

## 分布律——产品检验

例 某种产品在生产过程中的废品率为  $p(0 < p < 1)$ ，对产品逐个检查，直到检查出5个不合格品为止，试写出停止检查时已检查的产品个数  $X$  的分布律。

解：进行  $k$  次检查，指定的5次检查出现不合格品的概率为  $p^5(1-p)^{k-5}$ 。

事件  $\{X = k\}$  相当于第  $k$  次检查到的产品必为不合格品，而前  $k-1$  次检查中查出4件不合格品。

这种情形共有  $C_{k-1}^4$  种不同的方式。

故分布律为： $P\{X = k\} = C_{k-1}^4 p^5 (1-p)^{k-5}$

其中， $k = 5, 6, \dots$

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 bangzhibo@qq.com

## 分布律——抛骰子

例 同时抛掷两颗骰子，观察它们出现的点数，求两颗骰子中出现的最大点数的概率分布。

解：设两颗骰子中出现最大点数为  $X$ ，则  $X$  的可能取值为：1, 2, 3, 4, 5, 6

基本事件总数：36

$\{X = 1\}$  只包含一个基本事件

$\{X = k\}$  包含的基本事件个数

两颗骰子都出现  $k$  点 1

一颗出现  $k$  点，另一颗小于  $k$  点  
 $C_2^1 \cdot 1 \cdot C_{k-1}^1$

$X$  的分布律为

$X$	1	2	3	4	5	6
$P$	1/36	1/12	5/36	7/36	1/4	11/36

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 bangzhibo@qq.com

## 二项分布——产品抽检试验

例 设有一批同类产品共有  $N$  个，其中次品有  $M$  个，现从中任取(有放回)  $n$  个，试求出  $n$  件中所含的次品数  $X$  的分布律。

解：设想产品是逐件有放回取出，由于各次抽到的次品是相互独立的，抽  $n$  件产品相当于做  $n$  重贝努里试验，故  $X \sim B(n, \frac{M}{N})$

所以， $X$  的分布律为  $P\{X = k\} = C_n^k (\frac{M}{N})^k (1 - \frac{M}{N})^{n-k}$ ，

其中  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ 。

思考：将抽取方式改为无放回抽取，试写出  $X$  的分布律。

$$P\{X = k\} = \frac{C_{N-M}^{n-k} C_M^k}{C_N^n} \quad k = 0, 1, \dots, l \quad l = \min(M, n)$$

此时称  $X$  服从超几何分布

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 bangzhibo@qq.com

## 二项分布——强弱对抗试验

例3：两人进行乒乓球对抗赛，得胜场次多的一方获胜，已知弱者每场获胜的概率为 0.4，现有比赛3场、比赛7场两个方案，哪一个对弱者有利？

解：设  $A = \{\text{弱者获胜}\}$ ，弱者获胜的场数为  $X$

双方逐场较量从而相互独立，视为独立重复试验

(1) 当双方比赛3场时， $X \sim B(3, 0.4)$

$$\therefore P(A) = P\{X \geq 2\} = \sum_{k=2}^3 C_3^k \cdot 0.4^k \cdot 0.6^{3-k} \approx 0.352$$

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 bangzhibo@qq.com

(2) 当双方比赛7场时， $X \sim B(7, 0.4)$

$$\therefore P(A) = P\{X \geq 4\} = \sum_{k=4}^7 C_7^k \cdot 0.4^k \cdot 0.6^{7-k} \approx 0.29$$

因此，第一种方案对弱队更有利一些。

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 bangzhibo@qq.com

## 二项分布——设备故障试验

例4：有300台独立运转的同类机床，每台发生故障的概率都是0.01，若一人排除一台的故障。问至少需要多少名工人，才能保证不能及时排除故障的概率小于0.01。

解：设  $X$  表示同一时刻发生故障的机床数， $X \sim B(300, 0.01)$

配  $N$  个工人，应使

$$0.01 > P\{X > N\} = 1 - P\{X \leq N\}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^N C_{300}^k \cdot 0.01^k \cdot (1 - 0.01)^{300-k}$$

即是求上述不等式成立的最小  $N$  值。

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 bangzhibo@qq.com

因为  $300 \times 0.01 = 3$  (该值很小), 故可近似认为  $X$  服从  $\lambda = 3$  的泊松分布, 即  $X \sim P(3)$

$$\therefore 0.01 > P\{X > N\} = \sum_{k=0}^N \frac{3^k}{k!} e^{-3}$$

查附表1 可得

$$P\{X \geq 8\} = 0.011905 > 0.01$$

$$P\{X \geq 9\} = 0.003803 < 0.01$$

**思考: 至少需要配备修理工人8个还是9个?**

至少需要配备8个修理工人

结合  $X$  的含义可知, 当有8个工人时, 出故障的机床无人修理的概率小于0.01

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 hongchidufei@qq.com

## 泊松分布——宇宙粒子

已知运载火箭在飞行中, 进入它的仪器舱的宇宙粒子数服从参数为  $\lambda$  的泊松分布。而进入仪器舱的每个粒子落到仪器的重要部位的概率等于  $p$ , 试求恰有  $k$  个粒子落到仪器重要部位的概率。

分析: 粒子落到仪器重要部位的试验是由前后相关联的两个试验所组成:

第一个试验是宇宙粒子进入仪器舱, 进入的粒子数服从泊松分布;

再是进入仪器舱的这些粒子落到仪器舱重要部位, 其数目服从二项分布;

这类问题可用全概率公式求解。

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 hongchidufei@qq.com

解: 从第一个试验入手, 划分样本空间。

设  $X$  表示宇宙粒子进入仪器舱的个数。

由题设  $X \sim P(\lambda)$  即

$$P\{X = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

显然  $\{X = m\}, (m = 0, 1, 2, \dots)$  构成样本空间的一个划分

(回忆: 样本空间的有限划分如何定义?)

设  $Y$  表示落到重要部位的粒子数, 由题意知

$$P\{Y = k | X = m\} = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m$$

由全概率公式得所求概率为

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 hongchidufei@qq.com

$$\begin{aligned} P\{Y = k\} &= \sum_{m=k}^{+\infty} P\{X = m\} P\{Y = k | X = m\} \\ &= \sum_{m=k}^{+\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} * C_m^k p^k (1-p)^{m-k} \quad (m \geq k) \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{m=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{m-k} (1-p)^{m-k}}{(m-k)!} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^n}{n!} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} * e^{\lambda(1-p)} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\frac{\lambda' = \lambda(1-p)}{\lambda' = \lambda(1-p)} \Rightarrow e^{\lambda'} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda'^n}{n!} e^{-\lambda'} = e^{\lambda'}$$

落到仪器重要部位的粒子数服从参数为  $\lambda p$  的泊松分布。

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 hongchidufei@qq.com