

## 确定性(必然)现象

例1: **比萨斜塔** 试验



例2: **镁** 的燃烧



例3: **果树** 的生长



例4: **数学** 计算

$$1+1=2$$

$$\frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x \quad \frac{\partial e^x}{\partial y} = 0$$

**确定性现象的特点: 可事前预言**

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 bangshidafang.com

早期的科学研究(如 天文. 地理. 物理. 化学. 生物...) 就是研究确定性现象的规律。

所借助的数学工具有: **几何. 代数. 微积分. 微分方程...**

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 bangshidafang.com

## 非确定性现象

例1: **抛硬币** 试验

(抛一枚硬币一次判断出现的结果)

例2: **炮弹发射** 试验

(判断落地点距目标的距离)



例3: **地球的未来**

(1万年后地球会是什么样子)



**非确定性现象** 的特点:

**不可事前预言**

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 bangshidafang.com

## 概率论的历史简介

历史上人们很早就观察到随机现象(如天气), 并加以一定利用, 如占卜。但各种知识积累有限, 一直未能研究下去。

直到16世纪左右大航海时代, 海上贸易带来巨大利润, 但同时伴随着巨大风险(飓风、海盗...)。保险业开始蓬勃发展, 其中也涉及利润和风险问题, 与赌博很类似——概率的发展有着**社会需求**。

另一方面, 16世纪后罗马计数(如英语中所用的 I II III IV V VI...) 被阿拉伯数字代替, 使得复杂的概率计算可以实现; 文艺复兴前演绎**思维**占主导地位, 之后归纳法成为科学



电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 bangshidafang.com

## 发现主导方法——**知识与技术的积累**是概率发展的基础。

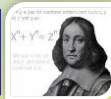
Antoine Gombaud, Chevalier de Méré (1607–29 December 1684) was a French writer, born in Poitou.<sup>[1]</sup> Although he was not a nobleman, he adopted the title Chevalier (Knight) for the character in his dialogues who represented his own views (Chevalier de Méré because he was educated at Méré). Later his friends began calling him by that name.<sup>[2]</sup>

Antoine Gombaud, Chevalier de Méré (常被译为德. 美黑) 在沙龙中提出一个问题: 两赌徒约定谁先赢到一定盘数就获得全部赌注, 但因意外中断时赌注该如何分配?



Blaise **Pascal** and Pierre de **Fermat** 在一系列通信来往中解决了这个问题, 并奠定了近代概率论基础。

帕斯卡、费马和惠更斯搭建了概率论基础



之后雅各布. 贝努利提出大数定律, 说明频率的极限稳定于概率——随机现象具有**统计规律性**——有规律才有研究价值!

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 bangshidafang.com

1812年, 拉普拉斯在《**分析的概率理论**》中明确了**古典概率**的定义, 1814年第二版的书名换为《**概率论的哲学导论**》, 还证明了“**隶莫弗——拉普拉斯中心极限定理**”

1866年, 俄国的切比雪夫推广了**大数定律和中心极限定理**。1906年, 他的学生马尔科夫提出了有名的“马尔科夫链”。

1933年前苏联的柯尔莫哥洛夫出版了《**概率论基础**》, 建立了**概率论公理化体系**, 使概率论成为严谨的数学分支。



拉普拉斯



切比雪夫



马尔科夫



柯尔莫哥洛夫

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 bangshidafang.com

## 随机现象的统计规律性

### 抛硬币试验

重复进行多次抛掷时，就会出现**正面**与**反面**的比总是近似 **1: 1**

正面	Head	—	1
反面	Tail	--	0

根据各个国家各个时期的人口统计资料，新生婴儿中**男婴**和**女婴**的比例大约总是**1: 1**?



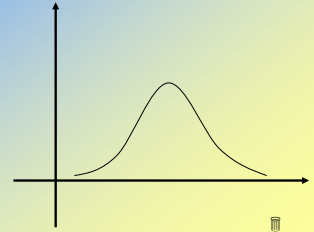
拉普拉斯发现

22:21

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 bangzhibo@qq.com



## 炮弹发射试验——落点服从正态分布

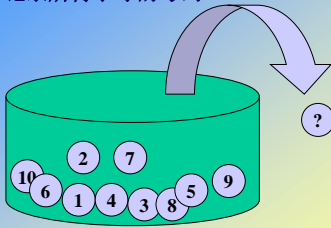


电子科技大学数学科学学院 杜润飞 bangzhibo@qq.com



## 常见随机试验

E1 从10个标有号码 1, 2, ..., 10 的小球中任取一个，记录所得小球的号码。



电子科技大学数学科学学院 杜润飞 bangzhibo@qq.com



E2 抛一枚硬币，将会出现正面还是反面？



电子科技大学数学科学学院 杜润飞 bangzhibo@qq.com



E3 仪器上某种型号的电子元件使用时间已达300小时，检测该元件还能使用多少小时？



它还能使用多久啊？

E4 测量某零件长度 $x$ 和直径 $y$ 所产生的误差；

E5 检验出 $N$ 件产品中的次品数；

E6 测量某团体人员的身高。

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 bangzhibo@qq.com



## 随机试验——电话呼叫试验

E1: 某电话总台一天接到的呼叫次数。

$A = \{ \text{呼叫次数为偶数} \}$ ;

