

武汉理工大学

数学建模暑期培训论文

第 1 题

基于 xxxxxxxx 模型

第 A010 组

姓名

刘子川（组长）

程宇

祁成

方向

编程

建模

写作

2020 年 7 月 22 日

摘要

控制高压油管的压力变化对减小燃油量偏差,提高发动机工作效率具有重要意义。本文建立了基于质量守恒定理的微分方程稳压模型,采用二分法、试探法以及自适应权重的蝙蝠算法对模型进行求解。//

针对问题一,建立基于质量守恒定律的燃油流动模型,考察单向阀开启时间对压力稳定性的影响。综合考虑压力与弹性模量、密度之间的关系,提出燃油压力-密度微分方程模型和燃油流动方程。本文采用改进的欧拉方法对燃油压力-密度微分方程求得数值解;利用二分法求解压力分布。综合考虑平均绝对偏差等反映压力稳定程度的统计量,求得直接稳定于 100MPa 的开启时长为 **0.2955ms**,在 2s、5s 内到达并稳定于 150MPa 时开启时长为 **0.7795ms**、**0.6734ms**,10s 到达并稳定于 150MPa 的开启时长存在多解。最后对求解结果进行灵敏度分析、误差分析。//

针对问题二,建立基于质量守恒定律的泵-管-嘴系统动态稳压模型,将燃油进入和喷出的过程动态化处理。考虑柱塞和针阀升程的动态变动,建立喷油嘴流量方程和质量守恒方程。为提高角速度求解精度,以凸轮转动角度为固定步长,转动时间变动步长,采用试探法粗略搜索与二分法精细搜索的方法求解,求得凸轮最优转动角速度 **0.0283rad/ms** (转速 **270.382 转/分钟**),并得到该角速度下高压油管的密度、压力周期性变化图。对求解结果进行误差分析与灵敏度分析,考察柱塞腔残余容积变动对高压油管压力稳态的影响。//

针对问题三,对于增加一个喷油嘴的情况,改变质量守恒方程并沿用问题二的模型调整供、喷油策略,得到最优凸轮转动角速度为 **0.0522rad/ms** (**498.726 转/分钟**);对于既增加喷油嘴又增加减压阀的情况,建立基于自适应权重的蝙蝠算法的多变量优化模型,以凸轮转动角速度、减压阀开启时长和关闭时长为参数,平均绝对偏差 MAD 为目标,在泵-管-嘴系统动态稳压模型的基础上进行求解,得到最优参数:角速度 **0.0648 rad/ms** (**619.109 转/分钟**)、减压阀的开启时长 **2.4ms** 和减压阀的关闭时长 **97.6ms**。//

本文的优点为:1. 采用试探法粗略搜索与二分法精细搜索结合的方法,降低了问题的求解难度。2. 以凸轮转动角度为固定步长,对不同角速度按照不同精度的时间步长求解,大大提高了求解的精确度。3. 针对智能算法求解精度方面,采用改进的蝙蝠算法,使速度权重系数自适应调整,兼顾局部搜索与全局搜索能力。

关键词: 微分方程 微分方程 微分方程 微分方程

目录

一、 问题重述	1
1.1 问题背景	1
1.2 问题概述	1
二、 模型假设	1
三、 符号说明	2
四、 问题一模型的建立与求解	2
4.1 问题描述与分析	2
4.2 模型的建立	2
4.3 模型的求解	3
4.4 实验结果及分析	4
五、 问题二模型的建立与求解	4
5.1 问题描述与分析	4
5.2 模型的建立	5
5.3 模型的求解	5
5.4 实验结果及分析	5
六、 问题三模型的建立与求解	7
6.1 结果分析	7
七、 灵敏度分析	7
八、 模型的评价	7
8.1 模型的优点	7
8.2 模型的缺点	7
8.3 模型改进	7
附录 A 问题一、二代码及其可视化	9
附录 B 问题三代码及其可视化	14

