

武汉理工大学

数学建模暑期培训论文

第 1 题

基于 xxxxxxxx 模型

第 10 组

姓名

刘子川（组长）

程宇

祁成

方向

编程

建模

写作

2020 年 8 月 10 日

摘要

控制高压油管的压力变化对减小燃油量偏差,提高发动机工作效率具有重要意义。本文建立了基于质量守恒定理的微分方程稳压模型,采用二分法、试探法以及自适应权重的蝙蝠算法对模型进行求解。//

针对问题一,建立基于质量守恒定律的燃油流动模型,考察单向阀开启时间对压力稳定性的影响。综合考虑压力与弹性模量、密度之间的关系,提出燃油压力-密度微分方程模型和燃油流动方程。本文采用改进的欧拉方法对燃油压力-密度微分方程求得数值解;利用二分法求解压力分布。综合考虑平均绝对偏差等反映压力稳定程度的统计量,求得直接稳定于 100MPa 的开启时长为 **0.2955ms**,在 2s、5s 内到达并稳定于 150MPa 时开启时长为 **0.7795ms**、**0.6734ms**,10s 到达并稳定于 150MPa 的开启时长存在多解。最后对求解结果进行灵敏度分析、误差分析。//

针对问题二,建立基于质量守恒定律的泵-管-嘴系统动态稳压模型,将燃油进入和喷出的过程动态化处理。考虑柱塞和针阀升程的动态变动,建立喷油嘴流量方程和质量守恒方程。为提高角速度求解精度,以凸轮转动角度为固定步长,转动时间变动步长,采用试探法粗略搜索与二分法精细搜索的方法求解,求得凸轮最优转动角速度 **0.0283rad/ms** (转速 **270.382 转/分钟**),并得到该角速度下高压油管的密度、压力周期性变化图。对求解结果进行误差分析与灵敏度分析,考察柱塞腔残余容积变动对高压油管压力稳态的影响。//

针对问题三,对于增加一个喷油嘴的情况,改变质量守恒方程并沿用问题二的模型调整供、喷油策略,得到最优凸轮转动角速度为 **0.0522rad/ms** (**498.726 转/分钟**);对于既增加喷油嘴又增加减压阀的情况,建立基于自适应权重的蝙蝠算法的多变量优化模型,以凸轮转动角速度、减压阀开启时长和关闭时长为参数,平均绝对偏差 MAD 为目标,在泵-管-嘴系统动态稳压模型的基础上进行求解,得到最优参数:角速度 **0.0648 rad/ms** (**619.109 转/分钟**)、减压阀的开启时长 **2.4ms** 和减压阀的关闭时长 **97.6ms**。//

本文的优点为:1. 采用试探法粗略搜索与二分法精细搜索结合的方法,降低了问题的求解难度。2. 以凸轮转动角度为固定步长,对不同角速度按照不同精度的时间步长求解,大大提高了求解的精确度。3. 针对智能算法求解精度方面,采用改进的蝙蝠算法,使速度权重系数自适应调整,兼顾局部搜索与全局搜索能力。

关键词: 微分方程 微分方程 微分方程 微分方程

目录

一、 问题重述	1
1.1 问题背景	1
1.2 问题概述	1
二、 模型假设	2
三、 符号说明	2
四、 问题一模型的建立与求解	2
4.1 问题描述与分析	2
4.2 搭建卷积自编码器模型	3
4.2.1 卷积神经网络	3
4.2.2 卷积自动编码器	5
4.3 实验结果及分析	7
五、 问题二模型的建立与求解	8
5.1 问题描述与分析	8
5.2 模型的建立	8
5.3 模型的求解	8
5.4 实验结果及分析	8
六、 问题三模型的建立与求解	10
6.1 结果分析	10
七、 灵敏度分析	10
八、 模型的评价	10
8.1 模型的优点	10
8.2 模型的缺点	10
8.3 模型改进	10
附录 A 数据可视化的实现	12

