来自@清华李永乐考研数学辅导团队

【答疑重要说明】

1 答疑范围仅限图中所列图书（唯一一套经李永乐老师授权编写），其他图书或教材不提供答疑

2 发送问题时需将书名、数几、页码、题号誊写清楚，信息不完整不做答

3 以私信方式发送需答疑问题@ 或评论方式不接收

4 回复时限为 1-7 个工作日（ 8 小时工作时间外、周末节假日顺延）

5 请先下载答疑整理文件（按月度更新），查看其中同问题是否已经有回复

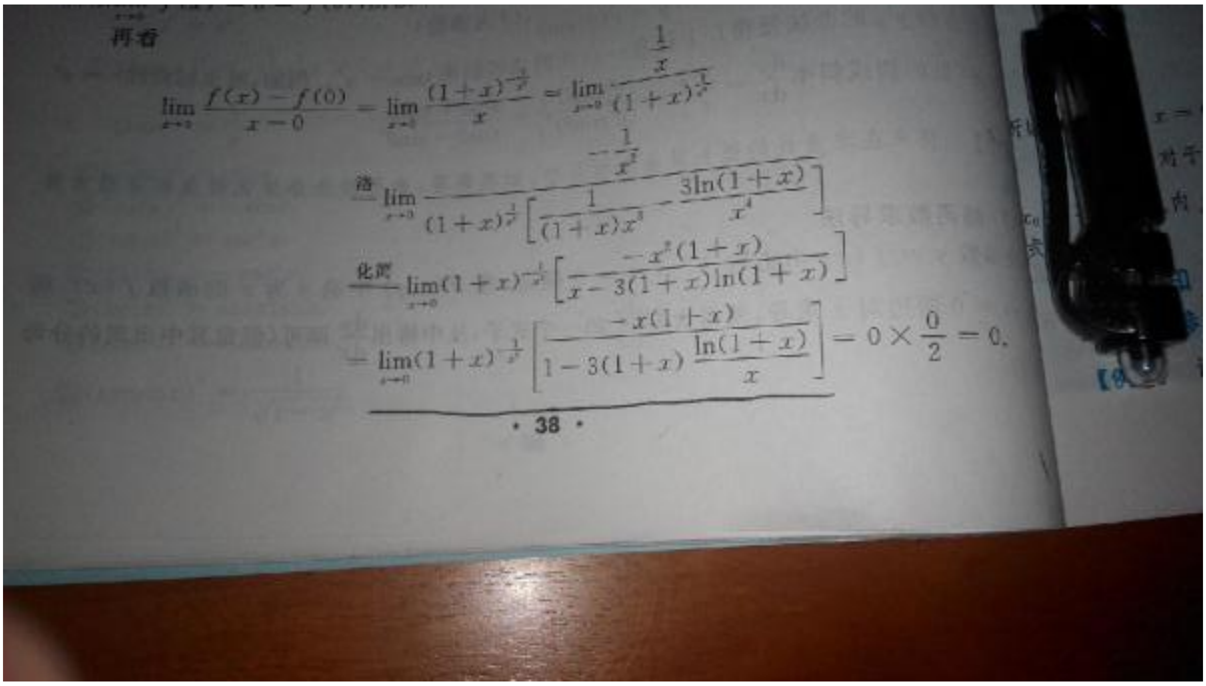
6 凡在工作时间内发送的问题会收到“问题收到，请等待回复”字样，如未收到该回复属新浪系统吞私信请将问题重新发送

7 微博中发布有辅导视频、答疑整理、线代讲义练习题参考答案、勘误等，请自行寻找。

1. 变态怪蜀黍山轰

17 年数二复习全书这个式子的极限是怎么求

右边那个式子



再看

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{-\frac{1}{x^3}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{(1+x)^{\frac{1}{x^3}}}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x^2}}{(1+x)^{\frac{1}{x^3}}\left[\frac{1}{(1+x)x^3}-\frac{3\ln(1+x)}{x^4}\right]}$$

$$\overset{化简}{=}\lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x^3}}\left[\frac{-x^2(1+x)}{x-3(1+x)\ln(1+x)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x^3}}\left[\frac{-x(1+x)}{1-3(1+x)\frac{\ln(1+x)}{x}}\right]=0\times\frac{0}{2}=0.$$

· 38 ·

$\because$ 前面已算过 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x^3}}=0$.

