

# 武汉理工大学

数学建模暑期培训论文

第 3 题

基于 xxxxxxxx 模型

---

第 10 组

姓名

刘子川（组长）

程宇

祁成

方向

编程

建模

写作

2020 年 8 月 14 日

## 摘要

控制高压油管的压力变化对减小燃油量偏差,提高发动机工作效率具有重要意义。本文建立了基于质量守恒定理的微分方程稳压模型,采用二分法、试探法以及自适应权重的蝙蝠算法对模型进行求解。//

针对问题一,建立基于质量守恒定律的燃油流动模型,考察单向阀开启时间对压力稳定性的影响。综合考虑压力与弹性模量、密度之间的关系,提出燃油压力-密度微分方程模型和燃油流动方程。本文采用改进的欧拉方法对燃油压力-密度微分方程求得数值解;利用二分法求解压力分布。综合考虑平均绝对偏差等反映压力稳定程度的统计量,求得直接稳定于 100MPa 的开启时长为 **0.2955ms**,在 2s、5s 内到达并稳定于 150MPa 时开启时长为 **0.7795ms**、**0.6734ms**,10s 到达并稳定于 150MPa 的开启时长存在多解。最后对求解结果进行灵敏度分析、误差分析。//

针对问题二,建立基于质量守恒定律的泵-管-嘴系统动态稳压模型,将燃油进入和喷出的过程动态化处理。考虑柱塞和针阀升程的动态变动,建立喷油嘴流量方程和质量守恒方程。为提高角速度求解精度,以凸轮转动角度为固定步长,转动时间变动步长,采用试探法粗略搜索与二分法精细搜索的方法求解,求得凸轮最优转动角速度 **0.0283rad/ms** (转速 **270.382 转/分钟**),并得到该角速度下高压油管的密度、压力周期性变化图。对求解结果进行误差分析与灵敏度分析,考察柱塞腔残余容积变动对高压油管压力稳态的影响。//

针对问题三,对于增加一个喷油嘴的情况,改变质量守恒方程并沿用问题二的模型调整供、喷油策略,得到最优凸轮转动角速度为 **0.0522rad/ms** (**498.726 转/分钟**);对于既增加喷油嘴又增加减压阀的情况,建立基于自适应权重的蝙蝠算法的多变量优化模型,以凸轮转动角速度、减压阀开启时长和关闭时长为参数,平均绝对偏差 MAD 为目标,在泵-管-嘴系统动态稳压模型的基础上进行求解,得到最优参数:角速度 **0.0648 rad/ms** (**619.109 转/分钟**)、减压阀的开启时长 **2.4ms** 和减压阀的关闭时长 **97.6ms**。//

本文的优点为:1. 采用试探法粗略搜索与二分法精细搜索结合的方法,降低了问题的求解难度。2. 以凸轮转动角度为固定步长,对不同角速度按照不同精度的时间步长求解,大大提高了求解的精确度。3. 针对智能算法求解精度方面,采用改进的蝙蝠算法,使速度权重系数自适应调整,兼顾局部搜索与全局搜索能力。

关键词: 微分方程 微分方程 微分方程 微分方程

# 目录

一、 问题重述 .....	1
1.1 问题背景 .....	1
1.2 问题概述 .....	2
二、 模型假设 .....	2
三、 符号说明 .....	2
四、 问题一模型的建立与求解 .....	2
4.1 问题描述与分析 .....	2
4.2 模型的建立 .....	3
4.2.1 有线充电设备模型 .....	3
4.2.2 无线充电设备模型 .....	4
4.3 模型的求解 .....	7
4.4 生命遗传算法 .....	7
4.5 实验结果及分析 .....	9
五、 问题二模型的建立与求解 .....	9
5.1 问题描述与分析 .....	9
5.2 模型的建立 .....	9
5.3 模型的求解 .....	9
5.4 实验结果及分析 .....	9
六、 问题三模型的建立与求解 .....	11
6.1 结果分析 .....	11
七、 灵敏度分析 .....	11
八、 模型的评价 .....	11
8.1 模型的优点 .....	11
8.2 模型的缺点 .....	11
8.3 模型改进 .....	11
附录 A 数据可视化的实现 .....	13

