第三讲：矩阵零空间，线性方程组的完整解

3.1 A 的零空间: 求解 $Ax = 0$ 与 $Rx = 0$

本节介绍包含 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的所有解的子空间。矩阵 A 是 m 乘 n，可以是正方形或矩形。

零空间 $\mathbf{N}(A)$ 由 $A\mathbf{x}= \mathbf{0}$ 的所有解构成. 这些向量 $\mathbf{x}$ 落在 $\mathbf{R}^n$.

检查解向量是否形成子空间。假设 x 和 y 在零空间中（这是表示 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 和 $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$）。矩阵乘法规则给出 $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{0} + \mathbf{0}$。同时还给出 $A(c\mathbf{x}) = c\mathbf{0}$。右侧仍然为零。因 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ 和 $c\mathbf{x}$ 也是在零空间 $\mathbf{N}(A)$ 中。因此，是一个子空间。

强调: 零空间 $\mathbf{N}(A)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间，列空间 $\mathbf{C}(A)$ 是 $\mathbf{R}^m$ 的一个子空间。

例 1 描述 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ 的零空间. 该矩阵是奇异的!

解 对线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 使用高斯消去法:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ \mathbf{0} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

实际上只有一个方程。第二个方程式是第一个方程式乘以 3. 在行视角中，线 $x_1 + 2x_2 = 0$ 与线 $3x_1 + 6x_2 = 0$ 相同。这条线就是零空间 $\mathbf{N}(A)$。它包含所有的解 (x_1, x_2).

例 2 $x+2y+3z=0$ 来自于 1 乘 3 矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. 则 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 表示一个平面。所有在这个平面上的向量都垂直于 $(1,2,3)$. 这个平面就是 A 的零空间. 此处，有两个自由变量 y 和 z 分别设为 0 和 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=0 \text{ 有解 } s_1=\begin{bmatrix} -2 \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad s_2=\begin{bmatrix} -3 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

向量 s_1 和 s_2 落在平面 $x+2y+3z=0$中。平面上的所有项目可表示为 s_1 和 s_2 的组合.

注意 s_1 和 s_2 的特殊之处。最后两个分量是 “自由的”，我们特别选择它们作为 1,0 和 0,1。然后，第一个分量 -2 和 -3 由方程 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 确定。

两个关键步骤： (**1**) 将 A 化为 **简化行阶梯型 R**; (**2**) 寻找上述 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的 **一般解**。

3.2 主列与自由列

例 3 寻找矩阵 A, B, C 的零空间，以及 $C\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的一般解：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} A \\ 2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 4 \\ 6 & 16 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} A & 2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix}.$$

解 方程 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 有唯一零解 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. 它的零空间 $\mathbf{Z}$. 仅包含 $\mathbf{R}^2$ 中的零向量 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. 事实上，

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{可得} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{即} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

A 可逆. 所有列都是主的.

矩形矩阵 B 具有相同的零空间 $\mathbf{Z}$。$B\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 中的前两个方程同样要求 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$；后两个方程也将强制 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$。当我们添加额外的方程（给出额外的行）时，零空间肯定不会变大。额外的行对零空间中的向量 $\boldsymbol{x}$ 施加了更多条件。

矩形矩阵 C 不同。它有额外的列，而不是额外的行。解向量 $\boldsymbol{x}$ 有 4 个组件。消除将在 C 的前两列中生成枢轴（pivot），但 C 的最后两列是“自由”的，它们没有枢轴。

行 2 减去 3 (行 1) $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix}$ 化为 $U=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 2 & 4 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

3.3 简化行阶梯型 R

由 U 进一步获得 R :

1. 主元上方化为零. 使用主元所在行进行高斯消去法.
2. 主元的元素化为一. 将整个主元所在行行除以其主元。

零空间保持不变: $\boldsymbol{N}(A) = \boldsymbol{N}(U) = \boldsymbol{N}(R)$. 当我们到达简化行阶梯形式 $\mathbf{R} = \mathrm{rref}(\mathbf{A})$，最容易看到他的零空间。$\mathbf{R}$ 的主元所在列包含 $\mathbf{I}$。

获得

R

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{变成} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \end{array}$$

一般解

$\boldsymbol{As} = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{Rs} = \mathbf{0}$

$$s_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ and } s_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{主元} \\ \leftarrow \text{变量} \\ \leftarrow \text{自由} \\ \leftarrow \text{变量} \end{array}$$

Pivot Variables and Free Variables in the Echelon Matrix R

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} p & p & f & p & f \\ | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & a & 0 & c \\ 0 & \mathbf{1} & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{s}_1 = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{s}_2 = \begin{bmatrix} -c \\ -d \\ \mathbf{0} \\ -e \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

