条件分布律

在1,2,3,4 中随机取出一数 X ,再随机地从$1\sim X$中取一数Y ,求在$X=3$的条件下，Y 的条件分布律.

解： 由古典概率有

$$P\{Y=j \mid X=3\}=\frac{1}{3} \qquad j=1,2,3$$

婴儿数目的分布律

记X为某医院一天出生的婴儿个数,记Y为男婴的个数，设(X,Y)的联合分布律为:

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{e^{-14}(7.14)^{j}(6.86)^{i-j}}{j!(i-j)!}\qquad \begin{array}{l} j=0,1,\ldots,i, \\ i=0,1,\ldots \end{array}$$

求: 1) 边缘分布律；2) 条件分布律; 3) $X=20$时Y的条件分布律.

解: 1) $P\{X=i\}=P\{X=i,Y<+\infty\}$

$$=\sum_{j=0}^{i}p_{ij}=\frac{e^{-14}}{i!}\sum_{j=0}^{i}\frac{i!(7.14)^{j}(6.86)^{i-j}}{j!(i-j)!}$$

$$=\frac{e^{-14}}{i!}(7.14+6.86)^{i}=\frac{14^{i}}{i!}e^{-14}\qquad i=0,1,\ldots$$

$X\sim P(14)$

$$P\{Y=j\}=P\{X<+\infty, Y=j\}$$

$$=\sum_{i=j}^{+\infty} p_{ij} \quad =\frac{e^{-14}}{j!}\sum_{i=j}^{+\infty}\frac{(7.14)^j(6.86)^{i-j}}{(i-j)!}$$

令 $k=i\text{-}j$

$$=\frac{e^{-14}}{j!}(7.14)^j\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{6.86^k}{k!}$$

利用“分布律之和等于1”求级数

$$=\frac{(7.14)^j}{j!}e^{-7.14} \qquad j=0,1,\ldots$$

$$Y \sim P(7.14)$$

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{e^{-14}\times 7.14^{j}\times 6.86^{i-j}}{j!(i-j)!}$$

2) $$P\{X=i|Y=j\}=\frac{P(X=i,Y=j)}{P(Y=j)}$$

$$=\frac{e^{-6.86}(6.86)^{i-j}}{(i-j)!}\qquad i=j,j+1,\ldots$$

$$P\{Y=j|X=i\}=\frac{P(X=i,Y=j)}{P(X=i)}$$

$$=C_i^j\left(\frac{7.14}{14}\right)^j\left(\frac{6.86}{14}\right)^{i-j}\qquad j=0,1,\ldots i$$

3) $$P\{Y=j \mid X=20\}=\frac{P(X=20,Y=j)}{P(X=20)}$$

$$=C_{20}^{j}\left(\frac{7.14}{14}\right)^{j}\left(\frac{6.86}{14}\right)^{20-j} \qquad j=0,1,\ldots 20$$

$$Y\sim B\left(20,\frac{7.14}{14}\right)$$

思考：随机变量X与Y是否相互独立?

不相互独立

$$P\{Y=j\}\neq P\{Y=j \mid X=i\}$$

条件概率密度例一

例3.3.3 设(X,Y)的联合概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}3x & 0\le x\le 1, 0<y<x\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求: $P\left(Y\le \frac{1}{8}\middle|X=\frac{1}{4}\right)$

分析: 1) 所求值是在$X=1/4$的条件下，Y的条件分布函数在1/8处的函数值.

2) 初看起来可以用条件概率的定义求解,但这时会出现分母为0 .

3) 利用条件概率密度求解. 先求X的边缘概率密度,再求Y的条件概率密度,最后积分求解.

例3.3.3 设(X,Y)的联合概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases} 3x & 0\le x\le 1, 0<y<x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

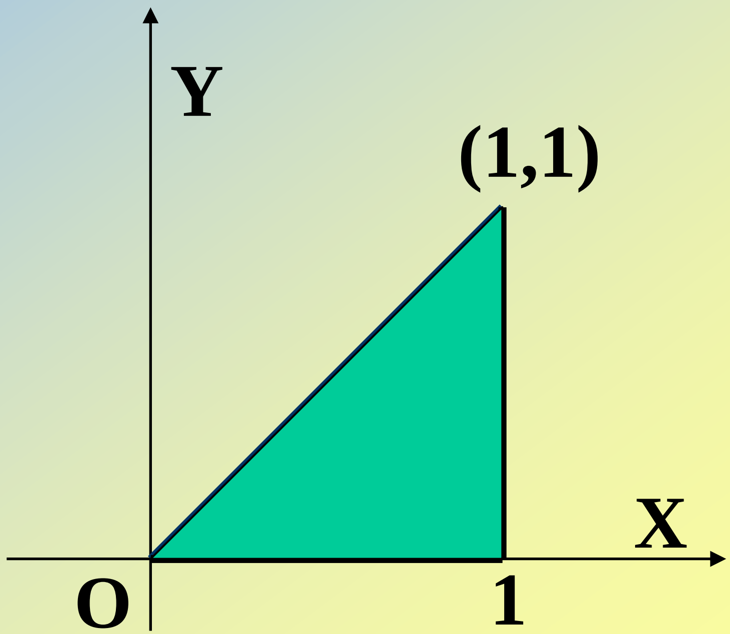
求: $P\left(Y\le \frac{1}{8} \middle| X=\frac{1}{4}\right)$

