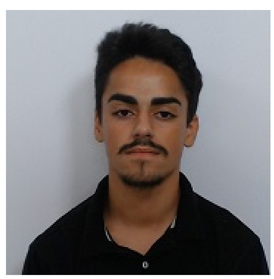
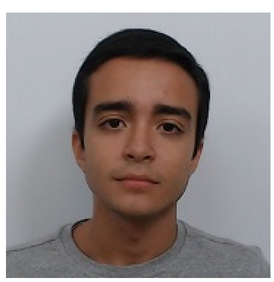
Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Trabalho 3

Métodos Determinísticos de Investigação Operacional

Bruno Filipe de Sousa Dias A89583
Guilherme Santiago Lopes Pereira A89479
Luís Enes Sousa A89597
Pedro Miguel de Soveral Pacheco Barbosa A89529



8 de dezembro de 2020

Conteúdo

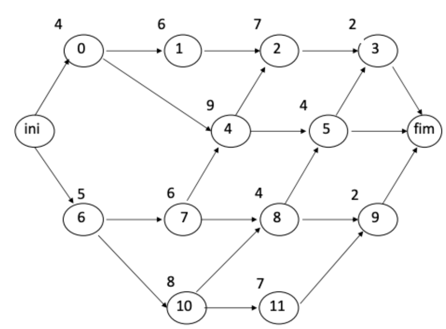
1 Introdução

No âmbito da cadeira de Métodos Determinísticos de Investigação Operacional, para o trabalho prático 3, foi-nos proposta a resolução de um problema onde é necessário aplicar o método do caminho crítico. O método do caminho crítico é aplicado a projectos que podem ser decompostos num conjunto de actividades, que se considera terem durações determinísticas, entre as quais existem relações de precedência. As restrições de precedência traduzem o facto de o instante em que se pode dar início a uma dada actividade ter de ser posterior aos instantes em que terminam as actividades que lhe são precedentes. No método do caminho crítico, a rede que representa o projecto pode ser representada de duas formas alternativas sendo que iremos utilizar a alternativa em que as atividades do projeto são representadas por nós.

Este trabalho prático 3 tem como principal objetivo decidir como devem ser reduzidas as durações das actividades, de modo a realizar o projecto na nova duração desejada, com um custo suplementar mínimo.

Para a realização deste trabalho prático foram-nos dados tanto uma tabela com as atividades, as suas durações e as suas relações de precedência e também o grafo associado ao projeto que se encontram nas seguintes imagens:

Actividade	Duração	Precedências
0	4	–
1	6	0
2	7	1,4
3	2	2,5
4	9	0,7
5	4	4,8
6	5	–
7	6	6
8	4	7,10
9	2	8,11
10	8	6
11	7	10



2 Resolução dos Exercícios Propostos - Parte 0

2.1 Exercício 0

2.1.1 Apresentação da Rede do Projeto

As indicações dadas para a remoção de atividades da rede do projeto foram as seguintes.

Seja ABCDE o número de inscrição do aluno do grupo com maior número de inscrição. Remova da lista de actividades as actividades D e E, passando as precedências a ser estabelecidas da seguinte forma:

- os sucessores da actividade D passam a ter como novas precedências os antecessores da actividade D.
- o mesmo para E.

Como o nosso valor do ABCDE é 89597 então o nosso grupo irá remover as atividades 9 e 7. Assim sendo, a tabela com as atividades, as suas durações e as suas relações de precedência e a rede do projeto após ser atualizada com a remoção das atividades D e E são as seguintes:

Atividade	Duração	Precedências
0	4	-
1	6	0
2	7	1,4
3	2	2,5
4	9	0,6
5	4	4,8
6	5	-
8	4	6,10
10	8	6
11	7	10

Tabela 1: Tabela com as atividades, as suas durações e as suas relações de precedência

