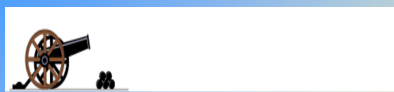
多维随机变量的引入

例：炮弹发射试验



炮弹在地面的命中点位置要由两个随机变量(X , Y)来确定。

飞机在空中飞行的位置由三个随机变量(X , Y, Z)来确定。

考察某地区儿童的身体发育情况一般由两个随机变量(X , Y) (身高、体重)来确定。

联合分布律

在1, 2, 3, 4 中随机取出一数 X ,再随机地从 1~X中取 一数Y， 求(X , Y)的联合分布律。

解：X 的分布律为:

X	1	2	3	4
$P\{X=x\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$p_{ij}=P\{X=i,Y=j\}=P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})$$

$$=P\{X=i\}P\{Y=j|X=i\}$$

$$=\begin{cases}0 & j>i\\ \frac{1}{4}\frac{1}{i} & j\le i\end{cases}\qquad i,\ j=1,2,3,4$$

X \ Y	1	2	3	4	
1	1/4	0	0	0	1/4
2	1/8	1/8	0	0	1/4
3	1/12	1/12	1/12	0	1/4
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
	25/48	13/48	7/48	1/16	1

二维两点分布

例：(两点分布)

用一细绳将一小球悬挂于空中,现用一剪刀随机的去剪细绳一次.剪中的概率为p . 设剪中的次数为X ,小球下落的次数为Y,试写出(X, Y)的联合分布律.

X \ Y	0	1
0	1-p	0
1	0	p

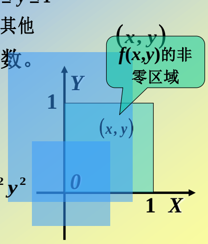
称(X, Y)服从二维两点分布.

联合分布函数

已知二维随机变量(X , Y)的联合概率密为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy & 0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

试写出(X , Y)的联合分布函数。



解：1) 当 $x\le 0$, 或 $y\le 0$ 时

$$F(x,y)=0$$

2) 当 $0\le x , y\le 1$ 时

$$F(x,y)=4\int_0^x\int_0^y uv\,dudv=x^2y^2$$

3) 当 $0\le x\le 1$, $y\ge 1$ 时

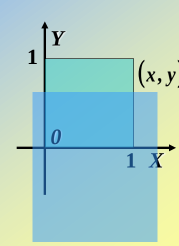
$$F(x,y)=4\int_0^x\int_0^1 uv\,dudv=x^2$$

4) 当 $0\le y\le 1$, $x\ge 1$ 时

$$F(x,y)=4\int_0^1\int_0^y uv\,dudv=y^2$$

5) 当 $x, y\ge 1$ 时

$$F(x,y)=1$$



综上所叙得:

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x<0\text{ 或 }y<0\\ x^2y^2 & 0\le x,y\le 1\\ x^2 & 0\le x\le 1,y\ge 1\\ y^2 & x\ge 1,0\le y\le 1\\ 1 & x,y\ge 1\end{cases}$$

边缘概率密度

已知二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x^2y} & 1\le x<+\infty,\ \dfrac{1}{x}\le y\le x\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

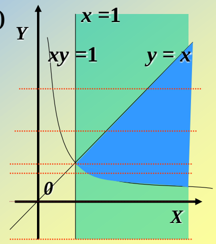
求关于Y的边缘概率密度$f_Y(y)$

分析： $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$

求Y的边缘概率密度，就是固定y对x求积分。

实质上是求含参变量的积分。

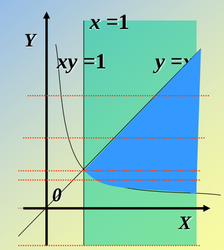
对于y取不同的值，$f_Y(y)$的积分上下限是不相同的。



解： $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$

$$=\begin{cases}0 & y\le 0\\ \int_{\frac{1}{y}}^{+\infty}\dfrac{1}{2x^2y}dx & 0<y\le 1\\ \int_{y}^{+\infty}\dfrac{1}{2x^2y}dx & 1<y\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & y\le 0\\ 1/2 & 0<y\le 1\\ 1/2y^2 & 1<y\end{cases}$$



综合例题

已知二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}a(3x^2+xy) & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

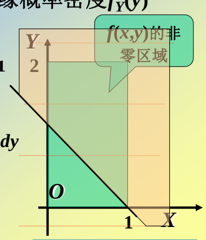
求：1）a　　2）边缘概率密度$f_Y(y)$

3）$P\{X+Y>1\}$

分析：1）利用$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dxdy=1$

2）

3）$P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y>1}f(x,y)\,dxdy$



$$f(x,y)=\begin{cases}a(3x^2+xy) & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

解：1) 由$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dxdy=1$得

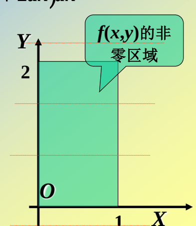
$$\int_0^1\left[\int_0^2 a(3x^2+xy)dy\right]dx=\int_0^1(6ax^2+2ax)dx$$