解: X的边缘概率密度为:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases} \int_0^x 3x\,dy & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 3x^2 & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



$\boxed{\text{当} 0 < x \le 1 \text{时，} f_X(x) > 0}$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{3x}{3x^2} = \dfrac{1}{x} & \boxed{0 < y < x} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$P\{Y \le 1/8 | X = 1/4\}$$

$$= F_{Y|X}\{y \le 1/8 | x_0 = 1/4\}$$

$$= \int_{-\infty}^{1/8} f_{Y|X}(y|x_0 = 1/4)dy$$

$$= \int_0^{1/8} 4dy = \frac{1}{2}$$

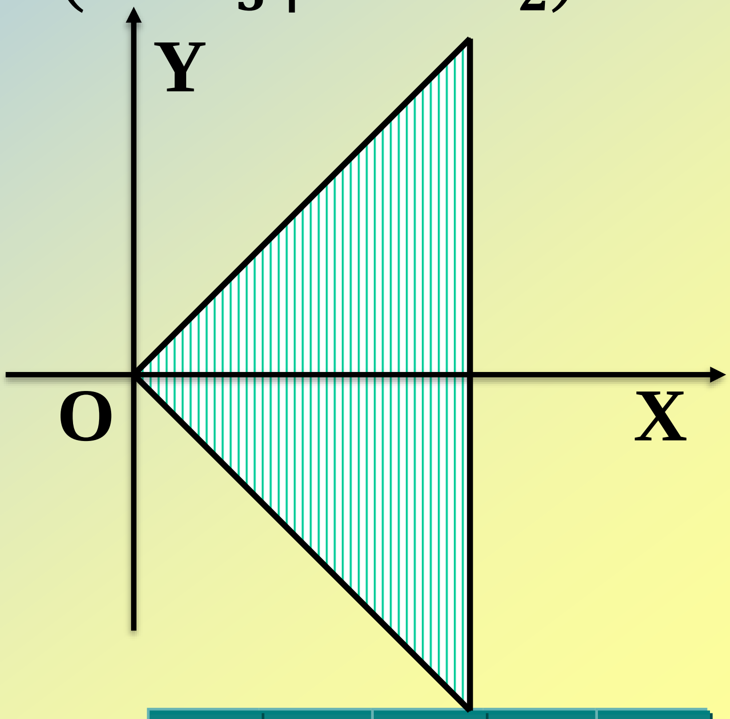
条件概率密度例二

设(X,Y)的联合概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & |y|<x,0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求: 1) 求条件概率密度

2) $P\left(|Y|<\frac{1}{3}\middle|X=\frac{1}{2}\right)$　　$P\left(X<\frac{1}{3}\middle|Y=-\frac{1}{2}\right)$

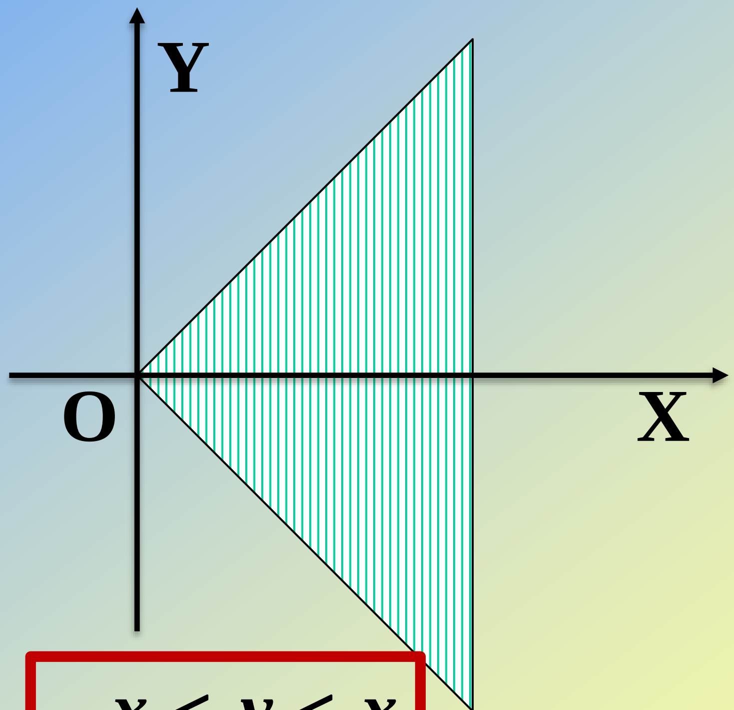


解: 1) 先求X,Y的边缘概率密度:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_{-x}^{+x}1dy=2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1+y & -1<y<0\\ 1-y & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



当 $0<x<1$时, $f_X(x)>0$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x} & -x<y<x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

当 $-1<y<1$时, $f_Y(y)>0$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|} & |y|<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$2)\ P\left(|Y| < \frac{1}{3} \middle| X = \frac{1}{2}\right)$$

$$= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} f_{Y|X}\left(y \middle| \frac{1}{2}\right) dy \quad = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} 1 dy = \frac{2}{3}$$

$$P\left(X < \frac{1}{3} \middle| Y = -\frac{1}{2}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{1}{3}} f_{X|Y}\left(x \middle| -\frac{1}{2}\right) dx = \int_{-\infty}^{\frac{1}{3}} 0\, dx = 0$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-|y|} & |y| < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com