引 例

在一次社交聚会中， 一位女士宣称她能区分在熬好的咖啡中，是先加奶还是先加糖，并当场试验，结果 8 杯中判断正确 7 杯.

但因它未完全说正确，有人怀疑她的能力！该如何证明她的能力呢?

在场的一位统计学家给出了如下的**推理思路**:

引 例

设该女士判断正确的概率为p

- 原 假 设H_0： $p=1/2$ 即该女士凭猜测判断

  对立假设H_1： $p>1/2$ 即该女士确有判断力

- 在假设H_0下，8杯中猜对7杯以上的概率为

  0.0352 (用二项分布计算)

- 若H_0正确，则小概率事件发生！---故拒绝H_0

  即认为该女士确有鉴别能力.

包装机工作正常与否的判断

某车间有一台葡萄糖自动包装机，额定标准为每袋重500克。设每袋产品重量$X \sim N(\mu, 15^2)$，某天开工后，为了检验包装机工作是否正常，随机取得9袋产品，称得重量为(单位：克)：

497	506	518	524	498	511	520	515	512

问：这天包装机是否工作正常?

分析：若$\mu=500$(克)，则包装机工作正常；否则不正常.

包装机工作正常与否的判断

分析：若μ=500(克)，则包装机工作正常；否则不正常.

首先，根据实际问题提出一对假设

$$H_0: \mu=500=\mu_0 \qquad H_1: \mu\neq\mu_0$$

若依实际情况**拒绝了H_0，则表明包装机工作不正常**；否则，就表明包装机工作正常.

其次，构造适当的检验统计量

由于 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是μ的良好估计量，且$\sigma_0^2=15^2$， 故当H_0成立时，有 $\bar{X}\sim N(\mu_0,\sigma_0^2/n)$ 从而有

$$U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

然后，确定H_0的拒绝域

对给定的显著水平$\alpha(0<\alpha<1)$，

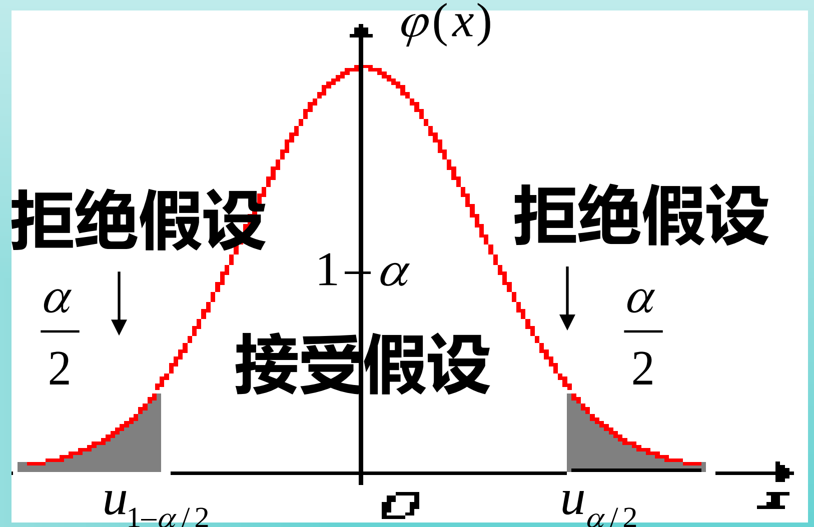
有正态分布表可查得$u_{\alpha/2}$，使得

$$P\{\,|U|>u_{\alpha/2}\}=\alpha$$

即

$$P\{\,|U|\le u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

于是



$$C=\left\{(x_1,\dots,x_n):\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}}>u_{\alpha/2}\right\}$$

称为H_0的拒绝域

(否定区域或临界区域)

最后，下结论(作判断)

对给定的样本值x_1，…，x_n，算出U 的具体值

$$u=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}},\quad 其中\ \bar{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i$$

若$|u|>u_{\alpha/2}$(这等价于(x_1，…，x_n)∈C)，则拒绝H_0(从而接受H_1)；

否则，接受H_0.

该例中，若取α=0.05，查表得：$u_{\alpha/2}$=1.96

由样本可算得：

$$|u|=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}=\frac{|511-500|}{15/3}=\frac{11}{5}=2.2$$

由于$|u|$=2.2> 1.96，故在显著性水平α=0.05 之下拒绝H_0，即认为包装机工作不正常.