例1 设同时掷两个均匀的四面体一次，每一个四面体的四面分别标有号码1，2，3，4。

令$A$={甲四面体向下的一面是偶数},

$B$={乙四面体向下的一面是奇数},

$C$={两个四面体向下的一面同为奇数或偶数}。

由古典概率定义有

$$P(A)=P(B)=P(C)=8/16=1/2$$

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=1/4$$

$$P(ABC)=P(\phi)=0$$

从而有

$$\begin{aligned} P(AB)&=P(A)P(B)\\ P(AC)&=P(A)P(C)\\ P(BC)&=P(B)P(C) \end{aligned} \qquad (*)$$

即$A$、$B$、$C$中任意两个都是相互独立的，称$A$、$B$、$C$ 两两独立。

另一方面 $P(A|BC)=0\neq 1/2=P(A)$

这说明事件$A$发生的可能性大小会受到$B$与$C$的“联合”影响。

若（*）式成立，并且$P(A|BC)=P(A)$，有

$$P(ABC)=P(A|BC)P(BC)=P(A)P(B)P(C)$$

称$A$、$B$、$C$ 相互独立。

**例2** 三个枪手向一个神枪手比武.他们都独立地向同一目标射击，三个枪手的命中率分别为0.5、0.55、0.60，神枪手的命中率为0.90.问哪一方胜出的可能性大?

解：令$A_i$={第 $i$ 个枪手命中目标}，$i$=1,2,3。则有

$A_1$、$A_2$、$A_3$相互独立。

于是由加法定理可得

$$p = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3)$$

$$- P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

$$= 0.5 + 0.55 + 0.60 - 0.5 \times 0.55 - 0.5 \times 0.60$$

$$- 0.60 \times 0.55 + 0.5 \times 0.55 \times 0.60$$

$$=0.91$$

**三 个 枪 手 胜 出 的 可 能 性 大**

**思考**：　　进行决策时，是否三人出主意一定比一人高明？

这必须加上一些**必要的假设**才行，如：

- 三人出主意是相互独立的（互不影响）
- 一旦有了好主意就能**被采纳**
- ……

**例3** 某人做一次试验获得成功的概率仅为0.2，他持之以恒，不断重复试验，求他做10次试验至少成功一次的概率？做20次又怎样呢？

解：设他做$k$次试验至少成功一次的概率为$p_k$，

$A_k$={第$k$次试验成功}，$k$=1，2，…

则 
$$p_{10} = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{10})$$
$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\dots P(\overline{A_{10}})$$
$$= 1 - (1 - 0.2)^{10} \approx 0.8926$$
$$p_{20} = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{20})$$
$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\dots P(\overline{A_{20}})$$
$$= 1 - (1 - 0.2)^{20} \approx 0.9885$$

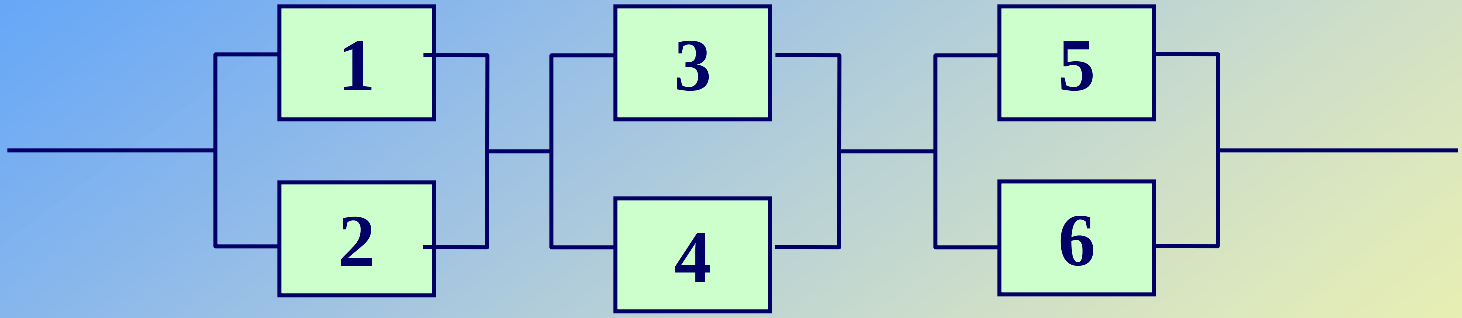
一般，将试验$E$重复进行$k$次，每次试验中$A$出现的概率$p$（$0 < p < 1$）则$A$至少出现一次的概率为

$$p_k = 1 - (1 - p)^k$$

并且

$$\lim_{k\to\infty} p_k = \lim_{k\to\infty}[1 - (1 - p_k)^k = 1$$

**例4 (可靠性问题)设有6个元件，每个元件在单位时间内能正常工作的概率均为0.9，且各元件能否正常工作是相互独立的，试求下面系统能正常工作的概率。**




**解：设$A_k$={第$k$个元件能正常工作}，$k$=1，2，…，6**

$A$ ={整个系统能正常工作}

$=(A_1 \cup A_2)(A_3 \cup A_4)(A_5 \cup A_6)$

$A_1$，$A_2$，…，$A_6$设相互独立，可以证明$A_1 \cup A_2$，$A_3 \cup A_4$，$A_5 \cup A_6$也相互独立

所以有

$$P(A)=P(A_1\cup A_2)P(A_3\cup A_4)P(A_5\cup A_6)$$

$$=[1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})][1-P(\overline{A_3}\,\overline{A_4})][1-P(\overline{A_5}\,\overline{A_6})]$$

$$=[1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})][1-P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})][1-P(\overline{A_5})P(\overline{A_6})]$$

$$=[1-(1-0.9)^2]^3=\quad 0.970299$$