第三章 多维随机变量

1.	二维随机变量及其分布
2.	随机变量的独立性
3.	条件分布
4.	随机变量的函数及其分布

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

问题的由来

引例1 博彩问题

一. 离散型随机变量的函数及其分布律

离散型随机变量X的分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_i \qquad i=1,2,\ldots$$

若$Y=g(X)$ 则

$$P\{Y=y_j\}=P\{g(X)=y_j\}$$

$$=\sum_{x_i\in S_j}P\{X=x_i\} \qquad j=1,2,\ldots$$

$$S_j=\{x_i \mid g(x_i)=y_j\}$$

$Z=g(X,Y)$

应如何处理?

引例2 骰子点数和

一. 离散型随机变量的函数及其分布律

离散型随机变量(X,Y)的分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \qquad i,j=1,2,\ldots$$

若 $Z=G(X,Y)$ 则

$$P\{Z=z_k\}=P\{G(X,Y)=z_k\}$$

$$=\sum_{(x_i,y_j)\in T_k} P\{X=x_i, Y=y_j\} \qquad k=1,2,\ldots$$

$$T_k=\{(x_i,y_j) \mid G(x_i,y_j)=z_k\}$$

函数的分布律

第3章4节　随机变量的函数及其分布

一. 离散型随机变量的函数及其分布律

定理: 设随机变量(X,Y)是离散型随机变量,X,Y相互独立，其分布律为:

$$P\{X=k\}=p(k)\quad k=0,1,2,\ldots$$

$$P\{Y=r\}=q(r)\quad r=0,1,2,\ldots$$

则$X+Y$的分布律为:

$$P\{X+Y=m\}=\sum_{k=0}^{m}p(k)q(m-k)\quad m=0,1,2,..$$

思考:

若$k=i,i+1,\cdots$；$r=j,j+1,\cdots$

$X+Y$的分布律形式又该如何?

第3章4节　随机变量的函数及其分布

思路: 若$k=i,i+1,\cdots;\ \ r=j,j+1,\cdots$

$$P\{X+Y=m\}=\sum_{k=}P\{X=k,Y=m-k\}$$

k的取值范围?

$$\left.\begin{aligned}X&=k\ge i\\Y&=m-k\ge j\end{aligned}\right\}\Rightarrow i\le k\le m-j$$

