CHƯƠNG 3
ĐỒ THỊ DẠNG PHẲNG

Bùi Tiến Lên

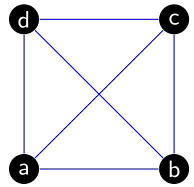
Đại học Khoa học Tự nhiên TPHCM

1/1/2018

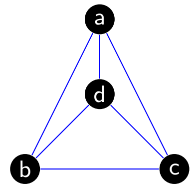
Đồ thị phẳng

Định nghĩa 3.1

Một đồ thị vô hướng được gọi là **đồ thị phẳng** (planar graph) nếu tồn tại một cách vẽ đồ thị trong mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào của nó **cắt** (cross) nhau



(a) Cách vẽ không phẳng



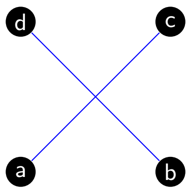
(b) Cách vẽ phẳng

Hình 3.1: Hai cách vẽ cho đồ thị K_4

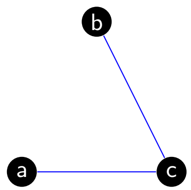
Đồ thị phẳng (cont.)

Quy ước về **cắt** nhau

- Hai cạnh có đỉnh chung thì không được xem là cắt nhau
- Mỗi cách vẽ đồ thị trên mặt phẳng sao cho không có cạnh cắt nhau được gọi là **biểu diễn phẳng** (planar representation) của đồ thị



(a) hai cạnh cắt nhau



(b) hai cạnh không cắt nhau

Hình 3.2: Các cạnh cắt và không cắt

Đồ thị phẳng (cont.)

Định nghĩa 3.2

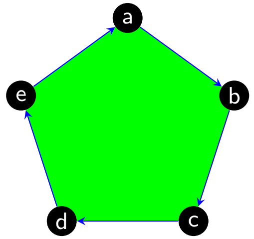
Một đồ thị phẳng và biểu diễn phẳng của đồ thị sẽ tạo ra các **miền** (region). Có hai loại miền: hữu hạn và vô hạn

- **Miền hữu hạn** là phần mặt phẳng được giới hạn bởi một chu trình sơ cấp mà không chứa bên trong nó một chu trình sơ cấp khác
- **Miền vô hạn** là phần mặt phẳng nằm bên ngoài tất cả các miền hữu hạn
- Chu trình sơ cấp bao quanh một miền được gọi là **đường biên**
- Chu trình sơ cấp tiếp giáp với miền vô hạn được gọi là **đường biên ngoài**

Đồ thị phẳng (cont.)

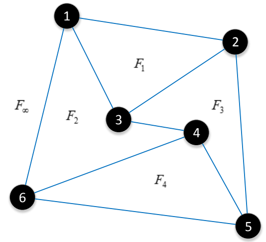
Quy ước

Các đỉnh của một đường biên được viết theo thứ tự sao cho khi đi dọc theo đường biên theo thứ tự đó thì miền bao quanh ở phía bên tay phải

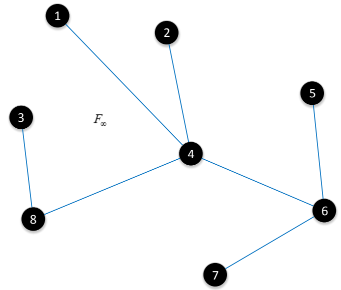


Hình 3.3: Các đỉnh của đường biên được viết theo quy ước là a b c d e

Đồ thị phẳng (cont.)



(a) đồ thị có 5 miền
$F_\infty = \{6, 5, 2, 1\}$
$F_1 = \{1, 2, 3\}$
$F_2 = \{1, 3, 4, 6\}$
$F_3 = \{2, 5, 4, 3\}$
$F_4 = \{4, 5, 6\}$



(b) đồ thị có 1 miền
F_∞

Hình 3.4: Các miền của các đồ thị

Đồ thị phẳng (cont.)

