绪　论

一 随机现象及其统计规律

现象

确定性(必然)现象　　　　非确定性现象

确定性(必然)现象的特点：可事前预言

非确定性现象的特点：不可事前预言

非确定性现象

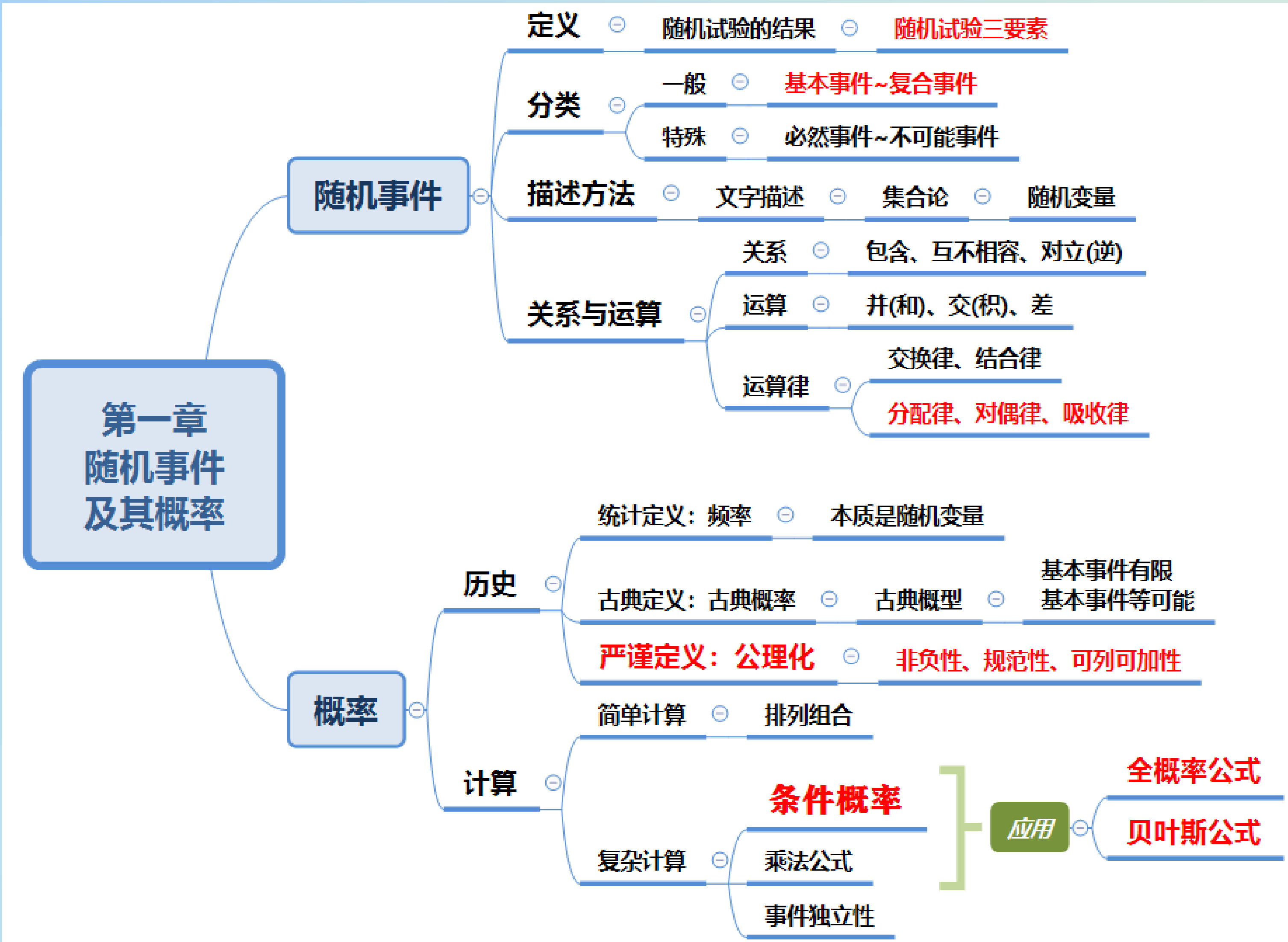
模糊现象 → 模糊数学

随机现象 → 概率统计

概率论的历史简介：源于赌博

随机现象具有统计规律性

第一章　随机事件及其概率



§1 随机事件与随机变量

一、 随机试验和随机事件

试验是对自然现象进行的观察和各种科学实验.

