乘法公式——空战试验

例1 两架飞机进行空战，甲机首先开火，击落乙机的概率为0.2，若乙机未被击落，进行还击，击落甲机的概率为0.3，若甲机又未被击落，它再次向乙机开火，并击落它的概率为0.4。试求这几个回合中

（1）甲机被击落的概率p_1；

（2）乙机被击落的概率p_2。

解：设A={甲机首次攻击击落乙机}

B={乙机击落甲机}

C={甲机第二次攻击击落乙机}

所以有 $P(A)=0.2,\ P(B\mid\bar{A})=0.3,\ P(C\mid\bar{A}\,\bar{B})=0.4$

乘 法 公 式

（1）甲机被击落的概率

$$p_1=P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B\mid\bar{A})=0.8\times0.3=0.24$$

（2）乙机被击落的概率

$$\begin{aligned}p_2&=P(A\cup\bar{A}\bar{B}C)=P(A)+P(\bar{A}\bar{B}C)\\&=P(A)+P(\bar{A})P(\bar{B}\mid\bar{A})P(C\mid\bar{A}\bar{B})\\&=P(A)+[1-P(A)][1-P(B\mid\bar{A})]P(C\mid\bar{A}\bar{B})\\&=0.2+(1-0.2)(1-0.3)\times0.4\\&=0.424\end{aligned}$$

全概率公式——摸球试验

例2 甲盒中有5个红球，6个白球；乙盒中有3个红球，4个白球。现抛一枚均匀硬币，若出现正面，则从甲盒中任取一球，反之从乙盒中任取一球。试求取出白球的概率p。

解：设A={取出白球}，B={甲盒中任取一球}={H}。从而

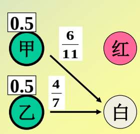
A={从甲盒中取出一白球} ∪{从乙盒中取出一白球}

$=(AB)\cup(A\bar{B})$

于是 $p=P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})$

$=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid\bar{B})P(\bar{B})$

$=\frac{6}{11}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{7}\times\frac{1}{2}\approx\ 0.5584$



全概率公式——抽检试验

例3 某工厂有4个车间生产同一种产品,其产品分别占总产量的15%、20%、30%和35%，各车间的次品率依次为0.05、0.04、0.03及0.02。现从出厂产品中任取一件，问恰好抽到次品的概率是多少？

解：设A_i={恰好取到第 i 个车间的产品}，i=1,2,3,4

B={任取一件，恰好取到次品}，则

$$P(A_1)=0.15,\ P(A_2)=0.20,\ P(A_3)=0.30,\ P(A_4)=0.35$$

$$P(B\mid A_1)=0.05,\ P(B\mid A_2)=0.04,\ P(B\mid A_3)=0.03,\ P(B\mid A_4)=0.02$$

由全概率公式可得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.0315$$

全概率公式——抽签的公平性

例4 设袋中有n个红球，m个白球。三人依次不放回地各取出一个球。求他们取得红球的概率各为多少？

解：设A_i={第 i 个人取到红球}，i=1,2,3

$$P(A_1)=\frac{n}{m+n},$$

$$\begin{aligned}P(A_2)&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2\mid\bar{A}_1)\\&=\frac{n}{m+n}\times\frac{n-1}{m+n-1}+\frac{m}{m+n}\times\frac{n}{m+n-1}\\&=\frac{n}{m+n}\end{aligned}$$

全 概 率 公 式

求$P(A_3)$时,我们把$A_1A_2,\bar{A}_1A_2,A_1\bar{A}_2,\bar{A}_1\bar{A}_2$这四个事件构成一个有限划分,由全概率公式可得

$$\begin{aligned}P(A_3)&=P(A_1A_2)P(A_3\mid A_1A_2)+P(\bar{A}_1A_2)P(A_3\mid\bar{A}_1A_2)\\&\quad+P(A_1\bar{A}_2)P(A_3\mid A_1\bar{A}_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2)P(A_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)\\&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)+P(\bar{A}_1)P(A_2\mid\bar{A}_1)P(A_3\mid\bar{A}_1A_2)\\&\quad+P(A_1)P(\bar{A}_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\bar{A}_2)+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)P(A_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)\\&=\frac{n}{m+n}\times\frac{n-1}{m+n-1}\times\frac{n-2}{m+n-2}+\frac{2mn}{(m+n)(m+n-1)}\times\frac{n-1}{m+n-2}\\&\quad+\frac{m}{m+n}\times\frac{m-1}{m+n-1}\times\frac{n}{m+n-2}=\frac{n}{m+n}\end{aligned}$$

贝叶斯公式——病情诊断试验

例5 设某医院用某一种方法诊断肝癌，由于各种原因，被诊断为患有肝癌的患者未必患有肝癌。

令 A={被检查者确实患有肝癌}，
B={被检查者被诊断为患有肝癌}。

假设 $P(A)=0.0004$（患者的比例很小），
$P(B|A)=0.95$（对肝癌病人的诊断准确率很高），
$P(\bar{B}|\bar{A})=0.9$（对非肝癌病人的诊断准确率也很高），

现有一病人被该方法诊断为患肝癌，求此人确是患者的概率 $P(A|B)$。

贝 叶 斯 公 式

解：从题设可得

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-0.0004,\ P(B|\bar{A})=1-0.9.$$

根据贝叶斯公式有

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

$$=\frac{0.0004\times0.95}{0.0004\times0.95+(1-0.0004)\times(1-0.9)}$$

$$\approx 0.0038$$

有病且判为患病

下表有助于理解贝叶斯公式：

事件	先验概率	条件概率	联合概率	事后概率
A_i	$P(A_i)$	$P(B\|A_i)$	$P(A_i\cap B)$	$P(A_i\|B)$
A_1	0.0004	0.95	0.00038	0.00038/0.10034 =0.003787
A_2	0.9996	0.1	0.09996	0.09996/0.10034 =0.996213
	1.00		$P(B)$=0.10034	1.00