$$\therefore P\{X+Y=m\}=\sum_{k=i}^{m-j}P\{X=k,Y=m-k\}$$

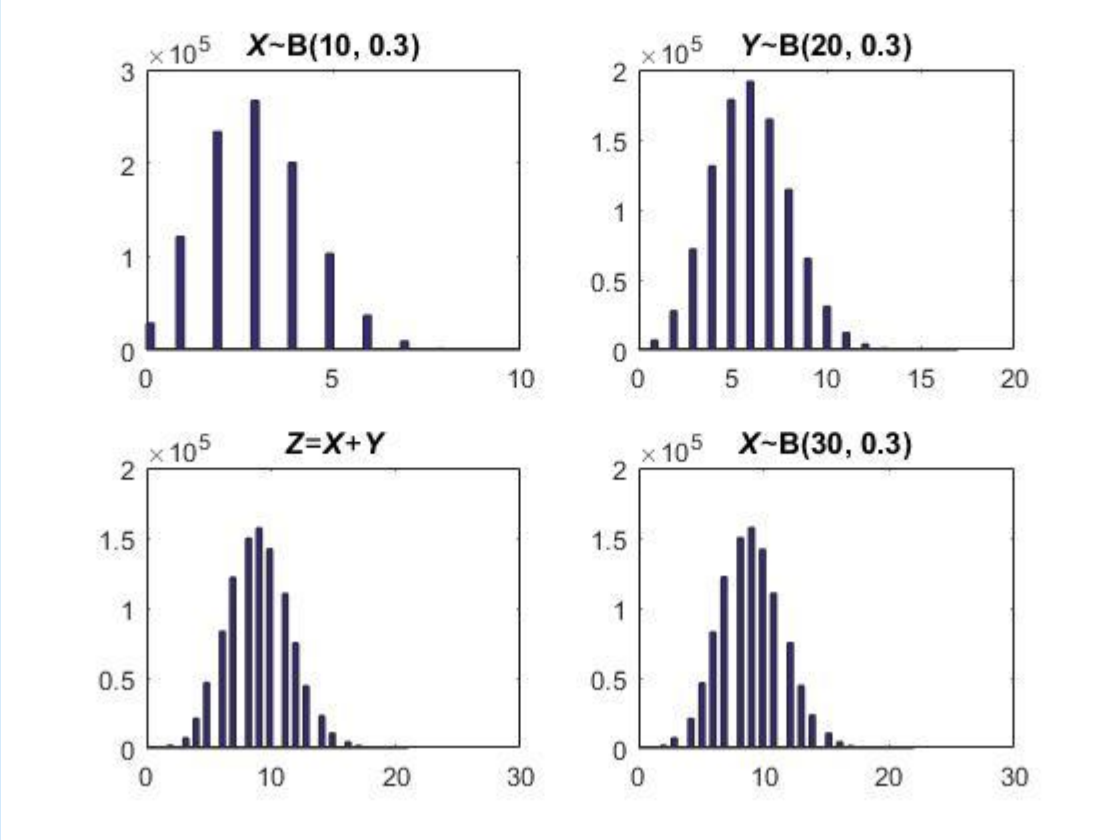
X与Y相互独立

$$=\sum_{k=i}^{m-j}P\{X=k\}P\{Y=m-k\}$$

$$=\sum_{k=i}^{m-j}p(k)q(m-k),\quad m=i+j,i+j+1,\cdots$$

一. 离散型随机变量的函数及其分布律

二项分布之和



横坐标为随机变量取值，纵坐标为频数。

试分析这几幅图有何特点?

第3章4节　随机变量的函数及其分布

一. 离散型随机变量的函数及其分布律

二项分布具有可加性

泊松分布具有可加性

若$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,且$X_i \sim B(1,p)$则

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim B(n,p)$$

反之 若$X \sim B(n,p)$ 则存在相互独立的

$X_i \sim B(1,p)$, $i = 1, 2, \ldots n$, 使得

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

二.连续型随机变量的函数及其概率密度

设X是连续型随机变量，则$\boxed{Y=g(X)}$的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{g(X)\le y\}=\int_{\{x|g(x)\le y\}} f_X(x)dx$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} F_Y'(y) & \text{在} f_Y(y) \text{的连续点} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

思路： 先确定分布函数，然后确定概率密度。

二.连续型随机变量的函数及其概率密度

对于二维的情形可类似给出.

设(X,Y)的联合概率密度是$f(x,y)$，则

$\boxed{Z=g(X,Y)}$的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{G(X,Y)\le z\}$$

$$=\iint_{\{(x,y)\mid G(x,y)\le z\}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$f_Z(z)=\begin{cases} F_Z'(z) & \text{在} f_Z(z)\text{的连续点} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

平方的概率密度

$X+2Y$的概率密度

二.连续型随机变量的函数及其概率密度

定理： 设随机变量X具有概率密度$f_X(x)$, $(-\infty < x < +\infty)$，又设函数$g(x)$处处可导且恒有$g'(x)>0$ (或$g'(x)<0$) 则$Y= g(X)$是连续型随机变量,其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left[h(y)\right]\left|h'(y)\right| & \alpha < y < \beta \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\alpha = \min\left(g(-\infty), g(+\infty)\right) \qquad \beta = \max\left(g(-\infty), g(+\infty)\right)$$

二.连续型随机变量的函数及其概率密度

*****扩展补充:

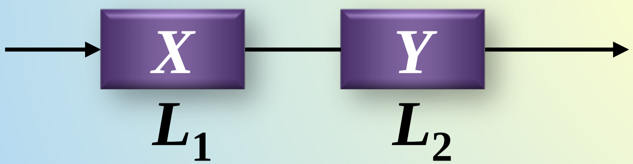
设随机变量$Y=g(X)$在不重叠的区域I_1，I_2，…上逐段严格单调，其反函数分别为$h_1(y)$，$h_2(y)$，…，且$h_1'(y)$，$h_2'(y)$，…均为连续函数，则$Y=g(X)$是连续型随机变量,其概率密度为

