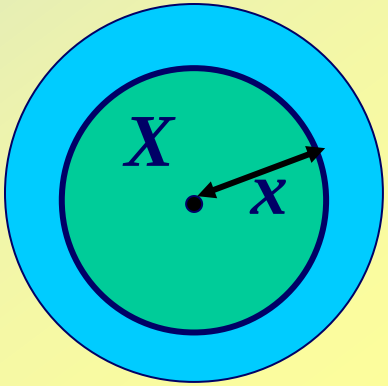
# 概率密度函数——射击试验

**例1** 一个靶子是半径为2米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘的概率与该圆盘的面积成正比，射击均能中靶，用$X$表示弹着点与圆心的距离。试求$X$的分布函数。

**解：** 由第一节可知，$X$的分布函数为

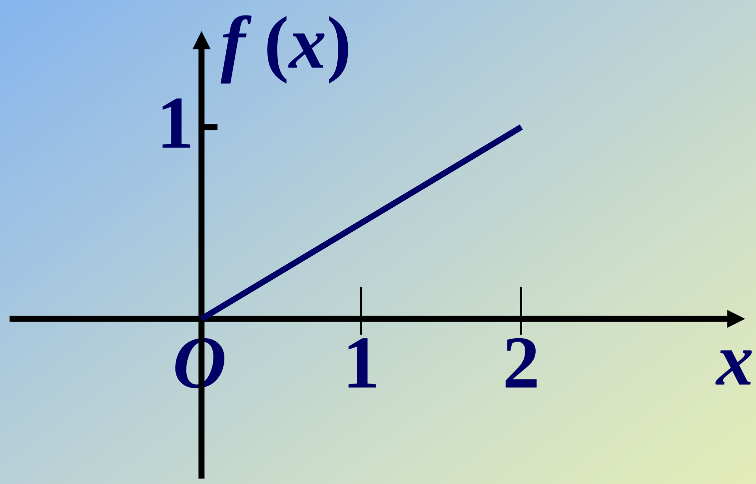
$$F(x)=\begin{cases}0\ , & x<0\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\le x<2\\ 1\ , & x\ge 2\end{cases}$$

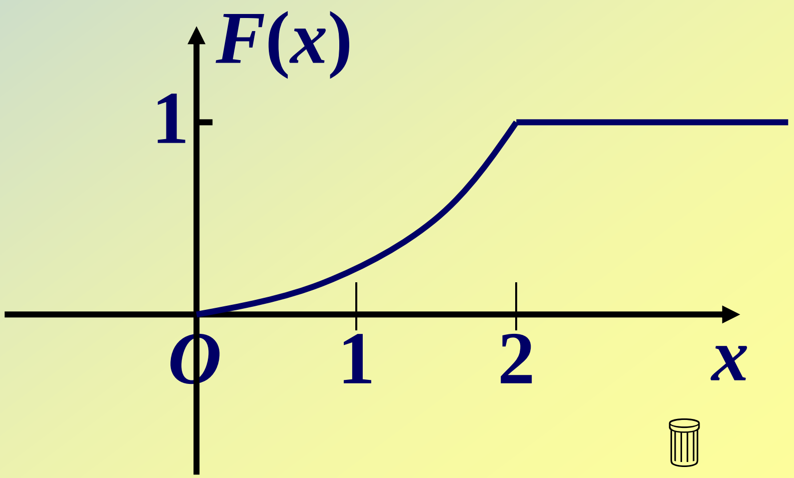
考虑函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0\le x<2\\ 0\,, & else\end{cases}$



$f(x)$ 的变上限积分为

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \frac{t}{2}dt = \frac{x^2}{4}, & 0 \le x < 2 \\ \int_0^2 \frac{t}{2}dt = 1, & x \ge 2 \end{cases} = F(x)$$



**例2** 使用了$t$小时的电子管在以后的$\Delta t$小时内损坏的概率等于$\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, 其中$\lambda > 0$为一常数, 试写出电子管的寿命$T$的分布函数。

**解：** 由第一节可得，寿命$T$的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases} 1-e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

