## 频率——抛硬币

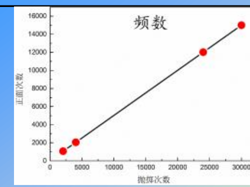
例1 抛一枚硬币，观察其出现正面H和反面T的情况。

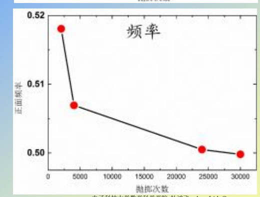
我们通过实践与分析可得：硬币出现正面的可能性等于它出现反面的可能性。

历史上几位著名科学家亲自做实验并记录：

| 实验者 | 抛掷次数 | 出现正面次数 | *m/n* |
|---|---|---|---|
| 德.摩根 | 2048 | 1061 | 0.5181 |
| 蒲丰 | 4040 | 2048 | 0.5069 |
| 皮尔逊 | 24000 | 12012 | 0.5005 |
| 维尼 | 30000 | 14994 | 0.4998 |






有何结论？

有何结论？

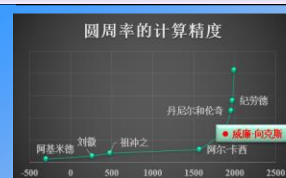


## 频率的应用——$\pi$ 的计算


| | | |
|---|---|---|
| 公元前三世纪 | 古希腊.阿基米德 | 3.14 |
| 公元263 年前后 | 魏晋.刘徽 | 3.1416 |
| 公元450年前后 | 南北朝.祖冲之 | 小数点后7位 |
| 16世纪 | 阿拉伯.阿尔·卡西 | 小数点后16位 |
| 公元1610 年 | 德.鲁道夫 | 小数点后35 位 |
| 1872 年 | 英. 威廉 ● 向克斯 | 小数点后707 位 |
| 1961 年 | 美.丹尼尔和伦奇 | 小数点后100265位 |
| 1973年 | 法.纪劳德 | 小数点后1000000位 |
| 1990年 | | 1000000000位（$10^9$） |



## 频率的应用——$\pi$ 的计算




英国学者威廉.向克斯：用**20年**时间于1872年将$\pi$ 算到小数后707位。

英.法格逊发现前608位小数中：

- 3出现68次
- 7仅出现44次
- 8出现85次




## 频率的应用——$\pi$ 的计算

英国数学家法格逊发现：前608位小数中3出现68次，7仅出现44次。

法格逊猜想：在 $\pi$ 的数值中各数码0, 1, •••9出现的可能性大小应当相等。

**该假设无论成立与否都有较大价值，思考：为什么？**

他从1944年5月到1945年5月，花了**一年**时间，用当时最先进的计算机，终于确定向克斯$\pi$值707位小数中后180位是错的。

在近30年以后，法国学者让.盖尤和芳丹娜对$\pi$值的前100万位小数中0到9这十个数码出现的概率作了计算，进一步证实了法格逊的猜想。



## 古典概率——用样本空间求概率

例3 抛一枚质量分布均匀的硬币，观察其出现正面H和反面T的情况。

这是一个古典概型的随机试验。

因为该试验的基本事件只有两个：

$\{\omega_1\}$=\{出现正面H\}，$\{\omega_2\}$=\{出现反面T\}。

而且基本事件$\{\omega_1\}$、$\{\omega_2\}$发生的可能性相等。

∴ P(H)=P(T)=0.5

## 古典概率——鸽笼问题

例4 一个鸽场养了$n$只鸽子，每只鸽子都等可能的飞入$N$个鸽笼中的任意一个去住($n \le N$)，求下事件发生的概率：

（1）**指定**的$n$个鸽笼各有一只鸽子去住；

（2）**恰好**有$n$个鸽笼，每个各有一只鸽子。

分析：当样本点很少时，可以把它全部写出来，再来计算所求事件包含的样本点数（如书上例1.2.2）；

当样本点很多时，用排列组合的知识求出样本点总数和所求事件包含的样本点数。

关键——如何假设事件？

解： 设 $A$={指定的$n$个鸽笼各有一只鸽子}

$B$={恰好有$n$个鸽笼，每个各有一只鸽子}

由乘法原理可知，基本事件总数为$N^n$。

指定的$n$个鸽笼各有一只鸽子，有$n!$个不同的住法。故

$$P(A) = \frac{n!}{N^n}$$

下面考虑事件B：首先从$N$个鸽笼中任意选出$n$个，共有$C_N^n$种不同的方法；然后让选定的$n$个鸽笼各住一只鸽子，有$n!$个不同的住法。故

$$P(B) = \frac{C_N^n \cdot n!}{N^n} = \frac{P_N^n}{N^n}$$

## 古典概率——摸彩试验

例5 袋中有10个小球，4个红的，6个白的，求

（1）有放回地从中依次取3球，取得“2红1白”的概率

（2）不放回地从中依次取3球，取得“2红1白”的概率

解：设10个球依次编为1，2，3，…10，

A={有放回依次抽取得“2红1白”}

B={无放回依次抽取得“2红1白”}

（1）有放回抽取

基本事件总数为$N=10\times10\times10=10^3$

A所包含基本事件数为$r = C_3^2 \times 4^2 \times 6$

$C_3^2$是三次抽取中选出两次取到红球

$$\therefore P(A) = \frac{r}{N} = \frac{C_3^2 \times 4^2 \times 6}{10^3} = 0.288$$

