第 3 章　交流电路

3.1　正弦交流电的基本概念

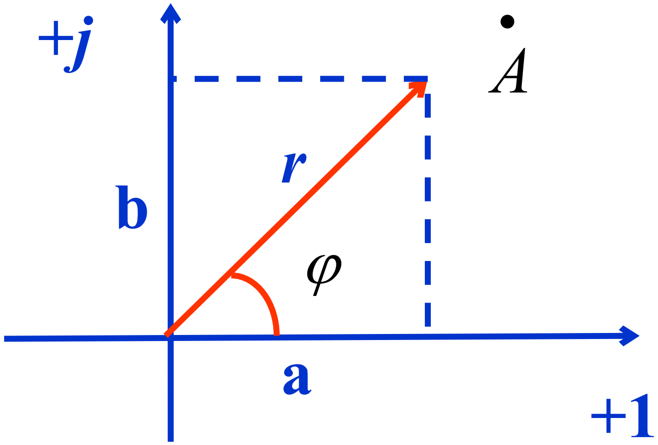
3.2　正弦量的相量表示法

3.3　单一元件参数电路

3.4　简单的正弦交流电路分析

3.6　正弦交流电路的功率

二、复数式表示法



直角坐标 ⟶ 复数坐标

横轴 ⟶ 实轴 ⟶ 表示复数的实部

纵轴 ⟶ 虚轴 ⟶ 表示复数的虚部

$$a = r\cos\varphi$$

$$b = r\sin\varphi$$

※ ① 复数的代数式 ⟶ $\dot{A} = a + jb$

② 复数的三角函数式 ⟶ $\dot{A} = r\cos\varphi + j\,r\sin\varphi$

欧拉公式：

$$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

③ 复数的指数式 ⟶ $\dot{A} = re^{j\varphi}$

※ ④ 复数的极坐标式 ⟶ $\dot{A} = r\angle\varphi$

相量的加减运算常用代数形式；乘除运算常用极坐标形式；

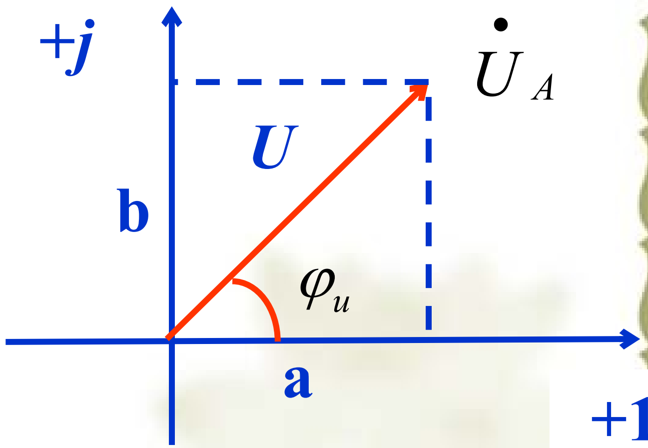
例题： $u_A = 220\sqrt{2}\sin(314t)\,V$ $u_B = 220\sqrt{2}\sin(314t - 120°)\,V$

要求：写出幅值相量和有效值相量的代数形式和极坐标形式

$$\dot{U}_{Am} = r\angle\varphi = 220\sqrt{2}\angle 0° = a + jb$$

$$= (220\sqrt{2}\cos 0°) + j(220\sqrt{2}\sin 0°)$$

$$= 220\sqrt{2}\,V$$



$$\dot{U}_A = r\angle\varphi = 220\angle 0° = a + jb$$

$$= (220\cos 0°) + j(220\sin 0°) = 220\,V$$

※ 结论：用复数表示正弦交流电量时，常用极坐标形式表示

$\dot{U}_m = U_m\angle\varphi_u$ $\dot{U} = U\angle\varphi_u$ 常使用有效值相量

相量的加减运算常用代数形式；乘除运算常用极坐标形式；

$$\dot{A}_1 = a_1 + jb_1 = r_1\angle\varphi_1$$

$$\dot{A}_2 = a_2 + jb_2 = r_2\angle\varphi_2$$

① $\dot{A} = \dot{A}_1 + \dot{A}_2$

$$= (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

② $\dot{A} = \dot{A}_1 - \dot{A}_2$

$$= (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

③ $\dot{A} = \dot{A}_1 \times \dot{A}_2$

$$= r_1 r_2 \angle(\varphi_1 + \varphi_2)$$

④ $\dot{A} = \dot{A}_1 \div \dot{A}_2$

$$= \frac{r_1}{r_2}\angle(\varphi_1 - \varphi_2)$$

[例 3- 3] 已知 A_1=10+j5 , A_2=3+j4 . 求 $A_1 \cdot A_2$ 和 $\frac{A_1}{A_2}$

解：

$$A_1 = 10 + j5 = 11.18\angle 26.57^0$$

$$A_2 = 3 + j4 = 5\angle 53.13^0$$

$$A_1 \cdot A_2 = (11.18\angle 26.57^0)(5\angle 53.13^0)$$

$$= (11.18 \times 5)\angle(26.57^0 + 53.13^0)$$

$$= 55.90\angle 79.70^0$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{11.18\angle 26.57^0}{5\angle 53.13^0}$$

$$= \frac{11.18}{5}\angle\ (26.57^0 - 53.13^0)$$

$$= 2.236\angle -26.56^0$$

如何计算线电压$u_{AB}=u_A-u_B=220\sqrt{2}\sin(\omega t)-220\sqrt{2}\sin(\omega t-120°)$？

步骤1：把瞬时值公式转成相量公式　　哪个好算选哪个

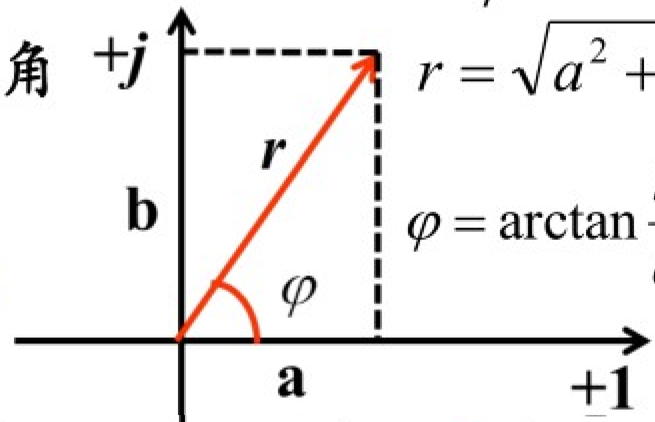
幅值相量公式：$\dot{U}_{ABm}=\dot{U}_{Am}-\dot{U}_{Bm}$　有效值相量公式：$\dot{U}_{AB}=\dot{U}_A-\dot{U}_B$

