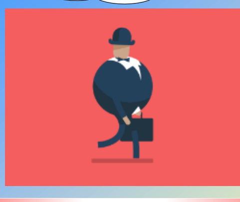
方差—引例1

我也平均每天一万步

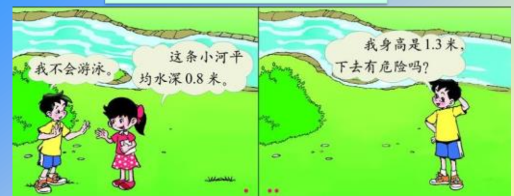
我平均每天一万步



我周一走六万多步，其余六天每天大约一千步，恢复体力

我每天都是一万步步左右

下图给你什么启发?



仅用均值不足以衡量整体水平
还需考虑极大值、极小值、离差等

$X - E(X)$

方差——引 例2

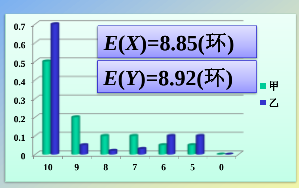
已知甲乙两名射击运动员的历史记录为：

X	10	9	8	7	6	5	0
$P(X=x_i)$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.05	0.05	0

甲

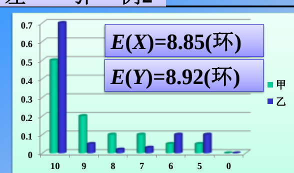
Y	10	9	8	7	6	5	0
$P(Y=y_k)$	0.7	0.05	0.02	0.03	0.1	0.1	0

乙



仅用均值，或极大值、极小值难以衡量整体水平!

方差——引 例2



考虑偏离均值的程度——离差
$X - E(X)$

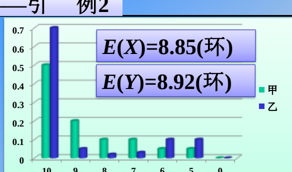
思考： 可否用离差的均值作偏离程度的指标?

离差的均值会正负抵消!

为避免这种情况，可考虑先取绝对值或平方，然后计算其均值。

哪种更好?

方差——引 例2



若参加比赛，该选谁去?

考虑离差平方的平均值：

甲：$\sum_{i=5}^{10}(i-E(X))^2 P\{X=i\} = E\{[X-E(X)]^2\} = 2.2275$

乙：$\sum_{k=5}^{10}(k-E(Y))^2 P\{Y=k\} = E\{[Y-E(Y)]^2\} = 3.4860$

这说明甲的技术水平发挥的更稳定

方差公式的证明

$$
\begin{aligned}
D(X) &= E\{[X-E(X)]^2\} \\
&= E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\} \\
&= E(X^2) - 2E(X)\cdot E(X) + [E(X)]^2 \\
&= E(X^2) - [E(X)]^2
\end{aligned}
$$

泊松分布的方差

1. $X \sim P(\lambda)$ 则 $E(X)=\lambda$ $D(X)=\lambda$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{+\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

$$\underline{\underline{令 m=k-1}}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(m+1)\lambda^{m+1}}{m!}e^{-\lambda}$$

泊松分布的期望

$$=\lambda\underline{\sum_{m=0}^{+\infty}m\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}}+\lambda\underline{\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}}$$

分布律之和等于1

$$=\lambda^2+\lambda$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2$$

$$=\lambda$$

正态分布的方差

3. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 则 $E(X)=\mu$ $D(X)=\sigma^2$

证明: $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-\mu]^2 f(x)dx$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\underline{\underline{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}}\ \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\,de^{-\frac{t^2}{2}}$$

$\underline{\underline{分部积分}}$ σ^2

随机变量函数的方差

例4.2.1 设随机变量X的分布律为

X	-1	0	1
P	$1/2$	$1/3$	$1/6$

1)求$D(X)$ 2) $Y=X^2+1$，求$D(Y)$

解：1) $E(X)=(-1)\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$

$$E(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{2}+0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{5}{9}$$

