普通高等教育“十一五”国家级规划教材

新世纪高等学校教材

面向21世纪课程教材

数学及应用数学专业主干课程系列教材

刘来福　曾文艺　编著

北京师范大学数学科学学院　组编

数学模型与数学建模

第二版

SHUXUE MOXING YU SHUXUE JIANMO

北京师范大学出版社

面向21世纪课程教材

数 学 模 型 与 数 学 建 模

刘来福　曾文艺　编著

北 京 师 范 大 学 出 版 社
·北　京·

内 容 简 介

数学模型是架于数学理论和实际问题之间的桥梁．数学建模是应用数学解决实际问题的重要手段和途径．本书是作为数学理论教学的一个补充，通过数学模型和数学建模有关问题的论述和模型实例的介绍，使读者应用数学解决实际问题的能力有所提高．全书分三篇：第一篇阐述了数学模型和数学建模的有关问题和常用的数学模型及其组建的方法．第二篇给出了十六个模型的实例，以展示不同领域的实际问题中如何组建数学模型及其应用效果．第三篇介绍了数学模型在相关学科或领域的基础理论研究中的应用．

本书可作为大学数学系“数学模型”课的教材、非数学专业研究生和本科生选修课的教材，也可供高等院校师生以及各类科学技术工作者参考．

图书在版编目（CIP）数据

数学模型与数学建模/刘来福，曾文艺编著．—北京：北京师范大学出版社，1997.9
高等学校教学用书
ISBN 7-303-04374-8

Ⅰ．数…　Ⅱ．①刘…　②曾…　Ⅲ．①数学模型-高等学校-教材②建立模型-高等学校-教材
Ⅳ．O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 12958 号

北京师范大学出版社出版发行
（北京新街口外大街 19 号　邮政编码：100875）
出版人：常汝吉
北京师范大学印刷厂印刷　全国新华书店经销
开本：787 mm×960 mm　1/16　印张：23　字数：395 千字
2002 年 3 月第 2 版　2002 年 3 月第 1 次印刷
印数：1～5 000 册　定价：26.00 元

前　言

以前，人们习惯将应用数学理解为数学在力学、电学和工程技术等与物理关系密切的领域中的应用．然而，近几十年来随着科学技术的不断进步和计算机的迅速发展，数学的应用领域在不断地扩大．它不仅被用来解决我们日常的生产、生活和社会等领域中的各种各样的实际问题，而且也在许多学科（如：经济学、生物学、医学和环境科学等）的理论发展中得到了应用．科学不断发展，社会不断进步．我们周围将会出现更多的与数学有关的问题等待我们去研究、开发．

数学的应用，实质上是数学和所研究的实际问题相结合的结果．一个成功的数学应用的成果，往往会使我们对所研究问题的认识达到更深的层次，这是当我们使用自然语言来描述一个现象时很难做到的．数学是各学科可以共同使用的一种科学语言，有它自己的理论体系；而实际问题则各自显示它们自己的特征和要求．一个成功的应用必须要把两者沟通，建立起它们之间的紧密联系．数学模型就是架于数学理论和实际问题之间的桥梁．通过数学模型的组建，数学的语言被应用到实际问题，而实际问题的对模型分析的特殊需求又往往对数学的理论提出新的挑战．实践证明，要想使数学应用得以成功，将依赖于应用者深厚的数学基础和严格的逻辑推理能力．但仅此是不够的，还要依赖于他的敏锐的洞察力、分析归纳的能力以及对实际问题的深入的理解和广博的知识面．这些在我们传统的数学教学中并没有引起足够的注意和训练．过去我们经常形容传统的数学理论是“烧（鱼的）中段”．也就是说数学理论主要着眼于数学内部的理论结构和它们之间的逻辑关系，并没有着意讨论如何从实际问题中构造出数学问题（鱼头）以及如何将数学分析的结果用来解决实际问题（鱼尾）方面的内容．作为一个应用者，要想使自己的应用工作得到成功，仅仅掌握数学理论的内容和训练是不够的，他必须具备应用数学知识解决实际问题的能力，必须经受更全面的训练．在数学教学中不仅要给学生“烧中段”，应该给他们“烧全鱼”．

本书将以数学模型和数学建模为主要论题，目的在于通过书中内容的学习使读者在应用数学知识解决实际问题的能力上有所提高．书中重点介绍如何针对实际问题来组建数学模型以及如何通过模型的分析来解决实际问题．以“烧头尾”来补充在基础数学教学上“烧中段”的不足．为了使更多的读者能了解数学如何应用于解决实际问题，本书将读者的数学知识定位于大学低年级的水平．也就是说只要求读者具备微积分、线性代数、常微分方程和初等概率论等数学知识就可以顺利地阅读本书中的大部分内容．这并不意味着只是这些数学知识是有用的．实际问题对数学的需求是没有学科的界限和知识层次的高低之分的．问题解决的水平将有赖于应用者的数学功底和他解决实际问题的能力．

不少人反映“学了不少数学，但是不会用它去解决实际问题”．这表明“学数学”与“用数学”是不同的．会学数学的人不一定就肯定会用数学．掌握了数学的人在数学建模和数学应用上也不一定是自通的．在知识结构、思维方式和能力训练等诸多方面数学建模和数学应用都有它自己的特点，与数学理论在这些方面的要求明显不同．本书结合作者多年在数学应用的研究及教学工作中的经验体会，在第一篇中就与数学模型和数学建模有关的问题上进行了一些讨论．目的在于阐明数学建模和数学应用与数学理论一样是需要学习和训练的．

本书的第二篇集中介绍了十六个数学模型的应用实例，以表明应用数学解决实际问题时的方式和效果．实例中不少是在数学应用的发展过程中取得成功并且是有影响的例子．在实例的选取上我们尽量拓宽它们在实际问题上和所涉及的数学理论上的覆盖面．本书不打算（也不可能）涉及数学所有可能应用的各种各样的实际问题和所有可能使用的数学知识．我们相信读者在这些例子的启发下会在更多的领域做出有特色的创造性的应用成果．

书中的第三篇介绍了数学模型在相关学科或领域的理论发展中的应用．虽然这些讨论在相关的学科和领域中仍属理论基础，但对数学来说实际上可以理解为它在相关学科发展中的应用．它们当中有些已经有了系统的研究工作，促进了相关领域的理论研究的深入开展．我们相信这些内容会帮助读者了解数学模型和数学建模在学科发展中的作用，对数学模型有一个更全面的认识．

应该说我们大家十分熟悉的理论力学、数学物理、工程计算、运筹学和统计学等都是数学和物理学或实际问题出色结合的结果．用我们的语言说，都是非常成功的数学模型．由于它们各自都有了自己系统的理论，有大量的著作和教材以

及学习它们的教学途径，本书中没有涉及这方面的内容．有需要的读者寻找适当的途径了解和掌握有关的知识不会有多大困难．

本书的第二篇由曾文艺提供初稿，其余部分和全书的统稿工作由刘来福完成．本书是作为大学“数学模型”课的教材编写的．但是要在 40～60 学时的课堂教学中讲完全部内容是困难的．书中大部分章节的内容是相对独立的，可以根据教学时数、教学要求和学生的程度进行舍取，选讲其中的部分内容．

时光飞驰，把我们推进了21世纪。回首过去，“数学模型”作为一门课程在我国开设已经有十多年的历史了。这十多年来，从少数几个学校的开设者门课的探索，到现在已经普及到了全国几百所高等学校并且成为一门很受广大师生欢迎的课程。在此基础上，一年一届的全国大学生数学建模竞赛也举办了十届了，作为“数学模型”课的实践活动吸引了大批各类专业的大学生，推动了数学教学的改革。这是我国高等学校教学内容和课程体系上的一个重大的变化。“数学模型”这门课程进入了成熟、提高的阶段。本书的前一版自 1997 年出版以来也有近五年的时间了。通过这几年来的教学探索和实践，我们对“数学模型”课的教学内容的处理和教学方法的选择不断进行改革的尝试，对数学模型的概念、作用及其内涵的理解也有了进一步的提高。在此基础上，我们对本书的前一版进行了较大的修改，重新撰写了个别的章节，并且以附录的形式增加了历年来全国大学生数学建模竞赛的试题以利于进一步提高“数学模型”课的教学质量，增强大学生的数学应用意识和能力。这个工作作为教育部《高等师范教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划》的教改立项成果纳入了“面向 21 世纪课程教材”的编写计划。我们期望这本书的出版有助于大学生数学应用意识和能力的培养和提高，进一步巩固和深化教学改革的成果。