有向线段的长度为最大值　　有向线段的长度为有效值

步骤2：根据瞬时值表达式先写出相量的极坐标形式$r\angle\varphi$

r:表示有向线段的长度　φ:表示初相角

$\dot{U}_A=220\angle 0°$　$\dot{U}_B=220\angle -120°$



$r=\sqrt{a^2+b^2}$

$\varphi=\arctan\dfrac{b}{a}$

步骤3：把极坐标形式转换为代数形式

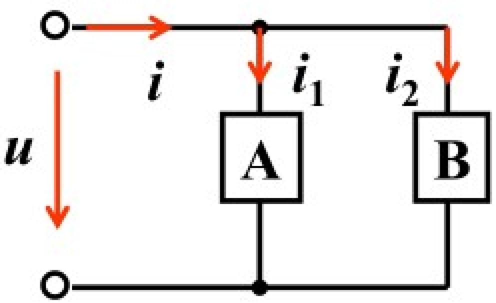
$a=r\cos\varphi$　　$b=r\sin\varphi$

$\dot{U}_{AB}=\dot{U}_A-\dot{U}_B=(220+0j)-(-110-j110\sqrt{3})=330+j110\sqrt{3}$　有效值

步骤4：把代数形式转换为极坐标形式　$=220\sqrt{3}\angle 30°\approx 380\angle 30°$

步骤5：利用极坐标写出瞬时值表达式 ⟶ 注意相量符号的含义

交流电路的所有计算都遵循上述步骤　$u_{AB}=380\sqrt{2}\sin(\omega t+30°)$



已知：$i_1 = 8\sin(314t + 60°)A$　　$\dot{I}_{m1} = 8\angle 60°$

$i_2 = 6\sin(314t - 30°)A$　　$\dot{I}_{m2} = 6\angle -30°$

求：$i = ?$　　$i = 10\sin(314t + 23.1°)A$

KCL:任一瞬间，流入某个节点的电流总和＝流出它的电流总和

※ KCL和KVL均仅对瞬时值成立，对有效值和最大值并不成立!

$i = i_1 + i_2$　　$I_m \neq I_{m1} + I_{m2} \Rightarrow I \neq I_1 + I_2$　　$\dot{I}_m = \dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2}$　　$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$

步骤1：把瞬时值公式转成相量公式（哪个好算选哪个）

步骤2：根据瞬时值表达式先写出相量的极坐标形式 $r\angle\varphi$

步骤3：把极坐标形式转换为代数形式 $a + jb$

$\dot{I}_m = \dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2} = (4 + j6.9) + (5.2 - j3) = 9.2 + j3.9 = 10\angle 23.1°$

步骤4：把代数形式转换为极坐标形式　　**最大值**

步骤5：利用极坐标写出瞬时值表达式（幅值相量or有效值相量）

注意：瞬时值表达式和相量的转换跳板是极坐标 $r\angle\varphi$

用相量分析交流电路步骤

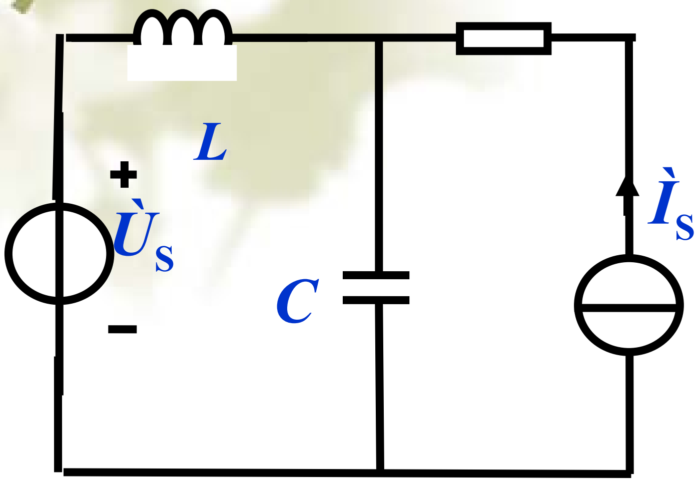
1，将各交流物理量用相量表示

2，根据电路关系，对相量进行四则运算

相量的加减运算常用代数形式;

乘除运算常用极坐标形式;

3，将相量计算结果再变换成正弦量形式



(a)

问题：交流电路中，两电源都是交流电源，已知各元件参数，求各元件上的电压电流值。其中电源

$$u_s(t) = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 60^\circ)\ \mathrm{A}$$

$$i_s(t) = 5\sqrt{2}\sin(\omega t - 90^0)\ \mathrm{A}$$

如何求解?

