第五章　大数定律和中心极限定理

1.	随机变量序列的收敛性
2.	大数定律
3.	中心极限定理

一.随机变量序列的收敛性

引例1

设Y_i独立同分布

$$Y_i \sim B(1, p) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim B(n, p)$$

$$X_n = f_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$E(X_n) = p, \quad D(X_n) = \frac{p(1-p)}{n}$$

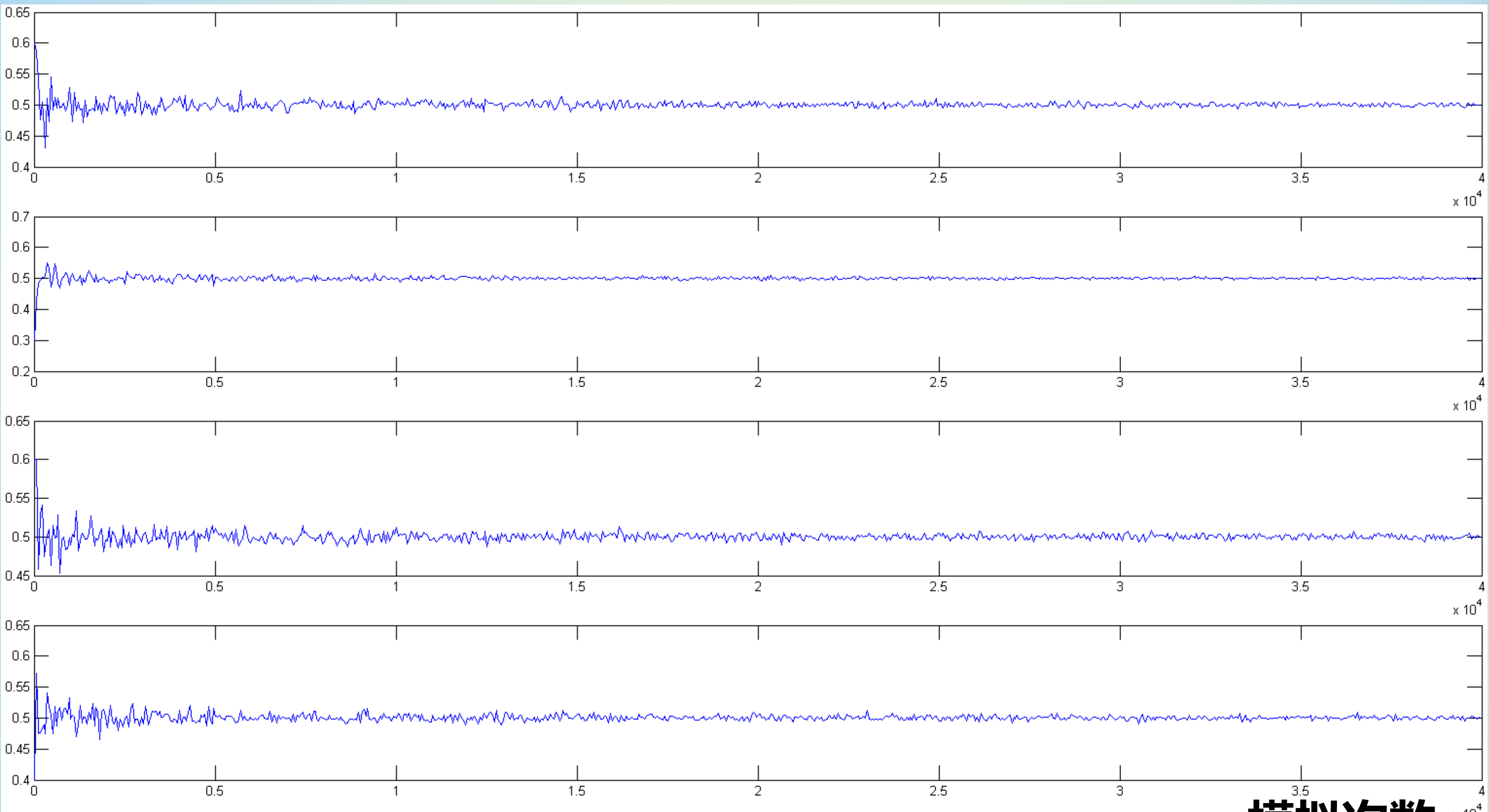
$$X_n \xrightarrow{n\to\infty} p$$

以抛硬币问题为例，取$p=0.5$，作四次模拟

分析：

随着n的增大，频率变化趋势如何?

一.随机变量序列的收敛性



分析：随着n→∞，图形趋势特点

$$\lim_{n\to\infty} X_n = p$$

一.随机变量序列的收敛性

定义

设$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$是随机变量序列，$X$是一个随机变量(或为常数$a$)

如果对于任意给定的正数ε，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Xn - X| < \varepsilon\} = 1$$

或

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Xn - X| \geq \varepsilon\} = 0$$

