投资组合优化中的协方差矩阵估计

蒋志强

zqjiang.ecust@qq.com

投资组合问题

问题：投资于 n 种风险资产，资产怎么买？

不要把鸡蛋放到同一个篮子里面

方法一：等权重法

$$w_i = \frac{1}{N} \text{ for } i = 1, \ldots, N$$

方法二：价值权重法

$$w_i = \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{N} x_j}$$

其中 x_i 代表第 i 种风险资产的市值

思路一：最小化期望方差（风险）

假设可预测风险资产的如下信息：

- 超额收益的一阶矩：均值 $\underset{(N\times 1)}{\hat{\mu}}$
- 超额收益的二阶矩：方差-协方差矩阵（风险） $\underset{(N\times N)}{\hat{\Sigma}}$

思路一：在给定约束条件下最小化期望方差

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}'\hat{\Sigma}\mathbf{w} \text{ subject to } \hat{\mu}'\mathbf{w} = \mu_p,\ \iota_N'\mathbf{w} = 1$$

权重向量
- N-vector of portfolio weights $\Rightarrow \mathbf{w} = [\ w_1 \quad \cdots \quad w_N\ ]'$

期望收益
- Expected portfolio excess return $\Rightarrow \hat{\mu}'\mathbf{w}$

期望方差
- Expected portfolio variance $\Rightarrow \mathbf{w}'\hat{\Sigma}\mathbf{w}$

权重和为1
- Fully invested $\Rightarrow \iota_N'\mathbf{w} = 1$

思路一：最小化期望方差（风险）

求解：在给定约束条件下<u>最小化期望风险</u>

- $\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}'\hat{\Sigma}\mathbf{w}$ subject to $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{b}$

  m个线性约束条件

  - Set of m linear constraints $\Rightarrow \underset{(m\times N)}{\mathbf{A}}$ & $\underset{(m\times 1)}{\mathbf{b}}$

  最优解

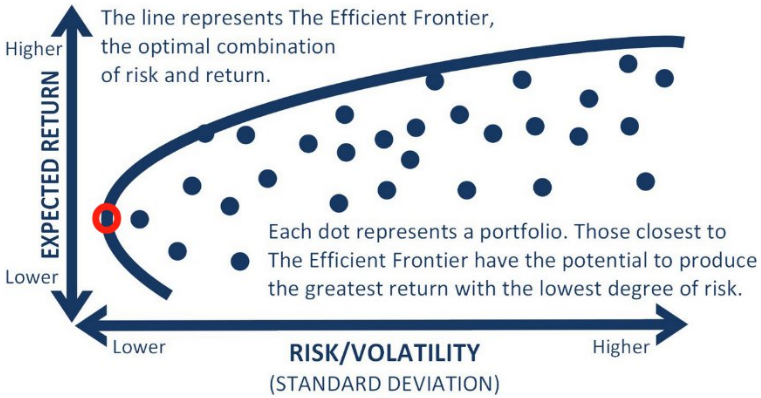
  - Solution $\Rightarrow \boxed{\mathbf{w}^* = \hat{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\hat{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{b}}$

- $\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}'\hat{\Sigma}\mathbf{w}$ subject to $\underbrace{\hat{\mu}'\mathbf{w} = \mu_p}_{\text{return target}}, \ \underbrace{\iota_N'\mathbf{w} = 1}_{\text{fully invested}}$

  - $\mathbf{A} = [\ \hat{\mu} \quad \iota_N\ ]'$
  - $\mathbf{b} = [\ \mu_p \quad 1\ ]'$

思路一：最小化期望方差（风险）

最小方差组合



- Minimum variance portfolio
  - $\min\limits_{\mathbf{w}} \mathbf{w}'\hat{\Sigma}\mathbf{w}$ subject to $\underbrace{\boldsymbol{\iota}'\mathbf{w} = 1}_{\text{fully invested}}$
  - General problem with $\mathbf{A} = \boldsymbol{\iota}_N'$, $b = 1$
    - Solution $\Rightarrow \boxed{\mathbf{w}^* = \hat{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\iota}_N(\boldsymbol{\iota}_N'\hat{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\iota}_N)^{-1}}$
  - Left edge of efficient frontier

