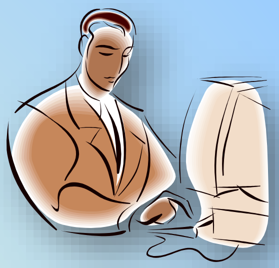
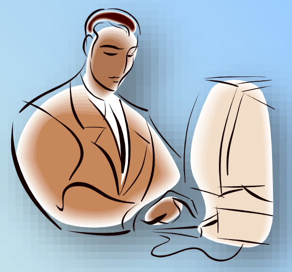
第七章　参数估计



1.	参数的点估计
2.	估计量的优良性准则
3	区间估计

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

第七章　参数估计

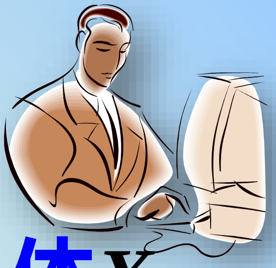


参数估计是对已知分布类型的总体，利用样本对其未知参数作出估计。

参数估计可作如下划分：

- 参数估计
  - 点估计
    - 矩法估计
    - 极大似然估计
  - 区间估计

第7章1节　参数的点估计



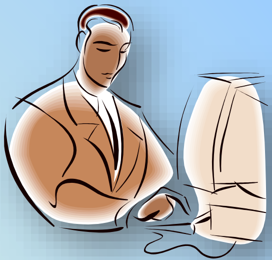
参数的点估计是针对已知分布类型的总体X，如果$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$是分布函数中的未知参数，$X_1, X_2, \ldots, X_n$是总体 X 的一组样本。

对于每一个未知参数$\theta_k\,(k=1,2,\cdots,m)$，构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_k(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

作为对参数$\theta_k\,(k=1,2,\cdots,m)$的估计，我们称之为参数$\theta_k$的**估计量**。

思想：用统计量去估计真实值.

第7章1节　参数的点估计



一、矩估计法

基本思想： <u>用样本矩作为相应总体矩的估计</u>

设X为离散型随机变量，则

$$E(X)=\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \boxed{p_i}$$

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i=\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \boxed{\frac{1}{n}}$$

假设每个样本发生的可能性相同，即为1/n

第7章1节　参数的点估计

一、矩估计法

基本思想：用样本矩作为相应总体矩的估计

即用A_k来估计γ_k，用M_k来估计μ_k，从而得到一组关于未知参数的方程，

$$\gamma_k(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n)=\int_{+\infty}^{-\infty}x^k f(x;\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n)dx$$

$$\mu_k(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n)=\int_{+\infty}^{-\infty}(x-E(X))^k f(x;\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n)dx$$

$$\gamma_k(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n)\approx A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$$

$$\mu_k(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n)\approx M_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$$

一、矩估计法

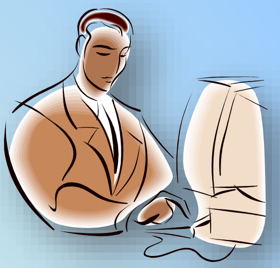
基本思想：用样本矩作为相应总体矩的估计

有多少未知参数就取多少方程，解出未知参数即可得它的估计量.

这样确定的估计量称为**矩估计量**，其对应的估计值称为**矩估计值**，统称为**矩估计**.

注:

1. 运用矩估计的**前提**条件是总体对应的各阶矩要存在；
2. 尽量用低阶样本矩去估计未知参数.



