查明，只是失掉了平凡积分 $z=$ 常数.

特别地，如果设 $\Omega(u)=A(u)+B$，则又得到全积分 (2).

(c₂) 在这情况下，所给方程化为

$$ZZ_X=aY.$$

因此

$$Z^2=2aXY+2\Omega(Y).$$

利用逆变换便得积分的参数表达式

$$(z-yY)^2=2axY+2\Omega(Y),$$

$$y^2=\frac{[ax+\Omega'(Y)]^2}{2axY+2\Omega(Y)}.$$

假设 $\Omega(u)=Au-B$，则得全积分

$$z=\frac{By}{ax+A}-\frac{ax+A}{2y}.$$

(d) 为了得到通过给定初始条形的一个积分曲面，可确定特征方程 (1) 的当 $t=0$ 时包含积分元素 x_0, y_0, z_0, $p_0\neq 0$, q_0 的解. 从最后两个特征方程和原方程，我们有

$$q=q_0,\quad \frac{1}{p}=\frac{1}{p_0}-t,\quad ypq-zp+aq=0. \tag{4}$$

若把这些式子代入前两个特征方程，则得

$$x'=\frac{aq_0}{p_0}(p_0t-1),\qquad y'+\frac{p_0y}{p_0t-1}=a.$$

由此

$$\begin{aligned} x&=x_0+aq_0\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t}{p_0}\right),\\ y&=-\frac{2p_0y_0+a}{2p_0(p_0t-1)}+\frac{a}{2p_0}(p_0t-1). \end{aligned} \tag{5}$$

然后由 (4) 的第三个方程得

$$z = -\frac{q_0}{2p_0}\left[\frac{2y_0p_0 + a}{p_0t - 1} + a(p_0t - 1)\right]. \tag{6}$$

这样，特征方程就已积出.

如果需要得到通过初始条形

$$x = \omega_1(s),\quad y = \omega_2(s),\quad z = \omega_3(s),\quad p = \omega_4(s),$$
$$q = \omega_5(s)$$

的一个积分曲面，则函数 ω_i 应该满足所给偏微分方程和条形条件

$$\omega_3' = \omega_4\omega_1' + \omega_5\omega_2'.$$

现在如果把

$$x_0 = \omega_1,\quad y_0 = \omega_2,\quad z_0 = \omega_3,\quad p_0 = \omega_4,\quad q_0 = \omega_5$$

代入关系式 (5) 和 (6)，则得含有参数 s, t 的参数表示下的积分曲面.

Serret-Scheffers, D-u. I-Rechnung III, p. 626—629; 那里还有参数表达式的其它变形.

6.37. $p(kyq + ax + by + cz) = 1$, $k \neq 0$.

由特征方程得

$$\frac{y'}{ky} + \frac{q'}{(k+c)q + b} = 0. \tag{1}$$

由此得出的首次积分按照 $k + c \neq 0$ 还是 $k + c = 0$，有两种不同情况.

(a) $k + c \neq 0$. 于是由方程 (1) 可得

$$q = -\frac{b}{k+c} + Ay^{-1-\frac{c}{k}},$$

因此

$$z = -\frac{b}{k+c}y - \frac{k}{c}Ay^{-\frac{c}{k}} + \varphi(x).$$

如果将 z 的表达式代入原微分方程，则得关系式

$$(c\varphi + ax)\varphi' = 1. \tag{2}$$

于是，若置 $u(x) = c\varphi + ax$，则有

$$\frac{uu'}{au + c} = 1,$$

此处要区分 $a \neq 0$ 与 $a = 0$ 这两种情况.

(b) $k + c = 0$，即 $k = -c$. 于是由方程(1)可得

$$q = \frac{b}{c}\ln y + A$$

因此

$$z = \frac{b}{c}y(\ln y - 1) + Ay + \varphi(x).$$

并且又得到关于 φ 的方程 (2).

如果 $k + c \neq 0$，则用变换

$$ax + \frac{bc}{k + c}y + cz = \zeta(\xi, \eta), \ \xi = x, \eta = \ln y.$$

也可将所给微分方程化为 6.30 型

$$(\zeta_\xi - a)(k\zeta_\eta + c\zeta) = c^2.$$

参看 Forsyth, Diff. Equations V, p. 161.

6.38. $(x - y)pq + (x - z)p + (z - y)q = 0.$

通过勒让德变换(参看第一部分 § 11.14)，我们得到微分方程 2.29

$$X(2Y - X + 1)\frac{\partial Z}{\partial X} - Y(2X - Y + 1)\frac{\partial Z}{\partial Y} = (Y - X)Z,$$

它有积分

$$Z = (X + Y - 1)\Omega(u), \quad u = \frac{(X + Y - 1)^3}{XY}. \tag{1}$$

由此我们得到原方程的在参数形式下的积分

$$z = xX + yY - Z,$$

$$x=\Omega(u)+\frac{u}{X}(2X-Y+1)\Omega'(u),$$

$$y=\Omega(u)+\frac{u}{Y}(2Y-X+1)\Omega'(u).$$

这里还要添写方程 (1).

6.39. $xypq=1$.

设

$$z(x,y)=\zeta(\xi,\eta),\quad \xi=\ln x,\quad \eta=\ln y,$$

则得微分方程 6.21: $\zeta_\xi\zeta_\eta=1$. 因此,我们求得全积分

$$z=A\ln x+\frac{\ln y}{A}+B.$$

这个微分方程也可作为可分离变量方程来处理.

6.40. $xypq=z^2$; 齐次微分方程.

设

$$z=\pm e^{\zeta(\xi,\eta)},\quad \xi=\ln x,\quad \eta=\ln y,$$

则得微分方程 6.21: $\zeta_\xi\zeta_\eta=1$.

6.41. $(x^2+1)p(q-1)+xy^2q=0$.

方程中的变量可以分离

$$\frac{x^2+1}{x}p=\frac{y^2q}{1-q}.$$

于是得全积分

$$z=\pm\frac{A^2}{2}\ln(x^2+1)+B+\begin{cases}A\operatorname{arctg}\dfrac{y}{A}, & \text{当取正号时},\\ A\cdot\operatorname{Arth}\dfrac{y}{A} & \\ \text{或 } A\cdot\operatorname{Arcth}\dfrac{y}{A}, & \text{当取负号时}.\end{cases}$$

6.42. $[(1-x)^2-y][(1-x)(1-p)-z]q=a(1-x)^2$.

作变换

$$z = (1-x)Z(u), \qquad u = \frac{y}{(1-x)^2},$$

则可得关于 $Z(u)$ 的一个常微分方程．因此，在点 $x=0$，$y=0$ 处正则且当 $y=0$ 时等于零的积分是

$$z = (1-x)\int_0^u \frac{1}{4u}\left(1-\sqrt{1-\frac{8au}{1-u}}\right)du.$$

O. Perron, *Math. Zeitschrift*, **5** (1919), p. 157.

43—48. $f(z)pq+\cdots$

6.43. $\boldsymbol{zpq = ap + bz}$；第一部分 § 11.3 型的方程．

$$-a\ln|a\pm\sqrt{4Abz^2+a^2}|\pm\sqrt{4Abz^2+a^2} = 2b(x+Ay+B).$$

6.44. $\boldsymbol{zpq = xp + yq}$.

由特征方程可得首次积分 $\dfrac{p}{q}$，再用第一部分 §9.3 的方法而得全积分

$$z^2 = \frac{1}{AB}(Ax+By)^2 + C.$$

6.45. $\boldsymbol{zpq + x^2yp + xy^2q = xyz}$.

用变换

$$z^2 = \zeta(\xi,\eta), \quad \xi = x^2, \quad \eta = y^2,$$

可得第一部分 § 11.12 中的克莱罗方程

$$\zeta = \xi\zeta_\xi + \eta\zeta_\eta + \zeta_\xi\zeta_\eta.$$

由此得全积分

$$z^2 = Ax^2 + By^2 + AB.$$

函数 $z=0$ 是奇积分．

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 293 (35), 395.

6.46. $\boldsymbol{(z+a)pq = bz^2}$；第一部分 § 11.3 型的方程．

通过变换

$$z(x, y)=\zeta(\xi), \quad \xi=x+Ay,$$

我们得到常微分方程

$$A(\zeta+a)\zeta'^2=b\zeta^2.$$

由此求得

$$\xi+B=\pm\sqrt{\frac{A}{b}}\int\frac{\sqrt{\zeta+a}}{\zeta}d\zeta.$$

如果作置换 $\zeta+a=u^2$，则积分容易求出. $z=0$ 也是一个积分.

6.47. $(a+b)zpq+axq+byp=0$；齐次微分方程.

通过变换

$$z(x, y)=\zeta(\xi, \eta), \ \xi=\frac{x^2}{2}, \ \eta=\frac{y^2}{2},$$

可得第一部分 §11.3 型的方程

$$(a+b)\zeta\zeta_\xi\zeta_\eta+a\zeta_\eta+b\zeta_\xi=0.$$

由它我们求得全积分

$$z^2=C-\frac{aB+bA}{(a+b)AB}(Ax^2+By^2).$$

6.48. $z^2pq=xy+a.$

设 $2u(x, y)=z^2$，我们得到方程 6.22

$$u_xu_y=xy+a.$$

为了求原方程的解，也可利用它的首次积分

$$z^2p^2-y^2, \quad z^2q^2-x^2, \quad (xp-yq)z.$$

Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 144—150.

49—54. $(\cdot\cdot)p^2+(\cdot\cdot)pq+\cdots$

6.49. $ap^2+bpq=cz^2$；第一部分 §11.3 型的方程.

$$z = c\exp[(Ax + By)R],$$

其中 $R^2 = \dfrac{c}{A(aA + bB)}$.

6.50. $\boldsymbol{xp^2 - pq + ay^2 = 0}$.

由特征方程得首次积分 pe^{-y}. 其次,考察方程组

$$p = Ae^y, \quad q = \frac{a}{A}y^2e^{-y} + Axe^y,$$

由此,我们最后求得

$$z = Axe^y - \frac{a}{A}(y^2 + 2y + 2)e^{-y} + B.$$

6.51. $\boldsymbol{xp^2 + ypq = 1}$; 可分离变量方程

由方程组

$$xp - \frac{1}{p} = A, \quad yq = -A$$

得全积分

$$z = \sqrt{4x + A^2} + A\ln\left|\frac{\sqrt{4x + A^2} - A}{y}\right| + B.$$

6.52. $\boldsymbol{axp^2 - (ay + b)pq + cy(ay + b)^2 = 0}$.

由特征方程得首次积分 $\dfrac{p}{ay + b}$. 由它并从原方程式得到关于 z 的方程组

$$p = A(ay + b), \quad q = aAx + \frac{c}{A}y.$$

由此得全积分

$$z = Ax(ay + b) + \frac{cy^2}{2A} + B.$$

6.53. $\boldsymbol{(z^2 + 1)yp^2 + xzpq = 4x^2y}$; 齐次微分方程.

变换

$$z(x, y) = \zeta(\xi, \eta), \quad \xi = x^2, \quad \eta = y^2$$

将所给方程化为第一部分§11.3型的方程

$$(\zeta^2+1)\zeta_\xi^2+\zeta\zeta_\xi\zeta_\eta=1.$$

6.54. $p^2+z^2pq=z^2$; 第一部分§11.3型.

作变换

$$z(x,y)=\zeta(\xi),\quad \xi=Ax+By,$$

我们得到常微分方程

$$(A^2+AB\zeta^2)\zeta'^2=\zeta^2.$$

由此得全积分

$$\pm(Ax+By+C)=R+A\ln\frac{R-A}{z},$$

其中 $R^2=ABz^2+A^2$.

55—68. $ap^2+bq^2=f(x,y),f(x,y,z)$

6.55. $p^2+q^2=a^2$; 方程6.56的特例.

例如,平面

$$z=Ax+By+C$$

是积分,其中 $A^2+B^2=a^2$. 通过每一点 (ξ,η,ζ) 的特征线构成一个正圆锥面,其轴平行于 z 轴且圆锥面本身是一积分曲面.

如果要找这样积分曲面 $z(x,y)$,它包含曲线

$x=\xi,\quad y=\eta,\quad z=\omega(\eta)\ (-\infty<\eta<+\infty)$

(其中 ξ 是固定的),则 $z(\xi,\eta)=\omega(\eta)$,于是 $z_\eta(\xi,\eta)=\omega'(\eta)$. 因此应有 $|\omega'(\eta)|\leqslant a$; 于是根据原偏微分方程,有

$$z_x(\xi,\eta)=\pm\sqrt{a^2-\omega'^2}.$$

由特征方程

$$x'(t)=2p,\ y'(t)=2q,\ z'(t)=2p^2+2q^2,$$

$$p'(t)=0, \quad q'(t)=0$$

我们求得

$$p=\pm\sqrt{a^2-\omega'^2}, \quad q=\omega',$$

$$x=\xi\pm 2t\sqrt{a^2-\omega'^2},\ y=\eta+2t\omega',\ z=\omega(\eta)+2a^2t.$$

最后三个方程可以看作是所求积分的参数表达式.消去参数 t 和 η,我们得到

若 $\omega(\eta)=c$, 则 $z=c\pm a(x-\xi)$;

若 $\omega(\eta)=\alpha+\beta\eta$, 则 $z=\alpha+\beta y \pm(x-\xi)\sqrt{a^2-\beta^2}$;

若 $\omega(\eta)=\gamma+\frac{a}{\beta}\sqrt{1+(\alpha+\beta\eta)^2}$, 则

$$z=\gamma+\frac{a}{\beta}\sqrt{[1+\beta(x-\xi)]^2+(\alpha+\beta y)^2}.$$

关于这个微分方程的详细讨论及其对于几何光学方面的意义,参看 Courant-Hilbert, Methoden math. Physik II, p. 74 (中译本:数学物理方法 II, p. 69—72); Hamilton-Prange, Strahlenoptik, p. 204.

