

# 武汉理工大学

## 数学建模暑期培训论文

### 第 1 题

### 基于卷积自编码的指纹编码与 k 聚类模型

### 第 10 组

姓名

刘子川（组长）

程宇

祁成

方向

编程

建模

写作

2020 年 8 月 13 日

## 摘要

控制高压油管的压力变化对减小燃油量偏差，提高发动机工作效率具有重要意义。本文建立了基于质量守恒定理的微分方程稳压模型，采用二分法、试探法以及自适应权重的蝙蝠算法对模型进行求解。

为消除指纹图像噪声、伪特征点的影响，设计了预处理策略体系以统一图像尺度、细化纹线骨架。首先对指纹图片进行灰度值线性归一化处理，尺寸放缩之后利用分数阶微分算子构造掩膜进行图像增强，最后通过方向场确定脊线以实现指纹像素二值化。预处理保留了原指纹的连接状态、拓扑结构和纹理信息，剔除了次要纹线宽度信息，有利于后续特征提取。

针对在小样本条件下难以有效提取指纹特征的问题，设计了一种卷积自编码网络的个体细微特征提取算法。首先将预处理后的图像信号用卷积核转化到高维特征空间，然后利用大量无标签的指纹高维样本训练卷积自编码器网络。在此基础上，通过损失函数KL散度对原始图像和解码后图像无监督学习，编码出最佳线性空间特征。经训练提取的指纹特征损失率仅占0.04%，具有精校的还原程度。

针对问题二，对原始指纹图像经过卷积自动编码器转换成的特征编码向量进行归一化处理，以谷本系数、皮尔逊相关系数、马氏距离为基础，构造相似度关系函数来描述特征编码向量间的相似程度，不同指纹间的异同及相似程度通过矩阵距离相似度热图可视化。灵敏度分析表明，谷本系数、皮尔逊相关系数、马氏距离权重分别取?????的时候，????指纹的相似度较高，而其他指纹相似度较低，可认为是不同类型的指纹图案。

针对问题三，建立中心聚类模型，以问题二中的量化相似度作为代价函数，并使用 $k-medoids$ 算法选取聚类中心点完成样本分类；对于附件中的16个指纹样本，基于问题二设计的加权相似度模型可计算出每两个指纹样本间的相似度。选取 $k$ 个样本点作为聚类中心，以样本点到聚类中心的平均值作为代价函数。遍历所有聚类中心组合，可得出被分为 $k$ 组的样本聚类结果。当 $k=2$ 时，分组情况为????；当 $k=3$ 时，分组情况为????；当 $k=4$ 时，分组情况为????。

本文的优点为：1. 采用试探法粗略搜索与二分法精细搜索结合的方法，降低了问题的求解难度。2. 以凸轮转动角度为固定步长，对不同角速度按照不同精度的时间步长求解，大大提高了求解的精确度。3. 针对智能算法求解精度方面，采用改进的蝙蝠算法，使速度权重系数自适应调整，兼顾局部搜索与全局搜索能力。

关键词： 卷积自编码器 微分方程 微分方程 微分方程

# 目录

一、 问题重述.....	1
1.1 问题背景.....	1
1.2 问题概述.....	1
二、 模型假设.....	2
三、 符号说明.....	2
四、 数据预处理.....	3
4.1 归一化处理.....	3
4.1.1 灰度值处理 .....	3
4.1.2 外框去除与尺度统一 .....	4
4.2 图像增强处理.....	4
4.3 二值化处理.....	6
4.3.1 场方向估计 .....	6
4.3.2 二值化 .....	7
五、 问题一模型的建立与求解.....	7
5.1 问题描述与分析.....	7
5.2 搭建卷积自编码器模型.....	8
5.2.1 卷积神经网络 .....	8
5.2.2 卷积自动编码器 .....	10
5.3 实验结果及分析.....	11
5.4 灵敏度分析.....	13
六、 问题二模型的建立与求解.....	13
6.1 问题分析与相似度计算.....	13
6.2 实验结果及分析.....	14
6.3 灵敏度分析.....	15
七、 问题三模型的建立与求解.....	16
7.1 问题描述与分析.....	16
7.2 k-medoids 模型的建立与求解.....	16
7.3 实验结果及分析.....	16

八、 模型的评价 .....	18
8.1 模型的优点 .....	18
8.2 模型的缺点 .....	18
8.3 模型的总结与展望 .....	18
附录 A 数据预处理 .....	21
附录 B 第一问代码实现及可视化 .....	30
附录 C 第二、三问代码实现及可视化 .....	34

