电子科技大学 2018-2019 学年第 1 学期期末 A 卷

一、简答题（每小题 10 分，共 50 分）

1. 设随机事件 A 与 B 相互独立，$P(A)=0.8, P(B)=0.6$，求（1）$P(A\cup B)$，（2）$P(\bar{A}|A\cup B)$。

解： (1)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.8+0.6-0.8\times 0.6=0.92$

或$P(A\cup B)=1-P(\bar{A}\,\bar{B})=1-0.2\times 0.4=0.92$

(2)

$$P(\bar{A}|A\cup B)=\frac{P\big(\bar{A}\cap(A\cup B)\big)}{P(A\cup B)}=\frac{P\big((\bar{A}\cap A)\cup(\bar{A}\cap B)\big)}{P(A\cup B)}=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(A\cup B)}=\frac{P(\bar{A})P(B)}{P(A\cup B)}=\frac{0.12}{0.92}=\frac{3}{23}\approx 0.13$$

容易犯错： ① $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=1.4$，乱用有限可加性（前提需要互不相容），且不注意概率已经超过 1；

② $P(A\cup B)=P(A)\cdot P(B)=0.48$，将并集与交集混淆后使用独立性

③ $P(\bar{A}|A\cup B)=\frac{P(\bar{A}\cap A\cup B)}{P(A\cup B)}=\frac{P(B)}{P(A\cup B)}$，公式不严格，漏写括号导致集合运算错误

2. 设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，证明：$Y=1-e^{-2X}$服从$(0,1)$上的均匀分布。

解： $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

方法一：当$y\le 0$时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=0$

当$y\ge 1$时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=1$

当$0<y<1$时，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{1-e^{-2X}\le y\}=P\{e^{-2X}\ge 1-y\}=P\left\{X\le -\frac{1}{2}\ln(1-y)\right\}$$

$$=\int_0^{-\frac{1}{2}\ln(1-y)}2e^{-2x}dx=y$$

概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & else\end{cases}$$

得证。

方法二：当$x>0$时，由于$Y=1-e^{-2X}$，Y 的值域是$(0,1)$

$$x=h(y)=-\frac{1}{2}\ln(1-y),\qquad h'(y)=\frac{1}{2(1-y)}$$

当$0<y<1$时，

$$f_Y(y)=f_X\big(h(y)\big)\cdot|h'(y)|=2(1-y)\cdot\frac{1}{2(1-y)}=1$$

从而

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & else\end{cases}$$

得证。

容易犯错： ① $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=\cdots=\begin{cases}y, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，对取值为 0 时的定义域未作讨论，

忘记分布函数有取值为 1 的部分，与概率密度$f_Y(y)$分段混淆

② $f_Y(y)=f_X\big(h(y)\big)\cdot|h'(y)|=\cdots$，代公式计算时未讨论定义域

③ 随机变量与变量混淆如$F_y(Y),f_y(Y)$，表达形式写法混乱如$F(Y\le y)=\cdots$

3. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 2-x, & 1\le x\le 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求$E(X),D(X)$。

解：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x(2-x)dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2=1$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2 x^2(2-x)dx=\frac{7}{6}$$

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{1}{6}$$

容易犯错：①数学期望算成分段函数 x 平方的期望，平方在积分里面位置错误方差常用公式写成加号或两项位置颠倒；

4. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为取自总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，确定常数 C，使得

$$C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$$

为σ^2的无偏估计。

解： $X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且同分布，从而有

$$E(X_i)=\mu,D(X_i)=\sigma^2,\qquad E\left(X_i^2\right)=D(X_i)+E(X_i)^2=\sigma^2+\mu^2,(i=1,2,\cdots,n)$$

$$\begin{aligned} E[(X_{i+1}-X_i)^2]&=E\left(X_{i+1}^2+X_i^2-2X_{i+1}X_i\right)=E\left(X_{i+1}^2\right)+E\left(X_i^2\right)-2E(X_{i+1}X_i) \\ &=2(\sigma^2+\mu^2)-2E(X_{i+1})E(X_i)=2\sigma^2 \end{aligned}$$

若该统计量为σ^2的无偏估计，则有

$$E\left[C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right]=2(n-1)C\cdot\sigma^2=\sigma^2\Rightarrow C=\frac{1}{2(n-1)}$$

容易犯错：①不知道无偏估计概念，不知道简单随机样本蕴含样本间相互独立，二阶矩计算错误。②不会利用期望和正态分布的线性性质。③不知道无偏性，用卡方分布来算期望，计算错误

5. 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P(X=x)=\frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!},x=0,1,2,\cdots,\qquad 0<\theta<+\infty$$

其中θ为未知参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$为一组样本观测值，求θ的极大似然估计值。

解： 似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta^{x_i}e^{-\theta}}{x_i!}=e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x!}$$

$$\ln L(\theta)=-n\theta+\ln\theta\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i+\ln\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x!}$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=-n+\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

$$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

所以θ的极大似然估计值为$\hat{\theta}=\bar{x}$

容易犯错：①似然函数写错，②计算似然方程的根时求解错误。

二、计算题（共 10 分）

市场上出售的某种商品由三个厂家同时供货，其供应量第一厂家为第二厂家的两倍，第二、第三厂家相等，且第一、第二、第三厂家的次品率依次为 2%, 2%, 4%。若在市场上随机购买一件商品，发现其为次品，问该件商品是第一厂家生产的概率为多少?

