第三章　多维随机变量

1.	二维随机变量及其分布
2.	随机变量的独立性
3.	条件分布
4.	随机变量的函数及其分布

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

第3章　多维随机变量

多维随机变量的引入

§3.1 二维随机变量及其分布

一、联合分布函数

定义 设随机试验E的样本空间为Ω，对于每一样本点$\omega \in \Omega$，有两个实数$X(\omega),Y(\omega)$与之对应，称它们构成的有序数组(X,Y)为**二维随机变量**。

注：X，Y都是定义在Ω上的随机变量.

$$F_X(x)=P\{X \le x\} \qquad F_Y(y)=P\{Y \le y\}$$

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

第3章1节 二维随机变量及其分布

一、联合分布函数

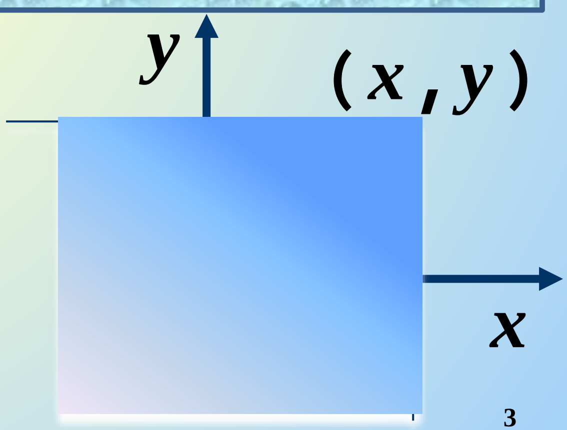
定义 对任意实数对 $(x, y) \in R^2$，记

$$\{X \le x, Y \le y\} = \{X \le x\} \cap \{Y \le y\}$$

称二元函数 $F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$ 为 (X, Y) 的**联合分布函数**。

一维随机变量 X、Y 的分布函数 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$ 称为 (X,Y) 的**边缘分布函数**。

联合分布函数几何意义:



电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

第3章1节 二维随机变量及其分布

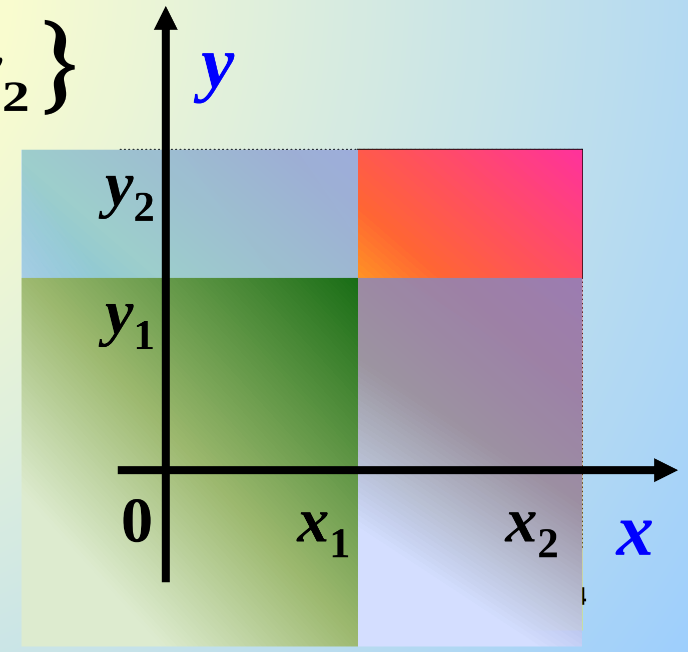
一、联合分布函数

1. 由联合分布函数可确定边缘分布函数

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<+\infty\}=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X<+\infty,Y\le y\}=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$$

2. $$P\{x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2\}$$
$$=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)$$
$$-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$$



第3章1节 二维随机变量及其分布

一、联合分布函数

练习:

(X,Y)的联合分布函数为:

$$F(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-2x}\right)\left(1-e^{-3y}\right) & x\geq 0, y\geq 0\\ 0 & else\end{cases}$$

$$F_X(x)=\boxed{\begin{cases}1-e^{-2x} & x\geq 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}}\qquad F_Y(y)=\boxed{\begin{cases}1-e^{-3y} & y\geq 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}}$$

