

第四章 随机变量的数字特征



1.	数学期望
2.	随机变量的方差
3.	协方差、相关系数和矩
4.	多维正态随机变量

第4章2节 随机变量的方差



一. 随机变量的方差

引 例

定义

设 X 是随机变量, 若 $E\{[X - E(X)]^2\}$ 存在, 称 $D(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$ 为 X 的**方差**, 称 $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ 为 X 的**标准差或均方差**.

➤ $D(X)$ 是随机变量 X 的**函数的数学期望**:

当 X 为离散型时
$$D(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} [x_i - E(X)]^2 P\{X = x_i\}$$

当 X 为连续型时
$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f_X(x) dx$$



第4章2节 随机变量的方差



一. 随机变量的方差

➤ $D(X) \geq 0$

常用公式: $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$

证 明

1、 $X \sim P(\lambda)$ 则 $E(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$

泊松分布的方差

2、 $X \sim B(n, p)$ 则 $E(X) = np$, $D(X) = np(1-p)$

见例4.2.5

3、 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$

正态分布的方差



第4章2节 随机变量的方差



一. 随机变量的方差

1. $X \sim P(\lambda)$ 则 $E(X) = \lambda$ $D(X) = \lambda$
2. $X \sim B(n, p)$ 则 $E(X) = np$ $D(X) = np(1-p)$
3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $E(X) = \mu$ $D(X) = \sigma^2$
4. $X \sim U(a, b)$ 则 $E(X) = \frac{a+b}{2}$ $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
5. $X \sim E(\lambda)$ 则 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

随机变量函数的方差

$|X - Y|$ 的方差

练习



第4章2节 随机变量的方差



一.方差的性质

设 X, X_1, X_2, \dots, X_n 是随机变量, c, b 是常数

$$1) E(c) = c \quad D(c) = 0$$

$$2) E(cX) = cE(X) \quad D(cX) = c^2 D(X)$$

$$3) E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

$$D(cX + b) = c^2 D(X)$$

$$D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n D(X_i) + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ j>i}}^n E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}$$



第4章2节 随机变量的方差



一.方差的性质

设 X, X_1, X_2, \dots, X_n 是随机变量, c, b 是常数。

若 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 则

$$D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n D(X_i)$$

若 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 则

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$$



第4章2节 随机变量的方差



一.方差的性质

$$4) D(X) = 0 \Leftrightarrow P\{X = E(X)\} = 1$$

随 机 变 量 的 标 准 化

样本均值的期望和方差

$X^2 + Y^2$ 的期望与方差



第4章2节 随机变量的方差



一.方差的性质

注1： 要防止计算中常见的两个错误！

$$\cancel{D(cX) = cD(X)} \quad \cancel{D(X - Y) = D(X) - D(Y)}$$

$$\text{注2：} \quad D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n D(X_i)$$

此式只有在诸随机变量相互独立的条件下才成立。



第4章2节 随机变量的方差



进一步思考：

多个随机变量的数字特征？

变量间关系如何衡量？

