电子科技大学 2022-2023 学年第 1 学期期末考试 A 卷

考试科目：概率论与数理统计 考试形式：闭卷 考试日期：____年____月____日

本试卷由 三 部分构成，共 4 页。考试时长：150 分钟

成绩构成比例：平时成绩 30 %，期末成绩 70 %

说明：可使用非存储功能的简易计算器

座位号______ 考场教室______ 任课教师______ 学号______ 姓名______ 学院______

密……封……线……以……内……答……题……无……效

一、选择题（共 16 分，共 8 题，每小题 2 分）

1. 设 A,B,C 为三事件，则 $\overline{(A\cup C)}B=$（ B ）.

（A）ABC；（B）$(\bar{A}\bar{C})\cup\bar{B}$；（C）$(\bar{A}\cup\bar{B})\cup C$；（D）$(\bar{A}\cup\bar{C})\cup\bar{B}$.

2. 设 X 与 Y 是任意两个连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，则（ B ）

×（A）$f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度；

√（B）$\frac{1}{2}(f_1(x)+f_2(x))$ 必为某一随机变量的概率密度；

×（C）$f_1(x)-f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度；

×（D）$f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

3. 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，则随机变量 $U=X+Y$ 与 $V=X-Y$ 相互独立的充分必要条件为（ B ）

$\mathrm{Cov}(U,V)=0$

（A）$E(X)=E(Y)$；

（B）$E(X^2)-(E(X))^2=E(Y^2)-(E(Y))^2$；

（C）$E(X^2)=E(Y^2)$；

（D）$E(X^2)+(E(X))^2=E(Y^2)+(E(Y))^2$.

4. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，$S_n=X_1+X_2+\cdots X_n$，则根据列维-林德伯格中心极限定理，当 n 充分大时，若要 S_n 近似服从正态分布，只要 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 满足条件（ ~~A~~ ）C

（A）有相同的数学期望；（B）有相同的方差；

（C）服从同一指数分布；（D）服从同一离散型分布.

5. 设随机变量 X 与 Y 都服从标准正态分布，则（ C ）

×（A）$X+Y$ 服从正态分布；×（B）X^2+Y^2 服从 χ^2 分布；

（C）X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布；（D）X^2/Y^2 服从 F 分布.

6.矩估计必然是（ B ）. $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

（A）总体矩的函数; （B）样本矩的函数;

（C）无偏估计; X（D）最大似然估计.

A 7.设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 σ^2 已知，则总体均值 μ 的置信区间长度 l 与置信度 $1-\alpha$ 的关系是（　　）

（A）当 $1-\alpha$ 缩小时，l 缩短; （B）当 $1-\alpha$ 缩小时，l 增大;

（C）当 $1-\alpha$ 缩小时，l 不变; （D）以上说法都不变. $l=\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}$

C 8.总体均值 μ 置信度为95%的置信区间为 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$，其含义是（ ）

（A）总体均值 μ 的真值以95%的概率落入区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$;

（B）样本均值 $\overline{X}$ 以95%的概率落入区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$;

（C）区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 含总体均值 μ 的真值的概率为95%;

（D）区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 含样本均值 $\overline{X}$ 的概率为95%.

二、填空题（共24分，共8题，每小题3分） ~~$1-P(ABC)$~~ $P(\overline{ABC}) = 1-P(A\cup B\cup C)$

1.已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{8}$，则事件 A,B,C 全不发生的概率为 $\frac{1}{2}$.

~~$P(ABC)=P(A)+P(B)+P(C)$~~

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$=3\times\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\times 2$

2.设随机变量 X 在 $(1,6)$ 上服从均匀分布，则方程 $y^2+Xy+1=0$ 有实根的概率为 $\frac{4}{5}$.

$X\sim U(0,2)$

3.设随机变量 X 服从 $(0,2)$ 上的均匀分布，则随机变量 $Y=X^2$ 在 $(0,4)$ 内的概率密度 $f_Y(y)=$

$\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4\\ 0, & else.\end{cases}$ X $\frac{1}{4\sqrt{y}}, 0<y<4$

$X\sim B(10,0.4)$

4. 设随机变量 X 表示10次独立重复射击时命中目标的次数，若每次命中目标的概率为0.4，则 X^2 的数学期望 $E(X^2)=$ 18.4.