则称随机变量序列$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$**依概率收敛**于$X$。

记为：$X_n \xrightarrow{P} X$ 或记为 $\lim_{n\to\infty} X_n = X(P)$

注意：与数列收敛的区别！

一.随机变量序列的收敛性

引例2

设Y_i独立同分布

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim ?$$

$$X_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}} \sim$$

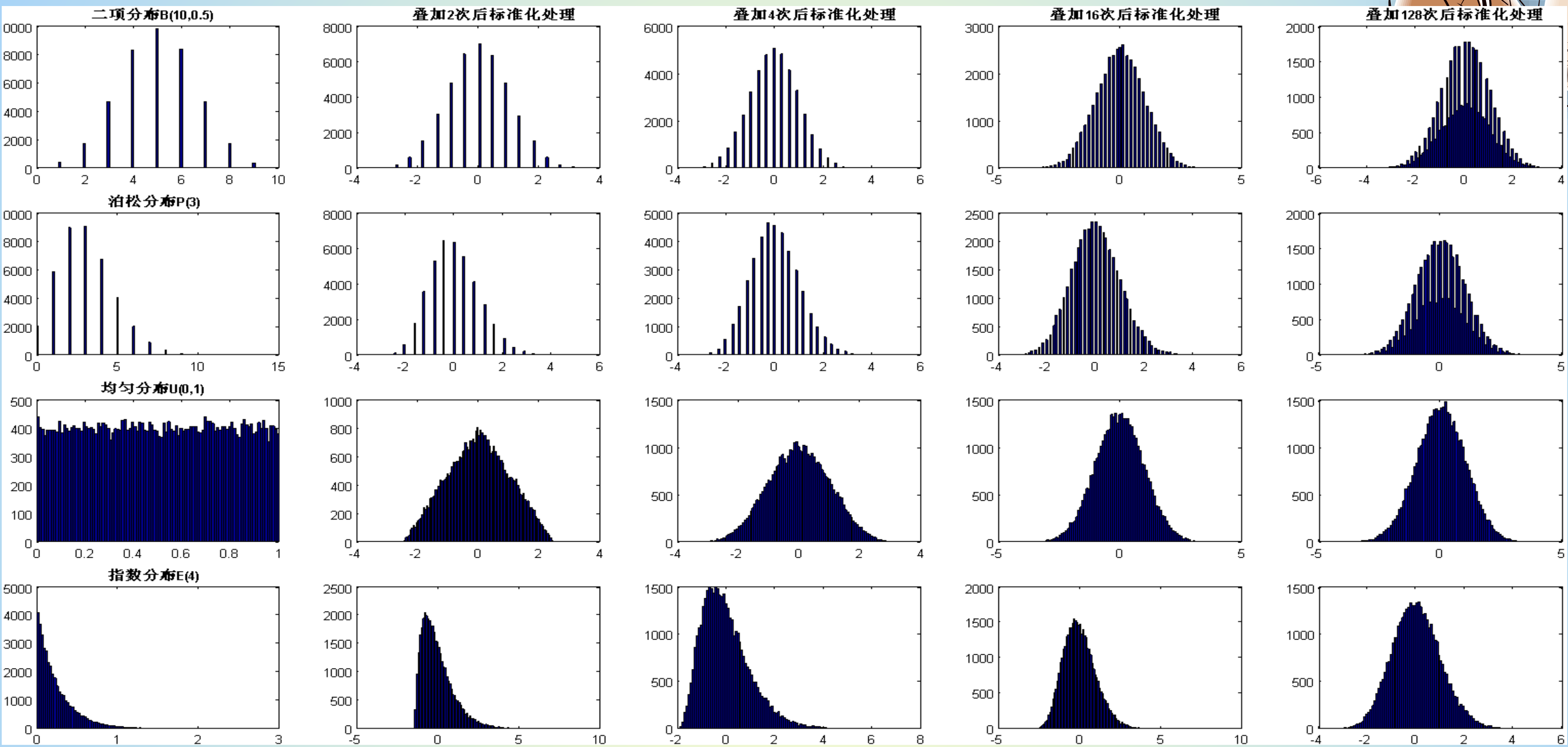
$$F_n(x) = P\{X_n \le x\} \xrightarrow{n\to\infty} ?$$

分别以各种分布为例，模拟其和的分布

分析：

随着n的增大，和的分布有何变化特点?

一.随机变量序列的收敛性



分析：随着n增大，分布函数特点？

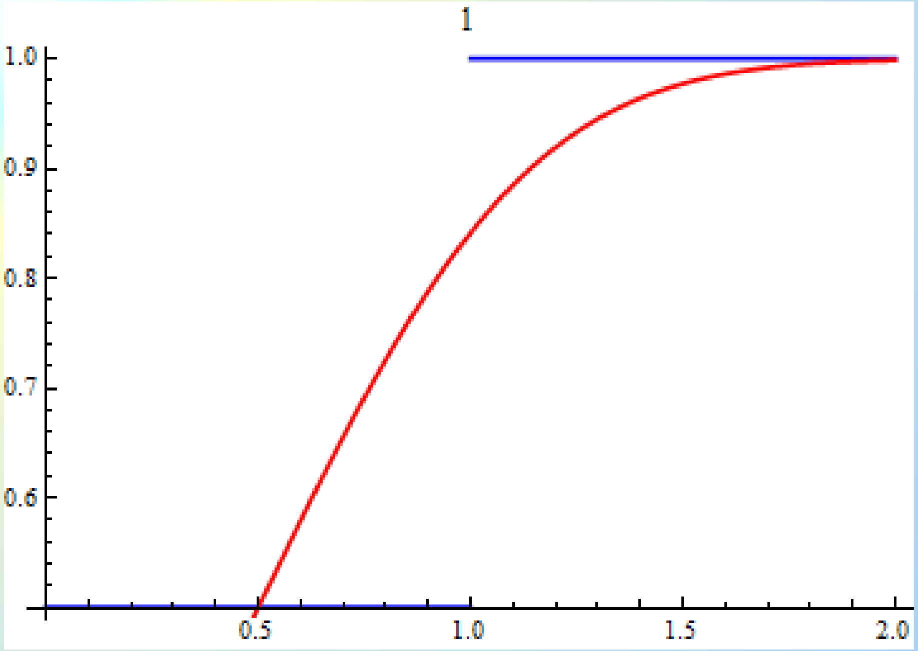
$$\lim_{n\to\infty} F_n = \Phi(x)$$

一.随机变量序列的收敛性

设$Y_i \sim B(1, 0.5)$，则$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \sim B(n, p)$。观察二项分布$B(n, p)$的分布函数，红色曲线为正态分布$N(np, np(1-p))$的分布函数，二者有何关系？

进一步分析：

若$X_n \sim B(n, p)$进行标准化处理后，其分布函数与$N(0,1)$的分布函数有何关系？



一.随机变量序列的收敛性

定义 设$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$是随机变量序列，$X$为随机变量，$F_n(x)$和$F(x)$分别是$X_n$和$X$的分布函数，如果在$F(x)$的连续点$x$处均有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

则称随机变量序列$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$**依分布收敛**于$X$。记为：$X_n \xrightarrow{L} X$

例如：**均匀分布之和依分布收敛于正态分布**

一.随机变量序列的收敛性

$$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X$$ 反之不然

例：(依分布收敛但不依概率收敛的反例)

设 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\},\ P(\omega_1)=P(\omega_2)=\dfrac{1}{2}$

定义随机变量： $X(\omega_1)=-1, X(\omega_2)=1$

则X的分布律为

X	-1	1
P	0.5	0.5

一.随机变量序列的收敛性

令 $X_n(\omega) = -X(\omega)$, 则X_n与X的分布律相同

X	-1	1
P	0.5	0.5
Xn	1	-1

从而分布函数相同

故 $X_n(\omega) \xrightarrow{L} X(\omega)$即$X_n \xrightarrow{L} X$

但对任意的 $0 < \varepsilon < 2$

$$P\{|X_n - X| > \varepsilon\} = P\{\Omega\} = 1$$

故 $X_n \xrightarrow{P} X$不成立

二. 大数定律

定理5.2.1 (切比雪夫不等式)

$$\forall \varepsilon > 0, P\{|\boxed{X - E(X)}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\boxed{D(X)}}{\varepsilon^2}$$

$$\text{或} P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

[证明时先用定义展开，再将系数变大，最后将范围变大。]