而 $\lim_{x\to 0}\dfrac{-x(1+x)}{1-3(1+x)\frac{\ln(1+x)}{x}}=\dfrac{0}{-2}$.

2. 新理工大保键

数学二复习全书 94 页例题 16 如果不进行变换怎么求第二个分段的表达式？

我意思是不进行变换直接进行计算，第一个分段可以求出来，但是第二个分段好像就没法算了

【回答】 当 $1<x<e$ 时，$\left|e^t-x\right|=\begin{cases}x-e^t,0\le t\le\ln x\\ e^t-x,\ln x<t\le 1\end{cases}$

$$F(x)=\int_0^{\ln x}t\left(x-e^t\right)dt+\int_{\ln x}^1 t\left(e^t-x\right)dt$$

$$=x\int_0^{\ln x}tdt-\int_0^{\ln x}te^tdt+\int_{\ln x}^1 te^tdt-x\int_{\ln x}^1 tdt$$

$$=x\frac{t^2}{2}\bigg|_0^{\ln x}-(t-1)e^t\Big|_0^{\ln x}+(t-1)e^t\Big|_{\ln x}^1-x\frac{t^2}{2}\bigg|_{\ln x}^1$$

$$=x\frac{\ln^2 x}{2}-(\ln x-1)x-1-(\ln x-1)x-x\frac{1}{2}+x\frac{\ln^2 x}{2}$$

$$=x\ln^2 x-2x\ln x+\frac{3}{2}x-1$$

3. 奇永啊

老师，我看您的数二复习全书上有例题涉及了“可齐次化的方程”P181【例 3】，我看 16 年大纲里只要求会计算齐次方程就可以，而且书上这节标注星号了。不知道还需要掌握么？

【回答】 考研数二不需要掌握。

数二：复习全书 P9，【例 4】标注中证明导数小于零，如何证明呢？希望老师给予解题步骤。谢谢

【回答】 $f'(x)=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}-\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

$$\left(\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\right)^2=\frac{4x^2-4x+1}{4x^2-4x+4}=1-\frac{3}{4x^2-4x+4}$$

$$\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\right)^2=\frac{4x^2+4x+1}{4x^2+4x+4}=1-\frac{3}{4x^2+4x+4}$$

$$\left(1-\frac{3}{4x^2-4x+4}\right)-\left(1-\frac{3}{4x^2+4x+4}\right)=\frac{3}{4x^2+4x+4}-\frac{3}{4x^2-4x+4}$$

$$=3\frac{(4x^2-4x+4)-(4x^2+4x+4)}{(4x^2+4x+4)(4x^2-4x+4)}=\frac{-24x}{(4x^2+4x+4)(4x^2-4x+4)}=\begin{cases}<0,x>0,\\>0,x<0.\end{cases}$$

当 $x\geq\dfrac{1}{2}$ 时， $\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}},\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\geq 0$，

$$\left(\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\right)^2<\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\right)^2$$

$$\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}<\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}-\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}<0,$$

当 $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$， $\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}<0,\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}>0$，

$$\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}-\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}<0,$$

当 $x\le-\frac{1}{2}$， $\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}},\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\le0$，

负数平方大的，负数小。

综上， $f'(x)<0$.