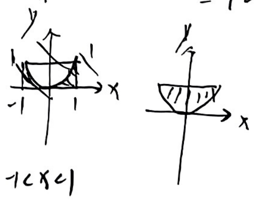
$E(X)=4$ $D(X)=10\times0.4\times0.6=2.4$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$

$E(X^2)=2.4+16=18.4$

5.设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y, & x^2<y<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$，求 $f_{Y|X}(y|x)=$

$\begin{cases}\frac{2y}{1-x^4}, & x^2<y<1\\ 0, & else.\end{cases}$



$f_X(x)=\frac{21x^2}{8}(1-x^4)$ $0<x<1$

6.设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 未知，σ^2 已知.又设 X_1,X_2,X_3 是来自总体 X 的一个样本，作样本

学院＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 任课教师＿＿＿＿ 考场教室＿＿＿＿ 座位号＿＿＿＿

函数如下：① $\frac{1}{2}X_1+\frac{2}{3}X_2-\frac{1}{6}X_3$；② $\frac{1}{3}(X_2+2\mu)$；③ X_3；④ $\sum_{i=1}^{3}\frac{X_i^2}{\sigma^2}$；⑤ $\min\{X_1,X_2,X_3\}$，这些函数中，是统计量的有 ①③④⑤ ，而在统计量中，是 μ 的无偏估计量的有 ①⑤ ，其中最有效的是 ① .

7.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，μ 未知，则参数 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间是 $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}\right)$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

$\chi^2_{0.975}(n-1)\le\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\le\chi^2_{0.025}(n-1)$

8.设 y 与 x 间的关系为 $\begin{cases}y=ax+b+\varepsilon,\\ \varepsilon\sim N(\mu,\sigma^2),\end{cases}$ $(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,n$ 是 (x,y) 是 n 组观测值，则回归系数的最小二乘估计是 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=$ $\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$

三、计算题（10分）

有朋自远方来，他乘火车、轮船、汽车、飞机来的概率分别为0.3，0.2，0.1，0.4，如果他乘火车、轮船、汽车来的话，迟到的概率分别为 $\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{12}$，而乘飞机则不会迟到，求（1）他迟到的概率；（2）他迟到了，他乘火车来的概率为多少？

解：设 A_i = {乘 i 来}，i = 火车，轮船，汽车，飞机 B = {他迟到}

$P(A_1)=\frac{3}{10}$ $P(A_2)=\frac{2}{10}$ $P(A_3)=\frac{1}{10}$ $P(A_4)=\frac{4}{10}$

$P(B|A_1)=\frac{1}{4}$ $P(B|A_2)=\frac{1}{3}$ $P(B|A_3)=\frac{1}{12}$ $P(B|A_4)=0$

(1) $P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)\cdot P(B|A_i)=\frac{18}{120}=\frac{3}{20}$

(2) $P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)\cdot P(A_1)}{P(B)}=\frac{1}{2}$

四、计算题（15分）

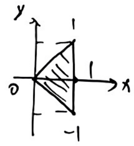
设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（1）计算 $P\left(X>\frac{1}{2}\middle|Y>0\right)$；

（2）求 X 与 Y 的边缘概率密度；

（3）求 $Z=X+Y$ 的概率密度.



解 (1) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_{|y|}^{1}1\,dx=1-|y|, & -1<y<1\\ 0, & else.\end{cases}$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1\,dy=2x, & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}$

(1) $P\{X>\frac{1}{2}|Y>0\}=\frac{P\{X>\frac{1}{2},Y>0\}}{P\{Y>0\}}=\frac{\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}dx\int_{0}^{+\infty}f(x,y)\,dy}{\int_{0}^{+\infty}f_Y(y)\,dy}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$

(2) $f_Y(y)=\begin{cases}1-|y|, & -1<y<1\\ 0, & else\end{cases}$ $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & else.\end{cases}$

(3) $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=\iint_{x+y\le z}f(x,y)\,dxdy=\begin{cases}0, & z\le0\\ \ , & 0<z<2\\ 1, & z\ge2\end{cases}$

$\int_{0}^{\frac{z}{2}}dx\int_{-x}^{x}dy+\int_{\frac{z}{2}}^{1}dx\int_{-x}^{z-x}dy=z-\frac{z^2}{4}$

$\therefore f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}1-\frac{z}{2}, & 0<z<2\\ 0, & else.\end{cases}$

解：设100个人中治愈人数为 X，则 $X\sim B(100,\frac{4}{5})$　$E(X)=100\times\frac{4}{5}=80$

根据棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理，认为 $X\sim N(80,16)$　$D(X)=100\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=16$

$\frac{X-80}{4}\sim N(0,1)$　(1) $P\{\frac{X}{100}\geq\frac{75}{100}\}=P\{\frac{X-80}{4}\geq-\frac{5}{4}\}=1-\Phi(-\frac{5}{4})=\Phi(1.25)=0.8944$

五、计算题（10分）

某药厂生产的某种药品，据说对某疾病的治愈率为80%.现为了检验其治愈率，任意抽取100个此种病患进行临床试验，如果有多于75人治愈，则此药通过检验.试在以下两种情况下，分别计算此药通过检验的可能性.（1）此药的实际治愈率为80%；（2）此药的实际治愈率为70%.

