

第四章 随机变量的数字特征



1. 数学期望
2. 随机变量的方差
3. 协方差、相关系数和矩
4. 多维正态随机变量

第4章4节 多维正态随机变量

一. n 维正态随机变量

定义: 设 n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的协方差矩阵 $C = (C_{ij})$ 是 n 阶正定对称矩阵, 其联合概率密度为

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |C|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X - \mu)' C^{-1} (X - \mu) \right\}$$

其中 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)'$

- 注:**
- 1) $E(X_i) = \mu_i$ $D(X_i) = \sigma_i^2$
 - 2) $\text{cov}(X_i, X_j) = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$



第4章4节 多维正态随机变量



二. 重要结论

1. 有限个相互独立的正态随机变量的线性函数仍服从正态分布

$$(1) X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

例3.4.7

$$(2) X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \Rightarrow X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

例3.4.11



第4章4节 多维正态随机变量



二. 重要结论

2. (X_1, \dots, X_n) 服从 n 维正态分布 \Leftrightarrow

X_1, \dots, X_n 的任意线性组合 $L_1 X_1 + \dots + L_n X_n$

服从正态分布, 其中系数 L_1, \dots, L_n 不全为0.

$$* (X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho) \Rightarrow$$

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

例3.1.10



第4章4节 多维正态随机变量



二. 重要结论

3. (X_1, \dots, X_n) 服从 n 维正态分布, Y_1, \dots, Y_m 是 X_1, \dots, X_n 的线性组合 \Rightarrow
 Y_1, \dots, Y_m 是 m 维正态分布随机变量.



第4章4节 多维正态随机变量



二. 重要结论

4. (X_1, \dots, X_n) 服从 n 维正态分布, 且相互独立

$\Leftrightarrow X_1, \dots, X_n$ 不相关 (协方差阵为对角阵)

$$* (X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho), X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立}$$

$\Rightarrow \rho = 0$ (即 X 与 Y 不相关)

例3.2.5、例4.4.6

[典型习题: 三章25题、四章21题]



| | | | | | |
|----------|----------|---------|----------|----------|---------|
| <i>A</i> | <i>α</i> | alpha | <i>N</i> | <i>ν</i> | nu |
| <i>B</i> | <i>β</i> | beta | <i>Ξ</i> | <i>ξ</i> | xi |
| <i>Γ</i> | <i>γ</i> | gamma | <i>O</i> | <i>ο</i> | omicron |
| <i>Δ</i> | <i>δ</i> | delta | <i>Π</i> | <i>π</i> | pi |
| <i>E</i> | <i>ε</i> | epsilon | <i>P</i> | <i>ρ</i> | rho |
| <i>Z</i> | <i>ζ</i> | zeta | <i>Σ</i> | <i>σ</i> | sigma |
| <i>H</i> | <i>η</i> | eta | <i>T</i> | <i>τ</i> | tau |
| <i>Θ</i> | <i>θ</i> | theta | <i>Υ</i> | <i>υ</i> | upsilon |
| <i>I</i> | <i>ι</i> | iota | <i>Φ</i> | <i>φ</i> | phi |
| <i>K</i> | <i>κ</i> | kappa | <i>X</i> | <i>χ</i> | chi |
| <i>Λ</i> | <i>λ</i> | lambda | <i>Ψ</i> | <i>ψ</i> | psi |
| <i>M</i> | <i>μ</i> | mu | <i>Ω</i> | <i>ω</i> | omega |

希腊字母表

电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 hongfdu@qq.com

7



应用——建模案例

全国大学生数学建模竞赛1997年赛题

A题 零件的参数设计

一件产品由若干零件组装而成，标志产品性能的某个参数取决于这些零件的参数。零件参数包括**标定值**和**容差**两部分。进行成批生产时，标定值表示一批零件该参数的平均值，容差则给出了参数偏离其标定值的容许范围。若将零件参数视为随机变量，则标定值代表期望值，在生产部门无特殊要求时，容差通常规定为均方差的3倍。

电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 hongfdu@qq.com

8



应用——建模案例

全国大学生数学建模竞赛1997年赛题

A题 零件的参数设计

进行零件参数设计，就是要确定其标定值和容差。这时要考虑**两方面因素**：一是当各零件组装成产品时，如果产品参数偏离预先设定的目标值，就会造成**质量损失**，偏离越大，损失越大；二是零件容差的大小决定了其**制造成本**，容差设计得越小，成本越高。

试通过如下的具体问题给出一般的零件参数设计方法。

电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 hongfdu@qq.com

9



应用——建模案例

全国大学生数学建模竞赛1997年赛题

A题 零件的参数设计

粒子分离器某参数（记作 y ）由7个零件的参数（记作 x_1, x_2, \dots, x_7 ）决定，经验公式为：

$$y = 174.42 \times \left(\frac{x_1}{x_5} \right) \times \left[\frac{x_3}{x_2 - x_1} \right]^{-0.85} \times \sqrt[3]{\frac{1 - 2.62 \times \left[1 - 0.36 \times \left(\frac{x_4}{x_2} \right)^{-0.56} \right]^{\frac{3}{2}} \times \left(\frac{x_4}{x_2} \right)^{1.16}}{x_6 \times x_7}}$$

电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 hongfdu@qq.com

10



应用——建模案例

全国大学生数学建模竞赛1997年赛题

A题 零件的参数设计

y 的目标值（记作 y_0 为1.50。

当 y 偏离 $1.00 \pm y$ 时，产品为次品，质量损失为1,000（元）；

当 y 偏离 $3.00 \pm y$ 时，产品为废品，损失为9,000（元）。

电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 hongfdu@qq.com

11



应用——建模案例

全国大学生数学建模竞赛1997年赛题

A题 零件的参数设计

零件参数的标定值有一定的容许变化范围；容差分为A、B、C三个等级，用与标定值的相对值表示，A等为 $\pm 1\%$ ，B等为 $\pm 5\%$ ，C等为 $\pm 10\%$ 。7个零件参数标定值的容许范围，及不同容差等级零件的成本（元）如下表（符号/表示无此等级零件）：

电子科技大学数学科学学院 杜冠飞 hongfdu@qq.com

12



应用——建模案例

全国大学生数学建模竞赛1997年赛题



| | 标定值容许范围 | C 等 | B 等 | A 等 |
|-------|-------------------|-----|-----|-----|
| X_1 | $[0.075, 0.125]$ | / | 25 | / |
| X_2 | $[0.225, 0.375]$ | 20 | 50 | / |
| X_3 | $[0.075, 0.125]$ | 20 | 50 | 200 |
| X_4 | $[0.075, 0/125]$ | 50 | 100 | 500 |
| X_5 | $[1.125, 1.875]$ | 50 | / | / |
| X_6 | $[12, 20]$ | 10 | 25 | 100 |
| X_7 | $[0.5625, 0.935]$ | / | 25 | 100 |

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 hongfdu@qq.com

13



应用——建模案例

全国大学生数学建模竞赛1997年赛题



A题 零件的参数设计

现进行成批生产，每批产量 1,000 个。在原设计中，7 个零件参数的标定值为：

$$X_1 = 0.1, \quad X_2 = 0.3, \quad X_3 = 0.1,$$

$$X_4 = 0.1, \quad X_5 = 1.5, \quad X_6 = 16,$$

$$X_7 = 0.75$$

容差均取最便宜的等级。

请你综合考虑 y 偏离 y_0 造成的损失和零件成本，重新设计零件参数（包括标定值和容许差），与原设计比较，总费用降低了多少。

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 hongfdu@qq.com

14

