方差—引例1

我也平均每天一万步

我平均每天一万步

我周一走六万多步，其余六天每天大约一千步，恢复体力

我每天都是一万多步左右

下图给你什么启发?

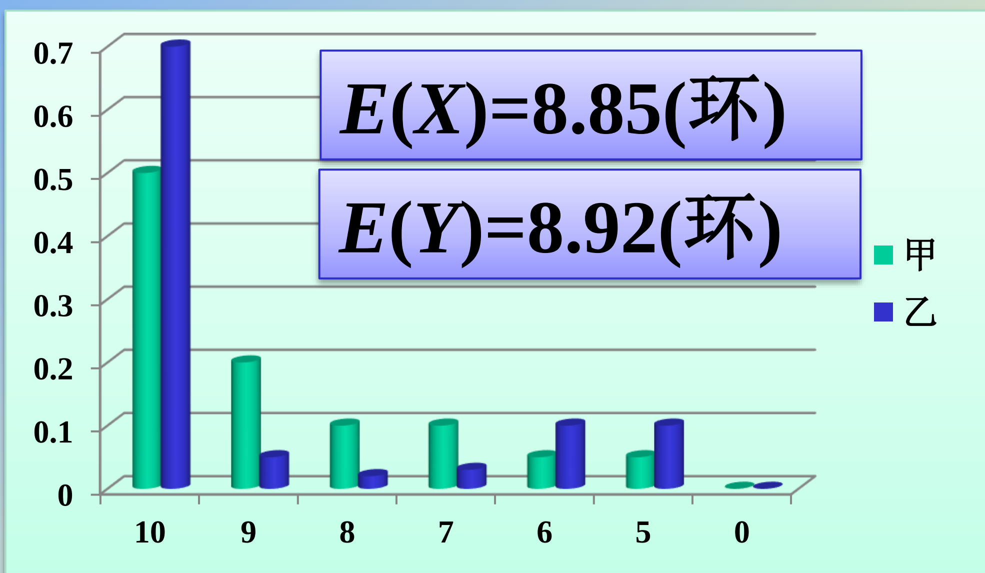
仅用均值不足以衡量整体水平
还需考虑极大值、极小值、离差等

$$X - E(X)$$

已知甲乙两名射击运动员的历史记录为：

X	10	9	8	7	6	5	0	
$P(X=x_i)$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.05	0.05	0	甲

Y	10	9	8	7	6	5	0	
$P(Y=y_k)$	0.7	0.05	0.02	0.03	0.1	0.1	0	乙

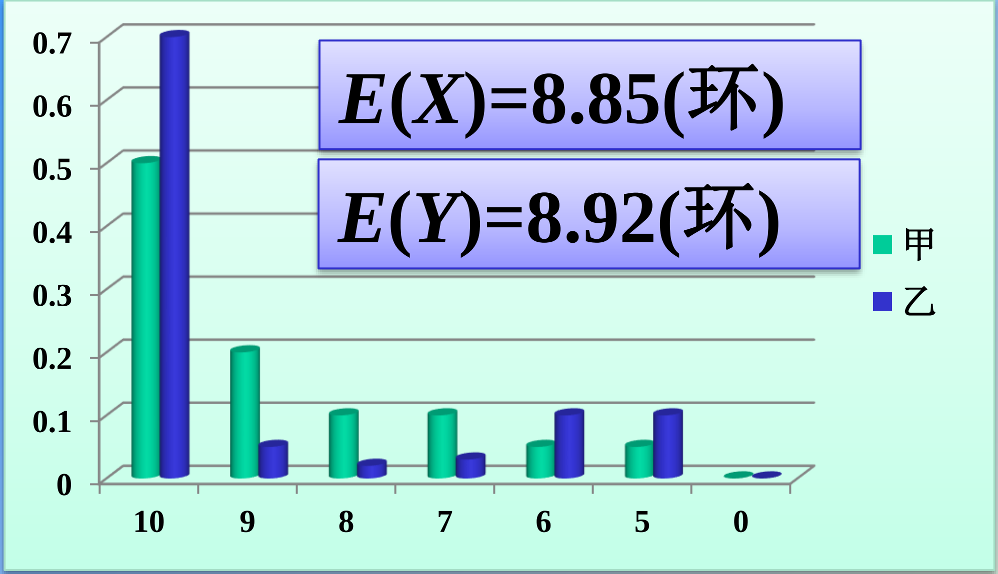


$E(X)=8.85$(环)

