武漢理工大學

数学建模暑期培训论文

第 1 题

基于 xxxxxxxxx 模型

第 A010 组

姓名	方向
刘子川（组长）	编程
程宇	建模
祁成	写作

2020 年 7 月 21 日

摘要

控制高压油管的压力变化对减小燃油量偏差，提高发动机工作效率具有重要意义。本文建立了基于质量守恒定理的微分方程稳压模型，采用二分法、试探法以及自适应权重的蝙蝠算法对模型进行求解。//

针对问题一，建立基于质量守恒定律的燃油流动模型，考察单向阀开启时间对压力稳定性的影响。综合考虑压力与弹性模量、密度之间的关系，提出燃油压力-密度微分方程模型和燃油流动方程。本文采用改进的欧拉方法对燃油压力-密度微分方程求得数值解；利用二分法求解压力分布。综合考虑平均绝对偏差等反映压力稳定程度的统计量，求得直接稳定于 100MPa 的开启时长为 **0.2955ms**，在 2s、5s 内到达并稳定于 150MPa 时开启时长为 **0.7795ms**、**0.6734ms**，10s 到达并稳定于 150MPa 的开启时长存在多解。最后对求解结果进行灵敏度分析、误差分析。//

针对问题二，建立基于质量守恒定律的泵-管-嘴系统动态稳压模型，将燃油进入和喷出的过程动态化处理。考虑柱塞和针阀升程的动态变动，建立喷油嘴流量方程和质量守恒方程。为提高角速度求解精度，以凸轮转动角度为固定步长，转动时间变动步长，采用试探法粗略搜索与二分法精细搜索的方法求解，求得凸轮最优转动角速度 **0.0283rad/ms**（**转速 270.382 转/分钟**），并得到该角速度下高压油管的密度、压力周期性变化图。对求解结果进行误差分析与灵敏度分析，考察柱塞腔残余容积变动对高压油管压力稳态的影响。//

针对问题三，对于增加一个喷油嘴的情况，改变质量守恒方程并沿用问题二的模型调整供、喷油策略，得到最优凸轮转动角速度为 **0.0522rad/ms**（**498.726 转/分钟**）；对于既增加喷油嘴又增加减压阀的情况，建立基于自适应权重的蝙蝠算法的多变量优化模型，以凸轮转动角速度、减压阀开启时长和关闭时长为参数，平均绝对偏差 MAD 为目标，在泵-管-嘴系统动态稳压模型的基础上进行求解，得到最优参数：**角速度 0.0648 rad/ms**（**619.109 转/分钟**）、减压阀的开启时长 **2.4ms** 和减压阀的关闭时长 **97.6ms**。//

本文的优点为：1. 采用试探法粗略搜索与二分法精细搜索结合的方法，降低了问题的求解难度。2. 以凸轮转动角度为固定步长，对不同角速度按照不同精度的时间步长求解，大大提高了求解的精确度。3. 针对智能算法求解精度方面，采用改进的蝙蝠算法，使速度权重系数自适应调整，兼顾局部搜索与全局搜索能力。

关键词： 微分方程 微分方程 微分方程 微分方程

目录

一、 问题重述

1.1 问题背景

分析研究[1]。xxxxxxxxxxx[1]. 村通自来水工程是指在现有农村居民饮水安全工程的基础上，通过扩网、改造、联通、整合和新建等措施，把符合国家水质标准的自来水引接到行政村和有条件的自然村，形成具有高保证率和统一供水标准的农村供水网络，基本形成覆盖全县农村的供水安全保障体系，实现农村供水由点到面、由小型分散供水到适度集中供水、由解决水量及常规水质到水量、水质、水压达标等方面的提升，使广大农村居民长期受益，实现我县农村饮水“提质增效升级”的目的。

自来水管道铺设是搭建自来水系统的重要环节，合理的管道铺设方案可以大幅度节约成本。本问题要求在充分考虑市场因素后，研究用两种不同型号的管道铺设该村的自来水管道的方案，使得建设成本降低。由于不同类形的管道的成本不同，且在实际应用中自来水厂有功率限制，研究自来水管的铺设对于村通自来水工程有着重要意义。