6.56. $ap^2+bq^2=c$; 第一部分 § 11.1 型.

一个全积分是

$$z=Ax+By+C,$$

其中 $aA^2+bB^2=c$, 或者

$$\frac{z^2}{c}=\frac{(x-A)^2}{a}+\frac{(y-B)^2}{b}.$$

6.57. $p^2+q^2=ay+b$; 方程 6.74 的特例.

$$z=Ax+\frac{2}{3a}(ay+b-A^2)^{\frac{3}{2}}+B.$$

这个方程在重力作用下的运动问题中出现. 参看 Darboux, Théorie des surfaces, II, 第二版, p. 29.

6.58. $p^2+q^2=x+y$; 方程 6.74 的特例.

$$z=\frac{2}{3}(x+A)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}(y-A)^{\frac{3}{2}}+B.$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 384.

6.59. $p^2+q^2=x^2+y^2$; 方程 6.74 的特例.

$$2z=x\sqrt{x^2\pm A^2}\pm A^2\begin{cases}\operatorname{Arsh}\dfrac{x}{A}\\ \operatorname{Arch}\dfrac{x}{A}\end{cases}+y\sqrt{y^2\mp A^2}$$

$$\mp A^2\begin{cases}\operatorname{Arch}\dfrac{y}{A}\\ \operatorname{Arsh}\dfrac{y}{A}\end{cases}+B$$

其中函数 Arch u 中的变量大于 1.

6.60. $p^2+q^2=x^2+xy+y^2$.

作变换

$$z(x,y)=\zeta(\xi,\eta),\ 2\xi=x+y,\ 2\eta=x-y,$$

则得可分离变量方程

$$\zeta_\xi^2-6\xi^2=2\eta^2-\zeta_\eta^2.$$

由此求得全积分,

$$z=\int\sqrt{6\xi^2+A}\,d\xi+\int\sqrt{2\eta^2-A}\,d\eta+B.$$

这些积分也可以用双曲函数表示.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 427, 7(1), p. 840.

6.61. $p^2+q^2=ax^m+by^n+c$; 方程 6.74 的特例.

$$z=\pm\int\sqrt{ax^m+A}\,dx\pm\int\sqrt{by^n+c-A}\,dy.$$

6.62. $p^2+q^2=\dfrac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}+b.$

作变换

$$z(x,y)=\zeta(\rho,\theta),\quad x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta.$$

我们得到可分离变量方程

$$\rho^2\zeta_\rho^2-b\rho^2-a\rho=-\zeta_\theta^2.$$

由它求得全积分

$$z=\pm\int\sqrt{b+\frac{a}{\rho}-\frac{A^2}{\rho^2}}\,d\rho+A\theta+B.$$

Courant-Hilbert, Methoden math. Physik II, p. 15（中译本：数学物理方法 II, p. 15—16）。

6.63. $p^2+q^2=f(x)$；方程 6.74 的特例.

$$z=Ay+B\pm\int\sqrt{f(x)-A^2}\,dx.$$

这个方程出现在微分几何中。可参看 Darboux, Théorie des surfaces, *III*, 第一版，p. *29—30*.

6.64. $p^2+q^2=f(x^2+y^2)$；质点在中心力作用下作平面运动时的哈密顿方程. 参看 Kamke 册手 I，第三部分 9.26 题，(中译本，760 页). 由特征方程得

$$(xq)'-(yp)'=0\ \text{即}\ xq-yp=A.$$

令 $r^2=x^2+y^2$，由这个方程及所给方程推得

$$p=-\frac{Ay}{r^2}\pm\frac{x}{r^2}\sqrt{r^2f(r^2)-A^2},$$

$$q=\frac{Ax}{r^2}\pm\frac{y}{r^2}\sqrt{r^2f(r^2)-A^2}.$$

因此，当 $e^\rho=r^2$ 时，有

$$z=-A\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\pm\frac{1}{2}\int\sqrt{e^\rho f(e^\rho)-A^2}\,d\rho+B.$$

6.65. $p^2+q^2=f(x,y)$；第一部分 § 11.13 型.

如果把方程表为如下形状

$$\frac{p^2+q^2}{2}+U(x,y)=C \tag{1}$$

则这是一个质点的平面运动的哈密顿方程.

方程 (1) 的没有中间一个方程(即缺少条形条件)的特征方程组具有下列形状

$x'(t)=p,\ y'(t)=q,\ p'(t)=-U_x,\ q'(t)=-U_y.$

由此推得

$$x''(t)=-U_x(x, y), \quad y''(t)=-U_y(x, y).$$

于是 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 可作为单位质点在势函数 $U(x, y)$ 作用下发生的运动方程. 由特征方程得

$$\frac{p^2+q^2}{2}+U(x, y)=C,$$

这说明,表达式 $\frac{p^2+q^2}{2}$ 是动能,而前面所写的方程就是能量守恒定律的表达式.

如果能求得方程 (1) 的单参数积分族 $z=\phi(x, y, A)$, 并且 $|\phi_{Ax}|+|\phi_{Ay}|>0$, 则根据第一部分 § 11.13, 这个运动的轨道将是满足方程

$$\phi_A = \text{常数}$$

的曲线.

方程 (1) 对于几何光学具有重大意义. 如果存在非均匀(但各向同性)的在点 (x, y) 处具有折射系数 $f(x, y)$ 的介质, 则方程的特征线就是光线的路径, 且方程 $z=$ 常数给出波前. 参看 Courant-Hilbert, Methoden math. Physik II, p. 74 (中译本: 数学物理方法 II, p. 69—72).

Bieberbach, DGlen, p. 290.

6.66. $ap^2+bq^2=cz$; 第一部分 § 11.3 型.

$$z=\frac{c}{4(aA^2+bB^2)}(Ax+By+C)^2; \quad z=0.$$

6.67. $p^2+q^2=(x^2+y^2)z$; 齐次方程.

设 $u(x, y)=2\sqrt{z}$, 则得可分离变量方程

$$u_x^2 - x^2 = y^2 - u_y^2.$$

因此

$$u = \int \sqrt{x^2 + A}\,dx + \int \sqrt{y^2 - A}\,dy + B.$$

6.68. $\boldsymbol{p^2 + q^2 = az^2 + b}$; 第一部分 § 11.3 型.

作变换

$$z(x, y) = \zeta(\xi), \quad \xi = Ax + By,$$

我们得到

$$\pm\sqrt{A^2 + B^2}\int \frac{d\zeta}{\sqrt{a\zeta^2 + b}} = \xi.$$

特别地，若 $a = 1$, $b = 0$, 则得

$$z = C \exp \frac{Ax + By}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

关于特殊情况，参看 Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 113, 135—140.

69—74. $f(x, y)p^2 + g(x, y)q^2 = h(x, y, z)$

6.69. $\boldsymbol{xp^2 - yq^2 = x + y}$; 方程 6.74 的特例.

如果 $x(x + A) > 0$, $y(A - y) > 0$, 则

$$z = \pm\left[\sqrt{x(x + A)} + \frac{A}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{|x + A|} + \sqrt{|x|}}{\sqrt{|x + A|} - \sqrt{|x|}}\right|\right]$$

$$\pm\left[\sqrt{y(A - y)} - A\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{A - y}{y}}\right] + B.$$

括号前的符号可以彼此独立地选取.

6.70. $\boldsymbol{ax^2p^2 + by^2q^2 = z^c}$; 齐次方程.

作变换

$$z(x, y) = \zeta(\xi, \eta), \quad \xi = \ln x, \quad \eta = \ln y,$$

我们得到方程

$$a\zeta_\xi^2 + b\zeta_\eta^2 = \zeta^c.$$

由此，变换

$$\zeta = \begin{cases} u^{\frac{2}{2-c}}, & c \neq 2; \\ e^u, & c = 2. \end{cases}$$

将它化为方程 6.56

$$au_\xi^2 + bu_\eta^2 = \begin{cases} \left(\dfrac{2-c}{2}\right)^2, & c \neq 2; \\ 1, & c = 2. \end{cases}$$

6.71. $(x + a_1)(x + a_2)p^2 - (y + a_1)(y + a_2)q^2 = a\sqrt{x + a_1} + b\sqrt{y + a_2} + c(x - y)$；可分离变量方程.

$$z = \int\sqrt{\frac{A + cx + a\sqrt{x + a_1}}{(x + a_1)(x + a_2)}}\,dx + \int\sqrt{\frac{A + cy - b\sqrt{y + a_2}}{(y + a_1)(y + a_2)}}\,dy + B$$

是一全积分.

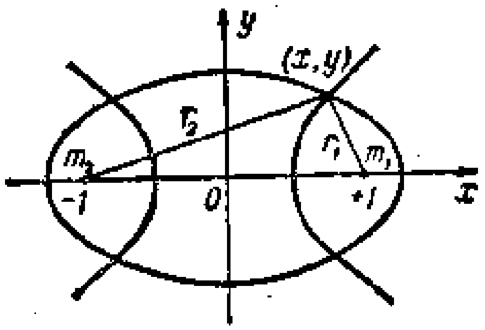

图 20

如果将哈密顿方程

$$\frac{p^2 + q^2}{2} + U(x, y) = c,$$

$$U = -\frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2}$$

(x, y 平面上单位质点的运动方程，该质点受位于点 $x=\pm 1$, $y=0$ 处的质量 m_1, m_2 的引力作用）变换到椭圆坐标，则得具有 $2a = m_1 + m_2$, $2b = m_1 - m_2$ 且以 λ_1, λ_2 代替 x, y 的所给方程. 同时作为椭圆坐标的参数 λ_1, λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) 对应于点 (x, y)，并在固定的 $a_1 > a_2 > 0$, $a_1 - a_2 = 1$ 下，确定两条通过点 (x, y) 的二次曲线(图20)

$$\frac{x^2}{a_1+\lambda} + \frac{y^2}{a_2+\lambda} = 1.$$

参看 Bieberbach, DGlen, p. 291—294.

[本题较难，兹作补充说明如下.

1) 椭圆坐标定义.

考虑二次曲线族

$$\frac{x^2}{a_1+\lambda} + \frac{y^2}{a_2+\lambda} = 1, \tag{i}$$

这里设常数 a_1, a_2 满足条件

$$a_1 > a_2 > 0, \quad a_1 - a_2 = 1. \tag{ii}$$

从几何考虑，容易知道：对于 XOY 平面的任一定点 (x, y)，曲线族 (i) 中必有两条线通过它；其中一条是椭圆，另一条是双曲线.

为了求一定点 (x, y) 的坐标同通过两条曲线的参数 $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ 间的关系，先把方程 (i) 写为如下形式

$$\begin{aligned}(a_1+\lambda)(a_2+\lambda) - (a_2+\lambda)x^2 - (a_1+\lambda)y^2 \\ = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = 0.\end{aligned} \tag{iii}$$

上式中 λ_1, λ_2 是方程 (i) 当 x, y 已给定时的两个根.

令 $\lambda = -a_1$, 再令 $\lambda = -a_2$, 并因 (ii) 式，则得

$$x^2 = (a_1 + \lambda_1)(a_1 + \lambda_2),$$
$$y^2 = -(a_2 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_2). \tag{iv}$$

这式可看作是一点 (x, y) 同通过它的两条曲线的参数 λ_1, λ_2 间的关系式.

如果不用直角坐标 x, y, 而改用所对应的参数 λ_1, λ_2 来表示这平面上的点, 则称 (λ_1, λ_2) 为**椭圆坐标**.

2) 在椭圆坐标系下的哈密顿方程.