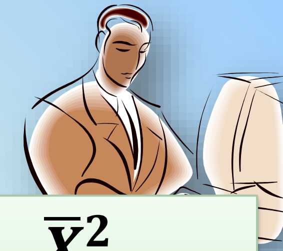
一、矩估计法

TIPS

均匀分布的矩估计

注意：样本矩是随机变量，而总体矩是数值

要注意相应的字母大小写区分



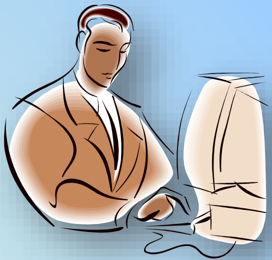
常见分布的矩估计： 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是一组样本

- 二项分布 $X \sim B(m,p)$ $\qquad \hat{p} = 1 - \dfrac{M_2}{\overline{X}}, \; m = \dfrac{\overline{X}^2}{\overline{X} - M_2}$
- 泊松分布 $X \sim P(\lambda)$ $\qquad \hat{\lambda} = \overline{X}$ 或 $\hat{\lambda} = M_2$
- 均匀分布 $X \sim U(a,b)$ $\qquad \hat{a} = \overline{X} - \sqrt{3M_2}, \; \hat{b} = \overline{X} + \sqrt{3M_2}$
- 指数分布 $X \sim E(\lambda)$ $\qquad \hat{\lambda} = \dfrac{1}{\overline{X}}$
- 正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\qquad \hat{\mu} = \overline{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = M_2$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

任意总体若$E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$，都有

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com



一、矩估计法

矩估计法的缺陷：

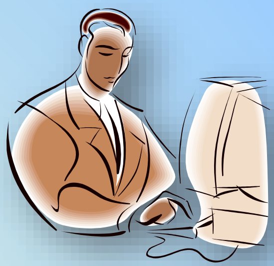
只利用了样本的信息

假设每个样本发生的可能性相同

没有利用分布的信息！

如何利用分布的信息？

→ 极大似然估计



二、极大似然估计法

TIPS

极大似然估计法简例

极大似然估计法基本思想：

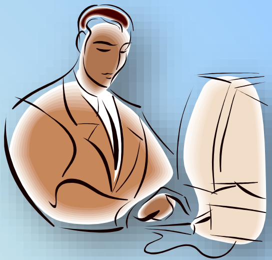
按照最大可能性的准则进行推断.

我们希望通过抽样来估计参数值.

并且希望利用分布的信息.

TIPS

通过抽样判断球的多少



二、极大似然估计法

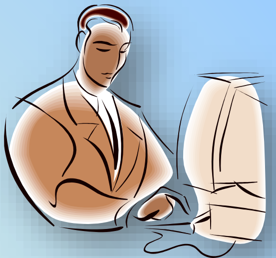
定义

若总体 X 的概率密度函数为$f(x;\theta)$ (θ 可能为向量)，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自$f(x;\theta)$的一组样本，则n维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**联合概率密度函数**记为：

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

称之为参数θ 的**似然函数**.

(对于离散型样本，其似然函数为其联合分布律)



二、极大似然估计法

极大似然估计法： 就是求参数θ的估计值，使似然函数（即联合概率密度函数或联合分布律）得到极大值——即这组样本发生的可能性最大.

定义： 若

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \hat{\theta}) = \max_{\theta} L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$$

则称 $\hat{\theta}$ 为θ的**极大似然估计值**，

相应的估计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

称为参数θ 的**极大似然估计量**.

二、极大似然估计法

怎样求极大似然估计呢?

- 能否直接求一阶导数? →不可，解决办法
- 因为$\ln x$是x 的严格单增函数，$\ln L$与L有相同的极大值，
- 故一般只需求$\ln L$的极大值即可，
- ——令其一阶偏导为0，得到似然方程（组），求解即可.

二、极大似然估计法

一般步骤：

1. 写出似然函数：

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$$

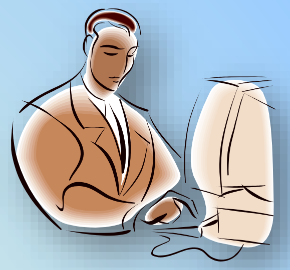
2. 对似然函数取对数：

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}\ln p(x_i;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$$

3. 对θ_j $(j=1,\ldots,m)$分别求偏导，并令其为 0 得似然方程(组)：

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j}=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m)$$

4. 解似然函数方程组得 $\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_m$ 即为所求.



二、极大似然估计法

TIPS

指数分布的点估计

矩估计与似然估计不等的例子

均匀分布的极大似然估计