1.2 问题概述

围绕相关附件和条件要求，研究两种型号的管道在各自来水厂间的铺设方案，依次提出以下问题:

问题一：设计从中心供水站 A 出发使得自来水管道的总里程最少的铺设方案，并求出该方案下 I 型管道和 II 型管道总里程数。

问题二：由于二型管道数量不足，设计自来水厂升级方案使得两个二级自来水厂升级为一级自来水厂，使得二级管道的使用量尽可能减小。

问题三：考虑自来水厂的功率限制，设计升级方案使得若干的二级自来水厂升级为一级，并求解该情况下的最小铺设总长度。

二、 模型假设

(1)

(2)

(3)

(4)

[1] xxxxxxxxxx.

三、 符号说明

符号	说明
P_n	20 个站点
P_n	20 个站点
P_n	20 个站点

注：表中未说明的符号以首次出现处为准

四、 问题一模型的建立与求解

4.1 问题描述与分析

问题一要求分析一级供水站与二级供水站的分布情况，并根据分析结果，设计从中心供水站出发总里程最少的管道铺设方案。该问题本质是一个带特殊约束的最小生成树问题，即在不考虑二级供水站的情况下，一级供水站要相互连通。针对该问题，本组将供水站间的距离关系转化为权重矩阵，并设计二阶 Prim 算法以求解管道使用总里程最小的铺设方案。

图 **1** 问题一思维流程图

4.2 模型的建立

在村村通自来水工程的连通图 $G=(V(G),E(G))$ 中，每个供水站可以视作一个节点 $v\in V$，节点间的供水管道看作边 $e\in E$，那么由中心供水站于 I 级供水站间可构成生成树：

$$T_1=(V_i(T_1),E_i(T_1))$$

其中 T_1 代表一级生成树其中

、由 I 级供水站到 II 级供水站分别构成了生成树其中 $V_i(G)=V_i(T_i)$，$E_i(T_i)\subset E_i(G),(i=1,2)$，

且根据定理（这里引用一下!!!!!），$|E_i| = |V_i| - 1$。由于 I 级和 II 级供水站的本质区别是 II 级供水站不能与中心供水站直接相连，故本问题实质上是一个二阶最小生成树问题。我们以两节点间的欧式距离作为边的代价，应用改进的 Prim 算法（二阶的，想个名字!!!!!!）求解模型。其思维流程图如图 1 所示：

同一般的最小生成树问题不同，问题一中的 II 级供水站生成树优化需待 I 级供水站的最小连通树生成后才能开始进行。因此，问题一的模型（取个屌点的名字?????）分为两部分，I 级供水站和 II 级供水站先后进行目标优化。本问题中，边 e 的代价是两节点 $v_i(x_i, y_i), v_j(x_j, y_j)$ 间的欧式距离, 可表示为：

$$cost(v_i, v_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \tag{1}$$

在此二阶最小生成树问题中，已知节点和边的关系为：$|E_i| = |V_i| - 1, (i = 1, 2)$，其中 $|E_i|$ 是边的数目，$|V_i|$ 是节点个数。把生成树节点对应的序列作为决策变量，以序列矩阵的形式表示，每一层的最优序列矩阵可以表示为

$$A_k = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \\ \cdots & \cdots \\ v_{|E_k|,1} & v_{|E_k|,2} \end{bmatrix}, k = 1, 2$$

其中，$v_{i1}, v_{i2} (1 \le i \le |E_k|)$ 分别代表边 e_i 的起始节点和终止节点。

分别将 I、II 管道总里程作为优化目标，可知总里程是所有边的代价之和，而代价可以表示成节点间的距离，最佳节点序列已经存放在最优序列矩阵中，这些节点距离可以通过节点序列取出。同时，总里程是关于 E_i 的函数。因此，在第一层和第二层分别对距离求和，可得目标函数最短路径为：

$$F(E) = F_1(E) + F_2(E), \tag{2}$$

$$F_k(E) = \sum_{i=1}^{|E_k|} cost(v_{i1}, v_{i2}), k = 1, 2 \tag{3}$$

此问题的约束条件为问题一中的 II 级供水站生成树优化不能先于 I 级供水站的最小连通树生成，对应的数学描述为

以从中心出发铺设的自来水管道总里程最少，结合约束条件，得到自来水管道最短路径：

$$minF(E) \tag{4}$$

$$
s.t.\begin{cases} F(E) = F_1(E) + F_2(E) \\ F_k(E) = \sum_{i=1}^{|E_k|} cost(v_{i1}, v_{i2}), k = 1, 2 \\ cost(v_i, v_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \\ ????? \end{cases}
$$