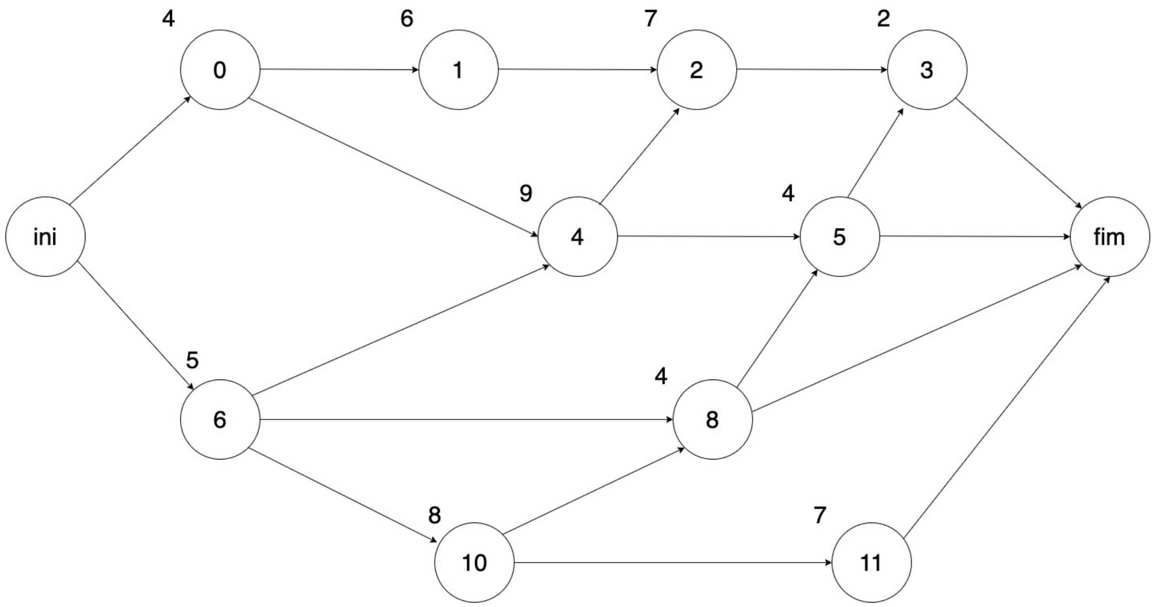


Figura 1: Grafo Representativo da Rede do Projeto após remoção das atividades 9 e 7

Após removermos a atividade 7, os seus sucessores (atividades 4 e 8) terão como novo antecessor a atividade 6. No caso da atividade 9, o seu sucessor (fim) terá como novas precedências as atividades 8 e 11.

2.2 Exercício 0

2.2.1 Apresentação do Diagrama de Gantt

Para a construção do Diagrama de Gantt, submetemos o problema apresentado pela rede anterior no LPSolve.

Variáveis de decisão

Para iniciar a formulação do problema de programção linear apresentado é necessário definir as variáveis de decisão. Neste caso específico, as variáveis de decisão irão representar o tempo de início de cada atividade.

Deste modo, as nossas variáveis de decisão irão ser:

ti: Tempo de início da atividade i.
i $\in \{ini, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, fim\}$

Função Objetivo

O objetivo deste modelo de programação linear é minimizar o tempo de execução total do projeto obedecendo a todas as restrições de precedência apresentadas. Desta forma, obtemos a seguinte função objetivo:

$$\textbf{min: } \mathbf{t}_{fim}$$

Restrições

As restrições do problema, relativas a cada um dos arcos do grafo, traduzem as diferentes relações de precedência entre as atividades. Para cada atividade j, o tempo de início da atividade j deve ser posterior ao tempo de conclusão de cada uma das atividades i que precedem essa mesma atividade j.

Desta forma, sabendo que ti designa o tempo de início da atividade i, então, a função ti+di irá designar a conclusão dessa mesma atividade.