限于作者的水平，书中还会有谬误和不妥。我们热切地希望听到读者的反馈信息，无论是批评指正，还是建议完善，我们都非常欢迎。

北京师范大学出版社的吕建生同志在本书的出版过程中付出了大量的精力，在此表示衷心的感谢。

编　著　者

北京师范大学数学系

目　录

第一篇　数学模型和数学建模

第一章　数学模型 ……………………………………………………（1）

§1.1　引　言 ……………………………………………………（1）

§1.2　数学模型 ……………………………………………………（3）

§1.3　问题举例 ……………………………………………………（6）

第二章　数学建模 ……………………………………………………（16）

§2.1　数学建模 ……………………………………………………（16）

§2.2　数学建模过程 ……………………………………………………（17）

§2.3　数学建模举例 ……………………………………………………（19）

第三章　常见的数学模型及其建模方法 ……………………………………（25）

§3.1　量纲分析与轮廓模型 ……………………………………………（25）

§3.2　数据资料与拟合模型 ……………………………………………（34）

§3.3　平衡原理与机理模型 ……………………………………………（45）

§3.4　复杂决策系统与层次分析模型 ……………………………………（60）

§3.5　随机现象的模拟与系统仿真模型 …………………………………（71）

习　题 ……………………………………………………（85）

第二篇　数学模型实例

第四章　日常生活中的数学模型 ……………………………………………（91）

§4.1　减肥模型 ……………………………………………………（91）

§4.2　铅球投掷模型 ……………………………………………………（96）

§4.3　屋檐水槽模型 ……………………………………………………（104）

§4.4　拥挤水房模型 ……………………………………………………（109）

习 题 …… (116)

第五章 自然界与环境资源的数学模型 …… (119)
§5.1 天空彩虹模型 …… (119)
§5.2 地球年龄模型 …… (124)
§5.3 湖水污染模型 …… (130)
§5.4 森林管理模型 …… (136)
习 题 …… (142)

第六章 医学与遗传的数学模型 …… (145)
§6.1 糖尿病诊断模型 …… (145)
§6.2 传染病模型 …… (150)
§6.3 药物动力学的房室模型 …… (157)
§6.4 群体遗传模型 …… (166)
习 题 …… (174)

第七章 与社会有关的数学模型 …… (177)
§7.1 代表名额分配模型 …… (177)
§7.2 密码和解密模型 …… (184)
§7.3 作战模型 …… (196)
§7.4 团体决策模型 …… (202)
习 题 …… (209)

第三篇 相关学科中数学模型的系统研究

第八章 经济学中的数学模型 …… (215)
§8.1 需求理论模型 …… (215)
§8.2 供给理论模型 …… (224)
§8.3 市场均衡模型 …… (230)
§8.4 投入产出模型 …… (240)
习 题 …… (247)

第九章　种群生态学的数学模型 ……………………………… (250)
§9.1　单个种群动态行为模型 ……………………………… (250)
§9.2　单个种群随机动态模型 ……………………………… (266)
§9.3　交互作用种群动态模型 ……………………………… (273)
§9.4　可再生资源管理模型 ……………………………… (282)
习　题 ……………………………… (295)

第十章　交通流的数学模型 ……………………………… (298)
§10.1　建立模型 ……………………………… (298)
§10.2　模型的分析 Ⅰ——密度波及其传播 ……………………………… (304)
§10.3　模型的分析 Ⅱ——非连续的交通流 ……………………………… (310)
§10.4　交通灯或交通事故对交通流的影响 ……………………………… (315)
习　题 ……………………………… (320)

参考文献 ……………………………… (355)

第一篇　数学模型和数学建模

第一章　数 学 模 型

§1.1　引　　言

20 世纪以来，科学技术得到了飞速的发展.数学在这个发展过程中发挥了它不可替代的作用，同时它自身也得到了空前的发展.由于计算机的迅速发展和普及，大大增强了数学解决现实问题的能力.数学向社会、经济和自然界各个领域的渗透，扩展了数学与实际的接触面.数学科学应用于经济建设、社会发展和日常生活的范围和方式发生了深刻的变化.从科学技术的角度来看，不少新的分支学科出现了，特别是与数学相结合而产生的新学科如数学生物学、数学地质学、数学心理学和数学语言学等等.在当今的时代，“国家的繁荣富强，关键在于高新的科学技术和高效率的经济管理”.这是当代有识之士的一个共同的见解，也已为发达国家的历史所证实.大量的事实表明，高技术是保持国家竞争力的关键因素.高新技术的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学.高技术的出现使得数学与工程技术之间在更广阔的范围内和更深刻的程度上直接地相互作用，把我们的社会推进到数学工程技术的新时代.当代社会和经济发展的一个特点就是定量化和定量思维的不断加强.它不仅适用于科学技术工作，在经济管理工作中也日益体现出了它的重要作用.直观思维、逻辑推理、精确计算以及结论的明确无误，这些都将成为精明的科技人员和经济工作者所应具备的工作素质.因此可以预言：数学以及数学的应用在科学技术、经济建设、商业贸易和日常生活中所起的作用将愈来愈大.数学科学作为技术改进、经济发展以及工业竞争的推动力的重要性也将日益显现出来.

众所周知，数学最引人注目的特点是它的思维的抽象性、推理的严谨性和应用的广泛性.这是在数学发展的漫长的历程中逐渐形成的.它来源于人们生产和生活

的需要.对其中有关的空间结构、数量关系的共性不断地抽象、升华而形成当今的数学.它的出现为我们在更深的层次上认识世界提供了一条重要的途径.它的抽象性和严谨性的特点也成为我们科学地思维和组织构造知识的一个有效的手段.而数学的广泛应用性则为各门学科以及人们的生产、生活和社会活动在定量方面向深层次发展奠定了基础.但是在过去的年代由于种种原因,这个特点在人们的印象中反映得并不充分.往往只把数学理解为训练人们科学思维的工具,致使人们常常感到学了大量的数学知识和方法但是不会用或者用不上.当前,在数学科学与其他科学技术和经济建设紧密结合变得更加需要和可能的今天,学术界在探讨数学科学的技术基础及其对经济竞争力的作用时指出:“在经济竞争中数学是不可少的,数学科学是一种关键性的、普遍的、能够实行的技术.”……“高技术的出现把我们的社会推进到数学技术的时代.”数学的应用特征在当今就显得更加突出和重要.

数学模型是应用数学知识和计算机解决实际问题的一种有效的重要工具.不妨请看几个例子.对于十字路口的交通问题,为使路口的交通顺畅,需要设计一个路口的最佳交通流的控制方案(如是否设单行道,是否限制载重车辆通行,如何控制交通灯等).一种办法是将几种不同的交通控制的设计方案交给交通队进行实地试验、观测,找出最优的方案.显然,这种办法不仅费时费力,而且会造成该路口和临近地区的交通混乱,根本无法执行.另一种办法是由研究人员调查路口的车流规律,收集有关的数据资料,如车流密度、车辆速度、大小以及路口状况等,使用数学和统计学的手段提炼出这些量之间的关系并且使用计算机进行分析和比较,就可以找到最优的控制管理方案.这就是交通管理的数学模型.有了它我们还可以评估类似的交通流控制方案.生物医学专家掌握了药物浓度在人体内随时间和空间变化的数学模型,他就可以用来分析药物的疗效,从而有效地指导临床用药.厂长和经理们掌握了他们的工厂、企业的生产与销售的数学模型,他们就可以用计算机控制生产、销售以获取尽可能高的经济收益,增强他们的经济竞争力.

应用数学知识和计算机去解决各门学科和社会生产中的实际问题时,首先要通过对实际问题的分析、研究组建用以描述这个问题的数学模型,使用数学的理论和方法或者编程计算对模型进行分析从而得到结果,再返回去解决现实的实际问题.可见数学模型、数学建模是应用数学理论和计算机解决实际问题的重要手段和桥梁.大量的事实表明,掌握了数学知识只是应用数学解决实际问题的必要条件,在当前实现数学作为一种技术的职能的过程中使用数学解决实际问题的技能的培

养也是非常重要和必需的.这主要是数学模型的有关知识和数学建模能力的培养.这也是本书的主要目的.