4. 霸气祜祜

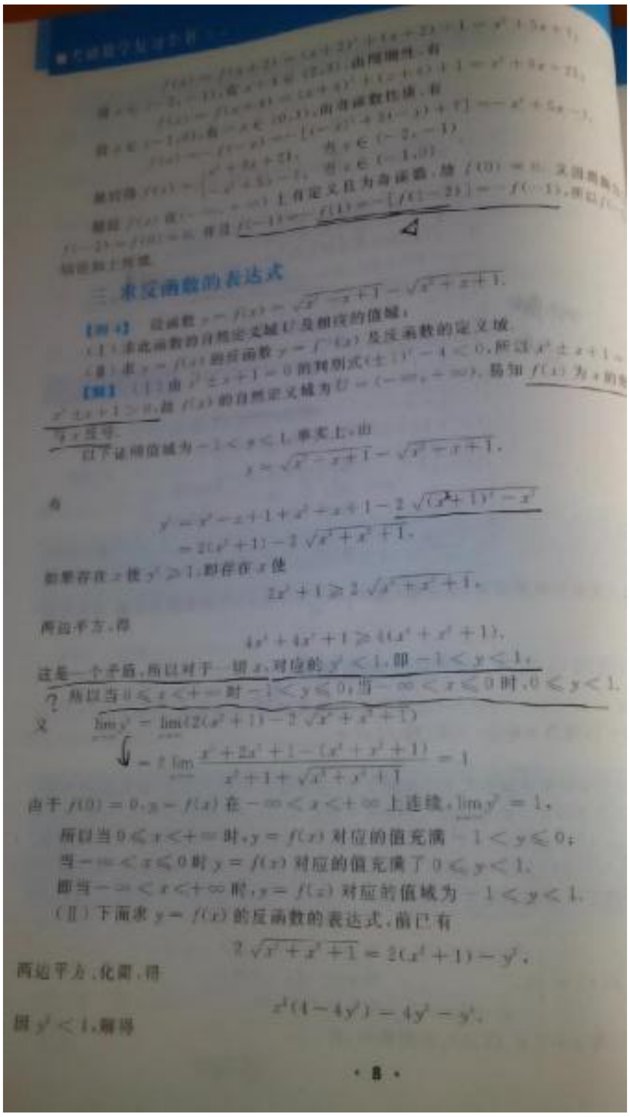
数学二复习全书第八页例四

划线部分为什么分 x 大于 0 和 x 小于零，分别讨论？

还有划线下面部分，求极限的。怎样划分成分式的

①因为当 x>0 时 y<0:当 x<0 时 y>0

②这里是分子\分母同乘 $\left(x^2+1\right)+\sqrt{x^4+x^2+1}$


这是一个矛盾，所以对于一切 x，对应的 $y^2<1$，即 $-1<y<1$。

所以当 $0\leqslant x<+\infty$ 时 $-1<y\leqslant 0$；当 $-\infty<x\leqslant 0$ 时，$0\leqslant y<1$。

由于 $f(0)=0$，$y=f(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上连续，$\lim y^2=1$，

所以当 $0\leqslant x<+\infty$ 时，$y=f(x)$ 对应的值充满 $-1<y\leqslant 0$；

当 $-\infty<x\leqslant 0$ 时 $y=f(x)$ 对应的值充满了 $0\leqslant y<1$。

即当 $-\infty<x<+\infty$ 时，$y=f(x)$ 对应的值域为 $-1<y<1$。

(Ⅱ) 下面求 $y=f(x)$ 的反函数的表达式，前已有

两边平方，化简，得

由 $y^2<1$，解得

· 8 ·

5. 打北边来的哑巴-

考研数学复习全书，数学二，20 页，方法二中为什么由题设极限存在且不为 0 得到 x 的一次项和三次项等于 0。把 sinx 和 cosx 的佩亚诺余项带入 f（x）后怎么化简得到第二步，o1（x6）怎么没了？

$$f(x)=x-\left[ax+b\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o_1(x^6)\right)\right]\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o_2(x^5)\right)$$

$$=x-\left(ax-\frac{a}{2!}x^3+\frac{a}{4!}x^5+bx-\frac{b}{2!}x^3+\frac{b}{4!}x^5-\frac{b}{3!}x^3+\frac{b}{2!3!}x^5+\frac{b}{5!}x^5+o(x^5)\right)$$

$$=(1-a-b)x+\left[\frac{a}{2!}x^3+\frac{b}{2!}x^3+\frac{b}{3!}x^3\right]-\left(\frac{a}{4!}x^5+\frac{b}{2!3!}x^5+\frac{b}{4!}x^5+\frac{b}{5!}x^5\right)+o(x^5)$$

$$=(1-a-b)x+\left[\frac{a}{2!}+\frac{4b}{3!}\right]x^3-\left[\frac{a+b}{4!}+\frac{b}{2!3!}+\frac{b}{5!}\right]x^5+o(x^5)$$