一、问题重述

1.1 问题背景

分析研究^[1]。xxxxxxxxxx¹. 村通自来水工程是指在现有农村居民饮水安全工程的基础上,通过扩网、改造、联通、整合和新建等措施,把符合国家水质标准的自来水引接到行政村和有条件的自然村,形成具有高保证率和统一供水标准的农村供水网络,基本形成覆盖全县农村的供水安全保障体系,实现农村供水由点到面、由小型分散供水到适度集中供水、由解决水量及常规水质到水量、水质、水压达标等方面的提升,使广大农村居民长期受益,实现我县农村饮水“提质增效升级”的目的。

自来水管道路铺设是搭建自来水系统的重要环节,合理的管道铺设方案可以大幅度节约成本。本问题要求在充分考虑市场因素后,研究用两种不同型号的管道铺设该村的自来水管道的方案,使得建设成本降低。由于不同类形的管道的成本不同,且在实际应用中自来水厂有功率限制,研究自来水管的铺设对于村通自来水工程有着重要意义。

1.2 问题概述

围绕相关附件和条件要求,研究两种型号的管道在各自来水厂间的铺设方案,依次提出以下问题:

问题一: 设计从中心供水站 A 出发使得自来水管道的总里程最少的铺设方案,并求出该方案下 I 型管道和 II 型管道总里程数。

问题二: 由于二型管道数量不足,设计自来水厂升级方案使得两个二级自来水厂升级为一级自来水厂,使得二级管道的使用量尽可能减小。

问题三: 考虑自来水厂的功率限制,设计升级方案使得若干的二级自来水厂升级为一级,并求解该情况下的最小铺设总长度。

二、模型假设

(1)

(2)

(3)

(4)

¹ xxxxxxxxxxxx.

三、符号说明

符号	说明
P_n	20 个站点
P_n	20 个站点
P_n	20 个站点

注：表中未说明的符号以首次出现处为准

四、问题一模型的建立与求解

4.1 问题描述与分析

问题一要求给出总里程最少的管道铺设方案。在村村通自来水工程的连通图 $G = (V(G), E(G))$ 中，每个供水站可以视作一个节点 $v \in V$ ，节点间的供水管道看作边 $e \in E$ ，那么由中心供水站到 I 级供水站、由 I 级供水站到 II 级供水站分别构成了生成树 $T_i = (V_i(T_i), E_i(T_i))$ ，其中 $V_i(G) = V_i(T_i)$ ， $E_i(T_i) \subset E_i(G)$, $(i = 1, 2)$ ，且根据定理（这里引用一下!!!!!!）， $|E_i| = |V_i| - 1$ 。由于 I 级和 II 级供水站的本质区别是 II 级供水站不能与中心供水站直接相连，故本问题实质上是一个二阶最小生成树问题。我们以两节点间的欧式距离作为边的代价，应用改进的 Prim 算法（二阶的，想个名字!!!!!!）求解模型。其思维流程图如图 1 所示：



图 1 问题一思维流程图

4.2 模型的建立

同一般的最小生成树问题不同，问题一中的 II 级供水站生成树优化需待 I 级供水站的最小连通树生成后才能开始进行。因此，问题一的模型（取个屁点的名字?????）分为两部分，I 级供水站和 II 级供水站先后进行目标优化。本问题中，边 e 的代价是两节点 $v_i(x_i, y_i), v_j(x_j, y_j)$ 间的欧式距离，可表示为：

$$cost(v_i, v_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \quad (1)$$

在此二阶最小生成树问题中，已知节点和边的关系为： $|E_i| = |V_i| - 1, (i = 1, 2)$ ，其中 $|E_i|$ 是边的数目， $|V_i|$ 是节点个数。把生成树节点对应的序列作为决策变量，以序列矩阵的形式表示，每一层的最优序列矩阵可以表示为

$$A_k = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \\ \dots & \dots \\ v_{|E_k|,1} & v_{|E_k|,2} \end{bmatrix}, k = 1, 2$$

