

第四章 随机变量的数字特征



1.	数学期望
2.	随机变量的方差
3.	协方差、相关系数和矩
4.	多维正态随机变量

第4章4节 多维正态随机变量



一. n 维正态随机变量

定义： 设 n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的协方差矩阵 $C = (C_{ij})$ 是 n 阶正定对称矩阵,其联合概率密度为

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |C|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X - \mu)' C^{-1} (X - \mu) \right\}$$

$$\text{其中 } X = (X_1, X_2, \dots, X_n)' \quad \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)'$$

注：

- 1) $E(X_i) = \mu_i \quad D(X_i) = \sigma_i^2$
- 2) $\text{cov}(X_i, X_j) = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$





二.重要结论

1. 有限个相互独立的正态随机变量的线性函数仍服从正态分布

$$(1) X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

例3.4.7

$$(2) X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \Rightarrow \\ X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

例3.4.11





二.重要结论

2. (X_1, \cdots, X_n) 服从 n 维正态分布 \Leftrightarrow

X_1, \cdots, X_n 的任意线性组合 $L_1X_1 + \cdots + L_nX_n$ 服从正态分布,其中系数 L_1, \cdots, L_n 不全为0.

$$\begin{aligned} &* (X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho) \Rightarrow \\ &X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \end{aligned}$$

例3.1.10



第4章4节 多维正态随机变量



二.重要结论

3. (X_1, \cdots, X_n) 服从 n 维正态分布, Y_1, \cdots, Y_m 是 X_1, \cdots, X_n 的线性组合 \Rightarrow
 Y_1, \cdots, Y_m 是 m 维正态分布随机变量。





二.重要结论

4. (X_1, \cdots, X_n) 服从 n 维正态分布,且相互独立

$\Leftrightarrow X_1, \cdots, X_n$ 不相关(协方差阵为对角阵)

* $(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$, X 与 Y 相互独立

$\Rightarrow \rho = 0$ (即 X 与 Y 不相关)

例3.2.5、 例4.4.6

[典型习题: 三章25题、四章21题]





希腊字母表

A	α	alpha	N	ν	nu
B	β	beta	Ξ	ξ	xi
Γ	γ	gamma	O	o	omicron
Δ	δ	delta	Π	π	pi
E	ε	epsilon	P	ρ	rho
Z	ζ	zeta	Σ	σ	sigma
H	η	eta	T	τ	tau
Θ	θ	theta	Y	υ	upsilon
I	ι	iota	Φ	ϕ	phi
K	κ	kappa	X	χ	chi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
M	μ	mu	Ω	ω	omega





全国大学生数学建模竞赛1997年赛题

A题 零件的参数设计

一件产品由若干零件组装而成，标志产品性能的某个参数取决于这些零件的参数。零件参数包括标定值和容差两部分。进行成批生产时，标定值表示一批零件该参数的平均值，容差则给出了参数偏离其标定值的容许范围。若将零件参数视为随机变量，则标定值代表期望值，在生产部门无特殊要求时，容差通常规定为均方差的 3 倍。



应用——建模案例



全国大学生数学建模竞赛1997年赛题

A题 零件的参数设计

进行零件参数设计，就是要确定其标定值和容差。这时要考虑两方面因素：一是当各零件组装成产品时，如果产品参数偏离预先设定的目标值，就会造成质量损失，偏离越大，损失越大；二是零件容差的大小决定了其制造成本，容差设计得越小，成本越高。

试通过如下的具体问题给出一般的零件参数设计方法。



应用——建模案例



全国大学生数学建模竞赛1997年赛题

A题 零件的参数设计

粒子分离器某参数（记作 y ）由7个零件的参数（记作 x_1, x_2, \dots, x_7 ）决定，经验公式为：

$$y = 174.42 \times \left(\frac{x_1}{x_5} \right) \times \left[\frac{x_3}{x_2 - x_1} \right]^{0.85} \times \sqrt[3]{ \frac{ \left[1 - 2.62 \times \left[1 - 0.36 \times \left(\frac{x_4}{x_2} \right)^{-0.56} \right] \times \left(\frac{x_4}{x_2} \right)^{1.16} \right]^{3/2} }{ x_6 \times x_7 } }$$



应用——建模案例



全国大学生数学建模竞赛1997年赛题

A题 零件的参数设计

y 的目标值 (记作 y_0 为1.50。

当 y 偏离 $1.00 \pm y$ 时, 产品为次品, 质量损失为 1, 000 (元) ;

当 y 偏离 $3.00 \pm y$ 时, 产品为废品, 损失为 9, 000 (元) 。





全国大学生数学建模竞赛1997年赛题

A题 零件的参数设计

零件参数的标定值有一定的容许变化范围；容差分为 A 、 B 、 C 三个等级，用与标定值的相对值表示， A 等为 $\pm 1\%$ ， B 等为 $\pm 5\%$ ， C 等为 $\pm 10\%$ 。7 个零件参数标定值的容许范围，及不同容差等级零件的成本（元）如下表（符号/表示无此等级零件）：



应用——建模案例



全国大学生数学建模竞赛1997年赛题

	标定值容许范围	C 等	B 等	A 等
X_1	$[0.075, 0.125]$	/	25	/
X_2	$[0.225, 0.375]$	20	50	/
X_3	$[0.075, 0.125]$	20	50	200
X_4	$[0.075, 0/125]$	50	100	500
X_5	$[1.125, 1.875]$	50	/	/
X_6	$[12, 20]$	10	25	100
X_7	$[0.5625, 0.935]$	/	25	100





全国大学生数学建模竞赛1997年赛题

A题 零件的参数设计

现进行成批生产，每批产量 1,000 个。在原设计中，7 个零件参数的标定值为：

$$X_1 = 0.1, \quad X_2 = 0.3, \quad X_3 = 0.1,$$

$$X_4 = 0.1, \quad X_5 = 1.5, \quad X_6 = 16,$$

$$X_7 = 0.75$$

容差均取最便宜的等级。

请你综合考虑 y 偏离 y_0 造成的损失和零件成本，重新设计零件参数（包括标定值和容许差），与原设计比较，总费用降低了多少。

