目　录

第一章 行列式

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法.此外还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

§1 二阶与三阶行列式

一、二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

为消去未知数 x_2,以 a_{22}与 a_{12}分别乘上列两方程的两端,然后两个方程相减,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

类似地,消去 x_1,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,求得方程组(1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

(2)式中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得.其

中分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$是由方程组(1)的四个系数确定的，把这四个数按它们在方程组(1)中的位置，排成二行二列(横排称行、竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为数表(3)所确定的二阶行列式，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为行列式(4)的元素.元素 a_{ij}的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆.参看图 1.1，把 a_{11}到 a_{22}的实联线称为主对角线，a_{12}到 a_{21}的虚联线称为副对角线，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

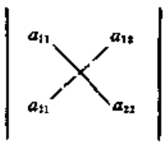

图 1.1

利用二阶行列式的概念，(2)式中 x_1、x_2 的分子也可写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

那末(2)式可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意这里的分母 D 是由方程组(1)的系数所确定的二阶行列式(称系数行列式),x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21}所得的二阶行列式,x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}、a_{22}所得的二阶行列式.

例 1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12, \\ 2x_1+x_2=1. \end{cases}$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-24=-21,$$

因此 $$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

二、三阶行列式

定义 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{5}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{6}$$

(6)式称为数表(5)所确定的三阶行列式.

上述定义表明三阶行列式含 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其规律遵循图 1.2 所示的对角线法则:图中有三条实线看作是平行于主对角线的联线,三条虚线看作是平行于副对角线的联线,实线上三元素的乘积冠正号,虚线上三元素的乘积冠负号.

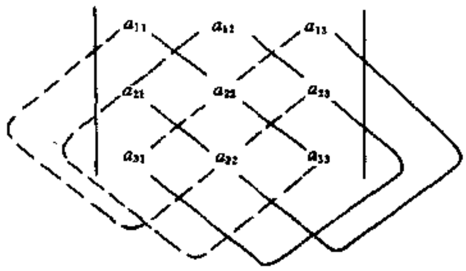

图 1.2

例 2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则,有

$$
\begin{aligned}
D &= 1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4 \\
&\quad -1\times1\times4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times2\times(-3) \\
&= -4-6+32-4-8-24=-14.
\end{aligned}
$$

例 3 求解方程

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.
$$

解 方程左端的三阶行列式

$$
\begin{aligned}
D &= 3x^2+4x+18-9x-2x^2-12 \\
&= x^2-5x+6,
\end{aligned}
$$

由 $x^2-5x+6=0$ 解得 $x=2$ 或 $x=3$.

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式,为研究四阶及更高阶行列式,下面先介绍有关全排列的知识,然后引出 n 阶行列式的概念.

§2 全排列及其逆序数

先看一个例子.

引例 用 1、2、3 三个数字,可以组成多少个没有重复数字的三位数?

解 这个问题相当于说,把三个数字分别放在百位、十位与个位上,有几种不同的放法?

显然,百位上可以从 1、2、3 三个数字中任选一个,所以有 3 种放法;十位上只能从剩下的两个数字中选一个,所以有 2 种放法;而个位上只能放最后剩下的一个数字,所以只有 1 种放法.因此,共有 $3\times2\times1=6$ 种放法.

这六个不同的三位数是:

$$123,\quad 231,\quad 312,\quad 132,\quad 213,\quad 321.$$

在数学中，把考察的对象，例如上例中的数字 1、2、3 叫做元素.上述问题就是：把 3 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法？

对于 n 个不同的元素，也可以提出类似的问题：把 n 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法？

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列（也简称排列）.

n 个不同元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示.由引例的结果可知 $P_3=3\cdot2\cdot1=6$.

为了得出计算 P_n 的公式，可以仿照引例进行讨论：

从 n 个元素中任取一个放在第一个位置上，有 n 种取法；

又从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上，有 $n-1$ 种取法；

这样继续下去，直到最后只剩下一个元素放在第 n 个位置上，只有 1 种取法.于是

$$P_n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!$$

对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有一个标准次序（例如 n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序），于是在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有 1 个逆序.一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

下面来讨论计算排列的逆序数的方法.

不失一般性，不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数，并规定由小到大为标准次序.设

$$p_1p_2\cdots p_n$$

为这 n 个自然数的一个排列，考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i. 全体元素的逆序数之总和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n} t_i,$$

即是这个排列的逆序数.

例 4 求排列32514的逆序数.

解 在排列 32514 中，

3 排在首位，逆序数为 0；

2 的前面比 2 大的数有一个(3)，故逆序数为 1；

5 是最大数，逆序数为 0；

1 的前面比 1 大的数有三个(3、2、5)，故逆序数为 3；

4 的前面比 4 大的数有一个(5)，故逆序数为 1，于是这个排列的逆序数为

$$t=0+1+0+3+1=5.$$

§3 n 阶行列式的定义

为了作出 n 阶行列式的定义，先来研究三阶行列式的结构. 三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{6}$$

容易看出：

(i) (6)式右边的每一项都恰是三个元素的乘积，这三个元素位于不同的行、不同的列. 因此，(6)式右端的任一项除正负号外可

以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 这里第一个下标(行标)排成标准次序 123,而第二个下标(列标)排成 $p_1p_2p_3$,它是 1、2、3 三个数的某个排列.这样的排列共有 6 种,对应(6)式右端共含 6 项.

(ii) 各项的正负号与列标的排列对照:

带正号的三项列标排列是:123,231,312;

带负号的三项列标排列是:132,213,321.

经计算可知前三个排列都是偶排列,而后三个排列都是奇排列.因此各项所带的正负号可以表示为$(-1)^t$,其中 t 为列标排列的逆序数.

总之,三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数,Σ 表示对 1、2、3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和.

仿此,可以把行列式推广到一般情形.

定义 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号 $(-1)^t$,得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{7}$$

的项,其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数.由于这样的排列共有 $n!$ 个,因而形如(7)式的项

共有 $n!$ 项.所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为n阶行列式,记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记作 $\det(a_{ij})$.数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素.

按此定义的二阶、三阶行列式,与§1中用对角线法则定义的二阶、三阶行列式,显然是一致的.当 $n=1$ 时,一阶行列式 $|a|=a$,注意不要与绝对值记号相混淆.

例 5 证明对角行列式(其中对角线上的元素是 λ_i,未写出的元素都是0)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & ⋰ & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证 第一式是显然的,下面只证第二式.

若记 $\lambda_i=a_{i,n-i+1}$,则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & ⋰ & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^t\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中 t 为排列 $n(n-1)\cdots 2\ 1$ 的逆序数,故

$$t=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$ 证毕

对角线以下(上)的元素都为 0 的行列式叫做上(下)三角形行列式,它的值与对角行列式一样.

例 6 证明下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 由于当 $j>i$ 时,$a_{ij}=0$,故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip_i},其下标应有 $p_i\leqslant i$,即 $p_1\leqslant 1,p_2\leqslant 2,\cdots,p_n\leqslant n$.

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中,能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$,所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.此项的符号 $(-1)^t=(-1)^0=1$,所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

§4 对 换

为了研究 n 阶行列式的性质,先来讨论对换以及它与排列的奇偶性的关系.

在排列中,将任意两个元素对调,其余的元素不动,这种作出新排列的手续叫做对换.将相邻两个元素对换,叫做相邻对换.

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$．显然，$a_1,\cdots,a_l;b_1,\cdots,b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a,b 两元素的逆序数改变为：当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1．所以排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同．

再证一般对换的情形．

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$，把它作 m 次相邻对换，调成 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$，再作 $m+1$ 次相邻对换，调成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$．总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 调成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反．

推论　奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数．

证　由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列（逆序数为 0），因此知推论成立．　　　　证毕

利用定理 1，下面来讨论行列式定义的另一种表示法．

对于行列式的任一项

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n},$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数，对换元素 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 成

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n},$$

这时，这一项的值不变，而行标排列与列标排列同时作了一次相应的对换．设新的行标排列 $1\cdots j\cdots i\cdots n$ 的逆序数为 r，则 r 为奇数；设新的列标排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则

$(-1)^{t_1}=-(-1)^t$．故 $(-1)^t=(-1)^{r+t_1}$，于是

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}=(-1)^{r+t_1}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}.$$

这就表明，对换乘积中两元素的次序，从而行标排列与列标排列同时作了相应的对换，则行标排列与列标排列的逆序数之和并不改变奇偶性. 经一次对换是如此，经多次对换当然还是如此. 于是，经过若干次对换，使：

列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$（逆序数为 t）变为自然排列（逆序数为 0）；

行标排列则相应地从自然排列变为某个新的排列，设此新排列为 $q_1q_2\cdots q_n$，其逆序数为 s，则有

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^s a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

又，若 $p_i=j$，则 $q_j=i$（即 $a_{ip_i}=a_{ij}=a_{q_jj}$）. 可见排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 所唯一确定.

由此可得

定理 2　n 阶行列式也可定义为

$$D=\Sigma(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

其中 t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

证　按行列式定义有

$$D=\Sigma(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

记

$$D_1=\Sigma(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

按上面讨论知：对于 D 中任一项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，总有且仅有 D_1 中的某一项 $(-1)^s a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$ 与之对应并相等；反之，对于 D_1 中的任一项 $(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$，也总有且仅有 D 中的某一项 $(-1)^s a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$ 与之对应并相等，于是 D 与 D_1 中的项可以一一对应并相等，从而 $D=D_1$.

§5 行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证 记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，按定义

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}.$$

而由定理 2，有

$$D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

故 $$D^{\mathrm{T}}=D.$$ 证毕

由此性质可知，行列式中的行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立，反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

证 设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 变换 i,j 两行得到的，即当 $k\neq i,j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$；当 $k=i,j$ 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$，于是

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}, \end{aligned}$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数. 设排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$，故

$$D_1=-\sum(-1)^{t_1}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D. \qquad \text{证毕}$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示第 i 列. 交换 i,j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$，交换 i,j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论　如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

证　把这两行互换，有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 3　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

第 i 行(或列)乘以 k，记作 $r_i\times k$(或 $c_i\times k$).

推论　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

第 i 行(或列)提出公因子 k，记作 $r_i\div k$(或 $c_i\div k$).

性质 4　行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零.

性质 5　若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和，例如

第 i 列的元素都是两数之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6　把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

例如以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上(记作 c_i+kc_j)，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_i+kc_j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},(i \neq j).$$

(以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上，记作 r_i+kr_j)

以上诸性质请读者证明之.

上述性质5表明,当某一行(或列)的元素为两数之和时,行列式关于该行(或列)可分解为两个行列式.若 n 阶行列式每个元素都表示成两数之和,则它可分解成 2^n 个行列式.例如二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+y \\ c & d+w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b+y \\ z & d+w \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & y \\ c & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ z & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}.$$

性质2、3、6介绍了行列式关于行和关于列的三种运算,即 $r_i \leftrightarrow r_j$、$r_i \times k$、$r_i + kr_j$ 和 $c_i \leftrightarrow c_j$、$c_i \times k$、$c_i + kc_j$,利用这些运算可简化行列式的计算,特别是利用运算 $r_i + kr_j$(或 $c_i + kc_j$)可以把行列式中许多元素化为0.计算行列式常用的一种方法就是利用运算 $r_i + kr_j$ 把行列式化为上三角形行列式,从而算得行列式的值.请看下例.

例7 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&0&\frac{5}{2}\end{vmatrix}=40.$$

上述解法中，先用了运算 $c_1\leftrightarrow c_2$，其目的是把 a_{11}换成 1，从而利用运算 $r_i-a_{i1}r_1$，即可把 $a_{i1}(i=2,3,4,)$变为 0. 如果不先作 $c_1\leftrightarrow c_2$，则由于原式中 $a_{11}=3$，需用运算 $r_i-\frac{a_{i1}}{3}r_1$ 把 a_{i1}变为 0，这样计算时就比较麻烦. 第二步把 r_2-r_1 和 r_4+5r_1 写在一起，这是两次运算，并把第一次运算结果的书写省略了.

例 8 计算

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}.$$

解 这个行列式的特点是各列 4 个数之和都是 6. 今把第 2、3、4 行同时加到第 1 行，提出公因子 6，然后各行减去第一行：

$$D\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\div 6}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48.$$

例 9 计算

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}.$$

解 从第 4 行开始,后行减前行:

$$D\xlongequal[r_2-r_1]{\substack{r_4-r_3\\ r_3-r_2}}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4.$$

上述诸例中都用到把几个运算写在一起的省略写法,这里要注意各个运算的次序一般不能颠倒,这是由于后一次运算是作用在前一次运算结果上的缘故.例如

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix}\xlongequal{r_2-r_1}\begin{vmatrix} a+c & b+d \\ -a & -b \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\xlongequal{r_2-r_1}\begin{vmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix} c & d \\ c-a & d-b \end{vmatrix},$$

可见两次运算当次序不同时所得结果不同.忽视后一次运算是作

用在前一次运算的结果上,就会出错,例如

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal[r_2 - r_1]{r_1 + r_2} \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$

这样的运算是错误的,出错的原因在于第二次运算找错了对象.

此外还要注意运算 $r_i + r_j$ 与 $r_j + r_i$ 的区别,记号 $r_i + kr_j$ 不能写作 $kr_j + r_i$(这里不能套用加法的交换律).

上述诸例都是利用运算 $r_i + kr_j$ 把行列式化为上三角形行列式,用归纳法不难证明(这里不证)任何 n 阶行列式总能利用运算 $r_i + kr_j$ 化为上三角形行列式,或化为下三角形行列式(这时要先把 $a_{1n}, \cdots, a_{n-1,n}$ 化为 0).类似地,利用列运算 $c_i + kc_j$,也可把行列式化为上三角形行列式或下三角形行列式.

例 10 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \det(b_{ij}) = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明 $D = D_1 D_2$.

证 对 D_1 作运算 $r_i + kr_j$,把 D_1 化为下三角形行列式,设为

$$D_1=\begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk};$$

对 D_2 作运算 c_i+kc_j，把 D_2 化为下三角形行列式，设为

$$D_2=\begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn}.$$

于是，对 D 的前 k 行作运算 r_i+kr_j，再对后 n 列作运算 c_i+kc_j，把 D 化为下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & 0 & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix},$$

故
$$D=p_{11}\cdot\cdots\cdot p_{kk}\cdot q_{11}\cdot\cdots\cdot q_{nn}=D_1D_2.$$

§6 行列式按行(列)展开

一般说来，低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简便，于是，我们自然地考虑用低阶行列式来表示高阶行列式的问题. 为此，先引进余子式和代数余子式的概念.

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}；记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

A_{ij} 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{32}的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}.$$

引理　一个 n 阶行列式,如果其中第 i 行所有元素除 a_{ij}外都为零,那末这行列式等于 a_{ij}与它的代数余子式的乘积,即

$$D=a_{ij}A_{ij}.$$

证　先证 a_{ij}位于第 1 行第 1 列的情形,此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这是例 10 中当 $k=1$ 时的特殊情形,按例 10 的结论,即有

$$D=a_{11}M_{11}.$$

又　　$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11},$$

从而　　$$D=a_{11}A_{11}.$$

再证一般情形,此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

为了利用前面的结果，把 D 的行列作如下调换：把 D 的第 i 行依次与第 $i-1$ 行、第 $i-2$ 行、…、第 1 行对调，这样 a_{ij} 就调到原来 a_{1j} 的位置上，调换的次数为 $i-1$. 再把第 j 列依次与第 $j-1$ 列、第 $j-2$ 列、…、第 1 列对调，这样 a_{ij} 就调到左上角，调换的次数为 $j-1$. 总之，经 $i+j-2$ 次调换，把 a_{ij} 调到左上角，所得的行列式 $D_1=(-1)^{i+j-2}D=(-1)^{i+j}D$，而元素 a_{ij} 在 D_1 中的余子式仍然是 a_{ij} 在 D 中的余子式 M_{ij}.

由于 a_{ij} 位于 D_1 的左上角，利用前面的结果，有

$$D_1=a_{ij}M_{ij},$$

于是 $$D=(-1)^{i+j}D_1=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}.$$

定理 3　行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

或 $$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

证

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots 0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
+ \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},
$$

根据引理，即得

$$
D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}
$$
$$
(i = 1,2,\cdots,n).
$$

类似地，若按列证明，可得

$$
D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}
$$
$$
(j = 1,2,\cdots,n).
$$

证毕

这个定理叫做行列式按行(列)展开法则．利用这一法则并结合行列式的性质，可以简化行列式的计算．

下面用此法则来计算例 7 的

$$
D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.
$$

保留 a_{33}，把第 3 行其余元素变为 0，然后按第 3 行展开：

$$D \xlongequal[c_4+c_3]{c_1-2c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_2} \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 40.$$

例 11 计算

$$D_{2n} = \underbrace{\begin{vmatrix} a & & & & & & b \\ & a & & 0 & & b & \\ & & \ddots & & \iddots & & \\ & & & a \quad b & & & \\ 0 & & & & & & 0 \\ & & & c \quad d & & & \\ & & \iddots & & \ddots & & \\ & c & & 0 & & d & \\ c & & & & & & d \end{vmatrix}}_{2n}$$

解 按第 1 行展开,有

$$D_{2n} = a \cdot \begin{vmatrix} \begin{matrix} a & & & 0 & & & b \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & a & & b & & \\ 0 & & & & & & 0 \\ & & c & & d & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ c & & & 0 & & & d \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \underbrace{0 \ \cdots \ \cdots\cdots\cdots \ \cdots \ 0}_{2(n-1)} & d \end{vmatrix}$$

$$
+b(-1)^{1+2n}\left|\begin{array}{cccccc}
0 & a & & 0 & & b \\
\vdots & & \ddots & & \iddots & \\
\vdots & & & a \quad b & & \\
\vdots & & 0 & & 0 & \\
\vdots & & & c \quad d & & \\
\vdots & & \iddots & & \ddots & \\
0 & c & & 0 & & d \\
c & 0 & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & 0
\end{array}\right|
$$

$$
\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{2(n-1)}
$$

$$
= adD_{2(n-1)} - bc(-1)^{2n-1+1}D_{2(n-1)} = (ad-bc)D_{2(n-1)},
$$

以此作递推公式,即可得

$$
\begin{aligned}
D_{2n} &= (ad-bc)D_{2(n-1)} = (ad-bc)^2 D_{2(n-2)} = \cdots \\
&= (ad-bc)^{n-1}D_2 = (ad-bc)^{n-1}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\
&= (ad-bc)^n .
\end{aligned}
$$

例 12 证明范德蒙德(Yandermonde)行列式

$$
D_n = \begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\
x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}
\end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j), \qquad (8)
$$

其中记号“$\prod$”表示全体同类因子的乘积.

证 用数学归纳法.因为

$$
D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{2 \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j),
$$

所以当 $n=2$ 时(8)式成立.现在假设(8)式对于 $n-1$ 阶范德蒙德

行列式成立,要证(8)式对 n 阶范德蒙德行列式也成立.

为此,设法把 D_n 降阶:从第 n 行开始,后行减去前行的 x_1 倍,有

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix},$$

按第 1 列展开,并把每列的公因子 (x_i-x_1) 提出,就有

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙德行列式,按归纳法假设,它等于所有 (x_i-x_j) 因子的乘积,其中 $n\geqslant i>j\geqslant 2$.故

$$\begin{aligned}D_n&=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 2}(x_i-x_j)\\ &=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j).\end{aligned}$$

证毕

例 11 和例 12 都是计算 n 阶行列式.计算 n 阶行列式,常要使用数学归纳法,不过在比较简单的情形(如例 11),可省略归纳法的叙述格式,但归纳法的主要步骤是不可省略的.这主要步骤是:导出递推公式(例 11 中导出 $D_{2n}=(ad-bc)D_{2(n-1)}$)及检验 $n=1$ 时结论成立(例 11 中最后用到 $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$).

由定理 3,还可得下述重要推论.

推论 **行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.即**

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0, i\neq j,$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0, i\neq j.$$

证 把行列式 $D=\det(a_{ij})$ 按第 j 行展开，有

$$a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

在上式中把 a_{jk} 换成 $a_{ik}(k=1,\cdots,n)$，可得

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

当 $i\neq j$ 时，上式右端行列式中有两行对应元素相同，故行列式等于零，即得

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0, (i\neq j).$$

上述证法如按列进行，即可得

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0, (i\neq j).$$ 证毕

综合定理 3 及其推论，有关于代数余子式的重要性质：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j; \end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j; \end{cases}$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{当 } i = j, \\ 0, \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$

§7 克拉默法则

含有 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{9}$$

与二、三元线性方程组相类似，它的解可以用 n 阶行列式表示，即有

克拉默法则　如果线性方程组(9)的系数行列式不等于零，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那末，方程组(9)有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{10}$$

其中 $D_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 用 D 中第 j 列元素的代数余子式 $A_{1j},A_{2j},\cdots,A_{nj}$ 依次乘方程组(9)的 n 个方程,再把它们相加,得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{kj}\right)x_1+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\right)x_j+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kn}A_{kj}\right)x_n$$
$$=\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj},$$

根据代数余子式的重要性质可知,上式中 x_j 的系数等于 D,而其余 $x_i(i\neq j)$的系数均为 0;又,等式右端即是 D_j.于是

$$Dx_j=D_j,(j=1,2,\cdots,n). \tag{11}$$

当 $D\neq 0$ 时,方程组(11)有唯一的一个解(10).

由于方程组(11)是由方程组(9)经乘数与相加两种运算而得,故(9)的解一定是(11)的解.今(11)仅有一个解(10),故(9)如果有解,就只可能是解(10).

为证解(10)是方程组(9)的唯一解,还需验证解(10)确是方程组(9)的解,也就是要证明

$$a_{i1}\frac{D_1}{D}+a_{i2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{in}\frac{D_n}{D}=b_i,(i=1,2,\cdots,n).$$

为此,考虑有两行相同的 $n+1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_i & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (i=1,2,\cdots,n),$$

它的值为 0.把它按第 1 行展开,由于第 1 行中 a_{ij} 的代数余子式为

$$(-1)^{1+j+1}\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$=(-1)^{j+2}(-1)^{j-1}D_j=-D_j,$$

所以有 $$0=b_iD-a_{i1}D_1-\cdots-a_{in}D_n,$$

即 $$a_{i1}\frac{D_1}{D}+a_{i2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{in}\frac{D_n}{D}=b_i,(i=1,2,\cdots,n).$$

例 13 解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8,\\ x_1-3x_2-6x_4=9,\\ 2x_2-x_3+2x_4=-5,\\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0.\end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_2]{r_1-2r_2}\begin{vmatrix}0&7&-5&13\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\0&7&-7&12\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}7&-5&13\\2&-1&2\\7&-7&12\end{vmatrix}\xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2}-\begin{vmatrix}-3&-5&3\\0&-1&0\\-7&-7&-2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-3&3\\-7&-2\end{vmatrix}=27,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=81,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 8 & 1\\1 & -3 & 9 & -6\\0 & 2 & -5 & 2\\1 & 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-27,$$

$$D_4=\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & 8\\1 & -3 & 0 & 9\\0 & 2 & -1 & -5\\1 & 4 & -7 & 0\end{vmatrix}=27,$$

于是得 $$x_1=3, x_2=-4, x_3=-1, x_4=1.$$

克拉默法则有重大的理论价值,撇开求解公式(10),克拉默法则可叙述为下面的重要定理.

定理 4　如果线性方程组(9)的系数行列式 $D\neq 0$,则(9)一定有解,且解是唯一的.

定理 4 的逆否定理为:

定理 4′　如果线性方程组(9)无解或有两个不同的解,则它的系数行列式必为零.

线性方程组(9)右端的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零时,线性方程组(9)叫做非齐次线性方程组,当 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零时,线性方程组(9)叫做齐次线性方程组.

对于齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0,\end{cases}\tag{12}$$

$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 一定是它的解,这个解叫做齐次线性方程组(12)的零解.如果一组不全为零的数是(12)的解,则它叫做齐次线性方程组(12)的非零解.齐次线性方程组(12)一定有零解,但不一

定有非零解.

把定理 4 应用于齐次线性方程组(12),可得

定理 5　如果齐次线性方程组(12)的系数行列式 $D \neq 0$,则齐次线性方程组(12)没有非零解.

定理 5′　如果齐次线性方程组(12)有非零解,则它的系数行列式必为零.

定理 5(或定理 5′)说明系数行列式 $D=0$ 是齐次线性方程组有非零解的必要条件.在第三章中还将证明这个条件也是充分的.

例 14　问 λ 取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases}(5-\lambda)x+2y+2z=0,\\ 2x+(6-\lambda)y=0,\\ 2x+(4-\lambda)z=0\end{cases} \tag{13}$$

有非零解?

解　由定理 5′可知,若齐次线性方程组(13)有非零解,则(13)的系数行列式 $D=0$.而

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}5-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 6-\lambda & 0\\ 2 & 0 & 4-\lambda\end{vmatrix}\\ &=(5-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda)-4(4-\lambda)-4(6-\lambda)\\ &=(5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda),\end{aligned}$$

由 $D=0$,得 $\lambda=2$、$\lambda=5$ 或 $\lambda=8$.

不难验证,当 $\lambda=2$、5 或 8 时,齐次线性方程组(13)确有非零解.

习　题　一

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

2. 按自然数从小到大为标准次序,求下列各排列的逆序数:

(1) 1　2　3　4;　　(2) 4　1　3　2;

(3) 3　4　2　1;　　(4) 2　4　1　3;

(5) 1　3 ⋯ $(2n-1)$ 2　4 ⋯ $(2n)$;

(6) 1　3 ⋯ $(2n-1)$ $(2n)$ $(2n-2)$ ⋯ 2.

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

4. 计算下列各行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$.

5. 证明:

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$;

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$

$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$;

(5) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$

$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

6. 设 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$，把 D 上下翻转、或逆时针旋转 90°、或依副对角线翻转，依次得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix},$$

证明 $D_1=D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$，$D_3=D$.