（2）无放回抽取

解法一：采用排列方式计算

基本事件总数为$N = 10 \times 9 \times 8 = P_{10}^3$

B所包含基本事件数为$r = C_3^2 \times 4 \times 3 \times 6$

$$\therefore P(B) = \frac{r}{N} = 0.3$$

解法二：采用组合方式计算

基本事件总数为$N = C_{10}^3$

B所包含基本事件数为$r = C_4^2 \times C_6^1$

$$\therefore P(B) = \frac{r}{N} = 0.3$$

**注意**：采用古典概率进行计算时，注意分子、分母的样本空间保持一致

——同时用排列，或同时用组合

## 公理化定义——抛不均匀硬币

例6 抛一枚质量分布不均匀的硬币，观察其出现正面H和反面T的情况。

这不是一个古典概型的随机试验。

因为该试验的基本事件只有两个：

$\{\omega_1\}$={出现正面H}，$\{\omega_2\}$={出现反面T}；

但基本事件$\{\omega_1\}$、$\{\omega_2\}$发生的可能性不相等。

## 公理化定义——仪器寿命试验

例7 仪器上某种型号的电子元件使用时间已达30小时，测该元件还能使用多少小时？

该试验不是古典概型的随机试验，因为它的样本空间有无数多个样本点。



## 公理化定义——不可能事件的概率

**性质：** 不可能事件的概率为0, 即$P(\phi)=0$.

**证明：** 根据不可能事件(对应空集)的特点，有

$$\phi=\phi\cup\phi\cup\phi\cup\cdots$$

根据公理化定义中的可列可加性

$$P(\phi)=P(\phi\cup\phi\cup\phi\cup\cdots)$$
$$=P(\phi)+P(\phi)+P(\phi)+\cdots$$

两边同时消去一个$P(\phi)$，可得

$$0=P(\phi)+P(\phi)+\cdots$$

根据公理化定义中的非负性，可得

$$P(\phi)=0$$



## 公理化定义——有限可加性

**性质：** 若试验$E$的事件组$A_1,A_2,\cdots,A_n$互不相容,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

**证明：** 为了能使用公理化定义中的可列可加性，设

$$A_i=\phi,\qquad i=n+1,n+2\cdots$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+\sum_{i=n+1}^{\infty}P(A_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+\sum_{i=n+1}^{\infty}P(\phi)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

$P(\phi)=0$



## 公理化定义——对立事件概率和

**性质：** 对立事件概率和为1, 即

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

**思考：对立事件的定义?**

**证明：** 由于$A$和$\bar{A}$互不相容，根据有限可加性有

$$P(A)+P(\bar{A})=P(A\cup\bar{A})$$

由于$A$和$\bar{A}$满足：$A\cup\bar{A}=\Omega$

根据公理化定义中的规范性，可得

$$P(A)+P(\bar{A})=P(A\cup\bar{A})=P(\Omega)=1$$



## 公理化定义——概率单调性

**性质：** 若事件A和B满足$A\subset B$，则有

$$P(A)\le P(B),\ P(B-A)=P(B)-P(A)$$

**证明：** 由于$A$与$B-A$互不相容，利用有限可加性，有

$$P(B-A)+P(A)=P\big((B-A)\cup A\big)=P(B)$$
$$\therefore\ P(B-A)=P(B)-P(A)$$

根据公理化定义中的非负性，可得

$$P(B)-P(A)=P(B-A)\ge 0$$
$$\therefore\ P(A)\le P(B)$$



## 公理化定义——抽检试验

例8 设50件产品中有5件是次品，其余的是合格品，从中任取3件，求选到的3件产品中有次品的概率。

解法一：设$A$={选到的3件产品中有次品}，

$A_i$={选到的3件产品中有$i$件次品}，$i$=1,2,3。

则$A_1$，$A_2$，$A_3$互不相容,并且有$A=A_1\cup A_2\cup A_3$。

所以有 $P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$

$$=\frac{C_5^1C_{45}^2}{C_{50}^3}+\frac{C_5^2C_{45}^1}{C_{50}^3}+\frac{C_5^3C_{45}^0}{C_{50}^3}$$
$$=0.2761$$

解法二： 考虑$A$的对立事件

$\overline{A}$={选到的3件产品全是合格品}

$$P(\overline{A})=\frac{C_{45}^{3}}{C_{50}^{3}}\approx 0.7239$$

$$\therefore P(A)=1-P(\overline{A})$$

$$\approx 1-0.7239$$

$$=0.2761$$

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com