

Cálculo de Programas Trabalho Prático MiEI+LCC — 2019/20

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Junho de 2020

Grupo nr.	10
a89605	Carlos Miguel Luzia de Carvalho
a89519	José Pedro Carvalho Costa
a89458	Francisco Correia Franco

1 Preâmbulo

A disciplina de **Cálculo de Programas** tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, restringe-se a aplicação deste método à programação funcional em **Haskell**. Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em **Haskell**. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, validá-los, e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita “**literária**” [?], cujo princípio base é o seguinte:

Um programa e a sua documentação devem coincidir.

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp1920t.pdf` que está a ler é já um exemplo de **programação literária**: foi gerado a partir do texto fonte `cp1920t.lhs`¹ que encontrará no **material pedagógico** desta disciplina descompactando o ficheiro `cp1920t.zip` e executando

```
$ lhs2TeX cp1920t.lhs > cp1920t.tex
$ pdflatex cp1920t
```

em que **lhs2tex** é um pre-processor que faz “pretty printing” de código Haskell em **L^AT_EX** e que deve desde já instalar executando

```
$ cabal install lhs2tex
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp1920t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em **Haskell**, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp1920t.lhs
```

¹O suffixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

Abra o ficheiro `cp1920t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

vai ser seleccionado pelo **GHCI** para ser executado.

3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de três alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na [página da disciplina](#) na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo **C** com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com **BibTeX**) e o índice remissivo (com **makeindex**),

```
$ bibtex cp1920t.aux
$ makeindex cp1920t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário **QuickCheck**, que ajuda a validar programas em **Haskell** e a biblioteca **Gloss** para geração de gráficos 2D:

```
$ cabal install QuickCheck gloss
```

Para testar uma propriedade **QuickCheck** *prop*, basta invocá-la com o comando:

```
> quickCheck prop
+++ OK, passed 100 tests.
```

Pode mesmo controlar o número de casos de teste e sua complexidade utilizando o comando:

```
> quickCheckWith stdArgs { maxSuccess = 200, maxSize = 10 } prop
+++ OK, passed 200 tests.
```

Qualquer programador tem, na vida real, de ler e analisar (muito!) código escrito por outros. No anexo **B** disponibiliza-se algum código **Haskell** relativo aos problemas que se seguem. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Problema 1

Pretende-se implementar um sistema de manutenção e utilização de um dicionário. Este terá uma estrutura muito peculiar em memória. Será construída uma árvore em que cada nodo terá apenas uma letra da palavra e cada folha da respectiva árvore terá a respectiva tradução (um ou mais sinónimos). Deverá ser possível:

- *dic_rd* — procurar traduções para uma determinada palavra
- *dic_in* — inserir palavras novas (palavra e tradução)
- *dic_imp* — importar dicionários do formato “lista de pares palavra-tradução”
- *dic_exp* — exportar dicionários para o formato “lista de pares palavra-tradução”.

A implementação deve ser baseada no módulo **Exp.hs** que está incluído no material deste trabalho prático, que deve ser estudado com atenção antes de abordar este problema.

No anexo **B** é dado um dicionário para testes, que corresponde à figura **1**. A implementação proposta deverá garantir as seguintes propriedades:



Figura 1: Representação em memória do dicionário dado para testes.

Propriedade [QuickCheck] 1 Se um dicionário estiver normalizado (ver apêndice B) então não perdemos informação quando o representamos em memória:

$$\text{prop_dic_rep } x = \text{let } d = \text{dic_norm } x \text{ in } (\text{dic_exp} \cdot \text{dic_imp}) d \equiv d$$

Propriedade [QuickCheck] 2 Se um significado s de uma palavra p já existe num dicionário então adicioná-lo em memória não altera nada:

$$\begin{aligned} \text{prop_dic_red } p \ s \ d \\ | \text{ dic_red } p \ s \ d = \text{dic_imp } d \equiv \text{dic_in } p \ s \ (\text{dic_imp } d) \\ | \text{ otherwise } = \text{True} \end{aligned}$$

Propriedade [QuickCheck] 3 A operação dic_rd implementa a procura na correspondente exportação do dicionário:

$$\text{prop_dic_rd } (p, t) = \text{dic_rd } p \ t \equiv \text{lookup } p \ (\text{dic_exp } t)$$

Problema 2

Árvores binárias (elementos do tipo **BTree**) são frequentemente usadas no armazenamento e procura de dados, porque suportam um vasto conjunto de ferramentas para procuras eficientes. Um exemplo de destaque é o caso das **árvores binárias de procura**, *i.e.* árvores que seguem o princípio de *ordenação*: para todos os nós, o filho à esquerda tem um valor menor ou igual que o valor no próprio nó; e de forma análoga, o filho à direita tem um valor maior ou igual que o valor no próprio nó. A Figura 2 apresenta dois exemplos de árvores binárias de procura.²

Note que tais árvores permitem reduzir *significativamente* o espaço de procura, dado que ao procurar um valor podemos sempre *reduzir a procura a um ramo* ao longo de cada nó visitado. Por exemplo, ao procurar o valor 7 na primeira árvore (t_1), sabemos que nos podemos restringir ao ramo da direita do nó com o valor 5 e assim sucessivamente. Como complemento a esta explicação, consulte também os **vídeos das aulas teóricas** (capítulo ‘pesquisa binária’).

Para verificar se uma árvore binária está ordenada, é útil ter em conta a seguinte propriedade: considere uma árvore binária cuja raiz tem o valor a , um filho s_1 à esquerda e um filho s_2 à direita. Assuma

² As imagens foram geradas com recurso à função *dotBt* (disponível neste documento). Recomenda-se o uso desta função para efeitos de teste e ilustração.



Figura 2: Duas árvores binárias de procura; a da esquerda vai ser designada por t_1 e a da direita por t_2 .

que os dois filhos estão ordenados; que o elemento *mais à direita* de t_1 é menor ou igual a a ; e que o elemento *mais à esquerda* de t_2 é maior ou igual a a . Então a árvore binária está ordenada. Dada esta informação, implemente as seguintes funções como catamorfismos de árvores binárias.

$\text{maisEsq} :: \text{BTree } a \rightarrow \text{Maybe } a$
 $\text{maisDir} :: \text{BTree } a \rightarrow \text{Maybe } a$

Seguem alguns exemplos dos resultados que se esperam ao aplicar estas funções à árvore da esquerda (t_1) e à árvore da direita (t_2) da Figura 2.

