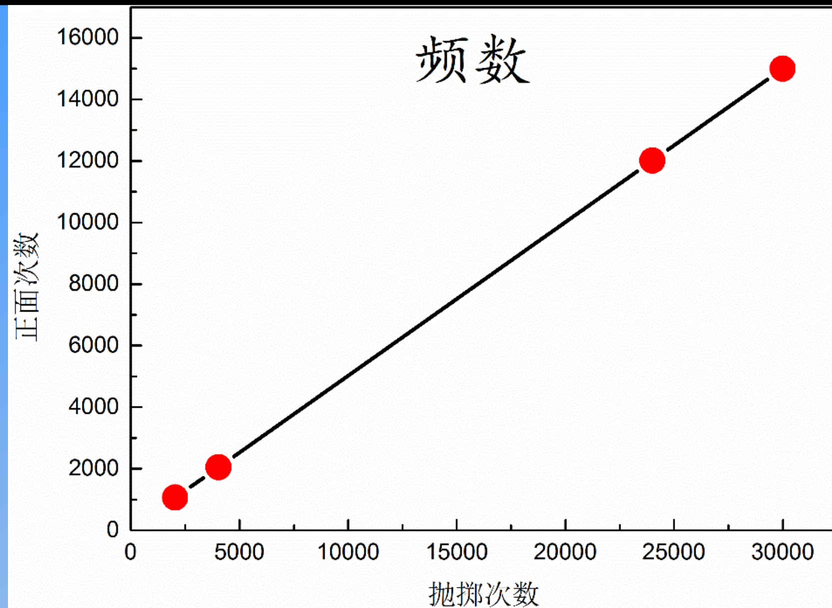
频率——抛硬币

例1 抛一枚硬币，观察其出现正面H和反面T的情况。

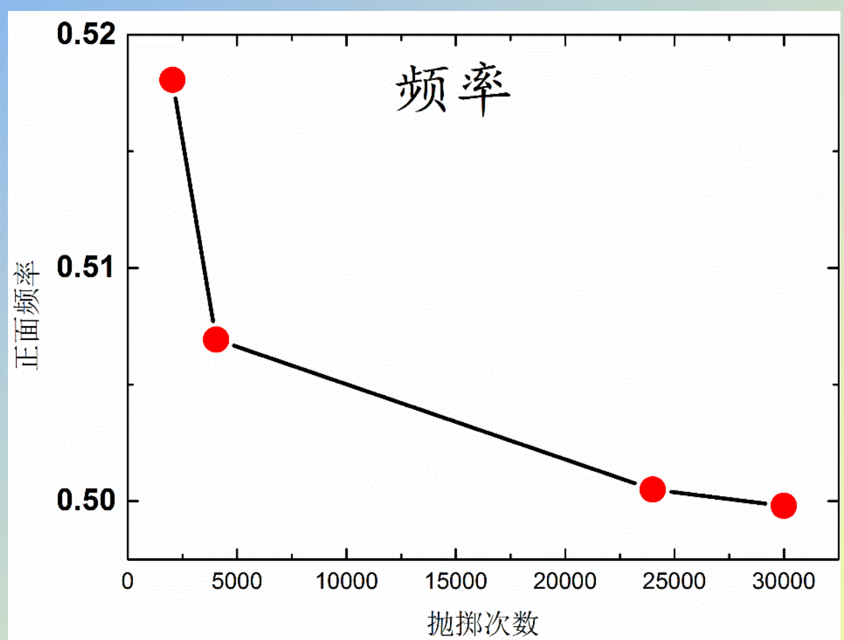
我们通过实践与分析可得：硬币出现正面的可能性等于它出现反面的可能性。

历史上几位著名科学家亲自做实验并记录:

实验者	抛掷次数	出现正面次数	*m/n*
德.摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998



