泰勒公式的证明及其应用推广

余家骅

（许昌学院数学科学学院，河南许昌 461000）

[摘 要] 在理解泰勒公式基本的形式及内容的基础上，更进一步意义的推理泰勒公式的证明及其在解决实际数学问题上的应用，探究一个定理的辩证思维方式，使我们学习知识更加深化，形成发散性思维。

[关键词] 泰勒公式；泰勒级数；中值定理 行列式；函数的凸凹性；重积分

1 泰勒公式的几种形式的证明

一元函数泰勒公式是指：

Ⅰ：定理 A：设 f(x)在 δ(a)内存在 n+1 阶连续导数，那么对∀x∈δ(a)，有 $f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-\alpha)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$……①，这里 R_n 称为 f(x)在 a 点的 n 次泰勒余项，简称泰勒余项。特别地，$R_n(x)=0[(x-a)^n](x\to t)^n dt$ 称为佩亚诺余项，称为拉格朗日余项，其中在 a 与 x 之间， 称为积分余项，上述三种形式是对不同泰勒余项形式的概括，现在分别用以下几种方法证明泰勒公式的几种不同形式：

1.1 利用完全归纳法证明泰勒公式

定理：对于任何一个函数 f(x)只要 f(x)在 a 点有直到 n 阶为止的导数，则 f(x)在 a 点附近必可表达为，

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+o(h^n)(a)+o(h^n)\text{ …….①(皮亚诺型)}$$

证明：①：当 n=1 时，定理自然成立。事实上，这时①变 f(a+h)=f(a)+h+o(h)这是我们熟知的。我们假定定理对 n-1 已经成立，换言之，我们假定：对于任何一个函数 f(x),只要 f(x) 在 a 点有直到 n-1 阶为止的导数，则 f(x)在 a 点附近可表示为：

$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\cdots+\frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+o(h^{(n-1)})$……②，现在我们来证明定理对 n 也成立。要证明对 n 也成立，只需证明①式成立，亦即 $\dfrac{f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1!}f'(a)-\cdots-\frac{h^{(n)}}{n!}f^{(n)}(a)}{h^{(n)}}=o\frac{(h^{(n)})}{h^{(n)}}$……③，事实上，根据洛比达法则，我们有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1!}f'(a)-\cdots-\frac{h^{(n)}}{n!}f^{(n)}(a)}{h^{(n)}}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)-hf''(a)-\cdots-\frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n)}(a)}{nh^{(n-1)}}\text{……④}$$

考虑到函数 Φ(x)=f'(x)，由于 f(x)在 a 点有直到 n 阶为止的导数，所以 Φ(x)在 a 点有直到 n-1 阶为止的导数，但是我们已经假定定理对 n-1 成立，因此我们将等式②应用 Φ(x)，则得：$\Phi(a+b)=\Phi(a)+\frac{h}{1!}\Phi(a)+\cdots+\frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!}\Phi^{(n-1)}(a)+o(h^{(n-1)})$，即[Φ(x)-f'(x)]. $f'(a+b)-f'(a)-hf''(a)-\cdots-\frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n)}(a)=o(h^{(n-1)})$，回到④我们有：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1!}f'(a)-\cdots-\frac{h^{(n)}}{(n)!}f^{(n)}(a)}{h^{(n)}}=\lim_{h\to 0}\frac{o(h^{(n-1)})}{nh^{(n-1)}}=0$$

，亦即③成立，亦即①成立。

1.2 以下是给出带有积分型余项的泰勒公式，在利用积分巧妙证明的同时，得出了几点结论：定理如下：

Ⅰ：设函数 f(x)在[a,b]上存在直到 n 阶的连续导数，在(a,b)内存在 n+1 阶导数，则对任意给定的 $x,x_0\in(a,b)$,f(x)可表示成为一个 n 次多项式与一个余项 $R_n(x)$之和，即：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{(n)}+R_n(x)$，其 $R_n(x)=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_2}\cdots\int_{x_0}^{x_n}f^{(n+1)}(x_{n+1})dx_{(n+1)}\cdots dx_2dx_1$。