思路二：最大化期望效用

期望效用定义：

$$E(Rx_p) - 0.5\,\gamma\,\text{var}(Rx_p)$$

超额收益率

- $Rx_p \Rightarrow$ portfolio excess return

风险偏好系数

- $\gamma \Rightarrow$ coefficient of relative risk aversion

最大化期望效用（可无限制借贷无风险资产R_f）

- $\max\limits_{\mathbf{w}}\ \hat{\boldsymbol{\mu}}'\mathbf{w} - 0.5\gamma\mathbf{w}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{w}$
  - Solution $\Rightarrow \mathbf{w}^* = \frac{1}{\gamma}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}$
- $1 - \boldsymbol{\iota}_N'\mathbf{w}^*$ invested in risk-free asset $\Rightarrow R_p = \mathbf{w}^{*\prime}\mathbf{Rx} + R_f$

无风险资产的权重

总收益率

思路二:最大化期望效用

最大化期望效用(全部投资风险资产)

- $\max_{\mathbf{w}} \hat{\mu}'\mathbf{w} - 0.5\gamma\,\mathbf{w}'\hat{\Sigma}\mathbf{w}$ subject to $\iota_N'\mathbf{w} = 1$
  - $\min_{\mathbf{w}} 0.5\gamma\,\mathbf{w}'\hat{\Sigma}\mathbf{w} - \hat{\mu}'\mathbf{w}$ subject to $\iota_N'\mathbf{w} = 1$
- General problem $\Rightarrow \min_{\mathbf{w}} 0.5\mathbf{w}'\mathbf{Q}\mathbf{w} + \mathbf{c}'\mathbf{w}$ subject to $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{b}$
- Solution to general problem
  - $\mathbf{w}^* = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{Q}^{-1}[\mathbf{I}_N - \mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}]\mathbf{c}$

$\mathbf{Q} = \gamma\hat{\Sigma}$ $\qquad$ $\mathbf{c} = -\hat{\mu}$ $\qquad$ $\mathbf{A} = \iota_N'$ $\qquad$ $\mathbf{b} = 1$

最优权重求解

最优权重求解所需的三个参数

1. 投资者风险偏好系数 γ
2. 组合期望收益 $\underset{(N\times 1)}{\hat{\mu}}$

（估计方法:如何预测收益率?）

3. 组合期望方差 $\underset{(N\times N)}{\hat{\Sigma}}$

（估计方法: 如何估计方差-协方差矩阵?）

最优权重求解

问题一：如何估计收益率？

复习“收益率可预测性的实证检验”

问题二：如何估计方差-协方差矩阵？

- 方法1：样本方差-协方差矩阵
- 方法2：常量估计法
- 方法3：因子模型估计法
- 方法4：压缩估计法
- 方法5：指数加权移动平均估计法

期望方差估计

方法1:样本方差-协方差矩阵

- $$\hat{\Sigma}^{S}_{t+1} = \begin{bmatrix} s_1^{2,(t)} & c_{1,2}^{(t)} & \cdots & c_{1,N}^{(t)} \\ c_{1,2}^{(t)} & s_2^{2,(t)} & \cdots & c_{2,N}^{(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1,N}^{(t)} & c_{2,N}^{(t)} & \cdots & s_N^{2,(t)} \end{bmatrix}$$

- $$s_i^{2,(t)} = \frac{1}{t-1}\sum_{s=1}^{t}\left(Rx_{i,s} - \overline{Rx}_i^{(t)}\right)^2$$

- $$\overline{Rx}_i^{(t)} = \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} Rx_{i,s}$$

- $$c_{i,j}^{(t)} = \frac{1}{t-1}\sum_{s=1}^{t}\left(Rx_{i,s} - \overline{Rx}_i^{(t)}\right)\left(Rx_{j,s} - \overline{Rx}_j^{(t)}\right)$$

适用条件$T>>N$;小样本表现差;$T<N$时,方差-协方差矩阵奇异

期望方差估计

方法2:常量估计法

- 设 Σ 矩阵对角线的方差相同，取样本方差的均值
- 设 Σ 矩阵非对角线的协方差相同，取$N(N-1)/2$个样本协方差的均值

$$\hat{\Sigma}^{S}_{t+1}=\begin{bmatrix} s_1^{2,(t)} & c_{1,2}^{(t)} & \cdots & c_{1,N}^{(t)} \\ c_{1,2}^{(t)} & s_2^{2,(t)} & \cdots & c_{2,N}^{(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1,N}^{(t)} & c_{2,N}^{(t)} & \cdots & s_N^{2,(t)} \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\Sigma}^{C}_{t+1}=\begin{bmatrix} \bar{s}^{2,(t)} & \bar{c}^{(t)} & \cdots & \bar{c}^{(t)} \\ \bar{c}^{(t)} & \bar{s}^{2,(t)} & \cdots & \bar{c}^{(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{c}^{(t)} & \bar{c}^{(t)} & \cdots & \bar{s}^{2,(t)} \end{bmatrix}$$

