§3.2 随机变量的独立性

一. 二维随机变量的独立性

回忆： 事件独立性

事件A与B相互独立 $\Leftrightarrow$

$P(AB) = P(A)P(B)$ 或 $P(A|B) = P(A)$

定义:设(X,Y)是二维随机变量,若对任意实数对(x,y)均有$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\}$成立,则称$X$与$Y$相互独立.

意义：对任意实数对(x,y)，随机事件$\{X \le x\}$与随机事件$\{Y \le y\}$相互独立.

X与$|X|$是否相互独立

$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

对离散型和连续型各自的充要条件是什么?

等价条件:

1. X与Y相互独立 $\Leftrightarrow F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

2. (离散型)X与Y相互独立 $\Leftrightarrow p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$ 即

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}$$

3. (连续型)X与Y相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

在平面上除去“面积”为0的集合外成立

相互独立的判断

相互独立的应用

用分布函数证明独立性

二. 多维随机变量的独立性

定义：设 n 维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的联合分布函数为 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 若对任意实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$均有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)$$

$F(x_i)$ 为 X_i 的边缘分布函数，称$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立。

定理:若n维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$相互独立，则

1) 任意k个随机变量$(2 \le k \le n)$也相互独立.

2) 随机变量 $g_1(X_1), g_2(X_2), \cdots, g_n(X_n)$也相互独立.

3) $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$与$(X_{m+1}, X_{m+2}, \cdots, X_n)$也相互独立.
且随机变量$h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$与$g(X_{m+1}, X_{m+2}, \cdots, X_n)$也相互独立.

例:3 维随机变量X_1, X_2, X_3 相互独立，则

- X_1^2，X_2^2，X_3^2 也相互独立.
- $X_1 + X_2$与X_3也相互独立.
- $\sin X_1$ 与X_3也相互独立.
- $X_1 + X_2$与$X_1 - X_2$不一定相互独立.

随机变量的独立性本质上是事件的独立性(参见 例1.4.3)