其中， $v_{i1}, v_{i2} (1 \leq i \leq |E_k|)$ 分别代表边 e_i 的起始节点和终止节点。

分别将 I、II 管道总里程作为优化目标，可知总里程是所有边的代价之和，而代价可以表示成节点间的距离，最佳节点序列已经存放在最优序列矩阵中，这些节点距离可以通过节点序列取出。同时，总里程是关于 E_i 的函数。因此，在第一层和第二层分别对距离求和，可得目标函数最短路径为：

$$F(E) = F_1(E) + F_2(E), \quad (2)$$

$$F_k(E) = \sum_{i=1}^{|E_k|} cost(v_{i1}, v_{i2}), k = 1, 2 \quad (3)$$

此问题的约束条件为问题一中的 II 级供水站生成树优化不能先于 I 级供水站的最小连通树生成，对应的数学描述为

以从中心出发铺设的自来水管总里程最少，结合约束条件，得到自来水管最短路径：

$$\min F(E) \quad (4)$$

$$s.t. \begin{cases} F(E) = F_1(E) + F_2(E) \\ F_k(E) = \sum_{i=1}^{|E_k|} cost(v_{i1}, v_{i2}), k = 1, 2 \\ cost(v_i, v_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \\ \text{?????} \end{cases}$$

4.3 模型的求解

为求取管道最小里程和最优路径，我们要求解每一层的最优序列矩阵。针对问题一，我们采用 Prim 算法，分别实现由中心供水站到 I 级供水站、由 I 级供水站到 II 级供水站的最小生成树，可以求得每一层的最优序列矩阵 A_k 。

Prim 算法的伪代码如下。

Algorithm 1: Procedure of Apriori

Input: item data base: D
minimum Support threshold: Sup_{min}
minimum Confidence threshold: $Conf_{min}$
Output: frequent item sets F

```

1 Initialize
  iteration  $t \leftarrow 1$ 
  The candidate FIS:  $C_t = \emptyset$ 
  The length of FIS:  $length = 1$ 
  for  $i=1$  to  $sizeof(D)$  do
2    $I_i = D(i)$ 
    $n = sizeof(I_i)$ 
   for  $j=1$  to  $n$  do
3     if  $I_i(j) \notin C_t$  then
4        $C_t = C_t \cup I_i(j)$ 
5     end
6   end
7 end
8  $F_t = \{f | f \in C_t, Sup(f) > Sup_{min}\}$ 
  while  $F \neq \emptyset$  do
9    $t = t + 1$ 
    $length = length + 1$ 
    $C_t \leftarrow$  all candidate of FIS in  $F_{t-1}$ 
    $F_t = \{f | f \in C_t, (Sup(f) > Sup_{min}) \cap (Conf(f) > Conf_{min})\}$ 
10 end
11 return  $F_{t-1}$ 

```

结果在这里放一些。。。。。。

4.4 实验结果及分析

1. 灵敏度分析；(2. 对比分析)；3. 算法收敛性分析；4. 算法时间复杂度分析。。

五、 问题二模型的建立与求解

5.1 问题描述与分析

问题二要求升级两个 II 级供水站为 I 级供水站，使得 II 级管道里程数最少。

其中，第一层更新后的决策变量仍是最优节点序列，用最优序列矩阵表示为：

$$A'_1 = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \\ \dots & \dots \\ v_{|E_1|,1} & v_{|E_1|,2} \\ v_{|E'_1|,1} & v_{|E'_1|,2} \end{bmatrix}, |E'_1| = |E_1| + 1 \quad (5)$$

其中, A' 是更新后的最优序列矩阵。 $|E'_1|, |E_1|$ 分别是更新后和更新前的边集合的模, 即边数。升级两个 II 级供水站为 I 级后, 增加一条边, 故满足 $|E'_1| = |E_1| + 1$ 。 $v_{i1}, v_{i2} (1 \leq i \leq |E_k|)$ 分别代表边 e_i 的起始节点和终止节点。

目标函数为 II 级管道的总里程

$$F_2(E) = \sum_{i=1}^{|E_2|'} cost(v_{i1}, v_{i2}), \quad (6)$$

其思维流程图如图 2 所示:



