第八章　假设检验

1.	假设检验的基本思想与步骤
2.	正态总体的参数检验

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

第8章2节　正态总体的参数检验

一. 均值μ的检验

1. u 检验法

1) 单正态总体 u 检验法：

$X_1,\ldots,X_n$是从正态总体$N(\mu,\sigma_0^2)$中抽取的样本，σ_0^2 已知，检验　　$H_0: \mu = \mu_0 \quad H_1: \mu \neq \mu_0$

原假设成立时，$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

拒绝域为：$|u| > u_{\frac{\alpha}{2}}$

例：§8.1 中“包装机工作正常与否的判断”

第8章2节　正态总体的参数检验

一. 均值μ的检验

2) 双正态总体 u 检验法

$X_1,\ldots,X_{n1}$是从正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$中抽取的样本，$Y_1,\ldots,Y_{n2}$是从正态总体$N(\mu_2,\sigma_2^2)$中抽取的样本，σ_1^2 与σ_2^2已知，检验　$H_0: \mu_1 = \mu_2$　$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

原假设成立时，

$$U = \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

拒绝域为：$|u| > u_{\alpha/2}$

一. 均值μ的检验

u检验法都是构造统计量U，它服从标准正态分布，为了标准化，我们必须知道总体的方差。

但许多实际问题里，方差往往是未知的，如何检验关于正态总体均值的有关假设呢?

$$S^2 \to \sigma^2$$

第8章2节　正态总体的参数检验

一. 均值μ的检验

2. 1) 单正态总体 t 检验法：

$X_1,\ldots,X_n$是从正态总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽取的样本，

μ,σ^2 未知，检验　　$H_0: \mu = \mu_0$　　$H_1: \mu \neq \mu_0$

原假设成立时，
$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

拒绝域为：
$$|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

TIPS

铁水温度的测量

- 采用不同的显著性水平α，常得到不同的结论。
- 即检验的结果依赖于显著性水平α的选择。

第8章2节　正态总体的参数检验

一. 均值μ的检验

2)　双正态总体 t 检验法

$X_1,\ldots,X_{n1}$是从正态总体$N(\mu_1,\sigma^2)$中抽取的样本,
$Y_1,\ldots,Y_{n2}$是从正态总体$N(\mu_2,\sigma^2)$中抽取的样本,
μ,σ^2 未知，检验　H_0: $\mu_1=\mu_2$　H_1: $\mu_1\neq\mu_2$

原假设成立时,

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

拒绝域为:

$$|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$$

TIPS

成年人红细胞数与性别的关系

第8章2节　正态总体的参数检验

二.方差σ^2的检验

1. χ^2检验法

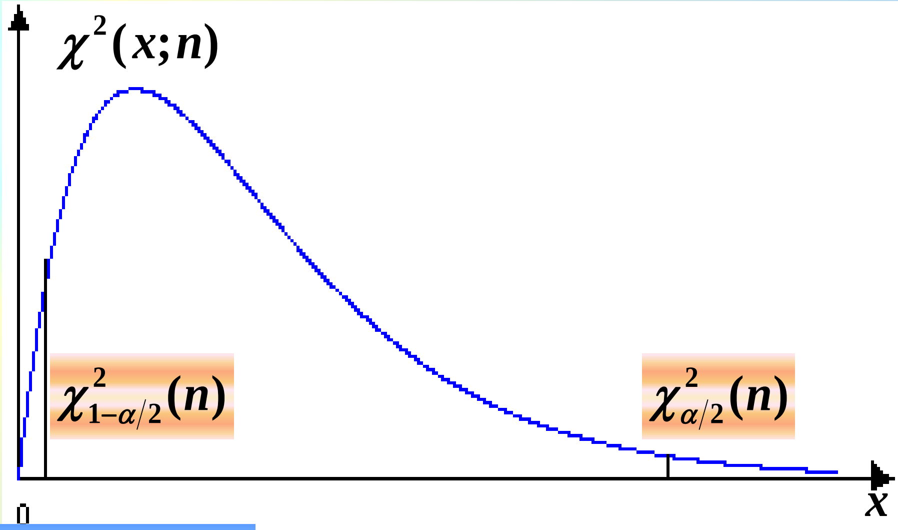
$X_1,\ldots,X_n$是从正态总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽取的样本，