随机试验是对随机现象所进行的观察和实验。

随机试验的**特点**:

(1) 可在相同条件下重复进行;

(2) 可以弄清试验的全部可能结果;

(3) 试验前不能预言将出现哪一个结果。

常 见 随 机 试 验

随机事件就是在随机试验中可能发生也可能不发生的事情,简称**事件**。

随机事件

在概率统计中用大写字母 A, B, C 以及 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 等表示事件。

必然事件就是随机试验中肯定发生的事件,记为Ω

不可能事件就是随机试验中肯定不发生的事件,记为ϕ

基本事件就是在一次试验中必发生一个且仅发生一个的最简单事件。

基本事件可理解为“不能再分解”的事件。

复合事件是由若干基本事件组合而成的事件。

电话呼叫试验　　抛硬币

注意：对于同一试验而言，试验目的不同，则试验的基本事件就有可能不相同。我们把这称为基本事件具有相对性。

基本事件相对性

二. 样本空间和随机变量

将联系于试验的每一个基本事件，可以用一个包含一个元素ω的单点集来表示。

基本事件A_1　　基本事件A_2　　· · ·

⇕　　⇕ 一一对应 · · ·　} 摸球试验 / 抛硬币

单点集$\{\omega_1\}$　　单点集$\{\omega_2\}$　　· · ·

复合事件由它所包括的基本事件对应的单点集的元素组成的集合表示。

所有基本事件对应元素的全体所组成的集合，称为试验的**样本空间(Ω)**，样本空间的元素称为**样本点(ω)**。

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞　hongfeidu@qq.com

复合事件是样本空间的一个子集。

一次试验之后，必定出现基本事件中的一个，假定它对应的样本点是ω，对任意事件A，若$\omega \in A$，称事件A **发生**，否则称 A没有发生。

摸球试验

样本空间Ω对应的事件是必然事件，空集ϕ对应的事件是不可能事件。

为了能运用数学的手段研究随机现象，需进一步将所有的元素(即样本点ω) 数量化，即

$$X(\omega) \to R^n$$

事件数字化

这些变量都定义在样本空间上，具有以下特点：

（1） 变量的取值由随机试验的结果来确定

（2） 它们取某值的可能性大小有确定的规律性。

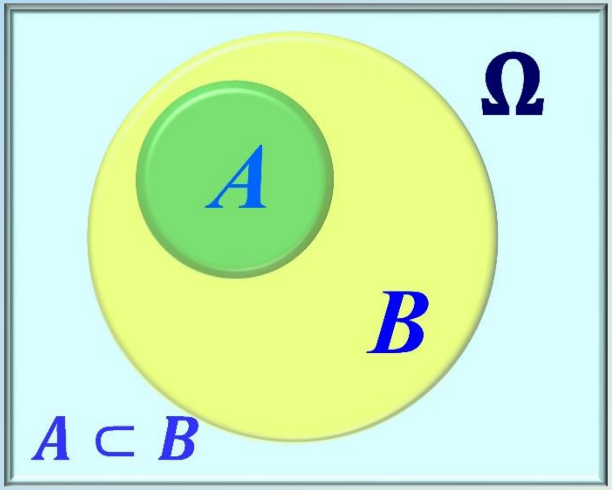
这种变量的取值变化情况由试验结果确定，称之为**随机变量**，它可以完整地描述试验结果，从而用量化分析方法(如微积分)来研究随机现象的统计规律性。

三、随机事件的关系及运算

随机事件的关系及运算实际上就是集合的关系及运算。不过随机事件的关系有其特有的提法。

(1) **包含关系**

若$A \subset B$，即事件{A发生，必然导致事件B发生}，称事件B包含事件A，或A是B的子事件。



从集合的角度：若$\omega \in A$ $\longrightarrow$ $\omega \in B$

如果两个事件互相包含，称为事件相等。

对任意事件A，有 $\phi \subset A \subset \Omega$.

