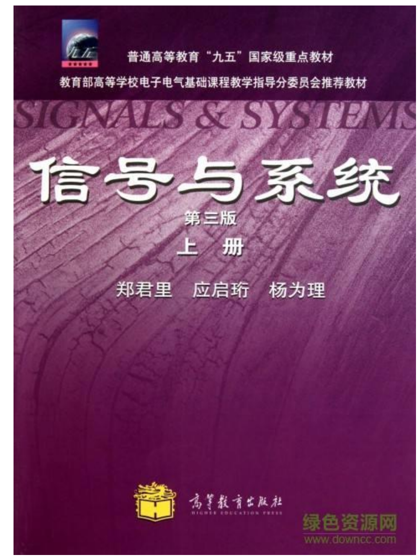
信号与系统

贾璐

LuJia@hfut.edu.cn

课程性质：

- 专业必修课、考研专业课
- 《数字信号处理》《通信系统》等专业必修课前期课程
- 教材：《信号与系统》，



郑君里，应启珩，杨为理

高等教育出版社，2011

- 48课时讲授+4课时实验
- 作业/考勤(20%)+实验报告/实验验收(20%)

+课堂测试（或期中）(20%)+期末考试（40%)

课程主要内容及参考书

1. 本课程主要内容： 研究确定信号的特性，线性时不变系统的特性以及信号通过 LTI 系统的基本分析方法。

2. 参考书：

① 《信号与线性系统分析》，吴大正著

② 《Signals and Systems》，奥本海姆著
《信号与系统》，刘树棠译

3. 前序课程： 《高等数学》《电路》

课程特点及要求

1. 课程特点： 理论抽象，数学知识应用较多，
分析方法灵活，有较广的实际应用。

2. 具体要求： ① 课程内容很重要，思想上要重视！

② 讲授顺序与教材可能会不完全一致，且会补充一定内容，注意记好笔记！

③ 正确理解概念，消化理论知识，多做习题，巩固所学知识。

3. 教学方法： 拟采用并行方式讨论连续与离散信号和系统，以使得两者在概念和观点上的相同点能够互相分享，不同点能够更好地加以区别。

本课程主要章节：

第一章：绪论

第二章：连续时间系统的时域分析

第三章：傅里叶变换

第四章：连续时间系统的复频域分析

第七章：离散时间系统的时域分析

第八章：z变换、离散时间系统的z域分析

第一章　绪　论

- 1.1　信号与系统的基本概念
- 1.2　信号的描述和分类
- 1.3　信号的运算
- 1.4　阶跃信号和冲激信号
- 1.5　信号的分解
- 1.6　系统模型及其分类
- 1.7　线性时不变系统
- 1.8　系统的分析方法

1.1　信号与系统的基本概念

思考：什么是信号？什么是系统？为什么把这两个概念联系到一起?

一. 信号的概念

1.消息

来自外界的各种报道统称为消息。

2.信息（information）：消息中有意义的内容统称为信息。

信息量=收到消息前对某事件的无知程度-收到消息后对某事件的无知程度

3.信号（signal）

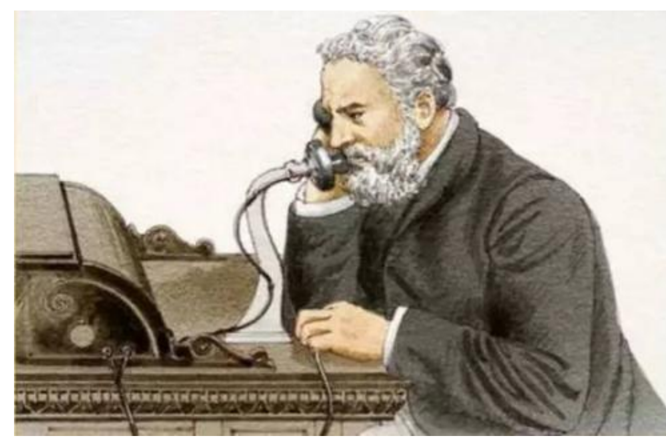
信号是信息的载体。通过信号传递信息。

为了有效地传播和利用信息，常常需要将信息转换成便于传输和处理的信号。

声信号、光信号、**电信号**、文字信号、图像信号等


长城战队


网页_百度图片搜索
新闻_百度搜索
百度新闻——海量中文资讯
央视网_世界就在眼前
https://news.baidu.com
网页 新闻 贴吧 知道 音乐 图片 视频 地图 文库
庆祝新中国成立70周年
Bai du 新闻
百度一下
帮助
首页 国内 国际 军事 财经 娱乐 体育 互联网 科技 游戏 女人 汽车 房产
热点要闻
习近平在庆祝新中国成立70周年大会上的讲话
习近平向党旗 国旗 军旗行注目礼 宣布阅兵开始
党旗国旗军旗同时通过天安门 空中护旗梯队飞越北京
凝聚力量 "中国的发展故事为各国树立了典范" 专题
微视频：共和国荣光 请检阅 他心中的国
郝福满：新中国成立70周年 辉煌成就有何奥秘?
珍藏!国庆70周年阅兵分列式全程视频 看得热血沸腾
装备解读来了：它们是本次大阅兵中最重磅的明星!
庆祝中华人民共和国成立70周年大会在京隆重举行
网上有害信息举报
15:53
2019/10/1

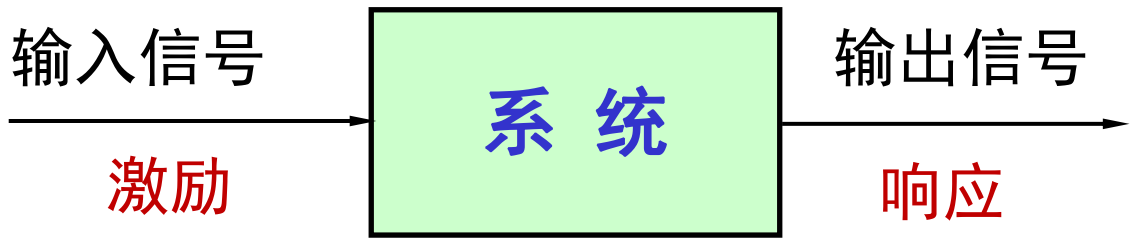


二、系统的概念

一般而言，系统是指若干相互关联的事物组合而成具有特定功能的整体。

信号的产生、传输和处理需要一定的物理装置，这样的物理装置通常称为系统。

比如手机、电视机、通信网、计算机网等都可以看成系统。它们所传送的语音、音乐、图像、文字等都可以看成信号。信号的概念与系统的概念往往紧密地联系在一起。



信号与系统总是紧密相连的

系统功能：信号产生、信号处理、信号传输、信号交换等等

信号处理：信号滤波，信号放大、信号变换、特征提取、抗干扰等等

1.2. 信号的描述和分类（可以从不同角度分类）

一、信号的描述

信号是信息的一种物理体现。它一般是随时间或位置变化的物理量。

信号是按物理属性分：电信号和非电信号。它们可以相互转换。电信号容易产生，便于控制，易于处理。本课程讨论电信号-简称“信号”。

电信号的基本形式：随时间变化的电压或电流。

描述信号的常用方法（1）表示为时间的函数

（2）信号的图形表示-波形

“信号”和“函数”两词常相互通用。

二、信号的分类

1. 确定信号和随机信号

可以用确定时间函数表示的信号，称为确定信号。如正弦函数、指数信号、脉冲信号。

若信号不能用确切的函数描述，它在任意时刻的取值都具有不确定性，只可能知道它的统计特性，如在某时刻取某一数值的概率，这类信号称为随机信号或不确定信号。电子系统中的起伏热噪声、雷电干扰信号就是两种典型的随机信号。