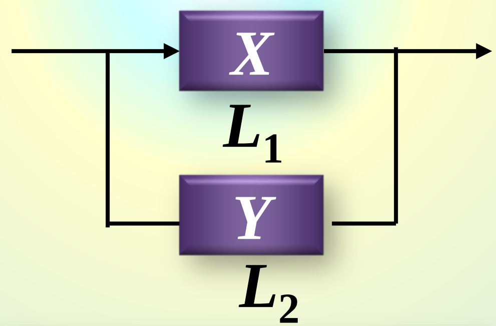
$$f_Y(y)=f_X[h_1(y)]\left|h_1'(y)\right|+f_X[h_2(y)]\left|h_2'(y)\right|+\cdots$$

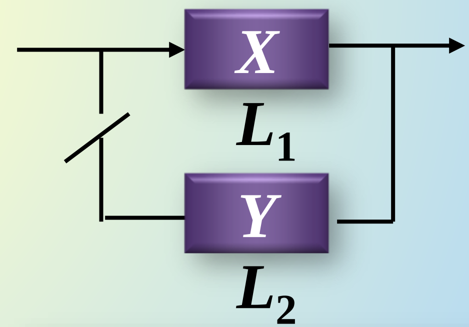
再求平方的概率密度　　练习　　往年考题

三. 几种特殊函数的分布

设系统L由两个功能相似且相互独立的子系统L_1, L_2连接而成，连接的方式分别为：1) 串联 2) 并联 3) 备用，如图所示。设L_1, L_2的寿命分别为X、Y，系统的寿命如何用X、Y表示?







$\min(X, Y)$　　$\max(X, Y)$　　$X + Y$

如何确定系统寿命的分布？

三. 几种特殊函数的分布

一般原则：对于二维连续型随机变量(X,Y)的函数$Z=G(X,Y)$的概率密度 $f_Z(z)$。

一般是先求出 Z 的分布函数 $F_Z(Z)$

再对$F_Z(Z)$微分得到 $f_Z(z)$

三. 几种特殊函数的分布

1. $M=\max(X,Y)$,　$N=\min(X,Y)$

$$F_M(z)=P\{M\le z\}$$
$$=P\{\max(X,Y)\le z\}$$
$$=P\{X\le z,Y\le z\}$$
$$=F(z,z)$$

思考:

1. 如何推广至n个子系统串联?
2. 概率密度函数的形式?

若 X 与 Y 相互独立有:

$$F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$$

三. 几种特殊函数的分布

1. $M=\max(X,Y)$，　$N=\min(X,Y)$

$$F_N(z)=P\{N\le z\}=P\{\min(X,Y)\le z\}$$
$$=P\{X\le z\text{或}Y\le z\}$$
$$=P\{X\le z\}+P\{Y\le z\}-P\{X\le z,Y\le z\}$$
$$=F_X(z)+F_Y(z)-F(z,z)$$

若 X 与 Y 相互独立有:

$$F_N(z)=1-P\{\min(X,Y)>z\}=1-P\{X>z,Y>z\}$$
$$=1-P\{X>z\}P\{Y>z\}$$
$$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

三. 几种特殊函数的分布

思考推广:

若n个子系统相互独立且具有相同分布，则:

① 串联时系统寿命分布如何用子系统的分布表示?

② 并联时系统寿命又如何表示?

③ 系统的概率密度如何用子系统的概率密度表示?