需先确定各元件上伏安关系。

第 3 章　交流电路

3.1　正弦交流电的基本概念

3.2　正弦量的相量表示法

3.3　单一元件参数电路

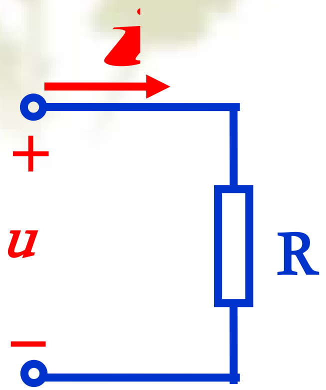
3.4　简单的正弦交流电路分析

3.6　正弦交流电路的功率

3.3 单一元件参数电路

3.2.1 电阻电路

（1）电压与电流的关系

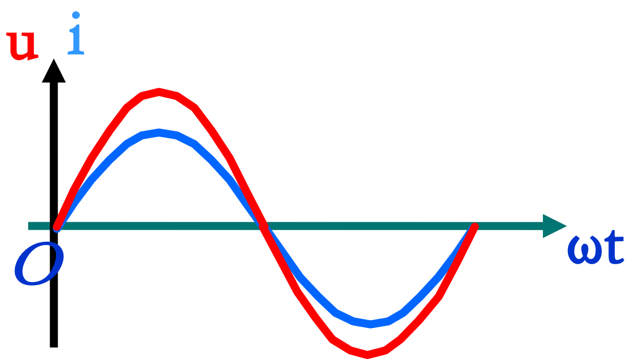


若 $i = I_m \sin\omega t = \sqrt{2} I \sin\omega t$

由欧姆定律： $u = R\,i$

得 $u = RI_m \sin\omega t$

$= \sqrt{2} RI \sin\omega t$



对照电压与电流，可见

（1）频率相同

（2）有效值 $U = RI$ $U_m = R I_m$

（3）同相

$\phi = \psi_u - \psi_i = 0°$

（4）相量关系

$\dot{U} = \dot{I} R$

（2）功率的计算

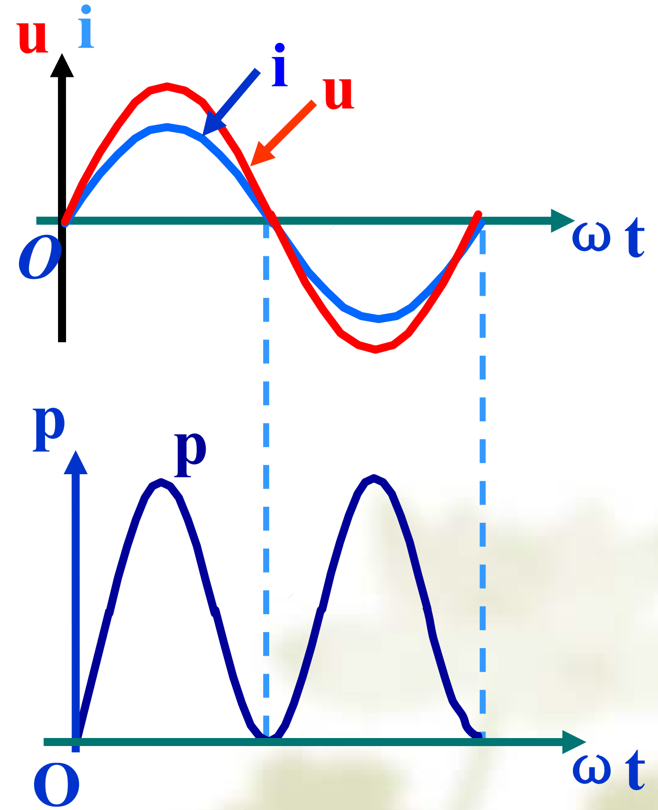
①瞬时功率 p：瞬时电压与瞬时电流的乘积

$$i=\sqrt{2}\,I\sin\omega t$$

$$u=\sqrt{2}\,U\sin\omega t$$

$$p=u\cdot i$$

$$=2UI\sin^2\omega t\ \geq 0$$



※ 结论：R 永远在消耗电能

↓

R 是耗能原件

② 平均功率 ⟶ 瞬时功率在一个周期内的平均值

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T(2UI\sin^2\omega t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T UI\,(1-\cos 2\omega t)\,dt$$

※ $P=UI=I^2R=U^2/R$ 交流设备的额定功率 ＝ 平均功率

[例 3-4] 图 3-15 中电路，$\dot{U}=220\angle 0^0$V, P=200W, 求电流 $\dot{I}$ 和电阻 R 。

解法一：对于图 3-15 中电阻电路，由 $P=UI$ 得

$$I=\frac{P}{U}=\frac{200}{220}\approx 0.91\text{A}$$

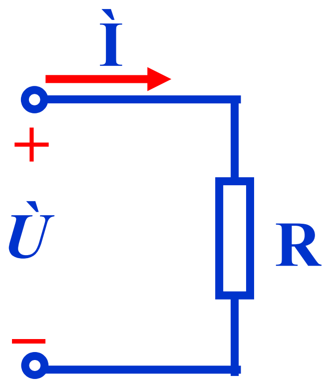


图 3-15

电压与电流同相位，故

$$\dot{I}\approx 0.91\angle 0^0\ \text{A}$$

由 $\dot{U}=R\dot{I}$ 得

$$R=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{220\angle 0^0}{0.91\angle 0^0}=242\,(\Omega)$$

[例 3-5] 图 3-15 中电路， $\dot{U}=220\angle 0^{0}$V, P=200W, 求电流 $\dot{I}$ 和电阻 R 。

解法二：对于图 3-15 中电阻电路，由 $P=\frac{U^2}{R}$ 得

$$R=\frac{U^2}{P}=\frac{220^2}{220}=242(\Omega)$$

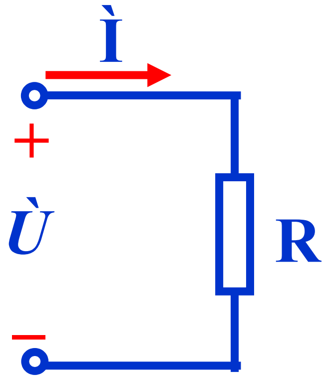


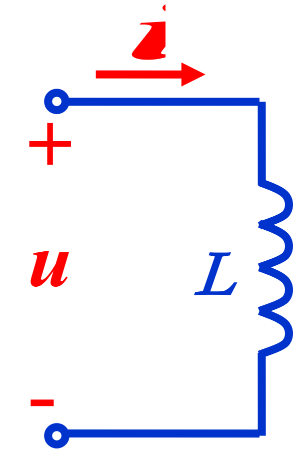
图 3-15

由 $\dot{U}=R\dot{I}$ 得

$$I=\frac{P}{U}=\frac{200}{220}\approx 0.91\text{A}$$

3.3.2 电感元件

（1）电压与电流的关系 $u = L\dfrac{di}{dt}$



设 $i = \sqrt{2} I \sin \omega t$

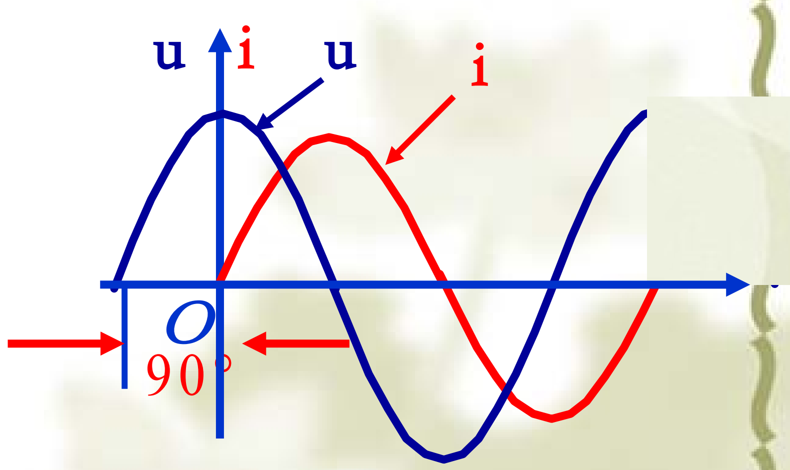
则 $u = L\dfrac{d(\sqrt{2} I \sin \omega t)}{dt} = \sqrt{2} I \omega L \cos(\omega t)$