4.3 模型的求解

为求取管道最小里程和最优路径，我们需要求解每一层的最优序列矩阵。针对问题一，我们采用 Prim 算法，分别实现由中心供水站到 I 级供水站、由 I 级供水站到 II 级供水站的最小生成树，可以求得每一层的最优序列矩阵 A_k。

Prim 算法的流程流程图如图 2 所示

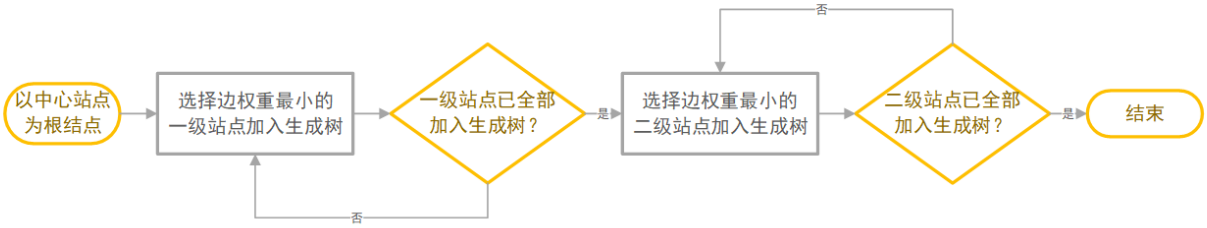

图 **2**　问题二思维流程图

4.4 实验结果及分析

1. 灵敏度分析；（2. 对比分析）；3. 算法收敛性分析；4. 算法时间复杂度分析。。。

五、 问题二模型的建立与求解

5.1 问题描述与分析

问题二要求升级两个 II 级供水站为 I 级供水站，使得 II 级管道里程数最少。

其中，第一层更新后的决策变量仍是最优节点序列，用最优序列矩阵表示为：

$$
A_1' = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \\ \dots & \dots \\ v_{|E_1|,1} & v_{|E_1|,2} \\ v_{|E_1'|,1} & v_{|E_1'|,2} \end{bmatrix}, |E_1'| = |E_1| + 1 \tag{5}
$$

其中，A' 是更新后的最优序列矩阵。$|E_1'|$,$|E_1|$ 分别是更新后和更新前的边集合的模，即边数。升级两个 II 级供水站为 I 级后，增加一条边，故满足 $|E_1'| = |E_1| + 1$。$v_{i1}, v_{i2}(1 \leq i \leq |E_k|)$ 分别代表边 e_i 的起始节点和终止节点。

