教材、参考书

- 教材:
  - Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra, fifth Edition, Wellesley-Cambridge Press, 2016. （影印版，清华大学出版社）
- 参考书:
  - Gilbert Strang, Linear Algebra and Learning from Data, Wellesley-Cambridge Press, 2019.
  - R. A. Horn and C. R. Johnson, Matrix Analysis. New York: Cambridge University Press, 1989.
  - R. A. Horn and C. R. Johnson, Topics in Matrix Analysis. New York: Cambridge University Press, 1991.

考试与作业

- 日常练习（占期末总评10%，随堂布置，5-8题/次，独立完成，提交拍照电子版，期末统一讲评）；
- 大作业（占期末总评20%，以一至三人组队完成）；
- 期末考试（占期末总评70%，时间暂定第 **17** 周）。

关于大作业

- 挑选教材 Chapters 10–12 任意一节自学；
- 使用中文叙述学习体会（**翻译+学习心得**）；
- 完成课后习题至少 5 题；
- 使用 Matlab/Python/C 编程；
- 使用 Latex 打印书写作业；
- 2人或3人合作；需在作业中注明每个人的分工，以及相应完成部分（按照每人的实际贡献给分）。

注：需自学 Latex 排版软件。

第一讲：向量空间与子空间

1.1 向量与线性组合

1. $3\mathbf{v}+5\mathbf{w}$ 是向量 $\mathbf{v}$与$\mathbf{w}$的线性组合 $c\mathbf{v}+d\mathbf{w}$ 的一个例子.
2. 给定向量 $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 与 $\mathbf{w}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ 则它们的线性组合

   是 $3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+10\\3+15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\18\end{bmatrix}$.
3. 线性组合 $c\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ 撑满整个 xy 平面. 他们生成所有向量 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$.
4. 线性组合 $c\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$ 撑满 xyz 空间中的一个平面.
5. $\begin{cases}c+2d=1\\c+3d=0\\c+4d=0\end{cases}$ 无解，因为右端向量 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ 不在这个平面内.

1.2 长度与点积

1. 向量 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ 的“点积”
   是 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (1)(4) + (2)(5) = 4 + 10 = \mathbf{14}$.

2. 向量 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 与 $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$ 是垂直的，因为它们的点积等于零:
   $$(1)(4) + (3)(-4) + (2)(4) = \mathbf{0}.$$

3. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 的长度平方是 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1 + 9 + 4 = 14$. **它的长度是** $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{14}}$.

1. $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 有长度 $\|\mathbf{u}\| = 1$. 验证 $\frac{1}{14} + \frac{9}{14} + \frac{4}{14} = 1$.

2. 向量 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 的夹角 θ 满足 $\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|}$.

3. 例如：向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的夹角 θ 满足 $\cos\theta = \frac{1}{(1)(\sqrt{2})}$. 那么这个夹角等于 $\theta = 45^\circ$.

4. **柯西施瓦茨不等式:** 所有的夹角都满足 $|\cos\theta| \leq 1$. 故对所有的向量都有 $|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|$.

1.3 矩阵

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ 是 3 乘 2 的矩阵: $m = 3$ 行和 $n = 2$ 列.

2. $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 可视为列的线性组合 $A\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$.

3. 线性方程组的矩阵形式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$: $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ 取代

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= b_1 \\ 3x_1 + 7x_2 &= b_2 \end{aligned}.$$

4. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解可表示为 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$，当且仅当 A^{-1} 存在时。

1.4 矩阵乘法法则

1. 具有 n 个列的矩阵 A 与具有 n 个行的矩阵可相乘: $A_{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}B_{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}} = C_{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{p}}$.

2. $AB = C$ 中的每个元素实际是一个点积: $C_{ij} =$ (A 的第 i 行) · (B 的第 j 列).

3. 结合率: AB **乘以** C **等于** A **乘以** BC. 特别地, $(AB)\boldsymbol{x} = A(B\boldsymbol{x})$.

4. 交换律通常不能满足：即难以得到 $AB = BA$. 并且更多情况下，A 与 B 不可乘.

5. 矩阵乘法的分块形式：$A = [A_1 \quad A_2]$ 乘以 $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ 等于 $A_1B_1 + A_2B_2$.

1.5 逆矩阵

1 若有一个方阵 A 具有一个逆 A^{-1}，则 $A^{-1}A = I$ 与 $AA^{-1} = I$.

2 验证可逆的计算算法是消元法：A 必须有 n 个（非零）主元。

3 验证可逆的代数法则是行列式：A 的行列式 det A 不等于零.

4 验证可逆的方程方法是：齐次方程 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$: $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有零解.

5 当 A 和 B 维数相同且都可逆时，AB: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

6 $AA^{-1} = I$ 表示 n 个方程以计算 A^{-1} 的 n 个列。高斯消去法：$[A\ I]$ 至 $[I\ A^{-1}]$.