$= \sqrt{2} I \omega L \sin(\omega t + 90°)$

① 频率相同

② 有效值 $U = \omega L I$

③ 电压超前电流 90°



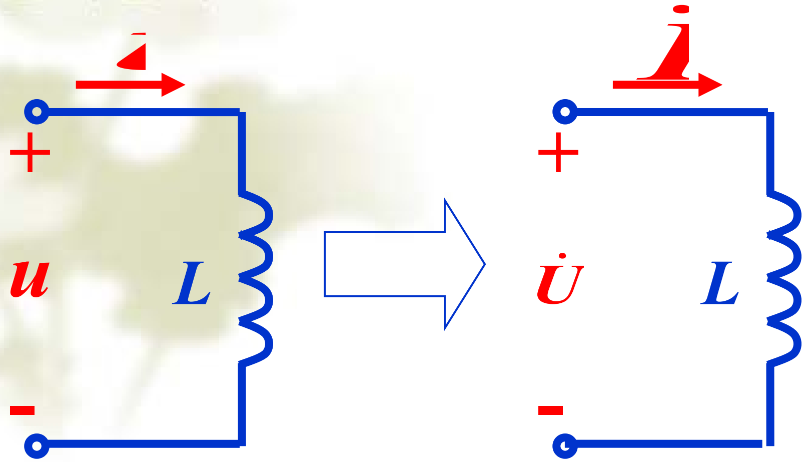
令 $X_L = \omega L = 2\pi f L$ ，$U_m = I_m X_L$

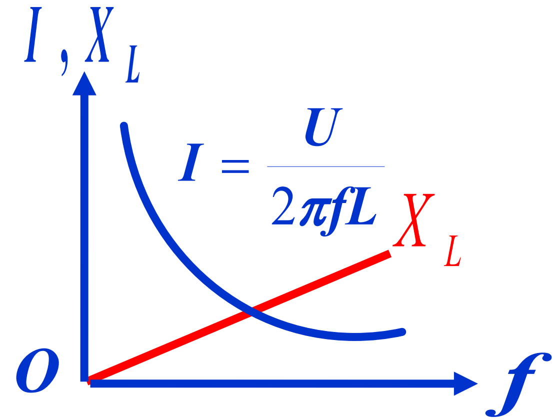
$U = I X_L$

感抗(Ω)

$u \neq i X_L = L\dfrac{di}{dt}$

④ $\boxed{\dot{U} = jX_L \dot{I}}$ $j = \angle 90°$ $-j = \angle -90°$

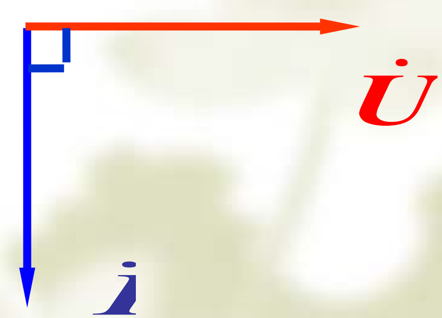




电感电路相量形式的欧姆定律

$$\dot{U} = \mathrm{j}\omega L\dot{I} = \mathrm{j}X_L\dot{I}$$

电感的伏安特性



相量图

(2) 瞬时功率 $p = i \cdot u = U_m I_m \sin\omega t \sin(\omega t + 90°)$

$$= U_m I_m \sin\omega t \cos\omega t = \frac{U_m I_m}{2}\sin 2\omega t$$

$$= UI \sin 2\omega t$$

(3) 平均功率

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T UI\sin(2\omega t)\,\mathrm{d}t = 0$$

电感元件有的时刻是吸收电功率，有的时刻发出电功率。平均功率为零。

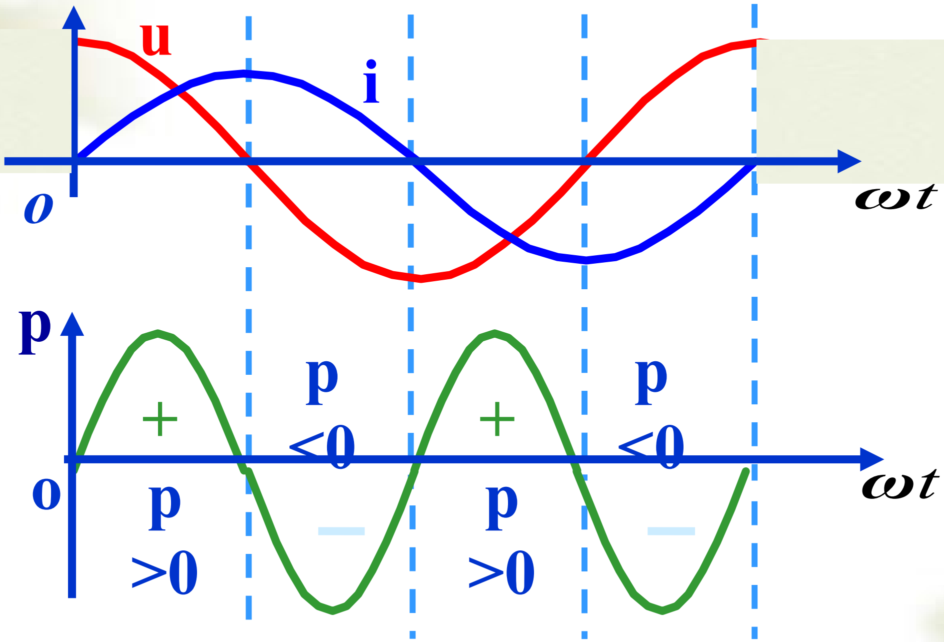
$p \geq 0$ 或 $p \leq 0$

$p \geq 0$ → 消耗电能 → 负载

$p \leq 0$ → 提供电能 → 电源

问题：L 什么时候耗能？什么时候供能？

瞬时功率 ： $p = i \cdot u = UI \sin 2\omega t$



结论：电感元件是储能元件，不消耗能量，只和电源进行能量交换。

(4) 无功功率(衡量元件 储存能量 的能力)

$Q_L = \max(p) = UI = I^2 X_L = U^2 / X_L$ 乏 (Var)

令 $X_L = \omega L$ 感抗 (Ω) $U_m = I_m X_L$ $U = IX_L$ $u \neq iX_L$

[例 3-5] 把一个 L=0.01H 的电感接到 f=50Hz, U=220V 的正弦电源上，(1) 求电感电流 I ; (2) 如保持 U 不变，而电源 f = 5000Hz, 这时 I 为多少?