二. 大数定律

证明:

$$P(|X-\mu|\ge\varepsilon)=\int_{\{x:|x-\mu|\ge\varepsilon\}}f(x)dx \quad (\text{区域上概率,积分})$$

$$\le\int_{\{x:|x-\mu|\ge\varepsilon\}}\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}f(x)dx \quad (\text{系数增大})$$

$$\le\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}f(x)dx \quad (\text{积分范围增大})$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2f(x)dx$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}D(X) \quad (\text{方差定义})$$

二. 大数定律

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad P\left\{\left|\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right| < \delta\right\} \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}$$

切比雪夫不等式只利用***期望***与***方差***就描述了随机变量的变化情况，因此它在理论研究与实际应用中很有价值

二. 大数定律

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

例5.2.1与5.2.2：

利用切比雪夫不等式对概率进行估计。

对比例2.3.7分析：

为什么说切比雪夫不等式只能对概率作出很粗略的估计？

二. 大数定律

例：利用切比雪夫不等式粗略估计概率

设在相同条件下，独立对某物的长度进行n次测量，各次测量的结果均服从正态分布 $X \sim N\left(a, \sigma^2\right)$，试用切比雪夫不等式估计 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 落在 $[a-3\sigma, a+3\sigma]$ 内的概率。

解：首先列出待求的概率表达式

$$P\left(a-3\sigma < \overline{X} < a+3\sigma\right) = P\left(-3\sigma < \overline{X} - a < 3\sigma\right)$$

二. 大数定律

解：首先列出待求的概率表达式

$$P\left(a-3\sigma<\overline{X}<a+3\sigma\right)=P\left(-3\sigma<\overline{X}-a<3\sigma\right)$$

然后转换为切比雪夫不等式形式

$$=P\left(\left|\overline{X}-a\right|<3\sigma\right)=P\left(\left|\overline{X}-E\left(\overline{X}\right)\right|<\boxed{3\sigma}\right)$$

ε

$$\geq 1-\frac{D\left(\overline{X}\right)}{(3\sigma)^2}=1-\frac{\sigma^2/n}{9\sigma^2}$$

$$=1-\frac{1}{9n}$$

二. 大数定律

如何根据随机变量落在区间内的概率估计 ε 值？

$$P\left(\left|X-E(X)\right|<\varepsilon\right)\geq a\quad(0<a<1)$$

方法：这实际是上例的反问题，主要将 a 与 $1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$ 比较

二. 大数定律

例： 设在相同条件下，独立对某物的长度进行n次测量，各次测量的结果 X_i 均服从正态分布$N(a,\sigma^2)$，问：

对该物体的长度至少要测量多少次，才能使得用测量的平均值作为物体的长度真值的近似值，其误差不超过3σ的概率不小于0.99。

解：由题意$\overline{X}$应满足：$P\left(\left|\overline{X}-a\right|\le 3\sigma\right)\ge 0.99$

二. 大数定律

解：由题意$\overline{X}$应满足：$P\left(\left|\overline{X}-a\right|\le 3\sigma\right)\ge 0.99$

由切比雪夫不等式：$P\left(\left|\overline{X}-a\right|\le 3\sigma\right)\ge 1-\dfrac{D\left(\overline{X}\right)}{\varepsilon^2}=1-\dfrac{1}{9n}$

从而应有$1-\dfrac{1}{9n}\ge 0.99 \Rightarrow n\ge 11.11$

故至少要做12次独立重复测量，才能使测量的平均值的误差不超过3σ的概率不小于0.99

二. 大数定律

定义 设随机变量序列$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$的每个数学期望$E(X_i)$，$i$=1,2,…均存在，如果对于任意给定的正数$\varepsilon$，有

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

则称随机变量序列$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$**服从大数定律**。

下面在$X_1, \ldots, X_n$相互独立的条件下,说明三个大数定律之间的关系：

二. 大数定律

- 切比雪夫不等式: $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$

- Th5.2.2(**切比雪夫大数定律**)

令 $X=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

$E(X_i)$存在, $D(X_i)<C$, $i=1,2,3,\ldots\ldots$

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)|<\varepsilon\}=1\quad(\varepsilon>0)$$

$$P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}{\varepsilon^2}\geq 1-\frac{C/n}{\varepsilon^2}$$

二. 大数定律

- **Th5.2.2(切比雪夫大数定律)**

$E(X_i)$存在, $D(X_i)<C$, $i=1,2,3,\ldots\ldots$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)}|<\varepsilon\}=1 \quad (\varepsilon>0)$$

- **Th5.2.3(独立同分布大数定律)**

$$E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2, i=1,2,\ldots$$

$$\because \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)=\mu$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \boxed{\mu}|<\varepsilon\}=1 \quad (\varepsilon>0)$$

二. 大数定律

- **Th5.2.3(独立同分布大数定律)**

$$\boxed{E(X_i)=\mu}, D(X_i)=\sigma^2, i=1,2,\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}-\boxed{\mu}|<\varepsilon\}=1 \quad (\varepsilon>0)$$

- **Th5.2.5(贝努里大数定律)**

m为 n 重贝努里试验中事件A出现的次数,
p为A在每次试验中发生的概率

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\boxed{\frac{m}{n}}-\boxed{p}|<\varepsilon\}=1 \quad (\varepsilon>0)$$

$$\boxed{X=\sum_{i=1}^{n} X_i=m}$$

$$\boxed{E(X_i)=\mu=p}$$

二. 大数定律

- **Th5.2.4(辛钦大数定律)**

设$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$是独立同分布的随机变量序列，数学期望$E(X_i)=\mu$，$i=1,2,\ldots$均存在，则随机变量序列$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$**服从大数定律**。即对于任意的正数$\varepsilon$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| < \varepsilon\} = 1$$

二. 大数定律的应用

应用一：

1. 测量值估计：实际工作中，以大量测量值的平均值作为精确值的估计值→以独立同分布大数定律为理论依据

应用二：

2. 小概率事件原理：概率很小的事件，实际发生的频率也很小，在一次试验中几乎不可能发生→实际中看作不可能事件
3. 三倍标准差原理(3σ原理)： 若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， 则当X取值在$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之外时，看作小概率事件$P\{|X - \mu| > 3\sigma\} = 0.0026$

二. 大数定律的应用

应用说明：

- 统计推断时，**假设检验**以小概率事件原理为基础
- 很多**实际问题**并非理想的随机变量，例如人的身高，取值范围不可能为$(-\infty,+\infty)$，但根据3σ原理，考虑有限范围是有理论依据的。

