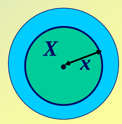
概率密度函数——射击试验

例1 一个靶子是半径为2米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘的概率与该圆盘的面积成正比，射击均能中靶，用X表示弹着点与圆心的距离。试求X的分布函数。

解：由第一节可知，X的分布函数为

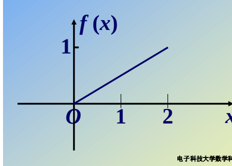
$$F(x)=\begin{cases}0\ , & x<0\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\le x<2\\ 1\ , & x\ge 2\end{cases}$$

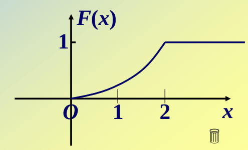


考虑函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0\le x<2\\ 0\ , & else\end{cases}$

$f(x)$的变上限积分为

$$\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0\ , & x<0\\ \displaystyle\int_0^x\frac{t}{2}dt=\frac{x^2}{4}, & 0\le x<2\\ \displaystyle\int_0^2\frac{t}{2}dt=1, & x\ge 2\end{cases}=F(x)$$





概率密度函数——仪器寿命问题

例2 使用了t小时的电子管在以后的Δt小时内损坏的概率等于$\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，其中$\lambda>0$为一常数，试写出电子管的寿命$T$的分布函数。

解：由第一节可得，寿命T的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

即是函数 $f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

的变上限积分。

概率密度函数——概率密度判定

例3 设

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ x\in R$$

证明 $\varphi(x)$ 是概率密度函数。

证明：（1） $\varphi(x)>0\ , x\in R$显然成立。

（2） $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$

令 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$$I^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$\overline{\overline{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta}}}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}rdr$$

$$=2\pi\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{+\infty}=2\pi$$

从而 $I=\sqrt{2\pi}$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=1$$

概率密度函数——函数参数确定

例4 设随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}ke^{-\frac{x}{\theta}}, & x>\alpha\\ 0\ , & x\le\alpha\end{cases}\qquad \theta>0$$

试确定常数k。

解：$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{\alpha}^{+\infty}k\,e^{-\frac{x}{\theta}}dx$

$$=-\theta\,k\int_{\alpha}^{+\infty}e^{-\frac{x}{\theta}}d(-\frac{x}{\theta})=-\theta\,k\,e^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_{\alpha}^{+\infty}$$

$$=\theta\,k\,e^{-\frac{\alpha}{\theta}}\ \Longrightarrow\ k=\frac{1}{\theta}e^{\frac{\alpha}{\theta}}$$

概率密度函数——概率的计算

例5 已知随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}$$

用Y表示对X进行三次独立重复观测中事件$\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$出现的次数，求$P\{Y=2\}=?$

分析： 把事件$\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$看作事件$A$，则$Y$表示进行3次独立实验时，事件$A$发生的次数，则 $Y\sim B(3,P(A))$

解： $P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f(x)\,dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}2x\,dx=\frac{1}{4}$

所以 $Y\sim B\left(3,\frac{1}{4}\right)$，从而

$$P\{Y=2\}=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$$

均匀分布——方程有实根的概率

例6 设随机变量$X\sim U(0,5)$，求方程

$4r^2+4Xr+X+2=0$ 中r有实根的概率p.

解： $p=P\{(4X)^2-4\times4(X+2)\ge0\}$

$=P\{X^2-(X+2)\ge0\}\quad=P\{(X-2)(X+1)\ge0\}$

$=P(\{X\le-1\}\cup\{X\ge2\})$

$=P\{X\le-1\}+P\{X\ge2\}$

$=P\{2\le X\le5\}$

$$=\frac{5-2}{5}=\frac{3}{5}$$

均匀分布——四 舍 五 入

例7 在数值计算中，由于四舍五入引起的误差X服从均匀分布.如果小数后面第五位按四舍五入处理，试求误差在0.00003和0.00006之间的概率.

解法1 由题设知，误差在[-0.00005,0.00005] 上服从均匀分布，所以X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{0.00005-(-0.00005)}=10000 & -0.00005\le x\le0.00005\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

故所求概率为：

$P\{0.00003\le x\le0.00006\}=\int_{0.00003}^{0.00005}10000\,dx=0.2$

解法2 设真值为x_0，舍入为x，由于舍入值x在$x_0-0.00005$与$x_0+0.00005$之间的任一值都是等可能的.问题归结为向直线区域

$\Omega=\{x|\ x_0-0.00005\le x\le x_0+0.00005\}$

随机投一点，而事件

A={误差在0.00003与0.00006之间}

$=\{x|\ x_0+0.00003\le x\le x_0+0.00005\}$

从而P{A}= $\dfrac{A\text{长度}}{\Omega\text{的长度}}=\dfrac{0.00005-0.00003}{0.00005-(-0.00005)}=0.2$