$B = \{ \text{呼叫次数为奇数} \}$ ;

$C = \{ \text{呼叫次数大于 } 3 \}$ ;

$A_i = \{ \text{呼叫次数为 } i \}, i = 0, 1, 2, \dots$

等等；都是随机事件。

$\Omega = \{ \text{呼叫次数大于等于 } 0 \}$  是必然事件，

$\phi = \{ \text{呼叫次数小于 } 0 \}$  是不可能事件。



电子科技大学数学科学学院 杜润飞 bangzhibo@qq.com



### 随机试验——抛硬币

E2 抛一枚硬币，观察其出现正面H和反面T的情况。

在试验中，若根据硬币出现正面或反面来决定球赛的首发权，把硬币“出现正面H”和“出现反面T”这两个可能结果看成随机事件。

故有： $A=\{\text{出现正面}\}$ ，

$B=\{\text{出现反面}\}$ 。

由于试验的目的，硬币沿什么方向滚动等结果将不被看成随机试验。

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 bangzhibo@qq.com



### 随机试验——其它试验

E3 检验出N件产品中的次品。

随机事件有： $A=\{\text{检验到正品}\}$ ；

$B=\{\text{检验到次品}\}$ ，等等。

E4 测量某团体人员的身高。

用 $X$ 表示人的身高， $\{X = x\}$ 表示“人的身高为 $x$ 米”则有：

$$\begin{aligned} \{X = x\} \mid x > 0, \quad \{X > 0\}, \\ \{X < 1.2\}, \quad \{X > 1.30\} \end{aligned}$$

等等都是随机事件。



电子科技大学数学科学学院 杜润飞 bangzhibo@qq.com



### 基本事件——电话呼叫试验

E1: 某电话总台一天接到的呼叫次数。

$A = \{\text{呼叫次数为偶数}\}$ ；

$B = \{\text{呼叫次数为奇数}\}$ ；

$C = \{\text{呼叫次数大于} 3\}$ ；

$A_i = \{\text{呼叫次数为} i\}, i = 0, 1, 2, \dots$



基本事件

$\Omega = \{\text{呼叫次数大于等于} 0\}$  是必然事件，

$\phi = \{\text{呼叫次数为} 1.2\}$  是不可能事件。

复合事件

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 bangzhibo@qq.com



### 基本事件——抛硬币

例2 抛一枚硬币，观察其出现正面H和反面T的情况。

在试验中，若根据硬币出现正面或反面来决定球赛的首发权，把硬币“出现正面H”和“出现反面T”这两个可能结果看成随机事件。

故有： $A=\{\text{出现正面}\}$

$B=\{\text{出现反面}\}$

基本事件

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 bangzhibo@qq.com



### 基本事件相对性——测量身高

例4 测量某团体人员的身高。

用 $X$ 表示人的身高， $\{X = x\}$ 表示“人的身高为 $x$ 米”则有：

基本事件

$$\{X = x\} \mid x > 0, \quad \{X > 0\},$$

$$\{X < 1.5\}, \quad \{X > 1.70\}$$

等等都是随机事件。

复合事件

若测量人的身高是为了判断乘车购票与否，则仅有三个基本事件：

$A=\{\text{购全票}\}$ ， $B=\{\text{购半票}\}$ ， $C=\{\text{免票}\}$ 。

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 bangzhibo@qq.com



### 基本事件的相对性——抽取扑克

例：从52张扑克中任意抽取一张。

考虑其点数及其花色

(黑桃:S-Spade 红桃:H-Heart

方块:D-Diamond 梅花:C-Club)

样本空间为：

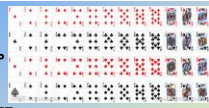
$$\Omega = \{SA \ SK \ \dots \ S2 \ HA \ HK \ \dots \ H2 \ \dots C2\}$$