Tính chất 3.1

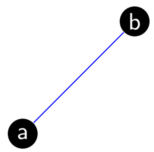
Một đồ thị phẳng G
- *Là một đồ thị thưa*
- *Là đồ thị 4 màu*

Đồ thị phẳng có rất nhiều ứng dụng trong xây dựng, thiết kế mạch VLSI...

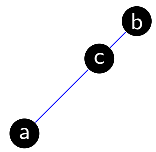
Phép biến đổi đồng phôi

Định nghĩa 3.3

Phép **biến đổi đồng phôi** (**homeomorphism**) bao gồm
- Tách một cạnh thành hai cạnh (thêm đỉnh)
- Gộp hai cạnh có chung một đỉnh bậc 2 thành một cạnh hay (bỏ đỉnh)



(a) cạnh 2 đỉnh



(b) cạnh 3 đỉnh

Hình 3.5: Biến đổi đồng phôi trên cạnh

Phép biến đổi đồng phôi (cont.)

Định nghĩa 3.4

Hai đồ thị được gọi là đồng phôi nếu tồn tại một chuỗi các biến đổi đồng phôi biến đồ thị này thành đồ thị kia

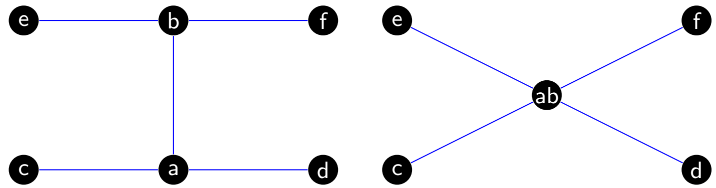
(a) đồ thị K_5 **(b)** cạnh 3 đỉnh

Hình 3.6: Đồ thị K_5 và đồ thị đồng phôi của nó

Phép biến đổi co

Định nghĩa 3.5

Phép **biến đổi co** (shrink) là phép biến đổi gộp đỉnh (“xóa cạnh”)



(a) đồ thị trước khi co a và b **(b)** đồ thị sau khi co a và b

Hình 3.7: Phép biến đổi co

Một số nhận xét về tính phẳng của đồ thị

Nhận xét

Tính chất phẳng hay không phẳng của một đồ thị không ảnh hưởng bởi

- Cạnh khuyên $\Longrightarrow$ bỏ cạnh khuyên
- Các cạnh song song $\Longrightarrow$ bỏ các cạnh song song (chỉ giữ lại một cạnh)
- Các phép biến đổi đồng phôi

Định lý Euler

Bổ đề 3.1

Cây có n đỉnh là một đồ thị phẳng có số cạnh $e = n - 1$ và số miền $f = 1$

Chứng minh

Sinh viên tự chứng minh ■

Định lý Euler (cont.)

Định lý 3.1 (công thức về số cạnh, số miền và số đỉnh của một đồ thị phẳng)

Cho một đồ thị phẳng, liên thông gồm n đỉnh, e cạnh và f miền thì ta có công thức sau:

$$f = e - n + 2 \tag{3.1}$$

Chứng minh

Cho G là một đồ thị liên thông phẳng có n đỉnh, e cạnh và f miền

- Nếu G có chu trình thì bỏ đi một cạnh của chu trình
- Khi đó số cạnh e giảm đi một, và số miền f bớt đi một, nhưng số đỉnh giữ nguyên
- Tiếp tục quá trình bỏ cạnh cho đến khi không thực hiện được nữa thì đồ thị con cuối cùng là một cây

Định lý Euler (cont.)

- Đồ thị dạng cây luôn thỏa công thức Euler
- Vậy đồ thị ban đầu phải thỏa công thức Euler

■

Định lý Euler (cont.)

Bổ đề 3.2

Một đồ thị đơn, phẳng và liên thông gồm n đỉnh, e cạnh ($e \geq 3$) và f miền thì ta có bất đẳng thức sau

$$e \geq \frac{3}{2} f \tag{3.2}$$

Chứng minh

Xét một đồ thị phẳng, đơn, liên thông G thì (**Lưu ý về suy luận cho miền vô hạn**)

- Mỗi miền được bao bởi ít nhất 3 cạnh
- Mỗi cạnh kề nhiều nhất là 2 miền
- Do đó

$$2e \geq 3f \Rightarrow e \geq \frac{3}{2} f$$

■

Định lý Euler (cont.)

