

考试科目：概率论与数理统计 考试形式：闭卷 考试日期：

考试时长：120 分钟

一、简答题（每小题 10 分，共 50 分）

1. 设随机事件 A 与 B 相互独立, B 与 C 相互独立, A 与 C 互不相容, $P(A)=0.5$, $P(B)=0.25$, $P(C)=0.125$, 求 $P(A \cup B \cup C)$ 。

2. 独立重复地抛一颗均匀骰子 2 次, 设 X 表示出现 1 或 2 的次数, Y 表示出现 6 的次数。分别计算 X 和 Y 的数学期望。

3. 设 X_1, X_2, \dots, X_{10} 为取自正态总体 $X \sim N(0, \sqrt{2}^2)$ 的样本, 记 $T = \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2$, 计算方差 $D(T)$ 。

4. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为取自总体 $X \sim N(0, \theta)$ 的样本, 其中 $\theta > 0$ 为方差, 令 $T = |\sum_{i=1}^n X_i|$, 确定常数 b , 使 bT 为 $\sqrt{\theta}$ 的无偏估计。

5. 设总体 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数, x_1, x_2, \dots, x_n 为一组样本观察值, 求 θ 的极大似然估计值。

二、计算题（共 10 分）

设某道选择题有四个答案, 只有一个是正确的。懂的学生能够正确回答, 不懂的学生从四个答案中随机选择。假定懂的学生比例为 0.5, 试计算

- (1) 随机抽取一位学生, 他答对该题的概率;
- (2) 一位答对该题的学生对该题不懂的概率。

三、计算题（共 10 分）

设随机变量 $X \sim N(12, 3^2)$, $Y \sim N(10, 4^2)$, X, Y 相互独立。

- (1) 分别求 $U = 2X + Y$ 与 $V = X - Y$ 的分布, 并说明 U 与 V 是否独立;
- (2) 求概率 $P\{12 < X + Y < 32\}$ 。(用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示)

四、计算题（共 10 分）

假定某电视节目在 S 市的收视率为 15%, 在一次收视率调查中, 从该市的居民中随机抽取 5000 户, 调查该电视节目的收视情况, 试计算: 抽样所得收视率与 15% 之差的绝对值小于 0.01 的概率。

$$\Phi(1.95) = 0.9744, \Phi(1.96) = 0.9750, \Phi(1.97) = 0.9756, \Phi(1.98) = 0.9761$$

五、计算题（共 10 分）

一油漆制造商宣称, 他们生产的一种新型乳胶漆的平均干燥时间为 125 分钟; 现从该种乳胶漆中随机抽出 20 罐做实验, 发现他们的干燥时间(分钟)为: 123, 109, 115, 121, 130, 127, 106, 120, 116, 136, 131, 128, 139, 110, 133, 122, 133, 119, 135, 109。假定干燥时间服从正态分布。

(1) 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 检验以上数据能否说明这种乳胶漆的平均干燥时间不低于制造商宣称的 125 分钟, 即:

$$H_0: \mu \geq 125, \quad H_1: \mu < 125$$

(经计算, 样本均值为 123.1, 样本标准差为 10)

(2) 给出平均干燥时间 μ 的置信度为 95%的置信区间。

$$(t_{0.025}(19) = 2.093, \quad t_{0.05}(19) = 1.729)$$

六、计算题 (共 10 分)

炼铝厂测得所产铸模用的硬度 X 与抗张强度 Y 数据如下:

X	68	53	70	84	60	72	51	83	70	64
Y	288	293	349	343	290	354	283	324	340	286

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 675, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 3150, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 46659, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 1000120, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 214672$$

(1) 求 Y 关于 X 的一元经验线性回归方程。

(2) 检验 X 与 Y 的线性相关关系是否显著? ($\alpha = 0.01$)

$$(R_{0.01}(8) = 0.765, \quad R_{0.01}(9) = 0.735)$$