检验　$H_0: \sigma^2 = \sigma_0{}^2$　　$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0{}^2$

1) μ已知

原假设成立时，

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Xi-\mu}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$



拒绝域为：

$\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}(n)$ 或 $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n)$

注意$\chi^2_\alpha(n)$的定义：$P\{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)\} = \alpha$

第8章2节　正态总体的参数检验

二.方差σ^2的检验

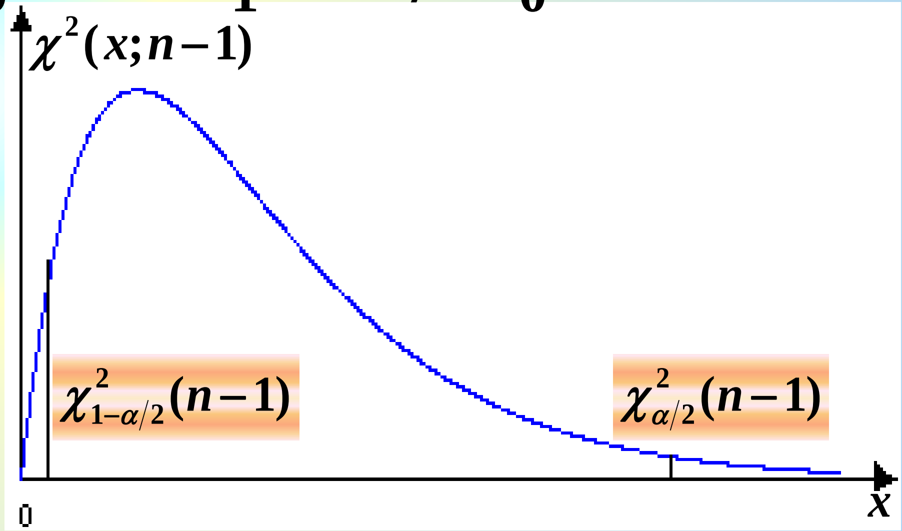
2)　μ未知

$X_1,\ldots,X_n$是从正态总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽取的样本，

检验　　$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$　　$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

原假设成立时，

$$\chi^2 = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$



拒绝域为：

$$\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \quad \text{或} \quad \chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$$

第8章2节　正态总体的参数检验

二.方差σ^2的检验

2. F 检验法

$X_1,\ldots,X_{n1}$是从正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$中抽取的样本，

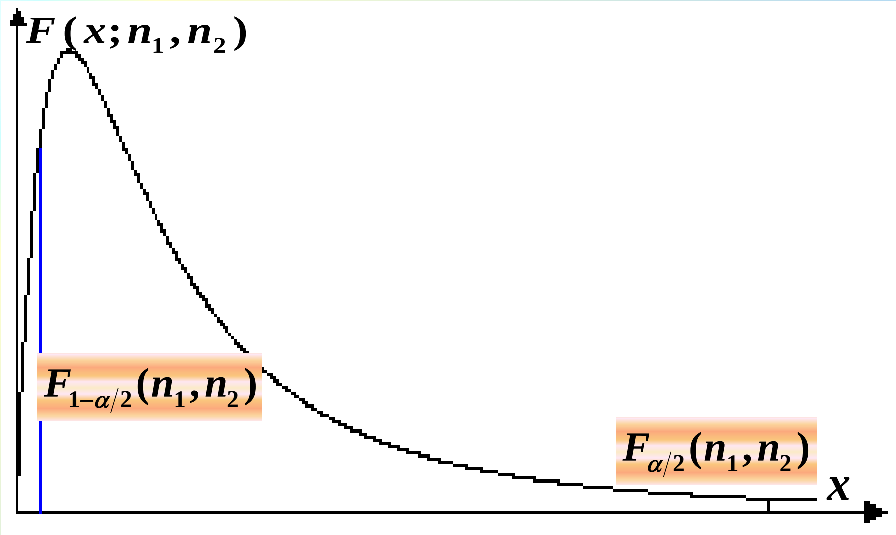
$Y_1,\ldots,Y_{n2}$是从正态总体$N(\mu_2,\sigma_2^2)$中抽取的样本，

检验　$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \qquad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

1) μ_1、μ_2已知

原假设成立时，

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2 \Big/ n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2 \Big/ n_2} \sim F(n_1,n_2)$$



