


第一章 思考题

球赛分组问题

? 8个足球队，有2个强队，先任意将8个队分为两组（每组4个队）进行比赛，这两个强队被分在一个组内的概率是多少？

 解：两个强队要分在一组，只要从剩下的6个队中任取2个队和这两个队拼成一组就行了，共有 C_6^2 种方法，故所求概率为 $\frac{C_2^2 \times C_6^2}{C_8^4} = \frac{3}{14}$

 错误！ 分子分母所在的样本空间不一致。

 分子：一种分组法是一个基本事件

 分母：每4个队的一种组合是一个基本事件

- ☑ 解法一：取每一种分组法为一个基本事件，
因为两个“组合”才合成一个“分组法”，故分组法（即基本事件总数）有 $C_8^2/2$ 种，故所求概率为

$$\frac{C_6^2}{C_8^4/2} = \frac{3}{7}$$

- ☑ 解法二：取“8个元素每取4个元素的一个组合”为一基本事件。因为6个元素每取2个元素的一个组合，对应于8个元素每取4个元素的两个组合（即对应于两个基本事件），所以两个强队在在一组所对应的组合数（即两个强队在在一组所对应的基本事件个数）

是 $2C_6^2$ ，故所求概率为 $\frac{2C_6^2}{C_8^4} = \frac{3}{7}$

☑ 解法三：记事件 $A=\{\text{两个强队在一组}\}$, $A_1=\{\text{两个强队在第一组}\}$, $A_2=\{\text{两个强队在第二组}\}$, 则

$A = A_1 + A_2$, 且 A_1 与 A_2 互斥

$$P(A_1) = \frac{C_6^2}{C_8^4}, \quad P(A_2) = \frac{C_6^2}{C_8^4}$$

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

$$= \frac{C_6^2}{C_8^4} + \frac{C_6^2}{C_8^4} = \frac{3}{7}$$

☑ 解法四：记事件 $A=\{\text{两个强队在一组}\}$ ，则 $\bar{A}=\{\text{两组各有一个强队}\}$ ，两组各有一个强队可以看成“从8个队中抽取4个队，其中恰有一个强队”，其概率为

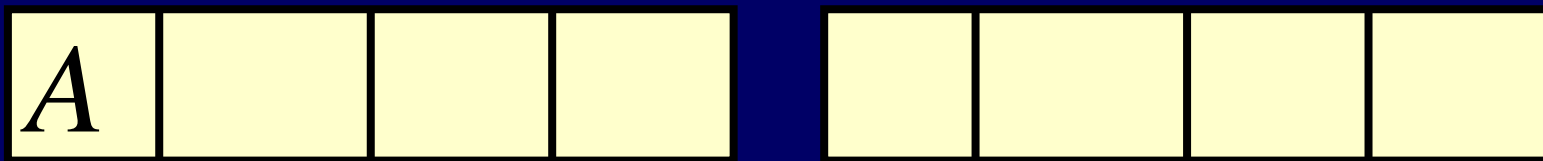
$$P(\bar{A}) = \frac{C_2^1 C_6^3}{C_8^4} = \frac{4}{7}$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

✓ 解法五：设有编号为1、2、3、4、5、6、7、8的八根签，8个队各抽一签，抽到1、2、3、4号为第一组，抽到5、6、7、8号为第二组，则抽签结果共有 $8!$ 种；设八个队中，A队与B队为强队，那么A、B两强队在同一组的抽法共有 $8 \times 3 \times 6!$ 种（第一步由A队抽，共有8种抽法，第二步由B队抽，要与A队同组，共有3种抽法；余下6个队抽余下的6个签，共有 $6!$ 种抽法），故所求概率为：

