§3.2 随机变量的独立性

一. 二维随机变量的独立性

回忆： 事件独立性

事件A与B相互独立 $\Leftrightarrow$

$$P(AB)=P(A)P(B) \text{ 或 } P(A|B)=P(A)$$

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

定义:设(X,Y)是二维随机变量,若对任意实数对(x,y)均有$P\{X\le x, Y\le y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\}$成立,则称$X$与$Y$**相互独立**.

意义:对任意实数对(x,y),随机事件$\{X\le x\}$与随机事件$\{Y\le y\}$<u>相互独立</u>.

X与$|X|$是否相互独立

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

对离散型和连续型各自的充要条件是什么?

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

等价条件：

1. X与Y相互独立 $\Longleftrightarrow F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

2. (离散型)X与Y相互独立 $\Longleftrightarrow p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$ 即

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}$$

3. (连续型)X与Y相互独立 $\Longleftrightarrow f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

在平面上除去“面积”为0 的集合外成立

相互独立的判断

相互独立的应用

用分布函数证明独立性

二. 多维随机变量的独立性

定义： 设 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布函数为 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 若对任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)$$

$F(x_i)$ 为 X_i 的边缘分布函数，称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立。

定理: 若n维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$相互独立，则

1) 任意k个随机变量$(2\le k\le n)$也相互独立.

2) 随机变量 $g_1(X_1),g_2(X_2),\cdots,g_n(X_n)$也相互独立.

3) $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$与$(X_{m+1},X_{m+2},\cdots,X_n)$也相互独立.
且随机变量$h(X_1,X_2,\cdots,X_m)$与$g(X_{m+1},X_{m+2},\cdots,X_n)$也相互独立.

例:3 维随机变量X_1, X_2, X_3相互独立，则

- X_1^2，X_2^2，X_3^2也相互独立.
- X_1+X_2与X_3也相互独立.
- $\sin X_1$ 与X_3也相互独立.
- X_1+X_2与X_1-X_2不一定相互独立.

随机变量的独立性本质上是事件的独立性(参见 例1.4.3)