7. 计算下列各行列式（D_k 为 k 阶行列式）：

(1) $D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$，其中对角线上元素都是 a，未写出的元素都是 0；

(2) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$；

(3) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$；

提示：利用范德蒙德行列式的结果.

(4) $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & 0 & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ 0 & & & & & 0 \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & 0 & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$;

(5) $D_n=\det(a_{ij})$，其中 $a_{ij}=|i-j|$；

(6) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

8. 用克拉默法则解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5, \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2, \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2, \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 5x_1+6x_2 & =1, \\ x_1+5x_2+6x_3 & =0, \\ \quad x_2+5x_3+6x_4 & =0, \\ \quad\quad x_3+5x_4+6x_5 & =0, \\ \quad\quad\quad x_4+5x_5 & =1. \end{cases}$

9. 问 λ、μ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0, \\ x_2+\mu x_2+x_3=0, \\ x_1+2\mu x_2+x_3=0 \end{cases}$$

有非零解？

10. 问 λ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0, \\ 2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0 \end{cases}$$

有非零解？

第二章 矩阵及其运算

§1 矩　　阵

定义 1 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m \times n$ 矩阵. 为表示它是一个整体，总是加一个括弧，并用大写黑体字母表示它，记作

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

这 $m \times n$ 个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，简称为元，数 a_{ij} 位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元. 以数 a_{ij} 为 (i,j) 元的矩阵可简记作 (a_{ij}) 或 $(a_{ij})_{m \times n}$. $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也记作 $\boldsymbol{A}_{m \times n}$.

元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵. 本书中的矩阵除特别说明者外，都指实矩阵.

行数与列数都等于 n 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也记作 $\boldsymbol{A}_n$.

只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_1\ a_2 \cdots\ a_n)$$

称为行矩阵,又称行向量.为避免元素间的混淆,行矩阵也记作

$$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为列矩阵,又称列向量.

两个矩阵的行数相等、列数也相等时,就称它们是同型矩阵.如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是同型矩阵,并且它们的对应元素相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

那末就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等,记作

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}.$$

元素都是零的矩阵称为零矩阵,记作 $\boldsymbol{O}$.注意不同型的零矩阵是不同的.

矩阵的应用非常广泛,下面仅举几例.

例 1 某厂向三个商店发送四种产品的数量可列成矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

其中 a_{ij} 为工厂向第 i 店发送第 j 种产品的数量.

这四种产品的单价及单件重量也可列成矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix},$$

其中 b_{i1}为第 i 种产品的单价，b_{i2}为第 i 种产品的单件重量.

例 2 四个城市间的单向航线如图 2.1所示.若令

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市有 1 条单向航线}, \\ 0, \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市没有单向航线}, \end{cases}$$

则图 2.1 可用矩阵表示为

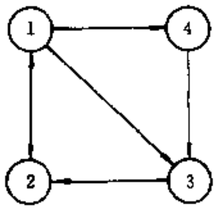

图 2.1

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

一般地，若干个点之间的单向通道都可用这样的矩阵表示.

例 3 n 个变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 m 个变量$y_1, y_2, \cdots, y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{2}$$

表示一个从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的线性变换，其中 a_{ij}为常数.线性变换(2)的系数 a_{ij}构成矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$.

给定了线性变换(2),它的系数所构成的矩阵(称为系数矩阵)也就确定.反之,如果给出一个矩阵作为线性变换的系数矩阵,则线性变换也就确定.在这个意义上,线性变换和矩阵之间存在着一一对应的关系.

例如线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

叫做恒等变换,它对应的一个 n 阶方阵

$$\boldsymbol{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

叫做 n 阶单位矩阵,简记作 $\boldsymbol{E}$.这个方阵的特点是:从左上角到右下角的直线(叫做主对角线)上的元素都是 1,其它元素都是 0.即单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的 (i,j) 元为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j. \end{cases}$$

又如线性变换

$$\begin{cases} y_1 = \lambda_1 x_1, \\ y_2 = \lambda_2 x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = \lambda_n x_n \end{cases}$$

对应 n 阶方阵

$$
\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.
$$

这个方阵的特点是:不在主对角线上的元素都是0.这种方阵称为对角矩阵.对角矩阵也记作

$$
\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).
$$

由于矩阵和线性变换之间存在一一对应的关系,因此可以利用矩阵来研究线性变换,也可以利用线性变换来解释矩阵的涵义.

例如矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$所对应的线性变换

$$
\begin{cases} x_1=x, \\ y_1=0 \end{cases}
$$

可看作XOY平面上把点$P(x,y)$变为点$P_1(x,0)$的变换(参看图2.2),由于点$P_1(x,0)$是点$P(x,y)$在X轴上的投影(也就是向量$\overrightarrow{OP_1}=(x,0)$是向量$\overrightarrow{OP}=(x,y)$在$X$轴上的投影向量),因此这是一个投影变换.

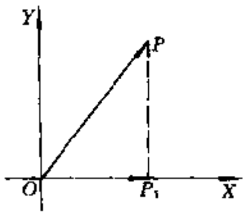

图2.2

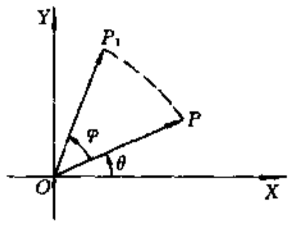

图2.3

又如矩阵$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$对应的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = \cos\varphi x - \sin\varphi y, \\ y_1 = \sin\varphi x + \cos\varphi y \end{cases}$$

把点 $P(r\cos\theta, r\sin\theta)$变为点 $P_1(r\cos(\theta+\varphi), r\sin(\theta+\varphi))$，即把极坐标为$(r,\theta)$的点 P 变为极坐标为$(r,\theta+\varphi)$的点 P_1（也就是把向量$\overrightarrow{OP}$的辐角增加 φ 而长度保持不变），因此这是一个以原点为中心旋转 φ 角的旋转变换（参看图 2.3）.

§2 矩阵的运算

一、矩阵的加法

定义 2 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，那末矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

应该注意，只有当两个矩阵是同型矩阵时，这两个矩阵才能进行加法运算.

矩阵加法满足下列运算规律（设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵）：

(i) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(ii) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，记

$$-\boldsymbol{A}=(-a_{ij}),$$

$-\boldsymbol{A}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，显然有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}.$$

由此规定矩阵的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

二、数与矩阵相乘

定义 3 数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$，规定为

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}.$$

数乘矩阵满足下列运算规律（设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵，λ、μ 为数）：

(i) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$；

(ii) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$；

(iii) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

矩阵相加与数乘矩阵合起来，统称为矩阵的线性运算.

三、矩阵与矩阵相乘

设有两个线性变换

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\end{cases}\tag{3}$$

$$\begin{cases}x_1=b_{11}t_1+b_{12}t_2,\\ x_2=b_{21}t_1+b_{22}t_2,\\ x_3=b_{31}t_1+b_{32}t_2,\end{cases}\tag{4}$$

若想求出从 t_1、t_2 到 y_1、y_2 的线性变换，可将(4)代入(3)，便得

$$\begin{cases}y_1=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31})t_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32})t_2,\\ y_2=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31})t_1+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32})t_2.\end{cases}\tag{5}$$

线性变换(5)可看成是先作线性变换(4)再作线性变换(3)的结果.我们把线性变换(5)叫做线性变换(3)与(4)的乘积,相应地把(5)所对应的矩阵定义为(3)与(4)所对应的矩阵的乘积,即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

一般地,我们有

定义 4 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是一个 $m \times s$ 矩阵,$\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 是一个 $s \times n$ 矩阵,那末规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$,其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}$$
$$(i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n), \tag{6}$$

并把此乘积记作

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}.$$

按此定义,一个 $1 \times s$ 行矩阵与一个 $s \times 1$ 列矩阵的乘积是一个 1 阶方阵,也就是一个数:

$$(a_{i1}a_{i2}\cdots a_{is})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$$

$$= \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} = c_{ij},$$

由此表明乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 的 (i,j) 元 c_{ij} 就是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的乘积.

必须注意:只有当第一个矩阵(左矩阵)的列数等于第二个矩阵(右矩阵)的行数时,两个矩阵才能相乘.

例 4 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix} \text{与 } \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

的乘积 $\boldsymbol{AB}$.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 2×4 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 4×3 矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数,所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘,其乘积 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 是一个 2×3 矩阵.按公式(6)有

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\begin{matrix}1\times4+0\times(-1)\\ +3\times2\\ +(-1)\times1\end{matrix} & \begin{matrix}1\times1+0\times1\\ +3\times0\\ +(-1)\times3\end{matrix} & \begin{matrix}1\times0+0\times3\\ +3\times1\\ +(-1)\times4\end{matrix}\\ \begin{matrix}2\times4+1\times(-1)\\ +0\times2\\ +2\times1\end{matrix} & \begin{matrix}2\times1+1\times1\\ +0\times0\\ +2\times3\end{matrix} & \begin{matrix}2\times0+1\times3\\ +0\times1\\ +2\times4\end{matrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9 & 2 & -1\\ 9 & 9 & 11\end{pmatrix}.$$

例 5 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{与} B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 及 $\boldsymbol{BA}$.

解 按公式(6),有

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

在例 4 中,$\boldsymbol{A}$ 是 2×4 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 4×3 矩阵,乘积 $\boldsymbol{AB}$ 有意义而 $\boldsymbol{BA}$ 却没有意义.由此可知,在矩阵的乘法中必须注意矩阵相乘的顺序.$\boldsymbol{AB}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$($\boldsymbol{B}$ 被 $\boldsymbol{A}$ 左乘)的乘积,$\boldsymbol{BA}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{B}$ 的乘积,$\boldsymbol{AB}$ 有意义时,$\boldsymbol{BA}$ 可以没有意义.又若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义,但 $\boldsymbol{AB}$ 是 m 阶方阵,$\boldsymbol{BA}$ 是 n 阶方阵,当 $m\neq n$ 时 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.即使 $m=n$,即 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是同阶方阵,如例 5,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 2 阶方阵,从而 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 也都是 2 阶方阵,但 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 仍然可以不相等.总之,矩阵的乘法不满足交换律,即在一般情形下,$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

例 5 还表明,矩阵 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,但却有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$.这就提醒读者要特别注意:若有两个矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,不能得出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 的结论;若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 而 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{O}$,也不能得出 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$ 的结论.

矩阵的乘法虽不满足交换律,但仍满足下列结合律和分配律(假设运算都是可行的):

(i) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

(ii) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$,(其中 λ 为数);

(iii) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$,

$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.

对于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$,容易验证

$$E_m A_{m\times n} = A_{m\times n}, \quad A_{m\times n}E_n = A_{m\times n}.$$

或简写成

$$EA = AE = A.$$

可见单位矩阵 E 在矩阵乘法中的作用类似于数 1.

有了矩阵的乘法，就可以定义矩阵的幂. 设 A 是 n 阶方阵，定义

$$A^1 = A, A^2 = A^1A^1, \cdots, A^{k+1} = A^kA^1,$$

其中 k 为正整数. 这就是说，A^k 就是 k 个 A 连乘. 显然只有方阵，它的幂才有意义.

由于矩阵乘法适合结合律，所以矩阵的幂满足以下运算规律：

$$A^kA^l = A^{k+l}, (A^k)^l = A^{kl},$$

其中 k、l 为正整数. 又因矩阵乘法一般不满足交换律，所以对于两个 n 阶矩阵 A 与 B，一般说来 $(AB)^k \neq A^kB^k$.

上节例 1 中有一个向三个商店发送四种产品的数量所构成的矩阵 A、以及一个四种产品的单价与单件重量所构成的矩阵 B，按矩阵相乘的定义，可知 A 与 B 的乘积矩阵 $AB = C = (c_{ij})_{3\times 2}$ 为向三个商店所发产品的总值及总重量所构成的矩阵，即 c_{i1} 为向第 i 店所发产品的总值，c_{i2} 为向第 i 店所发产品的总重量.

上节例 2 中有一个四城市间的单向航线矩阵 A，由

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 有\ A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

记 $A^2 = (b_{ij})$，则 b_{ij} 为从 i 市经一次中转到 j 市的单向航线条数.

例如

$b_{23} = 1$，显示从②市经一次中转到③市的单向航线有 1 条（②

$\to$①$\to$③,参看图 2.1);

$b_{42}=2$,显示从④市经一次中转到②市的单向航线有 2 条(④$\to$①$\to$②,④$\to$③$\to$②);

$b_{11}=2$,显示过①市的双向航线有 2 条(①$\to$②$\to$①,①$\to$④$\to$①);

$b_{33}=0$,显示③市没有双向航线.

上节例 3 中的线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{cases} \tag{2}$$

利用矩阵的乘法,可记作

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X},$$

其中 $$\boldsymbol{A} = (a_{ij}), \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

这里,列向量(列矩阵)$\boldsymbol{X}$ 表示 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,列向量 $\boldsymbol{Y}$ 表示 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$. 线性变换(2)把 $\boldsymbol{X}$ 变成 $\boldsymbol{Y}$,相当于用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 去左乘 $\boldsymbol{X}$ 得到 $\boldsymbol{Y}$.

用矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$去左乘向量$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$①,相当于把向量$\overrightarrow{OP}$投影到 X 轴上.

用矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$左乘向量$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,相当于把向

---

① 坐标为 x, y 的向量$\overrightarrow{OP}$,可以记作行向量(x, y),也可记作列向量$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

量$\overrightarrow{OP}$旋转φ角.进一步还可推知,以$A^n=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^n$左乘向量$\overrightarrow{OP}$,应把向量$\overrightarrow{OP}$旋转$n$个$\varphi$角,即旋转$n\varphi$角,而旋转$n\varphi$角所对应的矩阵为$\begin{pmatrix}\cos n\varphi & -\sin n\varphi\\ \sin n\varphi & \cos n\varphi\end{pmatrix}$.

例6 证明

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\varphi & -\sin n\varphi\\ \sin n\varphi & \cos n\varphi\end{pmatrix}.$$

从前段说明已能推知本例的结论,下面按矩阵幂的定义来证明此结论.

证 用数学归纳法.当$n=1$时,等式显然成立.设$n=k$时成立,即设

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}\cos k\varphi & -\sin k\varphi\\ \sin k\varphi & \cos k\varphi\end{pmatrix},$$

要证$n=k+1$时成立.此时有

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}\cos k\varphi & -\sin k\varphi\\ \sin k\varphi & \cos k\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}\cos k\varphi\cos\varphi-\sin k\varphi\sin\varphi & -\cos k\varphi\sin\varphi-\sin k\varphi\cos\varphi\\ \sin k\varphi\cos\varphi+\cos k\varphi\sin\varphi & -\sin k\varphi\sin\varphi+\cos k\varphi\cos\varphi\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}\cos(k+1)\varphi & -\sin(k+1)\varphi\\ \sin(k+1)\varphi & \cos(k+1)\varphi\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

于是等式得证.

四、矩阵的转置

定义5 把矩阵A的行换成同序数的列得到一个新矩阵,叫

做 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 例如矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

的转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

矩阵的转置也是一种运算，满足下述运算规律(假设运算都是可行的)：

(i) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(ii) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(iii) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(iv) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

这里仅证明(iv). 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$, 记 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}=(d_{ij})_{n\times m}$. 于是按公式(6)，有

$$c_{ji}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki},$$

而 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行为 $(b_{1i},\cdots,b_{si})$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 j 列为 $(a_{j1},\cdots,a_{js})^{\mathrm{T}}$，因此

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{s}b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki},$$

所以 $\qquad d_{ij}=c_{ji}\ (i=1,2,\cdots,n;\quad j=1,2,\cdots,m)$,

即 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$，亦即

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}.$$

例 7 已知

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix},$$

求$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$.

解法 1 因为

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&14&-3\\17&13&10\end{pmatrix},$$

所以
$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$$

解法 2

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&4&2\\7&2&0\\-1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，如果满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即

$$a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n),$$

那末 $\boldsymbol{A}$ 称为对称矩阵. 对称矩阵的特点是：它的元素以主对角线为对称轴对应相等.

例 8 设列矩阵 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$满足 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=1$，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，证明 $\boldsymbol{H}$ 是对称矩阵，且 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$.

证明前先提醒读者注意：$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 是一阶方

阵，也就是一个数，而 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$ 是 n 阶方阵.

证

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} &= (\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-2(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{H},\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{H}$ 是对称矩阵.

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{H}^2 = (\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^2 \\ &= \boldsymbol{E}-4\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}+4(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}) \\ &= \boldsymbol{E}-4\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{E}-4\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

五、方阵的行列式

定义 6 由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素所构成的行列式（各元素的位置不变），称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$.

应该注意，方阵与行列式是两个不同的概念，n 阶方阵是 n^2 个数按一定方式排成的数表，而 n 阶行列式则是这些数（也就是数表 $\boldsymbol{A}$）按一定的运算法则所确定的一个数.

由 $\boldsymbol{A}$ 确定 $|\boldsymbol{A}|$ 的这个运算满足下述运算规律（设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，λ 为数）：

(i) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$（行列式性质 1）；

(ii) $|\lambda\boldsymbol{A}| = \lambda^n|\boldsymbol{A}|$；

(iii) $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

我们仅证明(iii). 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$. 记 $2n$ 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & & & \\ \vdots & & \vdots & & \boldsymbol{O} & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & & & \\ -1 & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix},$$

由第一章例 10 可知 $D = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，而在 D 中以 b_{1j} 乘第 1 列，b_{2j}

乘第 2 列，…，b_{nj} 乘第 n 列，都加到第 $n+j$ 列上（$j=1,2,\cdots,n$），有

$$D=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，$c_{ij}=b_{1j}a_{i1}+b_{2j}a_{i2}+\cdots+b_{nj}a_{in}$，故 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

再对 D 的行作 $r_j\leftrightarrow r_{n+j}$（$j=1,2,\cdots,n$），有

$$D=(-1)^n\begin{pmatrix} -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix},$$

从而按第一章例 10 有

$$D=(-1)^n|-\boldsymbol{E}||\boldsymbol{C}|=(-1)^n(-1)^n|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{AB}|.$$

于是
$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$
证毕

由（iii）可知，对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，一般说来 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，但总有

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|.$$

例 9 行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下的矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 试证

$$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

证 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，记 $\boldsymbol{AA}^*=(b_{ij})$，则

$$b_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=|\boldsymbol{A}|\delta_{ij},$$

故 $$AA^* = (|A|\delta_{ij}) = |A|(\delta_{ij}) = |A|E.$$

类似有

$$A^*A = \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj}\right) = (|A|\delta_{ij}) = |A|(\delta_{ij}) = |A|E.$$

六、共轭矩阵

当 $A=(a_{ij})$为复矩阵时,用 $\bar{a}_{ij}$表示 a_{ij}的共轭复数,记

$$\overline{A} = (\bar{a}_{ij}).$$

$\overline{A}$称为 A 的共轭矩阵.

共轭矩阵满足下述运算规律(设 A,B 为复矩阵,λ 为复数,且运算都是可行的):

(i) $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$;

(ii) $\overline{\lambda A} = \bar{\lambda}\,\overline{A}$;

(iii) $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$.

§3 逆 矩 阵

设给定一个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{7}$$

它的系数矩阵是一个 n 阶矩阵 A,若记

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

则线性变换(7)可记作

$$Y = AX. \tag{8}$$

按克拉默法则,若$|A| \neq 0$,则由(7)可解出

$$x_i = \frac{1}{|A|}(A_{1i}y_1 + A_{2i}y_2 + \cdots + A_{ni}y_n),$$

即 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 可用 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 线性表示为

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n, \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n, \end{cases} \tag{9}$$

其中 $b_{ij} = \frac{1}{|A|}A_{ji}$,并且这个表示式是唯一的.(9)是一个从 y_1, $y_2, \cdots, y_n$ 到 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性变换,称为线性变换(7)的逆变换.

若把(9)的系数矩阵记作 $\boldsymbol{B}$,则(9)也可记作

$$X = BY. \tag{10}$$

我们从(8)、(10)两式分析变换所对应的方阵 $\boldsymbol{A}$ 与逆变换所对应的方阵$\boldsymbol{B}$ 之间的关系.用(10)代入(8),可得

$$Y = A(BY) = (AB)Y,$$

可见 $\boldsymbol{AB}$ 为恒等变换所对应的矩阵,故 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$.用(8)代入(10),得

$$X = B(AX) = (BA)X,$$

知有 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$.于是有

$$AB = BA = E.$$

由此我们引入逆矩阵的定义.

定义 7 对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$,如果有一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$,使

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E},$$

则说矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的,并把矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的,那末 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的.这是因为:设 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,则有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BE}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC})=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{EC}=\boldsymbol{C},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的.

$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$.即若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

定理 1 **若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.**

证 $\boldsymbol{A}$ 可逆,即有 $\boldsymbol{A}^{-1}$,使 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$.故 $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{E}|=1$,所以 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

定理 2 **若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且**

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*},$$

其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

证 由例 9 知

$$\boldsymbol{AA}^{*}=\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E},$$

因 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,故有

$$\boldsymbol{A}\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},$$

所以,按逆矩阵的定义,即有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}.$$

证毕

当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时,$\boldsymbol{A}$ 称为奇异矩阵,否则称非奇异矩阵.由上面两定理可知:**$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,即可逆矩阵就是非奇异矩阵.**

由定理2,可得下述推论.

推论 若 $AB=E$(或 $BA=E$),则 $B=A^{-1}$.

证 $|A|\cdot|B|=|E|=1$,故 $|A|\neq 0$,因而 A^{-1}存在,于是

$$B=EB=(A^{-1}A)B=A^{-1}(AB)=A^{-1}E=A^{-1}. \quad \text{证毕}$$

方阵的逆矩阵满足下述运算规律:

(i) 若 A 可逆,则 A^{-1}亦可逆,且 $(A^{-1})^{-1}=A$.

(ii) 若 A 可逆,数 $\lambda\neq 0$,则 λA 可逆,且 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

(iii) 若 A,B 为同阶矩阵且均可逆,则 AB 亦可逆,且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

证 $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$.由推论,即有 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

(iv) 若 A 可逆,则 A^{T} 亦可逆,且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

证 $A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{-1}A)^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}=E$,所以

$$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}. \quad \text{证毕}$$

当 $|A|\neq 0$ 时,还可定义

$$A^0=E,\quad A^{-k}=(A^{-1})^k,$$

其中 k 为正整数.这样,当 $|A|\neq 0$,λ,μ 为整数时,有

$$A^{\lambda}A^{\mu}=A^{\lambda+\mu},(A^{\lambda})^{\mu}=A^{\lambda\mu}.$$

例 10 求方阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$$

的逆矩阵.

解 求得 $|A|=2\neq 0$,知 A^{-1}存在.再计算

$$A_{11}=2,\qquad A_{21}=6,\qquad A_{31}=-4,$$
$$A_{12}=-3,\qquad A_{22}=-6,\qquad A_{32}=5,$$
$$A_{13}=2,\qquad A_{23}=2,\qquad A_{33}=-2,$$

得
$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}2 & 6 & -4\\ -3 & -6 & 5\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix},$$

所以
$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2}\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

例 11 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使满足

$$\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}.$$

解 若 $\boldsymbol{A}^{-1}$,$\boldsymbol{B}^{-1}$存在,则用 $\boldsymbol{A}^{-1}$左乘上式,$\boldsymbol{B}^{-1}$右乘上式,有

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AXBB}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1},$$

即
$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}.$$

由上例知 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,而 $|\boldsymbol{B}|=1$,故知 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 都可逆.且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2}\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix},$$

于是 $X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

§4 矩阵分块法

对于行数和列数较高的矩阵 A，运算时常采用分块法，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算. 我们将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为 A 的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

例如将 3×4 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

分成子块的分法很多，下面举出三种分块形式：

$$\text{(i)} \left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right), \quad \text{(ii)} \left(\begin{array}{c:cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right),$$

$$\text{(iii)} \left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right).$$

分法(i)可记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},$$

其中
$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix}a_{13} & a_{14}\\ a_{23} & a_{24}\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{A}_{21}=(a_{31}\quad a_{32}),\boldsymbol{A}_{22}=(a_{33}\quad a_{34}),$$
即 $\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{12},\boldsymbol{A}_{21},\boldsymbol{A}_{22}$为 $\boldsymbol{A}$ 的子块,而 $\boldsymbol{A}$ 形式上成为以这些子块为元素的分块矩阵.分法(ii)及(iii)的分块矩阵请读者写出.

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则相类似,分别说明如下:

(1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同、列数相同,采用相同的分块法,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$与$\boldsymbol{B}_{ij}$的行数相同、列数相同,那末

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix}.$$

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$,$\lambda$ 为数,那末

$$\lambda \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \lambda \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \lambda \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}.$$

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times l$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $l \times n$ 矩阵，分块成

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{t1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{tr} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{i1}, \boldsymbol{A}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{A}_{it}$ 的列数分别等于 $\boldsymbol{B}_{1j}, \boldsymbol{B}_{2j}, \cdots, \boldsymbol{B}_{tj}$ 的行数，那末

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{C}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{sr} \end{pmatrix},$$

其中 $$\boldsymbol{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{t} \boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj} \ (i = 1, \cdots, s; j = 1, \cdots, r).$$

例 12 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$.

解 把 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分块成

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{E} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ \hdashline 1 & 0 & 4 & 1\\ -1 & -1 & 2 & 0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix},$$

则 $$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix},$$

而 $$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{B}_{21}&=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_{22}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix},$$

于是 $$\boldsymbol{AB}=\left(\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ \hdashline -2 & 4 & 3 & 3\\ -1 & 1 & 3 & 1\end{array}\right).$$

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,若 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块,其余子块都为零矩阵,且非零子块都是方阵,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \boldsymbol{O}\\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix},$$

其中 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$都是方阵，那末称 A 为分块对角矩阵.

