Assignment3 报告

一．对 LSTM 的求导

1.1 单步 LSTM 的求导

$$h_t = o_t * \tanh(C_t)$$
$$\frac{\partial h_t}{\partial o_t} = \tanh(C_t)$$
$$\frac{\partial h_t}{\partial C_t} = o_t * (1 - tanh^2(C_t))$$
$$o_t = \sigma(W_o \cdot z + b_o)$$

$$\frac{\partial o_t}{\partial W_o} = \frac{\partial o_t}{\partial (W_o z + b_o)} * \frac{\partial (W_o z + b_o)}{\partial W_0} = [o_t * (1 - o_t)] \cdot z^T$$
$$\frac{\partial h_t}{\partial W_o} = \frac{\partial h_t}{\partial o_t} * \frac{\partial o_t}{\partial W_o} = \tanh(C_t) * [o_t * (1 - o_t)] \cdot z^T$$
$$\frac{\partial o_t}{\partial b_o} = \frac{\partial o_t}{\partial (W_o z + b_o)} * \frac{\partial (W_o z + b_o)}{\partial b_o} = o_t * (1 - o_t)$$
$$\frac{\partial h_t}{\partial b_o} = \frac{\partial h_t}{\partial o_t} * \frac{\partial o_t}{\partial b_o} = \tanh(C_t) * [o_t * (1 - o_t)]$$

$$C_t = f_t * C_{t-1} + i_t * \overline{C_t}$$
$$\frac{\partial h_t}{\partial f_t} = \frac{\partial h_t}{\partial C_t} * \frac{\partial C_t}{\partial f_t} = o_t * (1 - tanh^2(C_t)) * C_{t-1}$$
$$\frac{\partial h_t}{\partial C_{t-1}} = \frac{\partial h_t}{\partial C_t} * \frac{\partial C_t}{\partial C_{t-1}} = o_t * (1 - tanh^2(C_t)) * f_t$$
$$\frac{\partial h_t}{\partial i_t} = \frac{\partial h_t}{\partial C_t} * \frac{\partial C_t}{\partial i_t} = o_t * (1 - tanh^2(C_t)) * \overline{C_t}$$
$$\frac{\partial h_t}{\partial \overline{C_t}} = \frac{\partial h_t}{\partial C_t} * \frac{\partial C_t}{\partial \overline{C_t}} = o_t * (1 - tanh^2(C_t)) * i_t$$
$$\frac{\partial h_t}{\partial W_f} = \frac{\partial h_t}{\partial f_t} * \frac{\partial f_t}{\partial (W_f z + b_f)} * \frac{\partial (W_f z + b_f)}{\partial W_f}$$
$$= o_t * (1 - tanh^2(C_t)) * C_{t-1} * [f_t * (1 - f_t)] \cdot z^T$$
$$\frac{\partial h_t}{\partial b_f} = \frac{\partial h_t}{\partial f_t} * \frac{\partial f_t}{\partial (W_f z + b_f)} * \frac{\partial (W_f z + b_f)}{\partial b_f}$$
$$= o_t * (1 - tanh^2(C_t)) * C_{t-1} * [f_t * (1 - f_t)]$$
$$\frac{\partial h_t}{\partial W_i} = \frac{\partial h_t}{\partial i_t} * \frac{\partial i_t}{\partial (W_i z + b_i)} * \frac{\partial (W_i z + b_i)}{\partial W_i}$$
$$= o_t * (1 - tanh^2(C_t)) * \overline{C_t} * [i_t * (1 - i_t)] \cdot z^T$$
$$\frac{\partial h_t}{\partial b_i} = \frac{\partial h_t}{\partial i_t} * \frac{\partial i_t}{\partial (W_i z + b_i)} * \frac{\partial (W_i z + b_i)}{\partial b_i} = o_t * (1 - tanh^2(C_t)) * \overline{C_t} * [i_t * (1 - i_t)]$$
$$\frac{\partial h_t}{\partial W_c} = \frac{\partial h_t}{\partial \overline{C_t}} * \frac{\partial \overline{C_t}}{\partial (W_c z + b_c)} * \frac{\partial (W_c z + b_c)}{\partial W_c} = o_t * (1 - tanh^2(C_t)) * i_t * \left(1 - \overline{C_t}^2\right) \cdot z^T$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial b_c}=\frac{\partial h_t}{\partial \overline{C_t}}*\frac{\partial \overline{C_t}}{\partial (W_c z+b_c)}*\frac{\partial (W_c z+b_c)}{\partial b_c}=o_t*(1-tanh^2(C_t))*i_t*\left(1-\overline{C_t}^2\right)$$