例 子

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

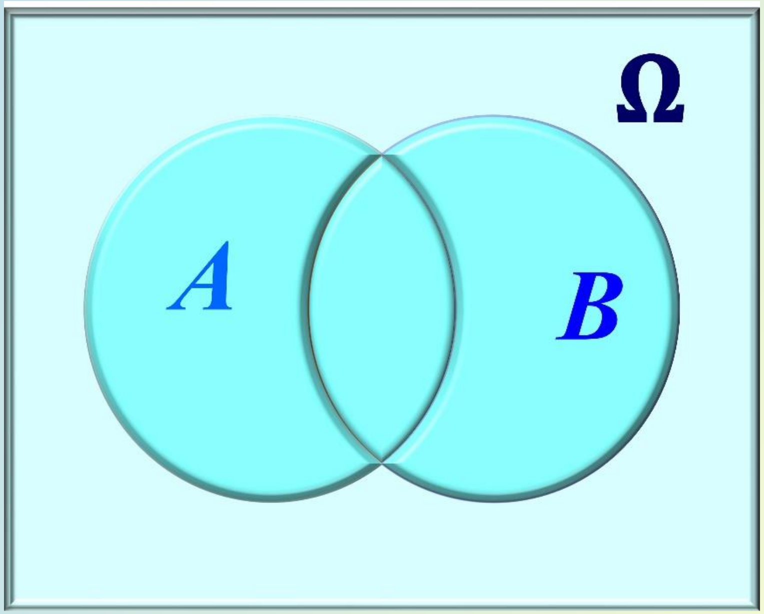
(2) 和事件

事件A与B的和事件记为 $A \cup B$

$A \cup B$ 是事件 $\{A$与B至少有一个发生$\}$

从集合的角度:

$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$$



从随机事件角度:

$A \cup B$ 是事件 $\{A$与B至少有一个发生$\}$

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$表示"$A_1, A_2, \cdots, A_n$中至少有一个事件发生"这一事件.

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$表示"事件列$A_1, A_2, \cdots$中至少有一个事件发生"这一事件.

