

# 武汉理工大学

## 数学建模暑期培训论文

### 第 1 题

#### 基于 xxxxxxxx 模型

---

### 第 A010 组

姓名

刘子川（组长）

程宇

祁成

方向

编程

建模

写作

2020 年 7 月 22 日

## 摘要

控制高压油管的压力变化对减小燃油量偏差,提高发动机工作效率具有重要意义。本文建立了基于质量守恒定理的微分方程稳压模型,采用二分法、试探法以及自适应权重的蝙蝠算法对模型进行求解。//

针对问题一,建立基于质量守恒定律的燃油流动模型,考察单向阀开启时间对压力稳定性的影响。综合考虑压力与弹性模量、密度之间的关系,提出燃油压力-密度微分方程模型和燃油流动方程。本文采用改进的欧拉方法对燃油压力-密度微分方程求得数值解;利用二分法求解压力分布。综合考虑平均绝对偏差等反映压力稳定程度的统计量,求得直接稳定于 100MPa 的开启时长为 **0.2955ms**,在 2s、5s 内到达并稳定于 150MPa 时开启时长为 **0.7795ms**、**0.6734ms**,10s 到达并稳定于 150MPa 的开启时长存在多解。最后对求解结果进行灵敏度分析、误差分析。//

针对问题二,建立基于质量守恒定律的泵-管-嘴系统动态稳压模型,将燃油进入和喷出的过程动态化处理。考虑柱塞和针阀升程的动态变动,建立喷油嘴流量方程和质量守恒方程。为提高角速度求解精度,以凸轮转动角度为固定步长,转动时间变动步长,采用试探法粗略搜索与二分法精细搜索的方法求解,求得凸轮最优转动角速度 **0.0283rad/ms** (转速 **270.382 转/分钟**),并得到该角速度下高压油管的密度、压力周期性变化图。对求解结果进行误差分析与灵敏度分析,考察柱塞腔残余容积变动对高压油管压力稳态的影响。//

针对问题三,对于增加一个喷油嘴的情况,改变质量守恒方程并沿用问题二的模型调整供、喷油策略,得到最优凸轮转动角速度为 **0.0522rad/ms** (**498.726 转/分钟**);对于既增加喷油嘴又增加减压阀的情况,建立基于自适应权重的蝙蝠算法的多变量优化模型,以凸轮转动角速度、减压阀开启时长和关闭时长为参数,平均绝对偏差 MAD 为目标,在泵-管-嘴系统动态稳压模型的基础上进行求解,得到最优参数:角速度 **0.0648 rad/ms** (**619.109 转/分钟**)、减压阀的开启时长 **2.4ms** 和减压阀的关闭时长 **97.6ms**。//

本文的优点为:1. 采用试探法粗略搜索与二分法精细搜索结合的方法,降低了问题的求解难度。2. 以凸轮转动角度为固定步长,对不同角速度按照不同精度的时间步长求解,大大提高了求解的精确度。3. 针对智能算法求解精度方面,采用改进的蝙蝠算法,使速度权重系数自适应调整,兼顾局部搜索与全局搜索能力。

关键词: 微分方程 微分方程 微分方程 微分方程

# 目录

一、 问题重述 .....	2
1.1 问题背景 .....	2
1.2 问题概述 .....	2
二、 模型假设 .....	2
三、 符号说明 .....	3
四、 问题一模型的建立与求解 .....	3
4.1 问题描述与分析 .....	3
4.2 模型的建立 .....	3
4.3 模型的求解 .....	5
4.3.1 二阶 Prim 算法 .....	5
4.4 实验结果及分析 .....	5
五、 问题二模型的建立与求解 .....	7
5.1 问题描述与分析 .....	7
5.2 模型的建立 .....	8
5.3 模型的求解 .....	8
5.4 实验结果及分析 .....	9
5.5 实验结果及分析 .....	10
六、 问题三模型的建立与求解 .....	11
6.1 问题三描述与分析 .....	11
6.2 问题一模型的改进 .....	12
6.3 模型的求解 .....	12
6.3.1 改进二阶 Prim 算法 .....	12
6.4 结果分析 .....	13
6.4.1 免疫遗传算法 .....	13
七、 灵敏度分析 .....	14
八、 模型的评价 .....	14
8.1 模型的优点 .....	14
8.2 模型的缺点 .....	14
8.3 模型改进 .....	14

