

Trabalho 2

Métodos Determinísticos de Investigação Operacional

Bruno Filipe de Sousa Dias A89583 Guilherme Santiago Lopes Pereira A89479 Luís Enes Sousa A89597 Pedro Miguel de Soveral Pacheco Barbosa A89529









11 de dezembro de 2020

Conteúdo

1	Intr	rodução	1
2	Res	olução dos Exercícios Propostos - Parte I	1
	2.1	Exercício 0	1
		2.1.1 Valor estimado do inventário de minério em cada bloco	1
	2.2	Exercício 1	3
		2.2.1 Descrição do Problema	3
		2.2.2 Objetivo do Problema	3
		2.2.3 Variáveis de Decisão	4
		2.2.4 Dados	4
		2.2.5 Restrições	4
	2.3	Exercício 2	5
	2.4	Exercício 3	6
	2.5	Exercício 4	8
	2.6	Exercício 5	9
	2.7	Exercício 6	12

1 Introdução

No âmbito da cadeira de Métodos Determinísticos de Investigação Operacional, para o trabalho prático 2, foi-nos proposta a resolução de um problema que consiste em ao examinar uma área de exploração de minas a céu aberto determinar, através da utilização de um software de otimização de redes, quais os blocos que devem ser extraídos de forma a maximizar o lucro.

Este trabalho prático 2 tem como principal objetivo avaliar a análise de sistemas e a criação de modelos que os descrevam e resolvam utilizando, para isso, programas adequados para conseguirmos realizar as tarefas propostas.

2 Resolução dos Exercícios Propostos - Parte I

2.1 Exercício 0

2.1.1 Valor estimado do inventário de minério em cada bloco

As indicações dadas para a atualização do valor estimado do inventário de minério em cada bloco foram as seguintes.

Seja ABCDE o número de inscrição do estudante do grupo com maior número de inscrição. Use os valores dos dígitos B, C, D e E para o valor estimado de inventário dos respectivos blocos.

Assim sendo, a tabela com o valor estimado do inventário de minério em cada bloco após ser atualizada com os respetivos valores de B, C, D e E é a seguinte:

nível -1							10	8				
nível -2	х					12	14	15	40			х
nível -3	х	х			16				20		Х	х
nível -4	x	X	X	თ	18	9			5	X	X	X
nível -5	х	x	х	х	20	9		7	X	x	x	X

Figura 1: Tabela com o valor estimado do inventário de minério em cada bloco

2.2 Exercício 1

2.2.1 Descrição do Problema

O problema que pretendemos solucionar, acontece quando é feita uma exploração de minas a céu aberto, com o objetivo de extrair minérios, rochas ornamentais ou até mesmo outros materiais. Inicialmente é feita uma estimativa dos recursos existentes e do tipo de materiais que se espera encontrar no solo em exploração. Para isso, o solo em estudo, é dividido em "blocos" de terra, sobre os quais incidem as estimativas de minérios e materiais (no nosso caso em específico, o solo é dividido num quadriculado bidimensional).

Em seguida, procede-se a determinar quais os blocos de terra que irão ser minerados. A finalidade desta seleção de blocos é a de maximizar o lucro de uma empresa face aos terrenos que explora.

Depois de selecionados, os blocos de terra são então explorados e minerados. É importante perceber que de modo a cumprir normas de segurança, são impostas regras de contorno de escavação, que passam por sempre que se minera um bloco de solo, o bloco imediatamente na camada acima terá de ser minerado também, bem como os dois blocos que a si se avizinham (fazendo assim um total de 3 blocos de solo extra).

O problema basicamente irá passar por um problema de fecho máximo de um grafo (maximum closure). Neste grafo em estudo, cada vértice irá representar um bloco do terreno em exploração. Para mais fácil gestão foi criado um grafo auxiliar de modo a conseguirmos resolver de forma mais simplificada o problema. Todo este processo irá ser explicado posteriormente.

2.2.2 Objetivo do Problema

O grande objetivo do problema em estudo, passa por utilizar um software com a grande finalidade de decidir quais os blocos de solo a minerar, num dado terreno em exploração. Isto deve-se ao facto de a empresa possuir sempre a necessidade de maximizar os seus lucros. Dado que ao minerarmos um bloco possuímos um custo, sendo este cada vez maior á medida que a profundidade dos blocos vai aumentado, precisamos então de chagar à solução ótima de quais os blocos a minerar num certo terreno de modo a que o valor dos minérios conseguidos, exceda no seu máximo os custos da exploração das seções selecionadas.