1.6 转置

1 $A\boldsymbol{x}$, AB, A^{-1} 的转置依次是 $\boldsymbol{x}^T A^T$, $B^T A^T$, $(A^T)^{-1}$.

2 点积（内积）可表示为 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$，它是 $(1 \times n)(n \times 1) = (1 \times 1)$.

3 关于A^T的一个常见运算： $A\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ 会等于 $\boldsymbol{x} \cdot A^T \boldsymbol{y}$，因为 $(A\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T A^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T (A^T \boldsymbol{y})$.

1.7 向量空间

向量空间及其子空间是理解方程 $Ax = b$ 解的重要手段。

由最重要的向量空间开始：它们可记为 $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^4$, ... 每个空间 $\mathbf{R}^n$ 包含所有 n 维向量的集合。例如，$\mathbf{R}^5$ 包含所有具有5个分量的向量的集合，因此称之为：5 维空间。

定义： 向量空间 $\mathbf{R}^n$ 由所有具有 n 个分量的列向量 v 组成。

向量 v 的分量都是实数，这就是为什么我们使用字母 $\mathbf{R}$. 当一个向量的 n 个分量出现复数时，记为向量空间 $\mathbf{C}^n$.

向量空间 $\mathbf{R}^2$ 表示常见的 $x-y$ 平面。$\mathbf{R}^2$ 中的每个向量具有两个元素。“空间”这个词要求我们考虑整个平面的所有向量。每个向量给出 x 和 y 平面坐标系里的一个点: $v=(x,y)$.

类似地，$\mathbf{R}^3$ 中的向量对应所有的点 (x,y,z)，是三维空间；$\mathbf{R}^1$是一条直线，是一维空间。

向量空间：满足加法、数乘运算封闭，并且对应运算满足如下八条性质：

向量加法法则:

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
- $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$
- 存在唯一的“零向量”使得 $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
- 对每个 $\mathbf{x}$，存在唯一的“负向量” $-\mathbf{x}$ 满足 $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

向量的（实）数乘法则:

- 1 乘以 $\mathbf{x}$ 等于 $\mathbf{x}$
- $(c_1 c_2)\mathbf{x} = c_1(c_2\mathbf{x})$
- $c(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y}$
- $(c_1 + c_2)\mathbf{x} = c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{x}$