§1.2 数学模型

我们经常使用模型的思想来认识世界和改造世界.这里的模型是针对原型而言的.所谓原型是指人们在社会活动和生产实践中所关心和研究的实际对象,在科技领域常常用系统或过程等术语.如机械系统、电力系统、生态系统、交通系统、社会经济系统等;又如导弹飞行过程、化学反应过程、人口增长过程、污染扩散过程等等.**模型是人们为一定的目的对原型进行的一个抽象**.例如大家熟知的航空模型就是飞机的一个抽象.除了机翼与机身的相对位置关系外的一切因素,包括飞机的实际大小都在抽象的过程中被忽略掉了.虽然它与原型的实际飞机已经相距甚远,但是在飞行过程中机翼的位置与形状如何影响飞机在空中平稳地滑翔可以给人们以启迪.城市的交通图是这个城市的一个模型.在这个模型中城市的人口、车辆、树木、建筑物的形状等都不重要.但图中所展示的街道和一目了然的公共交通线路是任何一个实际置身于城市中的人很难搞清楚的.由此可见模型来源于原型,但它不是对原型简单的模仿,它是人们为了认识和理解原型而对它所作的一个抽象、升华.有了它就可以使我们通过对模型的分析、研究加深对原型的理解和认识.

所谓数学模型是指**通过抽象和简化,使用数学语言对实际现象的一个近似的刻画,以便于人们更深刻地认识所研究的对象**.数学模型也不是对现实系统的简单的模拟,它是人们用以认识现实系统和解决实际问题的工具.数学模型是对现实对象的信息通过提炼、分析、归纳、翻译的结果.它使用数学语言精确地表达了对象的内在特征.通过数学上的演绎推理和分析求解,使得我们能够深化对所研究的实际问题的认识.例如力学中著名的牛顿第二定律使用公式 $F=m\mathrm{d}x^2/\mathrm{d}t^2$ 来描述受力物体的运动规律就是一个成功的数学模型,其中 $x(t)$表示运动的物体在时刻 t 的位置,m 为物体的质量,而 F 表示运动期间物体所受的外力.模型忽略了物体的形状和大小.由于它抓住了物体受力运动的主要因素,这一定律的出现大大深化了力与物体运动规律的研究工作.又如描述人口 $N(t)$随时间 t 自由增长过程的数学模型 $\mathrm{d}N(t)/\mathrm{d}t=rN(t)$,尽管由于它忽略了性别、年龄、社会经济和自然界的约束条件等许多与人口增长有密切关系的因素,相对于实际人口的动态来说大大地被简

化了.但它所揭示出的人口成等比数列的增长的结论是人们不得不面对的严酷事实.

数学模型并不是新的事物,很久以来它就一直伴随在我们身边.可以说有了数学并要用数学去解决实际问题时就一定要使用数学的语言、方法去近似地刻画这个实际问题.这就是数学模型.数(整数、有理数、实数等)、几何图形、导数、积分、数学物理方程以至于广义相对论、规范场等都是非常成功的数学模型.运筹学以及统计学的大部分内容都是关于数学模型的讨论和分析.可以说在数学的发展进程中无时无刻不留下数学模型的印记.在数学应用的各个领域到处都可以找到数学模型的身影.只不过在当前随着科学技术的发展,各门学科的定量化分析的加强以及使用数学工具来解决各种问题的要求日益普遍的条件下,数学模型作为数学实现其技术化职能的主要手段之一,它的作用显得愈发突出,从而受到了更加普遍的重视.

数学模型主要是使用数学知识来解决实际问题.因此数学是人们掌握和使用数学模型这个工具的必要条件和重要的基础.没有广博的数学知识、严格的数学逻辑思维的训练是很难使用数学模型来解决实际问题的.但是数学模型本身也还具有若干不同于数学的特征,这些都是在学习和掌握数学模型过程中特别要注意的.

在实践中,能够直接运用数学方法解决实际问题的情形是很少见的.也就是说,实际问题很少直接以数学的语言出现在我们面前.而且对于如何使用数学语言来描述所面临的实际问题也往往不是轻而易举的.应用数学知识解决实际问题的第一步必须要面对实际问题中看起来杂乱无章的现象并从中抽象出恰当的数学关系,也就是组建这个问题的数学模型.这个过程就是数学建模.与数学不同,数学模型的组建的过程不仅要进行演绎推理而且还要对复杂的现实进行总结、归纳和提炼的工作.这是一个归纳总结与演绎推理相结合的过程.可以设想,在描述人口增长时,如果把年龄、性别、死亡、生育、择偶、婚配、疾病、卫生、饥荒、战争等等因素都容纳进去,即使使用现代的数学工具恐怕也难以进行分析和研究.因此建模时必须要经历对现实问题进行去粗取精、去伪存真的归纳加工过程.在这个过程中究竟保留什么因素,忽略什么因素并没有一定的范式.这要根据建模者对实际问题的理解、研究的目的及其数学背景来完成这个过程.应该说这是一个创造性的过程.而且不同的建模者针对同一个实际问题完全可以得到不同的数学模型.

数学模型的另一个重要的特点是要接受实践的检验.因为建模的目的是要用

以研究和解决原型的实际问题.而数学模型是经过简化和抽象得到的,尽管这个数学模型的组建过程中的逻辑推导准确无误,也并不意味着模型是成功的.它必须要接受实践的检验.经检验被认为是可以接受的模型才能付诸分析、使用.

数学模型是使用数学来解决实际问题的桥梁.对它的分析和研究的过程中主要是数学的理论、方法.由于我们的目的是解决实际问题,在分析过程中应用数学理论时数学上的自然的结论不一定是研究数学模型所需要的结果.像大家在中学数学中所遇到的应用题那样只要套用公式就能解决的问题在实际的数学模型中是很少见到的.将分析模型所得到的数学结论回到实际中去解决问题同样需要创造性的工作,往往并非简单地套用现有的数学公式或定理所能奏效的.因此不能认为数学模型就是数学应用题,特别是不能认为数学模型就是套公式的问题.

数学模型和数学建模不仅仅展示了解决实际问题时所使用的数学的知识和技巧,更重要的是它将告诉我们如何提出实际问题中的数学内涵并使用数学的技巧来解决它.因此学习数学模型不仅要学习和理解模型分析过程中所使用的数学知识和逻辑推理,更重要的是在于了解怎样用数学对实际问题组建模型以解决问题.如何"用数学"与如何"学数学"是根本不同的.掌握使用数学去建立模型以解决实际问题所需的技能与理解数学概念、证明定理、求解方程所需的技巧也是迥然不同的.

一个好的数学模型不在于它使用了多么高深的数学.作为一个成功的模型应该有较强的实际背景,最好是直接针对某个实际问题的;模型应该是经过实际检验表明是可以接受的;模型应该能够使我们对所研究的问题有进一步的了解;而且也应该是尽可能的简单以利于使用者理解和接受的.

§1.3　问 题 举 例

对于初学者来说,数学模型是一个较难驾驭的课题,它的处理手法相当灵活.要掌握数学模型最好的办法是实践,自己一个人独立地实践或几个人一组集体实践.开始阶段不要急于尝试工业上或科学技术上复杂的建模问题.在我们身边的现实生活中就有许多值得我们思考的问题.其中不少既简单又实用,是我们学习数学模型的好材料.这一节所列举的例子将展现给大家实际中的数学模型是什么样子.以利于大家去发现我们身边的模型.例题是一些极普通的问题,不需要你具备多少

实际的专业背景和过多过深的数学知识和方法就可以着手去尝试.例子中多数都可以找到另外的研究方法,这在数学模型中是不奇怪的.就像我们在例子中将要看到的那样,也许我们会发现更巧妙的思路来改进例题所得到的结论,这都是很正常的.

例 1.1 包扎管道

问题:水管或煤气管经常需要从外部包扎以便对管道起保护作用。如何进行包扎才能使带子全部包住管道而且最节省材料。

虽然问题很实际,但提法比较粗糙。问题没有交代管子的形状和包扎带的情况。为规范这个问题以便于使用数学的方法进行分析,我们需要对问题作进一步的假设。首先我们对如下的情况进行讨论。假设:

(1)管道的横截面都是圆,而且粗细一致;

(2)带子的宽度是不变的,而且带子的宽度小于圆管截面的周长。

在这个情形下,我们的问题就变为:如何用带子缠绕在管道外部才能使带子全部包住全部管道而且带子间互不重叠?

