## 第一章 随机事件及其概率



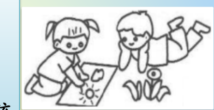


## 第1章3节 条件概率

引例：假设生男生女概率相等。

已知某家庭第一胎是女孩，则第二胎是男孩的概率有多大？

若已知该家庭中有两个小孩，其中一个是女孩，则另一个是男孩的概率有多大？



这两个问题是一回事，生男孩的概率都是1/2？
还是这两个问题的概率有所不同，区别在哪里？



## 第1章3节 条件概率

在计算事件的概率时，一个事件常与另一个事件有一定的联系。

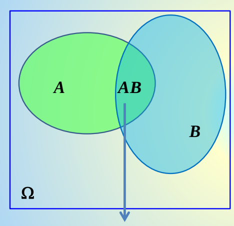
这种已知事件B发生的条件下，事件A发生的可能性大小称为条件概率，记为P(A|B)。

**定义** 设$A$、$B$是随机试验$E$的两个随机事件，且$P(B)>0$，称 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为在**事件B发生的条件下，事件A发生的条件概率**。



## 第1章3节 条件概率

- 直观图示理解




$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

- 理解

设满足古典概型

设$\Omega$所含基本事件数为$n$

设$A$所含基本事件数为$m_A$

设$B$所含基本事件数为$m_B$

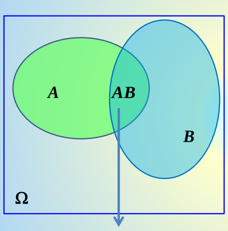
设$AB$所含基本事件数为$m_{AB}$

$$P(A|B)=\frac{m_{AB}}{m_B}=\frac{m_{AB}/n}{m_B/n}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$



## 第1章3节 条件概率

- 直观图示理解




$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

- 理解：以扑克牌为例

$\Omega$所含基本事件数为54

设$A$={取出牌为红心}

$B$ ={取出牌为$K$}

则$AB$ ={取出牌为红心$K$}

$$P(A)=\frac{13}{54},\quad P(B)=\frac{4}{54},\quad P(AB)=\frac{1}{54}$$

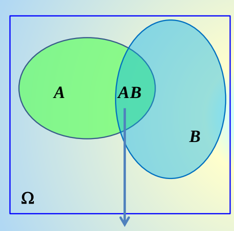
$$P(A|B)=\frac{1}{4}=\frac{P(AB)}{P(B)}\qquad P(B|A)=\frac{1}{13}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

注意：$P(A|B)\neq P(B|A)$



## 第1章3节 条件概率

- 直观图示理解




$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

思考三个概率的区别：
P(AB)、P(A|B)、P(B|A)

- P(AB)是AB同时发生的概率
- P(A|B)是B发生条件下A发生（或者AB同时发生）的概率
- P(B|A)是A发生条件下B发生（或者AB同时发生）的概率

- 三者各不相同——即便有时概率值相同，表达的含义也不一样

## 第1章3节 条件概率

引例：假设生男生女概率相等。已知某家庭第一胎是女孩，则第二胎是男孩的概率有多大？

若已知该家庭中有两个小孩，其中一个是女孩，则另一个是男孩的概率有多大？

思路：这两个问题不是一回事，概率有所不同

1. 家庭中有两个小孩，样本空间是{男男、男女、女男、女女}
2. 家庭第一胎是女孩，样本空间是{女男，女女}

根据条件概率的定义，利用古典概率可以计算：

样本空间是什么？

- 第一胎是女孩，则第二胎是男孩的概率为1/2
- 一个是女孩，则另一个是男孩的概率为2/3



## 第1章3节 条件概率

◆条件概率性质

1. $0 \le P(A|B) \le 1$
2. $P(\Omega|B) = 1$
3. 若事件$A_1, A_2, \ldots$互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \middle| B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$$

性质3证明：

条件概率定义

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \middle| B\right) = \frac{P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right]}{P(B)}$$

分配律

可列可加性

$$= \frac{P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i B)\right]}{P(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B)}{P(B)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$$

条件概率定义

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

## 第1章3节 乘法公式

**定理** 设$P(B) > 0$，则有

$$P(AB) = P(B)P(A|B)$$

若$P(A) > 0$，则有

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

更一般地有：

若$P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$，则

$$P(A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$$

由条件概率？ 分母不能为0?

$$P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$$

$$\cancel{P(A_1)} \times \frac{\cancel{P(A_1 A_2)}}{\cancel{P(A_1)}} \times \frac{P(A_1 A_2 A_3)}{\cancel{P(A_1 A_2)}} \times \cdots \frac{P(A_1 A_2 \cdots A_n)}{P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1})}$$

## 第1章3节 乘法公式

更一般地有：

若$P(A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) > 0$，则

$$P(A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$$

由概率单调性 条件概率，分母不能为0！

$$A_1 \supset A_1 A_2 \supset A_1 A_2 A_3 \supset \cdots A_1 A_2 \cdots A_{n-1}$$

$$P(A_1) \ge P(A_1 A_2) \ge P(A_1 A_2 A_3) \ge \cdots \ge P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

例： 空战试验

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

## 第1章3节 全概率公式

蒙提霍尔问题，也称三门问题，出自美国的电视游戏节目Let's Make a Deal，节目主持人为蒙提·霍尔(Monty Hall)。参赛者面对三扇关闭着的门，其中一扇后面是汽车，选中该门就可以赢得汽车，另外两扇门后面各有一只山羊；当参赛者选择一门但未开启的时候，然后知道门后面有什么的主持人，会开启剩下两门中的一扇露出其中的山羊，然后主持人问参赛者是否更换选择去选另一扇关着的门。

问题是：更换选择是否会增加参赛者赢得汽车的机率？

1 ?  2 3 ?

