数学期望引例1

•衡量某地区的收入情况——
可用**平均收入**作为指标；
•对班级或个人学习情况进行比较-
可用**平均成绩**作为指标...

•某射手进行实弹射击，每次射击的命中环数是随机变量X，现在他射击了100次，结果如下，如何评价他的射击水平?

命中环数x_i	10	9	8	7	6	5
频数μ_i	20	30	15	10	15	10

数学期望引例1

如何评价他的射击水平?

命中环数x_i	10	9	8	7	6	5
频数μ_i	20	30	15	10	15	10

计算他各次射击结果的算术平均值:

$$\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{6} x_i\mu_i = \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\mu_i}{100} \Rightarrow = \sum_{i=1}^{6} x_i f_i \Rightarrow = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$= 10\times0.2+9\times0.3+8\times0.15+7\times0.1+6\times0.15+5\times0.1$$

$$= 8$$

可作为随机变量的数字特征！

数学期望引例2

设随机变量X的分布律如下，计算其均值

$$P\left\{X=(-1)^k\frac{2^k}{k}\right\}=\frac{1}{2^k}\quad(k=1,2,\cdots)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^k}{k}\cdot\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}=-\ln 2$$

思考：先计算正数部分，再计算负数部分，然后合并，结果如何?

分开计算，级数不收敛——改变求和的顺序，导致结果不一致！

数学期望引例2

设随机变量X的分布律如下，计算其均值

$$P\left\{X=(-1)^k\frac{2^k}{k}\right\}=\frac{1}{2^k}\quad(k=1,2,\cdots)$$

分开计算，级数不收敛——改变求和的顺序，导致结果不一致！

作为随机变量的数字特征应是唯一的，不该因求和顺序不同而不一致！
为避免求和顺序不同导致的结果不一致，应增加限制条件

期望是否存在?

1) 设$R.V.X$服从拉普拉斯分布,其概率密度为:

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}\qquad -\infty<x<+\infty\quad 求\ E(X)$$

2) 设$R.V.X$服从柯西分布,其概率密度为:

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\qquad -\infty<x<+\infty\quad 求\ E(X)$$

解: 1) $E(X)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-|x|}dx=0$

被积函数为奇函数且积分区间关于原点对称

~~2)~~ $\cancel{E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\frac{x}{1+x^2}dx=0}$

在一般的$E(X)$计算中,为简便记,我们常省略事先判断绝对收敛这一步.

泊松分布期望值

1. $X\sim P(\lambda)$, 则 $E(X)=\lambda$

证明: $P\{X=k\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\quad k=0,1,2,....$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}k\cdot P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{+\infty}ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}\ \overset{令m=k-1}{=\!=\!=}\ \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{m+1}}{m!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda$$

注意到它与泊松分布相似，但泊松分布取值是从0开始！

要点：

1、按照定义写出期望的表达式；

2、将被加部分化成常见分布的分布律形式；

3、利用分布律之和等于1化简。

二项分布期望值

2. $X\sim B(n,p)$, 则 $E(X)=np$

证明: $P\{X=i\}=C_n^i(1-p)^{n-i}p^i \quad i=0,1,2,\dots,n$

$$E(X)=\sum_{i=0}^{n} iC_n^i(1-p)^{n-i}p^i \Leftarrow C_n^i=\frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} nC_{n-1}^{i-1}(1-p)^{n-1-(i-1)}p^i$$

$$\overset{令k=i-1}{=} np\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}(1-p)^{n-1-k}p^k$$

$$=np[p+(1-p)]^{n-1}$$

$$=np$$

正态分布期望值

3. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $E(X)=\mu$

证明: $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$

$$\overset{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mu+\sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mu e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=0+\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\mu$$