不考虑花色，其样本空间为：

$$\Omega = \{A \ K \ \dots \ 2\}$$

考虑花色但不考虑点数，其样本空间为：

$$\Omega = \{S \ H \ D \ C\}$$



电子科技大学数学科学学院 杜润飞 bangzhibo@qq.com



事件的集合表示——摸球试验

E1 从 10个标有号码 1, 2, ..., 10 的小球中任取一个, 记录所得小球的号码, 这就是一个随机试验。

$A = \{\text{取得的小球号码为偶数}\}, B = \{\text{号码为奇数}\},$   
 $C = \{\text{号码大于 } 3\};$   
 $A_i = \{\text{号码为 } i\}, i = 1, 2, \dots, 10$   
等等; 都是随机事件。

基本事件:  $A_i = \{\text{号码为 } i\} = \{\omega_i\} = \{i\}, i = 1, 2, \dots, 10.$

复合事件:  $A = \{\text{号码为偶数}\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$   
 $B = \{\text{号码为奇数}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$   
 $C = \{\text{号码大于 } 3\} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

事件的集合表示——抛硬币

E2 抛一枚硬币, 观察其出现正面  $H$  和反面  $T$  的情况。

基本事件  $\begin{cases} A = \{\text{出现正面}\}, \\ B = \{\text{出现反面}\}. \end{cases}$

我们可以令  $A = \{\text{出现正面}\} = \{H\},$   
 $B = \{\text{出现反面}\} = \{T\}.$

而样本空间  $\Omega = \{H, T\}.$

事件的集合表示——摸球试验\*

$\Omega = \{\text{号码不超过 } 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  此即为样本空间, 是一个必然事件。

$\emptyset = \{\text{号码等于 } 0\},$  它不包含任何基本事件, 从而不包含任何样本点, 是不可能事件。

$A = \{\text{号码为偶数}\} = \{2, 4, 6, 8, 10\} \subset \Omega$   
 $B = \{\text{号码为奇数}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\} \subset \Omega$

例如, 取出号码为4, 则事件  $A$  发生  
取出号码为3, 则事件  $B$  发生

事件的数字化

E2 抛一枚硬币, 观察其出现正面  $H$  和反面  $T$  的情况。  
若用  $X$  表示抛一次硬币时出现正面的次数, 则  
 $X(H) = 1, X(T) = 0$

E4 测量某零件长度  $x$  和直径  $y$  所产生的误差。  
用  $\varepsilon_x$  和  $\varepsilon_y$  分别表示测量零件长度和直径所产生的误差. 则  
 $\Omega = \{(\varepsilon_x, \varepsilon_y) / -\infty < \varepsilon_x < +\infty, -\infty < \varepsilon_y < +\infty\}$

E5 检验  $N$  件产品中的次品数。  
若用  $Y$  表示检查  $N$  件产品中的次品数, 我们有  
 $Y(k) = k$

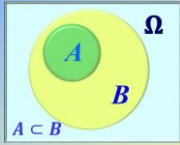
包含关系

例 从 10个标有号码 1, 2, ..., 10 的小球中任取一个, 记录所得小球的号码。

$A = \{\text{球的号码为4的倍数}\} = \{4, 8\},$   
 $B = \{\text{球号码为偶数}\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$

则:  $A \subset B$

思考:  $B$  的子事件还有哪些?  
 $\{2\}, \{4\}, \{6\}, \{8\}, \{10\},$   
 $\{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{2, 10\},$   
 $\{4, 6\}, \{4, 8\}, \{4, 10\}, \dots$

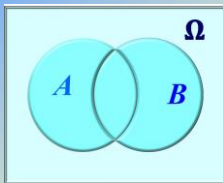


和事件

从集合的角度 参见示意图

例 从 10个标有号码 1, 2, ..., 10 的小球中任取一个, 记录所得小球的号码。

$A = \{\text{球的号码是不大于3的奇数}\} = \{1, 3\},$   
 $B = \{\text{球的号码是不大于4的偶数}\} = \{2, 4\}$   
若  $C = A \cup B$   
则  $C = \{1, 2, 3, 4\} = \{\text{球的号码不超过 } 4\}$



## 积事件

从集合的角度 参见示意图

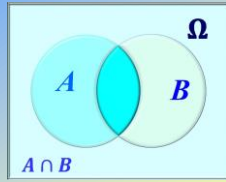
例 从10个标有号码1, 2, ..., 10的小球中任取一个, 记录所得小球的号码。

