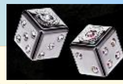
第1章4节 事件的独立性



引例

十七世纪，法国的赌徒常就这样的事件打赌：

掷4次骰子至少出现一个幺点；

掷一对骰子24次至少出现一对幺点。

当时De Mere认为这两件事是等可能的，他推断：

- 一颗骰子掷一次，有1/6的机会得到幺点，故4次有4×1/6=2/3的机会得到一个幺点
- 一对骰子掷一次，有1/36的机会得到一对幺点，故24次有24×1/36=2/3的机会得到一对幺点。

第1章4节 事件的独立性

但经验表明前者比后者可能性大一点。出现了矛盾，试分析原因。

注1：De Mere 向Pascal请教该问题，Pascal在Fermat帮助下解决了这个问题。

注2：Fermat是法官和议员

De Mere的**推导思路**（以一颗骰子抛4次为例）：

设第i次抛掷出现幺点为A_i，掷4次骰子至少出现一个幺点的概率为

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right)=\sum_{i=1}^{4} P(A_i)=4\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

哪里的推导出了问题?

提示：A_i之间的关系是否符合有限可加性的前提…

一、两个事件的独立性

在一般情况下(如 例1.3.1), $P(A|B)\neq P(A)$。

但若 $P(A|B)=P(A)$ (*)

成立，即事件A发生的可能性大小不受事件B的影响，则称A与B是相互独立的。

定义：设A，B是试验E的两个事件，若满足

$$P(AB)=P(A)P(B) \qquad (**)$$

称事件A与B相互独立。

注：当$P(B)>0$时 公式（*）与（**）是等价的

（*）式常用来判断事件的独立性，

（**）式常在已知独立时用于计算或证明。

互不相容与相互独立之间的关系

当$P(A)>0$且$P(B)>0$时，

"A,B互不相容"与"A,B相互独立"不能同时成立

若A,B互不相容，则 $P(AB)=P(\Phi)=0$

若A,B相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)>0$

A,B相互独立的例子：抛两枚硬币

设第一枚硬币出现正面为事件A，第二枚硬币出现正面为事件B，则AB相互独立，不是互不相容（可以同时发生）

A,B互不相容的例子：无放回抽取

盒子内有标号1,2,2三张卡片，A为第一次取出卡片1，B为第二次取出卡片1，则AB互不相容，不是相互独立（相互影响）

$P(A)=P(B)=1/3$, $\quad P(B|A)=P(\Phi)=0\neq P(B)$

定理：若事件A和B相互独立，则下列三对事件

$\bar{A},B$； $A,\bar{B}$； $\bar{A},\bar{B}$

也相互独立。

证明：仅对第三种情形证明，需证明 $P(\bar{A}\,\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})$

因为$P(AB)=P(A)P(B)$

所以
$$\begin{aligned}P(\bar{A}\,\bar{B})&=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)\\&=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]\\&=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)\\&=[1-P(A)][1-P(B)]\\&=P(\bar{A})P(\bar{B})\end{aligned}$$

设A和B是两个随机事件，且

$0<P(A),P(B)<1,\quad P(B|A)=P(B|\bar{A})$

问：A,B是否相互独立?

答案：是

因为 $P(B|A)=P(B|\bar{A})\Rightarrow \dfrac{P(BA)}{P(A)}=\dfrac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow P(AB)P(\bar{A})=P(B\bar{A})P(A)\\&\Rightarrow P(AB)[1-P(A)]=[P(B)-P(AB)]P(A)\\&\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)\end{aligned}$$

此结论也可用来判断两个事件的独立性

二、n 个事件的独立性

在多个事件中，是否存在类似的独立性呢？

例如：掷四面体试验

定义：设A_1，A_2，…，A_n为试验E的事件，若对任意的s（$1 < s \le n$）及$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_s \le n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_s}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_s}) \quad (*)$$

成立，则称事件组A_1，A_2，…，A_n相互独立。

若对一切$1 \le i_1 < i_2 \le n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})$$

成立，则称事件组A_1，A_2，…，A_n两两独立。

注：1）（*）共包含2^n-n-1 个等式。

2）事件组A_1，A_2，…，A_n相互独立 $\Rightarrow$ 事件组A_1，A_2，…，A_n两两独立

定理：若n个事件A_1，A_2，…，A_n相互独立，则将A_1，A_2，…，A_n中的任意多个事件换成它们的对立事件后，所得到的n个事件仍然相互独立。

事件的独立性在实际生活中有着广泛的用途。

例如

- “三个臭皮匠，顶个诸葛亮”
- “有志者事竟成”
- 系统的可靠性设计

试求A_1，A_2，…，A_n至少有一个发生的概率，其中$0 < P(A_i)=p_i < 1$

若 （1）A_1，A_2，…，A_n 互不相容

（2）A_1，A_2，…，A_n 相互独立

若A_1，A_2，…，A_n 互不相容，由概率的有限可加性可得

$$p = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$

若A_1，A_2，…，A_n相互独立，由加法定理可得

$$\begin{aligned} p &= P\{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\} \\ &= 1 - P\{\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_n\} \\ &= 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_n) \\ &= 1 - (1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n) \end{aligned}$$