Em termos do ponto de vista de um problema de fecho máximo de um grafo, nós, recorrendo ao gráfico auxiliar a construir, iremos consultar o

corte mínimo de (s,t) do grafo auxiliar e obtemos o fecho máximo do grafo principal, que é o resultado que queremos obter!

2.2.3 Variáveis de Decisão

No presente trabalho, não era necessária qualquer utilização de lpSolve e/ou formulação de um modelo de programação linear. No entanto, se fosse necessário, iriramos ter como variáveis:

Xj: Variável binária que indica se vértice j pertence ao fecho do grafo j $\in V$

Deste modo, \mathbf{j} irá indicar o numero de um vértice pertencente a um conjunto de vértices \mathbf{V} .

2.2.4 Dados

Os dados apresentados para este problema constam no enunciado e são eles: a representção dos vértices no quadriculado bidimensional com a sua numeração; o valor estimado do inventário de minério em cada bloco, novamente no quadro bidimensional (sendo este completo quando são subtituidas as letras no quadro dado pelos digitos do aluno com maior número de inscrição); custo de mineração de um bloco consoante o seu nivel de profundidade (indicado no quadro bidimensional).

Avaliando os dados que possuímos, é de imediato contruída uma tabela de lucros, dado que possuímos, tanto o valor estimado como o custo de mineração de um bloco. (Esta tabela é fornecida pelo Professor juntamente com o enunciado). É a partir destes dados que iremos começar a construir a resolução do problema.

2.2.5 Restrições

Mais uma vez, no presente projeto, não era necessária qualquer utilização de lpSolve e/ou formulação de um modelo de programação linear. No entanto, se fosse necessário, iriramos ter como restrições:

$$xi - xj \le 0, \forall (i, j) \in A$$

Aqui, A representa as arestas do grafo em estudo, e **i** e **j** os vértices. Assim, se o vértice **i** pertencer ao fecho de um grafo, o vértice **j** também vai pertencer.

2.3 Exercício 2

Dados os vértices do grafo, temos ainda os pesos de cada vertice, c_j . Estes pesos serão encontrados nos valores da tabela do excell que inclui os lucros/custos da mineração de cada bloco de terreno . Estes valores são calculados pela diferença do valor de minérios num bloco (se existir, caso contrário o valor é 0) com o custo de mineração desse bloco em estudo.

O fecho máximo de um grafo (solução e problema que queremos resolver) é muitas vezes determinado pela resolução de um problema de fluxo máximo num grafo auxiliar G', obtido adicionando ao grafo G uma fonte s e um terminal t. No nosso, caso, a fonte s será representada como o vértice 41 e o terminal t será representado pelo vértice 42. Neste grafo, iremos ter vários arcos que irão ser fulcrais na determinação da solução do problema. Assim, no grafo auxiliar G' irão estar presentes os seguintes arcos:

- Arcos (s,j) com origem no vértice **s** e destino no vértice **j**. Estes arcos apenas irão incidir em vértices **j**, cujo seu custo (c_j) seja maior ou igual a 0. Além disso esses arcos irão possuir o custo do peso do vértice **j** em que incidem (c_j) ;
- Arcos (j,t) com origem no vértice \mathbf{j} e destino no vértice \mathbf{t} . Estes arcos apenas irão incidir em vértices \mathbf{j} , cujo seu custo (c_j) menor do 0. Além disso esses arcos irão possuir o custo do inverso do peso do vértice \mathbf{j} em que incidem $(-c_j)$;
- Arcos (j1,j2) com origem no vértice **j1** e destino no vértice **j2**, onde **j1** é um vértico com ganho/lucro (peso positivo) e **j2** um vértice com custo/despesa (peso negativo). Além desta implicação, **j2** é um vértice que tem de estar envolvido, ou seja, estar no "cone de desbaste" do vértice **j1**. Estes arcos irão possuir uma capacidade infinita (no relax4 assumimos como capacidade virtualmente infinita 1000);
- Arco (t,s) com origem no vértice t e destino no vértice s. Estes arco é o que irá mostrar o fluxo máximo no gráfico. Este gráfico não é representado na figura seguinte, representativa do grafo auxiliar, no entanto o mesmo consta no input do Relax4.