6. 盐粥必须笙

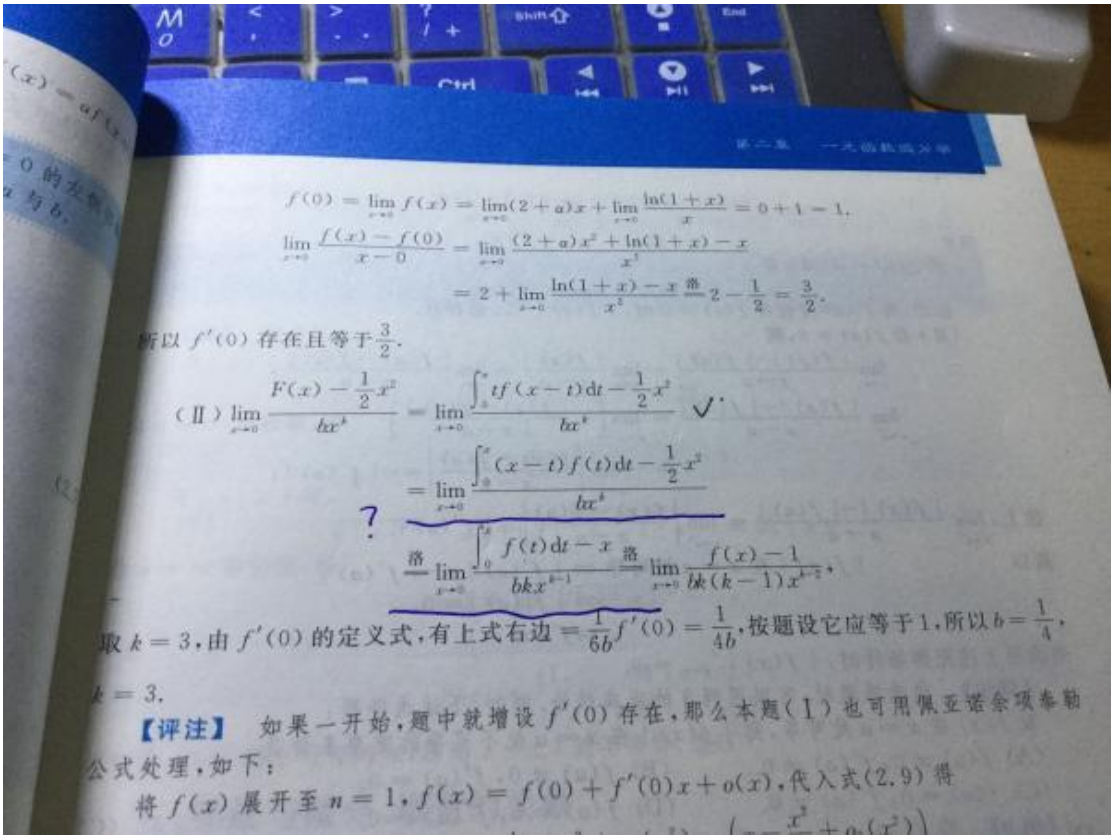
老师，《考研复习全书数学二》44 页例 7 第二问，图中画蓝线部分没看懂，不知怎样化出来的，求老师解答

$$\left(\int_0^x (x-t) f(t) dt\right)'$$

$$=\left(x\int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t)\right)'$$

$$=\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)$$

$$=\int_0^x f(t)dt$$


第二章　一元函数微分学

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(2+a)x+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=0+1=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{(2+a)x^2+\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=2+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\overset{洛}{=}2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

所以 $f'(0)$ 存在且等于 $\frac{3}{2}$.

(Ⅱ) $$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-\frac{1}{2}x^2}{bx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(x-t)dt-\frac{1}{2}x^2}{bx^k}$$ ✓

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt-\frac{1}{2}x^2}{bx^k}$$

?

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt-x}{bkx^{k-1}}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{bk(k-1)x^{k-2}},$$

取 $k=3$，由 $f'(0)$ 的定义式，有上式右边 $=\frac{1}{6b}f'(0)=\frac{1}{4b}$，按题设它应等于1，所以 $b=\frac{1}{4}$，$k=3$.