$$P(A) = \frac{8 \times 3 \times 6!}{8!} = \frac{3}{7}$$

✓ 解法六：设强队A编组已定，则与A同组的空位共有3个，与A不同组的空位共有4个，如下图：



将B填入任一空位的可能性是相等的，从而知A、B同组的概率为 $P(A) = \frac{3}{7}$

据此方法容易推广得：若有 $2n$ 个队，平分为两组，则指定的两队编在同一组的概率为：

$$p = \frac{n-1}{2n-1}$$

事件之间关系（是非判断）

? A、B、C为任意三个事件，则

$$(A+B) - C = A + (B-C)$$

✘ 错误：只有同为并或交才能用结合律

👉 特例如：令 $B=C$ ，两者关系应为？

? A、B为任意二个事件，则

$$(A+B) - A = B$$

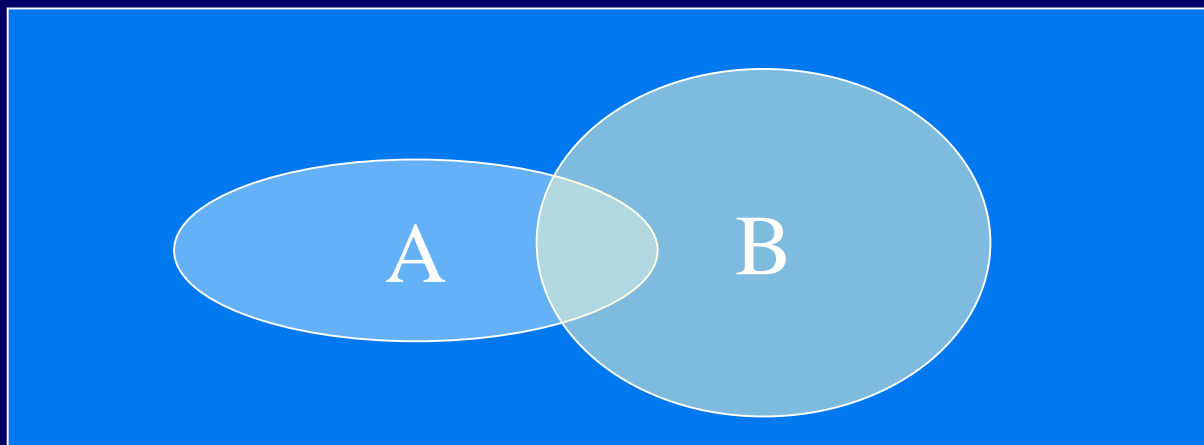
✘ 错误：只有同为并或交才能用结合律

👉 若 AB 不是互不相容，则 $(A+B)-A = B-A$

? 事件的和、差运算可以“去括号”或交换运算次序，
如 $B+(A-B)=B+A-B=B-B+A=A$

✘ 错误

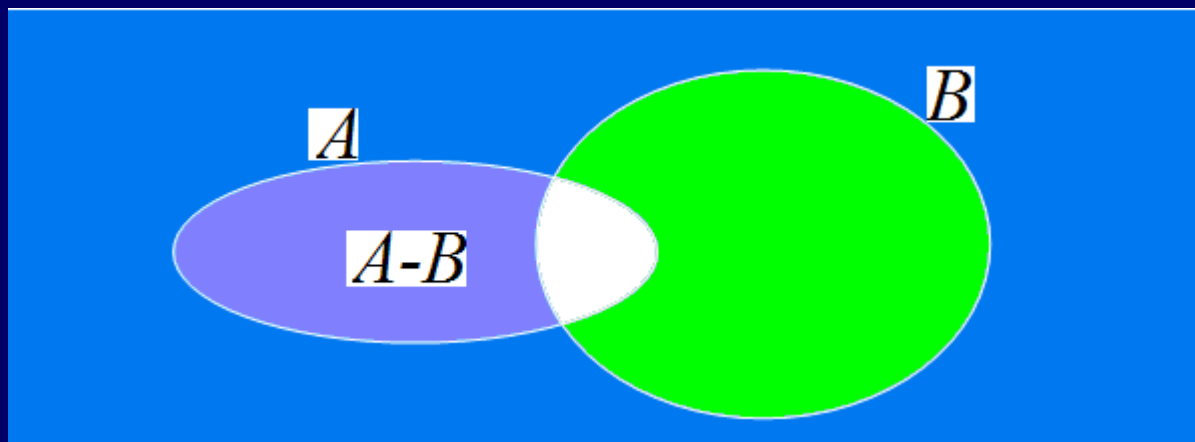
👉 设事件关系如下图，则 $B+(A-B)=A+B$



? 事件的运算可以“移项”，如 $B+(A-B)=A+B$ ，移项得 $B+(A-B)-B=A$ ，得 $A-B=A$

✘ 错误

👉 参考上一问解答



? 若 $A=B$ ，则A、B为同一事件

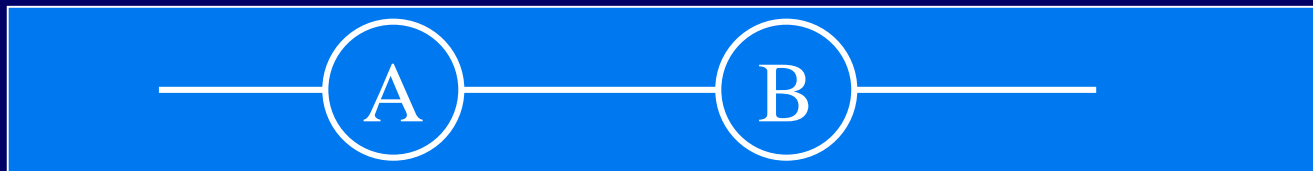
✘ 错误， $A=B$ 仅能说明两者同时发生或同时不发生

👉 如下图，两个灯泡串联，记 $A=\{A\text{灯亮}\}$ ， $B=\{B\text{灯亮}\}$

因为A不发生必导致B不发生，故 $\bar{B} \supset \bar{A}$ ，即 $A \supset B$

同理，B不发生必导致A不发生，故 $B \supset A$

因此 $A=B$ ，但A、B并非同一事件



? $P(A)=P(B)$ 的充要条件是 $A=B$

✘ 错误, $A=B \Rightarrow P(A)=P(B)$, 但反之不一定成立

👉 例如抛硬币试验中, 令 $A=\{\text{正面向上}\}$, $B=\{\text{反面向上}\}$, 可知 $P(A)=P(B)$, 但此时 $A \neq B$