As restrições do problema são as seguintes:

Atividade ini:
arco_ini0 : t0 $\geq tini + 0$;
arco_ini6 : t6 $\geq tini + 0$;

Atividade 0:
arco_01 : t1 $\geq t0 + 4$;
arco_04 : t4 $\geq t0 + 4$;

Atividade 1:
arco_12 : t2 $\geq t1 + 6$;

Atividade 2:
arco_23 : t3 $\geq t2 + 7$;

Atividade 3:
arco_3fim : tfim $\geq t3 + 2$;

Atividade 4:
arco_42 : t2 $\geq t4 + 9$;
arco_45 : t5 $\geq t4 + 9$;

Atividade 5:
arco_53 : t3 $\geq t5 + 4$;
arco_5fim : tfim $\geq t5 + 4$;

Atividade 6:
arco_64 : t4 $\geq t6 + 5$;
arco_68 : t8 $\geq t6 + 5$;

Atividade 8:
arco_85 : t5 $\geq t8 + 4$;
arco_8fim : tfim $\geq t8 + 4$;

Atividade 10:
arco_108 : t8 $\geq t10 + 8$;
arco_1011 : t11 $\geq t10 + 8$;

Atividade 11:
arco_11fim : tfim $\geq t11 + 7$;

Input do LPSolve

De seguida, apresenta-se o ficheiro input submetido ao LPSolve:

```
/* Objective Function */

min: tfim;

/* Variable bounds */

arco_ini0: t0 >= tini + 0;
arco_ini6: t6 >= tini + 0;
arco_01: t1 >= t0 + 4;
arco_04: t4 >= t0 + 4;
arco_12: t2 >= t1 + 6;
arco_23: t3 >= t2 + 7;
arco_3fim: tfim >= t3 + 2;
arco_42: t2 >= t4 + 9;
arco_45: t5 >= t4 + 9;
arco_53: t3 >= t5 + 4;
arco_5fim: tfim >= t5 + 4;
arco_64: t4 >= t6 + 5;
arco_68: t8 >= t6 + 5;
arco_85: t5 >= t8 + 4;
arco_8fim: tfim >= t8 + 4;
arco_108: t8 >= t10 + 8;
arco_1011: t11 >= t10 + 8;
arco_11fim: tfim >= t11 + 7;
```

Figura 2: Ficheiro Input LPSolve

Ficheiro Output do LPSolve

Depois de executado o ficheiro de input acima apresentado no LPSolve verificamos que o projeto terá uma duração de 23 unidades de tempo.

```
Value of objective function: 23.00000000

Actual values of the variables:
tfim                              23
t0                                 0
tini                               0
t6                                 0
t1                                 4
t4                                 5
t2                                14
t3                                21
t5                                14
t8                                 8
t10                                0
t11                                8
```

Figura 3: Ficheiro Output LPSolve

Diagrama de Gantt

Esta solução será agora apresentada através do Diagrama de Gantt.

