# 第七章　参数估计

| | |
|---|---|
| 1. | 参数的点估计 |
| 2. | 估计量的优良性准则 |
| 3 | 区间估计 |



电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

# 第7章3节　区间估计

## 点估计的缺陷

① 由于样本是随机的，**估计值**可能**非真**值——即便估计量是无偏有效估计量；

② 即使估计值等于真实值，也**无从肯定**；不知相差多少.

### 改进：

对于$\theta$的估计，给定一个范围：$\theta \in \left[\overset{\frown}{\theta}_1, \overset{\frown}{\theta}_2\right]$

# 第7章3节　区间估计

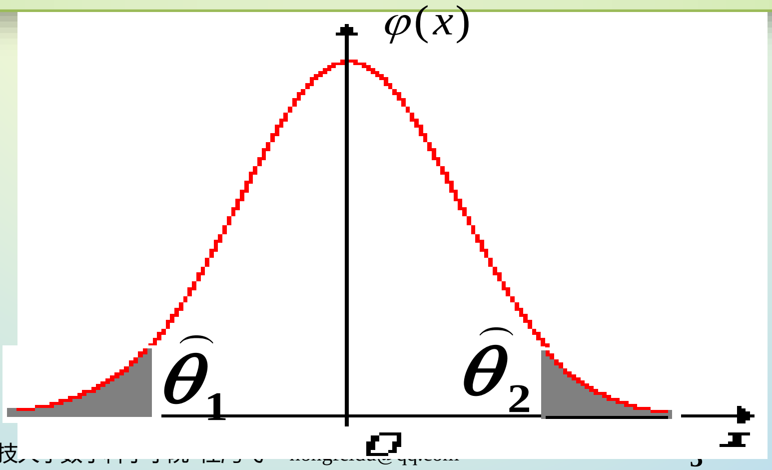
**改进：**

对于$\theta$的估计，给定一个范围：$\theta \in [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$，
并满足：

(1)　$P\{\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\}$应尽可能大

(2)　$\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$应尽可能小

我们希望两者都能满足，但这**二者是矛盾**的！无法同时满足.



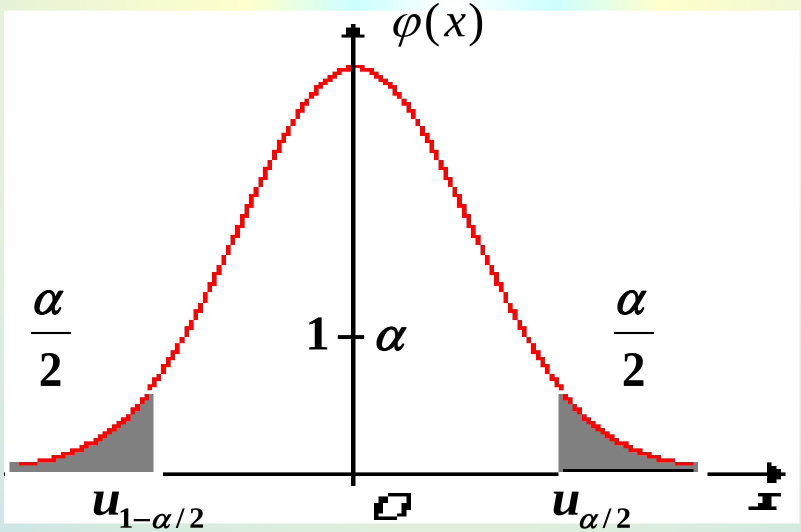
# 第7章3节　区间估计

**改进：**

**可以将上述两个要求改为：**

**①在一定可靠程度下，**

**②指出被估参数的可能取值范围.**



# 第7章3节　区间估计

## 置信区间

**定义**

设总体的末知参数为$\theta$，由样本$X_1, \ldots, X_n$确定两个统计量$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\ldots, X_n)$和$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\ldots, X_n)$，对于给定的实数$\alpha$ ($0<\alpha<1$)，满足

$$P\left\{\hat{\theta}_1(X_1,\ldots, X_n)\le\theta\le\hat{\theta}_2(X_1,\ldots, X_n)\right\}=1-\alpha$$

则称随机区间$\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right]$为$\theta$的**置信度**为$1-\alpha$的**置信区间**.

