

# 武汉理工大学

数学建模暑期培训论文

第 3 题

基于 xxxxxxxx 模型

---

第 10 组

姓名

刘子川（组长）

程宇

祁成

方向

编程

建模

写作

2020 年 8 月 14 日

## 摘要

控制高压油管的压力变化对减小燃油量偏差,提高发动机工作效率具有重要意义。本文建立了基于质量守恒定理的微分方程稳压模型,采用二分法、试探法以及自适应权重的蝙蝠算法对模型进行求解。//

针对问题一,建立基于质量守恒定律的燃油流动模型,考察单向阀开启时间对压力稳定性的影响。综合考虑压力与弹性模量、密度之间的关系,提出燃油压力-密度微分方程模型和燃油流动方程。本文采用改进的欧拉方法对燃油压力-密度微分方程求得数值解;利用二分法求解压力分布。综合考虑平均绝对偏差等反映压力稳定程度的统计量,求得直接稳定于 100MPa 的开启时长为 **0.2955ms**,在 2s、5s 内到达并稳定于 150MPa 时开启时长为 **0.7795ms**、**0.6734ms**,10s 到达并稳定于 150MPa 的开启时长存在多解。最后对求解结果进行灵敏度分析、误差分析。//

针对问题二,建立基于质量守恒定律的泵-管-嘴系统动态稳压模型,将燃油进入和喷出的过程动态化处理。考虑柱塞和针阀升程的动态变动,建立喷油嘴流量方程和质量守恒方程。为提高角速度求解精度,以凸轮转动角度为固定步长,转动时间变动步长,采用试探法粗略搜索与二分法精细搜索的方法求解,求得凸轮最优转动角速度 **0.0283rad/ms** (转速 **270.382 转/分钟**),并得到该角速度下高压油管的密度、压力周期性变化图。对求解结果进行误差分析与灵敏度分析,考察柱塞腔残余容积变动对高压油管压力稳态的影响。//

针对问题三,对于增加一个喷油嘴的情况,改变质量守恒方程并沿用问题二的模型调整供、喷油策略,得到最优凸轮转动角速度为 **0.0522rad/ms** (**498.726 转/分钟**);对于既增加喷油嘴又增加减压阀的情况,建立基于自适应权重的蝙蝠算法的多变量优化模型,以凸轮转动角速度、减压阀开启时长和关闭时长为参数,平均绝对偏差 MAD 为目标,在泵-管-嘴系统动态稳压模型的基础上进行求解,得到最优参数:角速度 **0.0648 rad/ms** (**619.109 转/分钟**)、减压阀的开启时长 **2.4ms** 和减压阀的关闭时长 **97.6ms**。//

本文的优点为:1. 采用试探法粗略搜索与二分法精细搜索结合的方法,降低了问题的求解难度。2. 以凸轮转动角度为固定步长,对不同角速度按照不同精度的时间步长求解,大大提高了求解的精确度。3. 针对智能算法求解精度方面,采用改进的蝙蝠算法,使速度权重系数自适应调整,兼顾局部搜索与全局搜索能力。

关键词: 微分方程 微分方程 微分方程 微分方程

# 目录

一、 问题重述 .....	1
1.1 问题背景 .....	1
1.2 问题概述 .....	2
二、 模型假设 .....	2
三、 符号说明 .....	2
四、 问题一模型的建立与求解 .....	2
4.1 问题描述与分析 .....	2
4.1.1 决策变量 .....	3
4.1.2 约束条件 .....	3
4.1.3 目标函数 .....	3
4.2 模型的建立 .....	3
4.3 模型的求解 .....	4
4.4 实验结果及分析 .....	4
五、 问题二模型的建立与求解 .....	4
5.1 问题描述与分析 .....	4
5.2 模型的建立 .....	5
5.3 模型的求解 .....	6
5.4 灵敏度分析 .....	8
六、 问题三模型的建立与求解 .....	10
6.1 结果分析 .....	10
七、 灵敏度分析 .....	10
八、 模型的评价 .....	10
8.1 模型的优点 .....	10
8.2 模型的缺点 .....	10
8.3 模型改进 .....	10
附录 A 数据可视化的实现 .....	12

