X 与$|X|$是否相互独立

随机变量$X \sim N(0,1)$，问：X与$|X|$是否相互独立?

思路：

- 相互独立是二者互不影响

  ——X与$|X|$是否相互影响?
- 若有影响，可采用反证法，举一反例即可
- 入手点：相互独立的定义

判断X与$|X|$是相互独立, 需验证

$$P\{X \le a, |X| \le a\} = P\{X \le a\} P\{|X| \le a\}$$

对任意的a都成立

判断不相互独立，只需有一个a使得上式不成立即可。

解：对于任意给定的实数 $a > 0$

若X与$|X|$相互独立, 则有

$$P\{X \le a\}P\{|X| \le a\} = P\{\underline{X \le a, |X| \le a}\}$$

$$\{x \le a, |x| \le a\} = \{|x| \le a\}$$

$$\therefore\ P\{X \le a, |X| \le a\} = P\{|X| \le a\}$$

$$P\{X \le a\}P\{|X| \le a\} = P\{|X| \le a\}$$

$X \sim N(0,1)$

矛盾

$\exists a$ 使得 $0 < P\{X \le a\} < 1,\quad 0 < P\{|X| \le a\} < 1$

$$P\{X \le a\}P\{|X| \le a\} < P\{|X| \le a\}$$

故 X与$|X|$不相互独立。

已知二维随机变量(X,Y)的概率密度为：

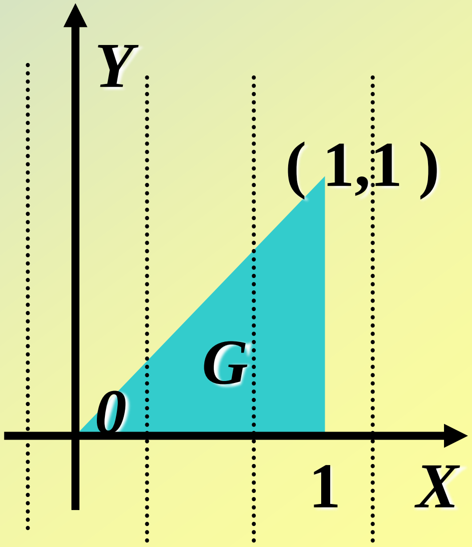
$$f(x,y)=\begin{cases}8xy & 0\le y\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

问 X,Y是否相互独立？

解：$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$$

$$=\begin{cases}0 & x<0\ or\ x>1\\ \int_0^x 8xy\,dy & 0\le x\le 1\end{cases}$$

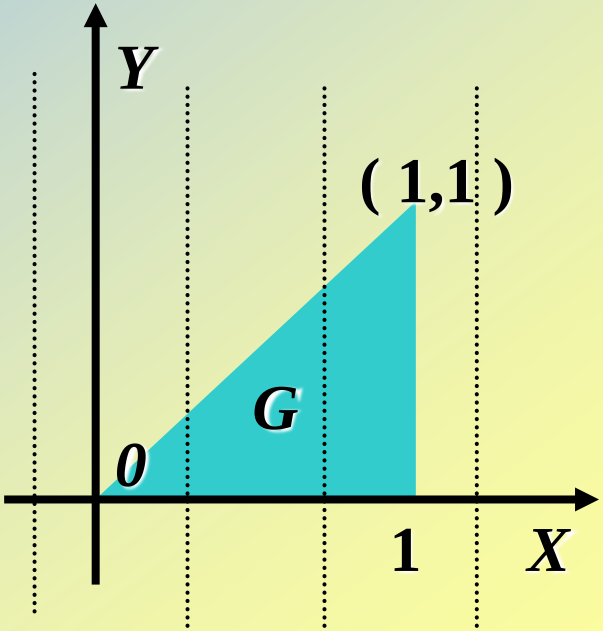
$$=\begin{cases}0 & x<0\ or\ x>1\\ 4x^3 & 0\le x\le 1\end{cases}$$