根据生活的经验我们都知道,只要把带子斜搭在管子上将管子缠绕起来就可以了。但是要使带子全部包住全部管道而且带子间互不重叠,必须要有一个适当的缠绕角度。也就是说,在这个问题中带子的宽度、管道的粗细和缠绕的角度之间存在着一定的关系。找出这个关系就可以进一步讨论如何根据管道的粗细和带子的宽度确定包扎的方式。这就是管道包扎的数学模型。

我们用 W 表示带子的宽度,C 表示圆管的周长,θ表示带子的倾斜方向与管道母线垂线的方向之间的夹角。

我们设想将带子缠绕在管道上使它包住管道且带子间互不重叠,并且从带子一角的 A 点沿圆管母线的方向画一条辅助线 l,再在辅助线与带子边缘的交点处画出圆管的横截面的截口线 c。将画有辅助线的带子截下一段展开,平放在平面上(如图 1.1 所示)。

注意只有在带子覆盖圆管且又互不重叠的情况下母线和截口线将相交于带子的边缘。这时 A,B 和 D,E 分别表示管道上的同一个点。直线 AB 和 DE 是圆管的截口而 BD 和 EF 是圆管的母线,且有 $AO \perp OB$。因此容易得出带子的宽度 W、圆管截面周长 C 和带子的倾斜角度 θ这三个变量之间的关系式为

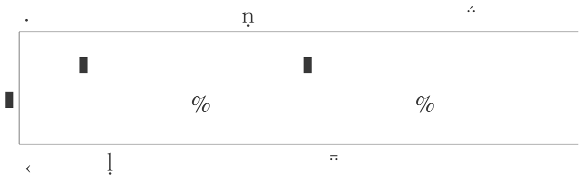

图 1.1　管道包扎带的平面展开形状

$$W = C\sin\ \theta.$$

这就是我们所需要的管道包扎的数学模型。对于熟悉数学的人来说组建这个模型是一个正常的思维过程，所得到的模型也是完美和无懈可击的。但是认真思考一下，我们很容易发现这个模型并不实用。因为它牵涉到了角度的计算和测量，这在实际操作当中是不太容易实现的。

要使得模型在实际操作过程中更加实用就需要尽量避免涉及到角度的计算和测量。为此我们从另外一个角度出发，考虑组建线段 OB 的模型。由前面的分析我们知道，当用带子包住圆管且又互不重叠时的充分必要条件是 A 点和 B 点在管道上要重合为一点。而线段 AB 的长度就可以用来确定点 B 的准确的位置。这样一来，使用

$$|OB| = \sqrt{C^2 - W^2}$$

作为管道包扎的数学模型较之前者就有更强的可操作性。

思考：

(1) 当管道的截面是正方形或其他形状时，对问题的结论有什么影响?

(2) 如果包扎时允许带子有一定宽度的重叠，这时如何修改我们的模型?

(3) 如果给定管道的长度、粗细和带子的宽度，能否使用模型计算所需带子的长度?

例 1.2　交通路口红绿灯的模型

问题：在一个由红绿灯管理下的十字路口，如果绿灯亮 15 秒，最多可以有多少汽车通过这个交叉路口?

这个问题提得笼统含混，因为交通灯对十字路口的控制方式很复杂，特别是车辆左、右转弯的规则，不同的国家都不一样。通过路口的车辆的多少还依赖于路面上汽车的数量以及它们的行驶的速度和方向。这里我们在一定的假设之下把这个问题简化。

假设：

(1)十字路口的车辆穿行秩序良好，不会发生阻塞；

(2)所有车辆都是直行穿过路口，不拐弯行驶，并且仅考虑马路一侧或单行线上的车辆；

(3)所有的车辆都相同，并且都是从静止状态匀加速启动；

(4)红灯时等待的每相邻两辆车之间的距离相等；

(5)前一辆车起动后，下一辆车启动的延迟时间相等。

用 x 轴表示车辆行驶的道路，原点 O 表示交通灯的位置，x 轴的正向是汽车行驶的方向，汽车的车头在道路上所处的位置表示汽车的位置。以绿灯开始亮时为时刻 $t=0$。

根据前面的假设，我们令 L 表示汽车的长度，D 表示红灯时等待的相邻两辆车之间的距离，T 表示相邻两辆汽车启动的延迟时间，a 表示汽车的加速度。我们用 $S_n(t)$ 时刻 t 第 n 辆汽车所在的位置，用 t_n 表示第 n 辆汽车开始启动的时间。

汽车启动之前停车位置的模型为：$S_n(0)=-(n-1)(L+D)$。

汽车启动的时间的模型为：$t_n=(n-1)T$。

汽车刚起动时应该按照匀加速的规律运动，汽车启动后在时刻 $t(t>t_n)$ 的位置为：

$$S_n(t)=S_n(0)+a(t-t_n)^2/2.$$

综合上面的分析，我们就得到了汽车在道路上行驶的模型为

$$S_n(t)=\begin{cases} S_n(0), & 0\leqslant t<t_n, \\ S_n(0)+a(t-t_n)^2/2, & t_n\leqslant t. \end{cases}$$

生活常识告诉我们，在城市道路上行驶的汽车都有一个最高时速的限制，不允许无限制地提高车速。我们给定这条路上的最高限速为 v_* 米/秒。这样我们还需要附加一个假设：绿灯亮后汽车将匀加速启动一直到可能的最高限速，并以这个速度匀速地向前行使。这时汽车作匀加速运动的时间应该是 $t_n^*-t_n=v_*/a$，其中 t_n^* 是第 n 辆汽车到达限速的时间。

由上面的分析可以得到，绿灯亮后汽车穿过十字路口行驶的模型是

$$S_n(t)=\begin{cases} S_n(0), & 0\leqslant t<t_n, \\ S_n(0)+a(t-t_n)^2/2, & t_n\leqslant t<t_n^*, \\ S_n(0)+a(t_n^*-t_n)^2/2+v_*(t-t_n^*), & t_n^*\leqslant t. \end{cases}$$

关于模型的参数值,我们取 $L=5$ 米,$D=2$ 米,$T=1$ 秒。如果在这个十字路口汽车的最高速度是 40 千米/时,它折合 $v_*=11.1$ 米/秒。进一步需要估计加速度,经调查大部分司机声称:10 秒内车子可以由静止加速到大约 26 米/秒的速度。这时可以算出加速度应为 2.6 米/秒,保守一些取汽车的加速度为 $a=2$ 米/秒.则有 $v_*/a=5.5$ 秒。

根据这些参数,我们可以计算出绿灯亮至 15 秒红灯再次亮时每辆汽车的位置如表 1.1 所示.

表 1.1　绿灯亮至 15 秒时汽车的位置

汽车序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
位置/m	135.7	117.6	99.5	81.4	63.3	45.2	27.1	9.0	−9.1

从表 1.1 可见,当绿灯亮至 15 秒时,第八辆汽车已经驶过红绿灯 9 米。而第九辆车还距交通灯 9.1 米不能通过。因此 15 秒的绿灯可以通过 8 辆汽车。

思考:

(1) 请你真正到交通路口作实地调查,搜集若干路口绿灯亮的时间和通过路口的汽车的数量和有关的参数,检验上述模型的正确性,并进一步完善这个模型。

(2) 你能继续组建行进中的汽车遇到红灯时的数学模型吗? 假设司机见到红灯后的反应时间是 0.35 秒,刹车(非紧急刹车)后的加速度平均为 −6.5 米/秒。试讨论红灯亮后第九辆车的运动状态。

(3) 请你根据前面的分析进一步给出通过十字路口的汽车的数量如何依赖于绿灯亮的时间的模型,能否通过分析这个模型对这个路口交通流量的优化管理提出改进建议。

例 1.3　铲雪机的工作

问题:冬天,一台铲雪机负责清除 10 千米长的一条公路路面上的积雪。一般当路面积雪达 0.5 米时,铲雪机就开始工作。如果开始铲雪后降雪仍然继续,随着路面积雪的加深,铲雪机工作的速度将逐渐降低。如果积雪过深,铲雪机将无法清除而被迫终止工作。

显然,降雪的大小将直接影响着铲雪机的工作。但降雪量究竟如何影响着铲雪机的工作,当降雪多大铲雪机就无法完成全部路面积雪的清除工作,这是我们十

分关心的问题。

进一步,我们可以了解到如下的情况和数据:

(1) 铲雪机开始工作后一直持续降雪;

(2) 降雪最大时积雪深度的增加量为 0.1 厘米/秒;

(3) 积雪深度达到 1.5 米时铲雪机将无法工作;

(4) 铲雪机在无雪的路面上行驶的速度是 10 米/秒.