# 一、问题重述

## 1.1 问题背景

由部署在监控区域的大量低成本微传感器节点组成的网络系统，称为无线传感器网络（Wireless Sensor Network, WSN）。WSN 节点通过无线信道相互通信，协同感知，收集和处理监控区域内传感对象的信息，然后将信息发送给观察者<sup>[1]</sup>。因此，WSN 广泛应用于自然灾害预警，环境监测，战场监视等领域<sup>[2]</sup>。能源对无线传感器网络的发展至关重要。传感器节点通常由装载电池或超级电容器供电，但由于传感器节点尺寸较小，装载的电池容量有限，有时因为维护成本过高而无法延长无线传感器网络的生命周期，这限制了无线传感器网络的发展和应用。前人采用能量平衡<sup>[4, 5]</sup>，移动传感器<sup>[6, 7]</sup>和移动收集器等方案来节省能量从而达到延长网络生命周期的目的。然而，这些方案仅降低能量消耗率，不能真正延长 WSN 的生命周期。

而在按需充电结构的无线可充电传感器网络（Wireless Rechargeable Sensor Network, WRSN）中，节点主动监视其自身的剩余能量，当其能量水平低于某个阈值时，向 BS 发送充电请求。BS 根据某些充电规则对请求节点建立充电调度队列，并将该调度发送给 WCD 从而引导 WCD 为节点进行充电服务<sup>[3]</sup>，如图1所示。传统的调度方案只考虑时间，空间或两者混合因素。由于受到空间、时间和能量因素的制约，传统的调度方案仅能满足少量的充电请求节点，这导致 WRSN 在繁忙的网络环境中生命周期比较短<sup>[3]</sup>。为了减小移动充电器在路上的能量消耗，需要合理地规划移动充电器的充电路线。

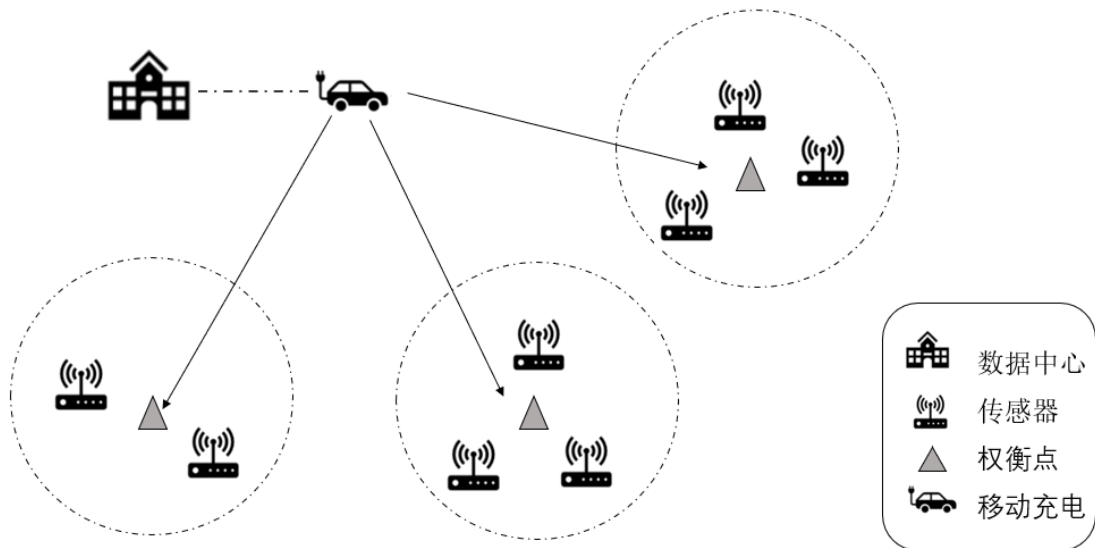


图 1 无线可充电传感器网络架构示意图

## 1.2 问题概述

围绕相关附件和条件要求，研究一个或多个移动充电器在各传感器间的充电路线方案，依次提出以下问题：

**问题一：**当只派出一个移动充电器时，如何规划移动充电器的充电路线才能最小化移动充电器在路上的能量消耗。

**问题二：**在只派出一个移动充电器的情况下，若采用问题一中规划出来的充电路线，每个传感器的电池的容量应至少是多大才能保证整个系统一直正常运行？

**问题三：**为了提高充电效率，同时派出 4 个移动充电器进行充电，在这种情况下应该如何规划移动充电器的充电路线以最小化所有移动充电器在路上的总的能量消耗？每个传感器的电池的容量应至少是多大才能保证整个系统一直正常运行？

## 二、模型假设

- (1) 假设充电场景不属于时变充电方案，即传感器解节点充电时单位时间的收发数据能量不随时间改变而改变。
- (2) 考虑移动充电器 WCV 可以同时为多个节点进行充电，其具有一定的充电范围，并且在此范围内充电场的能级随距离增大而递减。
- (3)
- (4)

