公式推导

在二维频域相位相乘实现 SRC，RDA 公式推导

2015.01.14

解调后的点目标模型

$$\begin{aligned} s_0(\tau,\eta) = A_0 \cdot \omega_r\left[\tau - \frac{2R(\eta)}{c}\right] \cdot \omega_a(\eta-\eta_c) \times \exp\left\{-j\frac{4\pi f_0 R(\eta)}{c}\right\} \\ \times \exp\left\{j\pi K_r\left(\tau - \frac{2R(\eta)}{c}\right)^2\right\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中，A_0 表示目标的后向散射特性，包括幅度和相位，即：$A_0 = \sigma_0 \cdot e^{j\phi_0}$，是个复数。

进行距离向傅里叶变换，利用 POSP，有：

$$S_0(f_\tau,\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_0(\tau,\eta)\exp\{-j2\pi f_\tau \tau\}d\tau \tag{1.2}$$

令：

$$\theta(\tau) = -\frac{4\pi f_0 R(\eta)}{c} + \pi K_r\left(\tau - \frac{2R(\eta)}{c}\right)^2 - 2\pi f_\tau \tau \tag{1.3}$$

$$\frac{d\theta(\tau)}{d\tau} = 0 = 2\pi K_r\left(\tau - \frac{2R(\eta)}{c}\right) - 2\pi f_\tau \tag{1.4}$$

所以有时频对应关系是：

$$\tau = \frac{f_\tau}{K_r} + \frac{2R(\eta)}{c} \tag{1.5}$$

POSP 得到距离向频谱是：

$$\begin{aligned} S_0(f_\tau,\eta) = A_0 \cdot W_r(f_\tau) \cdot \omega_a(\eta-\eta_c) \times \exp\left\{-j\pi\frac{f_\tau^2}{K_r}\right\} \\ \times \exp\left\{-j\frac{4\pi(f_0+f_\tau)R(\eta)}{c}\right\} \times \exp\left\{\pm j\frac{\pi}{4}\right\} \end{aligned} \tag{1.6}$$

注意：$\exp\left\{\pm j\frac{\pi}{4}\right\}$是 POSP 计算公式中的一部分，但是以前绝大多数时候我们都忽略了。这里考虑干涉 SAR，精确的相位是十分重要的，因此这里要考虑进去。关于 POSP 详见参数书[1]中第 47 页到第 48 页内容，及参考书[2]相应章节。

下面进行距离压缩

选取复制脉冲：$s_{ref}\left(\tau\right)=\omega_r\left(\tau\right)\cdot\exp\left\{j\pi K_\tau\tau^2\right\}$

由 POSP 得其频谱为：$S_{ref}\left(f_\tau\right)=W_r\left(f_\tau\right)\cdot\exp\left\{-j\pi\frac{f_\tau^2}{K_r}\pm j\frac{\pi}{4}\right\}$

将其取复共轭，得 $H_{range}\left(f_\tau\right)$ 为：

$$H_{range}\left(f_\tau\right)=\left\{S_{ref}\left(f_\tau\right)\right\}^*=W_r\left(f_\tau\right)\cdot\exp\left\{+j\pi\frac{f_\tau^2}{K_r}\mp j\frac{\pi}{4}\right\} \tag{1.7}$$

将公式(1.6)和公式(1.7)相乘，完成 MF，结果如下：

$$\begin{aligned}S_{rc}\left(f_\tau,\eta\right)&=A_0\cdot W_r\left(f_\tau\right)\cdot\omega_a\left(\eta-\eta_c\right)\times\exp\left\{-j\pi\frac{f_\tau^2}{K_r}\pm j\frac{\pi}{4}\right\}\times\exp\left\{-j\frac{4\pi\left(f_0+f_\tau\right)R(\eta)}{c}\right\}\\&\quad\times W_r\left(f_\tau\right)\cdot\exp\left\{+j\pi\frac{f_\tau^2}{K_r}\mp j\frac{\pi}{4}\right\}\\&=A_0\cdot W_r\left(f_\tau\right)\cdot\omega_a\left(\eta-\eta_c\right)\times\exp\left\{-j\frac{4\pi\left(f_0+f_\tau\right)R(\eta)}{c}\right\}\end{aligned} \tag{1.8}$$

