# 2023年概率统计期中考试

一、简答题（共50分，共 5题，每题10 分）

1. 判断以下关系是否成立，并说明理由

(1) $A(B-C)=AB-AC$，$A-AB=A-B$

(2) $AB=\phi \Leftrightarrow P(AB)=0$

**解**：(1) 根据事件运算律中的分配律，等式 $A(B-C)=AB-AC$ 成立 (2 分)

$A-AB=A\Omega-AB=A(\Omega-B)=A\overline{B}=A-B$ 成立 (3 分)

(2) $AB=\phi \Rightarrow P(AB)=P(\phi)=0$ (2 分)

反之未必成立，例如，$X\sim N(0,1)$，$AB=\{X=1\}$，则$P(AB)=0$，但$AB\neq\phi$ (3 分)

也可以类似举例，$AB$为连续型随机变量的有限个点的集合，非空但概率为 0

- 若说“反之不成立”，扣1分，因为有时充要条件可以成立。

2. 对于二维随机变量$(X,Y)$，下述命题是否成立？若成立，请说明方法；若不成立，举例说明原因.

(1) 根据联合分布能确定边缘分布；(2) 根据边缘分布能确定联合分布.

**解**：(1) 根据联合发布能够确定边缘分布 (1 分)

若$(X,Y)$的联合分布函数为$F(x,y)$，则边缘分布为 (4 分)

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y),\quad F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$$

(2) 根据边缘分布不一定能确定联合发布 (1 分)

当$X,Y$相互独立时，根据边缘分布能确定联合发布：$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$ (2 分)

当$X,Y$不是相互独立时，要确定联合分布还需要考虑变量之间关系，例如 (2 分)

$$X\sim N(0,1),\qquad Y\sim N(0,1),\ (X,Y)\sim N(0,1;0,1;\rho)$$

此时，只根据边缘分布无法确定联合分布.

3. 给出以下分布的分布律(或概率密度)和分布函数：

(1) $X$服从$0-1$ 分布(取 1 的概率为$p$)；(2) $X\sim U(0,1)$；(3) $X\sim N(0,1)$

**解**：(1) $X$服从$0-1$ 分布，即 $X\sim B(1,p)$，其分布律为

$P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x},x=0,1$ 或分布表

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | $1-p$ | $p$ |

其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-p, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

(2) $X\sim U(0,1)$，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}$$

其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

(3) $X\sim N(0,1)$，其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},x\in R$$

其分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

给分：(1) 分布律 2 分，分布函数 2 分；　(2)、(3) 概率密度各 2 分，分布函数各 1 分

4. 某人途经一个十字路口，所经方向有 50%时间亮红灯，遇红灯需等待直至绿灯，等待时间在区间[0, 20](单位：秒)上服从均匀分布. 用$X$表示此人的等待时间，求$X$的分布函数，并分析$X$是否为离散型或连续型随机变量，说明理由.

**解：** 设$A$=“经过路口时为绿灯”，则 $P(A)=\frac{1}{2}$

(1) $x<0$时，　$F(x)=0$

(2) $x\geq 20$时，$F(x)=1$

(3) $0\leq x<20$时，根据全概率公式有

$$F(x)=P\{X\leq x\}=P(A)P\{X\leq x|A\}+P(\overline{A})P\{X\leq x|\overline{A}\}$$
$$=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{x}{20}=\frac{1}{2}+\frac{x}{40}$$

(4) 综合可得

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}+\frac{x}{40}, & 0\leq x<20\\ 1, & x\geq 20\end{cases}$$

(5) $X$不是离散型随机变量，因为它的分布函数在区间[0,20)上严格单增(不是阶梯函数)；

$X$也不是连续型随机变量，因为它的分布函数在$x=0$处不连续，左极限为 0，右极限为1/2.

给分：(1)和(2) 各 1 分，(3) 2 分，(4) 2 分；　(5)不是离散 2 分、不是连续 2 分

5. 设随机变量$X,Y$相互独立，且$X\sim N(0,1)$，$Y$的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<z\},z\in R$. （用$\Phi$表示结果即可）

【可用全概率公式计算，也可用独立性展开】

**解：** 令$Z=XY$，则

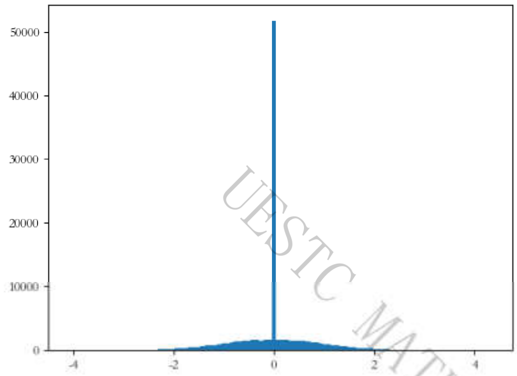
$$F_Z(z)=P\{XY<z\}=P\{XY<z,Y=0\}+P\{XY<z,Y=1\}$$
$$=P\{Y=0\}P\{XY<z|\,Y=0\}+P\{Y=1\}P\{XY<z|Y=1\}$$

由于 $P\{XY<z|Y=1\}=P\{X<z\}=\Phi(z)$

当$z<0$时，$P\{XY<z|\,Y=0\}=0$

当$z\geq 0$时，$P\{XY<z|\,Y=0\}=1$

$$\therefore\quad F_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\Phi(z), & z<0\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi(z), & z\geq 0\end{cases}$$




给分：根据 Y 取值展开 3 分、根据独立性展开 3 分、分布函数表达式 4 分

二、（15 分）甲、乙、丙三个工厂生产同型号的产品，其产品分别占总产量的25%, 35%, 40%. 各厂产品的次品率分别为5%, 4%, 2%.　现将三个厂的产品堆放在一起，从中任取一件，求：(1) 取得次品的概率；(2) 若取得次品，最可能是哪个厂生产的？ (3) 发现取得的产品不是丙厂生产的情况下，是甲厂生产的概率.