除列向量外还有向量，除 R^n 外还有其它向量空间，所有向量空间都必须遵守八条合理的规则。

实向量空间是一组“向量”以及向量加法和实数乘法规则。

加法和乘法必须产生空间中的向量，并且必须满足八个条件。

以下列举 R^n 外的常见三个向量空间：
M 所有 2 乘 2 实矩阵构成的向量空间
F 所有实函数 $f(x)$ 构成的向量空间
Z 仅包含零向量的向量空间

F 是无限维的；**Z** 是零维的；问题： **M** 是几维的？

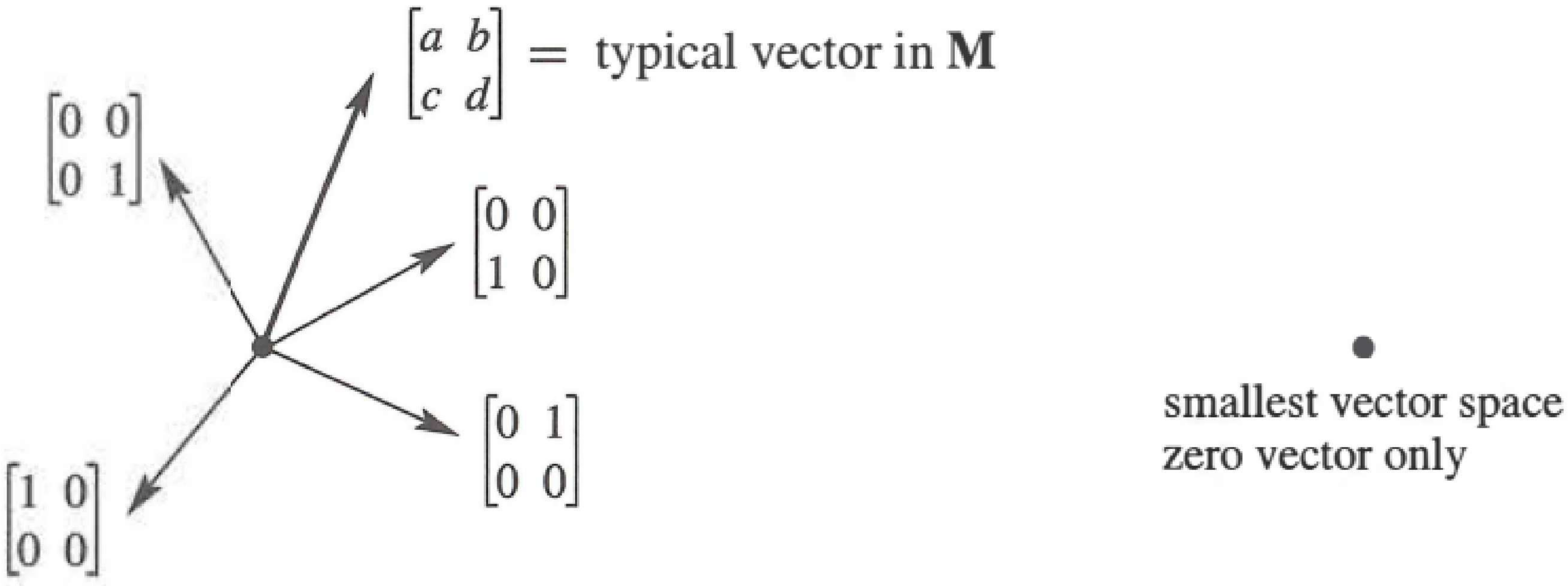

Figure 3.1: "Four-dimensional" matrix space $\mathbf{M}$. The "zero-dimensional" space $\mathbf{Z}$.

1.8 子空间

从通常的三维空间 $\mathbf{R}^3$ 开始。选择穿过原点 $(0,0,0)$ 的平面. 这个平面本身就是一个向量空间。如果我们在平面中添加两个向量，他们的和在平面上。如果我们将平面内向量乘以 2 或 -5，它仍然在平面内。三维空间中的平面不是 $\mathbf{R}^2$ （即使它看起来像$\mathbf{R}^2$）。向量具有三个分量，它们属于 $\mathbf{R}^3$。平面是一个向量空间在 $\mathbf{R}^3$ 的内部。

这说明了线性代数中最基本的思想之一。穿过 $(0,0,0)$ 的平面是向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的子空间。

定义 向量空间的一个子空间，它包含满足以下关系的所有向量（包括**0**）的集合：若 **v** 与 **w** 是该集合中的任意两个向量，则

(i) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ 属于它　　(ii) $c\mathbf{v}$ 也属于它

上述条件也可表述为：若 **v** 与 **w** 的所有线性组合属于这个集合。

例：$\mathbf{R}^3$ 所有可能的子空间：

(**L**) 任意穿过 (0, 0, 0)的直线　　(**P**) 任意穿过 (0, 0, 0)的平面

($\mathbf{R}^3$) 全空间　　(**Z**) 仅包含原点 (0, 0, 0) 集合

如果我们只保留平面或直线的一部分，子空间的要求就不成立。看看以下 $\mathbf{R}^2$ 中的这些例子——它们不是子空间。

例 1 只保留分量为正或零的向量 (x, y)（这是四分之一平面）。包含向量 (2, 3)，但不包含向量 (-2, -3)。因此，当我们试图乘以 $c = -1$ 时，违反了规则 (ii)。**四分之一平面不是子空间。**

例 2 即使包括了其分量均为负值的向量。现在我们有两架四分之一平面。满足要 (ii)；我们可以用任何 c 乘法。但规则 (i) 依然失败。$\mathbf{v} = (2, 3)$ 和 $\mathbf{w} = (-3, -2)$ 的和是 $(-1, 1)$，它位于两个四分之一平面之外。**两个四分之一平面不构成子空间。**

例 3 在所有2乘2矩阵的向量空间M内，有两个子空间：

$$(\mathbf{U})\ \text{所有上三角矩阵} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{D})\ \text{所有对角矩阵} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

在 **U** 中添加任意两个矩阵，总和在 **U** 中。对角矩阵的和还是对角的。在这种情况下，**D** 也是 **U** 的子空间！当然，当 a, b, 和 d 都等于零时，零矩阵就在这些子空间中。

小结

1 标准 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 包含所有具有 n 个元素的实列向量.

2 若 **v** 和 **w** 在向量空间 S 内，则它们的任意线性组合也在 **S** 内.

3 **S** 中的“向量”可以是 **x** 的矩阵或函数。1-点空间 **Z** 由 $\mathbf{x} = 0$ 组成。

4 $\mathbf{R}^n$的子空间是$\mathbf{R}^n$内的向量空间。示例：直线 $\mathbf{y} = 3\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 内。

习题

Problem Set 3.1: 3, 10, 15, 17, 18, 30

第二讲：线性方程组的几何解释，矩阵的列空间

2.1 向量与线性方程

线性代数的中心问题是求解方程组。这些方程是线性的，这意味着未知量只会乘以数字——我们永远看不到 x 乘以 y（非线性项）。

以下线性方程组规模很小，但可以有不同视角来看它：

$$
\begin{array}{llcrcr}
\textbf{两个方程} & x & - & 2y & = & 1 \\
\textbf{两个未知数} & 3x & + & 2y & = & 11
\end{array}
\tag{1}
$$

行视角.