## 三、符号说明

符号	说明
$P_n$	20 个站点
$P_n$	20 个站点
$P_n$	20 个站点

注：表中未说明的符号以首次出现处为准

## 四、问题一模型的建立与求解

### 4.1 问题描述与分析

问题一要求充电路线最小化移动充电器在路上的能量消耗。在周期性场景中，均以最大化驻站空闲时间比为目标，移动充电设备均从服务站（即维护站）出发，完成充电活动后回到服务站。Kurs 等人<sup>[4]</sup>最先提出对网络中所有节点进行固定周期  $T$  的遍历充

电模型。移动无线充电设备 (Wireless Charging Vehicle, WCV) 从服务站出发，依次为网络中所有节点进行点对点的无线充电，最终又回到服务站。

根据无线传感器网络模型，每个固定位置的基站传感器节点具有通信圆域，其半径为  $R$ ，无线充电设备在通信圆域内以固定速率  $r$  充电，

#### 4.1.1 决策变量

#### 4.1.2 约束条件

约束条件是  $r$

#### 4.1.3 目标函数

目标函数是转折点之间的距离和，

### 4.2 模型的建立

$$d(p_i, p_j) = |x_i - x_j| + |y_i - y_j|,$$

### 4.3 模型的求解

---

**Algorithm 1:** Procedure of Apriori

---

**Input:** item data base:  $D$   
minimum Support threshold:  $Sup_{min}$   
minimum Confidence threshold:  $Conf_{min}$   
**Output:** frequent item sets  $F$

```
1 Initialize  
   iteration  $t \leftarrow 1$   
   The candidate FIS:  $C_t = \emptyset$   
   The length of FIS:  $length = 1$   
   for  $i=1$  to  $sizeof(D)$  do  
2      $I_i = D(i)$   
      $n = sizeof(I_i)$   
     for  $j=1$  to  $n$  do  
3       if  $I_i(j) \notin C_t$  then  
4          $C_t = C_t \cup I_i(j)$   
5       end  
6     end  
7 end  
8  $F_t = \{f | f \in C_t, Sup(f) > Sup_{min}\}$   
   while  $F \neq \emptyset$  do  
9      $t = t + 1$   
      $length = length + 1$   
      $C_t \leftarrow$  all candidate of FIS in  $F_{t-1}$   
      $F_t = \{f | f \in C_t, (Sup(f) > Sup_{min}) \cap (Conf(f) > Conf_{min})\}$   
10 end  
11 return  $F_{t-1}$ 
```

---

### 4.4 实验结果及分析

## 五、问题二模型的建立与求解

### 5.1 问题描述与分析

问题二要求在问题一求得最优充电路线的基础上，给出传感器最小电池容量分布。考虑到固定周期为  $T$  的遍历充电模型 [文献 10] 中能量得失分别与时间成正比，本节将充电周期划分为驻留期和移动期。一个周期内，对任意一个传感器，移动期和所有驻留期都以已知恒定速率耗电，仅在该传感器停驻的时期内以已知恒定速率充电。极限情况下，传感器能量消耗与补给的供需平衡对应传感器正常工作时的最小容量。分析能量得失去向和划分周期后，建立极限情况下的能量流动方程组，可知该模型是单值定解问题。求解方程组，可以求得传感器停留时间分布，推导停留时间和传感器电池容量的线性关系，可以获取最小能耗对应的传感器最小电池容量分布。其思维流程图如图 2 所示：