拒绝域为：

$$f > F_{\alpha/2}(n_1,n_2) \quad 或 \quad f < F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2)$$

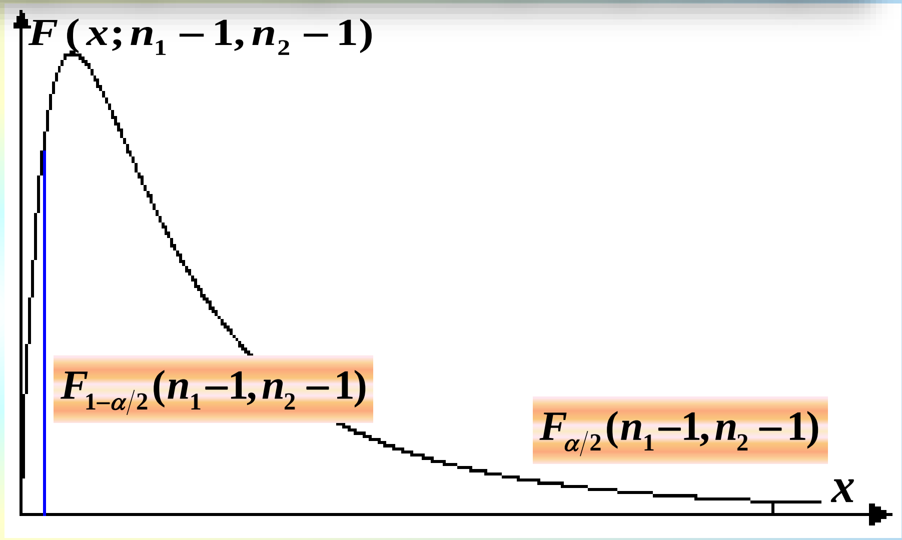
二.方差σ^2的检验

2) μ_1、 μ_2 未知

检验 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

原假设成立时,

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$



拒绝域为:

$$f > F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) \quad \text{或} \quad f < F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$$

TIPS

成年人红细胞数与性别的关系 (F检验法)

三.单侧检验（略）

设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，根据实际问题提出假设

$$H_0: \mu=\mu_0 \qquad H_1: \mu>\mu_0$$

回忆：$\mu_1-\mu_2$的估计

二总体均值差的置信区间的含义是：

- 若$\mu_1-\mu_2$的置信下限大于零，则可认为 $\mu_1>\mu_2$；
- 若$\mu_1-\mu_2$的置信上限小于零，则可认为 $\mu_1<\mu_2$。

对比：这里，若μ的置信下限大于μ_0，则可认为

$$\mu>\mu_0$$

第8章2节 正态总体的参数检验

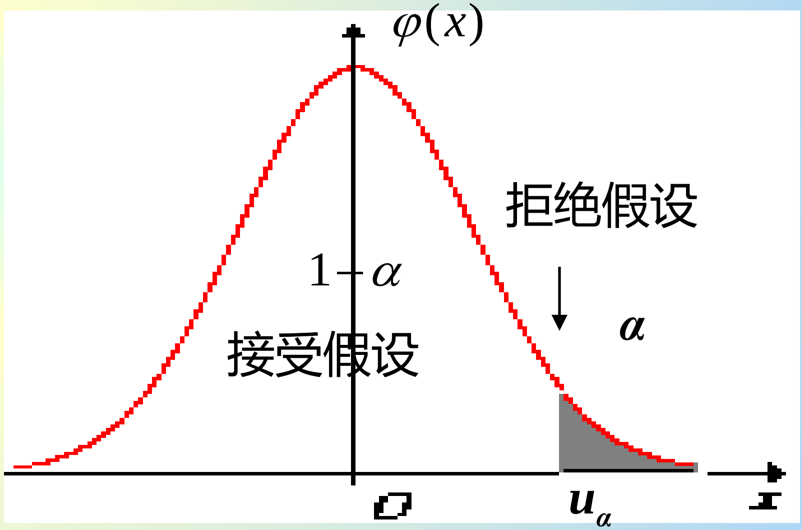
三.单侧检验（略）

设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，根据实际问题提出假设

$$H_0:\ \mu=\mu_0 \qquad H_1:\ \mu>\mu_0$$

分析：类似区间估计，若

$$H_1:\ \mu>\mu_0 \text{成立}$$



则单侧置信下限$>\mu_0$

$$\mu \to \overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha>\mu_0$$

$$\overline{X}-\mu_0>\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha \Rightarrow \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}>u_\alpha$$