Assim, iremos ter como grafo auxiliar, o seguinte grafo:

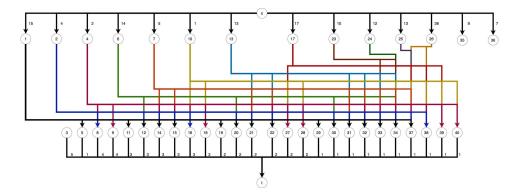


Figura 2: Grafo auxiliar

2.4 Exercício 3

Depois de perceber o problema e de chegar a um grafo Auxiliar que permitiria uma melhor realização do trabalho, chega a altura de contruir um input para ser compilado num software de otimização de redes (neste caso o RELAX4). É importante realçar que os arcos que possuem uma capacidade de 1000 neste input, têm como significado uma capacidade virtualmente infinita.

Para melhor perceção, o input apresentado em seguida encontra-se sobre a forma de colunas. Este input respeita, no entanto, todas as condições necessárias para uma boa compilação no relax4, apenas se encontra deste modo para uma melhor visualização de todo o panorama. Assim, o input inserido é o seguinte:

42	1 5 0 1000	6 12 0 1000	0
132	1 11 0 1000	6 14 0 1000	0
41 1 0 15	1 12 0 1000	6 20 0 1000	0
41 2 0 4	1 14 0 1000	6 21 0 1000	0
41 4 0 2	1 15 0 1000	6 22 0 1000	0
41 6 0 14	1 19 0 1000	6 30 0 1000	0
41 7 0 5	1 20 0 1000	6 31 0 1000	
41 10 0 1	1 21 0 1000	6 32 0 1000	0
41 13 0 13	1 22 0 1000	6 33 0 1000	0
41 17 0 17	1 29 0 1000	6 34 0 1000	0
41 23 0 10	1 30 0 1000	7 14 0 1000	0
41 24 0 12	1 31 0 1000	7 15 0 1000	0
41 25 0 13	1 32 0 1000	7 21 0 1000	0
41 26 0 38	1 33 0 1000	7 22 0 1000	0
41 35 0 9	1 34 0 1000	7 31 0 1000	0
41 36 0 7	1 37 0 1000	7 32 0 1000	0
3 42 0 5	2 8 0 1000	7 33 0 1000	0
5 42 0 1	2 12 0 1000	7 34 0 1000	0
8 41 0 4	2 14 0 1000	7 37 0 1000	0
9 42 0 4	2 15 0 1000	10 16 0 1000	0
11 42 0 3	2 16 0 1000	10 18 0 1000	0
12 42 0 3	2 20 0 1000	10 27 0 1000	0
14 42 0 3	2 21 0 1000	10 28 0 1000	0
15 42 0 3	2 22 0 1000	10 34 0 1000	0
16 42 0 3	2 30 0 1000	10 37 0 1000	0
18 42 0 3	2 31 0 1000	10 38 0 1000	0
19 42 0 2	2 32 0 1000	10 39 0 1000	0
20 42 0 2	2 33 0 1000	10 40 0 1000	0
21 42 0 2	2 34 0 1000		0
22 42 0 2	2 37 0 1000	13 21 0 1000 13 22 0 1000	0
27 42 0 2	2 38 0 1000		0
28 42 0 2	4 8 0 1000	13 31 0 1000	0
29 42 0 1	4 9 0 1000	13 32 0 1000	0
30 42 0 1	4 14 0 1000	13 33 0 1000 13 34 0 1000	0
31 42 0 1	4 15 0 1000		0
32 42 0 1	4 16 0 1000	17 27 0 1000	0
33 42 0 1	4 18 0 1000	17 37 0 1000	0
34 42 0 1	4 22 0 1000	17 38 0 1000	0
37 42 0 1	4 27 0 1000	17 39 0 1000 23 33 0 1000	0
38 42 0 1	4 28 0 1000		0
39 42 0 1	4 32 0 1000	23 34 0 1000	0
40 42 0 1		24 34 0 1000	0
70 42 U I	4 33 0 1000	25 37 0 1000	0
	4 34 0 1000	26 37 0 1000	
	4 37 0 1000	26 38 0 1000	
	4 38 0 1000	42 41 -1 1000	
	4 39 0 1000		
	4 40 0 1000 7		