随机变量函数的数学期望

一个庄家在一个签袋中放有8个白、8个黑的围棋子。规定：每个摸彩者交一角钱作“手续费”，然后一个从袋中摸出五个棋子，按下面“摸子中彩表”给“彩金”。

摸到	五个白	四个白	三个白	其它
彩金	2元	2角	5分	共乐一次

随机变量函数的数学期望

设X表示摸出的白围棋子个数，Y表示一次得到的彩金，则X，Y的分布律为

X	0	1	2	3	4	5
P	0.0128	0.1282	0.3590	0.3590	0.1282	0.0128
Y	0	0	0	0.05	0.2	2
P	0.0128	0.1282	0.3590	0.3589	0.1282	0.0128

随机变量函数的数学期望

X	0	1	2	3	4	5
P	0.0128	0.1282	0.3590	0.3590	0.1282	0.0128
Y	0	0	0	0.05	0.2	2
P	0.0128	0.1282	0.3590	0.3589	0.1282	0.0128

设$Y=g(X)$，则

$$E(Y)=g(0)\times0.0128+g(1)\times1282+g(2)\times0.3590$$

$$+g(3)\times0.3590+g(4)\times0.1282+g(5)\times0.0128$$

$$=0\times0.5001$$

$$+0.05\times0.3589+0.2\times0.1282+2\times0.0128$$

$$=\sum_{i=1}^{6}g(x_i)\cdot P\{X=x_i\}$$

离差平方的期望

设随机变量X的数学期望存在，证明:

$$E\{[X-E(X)]^2\}=E(X^2)-[E(X)]^2$$

设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1+x & -1\le x<0\\ 1-x & 0\le x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad \text{试求 } E\{[X-E(X)]^2\}$$

证明: $E\{[X-E(X)]^2\}=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\{x^2-2xE(X)+[E(X)]^2\}f(x)dx$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$\because E(X)=0$ （参见书上 例4.1.3）

$$E\{[X-E(X)]^2\}=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^2(1-x)dx$$

$$=1/6$$

$X\cdot Y$的 期 望

设X,Y相互独立，$E(X),E(Y)$存在，且

$$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}\ ,\ i=1,2,\cdots$$

$$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}\ ,\ j=1,2,\cdots$$

求 $E(XY)$

解: $E(XY)=\sum_i\sum_j x_i y_j P\{X=x_i,Y=y_j\}$

$$=\sum_i\sum_j x_i y_j P_{i\cdot}P_{\cdot j}$$

$$=\sum_i x_i P_{i\cdot}\sum_j y_j P_{\cdot j}$$

$$=E(X)E(Y)$$

$\min(X,Y)$ 的 期 望

X,Y相互独立,且服从$N(0,1)$分布. 试求$E[\min(X,Y)]$

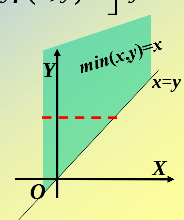
解: $E[\min(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\min(x,y)f(x,y)dx\right]dy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{y}xf(x,y)dx\right]dy+\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{y}^{+\infty}yf(x,y)dx\right]dy$$

又$\because f(x,y)$关于x,y对称

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{x}yf(x,y)dy\right]dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{y}^{+\infty}yf(x,y)dx\right]dy$$



X,Y相互独立,且服从$N(0,1)$分布. 试求$E[\min(X,Y)]$

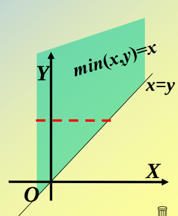
解: $E[\min(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\min(x,y)f(x,y)dx\right]dy$

$$=2\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{y}xf(x,y)dx\right]dy$$

$$=2\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{y}x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx\right]dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{e^{-y^2}}{\pi}dy$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$



练习解答

设随机变量X与Y相互独立, 且$X,Y\sim N(0,{}^1\!/_2)$

则 $E(|X-Y|)=$______

解法一: $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{\pi}e^{-(x^2+y^2)}\quad (x,y)\in R^2$

$$E(|X-Y|)=\iint_{R^2}|x-y|f(x,y)d\sigma=\text{.........}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

解法二：利用正态分布可加性

$Y\sim N(0,{}^1\!/_2)\ \Rightarrow\ -Y\sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 【见例题3.4.7结论】

$X\sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)$

$\because X$、Y相互独立，由正态分布可加性

【见例题3.4.11结论】

$\Rightarrow X-Y=X+(-Y)\sim N(0,1)$

令$Z=X-Y\sim N(0,1)$，则

$$E(|X-Y|)=E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}d\frac{z^2}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-e^{-\frac{z^2}{2}}\right]_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