在本情况,该方程是

$$\frac{p^2 + q^2}{2} + U(x, y) = C. \tag{v}$$

为了计算 $U(x, y)$, 先应注意从 (iv) 与 (ii) 可推得

$$x^2 + y^2 = a_1 + a_2 + \lambda_1 + \lambda_2. \tag{vi}$$

又因(参看图 20)

$$\begin{matrix} r_2^2 \\ r_1^2 \end{matrix} = (x \pm 1)^2 + y^2 = x^2 + y^2 \pm 2x + 1,$$

利用 (vi), (ii), (iii) 可算得

$$\begin{matrix} r_2^2 \\ r_1^2 \end{matrix} = 2a_1 + \lambda_1 + \lambda_2 \pm 2\sqrt{(a_1 + \lambda_1)(a_1 + \lambda_2)}$$
$$= [\sqrt{a_1 + \lambda_1} \pm \sqrt{a_1 + \lambda_2}]^2.$$

因此,得

$$U(x, y) = -\frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2}$$
$$= -\frac{(m_1 + m_2)\sqrt{a_1 + \lambda_1} + (m_1 - m_2)\sqrt{a_1 + \lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

尚需把对 x, y 的偏导数 p, q 化为对 λ_1, λ_2 的偏导数. 这可以利用变换式 (iii) 来计算. 虽然计算比较冗长,但计算方法是通常所用的. 计算后得(参看前引的 Bieberbach 的书, p. 293)

$$\frac{p^2+q^2}{4}=\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda_1}\right)^2\frac{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}$$
$$-\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda_2}\right)^2\frac{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

把上面所得两个式子代到方程（v），最后得在椭圆坐标系下的哈密顿方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda_1}\right)^2(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)-\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda_2}\right)^2(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)$$
$$=\frac{m_1+m_2}{2}\sqrt{a_1+\lambda_1}+\frac{m_1-m_2}{2}\sqrt{a_1+\lambda_2}+C(\lambda_1-\lambda_2).$$

这就证明了本题的方程是这个方程当自变量为 λ_1，λ_2，而 $2a=m_1+m_2$，$2b=m_1-m_2$ 时的特殊情况.

——校者注]

6.72. $\boldsymbol{4y(a-x)(b-x)(c-x)p^2}$
$\boldsymbol{-4x(a-y)(b-y)(c-y)q^2=(x-y)xy.}$

如果将方程两端除以 xy，则变量可以分离，于是得全积分

$$z=\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{x(x+A)}{N(x)}}dx+\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{y(y+A)}{N(y)}}dy+B,$$

其中

$$N(x)=(a-x)(b-x)(c-x).$$

这个方程在寻求半轴为 a，b，c 的椭球面上的测地线时遇到.

参看 Courant-Hilbert, Methoden math. Physik II, p.94（中译本：数学物理方法 II, p.88—90）.

6.73. $\boldsymbol{(p^2-1)\sin^2x+q^2=0}$；方程 6.74 的特例.

$$z=Ay+B\pm\int\sqrt{1-\frac{A^2}{\sin^2x}}dx.$$

在单位球面上引进正交测地参数曲线时产生这个方

程．

参看 Knoblauch, Differentialgeometrie, p.459.

6.74. $f(x)p^2+g(y)q^2=\varphi(x)+\psi(y)$；可分离变量方程．

$$z=\int\sqrt{\frac{\varphi+A}{f}}\,dx+\int\sqrt{\frac{\psi-A}{g}}\,dy+B.$$

在微分几何中研究刘维尔曲面时遇到这个方程．

可参看 Darboux, Théorie des sur faces, III（第一版，p. 9），在该书中还讨论与这有关的各种特殊情况．

75—80. $f(x,y,z)p^2+g(x,y,z)q^2=h(x,y,z)$

6.75. $ap^2+bzq^2=c^2$；第一部分 § 11.3 型．

$$bB^2z=-aA^2+\left[\frac{3bcB^2}{2}(Ax+By+c)\right]^{\frac{2}{3}}.$$

6.76. $z(p^2-q^2)=x-y$.

作变换

$$z(x,y)=\zeta(\xi,\eta)\quad \xi=x-y,\quad \eta=x+y,$$

则得方程

$$4\zeta\zeta_\xi\zeta_\eta=\xi.$$

由它再利用变换 $\zeta=u(\xi)v(\eta)$，可求得原方程的全积分

$$8z^3=[3(x-y)^2+A][3(x+y)+B].$$

6.77. $xzp^2-yzq^2=x+y$；齐次方程．

通过未知函数的变换

$$u(x,y)=\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}},$$

我们得到可分离变量方程 6.69

$$x(u_x^2-1)=y(u_y^2+1).$$

6.78. $z^2(p^2+q^2)=x^2+y^2$；齐次方程．

通过未知函数的变换 $2u(x,y)=z^2$ 可得方程 6.59

$$u_x^2+u_y^2=x^2+y^2.$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 385, 例 2(1) p. 821.

6.79. $z^2(ap^2+bq^2)=z^2+c$；第一部分 § 11.3 型的方程.

应用第一部分 § 11.3 中的方法，可求得全积分

$$(aA^2+bB^2)(z^2+c)=(Ax+By+c)^2. \qquad (1)$$

如果作变换 $z^2=u(x)+v(y)$，则变量可以分离，并得如下形状的一个全积分

$$z^2=-c+\frac{(x-A)^2}{a}+\frac{(y-B)^2}{b}. \qquad (2)$$

如果 $a=-1, b=-1, c=-r^2<0$，则关系式 (1) 表示柱面，关系式 (2) 表示球面

$$(x-A)^2+(y-B)^2+z^2=r^2.$$

于是这些球面中那些中心在 x, y 平面上沿一条曲线（这时可能出现包络脊线）运动的包络面（如果它们存在），在这情况下也是积分. 就是说，我们得到了管状或隧道形的曲面.

Goursat, Équations du premier ordre, p. 139; Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 106; Courant-Hilbert, Methoden math. Physik II, p. 80（中译本：数学物理方法 II, p. 21, 75）.

6.80. $z^2(y^2p^2+x^2q^2)=a^2x^2y^2$；齐次方程.

变换

$$2\zeta(\xi,\eta)=z^2,\quad 2\xi=x^2,\quad 2\eta=y^2$$

将方程化为方程 6.55

$$\zeta_\xi^2+\zeta_\eta^2=a^2.$$

Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 163—169.

81—88. $(\cdot\cdot)p^2+(\cdot\cdot)q^2+(\cdot\cdot)p+(\cdot\cdot)q+\cdots$

6.81. $p^2+q^2+xp+yq=z-1$；克莱罗方程。

一个全积分是

$$z=Ax+By+A^2+B^2+1.$$

奇积分是

$$4z+x^2+y^2=4.$$

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 293 (29), 395.

6.82. $p^2+q^2-2xp-2yq+2xy=0$.

从特征方程可得首次积分 $p+q=x-y$，然后可得全积分

$$2z=x^2+y^2+A(x+y)\pm(x-y)\sqrt{\frac{(x-y)^2}{2}-\frac{A^2}{4}}$$

$$\mp\frac{A^2}{2\sqrt{2}}\operatorname{Arch}\frac{\sqrt{2}\,|x-y|}{A}+B,$$

其中$|x-y|>\dfrac{A}{\sqrt{2}}$，且函数 Arch 具有 $x-y$ 的正负号。

如果作变换

$$\zeta(\xi,\eta)=z-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2},$$

$$\xi=\frac{x-y}{\sqrt{2}},\quad \eta=\frac{x+y}{\sqrt{2}},$$

则得可分离变量方程

$$\zeta_\xi^2+\zeta_\eta^2=2\xi^2.$$

由它又可得到前面的全积分。

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 394 (印刷上有错)。

6.83. $p^2+q^2-2yp-2xq=1-x^2-y^2$.

即 $(p-y)^2+(q-x)^2=1$.

从特征方程可得首次积分 $p-y$ 及 $q-x$. 于是得全积分

$$z=xy+Ax+By+C,$$

其中 $A^2+B^2=1$.

6.84. $\boldsymbol{p^2+q^2=4(xp+yq-z)}$; 克莱罗方程.

一个全积分是

$$z=Ax+By-\frac{A^2+B^2}{4},$$

奇积分是

$$z=x^2+y^2.$$

其它积分是

$$x^2+By-\frac{B^2}{4},\quad y^2+Ax-\frac{A^2}{4},\quad \frac{(Ax+By)^2}{A^2+B^2}.$$

6.85. $\boldsymbol{ap^2+bq^2+2cxp+2dyq=k}$, $ab>0$. 可分离变量方程.

一个全积分是

$$z=u(x)+v(y)+B,$$

其中 u, v 分别满足常微分方程

$$au'^2+2cxu'=A,\quad bv'^2+2dyv=k-A.$$

如果 $A=0$, 则或者 $u=0$, 或者 $u=-\frac{c}{a}x^2$, 或者 $u(x)$ 表为这两条曲线的组合.

如果 $c=0$, 则需要这样选取数 A 的正负号, 使 $aA>0$; 于是 $u=x\sqrt{\frac{A}{a}}$.

如果 $A\neq 0$, $c\neq 0$, 则有

$$u=-\frac{c}{2a}x^2\pm\frac{c}{a}\int\sqrt{x^2+\frac{aA}{c^2}}\,dx.$$

当 $\alpha > 0$[1] 时，对积分作变换可得表达式

$$\int\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{2}\operatorname{Arsh}\frac{x}{\alpha},$$

$$\int\sqrt{x^2-\alpha^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-\alpha^2}-\frac{\alpha^2}{2}\frac{|x|}{x}\operatorname{Arch}\frac{|x|}{\alpha},$$

$$|x| > \alpha.$$

并且对 $u > 0$ 时，Arch u 理解为这个函数的正分支.

关于 v 的方程可同样地讨论.

一个特例，参看 Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 395, 例 2(1), p. 826.

6.86. $\boldsymbol{p^2-q^2-2zp+z^2=1}$；第一部分 § 11.3 型的方程.

作变换

$$z(x, y) = \zeta(\xi), \quad \xi = Ax + By,$$

可得常微分方程

$$(A^2-B^2)\zeta' = A\zeta \pm \sqrt{B^2\zeta^2+A^2-B^2}.$$

于是从下式可得一全积分

$$Ax + By + C = \int\frac{A^2-B^2}{Az \pm \sqrt{B^2z^2+A^2-B^2}}\,dz.$$

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 292 (21), 394.

6.87. $\boldsymbol{(x^2-1)[x^2(xp-z)^2-x^2p^2-q^2]+x^2z^2=0.}$

设 $z = u(x, y)\sqrt{|x^2-1|}$，我们得到方程

$$x^2(x^2-1)u_x^2 - u_y^2 = 0.$$

当 $x^2 < 1$ 时，必须有 $u_x = u_y = 0$，于是得积分

$$z = C\sqrt{1-x^2}.$$

---

1) [此处用 α^2 表示 $\frac{aA}{c^2}$ 或 $-\frac{aA}{c^2}$. ——俄译本编者注] 下列两式可在一般积分表中查到. ——译者注

当 $x^2>1$ 时，该微分方程可写为分解的形式

$$(x\sqrt{x^2-1}\ u_x+u_y)(x\sqrt{x^2-1}\ u_x-u_y)=0,$$

其中每一因子给出一个线性方程．对于这两个方程，我们求得函数

$$\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\mp y$$

作为积分基底．于是所给方程的积分是

$$z=\sqrt{x^2-1}\,\Omega(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\pm y).$$

6.88. $(zp+x)^2+(zq+y)^2-a^2z^2(p^2+q^2+1)=0.$

从特征方程得到首次积分

$$zp+x,\quad zq+y.$$

它们给出两个既与所给方程彼此对合，又它们本身也彼此对合的方程．因此，可以应用第一部分 §9.2 中的方法，并得到作为全积分的半球族

$$(x-A)^2+(y-B)^2+z^2=\frac{A^2+B^2}{a^2}\ (z\gtreqless 0).$$

当 $a^2>1$ 时，有一奇积分

$$(a^2-1)z^2=x^2+y^2.$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 364.

89—111. $(\cdot\cdot)p^2+(\cdot\cdot)q^2+(\cdot\cdot)pq+\cdots$

6.89. $p^2+q^2=apq$；第一部分 §11.2 型的方程．

$$z=Ax+By+C,$$

其中 $A^2+B^2=aAB$．

6.90. $xp^2+yq^2=2pq.$

从特征方程得到首次积分 $\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$．如果令它等于

$\frac{1}{A}$，并利用原方程，则得

$$\frac{p}{A}=\frac{1-x}{x}\pm\frac{1}{x}\sqrt{1-xy},$$

$$\frac{q}{A}=\frac{y-1}{y}\pm\frac{1}{y}\sqrt{1-xy}.$$

于是得全积分

$$z=A(y-x)+A\ln\left|\frac{x}{y}\right|$$

$$\pm A\left(2\sqrt{1-xy}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-xy}}{1+\sqrt{1-xy}}\right|\right)+B.$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 398，例 2，p. 828.

6.91. $z(p-q)^2+a(p+q)^2=b$；第一部分 §11.3 型的方程。

如果 $A\neq B$，则有

$$z=-a\left(\frac{A+B}{A-B}\right)^2+\sqrt[3]{b}\left[\frac{3(Ax+By+C)}{2(A-B)}\right]^{\frac{2}{3}}.$$

6.92. $(p^2+4q^2)\mathrm{ch}^2y-4pq\,\mathrm{ch}y\,\mathrm{sh}y=1$.

对于 p 解这个方程，则得可分离变量方程

$$p=2q\,\mathrm{th}y\pm\frac{\sqrt{1-4q^2}}{\mathrm{ch}y}$$

由此得全积分

$$z=Ax+\frac{A}{2}\ln\mathrm{ch}y\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-A^2}\,\mathrm{arctg}\,\mathrm{sh}y+B.$$

6.93. $(yp-xq)^2+a(xp+yq)=b$.

