# 中国股市投资组合优化协方差矩阵的估计

蒋志强

zqjiang.ecust@qq.com

# 期望方差估计

## 方法1：样本方差-协方差矩阵

- $$\hat{\Sigma}^S_{t+1} = \begin{bmatrix} s_1^{2,(t)} & c_{1,2}^{(t)} & \cdots & c_{1,N}^{(t)} \\ c_{1,2}^{(t)} & s_2^{2,(t)} & \cdots & c_{2,N}^{(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1,N}^{(t)} & c_{2,N}^{(t)} & \cdots & s_N^{2,(t)} \end{bmatrix}$$
  - $$s_i^{2,(t)} = \frac{1}{t-1}\sum_{s=1}^{t}\left(Rx_{i,s} - \overline{Rx}_i^{(t)}\right)^2$$
    - $$\overline{Rx}_i^{(t)} = \tfrac{1}{t}\textstyle\sum_{s=1}^{t} Rx_{i,s}$$
  - $$c_{i,j}^{(t)} = \tfrac{1}{t-1}\textstyle\sum_{s=1}^{t}\left(Rx_{i,s} - \overline{Rx}_i^{(t)}\right)\left(Rx_{j,s} - \overline{Rx}_j^{(t)}\right)$$

**适用条件$T>>N$；小样本表现差 ；$T<N$时，方差-协方差矩阵奇异**

# 期望方差估计

## 方法2：常量估计法

- 设 $\Sigma$ 矩阵对角线的方差相同，取样本方差的均值
- 设 $\Sigma$ 矩阵非对角线的协方差相同，取$N(N-1)/2$个样本协方差的均值

$$\hat{\Sigma}^{S}_{t+1}=\begin{bmatrix} s_1^{2,(t)} & c_{1,2}^{(t)} & \cdots & c_{1,N}^{(t)} \\ c_{1,2}^{(t)} & s_2^{2,(t)} & \cdots & c_{2,N}^{(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1,N}^{(t)} & c_{2,N}^{(t)} & \cdots & s_N^{2,(t)} \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\Sigma}^{C}_{t+1}=\begin{bmatrix} \bar{s}^{2,(t)} & \bar{c}^{(t)} & \cdots & \bar{c}^{(t)} \\ \bar{c}^{(t)} & \bar{s}^{2,(t)} & \cdots & \bar{c}^{(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{c}^{(t)} & \bar{c}^{(t)} & \cdots & \bar{s}^{2,(t)} \end{bmatrix}$$

# 期望方差估计

## 方法3：因子模型估计法

**因子模型** $Rx_{i,t} = \alpha_i + \sum_{k=1}^{K} \beta_{i,k} f_{k,t} + \varepsilon_{i,t}$ for $i = 1, \ldots, N$

- $\mathbf{Rx}_t = [\ Rx_{1,t} \ \cdots \ Rx_{N,t}\ ]'$
- $\boldsymbol{\alpha} = [\ \alpha_1 \ \cdots \ \alpha_N\ ]'$
- $\mathbf{B} = [\ \boldsymbol{\beta}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{\beta}_N\ ]'$
  - $\boldsymbol{\beta}_i = [\ \beta_{i,1} \ \cdots \ \beta_{i,K}\ ]'$
- $\mathbf{f}_t = [\ f_{1,t} \ \cdots \ f_{K,t}\ ]'$
- $\boldsymbol{\varepsilon}_t = [\ \varepsilon_{1,t} \ \cdots \ \varepsilon_{N,t}\ ]'$

**矩阵形式** $\mathbf{Rx}_t = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B}\mathbf{f}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t$

**因子模型估计法** $\hat{\Sigma}_{t+1}^{FM} = \hat{B}^{(t)} \hat{\Sigma}_f^{(t)} \hat{B}^{(t)\prime} + \hat{\Sigma}_\varepsilon^{(t)}$

$\hat{B}^{(t)}$ 因子模型在 $t$ 时刻OLS的参数估计（迭代或滚动窗口）

$\hat{\Sigma}_f^{(t)}$ 因子 $f$ 的样本方差-协方差矩阵（因子数 $K$ 较小适用）

$\hat{\Sigma}_\varepsilon^{(t)}$ 对角线元素满足 $\left[\hat{\Sigma}_\varepsilon^{(t)}\right]_{ii} = \hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^{2,(t)}$

# 期望方差估计

## 方法4：压缩估计法

- 因子模型估计法：**估计相对精确但有偏**
- 样本方差-协方差矩阵估计：**无偏估计但不够精确**

**取两者之精华：** shrink $\hat{\Sigma}^{\text{S}}_{t+1}$ toward $\hat{\Sigma}^{\text{FM}}_{t+1}$

**压缩估计法：**

$$\hat{\Sigma}^{\text{Shrink}}_{t+1} = c\hat{\Sigma}^{\text{FM}}_{t+1} + (1-c)\hat{\Sigma}^{\text{S}}_{t+1} \text{ for } 0 \leqslant c \leqslant 1$$

- $c = 0 \Rightarrow \hat{\Sigma}^{\text{Shrink}}_{t+1} = \hat{\Sigma}^{\text{S}}_{t+1}$ (no shrinkage)
- $c = 1 \Rightarrow \hat{\Sigma}^{\text{Shrink}}_{t+1} = \hat{\Sigma}^{\text{FM}}_{t+1}$ ('total' shrinkage)

# 期望方差估计

## 方法5：指数加权移动平均估计法 EWMA

$$\hat{\Sigma}_{t+1}^{\mathrm{EWMA}} = (1-\lambda)\left(\mathbf{Rx}_t - \overline{\mathbf{Rx}}^{(t)}\right)\left(\mathbf{Rx}_t - \overline{\mathbf{Rx}}^{(t)}\right)' + \lambda\hat{\Sigma}_t^{\mathrm{EWMA}}$$

- Pre-specify EWMA parameter $\Rightarrow 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$
  - Monthly data $\Rightarrow \lambda \approx 0.95$
- $\overline{\mathbf{Rx}}^{(t)} = \left[\ \overline{Rx}_1^{(t)} \quad \cdots \quad \overline{Rx}_N^{(t)}\ \right]'$

**初值：初始样本的样本方差-协方差矩阵**

# 示例（16级期末考试真题）

六、(25 分) 计算题（最优投资组合权重计算）

利用第四题 5 个组合的数据，计算最优投资组合权重。

1. 利用整个数据样本计算方差-协方差矩阵 $\hat{\Sigma}^S$；
2. 利用整个数据样本，采用压缩估计法，计算方差-协方差矩阵 $\hat{\Sigma}^{\text{shrink}}$，其中因子模型使用 CAPM，压缩系数 $c = 0.5$；
3. 将股票收益率的均值作为期望收益，结合方差-协方差矩阵的估计值 $\hat{\Sigma}^S$ 和 $\hat{\Sigma}^{\text{shrink}}$，在最小化期望方差的条件下分别估计最优权重，并比较计算结果进行讨论。

(注意：答题时需给出解题原理、详细步骤和计算结果。**千万不要只给计算结果，计算结果保留至小数点后四位。**若利用 MATLAB 函数求解，需标注 MATLAB 版本，写出 MATLAB 函数及其参数设置。)