本课程只讨论确定信号。

1.2. 信号的描述和分类（可以从不同角度分类）

2、连续时间信号和离散时间信号

根据信号自变量（时间t）为连续/离散的特点进行区分。

连续时间信号： 在所讨论的时间间隔内，对于任意时间值（除若干不连续点之外），都可给出确定的函数值。

连续信号的幅值可以是连续的，也可以是离散的。

离散时间信号： 在时间上是离散的，只在某些不连续的规定瞬时给出函数值，在其它时间上没有定义。

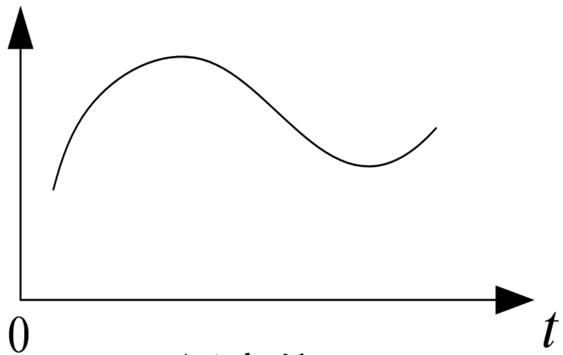
离散信号的幅值可以是连续的，也可以是离散的。

- ✓ 模拟信号：<u>代表消息的信号参量取值连续</u>

模拟信号的时间可以是连续的，也可以是离散的。

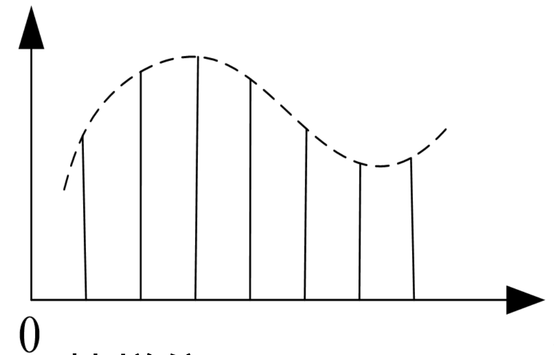
- ✓ 数字信号：代表消息的信号参量<u>取值为有限个</u>

数字信号的时间可以是连续的，也可以是离散的。



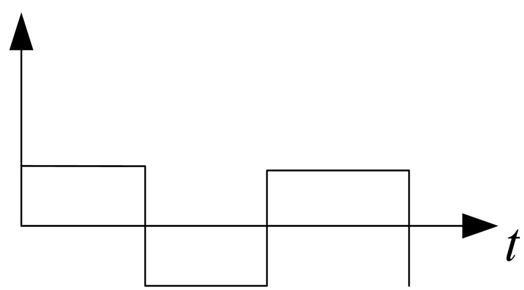
(a) 话音信号

连续信号、模拟信号



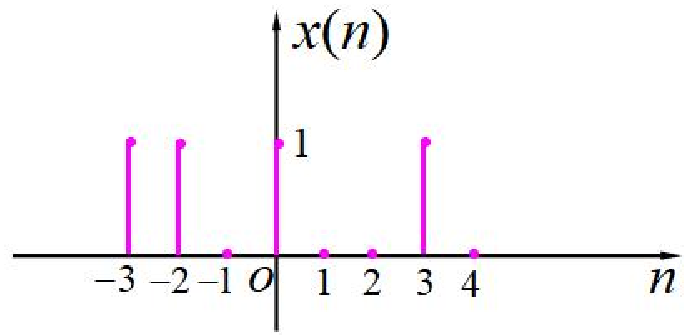
(b) 抽样信号

离散信号、模拟信号



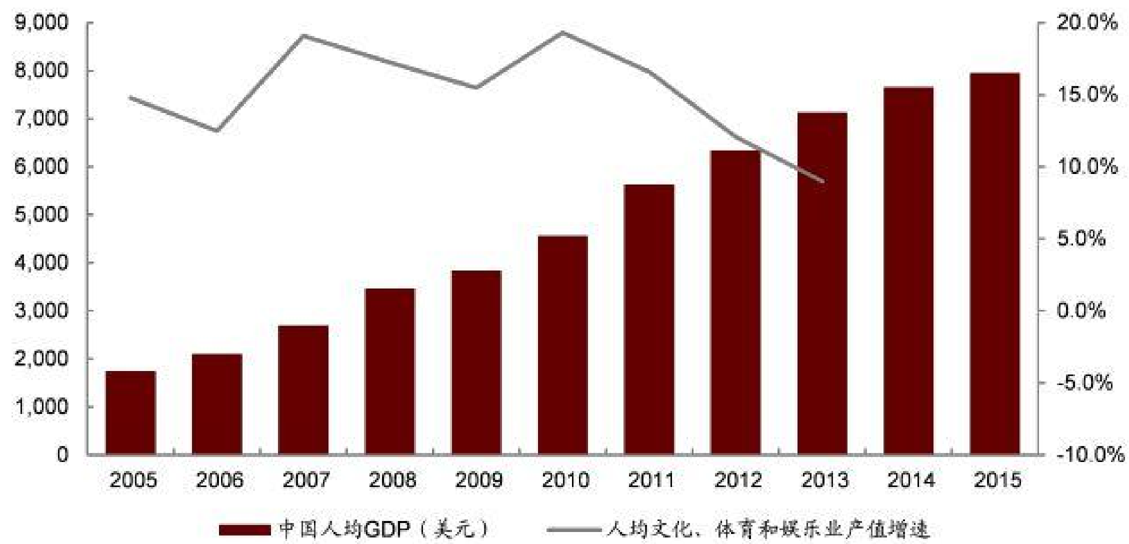
(c) 二进制信号

连续信号、数字信号



离散信号、数字信号


Adobe Audition
00:00:08:00
中关村在线
zol.com.cn


9,000
8,000
7,000
6,000
5,000
4,000
3,000
2,000
1,000
0
20.0%
15.0%
10.0%
5.0%
0.0%
-5.0%
-10.0%
2005
2006
2007
2008
2009
2010
2011
2012
2013
2014
2015
中国人均GDP（美元）
人均文化、体育和娱乐业产值增速

3、周期信号与非周期信号（确定信号）

周期信号： 依一定的时间间隔周而复始的出现，而且是无始无终的信号。

$$f(t)=f(t+nT) \qquad n=0,\pm 1,\pm 2\cdots$$

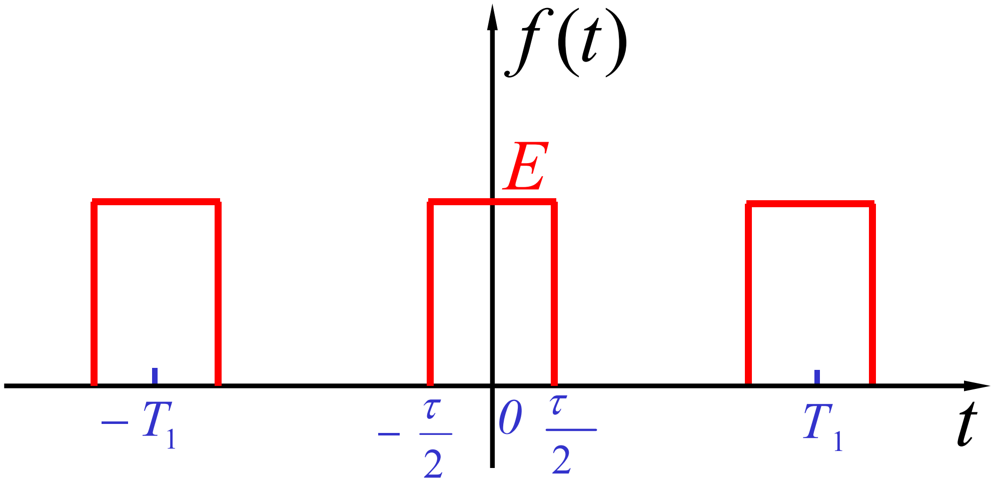
满足上述关系式的**最小T**值，称为连续信号的**周期**。

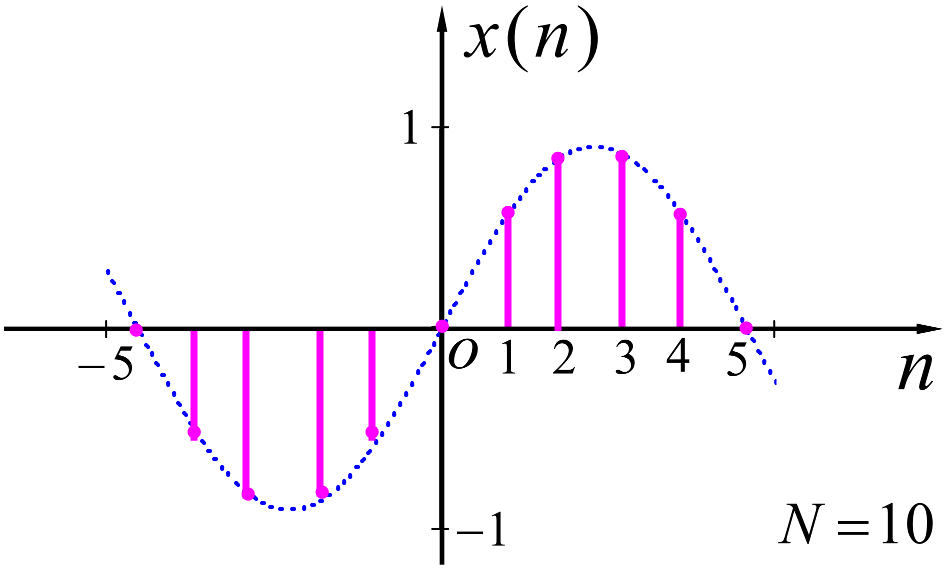
$$x(n)=x(n+kN) \qquad k=0,\pm 1,\pm 2\cdots$$