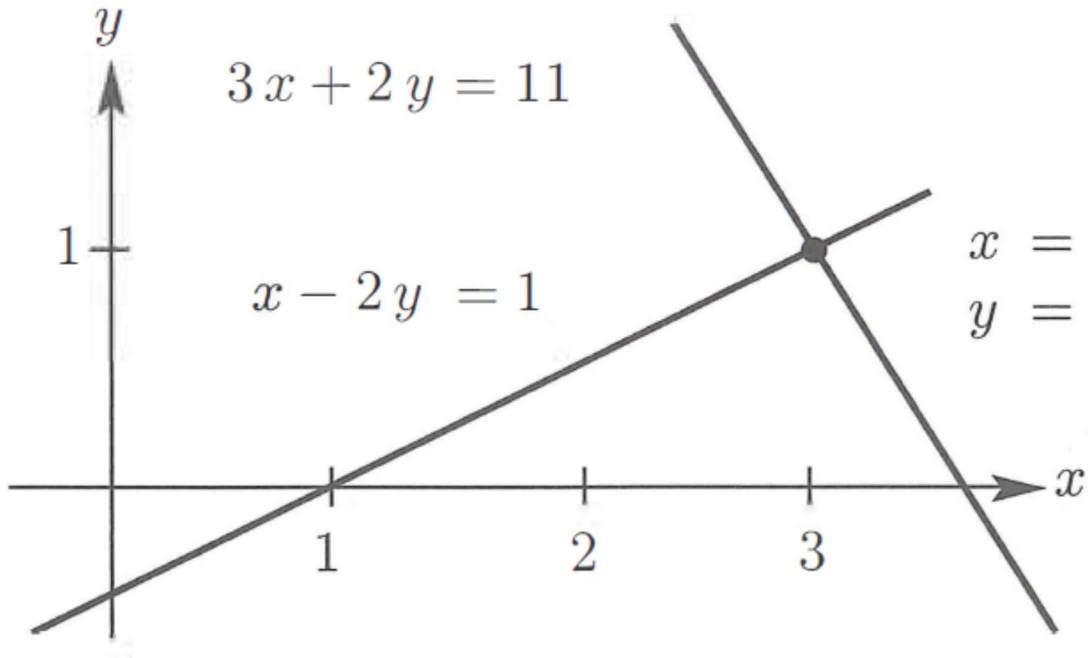

Figure 2.1: *Row picture*: The point $(3, 1)$ where the lines meet solves both equations.

行： **行视角展示为两条直线相交于单一点（方程的解）。**

列视角.

把同一个线性方程看作“向量方程”。我们需要看到的不是数字而是向量。如果将原始方程拆分为列而不是行，则会得到一个向量方程：

$$\textbf{列向量的线性组合等于 b} \qquad x\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\11\end{bmatrix}=\mathbf{b}. \tag{2}$$

左侧有两个列向量。问题是找到那些等于右边向量的线性组合。我们将第一列乘以 x，第二列乘以 y，然后相加。如果正确选择 $x=3$ 和 $y=1$（与前面的数字相同），则会生成 $3(\textbf{column 1})+1(\textbf{column 2})=\mathbf{b}$。

