

# PRML Assignemnt 3 报告

---

16307130076 赵伟丞

## LSTM 原理推导

---

### LSTM 后向传播导数推导

首先, 已知 LSTM 的前向传播公式如下:

$$f_t = \sigma(W_f \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_f)$$

$$i_t = \sigma(W_i \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_i)$$

$$\hat{c}_t = \tanh(W_c \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_c)$$

$$c_t = f_t * c_{t-1} + i_t * \hat{c}_t$$

$$o_t = \sigma(W_o \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_o)$$

$$h_t = o_t * \tanh(c_t)$$

显然有,

$$\frac{\partial h_t}{\partial o_t} = \text{diag}[\tanh(c_t)]$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial c_t} = \text{diag}[o_t * (1 - \tanh(c_t)^2)]$$

$$\frac{\partial c_t}{\partial f_t} = \text{diag}[c_{t-1}]$$

$$\frac{\partial c_t}{\partial i_t} = \text{diag}[\hat{c}_t]$$

$$\frac{\partial c_t}{\partial \hat{c}_t} = \text{diag}[i_t]$$

$$\frac{\partial c_t}{\partial c_{t-1}} = \text{diag}[f_t]$$

于是有,

$$\frac{\partial h_t}{\partial f_t} = o_t * (1 - \tanh(c_t)^2) * c_{t-1}$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial i_t} = o_t * (1 - \tanh(c_t)^2) * \hat{c}_t$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial \hat{c}_t} = o_t * (1 - \tanh(c_t)^2) * i_t$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial c_{t-1}} = o_t * (1 - \tanh(c_t)^2) * f_t$$

又因为,

$$o_t = \sigma(\text{net}_{o,t})$$

$$\text{net}_{o,t} = W_o \cdot z + b_o$$

$$f_t = \sigma(\text{net}_{f,t})$$

$$\text{net}_{f,t} = W_f \cdot z + b_f$$

$$i_t = \sigma(\text{net}_{i,t})$$

$$\text{net}_{i,t} = W_i \cdot z + b_i$$

$$\hat{c}_t = \tanh(\text{net}_{\hat{c},t})$$

$$\text{net}_{\hat{c},t} = W_c \cdot z + b_c$$

显然,

$$\frac{\partial o_t}{\partial \text{net}_{o,t}} = \text{diag}[o_t * (1 - o_t)]$$

$$\frac{\partial \text{net}_{o,t}}{\partial z} = W_o$$

$$\frac{\partial f_t}{\partial \text{net}_{f,t}} = \text{diag}[f_t * (1 - f_t)]$$

$$\frac{\partial \text{net}_{f,t}}{\partial z} = W_f$$

$$\frac{\partial i_t}{\partial \text{net}_{i,t}} = \text{diag}[i_t * (1 - i_t)]$$

$$\frac{\partial \text{net}_{i,t}}{\partial z} = W_i$$

$$\frac{\partial \hat{c}_t}{\partial \text{net}_{\hat{c},t}} = \text{diag}[1 - \hat{c}_t^2]$$

$$\frac{\partial \text{net}_{\hat{c},t}}{\partial z} = W_c$$

由上面一系列式子可得,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_t}{\partial z} &= \frac{\partial h_t}{\partial h_{t-1}} = \frac{\partial h_t}{\partial x_t} = \tanh(c_t) * o_t * (1 - o_t) * W_o \\ &= o_t * (1 - \tanh(c_t)^2) * c_{t-1} * f_t * (1 - f_t) * W_f \\ &= o_t * (1 - \tanh(c_t)^2) * \hat{c}_t * i_t * (1 - i_t) * W_i \\ &= o_t * (1 - \tanh(c_t)^2) * i_t * (1 - \hat{c}_t^2) * W_c \end{aligned}$$