# 一、问题重述

## 1.1 问题背景

自动指纹识别系统 (automated fingerprint identification system, 简称 AFIS) 有着广泛的应用背景。目前对自动指纹识别系统的研究主要有 3 个方面, 即图像增强、指纹分类和细节匹配。一般可以分成“离线部分”和“在线部分”两个部分。如图 1 所示, 离线部分包括用指纹采集仪采集指纹、提取出细节点、将细节点保存到数据库中形成指纹模板库等主要步骤。在线部分包括用指纹采集仪采集指纹、提取出细节点、然后将这些细节点与保存在数据库中模板细节点进行匹配, 判断输入细节点与模板细节点是否来自同一个手指的指纹<sup>[1, 3]</sup>。指纹分类一般是用在大规模的指纹库中, 作为细节匹配中减少搜索范围的步骤使用。指纹图像一般占用较多的空间, 且图像中的像素信息并不适合计算机进行分析或匹配。为实现计算机自动识别, 需要有一种方法来描述指纹的内在结构、具体形态和其它特征并将其用最少的字节数来存储于计算机中。此计算机系统可扫描犯罪现场采集的指纹, 并且与州、地区、国家之间执法机关采集的数百万指纹档案互相比对<sup>[2]</sup>。指纹由专家追踪后, 经计算机扫描, 得到许多细节来和数据库里其它指纹比对, 列出相符合的百分比来让鉴识人员得知可能的相符人选<sup>1</sup>。任何计算机比对的结果, 都会经指纹专家比较与此指纹相关的样本来验证。



图 1 自动指纹识别系统框图

## 1.2 问题概述

围绕相关附件和条件要求, 试根据附件中的 16 幅指纹图像, 不借助现有的指纹相关软件, 依次提出以下问题:

<sup>1</sup> <https://baike.baidu.com/item/AFIS/2851410?fr=aladdin>

**编码：**给出一种用不超过 200 字节（下面称为“指纹密码”）来刻画描述指纹基本特征的表示方法，介绍其数学原理。

**匹配：**将你的方法编程实现，对附件中的每一幅指纹都给出其“指纹密码”的表示。基于你找到的这些指纹表示，你能否给出一种方法比较不同指纹间的异同及相似程度？

**应用：**你能否对附件中的 16 个指纹进行对比和归类？请给出你对比及分类的依据和结果。

## 二、模型假设

- (1) 假设附件中所有指纹图像都为清晰完整的图像，不存在由于图像压缩产生的信息损失。
- (2) 假设附件中的指纹图像特征都具有代表性，具有正常人指纹拥有的所有特征。

## 三、符号说明

符号	说明
$P_i$	第 $i$ 张图像, $i = \{1, 2, \dots, 16\}$
$u_{P(x,y)}$	像素矩阵
$(x, y)$	像素点位置值
$fringe_{x1}, fringe_{x2}$	图片的上下边界
$fringe_{y1}, fringe_{y2}$	图片的左右边界
$E$	信息熵
$iDir$	脊线方向
$\gamma$	编码器的图像编码
$b$	编码大小
$Z$	解码器还原的图像矩阵
$epoch$	迭代次数
$in/out$	出/入通道数
$b$	编码大小
$lr$	学习率
$k_i$	卷积核 $i$
$T$	谷本系数
$P$	皮尔逊相关系数
$M$	马氏距离
$\{c_i\}$	聚类中心
$Max_{1 \leq j \leq k} S(\gamma_i, c_j)$	样本点 $\gamma_i$ 与 $\{c_i\}$ 间的最高的相似度值

注：表中未说明的符号以首次出现处为准

## 四、数据预处理

在正式搭建模型前，本文首先将图片进行预处理，以方便进行后续运算。经过归一化处理，图像增强处理和二值化处理后，即可得到相同规格的二值化图片，其具体流程如图 2 所示

