简　介

这一套书的前身，是已出版达十四年之久的名为《普通数学》的那套书，我们把书名保留下来了，是因为就其大部分内容而论，它依然是大学第一阶段的教科书，又是为准备参加工程学院和高等师范学院会考的教学用书，也可以作为这些学院本身的教学用书，我们还希望它可供未来的中学与专科学校的教师以及现任职教师使用。

本书前身受到欢迎，这激励我们按同样的精神来撰写这部新作，就是说它有时会超出人们称之谓官方大纲的范围。实际上，用更一般的观点来阐述一章书，往往是比较可取的；这有利于与以后的学习相衔接。

这里对此套书的内容作简略的说明。前三卷以旧书的一些内容作为重要的部分；即是说旧书的某些部分移到新书的其他几册中去，对留下来的部分作了细小的修改与补充。这里主要的一方面是指代数和初等线性代数，另一方面是指与实数有关的内容。

将第 4、5、6 卷的内容作了新的叙述。在第四卷中叙述了关于度量空间拓扑的一些主要概念，然后一直讲到巴拿赫定理，这个定理给出由一个赋范空间到另一个赋范空间线性映射是连续的充要条件。因为这个定理从根本上阐明了有关可微函数与测度概念的问题。

积分论一章以一般方式阐述了积分的结构，勒贝格积分是其一特例，最后我们作出一个极其简便的处理，而无须回到传统的对两个或三个实变量的函数的黎曼积分的处理方法上去，我们觉得

这样做比用传统方法来处理要好得多. 此外, 这里的叙述方式自然地把初等理论(卷 3)的形成清楚地揭示了出来, 即在那里所用的范数是一致收敛的范数.

第五卷包含无穷小计算的重要一章(在 R 上求积分、级数), 有一章讲埃米特空间和付立叶级数 (然而后者是作为独立部分叙述的); 最后, 对解析函数的讨论, 占一重要地位.

在最后一卷中, 一方面阐述概率计算的初等概念, 另一方面研究有限维埃米特空间和欧氏空间, 这里讲了自伴随算子的概念, 还研究了矩阵的约化和微分方程组, 它们是作为隐函数理论和线性代数的应用的例子来讲的.

我们经常有意识地重复. 对那些今后常用的数学定义以及在证明中要用到的一些重要定理的内容, 我们是不怕复习的. 我们从经验知道, 一个非专门的读者, 当要参考以前五、六个结果才能去理解一个论证时, 该是多么困难.

书中有例题, 有些段落的例题较多. 许多例题是习题解答; 有些解答是详尽的, 另一些则以习题的形式出现, 而给出了它的解答纲要.

我们是想再一次证明, 不存在没有"技术"的数学, 即不存在没有计算技巧的数学.

我们希望这套书将使大学生喜爱, 一般地也使那些需要数学或爱数学的人喜爱. 我们还希望证明, 伪先知的胡言乱语给一个国家带来怎样的危险性. 虚伪的现代数学的祭司们就是自封为这种先知的, 他们利用被伤害的青年一代的马虎才能得逞. 然而这是不同于我们在序言中所说的另一种历史.

下略.

序　言

数学，现代数学.

我们知道，几代以来，人们屡次提出这样的问题：历史是科学还是艺术？这个问题的一个变种是，或者也许是：数学是什么？

从字义上说，艺术是学习理解事物的本领.拉普拉斯对很大的一部分数学论文作了总结说："数学理论的最大优点之一及其值得信赖的最大特点是在于，它从显得千差万别的现象中找出它们之间的关系而把它们联系起来，而且这不是由于泛泛的观察和猜测，而是通过精密的计算而得到的."

数学是艺术，又是科学，它也是一种智力游戏，然而它又是描绘现实世界的一种方式和创造现实世界的一种助力.

诚然数学常常过于显得独立存在，好像丝毫也不受大自然界约束似的.但这是一个严重的误解.可以肯定的是：数学由于对自然界以其原始状态提出的问题缺乏处理能力而把这些问题简单化了.连续性、交换性、可逆性等概念有时是没有任何意义的.

许多概念，诸如上面所说的那些，它们之所以起到数学的作用，只是因为它们符合现象的某些方面.用数学式子来表示物理现象就是这一类的例子.这种表示会引起数学家的反感，直到问题已被澄清，使数学家知道感激那些"蹩脚的数学家们"为他提供了好的课题时为止.

数学家应该唤起数学使用者谨慎小心，因为他知道数学的限度.现今，人们也许只能对某些问题的解决方式感到不安（我们想指的是经济问题、人口统计问题），因为那些相信自己开动了数学

机器的人们，使人得到这样的印象，好像他们是相信了通过两点的唯一曲线是直线，而通过三点的唯一曲线是指数曲线似的。

然而，更加使人感到不安的可能是现时刮遍了法国的那种恶劣风尚，它开始是微风，而终于成为风暴。那就是某些人称之为现代数学的那种东西。

虽然已出现了一些令人不安的结果，但今天却依然是车载船运似的把一大堆概念、公理塞满了高中和初中的教学大纲，并且是从低年级开始。这样从今而后，不论是儿童、少年，还是青年都会忘记什么是推理，而只会相信"于是、从而"等字眼的能力。人们引进了逻辑，但它又消失了；人们要建立计算的基础，但学生几乎不会计算，而且越来越不会计算，正如我们已经见到的那样。

可是，没有计算技巧，那就只能很迟，或干脆不可能领会数学的实质，这种实质是远远超过可感知的实质的。异常丰富多彩的非欧几何学就是一个十分辉煌的例子。

业士中的一个重要部分（五分之一），即具有业士学位 C 的那些人，他们学了最重的数学课，但不知道用"头脑"去计算，不知道做两个分式的除法，不知道 2 的各次幂的计算，不知道列写直线的笛卡儿方程，不知道三角学，对他们花了几小时去说明 $2+3=3+2$，但他们仍然不知道其结果是 5（至少是在十进制里），当要求他们举一个简单而自然的非交换性的例子时，他们什么也找不出来；他们想像不到，如果他们煮咖啡，那么"咖啡磨"和"滤筛"这两个算子是不可交换的。他们对于这种状况是没有任何责任的，因为名词已把他们弄得头昏脑胀，没有向他们讲明事实，他们很迟，非常迟才发现自己什么也不知道，留给他们的，犹如电路系统的作者用闭合回路来谈论数学基础一样，只是字义的争论。

某些抱怨技术教育卑微的人，发明了这种把技术排除在外的数学体系，也就是排除了对事物加以运用和进行变换的本领，即使

这种事物就是数学的事物.

对于那些高谈阔论文化的人，声称数学愈“现代化”就愈容易的人，议论一切、通晓一切而又什么没有教过的人，我们说些什么呢?!

一个概念，一个公理，要有大量的实例来支持，才有生命，而这又要求事先具备一定的实际知识，抽象来源于实际，而且如果它不再回到实际中去，它就很快会使精神的东西成为不可思议，受到歪曲并使它因饥渴而死亡。

这类数学的祭司们说他们的数学是现代的，以其傲慢态度和狂妄想法，自以为掌握真理，并蔑视着人们，他们否定人类智慧的基本成就.他们对于从事其他学科的人们的需要与愿望漠不关心；这里所说的其他学科涉及自然科学、医学、法学、经济学，乃至古文字学，等等；这些人用他们所从事学科中的贡献日复一日地改造着社会，并将明天的利益与往日的财富提供给人们.现代数学的祭司们以自己的形象……再造着人们，然而当知识界中的大部份人可能是因惊讶于这种骗局竟能成功，而保持着缄默的时候，某些人却因害怕显出自己是反对“现代事物”的“老朽分子”而继续不断地唱着低调，并利用自己的权力，以掩盖其无能.

遗憾的是，今天人们以一律的方式将一个错误体系强加给法国的无力反抗的青少年，使他们，嗨哟，若干年后将付出高昂的代价.

译者的话

这一套书是法国大学第一阶段(cycle)、工程师学校预科第一、二学年与工程师学校第一、二学年的数学教材. 全套书分六卷;本书为第一卷.

这一套书是按法国官方教学大纲编写的. 主要内容为:

第一卷包括代数与线性代数基础;

第二卷包括实数与实变函数;

第三卷包括数学工具与数学方法:积分的初等理论,常用的函数,初等微分方程;

第四卷包括度量空间,微分映射;隐函数,积分法;

第五卷同样讲数学工具与数学方法:无穷小计算(R上的积分法与级数),付氏级数,解析函数;

第六卷包括矩阵的约化,有限维埃米特空间的代数,微分方程与微分方程组,概率初步.

第一卷译文由陈昌平副教授全面校订;对序言和前言译文他更是大力斧正;此书的能够出版,与陈昌平同志的可贵劳动是分不开的,谨于此致谢.

对译文中的问题,请读者提出宝贵意见.

译者

1981年2月

目　录

一 般 概 念

第一章 集合论

第一部分 逻辑和逻辑符号

我们把数学元素的集合这个概念看作是直觉的概念。

集合的元素——集合由元素组成；我们以后用这样的说法：元素 a 属于集合 E，并写作 $a\in E$.

子集——一个集合 F，如果它的一切元素都属于一个集合 E，就叫做 E 的子集；写作 $F\subset E$；也可以说：F 被包含于 E.

同时，也使用记号 $E\supset F$，它的意思是 E 包含 F. 一个集合 E 的子集，一般地被定义为 E 中具有某种性质的元素的集合．但可能有这样的情况：E 中没有一个元素具备这个性质．这时为了还能继续说：一个性质定义 E 的一个子集，我们把上述情况称作空子集．由于错用名词而称之为空集，用记号 $\varnothing$ 来表示．对于不论怎样的 E，定义 $\varnothing\subset E$.

对不论怎样的集合 E，总有 $E\subset E$.

如果 $F\subset E$ 和 $G\subset F$，就有 $G\subset E$；这个性质表明，从属关系是传递的.

蕴含关系——我们说：一个命题 P 蕴含或导致一个命题 Q，或者以命题 Q 为其推论，如果每当 P 为真时 Q 即为真；这时写作 $P\Longrightarrow Q$. 如果反过来 Q 又蕴含 P，那末命题 P 和命题 Q 就称做等价的；并写作 $P\Longleftrightarrow Q$. 在此情况下，在一切推理中，可将这两命题

中的一个用另一个来替换．如果$P \Longleftrightarrow Q$，就说Q是使P成立的必要且充分的条件．符号$\Longrightarrow$有时也读作“使得…”以代替导致的读法．

相等——相等用符号$=$来表示，它在数学中具有多种意义．

1° 相等表示恒等；$x=y$的意思是：x和y没有区别．这样例如$1=1$．

2° 相等只能是有条件的；这就是方程式左右两端相等的意思．当列出方程

$$ax=b$$

时，只有在x取特定值的条件下，相等才能成立．

3° 符号$=$能够用来定义一个新的记号．当说：“令$y=f(x)$”时，符号$=$定义一个新记号y，而此时x与f这两个记号是已经有定义的．

要提请注意：1° 与 2° 就其意义来说是 3° 的特殊情形．于是，如果x是已知的；恒等式$x=y$也是y的一个定义．方程$ax=b$定义了能使等式成立的那些元素x．

4° 常常用符号$=$来表示两个集合间的同构．例如我们写$\frac{n}{1}=n$，因为对于乘法运算，在整数n的集合Z与$\frac{n}{1}$这样形式的分数集合之间有同构关系．

5° 最后，有时把符号$=$当作等价的记号（第三章，第二部分），以代替$\sim$．于是，写

$$\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$$

以代替更正确的写法$\frac{4}{6}\sim\frac{6}{9}$．符号$=$的这种用法可归并于 4°．

量词——用符号来表示某些词组有时是很方便的；现说明下面两个符号

$\forall$ 代表词组：对不论怎样的…，对所有的….

$\exists$ 代表词组：存在

这些记号叫做量词，它们在数学中被赋予特殊的作用，而与形式逻辑中的 $\forall$ 和 $\exists$ 有所区别.

否定——当一个性质不发生，就说这个性质的否定发生，表示否定的符号是在性质符号上画一杠.

这样，当元素 b 不属于集合 E 时，就写作 $b\notin E$.

设 G 是一集合，它有些元素不属于 E，于是 G 不是 E 的子集，写作 $G\not\subset E$，或者也可以说 E 不包含 G，写作 $E\not\supset G$.

设一个命题不导致另一个命题，就写作$\nRightarrow$. 设两个命题互不等价，就写作$\nLeftrightarrow$.

相等的否定在各种不同的意义下被使用着，用$\neq$来表示，读作"异于".

合取、析取——合取的词和在其通常的意义下加以使用："a 和 b"的意思是："同时（同一次）发生 a 和 b". 可是，在通行的语言中，词组"a 或 b"能有两种意义. 一种意义是："或者 a，或者 b，只有一种可能发生而排斥另一种的发生"；另一种意义是："或者 a，或者 b，或者两个同时发生". 在数学中，我们总是用"或"的两种意义中的这样一种，它是"和"的否定，也就是说，上述两种通常意义中的第二种.

一个命题可以用逻辑符号写出来.

这样，命题"集合 F 是集合 E 的子集，意味着 F 的任一元素都是 E 的元素"，用逻辑符号写出来就是

$$F\subset E\Longleftrightarrow(\forall a\in F\Longrightarrow a\in E).$$

为了构成一个命题的否定，往往宁愿采用符号形式，而不用通行的语言，这要更方便一些. 可以将$\subset$，$\in$，$=$，"和"相应地用$\not\subset$，$\notin$，$\neq$，"或"来替换，只要不直接跟在量词后面；将 $\forall$ 用 $\exists$ 来替换，

而不变更量词作用于其上的那个符号；最后，结论用其否定来替换.

这样用上面那个例子来做它的否定命题，写成：

$$F\not\subset E\Longleftrightarrow(\exists a\in F\Longrightarrow a\notin E);$$

用通常的语言来说："集F不是E的子集，其意义等价于：存在F的一个元素a，使得a不属于E".

第二部分　集的运算

交——设有两个集E和F. 既属于E同时也属于F的所有元素的集形成一个新集，它用$E\cap F$来表示，叫做E和F的交.

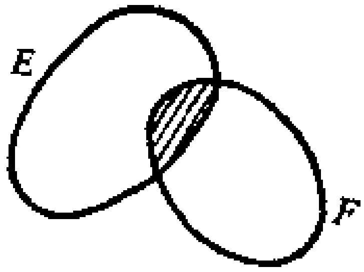
显然，$E\cap E=E$；更一般地，设$H\subset E$，则有$H\cap E=H$. 可能有这种情况：E和F没有任何公共的元素，这时就说E和F不相交，或者说，E和F的交是空集，写作$E\cap F=\varnothing$.

$E\cap F=F\cap E$成立；这说明，交运算$\cap$适合交换律.

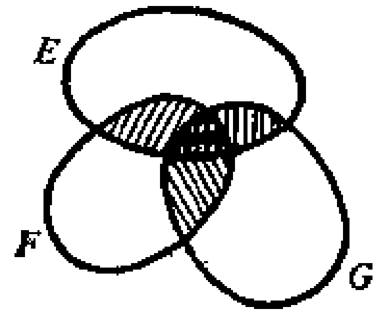
考虑三个集E,F,G. 交$E\cap F$是E和F的共同元素的集，因此，$(E\cap F)\cap G$就是既属于G又是E和F的共同元素的集；这是同时属于三个集E，F和G的元素的集；因而有$(E\cap F)\cap G=E\cap(F\cap G)$；这个性质叫做可结合性.

一般地，设有集E_i的族. 所有E_i的交记为$\bigcap\limits_i E_i$；这是同时属于族中所有E_i的一切元素的集. 集E_i的次序可以颠倒，也可将其中的多个用它们的交来替换. 如果族包含无限多个集，情况也是一样的.（我们将在后面说明以i为足标的记号E_i的确切含义.）

并——设有两个集E和F. 属于E，或者属于F的元素的集，也就是说，或者属于E，或者属于F，或者同时属于E和F的元素



$E\cap F$



$E\cap F\cap G$

的集，叫做E和F的并，记为$E\cup F$. 显然有$E\cup E=E$；一般地，如果$H\subset E$，就有$H\cup E=E$.

$E\cup F=F\cup E$成立；并的运算是可交换的.

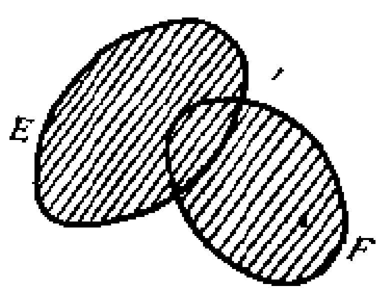
设G是第三个集，$(E\cup F)\cup G$是属于E，或属于F，或属于G的元素的集，词“或”表示：一个元素可以同时属于两个，或属于三个集. 因此并运算同样也是可结合的：

$$(E\cup F)\cup G=E\cup(F\cup G)$$

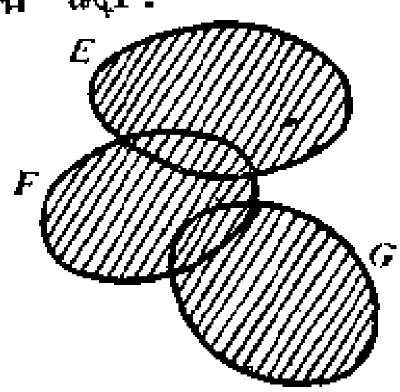
一般地，一族集E_i的并记作$\bigcup_i E_i$；这是至少属于一个集E_i的那些元素的集. 这个集与这些E_i的次序无关，并且能将多个的E_i用它们的并来替换.

补集——设有一个集E；F是E的一个子集(因而$F\subset E$). 属于E而不属于F的元素的集构成一个新的集，称为F关于E的补集，记做$\complement_E F$. 于是有

$$a\in\complement_E F\Longleftrightarrow a\in E\quad 和\quad a\notin F.$$



$E\cup F$



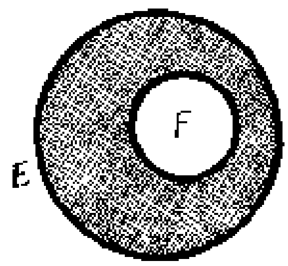
$E\cup F\cup G$

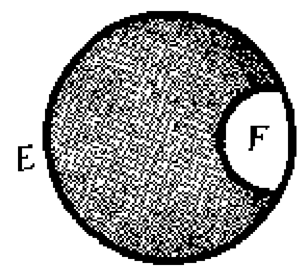
例 关于整数集 Z 的偶数集的补集是奇数集.

于是有

$$F \cup (\underset{E}{\complement} F) = E \quad 和 \quad F \cap (\underset{E}{\complement} F) = \varnothing$$

一个集 E 当其为熟知而不致产生混淆时，关于它取某个集的补集，常常将字母 E 省略而直接写作 $\complement F$.





一个集的划分——我们来分割 E 为两个不相交的子集 F 和 $\complement F$，它们的并就是 E. 一般地，假设 E 已被分割成有限多个或无限多个两两互不相交的子集 E_i，它们的并就是 E，这时说，这些集 E_i 组成 E 的一个划分，于是有：$E = \bigcup_i E_i$，且当 $i \neq j$ 时 $E_i \cap E_j = \varnothing$，同样，$F$ 和 $\underset{E}{\complement} F$ 组成 E 的划分.

例 设 N 是自然数的集，N_i 是这样的整数的集，它的素因子分解式中包含 i 个相异的或非异的素数(这样，$N_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2, 2 \cdot 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 5, \cdots$)；于是有 $N = \bigcup_i N_i$，且当 $i \neq j$ 时，$N_i \cap N_j = \varnothing$，$N_i$ 的(无限)集于是组成 N 的一个划分.

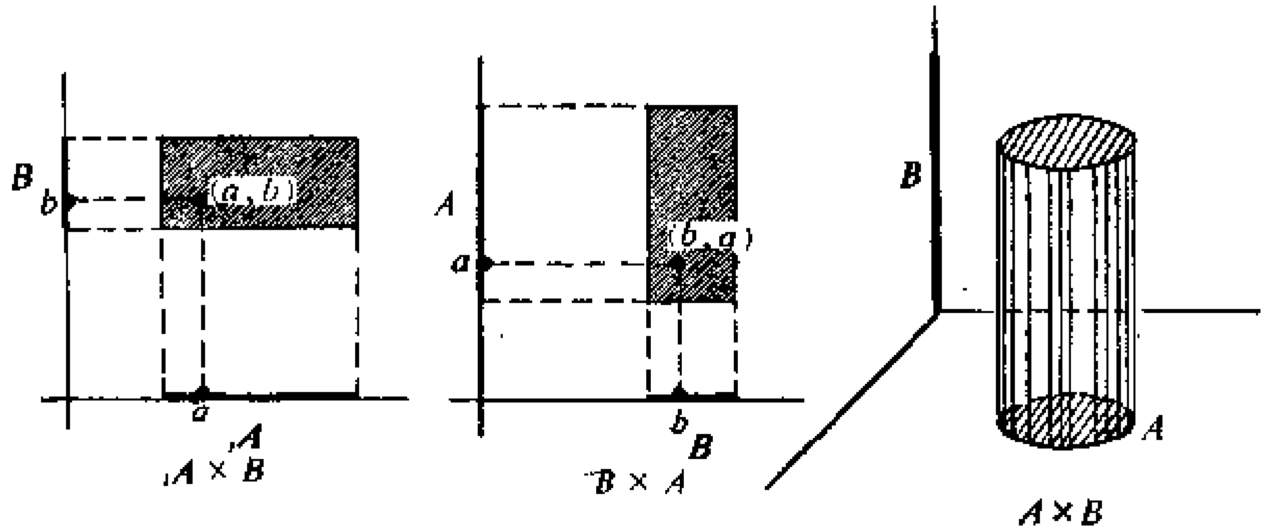
对于集的这些不同的运算相互之间可以组合，并由此得到新的命题. 例如

$$(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$$

上面的这些问题和性质是从叫做集合代数的理论中产生的；它有大量的应用，即使在实验科学领域里也如此，不过这里我们不去阐述它.

集的积——设有两个集 A 和 B；设 $a \in A$ 和 $b \in B$. 考虑有序对

(a, b)，这一词组表示，即使 $A=B$，(a, b) 和 (b, a) 也是不同的. 一



切可能的有序对构成一个新集，叫做 A 乘以 B 的积，记作 $A\times B$. 元素 a 和 b 叫做有序对 (a, b) 的分量或坐标.

当集 B 恒等于集 A 时，$A\times A$ 就表示有序对 (a, a') 的集：其中 $a\in A$，$a'\in A$. 例如，设 N 是自然整数集①，则 $N\times N$ 就是两个自然整数对的集，像分数 p/q 的集，分子和分母的区别表明了词组“有序对”的意义.

设 $B\neq A$，则有 $A\times B\neq B\times A$；这说明了，集合的积是不可交换的.

一般地，设有相异的或非异的集 A_n 的族，我们将有序系 $(a_1, \cdots, a_n, \cdots)$ 的集叫做积，并记做 $\prod\limits_n A_n$，其中第 n 个元素 a_n 属于集 A_n. 后面我们将看到：一个序列是无限个集的积的一个元素，这里的集等于实数集.

① 这种译法是为了依从法文原文的写法——译者注.

第二章　函数　映射

§1　函　　数

设有一个集E,叫做定义域．又设F是一个集,叫做值域．一个对应关系将每个元素$x\in E$对应于一个元素$y\in F$，这个对应关系就叫做从E到F内的映射．

元素$x\in E$叫做变量；元素$y\in F$就叫做值或像．

同样也可用函数这个词来代替映射．用字母f来表示函数；如果$x\in E$对应着$y\in F$,就写为$y=f(x)$.

同样也写为$x\to f(x)$,这就是说：x给出$f(x)$．还说f是变量x的函数,在F内取值,或y是x经f的像．

有时也写成$x\to f_x$,这时变量叫做序标．当定义域E是自然整数集N时,这种记法是常常采用的.

必须非常仔细地区别开变量x,函数值$f(x)$,和运算f;变量x是E的元素,函数值$f(x)$是F的元素，运算f是与前两者不同的另一回事.

例如，设$y=x^3$；给变量x的值为2；于是y的对应值为8;而函数f是"乘三次方"的运算.

子集的像——设$G\subset E$是E的一个子集；F的元素，即G的至少一个元素经映射f的像，它所成的集记为$f(G)$；这个集是F的子集；于是有$f(G)\subset F$.

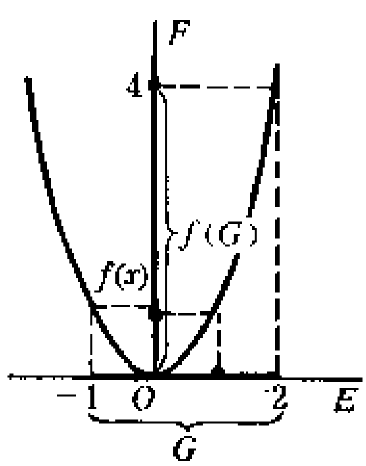
例——设f是从实数集R到R内的映射，定义为$x\to x^2$；且设G是满足$-1<x<2$的x的集，于是$f(G)$是满足$0\leqslant y<4$的y

的集.

特别，如果取整个的集E作为子集G，则$f(E)$就是E的至少一个元素的像的F的元素的集. 这时也有$f(E)\subset F$. 在$f(E)=F$的情况下，也就是说F的一切元素都是E的至少一个元素的像，这时就说从E到F内的映射是从E到F上的映射，或者说映射f是满射的.（请注意：一般地$f(E)$不是整个F）.

如果$f(x)=f(x')\Longrightarrow x=x'$，就说$f$是单射的；这意味着，设$y\in F$是$E$的一个$x$经$f$的像，则这样的$y$是唯一的.

例——当E是实数集R，F也同样是实数集时，映射$x\to x^3$就是从R到R上的映射，因为任何一个实数都可成为一个实数的立方. 相反，如果$E=F=Z$，Z是整数集，从Z到Z内的映射$x\to x^3$就不是从Z到Z上的映射，因为一个整数不一定是某一个整数的立方.



映射到…内

映射到…上

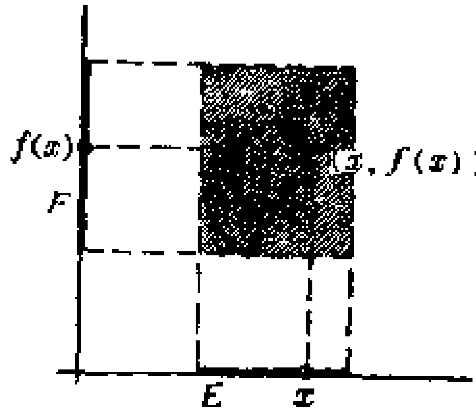
映射的限制——设f是从E到F内的映射，又设$G\subset E$是E的子集. 映射f使G的每一元素对应于F的一个元素；这就定义了从G到F内的一个映射，叫做f在G上的限制；当不会产生混淆时，仍可用符号f来表示限制.

例——对$x\in Z$定义的映射$x\to x^3$，是从R到R上的映射$x\to x^3$在Z上的限制.

恒等映射——设 $F=E$, f 就定义了从 E 到其自身内(上)的一个映射.

特别，使每一个元素 $x\in E$ 对应于元素 x 自身的映射，是从 E 到 E 上的映射，叫做恒等映射.

映射的图形——设 f 是从集 E 到集 F 内的映射. 有序对 $(x, f(x))$ $(x\in E)$ 的集是积集 $E\times F$ 的子集，叫做函数 f 的图形.



$E\times F$, $\sim f$ 的图形

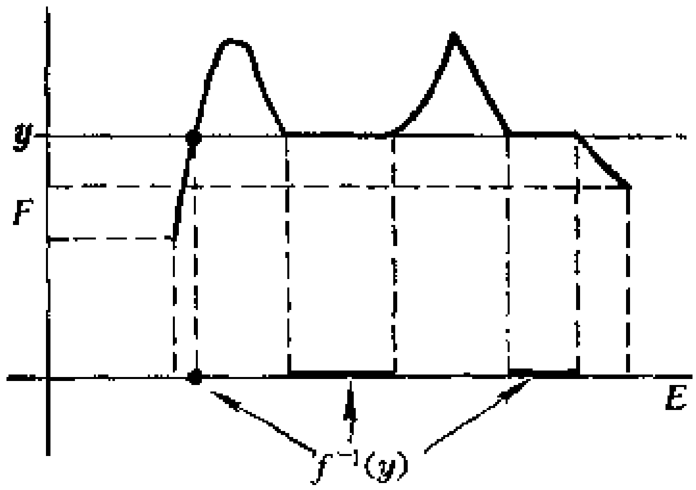
例——积集 $R^2=R\times R$ 的有序对 (x, x^3) 的集构成函数"乘三次方"的图形. 在几何上它用"曲线" $y=x^3$ 的点来表示.

序列——取自然整数集 N 作为 E, 取任意的集作为 F; 从 N 到 F 内的映射 f 叫做 F 的元素的序列. 于是，序列 f 使对于每个自然数 n, 有 F 的一个元素与之对应，这件事一般用 f_n 来表示，而不用 $f(n)$. 序列 f 常常用符号 $f=(f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots)$ 来表示，或者用简略的形式 $f=(f_n)$. 这时符号 f_n 就表示 F 的元素（它是 N 中的自然整数经 f 的像）.

逆像——设 f 是从空间 E 到空间 F 内的映射；每个元素 $x\in E$ 经 f 有唯一的元素 $y\in F$ 和它对应. 然而，反过来说，设 y 是 F 的一个元素；则它可能是 E 中多个元素经 f 的象.

例——考虑值 -6, 它是元素 -3, 1, 2 经函数 x^3-7x 的像. 再考虑 x 的整数部份函数，也就是小于 x 的最大整数；于是一个整数 n, 是适合不等式 $n\leqslant x<n+1$ 的无限多个 x 值的像.

经 f 以唯一的元素 $y\in F$ 为像的、元素 $x\in E$ 的集叫做 y 的**逆像**，并记作 $f^{-1}(y)$. 要注意，y 是 F 的一个元素(不是 E 的)；还有，如果集 $f^{-1}(y)$ 允许有多于一个的元素，那末 f^{-1} 就不是前面所定义的那种意义下的一个映射.



一般地，如果H是F的一个子集，我们就用$f^{-1}(H)$表示E的那样的元素的集，它经f的像属于子集H.

如果F的每一元素的逆像是E的至多一个元素，就说f是单射的；这也就是说：$f(x)=f(x')$导致$x=x'$.

§2　一一对应映射或双射；势

一个特别重要的情况是：映射既是满射又是单射的，也就是说，F的每一个元素的逆像是E的唯一的元素.在这种情况下，f^{-1}是从F到E内的映射；它叫做f的逆函数或逆映射.

例——函数$y\to\sqrt[3]{y}$是$x\to x^3$的逆映射；它把实数集R映射到自身上.

设映射f是从E到F上的映射，且逆映射f^{-1}存在．则f^{-1}是从F到E上的映射.

事实上，每一个元素$x\in E$以一个元素$y=f(x)\in F$作为像，且$f^{-1}(y)=x$. 在这种情况下就说，映射f是从E到F上的一一对应映射或双射.

势——设有两个集E和F；如果至少存在一个从E到F上的双射映射，就说E和F是等势的.

例——设 E 是满足 $0\leqslant x<1$ 的实数 x 的集，F 是集 $E\times E$，即有序对 (y, z) 的集，这里 y 和 z 是满足 $0\leqslant y<1$，$0\leqslant z<1$ 的实数.（从几何上讲，E 是线段，F 是面积）．设 x 是 E 的某一个元素；把它写成十进小数：$x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，这里 a_n 是一整数：$0\leqslant a_n\leqslant 9$；约定，如果 x 是一准确小数，那么在从某一位以后 a_n 的值为 0（且不总是等于 9）．对于这个元素 x，使数 y 和 z 与它对应，y 和 z 的十进小数写法是：$y=0.a_1a_3a_5\cdots$，$z=0.a_2a_4a_6\cdots$．这个使 x 与有序对 (y, z) 相对应的函数 f 可以有一逆映射，从而 E 与 $E\times E$ 是等势的．

势的概念是通常计数概念的推广．实际上，计数的实质是：在计数对象的集合和从 1 开始接连的整数集的有限子集之间，建立一一对应关系．

无限集——势的概念同样允许人们对有无限多元素的集的概念给以精确的意义．一个这样的集是以下面的性质来定义的：至少存在这个集的一个不同于原集的子集，而此子集又与原集有相同的势．这样，设 N 是正整数的集；正偶数的集是 N 的一个子集，又不同于 N．可是，对应关系 $n\to 2n$ 是一对一的；这两个集有相同的势，因而 N 是无限的．

此外，正如前面的例子所说，设 y 和 z 是实数：$0\leqslant y<1$，$0\leqslant z<1$，又设有实数 x 的集：$0\leqslant x<1$，则有序对 (y, z) 的集 E 与实数 x 的集有相同的势；可是，后一个集是有序对 $(x, 0)$ 的集，它是原集 E 的一个子集，又不同于 E．这个集 E 就是无限集了．

于是，一个有限集就是一个非无限的集，也就是说，不存在整个集的任何与它不同的子集，而和原集有相同的势．

这里我们不阐述势的概念的推论，这些推论在本教程的后面部份将要研究．然而待到讲自然整数那一章（第四章），我们将看到非常重要的可数集的概念，也就是说与自然数集有相同势的集

的概念.

§3 集的排列

排列——从集E到其自身的每一双射映射都叫做 E 的排列. 例如, 映射 $r\to 2r$ 使每一有理数 r 对应于数 $2r$, 它是有理数集 Q 的一个排列. 恒等映射也是一个排列.

有限集的排列——设E是一具有有限个元素的集, 个数为 n. 用 P_n表示排列数. 显然 $P_1=1$, 因为, 如果E是由唯一的元素所组成, 则从E到E上的唯一的一一对应映射是恒等映射.

现设E具有 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 又设 f 是E的一个排列, 它使 $a'_i=f(a_i)$, $i=1,\cdots,n$. 设 k 是这样的序标, 它使 $f(a_k)=a_n$. 现考虑如下的映射 g:

$$g(a_i)=a'_i, \quad \text{如果} \quad i<k,$$
$$g(a_j)=a'_{j+1}, \quad \text{如果} \quad k\leqslant j\leqslant n-1.$$

这映射 g 就是 $n-1$ 个元素 $a_1, \cdots, a_{n-1}$ 的集 E' 的一个排列.

反过来说, 设 h 是 E' 的一个排列, 它使 $h(a_i)=a''_i$, 这里 $i=1,\cdots,n-1$; 设任意选定了一个 k: $1\leqslant k\leqslant n$, 并令

$$f(a_i)=a''_i \quad \text{对于} i<k$$
$$f(a_k)=a_n$$
$$f(a_j)=a''_{j-1} \quad \text{对于} j>k$$

则据此作出了E的一个排列 f.

显然, 像前面那样, 由这个 f 导出 E' 的排列 g 是和 h 相同的. 可是对于 k 有 n 种不同的可能选法, 于是 E' 的每一个排列对应着 E 的 n 个不同的排列; 且如果 E' 的两个排列 h_1 和 h_2 是不同的, 那末对应于 h_1 的E的每一个排列 f_1 不同于对应 h_2的E的每一排列 f_2. 否则, 去掉 a_n, E' 的排列就是一样的了. 结果有

$$P_n = nP_{n-1}$$

依此类推，有 $P_{n-1}=(n-1)P_{n-2}$，于是 $P_n=n(n-1)P_{n-2}$，逐步推下去就有

$$P_n = n(n-1)\cdots 2\cdot P_1 = 1\cdot 2\cdots n$$

这从 1 开始的头 n 个相继的自然数的乘积记为：$n!=1\cdot 2\cdots n$，叫做 n 的阶乘．约定 $0!=1$．于是 $P_n=n!$．

排列的奇偶性—— n 个元素 $a_1,\cdots,a_n$ 的集 E 的一个排列 f 是由 $a_i'=f(a_i)$，$i=1,\cdots,n$，来定义的；然而 a_i' 是 $a_1,\cdots,a_n$ 等元素中的一个，于是 $a_i'=a_{m_i}$，这里 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 是头 n 个接连的自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列的值．

如果在排列 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 中存在一个有序对 (m_i,m_j)，其中 $j>i$，而 $m_j<m_i$，就说这有序对形成一个逆序．设 I 是这个排列的逆序的总数．如果 I 是偶数，就说这排列是偶排列；如果 I 是奇数，就说这排列是奇排列．引伸一下，这个奇偶性也是 E 的排列的奇偶性．

数 $(-1)^I$ 叫做排列的符号差；如果 I 为偶数，符号差等于 $+1$；如果 I 是奇数，符号差等于 -1．符号差用 ε_f 来表示，这里 f 是排列；或用 $\varepsilon(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ 来表示．

定理——如果在一排列中对换两个元素，则它的奇偶性发生变化．

姑且先假设对换两个紧相邻的元素．于是，设 f 是 $a_1,\cdots,a_n$ 的排列，它用 $a_i'=f(a_i)$ 来定义；又设排列 g 定义如下：如果 $i<k$ 或 $i>k+1$，$g(a_i)=a_i'$

$$g(a_k)=a'_{k+1};\quad g(a_{k+1})=a'_k,$$

再设 $a_i'=a_{m_i}$，对应于 f 的是排列

$$(m_1,\cdots,m_{k-1},m_k,m_{k+1},m_{k+2},\cdots,m_n),$$

对应于 g 的是排列

$$(m_1, \cdots, m_{k-1}, m_{k+1}, m_k, m_{k-2}, \cdots, m_n).$$

在上面这两个排列中，当 $i<k$ 和任何一个 $j>i$ 时，和当 $j>k+1$ 与任何一个 $i<j$ 时，(m_i, m_j) 这序对同时为一个逆序，或同时不是一个逆序．序的性质发生变化的唯一的有序对是 (m_k, m_{k+1})，它变为(m_{k+1}, m_k)，于是逆序的总数变更了一个，从而奇偶性发生变化．

在一个排列中，元素a'_i 和a'_j 的对换将涉及相邻元素的$2|i-j|-1$ 次对换，于是这个数是一个奇数，从而排列的奇偶性发生变化．

设排列$(a_1, \cdots, a_n)$是偶排列，则$(a'_1, \cdots, a'_n)$的奇偶性可用下法判定：将后一排列变到前一排列，对换的次数为偶数，它就是偶排列，否则为奇排列．

§4 复合函数

在函数上的运算——设 f 是从集 E 到集 F 上的映射，又 g 是从 F 到集 G 内的映射．设 $x\in E$；于是 $y=f(x)\in F$，且可考虑元素 $z=g(y)\in G$．这样，对每一$x\in E$ 就对应着 G 的 $z=g[f(x)]$，这就定义了从 E 到 G 内的一个映射，叫做 f 经 g 的*复合函数*或*复合映射*，记为 $g\circ f$(注意：这里要从右向左读，而不是从左向右读，因为 $g\circ f$ 是 $g(f(\quad))$．

可以看出，$g\circ f$ 一般是不同于 $f\circ g$ 的，后一符号可能没有任何意义，因为 f 是从 E 到 F 上，而 g 是从 F 到 G 内的映射．用运算$\circ$可从函数 g 与 f 定义函数 $g\circ f$，然而$\circ$一般不是可交换的．

可是，它是可结合的：设 h 是从 G 到 H 内的一个映射，g 是从 F 到 G 上的一个映射，我们有 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$，因为，如果$w=h(z)$，则有$(g\circ f)(x)=z$，又$(h\circ(g\circ f))(x)=w$；同样，$f(x)=y$，且

$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(y)=w$.

设 f 是从 E 到 F 上的一个双射映射，f^{-1} 是一个从 F 到 E 上的映射，则 $f^{-1}\circ f$ 就是 E 的恒等映射. 同样 $f\circ f^{-1}$ 是 F 的恒等映射.

设还有 f 是从 E 到 F 上的双射映射，g 是从 F 到 G 上的双射映射，于是 $g\circ f$ 是从 E 到 G 上的双射映射，且有 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

第三章 二元关系

我们直觉地了解：可以将实数按照从小向大的顺序排列，也就是说，若给定了两个实数，就能讲一个是否比另一个大.

如果所考虑的是平面的点，若给定了两个点，则也能说一个是否比另一个离点 O 远.

还能说两个点是否在一给定的半直线上.

在这些例子中，我们总括地说，在两个元素间引进了一个*二元关系*.

定义——设有一个集 E；我们说在 E 上定义了一个二元关系，如果给定了积集 $E\times E$ 的一个子集 $\mathscr{R}$ 的话.

当一有序对 (a,b)（其中 $a\in E$, $b\in E$）属于 $\mathscr{R}$ 时，就说 a 与 b 用关系 $\mathscr{R}$ 联系着，或说关系 $\mathscr{R}$ 被满足.

可以不写 $(a,b)\in\mathscr{R}\subset E\times E$，而常用一个更简单的符号，这个我们就要看到.

考虑 $E\times E$ 的子集 D，它由两个元素都相等的即 (a,a) 这种有序对所组成；D 叫做 $E\times E$ 的*对角线*．于是 $(a,b)\in D\Longleftrightarrow a=b$；对应于 D 的这种关系就叫做相等（恒等）.

如果 $D\subset\mathscr{R}$，也就是说一切有序对 $(a,a)\in\mathscr{R}$，关系 $\mathscr{R}$ 就说是*自反的*，因此，相等是自反的.

如果 $(a,b)\in\mathscr{R}\Longleftrightarrow(b,a)\in\mathscr{R}$，关系 $\mathscr{R}$ 就说是*对称的*.

如果 $(a,b)\in\mathscr{R}$ 且 $(b,a)\in\mathscr{R}\Longrightarrow a=b$，关系 $\mathscr{R}$ 就说是*反对称的*.

如果 $(a,b)\in\mathscr{R}$ 且 $(b,c)\in\mathscr{R}\Longrightarrow(a,c)\in\mathscr{R}$，关系 $\mathscr{R}$ 就说是*传*

递的.

例——设N是整数集，且$\mathscr{R}$是那样的整数有序对(a, b)的子集，(a,b)的元素中至少有一个等于1，或它们的最大公约数不等于1(即a与b为非互质的整数).

这个关系是自反的，因为如果$a\neq 1$，(a,a)有最大公约数a；它也是对称的；但它不是传递的，因为：$(4,6)\in\mathscr{R}$，$(6,9)\in\mathscr{R}$，然而$(4,9)\notin\mathscr{R}$.

可能会设想：对称性和传递性导致自反性；然而，一般地并非如此，因为并不一定能把每个元素$a\in E$对应一个元素$b\in E$，使$(a,b)\in\mathscr{R}$. 如果这件事发生，就会有$(a,b)\in\mathscr{R}$，$(b,a)\in\mathscr{R}\Longrightarrow(a,a)\in\mathscr{R}$，由此而得自反性.

第一部分　序的关系

定义——一个二元关系Ω叫做集E上的序的关系，如果$E\times E$的子集Ω是自反的，传递的和反对称的.

如果一个有序对(a, b)属于Ω，那末对称的有序对(b, a)就不属于Ω，除非$a=b$.

设Ω是E上的一个序的关系，我们就说Ω使E有序，或E被Ω有序化.

在本章前言中给出的例子是序的关系；$(a,b)\in\Omega$用下面的话来表达：a较b大，或a较b离原点远.

常常不用$(a,b)\in\Omega$，而用记号$a\leqslant b$，或记号$a\geqslant b$.

关于记号$\leqslant$，有下列几个特性：

自反性　$a\leqslant a$

传递性　$a\leqslant b$ 且 $b\leqslant c\Longrightarrow a\leqslant c$

反对称性　$a \leqslant b$ 且 $b \leqslant a \Longrightarrow b=a$

一般地，在一个集上的序的关系并不可以使任一对元素都有序．然而，如果对E的不论怎样的 a 和 b，总有$(a, b) \in \Omega$或$(b, a) \in \Omega$，于是就说E是被Ω做成全有序的．例如，实数是被关系 $a \leqslant b$ 做成全有序的．相反地，平面的点是被引言中指出的关系做成有序的，但非全有序的，自然整数也是被关系 $a \leqslant b$ 做成全有序的．

第二部分　等 价 关 系

定义——在一个集 E 上的二元关系叫做等价关系，如果$E \times E$的子集$\mathscr{R}$是自反的，对称的和传递的．

一般地，为了书面表示 $a \in E$ 和 $b \in E$ 是由$\mathscr{R}$联系着的，就写 $a \sim b$，或 $a=b(\mathrm{mod}\mathscr{R})$；后一记号读作"$a$ 按模$\mathscr{R}$等于 b"．我们也说，a 与 b 是等价的（省略掉"按$\mathscr{R}$"二字）．它的特征性质为：

自反性　$a \sim a$，

对称性 $a \sim b \Longleftrightarrow b \sim a$，

传递性　$a \sim b$ 且 $b \sim c \Longrightarrow a \sim c$．

例——设N为自然整数的集．如果$b-a$能被固定的整数m所整除，我们就说 $a \sim b$．不难看出，上面的三个性质是适合的．

等价类——在E上的一个等价关系的基本的和重要的性质是：用它可以将集 E 划分成叫做等价类的部分．

定义——设E是一集合，在它上面定义了一个等价关系．由 E 中和一个已知元素 a 等价的一切元素所成的E的一个子集A叫做等价类．

所有这些等价类的集，叫做由所考虑的等价关系做成的商集．

按照传递性，A的任意两个元素是等价的，且定义了 A．设 b

是E的不属于A的一个元素，B是与b等价的一切元素的集. 集A与集B是不相交的；实际上，如果存在一个元素c，满足$c\in A$且$c\in B$，于是有$a\sim c$(因为$c\in A$)，且$b\sim c$(因为$c\in B$)；然而$a\sim c$且$c\sim b\Longrightarrow a\sim b$，这与$b\notin A$的假设矛盾. 这样，若取来考察的是$E$的一切元素，那就形成把$E$分为等价类的一个划分.

同样，设整数a与b间的等价关系用下列方式定义：$a-b$能被整数m整除. 于是，不能被m整除，余数相同的那些整数组成一等价类，就恰有m个等价类，它们是下列的各类

$$(1, 1+m, 1+2m, \cdots), (2, 2+m, 2+2m), \cdots$$

$$(m, 2m, 3m, \cdots).$$

一个等价类是由这个类的任何一个元素来确定的. 这样的元素也叫做这个类的*代表元*.

等价类和商集是数学基本概念中的两个概念. 在开头学习时就要遇到这两个概念. 这样，直线之方向的概念，在实际上就是等价类的概念，这等价类是互相平行的直线的集所形成. 每一个这样的直线就是一个方向的代表，而这方向就是一等价类. 所有一切方向的集用平行关系构成一切直线集的商集.

在本教程中我们将看到许多这样的例子.

我们要特别指出一个熟悉的例子，这就是将来还要回头看的有理数. 在分数间建立一个等价关系："$p/q\sim p'/q'$"表示$pq'=qp'$. 相应的等价类叫做"有理数". 于是，有理数集就是用上述等价关系作成的集$N\times N$的一个商集.

在上面一段中，正如在其他场合我们每次都明确指出的那样，习惯用法是以符号$=$替换符号$\sim$，然而于此$=$已不再表示逻辑恒等了.

第三部分　组 合 规 律

§1　定　　义

代数的对象是研究计算的规则．最简单的法则就是加法与乘法．这两个法则将两个数的数对对应于一第三个数，叫做和或积．我们以一般的方式定义集 E 上的组合规律．

集 E 上的一个内组合规律就是从积 $E\times E$ 到 E 内的一个映射．

例："两个矢量的几何和"．

E, F 是两个集，E 上的一个外组合规律就是从集 $E\times F$ 到 E 内的一个映射．

例："矢量乘以实数的积"．

如果 $a\in E$, $b\in F$, 且 f 是从 $E\times F$ 到 E 内的一个映射，$f(a,b)$ 是 E 的一个元素，它就是在 $(a,b)\in E\times F$ 的值．于是，组合规律用函数符号 f 来表示；且如果 c 是将 f 作用于 (a,b) 的结果．就应写作 $c=f(a,\ b)$ 或 $f(a,b)=c$．然而我们将要看到，常采用另外的记号．

在组合规律的研究中，要涉及到每一特定的场合都会碰到的一些概念，现在我们就来系统地对他们考察一下．

记号——不用函数的符号，例如不用 $f(a,b)=c$ 来表示组合规律，而是一般地用一个特殊的符号，像 $+$ 表示加法：$a+b=c$，$\cdot$ 表示乘法 $a\cdot b=c$；乘方或幂表示为：$a^b=c$，为了能研究所有这些规律的共同性质，我们使用唯一的符号 $\top$，写作 $a\top b=c$，读作 a 与 b 组合而给出 c。

可交换性——一个内规律叫做可交换的，如果对不论怎样的a和$b\in E$，有$a\top b=b\top a$.

例如，整数的加法和乘法是可交换的，而乘方a^b就不是可交换的($2^3=8$, $3^2=9$).

可结合性——一个内规律叫做可结合的，如果对不论怎样的$a, b, c\in E$，有$(a\top b)\top c=a\top(b\top c)$.

这里应该考虑元素的次序. 加和乘是可结合运算而乘方是不可结合的(例如，$(2^2)^3=64$, $2^{(2^3)}=256$).

当一个规律同时是可结合的和可交换的，我们就可证明(但我们不在这里证明)：在$a_1\top a_2\top\cdots\top a_n$这样形式的表达式中任意两个元素可交换次序，且可将多个元素用一个元素来替换，这个元素就是将这规律作用于多个元素而得的结果.

当一个可结合和可交换的规律是用符号$+$来表示时，就可令

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n;$$

当此规律是用符号$\cdot$来表明时，就可令

$$\prod_{i=1}^{n}a_i=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n.$$

序标i叫做运算序标；它可以用完全不同的字母来代替，例如有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{h=1}^{n}a_h=\sum_{k=1}^{n}a_k;\quad \prod_{i=1}^{n}a_i=\prod_{h=1}^{n}a_h=\prod_{k=1}^{n}a_k.$$

正则元素——一个元素$a\in E$叫做关于一个内规律$\top$是正则的，如果对于任意的x和$y\in E$，等式$a\top x=a\top y$与$x\top a=y\top a$导致$x=y$.

于是就说等式可用a来简化.

当内规律不是可交换的，那就应该区别左正则元素，也就是 $a\top x=a\top y\Longrightarrow x=y$，和右正则元素，也就是 $x\top a=y\top a\Longrightarrow x=y$.

随之，词句"a 是 $\top$ 的正则元素"表示 a 是右正则和左正则的.

例——设 a 是一个整数 $\neq 0$ 或 $\neq 1$，则 $a^x=a^y\Longrightarrow x=y$，反之，由 $1^x=1^y$ 不能推得 $x=y$，于是 0 和 1 不是左正则的.

此外，$x^a=y^a$ 除了 $a=0$ 以外都导致 $x=y$，于是 0 不是右正则的.

对于乘法来说，除 0 以外的一切数都是正则的，因为 $0\cdot x=0\cdot y$ 并不导致 $x=y$.

对于加法来说，一切数都是正则的.

中性元素——设存在一个元素 $e\in E$，使得对不论怎样的 $x\in E$，$e\top x=x$，e 就叫做*左中性元*. 同时，$e'\in E$ 叫做*右中性元*，如果对任何 $x\in E$，有 $x\top e'=x$.

在内规律的场合，一个元素 e 说是*中性的*，如果对不论怎样的 $x\in E$，有 $e\top x=x\top e=x$.

如果存在一个中性元素 e（即是说它是左中性和右中性的），那末它是唯一的，因为，如果还有一个其他的 e'，那末对任意的 $y\in E$，就有 $e'\top y=y\top e'=y$. 于是，在 $x\top e=x$ 中，以元素 e' 作为 x，就有 $e'\top e=e'$. 再在 $e'\top y=y$ 中，以 e 作为 y，就有 $e'\top e=e$，于是得 $e=e'$.

于是，0 是加法的中性元素，是乘法的中性元素. 乘方的运算没有左中性元素，因为 $e^x=x$ 对任何的 x 都是不可能的；相反地，$x^e=x$ 对任意的 x 给出 $e=1$，1 是右中性元素. 乘方运算因为没有左中性元素，所以它没有中性元素.

对映射的组合规律 $f\circ g$ 来说，恒等映射是中性元素.

对称元素——设 $\top$ 是 E 上的一个内规律，有一个中性元素 e. E 的一个元素 $\bar{a}$ 叫做 E 的一个元素 a 的对称元素，如果有 $\bar{a}\top a$

$=e$.

例——如果 a 是一实数，则 $-a$ 是加法的对称元素.

如果 a 是非零实数，则 $\frac{1}{a}$ 是 a 对乘法的对称元素.

如果 e 是中性元素，则 e 是它自己的对称元素，因为 $e\top e=e$.

当规律 $\top$ 是可交换的，且当 a 具有一对称元素 $\bar{a}$ 时，我们有 $\bar{a}\top a=a\top\bar{a}$. 于是 $a\top\bar{a}=e$. 因而 a 也是 $\bar{a}$ 的对称元素，这可写作 $\bar{\bar{a}}=a$.

当规律 $\top$ 是可结合但不一定是可交换的时，并且，如果 a 是一正则元素且具有一个对称元素 $\bar{a}$，则有

$$a\top\bar{a}\top a=a\top(\bar{a}\top a)=a\top e=a.$$

可是因为 e 是中性元素，因而有 $e\top a=a$. 于是

$$(a\top\bar{a})\top a=e\top a.$$

因为 a 是正则的，就有 $a\top\bar{a}=e$.

于是，当规律 $\top$ 是可结合的，且 a 是正则的时，$\bar{a}\top a=e$ 导致 $a\top\bar{a}=e$.

当规律 $\top$ 是可结合的，且 a 是正则的时，如果 a 具有一个对称元素 $\bar{a}$ 时，它是唯一的.