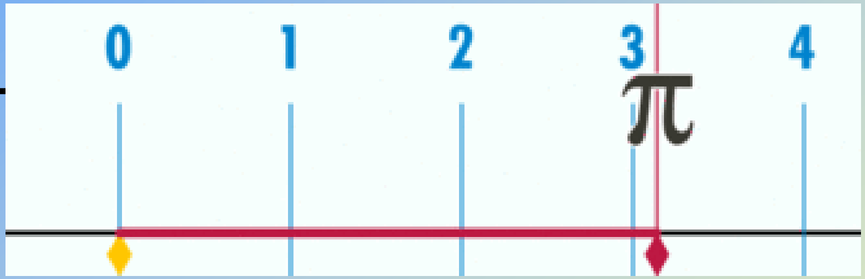
有何结论？



有何结论？

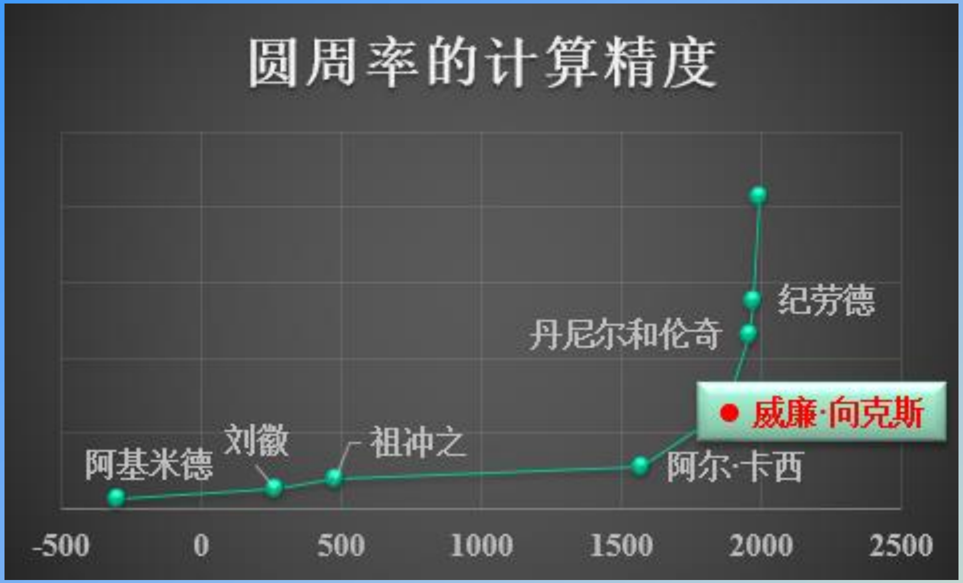
电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