分块对角矩阵的行列式具有下述性质：

$$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

由此性质可知，若$|A_i|\neq 0(i=1,2,\cdots,s)$，则$|A|\neq 0$，并有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 13 设 $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解
$$A=\left(\begin{array}{c|cc} 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1=(5),A_1^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right);$$

$$A_2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},A_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix};$$

所以
$$A^{-1}=\left(\begin{array}{c|cc} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

对矩阵分块时，有两种分块法应予特别重视，这就是按行分块和按列分块.

$m\times n$ 矩阵 A 有 m 行，称为矩阵 A 的 m 个行向量. 若第 i 行记作

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})^{①},$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 便记为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

$m \times n$ 矩阵$\boldsymbol{A}$ 有 n 列，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量，若第 j 列记作

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

则
$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n).$$

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

记 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}), \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$

---

① 今后列向量(列矩阵)常用小写黑体字母表示，如 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{x}$ 等，而行向量(行矩阵)则用列向量的转置表示，如 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 等.

其中 $\boldsymbol{A}$ 称为系数矩阵，$\boldsymbol{x}$ 称为未知数向量，$\boldsymbol{b}$ 称为常数项向量，$\boldsymbol{B}$ 称为增广矩阵. 按分块矩阵的记法，可记

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A} \,\vdots\, \boldsymbol{b}), \text{或 } \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}).$$

利用矩阵的乘法，此方程组可记作

$$\boldsymbol{A x}=\boldsymbol{b}.$$

如果把系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按行分成 m 块，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可记作

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

这就相当于把每个方程

$$a_{i1} x_1+a_{i2} x_2+\cdots+a_{in} x_n=b_i$$

记作
$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}=b_i \quad (i=1,2, \cdots, m).$$

如果把系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分成 n 块，则与 $\boldsymbol{A}$ 相乘的 $\boldsymbol{x}$ 应对应地按行分成 n 块，从而记作

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{b},$$

即
$$x_1 \boldsymbol{a}_1+x_2 \boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n \boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}.$$

对于矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m \times s}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s \times n}$ 的乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m \times n}$，若把 $\boldsymbol{A}$ 按行分成 m 块，把 $\boldsymbol{B}$ 按列分成 n 块，便有

$$AB=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}=(c_{ij})_{m\times n},$$

其中

$$c_{ij}=\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_j=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is})\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{sj}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},$$

由此可进一步领会矩阵相乘的定义.

以对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_m$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 时,把 $\boldsymbol{A}$ 按行分块,有

$$\boldsymbol{\Lambda}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},$$

可见以对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_m$ 左乘 $\boldsymbol{A}$ 的结果是 $\boldsymbol{A}$ 的每一行乘以 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中与该行对应的对角元.

以对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}_n$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 时,把 $\boldsymbol{A}$ 按列分块,有

$$\boldsymbol{A\Lambda}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=(\lambda_1\boldsymbol{a}_1,\lambda_2\boldsymbol{a}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{a}_n),$$

可见以对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$ 的结果是 $\boldsymbol{A}$ 的每一列乘以 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中与该列对应的对角元.

________ ________ ________

习 题 二

1. 已知线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_2 = 3y_1 + y_2 + 5y_3, \\ x_3 = 3y_1 + 2y_2 + 3y_3, \end{cases}$$

求从变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的线性变换.

2. 已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_3, \\ x_2 = -2y_1 + 3y_2 + 2y_3, \\ x_3 = 4y_1 + y_2 + 5y_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = -3z_1 + z_2, \\ y_2 = 2z_1 + z_3, \\ y_3 = -z_2 + 3z_3, \end{cases}$$

求从 z_1, z_2, z_3 到 x_1, x_2, x_3 的线性变换.

3. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,

求 $3\boldsymbol{AB} - 2\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$.

4. 计算下列乘积:

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; (2) $(1,2,3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1,2)$;

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

(5) $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$;

(6) $\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&2&-1\\0&0&-2&3\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$.

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$,问:

(1) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 吗?

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 吗?

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ 吗?

6. 举反例说明下列命题是错误的:

(1) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$;

(3) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$,且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^3,\cdots,\boldsymbol{A}^k$.

8. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^k$.

9. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵,证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 也是对称矩阵.

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称矩阵,证明 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

11. 求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-4&1\end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\2&1&3&0\\1&2&1&4\end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;　　(6) $\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$,

$(a_1a_2\cdots a_n \neq 0)$.

12. 解下列矩阵方程：

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

13. 利用逆矩阵解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

14. 设 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{O}$（$k$ 为正整数），证明

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \cdots + \boldsymbol{A}^{k-1}.$$

15. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}$ 都可逆，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E})^{-1}$.

16. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{B}$.

17. 设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{11}$.

18. 设 m 次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$,记

$$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m,$$

$f(\boldsymbol{A})$称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 次多项式.

(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$,证明:$\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0\\ 0 & \lambda_2^k\end{pmatrix}$,

$f(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & 0\\ 0 & f(\lambda_2)\end{pmatrix}$;

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$,证明:$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$,$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}f(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}$.

19. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$,证明:

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$,则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$;

(2) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

20. 取 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,验证

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix}|\boldsymbol{A}| & |\boldsymbol{B}|\\ |\boldsymbol{C}| & |\boldsymbol{D}|\end{vmatrix}.$$

21. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 4 & & \\ 4 & -3 & \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{O}} \\ & & 2 & 0\\ \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{O}} & 2 & 2\end{pmatrix}$,求 $|\boldsymbol{A}^8|$ 及 $\boldsymbol{A}^4$.

22. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及 s 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可逆,求 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}$.

第三章

矩阵的初等变换与线性方程组

本章先引进矩阵的初等变换，建立矩阵的秩的概念；然后利用矩阵的秩讨论齐次线性方程组有非零解的充分必要条件和非齐次线性方程组有解的充分必要条件，并介绍用初等变换解线性方程组的方法.

§1 矩阵的初等变换

矩阵的初等变换是矩阵的一种十分重要的运算，它在解线性方程组、求逆阵及矩阵理论的探讨中都可起重要的作用. 为引进矩阵的初等变换，先来分析用消元法解线性方程组的例子.

引例 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. ④ \end{cases} \tag{1}$$

解

$$(1) \xrightarrow[③\div 2]{①\leftrightarrow②} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9, ④ \end{cases} \tag{B_1}$$

$$\xrightarrow[\text{④}-3\text{①}]{\substack{\text{②}-\text{③}\\ \text{③}-2\text{①}}}\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & \text{①} \\ \quad 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, & \text{②} \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & \text{③} \\ \quad 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3, & \text{④} \end{cases} \qquad (B_2)$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{③}+5\text{②}\\ \text{④}-3\text{②}}]{\text{②}\times\frac{1}{2}}\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & \text{①} \\ \quad x_2 - x_3 + x_4 = 0, & \text{②} \\ \qquad 2x_4 = -6, & \text{③} \\ \qquad x_4 = -3, & \text{④} \end{cases} \qquad (B_3)$$

$$\xrightarrow[\text{④}-2\text{③}]{\text{③}\leftrightarrow\text{④}}\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & \text{①} \\ \quad x_2 - x_3 + x_4 = 0, & \text{②} \\ \qquad x_4 = -3, & \text{③} \\ \qquad 0 = 0. & \text{④} \end{cases} \qquad (B_4)$$

这里,(1)→(B_1)是为消 x_1 作准备.(B_1)→(B_2)是保留①中的 x_1,消去②、③、④中的 x_1.(B_2)→(B_3)是保留②中的 x_2 并把它的系数变为1,然后消去③、④中的 x_2,在此同时碰巧把 x_3 也消去了.(B_3)→(B_4)是消去 x_4,在此同时碰巧把常数也消去了,得到恒等式 $0=0$(如果常数项不能消去,就将得到矛盾方程 $0=1$,则说明方程组无解).至此消元完毕.

(B_4)是4个未知量3个有效方程的方程组,应有一个自由未知量,由于方程组(B_4)呈阶梯形,可把每个台阶的第一个未知量(即 x_1、x_2、x_4)选为非自由未知量,剩下的 x_3 选为自由未知量.这样,就只需用"回代"的方法便能求出解:由③得 $x_4=-3$ 代入②,得 $x_2=x_3+3$;以 $x_4=-3$,$x_2=x_3+3$ 代入①,得 $x_1=x_3+4$.于是解得

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 4, \\ x_2 = x_3 + 3, \\ x_4 = -3, \end{cases}$$

其中 x_3 可任意取值.或令 $x_3=c$,方程组的解可记作

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c+4\\c+3\\c\\-3\end{pmatrix},\text{即 } \boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\3\\0\\-3\end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中 c 为任意常数.

在上述消元过程中,始终把方程组看作一个整体,即不是着眼于某一个方程的变形,而是着眼于整个方程组变成另一个方程组.其中用到三种变换,即(i)交换方程次序(ⓘ与ⓙ相互替换);(ii)以不等于 0 的数乘某个方程(以ⓘ$\times k$ 替换ⓘ);(iii)一个方程加上另一个方程的 k 倍(以ⓘ$+k$ ⓙ替换ⓘ).由于这三种变换都是可逆的,即

$$\text{若}(A)\xrightarrow{ⓘ\leftrightarrow ⓙ}(B),\quad \text{则}(B)\xrightarrow{ⓘ\leftrightarrow ⓙ}(A);$$

$$\text{若}(A)\xrightarrow{ⓘ\times k}(B),\quad \text{则}(B)\xrightarrow{ⓘ\div k}(A);$$

$$\text{若}(A)\xrightarrow{ⓘ+kⓙ}(B),\quad \text{则}(B)\xrightarrow{ⓘ-kⓙ}(A).$$

因此变换前的方程组与变换后的方程组是同解的,这三种变换都是方程组的同解变换,所以最后求得的解(2)是方程组(1)的全部解.

在上述变换过程中,实际上只对方程组的系数和常数进行运算,未知量并未参与运算.因此,若记

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix},$$

那末上述对方程组的变换完全可以转换为对矩阵 $\boldsymbol{B}$(方程组(1)的

增广矩阵)的变换.把方程组的上述三种同解变换移植到矩阵上，就得到矩阵的三种初等变换.

定义 1 下面三种变换称为矩阵的初等行变换：

(i) 对调两行(对调 i,j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$)；

(ii) 以数 $k \neq 0$ 乘某一行中的所有元素(第 i 行乘 k，记作 $r_i \times k$)；

(iii) 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去(第 j 行的 k 倍加到第 i 行上，记作 $r_i + kr_j$).

把定义中的"行"换成"列"，即得矩阵的初等列变换的定义(所用记号是把"r"换成"c").

矩阵的初等行变换与初等列变换，统称初等变换.

显然，三种初等变换都是可逆的，且其逆变换是同一类型的初等变换：变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换就是本身；变换 $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \times \left(\frac{1}{k}\right)$(或记作 $r_i \div k$)；变换 $r_i + kr_j$ 的逆变换为 $r_i + (-k)r_j$(或记作 $r_i - kr_j$).

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

矩阵之间的等价关系具有下列性质：

(i) **反身性** $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$；

(ii) **对称性** 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$；

(iii) **传递性** 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$.

数学中把具有上述三条性质的关系称为等价，例如两个线性方程组同解，就称这两个线性方程组等价.

下面用矩阵的初等行变换来解方程组(1)，其过程可与方程组(1)的消元过程一一对照：

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \div 2]{r_1 \leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}_1$$

$$\xrightarrow[r_4 - 3r_1]{\substack{r_2 - r_3 \\ r_3 - 2r_1}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}_2$$

$$\xrightarrow[r_4 - 3r_2]{\substack{r_2 \div 2 \\ r_3 + 5r_2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}_3$$

$$\xrightarrow[r_4 - 2r_3]{r_3 \leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}_4.$$

由方程组(B_4)得到解(2)的回代过程,也可用矩阵的初等行变换来完成,即

$$\boldsymbol{B}_4 \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}_5$$

$\boldsymbol{B}_5$ 对应方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 4, \\ x_2 - x_3 = 3, \\ x_4 \qquad = -3, \end{cases}$$

取 x_3 为自由未知量，并令 $x_3=c$，即得

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c+4\\c+3\\c\\-3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\3\\0\\-3\end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中 c 为任意常数.

矩阵 B_4 和 B_5 都称为行阶梯形矩阵，其特点是：可画出一条阶梯线，线的下方全为 0；每个台阶只有一行，台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线（每段竖线的长度为一行）后面的第一个元素为非零元，也就是非零行的第一个非零元.

行阶梯形矩阵 B_5 还称为行最简形矩阵，其特点是：非零行的第一个非零元为 1，且这些非零元所在的列的其他元素都为 0.

用归纳法不难证明（这里不证），对于任何矩阵 $A_{m\times n}$，总可经过有限次初等行变换把它变为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

利用初等行变换，把一个矩阵化为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵，是一种很重要的运算. 由引例可知，要解线性方程组只须把增广矩阵化为行最简形矩阵.

由行最简形矩阵 B_5，即可写出方程组的解(2)，反之，由方程组的解(2)，也可写出矩阵 B_5. 由此可猜想到一个矩阵的行最简形矩阵是唯一确定的（行阶梯形矩阵中非零行的行数也是唯一确定的）.

对行最简形矩阵再施以初等列变换，可变成一种形状更简单的矩阵，称为标准形. 例如

$$B_5=\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[c_5-4c_1-3c_2+3c_3]{\substack{c_3\leftrightarrow c_4\\c_4+c_1+c_2}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=F,$$

矩阵 $\boldsymbol{F}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的标准形，其特点是：$\boldsymbol{F}$ 的左上角是一个单位矩阵，其余元素全为 0.

对于 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，总可经过初等变换（行变换和列变换）把它化为标准形

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}_{m \times n},$$

此标准形由 m、n、r 三个数完全确定，其中 r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数. 所有与 $\boldsymbol{A}$ 等价的矩阵组成的一个集合，称为一个等价类，标准形 $\boldsymbol{F}$ 是这个等价类中形状最简单的矩阵.

§2 矩 阵 的 秩

矩阵经初等行变换化成行阶梯形矩阵，上节已指出行阶梯形矩阵所含非零行的行数是唯一确定的，这个数就是矩阵的秩. 但由于这个数的唯一性尚未证明，因此下面用另一种说法给出矩阵的秩的定义.

定义 2 在 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，任取 k 行与 k 列（$k \leqslant m, k \leqslant n$），位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 $\boldsymbol{A}$ 中所处的位置次序而得的 k 阶行列式，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式.

$m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式共有 $C_m^k \cdot C_n^k$ 个.

定义 3 设在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于 0，那末 D 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记作 $R(\boldsymbol{A})$. 并规定零矩阵的秩等于 0.

由行列式的性质可知，在 $\boldsymbol{A}$ 中当所有 $r+1$ 阶子式全等于 0 时，所有高于 $r+1$ 阶的子式也全等于 0，因此 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 中不等于 0 的子式的最高阶数.

显然 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A})$.

例 1 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

解 在 $\boldsymbol{A}$ 中，容易看出一个 2 阶子式 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\neq 0$，$\boldsymbol{A}$ 的 3 阶子式只有一个 $|\boldsymbol{A}|$，经计算可知 $|\boldsymbol{A}|=0$，因此 $R(\boldsymbol{A})=2$.

$\boldsymbol{B}$ 是一个行阶梯形矩阵，其非零行有 3 行，即知 $\boldsymbol{B}$ 的所有 4 阶子式全为零. 而以三个非零行的第一个非零元为对角元的 3 阶行列式

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}$$

是一个上三角形行列式，它显然不等于 0，因此 $R(\boldsymbol{B})=3$.

从本例可知，对于一般的矩阵，当行数与列数较高时，按定义求秩是很麻烦的. 然而对于行阶梯形矩阵，它的秩就等于非零行的行数，一看便知毋须计算. 因此自然想到用初等变换把矩阵化为行阶梯形矩阵，但两个等价矩阵的秩是否相等呢？下面的定理对此作出肯定的回答.

定理 1 **若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.**

证 先证明：若 $\boldsymbol{A}$ 经一次初等行变换变为 $\boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{B})$.

设 $R(\boldsymbol{A})=r$，且 $\boldsymbol{A}$ 的某个 r 阶子式 $D_r\neq 0$.

当 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\times k}\boldsymbol{B}$ 时，在 $\boldsymbol{B}$ 中总能找到与 D_r 相对应的子式 $\overline{D}_r$，由于 $\overline{D}_r=D_r$ 或 $\overline{D}_r=-D_r$ 或 $\overline{D}_r=kD_r$，因此 $\overline{D}_r\neq 0$，从而 $R(\boldsymbol{B})\geqslant r$.

当 $A \overset{r_i+kr_j}{\sim} B$ 时，分三种情形讨论：①D_r 中不含第 i 行；②D_r 中同时含第 i 行和第 j 行；③D_r 中含第 i 行但不含第 j 行. 对①、②两种情形，显然 $\boldsymbol{B}$ 中与 D_r 对应的子式 $\overline{D}r = D_r \neq 0$，故 $R(\boldsymbol{B}) \geqslant r$；对情形③，由

$$\overline{D}_r = \begin{vmatrix} \vdots \\ r_i + kr_j \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ r_i \\ \vdots \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{vmatrix} = D_r + k\hat{D}_r,$$

若 $\hat{D}_r \neq 0$，则因 $\hat{D}_r$ 中不含第 i 行知 $\boldsymbol{A}$ 中有不含第 i 行的 r 阶非零子式，从而根据情形①知 $R(\boldsymbol{B}) \geqslant r$；若 $\hat{D}_r = 0$，则 $\overline{D}_r = D_r \neq 0$，也有 $R(\boldsymbol{B}) \geqslant r$.

以上证明了若 $\boldsymbol{A}$ 经一次初等行变换变为 $\boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{A}) \leqslant R(\boldsymbol{B})$. 由于 $\boldsymbol{B}$ 亦可经一次初等行变换变为 $\boldsymbol{A}$，故也有 $R(\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A})$. 因此 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$.

经一次初等行变换矩阵的秩不变，即可知经有限次初等行变换矩阵的秩仍不变.

设 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换变为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 经初等行变换变为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，由上段证明知 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = R(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$，又 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，$R(\boldsymbol{B}) = R(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$，因此 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$.

总之，若 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等变换变为 $\boldsymbol{B}$（即 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$），则 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$. 证毕

根据这一定理，为求矩阵的秩，只要把矩阵用初等行变换变成行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数即是该矩阵的秩.

例 2 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，

求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，并求 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式.

解 先求 A 的秩，为此对 A 作初等行变换变成行阶梯形矩阵：

$$
A=\begin{pmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1}]{\substack{r_1\leftrightarrow r_4\\r_2-r_4}}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&1&-1\\0&-12&9&7&-11\\0&-16&12&8&-12\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_4-4r_2]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&1&-1\\0&0&0&4&-8\\0&0&0&4&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-r_3}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&1&-1\\0&0&0&4&-8\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},
$$

因为行阶梯形矩阵有 3 个非零行，所以 $R(A)=3$.

再求 A 的一个最高阶非零子式. 因 $R(A)=3$，知 A 的最高阶非零子式为 3 阶. A 的 3 阶子式共有 $C_4^3\cdot C_5^3=40$(个)，要从 40 个子式中找出一个非零子式，是比较麻烦的，考察 A 的行阶梯形矩阵，记 $A=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$，则矩阵 $B=(a_1,a_2,a_4)$的行阶梯形矩阵为

$$
\begin{pmatrix}1&6&-1\\0&-4&1\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix},
$$

知 $R(B)=3$，故 B 中必有 3 阶非零子式. B 的 3 阶子式有 4 个，在 B 的 4 个 3 阶子式中找一个非零子式比在 A 中找非零子式较方便. 今计算 B 的前三行构成的子式

$$
\begin{vmatrix}3&2&5\\2&0&5\\3&-2&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&2&5\\2&0&5\\6&0&11\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}2&5\\6&11\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}2&5\\0&-4\end{vmatrix}=16\neq 0,
$$

因此这个子式便是 A 的一个最高阶非零子式. 解毕

对于 n 阶可逆矩阵 A,因 $|A|\neq 0$,知 A 的最高阶非零子式为 $|A|$,$R(A)=n$,故 A 的标准形为单位矩阵 E,$A\sim E$.由于可逆矩阵的秩等于阶数,故可逆矩阵又称满秩矩阵,而奇异矩阵又称降秩矩阵.

例 3 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\2&-4&8&0\\-2&4&-2&3\\3&-6&0&-6\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$,

求矩阵 A 及矩阵 $B=(A\mid b)$的秩.

解 对 B 作初等行变换变为行阶梯形矩阵,设 B 的行阶梯形矩阵为 $\widetilde{B}=(\widetilde{A},\widetilde{b})$,则 $\widetilde{A}$ 就是 A 的行阶梯形矩阵,故从 $\widetilde{B}=(\widetilde{A},\widetilde{b})$ 中可同时看出 $R(A)$ 及 $R(B)$.

$$B=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\2&-4&8&0&2\\-2&4&-2&3&3\\3&-6&0&-6&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3+2r_1}}\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\0&0&4&2&0\\0&0&2&1&5\\0&0&-6&-3&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_2]{\substack{r_2\div 2\\r_3-r_2}}\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\0&0&2&1&0\\0&0&0&0&5\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_3]{r_3\div 5}\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\0&0&2&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

因此, $$R(A)=2,R(B)=3.$$

从矩阵 B 的行阶梯形矩阵可知,本例中的 A 与 b 所对应的线性方程组 $Ax=b$ 是无解的,这是因为行阶梯形矩阵的第 3 行表示矛盾方程 $0=1$.

§3 线性方程组的解

利用系数矩阵 A 和增广矩阵 B 的秩，可方便地讨论线性方程组 $Ax=b$ 的解，其结论是：

定理 2 **n 元齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(A)<n$.**

本定理所述条件 $R(A)<n$ 的必要性是克拉默定理的推广（克拉默定理只适用于 $m=n$ 的情形），其充分性则包含了克拉默定理的逆定理.

证 先证必要性. 设方程组 $Ax=0$ 有非零解，要证 $R(A)<n$. 用反证法，设 $R(A)=n$，则在 A 中应有一个 n 阶非零子式 D_n，从而 D_n 所对应的 n 个方程只有零解（根据克拉默定理），这与原方程组有非零解相矛盾，因此 $R(A)=n$ 不能成立，即 $R(A)<n$.

再证充分性. 设 $R(A)=r<n$，则 A 的行阶梯形矩阵只含 r 个非零行，从而知其有 $n-r$ 个自由未知量. 任取一个自由未知量为 1，其余自由未知量为 0，即可得方程组的一个非零解.

定理 3 **n 元非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵 A 的秩等于增广矩阵 $B=(A,b)$ 的秩.**

证 先证必要性. 设方程组 $Ax=b$ 有解，要证 $R(A)=R(B)$. 用反证法，设 $R(A)<R(B)$，则 B 的行阶梯形矩阵中最后一个非零行对应矛盾方程 $0=1$，这与方程组有解相矛盾. 因此 $R(A)=R(B)$.

再证充分性，设 $R(A)=R(B)$，要证方程组有解. 把 B 化为行阶梯形矩阵，设 $R(A)=R(B)=r(r\leqslant n)$，则 B 的行阶梯形矩阵中含 r 个非零行，把这 r 行的第一个非零元所对应的未知量作为非自由未知量，其余 $n-r$ 个作为自由未知量，并令 $n-r$ 个自由未知量全取 0，即可得方程组的一个解. 证毕

当 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=n$ 时，方程组没有自由未知量，只有唯一解. 当 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=r<n$ 时，方程组有 $n-r$ 个自由未知量，令它们分别等于 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$，可得含 $n-r$ 个参数 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 的解，这些参数可任意取值，因此这时方程组有无限多个解. 并且这个含 $n-r$ 个参数的解可表示方程组的任一解，因此这个解称为线性方程组的通解.

对于齐次线性方程组，只需把它的系数矩阵化成行最简形矩阵，便能写出它的通解. 对于非齐次线性方程组，只需把它的增广矩阵化成行阶梯形矩阵，便能根据定理 3 判断它是否有解；在有解时，把增广矩阵进一步化成行最简形矩阵，便能写出它的通解. §1 中的引例已经介绍了这种解法，为使读者能熟练掌握这种解法，下面再举几例.

例 4 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0, \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0. \end{cases}$$

解 对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换变为行最简形矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\div(-3)]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即得与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - \frac{5}{3}x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 0, \end{cases}$$

由此即得

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + \frac{5}{3}x_4, \\ x_2 = -2x_3 - \frac{4}{3}x_4, \end{cases} \quad (x_3, x_4 \text{ 可任意取值}).$$

令 $x_3 = c_1, x_4 = c_2$，把它写成通常的参数形式

$$\begin{cases} x_1 = 2c_1 + \frac{5}{3}c_2, \\ x_2 = -2c_1 - \frac{4}{3}c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \end{cases}$$

其中 c_1, c_2 为任意实数，或写成向量形式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + \frac{5}{3}c_2 \\ -2c_1 - \frac{4}{3}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例 5 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

解 对增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 施行初等行变换,

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2\\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1\\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

可见 $R(\boldsymbol{A})=2, R(\boldsymbol{B})=3$,故方程组无解.

例 6 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1,\\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4,\\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0.\end{cases}$$

解
$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4\\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1\\ 0 & 4 & -6 & -7 & -1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times\left(-\frac{1}{4}\right)]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4}\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

即得
$$\begin{cases}x_1 = \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{4}x_4 + \frac{5}{4},\\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{4}x_4 - \frac{1}{4},\\ x_3 = \quad x_3,\\ x_4 = \qquad\qquad x_4.\end{cases}$$

亦即
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{7}{4}\\ 0\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\ -\frac{1}{4}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in \mathbf{R}).$$

例 7 设有线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0,\\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3,\\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda,\end{cases}$$

问 λ 取何值时,此方程组(1)有唯一解;(2)无解;(3)有无限多个解?并在有无限多解时求其通解.