一、问题重述

1.1 问题背景

自动指纹识别系统 (automated fingerprint identification system, 简称 AFIS) 有着广泛的应用背景。目前对自动指纹识别系统的研究主要有 3 个方面, 即图像增强、指纹分类和细节匹配。一般可以分成” 离线部分” 和” 在线部分” 两个部分。如图 1 所示, 离线部分包括用指纹采集仪采集指纹、提取出细节点、将细节点保存到数据库中形成指纹模板库等主要步骤。在线部分包括用指纹采集仪采集指纹、提取出细节点、然后将这些细节点与保存在数据库中模板细节点进行匹配, 判断输入细节点与模板细节点是否来自同一个手指的指纹^[1, 3]。指纹分类一般是用在大规模的指纹库中, 作为细节匹配中减少搜索范围的步骤使用。指纹图像一般占用较多的空间, 且图像中的像素信息并不适合计算机进行分析或匹配。为实现计算机自动识别, 需要有一种方法来描述指纹的内在结构、具体形态和其它特征并将其用最少的字节数来存储于计算机中。此计算机系统可扫描犯罪现场采集的指纹, 并且与州、地区、国家之间执法机关采集的数百万指纹档案互相比对^[2]。指纹由专家追踪后, 经计算机扫描, 得到许多细节来和数据库里其它指纹比对, 列出相符合的百分比来让鉴识人员得知可能的相符人选¹。任何计算机比对的结果, 都会经指纹专家比较与此指纹相关的样本来验证。

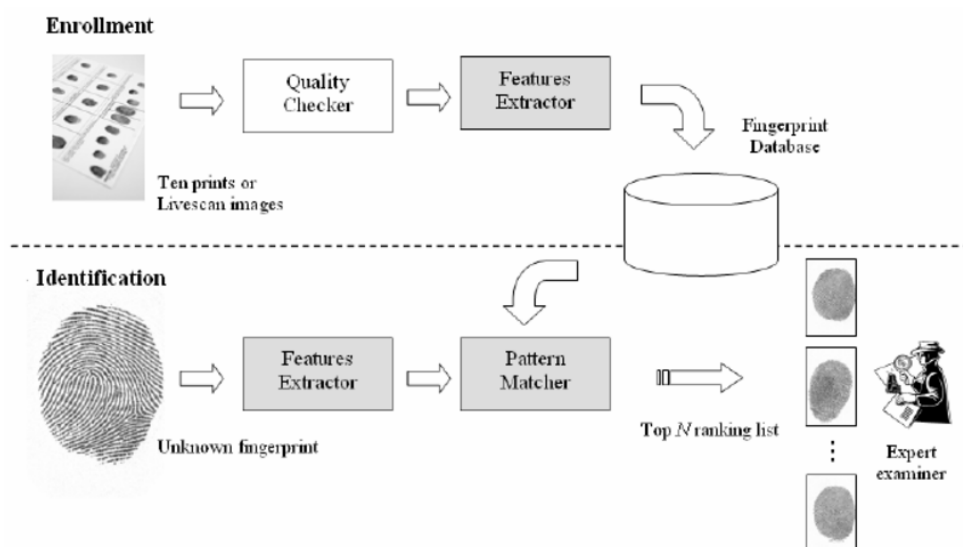


图 1 自动指纹识别系统框图

1.2 问题概述

围绕相关附件和条件要求, 试根据附件中的 16 幅指纹图像, 不借助现有的指纹相关软件, 依次提出以下问题:

¹ <https://baike.baidu.com/item/AFIS/2851410?fr=aladdin>

编码：给出一种用不超过 200 字节（下面称为“指纹密码”）来刻画描述指纹基本特征的表示方法，介绍其数学原理。

匹配：将你的方法编程实现，对附件中的每一幅指纹都给出其“指纹密码”的表示。基于你找到的这些指纹表示，你能否给出一种方法比较不同指纹间的异同及相似程度？

应用：你能否对附件中的 16 个指纹进行对比和归类？请给出你对比及分类的依据和结果。

二、模型假设

(1)

(2)

(3)

(4)

三、符号说明

符号	说明
P_n	20 个站点
P_n	20 个站点
P_n	20 个站点

注：表中未说明的符号以首次出现处为准

四、问题一模型的建立与求解

4.1 问题描述与分析

问题一要求给出一种用不超过 200 字节来刻画描述指纹基本特征的表示方法。传统的图像压缩方法有霍夫曼压缩、Golomb 编码、LZW 编码、小波编码等，这些都能对指纹进行刻画。但是相对于 200 字节的限制而言，他们在压缩编码方向显得不敬人意。