3 pivot columns p
2 free columns f
to be revealed by R

I in pivot columns
F in free columns
3 pivots: rank $r = 3$

special $R\boldsymbol{s}_1 = \mathbf{0}$ and $R\boldsymbol{s}_2 = \mathbf{0}$
take $-a$ to $-e$ from R
$R\boldsymbol{s} = \mathbf{0}$ means $A\boldsymbol{s} = \mathbf{0}$

R shows clearly: *column* $3 = a($*column* $1) + b($*column* $2)$. The same must be true for A.
The special solution $\boldsymbol{s}_1$ repeats that combination so $(-\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{b}, \mathbf{1}, 0, 0)$ has $R\boldsymbol{s}_1 = \mathbf{0}$.
Nullspace of $A =$ Nullspace of $R =$ all combinations of $\boldsymbol{s}_1$ and $\boldsymbol{s}_2$.

注意: 列空间 $\mathbf{C}(R)$ 包含所有形如 $(b_1, b_2, b_3, 0)$ 的向量。也就是通常, $\mathbf{C}(R) \neq \mathbf{C}(A)$.

注意: 零空间的 "维数" 等于自由变量的个数.

3.4 矩阵的秩

数字 m 和 n 给出了矩阵的大小，但不一定是线性方程组的真正大小。A 的真实大小由它的秩给出。

定义 A 的秩等于主元的个数. 这个数值是 r.

选取以下 3 乘 4 矩阵，秩为 $r=2$：

四列
两主元

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&4\\1&2&2&5\\1&3&2&6\end{bmatrix}\quad R=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&2&3\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

A 的前两列是 $(1,1,1)$ 和 $(1,2,3)$，方向不同。这些将是枢轴列（由 R 显示）。第三列 $(2,2,2)$ 是第一列的倍数。我们在第三栏中看不到主元。第四列 $(4,5,6)$ 是前三列的总和。第四列也没有主元。A 和 R 的秩均为 2。

每一个“自由列”是其之前主列的线性组合，由一般解 $\boldsymbol{s}_1$， $\boldsymbol{s}_2$ 的选取可知:

$$\begin{array}{ll} \text{列 } 3 = \mathbf{2}(\text{ 列 } 1) + \mathbf{0}(\text{ 列 } 2) & \boldsymbol{s}_1 = (-\mathbf{2}, -\mathbf{0}, 1, 0) \\ \text{列 } 4 = \mathbf{3}(\text{ 列 } 1) + \mathbf{1}(\text{ 列 } 2) & \boldsymbol{s}_2 = (-\mathbf{3}, -\mathbf{1}, 0, 1) \end{array}$$

秩的第二种定义，更高级：它处理整行和整列向量，而不仅仅是数字。所有三个矩阵 A、U 和 R 都有 $\boldsymbol{r}$ 个线性无关行。A、U 和 R 还有 $\boldsymbol{r}$ 线性无关列。

秩的第三种定义，最高级：它处理向量的空间。秩 r 等于列空间的“维度”。同时也是“行空间”的维度。最棒的是 $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{r}$ 是零空间的维度。

小结-1

1 **零空间** $\mathbf{N}(A)$ 属于 $\mathbf{R}^n$，它包含 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的所有解 $\mathbf{x}$，其中包含 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2 初等行变换 (from A to U to R) 不会改变零空间: $\mathbf{N}(A) = \mathbf{N}(U) = \mathbf{N}(R)$.

3 **简化行阶梯型R** $=$ **rref(A)** 所有的主元都$= 1$, 其上下元素都为零.

4 若 R 的列 j 是自由的（不含主元），则可令其 $x_j = 1$ 获得 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的**一个一般解**.

5 主元的个数 $=$ R 的非零行的个数 $=$ **秩 r**. 自由列个数是$n - r$.

6 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的完整解可表示为 $n - r$ 个一般解的线性组合.

3.5 $Ax = b$ 的完整解：存在条件

现在 $\boldsymbol{b}$ 不是零。左侧的行操作也必须作用于右侧。使用相同的解决方案，将 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 简化为一个更简单的系统 $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$。一种方法是将 $\boldsymbol{b}$ 作为矩阵的额外列，生成**增广矩阵** $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{7} \end{bmatrix} \quad \text{具有增广矩阵} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \mathbf{6} \\ 1 & 3 & 1 & 6 & \mathbf{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}.$$

当对 A 施加消去法获得 R 时，我们同时可将 b 变到 d:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{具有增广矩阵} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \mathbf{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$$

第三个方便变为 $0 = 0$. 所以该方程可解.