Hệ quả 3.1

Một đồ thị đơn, phẳng và liên thông gồm n đỉnh, e cạnh ($e \geq 3$) và f miền thì ta có bất đẳng thức sau

$$e \leq 3n - 6 \tag{3.3}$$

Chứng minh

- Theo định lý Euler ta có

$$f = e - n + 2$$

- Theo bổ đề trước ta có

$$\frac{2}{3} e \geq f$$

Định lý Euler (cont.)

- Do đó
$$\frac{2}{3}e \geq e - n + 2 \Rightarrow e \leq 3n - 6$$

■

Định lý Euler (cont.)

Hệ quả 3.2

Một đồ thị đơn, phẳng và liên thông gồm n đỉnh, e cạnh ($e \geq 4$), f miền và các chu trình đều có độ dài ≥ 4 thì ta có bất đẳng thức sau
$$e \leq 2n - 4 \tag{3.4}$$

Chứng minh

Sinh viên tự chứng minh ■

Định lý Euler tổng quát

Định lý 3.2

Cho một đồ thị phẳng gồm n đỉnh, e cạnh, f miền và p thành phần liên thông thì ta có công thức sau:
$$f = e - n + p + 1 \tag{3.5}$$

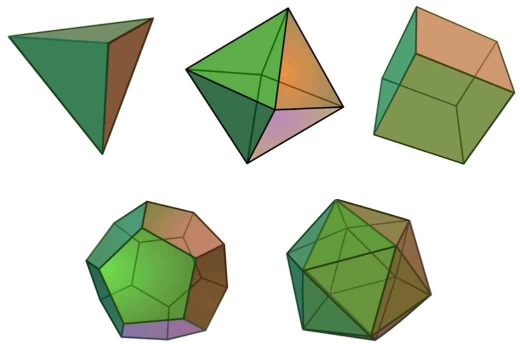
Chứng minh

Sinh viên tự chứng minh ■

Định lý Euler tổng quát (cont.)

Nhận xét

Công thức Euler cũng đúng cho các khối đa diện lồi



Hình 3.8: Năm khối đa diện lồi đều

Định Lý Kuratowski

Định lý 3.3

Đồ thị đủ K_5 là đồ thị không phẳng

Định lý 3.4

Đồ thị phân đôi đủ $K_{3,3}$ là đồ thị không phẳng

Định lý 3.5

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị liên thông có tính phẳng là đồ thị không chứa đồ thị con nào đồng phôi với K_5 hoặc $K_{3,3}$

Định Lý Kuratowski (cont.)

Nhận xét

Hai đồ thị K_5 và $K_{3,3}$ là hai đồ thị không phẳng đơn giản nhất

- Nếu xóa bất kỳ một đỉnh hoặc một cạnh thì sẽ được một đồ thị phẳng
- Đồ thị K_5 là đồ thị không phẳng có ít đỉnh nhất
- Đồ thị $K_{3,3}$ là đồ thị không phẳng có ít cạnh nhất

Định Lý Kuratowski (cont.)

(a) đồ thị K_5 **(b)** đồ thị $K_{3,3}$

Hình 3.9: Hai đồ thị không phẳng đơn giản nhất K_5 và $K_{3,3}$

Chứng minh

Phương pháp chứng minh phản chứng

- Giả sử đồ thị K_5 phẳng. Đồ thị này có số đỉnh $n = 5$ và số cạnh $e = 10$. Theo hệ quả $e \leq 3n - 6$; nhưng $10 \leq 3.5 - 6$ là vô lý. Vậy ta có điều phải chứng minh

Định Lý Kuratowski (cont.)