# 一、问题重述

## 1.1 问题背景

由部署在监控区域的大量低成本微传感器节点组成的网络系统，称为无线传感器网络（Wireless Sensor Network, WSN）。WSN 节点通过无线信道相互通信，协同感知，收集和处理监控区域内传感对象的信息，然后将信息发送给观察者<sup>[1]</sup>。因此，WSN 广泛应用于自然灾害预警，环境监测，战场监视等领域<sup>[2]</sup>。能源对无线传感器网络的发展至关重要。传感器节点通常由装载电池或超级电容器供电，但由于传感器节点尺寸较小，装载的电池容量有限，有时因为维护成本过高而无法延长无线传感器网络的生命周期，这限制了无线传感器网络的发展和应用。前人采用能量平衡<sup>[4, 5]</sup>，移动传感器<sup>[6, 7]</sup> 和移动收集器等方案来节省能量从而达到延长网络生命周期的目的。然而，这些方案仅降低能量消耗率，不能真正延长 WSN 的生命周期。

而在按需充电结构的无线可充电传感器网络（Wireless Rechargeable Sensor Network, WRSN）中，节点主动监视其自身的剩余能量，当其能量水平低于某个阈值时，向 BS 发送充电请求。BS 根据某些充电规则对请求节点建立充电调度队列，并将该调度发送给 WCD 从而引导 WCD 为节点进行充电服务<sup>[3]</sup>，如图1所示。传统的调度方案只考虑时间，空间或两者混合因素。由于受到空间、时间和能量因素的制约，传统的调度方案仅能满足少量的充电请求节点，这导致 WRSN 在繁忙的网络环境中生命周期比较短<sup>[3]</sup>。为了减小移动充电器在路上的能量消耗，需要合理地规划移动充电器的充电路线。

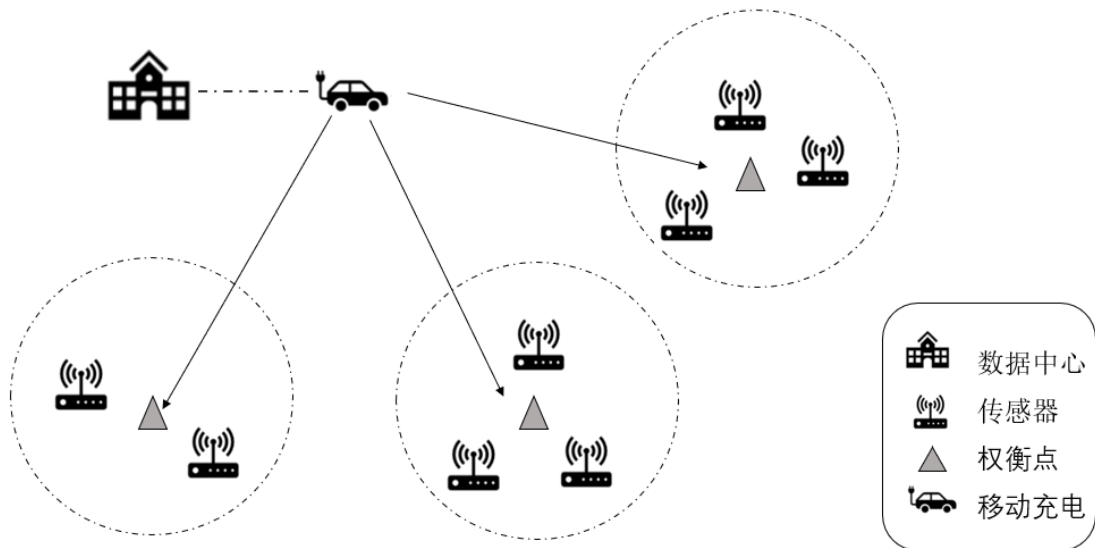


图 1 无线可充电传感器网络架构示意图

## 1.2 问题概述

围绕相关附件和条件要求,研究一个或多个移动充电器在各传感器间的充电路线方案,依次提出以下问题:

**问题一:** 当只派出一个移动充电器时,如何规划移动充电器的充电路线才能最小化移动充电器在路上的能量消耗。

**问题二:** 在只派出一个移动充电器的情况下,若采用问题一中规划出来的充电路线,每个传感器的电池的容量应至少是多大才能保证整个系统一直正常运行?

**问题三:** 为了提高充电效率,同时派出 4 个移动充电器进行充电,在这种情况下应该如何规划移动充电器的充电路线以最小化所有移动充电器在路上的总的能量消耗?每个传感器的电池的容量应至少是多大才能保证整个系统一直正常运行?

## 二、模型假设

- (1) 假设充电场景不属于时变充电方案,即传感器节点充电时单位时间的收发数据能量不随时间改变而改变。
- (2) 考虑移动充电器 MC 可以同时为多个节点进行无线充电,即其具有一定的充电范围,并且在此范围内充电场的能级不随距离而发生变化。
- (3) 由于传感器分布区域较小,本文忽略地球曲率的影响,即假设所有传感器分布在同一个二维平面上。
- (4) 假设小车在移动时的能量消耗功率为恒定值,即其不随移动路段和工作时间而改变。

## 三、符号说明

符号	说明
$P_n$	20 个站点
$P_n$	20 个站点
$P_n$	20 个站点

注:表中未说明的符号以首次出现处为准

## 四、问题一模型的建立与求解

### 4.1 问题描述与分析

问题一要求充电路线最小化移动充电器在路上的能量消耗。为使得无线传感器网络 (Wireless Sensor Network, WSN) 持续不断地运行,移动充电器 (Mobile Charger, MC)

必须在 WSN 的每一个生命周期中访问所有的传感器节点并对其完成充电并返回数据中心。要使得 MC 在路上的能量消耗最小，即使得每个周期内 MC 移动的路程达到最小，当 MC 为传统的短程有线充电设备时，该问题可被转化为传统的 TSP 问题。

分析整理相关文献可知 (引用)，随近代无线充电技术发展，WSN 的充电任务将由负载无线充电设备的移动充电器 (Wireless Charging Vehicle, WCV) 完成。WCV 可在距离目标传感器一定范围内对其执行无线充电，且可同时对多个传感器进行无线充电，假设在此范围内充电场的能级不随距离而发生变化，并尝试优化求解在充电设备的最大充电距离为不同值时的最佳充电路线。

本节首先使 MC 为传统的短途有线充电设备，使得可充电距离  $R = 0$ ，即将问题转化为传统 TSP 优化模型，使用??? 遗传算法进行优化求解。之后将 MC 视为无线充电设备，首先使得  $0 < R < \frac{\alpha}{2}$  ( $\alpha$  表示所有传感器间的距离中的最小值)，该情况下，MC 在任意时刻最多只能对一个传感器进行充电，我们将梯度下降算法嵌入??? 遗传算法对该情况下的充电路径进行优化求解；当  $R \geq \frac{\alpha}{2}$ ，即 MC 可对多个传感器同时进行充电，针对此情况我们修改??? 遗传算法的编码方式，即合并可充电区域重叠的传感器编码，求解最佳充电路径。

