

## IQ DEMODULATION

$$S(t) = I(t) + iQ(t) = r(t)e^{i\varphi(t)} , \quad i^2 = -1 ,$$

d.h.

$$\operatorname{Re} S(t) = I(t) , \quad \operatorname{Im}(t) = Q(t) \quad , \quad r(t) = |S(t)| , \quad \varphi(t) = \arg S(t) .$$

Diskrete *samples*, *sample rate*  $1/T_s$ :  $S_n = S(nT_s)$ .

Sei  $f$  differenzierbar,

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} .$$

Verschiedene Approximationen der Ableitung von  $f_n = f(nT_s)$ :

$$d_1 f_n = \frac{f_{n+1} - f_n}{T_s} \quad , \quad d_2 f_n = \frac{f_n - f_{n-1}}{T_s} \quad , \quad d_3 f_n = \frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2T_s}$$

### FM Demod.

$$\varphi(t) = \arg S(t) = \arctan \frac{Q(t)}{I(t)} \quad ,$$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{d}{dt} \varphi(t) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{Q(t)}{I(t)} \right]^2} \frac{d}{dt} \frac{Q(t)}{I(t)} = \frac{Q'(t)I(t) - Q(t)I'(t)}{I^2(t) + Q^2(t)} \\ &= \frac{Q'(t)I(t) - Q(t)I'(t)}{|S(t)|^2} \end{aligned} \quad (*)$$

d1) Approximation (\*) linke Seite,  $\varphi'(nT_s) \approx d_1 \varphi_n = \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{T_s}$ :

$$S_{n+1} \overline{S}_n = r_{n+1} r_n e^{i(\varphi_{n+1} - \varphi_n)} = I_{n+1} I_n + Q_{n+1} Q_n + i(Q_{n+1} I_n - I_{n+1} Q_n)$$

$$\begin{aligned} \leadsto \quad \varphi_{n+1} - \varphi_n &= \arg(S_{n+1} \overline{S}_n) = \arctan \frac{\operatorname{Im}(S_{n+1} \overline{S}_n)}{\operatorname{Re}(S_{n+1} \overline{S}_n)} \\ &= \arctan \frac{Q_{n+1} I_n - I_{n+1} Q_n}{I_{n+1} I_n + Q_{n+1} Q_n} \end{aligned}$$

d2) Approximation (\*) recht Seite,  $Q'(nT_s) \approx d_1 Q_n$ ,  $I'(nT_s) \approx d_1 I_n$ :

$$\frac{(Q_{n+1} - Q_n)I_n - Q_n(I_{n+1} - I_n)}{|S_n|^2} = \frac{Q_{n+1} I_n - Q_n I_{n+1}}{|S_n|^2} = \frac{\operatorname{Im}(S_{n+1} \overline{S}_n)}{|S_n|^2}$$

d1) & d2)  $|\varphi_{n+1} - \varphi_n| \ll \pi/2$ :

$$\frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{T_s} \approx \frac{\operatorname{Im}(S_{n+1} \overline{S}_n)}{T_s |S_n|^2} = \frac{r_{n+1}}{r_n} \frac{\sin(\varphi_{n+1} - \varphi_n)}{T_s}$$

d3) Wenn Signal FM-moduliert, dann  $|S(t)| = r = \text{const}$ ,

$$\varphi_{n+1} - \varphi_n \approx \frac{1}{r^2} \operatorname{Im}(S_{n+1} \overline{S}_n) = \sin(\varphi_{n+1} - \varphi_n)$$

## FSK & MSK.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} s(t) \quad , \quad s(t) &= r(t) e^{i(\omega_c t + \varphi(t))} \quad , \quad \omega_c = 2\pi f_c \\ g(t) &= e^{-i\omega_c t} s(t) = S(t) = I(t) + iQ(t) = r(t) e^{i\varphi(t)} \end{aligned}$$

Betrachte *Frequency Shift Keying* (FSK) mit Modulations-Index  $h$ , d.h. ist  $T = MT_s$  die Symbollänge, so ändert sich die Phase im Intervall  $[nT, (n+1)T]$  um  $\pm h\pi$ . In den Intervallen ist die Frequenz relativ zu  $\omega_c = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$  entweder  $f_1 = -h/(2T)$  oder  $f_2 = +h/(2T)$ .