即是函数 $$f(t)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

的变上限积分。

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

# 概率密度函数——概率密度判定

**例3** 设

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ x\in R$$

证明 $\varphi(x)$ 是概率密度函数。

**证明：** （1） $\varphi(x)>0$ , $x\in R$显然成立。

（2） $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$

令 $$I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$I^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

$$\overset{x = r\cos\theta}{\underset{y = r\sin\theta}{=\!=\!=}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} rdr$$

$$= 2\pi\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{+\infty} = 2\pi$$

从而 $I = \sqrt{2\pi}$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = 1$$

**例4** 设随机变量$X$的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} ke^{-\frac{x}{\theta}}, & x>\alpha \\ 0 \quad , & x\le\alpha \end{cases} \qquad \theta>0$$

试确定常数$k$。

**解：**

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{\alpha}^{+\infty}k\,e^{-\frac{x}{\theta}}dx$$

$$=-\theta\,k\int_{\alpha}^{+\infty}e^{-\frac{x}{\theta}}d(-\frac{x}{\theta})=-\theta\,k\,e^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_{\alpha}^{+\infty}$$

$$=\theta\,k\,e^{-\frac{\alpha}{\theta}} \quad \Longrightarrow \quad k=\frac{1}{\theta}e^{\frac{\alpha}{\theta}}$$

# 概率密度函数——概率的计算

**例5** 已知随机变量$X$的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}$$

用$Y$表示对$X$进行三次独立重复观测中事件$\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$出现的次数，求$P\{Y=2\}=?$

**分析：** 把事件$\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$看作事件$A$, 则$Y$表示进行3次独立实验时,事件$A$发生的次数,则 $Y\sim B\big(3,P(A)\big)$

**解：** $$P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f(x)\,dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}2\,x\,dx=\frac{1}{4}$$

所以 $Y\sim B\left(3,\frac{1}{4}\right)$，从而

$$P\{Y=2\}=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$$

# 均匀分布——方程有实根的概率

**例6** 设随机变量 $X\sim U(0,5)$，求方程

$$4r^2+4Xr+X+2=0$$ 中 $r$ 有实根的概率 $p$.

**解：** $p = P\{ (4X)^2 - 4\times 4(X+2) \geq 0 \}$

$= P\{ X^2 - (X+2) \geq 0 \} \quad = P\{ (X-2)(X+1) \geq 0 \}$

$= P(\{ X \leq -1 \} \cup \{ X \geq 2 \})$

$= P\{ X \leq -1 \} + P\{ X \geq 2 \}$

$= P\{ 2 \leq X \leq 5 \}$

$$= \frac{5-2}{5} = \frac{3}{5}$$

# 均匀分布——四 舍 五 入

**例7** 在数值计算中,由于四舍五入引起的误差$X$服从均匀分布.如果小数后面第五位按四舍五入处理,试求误差在0.00003和0.00006之间的概率.

解法1 由题设知,误差在[-0.00005,0.00005] 上服从均匀分布,所以$X$的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{0.00005-(-0.00005)}=10000 & -0.00005\le x\le 0.00005\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

故所求概率为:

$$P\{0.00003\le x\le 0.00006\}=\int_{0.00003}^{0.00005}10000\,dx=0.2$$

解法2 设真值为$x_0$,舍入为$x$,由于舍入值$x$在$x_0$ -0.00005与$x_0$ +0.00005之间的任一值都是等可能的.问题归结为向直线区域

$$\Omega=\{\, x \mid x_0 - 0.00005 \le x \le x_0 + 0.00005\}$$

随机投一点,而事件

A={误差在0.00003与0.00006之间}

$$=\{x \mid x_0 + 0.00003 \le x \le x_0 + 0.00005\}$$

从而P{A}= $\dfrac{A\text{长度}}{\Omega\text{的长度}} = \dfrac{0.00005 - 0.00003}{0.00005 - (-0.00005)} = 0.2$

# 指数分布——灯 管 寿 命

**例8** 设某类日光灯管的使用寿命服从参数为$\lambda$=0.0005的指数分布，求：

(1) 任取一根灯管，能正常使用1000h以上的概率；

(2) 若这根灯管已使用了1000h，还能再使用1000h以上的概率。

**解**：因为$X \sim E(\lambda)$， 所以$X$的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & \text{其他}\end{cases} \qquad \lambda = 0.0005$$