因为，如果有另外一个元素 a'，使得 $a'\top a=e$，因 a 是正则的，根据上面的结果：$a\top a'=e$. 由此：

$$(\bar{a}\top a)\top a'=e\top a'=a',$$
$$\bar{a}\top(a\top a')=a',$$
$$\bar{a}\top e=a',$$
$$\bar{a}=a'.$$

分配律——如果在 E 上定义了两个组合规律，记为 $\top$ 和 $\perp$，规律 $\top$ 叫做关于规律 $\perp$ 是可分配的，如果对不论怎样的 a, b, c，有

$$a\top(b\perp c)=(a\top b)\perp(a\top c).$$

这样，数的乘法关于加法是可分配的，因为

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

然而加法对于乘法不是可分配的，因为对不论怎样的 a, b, c，不成立下述公式：

$$a+bc\neq(a+b)(a+c)$$

集的并与交的运算都是组合规律；我们不难证实，对任意的集 A, B, C，成立

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$

这两规律中的每一个对另一个都是可分配的.

§2 同　构

定义——设有两个相异或相交的集 E 和 F，假定 E 具有一个内规律 $\top$，F 具有一个内规律 $\perp$. 从 E 到 F 上的一个一一对应映射 f，它使得对不论怎样的 $a, b\in E$，成立

$$f(a\top b)=f(a)\perp f(b),$$

则把它叫做从 E 到 F 上的同构；我们也说，相对于规律 $\top$ 和 $\perp$，E 和 F 同构.

例 1——E 是正、负整数的集 $\mathbf{Z}$；规律 $\top$ 是加法；F 是 $2^n(n\in\mathbf{Z})$ 这样形式的数集，$\perp$ 是乘法. 由 $n\to2^n$ 定义的映射 f 是一同构，因为有 $n+n'\to2^{n+n'}$，这就是说 $f(n+n')=f(n)\cdot f(n')$，映射是一一对应的，因为，$2^p=2^q$ 导致 $p=q$.

例 2——设 E 是严格的正实数；规律 $\top$ 是乘法；设 F 是一切实数的集，规律 $\perp$ 是加法. 映射 $x\to\mathrm{Log}x$，也就是 $f(x)=\mathrm{Log}x$，是一个同构，因为 $\mathrm{Log}(x\cdot y)=\mathrm{Log}x+\mathrm{Log}y$，还有，映射是一一对应的，因为 $\mathrm{Log}u=\mathrm{Log}v$ 导致 $u=v$（见三卷，四章）.

同构容许对E中的运算$a\top b$用下列的运算来替换：我们作出F的$a'=f(a)$和$b'=f(b)$，且在F内作运算$\perp$，也就是说作$a'\perp b'=c'$；最后得：

$$a\top b=f^{-1}(c')$$

如果F里的运算$\perp$比E里的运算$\top$更简单，上面的替换法就有好处．比如，由于有了对数，人们可以把乘法用加法来替换，就是这种情况．

设两个集的每一个具有一个或多个内规律，当我们能在这两个集之间建立一个同构，通过这同构使这两集相互对应．那就常做到了使这两个集等同的结果，也就是说，我们可以利用同样的符号来表示它们的元素，和利用那个使得在同构下达到相互对应的内规律的符号．在这套教材的有关章节中，我们将提供这种等同的许多例子．

代　　数

第四章 自然整数

§1 定 义

从集合论的公理出发，就有可能建立一个具有下列性质的集 N：

1° N是一无限的，全有序的集.

2° N的每一子集都具有一个最小的元素.

3° N的具有一个最大元素的子集都是有限的.

一个这样的集叫做自然整数集（回忆一下：有限的或无限的集的概念能够从集合论(第二章，§2)推导出来.）

这里我们只想指出以集合论为基础的、达到整数的道路，且我们只限于承认这样的集N的存在.

根据性质2°，集N本身有一最小元素. 除去了这个最小元素，剩下的集仍具有性质1°，2°，3°. 一般地，可以接连除去有限个最小元素，所得到的集仍然是集N. 于是存在集N的多个样本，然而总能约定其中一个作为标准的，这就是通常用符号1, 2, 3, 4, …来表示其相继的元素的集.

设a是N的一个元素. 严格大于a的、N的元素的集是N的一个子集. 根据性质2°，这个子集有一个最小元素，我们将它记为a^+，叫做a的后继整数. 相反地，设b是N的一个元素；根据性质3°，小于或等于b的、N的元素是有限的；在上述这个集中除去b而得到的、N的子集，结果是一有限集或空集；如果这是有限集，那末它有一最大元素，因为它是全有序的；如果a是这最大元素，

于是有 $a^+=b$. 这样, N 的每一元素, 除去最小元素——通常用符号 1 表示, 都是 N 的一个元素的后继整数; 我们说: 当 $a^+=b$ 时 a 是 b 的先行元素.

递推推理——在研究集 N 中的最重要工具是递推推理, 它由于下列的过程组成:

假设我们已建立下列两个命题:

1° 一个命题 P 假设对某个整数 a 为真, 导致 P 对 a 的后继整数也为真.

2° 至少存在一个整数 b, 对于它命题 P 为真.

于是, 这两个命题导致 P 对大于或等于 b 的一切整数也为真.

实际上, 考虑大于 b 的整数集, 对于这些整数, 命题 P 不真; 这个集是 N 的一个子集, 于是它有一个最小元素 c, 而且有 $c>b$, 因为对于 b 命题为真. 设 c' 是 c 的先行元素; 于是 $c'\geqslant b$, 且 P 对 c' 为真; 根据命题 1°, P 对 c 为真, 由此而得到矛盾, 因而 c 不存在. 因而 P 对大于或等于 b 的、N 的一切整数为真. 特别, 如果 b 是 N 的最小整数, 也就是说 $b=1$, 则 P 对 N 的一切整数为真.

§2 运　　算

1° 加法——用符号 1 来表示 N 的最小元素. 作为定义, 我们令 $a+1=a^+$; 如果 b 是 N 的异于 1 的某个元素, 且 b^- 是它的先行元素, 于是 $a+b=(a+b^-)^+$, 这样, 我们就用递推法定义了内组合规律, 叫做加法. 我们要指出, 选定了 N 的第一个元素 1 后, 就不能再从 N 中除去. 我们不停留于证明下述的命题, 它们是容易用递推法证明的, 但其细节是冗长的. 我们有

$$a+b=b+a \qquad \text{(交换律)}$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c \quad \text{(结合律)}$$

于是，在多个整数的和中，可以将两相加项互换位置，或者将若干个整数用其和来替换．

每个整数对加法是正则的：

$$a+x=a+y \text{ 导致 } x=y.$$

相反，对于加法，它没有中性元素．

2° 乘法——设 $a\cdot 1=a$；如果 b 是一个异于 1 的整数，且 b^- 是它的先行元素，又设 $a\cdot b=a\cdot b^-+a$．这样，用递推法又定义了一个新的内组合规律，叫做*乘法*．如同加法的情况那样，不难建立下列命题：

$$a\cdot b=b\cdot a \qquad \text{（交换律）}$$

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c \qquad \text{（结合律）}$$

于是，在多个整数的积中，可以将两相乘项互换位置，或者将若干个整数用其积来替换．

每一个整数对乘法来说都是*正则的*：

$$a\cdot x=a\cdot y \text{ 导致 } x=y.$$

整数 1 是*中性元素*，因为对不论怎样的整数 x，有 $x\cdot 1=1\cdot x=x$．

具有对称元素的唯一元素是 1．

最后，乘法对于加法是*可分配的*；我们有：

$$a(b+c)=ab+ac.$$

这个性质是乘法的特征性质，有时某一种可交换的或不可交换的规律对于另一个可交换的规律是可分配的，也常常引伸而将它叫做乘法（例如两个矢量的标积，矢量积等等）．

§3 可 数 集

定义——可数集的概念可归结到自然整数集的概念．一个集

叫做可数的，如果它的势等于集N的势.

这就是说：存在一个从N到E上的一一对应映射，也就是说，对每一个整数$n\in N$，可有一个且只有一个$a\in E$和它对应，且$a=f(n)$，$n=f^{-1}(a)$.

一般地，用a_n表示E的对应于n的元素，并把n叫做序标．于是，一个可数集是这样的一个集，它的每个元素都可以整数为序标.

现在我们要指出，逆命题是非真的，一个序列的元素的集可能不是可数的，而是有限的．例如，对不论怎样的n用$x_n=1$定义的序列(见§4)是只有唯一元素1的集，于是这个集是有限的，它的势不等于N的势.

可数集的例——偶数集是可数的；实际上，映射$n\to 2n$是从N到N'上的一一对应映射.

定理——有限个有限集或可数集的积是有限集或可数集.

设$E_1,\cdots,E_k$是可数集；设a_{hn}是E_h的元素，这里$h=1,\cdots,k$，且$n\in N$；$E_1\times E_2\times\cdots\times E_k$的一个元素是一个元素组$(a_{1n_1},a_{2n_2},\cdots,a_{kn_k})$．于是，我们来考虑这样的元素组，在其中$n_1+n_2+\cdots n_k$等于一给定的整数$m$；这样的元素组的个数是有限的，于是我们可以将它编号．如果我们给m以相继的数值$k,k+1,k+2,\cdots$，于是我们就可给每一元素组一个号码；反过来，这样对于每个整数就对应着一个元素组，唯一的元素组，而此元素组又以整数为其编号．因此，就存在一个从$E_1\times E_2\times\cdots\times E_k$到$N$上或$N$的一个有限子集上的一一对应映射.

特别，$N\times N$是可数的；结果，分数的集是可数的.

§4 序　　列

定义——(见第二章, §1)从N到集E里的一个映射叫做E的元素的一个*序列*.

映射不必是一一对应的, E的同一个元素可能是多个不同整数的像. 可以用元素下附整数序标的写法来记序列; 然而序列的元素不必是不同的. 一个序列的不同元素的个数或是有限的, 或是可数的.

我们说两个序列$(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$和$(y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots)$相等, 如果对一切$n$有$x_n = y_n$(这里相等是恒等的意思).

重序列的定义——从$N\times N$到E里的一个映射叫做*重序列*.

一个这样的序列用两个序标来表示; $a_{p,q}$是E的对应于$N\times N$的有序对(p, q)的元素. 重序列的不同元素的个数也是有限的或可数的. 两个重序列的相等也是其各元素恒等的意思.

第五章　整数概念的扩张：相对整数；有理数

第一部分　组合规律的对称化

在自然整数集里，我们定义了可结合的和可交换的两个内规律，它们使得每个元素都是正则的。然而，“逆”运算则不总是可能的，例如，并不总是存在一个整数 x，可使 $a+x=b$；这等式只在$b>a$ 时成立，它在 $b\leqslant a$ 时是不可能成立的。

我们现在来试一试，从N出发构造一个新集 Z，在其中能定义一个内规律而免除了上述的不可能性，且N能与新集Z的一个子集同构，因此，我们也就能将N与Z的这个子集“等同”。

为了说明这个方法的思路，我们把加法解释为砝码的相加，而这些砝码的值都是整数。在天平的一个等盘上放一个 a 克的砝码和一个 b 克的砝码；在另一个等盘上放一个 c 克的砝码；如果$a+b=c$，天平就处于平衡状态，为了衡量一个重量 x 尚未知道的物体，可将它放在一个等盘上，用已知的砝码放在另一个等盘上而去计算物重；得到 $a=x$。然而我们也可以衡量一个连带包皮的物体，包皮重是补充的砝码m。于是置 $a+m=x+m$ 就使天平平衡。于是用有序对$(a+m, m)$去计量物重 x，和用有序对$(a; 0)$去计量是一样的。这样，我们就要研究整数有序对$(a, a')=A$，也就是说要考虑积 $N\times N$，且当这两个有序对衡量同一物重，也就是当 $a_1+a_2'=a_2+a_1'$ 时，建立一个等价关系$(a_1, a_1')=A_1\sim(a_2, a_2')=A_2$。

如果“减法”是可能的，这个条件写作 $a_2'-a_2=a_1'-a_1$；然而因

为减法并不像加法那样，不总是可能的，所以我们只限于叫做加法，而不另立名称.

具备可结合、可交换组合规律的，其中每一元素都是正则的集的对称化——我们现在来说明，投影运算一般地是可能的，且可应用到这样的集E的一切元素上，这个集具备可结合、可交换的组合规律，记作$\top$，E的每一元素都是正则的（在上面的情况，$E=N$，而$\top$是$+$）.

考虑集$E\times E$；这个集的一个元素A是一个有序对(a, a')，其中$a\in E, a'\in E$. 如果有$a_1\top a_2'=a_2\top a_1'$，我们就说，$A_1=(a_1, a_1')$与$A_2=(a_2, a_2')$等价，我们要说明，这定义了一个等价关系：

1° **自反性**：$A\sim A$；实际上，如果$A=(a, a')$则有

$$a\top a'=a\top a'.$$

2° **对称性**：如果$A_1=(a_1, a_1')$与$A_2=(a_2, a_2')$是等价的：

$$a_1\top a_2'=a_2\top a_1',$$

于是，因为$a_2\top a_1'=a_1\top a_2'$，我们又有

$$A_2\sim A_1.$$

3° **传递性**：设$A_3=(a_3, a_3')$. 如果$A_1\sim A_2$且$A_2\sim A_3$，则有

$$a_1\top a_2'=a_2\top a_1' \text{ 且 } a_2\top a_3'=a_3\top a_2',$$

由此就有

$$(a_1\top a_2')\top(a_2\top a_3')=(a_2\top a_1')\top(a_3\top a_2').$$

交换律与结合律使我们能交换运算的次序，据此而有

$$a_1\top a_3'\top a_2\top a_2'=a_3\top a_1'\top a_2\top a_2'.$$

元素$(a_2\top a_2')$是正则的，这就导致

$$a_1\top a_3'=a_3\top a_1' \quad \text{也就是说} \quad A_1\sim A_3.$$

在$E\times E$内有了一个等价关系，我们就能考虑等价类. 等价类的集是一个新集$\mathscr{E}$，即用等价关系做成的$E\times E$的商集.

在这个集$\mathscr{E}$中，我们来定义一个组合规律，暂且用$\perp$来表示.

设 $\alpha=A_1$ 的等价类 $=A_2$ 的等价类$(A_1\sim A_2)$，$\beta=B_1$ 的等价类 $=B_2$ 的等价类$(B_1\sim B_2)$；$\alpha\in\mathscr{E}$, $\beta\in\mathscr{E}$.

作为定义，我们设 $\alpha\perp\beta=$ 有序对 $G_1=(a_1\top b_1,\ a_1'\top b_1')$的类. 这个类不依赖 α 和 β 中所选择的代表元素. 事实上，在 α 中用 $A_2\sim A_1$ 替换 A_1, 则有 $G_2=(a_2\top b_1, a_2'\top b_1')$；且有 $G_1\sim G_2$, 因为可验证

$$(a_1\top b_1)\top(a_2'\top b_1')=(a_2\top b_1)\top(a_1'\top b_1').$$

由于结合性和交换性, 此式可写作

$$a_1\top a_2'\top b_1\top b_1'=a_2\top a_1'\top b_1\top b_1';$$

左右两端是相等的; 因为 $a_1\top a_2'=a_2\top a_1'$, $G_1\sim G_2$ 得证.

类 α 和 β 可以结合而成一个类, 记为 $\alpha\perp\beta$, 这就是说, 我们在商集 $E\times E$ 上用～定义一个内组合规律.

这个规律是可交换的, 因为

$$G_1=(a_1\top b_1, a_1'\top b_1')=(b_1\top a_1, b_1'\top a_1').$$

它也是可结合的，因为，如果 $\gamma=C_1$ 类，其中 $C_1=(c_1, c')$, 则有

$$\begin{aligned}(\alpha\perp\beta)\perp\gamma&=[(a_1\top b_1)\top c_1, (a_1'\top b_1')\top c_1']\text{类}\\&=[a_1\top(b_1\top c_1), a_1'\top(b_1'\top c_1')]\text{类}\\&=\alpha\perp(\beta\perp\gamma).\end{aligned}$$

每一元素对这规律是正则的, 因为设

$$\xi=(x, x')\text{类和 }\eta=(y, y')\text{类},$$

又设 $\alpha\perp\xi=\alpha\perp\eta$, 也就是说:

$$(a\top x, a'\top x')\text{类}=(a\top y, a'\top y')\text{类},$$

或者还有

$$(a\top x)\top(a'\top y')=(a\top y)\top(a'\top x')$$

于是

$$x\top y'=x'\top y,\quad \text{由此}(x, x')\sim(y, y')\text{且 }\xi=\eta.$$

我们来证明：规律$\perp$具有一个中性元素，且每个元素具有对称元素，

事实上，要寻求一个$\zeta=(z,z')$类，使$\alpha\perp\zeta=\alpha$对任意的α成立，这样，对不论怎样的$a\in E$和$a'\in E$，我们应该有$(a\top z, a'\top z')\sim(a,a')$，于是$(a\top z)\top a'=a\top(a'\top z')$，由此$z=z'$。反过来说，两个元素相等的每一有序对$(z,z)$是相互等价的，它们的类$\zeta$具有中性元素的性质。

于是，设$\alpha=(a,a')$类，寻求$\bar{\alpha}=(\bar{a},\bar{a}')$类，使得$\alpha\perp\bar{\alpha}=\zeta$，因而$(a\top\bar{a}, a'\top\bar{a}')\in\zeta$或$a\top\bar{a}=a'\top\bar{a}'$。若取$\bar{a}=a'$，和$\bar{a}'=a$，这个关系就被满足，于是$\bar{\alpha}=(a',a)$类，且这个类是唯一的(第三章)。

同构——我们来证明：具有规律$\perp$的集$\mathscr{E}$(用$\sim$做成的$E\times E$的商集)包含一个子集E'，它同构于具有规律$\top$的E。

事实上，设E'是用有序对$(a\top x, a)$定义的类的集，这里a和$x\in E$。

设$\xi=(a\top x, a)$类。于是ξ是$\mathscr{E}$的一个元素，且一切ξ的集定义了E'。

使对每一ξ有x与之对应。我们来定义从E'到E内的映射f，且写作：$x=f(\xi)$。

设$\eta=(b\top y, b)$类是E'的另一元素：$y=f(\eta)$。

可是

$$\xi\perp\eta=(a\top x\top b\top y, a\top b)\text{类}=((a\top b)\top(x\top y), (a\top b))\text{类}$$
$$=(c\top(x\top y), c)\text{类，其中 } c=a\top b.$$

于是$\xi\perp\eta\in E'$，且根据f的定义，我们有

$$x\top y=f(\xi\perp\eta)=f(\xi)\top f(\eta)$$

从E'到E上的映射显然是一一对应的，且将$\xi\perp\eta$变换为$f(\xi)\top f(\eta)$；f是一同构。

今后，我们将集E和用$\sim$做成的$E\times E$的商集$\mathscr{E}$的这个子集

E' 等同，我们就用$\top$这符号来记在 $\mathscr{E}$ 上定义的这个规律，以代替迄今为止使的符号$\perp$；我们说，已将规律$\top$延伸到商集.

我们要指明，$\top$的逆运算总是可能的，也就是说，如果 α 和γ是两个已给的类，则总存在一个类 β，使得 $\alpha\top\beta=\gamma$. 实际上，我们应该有

$$\bar{\alpha}\top(\alpha\top\beta)=\bar{\alpha}\top\gamma, \text{ 由此有 } (\bar{\alpha}\top\alpha)\top\beta=\bar{\alpha}\top\gamma.$$

且因 $\bar{\alpha}\top\alpha=\zeta$ 是中性元素，故有 $\beta=\bar{\alpha}\top\gamma$.

特别，如果对于一个元素 $a\in E$ 逆运算是可能的，则在集 $\mathscr{E}$ 内，逆运算仍是可能的；其结果是在同构下的对应的类.

这样构成的商集叫做具有规律$\top$的集E的对称集.

它具有下列性质：

1° 它有一个组合规律；

2° 这个规律是可结合的；

3° 它有一个中性元素；

4° 每一元素都有一个对称元素.

具有上述四个性质的每一个集叫做一个群；如果这个规律还是可交换的，它就叫做可交换群，或阿贝尔(Abel)群. 商集$\mathscr{E}$对运算$\top$也是一个可交换群.

第二部分 相对整数，Z

我们将第一部分中得到的结果应用于自然整数集N中的加法运算. N对于加法的对称集是一个可交换群，它由自然整数有序对的等价类组成，其中，如果 $a_1+a_2'=a_2+a_1'$，则$(a_1, a_1')\sim(a_2, a_2')$；群的元素叫做相对整数；它们的集常用 Z 来表示.

中性元素 ζ 用符号 0 来表示；α 的一个对称元素 $\bar{\alpha}$ 用$(-\alpha)$来

表示，叫是α的相反数．在Z中减法是不受限制地可行的：如果已给定α和$\gamma\in Z$，且如果要求β，使得$\alpha+\beta=\gamma$，则$\beta=\gamma+\bar{\alpha}=\gamma+(-\alpha)$；后者也可用$\gamma-\alpha$来表示．

序的关系——Z的与N同构的子集是由$(a+x, a)$这种形式的有序对的类所组成的，其中$a\in N$；这个类对应于$x\in N$；于是这个类的形式为(a, a')，其中$a>a'$．我们也说，如果$\alpha=(a, a')$类，其中$a>a'$，则这样的类是严格地为正，并表示为$\alpha>0$．

我们在Z的两个元素间建立下列的关系：$\alpha\geqslant\beta\Longleftrightarrow\alpha-\beta>0$或$\alpha=\beta$．

这是序的关系．事实上这个关系具有下列性质：

自反性——因为$\alpha-\alpha=0$，有$\alpha\leqslant\alpha$；

传递性——$\alpha\leqslant\beta$且$\beta\leqslant\gamma\Longleftrightarrow\beta-\alpha\in N_0$，$\gamma-\beta\in N_0$，这里$N_0$表示$Z$的与$N$同构的子集，而它有中性元素0．

相加一下，我们有

$$(\beta-\alpha)+(\gamma-\beta)=\beta+(-\alpha)+\gamma+(-\beta),$$

且
$$\beta+(-\beta)=0,$$

于是
$$(\beta-\alpha)+(\gamma-\beta)=\gamma+(-\alpha)=\gamma-\alpha.$$

然而，N_0的两个元素的和属于N_0，于是正好有$\gamma-\alpha\in N_0$且$\alpha\leqslant\gamma$．

反对称性——$\alpha\leqslant\beta$且$\beta\leqslant\alpha\Longleftrightarrow\beta-\alpha\in N_0$且$\alpha-\beta\in N_0$；然而，有$\alpha-\beta+(\beta-\alpha)=0$，于是，$\beta-\alpha$是$\alpha-\beta$的对称元素．如果$(u, v)$是$\beta-\alpha$的类的一个有序对，则$(v, u)$就是$\alpha-\beta$的类的一个有序对．可是，$(u, v)$的类$\in N_0$表示$u\geqslant v$且$(v, u)\in N_0$表示$v\geqslant u$，于是有$u=v$和$\alpha-\beta=\beta-\alpha=0$；随之而有$\alpha=\beta$．

集Z是由这个序关系做成的全有序集，因为，如果$\alpha\in Z$和$\beta\in Z$，且如果不成立$\alpha\geqslant\beta$，这也能说，如果(u, v)是$\alpha-\beta$类的一个有序对，则不存在$u\geqslant v$；然而这就有$v>u$，且(v, u)的类，即$\beta-\alpha\in N$，

于是 $\beta>\alpha$. 这个论证证明：我们有一个将 Z 分割成三个集的划分，一个是与 N 同构的子集，一个是由这子集的每一元素的相反元素组成的子集，设为 $-N$，和一个元素 0.

这样引入的序的关系与加法是相容的，也就是说，如果 $\alpha\leqslant\beta$，则对不论怎样的 $\gamma\in Z$，关系 $\alpha+\gamma\leqslant\beta+\gamma$ 成立.

最后要指出，Z 是可数集.

N 中的乘法扩张到 Z 中——集 N 还具有另一个组合规律——乘法. 不能先验地确保：这个规律能协调地延伸到 Z 中去. 为了能够延伸，必须使与 N 同构的那个子集的元素的乘法，与 N 的乘法相重合，也就是说，如果 $a=a'+x$，$b=b'+y$ 和 $c=c'+xy$，就有 (a,a') 类 $\cdot(b,b')$ 类 $=(c,c')$ 类.

将 c 和 c' 表示为 a,a',b,b' 的函数，我们有

$$ab'=a'b'+b'x;\quad ba'=a'b'+a'y,$$

最后得

$$ab=(a'+x)(b'+y)=a'b'+b'x+a'y+xy;$$

在等式两边加上 $a'b'$，并考虑到前两个等式即得

$$ab+a'b'=ab'+a'b+xy.$$

从而应该取 $c=ab+a'b'$，且 $c'=ab'+a'b$.

于是，我们应该一般地定义积 $\alpha\cdot\beta$，这里 $\alpha=(a,a')$ 类，$\beta=(b,b')$ 类，定义 $\alpha\cdot\beta=(ab+a'b',ab'+a'b)$ 类.

这个定义不依赖于在类 α 中所选定的代表元，因为，如果 $(a_1,a_1')\in\alpha$，$(a_2,a_2')\in\alpha$，就有

$$(a_1b+a_1'b',a_1b'+a_1'b)\sim(a_2b+a_2'b',a_2b'+a_2'b),$$

或

$$a_1b+a_1'b'+a_2b'+a_2'b=a_1b'+a_1'b+a_2b+a_2'b',$$

也就是说

$$(a_1+a_2')b+(a_1'+a_2)b'=(a_1+a_2')b'+(a_1'+a_2)b,$$

然而 $a_1+a_2'=a_2+a_1'$.

性质——这样定义的乘法是可交换的，根据它的定义这是显然的.

乘法也是可结合的，因为设 $\gamma=(c,c')$类，则有

$$(\alpha\beta)\gamma=[(ab+a'b')c+(ab'+a'b)c',(ab+a'b')c'+(ab'+a'b)c]\text{类}=\alpha(\beta\gamma).$$

我们来求正则元素：设$\alpha\beta=\alpha\gamma$；于是按照前面的说明，应该有

$$ab+a'b'+ac'+a'c=ab'+a'b+ac+a'c',$$

或者

$$a(b+c')+a'(b'+c)=a(b'+c)+a'(b+c').$$

如果 $\beta\neq\gamma$，则有 $b+c'\neq b'+c$；设 $b+c'>b'+c$，于是有

$$a[(b+c')-(b'+c)]=a'[(b+c')-(b'+c)],$$

于是 $a=a'$ 且 $\alpha=0$. 从而，Z除去 0 外的每一元素对乘法都是正则的，并且有：对任意的 α, $0\cdot\alpha=0$.

中性元素——我们来寻求一个元素 $\varepsilon\in Z$，它使得对不论怎样的 $\alpha\in Z$，有 $\alpha\cdot\varepsilon=\alpha$. 设$(u,u')$是 ε 的类的一个有序对；于是应该有

$$au+a'u'+a'=au'+a'u+a.$$

特别取 $\alpha>0$，于是 $a>a'$. 于是我们可以写出

$$u(a-a')=(u'+1)(a-a'),$$

于是 $u=u'+1$ 且$\varepsilon=(u'+1,u')$类，它等同于自然整数 1. 容易验证，对于 ε，当 $\alpha\leqslant0$ 时也有 $\alpha\cdot\varepsilon=\alpha$.

对称元素——如果存在 $\bar{\alpha}$，使 $\alpha\cdot\bar{\alpha}=\varepsilon$，试找出这个 $\bar{\alpha}$；于是 $\alpha\neq0$：设$(\bar{a},\bar{a}')$是 $\bar{\alpha}$ 类的一个有序对.

应该有 $a\bar{a}+a'\bar{a}'=a\bar{a}'+\bar{a}a'+1$.

首先设 $a>a'$, 于是能够写出

$$\bar{a}(a-a')-\bar{a}'(a-a')=1 \text{ 或} (\bar{a}-\bar{a}')(a-a')=1,$$

于是有 $a-a'=1$ 和$\bar{a}-\bar{a}'=1$, 于是唯一可能的元素 α 是 $\alpha=1$, 且 $\bar{\alpha}=1$.

如果 $a<a'$, 同样有

$$\bar{a}'(a'-a)-\bar{a}(a'-a)=1 \text{ 或} (\bar{a}'-\bar{a})(a'-a)=1,$$

于是 $a'-a=1$ 和 $\bar{a}'-\bar{a}=1$, 唯一可能的元素就是 -1, 而且它的对称元素也是 -1.

符号规则——考虑$(-\alpha)$被 β 乘的积.

我们有 $-\alpha=(a',a)$类, 于是

$$(-\alpha)\cdot\beta=(a'b+ab', a'b'+ab)\text{类}=(-\alpha\beta),$$

于是$(-\alpha)$被 β 乘的积是与 $\alpha\beta$ 的相反的类.

我们还有 $(-\alpha)\cdot(-\beta)=\alpha(-\beta)$ 的相反的类, 也就是说 $(-\alpha\beta)$的相反的类, 因而它就是 $\alpha\beta$.

乘法对于加法的分配性——我们有:

$$\begin{aligned}\alpha(\beta+\gamma)&=[a(b+c)+a'(b'+c'), a(b'+c')+a'(b+c)]\text{类}\\&=[(ab+a'b')+(ac+a'c'),\\&\qquad (ab'+a'b)+(ac'+a'c)]\text{类}\\&=\alpha\beta+\alpha\gamma.\end{aligned}$$

我们要指出, Z 中的乘法和序的关系是不相容的, 因为, 如果 $\alpha\geqslant\beta$, 则对任意的 $\gamma\in Z$, 并不总成立 $\alpha\gamma\geqslant\beta\gamma$, 因为这意味着 $\alpha\gamma-\beta\gamma\geqslant0$, 也就是$(\alpha-\beta)\gamma\geqslant0$, 而这除非 $\gamma\geqslant0$, 才是可能的.

在集 Z 中, 我们能在任意两个元素间做加法和减法. 此外, 还可将任意两个元素相乘 (一般地讲, 不能将两个任意元素相除). 集 Z 是环的第一个例子.

第三部分　有　理　数

§1　定义，运算

在 Z 中乘法的逆运算，即除法不总是可能的．现在，我们通过把对称化的方法应用于乘法，而使集 Z 扩张．

然而 Z 的每一元素不皆是正则的；弃去非正则元素 0，这样得到的新集，即 0 以外的一切相对整数的集记为 Z'．于是，乘法就是在 Z' 上的一个可结合、可交换的内规律，而 Z' 的每一元素都是正则的．我们来建立 Z' 的对于乘法的对称元素．

考虑 $Z'\times Z'$，也就是有序对 (a, a')，这里 $a\in Z'$ 和 $a'\in Z'$，一个这样的有序对叫做一个分数，通常写成 a/a'，这里 a 是分子，a' 是分母（我们指出，暂时要设 $a\neq 0$ 和 $a'\neq 0$）．于是，我们来建立等价关系：

$$\frac{a_1}{a_1'}\sim\frac{a_2}{a_2'}\qquad（这意味着\quad a_1a_2'=a_2a_1'.）$$

等价类

$$\alpha=\left(\frac{a_1}{a_1'},\ \frac{a_2}{a_2'},\ \cdots\right)类$$

叫做有理数．

如果

$$\beta=\left(\frac{b_1}{b_1'}, \frac{b_2}{b_2'}, \cdots\right)类,$$

则我们定义积 $\alpha\beta$ 如下：

$$\alpha\beta=\left(\frac{a_1b_1}{a_1'b_1'},\cdots\right)\text{类}.$$

等价类的集构成用等价关系做成的 $Z'\times Z'$ 的商集，并用 Q'来表示.

如果 $x\in Z'$，则$\xi=(ax/a,\cdots)$类这种形式的 Q' 的类的集对于乘法来说是同构于 Z' 的集，我们将 ξ 与 x 等同.

在 Q'中的乘法中性元素是$(a/a,\cdots)$类，因而根据实际上已实行的约定，我们将此中性元素与 Z' 的元素 1 等同.

于是 Q' 的每个元素 α 有一个对称元素，叫做*逆元素*. 对于乘法用 $1/\alpha$ 来表示.

如果 $\alpha=\left(\frac{a}{a'},\cdots\right)$类，则有$\frac{1}{\alpha}=\left(\frac{a'}{a},\cdots\right)$类.

既约分数——考虑有理数

$$\alpha=\left(\frac{a_1}{a_1'},\ \frac{a_2}{a_2'},\cdots\right)\text{类};$$

设d_1 是a_1 和 a_1' 的最大公约数，于是$a_1=d_1a$, $a_1'=d_1a'$，且整数 a 和 a' 是互素的，则有

$$\frac{a_1}{a_1'}\sim\frac{a}{a'},$$

因为 $a_1a'=d_1aa'=a_1'a$. 从而 a/a' 是类 α 的一个代表元素.

设 a_2/a_2' 是类 α 的任何一个代表元素，于是 $a_2/a_2'\sim a/a'$，也就是说 $a_2a'=a_2'a$.

可是 a 与 a' 是互素的，且 a 可除 a_2a'，它就能除 a_2，也就是说有

$$a_2=d_2a,$$

从而又有 $a_2'=d_2a'$. 于是，类 α 的每一分数都是 da/da' 这种形式的，其中 a 与 a'互素，d是 Z' 的某个整数.

a/a' 是 α 类的一个特别代表元素，叫做这个类的*既约分数*. 如

果明确选取 $a'>0$ 的话，这种既约分数是唯一的。

如果有理数属于同构于 Z' 的一个子集，设 $x\in Z$，则 x 类的既约分数是 $x/1$，它的分母是 1；反过来也是一样。

加法的扩张——我们将定义在 Z' 中的加法延伸到 Q' 中去。为此，设 $a=a'x$, $b=b'y$，且 $c=c'(x+y)$；于是应该有

$$\left(\frac{a}{a'},\cdots\right)\text{类}+\left(\frac{b}{b'},\cdots\right)\text{类}=\left(\frac{c}{c'},\cdots\right)\text{类}.$$

将 c 和 c' 表示为 a, a', b, b' 的函数。我们有

$$ab'=a'b'x,\quad a'b=a'b'y.$$

相加即得

$$ab'+a'b=a'b'(x+y).$$

我们应该取

$$c=ab'+a'b\quad\text{和}\quad c'=a'b'.$$

我们来一般地定义

$$\alpha=\left(\frac{a}{a'},\cdots\right)\text{类}\quad\text{和}\quad\beta=\left(\frac{b}{b'},\cdots\right)\text{类}$$

的加法为：

$$\alpha+\beta=\left(\frac{ab'+a'b}{a'b'},\cdots\right)\text{类}.$$

这个定义不依赖于在 α 类中选定的代表元素，因为，如果 a_1/a_1' 和 a_2/a_2' 属于 α 类，我们就有

$$(a_1b'+a_1'b)a_2'b'=(a_2b'+a_2'b)a_1'b',$$

因为

$$a_1a_2'=a_2a_1'.$$

性质——这样定义的加法是可交换的，根据定义这是显然的。它是可结合的，因为，如果 $\gamma=(c/c',\cdots)$类，我们就有

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\left[\frac{(ab'+a'b)c'+a'b'c'}{a'b'c'},\cdots\right]\text{类}=\alpha+(\beta+\gamma).$$

中性元素——我们来寻求，对不论怎样的 α，使得 $\alpha+\zeta=\alpha$ 的 $\zeta=(z/z',\cdots)$ 类；我们应该有：

$$\frac{az'+a'z}{a'z'}\sim\frac{a}{a'},$$

于是 $(az'+a'z)a'=aa'z'$，移项后有 $a'^2z=0$.

没有 Q' 的这样的类可以适合上面的条件．此时，我们将分子为零而分母非零[即$0/z'(z'\neq 0)$这种形式的分数]的元素的集加进去．两个任意的这种分数 $0/z_1'$ 和 $0/z_2'$ 是等价的，这是从分数的等价关系的意义来看的，因为我们有 $0\cdot z_2'=0\cdot z_1'$．这种元素的集构成一类 ζ，且有$\alpha+\zeta=\alpha$，ζ 是对于加法的中性类；按照这个约定，我们可以将它与 Z 的数 0 等同．集 Q' 再加上 0 类，所成的集就用 Q 来表示.

容易看到：Q 的每一元素相对于加法是正则的，且 Q 的两个元素的加法和减法总是可能的.

将 Q' 中那样的规则来定义 Q 的两个元素的乘法，于是有

$$\alpha\cdot 0=0.$$

元素 0 对于乘法不是正则的；0 没有逆元素.

乘法对于 Q 中的加法是可分配的，实际上，如果

$\alpha=(a/a',\cdots)$类；　　$\beta=(b/b',\cdots)$类；　　$\gamma=(c/c',\cdots)$类，

则有

$$\alpha(\beta+\gamma)=\left[\frac{a(bc'+cb')}{a'b'c'},\cdots\right]\text{类}$$

和

$$\alpha\beta+\alpha\gamma=\left[\frac{(aba'c'+aca'b')}{a'b'a'c'},\cdots\right]\text{类}.$$

可是有关的分数是相等的，因为

$a(bc'+cb')a'b'a'c'=a'b'c'(aba'c'+aca'b')$,

于是

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma.$$

在集 Q 中可以做两个任意元素的加法和减法，也可以做乘法．除去用 0 做除数外，除法也是可以的．

这样的集是域的第一个例子，Q 叫做有理数域，它的元素就是有理数．

§2 序的关系

序的关系——Z 中的序的关系可以推广到 Q 中来．设实际上有 Z 的一个元素 x；作为 Q 的元素，x 是 $a'x/a'$ 类，也就是 a/a' 的类，只要 $a=a'x$．如果 $x>0$，a 与 a' 同正负号，于是 $aa'>0$；如果 $x<0$，a 与 a' 正负号相反，于是 $aa'<0$；最后，如果 $x=0$，就有 $aa'=0$，因为 $a=0$．

于是，如果 $aa'\geqslant 0$，我们一般地对 $\alpha=(a/c',\cdots)$类，令 $\alpha\geqslant 0$．这个关系是不依赖于所选取的代表元素的，因为，如果

$a_1/a_1'\sim a_2/a_2'$，　就有 $a_1a_2'=a_2a_1'$，　在乘以 $a_1'a_2$ 时，还有

$$a_1a_1'\cdot a_2a_2'=a_2^2a_1'^2\geqslant 0,$$

从而 a_1a_1' 与 a_2a_2' 同号．

设 $\beta=(b/b',\cdots)$类，如果 $\alpha-\beta\geqslant 0$，我们取 $\alpha\geqslant\beta$．

自反性——我们有 $\alpha\geqslant\alpha$，因为 $\alpha-\alpha=0$．

传递性——如果 $\alpha\geqslant\beta$ 且 $\beta\geqslant\gamma$，我们有 $\alpha-\beta\geqslant 0$ 且 $\beta-\gamma\geqslant 0$；来看两个有理数的和：即

$\xi=(x/x',\cdots)$类，　$\eta=(y/y',\cdots)$类

（这里 $\xi\geqslant 0$ 且 $\eta\geqslant 0$）．的和

$$\xi+\eta=\left(\frac{(xy'+yx')}{x'y'},\cdots\right)\text{类}.$$

可是　　　$xx'\geqslant 0$　　　且　$yy'\geqslant 0$,

由此，$(xy'+yx')x'y'=xx'y'^2+yy'x'^2\geqslant 0$ 且 $\xi+\eta\geqslant 0$.

结果得 $\alpha-\beta+\beta-\gamma=\alpha-\gamma\geqslant 0$， 于是 $\alpha\geqslant\gamma$.

反对称性——如果 $\alpha\geqslant\beta$， 且 $\beta\geqslant\alpha$， 我们有

$$\xi=\alpha-\beta\geqslant 0,\quad \text{其相反元素}(-\xi)=\beta-\alpha\geqslant 0.$$

可是，如果 $\xi=(x/x',\cdots)$类，我们有$(-\xi)=(-x/x',\cdots)$类

于是 $xx'\geqslant 0$ 且 $(-x)\cdot x'=-xx'\geqslant 0$,

随之有 $xx'=0$ 且 $\xi=0$, 于是 $\alpha=\beta$.

集 Q 是用这个序的关系做成的全有序集，因为，如果 α 和 β 是两个任意有理数，设 $\xi=\alpha-\beta=(x/x',\cdots)$类．我们有：当 $xx'>0$ 时， $\xi\geqslant 0$ 且 $\alpha\geqslant\beta$; 当 $xx'<0$ 而$(-x)\cdot x'>0$ 且 $(-\xi)>0$ 时， 有 $\beta>\alpha$.

序的关系与加法是相容的，我们有：对任意 $\gamma\in Q$,

$$\alpha\geqslant\beta\Longleftrightarrow\alpha+\gamma\geqslant\beta+\gamma,$$

因为 $\alpha+\gamma-(\beta+\gamma)=\alpha-\beta$.

可是序的关系对乘法是不相容的。

§3 绝 对 值

Q 中的绝对值——设 α 是 Q 的一个元素．我们来考察 $\alpha>0$, $\alpha=0$, $\alpha<0$ 的三种情况；这三种情况中只有一种可能发生．我们用下列方式来定义从 Q 到其$\geqslant 0$ 的元素上的一种映射 $\alpha\to|\alpha|$．令

$$|\alpha|=\alpha,\qquad \text{如果 } \alpha\geqslant 0;$$

$$|\alpha|=-\alpha,\qquad \text{如果 } \alpha<0;$$

函数$|\alpha|$叫做 α 的绝对值。

从而有 $$|\alpha|=|-\alpha|.$$

绝对值具有下列三个性质：对不论怎样的 $\alpha\in Q$, $\beta\in Q$, 我们有

1° $|\alpha|\geqslant 0$, 且$|\alpha|=0\Longleftrightarrow\alpha=0$;

2° $$|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|;$$
3° $$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|.$$

为了证明 3°，我们指出，总有 $\alpha\leqslant|\alpha|$；事实上，如果 $\alpha\geqslant0$，这个不等式可写作 $\alpha\leqslant\alpha$. 这是从自反性得到的结果；如果 $\alpha<0$，这不等式可写作 $\alpha\leqslant-\alpha$，即 $-\alpha-\alpha\geqslant0$，于是 $-2\alpha\geqslant0$，这是可验证的. 将 α 用 $-\alpha$ 来替换，我们同样对任意的 α 有不等式 $-\alpha\leqslant|\alpha|$，或 $-|\alpha|\leqslant\alpha$.

这样，我们来考虑两个不等式

$$-|\alpha|\leqslant\alpha\leqslant|\alpha| \quad 且 \quad -|\beta|\leqslant\beta\leqslant|\beta|.$$

由于传递性，我们有

$$-|\alpha|+\beta\leqslant\alpha+\beta\leqslant|\alpha|+\beta,$$

最后有

$$-|\alpha|-|\beta|\leqslant-|\alpha|+\beta\leqslant\alpha+\beta\leqslant|\alpha|+\beta\leqslant|\alpha|+|\beta|.$$

如果 $\alpha+\beta\geqslant0$，我们有 $\alpha+\beta=|\alpha+\beta|$，于是

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|.$$

如果 $\alpha+\beta<0$，我们有 $\alpha+\beta=-|\alpha+\beta|$，从而

$$-|\alpha|-|\beta|\leqslant-|\alpha-\beta|$$

由此而有 $$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|.$$

不等式 3° 叫做三角不等式，其理由在讨论复数时再谈，它能用不同的方式写出来.

对于 Q 的任意元素 α 和 β，我们有不等式：

$$|(\alpha-\beta)+\beta|\leqslant|\alpha-\beta|+|\beta|,$$

也就是说

$$|\alpha-\beta|\geqslant|\alpha|-|\beta|.$$

将 α 和 β 对换，得

$$|\beta-\alpha|\geqslant|\beta|-|\alpha|.$$

可是有

$$|\beta-\alpha|=|\alpha-\beta|.$$

然而$\big||\alpha|-|\beta|\big|$或者等于$|\alpha|-|\beta|$，或者等于$|\beta|-|\alpha|$；我们总能写出：

$$|\alpha-\beta|\geqslant\big||\alpha|-|\beta|\big|.$$

相反地，后一等式等价于三角不等式．事实上，按照假设，对于Q的任意元素β和γ，我们有

$$|\gamma-\beta|\geqslant\big||\gamma|-|\beta|\big|,$$

于是，

$$|\gamma-\beta|\geqslant|\gamma|-|\beta|.$$

设$\gamma=\alpha+\beta$；于是这不等式变成

$$|\alpha|\geqslant|\gamma|-|\beta|,$$

或者写作

$$|\alpha|+|\beta|\geqslant|\gamma|,$$

也就是说：

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|.$$

第六章　组合的规律

我们曾看到，在构造有理数时出现具有多种组合规律的集合．这里我们来揭示那出现与贯穿在数学每一部分中的基本结构．

我们从只有一个组合规律的概念，即群的概念开始．从历史来看这也是第一个被揭示出来的概念；它是伽罗华的基本业绩，他在寻求代数方程的解时导出了群的概念．

随后我们还要考察关于两个组合规律的概念．

第一部份　内规律

§1　群

群——我们说，具有一个内规律⊤的集E是一个*群*，如果这个⊤具有下列三个性质：

1° 这个组合规律是*可结合的*；

2° 它有一个*中性元素*；

3° 每一个元素有一个*对称元素*．

如果这个规律是*可交换的*，这个群就叫做*可交换群*，或*阿贝尔群*．

我们回忆一下（第三章，第三部分），中性元素是唯一的，对称元素也是唯一的．

例——加法将 Z 作成一可交换群. 乘法将 Q'（非零有理数）作成一可交换群.

在平面几何中围绕一点的旋转构成一可交换群.

在空间几何中围绕一点的旋转构成一非交换群, 因为先后次序是影响运算结果的.

在平面几何中一切旋转的集不构成一个群, 因为两个旋转的积可能是一个平移. 可是, 旋转和平移的集构成一个群.

幂的运算的集不构成一个群, 因为它不是可结合的.

Z'(Z 除去 0)的偶数的集不构成乘法群, 因为, 性质 1° 虽被满足, 然而性质 2° 和 3° 不满足.

子群——群的一个子集, 它相对于群的运算本身也是一个群的, 叫做子群. 这样, Z 的偶数集是群 Z 的相对于加法的一个可交换的子群. 平移的集是由所有的旋转和平移形成的非交换群的可交换子群.

一个子群总包含这个群的中性元素.

在可交换群中, 我们常用符号 + 来表示组合的规律. 这样, 自由矢量的几何加法就用这些矢量的集做成一个可交换群.

§2 环

环——一个可交换群 A, 倘还具有第二个内组合规律, 且是可结合的, 对于第一个内规律是可分配的, 它就叫做环.

一个环叫做可交换的, 如果第二个规律是可交换的.

集 Z 是一可交换环: 群的规律是加法, 第二个规律是乘法.

我们将看到, n 行 n 列的方阵的集构成一非交换环.

环 A 的每一非空子集, 它对于环的规律本身也是一个环的, 叫做子环.

一个环 A 相对于第一个规律是一个群，必须包含群的中性元素，也就是说，如果这个群是以加法群来标记的话，则这个中性元素就应记作 0. 然而它不一定包含第二个规律的中性元素. 例如，偶数集就不包含乘法的中性元素 1. 如果环 A 还包含第二个规律的中性元素，这个环就叫做酉环（如果这第二个规律是用乘法来标记的. 中性元素也叫做单位元素）.

如果第二个规律将异于群的中性元素 0 的一对元素 a, b 对应于这个中性元素 0，我们就说这两元素 a, b 是零因子（对于第一规律用加法记号，对于第二规律用乘法记号，写作 $ab=0$ 且 $a\neq 0$, $b\neq 0$）.

方阵环包含零因子.

没有零因子的环叫做整环.

理想——我们来考虑可交换环 A 的这样一个子群 I，它使得由 I 的一个元素和 A 的任意一个元素用第二个规律组合成的元素是 I 的一个元素，于是 I 是 A 的一个子环，叫做理想.

如果在环 A 上第一个内规律用 $+$ 来标记（且由 A 作成群），第二个规律用 $\cdot$ 来标记，一个理想是这样的元素 x（显然属于 I）的集，它使得对不论怎样的 $a\in A$，如果 $x\in I$，就有 $x\cdot a\in I$，且对不论怎样的 $x\in I, y\in I$，我们有 $x+y\in I$ 和 $x-y\in I$.

例——偶数 $2p$ 的集是 Z 的一个理想，这里 Z 被看作为加法群；第二个规律是乘法. 实际上，偶数 $2p$ 与 Z 的任意整数的乘积仍是偶数 $2np$. 我们将看到，理想这个概念在研究多项式的可除性时是有用的.

§3 域

域——一个环 K，当除去了它的第一个规律的中性元素后，其

余元素的集是相对于第二个规律的一个群，这个环 K 就叫做一个域。

如果第二个规律还是可交换的，这个域就叫做可交换域

域 K 的每一个部分 K^*，它本身也是一个域的，叫做 K 的子域；而 K 就是 K^* 的母域。

例——有理数的集 Q 是一个可交换域．实数集 R 和复数集 C 与 Q 一样也是域．这里，Q 是 R 的子域，而 R 又是 C 的子域。

具有特征数 p 的域——考虑相对整数的集 Z，且设 m 是整数 $\geqslant 2$．引入等价关系：$a_1 \sim a_2 \Longleftrightarrow a_1 - a_2$ 是零或能被 m 所除尽．立刻可看出，这是一个等价关系．设 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots)$ 类，等价类的个数是有限的，且等于 m；可以从不等式 $0 \leqslant a \leqslant m-1$ 中选择类 α 的一个代表元素 a.

设 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots)$ 类，　$\beta=(b_1, b_2, \cdots)$ 类。

令　$\alpha+\beta=(a_1+b_1, \cdots)$ 类，　$\alpha\cdot\beta=(a_1b_1, \cdots)$ 类。

这运算只依赖于 α 类和 β 类，而不是依赖特定的代表元素．这运算是可结合的和可交换的，且乘法对于加法是可分配的．对于加法的中性元素是 0 类 $=(0, m, \cdots)$，且每个 α 类有一个相反元素 $-\alpha=(-a_1, -a_2, \cdots)$．乘法以 1 类 $=(1, m+1, \cdots)$ 类作为其中性元素．于是这些类的集是一个酉环。

设 m 不是素数，$m=q\cdot r$，于是如果 $\gamma=(q, \cdots)$ 类，$\rho=(r, \cdots)$ 类，则有 $\gamma\cdot\rho=(m, \cdots)$ 类 $=0$，且 $\gamma\neq 0, \rho\neq 0$．这样它们就是零因子。

如果 $m=p$ 是素数，我们看到，如果 $\alpha\cdot\beta=0$，于是 a_1b_1 能被 p 除尽，于是，a_1 或 b_1 中至少有一个能被 p 除尽；且 α 或 β 是零．在这情况下，这个环是一整环。

我们要证明，这是一个域．设 $\alpha=(a, \cdots)$ 类，$\alpha\neq 0$，于是 $a\neq 0$ 不能被 p 整除．考虑 $p-1$ 个整数 $a, 2a, \cdots, (p-1)a$；将这些整数

用 p 来除，设 $r_1, r_2, \cdots, r_{p-1}$ 是所得到的余数．任一个余数都不是零，因为 p 对这 $p-1$ 个所考虑整数中的每一个都是互素的，于是对 $h=1, \cdots, p-1$，就有 $1 \leqslant r_h \leqslant p-1$．

另一方面，设 $h \neq k$，则有 $r_h \neq r_k$．实际上，如果 $r_h = r_k$．则有 $ha = pq_h + r_h$，$ka = pq_k + r_k$，于是，如果 $h > k$，则

$$(h-k)a = p(q_h - q_k).$$

这是不可能的，因为，$1 \leqslant h-k \leqslant p-2$ 且 $h-k$ 与 p 互素．而这 $p-1$ 个不同的数 r_h 介于 1 与 $p-1$ 之间，取从 1 到 $p-1$ 之间的每一个值；特别，存在这样一个整数 b，$1 \leqslant b \leqslant p-1$，使得 $r_b = 1$；于是 $ba = pq_b + 1$，且如果 $\beta = (b, \cdots)$类，我们即有

$$\alpha\beta = (ab, \cdots)\text{类} = (1, \cdots)\text{类} = 1$$

于是，每一个元素 $\alpha \neq 0$ 具有对于乘法的逆元素 $1/\alpha = \beta$．这个集是可交换域．

这个域具有只含有限的 p 个元素这一令人注目的性质，计算 p 个等于 1 的各项之和，得到 $1+1+1+\cdots+1=0$．具有这一特点的域叫做特征数为 p 的域．如果我们能将 1 加任意次而始终得不到零，这个域就叫做特征数为 0 的域．今后我们用到的只是特征数为 0 的域，它们是 Q，R 和 C 这样的域．

绝对值——从 K 到大于或等于零的实数集 R^+ 内的映射 $\alpha \to |\alpha|$，在其适合下列性质时，叫做域 K 上的**绝对值**

1° $\quad |\alpha| \geqslant 0 \quad$ 且 $|\alpha| = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0$；

2° $\quad |\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$；

3° $\quad |\alpha+\beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$．

当在一个域上定义了绝对值时，就说这个域被赋值．$|\alpha|$ 叫做 $\alpha \in K$ 的绝对值．

例——1．如果 $K = Q$ 或 R，通常的绝对值适合上述三性质．

2．在 Q 内还可用另一种方式定义绝对值．设实际上 p 是一

固定的素数；又设 α 是一非零有理数，且 a/a' 是可约分的. 则可写出

$$\frac{a}{a'}=p^m\frac{b}{b'},$$

这里 $m\in \mathbf{Z}$，且 b 和 b' 都不能被 p 整除.