注：$\Phi(1.25)=0.8944$；$\Phi(1.09)=0.8621$.

(2) $X\sim B(100,0.7)$　$E(X)=70$　$D(X)=100\times\frac{7}{10}\times\frac{3}{10}=21$

$\frac{X-70}{\sqrt{21}}\sim N(0,1)$　$P\{\frac{X}{100}\geq\frac{75}{100}\}=1-\Phi(\frac{5}{\sqrt{21}})$
$=1-\Phi(1.09)$
$=1-0.8621=0.1379$

六、计算题（10分）

设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}},\ -\infty<x<\infty,$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的简单随机样本，试求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}$，并判断 $\hat{\theta}$ 是否是 θ 的无偏估计.

解：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}\frac{1}{2^n\theta^n}\cdot e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}, & x_i\in R,\ i=1,2,3,\cdots,n\\ \cancel{0,\ else}\end{cases}$

$\ln L(\theta)=-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|-n\ln 2\theta$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\theta^2}-\frac{n}{\theta}=0\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{n}$

$\hat{\theta}$ 的极大似然估计量为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$，$E(\hat{\theta})=E(|X|)$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{e^{-\frac{|x|}{\theta}}}{2\theta}dx$

$=\theta\int_0^{+\infty}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}d\frac{x}{\theta}$

$=\theta\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$

$=\theta$

∴ $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计

$\int_0^{+\infty}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx\overset{?}{=}\theta$

七、计算题（15分）

设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，从总体中抽取容量为36的一个样本，样本均值和样本方差值分别为 $\bar{x}=3.5,s^2=4$.

（1）已知 $\sigma^2=1$，求 μ 的置信度为0.95的置信区间；

（2）σ^2 未知，求 μ 的置信度为0.95的置信区间；

（3）当 $\sigma^2=8$ 时，如果以 $(\bar{X}-1,\bar{X}+1)$ 作为 μ 的置信区间，求置信度.

注：$u_{0.025}=1.96$；$t_{0.025}(35)=2.0301$；$t_{0.025}(36)=2.0281$；$\Phi(2.121)=0.983$

解 (1) ∵ $\sigma^2=1$ 已知　∴枢轴变量为 $U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

置信区间为 $[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}]$　$1-\alpha=0.95$　$\alpha=0.05$　$\frac{\alpha}{2}=0.025$

∴ $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\sqrt{36}}\cdot u_{0.025}=\frac{1}{6}\times1.96=0.3267$　$\bar{x}=3.5$

∴置信区间为 $[3.1733,3.8267]$　$[3.17,3.83]$

(2) ∵ σ^2 未知，∴枢轴变量为 $T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

置信区间为 $[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)]$　$\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\frac{2}{6}\cdot2.0301$
$=0.6767$

细节

∴置信区间为 $[2.8233,4.1767]$　$[2.83,4.18]$

(3) 当 $\sigma^2=8$ 时 $\sigma=2\sqrt{2}$　$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{6}\times1.96=\frac{\sqrt{2}}{3}\times1.96=0.9240$

$\cancel{1-\alpha=\frac{0.9240}{1}=0.9240}$　$\cancel{\alpha=0.076}$　$1-\alpha=\frac{2\times0.9240}{2}$　$\alpha=0.076$

X

$P\{U>u_{\frac{\alpha}{2}}\}=\frac{\alpha}{2}$

$P\{U\leq u_{\frac{\alpha}{2}}\}=1-\frac{\alpha}{2}$
$=\Phi(2.121)$

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}=1$　$u_{\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{n}}{\sigma}=\frac{6}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=2.121$

$\alpha=0.034$　$1-\alpha=0.966$

学院＿＿ 姓名＿＿ 学号＿＿ 任课教师＿＿ 考场教室＿＿ 座位号＿＿

密 封 线 以 内 答 题 无 效