对一般的 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$:

$$\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & \boldsymbol{b}_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \boldsymbol{b}_2 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & \boldsymbol{b}_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \boldsymbol{b}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$$

要获得第三个方程 $0 = 0$ 当且仅当 $b_3 - b_1 - b_2 = 0$. 即 $b_1 + b_2 = b_3$.

3.6 非齐次特解

我们已知 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$（或者 $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$）的特殊解是 $\boldsymbol{x}_p = (1, 0, 6, 0)$。这个特殊解是我们最喜欢的：自由变量取零，主元变量可以直接从 d 中读出。该方案总是可行：

要使解决方案存在，$\boldsymbol{R}$ 中的零行对应 $\boldsymbol{d}$ 中分量也必须为零。因为 $\boldsymbol{I}$ 位于 $\boldsymbol{R}$ 中，$\boldsymbol{x}_{\text{particular}}$ 中的主元变量来自 $\boldsymbol{d}$。

$$R\boldsymbol{x}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & \mathbf{0} & 2 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \\ \mathbf{6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

主元变量 $\mathbf{1}, \mathbf{6}$
自由变量 $0, 0$
解 $\boldsymbol{x_p} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{6}, \mathbf{0})$

注意我们如何选择自由变量（作为零）并求解主元变量。行缩减到 R 后，这些步骤很快。当自由变量为零时，$\boldsymbol{x}_p$ 的主元变量已在右侧向量 $\boldsymbol{d}$ 中显示。

$x_{\textbf{particular}}$	**非齐次的特解**	$A\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{b}$
$x_{\textbf{nullspace}}$	$\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}$ **个一般解**	$A\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$

这个特定的解是 $(1,0,6,0)$。两个一般解满足 $R\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 来自 R 的两个自由列，通过颠倒 3、2 和 4 的符号。$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的完整解是 $\boldsymbol{x}_p+\boldsymbol{x}_n$：

$$\text{完整解} \qquad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_p+\boldsymbol{x}_n=\begin{bmatrix}1\\0\\6\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-2\\0\\-4\\1\end{bmatrix}$$

问题 设 A 是可逆方阵, $m = n = r$. 那么 $\boldsymbol{x}_p$ 和 $\boldsymbol{x}_n$ 是什么?

解答 特解也是唯一解 $\boldsymbol{x}_p = A^{-1}\boldsymbol{b}$。那里没有特解或自由变量。$R = I$ 没有零行。零空间中唯一向量是 $\boldsymbol{x}_n = \mathbf{0}$。完整的解是 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{x}_p = A^{-1}\boldsymbol{b} + \mathbf{0}$.

例 1 当 (b_1, b_2, b_3) 满足什么条件时，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 可解：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ and } \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

寻找完整解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_n$.

解 使用增广矩阵及其额外的列$\boldsymbol{b}$。从第2行减去$\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$的第1行。然后将第1行的2倍加到第3行，得到$\begin{bmatrix} R & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & b_2 \\ -2 & -3 & b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & b_3 + 2b_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{b_3 + b_1 + b_2} \end{bmatrix}$$

最后一行是 $0 = 0$，如果 $b_3 + b_1 + b_2 = 0$。该条件使得 $\boldsymbol{b}$ 落在列空间中。从而 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 可解。A 的行添加到零行。为了保持一致性 b 的元素也必须加到零.

此例中没有自由变量，因为 $n-r=2-2$。因此，没有一般解。零空间解是 $\boldsymbol{x}_n=\mathbf{0}$。$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 和 $R\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ 的特解即为 $\boldsymbol{d}$ 最后一列的顶部部分:

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\text{有唯一解}\quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_p+\boldsymbol{x}_n=\begin{bmatrix} 2b_1-b_2 \\ b_2-b_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

显然，当 $b_3+b_1+b_2$ 不等于零时，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解不存在($\boldsymbol{x}_p$ 和 $\boldsymbol{x}$ 都不存在)。

这个例子是一个非常重要的例子：A 具有列满秩。每一列都有一个主元。秩等于 $r=n$。矩阵又高又瘦。行缩减将 I 放在顶部，当 A 降为 R，秩为n：

$$\textbf{列满秩}\quad R=\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n\text{ 乘 }n\text{ 单位矩阵} \\ m-n\text{ 零行} \end{bmatrix} \tag{1}$$

没有自由列和自由变量。零空间是 $\mathbf{Z}=\{0\}$.

每个列满秩的矩阵 A $(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{n})$ 具有以下性质：

1. A 的所有列都是主元列.
2. 没有自由变量与一般解.
3. 零空间 $\boldsymbol{N}(A)$ 仅包含零向量 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.
4. 若方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解（方程可能无解），则仅有唯一解.