## 4.2 模型的建立

### 4.2.1 有线充电设备模型

定义传感器坐标点集为  $S = \{s_k | 1 \leq k \leq 29, i \in Z\}$ ，其中  $s_k$  表示附件中的第  $k$  号传感器对应的坐标位置。当 MC 为短程有线充电设备时，即充电有效距离  $R = 0$  时，问题一可转化为传统 TSP 问题。假设 MC 在移动时的能量消耗功率为定值，为使得其在路上的能量消耗最小，即使得其在每个周期内移动总路程达到最小值。MC 的充电路线可表示为二维有限序列如下

$$P = [p_1, \dots, p_i, \dots, p_{29}], \quad (1)$$

其中  $p_i(x_i, y_i) \in S, (1 \leq i \leq 29, i \in Z)$  表示 MC 在充电路线上经过的第  $i$  个传感器对应的二维坐标，即。且对于  $\forall i \neq j$  都有  $p_i \neq p_j$ 。任意两坐标点  $p_i(x_i, y_i)$  和  $p_j(x_j, y_j)$  间的欧式距离可表示为

$$d(p_i, p_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2},$$

将 MC 行驶路程作为优化目标即可得到目标函数如下

$$L(P_n) = d(p_0, p_1) + d(p_0, p_{29}) + \sum_{i=1}^{28} d(p_i, p_{i+1}),$$

其中  $p_0(x_0, y_0)$  表示数据中心对应的二维坐标， $L(P_n)$  表示充电路线  $P_n$  对应的总路程。即可得到整体优化模型如下

$$\min L(P_n), \quad (2)$$

$$s.t. \begin{cases} p_i(x_i, y_i) \in S, (1 \leq i \leq 29, i \in Z), \\ \forall i \neq j, p_i \neq p_j. \end{cases} \quad (3)$$

#### 4.2.2 无线充电设备模型

当 MC 为无线充电设备时，将其无线充电的有效距离记为  $R$ ，且假设在此有效距离内充电场的能级不随距离而发生变化，即只要 MC 位置坐标  $p_m(x_m, y_m)$  与传感器  $i$  的位置坐标  $s_i(x_{si}, y_{si})$  满足  $d(p_m, s_i) \leq R$  时，其对传感器  $i$  的充电速率就将等于  $r(mA/s)$ 。在此情况下，若充电有效距离  $R$  满足

$$0 < R < \frac{1}{2} \max \{d(s_i, s_j)\}_{1 \leq i \leq 29, 1 \leq j \leq 29, i \neq j} \quad (4)$$

其中  $\max \{d(s_i, s_j)\}_{1 \leq i \leq 29, 1 \leq j \leq 29, i \neq j}$  表示所有传感器间的距离中的最小值，此情况下，每个 MC 在任意位置最多对同一个传感器充电。其充电路线大致可由图 2 表示