从特征方程得首次积分 $xp+yq$, $yp-xq$. 如果现在设 $yp-xq=A$，则由它和原方程可求出 p, q，而后得全积分

$$z=\frac{b-A^2}{2a}\ln(x^2+y^2)-A\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}+B.$$

如果作变换

$$z(x,y)=\zeta(\rho,\theta),\quad x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta.$$

则得可分离变量方程

$$\zeta_\theta^2=-a\rho\zeta_\rho+b.$$

从此得

$$\zeta=A\theta+\frac{b-A^2}{a}\ln\rho+B.$$

于是回到原变量,又得到前面已求得的表达式.

Nouvelles Annales Math., (6) **2** (1927) 116. Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 186.

6.94. $(yp-xq)^2+az(xp+yq-z)=0.$

通过变量代换

$$z(x,y)=\zeta(\rho,\theta),\quad x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,$$

可得方程 6.13

$$\zeta_\theta^2+a\zeta(\rho\zeta_\rho-\zeta)=0.$$

Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 195.

6.95. $(yp-xq)^2=p^2+q^2+1.$

从特征方程得首次积分 p^2+q^2. 设

$$z(x,y)=\zeta(\rho,\theta),\quad x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta.$$

于是得可分离变量方程

$$\zeta_\theta^2=\frac{\rho^2}{\rho^2-1}(\zeta_\rho^2+1).$$

由此得全积分

$$\zeta=\sigma-A\operatorname{arctg}\frac{\sigma}{A}+A\theta+B,$$

其中 $\sigma^2=\rho^2(A^2-1)-A^2$.

Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 141—144.

6.96. $(yp-xq)^2=a(x^2+y^2)(p^2+q^2+1).$

作变量代换

$$z(x,y)=\zeta(\rho,\theta),\quad x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,$$

我们得到可分离变量方程

$$\frac{1-a}{a}\zeta_\theta^2=\rho^2(\zeta_\rho^2+1).$$

因此，它仅当 $0\leqslant a<1$ 时可解．我们不考虑 $a=0$ 这个琐屑情况，而令后一方程的左端和右端等于 A^2，于是可得全积分

$$\zeta=A\sqrt{\frac{a}{1-a}}\theta+\sigma+\frac{A}{2}\ln\left|\frac{\sigma-A}{\sigma+A}\right|+B,$$

其中 $\sigma^2=A^2-\rho^2$（因而必须有 $\rho^2<A^2$）．

Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 152—155.

6.97. $(xp+yq)^2=(1-z^2)(p^2+q^2)$.

奇积分是 $z=$ 常数及两个半球

$$x^2+y^2+z^2=1\quad(z\gtrless 0).$$

这个方程是有趣的：虽然首次积分 $\frac{p}{q}$ 容易求得，但用第一部分 § 9.3 中的方法却得不到全积分．问题在于第一部分 § 9.3 中所述的条件对于函数行列式不满足．因为这个方程关于 p，q 是齐次的，所以在变换 $p=Aq$ 下，两个导数消失，不过用这方法至少还得到积分族

$$z^2=1-\frac{(Ax+By)^2}{A^2+B^2}$$

为得到全积分，可以作变换

$$z(x,y)=\zeta(\rho,\theta),\quad x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,$$

于是得到方程

$$(1-\zeta^2)\zeta_\theta^2=\rho^2(\zeta^2+\rho^2-1)\zeta_\rho^2.$$

从原方程推出 $z^2\leqslant 1$，因此 $\zeta^2\leqslant 1$．于是根据前面所写的微分方程，有 $\zeta^2+\rho^2-1\geqslant 0$．所以前面所写的方

程可分解为两个拟线性方程

$$\sqrt{1-\zeta^2}\zeta_\theta \pm \rho\sqrt{\zeta^2+\rho^2-1}\zeta_\rho = 0.$$

对于在第一部分 § 5.4 意义下的对应的齐次方程，可得积分

$$\Omega\left(\zeta, \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\rho^2}{1-\zeta^2}-1}-\theta\right)\right).$$

因此，原方程的积分可由方程

$$\Omega\left(z, \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{1-z^2}-1}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)\right)=0$$

解出 z 而得到.

关于这个微分方程及其特征线的几何解释，参看 Goursat, Équations du premier ordre, p. 248.

6.98. $(xp+yq)^2=z^2(pq+1)$.

由特征方程求得首次积分 $\frac{q}{p}$；现在可按第一部分 § 9.3 中的方法进行. 如果设

$$z(x, y)=\zeta(\xi), \quad \xi=Ax+By,$$

则所给方程变为齐次常微分方程（参看手册 I, A§4.6(b)）

$$\xi^2\zeta'^2=\zeta^2(AB\zeta'^2+1).$$

由它可得

$$\ln|\zeta(\xi\pm\sqrt{\xi^2-AB\zeta^2})|=C-\frac{\xi}{\xi\pm\sqrt{\xi^2-AB\zeta^2}},$$

化回到原变量 x, y, z 并且解出 z，即可得到一个全积分.

6.99. $(xp+yq)^2-z(xp+yq)=pq$.

借助于第一部分 § 11.14 中的勒让德变换，可得拟线性方程 2.52

$$XZZ_X+YZZ_Y=XY.$$

这个方程的积分由关系式

$$Z^2 = XY + \Omega\left(\frac{Y}{X}\right)$$

得到. 因此,原方程的积分由下列参数式给出:

$$z = -\frac{1}{Z}\Omega\left(\frac{Y}{X}\right), \quad 2xZ = Y - \frac{Y}{X^2}\Omega'\left(\frac{Y}{X}\right),$$

$$2yZ = X + \frac{1}{X}\Omega'\left(\frac{Y}{X}\right), \quad Z^2 = XY + \Omega\left(\frac{Y}{X}\right).$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 388, 例 2(1), p. 823.

6.100. $(xp + yq)^2 - a^2(p^2 + q^2 + 1) = 0.$

从特征方程得首次积分 $\frac{q}{p}$. 设 $q = p\operatorname{tg} A$, 则由所给方程得到

$$\frac{p}{\cos A} = \frac{q}{\sin A} = \pm\frac{a}{\sqrt{(x\cos A + y\sin A)^2 - a^2}}.$$

因此

$$z = a\operatorname{Arch}\frac{x\cos A + y\sin A}{a} + B.$$

也可以设

$$z(x, y) = \zeta(\rho, \theta), \quad x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta,$$

并得到可分离变量方程

$$\frac{\rho^2}{a^2}[(\rho^2 - a^2)\zeta_\rho^2 - a^2] = \zeta_\theta^2.$$

如果令这个等式的左端和右端等于 A^2, 则可得

$$\zeta = a\ln\sqrt{\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1}} - A\operatorname{arctg}\frac{a\sigma}{A} + A\theta + B,$$

其中

$$\sigma^2 = \frac{\rho^2 + A^2}{\rho^2 - a^2}.$$

Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 116—118.

6.101. $(xp+yq)^2+p^2+q^2-z(xp+yq)=0.$

借助于第一部分 § 11.14 中的勒让德变换，可得拟线性微分方程 2.53

$$XZZ_X+YZZ_Y=-X^2-Y^2.$$

这个方程有解

$$X^2+Y^2+Z^2=\Omega(u),\quad u=\frac{Y}{X},\tag{1}$$

其中 $\Omega(u)$ 是在 X，Y 的有限区域内使 $\Omega\left(\frac{Y}{X}\right)>X^2+Y^2$ 的任意连续可微函数. 由 (1) 式可得原方程的用参数式表示的解

$$z=xX+yY-Z,\quad x=-\frac{X}{Z}-\frac{Y}{2X^2Z}\Omega'(u),$$

$$y=-\frac{Y}{Z}+\frac{1}{2XZ}\Omega'(u).$$

此外，函数 $z=$ 常数也是积分.

6.102. $(xp+yq-z)^2=pq.$

这个微分方程可分解为两个克莱罗方程

$$z=xp+yq\pm\sqrt{pq}.$$

它们有全积分

$$z=Ax+By\pm\sqrt{AB},\ AB\geqslant 0.$$

这里无奇积分.

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 293 (31), 395.

6.103. $(xp+yq-z)^2=ap^2+bq^2+c.$

这个微分方程可分解为两个克莱罗方程

$$z=xp+yq\pm\sqrt{ap^2+bq^2+c}.$$

它们有全积分

$$z = Ax + By \pm \sqrt{aA^2 + bB^2 + c}.$$

奇积分可由关系式

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

得到.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 386, 例 1(3), p. 822.

6.104. $(xp + yq - z)^2 = xp^2 + yq^2$.

通过勒让德变换可得拟线性方程 2.39

$$X^2 Z_X + Y^2 Z_Y = Z^2. \tag{1}$$

这个方程的解是函数

$$Z = \left[\frac{1}{X} + \Omega\left(\frac{X - Y}{XY}\right)\right]^{-1}.$$

此时可得用参数 X, Y 表示的原方程的解

$$z = [u\Omega'(u) - \Omega(u)]Z^2,$$

$$x = \frac{Z^2}{X^2}[1 - \Omega'(u)], \quad y = \frac{Z^2}{Y^2}\Omega'(u).$$

其中

$$u = \frac{X - Y}{XY}, \quad Z = \left[\frac{1}{X} + \Omega(u)\right]^{-1}.$$

如果把方程(1)当作齐次方程(按照第一部分§11.10)来处理. 亦即设

$$Z(X, Y) = \zeta(\xi, \eta), \quad \xi = \frac{1}{X}, \quad \eta = \frac{1}{Y},$$

则可得第一部分 § 11.3 型的方程

$$\zeta_\xi + \zeta_\eta + \zeta^2 = 0.$$

由此求得方程 (1) 的全积分

$$\frac{1}{Z} = \frac{A}{X} + \frac{B}{Y} + C,$$

其中 $A + B = 1$, 且原方程的全积分为

$$\sqrt{-Cz}=\sqrt{Ax}+\sqrt{By}-1.$$

关于特解可参看 Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 388, 例 2(3), p. 824.

6.105. $(xp+yq-z)^2=[a^2(x^2+y^2+z^2+1)-1]\times(p^2+q^2+1).$

如果利用第一部分 § 12.3(a) 中的方法将它化为不含未知函数的微分方程，即由方程 $w(x,y,z)=0$ 确定函数 $z(x,y)$，则可得关于 w 的方程 7.20

$$(xw_x+yw_y+zw_z)^2=[a^2(x^2+y^2+z^2+1)-1](w_x^2+w_y^2+w_z^2).$$

参看 Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 159—162.

6.106. $(xp+yq-z)^2=a^2(x^2+y^2+z^2)^2(p^2+q^2+1).$

由关系式

$$(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2=\frac{1}{4a^2}$$

在条件

$$A^2+B^2+C^2=\frac{1}{4a^2}$$

下可得一全积分；奇积分是

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{a^2}.$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 426, 2, p. 836.

6.107. $(xp+yq-z)^2=f(x^2+y^2)(p^2+q^2).$

由特征方程得到 $\dfrac{yp-xq}{z}$ 作为广义的首次积分。如果令它等于 A，并利用原方程，则可确定 p，q，然后积分再求得 z。试与第一部分 § 9.3 中的例 2 比较。

如果作变换

$$\ln|z(x,y)|=\zeta(\rho,\theta),\quad x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,$$

则方程变为

$$(\rho\zeta_\rho - 1)^2 = f(\rho^2)\left(\zeta_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\zeta_\theta^2\right).$$

这方程的变量可以分离.

Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 198.

6.108. $x^2(xp + yq - z)^2 = y^2 q$; 第一部分 §11.7 型.

从特征方程得首次积分 $\left(\frac{y}{x}\right)^2 q$. 如果令它等于 A^2（因为由所给方程推知 $q \geqslant 0$），则利用原方程可得

$$q = \left(\frac{Ax}{y}\right)^2, \quad xp + \frac{Ax^2}{y} - z = A.$$

由此通过积分，我们有

$$z = -\frac{A^2x^2}{y} + A + Bx;$$

这是顶点在 x 轴上的锥面.

Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 174—176.

6.109. $(x^2 + y^2 - 1)[(xp + yq - z)^2 - (p^2 + q^2)] + z^2 = 0$.

作变换

$$z(x, y) = \zeta(\rho, \theta), \quad x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta,$$

可得方程 6.87

$$(\rho^2 - 1)[\rho^2(\rho\zeta_\rho - \zeta)^2 - \rho^2\zeta_\rho^2 - \zeta_\theta^2] + \rho^2\zeta^2 = 0.$$

参看 Forsyth, Diff. Equations V, p. 188.

6.110. $f(x,y)p^2 + g(x,y)pq + h(x,y)q^2 = k(x,y)$.

这个方程在微分几何中以如下形式出现：

$$E\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 = EG - F^2.$$

其中基本量 E, F, G 是已知的. 如果 $\theta = \theta(u, v)$ 是一个解，则 $\theta =$ 常数 所给出的诸曲线测地地平行，并且 θ 是从一固定曲线 $\theta = \theta_0$ 计算的正交测地线的弧度.