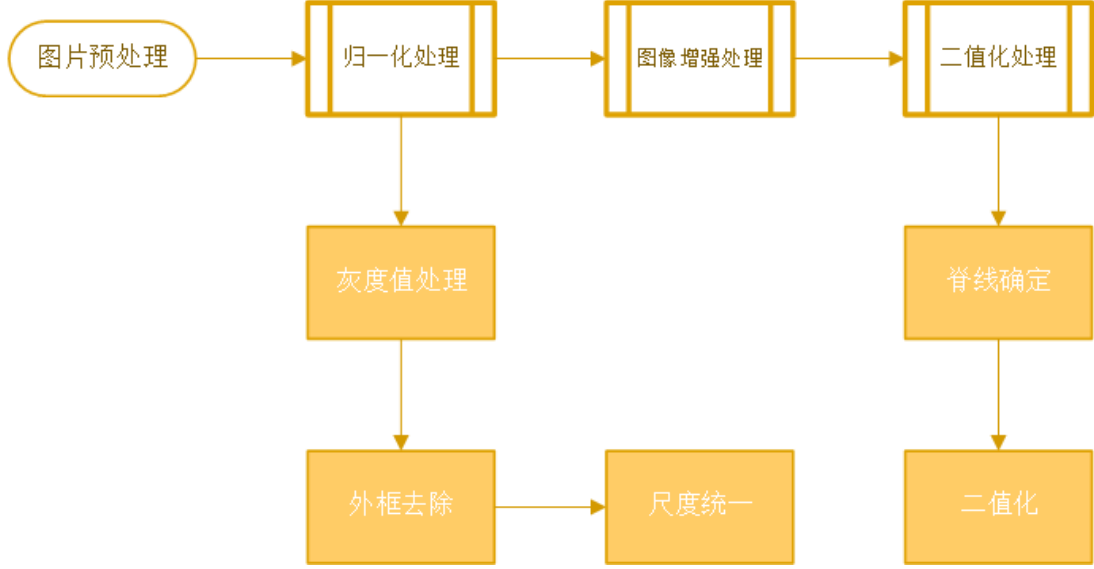


图 2 图片数据预处理

### 4.1 归一化处理

#### 4.1.1 灰度值处理

鉴于各个指纹图像的纹理深浅不统一，首先对每张图片做灰度值归一化处理。对于图片  $P_i$ ，其第  $x$  行第  $y$  列的像素点的灰度值可表示为  $P_i(x, y) \in [0, 255]$ 。即当  $P_i(x, y) = 255$  时， $P_i(x, y)$  为纯白色像素点；当  $P_i(x, y) = 0$  时， $P_i(x, y)$  为纯黑色像素点。对于任意图片  $P_i$ ，有

$$P_{i,max} = \max_{1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq m} P_i(x, y),$$

$$P_{i,min} = \min_{1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq m} P_i(x, y),$$

其中  $n$  和  $m$  分别表示图片的行数和列数。即  $P_{i,max}$  与  $P_{i,min}$  分别表示图片中像素的最大灰度值和最小灰度值。对图片执行线性归一化操作如下

$$P_i(x, y)' = \frac{255}{P_{i,max} - P_{i,min}} (P_i(x, y) - P_{i,min}),$$

即将图片  $P_i$  像素点灰度值线性放缩于  $[0, 255]$  间，得到灰度值归一化图片  $P_i'$ 。

#### 4.1.2 外框去除与尺度统一

对于图片  $P_i$ ，我们将去除其空白外框以方便后续学习策略运算。设定边界阈值为  $threshold_N$ ，当图片  $P_i$  最上方的某一行和最下方的某一行的非空白像素数大于  $threshold_N$  时，将其定义为新的上边界或下边界，及可得到行边界位置如下

$$fringe_{x1} = \frac{\max(x)}{(\sum_{i=1}^m (P'(x,i) < 255)) > threshold_N},$$

$$fringe_{x2} = \frac{\min(x)}{(\sum_{i=1}^m (P'(x,i) < 255)) > threshold_N},$$

其中  $fringe_{x1}$  与  $fringe_{x2}$  分别为新定义上边界与下边界，同理有列边界位置如下：

$$fringe_{y1} = \frac{\min(y)}{(\sum_{i=1}^n (P'(i,y) < 255)) > threshold_N},$$

$$fringe_{y2} = \frac{\max(y)}{(\sum_{i=1}^n (P'(i,y) < 255)) > threshold_N},$$

其中  $fringe_{y1}$  与  $fringe_{y2}$  分别为新定义左边界与右边界。即去除外框后的图片可表示为  $P'' = P'(fringe_{x1} : fringe_{x2}, fringe_{y1} : fringe_{y2})$ 。即只保留新定义边界内的像素点并删除剩余像素点即可得到去除外框后的图片  $P''_i$ 。定义标准行数为  $N$ ，标准列数为  $M$ ，将去除外框后的图片  $P''_i$  进行放缩处理可得归一化图片  $P_i^s$  如下：

$$P_i^s(x, y) = P''_i(\text{floor}(\frac{fringe_{x1} - fringe_{x2}}{N}x), \text{floor}(\frac{fringe_{y2} - fringe_{y1}}{M}y)),$$

$$x \in [1, N], y \in [1, M],$$

其中  $\text{floor}$  表示向下取整，即通过灰度值处理、外框去除与尺度统一后即可将原始指纹图片数据  $P_i$  转换为灰度值范围与图片尺度统一的归一化图片数据  $P_i^s(x, y)$ 。

#### 4.2 图像增强处理

利用 Grunward-Letnikov 微分算子<sup>[5]</sup>，构造自适应函数，采集梯度信息和计算信息熵，从而确定微分阶数。为了确定自适应分数阶微分阶数  $v$ ，需要确定每个像素的梯度  $G$  和信息熵  $E$ 。梯度  $G$  反映指纹像素特征在感兴趣区域 (ROI, Region of Interest) 上的突变情况，取近似梯度模值为

$$G[P(x, y)] = \max \left\{ \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial P}{\partial y} \right| \right\}. \quad (1)$$

另一个描述图像边缘纹理变化的指标是信息熵  $E$ ，即所有可能发生事件的信息量期



望之和，其数学描述为

$$E = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \cdot \log_2(p(x_i)), \quad (2)$$

其中， $p(x_i)$  是事件  $x_i$  发生的概率， $n$  是可能发生事件的个数。对信息熵进行归一化处理，可以获得取值范围为  $[0, 1]$  的信息熵

$$E' = \frac{E - E_{min}}{E_{max} - E_{min}}. \quad (3)$$

综合梯度模值和信息熵，构造关系函数  $v = w_1 \cdot G + w_2 \cdot E' + w_3$ ，即微分阶数  $v$  由梯度和信息熵共同决定，梯度模值和信息熵越大，反映该指纹像素需要增强的程度越大，更可能为纹理区域或边缘，分数阶微分阶数取值也越大。此问题中，可算得  $v = 3$ 。将阶数代入利用 Grunward-Letnikov 分数阶微分近似表达式，即

$$\frac{\partial^v P(x, y)}{\partial x_i^v} \doteq \sum_{k=0}^{t-\alpha} (-1)^k \binom{v}{k} P(x_i - k), \quad (4)$$