于是令 $|\alpha|_p=p^{-m}$，又令 $|0|_p=0$. 可以毫不困难地验证性质 1°, 2°, 3°. 不等式 3° 可用更强不等式来代替

$$|\alpha+\beta|_p\leqslant \max(|\alpha|_p, |\beta|_p),$$

$\max(|\alpha|_p, |\beta|_p)$ 表示 $|\alpha|_p$, $|\beta|_p$ 两者中较大的一个.

除非 $|\alpha|_p=|\beta|_p$，不等式的两端是严格不等的.

第二部分　外　规　律

可能有这种情况：在具有交换群的内规律的集 E 上，利用另一个集 F 来定义一个外组合规律. 最重要的例子就是矢量空间，我们以后只研究矢量空间.

§1　矢 量 空 间

域 K 上的矢量空间——设集 E 具有一个可交换群的规律，记作 $+$：对不论怎样的 $x, y, z\in E$，o 是中性元素，设

1°　$x+(y+z)=(x+y)+z$　（结合律）

2°　$x+o=o+x=x$　（中性元素）

3°　$x+(-x)=o$　（对称元素）

4°　$x+y=y+x$　（可交换性）.

设另有一个域 K，它的元素用希腊字母来表示. 设在 E 上定

义了一个外规律. 也就是说，对于有序对(λ, x)对应着E的一个元素记为λx，其中$\lambda\in K$和$x\in E$，这个外规律又适合下列的性质:

5°	$\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$	(分配性)
6°	$(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$	(分配性)
7°	$\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$	(结合性)
8°	$\varepsilon x=x$，ε是K的单位元素.	

于是将E取名为域K上的矢量空间.

例——1. 自由矢量的集是一矢量空间，它的内规律是几何加法，外规律是数乘法，域K在这里一般是实数域R.

2. 缺第二项[①]的线性微分方程的解集是一矢量空间，它的内规律是函数的通常的加法，外规律是乘以复数的乘法；这里K是复数域C.

3. 多项式的集是一矢量空间，内规律是通常的加法，外规律是乘以系数域K的一个常数的乘法.

4. 如果取$E=K$. 则可看到，每一个域是在其自身上的一个矢量空间，内规律是加法，“外规律”是乘法.

子矢量空间——设E是域K上的一个矢量空间. E的每一个部份E'，若也具有E的两个规律，也是域K上的一个矢量空间，它就叫做E的子矢量空间.

从定义推演出来的性质——设0是域K对于K内的加法的中性元素.

从6°推导出$(0+\mu)x=0\cdot x+\mu\cdot x$，于是$\mu x=0\cdot x+\mu\cdot x$且对不论怎样的$x\in E$，有$0\cdot x=o$为群的中性元素.

此外，从5°推导出$\lambda(x+o)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot o$，这里对不论怎样的$\lambda\in K$，有$o=\lambda\cdot o$.

---

① 此即指齐次线性微分方程——译者注.

§2 在矢量空间上的模

在矢量空间上的模——我们能将绝对值的概念推广到被赋值的域K上的矢量空间. 一个适合下列性质的、从E到R^+(大于或等于0的实数集)内的映射$x\to\|x\|$叫做E上的模:

1° $\|x\|\geqslant 0$, 且 $\|x\|=0\Longleftrightarrow x=o$.

2° $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$, 对不论怎样的$x\in E$.

3° $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$, 对不论怎样的$x,y\in E$.

$\|x\|$叫做元素x的模.

我们会注意到, 如果$E=K$, 就又回到K上绝对值的定义了.

例——1. 在自由矢量的矢量空间里, 矢量的长是一个模; 不等式3°, 即所谓三角不等式, 表明在一个三角形里, 一边的长最多等于其他两边长的和.

2. 如果考虑闭区间上的连续函数, 则将表明, 绝对值的极大值是矢量空间上的模, 在这矢量空间中, 内规律是函数的加法, 外规律是乘以实数的乘法(见第二卷, 第四章).

我们将在第十章和第四卷的第一章更详细地研究矢量空间.

第三部分 例

§1 函 数

我们回忆一下, 一个函数是从一个叫做定义域的集(用A来表示) 到另一个叫做值域的集(用E来表示)内的映射. 我们在定义

一个复合函数(第二章，§2)时，已经定义了一个函数集上的组合规律，根据值域E的性质，我们想要在这里定义另外一些组合的规律.

函数的矢量空间——我们假定，值域E是域K上的矢量空间，定义域A可以是任意的. 我们将从A到E内的函数集或映射集记做$\mathscr{F}$.

于是一个函数$f\in\mathscr{F}$使每一个元素$\xi\in A$有矢量空间E的一个元素$f(\xi)$和它相对应.

1° 内规律——设f和g是$\mathscr{F}$的两个函数；对于每个$\xi\in A$有$f(\xi)\in E$和$g(\xi)\in E$和它相对应. 于是，考虑使对每个$\xi\in A$有矢量空间E的元素$f(\xi)+g(\xi)$和它相对应的映射. 这样就定义了一个从A到E内的映射，也就是$\mathscr{F}$的一个元素.

这个映射记为$f+g$；一个元素$\xi\in A$在E内的象是$(f+g)(\xi)=f(\xi)+g(\xi)$.

这样就定义了$\mathscr{F}$内的内组合规律；对$\mathscr{F}$的两个元素f和g，有$\mathscr{F}$的记为$(f+g)$的元素相对应.

这个内规律是可交换群的规律. 实际上，如同E是矢量空间那样，对于每个$\xi\in A$和不论怎样的$f\in\mathscr{F}$，$g\in\mathscr{F}$，$h\in\mathscr{F}$，则有

$$f(\xi)+g(\xi)=g(\xi)+f(\xi)\quad 于是\quad f+g=g+f;$$

$$f(\xi)+(g(\xi)+h(\xi))=(f(\xi)+g(\xi))+h(\xi),$$

于是　$f+(g+h)=(f+g)+h.$

用o表示从A到E内的这样的映射，它使得对于每一$\xi\in A$有E的加法中性元素o与之对应，也就是说，对不论怎样的$\xi\in A$，有

$$o(\xi)=o.$$

于是，　$f(\xi)+o(\xi)=f(\xi)+o=f(\xi)$；　于是 $f+o=f$；

映射o是$\mathscr{F}$内加法规律的中性元素.

设g是这样的映射，它使得对于每一$\xi\in A$有元素$-f(\xi)\in E$

与之对应，也就是说，对不论怎样的 $\xi\in A$，有 $g(\xi)=-f(\xi)$．这时有 $f(\xi)+g(\xi)=o$，于是 $f+g=o$.

设 $g=(-f)$；每一 $f\in\mathscr{F}$ 有一 $\mathscr{F}$ 中的对于加法的对称元素 $(-f)$.

这样在 $\mathscr{F}$ 内定义的加法就具有可交换群的规律的一切性质.

2° 外规律——设 $f\in\mathscr{F}$ 且 $\lambda\in K$；对每个 $\xi\in A$ 有 $f(\xi)\in E$ 和它对应．考虑这样的映射，它使得对每个 $\xi\in A$ 有矢量空间的元素 $\lambda f(\xi)$ 与之对应，这是一个从 A 到 E 内的映射；从而是这个映射集 $\mathscr{F}$ 的一个元素．我们用 λf 来标记它．在 $\mathscr{F}$ 上这样定义的运算是 $\mathscr{F}$ 上的一个外规律；对于有序对 (λ, f)（这里 $\lambda\in K, f\in\mathscr{F}$）有 $\mathscr{F}$ 的的元素 λf 与之对应.

内规律和外规律两个规律的集由 $\mathscr{F}$ 做成一个 K 上的矢量空间．实际上，如同 E 是矢量空间一样，对每一 $\xi\in A$，和不论怎样的 $f\in\mathscr{F}, g\in\mathscr{F}, \lambda\in K, \mu\in K$，有：

$\lambda[f(\xi)+g(\xi)]=\lambda f(\xi)+\lambda g(\xi)$，于是 $\lambda(f+g)=\lambda f+\lambda g$；

$(\lambda+\mu)f(\xi)=\lambda f(\xi)+\mu f(\xi)$，　　于是 $(\lambda+\mu)f=\lambda f+\mu f$；

$\lambda[\mu f(\xi)]=(\lambda\mu)f(\xi)$，　　于是 $\lambda(\mu f)=(\lambda\mu)f$；

$\varepsilon f(\xi)=f(\xi)$，　　于是 $\varepsilon f=f$，

如果 ε 是 K 中乘法的中性元素，$\varepsilon=1$.

函数的环——现在假设值域 E 是一个环，定义域 A 是任意的。我们把函数，即从 A 到 E 内的映射的集也叫做 $\mathscr{F}$．我们用符号 $+$ 来标记 E 的可交换群的规律，把对于第一个规律为可分配的第二个规律记作为乘法（这后一规律可能不是可交换的）.

设 f 和 g 是 $\mathscr{F}$ 的两个元素；我们同前面一样定义函数 $(f+g)$ 为一个映射，它使得对于每一 $\xi\in A$ 有环 E 的元素 $f(\xi)+g(\xi)$ 与之对应．于是集 $\mathscr{F}$ 对于这个组合规律是一个可交换群，这个规律记作为加法．中性元素 o 是这样的映射，它使得对于每一 $\xi\in E$ 有

环A的第一个规律的中性元素与之对应.

现在我们考虑这样的映射，它使得对于每一$\xi\in A$有E的元素$f(\xi)\cdot g(\xi)$与之对应；它是$\mathscr{F}$的一个元素；我们把它表示为$f\cdot g$（要遵守这两函数的次序）. 这运算是在$\mathscr{F}$内的第二个内组合规律. 一般地，$f\cdot g\neq g\cdot f$.

两个规律的集将$\mathscr{F}$做成一个环. 实际上，像E是一个环那样，对每个$\xi\in E$和不论怎样的$f\in\mathscr{F}$，$g\in\mathscr{F}$，$h\in\mathscr{F}$；有

$$f(\xi)\cdot(g(\xi)\cdot h(\xi))=(f(\xi)\cdot g(\xi))\cdot h(\xi),$$

于是
$$f\cdot(g\cdot h)=(f\cdot g)\cdot h;$$

此外还有

$$f(\xi)\cdot(g(\xi)+h(\xi))=f(\xi)\cdot g(\xi)+f(\xi)\cdot h(\xi),$$

于是
$$f\cdot(g+h)=f\cdot g+f\cdot h;$$

$$(f(\xi)+g(\xi))\cdot h(\xi)=f(\xi)\cdot h(\xi)+g(\xi)\cdot h(\xi),$$

于是
$$(f+g)\cdot h=f\cdot h+g\cdot h;$$

这里各项的次序是应予遵守的.

设E是一可交换环，$\mathscr{F}$也同样是一可交换环，因为对于每一$\xi\in A$，和不论怎样的$f\in\mathscr{F}$和$g\in\mathscr{F}$，有

$$f(\xi)\cdot g(\xi)=g(\xi)\cdot f(\xi),\ \text{于是}\ f\cdot g=g\cdot f.$$

对于一个这样的可交换环，两个可分配规律化为一个.

如果E是一酉环，E包含对于第二规律的中性元素u，也就是说，对不论怎样的$x\in E$，有$u\cdot x=x\cdot u=x$. 于是设v是从A到E内的这样的映射，它使得对于每一$\xi\in A$，有E内不依赖于ξ的元素u与之对应；于是$v(\xi)=u$（v是A上的一个常量函数）. 对不论怎样的$f\in\mathscr{F}$和$\xi\in A$，则有

$$v(\xi)\cdot f(\xi)=u\cdot f(\xi)=f(\xi)\cdot u=f(\xi)\cdot v(\xi)=f(\xi).$$

于是对不论怎样的$f\in\mathscr{F}$，$v\cdot f=f\cdot v=f$. 从而，环$\mathscr{F}$是酉环，函数$v\in\mathscr{F}$是单位元素，也就是第二规律的中性元素.

注释——即使环E没有零因子，然而一般地环$\mathscr{F}$并不是这样的. 作为例子,设A'是A的子集,而A''是A'相对A的补集(也就是说, $A'\cup A''=A$, 且$A'\cap A''=\varnothing$). 设f是$\mathscr{F}$的这样的元素,它使得对一切$\xi'\in A'$有$f(\xi')=o$,而当$\xi''\in A''$时有$f(\xi'')\neq o$,这里o表示E内加法的中性元素. 此外设g是$\mathscr{F}$的一个元素,它使得当$\xi'\in A'$时$g(\xi)\neq 0$,而对每一$\xi''\in A''$有$g(\xi'')=o$. 函数f与g是任意两个异于函数$o\in\mathscr{F}$的函数,即这里o是$\mathscr{F}$中加法的中性元素.

然而对每一$\xi\in A$我们有$f(\xi)g(\xi)=o$,从而在$\mathscr{F}$内$f\cdot g=o$,因为,如果$\xi\in A'$,我们有$f(\xi)=o$;又如果$\xi\in A''$,我们有$g(\xi)=o$.

环$\mathscr{F}$于是有零因子.

为了使$\mathscr{F}$能够没有零因子，必须使得上述f与g这样的函数不存在. 当不取$\mathscr{F}$,而取$\mathscr{F}$的一个子环时,所说的这个条件就能出现. 我们将看到,多项式就是这种情况的一个例子.

数值函数的特殊情况——如果值域E是实数域R或复数域C, E是一个环. 上述的考虑说明，可以怎样定义两个数值函数的和与积,并可证明,集$\mathscr{F}$构成一可交换环. 这样,作为$\mathscr{F}$的子集,可以用阶梯函数、连续函数的集来构成，这时A是R或R^n的适当的子集(见第二卷).

§2 序 列

回忆一下第一章第四节中已给出的序列的定义:

序列的定义——设已给定一个集E. 我们把从自然整数集N到E内的一个映射叫做E上的*序列*.

重序列——设已给一个集E. 我们把从积$N\times N$到E内的一个映射叫做E上的*重序列*.

我们用字母$n, p, q, \cdots$表示N的元素.

一个序列 x 是一个从 N 到 E 内的映射，从而 $n\in N$ 在 E 内的象应该用 $x(n)$ 来表示. 然而，在序列的情况下，$x(n)$ 这种记法是不常采用的；一般地，我们用符号 x_n 来表示 n 的象，并把 n 叫做序标. 此外，如 y 是重序列. 我们就用符号 $y_{p,q}$ 来表示 $(p, q)\in N\times N$ 在 E 中的象，这里 p 和 q 也叫做序标.

这种表示法叫做注叙法.

1° 当我们说"给定一个 E 的元素序列"时，这表示给定了一个从 N 到 E 内的映射. 我们用 (x_n) 来表示一个序列并且也这样说：考虑序列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 或 $(x_1, x_2, \cdots, x_n \cdots)$. 词组"序列 (x_n)"，或"序列 $(x_1, x_2 \ \cdots, x_n \cdots)$"不应该与"序列 (x_n) 的值域"相混淆.

2° 常常说：用 X 表示序列 (x_n)，且写作 $X=(x_n)$，或 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$. 这种写法在某种场合下是方便的，但与约定是不协调的，因为序列 X 必须写作 (X_n).

定义——E 的元素 x_n 叫做序列 x 的*序标为 n 的项*. 我们也常说第 n 项.

3° 我们也说："E 的元素的序列"，而不说"序列"，为的是表明，所说的是从 N 到 E 内的映射. 这样说法当涉及到两个值域 E 和 F 时是方便的，可以说："考虑 E 的元素的序列和 F 的元素的序列."也可以把说法简化为："E 的序列".

4° 如果 E 的两个序列 (x_n) 和 (y_n) 相等，则对于不论怎样的 $n\in N$，我们有 $x_n=y_n$.

我们要谨防，不要把两个序列相等和两个序列的值域相等互相混淆. 例如，考虑用 $x_{2p}=0$，$x_{2p+1}=1$ 定义的序列 (x_n)，也就是说，如果 n 是偶数，$x_n=0$；如果 n 为奇数，$x_n=1$；而序列 (y_n) 是由 $y_{2p}=1, y_{2p+1}=0$ 定义的. 这两序列是从 N 到 $E=N$ 内的映射；这两序列的值域是一样的；这是 N 的两个元素 0 和 1 的集合；相反，序列 (x_n) 和序列 (y_n) 却不是相等的.

5° 如果在E上定义了一个加法，将序列(x_n+y_n)叫做E的两个序列(x_n)和(y_n)的和．这个定义是§1的$f+g$的定义的转述．序列(x_n+y_n)是这样的序列，它使得对每个$n\in N$有E的元素x_n+y_n与之对应．我们也说，将各对应项逐项相加而作成两个序列的和．

6° 如果在E上定义了乘以域K的一个数的乘法(外规律)，对于$\lambda\in K$，我们就把序列$\lambda(x_n)$叫做E的序列(λx_n)．

如果E是K上的矢量空间，则E的序列形成K上的一个矢量空间．

7° 如果在E上定义了一个乘法（内规律），我们则把序列(x_ny_n)叫做两个序列(x_n)，(y_n)的积．

如果E是一个环，则E的序列也构成一个环．

8° 把序列看作为从N到E内的映射，在其中包括常序列，即使得对每个$n\in N$有同一个元素$a\in E$与之对应的序列．一个这样的集也记作为(a)．同样，当E包含整数集时，序列(0)是由$x_n=0$，(n为任意的)来定义的，而序列(1)是由$x_n=1$(n为任意的)来定义的．

9° 一个重序列是由$(x_{p,q})$来表示的．

10° 为了强调和明确，我们也用下列记号：

$$(x_n)_{n\in N},\qquad (x_{p,q})_{(p,q)\in N\times N},$$

其目的是要表明：变量是N的元素或$N\times N$的元素．这个记号在下面11°的情况中也要用到．

11° 设(x_n)是集E的元素的序列．更设n_k是N的整数项序列，也就是说，从N到N内的一个映射$k\to n_k$，它使得$k<k'$导致$n_k<n_{k'}$．E的元素的序列(y_k)由$y_k=x_{n_k}$(对每一$k\in N$)来定义，它叫做(x_n)的子序列．我们把它记为(x_{n_k})，或为了更明确而写作：$(x_{n_k})_{k\in N}$．

例——对每一整数 $k\in N$, 使 $n_k=2k$ 与之对应; (n_k)是偶数序列: $(x_{2k})_{k\in N}$ 在 n 取偶数值时, 是序列(x_n)的子序列.

$(x_{2k-1})_{k\in N}$ 在 n 取奇数值时, 是序列(x_n)的子序列.

$(x_{2^k})_{k\in N}$ 在 n 取 2 的整数次幂时, 是序列(x_n)的子序列.

第七章　多　项　式

在这一章里，我们首先研究多项式的代数性质，而不管多项式也是函数．换句话说，我们先研究加法、乘法和形式求导的运算．

在一个整环 A 上具有一个未定元的多项式——设 A 是一个整酉环，也就是说一个无零因子而有单位元素（乘法的中性元素）的环．在以后，我们取作为 A 的，或者是复数域 C，或者是实数域 R，或者是有理数域 Q．（在研究具有多个未定元的多项式时，可以得到 A 是多项式环）．

考虑 A 的元素的这样一个序列，使得从某个序标起，序列的所有以后的元素都等于 A 的 0 元素，这里 0 是 A 里加法的中性元素．于是，得到一序列：

$$a=(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, 0, 0, \cdots),$$

这里 $\alpha_i \in A$；这样的序列叫做 A 上具有一个未定元的多项式．

使 $\alpha_n \neq 0$ 的最大的序标叫做多项式 a 的次数．

元素 α_i 叫做多项式的系数；系数 α_0 叫做常数项．

如果所有的系数都等于 0，则对应的多项式用 0 来表示，且约定：它是没有次数的，我们偶而也约定给它象征性的次数，记作 $-\infty$，这个符号按照约定满足不等式 $-\infty<n$，这里 n 是任意整数．

第一部分 矢量空间——多项式环

§1 多项式矢量空间

设有两个多项式:

$a=(\alpha_0,\cdots,\alpha_n,0,0,\cdots)$ 和 $b=(\beta_0,\cdots,\beta_m,0,0,\cdots)$.

如果有恒等关系,也就是说,如果 $n=m$(次数相同), 又如果对一切 $i=0,1,\cdots n$, $\alpha_i=\beta_i$, 则令$a=b$.

加法——我们在多项式的集上定义一个内运算,记为加法,即

$$a+b=(\alpha_0+\beta_0,\alpha_1+\beta_1,\cdots).$$

我们看到,这个运算是可结合的和可交换的.

它有一个中性元素:这是记为$0=(0,0,\cdots)$的多项式,它的所有系数都是零.

最后,每一多项式具有一个对称元素或相反元素,记为

$$-a=(-\alpha_0,\cdots,-\alpha_n,0,0,\cdots);$$

这是其系数都与 a 的系数反号的多项式.

于是对于这个规律,多项式的集构成一可交换的群.

要指出,如果两个多项式的次数不等,则 $a+b$ 的次数等于两个次数中最大的一个;如果两个次数相等,则 $a+b$ 的次数可能变小,于是总有$(a+b)$的次数$\leqslant$max(a 的次数, b 的次数),以后写作 degré$(a+b)\leqslant$max(degréa, degréb)[1]. 0多项式的次数是不

---

[1] degré 是法文"次数"的意思,本书中以 degréa 表示多项式 a 的次数,等等——译者注.

定的，$-a$ 的次数与 a 的次数相同.

乘以 A 的元素的乘法——设 $\lambda\in A$，令

$$\lambda a=(\lambda\alpha_0,\lambda\alpha_1,\cdots,\lambda\alpha_n,0,0,\cdots);$$

λa 是一多项式，它的系数是 a 的系数乘以 λ 的积.

如果 $\lambda\in A$ 和 $\mu\in A$，则有下列规则：

$$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$$

$$(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$$

$$\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a$$

$$1\cdot a=a.$$

如果 $\lambda\neq 0$，则可看到 $\text{degré}(\lambda a)=\text{degré}(a)$.

在 A 是域 K 的情况下，这些运算将多项式集作成系数域 K 上的一矢量空间(见第十章).

现在来考虑多项式 $u_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$，它的系数除序标为 n 的一项以外都是零. 序标为 n 的一项的系数为 1，即 A 的单位元素；这样，u_n 仍是一 n 次多项式. 每一多项式 $a=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,0,0,\cdots)$ 以唯一的方法写成下式：

$$a=\alpha_0u_0+\alpha_1u_1+\cdots\alpha_nu_n.$$

在 A 为域 K 的场合，将 a 用唯一的方法表示为有限个元素 u_n 的线性组合，u_n 的系数为 K 的元素. 我们说，元素 u_n 形成多项式矢量空间的一个基. 基的元素的个数叫做矢量空间的维数. 这样，多项式矢量空间是无限维的.

通常的记法——为了后面要出现的理由，我们用记号 x^n 以代替 u_n. 重要的是指出下列一点：现时 x 不表示什么东西，而 x^n 是一个符号，其中 n 与 x 是不能分离的，n 起到序标的作用. 最后，作为一个约定，我们写 $u_0=x^0=1$.

我们通常还写作

$$a=\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n$$

或

$$a=\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0.$$

在第一种写法中，我们说 a 是按 x 的升幂排列的；在第二种写法中，a 是按 x 的降幂排列的.

在环 A 上多项式集写作 $A[x]$，x 叫做未定元或变量. 变量这术语主要地是当我们把多项式看作函数时使用.

§2 多项式环

多项式乘法——我们引入多项式集上的第二个组合规律，一种可结合的同时对于多项式加法的可分配的规律.

根据可分配性，只要对 $\alpha_i x^i$ $(\alpha_i\in A)$这种形式的多项式，定义第二个规律就行了.

对于 $\alpha_i\in A$, $\beta_i\in A$, 我们令

$$(\alpha_i x^i)(\beta_j x^j)=\alpha_i\beta_j x^{i+j}.$$

换句话说，未定元的相乘，其序标像幂指数那样处理.

如果 $a=\alpha_0+\alpha_1 x+\cdots+\alpha_n x^n$, $b=\beta_0+\beta_1 x+\cdots+\beta_m x^m$,

则根据分配律，可以看出：

$$a\cdot b=\alpha_0\beta_0+(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0)x+\cdots$$
$$+(\alpha_0\beta_i+\alpha_1\beta_{i-1}+\cdots+\alpha_i\beta_0)x^i+\cdots+\alpha_n\beta_m x^{n+m}.$$

这个运算是可交换的，对于加法是可分配的. 我们可用一稍长但不甚困难的计算即可验证，它是可结合的.

我们要指出下面的重要性质

$$\text{degré}(a\cdot b)=\text{degré}\,a+\text{degré}\,b.$$

如果 $b=0$，在约定对不论怎样的 n，总有 $-\infty=n+(-\infty)$时，上式仍保持为真.

集 $A[x]$是可交换环. 设多项式 $u=\eta_0+\eta_1 x+\cdots+\eta_l x^l$，如果

对任意多项式 a 有 $u\cdot a=a$，u 就是对于乘法的中性元素. 特别应该有 $ux^n=x^n$，于是 $\eta_0x^n+\eta_1x^{n+1}+\cdots+\eta_lx^{n+l}=x^n$，这就要求 $\eta_0=1$，$\eta_1=0$，$\eta_2=0$，…，$\eta_l=0$. 这样就有 $u=x^0=1$；这就是将多项式 x^0 与数 1 等同的理由. 于是环 $A[x]$是酉环. 另一方面，多项式 x 可以与未定元等同，这是从下面意义来说的，用符号 x^i 表示的多项式是多项式 x 的 i 次幂，而后者又是按照刚刚定义的乘法来作成的.

我们来探求 $A[x]$ 有无零因子. 设 a 和 b 是 $A[x]$ 的两个多项式，且 $a\neq0$；于是在 a 中至少存在一个系数 $\alpha_h\neq0$；假设 h 是具有如下性质的最小序标，它使得如果存在整数 i：$0\leqslant i<h$，则有 $\alpha_i=0$. 如果 b 的系数是 $\beta_0,\beta_1,\cdots$，由等式 $ab=0$ 得

$$\alpha_h\beta_0=0,\quad \alpha_h\beta_1+\alpha_{h+1}\beta_0=0,\ \cdots$$

因 $\alpha_h\neq0$，我们陆续推出 $\beta_0=0,\beta_1=0,\cdots$，于是就有 $b=0$. 于是环 $A[x]$是一个整环.

推论——由等式 $ab=ac$ 导致：如果 $a\neq0$，则 $b=c$. 实际上，等式 $ab=ac$ 也写作 $a(b-c)=0$；然而 $a\neq0$，于是 $b-c=0$，从而 $b=c$.

每个多项式 $a\neq0$ 对乘法是正则的.

第二部分　按降幂排列的除法

在这一部分，我们假设 A 是一个域 K，这里 K 或是 C，或是 R，或是 Q.

§1　除法的等式

设已给两个多项式 a 和 b，并不总是存在多项式 q，使 $a=bq$. 如果存在这样的多项式 q，就说 a 能被 b 整除，或 b 整除 a，或 a

是 b 的倍式.

这样,多项式 0 是任一多项式的倍式.

为了使 a 能被 b 整除,必需 a 属于 b 的倍式的集 I,也就是 cb 这样形式的多项式的集,这里 c 是一任意的多项式.可以立刻验证:I 是 $K[x]$的子环;而且 I 还是这个环的一个理想,因为 b 的一个倍式被一任意的多项式来乘,其积仍是 b 的倍式.

I 的每一非零多项式的次数至少等于 b 的次数,因而 b 是 I 的一个非零多项式,它有可能最小的次数.

如果 a 的次数严格小于 b 的次数,则 a 不能被 b 整除,除非 $a=0$.

于是设 degré$a\geqslant$degréb.我们设法从 a 减去 b 的倍式,倘若 $a\in I$,则我们得到 I 的多项式,其次数愈来愈小,我们希望最后得到多项式 0,在这种情况下,a 就能为 b 整除.为了强调次数,我们这里按序标下降的次序来写出这多项式:设

$$a=\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_0 \qquad \alpha_n\neq 0$$

$$b=\beta_m x^m+\beta_{m-1}x^{m-1}+\cdots+\beta_0 \qquad \beta_m\neq 0 \text{ 且} n\geqslant m.$$

多项式 $x^{n-m}\cdot b=\beta_m x^n+\beta_{m-1}x^{n-1}+\cdots+\beta_0 x^{n-m}$ 属于 I 且它的次数等于 a 的次数 n.

于是考虑多项式

$a_{n-1}=a-\gamma_{n-m}x^{n-m}b$ 这里 $\gamma_{n-m}=\alpha_n/\beta_m$.

此地涉及到一个事实,即系数的环应该是一个域,为的是保证 γ_{n-m} 的存在,这就要求 $\beta_m\neq 0$.

如果 $a\in I$,且因 $b\in I$,则多项式 $a_{n-1}\in I$,且 a_{n-1} 的 x^n的系数是 $\alpha_n-\gamma_{n-m}\beta_m=0$.从而,degré$a_{n-1}\leqslant n-1$.

对多项式 a_{n-1} 再做类似的运算,并以此类推,我们就一步一步地得到下面一系列关系

$$a-\gamma_{n-m}x^{n-m}b=a_{n-1} \qquad \text{degré}a_{n-1}\leqslant n-1$$

$$a_{n-1}-\gamma_{n-m-1}x^{n-m-1}b=a_{n-2} \qquad \text{degré}\, a_{n-2}\leqslant n-2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$a_m-\gamma_0x^0b=r, \qquad \text{degré}\, r\leqslant m-1.$$

可是我们要指出：如果在上述等式中有 degré$a_i<i$，我们就在关系 $a_i-\gamma_{i-m}x^{i-m}=a_{i-1}$ 中取 $\gamma_{i-m}=0$，从而就有 $a_i=a_{i-1}$。

最后 degré$r\leqslant m-1$ 表示 r 可能是 0 多项式。

将上述等式都加起来，写如下式

$$a-(\gamma_{n-m}x^{n-m}+\gamma_{n-m-1}x^{n-m-1}+\cdots+\gamma_0)b=r,$$

这就是说，不论怎样的多项式 a 和 b，存在一个多项式 q 和一个多项式 r，使得 $a=bq+r$，其中 degré$r<$degréb（约定：degré$0=-\infty$ 严格小于任何次数）。

我们来证明：如果 degré$a\geqslant$degréb，则

$$q=\gamma_{n-m}x^{n-m}+\cdots+\gamma_0$$

是 $n-m$ 次的多项式：实际上：$\gamma_{n-m}=\alpha_n/\beta_m\neq0$。

如果 degré$a<$degréb，而等式

$$a=bq+r，其中\ \text{degré}\, r<\text{degré}\, b$$

仍有效，则须取 $q=0$，于是 $r=a$。

这个关系叫做按降幂排列的除法的等式。

唯一性——不论怎样的 $K[x]$的多项式 a 和 b，至少存在一对多项式 q 和 r，使得 $a=bq+r$，其中 degré$r<$degréb。我们来证明，这多项式对是唯一的。

假设还有

$$a=bq^*+r^*，其中\ \text{degré}\, r^*<\text{degré}\, b.$$

取两式之差，得

$$b(q^*-q)=r-r^*$$

于是：

$$\text{degré}\, b+\text{degré}(q^*-q)=\text{degré}(r-r^*).$$

可是 degré$(r-r^*)<$degréb，因而degré$(q^*-q)<0$；适合上

述等式的唯一次数是$-\infty$，于是$q^*-q=0$，从而又有$r-r^*=0$.

我们能把定理叙述如下：

定理——设给定环$K[x]$的两个多项式a和b；则存在唯一的多项式q和唯一的多项式r，使得

$$a=bq+r,\qquad\qquad \text{degré}\,r<\text{degré}\,b$$

q叫做按降幂b除a的商式，r叫余式.

特别，如果a能被b整除，这就是说，存在一个多项式c，使$a=bc$；然而，这个关系就是上述除法的等式：$a=bq+r$，其中$q=c$，而$r=0$；实际上$r=0$的次数是$-\infty$，它小于b的次数. 由于唯一性，按照降幂除法的演算给出$q=c$和$r=0$. 因此：

要使多项式a能被多项式b整除，其充分和必要条件是：按照降幂排列的b除a的余式是零.

实际计算——把多项式按未定元的降幂排列，做多项式除法运算，就同做整数除法一样.

例：

$$\begin{array}{rl|l}
a= & 5x^6 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +1 & x^2+2x+1 \\
\gamma_4x^4b= & 5x^6+10x^5+5x^4 & \qquad\qquad =b \\
\hline
a_5= & \quad -10x^5-5x^4 \qquad\qquad\qquad (+1) & 5x^4-10x^3+ \\
\gamma_3x^3b= & \quad -10x^5-20x^4-10x^3 & 15x^2-20x+ \\
\hline
a_4= & \qquad\qquad 15x^4+10x^3 \qquad\qquad (+1) & 25 \\
\gamma_2x^2b= & \qquad\qquad 15x^4+30x^3+15x^2 & \gamma_4x^4+ \\
\hline
a_3= & \qquad\qquad\qquad -20x^3-15x^2 \quad (+1) & \gamma_3x^3+\gamma_2x^2 \\
\gamma_1xb= & \qquad\qquad\qquad -20x^3-40x^2-20x & +\gamma_1x+\gamma_0 \\
\hline
a_2= & \qquad\qquad\qquad\qquad 25x^2+20x+1 & \\
\gamma_0b= & \qquad\qquad\qquad\qquad 25x^2+50x+25 & \\
\hline
a_1=r= & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -30x-24 &
\end{array}$$

作为一条原则，(+1)必须写在圆括弧里，然而当某个多项式 $\gamma_i x^i b$ 也包含与(+1)的次数相同的项时，(+1)的圆括弧就去掉了.

于是这里有:

$$a=5x^6+1,\ b=x^2+2x+1,\ 且\ a=bq+r,$$

其中

$$q=5x^4-10x^3+15x^2-20x+25,$$

$$r=-30x-24,$$

$$\text{degré}\,q=4,\ \ \text{degré}\,r=1\quad 且\ \text{degré}\,r<\text{degré}\,b=2.$$

§2 两个多项式的最大公约式

多项式的理想——我们来证明，具有一个未定元的多项式的每一理想是由唯一的多项式的倍式形成的(一个这样的理想叫做主理想).

事实上，设 I 是理想，且设 $b\in I, b\neq 0$，使得 degréb 是 I 的一切多项式中次数可能最小的(并不假设 b 是唯一的). 设 $a\in I$ 是任意的，用 b 来除 a，就有 $a=bq+r$，于是 $r=a-bq$; 可是 $a\in I, b\in I$，于是 $bq\in I$ 和 $a-bq=r\in I$. 但是 degré$r<$degréb; 然而 0 是 I 中其次数适合此不等式的唯一多项式，这样 $r=0$ 且 $a=bq$. 因而 I 的每一多项式是 b 的倍式. 如果 $b_1\in I$ 且 degré$b_1=$degréb，则 $b_1=bq$，给出 degré$q_1=0$; 于是 I 的与 b 的次数相同的每一多项式是 λb 的形式，$\lambda\in K$，且 $\lambda\neq 0$.

两个多项式的最高公约式——设 a 和 b 是两个固定的多项式，我们来求 a 和 b 的公因子. 0 次多项式，即常数，总可作为公因子. a 和 b 的每一公因子同样可整除 $va+wb$，而不论 v 和 w 是怎样的多项式. 可是多项式 $va+wb$ 的集，(这里 a 和 b 是固定

的；v 和 w 是任意的，）显然形成一个理想；于是这是主理想，也就是说，存在一个多项式 d，准确到一个常数因子，使得每一多项式 $va+wb$ 是 d 的倍式.

特殊地，我们有

1° 对于某些多项式 v 和 w，有 $d=va+wb$；

2° $a=a_1d$ 且 $b=b_1d$，因为 $v=1,w=0$ 时多项式 $1\cdot a+0\cdot b$ 属于此理想；在 $v=0,w=1$ 时多项式 $0\cdot a+1\cdot b$ 属于此理想.

由于 1°，a 和 b 的每一公因式整除 d；而由于 2°，d 的每一因式整除 a 和 b；a 和 b 的公因式的集因而等同 d 的因式的集；特别，d 本身是次数最高的公因式；因而叫做 a 和 b 的*最高公因式*（简写作 P.G.C.D.）.

我们要指出，1° 和 2° 在其系数域是 K 的子域的每一域内也是有效的；于是两个多项式 a 和 b 的 P.G.C.D. 属于 a 和 b 的系数域. 这样，当 a 和 b 的系数是有理数时，a 和 b 的 P.G.C.D. 也有有理数系数，即使我们把 a 和 b 看作系数在实数域内或复数域内的多项式时，亦如此.

1° 和 2° 中的等式同样也证明，如果 d 是 a 和 b 的 P.G.C.D. 则 ac 和 bc 的 P.G.C.D. 是 dc，不论 c 是怎样的多项式.

互素多项式——两个多项式 a 和 b，如果它们的 P.G.C.D. 是零次的（就是非零的常数），就叫做*互素的*.

欧几里德（Euclide）定理——如果 a 整除积 bc，又如果 a 和 b 是互素的，则 a 整除 c.

实际上，a 和 b 的 P.G.C.D. 是一非零常数，于是 ac 和 bc 的 P.G.C.D. 是 λc. 可是 a 整除 ac，而按假设它整除 bc，因而整除 ac 和 bc 的 P.G.C.D.，它是 λc，于是 a 整除 c.

素多项式——一个多项式 p 叫做*素多项式*，或*既约多项式*，如果它除了本身和不等于零的常数外没有别的因式的话.

设 a 是任意的多项式，而 d 是 a 和 p 的 P. G. C. D.；因为 p 是素多项式，d 就或等于 p，或等于常数；在第一种场合 a 是可被 p 整除的，在第二种场合 a 与 p 互素．这样，任一多项式或者恰能被 p 整除，或者与 p 互素．

必须指出，与关于两个多项式的 P. G. C.D. 的论述相反，素多项式的概念主要依赖于系数域 K；这样，多项式 x^2-4 在有理数域 Q 里不是素多项式，因为它能被 $x-2$ 和被 $x+2$ 整除；多项式 x^2-2 在 Q 里是素多项式，然而在 R 里它不是素多项式，因为它能被 $x-\sqrt{2}$ 和 $x+\sqrt{2}$ 整除；多项式 x^2+1 在 R 中是素多项式，因而在 Q 中也是素多项式，然而在 C 中却不是素多项式，因为它能被 $x+i$ 和 $x-i$ 整除．如果一个多项式在一个域里是素多项式，它在其一切子域里也是素多项式．

我们还要指出，次数为 1 的多项式是素多项式，而不论域 K 是怎样的，因为每一因式或者是常数，或者是它自身．

欧几里德定理使得将任一多项式唯一地分解为素多项式的理论成为可能；然而我们不准备涉及这个代数问题．

求 P. G. C. D.：欧几里德算法——设 degré$a \geqslant$degréb；按照降幂排列用 b 除 a：

$$a=bq_0+r_0 \qquad \text{degré}\, r_0<\text{degré}\, b.$$

接着用 r_0 除 b

$$b=r_0q_1+r_1 \qquad \text{degré}\, r_1<\text{degré}\, r_0$$

第三步用 r_1 除 r_0；我们又得到一个余式 r_2，它的次数低于 r_1 的次数．又用 r_2 除 r_1，如此类推；余式 r_0，r_1，…的次数逐次严格下降；达到某个余式 r_{n-1} 能被 r_n 整除为止，于是

$$r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n \qquad \text{degré}\, r_n<\text{degré}\, r_{n-1}$$

$$r_{n-1}=r_nq_{n+1}$$

a 和 b 的每个公因式都能整除 r_0．于是根据第二个关系它能

除 $r_1\cdots$，直至最后能除 r_n；反过来，r_n 的每个因式能除 r_{n-1}，于是能除 r_{n-2}，于是能除 b 和 a；r_n 就是 a 和 b 的 P.G.C.D.。

这种求 P.G.C.D. 的方法名为欧几里德算法；算法(algorithme 这个名词)即计算方法的意思.

培蜀(Bezout)定理与恒等式——设 a 和 b 是 $K[x]$ 的两个多项式，设 d 是它们的 P.G.C.D.，存在 $K[x]$ 的两个多项式 v 和 w，使得 $va+wb=d$；其中

$$\text{degré}v<\text{degré}b-\text{degré}d;$$

$$\text{degré}w<\text{degré}a-\text{degré}d.$$

这两多项式是唯一的.

证明

1. 特殊情况——如果 a 和 b 是 $K[x]$ 的两个互素多项式，则存在 $K[x]$ 的两个唯一的多项式 v 和 w，使得

$$va+wb=1,$$

其中 $\text{degré}v<\text{degré}b$，$\text{degré}w<\text{degré}a$.

2. 一般情况——欧几里德算法的等式序列也可以写作：

$$r_0=v_0a+w_0b,\quad 其中\ v_0=1,\ w_0=-q_0,$$

于是：$\text{degré}v_0\leqslant 0$，$\text{degré}w_0=\text{degré}a-\text{degré}b$.

考虑到这个关系，等式 $b=r_0q_1+r_1$ 就可写作

$$r_1=v_1a+w_1b,\quad 其中\ v_1=-q_1;\quad w_1=q_0q_1+1.$$

则有

$$\text{degré}v_1=\text{degré}b-\text{degré}r_0$$

$$\begin{aligned}\text{degré}w_1&=\text{degré}a-\text{degré}b+\text{degré}b-\text{degré}r_0\\&=\text{degré}a-\text{degré}r_0.\end{aligned}$$

于是假设，对于某个 $h<k$，得到：

$$r_h=v_ha+w_hb,$$

其中

$$\text{degré}\, v_k = \text{degré}\, b - \text{degré}\, r_{k-1}$$

$$\text{degré}\, w_k = \text{degré}\, a - \text{degré}\, r_{k-1}.$$

于是关系 $r_{k-2}=r_{k-1}q_k+r_k$ 给出

$$r_k = v_{k-2}a + w_{k-2}b - (v_{k-1}a + w_{k-1}b)q_k,$$

于是

$$r_k = v_k a + w_k b,$$

其中

$$v_k = -q_k v_{k-1} + v_{k-2}, \qquad w_k = -q_k w_{k-1} + w_{k-2}.$$

我们有

$$\begin{aligned}\text{degré}(q_k v_{k-1}) &= \text{degré}\, r_{k-2} - \text{degré}\, r_{k-1} \\ &\quad + \text{degré}\, b - \text{degré}\, r_{k-2} \\ &= \text{degré}\, b - \text{degré}\, r_{k-1};\end{aligned}$$

从而 $\text{degré}(q_k v_{k-1}) > \text{degré}\, v_{k-2} = \text{degré}\, b - \text{degré}\, r_{k-3}$,
且有 $\text{degré}\, v_k = \text{degré}\, b - \text{degré}\, r_{k-1}$.

同样能证明

$$\text{degré}\, w_k = \text{degré}\, a - \text{degré}\, r_{k-1}.$$

于是，所得到的公式对一切 k 为真．同样能指出，如果令 $v_{-1}=0, w_{-1}=1$ 且 $v_{-2}=1, w_{-2}=0$, 为了实际计算而使用的公式，仍然为真

特别的，对 P.G.C.D. $d=r_n$, 公式为真，于是存在两个多项式 $v=v_n$ 和 $w=w_n$, 使得

$$d = va + wb,$$

这里更有

$$\text{degré}\, v = \text{degré}\, b - \text{degré}\, r_{n-1} < \text{degré}\, b - \text{degré}\, d,$$

$$\text{degré}\, w = \text{degré}\, a - \text{degré}\, r_{n-1} < \text{degré}\, a - \text{degré}\, d.$$

3. 唯一性——我们已看到，d 是用形式 $va+wb$ 来表示的，然而我们得到 v 和 w 的精确次数．我们来证明，关于次数的条件导

致这些多项式的唯一性。

实际上，设还有

$$d=v^*a+w^*b,$$

其中

$$\text{degré}\,v^*<\text{degré}\,b-\text{degré}\,d$$

$$\text{degré}\,w^*<\text{degré}\,a-\text{degré}\,d.$$

取两个 d 的表达式的差，得到

$$(v-v^*)a=(w^*-w)b.$$

用 d 除 a 和 b，设 $a=da_1$；$b=db_1$；而 a_1 和 b_1 是互素的，且 $\text{degré}\,a_1=\text{degré}\,a-\text{degré}\,d$, $\text{degré}\,b_1=\text{degré}\,b-\text{degré}\,d$.

用 d 来除等式两端，得

$$(v-v^*)a_1=(w^*-w)b_1.$$

可是 a_1 能整除 $(w^*-w)b$，而它与 b_1 又互素，于是根据欧几里德定理，a_1 可整除 w^*-w。于是有 $w^*-w=a_1q_1$.

我们有

$$\text{degré}(w^*-w)<\text{degré}\,a-\text{degré}\,d;$$

另一方面

$$\begin{aligned}\text{degré}(a_1q_1)&=\text{degré}\,a_1+\text{degré}\,q_1\\&=\text{degré}\,a-\text{degré}\,d+\text{degré}\,q_1.\end{aligned}$$

这样，$\text{degré}\,q_1<0$，就是说 $q_1=0$，从而 $w^*-w=0$．且 $v-v^*=0$.

这种证明过程还说明，如果我们把 d 表示成形式 $d=v^*a+w^*b$，而对 v^*和 w^*的次数无限制，则每一个 v^*，w^*的等式组都可用下列公式从 v, w 推出来：

$$v^*=v+cb_1,\quad w^*=w-ca_1,$$

这里 c 是任意的多项式

例一——设　$a=x^5+x^4-x^3+x^2+x+1$,

$$b=x^4-1.$$

用逐次除法就得到

$$\begin{array}{ll} q_0=x+1 & r_0=x^3+x^2+2x+2 \\ q_1=x-1 & r_1=-x^2+1 \\ q_2=-x-1 & r_2=3x+3 \\ q_3=-\dfrac{1}{3}(x-1) & r_3=0. \end{array}$$

于是 P.G.C.D. d 是多项式 r_2，或者准确到（不计）常数因子，$d=x+1$。

为了从培蜀恒等式求多项式 v 和 w，我们利用递推公式

$$v_k=-q_kv_{k-1}+v_{k-2},$$

$$w_k=-q_kw_{k-1}+w_{k-2},$$

从 $k=-2$ 出发，由此有

k	$-q_k$	v_k	w_k
-2		1	0
-1		0	1
0	$-(x+1)$	1	$-(x+1)$
1	$-(x-1)$	$-(x-1)$	x^2
2	$x+1$	$-x^2+2$	$x^3+x^2-x-1.$

这样就有

$$d=3(x+1)=(-x^2+2)a+(x^3+x^2-x-1)b,$$

且

$$\text{degré}(-x^2+2)<\text{degré}\,b-\text{degré}\,d=4-1=3$$

$$\text{degré}(x^3+x^2-x-1)<\text{degré}\,a-\text{degré}\,d=5-1=4.$$

第三部分　按升幂排列的除法

多项式的赋值——设 $a=\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n\neq0$ 是环 A 上的

一个多项式，又设 $h\geqslant 0$ 是使 $\alpha_h\neq 0$ 的最小序标数(如果 $k<h$，则 $\alpha_k=0$)；我们把整数 $v(a)=h$ 叫做 a 的赋值。

对于每一多项式$\neq 0$，下列性质是明显的：

1° $v(a)\geqslant 0$;

2° $v(a\cdot b)=v(a)+v(b)$;

3° $v(a+b)\geqslant\min(v(a),\ v(b))$；仅当 $v(a)=v(b)$时，才有 $v(a+b)>\min(v(a),v(b))$。

$v(0)$无定义。

这三条性质类似绝对值的性质；实际上，设$0<\omega<1$是任一实数，我们来考虑函数 $\varphi(a)=\omega^{v(a)}$；则有

1° $\varphi(a)>0$，如果 $a\neq 0$;

2° $\varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$;

3° $\varphi(a+b)\leqslant\max(\varphi(a),\varphi(b))<\varphi(a)+\varphi(b)$.

如果我们还约定 $\varphi(0)=0$，也就是说(见第二卷，第四章)$v(0)=+\infty$，$\varphi(a)$正好就是多项式环上的绝对值。为了赋值，还约定 $v(0)=+\infty$，这个符号适合$+\infty+n=+\infty$和$+\infty>n$，其中 n 为任意的整数。

对任意的 $n=0,1,\cdots$，有 $v(x^n)=n$。

设多项式a是这样的，它使得 $v(a)=h$，即

$$a=\alpha_h x^h+\alpha_{h+1}x^{h+1}+\cdots+\alpha_n x^n,\ 其中\ \alpha_h\neq 0.$$

则能写

$$a=x^h\cdot b,$$

这里

$$b=\alpha_h+\alpha_{h+1}x+\cdots+\alpha_n x^{n-h}\quad 且\quad v(b)=0.$$

从而，如果 $v(a)=h\neq 0$，则总能用多项式 x^h 去除 a，且商是赋值为0的一个多项式。

以后，在这一部分我们总假设：环A是域K，这里$K=C$或R

或 Q.

按照升幂的除法——我们来重新探求多项式 a 能否被多项式 b 整除的问题.

设有: $a=bq$, 于是 $v(a)=v(b)+v(q)\geqslant v(b)$.

于是, 如果 $v(b)=h\neq 0$, 则有 $b=x^h b^*$, 这里 $v(b^*)=0$. 然而, 因为 $v(a)\geqslant v(b)=h$, 则也有 $a=x^h\cdot a^*$, 又因 $a=bq$, 则有 $a^*=b^*q$. 这样, 用多项式 b^*除 a^*就能得到 q, 这里 $v(b^*)=0$. 在研究用 b 除 a 时, 就能只限于 $v(b)=0$ 的多项式 b 的情形.

如果 a 能被 b 整除, 它就属于 b 的倍式的理想 I, 我们来试求从 a 减去 b 的这种倍式, 以得到 I 的如此多项式, 其赋值愈来愈大, 以至得到赋值 $+\infty$, 也就是多项式 0.

为了阐明赋值, 我们把多项式写成按其序标增长的次序排列. 设

$$a=\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n,$$

$b=\beta_0+\beta_1x+\cdots+\beta_mx^m$, 其中 $\beta_0\neq 0$, 因而

$$v(b)=0.$$

于是我们考虑多项式

$$r_1=a-\gamma_0b,$$

这里 $\gamma_0=\alpha_0/\beta_0$. 这个数 γ_0 是存在的, 因为多项式系数属于一个域 K, 且 $\beta_0\neq 0$. 也可能会有 $\gamma_0=0$, 这必须且只须: $\alpha_0=0$.

如果 $a\in I$, 因为 $b\in I$, 则多项式 $r_1\in I$, r_1 的常数项是 $\alpha_0-\gamma_0\beta_0=0$. 因而有

$$v(r_1)\geqslant 1.$$

先从多项式 r_1 开始做除法运算, 于是逐步地得到一系列关系:

$$a-\gamma_0b=r_1,\quad v(r_1)\geqslant 1,$$

$$r_1-\gamma_1xb=r_2,\quad v(r_2)\geqslant 2,$$

$$r_k-\gamma_k x^k b=r_{k+1}, \quad v(r_{k+1})\geqslant k+1.$$

实际上，设我们得到 r_i 与 $v(r_i)\geqslant i$，于是 $r_i=\rho_i x^i+\rho_{i+1}x^{i+1}+\cdots$，此外，如果 $v(r_i)>i$，ρ_i 还可能是零. 令 $\gamma_i=\rho_i/\beta_0$ 是 $r_i-\gamma_i x^i b$ 中 x^i 的系数，就有 $\rho_i-\gamma_i\beta_0=0$；于是恰有 $v(r_{i+1})\geqslant i+1$.

把上面的所有等式相加，就得到

$$a-(\gamma_0+\gamma_1 x+\cdots+\gamma_k x^k)b=r_{k+1}.$$

因为把 $v(0)$ 看作大于一切整数，而记作 $+\infty$，所以还能说：

不论怎样的 a 和 b，$v(b)=0$ 且序标 $k\geqslant 0$，存在一个最多为 k 次的多项式 q_k，和一个多项式 r_{k+1}，使得

$$a=bq_k+r_{k+1} \quad 与 \quad v(r_{k+1})\geqslant k+1>\text{degré}\, q_k$$

上面写的等式叫做按升幂排列的除法的等式.

唯一性——不论怎样的 $K[x]$ 的多项式 a 和 $b(v(b)=0)$，又不论怎样的整数 $k\geqslant 0$，我们刚刚确立了至少有一对多项式 q_k 和 r_{k+1} 存在，使得

$$a=bq_k+r_{k+1}, \quad v(r_{k+1})\geqslant k+1>\text{degré}\, q_k$$

我们来证明，对给定的 k，这一对多项式是唯一的. 于是假定还有另外的一对多项式：

$$a=bq_k^*+r_{k+1}^*, \quad v(r^*_{k+1})\geqslant k+1>\text{degré}\, q_k^*$$

取两个等式的差，得到

$$b(q_k^*-q_k)=r_{k+1}-r_{k+1}^*,$$

于是

$$v(b)+v(q_k^*-q_k)=v(r_{k+1}-r_{k+1}^*).$$

可是 $v(b)=0$，于是 $v(q_k^*-q_k)\geqslant k+1$. 然而有 $\text{degré}(q_k^*-q_k)\leqslant k$，这样，$q_k^*-q_k$ 的每一个系数是零，且 $q_k^*-q_k=0$，从而又有

$$r_{k+1}-r_{k+1}^*=0.$$

我们可以把它叙述成定理如下：

定理——设给定 $K[x]$ 的两个多项式 a 和 b, b 的赋值 $v(b)$ 是零. 不论怎样的整数 k, 存在一个多项式 q_k 和一个多项式 r_{k+1}, 它们对于 k 的给定值是唯一的, 使得

$$a=bq_k+r_{k+1},\qquad v(r_{k+1})\geqslant k+1>\text{degré}\, q_k.$$

这个多项式 q_k 叫做按升幂排法以 b 除 a 的商, r_{k+1} 叫做此除法的余式.