目标函数为 II 级管道的总里程

$$F_2(E) = \sum_{i=1}^{|E_2|'} cost(v_{i1}, v_{i2}), \tag{6}$$

决策变量是需要升级的两个 II 供水站，

其思维流程图如图 3 所示：

图 **3**　问题二思维流程图

5.2 模型的建立

5.3 模型的求解

5.4 实验结果及分析

结果如下表**??**所示：

表 **1**　**xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx**

xxxxxxx	xxxxxxx
xxxxxxx	909.80
xxxxxxx	852.60

由表1可知

其各个小车的运输细节图下图所示：

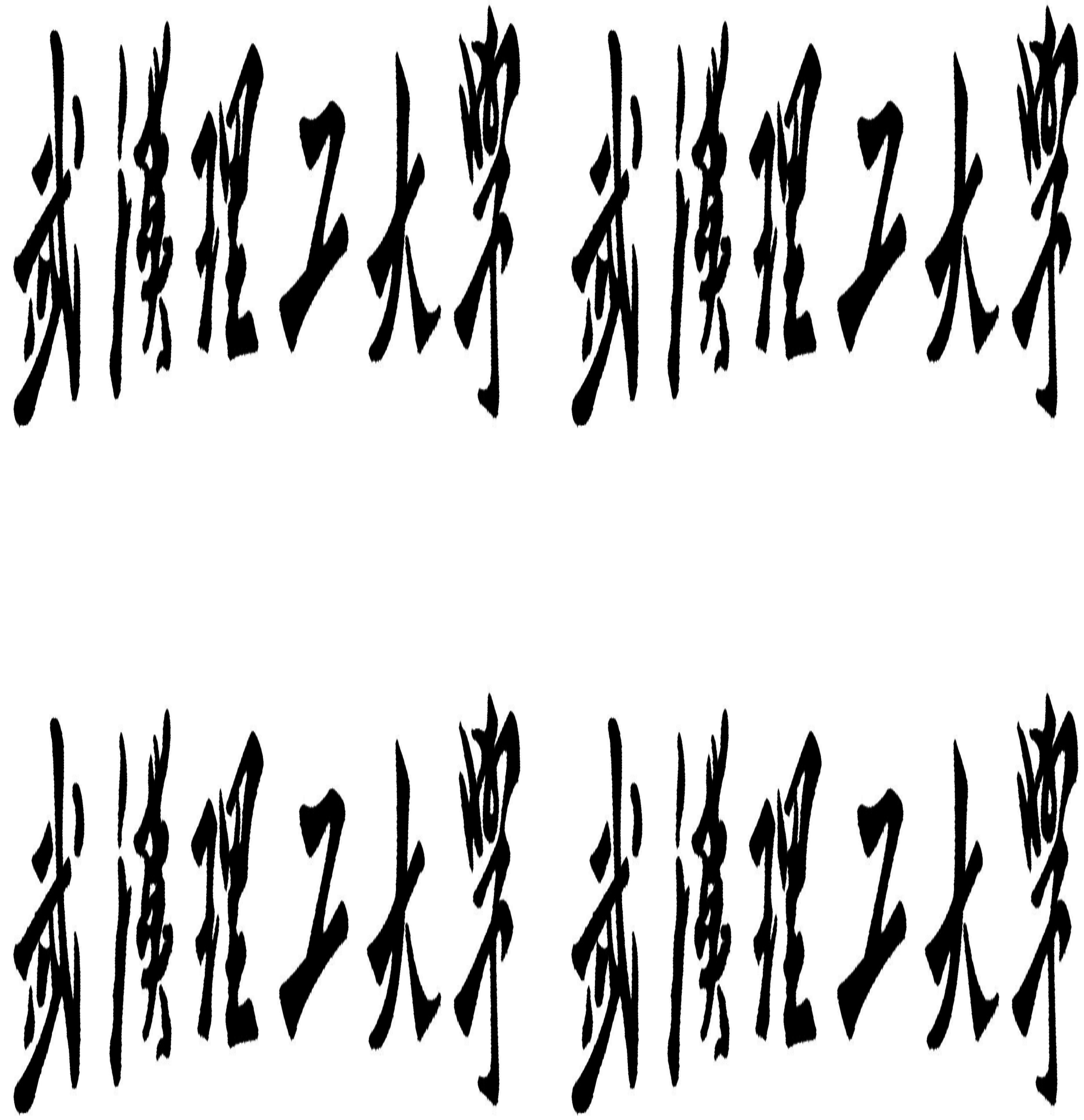

图 **4**　**xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx**

六、 问题三模型的建立与求解

6.1 结果分析

七、 灵敏度分析

八、 模型的评价

8.1 模型的优点

(1)

(2)

8.2 模型的缺点

8.3 模型改进

参考文献

[1] 张斯嘉, 郭建胜, 钟夫, 等. 基于蝙蝠算法的多目标战备物资调运决策优化 [J]. 火力与指挥控制, 2016, 41(1): 58-61.

附录 A 数据可视化的实现

第一问画图–python 源代码

第二问画图–python 源代码