图 2 问题二思维流程图

5.2 模型的建立

5.3 模型的求解

5.4 实验结果及分析

结果如下表??所示:

表 1 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

XXXXXXX	XXXXXXX
XXXXXXX	909.80
XXXXXXX	852.60

由表1可知

其各个小车的运输细节图下图所示:

武汉理工大学 武汉理工大学

武汉理工大学 武汉理工大学

图 3 xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

六、 问题三模型的建立与求解

6.1 结果分析

七、 灵敏度分析

八、 模型的评价

8.1 模型的优点

(1)

(2)

8.2 模型的缺点

8.3 模型改进

参考文献

- [1] Jiang B, Zhang L. Research on minimum spanning tree based on prim algorithm[J]. Computer Engineering and Design, 2009, 13.
- [2] Graham R L, Hell P. On the history of the minimum spanning tree problem[J]. Annals of the History of Computing, 1985, 7(1): 43-57.
- [3] 丁建立, 陈增强, 袁著祉. 遗传算法与蚂蚁算法的融合 [J]. 计算机研究与发展, 2003, 40(9): 1351-1356.
- [4] 贺毅朝, 刘坤起, 张翠军, 等. 求解背包问题的贪心遗传算法及其应用 [J]. 计算机工程与设计, 2007, 28(11): 2655-2657.
- [5] 王磊, 潘进, 焦李成. 免疫算法 [D]. , 2000.
- [6] 卢开澄, 卢华明. 图论及其应用 [M]. 清华大学出版社有限公司, 20004.

附录 A 问题一、二代码及其可视化

Graph 类实现最小生成树算法

```
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import copy
import networkx as nx
from tqdm.notebook import tqdm

class Graph(object):
    def __init__(self, Matrix, add_edge=None, add_node=None):
        self.Matrix = Matrix
        self.nodenum = len(self.Matrix)
        self.edgenum = self.get_edgenum()
        self._weight_ = np.zeros((self.nodenum, self.nodenum))
        self.add_edge = add_edge
        self.add_node = add_node

    def get_edgenum(self):
        count = 0
        for i in range(self.nodenum):
            for j in range(i):
                if self.Matrix[i][j] > 0 and self.Matrix[i][j] < 9999:
                    count += 1
        return count

    def plot_matrix(self, pos=None, figsize=(15,15), title="Pipeline ONE"):
        plt.figure(figsize=(12,9))
        self._get_edge()
        G_nx = nx.Graph()
        G_nx2 = nx.Graph()
        if self.add_edge!=None:
            for i in range(self.nodenum):
                for j in range(self.nodenum):
                    if self._weight_[i, j]!=0 and i<13 and j<13:
                        G_nx.add_edge(i, j)
                    if self._weight_[i, j]!=0 and i>0 and j>0:
                        G_nx2.add_edge(i, j)
        else:
            for i in range(self.nodenum):
                for j in range(self.nodenum):
                    if self._weight_[i, j] != 0:
                        G_nx.add_edge(i, j)
```

```

if self.add_edge!=None:
    nx.draw_networkx(G_nx, pos[:len(self.add_edge)+1], alpha=0.85)
    nx.draw_networkx(G_nx2,pos,alpha=0.6,with_labels=False,node_color='slateblue',
    node_shape=".", node_size=100, style='dashed')
else:
    nx.draw_networkx(G_nx, pos, alpha=0.85)
    GG = nx.Graph()
    GG.add_node(0)
    nx.draw_networkx(GG, {0:pos[0]}, node_color='r',node_shape='*', node_size=1200)
plt.title(title)
plt.show() # display

def _get_edge(self):
    edge = self.prim()
    if self.add_node!=None:
        for i in edge:
            for id_j, j in enumerate(self.add_node):
                if i[0]==j:
                    i[0] = 13+id_j
                if i[1]==j:
                    i[1] = 13+id_j
            for k in edge:
                self._weight_[k[0],k[1]] = self.Matrix[k[0],k[1]]
    if self.add_node!=None:
        for i in edge:
            for id_j, j in enumerate(self.add_node):
                if i[0]==13+id_j:
                    i[0] = j
                if i[1]==13+id_j:
                    i[1] = j
        return self._weight_

def prim(self, first_node = 0):
    # 存储已选顶点，初始化时可随机选择一个起点
    select = [first_node]
    # 存储未选顶点
    candidate = list(range(0, self.nodenum))
    candidate.remove(first_node)
    if self.add_edge!=None:
        node = []
        select.remove(first_node)
        for i in self.add_edge:
            if i[0] not in node:
                node.append(i[0])
            if i[1] not in node:
                node.append(i[1])
        for i in node:

