第二章　随机变量的分布

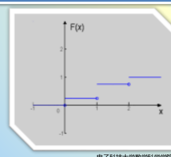
第2章2节　离散型随机变量

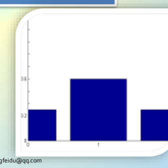
一、离散型随机变量的分布律

定义 如果随机变量 X 只取有限个或可列无穷个数值，则称X是离散型随机变量，并称 $p_i = P\{X = x_i\}$，$i = 1, 2, \cdots$为X的分布律(某些教材又称之为概率质量函数).

如抛硬币两次，出现正面的次数为X

分布函数图





分布律图

第2章2节　离散型随机变量

若X是离散型随机变量，且$p_i = P\{X = x_i\}$，$i = 1, 2, \ldots$

则满足两条性质：（1） $p_i \geq 0$；　（2） $\sum p_i = 1$

根据概率公理化定义容易得到这两条结论：

(1) 根据概率的非负性

(2) 根据可列可加性和规范性

这两条性质的作用：

(1) 可用于确定分布律中的待定参数

(2) 根据分布律之和为1，可将某些级数求和简化

第2章2节　离散型随机变量

我们常用表格表示分布列（分布表）

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
$P\{X = x_i\}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

例　产品检验　抛　骰　子

对于离散型随机变量X，由概率可加性得：

$$\{X \le x\} = \bigcup_{x_i \le x}\{X = x_i\} \Rightarrow P\{X \le x\} = P\left[\bigcup_{x_i \le x}\{X = x_i\}\right]$$

$$= \sum_{x_i \le x} P\{X = x_i\}$$

所以分布函数为　$F(x) = \sum_{x_i \le x} p_i$

第2章2节　离散型随机变量

二、贝努里试验和二项分布

$E1$：抛一枚硬币出现正反面

$E2$：检查一件产品是否合格

$E3$：射击，观察是否命中

$E4$：考一门课，是否通过

特点：试验只有两个结果，A和$\bar{A}$.

我们称之为贝努里试验.

?

如何设置随机变量?

第2章2节　离散型随机变量

设贝努里试验的两个基本事件之一为A，$P(A) = p$

令随机变量 $X = \begin{cases} 1，若事件A发生 \\ 0，若事件A不发生 \end{cases}$

则X的分布律为　称X 服从(0-1)分布

X	0	1
$P\{X = x_i\}$	$1 - p$	p

思考: X的分布函数怎样?

第2章2节 离散型随机变量

定义 将试验E按下述条件重复进行n次
（1）每次试验的条件不变；
（2）各次试验的结果互不影响
则称这n次试验为**n次重复独立试验**.

如果试验E恰好是贝努里试验，则称这n次试验为**n重贝努里试验**，或称**贝努里概型**.

Jacob Bernoulli

贝努里家族

第2章2节 离散型随机变量

对于一个贝努里试验，我们常考察如下问题：
（1）事件A首次发生的试验次数；
（2）事件A发生k次时的试验次数；
（3）n次试验中事件A发生的次数.
在贝努里试验中，设事件A发生的概率为p

(1) 设事件A首次发生的试验次数为 X

则 $\{X=k\}$表示首次试验成功在第k次，$k=1,2,3,\cdots$

X的分布律为：$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$,

称X服从参数为p的**几何分布**(Geometric distribution).

第2章2节 离散型随机变量

- 几何分布——分布律的解释

第1次	第2次	…	第k-1次	第k次
A不发生	A不发生	…	A不发生	A发生
$1-p$	$1-p$	…	$1-p$	p

$$\therefore\ P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},\quad k=1,2,3,\cdots$$

第2章2节 离散型随机变量

问：最后一次A一定发生，那么应该是必然事件，但为何概率是p？

答案：我们考察的仅仅是若干可能性中的一种——在当前情形下，最后一次A发生，其发生的可能性为p.

