

考试科目: 概率论与数理统计 考试形式: 闭卷 考试日期: 2023 年 11 月 12 日

成绩构成比例: 平时 50 %, 期末 50 %

本试卷由 五 部分构成, 共 2 页。考试时长: 120 分钟

### 一、简答题 (每小题 10 分, 共 50 分)

1. 判断以下关系是否成立, 并说明理由

(1)  $A(B - C) = AB - AC$ ,  $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (B \cap C)$

(2)  $AB = \phi \Leftrightarrow P(AB) = 0$

2. 对于二维随机变量  $(X, Y)$ , 下述命题是否成立? 若成立, 请说明方法; 若不成立, 举例说明原因.

(1) 根据联合分布函数能确定边缘分布函数;

(2) 根据边缘分布能确定联合分布.

3. 给出以下分布的分布律(或概率密度)和分布函数:

(1)  $X$  服从  $0-1$  分布(取 1 的概率为  $p$ ); (2)  $X \sim U(0, 1)$ ; (3)  $X \sim N(0, 1)$

4. 某人途经一个十字路口, 所经方向有 50% 时间亮红灯, 遇红灯需等待直至绿灯, 等待时间在区间  $[0, 20]$  (单位: 秒) 上服从均匀分布. 用  $X$  表示此人的等待时间, 求  $X$  的分布函数, 并分析  $X$  是否为离散型或连续型随机变量, 说明理由.

5. 某系统由 6 个独立的同类型元件组成, 这类元件的寿命(单位: 小时)服从指数分布  $E(1/2000)$ , 当损坏元件数目不超过 1 个时系统能正常工作. 现已知 400 小时后所有元件能正常工作, 求该系统还能正常使用 2000 小时以上的概率. (最后结果化简即可, 无需计算小数结果)

### 二、计算题 (共 15 分)

甲、乙、丙三个工厂生产同型号的产品, 其产品分别占总产量的 25%, 35%, 40%. 各厂产品的次品率分别为 5%, 4%, 2%. 现将三个厂的产品堆放在一起, 从中任取一件, 求:

(1) 取得次品的概率;

(2) 若取得次品, 最可能是哪个厂生产的?

(3) 发现取得的产品不是丙厂生产的情况下, 是甲厂生产的概率.

三、计算题（共 10 分）

在区间 $[0, a]$ 上任意掷一个质点，用 $X$ 表示这个质点的坐标. 设这个质点落在 $[0, a]$ 中任意子区间内的概率与这个子区间的长度成正比，试求 $X$ 的分布函数.

四、计算题（共 10 分）

设随机变量 $X, Y$ 相互独立，且 $X \sim U(0, 2), Y \sim U(0, 1)$ ，求 $Z = X/Y$ 的概率密度.

五、计算题（共 15 分）

设二维随机变量 $(X, Y)$ 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

求： (1)  $(X, Y)$ 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$ ，并判断 $(X, Y)$ 是否相互独立；

(2) 条件概率密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$ ；

(3)  $P\left\{-5 < y < \frac{1}{2} \mid x = \frac{1}{2}\right\}$ .