满足上述关系式的**最小N**值，称为离散信号的**周期**。

非周期信号： 不具备上述周而复始特性的信号。

周期信号举例





4. 能量信号与功率信号

若$f(t)$为实函数，则能量的定义：$$E=\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt$$

离散信号$x(n)$能量的定义：$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|^2$$

能量信号：能量为有限值的信号。

信号$f(t)$的平均功率表达式为：

$$P=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left|f(t)\right|^2 dt\right]$$

功率信号：功率为有限值的信号。

三. 典型的连续与离散信号

连续时间信号：

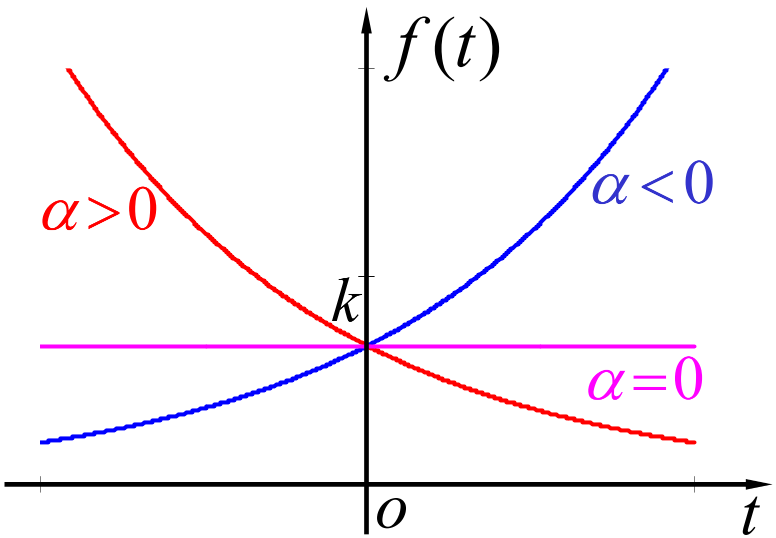
1. 指数信号

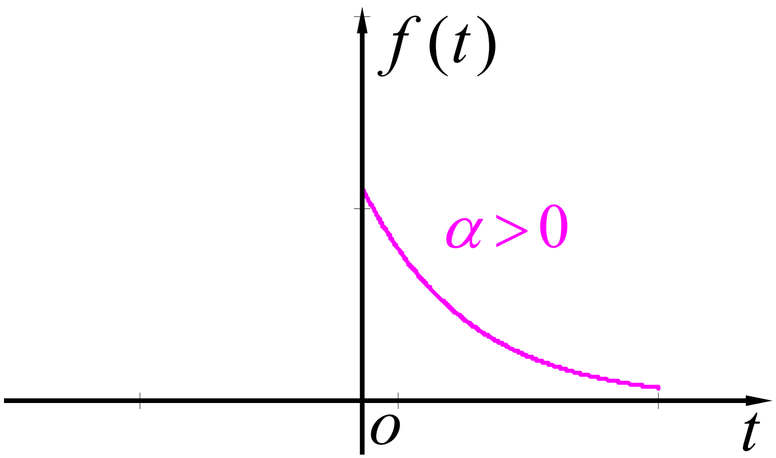
$$f(t)=k\,e^{-\alpha t}$$

$$\tau=\frac{1}{|\alpha|}$$

称为指数函数的**时间常数**

时间常数越大，指数函数变化速度越慢。





单边指数信号

指数信号经微分和积分仍然得到指数信号。

2. 复指数信号

$$f(t) = ke^{st}$$

$$\boxed{s = \alpha + j\omega}$$

$$= ke^{\alpha t} \cdot e^{j\omega t}$$

$$= ke^{\alpha t}\cos(\omega t) + jke^{\alpha t}\sin(\omega t)$$

$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\omega t) = \dfrac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right) \\ \cos(\omega t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right) \end{cases}$$

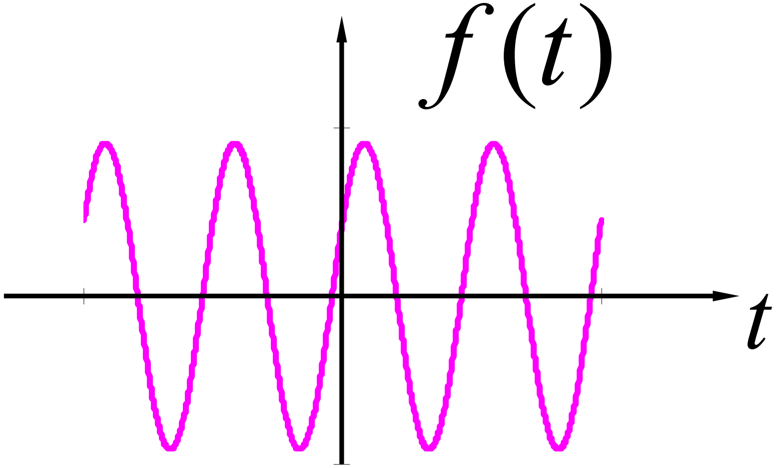
常用公式！

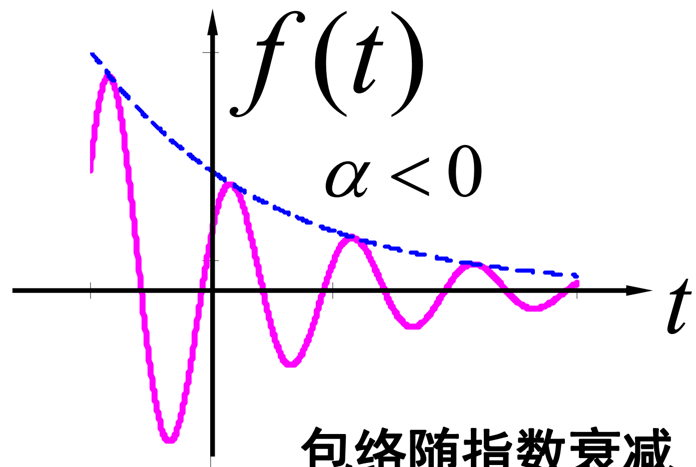
3. 正弦信号

$$f(t)=\overset{\text{振幅}}{k}\sin(\overset{\text{角频率}}{\omega}t+\overset{\text{初始相位}}{\theta})$$