```
*Splay> maisDir t1
Just 16
*Splay> maisEsq t1
Just 1
*Splay> maisDir t2
Just 8
*Splay> maisEsq t2
Just 0
```

Propriedade [QuickCheck] 4 As funções maisEsq e maisDir são determinadas unicamente pela propriedade

$\text{prop_inv} :: \text{BTree } \text{String} \rightarrow \text{Bool}$
 $\text{prop_inv} = \text{maisEsq} \equiv \text{maisDir} \cdot \text{invBTree}$

Propriedade [QuickCheck] 5 O elemento *mais à esquerda* de uma árvore está presente no ramo da esquerda, a não ser que esse ramo esteja vazio:

$\text{propEsq } \text{Empty} = \text{property } \text{Discard}$
 $\text{propEsq } x@(Node(a, (t, s))) = (\text{maisEsq } t) \neq \text{Nothing} \Rightarrow (\text{maisEsq } x) \equiv \text{maisEsq } t$

A próxima tarefa deste problema consiste na implementação de uma função que insere um novo elemento numa árvore binária *preservando* o princípio de ordenação,

$\text{insOrd} :: (\text{Ord } a) \Rightarrow a \rightarrow \text{BTree } a \rightarrow \text{BTree } a$

e de uma função que verifica se uma dada árvore binária está ordenada,

$\text{isOrd} :: (\text{Ord } a) \Rightarrow \text{BTree } a \rightarrow \text{Bool}$

Para ambas as funções deve utilizar o que aprendeu sobre *catamorfismos e recursividade mútua*.

Sugestão: Se tiver problemas em implementar com base em catamorfismos estas duas últimas funções, tente implementar (com base em catamorfismos) as funções auxiliares

$\text{insOrd}' :: (\text{Ord } a) \Rightarrow a \rightarrow \text{BTree } a \rightarrow (\text{BTree } a, \text{BTree } a)$
 $\text{isOrd}' :: (\text{Ord } a) \Rightarrow \text{BTree } a \rightarrow (\text{Bool}, \text{BTree } a)$

tais que $\text{insOrd}' x = (\text{insOrd } x, \text{id})$ para todo o elemento x do tipo a e $\text{isOrd}' = \langle \text{isOrd}, \text{id} \rangle$.

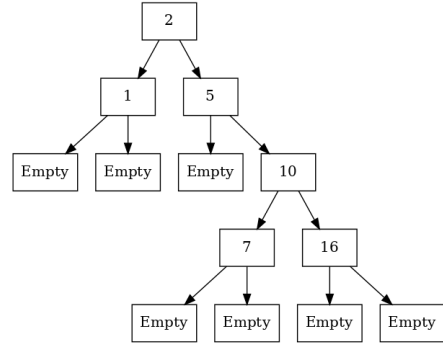


Figura 3: Exemplo de uma rotação à direita. A árvore da esquerda é a árvore original; a árvore da direita representa a rotação à direita correspondente.

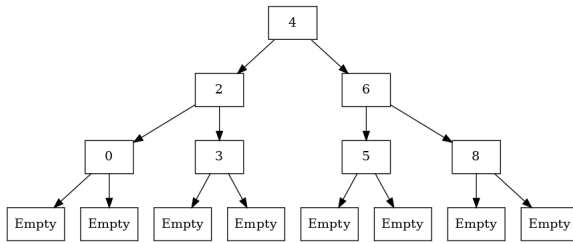


Figura 4: Exemplo de uma rotação à direita. A árvore da esquerda é a árvore original; a árvore da direita representa a rotação à direita correspondente.

Propriedade [QuickCheck] 6 Inserir uma sucessão de elementos numa árvore vazia gera uma árvore ordenada.

$prop_ord :: [Int] \rightarrow Bool$
 $prop_ord = isOrd \cdot (foldr insOrd Empty)$

As árvores binárias providenciam uma boa maneira de reduzir o espaço de procura. Mas podemos fazer ainda melhor: podemos aproximar da raiz os elementos da árvore que são mais acedidos, reduzindo assim o espaço de procura na *dimensão vertical*³. Esta operação é geralmente referida como *splaying* e é implementada com base naquilo a que chamamos *rotações à esquerda e à direita de uma árvore*.

Intuitivamente, a rotação à direita de uma árvore move todos os nós "uma casa para a sua direita". Formalmente, esta operação define-se da seguinte maneira:

1. Considere uma árvore binária e designe a sua raiz pela letra r . Se r não tem filhos à esquerda então simplesmente retornamos a árvore dada à entrada. Caso contrário,
2. designe o filho à esquerda pela letra l . A árvore que vamos retornar tem l na raiz, que mantém o filho à esquerda e adota r como o filho à direita. O orfão (*i.e.* o anterior filho à direita de l) passa a ser o filho à esquerda de r .

A rotação à esquerda é definida de forma análoga. As Figuras 3 e 4 apresentam dois exemplos de rotações à direita. Note que em ambos os casos o valor 2 subiu um nível na árvore correspondente. De facto, podemos sempre aplicar uma *sequência* de rotações numa árvore de forma a mover um dado nó para a raiz (dando origem portanto à referida operação de *splaying*).

Começe então por implementar as funções

³Note que nas árvores de binária de procura a redução é feita na dimensão horizontal.