**解：** 设$A_1, A_2, A_3$分别表示甲、乙、丙三个工厂生产的产品，$B$表示取得次品，则$A_1, A_2, A_3$构成样本空间的有限划分，即$A_1, A_2, A_3$互不相容，且 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$

(1) 根据全概率公式可得

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B|A_i)$$
$$= 0.25 \times 0.05 + 0.35 \times 0.04 + 0.40 \times 0.02 = 0.0345$$

(2) 根据贝叶斯公式(或条件概率)可得

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.25 \times 0.05}{0.0345} = \frac{25}{69} \approx 0.3623$$

类似可得：

$$P(A_2|B) = \frac{28}{69} \approx 0.4058, \qquad P(A_3|B) = \frac{16}{69} \approx 0.2319$$

因此，若取得次品，最可能是乙厂生产的.

(3) 根据题意可知：$\overline{A_3} = A_1 \cup A_2$

$$P(A_1|\overline{A_3}) = \frac{P(A_1\overline{A_3})}{P(\overline{A_3})} = \frac{P(A_1 \cap (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1 \cup A_1A_2)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1) + P(A_2)}$$
$$= \frac{0.25}{0.25 + 0.35} = \frac{5}{12} \approx 0.4167$$

说明：这里利用到$A_1, A_2, A_3$构成样本空间的有限划分，从而

$$\overline{A_3} = A_1 \cup A_2, \quad A_1A_2 = \phi, \quad P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

给分：(1)、(2)、(3)各 5 分

三、（10 分）在区间$[0, a]$上任意选一个位置，记为$X$，表示某个质点的坐标. 试求$X$的分布函数.

**解：** 设$X$的分布函数为$F(x)$，由题设易知这是均匀分布

(1) 当$x < 0$时，$F(x) = 0$ (2 分)

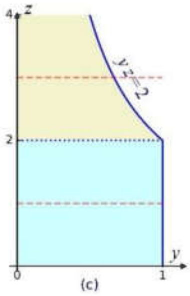
(2) 当$x \geq a$时，$F(x) = 1$ (2 分)

(3) 当$0 \leq x < a$时，$F(x) = P\{0 < X \leq x\} = \frac{x-0}{a-0} = \frac{x}{a}$ (4 分)

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{a}, & 0 \leq x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}$$

给分：分布函数综合表达式 2 分.

四、（10 分）设随机变量$X, Y$相互独立，且$X \sim U(0,2), Y \sim U(0,1)$，求$Z = X/Y$的概率密度.



(c)

**解**：$X, Y$的联合概率密度函数为 (1 分)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & else \end{cases}$$

$Z = X/Y$的概率密度为 (2 分)

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y)\, dy$$

$f(yz, y)$的非零区域为$yOz$平面上的子区域$G = \{(y,z) | 0 \leq yz \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$，如图所示 (1 分)

当$z < 0$时，$f_Z(z) = 0$ (1 分)

当$0 \leq z < 2$时， (2 分)

$$f_Z(z) = \int_0^1 \frac{y}{2}\, dy = \frac{1}{4}$$

当$z \geq 2$时， (2 分)

$$f_Z(z) = \int_0^{\frac{2}{z}} \frac{y}{2}\, dy = \frac{1}{z^2}$$

综合可得 (1 分)

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq z < 2 \\ \frac{1}{z^2}, & z \geq 2 \end{cases}$$

五、（15 分）设二维随机变量$(X, Y)$的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x \\ 0, & else \end{cases}$$

求：(1) $(X, Y)$的边缘概率密度$f_X(x), f_Y(y)$，并判断$(X, Y)$是否相互独立；

(2) 条件概率密度函数$f_{Y|X}(y|x)$；

(3) $P\left\{-5 < Y < \frac{1}{2} \middle| X = \frac{1}{2}\right\}$.

**解**：(1) $(X, Y)$的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy = \begin{cases} \int_0^{2x} 1\, dy = 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & else \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx = \begin{cases} \int_{\frac{y}{2}}^{1} 1\, dy = 1 - \frac{y}{2}, & 0 < y < 2 \\ 0, & else \end{cases}$$

由于在$0<x<1,0<y<2x$时，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，因此$X$与$Y$不相互独立.

(2) 当$0<x<1$时，$f_X(x)>0$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 0<y<2x\\ 0, & else\end{cases}$$

(3) 由于$f_{Y|X}(y|x)$在$(0,2x)$上服从均匀分布，从而落在子区间上的概率与等于子区间长度除以总长度

$$P\left\{-5<Y<\frac{1}{2}\middle|X=\frac{1}{2}\right\}=\frac{\frac{1}{2}-0}{2\times\frac{1}{2}-0}=\frac{1}{2}$$

或

$$P\left\{-5<Y<\frac{1}{2}\middle|X=\frac{1}{2}\right\}=\int_{-5}^{\frac{1}{2}}f_{Y|X}\left(y\middle|\frac{1}{2}\right)dy=\int_{0}^{\frac{1}{2}}1dy=\frac{1}{2}$$

给分：(1) 8 分、(2) 4 分、(3) 3 分.