随机变量——摸彩赌博

例1 一个庄家在一个签袋中放有8个白、8个黑的围棋子。规定：每个摸彩者交一角钱作“手续费”，然后一个从袋中摸出五个棋子，按下面“摸子中彩表”给“彩金”。

摸到	五个白	四个白	三个白	其它
彩金	2元	2角	5分	共乐一次

解：用“i”表示模出的五个棋子中有 i 个**白子**，则试验的样本空间为 $\Omega=\{0，1，2，3，4，5\}$

用 Y（单位:元）表示赌徒摸一次得到的**彩金**，则有

$$Y(i)=0,\quad i=0,\ 1,\ 2$$
$$Y(3)=0.05,\quad Y(4)=0.2,\quad Y(5)=2$$

Y是定义在Ω上的随机变量，对于每一个 i，都有一个实与之对应。

$$P\{Y=0.05\}=P\{3\}=C_8^2C_8^3/C_{16}^5=0.3589$$
$$P\{Y=0.2\}=P\{4\}=C_8^1C_8^4/C_{16}^5=0.1282$$
$$P\{Y=2\}=P\{5\}=C_8^5/C_{16}^5=0.0128$$

$$P\{Y=0\}=P\{0,1,2\}=1-0.3589-0.1282-0.0128=0.5001$$

对于任意实数x，$\{X(\omega)\leqslant x\}$实际表示一个随机事件，从而有确定的概率，例如

$$P\{Y\le -0.5\}=P\{\Phi\}=0 \qquad P\{Y\le 3\}=P\{\Omega\}=1$$
$$P\{Y\le 1.2\}=P\{0,1,2,3,4\}=1-0.0128=0.9872$$

总结：随机变量Y完整地描述了试验的全过程，而不必对每一个事件进行重复讨论。

分布函数——摸彩试验

例2：一袋中有依次标有-1、2、2、2、3、3数字的六个球，从中任取一球，试写出球上号码X 的分布函数。

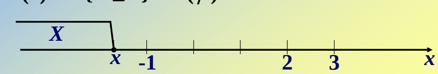
思路：分布函数一般是分段函数
根据随机变量的取值来确定分段数目

解：由题意有

$$P\{X=-1\}=\frac{1}{6},\quad P\{X=2\}=\frac{1}{2},\quad P\{X=3\}=\frac{1}{3}$$

当$x<-1$时，

$F(x)=P\{X\le x\}=P(\phi)=0$。



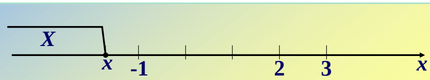
注意：

1. $x<-1$和$\{X<-1\}$的区别——前者表示区域，后者表示事件
2. 区域右边界是开区间$x<-1$，不能是$x\le -1$

若取$x\le -1$，则

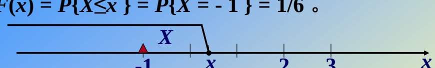
$$if\quad x<-1,\ P\{X\le x\}=P\{\Phi\}=0$$
$$if\quad x=-1,\ P\{X\le x\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{6}$$

在同一分段中，函数值取得不同，有悖于初衷



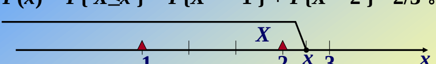
当$-1\le x<2$时，

$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=-1\}=1/6$ 。



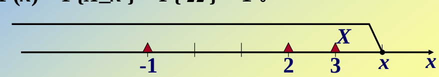
当$2\le x<3$时，

$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=-1\}+P\{X=2\}=2/3$ 。



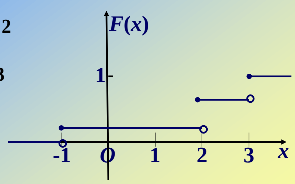
当$3\le x$时，

$F(x)=P\{X\le x\}=P\{\Omega\}=1$ 。



综上所述,可得

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{6}, & -1\le x<2\\ \frac{2}{3}, & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$$