证明：应用 Newton-Leibniz 积分公式易知；

$f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x}f'(x_1)dx_1$，即 $f'(x_1)-f'(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f''(x_2)dx_2$

$$f''(x_2)=f''(x_0)+\int_{x_0}^{x_2}f'''(x_3)dx_3$$

$f(x)-f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(x_1)dx_1$ 同理有：…

$$f^{(n)}(x_n)=f^{(n)}(x_0)=+\int_{x_0}^{x_n}f^{(n+1)}(x_{n+1})dx_{n+1},$$

故 $f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(x_1)dx_1=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}\left[f'(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f''(x_2)dx_2\right]dx_1=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1}f''(x_2)dx_x\,dx_1=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1}\left[f''(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f'''(dx_3)\right]dx_2dx_1=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_2}f'''(x_3)dx_3dx_2dx_1=\cdots=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$

其中 $R_n(x)=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1}\cdots\int_{x_0}^{x_{n+1}}f^{(n+1)}(x_{n+1})dx_{n+1}\cdots dx_2dx_1$。。

结论：

(一)：$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(X)}{(X-X_0)}=0$，即 $R_n(x)=0\left[(x-x_0)^n\right]$，即；事实上，L-hospital 法则，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(X)}{(X-X_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1}\cdots\int_{x_0}^{x_n}f^{(n+1)}(x_{n+1})dx_{n+1}\cdots dx_2dx_1}{(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1}\cdots\int_{x_0}^{x_{n+1}} f^{n}(x_n)dx_n dx_{n-1}\cdots dx_2 dx_1}{n(x-x_0)^{n-1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{\int_{x_0}^{x} f'(x_1)dx_1}{n!}=0$$

㈡：其他余项中只知道 $\xi\in(a,b)$，这里 $x_n\to x_0(n\to+\infty)$；

㈢：由①可知，重积分型余项可以推出 Peano 型余项，当然也可以能推出其他各种余项公式形式；

上述的二种方法，是从不同的思考角度去证明了泰勒公式，形式变化，但总体的内涵不变，体现在变中求主要思想精髓的证明思路，易于理解。

2 泰勒公式的数学应用及推广

正如上面所论述的那样，泰勒公式是一种非常开放的数学公式，从而在解决数学计算及推理某些重要结论方面有很重要的应用，现分别归纳总结此公式用以解决实际数学计算中的重要作用及其应用范围。

现分别在本文中在以下几个大的方面去逐一分析泰勒公式本身在以下几个具体问题的应用：

（一） 求函数的极限：

求未定式的极限利用洛比达法则是很有效的，但是对某些未定式的极限并不方便，甚至不能求出，此时可用带余项的泰勒公式展开式再配合中值加以解决，利用洛比达法则求未定式极限时，其结果化为某阶导数的比，而泰勒公式的各项系数正分别含有各阶导数的值，

洛比达法则所肯定的结论可以在特殊的条件下，用泰勒公式展开式推导出来，所以可以利用已知函数的泰勒公式求未定式的极限，现用以下两个例子来说明：

2.1 利用带 Peano 型余项的泰勒公式求函数的极限

例：求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

解：$\because e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)$，将 x 换成 $-\frac{x^2}{2}$，有

$e^{-\frac{x2}{2}}=1+(-\frac{x^2}{2})+\frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2})+o((-\frac{x^2}{2}))$，又 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+0(x^4)$，

$\therefore \cos x-e-\frac{x^2}{2}=x^4(\frac{1}{24}-\frac{1}{8})+o(x^4)-o(\frac{1}{4}x^4)=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$，故

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{12}^{x^4+o(x^4)}}{x^4}=\frac{1}{12}$。

例：计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$

分析：此题是“$\frac{0}{0}$”型，但用洛比达法则很难求出，不难验证 tan(tanx)和 sin(sinx)和 tanx，sinx 都在 $o(0,\delta)$内 3 阶可微：

$\because \sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)'$

$\tan x=x+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)'$

$\tan x-\sin x=(\frac{1}{3}+\frac{1}{3!})x^3+o(x^3)=\frac{1}{2}x^3+o(x^3)'$

可见分母 tanx- sinx 是 3 的 3 阶无穷小，故写出的分子上各函数三阶泰勒展开式，关于 x^3 较高阶的无穷小可省略去。又，

$\sin(\sin x)=\sin(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3))=x-\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{3!}(x-\frac{1}{3!}x^3)^3+o(x^3)=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$，$\tan(\tan x)=\tan(x+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3))=x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$

