单因子资产定价模型的实证检验

蒋志强

zqjiang.ecust@qq.com

实验内容

时间序列检验

- 单资产检验
- 多资产检验：Wald, LR, LM

横截面检验

- 排序法
- Fama-MacBeth回归

CAPM的时间序列检验

CAPM模型是从理想的金融世界推导出来的，这个模型到底是否成立的呢？

市场模型： $r_i = \alpha_i + \beta_{im} r_m + \varepsilon_i$

CAPM模型： $r_i = \beta_{im} r_m + \varepsilon_i$

市场模型的 $\alpha_i = 0$ 等价于 CAPM成立

CAPM时间序列估计和检验的基本问题

时间序列：单资产估计与检验

- 对于 N 个资产，CAPM 隐含着 $\alpha_i = 0$
- 考虑单个资产 i ，在线性回归模型的假设下可用 t 检验来检验市场模型：

$$H_0: \alpha_i = 0\ ;\ H_1: \alpha_i \neq 0$$

- 如果 H_1 成立，该资产存在超额回报率（正的或者负的），有何意义？

时间序列：单资产估计与检验

单个资产CAPM检验步骤：

1. 用OLS估计市场模型，得到 α_i 的估计值
2. 计算 $\alpha_i = 0$ 的 t 检验统计量
3. 确定显著性水平，比较分位数或计算p值，作出统计推断

时间序列：单资产估计与检验

假设观察到总体的T个样本，则时间序列回归方程为：

$$r_{it} = \hat{\alpha}_{it} + \hat{\beta}_{im} r_{mt} + e_{it}, \quad t = 1, \cdots, T$$

最小二乘估计量为:

$$\hat{\beta}_{im} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \bar{r}_i)(r_{mt} - \bar{r}_m)}{\sum_{t=1}^{T}(r_{mt} - \bar{r}_m)^2}$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{r}_i - \hat{\beta}_{im} \bar{r}_m$$

$$\bar{r}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it}$$

$$\bar{r}_m = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{mt}$$

时间序列：单资产估计与检验

CAPM的单资产检验，以贵州茅台为例。

数据

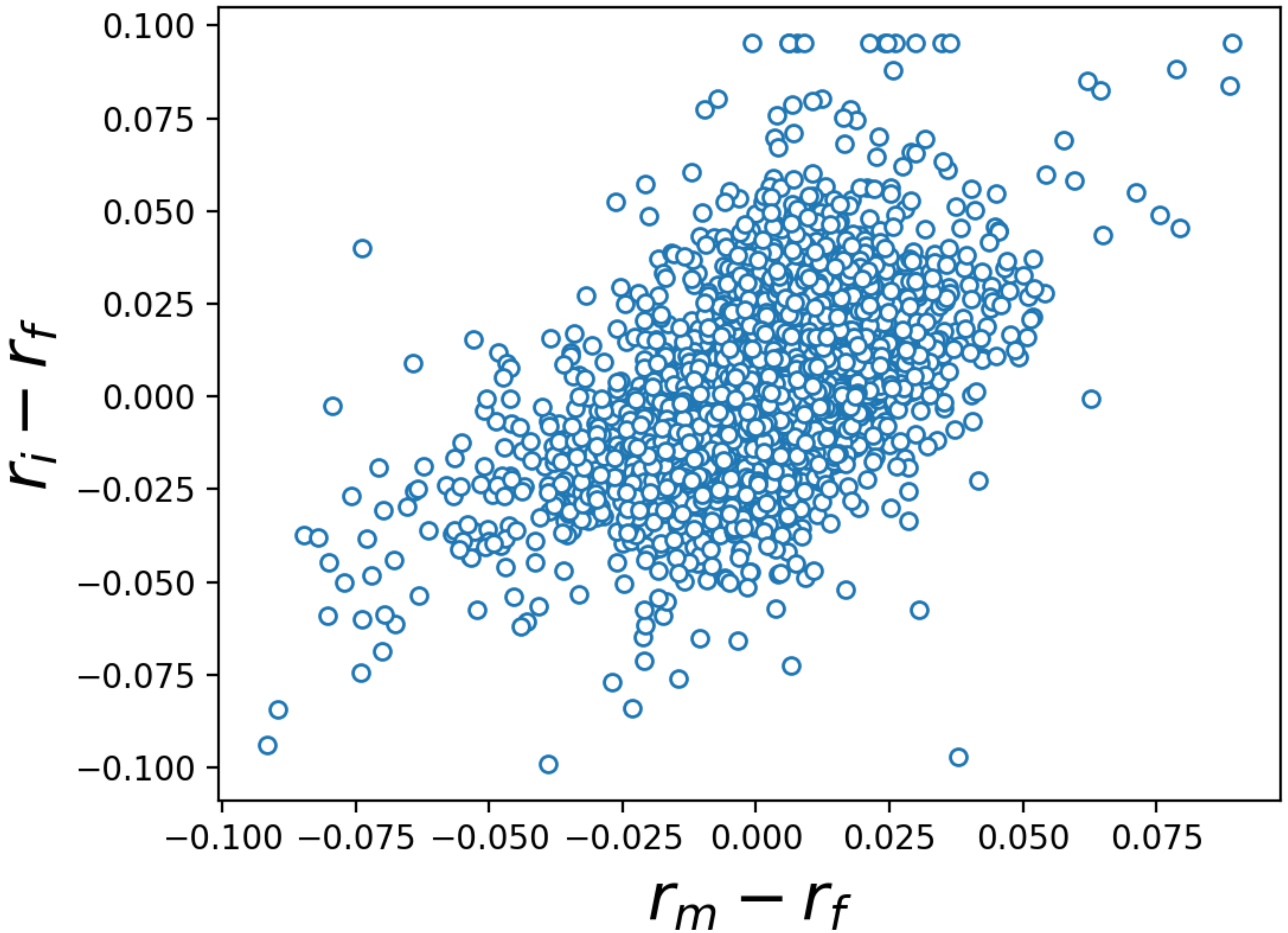
- 资产数据：2001-2018贵州茅台日度数据；
- 市场数据：2001-2018沪深300指数日度数据；
- 无风险利率：2001-2018无风险利率。