特别地, 如果 a 能被 b 整除, 则存在 c, 使 $a=bc$ 且 $\text{degré}\, c=\text{degré}\, a-\text{degré}\, b$; 当 $q_k=c$ 且 $r_{k+1}=0$ 时, 对于一切适合 $k\geqslant\text{degré}\, a-\text{degré}\, b$ 的 k, 这个关系是除法的等式, 实际上, $v(r_{k+1})=v(0)=+\infty>k+1>\text{degré}\, q_k=\text{degré}\, a-\text{degré}\, b$. 因为有唯一性, 应用按照升幂排列的除法算法, 就给出 $q_k=c$ 且 $r_{k+1}=0$. 从而:

要多项式 a 能被多项式 b 整除, 而 $v(b)=0$, 其必要且充分条件是: 对于至少一个整数 $k\geqslant\text{degré}\, a-\text{degré}\, b$, 按照升幂排列以 b 除 a 的余式 r_{k+1} 为零.

如果 a 不能被 b 整除, 运算可以持续进行到 k 的任意值. 这是按升幂排列的除法与按降幂排列的除法的主要差别, 后者总会在某一步终止的.

实际计算——把多项式写成按未定元的升幂排列, 像整数除法一样来进行运算

例:

$$\begin{array}{rlr|l}
a= & 1 & +5x^6 & 1+2x+x^2 \qquad =b \\ \cline{4-4}
\gamma_0 b= & 1+2x+x^2 & & 1-2x+3x^2-4x^3+5x^4 \\ \cline{2-3}
r_1= & -2x-x^2 & (+5x^6) & \gamma_0+\gamma_1 x+\gamma_2 x^2+\gamma_3 x^3+\gamma_4 x^4 \\
\gamma_1 xb= & -2x-4x^2-2x^3 & & \\ \cline{2-3}
r_2= & 3x^2+2x^3 & (+5x^6) & \\
\gamma_2 x^2 b= & 3x^2+6x^3+3x^4 & &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rl}
r_3 = & -4x^3 - 3x^4 \qquad\qquad (+5x^6) \\
\gamma_3 x^3 b = & -4x^3 - 8x^4 - 4x^5 \\
\hline
r_4 = & \qquad\quad 5x^4 + 4x^5 + 5x^6 \\
\gamma_4 x^4 b = & \qquad\quad 5x^4 + 10x^5 + 5x^6 \\
\hline
r_5 = & \qquad\qquad -6x^5
\end{array}
$$

这里就有

$$a = 1 + 5x^6,\quad b = 1 + 2x + x^2,\quad 和\ a = bq_4 + r_5,$$

其中

$$q_4 = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4,\quad r_5 = -6x^5.$$

另一方面，degré$q_4 = 4$ 且 $v(r_5) = (\text{degré}\,q_4) + 1$.

我们要指出，这种除法给出的结果是与按降幂排列用同一个 b 除同一个 a 的结果不同的(第二部分 § 1).

第四部分 多项式的求导，泰勒(Taylor)公式

§1 求 导

在这一节里我们来论述多项式的求导问题，用的是纯代数的方法，而不用极限概念. $A[x]$ 是有一个未定元在整环 A 上的多项式环.

导多项式的定义——设多项式 $a = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$. 作为定义我们设令

$$a' = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \cdots + n\alpha_n x^{n-1} = \alpha_0' + \alpha_1' x + \cdots + \alpha_{n-1}' x^{n-1},$$

其中

$$\alpha'_i=(i+1)\alpha_{i+1},\qquad 这里\ i=0,1,\cdots,n-1.$$

多项式 a' 叫做多项式 a 的导多项式. 如果 $a=0$ 或者如果 $a=\alpha_0$ 是 0 次多项式, 则有 $a'=0$, 在此以外的其他场合, 则有

$$\mathrm{degré}\,a'=(\mathrm{degré}\,a)-1.$$

求导的性质——如果 $a\in A[x]$, $b\in A[x]$, $\lambda\in A$, 则有

$$(\lambda a)'=\lambda a' \qquad 且 \qquad (a+b)'=a'+b'.$$

在 A 是域 K 的情况下, 使得 $a'\in K[x]$ 对应于 $a\in K[x]$ 的映射是从矢量空间 $K[x]$ 到其自身内的一个线性映射(第十章, §3).

我们回到 A 是整环的一般情况. 我们只须根据上述两个性质来了解 x^n 的导多项式就行了.

我们有:

对 $n\geqslant 1$, $(x^n)'=nx^{n-1}$, 且 $(x^0)'=(1)'=0$.

积的导数——我们先考虑积 $x^i\cdot x^j$. 如果 $i+j\geqslant 1$, 则有

$$(x^i\cdot x^j)'=(x^{i+j})'=(i+j)x^{i+j-1}.$$

如果 $i\geqslant 1$, $j\geqslant 1$, 则能写出

$$(x^i\cdot x^j)'=ix^{i-1}x^j+jx^{j-1}\cdot x^i=(x^i)'x^j+(x^j)'x^i$$

如果 $i=0$, 则有 $(x^0\cdot x^j)'=(x^0)'x^j+(x^j)'x^0$.

如果最后 $i=j=0$, 则有 $(x^0\cdot x^0)'=(1)'=0=(x^0)'x^0+(x^0)'x^0$.

于是公式

$$(x^i\cdot x^j)'=(x^i)'\cdot x^j+(x^j)'\cdot x^i$$

对于所有 $i\geqslant 0$, $j\geqslant 0$, 是有效的.

如果:

$$a=\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n$$
$$b=\beta_0+\beta_1x+\cdots+\beta_mx^m.$$

则有

$$a\cdot b=\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{m}\alpha_i\beta_j(x^i\cdot x^j)\Big)$$

于是：

$$(a\cdot b)'=\sum_{i=0}^{n}(\sum_{j=0}^{m}\alpha_i\beta_j[(x^i)'\cdot x^j+(x^j)'\cdot x^i])$$

$$=\sum_{j=0}^{m}(\beta_j x^j[\sum_{i=0}^{n}\alpha_j^i(x^i)'])$$

$$+\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i x^i\ [\sum_{j=0}^{m}\beta_i^j(x^j)']),$$

也就是说：

$$(a\cdot b)'=a'b+b'a.$$

如果 b 是零次的，这个公式也是有效的，因为，如果 $b=\beta_0\in A$，则有 $b'=0$，且 $(\beta_0 a)'=\beta_0 a'+0\cdot a=\beta_0 a'$，这就是前面已经指明的公式。

我们应用这个公式来计算 $(a^k)'$．对 k 进行递推法，我们来证明 $(a^k)'=ka^{k-1}a'$．约定 $a^0=0$，这公式对 $k=1$ 为真．假设对 $k>1$ 这公式为真，于是有

$$(a^{k+1})'=(a^k\cdot a)'=(ka^{k-1}\cdot a')a+a^k\cdot a'=(k+1)a^k\cdot a';$$

于是公式对 $k+1$ 为真，从而它对所有的整数 $k\geqslant1$ 为真．

要指出，若把 x^n 看作多项式 x 的 n 次幂，我们又回到了 x^n 的求导公式．

高阶导数——我们令 $a''=(a')'$；a'' 叫做 a 的二阶导多项式；一般地，令 $a^{(h)}=(a^{(h-1)})'$，并将 $a^{(h)}$ 叫做 a 的 h 阶导多项式，这里 $h\geqslant1$．我们约定 $a^{(0)}=0$（0 阶导数）．

设 $a=\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n$ 是 n 次多项式．

于是 $a^{(h)}$ 是 $n-h$ 次多项式，特别对于每一 $h>n$，$a^{(h)}=0$．

令

$$a^{(h)}=\alpha_{h,0}+\alpha_{h,1}x+\cdots+\alpha_{h,n-h}x^{n-h}.$$

因而 x^i 的系数 $\alpha_{h,i}$，对 $i=0,1,\cdots,n-h$ 由下式给出

$$\alpha_{h,i}=(i+h)(i+h-1)\cdots(i+1)\alpha_{i+h}.$$

特别，常数项是

$$\alpha_{h,0}=h(h-1)\cdots1\cdot\alpha_h=h!\alpha_h.$$

§2 泰勒(Taylor)公式

多项式函数——设 $a=\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n$ 是在环 A 上的一多项式．设 ξ 是 A 的一元素，于是ξ^i定义为 i 个等于 ξ 的因子的积，于是 $\xi^i\in A$，且元素

$$a(\xi)=\alpha_0+\alpha_1\xi+\cdots+\alpha_n\xi^n$$

属于环 A．于是多项式 a 定义了一个从 A 到 A 内的映射，它使得对每个 $\xi\in A$ 有 $a(\xi)\in A$ 与之对应．这个映射叫做多项式函数 a，或者在不致引起混乱的情况下，径直地叫做多项式 a．

运算——设 a 和 b 由下二式定义

$$a=\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n,$$
$$b=\beta_0+\beta_1x+\cdots+\beta_mx^m,$$

它们是 $A[x]$的两个任意多项式；设 λ 是 A 的一个任意元素．于是对每一 $\xi\in A$，有

$$(\lambda a)(\xi)=\lambda\alpha_0+\lambda\alpha_1\xi+\cdots+\lambda\alpha_n\xi^n=\lambda\cdot a(\xi),$$
$$(a+b)(\xi)=(\alpha_0+\beta_0)+(\alpha_1+\beta_1)\xi+(\alpha_2+\beta_2)\xi^2+\cdots$$
$$=a(\xi)+b(\xi),$$
$$(ab)(\xi)=\alpha_0\beta_0+(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0)\xi+\cdots,$$
$$+(\alpha_0\beta_i+\alpha_1\beta_{i-1}+\cdots+\alpha_i\beta_0)\xi^i+\cdots+\alpha_n\beta_mx^{n+m}$$
$$=\left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\xi^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m}\beta_j\xi^j\right)=a(\xi)\cdot b(\xi);$$

这是多项式乘法规律的另一种解释．这个组合规律就是我们前面对函数定义的组合规律(见第六章第三部分 §1)．

泰勒(Taylor)公式——在本段的后面部分，我们设环 A 是域 K，这里 K 或者是域 C，或者是域 R，或者是域 Q.

设 $a=\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n$ 是 $K[x]$的 n 次多项式. 于是 $\alpha_n\neq0$.

我们推得公式

$$a^{(h)}=\alpha_{h,0}+\alpha_{h,1}x+\cdots+\alpha_{h,n-h}x^{n-h},$$

这里

$\alpha_{h,i}=(i+1)(i+2)\cdots(i+h)\alpha_{i+h}$， 对 $i=0,1,\cdots,n-h$，且 $\alpha_{h,0}=h!\alpha_h$. 于是就有 $\alpha_h=\frac{\alpha_{h,0}}{h!}$. 然而 $\alpha_{h,0}=a^{(h)}(0)$，于是能把多项式 a 写成如下形式：

$$a=a(0)+\frac{a'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{a^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{h=0}^{n}\frac{a^{(h)}(0)}{h!}x^h,$$

这里约定 $a^{(0)}=\alpha_0$ 且 $0!=1$.

这个公式叫做麦克劳林(Mac-Laurin)公式.

当已知各阶导数在 K 的 0 处的值时，就能写出这多项式.

用类似的方法，我们来求另一公式，它以任意值 $\lambda\in K$ 来代替 0. 于是设 λ 是 K 的一个确定的数，令

$$p_\lambda=x-\lambda,$$

p_λ 同样是一个一次多项式，且 $p_\lambda(\lambda)=0$.

按照降幂用 p_λ 来除 a；商 a_{n-1} 是 $n-1$次的，而余式的次数小于或等于 0：余式是一个可能为零的常数. 我们写出：

$$a=p_\lambda a_{n-1}+\beta_0,\quad 这里\ \beta_0\in K.$$

我们自 a_{n-1} 开始，并继续做下去，这就得到一列等式：

$$a=p_\lambda a_{n-1}+\beta_0,\quad \beta_0\in K,\quad \text{degré}(a_{n-1})=n-1,$$

$$a_{n-1}=p_\lambda a_{n-2}+\beta_1,\quad \beta_1\in K,\quad \text{degré}(a_{n-2})=n-2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_1=p_\lambda a_0+\beta_{n-1},\quad \beta_{n-1}\in K,\quad \text{degré}\,a_0=0,$$

$$\alpha_0=\beta_n,\quad \beta_n\in K.$$

用 p_λ^{n-i} 乘关系式 $\alpha_i=p_\lambda\alpha_{i-1}+\beta_{n-i}$，这里 $i=1,\cdots,n-1$，且再从第一式到末一式相加，得到：

(1) $$\alpha=\beta_0+\beta_1p_\lambda+\beta_2p_\lambda^2+\cdots+\beta_np_\lambda^n.$$

可是对 $p_\lambda=x-\lambda$ 求导，得 $p_\lambda'=1$，从而 $(p_\lambda^{i+1})'=(i+1)p_\lambda^i$. 求导 h 次，得

$(p_\lambda^{i+h})^{(h)}=(i+h)(i+h-1)\cdots(i+1)p_\lambda^i$，其中 $i=0,1,\cdots$. 这里约定 $p_\lambda^0=1$. 还要指出，如果 $j<h$，则 $(p_\lambda^j)^{(h)}=0$，于是得到

$$\alpha^{(h)}=h!\beta_h+\cdots+(i+1)(i+2)\cdots(i+h)\beta_{i+h}p_\lambda^i+\cdots$$
$$+(n-h+1)\cdots n\beta_np_\lambda^{n-h}.$$

因为 $p_\lambda(\lambda)=0$，所以推出：

$$\alpha^{(h)}(\lambda)=h!\beta_h,\quad 于是\beta_h=\frac{\alpha^{(h)}(\lambda)}{h!}.$$

这样就得到下面的公式，它叫做泰勒公式：

$$\alpha=\alpha(\lambda)+\frac{\alpha'(\lambda)}{1!}p_\lambda+\cdots+\frac{\alpha^{(n)}(\lambda)}{n!}p_\lambda^n=\sum_{h=0}^{n}\frac{\alpha^{(h)}(\lambda)}{h!}(x-\lambda)^h.$$

这里约定 $(x-\lambda)^0=1$.

这个公式表明，如果 λ 是固定的，α 的表达式(1)就是唯一的，因为，对于 $\lambda\in K$，已知 $\alpha^{(h)}$的各阶导数值，我们就得到 α.

§3 二项式公式和二项式系数

二项式公式——考虑多项式 $\alpha=(1+x)^n=p_{-1}^n$，它是 n 次的，并且根据上面所说，可得

$$\alpha^{(h)}=(p_{-1}^n)^{(h)}=n(n-1)\cdots(n-h+1)p_{-1}^{n-h}.$$

因为 $p_{-1}(0)=1$，则有

$$\alpha^{(h)}(0)=n(n-1)\cdots(n-h+1)$$

应用麦克劳林公式则得

$$(1+x)^n=\sum_{h=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-h+1)}{h!}x^h.$$

令

$$C_n^h=\frac{n(n-1)\cdots(n-h+1)}{h!}.$$

这个数叫做二项式系数. 也可将它写作

$$C_n^h=\binom{n}{h}$$

公式

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n=\sum_{h=0}^{n}C_n^hx^h$$

叫做二项式公式.

二项式系数的性质——作等于$(1+x)$的 n 个因子的积，我们看到二项式的系数是正整数. 我们有

$$C_n^0=1 \quad 和 \quad C_n^1=n.$$

将

$$C_n^h=\frac{n(n-1)\cdots(n-h+1)}{h!}$$

的分子和分母同乘以$(n-h)!$ 就得到 $C_n^h=\dfrac{n!}{h!(n-h)!}$.

这个公式利用阶乘将 C_n^h 唯一地表达出来. 此外, 它还表明了一个对称性; 即有 $C_n^h=C_n^{n-h}$.

从$(1+x)^n=(1+x)^{n-1}(1+x)$出发, 即从

$$\begin{aligned}&1+C_n^1x+\cdots+C_n^hx^h+\cdots+x^n\\&=(1+\cdots+C_{n-1}^{h-1}x^{h-1}+C_{n-1}^hx^h+\cdots+x^{n-1})(1+x),\end{aligned}$$

出发, 令两端 x^h 的系数相等, 得

$$C_n^h=C_{n-1}^{h-1}+C_{n-1}^h,$$

这里 $1\leqslant h\leqslant n-1$ 且

$$C_n^0=C_{n-1}^0=1,\ C_n^n=C_{n-1}^{n-1}=1.$$

于是，约定 $C_0^0=1$，将二项式的系数写成三角形表的形式，就得到

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad C_2^1\quad 1\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
1\cdots C_{n-1}^{h-1}\quad C_{n-1}^{h}\cdots 1\\
1\cdots\cdots C_n^h\cdots\cdots 1.
\end{array}$$

每一项是两个整数的和，这两个整数在紧挨这一项的上一行的左右两边. 这个表叫做巴斯伽(Pascal)三角形表①. 当 n 不大时，就能很快地从此表求得系数 C_n^h. 对于 n 的稍大的值，牛顿(Newton)发现的公式

$$C_n^h=\frac{n(n-1)\cdots(n-h+1)}{h!}$$

是很好的. 不要忘记，C_n^h 是一个整数，于是可以用分母的因子去约分，将此公式化简，而得一整数.

对于 x 的值 1 而求 $a=(1+x)^n$，得 $a(1)=2^n$，由此，根据二项式公式，$2^n=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n$. 因为对于每一 h, C_n^h 是正的，因此有 $C_n^h<2^n$，这里 $n\geqslant 1$.

第五部分　多项式的零点

在这一部分我们假设 A 是域 K，这里 K 是域 C，或域 R，或域

① 我国南宋时期的数学家杨辉，在他的著作《详解九章算法》(1261 年)中也得到类似的结果，比 Pascal 的这个结果(1650 年)约早近四百年. ——译者注.

Q, 我们来考虑 $K[x]$ 的多项式.

定义——一个数 $\rho\in K$ 叫做多项式 a 的零点，如果它适合 $a(\rho)=0$. 我们也说, ρ 是方程 $a(\xi)=0$ 的一个根, 然而在这一部分我们回避使用根这个词.

定理 1——为了使 ρ 是多项式 a 的一个零点，必需且只需 a 能被多项式 $x-\rho$ 整除.

实际上, 按照降幂排列用 $x-\rho$ 除 a, 因为 $x-\rho$ 是一次的，余式的次数 $\leqslant 0$, 因而它是一个可能为零的常数且有

$$a=(x-\rho)a_1+\alpha.$$

我们来求 $a(\rho)$. 因为 $\rho-\rho=0$, 所以有 $a(\rho)=\alpha$. 从而，如果 ρ 是多项式 a 的零点, 则有 $a(\rho)=0$, 于是 $\alpha=0$, 且 a 能被 $x-\rho$ 整除.

反过来说，如果 a 能被 $x-\rho$ 整除，于是 $\alpha=0$，且有 $a(\rho)=(\rho-\rho)a_1(\rho)=0$.

零点的重数——设 ρ 是多项 a 的一个零点，于是有 $a=(x-\rho)a_1$, 可能多项式 a_1 也以 ρ 为零点, 于是 $a_1=(x-\rho)a_2$, 且 $a=(x-\rho)^2a_2$. 设有 $a=(x-\rho)^ka_h$, 而多项式 a_h 不再以 ρ 为零点, 即 $a_h(\rho)\neq 0$, 于是使上式成立的最大整数指数 h 叫做零点 ρ 的重数. 如果 $h=1$, 就说 ρ 是单重零点; 如果 $h=2$, 则说 ρ 是双重零点.

设 $\rho_1,\cdots,\rho_k$ 是多项式 a 的不同零点, 又设 $h_1,\cdots,h_k$ 分别是它们的重数. 于是有 $a=(x-\rho_1)^{h_1}b=(x-\rho_2)^{h_2}c$. 由于 $x-\rho_1$ 是一次的, 所以不论 K 如何, $x-\rho_1$ 是素多项式，又因为 $\rho_1\neq\rho_2$，于是与 $x-\rho_2$ 互素, 从而 $(x-\rho_1)^{h_1}$ 与 $(x-\rho_2)^{h_2}$ 互素. 然而 $(x-\rho_2)^{h_2}$ 能整除积 $(x-\rho_1)^{h_1}b$, 于是根据欧几里德定理，$(x-\rho_2)^{h_2}$ 能整除 b，且有

$$b=(x-\rho_2)^{h_2}b^*,\quad 于是\quad a=(x-\rho_1)^{h_1}(x-\rho_2)^{h_2}b^*.$$

对每一多项式 $(x-\rho_j)^{h_j}$ 继续进行这样的推理. 最后得:

$$a=(x-\rho_1)^{h_1}(x-\rho_2)^{h_2}\cdots(x-\rho_k)^{h_k}q,$$

这里 q 是一多项式，不再以 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_k$ 为其零点.

设 n 是 a 的次数；a 的上面的表达式证明：

$$n=\text{degré}\,a=h_1+h_2+\cdots+h_k+\text{degré}\,q,$$

由此

$$h_1+h_2+\cdots+h_k\leqslant\text{degré}\,a=n.$$

特别有：一个 n 次多项式不能有多于 n 个的不同零点.

如果它有 n 个零点，则这些零点都是单重的.

还可以表达这个结果如下：一个至多 n 次的多项式，对多于 n 个的不同的 x 的值，都取 0 值，它必然是零多项式.

一个多项式当其在 n 个不同的值 $\rho_1, \cdots, \rho_n$ 处为零时可写成如下形式：$a=(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_n)q$，这里 q 是一任意的多项式. 如果 a 是 n 次的，则 q 应是 0 次的；于是 q 是一非零常数.

零点与导数间的关系——设 ρ 是多项式 a 的 $h(h\geqslant1)$ 重零点，则有

$$a=(x-\rho)^h a_h,\quad \text{其中 } a_h(\rho)\neq0.$$

求此等式的导数，则得

$$a'=h(x-\rho)^{h-1}a_h+(x-\rho)^h a'_h=(x-\rho)^{h-1}b,$$

这里 $b=ha_h+(x-\rho)a'_h$

我们有 $b(\rho)=ha_h(\rho)\neq0$. 由此得下列结果：

如果 ρ 是多项式 a 的 $h(h\geqslant1)$ 重零点，则 ρ 是导多项式 a' 的 $h-1$ 重零点.

将此结果用于 a 的多阶导数，则又导出下述定理：

定理 2——要 ρ 是多项式 a 的 $h(h\geqslant1)$ 重零点，其必要且充分条件是：ρ 是多项式 $a', a'', \cdots, a^{(h-1)}$ 的零点，然而不是 $a^{(h)}$ 的零点.

我们刚刚看到，如果 ρ 是 h 重零点，则有

$$a'(\rho)=a''(\rho)=\cdots=a^{(h-1)}(\rho)=0,\ a^{(h)}(\rho)\neq0.$$

相反地，现在设这些关系是被满足的. 则泰勒公式给出

$$a=\frac{a^{(h)}(\rho)}{h!}(x-\rho)^h+\cdots+\frac{a^{(n)}(\rho)}{n!}(x-\rho)^n,$$

这就是说 $a=(x-\rho)^h c$, 其中

$$c=\frac{a^{(h)}(\rho)}{h!}+\frac{a^{(h+1)}(\rho)}{(h+1)!}(x-\rho)+\cdots+\frac{a^{(n)}(\rho)}{n!}(x-\rho)^{n-h}.$$

从而 $c(\rho)=\frac{a^{(h)}(\rho)}{h!}\neq 0$, 于是 ρ 是 a 的恰为 h 重的零点.

我们要指出, 如果有 $a(\rho)=a'(\rho)=\cdots=a^{(h-1)}(\rho)=0$,则只能肯定, ρ 是 a 的至少为 h 重零点.

拉格朗日(Lagrange)插值多项式——常会遇到, 我们要求一个多项式, 它对于已给的数, 取预先给定的值. 为了明确起见, 设给定了K的 n 个不同的数 $\xi_1, \cdots, \xi_n$. 其对应值为 $\eta_1, \cdots, \eta_n$. 我们来求这样的多项式 $a\in K[x]$, 它使得

$$a(\xi_1)=\eta_1, \cdots, a(\xi_n)=\eta_n.$$

为此, 我们来确定这样的多项式 a_i, 使得对于 $j=1, \cdots, n$(然而 $j\neq i$), 有 $a_i(\xi_j)=0$. 我们已经看到, 为此只要取

$$a_i=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x-\xi_j)$$

a_i 就是 $n-1$ 次的.

因而有

$$a_i(\xi_i)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\xi_i-\xi_j)\neq 0.$$

令 $a_i(\xi_i)=\lambda_i$. 多项式 $b_i=\frac{\eta_i}{\lambda_i}a_i$ 就具有性质: 如果 $j\neq i$, 则 $b_i(\xi_j)=0$, 而 $b_i(\xi_i)=\eta_i$. 从而多项式

$$b=b_1+b_2+\cdots+b_n$$

是这样的一个多项式, 它满足如下问题: 对 $i=1, \cdots, n$, $b(\xi_i)=\eta_i$.

这个多项式是至多 $n-1$ 次的，叫做拉格朗日插值多项式.

设 a 是另一多项式，使得对于 $i=1,\cdots,n$, $a(\xi_i)=\eta_i$. 于是多项式 $c=a-b$ 对于 $i=1,\cdots,n$, 适合 $c(\xi_i)=0$. 因此它或可被多项式

$$p=\prod_{i=1}^{n}(x-\xi_i)$$

整除，或是零. 这样就有

$$c=pq=(x-\xi_1)\cdots(x-\xi_n)q,$$

这里 q 是一任意多项式(也可能是 0 多项式). 从而

$$a=b+pq.$$

因为 p 的次数是 n, 即有如下结果:

在 n 个给定点 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 取 n 个给定值 $\eta_1,\ \eta_2,\cdots,\eta_n$ 的次数 $\leqslant n-1$ 的唯一的多项式是拉格朗日插值多项式.

第六部分　多个未定元的多项式

在一个酉整环 A 上有两个未定元的多项式——我们来考虑 A 的元素的重序列，也就是从 $N\times N$ 到 A 内的一个映射，或者是有两个序标的 A 的元素序列 $\alpha_{i,j}$, 它使得从 i 和 j 的某值开始，一切 $\alpha_{i,j}$ 都是零($\alpha_{i,j}$ 是零，除去它们中的有限个数以外).

我们说: $a=(\alpha_{0,0},\cdots,\alpha_{n,m},0,0\cdots)$ 是在 A 上有两个未定元的多项式. 使 $\alpha_{i,j}\neq 0$ 的第一个序标 i 的最大数值叫做第一个未定元的次数；使 $\alpha_{i,j}\neq 0$ 的第二个序标 j 的最大数值叫做第二个未定元的次数；最后，使 $\alpha_{i,j}\neq 0$ 的 $i+j$ 的最大数值叫做对于两个未定元集的次数；一般，当没有明确讲那个的次数时，就总是讲这两个未定元集的次数.

数 $\alpha_{i,j}$ 叫做多项式的系数.

矢量空间——设 a 是系数为 $\alpha_{i,j}$ 的一多项式，b 是系数为 $\beta_{i,j}$ 的另一多项式. 令 $a+b=c$，这里 c 以 $\gamma_{i,j}=\alpha_{i,j}+\beta_{i,j}$ 为其系数.

另一方面，如果 $\lambda\in A$，则令 $c=\lambda a$，而 c 以 $\gamma_{i,j}=\lambda\alpha_{i,j}$ 为其系数.

零多项式 0 是这样的多项式，它的所有系数都是零，它没有次数。

如果 A 是域 K，前面的性质就定义了一个矢量空间. 这个矢量空间以多项式 $u_{i,j}$ 作为基，而 $u_{i,j}$ 是这样的多项式，它除了序标为 i, j 的那个系数等于 1 以外，其他系数都是零. 当 A 不是一个域时，这种多项也是存在的，因为 A 是一酉环，包含元素1. 所有多项式 a 都写作

$$a=\Sigma\alpha_{i,j}u_{i,j}$$

且这种表示法是唯一的.

通常的记法——不用符号 $u_{i,j}$，而用符号 $x_1^i x_2^j$，这些量只不过是起着明确序标 i 与 j 的作用.

令

$$x_1^0 x_2^j=x_2^j,\quad x_1^i x_2^0=x_1^i,\quad 且\ x_1^0 x_2^0=1.$$

于是可写出:

$$a=\Sigma\alpha_{i,j}x_1^i x_2^j.$$

在 A 上有两个未定元的多项式的集也写作 $A[x_1, x_2]$; x_1, x_2 就叫做未定元.

乘法——设 $a=\Sigma\alpha_{i,j}x_1^i x_2^j$ 和 $b=\Sigma\beta_{i,j}x_1^i x_2^j$ 是 $A[x_1, x_2]$ 的两个多项式. 将 a 和 b 的项逐项相乘而且正如关于数的乘积一样，令

$$\alpha_{i,j}x_1^i x_2^j\cdot\beta_{p,q}x_1^p x_2^q=\alpha_{i,j}\beta_{p,q}x_1^{i+p}x_2^{j+q}$$

这样得到的多项式叫做积 $a\cdot b$.

可写出

$$a\cdot b=\sum\left(\sum_{\substack{h+p=i\\k+q=j}}\alpha_{h,k}\beta_{p,q}\right)x_1^i x_2^j.$$

很清楚，这运算对于加法是可分配的，且它又是可交换的．我们不难验证，它也是可结合的．

多项式 x_1 可能等同于第一个未定元，而多项式 x_2 等同于第二个未定元．这是从如下的意义来讲的：用符号 $x_1^i x_2^j$ 表示的多项式是多项式 x_1 的 i 次幂和多项式 x_2 的 j 次幂相乘的积，而乘法就是刚才所定义的．

这样，多项式的集就构成一个环；它是酉环，乘法的中性元素是多项式 $u_{0,0}=1$．这是一个整环，且每一多项式 $a\neq 0$ 对乘法是正则的．

注： 当 A 是一个域 K 时，理想不一定是环 $K[x_1,x_2]$ 里的主理想：这是与一个未定元的多项式环的本质差别．

$A[x_1,x_2]$**和** $A[x_1]$**或** $A[x_2]$**间的关系**——考虑所有的系数 $\alpha_{i,j}$，这里 i 是固定的，而 j 是变化的．可以把这个序列看作是一个未定元的多项式，设 x_2 是未定元，于是有

$$\begin{aligned}a_i&=(\alpha_{i,0},\alpha_{i,1},\cdots,\alpha_{i,m},0\cdots)\\&=\alpha_{i,0}+\alpha_{i,1}x_2+\cdots+\alpha_{i,m}x_2^m\end{aligned}$$

于是考虑环 $A_2=A[x_2]$；这是多项式 a_i 的整环；我们来作一个未定元 x_1 的多项式环，它的系数在 $A[x_2]$ 中，这就是说，多项式有如下的形式：

$$a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_1^n;$$

立刻可看到，这个多项式同构于多项式 $A[x_1,x_2]$．于是可作等式 $A[x_1,x_2]=A_2[x_1]$．此外，还有 $A[x_1,x_2]=A_1[x_2]$，这里 $A_1=A[x_1]$ 是一个未定元 x_1 的多项式整环．

我们可以容易地推广到任意多个变量的情形，但变量个数必须是有限的．这样，$A[x_1,\cdots,x_n]$ 就是 n 个变量的多项式环，且有

$A[x_1, \cdots, x_n] = A_1[x_2, \cdots, x_n]$, 这里 $A_1 = A[x_1]$. $A[x_1, \cdots, x_n]$的元素可写作

$$\Sigma \alpha_{i_1, \cdots, i_n} x_1^{i_1}, \cdots, x_n^{i_n},$$

这里 $x_1^{i_1}, \cdots, x_n^{i_n}$ 是一个符号, 它等于 $u_{i_1, \cdots, i_n}$.

第八章　复　　数

第一部分　代 数 扩 张

在本节中遇到的多项式是在域K上有一个未定元的多项式．我们曾见到，素多项式的概念依赖于系数域K．于是，设p是次数$\geqslant 2$的多项式，其系数在K中，在$K[x]$内为素多项式．我们来建立K的一个母域，在其中p具有一零点，因而不再是素多项式．为此必须p的次数至少是2，因为$K[x]$的每一个一次多项式在K内有一零点．

等价关系——设p是次数$\geqslant 2$的多项式，在$K[x]$内为素多项式，P是由p的倍多项式形成的理想．设a_1和a_2是$K[x]$的多项式．如果a_1-a_2是零，或能被p整除，也就是说$a_1-a_2\in P$，我们说$a_1\sim a_2$．

如果a是$K[x]$的一多项式，则等价的多项式就是任一形式为$a+p_i$的多项式，其中$p_i\in P$，就是说，或者$p_i=0$，或者p_i能被p整除．

这关系是等价关系；事实上：

1°　$a_1\sim a_1$，因为$a_1-a_1=0$．

2°　$a_1\sim a_2\Longleftrightarrow a_2\sim a_1$，因为如果$a_1-a_2=p_1$，则

$$a_2-a_1=-p_1\in P.$$

3°　$a_1\sim a_2$且$a_2\sim a_3\Rightarrow a_1\sim a_3$，因为如果$a_1-a_2=p_1$且$a_2-a_3=p_2$，则有$a_1-a_3=p_1+p_2\in P$．

定理——设有$\alpha=(a,\cdots)$类，$\beta=(b,\cdots)$类，这些类的集K^*(由

等价关系作成的商空间)．用下列公式定义两个内规律：

$$\alpha+\beta=(a+b,\cdots)\text{类};\quad \alpha\cdot\beta=(a\cdot b,\cdots)\text{类}.$$

具有这两个规律的集 K^* 是一个域，它的 K 是一个子域．这里要证明下列几点：

1．这个规律的定义只依赖于类 α 和 β，不依赖于所选定的代表元．实际上，α 的每个元素是 $a+p_1$ 形式的，$p_1\in P$，β 的每个元素是 $b+p_2$ 形式的，$p_2\in P$．于是有

$$(a+p_1)+(b+p_2)=(a+b)+(p_1+p_2),\text{而 } p_1+p_2\in P.$$

$$(a+p_1)(b+p_2)=ab+(p_1b+p_2b+p_1p_2),\text{而 } p_1b+p_2a+p_1p_2\in P.$$

这个规律是可结合的，可交换的，且乘法对于加法是可分配的．

理想 P 也构成一个类，这是加法的中性类，记作 0．每一个类 α 有一个反类 $(-\alpha)=(-a,\cdots)$ 类．类 $1=(x^0=1,\cdots)$ 类是乘法的中性类：

用等价关系"$a_1\sim a_2\Longleftrightarrow a_1-a_2$ 是多项式 p 的倍式"做成的 $K[x]$ 的商集，是一酉环．

2．看看有无零因子．如果 $\alpha\beta=0$，则有 $ab\in P$．于是，如果 $\alpha\neq0$，则有 $a\notin P$，这样 a 与 p 互素；既然 p 整除 ab，那末它就整除 b，且 $b\in P$，$\beta=0$．从而它没有零因子，上述的环是整环．

每个元素 $\alpha\neq0$ 是对于乘法为正则的，因为如果 $\alpha\beta=\alpha\gamma$，则有 $\alpha(\beta-\gamma)=0$，于是 $\beta-\gamma=0$．

3．我们来证明，这个环是一个域．这只须证明，对每个元素 $\alpha\neq0$，可能配合一个 $\beta=1/\alpha$，使 $\alpha\beta=1$．可是如果 $\alpha\neq0$，则可看到，$a\notin P$，于是 a 与 p 互素．按照培蜀恒等式(第七章，第二部分，§2)，于是存在 $K[x]$ 的两个多项式 b 和 v，使 $ab+pv=1$，因为 a 和 p 的 P. G. C. D 是 1．设 $\beta=(b,\cdots)$ 类，则 $\alpha\beta=1$．

4．每一等价类可能被一个且只被一个次数严格小于 p 的次

数的多项式来定义.

实际上，如果a是α类的一个多项式，用p除a；余式是次数小于p的次数的多项式，属于α类. 另一方面，这个多项式是唯一的，因为如果$a_1\in\alpha$且$a_2\in\alpha$，则有$a_1-a_2\in P$，这就是说a_1-a_2是零，或能被p整除，于是次数大于或等于p的次数.

于是，如果p是k次的，在已知类α的次数$\leqslant k-1$的多项式的k个系数(其中某些可能为零)时，则每个类α可能被一种且只一种方式表示为K的k个数的组.

5. 域K^*是K的一个母域——实际上，我们来考虑K^*的这样的类，它的一个代表是零次多项式，设$a=(\alpha_0, 0, 0, \cdots)$，$b=(\beta_0, 0, 0, \cdots)$.

则有$a+b=(\alpha_0+\beta_0, 0, 0, \cdots)$与$ab=(\alpha_0\beta_0, 0, 0, \cdots)$. 于是，在这些0次多项式间对于加法和乘法有一个同构，从而在K^*中0次多项式类间对加和乘有一同构，且K的元素以其唯一的系数构成常数项.

于是我们来鉴定这些元素，在这些元素中包括类0和类1. 这些元素的集是一个同构于K的K^*的子域.

在$K^*[x]$中，多项式p有一个零点——考虑在域K^*上的多项式环$K^*[x]$. 假设：

$$p=\omega_0+\omega_1x+\cdots+\omega_kx^k，这里\ \omega_h\in K，\ h=0, \cdots, k.$$

因为K是K^*的一个子域，我们也能考虑：ω_h是K^*的元素，而p还是$K^*[x]$的一个多项式.

设$\rho=(x, \cdots)$类，于是$\rho\in K^*$. 则有$\rho^h=(x^h, \cdots)$类$=(u_h, \cdots)$类，而$1=(x^0, \cdots)$类.

这样：

$(\omega_0+\omega_1x+\cdots+\omega_kx^k)$类$=\omega_0+\omega_1\rho+\cdots+\omega_k\rho^k=(p, \cdots)$类$=0$；于是恰有$p(\rho)=0$，其中$\rho\in K^*$.

还看到，如果 $a=\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_{k-1}x^{k-1}$ 是次数 $\leqslant k-1$ 的多项式,它作为类 α 的代表,则有 α 类 $=(\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_{k-1}x^{k-1})$类 $=\alpha_0+\alpha_1\rho+\cdots+\alpha_{k-1}\rho^{k-1}=a(\rho)$.

于是 K^* 的每一个元素可用一种且只一种方式写成形式 $a(\rho)$, 这里 $a\in K[x]$ 是次数 $\leqslant k-1$ 的多项式, 且 ρ 为 K^* 的一个特别元素,即 ρ 的零点.

第二部分　复　　数

§1　定义和运算

设 $K=R$ 是实数域. 多项式 x^2+1 在 R 内是素多项式,因为它不可能分解为两个一次的实系数的多项式之积. 我们来构造一个域 C, 它包含 R 作为其子域,使在 C 中 x^2+1 能分解成两个一次多项式的积. 为此, 我们应用第一部分的结果, 并构造 R 的一个扩张, 使在其中 x^2+1 有零点. 这个扩张的一个元素是用它的类的一次多项式来表示的,即用这多项式的两个系数来代表.

现在我们来表述与第一部分无关的定理

复数的定义——两个实数 $\xi\in R$ 与 $\eta\in R$ 的一个有序对 $z=(\xi,\eta)$ 叫做一个复数; z 是 $R^2=R\times R$ 的一个元素.

现在用下面的规则定义两个内规律, 一个是加法, 一个是乘法

对于 $z=(\xi,\eta)$ 和 $z'=(\xi',\eta')$; 作为定义令

$$z+z'=(\xi+\xi',\eta+\eta'),\quad zz'=(\xi\xi'-\eta\eta',\xi\eta'+\xi'\eta).$$

注释——1. 这个规则是从第一部分的考虑中推导出来的; 实

际上，多项式的和：

$$(\xi-\eta x)\text{与}(\xi'+\eta' x)\text{的和是}(\xi+\xi')+(\eta+\eta')x;$$

它们的积是 $\xi\xi'+(\xi\eta'+\xi'\eta)x+\eta\eta' x^2$，于是，用 x^2+1 来除此多项式的余式是

$$(\xi\xi'-\eta\eta')+(\xi\eta'+\xi'\eta)x.$$

2. 复数有时也叫做虚数.

3. 为了使 $z=z'$，必须且只须 $\xi=\xi'$ 与 $\eta=\eta'$.

由上面的定义，经过很容易的计算，就可推出：加法和乘法是可结合的和可交换的，且乘法对于加法是可分配的.

$(\xi, 0)$ 这种形式的复数的集对于加法和乘法与 R 中的对应数 ξ 同构. 实际上

$$(\xi, 0)+(\xi', 0)=(\xi+\xi', 0)\text{且}(\xi, 0)(\xi', 0)=(\xi\xi', 0).$$

用同一个符号 ξ 来表示实数 ξ 与复数 $(\xi, 0)$，也即把这两者等同起来.

还令 $i=(0, 1)$；i 就是 x^2+1 的零点，实际上

$$i^2=(-1, 0)=-1,$$

这是根据上面的约定而得出的.

于是有 $i\cdot(\eta, 0)=(0, 1)(\eta, 0)=(0, \eta)$.

这样，每个复数能写作：

$$z=(\xi, \eta)=(\xi, 0)+(0, \eta)=\xi+i(\eta, 0)=\xi+i\eta.$$

这里 ξ 和 η 是实数，且 $i^2=-1$.

数 ξ 叫做 z 的实部，η 叫做 z 的虚部.

我们常写成 $\xi=\mathrm{Re}(z)$，$\eta=\mathrm{Im}(z)$

在一切加法和乘法中，可以将复数 z 用和 $\xi+i\eta$ 来代替，且象对实数那样进行运算；这只要在凡是碰到 i 的至少 2 次以上的幂时用 -1 来代替 i^2 就行.

复数集对于加法是一可交换群. 实际上，中性元素是 $(0, 0)$，

我们用 0 来表示，以适合前面的约定．每一个复数 $z=(\xi, \eta)$ 有一个相反的数，我们用 $-z$ 表示它；这就是 $(-\xi, -\eta)$，或还有

$$-z=-\xi-i\eta;$$

我们有

$$z+(-z)=0$$

共轭复数——因为 $(-i)^2=-1$，由于已知 $(-i)^2$ 是 -1，所以 $-i$ 具有 i 的性质．

把 $\xi-i\eta$ 叫做复数 $z=\xi+i\eta$ 的共轭复数，并且记作 $\bar{z}$．

映射 $z\to\bar{z}$ 是从复数集到其自身上的一一对应映射，也就是复数集的一个排列（请参看书中的I），因为，如果 $z=\xi+i\eta, z'=\xi'+i\eta', \bar{z}=\bar{z}'$ 这个假设导致 $\xi=\xi'$ 和 $\eta=\eta'$，于是 $z=z'$．

设 $z=\xi+i\eta$ 且 $z'=\xi'+i\eta'$；则有

$$\overline{(z+z')}=(\xi+\xi')-i(\eta+\eta')=\bar{z}+\bar{z}'.$$

同时又有

$$\overline{zz'}=(\xi\xi'-\eta\eta')-i(\xi\eta'+\xi'\eta)=\bar{z}\cdot\bar{z}'.$$

于是，映射 $z\to\bar{z}$ 是对于加法和乘法的一个同构．

还有下列的性质：

1° $z+\bar{z}=2\xi$；于是一个复数加它的共轭复数的和总是一个实数．

2° $z\cdot\bar{z}=\xi^2+\eta^2$；于是一个复数乘它的共轭复数的积也是一实数．而且 $\bar{z}\cdot z$ 是一大于或等于 0 的实数．

域 C——我们来证明，复数集形成一个域，记作 C．

加法和乘法将复数域作成一可交换环．

这是一整环；事实上，如果 $z\cdot z'=0$，则也有 $zz'\cdot\overline{zz'}=0$，也就是说，$(z\bar{z})(\bar{z}'z')=0$，或 $(\xi^2+\eta^2)(\xi'^2+\eta'^2)=0$．结果得：如果 $z\neq0$，则有 $\xi^2+\eta^2\neq0$，于是，$\xi'^2+\eta'^2=0$，从而 $z'=0$．

这是一酉环，因为，如果要求一复数 $w=u+iv$，使得对不论怎样的 z，$zw=z$，我们即得，对不论怎样的 ξ 和 η，$\xi u-\eta v=\xi$，

$\xi v+\eta u=\eta$.

由此，若有$\eta=0, \xi=1$，就推得$u=1, v=0$，于是$w=u+iv=1$. 这个数 1 实际上是乘法的中性元素.

每一个复数$z\neq 0$有一个对于乘法的对称元素. 实际上，如果存在这个对称元素z': $z'=\xi'+i\eta'$，则应该有$z'z=1$; 由此，两边乘以$\bar{z}$，则:

$$\bar{z}zz'=\bar{z} \quad 且 \quad z'=\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}-i\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}.$$

反过来说，这个数z'恰好适合关系$zz'=1$. 于是复数集合恰好是一个域C.

注释——如果我们用前面第一部分的结果，那里已一般地证明了，一个代数扩张是一个域; 则上面的证明方法可不用.

模或绝对值——我们来证明，C是一个赋值域，即在C上可以定义一个绝对值(第四章，§ 3).

设$z=\xi+i\eta, z'=\xi'+i\eta'$是两个复数. 我们已看到$z\bar{z}=\xi^2+\eta^2\geqslant 0$，且$z\bar{z}=0$导致$z=0$. 把用$|z|=\sqrt{z\bar{z}}$定义的正实数或零叫做$z$的模，并记作$|z|$.

模正是绝对值; 实际上有

1° $|z|\geqslant 0$，且$|z|=0$导致$z=0$.

2° $|zz'|=|z|\cdot|z'|$.

实际上$|zz'|^2=zz'(\overline{zz'})=zz'\bar{z}\bar{z}'=(z\bar{z})(z'\bar{z}')=|z|^2\cdot|z'|^2$.

3° $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$.

为了证明不等式 3°，考虑等式

$$z\bar{z}'(\overline{z\bar{z}'})=z\bar{z}(z'\bar{z}').$$

将它写作:

$$(\xi\xi'+\eta\eta')^2+(\xi'\eta-\xi\eta')^2=(\xi^2+\eta^2)(\xi'^2+\eta'^2).$$

对不论怎样的实数ξ, η, ξ', η'，这个等式为真. 从而对不论怎

样的 z 和 z'，不等式

$$|\xi\xi'+\eta\eta'|\leqslant|z||z'|$$

成立；只当 $\xi'\eta-\xi\eta'=0$ 时，等号才能成立。

于是我们考虑：

$$|z+z'|^2=(z+z')(\bar{z}+\bar{z}')=z\bar{z}+z'\bar{z}'+z\bar{z}'+z'\bar{z}.$$

因为

$$z\bar{z}'+\bar{z}z'=2(\xi\xi'+\eta\eta')$$

是一实数，根据上面的不等式，则有

$$|z\bar{z}'+\bar{z}z'|\leqslant 2|z||z'|;$$

这里

$$|z+z'|^2\leqslant|z|^2+|z'|^2+2|z||z'|=(|z|+|z'|)^2$$

这就是不等式 3°.

还能说明，只当 $\xi'\eta-\xi\eta'=0$，并且 $z\bar{z}'=\xi\xi'+\eta\eta'$，因而是一个实数 λ 时，才有等式 $|z+z'|=|z|+|z'|$；此外还有 $\lambda\geqslant 0$，因为应该有 $z\bar{z}'+\bar{z}z'=2|z||z'|=2\lambda$。于是，如果有

1° $z'\neq 0$，且 $z=\mu z'$，其中 $\mu=\lambda/(z'\bar{z}')\geqslant 0$；

2° $z'=0$，且 z 是任意的，

则在 3° 中出现相等的情况。

引进模的概念，就使我们容易将 $z=\xi+i\eta$ 和 $z'=\xi'+i\eta'$ 之商的实部和虚部写出来。

实际上，有

$$\frac{z}{z'}=\frac{z\bar{z}'}{z'\bar{z}'}=\frac{\xi\xi'+\eta\eta'}{\xi'^2+\eta'^2}+i\frac{\xi'\eta-\xi\eta'}{\xi'^2+\eta'^2}.$$

模为 1 的数的子群——设 $z\neq 0$ 为复数。令 $u=z/|z|$。根据定义复数模的第二个性质，对复数 u 有 $|u|=1$。

模为 1 的一切复数的集形成一个关于乘法的群。

实际上，如果 u 和 v 都有 $|u|=|v|=1$，则有 $|uv|=1$；另一方

面 $|1|=1$ 是乘法的中性元素；最后，如果 $|u|=1$，则有 $|\overline{u}|=1$，且 $u\overline{u}=|u|^2=1$，于是 $\overline{u}$ 是 u 的对称元素.

于是，这个群是非零的复数关于乘法的群的可交换子群.

辐角——我们通过分析证明：函数 $u=e^{i\theta}$ 建立了模为 1 的复数的乘法群和实数(mod 2π)的加法群之间的一个同构，也就是说，用等价关系 $\theta_1-\theta_2$ 作成的实数域 R 的商集 $\Longleftrightarrow$ "$\theta_1-\theta_2$ 是零或是 2π 的整数倍."

如果 $v=e^{i\varphi}$，则有 $uv=e^{i(\theta+\varphi)}$.

实数 θ，确定到不计 2π 的任意整数倍，叫做 u 的辐角. 我们写作 $\theta=\mathrm{Arg}\,u$ 或 $\theta=\mathrm{Am}\,u$.

我们有 $u=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$；反过来说，每一个 $\cos\theta+i\sin\theta$ 形式的复数以 1 为模，以 θ 为辐角.

穆瓦弗 (Moivre) 公式——在 $v=u^{n-1}$ 的情况下应用公式 $uv=e^{i(\theta+\varphi)}$ 时，对每个整数 $n\geqslant1$ 施行递推法就得到：$u^n=e^{in\theta}$，也就是有叫做穆瓦弗公式的下面的关系

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

因为 $\overline{u}=1/u$，则有 $u^{-1}=\overline{u}$，即是说

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}=\cos\theta-i\sin\theta.$$

于是，对于每一负整数穆瓦弗公式亦真；如果约定

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^0=1,$$

则对 $n=0$ 穆瓦弗公式亦真.

于是穆瓦弗公式对于相对整数环 Z 的每个整数 n 为真.

穆瓦弗公式可以利用二项式公式展开（第七章、第四部分，§3），这使我们可以将 $\cos n\theta$ 和 $\sin n\theta$ 表示为 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的函数. 实际上，我们有

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots,$$

$$\sin n\theta=C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-C_n^3\cos^{n-3}\sin^3\theta+C_n^5\cos^{n-5}\sin^5\theta-\cdots.$$

一个任意复数的辐角——设 $z\neq 0$ 是一任意复数；令

$$\frac{z}{|z|}=\cos\theta+i\sin\theta;$$

它还可写作：

$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta).$$

模为 1 的复数 $z/|z|$ 的辐角 θ（确定到不计 2π 的整数倍），叫做 z 的辐角，并记作 $\arg z$（或 $\mathrm{Am}z$）。

如果 $z=0$，我们约定：每一实数都可取作为 0 的辐角；公式

$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

对 $z=0$ 也是有效的。

使用模和辐角对于乘法是特别值得称道的。

事实上，设

$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)\quad 且\quad z'=|z'|(\cos\theta'+i\sin\theta');$$

则有

$$zz'=|z||z'|[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')]$$

也就是说

$$|zz'|=|z||z'|\quad 且\quad \arg(zz')=\arg z+\arg z'$$

更一般地，在实际上不用 $\cos\theta+i\sin\theta$，而用记号 $e^{i\theta}$；它的性质更好，这是明显的。例如

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}=\cos\theta-i\sin\theta$$

可写作 $(\theta^{i\theta})^{-1}=e^{-i\theta}$。

一个实数以 $\sin\theta=0$ 为其特征；如果这个实数是正数，则有 $\cos\theta=1$，于是 $\theta=2k\pi$，k 是整数；如果这个实数是负数，则有 $\cos\theta=-1$，于是

$$\theta=\pi+2k\pi,\ k 是整数.$$

一般地，有

$$\arg(-z)=\arg(-1)+\arg z=\arg z+\pi.$$

几何解释——上面的结果可以有一个非常简单的几何解释；然而必须避免去想，这种解释是足够证明复数的性质了，除非从公理出发坚实地建立了几何学.

设 $O\xi$, $O\eta$ 是两个正交的轴, 在 $O\xi$ 上的单位矢量为 OU, 在 $O\eta$ 上的单位矢量为 OV, 各长为 1, 我们以坐标为 ξ 和 η 的点 M 表示复数 $z=\xi+i\eta$; 点 M 叫做 z 的**配点**. 实数以 $\eta=0$ 为其特征; 它的配点就在 $O\xi$ 上, 反之亦然. 轴 $O\xi$ 叫做**实轴**. $O\eta$ 上的点是 $i\eta$ 形式的复数的配点; $O\eta$ 轴叫做**虚轴**. 所有点的集叫做**复平面**.

如果 $\overline{M}$ 是 $\bar{z}$ 的配点, 则可看出, $\overline{M}$ 是关于实轴 $O\xi$ 与 M 对称的. 模 $|z|$ 用线段 OM 的长来表示.