列: **列视角展示方程左端列向量的线性组合以生成右端向量 b。**

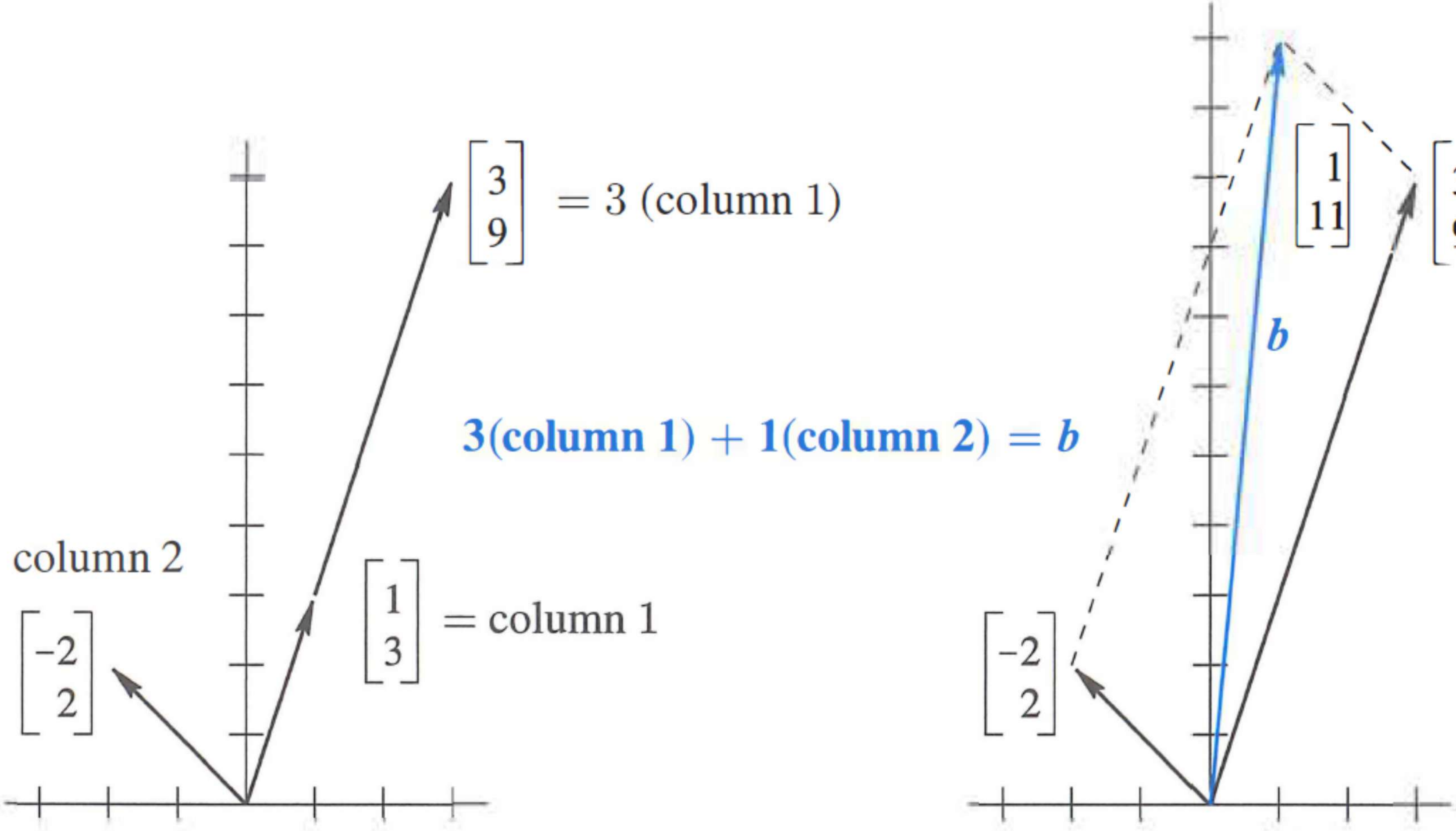

Figure 2.2: *Column picture*: A combination of columns produces the right side (1, 11).

强调: 向量方程的左侧是列的线性组合。问题是找到正确的系数 $x = 3$ 和 $y = 1$。我们将标量乘法和向量加法合并为一个步骤。这一步至关重要，因为它包含两个基本操作：分别乘以 **3** 和 **1**，然后相加.

$$\textbf{线性组合} \qquad 3\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\11\end{bmatrix}.$$

2.2 三个方程三个未知数

设有三个未知数 x, y, z 满足三个线性方程:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & +3z & = & 6 \\ 2x & + & 5y & +2z & = & 4 \\ 6x & + & 3y & + \; z & = & 2 \end{array} \tag{3}$$

我们寻找能够同时求解所有三个方程的数 x, y, z。这些所需的数可能存在，也可能不存在。对于这个系统，它们确实存在。当未知数的数目与有效的方程的数目相匹配时，通常只有一个解。

两种视角:

行 **行视角展示为三个平面相交于单一点.**

列 **列视角展示方程左端列向量的线性组合以生成右端向量 $\boldsymbol{b} = (6, 4, 2)$.**

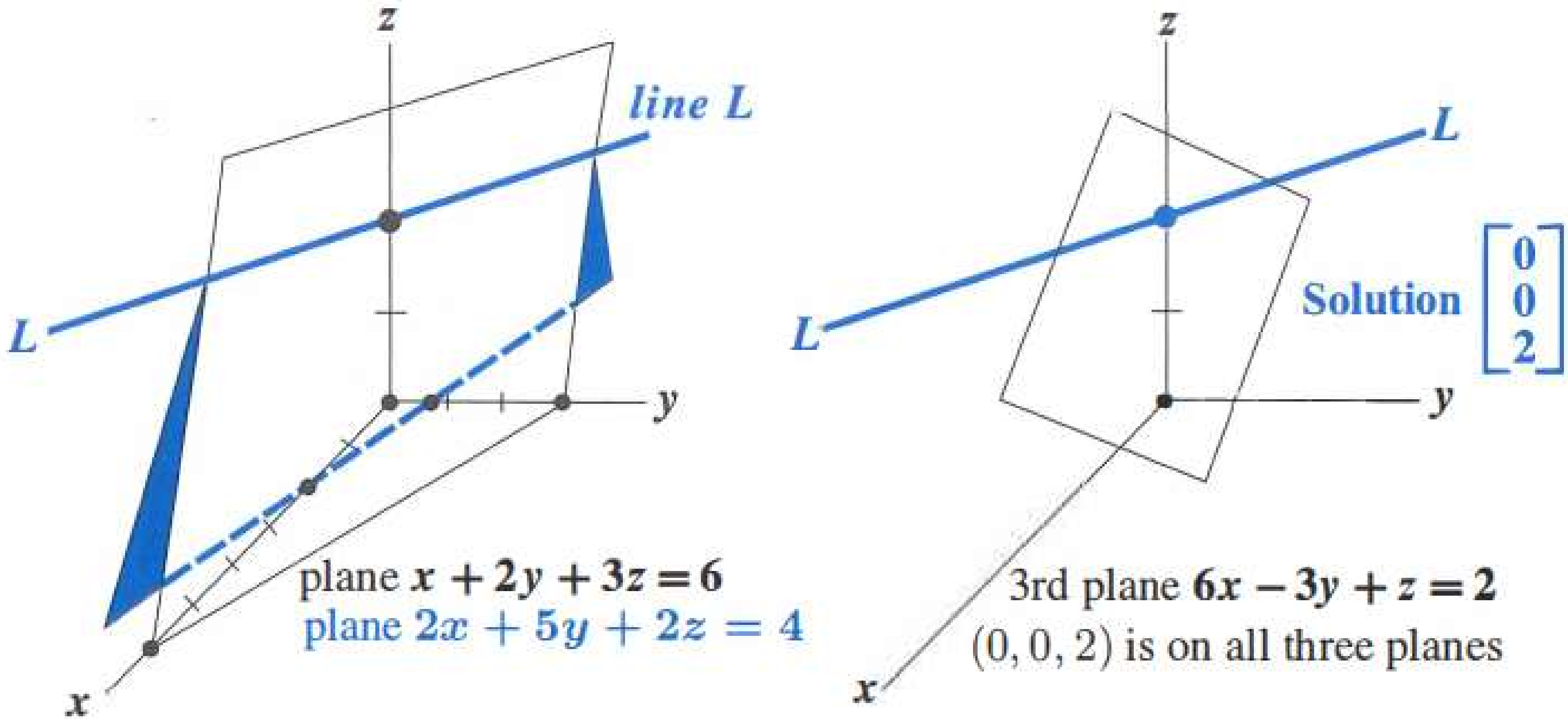

Figure 2.3: *Row picture*: Two planes meet at a line L. Three planes meet at a point.

列视角以向量形式展示方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$:

$$\textbf{组合列}\quad x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \tag{4}$$

未知项是系数 x, y, z。我们想用正确的数 x, y, z 乘以三个列向量，得到 $\mathbf{b} = (6, 4, 2)$。

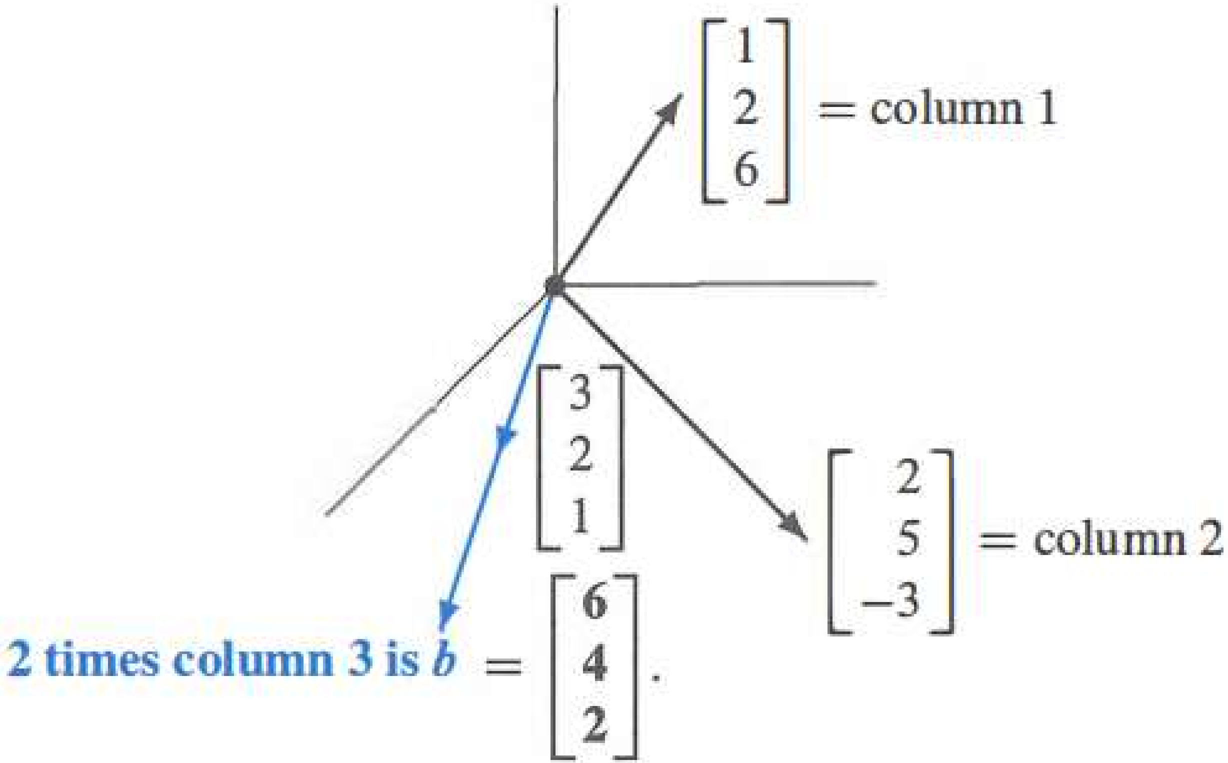

Figure 2.4: *Column picture: Combine the columns with weights* $(x, y, z) = (0, 0, 2)$.