```

rrot :: BTree a → BTree a
lrot :: BTree a → BTree a

```

de rotação à direita e à esquerda.

Propriedade [QuickCheck] 7 As rotações à esquerda e à direita preservam a ordenação das árvores.

```

prop_ord_pres_esq = forAll orderedBTree (isOrd · lrot)
prop_ord_pres_dir = forAll orderedBTree (isOrd · rrot)

```

De seguida implemente a operação de splaying

```

splay :: [Bool] → (BTree a → BTree a)

```

como um catamorfismo de listas. O argumento `[Bool]` representa um caminho ao longo de uma árvore, em que o valor `True` representa "seguir pelo ramo da esquerda" e o valor `False` representa "seguir pelo ramo da direita". O caminho ao longo de uma árvore serve para *identificar* unicamente um nó dessa árvore.

Propriedade [QuickCheck] 8 A operação de splay preserva a ordenação de uma árvore.

```

prop_ord_pres_splay :: [Bool] → Property
prop_ord_pres_splay path = forAll orderedBTree (isOrd · (splay path))

```

Problema 3

Árvores de decisão binárias são estruturas de dados usadas na área de **machine learning** para codificar processos de decisão. Geralmente, tais árvores são geradas por computadores com base num vasto conjunto de dados e reflectem o que o computador "aprendeu" ao processar esses mesmos dados. Segue-se um exemplo muito simples de uma árvore de decisão binária:



Esta árvore representa o processo de decisão relativo a ser preciso ou não levar um guarda-chuva para uma viagem, dependendo das condições climáticas. Essencialmente, o processo de decisão é efectuado ao "percorrer" a árvore, escolhendo o ramo da esquerda ou da direita de acordo com a resposta à pergunta correspondente. Por exemplo, começando da raiz da árvore, responder `["não", "não"]` leva-nos à decisão "não precisa" e responder `["não", "sim"]` leva-nos à decisão "precisa".

Árvores de decisão binárias podem ser codificadas em **Haskell** usando o seguinte tipo de dados:

```

data Bdt a = Dec a | Query (String, (Bdt a, Bdt a)) deriving Show

```

Note que o tipo de dados `Bdt` é parametrizado por um tipo de dados `a`. Isto é necessário, porque as decisões podem ser de diferentes tipos: por exemplo, respostas do tipo "sim ou não" (como apresentado acima), a escolha de números, ou **classificações**.

De forma a conseguirmos processar árvores de decisão binárias em **Haskell**, deve, antes de tudo, resolver as seguintes alíneas:

1. Definir as funções `inBdt`, `outBdt`, `baseBdt`, `cataBdt`, e `anaBdt`.
2. Apresentar no relatório o diagrama de `anaBdt`.

Para tomar uma decisão com base numa árvore de decisão binária t , o computador precisa apenas da estrutura de t (i.e. pode esquecer a informação nos nós da árvore) e de uma lista de respostas "sim ou não" (para que possa percorrer a árvore da forma desejada). Implemente então as seguintes funções na forma de *catamorfismos*:

1. $extLTree : Bdt\ a \rightarrow LTree\ a$ (esquece a informação presente nos nós de uma dada árvore de decisão binária).

Propriedade [QuickCheck] 9 A função $extLTree$ preserva as folhas da árvore de origem.

$$\begin{aligned} prop_pres_tips &:: Bdt\ Int \rightarrow Bool \\ prop_pres_tips &= tipsBdt \equiv tipsLTree \cdot extLTree \end{aligned}$$

2. $navLTree : LTree\ a \rightarrow ([Bool] \rightarrow LTree\ a)$ (navega um elemento de $LTree$ de acordo com uma sequência de respostas "sim ou não". Esta função deve ser implementada como um catamorfismo de $LTree$. Neste contexto, elementos de $[Bool]$ representam sequências de respostas: o valor $True$ corresponde a "sim" e portanto a "segue pelo ramo da esquerda"; o valor $False$ corresponde a "não" e portanto a "segue pelo ramo da direita".

Seguem alguns exemplos dos resultados que se esperam ao aplicar $navLTree$ a $(extLTree\ bdtGC)$, em que $bdtGC$ é a árvore de decisão binária acima descrita, e a uma sequência de respostas.