第3章4节　随机变量的函数及其分布

三. 几种特殊函数的分布

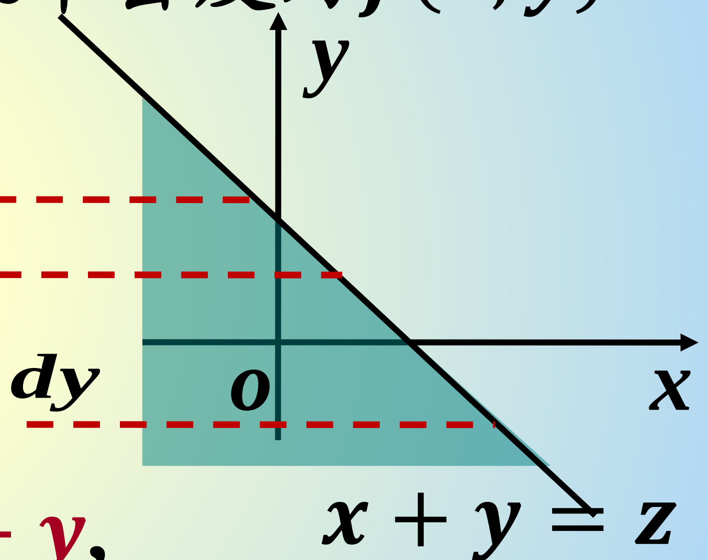
2. $Z = X + Y$

设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$

$$F_Z(z) = P\{X+Y \le z\}$$

$$= \iint_{x+y\le z} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,dx\right]dy$$



作积分变量变换, 令 $x = u - y$,

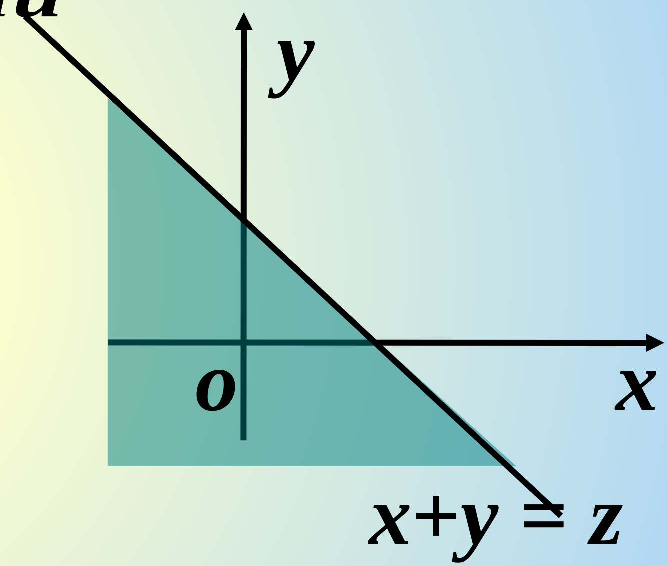
则 $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\,du\right]dy$

$$= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)\,dy\right]du$$

三. 几种特殊函数的分布

2. $Z = X + Y$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y, y)\,dy\right] du$$



由分布函数(连续型)定义

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_z(u)\,du$$

得到公式:

$$\boxed{f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\,dy}$$

先对x积分，可得公式:

$$\boxed{f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx}$$

三. 几种特殊函数的分布

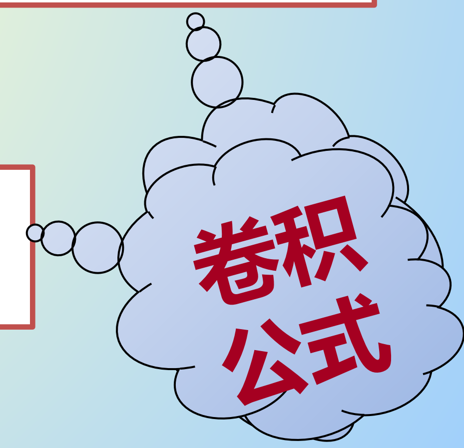
思考：

若随机变量X, Y**相互独立**，则有公式：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,dy$$

或者

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$



三. 几种特殊函数的分布

已知随机变量(X,Y)的联合概率密度$f(x,y)$，求$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(z)$，可以利用下面公式求解

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx$$

$$y=z-x$$

均匀分布之和

$X+Y$ 的概率密度

三. 几种特殊函数的分布

解题步骤：

① 在XOZ平面上作出$f(x,z-x)$的非零区域G

② 从区域G中确定$f_z(z)$非零区域

③ 在$f_z(z)$非零区域中，逐段确定$f_z(z)$的表达式

④ 写出$f_z(z)$的完整表达式。

三. 几种特殊函数的分布

思考:

在求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 时，我们是否可以通过YOZ平面来求解?