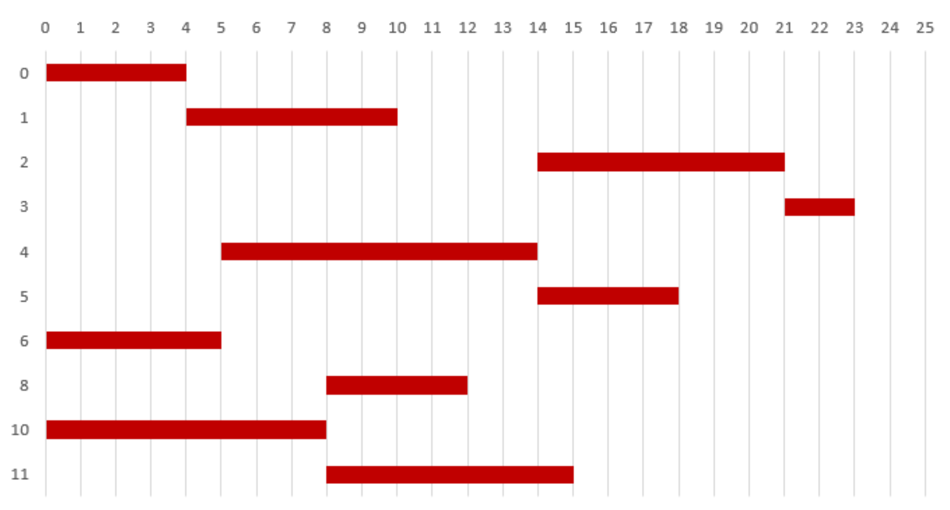


Figura 4: Diagrama de Gantt

3 Resolução dos Exercícios Propostos - Parte 1

3.1 Exercício 1

3.1.1 Descrição do Problema

Considerando que é possível, através do aumento dos recursos aplicados e de custos suplementares, reduzir a duração de uma atividade, vamos recorrer a dois tipos de relação diferentes. A primeira em que o custo é dado por uma função contínua côncava e a segunda em que o aumento do custo é feito através da escolha de um conjuntos discreto de opções.

Em relação ao primeiro caso, temos que o modelo com funções não lineares pode ser aproximado por um outro em que cada função dessas é aproximada por uma função contínua linerar por partes. Neste trabalho prático 3, iremos aproximar a nossa função não linear através de uma função linear com 2 partes. No caso em análise, cada atividade é composta por cinco parâmetros adicionais, sendo eles:

- o custo normal, expresso em unidades monetárias [U.M.].
- o custo suplementar de reduzir a duração da actividade de uma unidade de tempo [U.T.], expresso em [U.M./U.T.].
- o valor da máxima redução de tempo a um custo c1.
- o valor de c2, o custo suplementar de reduzir a duração da actividade de uma unidade de tempo [U.T.] após ter aplicado a máxima redução a um custo c1
- o valor da máxima redução de tempo a um custo c2.

Esses valores estão apresentados na seguinte tabela que foi fornecida no enunciado do 3º Trabalho Prático da Unidade Curricular, sendo que o nosso grupo procedeu à remoção das atividades 7 e 9.

Atividade	Custo Normal	c1	Máx. red. a custo c1	c2	Máx. red. a custo c2
0	400	200	0.5	100	0.5
1	1000	600	1	300	1
2	1400	1000	3	500	1
3	300	200	0.5	100	0.5
4	2000	800	2	400	1
5	1000	1600	0.5	800	0.5
6	800	180	1	90	1
8	600	200	0.5	100	0.5
10	1600	1000	0.5	500	0.5
11	1400	600	1	300	1

Tabela 2: Tabela com as atividade e os seus parâmetros

Em relação ao segundo caso, estamos perante um conjunto discreto de opções para a realização de uma certa atividade, em que se pretende que o tempo de execução do projeto da PARTE 0 seja reduzido em 3 U.T.

3.1.2 Objetivo do Problema

O objetivo do problema deste trabalho prático consiste em decidir como devem ser feitas as reduções das durações das atividades, de maneira à realização do projeto ser feita na nova duração desejada. Isto tudo deve ser alcançado com um custo suplementar mínimo.

3.1.3 Variáveis de Decisão

Relativamente ao problema anterior, e tendo em conta as variáveis de decisão usadas, nesta parte foi preciso adicionar uma variável de decisão binária b_i, com o intuito de de impedir que sejam feitas reduções ao custo c2 sem que o custo c1 tenha atingido o seu limite. Assim sendo, as variáveis de decisão são:

- t_i, tempo em que inicia a atividade i.
- r_{1i}, redução aplicada a custo c1 à atividade i.
- r_{2i}, redução aplicada a custo c2 à atividade i.
- $$b_i = \begin{cases} 1, & \text{Se a redução a custo c1 não atingiu o seu limite} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

  $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

3.1.4 Dados

Os dados deste problema são apresentados na seguinte tabela:

Atividade	Custo Normal	c1	Máx. red. a custo c1	c2	Máx. red. a custo c2	Duração	Precedências
0	400	200	0.5	100	0.5	4	-
1	1000	600	1	300	1	6	0
2	1400	1000	3	500	1	7	1,4
3	300	200	0.5	100	0.5	2	2,5
4	2000	800	2	400	1	9	0,6
5	1000	1600	0.5	800	0.5	4	4,8
6	800	180	1	90	1	5	-
8	600	200	0.5	100	0.5	4	6,10
10	1600	1000	0.5	500	0.5	8	6
11	1400	600	1	300	1	7	10

Tabela 3: Tabela com os dados do trabalho

3.1.5 Restrições

Para além das restrições utilizadas em cima, foi necessário a adição de mais restrições para as dependências de reduções. Isto, porque é necessário garantir que as reduções a custo c2 só sejam efetuadas após c1 ter atingido o seu limite. Deste modo, é necessário restringir tanto as reduções a custo c1 como as reduções a custo c2.

As reduções a custo c1 são mais fáceis de restringir pois não são dependentes. Desta forma, a sua restrição é a seguinte:

$$r_{1i} \leq \mathrm{r}_{1i}^{max}$$

Em relacão às reduções de custo c2 é necessário garantir quer as mesmas só sejam efetuadas quando as de custo c1 atinjam o seu limite, como referido em cima. Para tal, utilizamos a variável de decisão binária b_i que referimos em cima (na secção das variáveis de decisão). Esta serve para indicar se uma dada atividade pode ou não continuar a ser reduzida a um custo c1. Desta maneira, idealizou-se a seguinte restrição:

$$b_i \geq \mathrm{r}_{1i}^{max} - r_{1i}$$

Assim sendo se o resultado obtido for maior do que 0 sabemos que a redução a custo c1 ainda não atingiu o seu limite máximo. Caso o valor seja 0, sabemos que atingiu o limite máximo.

A restrição em relação às reduções de custo c2 é a seguinte:

$$b_i \leq \mathrm{r}_{2i}^{max} \; (1\text{-}b_i)$$

Assim, se a redução a custo c1 não tiver atingido o seu limite a variável binária b_i terá o valor de 1, obtendo-se a restrição $r_{2i} \leq 0$, impossibilitando assim reduzir a custo c2. Caso, contrário, esta tomará o valor de 0, obtendo-se $r_{2i} \leq \mathrm{r}_{2i}^{max}$, sendo então possível iniciar a redução.

3.2 Exercício 2

3.2.1 Variáveis de Decisão

Como referido anteriormente, teremos então variáveis de decisão que correspondem ao tempo de início de cada atividade i, t_i, à redução a custo c1 aplicada à atividade i, r_{1i}, à redução a custo c2 aplicada à atividade i, r_{2i}, e uma variável binária, b_i, que irá impedir que se façam reduções a custo c2 sem que o custo c1 tenha atingido o seu limite.

3.2.2 Restrições

Como referimos em cima, para além das restrições utilizadas em cima para obtermos o Diagrama de Gantt, ainda teremos mais restrições que irão garantir as dependências das reduções. Assim sendo, as restrições por atividades são as seguintes:

Atividade fim:

tfim $\leq$ 20;(23 - 3 U.T. pois é a redução que pede no enunciado)

Atividade ini:

arco_ini0 : t0 $\geq tini + 0$;
$arco\_ini6 : t6 \geq tini + 0$;

Atividade 0:

arco_01 : t1 $\geq t0 - (\mathrm{r}_{01} + r_{02}) + 4$;
arco_04 : t4 $\geq t0 - (\mathrm{r}_{01} + r_{02}) + 4$;

Atividade 1:

arco_12 : t2 $\geq t1 - (\mathrm{r}_{11} + r_{12}) + 6$;

Atividade 2:

arco_23 : t3 $\geq t2 - (\mathrm{r}_{21} + r_{22}) + 7$;