其中  $P(x, y)$  是图像坐标为  $(x, y)$  的像素灰度值， $t$  和  $\alpha$  分别是微分上限和下限， $x_i (i = 0, 1, \dots, 7)$  是不同的偏微分方向，此处取以  $x$  轴正向为起始方向，顺时针旋转一周均匀分部的 8 个方向。为方便计算，对 8 个方向的分数阶偏微分近似分别保留前三项进行三层  $5 \times 5$  掩膜构造，并进行归一化赋权。

对每个方向  $x_i$ ，以掩膜中心点为作用点， $5 \times 5$  掩膜  $w(x, y)$  中三层权重分别为分数阶微分近似的前三项系数，则掩膜中总权重为分数阶微分近似的前三项系数与每层掩膜元素个数的乘积之和，即  $4v_2 - 12v + 8$ 。对权重归一化，可得中心点、第一层、第二层掩膜元素权重分别为  $w_0 = \frac{8}{4v_2 - 12v + 8}$ ,  $w_1 = \frac{-v}{4v_2 - 12v + 8}$ ,  $w_2 = \frac{v}{16(v-2)}$ 。在规模为  $M \times N$  的图像上，对距离中心点小于  $M - \frac{n-1}{2}$  和  $N - \frac{n-1}{2}$  的像素进行  $n \times n$  掩膜操作，其他像素进行灰度保留。输出图像可以表示为：

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b P(x+s, y+t) \cdot w(x, y), \quad (5)$$

其中， $w(x, y)$  是构造的  $5 \times 5$  掩膜， $a = b = \frac{n-1}{2}$ 。

### 4.3 二值化处理

#### 4.3.1 场方向估计

一般指纹图像都有较为清晰的场方向，对于图像上的每一个像素  $P(x, y)$ ，为了确定其在该像素处脊线的方向，以该像素为中心的  $9 \times 9$  像素矩阵  $u_{P(x, y)}$  内，分别计算 8 个方向上的灰度平均值<sup>[6]</sup>，即对于

$$u_{P(x, y)} = \begin{bmatrix} P(x-4, y-4) & \cdots & P(x, y-4) & \cdots & P(x+4, y-4) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(x-4, y) & \cdots & P(x, y) & \cdots & P(x+4, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(x+4, y+4) & \cdots & P(x, y+4) & \cdots & P(x+4, y+4) \end{bmatrix}.$$

若  $u_{P(x, y)}$  中存在若干像素点超出原图像边界时，记超出边界的像素点为  $P_o$  并使得  $\{P_o\} = 255$ 。并依照图 3 中的方向，分别计算 8 个方向上的灰度平均值得到  $Gmean[i]$ ，然后将这 8 个平均值按两两垂直的方向分成 4 组, 0 和 4 一组、1 和 5 一组、2 和 6 一组、3 和 7 一组，计算每组中两个平均值的差值。

$$Gdiff[j] = |Gmean[j] - Gmean[j+4]|, j = 1, 2, 3, 4,$$

差值绝对值相差最大的方向即为脊线方向与其法向，即

$$iDir = \begin{cases} \arg(\max_i(Gdiff[j])), |P(x, y) - \max_i(Gdiff[j])| < |P(x, y) - \max_i(Gdiff[j+4])| \\ \arg(\max_i(Gdiff[j])) + 4, otherwise \end{cases}$$

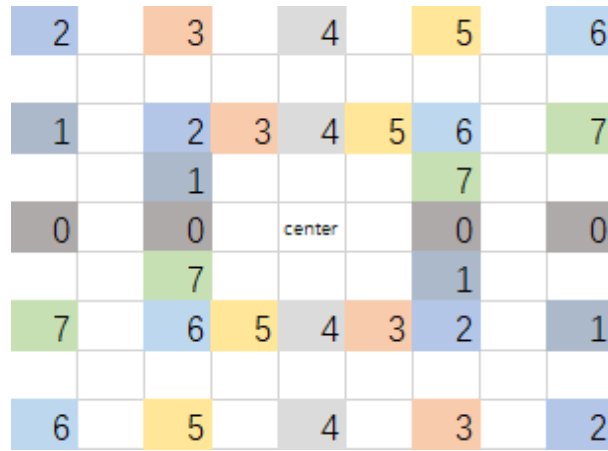


图 3 脊线估计方向

### 4.3.2 二值化

得到图像每个像素处的方向场后,再依据方向场来对图像进行二值化。若像素  $P(x, y)$  处的脊线方向为  $iDir$ , 先用估计方向场的方法计算该像素处在方向  $iDir$  和其法线  $iVar = iDir + 4$  的灰度平均值  $Gmean[iDir]$  和  $Gmean[iVar]$ , 基于此将该像素二值化为

$$P(x, y) = \begin{cases} 255, & Gmean[iDir] \geq Gmean[iVar] \\ 0, & otherwise \end{cases},$$