$\therefore \tan(\tan x)-\sin(\sin x)=x^3+o(x^3)$，$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3+o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}=2$；

2.2 泰勒公式在证明不等式方面的应用

如果函数 f(x)的二阶及二阶以上导数存在且有界，利用泰勒公式去证明这些不等式。证明思路：①：写出比最高阶导数低一阶的泰勒展开式，②：恰当选择等式两边的 x 与 x_0；③：根据最高阶导数的大小或界对展开式进行放缩；

例：若函数 f(x)在区间[a,b]上具有二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$，则在(a,b)内至少存在一点 ρ，使 $|f''(\delta)|\ge\frac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$成立。

证明：因为 f(x)在[a,b]上具有二阶导数，所以 f(x)在 x_0 处一阶泰勒公式成立 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\varepsilon)}{2!}(x-x_0)^2$，其中 ε 在 x 与 x_0 之间，$x_0\in[a,b]$，在(2)式中取 $x_0=a,x=\frac{a+b}{2}$，则有：$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+f'(a)(\frac{a+b}{2}-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(\frac{a+b}{2}-a)^2$，因为 $f'(a)=0$，所以 $f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{f''(\varepsilon_1)}{2!}(\frac{b-a}{2})^2, a\le\xi_1\le\frac{a+b}{2!}$ …③ 在②式中取 $x_0=b$，$x=\frac{a+b}{2}$，又因为 $f'(b)=0$，所以 $f(\frac{a+b}{2})=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(\frac{b-a}{2})^2$，$\frac{a+b}{2}\le\xi_2\le b$，…④，④式减去③式并取绝对值。则 $|f(b)-f(a)|=\frac{1}{8}(b-a)^2|f''(\xi_2)-\xi_1|\le\frac{1}{8}(b-a)^2[|f''(\xi_2)|+|f''(\xi_1)|]$，取 $|f''(\eta)|=Max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$，$\eta\in(a,b)$，则 $|f(a)-f(b)|\le\frac{1}{4}(b-a)^2.|f''(\eta)|$，即 $|f''(\eta)|\ge\frac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$，证毕。

值得说明的是泰勒公式有时要结合其他知识一起使用，如当前要证明的不等式中含有积分符号时，一般利用定积分的性质综合使用泰勒公式进行证明；当所要证明的不等式是含有多项式和初等函数的混合式时，不妨做一个辅助函数并利用泰勒公式代替，往往使证明简洁，泰勒公式巧妙，合理的运用，可以解决一些其他方法较难解决的问题。

3 泰勒公式在判断级数及积分收敛中的应用

A：在级数敛散性理论中：要判断一个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{n}a_n$ 是否收敛，通常找一个较简单的函数，$\sum\limits_{n=1}^{n}b_n=\sum\limits_{n=1}^{n}\frac{1}{n^p}(p>0)$，再由比较判定法来判定，在实际应用中较困难的问题是如何选取恰当的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$(p>0 中的 p 值)?

例如：㈠：若 p=2,此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，但是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n^2}}=+\infty$；

㈡：若 p=1，此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 收敛，但是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n}}=0$；

这里我们无法判定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性，为了有效地选取 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 中的 p 值，可以应用泰勒公式研究选项 $a_n\to0$（$n\to\infty$） 的阶，据此选取恰当的 p 的值，使 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n^p}}=1$ 并且保证 （下转第 54 页）

控制在 55%~75%，每天记录一次。在整个车间内部铺设防静电地板，建立一个大面积的静电释放通道。防静电地板按照一级标准施工，室内静电电位绝对值控制在 100V 以下.