$E(Y)=8.92$(环)

仅用均值，或极大值、极小值难以衡量整体水平！

方差——引　例2



考虑偏离均值的程度——离差

$$X - E(X)$$

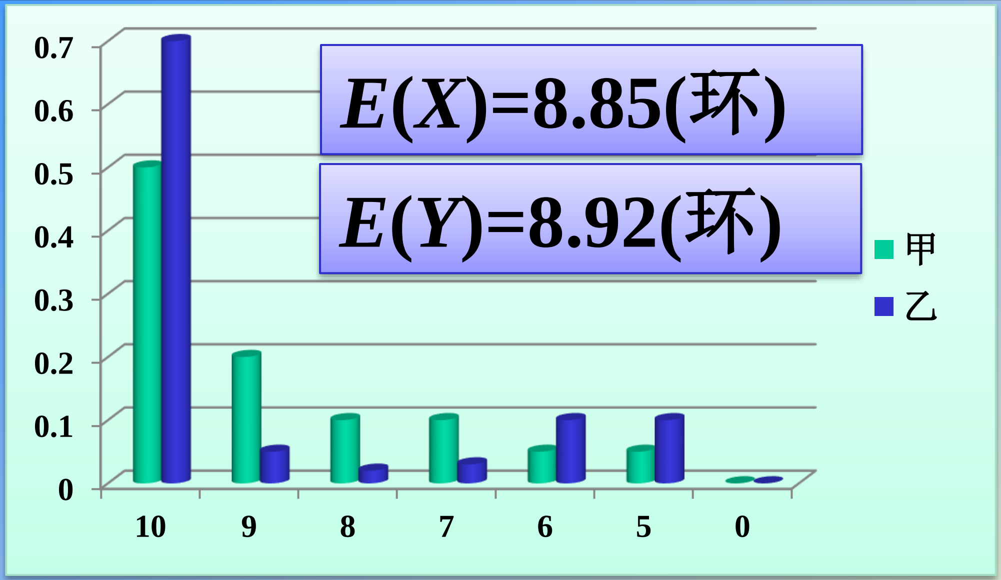
思考：可否用离差的均值作偏离程度的指标?

离差的均值会正负抵消!

为避免这种情况，可考虑先取绝对值或平方，然后计算其均值。

哪种更好?

方差——引　例2



若参加比赛，该选谁去?

考虑离差平方的平均值:

甲：$$\sum_{i=5}^{10}\left(i-E(X)\right)^2 P\{X=i\}=E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}=2.2275$$

乙：$$\sum_{k=5}^{10}\left(k-E(Y)\right)^2 P\{Y=k\}=E\left\{\left[Y-E(Y)\right]^2\right\}=3.4860$$

这说明甲的技术水平发挥的更稳定

方差公式的证明

$$
\begin{aligned}
D(X) &= E\left\{[X - E(X)]^2\right\} \\
&= E\left\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\right\} \\
&= E(X^2) - 2E(X)\cdot E(X) + [E(X)]^2 \\
&= E(X^2) - [E(X)]^2
\end{aligned}
$$

泊松分布的方差

1. $X \sim P(\lambda)$ 则 $E(X)=\lambda \quad D(X)=\lambda$

$$E\left(X^2\right)=\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda}$$

$$\underline{\underline{\text{令} m=k-1}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+1)\lambda^{m+1}}{m!} e^{-\lambda}$$

泊松分布的期望

$$=\lambda \sum_{m=0}^{+\infty} m \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}+\lambda \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

分布律之和等于1

$$=\lambda^2+\lambda$$

$$D(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2$$

$$=\lambda$$

正态分布的方差

3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $E(X) = \mu \quad D(X) = \sigma^2$

证明: $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x-\mu]^2 f(x) dx$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\underline{\underline{t = \frac{x-\mu}{\sigma}}} \quad \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t de^{-\frac{t^2}{2}}$$

$\underline{\underline{\text{分部积分}}} \quad \sigma^2$

例4.2.1 设随机变量X的分布律为

X	-1	0	1
P	$1/2$	$1/3$	$1/6$

1)求$D(X)$　　2) $Y = X^2 + 1$，　求$D(Y)$

解：1) $E(X) = (-1)\times\frac{1}{2} + 0\times\frac{1}{3} + 1\times\frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$

$$E(X^2) = (-1)^2\times\frac{1}{2} + 0^2\times\frac{1}{3} + 1^2\times\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{5}{9}$$