因为$\mathbf{z}=[\mathbf{h_{t-1}},\boldsymbol{x_t}]$，所以不妨设$\mathbf{W_*}=[\boldsymbol{U_*},\boldsymbol{V_*}]$，其中$\mathbf{U_*}$的维度和$\mathbf{h_t}$相同。

$$\frac{\partial h_t}{\partial h_{t-1}}=tanh(C_t)*\frac{\partial o_t}{\partial h_{t-1}}+o_t*\frac{\partial \tanh(C_t)}{\partial h_{t-1}}$$

$$=tanh(C_t)*\frac{\partial o_t}{\partial \sigma}*\frac{\partial \sigma}{\partial h_{t-1}}+o_t\frac{\partial h}{\partial C_t}*\frac{\partial C_t}{\partial h_{t-1}}$$

$$=\mathbf{U_o^T}\cdot(\tanh(C_t)*[o_t*(1-o_t)]+o_t*(1-tanh^2(C_t))$$

$$*\left(C_{t-1}*\frac{\partial f_t}{\partial h_{t-1}}+\overline{C_t}*\frac{\partial i_t}{\partial h_{t-1}}+i_t*\frac{\partial \overline{C_t}}{\partial h_{t-1}}\right)$$

$$=\mathbf{U_o^T}\cdot(\tanh(C_t)*[o_t*(1-o_t)]+o_t*(1-tanh^2(C_t))*[U_f^T\cdot\left(C_{t-1}*f_t*(1-f_t)\right)$$

$$+U_i^T\cdot\left(\overline{C_t}*i_t*(1-i_t)\right)+U_c^T\cdot(i_t*\left(1-\overline{C_t}^2\right))]$$

同理可得

$$\frac{\partial h_t}{\partial x_t}=\mathbf{V_o^T}\cdot(\tanh(C_t)*[o_t*(1-o_t)]+o_t*(1-tanh^2(C_t))*[V_f^T$$

$$\cdot\left(C_{t-1}*f_t*(1-f_t)\right)+V_i^T\cdot\left(\overline{C_t}*i_t*(1-i_t)\right)+V_c^T\cdot(i_t*\left(1-\overline{C_t}^2\right))]$$

1.2 LSTM 在时间序列上的求导

我们采用交叉熵函数当做损失函数，设序列的最后位置为τ

$$\hat{y}_t=\mathrm{softmax}(\mathbf{W_p h_t}+\mathbf{b_p})$$

$$\mathbf{L}=-\textstyle\sum_{t=1}^{\tau} y_t*\log\hat{y}_t$$

则当$t=\tau$时，求导和 1.1 过程一样，梯度为

$$\frac{\partial L}{\partial h_t}=\frac{\partial L}{\partial \hat{y}_t}*\frac{\partial \hat{y}_t}{\partial (\mathbf{W_p h_t}+\mathbf{b_p})}*\frac{\partial (\mathbf{W_p h_t}+\mathbf{b_p})}{\partial h_t}=W_p^T\cdot(\hat{y}_t-y_t)$$