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

第3章1节　二维随机变量及其分布

一、联合分布函数

回忆：

1. 概率定义三性质

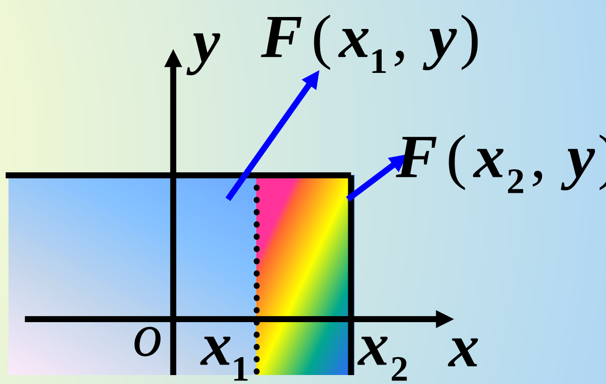
2. 分布函数三性质

联合分布函数的性质：

① **单调不减性**：$F(x,y)$分别对x，y单调不减。

$$x_1 < x_2 \quad F(x_1,y) \le F(x_2,y), \quad \forall y \in R^1$$

$$y_1 < y_2 \quad F(x,y_1) \le F(x,y_2), \quad \forall x \in R^1$$



$\because \{X \le x_1, Y \le y\} \subset \{X \le x_2, Y \le y\}$　由概率单调性得

$$F(x_1,y) = P\{X \le x_1, Y \le y\} \le P\{X \le x_2, Y \le y\} = F(x_2,y)$$

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

一、联合分布函数

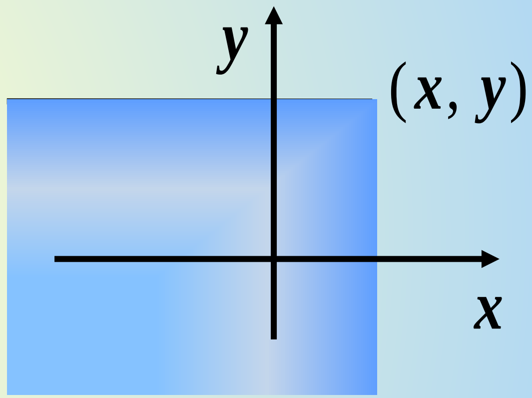
联合分布函数的**性质**：

② **有界性**： $0 \le F(x, y) \le 1$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x, y) = 0$$

$$\lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1$$



③ **右连续性**： $F(x, y)$ 分别关于 x 或 y 为右连续。

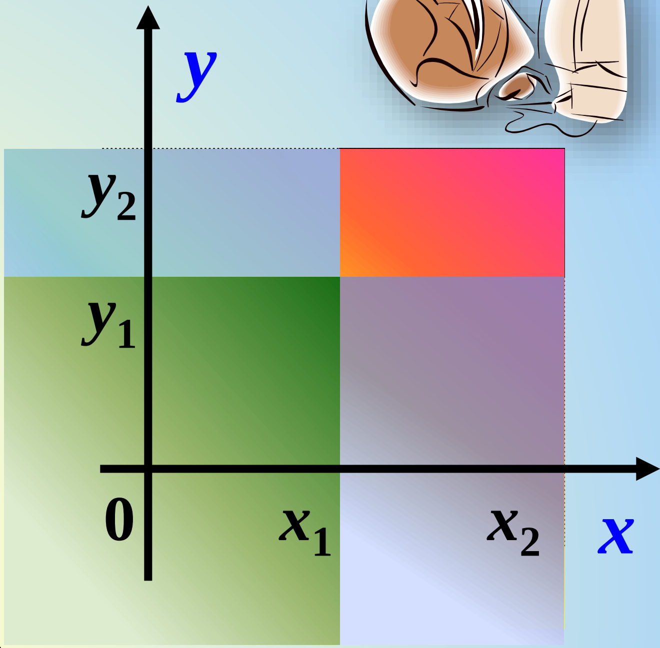
$$\lim_{x \to x_0^+} F(x, y) = F(x_0, y) \qquad \lim_{y \to y_0^+} F(x, y) = F(x, y_0)$$

一、联合分布函数

联合分布函数的性质：

④ 相容性：

对任意 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$，有：



$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\geq 0$$

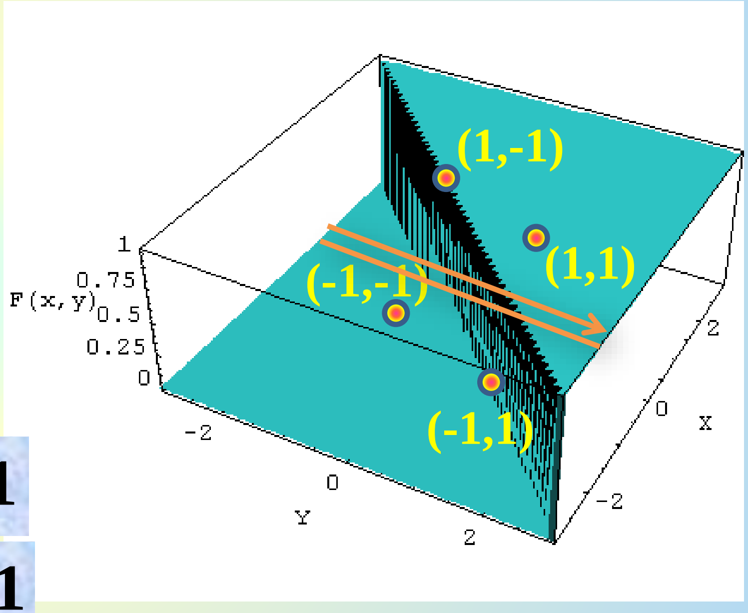
注：若二元函数$F(x,y)$满足上述4条性质，则必存在二维随机变量(X,Y)以$F(x,y)$为分布函数。