```
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) []
Fork (Leaf "Precisa",Fork (Leaf "Precisa",Leaf "N precisa"))
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False]
Fork (Leaf "Precisa",Leaf "N precisa")
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False,True]
Leaf "Precisa"
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False,True,True]
Leaf "Precisa"
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False,True,True,True]
Leaf "Precisa"
```

Propriedade [QuickCheck] 10 Percorrer uma árvore ao longo de um caminho é equivalente a percorrer a árvore inversa ao longo do caminho inverso.

$$\begin{aligned} prop_inv_nav &:: Bdt\ Int \rightarrow [Bool] \rightarrow Bool \\ prop_inv_nav\ t\ l &= \mathbf{let}\ t' = extLTree\ t\ \mathbf{in} \\ &\quad invLTree\ (navLTree\ t'\ l) \equiv navLTree\ (invLTree\ t')\ (fmap\ \neg\ l) \end{aligned}$$

Propriedade [QuickCheck] 11 Quanto mais longo for o caminho menos alternativas de fim irão existir.

$$\begin{aligned} prop_af &:: Bdt\ Int \rightarrow ([Bool],[Bool]) \rightarrow Property \\ prop_af\ t\ (l1,l2) &= \mathbf{let}\ t' = extLTree\ t \\ &\quad f = \mathbf{length} \cdot tipsLTree \cdot (navLTree\ t') \\ &\quad \mathbf{in}\ isPrefixOf\ l1\ l2 \Rightarrow (f\ l1 \geq f\ l2) \end{aligned}$$

Problema 4

Mónades são funtores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca **Probability** oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\mathbf{newtype}\ Dist\ a = D\ \{\mathit{unD} :: [(a, ProbRep)]\} \quad (1)$$

em que $ProbRep$ é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

Cada par (a, p) numa distribuição $d :: \text{Dist } a$ indica que a probabilidade de a é p , devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de d somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de A a E ,



será representada pela distribuição

```
d1 :: Dist Char
d1 = D [('A', 0.02), ('B', 0.12), ('C', 0.29), ('D', 0.35), ('E', 0.22)]
```

que o **GHCI** mostrará assim:

```
'D' 35.0%
'C' 29.0%
'E' 22.0%
'B' 12.0%
'A' 2.0%
```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições *uniformes*,

```
d2 = uniform (words "Uma frase de cinco palavras")
```

isto é

```
"Uma" 20.0%
"cinco" 20.0%
"de" 20.0%
"frase" 20.0%
"palavras" 20.0%
```

distribuição *normais*, eg.

```
d3 = normal [10..20]
```

etc.⁴ `Dist` forma um **mónade** cuja unidade é `return a = D [(a, 1)]` e cuja composição de Kleisli é (simplificando a notação)

$$(f \bullet g) a = [(y, q * p) \mid (x, p) \leftarrow g\ a, (y, q) \leftarrow f\ x]$$

em que $g : A \rightarrow \text{Dist } B$ e $f : B \rightarrow \text{Dist } C$ são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*. Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular da programação monádica. Vamos estudar a aplicação deste mónade ao exercício anterior, tendo em conta o facto de que nem sempre podemos responder com 100% de certeza a perguntas presentes em árvores de decisão.

Considere a seguinte situação: a Anita vai trabalhar no dia seguinte e quer saber se precisa de levar guarda-chuva. Na verdade, ela tem autocarro de porta de casa até ao trabalho, e portanto as condições meteorológicas não são muito significativas; a não ser que seja segunda-feira... Às segundas é dia de feira e o autocarro vai sempre lotado! Nesses dias, ela prefere fazer a pé o caminho de casa ao trabalho, o que a obriga a levar guarda-chuva (nos dias de chuva). Abaixo está apresentada a árvore de decisão

⁴Para mais detalhes ver o código fonte de **Probability**, que é uma adaptação da biblioteca **PHP** ("Probabilistic Functional Programming"). Para quem quiser souber mais recomenda-se a leitura do artigo [?].

respectiva a este problema.



Assuma que a Anita não sabe em que dia está, e que a previsão da chuva para a ida é de 80% enquanto que a previsão de chuva para o regresso é de 60%. *A Anita deve levar guarda-chuva?* Para responder a esta questão, iremos tirar partido do que se aprendeu no exercício anterior. De facto, a maior diferença é que agora as respostas ("sim" ou "não") são dadas na forma de uma distribuição sobre o tipo de dados *Bool*. Implemente como um catamorfismo de *LTree* a função

$$bnavLTree :: LTree\ a \rightarrow ((BTree\ Bool) \rightarrow LTree\ a)$$

que percorre uma árvore dado um caminho, *não* do tipo $[Bool]$, mas do tipo $BTree\ Bool$. O tipo $BTree\ Bool$ é necessário na presença de incerteza, porque neste contexto não sabemos sempre qual a próxima pergunta a responder. Teremos portanto que ter resposta para todas as perguntas na árvore de decisão.

Seguem alguns exemplos dos resultados que se esperam ao aplicar *bnavLTree* a (*extLTree* *anita*), em que *anita* é a árvore de decisão acima descrita, e a uma árvore binária de respostas.