当$t<\tau$时，对h_t的求导为

$$\frac{\partial L}{\partial h_t}=\frac{\partial \sum_{k=t}^{\tau}(-y_k\log\widehat{y_k})}{\partial h_t}=\frac{\partial \sum_{k=t+1}^{\tau}(-y_k\log\widehat{y_k})}{\partial h_t}+\frac{\partial y_t\log\hat{y}_t}{\partial h_t}$$

$$=\frac{\partial \sum_{k=t+1}^{\tau}(-y_k\log\widehat{y_k})}{\partial h_{t+1}}*\frac{\partial h_{t+1}}{\partial h_t}+\frac{\partial y_t\log\hat{y}_t}{\partial h_t}\mathbf{0}$$

$$=\frac{\partial L}{\partial h_{t+1}}*\frac{\partial h_{t+1}}{\partial h_t}+W_p^T\cdot(\hat{y}_t-y_t)$$

所以对W_o等权重矩阵求导为

$$\frac{\partial L}{\partial W_o}=\sum_{t=1}^{\tau}\frac{\partial L}{\partial h_t}*\frac{\partial h_t}{\partial W_f}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_o}=\sum_{t=1}^{\tau}\frac{\partial L}{\partial h_t}*\frac{\partial h_t}{\partial b_o}$$

当$t=\tau$时，对C_t求导为

$$\frac{\partial L}{\partial C_t}=\frac{\partial L}{\partial \mathrm{h_t}}*\frac{\partial h_t}{\partial C_t}$$

当$t<\tau$时，因为$h_t=o_t*\tanh(C_t)$且$C_{t+1}=f_{t+1}*C_t+i_{t+1}*\overline{C_{t+1}}$，所以对$C_t$求导为

$$\frac{\partial L}{\partial C_t}=\frac{\partial L}{\partial h_t}*\frac{\partial h_t}{\partial C_t}+\frac{\partial L}{\partial C_{t+1}}*\frac{\partial C_{t+1}}{\partial C_t}=\frac{\partial L}{\partial h_t}*o_t*(1-tanh^2(C_t))+\frac{\partial L}{\partial C_{t+1}}*f_{t+1}$$

因此对$\mathbf{W}_*$和$\mathbf{b}_*$的求导为

$$\frac{\partial L}{\partial W_f}=\sum_{t=1}^{\tau}\frac{\partial L}{\partial C_t}*\frac{\partial C_t}{\partial W_f}=\sum_{t=1}^{\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial C_t}*C_{t-1}*[f_t*(1-f_t)]\right)\cdot z^T$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_f}=\sum_{t=1}^{\tau}\frac{\partial L}{\partial C_t}*\frac{\partial C_t}{\partial W_f}=\sum_{t=1}^{\tau}\frac{\partial L}{\partial C_t}*C_{t-1}*[f_t*(1-f_t)]$$

$$\frac{\partial L}{\partial W_i}=\sum_{t=1}^{\tau}\frac{\partial L}{\partial C_t}*\frac{\partial C_t}{\partial W_i}=\sum_{t=1}^{\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial C_t}*\overline{C_t}*[i_t*(1-i_t)]\right)\cdot z^T$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_i}=\sum_{t=1}^{\tau}\frac{\partial L}{\partial C_t}*\frac{\partial C_t}{\partial b_i}=\sum_{t=1}^{\tau}\frac{\partial L}{\partial C_t}*C_{t-1}*[i_t*(1-i_t)]$$

$$\frac{\partial L}{\partial W_C}=\sum_{t=1}^{\tau}\frac{\partial L}{\partial C_t}*\frac{\partial C_t}{\partial W_C}=\sum_{t=1}^{\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial C_t}*i_t*\left(1-\overline{C_t}^2\right)\right)\cdot z^T$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_C}=\sum_{t=1}^{\tau}\frac{\partial L}{\partial C_t}*\frac{\partial C_t}{\partial b_i}=\sum_{t=1}^{\tau}(\frac{\partial L}{\partial C_t}*i_t*\left(1-\overline{C_t}^2\right))$$

二、LSTM 的训练

1.初始化

初始化训练参数如下:

Vocabulary size$|\mathrm{V}|=$ 5656

Batch size=20

Sentence length=64

Hidden size=256

Input size=128

Embedding 采用 Pytorch 自带的 nn.Embedding()。

权重矩阵W_*和偏置矩阵b_*初始化为$[-\mathrm{S},+\mathrm{S}]$的均匀分布，其中$\mathrm{S}=\sqrt{\frac{1}{\text{output size}}}$，在这里$\text{output size}=\text{hidden size}$一开始我取均值为 0，方差为 1 的标准正态分布，后来发现这样初始化效果很差，一开始的 loss 很高。网上查阅了 Pytorch 自带的 nn.Linear 层的权重初始化才采取了这个分布，效果和 nn.Linear()对比差不多。不设为 0 的原因是因为求导采用链式法则，只要有一步导数为 0 整个导数即为 0，会导致整个模型一开始梯度下降很慢甚至梯度没有下降。例如，当尝试将$\mathbf{a_t}=\boldsymbol{Wh_t}+\boldsymbol{b}$中的$\mathbf{W}$和$\mathbf{b}$取为 0 矩阵时，求出的$\mathrm{a_t}$为 0，这样理论上$\mathrm{softmax}(\mathrm{a_t})$会出现除 0 的情况（虽然程序并没有报错）。因此需要取一个非 0 的随机值。

数据集：采用了这个 lab 给定的数据集，但是发现数据集过小导致非常容易过拟合。后

来尝试使用“全唐诗”的数据集，但是由于机器性能问题，运行完一轮需要很久，loss 下降得很慢，因此最终只使用了 700 首诗。

数据预处理：我认为 LSTM 能够学习到逗号和句号的特征，所以没有去掉逗号和句号。一开始将所有诗连起来然后以 sentence length 长度分开，但这样会破坏一整首诗的完整性导致给出第一句话不完整。所以我认为要保持整首诗的完整性，因此以诗为单位，诗句不足 sentence length 的补‘E’填充符。如果一首诗长过 sentence length 则划分为几首诗。

早停策略：最近 10 个 epoch 发现 perplexity 没有更优值时停止。

2.生成

一开始学习给定的数据集’tangshi.txt’，但是该数据集过小，因此生成的诗句并不是很好。下面是根据给定的数据集’tangshi.txt’学习后生成的诗句，其中“湖”字第二个字符便为停止符没有生成。

‘日’：日月三千里，明公去一麾。可能休涕泪，岂独感恩知。草木穷秋后，山川落照时。如何望故国，驱马却迟迟。

‘红’：红烟雾死，将进酒，酒中有毒鸩主父，言之主父伤主母。母为妾地父妾天，仰天俯地不忍言。佯为僵踣主父前，主父不知加妾鞭。

‘山’：山林迹如踣铁，交河几蹴曾冰裂。五花散作云满身，万里方看汗流血。长安壮儿不敢骑，走过掣电倾城知。青丝络头为君老，何由却出横门道。

‘夜’：夜沈饮聊自适，放歌颇愁绝。岁暮百草零，疾风高冈裂。天衢阴峥嵘，客子中夜发。霜严衣带断，指直不得结。凌晨过骊山，御榻在嵽嵲。

‘海’：海亭秋日望，委曲见江山。染翰聊题壁，倾壶一解颜。歌逢彭泽令，归赏故园间。予亦将琴史，栖迟共取闲。

‘月’：月三日天气新，长安水边多丽人。态浓意远淑且真，肌理细腻骨肉匀。绣罗衣裳照暮春，蹙金孔雀银麒麟。头上何所有，翠微盍叶垂鬓唇。

从网上下载了“全唐诗”数据集并使用了一部分诗句学习。下面是学习“全唐诗”数据集后生成的几首不同的诗句。

‘**日**‘：日月高明月，春風如墮塵。我來一傾耳，萬里天一隅。一聞鄒室中，蒼生愧我身。

‘**紅**‘： 紅藥就曾孫，西溪長擊節。池草綠收弋，霜餘春曉霞。山林十里旅，春風吹草霞。山林雲水在，天上卿雲雷。
紅榴內消停起，一時不復辭。不辭援鼓桴，不是兼非真。

