S^2 是σ^2的无偏估计

例 设总体的方差$D(X)=\sigma^2>0$，则样本方差S^2是σ^2的无偏估计.

证明：

$$(n-1)S^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+n\overline{X}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}-n\overline{X}^2$$

$$(n-1)E(S^2)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^{\,2})-nE(\overline{X}^2)=nE(X^2)-nE(\overline{X}^2)$$

$$=n\{D(X)+E(X)^2\}-n\{D(\overline{X})+E(\overline{X})^2\}$$

$$=n(\sigma^2+\mu^2)-n(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)\quad=(n-1)\sigma^2$$

$$\therefore E(S^2)=\sigma^2$$

证明无偏性并判断哪个有效

例　设总体$X \sim U[0,\theta]$，　$\theta > 0$ 未知，(X_1, X_2, X_3)是取自X的一个样本：

1)　试证 $\hat{\theta}_1 = \frac{4}{3}\max\limits_{1 \le i \le 3} X_i, \hat{\theta}_2 = 4\min\limits_{1 \le i \le 3} X_i$ 都是θ的无偏估计；

2)　上述两个估计量中哪个方差最小？

分析：要判断是否无偏估计，需要计算期望
要计算期望，需知道概率密度函数

证明：　1)　X的分布函数为：

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{\theta}, & 0 \le x < \theta \\ 1, & x \ge \theta \end{cases}$$

令$Y=\max\limits_{1\le i\le 3} X_i$, $Z=\min\limits_{1\le i\le 3} X_i$　则Y的分布函数为：

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\max_{1\le i\le 3} X_i\le y\}$$
$$=P\{X_1\le y, X_2\le y, X_3\le y\}$$
$$=P\{X_1\le y\}\cdot P\{X_2\le y\}\cdot P\{X_3\le y\}$$
$$=[F_X(y)]^3$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\le x<\theta\\ 1, & x\ge\theta\end{cases}$$

$$\therefore\ f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{\theta}\cdot\left(\dfrac{y}{\theta}\right)^2, & 0\le y\le\theta\\ 0\ , & else\end{cases}$$

$$\therefore E(Y)=\frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta y^3dy=\frac{3}{4}\theta$$

同理可得 $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{3}{\theta}\cdot\left(1-\dfrac{z}{\theta}\right)^2, & 0\le z\le\theta\\ 0\ , & else\end{cases}$

$$\therefore E(Z)=\frac{3}{\theta^3}\int_0^{\theta} z\cdot(\theta-z)^2dz=\frac{1}{4}\theta$$

从而, $E(\frac{4}{3}\max\limits_{1\le i\le 3} X_i)=E(4\min\limits_{1\le i\le 3} X_i)=\theta$

即 $\frac{4}{3}\max\limits_{1\le i\le 3} X_i$ 和 $4\min\limits_{1\le i\le 3} X_i$ 都是 θ 的无偏估计

2) $\because D(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=\dfrac{3}{80}\theta^2$

$$D(Z)=E(Z^2)-E(Z)^2=\frac{3}{80}\theta^2$$

$$\therefore D(\frac{4}{3}Y)\le D(4Z)$$

即$\dfrac{4}{3}\max\limits_{1\le i\le 3} X_i$比$\widehat{\theta}_2=4\min\limits_{1\le i\le 3} X_i$的方差小(更有效)

相合估计量的证明

例 设 $X \sim N(0, \sigma^2)$，证明：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 是σ^2的相合估计量.

分析：

1. 证明相合性往往用到**切比雪夫不等式**，其中涉及**期望与方差**；
2. 这里计算方差较难，可以先化为χ^2分布，再利用卡方分布的性质计算.

相合估计量的证明

例　设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，证明：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 是σ^2的相合估计量.

证法一：

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i^2\right)=E\left(X^2\right)=\sigma^2$$

$$令Y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)\quad 则\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\frac{\sigma^2}{n}Y$$

$$故D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=D\left(\frac{\sigma^2}{n}Y\right)=\frac{\sigma^4}{n^2}\cdot D(Y)$$

$$=\frac{\sigma^4}{n^2}\cdot 2n=\frac{2\sigma^4}{n}$$

由切比雪夫不等式，有

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)\right|\geq\varepsilon\right\}$$

$$=P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\sigma^2\right|\geq\varepsilon\right\}$$

$$\leq\frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)}{\varepsilon^2}=\frac{2\sigma^4}{n\varepsilon^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

故 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 是σ^2的相合估计量.

证法二：

由$X \sim N(0,\sigma^2)$

$$\Longrightarrow E\left(X_i^2\right) = E\left(X^2\right) = D(X) + E(X)^2 = \sigma^2$$

$X_i^2(i = 1, 2, \cdots, n)$ 独立同分布，且期望相等，

根据辛钦大数定律

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \sigma^2\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

故 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 是σ^2的相合估计量.