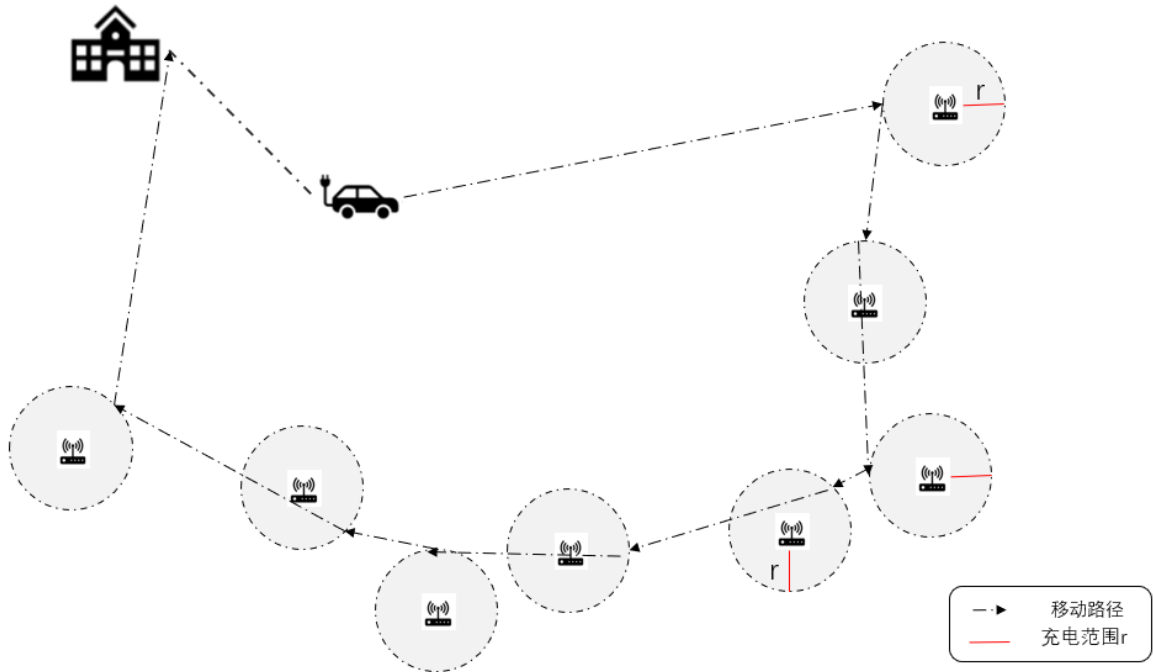


图 2 充电区域不重叠时充电路线示意图

图中传感器图形外围的虚线圆框表示对应传感器的可被充电范围，显然该情况下可充电区域不会发生，即当 MC 行驶至圆框内部或边界上时，即可停顿并对对应传感器进行

无线充电。显然，该情况下的最短路径任然为首尾相连的折线段，且停顿点数量任然等于传感器的数量，即 MC 的充电路线任可表示为二维有限序列如下

$$P = [p_1, \dots, p_i, \dots, p_{29}], \quad (5)$$

其中  $p_i(x_i, y_i)$  表示 MC 进行充电操作时的停留点位置坐标，其必须满足充电距离约束，且每个传感器的可充电范围内至少停留了一个 MC，即

$$\forall i \in [1, 29] : \min_{p_j \in P} \{d(s_i, p_j)\} \leq R, \quad (6)$$

且 MC 在各个停留点处最多对同一传感器充电，且不会在多个停留点对同一个传感器充电，即

$$\forall i, j \in [1, 29], i \neq j : \argmin_{s \in S} \{d(p_i, s)\} \neq \argmin_{s \in S} \{d(p_j, s)\}, \quad (7)$$

其中  $\argmin_{s \in S} \{d(p_i, s)\}$  表示距离停留点  $p_i$  最近的传感器坐标，即表示任意两个停留点的充电目标都互不相同。且所有传感器都需要被充电，即

$$\bigcup_{i=1}^{29} \argmin_{s \in S} \{d(p_i, s)\} = S \quad (8)$$

其中  $S$  表示全部传感器坐标的集合，即表示所有停留点的充电目标的集合包含了所有的传感器。目标函数仍为 MC 充电路线的总路程，即

$$L(P) = d(p_0, p_1) + d(p_0, p_{29}) + \sum_{i=1}^{28} d(p_i, p_{i+1}),$$

即整体模型可表示为

$$\begin{aligned} & \min L(P), \quad (9) \\ \text{s.t.} \left\{ \begin{aligned} & 1 \leq i \leq 29, i \in Z \\ & 0 < R < \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq 29, 1 \leq j \leq 29, i \neq j} \{d(s_i, s_j)\}, \\ & \forall i \in [1, 29] : \min_{p_j \in P} \{d(s_i, p_j)\} \leq R, \\ & \bigcup_{i=1}^{29} \argmin_{s \in S} \{d(p_i, s)\} = S, \\ & \forall i, j \in [1, 29], i \neq j : \argmin_{s \in S} \{d(p_i, s)\} \neq \argmin_{s \in S} \{d(p_j, s)\}. \end{aligned} \right. \quad (10) \end{aligned}$$