2.3 方程的矩阵形式

$$\textbf{矩阵方程 } A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

基本问题: A **乘以** $\boldsymbol{x}$ **的意义?**

行相乘　$A\boldsymbol{x}$ 可由点积获得，记每一行与 $\boldsymbol{x}$ 做点积:

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} (\textbf{行 } 1)\cdot\boldsymbol{x} \\ (\textbf{行 } 2)\cdot\boldsymbol{x} \\ (\textbf{行 } 3)\cdot\boldsymbol{x} \end{bmatrix} \tag{6}$$

列相乘　$A\boldsymbol{x}$ 可由一组列向量做线性组合:

$$A\boldsymbol{x}=x(\textbf{列 } 1)+y(\textbf{列 } 2)+z(\textbf{列 } 3). \tag{7}$$

小结-1

1. $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的列视角: A 的 n 个向量的某一个线性组合能生成 $\mathbf{b}$.
2. $A\mathbf{x}=x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_n\mathbf{a}_n=\mathbf{b}$: $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2,\ldots,$ $\mathbf{a}_n$ 对应 A 的列.
3. 当 $\mathbf{b}=\mathbf{0}$, 一个显然的组合 $\boldsymbol{x}=(0,...,0)$ 生成零向量。
4. $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的行视角: m 个行定义的 m 个平面相较于 $\boldsymbol{x}$.
5. 可使用点积表示这些平面: $(\textbf{row 1})\cdot\boldsymbol{x}=b_1,\ldots,(\textbf{row } \boldsymbol{m})\cdot\boldsymbol{x}=b_m$.
6. 当 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$, 所有的平面将都会经过 $\boldsymbol{x}=(0,\ 0,\ldots,0)$.

2.4 列空间

列空间是最重要的子空间，它直接关联到矩阵 A。我们尝试求解 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$。如果 A 不是可逆的，系统对于某些 $\mathbf{b}$ 是可解的，对于其他 $\mathbf{b}$ 是不可解的。那些可解的方程所对应的 $\mathbf{b}$'s 形成了 A 的“列空间”。

请记住，$A\mathbf{x}$ 是 A 列的线性组合。为了获得每个可能的 $\mathbf{b}$，我们使用每个可能的 $\mathbf{x}$。从 A 列开始，取它们的所有线性组合。这会产生 A 的列空间它是由列向量组成的向量空间。

定义 列空间 $\mathbf{C}(A)$ 由列的所有线性组合组成。这些组合都是可能的向量$A\mathbf{x}$。它们填充列空间 $\mathbf{C}(A)$.

注意： $\mathbf{C}(A)$ 不仅仅包含 A 的列，还包含其所有的线性组合.

要解 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$，也就是要将 **b** 展开成 A 的列的线性组合。故右侧向量 **b** 必须是在列空间中，由左侧的 A 生成，否则没有解。

系统 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ **可解当且仅当 b 在A 的列空间中**

当 **b** 位于列空间中时，它是某一线性组合。该组合中的系数为我们提供了一个解。

假设 A 是 m 乘 n 矩阵。它的列有 m 个分量（不是 n）。所以列属于 $\mathbf{R}^m$。A 的列空间是 $\mathbf{R}^m$ 的一个子空间，而不是 $\mathbf{R}^n$ 的。所有列组合 $A\mathbf{x}$ 满足子空间的规则 **(i)** 和 **(ii)** 。当我们添加线性组合或乘以标量，仍然会生成列的组合。

例 4

$$A\mathbf{x} \text{ 等于 } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ 可表示为 } x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

两列的所有组合的列空间填满 $\mathbf{R}^3$ 中的一个平面。我们绘制了一个特定的 **b**（列的组合）。这个 $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$ 位于平面上。

该平面的厚度为零，因此 $\mathbf{R}^3$ 中的大多数右侧 **b** 都不在在列空间中。即对于大多数 **b** 在 2 个未知数中没有 3 个方程的解。