频率的应用——π 的计算

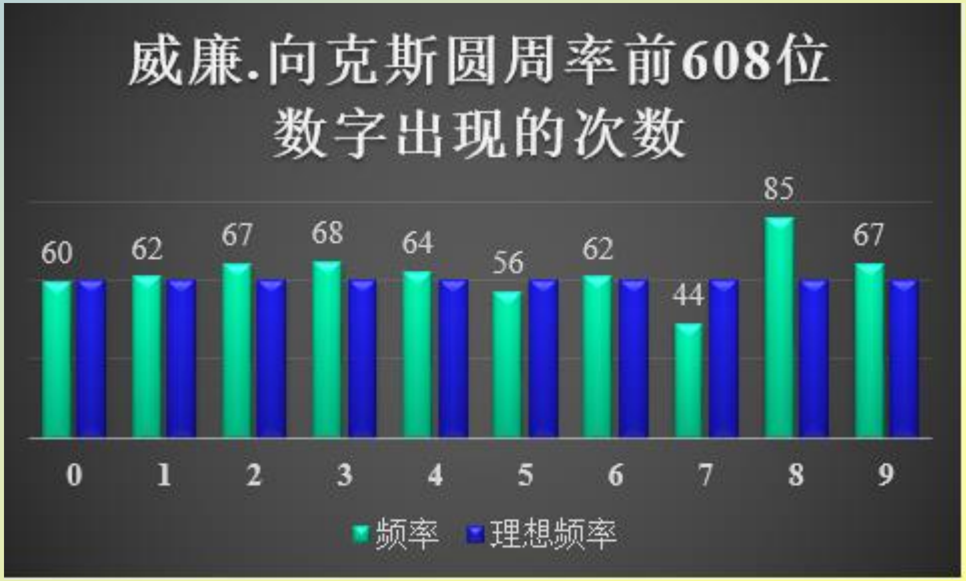


公元前三世纪	古希腊.阿基米德	3.14
公元263 年前后	魏晋.刘徽	3.1416
公元450年前后	南北朝.祖冲之	小数点后7位
16世纪	阿拉伯.阿尔·卡西	小数点后16位
公元1610 年	德.鲁道夫	小数点后35 位
1872 年	英.威廉●向克斯	小数点后707 位
1961 年	美.丹尼尔和伦奇	小数点后100265位
1973年	法.纪劳德	小数点后1000000位
1990年		1000000000位（10^9）

频率的应用——π 的计算



英国学者威廉.向克斯：用**20年**时间于1872年将π 算到小数后707位。



英.法格逊发现前608位小数中：

- 3出现68次
- 7仅出现44次
- 8出现85次

频率的应用——π 的计算

英国数学家法格逊发现：前608位小数中3出现68次，7仅出现44次。

法格逊猜想：在 π 的数值中各数码0, 1, …9出现的可能性大小应当相等。

该假设无论成立与否都有较大价值，思考：为什么？

他从1944年5月到1945年5月，花了**一年**时间，用当时最先进的计算机，终于确定向克斯π值707位小数中后180位是错的。

在近30年以后，法国学者让.盖尤和芳丹娜对π值的前100万位小数中0到9这十个数码出现的概率作了计算，进一步证实了法格逊的猜想。

古典概率——用样本空间求概率

例3 抛一枚质量分布均匀的硬币，观察其出现正面H和反面T的情况。

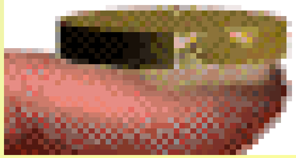
这是一个古典概型的随机试验。

因为该试验的基本事件只有两个：

$\{\omega_1\}$={出现正面H}，$\{\omega_2\}$={出现反面T}。

而且基本事件$\{\omega_1\}$、$\{\omega_2\}$发生的可能性相等。

$\therefore \quad P(H)=P(T)=0.5$



古典概率——鸽笼问题

例4　一个鸽场养了n只鸽子，每只鸽子都等可能的飞入N个鸽笼中的任意一个去住($n \le N$)，求下事件发生的概率:

（1）**指定**的n个鸽笼各有一只鸽子去住;

（2）**恰好**有n个鸽笼，每个各有一只鸽子。

分析：当样本点很少时，可以把它全部写出来，再来计算所求事件包含的样本点数（如书上例1.2.2）；

当样本点很多时，用排列组合的知识求出样本点总数和所求事件包含的样本点数。

关键——如何假设事件?

解：　设 A={指定的n 个鸽笼各有一只鸽子}

B={恰好有n 个鸽笼，每个各有一只鸽子}

由乘法原理可知，基本事件总数为N^n。

指定的n个鸽笼各有一只鸽子，有$n!$个不同的住法。故

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

下面考虑事件B：首先从N 个鸽笼中任意选出n 个，共有 C_N^n 种不同的方法；然后让选定的n个鸽笼各住一只鸽子，有$n!$个不同的住法。故

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}=\frac{P_N^n}{N^n}$$

古典概率——摸彩试验

例5 袋中有10个小球，4个红的，6 个白的，求

（1）有放回地从中依次取3球，取得“2红1白”的概率

（2）不放回地从中依次取3 球，取得“2红1白”的概率

解：设10个球依次编为1，2，3，…10，

A={有放回依次抽取得“2红1白”}

B={无放回依次抽取得“2红1白”}

（1）有放回抽取

基本事件总数为N=10×10×10=10^3

A所包含基本事件数为$r = C_3^2 \times 4^2 \times 6$

$$\therefore P(A) = \frac{r}{N} = \frac{C_3^2 \times 4^2 \times 6}{10^3} = 0.288$$