Atividade 3:
arco_3fim : tfim $\geq t3 - (\mathrm{r}_{31} + r_{32}) + 2$;

Atividade 4:
arco_42 : t2 $\geq t4 - (\mathrm{r}_{41} + r_{42}) + 9$;
arco_45 : t5 $\geq t4 - (\mathrm{r}_{41} + r_{42}) + 9$;

Atividade 5:
arco_53 : t3 $\geq t5 - (\mathrm{r}_{51} + r_{52}) + 4$;
arco_5fim : tfim $\geq t5 - (\mathrm{r}_{51} + r_{52}) + 4$;

Atividade 6:
arco_64 : t4 $\geq t6 - (\mathrm{r}_{61} + r_{62}) + 5$;
arco_68 : t8 $\geq t6 - (\mathrm{r}_{61} + r_{62}) + 5$;

Atividade 8:
arco_85 : t5 $\geq t8 - (\mathrm{r}_{81} + r_{82}) + 4$;
arco_8fim : tfim $\geq t8 - (\mathrm{r}_{81} + r_{82}) + 4$;

Atividade 10:
arco_108 : t8 $\geq t10 - (\mathrm{r}_{101} + r_{102}) + 8$;
arco_1011 : t11 $\geq t10 - (\mathrm{r}_{101} + r_{102}) + 8$;

Atividade 11:
arco_11fim : tfim $\geq t11 - (\mathrm{r}_{111} + r_{112}) + 7$;

Teremos também as restrições para as **reduções máximas para o custo c1**.

$r_{01} \leq 0.5$
$r_{11} \leq 1$
$\mathrm{r}_{21} \leq 3$
$\mathrm{r}_{31} \leq 0.5$
$\mathrm{r}_{41} \leq 2$
$\mathrm{r}_{51} \leq 0.5$
$\mathrm{r}_{61} \leq 1$
$\mathrm{r}_{81} \leq 0.5$
$\mathrm{r}_{101} \leq 0.5$
$\mathrm{r}_{111} \leq 1$

Teremos também as nossas restrições para as variáveis binárias.
bin $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_8, b_{10}, b_{11}$;

No caso de o limite máximo de redução a custo c1 seja utilizado, teremos que $b_i = 0$. Assim, teremos as seguintes restrições.

$b_0 \geq 0.5 - \mathrm{r}_{01}$
$b_1 \geq 1 - \mathrm{r}_{11}$
$b_2 \geq 3 - \mathrm{r}_{21}$
$b_3 \geq 0.5 - \mathrm{r}_{31}$
$b_4 \geq 2 - \mathrm{r}_{41}$
$b_5 \geq 0.5 - \mathrm{r}_{51}$
$b_6 \geq 1 - \mathrm{r}_{61}$
$b_8 \geq 0.5 - \mathrm{r}_{81}$
$b_{10} \geq 0.5 - \mathrm{r}_{101}$
$b_{11} \geq 1 - \mathrm{r}_{111}$

As restrições para as **reduções máximas para o custo c2** são:

$r_{02} \leq 0.5 * (1 - \mathrm{b}_0)$
$r_{12} \leq 1 * (1 - \mathrm{b}_1)$
$r_{22} \leq 1 * (1 - \mathrm{b}_2)$
$r_{32} \leq 0.5 * (1 - \mathrm{b}_3)$
$r_{42} \leq 1 * (1 - \mathrm{b}_4)$
$r_{52} \leq 0.5 * (1 - \mathrm{b}_5)$
$r_{62} \leq 1 * (1 - \mathrm{b}_6)$
$r_{82} \leq 0.5 * (1 - \mathrm{b}_8)$
$r_{102} \leq 0.5 * (1 - \mathrm{b}_{10})$
$r_{112} \leq 1 * (1 - \mathrm{b}_{11})$

3.2.3 Função Objetivo

Com a função objetivo pretendemos alcançar as reduções das durações das atividades, de maneira à realização do projeto ser feita na nova duração desejada, tendo em conta que devemos alcançar tudo isto com um custo suplementar mínimo. Logo, a nossa função objetivo irá ser uma função de minimização.