```

*ML> bnavLTree (extLTree anita) (Node(True, (Empty,Empty)))
Fork (Leaf "Precisa",Fork (Leaf "Precisa",Leaf "N precisa"))
*ML> bnavLTree (extLTree anita) (Node(True, (Node(True, (Empty,Empty)),Empty)))
Leaf "Precisa"
*ML> bnavLTree (extLTree anita) (Node(False, (Empty,Empty)))
Leaf "N precisa"

```

Por fim, implemente como um catamorfismo de *LTree* a função

$$pbnvLTree :: LTree\ a \rightarrow ((BTree\ (Dist\ Bool)) \rightarrow Dist\ (LTree\ a))$$

que deverá consistir na "monadificação" da função *bnavLTree* via a mónade das probabilidades. Use esta última implementação para responder se a Anita deve levar guarda-chuva ou não dada a situação acima descrita.

Problema 5

Os **mosaicos de Truchet** são padrões que se obtêm gerando aleatoriamente combinações bidimensionais de ladrilhos básicos. Os que se mostram na figura 5 são conhecidos por ladrilhos de Truchet-Smith. A figura 6 mostra um exemplo de mosaico produzido por uma combinação aleatória de 10x10 ladrilhos *a* e *b* (cf. figura 5).

Neste problema pretende-se programar a geração aleatória de mosaicos de Truchet-Smith usando o mónade **Random** e a biblioteca **Gloss** para produção do resultado. Para uniformização das respostas, deverão ser seguidas as seguintes condições:

- Cada ladrilho deverá ter as dimensões 80x80
- O programa deverá gerar mosaicos de quaisquer dimensões, mas deverá ser apresentado como figura no relatório o mosaico de 10x10 ladrilhos.
- Valorizar-se-ão respostas elegantes e com menos linhas de código **Haskell**.

No anexo B é dada uma implementação da operação de permuta aleatória de uma lista que pode ser útil para resolver este exercício.

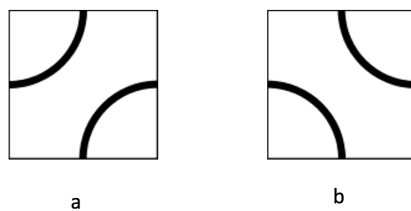


Figura 5: Os dois ladrilhos de Truchet-Smith.



Figura 6: Um mosaico de Truchet-Smith.

Anexos

A Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:⁵

$$\begin{aligned}
 id &= \langle f, g \rangle \\
 &\equiv \{ \text{universal property} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
 &\equiv \{ \text{identity} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
 &\square
 \end{aligned}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* L^AT_EX **xymatrix**, por exemplo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
 \downarrow \langle g \rangle & & \downarrow id + \langle g \rangle \\
 B & \xleftarrow{g} & 1 + B
 \end{array}$$

B Código fornecido

Problema 1

Função de representação de um dicionário:

$$\begin{aligned}
 dic_imp &:: [(String, [String])] \rightarrow Dict \\
 dic_imp &= Term \text{ "" } \cdot \text{map } (bmap \text{ id singl}) \cdot \text{untar} \cdot \text{discollect}
 \end{aligned}$$

onde

$$\text{type } Dict = Exp \text{ String String}$$

Dicionário para testes:

$$\begin{aligned}
 d &:: [(String, [String])] \\
 d &= [(\text{"ABA"}, [\text{"BRIM"}]), \\
 &\quad (\text{"ABALO"}, [\text{"SHOCK"}]), \\
 &\quad (\text{"AMIGO"}, [\text{"FRIEND"}]), \\
 &\quad (\text{"AMOR"}, [\text{"LOVE"}]), \\
 &\quad (\text{"MEDO"}, [\text{"FEAR"}]), \\
 &\quad (\text{"MUDO"}, [\text{"DUMB"}, \text{"MUTE"}]), \\
 &\quad (\text{"PE"}, [\text{"FOOT"}]), \\
 &\quad (\text{"PEDRA"}, [\text{"STONE"}]), \\
 &\quad (\text{"POBRE"}, [\text{"POOR"}]), \\
 &\quad (\text{"PODRE"}, [\text{"ROTTEN"}])]
 \end{aligned}$$

Normalização de um dicionário (remoção de entradas vazias):

$$\begin{aligned}
 dic_norm &= collect \cdot filter \text{ p } \cdot discollect \text{ where} \\
 \text{p } (a, b) &= a > \text{ "" } \wedge b > \text{ ""}
 \end{aligned}$$

Teste de redundância de um significado s para uma palavra p :

$$dic_red \text{ p s d } = (p, s) \in discollect \text{ d}$$

⁵Exemplos tirados de [?].

Problema 2

Árvores usadas no texto:

```
emp x = Node (x, (Empty, Empty))
t7 = emp 7
t16 = emp 16
t7_10_16 = Node (10, (t7, t16))
t1_2_nil = Node (2, (emp 1, Empty))
t' = Node (5, (t1_2_nil, t7_10_16))
t0_2_1 = Node (2, (emp 0, emp 3))
t5_6_8 = Node (6, (emp 5, emp 8))
t2 = Node (4, (t0_2_1, t5_6_8))
dotBt :: (Show a) => BTree a -> IO ExitCode
dotBt = dotpict · bmap Just Just · cBTree2Exp · (fmap show)
```

Problema 3

Funções usadas para efeitos de teste:

```
tipsBdt :: Bdt a -> [a]
tipsBdt = cataBdt [singl, ( $\widehat{++}$ ) ·  $\pi_2$ ]
tipsLTree = tips
```

Problema 5

Função de permutação aleatória de uma lista:

```
permuta [] = return []
permuta x = do { (h, t) ← getR x; t' ← permuta t; return (h : t') } where
  getR x = do { i ← getStdRandom (randomR (0, length x - 1)); return (x !! i, retira i x) }
  retira i x = take i x ++ drop (i + 1) x
```

QuickCheck

Código para geração de testes:

```
instance Arbitrary a => Arbitrary (BTree a) where
  arbitrary = sized genbt where
    genbt 0 = return (inBTree $ i_1 ())
    genbt n = oneof [(liftM2 $ curry (inBTree · i_2))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt (n - 1)) (genbt (n - 1))),
      (liftM2 $ curry (inBTree · i_2))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt (n - 1)) (genbt 0)),
      (liftM2 $ curry (inBTree · i_2))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt 0) (genbt (n - 1)))]
instance (Arbitrary v, Arbitrary o) => Arbitrary (Exp v o) where
  arbitrary = (genExp 10) where
    genExp 0 = liftM (inExp · i_1) QuickCheck.arbitrary
    genExp n = oneof [liftM (inExp · i_2 · ( $\lambda a \rightarrow (a, [])$ )) QuickCheck.arbitrary,
      liftM (inExp · i_1) QuickCheck.arbitrary,
      liftM (inExp · i_2 · ( $\lambda (a, (b, c)) \rightarrow (a, [b, c])$ ))
      $ (liftM2 (,) QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,)
        (genExp (n - 1)) (genExp (n - 1)))),
      liftM (inExp · i_2 · ( $\lambda (a, (b, c, d)) \rightarrow (a, [b, c, d])$ ))
      $ (liftM2 (,) QuickCheck.arbitrary (liftM3 (,,
```

```

    (genExp (n - 1)) (genExp (n - 1)) (genExp (n - 1)))
  ]
orderedBTree :: Gen (BTree Int)
orderedBTree = liftM (foldr insOrd Empty) (QuickCheck.arbitrary :: Gen [Int])
instance (Arbitrary a) => Arbitrary (Bdt a) where
  arbitrary = sized genbt where
    genbt 0 = liftM Dec QuickCheck.arbitrary
    genbt n = oneof [(liftM2 $ curry Query)
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt (n - 1)) (genbt (n - 1))),
      (liftM2 $ curry (Query))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt (n - 1)) (genbt 0)),
      (liftM2 $ curry (Query))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt 0) (genbt (n - 1)))]

```

Outras funções auxiliares

Lógicas:

```

infixr 0 =>
  (=>) :: (Testable prop) => (a -> Bool) -> (a -> prop) -> a -> Property
  p => f = λa -> p a => f a
infixr 0 <=>
  (<=>) :: (a -> Bool) -> (a -> Bool) -> a -> Property
  p <=> f = λa -> (p a => property (f a)) .&&. (f a => property (p a))
infixr 4 ≡
  (≡) :: Eq b => (a -> b) -> (a -> b) -> (a -> Bool)
  f ≡ g = λa -> f a ≡ g a
infixr 4 ≤
  (≤) :: Ord b => (a -> b) -> (a -> b) -> (a -> Bool)
  f ≤ g = λa -> f a ≤ g a
infixr 4 ∧
  (∧) :: (a -> Bool) -> (a -> Bool) -> (a -> Bool)
  f ∧ g = λa -> (f a) ∧ (g a)

```

Compilação e execução dentro do interpretador:⁶

```
run = do { system "ghc cp1920t"; system "./cp1920t" }
```

C Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções aos exercícios propostos, de acordo com o “layout” que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Problema 1

C.0.1 discollect

Para esta função partimos da definição da função collect definida em *Exp.hs*. Esta função tem como propósito partir de uma lista de pares *Strig,[String]* e originar uma lista de pares *String,String*.

```

discollect :: (Ord b, Ord a) => [(b, [a])] -> [(b, a)]
discollect = g .! id where
  g (a, x) = [(a, b) | b <- x]

```

⁶Pode ser útil em testes envolvendo [Gloss](#). Nesse caso, o teste em causa deve fazer parte de uma função *main*.

C.0.2 dicexp

Para exportar um dicionário, a função `dicexp` transforma utiliza duas funções auxiliares uma delas a `collect` definida em *Exp.hs* e a função `tar`, sendo esta também um catamorfismo que tem como caso de paragem um par sem nenhuma letra e uma palavra, e que faz um map em que cada posição do vetor

```
dic_exp :: Dict → [(String, [String])]
dic_exp = collect · tar
tar = cataExp g where
  g = [t_1, t_2]
t_1 x = [("", x)]
t_2 (o, l) = map (λ(x, y) → ((o ++ x), y)) (concat l)
```

C.0.3 dicrd

Esta função está definida não utilizando catamorfismos diretamente mas sim através do uso de `dicexp`, exportando o dicionário para uma lista, e de seguida procurando com a função `procura` a correspondente de uma palavra nessa lista.

```
dic_rd p = (procura p) · dic_exp
procura p [] = Nothing
procura p ((a, o) : t) | p ≡ a = Just o
  | otherwise = procura p t
```

C.0.4 dicin

Esta função está definida não utilizando catamorfismos diretamente mas sim através do uso de `dicexp` e `dicimp`, exportando o dicionário para uma lista, e de seguida inserindo uma nova palavra e ou tradução utilizando a função `insere`, importando de seguida a nova lista num dicionário.

```
dic_in p m = dic_imp · (inserir_pal p m) · dic_exp
inserir_pal a o [] = [(a, [o])]
inserir_pal a o ((p, s1) : t) | a ≡ p = (p, (inserir2 o s1)) : t
  | otherwise = (p, s1) : (inserir_pal a o t)
inserir2 s1 [] = [s1]
inserir2 s1 (h2 : t2) | s1 ≡ h2 = (h2 : t2)
  | otherwise = h2 : (inserir2 s1 t2)
```

Problema 2

C.0.5 maisDir

`maisDir` é uma função que retorna o elemento mais a direita de uma determinada árvore, para isso utilizamos um catamorfismo que devolve o elemento mais a direita de uma árvore, que utiliza a função `diraux` que define para uma árvore qual o nodo mais a direita.

