

第三章 多维随机变量



1. 二维随机变量及其分布
2. 随机变量的独立性
3. 条件分布
4. 随机变量的函数及其分布

电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 hggzhu@qq.com

1

第3章4节 随机变量的函数及其分布



问题的由来

引例1 博彩问题

电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 hggzhu@qq.com



第3章4节 随机变量的函数及其分布



一. 离散型随机变量的函数及其分布律

离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_i\} = p_i \quad i = 1, 2, \dots$$

若 $Y = g(X)$ 则

$$\begin{aligned} P\{Y = y_j\} &= P\{g(X) = y_j\} \\ &= \sum_{x_i \in S_j} P\{X = x_i\} \quad j = 1, 2, \dots \\ S_j &= \{x_i | g(x_i) = y_j\} \end{aligned}$$

 $Z = g(X, Y)$
应如何处理?

引例2 骰子点数和

电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 hggzhu@qq.com



第3章4节 随机变量的函数及其分布



一. 离散型随机变量的函数及其分布律

离散型随机变量 (X, Y) 的分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots$$

若 $Z = G(X, Y)$ 则

$$\begin{aligned} P\{Z = z_k\} &= P\{G(X, Y) = z_k\} \\ &= \sum_{(x_i, y_j) \in T_k} P\{X = x_i, Y = y_j\} \quad k = 1, 2, \dots \\ T_k &= \{(x_i, y_j) | G(x_i, y_j) = z_k\} \end{aligned}$$

函数的分布律

电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 hggzhu@qq.com



第3章4节 随机变量的函数及其分布



一. 离散型随机变量的函数及其分布律

定理: 设随机变量 (X, Y) 是离散型随机变量, X, Y 相互独立, 其分布律为:

$$P\{X = k\} = p(k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$P\{Y = r\} = q(r) \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

则 $X + Y$ 的分布律为:

$$P\{X + Y = m\} = \sum_{k=0}^m p(k)q(m-k) \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

思考:

若 $k = i, i + 1, \dots$; $r = j, j + 1, \dots$
 $X + Y$ 的分布律形式又该如何?

电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 hggzhu@qq.com



第3章4节 随机变量的函数及其分布

思路: 若 $k = i, i + 1, \dots$; $r = j, j + 1, \dots$

$$P\{X + Y = m\} = \sum_{k=0}^{m-j} P\{X = k, Y = m - k\} \quad k \text{ 的取值范围?}$$

$$\left. \begin{aligned} X &\geq i \\ Y &= m - k \geq j \end{aligned} \right\} \Rightarrow i \leq k \leq m - j$$

$$\therefore P\{X + Y = m\} = \sum_{k=i}^{m-j} P\{X = k, Y = m - k\}$$

 X 与 Y 相互独立

$$= \sum_{k=i}^{m-j} P\{X = k\}P\{Y = m - k\}$$

$$= \sum_{k=i}^{m-j} p(k)q(m - k), \quad m = i + j, i + j + 1, \dots$$

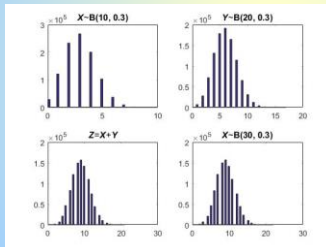
电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 hggzhu@qq.com



第3章4节 随机变量的函数及其分布

一. 离散型随机变量的函数及其分布律

二项分布之和



横坐标为随机变量取值，纵坐标为频数。

试分析这几幅图有何特点？

电子科技大学数学学院 杜润飞 hggfchina@qq.com



第3章4节 随机变量的函数及其分布

一. 离散型随机变量的函数及其分布律

二项分布具有可加性

泊松分布具有可加性

若 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 且 $X_i \sim B(1, p)$ 则

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim B(n, p)$$

反之 若 $X \sim B(n, p)$ 则存在相互独立的

$X_i \sim B(1, p), i = 1, 2, \dots, n$, 使得

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

电子科技大学数学学院 杜润飞 hggfchina@qq.com



第3章4节 随机变量的函数及其分布

二. 连续型随机变量的函数及其概率密度

设 X 是连续型随机变量, 则 $Y = g(X)$ 的分布函数为

$$F_Y(y) = P\{g(X) \leq y\} = \int_{\{x|g(x) \leq y\}} f_X(x) dx$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} F'_Y(y) & \text{在 } f_Y(y) \text{ 的连续点} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

思路: 先确定分布函数, 然后确定概率密度。

电子科技大学数学学院 杜润飞 hggfchina@qq.com



第3章4节 随机变量的函数及其分布

二. 连续型随机变量的函数及其概率密度

对于二维的情形可类似给出。

设 (X, Y) 的联合概率密度是 $f(x, y)$, 则

$Z = g(X, Y)$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{G(X, Y) \leq z\} = \iint_{\{(x, y) | G(x, y) \leq z\}} f(x, y) dx dy$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} F'_Z(z) & \text{在 } f_Z(z) \text{ 的连续点} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