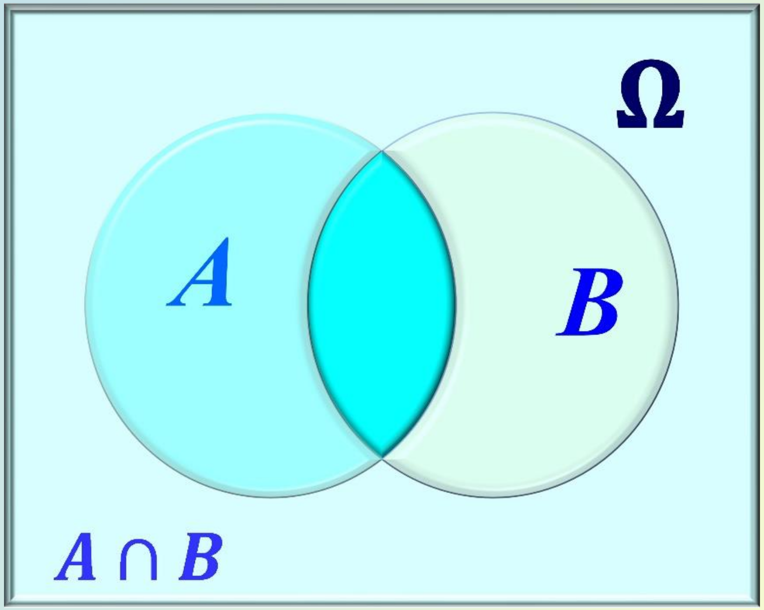
参见例子

(3) 积事件

事件A与B的积事件记为 $A \cap B$ 或 AB

从集合的角度：$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}$

从随机事件角度: $A \cap B$ 是事件$\{A$与B同时发生$\}$。



(3) 积事件

从随机事件角度: $A\cap B$ 是事件$\{A$ 与 B 同时发生$\}$。

$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n$同时发生"这一事件.

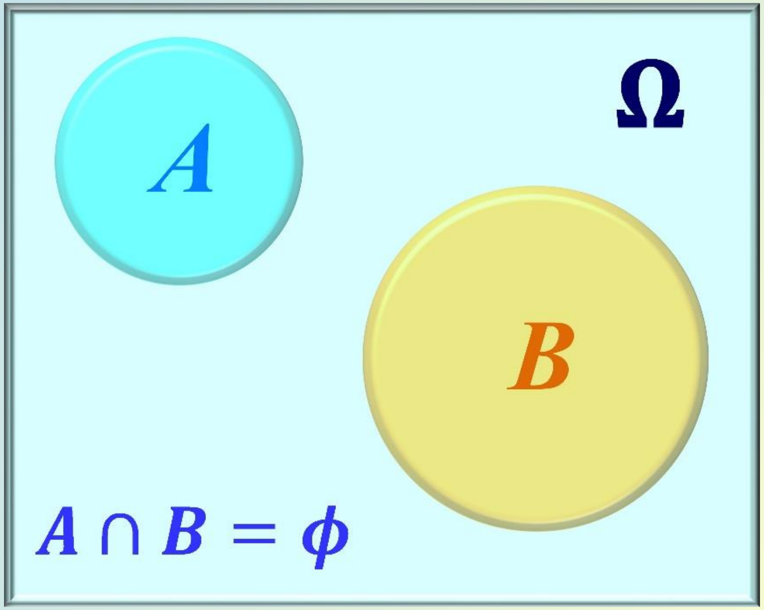
$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$表示"事件列$A_1,A_2,\cdots$同时发生"这一事件

积事件

(4) **互不相容事件**

若 $AB=\phi$，称 A,B 为互不相容或互斥事件，即**事件 A,B 不可能同时发生**。

显然，ϕ 与任何事件互不相容。



(4) 互不相容事件

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个互不相容，称 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容（两两互斥）。

事件列 $A_1, A_2, \cdots$ 互不相容是指其中任意有限个事件互不相容。

性质：同一试验的基本事件互不相容。

事件的互斥

(5) 对立事件（逆事件）

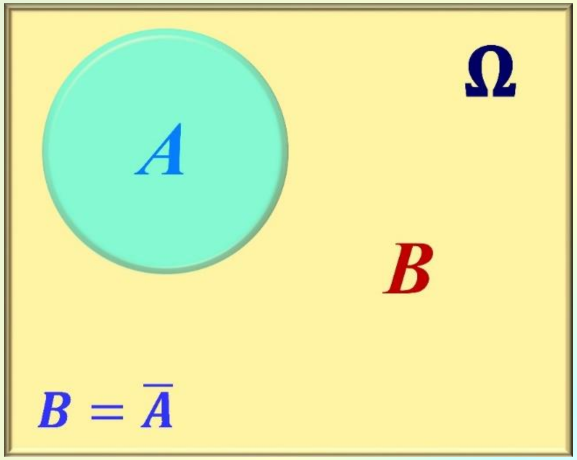
若 $AB=\phi$，且 $A\cup B=\Omega$，称 A,B 互为**对立事件**（**逆事件**），记为 $B=\overline{A}$.