②设备接地。如果机器主机架不能和使用机械连接接地，可以使用金属编织接地带。编织接地带具有更大的表面积，允许较大的电荷耗散，并且编织形状还能减弱电场。

③在车间门口树立一根接地良好的金属柱，要求进入组装车间的人员都要用手摸下这根柱子。也可以用同样良好的金属链作为门帘悬挂在车间门口，这样，每一位想进入车间的人员都必须先用手分开金属门帘才能进入。

④进入车间的人员均要穿好防静电工作服。对于不经常走动的员工，要佩带好防静电工作手腕，保证手腕和皮肤接触良好。对于经常走动的员工，应穿好防静电鞋，将人上的静电通过防静电鞋与防静电地板释放到大地当中。

⑤产品组装时，还必须采取措施。如属于单件加工，要求 CMOS 电路一径从原包装中取出来就必须尽快装焊。多种元件装配时，则应先焊接其他元件，后装焊 CMOS 电路。在流水线作业中，不可能做到这一点，可以将印制电路板组件（PCBA）或者 CMOS 元件放在防静电架或者防静电周转盒中。

⑹所有使用的烙铁、热风枪均使用防静电产品，外壳要严格接地。在修理时还要使用离子吹风机，以对返修的电路板进行离子中和。

总之，在所有操作和检查中尽量减少 PCBA 的运动；将元件保存在原包装内，直到准备使用时。还要讲给他们哪些是不应该做的：如摩擦头发使用非静电防护认可的袋子和工具箱；在电源电路工作时使用接地手腕、脚带或接地工作台垫。使员工明白，他们的一举一动都关系到产品的质量和可靠性，培养他们防范静电意识，促使他们养成习惯。

参考资料

[1] 防静电工程技术规范.(上海市工程建设规范 DGJ08-83-2000).

[2] 电世界.2005 年下半年合订本.

（上接第 52 页） $0< l< +\infty$，再由比较判定法(极限形式)就可判定 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性，下面举例说明之。

例 1：判定级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}-\sqrt{1n^{(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}}\right)$ 的敛散性。

解：由于 $1n^{(1+x)}=x-\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)$, $(1+x)^a=1+ax+o(x)$, $an=$

$$\left[\frac{1}{\sqrt[4]{n}}-\sqrt{1n^{(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}}\right]=\frac{4}{\sqrt[4]{n}}-\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2+o\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

，因此有 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{1}{4}$，故 $a_n\to 0$ 是关于（$\frac{1}{n}$）的 $\frac{1}{2}$ 阶，即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 同发散。

4　在广义积分敛散性中的应用

在判定广义积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 敛散性时，通常选取广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx(p>0)$ 进行比较，在此通常研究无穷小量 $|f(x)|(x\to+\infty)$ 的阶来有效地选择 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 中的 p 的值，从而简便的判定敛散性，(注意到：如果 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则收敛 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$)。

例：广义积分 $\int_0^1\frac{x\sin x}{\arctan x-x}dx$ 是否收敛?

解：$\mathrm{sim}x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)$, $f(x)=\frac{\sin x}{\arctan x-x}=$

$$\frac{x(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4))}{(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+o(x^6)-x)}=\frac{3}{x}+o(x^2)$$

由于 $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{-\frac{3}{x}}=1$ 故 $f(x)$ 是 $\frac{1}{x}(x\to 0^+)$ 的一阶无穷大量，而 $\int_0^1\frac{1}{x}dx$ 发散，故 $\int_0^1\frac{x\sin x}{\arctan x-x}dx$ 也发散。

综合以上几种具体而实用的方法在解题中的应用,是对泰勒公式这个本身极具实用性的数学公式做了一个推广,使之内涵更加具体化,对我们解决某些具体问题有更大的帮助.

泰勒公式是一元微积分的一个重要内容,不仅在理论上有重要的地位,而且在近似计算,极限计算,函数性质的研究方面也有重要的应用,所以作为一个合格的数学与应用数学方面的本科生,应有一种锲而不舍地探求精神,使我们对这个定理的理解有更加直观,深刻的印象,使之在解决问题是有更加巨大的力量.

参考文献

[1] 同济大学应用数学系.高等数学[M].北京:高等教育出版社,2005.

[2] 米多维奇.数学分析习题集题解[M].济南:山东科学技术出版社,1987.

[3] 钱吉林.数学分析题解精粹.武汉:崇文书局出版社,2003.

[4] 华中师范大学数学系.数学分析.武汉:华中师范大学出版社,2001.

[5] 沈昌.数学分析纵横谈,北京大学出版社,1991.