解 对增广矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 作初等行变换把它变为行阶梯形矩阵,有

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-(1+\lambda)r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda(2+\lambda) & -\lambda(1+\lambda)\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}.$$

(1) 当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=3$，方程组有唯一解；

(2) 当 $\lambda=0$ 时，$R(\boldsymbol{A})=1, R(\boldsymbol{B})=2$，方程组无解；

(3) 当 $\lambda=-3$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$，方程组有无限多个解.

当 $\lambda=-3$ 时，

$$\boldsymbol{B} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

由此便得通解

$$\begin{cases}x_1=x_3-1, \\ x_2=x_3-2,\end{cases}(x_3 \text{ 可任意取值})$$

即

$$\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1 \\ 1 \\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 \\ -2 \\ 0\end{pmatrix},(c \in \mathbf{R}).$$

本例中矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是一个含参数的矩阵,由于 $\lambda+1$、$\lambda+3$ 等因式可以等于 0,故不宜作诸如 $r_2-\dfrac{1}{\lambda+1}r_1$、$r_2\times(\lambda+1)$、$r_3\div(\lambda+3)$ 这样的变换.如果作了这种变换,则需对 $\lambda+1=0$(或 $\lambda+3=0$)的情形另作讨论.

§4 初等矩阵

矩阵的初等变换是矩阵的一种最基本的运算,它有着广泛的应用.下面我们进一步介绍一些有关知识.

定义 4 由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

三种初等变换对应着三种初等矩阵.

1. 对调两行或对调两列

把单位矩阵中第 i,j 两行对调($r_i\leftrightarrow r_j$),得初等矩阵

$$
\boldsymbol{E}(i,j)=\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 && \cdots && 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 && \cdots && 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow\text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow\text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

用 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_m(i,j)$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,得

$$
\boldsymbol{E}_m(i,j)\boldsymbol{A}=\begin{array}{l}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}
$$

其结果相当于对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行第一种初等行变换：把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行对调($r_i \leftrightarrow r_j$). 类似地，以 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_n(i,j)$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，其结果相当于对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行第一种初等列变换：把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列与第 j 列对调($c_i \leftrightarrow c_j$).

2. 以数 $k \neq 0$ 乘某行或某列

以数 $k \neq 0$ 乘单位矩阵的第 i 行($r_i \times k$)，得初等矩阵

$$
\boldsymbol{E}(i(k))=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}, \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

可以验知：以 $\boldsymbol{E}_m(i(k))$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，其结果相当于以数 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行($r_i \times k$)；以 $\boldsymbol{E}_n(i(k))$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，其结果相当于以数 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列($c_i \times k$).

3. 以数 k 乘某行(列)加到另一行(列)上去

以 k 乘 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行加到第 i 行上($r_i + kr_j$)[或以 k 乘 $\boldsymbol{E}$ 的第 i

列加到第 j 列上(c_j+kc_i)],得初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(ij(k))=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}\end{array}$$

可以验知:以 $\boldsymbol{E}_m(ij(k))$左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$,其结果相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行乘 k 加到第 i 行上(r_i+kr_j),以 $\boldsymbol{E}_n(ij(k))$右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$,其结果相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘 k 加到第 j 列上(c_j+kc_i).

综上所述,可得下述定理.

定理 4 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵,对 A 施行一次初等行变换,相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵;对 A 施行一次初等列变换,相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

初等变换对应初等矩阵,由初等变换可逆,可知初等矩阵可逆,且此初等变换的逆变换也就对应此初等矩阵的逆矩阵:由变换 $r_i\leftrightarrow r_j$ 的逆变换就是其本身,知 $\boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$;由变换 $r_i\times k$ 的逆变换为 $r_i\times\frac{1}{k}$,知 $\boldsymbol{E}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{E}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$;由变换 r_i+kr_j 的逆变换为 $r_i+(-k)r_j$,知 $\boldsymbol{E}(ij(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(ij(-k))$.

定理 5 设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵,则存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_l$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l$.

证 因 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{E}$,故 $\boldsymbol{E}$ 经有限次初等变换可变成 $\boldsymbol{A}$,也就是存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_l$,使

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_r\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}_{r+1}\cdots\boldsymbol{P}_l=\boldsymbol{A},$$

即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l.$$

推论 $m\times n$ **矩阵** $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ **的充分必要条件是：存在** m **阶可逆矩阵** $\boldsymbol{P}$ **及** n **阶可逆矩阵** $\boldsymbol{Q}$**，使** $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

此推论请读者证明之.

由定理 5,还可得一种求逆矩阵的方法：

当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l$，有

$$\boldsymbol{P}_l^{-1}\boldsymbol{P}_{l-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}, \tag{i}$$

及

$$\boldsymbol{P}_l^{-1}\boldsymbol{P}_{l-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1}. \tag{ii}$$

(i)式表明 $\boldsymbol{A}$ 经一系列初等行变换可变成 $\boldsymbol{E}$，(ii)式表明 $\boldsymbol{E}$ 经这同一系列初等行变换即变成 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 用分块矩阵形式，(i)、(ii)两式可合并为

$$\boldsymbol{P}_l^{-1}\boldsymbol{P}_{l-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_1^{-1}(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{A}^{-1}),$$

即对 $n\times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})$ 施行初等行变换，当把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{E}$ 时，原来的 $\boldsymbol{E}$ 就变成 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

例 8 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$
\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}
\left(\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\
0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}
\left(\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\
0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_3\div(-1)]{r_2\div(-2)}
\left(\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\
0 & 1 & 0 & -\dfrac{3}{2} & -3 & \dfrac{5}{2} \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1
\end{array}\right),
$$

$$
\therefore \quad \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}
1 & 3 & -2 \\
-\dfrac{3}{2} & -3 & \dfrac{5}{2} \\
1 & 1 & -1
\end{pmatrix}.
$$

利用初等行变换求逆矩阵的方法，还可用于求矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 由

$$
\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B})=(\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})
$$

可知，若对矩阵$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B})$施行初等行变换，当把 $\boldsymbol{A}$ 变为$\boldsymbol{E}$ 时，$\boldsymbol{B}$ 就变为$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

例 9 求矩阵 $\boldsymbol{X}$，使 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 \\
2 & 2 & 1 \\
3 & 4 & 3
\end{pmatrix}, \quad
\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}
2 & 5 \\
3 & 1 \\
4 & 3
\end{pmatrix}.
$$

解 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

$$
(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:cc}
1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\
2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\
3 & 4 & 3 & 4 & 3
\end{array}\right)
\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\
0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\
0 & -2 & -6 & -2 & -12
\end{pmatrix}
$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&1&-4\\0&-2&-5&-1&-9\\0&0&-1&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&3&2\\0&-2&0&4&6\\0&0&-1&-1&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\div(-1)]{r_2\div(-2)}\begin{pmatrix}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&1&3\end{pmatrix},$$

因此
$$X=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-3\\1&3\end{pmatrix}.$$

本例用初等行变换的方法求得 $X=A^{-1}B$，如果要求 $Y=CA^{-1}$，则可对矩阵$\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}$作初等列变换，使

$$\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}E\\CA^{-1}\end{pmatrix},$$

即可得 $Y=CA^{-1}$. 不过通常都习惯作初等行变换，那末可改为对$(A^{\mathrm{T}},C^{\mathrm{T}})$作初等行变换，使

$$(A^{\mathrm{T}},C^{\mathrm{T}})\xrightarrow{\text{行变换}}(E,(A^{\mathrm{T}})^{-1}C^{\mathrm{T}}),$$

即可得 $Y^{\mathrm{T}}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}C^{\mathrm{T}}$，从而求得 Y.

习 题 三

1. 把下列矩阵化为行最简形矩阵：

(1) $\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\2&0&3&1\\3&0&4&-3\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\0&3&-4&3\\0&4&-7&-1\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;　(4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

2. 在秩是 r 的矩阵中,有没有等于 0 的 $r-1$ 阶子式? 有没有等于 0 的 r 阶子式?

3. 从矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中划去一行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$,问 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的秩的关系怎样?

4. 求作一个秩是 4 的方阵,它的两个行向量是

$$(1,0,1,0,0),(1,-1,0,0,0).$$

5. 求下列矩阵的秩,并求一个最高阶非零子式:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

6. 求解下列齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0, \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0, \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0, \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0, \\ 3x_1+x_2+2x_3-7x_4=0, \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0, \\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0; \end{cases}$　(4) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0, \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0, \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$

7. 求解下列非齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=2, \\ 3x_1-x_2+2x_3=10, \\ 11x_1+3x_2=8; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x+3y+z=4, \\ x-2y+4z=-5, \\ 3x+8y-2z=13, \\ 4x-y+9z=-6; \end{cases}$

$$(3)\begin{cases}2x+y-z+w=1,\\4x+2y-2z+w=2,\\2x+y-z-w=1;\end{cases}\qquad(4)\begin{cases}2x+y-z+w=1,\\3x-2y+z-3w=4,\\x+4y-3z+5w=-2.\end{cases}$$

8. λ 取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$$

(1) 有唯一解；(2) 无解；(3) 有无穷多个解？

9. 非齐次线性方程组

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2,\\x_1-2x_2+x_3=\lambda,\\x_1+x_2-2x_3=\lambda^2\end{cases}$$

当 λ 取何值时有解？并求出它的解.

10. 设
$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\-2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1,\end{cases}$$
问 λ 为何值时，此方程组有唯一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求解.

11. 试利用矩阵的初等变换，求下列方阵的逆矩阵：

$$(1)\begin{pmatrix}3&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix};\qquad(2)\begin{pmatrix}3&-2&0&-1\\0&2&2&1\\1&-2&-3&-2\\0&1&2&1\end{pmatrix}.$$

12. (1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&2&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-3\\2&2\\3&-1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$ 使 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$；

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-3&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$ 使 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$.

第四章

向量组的线性相关性

§1 n 维向量

定义1 n 个有次序的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的数组称为 n 维向量，这 n 个数称为该向量的 n 个分量，第 i 个数 a_i 称为第 i 个分量.

分量全为实数的向量称为实向量，分量为复数的向量称为复向量. 本书中除特别指明者外，一般只讨论实向量.

n 维向量可写成一行，也可写成一列. 按第二章中的规定，分别称为行向量和列向量，也就是行矩阵和列矩阵，并规定行向量与列向量都按矩阵的运算规则进行运算. 因此，n 维列向量

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

与 n 维行向量

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

总看作是两个不同的向量(按定义1，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ 应是同一个向量).

本书中，列向量用黑体小写字母 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 等表示，行向量则用 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 等表示. 所讨论的向量在没有指明是行向量还是列向量时，都当作列向量.

在解析几何中，我们把“既有大小又有方向的量”叫做向量，并

把可随意平行移动的有向线段作为向量的几何形象．在引进坐标系以后，这种向量就有了坐标表示式——三个有次序的实数，也就是本书中的 3 维向量．因此，当 $n \leqslant 3$ 时，n 维向量可以把有向线段作为几何形象，但当 $n>3$ 时，n 维向量就不再有这种几何形象，只是沿用一些几何术语罢了．

几何中，"空间"通常是作为点的集合，即作为"空间"的元素是点，这样的空间叫做点空间．我们把 3 维向量的全体所组成的集合

$$R^3=\{\boldsymbol{r}=(x,y,z)^{\mathrm{T}} \mid x,y,z\in\mathbf{R}\}$$

叫做三维向量空间．在点空间取定坐标系以后，空间中的点 $P(x,y,z)$ 与 3 维向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 之间有一一对应的关系，因此，向量空间可以类比为取定了坐标系的点空间．向量的集合

$$\pi=\{\boldsymbol{r}=(x,y,z)^{\mathrm{T}} \mid ax+by+cz=d\}$$

也叫做向量空间 R^3 中的平面．

类似地，n 维向量的全体所组成的集合

$$R^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$$

叫做 n 维向量空间．n 维向量的集合

$$\pi=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \mid a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b\}$$

叫做 n 维向量空间 R^n 中的 $n-1$ 维超平面．

n 维向量有着广泛的实际意义．例如为确定飞机的状态，需要 6 个参数．表示飞机重心在空间的位置需 3 个参数，还有 3 个参数是：机身的水平转角 $\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$，机身的仰角 $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，以及机翼（以机身为轴）的转角 $\psi(-\pi<\psi\leqslant\pi)$，这 6 个参数组成 6 维向量．

§2　向量组的线性相关性

若干个同维数的列向量（或同维数的行向量）所组成的集合叫

做向量组.例如一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 有 n 个 m 维列向量

$$\boldsymbol{a}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix},(j=1,2,\cdots,n)$$

它们组成的向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组.

$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 又有 m 个 n 维行向量

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),(i=1,2,\cdots,m)$$

它们组成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组.

反之,由有限个向量所组成的向量组可以构成一个矩阵.例如

m 个 n 维列向量所组成的向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 构成一个 $n\times m$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m);$$

m 个 n 维行向量所组成的向量组 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}$ 构成一个 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}.$$

前两章中常把 m 个方程 n 个未知量的线性方程组写成矩阵形式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,从而方程组可以与它的增广矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$一一对应.这种对应若看成一个方程对应一个行向量,则方程组即与增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组对应.若把方程组写成向量形式

$$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b},$$

则可见方程组与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}$ 之间也有一一对应的关系.

定义2 给定向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$，对于任何一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，向量

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m$$

称为向量组 A 的一个线性组合，$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 称为这个线性组合的系数.

给定向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 和向量 $\boldsymbol{b}$，如果存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使

$$\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m,$$

则向量 $\boldsymbol{b}$ 是向量组 A 的线性组合，这时称向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示.

向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示，也就是方程组

$$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{b}$$

有解.由上章定理 3，立即可得

定理1 向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 的秩等于矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b})$ 的秩.

定义3 设有两个向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 及 $B:\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s$，若 B 组中的每个向量都能由向量组 A 线性表示，则称向量组 B 能由向量组 A 线性表示.若向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示，则称这两个向量组等价.

把向量组 A 和 B 所构成的矩阵依次记作 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 和 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s)$，$B$ 组能由 A 组线性表示，即对每个向量 $\boldsymbol{b}_j(j=1,2,\cdots,s)$ 存在数 $k_{1j},k_{2j},\cdots,k_{mj}$，使

— — — — — — — — —

$$\boldsymbol{b}_j = k_{1j}\boldsymbol{a}_1 + k_{2j}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_{mj}\boldsymbol{a}_m = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)\begin{pmatrix} k_{1j} \\ k_{2j} \\ \vdots \\ k_{mj} \end{pmatrix},$$

从而 $$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{ms} \end{pmatrix}.$$

这里，矩阵 $\boldsymbol{K}_{m\times s} = (k_{ij})$ 称为这一线性表示的系数矩阵.

由此可知，若 $\boldsymbol{C}_{m\times n} = \boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times n}$，则矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组能由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示，$\boldsymbol{B}$ 为这一表示的系数矩阵：

$$(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_n) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix};$$

同时，$\boldsymbol{C}$ 的行向量组能由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表示，$\boldsymbol{A}$ 为这一表示的系数矩阵：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\gamma}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_s^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的每个行向量都是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的线性组合，即 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组能由 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性表示. 由于初等变换可逆，知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 亦可经初等行变换变为 $\boldsymbol{A}$，从而 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组也能由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表示. 于是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

类似可知,若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

向量组的线性组合、线性表示及等价等概念,也可移用于线性方程组:对方程组 A 的各个方程作线性运算所得到的一个方程就称为方程组 A 的一个线性组合;若方程组 B 的每个方程都是方程组 A 的线性组合,就称方程组 B 能由方程组 A 线性表示,这时方程组 A 的解一定是方程组 B 的解;若方程组 A 与方程组 B 能相互线性表示,就称这两个方程组等价,等价的线性方程组一定同解.

定义4 给定向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$,如果存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0},$$

则称向量组 A 是线性相关的,否则称它线性无关.

说向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关,通常是指 $m\geqslant2$ 的情形,但定义 4 也适用于 $m=1$ 的情形.当 $m=1$ 时,向量组只含一个向量,对于只含一个向量 $\boldsymbol{a}$ 的向量组,当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时是线性相关的,当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时是线性无关的.对于含 2 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 的向量组,它线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 的分量对应成比例,其几何意义是两向量共线.3 个向量线性相关的几何意义是三向量共面.

向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m(m\geqslant2)$ 线性相关,也就是在向量组 A 中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.这是因为:

如果向量组 A 线性相关,则有不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$.因 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为 0,不妨设 $k_1\neq0$,于是便有

$$\boldsymbol{a}_1=\frac{-1}{k_1}(k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m),$$

即 $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示.

如果向量组 A 中有某个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示,不妨设 $\boldsymbol{a}_m$ 能由 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{m-1}$ 线性表示,即有 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-1}$ 使 $\boldsymbol{a}_m=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_{m-1}\boldsymbol{a}_{m-1}$,于是

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_{m-1}\boldsymbol{a}_{m-1}+(-1)\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$$

因为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-1},-1$ 这 m 个数不全为0(至少 $-1\neq 0$),所以向量组 A 线性相关.

向量组的线性相关与线性无关的概念也可移用于线性方程组.当方程组中有某个方程是其余方程的线性组合时,这个方程就是多余的,这时称方程组(各个方程)是线性相关的;当方程组中没有多余方程,就称该方程组(各个方程)线性无关(或线性独立).

向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 构成矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$,向量组 A 线性相关,就是齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0},\text{即 }\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$$

有非零解.由上章定理 2,即可得

定理2　向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关的充分必要条件是它所构成的矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 的秩小于向量个数 m;向量组线性无关的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=m$.

例1　n 维向量组

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

称为 n 维单位坐标向量组,试讨论它的线性相关性.

解　n 维单位坐标向量组构成的矩阵

$$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$$

是 n 阶单位矩阵.由 $|\boldsymbol{E}|=1\neq 0$,知 $R(\boldsymbol{E})=n$,即 $R(\boldsymbol{E})$ 等于向

量组中向量个数，故由定理 2 知此向量组是线性无关的.

例 2 已知

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix},$$

试讨论向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 及向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 的线性相关性.

解 对矩阵$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$施行初等行变换变成行阶梯形矩阵，即可同时看出矩阵$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$及$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$的秩，利用定理 2 即可得出结论.

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&5&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-\frac{5}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可见 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=2$，向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性相关；$R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=2$，向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性无关.

例3 已知向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1$，试证向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 线性无关.

证 设有 x_1,x_2,x_3 使

$$x_1\boldsymbol{b}_1+x_2\boldsymbol{b}_2+x_3\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{0},$$

即 $$x_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)+x_2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)+x_3(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1)=\boldsymbol{0},$$

亦即 $$(x_1+x_3)\boldsymbol{a}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{a}_2+(x_2+x_3)\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0},$$

因 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关，故有

$$\begin{cases}x_1+x_3=0,\\x_1+x_2=0,\\x_2+x_3=0.\end{cases}$$

由于此方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

故方程组只有零解 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$，所以向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 线性无关.

线性相关性是向量组的一个重要性质，下面先介绍与之有关的一些简单的结论.

定理3 (1) **若向量组** $A: \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ **线性相关，则向量组** $B: \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}$ **也线性相关. 反言之，若向量组** B **线性无关，则向量组** A **也线性无关.**

(2) **设** $\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{rj} \\ a_{r+1,j} \end{pmatrix}, (j = 1, 2, \cdots, m)$

即向量 $\boldsymbol{a}_j$ **添上一个分量后得向量** $\boldsymbol{b}_j$. **若向量组** $A: \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ **线性无关，则向量组** $B: \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ **也线性无关. 反言之，若向量组** B **线性相关，则向量组** A **也线性相关.**

(3) m **个** n **维向量组成的向量组，当维数** n **小于向量个数** m **时一定线性相关.**

(4) **设向量组** $A: \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ **线性无关，而向量组** $B: \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}$ **线性相关，则向量** $\boldsymbol{b}$ **必能由向量组** A **线性表示，且表示式是唯一的.**

证 这些结论都可利用定理 2 来证明.

(1) 记 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m), \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1})$，有 $R(\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A}) + 1$. 若向量组 A 线性相关，则根据定理 2，有 $R(\boldsymbol{A}) < m$，从而 $R(\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A}) + 1 < m + 1$，因此根据定理 2 知向量组 B 线性相关.

结论(1)是对向量组增加 1 个向量而言的，增加多个向量结论

也仍然成立.即设向量组 A 是向量组 B 的一部分(这时称 A 组是 B 组的部分组),于是结论(1)可一般地叙述为:一个向量组若有线性相关的部分组,则该向量组线性相关.特别地,含零向量的向量组必线性相关.一个向量组若线性无关,则它的任何部分组都线性无关.

(2) 记 $\boldsymbol{A}_{r\times m}=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$, $\boldsymbol{B}_{(r+1)\times m}=(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_m)$,有 $R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{B})$.若向量组 A 线性无关,则 $R(\boldsymbol{A})=m$,从而 $R(\boldsymbol{B})\geqslant m$.但 $R(\boldsymbol{B})\leqslant m$(因 $\boldsymbol{B}$ 只有 m 列),故 $R(\boldsymbol{B})=m$,因此向量组 B 线性无关.

结论(2)是对向量增加一个分量(即维数增加1维)而言的,如果增加多个分量,结论也仍然成立.

(3) m 个 n 维向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 构成矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times m}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$,有 $R(\boldsymbol{A})\leqslant n$.若 $n<m$,则 $R(\boldsymbol{A})<m$,故 m 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关.

(4) 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b})$,有 $R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{B})$.因 A 组线性无关,有 $R(\boldsymbol{A})=m$;因 B 组线性相关,有 $R(\boldsymbol{B})<m+1$.所以 $m\leqslant R(\boldsymbol{B})<m+1$,即有 $R(\boldsymbol{B})=m$.

由 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=m$,根据上章定理3,知方程组

$$(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

有唯一解,即向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示,且表示式是唯一的.

§3 向量组的秩

定理2显示,在讨论向量组的线性相关性时,矩阵的秩起了十分重要的作用.下面把秩的概念引进向量组.

定义5 设有向量组 A,如果在 A 中能选出 r 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$,满足

(i) 向量组 $A_0:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关;

(ii) 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量(如果 A 中有 $r+1$ 个向量的话)都线性相关,那末称向量组 A_0 是向量组 A 的一个最大线性无关向量组(简称最大无关组);最大无关组所含向量个数 r 称为向量组 A 的秩.

只含零向量的向量组没有最大无关组,规定它的秩为 0.

联系上一章中矩阵秩的定义,并依据与定理 2,立即可得

定理4　矩阵的秩等于它的列向量组的秩,也等于它的行向量组的秩.

证　设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$, $R(\boldsymbol{A})=r$,并设 r 阶子式 $D_r\neq 0$. 根据定理 2,由 $D_r\neq 0$ 知 D_r 所在的 r 列线性无关;又由 $\boldsymbol{A}$ 中所有 $r+1$ 阶子式均为零,知 $\boldsymbol{A}$ 中任意 $r+1$ 个列向量都线性相关. 因此 D_r 所在的 r 列是 A 的列向量组的一个最大无关组,所以列向量组的秩等于 r.

类似可证矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩也等于 $R(\boldsymbol{A})$.

今后向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 的秩也记作 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$.

从上述证明中可见:若 D_r 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式,则 D_r 所在的 r 列即是列向量组的一个最大无关组,D_r 所在的 r 行即是行向量组的一个最大无关组.

向量组的最大无关组一般不是唯一的. 如例 2

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix},$$

由 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=2$,知 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性无关;由 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=2$ 知 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性相关,因此 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 是向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 的一个最大无关组.

此外,由 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3)=2$ 及 $R(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=2$ 可知 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3$ 和 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 都是向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 的最大无关组.

向量组 A 和它自己的最大无关组 A_0 是等价的. 这是因为 A_0

组是 A 组的一个部分组，故 A_0 组总能由 A 组线性表示（A 中每个向量都能由 A 组表示）；而由定义 5 的条件(ii)知，对于 A 中任一向量 $\boldsymbol{a}$，$r+1$ 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{a}$ 线性相关，而 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关，根据定理 3(4)知 $\boldsymbol{a}$ 能由 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性表示，即 A 组能由 A_0 组线性表示．所以 A 组与 A_0 组等价．

例4 全体 n 维向量构成的向量组记作 R^n，求 R^n 的一个最大无关组及 R^n 的秩．

解 在例 1 中，我们证明了 n 维单位坐标向量构成的向量组

$$E:\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$$

是线性无关的，又根据定理 3 的结论(3)，知 R^n 中的任意 $n+1$ 个向量都线性相关，因此向量组 E 是 R^n 的一个最大无关组，且 R^n 的秩等于 n． **解毕**

显然，R^n 的最大无关组很多，任何 n 个线性无关的 n 维向量都是 R^n 的最大无关组．

例5 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个最大无关组，并把不属最大无关组的列向量用最大无关组线性表示．

解 对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换变为行阶梯形矩阵（参看第三章§1引例）

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

知 $R(\boldsymbol{A})=3$，故列向量组的最大无关组含 3 个向量．而三个非零行的非零首元在 1、2、4 三列，故 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ 为列向量组的一个最大无关组．这是因为：

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4)\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

知 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4)=3$，故 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ 线性无关．

为把 $\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_5$ 用 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ 线性表示，把 $\boldsymbol{A}$ 再变成行最简形矩阵

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

即得
$$\boldsymbol{a}_3=-\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,$$
$$\boldsymbol{a}_5=4\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2-3\boldsymbol{a}_4.$$

（请读者想一想为什么?）

定理5　设向量组 B 能由向量组 A 线性表示，则向量组 B 的秩不大于向量组 A 的秩．

证　设向量组 B 的一个最大无关组为 $B_0:\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_r$，向量组 A 的一个最大无关组为 $A_0:\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_s$，要证 $r\leqslant s$．

因 B_0 组能由 B 组线性表示，B 组能由 A 组线性表示，A 组能由 A_0 组线性表示，故 B_0 组能由 A_0 组线性表示，即存在系数矩阵 $\boldsymbol{K}_{sr}=(k_{ij})$ 使

$$(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_r)=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_s)\begin{pmatrix}k_{11}&\cdots&k_{1r}\\\vdots&&\vdots\\k_{s1}&\cdots&k_{sr}\end{pmatrix}.$$

如果 $r>s$，则方程组

$$K_{sr}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}=\mathbf{0}\qquad(\text{简记为 } \boldsymbol{Kx}=\mathbf{0})$$

有非零解(因 $R(\boldsymbol{K})\leqslant s<r$)，从而方程组 $(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_s)\boldsymbol{Kx}=\mathbf{0}$ 有非零解，即 $(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_r)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解，这与 B_0 组线性无关矛盾，因此 $r>s$ 不能成立，所以 $r\leqslant s$.