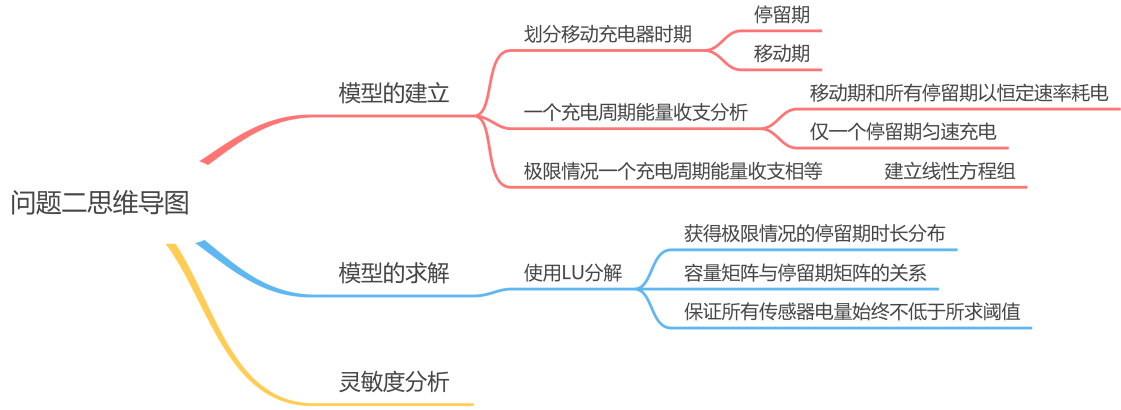


图 2 问题二思维流程图

## 5.2 模型的建立

这个地方可以细化一下。。。。。

周期为  $T$  的遍历充电模型中，移动充电器循环遍历预先规划的路径，在预定区域向传感器充电。本节将充电周期  $T$  划分为驻留期  $T_{park}$  和移动期  $T_{traverse}$ ，驻留期  $T_{park}$  移动充电器已经进入并静止于传感器强耦合磁共振圆域，完成移动充电器向目标传感器匀速充电的过程；移动期  $T_{traverse}$ ，移动充电器匀速移动，移动充电器停止供电。基于模型假设，不考虑驻留期和移动期之间的时间间隔。根据能量得失去向和划分周期的关系，可列出无线可充电传感器网络正常工作时的能量流动表达式：

$$v_{consume} \cdot (T_{traverse} + \sum_i T_{park}^i) \leq v_{supply} \cdot T_{park}^i. \quad (1)$$

式 (???) 左端和右端分别用能量流动速度与能量传递时间的乘积表示耗能和供能值。

可知当所有传感器按最小电池容量分布时，传感器从移动充电器获得能量与自身消耗能量相等，即是无线可充电传感器网络正常工作的极限情况。结合已知的相关数据，对每个传感器  $s_i$ ，有关于移动充电器在传感器  $s_i$  处停留时间  $t_i$  的  $n$  元线性方程组：

$$c_j \cdot (L/v + \sum_{i=1}^n t_i) = r \cdot t_j (j = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

其中， $n$  是传感器数目， $L$  是问题一解得最小能量消耗对应的总里程， $v$  是移动充电器的移动速度， $c_j$  是第  $j$  个传感器已知的能量消耗速率， $r$  是充电速率。式 (1) 左右分别代表一个充电周期内消耗和补给的电量，满足传感器能量消耗与补给的供需平衡。

求解这个线性方程组，可得移动充电器在所有传感器的停留时间  $t_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，即驻留期分布。为了满足使用要求，传感器电量必须始终大于阈值  $f$ ，同时保证所有传感器电量不小于  $f$  的使用要求。一个周期  $T$  内，传感器电池容量  $T_{threshold}$  不低于驻



留期  $T_{park}$  补充的能量  $r \cdot T_{park}$ ，则无线可充电传感器网络正常工作时电量分布与驻留期的线性关系可表示为:

$$\begin{cases} v_1 \geq f + r \cdot t_1 \\ v_2 \geq f + r \cdot t_2 \\ \vdots \\ v_n \geq f + r \cdot t_n \end{cases}, \quad (3)$$

极限情况取等号，即传感器电池容量矩阵  $\mathbf{V}_{threshold}$  与驻留期矩阵  $\mathbf{T}_{threshold}$  关系为

$$\mathbf{V}_{threshold} = \mathbf{F} + r \cdot \mathbf{T}_{threshold}, \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{F}$  是元素全为传感器电量阈值  $f$  的规格为  $n \times 1$  的列向量,  $\mathbf{T}_{threshold}$  是  $t_1, t_2, \dots, t_n$  按顺序构成的规格为  $n \times 1$  的列向量,  $r$  是充电速率。