Bei *Minimum Shift Keying* (MSK) ist der Modulations-Index  $h = 1/2$ ,  $f_1$  und  $f_2$  unterscheiden sich um  $\Delta f = 1/(2T)$ , die Phase ändert sich in  $[nT, (n+1)T]$  um  $\pm\pi/2$ .

Sei  $S(0) = 1$ , d.h.  $\varphi(0) = 0$ , und  $|r(t)| = 1$ . Dann gilt

$$\varphi(nT) = k_n \frac{\pi}{2} \quad , \quad k_n \in \{0, 1, 2, 3\}$$

wobei  $x_{n+1} = k_{n+1} - k_n \in \{1, -1\}$ . Sei

$$S_n = I_n + iQ_n = e^{ik_n \frac{\pi}{2}} = i^{k_n} \in \{1, i, -1, -i\} .$$

Es gilt

$$S_n^2 = I_n^2 - Q_n^2 + i2I_nQ_n = (i^2)^{k_n} = (-1)^{k_n} \rightsquigarrow I_nQ_n = 0 \quad , \quad S_n^2 \in \{1, -1\} .$$

Phasendifferenz aufeinanderfolgender Konstellationspunkte  $\angle(S_n, S_{n+1}) = \pm\pi/2$ :

$$\begin{aligned} S_{n+1}\bar{S}_n &= e^{i(k_{n+1}-k_n)\frac{\pi}{2}} = I_{n+1}I_n + Q_{n+1}Q_n + i(Q_{n+1}I_n - I_{n+1}Q_n) \\ &= e^{ix_{n+1}\frac{\pi}{2}} = ix_{n+1} = i(Q_{n+1}I_n - I_{n+1}Q_n) \end{aligned}$$

Daher folgt

$$S_n \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad S_{n+1} \in i\mathbb{R} , \quad (*)$$

und wegen  $I_nQ_n = 0$  ist entweder  $x_{n+1} = Q_{n+1}I_n$  oder  $x_{n+1} = -I_{n+1}Q_n$ .

O.E. sei  $\varphi(0) = 0$ , d.h.  $S_0 = 1$ .

Dann ist  $S_{2n} \in \{1, -1\}$  und  $S_{2n+1} \in \{i, -i\}$ , denn

$$S_n\bar{S}_{n-1} = ix_n \rightsquigarrow S_n = ix_n S_{n-1} = i^2 x_n x_{n-1} S_{n-2} = \dots = i^n \prod_{j=1}^n x_j .$$

Da  $I_0 = 1$ , gilt mit  $(*)$  zudem  $Q_0 = 0 = Q_{2n}$  und  $I_1 = 0 = I_{2n+1}$ , daher

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= I_{2n}Q_{2n+1} \\ x_{2n+2} &= -Q_{2n+1}I_{2n+2} . \end{aligned}$$

In  $((2n-1)T, (2n+1)T)$  gilt  $\operatorname{Re} S(t) = I(t) \leq 0$ , wobei  $I(2nT) = I_{2n} = S_{2n}$ .

In  $(2nT, (2n+2)T)$  gilt  $\operatorname{Im} S(t) = Q(t) \leq 0$ , wobei  $Q((2n+1)T) = Q_{2n+1} = \frac{1}{i}S_{2n+1}$ .

Somit können  $I$  und  $Q$  jeweils über den Zeitraum  $2T$  gesampelt werden.

Im Intervall  $nT \leq t \leq (n+1)T$  verbindet

$$S(t) = I(t) + iQ(t) = e^{i(k_n + (k_{n+1} - k_n)\frac{t-nT}{T})\frac{\pi}{2}} = e^{i(k_n + x_{n+1}\frac{t-nT}{T})\frac{\pi}{2}} = e^{i\varphi_{n+1}(t)}$$

die Punkte  $S_n$  und  $S_{n+1}$  mit  $\varphi'_{n+1}(t) = x_{n+1}\frac{\pi}{2T} = x_{n+1}\frac{2\pi}{4T} = \pm\frac{2\pi}{4T}$ .