$=3a=1$

$a=1/3$

2） $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$

$$=\begin{cases}0 & y\le 0\\ \int_0^1\left(x^2+\dfrac{1}{3}xy\right)dx & 0<y\le 2\\ 0 & 2<y\end{cases}$$



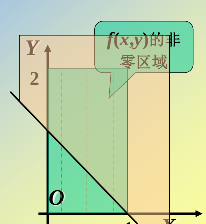
$$=\begin{cases}0 & y\le 0\\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}y & 0<y\le 2\\ 0 & 2<y\end{cases}$$

3） $P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y>1}f(x,y)\,dxdy$

$$=\int_0^1\left[\int_{1-x}^2 f(x,y)dy\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{x}{2}+\frac{4x^2}{3}+\frac{5x^3}{6}\right]dx$$

$$=\frac{65}{72}$$



约会问题

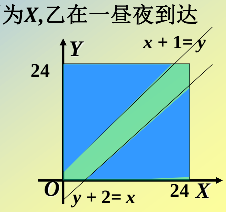
甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头停泊。它们在一昼夜内到达 的时刻是等可能的。如果甲的停泊时间为1小时，乙的停泊时间为二小时。求它们中的任意一艘都不须等待码头空出的概率。

分析：设甲在一昼夜到达的时刻为X,乙在一昼夜到达的时刻为Y，所求的概率为:

$P\{X+1\le Y$ 或 $Y+2\le X\}$

设$G=\{(x,y)|0\le x,y\le 24\}$

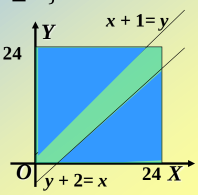
(X,Y)在G上服从均匀分布



解：设甲在一昼夜到达的时刻为X,乙在一昼夜到达的时刻为Y，所求概率为：$P\{X+1\le Y$ 或 $Y+2\le X\}$

令$G=\{(x,y)|0\le x,y\le 24\}$，则$(X,Y)$在$G$上服从均匀分布，记$D=\{X+1\le Y$ 或 $Y+2\le X\}$

$$P\{X+1\le Y \text{ 或 } Y+2\le x\} = P\{(X,Y)\in D\} = \frac{S(D)}{S(G)} = \frac{0.5\times 23^2+0.5\times 22^2}{24^2} \approx 0.88$$



折段成三角形

把长为 l 的木棒，任意折成3段，求它们能构成一个三角形的概率.

分析：1)可设第一段的长度为 X，第二段的长度为Y

$0<X<l$，$0<Y<l$

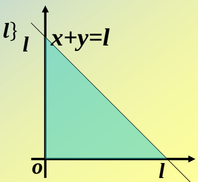
$X+Y<l$

2) (X,Y)在三角形

$G=\{(x,y)|0<x<l, 0<y<l, x+y<l\}$

服从均匀分布.

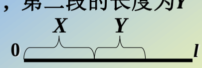
即 从该区域内任选一点所得二维数组(x,y)能满足折成3段的要求.



折段成三角形

把长为 l 的木棒，任意折成3段，求它们能构成一个三角形的概率。

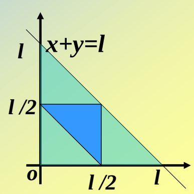
分析：1)可设第一段的长度为 X，第二段的长度为Y



3) 能构成三角形的充要条件为：

两边之和大于第三边，从而有

$$\begin{cases} y+[l-(x+y)]>x \\ x+[l-(x+y)]>y \\ x+y>l-(x+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<\frac{l}{2} \\ 0<y<\frac{l}{2} \\ x+y>\frac{l}{2} \end{cases}$$



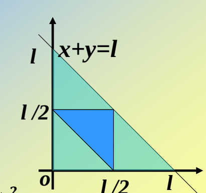
解：设第一段的长度为X，第二段的长度为Y

(X,Y)在三角形

$G=\{(x,y)|0\le x\le l, 0\le y\le l, x+y\le l\}$

上服从均匀分布。

能构成三角形的充要条件：$\begin{cases} 0<x<\frac{l}{2} \\ 0<y<\frac{l}{2} \\ x+y>\frac{l}{2} \end{cases}$



所求概率为：

$$p=P\left\{x<\frac{l}{2}, y<\frac{l}{2}, x+y>\frac{l}{2}\right\}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}l^2}=\frac{1}{4}$$

二维正态分布

设(X,Y)服从二维正态分布$N(0,1;0,1;\rho)$

求 X,Y的边缘概率密度.

解：(X,Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)} \quad x,y\in R$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)}dy$$

$$=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}dy$$

$$\frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}=t \qquad \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad -\infty<x<+\infty$$

即 $X\sim N(0,1)$

同理 $Y\sim N(0,1)$

注: 1)二维正态分布的边缘分布为正态分布.

2)正态分布的联合概率密度与ρ有关. 边缘概率密度与ρ无关.

3)边缘分布不能唯一确定联合分布.