二. 大数定律的应用

应用三：

4. **矩估计的理论基础：**独立同分布大数定律可推广为**辛钦大数定律**（只要求各个随机变量的期望相同即可），可得<u>样本矩依概率收敛于总体矩</u>，这在统计推断中保证了估计量的相合性

应用说明：

- 假设$\{X_i\}$是独立同分布随机变量序列，且$E(X_i)=E(X), i=1,2,\cdots,n$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} E(X)$$

- 对于高阶矩有类似结论。

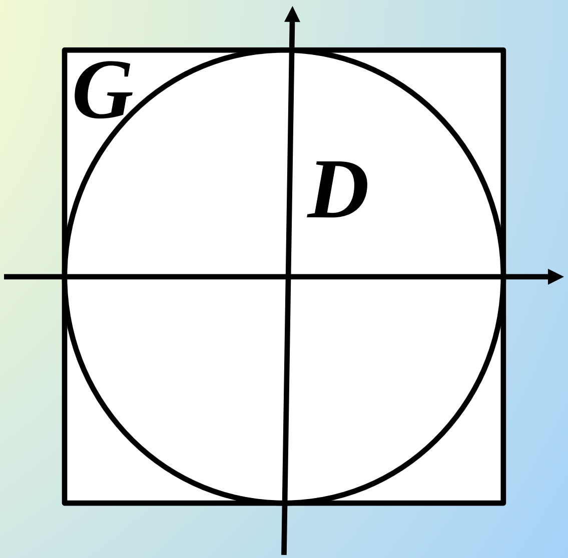
二. 大数定律的应用

应用四：

5. 频率的稳定性：试验次数充分多，则A发生的频率m/n 趋于A发生的概率p，是计算机做随机模拟中蒙特卡罗法(Monte Carlo)的理论基础→以贝努里大数定律为理论依据

应用： 用蒙特卡罗法估计圆周率π

设随机变量(X,Y)在正方形区域G内服从二维均匀分布，内切圆D的半径为1，根据均匀分布性质有



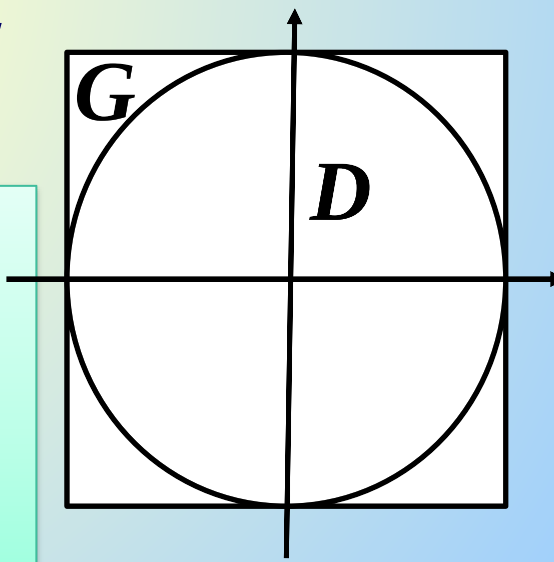
$$P\{(X,Y)\in D\}=\frac{S(D)}{S(G)}=\frac{\pi\times 1^2}{2\times 2}=\frac{\pi}{4}$$

二. 大数定律的应用

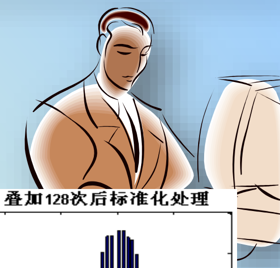
$$P\{(X,Y)\in D\}=\frac{S(D)}{S(G)}=\frac{\pi\times 1^2}{2\times 2}=\frac{\pi}{4}$$

随机模拟方法：

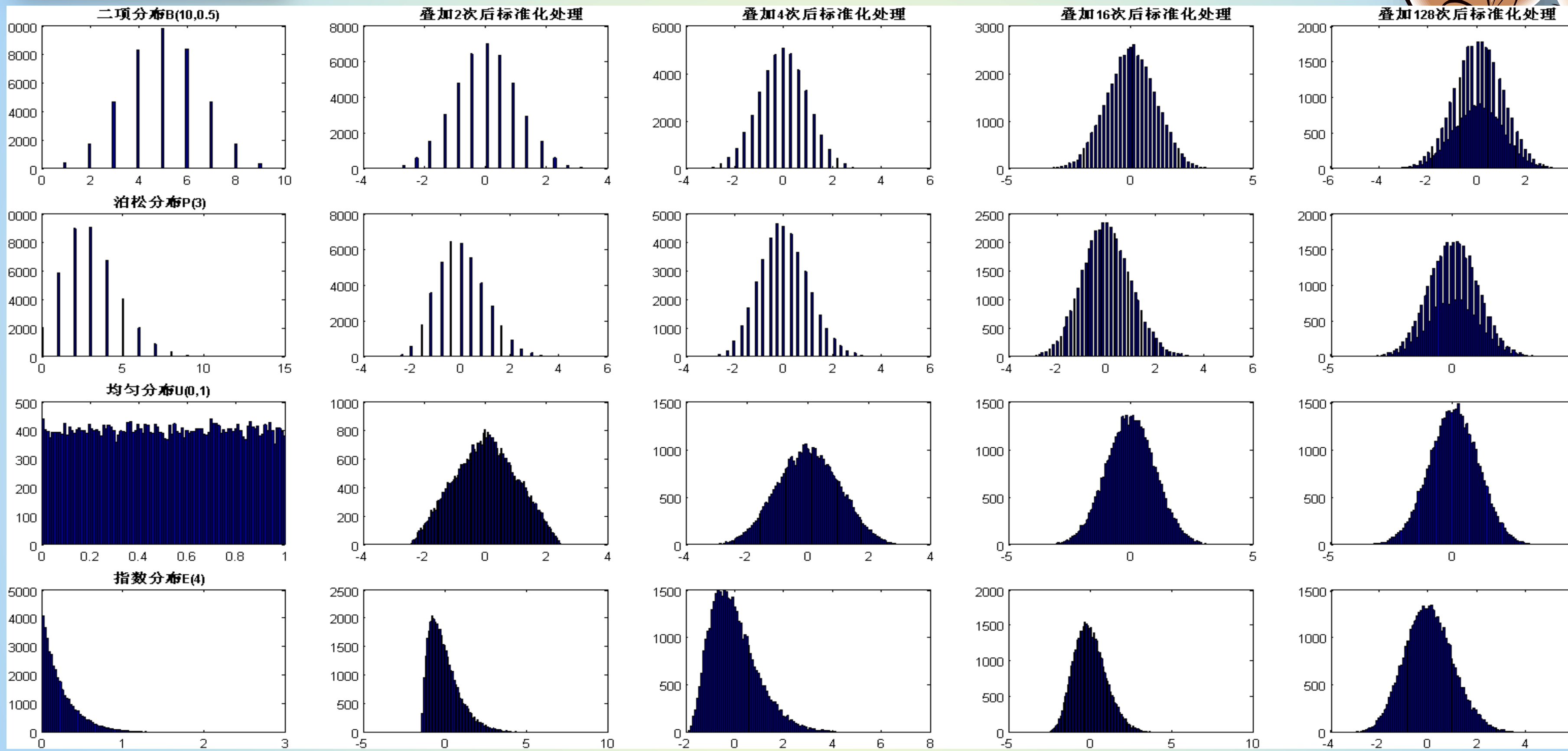
1. 产生n组落在正方形G内的随机点(x,y)，其中$X\sim U(-1,1), Y\sim U(-1,1)$
2. 统计满足$x^2+y^2\leq 1$的随机点个数，设为k
3. n足够大时可用$\frac{4k}{n}$近似估算圆周率π



