事件的独立性——掷四面体试验

例1 设同时掷两个均匀的四面体一次，每一个四面体的四面分别标有号码1，2，3，4。

令A={甲四面体向下的一面是偶数}，
B={乙四面体向下的一面是奇数}，
C={两个四面体向下的一面同为奇数或偶数}。
由古典概率定义有

$$P(A)=P(B)=P(C)=8/16=1/2$$
$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=1/4$$
$$P(ABC)=P(\phi)=0$$

从而有$P(AB)=P(A)P(B)$

$$P(AC)=P(A)P(C) \qquad (*)$$
$$P(BC)=P(B)P(C)$$

事 件 的 独 立 性

即A、B、C中任意两个都是相互独立的，称A、B、C 两两独立。

另一方面 $P(A|BC)=0\neq 1/2=P(A)$

这说明事件A发生的可能性大小会受到B与C的“联合”影响。

若（*）式成立，并且$P(A|BC)=P(A)$，有

$$P(ABC)=P(A|BC)P(BC)=P(A)P(B)P(C)$$

称A、B、C 相互独立。

事件的独立性——三个臭皮匠，顶个诸葛亮

例2 三个枪手向一个神枪手比武.他们都独立地向同一目标射击，三个枪手的命中率分别为0.5、0.55、0.60，神枪手的命中率为0.90.问哪一方胜出的可能性大?

解：令A_i={第 i 个枪手命中目标}，i=1,2,3。则有A_1、A_2、A_3相互独立。

于是由加法定理可得

$$p=P(A_1\cup A_2\cup A_3)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)$$
$$-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$
$$=0.5+0.55+0.60-0.5\times 0.55-0.5\times 0.60$$
$$-0.60\times 0.55+0.5\times 0.55\times 0.60$$
$$=0.91$$

三 个 枪 手 胜 出 的 可 能 性 大

思考： 进行决策时，是否三人出主意一定比一人高明？

这必须加上一些必要的假设才行，如：
- 三人出主意是相互独立的（互不影响）
- 一旦有了好主意就能被采纳
- ……

事件的独立性——有志者事竟成

例3 某人做一次试验获得成功的概率仅为0.2，他持之以恒，不断重复试验，求他做10次试验至少成功一次的概率？做20次又怎样呢？

解：设他做k次试验至少成功一次的概率为p_k，
A_k={第k次试验成功}，k=1，2，…

则 $$p_{10}=P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{10})$$
$$=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_{10})$$
$$=1-(1-0.2)^{10}\approx 0.8926$$
$$p_{20}=P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{20})$$
$$=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_{20})$$
$$=1-(1-0.2)^{20}\approx 0.9885$$

事 件 的 独 立 性

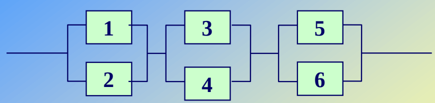
一般，将试验E重复进行k次，每次试验中A出现的概率p（$0<p<1$）则A至少出现一次的概率为

$$p_k=1-(1-p)^k$$

并且

$$\lim_{k\to\infty}p_k=\lim_{k\to\infty}[1-(1-p_k)^k=1$$

例4 (可靠性问题)设有6个元件，每个元件在单位时间内能正常工作的概率均为0.9，且各元件能否正常工作是相互独立的，试求下面系统能正常工作的概率。



解：设A_k={第k个元件能正常工作}，k=1，2，…，6

A ={整个系统能正常工作}

$=(A_1 \cup A_2)(A_3 \cup A_4)(A_5 \cup A_6)$

A_1，A_2，…，A_6设相互独立，可以证明$A_1 \cup A_2$，$A_3 \cup A_4$，$A_5 \cup A_6$也相互独立

所以有

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2)P(A_3 \cup A_4)P(A_5 \cup A_6)$$

$$= [1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})][1 - P(\overline{A_3}\,\overline{A_4})][1 - P(\overline{A_5}\,\overline{A_6})]$$

$$= [1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})][1 - P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})][1 - P(\overline{A_5})P(\overline{A_6})]$$

$$= [1 - (1 - 0.9)^2]^3 = 0.970299$$