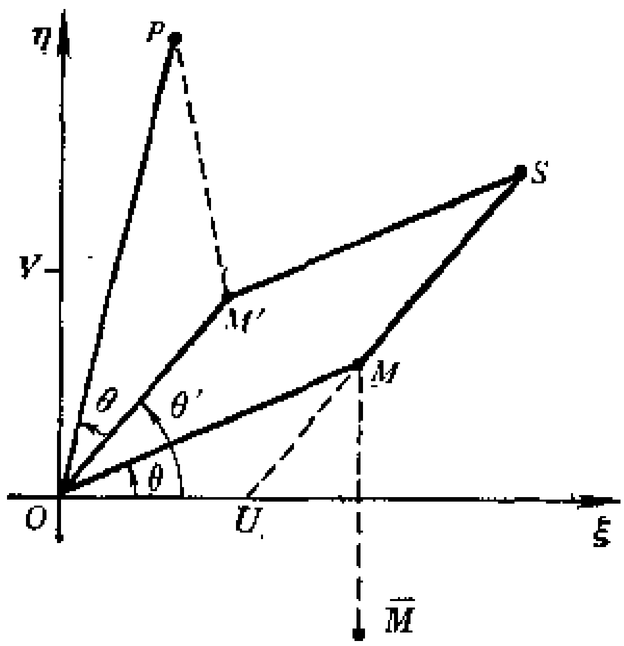
设 M' 是 $z'=\xi'+i\eta'$ 的配点, 于是 $z+z'$ 的配点 S 就是以 O 为起点的矢量 $\boldsymbol{OM}+\boldsymbol{OM'}=\boldsymbol{OS}$ 的端点.

z 的辐角是 $O\xi$ 与 $\boldsymbol{OM}$ 间的夹角, 以弧度计量, 不计 2π 的整数倍.

设 P 是 zz' 的配点, 则有 $OP=OM\cdot OM'$, 于是

$$\frac{OP}{OM'}=\frac{OM}{OU}.$$

另一方面, $O\xi$ 与 $\boldsymbol{OP}$ 的夹角是 $\theta+\theta'$; 于是, 因为 $O\xi$ 与 $\boldsymbol{OM'}$



的夹角是 θ'，OM' 与 OP 的夹角就是 θ；$\triangle OUM$ 与 $\triangle OM'P$ 相似，由此而作出 P.

这个几何解释使得有可能利用复数去处理平面几何的许多问题.

要特别指出，$z-z'$ 的配点是使 $OM''=OM-OM'=OM+M'O=M'M$ 的点 M''；于是 $|z-z'|$ 就用 z 的配点 M 和 z' 的配点 M' 间的距离来表示.

最后，不等式 $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$ 表示，在 $\triangle OMS$ 中 OS 边的边长至多等于 OM 和 MS 两个边长的和，这就是将此不等式叫做三角不等式的理由.

应该指出的两个恒等式——很清楚，对于实数为有效的关于和与积的计算，对于复数同样有效.

特别要指出

$$(z+z')^2=z^2+2zz'+z'^2;\qquad (z+z')(z-z')=z^2-z'^2$$

对不论怎样的复数 z 和 z' 也有效.

几何级数的和——令

$$s=z+rz+r^2z+\cdots+r^{n-1}z,$$

这里 z 与 r 是复数；r 叫做几何级数的公比，和实数情况是一样的.

1° 如果 $r=1$，则有 $s=nz$；

2° 如果 $r\neq1$，则将此级数乘以 r，并从积 rs 中减去 s；可得

$$(r-1)s=zr^n-z,\quad 由此,\quad s=z\frac{r^n-1}{r-1}.$$

应用——考虑下列和式：

$$\sigma=1+\cos\theta+\cdots+\cos(n-1)\theta,$$

它是 $s=1+e^{i\theta}+\cdots+e^{i(n-1)\theta}$ 的实部. 从而

1° 如果 $e^{i\theta}=1$，即如果 $\theta=2k\pi$，k 为整数，则有 $s=n$，于是也有 $\sigma=n$；

2° 如果 $e^{i\theta}\neq 1$, 即如果 $\theta\neq 2k\pi$, k 为整数. 则有

$$s=\frac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1}.$$

为了得到 s 的实部 σ, 将 s 的分子、分母同乘以分母的共轭复数 $e^{-i\theta}-1$, 也可以按照下面的方式进行: 将 s 的分子、分母同乘以 $e^{-i\theta/2}$, 得

$$s=\frac{e^{i\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}$$

$$=\frac{\left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\frac{\theta}{2}\right]+i\left[\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta+\sin\frac{\theta}{2}\right]}{2i\sin\frac{\theta}{2}},$$

由此而有

$$\sigma=\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{2}.$$

§2 $C[x]$的多项式的零点

1° 平方根——设有多项式 x^2-a, 这里 a 是一复数, 这多项式的零点 z 适合 $z^2=a$; 可写作 $z=\sqrt{a}$, 或 $z=a^{\frac{1}{2}}$, 并把 z 叫做 a 的平方根(与 R 中所用的约定相反, 符号 $\sqrt{a}$ 或 $a^{\frac{1}{2}}$ 表示 C 中随便的一个数, 只要其平方为 a).

如果 $a=0$, 又如果 $z^2=a=0$, 则必然有 $z=0$, 于是 0 是在 C 中只有一个平方根的数, 这平方根就是 0.

于是, 设 $a\neq 0$, 我们来求 $\sqrt{a}$ 的模和辐角. 因为 $z^2=a$, 因此, 必须同时有

$$|z|^2=|a| \quad 且 \quad 2\arg z=\arg a.$$

从而有

$$|z|=\sqrt{|a|},$$

（这里$\sqrt{|a|}$表示实数$|a|$的正平方根），且$\arg z=\frac{1}{2}\arg a$.

可是 z 的辐角 $\arg a$ 是确定到不计 $2k\pi$ 的，k 是整数，z 的辐角能取且仅取两个不同的值，每个值都不计 $2k\pi$，已知它们是：

$$\arg z=\frac{1}{2}\arg a+2k\pi \quad 和 \quad \arg z=\frac{1}{2}\arg a+\pi+2k\pi.$$

数 a 在 C 中也恰有两个不同的平方根，如果 z 是其中一个，则 $-z$ 必是另一个.

如果 a 是正实数，$\arg a=0+2k\pi$，于是$\sqrt{a}$是实数，且其两个平方根是$\sqrt{a}$和$-\sqrt{a}$.

如果 a 是负实数，$\arg a=\pi+2k\pi$，于是$\sqrt{a}$ 以 $\pi/2+2k\pi$ 或 $3\pi/2+2k\pi$ 为辐角. 可是，如果 $\theta=\pi/2$，则 $\cos\theta+i\sin\theta$ 是 i；如果$\theta=3\pi$，则它是$-i$. 从而 a 的两个平方根是 $i\sqrt{-a}$和$-i\sqrt{-a}$，这里$\sqrt{-a}$是一实数.

在平方根的情况下，我们能不用辐角的概念来建立上述结果，这件事可以从此结果推出辐角的概念.

事实上，设

$$z=\xi+i\eta, \quad 它使 \quad z^2=a=\alpha+i\beta,$$

则可推出

$$\xi^2-\eta^2=\alpha \quad 与 \quad 2\xi\eta=\beta.$$

将上两等式平方并相加，即得

$$(\xi^2+\eta^2)^2=\alpha^2+\beta^2,$$

这个等式还表明：$|z|^4=|a|^2$.

于是，因为 $\xi^2+\eta^2\geqslant0$，故有

$$\xi^2+\eta^2=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

另一方面

$$\xi^2-\eta^2=\alpha,$$

由此有

$$\xi^2=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}, \qquad \eta^2=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}.$$

第二项为正或零，因为 $\alpha\leqslant\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

从而推出

$$\xi=\varepsilon\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}}, \qquad \eta=\varepsilon'\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}},$$

这里 $\varepsilon=+1$ 或 -1，而 $\varepsilon'=+1$ 或 -1. 然而它不可能有四种可能情形 因为关系 $2\xi\eta=\beta$ 要求 $\varepsilon\varepsilon'$ 与 β 同号.

如果 $\beta=0$, 则有 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=|x|$, ξ 或 η 中有一数是零.

于是在这两种情况中，只留下可能的两组 ξ,η，且如果 ξ,η 是两组之一，则 $-\xi,-\eta$ 是另一组，不难验证这两组都适合 $(\xi+i\eta)^2=\alpha$; 则正好得到两个反号的平方根; 如果 $\alpha\neq0$, 它们是不同的.

2° 二次多项式——设有多项式 $ax^2+bx+c=0$，这里 a, b, c 是复数，其中 $a\neq0$. 这个多项式的零点 z 适合

$$az^2+bz+c=0$$

因为 $a\neq0$, 则可以写

$$a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}=0,$$

就是说

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

这就归结为 1° 中处理的求平方根的问题. 于是有

$$z+\frac{b}{2a}=\varepsilon\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{\varepsilon\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

这里 $\varepsilon=+1$ 或 -1. 我们还可进一步化为下列结果:

设 $ax^2+bx+c=0$，其中 $a\neq 0$:

如果 $b^2-4ac\neq 0$，则有两个不同的零点，由下列公式给出：

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

如果 $b^2-4ac=0$，则只有一个零点

$$z=-\frac{b}{2a}$$

这个零点是二重的，因为：

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=a(x-z)^2.$$

要指出，这个一元二次方程之解的公式就是实数域中的公式．不过在 $C[x]$环里，所有二次多项式在 C 中总有两个（相异或非异）零点．特别地，如果 a, b, c 是实数，它在 C 里总是有零点的：

如果 $b^2-4ac>0$，有两个相异的实零点．

如果 $b^2-4ac=0$，则有一个二重实零点；

如果 $b^2-4ac<0$，则有二个非实的复零点，两者互为共轭复数．

3° n 次根——设有多项式 x^n-a，这里 a 是一个复数，n 是 $\geqslant 2$ 的整数．这多项式的一个零点 z 适合 $z^n=a$．我们写作 $z=\sqrt[n]{a}$ 或宁愿写作 $z=a^{\frac{1}{n}}$，并且将 C 中其 n 次幂为 a 的每个数叫做 a 的 n 次根．

于是有

$$|z|^n=|a| \quad 且 \quad n\arg z=\arg a.$$

从而

$$|z|=\sqrt[n]{|a|}=|a|^{\frac{1}{n}} \quad 且 \quad \arg z=\frac{1}{n}\arg a.$$

（$|a|^{\frac{1}{n}}$的定义推迟到第二卷，第四章再谈）．

如果 $a=0$，又如果 $z^n=a=0$，则必然有 $z=0$，于是 0 在 C 中只有唯一的 n 次根，即零。

如果 $a\neq 0$，则不计 2π 的整数倍，$\arg z$ 有 n 个可能不同的值，已知：

$$\arg z=\frac{1}{n}\arg a+\frac{2k}{n}\pi$$

这里 $k=0,1,\cdots,n-1$. 可以看出，z 的配点是在圆心为 0、半径为 $|a|^{\frac{1}{n}}$ 的圆周上，且形成正 n 边形的顶点。

1 的根

我们来考虑 $a=1$ 的特殊情况；这时有 $|1|=1$ 和 $\arg 1=0$，于是，这个 1 的 n 次根以 1 为模，且以 $\frac{2k}{n}\pi$ 为辐角，$k=0,1,\cdots,n-1$；于是它们就是这些数：

$$z_k=\cos\frac{2k}{n}\pi+i\sin\frac{2k}{n}\pi=e^{2k\pi i/n},\quad k=0,1,\cdots,n-1$$

令

$$z=z_1=e^{2\pi i/n},$$

则有 $z_k=z^k$，于是 1 的根是：

$$1,\ z,\ z^2,\ \cdots,\ z^{n-1}.$$

1 的根的某些性质——设 h 是任意的整数，我们来计算和：

$$s_h=z_0^h+z_1^h+\cdots z_{n-1}^h,$$

右端各项是 1 的 n 个根的 h 次幂。

1° 假设 $h\geqslant 0$；当 $z=z_1$ 时，就有

$$s_h=1+z^h+z^{2h}+\cdots+z^{(n-1)h}.$$

这是公比为 $z^h=e^{2h\pi i/n}$ 的几何级数的和。当且仅当 h 是 n 的倍数，即 $h=n\cdot m$ 时，有 $z^h=1$. 在这种情况下 $s_h=n$. 如果 h 不是 n 的倍数，则有 $z^h\neq 1$，于是

$$s_k=\frac{z^{nk}-1}{z^k-1};$$

可是 $z^{nh}=(z^n)^h=1$,因为 $z^n=1$,于是 $s_h=0$.

2° 设 $h<0$, 因为$\frac{1}{z}=\bar{z}$, 我们有 $s_h=\bar{s}_{-h}$, 1° 的结果是适用的,因为$-h>0$.

为确定起见,总结一下

$$s_h=\begin{cases}0, \text{如果 } h \text{ 不是 } n \text{ 的整数倍数;}\\ n, \text{如果 } h \text{ 是 } n \text{ 的整数倍数,或如果 } h=0.\end{cases}$$

4° $C[x]$的某个多项式——在第三卷第四章,第三部分将证明下面的定理:

达兰倍尔(d'Alembert)定理——次数至少等于1的,$C[x]$的每一多项式至少在C中有一零点.

这个定理表示,复系数的、非常数的多项式总至少有一复零点. 如果 a 是 $C[x]$ 的次数 $n\geqslant1$ 的多项式; 它具有一个零点 $\rho_1\in C$,则有

$$a=(x-\rho_1)a_1,\qquad \text{degré}a_1=n-1.$$

可是 $a_1\in C[x]$; 于是 a_1 至少具有一个零点 ρ_2(与 ρ_1 不同,或无不同);则有

$$a_1=(x-\rho_2)a_2,\qquad \text{degré}a_2=n-2.$$

一步一步地进行下去,得到

$$a_{n-1}=(x-\rho_n)a_n,\qquad \text{degré}a_n=0.$$

于是 $a_n=\lambda\in C$ 且 $\lambda\neq0$.

这样就有

$$a=\lambda(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_n),\quad \lambda\neq0.$$

用另一种说法,如果零点是几重的,就算几个,则 $C[x]$的每一多项式恰有 n 个零点.

这个结果表明，在 $C[x]$ 中唯一的素多项式是一次多项式.

我们现在来考虑 $R[x]$ 的多项式；因为 R 是 C 的一个子域，它也是 $C[x]$ 的多项式，于是在 C 中有 n 个相异的或非异的根.

设 $a\in R[x]$，且 $a=\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n$. 如果 ρ 是 a 的一个复零点，又设 $\bar{\rho}$ 是 ρ 的共轭复数. 则有

$$a(\rho)=\alpha_0+\alpha_1\rho+\cdots+\alpha_n\rho^n=0$$

可是 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是实的，于是 $a(\rho)$ 的共轭复数是 $\overline{a(\rho)}=\alpha_0+\alpha_1\bar{\rho}+\cdots+\alpha_n\overline{\rho^n}=a(\bar{\rho})=\bar{0}=0$. 从而 $\bar{\rho}$ 也是 a 的零点.

因为各阶导数 a', a'', $\cdots$, $a^{(h)}$ 属于 $R[x]$，如果 ρ 是 a 的 h 阶零点，则有

$$a(\rho)=a'(\rho)=\cdots=a^{(h-1)}(\rho)=0, a^{(h)}(\rho)\neq 0,$$

取其零点的共轭复数，则有

$$a(\bar{\rho})=a'(\bar{\rho})=\cdots=a^{(h-1)}(\bar{\rho})=\bar{0}=0 \quad 且 \quad a^{(h)}(\bar{\rho})\neq 0,$$

因一个非零复数的共轭复数不是零. 这样 $\bar{\rho}$ 也是 a 的零点，它的重数与 ρ 的重数相同. 于是我们能将复零点两两归类.

如果 ρ 是复数，则多项式

$$(x-\rho)(x-\bar{\rho})=x^2-(\rho+\bar{\rho})x+\rho\bar{\rho}\in R[x].$$

于是可看到，在 $R[x]$ 内仅有的素多项式是次数为 1 的多项式和次数为 2 的无实零点的多项式.

例——考虑多项式 x^n-1. 我们已看到，在 C 内这多项式有 n 个不同的零点 $z_k=z^k$, $k=0, 1, \cdots, n-1$，这里

$$z=z_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}=e^{2\pi i/n},$$

于是有

$$x^n-1=(x-z_0)(x-z_1)\cdots(x-z_{n-1}).$$

所有这些零点都是单重的.

然而 x^n-1 也是 $R[x]$ 的多项式. 它的零点两两成共轭复数.

实际上有 $\bar{z}=\frac{1}{z}$，于是

$$\bar{z}_k=z^{-k}=z^{n-k}=z_{n-k},$$

因为 $z^n=1$。如果 $z_k=\bar{z}_k$，从而如果 $z_k=z_{n-k}$，则有实零点。一方面如果 $k=0$，因为 $z_0=z_n=z^n=1$，另一方面如果 $k=n-k$，则 $2k=n$，于是上述等式是可能的。除非 n 是偶数，$2k=n$ 的情况不可能发生，设 $n=2m$，于是 z_m 是实数，实际上有

$$z_m=e^{2im\pi/2m}=e^{i\pi}=-1.$$

对于 $k\neq0$ 和 $k\neq n/2$ 的值，有

$$\begin{aligned}(x-z_k)(x-\bar{z}_k)&=x^2-(z_k+\bar{z}_k)x+z_k\bar{z}_k\\&=x^2-2x\cos\frac{2\pi k}{n}+1.\end{aligned}$$

这样，在 $R[x]$内有下面的分解式：

如果 n 是奇数，则

$$x^n-1=(x-1)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1\right).$$

如果 n 是偶数，则

$$x^n-1=(x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1\right).$$

系数和零点间的关系

现在设 $a\in C[x]$具有如下形式

$$a=\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n,\qquad \alpha_n\neq0.$$

将 a 的不同的零点或相同的零点明显列出，则有

$$\alpha_nx^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_0=\lambda(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_n).$$

将右端的积展开，则得

$$\alpha_n=\lambda,$$

$$\alpha_{n-1}=-\lambda(\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_n)=-\lambda\sigma_1,$$
$$\alpha_{n-2}=\lambda(\rho_1\rho_2+\cdots+\rho_{n-1}\rho_n)=\lambda\sigma_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_0=(-1)^n\lambda\rho_1\rho_2\cdots\rho_n=(-1)^n\lambda\sigma_n.$$

量 $\sigma_k=\Sigma\rho_{i_1}\rho_{i_2}\cdots\rho_{i_k}$，这里和 Σ 是对于所有 k 个不同的整数系$(i_1,i_2,\cdots,i_k)$而展开的，而$(i_1, i_2, \cdots, i_k)$是从 1, 2, $\cdots$, n 个整数中取 k 个组合成的，σ_k 叫做数 $\rho_1, \cdots, \rho_n$ 的初等对称函数. 于是

$$\sigma_h=(-1)^h\frac{\alpha_{n-h}}{\alpha_n}.$$

已知C的 n 个不同的或相同的数 $\rho_1, \cdots, \rho_n$，则多项式

$$a=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^h\sigma_hx^{n-h}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$$

以 $\rho_1, \cdots, \rho_n$ 为其零点. 相反地，多项式

$$a=\alpha_nx^n+\cdots+\alpha_0$$

的零点 $\rho_1, \cdots, \rho_n$ 与系数 α_h 的关系为 $\sigma_h=(-1)^h\dfrac{\alpha_{n-h}}{\alpha_n}$.

求方程组

$$\sigma_h=(-1)^h\frac{\alpha_{n-h}}{\alpha_n},\qquad h=1, 2, \cdots, n.$$

(这里未知数是 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$)的解，与求

$$\alpha_nx^n+\cdots+\alpha_0$$

的零点是一个等价的问题. 这就是说，等价于求方程

$$\alpha_nx^n+\cdots+\alpha_0=0$$

的解.

第九章 有理分式

我们已见到，有一个未定元的多项式系数的环A是一整环，且每个$\neq 0$的元素对于乘法是正则的．在A是域K的情况下，可以将摘除0的这个环作成对于乘法是对称的(见第五章，§1)．这样得到的集就是一个域，叫做具有一个未定元的有理分式域．

有理分式的定义——我们来考虑多项式对(a_1, b_1)，其中每一个元素都不是零；如果$a_1b_2=a_2b_1$，就说$(a_1, b_1)\sim(a_2, b_2)$．这样，就定义了一个等价关系．将这个多项式对记作a_1/b_1，而不写作(a_1, b_1)；a_1叫做分子，b_1叫做分母，而a_1/b_1叫做有理分式．

设α是等价类，有

$$\alpha=\left(\frac{a_1}{b_1}, \cdots\right)\text{类}.$$

如果

$$\beta=\left(\frac{u_1}{v_1}, \cdots\right)\text{类},$$

则令

$$\alpha+\beta=\left(\frac{a_1v_1+b_1u_1}{b_1v_1}, \cdots\right)\text{类}$$

与

$$\alpha\beta=\left(\frac{a_1u_1}{b_1v_1}, \cdots\right)\text{类};$$

这两运算是可结合的和可交换的，且乘法对于加法是可分配的．引入0类(它的分式形式是分子为零，分母总$\neq 0$)，0是对于加法的中性元素．最后，分母是多项式$x_0=1$的分式类形成一个与原来的

多项式环同构的环；我们将它与此环等同.

既约分式——设 d 是多项式 a_1 和 b_1（我们已指明，d 与域 K 无关）的P. G. C. D.；于是有 $a_1=da, b_1=db$，且 a 与 b 互素. 可是 $a/b\sim a_1/b_1$，于是在每一类有一个代表元 a/b，这里 a 和 b 是互素的. 代表元 a/b 叫做类的既约代表元. 不计 K 的一个因子，这个代表元是唯一的，因为，如果有 $a/b\sim a^*/b^*$，a^*，b^* 互素，则有 $ab^*=ba^*$. 从而 a 能整除 ba^*，而 a 又与 b 互素，所以它能整除 a^*. 此外，又可证明，a^* 能整除 a，于是 $a^*=\lambda a$，这里 $\lambda\in K$.

还可以得出 $b^*=\lambda b$. a/b 的类的每一分式具有 ac/bc 的形式，实际上，如果 $a_1/b_1\sim a/b$，则有 $a_1b=ab_1$；a 整除 a_1b，且与 b 互素，于是 a 整除 a_1 且 $a_1=ac$，由此 $b_1=bc$.

分解一个有理分式成部分分式——设 a/b 是一有理分式类的既约代表元素. 按降幂排列将 a 用 b 来除；我们有

$$a=bq+r,\qquad \text{degrè}\,r<\text{degré}\,b,$$

于是

$$\frac{a}{b}=q+\frac{r}{b},$$

且此分解是唯一的.

而且 r/b 是既约的，因为如果 r 和 b 有公因子，则此公因子也能除 a.

现在设 $b=b_1b_2$，这里 b_1 和 b_2 是互素的. 理想 vb_1+wb_2（这里 v 和 w 是任意多项式）以常数为其基，于是这个理想包含每一多项式，且因此而存在 u_1 和 u_2，使 $u_2b_1+u_1b_2=r$. 而且多项式 u_1 和 u_2 不是唯一的. 将 u_1 用 b_1 来除

$$u_1=b_1c_1+r_1,\qquad \text{degré}\,r_1<\text{degré}\,b_1.$$

多项式 r_1 与 b_1 是互素的，因为若一个公因子能整除 u_1，则 r 和 $b=b_1b_2$ 及 r/b 就不是既约的了.

特别，结果得 $r_1 \neq 0$.

将 u_2 用 b_2 来除，于是

$$u_2 = b_2 c_2 + r_2, \qquad \text{degré}\, r_2 < \text{degré}\, b_2.$$

同时还证明了，r_2 和 b_2 是互素的. 于是还有 $r_2 \neq 0$.

这样就有

$$r = u_2 b_1 + u_1 b_2 = b_1 b_2 (c_1 + c_2) + r_2 b_1 + r_1 b_2,$$

可是

$$\text{degré}\, r < \text{degré}\, b = \text{degré}\, b_1 + \text{degré}\, b_2,$$

$$\text{degré}(r_2 b_1) = \text{degré}\, b_1 + \text{degré}\, r_2 < \text{degré}\, b_1 + \text{degré}\, b_2,$$

$$\text{degré}(r_1 b_2) = \text{degré}\, r_1 + \text{degré}\, b_2 < \text{degré}\, b_1 + \text{degré}\, b_2.$$

从而

$$\text{degré}\, b_1 b_2 (c_1 + c_2) < \text{degré}\, b_1 + \text{degré}\, b_2.$$

这个不等式只在 $c_1 + c_2 = 0$ 时才有可能，所以有

$$r = r_2 b_1 + r_1 b_2,$$

这里 $\text{degré}\, r_1 < \text{degré}\, b_1$， 且 $\text{degré}\, r_2 < \text{degré}\, b_2$.

多项式 r_1 和 r_2 同样是唯一确定的. 事实上，如果有:

$$r = r_2^* b_1 + r_1^* b_2,$$

这里 $\text{degré}\, r_1^* < \text{degré}\, b_1$ 且 $\text{degré}\, r_2^* < \text{degré}\, b_2$，则将上两式取差，即得

$$(r_2^* - r_2) b_1 = (r_1 - r_1^*) b_2.$$

可是 b_1 和 b_2 是互素的，于是 b_1 整除 $r_1 - r_1^*$. 将次数的大小进行比较就能证明，这将导致 $r_1 - r_1^* = 0$；于是还有 $r_2^* - r_2 = 0$.

这样就有如下分解式

$$\frac{r}{b} = \frac{r_1}{b_1} + \frac{r_2}{b_2},$$

$\text{degré}\, r_1 < \text{degré}\, b_1$, $\text{degré}\, r_2 < \text{degré}\, b_2$，且此分解是唯一的.

一般地，如果 $b = b_1 b_2 \cdots b_n$ 是把 b 分解成两两互素多项式的一

个分解式，则有

$$\frac{a}{b}=q+\frac{r_1}{b_1}+\cdots+\frac{r_n}{b_n},$$

这里 degrér_i<degréb_i, $i=1,\cdots,h$. 这个分解式对于已给的 $b_1\cdots b_h$ 是唯一的。

q 叫做 a/b 的整数部分；只有当 degré$a\geq$degréb 时，q 才不等于 0。

在复数域 C 上多项式的情况——如果系数域是 C，则每一多项式 b 可以分解为积：

$$\prod_{h=1}^{k}(x-\rho_h)^{m_h},$$

这里 ρ_h 是不同的复数，且 m_h 是≥ 1的整数。

对于 $h\neq j$，多项式 $(x-\rho_h)^{m_h}$ 与 $(x-\rho_j)^{m_j}$ 是互素的，且 $(x-\rho_h)^{m_h}$ 是 m_h 次的．从而有

$$\frac{a}{b}=q+\frac{r_1}{(x-\rho_1)^{m_1}}+\cdots+\frac{r_k}{(x-\rho_k)^{m_k}},$$

这里

$$\text{degré}\,r_h<m_h,\qquad h=1,\cdots,k;$$

这种分解是唯一的。

数 $\rho_1,\cdots,\rho_k$ 叫做有理分式的极点；m_h 叫做极点 ρ_h 的重数．这些极点就是分母 b 的相同重数的零点．

我们将下面形式的分式进一步分解

$$\frac{r}{(x-\rho)^m},$$

这里 degré$r<m$。

将泰勒公式应用于多项式 r，得到

$$r=r(\rho)+\frac{r'(\rho)}{1!}(x-\rho)+\cdots+\frac{r^{(m-1)}(\rho)}{(m-1)!}(x-\rho)^{m-1},$$

也就是说：

$$r=\lambda_m+\lambda_{m-1}(x-\rho)+\cdots+\lambda_1(x-\rho)^{m-1},$$

这里

$$\lambda_j=\frac{r^{(m-j)}(\rho)}{(m-j)!}.$$

我们有 $\lambda_m\neq0$，因为 r 与 $(x-\rho)^m$ 互素，因而 r 不能被 $x-\rho$ 所整除，即 $r(\rho)\neq0$．于是得到

$$\frac{r}{(x-\rho)^m}=\frac{\lambda_1}{x-\rho}+\frac{\lambda_2}{(x-\rho)^2}+\cdots+\frac{\lambda_m}{(x-\rho)^m},$$

这里 $\lambda_m\neq0$. 这种分解式也是唯一的，因为它是从泰勒公式的唯一性得来的．

于是得到下列的分解式

$$\frac{a}{b}=q-\sum_{h=1}^{k}\left(\frac{\lambda_{h,1}}{x-\rho_h}+\frac{\lambda_{h,2}}{(x-\rho_h)^2}+\cdots+\frac{\lambda_{h,m_h}}{(x-\rho_h)^{m_h}}\right),$$

这里 $\lambda_{h,m_h}\neq0,\ h=1,\cdots,k$.

这种分解叫做有理分式分解成部分分式．这种分解是唯一的．

分解式的系数 $\lambda_{h,j}$ 的计算——整式部分 q 的计算，按降幂排列用 b 来除 a，得到的商式就是 q.

用 ρ 来表示不同的极点 ρ_h 中的某一个；设 m 是其重数．令

$$\frac{a}{b}=q+\frac{r}{(x-\rho)^m}+\frac{w}{c},$$

这里 w/c 是对应于与 ρ 不同的极点 ρ_h 的有理分式的和．于是有

$$\text{degré}\,r<m,\quad \text{degré}\,w<\text{degré}\,c,\quad b=(x-\rho)^m c,$$

这样就有

$$a=cr+(x-\rho)^m(cq+w),$$

可是

$$r=\lambda_m+\lambda_{m-1}(x-\rho)+\cdots+\lambda_1(x-\rho)^{m-1}.$$

如果我们把多项式 $p_\rho=x-\rho$ 看作新的未定元 y，则

$$(1)\qquad \begin{cases} a=cr+y^m(cq+w), \\ r=\lambda_m+\lambda_{m-1}y+\cdots+\lambda_1 y^{m-1}. \end{cases}$$

另一方面，按照泰勒公式，多项式 a 和 c 也同样能看作是未定元 y 的多项式；如果 s 是 a 的次数，n 是 b 的次数，实际上就有

$$a=a(\rho)+\frac{a'(\rho)}{1!}y+\cdots+\frac{a^{(s)}(\rho)}{s!}y^s,$$

$$c=c(\rho)+\frac{c'(\rho)}{1!}y+\cdots+\frac{c^{(n-m)}(\rho)}{(n-m)!}y^{n-m}.$$

(1)的两个等式是按升幂用 c 除 a 的除法等式，这个除法进行到得到一个余式，其未定元 y 的赋值 $\geqslant m$ 时为止. $m-1$ 次商式是：

$$r=\lambda_m+\lambda_{m-1}y+\cdots+\lambda_1 y^{m-1}.$$

多项式 c 是用 $b=(x-\rho)^m c$ 来定义的. 然而在按泰勒公式展开 b 时，有

$$b(\rho)=b'(\rho)=\cdots=b^{(m-1)}(\rho)=0,\quad b^{(m)}(\rho)\neq 0.$$

因为 ρ 是 b 的 m 重零点. 因此

$$\begin{aligned} b&=\frac{b^{(m)}(\rho)}{m!}y^m+\frac{b^{(m+1)}(\rho)}{(m+1)!}y^{m+1}+\cdots+\frac{b^{(n)}(\rho)}{n!}y^n \\ &=y^m\left[\frac{b^{(m)}(\rho)}{m!}+\frac{b^{(m+1)}(\rho)}{(m+1)!}y+\cdots+\frac{b^{(n)}(\rho)}{n!}y^{n-m}\right], \end{aligned}$$

于是有

$$c=\frac{b^{(m)}(\rho)}{m!}+\frac{b^{(m+1)}(\rho)}{(m+1)!}y+\cdots+\frac{b^{(n)}(\rho)}{n!}y^{n-m}.$$

在用 c 除 a 的除法中，因为要求次数小于 m 的商式，我们能在 a 与 c 中消去一切包含次数 $\geqslant m$ 的 y 的幂的项，并对经过这样化简的多项式做除法；在除法的中间运算里，也能消去每一次数 $\geqslant m$ 的 y 的幂.

在 ρ 是单次极点的特殊情形，则有

$$\lambda_1=\frac{a(\rho)}{c(\rho)}=\frac{a(\rho)}{b'(\rho)}.$$

在一极点的重数 $m\geqslant 2$ 的情形，一般地，我们感兴趣的是利用按升幂排列的除法.

我们能指出，总有

$$\lambda_m=\frac{a(\rho)}{c(\rho)}=\frac{m!a(\rho)}{b^{(m)}(\rho)}.$$

因为有分解的唯一性，所以能写出下式：

$$\frac{a(\gamma)}{b(\gamma)}=q(\gamma)+\sum_{h=1}^{k}\frac{\lambda_{h,1}}{\gamma-\rho_h}+\frac{\lambda_{h,2}}{(\gamma-\rho_h)^2}+\cdots+\frac{\lambda_{h,m_h}}{(\gamma-\rho_h)^{m_h}},$$

这里 γ 是 C 中的某一个数，它不是极点 $\rho_1,\cdots,\rho_k$. 对于 $\lambda_{h,j}$ 和 q 的系数得到的这等式是对于这些量的线性方程.

这个方法叫做待定系数法.

最后，如果 a 和 b 是 $R[x]$ 的多项式，即实系数的多项式，在分解式中过渡到共轭复数时，由于唯一性，不应改变这个分解式. 因而对应于两个共轭复数极点的数 $\lambda_{h,j}$ 也是共轭的. 结果是：对应于实极点的量 $\lambda_{h,j}$ 是实的.

例：
$$a=x^7+2x^6+x^5-6x^4+9x^3+x$$
$$b=(x-1)(x^2+1)^3$$

多项式 a 和 b 的系数是实的. a/b 的极点是 b 的零点，即 $\rho_1=i$；$\rho_2=-i$ 二者是三重极点；$\rho_3=1$ 是单重极点. 将 ρ_1,ρ_2,ρ_3 代入 a，得

$$a(\rho_1)=a(i)=-8-8i,$$
$$a(\rho_2)=a(-i)=\overline{a(i)}=-8+8i,$$
$$a(\rho_3)=a(1)=8,$$

这就能保证 a 与 b 互素.

这三个数 $\neq 0$，于是 a 和 b 不能有任何的公因子，因为 b 在

$C[x]$中的素因子是 $x-1, x-i$ 和 $x+i$.

多项式 a 和 b 都是 7 次, 它有一非零整部 q, 它可用按降幂排列以 b 除 a 的除法得到, 于是有

$$a=bq+r, \quad \text{其中} \quad q=1,$$

且
$$r=3x^6-2x^5-3x^4+6x^3+3x^2+1.$$

复数极点是共轭复数, 于是有如下分解式

$$\frac{r}{b}=\frac{\lambda_1}{(x-i)}+\frac{\lambda_2}{(x-i)^2}+\frac{\lambda_3}{(x-i)^3}+\frac{\bar{\lambda}_1}{(x+i)}$$
$$+\frac{\bar{\lambda}_2}{(x+i)^2}+\frac{\bar{\lambda}_3}{(x+i)^3}+\frac{\mu}{x-1}.$$

为了计算 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 我们利用泰勒公式来把多项式 r 和 b 写成 $x-i=y$ 的多项式形式. 得到:

$$r=r(i)+\frac{r'(i)}{1!}(x-i)+\frac{r''(i)}{2!}(x-i)^2+\cdots$$
$$=-(8+8i)+(-28+36i)y+(66+38i)y^2+\cdots,$$
$$b=\frac{b'''(i)}{3!}(x-i)^3+\frac{b^{(4)}(i)}{4!}(x-i)^4+\frac{b^{(5)}(i)}{5!}(x-i)^5+\cdots$$
$$=y^3[(8+8i)+(12-20i)y+(-18-6i)y^2+\cdots]=y^3c.$$

因为极点 $\rho_1=i$ 的重数是 $m=3$, 在 r 和 c 中未曾写出 y 的高于 2 次的幂. 用 c 除 r

$$\begin{array}{r|l}
-(8+8i)+(-28+36i)y+(66+38i)y^2+\cdots & (8+8i)+(12- \\
(8+8i)+(12-20i)y+(-18-6i)y^2+\cdots & 20i)y+(-18 \\
 & -6i)y^2+\cdots \\
\hline
(-16+16i)y+(48+32i)y^2+\cdots & -1+2iy+y^2 \\
(16-16i)y+(-40-24i)y^2+\cdots & \\
\hline
(8+8i)y^2+\cdots &
\end{array}$$

在余式中 y 的赋值$\geqslant 3$, 所得商式$-1+2iy+y^2$, 由此给出 $\lambda_1=1, \lambda_2=2i, \lambda_3=-1$.

为了得到对应于单重极点 $\rho_3=1$ 的 μ，我们有 $b=(x-1)c^*$，这里 $c^*=(x^2+1)^3$，于是有

$$\mu=\frac{a(1)}{c^*(1)}=\frac{r(1)}{c^*(1)}=\frac{8}{8}=1.$$

总结起来，分解式如下：

$$\frac{a}{b}=1+\frac{1}{(x-i)}+\frac{2i}{(x-i)^2}-\frac{1}{(x-i)^3}+\frac{1}{(x+i)}$$
$$-\frac{2i}{(x+i)^2}-\frac{1}{(x+i)^3}+\frac{1}{x-1}.$$

第十章 矢量空间

在第六章，第二部分，§1 中，我们已遇到矢量空间的概念．这个概念是现代数学中最重要概念之一．"线性"运算几乎是现在在数学中能够深入研究的唯一的运算．

"矢量"空间的名称首先来源于自由矢量的研究，自由矢量是矢量空间的原始的例子．内规律是几何加法，外规律是乘以数的乘法．然而很快地发现，很多其他数学的集合也能看作是矢量空间，例如齐次线性微分方程的解，在一个域上的多项式集，在区间上的连续函数的集等等．

第一部分 定义和主要性质

§1 定 义

定义——集 E 叫做可交换域 K 上的矢量空间，如果它具有(见第六章，第二部分，§1)：

1° 可交换群的内规律，记作加法规律，根据这个规律，对不论怎样的 $x\in E$, $y\in E$, $z\in E$, 有

(1) $$x+(y+z)=(x+y)+z;$$

(2) $$x+y=y+x;$$

(3) 存在 $o\in E$, 使 $x+o=x$;

(4) 存在$(-x)\in E$，使 $x+(-x)=o$;

2° 一个外规律，使得对不论怎样的 $x\in E$, $y\in E$, $\lambda\in K$, $\mu\in K$, 有

(5) $$\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y;$$

(6) $$(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x;$$

(7) $$\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x;$$

(8) $$\varepsilon x=x;$$

这里 ε 是K的单位元素，即K中乘法的中性元素.

我们用小写拉丁文字母来表示E的元素，用小写希腊文字母来表示可交换域K的元素．K中加法中性元素记作 0，K 中乘法中性元素 ε 记作 1．将E的元素用字母上加箭头，或用小写黑体如 $\boldsymbol{x}$ 来标记，以说明它与初等意义下矢量的相似性，有时是方便的.

定义的推论——根据(6)，对于 $\mu=0$，不论怎样的 $\lambda\in K$，和 $x\in E$，有

$$(\lambda+0)x=\lambda x=\lambda x+0\cdot x.$$

于是，对不论怎样的 $x\in E$，有

$$0\cdot x=o.$$

如果$-\lambda$是 λ 在K中的相反元素，根据(6)就有

$$[\lambda+(-\lambda)]x=\lambda x+(-\lambda)x=0\cdot x=o.$$

于是对不论怎样的 $\lambda\in K$, $x\in E$,

$$(-\lambda)x=-(\lambda x),$$

特别有$(-1)x=-x$.

根据(5)，对于 $y=o$，对不论怎样的 $\lambda\in K$, $x\in E$，有

$$\lambda(x+o)=\lambda x=\lambda x+\lambda o.$$

于是对不论怎样的 $\lambda\in K$,

$$\lambda o=o.$$

相反地，假设对某个 $\lambda\in K$ 和某个 $x\in E$，有关系

$$\lambda x = o,$$

于是，或者 $\lambda=0$，等式成立，或者 $\lambda\neq 0$，λ 就是 K 中的一个逆元素 $\mu=1/\lambda$，且有

$$\mu(\lambda x)=\mu\cdot o=o;$$

可是
$$\mu(\lambda x)=(\mu\lambda)x=1\cdot x=x,$$

于是 $x=o$，这样关系式 $\lambda x=o$ 导致 $\lambda=0$ 或 $x=o$。

于是考虑下列等式

$$\lambda x=\mu x,\quad 这里\ \lambda\in K,\ \mu\in K,\ x\in E.$$

如果 $x=o$，对不论怎样的 λ 和 μ，这等式是成立的．如果 $x\neq o$，则在等式两端加上 μx 的相反元素 $-\mu x$ 后，就推出

$$\lambda x+(-\mu)x=\mu x+(-\mu x)=o,$$

于是

$$[\lambda+(-\mu)]x=o.$$

因为 $x\neq o$，则有 $\lambda+(-\mu)=o$，由此在等式两边加上 μ：$\lambda+(-\mu)+\mu=\mu$，即 $\lambda=\mu$。

于是 E 的每个元素 $x\neq o$ 是对外规律的正则元素。

此外，考虑等式

$$\lambda x=\lambda y,\quad 这里\ \lambda\in K,\ x\in E,\ y\in E.$$

如果 $\lambda=0$，则对不论怎样的 x 和 y，这等式是成立的。

如果 $\lambda\neq 0$，则有

$$\lambda x+(-\lambda y)=o.$$

可是

$$(-\lambda y)=(-\lambda)y=(-1\cdot\lambda)y=[\lambda(-1)]y=\lambda(-y),$$

于是，

$$\lambda x+(-\lambda y)=\lambda[x+(-y)]=o.$$

因为 $\lambda\neq 0$，所以有 $x+(-y)=o$，由此在等式两边加上 y，得 $x+(-y)+y=y$，即 $x=y$．

于是K的每一元素$\lambda\neq 0$是外规律的正则元素.

§2 矢量空间的结构和例子

欧氏几何中的自由矢量形成一矢量空间，内规律是几何加法$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$，矢量$\boldsymbol{o}$是零矢量(它的方向是任意的)，$-\boldsymbol{x}$是$\boldsymbol{x}$的相反矢量.

域K在这里是实数域. $\lambda\boldsymbol{x}(\lambda>0)$与$\boldsymbol{x}$有同样的方向；且如果$\boldsymbol{x}$是单位矢量，则$\lambda\boldsymbol{x}$的端点以$\lambda$为横坐标.

每一个可交换域K是一个在其自身上的矢量空间，加法是内规律，乘法是外规律($E=K$).

在同一个域K上的两个矢量空间的积——设E_1和E_2是K上的两个矢量空间；我们来考虑积$E_1\times E_2$；我们将它组织成K上的矢量空间. 我们将元素下附以序标1以表明E_1的元素，附以序标2以表明E_2的元素.

内规律——令$(x_1, x_2)+(y_1, y_2)=(x_1+y_1, x_2+y_2)$.

这个内组合规律是可结合和可交换的；它有一个中性元素(o_1, o_2)，这里o_1是E_1的中性元素，o_2是E_2的中性元素；每一元素(x_1, x_2)有其相反元素$(-x_1, -x_2)$.

外规律——设λ是K的某个元素.

令

$$\lambda(x_1, x_2)=(\lambda x_1, \lambda x_2).$$

于是，对任意的$\lambda\in K$和$\mu\in K$，有

$$\begin{aligned}&\lambda[(x_1, x_2)+(y_1, y_2)]=\lambda(x_1+y_1, x_2+y_2)\\&=[\lambda(x_1+y_1), \lambda(x_2+y_2)]=(\lambda x_1, \lambda x_2)+(\lambda y_1, \lambda y_2)\\&=\lambda(x_1, x_2)+\lambda(y_1, y_2);\\&(\lambda+\mu)(x_1, x_2)=[(\lambda+\mu)x_1, (\lambda+\mu)x_2]\end{aligned}$$

$$=(\lambda x_1, \lambda x_2)+(\mu x_1, \mu x_2)=\lambda(x_1, x_2)+\mu(x_1, x_2),$$

$$\lambda[\mu(x_1, x_2)]=\lambda(\mu x_1, \mu x_2)=(\lambda\mu x_1, \lambda\mu x_2)=(\lambda\mu)(x_1, x_2)$$

$$1\cdot(x_1, x_2)=(1\cdot x_1, 1\cdot x_2)=(x_1, x_2).$$

于是 $E_1\times E_2$ 是 K 上的一个矢量空间.

可以将上述结果推广到有限的 n 个于相同的域 K 上的矢量空间的积. 用序标 i 附在 E_i 的元素下, 以表明它属于 E_i, $i=1, \cdots, n$; 令

$$(x_1, \cdots, x_n)+(y_1, \cdots, y_n)=(x_1+y_1, \cdots, x_n+y_n),$$

$$\lambda(x_1, \cdots, x_n)=(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n); \text{对于所有的 } \lambda\in K.$$

我们像以前那样证实: $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ 也是 K 上的矢量空间.

最重要的特殊情况是: $E_1=\cdots=E_n=K$ 和 $K=R$ 或 $K=C$. 于是我们把这矢量空间记为 R^n(相应的 C^n); 它的元素是 n 数组 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$, 这里 $\xi_i\in R$(相应地 $\xi_i\in C$).

我们立刻看到, R^3 同构于三维空间中三个分量 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 的自由矢量的矢量空间.

子矢量空间——设有域 K 上的矢量空间 E; 又设 F 是 E 的一个子集, 它具有从 E 中导来的同样规律, 则它也是 K 上的矢量空间; 于是 F 称为 E 的子矢量空间, 或 E 的线性簇.

例——对于每一 $m<n$, R^m 是 R^n 的子空间; 这只要取元素 $(\xi_1, \cdots, \xi_m, 0, \cdots, 0)$, 它的最后 $n-m$ 个分量为零, 就能明瞭了.

由 E 的元素 $x_1, \cdots, x_n$ 生成的子空间——设 E 的元素 y 具有形式 $y=\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n$, 这里 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 K 的任意的数, 我们来考虑 y 的集 F. 于是, F 是 E 的子空间, 它可能与 E 相同; F 叫做由 $x_1, \cdots, x_n$ 生成的子矢量空间. 或叫做由 $x_1, \cdots, x_n$ 生成的线性簇.

实际上, 设 $z=\mu_1 x_1+\cdots+\mu_n x_n$, 这里 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ 是 K 的任意

数，则有

$$y+z=(\lambda_1+\mu_1)x_1+\cdots+(\lambda_n+\mu_n)x_n\in F;$$

$$o=0\cdot x_1+\cdots+0\cdot x_n\in F;$$

$$-y=(-\lambda_1)x_1+\cdots+(-\lambda_n)x_n\in F.$$

另一方面，对不论怎样的 $\lambda\in K$，则有

$$\lambda y=(\lambda\lambda_1)x_1+\cdots+(\lambda\lambda_n)x_n\in F.$$

从而 F 是矢量空间.

在 F 的这个定义中，并不必须元素 $y\in F$ 有唯一的表达形式 $\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n$；而只要至少有一个这种表达形式，我们看到，可能对同一个元素 $y\in F$，有无穷多个这种表达形式.

在同一个域 K 上的两个矢量空间的交——设 E 和 F 是 K 上的两个矢量空间，我们考虑 $E\cap F$. 如果 $x\in E\cap F$，则有 $x\in E$ 和 $x\in F$，于是对每一 $\lambda\in K$ 有 $\lambda x\in E$ 和 $\lambda x\in F$，因而 $\lambda x\in E\cap F$.

如果 $x\in E\cap F$ 和 $y\in E\cap F$，则 $x+y\in E$ 和 $x+y\in F$，于是 $x+y\in E\cap F$. 可以将此结果推广到同一个域 K 上若干个矢量空间的交上.

要指出，两个矢量空间的并一般不是矢量空间.

直接和——设 F 和 G 是域 K 上一个矢量空间的两个子矢量空间. 如果 E 的每个元素 x 可以写作 $x=y+z$，其中 $y\in F$，$z\in G$；且如果这种分解式是唯一的，则说 E 是 F 与 G 的直接和，且写作 $E=F\oplus G$.

可以用类似的方式来定义有限多个子矢量空间的直接和.

我们指出，这要求 $F\cap G=o$；事实上，如果有一元素 $w\neq o$，$w\in F$ 且 $w\in G$，则对每一组 $\lambda\in K$，$\mu\in K$，$\lambda+\mu=1$，有 $w=\lambda w+\mu w$. w 的这种分解式就不是唯一的.

第二部分　线性无关　基

§1 定　　义

线性无关——设E为域K上矢量空间．设有E的元素$x_1, \cdots, x_k$, 其中个数k为有限的；如果下面的关系

$$\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_k x_k=o, \text{ 这里 } \lambda_1\in K, \cdots, \lambda_k\in K,$$

导致$\lambda_1=0, \cdots, \lambda_k=0$, 就说$x_1, \cdots, x_k$是**线性无关的**．

如果至少存在K的一组元素$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, 它们不都等于0, 使得

$$\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_k x_k=o,$$

则说E的元素$x_1, \cdots, x_k$是**线性相关的**．

如果一组$x_1, \cdots, x_k$是线性无关的(或相关的)，则也说x_i与其他的元素是线性无关的(或线性相关的)．

这样，如果$x\neq o$, 则每个$x\in E$是线性无关的；然而元素$o\in E$是线性相关的．

如果在$x_1, \cdots, x_k$诸元素中存在$x_1, \cdots, x_h$ $(h\leqslant k)$ 等h个元素线性相关，则$x_1, \cdots, x_k$这组元素也是线性相关的；实际上，存在一组不是全都为零的$\mu_1, \cdots, \mu_h$, 使得$\mu_1 x_1+\cdots+\mu_h x_h=o$, 且因而有

$$\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_h x_h+\lambda_{h+1}x_{h+1}+\cdots+\lambda_k x_k=o$$

这里$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$不全是零；这只要对$i=1, \cdots, h$, 取$\lambda_i=\mu_i$, 和$\lambda_j=0$, 如果$j=h+1, \cdots, k$.

于是，如果在$x_1, \cdots, x_k$这组元素中包含元素o, $x_1, \cdots, x_k$就是线性相关的；这也可以说，如果一组元素是线性无关的，则每个元素$\neq o$。

此外，如果在一组数里存在两个成比例的元素，例如 $x_2=\mu x_1$，其中 $\mu(\in K)$ 是任意的，这组数是线性相关的，因为 x_1，x_2 这一部分数组是线性相关的，实际上有 $\mu x_1+(-1)x_2=o$，而 $-1\neq 0$（此外可能 $\mu=0$）。

设 E 是一矢量空间，G 和 F 是两个子矢量空间，使 $E=F\oplus G$（直接和）。设 x_1，$\cdots$，x_h 是 F 的线性无关的元素，y_1，$\cdots$，y_k 是 G 的线性无关的元素。于是并 x_1，$\cdots$，x_h，y_1，$\cdots$，y_k 是 E 的一组线性无关的元素。实际上，设存在 K 的 λ_i，μ_j，使得

$$\sum_{i=1}^{h}\lambda_i x_i+\sum_{j=1}^{k}\mu_j y_j=o.$$

令

$$x=\sum_{i=1}^{h}\lambda_i x_i \qquad y=\sum_{j=1}^{k}\mu_j y_j$$

于是 $x\in F$，$y\in G$，且 $x+y=o$，于是根据直接和的定义，$x=o$ 和 $y=o$，于是 $\lambda_i=0$，$i=1,\cdots,h$，且 $\mu_j=0$，$j=1,\cdots,k$，这证明了我们的论断。

基，维数——设有一矢量空间 E，又设存在有限 n 个线性无关的元素 e_1，$\cdots$，e_n，使得 E 的每一元素 x 与 e_1，$\cdots$，e_n 线性相关。于是我们说，一组元素 e_1，$\cdots$，e_n 形成 E 的基，且 E 是有限的 n 维的。

要指出，存在不是有限维的矢量空间。我们说它们是无限维的。在这样的矢量空间中存在个数为任意大的、线性无关的矢量组。域 K 上的多项式矢量空间 $K[x]$ 就是无限维的；指数 i 皆不相同的多项式 x^i 的组是线性无关的（第七章，第一部分，§ 1）。

设 x 是 E 的一个元素；因为 x 与 e_1，$\cdots$，e_n 是线性相关的，所以存在 K 的 λ，λ_1，$\cdots$，λ_n，它们不都是零，可使

$$\lambda x+\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n=o.$$

于是有 $\lambda \neq 0$，因为不然的话，$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = o$，其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 不都是零，因而 $e_1, \cdots, e_n$ 线性相关．因为 K 是一个域，所以存在 $1/\lambda \in K$，且乘以 $-1/\lambda$ 时，可得

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n，\text{其中 } \xi_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda} \in K,\ i = 1, \cdots, n.$$

还可看到 E 是由基 $e_1, \cdots, e_n$ 生成的一个矢量空间．

此外，E 的每一个元素的这种表达式是唯一的，因为如果它还有

$$x = \xi_1' e_1 + \cdots + \xi_n' e_n,$$

则取两式之差，就得

$$o = (\xi_1 - \xi_1')e_1 + \cdots + (\xi_n - \xi_n')e_n;$$

于是，因为 $e_1, \cdots, e_n$ 是线性无关的，就有

$$\xi_i' - \xi_i = 0,$$

即

$$\xi_i' = \xi_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

§2　n 维空间和 K^n 间的同构

设 E 是 K 上有限的 n 维矢量空间．

我们来考虑 K 上 n 个矢量空间 K 的积的矢量空间 $K^n = K \times K \times \cdots \times K$（第一部分，§2）．使 K^n 的元素 $(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \tilde{x}$ 与 E 的元素 x 相对应．设还有一个元素 $y \in E$；则有 $y = \eta_1 e_1 + \cdots + \eta_n e_n$．我们使 K^n 的元素 $(\eta_1, \cdots, \eta_n) = \tilde{y}$ 与 $y \in E$ 相对应．

因为 $x + y = (\xi_1 + \eta_1)e_1 + \cdots + (\xi_n + \eta_n)e_n$，$x + y$ 应该对应于 K 的元素 $\tilde{x} + \tilde{y}$；因为 $\lambda x = \lambda\xi_1 e_1 + \cdots + \lambda\xi_n e_n$，$\lambda x$ 应该对应于 K^n 的元素 $\lambda\tilde{x}$；这样的运算是像前面那样定义的（第一部分，§2）．

K 上的有限的 n 维矢量空间 E 同构于 K^n；在 E 和 K^n 间的

这种同构与在 E 中选择的基有关.