```

```

select.append(i)
if i in candidate:
    candidate.remove(i)
# 存储每次搜索到的最小生成树的边
edge = []+self.add_edge if self.add_edge!=None else []

def min_edge(select, candidate, graph):
    min_weight = np.inf
    v, u = 0, 0
    for i in select:
        for j in candidate:
            if min_weight > graph[i][j]:
                min_weight = graph[i][j]
                v, u = i, j
    return v, u

num = len(self.add_edge)+1 if self.add_edge!=None else 1
for i in range(num, self.nodenum):
    v, u = min_edge(select, candidate, self.Matrix)
    edge.append([v, u])
    select.append(u)
    candidate.remove(u)
    if self.add_node!=None:
        for i in edge:
            for id_j, j in enumerate(self.add_node):
                if i[0]==13+id_j:
                    i[0] = j
                if i[1]==13+id_j:
                    i[1] = j
    return edge

```

问题一代码实现及可视化

```

def distance(x1,y1,x2,y2):
    return np.sqrt((x1-x2)**2+(y1-y2)**2)

def fix(x):
    if x.startswith('A'):
        return 0
    return 1 if x.startswith('V') else 2

def get_xy(i,j=0, add_node = None):
    pos = [] # 元组中的两个数字是第i（从0开始计数）个点的坐标
    if add_node==None:
        for k in range(j, i):

```

```

pos.append((data['X坐标'].loc[k], data['Y坐标'].loc[k]))
else:
    for k in range(j, i):
        pos.append((data['X坐标'].loc[k], data['Y坐标'].loc[k]))
    for k in add_node:
        pos.append((data['X坐标'].loc[k], data['Y坐标'].loc[k]))
    return pos

weight_array = np.zeros((181,181))
data = pd.read_excel('/content/drive/My Drive/competitions/CMCM/demo1/data.xlsx')
data['类型'] = data['类型'].apply(lambda x:fix(x))

# 初始化权重矩阵
for i in tqdm(range(181)):
    for j in range(181):
        point_i = data[data['序号']==i]
        point_j = data[data['序号']==j]
        weight_array[i][j] = distance(point_i['X坐标'].values,
        point_i['Y坐标'].values,
        point_j['X坐标'].values,
        point_j['Y坐标'].values)
    if (i==0 and j>12) or (j==0 and i>12):
        weight_array[i][j]=0
    weight_array[weight_array==0] = 10000

weight_array_A = weight_array[:13,:13]
G_A = Graph(weight_array_A)
pos_A = get_xy(G_A.nodenum)
edge_A = G_A.prim(first_node=0)
G_A.plot_matrix(pos_A)

G = Graph(weight_array, edge_A)
print('节点数据为%d, 边数为%d\n'%(G.nodenum, G.edgenum))
pos = get_xy(G.nodenum)
edge = G.prim()
G.plot_matrix(pos, title="Pipeline TWO")

sum = 0
for p in edge:
    i,j=p[0],p[1]
    sum = sum+weight_array[i][j]
sum