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

一、联合分布函数

例3.1.1 判断如下二元函数是否为联合分布函数。

$$F(x,y)=\begin{cases}1, & x+y\geq 0\\ 0, & x+y<0\end{cases}$$



分析:

1. 单调不减性 √
2. 有界性 √
3. 右连续性 √
4. 相容性 X

$F(1,1)=1$

$F(1,-1)=1$

$F(-1,1)=1$

$F(-1,-1)=0$

$F(1,1)-F(1,-1)-F(-1,1)+F(-1,-1)=-1$

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

一、联合分布函数

定义 n维随机变量$(X_1, X_2, \dots, X_n)$的**联合分布函数**为

$$F(x_1, x_2, \dots x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots X_n \le x_n\}$$

其中$x_1, x_2, \dots, x_n$为n个任意实数。

由$(X_1, X_2, \dots, X_n)$的联合分布函数，可确定其中任意k个分量的联合分布函数，称为**k维边缘分布函数**，例如：

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, +\infty, +\infty, \cdots, +\infty)$$

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, +\infty, \cdots, +\infty)$$

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

第3章1节 二维随机变量及其分布

一、联合分布函数

思考：

一维分布函数与二维分布函数的联系与区别?

(联系概率性质分析)

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

第3章1节　二维随机变量及其分布

二、联合分布律

定义

设二维随机变量(X,Y)至多取可列对数值：

$(x_i, y_j)\quad i,j=1,2,\ldots.$　记

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}\quad i,j=1,2,\ldots. \qquad (*)$$

称(X,Y)为**二维离散型随机变量**，称式(*)为(X,Y)的**联合分布律**。

若　1）$p_{ij}\geq 0\qquad i,j=1,2,\ldots.$

2）$\sum_i \sum_j p_{ij}=1$

对比概率性质

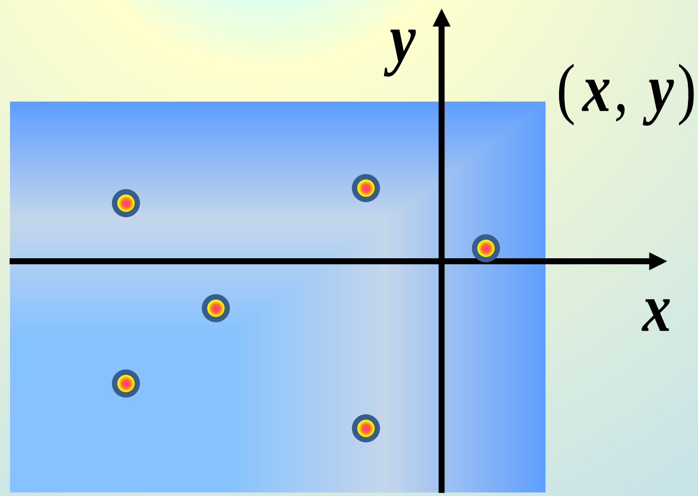
电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

二、联合分布律

由联合分布律可以确定联合分布函数：

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \quad i, j = 1,2,\ldots \qquad (*)$$

$$F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\} = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} p_{ij}$$



电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

第3章1节　二维随机变量及其分布

二、联合分布律

由联合分布律可得随机变量X,Y的分布律：

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}\ ,\ i=1,2,\cdots$$

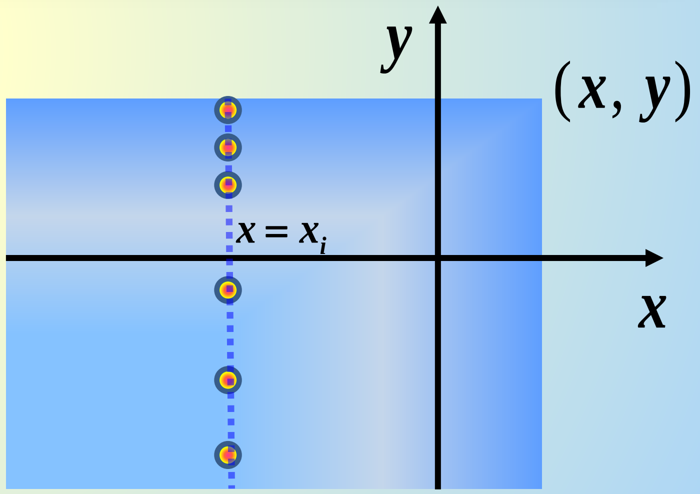
$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}\ ,\ j=1,2,\cdots$$