2.5 Exercício 4

Após compilação, o software de otimização de redes chega a um resultado, e o output obtido é o seguinte:

```
END OF READING
NUMBER OF NODES = 42, NUMBER OF ARCS = 132
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
                                                                                   1 29
2 16
 TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.
 TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.
                                                                                    6 12
  41 1 7.
41 2 3.
41 4 2.
41 6 8.
41 7 5.
41 10 1.
                                                                                    6 14
                                                                                    7 14
7 15
                                                                                    7 37
   41 13 6.
41 17 3.
                                                                                    10 18
                                                                                   13 21
13 22
   41 23 1.
41 24 1.
41 26 1.
                                                                                    13 31
                                                                                    13 32
   5 42 1.
9 42 2.
                                                                                    17 27
                                                                                    17 39
   11 42 3.
12 42 3.
                                                                                    23 33
                                                                                   24 34
26 38
   14 42
15 42
                                                                                   42 41 38.
   16 42 3.
                                                                                OPTIMAL COST = -38.
   16 42 3.

18 42 1.

19 42 2.

20 42 2.

21 42 2.

22 42 2.

27 42 2.
                                                                                NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 60
NUMBER OF ITERATIONS = 76
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 17
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 0
                                                                                NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 17
   29 42
   30 42 1.
31 42 1.
   32 42
   33 42 1.
34 42 1.
37 42 1.
   38 42
```

Figura 4: Output Relax4

2.6 Exercício 5

Face aos resultados obtidos no software de otimização de redes chega á altura de se tomarem certas decisões para obtermos aquela que achamos, ser a melhor solução possível para o problema. Para todo este processo se tornar mais fácil, é criado um grafo auxiliar Final baseado nos resultados obtidos no software RELAX4, de modo a podermos ter uma melhor visualização da situação. Assim, o gráfico obtido é o seguinte:

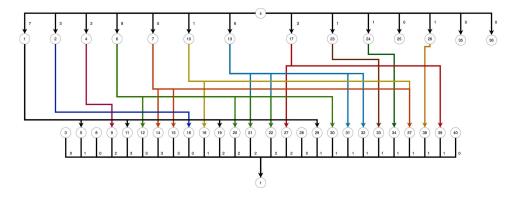


Figura 5: Grafo Final

Analisando o grafo e o output do Relax4, iremos primeiramente selecionar todos os vértices que não possuem um fluxo nulo neste sistema. Deste modo ficaremos com os seguintes vértices selecionados:

_ 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28	29	30	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	_	19	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	_
5 6 7 8 0 10		ı	_	11	12	13	14	15	16	17	18	- 1	_
	_	1	_	-	5	6	7	8	9	10	1	-	ı
1 2 3 4	_	1	_	_	ı	1	2	3	4	- 1	- 1	- 1	ı

Figura 6: Vertices selecionados com Fluxo Não Nulo

Prosseguindo com a análise do grafo e do output do relax4, surgem então alguns vértices que não se encontram selecionados e que são fulcrais para o bom lucro por parte da empresa. Aqui estamos a falar dos vértices que estão ligados ao vértice s e que possuem fluxo 0. Estes vértices são eles o 25, o 35 e o 36. Nestes vértices/nestes blocos de terreno de exploração, uma vez que o fluxo é 0, todo o lucro da escavação serve para nosso proveito, não havendo custos adicionais de escavação aos que temos primitivamente. Por isso iremos adicionar estes blocos à nossa solução. Estes blocos/vértices serão preenchidos com uma cor amarela.

Apesar de acrescentarmos vértices, também será necessário retirar alguns. Os vértices nomeados a seguir são vértices que são retirados por duas razões. Uma delas é por um bloco não possuir pelo menos um dos três blocos acima minerado (blocos estes que são necesários para que este possa ser minerado com segurança). Nesta sitação encontra-se por exemplo o vértice 2. Outra razão pela qual alguns blocos serem removidos da solução, é por não conseguirem compensar a perda de capacidade que vai existir face aos 3 blocos acima de si, que serão necessários minerar para que este possa ser minerado também. Neste caso temos o vértice 18 e o vértice 10. Devido a estes blocos serem removidos, implicará que também o vértice 4 seja removido pela falta destes (como referido na razão anterior). Podemos ainda retirar o bloco 9 e o bloco 16, dado que estes não são necessários para outros blocos que tragam lucro, e ao mesmo tempo apenas possuem um custo desnecessário. Todos estes blocos/vértices serão preenchidos com uma cor vermelha.

