教学案例四：高斯投影正反解

1. 高斯投影正算

（1）计算内容

已知椭球面上某点的大地坐标（L，B），求该点相应的高斯平面直角坐标（x，y）

（2）解算步骤

1° 计算辅助量

$$\begin{cases} \eta = e' \cos B \\ t = \tan B \\ N = \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \end{cases}$$

2° 计算子午线弧长 X

采用展成正弦 n 次幂和余弦乘积的子午线弧长公式计算

对于克拉索夫斯基椭球

$$\begin{aligned} X &= 111134.8611B^{\circ} - (32005.7799\sin B + 133.9238\sin^3 B \\ &\quad + 0.6973\sin^5 B + 0.0039\sin^7 B)\cos B \end{aligned}$$

对于 IUGG－1975 椭球

$$\begin{aligned} X &= 111134.0047B^{\circ} - (32009.8575\sin B + 133.9602\sin^3 B \\ &\quad + 0.6976\sin^5 B + 0.0039\sin^7 B)\cos B \end{aligned}$$

式中 $B°$表示以“度”为单位的 B 值

3° 计算高斯平面坐标

根据上面计算得到的辅助量及子午线弧长，用下面的正算公式进行计算

$$\left.\begin{aligned} x &= X + \frac{N}{2\rho''^2}\sin B\cos B \cdot l''^2 + \frac{N}{24\rho''^4}\sin B\cos^3 B(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)l''^4 \\ &\quad + \frac{N}{720\rho''^6}\sin B\cos^5 B(61 - 58t^2 + t^4)l''^6 \\ y &= \frac{N}{\rho''}\cos B l'' + \frac{N}{6\rho''^3}\cos^3 B(1 - t^2 + \eta^2)l''^3 + \frac{N}{120\rho''^5}\cos^5 B(5 - 18t^2 \\ &\quad + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2)l''^5 \end{aligned}\right\}$$

也可用下面的实用公式进行编程

$$x = X + Nt\left[\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{24}\left(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4\right)m^4 + \frac{1}{720}\left(61 - 58t^2 + t^4\right)m^6\right]$$

$$y = N\left[m + \frac{1}{6}\left(1 - t^2 + \eta^2\right)m^3 + \frac{1}{120}\left(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2\right)m^5\right]$$

式中 $m = \cos B \cdot l^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$

（3）算例

高斯投影正算算例

已知数据	椭球参数	运算结果（单位：m）	
		六度带	三度带
B= 40°58′32″.33 L=100°10′20″.11	克拉索夫斯基椭球	x= 4 538 610.951	x=4 538 610.951
		y= 98 666.625	y=98 666.625
		Y= 17 598 666.625	Y= 33 598 666.625
	IUGG-1975 椭球	x=4 538 532.847	x=4 538 532.847
		y= 98 665.021	y= 98 665.021
		Y=17 598 665.021	Y=33 598 665.021
B= 35°26′40″.38 L=115°08′51″.22	克拉索夫斯基椭球	x= 3 925 560.035	x=3 924 588.055
		y= -168 198.576	y=104 193.074
		Y= 20 331 801.424	Y= 38 604 193.074
	IUGG-1975 椭球	x=3925492.278	x=3924520.313
		y= -168195.835	y= 104191.376
		Y=20 331804.165	Y=38 604191.376

*** 表中 Y 为通用坐标**

2. 高斯投影反算

（1）计算内容

已知平面上某点的高斯平面直角坐标（x，y），求该点相应的椭球面上的大地坐标（L，B）

（2）解算步骤

1° 计算底点纬度

由 X 反求 B_f 的迭代公式是：

对于克拉索夫斯基椭球

当 $\leq 3000km$ 时，

$$\begin{aligned} B_f^\circ = {} & 9.04353301294X - 0.00000049604X^2 \\ & - 0.00075310733X^3 - 0.00000084307X^4 \\ & + 0.00000426055X^5 - 0.00000010148X^6 \end{aligned}$$

当 $3000km < X < 6000km$ 时，

$$
\begin{aligned}
B_f^{\circ} = {} & 27.11115372595 + 9.02468257083(X-3) \\
& - 0.00579740442(X-3)^2 - 0.00043532572(X-3)^3 \\
& + 0.00004857285(X-3)^4 + 0.00000215727(X-3)^5 \\
& - 0.00000019399(X-3)^6
\end{aligned}
$$

式中X均以千公里为单位。

对于 IUGG-1975 椭球

当$X < 3000km$时，

$$
\begin{aligned}
B_f^{\circ} = {} & 9.04369066313X - 0.00000049618X^2 \\
& - 0.00075325505X^3 - 0.00000084330X^4 \\
& + 0.00000426157X^5 - 0.00000010150X^6
\end{aligned}
$$

当$3000km < X < 6000km$时，

$$
\begin{aligned}
B_f^{\circ} = {} & 27.11162289465 + 9.02483657729(X-3) \\
& - 0.00579850656(X-3)^2 - 0.00043540029(X-3)^3 \\
& + 0.00004858357(X-3)^4 + 0.00000215769(X-3)^5 \\
& - 0.00000019404(X-3)^6
\end{aligned}
$$

式中X均以千公里为单位。

2° 计算辅助量

$$
\begin{cases}
\eta_f = e' \cos B_f \\
t_f = \tan B_f \\
N_f = \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_f}}
\end{cases}
$$

3° 计算子午线弧长X

采用展成正弦n次幂和余弦乘积的子午线弧长公式计算

对于克拉索夫斯基椭球

$$
\begin{aligned}
X = {} & 111134.8611B^{\circ} - (32005.7799\sin B + 133.9238\sin^3 B \\
& + 0.6973\sin^5 B + 0.0039\sin^7 B)\cos B
\end{aligned}
$$