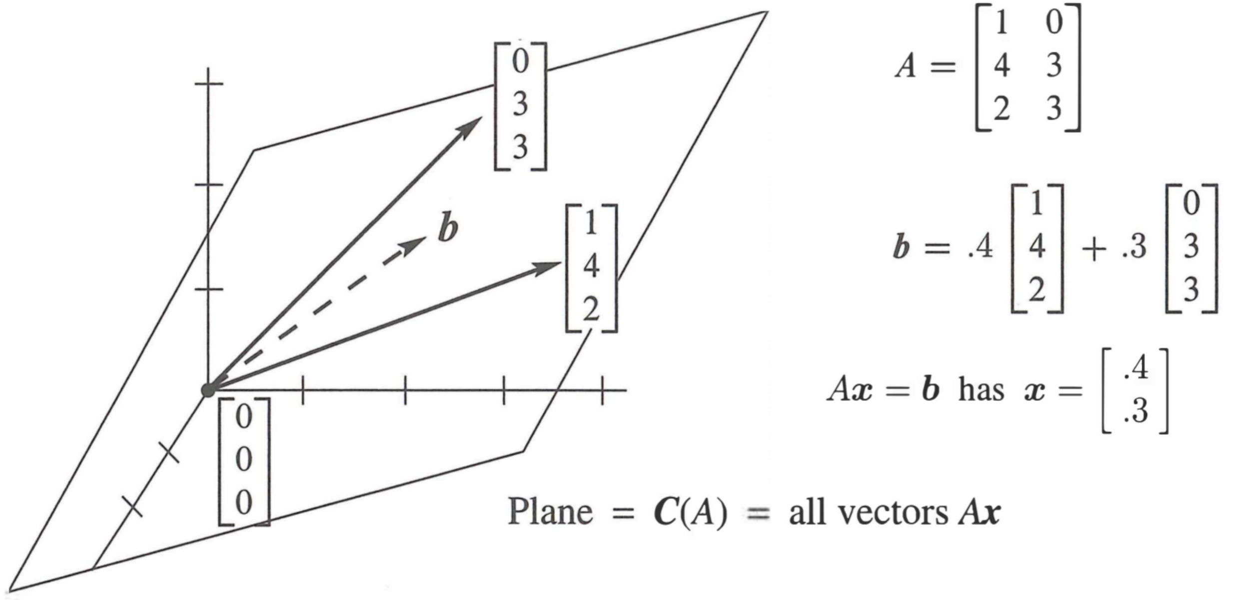

Figure 3.2: The column space $\boldsymbol{C}(A)$ is a plane containing the two columns. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ is solvable when $\boldsymbol{b}$ is on that plane. Then $\boldsymbol{b}$ is a combination of the columns.

为代替 **R**^{m} 中的列，我们可以从向量空间 **V** 中的任何一组 **S** 向量开始。为得到 **V** 的子空间 **SS**，我们取该集合中向量的所有组合:

$$\begin{aligned} \textbf{S} &= \textbf{V} \text{ 中向量的集合 (无需是子空间)} \\ \textbf{SS} &= \textbf{S} \text{ 中向量的所有线性组合 (必然是子空间)} \end{aligned}$$

$$\textbf{SS} = \text{all } c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_N\mathbf{v}_N = \text{子空间 } \textbf{SS} \text{ 由 } \textbf{S} \text{ “张成（span）”。}$$

当 **S** 是列集合时，**SS** 是列空间。当只有一个非零向量 **v** 在 **S** 中，子空间 **SS** 是穿过 **v** 的线。始终 **SS** 是包含 **S** 的最小的子空间。这是创建子空间的基本方法。

强调: 列s “张成” 列空间.

子空间 **SS** 由 **S** 张成, 它包含 **S** 中所有向量的线性组合.

例 5　　描述以下矩阵的列空间 (它们都是 $\mathbf{R}^2$ 的子空间)

$$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \text{ and } A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix} \text{ and } B=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&4\end{bmatrix}$$

解

单位矩阵 I 的列空间是全空间 R^2。每个向量都是矩阵 I 的列的线性组合。在向量空间语言中，$C(I)$ 是 R^2。

A 的列空间仅为一条线。第二列 $(2,4)$ 是第一列 $(1,2)$ 的倍数。这些向量是不同的，我们关注的是向量张成的空间。即 A 的列空间包含 $(1,2),(2,4)$ 以及沿着该行的所有其他向量 $(c,2c)$。方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 只有当 $\mathbf{b}$ 在这条线上时，才可解。

B 有三列，列空间 $\mathbf{C}(B)$ 全部为 R^2。每个 $\mathbf{b}$ 都是可以实现的。例如，向量 $\mathbf{b}=(5,4)$ 可以表示成第二列 + 第三列，可得 $\mathbf{x}$ 是 $(0,1,1)$。它又可以表示成 2 乘以第一列 + 第三列，可得另一个 $\mathbf{x}$ 是 $(2,0,1)$。B 与 I 有相同的列空间，即所有 $\mathbf{b}$ 都是可实现的。但后者 $\mathbf{x}$ 需要有个额外的分量，并且有更多的解决方案和更多的组合来提供 $\mathbf{b}$。

小结-2

1. A 的列空间包含 A 列的所有组合：$\mathbf{R}^m$ 的子空间。
2. 列空间包含所有向量$A\mathbf{x}$。因此，当$\mathbf{b}$位于$\mathbf{C}(A)$中时，$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$是可解的。
3. $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解仅当 $\mathbf{b}$ 落在 A 的列空间。

习题

自学 Worked Example 3.1B

Problem Set 2.1: 19, 29

Problem Set 3.1: 19, 23, 26, 32