这就是距离压缩后，距离多普勒域的结果。

我将公式(1.8)通过逆傅里叶变换变回到时域，看看此时的信号形式，如下：

$$\begin{aligned}s_{rc}\left(\tau,\eta\right)&=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{rc}\left(f_\tau,\eta\right)\cdot\exp\left\{+j2\pi f_\tau\tau\right\}df_\tau\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}A_0\cdot W_r\left(f_\tau\right)\cdot\omega_a\left(\eta-\eta_c\right)\times\exp\left\{-j\frac{4\pi\left(f_0+f_\tau\right)R(\eta)}{c}\right\}\cdot\exp\left\{+j2\pi f_\tau\tau\right\}df_\tau\\&=A_0\cdot\omega_a\left(\eta-\eta_c\right)\cdot\exp\left\{-j\frac{4\pi f_0R(\eta)}{c}\right\}\\&\quad\times\int_{-\infty}^{+\infty}W_r\left(f_\tau\right)\cdot\exp\left\{-j\frac{4\pi f_\tau R(\eta)}{c}\right\}\cdot\exp\left\{+j2\pi f_\tau\tau\right\}df_\tau\\&=A_0\cdot\sin c\left\{B_r\left(\tau-\frac{2R(\eta)}{c}\right)\right\}\cdot\omega_a\left(\eta-\eta_c\right)\cdot\exp\left\{-j\frac{4\pi f_0R(\eta)}{c}\right\}\\&=A_0\cdot p_r\left(\tau-\frac{2R(\eta)}{c}\right)\cdot\omega_a\left(\eta-\eta_c\right)\cdot\exp\left\{-j\frac{4\pi f_0R(\eta)}{c}\right\}\end{aligned} \tag{1.9}$$

推导过程详见“我的笔记【1】” $P_{15\,(\ )\,45}-P_{(\ )}$；

我可以在进行了距离压缩后，通过 IFFT 回到时域来检查脉压效果是否正确，即保相性如何。

由于考虑到更精确的方法，我使用考虑 SRC 的 RD 算法。

其中，SRC 采用二维频域相位相乘的形式。

因此，首先，我将从公式(1.8)开始，进行方位傅里叶变换，以得到二维频谱，有：

$$S_{2df}\left(f_\tau, f_\eta\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{rc}\left(f_\tau, \eta\right) \cdot \exp\left\{-j2\pi f_\eta \cdot \eta\right\} d\eta \tag{1.10}$$

利用 POSP，有：

$$\theta(\eta) = -\frac{4\pi\left(f_0 + f_\tau\right)R(\eta)}{c} - 2\pi f_\eta \eta \tag{1.11}$$

其中，$R(\eta) = \sqrt{R_0^2 + V_r^2\eta^2}$，令：

$$\frac{d\theta(\eta)}{d\eta} = 0 = -\frac{4\pi\left(f_0 + f_\tau\right)}{c} \cdot \frac{dR(\eta)}{d\eta} - 2\pi f_\eta \tag{1.12}$$

得到：

$$\begin{cases} f_\eta = -\dfrac{2\left(f_0 + f_\tau\right)}{c} \cdot \dfrac{V_r^2 \eta}{\sqrt{R_0^2 + V_r^2\eta^2}} \\ \eta = -\dfrac{cR_0 f_\eta}{2\left(f_0 + f_\tau\right) \cdot V_r^2 \cdot \sqrt{1 - \dfrac{c^2 f_\eta^2}{4V_r^2\left(f_0 + f_\tau\right)^2}}} \end{cases} \tag{1.13}$$