分析:在这个问题中路面积雪的深度是影响铲雪机工作的重要的因素。降雪的大小直接影响到路面积雪深度的变化,而路面积雪的深度又影响着铲雪机的工作。因此,解决这个问题必须要清楚由于降雪所引起的路面积雪厚度随时间而改变的关系,以及铲雪机的工作速度与路面积雪深度之间的关系。这些关系在问题中并没有明确地给出。需要通过假设来给定。通常是从最简单的情况开始我们的讨论。因此,先给出下面的假设:

(1) 降雪是均匀的,即降雪的速度保持不变,于是积雪的深度将以定常的速度随时间而增加;

(2) 铲雪机的工作速度随着积雪深度的增加而线性地降低。

根据前面介绍的背景以及我们所做的假设可以知道与问题有关的变量是铲雪机工作的时间 t(秒)(我们假设 $t=0$ 时铲雪机开始工作),路面积雪的厚度 $d(t)$ 和铲雪机工作的速度 $v(t)$。有关的参数有:需要铲雪的路面的长度 L(米),铲雪机开始工作时路面积雪的深度 d_0(米),降雪时积雪的深度随时间增加的速度 r(厘米/秒),路面无雪时铲雪机行驶的速度 v_0(米/秒)和铲雪机无法工作($v=0$)时路面积雪的深度 d^*(米)。

根据假设(1),我们可以得到降雪时路面积雪的深度随时间变化的模型为

$$d(t)=(r/100)t+d_0 .$$

根据假设(2)可知铲雪机的工作速度与积雪厚度的关系为 $v=a-bd$。注意到背景知识的(3)和(4)有 $a=v_0$ 和 $b=a/d^*$,从而得到铲雪机工作的速度依赖于路面积雪的深度的模型

$$v(d)=\begin{cases} v_0(1-d/d^*), & d\leqslant d^*, \\ 0, & d>d^*. \end{cases}$$

综合这两个模型就可以得到铲雪机工作的速度的模型为

$$v(t)=\begin{cases} v_0\left(1-\dfrac{d_0}{d^*}\right)-\dfrac{v_0}{d^*}\dfrac{r}{100}t, & t\leqslant\dfrac{100(d^*-d_0)}{r},\\ 0, & t>\dfrac{100(d^*-d_0)}{r}.\end{cases}$$

铲雪机工作的距离的模型为

$$S(t)=\begin{cases} v_0\left(1-\dfrac{d_0}{d^*}\right)t-\dfrac{v_0}{2d^*}\dfrac{r}{100}t^2, & t\leqslant\dfrac{100(d^*-d_0)}{r},\\ \dfrac{100v_0(d^*-d_0)^2}{2rd^*}, & t>\dfrac{100(d^*-d_0)}{r}.\end{cases}$$

在我们的问题中模型的参数值取如下数值：$v_0=10$ 米/秒，$d_0=0.5$ 米，$d^*=1.5$ 米，$L=10\ 000$ 米. 模型就可以具体地写为

$$v(t)=\begin{cases} \dfrac{20}{3}-\dfrac{20}{3}\dfrac{r}{100}t, & t\leqslant\dfrac{100}{r},\\ 0, & t>\dfrac{100}{r},\end{cases}$$

和

$$S(t)=\begin{cases} \dfrac{20}{3}t-\dfrac{1}{30}rt^2, & t\leqslant\dfrac{100}{r},\\ \dfrac{1\ 000}{3r}, & t>\dfrac{100}{r}.\end{cases}$$

分析这个模型，不难看出当大雪以速率 r 均匀地降落时，铲雪机只能工作到时刻 $t_*=100/r$。这就是铲雪机由于积雪过深而被迫终止工作所用的时间。这段时间铲雪机清扫的路面距离为 $S(t_*)=1\ 000/3r$。由于铲雪机只负责 $L=10\ 000$ 米长的路面的清理。因此在工作距离内机器被迫终止工作就相当于 $1\ 000/3r<10\ 000$或 $r>1/30$(厘米/秒)，这就是降雪速度将影响到铲雪机正常工作的极限值。

具体来说，如果大雪以可能的最大速度飘降，即 $r=0.1$(厘米/秒).那么可以算出 $t_*=1\ 000$ 秒$=16.67$ 分，$S(t_*)=3\ 330$ 米。也就是说铲雪机只工作了不到 17 分，只清除了三分之一路面上的积雪就被迫终止工作了。如果降雪不大 $r=1/40=0.025$ (厘米/秒)，则有 $t_*=4\ 000$ 秒$=66.67$ 分，$S(t_*)=13\ 333.3$ 米.这比要求的 10 千米更长。这表明铲雪机可以完成路面清理的任务，还可以算出产雪机实际工作的时间是 33.33 分。

思考：

(1)关于一直持续匀速降雪的假设(1)来说是不实际的。尝试修改这一假设,组建新的模型继续分析。

(2)关于铲雪机工作速度的假设(2)是基于数学上的简单化而给出的。从机械学上讲,应该认为铲雪机的功率是不变的。试根据这一出发点组建一个更实际更合理的模型。

(3)在降雪的过程中,铲雪机清理过的路面又会开始积雪。如果降雪的时间足够长,试建模描述路面积雪的变化和铲雪机工作过程,分析会不会出现路面积雪还没有清扫完,清扫过的路面又需要进行清扫的情况。

例 1.4 人员疏散

在意外事件发生的时候,建筑物内的人员是否能有组织地、尽快地疏散撤离是人们普遍关心的有关人身安全保障的大问题。对于一个特定的建筑物,管理人员关心房间内所有的人在疏散时疏散的路线、全部疏散完毕所用时间等以便于他设计建筑物的出口以及全部的疏散方案。这个问题可以通过反复的实际演习来解决。但多次反复的演习实际上是不可能的。理想的办法是通过理论上的分析来得到。

问题:考虑学校的一座教学楼,其中一楼有一排四间相同的教室(图 1.2)。学生们可以沿教室外的走道一直走到尽头的出口。试用数学模型来分析人员疏散所用的时间。

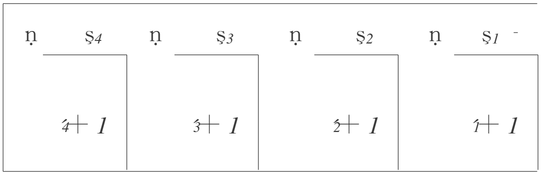

图 1.2 教学楼的平面图

分析:混乱无序的疏散撤离是难于使用数学方法来分析的,而且这也决不是最佳的疏散撤离的方案。为简单起见,开始我们不妨假设疏散时大家秩序景然地排成单行且间隔均匀地、匀速地撤离建筑物。

在这些假设下,疏散撤离的队列中人与人之间的距离为常数,记为 d(米);队列行进的速度也是常数 v(米/秒).令第 i 个教室中的人数为 n_i+1 人,第 i 个教室

的门口到前一个教室的门口的距离为 L_i(米),教室门的宽度为 D(米)。疏散时教室内第一个人到达教室门口所用的时间忽略不计。

首先考虑第一个教室内人员的疏散。这个教室撤空的时间是 $n_1 d/v$(秒),而该室的最后一个人到达出口,即全部撤离的时间是 $T_1 = L_1/v + n_1 d/v$(秒)。

类似地,第二个教室撤空的时间是 $n_2 d/v$(秒)。而该室内最后一个人到达出口所用的时间是 $T_2 = (L_1 + L_2 + D)/v + n_2 d/v$(秒)。但是在单行撤离的假设下还应该考虑到这两支疏散队伍可能出现的重叠的情形。也就是说,当第二个教室的第一个撤离者到达第一个教室的门口时,第一个教室内的人还没有疏散完毕。这时如果两支队伍同时行进势必造成混乱。因此需要等待第一个教室撤空以后第二个教室的队伍再继续前进。这种情形出现的条件是 $(n_1+1)d/v > (L_2+D)/v$ 或 $(n_1+1)d > L_2 + D$。

由此可以得到这两个教室内的人员(单队)完全撤出教学楼所用的时间的数学模型是

$$T_{12} = \begin{cases} (L_1 + L_2 + D + n_2 d)/v, & (n_1+1)d \leqslant L_2 + D, \\ [L_1 + (n_1 + n_2 + 1)d]/v, & (n_1+1)d > L_2 + D. \end{cases}$$