推论1　等价的向量组的秩相等.

证　设向量组 A 与向量组 B 的秩依次为 s 和 r，因两个向量组等价，即两个向量组能相互线性表示，故 $s\leqslant r$ 与 $r\leqslant s$ 同时成立，所以 $s=r$.

推论2　**设** $\boldsymbol{C}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times n}$，**则** $R(\boldsymbol{C})\leqslant R(\boldsymbol{A})$，$R(\boldsymbol{C})\leqslant R(\boldsymbol{B})$.

证　设矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 用其列向量表示为

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{c}_1,\cdots,\boldsymbol{c}_n),\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_s).\text{ 而 } \boldsymbol{B}=(b_{ij}),$$

由
$$(\boldsymbol{c}_1,\cdots,\boldsymbol{c}_n)=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_s)\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ b_{s1}&\cdots&b_{sn}\end{pmatrix},$$

知矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组能由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示，因此 $R(\boldsymbol{C})\leqslant R(\boldsymbol{A})$.

因 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，由上段证明知 $R(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})\leqslant R(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$，即 $R(\boldsymbol{C})\leqslant R(\boldsymbol{B})$.

定理 5 与推论 2 是同一个原理的两种表现形式，前者以向量组的形式表现之，后者则以矩阵形式表现之.

推论3　(最大无关组的等价定义)

设向量组 B 是向量组 A 的部分组，若向量组 B 线性无关，且向量组 A 能由向量组 B 线性表示，则向量组 B 是向量组 A 的一

个最大无关组.

证 设向量组 B 含 r 个向量,则它的秩为 r. 因 A 组能由 B 组线性表示,故 A 组的秩$\leqslant r$,从而 A 组中任意 $r+1$ 个向量线性相关. 所以向量组 B 满足定义 5 所规定的最大无关组的条件.

例6 设向量组 B 能由向量组 A 线性表示,且它们的秩相等,证明向量组 A 与向量组 B 等价.

证一 只要证明向量组 A 能由向量组 B 线性表示.

设两个向量组的秩都为 r,并设 A 组和 B 组的最大无关组依次为 $A_0:\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 和 $B_0:\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_r$. 因 B 组能由 A 组线性表示,故 B_0 组能由 A_0 组线性表示,即有 r 阶方阵 $\boldsymbol{K}_r$ 使

$$(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_r)=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r)\boldsymbol{K}_r.$$

因 B_0 组线性无关,故 $R(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_r)=r$. 根据定理 5 推论 2,有

$$R(\boldsymbol{K}_r)\geqslant R(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_r)=r.$$

但 $R(\boldsymbol{K}_r)\leqslant r$,因此 $R(\boldsymbol{K}_r)=r$. 于是矩阵 $\boldsymbol{K}_r$ 可逆,并有

$$(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r)=(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_r)\boldsymbol{K}_r^{-1},$$

即 A_0 组能由 B_0 组线性表示,从而 A 组能由 B 组线性表示.

证二 设向量组 A 和 B 的秩都为 r. 因 B 组能由 A 组线性表示,故 A 组和 B 组合并而成的向量组 (A,B) 能由 A 组线性表示,而 A 组是 (A,B) 组的部分组,故 A 组总能由 (A,B) 组线性表示,所以 (A,B) 组与 A 组等价,因此 (A,B) 组的秩也为 r. 又因 B 组的秩为 r,故 B 组的最大无关组 B_0 含 r 个向量,因此 B_0 组也是 (A,B) 组的最大无关组,从而 (A,B) 组与 B_0 组等价. 由 A 组与 (A,B) 组等价,(A,B) 与 B_0 等价,B_0 与 B 等价,推知 A 组与 B 组等价.

本例的证明中,把证明两向量组 A 与 B 等价,转换为证明它们的最大无关组 A_0 与 B_0 等价. 证一证明 B_0 用 A_0 线性表示的

矩阵可逆;证二实质上是证明 A_0 与 B_0 都是向量组(A,B)的最大无关组.

例7 已知

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=\begin{pmatrix}2&3\\0&-2\\-1&1\\3&-1\end{pmatrix},(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=\begin{pmatrix}-5&4\\6&-4\\-5&3\\9&-5\end{pmatrix},$$

证明向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 与 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 等价.

证一 要证存在2阶方阵 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$,使

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{X},(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)\boldsymbol{Y}.$$

先求 $\boldsymbol{X}$.类似于线性方程组求解的方法,对增广矩阵$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$施行初等行变换变为行最简形矩阵:

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=\begin{pmatrix}2&3&-5&4\\0&-2&6&-4\\-1&1&-5&3\\3&-1&9&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+3r_1]{\substack{r_1\leftrightarrow r_3\\r_3+2r_1}}\begin{pmatrix}-1&1&-5&3\\0&-2&6&-4\\0&5&-15&10\\0&2&-6&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{\substack{r_2\div(-2)\\r_3-5r_2}}\begin{pmatrix}-1&1&-5&3\\0&1&-3&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\div(-1)]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-3&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

即得
$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}.$$

因$|\boldsymbol{X}|=1\neq 0$,知 $\boldsymbol{X}$ 可逆,取 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}^{-1}$,即合所求.因此向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 与 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 等价.

证二 对矩阵$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$施行初等列变换变为$(\widetilde{\boldsymbol{a}_1},\widetilde{\boldsymbol{a}_2})$,则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 与$\widetilde{\boldsymbol{a}_1},\widetilde{\boldsymbol{a}_2}$等价.因此,对$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$和$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$施行初等列变换变为

列最简形矩阵，若两个列最简形矩阵相同，则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 都与列最简形矩阵的列向量组等价，从而 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 与 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 等价（若 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$ 与 $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$ 的列最简形矩阵不同，则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 与 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 不等价）. 我们通常习惯作初等行变换，即对 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)^{\mathrm{T}}$ 和 $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)^{\mathrm{T}}$ 作行变换，有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1 & 3\\ 3 & -2 & 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-3r_1]{r_1\div 2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & -2 & \frac{5}{2} & -\frac{11}{2}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\div(-2)}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & \frac{11}{4}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 6 & -5 & 9\\ 4 & -4 & 3 & -5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2 & 4\\ 4 & -4 & 3 & -5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-4r_1]{r_1\div(-1)}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -4\\ 0 & 4 & -5 & 11\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\div 4]{r_1+\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & \frac{11}{4}\end{pmatrix},$$

因 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ 有相同的行最简形矩阵，故 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}$ 等价，即 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 与 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 等价.

证三 显然 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 也线性无关. 而

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)\sim\begin{pmatrix}-1 & 1 & -5 & 3\\ 0 & 1 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

知 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=2$. 因此 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 与 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 都是向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$,

$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 的最大无关组，所以 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 与 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 等价.

本例中证一的思路较简单，即按向量组等价的定义，只要找出两向量组相互线性表示的系数矩阵就完成证明. 这里把方程组

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}_1 \quad 与 \quad (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}_2$$

合在一起求解，这一方法与上一章例 9 的解法相类似，不过那里的系数矩阵是个方阵，而现在的系数矩阵 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$ 不是方阵. 这一方法在本章例 5 中也用了.

证二利用"经初等列变换，矩阵的列向量组等价，经初等行变换，则行向量组等价"这一特性，验证 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)^{\mathrm{T}}$ 与 $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)^{\mathrm{T}}$ 有相同的行最简形矩阵. 这里，若行最简形矩阵不同，则行向量组不等价，这是因为若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是两个同型的行最简形矩阵，但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组不可能等价（$\boldsymbol{A}$ 不可能经初等行变换变为 $\boldsymbol{B}$，$R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 与 $R(\boldsymbol{A})$ 也不会相等）.

证三的思路与例 6 证二的思路相同，这里由于是给出具体的向量，故只需直接计算 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$ 即可.

§4 向量空间

本章§1 中把 n 维向量的全体所构成的集合 R^n 叫做 n 维向量空间. 下面介绍向量空间的有关知识.

定义6 设 V 为 n 维向量的集合，如果集合 V 非空，且集合 V 对于加法及乘数两种运算封闭，那么就称集合 V 为向量空间.

所谓封闭，是指在集合 V 中可以进行加法及乘数两种运算. 具体地说，就是：若 $\boldsymbol{a}\in V,\boldsymbol{b}\in V$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in V$；若 $\boldsymbol{a}\in V,\lambda\in\mathbf{R}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}\in V$.

例8 3 维向量的全体 R^3，就是一个向量空间. 因为任意两个

3 维向量之和仍然是 3 维向量，数 λ 乘 3 维向量也仍然是 3 维向量，它们都属于 R^3. 我们可以用有向线段形象地表示 3 维向量，从而向量空间 R^3 可形象地看作以坐标原点为起点的有向线段的全体.

类似地，n 维向量的全体 R^n，也是一个向量空间. 不过当 $n > 3$ 时，它没有直观的几何意义.

例9 集合

$$V = \{\boldsymbol{x} = (0, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

是一个向量空间. 因为若 $\boldsymbol{a} = (0, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}} \in V$, $\boldsymbol{b} = (0, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}} \in V$，则 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (0, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)^{\mathrm{T}} \in V$, $\lambda\boldsymbol{a} = (0, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)^{\mathrm{T}} \in V$.

例10 集合

$$V = \{\boldsymbol{x} = (1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

不是向量空间，因为若 $\boldsymbol{a} = (1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}} \in V$，则

$$2\boldsymbol{a} = (2, 2a_2, \cdots, 2a_n)^{\mathrm{T}} \overline{\in} V.$$

例11 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为两个已知的 n 维向量，集合

$$V = \{\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$$

是一个向量空间. 因为若 $\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{a} + \mu_1\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{a} + \mu_2\boldsymbol{b}$，则有

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)\boldsymbol{a} + (\mu_1 + \mu_2)\boldsymbol{b} \in V,$$

$$k\boldsymbol{x}_1 = (k\lambda_1)\boldsymbol{a} + (k\mu_1)\boldsymbol{b} \in V.$$

这个向量空间称为由向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 所生成的向量空间.

一般地，由向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 所生成的向量空间为

$$V = \{\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{a}_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbf{R}\}.$$

例12 设向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ 等价，记

$$V_1=\{x=\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m \mid \lambda_1,\cdots,\lambda_m\in\mathbf{R}\},$$

$$V_2=\{x=\mu_1 b_1+\cdots+\mu_s b_s \mid \mu_1,\cdots,\mu_s\in\mathbf{R}\},$$

试证 $V_1=V_2$.

证 设 $x\in V_1$,则 x 可由 $a_1,\cdots,a_m$ 线性表示.因 $a_1,\cdots,a_m$ 可由 $b_1,\cdots,b_s$ 线性表示,故 x 可由 $b_1,\cdots,b_s$ 线性表示,所以 $x\in V_2$.这就是说,若 $x\in V_1$,则 $x\in V_2$,因此 $V_1\subset V_2$.

类似地可证:若 $x\in V_2$,则 $x\in V_1$,因此 $V_2\subset V_1$.

因为 $V_1\subset V_2$,$V_2\subset V_1$,所以 $V_1=V_2$.

定义7 设有向量空间 V_1 及 V_2,若 $V_1\subset V_2$,就称 V_1 是 V_2 的子空间.

例如任何由 n 维向量所组成的向量空间 V,总有 $V\subset R^n$,所以这样的向量空间总是 R^n 的子空间.

定义8 设 V 为向量空间,如果 r 个向量 $a_1,a_2,\cdots,a_r\in V$,且满足

(i) $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 线性无关;

(ii) V 中任一向量都可由 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 线性表示,

那末,向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 就称为向量空间 V 的一个基,r 称为向量空间 V 的维数,并称 V 为 r 维向量空间.

如果向量空间 V 没有基,那末 V 的维数为0.0维向量空间只含一个零向量**0**.

若把向量空间 V 看作向量组,则按§3定理5的推论3可知,V 的基就是向量组的最大线性无关组,V 的维数就是向量组的秩.

例如,由例4知,任何 n 个线性无关的 n 维向量都可以是向量空间 R^n 的一个基,且由此可知 R^n 的维数为 n.所以我们把 R^n 称为 n 维向量空间.

又如,向量空间

$$V=\{x=(0,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$$

的一个基可取为：$e_2=(0,1,0,\cdots,0)^T,\cdots,e_n=(0,\cdots,0,1)^T$. 并由此可知它是 $n-1$ 维向量空间.

由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 所生成的向量空间

$$V=\{x=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m \mid \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbf{R}\},$$

显然向量空间 V 与向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 等价，所以向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 的最大无关组就是 V 的一个基，向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 的秩就是 V 的维数.

若向量空间 $V\subseteq R^n$，则 V 的维数不会超过 n. 并且，当 V 的维数为 n 时，$V=R^n$.

若向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 是向量空间 V 的一个基，则 V 可表示为

$$V=\{x=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{a}_r \mid \lambda_1,\cdots,\lambda_r\in\mathbf{R}\},$$

这就较清楚地显示出向量空间 V 的构造.

例13 设 $\mathbf{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=\begin{pmatrix}1&4\\0&3\\-4&2\end{pmatrix},$$

验证 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 是 R^3 的一个基，并把 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 用这个基线性表示.

解 要证 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 是 R^3 的一个基，只要证 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关，即只要证 $\mathbf{A}\sim\boldsymbol{E}$.

设 $\boldsymbol{b}_1=x_{11}\boldsymbol{a}_1+x_{21}\boldsymbol{a}_2+x_{31}\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{b}_2=x_{12}\boldsymbol{a}_1+x_{22}\boldsymbol{a}_2+x_{32}\boldsymbol{a}_3$ 即

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\\x_{31}&x_{32}\end{pmatrix},\text{记作 } \boldsymbol{B}=\mathbf{A}\boldsymbol{X}.$$

对矩阵$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B})$施行初等行变换，若 $\boldsymbol{A}$ 能变为$\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 为 R^3 的一个基，且当 $\boldsymbol{A}$ 变为$\boldsymbol{E}$ 时，$\boldsymbol{B}$ 变为$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B})=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2-2r_1 \\ r_3+r_1}]{\frac{1}{3}(r_1+r_2+r_3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \div 3]{r_2 \div (-3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\dfrac{5}{3} & \dfrac{5}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_2]{r_1-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{2}{3} & \dfrac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

因有 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 为 R^3 的一个基，且

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{4}{3} \\ -\dfrac{2}{3} & 1 \\ -1 & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

§5 线性方程组的解的结构

在上一章§1中，我们已经介绍了用矩阵的初等变换解线性方程组的方法，并在§3中建立了两个重要定理，即

(1) n 个未知量的齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A})<n$.

(2) n 个未知量的非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩，且当 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=n$时方程组有唯一解，当 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=r<n$ 时方程组有无限多个解.

下面我们用向量组线性相关性的理论来讨论线性方程组的解.先讨论齐次线性方程组.

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1}$$

记
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

则(1)式可写成向量方程

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{2}$$

若 $x_1 = \xi_{11}, x_2 = \xi_{21}, \cdots, x_n = \xi_{n1}$ 为(1)的解,则

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \end{pmatrix}$$

称为方程组(1)的解向量,它也就是向量方程(2)的解.

根据向量方程(2),我们来讨论解向量的性质.

性质1　若 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}_2$ 为(2)的解,则 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2$ 也是(2)的解.

证　只要验证 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2$ 满足方程(2):

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}.$$

性质2　若 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}_1$ 为(2)的解,k 为实数,则 $\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{\xi}_1$ 也是(2)的解.

证 $$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\xi}_1)=k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1)=k\,\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}.$$ 证毕

若用 S 表示方程组(1)的全体解向量所组成的集合，则性质1、2即为

1. 若 $\boldsymbol{\xi}_1\in S,\boldsymbol{\xi}_2\in S$，则 $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2\in S$；

2. 若 $\boldsymbol{\xi}_1\in S,k\in\mathbf{R}$，则 $k\boldsymbol{\xi}_1\in S$.

这就说明集合 S 对向量的线性运算是封闭的，所以集合 S 是一个向量空间，称为齐次线性方程组(1)的解空间.

下面我们来求解空间 S 的一个基.

设系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，并不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 个列向量线性无关，于是 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1,n-r}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&1&b_{r1}&\cdots&b_{r,n-r}\\ 0&&&\cdots&&0\\ \vdots&&&&&\vdots\\ 0&&&\cdots&&0\end{pmatrix},$$

与 $\boldsymbol{B}$ 对应，即有方程组

$$\begin{cases}x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n.\end{cases}\tag{3}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价，故方程组(1)与(3)同解.在(3)中，任给 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 一组值，即唯一确定 $x_1,\cdots,x_r$ 的值，就得(3)的一个解，也就是(1)的解.现在令 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 取下列 $n-r$ 组数：

$$\begin{pmatrix}x_{r+1}\\x_{r+2}\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix},$$

由(3)即依次可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix},$$

从而求得(3)[也就是(1)]的 $n-r$ 个解.

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

下面证明 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$就是解空间 S 的一个基.

首先,由于$(x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 所取的 $n-r$ 个 $n-r$ 维向量

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性无关,所以在每个向量前面添加 r 个分量而得到的 $n-r$ 个 n 维向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$也线性无关.

其次,证明(1)的任一解

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

都可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性表示. 为此,作向量

$$\eta=\lambda_{r+1}\xi_1+\lambda_{r+2}\xi_2+\cdots+\lambda_n\xi_{n-r},$$

由于 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是(1)的解,故 η 也是(1)的解,比较 η 与 ξ,知它们的后面 $n-r$ 个分量对应相等,由于它们都满足方程组(3),从而知它们的前面 r 个分量亦必对应相等(方程组(3)表明任一解的前 r 个分量由后 $n-r$ 个分量唯一地决定),因此 $\xi=\eta$,即

$$\xi=\lambda_{r+1}\xi_1+\lambda_{r+2}\xi_2+\cdots+\lambda_n\xi_{n-r}.$$

这样就证明了 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是解空间 S 的一个基,从而知解空间 S 的维数是 $n-r$.

根据以上证明,即得下述定理.

定理6　n 元齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$的全体解所构成的集合 S 是一个向量空间,当系数矩阵的秩 $R(A_{m\times n})=r$ 时,解空间 S 的维数为 $n-r$.

上面的证明过程还提供了一种求解空间的基的方法. 当然,求基的方法很多,而解空间的基也不是唯一的. 例如,$(x_{r+1},\cdots,x_n)$可任取 $n-r$ 个线性无关的 $n-r$ 维向量,由此即可相应地求得解空间的一个基. 又如方程组(1)的任何 $n-r$ 个线性无关的解向量,都可作为解空间 S 的基.

解空间 S 的基又称为方程组(1)的基础解系.

当 $R(A)=n$ 时,方程组(1)只有零解,因而没有基础解系(此时解空间 S 只含一个零向量,为 0 维向量空间). 而当 $R(A)=r<n$ 时,方程组(1)必有含 $n-r$ 个向量的基础解系. 设求得 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$为方程组(1)的一个基础解系,则(1)的解可表示为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中 $k_1,\cdots,k_{n-r}$为任意实数. 上式称为方程组(1)的通解. 此时,

解空间可表示为

$$S=\{x=k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}\mid k_1,\cdots,k_{n-r}\in\mathbf{R}\}.$$

在上一章§3中我们已经提出通解这一名称，这里在解空间、基础解系等概念的基础上重提通解的定义，读者应由此理解通解与解空间、基础解系之间的关系．由于基础解系不是唯一的，因此通解的表达式也不是唯一的．

上一段证明中提供的求基础解系的方法其实就是上一章中用初等行变换求通解的方法．为说明这层意思，下面再举一例．

例14 求齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4=0,\\2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0,\\7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0\end{cases}$$

的基础解系与通解．

解 对系数矩阵 A 作初等行变换，变为行最简形矩阵，有

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-5&3&2\\7&-7&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-7r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&-7&5&4\\0&-14&10&8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&-7&5&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_2]{r_2\div(-7)}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{2}{7}&-\frac{3}{7}\\0&1&-\frac{5}{7}&-\frac{4}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

便得

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{2}{7}x_3+\dfrac{3}{7}x_4,\\x_2=\dfrac{5}{7}x_3+\dfrac{4}{7}x_4.\end{cases}\qquad(*)$$

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，则对应有 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\\frac{5}{7}\end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\\frac{4}{7}\end{pmatrix}$，即得基础

解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\ \frac{5}{7}\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\ \frac{4}{7}\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

并由此写出通解

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\ \frac{5}{7}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\ \frac{4}{7}\\ 0\\ 1\end{pmatrix},(c_1,c_2\in\mathbf{R}).$$

上一章中线性方程组的解法是从(*)式写出通解(从通解的表达式即可得基础解系),现在从(*)式先取基础解系,再写出通解,两种解法其实没有多少区别.

根据(*)式,如果取

$$\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\text{及}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\text{对应得}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{7}\\ \frac{9}{7}\end{pmatrix}\text{及}\begin{pmatrix}-\frac{1}{7}\\ \frac{1}{7}\end{pmatrix},$$

即得不同的基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}\frac{5}{7}\\ \frac{9}{7}\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{7}\\ \frac{1}{7}\\ 1\\ -1\end{pmatrix},$$

从而得通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{9}{7} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (k_1, k_2 \in \mathbf{R}).$$

显然 $\boldsymbol{\xi}_1$、$\boldsymbol{\xi}_2$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1$、$\boldsymbol{\eta}_2$ 是等价的，两个通解虽然形式不一样，但都含两个任意常数，且都可表示方程组的任一解.

上述解法中，由于行最简形矩阵的结构，x_1 总是选为非自由未知量. 对于解方程来说，x_1 当然也可选为自由未知量. 如果要选 x_1 为自由未知量，那末就不能采用上述化系数矩阵为行最简形矩阵的“标准程序”，而要稍作变化，对系数矩阵 $\mathbf{A}$ 作初等行变换，先把其中某一列（不一定是第一列）化为 $(1,0,0)^{\mathrm{T}}$. 如本例中第四列数值较简，容易化出两个 0：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3+r_1 \\ r_1 \div (-1)}]{r_2+2r_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 8 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-r_2]{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

上式最后一个矩阵虽不是行最简形矩阵，但也具备行最简形矩阵的功能. 按照这个矩阵，取 x_1、x_2 为自由未知量，便可写出通解

$$\begin{cases} x_3 = -4x_1 + 3x_2, \\ x_4 = 5x_1 - 2x_2, \end{cases} (x_1、x_2 \text{ 可任意取值})$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in \mathbf{R})$$

而对应的基础解系为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

定理 6 不仅是线性方程组各种解法的理论基础，在讨论向量组的线性相关性时也很有用.

例15 证明 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{x}$ 为 n 维列向量.

若 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，则有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax})=\boldsymbol{0}$，即 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$；

若 $\boldsymbol{x}$ 满足 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，即 $(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax})=0$，从而推知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$.[①]

综上可知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解，因此 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$.

下面讨论非齐次线性方程组.

设有非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{4}$$

它也可写作向量方程

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}, \tag{5}$$

向量方程(5)的解也就是方程组(4)的解向量，它具有

① $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，这一命题对复向量不成立，对复向量 $\boldsymbol{x}$，命题应改为：$\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 同理，例 15 的结论对复矩阵不成立，对复矩阵 $\boldsymbol{A}$，结论应改为 $R(\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$.

性质3 设 $x=\boldsymbol{\eta}_1$ 及 $x=\boldsymbol{\eta}_2$ 都是(5)的解，则 $x=\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 为对应的齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{6}$$

的解.

证 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,

即 $x=\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 满足方程(6).

性质4 设 $x=\boldsymbol{\eta}$ 是方程(5)的解，$x=\xi$ 是方程(6)的解，则 $x=\xi+\boldsymbol{\eta}$ 仍是方程(5)的解.

证 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$,

即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 满足方程(5). 证毕

由性质3可知，若求得(5)的一个解 $\boldsymbol{\eta}^*$，则(5)的任一解总可表示为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}^*,$$

其中 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ 为方程(6)的解，又若方程(6)的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$，则方程(5)的任一解总可表示为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}^*.$$

而由性质4可知，对任何实数 $k_1,\cdots,k_{n-r}$，上式总是方程(5)的解. 于是方程(5)的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}^*,(k_1,\cdots,k_{n-r}\text{为任意实数}).$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程(6)的基础解系.

例16 求解方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=0,\\x_1-x_2+x_3-3x_4=1,\\x_1-x_2-2x_3+3x_4=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

解 对增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 施行初等行变换:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\1&-1&1&-3&1\\1&-1&-2&3&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\0&0&2&-4&1\\0&0&-1&2&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2\div 2\\ r_3+r_2}]{r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&\frac{1}{2}\\0&0&1&-2&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可见 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$,故方程组有解,并有

$$\begin{cases}x_1=x_2+x_4+\dfrac{1}{2},\\ x_3=2x_4+\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

取 $x_2=x_4=0$,则 $x_1=x_3=\dfrac{1}{2}$,即得方程组的一个解

$$\boldsymbol{\eta}^*=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}.$$

在对应的齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1=x_2+x_4,\\x_3=2x_4\end{cases}$ 中,取

$$\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\text{及}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\text{则}\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\text{及}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},$$

即得对应的齐次线性方程组的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},$$

于是所求通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix},(c_1,c_2\in\mathbf{R}).$$

习　题　四

1. 设 $\boldsymbol{v}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}_3=(3,4,0)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$ 及 $3\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3$.