随机变量函数的方差

例4.2.1 设随机变量X的分布律为

X	-1	0	1
P	$1/2$	$1/3$	$1/6$

1)求$D(X)$ 2) $Y=X^2+1$，求$D(Y)$

$E(X^2)=2/3$

解：2) $E(Y)=E(X^2+1)=E(X^2)+1=\frac{5}{3}$

$$E(Y^2)=E(X^4+2X^2+1)=3$$

注意到：X^4与X^2同分布

$$D(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=\frac{2}{9}$$

|X-Y|的方差

例4.2.2: 设随机变量X与Y相互独立,且$X,Y\sim N(0,\frac{1}{2})$ 求$|X-Y|$ 的方差。

解：X,Y相互独立, $-Y\sim N(0,\frac{1}{2})$ $\xrightarrow{\text{正态分布具有可加性}}$ $X-Y\sim N(0,1)$

令$Z=X-Y$ 则 $Z\sim N(0,1)$ $E(Z)=0$ $D(Z)=1$

$$E(|Z|)=\sqrt{2/\pi}$$

$$E(|Z|^2)=E(Z^2)=D(Z)+[E(Z)]^2=1$$

$$D(|X-Y|)=E(|Z|^2)-[E(|Z|)]^2=1-\frac{2}{\pi}$$

练习解答

练习：设一次试验成功的概率为p,进行100次独立重复试验，当$p=$ 1/2 时，成功次数的标准差的值最大，其值为 5

解：设成功次数为X，则$X\sim B(100,p)$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{100p(1-p)}=10\sqrt{p(1-p)}$$

令 $f(p)=p(1-p)$ $0<p<1$

令 $f'(p)=1-2p=0 \Rightarrow p=\frac{1}{2}$

$f''(p)|_{p=0.5}=-2$

$f(p)$在$p=\frac{1}{2}$ 取最大值

$$\sigma(X)=10\sqrt{p(1-p)}=5$$

随机变量的标准化

例4.2.4 随机变量X的$E(X), D(X)$存在，且$D(X)>0$

令 $X^* = \dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$

这里期望和方差看做常数

证明：$E(X^*)=0 \quad D(X^*)=1$

证 明：$E(X^*)=\dfrac{1}{\sqrt{D(X)}}E[X-E(X)]=0$

$$D(X^*)=\left(\frac{1}{\sqrt{D(X)}}\right)^2 D[X-E(X)]=\frac{D(X)}{D(X)}=1$$

称X^*为X的标准化随机变量。

作用：消除量纲的影响

特别地：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

样本均值的期望和方差

例4.2.7 设随机变量$X_1, X_2,\dots, X_n$相互独立，且$E(X_i)=\mu$

$D(X_i)=\sigma^2$，求$\bar{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\dots+X_n)$的数学期望和方差

解

$$E(\bar{X})=E\left[\frac{1}{n}(X_1+X_2+\dots+X_n)\right]$$

$$=\frac{1}{n}E(X_1+X_2+\dots+X_n)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}n\mu=\mu$$

样本均值的期望和方差

例4.2.7 设随机变量$X_1, X_2,\dots, X_n$相互独立，且$E(X_i)=\mu$

$D(X_i)=\sigma^2$，求$\bar{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\dots+X_n)$的数学期望和方差

解

$$D(\bar{X})=D\left[\frac{1}{n}(X_1+X_2+\dots+X_n)\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}D(X_1+X_2+\dots+X_n)$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

思考：该结论有何作用？

X^2+Y^2的期望与方差

设 $X,Y\sim N(0,1)$ 且 X,Y 相互独立。

求 $E(X^2+Y^2), D(X^2+Y^2)$

解：$\because X,Y\sim N(0,1)$

由$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=1$

同理 $E(Y^2)=1$

$\therefore E(X^2+Y^2)=2$

$$D(X^2)=E(X^4)-[E(X^2)]^2$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}dx-1=3-1=2$$

X^2+Y^2的期望与方差

设 $X,Y\sim N(0,1)$ 且 X,Y 相互独立。

求 $E(X^2+Y^2), D(X^2+Y^2)$

$D(X^2)=2 \quad$ 同理 $D(Y^2)=2$

又 $\because X,Y$相互独立

$\therefore D(X^2+Y^2)=D(X^2)+D(Y^2)=4$

称X^2+Y^2的服从自由度为2的χ^2分布