同理

$$f_Y(y)=\begin{cases} 0 & y<0 \ or \ y>1 \\ 4y-4y^3 & 0\le y\le 1 \end{cases}$$

记 $G=\{(x,y)|0\le y\le x\le 1\}$

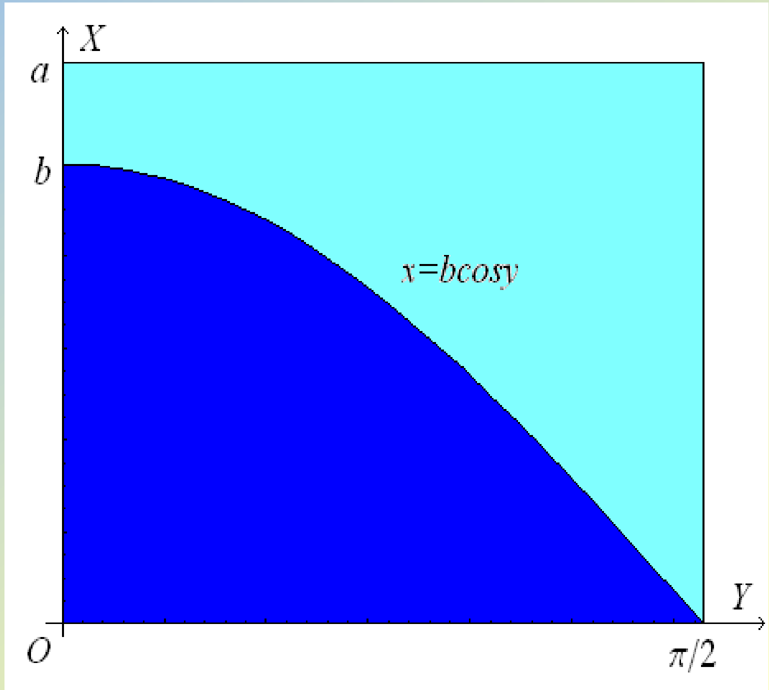


在区域 G 中

$$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

故 X,Y不相互独立。

例3.2.4　设随机变量X,Y 相互独立，$X\sim U(0,a)$
$Y\sim U(0,\pi/2)$ 且$0<b<a$，试求$P\{X<b\cos Y\}$.



解：$$f_X(x)=\begin{cases}1/a & 0<x<a\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}2/\pi & 0<y<\pi/2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

因为随机变量 X,Y 相互独立，则

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$
$$=\begin{cases}2/a\pi & o<x<a,\ 0<y<\pi/2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

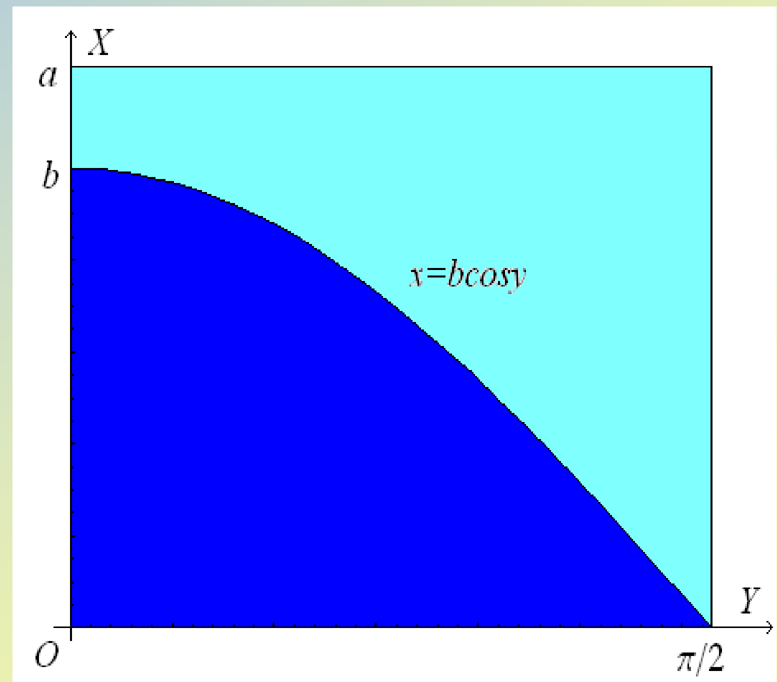
$$f(x,y) = \begin{cases} 2/a\pi & o < x < a\,,\, 0 < y < \pi/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$P\{X < b\cos Y\} = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

$$= \iint_D \frac{2}{a\pi}\,dxdy$$

$$= \frac{2}{a\pi} S(D)$$

$$= \frac{2b}{a\pi}$$



练习：设随机变量X与Y相互独立，填出空白处的数值.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	1/24	1/8		1/4
x_2	1/8			3/4
$p_{\cdot j}$	1/6	1/2		1

若(X,Y) 的联合分布律中某$p_{ij}=0$

问X,Y 是否相互独立?

不相互独立

$$0 < p_{i\cdot}p_{\cdot j} \neq P_{ij} = 0$$

例:3.2.2　设 (X,Y)的联合分布函数为:

$$F(x,y)=G(x)[H(y)-H(-\infty)],$$

且$G(+\infty),H(-\infty),H(+\infty)$都存在.

试证明：X,Y相互独立.

分析:　实际上只需验证$F(x,y)=F_X(x)\times F_Y(y)$

在证明过程中,需注意利用分布函数的性质.

用分布函数证明独立性

例:3.2.2　设(X,Y)的联合分布函数为: $F(x,y)=G(x)[H(y)-H(-\infty)]$ 且$G(+\infty),H(-\infty),H(+\infty)$都存在，试证明$X,Y$相互独立.

证明: $F_X(x)=F(x,+\infty)=G(x)[H(+\infty)-H(-\infty)]$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=G(+\infty)[H(y)-H(-\infty)]$$

$$F_X(x)F_Y(y)=G(x)\underline{[H(+\infty)-H(-\infty)]G(+\infty)}[H(y)-H(-\infty)]$$

$$\because F(+\infty,+\infty)=1$$

$\therefore$ 有 $G(+\infty)[H(+\infty)-H(-\infty)]=1$

从而 $F_X(x)F_Y(y)=G(x)[H(y)-H(-\infty)]=F(x,y)$

$$(x,y)\in R^2$$

X,Y相互独立.