得到二维频域频谱是：

$$\begin{aligned} S_{2df}\left(f_\tau, f_\eta\right) &= A_0 W_r\left(f_\tau\right) \cdot W_a\left(f_\eta - f_{\eta_c}\right) \times \\ &\quad \exp\left\{-j\frac{4\pi R_0\left(f_0 + f_\tau\right)}{c}\sqrt{1 - \frac{c^2 f_\eta^2}{4V_r^2\left(f_0 + f_\tau\right)^2}} \pm j\frac{\pi}{4}\right\} \\ &= A_0 W_r\left(f_\tau\right) \cdot W_a\left(f_\eta - f_{\eta_c}\right) \times \\ &\quad \exp\left\{-j\frac{4\pi R_0\left(f_0 + f_\tau\right)}{c} D_{2df}\left(f_\tau, f_\eta, V_r\right) \pm j\frac{\pi}{4}\right\} \\ &= A_0 W_r\left(f_\tau\right) \cdot W_a\left(f_\eta - f_{\eta_c}\right) \times \\ &\quad \exp\left\{-j\frac{4\pi R_0 f_0}{c}\sqrt{\left(1 - \frac{c^2 f_\eta^2}{4V_r^2 f_0^2}\right) + \frac{2f_\tau}{f_0} + \frac{f_\tau^2}{f_0^2}} \pm j\frac{\pi}{4}\right\} \\ &= A_0 W_r\left(f_\tau\right) \cdot W_a\left(f_\eta - f_{\eta_c}\right) \times \\ &\quad \exp\left\{-j\frac{4\pi R_0 f_0}{c}\sqrt{D^2\left(f_\eta, V_r\right) + \frac{2f_\tau}{f_0} + \frac{f_\tau^2}{f_0^2}} \pm j\frac{\pi}{4}\right\} \end{aligned} \tag{1.14}$$

其中，$D_{2df}\left(f_\tau, f_\eta, V_r\right)=\sqrt{1-\frac{c^2 f_\eta^2}{4V_r^2\left(f_0+f_\tau\right)^2}}=\sqrt{1-\frac{V_r^2\eta^2}{R^2(\eta)}}$，这被称为二维频域中的徙动因子；

其中，$D\left(f_\eta, V_r\right)=\sqrt{1-\frac{c^2 f_\eta^2}{4V_r^2 f_0^2}}$；

至此为止，我将信号从时域——距离频域，并进行距离 MF——二维频域。

现在在二维频域进行 SRC。

记

$$K_{src}\left(R_0, f_\eta\right)=\frac{2V_r^2 f_0^3 D^3\left(f_\eta, V_r\right)}{cR_0 f_\eta^2} \tag{1.15}$$

$$H_{src}\left(f_\tau\right)=\exp\left\{-j\pi\frac{f_\tau^2}{K_{src}\left(R_0, f_\eta\right)}\right\} \tag{1.16}$$