依据： 根据贝努里大数定律，随机点落在区域D内的频率k/n依概率收敛于概率$p=\pi/4$



回顾：



分析：随着n增大，分布函数特点？

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \Phi(x)$$

三.中心极限定理

正态分布与现实情形

正态分布是日常生活中最常见、常用的一种分布，如：

身高、体重、水文水位、测量数据等

实际变量往往是由诸多因素综合而成，如零件大小的测量数据Z可能会受下列因素影响：

温度(X_1)、湿度(X_2)、视觉(X_3)、仪器(X_4)等

故可看作 $Z=X_1+X_2+X_3+X_4+\ldots\ldots$

三.中心极限定理

正态分布与现实情形

$$Z=X_1+X_2+X_3+X_4+\ldots\ldots$$

为什么测量值 Z 可看作服从正态分布的随机变量?

中心极限定理将告诉我们：(独立或弱相依)随机变量之和的极限分布在什么条件下是正态的。

三.中心极限定理

定义

设$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$是相互独立的随机变量序列，其前n项和的标准化随机变量序列为

$$Z_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\sum_{i=1}^{n}E(X_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}D(X_i)}}\quad (n=1,2,\cdots)$$

记Z_n的分布函数为$F_n(x)=P\{Z_n\leq x\}$，若

$$\lim_{n\to\infty}P\{Z_n\leq x\}=\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\ -\infty<x\leq+\infty$$

则称随机变量序列$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$服从中心极限定理。

三.中心极限定理

- 以下均设$X_1,\ldots,X_n$相互独立

$$\lim_{n\to\infty} P\{Z_n \le x\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \boxed{E(X_i)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \boxed{D(X_i)}}} \le x\right\} = \Phi(x)$$

- 独立同分布中心极限定理:

$$E(X_i) = \mu \ , i = 1,2\ldots$$

$$D(X_i) = \sigma^2 > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\boxed{\mu}}{\sqrt{n}\boxed{\sigma}} \le x\right\} = \Phi(x)$$

三.中心极限定理

- **独立同分布中心极限定理：**

$$E(X_i)=\mu$$
$$D(X_i)=\sigma^2<\infty$$

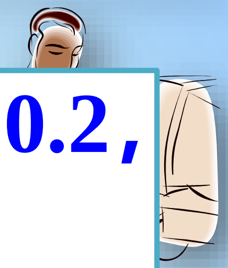
$$\lim_{n\to\infty}P\{\frac{\boxed{\sum_{i=1}^{n}X_i}-n\mu}{\boxed{\sqrt{n}\sigma}}\le x\}=\Phi(x)$$

- **拉普拉斯中心极限定理：** $Y_n \sim B(n,p)$

$$\lim_{n\to\infty}P\{\frac{\boxed{Y_n}-np}{\boxed{\sqrt{np(1-p)}}}\le x\}=\Phi(x)$$

$$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$$
$$E(X_i)=\mu=p$$
$$D(X_i)=\sigma^2=p(1-p)$$

三.中心极限定理



例1. 10部机器独立工作，每部停机的概率为0.2，求同时停机不多于3部的概率。

解： 设10部机器中同时停机的数目为X，则

$$X \sim B(10,0.2), np = 2, \sqrt{np(1-p)} \approx 1.265$$

方法一：直接计算

$$P\{X \le 3\} = \sum_{k=0}^{3} C_{10}^{k} \cdot 0.2^{k} \cdot 0.8^{10-k} = 0.879$$

方法二：用中心极限定理

$$P\{X \le 3\} \boxed{\approx} \Phi\left(\frac{3 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{3-2}{1.265}\right) = 0.785$$

两种方法差异较大，原因是：n不够大！
一般应有 $n \ge 30$

三.中心极限定理

例2.　每颗炮弹命中飞机的概率为0.01，求500发炮弹命中多于 5 发的概率。

解:

$$X \sim B(500,0.01), np = 5, \sqrt{np(1-p)} \approx 2.2$$

方法一：直接计算：

$$P\{X > 5\} = 1 - \sum_{k=0}^{5} C_{500}^{k} \cdot 0.01^{k} \cdot 0.99^{500-k} \approx 0.384$$

方法二：用中心极限定理：

$$P\{X > 5\} = P\{X \geq 6\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{6-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 0.327$$