### 5.3 模型的求解

再完善一下内容。。。对于单值定解问题，使用矩阵分解方法分解求解。目前矩阵分解方法主要有  $LU$  分解、 $LUP$  分解、谱分解、 $Cholesky$  分解、 $QR$  分解、奇异值分解等方法。考虑到问题二目标矩阵  $A$  具有阶数高、是  $n$  阶方阵、 $A$  的前  $rank(A)$  阶顺序主子式不为 0 等特征，可以看出是一阶线性方程组，考虑到左边方阵直接求逆计算复杂度较大，故化简后使用  $LU$  分解法求解。 $LU$  分解的最大计算复杂度是  $O(n^3)$ ，具有无需判定矩阵是否正定，浮点数操作总量都在  $O(n^2)$ （双重循环）等优点。

化简 (1) 式，得矩阵方程

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_{threshold} = -L/v \cdot \mathbf{b}, \quad (5)$$

或表示为

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{r}{c_1} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 - \frac{r}{c_2} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 - \frac{r}{c_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = -\frac{L}{v} \begin{bmatrix} 1/c_1 \\ 1/c_2 \\ \vdots \\ 1/c_n \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中  $t_i (i = 1, 2, \dots, n)$  是极限情况时，无线充电器在传感器  $s_i$  处的停留时间， $c_i (i = 1, 2, \dots, n)$  表示传感器  $s_i$  能量消耗速率， $r$  是固定的充电速率。

根据  $LU$  分解原理，有

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = -\mathbf{L}/v \cdot \mathbf{b}, \quad (7)$$

$$s.t. \begin{cases} y_1 = b_1 \\ y_k = b_k - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}y_j, k = 2, 3, \dots, n, \end{cases} \quad (8)$$

$$\mathbf{U}\mathbf{T}_{threshold} = -\mathbf{L}/v \cdot \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}, \quad (9)$$

$$s.t. \begin{cases} y_n = y_n/u_{nn} \\ t_k = (y_k - \sum_{j=k+1}^n u_{kj}t_j)/u_{kk}, k = n-1, n-2, \dots, 1. \end{cases} \quad (10)$$

结果如表1所示：

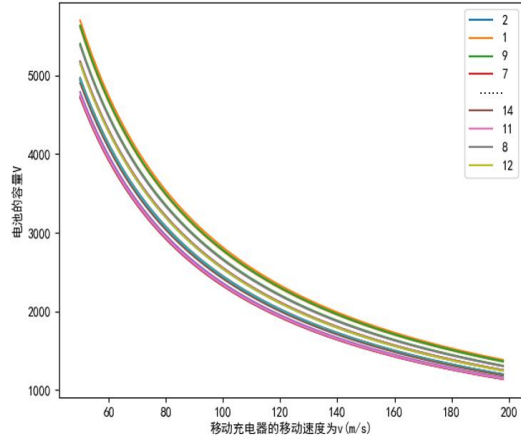
表 1 传感器电池最小容量分布

传感器序号	传感器最小电池容量	传感器序号	传感器最小电池容量
2	5001.24202643	3	4801.81519446
1	5533.04691166	4	5023.40056331
9	4801.81519446	22	5466.57130101
7	5023.40056331	28	5023.40056331
6	4602.3883625	24	4801.81519446
14	4801.81519446	23	4580.22982561
11	5222.82739527	21	5023.40056331
8	4823.97373135	29	5466.57130101
12	4801.81519446	26	4580.22982561
15	5023.40056331	25	5023.40056331
27	4801.81519446	18	4757.49812069
16	5444.41276412	19	4602.3883625
13	5244.98593216	20	5222.82739527
10	4801.81519446	17	5001.24202643
5	4646.70543627		

