例 区间 $[0,\theta]$ 上均匀分布的矩估计

设样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自在区间 $[0, \theta]$ 上均匀分布的总体，θ 未知，求 θ 的矩估计量.

分析： 要估计 θ，令 $E(X) = A_1 = \overline{x}$

解： $\because \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} & ,0 < x < \theta \\ 0 & ,\text{其它} \end{cases}$

$$\therefore \quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} x dx = \frac{\theta}{2}$$

令 $\dfrac{\theta}{2} = \overline{x}$，得 θ 的矩法估计量为

$$\hat{\theta} = 2\overline{X}$$

注意：估计量是随机变量，而期望是数值

例 极大似然法---简例

例.如果一个老兵和一个新兵同时打靶，但仅有一人命中，问谁命中的可能性大?

(1) 老兵　　(2)新兵

大家首先想到的是老兵，因为它更符合情理！

例.若袋中有黑白两种球（除颜色外别无差异），且已知两种球数之比为 1:3 ，现任取一球，发现是白色，问哪种颜色的球多一些?

显然，大家都会觉得白色的多一些.

例 极大似然法---通过抽样判断球的多少

例.若袋中有黑白两种球(除颜色外别无差异), 且已知两种球数之比为 1:3 ，而不知是白的多还是黑的多.

任取一球取得黑球的概率为 θ=0.25 或 θ =0.75 ，现在通过抽样来估计 θ 值.

分析:

首先，给出总体分布

令X 表示从袋中任取一球所得的黑球数，则

$$p(x;\theta) \triangleq P_\theta\{X = x\} = \theta^x(1-\theta)^{1-x}, x = 0,1$$

现从袋中有放回地 (保证独立性) 任取 n 个球 (不妨设为 n=3),

则X_1, X_2, X_3 独立同分布，是来自总体X 的一个容量为 n=3 的样本，其联合分布律 (似然函数) 为

$$L(x_1,x_2,x_3;\theta)\triangleq P_\theta\{X_1=x_1,X_2=x_2,X_3=x_3\}$$

$$=P_\theta\{X_1=x_1\}P_\theta\{X_2=x_2\}P_\theta\{X_3=x_3\}$$

$$=p(x_1;\theta)p(x_2;\theta)p(x_3;\theta)$$

$$=\theta^{x_1}(1-\theta)^{1-x_1}\theta^{x_2}(1-\theta)^{1-x_2}\theta^{x_3}(1-\theta)^{1-x_3}$$

$$=\theta^{\sum_{i=1}^{3}x_i}(1-\theta)^{3-\sum_{i=1}^{3}x_i},\quad (x_i=0,1\quad i=1,2,3)$$

现将抽样的所有可能结果及相应概率列表如下：

(x_1,x_2,x_3)	(0,0,0)	(0,0,1)	(0,1,0)	(1,0,0)	(0,1,1)	(1,0,1)	(1,1,0)	(1,1,1)
$P_{\theta=0.25}$	.4219	.1406	.1406	.1406	.0469	.0469	.0469	.0156
$P_{\theta=0.75}$	.0156	.0469	.0469	.0469	.1406	.1406	.1406	.4219

例如，当抽样结果为(0,1,1)时，

从直观看，抽得 3 球中有2黑，可估计 $\theta=0.75$

从概率看， $\theta=0.75$时

$$P_{0.75}(X_1=0,X_2=1,X_3=1)=.1406$$

$\theta=0.25$时

$$P_{0.25}(X_1=0,X_2=1,X_3=1)=.0469$$

即样本(0,1,1)来自$\theta=0.75$的总体的可能性要大些.

一般取

$$\widehat{\theta}=\widehat{\theta}(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}0.75, & \text{当} x_1+x_2+x_3=2\text{或}3\text{时}\\ 0.25, & \text{当} x_1+x_2+x_3=0\text{或}1\text{时}\end{cases}$$

也就是说，对每个样本观测值(x_1, x_2, x_3)，选取θ的估计值应使(x_1, x_2, x_3)出现的可能性最大，即

即选取$\widehat{\theta}=\widehat{\theta}(x_1,x_2,x_3)$，使

$$L(x_1,x_2,x_3;\widehat{\theta})=\max_{\theta\in\{0.25,\ 0.75\}}L(x_1,x_2,x_3;\theta)$$

这样得到的估计值就是θ的极大似然估计.

例　指数分布的点估计

例　某电子管的使用寿命 X （单位：小时) (从开始使用到首次失效为止）服从指数分布，

$$X \sim f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0\ , & 其它 \end{cases} \quad (\theta > 0)$$

今取一组样本，数据如下，问如何估计θ?

16	29	50	68	100	130	140	270	280
340	410	450	520	620	190	210	800	1100

解：可用两种方法估计：

矩法估计 和 极大似然估计

（一）矩法估计

$$\because E(X)=\int_0^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta$$

令$\overline{x}=\theta$ 则可得θ的矩法估计量为：

$$\hat{\theta}=\bar{X}$$

代入具体数值可得θ的估计值为：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i=\frac{1}{18}\cdot 5723\approx 318(\text{小时})$$

（二）极大似然估计

1. 构造似然函数：设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是一组样本观测值

$$L(x_1,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}=\theta^{-n}\cdot e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

$$x_i>0,\ i=1,2,\cdots,n$$

2. 取对数: $\ln L = -n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$

3. 求偏导: 令 $\frac{d\ln L}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

4. 求解得: $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$

代入具体数值可得θ的估计值为:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{18}\cdot 5723 \approx 318(\text{小时})$$

例 矩估计与似然估计不等的例子

设总体密度函数为： $p(x,\theta)=(\theta+1)x^{\theta}$， $0<x<1$

求参数θ的极大似然估计，并用矩法估计θ.

解： (一)极大似然估计法

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是一组样本观测值

1. 构造似然函数： $L(x_1,\ldots,x_n;\theta)=(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta}$

$(0<x_i<1,i=1,2,\cdots,n)$

2. 取对数： $\ln L=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

3. 求偏导： $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

4. 求解得： $\hat{\theta}=\dfrac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$

（二）矩估计法

$$\because E(X)=\int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}dx=\frac{x^{\theta+2}}{\theta+2}(\theta+1)\Big|_0^1=\frac{\theta+1}{\theta+2}$$

令 $\dfrac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{x}$ 可得θ的矩法估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}=\frac{1}{1-\overline{X}}-2$$

小　　结

1. **矩法估计量与极大似然估计量不一定完全相同;**
2. **用矩法估计参数比较方便;**
3. **但样本容量较大时，极大似然估计法精度高.**

例 均匀分布的极大似然估计

设样本X_1，X_2，…，X_n是来自在区间$[0, \theta]$上均匀分布的总体，θ未知，求θ的极大似然估计.

解：总体的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta} & ,0\le x\le\theta\\ 0 & ,else\end{cases}$$

设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是一组样本观测值

从而可得似然函数

$$L(x_1,\ldots,x_n;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0\le x_i\le\theta\\ 0 & ,else\end{cases}$$

注意：

该似然函数不能用一般方法——通过求导构造似然方程.

尝试用其他方法求解！

$$\because L=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, 0\le x_i\le\theta \\ 0 \quad , else\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, 0\le \min\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}, \max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}\le\theta \\ 0 \quad , else\end{cases}$$

如图所示，似然函数在

$\theta=\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}$处达到极大

(θ至少不小于$\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}$)

故θ的极大似然估计量

$$\hat{\theta}=\max_{1\le i\le n}\{X_i\}$$