基 $e_1, \cdots, e_n$ 的矢量的象是 $\tilde{e}_i=(\delta_{1i}, \cdots, \delta_{ni})$, 这里如果 $i\neq j$, 则 $\delta_{ij}=0$; 而 $\delta_{ii}=1$; 这个量 δ_{ij} 叫做克隆尼克(Kronecker)符号. 这样 $\tilde{e}_1=(1, 0, \cdots, 0)$; $\tilde{e}_2=(0, 1, \cdots, 0)$; $\cdots$; $\tilde{e}_n=(0, 0, \cdots, 1)$.

于是从上面的考虑导出: 要使 E 的元素 $x_1, \cdots, x_k$ 是线性无关的, 必要且充分条件是: 经由上述的同构而与 $x_1, \cdots, x_k$ 对应的 K^n 的元素 $\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_k$ 也是线性无关的. 这样, 我们就把关于 E 的元素的研究转到对 K^n 的元素的研究.

特别地, $\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_n$ 是 K^n 的基, 叫做 K^n 的标准基.

我们用与 K^n 对应的空间来证明下面的命题:

定理——在一 n 维矢量空间里, 多于 n 个的一组元素总是线性相关的.

我们对维数 n 作归纳法来证明这个定理.

1° 如果 $n=1$, 定理为真. 实际上, E 有一个由元素 e 组成的基, 于是 E 的每个元素 x 是 $x=\xi e$ 形式的, 其中 $\xi\in K$. 设 $x'=\xi' e$; 如果 $\xi=0$, 则有 $x=0$, 且 x, x' 这组元素是线性相关的; 如果 $\xi\neq0$, 我们有 $\lambda x+\lambda' x'=0$, 其中 $\lambda=\xi'/\xi$, 且 $\lambda'=-1\neq0$; x, x' 这组元素也是线性相关的.

2° 我们假设对至多 $n-1$ 维的矢量空间, 定理为真. 我们来考虑空间 E 的 $n+1$ 个矢量 $x_0, x_1, \cdots, x_n$; 借助于 E 的基 $e_1, \cdots, e_n$, 这些矢量表达成如下形式

$$x_i=\xi_{1i}e_1+\cdots+\xi_{ni}e_n,\ i=0, 1, \cdots, n.$$

我们来使 K^n 的元素 $\tilde{x}_i=(\xi_{1i}, \cdots, \xi_{ni})$ 与 x_i 相对应.

a) 首先假设对一切 $i=1, \cdots, n$, $\xi_{ni}=0$; 考虑 K^{n-1} 的元素 $\tilde{x}_i'=(\xi_{1i}, \cdots, \xi_{n-1,i})$. 矢量空间 K^{n-1} 是 $n-1$ 维的, 对 $i=1, \cdots, n$, n 个元素 $\tilde{x}_i'$ 是线性相关的; 于是存在 K 的不全为零的数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 使得

$$\lambda_1\tilde{x}_1'+\cdots+\lambda_n\tilde{x}_n'=\tilde{o}'$$

这里 $\tilde{o}'=(0,\cdots,0)$是 K^{n-1} 中加法的中性元素。

于是有

$$\lambda_1\xi_{j1}+\cdots+\lambda_n\xi_{jn}=0,\qquad j=1,\cdots,n-1.$$

然而因为对于 $i=1,\cdots,n$, $\xi_{ni}=0$, 上述关系对 $j=n$ 也为真；用另外的说法，对于同一组 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 关系

$$\lambda_1\tilde{x}_1+\cdots+\lambda_n\tilde{x}_n=o$$

在 K^n 中成立，因而根据 K^n 与 E 间同构关系，在 E 中则有

$$\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n=o$$

矢量 $x_1,\cdots,x_n$, 从而 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 就是在 E 中线性相关的。

b）现设 $\xi_{n0}\neq0$. 我们考虑元素

$$y_i=x_i-\frac{\xi_{ni}}{\xi_{n0}}x_0,\quad i=1,\cdots,n$$

我们有 $y_i=\eta_{1i}e_1+\cdots+\eta_{ni}e_n$; 特别

$$\eta_{ni}=\xi_{ni}-\frac{\xi_{ni}}{\xi_{n0}}\xi_{n0}=0.$$

这样我们就回到情况 a)，这里 y_i 代替了 x_i; 从而 $y_1,\cdots,y_n$ 是线性相关的，即存在不全为零的 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 使 $\lambda_1y_1+\cdots+\lambda_ny_n=0$, 也就是 $\lambda_0x_0+\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n=0$, 这里 $\lambda_0=-\frac{1}{\xi_{n0}}(\lambda_1\xi_{n1}+\cdots+\lambda_n\xi_{nn})$. 因为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 不是全为零，$\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 同样也不全为零；于是元素 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 在 E 中是线性相关的。

在 n 维矢量空间 E 中，不能使多于 n 个元素线性无关。

特别地，如果 E 有一个不同于 $e_1,\cdots,e_n$ 的基，于是这个基中元素的个数 $n'\leqslant n$. 可是，与此同时我们又见到，在 E 中至多只有 n' 个线性无关的元素，于是 $n\leqslant n'$, 从而 $n=n'$.

如果 E 具有多组基，这些基具有的元素个数是相同的，且这种个数等于 E 的维数；E 的维数于是与基的特定选择无关。

E的维数用 $\dim E$ 来表示.

§3 基

求基——设有 n 维矢量空间 E; 于是至少存在 n 个元素的一组基 $e_1, \cdots, e_n$.

又设有 E 中的任意元素 $a_1 \neq o$.

如果E不包含与 a_1 线性无关的元素, 每一个元素是 $x = \xi a_1$ 形式的; a_1 就是 E 的一组基, 因而 E 是一维的.

设维数 $n > 1$.

于是有 E 的与 a_1 线性无关的一个元素 a_2; 假设逐步地达到元素 $a_1, a_2, \cdots, a_h$ 线性无关.

如果 $h < n$, 则 E 包含与 $a_1, \cdots, a_h$的线性无关的元素, 否则对每个元素 $x \in E$, 存在不全为零的 $\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_h$, 使 $\lambda x + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_h a_h = o$. 这里 $\lambda \neq 0$, 否则 $a_1, \cdots, a_h$ 就不线性无关; 于是有 $x = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_h a_h$; 其中 $\xi_i = -\lambda_i / \lambda$, 这里 $i = 1, \cdots, h$, 而 $a_1, \cdots, a_h$ 是 E 的一组基, 然而因这基中只有 $h(<n)$个元素, 这是不可能的. 于是存在 $a_{h+1} \in E$, 使 $a_1, \cdots, a_h, a_{h+1}$ 是线性无关的. 利用这过程, 就能得到 n 个线性无关的元素; 它们构成E的一组基. 于是就总有 E 的无穷多个不同的基.

这个证明建立了下面的定理:

不完备基的定理——如果在E中 $h(<n)$ 个元素是线性无关的, 我们总能加上E中 $n-h$ 个其他元素, 使所得到的这 n 个元素构成E的一组基.

子矢量空间——设F是 E 的子矢量空间, 这里 E 是有限的 n 维的. 设 h 是 F 的线性无关元素的最大个数; 这个数 h 是存在的, 且 $h \leqslant n$. 设 $f_1, \cdots, f_h$ 是 F 的 h 个线性无关元素系, 且设 f 是 F 的

某个元素；于是元素 $f, f_1, \cdots, f_h$ 是线性相关的，即存在不全为零的 $\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_h$，使得

$$\lambda f+\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_h f_h=o$$

我们有 $\lambda\neq 0$，否则 $f_1, \cdots, f_h$ 线性相关.

从而有

$$f=\gamma_1 f_1+\cdots+\gamma_h f_h,$$

这里 $\gamma_i=-\lambda_i/\lambda$, $i=1, \cdots, h$. 另一方面，元素 f 的这种表示法是唯一的，因为如果有 $f=\gamma'_1 f_1+\cdots+\gamma'_h f_h$，则取两式之差就得

$$(\gamma'_1-\gamma_1)f_1+\cdots+(\gamma'_h-\gamma_h)f_h=0,$$

在此式中，根据 $f_1, \cdots, f_h$ 的线性无关性，就得 $\gamma'_i-\gamma_i=0$，即 $\gamma'_i=\gamma_i$, $i=1, \cdots, h$.

这样，$f_1, \cdots, f_h$ 是 F 的一组基，且有限维矢量空间的每一子矢量空间也是有限维的.

另一方面，如果 $h=n$，则有 $F=E$；如果 $h<n$，则能用 $g_{h+1}, \cdots, g_n$ 来补足 $f_1, \cdots, f_h$，以构成 E 的一组基.

用 $g_{h+1}, \cdots, g_n$ 生成的子矢量空间 G 叫做 F 的补子空间.

具有如下形式的元素 $x\in E$

$$x=\gamma_1 f_1+\cdots+\gamma_h f_h+\gamma_{h+1}f_{h+1}+\cdots+\gamma_n f_n$$

能用一种方式，且是唯一的方式表示成如下形式

$$x=f+g.$$

这里 $f\in F$, $g\in G$；于是 E 是 F 和 G 的直接和.

我们看到，如果 $\dim F=h$，则 $\dim G=n-h=\dim E-\dim F$.

注释—— F 的补子矢量空间 G 依赖于在 F 中选择的基和从 E 中选出来补足 E 的基的那些元素.

我们还要指出：如果 E 是两个子矢量空间 F 和 G 的直接和，则 F 的任意一组基 $f_1, \cdots, f_h$ 与 G 的任意一组基 $g_{h+1}, \cdots, g_n$ 的并构成 E 的基.

§4 商 空 间

商空间——设 E 是域 K 上的矢量空间，其维数为有限或非有限；又设 F 是 E 的子矢量空间。我们能按下述方式在 E 中定义一个等价关系：如果 $x-x'\in F$，则 $x\sim x'$。

实际上有：

$$x\sim x,\ \text{因为}\ x-x=o\in F;$$

$$x\sim x'\Longrightarrow x'\sim x,\ \text{因为}\ x'-x=-(x-x')\in F;$$

$$x\sim x'\ \text{和}\ x'\sim x''\Longrightarrow x\sim x'',\ \text{因为}(x-x')+(x'-x'')\in F.$$

于是，设 $\bar{x}$ 是 x 的等价类；$\bar{x}$ 的每一元素具有 $x+f$ 的形式，这里 f 是 F 的某一元素。

设 $\bar{x}=(x,\cdots)$类，$\bar{y}=(y,\cdots)$类；

令

$$\lambda\bar{x}=(\lambda x,\cdots)\text{类},\qquad \text{这里}\ \lambda\in K$$

与

$$\bar{x}+\bar{y}=(x+y,\cdots)\text{类}.$$

这定义不依赖于由这些类中所选定的代表元素，而只依赖于这些类本身；实际上有

$$\lambda(x+f)=\lambda x+\lambda f\sim\lambda x,$$

$$x+f'+y+f''=x+y+f'+f''=x+y+f\sim x+y,$$

$$f'\in F,\ f''\in F,\ \ f\in F.$$

加法是可结合与可交换的，它有一中性元素，且每个类 $\bar{x}$ 有一相反的类 $-x=(-x,\cdots)$类。

$$\bar{o}=(0,\cdots)\text{类}=\text{空间}\ F.$$

同样有

$$\lambda(\bar{x}+\bar{y})=(\lambda(x+y),\cdots)\text{类}=\lambda\bar{x}+\lambda\bar{y},$$

$$(\lambda+\mu)\bar{x}=((\lambda+\mu)x,\cdots)类=\lambda\bar{x}+\mu\bar{x},$$
$$\lambda(\mu\bar{x})=(\lambda(\mu x),\cdots)类=(\lambda\mu)\bar{x},$$
$$e\bar{x}=(ex,\cdots)类=\bar{x}.$$

对每个 $x\in E$, $y\in E$, $\lambda\in K$, $\mu\in K$; e 是对于K中乘法的中性元素(单位元).

于是类的集构成K上的矢量空间 H, 叫做由F作成的E的商矢量空间; 记作 $H=E/F$.

E 是有限维的情形——设E是有限的 n 维的, 于是子空间 F 也是有限的 $h(\leqslant n)$维的. 设 $f_1,\cdots,f_h$ 是F的一组基; 如果 $n>h$, 则用 $g_{h+1},\cdots,g_n$ 来补足, 以形成E的一组基.

对每个 $x\in E$, 有唯一的表达式

$$x=\xi_1 f_1+\cdots+\xi_h f_h+\xi_{h+1}g_{h+1}+\cdots+\xi_n g_n.$$

还设

$$x'=\xi'_1 f_1+\cdots+\xi'_h f_h+\xi'_{h+1}g_{h+1}+\cdots+\xi'_n g_n,$$

于是有

$$x\sim x'\Longleftrightarrow\xi_{h+1}=\xi'_{h+1},\cdots,\xi_n=\xi'_n.$$

考虑F的补矢量空间 G; G 的一个元素写成:

$$g=\xi_{h+1}g_{h+1}+\cdots+\xi_n g_n.$$

属于 x 的同一等价类的E的每一元素 x 对应于G的同一元素 g; G 与H间有一一对应关系.

设

$$\bar{x}\to u=\xi_{h+1}g_{h+1}+\cdots+\xi_n g_n,$$
$$\bar{y}\to v=\eta_{h+1}g_{h+1}+\cdots+\eta_n g_n,$$

则有

$$\lambda\bar{x}\to\lambda u \quad 且 \quad \bar{x}+\bar{y}\to u+v.$$

于是对应是一个同构.

这样, 我们就能将商空间 $H=E/F$ 与F的补空间G等同起

来.

特别地有

$$\dim H=\dim E/F=\dim G=n-h=\dim E-\dim F;$$

我们同样能说 E 是 F 和 E/F 的直接和.

如果 $h=n$, 商空间 H 化为一个元素 o.

例——设 E 是元素 $\tilde{x}=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 的 R^3 矢量空间; 设 F 是 E 的子矢量空间, 它的元素 $\tilde{f}=(\xi, 0, 0)$ 的后两个分量是零($\tilde{f}$ 在 $O\xi_1$ 轴上): F 以矢量 $\tilde{e}_1=(1, 0, 0)$ 为基. 我们能用两个其他矢量来补足 $\tilde{e}_1$, 以形成 R^3 的一组基.

作为例子取 $\tilde{e}_2=(0, 1, 0)$ 和 $\tilde{e}_3=(0, 0, 1)$; 这两矢量生成子矢量空间 G, 它的元素 $g=(0, \eta, \zeta)$, 其第一个分量为零(g 在 $O\xi_2\xi_3$ 平面上). R^3 的每一元素 $\tilde{x}=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 以一种且只一种方式写成如下形式:

$$\tilde{x}=\tilde{f}+\tilde{g},$$

这里 $\tilde{f}\in F$ 且 $\tilde{g}\in G$; 实际上有 $\tilde{f}=(\xi_1, 0, 0)$; $\tilde{g}=(0, \xi_2, \xi_3)$.

为了补足 $\tilde{e}_1$ 以形成 R^3 的一组基, 可以不取 $\tilde{e}_2$ 和 $\tilde{e}_3$, 而取其他的两个元素. 例如, 取 $\tilde{u}=(1, -1, 0)$ 和 $\tilde{v}=(1, 0, -1)$, 于是, 对于不论怎样的 $\tilde{x}=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\in R^3$,

$$\tilde{x}=(\xi_1+\xi_2+\xi_3)\tilde{e}_1-\xi_2\tilde{u}-\xi_3\tilde{v}=\tilde{f}'+\tilde{g}',$$

这里

$$\tilde{f}'=(\xi_1+\xi_2+\xi_3)\tilde{e}_1\in F,\quad 且\quad \tilde{g}'=-\xi_2\tilde{u}-\xi_3\tilde{v}\in G',$$

G' 是由元素 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 生成的矢量空间(即平面 $\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$).

两个空间 G 和 G', 每一个皆是 F 的补空间. 它们随之而与 E/F 同构. E/F 的一个元素是 $\tilde{x}$ 的类, 由此如果 $\tilde{x}'-\tilde{x}\in F$, 则 $\tilde{x}'\sim\tilde{x}$; 于是一个类就是平行于 $O\xi_1$ 的直线; 这些直线形成同构于 G 和 G' 的矢量空间, 对这些直线的运算可以从其与平面 G 或 G' 的交出发而来定义.

第三部分　线 性 映 射

§1　定　　义

定义 1——设有同一域K上的两个不同或相同的矢量空间E和F. 将具有下列性质的从E到F内的映射f叫做从E到F内的线性映射:

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2),\ 对每一\ x_1\in E, x_2\in E,$$
$$f(\lambda x)=\lambda f(x),\ 对每一\ x\in E, \lambda\in K,$$

也说f是从E到F内的同态.

当$F=E$时, 从E到E内的线性映射也叫做E内的线性算子, 或E内的线性自同态.

定义 2——如果$F=K$, 映射的值是K内的一个数, 则说f是一个线性形式.

这样, 一矢量在一平面上的正投影就是从R^3到R^2内的线性映射. 此外, 设x是一在闭区间$[\alpha, \beta]$内连续的实函数或复函数; 使x对应于积分$\int_\alpha^\beta x(t)dt$的映射就是一个在闭区间内连续的函数矢量空间上的线性形式.

性质——如果取$x_2=o, x_1=x$, 则应有

$$f(x+o)=f(x)+f(o),\ 于是\ f(o)=o.$$

现在必须指出, $f(o)$的括号里的o是E的中性元素; 于是一般地, 它与等式右端的元素o是不同的, 后者是F的中性元素.

我们来考虑集$f(E)$, 也就是F的元素的集, 它们是经过f的E的至少一个元素x的象.

设 y_1 和 y_2 是 $f(E)$ 的两个元素；于是存在 $x_1 \in E$ 和 $x_2 \in E$，使 $f(x_1)=y_1$ 和 $f(x_2)=y_2$.

我们有

$y_1+y_2=f(x_1)+f(x_2)=f(x_1+x_2)$，于是 $y_1+y_2 \in f(E)$.

此外 $\lambda y_1=\lambda f(x_1)=f(\lambda x_1)$，从而 $\lambda y_1 \in f(E)$. 于是，

$f(E)$ 是一矢量空间，即 F 的子矢量空间，又映射 f 是一个从 E 到 $f(E)$ 上的映射.（它是满射的，不一定是双射的）.

例——设 $x=(\xi_1, \xi_2)$ 是 R^2 的一个元素，使它对应于 R^3 的一个元素 $y=(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$，对应关系用下式表示

$$\eta_i=\xi_1+\xi_2,\quad i=1, 2, 3.$$

这是从 R^2 到 R^3 内的线性映射；现在 R^2 的象不是 R^3，而是唯一的 R^3 的"对角线"，即其三个坐标均相等的 R^3 的元素；这个对角线是一维矢量空间.

如果元素 $x_1, \cdots, x_n$ 是在 E 中线性相关的，则存在 K 的不全为零的 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，使

$$\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n=o;$$

从而有

$$f(\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n)=\lambda_1 f(x_1)+\cdots+\lambda_n f(x_n)=o.$$

于是 $f(E)$ 的元素 $f(x_1)$, …, $f(x_n)$ 也是线性相关的. 其逆一般地不成立.

于是 $f(E)$ 的维数至多等于 E 的维数（包括 E 的维数是无限的情形，约定任何一个有限的维数都小于无限的维数）.

§2　双射映射，核

考虑 E 的集 $f^{-1}(o)$，即使 $f(x)=o$ 的元素 $x(\in E)$ 的集，这里 o 表示 F 中加法的中性元素.

集 $f^{-1}(o)$ 叫做线性映射 f 的核．常用 $\mathrm{Ker}f$ 来表示核．

核是 E 的子矢量空间．

实际上，如果 $x_1\in f^{-1}(o)$ 和 $x_2\in f^{-1}(o)$，则有 $f(x_1)=f(x_2)=o$；从而 $f(x_1+x_2)=o$，于是 $x_1+x_2\in f^{-1}(o)$；此外，如果 $\lambda\in K$，则有 $f(\lambda x_1)=o$，于是 $\lambda x_1\in f^{-1}(o)$．

定理——如果 E 是有限维的，要使从 E 到 $F=f(E)$ 上的线性映射是双射的，其必要且充分条件是：f 的核退化为唯一的元素 $o\in E$；逆映射 f^{-1} 也是从 F 到 E 上的线性映射．

实际上，如果 $f(x)=f(x')$，则 $f(x-x')=o$，于是，$x-x'\in f^{-1}(o)$．从而，如果 $f^{-1}(o)$ 退化为唯一元素 o，则有 $x=x'$．

设 y_1 与 y_2 是 $F=f(x)$ 的两个元素，且 $x_1\in f^{-1}(y_1)$ 与 $x_2\in f^{-1}(y_2)$．可见，如果 $f^{-1}(o)=o$，则 x_1 和 x_2 是唯一的．然而，在每一种情况有

$$y_1+y_2=f(x_1)+f(x_2)=f(x_1+x_2),$$

于是 $x_1+x_2\in f^{-1}(y_1+y_2)$，且

$$\lambda y_1=\lambda f(x_1)=f(\lambda x_1)，于是\ \lambda x_1\in f^{-1}(\lambda y_1).$$

如果 $f^{-1}(o)=o$，还可见 f^{-1} 是从 F 到 E 上的线性映射；f 与 f^{-1} 建立了 E 与 F 间的一个同构．

如果 $f^{-1}(o)\neq o$，上述证明说明了：如果 F' 是 F 的一个子矢量空间，E 中的集 $E'=f^{-1}(F')$ 是 E 的一个子矢量空间．

§3 线性映射的秩

有限的 n 维矢量空间 E 的情形——设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 E 的一组基，f 是从 E 到 F 内的线性映射．每个 $x\in E$ 是如下形式的

$$x=\xi_1e_1+\cdots+\xi_ne_n，于是\ f(x)=\xi_1f(e_1)+\cdots+\xi_nf(e_n).$$

这样，矢量空间 $f(E)$ 就是由矢量 $f(e_1), \cdots, f(e_n)$ 生成的；每

一元素 $x\in E$ 的象是已知的，也就是说，如果已知 F 的元素 $f(e_1)$，$\cdots, f(e_n)$，则线性映射 f 是已知的.

反过来说，设有 n 个给定的 F 的元素 $c_1, \cdots, c_n$，又设对于 $x=\xi_1 e_1+\cdots+\xi_n e_n$ 有 F 的元素 $y=\xi_1 c_1+\cdots+\xi_n c_n$ 与之对应. 立即可看出这就定义了一个从 E 到 F 内的线性映射. 从一个有限维矢量空间到另一空间内的线性映射就是这样的形式的.

线性映射的秩——矢量空间 $f(E)$ 的维数（有限或无限）叫做线性映射 f 的秩. 如果 E 是有限的 n 维的，则可见秩 r 不能超过 n，于是 r 是有限的且 $r\leqslant n$.

设 G 是商空间 $E/f^{-1}(o)$，则于 G 与 $f(E)$ 间有一一对应关系.

实际上，如果

$$y=f(x)=f(x')\in f(E)\text{，则有 } x-x'\in f^{-1}(o)$$

于是，x 与 x' 属于同一个等价类，而这等价类是 G 的一个元素.

相反地，如果 x 和 x' 属于 G 的同一个等价类，则由于等价定义有：$x-x'\in f^{-1}(o)$，于是

$$f(x-x')=o \text{ 且 } f(x)=f(x');$$

这样，经过 f，x 和 x' 给出同一个元素 $y\in f(E)$.

这种一一对应是一线性映射，于是为一同构，因为如果

$$y_1=f(x_1),\quad y_2=f(x_2)$$

则一方面有

$$y_1+y_2=f(x_1+x_2)$$

于是 y_1+y_2 对应于 x_1+x_2 的等价类；另一方面有

$$\lambda y_1=f(\lambda x_1).$$

于是 λy_1 对应于等价类 λx_1.

从而 $r=\dim f(E)=\dim G=\dim E-\dim f^{-1}(o)$，于是 $r=n-\dim f^{-1}(o)$. 由此：

要使 f 是从 E 到 F 上的一个映射，其必要与充分条件是：

$\dim f^{-1}(o)=0$, 即 $r=n$, 或 $\dim f(E)=\dim E=n$.

可是，如果 $e_1, \cdots, e_n$ 是 E 的一组基. 则可知 $f(E)$ 是由 $f(e_1), \cdots, f(e_n)$ 生成的；从而 r 是 $f(e_1), \cdots, f(e_n)$ 中线性无关矢量的最大个数. 特别地, 要使 f 是 n 秩的. 其必要且充分条件是 $f(E)=F$, 即必须且只须 $f(e_1), \cdots, f(e_n)$ 是线性无关的.

§4 复合映射

复合映射——设 E, F, G 是在同一域 K 上的矢量空间，又设 f 是从矢量空间 E 到矢量空间 F 内的线性映射，g 是从 F 到矢量空间 G 内的线性映射；对应于每一 $x\in E$ 的是 $y=f(x)\in F$；设 $z=g(y)\in G$. 使元素 $z\in G$ 对应于 $x\in E$ 的对应关系是复合映射 $g\circ f$ (见第二章，§ 4).

$g\circ f$ 是一线性映射；实际上有

$$(g\circ f)(\lambda x)=g(f(\lambda x))=g(\lambda f(x))=\lambda g(f(x))=\lambda(g\circ f)(x)$$

且

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x+y)&=g(f(x+y))=g(f(x)+f(y))\\&=g(f(x))+g(f(y))=(g\circ f)(x)+(g\circ f)(y);\end{aligned}$$

这个映射叫做从 f 经过 g 的线性映射.

例——设 E 是元素 $\tilde{x}=(\xi_1, \xi_2)$ 的矢量空间 R^2. 设 f 是从 E 到 E 内的线性映射, 由 $\tilde{y}=(\eta_1, \eta_2)$ 来定义, 其中

$$\eta_1=\alpha\xi_1+\beta\xi_2; \quad \eta_2=\gamma\xi_1+\delta\xi_2.$$

再设 g 是从 E 到 E 内的线性映射，由 $\tilde{z}=(\zeta_1, \zeta_2)=g(\tilde{y})$ 来定义，其中

$$\zeta_1=\alpha'\eta_1+\beta'\eta_2; \quad \zeta_2=\gamma'\eta_1+\delta'\eta_2.$$

于是从 E 到 E 内的复合映射 $g\circ f$ 由 $\tilde{z}=g(f(\tilde{x}))$ 来定义，由

以上得

$$\xi_1=\alpha''\xi_1+\beta''\xi_2;\quad \xi_2=\gamma''\xi_1+\delta''\xi_2,$$

共中

$$\alpha''=\alpha\alpha'+\gamma\beta';\quad \beta''=\beta\alpha'+\delta\beta';$$
$$\gamma''=\alpha\gamma'+\gamma\delta';\quad \delta''=\beta\gamma'+\delta\delta'.$$

可以指出，从 E 到 E 内的映射 $f\circ g$ 是由 $\tilde{z}=f(g(\tilde{x}))$ 来定义的，且有

$$\xi_1=\alpha'''\xi_1+\beta'''\xi_2;\quad \xi_2=\gamma'''\xi_1+\delta'''\xi_2,$$

共中

$$\alpha'''=\alpha\alpha'+\beta\gamma';\quad \beta'''=\alpha\beta'+\beta\delta';$$
$$\gamma'''=\gamma\alpha'+\delta\gamma';\quad \gamma'''=\gamma\beta'-\delta\delta'.$$

用这个例子可说明，一般地 $g\circ f\neq f\circ g$.

第四部分　对偶，双对偶，秩

§1 对　偶

设 E 是域 K 上的矢量空间. 我们回忆一下，E 上的线性形式是从 E 到 K 内的线性映射 φ, K 被看作为在其自身上的线性空间.

这样，对于每一 $x\in E$, 经过 φ 有一元素 $\varphi(x)\in K$ 与之对应，且对 E 的每一 x, x_1, x_2 和 K 的每一 λ 有

$$\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)\quad 且\quad \varphi(x_1+x_2)=\varphi(x_1)+\varphi(x_2).$$

在 E 上线性形式的集能构成 E 上的线性空间.

这里回忆一下，在第六章，第三部分，§1 中曾证明，定义在一个集上，在一矢量空间中取值的一切函数所成的集，可以被组织成

为一矢量空间，如果只考虑E上的一切线性形式时，那里的证明是依然有效的，只要事先证实：如果$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$是$E$上的线性形式，$\lambda$是$K$的一个数，则$\varphi_1+\varphi_2$与$\lambda\varphi$是线性形式(根据第六章的约定)．证实这一点并不困难．

于是采取下面的定义

定义——E上的线性形式的集是一矢量空间，叫做E的对偶，并记作E^*．

中性形式ζ就是：对每一$x\in E$，有K的元素0与之对应，也就是对不论怎样的$x\in E$，有$\zeta(x)=0$．

有限维空间的情形——设E是有限的n维的，又设$e_1, \cdots, e_n$是E的一组基．每一$x\in E$写作$x=\xi_1e_1+\cdots+\xi_ne_n$．数$\xi_h\in K$依赖于$x\in E$；考虑从$E$到$K$内由$\xi_h=\varphi_h(x)$定义的映射$\varphi_h$．这个函数$\varphi_h$是$E$上的线性形式．

实际上有

$$\varphi_h(\lambda x)=\lambda\xi_h=\lambda\varphi_h(x)$$

且因为

$$x_1=\xi_{11}e_1+\cdots+\xi_{n1}e_n, \quad x_2=\xi_{12}e_1+\cdots+\xi_{n2}e_n,$$

所以有

$$\varphi_h(x_1+x_2)=\xi_{h1}+\xi_{h2}=\varphi_h(x_1)+\varphi_h(x_2).$$

这n个线性形式$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$按定义是对偶$E^*$的元素．它们是线性无关的．因为，如果有$\lambda_1\varphi_1-\cdots+\lambda_n\varphi_n=\zeta$，其中$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是不全为零的，则对每一$x\in E$有

$$\lambda_1\varphi_1(x)+\cdots\lambda_n\varphi_n(x)=\zeta(x)=0.$$

取$x=e_h$；于是$\varphi_i(e_h)=\delta_{ih}$，这就是说，如果$i\neq h$，则$\varphi_i(e_h)=0$；如果$i=h$，则$\varphi_i(e_h)=1$．

得到$\lambda_1\varphi_1(e_h)+\cdots+\lambda_n\varphi_n(e_h)=0$，即对不论怎样的$h$：$\lambda_h\varphi_h(e_h)=\lambda_h=0$；因为$h$可取值$1, \cdots, n$，这个结果与$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$不全为零的

事实矛盾.

另一方面，设 φ 是 E 上某个线性形式. 于是，如果 $x=\xi_1e_1+\cdots+\xi_ne_n$，则有 $\varphi(x)=\xi_1\varphi(e_1)+\cdots+\xi_n\varphi(e_n)$；然而 $\xi_k=\varphi_k(x)$，且如果我们设 $\mu_k=\varphi(e_k)$，则有 $\varphi(x)=\mu_1\varphi_1(x)+\cdots+\mu_n\varphi_n(x)$，即 $\varphi=\mu_1\varphi_1+\cdots+\mu_n\varphi_n$，这里 $\mu_k\in K$，且 $\varphi_k\in E^*$.

定理——每一线性形式 $\varphi\in E^*$ 是无关的线性形式 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 的线性组合，其系数在 K 中；$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 构成 E^* 的一组基；E^* 是有限维的且有与 E 相同的维数 n.

§2 双 对 偶

设 E 是一 K 上的矢量空间，E^* 是它的对偶，因为 E^* 也是矢量空间，可以考虑 E^* 的对偶 $(E^*)^*$，并记作 E^{**}，叫做 E 的双对偶(还可定义 E 的三对偶 E^{***}，等等).

我们来证明，E^{**} 包含一同构于 E 的子矢量空间；并且如果 E 是有限维的，则 E 和 E^{**} 是同构的.

固定 $x\in E$，考虑从 E^* 到 K 内的映射 μ_x，它使得每一 $\varphi\in E^*$，有对应的 $\varphi(x)$，即线性形式 φ 在点 $x\in E$ 取的值：

$$u_x:\ \varphi\to\varphi(x)\quad 或\quad u_x(\varphi)=\varphi(x),x\in E.$$

也可验证，u_x 是 E^* 上的线性形式. 于是，对于每一 $x\in E$，有 $u_x\in E^{**}$ 与之对应. u_x 的集形成一矢量空间 $\tilde{E}$，它含于 E^{**} 中(从 E 到 E^{**} 内的映射 $x\to u_x$ 常叫做从 E 到其双对偶内的正则映射).

可验证，$x\to u_x$ 是从 E 到 E^{**} 内(或 $\tilde{E}$ 上)的线性映射，因为，如果 $x\in E$，$y\in E$，$\lambda\in K$，则有 $u_x+u_y=u_{x+y}$ 且 $u_{\lambda x}=\lambda u_x$；用 u_x 的定义来证明就够了.

E 和 $\tilde{E}$ 间的对应 $x\to u_x$ 是一同构. 用别的术语来说：E^{**} 包含一同构于 E 的子矢量空间. 用形象的语言来说，一般地 E^{**} 比

E 大，乃至 E 可以等同 E^{**} 的一子矢量空间.

于是 E 是有限的 n 维的，则有下列结果

定理——如果 E 是在 K 上有限的 n 维矢量空间，从 E 到其双对偶 E^{**} 内的正则映射是一同构.

实际上 E^* 是 n 维的，于是 E^{**} 也是 n 维的，然而 $\widetilde{E}$（上面的记法）是同构于 E 的. 于是是 n 维的，从而 $\widetilde{E}=E^{**}$.

§3　一个线性映射的秩

设在同一个域 K 上有一有限的 m 维矢量空间 E 和一有限的 n 维矢量空间 F. 设 f 是一从 E 到 F 内的 r 秩的线性映射.

设 $b_1, \cdots, b_n$ 是 F 的一组基，对每一 $x\in E$ 则有

$$f(x)=\eta_1 b_1+\cdots+\eta_n b_n.$$

映射 φ_i 是由 $\eta_i=\varphi_i(x)$ 来定义的，它是 E 上的线性形式(§1). 可是，如果 $x-x'\in f^{-1}(0)$，则有 $f(x)=f(x')$，反之亦然；于是，对于属于同一个相对于 $f^{-1}(0)$（第二部分，§4）的等价类 $\bar{x}$ 的每一元素 x，φ_i 取同一个值.

可以令 $\eta_i=\varphi_i(\bar{x})$，且 φ_i 是商矢量空间 $G=E/f^{-1}(0)$ 上的线性形式；用别的词儿来说，φ_i 属于 G 的对偶 G^*. 我们看到（第三部分，§3），$r=\dim G$；根据前面的定理 $\dim G=\dim G^*$；于是：

在 E^* 中由线性形式 φ_i 生成的子矢量空间，其维数 $\leqslant r$.

设 $e_1, \cdots, e_m$ 是 E 的一组基. 因为 $f(E)$ 是 r 维的，在元素 $f(e_1), \cdots, f(e_m)$ 中可以选择 r 个线性无关的元素；假设它们是 $g_1=f(e_1), \cdots, g_r=f(e_r)$. 于是用 F 的元素 $g_{r+1}, \cdots, g_n$ 来补充 $g_1,\cdots, g_r$，使 $g_1, \cdots, g_n$ 成为 F 的一组基（不完备基的定理）.

对每一 $x\in E$，则有

$$f(x)=\psi_1(x)g_1+\cdots+\psi_r(x)g_r;$$

函数 ψ_h 也是 E 上的线性形式.

它们是无关的，因为，如果有

$$\lambda_1\psi_1+\cdots+\lambda_r\psi_r=\zeta,$$

这里 ζ 是零形式，即对不论怎样的 $x\in E$, $\zeta(x)=0$, 则对 $x=e_h$ 有

$$\lambda_1\psi_1(e_h)+\cdots+\lambda_r\psi_r(e_h)=0.$$

然而，如果 $h=1,\cdots,r$, 则 $f(e_h)=g_h$, 于是，对于 $k=1,\cdots,r$, $\psi_k(e_h)=\delta_{hk}$, 从而对于 $h=1,\cdots,r$, 有 $\lambda_h=0$, 这就证明了 ψ_h 是线性无关的.

设对于 $i=1,\cdots,n$, 有 $b_i=\gamma_{i1}g_1+\cdots+\gamma_{in}g_n$.

因此

$$\begin{aligned}f(x)&=\varphi_1(x)b_1+\cdots+\varphi_n(x)b_n\\&=[\gamma_{11}\varphi_1(x)+\cdots+\gamma_{n1}\varphi_n(x)]g_1\\&\quad+\cdots+[\gamma_{1n}\varphi_1(x)+\cdots+\gamma_{nn}\varphi_n(x)]g_n.\end{aligned}$$

可是因为 $g_1,\cdots,g_n$ 是一组基，且

$$f(x)=\psi_1(x)g_1+\cdots+\psi_r(x)g_r,$$

唯一性表明：

$$\psi_h(x)=\gamma_{1h}\varphi_1(x)+\cdots+\gamma_{nh}\varphi_n(x),\quad h=1,\cdots,r,$$

这就是说

$$\psi_h=\gamma_{1h}\varphi_1+\cdots+\gamma_{nh}\varphi_n.$$

这样，$\psi_1,\cdots,\psi_r$ 就属于 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 生成的空间；因为它们是线性无关的，这个空间的维数 $\geqslant r$. 于是

定理——从 E 到 F 内的线性映射 f 的秩 r 也是在 E 的对偶 E^* 内由线性形式 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 生成的矢量空间的维数.

如果有 E 的某一组基 $e_1',\cdots,e_m'$. 对每一 $x\in E$ 有

$$x=\xi_1e_1'+\cdots+\xi_me_m'\quad 且\quad f(x)=\xi_1f(e_1')+\cdots+\xi_mf(e_m').$$

然而 $f(e_j')=\beta_{1j}b_1+\cdots+\beta_{nj}b_n$, $j=1,\cdots,m$; 于是有

$$f(x)=\eta_1b_1+\cdots+\eta_nb_n,$$

这里，对 $i=1, \cdots, n$

$$\eta_i=\beta_{i1}\xi_1+\cdots+\beta_{im}\xi_m.$$

这些 η_i 与 φ_i 同构，于是矢量空间 K^m 的元素 $(\beta_{i1}, \cdots, \beta_{im})$ 生成一 r 维子矢量空间。

第五部分　双线性形式和多线性形式

§1　双线性形式的定义

设在同一域 K 上有两个相异的或非异的矢量空间 E 和 F.

定义——从积 $E\times F$ 到域 K 内的映射，当其在 E 和 F 内的限制是线性形式时，叫做 $E\times F$ 上的双线性形式。

这个定义表明，如果 $x\in E$ 和 $y\in F$, 则映射 $(x, y)\to\varphi(x, y)\in K$, 当下列各式

$$\varphi(\lambda x, y)=\lambda\varphi(x, y), \varphi(x, \mu y)=\mu(x, y),$$

$$\varphi(x_1+x_2, y)=\varphi(x_1, y)+\varphi(x_2, y),$$

$$\varphi(x, y_1+y_2)=\varphi(x, y_1)+\varphi(x, y_2)$$

对不论怎样的 $x, x_1, x_2\in E$, $y, y_1, y_2\in F$, 和 $\lambda, \mu\in K$ 成立时，就是双线性形式.

例——1. 设 ψ 是 E 上的线性形式，χ 是 F 上的线性形式；设 (x, y) 是积矢量空间 $E\times F$ 的一个元素，因而 $x\in E, y\in F$；由 $(x, y)\to\psi(x)\chi(y)$ 来定义的映射 φ，是一双线性形式；实际上：

$$\varphi(\lambda x, y)=\psi(\lambda x)\chi(y)=\lambda\psi(x)\chi(y)=\lambda\varphi(x, y),$$

且

$$\varphi(x_1+x_2, y)=\psi(x_1+x_2)\cdot\chi(y)=[\psi(x_1)+\psi(x_2)]\chi(y)$$

$$=\psi(x_1)\chi(y)+\psi(x_2)\chi(y)=\varphi(x_1,y)+\varphi(x_2,y),$$

可以证明关于F的同样的性质.

一般地, 如果 $\psi_1,\cdots,\psi_k$ 是E上的线性形式, $\chi_1,\cdots,\chi_k$ 是F上的线性形式, 则使$(x,y)\in E\times F$ 对应于K的元素

$$\varphi(x,y)=\psi_1(x)\chi_1(y)+\cdots+\psi_k(x)\chi_k(y)$$

的映射 φ 是双线性形式.

2. 设E是闭区间$[\alpha,\ \beta]$上实连续函数x的矢量空间. 又设$x\in E$ 和 $y\in E$; 下列映射 I

$$(x,y)\to I(x,y)=\int_\alpha^\beta x(t)y(t)dt$$

是 $E\times E$ 上的双线性形式.

定义——一个 $E\times E$ 上的双线性形式 φ, 如果对不论怎样的 $x\in E$, $y\in E$, 有 $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$, 就说它是对称的.

构造对称双线性形式是容易的: 实际上, 设 $\psi(x,y)$是 $E\times E$ 上的任意双线性形式, 由$(x,y)\to\psi(x,\ y)+\psi(y,\ x)$定义的映射 φ 是一对称双线性形式.

例——R^3 的两个任意矢量的数量积是 $R^3\times R^3$ 上的对称双线性形式.

定义——一个 $E\times E$ 上的双线性形式, 如果对不论怎样的 $x\in E$, $y\in E$, 有

$$\varphi(x,y)=-\varphi(y,x)$$

就叫做交变的.

对于这一形式, 有 $\varphi(x,x)=-\varphi(x,x)=0$.

这样, 当 $\psi(x,y)$是 $E\times E$ 上任意的双线性形式时, 使 $E\times E$ 的(x,y)对应于K的 $\varphi(x,y)=\psi(x,y)-\psi(y,x)$就显然是交变的双线性形式.

例——R^2 的两个任意矢量的矢量积是 $R^2\times R^2$ 上的交变双线

性形式，这里 $K=R$.

如果域 K 是复数域 C，有时要考虑 C 上 (x,y) 的这样的映射 ψ，使得 $\psi(x,y)$ 是 E 上的线性形式，且 $\overline{\psi(x,y)}$ 是 F 上的线性形式，$\overline{\psi(x,y)}$ 表示 $\psi(x,y)$ 的共轭复数．一个这样的映射就叫做 $E\times F$ 上的一个半线性形式．于是还有 $\psi(\lambda x, y)=\lambda\psi(x, y)$，然而 $\psi(x,\lambda y)=\bar{\lambda}\psi(x,y)$.

例——设 x,y 是实变量 t 的、在闭区间上连续的函数，它有复函数值．由下式定义的映射 I

$$(x,y)\to I(x,y)=\int_{\alpha}^{\beta}x(t)\overline{y(t)}dt$$

是一个半线性形式（第六卷，第一章）．

§2　双线性形式的性质

我们限于 E 和 F 是有限维的情况．设 E 是有限 n 维的，而 F 是有限 m 维的．设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 E 的一组基，$b_1,\cdots,b_m$ 是 F 的一组基．于是每一 $x\in E, y\in E$ 都有如下的表示式：

$$x=\xi_1e_1+\cdots+\xi_ne_n,\quad y=\eta_1b_1+\cdots+\eta_mb_m.$$

设 φ 是 $E\times F$ 上的双线性形式，则有

$$\varphi(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\xi_i\eta_j\varphi(e_i,b_j)\right).$$

$\varphi(x,y)$ 在 K 内的值，一当已知 K 中的 nm 个数 $\varphi(e_i,b_j)$ 时，就是已知的，于是 φ 用数 $\varphi(e_i,b_j)$ 来确定的．

相反地，因为 ξ_i 是 E 上的线性形式，η_j 是 F 上的线性形式，映射 $(x,y)\to\xi_i\eta_j$ 是 $E\times F$ 上的双线性形式，一般地，使 $E\times F$ 上的数对 (x,y) 对应于 K 中的元素

$$\varphi(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\xi_i\eta_j\right)$$

的映射φ是$E\times F$上的双线性形式，这里α_{ij}是K中任意固定的数.

于是$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\xi_i\eta_j\right)$定义了$E\times F$上更一般的双线性形式，此时，$E$和$F$的基是固定的.

$E\times E$上的对称双线性形式，以对于任意的$i\neq j$有$\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$这个条件作为特征.

$E\times E$上的交变双线性形式，以在$i\neq j$时$\alpha_{ij}=-\alpha_{ji}$和$\alpha_{ii}=0$这个条件为特征.

如果K是复数域，每一C^n上的一个半线性形式写成

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_i\bar{\eta}_j\right).$$

对偶基——设有域K上的矢量空间E；又φ是E上的线性形式，即对偶E^*的一个元素(第四部分，§1). 设x是E的一个元素，则线性形式$\varphi(x)$对每个x的值明显是一个$E^*\times E$上的双线性形式，叫做正则双线性形式.

设E是有限n维的，又设$e_1,\cdots,e_n$是E的一组基. 使得对于每个$x\in E$有分量ξ_h(§1)与之对应的，n个线性形式φ_h, $h=1,\cdots,n$，形成E^*的一组基. 我们说，这个基对应着E的基$e_1,\cdots,e_n$，常记作$e^1,\cdots,e^n$，由此，如果

$$x=\xi_1e_1+\cdots+\xi_ne_n,$$

则有$e^h(x)=\psi(e^h,x)=\xi_h$. 于是有

$$x=\psi(e^1,x)e_1+\cdots+\psi(e^n,x)e_n.$$

此外，如果φ是一线性形式(E^*的元素)，则有

$\varphi=\varphi_1e^1+\cdots+\varphi_ne^n$ 其中$\varphi(e_h)=\psi(\varphi,e_h)=\varphi_h$；于是

$$\varphi=\psi(\varphi, e_1)e^1+\cdots+\psi(\varphi, e_n)e^n.$$

通过与此公式类比，并为了遵守序标的位置，常常写 x^h 以代替 $\psi(e^h, x)=\xi_h$，由此而有

$$x=x^1e_1+\cdots+x^ne_n.$$

§3 多线性形式

双线性形式的概念容易以下述方式推广.

定义——设在同一个域K上有相异的或非异的矢量空间 $E_1, \cdots, E_n$，从 $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ 的积矢量空间到域K内的映射，当其在空间 E_i 上的限制，$i=1, \cdots, n$，是线性形式时，叫做 $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ 上的 n 次多线性形式。

设 $x_i\in E_i$；映射 φ：$(x_1, \cdots, x_n)\to\varphi(x_1, \cdots, x_n)\in K$，是一多线性形式，是指，对任意 i：

$$\varphi(x_1, \cdots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)=\lambda\varphi(x_1, \cdots, x_n)$$

$$\begin{aligned}&\varphi(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i'+x_i'', x_{i+1}, \cdots, x_n)\\=&\varphi(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \cdots, x_n)\\&+\varphi(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i'', x_{i+1}, \cdots, x_n).\end{aligned}$$

如果 $E_1=E_2=\cdots E_n=E$，一个 E^n 上的多线性形式叫做*对称的*，如果对于整数 $1, \cdots, n$ 的任意排列 $m_1, \cdots, m_n$，有 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)=\varphi(x_{m_1}, \cdots, x_{m_n})$.

定义——当交换多线性形式中两个元素的次序时，多线性形式变号，则此 E^n 上的多线性形式叫做*交变的*. 于是对于使 $x_i=x_j$，$i\neq j$，的 E^n 的每一点$(x_1, \cdots, x_n)$，交变多线性形式是零.

相反地，要使线性形式是交变的，上述后一性质是充分条件. 实际上，对不论怎样的 $x_1, x_2, \cdots, x_n\in E$，有

$$\varphi(x_1+x_2, x_1+x_2, x_3, \cdots, x_n)=0,$$

因为前两个元素相等. 将上式按定义化开得

$$\varphi(x_1,x_1,x_3,\cdots,x_n)+\varphi(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$$
$$+\varphi(x_2,x_1,x_3,\cdots,x_n)+\varphi(x_2,x_2,x_3,\cdots,x_n)=0$$

首项及末项都等于 0，因为 φ 中的两个元素相等；剩下：

$$\varphi(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)=-\varphi(x_2,x_1,x_3,\cdots,x_n).$$

对于任意的一对序标元素，都可重复上述证明.

我们不打算对多线性形式的理论作更多的讨论；我们将只在行列式论中看一个重要的例子.

第六部分　线性方程式

§1　一般理论

含 m 个未知量的 n 个方程的线性方程组，是指如下的一组方程

$$(1)\qquad \begin{cases}\alpha_{11}\xi_1+\cdots+\alpha_{1m}\xi_m=\beta_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_{n1}\xi_1+\cdots+\alpha_{nm}\xi_m=\beta_n,\end{cases}$$

量 α_{ij}, β_k 是域 K 中给定的数. 要求确定的是 K 的数 $\xi_1,\cdots,\xi_m$，叫做*未知量*，将它们代入联立方程组(1)，可使方程同时满足. 满足(1)的每一集合 $(\xi_1,\cdots,\xi_m)$ 叫做方程组的一个*解*.

这样的方程组(1)可以用矢量空间的语言来简单地解释. 实际上，设有矢量空间 K^n，并令

$$a_1=(\alpha_{11},\cdots,\alpha_{n1}),\cdots,a_m=(\alpha_{1m},\cdots,\alpha_{nm}),b=(\beta_1,\cdots,\beta_n);$$

这些量是 K^n 的元素. 于是方程组有与下列 K^n 的元素间的等式

相同的解:

(2) $$\xi_1 a_1+\cdots+\xi_m a_m=b,$$

也就是说,b 应能表示成 $a_1,\cdots,a_m$ 的线性组合. 解方程组的问题,就等于求所有使 b 能写成(2)的形式的集合$(\xi_1,\cdots,\xi_m)$.

1° **克拉美(Cramer)方程组**——首先设 $m=n$, 且 K^n 的元素 $a_1,\cdots,a_n$ 是线性无关的;在此情况下,(1)叫做*克拉美方程组*.

元素 $a_1,\cdots,a_n$ 构成 K^n 的一组基,因为它们是线性无关的;于是每个元素 b 以一种方式且只一种方式表示成形式(2).于是有下述结果

克拉美方程组总有一个且只一个解.

2° **一般情形**——很清楚,要使(2)至少有一个解,b 应该属于由 $a_1,\cdots,a_m$ 生成的 K^n 的子矢量空间 H.

假设元素 $a_1,\cdots,a_m$ 中线性无关元素的最大个数是 $r\leqslant m$,且设$a_1,\cdots,a_r$ 就是这些线性无关的元素,未知量$\xi_1,\cdots,\xi_r$ 叫做*主未知量*,未知量 $\xi_{r+1},\cdots,\xi_m$, 如果它们确实存在的话,叫做*非主未知量*.元素 $a_1,\cdots,a_r$ 构成子矢量空间H的一组基.

a) 如果 b 与 $a_1,\cdots,a_r$ 线性无关,则 $b\notin H$,方程组(1)无解.

b) 如果 b 与 $a_1,\cdots,a_r$ 线性相关,则 $b\in H$,同样与 $a_{r+1},\cdots,a_m$ 也线性相关,从而每一如下形式的元素

$$b'=b-\xi_{r+1}a_{r+1}-\cdots-\xi_m a_m$$

属于 H, 而不论给予非主未知量的值是什么, 于是关系(2)可写成:

$$\xi_1 a_1+\cdots+\xi_r a_r=b'.$$

对于一给定的 b',有一个且只一个解$(\xi_1,\cdots,\xi_r)$, 因为 $a_1,\cdots,a_r$ 是H的一组基.

小结一下:

a) 如果 b 与 $a_1,\cdots,a_r$ 是线性无关的,则方程组没有解.

b）如果 b 与 $a_1, \cdots, a_r$ 是线性相关的，则方程组总至少有一个解；如果它有非主未知量；则它有无穷多个解；可以给非主未知量以任意的值.

§2 齐次方程

齐次方程——如果在方程组(1)中 $\beta_1=\cdots=\beta_n=0$，也就是说在(2)中(上面§1)$b=0$，则方程组(1)就是齐次的.

在这种情况下，$b=o$ 总是与 $a_1, \cdots, a_r$ 线性相关的. 于是总至少有一个解；一个解是明显的，它就是 $\xi_1=\cdots=\xi_m=0$. 在齐次方程组的情况下，我们来求，有无 $\xi_1=\cdots=\xi_m=0$ 以外的解.

根据上面的结果，我们看到，要齐次方程组有非零解，其必要与充分条件是：$a_1, \cdots, a_m$ 线性相关；在这种情况下，实际上存在非主未知量，可给它们以非零的值. 特别地，如果 $m>n$，即如果未知量的个数超过方程的个数时，就是这样的.

定义——在一般的方程组(1)中，以 0 代替 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 所得的方程组，叫做对应于方程组(1)的齐次方程组. 于是(2)就由 $\xi_1a_1+\cdots+\xi_ma_m=o$ 来代替.

我们来考虑 $m=n$ 的情况.

互斥定理——如果(1)的对应齐次方程没有 $\xi_1=\cdots=\xi_n=0$ 以外的解，于是 $a_1, \cdots, a_n$ 是线性无关的，则(1)是克拉美方程组，且对任意的 $\beta_1, \cdots, \beta_n$，有一个且只一个解.

如果(1)的对应齐次方程组有 $\xi_1=\cdots=\xi_n=0$ 以外的解，于是 $a_1, \cdots, a_n$ 是线性相关的，且存在 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 这样的值，它们使方程组(1)没有任何解.

互斥定理常被用来确定，一个已给方程组是否是克拉美方程组.