类似全概率公式推导过程：

$$\{X=x_i\}=\{X=x_i\}\cap\Omega$$

$$=\{X=x_i\}\cap\left\{\bigcup_{j=1}^{+\infty}\{Y=y_j\}\right\}$$

$$=\bigcup_{j=1}^{+\infty}\{X=x_i,Y=y_j\}$$



接下来如何推导？

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

第3章1节　二维随机变量及其分布

二、联合分布律

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}\ ,\ i=1,2,\cdots$$

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}\ ,\ j=1,2,\cdots$$

用表格表示联合分布律和边缘分布律

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

第3章1节　二维随机变量及其分布

一、联合分布函数

联合分布律　　二维两点分布

思考： 能否用边缘分布律来确定联合分布律，原因是什么？

(参见教材 例3.1.3和3.1.4)

多维随机变量的联合分布不仅与每个分量的边缘分布有关，而且还与每个分量之 间的联系有关！

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

第3章1节　二维随机变量及其分布

三、联合概率密度

定义：二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为$F(x,\ y)$，如果存在非负的函数$f(x,y)$使得对任意实数对(x,y)有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv$$

称(X,Y)是**连续型随机变量**，$f(x,y)$称为(X,Y)的**联合概率密度**。

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

三、联合概率密度

性质：

1) $f(x,y)\geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

3) 若$f(x,y)$在(x,y)处连续。则

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$$

4) 若$G\subset R^2$,有

$$p\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)d\sigma$$

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

第3章1节　二维随机变量及其分布

三、联合概率密度

5) x, y的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

证： $F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv\right]du$

$$f_X(x)=F_X{}'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)dv$$

联合分布函数　边缘概率密度　综合例题

三、联合概率密度

对边缘概率密度的求解,实质上是求带参变量的积分.

其难点是：定积分的上下限.

我们可通过图形来很好的解决这个问题.

1. 写出基本公式
2. 检验：非负、　积分=1

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

第3章1节　二维随机变量及其分布

四、二维均匀分布

设$G \subset R^2$,面积为$S(G)$,若二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(G)} & (x,y)\in G \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则称(X,Y)在G上服从**均匀分布**。

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

第3章1节　二维随机变量及其分布

四、二维均匀分布

1. (X, Y)在G上服从均匀分布,设$D \subset G$则有

$$P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D \frac{1}{S(G)} d\sigma = \frac{S(D)}{S(G)}$$

设$X \sim U(a,b)$，$(c,d) \subset (a,b)$ 则

$$P\{c < X \le d\} = \frac{d-c}{b-a} = \frac{(c,d)\text{的长度}}{(a,b)\text{的长度}}$$

约会问题　　折段成三角形

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

五、二维正态分布

定义：二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}\quad x\in R,y\in R$$

其中，$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 均为常数，且$\sigma_1>0$，$\sigma_2>0,|\rho|<1$，称(X,Y)服从**二维正态分布**，记为$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\ \mu_2,\sigma_2^2;\ \rho)$

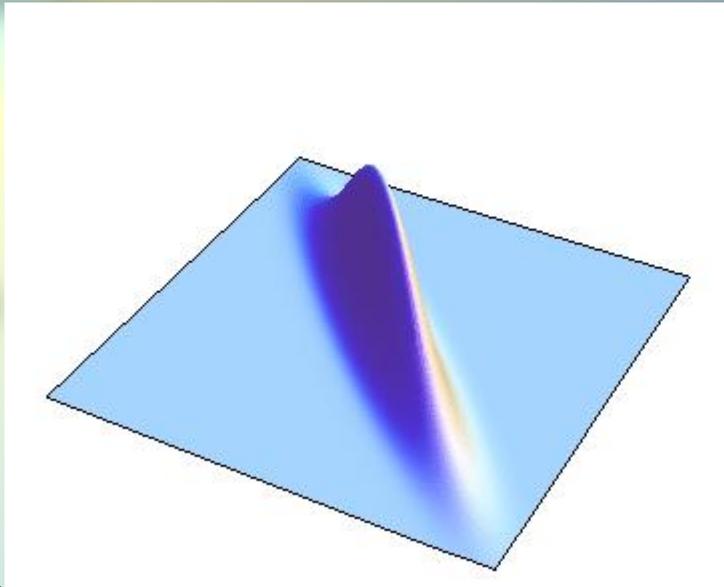
电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

五、二维正态分布

二维正态分布

命题3.1.1 若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\ \mu_2,\sigma_2^2;\ \rho)$，则 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

$(X,Y)\sim N(0,1;\ 0,1;\rho)$ ρ从-0.95到0.95 变化的动态图



电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com