Assim, a nossa função objetivo é

min: $200r_{01} + 100r_{02} + 600r_{11} + 300r_{12} + 1400r_{21} + 500r_{22} + 300r_{31} + 100r_{32} + 2000r_{41} + 400r_{42} + 1000r_{51} + 800r_{52} + 800r_{61} + 90r_{62} + 600r_{81} + 100r_{82} + 1600r_{101} + 500r_{102} + 1400r_{111} + 300r_{112}$

3.2.4 Exercício 3

Utilizando o software LPSolve, e introduzindo as restrições, bem como a função objetivo, chegámos ao seguinte ficheiro:

```
// custo associado à redução das durações das actividades (Função Objetivo)
min: 200 r01 + 100 r02 + 600 r11 + 300 r12 + 1000 r21 + 500 r22 + 200 r31 + 100 r32
+ 800 r41 + 400 r42 + 1600 r51 + 800 r52 + 180 r61 + 90 r62 + 200 r81 + 100 r82
+ 1000 r101 + 500 r102 + 600 r111 + 300 r112;

// tempo máximo para concluir o projecto
tfim <= 20;

// relações de precedência
// na restrição tj >= ti - ri + di, a função ti - ri + di designa
// o tempo de conclusão da actividade i após a redução da duração,
// de di para -ri + di
arco_ini0: t0 >= tini + 0;
arco_ini6: t6 >= tini + 0;
arco_01: t1 >= t0 - r01 - r02 + 4;
arco_04: t4 >= t0 - r01 - r02 + 4;
arco_12: t2 >= t1 - r11 - r12 + 6;
arco_23: t3 >= t2 - r21 - r22 + 7;
arco_3fim: tfim >= t3 - r31 - r32 + 2;
arco_42: t2 >= t4 - r41 - r42 + 9;
arco_45: t5 >= t4 - r41 - r42 + 9;
arco_53: t3 >= t5 - r51 - r52 + 4;
arco_5fim: tfim >= t5 - r51 - r52 + 4;
arco_64: t4 >= t6 - r61 - r62 + 5;
arco_68: t8 >= t6 - r61 - r62 + 5;
arco_85: t5 >= t8 - r81 - r82 + 4;
arco_8fim: tfim >= t8 - r81 - r82 + 4;
arco_108: t8 >= t10 - r101 - r102 + 8;
arco_1011: t11 >= t10 - r101 - r102 + 8;
arco_11fim: tfim >= t11 - r111 - r112 + 7;
```

Figura 5: Ficheiro de Input(1)

```
// reduções máximas permitidas custo c1
r01 <= 0.5;
r11 <= 1;
r21 <= 3;
r31 <= 0.5;
r41 <= 2;
r51 <= 0.5;
r61 <= 1;
r81 <= 0.5;
r101 <= 0.5;
r111 <= 1;

// limite máximo de redução a custo c1 é utilizado, bi = 0
b0 >= 0.5 - r01;
b1 >= 1 - r11;
b2 >= 3 - r21;
b3 >= 0.5 - r31;
b4 >= 2 - r41;
b5 >= 0.5 - r51;
b6 >= 1 - r61;
b8 >= 0.5 - r81;
b10 >= 0.5 - r101;
b11 >= 1 - r111;

// reduções máximas permitidas custo c2
r02 <= 0.5  - 0.5b0;
r12 <= 1 - b1;
r22 <= 1 - b2;
r32 <= 0.5 - 0.5b3;
r42 <= 1 - b4;
r52 <= 0.5 - 0.5b5;
r62 <= 1 - b6;
r82 <= 0.5 - 0.5b8;
r102 <= 0.5 - 0.5b10;
r112 <= 1 - b11;

bin b0, b1, b2, b3, b4, b5, b6, b8, b10, b11;
```

