自由度是由线性代数中借用的术语。

- 定义1. 若存在一组不全为零的常数 C_1、C_2、…、C_n 使得 $C_1X_1+C_2X_2+\dots+C_nX_n=0$，则称变量 X_1、X_2、…、X_n 之间存在一个约束条件。
- 定义2. 若存在 k 个约束条件
  $C_{i1}X_1+C_{i2}X_2+\dots+C_{in}X_n=0$，　$i=1，2，\dots，k$
  其中系数矩阵 $(C_{ij})_{kn}$ 的秩为 k，且对于任何 m ($k\le m$) 个约束：
  $C_{i1}'X_1+C_{i2}'X_2+\dots+C_{in}'X_n=0$，　$i=1，2，\dots，m$
  矩阵 $(C_{ij}')_{mn}$ 的秩总不大于 k，则称变量 X_1、X_2、…、X_n 之间存在 k 个独立的线性约束条件。
  易知，X_1、X_2、…、X_n 中只有 $(n-k)$ 个独立变量。

- 定义3. 若在平方和 $\sum X_i^2$ 中，X_1、X_2、…、X_n之间存在着 k 个独立的线性约束条件，则称平方和 $\sum X_i^2$ 的自由度为 $n-k$ (即其中独立变量为 $n-k$ 个)。

#

例 统计量的分布(之一)

设 X_1，X_2，…，X_n 是来自正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的容量为 n 的样本，求下列统计量的概率分布：

1. $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$　　2. $Y=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

解　1. $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(n\mu,n\sigma^2)$

故　$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

2. $\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$

故　$Y=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$

例　查表计算概率

1.若$X\sim N(0,1)$　　$P\{-1.58\le X\le 1.96\}=?$

2.若$\chi^2\sim\chi^2(15)$　　$P\{6.262\le\chi^2(15)\le 24.996\}=?$

解：1. $\because X\sim N(0,1)$

$\therefore P\{-1.58\le X\le 1.96\}\ =P\{X\le 1.96\}-P\{X\le -1.58\}$

$=P\{X\le 1.96\}-[1-P\{X\le 1.58\}]$

$=\Phi(1.96)-[1-\Phi(1.58)]\ =0.975-(1-0.943)$

$=\ 0.918$

2. $\because\chi^2\sim\chi^2(15)$

$\therefore P\{6.262\le\chi^2(15)\le 24.996\}$

$=P\{\chi^2(15)\ge 6.262\}-P\{\chi^2(15)\ge 24.996\}$

$=0.975-0.05\ =0.925$

$\chi^2_{0.975}(15)=6.262$

$\chi^2_{0.005}(15)=24.996$

注意：查表时应注意分布表的定义与查法！

例　统计量的分布(之二)

设 X_1，X_2，…，X_{n+m} 是来自正态总体$X\sim N(0,\sigma^2)$的容量为 $n+m$ 的样本，求下列统计量的概率分布：

1. $Y=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n+m}X_i^2$　　2. $Z=\sqrt{\frac{m}{n}}\sum_{i=1}^{n}X_i\Big/\sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+m}X_i^2}$　　3. $\frac{1}{Z^2}$

解 1. $\frac{X_i}{\sigma}\sim N(0,1)$且所有$\frac{X_i}{\sigma}$相互独立$(i=1,2,\dots,n+m)$

故　$Y=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n+m}X_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n+m)$

2. 因$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(0,n\sigma^2)\Rightarrow U=\sum_{i=1}^{n}X_i\Big/\sqrt{n\sigma^2}\sim N(0,1)$

同时　$V=\sum_{i=n+1}^{n+m}\frac{X_i^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m)$,　U与V相互独立

从而有　$Z=\sqrt{\frac{m}{n}}\sum_{i=1}^{n}X_i\Big/\sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+m}X_i^2}=\frac{U}{\sqrt{V/m}}\sim t(m)$

3. 　$U\sim N(0,1)\Rightarrow U^2\sim\chi^2(1)$

$V\sim\chi^2(m)$,　U与V相互独立

故　$\frac{1}{Z^2}=\frac{V/m}{U^2/1}\sim F(m,1)$