解： (1) 当 f = 50Hz 时

$$X_L = 2\pi fL = 2 \times 3.14 \times 50 \times 0.01 = 3.14\Omega$$

$$I = \frac{U}{X_L} = \frac{220}{3.14} = 70\text{A}$$

(2) 当 f = 5000Hz 时

$$X_L = 2\pi fL = 2 \times 3.14 \times 5000 \times 0.01 = 314\Omega$$

$$I = \frac{U}{X_L} = \frac{220}{314} = 0.70\text{A}$$

［例］ 一只 L=20mH 的电感元件，通有电流

$$i = 5\sqrt{2}\sin(314t - 30°)\mathrm{A}$$

求 (1) 感抗 X_L;(2) 线圈两端的电压 u;(3) 平均功率。

解：

（1）

$$X_L = 2\pi fL = \omega L = 314 \times 0.02 = 6.28(\Omega)$$

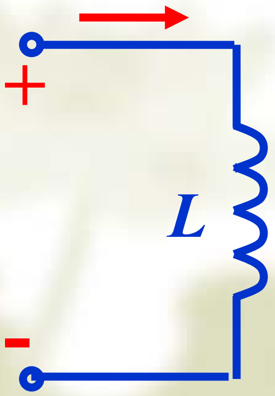
(2) 线圈两端的电压 u

$$\dot{I} = 5\angle -30^0$$

$$\dot{U} = \mathrm{j}\omega L\dot{I} = \mathrm{j}314 \times 0.02 \times 5\angle -30^0$$

$$= 31.4\angle 60^0$$

$$u = 31.4\sqrt{2}\sin(314t + 60°)\mathrm{A}$$



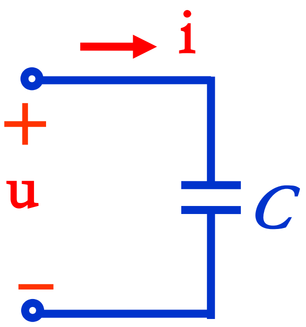
(3) 平均功率

电感元件不消耗电功率，平均功率为零， P=0 。

3.3.3 电容元件

（1）电流与电压的关系

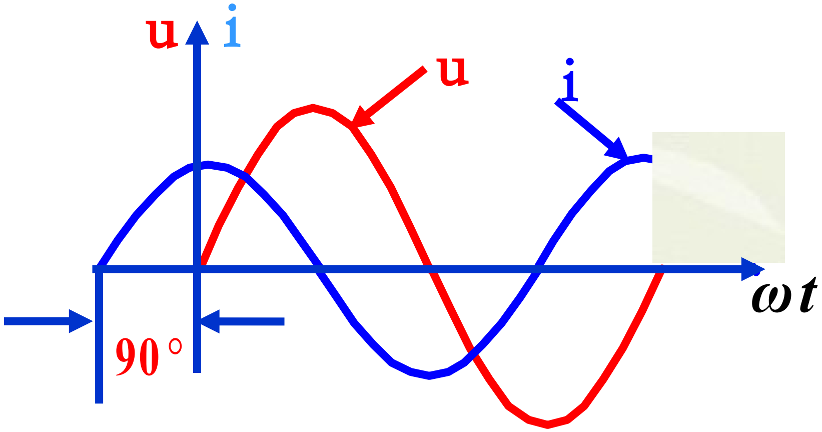
$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$



若 $u=\sqrt{2}U\sin\omega t$

则 $i=C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\sqrt{2}UC\omega\cos\omega t$

$$=\sqrt{2}U\omega C\sin(\omega t+90^\circ)$$



对照电流与电压的表达式

① 频率相同

② 有效值 I =ωCU

③电流超前电压 90°

$$\varphi=\psi_u-\psi_i=-90^\circ$$

$$\begin{cases} u = \sqrt{2}U\sin\omega t \\ i = \sqrt{2}\omega CU\sin(\omega t + 90°) \end{cases}$$

有效值 $I = U \cdot \omega C$ 或 $U = \dfrac{1}{\omega C} I$

定义 $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{2\pi f C}$

则 $U = X_C I$

X_C 称为电容电抗，简称为容抗，单位为欧姆（Ω）。

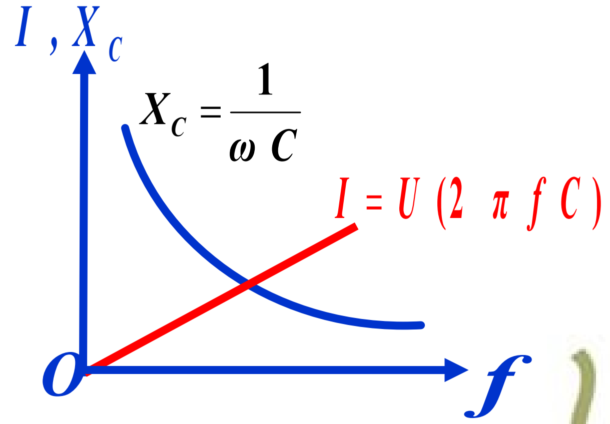
用相量形式写出电容电压与电流之间的关系

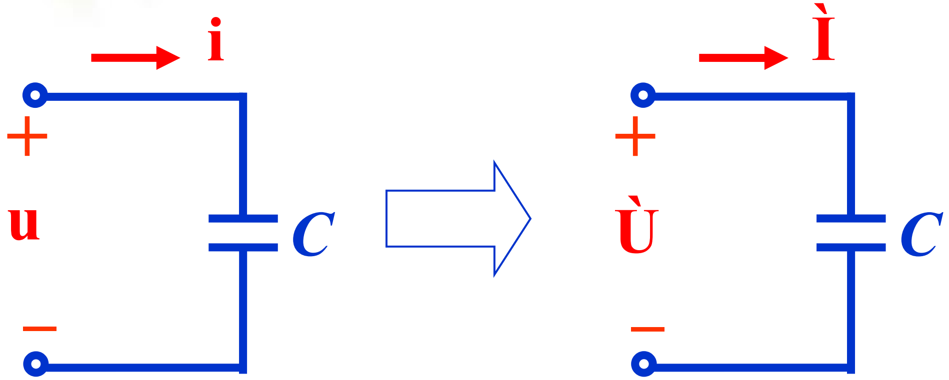
$$\dot{U} = -\mathrm{j}X_C\dot{I} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}$$

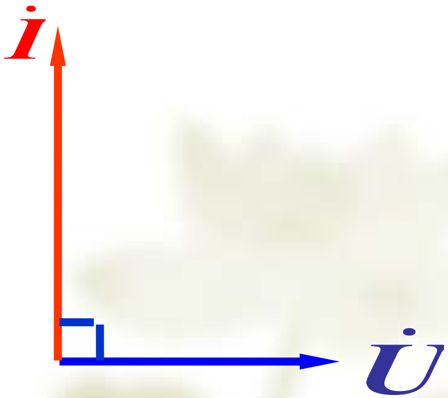
（3-19）

电容电路中相量形式的欧姆定律

$$\dot{U} = -\mathrm{j}X_C\dot{I} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}$$

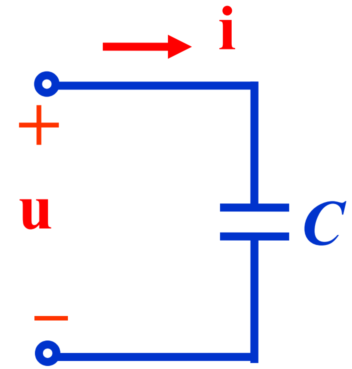






相量图

$$\begin{cases} u = \sqrt{2}U\sin\omega t \\ i = \sqrt{2}U\omega C \cdot \sin(\omega t + 90°) \end{cases}$$