这是一个右连续的单调不降阶梯函数，在不连续点处的阶跃值恰为$P\{X=k\}$, k=-1,2,3。

对照【例2.1.2】

1. 由分布律确定分布函数的方法步骤:
   ① 确定所有可能取值，及其概率;
   ② 根据 n 个取值将数轴划分为 n+1 段;
   ③ 逐段确定分布函数。
2. 由分布函数反推分布律的方法步骤:
   ① 分段函数的分界点就是所有可能取值;
   ② 分布函数逐段相减的差值，就是取值对应的概率。

分布函数——射击试验

例3：一个靶子是半径为2米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘的概率与该圆盘的面积成正比，射击均能中靶，用X表示弹着点与圆心的距离。试求X的分布函数。

解： 由题意有

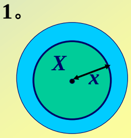
当$x<0$时, $F(x) = P\{X\le x\} = P(\phi) = 0$。

当$x\ge 2$时, $F(x) = P\{X\le x\} = P(\Omega) = 1$。

当$0\le x<2$时, 由题意知

$P\{0<X\le x\} = k\,x^2$

其中k为一常数。

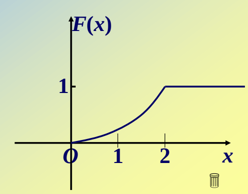


由题意可得 $1=P\{0<X\le 2\}=4k\Rightarrow k=\frac{1}{4}$

从而有 $F(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le 0\}+P\{0<X\le x\}=\frac{1}{4}x^2$

所以分布函数为:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x^2}{4}, & 0\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$



分布函数——仪器寿命问题

例4：使用了t小时的电子管在以后的Δt小时内损坏的概率等于$\lambda\Delta t+o(\Delta t)$, 其中$\lambda>0$为一常数, 试写出电子管的寿命$T$的分布函数。

解： 由题意

当$t<0$时, $F(t) = P\{T\le t\} = 0$。

当$t\ge 0$时, 设$\Delta t>0$，由题设条件有

$P\{T\le t+\Delta t\,|\,T>t\} = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$,

由条件概率定义，

$$P\{T\le t+\Delta t|T>t\}=\frac{P\{T\le t+\Delta t\text{且}T>t\}}{P\{T>t\}}$$

$$=\frac{P\{t<T\le t+\Delta t\}}{1-P\{T\le t\}}=\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{1-F(t)}$$

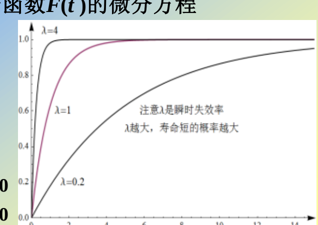
$$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{1-F(t)}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

令 $\Delta t\to 0$时，得到关于函数$F(t)$的微分方程

$$\begin{cases}\frac{dF(t)}{dt}=\lambda[1-F(t)]\\ F(0)=0\end{cases}$$

求解方程得分布函数

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$



分布函数——确定未知参数

例5：随机变量X的分布函数为连续函数，形式如下

$$F(x)=\begin{cases} a, & x<1 \\ bx\ln x+cx+d, & 1\le x<e \\ d, & e\le x \end{cases}$$

求a, b, c, d

分析：利用分布函数的性质求解。

解：

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty}F(x)=F(-\infty)=0 \\ &\lim_{x\to-\infty}F(x)=a \end{aligned}\right\} \Longrightarrow a=0$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty}F(x)=F(+\infty)=1 \\ &\lim_{x\to+\infty}F(x)=d \end{aligned}\right\} \Longrightarrow d=1$$

$$\lim_{x\to1^+}F(x)=F(1) \Longrightarrow c+d=a$$

$$\lim_{x\to e^+}F(x)=F(e) \Longrightarrow d=be+ce+d$$

$$\boxed{\begin{aligned} a&=0 \\ b&=1 \\ c&=-1 \\ d&=1 \end{aligned}}$$

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com