自由度是由线性代数中借用的术语。

- **定义1.** 若存在一组不全为零的常数 C_1、C_2、…、C_n 使得 $C_1X_1+C_2X_2+\ldots+C_nX_n=0$，则称变量 X_1、X_2、…、X_n 之间存在一个约束条件。
- **定义2.** 若存在 k 个约束条件

  $C_{i1}X_1+C_{i2}X_2+\ldots+C_{in}X_n=0$，　　$i=1，2，\ldots，k$

  其中系数矩阵 $(C_{ij})_{kn}$ 的秩为 k，且对于任何 m $(k\le m)$ 个约束：

  $C_{i1}'X_1+C_{i2}'X_2+\ldots+C_{in}'X_n=0$，　　$i=1，2，\ldots，m$

  矩阵 $(C_{ij}')_{mn}$ 的秩总不大于 k，则称变量 X_1、X_2、…、X_n 之间存在 k 个独立的线性约束条件。

易知，X_1、X_2、…、X_n 中只有 $(n-k)$ 个独立变量。

- 定义3. 若在平方和 $\sum X_i^2$ 中， X_1、X_2、…、X_n之间存在着 k 个独立的线性约束条件，则称平方和 $\sum X_i^2$ 的<u>自由度为 n-k</u> (即其中独立变量为 n-k 个)。

#

例 统计量的分布(之一)

设 X_1，X_2，…，X_n 是来自正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的容量为 n 的样本，求下列统计量的概率分布：

1. $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$　　　2. $Y=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

解 1. $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(n\mu,n\sigma^2)$

故 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

2. $\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$

故 $Y=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$

例　查表计算概率

1.若$X \sim N(0,1)$　　$P\{-1.58 \le X \le 1.96\} = ?$

2.若$\chi^2 \sim \chi^2(15)$　　$P\{6.262 \le \chi^2(15) \le 24.996\} = ?$

解： 1. $\because X \sim N(0,1)$

$\therefore P\{-1.58 \le X \le 1.96\} = P\{X \le 1.96\} - P\{X \le -1.58\}$

$= P\{X \le 1.96\} - \left[1 - P\{X \le 1.58\}\right]$

$= \Phi(1.96) - [1 - \Phi(1.58)] = 0.975 - (1 - 0.943)$

$= 0.918$

2. $\because \chi^2 \sim \chi^2(15)$

$\therefore P\{6.262 \le \chi^2(15) \le 24.996\}$

$= P\{\chi^2(15) \ge 6.262\} - P\{\chi^2(15) \ge 24.996\}$

$= 0.975 - 0.05 = 0.925$

$\chi^2_{0.975}(15) = 6.262$

$\chi^2_{0.005}(15) = 24.996$

注意：查表时应注意分布表的定义与查法！

例 统计量的分布(之二)

设 X_1，X_2，…，X_{n+m} 是来自正态总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的容量为 $n+m$ 的样本，求下列统计量的概率分布：

1. $Y=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n+m}X_i^2$　　2. $Z=\sqrt{\dfrac{m}{n}}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\Big/\sqrt{\sum\limits_{i=n+1}^{n+m}X_i^2}$　　3. $\dfrac{1}{Z^2}$

解 1. $\dfrac{X_i}{\sigma}\sim N(0,1)$ 且所有 $\dfrac{X_i}{\sigma}$ 相互独立 $(i=1,2,\ldots,n+m)$

故 $$Y=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n+m}X_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n+m)$$

2. 因$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(0, n\sigma^2) \Rightarrow U = \sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ \sqrt{n\sigma^2} \sim N(0,1)$

同时 $V = \sum_{i=n+1}^{n+m} \frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m)$, U与V相互独立

从而有 $Z = \sqrt{\frac{m}{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ \sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2} = \frac{U}{\sqrt{V/m}} \sim t(m)$

3. $U \sim N(0,1) \Rightarrow U^2 \sim \chi^2(1)$

$V \sim \chi^2(m)$, U与V相互独立

故 $\frac{1}{Z^2} = \frac{V/m}{U^2/1} \sim F(m,1)$