【评注】 如果一开始，题中就增设 $f'(0)$ 存在，那么本题(Ⅰ)也可用佩亚诺余项泰勒公式处理，如下：

将 $f(x)$ 展开至 $n=1$，$f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)$，代入式(2.9)得

7. lxmdoreen 看看你自己的样子

老师你好，我想问问

2017 考研数学复习全书，数学二

P47 例 12 中，参数方程求 y 的导数为什么不能直接用变限公式

86.

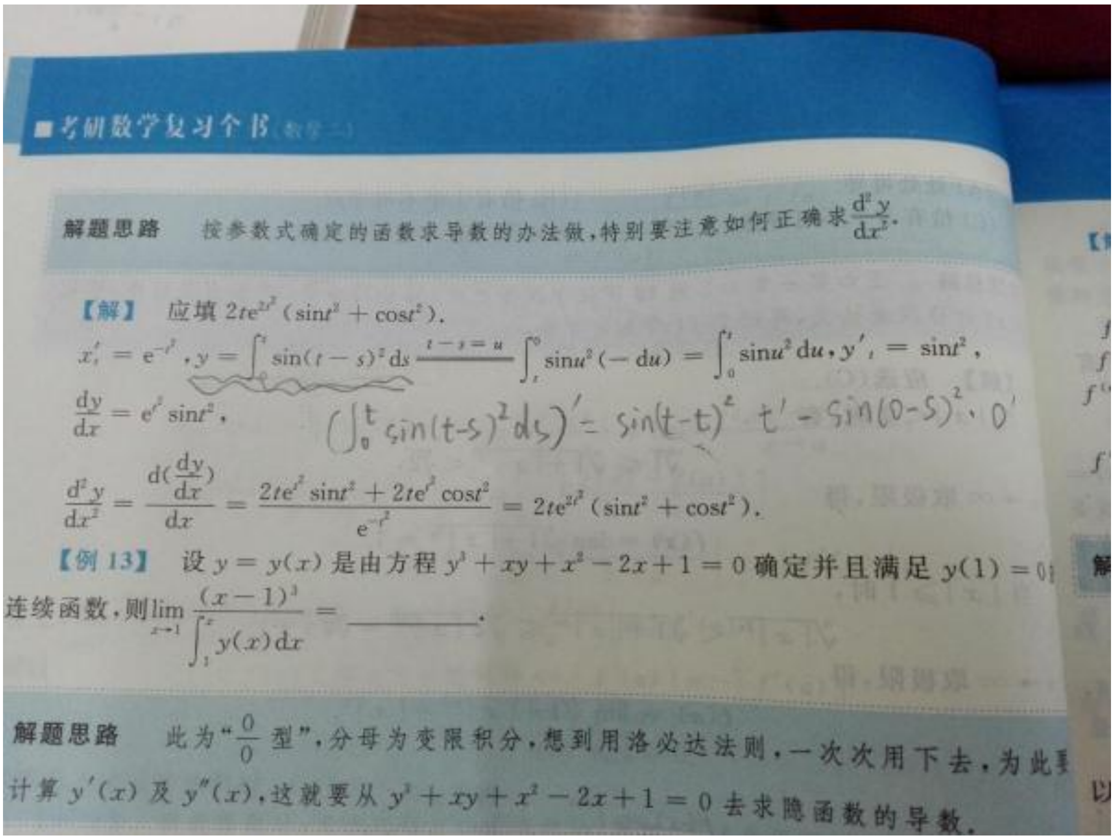
令 $t-s=u$

∵ $\int$ u 的积分范围是 t 到 0

∴有 $\int_0^t \sin(t-s)^2 ds$

$= \int_t^0 \sin u^2 \, d(t-u)$

$= \int_t^0 \sin u^2 (-du)$


■考研数学复习全书（数学二）

解题思路　按参数式确定的函数求导数的办法做，特别要注意如何正确求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

【解】　应填 $2te^{2t^2}(\sin t^2+\cos t^2)$.