相较于传统的图片编码而言，通过网络编码能更有效的提高图像在细节上的依赖。在网络训练的过程中，网络只用到该向量之中少量元素，其中的大部分元素对于网络来说是没有用的。自编码器通过无监督学习来提取有用的信息，对于手写数字图片来说可能是颜色为黑色的像素点，将图片中的很大一部分白色像素舍弃，只提取对网络有用的信息，到达降低数据维度的目的，从而实现小样本编码。

4.2 搭建卷积自编码器模型

自编码器 (AutoEncoder) 是一种能够通过无监督学习, 学到输入数据高效表示的人工神经网络。输入数据的这一高效表示称为编码 (codings), 其维度一般远小于输入数据, 使得自编码器可用于降维。更重要的是, 自编码器可作为强大的特征检测器 (feature detectors), 应用于深度神经网络的预训练。我们以 VGG 模型^[4] 结构为基础, 构造一个新的卷积神经网络模型, 并通过交叉验证的思想训练小样本数据, 调整模型参数, 得到小样本条件下最优的卷积神经网络模型。

4.2.1 卷积神经网络

Convolution Kernel 在图像处理的过程中, 我们经常会用到矩阵卷积来计算图像 (image) 的特征 (feature), 矩阵卷积有两种: 全卷积 (full convolution) 和有效值卷积 (valid convolution), 其全卷积核函数的定义式为:

$$z(u, v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_{i,j} \cdot k_{u-i,v-j}, \quad (1)$$

有效值卷积的定义式为:

$$z(u, v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_{i+u,j+v} \cdot k_{rot i,j} \cdot \chi(i, j) \quad (2)$$

$$\chi(i, j) = \begin{cases} 1, & 0 \leq i, j \leq n \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

其中 X 是灰度图像转换为 $m \times m$ 阶矩阵, K 是 $n \times n$ 阶卷积核, 一般取 3×3 , K_{rot} 是由 K 转置得到。

那么, 从 Input Image 到 Output Image 的变化如下图所示:

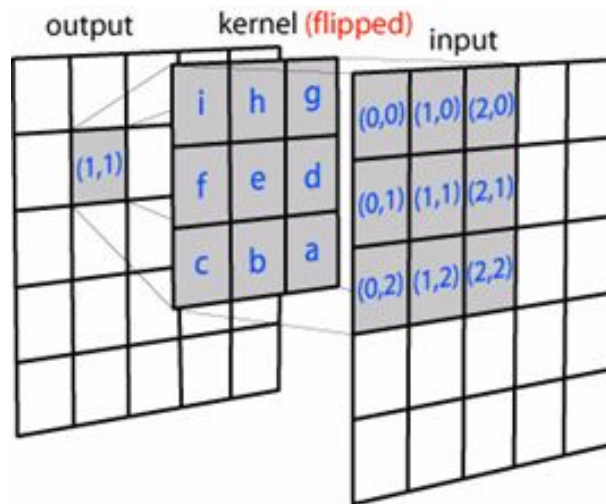


图 2 卷积核函数示意图

可以看出，其实二维卷积一样也是加权叠加/积分。需要注意的是，其中 Convolution Kernel 进行了水平和垂直方向的翻转。

Pooling 对于灰度图像的采样而言，Pooling 对于输入的 Feature Map，选择某种方式对其进行压缩。如下图，表示的就是对 2×2 邻域内的值，选择最大值输出到下一层，这叫做 Max-Pooling。

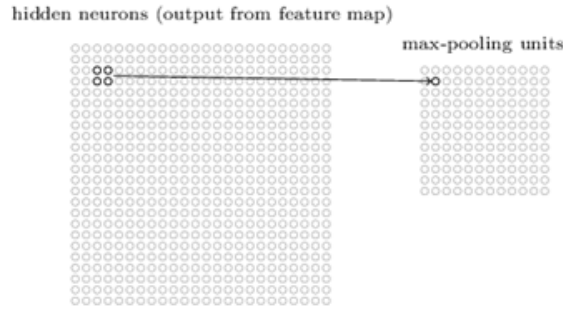


图 3 池化层 Max-Pooling 示意图

对卷积层进行池化从而通过对 Feature Map 降维，有效减少后续层需要的参数，当其中像素在邻域发生微小位移时，Pooling Layer 的输出是不变的。这就增强了网络的鲁棒性，有一定抗扰动的作用。