附录 A 数据可视化的实现 .....	16
---------------------	----

## 一、问题重述

### 1.1 问题背景

分析研究<sup>[1]</sup>。xxxxxxxxxx<sup>1</sup>. 村通自来水工程是指在现有农村居民饮水安全工程的基础上,通过扩网、改造、联通、整合和新建等措施,把符合国家水质标准的自来水引接到行政村和有条件的自然村,形成具有高保证率和统一供水标准的农村供水网络,基本形成覆盖全县农村的供水安全保障体系,实现农村供水由点到面、由小型分散供水到适度集中供水、由解决水量及常规水质到水量、水质、水压达标等方面的提升,使广大农村居民长期受益,实现我县农村饮水“提质增效升级”的目的。

自来水管道路铺设是搭建自来水系统的重要环节,合理的管道铺设方案可以大幅度节约成本。本问题要求在充分考虑市场因素后,研究用两种不同型号的管道铺设该村的自来水管道的方案,使得建设成本降低。由于不同类形的管道的成本不同,且在实际应用中自来水厂有功率限制,研究自来水管的铺设对于村通自来水工程有着重要意义。

### 1.2 问题概述

围绕相关附件和条件要求,研究两种型号的管道在各自来水厂间的铺设方案,依次提出以下问题:

**问题一:** 设计从中心供水站 A 出发使得自来水管道的总里程最少的铺设方案,并求出该方案下 I 型管道和 II 型管道总里程数。

**问题二:** 由于二型管道数量不足,设计自来水厂升级方案使得两个二级自来水厂升级为一级自来水厂,使得二级管道的使用量尽可能减小。

**问题三:** 考虑自来水厂的功率限制,设计升级方案使得若干的二级自来水厂升级为一级,并求解该情况下的最小铺设总长度。

## 二、模型假设

(1)

(2)

(3)

(4)

---

<sup>1</sup> xxxxxxxxxxxx.

### 三、符号说明

符号	说明
$P_n$	20 个站点
$P_n$	20 个站点
$P_n$	20 个站点

注：表中未说明的符号以首次出现处为准

### 四、问题一模型的建立与求解

#### 4.1 问题描述与分析

问题一要求分析一级供水站与二级供水站的分布情况，并根据分析结果，设计从中心供水站出发总里程最少的管道铺设方案。该问题本质是一个带特殊约束的最小生成树问题，即在不考虑二级供水站的情况下，一级供水站要相互连通。针对该问题，本组将供水站间的距离关系转化为权重矩阵，并设计二阶 Prim 算法以求解管道使用总里程最小的铺设方案。



图 1 问题一思维流程图

#### 4.2 模型的建立

在村村通自来水工程的连通图  $G = (V(G), E(G))$  中，每个供水站可以视作一个节点  $v \in V$ ，即对于中心供水站  $v_0 \in V_0$ 、一级供水站  $v_1(i) \in V_1 (i = 1, 2, \dots, 12)$  和二级供水站  $v_2(i) \in V_2 (i = 1, 2, \dots, 168)$ ，有  $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup V_2$ 。节点间的供水管道看作边  $e \in E(G)$ 。由中心供水站与一级供水站间可构成生成树：

$$T_1 = (V(T_1), E(T_1)),$$

其中  $T_1$  代表一级生成树，其中  $V(T_1) = V_0 \cup V_1$ ，即一级生成树中的节点只包含中心供水站和一级供水站。

在一级生成树生成树  $T_1$  的基础上引入二级站点  $V_2$  构成二级生成树:

$$T_2 = (V(T_2), E(T_2)),$$

其中  $V(T_2) = V(T_1) \cup V_2$ , 且满足  $E(T_1) \subseteq E(T_2)$ , 且在任意生成树  $T$  中, 都有  $|E(T)| = |V(T)| - 1$ , 即边数量为节点数量减一。

边  $e$  的代价是两节点  $v_a(i_1), v_b(i_2)$  间的欧式距离, 可表示为:

$$cost_k(v_a(i_1), v_b(i_2)) = |v_a(i_1) - v_b(i_2)|, \quad (1)$$

其中  $a, b = 0, 1, 2$ , 分别表示中心与一、二级供水站。  $k = 1, 2$  分别表示 I 型与 II 型管道, 即有

$$k = \begin{cases} 1, a + b \leq 2 \\ 2, a + b > 2 \end{cases} \quad (2)$$

在此二阶最小生成树问题中, 已知节点和边的关系为  $|E(T)| = |V(T)| - 1$ 。即决策变量可表示为生成树的边集合:

$$E(T_k) = \begin{bmatrix} (v_{11}, v_{12}) \\ (v_{21}, v_{22}) \\ \dots, \dots \\ (v_{|E(T_k)|,1}, v_{|E(T_k)|,2}) \end{bmatrix}, k = 1, 2 \quad (3)$$