衰减的正弦信号

$$f(t)=ke^{\alpha t}\sin(\omega t+\theta)$$





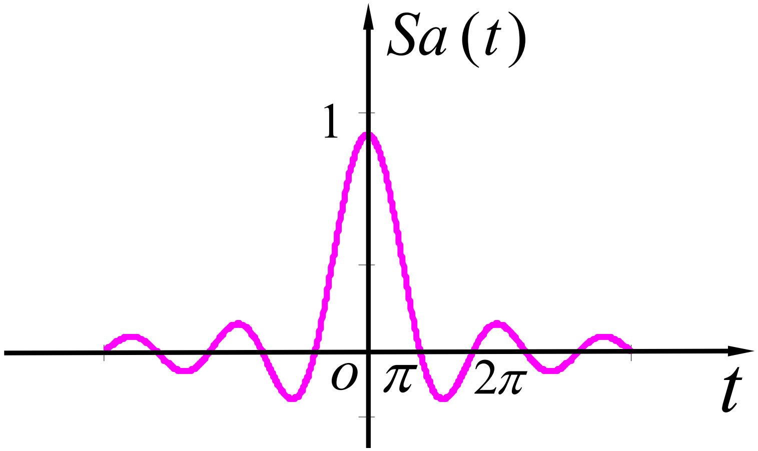
包络随指数衰减

周期信号！

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{f}$$

4. 抽样信号

$$Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$$

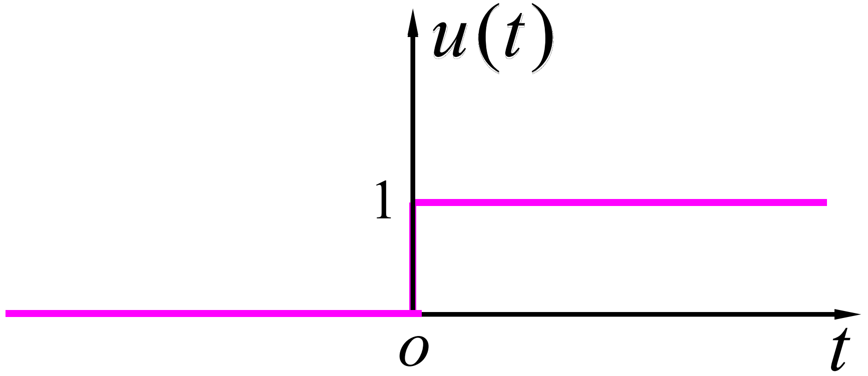


性质： $\int_{-\infty}^{\infty} Sa(t)\,dt = \pi$

$$Sa(\omega_c t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t}$$

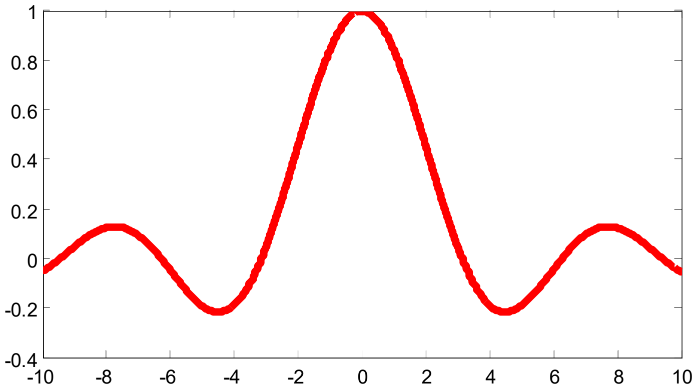
5. 阶跃信号

$$u(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

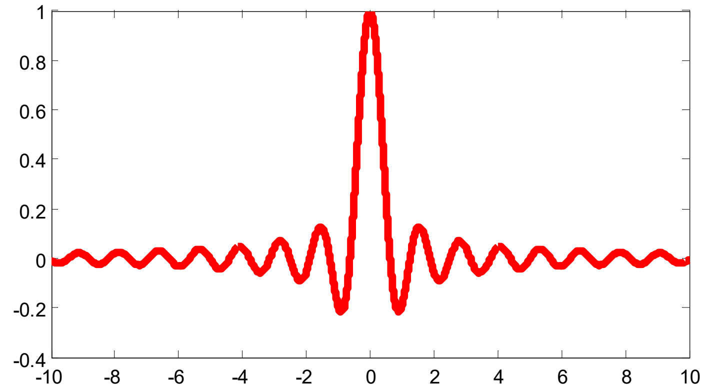


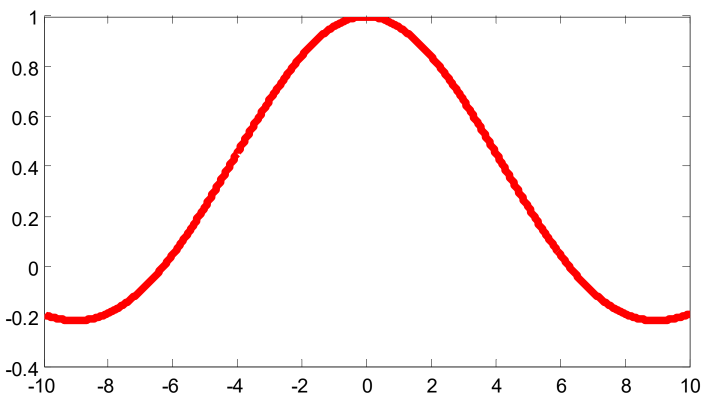
抽样信号参数对信号波形的影响

$$\omega_c = 1$$



$$\omega_c = 5$$

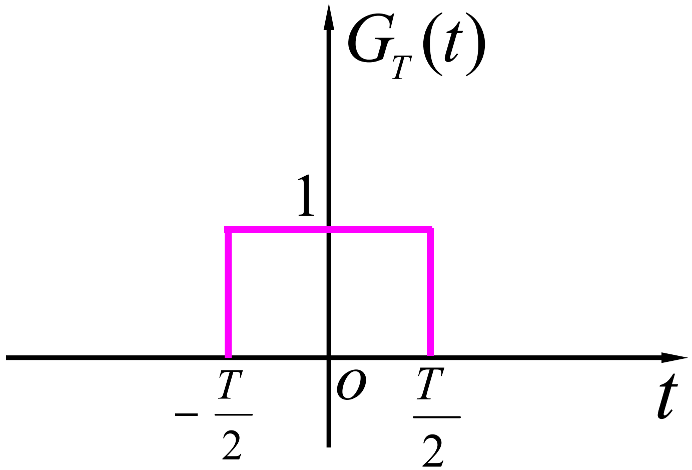




$$\omega_c = 0.5$$

6. 矩形脉冲信号

$$G_T(t)=\begin{cases}1 & (|t|<\dfrac{T}{2})\\ 0 & (|t|>\dfrac{T}{2})\end{cases}$$

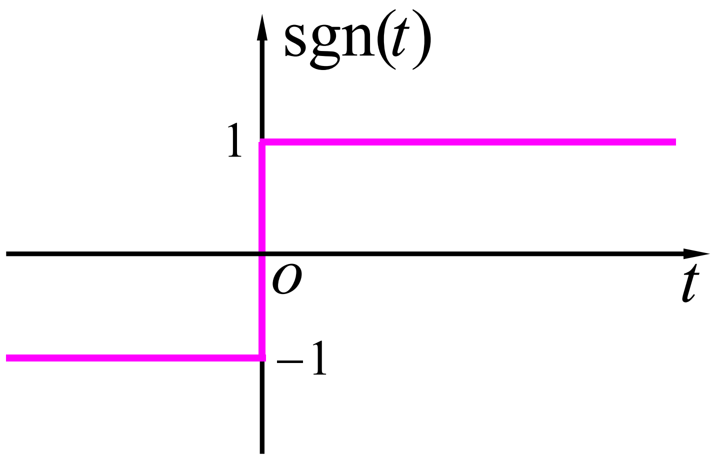


$$=u(t+\frac{T}{2})-u(t-\frac{T}{2})$$

7. 符号函数

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1 & (t>0)\\ -1 & (t<0)\end{cases}$$

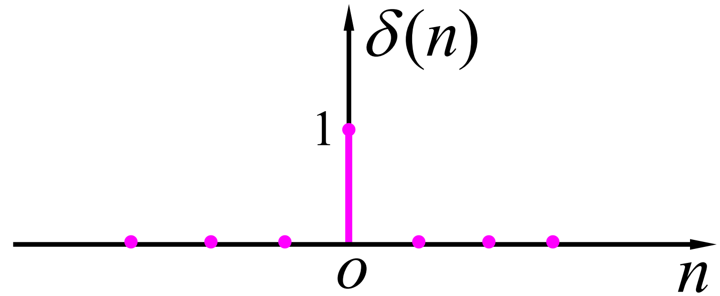
$$=2u(t)-1$$



离散时间信号

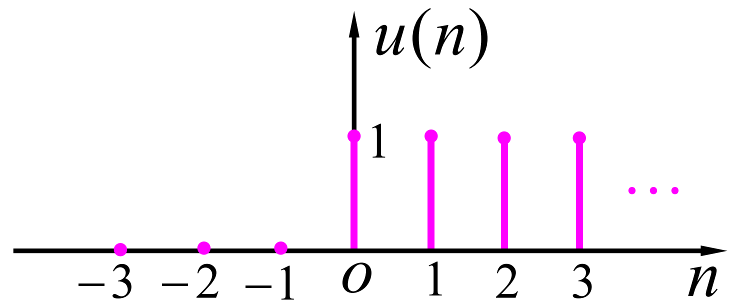
1. 单位样值信号

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & (n=0)\\0 & (n\neq 0)\end{cases}$$



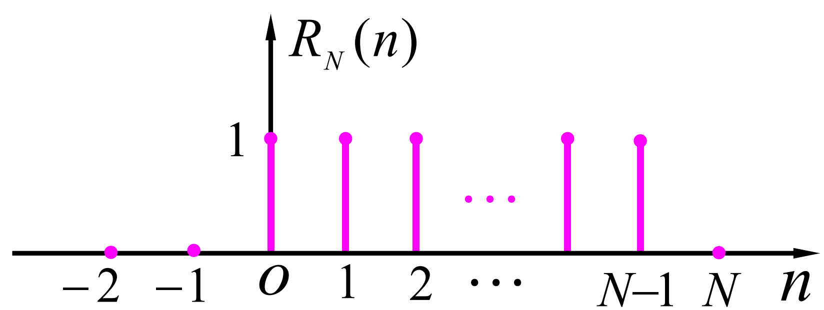
2. 单位阶跃信号

$$u(n)=\begin{cases}1 & (n\geq 0)\\0 & (n<0)\end{cases}$$



3. 矩形序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & (0\leq n\leq N-1)\\0 & (n<0,\ n\geq N)\end{cases}$$