类似地,可以给出四个教室内的人员完全撤出教学楼所用的时间的数学模型。

思考:

(1)如果教室外的走道足够宽,可以容许两列、三列或四列队伍同时并进时组建疏散时间的数学模型将不会再有什么困难。

(2)进一步分析所得到的模型,我们发现疏散的时间主要由两部分构成:队伍的排头从教室门口走出教室楼的时间和队伍的排尾走一个队伍的长度达到排头的位置所用的时间。我们不妨将它记为

$$T = \frac{L}{v} + \frac{nd}{v}.$$

由此可以看出:楼道的长度越长、教室内的人员越多疏散所用的时间越长,与人们通常的认识是一致的。另外,如果楼道的长度一定,教室内的人数一定时,队列行进的速度越快,疏散所用的时间越短;队伍越密集(d 越小),队列的长度越短,疏散所用的时间也就越短。这也与我们的生活常识是一致的。

(3)但是再进一步仔细地分析,如果队列十分密集,以至于使得 $d = 0$。我们发现,教室内全部成员疏散所用的时间为 $T = L/v$,它是一个与教室内的人数无

关的量，也就是说不管教室内有多少人，只要他们以最密集的队形疏散，那么教室内全部成员疏散所用的时间是一定的。这个结论显然是荒唐的。问题出在建模时我们作了忽略队列中人的身体厚度的假设（这应该在“假设”中明确地列出）。在队列疏散的模型中这是不容忽略的重要因素。如果我们把这个假设修正为：人的身体的厚度是相同的，记为 w 。则上述模型就可以修改为

$$T=\frac{L}{v}+\frac{n(d+w)}{v},$$

这时就不会再出现前面的荒唐现象了。

（4）如果使用这个模型，我们应该得到这样的结论：疏散时队伍应该以最密集的队形，以人所可能的最大的速度行进所得到的疏散的时间将是最短的。但是稍有生活经验的人都知道上面的结论是不实际的。因为一个密集队形的队伍行进时是不可能达到单个人所可能的最大的行进速度的。过于密集的队伍疏散时所用的时间也不可能是最短的。之所以会得到这样的不实际的结论，在于我们在建模时分别考虑了队列的密集程度和队列行进的速度对疏散时间的影响。这实际上相当于又做了一个“假设”：队列的密集程度与队列的行进速度是相互独立互不影响的（这也应该在“假设”中明确地列出）。这个假设与实际情况是不一致的。因此，一个正确的人员疏散的模型还应该明确地加上“假设”：疏散队伍行进的速度要受到队列的密集程度的影响，队列越密集，行进的最大速度越慢。也就是说队列最大的行进的速度依赖于队列密集程度，是队列密集程度的函数 $v(d)$，而且是 d 的增函数。这样一来，模型又可以修正为

$$T=\frac{L}{v(d)}+\frac{n(d+w)}{v(d)}.$$

这时我们可以证明一定存在着一个适当的队列密集的程度和队伍行进的速度使得人员疏散所用的时间最短。问题的具体的结论还依赖于函数 $v(d)$的具体形式。这又是一个队列行进的数学模型的问题。我们这里就不做进一步的讨论了。

上面的例子都是发生在我们身边的各种现象的模型，可以看出它们的形式各式各样、琳琅满目，如果需要的话还可以举出更多。它表明在我们身边有大量实际问题可以用数学模型来研究。

通过这些例子还可以看到，数学模型和通常我们所见到的数学问题是不同的。数学问题的叙述是严谨的、明确的，通常它的答案是确定的；而数学模型所描述的实际问题有时并不十分明确，所给的条件也不一定完备，而描述这个问题的模型和

答案有时也不是唯一的,对于同一个现象可以有不同的模型来描述它,从而会得到不同的答案。一般来说,数学问题的假设是逻辑推理过程中的自然推论或是研究范围的一个严格的界定;但对数学模型来说,假设则是建模者在建模过程中用来明确和简化实际问题的一个主要的手段,操作起来要灵活得多并且有较高的技巧。数学问题的分析求解的过程有赖于严格的逻辑推理和恰当的数学工具和技巧的使用,而数学模型的组建则更多地依赖于对实际问题的理解以及以一定的创造性的想像力把有关的变量按照实际问题的要求组合在一起。数学问题的结论是确定的,通常它可以使用封闭的数学表达式来表示;而数学模型则可以用数学式,也可以用图表来表达,数学模型的结论通常不是封闭的,它需要推广以改变研究的方法或者使模型适应更复杂的情况,甚至有些模型的结论还是悬而未决有待进一步探讨的(如人员疏散例1.4)。

从上面的例子中还可以看到,每一个例子从内容到方法都迥然不同。因此至少在目前要想给出关于数学模型和数学建模的系统的理论和方法来是困难的。掌握数学建模的技巧的关键是实践,在实践中不断提高我们的建模水平。

上述的数学模型的这些特点在本书后面的内容中还有体现。总之数学模型与我们所学过的数学有许多不同之处。这些都是在学习和掌握数学模型和数学建模的过程中特别要注意的。

第二章　数 学 建 模

§2.1　数 学 建 模

所谓数学建模是指根据需要针对实际问题组建数学模型的过程.这个过程在第一章已经作了初步的介绍.特别要指出的是,这里所说的“数学”是指广义的数学,也就是说它除去通常所说的经典的数学之外还包括统计学、运筹学以及计算机的使用等.

组建数学模型的过程大致要处理如下几种不同的情况:第一类问题如上一章的多数例题所述,问题的条件尚不完全明确,有待于在建模过程中通过假设来逐渐明确化.这一类问题较为典型,并且在数学建模过程中经常遇到.上一章我们已经对它的特点作了较详尽的论述,也是本书的主要涉及对象,这里就不再作进一步的讨论了.第二类问题是指通过对实际问题的分析可以得到完全确定的情况,而且也有其特定的答案,就像第一章所举的例1那样.处理这一问题主要在于对问题的条件给出恰当的分析,从而得到所需的模型,利用数学的知识和方法就可得出结论来.这一类问题在建模过程上与第一类问题稍有不同,比较明确和确定.第三类问题所涉及的情形比第一类要复杂,特别是在问题中需要考虑一些随机因素时就更是如此,需要借助计算机来处理.关于这一类问题我们不妨用如下两个例子来说明:

例 2.1　某城市建了一个超级市场,在进行内部装修设计时要考虑设置几个出口比较合理.出口设少了,将来会使顾客在出口处排长队等待付款而无法解决;出口设置太多可能会使服务效率降低并且又会浪费商场的营业空间.尽管商场的地理位置、规模、经营的商品可以认为是确定的,但顾客的到来、顾客购买的商品的种类和数量,因而顾客在出口处接受服务的时间都是随机的.这个问题必须解决于市场开业之前,无法通过对各种方案进行比较试验来作出决策.于是我们可以使用数学和统计学构造一个超级市场出口处的模型.资料可以来自类似商场的调查结果.这个模型就可以用来模拟实际将要建设的该超级市场出口处的排队的状态.这

个模型可以写成计算机程序，由计算机来运行它. 考虑到模型中的随机因素，在计算机上反复运行这个模型就可以得到顾客排队的平均队长、顾客在出口处的平均逗留时间、服务员的平均工作效率等结论. 针对出口处的不同的个数、出口处不同的服务方式反复运行这个模型，就可以得出在不同出口设置的方案下顾客的排队情况和服务效率的结论. 比较这些结论就可以作为我们对出口处设置方案作决策的重要依据.

例 2.2　一个城市的天然气管道干线的铺设是城市建设的基础工程. 如何设计管道干线的网络，既保证整个城市对天然气的需求又不会造成浪费，是工程设计中的一大课题. 设计中了解整个城市及其将来的发展对天然气的总需求是非常必要的. 但还需要掌握天然气的物理性质以及它在很长的复杂的网络管道中流动的规律. 一般，天然气在不同口径和长短的管道中流动的规律，根据物理学的知识，可以用微分方程来刻画. 但对于一个庞大的复杂的网络管道系统将会得到一个庞大的微分方程组，作为天然气在管道中流动的数学模型. 一般，从理论上来分析它已经很困难了. 但我们可以使用计算机来运行这个模型以了解天然气在管道中流动的状况. 在不同的管道网络条件下运行这个模型就可以模拟实际的管道网络系统. 通过不同管道设计方案的模拟结果的比较就可以得到一个最优的方案. 当然再考虑到需求的情况，特别是需求过程中季节性的或者逐日的波动. 在同一设计方案下针对不同的需求情况多次模拟的结果就可以给我们一个比较可信的预报结果，从而为我们管道干线铺设的设计工作提供重要的参考.