P.S 在二维频域时，使用场景中心处 R_0，这里是无法（也没有能够）对 R 进行适应的，只适应了 f_η。

将公式(1.14)和公式(1.16)相乘，结果如下

$$\begin{aligned}
S_{2df_after_src}\left(f_\tau, f_\eta\right)&=A_0W_r\left(f_\tau\right)\cdot W_a\left(f_\eta-f_{\eta_c}\right)\times\exp\left\{-j\frac{4\pi R_0 f_0}{c}\sqrt{D^2\left(f_\eta, V_r\right)+\frac{2f_\tau}{f_0}+\frac{f_\tau^2}{f_0^2}}\pm j\frac{\pi}{4}\right\}\\
&\quad\times\exp\left\{-j\pi\frac{f_\tau^2}{K_{src}\left(R_0, f_\eta\right)}\right\}\\
&\approx A_0W_r\left(f_\tau\right)\cdot W_a\left(f_\eta-f_{\eta_c}\right)\\
&\quad\times\exp\left\{\begin{array}{l}-j\frac{4\pi R_0 f_0}{c}D\left(f_\eta, V_r\right)-j\frac{4\pi R_0 f_0}{c}\cdot\frac{f_\tau}{f_0\cdot D\left(f_\eta, V_r\right)}+\\ j\frac{4\pi R_0 f_0}{c}\cdot\frac{f_\tau^2}{2f_0^2D^3\left(f_\eta, V_r\right)}\cdot\frac{c^2 f_\eta^2}{4V^2 f_0^2}-j\pi\frac{f_\tau^2}{K_{src}\left(R_0, f_\eta\right)}\pm j\frac{\pi}{4}\end{array}\right\}\\
&\approx A_0W_r\left(f_\tau\right)\cdot W_a\left(f_\eta-f_{\eta_c}\right)\times\exp\left\{-j\frac{4\pi R_0 f_0}{c}D\left(f_\eta, V_r\right)-j\frac{4\pi R_0}{c}\cdot\frac{f_\tau}{D\left(f_\eta, V_r\right)}\right\}\\
&\quad\times\exp\left\{\pm j\frac{\pi}{4}\right\}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

P.S.这里使用卡明书上[1]第 121 页，公式（5.32）的近似。公式（5.32）的推导过程见“我的笔记【1】” $P_{34(1)}$ 和 $P_{34(2)}$。

将其进行距离向傅里叶逆变换，有：

$$\begin{aligned}
S_{rd}(\tau, f_\eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{2df_after_src}(f_\tau, f_\eta)\cdot \exp\{+j2\pi f_\tau \cdot \tau\} df_\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} A_0 W_r(f_\tau)\cdot W_a(f_\eta - f_{\eta_c}) \times \exp\left\{-j\frac{4\pi R_0 f_0 D(f_\eta, V_r)}{c}\right\}\exp\left\{-j\frac{4\pi R_0 f_\tau}{cD(f_\eta, V_r)}\right\} \\
&\quad \cdot \exp\left\{\pm j\frac{\pi}{4}\right\}\exp\{+j2\pi f_\tau \cdot \tau\} df_\tau \\
&= A_0 \cdot W_a(f_\eta - f_{\eta_c})\exp\left\{-j\frac{4\pi R_0 f_0 D(f_\eta, V_r)}{c}\right\}\cdot \exp\left\{\pm j\frac{\pi}{4}\right\}\times \\
&\quad \int_{-\infty}^{+\infty} W_r(f_\tau)\exp\left\{-j\frac{4\pi R_0 f_\tau}{cD(f_\eta, V_r)}\right\}\exp\{+j2\pi f_\tau \cdot \tau\} df_\tau \\
&= A_0 \cdot W_a(f_\eta - f_{\eta_c})\exp\left\{-j\frac{4\pi R_0 f_0 D(f_\eta, V_r)}{c}\right\}\cdot \exp\left\{\pm j\frac{\pi}{4}\right\}\times \\
&\quad \int_{-\infty}^{+\infty} W_r(f_\tau)\exp\left\{-j2\pi f_\tau\left(\frac{2R_0}{cD(f_\eta, V_r)}\right)\right\}\exp\{+j2\pi f_\tau \cdot \tau\} df_\tau \\
&= A_0 \cdot p_r\left(\tau - \frac{2R_0}{cD(f_\eta, V_r)}\right)\cdot W_a(f_\eta - f_{\eta_c})\exp\left\{-j\frac{4\pi R_0 f_0 D(f_\eta, V_r)}{c}\right\}\cdot \exp\left\{\pm j\frac{\pi}{4}\right\}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

