电子科技大学 2024-2025 学年第 2 学期期中考试试卷参考答案

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有连续的偏导函数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$，则在点 (x_0,y_0) 处下列命题错误的是（ D ）

(A) 函数 $f(x,y)$ 可微；　　(B) 函数 $f(x,y)$ 沿各个方向的方向导数存在；

(C) 函数 $f(x,y)$ 连续；　　(D) 函数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 可微.

2. 设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得最小值，则下列结论正确的是(B)

(A) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数大于零；　　(B) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数等于零；

(C) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数小于零；　　(D) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数不存在.

3. 函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $n=(1,2,2)$ 的方向导数为（ D ）

(A) 12；　　(B) 6；　　(C) 4；　　(D) 2.

4. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=$（ A ）

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$；　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$；

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$；　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$.

5. 设 D 是第二象限一有界闭域, 且 $0<y<1$, 则以下三个积分

$I_1=\iint_D yx^3d\sigma,\ I_2=\iint_D y^2x^3d\sigma, I_3=\iint_D y^{\frac{1}{2}}x^3d\sigma$ 的大小顺序为（ D ）

(A) $I_1<I_2<I_3$；　　(B) $I_2<I_1<I_3$；

(C) $I_3<I_2<I_1$；　　(D) $I_3<I_1<I_2$.

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{(1-xy)^{\frac{1}{x}}\tan x}{xy}=$ ____ e^{-1} ____.

2. 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^z+xyz+x+\cos x=2$ 确定, 则 $dz\big|_{(0,1)}=$ ____ $-dx$ ____.

3. 曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为 $2x-y-z=1$.

4. 星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t \quad (a>0)$ 的全长为____$\underline{6a}$_____.

5. 设 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\oint_\Gamma (x^2+y)ds=$__$\underline{\dfrac{2}{3}\pi a^3}$_____.

三、（10 分）求函数 $z=(y+\dfrac{x^3}{3})e^{x+y}$ 的极值点与极值.

解：计算函数的一阶、二阶偏导数得

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=(y+x^2+\dfrac{x^3}{3})e^{x+y}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=(1+y+\dfrac{x^3}{3})e^{x+y}$，令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0, \dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，解之得驻点 $(1,-\dfrac{4}{3}),(-1,-\dfrac{2}{3})$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(y+2x+2x^2+\frac{x^3}{3})e^{x+y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(1+y+x^2+\frac{x^3}{3})e^{x+y}$$

在驻点 $(1,-\dfrac{4}{3})$ 处，$A=3e^{-\frac{1}{3}}, B=e^{-\frac{1}{3}}, C=e^{-\frac{1}{3}}$. 由于 $AC-B^2=2e^{-\frac{2}{3}}>0, A>0,$ 因此函数在该点取得极小值，且极小值为 $-e^{-\frac{1}{3}}$.

在驻点 $(-1,-\dfrac{2}{3})$ 处，$A=-e^{-\frac{5}{3}}, B=e^{-\frac{5}{3}}, C=e^{-\frac{5}{3}}$. 由于 $AC-B^2=-2e^{-\frac{10}{3}}<0,$ 因此 $(-1,-\dfrac{2}{3})$ 不是极值点.

四、（10 分）设函数 $z=f(xy,yg(x)),$ 其中函数 f 具有二阶连续偏导，函数 $g(x)$ 可导，且在 $x=1$ 处 $g(1)=1, g'(1)=0,$ 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(1,1)}$.

解：由 $z=f(xy,yg(x)),$ 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1+yg'(x)f_2, \dfrac{\partial z}{\partial y}=xf_1+gf_2,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1+y[xf_{11}+gf_{12}]+g'f_2+yg'[xf_{21}+gf_{22}]=f_1+g'f_2+xyf_{11}+(xyg'+yg)f_{12}+ygg'f_{22},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x[xf_{11}+gf_{12}]+g[xf_{21}+gf_{22}]=x^2f_{11}+2xg(x)f_{12}+g^2f_{22},$$

从而，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)}=f_1(1,1)+f_{11}(1,1)+f_{12}(1,1), \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(1,1)}=f_{11}(1,1)+2f_{12}(1,1)+f_{22}(1,1).$

五、（8 分）已知函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 试分析函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性及可微性.