Assim, após todas as alterações que achamos necessárias, ficamos com o seguinte plano de escavação (iremos minerar os blocos pintados de verde e os blocos pintados de amarelo):

29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
_	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	ı
_	1	11	12	13	14	15	16	17	18	-	1
_	1	-	5	6	7	8	9	10	1	_	1
_	_	_	_	1	2	3	4	_	-	_	_

Figura 7: Vertices selecionados para a solução final

Para respondermos a questões que tocam a lucros, proveitos e custo da operação, é mais fácil possuirmos uma tabela com todos os valores necessário para obtermos tais resultados. Esta tabela está também pintada com as mesmas cores nas mesmas posições, para melhor perceção. Imediatamente abaixo encontra-se então a tabela onde constam os valores da diferença do valores dos minérios num bloco e do custo da mineração desse bloco (valor minério - custo):

-1	-1	-1	-1	-1	-1	9	7	-1	-1	-1	-1
_	-2	-2	-2	-2	10	12	13	38	-2	-2	1
_	-	-3	-3	13	-3	-3	-3	17	-3	ı	1
_	_	1	-1	14	5	-4	-4	1	١	1	1
_	_	1	_	15	4	-5	2	-	1	1	-

Figura 8: (Valor Bloco - Custo Mineração do Bloco) para cada bloco do sistema

Assim, utilizando as tabelas acima, obtemos os resultados que foram pedidos para analisar serão então. Para o Proveito utitilzamos todos os valores positivos da ultima tabela, e para o Custo utilizamos todos os negativos. Deste modo, ficamos com:

- \bullet Proveito da Operação => 9 + 7 + 10 + 12 + 13 + 38 + 13 + 17 + 14 + 5 + 15 = 153;

Também poderíamos, ao contrário do que fizemos, e obtendo na mesma um lucro final equivalente:

- **Proveito da Operação** => Somar todos os valores dos minérios/blocos explorados (com a ajuda da Figura 1), que daria **185**.
- Custo da Operação => Somar para cada bloco minerado o seu custo de minerar, consoante o seu nível de profundidade, dando um total de 64.
 - Lucro da Operação => Proveito Custo = 185 64 = 121

2.7 Exercício 6

Obtida uma resposta e uma solução ótima, é então necessário passar por uma validação do modelo. Umas vez enunciadas algumas regras no problema, estas terão de ser respeitadas! Para além das regras enunciadas, temos ainda de respeitar algumas normas, concebidas pelo tipo de aproximação tomada para com a forma como queriamos resolver o problema enunciado. Neste caso teremos de verificar as seguintes peculiaridades:

• Verificação da Conservação de Fluxo

Utilizando os valores do output recebido no Relax4 (Figura 4) e/ou os valores referidos no grafo final (Figura 5) torna-se clara a verificação da conservação de fluxo, verificando-se a igualdade da quantidade de fluxo de entrada e de fluxo de saida de cada nodo. Assim é construída uma tabela com todos os parametros necessários e com a veracidade da conservação de fluxo em cada nodo. No final obtemos a Tabela 1 exibida seguidamente.

Verificação das Restrições de Capacidade -

Utilizando os valores do output recebido no Relax4 (Figura 4) e/ou os valores referidos no grafo final (Figura 5) torna-se clara a verificação das restrições de capacidade, aferindo-se a veracidade das mesmas.

Normas de segurança são respeitadas -

Utilizando a imagem da Figura 7, onde consta os blocos da solução a serem removidos, é facil aferir a veracidade desta peculiariadade. Analisando com cuidado o quadro bidimensional da figura, para todos os blocos pintados a verde e pintados a amarelo (são os que vão ser minerados), os três blocos em cima do mesmo (o que está imediatamente sobre o bloco em estudo e os seus adjacentes) serão sempre escadados também. Em casos de blocos do nível 1, como não possuem nenhum bloco no nivel superior ao seu, nenhum bloco tem de ser obrigatoriamente removido para estes o serem. Desse modo esta restrição fica também provada, para todos os blocos de mineração selecionados para mineração.