(2) 瞬时功率

$$p = i \cdot u = U_m I_m \sin\omega t \sin(\omega t + 90°)$$

$$= \frac{U_m I_m}{2}\sin 2\omega t = UI \sin 2\omega t$$

(3) 平均功率（有功功率）

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T UI\sin(2\omega t)\,dt = 0$$

与电感元件相似，电容元件有的时刻是吸收电功率，有的时刻发出电功率。平均功率为零。

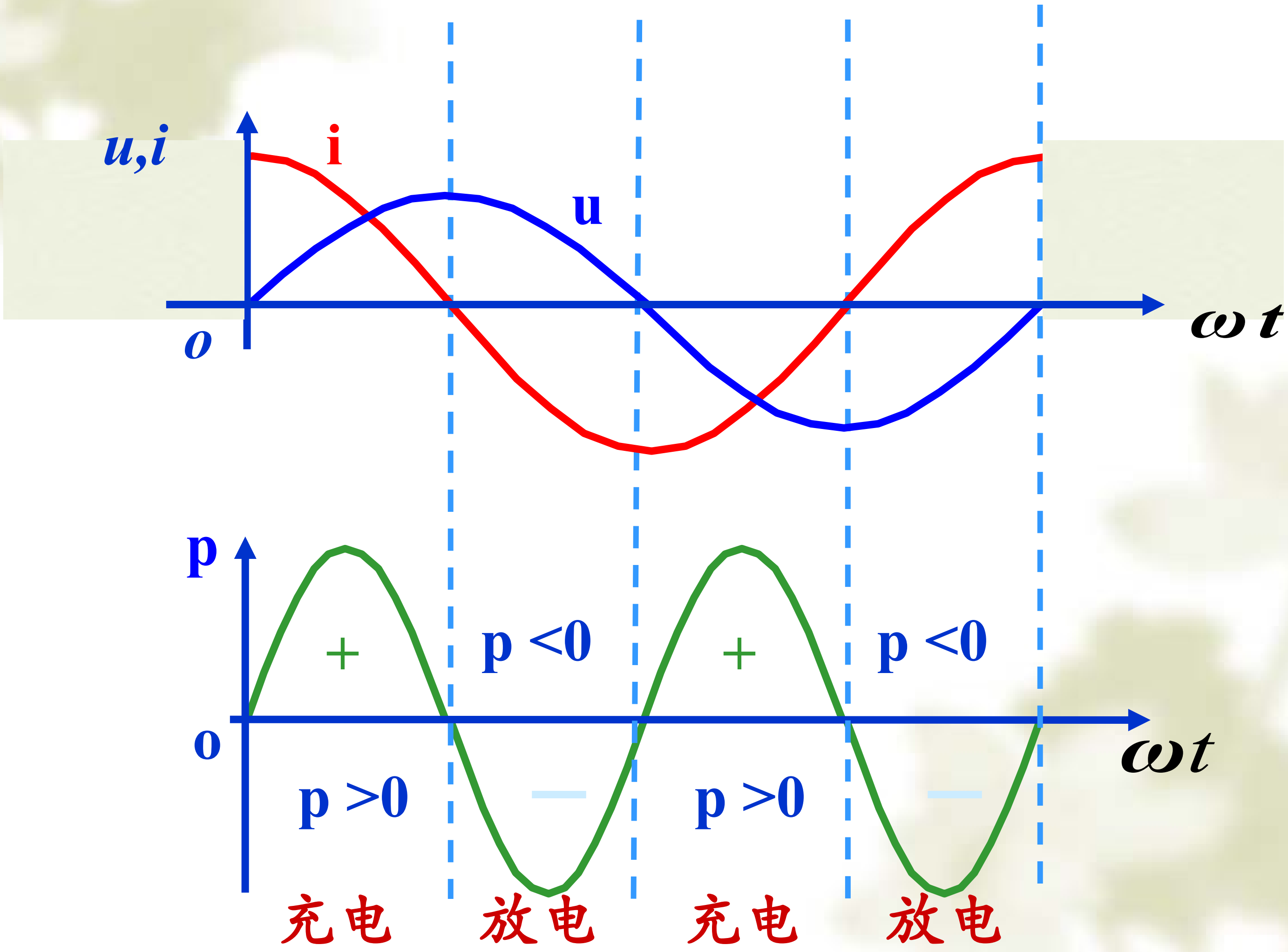
(4) 无功功率（衡量元件 储存能量 的能力）

$Q = \max(p) = UI$

$$= I^2 X_C = \frac{U^2}{X_C}$$

单位：乏（Var）

瞬时功率 ： $p = i \cdot u = UI \sin 2\omega t$



[例 3-6] 把一个电容 $C=318.5\times10^{-6}$F，接到 f=50Hz，$\dot{U}=220\angle0^0$V 的正弦电源上，试求 (1) 求电容电流 $\dot{I}$；(2) 如保持 $\dot{U}$ 不变，而电源 $f=10^6$Hz，这时 $\dot{I}$ 为多少？

解：(1) 当 f = 50Hz 时

$$X_C=\frac{1}{2\pi fC}=\frac{1}{2\times\pi\times50\times31.85\times10^{-6}}=100(\Omega)$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{-jX_C}=\frac{220\angle0^0}{-j100}=2.2\angle90^0(A)$$

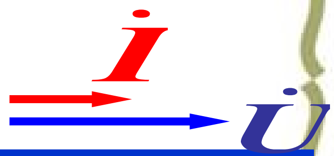
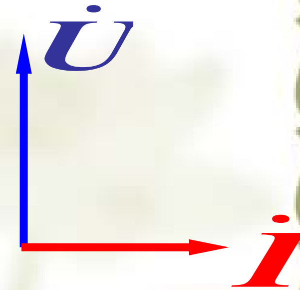
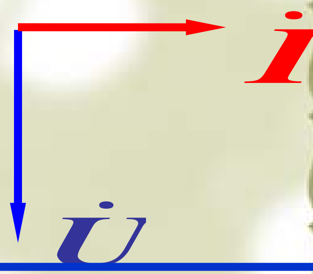
(2) 当 $f=10^6$Hz 时

$$X_C=\frac{1}{2\pi fC}=\frac{1}{2\times\pi\times10^6\times31.85\times10^{-6}}=0.005(\Omega)$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{-jX_C}=\frac{220\angle0^0}{-j0.005}=44\times10^3\angle90^0(A)$$

小结

单一参数电路中的基本关系

参数	阻抗	基本关系	相量式	相量图
R	R	$u = iR$	$\dot{U} = \dot{I}R$	
L	$\mathrm{j}X_L = \mathrm{j}\omega L$	$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$\dot{U} = \mathrm{j}X_L\dot{I}$	
C	$-\mathrm{j}X_C = -\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}$	$i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$	$\dot{U} = -\mathrm{j}X_C\dot{I}$	