```
maisDir = cataBTree g
  where g = [Nothing, dir_aux]
dir_aux (a, (e, Nothing)) = Just a
dir_aux (a, (_, d)) = d
```

C.0.6 maisEsq

`maisEsq` é uma função que retorna o elemento mais a esquerda de uma determinada árvore, para isso utilizamos um catamorfismo que devolve o elemento mais a esquerda de uma árvore, que utiliza a função `esqAux` que define para uma árvore qual o nodo mais a esquerda.

```
maisEsq = cataBTree g
  where g = [Nothing, esqAux]
esqAux (a, (Nothing, d)) = Just a
esqAux (a, (e, _)) = e
```

C.0.7 insOrd

A função devolve uma *BTree* com um determinado novo elemento inserido, para isso utilizamos a função `insOrd'` que através de catamorfismo devolve duas *BTree* sendo a primeira a alterada, e a segunda a inicial.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{BTree} & \xleftarrow{\text{inBTree}} & 1 + (A \times (\text{BTree} \times \text{BTree})) \\
 \downarrow \text{insOrd'} & & \downarrow \text{id} + \text{id} \times \text{insOrd'} \times \text{insOrd'} \\
 \text{BTree} \times \text{BTree} & \xleftarrow{g} & 1 + A \times (\text{BTree} \times \text{BTree}) \uparrow 2
 \end{array}$$

$\text{insOrd}' x = \text{cataBTree } g$

where $g = [(\text{Node } (x, (\text{Empty}, \text{Empty})), \text{Empty}), \text{insOrd}_a]$

$\text{insOrd}_a (a, ((e_2, e_1), (d_2, d_1))) = \text{if } (x > a) \text{ then } (\text{Node } (a, (e_1, d_2)), \text{Node } (a, (e_1, d_1))) \text{ else } (\text{Node } (a,$

$\text{insOrd } x = \pi_1 \cdot (\text{insOrd}' x)$

C.0.8 isOrd

Esta função devolve um *Bool* determinadno ou não se uma árvore se encontra ordenada, para isso utiliza como auxiliar a função `isOrd'` que através de cum catamorfismo devlve um par $(\text{Bool}, \text{BTree})$.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{BTree} & \xleftarrow{\text{inBTree}} & 1 + (A \times (\text{BTree} \times \text{BTree})) \\
 \downarrow \text{isOrd} & & \downarrow \text{id} + \text{id} \times \text{isOrd'} \times \text{isOrd'} \\
 \text{Bool} \times \text{BTree} & \xleftarrow{g} & 1 + A \times (\text{Bool} \times \text{BTree}) \uparrow 2
 \end{array}$$

$\text{isOrd}' = \text{cataBTree } g$

where $g = [(\text{True}, \text{Empty}), \text{isOrd}_a]$

$\text{isOrd}_a (a, ((b_1, \text{Empty}), (b_2, \text{Empty}))) = \text{if } (b_1 \wedge b_2) \text{ then } (\text{True}, \text{Node } (a, (\text{Empty}, \text{Empty}))) \text{ else } (\text{Fa}$

$$isOrd_a (a, ((b1, Empty), (b2, Node (d, (l2, r2))))) = \text{if } (a \leq d \wedge b1 \wedge b2) \text{ then } (True, Node (a, (Empty$$

$$isOrd_a (a, ((b1, Node (e, (l1, r1))), (b2, Empty))) = \text{if } (a \geq e \wedge b1 \wedge b2) \text{ then } (True, Node (a, (Node ($$

$$isOrd_a (a, ((b1, Node (e, (l1, r1))), (b2, Node (d, (l2, r2))))) \mid a \geq e \wedge a \leq d \wedge b1 \wedge b2 = (True, Node ($$

$$\mid otherwise = (False, Node (a, (Node (e, (l1, r1)), Node (d, (l2, r2)))))$$

$$isOrd = \pi_1 \cdot isOrd'$$

C.0.9 rrot

Para definir esta função inicialmente procuramos usar um catamorfismo porém percebemos que devido á recursividade utilizada neste a rotação não funcionava, efetuando rotação após rotação. Por isso definimos a função sem o auxílio de catamorfismo.

$$rrot \text{ Empty} = \text{Empty}$$

$$rrot (Node (a, (Empty, d))) = Node (a, (Empty, d))$$

$$rrot (Node (a, (Node (e, (l, r)), d))) = Node (e, (l, Node (a, (r, d))))$$

C.0.10 lrot

Semelhante a rrot definida em cima não conseguimos utilizar um catamorfismo, por isso definimos a função sem o auxílio de catamorfismo.

$$lrot (\text{Empty}) = \text{Empty}$$

$$lrot (Node (a, (e, \text{Empty}))) = \text{Empty}$$

$$lrot (Node (a, (e, Node (d, (l, r))))) = Node (d, (Node (a, (e, l)), r))$$

C.0.11 splay

Inicialmente fizemos o diagrama para tentar perceber o que a função auxiliar teria de devolver/receber e maior compreensão dos tipos. Posto isto, usamos um *curry* para juntar as variaveis num par, de seguida percorremos a lista e consoante o caso (o Bool) devolvemos o elemnto á esquerda ou direita da árvore e a cauda da lista.

$$\begin{array}{ccc} \text{BTree} & \xleftarrow{\text{inBTree}} & 1 + (A \times (\text{BTree} \times \text{BTree})) \\ \downarrow \text{splay} & & \downarrow \text{id} + \text{id} \times \text{splay} \times \text{splay} \\ \text{BTree} \uparrow \text{Bool}^* & \xleftarrow{g} & 1 + A \times (\text{BTree} \uparrow \text{Bool}^*) \uparrow 2 \end{array}$$

$$\text{splay} = (\text{flip } (\text{cataBTree } g))$$

$$\text{where } g = [\lambda x \rightarrow \underline{\text{Empty}}, \text{curry } (\text{aux_spl})]$$

$$\text{aux_spl } ((a, (e, d)), []) = Node (a, (e [], d []))$$

$$\text{aux_spl } ((a, (e, d)), (h : t)) \mid h \equiv \text{True} = e \ t$$

$$\mid otherwise = d \ t$$

Problema 3

Para definir as funções deste exercício baseamo-nos na BTree sendo que existem bastantes semelhanças entre a estrutura dada no problema e as BTree.

C.0.12 extLTree

Transforma uma Bdt numa LTree esquecendo a informação presente nos nós de uma determinada Bdt (árvore de decisão), para resolver este exercício percorremos a Bdt, caso a continuação desta se encontre vazia devolvemos a Leaf, caso contrário, devolvemos um Fork com a continuação, ou seja sem o nodo.