其中 255 为二值图像中图像背景和谷线的灰度值, 0 为二值图像中图像脊线的灰度值。

经过上述处理指纹图像, 得到最终结果如图所示



图 4 图像预处理的效果图

## 五、问题一模型的建立与求解

### 5.1 问题描述与分析

问题一要求给出一种用不超过 200 字节来刻画描述指纹基本特征的表示方法。传统的图像压缩方法有霍夫曼压缩、Golomb 编码、LZW 编码、小波编码等<sup>[7, 8, 9]</sup>, 这些都能对指纹进行刻画。但是相对于 200 字节的限制而言, 他们在压缩编码方向显得不尽人意。

相较于传统的图片编码而言, 通过网络编码能更有效的提高图像在细节上的依赖。在网络训练的过程中, 网络只用到该向量之中少量元素, 其中的大部分元素对于网络来说是没有用的。自编码器通过无监督学习来提取有用的信息, 对于指纹图片来说是颜色为黑色的像素点, 将图片中的很大一部分白色像素舍弃, 只提取对网络有用的信息, 到达降低数据维度的目的, 从而实现小样本编码。

## 5.2 搭建卷积自编码器模型

自编码器（AutoEncoder）是一种能够通过无监督学习，学到输入数据高效表示的人工神经网络。输入数据的这一高效表示称为编码（codings），其维度一般远小于输入数据，使得自编码器可用于降维<sup>[10]</sup>。更重要的是，自编码器可作为强大的特征检测器（feature detectors），应用于深度神经网络的预训练。我们以 VGG 模型<sup>[4]</sup> 结构为基础，构造一个新的卷积神经网络模型，并通过交叉验证的思想训练小样本数据，调整模型参数，得到小样本条件下最优的卷积神经网络模型。

### 5.2.1 卷积神经网络

**Convolution Kernel** 在图像处理的过程中，我们经常会用到矩阵卷积来计算图像 (image) 的特征 (feature)，矩阵卷积有两种：全卷积 (full convolution) 和有效值卷积 (valid convolution)<sup>[11]</sup>，其全卷积核函数的定义式为：

$$z(u, v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_{i,j} \cdot k_{u-i, v-j}, \quad (6)$$

有效值卷积的定义式为：

$$z(u, v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_{i+u, j+v} \cdot k_{rot i, j} \cdot \chi(i, j) \quad , \quad (7)$$

$$\chi(i, j) = \begin{cases} 1, & 0 \leq i, j \leq n \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

其中  $X$  是灰度图像转换为  $m \times m$  阶矩阵， $K$  是  $n \times n$  阶卷积核，一般取  $3 \times 3$ ， $K_{rot}$  是由  $K$  转置得到。

那么，从 Input Image 到 Output Image 的变化如下图所示：

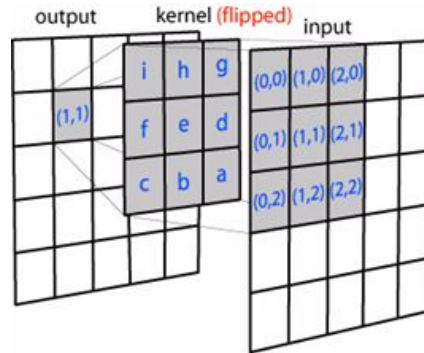


图 5 卷积核函数示意图

可以看出，其实二维卷积一样也是加权叠加/积分。需要注意的是，其中 Convolution

Kernel 进行了水平和竖直方向的翻转。

**Pooling** 对于灰度图像的采样而言，Pooling 对于输入的 Feature Map，选择某种方式对其进行压缩。如下图，表示的就是对  $2 \times 2$  邻域内的值，选择最大值输出到下一层，这叫做 Max-Pooling。

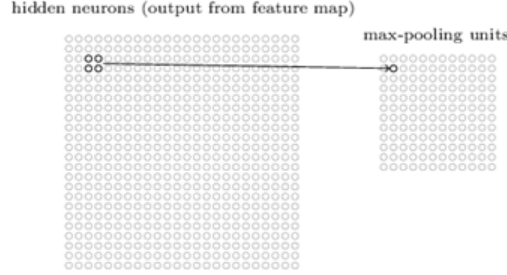


图 6 池化层 Max-Pooling 示意图

对卷积层进行池化从而通过对 Feature Map 降维，有效减少后续层需要的参数，当其中像素在邻域发生微小位移时，Pooling Layer 的输出是不变的。这就增强了网络的鲁棒性，有一定抗扰动的作用。

**Activation** 激活层的正向传播主要依靠众多神经元的计算来完成的，工作过程中可以用下式来表示：

$$u_k = \sum_{i=1} w_{ki} x_i,$$

$$y_k = f(u_k - b_k),$$

其中：  $x_i$  表示第  $i$  个输入；  $w_{ki}$  表示与第  $i$  输入量相连的权值；  $u_k$  表示所有输入的加权和；  $b_k$  为神经元阈值；  $f$  为激活函数；  $y_k$  为神经网络的输出。