$1-\alpha$又称**置信系数**或**置信概率**

$\alpha$又称**置信水平**，通常取值为0.1，0.05.

TIPS

正态分布中$\mu$的区间估计

## 寻找置信区间的步骤(枢轴变量法):

1) 选取待估参数$\theta$的**估计量**;
原则：**优良性准则**
常用：$\overline{X} \to \mu$，$S^2 \to \sigma^2$

**$\mu$已知时**

$$\sigma^2 \leftarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

2) 考察估计量服从的分布（若有其他未知参数，则选一优良估计量来替代);
**化至常用分布**(主要是：正态、$\chi^2$、$T$、$F$分布);
相应的变换函数 $W$ 称为**枢轴变量**

3) 对$P\left\{w_{1-\alpha/2} \le W \le w_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$ **查上侧分位数**;

4) **代换**得到 $P\{A \le \theta \le B\}=1-\alpha$
区间 $[A，B]$ 即为所求.

## 置信区间

TIPS

估计量的选取

未知参数的替换

由于正态分布是最常见的分布，后续内容将以**正态总体**为主要分析对象进行区间估计.

# 第7章3节　区间估计

## 正态总体的区间估计

## 一、单个正态总体：$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

### 1. μ 的估计

1) $\sigma^2$已知

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

枢轴变量

$$P\left\{-u_{\frac{\alpha}{2}}\le\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\le u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$$

$$\boxed{\left[\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right]}$$

# 正态总体的区间估计

## 一、单个正态总体：$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

### 1. μ 的估计

2) $\sigma^2$未知

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

枢轴变量

$$P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\le\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

$$\boxed{\left[\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right]}$$

# 第7章3节　区间估计

## 正态总体的区间估计

### 一、单个正态总体：$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

### 2. $\sigma^2$ 的估计

**1) $\mu$ 已知**

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$$

**枢轴变量**

$$P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) \le \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right\} = 1-\alpha$$

$$\boxed{\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]}$$

# 第7章3节　区间估计

## 正态总体的区间估计

## 一、单个正态总体：$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

### 2. $\sigma^2$ 的估计

2) $\mu$未知

$$\chi^2=\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)$$

枢轴变量

$$P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\le\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\le\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

$$\boxed{\left[(n-1)S^2\Big/\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ (n-1)S^2\Big/\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]}$$

# 第7章3节　区间估计

## 正态总体的区间估计

## 一、单个正态总体：$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

TIPS

零件长度的方差

婴儿体重的估计

# 正态总体的区间估计

## 二、两个正态总体：$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$　　$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

### 1. $\mu_1-\mu_2$ 的估计

1) $\sigma_1^2$ 和 $\sigma_2^2$ 已知

$$U=\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

枢轴变量

$$\left[\overline{X}-\overline{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \overline{X}-\overline{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

# 正态总体的区间估计

## 二、两个正态总体：$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$　　$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

### 1. $\mu_1-\mu_2$ 的估计

**2) $\sigma_1^2$ 和 $\sigma_2^2$ 未知，$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$**

$$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

枢轴变量

$$\left[\overline{X}-\overline{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\ \overline{X}-\overline{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]$$

# 正态总体的区间估计

## 二、两个正态总体：$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$　　$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

### 1. $\mu_1 - \mu_2$ 的估计

二总体均值差的置信区间的含义是:

- 若$\mu_1 - \mu_2$的置信下限大于零，则可认为 $\mu_1 > \mu_2$；
- 若$\mu_1 - \mu_2$的置信上限小于零，则可认为 $\mu_1 < \mu_2$.