- Giả sử đồ thị $K_{3,3}$ phẳng. Đồ thị $K_{3,3}$ có số đỉnh $n = 6$ và số cạnh $e = 9$. Đồ thị $K_{3,3}$ chỉ có các chu trình từ 4 cạnh trở lên vậy theo hệ quả $e \leq 2n - 4$; nhưng $9 \leq 2.6 - 4$ là vô lý. Vậy ta phải có điều chứng minh

■

Định Lý Wagner

Định lý 3.6

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị liên thông có tính phẳng là đồ thị không chứa đồ thị con nào có thể co thành K_5 hoặc $K_{3,3}$

Chứng minh

Sinh viên tự chứng minh ■

Kiểm tra tính phẳng của một đồ thị

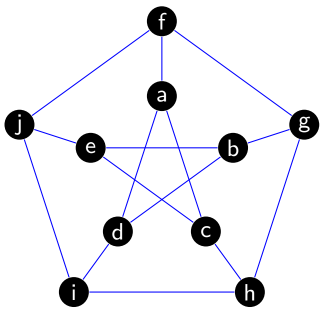
Có nhiều phương pháp để kiểm tra tính phẳng của đồ thị

- Sử dụng định lý Euler
- Sử dụng định lý Kuratowski
- Sử dụng định lý Wagner
- Sử dụng thuật toán Demoucron, Malgrange and Pertuiset (DMP)

Ví dụ minh họa

Chứng minh đồ thị Peterson không phẳng bằng

- Sử dụng định lý Wagner
- Sử dụng định lý Kuratowski

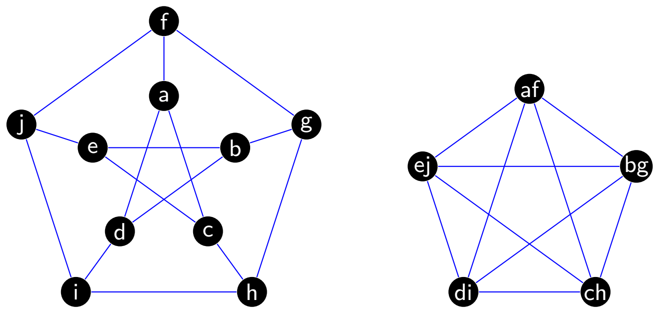


Hình 3.10: Đồ thị Petersen

Ví dụ minh họa (cont.)

Áp dụng định lý Wagner

- Thực hiện phép co 5 lần
- Đồ thị kết quả là K_5

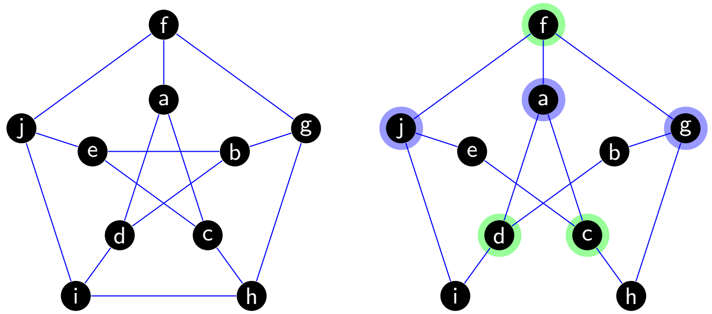


Hình 3.11: Đồ thị và kết quả sau khi thực hiện phép co 5 lần

Ví dụ minh họa (cont.)

Áp dụng định lý Kuratowski

- Loại bỏ một số cạnh
- Đồ thị kết quả đồng phôi với $K_{3,3}$



Hình 3.12: Đồ thị và kết quả loại bỏ các cạnh

Thuật toán DMP

Một số giả thiết đối với đồ thị $G = (V, E)$ cần kiểm tra tính phẳng

1. G là một đồ thị đơn, vô hướng
2. G có $|E| \leq 3|V| - 6$
3. G là một đồ thị liên thông
4. G là một đồ thị song liên thông

Thuật toán DMP (cont.)

