第四章　随机变量的数字特征

第4章1节　数学期望

随机变量的数字特征

一. 随机变量的数学期望

引 例 1　　引 例 2

定义 设X是离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_i,\quad i=1,2,3,\dots$$

若 $\sum_{i=1}^{+\infty}|x_i|p_i<+\infty$，则称

$$E(X)=\sum_{i=1}^{+\infty}x_ip_i$$ 为X的数学期望（均值）

绝对收敛

第4章1节　数学期望

一. 随机变量的数学期望

设 连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$，若

若：$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx<+\infty$ 称

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$ 为X的数学期望(均值)

期望是否存在?

注：并非所有的随机变量X都存在数学期望。

第4章1节　数学期望

一. 随机变量的数学期望　　二者关系

1. $X\sim P(\lambda)$ 则 $E(X)=\lambda$　　泊松分布期望值
2. $X\sim B(n,p)$ 则 $E(X)=np$　　二项分布期望值
3. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 则 $E(X)=\mu$　　正态分布期望值
4. $X\sim U(a,b)$ 则 $E(X)=\frac{a+b}{2}$
5. $X\sim E(\lambda)$ 则 $E(X)=\frac{1}{\lambda}$　　注意λ含义

第4章1节　数学期望

二. 随机变量的函数的数学期望

随机变量函数的数学期望

定理 设Y是随机变量X的函数$Y=g(X)$，$g(x)$为连续函数

1) 若X是离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_i,\qquad i=1,2,3,\cdots$$

若：$\sum_{i=1}^{+\infty}g(x_i)p_i$绝对收敛，则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{i=1}^{+\infty}g(x_i)p_i$$

第4章1节　数学期望

二. 随机变量的函数的数学期望

定理 设Y是随机变量X的函数$Y=g(X)$，$g(x)$为连续函数

2) X是连续型随机变量，其概率密度为$f(x)$，

若：$\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|f(x)<+\infty$ 则

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$$

离 差 平 方 的 期 望

第4章1节　数学期望

二. 随机变量的函数的数学期望

思考： 我们可否将前定理推广到二维甚至更多维的情况。

参见书上 定理4.1.2

$X \cdot Y$的期望　　$\min(X,Y)$的期望

练习　设随机变量X与Y相互独立，且$X, Y \sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)$

则　$E(|X-Y|)=$ ________

练 习 解 答

第4章1节　数学期望

三. 随机变量的数学期望的性质

设$X, X_1, X_2, \cdots, X_n$是随机变量，c, b是常数

1）$E(c) = c$

2）$E(cX) = cE(X)$

$E(cX+b) = cE(X)+b$

证　明

3）$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

4）若$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，则

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

第4章1节　数学期望

三. 随机变量的数学期望的性质

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

应用：

调 整 设 备 的 平 均 次 数

超几何分布的数学期望

验 血 的 次 数