其中,  $v_{i1}, v_{i2} (i = 1, 2, \dots, |E(T_k)|)$  分别代表边  $e_i$  的端点, 且满足  $E(T_1) \subseteq E(T_2)$ , 即生成树  $T_1$  优先生成并满足:

$$\sum_{i \in E(T_1)} cost_1(v_{i1}, v_{i2}) = \min \left\{ \sum_{i \in E(T_1)} cost_1(v_{i1}, v_{i2}) \right\} \quad (4)$$

即必须确保 I 型管道铺设距离最短, 即保证一级生成树  $T_1$  为中心供水站和一级供水站构成的最小生成树。同时, 总里程是关于  $E_i$  的函数。在二级生成树中对 I 型与 II 型管道的铺设距离求总和, 可得目标函数即最短铺设总距离为:

$$\sum_{i \in E(T_2)} cost_1(v_{i1}, v_{i2}) + \sum_{i \in E(T_2)} cost_2(v_{i1}, v_{i2}) \quad (5)$$

此问题的约束条件为问题一中的二级供水站生成树优化不能先于一级供水站的最

小连通树生成，即对应总模型的数学描述为：

$$\min \left\{ \sum_{i \in E(T_2)} cost_1(v_{i1}, v_{i2}) + \sum_{i \in E(T_2)} cost_2(v_{i1}, v_{i2}) \right\} \quad (6)$$

$$s.t. \begin{cases} E(T_1) \subseteq E(T_2) \\ \sum_{i \in E(T_1)} cost_1(v_{i1}, v_{i2}) = \min \left\{ \sum_{i \in E(T_1)} cost_1(v_{i1}, v_{i2}) \right\} \end{cases}$$

### 4.3 模型的求解

#### 4.3.1 二阶 Prim 算法

为求取管道最小里程和最优路径，需要搜索每一层生成树边集合  $E(T_k), k = 1, 2$ 。针对该二阶最小生成树问题，我们设计了二阶 Prim 算法，分别实现由中心供水站到 I 级供水站、由 I 级供水站到 II 级供水站的最小生成树，即可求得最终的边集合  $E(T_2)$ 。