Định nghĩa 3.6

Cho một đồ thị $G = (V, E)$ và đồ thị con $G' = (V', E')$. S được gọi là một **mảnh** (segment) của đồ thị G theo G' nếu thỏa một trong hai điều sau

- Nó là một cạnh không thuộc E' nhưng có hai đỉnh thuộc V'
- Nó là một thành phần liên thông của đồ thị $G - V'$ cùng với các cạnh nối nó với G'

Định nghĩa 3.7

Các đỉnh của một mảnh được gọi là **đỉnh tiếp xúc** (contact vertex) nếu nó thuộc đồ thị con G'

Thuật toán DMP (cont.)

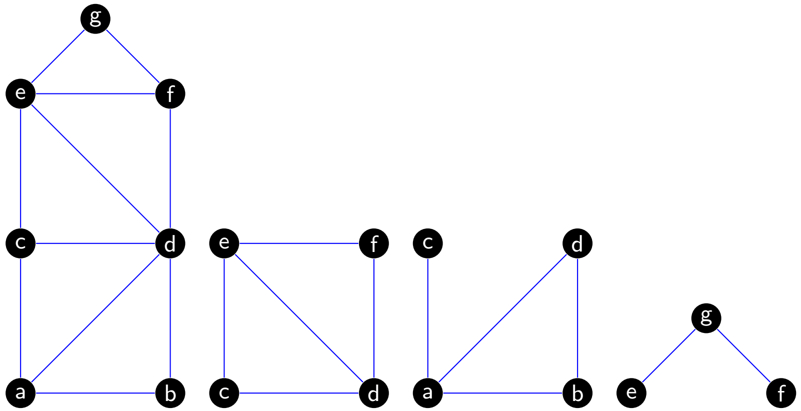
Định nghĩa 3.8

Một miền của đồ thị con G' là **miền tiếp nhận** (admissible face) của một mảnh nếu nó chứa tất cả các đỉnh tiếp xúc của mảnh này.

Định nghĩa 3.9

Đường đi-α (α-path) của một mảnh là đường đi nối hai đỉnh tiếp xúc của mảnh này.

Thuật toán DMP (cont.)



(a) đồ thị G (b) đồ thị con G' (c) mảnh S_1 (d) mảnh S_2

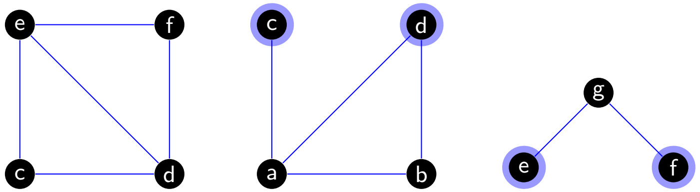
Hình 3.13: Các mảnh của đồ thị

Thuật toán DMP (cont.)

(a) đồ thị G (b) đồ thị con G'

Hình 3.14: Hãy xác định các mảnh của đồ thị

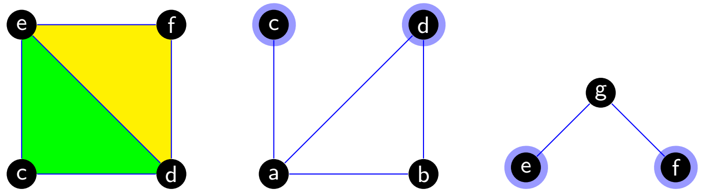
Thuật toán DMP (cont.)



(a) các đỉnh của đồ thị con G' (b) c, d là đỉnh tiếp xúc của S_1 (c) e, f là đỉnh tiếp xúc của S_2

Hình 3.15: Các đỉnh tiếp xúc của các mảnh

Thuật toán DMP (cont.)



(a) các miền của đồ thị con G' (b) {c,d,e} là miền tiếp nhận của S_1 (c) {d,e,f} là miền tiếp nhận của S_2

Hình 3.16: Các miền tiếp nhận của các mảnh

Thuật toán DMP (cont.)

(a) đường đi {c,a,d} **(b)** đường đi {c,a,b,d}

Hình 3.17: Các đường đi-α của S_1

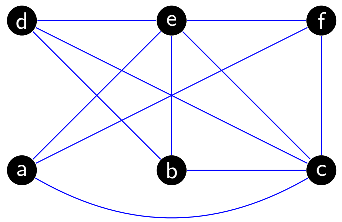
Thuật toán DMP (cont.)