三.中心极限定理

方法三：用Possion公式(查表)：

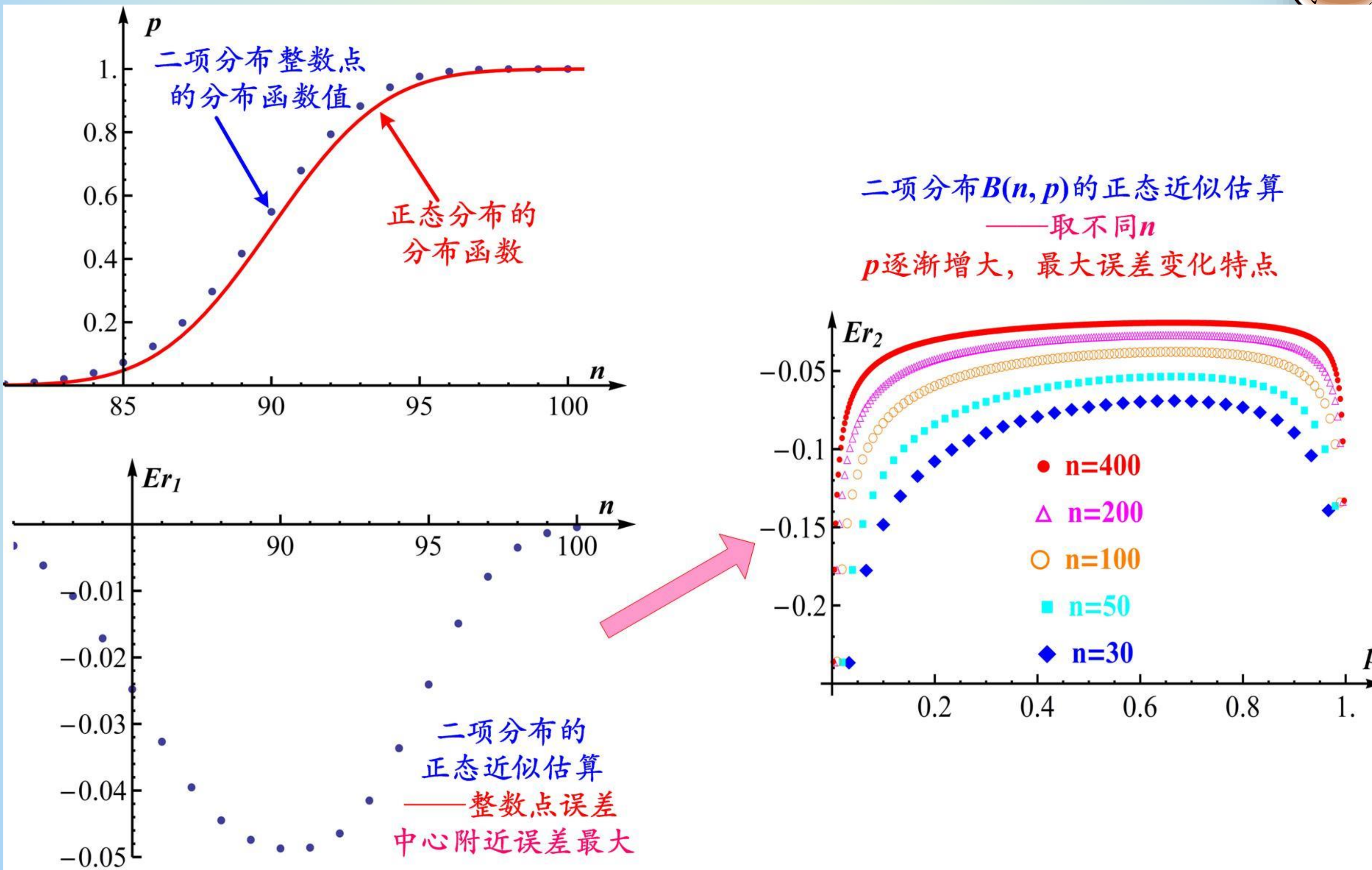
$$P\{X>5\}=P\{X\geq 6\}\approx 1-\sum_{k=0}^{5}\frac{5^k}{k!}e^{-5}\approx 0.384$$

用中心极限定理差异较大，原因是：

- 二项分布的极限分布，当np较小时，用泊松分布近似计算更精确；
- 二项分布的极限分布，当np较大时，可用正态分布逼近；
- 泊松分布参数λ较大时可用正态分布近似计算。

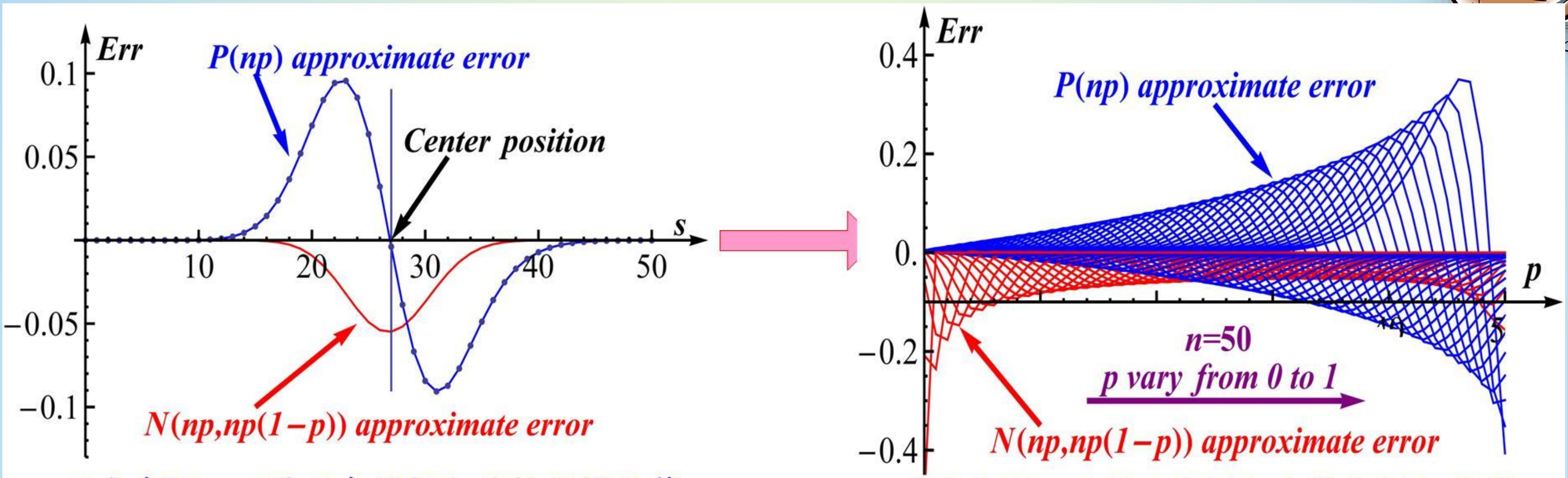
三.中心极限定理

扩展1：正态分布对二项分布的近似



三.中心极限定理

正态分布和泊松分布对二项分布的近似计算误差



二项分布$B(n,p)$的正态近似与泊松近似估算误差特点：

(1) 正态近似总是偏低，中心附近偏差最大

(2) 泊松近似先增后减，中心附近由高变低

二项分布$B(n,p)$的正态近似与泊松近似估算最大误差特点：当n固定($n=50$)，p从0增加到1

(1) 正态近似——最大误差先减后增

(2) 泊松近似——最大误差从小变大

- 当$np < 10$，采用**泊松分布**近似；
- 当$10 < np < n-10$时，可用**正态分布**近似；
- 当$n(1-p) < 10$时，**正态分布**近似的误差也很大。

三.中心极限定理

扩展2：正态分布近似估算的整数边界修正

用正态分布近似估算二项分布，前者是连续型分布而后者是离散型分布，当边界点为整数时容易产生分歧——如例2中$P\{X>5\}$与$P\{X\geq 6\}$，同一事件的不同处理导致结果出现较大差异。