NOTA: Para melhor vizualização e continuação de texto, as tabelas referidas nas verificações do modelo foram inseridas nas duas páginas subsequentes.

Nodo	Fluxo (Entrada) = (Saída)	Resultado	Valor Lógico
s	38 = 7 + 3 + 2 + 8 + 5 + 1 + 6 + 3 + 1 + 1 + 1	38 = 38	Verdade
1	7 = 1 + 3 + 2 + 1	7 = 7	Verdade
2	3 = 3	3 = 3	Verdade
3	0 = 0	0 = 0	Verdade
4	2 = 2	2 = 2	Verdade
5	1 = 1	1 = 1	Verdade
6	8 = 3 + 2 + 2 + 1	8 = 8	Verdade
7	5 = 1 + 3 + 1	5 = 5	Verdade
8	0 = 0	0 = 0	Verdade
9	2=2	2=2	Verdade
10	1 = 1	1 = 1	Verdade
11	3 = 3	3 = 3	Verdade
12	3 = 3	3 = 3	Verdade
13	6 = 2 + 2 + 1 + 1	6 = 6	Verdade
14	1 + 2 = 3	3 = 3	Verdade
15	3 = 3	3 = 3	Verdade
16	3 = 3	3 = 3	Verdade
17	3 = 2 + 1	3 = 3	Verdade
18	1 = 1	1 = 1	Verdade
19	2 = 2	2 = 2	Verdade
20	2 = 2	2=2	Verdade
21	2 = 2	2=2	Verdade
22	2 = 2	2=2	Verdade
23	1 = 1	1 = 1	Verdade
24	1 = 1	1 = 1	Verdade
25	0 = 0	0 = 0	Verdade
26	1 = 1	1 = 1	Verdade
27	2 = 2	2=2	Verdade
28	0 = 0	0 = 0	Verdade
29	1 = 1	1 = 1	Verdade
30	1 = 1	1 = 1	Verdade
31	1 = 1	1 = 1	Verdade
32	1 = 1	1 = 1	Verdade
33	1 = 1	1 = 1	Verdade
34	1 = 1	1 = 1	Verdade
35	0 = 0	0 = 0	Verdade
36	0 = 0	0 = 0	Verdade
37	1 = 1	1 = 1	Verdade
38	1 = 1	1 = 1	Verdade
39	1 = 1	1 = 1	Verdade
40	0 = 0	0 = 0	Verdade

Tabela 1: Tabela da Verificação da Conservação de Fluxo

Nodo	Capacidade	Valor Lógico
1	7 <= 15	Verdade
2	3 <= 4	Verdade
3	0 <= 5	Verdade
4	2 <= 2	Verdade
5	1 <= 1	Verdade
6	8 <= 14	Verdade
7	5 <= 5	Verdade
8	0 <= 4	Verdade
9	2 <= 4	Verdade
10	1 <= 1	Verdade
11	3 <= 3	Verdade
12	3 <= 3	Verdade
13	6 <= 13	Verdade
14	3 <= 3	Verdade
15	3 <= 3	Verdade
16	3 <= 3	Verdade
17	3 <= 17	Verdade
18	1 <= 3	Verdade
19	2 <= 2	Verdade
20	2 <= 2	Verdade
21	2 <= 2	Verdade
22	2 <= 2	Verdade
23	1 <= 10	Verdade
24	1 <= 12	Verdade
25	0 <= 13	Verdade
26	1 <= 38	Verdade
27	2 <= 2	Verdade
28	2 <= 2	Verdade
29	1 <= 1	Verdade
30	1 <= 1	Verdade
31	1 <= 1	Verdade
32	1 <= 1	Verdade
33	1 <= 1	Verdade
34	1 <= 1	Verdade
35	0 <= 9	Verdade
36	0 <= 7	Verdade
37	1 <= 1	Verdade
38	1 <= 1	Verdade
39	1 <= 1	Verdade
40	0 <= 1	Verdade

Tabela 2: Tabela da Verificação das Restrições de Capacidade