分布律——产品检验

例 某种产品在生产过程中的废品率为$p(0<p<1)$，对产品逐个检查，直到检查出5个不合格品为止，试写出停止检查时已检查的产品个数X的分布律。

解：进行 k 次检查，指定的5次检查出现不合格品的概率为$p^5(1-p)^{k-5}$。

事件$\{X=k\}$相当于第k次检查到的产品必为不合格品，而前$k-1$ 次检查中查出4件不合格品。

这种情形共有C_{k-1}^4种不同的方式。

故分布律为：$P\{X=k\}=C_{k-1}^4p^5(1-p)^{k-5}$

其中，$k=5,6,\ldots$

分布律——抛骰子

例 同时抛掷两颗骰子,观察它们出现的点数,求两颗骰子中出现的最大点数的概率分布.

解:设两颗骰子中出现最大点数为X,则X的可能取值为:1, 2, 3, 4, 5, 6

基本事件总数: 36

$\{X=1\}$ 只包含一个基本事件

两颗骰子都出现k点 1

$\{X=k\}$ 包含的基本事件个数

一颗出现k点,另一颗小于k点

$C_2^1 \cdot 1 \cdot C_{k-1}^1$

X的分布律为

X	1	2	3	4	5	6
P	1/36	1/12	5/36	7/36	1/4	11/36

二项分布——产品抽检试验

例　设有一批同类产品共有N个，其中次品有M个，现从中任取(有放回)n个，试求取出n件中所含的次品件数X的分布律。

解：设想产品是逐件有放回取出，由于各次抽到的次品是相互独立的，抽n件产品相当于做n重贝努里试验，故 $X \sim B\left(n, \frac{M}{N}\right)$

所以, X的分布律为 $P\{X=k\} = C_n^k \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}$,

其中 $k = 0, 1, 2, \ldots, n$。

思考：将抽取方式改为无放回抽取，试写出X的分布律。

$$P\{X=k\} = \frac{C_{N-M}^{n-k} C_M^k}{C_N^n} \quad k = 0,1,\ldots,l \quad l = \min(M, n)$$

此时称X服从**超几何分布**.

二项分布——强弱对抗试验

例3：两人进行乒乓球对抗赛，得胜场次多的一方获胜，已知弱者每场获胜的概率为**0**.4，现有比赛3场、比赛7场两个方案，哪一个对弱者有利？

解：设A={弱者获胜}，弱者获胜的场数为X

双方逐场较量从而相互独立，视为独立重复试验

（1）当双方比赛3场时，$X\sim B(3,0.4)$

$$\therefore P(A)=P\{X\geq 2\}=\sum_{k=2}^{3}C_3^k\cdot 0.4^k\cdot 0.6^{3-k}\approx 0.352$$

（2）当双方比赛7场时， $X \sim B(7, 0.4)$

$$\therefore P(A) = P\{X \geq 4\} = \sum_{k=4}^{7} C_7^k \cdot 0.4^k \cdot 0.6^{7-k} \approx 0.29$$

因此，第一种方案对弱队更有利一些.

二项分布——设备排障试验

例4：有300台独立运转的同类机床，每台发生故障的概率都是0.01，若一人排除一台的故障。问至少需要多少名工人，才能保证不能及时排除故障的概率小于0.01。

解：设X表示同一时刻发生故障的机床数，

$$X \sim B(300, 0.01)$$

配N个工人，应使

$$0.01 > P\{X > N\} = 1 - P\{X \le N\}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{N} C_{300}^{k} \cdot 0.01^{k} \cdot (1 - 0.01)^{300-k}$$

即是求上述不等式成立的最小N值。

因为$300\times 0.01=3$（该值很小），故可近似认为X服从$\lambda=3$的泊松分布，即 $X\sim P(3)$

$$\therefore 0.01 > P\{X>N\}=\sum_{k=0}^{N}\frac{3^k}{k!}e^{-3}$$

查附表1 可得

$$P\{X\geq 8\}=0.011905>0.01$$

$$P\{X\geq 9\}=0.003803<0.01$$

思考：至少需要配备修理工人8个还是9 个？

至少需要配备8 个修理工人

结合X的含义可知，当有8个工人时，出故障的机床无人修理的概率小于0.01

泊松分布——宇宙粒子

已知运载火箭在飞行中，进入它的仪器舱的宇宙粒子数服从参数为λ的泊松分布。而进入仪器舱的每个粒子落到仪器的重要部位的概率等于p，试求恰有k个粒子落到仪器重要部位的概率。

分析：粒子落到仪器重要部位的试验是由前后相关联的两个试验所组成：

第一个试验是宇宙粒子进入仪器舱，进入的粒子数服从泊松分布；

再是进入仪器舱的这些粒子落到仪器舱重要部位，其数目服从二项分布；

这类问题可用全概率公式求解。

解：从第一个试验入手，划分样本空间。

设 X表示宇宙粒子进入仪器舱的个数。

由题设$X \sim P(\lambda)$ 即

$$P\{X=m\}=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} \quad ,m=0,1,2,....$$

显然$\{X=m\},(m=0,1,2,..)$构成样本空间的一个划分

（回忆：样本空间的有限划分如何定义？）

设Y表示落到重要部位的粒子数，由题意知

$$P\{Y=k|X=m\}=C_m^k p^k(1-p)^{m-k}, \quad k=0,1,2,....,m$$

由全概率公式得所求概率为

$$P\{Y=k\}=\sum_{m=o}^{+\infty}P\{X=m\}P\{Y=k|X=m\}$$

$$=\sum_{m=o}^{+\infty}\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}*C_m^k p^k(1-p)^{m-k} \qquad (m\geq k)$$

$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{m=k}^{+\infty}\frac{\lambda^{m-k}(1-p)^{m-k}}{(m-k)!}$$

$$\underline{\underline{n=m-k}}\quad \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^n}{n!}}$$

$$\boxed{\xRightarrow{\lambda^*=\lambda(1-p)} e^{\lambda^*}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{*n}}{n!}e^{-\lambda^*}=e^{\lambda^*}}$$

$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}*e^{\lambda(1-p)}$$

$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p} \qquad k=0,1,2,....$$

落到仪器重要部位的粒子数服从参数为λp 的泊松分布。