上面的两个例子表明，数学建模有时还要处理一些比较复杂的实际问题. 这时仅仅使用数学的知识和手段就比较困难了. 对于这一类问题，我们可以把模型翻译成计算机程序，使用计算机运行这个模型，这就是我们通常所说的“模拟”或“仿真”. 虽然对于这一类模型我们难于通过理论的分析得出更深入的结果，但它不失为处理较复杂的实际问题的一个有效的手段.

当然从数学建模的角度出发，这三类模型并不是明显不同，截然分开的. 建模的过程是类似的，分析的方法有时也是相通的，只是根据不同的实际情况彼此之间有所不同的侧重.

§2.2　数学建模过程

由第一章的例题我们看到了数学模型涉及的范围相当宽，无论在实际问题方

面还是在数学的领域.尽管这些问题之间无论在内容还是方法上千差万别,它们之间有一点是共同的,那就是它们都是针对一个实际问题,通过辨识问题中变量之间的关系而把实际问题转化为由数学语言描述的形式.所有的例题都经历了这样一个过程.与数学方法的使用相比,这个过程是建模工作的一个明显特征.在这个过程中对每个例子的处理在方式上有一个非常相似之处就是通过一个程序化的过程来组建数学模型.这是数学建模工作中的一种有效的处理问题的方式.每当我们面对新的实际问题需要用数学的手段来处理时,这一程序化的处理方式将为我们提供一条有效地组建数学模型的途径.

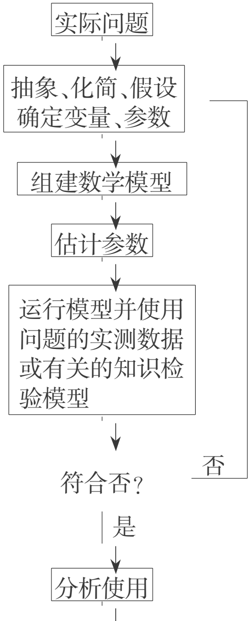

图 *2.1* 建模过程流程图

数学建模的过程一般包含有若干个有着明显区别的处理阶段.我们可以用如下的流程图(图 2.1)来表示.经验告诉我们,这个流程图为我们提供了一个思考问题的框架,它不仅能够帮助我们成功地组建有关的数学模型,而且当你面对一个实际的问题感到困惑而无法入手建模时,它将给你提供一条思考的途径.

流程图中的每一个方框表示建模过程的一个阶段.下面我们将对每个阶段作一个简要的说明.

1. 对于面临的实际问题,我们首先需要明确研究的对象和研究的目的.问题所依据的事实和数据资料的来源是什么,它们是否真实、以及与问题有关的背景知识.需要明确我们所研究问题的类型:是确定型的还是随机的,是需要建模还是需要模拟.

2. 辨识并列出与问题有关的因素,通过假设把所研究的问题进行简化,明确模型中需要考虑的因素以及它们在问题中的作用.以变量和参数的形式表示这些因素.通常在建模之初总是把问题尽量简化,在最简单的情形下组建模型以降低建模工作的难度.然后通过不断地调整假设使模型尽可能地接近实际.

3. 运用数学知识和数学上的技能技巧来描述问题中变量之间的关系.通常它可以用数学表达式来描述,如:比例关系、线性或非线性关系、经验关系、输入输出原理、平衡原理、牛顿运动定律、微分或差分方程、矩阵、概率、统计分布等.从而得到所研究问题的数学模型.

4. 使用观测数据或实际问题的有关的背景知识对模型中的参数给出估计值.

5. 运行所得到的模型、解释模型的结果或把模型的运行结果与实际观测进行比较.如果模型结果的解释与实际状况相合或结果与实际观测基本一致,这表明模型经检验是符合实际问题的,可以将它用于对实际问题进行进一步的分析讨论.如果模型的结果很难与实际相合或与实际观测差异较大,表明这个模型与所研究的实际问题是不符合的,不能直接将它应用于所研究的实际问题.这时如果数学模型的组建过程没有问题的话,就需要返回到建模前关于问题的假设.检查我们关于问题所作的假设是否恰当,检查是否忽略了不应该忽略的因素或者还保留着不应该保留的因素.对假设给出必要的修正,重复前面的建模过程,直到组建出经检验是符合实际问题的模型为止.

将一个数学模型应用于实际问题时主要是通过对模型作进一步的分析和讨论得到的,使用代数的、分析的或数值的方法给出模型的解.从理论上讨论解的性质,必要时也可以写出计算程序或者使用恰当的软件包由计算机进行模拟.把数学上和计算机运算所得到的结果再回到实际问题中去,用以对实际问题给出解释,解决实际问题或加深我们对问题的认识,从而达到使用数学模型研究实际问题的目的.需要注意,我们从数学模型得到结论的主要目的是解决实际问题,因此当用它来解决实际问题时的语言应该是非数学工作者所能理解的.这时,过多、过深地使用数学语言将影响模型的使用效果.要学会使用通俗的语言表达数学上的结论,使得它能为更多的人所接受.

§2.3　数学建模举例

下面我们给出一个例子来说明如何应用上面所指出的过程来组建数学模型.为便于理解,我们选择日常生活中大家都能遇到的雨中行走的现象来建模.

例 2.3　雨中行走

问题:一个雨天,你有件急事需要从家中到学校去.学校离家不远,仅一公里,况且事情紧急,你不准备花时间去翻找雨具,决定碰一下运气,顶着雨去学校.假设刚刚出发雨就大了,但你也不再打算回去了.一路上,你将被大雨淋湿.一个似乎是很简单的事实是你应该在雨中尽可能地快走,以减少雨淋的时间.但是如果考虑到

降雨方向的变化，在全部距离上尽力地快跑不一定是最好的策略．试组建数学模型来探讨如何在雨中行走才能减少淋雨的程度．

对于这个实际问题，它的背景是简单的，人人皆知无需进一步论述．我们的问题是要在给定的降雨条件下设计一个雨中行走的策略，使得你被雨水淋湿的程度最低．显然它可以按确定性模型来处理．

分析参与这一问题的因素，主要有：(1)降雨的大小；(2)风(降雨)的方向；(3)路程的远近和你跑的快慢．为简化问题的研究，我们假设：(1)降雨的速度(即雨滴下落速度)和降水强度保持不变；(2)你以定常的速度跑完全程；(3)风速始终保持不变；(4)把人体看成是一个长方体的物体．

为进一步简化这一问题的研究，首先我们讨论最简单的情形，即不考虑降雨的角度的影响，也就是说在你行走的过程中身体的前后左右和上方都将淋到雨水．

在这些假设之下，我们可以给出参与我们这个模型的所有的参数和变量：

雨中行走的距离 D(米)，雨中行走的时间 t(秒)，雨中行走的速度 v(米/秒)；你的身高 h(米)，宽度 w(米)和厚度 d(米)，你身上被淋的雨水的总量 C(升)．关于降雨的大小，在这里可以用降水强度(单位时间平面上的降下雨水的厚度)I(厘米/时)来描述．

问题中的行走距离 D，身体尺寸从而身体被雨淋的面积是 $S=2wh+2dh+wd$(米^2)是不变的，可以认为是问题的参数．雨中行走的速度 v，从而在雨中行走的时间是 $t=D/v$(秒)以及降水强度的大小 I 在问题中是可以调节、分析的，是问题中的变量．

模型是简单的，由于降水强度是单位时间每单位面积上的降下雨水的厚度，因此淋雨量 C 应该等于降雨强度 I 与淋雨时间 t 和淋雨面积 S 的乘积，即 $C=t\times I\times S$．

考虑到各参量取值单位的一致性，可以得到在整个雨中行走期间整个身体被淋的雨水的总量是

$$\begin{aligned} C &= t\times(I\times 0.01/3600)\times S(\text{米}^3) \\ &=(D/v)\times(I/3600)\times S\times 10(\text{升}) \\ &=\frac{1}{360}\,\frac{D\times I\times S}{v}(\text{升}). \end{aligned}$$