6.111. $(f_x p + f_y q - f_z)^2 = (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 - 1)(p^2 + q^2 + 1)$,

$f = f(x, y, z)$.

关于这个问题的一个几何解释，参看 S. Lie, *Math. Annalen*, 5 (1872), p. 198.

112—127. 关于 p, q 为三次与四次的方程

6.112. $p^3 = aq + bx$; 可分离变量方程.

$$z = \frac{3}{4b}(bx + A)^{\frac{4}{3}} + \frac{A}{a}y + B.$$

6.113. $5p^3 + (x-2)p + (y-1)q = z$; 克莱罗方程.

一个全积分是

$$z = Ax + By + 5A^3 - 2A - B.$$

函数

$$z = -10\left(\frac{2-x}{15}\right)^{\frac{3}{2}} + C(y-1)$$

也是积分. 这个方程没有奇积分.

6.114. $p^3 - y^3 q = x^2 - y^2$; 可分离变量方程.

$$z = \ln|y| - \frac{A}{2y^2} + \int \sqrt[3]{x^2 + A}\,dx + B.$$

6.115. $p^3 = zq$; 第一部分 § 11.3 型.

$$z = \frac{A}{4}(x + Ay + B)^2.$$

6.116. $p^3 = az^2 q$; 第一部分 § 11.3 型.

$$z = B\exp[\pm\sqrt{aA}(x + Ay)].$$

6.117. $p^3 = q^2$; 第一部分 § 11.2 型.

$$z = A^2 x + A^3 y + B.$$

6.118. $y^2 p^3 + xp + 3yq = 0$. 参看第一部分 § 14.8(c).

6.119. $p^2q = x^2y$；可分离变量方程.

$$z = \frac{Ax^2}{2} + \frac{y^2}{2A^2} + B.$$

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 293 (25), 394.

6.120. $(p^2 + a)q = (bz + c)p$；第一部 § 11.3 型.

$$z = \frac{b}{4AB}(Ax + By + C)^2 + \frac{aB - Ac}{Ab}.$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 383, 例 2(3), p. 821.

6.121. $p^2(q + a) = (bz + c)q$；第一部分 §11.3 型.

$$bB(Ax + By + C) = AR + aA^2\ln|R - aA|,$$

其中

$$R^2 = 4bB^2z + a^2A^2 + 4cB^2.$$

6.122. $(xp + yq + z)q^2 + p^2 = 0$.

从特征方程求得首次积分 $\frac{p}{q}$. 如果令它等于 A，则可得方程

$$p = -A\frac{z + A^2}{Ax + y}, \quad q = -\frac{z + A^2}{Ax + y}.$$

由此，从原方程得全积分

$$z = -A^2 + \frac{B}{Ax + y}.$$

Julia, Exercices d'Analyse IV, p. 109.

6.123. $(xp + yq - z)^3 + 27pq = 0$.

这是个克莱罗方程

$$z = xp + yq + 3\sqrt[3]{pq}.$$

一个全积分是

$$z = Ax + By + 3\sqrt[3]{AB}.$$

$xyz = 1$ 是奇积分.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 386, 例 2(4), p. 822.

6.124. $(xp+yq)pq-xp^2-yq^2-(x+y+z-1)pq$
$+z(p+q)=0.$

这个方程可写为克莱罗方程

$$z=xp+yq+\frac{pq}{pq-p-q}.$$

如果分母不等于零，即除去平凡积分 $z=C$，则得一个全积分

$$z=Ax+By+\frac{AB}{AB-A-B}.$$

或在常数的另一记法下，为

$$z=(A+B-1)\left(\frac{x}{A}+\frac{y}{B}-1\right).$$

函数

$$z=(\sqrt{x}+\sqrt{y}+1)^2$$

是一奇积分.

6.125. $9(p^2-2z)^2=4q^3$；第一部分 § 11.3 型.

借助于变换 $z=u(x)+v(y)$，这个方程也可求解，并得到全积分

$$z=\frac{(x+A)^2}{2}+\frac{(y+B)^3}{3};$$

奇积分是 $z=0$ 及 $z=\frac{(x+A)^2}{2}.$

Goursat, Équations du premier ordre, p. 234.

6.126. $z^2p^2q^2=y^2p^2+x^2q^2$；齐次方程.

作变换

$$z(x,y)=\zeta(\xi,\eta),\quad \xi=x^2,\quad \eta=y^2,$$

我们得到第一部分 § 11.3 型的方程

$$4\zeta^2\zeta_\xi^2\zeta_\eta^2=\zeta_\xi^2+\zeta_\eta^2.$$

由此求得平凡积分 $z=C$ 及全积分

$$z^2 = \frac{\sqrt{A^2+1}}{A}(x^2 + Ay^2) + B.$$

6.127. $(xp + yq - z)^2(xp^2 + yq^2) = p^2q^2.$

应用第一部分 § 11.14 中的勒让德变换，可得拟线性微分方程 2.64

$$X^2Z^2Z_X + Y^2Z^2Z_Y = X^2Y^2.$$

这个方程的积分由等式

$$Z^3\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{Y}\right)^3 - 3\left(\frac{Y}{X} - \frac{X}{Y}\right) + 6\ln\left|\frac{Y}{X}\right|$$
$$= Q\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{Y}\right)$$

得到，它和关系式

$$x = Z_X, \quad y = Z_Y, \quad z = xX + yY - Z$$

一起给出所求的正规的积分 $z(x, y)$ 的参数表达式。

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 388, 例 2(4), p. 824。

128—139. 其它非线性方程

6.128. $\sqrt{p} + \sqrt{q} = ax$; 可分离变量方程。

$$z = \frac{(ax - A)^3}{3a} + A^2y + B, \quad ax > A.$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 385, 例 2(4), p. 822。

6.129. $\sqrt{p^2 + q^2 + 1} + xp + yq = z$; 克莱罗方程。

一个全积分是

$$z = Ax + By + \sqrt{A^2 + B^2 + 1}.$$

奇积分是上半 ($z > 0$) 球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

积分是那些光滑曲面，它们的所有切平面与坐标原点的

距离等于 1.

6.130. $\sqrt{\sqrt{q}-p}+xp+yq=z$；克莱罗方程.

一个全积分是

$$z=Ax+By+\sqrt{\sqrt{B}-A},$$

或在常数的其它记法下，为

$$z=(A-B^2)x+A^2y+B.$$

奇积分是

$$z=\frac{1}{4x}-\frac{x^2}{4y}\ (x>0,\ y>0).$$

6.131. $(pq)^a=xp-yq.$

由特征方程得首次积分 pq. 如果令 $pq=A$，并利用原方程，则可得

$$p=\frac{A^a}{2x}\pm\frac{1}{2x}\sqrt{4xyA+A^{2a}},\quad q=\frac{A}{p}.$$

由此求得全积分

$$A^{-a}z=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{y}\right|\pm R\pm\frac{1}{2}\ln\left|\frac{R-1}{R+1}\right|+B,$$

其中 $R=\sqrt{4xyA^{1-2a}+1}$.

6.132. $(p^2+q^2)^a=xq-yp.$

从特征方程的最后两个得到首次积分 p^2+q^2. 如果令它等于 A，则可得到确定全积分的两个方程

$$z_x=\frac{-A^ay+xR}{x^2+y^2},\quad z_y=\frac{A^ax+yR}{x^2+y^2},$$

其中 $R^2=A(x^2+y^2)-A^{2a}$. 也可采用变换

$$z(x,y)=\zeta(\rho,\theta),\quad x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,$$

从而得到第一部分 § 11.4 型的方程

$$\zeta_\rho^2=\zeta_\theta^{\frac{1}{a}}-\frac{1}{\rho^2}\zeta_\theta^2.$$

因此，全积分是

$$\zeta = A\theta + B + \int \sqrt{A^{1/a} - \frac{1}{\rho^2} A^2}\, d\rho.$$

6.133. $(p^2 - q^2)^a = yp + xq.$

作变换

$z(x, y) = \zeta(\xi, \eta), \quad 2\xi = x + y, \quad 2\eta = x - y,$

方程变为 6.131

$$(\zeta_\xi \zeta_\eta)^a = \xi\zeta_\xi - \eta\zeta_\eta.$$

6.134. $(xp - yq)^a = pq$；参看方程 6.131.

6.135. $\left(\frac{p}{\cos^2 x}\right)^a + \left(\frac{q}{\sin^2 y}\right)^b z^c = z^{ac/(a-b)}$；参看第一部分§11.10.

6.136. $e^p = x(q + y)$；可分离变量方程.

$$z = Ay - \frac{y^2}{2} + x\ln(Ax) - x + B.$$

Kamke, DGlen, 1930, p. 377, 430.

6.137. $\ln p + ay^2(p + q) - 2ayz - 2\ln y = b.$

从特征方程得首次积分 $\frac{p}{y^2}$. 现在可按第一部分§9.3中的方法进行. 也可采用变换 $z = y^2 u(x, y)$，得到第一部分§11.4 型的关于 u 的微分方程

$$u_y = \frac{b - \ln u_x}{ay^4} - u_x.$$

利用两种方法都得到全积分

$$z = Axy^2 - Ay^3 + \frac{\ln A - b}{3ay} + By^2.$$

6.138. $\ln(pq) + xp + yq = z$；克莱罗方程.

一个全积分是

$z = Ax + By + \ln(AB) \quad (AB > 0)$;

奇积分是

$$z = -2 - \ln(xy) \quad (xy > 0).$$

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 293 (39), 395.

6.139. $\boldsymbol{p = \sin(xq)}$; 第一部分 §11.4 型.

$$z = \frac{1}{A}\cos Ax - Ay + B.$$

第七章　三个自变量的非线性微分方程

1—7.　含有一个或两个导数二次项的方程

7.1. $p_1^2+2x_2x_3p_1+2x_1x_3p_2+2p_3=0.$

从特征方程得首次积分

$$(p_1+p_2)\exp\frac{x_3^2}{2}\ \text{与}\ (p_1-p_2)\exp\left(-\frac{x_3^2}{2}\right).$$

如果令它们分别等于 $2A$ 与 $2B$，则得方程

$$p_1=A\exp\left(-\frac{x_3^2}{2}\right)+B\exp\frac{x_3^2}{2},$$

$$p_2=A\exp\left(-\frac{x_3^2}{2}\right)-B\exp\frac{x_3^2}{2}.$$

它们和原方程共同构成完全组．由这三个方程还可确定 p_3，并由此得到全积分

$$z=A(x_1+x_2)e^{-X}+B(x_1-x_2)e^{X}-ABx_3$$
$$-\frac{1}{2}\int(A^2e^{-2X}+B^2e^{2X})dx_3+C,$$

其中 $2X=x_3^2$.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 419, 例 5(4), p.832.

7.2. $ap_1^2+bp_2^2=x_3^2p_3$；可分离变量方程．

$$z=Ax_1+Bx_2-\frac{A^2a+B^2b}{x_3}+C.$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 419, 例 5(1), p. 831.

7.3. $p_1^2+p_2^2=zp_3+z^2$；第一部分 §13.2 型．

作变换

$$z = \zeta(\xi), \quad \xi = Ax_1 + Bx_2 + 2Cx_3,$$

可将该方程化为常微分方程

$$(A^2 + B^2)\zeta'^2 = 2C\zeta\zeta' + \zeta^2.$$

它有解

$$\ln|\zeta| = \frac{\xi}{A^2 + B^2}(C \pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}) + D.$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 417, 例 6(1), p. 830.

7.4. $p_1^2 - p_2p_3 = z(p_2 + p_3)$; 第一部分 § 13.4 型.

设 $\zeta = \ln|z|$，由所给方程得到第一部 § 13.1 中的方程

$$\zeta_{x_1}^2 = \zeta_{x_2}\zeta_{x_3} + \zeta_{x_2} + \zeta_{x_3}.$$

因此，一个全积分是

$$\ln|z| = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D,$$

其中 $A^2 = BC + B + C$.

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 293(44), 395.

7.5. $a(p_1 - p_2)p_3 + bx_3(x_2p_1 + x_1p_2) = c$.

从特征方程得首次积分

$$2a(p_1 - p_2) - bx_3^2, \quad p_1^2 - p_2^2,$$
$$(x_1 + x_2)(p_1 + p_2).$$

由前两个积分构成的方程

$$2a(p_1 - p_2) - bx_3^2 = A, \qquad p_1^2 - p_2^2 = B,$$

根据第一部分 § 12.1，不仅分别和所给方程彼此对合，而且它们本身也彼此对合. 因此，如果对于 p_1, p_2, p_3 解出这三个方程，再积分，则得到原方程的积分

$$z = \frac{x_1 - x_2}{4a}X + aB\frac{x_1 + x_2}{X} + 2c\int\frac{dx_3}{X} + C,$$

其中 $X = bx_3^2 + A$.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 417—419.

7.6. $2p_1(x_3p_2+x_2p_3)+2x_1+x_2^2=0$.

