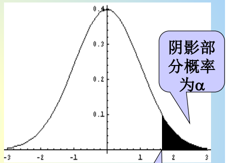
§2 常用的分布

一、四个常用分布

1. **标准正态分布** $X \sim N(0,1)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}},\ x\in R$$



上侧分位数u_α（$0<\alpha<1$）：

$$P\{X>u_\alpha\}=\int_{u_\alpha}^{+\infty}f(x)dx=\alpha$$

对于正态分布有：$\Phi(u_\alpha)=1-\alpha$

$$\because P\{X>u_\alpha\}=1-P\{X\le u_\alpha\}=1-\Phi(u_\alpha)=\alpha$$

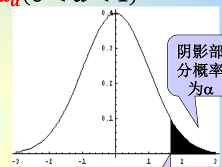
查表： 如 $\alpha=0.025$ 时，$u_\alpha=?$

$\Phi(u_{0.025})=1-0.025=0.975 \Rightarrow u_{0.025}=1.96$

---

1. **标准正态分布**

若标准正态分布的上侧分位数为$u_\alpha(0<\alpha<1)$



一般正态分布$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的上侧分位数u_α^*的计算方法：

$$P\{X>u_\alpha^*\}=\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{u_\alpha^*-\mu}{\sigma}\right\}=\alpha}$$

$$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)\Rightarrow \boxed{P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}>u_\alpha\right\}=\alpha}$$

$$\therefore \frac{u_\alpha^*-\mu}{\sigma}=u_\alpha \Rightarrow u_\alpha^*=\mu+\sigma\cdot u_\alpha$$

---

2. 自由度为n的χ^2 (卡方)分布 $\chi^2\sim\chi^2(n)$

自由度的含义

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\Gamma(\frac{n}{2})}(\frac{x}{2})^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},$$

其中,$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\alpha>0$ 为Gama 函数.

Γ函数的主要性质：$\Gamma(1)=1,\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi},\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$

当$n=2$时，卡方分布就是指数分布$E\left(\frac{1}{2}\right)$

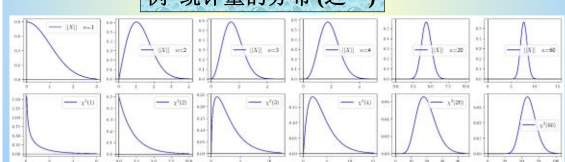
---

2. 自由度为n的χ^2 (卡方)分布 $\chi^2\sim\chi^2(n)$

定理6.2.1 设 X_1，X_2，…，X_n相互独立且都服从标准正态分布，则 $\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$

即随机变量χ^2服从自由度为 n 的卡方分布.

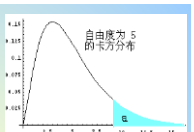
例 统计量的分布 (之一)



当$n=2$时，卡方分布就是指数分布

• $\chi^2(n)$ 的上侧分位数 $\chi_\alpha^2(n)$（$0<\alpha<1$）:

$$P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty}f_{\chi^2}(x)dx=\alpha$$



TIPS 例 查表计算

• χ^2分布的三条性质：

性质1.（数字特征）设$\chi^2\sim\chi^2(n)$，则有

$E(\chi^2)=n$， $D(\chi^2)=2n$

性质2.（可加性）设Y_1,Y_2 相互独立且$Y_1\sim\chi^2(n_1)$，$Y_2\sim\chi^2(n_2)$，则 $Y_1+Y_2\sim\chi^2(n_1+n_2)$

性质3.（大样本分位数）当n足够大(如$n>45$)时，有 $\chi_\alpha^2(n)\approx n+u_\alpha\sqrt{2n}$，其中$u_\alpha$满足$\Phi(u_\alpha)=1-\alpha$.

• χ^2分布的三条性质：

性质3.（大样本分位数）当n足够大(如$n>45$)时，有 $\chi_\alpha^2(n)\approx n+u_\alpha\sqrt{2n}$，其中$u_\alpha$满足$\Phi(u_\alpha)=1-\alpha$.

性质3的分析：

(1) $X_i\sim N(0,1)$, $X_i^2\sim\chi^2(1), i=1,\cdots,n$ 相互独立

$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$

根据独立同分布中心极限定理，当n足够大时， χ^2近似为正态分布 —— 参数如何定？

(2) 根据卡方分布性质(1) $E(\chi^2)=n$， $D(\chi^2)=2n$

(3) χ^2近似为一般正态分布， $\chi^2\sim N(n,2n)$

其分位数为 $\chi_\alpha^2(n)\approx n+u_\alpha\sqrt{2n}$

$X\sim N(\mu,\sigma^2)\rightarrow u_\alpha^*=\mu+\sigma\cdot u_\alpha$

3. 自由度为 n 的 t 分布　　$T \sim t(n)$

(又称学生氏分布----第一个研究者以Student作笔名发表文章)

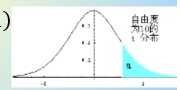
$$f(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}},\quad x\in R$$

定理6.2.2 设 随机变量 X, Y 相互独立， $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，则 $T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$

即随机变量 T 服从自由度为n的t分布.