激活函数的种类有很多，如 *sigmoid*，*tanh* 及 *Relu*，本文应用的是 *Relu* 作为激活函数搭建两层隐含层，如式 8 所示：

$$f_{\text{Relu}} = \max(0, z)$$

$$\frac{d}{dz} f_{\text{ReLU}} = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

网络的输出层使用 *softmax* 函数作分类器，式 5.2.1 为第  $i$  个神经的输出：

$$f_{\text{softmax}} = e^i / \sum_j e^j.$$

### 5.2.2 卷积自动编码器

普通的自编码器中，编码器和解码器中层与层之间的连接方式为全连接，该编码器具有一个输入层， $n$  个隐藏层和一个输出层，

给定图片样本  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{n \times c \times w \times h}$ ，其中  $c$  为通道数。自编码器首先将  $x_i$  编码成  $\gamma(x_i)$  再解码成  $z(y_i)$ ，其公式 L 表述如下：

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \text{Encoder}(W_1x + b) \\ z(x) &= \text{Decoder}(W_2y(x) + c) \end{aligned} \quad (9)$$

通过最小化重建误差  $L(X, Z)$ ，我们可以获得模型参数，这里用  $\theta$  表示为：

$$\theta = \arg \min_{\theta} L(X, Z) = \arg \min_{\theta} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\| x^{(i)} - z \left( x^{(i)} \right) \right\|^2. \quad (10)$$

本文卷积自编码器 (ConvAutoEncoder, CAE) 中的编码器部分的网络结构与卷积神经网络中卷积池化部分的结构相同。首先通过编码器部分构造出对应的解码器部分，在训练结束后，保留编码器部分的结构和权重，在编码器后加上与卷积神经网络结构中相同的全连接层来进行图像的编码与分类识别<sup>[12, 13]</sup>。其卷积自编码器  $L(X, Z)$  的具体结构如图 7 所示：

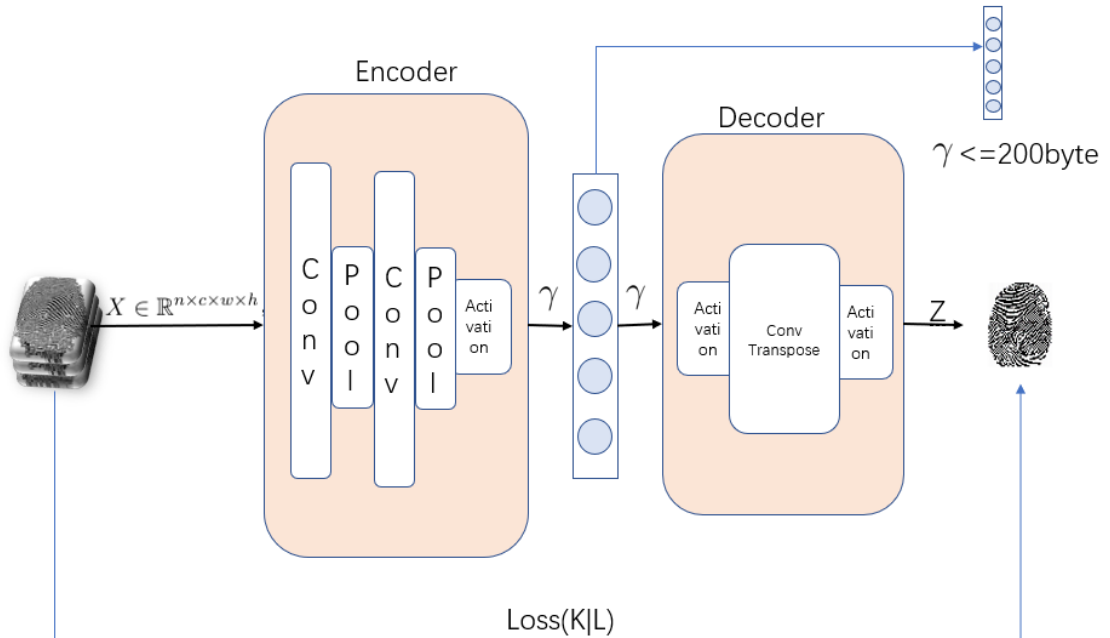


图 7 卷积自编码器 CAE 模型

其中，Conv 表示全卷积，ConvTranspose 表示有效值卷积，Activation 表示 rule 激

活层，Pooling 表示池化层，对应的编码输入为  $b(\gamma) < 200\text{byte}$ 。

将稀疏约束添加到目标函数后，自动编码器将成为稀疏的自动编码器，它考虑二值图像隐藏层的稀疏表示。为了实现稀疏表示，本文将使用稀疏约束将重构误差最小化，加上损失函数 KL 散度：

$$\text{CAE} = L(X, Z) + \gamma \sum_{j=1}^{H_D} \text{KL}(\rho \parallel \hat{\rho}_j), \quad (11)$$

$$\text{KL}(\rho \parallel \hat{\rho}_j) = \rho \log \frac{\rho}{\hat{\rho}_j} + (1 - \rho) \log \frac{1 - \rho}{1 - \hat{\rho}_j}, \quad (12)$$