三种序列之间的关系：

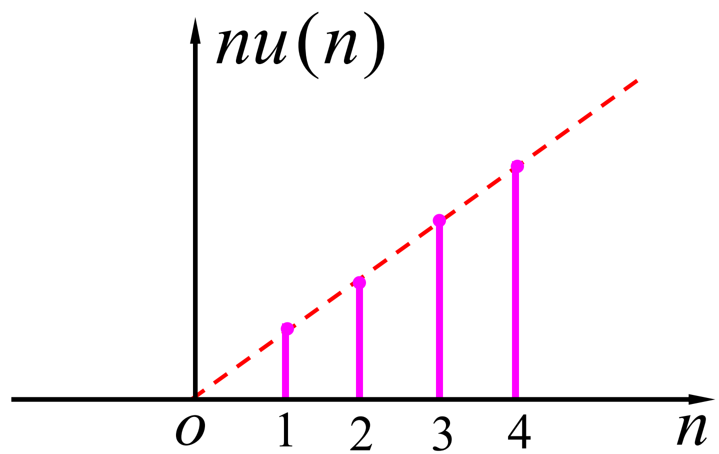
$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$$

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

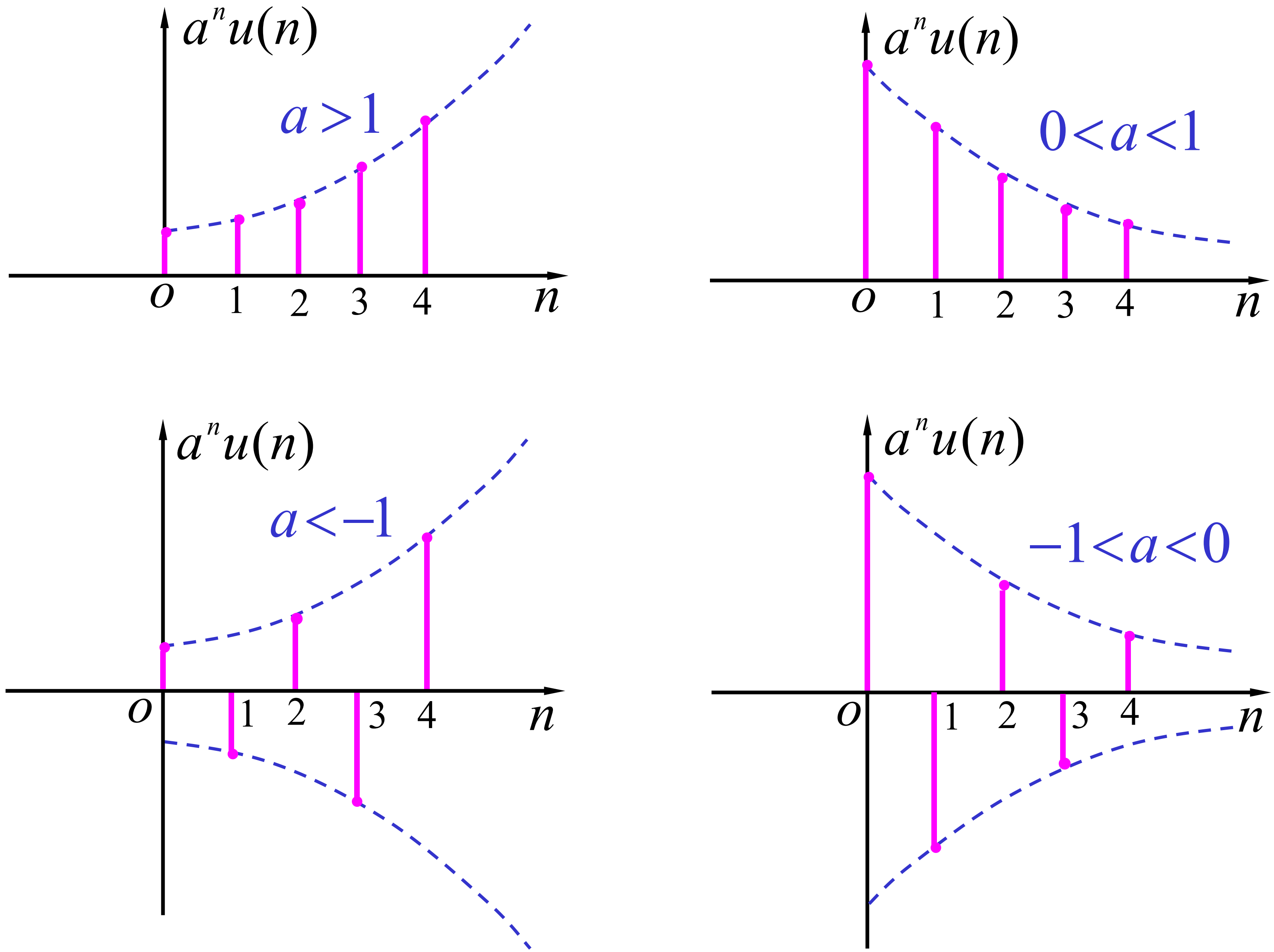
$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