这里，$A_1=A$，$A_2=\bar{A}$，A_1表示患癌症，A_2表示未患癌症，B表示判断被检查者患癌症

无病但判为患病

延伸：看似合理的直观分析，常包含令人迷惑的错误结论。

进一步思考：若该病人再进行一次独立检测，仍被诊断为肝癌患者，此人确实是患者的概率？

分析：设C={再次被诊断为患者}，由题意知B,C相互独立【根据“独立”概念，有$P(BC)=P(B)P(C)$】

$$P(BC|A)=P(B|A)P(C|A)=0.95^2$$

$$P(BC|\bar{A})=P(B|\bar{A})P(C|\bar{A})=(1-0.9)^2$$

$$P(A|BC)=\frac{P(BC|A)P(A)}{P(BC|A)P(A)+P(BC|\bar{A})P(\bar{A})}$$

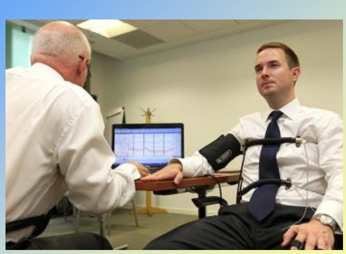
$$=\frac{0.95^2\times0.0004}{0.95^2\times0.0004+(1-0.9)^2\times(1-0.0004)}$$

$$\approx 0.03486$$

说明若第二次独立检测仍为患者，则可能性就比原来增加了近10倍！

慎用测谎仪

例6 测谎试验经常用来例行管理具有敏感职位的员工或准员工。



慎用测谎仪

例6 测谎试验经常用来例行管理具有敏感职位的员工或准员工。设事件A表示测谎仪显示积极信号，预示受测者撒谎，$\bar{A}$表示测谎仪预示受测者说真话；T表示受测者说的是真话，L表示受测者说的是假话。根据测谎可靠性研究（Gastwirth 1987）：如果一个人撒谎，被测谎仪探测出来的概率时0.88，而他说真话时测谎仪探测正确的概率是0.86。

现考虑为了某安全缘由，将测谎仪用来对大众员工检查，假设大部分人对于某些特定问题没有撒谎的理由，从而有$P(T)$=0.99。

问：若测谎仪显示被测者撒谎，可信度如何？

解：由题意可知，需计算$P(T|A)$，即测谎仪显示被测者撒谎时测谎仪误判的概率

样本空间的有限划分为：T与L

$$P(T\mid A)=\frac{P(AT)}{P(A)}=\frac{P(T)P(A\mid T)}{P(T)P(A\mid T)+P(L)P(A\mid L)}$$

已知：　$P(T)=0.99$，$P(A\mid L)=0.88$，$P(\bar{A}\mid T)=0.86$

可得：　$P(L)=0.01$，　$P(A\mid T)=0.14$

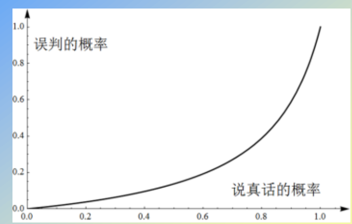
从而：　$P(T\mid A)=\dfrac{0.99\times 0.14}{0.99\times 0.14+0.01\times 0.88}=0.94$

将测谎仪用于无辜大众时，误判概率达到94%！

以本例中数据进一步分析：

设$P(T)=x$（$0\le x\le 1$），误判概率为如下函数

$$P(T\mid A)=\frac{x\times 0.14}{x\times 0.14+(1-x)\times 0.88}\approx\frac{0.189189\,x}{1.18919-x}$$



面向特定人群有较好效果；但面向大众时将产生不可预知的严重后果！

条件概率一般用法

例7　某炮台有三门炮，假定第一、二、三门炮弹中靶概率分别为0.4，0.3，0.5 。现三门炮各独立发射一发炮弹，有二发中靶，求第一门炮中靶的概率。

解：设B_i={第i门炮中靶}，i=1,2,3，则

$$P(B_1)=0.4,\quad P(B_2)=0.3,\quad P(B_3)=0.5$$

又设A={在发射的三发炮弹中有二发中靶}，则

$$A=B_1B_2\bar{B}_3\cup\bar{B}_1B_2B_3\cup B_1\bar{B}_2B_3$$

$$P(A)=P(B_1B_2\bar{B}_3)+P(\bar{B}_1B_2B_3)+P(B_1\bar{B}_2B_3)$$

由于各炮独立发射，故

$$P(A)=P(B_1)P(B_2)P(\bar{B}_3)+P(\bar{B}_1)P(B_2)P(B_3)+P(B_1)P(\bar{B}_2)P(B_3)$$
$$=0.4\times 0.3\times 0.5+0.6\times 0.3\times 0.5+0.4\times 0.7\times 0.5$$
$$=0.29$$

所求事件的概率为

$$P(B_1\mid A)=\frac{P(B_1)P(A\mid B_1)}{P(A)}=\frac{0.4\times P(A\mid B_1)}{0.29}=\frac{20}{29}$$

$$\begin{aligned}
&P(A|B_1)\\
&=P(B_1B_2\bar{B}_3\cup\bar{B}_1B_2B_3\cup B_1\bar{B}_2B_3|B_1)\\
&=P(B_2\bar{B}_3\cup\bar{B}_2B_3|B_1)\\
&=P(B_2\bar{B}_3\cup\bar{B}_2B_3)=P(B_2\bar{B}_3)+P(\bar{B}_2B_3)\\
&=0.3\times 0.5+0.7\times 0.5\\
&=0.5
\end{aligned}$$