其中  $\gamma$  是稀疏项的权重， $H_D$  是隐藏单元的数量， $\rho$  是稀疏性参数，通常是一个接近零的小值。 $\hat{\rho}_j = (1/N) \sum_{i=1}^N y_j(x^{(i)})$  是在训练集中隐藏单元  $j$  的平均激活。

在迭代修正的过程中，实验采用 *Keras* 自带优化器 *Adam* 函数进行迭代修正，如式 5.2.2 所示，其中  $\beta_1$  一般取 0.9， $\beta_2$  一般取 0.999。

$$\begin{cases} m_t = \beta_1 m_{t-1} + (1 - \beta_1) \nabla_w f(w_t) \\ v_t = \beta_2 v_{t-1} + (1 - \beta_2) \nabla_w f(w_t)^2 \\ \hat{m}_t = \frac{m_t}{1 - \beta_1^t}, \hat{v}_t = \frac{v_t}{1 - \beta_2^t} \\ w_t = w_{t-1} - \eta \frac{\hat{m}_t}{\sqrt{\hat{v}_t + \varepsilon}} \end{cases}$$

### 5.3 实验结果及分析

实验训练输入样本为  $400 \times 300$  的指纹图片，具体参数设置如表所示：

表 1 参数设置表

参数名称	值	参数名称	值
迭代次数 epoch	2000	吞吐量 batch	64
出/入通道数 in/out	3/3	编码大小 size	200
学习率 lr	0.01	偏置 $\beta_1, \beta_2$	0.9, 0.999
卷积核 $k_1, k_2, k_3$	3, 3, 4	池化层 padding	1

通过上述参数设置，计算 16 张指纹图片 KL 散度的最小值，并保存其编码程序。其迭代过程中损失函数如下图所示：

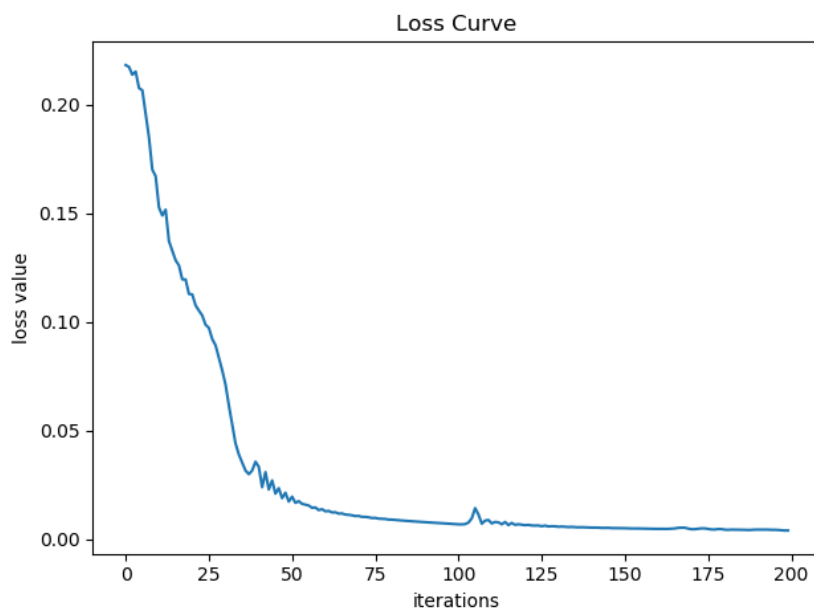


图 8 CAE 迭代过程中损失函数函数

可以看出，本文的模型在解码还原过程中，更逼近于真实的指纹图片，信息损失仅占 0.04%，相较于传统的编码方法有更强信息贮存能力。

本文将指纹编码过程进行还原，得到解码图像入下图所示，图中的指纹图像上方数字表示迭代次数，显然随迭代次数增加，还原的指纹图像的清晰度与完整度逐渐增加；当迭代次数超过 120 时，图像清晰度变化几乎无法用肉眼分辨。显然经由 CAE 模型编码后的指纹图像可被高精度还原。