```

extLTree :: Bdt a → LTree a
extLTree = cataBdt g where
  g = [Leaf, Fork · π2]

inBdt = [Dec, Query]

outBdt (Dec a) = i1 a
outBdt (Query (a, (t1, t2))) = i2 (a, (t1, t2))

baseBdt f g = id + (f × (g × g))

recBdt f = baseBdt id f

cataBdt a = a · (recBdt (cataBdt a)) · outBdt

```

C.0.13 anaBdt

$$\begin{array}{ccc}
 Bdt & \xleftarrow{\text{inBdt}} & String + (String \times (Bdt \times Bdt)) \\
 \uparrow \text{ana } f & & \uparrow \text{id} + \text{id} \times \text{ana } (f \times f) \\
 Bdt' & \xrightarrow{f} & String + String \times (Bdt' \times Bdt')
 \end{array}$$

$\text{anaBdt } f = \text{inBdt} \cdot (\text{recBdt } (\text{anaBdt } f)) \cdot f$

C.0.14 navLTree

Inicialmente fizemos o diagrama para tentar perceber o que a função auxiliar teria de devolver/receber e maior compreensão dos tipos. Posto isto, usamos um *curry* para juntar as variáveis num par, de seguida percorremos a lista de Bool e consoante o caso (o Bool) devolvemos o elemento á esquerda ou direita da árvore e a cauda da lista.

$$\begin{array}{ccc}
 LTree & \xleftarrow{\text{inLTree}} & 1 + (LTree \times LTree) \\
 \downarrow \text{navLTree} & & \downarrow \text{id} + \text{navLTree} \times \text{navLTree} \\
 LTree \uparrow Bool* & \xleftarrow{g} & 1 + (LTree \uparrow Bool*) \uparrow 2
 \end{array}$$

```

navLTree :: LTree a → ([Bool] → LTree a)
navLTree = cataLTree g
  where g = [flip Leaf, curry aux_Nav]
        aux_Nav ((l, v), []) = Fork (l [], v [])
        aux_Nav ((l, v), (h : t)) | h == True = l t
                                   | otherwise = v t

```

Problema 4

C.0.15 bnavLTree

Esta função tem semelhanças com a função `navLTree`, porém em vez de percorrer uma lista de *Bool* percorre uma *BTree* de *Bool*, assim sendo devolvemos o elemento á esquerda ou direita da *LTree* e o elemento á esquerda ou direita da *BTree*, respetivamente, consoante o valor no nodo da *BTree*.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{LTree} & \xleftarrow{\text{inLTree}} & 1 + (\text{LTree} \times \text{LTree}) \\
 \downarrow \text{bnavLTree} & & \downarrow \text{id} + \text{bnavLTree} \times \text{bnavLTree} \\
 \text{LTree} \uparrow \text{BTree} (\text{Bool}) & \xleftarrow{g} & 1 + (\text{LTree} \uparrow \text{BTree} (\text{Bool})) \uparrow 2
 \end{array}$$

bnavLTree = cataLTree *g*

where *g* = [*flip Leaf*, *curry aux_bNav*]

aux_bNav ((*l*, *r*), *Empty*) = *Fork* (*l Empty*, *r Empty*)

aux_bNav ((*l*, *r*), (*Node* (*a*, (*e*, *d*)))) | *a* ≡ *True* = *l e*
 | *otherwise* = *r d*

pbnavLTree = cataLTree *g*

where *g* = ⊥

Problema 5

```

truchet1 = Pictures [put (0,80) (Arc (-90) 0 40), put (80,0) (Arc 90 180 40)]
truchet2 = Pictures [put (0,0) (Arc 0 90 40), put (80,80) (Arc 180 (-90) 40)]
-- janela para visualizar:
janela = InWindow
  "Truchet"    -- window title
  (800,800)    -- window size
  (100,100)    -- window position
  -- defs auxiliares -----
put = Translate
--

```