解： 设 Ai 表示产品由第 i 家厂家提供，i=1,2,3； B 表示该产品为次品，则由贝叶斯公式

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{\frac{1}{2}\times 0.02}{\frac{1}{2}\times 0.02+\frac{1}{4}\times 0.02+\frac{1}{4}\times 0.04}=0.4$$

容易犯错：没有用课堂所学的全概率公式和贝叶斯公式进行计算，用的是高中阶段的加权方法。

三、计算题（共 10 分）

设(X,Y)的联合概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，试求:

(1) X,Y的边缘概率密度函数$f_X(x),f_Y(y)$; (2) 判断 X,Y 是否相互独立; (3) 判断 X,Y 是否不相关。

解： (1)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^1(2-x-y)dy=\frac{3}{2}-x, & 0\le x\le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1(2-x-y)dx=\frac{3}{2}-y, & 0\le y\le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

(2) 由于$f_X(x)\cdot f_Y(y)\neq f(x,y)$，所以 X,Y 不相互独立

(3)

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_X(x)dx=\int_0^1 x\left(\frac{3}{2}-x\right)dx=\frac{5}{12}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f_Y(y)dy=\int_0^1 y\left(\frac{3}{2}-y\right)dy=\frac{5}{12}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 xy(2-x-y)dy=\frac{1}{6}$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{6}-\left(\frac{5}{12}\right)^2=-\frac{1}{144}\Longrightarrow \rho_{XY}\neq 0$$

故此 X，Y 相关。

容易犯错： 相关系数计算错误

四．计算题（共 10 分）

某商店负责供应某地区 10000 人的商品，某种商品在一段时间内每人购买一件的概率为 0.6，假定在这一段时间内各人购买与否相互独立，问商店至少预备多少件这种商品，才能以 99%的概率保证不会脱销。(假定该商品在某一段时间内每人最多可以购买一件) $\Phi(2.33)=0.99$

解： 设 X 表示该段时间购买商品的人数，则$X\sim B(10000,0.6)$

假设应预备 N 件商品，由棣莫弗拉普拉斯中心极限定理有

$$0.99\le P\{X\le N\}=P\left\{\frac{X-10000\times 0.6}{\sqrt{10000\times 0.6\times 0.4}}\le\frac{N-10000\times 0.6}{\sqrt{10000\times 0.6\times 0.4}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{N-10000\times 0.6}{\sqrt{10000\times 0.6\times 0.4}}\right)$$

$$\Phi(2.33)=0.99\Longrightarrow\frac{N-10000\times 0.6}{\sqrt{10000\times 0.6\times 0.4}}\ge 2.33\Longrightarrow N\ge 6114.1$$

故应预备 6115 件商品。

容易犯错： 随机变量和所求数混淆$P(N)\approx\Phi(\ldots)$

五、计算题（共 10 分）

正常人的脉搏平均 72 次/分钟，现在测量 10 例酏剂中毒患者，算得每分钟平均脉搏次数为 67.4 次，样本方差为 5.929^2。已知人的脉搏次数$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，试问：中毒患者与正常人的平均脉搏有无显著差异？($\alpha=0.05$，$t_{0.025}(9)=2.2622, t_{0.05}(9)=1.8331$)

解： 由题意假设：$H_0{:}\,\mu=\mu_0=72$，$H_1{:}\,\mu\neq\mu_0$

总体方差未知，原假设成立时，

$$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$$

原假设 H0 的拒绝域为：$|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(9)$

将$n=10,\bar{x}=67.4,s=5.929$代入得到统计值为$|t|=\left|\frac{67.4-72}{\frac{5.929}{\sqrt{10}}}\right|=2.453>t_{0.025}(9)=2.2622$

故拒绝 H0，即认为中毒患者与正常人的平均脉搏有显著差异。

容易犯错： 不熟悉假设检验基本步骤，各环节都有错误

六、计算题（共 10 分）

某公司为预测一款产品的定价 Y（单位:元)，要研究它与原材料的成本 X（单位：元）之间的相关关系，现取得市场上 8 款同类产品的原材料成本与产品价格的数据（x_i,y_i），计算得：

$$\sum_{i=1}^{8}x_i=52,\sum_{i=1}^{8}y_i=228,\sum_{i=1}^{8}x_i^2=478,\quad\sum_{i=1}^{8}y_i^2=7666,\sum_{i=1}^{8}x_iy_i=1849$$

（1）求 Y 关于 X 的一元经验线性回归方程，并计算原材料成本为 50 元时的产品价格。

（2）检验 X 与 Y 的线性相关关系是否显著$(\alpha = 0.01)$？$(R_{0.01}(8) = 0.765, R_{0.01}(6) = 0.834)$

解： (1)

$$l_{xy} = \sum_{i=1}^{8} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = 367, \qquad l_{xx} = \sum_{i=1}^{8} x_i^2 - n\bar{x}^2 = 140, \qquad l_{yy} = \sum_{i=1}^{8} y_i^2 - n\bar{y}^2 = 1168$$

$$\hat{b} = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} \approx 2.62, \qquad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \approx 11.46$$

Y 关于 X 的一元经验线性回归方程为：$\hat{y} = 11.46 + 2.62x$

原材料成本为 50 元时的产品价格为：$\hat{y} = 11.46 + 2.62 \times 50 = 142.46$

(2)

$$R = \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx} l_{yy}}} \approx 0.9076 > R_{0.01}(6) = 0.834$$

故 X 与 Y 的线性相关关系显著。

容易犯错：①公式记错或记不完整，②漏答预测的较多