期望性质的证明

2）$E(cX+b)=cE(X)+b$

(仅就X为连续型的情况给出证明)

$$E(cX+b)=\int_{-\infty}^{+\infty}(cx+b)f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}cxf(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}bf(x)dx$$

$$=c\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx+b\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$$

$$=cE(X)+b$$

证明：

$$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)E(Y)$$

证明：左边

$$=E\{XY-YE(X)-XE(Y)+E(X)E(Y)\}$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)-E(X)E(Y)+E(X)E(Y)$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)$$

调整设备的平均次数

某批产品的次品率为0.1,检验员每天检查4次,每次随机地取10件产品进行检验,如果发现其中的次品数多于1 ,就去调整设备. 以$\boxed{X}$表示一天中调整设备的次数,试求 $E(X)$

解: 设$\boxed{Y_i}$为第i次检查时发现的次品数,则

$$Y_i\sim B(10,0.1)$$

设$\boxed{X_i}$为第i次检查时需要调整设备的次数

$$X_i=\begin{cases}1 & Y_i>1\\ 0 & Y_i\le 1\end{cases}\quad \text{显然有}\quad X=\sum_{i=1}^{4}X_i$$

解: 设Y_i为第i次检查时发现的次品数,则

$$Y_i\sim B(10,0.1)$$

设X_i为第i次检查时需要调整设备的次数

$$X_i=\begin{cases}1 & Y_i>1\\ 0 & Y_i\le 1\end{cases}\quad \text{显然有}\quad X=\sum_{i=1}^{4}X_i$$

$$P\{X_i=0\}=P\{Y_i=0\}+P\{Y_i=1\}$$

$$=(0.9)^{10}+C_{10}^{1}(0.1)(0.9)^9=1.9(0.9)^9$$

$$P\{X_i=1\}=P\{Y_i>1\}=1-P\{Y_i\le 1\}$$

$$=1-1.9(0.9)^9$$

则 X_i服从0-1分布

X_i	0	1
p	$1.9(0.9)^9$	$1\text{-}1.9(0.9)^9$

$$E(X_i)=1-1.9(0.9)^9\qquad i=1,2,3,4$$

从而 $E(X)=\sum_{i=1}^{4}E(X_i)=4\left[1-1.9(0.9)^9\right]=1.0556$

例:超几何分布的数学期望

求服从**超几何分布**的随机变量X的期望$E(X)$

$$P\{X=m\}=C_M^m C_{N-M}^{n-m}/C_N^n \quad m=0,1,2,\ldots,n \quad n\le M\le N$$

原始模型：N个球中有M个红球，余下为白球，从中任取n个球，n个球中的红球数为X

分析

1）显然直接求解很困难。因此应该想到用数学期望的性质求解。

求服从**超几何分布**的随机变量X的期望$E(X)$

$$P\{X=m\}=C_M^m C_{N-M}^{n-m}/C_N^n \quad m=0,1,2,\ldots,n \quad n\le M\le N$$

原始模型：N个球中有M个红球，余下为白球，从中任取n个球，n个球中的红球数为X

分析

2）可以设想这n个球是逐个不放回抽取的
令X_i表示第i次取到红球的个数，$i=1,2,\cdots,n$
则 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$

3) 由抽签的公平性有：

$$P\{X_i=1\}=M/N$$

解：设想这n个球是逐个不放回抽取的，共取了n次。令X_i表示第i次取到红球的个数，$i=1,2,\cdots,n$ 则

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

由抽签的公平性有：$P\{X_i=1\}=M/N$

从而$E(X_i)=1\times\frac{M}{N}+0\times\left(1-\frac{M}{N}\right)=\frac{M}{N}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{nM}{N}$$

M,N较大时，超几何分布近似为二项分布：

$$X\sim B\left(n,\frac{M}{N}\right)$$

方法总结：

1. 设置X_i，使得$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$
2. 分析X_i的所有可能取值(一般只有两个取值)
3. 按照X_i的分布律计算出$E(X_i)$
4. $E(X)=E(X_1)+\cdots+E(X_n)$