二阶 Prim 算法的流程流程图如图 8 所示

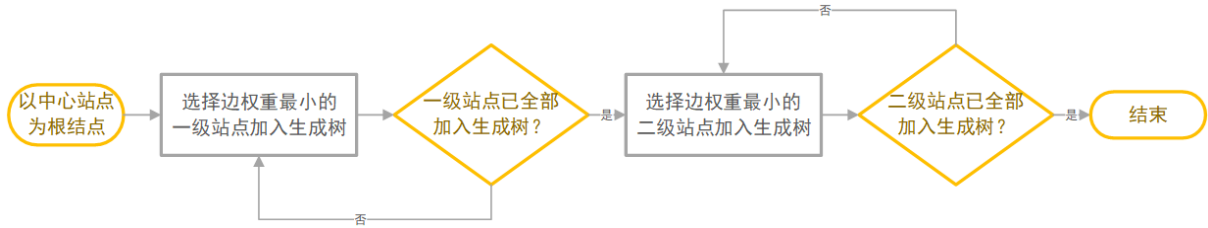


图 2 二阶 Prim 算法流程图

### 4.4 实验结果及分析

以中心供水站作为根节点运行二阶 Prim 算法，首先生成由中心供水站与一级供水站构成的供水网络如图 3 所示



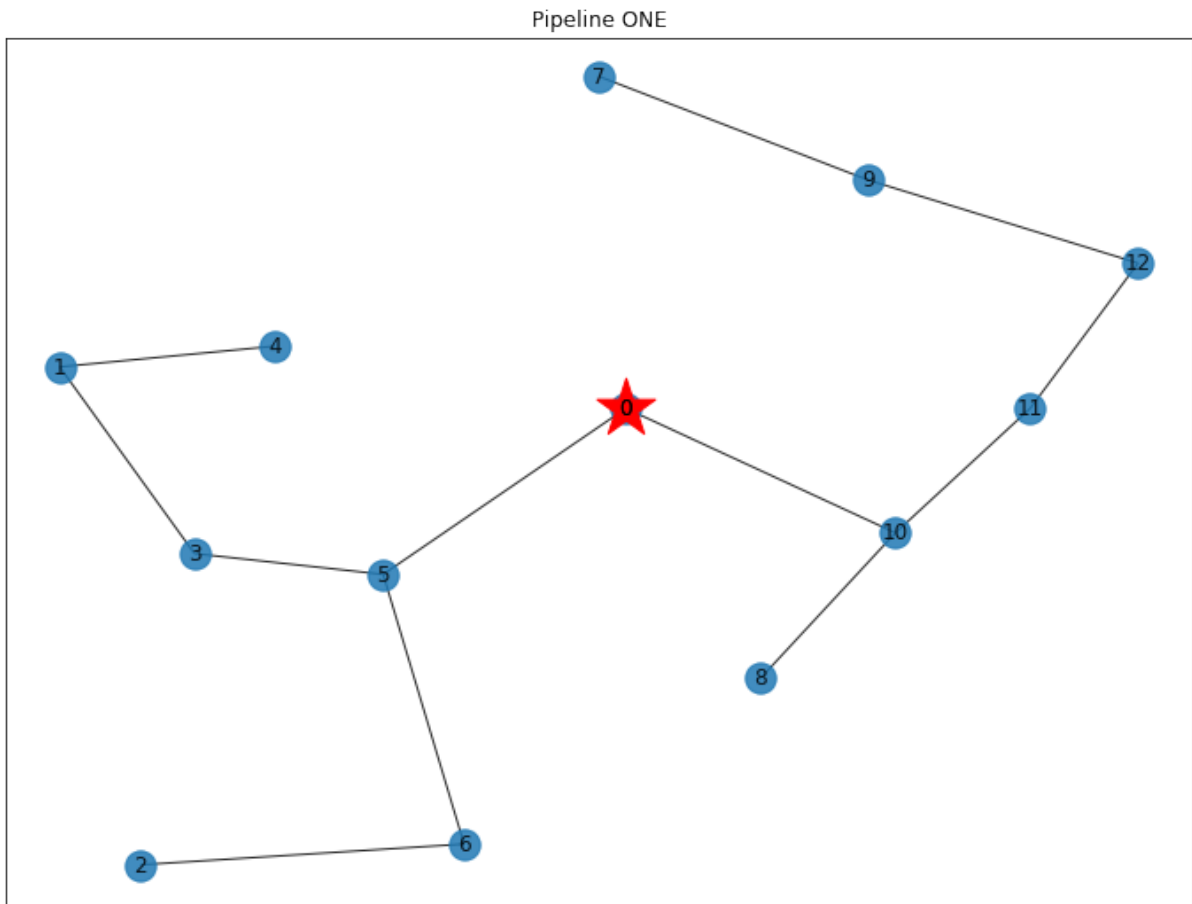


图 3 一阶最小生成树

图中 0 节点为中心供水站点，1 12 节点是一级供水站点，其构成的连通图即为其最小生成树。解得所需的 I 型管道的最小铺设距离为  $120.94km$ 。此时，将二级供水站并入节点集，在该生成树的基础上继续运行 Prim 算法，求解得到整体管道网络铺设如图 6 所示