$A = \{\text{球的号码是奇数}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\},$

$B = \{\text{球的号码大于5}\} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

若  $C = A \cap B$

则  $C = \{7, 9\} = \{\text{球的号码是7或9}\}$



电子科技大学数学科学学院 杜润飞 hougk@foxmail.com



例 对某一目标进行射击, 直至命中为止。

设:  $D = \{\text{进行了} k \text{次射击}\};$

$A_i = \{\text{第} i \text{次射击命中目标}\}, i = 1, 2, \dots$

$B_i = \{\text{第} i \text{次射击未命中目标}\}, i = 1, 2, \dots$

则  $D = B_1 B_2 \dots B_{k-1} A_k$

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 hougk@foxmail.com



## 事件的互斥

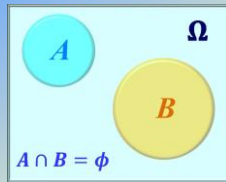
从集合的角度 参见示意图

例 从10个标有号码1, 2, ..., 10的小球中任取一个, 记录所得小球的号码。

$A = \{\text{球的号码是奇数}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\},$

$B = \{\text{球的号码是不大于4的偶数}\} = \{2, 4\}.$

则:  $A$ 与 $B$ 是互不相容的事件。



电子科技大学数学科学学院 杜润飞 hougk@foxmail.com



例 对某一目标进行射击, 直至命中为止。

设:  $D_k = \{\text{进行了} k \text{次射击}\}, k = 1, 2, \dots$

$A_i = \{\text{第} i \text{次射击命中目标}\}, i = 1, 2, \dots$

$B_i = \{\text{第} i \text{次射击未命中目标}\}, i = 1, 2, \dots$

则:  $D_k, k = 1, 2, \dots$  是互不相容的事件列。

$A_i$ 与 $B_i, i = 1, 2, \dots$  是互不相容的事件。

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 hougk@foxmail.com



## 对立事件

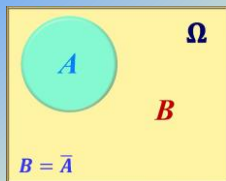
从集合的角度 参见示意图

例 从10个标有号码1, 2, ..., 10的小球中任取一个, 记录所得小球的号码。

$A = \{\text{球的号码是奇数}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\},$

$B = \{\text{球的号码是偶数}\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$

则:  $A$ 与 $B$ 是对立事件。



电子科技大学数学科学学院 杜润飞 hougk@foxmail.com



## 差事件

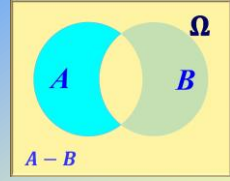
从集合的角度 参见示意图

例 从10个标有号码1, 2, ..., 10的小球中任取一个, 记录所得小球的号码。

$A = \{\text{球的号码是奇数}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\},$

$B = \{\text{球的号码不大于4}\} = \{1, 2, 3, 4\}.$

则:  $A - B = \{5, 7, 9\}$



电子科技大学数学科学学院 杜润飞 hougk@foxmail.com






**例 测量某团体人员的身高。**  
用 $X$ 表示人的身高,  $\{X = x\}$ 表示“人的身高为 $x$ 米”

事件 $\{X \leq 1.7\} - \{X \leq 1.5\}$   
 $= \{1.5 < X \leq 1.7\}$

表示事件“人的身高介于1.5与1.7之间”。



电子科技大学数学科学学院 杜润飞 hmg@chinafeng.com

**事件的运算**

**例 证明  $(A - AB) \cup B = A \cup B$**   
**证明:**

$(A - AB) \cup B = (A(\overline{AB})) \cup B$  **差事件性质**  
 $= (A(\overline{A \cap B})) \cup B$  **对偶律**  
 $= (A(\overline{A} \cup \overline{B})) \cup B$   
 $= \overline{A} \cup B$  **分配律**  
 $= \overline{A} \cup (AB \cup B)$   
 $= A(B \cup \overline{B}) \cup B$   
 $= A \cup B$

**其他证法?**  
**吸收律**

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 hmg@chinafeng.com

**例 题**  
设 $A, B, C$ 为三个随机事件, 试用 $A, B, C$ 的运算关系表示下列事件.

1)  $A$ 发生,  $B, C$ 都不发生  $\overline{A} \overline{B} \overline{C}$   
 $\overline{A} \overline{B} \cup \overline{A} \overline{C}$

2)  $A, B, C$ 中恰有两个发生  $A \cup C \cup B$

3)  $A, B, C$ 中不多于一个发生  $\overline{A} \overline{B} \cup \overline{A} \overline{C} \cup \overline{A} \overline{B} \overline{C}$

4)  $A, B, C$ 中至少有一个发生  $\overline{A} \overline{B} \overline{C} \cup \overline{A} \overline{B} C \cup \overline{A} B \overline{C} \cup \overline{A} B C$   
 $(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) - \overline{A} \overline{B} \overline{C}$   
 $\overline{A} \overline{B} \overline{C} \cup \overline{A} \overline{B} C \cup \overline{A} B \overline{C} \cup \overline{A} B C$

右侧集合对应哪个事件?

电子科技大学数学科学学院 杜润飞 hmg@chinafeng.com