0data_Index_daily_price_2001-2018.csv

0data_stock_daily_price_2001-2018.csv

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	股票代码_Stkc	日期_Date	开盘价_Op	最高价_Hi	最低价_Lo	收盘价_Cl	复权价1(元	复权价2(元	成交量_Tr	成交金额_	日无风险收益率_DRfRet	
2	600519	2001/8/27	34.51	37.78	32.85	35.55	35.55	11.4294	40631800	1.41E+09	0.000054	
3	600519	2001/8/28	34.99	37	34.61	36.86	36.86	11.8505	12964779	4.63E+08	0.000054	
4	600519	2001/8/29	36.98	37	36.1	36.38	36.38	11.6962	5325275	1.95E+08	0.000054	
5	600519	2001/8/30	36.28	37.51	36	37.1	37.1	11.9277	4801306	1.78E+08	0.000054	
6	600519	2001/8/31	37.15	37.62	36.8	37.01	37.01	11.8987	2323148	86231237	0.000054	
7	600519	2001/9/3	37.2	37.57	36.85	36.99	36.99	11.8923	2211209	82129438	0.000054	
8	600519	2001/9/4	37.01	38.08	36.88	37.46	37.46	12.0434	3700677	1.39E+08	0.000054	
9	600519	2001/9/5	37.61	37.92	37.21	37.44	37.44	12.037	2606695	97796243	0.000054	

时间序列：单资产估计与检验



时间序列：单资产估计与检验

```
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                      y   R-squared:                       0.257
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.257
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     1152.
Date:                Mon, 15 Mar 2021   Prob (F-statistic):          4.08e-217
Time:                        08:43:42   Log-Likelihood:                 8519.0
No. Observations:                3326   AIC:                        -1.703e+04
Df Residuals:                    3324   BIC:                        -1.702e+04
Df Model:                           1
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const          0.0011      0.000      3.256      0.001       0.000       0.002
x1             0.6277      0.018     33.945      0.000       0.591       0.664
==============================================================================
Omnibus:                      379.574   Durbin-Watson:                   1.833
Prob(Omnibus):                  0.000   Jarque-Bera (JB):             1488.523
Skew:                           0.516   Prob(JB):                         0.00
Kurtosis:                       6.111   Cond. No.                         57.1
==============================================================================
```

CAPM的多资产估计与检验

- 考虑N个资产，CAPM需联合检验

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 =, \ldots, \alpha_N = 0$$

- 把单资产的回归方程写成矩阵形式

$$\begin{cases} \underset{N*1}{\mathbf{r_t}} = \underset{N*1}{\boldsymbol{\alpha}} + \underset{N*1}{\boldsymbol{\beta}} r_{mt} + \underset{N*1}{\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t}} \\ \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t}\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t}') = \underset{N*N}{\boldsymbol{\Sigma}} \\ E(r_{mt}) = \mu_{m,} Var(r_{mt}) = \sigma_m^2 \\ Cov(r_{mt}, \boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t}) = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\mathbf{r_t} = (r_{it}, \ldots, r_{Nt})', t = 1, \ldots, T$$

