Worked Example 3.1B

例题 3.1B

请描述下列每个向量空间 V 的一个子空间 S，以及 S 的一个子空间 SS。

V_1：由向量 $(1,1,0,0)$，$(1,1,1,0)$ 和 $(1,1,1,1)$ 的所有线性组合构成的空间。

V_2：所有与 $u=(1,2,1)$ 垂直的向量构成的空间，即满足 $u\cdot v=0$。

V_3：所有对称 2×2 矩阵构成的空间（矩阵空间 M 的一个子空间）。

V_4：方程 $\frac{d^4y}{dx^4}=0$ 的所有解构成的空间（函数空间 F 的一个子空间）。

请用两种方式描述每个 V：“... 的所有线性组合”以及“... 方程的所有解”。

解答

解答：V_1 以三个向量开始。一个子空间 S 来自前两个向量 $(1,1,0,0)$ 和 $(1,1,1,0)$ 的所有组合。S 的一个子空间 SS 来自第一个向量的所有倍数 $(c,c,0,0)$。所以有很多可能性。

V_2 的一个子空间 S 是通过 $(1,-1,1)$ 的直线。这条线垂直于 u。向量 $x=(0,0,0)$ 在 S 中，它的所有倍数 cx 构成了最小的子空间 $SS=Z$。

对角矩阵是对称矩阵的一个子空间 S。单位矩阵的倍数 cI 是对角矩阵的一个子空间 SS。

V_4 包含所有满足 $\frac{d^4y}{dx^4}=0$ 的三次多项式 $y=a+bx+cx^2+dx^3$。二次多项式构成一个子空间 S。线性多项式是 SS 的一种选择。常数可以是 SSS。

在所有四个部分中，我们都可以将 S 取为 V 本身，将 SS 取为零子空间 Z。

每个 V 都可以描述为“... 的所有组合”和“... 的所有解”：

V_1：是 3 个向量的所有组合；是 $v_1-v_2=0$ 的所有解。

V_2：是 $(1,0,-1)$ 和 $(1,-1,1)$ 的所有组合；是 $u\cdot v=0$ 的所有解。

V_3：是矩阵 $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ 的所有组合；是所有满足 $b=c$ 的矩阵 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 的解。

V_4：是 $1,x,x^2,x^3$ 的所有组合；是 $\frac{d^4y}{dx^4}=0$ 的所有解。

Problem Set 2.1

第 19 题

什么样的 3×3 矩阵 E 能将向量 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 变换为 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z+x \end{pmatrix}$? 什么样的矩阵 E^{-1} 能将其变换回 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-x \end{pmatrix}$? 如果将向量 $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ 先乘以 E 再乘以 E^{-1}，得到的结果分别是 (___) 和 (___)?

第 29 题

从向量 $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 开始，反复乘以同一个马尔可夫矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$。接下来三个向量是 u_1, u_2, u_3:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = Au_1 = \underline{\quad}, \quad u_3 = Au_2 = \underline{\quad}$$

对于这四个向量 u_0, u_1, u_2, u_3，你注意到了什么性质?

Problem Set 3.1

第 19 题

描述以下矩阵的列空间（是直线、平面，还是其他图形）:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第 23 题

（推荐）如果我们在一个矩阵 A 上增加一个额外的列向量 b，那么其列空间会变大，除非 _____。请分别举一个列空间会变大和不变的例子。为什么方程 $Ax = b$ 有解的充分必要条件是增广矩阵 $[A\ b]$ 的列空间与 A 的列空间相同?

第 26 题

如果 A 是任意一个 5×5 的可逆矩阵，那么它的列空间是 ____。为什么？

第 32 题

证明矩阵 A 和增广矩阵 $[A\ AB]$ 具有相同的列空间。然后，请找出一个方阵 A，使其满足 $C(A^2)$ 是 $C(A)$ 的真子空间（即 $C(A^2)$ 比 $C(A)$ 小）。重要结论：一个 $n \times n$ 矩阵 A 具有列空间 $C(A) = \mathbb{R}^n$ 的充分必要条件是 A 是一个 ____ 矩阵。