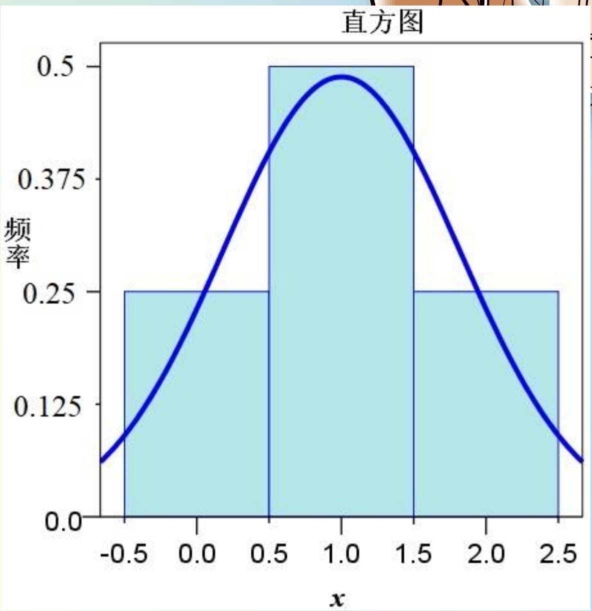
这类情形可用连续性修正方法提高估算精度并避免分歧。

为便于观察与理解修正计算方法，以一种“极端”情形进行说明：用$N(1,0.5)$估算$B(2,0.5)$。

三.中心极限定理

正态分布近似估算的整数边界修正

例：用$N(1, 0.5)$估算$B(2, 0.5)$。



图中给出$B(2, 0.5)$的概率直方图及相应的正态曲线，从图可看出整数点的概率$P\{X = k\}, k = 0, 1, 2$对应直方图中矩形面积，修正计算时将其对应正态曲线在区域 $k - 0.5 \sim k + 0.5$ 之间的面积。

例如，$P\{X \le 1\} = 0.75$，

- 若直接用$\Phi(1, 0.5; 1) = 0.5$估算则偏差很大;
- 用$P\{X \le 1\} = P\{X < 1.5\} \approx \Phi(1, 0.5; 1.5) = 0.7603$修正后则估算偏差较小。

三.中心极限定理

正态分布近似估算的整数边界修正

例： 用$N(1,0.5)$估算$B(2,0.5)$。

如

$$
\begin{aligned}
0.5 = P\{X=1\} &\approx \Phi(1,0.5;1.5) - \Phi(1,0.5;0.5) \\
&= 0.7603 - 0.2398 \\
&= 0.5205
\end{aligned}
$$

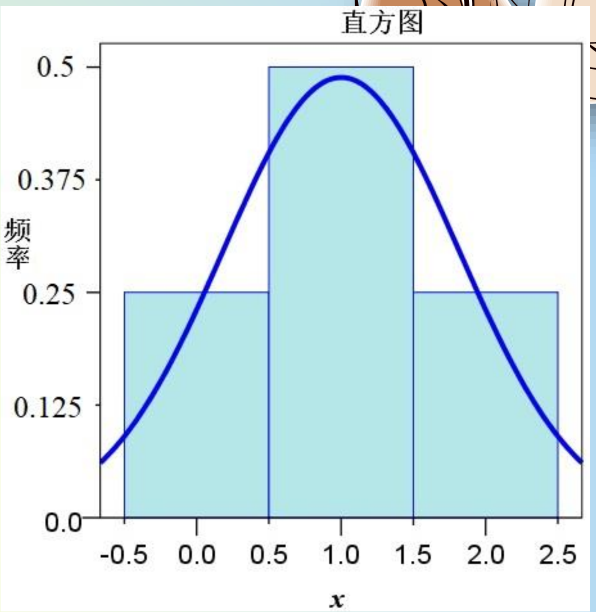


表 1 正态分布近似估算 $B(2,0.5)$ 的连续性修正

x	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$P\{X=x\}$		0.25		0.5		0.25	
$P\{X\le x\}$		0.25		0.75		1	
$\Phi(1,0.5;x)$	0.01695	0.07865	0.2398	0.5	0.7603	0.9214	0.9831

三.中心极限定理

正态分布近似估算的整数边界修正

用$N(np,np(1-p))$估算$B(n,p)$时，边界为整数时修正方法为：**根据包含的整数点向两侧扩张0.5。**

例如a,b为整数时，$\{a<X\}$与$\{a+1\leq X\}$包含的整数边界点都是$a+1$，因此修正方式为：

$$\{X=a\}\longrightarrow\{a-0.5<X<a+0.5\}$$

$$\{a+1\leq X\}\cong\{a<X\}\longrightarrow\{a+0.5<X\}$$

$$\{X\leq b-1\}\cong\{X<b\}\longrightarrow\{X<b-0.5\}$$

三.中心极限定理

正态分布近似估算的整数边界修正

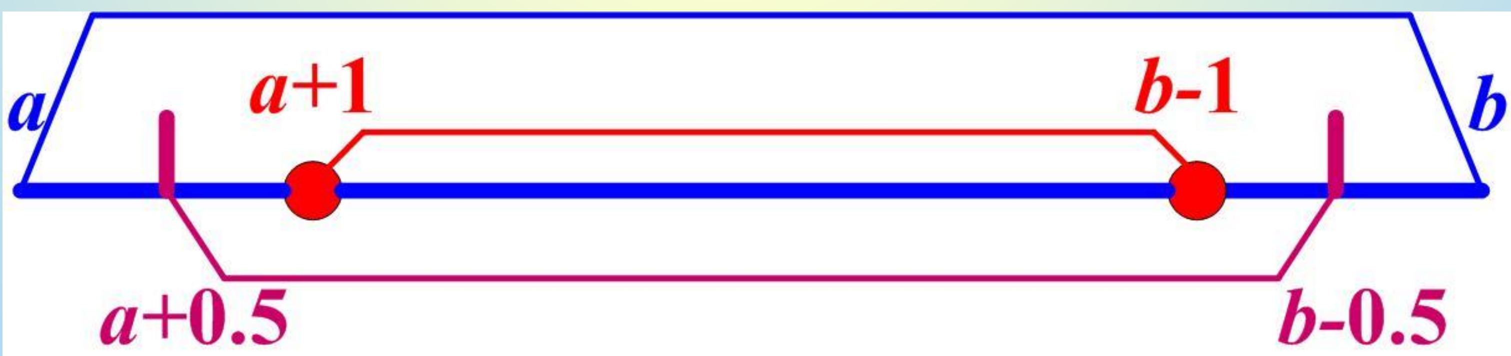
用$N(np,np(1-p))$估算$B(n,p)$时，边界为整数时修正方法为：根据包含的整数点向两侧扩张0.5。