$$\mathbf{r_t} \sim iidN(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

时间序列：多资产估计与检验

检验方法

- ✓ 沃德（Wald）检验
- ✓ 似然比（LR）检验
- ✓ 拉格朗日乘子（LM）检验

模型$M(\theta)$：极大似然函数为L，无限制模型的极大似然估计值$\hat{\theta}$，

限制条件$r(\theta)=0$，限制模型的极大似然估计值$\tilde{\theta}$

$$\text{Wald: } r(\hat{\theta}) \approx r(\tilde{\theta}) \approx 0$$

$$\text{LR: } \quad L(\hat{\theta}) - L(\tilde{\theta}) \approx 0$$

$$\text{LM: } \quad \frac{\partial L(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} = \frac{\partial L(\tilde{\theta})}{\partial \tilde{\theta}} \approx 0$$

时间序列：多资产估计与检验

Wald Test 检验步骤

- 利用最小二乘法估计模型参数 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\Sigma}$
- 计算Wald检验统计量

$$W_{\chi^2} = T\left[1 + \frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]^{-1} \hat{\alpha}^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\alpha} \sim \chi_N^2$$

$$W_F = \frac{T-N-1}{N}\left[1 + \frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]^{-1} \hat{\alpha}^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\alpha} \sim F(N, T-N-1)$$

- 根据统计量计算 *p*-value（chi2cdf, fcdf）

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{r}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}})(r_{mt} - \hat{\mu}_m)}{\sum_{t=1}^{T}(r_{mt} - \hat{\mu}_m)^2}$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\boldsymbol{\mu}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}\hat{\mu}_m$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T}\left[\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{r}_t - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} r_{mt})(\mathbf{r}_t - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} r_{mt})'\right]$$

时间序列：多资产估计与检验

LR Test 检验步骤

- 估计**限制**模型的参数（$\alpha_i = 0$）
- 估计**无限制**模型的参数
- 构造统计量（|A|矩阵A的行列式）

$$S_{\mathrm{LR},\,\chi^2} = T\left(\log|\tilde{\Sigma}| - \log|\hat{\Sigma}|\right) \sim \chi_N^2$$

- 根据统计量计算 p-value

限制模型

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \mathbf{r}_t r_{mt}}{\sum_{t=1}^{T} r_{mt}^2}$$

$$\tilde{\Sigma} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\mathbf{r}_t - \tilde{\beta} r_{mt}\right)\left(\mathbf{r}_t - \tilde{\beta} r_{mt}\right)^{\mathrm{T}}$$

无限制模型

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{r}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}})(r_{mt} - \hat{\mu}_m)}{\sum_{t=1}^{T}(r_{mt} - \hat{\mu}_m)^2}$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\boldsymbol{\mu}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}\hat{\mu}_m$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T}\left[\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{r}_t - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} r_{mt})(\mathbf{r}_t - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} r_{mt})'\right]$$

时间序列：多资产估计与检验

LM Test 检验步骤

- 估计**限制模型**的参数（$\alpha_i = 0$）
- 计算**无限制**模型似然函数的**得分向量**和**信息矩阵** $s(\theta) = \left.\dfrac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\{\alpha_i=0,\ \tilde{\theta}\}}$, $I(\theta) = -\mathrm{E}\left[\dfrac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\right] = -\mathrm{E}\left[\left.\dfrac{\partial s(\theta)}{\partial\theta}\right]\right|_{\theta=\{\alpha_i=0,\ \tilde{\theta}\}}$
- 构造统计量

$$S_{\mathrm{LM},\,\chi^2} = s(\alpha_i = 0, \tilde{\theta})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I}^{-1}(\alpha_i = 0, \tilde{\theta}) s(\alpha_i = 0, \tilde{\theta}) \sim \chi^2_N$$

- 根据统计量计算 p-value

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \mathbf{r}_t r_{mt}}{\sum_{t=1}^{T} r_{mt}^2}$$

$$\tilde{\Sigma} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\mathbf{r}_t - \tilde{\beta} r_{mt}\right)\left(\mathbf{r}_t - \tilde{\beta} r_{mt}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$s(\theta) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \log L(\theta)}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial \log L(\theta)}{\partial \beta} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{I}(\theta) = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial\alpha\partial\alpha} & -\dfrac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial\alpha\partial\beta} \\ -\dfrac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial\beta\partial\alpha} & -\dfrac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial\beta\partial\beta} \end{bmatrix}$$