平方的概率密度

$X + 2Y$ 的概率密度

电子科技大学数学学院 杜润飞 hggfchina@qq.com



第3章4节 随机变量的函数及其分布

二. 连续型随机变量的函数及其概率密度

定理: 设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, $(-\infty < x < +\infty)$, 又设函数 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x) > 0$ (或 $g'(x) < 0$) 则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)] |h'(y)| & \alpha < y < \beta \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\alpha = \min(g(-\infty), g(+\infty)) \quad \beta = \max(g(-\infty), g(+\infty))$$

电子科技大学数学学院 杜润飞 hggfchina@qq.com



第3章4节 随机变量的函数及其分布

二. 连续型随机变量的函数及其概率密度

****扩展补充:

设随机变量 $Y = g(X)$ 在不重叠的区域 I_1, I_2, \dots 上逐段严格单调, 其反函数分别为 $h_1(y), h_2(y), \dots$, 且 $h_1'(y), h_2'(y), \dots$ 均为连续函数, 则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y) = f_X[h_1(y)] |h_1'(y)| + f_X[h_2(y)] |h_2'(y)| + \dots$$

再求平方的概率密度

练习

往年考题

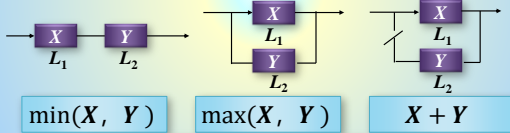
电子科技大学数学学院 杜润飞 hggfchina@qq.com



第3章4节 随机变量的函数及其分布

三. 几种特殊函数的分布

设系统 L 由两个功能相似且相互独立的子系统 L_1, L_2 连接而成, 连接的方式分别为: 1) **串联** 2) **并联** 3) **备用**, 如图所示。设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y , 系统的寿命如何用 X, Y 表示?



如何确定系统寿命的分布?

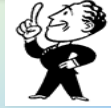
电子科技大学数学科学学院 杜润飞 tgg@china.qq.com

第3章4节 随机变量的函数及其分布

三. 几种特殊函数的分布

一般原则: 对于二维连续型随机变量 (X, Y) 的函数 $Z = G(X, Y)$ 的概率密度 $f_z(z)$ 。

一般是先求出 Z 的分布函数 $F_z(Z)$
再对 $F_z(Z)$ 微分得到 $f_z(z)$



电子科技大学数学科学学院 杜润飞 tgg@china.qq.com

第3章4节 随机变量的函数及其分布

三. 几种特殊函数的分布

1. $M = \max(X, Y), \quad N = \min(X, Y)$

$$\begin{aligned}
 F_M(z) &= P\{M \leq z\} \\
 &= P\{\max(X, Y) \leq z\} \\
 &= P\{X \leq z, Y \leq z\} \\
 &= F(z, z)
 \end{aligned}$$

若 X 与 Y 相互独立有:

$$F_M(z) = F_X(z)F_Y(z)$$

思考:

1. 如何推广至 n 个子系统串联?
2. 概率密度函数的形式?

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 tgg@china.qq.com

第3章4节 随机变量的函数及其分布

三. 几种特殊函数的分布

1. $M = \max(X, Y), \quad N = \min(X, Y)$

$$\begin{aligned}
 F_N(z) &= P\{N \leq z\} = P\{\min(X, Y) \leq z\} \\
 &= P\{X \leq z \text{ 或 } Y \leq z\} \\
 &= P\{X \leq z\} + P\{Y \leq z\} - P\{X \leq z, Y \leq z\} \\
 &= F_X(z) + F_Y(z) - F(z, z)
 \end{aligned}$$

若 X 与 Y 相互独立有:

$$\begin{aligned}
 F_N(z) &= 1 - P\{\min(X, Y) > z\} = 1 - P\{X > z, Y > z\} \\
 &= 1 - P\{X > z\}P\{Y > z\} \\
 &= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]
 \end{aligned}$$

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 tgg@china.qq.com

第3章4节 随机变量的函数及其分布

三. 几种特殊函数的分布

思考推广:

若 n 个子系统相互独立且具有相同分布, 则:

- ① 串联时系统寿命分布如何用子系统的分布表示?
- ② 并联时系统寿命又如何表示?
- ③ 系统的概率密度如何用子系统的概率密度表示?