同样的,

$$\frac{\partial h_t}{\partial W_o} = \tanh(c_t) * o_t * (1 - o_t) * z$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial b_o} = \tanh(c_t) * o_t * (1 - o_t)$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial W_f} = o_t * (1 - \tanh(c_t)^2) * c_{t-1} * f_t * (1 - f_t) * z$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial b_f} = o_t * (1 - \tanh(c_t)^2) * c_{t-1} * f_t * (1 - f_t)$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial W_i} = o_t * (1 - \tanh(c_t)^2) * \hat{c}_t * i_t * (1 - i_t) * z$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial b_i} = o_t * (1 - \tanh(c_t)^2) * \hat{c}_t * i_t * (1 - i_t)$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial W_c} = o_t * (1 - \tanh(c_t)^2) * i_t * (1 - \hat{c}_t^2) * z$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial b_c} = o_t * (1 - \tanh(c_t)^2) * i_t * (1 - \hat{c}_t^2)$$

至此，所有导数推导完毕。

## 时序上的导数传播

时序上的传播，就是依照前向传播的反向顺序，利用  $\frac{\partial h_t}{\partial h_{t-1}}$  进行时序上的反向传播，然后在每个计算单元中计算相应的导数，即可实现在序列中沿时间顺序的反向传播。

## 基于Numpy的LSTM实现

位于LSTM\_np.py文件中，检测方法为：使用同tensor（array）输入是进行一步迭代后计算出的梯度一致。

## 基于 LSTM 的唐诗生成模型

### 参数的初始化

参数初始化显然不能全 0，这会导致模型参数对称的问题，导致模型无法被恰当地训练。我个人在代码中使用了 PyTorch 提供的参数初始化中的 uniform\_来初始化各个参数，其从  $(-\frac{1}{\sqrt{hidden\_size}}, \frac{1}{\sqrt{hidden\_size}})$  均匀分布中取值来初始化模型参数（此部分参考了 PyTorch 自带的 LSTM 的实现）。

### 模型实现

#### 额外数据集

本人在训练模型时使用了全唐诗来进行训练。包括训练集中 34552 首诗和测试集中 8638 首诗。

#### 数据预处理

对于不足 seq\_len 长度的序列，在其前面补充<pad>（之所以在前面填充是因为在后面填充会出现输出全为<pad>的情形。对于超过 seq\_len 长度的序列，以 seq\_step 为步长截断为长度为 seq\_len 的序列。字典则通过 fastNLP 生成。

## 各个超参

- 词典大小: 6253
- batch size: 128
- 学习率:  $1e-3$
- 序列长度: 40
- 序列步长: 10
- input size: 128
- hidden size: 128

## 生成结果

以下诗句的划分为人工操作。

- 日清忆道年城别，上入春无翠花高。山万风云此去水，我分生新下南夜。
- 红日春高月，时青出云东。天白从来君，白常时江云。长风千中前，燕家行满金。百道流青水，一烟黄旧来。
- 山秋月上春，已寒烟旧中。无间高心来，初云海五寒。
- 夜心无为如玉白，我有一月此台青。水前大山时天相，开白清天长风上。君云天人四不闻，波相一春上千金。之风是心与天青，一别何日此岂客。
- 湖十高有日，山月南云春。清天万上今，旧北无朝心。自下高月此，九始问行多。如是君云长，得思时不多。
- 海何南高山，青石小人山。山上入东台，风开朝野双。天新不山河，酒上君青石。龙门千一别，晓日山万西。
- 月上春青多，行天何不出。三五我何马，长中天下白。云白常千君，春风无水闻。高风春草有，此台花未平。

## 困惑度计算

由于困惑度本身可以解释为交叉熵的指数形式，因此本人选择在测试集上计算交叉熵（在每个 batch 上分别计算，不求平均），然后在取 e 指数之后取平均值，得到困惑度。然后基于测试集上的困惑度是否连续两次上升决定是否进行 early stop。在最后使用的模型中，困惑度平均值为 7195.94。

## 优化器的选择

本人尝试使用了 PyTorch 已经实现的优化器中较为常用的两种，Adam 和 SGD with momentum。损失函数使用交叉熵作为损失函数。其中 SGD with momentum 中 momentum 取 0.9。这两种优化中 Adam 表现更好，主要是收敛速度更快（少了两个 epoch），而且最后的 loss 也相对较小（7.13/6.55）。