例4.2.1 设随机变量X的分布律为

X	-1	0	1
P	$1/2$	$1/3$	$1/6$

1)求$D(X)$　　2) $Y=X^2+1$，　求$D(Y)$

$$E\left(X^2\right)=2/3$$

解： 2) $E(Y)=E\left(X^2+1\right)=E\left(X^2\right)+1=\dfrac{5}{3}$

$$E\left(Y^2\right)=E\left(X^4+2X^2+1\right)=3$$

注意到： X^4与X^2同分布

$$D(Y)=E\left(Y^2\right)-E(Y)^2=\frac{2}{9}$$

|X-Y|的方差

例4.2.2： 设随机变量X与Y相互独立,且$X,Y \sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)$

求$|X-Y|$ 的方差。

解：
$$\left.\begin{array}{l} X,Y\text{相互独立} \\ -Y \sim N\left(0,\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{具有可加性}]{\text{正态分布}} X-Y \sim N(0,1)$$

令$Z=X-Y$ 则 $Z \sim N(0,1)$ $E(Z)=0$ $D(Z)=1$

$$E(|Z|)=\sqrt{2/\pi}$$

$$E\left(|Z|^2\right)=E\left(Z^2\right)=D(Z)+[E(Z)]^2=1$$

$$D(|X-Y|)=E\left(|Z|^2\right)-[E(|Z|)]^2=1-\frac{2}{\pi}$$

练习解答

练习：设一次试验成功的概率为p，进行100次独立重复试验，当$p=$ ___1/2___ 时，成功次数的标准差的值最大，其值为 ___5___

解：设成功次数为X，则$X \sim B(100, p)$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{100p(1-p)} = 10\sqrt{p(1-p)}$$

令 $f(p) = p(1-p) \quad 0 < p < 1$

令 $f'(p) = 1 - 2p = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

$f''(p)\big|_{p=0.5} = -2$

$f(p)$在$p = \frac{1}{2}$取最大值

$$\sigma(X) = 10\sqrt{p(1-p)} = 5$$

随机变量的标准化

例4.2.4 随机变量X的$E(X), D(X)$存在，且$D(X)>0$

令 $$X^* = \frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

这里期望和方差看做常数

证明：$E(X^*)=0 \quad D(X^*)=1$

证明：$E(X^*)=\frac{1}{\sqrt{D(X)}}E[X-E(X)]=0$

$$D(X^*)=\left(\frac{1}{\sqrt{D(X)}}\right)^2 D[X-E(X)]=\frac{D(X)}{D(X)}=1$$

称X^*为X的**标准化随机变量。**

作用：消除量纲的影响

特别地： $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

样本均值的期望和方差

例4.2.7 设随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立,且$E(X_i)=\mu$

$D(X_i)=\sigma^2$,求$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)$的数学期望和方差

解

$$E(\overline{X})=E\left[\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)\right]$$

$$=\frac{1}{n}E(X_1+X_2+\ldots+X_n)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i) \qquad =\frac{1}{n}n\mu=\mu$$

样本均值的期望和方差

例4.2.7 设随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$ $\boxed{\text{相互独立}}$，且$E(X_i)=\mu$

$D(X_i)=\sigma^2$，求$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)$的数学期望和方差

解

$$D(\overline{X})=D\left[\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}D(X_1+X_2+\ldots+X_n)$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

思考：该结论有何作用？

X^2+Y^2的期望与方差

设 $X,Y \sim N(0,1)$ 且 X,Y 相互独立。

求 $E(X^2+Y^2)$, $D(X^2+Y^2)$

解：$\because X,Y \sim N(0,1)$

由 $E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = 1$

同理 $E(Y^2) = 1$

$\therefore E(X^2+Y^2) = 2$

$$D(X^2) = E(X^4) - [E(X^2)]^2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx - 1 = 3 - 1 = 2$$

X^2+Y^2的期望与方差

设 $X,Y \sim N(0,1)$ 且 X,Y 相互独立。

求 $E(X^2+Y^2), D(X^2+Y^2)$

$$D(X^2)=2 \quad 同理 D(Y^2)=2$$

又 $\because X,Y$相互独立

$$\therefore D(X^2+Y^2)=D(X^2)+D(Y^2)=4$$

称X^2+Y^2的服从<u>自由度为2</u>的χ^2分布