为检验这个模型，需要对模型的参数给出估计。它们可以通过观测和日常的

调查资料得到。在我们的问题中：$D=1000$ 米，$h=1.50$ 米，$w=0.50$ 米，$d=0.20$ 米。由此可以得到：$S=2.2$ 米^2。我们假设降雨的强度是 $I=2$ 厘米/时。在雨中行走的速度 v 将是模型中的变量。模型表明，被淋在身上的雨水的总量与你在雨中行走的速度成反比。如果你在雨中以可能最快的速度 $v=6$ 米/秒 向前跑，于是你在雨中将行走 $t=167$ 秒 $=2$ 分 47 秒。

由此可以得到，你的身上被淋的雨水的总量有

$$C=\frac{167\times2\times2.2}{360}(\text{升})=2.041(\text{升}).$$

仔细分析，这是一个荒唐的结果。你在雨中只跑了 2 分 47 秒的时间，身上却被淋了 2 升多的雨水(大约有一个大可乐瓶的水量)。这是不可思议的。因此这表明，我们得到的这个模型用以描述雨中行走的人被雨水淋湿的状况是不符合实际情况的。

按照建模的程序，需要回到对问题所作的假设，推敲这些假设是否恰当。这时我们发现不考虑降雨角度的影响这个假设把问题简化得过于简单了。

考虑到降雨角度的影响，这时降雨强度已经不能完全描述落雨的情况了。关于降雨的方向还需要补充如下两个假设：①雨滴在考虑的范围内是匀速下落的；②雨滴是沿着前进的方向倾斜下落的，而且倾斜角度保持不变。于是我们令雨滴下落的速度为 r(米/秒)，降雨的角度(雨滴下落的方向与你前进的方向之间的夹角)为 θ。显然，前面提到的降雨强度将受降雨速度的影响，但它并不完全决定于降雨的速度。它还受到雨滴下落的密度的影响。我们用 p 来度量雨滴的密度，称为降雨强度系数，它表示在一定的时刻在单位体积的空间内由雨滴所占据的空间的比例数。于是有 $I=pr$。显然，$p\leqslant1$，当 $p=1$ 时意味着大雨倾盆，有如河流向下倾泻一般。

在这个情形下为要估计你被雨水淋湿的程度，关键是考虑到你在雨中的行走方向之后雨滴相对的下落方向。

首先考虑 $0<\theta\leqslant\pi/2$ 的情况。这时雨水是从前方迎面而来落下的，由经验可以知道，这时被淋湿的部位将仅仅是你的顶部和前方。因此淋在身上的雨水将分为两部分来计算。

首先考虑顶部被淋的雨水。雨滴速度垂直方向的分量是 $r\sin\theta$，顶部的面积是 wd。不难得到，在时间 $t=D/v$ 内淋在顶部的雨水量应该是：

$$C_1=(D/v)wd(pr\sin\theta).$$

再考虑前方表面淋雨的情况。雨速水平方向分量是 $r\cos\theta+v$,前方的面积是 wh。类似地我们有,前方表面被淋到的雨水的量应该是:

$$C_2=(D/v)wh[p(r\cos\theta+v)].$$

因此在整个的行程中被淋到的雨水的总量应该是

$$C=C_1+C_2=\frac{pwD}{v}[dr\sin\theta+h(r\cos\theta+v)].$$

仍然沿用前面得到的参数值,如果假设落雨的速度是 $r=4$ 米/秒,由降雨强度 $I=2$ 厘米/时 可以估算出它的强度系数 $p=1.39\times10^{-6}$。把这些参数值代入上式可以得到

$$C=\frac{6.95\times10^{-4}}{v}(0.8\sin\theta+6\cos\theta+1.5v).$$

在这个模型里有关的变量是 v 和 θ,因为 θ是落雨的方向,我们希望在模型研究过程中改变它的数值;而 v 是我们要选择的雨中行走的速度。由于在我们讨论的情形下有 $0<\theta\leqslant\pi/2$,C 是 v 的减函数。因此当 v 增大时淋雨量 C 将逐渐减小。

图 2.2　雨中行走模型图

下面分各种情况对模型进行讨论:

情形 1. $\theta=90°$

在这个情形下,因为,雨滴垂直落下。由上述模型可得

$$C=6.95\times10^{-4}(1.5+0.8/v)$$

假设以 $v=6$ 米/秒 的速度在雨中猛跑,由模型可以得出淋雨量 $C=11.3\times10^{-4}$ 米^3 $=1.13$ 升。

情形 2. $\theta=60°$

这时,因为,雨滴将向迎面向你身上落下。由上述模型可得

$$C=6.95\times10^{-4}[1.5+(0.4\sqrt{3}+3)/v]$$

同样,它将在 $v=6$ 米/秒 时淋到 $C=14.7\times10^{-4}$ 米$^3=1.47$ 升的雨量。

这表明所得到的结论较前面有很大的改进,可以继续分析下去。

考虑 $\pi/2<\theta<\pi$ 的情形。在这种情形下,雨滴将从后面向你身上落下。令 $\theta=90°+\alpha$,则 $0<\alpha<\pi/2$。这个情形还要按照你在雨中行走的速度分成两种情况。

首先考虑 $v\leqslant r\sin\alpha$的情形,也就是说行走的速度慢于雨滴的水平运动速度。这时雨滴将淋在后背上。淋在背上的雨水的量是 $pwDh(r\sin\alpha-v)/v$。于是淋在全身的雨水的总量应该是

$$C=pwD[rd\cos\alpha+h(r\sin\alpha-v)]/v.$$

当你以可能的最大速度 $v=r\sin\alpha$在雨中行进时,雨水量的表达式可以化简为

$$C=pwD(rd\cos\alpha)/v.$$

它表明你仅仅被头顶部位的雨水淋湿了。实际上,这意味着你刚好跟着雨滴向前走,所以身体前后都没有淋到雨。如果你的速度低于 $r\sin\alpha$,则由于雨水落在背上,而使得被淋的雨量增加。因此在这个情形下淋雨量仍然是行走速度的减函数。

第二个情形是 $v>r\sin\alpha$的情形,这时在雨中的奔跑的速度比较快,要快于雨滴的水平运动速度,这时人将不断地追赶雨滴,雨水将淋在你的胸前。被淋的雨量是 $pwhD(v-r\sin\alpha)/v$。于是全身被淋的雨水的总量是

$$C=pwD[rd\cos\alpha+h(v-r\sin\alpha)]/v$$

综合上面分析的结果,我们可以得到淋雨量的数学模型为:

$$C=\begin{cases}\dfrac{pwD}{v}[r(d\sin\theta+h\cos\theta)+hv],\ 0<\theta\leqslant\pi/2,\\ \dfrac{pwD}{v}[r(d\cos\alpha+h\sin\alpha)-hv],\ 0<\alpha<\pi/2,\ v\leqslant r\sin\alpha,\\ \dfrac{pwD}{v}[r(d\cos\alpha-h\sin\alpha)+hv],\ 0<\alpha<\pi/2,\ v>r\sin\alpha.\end{cases}$$

正如上面分析所得到的,模型中前两个式子都是速度 v 的减函数。但是第三个式子的情形就比较复杂了,它的增减性将取决于括号内的式子 $d\cos\alpha-h\sin\alpha$ 是正还是负,它刚好是关于人的体形的一个指标。

从这个模型我们可以得到如下的结论:

(1) 如果雨是迎着你前进的方向向你落下,这时的策略很简单,应该以最大的速度向前跑。

(2)如果雨是从你的背后落下,这时你应该控制你在雨中的行走的速度,让它刚好等于落雨速度的水平分量。这时雨滴不会淋到你的前胸和后背,只淋到了头顶上。可能这还不是最优的结论,但它是一个比较容易掌握的标准。

所得到的这些结果似乎是合理的并且与我们所期望的是一致的。我们的第二个更详细的模型对前面的模型的改进之处在于建模时考虑了落雨的方向并且更全面地考虑了各种可能发生的情况。所有的雨水量的结果都比第一个模型得到的 2 升要小。同样所得到的结果的数量级也是我们所希望的。当然,真正使用实际的数值结果来验证这个模型是困难的。如果你不介意全身被淋湿的话,也可以尝试在雨中行走来验证我们的模型。即使如此,如何在雨中控制你的行走的速度,如何测量和控制降雨强度以及如何测量淋在身上的雨水量也并非易事。

这是一个描述整个建模及其分析过程的一个典型的例子。希望它能有助于大家更快地掌握数学建模的思路。尽管在本书中或其他大家接触到的实例中具体的建模过程会有这样那样的区别,但从总的思路上是不会有太大的偏离的。