第七章　参数估计

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

第7章2节　估计量的优良性准则

引言

当 $X \sim U(0,\theta)$，θ的**矩法估计量**为 $2\overline{X}$，而**极大似然估计量**为 $\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$.

对于总体的一个参数，我们可用各种不同的方法去估计它，因此一个参数的**估计量不唯一**.

选哪一个更好？

选取的标准是什么？

下面给出三个常用的准则

第7章2节　估计量的优良性准则

一、无偏性

定义： 设$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是未知参数$\theta$的估计量，若$E(\hat{\theta}) = \theta$，则称$\hat{\theta}$为$\theta$的**无偏估计**.

TIPS

S^2是σ^2的无偏估计

注意： $M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$不是$\sigma^2$的无偏估计

$$\because M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{n-1}{n}S^2$$

$$\therefore E(M_2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

一、无偏性

μ已知时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$是$\sigma^2$的无偏估计

证明：

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2$$

期望性质

样本与总体同分布

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X-\mu)^2=E(X-\mu)^2$$

方差定义

$$=E\left[X-E(X)\right]^2=D(X)=\sigma^2$$

第7章2节　估计量的优良性准则

一、无偏性

思考：下列估计量是否μ的无偏估计量？哪个更好？

1. $\overline{X}$　　2. X_1　　3. X_1+X_2　　4. $0.1X_1+0.2X_2+0.7X_3$

由上例可见，一个参数的无偏估计可以有很多；无偏估计只能保证无系统误差，即$E(\widehat{\theta}-\theta)=0$；但是却可能有极大的偏差.

因此<u>一个优良的估计量，其方差应该较小</u>.

二、有效性

定义： 设$\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$和$\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是未知参数$\theta$的两个无偏估计量，若对$\theta$的所有可能取值都有

$D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$，则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效.

设$\hat{\theta}_0$是θ的无偏估计，如果对θ的任何一个无偏估计量$\hat{\theta}$, 都有$D(\hat{\theta}_0)\le D(\hat{\theta})$，则称$\hat{\theta}_0$为$\theta$的最小方差无偏估计量.

第7章2节　估计量的优良性准则

二、有效性

TIPS

证明无偏性并判断哪个有效

当$X\sim N(\mu,\sigma^2)$且μ和σ^2未知时，

$\overline{X}$和S^2分别是μ和σ^2的最小方差无偏估计.

第7章2节　估计量的优良性准则

三、相合性

定义： 设$\hat{\theta}_n(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是未知参数$\theta$的估计量，若对任意的$\varepsilon>0$，有$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1$

则称$\hat{\theta}_n$为θ的**相合估计量**.

TIPS

相合估计量的证明

$\overline{X}$是μ的相合估计量;

S^2和M_2都是σ^2的相合估计量.

第7章2节　估计量的优良性准则

无偏性 → 期望　$E(\hat{\theta})=\theta$

有效性 → 方差　$D(\hat{\theta}_0)\le D(\hat{\theta})$

相合性 → 极限　$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-\theta|<\varepsilon\}=1$

$\overline{X}$ 是μ的无偏、有效、相合估计量

第7章2节　估计量的优良性准则

构造统计量·之一

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是正态总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本，$\overline{X}, S^2$分别是样本均值和样本方差

1. 如何选择统计量估计μ和σ^2?
2. 统计量可化为哪种常见分布?
3. 当另一个参数已知（未知）时选择有何不同?

第7章2节　估计量的优良性准则

构造统计量.之一

1. 如何选择统计量估计μ和σ^2?

依据：优良性准则

μ的估计

$$\mu \leftarrow \overline{X}$$

σ^2的估计

μ已知时 $$\sigma^2 \leftarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

μ未知时 $$\sigma^2 \leftarrow S^2$$

核心

选一优良估计量来替代μ

构造统计量.之一

σ^2的估计为何不用S^2？

σ^2的估计

μ已知时

$$\sigma^2 \leftarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

$$D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right] = D\left[\frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right] = \frac{\sigma^4}{n^2}D\left[\chi^2\right] = \frac{\sigma^4}{n^2}\cdot 2n = \frac{2\sigma^4}{n}$$

$\sim \chi^2(n)$

比S^2更有效

$$D\left(S^2\right) = D\left[\frac{\sigma^2}{n-1}\cdot\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}D\left[\chi^2\right] = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$\sim \chi^2(n-1)$

构造统计量.之一

2. 统计量可化为哪种常见分布?

依据：抽样分布定理

将待估参数看作常数

μ的估计

σ^2已知时　$\overline{X} \Rightarrow$　$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

σ^2未知时　$\overline{X} \Rightarrow$　$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

用优良估计量S^2替代σ^2

第7章2节　估计量的优良性准则

构造统计量.之一

2. 统计量可化为哪种常见分布?

依据：抽样分布定理

将待估参数看作常数

σ^2的估计

μ已知时　$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \Rightarrow$　$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$

μ未知时　$S^2 \Rightarrow$　$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

用样本均值替代μ

第7章2节　估计量的优良性准则

构造统计量·之二

设$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$和$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$分别是来自正态总体$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$和$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$的样本，$\overline{X}, S_1^2$ 和 $\overline{Y}, S_2^2$ 为各自的样本均值和样本方差，则

1. 如何选择统计量估计μ_1-μ_2和$\sigma_1^2/\ \sigma_2^2$？
2. 统计量可化为哪种常见分布?
3. 当另一个参数已知（末知）时选择有何不同?

第7章2节　估计量的优良性准则

构造统计量.之二

1. 如何选择统计量估计μ_1-μ_2和$\sigma_1^2/\ \sigma_2^2$？

μ_1-μ_2的估计

$$\mu_1-\mu_2 \leftarrow \overline{X}-\overline{Y}$$

$\sigma_1^2/\ \sigma_2^2$的估计

μ已知时

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leftarrow \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2 \Big/ \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2$$

μ未知时

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leftarrow \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

第7章2节　估计量的优良性准则

构造统计量·之二

2. 统计量可化为哪种常见分布?

依据：抽样分布定理

将待估参数看作常数

μ_1-μ_2的估计

σ_1^2和 σ_2^2已知时

$$\overline{X}-\overline{Y} \Rightarrow \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知时

$$\overline{X}-\overline{Y} \Rightarrow \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

第7章2节　估计量的优良性准则

构造统计量·之二

2. 统计量可化为哪种常见分布?

依据：抽样分布定理

将待估参数看作常数

σ_1^2/σ_2^2 的估计

μ已知时

$$\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \Bigg/ \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\left(\frac{Y_j-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \sim F(n_1,n_2)$$

μ未知时

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$$