```

问题二代码实现及可视化

```

_max = (0,0,0)
_max2 = (0,0,0)
for ed in edge:
    i,j = ed[0],ed[1]
    if _max[0] < weight_array[i][j] and not (i<13 and j<13):
        _max = (weight_array[i][j], i, j)
    for ed in edge:
        i,j = ed[0],ed[1]
        if i!=126 and j!=125:
            if _max2[0] < weight_array[i][j] and not (i<13 and j<13):
                _max2 = (weight_array[i][j], i, j)

_max, _max2

_weight_ = G._get_edge()
plt.figure(figsize=(12,9))
G_nx = nx.Graph()
G_nx2 = nx.Graph()
G_nx3 = nx.Graph()
G_nx4 = nx.Graph()
GG = nx.Graph()
for i in range(G.nodenum):
    for j in range(G.nodenum):
        if _weight_[i, j]!=0 and i<13 and j<13:
            G_nx.add_edge(i, j)
        if _weight_[i, j]!=0 and i>0 and j>0:
            G_nx2.add_edge(i, j)
        # G_nx3.add_edge(126, 125)
        # G_nx4.add_edge(88, 89)
        G_nx3.add_node(125)
        G_nx4.add_node(89)

nx.draw_networkx(G_nx3, {125:pos[125]},node_color='r',
node_size=300, node_shape='.',with_labels=False, style='dashed')
nx.draw_networkx(G_nx4, {89:pos[89]},node_color='r',
node_size=300, node_shape='.',with_labels=False, style='dashed')

nx.draw_networkx(G_nx, pos[:len(G.add_edge)+1], alpha=0.85)
nx.draw_networkx(G_nx2,pos,alpha=0.6,with_labels=False,node_color='slateblue',
node_shape=".", node_size=100, style='dashed')
GG = nx.Graph()
GG.add_node(0)
nx.draw_networkx(GG, {0:pos[0]}, node_color='r',node_shape='*', node_size=1200)

plt.title("Upgrade Two Secondary Pipes")
plt.show()

```


附录 B 问题三代码及其可视化

改进 prim 算法

```
def prim_pro(Matrix, add_edge, first_node=0, cost=40):
    nodenum = len(Matrix)

    select = [first_node]
    candidate = list(range(0, nodenum))
    candidate.remove(first_node)
    node = []
    for i in add_edge:
        if i[0] not in node:
            node.append(i[0])
        if i[1] not in node:
            node.append(i[1])
    node_A = {}
    for i in node:
        node_A[i] = [0, [i]] # 存储形式是[dis, [v,u1,u2...]]
    for i in node:
        select.append(i)
        if i in candidate:
            candidate.remove(i)
    # 存储每次搜索到的最小生成树的边
    edge = []+add_edge
    loss = []

    def min_edge(select, candidate, graph):
        min_weight = np.inf
        v, u = 0, 0
        for i in select:
            for j in candidate:
                if min_weight > graph[i][j] and (i,j) not in loss:
                    min_weight = graph[i][j]
                    v, u = i, j
        for x in node:
            if v in node_A[x][1]:
                if node_A[x][0]+min_weight<=cost:
                    node_A[x][0] = node_A[x][0]+min_weight
                    node_A[x][1].append(u)
            else:
                loss.append((v,u))
        return False, v, u
    return True, v, u

    num = len(add_edge)+1
    test = 0
```

```

while test<num*(nodenum-num):
    flag, v, u = min_edge(select, candidate, Matrix)
    if flag:
        edge.append([v, u])
        select.append(u)
        candidate.remove(u)
    else:
        test = test+1
return edge, candidate, node_A

```

免疫遗传算法及其可视化

```

COST = 40
e, c, node_A = prim_pro(weight_array, edge_A, cost=COST)
_size = len(c)
_size#, c

_weight_ = np.zeros((181,181))
for k in e:
    _weight_[k[0],k[1]] = weight_array[k[0],k[1]]
plt.figure(figsize=(12,9))
G_nx = nx.Graph()
G_nx2 = nx.Graph()
G_nx3 = nx.Graph()

for i in range(181):
    for j in range(181):
        if _weight_[i, j]!=0 and i<13 and j<13:
            G_nx.add_edge(i, j)
        if _weight_[i, j]!=0 and i>0 and j>0:
            G_nx2.add_edge(i, j)
    nx.draw_networkx(G_nx, pos[:len(edge_A)+1], alpha=0.85)
    nx.draw_networkx(G_nx2, pos, alpha=0.6, with_labels=False, node_color='slateblue',
        node_shape=".", node_size=100, style='dashed')
    GG = nx.Graph()
    GG.add_node(0)
    nx.draw_networkx(GG, {0:pos[0]}, node_color='r', node_shape='*', node_size=1200
        , label='Central pipeline')
    p = {}
    for i in c:
        G_nx3.add_node(i)
        p[i] = pos[i]
    nx.draw_networkx(G_nx3, p, node_color='purple', node_size=120, with_labels=False,
        node_shape=".", label='Isolated point')