Activation 激活层的正向传播主要依靠众多神经元的计算来完成的，工作过程中可以用下式来表示：

$$u_k = \sum_{i=1} w_{ki} x_i,$$

$$y_k = f(u_k - b_k),$$

其中： x_i 表示第 i 个输入； w_{ki} 表示与第 i 输入量相连的权值； u_k 表示所有输入的加权和； b_k 为神经元阈值； f 为激活函数； y_k 为神经网络的输出。

激活函数的种类有很多，如 *sigmoid*，*tanh* 及 *Relu*，本文应用的是 *Relu* 作为激活函数搭建两层隐含层，如式 3 所示：

$$f_{\text{Relu}} = \max(0, z)$$

$$\frac{d}{dz} f_{\text{ReLU}} = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

网络的输出层使用 *softmax* 函数作分类器，式 4.2.1 为第 i 个神经的输出：

$$f_{\text{softmax}} = e^i / \sum_j e^j.$$

4.2.2 卷积自动编码器

普通的自编码器中，编码器和解码器中层与层之间的连接方式为全连接，该编码器具有一个输入层， n 个隐藏层和一个输出层，

给定图片样本 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times c \times w \times h}$ ，其中 c 为通道数。自编码器首先将 x_i 编码成 $y(x_i)$ 再解码成 $z(y_i)$ ，其公式 L 表述如下：

$$\begin{aligned} y(x) &= \text{Encoder}(W_1x + b) \\ z(x) &= \text{Decoder}(W_2y(x) + c) \end{aligned} \quad (4)$$

通过最小化重建误差 $L(X, Z)$ ，我们可以获得模型参数，这里用 θ 表示为：

$$\theta = \arg \min_{\theta} L(X, Z) = \arg \min_{\theta} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|x^{(i)} - z(x^{(i)})\|^2. \quad (5)$$

本文卷积自编码器 (ConvAutoEncoder, CAE) 中的编码器部分的网络结构与卷积神经网络中卷积池化部分的结构相同。首先通过编码器部分构造出对应的解码器部分，在训练结束后，保留编码器部分的结构和权重，在编码器后加上与卷积神经网络结构中相同的全连接层来进行图像的编码与分类识别。其卷积自编码器 $L(X, Z)$ 的具体结构如图 4 所示：

