§1.2 概 率

一、概率

刻划随机事件发生的可能性大小的数量指标是一个客观存在的量。

概率是刻划随机事件发生可能性大小的数量指标。

事件A的概率记为$P(A)$ 常规定 $0\le P(A)\le 1$

$P(\Omega)=1$，$P(\Phi)=0$

它不依主观变化而变化。

概率的这个客观量度是怎么得来的?

我们怎样来计算它?

二、频率

定义：在相同条件下，进行了n次试验，事件A发生了m次，称比值 $f_n(A)=\dfrac{m}{n}$

为事件A发生的频率。

频率从一定程度上反映了事件发生可能性的大小。它随着试验的次数、试验者的不同会有所不同。

例如： 抛硬币 频率的应用

注：频率不是概率，但在极限情况下，频率稳定于概率。

三、古典概率

引例：帕斯卡问题

甲乙二人约定，将一枚硬币掷两次，若正面至少出现一次，则甲胜，否则乙胜，求甲胜的概率。

- 费马认为，两次投掷必然出现四个结果之一：反反、反正、正反、正正。这四个结果是等可能的，其中三个满足至少出现一次正面，故甲胜的概率是3/4。
- 当时另一数学家罗伯瓦提出异议，他认为第一次出现正面，则甲已胜就无需再掷第二次，因此只有三种可能结果：反反、反正、正。 故甲胜的概率为2/3

问：费马与罗伯瓦谁是谁非?

三、古典概率

定义:设E是一个随机试验,若它满足以下两个条件:

(1)仅有有限多个基本事件;

(2)每个基本事件发生的可能性相等。

则称E 为古典概型试验。

思考：以下哪些是古典概型试验，为什么?

掷骰子 投 篮 测量身高

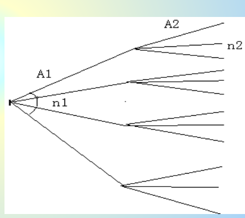
古典概率的预备知识

——基本的排列组合公式

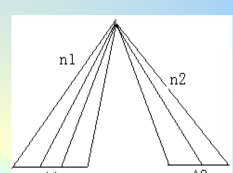
两条基本原理:

1. 乘法原理
2. 加法原理

乘法原理：若进行A1过程有n1种方法，进行A2有n2种方法，则进行A1后再进行A2过程共有n1*n2种方法。



加法原理：若进行A1过程有n1种方法，进行A2有n2种方法，假定A1过程与A2过程是并行的，则进行过程A1或过程A2的方法共有n1+n2种。



将这两条定理拓广可以应用到多过程的场合。

排列： n个元素中取r个进行排列

1. 有放回方式，称***有重复的排列***，共 n^r 种
2. 无放回方式，称***选排列***，共 P_n^r 种

特别，r = n 时，称全排列，共n!种

组合： ***n个元素中取r个而不考虑其顺序***

其总数为：

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

定义： 设试验E为古典概型试验，A_i，i=1,2,…,n是基本事件,则由

$$P(A) = \frac{A\text{所含的基本事件个数}}{\text{基本事件总数}} = \frac{A\text{所含样本点的数目}}{\text{样本空间的样本点总数}}$$

所确定的概率称为事件A的**古典概率**。

用样本空间求概率 | 鸽笼问题 | 摸彩试验

注：在古典概率的计算中常用到排列组合的知识，如乘法原理、加法原理等等。

引例：帕斯卡问题

甲乙二人约定，将一枚硬币掷两次，若正面至少出现一次，则甲胜，否则乙胜，求甲胜的概率。

- 费马认为，两次投掷必然出现四个结果之一：反反、反正、正反、正正。这四个结果是等可能的，其中三个满足至少出现一次正面，故甲胜的概率是3/4。
- 当时另一数学家罗伯瓦提出异议，他认为第一次出现正面，则甲已胜就无需再掷第二次，因此只有三种可能结果：反反、反正、正。 故甲胜的概率为2/3

问：费马与罗伯瓦谁是谁非?

答案：费马正确——罗伯瓦列举的样本空间包含的三个样本点不是等可能的，这样就不能用古典概型求解。

古典概率并不能解决所有的随机问题。

例如： 抛不均匀硬币 | 仪器寿命试验

为了得到更一般的方法，我们分析古典概率的性质，然后将之拓展，引出概率的公理化定义

古典概率具有如下三个性质：

(1)对任意事件A，有$0 \le P(A) \le 1$;

(2)$P(\Omega) = 1$;

(3)若$A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

四、概率的公理化定义

定义：设E的样本空间为Ω，对于E的每个事件A，均对应于唯一一个实数，记为$P(A)$，其对应规则满足

1.(***非负性***) 对任一事件A，有$0 \le P(A) \le 1$;

2.(***规范性***) $P(\Omega) = 1$;

3.(***可列可加性***) E的事件列$A_1, A_2, \cdots$互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

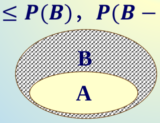
由公理化定义可以得到如下重要性质:

基本性质： 可列可加性

1. 不可能事件的概率为0, 即$P(\Phi) = 0$; 证明
2. (***有限可加性***)若试验E的事件组$A_1, A_2, \ldots, An$互不相容,则有 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ 证明

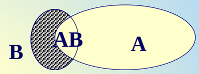
常用：$P(A) = 1 - P(\bar{A})$

3. 对立事件概率和为1, 即$P(A) + P(\bar{A}) = 1$; 证明
4. (概率单调性)若事件A和B满足$A \subset B$，则有$P(A) \le P(B)$，$P(B-A) = P(B) - P(A)$成立。证明



概率加法定理: 对试验E 的任意两个事件A 和B 有

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



概率的公理化定义及性质，为概率的计算提供了更完善的理论依据。

见例1.2.7 古典概率是公理化定义的特例。

例如: 抽检试验

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com