当充电有效距离  $R$  较大, 使得多个传感器的可充电范围发生重叠时, 即  $R$  满足

$$R \geq \frac{1}{2} \max \{d(s_i, s_j)\}. \quad (11)$$

此时充电路线大致可由图 3 表示

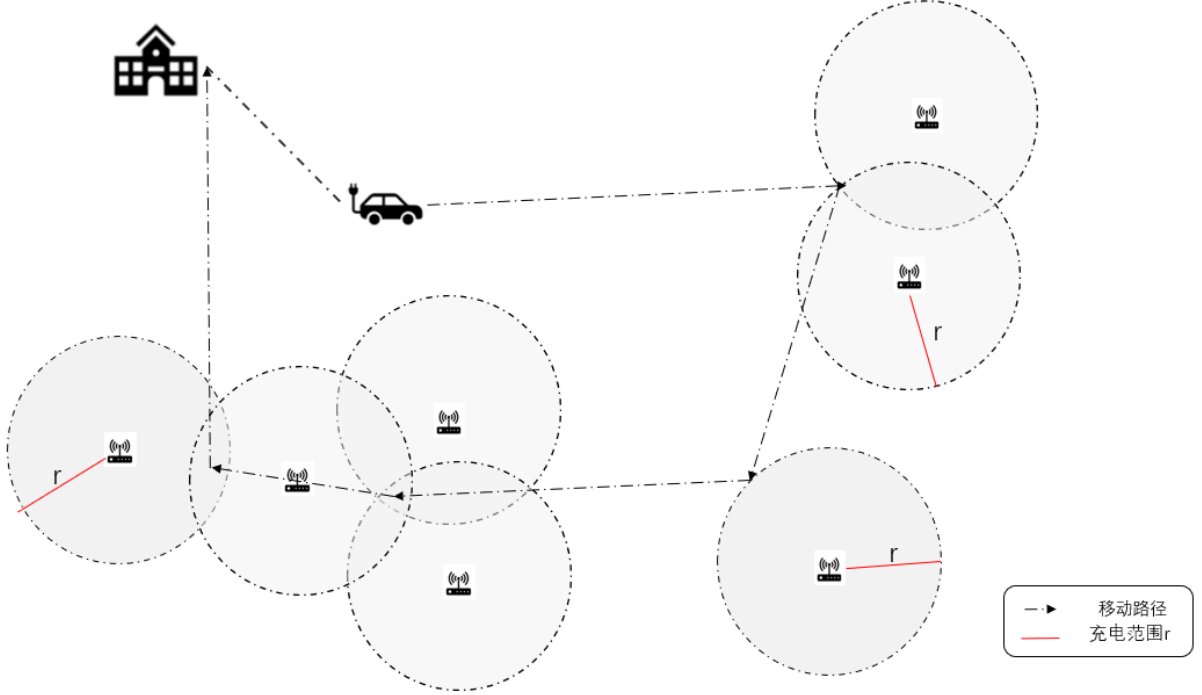


图 3 充电区域重叠时充电路线示意图

如图所示, 当可充电区域相互重叠时, 我们使得停留点落在重叠区域内, 即使得 MC 可同时对多个目标传感器进行充电。显然在此规则下, 若有  $k$  个传感器的可充电区域发生重叠, 则对应的停留点数量将变为  $30 - k$  个, 即充电路线可表示为

$$P_k = [p_1, \dots, p_i, \dots, p_{30-k}], \quad (12)$$

目标函数仍可表示为 MC 充电路线的总路程, 即

$$L(P_k) = d(p_0, p_1) + d(p_0, p_{30-k}) + \sum_{i=1}^{30-k} d(p_i, p_{i+1}), \quad (13)$$

每个传感器的可充电范围内至少存在一个 MC 停留点, 即

$$\forall s_i \in S : \min_{p_j \in P_k} \{d(s_i, p_j)\} \leq R, \quad (14)$$

即整体模型可表示为

$$\min L(P_k), \quad (15)$$

$$s.t. \begin{cases} 1 \leq i \leq 29, i \in Z \\ R \geq \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq 29, 1 \leq j \leq 29, i \neq j} \{d(s_i, s_j)\}, \\ \forall s_i \in S : \min_{p_j \in P_k} \{d(s_i, p_j)\} \leq R. \end{cases} \quad (16)$$