1) $P\{X>1000\}=1-P\{X \le 1000\}=1-\int_0^{1000} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1-\left(1-e^{-1000\lambda}\right)$

$$= e^{-1000 \times 0.00005} = e^{-0.5} \approx 0.607$$

2) $P\{X>2000 \mid X>1000\} = \dfrac{P\{X>2000, X>1000\}}{P\{X>1000\}}$

$$= \frac{P\{X>2000\}}{P\{X>1000\}} = \frac{\int_{2000}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx}{\int_{1000}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx}$$

$$= \frac{e^{-2000\lambda}}{e^{-1000\lambda}}$$

$$= e^{-1000\lambda}$$

$$\approx 0.607$$

**例9** 已知随机变量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，证明

$$P\left\{\left|X-\mu\right|<x\right\}=2\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)-1$$

证明: $P\left\{\left|X-\mu\right|<x\right\}=P\left\{\mu-x<X<\mu+x\right\}$

$$=\Phi\left(\frac{\mu+x-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-x}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)-\left[1-\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right]$$

$$=2\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)-1$$

特别地，有

$$P\{|X-\mu|<\sigma\}=2\Phi(1)-1=0.6826$$

$$P\{|X-\mu|<2\sigma\}=2\Phi(2)-1=0.9544$$

$$P\{|X-\mu|<3\sigma\}=2\Phi(3)-1=0.9974$$

这说明$X$以很大的概率密集在$x=\mu$的附近，

见书上 **$3\sigma$原理**

# 正态分布——车门设计

**例10** 公共汽车的车门是按男子与车门碰头的机会在0.01以下来设计的.设男子身高$X$服从参数为$\mu$=172cm，$\sigma = 6$ 的正态分布，即$X\sim N(172,36)$.问车门的高度该如何设计.

**解**：设车门的高度为$h$ cm，按设计要求

$P\{X \geq h\} \leq 0.01$ 或者 $P\{X<h\} \geq 0.99$

因为 $X\sim N(172,36)$ 所以

$$P\{X < h\} = \Phi\left(\frac{h-172}{6}\right) \geq 0.99$$

查表有$\Phi(2.33)=0.9901>0.99$

故$(h-172)/6=2.33$ 即$h=172+6\times2.33=186$cm

故设计车门高度为186cm时,可使男子与车门顶碰头的机会不大于0.01

# 正态分布——分位数

**例11** 设$X \sim N(10, 2^2)$，求$\alpha$使 $P\{|X-10|<\alpha\}=0.9$

**解:**

$$P\{|X-10|<\alpha\}=2\Phi\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1=0.9$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{\alpha}{2}\right)=0.95$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2}=1.645$$

$$\Rightarrow \alpha=3.29$$

# 正态分布——电池可靠性估计

**例12** 设某种电池的寿命为$X$ 小时, $X \sim N(300, 35^2)$,

求 (1) 电池寿命在335小时以上的概率$p_1$

(2) 求允许时限$x$, 使电池寿命在

$(300 - x, 300 + x)$的概率不小于0.9。

**解:** (1)

$$p_1 = P\{X > 335\}$$

$$= 1 - P\{X \le 335\}$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{335 - 300}{35}\right)$$

$$= 1 - \Phi(1)$$

$$= 1 - 0.8413 = 0.1587$$

$$(2)\quad 0.9 \le P\{300 - x < X < 300 + x\}$$

$$= 2\Phi\left(\frac{x}{35}\right) - 1$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{x}{35}\right) \ge 0.95$$

$$\Rightarrow \frac{x}{35} \ge 1.645$$

$$\Rightarrow x \ge 57.575$$

## 既非离散也不连续的反例

**例13** 某学生上学途经一个十字路口，所经方向有50%时间亮红灯，遇红灯需等待直至绿灯亮，等待时间在区间[0,30](单位：秒)上服从均匀分布. 用$X$表示该学生的等待时间，求$X$的分布函数，并分析$X$是否为离散型或连续型随机变量，说明理由.

**解**：设$A$= “经过路口时为绿灯”，则 $P(A)= 1/2$

1) $x<0$ 时，　$F(x)=0$

2) $0\le x<30$ 时，根据全概率公式有

$$F(x)=P\{X\le x\}=P(A)P\{X\le x|A\}+P(\bar{A})P\{X\le x|\bar{A}\}$$
$$=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{x}{30}=\frac{1}{2}+\frac{x}{60}$$

3) $x\ge 30$ 时，　$F(x)=1$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{60}, & 0\le x<30\\ 1, & x\ge 30\end{cases}$$