$x'_t=e^{-t^2}$, $y=\int_0^t \sin(t-s)^2 ds \xrightarrow{t-s=u} \int_t^0 \sin u^2(-du)=\int_0^t \sin u^2 du$, $y'_t=\sin t^2$,

$\frac{dy}{dx}=e^{t^2}\sin t^2$,　$\left(\int_0^t \sin(t-s)^2 ds\right)'=\sin(t-t)^2\, t'-\sin(0-s)^2\cdot 0'$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{2te^{t^2}\sin t^2+2te^{t^2}\cos t^2}{e^{-t^2}}=2te^{2t^2}(\sin t^2+\cos t^2).$$

【例 13】　设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^3+xy+x^2-2x+1=0$ 确定并且满足 $y(1)=0$ 的连续函数，则 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^3}{\int_1^x y(x)dx}=$______.

解题思路　此为"$\frac{0}{0}$型"，分母为变限积分，想到用洛必达法则，一次次用下去，为此要计算 $y'(x)$ 及 $y''(x)$，这就要从 $y^3+xy+x^2-2x+1=0$ 去求隐函数的导数.

8. 天远何处

我问的是复习全书数学二 77 页定理 3.1.3 后面的注。已经说 f（x）有跳跃间断点 x=x0，为什么还存在 F(X) 书上已给出是跳跃间断点

3. 若 $f(x)$ 可积，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 连续；

若 $f(x)$ ~~可积~~ 连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 可导.

$f(x)$ 在 x_0 有跳跃间断点，$f(x)$ 仍然是可积函数，所以 $F(x)$ 是存在的，并且是连续的.

9. 乖崽崽 0

考研数学复习全书数二 p8 例四的解答中，为什么 y 与 x 反号？

$$y=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}$$

y 的正负由 $\sqrt{x^2-x+1},\sqrt{x^2+x+1}$ 的大小决定，比较 x^2-x+1,x^2+x+1 的大小，

显然，$\left(x^2-x+1\right)-\left(x^2+x+1\right)=-2x$，它的正负与 x 相反。

10. 阿忆稀的路

老师好 我想问一下为什么复习全书第一章第一节 复合函数的条件是定义域和值域的交集不为零 但是高数课本则要求值域包含于定义域内 两者是不是有矛盾？

数学二全书是 Df∩Rg≠Ø 高数书是 Rg 包含于 Df

10. 并不矛盾. $y=f(u)$, $u=g(x)$.

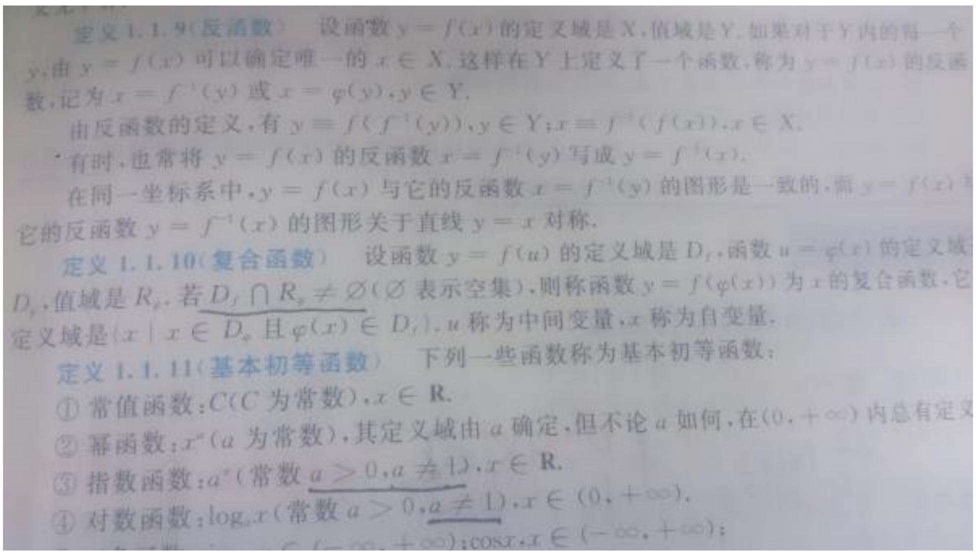
若 f 的定义域为 U. g 的值域为 $\tilde{U}$, 定义域为 X.

若 $\tilde{U}\subset U$, 则 $(f\circ g)(x)$ 的定义域仍为 X.

若 $\tilde{U}\cap U\neq\phi$, 但 $\tilde{U}\not\subset U$. 可以通过缩小定义域 X:

$\tilde{X}\subset X$, 使得 $g(\tilde{X})\subset U$. 此时

$f\circ g$ 的定义域为 $\tilde{X}$.