因此，最终结果如下：

$$\begin{aligned}
S_{rd}(\tau, f_\eta) &= A_0 \cdot p_r\left(\tau - \frac{2R_0}{cD(f_\eta, V_r)}\right)\cdot W_a(f_\eta - f_{\eta_c})\exp\left\{-j\frac{4\pi R_0 f_0 D(f_\eta, V_r)}{c}\right\}\cdot \exp\left\{\pm j\frac{\pi}{4}\right\} \\
&= A_0 \cdot p_r\left(\tau - \frac{2R_{rd}(f_\eta)}{c}\right)\cdot W_a(f_\eta - f_{\eta_c})\cdot \exp\left\{-j\frac{4\pi R_0 f_0 D(f_\eta, V_r)}{c}\right\}\cdot \exp\left\{\pm j\frac{\pi}{4}\right\}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

其中，$\exp\left\{-j\frac{4\pi R_0 f_0 D(f_\eta, V_r)}{c}\right\}$是唯一保留着相位信息（目标距离$R_0$）的项；

而 $p_r\left(\tau - \frac{2R_0}{cD(f_\eta, V_r)}\right) = p_r\left(\tau - \frac{2R_{rd}(f_\eta)}{c}\right), R_{rd}(f_\eta) = \frac{R_0}{D(f_\eta, V_r)}$则体现了距离徙动 RCM。

则 RCM 为：$R_{rd}(f_\eta) - R_0 = \frac{R_0}{D(f_\eta, V_r)} - R_0 = R_0\left[\frac{1 - D(f_\eta, V_r)}{D(f_\eta, V_r)}\right]$；

由此进行 RCMC，方法参照卡明的书[1]。

假定 RCMC 是精确的，则：

$$S_{rd\_after\_rcmc}(\tau, f_\eta) = A_0 \cdot p_r\left(\tau - \frac{2R_0}{c}\right)\cdot W_a(f_\eta - f_{\eta_c})\exp\left\{-j\frac{4\pi R_0 f_0 D(f_\eta, V_r)}{c}\right\}\cdot \exp\left\{\pm j\frac{\pi}{4}\right\} \tag{1.20}$$

1) 此时进行方位 MF，若使用卡明书[1]上第 171 页的公式（6.26）：

$$H_{az}\left(f_\eta\right)=\exp\left\{+j\frac{4\pi R_0 f_0 D\left(f_\eta,V_r\right)}{c}\right\}$$

则：

$$S_{ac}\left(\tau,f_\eta\right)=A_0\cdot p_r\left(\tau-\frac{2R_0}{c}\right)\cdot W_a\left(f_\eta-f_{\eta_c}\right)\cdot\exp\left\{\pm j\frac{\pi}{4}\right\} \tag{1.21}$$

这里的结果丢失了全部相位信息。

经过 IFT，得到最终压缩结果是：

$$\begin{aligned} s_{ac}\left(\tau,\eta\right)&=A_0\cdot p_r\left(\tau-\frac{2R_0}{c}\right)\cdot p_a\left(\eta-\eta_c\right)\cdot\exp\left\{\pm j\frac{\pi}{4}\right\}\\ &=\sigma_0\cdot e^{j\phi_0}\cdot p_r\left(\tau-\frac{2R_0}{c}\right)\cdot p_a\left(\eta-\eta_c\right)\cdot\exp\left\{\pm j\frac{\pi}{4}\right\}\\ &=\sigma_0\cdot p_r\left(\tau-\frac{2R_0}{c}\right)\cdot p_a\left(\eta-\eta_c\right)\cdot\exp\left\{j\left(\phi_0\pm\frac{\pi}{4}\right)\right\} \end{aligned} \tag{1.22}$$

因此，成像结果中，相位信息只包括了目标的后向散射特性中的相位 ϕ_0 和一个 $\pm\frac{\pi}{4}$。在干涉处理中，假定两个天线分别成像，在图像配准后生成干涉相位图时，相位相减导致结果不含任何相位信息。而我们需要从干涉相位图中提取出表征斜距差的相位，显然该方法无法达到此目的。