例如a,b为整数时，修正方式为：

$$\{X=a\}\longrightarrow\{a-0.5<X<a+0.5\}$$

从而有

$$\{a+1\le X\le b-1\}\cong\{a<X<b\}$$
$$\rightarrow\{a+0.5<X<b-0.5\}$$



三.中心极限定理

正态分布近似估算的整数边界修正

例2. 每颗炮弹命中飞机的概率为0.01，求500发炮弹命中多于5发的概率。

解法一：二项分布直接求解 $P\{X > 5\} \approx 0.3840$

相对误差 30.21%

解法二：中心极限定理不加处理直接近似估算

$$P\{X > 5\} = 1 - P\{X \le 5\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 0.5$$

相对误差 −14.97%

解法三：中心极限定理处理后近似估算

$$P\{X > 5\} = P\{X \ge 6\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{6 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 0.3265$$

相对误差 7.06%

解法四：中心极限定理整数边界修正后近似估算

$$P\{X > 5\} = P\{X \ge 6\} = P\{X > 5.5\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{5.5 - 5}{\sqrt{4.95}}\right) = 0.411093$$

三.中心极限定理

如何用独立同分布中心极限定理估计概率?

方法:

首先将复杂的随机变量分解成独立同分布的随机变量之和

然后计算出随机变量之和的期望和方差

最后把变量的和看作正态分布，近似计算在某区间上的概率

三.中心极限定理

例 某工厂检验员检验一件产品每次花10秒，若有产品需重复检查则要再花10秒。假设每个产品有一半的可能性需重复检查，求在8小时内检查员检查的产品不少于1900个的概率。

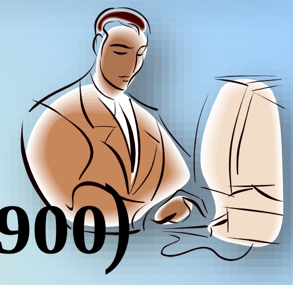
思路：

首先将问题转换为求检查员检查1900个产品所花总时间X不超过8小时的概率$P\{X\le 8\cdot 3600\}$

其次将X转换为随机变量之和，并计算期望和方差

然后利用中心极限定理估计概率

三.中心极限定理



解：设检查第i件产品所花时间为X_i $\left(i=1,2,\cdots,1900\right)$

则检查1900件产品所花的总时间为$X=\sum_{i=1}^{n} X_i$

这里，X_i是独立同分布的随机变量，其中

$$X_i=\begin{cases}10, & 第i件产品没有重复检查\\ 20, & 第i件产品需要重复检查\end{cases}$$

$$P\{X_i=10\}=P\{X_i=20\}=0.5,\quad i=1,2,\cdots,1900$$

$$E(X_i)=10\times0.5+20\times0.5=15$$

三.中心极限定理

$$D(X_i)=E(X_i^2)-E(X_i)^2=10^2\times0.5+20^2\times0.5-15^2=25$$

由独立同分布中心极限定理有：

$$X=\sum_{i=1}^{1900}X_i\sim N(1900\times15,1900\times25)$$

从而所求概率为：

$$P\{X\le 8\times3600\}$$

$$\approx\Phi\left(\frac{8\times3600-1900\times15}{\sqrt{1900\times25}}\right)=\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{19}}\right)$$

$$=\Phi(1.37649)=0.9162$$

三.中心极限定理

棣莫弗——拉普拉斯中心极限定理的几种用法

例、设某种工艺需要合格的产品100个，该产品的合格率为96%，问需要采购多少个这种产品，才能有95%以上的把握保证合格品数够用？

解：设采购n件产品，其中合格品数为X，要保证合格品数够用，X必须满足 $X \geq 100$

因此问题归结为求最小的正整数n，使得

$$P\left(X \geq 100\right) \geq 0.95$$

三.中心极限定理

因此问题归结为求最小的正整数n，使得

$$P(X\geq 100)\geq 0.95$$

由于$X\sim B(n,0.96)$,由棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理得

$$X\sim N(np,np(1-P))\text{即 } N(0.96n,0.96\times 0.04n)$$

从而有 $P(X\geq 100)=1-P(X<100)$

$$\approx 1-\Phi\left(\frac{100-0.96n}{\sqrt{0.96\times 0.04n}}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{0.96n-100}{\sqrt{0.96\times 0.04n}}\right)\geq 0.95$$

三.中心极限定理

$$\Phi\left(\frac{0.96n-100}{\sqrt{0.96\times 0.04n}}\right)\geq 0.95$$

查表得： $$\frac{0.96n-100}{\sqrt{0.96\times 0.04n}}\geq 1.64$$

化简得： $n-0.3348\sqrt{n}-104.1667\geq 0$

求解得：$\sqrt{n}\geq 10.3750$ 或 $\sqrt{n}\leq -10.0402$(舍弃)

也即 $n\geq 107.6406$

故 至少需要采购108个产品才能满足要求

三.中心极限定理

扩展思考：是否需要考虑上限?

例、设某种工艺需要某合格的产品100个，该产品的合格率为96%,问需要采购多少个这种产品，才能有95%以上的把握保证合格品数够用?

解：设采购n件产品，其中合格品数为X， 要保证合格品数够用，则要求最小的正整数n，使得：$P\{X \geq 100\} \geq 0.95$

思考：为保证准确度，是否应该采用 $P\{100 \leq X \leq n\} \geq 0.95$

$$P\{100 \leq X \leq n\} \approx \Phi\left(\frac{n-0.96n}{\sqrt{0.96\times 0.04n}}\right)-\Phi\left(\frac{100-0.96n}{\sqrt{0.96\times 0.04n}}\right)$$

由于上下限并非关于中心对称，求解困难！——注意到

$$\frac{n-0.96n}{\sqrt{0.96\times 0.04n}}=\frac{0.04}{\sqrt{0.96\times 0.04}}\sqrt{n}\approx 0.204\sqrt{n}\xrightarrow{n=100}2.04$$

$$\Phi(2.04)=0.9793\approx 1$$

三.中心极限定理

定理用法：

在近似计算公式中

$$\beta = P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = P\left(p - \varepsilon < \frac{n_A}{n} < p + \varepsilon\right)$$

$$= P\left(np - n\varepsilon < n_A < np + n\varepsilon\right) = \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{-n\varepsilon}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$= 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) - 1 = \beta$$

有四个相互联系的指标

试验总次数n，事件A出现的概率p，误差界ε

用频率估计概率所产生的误差的可靠度β

只要知道其中任意三个量，就可以求出另外一个