第三章 多维随机变量

第3章 多维随机变量

多维随机变量的引入

§3.1 二维随机变量及其分布

一、联合分布函数

定义 设随机试验E的样本空间为Ω，对于每一样本点$\omega\in\Omega$，有两个实数$X(\omega),Y(\omega)$与之对应，称它们构成的有序数组(X,Y)为**二维随机变量**。

注：X，Y都是定义在Ω上的随机变量.

$$F_X(x)=P\{X\le x\}\qquad F_Y(y)=P\{Y\le y\}$$

第3章1节 二维随机变量及其分布

一、联合分布函数

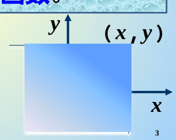
定义 对任意实数对$(x,y)\in R^2$，记

$$\{X\le x,Y\le y\}=\{X\le x\}\cap\{Y\le y\}$$

称二元函数$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$为$(X,Y)$的**联合分布函数**。

一维随机变量X、Y的分布函数$F_X(x)$与$F_Y(y)$称为(X,Y)的**边缘分布函数**。

联合分布函数几何意义:



第3章1节 二维随机变量及其分布

一、联合分布函数

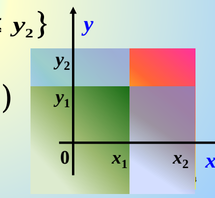
1. 由联合分布函数可确定边缘分布函数

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<+\infty\}=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X<+\infty,Y\le y\}=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$$

2. $P\{x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2\}$

$$=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$$



第3章1节 二维随机变量及其分布

一、联合分布函数

练习：

(X,Y)的联合分布函数为:

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}) & x\ge 0,y\ge 0\\ 0 & else\end{cases}$$

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-2x} & x\ge 0\\ 0 & 其他\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-3y} & y\ge 0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

第3章1节 二维随机变量及其分布

一、联合分布函数

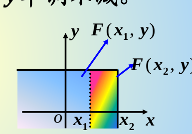
回忆:
1. 概率定义三性质
2. 分布函数三性质

联合分布函数的性质：

① **单调不减性**：$F(x,y)$分别对x,y单调不减。

$x_1<x_2\quad F(x_1,y)\le F(x_2,y),\quad \forall y\in R^1$

$y_1<y_2\quad F(x,y_1)\le F(x,y_2),\quad \forall x\in R^1$



$\because\{X\le x_1,Y\le y\}\subset\{X\le x_2,Y\le y\}$ **由概率单调性得**

$$F(x_1,y)=P\{X\le x_1,Y\le y\}\le P\{X\le x_2,Y\le y\}=F(x_2,y)$$

第3章1节 二维随机变量及其分布

一、联合分布函数

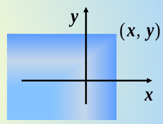
联合分布函数的性质：

② **有界性：** $0 \le F(x,y) \le 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y)=0$

$\lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y)=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x,y)=1$



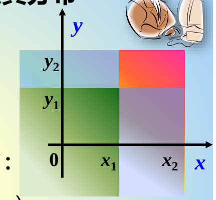
③ **右连续性：** $F(x,y)$ 分别关于 x 或 y 为右连续。

$\lim\limits_{x\to x_0^+} F(x,y)=F(x_0,y)$　　$\lim\limits_{y\to y_0^+} F(x,y)=F(x,y_0)$

第3章1节 二维随机变量及其分布

一、联合分布函数

联合分布函数的性质：



④ **相容性：**

对任意 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$，有：

$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\ge 0$

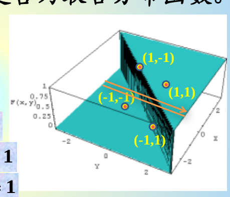
注：若二元函数$F(x,y)$满足上述4条性质，则必存在二维随机变量(X,Y)以$F(x,y)$为分布函数。

第3章1节 二维随机变量及其分布

一、联合分布函数

例3.1.1 判断如下二元函数是否为联合分布函数。

$$F(x,y)=\begin{cases}1, & x+y\ge 0\\ 0, & x+y<0\end{cases}$$



分析：

1. 单调不减性 √
2. 有界性 √
3. 右连续性 √
4. 相容性 X

$F(1,1)=1$

$F(1,-1)=1$

$F(-1,1)=1$

$F(-1,-1)=0$

$F(1,1)-F(1,-1)-F(-1,1)+F(-1,-1)=-1$

第3章1节 二维随机变量及其分布

一、联合分布函数

定义 n维随机变量$(X_1,X_2,\dots,X_n)$的**联合分布函数**为

$$F(x_1,x_2,\dots x_n)=P\{X_1\le x_1, X_2\le x_2,\dots X_n\le x_n\}$$

其中$x_1,x_2,\dots,x_n$为n个任意实数。

由$(X_1,X_2,\dots,X_n)$的联合分布函数，可确定其中任意k个分量的联合分布函数，称为**k维边缘分布函数**，例如：

$$F_{X_1}(x_1)=F(x_1,+\infty,+\infty,\cdots,+\infty)$$

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=F(x_1,x_2,+\infty,\cdots,+\infty)$$