#### 4.3 模型的求解

本文分别针对  $R = 0$ 、 $0 < R < \frac{\alpha}{2}$  与  $R \geq \frac{\alpha}{2}$  ( $\alpha = \max_{1 \leq i \leq 29, 1 \leq j \leq 29, i \neq j} \{d(s_i, s_j)\}$ ) 三种不同情况进行优化求解。当  $R = 0$  时问题为传统 TSP 问题，本组设计生命遗传算法 (LGA) 进行优化求解。当  $0 < R < \frac{\alpha}{2}$  时，在生命遗传算法的编码基础上，将随机梯度下降算法嵌入适应度求解过程以优化求解最佳充电路线。当  $R \geq \frac{\alpha}{2}$  时，在合并重叠区域的编码位置后，仍使用内嵌随机梯度下降的生命遗传算法对充电路线进行优化求解。

#### 4.4 生命遗传算法

本文设计生命遗传算法，在遗传算法的基础上加入生命值衰减与个体死亡的过程以防止算法陷入局部最优解且抑制早熟，此时每个编码个体将包括三个部分如图 4 所示

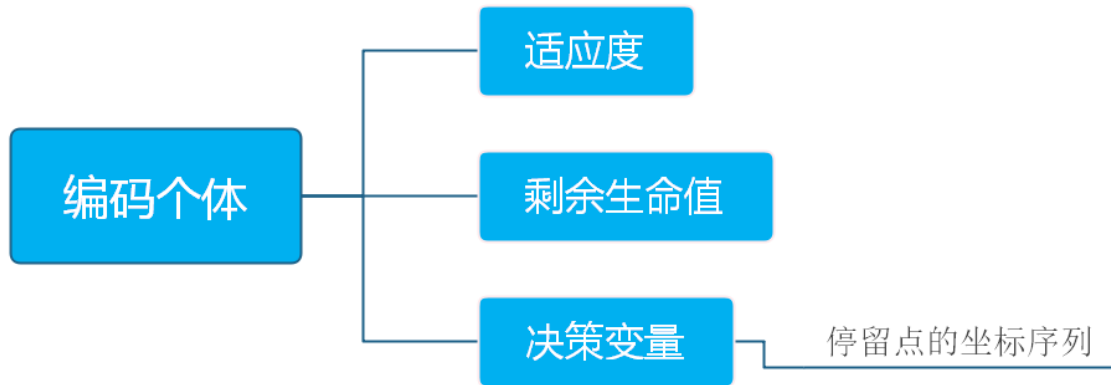


图 4 生命遗传算法编码个体组成

图 4 中决策变量为充电路线的整数编码，适应度即为该编码个体的决策变量对应的目标函数，剩余生命是一个递减的整数变量。

**初始化编码** 对于表示为二维有限序列的遍历路径  $P$ ，对其进行整数编码为

$$A_n = [a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{ni}, \dots, a_{n19}],$$

$$1 \leq a_i \leq 29, i \in Z; \forall i, \neq j : p_i \neq p_j$$

定义  $A_n$  为解序列  $P_n$  的整数编码，其中  $a_{ni}$  表示对传感器的访问顺序，例如  $a_{ni} = 7$  表示第  $i$  次访问 7 号仓库。即随机生成初始解集  $A = \{A_n\}$  其中  $n = 1, 2, \dots, w$ ， $w$  为的种群容量。