2. 设 $3(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a})=5(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a})$,
其中 $\boldsymbol{a}_1=(2,5,1,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_2=(10,1,5,10)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_3=(4,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{a}$.

3. 举例说明下列各命题是错误的:

(1) 若向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 是线性相关的,则 $\boldsymbol{a}_1$ 可由 $\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示.

(2) 若有不全为 0 的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=\mathbf{0}$$

成立,则 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关, $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_m$ 亦线性相关.

(3) 若只有当 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 全为 0 时,等式

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=\mathbf{0}$$

才能成立,则 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性无关, $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_m$ 亦线性无关.

(4) 若 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关, $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_m$ 亦线性相关,则有不全为 0 的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$,使

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}, \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{0}$$

同时成立

4. 设 $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_1$，证明向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ 线性相关.

5. 设 $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_r$，且向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 线性无关，证明向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

6. 利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组：

$$(1) \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}; \qquad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. 求下列向量组的秩，并求一个最大无关组：

$$(1)\ \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 100 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix};$$

(2) $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} = (1, 2, 1, 3), \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} = (4, -1, -5, -6), \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}} = (1, -3, -4, -7)$.

8. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是一组 n 维向量，已知 n 维单位坐标向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 能由它们线性表示，证明 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

9. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是一组 n 维向量，证明它们线性无关的充分必要条件是：任一 n 维向量都可由它们线性表示.

10. 设向量组 $A: \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 的秩为 r_1，向量组 $B: \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_t$ 的秩为 r_2，向量组 $C: \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_t$ 的秩为 r_3，证明

$$\max\{r_1, r_2\} \leqslant r_3 \leqslant r_1 + r_2.$$

11. 证明 $R(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B})$.

12. 设向量组 $B: \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 能由向量组 $A: \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性表示为

$$(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r) = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s)\boldsymbol{K},$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 为 $s \times r$ 矩阵，且 A 组线性无关. 证明 B 组线性无关的充分必要条件

是矩阵$\boldsymbol{K}$的秩$R(\boldsymbol{K})=r$.

13. 设$V_1=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$满足$x_1+\cdots+x_n=0\}$,

$V_2=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$满足$x_1+\cdots+x_n=1\}$,

问V_1、V_2是不是向量空间？为什么？

14. 试证：由$\boldsymbol{a}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_3=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$所生成的向量空间就是$R^3$.

15. 由$\boldsymbol{a}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_2=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$,所生成的向量空间记作$V_1$,由$\boldsymbol{b}_1=(2,-1,3,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}_2=(0,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$所生成的向量空间记作$V_2$,试证$V_1=V_2$.

16. 验证$\boldsymbol{a}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_2=(2,1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}}$为$R^3$的一个基,并把$\boldsymbol{v}_1=(5,0,7)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{v}_2=(-9,-8,-13)^{\mathrm{T}}$用这个基线性表示.

17. 求下列齐次线性方程组的基础解系：

(1) $\begin{cases}x_1-8x_2+10x_3+2x_4=0,\\2x_1+4x_2+5x_3-x_4=0,\\3x_1+8x_2+6x_3-2x_4=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x_1-3x_2-2x_3+x_4=0,\\3x_1+5x_2+4x_3-2x_4=0,\\8x_1+7x_2+6x_3-3x_4=0;\end{cases}$

(3) $nx_1+(n-1)x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n=0$.

18. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-2&1&3\\9&-5&2&8\end{pmatrix}$,求一个$4\times2$矩阵$\boldsymbol{B}$,使$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,且$R(\boldsymbol{B})=2$.

19. 求一个齐次线性方程组,使它的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(3,2,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

20. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3,已知$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$是它的三个解向量,且

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},$$

求该方程组的通解.

21. 设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$都是n阶矩阵,且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,证明$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

22. 设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{E}$为$n$阶单位矩阵,证明

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n.$$

(提示:利用题 11 及题 21 的结论)

23. 求下列非齐次线性方程组的一个解及对应的齐次线性方程组的基础解系:

(1) $\begin{cases} x_1+x_2=5, \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=1, \\ 5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11, \\ 5x_1+3x_2+6x_3-x_4=-1, \\ 2x_1+4x_2+2x_3+x_4=-6. \end{cases}$

24. 设 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解,$\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系. 证明

(1) $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关;

(2) $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

25. 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 s 个解,$k_1,\cdots,k_s$ 为实数,满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$. 证明

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$$

也是它的解.

26. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵的秩为 r,$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解(由题 24 知它确有 $n-r+1$ 个线性无关的解). 试证它的任一解可表示为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1} \qquad (\text{其中 } k_1+\cdots+k_{n-r+1}=1).$$

第五章

相似矩阵及二次型

§1 预备知识:向量的内积

定义1 设有 n 维向量

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

令
$$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n,$$

$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$称为向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积.

内积是向量的一种运算,用矩阵记号表示,当 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 都是列向量时,有

$$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}.$$

内积具有下列性质(其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 为 n 维向量,λ 为实数):

(i) $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=[\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}]$;

(ii) $[\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=\lambda[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$;

(iii) $[\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}]=[\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}]+[\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}]$.

(iv) $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]\geqslant0$,且当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$时有$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]>0$.

有解析几何中,我们曾引进向量的数量积

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\theta,$$

且在直角坐标系中,有

$$(x_1,x_2,x_3)\cdot(y_1,y_2,y_3)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

n 维向量的内积是数量积的一种推广. 但 n 维向量没有 3 维向量那样直观的长度和夹角的概念,因此只能按数量积的直角坐标计算公式来推广. 并且反过来,利用内积来定义 n 维向量的长度和夹角:

定义2 令

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2},$$

$\|\boldsymbol{x}\|$ 称为 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的长度(或范数).

向量的长度具有下述性质:

1. 非负性 当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时, $\|\boldsymbol{x}\|>0$; 当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时, $\|\boldsymbol{x}\|=0$;

2. 齐次性 $\|\lambda\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\,\|\boldsymbol{x}\|$;

3. 三角不等式 $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$.

当 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时,称 $\boldsymbol{x}$ 为单位向量.

向量的内积满足

$$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]^2\leqslant[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}][\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}],$$

上式称为施瓦茨不等式,这里不予证明. 由此可得

$$\left|\frac{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}\right|\leqslant 1\qquad(\text{当 }\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|\neq 0\text{ 时}),$$

于是有下面的定义:

当 $\|\boldsymbol{x}\|\neq 0$, $\|\boldsymbol{y}\|\neq 0$ 时,

$$\theta=\arccos\frac{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}$$

称为 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的夹角.

当 $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=0$ 时,称向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交. 显然,若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{x}$ 与任何向量都正交.

下面讨论正交向量组的性质. 所谓正交向量组,是指一组两两

正交的非零向量.

定理1　若 n 维向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 是一组两两正交的非零向量,则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关.

证　设有 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{0},$$

以 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}$ 左乘上式两端,得

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1=0,$$

因 $\boldsymbol{a}_1\neq\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1=\|\boldsymbol{a}_1\|^2\neq0$,从而必有 $\lambda_1=0$.类似可证 $\lambda_2=0,\cdots,\lambda_r=0$.于是向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关.　　证毕

我们常采用正交向量组作向量空间的基,称为向量空间的正交基.例如 n 个两两正交的 n 维非零向量,可构成向量空间 R^n 的一个正交基.

例1　已知3维向量空间 R^3 中两个向量

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

正交,试求一个非零向量 $\boldsymbol{a}_3$,使 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 两两正交.

解　记　$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{a}_3$ 应满足齐次线性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

由　$$\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

得 $\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$,从而有基础解系 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 取 $a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 即合所求.

定义3 设 n 维向量 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 是向量空间 $V(V \subset R^n)$ 的一个基,如果 $e_1, \cdots, e_r$ 两两正交,且都是单位向量,则称 $e_1, \cdots, e_r$ 是 V 的一个规范正交基.

例如
$$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
就是 R^4 的一个规范正交基.

若 $e_1, \cdots, e_r$ 是 V 的一个规范正交基,那么 V 中任一向量 a 应能由 $e_1, \cdots, e_r$ 线性表示,设表示式为

$$a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_r e_r.$$

为求其中的系数 $\lambda_i (i = 1, \cdots, r)$,可用 e_i^{T} 左乘上式,有

$$e_i^{\mathrm{T}} a = \lambda_i e_i^{\mathrm{T}} e_i = \lambda_i,$$

即
$$\lambda_i = e_i^{\mathrm{T}} a = [a, e_i].$$

设 $a_1, \cdots, a_r$ 是向量空间 V 的一个基,要求 V 的一个规范正交基.这也就是要找一组两两正交的单位向量 $e_1, \cdots, e_r$,使 $e_1, \cdots, e_r$ 与 $a_1, \cdots, a_r$ 等价.这样一个问题,称为把 $a_1, \cdots, a_r$ 这个基

— — — — — — —

规范正交化.

我们可以用以下办法把 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 规范正交化:

取
$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1;$$
$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_r-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_r]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{a}_r]}{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2-\cdots-\frac{[\boldsymbol{b}_{r-1},\boldsymbol{a}_r]}{[\boldsymbol{b}_{r-1},\boldsymbol{b}_{r-1}]}\boldsymbol{b}_{r-1}.$$

容易验证 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 两两正交,且 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 与 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 等价.

然后只要把它们单位化,即取
$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{b}_2\|}\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r=\frac{1}{\|\boldsymbol{b}_r\|}\boldsymbol{b}_r,$$
就得 V 的一个规范正交基.

上述从线性无关向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 导出正交向量组 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 的过程称为施密特(Schimidt)正交化过程.它不仅满足 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 与 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 等价,还满足:对任何 $k(1\leqslant k\leqslant r)$,向量组 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_k$ 与 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ 等价.

例2 设 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$,试用施密特正交化过程把这组向量规范正交化.

解 取 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1$;
$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{[\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1]}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2}\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix};$$
$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\frac{[\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1]}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2}\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_2]}{\|\boldsymbol{b}_2\|^2}\boldsymbol{b}_2$$

$$=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

再把它们单位化,取

$$e_1=\frac{b_1}{\|b_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},e_2=\frac{b_2}{\|b_2\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$e_3=\frac{b_3}{\|b_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

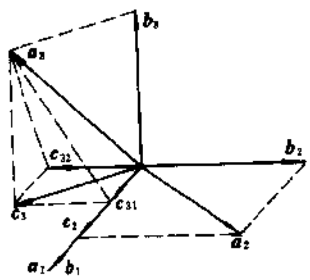

图 5.1

e_1,e_2,e_3 即合所求.

本例中各向量如图 5.1 所示.用解析几何的术语解释如下:

$b_2=a_2-c_2$,而 c_2 为 a_2 在 b_1 上的投影向量,即

$$c_2=\left[a_2,\frac{b_1}{\|b_1\|}\right]\frac{b_1}{\|b_1\|}=\frac{[a_2,b_1]}{\|b_1\|^2}b_1;$$

$b_3=a_3-c_3$,而 c_3 为 a_3 在平行于 b_1、b_2 的平面上的投影向量,由于 $b_1\perp b_2$,故 c_3 等于 a_3 分别在 b_1、b_2 上的投影向量 c_{31} 及 c_{32} 之和,即

$$c_3=c_{31}+c_{32}=\frac{[a_3,b_1]}{\|b_1\|^2}b_1+\frac{[a_3,b_2]}{\|b_2\|^2}b_2.$$

例3 已知 $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,求一组非零向量 a_2,a_3,使 a_1,a_2,a_3 两

两正交.

解 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 应满足方程 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$,即

$$x_1+x_2+x_3=0.$$

它的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

把基础解系正交化,即合所求.亦即取

$$\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{\xi}_2-\frac{[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2]}{[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_1]}\boldsymbol{\xi}_1.$$

其中$[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2]=1,[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_1]=2$,于是得

$$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

定义4 如果 n 阶矩阵$\boldsymbol{A}$ 满足

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\qquad(\text{即 }\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}),$$

那末称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

上式用 $\boldsymbol{A}$ 的列向量表示,即是

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=\boldsymbol{E},$$

亦即
$$(\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j)=(\delta_{ij}),$$

这也就是 n^2 个关系式

$$a_i^{\mathrm{T}} a_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{当 } i = j; \\ 0, \text{当 } i \neq j \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

这就说明:方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量都是单位向量,且两两正交.

考虑到 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}$ 等价,所以上述结论对 $\boldsymbol{A}$ 的行向量亦成立.

由此可见,正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列(行)向量构成向量空间 R^n 的一个规范正交基.

例4 验证矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

是正交矩阵.

解 $\boldsymbol{P}$ 的每个列向量都是单位向量,且两两正交,所以 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵.

定义5 若 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵,则线性变换 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 称为正交变换.

设 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 为正交变换,则有

$$\| \boldsymbol{y} \| = \sqrt{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} = \| \boldsymbol{x} \| .$$

按 $\| \boldsymbol{x} \|$ 表示向量的长度,相当于线段的长度. $\| \boldsymbol{y} \| = \| \boldsymbol{x} \|$ 说明经正交变换线段长度保持不变,这是正交变换的优良特性.

§2 方阵的特征值与特征向量

工程技术中的一些问题，如振动问题和稳定性问题，常可归结为求一个方阵的特征值和特征向量的问题.数学中诸如方阵的对角化及解微分方程组等问题，也都要用到特征值的理论.

定义6 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，如果数 λ 和 n 维非零列向量 $\boldsymbol{x}$ 使关系式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x} \tag{1}$$

成立，那末，这样的数 λ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，非零向量 $\boldsymbol{x}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

(1) 式也可写成，

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}, \tag{2}$$

这是 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组，它有非零解的充分必要条件是系数行列式

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0, \tag{3}$$

即
$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

上式是以 λ 为未知数的一元 n 次方程，称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程.其左端 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$ 是 λ 的 n 次多项式，记作 $f(\lambda)$，称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式.显然，$\boldsymbol{A}$ 的特征值就是特征方程的解.特征方程在复数范围内恒有解，其个数为方程的次数(重根按重数计算)，因此，n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个特征值.

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，由多项式的根与系数之间的关系，不难证明

(i) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

(ii) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$.

请读者证明之.

设 $\lambda=\lambda_i$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,则由方程

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

可求得非零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}_i$,那么 $\boldsymbol{p}_i$ 便是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_i 的特征向量.(若 λ_i 为实数,则 $\boldsymbol{p}_i$ 可取实向量;若 λ_i 为复数,则 $\boldsymbol{p}_i$ 为复向量.)

例5 求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&-1\\-1&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=8-6\lambda+\lambda^2$$
$$=(4-\lambda)(2-\lambda),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=4$.

当 $\lambda_1=2$ 时,对应的特征向量应满足

$$\begin{pmatrix}3-2&-1\\-1&3-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

即
$$\begin{cases}x_1-x_2=0,\\-x_1+x_2=0.\end{cases}$$

解得 $x_1=x_2$,所以对应的特征向量可取为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_2=4$ 时,由

$$\begin{pmatrix}3-4&-1\\-1&3-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\text{即}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

解得 $x_1=-x_2$，所以对应的特征向量可取为

$$p_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

显然，若 p_i 是方阵 A 的对应于特征值 λ_i 的特征向量，则 kp_i $(k\neq 0)$ 也是对应于 λ_i 的特征向量.

例6 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量.

解 A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&0\\-4&3-\lambda&0\\1&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2,$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=2$ 时，解方程 $(A-2E)x=0$. 由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-3&1&0\\-4&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $$p_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以 $kp_1(k\neq 0)$ 是对应于 $\lambda_1=2$ 的全部特征向量.

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，解方程 $(A-E)x=0$. 由

$$A-E=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系
$$p_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},$$
所以 $kp_2(k\neq 0)$是对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量.

例7 求矩阵
$$A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$$
的特征值和特征向量.

解
$$\begin{aligned}|A-\lambda E|&=\begin{vmatrix}-2-\lambda&1&1\\0&2-\lambda&0\\-4&1&3-\lambda\end{vmatrix}\\&=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-2-\lambda&1\\-4&3-\lambda\end{vmatrix}\\&=(2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)\\&=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2,\end{aligned}$$
所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=-1$ 时,解方程$(A+E)x=0$.由
$$A+E=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&3&0\\-4&1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
得基础解系
$$p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$
所以对应于 $\lambda_1=-1$ 的全部特征向量为 $kp_1(k\neq 0)$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时,解方程$(A-2E)x=0$.由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\-4&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系
$$p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},$$

所以对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量为

$$k_2\boldsymbol{p}_2+k_3\boldsymbol{p}_3\qquad(k_2,k_3\text{ 不同时为 }0).$$

例8 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,证明 λ^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值.

证 因 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,故有 $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$ 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}$. 于是

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{p}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{p})=\lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p})=\lambda^2\boldsymbol{p},$$

所以 λ^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值. 证毕

按此例类推,不难证明:若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则 λ^k 是 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值;$\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值.(其中 $\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$, $\varphi(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m$.)

定理2 **设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个特征值, $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 依次是与之对应的特征向量. 如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 各不相等,则 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 线性无关.**

证 设有常数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 使

$$x_1\boldsymbol{p}_1+x_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{p}_m=\boldsymbol{0}.$$

则 $\boldsymbol{A}(x_1\boldsymbol{p}_1+x_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{p}_m)=\boldsymbol{0}$,即

$$\lambda_1x_1\boldsymbol{p}_1+\lambda_2x_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+\lambda_mx_m\boldsymbol{p}_m=\boldsymbol{0},$$

类推之,有

$$\lambda_1^kx_1\boldsymbol{p}_1+\lambda_2^kx_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+\lambda_m^kx_m\boldsymbol{p}_m=\boldsymbol{0}.\ (k=1,2,\cdots,m-1)$$

把上列各式合写成矩阵形式,得

$$
(x_1\boldsymbol{p}_1, x_2\boldsymbol{p}_2, \cdots, x_m\boldsymbol{p}_m)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}).
$$

上式等号左端第二个矩阵的行列式为范德蒙德行列式，当 λ_i 各不相等时该行列式不等于 0，从而该矩阵可逆．于是有

$$
(x_1\boldsymbol{p}_1, x_2\boldsymbol{p}_2, \cdots, x_m\boldsymbol{p}_m) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}),
$$

即 $x_j\boldsymbol{p}_j = \mathbf{0}(j = 1, 2, \cdots, m)$．但 $\boldsymbol{p}_j \neq \mathbf{0}$，故 $x_j = 0(j = 1, 2, \cdots, m)$．

所以向量组 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 线性无关．

§3 相似矩阵

定义7 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$
\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B},
$$

则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵，或说矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似．对 $\boldsymbol{A}$ 进行运算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 称为对 $\boldsymbol{A}$ 进行相似变换，可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{B}$ 的相似变换矩阵．

定理3 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相同，从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值亦相同．

证 因 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$．故

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{E}| &= |\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}| \\
&= |\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}||\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}|.
\end{aligned}
$$

推论 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵

$$
\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}
$$

相似，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 即是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

证 因 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 即是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，由定理 3 知 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 也就是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值. 证毕

容易推证：若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$，则 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{P}^{-1}$. $\boldsymbol{A}$ 的多项式

$$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}^{-1}.$$

特别，若有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵，则

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1},\ \varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}.$$

而对于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，有

$$\boldsymbol{\Lambda}^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k\end{pmatrix},\ \varphi(\boldsymbol{\Lambda})=\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n)\end{pmatrix},$$

由此可方便地计算 $\boldsymbol{A}$ 的多项式 $\varphi(\boldsymbol{A})$.

有一个很有趣的结论：设 $f(\lambda)$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，则 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$. 这个结论的证明比较困难，但若 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似，则容易证明此结论. 这是因为：若 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似，即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，其中 λ_i 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，有 $f(\lambda_i)=0$. 于是，由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，有

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{P}f(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n)\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\boldsymbol{P}\boldsymbol{O}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{O}.\end{aligned}$$

下面我们要讨论的主要问题是：对 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，寻求相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵，这就称为把方阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化.

假设已经找到可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵，我们来讨论 $\boldsymbol{P}$ 应满足什么关系.

把 $\boldsymbol{P}$ 用其列向量表示为

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n),$$

由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)&=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\\&=(\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\lambda_2\boldsymbol{p}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{p}_n),\end{aligned}$$

于是有 $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i\qquad(i=1,2,\cdots,n).$$

可见 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，而 $\boldsymbol{P}$ 的列向量 $\boldsymbol{p}_i$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_i 的特征向量.

反之，由上节知 $\boldsymbol{A}$ 恰好有 n 个特征值，并可对应地求得 n 个特征向量，这 n 个特征向量即可构成矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$.（因特征向量不是唯一的，所以矩阵 $\boldsymbol{P}$ 也不是唯一的，并且 $\boldsymbol{P}$ 可能是复矩阵.）

余下的问题是：$\boldsymbol{P}$ 是否可逆？即 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 是否线性无关？如果 $\boldsymbol{P}$ 可逆，那末便有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似.

由上面的讨论即有

定理4　n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似（即 $\boldsymbol{A}$ 能对角化）的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

联系定理 2，可得

推论　如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互不相等，则 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似.

当 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程有重根时，就不一定有 n 个线性无关的特征向量，从而不一定能对角化. 例如在例 6 中 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程有重根，

确实找不到 3 个线性无关的特征向量，因此例 6 中的 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化；而在例 7 中 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程也有重根，但却能找到 3 个线性无关的特征向量，因此例 7 中的 $\boldsymbol{A}$ 能对角化.

一个 n 阶矩阵具备什么条件才能对角化？这是一个较复杂的问题.我们对此不进行一般性的讨论，而仅讨论当 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵的情形.

§4　对称矩阵的相似矩阵

定理5　对称矩阵的特征值为实数.

证　设复数 λ 为对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，复向量 $\boldsymbol{x}$ 为对应的特征向量，即 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$.

用 $\bar{\lambda}$ 表示 λ 的共轭复数，$\bar{\boldsymbol{x}}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的共轭复向量，则 $\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}=\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}=(\overline{\boldsymbol{Ax}})=(\overline{\lambda\boldsymbol{x}})=\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{x}}$. 于是有

$$\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax})=\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\lambda\boldsymbol{x}=\lambda\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},$$

及　$$\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=(\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=(\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

两式相减，得　$$(\lambda-\bar{\lambda})\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0,$$

但因 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，所以

$$\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i x_i=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\neq 0,$$

故 $\lambda-\bar{\lambda}=0$，即 $\lambda=\bar{\lambda}$，这就说明 λ 是实数.　　证毕

显然，当特征值 λ_i 为实数时，齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

是实系数方程组，由 $|\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E}|=0$ 知必有实的基础解系，所以对应的特征向量可以取实向量.

定理6　设 λ_1,λ_2 是对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值，$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 是对

应的特征向量.若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$,则 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 正交.

证 $\lambda_1 \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1, \lambda_2 \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$.

因 $\boldsymbol{A}$ 对称,故 $\lambda_1 \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} = (\lambda_1 \boldsymbol{p}_1)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}$,于是

$$\lambda_1 \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} (\lambda_2 \boldsymbol{p}_2) = \lambda_2 \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_2,$$

即

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_2 = 0.$$

但 $\lambda_1 \neq \lambda_2$,故 $\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_2 = 0$,即 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 正交.

定理7 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵,λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的 r 重根,则矩阵 $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = n - r$,从而对应特征值 λ 恰有 r 个线性无关的特征向量.

这定理不予证明.

定理8 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵,则必有正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$,其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 的互不相等的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$,它们的重数依次为 $r_1, r_2, \cdots, r_s (r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n)$.

根据定理 5 及定理 7 知,对应特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, s)$,恰有 r_i 个线性无关的实特征向量,把它们正交化并单位化,即得 r_i 个单位正交的特征向量.由 $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n$,知这样的特征向量共可得 n 个.

按定理 6 知对应于不同特征值的特征向量正交,故这 n 个单位特征向量两两正交.于是以它们为列向量构成正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,并有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda},$$

其中对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角元素含 r_1 个 $\lambda_1, \cdots, r_s$ 个 λ_s,恰是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

例9 设
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵.

解 $$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 3-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(4-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8)=(2-\lambda)(4-\lambda)^2,$$

故得特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=4$.

当 $\lambda_1=2$ 时,由

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

解得$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$,单位特征向量可取 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=4$ 时,由

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

解得
$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix},$$

基础解系中两个向量恰好正交,单位化即得两个单位正交的特征向量

$$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

于是得正交矩阵

$$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

可以验知确有

$$P^{-1}AP=P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}.$$

此例中对应于 $\lambda=4$,若求得方程$(A-4E)x=0$的基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

则需把它规范正交化:

取 $\eta_1=\xi_1,\eta_2=\xi_2-k\xi_1$.要 $\eta_1^{\mathrm{T}}\eta_2=0$,即 $\xi_1^{\mathrm{T}}\xi_2-k\xi_1^{\mathrm{T}}\xi_1=0$;有

$$k=\frac{\xi_1^{\mathrm{T}}\xi_2}{\xi_1^{\mathrm{T}}\xi_1}=\frac{1}{3},$$

故
$$\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

再单位化,即得

$$p_2=\frac{1}{\|\eta_1\|}\eta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{\eta}_2\|}\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

于是
$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

可以验知仍有 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

§5 二次型及其标准形

在解析几何中，为了便于研究二次曲线

$$ax^2+bxy+cy^2=1 \tag{4}$$

的几何性质，我们可以选择适当的坐标旋转变换

$$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta,\end{cases}$$

把方程化为标准形

$$mx'^2+ny'^2=1.$$

(4) 式的左边是一个二次齐次多项式，从代数学的观点看，化标准形的过程就是通过变量的线性变换化简一个二次齐次多项式，使它只含有平方项. 这样一个问题，在许多理论问题或实际问题中常会遇到. 现在我们把这类问题一般化，讨论 n 个变量的二次齐次多项式的化简问题.

定义8 含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \tag{5}$$
称为二次型.