用勒让德变换

$$x_\nu=Z_{X_\nu}=P_\nu,\quad p_\nu=X_\nu$$

可得方程 7.1

$$P_2^2+2X_1(X_3P_2+X_2P_3)+2P_1=0.$$

7.7. $x_1zp_1(x_3p_2+x_2p_3)=a(x_1p_1+2z)$.

在这个方程中变量可以分离。若设 $z=u(x_1)v(x_2,x_3)$，则得

$$\frac{a}{x_1}\frac{x_1u'+2u}{u^2u'}=A=v(x_3v_{x_2}+x_2v_{x_3}). \tag{1}$$

第一个等式给出

$$u'\left(Au-\frac{a}{u}\right)=\frac{2a}{x_1}.$$

因此

$$\exp\frac{Au^2}{2a}=Bx_1^2u.$$

当 $w=v^2$ 时，(1) 的第二个等式变为线性微分方程

$$x_3w_{x_2}+x_2w_{x_3}=2A,$$

它有积分

$$v^2=2A\ln|x_2+x_3|+\Omega(x_2^2-x_3^2).$$

8—14. 含有多于两个导数二次项且有常系数的方程

7.8. $(p_1+p_2)^2=2p_3+z$；第一部分 § 13.2 型.

作变换

$$z=\zeta(\xi),\quad \xi=Ax_1+Bx_2+Cx_3$$

将方程化为常微分方程

$$(A+B)^2\zeta'^2=2C\zeta'+\zeta,$$

它有解

$$2u-2C\ln|u+C|=\xi+D,$$

其中 $u^2=(A+B)^2\zeta+C^2$.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 417, 例 3(2), p. 830.

7.9. $ap_1^2+bp_2^2+cp_3^2=1$; 第一部分 § 13.1 型.

一个全积分是

$$z=Ax_1+Bx_2+Cx_3+D,$$

其中 $aA^2+bB^2+cC^2=1$.

关于这个微分方程当 $a=b=c$ 时对于几何光学的意义，参看 Courant-Hilbert, Methoden math. Physik II, p. 74 (中译本:数学物理方法 II, p. 69—72), Hamilton-Prange, Strahlenoptik, p. 204.

7.10. $ap_2p_3+bp_3p_1+cp_1p_2=d$; 第一部分 § 13.1 型.

一个全积分是

$$z=Ax_1+Bx_2+Cx_3+D,$$

其中 $aBC+bCA+cAB=d$.

7.11. $a_1p_1^2+a_2p_2^2+a_3p_3^2=z$; 第一部分 § 13.4 型.

$$z=\frac{\left(\sum_{\nu=1}^{3}A_\nu x_\nu+A\right)^2}{4\sum_{\nu=1}^{3}a_\nu A_\nu^2}\quad\text{或}\quad z=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{(x_\nu-A_\nu)^2}{4a_\nu}.$$

7.12. $p_1^2+p_2^2+p_3^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$; 可分离变量方程.

$$z=\sum_{\nu=1}^{3}\int\sqrt{x_\nu^2+A_\nu}\,dx_\nu+A_0,$$

其中 $A_1+A_2+A_3=0$.

Forsyth Jacobsthal. DGlen, p. 385, 例 3, p. 822.

7.13. $p_1^2+p_2^2+p_3^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$.

从特征方程容易得到首次积分，并且利用它们可构成彼此对合的方程

$$2(p_1-p_2)^2-(x_1-x_2)^2=A,$$

$$(p_1+p_2+p_3)^2-2(x_1+x_2+x_3)^2=B.$$

由所有三个方程求出 p_1, p_2, p_3, 然后确定 z.

较早期的结果陈述在 Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 419, 例 5(3), p. 831 中.

7.14. $p_1^2+p_2^2+p_3^2=2(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)$.

从特征方程可得一些首次积分，例如 $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{p_3}{p_1}$. 因此，如果设

$$Ap_2=Bp_1, \quad Ap_3=Cp_1,$$

则得三个方程构成的完全组，由它求得

$$p_1=\frac{2A(Ax_1+Bx_2+Cx_3)}{A^2+B^2+C^2},$$

因此

$$z=\frac{(Ax_1+Bx_2+Cx_3)^2}{A^2+B^2+C^2}.$$

这个方程也可用其它方法求解. 例如，我们也可以求得积分

$$\frac{x_1^2}{z+A}+\frac{x_2^2}{z+B}+\frac{x_3^2}{z+C}=1.$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 523 (88); 在该书中的(3)式所确定的函数不是积分，因为那里必须有 $x_1=x_2=0$ 或 $x_3=0$.

15—21. 含有导数二次项的其它方程

7.15. $p_1(p_1+p_2)+x_1p_2(x_3p_2+p_3)=ax_1$.

从特征方程可得首次积分 p_2, $p_3+x_3p_2$. 如果令它

们分别等于 A，B，则所得方程和已给方程一起组成彼此对合的方程组：

$$p_2=A,\quad p_3=-Ax_3+B,$$

$$p_1=-\frac{A}{2}\pm\sqrt{(a-AB)x_1+\frac{A^2}{4}}.$$

由此得

$$z=-\frac{A}{2}x_1\pm\frac{2}{3(a-AB)}\left[(a-AB)x_1+\frac{A^2}{4}\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$+Ax_2-\frac{A}{2}x_3^2+Bx_3+C.$$

7.16. $p_1(p_1+p_2)+x_1p_2(x_3p_2+p_3)=x_1z$；第一部分 § 13.4 型.

变换 $z=\pm w^2$ 将方程化为方程 7.15

$$w_{x_1}(w_{x_1}+w_{x_2})+x_1w_{x_2}(x_3w_{x_2}+w_{x_3})=\pm\frac{x_1}{4}.$$

7.17. $p_1^2+x_2p_1p_2+x_1x_2p_2p_3+x_1x_2^2x_3p_2^2=x_1z$；第一部分 § 13.4 型.

变换 $z=\pm u^2$ 将方程化为

$$q_1^2+x_2q_1q_2+x_1x_2q_2q_3+x_1x_2^2x_3q_2^2=\pm\frac{x_1}{4},$$

式中的 $q_\nu=u_{x_\nu}$. 在这方程中变量可以分离. 如果设

$$x_2q_2=A,\quad q_3+Ax_3=B,$$

则又可得到关系式

$$q_1^2+Aq_1+ABx_1=\pm\frac{x_1}{4}.$$

从所有这些方程我们得到

$$u=-\frac{A}{2}x_1-\frac{v^3}{3(4AB\pm1)}+A\ln|x_2|+Bx_3$$

$$-\frac{A}{2}x_3^2+C,$$

其中

$$v^2 = A^2 - (4AB \pm 1)x_1.$$

7.18. $a_1(x_2p_3 - x_3p_2)^2 + a_2(x_3p_1 - x_1p_3)^2 + a_3(x_1p_2 - x_2p_1)^2 = 1.$

从特征方程可得首次积分

$$\sum_{\nu=1}^{3} x_\nu^2, \quad \sum_{\nu=1}^{3} x_\nu p_\nu, \quad \sum_{\nu=1}^{3} p_\nu^2.$$

7.19. $z^2p_1p_2 + zp_2p_3 + p_3p_1 = 1$; 第一部分 § 13.2 型。

$$\int\sqrt{ABz^2 + BCz + AC}\,dz = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D.$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 383, 例 2(4), p. 821.

7.20. $(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3)^2 = [a^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1) - 1](p_1^2 + p_2^2 + p_3^2).$

变换

$$z(x_1, x_2, x_3) = \zeta(\rho, \varphi, \psi),$$

$$x_1 = \rho\sin\varphi\cos\psi,\ x_2 = \rho\sin\varphi\sin\psi,\ x_3 = \rho\cos\varphi$$

将已给方程化为

$$\zeta_\varphi^2 + \frac{1}{\sin^2\varphi}\zeta_\psi^2 = (1 - a^2)\frac{\rho^2(\rho^2 + 1)}{a^2\rho^2 + a^2 - 1}\zeta_\rho^2.$$

这是变量 φ, ψ 已经同 ρ 分离的方程. 令这方程左、右端等于 A^2, 则得方程

$$\zeta_\rho = \frac{A}{\sqrt{1 - a^2}}\frac{1}{\rho}\sqrt{a^2 - \frac{1}{\rho^2 + 1}}, \tag{1}$$

$$\zeta_\psi^2 = (A^2 - \zeta_\varphi^2)\sin^2\varphi. \tag{2}$$

在后一方程中变量已分离. 如果设它的左端和右端等于 B^2, 则又得到两个方程

$$\zeta_\psi = B, \tag{3}$$

$$\zeta_\varphi = \pm\sqrt{A^2 - \frac{B^2}{\sin^2\varphi}}. \tag{4}$$

因此得

$$\zeta = \frac{A}{\sqrt{1-a^2}} I_1 + B\psi + I_2 + C,$$

这里

$$I_1 = \int \frac{1}{\rho}\sqrt{a^2 - \frac{1}{\rho^2+1}}\,d\rho$$

$$= \frac{a}{2}\ln\frac{\sigma+a}{\sigma-a} - \sqrt{1-a^2}\ \mathrm{arc\,tg}\frac{\sigma}{\sqrt{1-a^2}},$$

其中

$$\sigma^2 = a^2 - \frac{1}{\rho^2+1},$$

而

$$I_2 = A\,\mathrm{arc\,sin}\frac{u}{\sqrt{A^2-B^2}} - B\,\mathrm{arc\,tg}\frac{u}{B\cos\varphi},$$

其中

$$u^2 = A^2\sin^2\varphi - B^2.$$

参看方程 6.105.

7.21. $2ze^{x_3}(e^{-x_1}p_1 + e^{-x_2}p_2)^2 = p_3$; 第一部分 § 13.4 型.

作变换

$$w = z^2, \quad q_\nu = w_{x_\nu},$$

原方程化为可分离变量方程

$$(e^{-x_1}q_1 + e^{-x_2}q_2)^2 = e^{-x_3}q_3,$$

由此得全积分

$$z^2 = Ae^{x_1} + Be^{x_2} + (A+B)^2e^{x_3} + C.$$

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 293(45), 395.

22—31. 含有更高次导数的方程

7.22. $p_1p_2p_3 = x_1x_2x_3$; 可分离变量方程.

$$z = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + D,$$

其中 $8ABC = 1$.

7.23. $\boldsymbol{p_1 p_2 p_3 = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3}$.

从特征方程可得首次积分 $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{p_3}{p_1}$. 因此,如果设

$$Ap_2 = Bp_1, \quad Ap_3 = Cp_1,$$

则得构成完全组的三个方程. 由此我们求得

$$p_1 = \sqrt{\frac{A}{BC}}\sqrt{Ax_1 + Bx_2 + Cx_3},$$

然后有

$$z = \frac{2}{3\sqrt{ABC}}(Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^{\frac{3}{2}} + D$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 419, 例 5(6), p.832.

7.24. $\boldsymbol{p_1 p_2 p_3 + x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = z}$; 克莱罗方程.

一个全积分是

$$z = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + ABC,$$

奇积分是

$$z^2 = -4x_1x_2x_3.$$

7.25. $\boldsymbol{p_1 p_2 p_3 = x_1 p_1^2 + x_2 p_2^2 + x_3 p_3^2}$.

从特征方程容易得到首次积分. 如果利用它们来构成方程

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} = A, \quad \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_3} = B,$$

则得组成一个对合组的三个方程. 由这些方程可以确定 p_1, p_2, p_3 及 z. 用勒让德变换

$$x_\nu = P_\nu, \quad p_\nu = X_\nu,$$

可将方程变为线性方程 3.61

$$X_1^2P_1 + X_2^2P_2 + X_3^2P_3 = X_1X_2X_3.$$

7.26. $\boldsymbol{p_1 p_2 p_3 - (x_2 x_3 p_2 p_3 + x_3 x_1 p_3 p_1 + x_1 x_2 p_1 p_2)}$

$$+x_1x_2x_3(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)=0.$$

从特征方程可得首次积分

$$x_1p_1-x_2p_2,\quad x_1p_1-x_3p_3.$$

因此，如果这时将方程

$$x_2p_2=x_1p_1+A,\quad x_3p_3=x_1p_1+B$$

和所给方程放在一起，则构成一个对合组．利用消去法可得关于 p_1 的一个三次方程．

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p.427, 例 7(4), p. 841.