对于 IUGG－1975 椭球

$$X = 111134.0047B^{\circ} - (32009.8575\sin B + 133.9602\sin^3 B + 0.6976\sin^5 B + 0.0039\sin^7 B)\cos B$$

式中 B°表示以“度”为单位的 B 值

4° 计算大地坐标

根据上面计算得到的底点纬度及辅助量，用下面的反算公式进行计算

$$\left.\begin{aligned}
\left(B_f - B\right)'' &= \frac{\rho'' t_f}{2M_f N_f} y^2 + \frac{\rho'' t_f}{24 M_f N_f^3} + \left(5 + 3t_f^2 + \eta_f^2 - 9\eta_f^2 t_f^2\right) y^4 \\
&\quad + \frac{\rho'' t_f}{720 M_f N_f^5}\left(61 + 90t_f^2 + 45t_f^4\right) y^6 \\
l'' &= \frac{\rho''}{N_f \cos B_f} y - \frac{\rho''}{6N_f^3 \cos B_f}\left(1 + 2t_f^2 + \eta_f^2\right) y^3 \\
&\quad + \frac{\rho''}{120 N_f^5 \cos B_f}\left(5 + 28t_f^2 + 24_f^4 + 6\eta_f^2 + 8\eta_f^2 t_f^2\right) y^5
\end{aligned}\right\}$$

也可用下面的实用公式进行编程

$$\left.\begin{aligned}
B^{\circ} &= B_f^{\circ} - \frac{1}{2} V_f^2 t_f \left[\left(\frac{y}{N_f}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(5 + 3t_f^2 + \eta_f^2 - 9\eta_f^2 t_f^2\right)\left(\frac{y}{N_f}\right)^4 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{360}\left(61 + 90t_f^2 + 45t_f^2\right)\left(\frac{y}{N_f}\right)^6\right]\frac{180}{\pi} \\
l^{\circ} &= \frac{1}{\cos B_f}\left[\left(\frac{y}{N_f}\right) - \frac{1}{6}\left(1 + 2t_f^2 + \eta_f^2\right)\left(\frac{y}{N_f}\right)^3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{120}\left(5 + 28t_f^2 + 24t_f^4 + 6\eta_f^2 + 8\eta_f^2 t_f^2\right)\left(\frac{y}{N_f}\right)^5\right]\frac{180}{\pi}
\end{aligned}\right\}$$

由上面的计算式得到的大地经纬度的单位为“度”

（3）算例

高斯投影反算算例

已知数据	椭球参数	运算结果	
		六度带	三度带
x= 3 354 874.257*m*	克拉索夫斯基椭球	*B*= 30° 18' 46″.92	*B*= 30° 18' 46″.92
y=386.564*m*		*L*=117° 00' 14″.46	*L*= 60° 00' 14″.46
X= 3 354 874.257*m*	IUGG-1975 椭球	*B*= 30° 18' 48″.80	*B*= 30° 18' 48″.80
Y=20 500 386.564*m*		*L*= 117° 00' 14″.46	*L*= 60° 00' 14″.47
x= 532 548.378*m*	克拉索夫斯基椭球	*B*= 4° 48' 57″.61	*B*= 4° 48' 57″.61
y=-209.135*m*		*L*=116° 59' 53″.21	*L*= 59° 59' 53″.21
		B= 4° 48' 57″.92	*B*= 4° 48' 57″.92

X= 532 548.378*m* *Y*=20 499 790.865*m*	IUGG-1975 椭球	*L*= 116° 59' 53″.21	*L*= 59° 59' 53″.21

*** 表中 *x*、*y* 为自然坐标，*X*、*Y* 为通用坐标**

3. 高斯投影邻带换算

邻带换算的基本方法就是，首先按高斯投影反算公式，依据该点在Ⅰ带的高斯平面坐标$(x, y)_{\mathrm{I}}$求得该点的大地坐标（*L*，*B*），然后再按高斯投影正算公式，以Ⅱ带的中央子午线经度$(L_0)_{\mathrm{II}}$为准，算得该点在Ⅱ带的高斯平面坐标 $(x, y)_{\mathrm{II}}$。其过程可表示为

$$(x,\ y)_{\mathrm{I}} \xrightarrow[\text{高斯投影反算}]{(L_0)_{\mathrm{I}}} (L,\ B) \xrightarrow[\text{高斯投影正算}]{(L_0)_{\mathrm{II}}} (x,\ y)_{\mathrm{II}}$$

具体算例见下表。

表 3°带与 6°带坐标换算算例

椭球参数	3°带与 6°带中央子午线重合		3°带与 6°带重合分带子午线重合	
	3°带坐标	6°带坐标	3°带坐标	6°带坐标
克拉索夫斯基椭球	*x*=3 858 520.6946 $y_{假定}$= 41 512 354.9834	*x*=3 858 520.6946	*x*=3 858 853.5671 $y_{假定}$= 42 420 902.8543	*x*=3 860 592.2479
		$y_{假定}$=21 512 354.9834		$y_{假定}$=21 695 272.9325
GRS75 椭球		*x*=3 858 520.6946		*x*=3 860 592. 1771
		$y_{假定}$=21 512 354.9834		$y_{假定}$=21 695 266.4644
GRS80 椭球		*x*=3 858 520.6946		*x*=3 860 592. 1751
		$y_{假定}$=21 512 354.9834		$y_{假定}$=21 695 266.2813