## 第1章3节 全概率公式

蒙提霍尔问题，也称三门问题，出自美国的电视游戏节目Let's Make a Deal，节目主持人为蒙提·霍尔(Monty Hall)。

很多人认为：参赛者选择门的时候并不知道门后面的东西，所以有1/3概率选到车；经主持人淘汰一个后面是山羊的门，剩下两个门一个是山羊，一个是汽车，因此有1/2的概率选到汽车；参赛者无论换或者不换，赢得汽车的机率是50%。

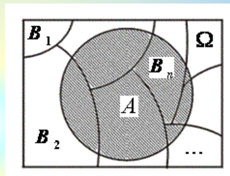
但主持人给出的答案是：应该换！

1 ?  2 3 ?

如何分析不同的选择对结果的影响？

## 第1章3节 全概率公式

- 计算事件的概率有时可能很复杂，为简化问题可以对基本事件进行分类计算。
- 如右图




$A = A\cap\Omega$

$= A\cap(B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n)$

$= AB_1\cup AB_2\cup\ldots\cup AB_n$

要计算$A$的概率，将$AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$的概率加起来即可

$B_1, B_2, \ldots, B_n$的含义？如何

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

## 第1章3节 全概率公式

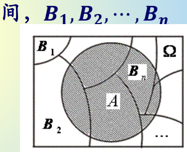
引例：摸球试验

**定义** 设Ω为随机试验$E$的样本空间，$B_1, B_2, \cdots, B_n$为$E$的一组事件，若

(1) $B_i\cap B_j = \Phi$，$i\neq j$

(2) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup Bn = \Omega$

称$B_1, B_2, \cdots, B_n$为Ω的一个有限划分.




电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

## 第1章3节 全概率公式

**定理(全概率公式)**

设随机试验$E$的样本空间为Ω，$A\subset\Omega$，$B_1, B_2, \cdots, B_n$为Ω 的一个有限划分，且$P(B_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$，则有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$$

**证明：** $B_1, B_2, \cdots, B_n$为Ω 的一个有限划分

$\Omega = B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n$

$$A = A\cap\Omega = A\cap(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n) = \bigcup_{i=1}^{n}(AB_i)$$

分配律

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

## 第1章3节 全概率公式

$B_1, B_2, \cdots, B_n$互不相容

故，$AB_1, AB_2, \cdots, AB_n$ 互不相容

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(AB_i)\right) = \sum_{i=1}^{n}P(AB_i)$$

有限可加性

乘法公式

$$= \sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

【证毕】

该公式常用在预测推断中，又称为**事前概率**。

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

## 第1章3节 全概率公式

**蒙提霍尔问题理论推导：**

仔细分析可知在游戏中，主持人知道门后面的东西，因此主持人肯定会开启背后是山羊的门，这是一个十分重要的隐藏条件！下面用全概率公式给出理论推导思路。

设A={参赛者最初选中汽车}，B={更换选择后选中汽车}

可知 $P(A) = 1/3$，$P(B|A) = 0$，$P(B|\bar{A}) = 1$

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

$$= \frac{1}{3}\times 0 + \left(1-\frac{1}{3}\right)\times 1 = \frac{2}{3}$$

说明更换选择后，赢得汽车的概率由1/3上升为2/3，因此参赛者应该更换选择。

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

## 第1章3节 全概率公式

**定理(全概率公式)**

设随机试验$E$的样本空间为Ω，$A\subset\Omega$，$B_1, B_2, \cdots, B_n$为Ω 的一个有限划分，且$P(B_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$，

则有 $$P(A) = \sum_{i=1}^{n}P(AB_i) = \sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

该公式常用在预测推断中，又称为**事前概率**。

例：抽检试验

抽签的公平性

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

## 第1章3节 贝叶斯公式

**在应用中常遇到：**

*已知结果发生，去找出最有可能导致它发生的原因。*

**定理（贝叶斯公式）：** 设随机试验$E$的样本空间为$\Omega$，$A\subset\Omega$，$B_1,B_2,\cdots,B_n$为$\Omega$的一个有限划分，且$P(B_i)>0, i=1,2,\cdots,n$，则有

$$P(B_j\mid A)=\frac{P(B_j)P(A\mid B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)}$$



## 第1章3节 贝叶斯公式

**证明：**

$$P(B_j|A)=\frac{P(AB_j)}{P(A)}=\frac{P(AB_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)}=\frac{P(B_j)P(A\mid B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)}$$

乘法公式

全概率公式

【证毕】

该公式常用于根据结果推测原因，称为**事后概率。**

在实际应用中，常把事件$A$看成“结果”，把事件$B_1$，$B_2$，…，$B_n$看成导致该结果的可能的“原因”。

实例如：设备维修，计算机诊病等。

**例：** 病情诊断试验　慎用测谎仪

条件概率—般用法