例:射击命中次数的期望

向某一目标进行射击，直至命中k次为止。已知命中率为$p>0$. 求命中次数X的数学期望。

分析：X的分布律为

$$P\{X=i\}=C_{i-1}^{k-1}p^k(1-p)^{i-k},\qquad i=k,k+1,\cdots$$

$$E(X)=\sum_{i=k}^{+\infty}iC_{i-1}^{k-1}p^k(1-p)^{i-k}$$

直接计算是一件很困难的事。因此考虑用数学期望的性质$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$进行求解。

1 2 . . i . . k

X_i表示第$i-1$次命中以后，到第i次命中中的射击次数

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

数 学 期 望

X_i的分布律为：

X_i	1	2	$\cdots$	m	$\cdots$
$P\{X_i=m\}$	p	$(1-p)p$	$\cdots$	$(1-p)^{m-1}p$	$\cdots$

$$E(X_i)=\sum_{m=1}^{+\infty}m(1-p)^{m-1}p$$

$$=p\left[\sum_{m=1}^{+\infty}mx^{m-1}\right]_{x=1-p}=p\left[\sum_{m=1}^{+\infty}x^m\right]'_{x=1-p}$$

数 学 期 望

例:4.1.7 向某一目标进行射击，直至命中k次为止。已知命中率为 $p>0$. 求命中次数 X 的数学期望。

解：设X_i表示第$i-1$次命中以后，到第i次命中的射击次数。则有$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$

X_i的分布律为：

X_i	1	2	.....	m	......
$P\{X_i=m\}$	p	$(1-p)p$	.....	$(1-p)^{m-1}p$	......

$$E(X_i)=\sum_{m=1}^{+\infty} m(1-p)^{m-1}p=p\left[\sum_{m=1}^{+\infty} mx^{m-1}\right]_{x=1-p}=p\left[\sum_{m=1}^{+\infty} x^m\right]'_{x=1-p}=\frac{1}{p}$$

从而 $E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_k)$

$$=\frac{1}{p}k$$

数学期望的应用——验血的次数

传染病检查

若某地流行甲肝，为控制病情，急需对人群作血清检查。若共有n个人，人群的发病率为p，有两种检查方式：①一人一次，共需n次 ② k个人一组，若血清为阴性，则查一次即可，否则需对每人重作一次检查，此时共需 $k+1$次。

问：选用哪一种方法更好?

•[分析] 用第一种方法需n 次检查，现判断用第二种方法需多少次。

•第二种方法所用次数显然是不定的，设为X次，则我们可据其期望$E(X)$ 来判断这种方法是否会更好。

X的期望直接计算比较困难，我们设第i个人需作X_i次检查($i=1,\cdots,n$)，则$X=X_1+\cdots+X_n$

$$E(X)=E(X_1)+\cdots+E(X_n)$$

• X_i 的可能取值有两个：$1/k$ 或 $1+1/k$ (k 个人共作$k+1$次，每人平均$(1+k)/k$次)

•令A_j表示k个人中第j个人患病，($j=1,\cdots,k$) 则

$$P\left\{X_i=\frac{1}{k}\right\}=P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_k})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot\cdots\cdot P(\overline{A_k})$$

$$=(1-p)^k$$

$$P\left\{X_i=1+\frac{1}{k}\right\}=P(A_1\cup A_2\cdots\cup A_k)=1-(1-p)^k$$

X_i的分布律为：

X_i	$\frac{1}{k}$	$1+\frac{1}{k}$
P	$(1-p)^k$	$1-(1-p)^k$

$$E(X_i)=\frac{1}{k}(1-p)^k+\left(1+\frac{1}{k}\right)\left[1-(1-p)^k\right]$$

$$=1+\left[\frac{1}{k}-(1-p)^k\right]=1-\boxed{\left[(1-p)^k-\frac{1}{k}\right]}$$

$E(X)=n-n\times\left[(1-p)^k-\frac{1}{k}\right]$，故关键在于 $(1-p)^k-\frac{1}{k}$ 的取值，当它大于0时，可减少检查次数!

例如，$p=0.01$时，取$k=10$，则 $(1-p)^k-\frac{1}{k}=0.8044$，可减少百分之八十的工作量!