定义 1.1.9（反函数） 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 X，值域是 Y. 如果对于 Y 内的每一个 y，由 $y=f(x)$ 可以确定唯一的 $x\in X$. 这样在 Y 上定义了一个函数，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$ 或 $x=\varphi(y)$，$y\in Y$.

由反函数的定义，有 $y\equiv f(f^{-1}(y))$，$y\in Y$；$x\equiv f^{-1}(f(x))$，$x\in X$.

有时，也常将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$.

在同一坐标系中，$y=f(x)$ 与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是一致的，而 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

定义 1.1.10（复合函数） 设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域是 D_φ，值域是 R_φ. 若 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$（$\varnothing$ 表示空集），则称函数 $y=f(\varphi(x))$ 为 x 的复合函数，它的定义域是 $\{x\mid x\in D_\varphi$ 且 $\varphi(x)\in D_f\}$，u 称为中间变量，x 称为自变量.

定义 1.1.11（基本初等函数） 下列一些函数称为基本初等函数：

① 常值函数：C（C 为常数），$x\in\mathbf{R}$.

② 幂函数：x^a（a 为常数），其定义域由 a 确定，但不论 a 如何，在 $(0,+\infty)$ 内总有定义

③ 指数函数：a^x（常数 $a>0,a\neq1$），$x\in\mathbf{R}$.

④ 对数函数：$\log_a x$（常数 $a>0,a\neq1$），$x\in(0,+\infty)$.

$\in(-\infty,+\infty)$；$\cos x$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

记为 $f\circ g$，即

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)].$$

与复合映射一样，g 与 f 能构成复合函数 $f\circ g$ 的条件是：函数 g 的值域 R_g 必须包含于函数 f 的定义域 D_f，即 $R_g\subset D_f$. 否则，不能构成复合函数. 例如，$y=f(u)=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，$u=g(x)=\sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $g(\mathbf{R})\subset[-1,1]$，故 g 与 f 可构成复合函数

$$y=\arcsin\sin x,x\in\mathbf{R};$$

又如，$y=f(u)=\sqrt{u}$ 的定义域为 $D_f=[0,+\infty)$，$u=g(x)=\tan x$ 的值域为 $R_g=(-\infty,+\infty)$，显然 $R_g\not\subset D_f$，故 g 与 f 不能构成复合函数. 但是，如果将函数 g 限制在定义域的一个子集 $D=\left\{x\mid k\pi\leqslant x<\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$ 上，令 $g^*(x)=\tan x,x$

11. lxmdoreen 看看你自己的样子

老师你好，我想问问

2017 考研数学复习全书，数学二

P44 例 7 中，这一步是怎么来的啊

13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)-\ln(1+x)}{x^2}=2$，$\dfrac{xf(x)-\ln(1+x)}{x^2}=2+\alpha$，其中 $\lim\limits_{x\to0}\alpha=0$. 所以 $f(x)=\dfrac{(2+\alpha)x^2+\ln(1+x)}{x}$

(Ⅱ) 设 $F(x)=\int_0$

……的关系解出 $f(x)$，再由 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f$

解题思路 由式(2.9)利用极限与无穷小的关系解出 $f(x)$，再由 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)$……步骤规范，无难点. 对于(Ⅱ)，……$f'(0)$，用 $f'(0)$ 的定义证明 $f'(0)$ 存在并求之.

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}x^2}{bx^k}=1,$$

用洛必达法则定出常数 b 与 k 的值.

【解】 (Ⅰ) 由式(2.9)及极限与无穷小的关系，解得

$$f(x)=\frac{(2+\alpha)x^2+\ln(1+x)}{x},\text{其中}\lim_{x\to0}\alpha=0.$$

12. sunshineqxf520

老师你好，有一道题不太懂。能不能看一下。“如果函数 f(x)在 a 连续，那么|f(x)|也在 a 连续”怎样证明这个说法是对的。可能是很简单的小题，但是盼回复

18. 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，$\forall x$：$|x-a|<\delta$，

$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

而 $\big||f(x)|-|f(a)|\big| \le |f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

$\therefore$ $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处也连续.