4. 斜变序列

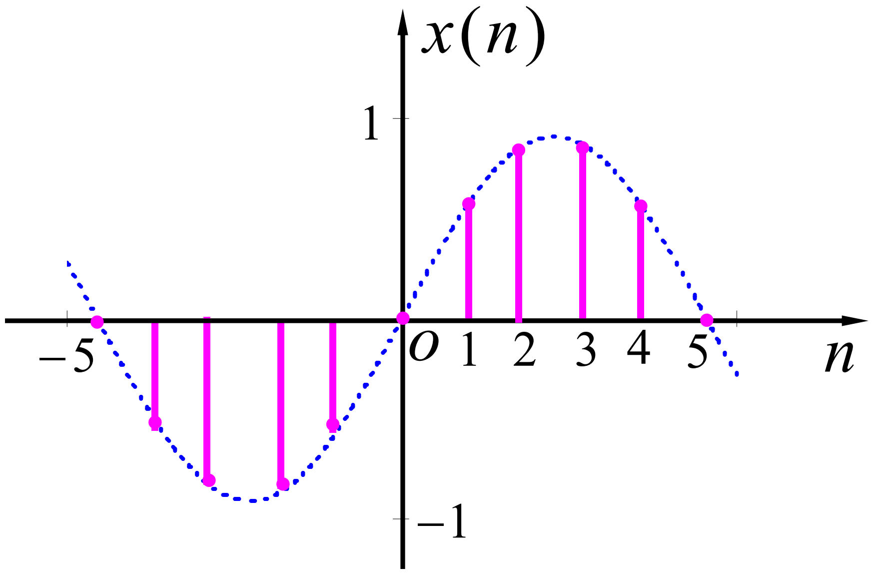
$$x(n)=nu(n)$$

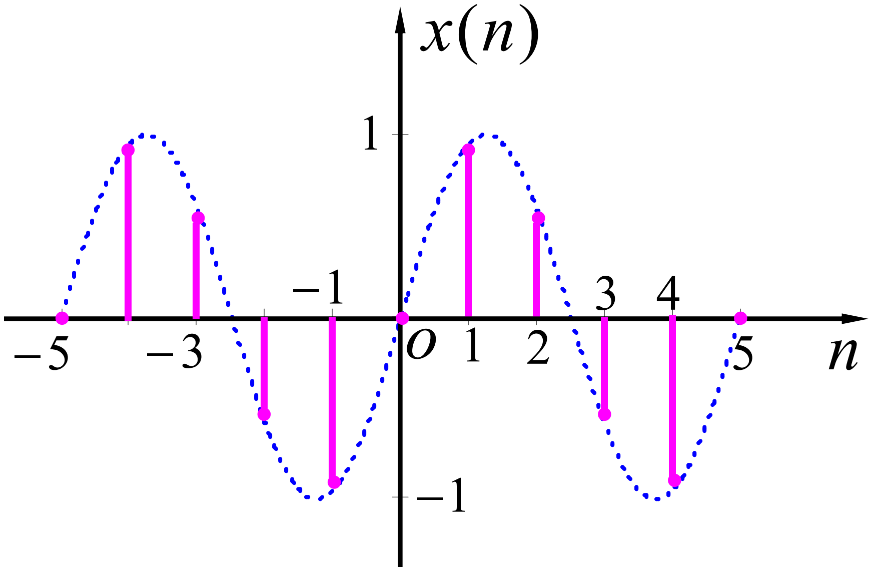


5. 指数序列 $x(n) = a^n u(n)$



6. 正弦序列 $x(n)=\sin(\omega_0 n)$





$$x(n)=\sin\left(\frac{\pi}{5}n\right)$$

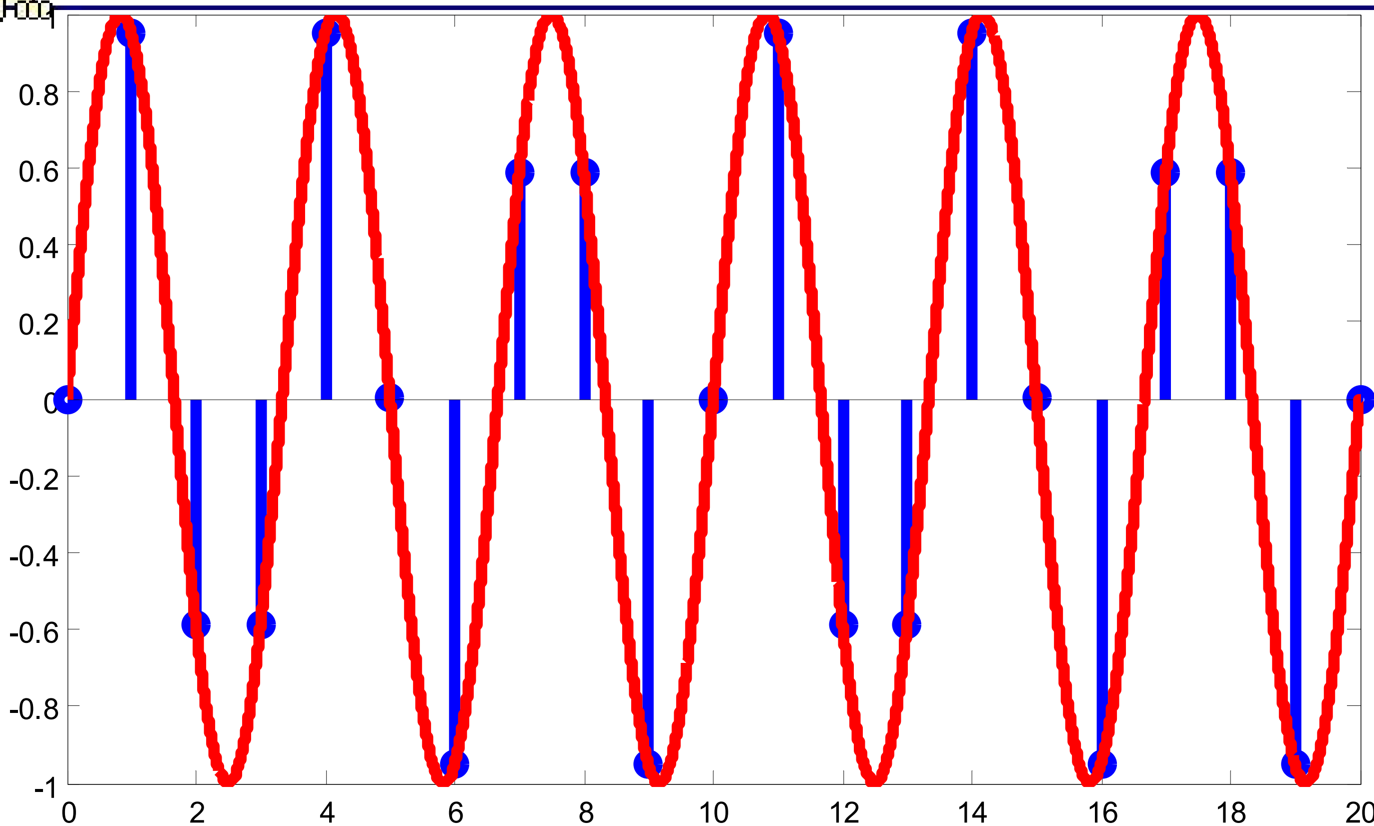
$$x(n)=\sin\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$$

$$x(n)=\sin\left(\frac{3\pi}{5}n\right)$$

$$x(n)=\sin\left(\frac{4\pi}{5}n\right)$$

$N=?$

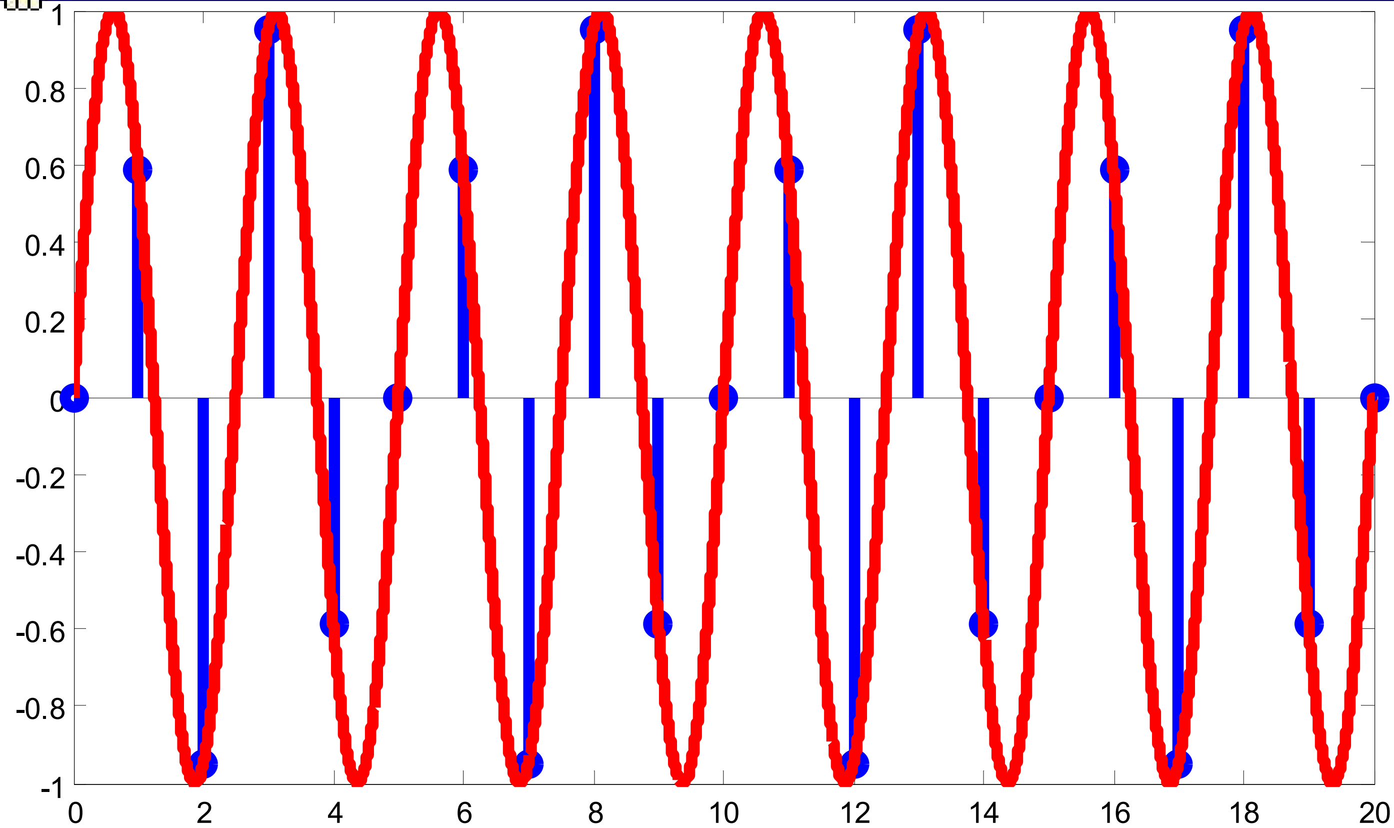
$N=?$



$$x(n)=\sin\left(\frac{3\pi}{5}n\right)$$

```
n=0:1:20;
t=0:0.001:20;
x=sin(3*pi/5*n);
y=sin(3*pi/5*t);
stem(n,x);hold on;
plot(t,y,'r');
```