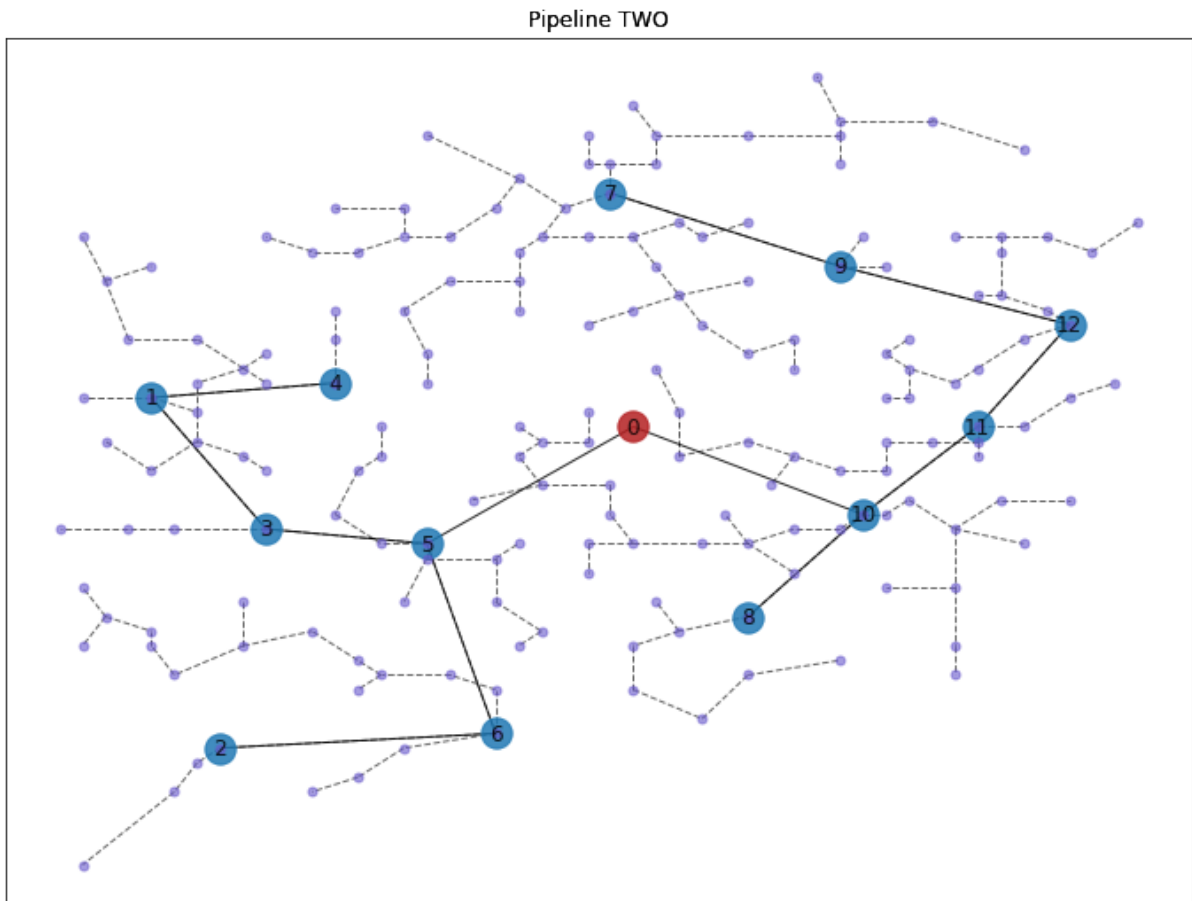


图 4 二阶阶最小生成树

图中的 168 个小节点即为二级供水站，解得 II 型管道铺设里程为  $403.40km$ 、I 型管道与 II 型管道的最小铺设总和为  $524.34km$ 。二阶 Prim 算法的基本原理基于经典图论算法 Prim 算法，其求解值可被证明为该模型最优解。(???????????????????? 引用文献)

## 五、 问题二模型的建立与求解

### 5.1 问题描述与分析

问题二要求在考虑市场因素的条件下尽可能减少 II 型管道的使用量，即将两个 II 级供水站升级为 I 级供水站，使得 II 级管道里程数最少。基于第一问建立的二阶生成树模型，以需要升级的二级站点为决策变量，并将 II 型管道的总里程作为目标函数构建优化模型。在深度分析分析生成树优化原理后，设计启发式算法用于搜索须升级的二级供水站。

## 5.2 模型的建立

分析问题可知，该模型决策变量可表示为须要升级的二级供水站，即：

$$\theta = \{v_2(i), v_2(j)\} \quad (7)$$

其中  $\theta$  为决策变量， $v_2(i), v_2(j)$  分别为将被升级的二级供水站。完成升级操作后根据问题一模型即可得到一级、二级生成树  $T'_1 = (V(T'_1), E(T'_1)), T'_2 = (V(T'_2), E(T'_2))$  其中生成树的边集合任可以表示为：

$$E(T'_k) = \begin{bmatrix} (v_{11}, v_{12}) \\ (v_{21}, v_{22}) \\ \dots, \dots \\ (v_{|E(T'_k)|,1}, v_{|E(T'_k)|,2}) \end{bmatrix}, k = 1, 2 \quad (8)$$

其任必须满足  $E(T'_1) \subseteq E(T'_2)$ ，目标函数为 II 型管铺设总里程，即：

$$\sum_{i \in E(T_2)} cost_2(v_{i1}, v_{i2}) \quad (9)$$

结合上述决策变量、目标函数、约束条件，得到以将两个升级的一级供水站为决策变量，以 II 级管道的总里程为目标函数，生成树  $T_1$  优先生成为约束条件的优化模型：

$$\min \sum_{i \in E(T_2)} cost_2(v_{i1}, v_{i2}) \quad (10)$$

$$s.t. \begin{cases} E(T'_1) \subseteq E(T'_2) \\ \sum_{i \in E(T'_1)} cost_1(v_{i1}, v_{i2}) = \min \left\{ \sum_{i \in E(T'_1)} cost_1(v_{i1}, v_{i2}) \right\} \end{cases}$$

## 5.3 模型的求解

深度分析问题二要求可知，问题二目标仅需要减小 II 级管道的使用量，当某一个二级供水站升级为一级供水站后：

$$\begin{aligned} |V(T'_1)| &= |V(T_1)| + 1 \\ |V(T'_2)| &= |V(T_2)| \end{aligned}$$

即一级生成树的节点数加一，且二级生成树的节点数不变。且根据式  $|E(T)| = |V(T)| - 1$  可知，I 型管道数量加，同时 II 型管道数量减一。由此本组设计启发式算法，在问题一

结果的基础上，断开最长的二级管道，将原生成树分割为两个生成树。分割后的两个生成树中必有一个不包含一级供水站，将该生成树中的任意一个二级站点升级为一级站点并连接该站点与一级供水网络，即可使 II 型管道的铺设减小量最大化，其流程图如下图 6 所示