第 3 章　交流电路

3.1　正弦交流电的基本概念

3.2　正弦量的相量表示法

3.3　单一元件参数电路

3.4　简单的正弦交流电路分析

3.6　正弦交流电路的功率

用相量分析交流电路步骤

1，将各交流物理量用相量表示

2，根据电路关系列方程，对相量进行四则运算

3，将相量计算结果再变换成正弦量形式

优点：

1 相量运算简单，

2 电感电容在相量下伏安特性类似线性关系。

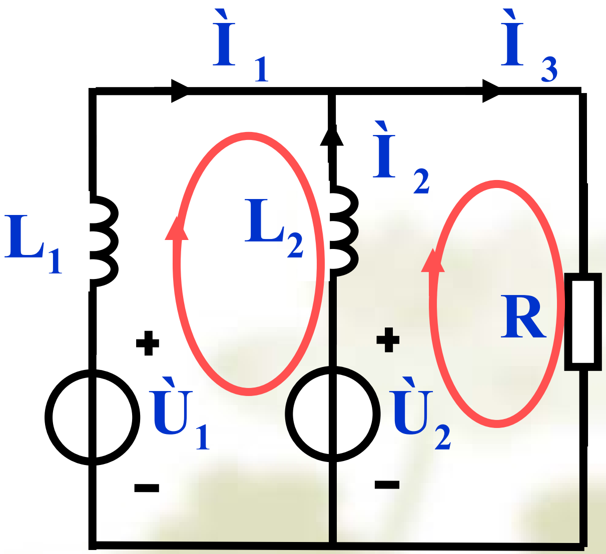
[例 3-10] 图中 R=10Ω, X_1=12.5 Ω， X_2=50 Ω, 电压源 $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = 220\angle 0^0$V, 用支路法求各支路电流。

解：用支路电流法。列出一个 KCL 方程和二个 KVL 方程。

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0$$

$$\mathrm{j}X_1\dot{I}_1 - \mathrm{j}X_2\dot{I}_2 + \dot{U}_2 - \dot{U}_1 = 0$$

$$\mathrm{j}X_2\dot{I}_2 + R\dot{I}_3 - \dot{U}_2 = 0$$



代入数据并整理，得

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0$$

$$\mathrm{j}12.5\dot{I}_1 - \mathrm{j}50\dot{I}_2 = 0$$

$$\mathrm{j}50\dot{I}_2 + 10\dot{I}_3 - 220 = 0$$

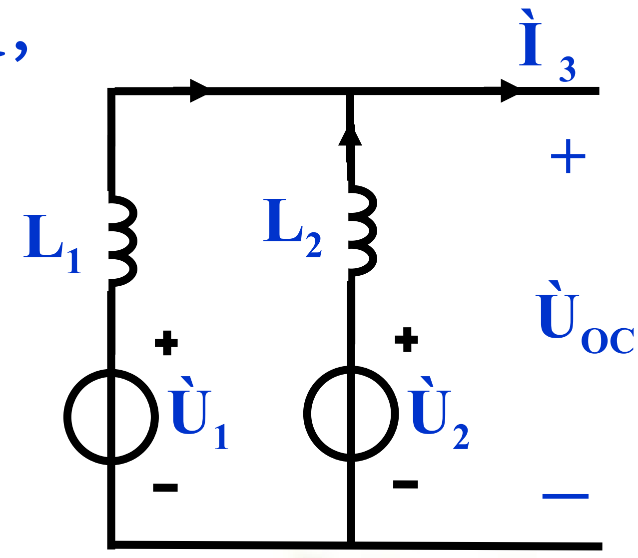
解得

$$\dot{I}_1 = 12.44\angle -45^0(\mathrm{A}),\quad \dot{I}_2 = 3.11\angle -45^0(\mathrm{A}),$$

$$\dot{I}_3 = 15.55\angle -45^0(\mathrm{A})$$

[例 3-11] 例 3-10 中元件参数不变，用戴维南定理求电流 $\dot{I}_3$ 。

解：去掉 R 所在支路，画出其余部分电路，见图（b）



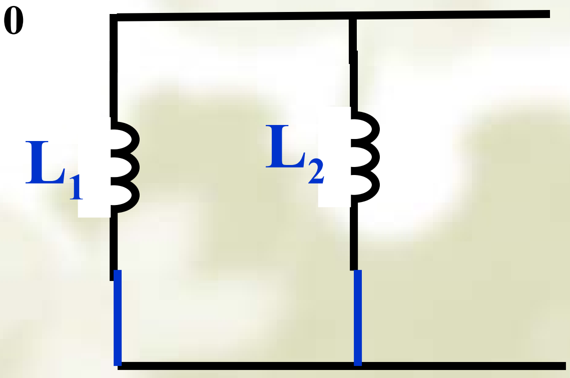
（b）

其开路电压为

$$\dot{U}_{OC} = jX_2 \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_2}{jX_1 + jX_2} + \dot{U}_2$$

$$= j50 \times \frac{220\angle 0^0 - 220\angle 0^0}{j12.5 + j50} + 220\angle 0^0$$