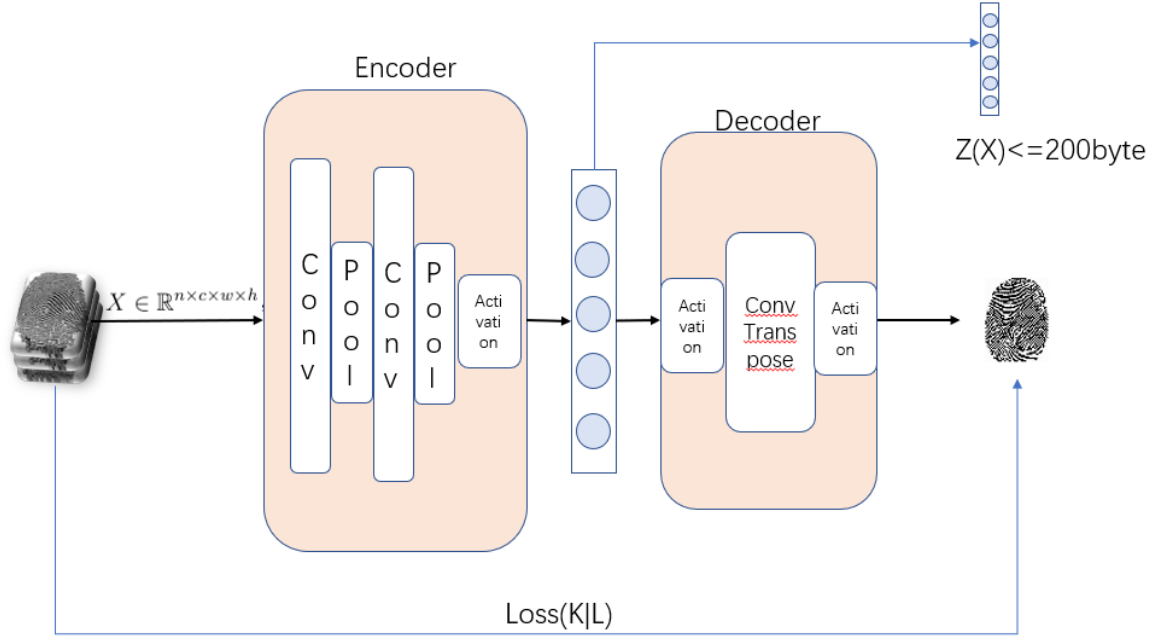


图 4 卷积自编码器 CAE 模型

其中，Conv 表示全卷积，ConvTranspose 表示有效值卷积，Activation 表述 rule 激活层，Pooling 表示池化层，对应的编码输入为 $Z(X) < 200\text{byte}$ 。

将稀疏约束添加到目标函数后，自动编码器将成为稀疏的自动编码器，它考虑二值图像隐藏层的稀疏表示。为了实现稀疏表示，本文将使用稀疏约束将重构误差最小化，加上损失函数 KL 散度：

$$\text{CAE} = L(X, Z) + \gamma \sum_{j=1}^{H_D} \text{KL}(\rho \parallel \hat{\rho}_j), \quad (6)$$

$$\text{KL}(\rho \parallel \hat{\rho}_j) = \rho \log \frac{\rho}{\hat{\rho}_j} + (1 - \rho) \log \frac{1 - \rho}{1 - \hat{\rho}_j}, \quad (7)$$

其中 γ 是稀疏项的权重， H_D 是隐藏单元的数量， ρ 是稀疏性参数，通常是一个接近零的小值。 $\hat{\rho}_j = (1/N) \sum_{i=1}^N y_j(x^{(i)})$ 是在训练集中隐藏单元 j 的平均激活。

在迭代修正的过程中，实验采用 Keras 自带优化器 Adam 函数进行迭代修正，如式 4.2.2 所示，其中 β_1 一般取 0.9， β_2 一般取 0.999。

$$\begin{cases} m_t = \beta_1 m_{t-1} + (1 - \beta_1) \nabla_w f(w_t) \\ v_t = \beta_2 v_{t-1} + (1 - \beta_2) \nabla_w f(w_t)^2 \\ \hat{m}_t = \frac{m_t}{1 - \beta_1^t}, \hat{v}_t = \frac{v_t}{1 - \beta_2^t} \\ w_t = w_{t-1} - \eta \frac{\hat{m}_t}{\sqrt{\hat{v}_t + \epsilon}} \end{cases}$$

4.3 实验结果及分析

实验训练输入样本为 400×300 的指纹图片，具体参数设置如表所示：

表 1 参数设置表

参数名称	值	参数名称	值
迭代次数 epoch	2000	吞吐量 batch	64
出/入通道数 in/out	3/3	编码大小 size	200
学习率 lr	0.01	偏置 β_1, β_2	0.9, 0.999
卷积核 k_1, k_2, k_3	3,3,4	池化层 padding	1