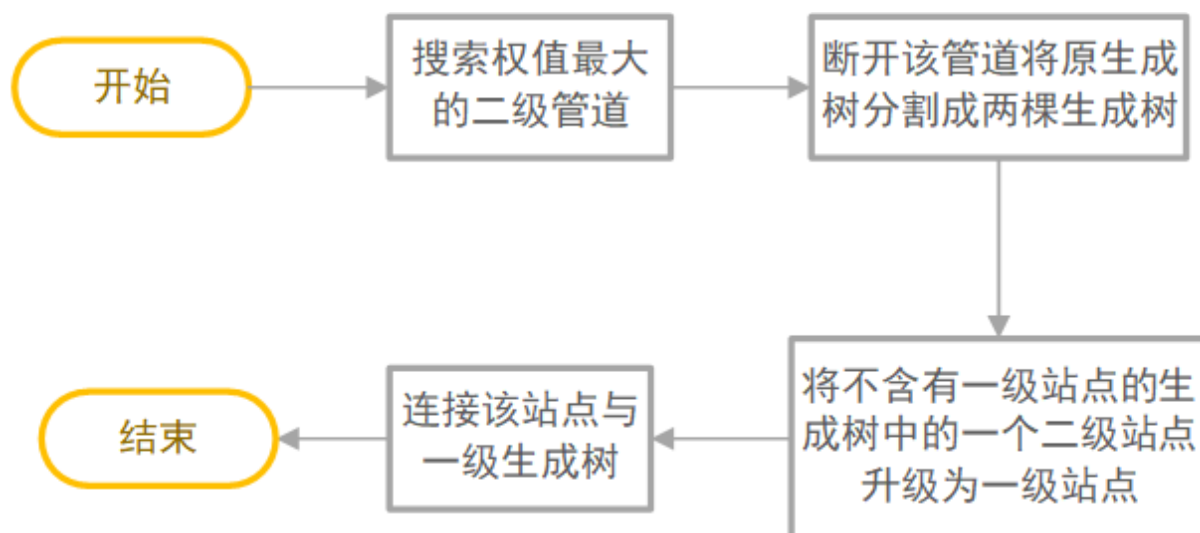


图 5 启发式算法

#### 5.4 实验结果及分析

连续两次执行启发式算法后，升级后的管道网络如图 ?? 所示

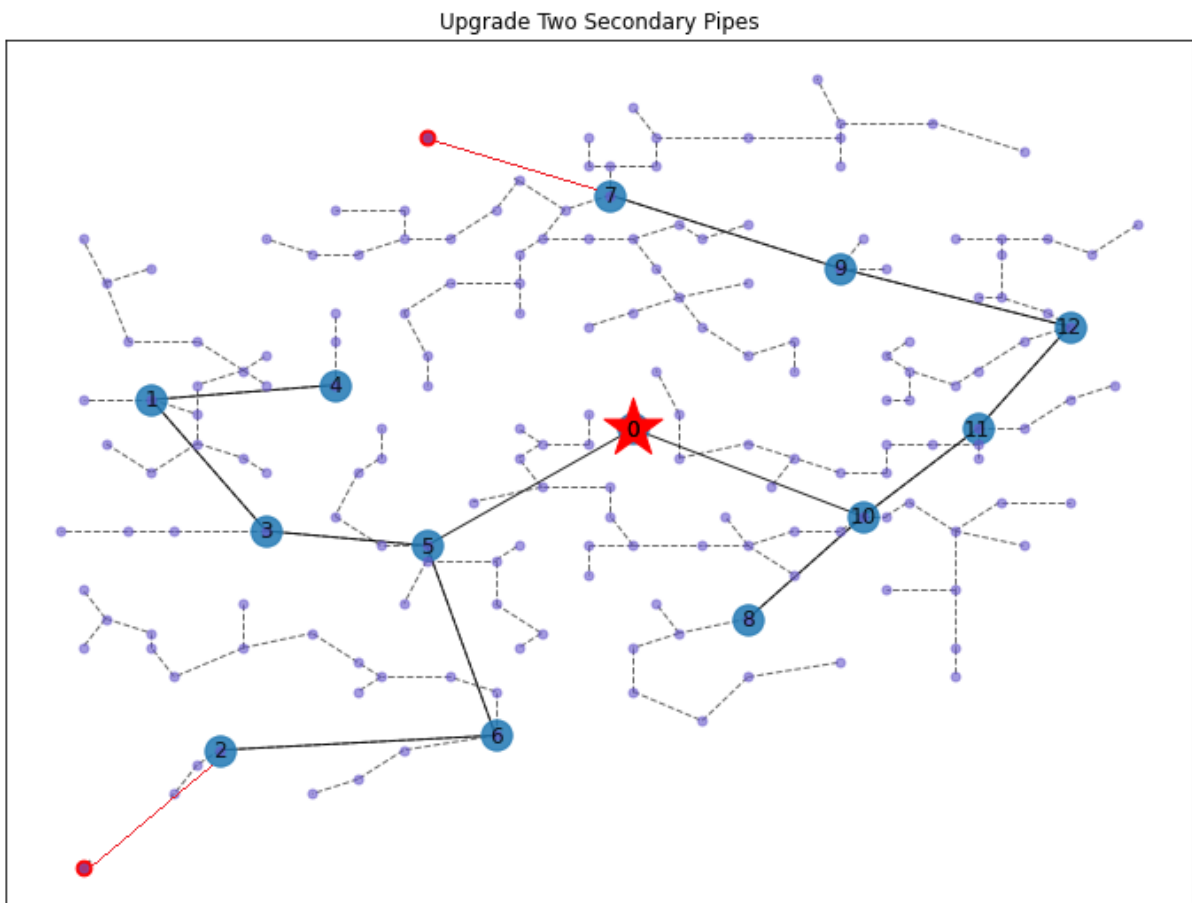


图 6 升级后的二阶最小生成树

图中红点表示升级为一级供水站的二级供水站，红线表示新增设的 I 型管道。其中 II 型管道使用量为???, 相对于问题一方案减少了???

### 5.5 实验结果及分析

由表??可知

其各个小车的运输细节图下图所示：

武汉理工大学 武汉理工大学

武汉理工大学 武汉理工大学

图 7 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

## 六、 问题三模型的建立与求解

### 6.1 问题三描述与分析

问题三在基础管道铺设的条件下考虑了供水站的功率限制，要求针对该限制重新制定管道铺设方案。在深入分析了模型三新增的约束条件后，本组针对其新增约束改进了二阶 Prim 算法，以求解该类带约束的生成树问题。之后我们引入了免疫遗传算法，搜索最佳升级方案，使得在升级二级供水站数量最少的情况下，实现对所有的供水站供水。

## 6.2 问题一模型的改进

在问题一的基础上，问题三限制了从 I 级供水站输送的总里程最大为 40km，即约束了

$$\sum_{i=1}^{|E_2|} |e_2^i| \leq 40, e_2^i \in E_2$$

其中  $E_2$  是第二层边的集合， $e_2^i (i = 1, 2, \dots, |E_2|)$  是其中的边元素。因此，每次执行 Prim 算法后需要使用上式检验新加入的边是否满足该约束条件。

## 6.3 模型的求解

### 6.3.1 改进二阶 Prim 算法

针对带约束的生成树问题，本组在二阶 Prim 算法的基础上加入边权重判定机制，即将某一个解纳入生成树后，若权重和超过了限制条件则退回到上一步，并将该路径的边权值修改为无穷大。在此基础上，若某个二级节点的所有边权重值都被修改为无穷大则将其定义为孤立节点。