7.27. $(a_1p_1-z)(a_2p_2-z)(a_3p_3-z)=p_1p_2p_3.$

对这方程作变换

$$\zeta(x_1,x_2,x_3)=\ln|z|,$$

可得第一部分 § 13.1 型的方程

$$(a_1\zeta_{x_1}-1)(a_2\zeta_{x_2}-1)(a_3\zeta_{x_3}-1)=\zeta_{x_1}\zeta_{x_2}\zeta_{x_3}.$$

它有全积分

$$\zeta=A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_0,$$

其中

$$(a_1A_1-1)(a_2A_2-1)(a_3A_3-1)=A_1A_2A_3.$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 417, 例3(3), p. 830, 当 $a_\nu=1$ 时．

7.28. $zp_1p_2p_3=x_1x_2x_3$; 第一部分 § 13.4 型．

设 $z=u^\lambda$, 于是从这方程得

$$\lambda^3u^{4\lambda-3}u_{x_1}u_{x_2}u_{x_3}=x_1x_2x_3,$$

因此，对于 $\lambda=\frac{3}{4}$, 则得可分离变量方程

$$\frac{u_{x_1}}{x_1}\frac{u_{x_2}}{x_2}\frac{u_{x_3}}{x_3}=\left(\frac{4}{3}\right)^3.$$

由此得全积分

$$\frac{3}{2}z^{\frac{4}{3}}=Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2+D,\quad (ABC=1).$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 381, 例 3(7), p. 821.

7.29. $azp_1 + bz^2p_2^2 + cz^3p_3^3 = 1.$

作变换

$$w = z^2, \qquad q_\nu = w'_{x_\nu},$$

可得第一部分 § 13.1 型的方程

$$\frac{a}{2} q_1 + \frac{b}{4} q_2^2 + \frac{c}{8} q_3^3 = 1.$$

因此所给方程的一个全积分是

$$z^2 = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D,$$

其中

$$\frac{a}{2} A + \frac{b}{4} B^2 + \frac{c}{8} C^3 = 1^{1)}.$$

7.30. $p_1^2 + zp_2^2 + z^2p_3^2 = z^3p_1p_2p_3$; 第一部分 § 13.2 型.

$$ABC \int \frac{z^3}{A^2 + B^2z + C^2z^2} dz = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D.$$

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 383, 例 2(5), p. 821.

7.31. $p_1^n + p_2^n + p_3^n = 1$; 第一部分 § 13.1 型.

$$z = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D,$$

其中

$$A^n + B^n + C^n = 1.$$

---

1) 俄译本及德文版均错为 $\frac{a}{2} A + \frac{b}{4} B^2 + \frac{c}{3} C^3 = 1$.——译者注

第八章 多于三个自变量的非线性微分方程

8.1. $p_1p_2+p_3p_4+x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4=z$；克莱罗方程.

一个全积分是

$$z=\sum_{\nu=1}^{4}A_\nu x_\nu+(A_1A_2+A_3A_4).$$

奇积分是

$$z=-x_1x_2-x_3x_4.$$

8.2. $p_1p_2p_3p_4=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4$；方程 8.13 的特例.

从特征方程可得首次积分 $\frac{p_\nu}{p_1}$ $(\nu=2,3,4)$，并由它们得方程

$$A_1p_\nu=A_\nu p_1\quad(\nu=2,3,4).$$

这些方程和原方程组成一个完全组. 由这四个方程可以解出 p_ν. 于是得

$$z=\frac{3}{4}\frac{(A_1x_1+\cdots+A_4x_4)^{\frac{4}{3}}}{(A_1\cdots A_4)^{\frac{1}{3}}}+A_0.$$

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 293(47), 395.

8.3. $(p_1-p_2)(p_3+x_4)(p_4+x_3)+x_2p_1+x_1p_2=1.$

方程中的变量可以分离. 于是对任意常数 A，可求解方程

$$(p_3+x_4)(p_4+x_3)=A,$$

$$x_2p_1 + x_1p_2 + A(p_1 - p_2) = 1.$$

容易求得第一个方程的全积分为

$$z_1 = -x_3x_4 + Bx_3 + \frac{A}{B}x_4.$$

第二个方程是线性的，其积分是

$$z_2 = \ln|x_1 + x_2| + \Omega((x_1 + x_2)(x_1 - x_2 - 2A)).$$

于是函数 $z_1 + z_2$ 就是所给方程的积分。

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 420.

8.4. $p_1^2p_2^2p_3^2p_4^2 = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4$. 方程 8.13 的特例。

关于求解过程，参看 8.2 题。

$$z = \frac{7}{8}\frac{(A_1x_1 + \cdots + A_4x_4)^{8/7}}{(A_1\cdots A_4)^{1/7}} + A_0.$$

Morris-Brown, Diff. Equations, p. 293 (48), 395.

8.5. $(p_1 + x_4p_3)p_4 + (p_2 + x_5p_3)p_5 = 0$.

由于 x_1, x_2, x_3 没出现在方程中，所以可作变换

$$z = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + u(x_4, x_5).$$

于是得到关于 u 的齐次线性方程，它有主积分

$$u = \frac{Cx_4 + A}{Cx_5 + B}.$$

这偏微分方程的更一般形式的积分是函数

$$z = \Omega\left(Ax_1 + Bx_2 + Cx_3, \frac{Cx_4 + A}{Cx_5 + B}\right).$$

函数

$$z = Ax_1 + Bx_2 + (AD - BC)x_3 + (Cx_1 + Dx_2 + E)(Bx_4 - Ax_5) + F$$

也是一个全积分。

关于这个积分的一个几何解释，参看 S. Lie, *Math. Annalen* 5(1872), p. 190. 如果设 $z(x_1, \cdots, x_5) = F(x_1, \cdots, x_5)$，则偏微分方程 $F(x, y, z, p, q) = 0$ 的特征线是它的积分曲面的渐近

线。参看 Goursat, Équations du premier ordre, p. 251.

8.6. $p_1[p_5+x_5(x_4p_4+x_5p_5)]-p_2[p_4+x_4(x_4p_4+x_5p_5)]$
$+p_3(x_4p_5-x_5p_4)=0.$

由于 x_1, x_2, x_3 在方程中没有出现，所以可作变量代换

$$z=Ax_1+Bx_2+Cx_3+u(x_4,x_5).$$

于是得到关于 u 的一个齐次线性微分方程，其主积分为

$$u=\frac{(Ax_4+Bx_5-C)^2}{x_4^2+x_5^2+1}.$$

所给方程的更一般形式的积分是函数

$$z=\Omega\left(Ax_1+Bx_2+Cx_3,\ \frac{(Ax_4+Bx_5-C)^2}{x_4^2+x_5^2+1}\right).$$

函数

$$z=\Omega(x_1x_4+x_2x_5-x_3,\ x_4,\ x_5)$$

也是积分。

关于几何解释，参看 S. Lie, *Math. Annalen*, **5** (1872), p. 194.

8.7. $p_1p_4+(3x_2+2x_3)p_2p_4+(4x_2+5x_3)p_3p_4$
$+[x_4+x_5(p_2-p_3)]p_4p_5+x_5p_5^2=0.$

方程两端除以 p_4，可得

$$p_1+(3x_2+2x_3)p_2+(4x_2+5x_3)p_3+[x_4+x_5(p_2-p_3)]p_5+x_5\frac{p_5^2}{p_4}=0. \qquad (1)$$

由特征方程推出

$$x_1+\ln|p_2-p_3|=\text{常数},$$
$$7x_1+\ln|p_2+2p_3|=\text{常数}.$$

因此

$$p_2=2Ae^{-x_1}+Be^{-7x_1},\quad p_3=-Ae^{-x_1}+Be^{-7x_1}. \qquad (2)$$

其次，由特征方程推得

$$\ln\left|\frac{p_5}{p_4}\right| = 3Ae^{-x_1} + 常数,$$

因此

$$p_5 = -Cp_4\exp(3Ae^{-x_1}).$$

这样，如果再次转到特征方程，则还有

$$\begin{cases} p_4 = D\exp\left(C\int e^{3Ae^{-x_1}}dx_1\right), \\ p_5 = -CDe^{3Ae^{-x_1}}\exp\left(C\int e^{3Ae^{-x_1}}dx_1\right). \end{cases} \tag{3}$$

因为方程 (2) 和 (3) 是由方程 (1) 的首次积分得到的，所以它们和方程 (1) 彼此对合. 此外，它们本身显然彼此对合. 因此，方程 (1), (2), (3) 有公共解. 将 (2) 和 (3) 代到 (1) 中，并求积分，我们得到

$$z = A(2x_2 - x_3)e^{-x_1} + B(x_2 + x_3)e^{-7x_1} + D(x_4 - Cx_5e^{3Ae^{-x_1}})\exp\left(C\int e^{3Ae^{-x_1}}dx_1\right) + E.$$

我们也可以这样进行：由特征方程又推得

$$x_4p_4 + x_5p_5 = 常数, \quad \frac{p_4}{p_5}e^{p_2-p_3} = 常数.$$

因此，和 (2) 一起，有

$$p_4 = \frac{C}{x_4 + Dx_5\exp(3Ae^{-x_1})},$$

$$p_5 = \frac{CD\exp(3Ae^{-x_1})}{x_4 + Dx_5\exp(3Ae^{-x_1})}.$$

这两个方程和方程 (2) 及已给方程一起，彼此对合. 现在从原方程还可以确定 p_1，并且最后得到

$$\begin{aligned} z = {} & A(2x_2 - x_3)e^{-x_1} + B(x_2 + x_3)e^{-7x_1} \\ & + C\ln|x_4 + Dx_5\exp(3Ae^{-x_1})| \\ & - CD\int\exp(3Ae^{-x_1})dx_1 + E. \end{aligned}$$

通过勒让德变换，方程可变为一个线性微分方程.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen, p. 428, (15), 844—846.

8.8. $(x_2p_1 + x_1p_2)x_3 + (p_1 - p_2)p_3[p_4^2 + (x_4 + p_5)(x_6 + p_5)p_6] = a, \ a \neq 0.$

对于任意常数 A，通过解两个方程

$$p_4^2 + (x_4 + p_5)(x_6 + p_5)p_6 = A, \qquad (1)$$

$$(x_2p_1 + x_1p_2)x_3 + A(p_1 - p_2)p_3 = a, \qquad (2)$$

可以得到原方程的积分. 如果 $u(x_4, x_5, x_6)$ 和 $v(x_1, x_2, x_3)$ 分别是这两个方程的积分，则 $u + v$ 就是原方程的积分. 由于(1)不依赖于 x_5，所以若把 $p_5 = B$ 当作常数，则其解可以得到. 这时(1)是可分离变量方程，并可得

$$u = \frac{2}{3C}[A + C(x_4 + B)]^{\frac{3}{2}} + Bx_5 - C\ln(x_6 + B).$$

方程(2)的解可由 7.5 题得到.

8.9. $p_1p_2\cdots p_n = x_1x_2\cdots x_n$; 可分离变量方程.

$$2z = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu x_\nu^2 + A_0,$$

其中 $A_1\cdots A_n = 1$. 或者

$$(z - \zeta)^n = \left(\frac{n}{2}\right)^n \prod_{\nu=1}^{n}(x_\nu^2 - \xi_\nu),\ \text{对于任意的}\ \zeta, \xi_\nu.$$

Goursat, Équations du premier ordre, p. 160.

8.10. $p_1p_2\cdots p_n = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$; 方程 8.13 的特例.

从特征方程可得首次积分 $\dfrac{p_\nu}{p_1}$ $(\nu = 2, \cdots, n)$. 因此，如果设

$$A_1p_\nu = A_\nu p_1 \ (\nu = 2, \cdots, n),$$

则可得 n 个方程的一个完全组，并由此可得全积分

$$z = A_0 + \frac{n-1}{n}(A_1 \cdots A_n)^{\frac{1}{1-n}}(A_1x_1 + \cdots + A_nx_n)^{\frac{n}{n-1}}.$$

8.11. $p_1p_2\cdots p_n = (a_1p_1 - z)(a_2p_2 - z)\cdots(a_np_n - z)$.

通过变换

$$\zeta(x_1, \cdots, x_n) = \ln|z|,$$

可得第一部分 § 13.1 型的方程

$$(a_1\zeta_{x_1} - 1)\cdots(a_n\zeta_{x_n} - 1) = \zeta_{x_1}\cdots\zeta_{x_n}.$$

它有全积分

$$\zeta = A_0 + A_1x_1 + \cdots + A_nx_n,$$

其中

$$(a_1A_1 - 1)\cdots(a_nA_n - 1) = A_1\cdots A_n.$$

8.12. $z = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu p_\nu + (n+1)(p_1\cdots p_n)^{\frac{1}{n+1}}$；克莱罗方程。

一个全积分是

$$z = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu x_\nu + (n+1)(A_1\cdots A_n)^{\frac{1}{n+1}};$$

奇积分是

$$z = \frac{(-1)^n}{x_1\cdots x_n}.$$

8.13. $f(p_1, \cdots, p_n) = x_1p_1 + \cdots + x_np_n$， f 是 m 次齐次函数，设 $m \neq 1$。

由首次积分

$$\frac{p_\nu}{p_1} \quad (\nu = 2, \cdots, n)$$

可得方程

$$p_\nu = \frac{A_\nu}{A_1}p_1 \quad (\nu = 2, \cdots, n),$$

它和所给方程共同构成一个完全组．由此就有

$$p_\mu = A_\mu\left[\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} A_\nu x_\nu}{f(A_1, \cdots, A_n)}\right]^{\frac{1}{m-1}} \quad (\mu = 1, \cdots, n).$$ [1)]

因此

$$z = \frac{m-1}{m}\left[\frac{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} A_\nu x_\nu\right)^m}{f(A_1, \cdots, A_n)}\right]^{\frac{1}{m-1}} + C.$$

8.14. $\boldsymbol{f(p_1, \cdots, p_n) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} x_\nu f_\nu(p_\nu).}$

首次积分是

$$F_\nu(p_\nu) - F_1(p_1) \qquad (\nu = 2, \cdots, n),$$

其中

$$F_\nu(p) = \int \frac{dp}{f_\nu(p)}.$$

由原方程和方程

$$F_\nu(p_\nu) - F_1(p_1) = A_\nu \quad (\nu = 2, \cdots, n).$$

所构成的方程组可以解出 p_ν. 如果

$$p_\nu = p_\nu(x_1, \cdots, x_n) \quad (\nu = 1, \cdots, n)$$

是该方程组的解，则所给方程的一个积分是

$$z = \int_{\xi_1, \cdots, \xi_n}^{x_1, \cdots, x_n} \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu dx_\nu.$$

1) 此式在德文版及俄译本中均错写为

$$p_\mu = A_\mu\left[\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} A_\nu x_\nu}{f(A_1, \cdots, A_n)}\right]^{\frac{1}{m}}.$$

——校者注

第九章　非线性微分方程组

9.1. $F(p, q, z-xp-yq)=0$,

$G(p, q, z-xp-yq)=0$.