第3章1节 二维随机变量及其分布

一、联合分布函数

思考：

一维分布函数与二维分布函数的联系与区别？

(联系概率性质分析)

第3章1节 二维随机变量及其分布

二、联合分布律

定义 设二维随机变量(X,Y)至多取可列对数值：

(x_i, y_j)　$i,j=1,2,\dots$　记

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}\quad i,j=1,2,\dots \qquad (*)$$

称(X,Y)为**二维离散型随机变量**，称式(*)为(X,Y)的**联合分布律**。

若 1) $p_{ij}\ge 0$　　$i,j=1,2,\dots$

2) $\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1$

对比概率性质

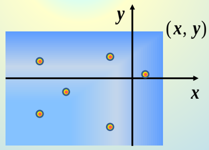
第3章1节 二维随机变量及其分布

二、联合分布律

由联合分布律可以确定联合分布函数:

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \quad i,j=1,2,.... \qquad (*)$$

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y} p_{ij}$$



第3章1节 二维随机变量及其分布

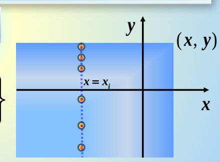
二、联合分布律

由联合分布律可得随机变量X, Y的分布律:

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij}=p_{i\cdot}, i=1,2,\cdots \qquad P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij}=p_{\cdot j}, j=1,2,\cdots$$

类似全概率公式推导过程:

$$\{X=x_i\}=\{X=x_i\}\cap\Omega$$
$$=\{X=x_i\}\cap\left\{\bigcup_{j=1}^{+\infty}\{Y=y_j\}\right\}$$
$$=\bigcup_{j=1}^{+\infty}\{X=x_i, Y=y_j\}$$



接下来如何推导?

第3章1节 二维随机变量及其分布

二、联合分布律

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij}=p_{i\cdot}, i=1,2,\cdots \qquad P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij}=p_{\cdot j}, j=1,2,\cdots$$

用表格表示联合分布律和边缘分布律

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

第3章1节 二维随机变量及其分布

一、联合分布函数

联合分布律 **二维两点分布**

思考: 能否用边缘分布律来确定联合分布律，原因是什么?
(参见教材 例3.1.3和3.1.4)

多维随机变量的联合分布不仅与每个分量的边缘分布有关，而且还与每个分量之 间的联系有关!

第3章1节 二维随机变量及其分布

三、联合概率密度

定义: 二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为$F(x, y)$，如果存在非负的函数$f(x,y)$使得对任意实数对(x,y)有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv$$

称(X,Y)是**连续型随机变量**，$f(x,y)$称为(X,Y)的**联合概率密度**。

第3章1节 二维随机变量及其分布

三、联合概率密度

性质:

1) $f(x,y)\ge 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1$

3) 若$f(x,y)$在(x,y)处连续。则
$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$$

4) 若$G\subset R^2$,有
$$p\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\,d\sigma$$

第3章1节　二维随机变量及其分布

三、联合概率密度

5) x, y的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

证：$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv\right]du$

$$f_X(x)=F_X{}'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)dv$$

联合分布函数　边缘概率密度　综合例题

第3章1节　二维随机变量及其分布

三、联合概率密度

对边缘概率密度的求解，实质上是求带参变量的积分.

其难点是：定积分的上下限.

我们可通过图形来很好的解决这个问题.

1. 写出基本公式
2. 检验：非负、　积分=1

第3章1节　二维随机变量及其分布

四、二维均匀分布

设$G\subset R^2$，面积为$S(G)$，若二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(G)} & (x,y)\in G\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则称(X,Y)在G上服从均匀分布。

第3章1节　二维随机变量及其分布

四、二维均匀分布

1. (X,Y)在G上服从均匀分布，设$D\subset G$则有

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D \frac{1}{S(G)}d\sigma=\frac{S(D)}{S(G)}$$

设$X\sim U(a,b)$，$(c,d)\subset(a,b)$ 则

$$P\{c<X\le d\}=\frac{d-c}{b-a}=\frac{(c,d)\text{的长度}}{(a,b)\text{的长度}}$$

约会问题　折段成三角形

第3章1节　二维随机变量及其分布

五、二维正态分布

定义：二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} \quad x\in R, y\in R$$

其中，$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 均为常数，且$\sigma_1>0$，$\sigma_2>0$，$|\rho|<1$，称(X,Y)服从**二维正态分布**，记为$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\ \mu_2,\sigma_2^2;\ \rho)$

第3章1节　二维随机变量及其分布

五、二维正态分布

二维正态分布

命题3.1.1 若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\ \mu_2,\sigma_2^2;\ \rho)$，则$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

$(X,Y)\sim N(0,1;\ 0,1;\ \rho)$
ρ从-0.95到0.95 变化的动态图