§3 逐次消元法

线性方程的实际解法．逐次消元法——首先设：$\alpha_{n1}=\cdots=\alpha_{nm}=0$，即每一 $a_1, \cdots, a_m$ 的最后一个分量是零．如果 $\beta_n\neq 0$，则方程组是不可能的；如果 $\beta_n=0$，则方程组与一含 m 个未知量 $n-1$ 个方程的方程组有同解，这时就说此两方程组等价．

现在假设，$\alpha_{n1}, \cdots, \alpha_{nm}$ 中至少有一个数不是零，例如设 $\alpha_{nm}\neq 0$．我们重新来看前面的情形．实际上，对 $k=1, \cdots, m-1$，我们作元素 $a'_k=a_k-\frac{\alpha_{nk}}{\alpha_{nm}}a_m$，和 $b'=b-\frac{\beta_n}{\alpha_{nm}}a_m$.

很清楚，元素 $a'_1, \cdots, a'_{m-1}, b'$ 的最后一个分量是零．现在考虑方程组 $\xi'_1a'_1+\cdots+\xi'_{m-1}a'_{m-1}=b'$；它等价于一含 $m-1$ 个未知量 $n-1$ 个方程的方程组．假设已知它可解，并设 $(\xi'_1, \cdots, \xi'_{m-1})$ 为它的一个解；则有

$$\xi'_1\left(a_1-\frac{\alpha_{n1}}{\alpha_{nm}}a_m\right)+\cdots+\xi'_{m-1}\left(a_{m-1}-\frac{\alpha_{n,m-1}}{\alpha_{nm}}a_m\right)=b-\frac{\beta_n}{\alpha_{nm}}a_m,$$

即

$$\xi'_1a_1+\cdots+\xi'_{m-1}a_{m-1}+\xi'_ma_m=b,$$

其中

$$\xi'_m=\frac{1}{\alpha_{nm}}(\beta_n-\alpha_{n1}\xi'_1-\cdots-\alpha_{n,m-1}\xi'_{m-1}).$$

从而，$\xi_1=\xi'_1, \cdots, \xi_m=\xi'_m$ 是原始方程组的解．

反过来说，如果 $(\xi_1, \cdots, \xi_m)$ 是 $\xi_1a_1+\cdots+\xi_ma_m=b$ 的一个解，则根据上面最后的方程有

$$\xi_m=\frac{1}{\alpha_{nm}}(\beta_n-\alpha_{n1}\xi_1-\cdots-\alpha_{n,m-1}\xi_{m-1}),$$

且 $(\xi_1, \cdots, \xi_{m-1})$ 是方程组 $\xi_1a'_1+\cdots+\xi_{m-1}a'_{m-1}=b'$ 的解．

同样，含 m 个未知量 n 个方程的方程组 $\xi_1 a_1+\cdots+\xi_m a_m=b$ 等价于含 $m-1$ 个未知量 $n-1$ 个方程的方程组 $\xi_1 a_1'+\cdots+\xi_{m-1}a_{m-1}'=b'$ 和关系

$$\xi_m=\frac{1}{\alpha_{nm}}(\beta_n-\alpha_{n1}\xi_1-\cdots-\alpha_{n,m-1}\xi_{m-1})$$

的集.

用流行的语言来说，这方法的实质就是：如果 $\alpha_{nm}\neq 0$，则将 ξ_m 作为 $\xi_1,\cdots,\xi_{m-1}$ 的函数而从(1)的最后一个方程消去；对最后一个以上的各方程也这样做；这样得到一含 $m-1$ 个未知量 $n-1$ 方程的方程组. 这个方法叫做*逐次消元法*；如果系数是数字，这个方法是唯一实用的方法.

一步一步地做，如果到了一步做不下去了，方程组就无解，如果只有一个方程了，它就是直接可解的.

从实用观点来看，这个方法要求用 $\frac{-\alpha_{nk}}{\alpha_{nm}}$ 去乘最后的方程，并逐次加到第 k 个方程上去，$k=1,\cdots,n-1$；还保持关系

$$\xi_m=\frac{1}{\alpha_{nm}}(\beta_n-\alpha_{n1}\xi_1-\cdots-\alpha_{n,m-1}\xi_{m-1})$$

例——设方程组

$$\begin{aligned}
2\xi_1-\xi_2\qquad\quad +\xi_4&=4\\
4\xi_1-2\xi_2+\xi_3+\xi_4&=7\\
6\xi_1-3\xi_2+2\xi_3-\xi_4&=8\\
8\xi_1-4\xi_2+3\xi_3-\xi_4&=11,
\end{aligned}$$

这里 $\alpha_{44}=-1\neq 0$. 我们逐步用 1, 1 和 -1 乘最后的方程，并将它加到前三个方程上去，于是得到等价的方程组：

$$\begin{aligned}
10\xi_1-5\xi_2+3\xi_3&=15\\
12\xi_1-6\xi_2+4\xi_3&=18\\
-2\xi_1+\ \xi_2-\ \xi_3&=-3,
\end{aligned}$$

这里 $\xi_4=8\xi_1-4\xi_2+3\xi_3-11$.

在这含三个未知量三个方程的方程组中，$\alpha'_{33}=-1\neq 0$；用3和4先后乘最后的方程，并将它加到第一和第二个方程上去，又得到等价的方程组

$$4\xi_1-2\xi_2=6$$
$$4\xi_1-2\xi_2=6,$$

这里 $\xi_3=-2\xi_1+\xi_2+3$.

在这含二个未知量二个方程的方程组里，$\alpha'_{22}=-2\neq 0$；用 -1 乘第二个方程，并将它加到第一方程上去，则得等价的方程组

$$0\cdot\xi_1=0,$$

这里 $\xi_2=2\xi_1-3$.

这里 ξ_1 应是任意的，于是有

$\xi_2=2\xi_1-3$

$\xi_3=-2\xi_1+\xi_2+3=-2\xi_1+(2\xi_1-3)+3=0$

$\xi_4=8\xi_1-4\xi_2+3\xi_3-11=8\xi_1-4(2\xi_1-3)+3\cdot 0-11=1.$

于是 ξ_1 是一非主未知量，此方程组有无穷多的解

$$(\xi_1, 2\xi_1-3, 0, 1).$$

第七部分　仿射空间，凸集

§1　仿射线性簇，仿射变换

在这一节里，我们将几何里直线和平面的通常概念加以推广.

矢量空间里的平移——设有域 K 上的矢量空间 E；设 a 是 E

的固定元素．我们也用E的点这个词来代替元素这个词．

从E到E内的映射，使得对每个$x\in E$经$y=x+a$而有一点$y\in E$与它对应的，叫做平移；而a叫做平移矢量．

这个映射是从E到其自身上的一一对应映射，然而，如果$a\neq o$，它就不是线性映射；实际上λx的象不是λy；x_1+x_2的象不是y_1+y_2．

平移构成一可交换群——实际上，设b是另一个平移矢量．这个平移使得$y=x+a$有元素$z=y+b$与它对应；于是有$z=x+a+b$，这样经过平移$a+b$就从x到z了．中性平移对应于平移矢量o，这是E的恒等变换；平移矢量$-a$是矢量a的反平移．

仿射线性簇——设V是E的子矢量空间，a是E的一个固定元素．从V的点经平移a演化出来的E的点的集叫做仿射线性簇，并用V_a来表示．

这样，V_a的每个点x是$x=v+a$这种形式的，这里$v\in V$．

还要指出，除非$a\in V$，V_a不是矢量空间，相反地，如果x和x'是V_a的点，则有$x=v+a$，$x'=v'+a$，这里$v\in V$，$v'\in V$，于是$x-x'=v-v'\in V$．

于是两个点x，$x'\in V_a$属于商矢量空间E/V的同一个元素(第七章，第二部分，§4)，即按照等价关系$x\sim x'\Longleftrightarrow x-x'\in V$的等价类的集．换句话说：$V_a\in E/V$．

设V_a是一仿射线性簇，又设a'是V_a的某一点，每一个点$x\in V_a$可以写作$x=a+v$，这里$v\in V$．然而，它也能写作$x=a'+(a-a')+v$；可是a和a'属于V_a，于是，$a-a'\in V$，且有$x=a'+v'$，这里$v'=(a-a')+v\in V$．

这样，每个$x\in V_a$属于$V_{a'}$．同样可证明，每个$x'\in V_{a'}$属于V_a．于是

$$V_a=V_{a'}.$$

从而可以知道，如果在取某一元素 $a\in W$ 时，所有 $x-a$ 的集 $(x\in W)$ 是 E 的子矢量空间 V，矢量空间的一部分 W 是一仿射线性簇。

写成 $W=a+V$.

将矢量空间 V 的维数(它是有限的或无限的)叫做仿射线性簇 V_a 的维数。

如果 W 是仿射线性簇，且 $W\subset V_a$，则集 W 叫做 V_a 的子仿射线性簇。

平行的仿射簇——从同一子矢量空间 V 演化出来的两个仿射线性簇 V_a 和 V_b 叫做平行的。

根据 $b-a\in V$ 或 $b-a\notin V$，应该有 $V_a=V_b$ 或 $V_a\cap V_b=\varnothing$，特别 V_a 平行于 $V=V_0$。

平行的概念是一等价关系，因为 1° V_a 平行于 V_a，2° 关系是对称的，3° 它是传递的，因为如果 V_a 平行于 V_b，又如果 V_b 平行于 V_c，V_a 与 V_c 是从同一子矢量空间演化出来的，于是平行。

对应的等价类叫做簇的方向。

作为方向的代表，总有仿射簇 V_0，也就是子矢量空间 V，它以作为含有点 o 的仿射簇为特征。

要指出，两个平行的簇有相同的维数。

广义的平行——还说两个仿射线性簇是(广义)平行的，如果其中的一个平行于另一个的子线性簇。

仿射线性簇的交——设 W_i 是在同一矢量空间 E 里的仿射线性簇，设 $W=\bigcap_i W_i$ 是所有 W_i 的交。如果 $W\neq\varnothing$，则所有 W_i 至少有一公共点 a；因此可以写作 $W_i=a+V_i$，这里 V_i 是 E 的子矢量空间。再设 $V=\bigcap_i V_i$；V 是 E 的子矢量空间(第七章，第一部

分，§ 2)，且每个元素 $w\in W$ 的形式是 $w=a+v$，这里 $v\in V=\bigcap_i V_i$.

反过来，每个点 $w=a+v(v\in V)$ 属于 $W=\bigcap_i W_i$. 这样 $W=\bigcap_i W_i$ 是一仿射线性簇.

含有 E 的某一个部分 P 的每个仿射线性簇的交是包含 P 的最小仿射线性簇；这个簇叫做由 P 生成的仿射线性簇.

于是来考虑由 E 的两个不同的点 a_0 和 a_1 所生成的仿射线性簇. 包含 0 的平行的簇 V 包含点 $a_1-a_0\neq o$；从而它的维数 $\geqslant 1$. 这个由点 $a_0+\lambda(a_1-a_0)$（λ 是 K 的任意一个数）构成的仿射线性簇 D 就是 1 维的；它包含点 a_0 和 a_1；于是，它是由点 a_0 和 a_1 生成的、最小的仿射线性簇.

这个仿射线性簇 D 叫做通过 a_0 和 a_1 的直线.

这样经过 E 的两个不同的点通过一条且只一条直线.

一般地，考虑 E 的 $k+1$ 个不同的或相同的点 $a_0, a_1, \cdots, a_k$. 设 W 是由这些点生成的仿射线性簇，且 V 平行于从 o 引出的 W. 这个矢量空间 V 包含 k 个点 $a_1-a_0, \cdots, a_k-a_0$；于是它包含由 k 个元素 $a_1-a_0, \cdots, a_k-a_0$ 生成的矢量空间 V'.

于是仿射线性簇 a_0+V' 包含 $k+1$ 个点 $a_0, a_1, \cdots, a_k$，且很清楚，它是包含这些点的最小仿射线性簇. 于是，$V=V'$ 且 $W=a_0+V'$. W 的维数 r 等于 V' 的维数，从而 $r\leqslant k$.

定义——说 $k+1$ 个点是仿射无关的，如果由这些点生成的仿射线性簇是 k 维的.

$k+1$ 个点 $a_0, a_1, \cdots, a_k$ 仿射无关的必要且充分条件是 k 个向量 $a_1-a_0, \cdots, a_k-a_0$ 在 E 中是线性无关的.

仿射变换——设 f 是从 E 到 E 内的线性映射，b 是 E 的一个元素，通过公式 $y=g(x)=f(x)+b$ 使每一 $x\in E$ 对应于 $y=g(x)\in E$

的从 E 到 E 内的映射叫做仿射变换.

如果 $b\neq o$, g 就不是线性映射, 如果 $b=o$, $g=f$ 是一线性映射, 且每一个从 E 到 E 内的线性映射是一仿射映射, 它的矢量 b 是零. 这样, 一个射影是一仿射变换.

例——1. 一个平移是一仿射变换. 这时线性映射 f 是恒等映射 $f(x)=x$.

2. 用 $y-c=\lambda(x-c)$ 定义的变换, 其中 c 是 E 的一固定点, 而 λ 是 K 的一固定数, 这个变换叫做以 c 为中心, 以 λ 为比数的位似变换. 这是一仿射变换, 有 $f(x)=\lambda x$ 和 $b=c(1-\lambda)$.

性质——一个仿射变换将一个仿射线性簇变换成一仿射线性簇. 实际上, 设 W 是一仿射线性簇; 则有 $W=V+a$, 这里 V 是一矢量空间.

有 $$W'=g(W)=f(W)+b$$

和 $$f(W)=f(V+a)=f(V)+f(a),$$

于是

$$W'=g(W)=f(V)+b',$$

这里 $b'=f(a)+b$.

然而 $f(V)$ 是由一矢量空间的线性映射作成的变换, 于是它就是矢量空间 V', 且 $\dim V'\leqslant\dim V$. 所以 $W'=V'+b'$, 而 W' 是一仿射线性簇, 它的维数不能超过 W 的维数.

一个仿射变换的逆变换, 它是一函数或不是函数, 也将一仿射线性簇变换为一仿射线性簇.

实际上, 如果 $y=g(x)=f(x)+b$, 则有 $x\in f^{-1}(y-b)$. 可是, 如果 $y\in W=V+a$, 则有 $x\in f^{-1}(V+a-b)$.

设 x_0 是 $f^{-1}(V+a-b)$ 的一固定元素, 于是 $f(x)\in V+a-b$, $f(x_0)\in V+a-b$, 因而 $f(x-x_0)\in V$ 且 $x-x_0\in f^{-1}(V)=W'$; 则 W' 是一子矢量空间(第十章, 第三部分, §2). 从而 $x\in W'+x_0$, 于是 x 属

于一仿射线性簇.

§2 加权中心

定义——设E是域K上的矢量空间; $a_1, \cdots, a_k$是E的点. 将每个a_i, $i=1, \cdots, k$, 对应一个数$\mu_i \in K$, 叫做a_i的质量. 适合

$$\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_k a_k = (\mu_1 + \cdots + \mu_k) m \tag{1}$$

的每个点m, 叫做分别具有质量$\mu_1, \cdots, \mu_k$的点$a_1, \cdots, a_k$的加权中心. 上式也可写作

$$\mu_1(a_1 - m) + \cdots + \mu_k(a_k - m) = o.$$

1° 如果$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k \neq 0$, 则关系式(1)给出

$$m = \frac{\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_k a_k}{\mu_1 + \cdots + \mu_k},$$

于是m存在且是唯一的.

2° 如果$\mu_1 + \cdots + \mu_k = 0$, 又如果$\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_k a_k \neq o$, 则$E$的任何一点都不是加权中心.

如果$\mu_1 + \cdots + \mu_k = 0$, 又如果$\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_k a_k = o$, E的每个点都是加权中心. 在这种情况下, 设$\mu_k \neq 0$, 于是

$$-\mu_k a_k = \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_{k-1} a_{k-1},$$

然而, 因为$\mu_1 + \cdots + \mu_k = 0$, 就有$-\mu_k = \mu_1 + \cdots + \mu_{k-1}$, 于是

$$\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_{k-1} a_{k-1} = (\mu_1 + \cdots \mu_{k-1}) a_k,$$

这里

$$\mu_1 + \cdots + \mu_{k-1} \neq 0.$$

于是具有非零质量的每个点是其他点的加权中心. 逆命题可以按反方向来证明.

定理 1——为了求加权中心, 可以将某几点用具有所考虑各点的质量之和的部分加权中心来代替.

实际上，设m是具有质量$\mu_1,\cdots,\mu_k$的$a_1,\cdots,a_k$的加权中心.于是有

(1) $$\mu_1 a_1+\cdots+\mu_k a_k=(\mu_1+\cdots+\mu_k)m.$$

又设m'是具有质量$\mu_1,\cdots,\mu_h$的$a_1,\cdots,a_h$的加权中心（如果存在的话）；又设$\mu'=\mu_1+\cdots+\mu_h$. 于是有

$$\mu_1 a_1+\cdots+\mu_h a_h=(\mu_1+\cdots+\mu_h)m'=\mu' m';$$

由此，并将它代入(1)得

$$\mu' m'+\mu_{h+1}a_{h+1}+\cdots+\mu_k a_k=(\mu'+\mu_{h+1}+\cdots+\mu_k)m,$$

这就证明了定理.

定理 2——每一个仿射变换把具有质量$\mu_1,\cdots,\mu_k$的k个点的加权中心变换为具有相同质量的、变换后的那些点的加权中心.

实际上，如果$g(x)=f(x)+b$是仿射变换，这里f是线性映射. 有

$$a_i'=g(a_i)=f(a_i)+b,\quad i=1,\cdots,k.$$

于是

$$\begin{aligned}&\mu_1 a_1'+\cdots+\mu_k a_k'\\&=\mu_1 f(a_1)+\cdots+\mu_k f(a_k)+(\mu_1+\cdots+\mu_k)b\\&=f(\mu_1 a_1+\cdots+\mu_k a_k)+(\mu_1+\cdots+\mu_k)b,\\&=f((\mu_1+\cdots+\mu_k)m)+(\mu_1+\cdots+\mu_k)b\\&=(\mu_1+\cdots+\mu_k)[f(m)+b]=(\mu_1+\cdots+\mu_k)m',\end{aligned}$$

这里$m'=f(m)+b$. 于是m'是$a_1,\cdots,a_k$的加权中心的的象同时也是变换成的点$a_1',\cdots,a_k'$的加权中心.

§3 凸 集

线段——具有质量$\mu_1\geqslant 0$, $\mu_2\geqslant 0$, $\mu_1+\mu_2\neq 0$的点a_1和a_2的

加权中心 $x=\frac{\mu_1 a_1+\mu_2 a_2}{\mu_1+\mu_2}$ 的集，叫做域 K 上矢量空间 E 的闭线段。

点 a_1, a_2 叫做线段的端点。

由 a_1 和 a_2 生成的仿射线性空间，也就是由 a_1 和 a_2 定义的直线 D，叫做线段的支柱集。

线段的每一点属于支柱集；实际上线段也是 E 的这样的 x 的集，它使得 $x=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2$，这里

$$\alpha_1\geqslant 0, \alpha_2\geqslant 0, \alpha_1+\alpha_2=1,$$

即
$$x=(1-\alpha_2)a_1+\alpha_2 a_2,$$

或
$$x=a_1+\alpha_2(a_2-a_1)\quad 0\leqslant\alpha_2<1.$$

这个表达式证明，这线段属于直线 D，即由 a_1 和 a_2 生成的仿射线性簇。

相反地，有 D 的点，它们不是线段的部分。如果 $a_2=a_1$，线段退化为一点 a_1。

根据 § 1，仿射变换将加权中心变换为加权中心；于是，仿射变换将线段变成线段。

E 的点的集 G 叫做凸集，如果对不论怎样的 $a_1\in G$ 和 $a_2\in G$，由 a_1 和 a_2 定义的闭线段的每一点属于 G。

例——一个仿射线性簇是凸集。

性质 1°——E 的一个仿射变换 g 将一闭线段变成闭线段；将 E 的每一凸集变成 E 的凸集。

2°——反过来说，设 $G'=g^{-1}(G)$ 是凸集 G 的逆象，g 是 E 的一仿射变换。如果 $a'_1\in G'$ 且 $a'_2\in G$，则有

$$a_1=g(a'_1)\in G\quad 且\quad a_2=g(a'_2)\in G.$$

如果 x' 是由 a'_1 和 a'_2 定义的闭线段的一点，则 $x=g(x')$ 属于由 a_1 和 a_2 定义的闭线段，于是也属于 G，因为 G 是凸集。

从而 $x'\in G'$，G' 是 G 的逆象；而 G'，作为凸集 G 的逆象，是凸的。

3° ——如果 G_1 和 G_2 是 E 的两个凸集，则 $G_1\cap G_2$ 是凸集. 因为如果 $a_1\in G_1\cap G_2$ 且 $a_2\in G_1\cap G_2$，则由 a_1 和 a_2 所定义的线段的每一点属于 G_1 和 G_2，于是属于 $G_1\cap G_2$。

这个定理对并不成立. 可是，它对于若干个凸集的交是成立的。

4° ——设 E_1 和 E_2 是在同一域 K 上的两个矢量空间，又 E 是积矢量空间 $E_1\times E_2$. 设 G_1 是 E_1 的非空集，G_2 是 E_2 的非空集. 要使积集 $G=G_1\times G_2$ 是 E 的凸集，其必要且充分条件是：G_1 在 E_1 中为凸集和 G_2 在 E_2 中为凸集。

实际上，设 f_1 是从 E 到 E_1 内的线性投影的映射，f_2 是从 E 到 E_2 内的投影，于是有 $G_1=f_1(G)$，$G_2=f_2(G)$. 因为 f_1 和 f_2 是线性映射，如果 G 是凸集，则结果 G_1 和 G_2 是凸集. 反过来说，如果 G_1 和 G_2 是凸集，$G'=f_1^{-1}(G_1)$ 和 $G_2'=f_2^{-1}(G_2)$ 是 E 的凸集. 于是 $G=G_1'\cap G_2'$ 也是凸集。

对于若干个矢量空间的积，这定理仍然成立。

凸包络——设 m 是具有质量 $\mu_1\geqslant 0,\cdots,\ \mu_k\geqslant 0$ 的点 $a_1,\ \cdots,\ a_k$ 的加权中心，而 $\mu_1+\cdots+\mu_k\neq 0$。

包含点 $a_1,a_2,\cdots,\ a_k$ 的凸集 G，对不论怎样的质量 $\mu_h\geqslant 0$，只要 $\sum\limits_{h=1}^{k}\mu_h>0$，也包含这些点的加权中心。

实际上，这个命题对 $k=2$ 为真，因为它与凸集的定义是等同的. 假设它对 $k-1$ 个点为真；于是具有质量 $\mu_1,\cdots,\mu_{k-1}$ 的点 $a_1,\cdots,a_{k-1}$ 的加权中心属于 G. 可是 m 是具有质量 $\mu_1+\cdots+\mu_{k-1}\geqslant 0$ 的点 m' 和具有质量 $\mu_k\geqslant 0$ 的点 a_k 的加权中心，于是就有 $m\in G$。

设P是E的某个集；包含P的最小凸集叫做P的凸包络.

凸包络是具有正质量各点的每一加权中心的集G.

一方面包含P的每一凸集也包含G，即P的点的加权中心的集；另一方面G是一凸集，因为如果m和m'是G的两个点，则它就是加权中心：一个是P的点$a_1, \cdots, a_k$的加权中心，另一个是P的点$a'_1, \cdots, a'_k$的加权中心．于是由m和m'定义的闭线段的每个点是具有正质量的m和m'的加权中心，所以又是P的具有正质量的点$a_1, \cdots, a_k, a'_1, \cdots, a'_k$的加权中心，从而属于$G$.

第十一章　矩　　阵

在第十章第三部分中我们已研究了从一个矢量空间到另一矢量空间内的线性映射．现在，就这两矢量空间的每一个都是有限维的且都具有一组基的情形，来作更详尽的研究．

第一部分　一般性质

设 m 维的矢量空间 E 有一组基 $e_1, \cdots, e_m$，又设 n 维矢量空间 F 有一组基 $b_1, \cdots, b_n$．我们假设 E 和 F 是在同一域 K 上的矢量空间．

设 f 是从 E 到 F 内的一线性映射（或同态）；它把 $x \in E$ 变成 $y = f(x) \in F$．利用基可以写出

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_m e_m,$$

$$y = \eta_1 b_1 + \cdots + \eta_n b_n,$$

和

$$y = f(x) = \xi_1 f(e_1) + \cdots + \xi_m f(e_m).$$

因为 $f(e_j) \in F$，利用基 $b_1, \cdots, b_n$ 而对每一 $j = 1, \cdots, m$ 有

$$f(e_j) = \alpha_{1j} b_1 + \cdots + \alpha_{nj} b_n,$$

从而有

$$y = \sum_{j=1}^{m} \xi_j f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \xi_j \right) b_i,$$

写成明显的形式即

$$
(1) \qquad \begin{cases} \eta_1=\alpha_{11}\xi_1+\cdots+\alpha_{1m}\xi_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_n=\alpha_{n1}\xi_1+\cdots+\alpha_{nm}\xi_m, \end{cases}
$$

立即可得，这个映射是从E到F内的一个线性映射．如果能列出α_{ij}的矩形表，也就是在明确E和F的基的条件下写作

$$
A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}=(\alpha_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}},
$$

这个映射就是确定的了．

这样的表叫做矩阵；α_{ij}叫做矩阵A的元素或系数．有相同的第一个下标的元素的集叫做行；有相同的第二个下标的元素的集叫做列．这样α_{ij}就是第i行第j列的元素．

也说A是有m列n行的矩阵．

当E的基(e_j)，F的基(b_i)是固定的时，公式(1)表示从E到F内的线性映射．说A表示f，或对应f，而公式(1)是分别相对于E和F的基(e_j)与(b_i)的f的方程组．

注——如果已给定E,F,f，对应于f的矩阵随E和F中选定的基而变化．我们将在第三部分研究这种变化．

例——1° 如果f是从E到E内的线性映射(自同态)，它使每个x对应于$y=\lambda x$，这里λ是一K中给定的数．如果在E中取一个基，用这个基来表示x和y，则有

$$
\eta_1=\lambda\xi_1,\quad \eta_2=\lambda\xi_2,\quad \cdots,\quad \eta_m=\lambda\xi_m,
$$

而与f对应的是m行m列的矩阵：

$$
A=\begin{pmatrix} \lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \alpha_{ii}=\lambda;\ \alpha_{ij}=0,\text{如果 } i\neq j.
$$

2° 如果 $e_1, \cdots, e_m$ 是 E 的一组基，又如果对于 $x\in E$ 可以写出

$$x=\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+\cdots+\xi_m e_m,$$

映射由下式定义：

$$x\to y=\xi_1 e_1.$$

反过来说，如果考虑由公式(1)定义的映射 $x\in E\to y\in F$，这里 α_{ij} 是 K 的一固定的数，ξ_j 是 x 的相对于 E 的一组基的分量，η_i 是 y 相对于同一组基的分量，则映射 $x\to y=\xi_1 e_1$ 是线性的(这是投影)．对应的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_{11}=1;\ \alpha_{ij}=0, \text{如果 } i+j\geqslant 3$$

从 K^m 到 K^n 的矩阵和同态——当空间为 K^p，K是一个域时，作为一般的规律，取标准基作为 K^p 的基．于是从 K^m 到 K^n 的线性映射由公式(1)来定义，即用矩阵 A 定义；这里可以说是 f 的矩阵．此外，如果反过来给定了一个矩阵 A，则映射 f 恰由公式(1)所确定．因而在从 K^m 到 K^n 的线性映射集一方和 m 列 n 行矩阵集另一方之间有一个双射，这 m 列 n 行矩阵的系数 α_{ij} 是域 K 的元素．

这样，当令 $\tilde{x}=(\xi_1, \cdots, \xi_m)$，$\tilde{y}=(\eta_1, \cdots, \eta_n)$，$\tilde{x}\in K^m$，$\tilde{y}\in K^n$ 时，公式(1)也是可以写出来的(或者是已给(α_{ij})，或者是首先考虑 E，F，f)，且公式(1)定义了一从 K^m 到 K^n 的线性映射 $\tilde{x}\to\tilde{y}$，并写作 $\tilde{y}=A(\tilde{x})$．

设 $\tilde{a}_j=(\alpha_{1j}, \cdots, \alpha_{nj})\in K^n$，$\tilde{a}_j$ 叫做列矢量，且(1)也可写作

$$\tilde{y}=\xi_1\tilde{a}_1+\cdots+\xi_m\tilde{a}_m.$$

K^m 的矢量$(\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{im})$叫做行矢量($i=1, \cdots, n$)．

正则矩阵——矩阵 A 叫做正则的，如果从 E 到 F 的线性映射

f 是从 E 到 F 上的映射(f 确定了 F). 在相反的场合就叫 A 是奇异的.

要使矩阵 A 是正则的, 其必要且充分条件是元素 $\tilde{y}$ 遍历整个空间 K^n, 换句话说: 由 $\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_m$ 生成的矢量空间应该是 K^n, 所以是 n 维的. 从而

要使矩阵 A 是正则的, 其必要且充分条件是: 列矢量 $\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_m$ 系的秩等于 n(第十章, 第三部分, §3).

在这种情况下, 必须 $m \geqslant n$.

矩阵的秩——列矢量系的秩叫做矩阵的秩.

K^m 的矢量 $(\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{im})$ 叫做行矢量. 矩阵的秩 r 也是 K^m 的行矢量的秩.

实际上, 已经看到(第十章, 第三部分, §4), 线性映射的秩也是由线性形式 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 生成的矢量空间的维数, 这线性形式是由(1)的右端定义的.

第二部分 在矩阵上的代数运算

§1 矩阵的矢量空间

设在同一域 K 上有同样多的 n 行 m 列矩阵:

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nm}\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \cdots & \beta_{1m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nm}\end{pmatrix}.$$

相等关系——如果对任意的 $i, j, \alpha_{ij}=\beta_{ij}$, 则说 $A=B$. 要使 $A=B$, 其必要且充分条件是: 对每一个 $\tilde{x}\in K^m$,

$$A(\tilde{x})=B(\tilde{x}).$$

实际上，如果 $A=B$，这性质是明显的．相反地，如果 $A(\tilde{x})=B(\tilde{x})$ 对每个 $\tilde{x}\in K^m$ 成立，则取 $\tilde{x}=\tilde{e}_j=(\delta_{1j},\ \cdots,\ \delta_{mj})$，即 K^m 的标准基的矢量．于是有

$\alpha_{i1}\delta_{1j}+\cdots+\alpha_{im}\delta_{mj}=\beta_{i1}\delta_{1j}+\cdots+\beta_{im}\delta_{mj}$，对 $i=1,\ \cdots,\ n$，即 $\alpha_{ij}=\beta_{ij}$．可是这对 $j=1,\cdots,m$ 是成立的，所以 $A=B$．

矩阵加法——对 K^m 的每个 $\tilde{x}$，有 K^n 的元素

$$A(\tilde{x})+B(\tilde{x})$$

与之对应的映射是线性映射；于是它能用 K 上的矩阵 C 来表示，它叫做矩阵 A 和 B 的和，记作 $C=A+B$．

取元素 $\tilde{e}_j$ 作为 $\tilde{x}$，可以看到 C 的元素 γ_{ij} 是

$$\gamma_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}\qquad i=1,\cdots,n;\quad j=1,\cdots,m.$$

我们要强调一件事：除非 A 和 B 有相同的行数和相同的列数，否则加法是无定义的．

这种加法是可结合的和可交换的，因为它最终就是 K 中的加法 $\alpha_{ij}+\beta_{ij}$；它有一个中性元素即零矩阵，记作 0，它的每个元素是零，且元素为 α_{ij} 的每个矩阵有一相反元素，记作 $-A$，它的元素是 $-\alpha_{ij}$．对不论怎样的 $\tilde{x}\in K^m$，有 $0(\tilde{x})=\tilde{o}\in K^n$，且 $(-A)(\tilde{x})=-(A(\tilde{x}))$．

回忆一下（第三章，第三部分）：中性元素是唯一的，同样 A 的对称元素 $-A$ 也是唯一的．

乘以 K 中之数的乘法——设 $\lambda\in K$；对每个 $\tilde{x}\in K^m$ 有 K^n 的元素 $\lambda A(\tilde{x})$ 与之对应的映射是一线性映射；于是它可用矩阵来表示，记作 λA，叫作 A 乘以 λ 的积．

在取 $\tilde{e}_j$ 作为 $\tilde{x}$ 时可见，如果 A 的元素是 α_{ij}，则 λA 的元素是 $\lambda\alpha_{ij}$．

这样 A 和 λA 就有同样数目的行数和同样数目的列数．对不

论怎样的 n 行 m 列矩阵 A 和 B，及任意的 $\lambda\in K$，$\mu\in K$，有

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B,\qquad 因为\ \lambda(\alpha_{ij}+\beta_{ij})=\lambda\alpha_{ij}+\lambda\beta_{ij};$$

$$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu B,\qquad 因为(\lambda+\mu)\alpha_{ij}=\lambda\alpha_{ij}+\mu\alpha_{ij};$$

$$\lambda(\mu A)=\lambda\mu A,\qquad 因为\quad \lambda(\mu\alpha_{ij})=(\lambda\mu)\alpha_{ij};$$

$$\varepsilon A=A,\qquad 因为\quad \varepsilon\alpha_{ij}=\alpha_{ij},\quad \varepsilon=1\in K.$$

我们断定：

n 行 m 列矩阵的集构成 K 上的矢量空间。

用 I_{ij} 表示这样的 n 行 m 列矩阵，它的元素除 i 行 j 列的元素为 $\varepsilon=1$ 外，都是零，即

$$I_{ij}=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & & \downarrow & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i, \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

因而每一 n 行 m 列矩阵 $A=(\alpha_{ij})$ 具有如下形式：

$$A=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}I_{ij}\right),$$

且这种表示是唯一的．于是矩阵 I_{ij} 构成 m 列 n 行矩阵矢量空间的一组基，从而这个矢量空间是有限维的，维数等于积 mn.

§2 两个矩阵的积

两个矩阵的积——一个 m 列 p 行的矩阵 A 表示一个从 K^m 到 K^p 内的线性映射．设有一从 K^t 到 K^n 内的线性映射，用 p 列 n 行的矩阵 B 来表示它．

如果 $\vec{x}\in K^m$，则有 $\vec{y}=A(\vec{x})\in K^p$.

于是设 $\tilde{z}=B(\tilde{y})\in K^n$；从 K^m 到 K^n 内的映射 $\tilde{x}\to\tilde{z}$ 是组合线性映射 $B\circ A$；所以可用 m 列 n 行的矩阵 $C=(\gamma_{ij})$ 来表示它．矩阵 C 叫做用 B 左乘 A 的积，记作 $C=B\cdot A$ 或 BA．

应该指出，只有 A 的行数等于 B 的列数，$B\cdot A$ 才有定义；因而，一般地，如果 BA 有定义，AB 不一定有定义．在行数等于列数的矩阵情形，总能定义 AB 和 BA，然而它们的积一般表示不同的矩阵．

设 $\tilde{x}=(\xi_1,\cdots,\xi_m)$，$\tilde{y}=(\eta_1,\cdots,\eta_p)$，$\tilde{z}=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$．于是有

$$
\begin{array}{ll}
\eta_1=\alpha_{11}\xi_1+\cdots+\alpha_{1m}\xi_m, & \zeta_1=\beta_{11}\eta_1+\cdots+\beta_{1p}\eta_p,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\eta_p=\alpha_{p1}\xi_1+\cdots+\alpha_{pm}\xi_m, & \zeta_n=\beta_{n1}\eta_1+\cdots+\beta_{np}\eta_p;
\end{array}
$$

随之而得

$$
\begin{aligned}
\zeta_i&=\beta_{i1}(\alpha_{11}\xi_1+\cdots+\alpha_{1m}\xi_m)+\cdots+\beta_{ip}(\alpha_{p1}\xi_1+\cdots+\alpha_{pm}\xi_m)\\
&=\gamma_{i1}\xi_1+\cdots+\gamma_{im}\xi_m,
\end{aligned}
$$

其中

$$
(1)\qquad \gamma_{ij}=\beta_{i1}\alpha_{1j}+\beta_{i2}\alpha_{2j}+\cdots+\beta_{ip}\alpha_{pj}=\sum_{k=1}^{p}\beta_{ik}\alpha_{kj}.
$$

积的性质——积是一可结合的运算，因为它表示一组合映射（见第二章，§4）．

前面已见到，积一般不是可交换的．

积对于矩阵的加法是可分配的．实际上，设 A 和 A' 是某两个 m 列 p 行的矩阵，B 是 p 列 n 行矩阵；令 $C=B(A+A')$．设 $\tilde{x}$ 是 K^m 的任一元素；则有

$$
\begin{aligned}
C(\tilde{x})&=B[(A+A')(\tilde{x})]=B[A(\tilde{x})+A'(\tilde{x})]\\
&=B[A(\tilde{x})]+B[A'(\tilde{x})]=BA(\tilde{x})+BA'(\tilde{x}).
\end{aligned}
$$

对于不论怎样的 $\tilde{x}\in K^m$，这个关系是成立的，则有

$$
C=B(A+A')=BA+BA'.
$$

用类似的方式能证明，如果B和B'是某两个p列n行矩阵，A是m列p行矩阵，则

$$(B+B')A=BA+B'A.$$

这个性质也可直接从公式(1)推出来，公式(1)给出了积的矩阵的元素

注——设$\tilde{x}=(\xi_1,\cdots,\xi_m)$是$K^m$的一个元素；考虑1列$m$行的矩阵：

$$X=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_m\end{pmatrix}.$$

设$A=(\alpha_{ij})$是m列n行矩阵，积$Y=AX$是1列n行矩阵，且有

$$Y=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix},$$

其中$\eta_i=\alpha_{i1}\xi_1+\cdots+\alpha_{im}\xi_m$，其中$i=1,\cdots,n$；上面的矩阵就是对应于$K^n$的元素$\tilde{y}$的1列$n$行矩阵.

此外应有：对应关系$\tilde{x}\to X$是一同构，因为$\lambda\tilde{x}\to\lambda X$且$\tilde{x}+\tilde{x}'\to X+X'$.

第三部分　方　　阵

§1　定　　义

行数和列数相等的矩阵叫做方阵；行和列的共同个数n叫做矩阵的阶数．元素α_{ii}的集叫做主对角线.

于是这些矩阵定义了从 K^n 到其自身的线性映射. 这个从 E 到 E 内的以方阵为其象的线性映射又叫做 E 中的线性算子.

两个 n 阶矩阵的和与积总是定义和给出一 n 阶矩阵.

根据上述性质(第二部分), 都是 n 阶的在同一域 K 上的方阵的集是一个环. 一般地, 是不可交换的环.

我们来探求这个环是否单位环, 也就是, 是否存在对于乘法的**中性元素** I. 对于不论怎样的 n 阶矩阵 A, 应有 $IA=AI=A$.

设 ε_{ij} 是 I 的元素, α_{ij} 是 A 的元素; 为了表明 $IA=A$, 对于 $i=1, \cdots, n$, 任意的 α_{ij}, 应写 $\varepsilon_{i1}\alpha_{1j}+\cdots+\varepsilon_{in}\alpha_{nj}=\alpha_{ij}$.

从而, 如果 $k\neq i$, 则 $\varepsilon_{ik}=0$; 如果 $k=i$, 则 $\varepsilon_{ik}=1$, 即 $\varepsilon_{ik}=\delta_{ik}$ (克隆尼克记号), 且有

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

I 的元素, 除了两个序标相等的以外, 都等于零, 即主对角线的元素的值为 1. 因而不难证明, $AI=A$.

于是 I 是环的单位矩阵: 环是**单位环**.

对不论怎样的 $\vec{x}\in K^n$, 有 $I(\vec{x})=\vec{x}$; 反过来, 设 J 是使 $J(\vec{x})=\vec{x}$ 的矩阵, 这里 $\vec{x}\in K^n$ 是任意的, 则有 $J=I$, 因为在取 K^n 的标准基的矢量 $\vec{e}_i(i=1, \cdots, n)$ 作为 $\vec{x}$ 时, 就已看到这个了.

要指出, 如果 0 是加法的中性矩阵, 即其每个元素都是零的矩阵, 则对任意 A, 有 $0A=A0=0$. 这个环可能有零因子; 实际上, 例如, 如果 $i\neq h$, 或如果 $j\neq k$, 则可看到 $I_{ij}I_{hk}=0$ (见第二部分, §1).

如果映射 $\vec{x}\to A(\vec{x})$ 是从 K^n 到 K^n 的映射, 则方阵 A 是正则的(第一部分).

§2 可逆矩阵

我们已经看到(第一部分),要使 A 是正则的,其必要且充分条件是:$r=n$,即由矩阵 A 的列矢量 $\vec{a}_1$, …, $\vec{a}_n$ 生成的 K^n 的子矢量空间是 n 维的,或者 $a_1, \cdots, a_n$ 是线性无关的. 于是矩阵 A 的秩是 n. 这些矢量于是构成 K^n 的一组基且映射 $\vec{x} \to A(\vec{x})$ 是一一对应的;存在一个逆映射,它是从 K^n 到 K^n 上的线性映射(第十章,第三部分,§3);它由叫做逆矩阵的 n 阶方阵来表示,并记作 A^{-1};矩阵 A^{-1} 是对于乘法的对称元素. 我们回忆一下,这个元素是唯一的.

于是也说矩阵 A 是可逆的.

相反地,如果 A 是可逆矩阵,则映射 $\vec{x} \to A(\vec{x})$ 是一一对应的,于是 A 是正则的.

在正则矩阵与可逆矩阵之间有恒等关系.

$AA^{-1}(\vec{x})=\vec{x}$ 成立,于是 $AA^{-1}=I$;同时 $A^{-1}A=I$.

矩阵 I 本身是正则的;列矢量是 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$;它们是线性无关的,因为它们是 K^n 的正则基.

设 A 和 B 是两个可逆矩阵;根据结合性有

$$ABB^{-1}A^{-1}=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=(AI)A^{-1}=AA^{-1}=I.$$

因而还有 $AB(B^{-1}A^{-1})=I$,于是两个可逆矩阵的积 AB 是一可逆矩阵,且有 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

每一可逆矩阵 A 是对于矩阵乘法的正则元素(第三章,第三部分,§1). 我们来证明它.

实际上,如果 A 是可逆的,且如果 $BA=0$,则用 A^{-1} 右乘它,就有 $BAA^{-1}=0A^{-1}=0$,所以 $BI=B=0$. 从而,如果 $BA=CA$,则由于分配律,有 $(B-C)A=0$,于是 $B-C=0$,且 $B=C$.

这样就证明了，$AB=AC$ 导致 $B=C$.

反过来说，每一个对乘法的正则矩阵 A 是可逆的.

实际上，这个命题等价于下面的命题：一个不可逆的矩阵 B 对乘法不是正则的. 于是设 B 不是可逆的；由 B 的列矢量 $\tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_n$ 生成的矢量空间 W 的维数 r，即 B 的秩数 r，小于 n. 设 $\tilde{u}_1, \cdots, \tilde{u}_r$ 是此矢量空间的一组基；用 $\tilde{u}_{r+1}, \cdots, \tilde{u}_n$ 补充这组基，使 $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \cdots, \tilde{u}_n$ 形成 K^n 的一组基.

于是设 $\tilde{x}=\xi_1\tilde{u}_1+\cdots+\xi_n\tilde{u}_n$ 是 K^n 的任意元素；映射 $\tilde{x}\to(0, \cdots, 0, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n)$ 是线性映射；它是用矩阵 C 来表示的. 我说：$C\neq 0$；因为 $n>r$，如果 $\tilde{x}=\tilde{u}_n\neq\tilde{o}$，则有 $C(\tilde{u}_n)=\tilde{e}_n\neq\tilde{o}$.

另一方面，如果 $\tilde{y}\in W$，则有 $\tilde{y}=\eta_1\tilde{u}_1+\cdots+\eta_r\tilde{u}_r$，于是 $C(\tilde{y})=\tilde{o}$. 从而，对每一 $\tilde{x}\in K^n$，有 $\tilde{y}=B(\tilde{x})\in W$ 且 $C(\tilde{y})=\tilde{o}$；于是，对每一 $\tilde{x}\in K^n$，有 $CB(\tilde{x})=\tilde{o}$，即 $CB=0$，这里 $C\neq 0$；于是 B 对乘法不是正则的.

这个结果说明了对可逆矩阵使用的正则这个词儿的理由.

§3 矩阵的变换

基的更换；矩阵的变换——我们已看到，对于从 m 维矢量空间 E 到 n 维矢量空间 F 内的线性变换 f，可以有一个 m 列 n 行的矩阵 A 与之对应.

这个矩阵有赖于 E 与 F 中基的选择. 我们来研究 E 与 F 中基的更换的影响.

设 $e_1, \cdots, e_m$ 是 E 中旧的基，$e'_1, \cdots, e'_m$ 是新的基，则有

$$e'_j=\tau_{1j}e_1+\cdots+\tau_{mj}e_m, \qquad 这里\ j=1, \cdots, m.$$

于是考虑 m 阶方阵

$$T=\begin{pmatrix}\tau_{11} & \cdots & \tau_{1m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \tau_{m1} & \cdots & \tau_{mm}\end{pmatrix}.$$

因为由元素 e'_j 生成的空间是 E, 所以是 m 维的, T 的行矢量是无关的, 于是 T 是 m 秩的, 且 T 是正则的.

同时, 设 $b_1, \cdots, b_n$ 是 F 的旧的基, $b'_1, \cdots, b'_n$ 是新的基. 则有

$$b'_i=\sigma_{1i}b_1+\cdots+\sigma_{ni}b_n, \qquad 这里\ i=1, \cdots, n.$$

矩阵

$$S=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn}\end{pmatrix}$$

也是正则的.

于是, 设 x 是 E 的某个元素, 则有

$$x=\xi_1e_1+\cdots+\xi_me_m=\xi'_1e'_1+\cdots+\xi'_me'_m$$

也就是借助于 e_i 和 T 来表示 e'_j, 则有

$$\xi_j=\tau_{j1}\xi'_1+\cdots+\tau_{jm}\xi'_m, \qquad 这里\ j=1, \cdots, m.$$

设在 K^m 内 $\tilde{x}=(\xi_1, \cdots, \xi_m)$和 $\tilde{x}'=(\xi'_1, \cdots, \xi'_m)$, 则有

$$\tilde{x}=T(\tilde{x}').$$

又设 y 是 F 的一个元素, 则有

$$y=\eta_1b_1+\cdots+\eta_nb_n=\eta'_1b'_1+\cdots+\eta'_nb_n$$

令

$$\tilde{y}=(\eta_1, \cdots, \eta_n)\in K^n \qquad 且 \qquad \tilde{y}=(\eta'_1, \cdots, \eta'_n)\in K^n,$$

于是 $\tilde{y}=S(\tilde{y}')$

从 E 到 F 内的线性映射 f 将 x 变换为 $y=f(x)$; 它是由矩阵 A 以下列方式实行的: $\tilde{y}=A(\tilde{x})$; 对于新的基它是由 $\tilde{y}'=B(\tilde{x}')$ 来实行的, 这里 B 是 m 列 n 行矩阵.

可是 $\tilde{y}=S(\tilde{y}')$, 于是 $\tilde{y}'=S^{-1}(\tilde{y})$, 且有

$$\tilde{y}' = S^{-1}[A(\tilde{x})] = S^{-1}\{A[T(\tilde{x}')]\}.$$

这个等式对不论怎样的 $\tilde{x}' \in K^m$ 成立. 于是有

(1) $$B = S^{-1}AT.$$

很清楚, A 和 B 代表同一线性映射, 所以同时是正则的或非正则的.

特别, 在 $F=E$, 或 E 与 F 相对于同一新的基的情况下, A 是一方阵, 且 $S=T$ 与 A 有相同的阶. 于是有 $B=T^{-1}AT$; B 叫做由 A 经 T 的变换矩阵; 说矩阵 B 和 A 是相似的.

公式(1)还能用下述方式来解释: 设矩阵 A 代表从 K^m 到 K^n 内的一线性映射 $\tilde{y}=A(\tilde{x})$, $\tilde{x}\in K^m$, $\tilde{y}\in K^n$. 设 T 是一 m 阶可逆方阵, 它代表一从 K^m 到其自身上一一对应的线性映射 $\tilde{x}=T(\tilde{x}')$. 同时, 设 S 是 n 阶可逆方阵, 代表从 K^n 到其自身上的一一对应映射 $\tilde{x}=S(\tilde{y}')$. 使得对于每一 $\tilde{x}' \in K^m$, 有 $\tilde{y}'$ 与之对应的从 K^m 到 K^n 内的映射是一线性映射, 且它的矩阵 B 是用下式给出的:

$$\tilde{y}' = B(\tilde{x}') = S^{-1}(\tilde{y}) = S^{-1}A(\tilde{x}) = S^{-1}AT(\tilde{x}'),$$

于是 $B=S^{-1}AT$: 这就是公式(1).

现在设所说的是方阵, 且 $S=T$.

于是有 $T^{-1}IT=I$; 换句话说, 单位矩阵的变换矩阵就是这单位矩阵本身.

还有:

$$T^{-1}(A_1+A_2)T = T^{-1}A_1T + T^{-1}A_2T,$$

$$T^{-1}(\lambda A)T = \lambda(T^{-1}AT),$$

$$T^{-1}(A_1A_2)T = (T^{-1}A_1T)(T^{-1}A_2T),$$

且如果 A 是可逆的, 则有

$$T^{-1}(A^{-1})T = (T^{-1}AT)^{-1}.$$

矩阵及其经一个固定的可逆矩阵 T 的变换矩阵之间的对应关系是同构关系.

这个结果还阐明了，矩阵及其变换矩阵表示同一个线性映射.

§4 矩阵的转置

一个方阵的转置矩阵——我们说，元素为 α'_{ij} 的矩阵 ${}^tA$ 是元素为 α_{ij} 的方阵 A 的转置矩阵，如果

$$\alpha'_{ij}=\alpha_{ji}, \qquad \text{这里 } i=1, \cdots, n; j=1, \cdots, n.$$

${}^tA$ 的元素是 A 的关于主对角线对称的元素. 由一个方阵化到它的转置矩阵的运算叫做矩阵的转置.

因为矩阵的秩就是其列矢量所生成的矢量空间的维数，也是行矢量所生成的矢量空间的维数(第十章，第四部分，§2)，可看出 A 和 ${}^tA$ 有相同的秩. 特别 A 和 ${}^tA$ 同时是可逆的或非可逆的.

有

$$ {}^t(\lambda A)=\lambda {}^tA; $$
$$ {}^t(A+B)={}^tA+{}^tB; $$
$$ {}^tI=I; $$

还有

$$ {}^t(BA)={}^tA\,{}^tB. $$

实际上，设 α_{ij} 是 A 的元素，β_{ij} 是 B 的元素；BA 的元素 γ_{ij} 由下式给出：

$$\gamma_{ij}=\beta_{i1}\alpha_{1j}+\cdots+\beta_{in}\alpha_{nj}, \qquad \text{这里 } i, j=1, \cdots, n.$$

设 α'_{ij} 是 ${}^tA$ 的元素，β'_{ij} 是 ${}^tB$ 的元素；于是 ${}^t(BA)$ 的元素 γ'_{ij} 为：

$$\begin{aligned}\gamma'_{ij}=\gamma_{ji}&=\beta_{j1}\alpha_{1i}+\cdots+\beta_{jn}\alpha_{ni}\\&=\beta'_{1j}\alpha'_{i1}+\cdots+\beta'_{nj}\alpha'_{in},\end{aligned}$$

这就是积 ${}^tA\,{}^tB$ 的元素.

如果 A 是可逆的，则有 ${}^t(A^{-1})=({}^tA)^{-1}$；实际上，从 $A^{-1}A=I$,

经过转置${}^t(A^{-1}A)={}^t(A){}^t(A^{-1})={}^tI=I$就有这个结果，所以${}^t(A^{-1})$是${}^tA$的逆矩阵；逆运算与转置是可交换的。

这样，转置是n阶方阵集间的一个同构关系，然而这个同构是把左乘映射到右乘上。

最后，如果T是可逆的，则有

$$
{}^t(T^{-1}AT)={}^tT{}^tA{}^t(T^{-1});
$$

所以，A的经过T做成的变换矩阵的转置矩阵是${}^tA$经过${}^t(T^{-1})$做成的变换矩阵。

定义——一个元素为α_{ij}的方阵A叫做对称的，如果$A={}^tA$。于是有$\alpha_{ji}=\alpha_{ij}$(例：I是对称的)。

在E和E^*内对应基的更换——设$e_1,\cdots,e_n$是n维矢量空间E的一组基，设

$$
e'_j=\tau_j^1e_1+\cdots+\tau_j^ne_n,\qquad j=1,\cdots,n
$$

是另一组基，且

$$
T=\begin{pmatrix}\tau_1^1 & \cdots & \tau_1^n\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \tau_n^1 & \cdots & \tau_n^n\end{pmatrix}.
$$

T于是为可逆的，且有

$$
e_i=\sigma_i^1e'_1+\cdots+\sigma_i^ne'_n,\qquad i=1,\cdots,n,
$$

$$
T^{-1}=\begin{pmatrix}\sigma_1^1 & \cdots & \sigma_1^n\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \sigma_n^1 & \cdots & \sigma_n^n\end{pmatrix}.
$$

现在设$e^1,\cdots,e^n$是对偶E^*的一组基，它对应于基$e_1,\cdots,e_n$(第十章第五部分，§2)，又设$e^{1'},\cdots,e^{n'}$是对应于基$e'_1,\cdots,e'_n$的一组基，如果x是E的任意一元素；φ是E^*的任意一元素，则有

$$
\varphi=\psi(\varphi,e_1)e^1+\cdots+\psi(\varphi,e_n)e^n,
$$

于是

$$\psi(\varphi, x) = \varphi(x) = \psi(\varphi, e_1)\psi(e^1, x) + \cdots + \psi(\varphi, e_n)\psi(e^n, x)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \psi(\varphi, e_i)\psi(e^i, x).$$

可是

$$e_i = \sigma_i^1 e_1' + \cdots + \sigma_i^n e_n',$$

于是

$$\psi(\varphi, x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^k \psi(\varphi, e_k')\psi(e^i, x)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \psi(\varphi, e_k')\psi\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^k e^i, x\right).$$

对于 $\varphi = e^{j'}$，得到：如果 $j \neq k$，则 $\psi(e^{j'}, e_k') = 0$，如果 $j = k$，则 $\psi(e^{j'}, e_k') = 1$.