如果

$$F(a, b, c)=G(a, b, c)=0,$$

则

$$z=ax+by+c$$

是一个公共解。

Goursat, Équations du premier ordre, p. 290.

9.2. $p_1^2+p_2^2+p_3^2=f(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$, $x_2p_1-x_1p_2=0$.

这是个对合组. 第二个方程是线性的，它的解的全体十分显然. 然后从它们之中选取也满足第一个方程的那些解.

函数 $x_1^2+x_2^2$, x_3 显然是第二个方程的一组积分基底. 因此，所有连续可微函数 $\zeta(\xi_1, \xi_2)$（其中 $\xi_1=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $\xi_2=x_3$）也是该方程的积分. 如果这些函数也满足第一个方程，则应有

$$\zeta_{\xi_1}^2+\zeta_{\xi_2}^2=f(\xi_1^2+\xi_2^2).$$

关于这个微分方程，参看 6.64 题.

9.3. $p_1p_2=x_3x_4$, $p_3p_4=x_1x_2$.

构成括号时，得到方程

$$x_1p_1+x_2p_2-x_3p_3-x_4p_4=0.$$

这三个方程构成一个完全组. 从这个方程组解出 p_1, p_2, p_3, 得

$$p_1=\frac{x_2x_3}{p_4},\quad p_2=\frac{x_4p_4}{x_2},\quad p_3=\frac{x_1x_2}{p_4}$$

即

$$p_1=\frac{x_4p_4}{x_1},\quad p_2=\frac{x_1x_3}{p_4},\quad p_3=\frac{x_1x_2}{p_4}.$$

这两组中的每一组现在都是对合组．第二组可由第一组通过对换 x_1 与 x_2（同时对换 p_1 与 p_2）而得到．对于第一个方程组，利用梅耶变换

$$z(x_1,x_2,x_3,x_4)=Z(u,u_1,u_2,u_3,x_4),$$

$$x_1=uu_1,\quad x_2-\xi_2=uu_2,\quad x_3=uu_3,$$

可得

$$Z_u=\frac{2uu_1u_3(uu_2+\xi_2)}{Z_{x_4}}+\frac{u_2}{uu_2+\xi_2}x_4Z_{x_4}.$$

（因为 u 应该取尽区间 $[0,1]$ 上的值，所以现在引进条件 $\xi_2\neq 0$ 显然是必要的.）由于 u_1,u_2,u_3,ξ_2 都是参数，所以这正是方程 6.52．因此这里得到

$$Z=A(uu_2+\xi_2)x_4+\frac{u^2u_1u_3}{A}+B,$$

于是

$$z=Ax_2x_4+\frac{x_1x_3}{A}+B.$$

通过对换 x_1 与 x_2，又得积分

$$z=Ax_1x_4+\frac{x_2x_3}{A}+B.$$

此外，函数

$$z=2\sqrt{x_1x_3(x_2x_4-A)}+B$$

及

$$z=2\sqrt{x_2x_3(x_1x_4-A)}+B$$

也都是全积分．

关于雅可比变换的运用，参看第一部分 § 14.7．

Forsyth, Diff. Equations V, p.125—127.

9.4. $p_1p_2p_3=p_4$, $x_1p_1=x_2p_2+x_4p_3+x_3p_4$.

构成括号时，给出方程

$$p_1p_2p_4=p_3.$$

如果 $p_1p_2=0$，则由此推得所有的 p_ν 都恒等于零：$p_\nu=0$. 于是得到积分

$$z=C.$$

如果 $p_3=0$ 或 $p_4=0$，则分别有 $p_4=0$ 或 $p_3=0$. 这时剩下方程

$$x_1p_1=x_2p_2.$$

它有主积分 x_1x_2.

因此，现在可以假设所有的 $p_\nu\neq 0$. 于是由前面三个方程推得

$$p_1p_2=\pm 1,\quad p_3=\pm p_4,$$
$$x_1p_1=x_2p_2+(x_3\pm x_4)p_4.$$

这是一个对合组. 对于最后一个方程，按照取正号或取负号，其积分基底分别为

$$x_1x_2,\quad x_1(x_3+x_4)$$

或

$$x_1x_2,\quad x_2(x_3-x_4),$$

并且它们也满足第二个方程. 下面这样来确定 $\zeta(\xi_1,\xi_2)$，此处 $\xi_1=x_1x_2$，$\xi_2=x_1(x_3+x_4)$（或相应地 $\xi_2=x_2(x_3-x_4)$），使得 ζ 也满足第一个方程. 这时可得方程（试与 6.51 题比较）

$$(\xi_1\zeta_{\xi_1}+\xi_2\zeta_{\xi_2})\zeta_{\xi_1}=\pm 1,$$

它有首次积分 $\dfrac{\zeta_{\xi_2}}{\zeta_{\xi_1}}$. 由 $\zeta_{\xi_2}=A\zeta_{\xi_1}$ 和前面的方程可得

$$\zeta_{\xi_1}=[\pm(\xi_1+A\xi_2)]^{-\frac{1}{2}};$$

于是

$$\zeta = 2\sqrt{\pm(\xi_1 + A\xi_2)} + B.$$

因此有

$$z = 2\sqrt{x_1x_2 + Ax_1(x_3 + x_4)} + B$$

及

$$z = 2\sqrt{Ax_2(x_4 - x_3) - x_1x_2} + B.$$

参考文献中采用的缩写

当援引下列著作时仅仅指出作者的姓：

[Гюнтер——Н. М. Гюнтер, Интегрирование дифференциалных уравнений первого порядка в частных производных, ГТТИ, 1934.

Камке——Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, «Наука», 1964. (1971 年俄译本第四版中译本：E. 卡姆克，常微分方程手册，张鸿林译，科学出版社，1977. 此即 E. Kamke Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und lösungen 一书的第一卷 Gewöhnliche differentialgleichungen. 本手册中"手册 I, A§××"即指该书中译本第一部分的××节.)

Курант——Р. Курант, Уравнения с частными производными, «Мир», 1964.

Петровский——И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, «Наука», 1964.

(1953 年版中译本：И. Г. 彼得罗夫斯基，常微分方程论讲义，黄克欧译，人民教育出版社，1959.)

Степанов——В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Физматгиз, 1959.

(1953 年版中译本：B. B. 史捷班诺夫，微分方程教程，卜元震译，人民教育出版社，1960.)

Трикоми——Ф. Трикоми, Лекции по уравнениям в частных производных, ИЛ, 1957.

Смирнов——В. И. Смирнов, Курс высшей математики, Т. IV, Физматгиз, 1958.

(1953 年第三版中译本：高等数学教程，第四卷第二分册，谷超豪，金福临译，人民教育出版社，1979.)

Эльсгольц——Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения, Гостехиздат, 1957.

(中译本：Л. Э. 艾利斯哥尔兹，微分方程，南开大学数学系译，人民教育出版社，1978.)

Рашевский——П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, Гостехиздат, 1947. ——俄译本编者注]

Bieberbach, DGlen: L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, 3. Aufl., Berlin, 1930.

Carathéodory, Variationsrechnung: C. Carathéodory, Variationsrechnung und

partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Leipzig und Berlin, 1935.

Courant-Hilbert, Methoden math. Physik II: R. Courant, D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik II, Berlin, 1937.
(1962 年英文改写版：R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol. II, 1962. 中译本：R. 柯朗，D. 希尔伯特，数学物理方法 II，熊振翔，杨应辰译，科学出版社，1977.)

Forsyth, Diff. Equations: A. R. Forsyth, Theory of Differential Equations, Cambridge, 1906.

Forsyth-Jacobsthal, DGlen: A. R. Forsyth, W. Jacobsthal, Lehrbuch der Differentialgleichungen, 2. Aufl., Braunschweig, 1912.

Frank-v. Mises, D-u. IGlen: Ph. Frank, R. v. Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Bd. I, 2. Aufl., Braunschweig, 1930.

Goursat, Équations du premier ordre: E. Goursat, Leçons sur l' intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, 2-Edit., Paris, 1921.

Hamilton-Prange, Strahlenoptik: W. R. Hamiltons Abhandlungen zur Strahlenoptik, übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von G. Prange, Leipzig, 1933.

Horn, Partielle DGlen: J. Horn, Partielle Differentialgleichungen, 2-Aufl., Berlin und Leipzig, 1929.

Julia, Exercices d'Analyse: G. Julia, Exercices d'Analyse, Vol. III, Paris, 1933; Vol. IV, Paris, 1935.

Kamke, DGlen: E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, 2. Aufl., Leipzig, 1944.

Knoblauch, Differentialgeometrie: J. Knoblauch, Grundlagen der Differentialgeometrie, Leipzig und Berlin, 1913.

Morris-Brown, Diff. Equations: M. Morris, O. E. Brown, Differential Equations, New York, 1935.

Serret-Scheffers, Differential- und Integralrechnung, oder D- u. I-Rechnung: Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, Bd. II, 6. und 7. Aufl., 1921; Bd. III, 6. Aufl., Leipzig und Berlin, 1924.

当援引杂志时，数目字按下列次序排列：（期数），卷数（出版年代），页数．例如：*Nouvelles Annales Math.* (6) **2** (1927), p. 116 = Nouvelles Annales de Mathématiques, Paris, 期 6，卷 2，1927 年，116 页．

下面列出引文中所用各种杂志名称的缩写：

Acta Szeged: Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio Scientiarum Mathematicarum, Szeged.

Americ. Journ. Math.: American Journal of Mathematics, Baltimore.

Annales Soc. Polon. Math.: Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, Cracovie.

Annals of Math.: Annals of Mathematics, Princeton.

Archiv Math.: Archiv der Mathematik und Physik, Leipzig, Berlin.

Atti Accad. Lincei: Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Roma.

Atti Congresso Intern. Bologna 1928: Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna, 1928.

Atti Torino: Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino.

Bulletin Americ. Math. Soc.: Bulletin of the American Mathematical Society, Menasha, New York.

Bulletin Liège: Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège.

Commentarii math. Helvetici: Commentarii mathematici Helvetici, Zürich.

Duke Math. Journal: Duke Mathematical Journal, Durham.

Giornale Mat.: Giornale di Matematiche di Battaglini, Napoli.

Jahresbericht DMV: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Leipzig.

Japanese Journal of Math.: Japanese Journal of Mathematics, Tokyo.

Journal für Math.: Journal für die veine und angewandte Mathematik, Berlin.

Math. Annalen: Mathematische Annalen, Berlin.

Math. Zeitschrift: Mathematische Zeitschrift, Berlin.

Mathematica: Mathematica, Cluj.

Monatshefte f. Math.: Monatshefte für Mathematik und Physik, Leipzig.

Nouvelles Annales Math.: Nouvelles Annales de Mathématiques, Paris.

Proceedings Edinburgh Math. Soc.: Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, London.

Sitzungsberichte Heidelberg: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abt. A. Heidelberg.

Sitzungsberichte Wien: Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abt. IIa., Wien.

Studia Math.: Studia Mathematica, Lwów.

Transactions Americ. Math. Soc.: Transactions of the American Mathematical Society, Menasha——New York.

Transactions Soc. Edinburgh: Transactions of the Royal Society of Edinburgh, Edinburgh.

Zeitschrift f. angew. Math. Mech.: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Berlin.

Zeitschrift für Gletscherkunde: Zeitschrift für Gletscherkunde, Berlin.

部分外国人姓氏中外文对照表

刘维尔	Liouville
希尔伯特	Hilbert
克莱罗	Clairaut
李普希茨	Lipschitz
欧拉	Euler
泊松	Poisson
拉格朗日	Lagrange
哈尔	Haar
柯西	Cauchy
柯朗	Courant
哈密顿	Hamilton
勒让德	Legendre
雅可比	Jacobi
海色	Heese
梅耶	Mayer
蒙日	Monge

索　引