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 tgg@china.qq.com

第3章4节 随机变量的函数及其分布

三. 几种特殊函数的分布

2. $Z = X + Y$

设随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$

$$\begin{aligned}
 F_Z(z) &= P\{X + Y \leq z\} \\
 &= \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx \right] dy
 \end{aligned}$$

作积分变量变换, 令 $x = u - y, \quad x + y = z$

$$\begin{aligned}
 \text{则 } F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^z f(u - y, y) du \right] dy \\
 &= \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u - y, y) dy \right] du
 \end{aligned}$$

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 tgg@china.qq.com

第3章4节 随机变量的函数及其分布

三. 几种特殊函数的分布

2. $Z = X + Y$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y, y) dy \right] du$$

由分布函数(连续型)定义

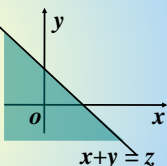
$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^z f_Z(u) du$$

得到公式:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy$$

先对 x 积分, 可得公式:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$$



电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 tgg@math.uestc.edu.cn



第3章4节 随机变量的函数及其分布

三. 几种特殊函数的分布

思考:

若随机变量 X, Y 相互独立, 则有公式:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

或者

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

卷积公式

电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 tgg@math.uestc.edu.cn



第3章4节 随机变量的函数及其分布

三. 几种特殊函数的分布

已知随机变量 (X, Y) 的联合概率密度 $f(x, y)$, 求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$, 可以利用下面公式求解

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$$

$$y = z - x$$

均匀分布之和

$X+Y$ 的概率密度

电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 tgg@math.uestc.edu.cn



第3章4节 随机变量的函数及其分布

三. 几种特殊函数的分布

解题步骤:

- ① 在 XOZ 平面上作出 $f(x, z-x)$ 的非零区域 G
- ② 从区域 G 中确定 $f_Z(z)$ 非零区域
- ③ 在 $f_Z(z)$ 非零区域中, 逐段确定 $f_Z(z)$ 的表达式
- ④ 写出 $f_Z(z)$ 的完整表达式。

电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 tgg@math.uestc.edu.cn



第3章4节 随机变量的函数及其分布

三. 几种特殊函数的分布

思考:

在求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 时, 我们是否可以通过 YOZ 平面来求解?

答案: 可以

这时所引用的公式为:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy$$

$$x = z - y$$

见例3.4.11 正态分布具有可加性。

系统寿命

电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 tgg@math.uestc.edu.cn



第3章4节 随机变量的函数及其分布

三. 几种特殊函数的分布

3. $Z = X/Y$ 的分布

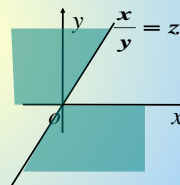
设随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$

$$F_Z(z) = P\{X/Y \leq z\} = \iint_{x/y \leq z} f(x, y) dx dy$$

积分区域如何?

$$x/y \leq z \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y > 0, & x \leq yz \\ y < 0, & x \geq yz \end{cases}$$



电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 tgg@math.uestc.edu.cn



第3章4节 随机变量的函数及其分布



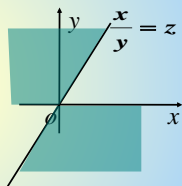
三. 几种特殊函数的分布

3. $Z = X/Y$ 的分布

$$F_Z(z) = \iint_{x/y \leq z} f(x, y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^0 \left[\int_{yz}^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy$$

$$+ \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{yz} f(x, y) dx \right] dy$$

作积分变量变换, 令 $x = yu$ 

电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 tgg@math.uestc.edu.cn



第3章4节 随机变量的函数及其分布



三. 几种特殊函数的分布

3. $Z = X/Y$ 的分布

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^0 \left[\int_{yz}^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy + \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{yz} f(x, y) dx \right] dy$$

作积分变量变换, 令 $x = yu$, 则

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{yz} yf(yu, y) du \right] dy = \int_{-\infty}^z \left[\int_0^{+\infty} yf(yu, y) dy \right] du$$

 $y < 0$

$$\int_{-\infty}^0 \left[\int_z^{+\infty} yf(yu, y) du \right] dy = - \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^0 yf(yu, y) du \right] dy$$

$$= - \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^0 yf(yu, y) dy \right] du$$

电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 tgg@math.uestc.edu.cn



第3章4节 随机变量的函数及其分布



三. 几种特殊函数的分布

3. $Z = X/Y$ 的分布

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \left[\int_0^{+\infty} yf(yu, y) dy \right] du - \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^0 yf(yu, y) dy \right] du$$

$$= \int_{-\infty}^z \left[\int_0^{+\infty} yf(yu, y) dy - \int_{-\infty}^0 yf(yu, y) dy \right] du$$

$$f_Z(z) = \int_0^{+\infty} yf(yz, y) dy - \int_{-\infty}^0 yf(yz, y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y) dy$$

商的分布

电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 tgg@math.uestc.edu.cn