答案: 可以

这时所引用的公式为:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\,dy$$

$x=z-y$

见例3.4.11 正态分布具有可加性。

系统寿命

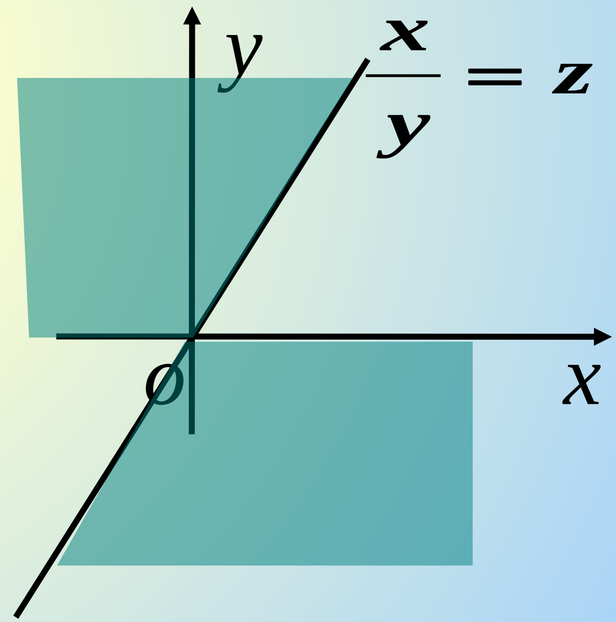
三. 几种特殊函数的分布

3. $Z = X/Y$ 的分布

设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$

$$F_Z(z) = P\{X/Y \le z\}$$

$$= \iint\limits_{x/y \le z} f(x,y)\,dxdy$$



积分区域如何?

$$x/y \le z \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} y > 0, & x \le y\,z \\ y < 0, & x \ge y\,z \end{cases}$$

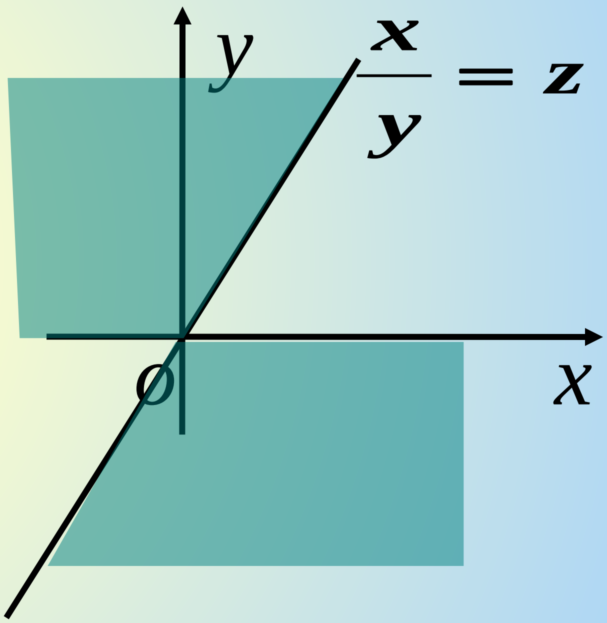
三. 几种特殊函数的分布

3. $Z = X/Y$ 的分布

$$F_Z(z) = \iint\limits_{x/y \le z} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\left[\int_{yz}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right]dy$$

$$+ \int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\,dx\right]dy$$



作积分变量变换，令 $x = yu$

三. 几种特殊函数的分布

3. $Z = X/Y$ 的分布

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{0}\left[\int_{yz}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right]dy + \int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\,dx\right]dy$$

作积分变量变换，令 $x = yu$，则

$y > 0$

$$\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} yf(yu,y)\,du\right]dy = \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{0}^{+\infty} yf(yu,y)\,dy\right]du$$

$y < 0$

$$\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{z}^{-\infty} yf(yu,y)\,du\right]dy = -\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{-\infty}^{z} yf(yu,y)\,du\right]dy$$

$$= -\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{0} yf(yu,y)\,dy\right]du$$

三. 几种特殊函数的分布

3. $Z=X/Y$ 的分布

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{0}^{+\infty} yf(yu,y)\,dy\right]du-\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{0} yf(yu,y)\,dy\right]du$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{0}^{+\infty} yf(yu,y)\,dy-\int_{-\infty}^{0} yf(yu,y)\,dy\right]du$$

$$f_Z(z)=\int_{0}^{+\infty} yf(yz,y)\,dy-\int_{-\infty}^{0} yf(yz,y)\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(yz,y)\,dy$$

商的分布