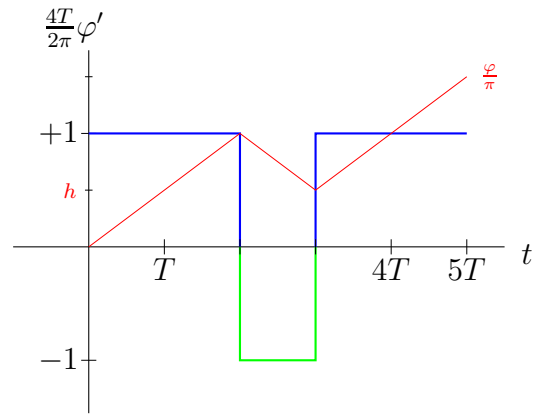
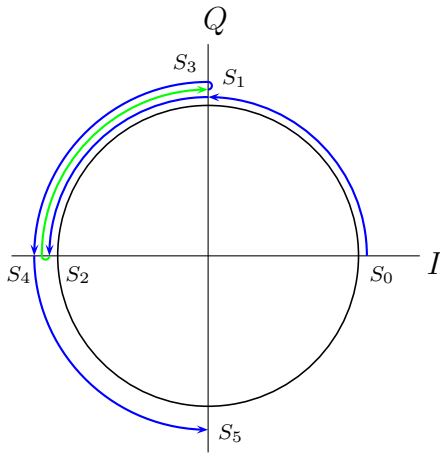
Beispiel:

Man startet bei  $S_0 = 1$  und bewegt sich in Zeiträumen  $T$  jeweils um den Winkel  $\pi/2$  vor oder zurück. Dann ist  $S(t)$  zur Zeit  $t = T$  entweder am Punkt  $S_1 = i$  oder  $S_1 = -i$ .  $S(t)$  verläuft für  $0 < t < T$  in der oberen bzw. unteren Halbebene und bleibt auch dort bis  $t = 2T$ . Hier ist entweder  $S_2 = -1$  oder wieder  $S_2 = 1$  und für  $T < t < 2T$  verläuft  $S(t)$  in der linken bzw. rechten Halbebene und verbleibt dort bis  $t = 3T$ . So verläuft  $S(t)$  durch die Quadranten und trifft bei  $t = nT$  die Achsen. Der Realteil hat Nullstellen bei  $2(n+1)T$  und der Imaginärteil bei  $2nT$  jeweils in Abständen  $2T$ , dazwischen ändern sie ihr Vorzeichen nicht.

Betrachte die Bitfolge  $b_n : 1, 1, 0, 1, 1$ , d.h. die Signalfolge  $x_{n+1} = 2b_{n+1} - 1 : +1, +1, -1, +1, +1$ .

$$x_{n+1} = \frac{1}{i} S_{n+1} \bar{S}_n = \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\pi/2} : +1, +1, -1, +1, +1 \quad ,$$

wobei  $S_0 = 1$ , d.h.  $\varphi_0 = 0$ . Somit  $S_n : 1, i, -1, i, -1, -i$ .



$t :$	$-T$	$0$	$T$	$2T$	$3T$	$4T$	$5T$	$6T$
$\Delta\varphi :$			$+\frac{\pi}{2}$	$+\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$+\frac{\pi}{2}$	$+\frac{\pi}{2}$	
$S_n :$		$1$	$i$	$-1$	$i$	$-1$	$-i$	
$\text{sgn } I :$	$ $	$+$	$+$	$ $	$-$	$-$	$ $	
$\text{sgn } Q :$		$ $	$+$	$+$	$ $	$+$	$-$	$-$
$IQ :$	$ $		$+$	$-$	$ $	$-$	$+$	$ $
$(-1)^n :$	$ $	$-1$	$ $	$+1$	$-1$	$ $	$+1$	$-1$
$x_{n+1} :$	$ $		$ $	$+1$	$ $	$+1$	$ $	$-1$

denn

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= I_{2n} Q_{2n+1} \\ x_{2n+2} &= -Q_{2n+1} I_{2n+2} \quad . \end{aligned}$$

## GFSK & GMSK.

Bei FSK/MSK wurde mit einer stetigen (Frequenz-)Funktion  $u : \mathbb{R} \setminus T\mathbb{Z} \rightarrow \{-1, +1\}$  die Phase  $\varphi(t) = h\pi \int_{-\infty}^t \frac{1}{T} u(\tau) d\tau$  moduliert, wobei  $u((n + \frac{1}{2})T) = x_{n+1}$ .

Nun soll die Rechteckfunktion  $u$  mit einer Gauß-Funktion  $g$  geglättet werden, so dass die Frequenz durch  $p = \frac{1}{T} u * g$  moduliert wird, d.h.  $\varphi(t) = h\pi \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau$ .