**交叉** 在原染色解集  $\{A_n\}$  中的染色体按照随机顺序配对，本文采用顺序交叉生成子代解，

再选取交叉个体时采用混合分组的方法，将父代均匀混合后选取所有编号为奇数的个体，与其相邻对应编号为偶数的个体，通过两种交叉方式产生处两种类型的子代。

**变异** 鉴于序列式染色体的特殊性，为了在变异阶段内尽可能不破坏原有的基因段，采取改良圈算法的思路进行变异操作。即在染色体  $A$  中随机选取  $a_i$  与  $a_j (1 \leq i < j \leq j)$ ，颠倒  $a_{ni}$  与  $a_{nj}$  间顺序的顺序，即：

$$M = [a_1, \dots, a_i, a_{j-1}, a_{j-2}, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_{19}] \quad (17)$$

$M$  为染色体  $A$  对应的变异染色体，对于每个染色体  $A_n$ ，都设定相同的变异概率  $\gamma$  去执行上述的变异操作。

**赌轮选择** 将第  $g$  代的染色体与其交叉和变异产生的子代并入同一解集  $G_g = \{A, H, M\}$ 。 $k$  表示原解集  $A$ ，交叉解集  $H$  和变异解集  $M$  中解的数量之和，即为  $G_g$  中的解的数目。每次选择中， $G_g$  第  $i$  个解  $G_g(i)$  被选择进入下一代的概率为

$$P(G_g(i)) = \frac{f(G_g(i))}{\sum_{j=1}^k f(G_g(j))}, \quad (18)$$

$f(G_g(i))$  为  $G_g(i)$  对应的目标函数值，即为  $G_g(i)$  对应的适应度。即在  $G_g$  做  $W$  次选择，将被选中个体放入下一代个体

**生命衰减** 在每个染色体  $A_n$  生成时设置其初始生命值为正整数  $H$ ，即令

$$Hp(A_n) = H, \quad (19)$$

将染色体

#### 4.5 实验结果及分析

### 五、问题二模型的建立与求解

#### 5.1 问题描述与分析

问题二要求

其思维流程图如图 5 所示：



图 5 问题二思维流程图

#### 5.2 模型的建立

#### 5.3 模型的求解

#### 5.4 实验结果及分析

结果如下表??所示：

表 1 xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

xxxxxxx	xxxxxxx
xxxxxxx	909.80
xxxxxxx	852.60

由表1可知

其各个小车的运输细节图下图所示：

武汉理工大学 武汉理工大学

武汉理工大学 武汉理工大学

图 6 xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

## 六、 问题三模型的建立与求解

### 6.1 结果分析

## 七、 灵敏度分析

## 八、 模型的评价

### 8.1 模型的优点

(1)

(2)

### 8.2 模型的缺点

### 8.3 模型改进

## 参考文献

- [1] Othman M F, Shazali K. Wireless sensor network applications: A study in environment monitoring system[J]. Procedia Engineering, 2015, 41: 1204-1210.
- [2] Borges L M, Velez F J, Lebres A S. Survey on the characterization and classification of wireless sensor network applications[J]. IEEE Communications Surveys & Tutorials, 2014, 16(4): 1860-1890.
- [3] Xie L, Shi Y, Hou Y T, et al. Making sensor networks immortal: An energy-renewal approach with wireless power transfer[J]. IEEE/ACM Transactions on networking, 2012, 20(6): 1748-1761.
- [4] Tarng W, Ou K L, Huang K J, et al. Applying cluster merging and dynamic routing mechanisms to extend the lifetime of wireless sensor networks[J]. International Journal of Communication Networks and Information Security, 2011, 3(1): 8.
- [5] 曲立军, 党鑫, 武继刚. 无线传感器网络中的充电调度算法 [J]. 计算机与数字工程, 2017, 45(2): 319-326.
- [6] Butler Z, Rus D. Controlling mobile sensors for monitoring events with coverage constraints[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA'04. 2004. IEEE, 2004, 2: 1568-1573.
- [7] Yao W, Li M, Wu M Y. Inductive charging with multiple charger nodes in wireless sensor networks[C]//Asia-Pacific Web Conference. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006: 262-270.

## 附录 A 数据可视化的实现

第一问画图-python 源代码

---

第二问画图-python 源代码

---