$$= 220\angle 0^0$$



（c）

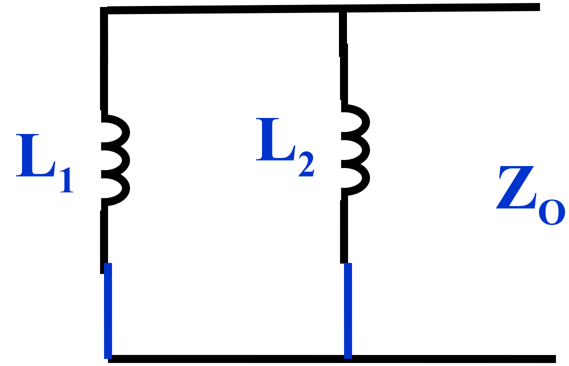
其等效阻抗见图（c），为

其等效阻抗见图（c），为

$$Z=\frac{jX_1jX_2}{jX_1+jX2}$$

$$=\frac{j12.5\times j50}{j12.5+j50}$$

$$=j10=10\angle 90^0(\Omega)$$



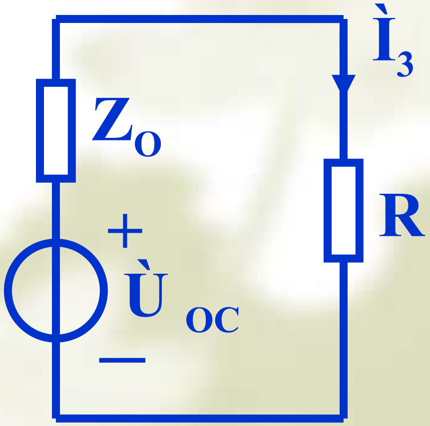
（c）

其戴维南等效电路见图（d）

$$\dot{I}_3=\frac{\dot{U}_{OC}}{Z_O+R}$$

$$=\frac{220\angle 0^0}{j10+10}$$

$$=15.55\angle -45^0(A)$$



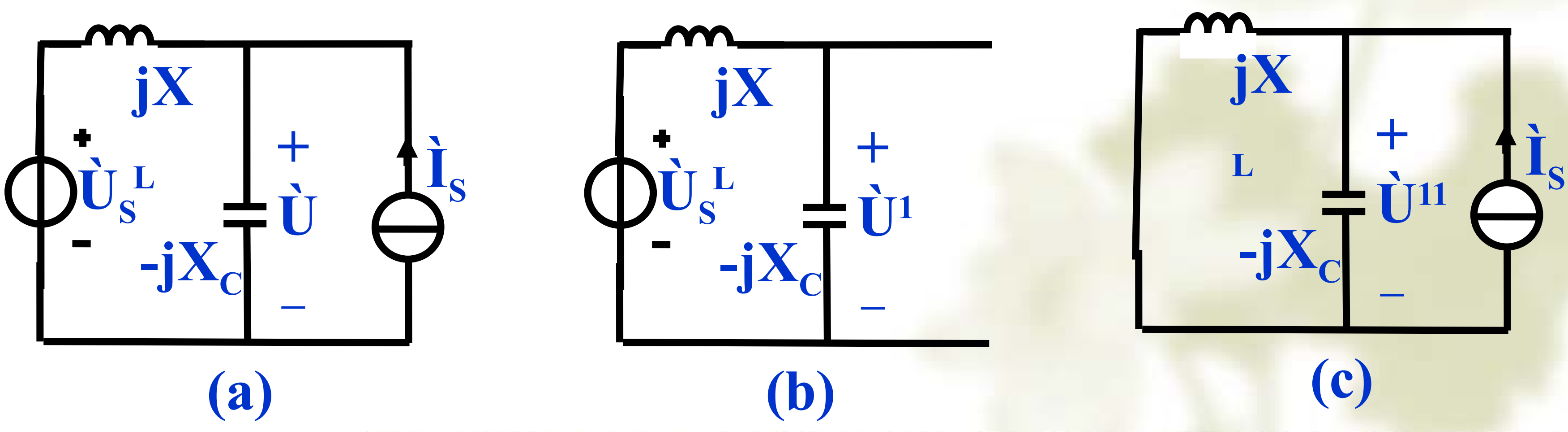
（d）

[例 3-12] 用叠加原理求图中电容电压 $\dot{U}$。已知 $\dot{U}_S=50\angle 0^0$V, $\dot{I}_S=10\angle 30^0$A, $X_L=5\ \Omega$, $X_C=3\Omega$。

解：(1) 首先断去电流源，计算电压源单独作用时的响应，见图 (b)

$$\dot{U}'=\frac{\dot{U}_S}{jX_L-jX_C}(-jX_C)=\frac{50\angle 0^0}{j5-j3}(-j3)=75\angle 180^0$$

(2) 将电压源置为零（用短路线替代），计算电流源单独作用时的响应，见图 (c)

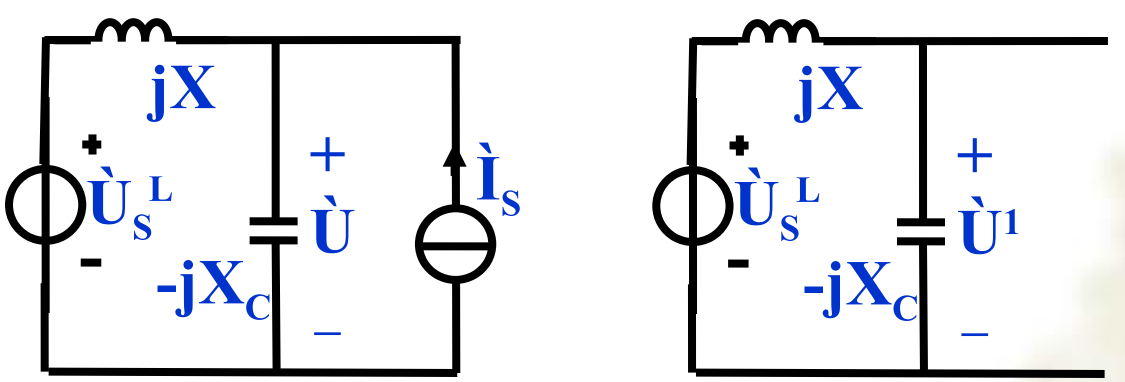


(2) 将电压源置为零（用短路线替代），计算电流源单独作用时的响应，见图 (c)

$$\dot{U}'' = \frac{jX_L \cdot (-jX_C)}{jX_L - jX_C}\dot{I}_S = \frac{j5\cdot(-j3)}{j5-j3}\times 10\angle 30^0 = 75\angle -60^0$$

(3) 电压源与电流源共同作用时的响应

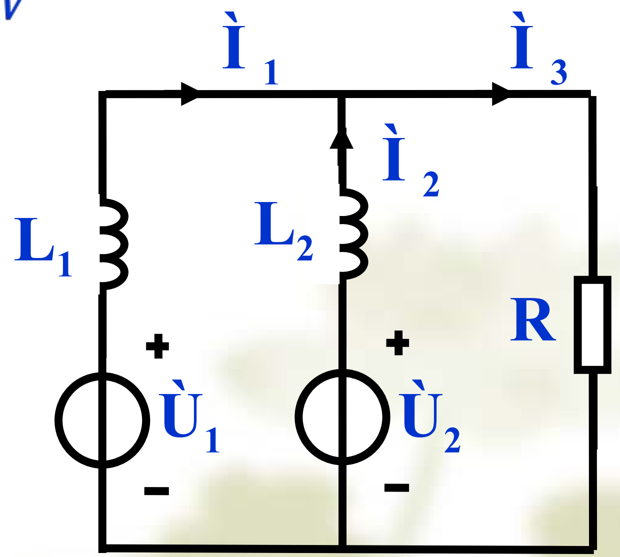
$$U = U' + \dot{U}'' = 75\angle 180^0 + 75\angle -60^0 = 75\angle -120^0 (\mathrm{V})$$



(a) (b) (c)

[扩展] 图中 R=10Ω, L_1=0.5 H， X_2=0.1 H, 电压源各支路电流。其中 $u_1(t) = 220\sqrt{2}\sin(314\pi t)\,V$

$$u_2(t) = 220\sqrt{2}\sin(628\pi t)\,V$$



有两个不同频率电源怎么处理?

方法：叠加原理。

电路的过渡过程

∵ 电容和电感是储能元件 → 能量的存储和释放需要一定时间

∴ 当电路发生改变时，含有储能元件的电路就会出现过渡过程

电路的暂态

不做要求

u i

$\dot{U}$、$\dot{I}$

不做要求