Figura 6: Ficheiro de Input(2)

3.2.5 Exercício 4

Após o software LPSolve executar o input dado, foi gerada a solução ótima. O output gerado pelo software foi o seguinte:

```
Value of objective function: 2800.00000000

Actual values of the variables:
r01                              0
r02                              0
r11                              0
r12                              0
r21                              2
r22                              0
r31                              0
r32                              0
r41                              1
r42                              0
r51                              0
r52                              0
r61                              0
r62                              0
r81                              0
r82                              0
r101                             0
r102                             0
r111                             0
r112                             0
tfim                            20
t0                               0
tini                             0
t6                               0
t1                               4
t4                               5
t2                              13
t3                              18
t5                              13
t8                               8
t10                              0
t11                              8
```

Figura 7: Ficheiro de Output(1)

```
b0     1
b1     1
b2     1
b3     1
b4     1
b5     1
b6     1
b8     1
b10    1
b11    1
```

Figura 8: Ficheiro de Output(2)

3.2.6 Exercício 5

O Diagrama de Gantt gerado a partir da solução obtida através do software LPSolve é o seguinte:

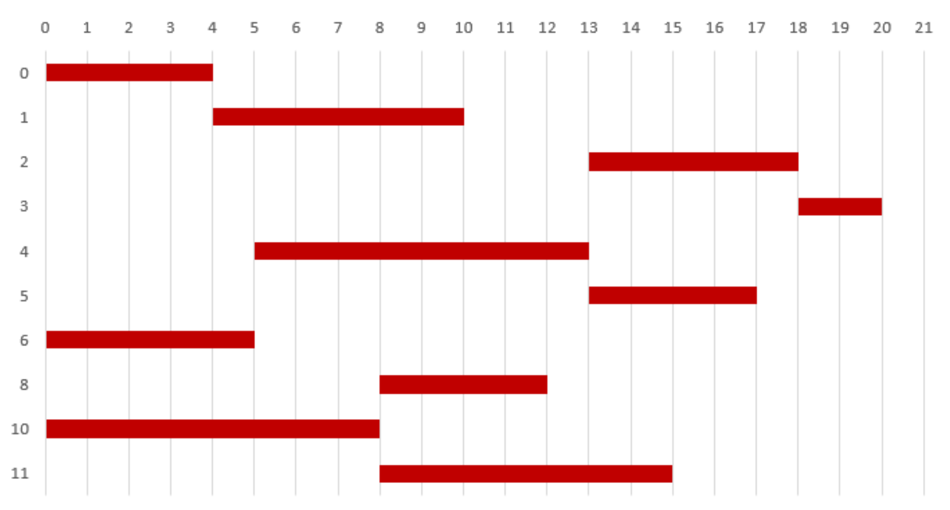


Figura 9: Diagrama de Gantt

3.2.7 Exercício 6

Como é possível verificar, ao comparar os dois Diagramas de Gantt apresentados em cima, ocorreram algumas reduções em várias atividades. Isto acontece devido ao tempo total do projeto ter sido diminuído em 3 unidades passando de 23 para 20 unidades.

Solução Ótima calculada pelo LPSolve $= 2800$

Cálculo para verificação do custo da solução é o seguinte:
$1000r_{21} + 800r_{41} = 1000 * 2 + 800 * 1 = 2800$

4 Conclusão

Concluindo, com a realização deste trabalho o grupo aprofundou os seus conhecimentos acerca de Programação Linear Inteira e Programação Linear Inteira Mista. Através da realizacação deste trabalho prático 3, em conjunto com os outros dois trabalhos práticos, conseguimos desenvolver a capacidade de análise de sistemas, criação de modelos que os descrevem, validação dos mesmos e interpretação de soluções ótimas obtidas para os resolver.

Deste modo, pensamos que conseguimos atingir os objetivos propostos pelos docentes da Unidade Curricular e que realizamos todos os exercícios propostos neste trabalho da melhor forma.