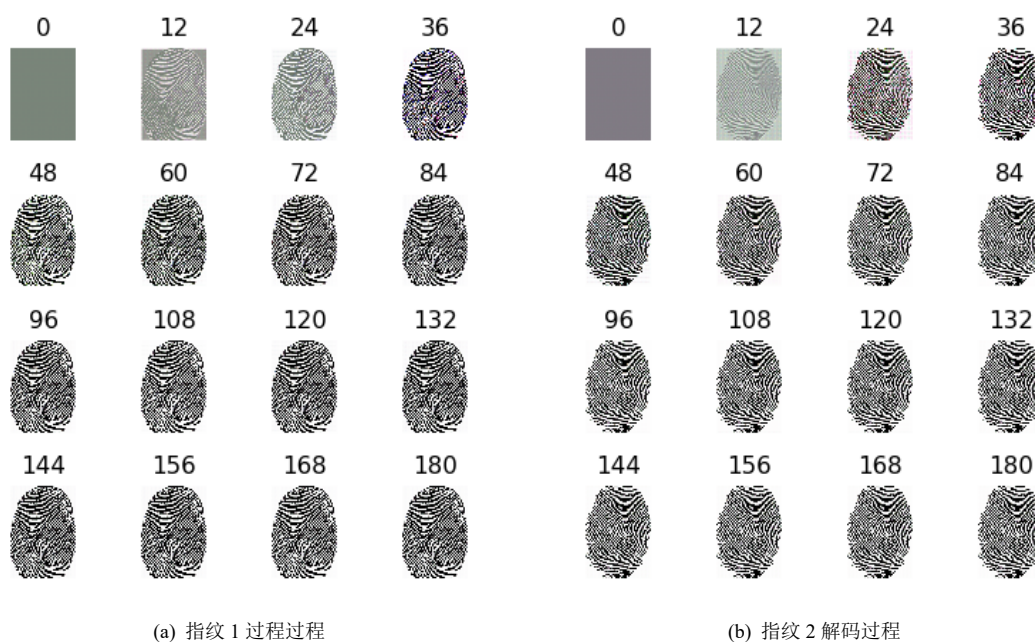


图 9 编码后经解码器后还原的效果图



## 5.4 灵敏度分析

本节对卷积自编码器中编码层输入的  $\gamma$  大小  $b$  做调整，得到



图 10 编码不同字节限制后对应的解码指纹效果

根据上述解码后效果图可以看出：编码 50 字节后能还原出指纹大致轮廓，但是具体图像仍然不清晰；编码 100 字节能还原出微细节轮廓，但上方密集部分仍然呈现模糊状况；编码 150 字节后能较为清晰的还原，但还是存在少量噪声；而到 200 字节以上非常清晰，能通过降维后的编码数据完美的还原出原始指纹图像。

## 六、问题二模型的建立与求解

### 6.1 问题分析与相似度计算

问题二要求从第一问求得的指纹编码的角度分析各个指纹间的异同及相似程度。在问题一模型中，本文使用卷积自动编码器将原始指纹图像转化成了以向量形式储存的特征编码，即分析各个指纹间相似程度可转化为量化分析编码向量间的相似程度。

设计加权相似度以量化特征向量间的相似程度。首先对各行向量的每一维度进行归一化处理，之后分别计算归一化后的行向量间的谷本系数 (Tanimoto Coefficient)、皮尔森相关系数 (Pearson Correlation Coefficient) 和马哈拉诺比斯距离 (Mahalanobis Distance)，最后构造关系函数确定行向量的相似程度。

- **谷本系数 (Tanimoto Coefficient)**

谷本系数主要用于计算符号度量或布尔值度量的个体间的相似度，因为个体的特征属性都是由符号度量或者布尔值标识，因此无法衡量差异具体值的大小，只能获得“是否相同”这个结果，所以谷本系数只关心个体间共同具有的特征是否一致这个问题。其数学描述为

$$T(A, B) = \frac{A * B}{\|A\|^2 + \|B\|^2 - A * B} \quad (13)$$

其中  $\|A\|^2$  和  $\|B\|^2$  分别是行向量  $A$  和  $B$  的模。谷本系数越大，向量间相似度越高。

- **皮尔逊相关系数 (Pearson Correlation Coefficient)**

皮尔逊相关系数反应了两个变量之间的线性相关程度，它的取值在  $[-1, 1]$  之间，其绝对值越大，向量间线性相关程度越高。

$$P(A, B) = \frac{cov(A, B)}{\sigma_A \cdot \sigma_B} \quad (14)$$

其中  $cov(A, B)$  是行向量  $A$  和  $B$  的协方差， $\sigma_A$  和  $\sigma_B$  分别是  $A$  和  $B$  的元素标准差。

- **马哈拉诺比斯距离 (Mahalanobis Distance)**

马氏距离是一种距离的度量，可以看作是欧氏距离的一种修正，修正了欧式距离中各个维度尺度不一致且相关的问题。马氏距离越小，表示向量间相似度越高。

$$M(A, B) = \sqrt{(A - B)^T \Sigma^{-1} (A - B)} \quad (15)$$

其中， $\Sigma$  是随机变量的协方差矩阵。

构造关系函数如下所示，用  $S(A, B)$  表示 CAE 输出行向量  $A$  和  $B$  的相似度：

$$S(A, B) = \omega_1 T(A, B) + \omega_2 / |P(A, B)| + \omega_3 M(A, B) \quad (16)$$

其中  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  分别谷本系数,皮尔逊相关系数和马哈拉诺比斯距离对应权重 ( $\omega_1, \omega_2, \omega_3 > 0$ )，其满足  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$ 。  $S(A, B)$  值越大即表示样本编码  $A$  与  $B$  的相似程度越高。

## 6.2 实验结果及分析

本文将  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  分别取 0.2、0.3 和 0.5，求得距离矩阵如图11所示，其中颜色越浅表示两张指纹距离越近，即相似度越高。