Problem Set 3.1: 3, 10, 15, 17, 18, 30 解答

Zhiyi Wang

2025/9/19

3

(a) 在 $\mathbb{R}^1$ 中仅保留正数 $x > 0$，运算仍为原本的加法和数乘。此集合不是子空间，原因：

- 不含零向量：集合中无 0，违反公理（3）。
- 不含加法逆元：任意 $x > 0$ 的逆元 $-x$ 不在集合中，违反公理（4）。

(b) 重定义运算

$$x \oplus y := xy, \qquad c \odot x := x^c \quad (x, y > 0,\ c \in \mathbb{R}).$$

检验标量对此加法的分配律（对应原公理（7））：

$$3 \odot (2 \oplus 1) \stackrel{?}{=} (3 \odot 2) \oplus (3 \odot 1).$$

计算：$2 \oplus 1 = 2 \cdot 1 = 2$，$3 \odot 2 = 2^3 = 8$，$3 \odot 1 = 1^3 = 1$，于是左边 $= 3 \odot 2 = 8$，右边 $= 8 \oplus 1 = 8 \cdot 1 = 8$，相等。此加法下的零向量由乘法单位元给出，即 $e = 1$，满足 $x \oplus e = x$。

10

(a) 平面 $b_1 = b_2$：包含 $\mathbf{0}$，对加法与数乘封闭，是子空间。

(b) 平面 $b_1 = 1$：不含 $\mathbf{0}$，不是子空间。

(c) 集合 $b_1 b_2 b_3 = 0$：不对加法封闭。反例

$$\mathbf{x} = (1, 0, 1),\ \mathbf{y} = (0, 1, 1) \text{ 均满足乘积为零，但 } \mathbf{x} + \mathbf{y} = (1, 1, 2), \quad 1 \cdot 1 \cdot 2 \neq 0.$$

不是子空间。

(d) $\operatorname{span}\{(1,4,0),(2,2,2)\}$：两条线性无关的向量的所有线性组合，是子空间。

(e) 超平面 $b_1+b_2+b_3=0$：线性方程的解空间，是子空间。

(f) 集合 $b_1\le b_2\le b_3$：乘以 -1 会颠倒不等式，不是子空间。

15

(a) 两个过原点的平面在 $\mathbb{R}^3$ 中的交集通常是一条 过原点的直线；当两平面重合时，交集也可能是 该平面本身。

(b) 一个过原点的平面与一条过原点的直线的交集通常是 $\{\mathbf{0}\}$；当该直线落在该平面内时，交集也可能是 这条直线本身。

(c) $\mathbf{0}\in S$ 且 $\mathbf{0}\in T$，故 $\mathbf{0}\in S\cap T$。若 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in S\cap T$，则 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 同时在 S 与 T。由于 S,T 各自对加法、数乘封闭，$\mathbf{x}+\mathbf{y}$ 与 $c\mathbf{x}$（任意 $c\in\mathbb{R}$）仍各自在 S,T，故在 $S\cap T$。于是 $S\cap T$ 为子空间。

17

(a) 可逆矩阵集合不是子空间。理由：不含零矩阵；且对加法不封闭，例如

$$I_n \text{ 与 } -I_n \text{ 均可逆，但 } I_n+(-I_n)=0 \text{ 奇异.}$$

(b) 奇异矩阵集合也不是子空间。反例：

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \text{ 均奇异，但 } A+B=I_2 \text{ 可逆.}$$

18

(a) **真**。若 $A^T=A$ 与 $B^T=B$，则

$$(A+B)^T=A^T+B^T=A+B,\qquad (cA)^T=cA^T=cA,$$

对加法与数乘封闭。

(b) **真**。若 $A^T=-A$ 与 $B^T=-B$，则

$$(A+B)^T=A^T+B^T=-(A+B),\qquad (cA)^T=cA^T=-cA,$$

亦对加法与数乘封闭。

(c) **假**。非对称矩阵集合对加法不封闭。举例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 均非对称，但 } A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 是对称矩阵.}$$

30

并无清晰思路，询问 ai 后有如下答案：

(a) 定义 $S + T := \{ s + t : \ s \in S, \ t \in T \}$。有

$$\mathbf{0} = \mathbf{0}_S + \mathbf{0}_T \in S + T.$$

若 $x_1 = s_1 + t_1, \ x_2 = s_2 + t_2$，则

$$x_1 + x_2 = (s_1 + s_2) + (t_1 + t_2) \in S + T \quad (\text{因 } S, T \text{ 各自对加法封闭}),$$

任意 $c \in \mathbb{R}$ 有

$$c\, x_1 = c(s_1 + t_1) = (cs_1) + (ct_1) \in S + T \quad (\text{因 } S, T \text{ 对数乘封闭}).$$

故 $S + T$ 为 V 的子空间。

(b) 若 S, T 是 $\mathbb{R}^m$ 中两条过原点的直线，则

$$S + T = \begin{cases} S & \text{若 } S = T, \\ \text{过原点的一个平面 } (\operatorname{span}\{S, T\}) & \text{若 } S \neq T. \end{cases}$$

而 $S \cup T$ 只是两条直线的并集，通常对加法不封闭（除非 $S = T$）。由定义可知

$$\operatorname{span}(S \cup T) = S + T,$$

即并集的张成空间正是它们的和空间。