Faltung (*convolution*):

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

$$\gamma(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \rightsquigarrow \quad \int_{-\infty+i\xi}^{\infty+i\xi} \gamma(t) dt = \sqrt{2\pi} \quad , \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon > 0 \quad , \quad \phi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \gamma\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\varepsilon(t) dt = 1$$

$$f * \phi_\varepsilon \longrightarrow f \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

*normalized bandwidth:*

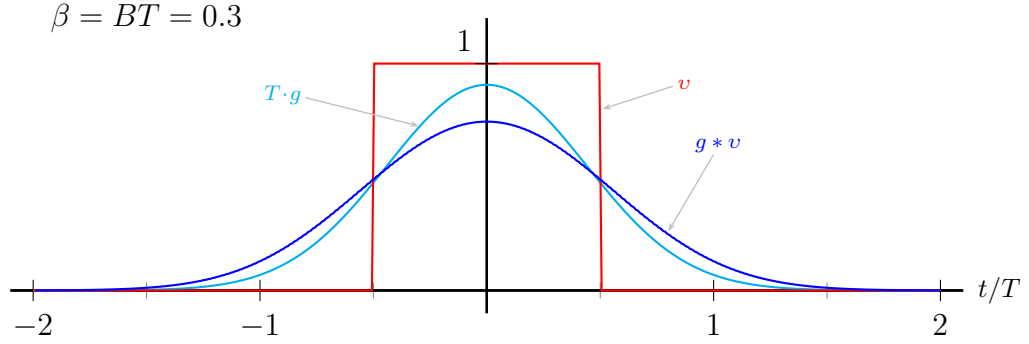
$$\beta = BT \quad , \quad \sigma = \frac{\sqrt{\ln 2}}{2\pi B} = \frac{\lambda}{B} = \lambda \frac{T}{\beta} = \alpha T$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{T\sqrt{2\pi\alpha^2}} e^{-\frac{1}{2\alpha^2}(\frac{t}{T})^2}$$

$$g(t) = \phi_\sigma(t) \quad \rightsquigarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) d\tau = 1$$

$$v(t) = \begin{cases} 1 & , \quad -T/2 < t < T/2 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g * v(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) v(t - \tau) d\tau = \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} g(\tau) d\tau = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t + \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) v(\tau) d\tau = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$



$$u_n(t) = \begin{cases} 1 & , \quad nT < t < (n+1)T \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u_n(\tau) d\tau = T$$

$$p_n = \frac{1}{T} u_n * g :$$

$$\begin{aligned} p_n(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} u_n(t - \tau) g(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_{t-(n+1)T}^{t-nT} g(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_{-T}^0 g(t - nT + \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} u_n(\tau) g(t - \tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} g(t - \tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T g(t - nT - \tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} u_n(t - \tau) dt d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) d\tau = 1$$