从**集合**的角度: $\overline{A}=\{\omega|\omega\notin A,\omega\in\Omega\}$

从随机**事件**角度: $\overline{A}$ 是事件 $\{A$ 不发生$\}$

显然，在一次试验中，$\overline{A}$ 与 A 必发生且仅发生一个，非此即彼。

$\overline{\overline{A}}=?$



TIPS

对立事件

- 甲乙两人向同一目标射击,设A={甲命中目标,乙未命中目标}，则其对立事件

$$\overline{A} = (\quad)$$

(a): { 甲未命中且乙命中}

(b): { 甲乙均命中}

(c): { 甲未命中}

(d): { 甲未命中或乙命中}

d

(6) **差事件** 事件 A与B 之差 $A-B$

从集合的角度:

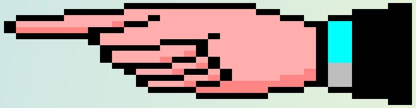
$$A - B = \{\omega \mid \omega \in A, 且\omega \notin B\}$$

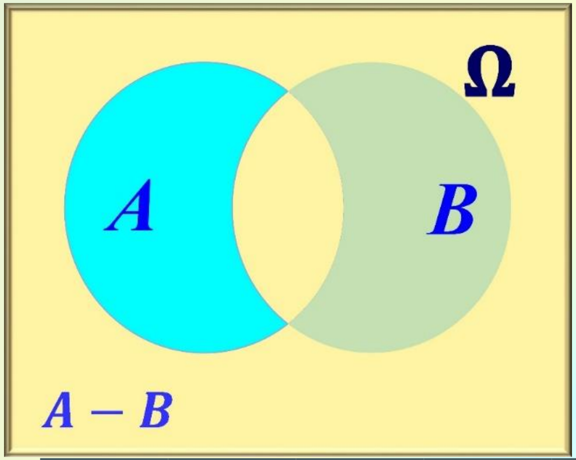
从随机事件角度:

$A-B$ 是事件 { 事件A发生并且 B不发生}

显然有 $A - B = A\overline{B}, \quad \overline{A} = \Omega - A.$

差事件



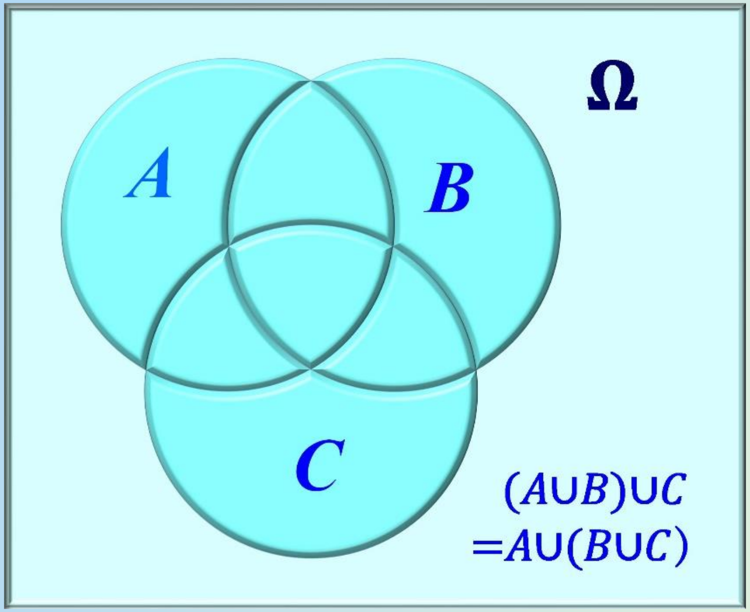


(7) 随机事件（集合）**运算律**

交换律: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$



(7) 随机事件（集合）**运算律**

交换律: $A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$

结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

$(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$

德 · 摩根律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

吸收律: 如果 $A \subset B$, 则 $A \cup B = B$, $AB = A$.

事件的运算

例 题

- $P(B-A)$的两种表示方法