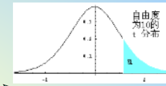
- $t(n)$ 的上侧分位数 $t_\alpha(n)$　$(0<\alpha<1)$

$$P\{T>t_\alpha(n)\}=\int_{t_\alpha(n)}^{+\infty} f_T(x)dx=\alpha$$



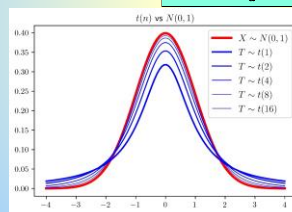
T 分布的特点:

- 关于纵轴对称　$t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$
- n 较大时(n>30)，　$t_\alpha(n)\approx u_\alpha$



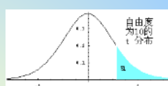
$\because P\{T\le -t_\alpha\}=P\{T>t_\alpha\}=\alpha$

$\therefore P\{T>-t_\alpha\}=1-\alpha$　　即　$t_{1-\alpha}=-t_\alpha$



T 分布的特点:

- 关于纵轴对称　$t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$
- n 较大时(n>30)，　$t_\alpha(n)\approx u_\alpha$



例　查表计算:　　$t_{0.95}(20)=?$　　$t_{0.95}(80)=?$

解: $t_{0.95}(20)=t_{1-0.05}(20)=-t_{0.05}(20)=-1.7247$

$t_{0.95}(80)=-t_{0.05}(80)\approx -u_{0.05}=-1.645$

$\Phi(u_\alpha)=1-\alpha$

4. F 分布　　$F \sim F(n_1, n_2)$

$$f(x)=\begin{cases} n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} \dfrac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})} x^{\frac{n_1}{2}-1}(n_1x+n_2)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

其中，n_1 为 F 分布的第一自由度，n_2 为 F 分布的第二自由度

定理6.2.3 设 随机变量X，Y 相互独立， $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，则 $F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}\sim F(n_1,n_2)$

即随机变量 F 服从第一自由度为n_1，第二自由度为n_2的F分布。

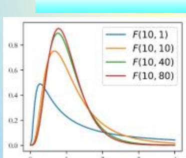
推论: 若　$F\sim F(n_1,n_2) \Rightarrow \dfrac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$

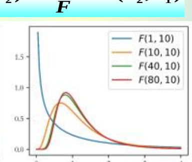
4. F 分布　　$F \sim F(n_1, n_2)$

定理6.2.3 设 随机变量X，Y 相互独立， $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，则 $F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}\sim F(n_1,n_2)$

即随机变量 F 服从第一自由度为n_1，第二自由度为n_2的F分布。

推论: 若　$F\sim F(n_1,n_2) \Rightarrow \dfrac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$





- $F(n_1, n_2)$的上侧分位数$F_\alpha(n_1,n_2)$　$(0<\alpha<1)$:

$$P\{F>F_\alpha(n_1,n_2)\}=\int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{+\infty} f_F(x)dx=\alpha$$

推论: 若　$F\sim F(n_1,n_2)\Rightarrow F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\dfrac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$

证: $1-\alpha=P\{F>F_{1-\alpha}(n_1,n_2)\}=P\{\dfrac{1}{F}<\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\}$

$\Rightarrow P\{\boxed{\dfrac{1}{F}>\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}}\}=\alpha$

又 $\because \dfrac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)\Rightarrow P\{\boxed{\dfrac{1}{F}>F_\alpha(n_2,n_1)}\}=\alpha$

由分位数定义得到

$\therefore \dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}=F_\alpha(n_2,n_1)$

TIPS

例　统计量的分布 (之二)

二、抽样分布定理

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\bar{X}$，S^2分别是样本均值和样本方差，则

定理6.2.4 (1) $\bar{X}$，S^2相互独立　(2) $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$

(3) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ (4) $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

证明： (4)　由(2)得　$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

由(3)得　$V=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

由(1)可知：U和V相互独立，再由t分布构造定理可得

$$\boxed{\frac{U}{\sqrt{V/(n-1)}}}=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Big/\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}*\frac{1}{n-1}}=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

定理6.2.5 设$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$分别是来自正态总体$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本，且相互独立，$\bar{X},S_1^2$和$\bar{Y},S_2^2$为各自的样本均值和样本方差，则

(1)　$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

(2)　当$\sigma_1^2=\sigma_2^2$时，

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

其中，$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

[(2)分析] $\bar{X}-\bar{Y}$服从正态分布，S^2可化为χ^2分布，二者组合而成的统计量应服从 t分布；再确定其系数与参数.

证明： (2) 由于$\bar{X}\sim N\left(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n_1}\right),\bar{Y}\sim N\left(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$，从而

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时，可化为

$$U=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

【注意：比较该统计量与目标统计量的相似性】

根据抽样分布定理6.2.4 —(3)可知

$$\chi_1^2=\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(n_1-1),\chi_2^2=\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n_2-1)$$

当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时，根据卡方分布可加性，有

$$V=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2)$$

$$U=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

由于$\bar{X},S_1^2$和$\bar{Y},S_2^2$相互独立，从而U与V也相互独立，故

$$T=\boxed{\frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n_1+n_2-2}}}}=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$