周期为10！



$$x(n) = \sin\left(\frac{4\pi}{5}n\right)$$

周期为5！

正弦序列周期性讨论：

$$x(n)=\sin(\omega_0 n)$$

$$\frac{2\pi}{\omega_0}=\begin{cases}\dfrac{N}{m}\ (\text{互质})\ \text{有理数} & \text{周期}N\\[2ex] \text{无理数} & \text{非周期}\end{cases}$$

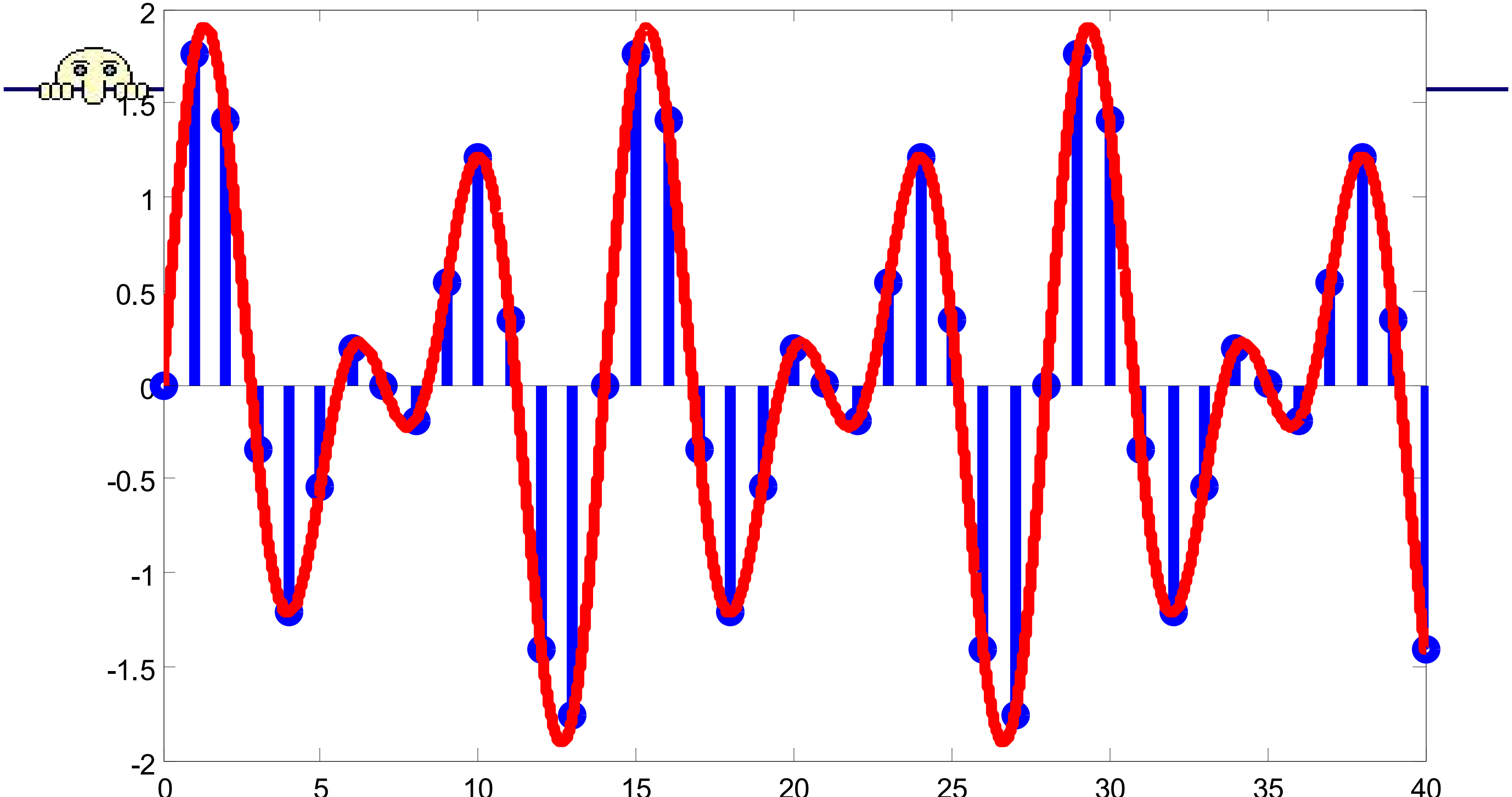
例1　判断下列正弦序列的周期性。

（1）$x_1(n)=\sin(\frac{2\pi n}{7})$ 周期为7

（2）$x_2(n)=\sin(\frac{3\pi n}{7})$ 周期为14

（3）$x_3(n)=\sin(\frac{2\pi n}{7})+\sin(\frac{3\pi n}{7})$

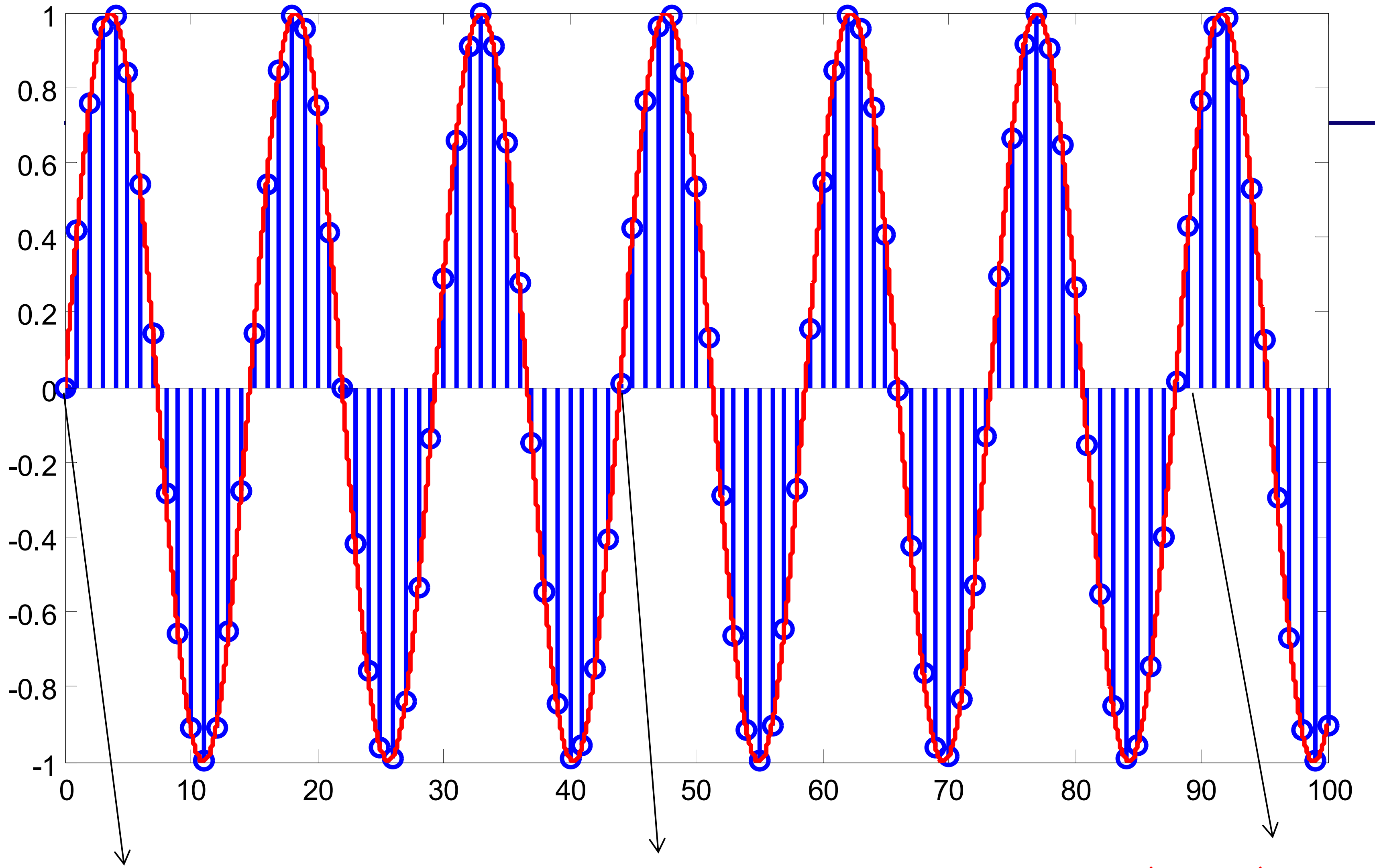
（4）$x_4(n)=\sin(\frac{3n}{7})$



$$x_3(\mathrm{n}) = \sin(\frac{2\pi n}{7}) + \sin(\frac{3\pi n}{7})$$