C_3^2是三次抽取中选出两次取到红球

（2）无放回抽取

解法一：采用排列方式计算

基本事件总数为$N = 10 \times 9 \times 8 = P_{10}^{3}$

B所包含基本事件数为$r = C_{3}^{2} \times 4 \times 3 \times 6$

$$\therefore P(B) = \frac{r}{N} = 0.3$$

解法二：采用组合方式计算

基本事件总数为$N = C_{10}^{3}$

B所包含基本事件数为$r = C_{4}^{2} \times C_{6}^{1}$

$$\therefore P(B) = \frac{r}{N} = 0.3$$

注意： 采用古典概率进行计算时，注意分子、分母的样本空间保持一致

——同时用排列，或同时用组合

公理化定义——抛不均匀硬币

例6 抛一枚质量分布不均匀的硬币，观察其出现正面H和反面T的情况。

这不是一个古典概型的随机试验。

因为该试验的基本事件只有两个：

$\{\omega_1\}$={出现正面H}，$\{\omega_2\}$={出现反面T}；

但基本事件$\{\omega_1\}$、$\{\omega_2\}$发生的可能性不相等。

公理化定义——仪器寿命试验

例7　仪器上某种型号的电子元件使用时间已达30小时，测该元件还能使用多少小时？

该试验不是古典概型的随机试验，因为它的样本空间有无数多个样本点。

公理化定义——不可能事件的概率

性质： 不可能事件的概率为0, 即$P(\phi)=0$.

证明： 根据不可能事件(对应空集)的特点，有

$$\phi=\phi\cup\phi\cup\phi\cup\cdots$$

根据公理化定义中的**可列可加性**

$$P(\phi)=P(\phi\cup\phi\cup\phi\cup\cdots)$$

$$=P(\phi)+P(\phi)+P(\phi)+\cdots$$

两边同时消去一个$P(\phi)$，可得

$$0=P(\phi)+P(\phi)+\cdots$$

根据公理化定义中的**非负性**，可得

$$P(\phi)=0$$

公理化定义——有限可加性

性质： 若试验E的事件组$A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相容,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

证明： 为了能使用公理化定义中的**可列可加性**，设

$$A_i = \phi, \qquad i = n+1, n+2 \cdots$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\phi)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$P(\phi) = 0$$

公理化定义——对立事件概率和

性质：对立事件概率和为1，即

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

思考：对立事件的定义？

证明：由于A和$\overline{A}$互不相容，根据**有限可加性**有

$$P(A)+P(\overline{A})=P(A\cup\overline{A})$$

由于A和$\overline{A}$满足：$A\cup\overline{A}=\Omega$

根据公理化定义中的**规范性**，可得

$$P(A)+P(\overline{A})=P(A\cup\overline{A})=P(\Omega)=1$$

公理化定义——概率单调性

性质： 若事件A和B满足$A \subset B$，则有

$$P(A) \le P(B),\ P(B-A) = P(B) - P(A)$$

证明： 由于A与$B-A$互不相容，利用有限可加性，有

$$P(B-A) + P(A) = P\big((B-A) \cup A\big) = P(B)$$

$$\therefore\ P(B-A) = P(B) - P(A)$$

根据公理化定义中的非负性，可得

$$P(B) - P(A) = P(B-A) \ge 0$$

$$\therefore\ P(A) \le P(B)$$

例8 设50件产品中有5件是次品，其余的是合格品，从中任取3件，求选到的3件产品中有次品的概率。

解法一：设A={选到的3件产品中有次品}，

A_i={选到的3件产品中有i件次品}，i=1,2,3。

则A_1，A_2，A_3互不相容,并且有$A=A_1\cup A_2\cup A_3$。

所以有 $P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$

$$=\frac{C_5^1C_{45}^2}{C_{50}^3}+\frac{C_5^2C_{45}^1}{C_{50}^3}+\frac{C_5^3C_{45}^0}{C_{50}^3}$$

$$=0.2761$$

解法二：　考虑A的对立事件

$\overline{A}$={选到的3件产品全是合格品}

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{45}^{3}}{C_{50}^{3}} \approx 0.7239$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

$$\approx 1 - 0.7239$$

$$= 0.2761$$