Cho một đồ thị G

Algorithm 1 Thuật toán Democron, Malgrange and Pertuiset

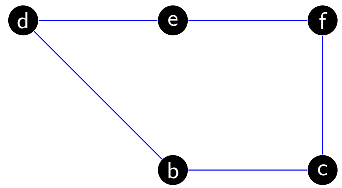
Chọn một chu trình G' của G
while G' $\neq$ G **do**
    Xác định các mảnh của $G - G'$
    Xác định các miền tiếp nhận của các mảnh
    if tồn tại một mảnh không có miền tiếp nhận **then**
        Dừng, đồ thị G không phẳng
    Chọn một mảnh và một miền tiếp nhận của mảnh (*ưu tiên mảnh có 1 miền tiếp nhận*)
    Nhúng đường đi-α của mảnh vào miền tiếp nhận này
    Cập nhật $G' = G' + \alpha$
Đồ thị G phẳng

Ví dụ minh họa thuật toán DMP



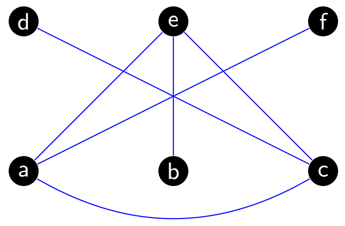
Hình 3.18: Áp dụng thuật toán DMP để kiểm tra tính phẳng của đồ thị G? Nếu đồ thị phẳng hãy vẽ ra một biểu diễn phẳng của đồ thị?

Ví dụ minh họa thuật toán DMP (cont.)



Hình 3.19: Đồ thị G'

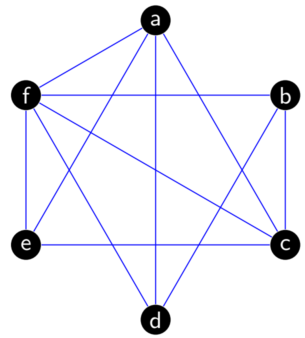
Ví dụ minh họa thuật toán DMP (cont.)



Hình 3.20: Đồ thị $G - G'$

Bài tập

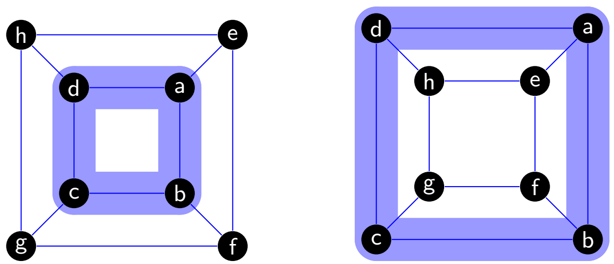
- Hãy xét tính phẳng của đồ thị sau. Nếu phẳng thì hãy tìm ra một biểu diễn phẳng



Định lý về biểu diễn phẳng

Định lý 3.7

Một biểu diễn phẳng của đồ thị luôn luôn có thể biến đổi thành một biểu diễn phẳng khác sao cho miền hữu hạn của nó trở thành miền vô hạn của kia



Hình 3.21: Biến đổi biểu diễn phẳng

Tài liệu tham khảo

Diestel, R. (2005).
Graph theory. 2005.
Springer-Verlag.

Moore, E. F. (1959).
The shortest path through a maze.
Bell Telephone System.

Rosen, K. H. and Krithivasan, K. (2012).
Discrete mathematics and its applications.
McGraw-Hill New York.

Tarjan, R. (1972).
Depth-first search and linear graph algorithms.
SIAM journal on computing, 1(2):146–160.

Tài liệu tham khảo (cont.)

Trần, T. and Dương, D. (2013).
Giáo trình lý thuyết đồ thị. 2013.
NXB Đại Học Quốc Gia TPHCM.

West, D. B. et al. (2001).
Introduction to graph theory.
Prentice hall Englewood Cliffs.