```

```

plt.show() # display

def fun(node_B, learning = 100):
    node_B_index = []
    for i in range(_size):
        if node_B[i]:
            node_B_index.append(i+13)
    node_A_index = list(range(0, 13))+node_B_index
    weight_array_A = np.zeros((len(node_A_index),len(node_A_index)))
    for id_i,i in enumerate(node_A_index):
        for id_j,j in enumerate(node_A_index):
            weight_array_A[id_i][id_j] = weight_array[i][j]
    G_A = Graph(weight_array_A)
    edge_AA = G_A.prim(first_node=0)
    e, c, node_A = prim_pro(weight_array, edge_AA, cost=COST)
    return np.sum(node_B)+learning*len(c)

def mutate(node_B1, mu = 0.05):
    l = len(node_B1)
    for i in range(l):
        p = np.random.random()
        if p < mu:
            node_B1[i] = 0 if node_B1[i]==1 else 1
    return node_B1

def cross(node_B1,node_B2):
    le = round(len(node_B1)/3)
    temp = node_B1[:le].copy()
    node_B1[:le] = node_B2[:le]
    node_B2[:le] = temp
    return node_B1,node_B2

def select(geti):
    sss = []
    for i in tqdm(geti):
        sss.append(fun(i))
    idx = [i for i,v in sorted(enumerate(sss), key=lambda x:x[1])]
    geti2 = []
    for i in idx:
        geti2.append(geti[i])
    le = round(len(geti)*3/4)
    # le = len(geti)-1
    g = []
    for i in range(le):
        g.append(geti2[i])
    return g, sss, idx

```

```

add_node = [89]
node_A_index = list(range(0, 13))+add_node
weight_array_A = np.zeros((len(node_A_index),len(node_A_index)))
for id_i,i in enumerate(node_A_index):
for id_j,j in enumerate(node_A_index):
weight_array_A[id_i][id_j] = weight_array[i][j]
G_A = Graph(weight_array_A,add_node=add_node)
edge_AA = G_A.prim(first_node=0)

pos_A = get_xy(13,add_node=add_node)
G_A.plot_matrix(pos_A)
e, c, node_A = prim_pro(weight_array, edge_AA, cost=COST)

_weight_ = np.zeros((181,181))
for k in e:
_weight_[k[0],k[1]] = weight_array[k[0],k[1]]
plt.figure(figsize=(12,9))
G_nx = nx.Graph()
G_nx2 = nx.Graph()
G_nx3 = nx.Graph()
pos_A = get_xy(13,add_node=add_node)
for i in range(181):
for j in range(181):
if _weight_[i, j]!=0 and i<13 and j<13:
G_nx.add_edge(i, j)
if _weight_[i, j]!=0 and i>0 and j>0:
G_nx2.add_edge(i, j)
nx.draw_networkx(G_nx, pos_A, alpha=0.85)
nx.draw_networkx(G_nx2,pos,alpha=0.6,with_labels=False,node_color='slateblue',
node_shape=".", node_size=100, style='dashed')
GG = nx.Graph()
GG.add_node(0)
nx.draw_networkx(GG, {0:pos[0]}, node_color='r',node_shape='*', node_size=1200
,label='Central pipeline')
p = {}
for i in add_node:
G_nx3.add_node(i)
p[i] = pos[i]
nx.draw_networkx(G_nx3, p, node_color='gold', node_size=150,with_labels=False,
node_shape=".",label='Isolated point')

plt.show() # display

```