例如，打靶直到命中为止，射击次数为X
A_i表示第i次射击命中，$i=1,2,3,\cdots$
$\{X=2\}$时，进行了两次射击，总共包含了四种情况：
A_1A_2, $\overline{A_1}A_2$, $A_1\overline{A_2}$, $\overline{A_1}\,\overline{A_2}$
$\{X=2\}=\overline{A_1}A_2$仅仅是其中一种情况.

第2章2节 离散型随机变量

✪几何分布的一个重要性质：无后效性（无记忆性）

$$P\{X=n+m|X>n\}=P\{X=m\}$$

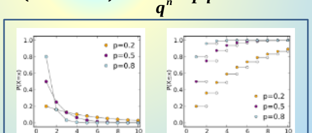
证明：$P\{X=n+m|X>n\}=\dfrac{1}{P\{X>n\}}*P\{X=n+m,X>n\}$

$$=\frac{1}{\sum_{k=n+1}^{+\infty}pq^{k-1}}*P\{X=n+m\}=\frac{1}{q^n}*pq^{n+m-1}$$

$$=pq^{m-1}$$

$a_n=a_{n-1}q\quad(q\neq1)$

$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$



分布律　分布函数

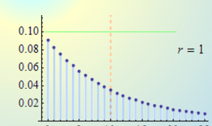
第2章2节 离散型随机变量

2）在贝努里试验中，设事件A发生r次时的试验次数为X，X的分布律为：

$$P\{X=t\}=C_{t-1}^{r-1}p^rq^{t-r},t=r,r+1,\cdots$$

称X服从**负二项分布**(帕斯卡分布. Negbinomial)，记为$X\sim NB(r,p)$.

负二项分布可看作几何分布的更一般情况.



第2章2节 离散型随机变量

3）在n次贝努里试验中事件A发生的次数

设随机变量X表示事件A发生的次数，则 $X=0,1,2,\ldots,n$.

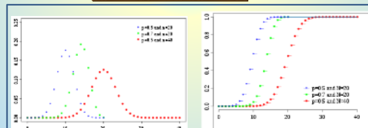
定理：在n重贝努里试验中，事件A的概率为$P(A)=p$，$0<p<1$，则事件A发生的次数X的分布律为

$$P\{X=k\}=P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}\quad k=0,1,2..,n$$

第2章2节 离散型随机变量

称随机变量X服从**二项分布**(Binomial distribution)，记为$X\sim B(n,p)$. 特别地，0-1分布可以看作$X\sim B(1,p)$.

例 → 产品抽检试验　强弱对抗试验　设备排障试验



分布律　分布函数

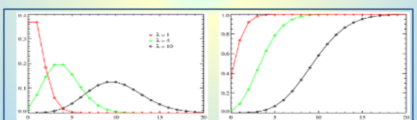
第2章2节 离散型随机变量

三、泊松分布

定义：若随机变量X的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \lambda>0,\quad k=0,1,2,3,\cdots$$

则称随机变量X服从参数为λ的**泊松分布**(Poisson distribution)，记为 $X\sim P(\lambda)$.



分布律　分布函数

第2章2节 离散型随机变量

泊松分布的重要性在于:

(1)现实中大量随机变量服从泊松分布

(2) 泊松分布可视为二项分布的极限分布

例 → 宇 宙 粒 子

第2章2节 离散型随机变量

定理：设随机变量序列$X_n\sim B(n,p_n), n=1,2,\cdots$,即

$$P\{X=k\}=C_n^k(p_n)^k(1-p_n)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda>0$，则有

$$\lim_{n\to\infty}P\{X_n=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

证明：略.

第2章2节 离散型随机变量

注：$\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{1/n}=\lambda$

即数列$\{p_n\}$与$\left\{\frac{1}{n}\right\}$是同阶的无穷小. 故可得

(1)当n够大，p较小时,有

$$p_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

其中$\lambda=np$. → 设备排障试验

(2) 实际问题中，n 次独立重复试验中，“稀有事件”出现的次数可认为服从泊松分布.