通过上述参数设置，计算 16 张指纹图片 KL 散度的最小值，并保存其编码程序。其迭代过程中损失函数如下图所示：

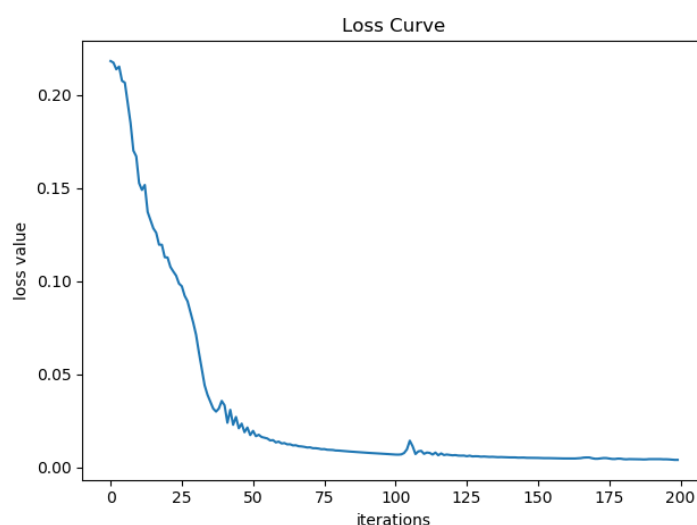


图 5 CAE 迭代过程中损失函数函数

可以看出，我们的模型在解码还原过程中，能明显逼近于真实的指纹图片，信息损失仅占 0.04%，对于传统的编码方法有明显的压缩能力。

本文将指纹编码过程进行还原，得到解码图像入下图所示，可以看见 CAE 模型编码后再还原出的指纹图像具有高精度的还原。

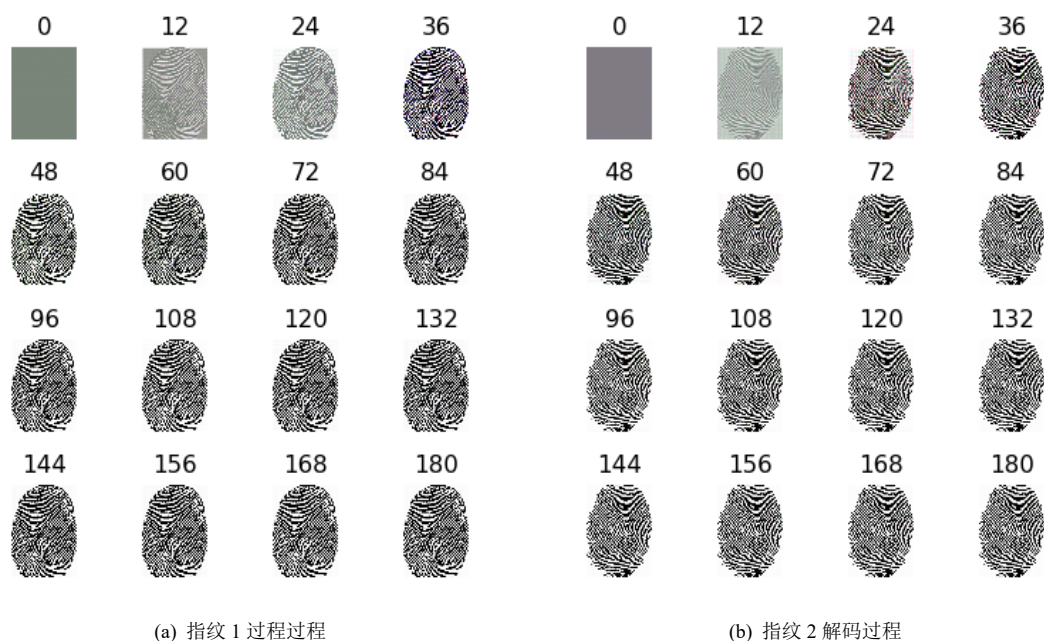


图 6 编码后经解码器后还原的效果图

五、问题二模型的建立与求解

5.1 问题描述与分析

问题二要求

其思维流程图如图 7 所示：

武汉理工大学

图 7 问题二思维流程图

5.2 模型的建立

5.3 模型的求解

5.4 实验结果及分析

结果如下表??所示：

表 2 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

XXXXXXX	XXXXXXX
XXXXXXX	909.80
XXXXXXX	852.60

由表2可知
其各个小车的运输细节图下图所示：

武汉理工大学 武汉理工大学



图 8 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

六、问题三模型的建立与求解

6.1 结果分析

七、灵敏度分析

八、模型的评价

8.1 模型的优点

- (1)
- (2)

8.2 模型的缺点

8.3 模型改进

参考文献

- [1] Davies S G. Touching Big Brother: How biometric technology will fuse flesh and machine[J]. Information Technology & People, 2014, 7(4): 38-47.
- [2] Moses K R, Higgins P, McCabe M, et al. Automated fingerprint identification system (AFIS)[J]. Scientific Working Group on Friction Ridge Analysis Study and Technology and National institute of Justice (eds.) SWGFAST-The fingerprint sourcebook, 2011: 1-33.
- [3] Dror I E, Wertheim K, Fraser-Mackenzie P, et al. The impact of human – technology co-operation and distributed cognition in forensic science: biasing effects of AFIS contextual information on human experts[J]. Journal of forensic sciences, 2012, 57(2): 343-352.
- [4] Simonyan K, Zisserman A. Very deep convolutional networks for large-scale image recognition[J]. arXiv preprint arXiv:1409.1556, 2014.
- [5]

附录 A 数据可视化的实现

第一问画图-python 源代码

第二问画图-python 源代码