2) 若使用以下方位脉压滤波器：

$$\begin{aligned} H_{az}\left(f_\eta\right)&=\exp\left\{+j\frac{4\pi R_0 f_0 D\left(f_\eta,V_r\right)}{c}-j\frac{4\pi R_0 f_0}{c}\right\}\\ &=\exp\left\{+j\frac{4\pi R_0\left[D\left(f_\eta,V_r\right)-1\right]f_0}{c}\right\} \end{aligned} \tag{1.23}$$

则有以下方位脉压结果（距离多普勒域）：

$$S_{ac}\left(\tau,f_\eta\right)=A_0\cdot p_r\left(\tau-\frac{2R_0}{c}\right)\cdot W_a\left(f_\eta-f_{\eta_c}\right)\cdot\exp\left\{-j\frac{4\pi R_0 f_0}{c}\right\}\cdot\exp\left\{\pm j\frac{\pi}{4}\right\} \tag{1.24}$$

变回时域，有：

$$\begin{aligned} s_{ac}(\tau,\eta) &= A_0\cdot p_r\left(\tau-\frac{2R_0}{c}\right)\cdot p_a(\eta-\eta_c)\cdot\exp\left\{-j\frac{4\pi R_0 f_0}{c}\pm j\frac{\pi}{4}\right\} \\ &= \sigma_0\cdot e^{j\phi_0}\cdot p_r\left(\tau-\frac{2R_0}{c}\right)\cdot p_a(\eta-\eta_c)\cdot\exp\left\{-j\frac{4\pi R_0 f_0}{c}\pm j\frac{\pi}{4}\right\} \\ &= \sigma_0\cdot p_r\left(\tau-\frac{2R_0}{c}\right)\cdot p_a(\eta-\eta_c)\cdot\exp\left\{j\left(\phi_0-\frac{4\pi R_0 f_0}{c}\pm\frac{\pi}{4}\right)\right\} \end{aligned} \tag{1.25}$$

公式(1.25)和公式(1.22)相比，公式(1.25)保留了表征目标距离信息的相位项：$-\frac{4\pi R_0 f_0}{c}$；更进一步的说，同样考虑双天线干涉处理。假定天线 A 成像结果的相位是$\left(\phi_0-\frac{4\pi R_A f_0}{c}\pm\frac{\pi}{4}\right)$，天线 B 成像结果的相位是$\left(\phi_0-\frac{4\pi R_B f_0}{c}\pm\frac{\pi}{4}\right)$（假定已经配准），其中 R_A 和 R_B 分别是天线 A 和天线 B 到同一目标的最近斜距，两者的不同由双天线间的基线距和基线倾角造成。干涉相位图提取即为两者相位之差，结果是：

$$\left(\phi_0-\frac{4\pi R_A f_0}{c}\pm\frac{\pi}{4}\right)-\left(\phi_0-\frac{4\pi R_B f_0}{c}\pm\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4\pi f_0}{c}(R_A-R_B)=-\frac{4\pi}{\lambda}(R_A-R_B)$$

这正是我们通过干涉处理希望得到的结果。

因此，公式(1.25)保留了相位信息，并可以用于后续的干涉处理。

最后，再次强调一件事：

使用公式(1.16)进行 SRC，得到的结果(1.17)，只有最近斜距为 R_0 处的目标（即 SRC 滤波器生成时被选择为参考距离处的目标）能被完全补偿，其他距离处的目标的二次距离压缩结果是有一定残余的[1]。是否需要考虑残余的影响在于该残余是否在容忍范围内。这里的结果没有考虑这一点。

至此，推导工作全部完成。

参考文献

[1] Cumming Ian G., Wong Frank H. 合成孔径雷达成像——算法与实现[M]. 洪文, 胡东辉等, 译. 电子工业出版社, 2007.

[2] 张澄波. 综合孔径雷达：原理、系统分析与应用[M]. 科学出版社, 1989.

WD

2015年1月14日23:02 p.m.