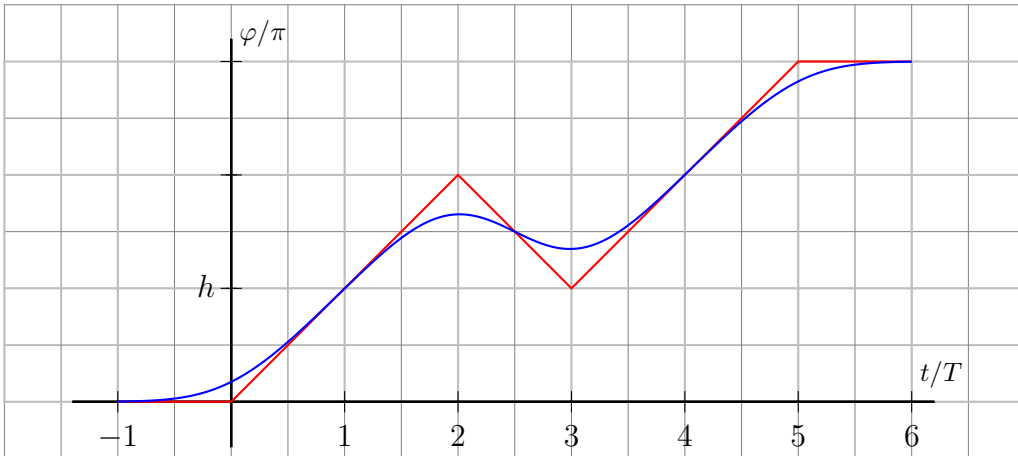
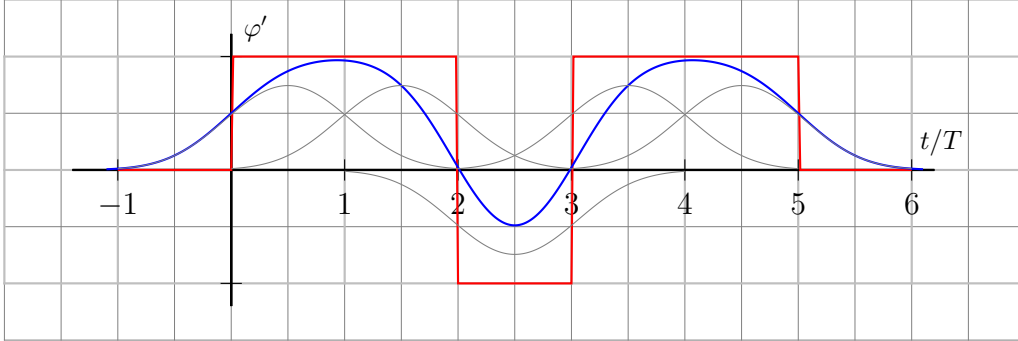
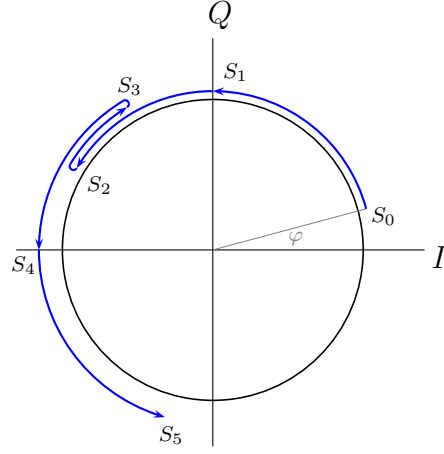
$$u(t) = \sum_n x_n u_n(t) \quad , \quad p(t) = \frac{1}{T} u * g(t) = \sum_n x_n p_n(t)$$

Für  $\beta = BT \rightarrow \infty$  geht  $\sigma \rightarrow 0$  und  $p = \frac{1}{T} u * g \rightarrow \frac{1}{T} u$ .

Modulations-Index  $h = 0.5$ ,  $\beta = BT = 0.3$ ,  $x_{n+1} : +1, +1, -1, +1, +1$ .

$$u(t) = \sum_n x_n u_n(t) \quad , \quad p(t) = \sum_n x_n p_n(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_n x_n g(t - nT - \tau) d\tau$$

$$\varphi(t) = h\pi \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau \quad , \quad S(t) = I(t) + iQ(t) = e^{i\varphi(t)}$$



## Fourier transform.

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{F}f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Notation:  $\mathcal{F}f(\omega) = \hat{f}(\omega) = F(\omega)$ .

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$$

$$\sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}(f \cdot g) = \mathcal{F}f * \mathcal{F}g$$

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega \mathcal{F}f(\omega)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = f(t)$$

$$\langle \mathcal{F}f, h \rangle_{L^2} = \langle f, \mathcal{F}^{-1}h \rangle_{L^2}$$

$$\gamma(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{F}\gamma(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \phi_{\sigma}(t) \quad \longleftrightarrow \quad \hat{g}(\omega) = \mathcal{F}g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} = \frac{1}{\sigma}\phi_{\frac{1}{\sigma}}(\omega)$$

$$\omega_B = \omega_{\text{3dB}} : P = \frac{d}{dt}E = UI = U^2/R \rightsquigarrow \sqrt{P/2} \propto U/\sqrt{2}$$

$$\hat{g}(\omega_B) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}(0) \rightsquigarrow e^{-\frac{\sigma^2\omega_B^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = e^{-\frac{\ln 2}{2}}$$

$$\rightsquigarrow \ln 2 = \sigma^2\omega_B^2 = \frac{\ln 2}{(2\pi B)^2}\omega_B^2 \rightsquigarrow \omega_B = 2\pi B = 2\pi\beta/T$$

$$g(t) = \frac{1}{T} \frac{\beta}{\lambda\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2}{2\lambda^2}(\frac{t}{T})^2} \quad \longleftrightarrow \quad \hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln 2}{2\beta^2}(T\frac{\omega}{2\pi})^2}$$