在下一节的基本语言中，A 有线性无关列仅当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 时才会出现 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$。第四章中，我们将在列表中再添加一个事实：当 A 秩为 n 时，方阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 可逆。

在这种情况下，A（和 R）的零空间缩小为零向量。$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解是唯一的（如果存在）。R 中将有 $m-n$ 个零行。因此，在 $\boldsymbol{b}$ 上有 $m-n$ 个条件，以便在这些行中有 $0=0$，从而使得$\boldsymbol{b}$ 在列空间中。对列满秩矩阵，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 要么仅有唯一解，要么无解（$m>n$ 过定的）。

3.7 完整解：一般情况

另一种极端情况是行满秩（$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{m}$）“行是线性无关的。“每一行都有一个主元，如下例：。

例 2 方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有 $n=3$ 个未知量，但只有 $m=2$ 个方程:

$$\text{行满秩} \qquad \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & z & = & 4 \end{array} \qquad (\boldsymbol{r}=\boldsymbol{m}=\mathbf{2})$$

特解将是线上的一个点。添加零空间向量 $\boldsymbol{x}_n$，将沿着图3.3 中的线移动。

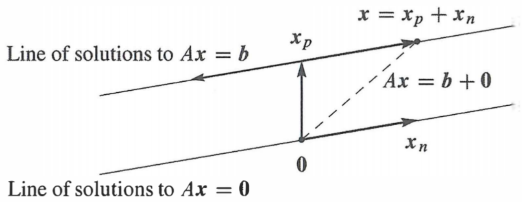

Figure 3.3: Complete solution = *one* particular solution + *all* nullspace solutions.

通过对 $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ 消去法，寻找 $\boldsymbol{x}_p$ 和 $\boldsymbol{x}_n$。从第 2 行减去第 1 行，然后从第 1 行减去第 2 行：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 1 & 2 & -1 & \mathbf{4} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 0 & 1 & -2 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & -2 & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}.$$

$$x_{\text{particular}} \quad \text{来自右端项 } \boldsymbol{d}\text{:} \ \boldsymbol{x}_p = (2, 1, 0)$$
$$x_{\text{special}} \quad \text{来自 } R \text{ 的第三列（自由列）：} \boldsymbol{s} = (-3, 2, 1)$$

$$\textbf{完整解} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

每个行满秩的矩阵 A $(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{m})$ 具有以下性质：

1. 所有的行都有主元，$\boldsymbol{R}$ 没有零行.
2. 对任意的右端项 $\boldsymbol{b}$，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 总有解.
3. 列空间是整个空间 $\boldsymbol{R}^m$.
4. 有 $n-r=n-m$ 个一般解，在 A 的零空间.

在这种情况下，有 m 个主元，行是线性无关的。因此 A^{T} 的列是线性无关的。A^{T} 的零空间是零向量。

依据矩阵的秩r，会发生如下四种可能情况：

$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{m}$	and	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{n}$	方且可逆	$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$	有 1 解
$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{m}$	and	$r<n$	矮且宽	$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$	有 ∞ 解
$r<m$	and	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{n}$	高且瘦	$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$	有 0 或 1 解
$r<m$	and	$r<n$	非满秩	$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$	有 0 或 ∞ 解

对应四类简化行阶梯矩阵 R 的样式（列置换意义下）

$$\begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

它们的秩 $\quad r=m=n \quad r=m<n \quad r=n<m \quad r<m, r<n$

小结-2

1 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}:\boldsymbol{x}$的完整解$=$ (一个特解 $\boldsymbol{x}_p$) $+$ (零空间中的任意向量 $\boldsymbol{x}_n$).

2 消去 $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ 以获得 $\begin{bmatrix} R & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$. 则 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 等价于 $R\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$.

3 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 与 $R\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ 可解仅当R的所有零行对应$\boldsymbol{d}$中的分量也是零.

4 当 $R\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ 可解, 特解 $\boldsymbol{x}_p$ 使得其所有自由变量等于零.

5 A 列满秩 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{n}$ 当它的零空间只有零向量，即无自由变量.

6 A 行满秩 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{m}$ 当它的列空间 $\boldsymbol{C}(A)$ 是整个 $\mathbf{R}^m$，即$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 总是有界.

7 四种解的情况：$r=m=n(A$ 可逆)；$r=m<n$ (任意$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$均可解)
$r=n<m(A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有 1 或 0 个解)；$r<m,r<n$(0 或 ∞ 个解).

习题

1. 自学 worked examples 3.2C, 3.3B;

2. Problem Set 3.2: 15, 22, 24, 30, 32, 36, 38, 48, 58

2. Problem Set 3.3: 22, 24, 25, 34