‘山’：山雨新葩酒，紅日霽空秋。一笑相逢入，萬里到橋邊。

‘**夜’**：夜枕江海志，一笑相交似。一笑忽爲人，一室自爲人。。

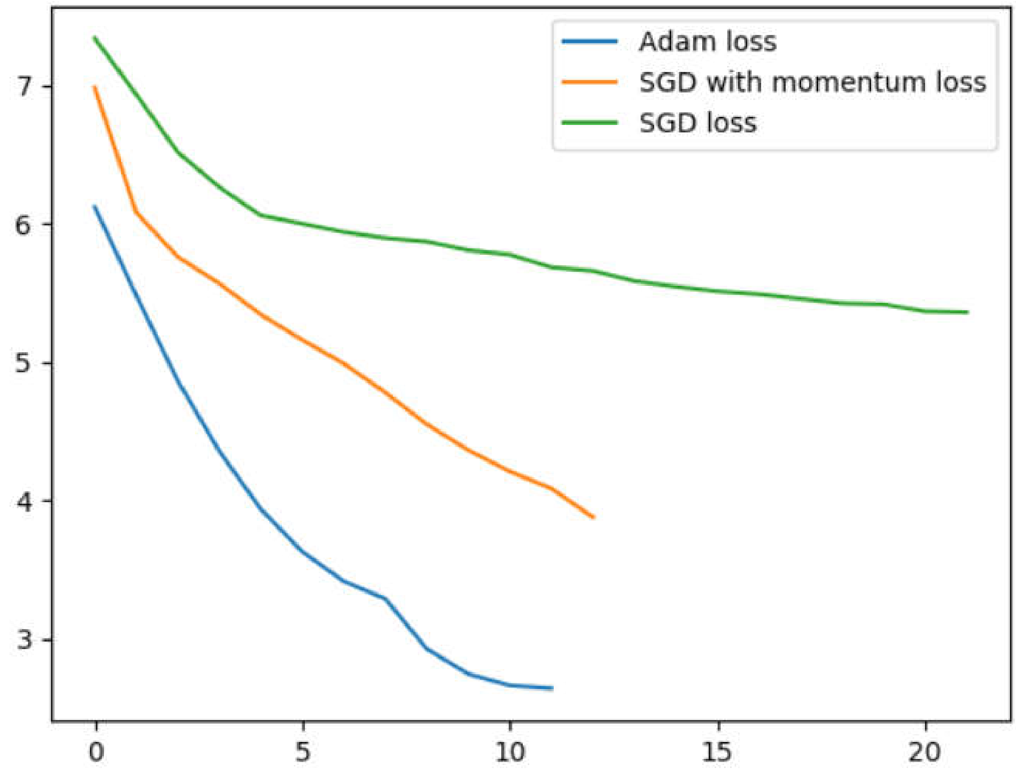
‘**湖’**：湖外紫微，默默而神。一飯蒼蒼日，孤墳接平沙。一笑相逢入，天長鴻雁哀。

‘**海**‘：海內思洪內，却憐悟舟驅。我來一傾耳，萬事一時心。一飽青天草，春風吹短槳。

‘月’：月色初藏日，春風吹野服。我生嗜好，一笑伸眉。

3.最优化

本次实验一共使用了 SGD，SGD with momentum，Adam，其中收敛最快的为 Adam。
很多情况下 SGD 学习率采用 0.01，Adam 学习率采用 0.001，但是由于机器性能问题这个学习率下降得太慢，因此放大了学习率。尽管可能难以收敛，但是能够确保初始 loss 下降得比较快。
一开始使用 SGD，由于每次梯度下降时间较长，当学习率较小的时候收敛时间非常长，因此采用学习率为 0.5。SGD with momentum 学习率为 0.5，动量为 0.9。使用 Adam 时学习率为 0.5 时无法收敛，因此采用学习率 0.01。
SGD，SGD with momentum，Adam 的 loss 如下图



(Adam 和 SGD with momentum 因为早停所以只显示一部分)
上图可以很明显看出即使 Adam 学习率很小，收敛仍明显快于 SGD with momentum 和 SGD。
而在相同的学习率下 SGD with momentum 则快于 SGD。