取 $a_{ji}=a_{ij}$，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$，于是(5)式可写成

$$\begin{aligned}f&=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n\\&\quad+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\&\quad+\cdots+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2\\&=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j.\end{aligned} \tag{6}$$

对于二次型，我们讨论的主要问题是：寻求可逆的线性变换

$$\begin{cases}x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n,\\x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n\end{cases} \tag{7}$$

使二次型只含平方项，也就是用(7)代入(5)，能使

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2.$$

这种只含平方项的二次型，称为二次型的标准形(或法式).

当 a_{ij} 为复数时，f 称为复二次型；当 a_{ij} 为实数时，f 称为实二次型. 这里，我们仅讨论实二次型，所求的线性变换(7)也限于实系数范围.

由(6)式，利用矩阵，二次型可表示为

$$\begin{aligned}f&=x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)\\&\quad+x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)\\&\quad+\cdots+x_n(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)\\&=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

则二次型可记作

$$f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}, \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵.

例如,二次型 $f = x^2 - 3z^2 - 4xy + yz$ 用矩阵记号写出来,就是

$$f = (x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

任给一个二次型,就唯一地确定一个对称矩阵;反之,任给一个对称矩阵,也可唯一地确定一个二次型.这样,二次型与对称矩阵之间存在一一对应的关系.因此,我们把对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 叫做二次型 f 的矩阵,也把 f 叫做对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型.对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩就叫做二次型 f 的秩.

记 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$,把可逆变换(7)记作

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y},$$

代入(8),有 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$.

定理9　任给可逆矩阵 C,令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$,如果 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵,则 $\boldsymbol{B}$ 亦为对称矩阵,且 $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})$.

证　$\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵,即有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,于是

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B},$$

即 $\boldsymbol{B}$ 为对称阵.

再证 $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})$.

因 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$,故 $R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\leqslant R(\boldsymbol{A})$(见第四章定理 5 的推论 2);

因 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}$,故 $R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1})\leqslant R(\boldsymbol{B})$.

于是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.　　　　证毕

这定理说明经可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 后,二次型 f 的矩阵由 $\boldsymbol{A}$ 变为 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$,且二次型的秩不变.

要使二次型 f 经可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 变成标准形,这就是要使

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}&=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2\\&=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{pmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\end{aligned}$$

也就是要使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 成为对角矩阵.因此,我们的主要问题就是:对于对称矩阵 $\boldsymbol{A}$,寻求可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵.

由上节定理 8 知,任给实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$,总有正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$,即 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.把此结论应用于二次型,即有

定理10　任给二次型 $f=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ (a_{ij}=a_{ji})$,总有正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,使 f 化为标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的特征值.

例10 求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，把二次型

$$f=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4.$$

化为标准形.

解 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

它的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1 & -1\\ 1 & -\lambda & -1 & 1\\ 1 & -1 & -\lambda & 1\\ -1 & 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}.$$

计算特征多项式：把二、三、四列都加到第一列上，有

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=(-\lambda+1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -\lambda & -1 & 1\\ 1 & -1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix},$$

把二、三、四行分别减去第一行，有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|&=(-\lambda+1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -\lambda-1 & -2 & 2\\ 0 & -2 & -\lambda-1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda+1\end{vmatrix}\\ &=(-\lambda+1)^2\begin{vmatrix}-\lambda-1 & -2\\ -2 & -\lambda-1\end{vmatrix}\\ &=(-\lambda+1)^2(\lambda^2+2\lambda-3)=(\lambda+3)(\lambda-1)^3.\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-3,\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$.

当 $\lambda_1=-3$ 时,解方程 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由

$$\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3&1&1&-1\\1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\-1&1&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\div 4]{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\-1&1&1&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&-2&0\\0&-2&2&0\\0&2&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\div 2\\r_3\div 4}]{\substack{r_3+r_2\\r_4-r_2\\r_3\leftrightarrow r_4}}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-r_2-r_3]{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$,单位化即得 $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$ 时,解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3+r_1}}\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可得正交的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

单位化即得 $$p_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},p_4=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}$$

且有 $$f=-3y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2.$$

§6 用配方法化二次型成标准形

用正交变换化二次型成标准形，具有保持几何形状不变的优点.如果不限于用正交变换，那末还可以有多种方法(对应有多个可逆的线性变换)把二次型化成标准形.这里只介绍拉格朗日配方法.下面举例来说明这种方法.

例11 化二次型

$$f=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$$

成标准形，并求所用的变换矩阵.

解 由于 f 中含变量 x_1 的平方项，故把含 x_1 的项归并起来，

配方可得

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3\\
&=(x_1+x_2+x_3)^2-x_2^2-x_3^2-2x_2x_3+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3\\
&=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2,
\end{aligned}
$$

上式右端除第一项外已不再含 x_1.继续配方,可得

$$f=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2.$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3, \\ y_2=x_2+2x_3, \\ y_3=x_3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1=y_1-y_2+y_3, \\ x_2=y_2-2y_3, \\ x_3=y_3, \end{cases}$

就把 f 化成标准形 $f=y_1^2+y_2^2$,所用变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (|C|=1\neq 0).$$

例12 化二次型

$$f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

成标准形,并求所用的变换矩阵.

解 在 f 中不含平方项.由于含有 x_1x_2 乘积项,故令

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2, \\ x_2=y_1-y_2, \\ x_3=y_3, \end{cases}$$

代入可得 $$f=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3.$$

再配方,得 $$f=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2.$$

令 $\begin{cases} z_1=y_1-y_3, \\ z_2=y_2-2y_3, \\ z_3=y_3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1=z_1+z_3, \\ y_2=z_2+2z_3, \\ y_3=z_3, \end{cases}$

即有 $f=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2$. 所用变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$(|C|=-2\neq 0).$$

一般地,任何二次型都可用上面两例的方法找到可逆变换,把二次型化成标准形. 且由定理 9 可知,标准形中含有的项数,就是二次型的秩.

§7 正定二次型

二次型的标准形显然不是唯一的,只是标准形中所含项数是确定的(即是二次型的秩). 不仅如此,在限定变换为实变换时,标准形中正系数的个数是不变的(从而负系数的个数也不变),也就是有

定理11 设有实二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$,它的秩为 r,有两个实的可逆变换

$$x=Cy \quad \text{及} \quad x=Pz$$

使 $$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ry_r^2 \qquad (k_i\neq 0),$$

及 $$f=\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\cdots+\lambda_rz_r^2 \qquad (\lambda_i\neq 0),$$

则 $k_1,\cdots,k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 中正数的个数相等.

这个定理称为惯性定理,这里不予证明.

比较常用的二次型是标准形的系数全为正($r=n$)或全为负的情形,我们有下述定义.

定义9 设有实二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$,如果对任何 $x\neq 0$,都有 $f(x)>0$(显然 $f(0)=0$),则称 f 为正定二次型,并称对称矩阵 A 是正定的;如果对任何 $x\neq 0$ 都有 $f(x)<0$,则称 f 为负定二次

型，并称对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是负定的.

定理12 实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定的充分必要条件是：它的标准形的 n 个系数全为正.

证 设可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 使

$$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}k_i y_i^2.$$

先证充分性. 设 $k_i>0(i=1,\cdots,n)$. 任给 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，故

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}k_i y_i^2>0.$$

再证必要性. 用反证法. 假设有 $k_s\leqslant 0$，则当 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_s$（单位坐标向量）时，$f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_s)=k_s\leqslant 0$. 显然 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_s\neq\boldsymbol{0}$，这与 f 为正定相矛盾. 这就证明了 $k_i>0(i=1,\cdots,n)$.

推论 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件是：$\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正.

定理13 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件是：$\boldsymbol{A}$ 的各阶主子式都为正，即

$$a_{11}>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\cdots,\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0;$$

对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为负定的充分必要条件是：奇数阶主子式为负，而偶数阶主子式为正，即

$$(-1)^r\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}>0,\ (r=1,2,\cdots,n).$$

这个定理称为霍尔维茨定理，这里不予证明.

例13 判别二次型 $f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$ 的正定性.

解 f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix},$$

$$a_{11}=-5<0,\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=26>0,$$

$$|A|=-80<0,$$

根据定理 13 知 f 为负定.

设 $f(x,y)$是二维的正定二次型,则 $f(x,y)=c(c>0$ 为常数)的图形是以原点为中心的椭圆.当把 c 看作任意常数时则是一族椭圆.这族椭圆随着 $c\to 0$ 而收缩到原点.当 f 为三维正定二次型时,$f(x,y,z)=c(c>0)$的图形是一族椭球.

习 题 五

1. 试用施密特法把下列向量组正交化:

(1) $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}$;

(2) $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

2. 下列矩阵是不是正交矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9}\end{pmatrix}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵，证明 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

4. 求下列矩阵的特征值和特征向量：

$$(1)\ \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix};\quad (2)\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix};\quad (3)\ \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(a_1,a_2,\cdots,a_n),(a_1\neq 0).$$

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & & \\ & y & \\ & & -4\end{pmatrix}$ 相似，求 x,y.

6. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，证明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

7. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=-1$；对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 2\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$.

8. 设 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 6,3,3，与特征值 6 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$.

9. 试求一个正交的相似变换矩阵，将下列对称矩阵化为对角矩阵：

$$(1)\ \begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix};\qquad (2)\ \begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}.$$

10. (1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$，求 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-5\boldsymbol{A}^{9}$；

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$，求 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-6\boldsymbol{A}^{9}+5\boldsymbol{A}^{8}$.

11. 用矩阵记号表示下列二次型：

(1) $f=x^2+4xy+4y^2+2xz+z^2+4yz$;

(2) $f=x^2+y^2-7z^2-2xy-4xz-4yz$;

(3) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_1x_4+6x_2x_3-4x_2x_4$.

12. 求一个正交变换使化下列二次型成标准形:

(1) $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$;

(2) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$.

13. 证明:二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时的最大值为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

14. 判别下列二次型的正定性:

(1) $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$;

(2) $f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4-12x_3x_4$.

15. 设 $\boldsymbol{U}$ 为可逆矩阵,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$,证明 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型.

16. 设对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,证明存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$.

* 第六章

线性空间与线性变换

向量空间又称线性空间，是线性代数中一个最基本的概念．在第四章中，我们把有序数组叫做向量，并介绍过向量空间的概念．在这一章中，我们要把这些概念推广，使向量及向量空间的概念更具一般性．当然，推广后的向量概念也就更加抽象化了．

§1 线性空间的定义与性质

定义1 设 V 是一个非空集合，$\mathbf{R}$ 为实数域．如果对于任意两个元素 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，总有唯一的一个元素 $\boldsymbol{\gamma}\in V$ 与之对应，称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记作 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$；又对于任一数 $\lambda\in\mathbf{R}$ 与任一元素 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，总有唯一的一个元素 $\boldsymbol{\delta}\in V$ 与之对应，称为 λ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的积，记作 $\boldsymbol{\delta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$；并且这两种运算满足以下八条运算规律（设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$；$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$）：

(i) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

(ii) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

(iii) 在 V 中存在零元素 $\mathbf{0}$；对任何 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，都有 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$；

(iv) 对任何 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，都有 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素 $\boldsymbol{\beta}\in V$，使 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$；

(v) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

(vi) $\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}$；

(vii) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$；

(viii) $\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$，

那末，V 就称为（实数域 $\mathbf{R}$ 上的）向量空间（或线性空间），V 中的元素不论其本来的性质如何，统称为（实）向量．

简言之，凡满足八条规律的加法及乘数运算，就称为线性运

算;凡定义了线性运算的集合,就称向量空间.

在第四章中,我们把有序数组称为向量,并对它定义了加法和乘数运算,容易验证这些运算满足八条规律.最后,把对于运算为封闭的有序数组的集合称为向量空间.显然,那些只是现在定义的特殊情形.比较起来,现在的定义有了很大的推广:

1. 向量不一定是有序数组;

2. 向量空间中的运算只要求满足八条运算规律,当然也就不一定是有序数组的加法及乘数运算.

下面举一些例子.

例1 次数不超过 n 的多项式的全体,记作 $P[x]_n$,即

$$P[x]_n=\{\boldsymbol{p}=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \mid a_n,\cdots,a_1,a_0\in\mathbf{R}\},$$

对于通常的多项式加法、数乘多项式的乘法构成向量空间.这是因为:通常的多项式加法、数乘多项式的乘法两种运算显然满足线性运算规律,故只要验证 $P[x]_n$ 对运算封闭:

$$\begin{aligned}&(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)+(b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0)\\&\quad=(a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\in P[x]_n;\\&\lambda(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)\\&\quad=(\lambda a_n)x^n+\cdots+(\lambda a_1)x+(\lambda a_0)\in P[x]_n.\end{aligned}$$

所以 $P[x]_n$ 是一个向量空间.

例2 n 次多项式的全体

$$Q[x]_n=\{\boldsymbol{p}=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0 \mid a_n,\cdots,a_1,a_0\in\mathbf{R},\text{且 } a_n\neq0\}$$

对于通常的多项式加法和乘数运算不构成向量空间.这是因为 $0\boldsymbol{p}=0x^n+\cdots+0x+0\notin Q[x]_n$,即 $Q[x]_n$ 对运算不封闭.

例3 正弦函数的集合

$$S[x]=\{\boldsymbol{s}=A\sin(x+B) \mid A,B\in\mathbf{R}\}$$

对于通常的函数加法及数乘函数的乘法构成向量空间.这是因为:

通常的函数加法及乘数运算显然满足线性运算规律,故只要验证 $S[x]$对运算封闭:

$$\begin{aligned}
s_1 + s_2 &= A_1\sin(x+B_1) + A_2\sin(x+B_2)\\
&= (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos x + b_2\sin x)\\
&= (a_1+a_2)\cos x + (b_1+b_2)\sin x\\
&= A\sin(x+B) \in S[x];
\end{aligned}$$

$$\lambda s_1 = \lambda A_1\sin(x+B_1) = (\lambda A_1)\sin(x+B_1) \in S[x].$$

所以 $S[x]$是一个向量空间.

检验一个集合是否构成向量空间,当然不能只检验对运算的封闭性(如上面二例).若所定义的加法和乘数运算不是通常的实数间的加乘运算,则就应仔细检验是否满足八条线性运算规律.

例4 n 个有序实数组成的数组的全体

$$S^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

对于通常的有序数组的加法及如下定义的乘法

$$\lambda \circ (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} = (0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$$

不构成向量空间.

可以验证 S^n 对运算封闭.但因 $1 \circ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,不满足运算规律 v,即所定义的运算不是线性运算,所以 S^n 不是向量空间.

比较 S^n 与 R^n,作为集合,它们是一样的,但由于在其中所定义的运算不同,以致 R^n 构成向量空间而 S^n 则不是向量空间.由此可见,向量空间的概念是集合与运算二者的结合.一般地说,同一个集合,若定义两种不同的线性运算,就构成不同的向量空间;若定义的运算不是线性运算,就不能构成向量空间.所以,所定义的线性运算是向量空间的本质,而其中的元素是什么倒并不重要.由此可以说,把向量空间叫做线性空间更为合适.

为了对线性运算的理解更具有一般性,请看下例.

例5 正实数的全体,记作 $\mathbf{R}^+$,在其中定义加法及乘数运算为

$$a \oplus b = ab, (a, b \in \mathbf{R}^+)$$
$$\lambda \circ a = a^\lambda, (\lambda \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}^+)$$

验证 $\mathbf{R}^+$ 对上述加法与乘数运算构成线性空间.

证 实际上要验证十条:

对加法封闭:对任意的 $a, b \in \mathbf{R}^+$,有 $a \oplus b = ab \in \mathbf{R}^+$;

对乘数封闭:对任意的 $\lambda \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}^+$,有 $\lambda \circ a = a^\lambda \in \mathbf{R}^+$;

(i) $a \oplus b = ab = ba = b \oplus a$;

(ii) $(a \oplus b) \oplus c = (ab) \oplus c = (ab)c = a(bc) = a \oplus (b \oplus c)$;

(iii) $\mathbf{R}^+$ 中存在零元素 1,对任何 $a \in \mathbf{R}^+$,有 $a \oplus 1 = a \cdot 1 = a$;

(iv) 对任何 $a \in \mathbf{R}^+$,有负元素 $a^{-1} \in \mathbf{R}^+$,使 $a \oplus a^{-1} = aa^{-1} = 1$;

(v) $1 \circ a = a^1 = a$;

(vi) $\lambda \circ (\mu \circ a) = \lambda \circ a^\mu = (a^\mu)^\lambda = a^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \circ a$;

(vii) $(\lambda + \mu) \circ a = a^{\lambda+\mu} = a^\lambda a^\mu = a^\lambda \oplus a^\mu = \lambda \circ a \oplus \mu \circ a$;

(viii) $\lambda \circ (a \oplus b) = \lambda \circ (ab) = (ab)^\lambda = a^\lambda b^\lambda = a^\lambda \oplus b^\lambda$

$$= \lambda \circ a \oplus \lambda \circ b.$$

因此,$\mathbf{R}^+$ 对于所定义的运算构成线性空间. 证毕

下面讨论线性空间的性质.

1. 零元素是唯一的.

证 设 $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$ 是线性空间 V 中的两个零元素,即对任何 $\boldsymbol{\alpha} \in V$,有 $\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0}_1 = \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0}_2 = \boldsymbol{\alpha}$. 于是特别有

$$\mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2, \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1.$$
$$\therefore \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2.$$

2. 任一元素的负元素是唯一的. $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素记作 $-\boldsymbol{\alpha}$.

证 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 有两个负元素 $\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$,即 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$. 于是

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\beta}+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}.$$

3. $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$;$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$;$\lambda\,\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

证 $\boldsymbol{\alpha}+0\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}+0\boldsymbol{\alpha}=(1+0)\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;$\therefore 0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$;

$$\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\alpha}=[1+(-1)]\boldsymbol{\alpha}=0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},$$

$$\therefore\ (-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha};$$

$$\lambda\,\mathbf{0}=\lambda[\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\alpha}]=\lambda\boldsymbol{\alpha}+(-\lambda)\boldsymbol{\alpha}=[\lambda+(-\lambda)]\boldsymbol{\alpha}=0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}.$$

4. 如果 $\lambda\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,则 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

证 若 $\lambda\neq0$,在 $\lambda\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$两边乘$\frac{1}{\lambda}$,得

$$\frac{1}{\lambda}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\frac{1}{\lambda}\mathbf{0}=\mathbf{0},$$

而
$$\frac{1}{\lambda}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha},$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$$

证毕

在第四章中,我们提出过子空间的定义,今稍作修正.

定义2 设 V 是一个线性空间,L 是 V 的一个非空子集,如果 L 对于 V 中所定义的加法和乘数两种运算也构成一个线性空间,则称 L 为 V 的子空间.

一个非空子集要满足什么条件才构成子空间?因 L 是 V 的一部分,V 中的运算对于 L 而言,规律(i),(ii),(v),(vi),(vii),(viii)显然是满足的,因此只要 L 对运算封闭且满足规律(iii)、(iv)即可.但由线性空间的性质知,若 L 对运算封闭,则即能满足规律(iii),(iv).因此我们有

定理1 线性空间 V 的非空子集L 构成子空间的充分必要条件是:L 对于 V 中的线性运算封闭.

§2　维数、基与坐标

在第四章中，我们用线性运算来讨论 n 维数组向量之间的关系，介绍了一些重要概念，如线性组合、线性相关与线性无关等等．这些概念以及有关的性质只涉及线性运算，因此，对于一般的线性空间中的元素仍然适用．以后我们将直接引用这些概念和性质．

在第四章中我们已经提出了基与维数的概念，这当然也适用于一般的线性空间．这是线性空间的主要特性，特再叙述如下：

定义3　在线性空间 V 中，如果存在 n 个元素 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，满足：

(i) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关；

(ii) V 中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 总可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，

那末，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 就称为线性空间 V 的一个基，n 称为线性空间 V 的维数．

维数为 n 的线性空间称为 n 维线性空间，记作 V_n．

若知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V_n 的一个基，则 V_n 可表示为

$$V_n=\{\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\},$$

这就较清楚地显示出线性空间 V_n 的构造．

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V_n 的一个基，则对任何 $\boldsymbol{\alpha}\in V_n$，都有一组有序数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

并且这组数是唯一的．

反之，任给一组有序数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，总有唯一的元素

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n\in V_n.$$

这样，V_n 的元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 与有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 之间存在着一种一一对应的关系，因此可以用这组有序数来表示元素 $\boldsymbol{\alpha}$．于是

我们有

定义4 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间 V_n 的一个基.对于任一元素 $\boldsymbol{\alpha}\in V_n$,总有且仅有一组有序数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,使

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 这组有序数就称为元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 这个基下的坐标,并记作

$$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}.$$

例6 在线性空间 $P[x]_4$ 中,$\boldsymbol{p}_1=1,\boldsymbol{p}_2=x,\boldsymbol{p}_3=x^2,\boldsymbol{p}_4=x^3$,$\boldsymbol{p}_5=x^4$ 就是它的一个基.任一不超过 4 次的多项式

$$\boldsymbol{p}=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

都可表示为 $\boldsymbol{p}=a_0\boldsymbol{p}_1+a_1\boldsymbol{p}_2+a_2\boldsymbol{p}_3+a_3\boldsymbol{p}_4+a_4\boldsymbol{p}_5$,

因此 $\boldsymbol{p}$ 在这个基下的坐标为$(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4)^{\mathrm{T}}$.

若另取一个基 $\boldsymbol{q}_1=1,\boldsymbol{q}_2=1+x,\boldsymbol{q}_3=2x^2,\boldsymbol{q}_4=x^3,\boldsymbol{q}_5=x^4$,则

$$\boldsymbol{p}=(a_0-a_1)\boldsymbol{q}_1+a_1\boldsymbol{q}_2+\frac{1}{2}a_2\boldsymbol{q}_3+a_3\boldsymbol{q}_4+a_4\boldsymbol{q}_5,$$

因此 $\boldsymbol{p}$ 在这个基下的坐标为$\left(a_0-a_1,a_1,\frac{1}{2}a_2,a_3,a_4\right)^{\mathrm{T}}$.

建立了坐标以后,就把抽象的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与具体的数组向量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$联系起来了.并且还可把 V_n 中抽象的线性运算与数组向量的线性运算联系起来:

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_n$,有 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}=y_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+y_n\boldsymbol{\alpha}_n$,于是

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1+y_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(x_n+y_n)\boldsymbol{\alpha}_n,$$

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=(\lambda x_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\lambda x_n)\boldsymbol{\alpha}_n,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 的坐标是 $(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)^{\mathrm{T}}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}+(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$,$\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标是$(\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n)^{\mathrm{T}}=\lambda(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$.

总之,设在 n 维线性空间 V_n 中取定一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,则 V_n 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 n 维数组向量空间 R^n 中的向量 $(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 之间就有一个一一对应的关系,且这个对应关系具有下述性质:

设 $\boldsymbol{\alpha}\leftrightarrow(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}\leftrightarrow(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$,则

1. $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\leftrightarrow(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}+(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$;

2. $\lambda\boldsymbol{\alpha}\leftrightarrow\lambda(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,

也就是说,这个对应关系保持线性组合的对应.因此,我们可以说 V_n 与 R^n 有相同的结构,我们称 V_n 与 R^n 同构.

一般地,设 V 与 U 是两个线性空间,如果在它们的元素之间有一一对应关系,且这个对应关系保持线性组合的对应,那末就说线性空间 V 与 U 同构.

显然,任何 n 维线性空间都与 R^n 同构,即维数相等的线性空间都同构.从而可知线性空间的结构完全被它的维数所决定.

同构的概念除元素一一对应外,主要是保持线性运算的对应关系.因此,V_n 中的抽象的线性运算就可转化为 R^n 中的线性运算,并且 R^n 中凡是只涉及线性运算的性质就都适用于 V_n.但 R^n 中超出线性运算的性质,在 V_n 中就不一定具备,例如 R^n 中的内积概念在 V_n 中就不一定有意义.

§3 基变换与坐标变换

由例 6 可见,同一元素在不同的基下有不同的坐标,那末,不同的基与不同的坐标之间有怎样的关系呢?

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是线性空间 V_n 中的两个基,

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=p_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+p_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+p_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \boldsymbol{\beta}_2=p_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+p_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+p_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_n=p_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+p_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+p_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n,\end{cases}\tag{1}$$

把 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 这 n 个有序元素记作$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，利用向量和矩阵的形式，(1)式可表示为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1}\\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}$$

或

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}. \tag{2}$$

(1)或(2)称为基变换公式，矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵. 由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关，故过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

定理2 设 V_n 中的元素 $\boldsymbol{\alpha}$，在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标为 $(x_1',x_2',\cdots,x_n')^{\mathrm{T}}$. 若两个基满足关系式(2)，则有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}, \text{或} \begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}. \tag{3}$$

证 因

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，故即有关系式(3). 证毕

这个定理的逆命题也成立.即若任一元素的两种坐标满足坐标变换公式(3)，则两个基满足基变换公式(2).

例7 在 $P[x]_3$ 中取两个基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=x^3+2x^2-x,\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=x^3-x^2+x+1,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=-x^3+2x^2+x+1,\quad \boldsymbol{\alpha}_4=-x^3-x^2+1;$$

及
$$\boldsymbol{\beta}_1=2x^3+x^2+1,\qquad \boldsymbol{\beta}_2=x^2+2x+2,$$
$$\boldsymbol{\beta}_3=-2x^3+x^2+x+2,\quad \boldsymbol{\beta}_4=x^3+3x^2+x+2.$$

求坐标变换公式.