所以

$$\psi(e^{j'}, x) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^j e^i, x\right).$$

这个关系对每个 $x \in E$ 都成立，因而

$$e^{j'} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^j e^i,$$

变换矩阵就是转置矩阵${}^t(T^{-1})$．它也是可逆的，它的逆就是${}^tT$，于是有

$$e^j = \sum_{j=1}^{n} \tau_j^i e^{i'}.$$

现在我们来求 E 或 E^* 的元素的分量的变换．有

$$x = \sum_{i=1}^{n} \psi(e^i, x)e_i = \sum_{j=1}^{n} \psi(e^{j'}, x)e_j',$$

可是

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} \tau_j^i e_i,$$

由此而有

$$\psi(e^i, x) = \sum_{j=1}^{n} \tau_j^i \psi(e^{j'}, x),$$

从而也有

$$\psi(e^{j'}, x) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^j \psi(e^i, x)$$

如果像上面那样用 x^i 代替 $\psi(e^i, x)$和用 $x^{j'}$ 代替 $\psi(e^{j'}, x)$，则有

$$x^i = \sum_{j=1}^{n} \tau_j^i x^{j'} \quad 和 \quad x^{j'} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^j x^i.$$

同时设 φ 是 E^* 的一个元素；令

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i e^i = \sum_{j=1}^{n} \varphi'_j e^{j'},$$

这里 $\varphi_i = \psi(\varphi, e_i)$, $\varphi'_j = \psi(\varphi, e'_j)$. 考虑到

$$e^{j'} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^j e^i,$$

则得:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_i^j \varphi'_j \qquad 和 \qquad \varphi'_j = \sum_{i=1}^{n} \tau_j^i \varphi_i.$$

总结归纳所得公式:

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} \tau_i^j e'_j; \qquad e'_j = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^j e^i;$$

$$e^i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^i e^{j'}; \qquad e^{j'} = \sum_{i=1}^{n} \tau_i^j e^i;$$

$$x^i = \sum_{j=1}^{n} \tau_j^i x^{j'}; \qquad x^{j'} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^j x^i;$$

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_i^j \varphi'_j; \quad \varphi'_j = \sum_{i=1}^{n} \tau_j^i \varphi_i;$$

一些约定——可以指出，总是对出现两次的附标；即对一次出现于足标，一次出现于指标的附标求和．这个爱因斯坦(Einstein)约定在于省去相应的记号 Σ，并约定，所有的同一字母的一对序标，其中一个是指标，一个是足标，都是求和的序标．这些序标叫做哑序标；可以毫无妨碍地将一个对应的字母用另一字母代替、必须每一次都要当心，不要把已经代表某个意思的字母去说明另一个意思，且对于不同的求和，安置不同的哑序标．

还要做下面的约定：令 $\tau_j^{i'} = \tau_j^i$ 且 $\tau_{i'}^{i} = \sigma_i^i$．用爱因斯坦约定来写基的更换公式

$$e_i = \tau_i^{i'} e_{i'}; \ e_{i'} = \tau_{i'}^{i} e_i; \ x^i = \tau_{i'}^{i} x^{i'}; \ x^{i'} = \tau_i^{i'} x^i;$$

$$e^i = \tau_{i'}^{i} e^{i'}; \ e^{i'} = \tau_i^{i'} e^i; \quad \varphi_i = \tau_i^{i'} \varphi_{i'}; \ \varphi_{i'} = \tau_{i'}^{i} \varphi_i;$$

这些记号在张量计算中是十分重要的，然而要纯熟地使用它必须养成一定的习惯．

§5 共轭矩阵

***C* 上一个方阵的共轭方阵**——设域 K 是复数域 C．

设有一方阵 A，其元素为 $\alpha_{ij} \in C$，又设 α_{ij} 的共轭复数为 $\bar{\alpha}_{ij}$，则以 $\bar{\alpha}_{ij}$ 为元素的矩阵叫做 A 的共轭方阵，并记作 $\bar{A}$．

很清楚，$\bar{A}$ 的秩和 A 的秩是相同的，于是 A 和 $\bar{A}$ 是同为可逆的或非可逆的，

有
$$\overline{(\lambda A)} = \bar{\lambda} \cdot \bar{A},$$
$$\overline{(A+B)} = \bar{A} + \bar{B},$$
$$\bar{I} = I,$$
$$\overline{(BA)} = \bar{B} \cdot \bar{A}.$$

如果 A 是可逆的，则

$$(\overline{A^{-1}}) = (\bar{A})^{-1}.$$

对应关系 $A \to \bar{A}$ 是矩阵环的一个同构；它把左乘（或右乘）映射到左乘（或右乘）上去.

同样有

$$(\overline{{}^{t}A}) = {}^{t}(\bar{A}).$$

如果 T 是可逆的，则有

$$(\overline{T^{-1}AT}) = (\bar{T})^{-1}\bar{A}\bar{T},$$

即从 A 用 T 做成的变换矩阵的共轭矩阵是从共轭矩阵 $\bar{A}$ 用共轭矩阵 $\bar{T}$ 做成的变换矩阵.

定义——元素为 $\alpha_{ij} \in C$ 的方阵 A，如果有 $\bar{A} = A$ 就叫做实的.

元素 α_{ij} 适合 $\alpha_{ij} = \bar{\alpha}_{ij}$，于是为实的，且 A 是在实数域 R 上的矩阵.

第十二章　行列式

一个行列式是一个数量，它对应于域 K 上的 n 维矢量空间 E 的一个(线性)自同态，它的值就是在 E 上交变的 n-线性形式的值.

我们从体积(或者面积)的思想出发，选择这个概念的表示式.

现在考虑 $E=R^n$，即 R 上的矢量空间，具有基 $(e_1, \cdots, e_n)$，例如标准基；设有 n 个矢量的组 $(a_1, \cdots, a_n)$ 是线性无关的，它定义了一超平行体：一个超平行体是 E 中使 $x=\theta_1 a_1+\cdots+\theta_n a_n$ 的点 x 的集，这里 $0\leqslant\theta_1\leqslant 1, \cdots, 0\leqslant\theta_n\leqslant 1$，或经平移导出的集. 这样的超平行体的体积具有下面的性质：

1° 如果用 $\lambda(\in$ 域 $R)$ 乘矢量 a_i 而作位似变换，则有

$$v(a_1, \cdots, \lambda a_i, \cdots, a_n)=|\lambda| v(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n).$$

2° 如果 $i\neq j$，则对任意的 λ，有

$$v(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j+\lambda a_i, \cdots, a_n)=v(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots, a_n).$$

3° $v(e_1, \cdots, e_n)=1$.

(在平面上作一个图，读者就可直观地看到这些性质.)

用上述三个性质定义行列式，然而在 1° 中要用 λ 来代替 $|\lambda|$，且设有限 n 维的 E 是 R 上或 C 上的矢量空间.

第一部分　行列式的概念

§1　定义和一般性质

1° 相对于一组基的矢量组的行列式

定理 1——设E是域$K(K=R$或$C)$上的n维矢量空间，它的一组基是$(e_1,\cdots,e_n)$，存在一从E^n到K内的映射D，使

1) 对不论怎样的$(a_1,\cdots,a_n)\in E^n$和$\lambda\in K$，有

$$D(a_1,\cdots,\lambda a_i,\cdots,a_n)=\lambda D(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_n);$$

2) 对不论怎样的$i\neq j$，和$\lambda\in K$，有

$$D(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_j+\lambda a_i,\cdots,a_n)=D(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_j,\cdots,a_n);$$

3) $D(e_1,\cdots,e_n)=1$.

从E^n到K内的映射D是交变的n-线性形式，且是唯一的.

定义——$D(a_1,\cdots,a_n)$叫做相对于基$(e_1,\cdots,e_n)$的矢量组的行列式.

(1) 如果D存在，则条件1)和2)导致D是E^n上的n-线性形式，即是说，对每一i，$a_i\to D(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$是$E$上的线性形式. 例如取$i=1$，且证明，对$E$的任意的$x,x_1,x_2$和$K$的$\lambda$，有

$$D(\lambda x,a_2,\cdots,a_n)=\lambda D(x,a_2,\cdots,a_n),$$

$$D(x_1+x_2,a_2,\cdots,a_n)=D(x_1,a_2,\cdots,a_n)+D(x_2,a_2,\cdots,a_n).$$

第一个命题不是别的，正是假设1).

设x_3使$x_1+x_2+x_3=o$，我们证明：

$$D(x_1,a_2,\cdots,a_n)+D(x_2,a_2,\cdots,a_n)+D(x_3,a_2,\cdots,a_n)=0.$$

我们先指出，根据1)，如果一个矢量是零，D取0值；如果$a_1,\cdots,a_n$是线性相关的，D同样取0值，因为存在不是全为零的λ_i，使得

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i=0,$$

且这个命题是假设2)的结果.

如果三个集$(x_i,a_2,\cdots,a_n)$，$i=1,2,3$，中的每一个是线性相关矢量的形式，则可加性得到证明. 如果至少一个是线性无关矢量的形式，例如$(x_3,a_2,\cdots,a_n)$，它们形成E的一组基. 于是可写作

$$x_1=\xi_1x_3+\sum_2^n\xi_ia_i,\qquad x_2=\eta_1x_3+\sum_2^n\eta_ia_i,$$

且 $x_1+x_2+x_3=o$ 给出: $\xi_1+\eta_1+1=0$. 然而利用假设 2)从 1)得

$$D(x_1,a_2,\cdots,a_n)=D(x_1-\sum_2^n\xi_ia_i,a_2,\cdots,a_n)$$

$$=D(\xi_1x_3,a_2,\cdots,a_n)=\xi_1D(x_3,a_2,\cdots,a_n)$$

同时又有: $D(x_2,a_2,\cdots,a_n)=\eta_1D(x_3,a_2,\cdots,a_n)$.

由此利用加法并考虑到 $\xi_1+\eta_1=-1$

$D(x_1,a_2,\cdots,a_n)+D(x_2,a_2,\cdots,a_n)=D(x_1+x_2,a_2,\cdots,a_n)$.

(2) D 是交变的 n-线性形式, 因为如果 $a_i=a_j$, $i\neq j$, 则矢量集$(a_1,\cdots,a_n)$线性相关, 于是 D 是零.

(3) 求 $D(a_1,\cdots,a_n)$的表达式:

如果$(b_1,\cdots,b_n)$是 E 的一组基, 且 $a_j=\sum_{i=1}^n\gamma_{ij}b_i$. 因为 D 是一线性形式, 有

$$D(a_1,\cdots,a_n)=\Sigma D(\gamma_{m_1,1}b_{m_1},\cdots,\gamma_{m_n,n}b_{m_n}),$$

这里和 Σ 遍及每一整数的集$(m_1,\cdots,m_n)$, 而 $m_i=1,2,\cdots,n$.

将假设 1 应用 n 次, 则有

$D(\gamma_{m_1,1}b_{m_1},\cdots,\gamma_{m_n,n}b_{m_n})=\gamma_{m_1,1}\cdots,\gamma_{m_n,n}D(b_{m_1},\cdots,b_{m_n})$.

因此, 如果对于 $i\neq j$, $m_i=m_j$, 则在$(b_{m_1},\cdots,b_{m_n})$中两个矢量是相等的, 且 D 取零值, 这只要将和 Σ 遍历每一整数的集$(m_1,\cdots,m_n)$就行了, 这里 m_i 取值 $1,2,\cdots,n$ 且是两两不相同的; 换句话说, 这只要考虑$(1,2,\cdots,n)$的每一排列, 因而只要考虑$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$的每一排列就行了(见第二章, §3). 设 $\varepsilon(m_1,\cdots,m_n)$是排列的符号(回忆一下, 根据排列是偶或奇, 而有 $\varepsilon=+1$ 或-1).

因为 D 是交变的, 则有

$$D(b_{m_1},\cdots,b_{m_n})=\varepsilon(m_1,\cdots,m_n)D(b_1,\cdots,b_n)$$

由此而有

(4) $D(a_1,\cdots,a_n)=(\sum\varepsilon(m_1,\cdots,m_n)\gamma_{m_1,1}\cdots\gamma_{m_n,n})D(b_1,\cdots,b_n)$,
这里和 Σ 遍历$(1, 2, \cdots, n)$的每个排列.

于是当E的一个基已选定以后，就有了$D(a_1,\cdots,a_n)$的表达式.

如果最后设(假设 3))，对于基$(e_1, \cdots, e_n)$，有 $D(e_1, \cdots, e_n)=1$，考虑了 a_j 在 e_i 上的分解时，就有

$$a_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}e_i, \quad (j=1, 2, \cdots, n),$$

且

(5) $D(a_1, \cdots, a_n)=\sum\varepsilon(m_1, \cdots, m_n)\alpha_{m_1,1}\cdots\alpha_{m_n,n}$.

总结一下，假设 1), 2), 3)导致：如果D存在，则$D(a_1, \cdots, a_n)$必须对于基$(e_1, \cdots, e_n)$有形式(5).

(6) 留下来要证明，数量$\sum\varepsilon(m_1, \cdots, m_n)\alpha_{m_1,1}\cdots\alpha_{m_n,n}$ 适合 1), 2), 3)，这样就可完成对定理的证明(包括唯一性).

显然，$(a_1, \cdots, a_n)\to\sum\varepsilon(m_1, \cdots, m_n)\alpha_{m_1,1}\cdots\alpha_{m_n,n}$ 是E上一个n-线性形式. 于是 1)为真. 如果变换两矢量 a_i, a_j, 则每一排列$(m_1, \cdots, m_n)$的奇偶性也随之改变，其正负号也就变换了，于是由(5)表示的 $D(a_1, \cdots, a_n)$也改变正负号，这就说明D是交变形式；如果两矢量相等时，就是零. 如果以 a_1 和 a_2 作为例子，则

$$\begin{aligned}D(a_1, a_2+\lambda a_1, \cdots, a_n)&=D(a_1, a_2, \cdots, a_n)+\lambda D(a_1, a_1, a_3, \cdots, a_n)\\&=D(a_1, a_2, \cdots, a_n),\end{aligned}$$

这就证明了 2).

最后，如果对于 $i\neq j$, $\delta_{ij}=0$, $\delta_{ii}=1$, 则有

$$D(e_1, \cdots, e_n)=\sum\varepsilon(m_1, \cdots, m_n)\delta_{m_1,1}\cdots\delta_{m_n,n},$$

且在上面的和式中只有一个非零项，它就是这样的项，其中$m_1=1$, $m_2=2, \cdots, m_n=n$；因为 $\varepsilon(1, 2, \cdots, n)=+1$，所以有$D(e_1, \cdots, e_n)=1$.

注——回忆一下：$(a_1, \cdots, a_n)$ 的行列式是相对于E的基B来定义的，这也许是有用的. 于是写作

$$D_B(a_1, \cdots, a_n), \text{或 } \mathrm{dét}_B(a_1, \cdots, a_n),$$

$$\text{或 } D_{(e_i)}(a_1, \cdots, a_n), \text{或 } \mathrm{dét}_{(e_i)}(a_1, \cdots, a_n).$$

定理 2——设E是域K($K=R$或C)上n维矢量空间，$(e_1, \cdots, e_n)$是一组基. 则存在一个且只有一个E上的交变的n-线性形式，它对于$(e_1, \cdots, e_n)$取值 1.

实际上，一个这样的形式满足定理 1 的条件 1), 2), 3)，于是对于E的每个矢量集$(a_1, \cdots, a_n)$，它的值是$D(a_1, \cdots, a_n)$；因而它恒等于D.

进而，定理 1 的论证过程证明，如果f是E上的交变的n-线性形式，则有

$$f(a_1, \cdots, a_n) = (\Sigma\varepsilon(m_1, \cdots, m_n)\alpha_{m_1,1}\cdots\alpha_{m_n,n})f(e_1, \cdots, e_n).$$

于是

$$f(a_1, \cdots, a_n) = D(a_1, \cdots, a_n)f(e_1, \cdots, e_n),$$

这最后的结果可用两种方式来解释：

定理 3——每一个E上交变的n-线性形式f用它对E的基$(e_1, \cdots, e_n)$取的值来确定. 每一个E上交变的n-线性形式可写作$f=\alpha D$，这里α是一数量，而D是交变的n-线性形式，对于基$(e_1, \cdots, e_n)$它等于 1.

2° 方阵的行列式

设

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}$$

是一方阵，这里α_{ij}是K的元素. 用$(a_1, \cdots, a_n)$表示列矢量，即n维矢量空间K^n的元素. 设$(e_1, \cdots, e_n)$是K^n的标准基.

列矢量的行列式叫做 A 的行列式，写作：

$$D(A)=D(a_1,\cdots,a_n)=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn}\end{vmatrix},$$

$$(=\Sigma e(m_1,\cdots,m_n)\alpha_{m_1,1}\cdots\alpha_{m_n,n}).$$

如果 $n=1$，则建议免用两边各加一竖线的办法来表示行列式，以避免与绝对值 $|\alpha_{11}|$ 混淆.

3° E 的(线性)自同态的行列式

定理——设 E 是一 n 维矢量空间，u 为一 E 的自同态(从 E 到 E 内的线性映射). 则存在一个且只一个数量 $\alpha\in K$，它与 E 的矢量 $a_1,\cdots,a_n$ 无关，与 E 中选择的基无关，且使

$$D(u(a_1),\cdots,u(a_n))=\alpha D(a_1,\cdots,a_n).$$

设 $(e_1,\cdots,e_n)$ 是 E 的一组基. 映射

$$(a_1,\cdots,a_n)\to D_{(e_i)}(u(a_1),\cdots,u(a_n))$$

显然是 E 上交变的 n-线性形式. 根据定理 3(1°)，存在与 $a_1,\cdots,a_n$ 无关的 $\alpha\in K$，使得对 E 中任意 $a_1,\cdots,a_n$，有

$$D_{(e_i)}(u(a_1),\cdots,u(a_n))=\alpha D_{(e_i)}(a_1,\cdots,a_n).$$

然而，在定理 1 的论证过程中的(4)(在那里基 $(e'_1,\cdots,e'_n)$ 记作 $(b_1,\cdots,b_n)$)，可写作

$$D_{(e_i)}(a_1,\cdots,a_n)=D_{(e'_i)}(a_1,\cdots,a_n)\cdot D_{(e_i)}(e'_1,\cdots,e'_n),$$

互换 (e_i) 和 (e'_i)，则有

$$D_{(e'_i)}(a_1,\cdots,a_n)=D_{(e_i)}(a_1,\cdots,a_n)\cdot D_{(e'_i)}(e_1,\cdots,e_n).$$

于是有

$$\begin{aligned}D_{(e'_i)}(u(a_1),\cdots,u(a_n))&=D_{(e_i)}(u(a_1),\cdots,u(a_n))D_{(e'_i)}(e_1,\cdots,e_n)\\&=\alpha D_{(e_i)}(a_1,\cdots,a_n)D_{(e'_i)}(e_1,\cdots,e_n)\\&=\alpha D_{(e'_i)}(a_1,\cdots,a_n).\end{aligned}$$

这证明了 α 与基无关.

因为另一方面有 $D_{(e_i)}(e_1, \cdots, e_n)=1$, 则有:

$$D_{(e_i)}(u(e_1), \cdots, u(e_n))=\alpha D_{(e_i)}(e_1, \cdots, e_n)=\alpha,$$

这证明了 α 的唯一性.

定义——唯一的数量 α, 它的存在是上面定理的研究对象, 叫做自同态 u 的行列式, 记作 $D(u)$, 或 $\mathrm{dét}(u)$.

注——这个结果, 对 E 的任意 $a_1, \cdots, a_n$ 和 E 的任意的基, 写作

$$D(u(a_1), \cdots, u(a_n))=(\mathrm{dét}u)D(a_1, \cdots, a_n).$$

这是最有意义的形式, 因为可以从中推出行列式的性质, 由于牵涉到有效地计算的实际理由, 把行列式的性质与矩阵联系起来, 现在我们就有选择地叙述这些性质.

§2 行列式的性质

两个行列式相乘——重新来看公式

$$D(a_1, \cdots, a_n)=D(b_1, \cdots, b_n)\sum\varepsilon(m_1, \cdots, m_n)\gamma_{m_1,1}\cdots\gamma_{m_n,n},$$

这里 $b_1, \cdots, b_n$ 形成 E 的一组基.

和式 Σ 可以解释为行列式 $D(c_1, \cdots, c_n)$, 这里 c_j 以 $\gamma_{1,j}, \cdots, \gamma_{n,j}$, $j=1, \cdots, n$, 为分量. 于是有

$$(*)\qquad D(a_1, \cdots, a_n)=D(b_1, \cdots, b_n)D(c_1, \cdots, c_n).$$

因为 γ_{ij} 是 a_i 通过基的元素 $b_1, \cdots, b_n$ 来表示的表达式的系数, γ_{ij} 是任意的.

可是, $b_1, \cdots, b_n$ 是线性无关的. 反之, 如果 $b_1, \cdots, b_n$ 线性相关, 且如果对于 $j=1, \cdots, n$, 有形式 $a_j=\gamma_{1j}b_1+\cdots+\gamma_{nj}b_n$, 则 a_i 属于由 $b_1, \cdots, b_n$ 生成的, 维数严格小于 n 的子矢量空间; 于是 $a_1, \cdots, a_n$ 是线性相关的. 所以公式 $(*)$ 是恰当的; 因而对不论怎样的

$D(b_1, \cdots, b_n)$和 $D(c_1, \cdots, c_n)$，它是成立的.

设 A, B, C 是分别以$(a_1, \cdots, a_n)$, $(b_1, \cdots, b_n)$, $(c_1, \cdots, c_n)$为列矢量的矩阵. 因为 $a_j = \gamma_{1j}b_1 + \cdots + \gamma_{nj}b_n$, 所以 a_j 的第 i 个分量 α_{ij} 是由下式给出的:

$$\alpha_{ij} = \beta_{i1}\gamma_{1j} + \cdots + \beta_{in}\gamma_{nj},$$

这里 $\beta_{1j}, \cdots, \beta_{nj}$ 是矢量 b_j 的分量, $j=1, \cdots, n$.

这个公式就是用B左乘C的积BC的元素的公式(第十一章, 第二部分, §2). 结果得

$$D(BC) = D(B) \cdot D(C).$$

注——1°即使 $BC \neq CB$, 可是

$$D(CB) = D(C) \cdot D(B) = D(BC).$$

设A是列矢量为 $a_1, \cdots, a_n$ 的矩阵, λA 的列矢量为 $\lambda a_1, \cdots, \lambda a_n$, 于是有

$$D(\lambda A) = \lambda^n A.$$

推论——行列式乘法的定理使我们可以证明下面的命题:

1° 要使 E 的 n 个矢量 $a_1, \cdots, a_n$ 线性无关, 其必要且充分条件是 $D(a_1, \cdots, a_n) \neq 0$.

人们已看到, 如果 $a_1, \cdots, a_n$ 是线性相关的, 则有 $D(a_1, \cdots, a_n) = 0$. 如果 $a_1, \cdots, a_n$ 是线性无关的, 设A为以 $a_1, \cdots, a_n$ 为列矢量的矩阵, 则A是可逆的(第十一章, 第三部分, §2), 所以存在 A^{-1}, 使 $AA^{-1} = I$, 这里 I 是单位矩阵. 因而 $D(I) = 1 = D(A) \cdot D(A^{-1})$, 于是必须有 $D(A) \neq 0$.

由此得下列重要结果:

定理——要使矩阵是可逆的, 必须且只须它的行列式不是零.

或: 要使E的一个自同态是可逆的, 必须且只须它的行列式不是零.

2° 如果B是A经过可逆矩阵T变换而来的, 则有

$$B = T^{-1}AT,$$

于是

$$D(B) = D(T^{-1})D(A)D(T) = D(A).$$

行和列的置换——我们来证明，$D({}^tA) = D(A)$，这里 ${}^tA$ 是 A 的转置矩阵.

设 α'_{ij} 是 ${}^tA$ 的元素，则实际上有

$$D({}^tA) = \Sigma\varepsilon(m_1, \cdots, m_n)\alpha'_{m_1,1}\cdots\alpha'_{m_n,n}.$$

可是 $\alpha'_{ij} = \alpha_{ji}$，于是

$$D({}^tA) = \Sigma\varepsilon(m_1, \cdots, m_n)\alpha_{1,m_1}\cdots\alpha_{n,m_n}$$
$$= \Sigma\varepsilon(m_1, \cdots, m_n)\alpha_{h_1,1}\cdots\alpha_{h_n,n}.$$

然而，如果作置换，使排列$(h_1, \cdots, h_n)$回到$(1, \cdots, n)$，这种置换也就是将排列变换为$(m_1, \cdots, m_n)$. 于是排列$(h_1, \cdots, h_n)$的奇偶性与$(m_1, \cdots, m_n)$的奇偶性是一样的，且有 $\varepsilon(m_1, \cdots, m_n) = \varepsilon(h_1, \cdots, h_n)$. 这样

$$D({}^tA) = \Sigma\varepsilon(h_1, \cdots, h_n)\alpha_{h_1,1}\cdots\alpha_{h_n,n} = D(A).$$

这个性质又阐明了业已证明的性质：A 和 ${}^tA$ 有相同的秩（第十一章，第三部分，§4）.

特别是两行的置换就将 $D(A)$ 换为它的负值.

行列式按照其列的元素的展开——考虑行列式$D(a_1, \cdots, a_n)$. 有

$$a_1 = \alpha_{11}e_1 + \cdots + \alpha_{n1}e_n,$$

于是

$$D(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \alpha_{11}D(e_1, a_2, \cdots, a_n) + \cdots$$
$$+ \alpha_{n1}D(e_n, a_2, \cdots, a_n).$$

以这种形式我们阐明了，$D(a_1, a_2, \cdots, a_n)$是一对于 a_1 的线性形式.

令

$$A_{1j}=D(e_j, a_2, \cdots, a_n), \quad j=1, \cdots, n;$$

于是有

$$D(a_1, a_2, \cdots, a_n)=A_{11}\alpha_{11}+A_{12}\alpha_{21}+\cdots+A_{1n}\alpha_{n1}.$$

特别考虑 $A_{11}=D(e_1, a_2, \cdots, a_n)$. 有

$$A_{11}=\sum\varepsilon(m_1, m_2, \cdots, m_n)\delta_{m_1,1}\alpha_{m_2,2}\cdots\alpha_{m_n,n}.$$

可是, 如果 $i\neq j$, 则 $\delta_{ij}=0$, 于是只要取 $m_1=1$, 就有

$$A_{11}=\sum\varepsilon(1, m_2, \cdots, m_n)\alpha_{m_2,2}\cdots\alpha_{m_n,n}.$$

然而$(m_2, \cdots, m_n)$已不再包含 1, 所以它是 $2,\cdots,n$的一个排列. 数 1 小于 m_i, $i=2, \cdots, n$; 排列$(1, m_2, \cdots, m_n)$与排列$(m_2, \cdots, m_n)$有相同的奇偶性. 于是

$$\varepsilon(1, m_2, \cdots, m_n)=\varepsilon(m_2, \cdots, m_n).$$

从而

$$A_{11}=\sum\varepsilon(m_2, \cdots, m_n)\alpha_{m_2,2}\cdots\alpha_{m_n,n}.$$

这个形式说明, A_{11} 是 $n-1$ 行和 $n-1$ 列的行列式, 序标 1 不再包含在 α_{ij} 的序标之中, A_{11} 是从 $D(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 出发去掉第一行第一列后所得到的行列式.

一般地, 从 $D(a_1, \cdots, a_n)$去掉第 i 行第 j 列后得到的 $n-1$ 行和 $n-1$ 列的行列式用 D_{ij} 来表示; D_{ij} 叫做 α_{ij} 的子式.

这样 $A_{11}=D_{11}$.

于是设 $a_j=\alpha_{1j}e_1+\cdots+\alpha_{nj}e_n$, 则有如上面对于 $j=1$ 所说,

$$D(a_1, \cdots, a_n)=A_{j1}\alpha_{1j}+\cdots+A_{jn}\alpha_{nj};$$

这时就说 $D(a_1, \cdots, a_n)$按第 j 列元素展开.

经 $j-1$ 次对换, 将$(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_n)$变为$(a_j, a_1, \cdots, a_n)$, 经 $i-1$ 次对换, 将第 i 行换到第一行的位置, 而不改变其他行的次序, α_{ij} 成为新行列式的序标为$(1, 1)$的元素, 由此可得

$$(-1)^{j-1+i-1}D(a_1, \cdots, a_n)=(-1)^{i+j}D(a_1, \cdots, a_n).$$

这个行列式的序标为$(1, 1)$的子式就是 D_{ij}, 于是有

$$A_{ji}=(-1)^{ij}D_{ij}.$$

A_{ij} 叫做 $D(a_1,\cdots,a_n)$ 按 j 列元素展开式中 α_{ij} 的系数，或余因子.

注: 要注意 A_{ji} 的序标的次序是元素 α_{ij}(A_{ji} 就是它的系数)的次序的逆序：这种约定的理由要到以后才能说明.

因为 $D({}^tA)=D(A)$，所以也能将 $D(A)$ 按一行的元素展开. 于是有 $D(A)=A'_{1i}\alpha_{i1}+\cdots+A'_{ni}\alpha_{in}$. α_{ij} 的系数 A'_{ji} 也是等于

$$(-1)^{i+j}D_{ij}.$$

于是有 $A'_{ji}=A_{ji}$，从而得到按行的展开式

$$D(A)=A_{1i}\alpha_{i1}+\cdots+A_{ni}\alpha_{in}.$$

n 行 n 列的行列式的计算就归结为 n 个 $n-1$ 行和 $n-1$ 列的行列式的计算.

例——1° 设 $n=1$，则一个元素的唯一排列是一恒等映射，它是偶排列，我们有

$$|\alpha_{11}|=\alpha_{11}.$$

这里字母 α_{11} 两旁的两竖线表示 $|\alpha_{n}|$ 是行列式，而不是绝对值，然而在这种情况下最好还是不用这记号.

2° 为了计算

$$\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix},$$

可以将它按第一列的元素展开. 以下列的数量为系数：

$$A_{11}=D_{11}=\alpha_{22},\quad A_{12}=(-1)^{1+2}D_{21}=-\alpha_{12},$$

于是行列式的值是 $\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12}$.

3° 又设

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix};$$

将它按第一列的元素展开. 系数为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}=\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{32}\alpha_{23},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}=-(\alpha_{12}\alpha_{33}-\alpha_{32}\alpha_{13}),$$

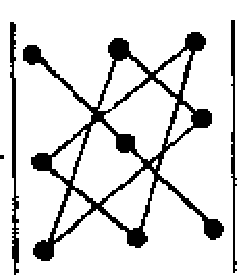
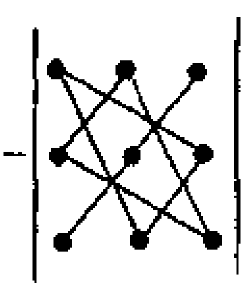
$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{22} & \alpha_{23}\end{vmatrix}=\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{22}\alpha_{13}.$$

因而

$$\begin{aligned}\Delta &= A_{11}\alpha_{11}+A_{12}\alpha_{21}+A_{13}\alpha_{31}\\ &=\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}+\alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13}+\alpha_{31}\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{11}\alpha_{32}\alpha_{23}-\alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{33}\\ &\quad-\alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13}.\end{aligned}$$

可以这样来记住上面的表达式：各行各列元素的安置如下面的两个表. 对在主对角线上各元素的乘积赋以+号；对于底边平行此主对角线的三角形三个顶点上的元素的乘积，也赋以+号；对于非主对角线上元素的乘积赋以－号；对于底边平行此非主对角线的三角形三个顶点上各元素的乘积也赋以－号.

这个方法叫做沙留士(Sarrus)规则.

正号 + 　　负号 − 

系数 A_{ij} 间的关系——考虑和式

$$A_{i1}\alpha_{1j}+A_{i2}\alpha_{2j}+\cdots+A_{in}\alpha_{nj},\quad i\neq j.$$

这是将行列式 $D(a_1, \cdots, a_n)$ 按第 i 列展开，当它的矢量 a_i 与矢量 a_j 一样时所得到的和式，此和式为零. 于是一般地对任意的 i 和 j 有

$$A_{i1}\alpha_{1j}+A_{i2}\alpha_{2j}+\cdots+A_{in}\alpha_{nj}=\delta_{ij}D(a_1, \cdots, a_n).$$

设 A 是元素 α_{ij} 的矩阵，又设 $D=D(A)\neq 0$；于是 A 是可逆的，所以它可以写为

$$\frac{A_{i1}}{D}\alpha_{1j}+\frac{A_{i2}}{D}\alpha_{2j}+\cdots+\frac{A_{in}}{D}\alpha_{nj}=\delta_{ij}.$$

结果是：元素 A_{ij}/D 的矩阵是这样的，用 A 乘它的积是元素 δ_{ij} 的矩阵，即单位矩阵，于是元素 A_{ij}/D 的矩阵是矩阵 A^{-1}。这就是前已介绍的序标要采用逆序这个约定的理由。

用 B 表示元素 A_{ij} 的矩阵；于是 $B\cdot A=D(A)\cdot I$；从而，取这个矩阵的行列式，得

$$D(B)\cdot D(A)=(D(A))^n.$$

如果$D(A)\neq 0$，两边同时消去$D(A)$，得 $D(B)=(D(A))^{n-1}$，这个关系也能从下述事实得到：A也是可逆的，且 $D(A^{-1})=1/D(A)$，因为 $A\cdot A^{-1}=I$。如果 $D(A)=0$，则有 $D(B)=0$，实际上，如果 $A=0$，则它的每一子式为零，于是 $B=0$；如果 $D(A)=0$ 且 $A\neq 0$，又如果 $D(B)\neq 0$，则 B是可逆的，于是对乘法是正则的，且 $B\cdot A=D(A)I=0$ 给出 $A=0$，由此导出矛盾。这样，关系

$$D(B)=[D(A)]^{n-1}$$

对不论 $D(A)$是零或非零都是有效的。

§3　将行列式用于决定矢量系的秩

为了第二部分，设空间 C^n 中具有一组标准基。

矢量系的秩——设在矢量空间 C^n 中有一 k 个矢量 $a_1,\cdots,a_k$ 的系。我们已看到（第十章，第三部分，§3），如果 $k=n$，则系 $a_1,\cdots,a_n$ 的秩 r 或$<n$，或恰恰等于 n，看 $D(a_1,\cdots,a_n)$是零或非零而定。我们来将这里所说的予以推广，以给出一种方法，可以借助行列式来求秩 r 的准确值。

我们先来建立一个准备性的命题. 考虑列矢量为 $a_1, \cdots, a_k$ 的矩阵. 说从矩阵抽出了 h 行 h 列的行列式, 如果从矩阵抽掉了一些行和列, 使得留下来的只是 h 行 h 列, 且它的值就是这 h 行 h 列的方阵的行列式的值. 这样一个子式就是从对应于原行列式的矩阵中抽去一些行和列的行列式.

设有 r 个这样的矢量 $a_1, \cdots, a_r$, 使得至少存在一个 r 行 r 列非零行列式, 它是从列矢量为 $a_1, \cdots, a_n$ 的矩阵中抽出来的. 可以假设, 在除去最后的 $n-r$ 行后, 行列式不是零. 如果 x 是 C^n 的一个元素, 其分量为 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$, 设 $x'=f(x)$ 是 C^r 的一个元素, 其分量为 $(\xi_1, \cdots, \xi_r)$. 又设 s 是一固定的序标, 适合 $r+1\leqslant s\leqslant n$, 且 $x''=g(x)$ 是 C^{r+1} 的一个元素, 其分量为 $(\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_s)$. 映射 f 和 g 是从 C^n 到 C^r 和 C^{r+1} 内的线性映射(投影).

设 a_i 的分量是 $\alpha_{1i}, \cdots, \alpha_{ni}$, $i=1, \cdots, r$. 又设 b 是 C^n 的一给定的矢量, 其分量为 $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$.

考虑 $a_1'=f(a_1), \cdots, a_r'=f(a_r)$; 因为 $D(a_1', \cdots, a_r')\neq 0$, $a_1', \cdots, a_r'$ 在 C^r 内是线性无关的. 可是 f 是一线性映射, $a_1, \cdots, a_r$ 也是 C^n 内线性无关的. 矢量 $a_1', \cdots, a_r'$ 形成 C^r 的一组基, 于是有 $b'=f(b)=\lambda_1 a_1'+\cdots+\lambda_r a_r'$.

设 $a_1''=g(a_1), \cdots, a_r''=g(a_r)$, $b''=g(b)$, 并考虑 $r+1$ 行 $r+1$ 列行列式 $D(a_1'', \cdots, a_r'', b'')$. 它等于

$$D(a_1'', \cdots, a_r'', b''-\lambda_1 a_1''-\cdots-\lambda_r a_r'').$$

上面行列式的最后一列的元素是

$$0, 0, \cdots, 0, \beta_s-\lambda_1\alpha_{s1}-\cdots-\lambda_r\alpha_{sr}.$$

按最后一列的元素来展开这行列式, 得

$$D(a_1'', \cdots, a_r'', b'')=(\beta_s-\lambda_1\alpha_{s1}-\cdots-\lambda_r\alpha_{sr})D(a_1', \cdots, a_r').$$

如果 $n-r$ 个行列式 $D(a_1'', \cdots, a_r'', b_s'')$ 对 $s=r+1, \cdots, s=n$ 这些值都是零, 则有 $\beta_s-\lambda_1\alpha_{s1}-\cdots-\lambda_r\alpha_{sr}=0$, 这里 $s=r+1, \cdots, n$,

因为 $D(a_1', \cdots, a_r') \neq 0$. 然而有

$$\beta_i - \lambda_1 \alpha_{i1} - \cdots - \lambda_r \alpha_{ir} = 0,\ i = 1, \cdots, r,$$

因为 $b' = \lambda_1 a_1' + \cdots + \lambda_r a_r'$. 从而有 $b = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r$ 且 b 属于由 $a_1, \cdots, a_r$ 生成的矢量空间. 反过来, 如果 b 属于这个矢量空间, 则存在数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$, 使 $b = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r$, 且

$$D(a_1'', \cdots, a_r'', b'') = D(a_1'', \cdots, a_r'', b'' - \lambda_1 a_1'' - \cdots - \lambda_r a_r'') = 0.$$

行列式 $D(a_1'', \cdots, a_r'', b'')$ 叫做特征行列式. 它是由如下方式得到的: 将从矩阵抽出的非零行列式 $D(a_1', \cdots, a_r')$“镶边”, 在右边镶上 b 的同序标的诸分量, 在下边镶上由诸矢量 $a_1, \cdots, a_r$, b 的第 s 个分量形成的行.

有 $n-r$ 个特征行列式. 如果 $n=r$, 就无特征行列式.

我们的准备命题即可叙述如下:

要使 b 属于由 $a_1, \cdots, a_r$ 生成的矢量空间, 其必要且充分条件是: $n-r$ 个特征行列式均为零.

如果 $r=n$, 则每个矢量 b 属于生成的矢量空间, 实际上, $a_1, \cdots, a_n$ 就是 C^n 的一组基.

考虑 C^n 的 k 个矢量 $a_1, \cdots, a_k$, 又设 r 是从列矢量为 $a_1, \cdots, a_k$ 的矩阵抽去若干行列后, 使所剩 r 行 r 列行列式非零的最大可能的数. 设 $(\alpha_{1i}, \cdots, \alpha_{ni})$ 是 a_i 的分量, $i=1, \cdots, k$, 又设

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{r1} & \cdots & \alpha_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

于是矢量 $a_1, \cdots, a_r$ 线性无关, 且由矢量 $b = a_h$, $h = r+1, \cdots, k$ 形成的有 $r+1$ 行和列的特征行列式为零, 于是 a_h 属于由 $a_1, \cdots, a_r$ 生成的矢量空间, $h = r+1, \cdots, k$. 所以矢量集的秩是使至少一个行列式非零的最大可能的数 r, 这个行列式是从以这些矢量为列矢量的矩阵中抽出来的且有 r 个行与列.

可以指出，在这个叙述中能交换列矢量和行矢量的作用.我们已经证明，这时秩是不改变的(第十章，第四部分，§2)。

第二部分 行列式与线性方程组

我们来考虑下面的m个未知量$\xi_1, \cdots, \xi_m$的n个方程的线性方程组

$$
(1)\qquad \begin{cases} \alpha_{11}\xi_1+\cdots+\alpha_{1m}\xi_m=\beta_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\xi_1+\cdots+\alpha_{nm}\xi_m=\beta_n, \end{cases}
$$

这里数α_{ij}, $i=1, \cdots, n$, $j=1, \cdots, m$和β_i, $i=1, \cdots, n$, 属于实数域R或复数域C. 我们还可以将它写成如下形式

$$
(2)\qquad \xi_1 a_1+\cdots+\xi_m a_m=b,
$$

这里a_j是R^n或C^n的矢量，其分量为$\alpha_{1j}, \cdots, \alpha_{nj}$, b是分量为$\beta_1, \cdots, \beta_n$的矢量.

§1 克拉美(Cramer)组

设$m=n$, 矢量$a_1, \cdots, a_n$线性无关. 从而$D(a_1, \cdots, a_n)\neq 0$.我们看到方程组(2)有一个且只一个解$\xi_1, \cdots, \xi_n$, 因为$a_1, \cdots, a_n$是矢量空间$R^n$或$C^n$的一组基.考虑行列式

$$
D(a_1, \cdots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \cdots, a_n).
$$

我们可以写成

$$
D(a_1, \cdots, a_{j-1}, b-\xi_1 a_1-\cdots-\xi_{j-1}a_{j-1}-\xi_{j+1}a_{j+1}-\cdots-\xi_n a_n, a_{j+1}, \cdots, a_n)
$$

这就是说，考虑到(2)，

$$D(a_1, \cdots, a_{j-1}, \xi_j a_j, a_{j+1}, \cdots, a_n) = \xi_j D(a_1, \cdots, a_n).$$

可是 $D(a_1, \cdots, a_n) \neq 0$，于是有

$$\xi_j = \frac{D(a_1, \cdots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \cdots, a_n)}{D(a_1, \cdots, a_n)}.$$

换句话说：未知量 ξ_j 的值是作为两个行列式的商而得到的，分母是未知量的系数 α_{ij} 的行列式 $D(a_1, \cdots, a_n) \neq 0$，分子就是将对应于要求的未知量 ξ_j 的列矢量 a_j 用右端的矢量 b 来代替的行列式。

按照第 j 列的元素将分子的行列式展开，得

$$\xi_j = \frac{A_{j1}\beta_1 + \cdots + A_{jn}\beta_n}{D(a_1, \cdots, a_n)}.$$

从这个公式可以推演出克拉美方程组的解存在定理，因为根据系数 A_{ji} 的性质，可以验证，这样计算得的数量 ξ_j 正是方程组 (1) 的解。

在某些行列式的计算上的应用——一般地，上面这个公式对于线性方程组的解的数值计算是不方便的；最好是用第十章，第六部分，§ 3 中所述的逐步消元法。然而在研究解的理论时，这公式还是有用的。

相反，为了计算行列式，解线性方程组常常是方便的。

这就是原则。

考虑方程组：

$$\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = e_n,$$

这里 e_n 是分量为 $(0, 0, \cdots, 0, 1)$ 的矢量。

于是有

$$\xi_n = \frac{D(a_1, \cdots, a_{n-1}, e_n)}{D(a_1, \cdots, a_n)} = \frac{A_{nn}}{D(a_1, \cdots, a_n)}.$$

然而系数 A_{nn} 等于元素 α_{nn} 的子式 D_{nn}，即

$$A_{nn} = D(a_1', \cdots, a_{n-1}'),$$

这里 a'_i，$i=1,\cdots,n-1$，是 R^{n-1} 或 C^{n-1} 的矢量，它是在去掉最后一个分量后由 a_i 得出的。于是有

$$\xi_n D(a_1,\cdots,a_n)=D(a'_1,\cdots,a'_{n-1}).$$

在某些场合下，ξ_n 是可直接知道的，上述关系提供了一个计算 $D(a_1,\cdots,a_n)$ 的递推关系。

例　范德蒙(Van der Monde)行列式——所谓范德蒙行列式是指这样的行列式 $D(a_1,\cdots,a_n)$，其中 $\alpha_{ij}=\lambda_i^{j-1}$，$i=1,\cdots,n$，$j=1,\cdots,n$ 而 λ_i^{j-1} 是数 λ_i 的 $j-1$ 次幂。

方程组 $\xi_1 a_1+\cdots+\xi_n a_n=e$ 可以写作

$$\begin{aligned}&\xi_1+\xi_2\lambda_1+\cdots+\xi_n\lambda_1^{n-1}=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\xi_1+\xi_2\lambda_{n-1}+\cdots+\xi_n\lambda_{n-1}^{n-1}=0,\\&\xi_1+\xi_2\lambda_n+\cdots+\xi_n\lambda_n^{n-1}=1.\end{aligned}$$

首先假设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是两两不同的。前 $n-1$ 个方程表示，变量 λ 的 $n-1$ 次多项式 $x=\xi_1+\lambda\xi_2+\cdots+\lambda^{n-1}\xi_n$ 以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1}$ 为零点。于是，如果 p_ρ 表示多项式 $\lambda-\rho$（见第四章，第五部分），则有 $x=\mu p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\cdots p_{\lambda_{n-1}}$，这里 μ 是一常数。可是 $p_\rho(\lambda_n)=\lambda_n-\rho$，于是上面的方程给出

$$x(\lambda_n)=1=\mu(\lambda_n-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_{n-1}),$$

由此得 μ 的值，且有

$$x=\frac{p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\cdots p_{\lambda_{n-1}}}{(\lambda_n-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_{n-1})}=\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_{n-1})}{(\lambda_n-\lambda_1)(\lambda_n-\lambda_2)\cdots(\lambda_n-\lambda_{n-1})}.$$

未知量 ξ_n 是最高次项的系数。

从而

$$\xi_n=\frac{1}{(\lambda_n-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_{n-1})}.$$

如果我们用 $\Delta_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 表示范德蒙行列式，则 A_{nn} 也应是

范德蒙行列式，已知 $A_{nn}=\Delta_{n-1}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1})$ 且 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ 是两两互异的，所以有

$$\Delta_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)=\frac{1}{\xi_n}\Delta_{n-1}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1})$$
$$=(\lambda_n-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_{n-1})\Delta_{n-1}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}).$$

因为 $\Delta_1(\lambda_1)=1$，于是逐步得到

$$\Delta_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)=\prod_{i>j}(\lambda_i-\lambda_j).$$

如果在 $i\neq j$ 时两个数 λ_i 与 λ_j 相等，这个公式也是有效的. 实际上右端的乘积也为零；另一方面 $\Delta_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 有两行相等，因而是零.

§2 一般情况

设 r 是以$a_1, \cdots, a_m$为列矢量的矩阵 A 的秩. 设

$$D(a_1', \cdots, a_r')=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{r1} & \cdots & \alpha_{rr} \end{vmatrix}\neq 0.$$

要使方程组(2)有一个解，其必要且充分条件是：矢量 b 属于由 $a_1, \cdots, a_r$ 生成的矢量空间，同时 $a_{r+1}, \cdots, a_m$ 也已属于它. 根据上面的结果和记法(212 页)，还可把这结果叙述为下面的形式：

要使线性方程组(1)有一个解，其必要且充分条件是：$n-r$ 个特征行列式

$$D(a_1'', \cdots, a_r'', b'')=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1r} & \beta_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{r1} & \cdots & \alpha_{rr} & \beta_r \\ \alpha_{s1} & \cdots & \alpha_{sr} & \beta_s \end{vmatrix}$$

对于 $s=r+1,\cdots,n$, 全为零。

未知量 $\xi_{r+1},\cdots,\xi_m$ 是非主未知量；可给它们以任意的数值，则剩下来要解的克拉美方程组如下

$$\xi_1 a_1'+\cdots+\xi_r a_r'=b'-\xi_{r+1}a_{r+1}'-\cdots-\xi_m a_m',$$

这里 $\xi_1,\cdots,\xi_r$ 是未知量．上式即

$$\alpha_{11}\xi_1+\cdots+\alpha_{1r}\xi_r=\beta_1-\alpha_{1,r+1}\xi_{r+1}-\cdots-\alpha_{1m}\xi_m,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{r1}\xi_1+\cdots+\alpha_{rr}\xi_r=\beta_r-\alpha_{r,r+1}\xi_{r+1}-\cdots-\alpha_{rm}\xi_m.$$

这里只要解(1)的 r 个方程就行了；其余的 $n-r$ 个自动地适合所求的未知量.

例一——设方程组

$$\begin{aligned}-\gamma\xi_2+\beta\xi_3&=\lambda,\\ \gamma\xi_1\qquad-\alpha\xi_3&=\mu,\\ -\beta\xi_1+\alpha\xi_2\qquad&=\nu.\end{aligned}$$

设 $\alpha=\beta=\gamma=0$, 如果量 λ,μ,ν 中至少有一个不是零，则此方程组是不可能的。

如果 $\lambda=\mu=\nu=0$, 则每一组 ξ_1,ξ_2,ξ_3 就是解。

于是设 $\gamma\neq 0$．则矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&-\gamma&\beta\\ \gamma&0&-\alpha\\ -\beta&\alpha&0\end{pmatrix}$$

是 2 秩的。

实际上 $D(A)=0$, 因为 ${}'A=-A$, 于是

$$D({}'A)=D(-A)=(-1)^3D(A)=-D(A).$$

可是

$$D(A)=D({}'A),$$

由此 $D(A)=0$(此外，直接计算在这里是容易的)。

另一方面，α_{33} 的子式，为二行二列行列式：

$$\begin{vmatrix} 0 & -\gamma \\ \gamma & 0 \end{vmatrix} = \gamma^2 \neq 0.$$

有唯一的特征行列式，它是

$$\begin{vmatrix} 0 & -\gamma & \lambda \\ \gamma & 0 & \mu \\ -\beta & \alpha & \nu \end{vmatrix} = \gamma(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu).$$

因为 $\gamma \neq 0$，如果 $\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu \neq 0$，方程组无解.

如果 $\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0$，方程组有解：可以给非主未知量 ξ_3 一任意数值；只要解

$$-\gamma\xi_2 = \lambda - \beta\xi_3$$
$$\gamma\xi_1 = \mu + \alpha\xi_3;$$

就行了，于是得到

$$\xi_1 = \frac{\alpha\xi_3 + \mu}{\gamma}, \quad \xi_2 = \frac{\beta\xi_3 - \lambda}{\gamma}.$$

我们来验证，对不论怎样的 ξ_3，第三个方程是满足的，因为

$$-\beta\xi_1 - \alpha\xi_2 = \frac{1}{\gamma}(-\alpha\beta\xi_3 - \beta\mu + \alpha\beta\xi_3 - \alpha\lambda) = \frac{1}{\gamma}\gamma\nu = \nu,$$

这是由于 $-\beta\mu - \alpha\lambda = \gamma\nu$.

齐次方程组之例——考虑 $n+1$ 个未知量 $\xi_0, \cdots, \xi_n$ 的 n 个方程的齐次方程组

$$\alpha_{10}\xi_0 + \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{n0}\xi_0 + \alpha_{n1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{nn}\xi_n = 0.$$

设系数 α_{ij} 的矩阵 A 是 n 秩的；于是存在一个从矩阵抽出的 n 行 n 列的非零行列式. 用 A_{j0} 表示 $(-1)^j$ 与一个矩阵的行列式的积，这个矩阵是这样得到的：在 A 中去掉以 j 为第二个序标的元素的列，就是这矩阵；A_{j0} 是元素 α_{0j} 的系数，这里 α_{0j} 即是：如果

用任意元素 α_{00}, …, α_{0n} 形成最上面的行，并以此来补足矩阵 A. α_{0j} 就是这样的矩阵中的一个元素.

于是设 $A_{00}\neq 0$; ξ_0 就是非主未知量, 可以给它任意值, 设 $\xi_0=A_{00}\rho$, ρ 是任意的. 只要解下面的克拉美方程组就行了:

$$\alpha_{11}\xi_1+\cdots+\alpha_{1n}\xi_n=-\alpha_{10}\rho A_{00},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{n1}\xi_1+\cdots+\alpha_{nn}\xi_n=-\alpha_{n0}\rho A_{00}.$$

系数的行列式是 A_{00}, 于是有

$$\xi_i=\frac{1}{A_{00}}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \cdots & -\rho A_{00}\alpha_{10} & \cdots\alpha_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{n1} & \cdots & -\rho A_{00}\alpha_{n0} & \cdots\alpha_{nn}\end{vmatrix},\ i=1,\cdots,n.$$

将 ρA_{00} 作为因子提出来, 并将第 i 列作为第一列, 于是可以看到应得

$$\xi_i=\rho A_{i0}.$$

这个公式对于 $i=0, 1, \cdots, n$, 及任意的 ρ 是有效的.

符号目录

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝普通数学　第一卷　代数和线性代数基础
作者＝（法）Ｃ．Ｐｉｓｏｔ　Ｍ．Ｚａｍａｎｓｋｙ著　邓应生译
页数＝２２０
ＳＳ号＝１０５０１５４３
出版日期＝１９８１年０２月第１版