指数分布——灯 管 寿 命

例8 设某类日光灯管的使用寿命服从参数为$\lambda=0.0005$的指数分布，求：

(1) 任取一根灯管，能正常使用1000h以上的概率；

(2) 若这根灯管已使用了1000h，还能再使用1000h以上的概率。

解： 因为$X\sim E(\lambda)$，所以X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad\lambda=0.0005$$

1) $P\{X>1000\}=1-P\{X\le1000\}=1-\int_0^{1000}\lambda e^{-\lambda x}\,dx=1-\left(1-e^{-1000\lambda}\right)$

$$=e^{-1000\times0.00005}=e^{-0.5}\approx0.607$$

2) $P\{X>2000\,|X>1000\}=\dfrac{P\{X>2000,X>1000\}}{P\{X>1000\}}$

$$=\frac{P\{X>2000\}}{P\{X>1000\}}=\frac{\int_{2000}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\,dx}{\int_{1000}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\,dx}$$

$$=\frac{e^{-2000\lambda}}{e^{-1000\lambda}}$$

$$=e^{-1000\lambda}$$

≈0.607

正态分布——正态分布事件概率

例9 已知随机变量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，证明

$$P\{|X-\mu|<x\}=2\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)-1$$

证明：

$$P\{|X-\mu|<x\}=P\{\mu-x<X<\mu+x\}$$
$$=\Phi\left(\frac{\mu+x-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-x-\mu}{\sigma}\right)$$
$$=\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-x}{\sigma}\right)$$
$$=\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)-\left[1-\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right]$$
$$=2\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)-1$$

特别地，有

$$P\{|X-\mu|<\sigma\}=2\Phi(1)-1=0.6826$$
$$P\{|X-\mu|<2\sigma\}=2\Phi(2)-1=0.9544$$
$$P\{|X-\mu|<3\sigma\}=2\Phi(3)-1=0.9974$$

这说明X以很大的概率密集在$x=\mu$的附近，

见书上 3σ原理

正态分布——车门设计

例10 公共汽车的车门是按男子与车门碰头的机会在0.01以下来设计的.设男子身高X服从参数为μ=172cm，$\sigma=6$的正态分布，即X~N(172,36).问车门的高度该如何设计.

解：设车门的高度为h cm，按设计要求

$P\{X\ge h\}\le 0.01$ 或者 $P\{X<h\}\ge 0.99$

因为 X~N(172,36) 所以

$$P\{X<h\}=\Phi\left(\frac{h-172}{6}\right)\ge 0.99$$

查表有Φ(2.33)=0.9901>0.99

故(h-172)/6=2.33 即h=172+6×2.33=186cm

故设计车门高度为186cm时,可使男子与车门顶碰头的机会不大于0.01

正态分布——分位数

例11 设$X\sim N(10, 2^2)$，求α使 $P\{|X-10|<\alpha\}=0.9$

解：

$$P\{|X-10|<\alpha\}=2\Phi\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1=0.9$$
$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{\alpha}{2}\right)=0.95$$
$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2}=1.645$$
$$\Rightarrow \alpha=3.29$$

正态分布——电池可靠性估计

例12 设某种电池的寿命为X小时, $X\sim N(300, 35^2)$,

求 (1) 电池寿命在335小时以上的概率p_1

(2) 求允许时限x, 使电池寿命在(300 – x，300 +x)的概率不小于0.9。

解：(1)

$$p_1=P\{X>335\}$$
$$=1-P\{X\le 335\}$$
$$=1-\Phi\left(\frac{335-300}{35}\right)$$
$$=1-\Phi(1)$$
$$=1-0.8413=0.1587$$

(2) $0.9\le P\{300-x<X<300+x\}$

$$=2\Phi\left(\frac{x}{35}\right)-1$$
$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{x}{35}\right)\ge 0.95$$
$$\Rightarrow \frac{x}{35}\ge 1.645$$
$$\Rightarrow x\ge 57.575$$

既非离散也不连续的反例

例13 某学生上学途经一个十字路口，所经方向有50%时间亮红灯，遇红灯需等待直至绿灯亮，等待时间在区间[0,30](单位：秒)上服从均匀分布. 用X表示该学生的等待时间，求X的分布函数，并分析X是否为离散型或连续型随机变量，说明理由.

解: 设A= “经过路口时为绿灯”， 则 $P(A)= 1/2$

1) $x<0$ 时， $F(x)=0$

2) $0\le x<30$ 时，根据全概率公式有

$$F(x)=P\{X\le x\}=P(A)P\{X\le x|A\}+P(\bar{A})P\{X\le x|\bar{A}\}$$
$$=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{x}{30}=\frac{1}{2}+\frac{x}{60}$$

3) $x\ge 30$ 时， $F(x)=1$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}+\frac{x}{60}, & 0\le x<30\\ 1, & x\ge 30\end{cases}$$