解 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 表示.由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(x^3,x^2,x,1)\boldsymbol{A},$$
$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(x^3,x^2,x,1)\boldsymbol{B},$$

其中
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix},$$

得
$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$$

故坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

用矩阵的初等行变换求 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$：把矩阵 $(\boldsymbol{B}\,\vdots\,\boldsymbol{A})$ 中的 $\boldsymbol{B}$ 变成 $\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$ 即变成 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$.计算如下：

$$
(\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{cccc:cccc}
2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_4-r_2]{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{cccc:cccc}
0 & -2 & -4 & -5 & -3 & 3 & -5 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 2 & -1 & 2
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_3-2r_4]{\substack{r_1+2r_4\\ r_2-r_4}}\left(\begin{array}{cccc:cccc}
0 & 0 & -2 & -7 & -7 & 7 & -7 & 5 \\
1 & 0 & 0 & 4 & 4 & -3 & 3 & -3 \\
0 & 0 & -1 & 3 & 3 & -3 & 3 & -4 \\
0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 2 & -1 & 2
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_4+r_3]{r_1-2r_3}\left(\begin{array}{cccc:cccc}
0 & 0 & 0 & -13 & -13 & 13 & -13 & 13 \\
1 & 0 & 0 & 4 & 4 & -3 & 3 & -3 \\
0 & 0 & -1 & 3 & 3 & -3 & 3 & -4 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 2 & -2
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\substack{r_3-3r_1\\ r_4-2r_1}]{\substack{r_1\div(-13)\\ r_2-4r_1}}\left(\begin{array}{cccc:cccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_4]{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\ r_3\div(-1)}}\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1
\end{array}\right),
$$

即得
$$
\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.
$$

§4 线性变换

定义5 设有两个非空集合 A、B,如果对于 A 中任一元素 α,按照一定的规则,总有 B 中一个确定的元素 β 和它对应,那末,这个对应规则称为从集合 A 到集合 B 的变换(或映射).我们常用字母表示一个变换,譬如把上述变换记作 T,并记

$$\beta = T(\alpha) \quad 或 \quad \beta = T\alpha,(\alpha \in A). \tag{4}$$

设 $\alpha_1 \in A$,$T(\alpha_1)=\beta_1$,就说变换 T 把元素 α_1 变为 β_1,β_1 称为 α_1 在变换 T 下的象,α_1 称为 β_1 在变换 T 下的源.A 称为变换 T 的源集.象的全体所构成的集合称为象集,记作 $T(A)$,即

$$T(A)=\{\beta = T(\alpha) \mid \alpha \in A\},$$

显然 $T(A) \subset B$.

变换的概念是函数概念的推广.例如,设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为平面区域 G,函数值域为 Z,那末,函数关系 f 就是一个从定义域 G 到实数域 $\mathbf{R}$ 的变换;函数值 $f(x_0,y_0)=z_0$ 就是元素 (x_0,y_0) 的象,(x_0,y_0) 就是 z_0 的源;G 就是源集,Z 就是象集.

定义6 设 V_n、U_m 分别是实数域上的 n 维和 m 维线性空间,T 是一个从 V_n 到 U_m 的变换,如果变换 T 满足

(i) 任给 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2 \in V_n$,(从而 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2 \in V_n$),有

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=T(\boldsymbol{\alpha}_1)+T(\boldsymbol{\alpha}_2);$$

(ii) 任给 $\boldsymbol{\alpha} \in V_n$,$k \in \mathbf{R}$,(从而 $k\boldsymbol{\alpha} \in V_n$),有

$$T(k\boldsymbol{\alpha})=kT(\boldsymbol{\alpha}),$$

那末,T 就称为从 V_n 到 U_n 的线性变换.

简言之,线性变换就是保持线性组合的对应的变换.

例如,关系式

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

就确定了一个从 R^n 到 R^m 的变换,并且是个线性变换(参看后面的例 10).

特别,在定义 6 中,如果 $U_m = V_n$,那末 T 是一个从线性空间 V_n 到其自身的线性变换,称为线性空间 V_n 中的线性变换.

下面我们只讨论线性空间 V_n 中的线性变换.

例8 在线性空间 $P[x]_3$ 中,

(1) 微分运算 D 是一个线性变换.这是因为

任取 $\boldsymbol{p} = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in P[x]_3$,

$$\mathrm{D}\boldsymbol{p} = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1,$$

$$\boldsymbol{q} = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \in P[x]_3,$$

$$\mathrm{D}\boldsymbol{q} = 3b_3x^2 + 2b_2x + b_1,$$

有

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) &= \mathrm{D}[(a_3+b_3)x^3 + (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x \\ &\quad + (a_0+b_0)] \\ &= 3(a_3+b_3)x^2 + 2(a_2+b_2)x + (a_1+b_1) \\ &= (3a_3x^2 + 2a_2x + a_1) + (3b_3x^2 + 2b_2x + b_1) \\ &= \mathrm{D}\boldsymbol{p} + \mathrm{D}\boldsymbol{q}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(k\boldsymbol{p}) &= \mathrm{D}(ka_3x^3 + ka_2x^2 + ka_1x + ka_0) \\ &= k(3a_3x^2 + 2a_2x + a_1) = k\mathrm{D}\boldsymbol{p}. \end{aligned}$$

(2) 如果 $T(\boldsymbol{p}) = a_0$,那末 T 也是一个线性变换.这是因为

$$T(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) = a_0 + b_0 = T(\boldsymbol{p}) + T(\boldsymbol{q});$$

$$T(k\boldsymbol{p}) = ka_0 = kT(\boldsymbol{p}).$$

(3) 如果 $T_1(\boldsymbol{p})=1$,那末 T_1 是个变换,但不是线性变换.这是因为 $T_1(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})=1$,而 $T_1(\boldsymbol{p})+T_1(\boldsymbol{q})=1+1=2$,故

$$T_1(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) \neq T_1(\boldsymbol{p}) + T_1(\boldsymbol{q}).$$

例9 由关系式

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

确定 xOy 平面上的一个变换 T,说明变换 T 的几何意义(参看第二章图 2.3).

解 记 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$ 于是

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\varphi) \\ r\sin(\theta+\varphi) \end{pmatrix},$$

这表示变换 T 把任一向量按逆时针方向旋转 φ 角(由例 10 可知这个变换是一个线性变换).

线性变换具有下述基本性质:

1. $T\,\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$, $T(-\boldsymbol{\alpha}) = -T\boldsymbol{\alpha}$;

2. 若 $\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$,**则**

$$T\boldsymbol{\beta} = k_1T\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2T\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_mT\boldsymbol{\alpha}_m;$$

3. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,则 $T\boldsymbol{\alpha}_1, T\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, T\boldsymbol{\alpha}_m$ 亦线性相关.

这些性质请读者证明之.注意性质 3 的逆命题是不成立的,即若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,则 $T\boldsymbol{\alpha}_1, T\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, T\boldsymbol{\alpha}_m$ 不一定线性无关.

4. 线性变换 T 的象集 $T(V_n)$ 是一个线性空间(V_n 的子空间),称为线性变换 T 的象空间.

证 设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\in T(V_n)$,则有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V_n$,使 $T\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1$,$T\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_2$,从而

$$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=T\boldsymbol{\alpha}_1+T\boldsymbol{\alpha}_2=T(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)\in T(V_n),(\text{因 }\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\in V_n);$$
$$k\boldsymbol{\beta}_1=kT\boldsymbol{\alpha}_1=T(k\boldsymbol{\alpha}_1)\in T(V_n),(\text{因 }k\boldsymbol{\alpha}_1\in V_n),$$

由于 $T(V_n)\subset V_n$,而由上述证明知它对 V_n 中的线性运算封闭,故它是 V_n 的子空间.

5. 使 $T\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 的 $\boldsymbol{\alpha}$ 的全体

$$S_T=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}\in V_n,T\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\},$$

也是 V_n 的子空间. S_T 称为线性变换 T 的核.

证 $S_T\subset V_n$,且

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in S_T$,即 $T\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$, $T\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$,则 $T(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=T\boldsymbol{\alpha}_1+T\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\in S_T$;

若 $\boldsymbol{\alpha}_1\in S_T$, $k\in\mathbf{R}$,则 $T(k\boldsymbol{\alpha}_1)=kT\boldsymbol{\alpha}_1=k\,\mathbf{0}=\mathbf{0}$,所以 $k\boldsymbol{\alpha}_1\in S_T$.

以上表明 S_T 对线性运算封闭,所以 S_T 是 V_n 的子空间.

例10 设有 n 阶矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),$$

其中
$$\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ni}\end{pmatrix},$$

定义 R^n 中的变换 $\boldsymbol{y}=T(\boldsymbol{x})$ 为

$$T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},(\boldsymbol{x}\in R^n)$$

则 T 为线性变换. 这是因为

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in R^n$,则

$$T(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}=T(\boldsymbol{a})+T(\boldsymbol{b});$$
$$T(k\boldsymbol{a})=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{a})=k\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}=kT(\boldsymbol{a}).$$

又,T 的象空间就是由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 所生成的向量空间

$$T(R^n)=\{\boldsymbol{y}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\};$$

T 的核 S_T 就是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间.

§5 线性变换的矩阵表示式

上节例 10 中,关系式

$$T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\qquad(\boldsymbol{x}\in R^n)$$

简单明了地表示出 R^n 中的一个线性变换. 我们自然希望 R^n 中任何一个线性变换都能用这样的关系式来表示. 为此,考虑到 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n$($\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为单位坐标向量),即

$$\boldsymbol{\alpha}_i=T(\boldsymbol{e}_i)\qquad(i=1,2,\cdots,n),$$

可见如果线性变换 T 有关系式 $T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,那末矩阵 $\boldsymbol{A}$ 应以 $T(\boldsymbol{e}_i)$ 为列向量. 反之,如果一个线性变换 T 使 $T(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$,那末 T 必有关系式

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{x})&=T[(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{x}]=T(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n)\\&=x_1T(\boldsymbol{e}_1)+x_2T(\boldsymbol{e}_2)+\cdots+x_nT(\boldsymbol{e}_n)\\&=(T(\boldsymbol{e}_1),\cdots,T(\boldsymbol{e}_n))\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

总之，R^n 中任何线性变换 T，都能用关系式

$$T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\qquad(\boldsymbol{x}\in R^n)$$

表示，其中 $\boldsymbol{A}=(T(\boldsymbol{e}_1),\cdots,T(\boldsymbol{e}_n))$.

把上面的讨论推广到一般的线性空间，我们有

定义7 设 T 是线性空间 V_n 中的线性变换，在 V_n 中取定一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，如果这个基在变换 T 下的象（用这个基线性表示）为

$$\begin{cases}T(\boldsymbol{\alpha}_1)=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\\T(\boldsymbol{\alpha}_2)=a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\T(\boldsymbol{\alpha}_n)=a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n,\end{cases}$$

记 $T(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(T(\boldsymbol{\alpha}_1),T(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_n))$，上式可表示为

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},\tag{5}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},$$

那末，$\boldsymbol{A}$ 就称为线性变换 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵.

显然，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 由基的象 $T(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 唯一确定.

如果给出一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作为线性变换 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵，也就是给出了这个基在变换 T 下的象，那末，根据变换 T 保持线性关系的特性，我们来推导变换 T 必须满足的关系式：

V_n 中的任意元素记为 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i$，有

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\sum_{i=1}^{n} x_iT(\boldsymbol{\alpha}_i)$$

$$=(T(\boldsymbol{\alpha}_1),T(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_n))\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

即

$$T\left[(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\right]=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.\qquad(6)$$

这个关系式唯一地确定一个变换 T,可以验证所确定的变换 T 是以 $\boldsymbol{A}$ 为矩阵的线性变换.总之,以 $\boldsymbol{A}$ 为矩阵的线性变换 T 由关系式(6)唯一确定.

定义 7 和上面一段讨论表明,在 V_n 中取定一个基以后,由线性变换 T 可唯一地确定一个矩阵 $\boldsymbol{A}$,由一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可唯一地确定一个线性变换 T,这样,在线性变换与矩阵之间就有一一对应的关系.

由关系式(6),可见 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $T(\boldsymbol{\alpha})$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标分别为

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad T(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

即按坐标表示,有

$$T(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}.$$

例11 在 $P[x]_3$ 中,取基

$$\boldsymbol{p}_1=x^3,\boldsymbol{p}_2=x^2,\boldsymbol{p}_3=x,\boldsymbol{p}_4=1,$$

求微分运算 D 的矩阵.

解
$$\begin{cases}\mathrm{D}\boldsymbol{p}_1=3x^2=0\boldsymbol{p}_1+3\boldsymbol{p}_2+0\boldsymbol{p}_3+0\boldsymbol{p}_4,\\ \mathrm{D}\boldsymbol{p}_2=2x=0\boldsymbol{p}_1+0\boldsymbol{p}_2+2\boldsymbol{p}_3+0\boldsymbol{p}_4,\\ \mathrm{D}\boldsymbol{p}_3=1=0\boldsymbol{p}_1+0\boldsymbol{p}_2+0\boldsymbol{p}_3+1\boldsymbol{p}_4,\\ \mathrm{D}\boldsymbol{p}_4=0=0\boldsymbol{p}_1+0\boldsymbol{p}_2+0\boldsymbol{p}_3+0\boldsymbol{p}_4,\end{cases}$$

所以 D 在这组基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\3&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

例12 在 $\mathbf{R}^3$ 中,T 表示将向量投影到 xOy 平面的线性变换,即

$$T(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},$$

(1) 取基为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,求 T 的矩阵;

(2) 取基为 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{j},\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,求 T 的矩阵.

解 (1)
$$\begin{cases}T\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i},\\ T\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j},\\ T\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\end{cases}$$

即
$$T(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})=(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(2) $$\begin{cases} T\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{i} = \boldsymbol{\alpha}, \\ T\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{j} = \boldsymbol{\beta}, \\ T\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \end{cases}$$

即 $$T(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由上例可见,同一个线性变换在不同的基下有不同的矩阵. 一般地,我们有

定理3 **设线性空间 V_n 中取定两个基**

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n;$$
$$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n,$$

由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$, V_n 中的线性变换 T 在这两个基下的矩阵依次为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$,那末 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

证 按定理的假设,有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{P}\ \text{可逆};$$

及 $$T(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},$$
$$T(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{B},$$

于是 $$\begin{aligned}(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{B} &= T(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n) = T[(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}] \\ &= [T(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)]\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} \\ &= (\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P},\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关,所以

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}.$$ 证毕

这定理表明 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似,且两个基之间的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 就是相似变换矩阵.

例13 设 V_2 中的线性变换 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix};$$

求 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1$ 下的矩阵.

解 $$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

即 $$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ 求得\ \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

于是 T 在基$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)$下的矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{11} & a_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}a_{22} & a_{21}\\ a_{12} & a_{11}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

定义8 线性变换 T 的象空间 $T(V_n)$ 的维数,称为线性变换 T 的秩.

显然,若 $\boldsymbol{A}$ 是 T 的矩阵,则 T 的秩就是 $R(\boldsymbol{A})$.

若 T 的秩为 r,则 T 的核 S_T 的维数为 $n-r$.

习 题 六

1. 验证:

(1) 2 阶矩阵的全体 S_1;

(2) 主对角线上的元素之和等于 0 的 2 阶矩阵的全体 S_2;

(3) 2 阶对称矩阵的全体 S_3,

对于矩阵的加法和乘数运算构成线性空间,并写出各个空间的一个基.

2. 验证:与向量$(0,0,1)^{\mathrm{T}}$不平行的全体 3 维数组向量,对于数组向量的加法和乘数运算不构成线性空间.

3. 设 U 是线性空间 V 的一个子空间,试证:若 U 与 V 的维数相等,则 $U=V$.

4. 设 V_r 是 n 维线性空间 V_n 的一个子空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 V_r 是一个基. 试证：V_n 中存在元素 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 成为 V_n 的一个基.

5. 在 R^3 中求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(3,7,1)^{\mathrm{T}}$ 在基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(6,3,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,0)^{\mathrm{T}}$$

下的坐标.

6. 在 R^3 中，取两个基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,7,1)^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(3,1,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(5,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,-6)^{\mathrm{T}},$$

试求坐标变换公式.

7. 在 R^4 中取两个基

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{e}_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{e}_3=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{e}_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,-1,1)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,0)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{\alpha}_3=(5,3,2,1)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{\alpha}_4=(6,6,1,3)^{\mathrm{T}}. \end{cases}$$

(1) 求由前一个基到后一个基的过渡矩阵；

(2) 求向量 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$ 在后一个基下的坐标；

(3) 求在两个基下有相同坐标的向量.

8. 说明 xOy 平面上变换 $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 的几何意义，其中

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$；　　(4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. n 阶对称矩阵的全体 V 对于矩阵的线性运算构成一个 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维线性空间. 给出 n 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$，以 $\boldsymbol{A}$ 表示 V 中的任一元素，变换

$$T(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

称为合同变换. 试证合同变换 T 是 V 中的线性变换.

10. 函数集合

______ ______ ______ ______

$$V_3=\{\boldsymbol{\alpha}=(a_2x^2+a_1x+a_0)\mathrm{e}^x \mid a_2,a_1,a_0\in\mathbf{R}\}$$

对于函数的线性运算构成3维线性空间.在 V_3 中取一个基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=x^2\mathrm{e}^x,\boldsymbol{\alpha}_2=x\mathrm{e}^x,\boldsymbol{\alpha}_3=\mathrm{e}^x,$$

求微分运算D在这个基下的矩阵.

11. 2阶对称矩阵的全体

$$V_3=\left\{\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_2 & x_3\end{pmatrix}\middle| x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}\right\}$$

对于矩阵的线性运算构成3维线性空间.在 V_3 中取一个基

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

在 V_3 中定义合同变换

$$T(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

求 T 在基 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 下的矩阵.

习题答案

习题一(第 32 页)

1. (1) -4;　　(2) $3abc-a^3-b^3-c^3$;
   (3) $(a-b)(b-c)(c-a)$;　(4) $-2(x^3+y^3)$.
2. (1) 0;(2) 4;(3) 5;(4) 3;(5) $\dfrac{n(n-1)}{2}$;(6) $n(n-1)$.
3. $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$;$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.
4. (1) 0;(2) 0;(3) $4abcdef$;(4) $abcd+ab+cd+ad+1$.
7. (1) $a^{n-2}(a^2-1)$;　　(2) $[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$;
   (3) $\prod\limits_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}(i-j)$;　　(4) $\prod\limits_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$;
   (5) $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$;　　(6) $a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\right)$.
8. (1) $x_1=1,x_2=2,x_3=3,x_4=-1$;
   (2) $x_1=\dfrac{1\,507}{665},x_2=-\dfrac{1\,145}{665},x_3=\dfrac{703}{665},x_4=-\dfrac{395}{665},x_5=\dfrac{212}{665}$.
9. $\lambda=1$ 或 $\mu=0$.
10. $\lambda=0,2$ 或 3.

习题二(第 66 页)

1. $\begin{cases} y_1=-7x_1-4x_2+9x_3, \\ y_2=6x_1+3x_2-7x_3, \\ y_3=3x_1+2x_2-4x_3. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1=-6z_1+z_2+3z_3, \\ x_2=12z_1-4z_2+9z_3, \\ x_3=-10z_1-z_2+16z_3. \end{cases}$
3. $3\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.

4. (1) $\begin{pmatrix}35\\6\\49\end{pmatrix}$; (2) 10; (3) $\begin{pmatrix}2&4\\-1&2\\-3&6\end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix}6&-7&8\\20&-5&-6\end{pmatrix}$;

(5) $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$;

(6) $\begin{pmatrix}1&2&5&2\\0&1&2&-4\\0&0&-4&3\\0&0&0&-9\end{pmatrix}$.

6. (1) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O}$ 而 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$;

(2) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, 有 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$ 而 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$;

(3) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, 有 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{Y}$ 而 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$.

7. $\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{pmatrix}$.

8. $\lambda^{k-2}\begin{pmatrix}\lambda^2&k\lambda&\dfrac{k(k-1)}{2}\\0&\lambda^2&k\lambda\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix}$.

11. (1) $\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}-2&1&0\\-\dfrac{13}{2}&3&-\dfrac{1}{2}\\-16&7&-1\end{pmatrix}$; (4) $\dfrac{1}{24}\begin{pmatrix}24&0&0&0\\-12&12&0&0\\-12&-4&8&0\\3&-5&-2&6\end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&2&-3\\0&0&-5&8\end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1}&&&\\&\frac{1}{a_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\frac{1}{a_n}\end{pmatrix}$.

12. (1) $X=\begin{pmatrix}2 & -23\\0 & 8\end{pmatrix}$;　　(2) $X=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\-\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$;

(3) $X=\begin{pmatrix}1 & 1\\\frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}$;　　(4) $X=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\1 & 3 & -4\\1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

13. (1) $\begin{cases}x_1=1,\\x_2=0,\\x_3=0;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x_1=5,\\x_2=0,\\x_3=3.\end{cases}$

15. $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E),(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A)$.

16. $\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\-1 & 2 & 3\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

17. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2^{13} & 4+2^{13}\\-1-2^{11} & -4-2^{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\ 731 & 2\ 732\\-683 & -684\end{pmatrix}$.

21. $|A^8|=10^{16},A^4=\begin{pmatrix}5^4 & 0 & & \\0 & 5^4 & & \\ & & 2^4 & 0\\ & & 2^6 & 2^4\end{pmatrix}$ (off-diagonal blocks O).

22. $\begin{pmatrix}O & B^{-1}\\A^{-1} & O\end{pmatrix}$.

习题三(第 92 页)

1. (1) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 5\\0 & 0 & 1 & -3\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 5\\0 & 0 & 1 & 3\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2 & -3\\0 & 0 & 1 & -2 & 2\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$;　(4) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & -2\\0 & 1 & -1 & 0 & 3\\0 & 0 & 0 & 1 & 4\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

2. 都可能有.

3. $R(\boldsymbol{A})\geqslant R(\boldsymbol{B})\geqslant R(\boldsymbol{A})-1$.

4. $\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&-1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

5. (1) $R=2$, $\begin{vmatrix}3&1\\1&-1\end{vmatrix}\neq 0$;　(2) $R=3$, $\begin{vmatrix}3&2&-1\\2&-1&-3\\7&0&-8\end{vmatrix}\neq 0$;

(3) $R=3$, $\begin{vmatrix}2&1&7\\2&-3&-5\\1&0&0\end{vmatrix}\neq 0$.

6. (1) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-3\\\frac{4}{3}\\1\end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$;

(3) 只有零解;　(4) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\frac{3}{17}\\\frac{19}{17}\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\frac{13}{17}\\-\frac{20}{17}\\0\\1\end{pmatrix}$.

7. (1) 无解;　(2) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\\frac{5}{7}\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\-\frac{9}{7}\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{6}{7}\\-\frac{5}{7}\\0\\0\end{pmatrix}$.

8. (1) $\lambda\neq1,-2$;(2) $\lambda=-2$;(3) $\lambda=1$.

9. $\lambda=1$ 时有解 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,

$\lambda=-2$ 时有解 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$.

10. $\lambda\neq1$,且 $\lambda\neq10$ 时有唯一解;$\lambda=10$ 时无解;$\lambda=1$ 时有无穷多解,解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

11. (1) $\begin{pmatrix}\frac{7}{6}&\frac{2}{3}&-\frac{3}{2}\\-1&-1&2\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}1&1&-2&-4\\0&1&0&-1\\-1&-1&3&6\\2&1&-6&-10\end{pmatrix}$.

12. (1) $\begin{pmatrix}-8&8\\12&-12\\-6&10\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-4&7&4\end{pmatrix}$.

习题四(第 127 页)

1. $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,$3\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3=(0,1,2)^{\mathrm{T}}$.

2. $\boldsymbol{a}=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$.

6. (1) 第 1,2,3 列； (2) 第 1,2,3 列.

7. (1) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$； (2) $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}$.

13. V_1 是，V_2 不是.

16. $\boldsymbol{v}_1=2\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{v}_2=3\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3$.

17. (1) $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-4\\0\\1\\-3\end{pmatrix}$； (2) $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\7\\0\\19\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$；

(3) $(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1})=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\\ -n & -n+1 & \cdots & -2\end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix}1 & 0\\5 & 2\\8 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$.

19. $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0,\\ 2x_1-3x_2+x_4=0.\end{cases}$

20. $\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$.

23. (1) $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}-8\\13\\0\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}-17\\0\\14\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-9\\1\\7\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-4\\0\\\frac{7}{2}\\1\end{pmatrix}$.

习题五(第 161 页)

1. (1) $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$;

   (2) $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_3=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}$.

2. (1) 不是; (2) 是.

4. (1) $\lambda_1=2,\lambda_2=3;\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$;

   (2) $\lambda_1=-1,\lambda_2=9,\lambda_3=0$;

   $$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix};$$

   (3) $\lambda_1=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$, $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$,

   $$(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)=\begin{pmatrix}a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n\\ a_2 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_n & & & a_1\end{pmatrix}.$$

5. $x=4,y=5$.

7. $\boldsymbol{A}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

8. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

9. (1) $\boldsymbol{P}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 4\end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{P}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}10 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$.

10. (1) $-2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; (2) $2\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix}$.

11. (1) $f=(x,y,z)\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$;

(2) $f=(x,y,z)\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & -2\\ -2 & -2 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$;

(3) $f=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 3 & -2\\ 2 & 3 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$.

12. (1) $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$, $f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2$;

(2) $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}$,

$$f=-y_1^2+3y_2^2+y_3^2+y_4^2.$$

14. (1) 负定;(2) 正定.

习题六(第 184 页)

1. 各个线性空间的基可取为

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

5. $(33,-82,154)^{\mathrm{T}}$.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标是 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,在 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标是 $(x'_1,x'_2,x'_3)^{\mathrm{T}}$,有

$$\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&19&\frac{181}{4}\\-9&-13&-\frac{63}{2}\\7&10&\frac{99}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

$$\text{或}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}.$$

7. (1) $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\\x'_4\end{pmatrix}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}12&9&-27&-33\\1&12&-9&-23\\9&0&0&-18\\-7&-3&9&26\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$;

(3) $k(1,1,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

8. (1) 关于 y 轴对称；

(2) 投影到 y 轴；

(3) 关于直线 $y=x$ 对称；

(4) 逆时针方向旋转 90°.

10. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.