X 与 $|X|$ 是否相互独立

随机变量 $X \sim N(0,1)$，问：X 与 $|X|$ 是否相互独立？

思路：

- 相互独立是二者互不影响
  ——X 与 $|X|$ 是否相互影响？
- 若有影响，可采用反证法，举一反例即可
- 入手点：相独立的定义

判断 X 与 $|X|$ 是相互独立，需验证

$$P\{X \le a, |X| \le a\} = P\{X \le a\} P\{|X| \le a\}$$

对任意的 a 都成立

判断不相互独立，只需有一个 a 使得上式不成立即可。

解：对于任意给定的实数 $a > 0$

若 X 与 $|X|$ 相互独立，则有

$$P\{X \le a\} P\{|X| \le a\} = P\{X \le a, |X| \le a\}$$

$$\{x \le a, |x| \le a\} = \{|x| \le a\}$$

$$\therefore\ P\{X \le a, |X| \le a\} = P\{|X| \le a\}$$

$$P\{X \le a\} P\{|X| \le a\} = P\{|X| \le a\}$$

$X \sim N(0,1)$

矛盾

$\exists a$ 使得 $0 < P\{X \le a\} < 1$，$0 < P\{|X| \le a\} < 1$

$$P\{X \le a\} P\{|X| \le a\} < P\{|X| \le a\}$$

故 X 与 $|X|$ 不相互独立。

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

相互独立的判断

已知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为：

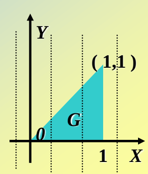
$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

问 X, Y 是否相互独立？

解：$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

$$= \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ or } x > 1 \\ \int_0^x 8xy\,dy & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ or } x > 1 \\ 4x^3 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$



电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

同理

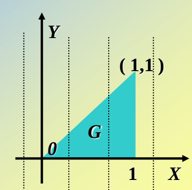
$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \text{ or } y > 1 \\ 4y - 4y^3 & 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

记 $G = \{(x,y) | 0 \le y \le x \le 1\}$

在区域 G 中

$$f(x,y) \ne f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

故 X, Y 不相互独立。



电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

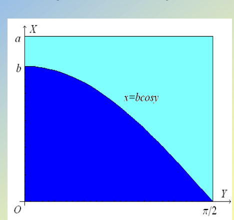
相互独立的应用

例3.2.4 设随机变量 X, Y 相互独立，$X \sim U(0,a)$ $Y \sim U(0, \pi/2)$ 且 $0 < b < a$，试求 $P\{X < b\cos Y\}$.

解：

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/a & 0 < x < a \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2/\pi & 0 < y < \pi/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



因为随机变量 X, Y 相互独立，则

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$= \begin{cases} 2/a\pi & 0 < x < a, 0 < y < \pi/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

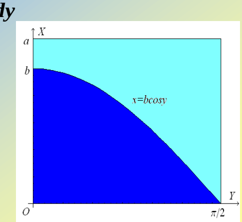
$$f(x,y) = \begin{cases} 2/a\pi & 0 < x < a, 0 < y < \pi/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$P\{X < b\cos Y\} = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

$$= \iint_D \frac{2}{a\pi}\,dxdy$$

$$= \frac{2}{a\pi} S(D)$$

$$= \frac{2b}{a\pi}$$



电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

练习：设随机变量X与Y相互独立，填出空白处的数值.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	1/24	1/8		1/4
x_2	1/8			3/4
$p_{\cdot j}$	1/6	1/2		1

若(X,Y) 的联合分布律中某$p_{ij}=0$

问X,Y 是否相互独立?

不相互独立

$$0 < p_{i\cdot}p_{\cdot j} \neq P_{ij} = 0$$

用分布函数证明独立性

例:3.2.2 设 (X,Y)的联合分布函数为:

$$F(x,y)=G(x)[H(y)-H(-\infty)],$$

且$G(+\infty),H(-\infty),H(+\infty)$都存在.

试证明：X,Y相互独立.

分析： 实际上只需验证$F(x,y)=F_X(x)\times F_Y(y)$

在证明过程中,需注意利用分布函数的性质.

用分布函数证明独立性

例:3.2.2 设(X,Y)的联合分布函数为: $F(x,y)=G(x)[H(y)-H(-\infty)]$ 且$G(+\infty),H(-\infty),H(+\infty)$都存在，试证明$X,Y$相互独立.

证明: $F_X(x)=F(x,+\infty)=G(x)[H(+\infty)-H(-\infty)]$

$F_Y(y)=F(+\infty,y)=G(+\infty)[H(y)-H(-\infty)]$

$F_X(x)F_Y(y)=G(x)[H(+\infty)-H(-\infty)]G(+\infty)[H(y)-H(-\infty)]$

$\because F(+\infty,+\infty)=1$

$\therefore$ 有 $G(+\infty)[H(+\infty)-H(-\infty)]=1$

从而 $F_X(x)F_Y(y)=G(x)[H(y)-H(-\infty)]=F(x,y)$

$(x,y)\in R^2$

X,Y相互独立.