期望方差估计

方法3：因子模型估计法

因子模型 $Rx_{i,t} = \alpha_i + \sum_{k=1}^{K} \beta_{i,k} f_{k,t} + \varepsilon_{i,t}$ for $i = 1, \ldots, N$

- $\mathbf{Rx}_t = [\ Rx_{1,t} \quad \cdots \quad Rx_{N,t}\ ]'$
- $\boldsymbol{\alpha} = [\ \alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_N\ ]'$
- $\mathrm{B} = [\ \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_N\ ]'$
  - $\beta_i = [\ \beta_{i,1} \quad \cdots \quad \beta_{i,K}\ ]'$
- $\mathbf{f}_t = [\ f_{1,t} \quad \cdots \quad f_{K,t}\ ]'$
- $\varepsilon_t = [\ \varepsilon_{1,t} \quad \cdots \quad \varepsilon_{N,t}\ ]'$

矩阵形式 $\mathbf{Rx}_t = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B}\mathbf{f}_t + \varepsilon_t$

因子模型估计法 $\hat{\Sigma}_{t+1}^{\mathrm{FM}} = \hat{\mathrm{B}}^{(t)} \hat{\Sigma}_f^{(t)} \hat{\mathrm{B}}^{(t)\prime} + \hat{\Sigma}_{\varepsilon}^{(t)}$

$\hat{\mathrm{B}}^{(t)}$ 因子模型在 t 时刻OLS的参数估计（迭代或滚动窗口）

$\hat{\Sigma}_f^{(t)}$ 因子 f 的样本方差-协方差矩阵（因子数 K 较小适用）

$\hat{\Sigma}_{\varepsilon}^{(t)}$ 对角线元素满足 $\left[\hat{\Sigma}_{\varepsilon}^{(t)}\right]_{ii} = \hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^{2,(t)}$

期望方差估计

方法4:压缩估计法

- 因子模型估计法:估计相对精确但有偏
- 样本方差-协方差矩阵估计:无偏估计但不够精确

取两者之精华: shrink $\hat{\Sigma}^{\mathrm{S}}_{t+1}$ toward $\hat{\Sigma}^{\mathrm{FM}}_{t+1}$

压缩估计法:

$$\hat{\Sigma}^{\mathrm{Shrink}}_{t+1} = c\hat{\Sigma}^{\mathrm{FM}}_{t+1} + (1-c)\hat{\Sigma}^{\mathrm{S}}_{t+1} \text{ for } 0 \leqslant c \leqslant 1$$

- $c = 0 \Rightarrow \hat{\Sigma}^{\mathrm{Shrink}}_{t+1} = \hat{\Sigma}^{\mathrm{S}}_{t+1}$ (no shrinkage)
- $c = 1 \Rightarrow \hat{\Sigma}^{\mathrm{Shrink}}_{t+1} = \hat{\Sigma}^{\mathrm{FM}}_{t+1}$ ('total' shrinkage)

期望方差估计

方法5:指数加权移动平均估计法 EWMA

$$\hat{\Sigma}_{t+1}^{\mathrm{EWMA}} = (1-\lambda)\left(\mathbf{Rx}_t - \overline{\mathbf{Rx}}^{(t)}\right)\left(\mathbf{Rx}_t - \overline{\mathbf{Rx}}^{(t)}\right)' + \lambda \hat{\Sigma}_t^{\mathrm{EWMA}}$$

- Pre-specify EWMA parameter $\Rightarrow 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$
  - Monthly data $\Rightarrow \lambda \approx 0.95$
- $\overline{\mathbf{Rx}}^{(t)} = \left[\begin{array}{ccc} \overline{Rx}_1^{(t)} & \cdots & \overline{Rx}_N^{(t)} \end{array}\right]'$

初值:初始样本的样本方差-协方差矩阵