改进 Prim 算法的流程图如下图所示：

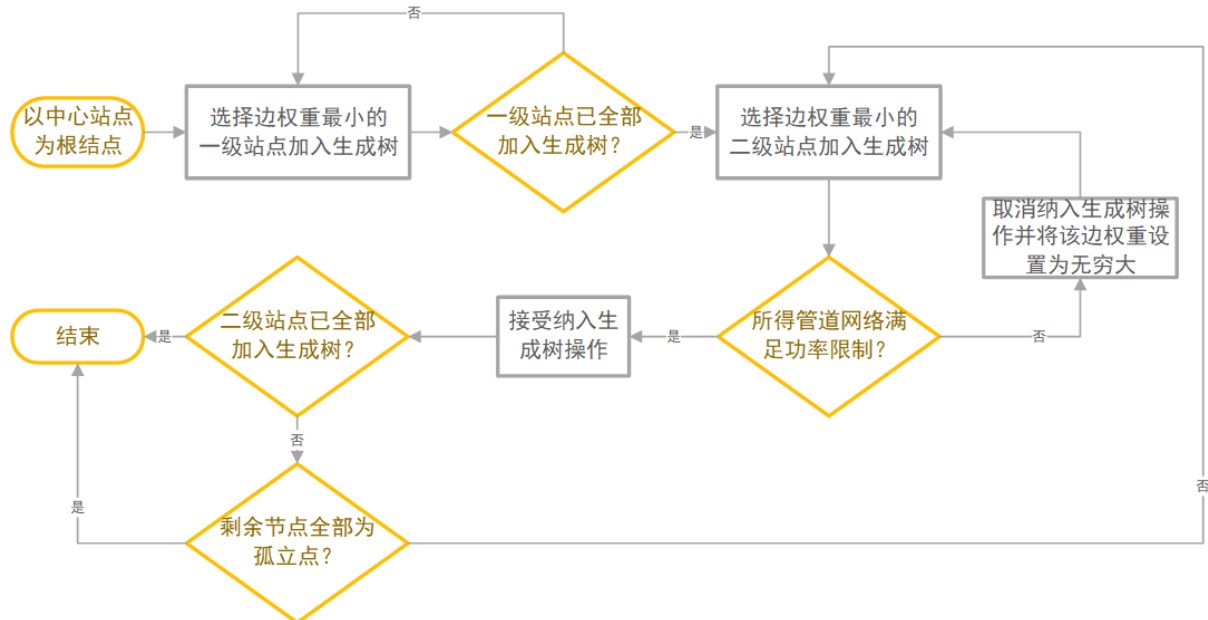


图 8 改进二阶 Prim 算法流程图

## 6.4 结果分析

### 6.4.1 免疫遗传算法

**0-1 编码与** 执行改进二阶 Prim 算法，即可求得所有未能被供水的节点  $\{v_i^{aban}\}$ ，其中  $i = 1, 2, \dots, n$ ， $n$  表示孤立节点数量，即染色体可对应编码为：

$$\Gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n] \quad (11)$$

其中  $\Gamma$  表示升级站点的决策变量，即染色体。 $\gamma_i = \{0, 1\}$  为孤立节点  $v_i^{aban}$  对应的决策值，当  $\gamma_i = 0$  时表示函数值孤立节点  $v_i^{aban}$  不做修改；当  $\gamma_i = 1$  时表示  $v_i^{aban}$  对应的二级供水站被升级为一级供水站。

**适应度计算** 将决策变量  $\Gamma$  所表征的升级操作执行后，即可得到升级后点集  $V_\Gamma$ ，将其带入改进后的二阶 Prim 算法可求得生成孤立点数量  $\varphi(V_\Gamma)$ 。若  $\varphi(V_\Gamma) > 0$  则说明任然存在孤立节点，即没有实现完全供水。基于此我们将  $\varphi(V_\Gamma)$  作为惩罚因子代换功率约束条件，即决策变量  $\Gamma$  的抗原适应度为：

$$F(\Gamma_i) = \sum_{j=1}^n \gamma_j + M \cdot \varphi(V_\Gamma) \quad (12)$$

其中  $\sum_{i=1}^n \gamma_i$  表示升级的二级站点数量和。 $M$  为较大的正数，与  $\varphi(V_\Gamma)$  构成罚函数。同时计算抗体亲和力：

$$S(\Gamma_1, \Gamma_2) = \left( \frac{k(\Gamma_1, \Gamma_2)}{n} > T \right) \quad (13)$$

$k(\Gamma_1, \Gamma_2)$  表示染色体相同的位数， $n$  为抗体长度。 $T$  为可设定的阈值，即当相同的位数的比例大于  $T$  时， $S(\Gamma_1, \Gamma_2) = 1$ ；否则  $S(\Gamma_1, \Gamma_2) = 0$ 。抗体与抗体之间的亲和力反映了抗体之间的相似程度。定义抗体浓度  $C(\Gamma_i)$  表示群体中与  $\Gamma_i$  相似抗体所占的比例，即可计算如下：

$$C(\Gamma_i) = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^N k(\Gamma_i, \Gamma_j)}{N} \quad (14)$$

即综合适应度可表示为：

$$\min P(\Gamma_i) = \lambda \frac{F(\Gamma_i)}{\sum_{i=1}^N F(\Gamma_i)} + (1 - \lambda) \frac{C(\Gamma_i)}{\sum_{i=1}^N C(\Gamma_i)} \quad (15)$$

**精英库保留策略** 先将染色体  $\{\Gamma_i\}$  以抗原适应度  $F(\Gamma_i)$  大小降序排列，并优先保留其前  $\alpha$  个染色体进入下一代，由此防止目标函数值最优的个体被舍去。之后，将剩余染色



体以综合适应度  $P(\Gamma_i)$  排序，并将前  $N - \alpha$  个染色体放入下一代。

## 七、灵敏度分析

## 八、模型的评价

### 8.1 模型的优点

(1)

(2)

### 8.2 模型的缺点

### 8.3 模型改进

## 参考文献

- [1] 张斯嘉, 郭建胜, 钟夫, 等. 基于蝙蝠算法的多目标战备物资调运决策优化 [J]. 火力与指挥控制, 2016, 41(1): 58-61.

## 附录 A 数据可视化的实现

第一问画图-python 源代码

---

第二问画图-python 源代码

---