解：由 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)=0, \left|\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le1$，得 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，因此函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

接着计算两个偏导数得

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,\ f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0\ .$$

计算极限

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta z-(f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y)}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0.$$

由可微的定义可知，函数函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

六、（10 分）已知点 $P(1,-2,1)$ 是空间曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 上一点，求曲线在点 P 的切线方程.

解：设方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 确定了隐函数 $y=y(x), z=z(x)$.

$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 两边对 x 求导得 $\begin{cases}2x+2yy'+2zz'=0\\ 1+y'+z'=0\end{cases}$，解方程组得 $\begin{cases}y'=\dfrac{x-z}{z-y}\\ z'=\dfrac{y-x}{z-y}\end{cases}$.

曲线 Γ 在 $P(1,-2,1)$ 的切向量 $\tau=(1,y',z')\big|_{(1,-2,1)}=(1,0,-1)$，

因此曲线 Γ 在 P 点的切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$.

七、（12 分）设函数 $f(x,y)=axy^2+byx^2$ 在点 $(1,1)$ 处沿方向 $l=(0,1)$ 的方向导数取得最大值 6.

（1）求 a,b 的值；

（2）计算 $\iint_D f(x,y)dxdy$，其中 $D: x^2+y^2\le1,\ x\ge0,\ y\ge0$.

解：（1）计算函数偏导数

$f_x(x,y)=ay^2+2byx,\ f_y(x,y)=2axy+bx^2$，在点$(1,1)$处有$f_x(1,1)=a+2b,\ f_y(1,1)=2a+b$.

由$f(x,y)$在点$(1,1)$处沿方向$l=(0,1)$的方向导数取得最大值 6，可得梯度$(a+2b,2a+b)$与$l=(0,1)$同向.

故$a+2b=0, 2a+b>0$，且 $2a+b=6$, 解得$a=4, b=-2$.

(2) 由（1）知$f(x,y)=4xy^2-2yx^2$，故

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(4r^4\cos\theta\sin^2\theta-2r^4\sin\theta\cos^2\theta)dr$$

$$=\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos\theta\sin^2\theta-2\sin\theta\cos^2\theta)d\theta\ =\frac{2}{15}.$$

八、（10 分）设球体$x^2+y^2+z^2\le 2z$的体密度$\mu(x,y,z)=x+y+z$, 求该球体的质量.

解：记球体为 V，则球体的质量可表示为

$$I=\iiint_V\mu(x,y,z)dV=\iiint_V(x+y+z)dV.$$

下面计算该三重积分. 由于 V 分别关于$x=0, y=0$对称, 且被积函数关于变量x,y均为奇函数，故有

$$\iiint_V xdV=\iiint_V ydV=0.$$

$$I=\iiint_V zdV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\cdot\sin\varphi d\varphi=\frac{4\pi}{3}.$$

九、（10 分）求质量分布在半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\ \ (R>0)$上的均匀几何体的形心.

解： 记几何体形心为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. 因为几何体关于$x=0, y=0$对称，所以$\bar{x}=\bar{y}=0$.

下面计算$\bar{z}$. 记半球面为S，其在xOy坐标面投影为$D: x^2+y^2\le R^2$.

计算可得半球面法向量为$(-z_x,-z_y,1)=(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},1)$,

计算曲面积分

$$\iint_S zdS=\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}})^2+(\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}})^2}dxdy$$

$$=\iint_D Rdxdy=\pi R^3$$

由形心公式可得 $\bar{z}=\dfrac{\iint_S zdS}{\iint_S dS}=\dfrac{\pi R^3}{2\pi R^2}=\dfrac{R}{2}$. 因此该几何体的形心为$(0,0,\frac{R}{2})$.