两稻种产量的期望差的置信区间

# 第7章3节　区间估计

## 正态总体的区间估计

### 二、两个正态总体：$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$　　$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

### 2. $\sigma_2^2/\sigma_1^2$ 的估计

#### 1) $\mu_1$与$\mu_2$已知

**枢轴变量**

$$F=\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\Bigg/n_1\Bigg/\sum_{j=1}^{n_2}\left(\frac{Y_j-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\Bigg/n_2=\boxed{\frac{n_2\cdot\sigma_2^2}{n_1\cdot\sigma_1^2}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}}\sim F(n_1,n_2)$$

$$\boxed{\left[\frac{n_1\cdot\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}{n_2\cdot\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}\cdot F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2),\ \frac{n_1\cdot\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}{n_2\cdot\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}\cdot F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)\right]}$$

# 第7章3节　区间估计

## 正态总体的区间估计

### 二、两个正态总体：$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$　　$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

### 2. $\sigma_2^2/\sigma_1^2$ 的估计

#### 2) $\mu_1$与$\mu_2$未知

**枢轴变量**

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} = \boxed{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2}} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

$$\left[ \frac{S_2^2}{S_1^2} \cdot F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1),\ \ \frac{S_2^2}{S_1^2} \cdot F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) \right]$$

## 三、大样本方法构造置信区间(略)

**要点：利用独立同分布中心极限定理**

**例** 设某总体的期望为$\mu$，方差为$\sigma^2$，且$\mu$、$\sigma^2$未知，从该总体抽取样本$X_1,X_2,\ldots,X_n$，试求参数$\mu$的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

**解** 由独立同分布中心极限定理：$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} N(0,1)$

$\sigma^2$未知，统计量应为 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} N(0,1)$

**因为S是$\sigma$的相合估计量**

## 三、大样本方法构造置信区间(略)

**例** 设某总体的期望为$\mu$，方差为$\sigma^2$，且$\mu$、$\sigma^2$未知，从该总体抽取样本$X_1,X_2,\ldots,X_n$，试求参数$\mu$的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} N(0,1)$$

从而参数$\mu$的置信度为$1-\alpha$的置信区间近似为

$$\boxed{\left[\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right]}$$

## 四、单侧置信区间(略)

**定义** 设总体的未知参数为$\theta$，由样本$X_1, \ldots, X_n$确定两个统计量$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1,\ldots, X_n)$和$\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1,\ldots, X_n)$，对于给定的实数$\alpha$ $(0< \alpha <1)$，满足

$$P\left\{\hat{\theta}_1(X_1,\ldots, X_n) \le \theta\right\} = 1-\alpha$$

则称随机区间$[\hat{\theta}_1, +\infty)$为$\theta$的置信度为1-$\alpha$的单侧置信区间，$\hat{\theta}_1$称为单侧置信下限.

$$P\left\{\theta \le \hat{\theta}_2(X_1,\ldots, X_n)\right\} = 1-\alpha$$

则称随机区间$(-\infty, \hat{\theta}_2]$为$\theta$的置信度为1-$\alpha$的单侧置信区间，$\hat{\theta}_2$称为单侧置信上限.

## 四、单侧置信区间(略)

**例** 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma^2$已知，试求参数$\mu$的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间。

比较单侧、双侧置信区间相似之处

**解** $$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

$$P\left\{-u_\alpha\le\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$$

置信上限 $$\left(-\infty,\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha\right]$$

$$P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\le u_\alpha\right\}=1-\alpha$$

置信下限 $$\left[\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha,+\infty\right)$$

双侧置信区间 $$\left[\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right]$$

# 小结：常见区间估计

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\boxed{P\{w_{1-\alpha/2} \le W \le w_{\alpha/2}\} = 1-\alpha}$$

| 被估参数 | 条件 | 统计量(枢轴变量) | 置信区间 |
|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\sigma^2$ 已知 | $U = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ | $\left[\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ |
| $\mu$ | $\sigma^2$ 未知 | $T = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ | $\left[\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]$ |
| $\sigma^2$ | $\mu$ 已知 | $\chi^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$ | $\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}, \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right]$ |
| $\sigma^2$ | $\mu$ 未知 | $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ | $\left[\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]$ |

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$$\boxed{P\left\{w_{1-\alpha/2} \le W \le w_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha}$$

| 被估参数 | 条件 | 统计量(枢轴变量) |
|---|---|---|
| $\mu_1-\mu_2$ | $\sigma_1^2$已知<br>$\sigma_2^2$已知 | $U=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$ |
| $\mu_1-\mu_2$ | $\sigma_1^2$未知<br>$\sigma_2^2$未知 | $T=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$ |
| $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ | $\mu_1$未知<br>$\mu_2$未知 | $F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$ |