三.单侧检验（略）

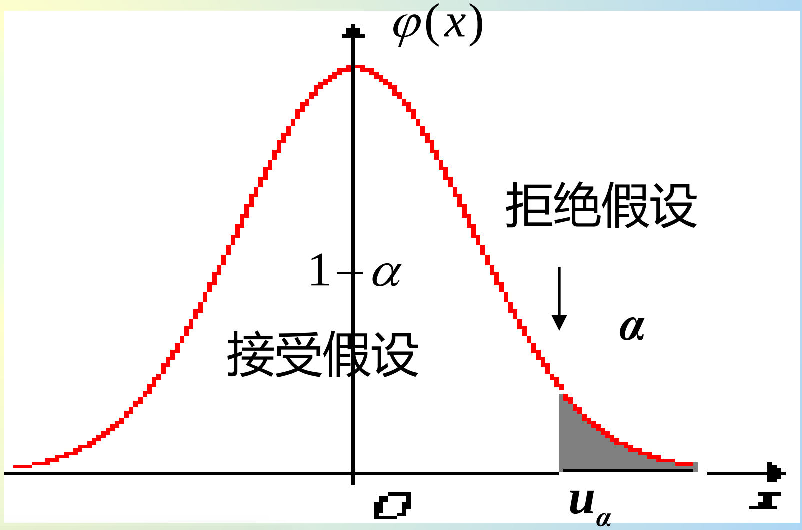
设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，根据实际问题提出假设

H_0：$\mu=\mu_0$　　　H_1：$\mu>\mu_0$

原假设成立时：

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

拒绝域为：$u>u_\alpha$



注意：

1. 根据对立假设确定拒绝域符号
2. 上侧分位数是u_α

关于假设的一点说明

比较两种枪弹的速度(均为正态分布，单位：米/秒)，在相同条件下进行速度测量，分别算得样本均值和样本标准差如下：

枪弹甲： $n_1 = 110, \bar{x} = 2805, s_1 = 120.51$;

枪弹乙： $n_2 = 100, \bar{y} = 2680, s_2 = 105.00$;

在显著性水平$\alpha = 0.05$下，问：可否认为甲枪弹的速度比乙枪弹的速度快?

- 这种“一个比另一个**”的情形，这里假设应为

$$H_0: \mu_1 \le \mu_2, \qquad H_1: \mu_1 > \mu_2$$

  - 当原假设被拒绝，对立假设是小概率事件，可以认为**对立假设的事件“结论显著成立”**
  - 当原假设成立，只能说明“不能拒绝原假设”

第8章2节　正态总体的参数检验

四.大样本检验方法（略）

参考例8.2.6

某供应公司与用户商定，供应的产品次品率不超过1%即视为合格，验收每一批产品时，从中随机抽取200件进行检查，试用假设检验方法确定恰当的验收方案($\alpha = 0.05$).

一种无统计假设思想的**直观猜想**：

抽取200件进行检查，次品率不超过1%，因此**次品数不能超过2件**！

但这种方式是否合理?

下面采用假设检验方法分析。

四.大样本检验方法（略）

参考例8.2.6

某供应公司与用户商定，供应的产品次品率不超过1%即视为合格，验收每一批产品时，从中随机抽取200件进行检查，试用假设检验方法确定恰当的验收方案($\alpha = 0.05$).

解： 设p为产品的次品率，依照题意进行检验

$$H_0: p \le 0.01, \qquad H_1: p > 0.01$$

则200件产品中的次品数为$X \sim B(200, p)$

由于n较大，根据中心极限定理，X可近似看作正态分布

四.大样本检验方法（略）

参考例8.2.6

解： 设p为产品的次品率，依照题意进行检验

$$H_0: p \le 0.01, \qquad H_1: p > 0.01$$

则200件产品中的次品数为$X \sim B(200, p)$

$$U = \frac{X - 200 \times 0.01}{\sqrt{200 \times 0.01 \times 0.99}} \sim N(0,1)$$

原假设的拒绝域为：$u > u_{0.01}$

可得：$X > 2 + 1.645 \times \sqrt{1.98} \approx 4.315$

由此得验收方案：

抽检200件中次品数超过4件则拒收，否则接受.