一、简单题（共 40 分，共 4 题，每题 10 分）

1. 做一系列独立试验，假设每次试验成功的概率为 p（$0<p<1$），请给出（1）首次成功时，试验次数 X 的分布律；（2）n 次成功之前已经失败次数 Y 的分布律；（3）在 n 次试验中成功次数 Z 的分布律。

2. 假设总体服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，抽样后构造统计量对 μ 进行估计，下面哪些估计量是无偏，哪个估计量最有效？为什么？

$(1)\ \overline{X} \quad (2)\ X_n \quad (3)\ \frac{1}{2}(X_1+X_2) \quad (4)\ X_1+X_2$

3. 设二维正态随机变量 $(X,Y)\sim N\left(1,3^2;0,4^2;-\frac{1}{2}\right)$，设 $Z=2X+bY$，b 为实数，问 X 与 Z 在什么条件下相关？什么条件下不相关？

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n+m}$ 是来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的容量为 n+m 的简单随机样本，问 Y_1 及 Y_2 服从什么分布？为什么？

$$Y_1=\frac{\sqrt{m}\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n}\sum_{i=n+1}^{n+m}X_i^2},\qquad Y_2=\frac{m\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=n+1}^{n+m}X_i^2}$$

二、（共 15 分）

甲箱中有 5 个正品和 3 个次品，乙箱中有 4 个正品和 3 个次品。现从甲箱中取两个产品放入乙箱，再从乙箱中任取一个产品，求：（1）从乙箱中取出为正品的概率；（2）若从乙箱中取得的为次品，求原来从甲箱中取出的都是正品的概率。

三、（共 15 分）

学生完成一道作业的时间 X 是一个随机变量，单位为小时，它的密度

$$f(x)=\begin{cases} c\,x^2+x, & 0\le x\le 0.5 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

（1）确定常数 c；（2）写出 X 的分布函数；（3）试求学生在 10min 以上 20min 以内完成一道作业的概率。

四、（共 10 分）

已知总体 X 服从几何分布 $P\{X=x\}=(1-p)^{x-1}p,\ x=1,2,\cdots$，其中 p 为未知参数，$0<p<1$。设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体的一组样本，求参数 p 的极大似然估计。

五、（共 10 分）

已知某电子元件的长度服从正态分布，且方差为 0.01。从一批次的产品中任取 10 个，测得 $s^2=0.012$，则在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，这批次电子元件的精度（即标准差）是否正常？（$\chi^2_{0.975}(10)=3.247$，$\chi^2_{0.025}(10)=20.483$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.700$，$\chi^2_{0.025}(9)=19.023$）

六、（共 10 分）

在考察硝酸钠的可溶程度时，对一系列不同温度观察它在 100 毫升的水中溶解的硝酸钠的重量，得到一组观测值$(x_i, y_i), i=1,2,\cdots,9$，计算得

$$\sum_{i=1}^{9} x_i = 234,\ \sum_{i=1}^{9} y_i = 811.3,\ \sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 10144,\ \sum_{i=1}^{9} y_i^2 = 76218.1339,\ \sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 24628.6$$

从理论上推测，温度x_i与溶解的硝酸钠的重量Y_i之间有关系式:

$$Y_i = a + b x_i + \varepsilon_i, i = 1,2,\cdots,9$$

式中$\varepsilon_i, i=1,2,\cdots,9$相互独立，均服从正态分布$N(0,\sigma^2)$

（1）求未知参数a,b的最小二乘估计值和σ^2的无偏估计值；（2）检验线性回归是否显著（$\alpha = 0.01$）？（结果保留四位有效数字）

α \ 自由度	6	7
0.01	0.834	0.798
0.005	0.870	0.836