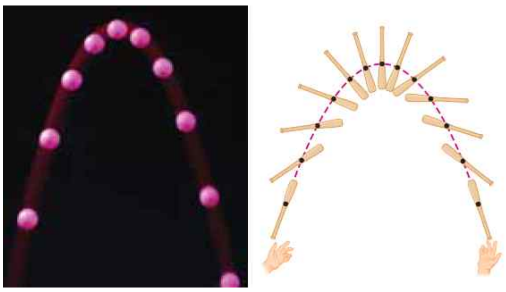
Chapter 09-1 The Center of Mass(질량 중심)

 자동차나 발레리나처럼 복잡한 물체의 운동을 물체의 특별한 점(point)을 이용하여,
간단하게 기술하는 물리학적 방법론을 공부한다. 이 점(point)를 질량 중심(The center of mass)라고 한다.



 공을 회전 없이 던져 올리면, 공은 포물선을 그리며 날아간다.
하지만 야구 방망이를 공중에 던지면, 야구 방망이의 운동은 공의 운동 보다 더 복잡하다.
왜냐하면 방망이의 각 부분이 제각기 다른 경로로 움직이기 때문에 하나의 입자로 기술할 수 없기 때문이다.
but, 방망이에서 질량 중심이라고 부르는 특별한 점은 포물선 경로를 따라 움직이는 것을 알 수 있다.

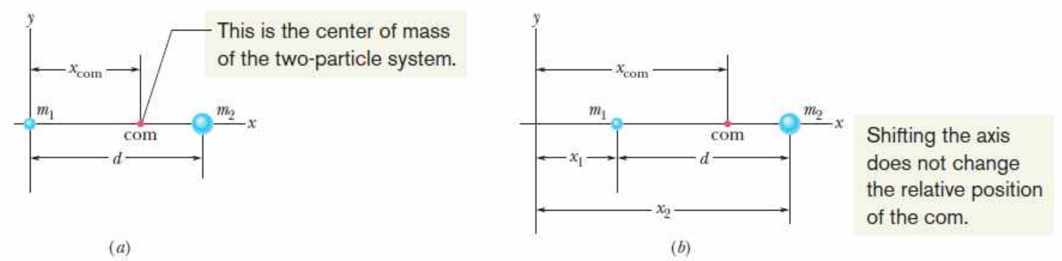
질량 중심(The Center of Mass)

The center of mass of a system of particles is the point that moves as though
(1) all of the system's mass were concentrated there and
(2) all external forces were applied there.

입자계의 질량 중심은
(1) 계의 모든 질량이 그 곳으로 집중 되어 있고,
(2) 모든 외부력이 그 곳에 적용되는 것처럼 운동하는 점이다.

입자계(Systems of Particles)

if(1차원의 두 개의 입자의 경우)



$$x_{com} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d. \qquad (9\text{-}1)$$

그림(a)
- 질량이 각각 m1, m2인 입자의 분리거리는 d 일 때,
질량 m1인 입자의 위치를 x축의 원점으로 잡고 계의 질량 중심 좌표를 정의한 식.(9-1)
- 지렛대의 원리를 생각하면 쉬움. (m2: m1 = x(com) : d - x(com))

$$x_{com} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \qquad (9\text{-}2)$$

그림(b)
- 좌표계의 원점을 입자 위에 놓지 않는 일반적인 상황.
(m2: n1으로 선분을 내분하는 점의 위치와 동일하다.)
- 좌표계의 이동은 각각의 입자에서 질량 중심까지의 거리를 변화시키지 않는다.
(물리적인 입자들의 성질이지 사용하는 좌표계의 성질이 아니기 때문에...)

$$x_{com} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}, \qquad (9\text{-}3)$$

- M은 계의 total 질량.(M = m1 + m2)

$$x_{com} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n}{M}$$
$$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i. \qquad (9\text{-}4)$$

- 일반적인 경우로 확장한 식. (M = m1 + m2 + ... + m(n))

if(3차원의 경우)

$$x_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \qquad y_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \qquad z_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i. \qquad (9\text{-}5)$$

- x, y, z축의 세 좌표로 표기해야 함.

$$\vec{r}_i = x_i\hat{\mathrm{i}} + y_i\hat{\mathrm{j}} + z_i\hat{\mathrm{k}}. \qquad (9\text{-}6)$$

- 벡터로 표기한 방법. (i 번째 입자의 위치)

$$\vec{r}_{com} = x_{com}\hat{\mathrm{i}} + y_{com}\hat{\mathrm{j}} + z_{com}\hat{\mathrm{k}}. \qquad (9\text{-}7)$$

- 입자계의 질량 중심의 위치를 위치 벡터(position vector)로 표기 함.

$$\vec{r}_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i, \qquad (9\text{-}8)$$

- (9-5)의 스칼라 방정식을 한 개의 벡터 방정식으로 표기 함.

고체(Solid Bodies)

- 야구 방망이와 같은 물체는 수많은 입자(원자)를 가지고 있으니까, 물질이 연속적으로 분포한 것으로 생각이 가능함.
입자들을 미분질량요소(differential mass elements) dm으로 표기하고, 질량 중심의 좌표를 적분으로 표기한다.

$$x_{com} = \frac{1}{M}\int x\,dm, \qquad y_{com} = \frac{1}{M}\int y\,dm, \qquad z_{com} = \frac{1}{M}\int z\,dm, \qquad (9\text{-}9)$$

물론, 모든 점에서 밀도가 균일한 물체만을 생각한다.
(균일한 물체: 단위 부피당 질량, 즉 밀도가 균일)

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}, \qquad (9\text{-}10)$$

- dm = (M/V)dV를 (9-9)에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$x_{com} = \frac{1}{V}\int x\,dV, \qquad y_{com} = \frac{1}{V}\int y\,dV, \qquad z_{com} = \frac{1}{V}\int z\,dV. \qquad (9\text{-}11)$$

- 물체가 대칭점, 대칭선 또는 대칭면을 갖는다면 위의 적분 중 한 개 이상을 생략할 수 있다.
왜냐하면 질량 중심은 대칭점, 대칭선 또는 대칭면 위에 있기 때문이다.

ex. 점대칭인 균일한 공의 질량 중심은 공의 중심에 있다.
ex. 중심축엥 대칭인 균일한 원뿔의 질량 중심은 원뿔의 중심축 위에 있다.