时间序列：多资产估计与检验

CAPM的多资产检验，以贵州茅台、五粮液、山西汾酒、酒鬼酒、古井贡酒、泸州老窖为例。

数据

- **资产数据：2001-2018 贵州茅台、五粮液、山西汾酒、酒鬼酒、古井贡酒、泸州老窖日度数据；**
- **市场数据：2001-2018 沪深300指数日度数据；**
- **无风险利率：2001-2018 无风险利率。**

0data_5stocks_daily_price_2001-2010.csv
0data_5stocks_daily_price_2011-2015.csv
0data_5stocks_daily_price_2015-2018.csv
0data_Index_daily_price_2001-2018.csv
0data_stock_daily_price_2001-2018.csv

金融计算 数值分析 MATLAB编程

时间序列：多资产估计与检验

```
Wald Test1, Wald Test2,    LR Test,    LM Test
  10.48369,    1.74291,  10.46408,  10.44452
   0.10571,    0.10711,   0.10642,   0.10714
```

- **联合检验不能拒绝原假设，因此，检验股票不存在超额回报率。**
- **结论：多资产联合检验支持CAPM**

横截面：排序法

- 惯性效应：过去表现好的股票（赢家）会继续表现好，过去表现差的股票（输家）会需继续表现差
- 反转效应：过去表现好的股票会表现差，过去表现差的股票会表现好

如何实证检验？排序法！

横截面：排序法

启发：

1. 构建赢家组合和输家股票组合
2. 计算赢家组合和输家组合的平均收益率
3. 对两个组合收益率进行差异性检验

横截面：排序法

排序法步骤：

1. t 时刻 构建投资组合

- 计算前N个月的累积收益率
- 将股票累积收益率排序、分组构造投资组合

2. t 时刻 持有投资组合

- 计算持有投资组合M个月的累积收益率

横截面：排序法

排序法步骤：

3. $t \to t+1$，重新分组构造投资组合，计算组合收益率（重复1, 2步）

因此，在$t = 1, 2, \ldots, T$，可有：

赢家组合收益率序列：$\{R_1^H, R_2^H, R_3^H, \ldots, R_T^H\}$

输家组合收益率序列：$\{R_1^L, R_2^L, R_3^L, \ldots, R_T^L\}$

计算高低β组合的平均收益率

$$\bar{R}^H = \frac{1}{T}\left[R_1^H + R_2^H + R_3^H + \cdots + R_T^H\right]$$

$$\bar{R}^L = \frac{1}{T}\left[R_1^L + R_2^L + R_3^L + \cdots + R_T^L\right]$$

横截面：排序法

排序法步骤：

4. 计算 t 统计量

零假设： $H_0 : \bar{R}^H - \bar{R}^L = 0$

$$t = \frac{\bar{R}^H - \bar{R}^L}{s_{\bar{R}^H - \bar{R}^L}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$s_{\bar{R}^H - \bar{R}^L} = \sqrt{\frac{s_H^2}{T} + \frac{s_L^2}{T}}, \quad s_i = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}(R_t^i - \bar{R}^i)^2}{T-1}}, \; i = H, L$$

若赢家和输家的平均收益率没有显著区别，不存在动量和反转效应。

惯性：赢家收益大于输家收益；反转：赢家收益小于输家收益

横截面：排序法

数据：1990-2009, 上海股市

表 3－4　基于过去收益率构造的五分位投资组合的平均收益率

历史收益率	五分位	持有期			
		1 个月	3 个月	6 个月	12 个月
1 个月	输家 Q1	2.108%	5.623%	12.229%	25.960%
	Q2	2.083%	5.960%	12.675%	27.267%
	Q3	1.791%	5.629%	12.435%	27.395%
	Q4	1.393%	4.993%	11.619%	27.141%
	赢家 Q5	0.833%	3.745%	9.620%	24.901%
	Q5－Q1	－1.275%	－1.877%	－2.609%	－1.058%

存在反转效应！！！

横截面：排序法

数据：1990-2009, 上海股市

表 3－5 基于过去收益率（跳过 1 个月）构造的五分位投资组合的平均收益率

历史收益率	五分位	持有期			
		1 个月	3 个月	6 个月	12 个月
1 个月	输家 Q1	1.841%	5.038%	11.315%	25.927%
	Q2	1.795%	5.513%	12.001%	26.869%
	Q3	1.649%	5.369%	12.219%	27.044%
	Q4	1.606%	5.098%	11.744%	27.152%
	赢家 Q5	1.130%	4.096%	10.267%	25.013%
	Q5－Q1	－0.711%	－0.942%	－1.049%	－0.914%

反转效应虽然减弱，但是依然存在！！！