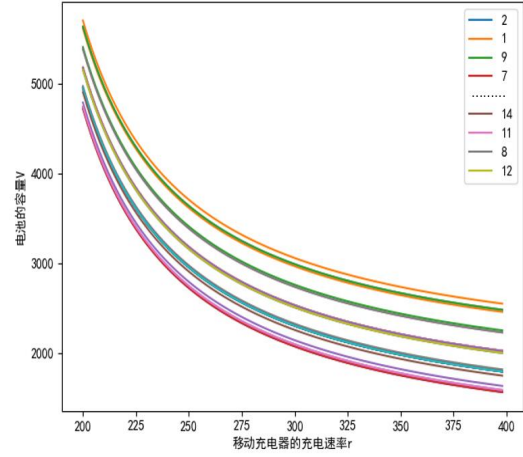
由表1可知

#### 5.4 灵敏度分析

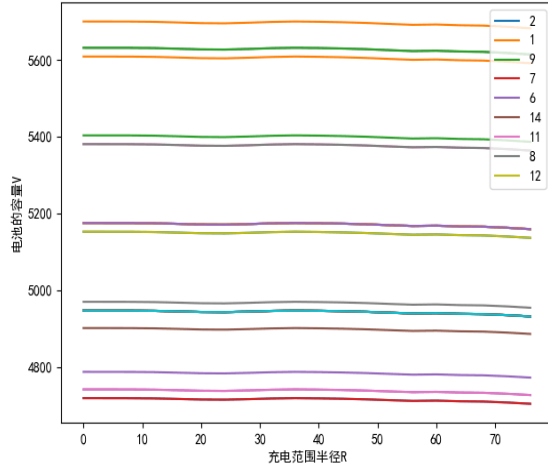
改变移动充电器的移动速度、充电速率、能量圆域半径和传感器电量阈值，观察 30 个传感器电池容量的变化情况。



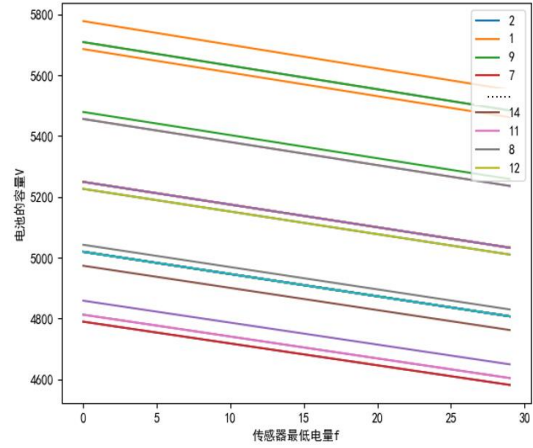
(a) 最大 25km, 升级 20 个水管



(b) 最大 30km, 升级 11 个水管



(c) 最大 35km, 升级 7 个水管



(d) 最大 40km, 升级 1 个水管

图 3 不同二级管道铺设最大代价

根据图3分析可知, 0 到 70m 范围内能量圆域半径  $R$  变化对传感器电池容量分布几乎无影响, 而移动充电器的移动速度  $v$ 、充电速率  $r$  和传感器电量阈值  $f$  的增大会引起所有传感器电池容量下降, 其中传感器电量阈值  $f$  增大引起的电池容量降低效应是线性的, 这是由于移动充电器充电速率  $r$  远大于给定的传感器能量消耗速率  $c_j (j = 1, 2, \dots, 29)$ , 使得式 (5) 对角元系数为负值, 驻留期时间  $t_i (i = 1, 2, \dots, 29)$  线性减少效应大于传感器电量阈值  $f$  的增大效应。

## 六、 问题三模型的建立与求解

### 6.1 结果分析

## 七、 灵敏度分析

## 八、 模型的评价

### 8.1 模型的优点

(1)

(2)

### 8.2 模型的缺点

### 8.3 模型改进

## 参考文献

- [1] Othman M F, Shazali K. Wireless sensor network applications: A study in environment monitoring system[J]. Procedia Engineering, 2015, 41: 1204-1210.
- [2] Borges L M, Velez F J, Lebres A S. Survey on the characterization and classification of wireless sensor network applications[J]. IEEE Communications Surveys & Tutorials, 2014, 16(4): 1860-1890.
- [3] Xie L, Shi Y, Hou Y T, et al. Making sensor networks immortal: An energy-renewal approach with wireless power transfer[J]. IEEE/ACM Transactions on networking, 2012, 20(6): 1748-1761.
- [4] Tarng W, Ou K L, Huang K J, et al. Applying cluster merging and dynamic routing mechanisms to extend the lifetime of wireless sensor networks[J]. International Journal of Communication Networks and Information Security, 2011, 3(1): 8.
- [5] 曲立军, 党鑫, 武继刚. 无线传感器网络中的充电调度算法 [J]. 计算机与数字工程, 2017, 45(2): 319-326.
- [6] Butler Z, Rus D. Controlling mobile sensors for monitoring events with coverage constraints[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA'04. 2004. IEEE, 2004, 2: 1568-1573.
- [7] Yao W, Li M, Wu M Y. Inductive charging with multiple charger nodes in wireless sensor networks[C]//Asia-Pacific Web Conference. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006: 262-270.

## 附录 A 数据可视化的实现

第一问画图-python 源代码

---

第二问画图-python 源代码

---