周期为14

$$x_3(1) = x_3(15) = x_3(29) = 1.7568$$



sin(3*0/7)=0

sin(3*44/7)=0.0076

sin(3*88/7)=0.0152

$$x_4(n) = \sin(\frac{3n}{7})$$

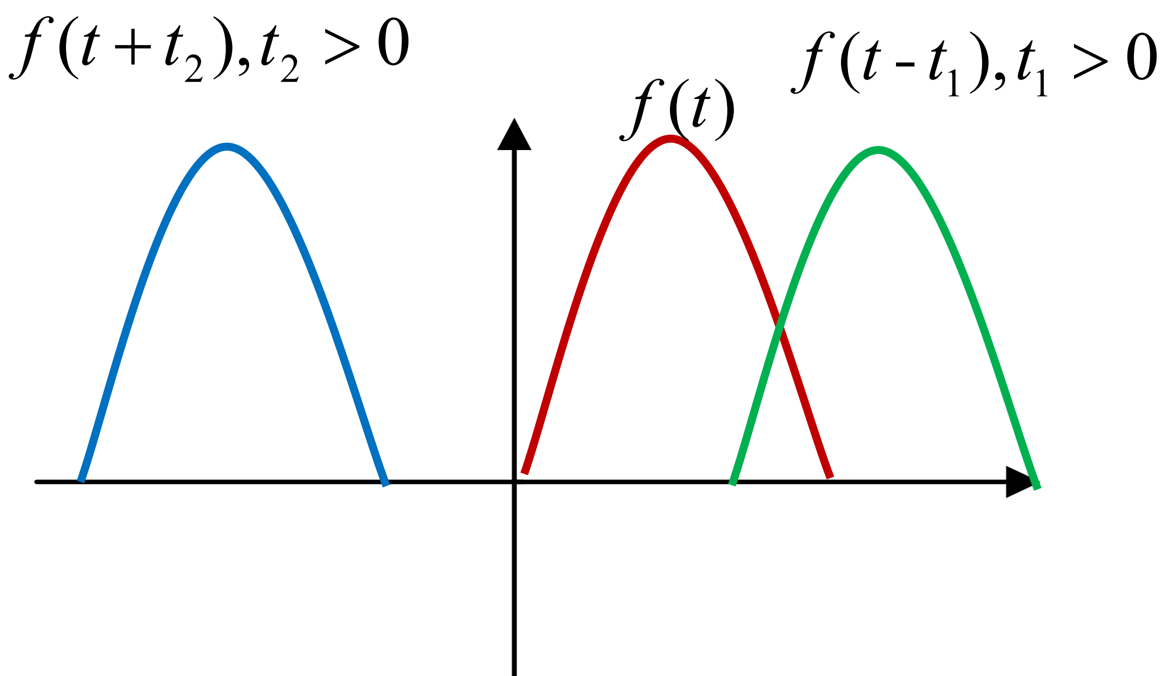
非周期!

1.3 信号的运算

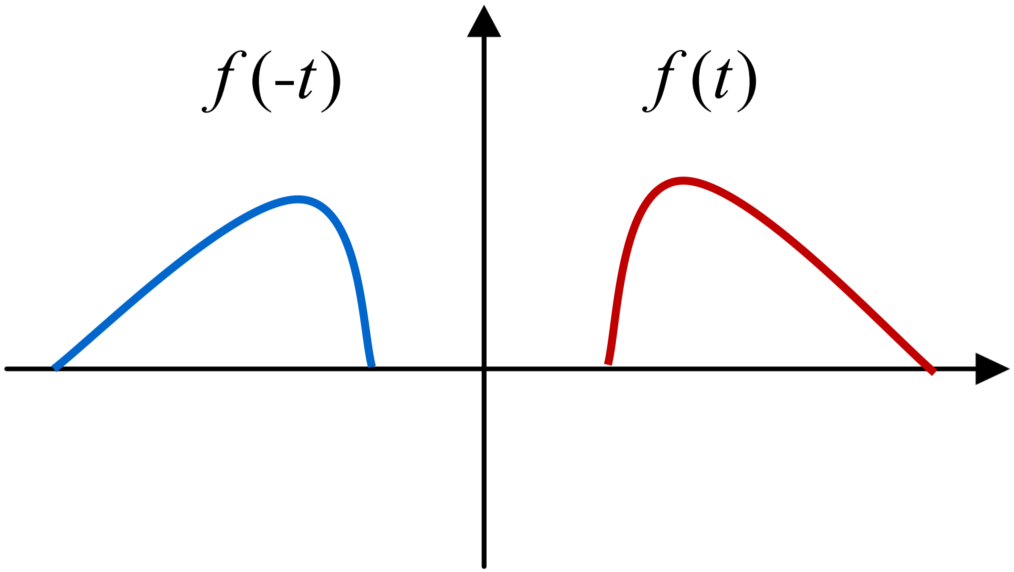
一. 移位、反褶与尺度变换

连续信号：

移位： $f(t) \longrightarrow f(t-t_0)$ $\begin{cases} t_0 > 0 & \text{右移 } t_0 \\ t_0 < 0 & \text{左移 } |t_0| \end{cases}$

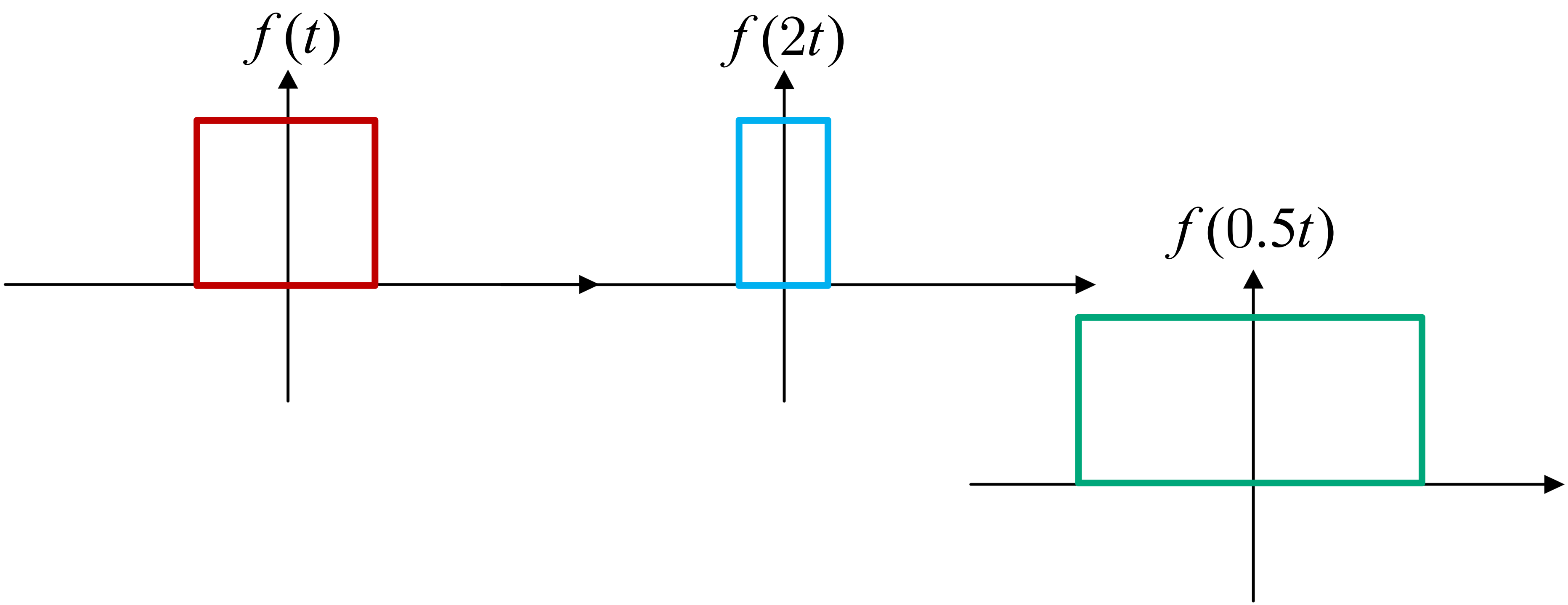


反褶： $f(t) \longrightarrow f(-t)$ **时间轴反转**



尺度变换：$f(t) \longrightarrow f(at)$

$$\begin{cases} |a|>1 & \text{波形压缩} \\ 0<|a|<1 & \text{波形扩展} \end{cases}$$



综合以上三种情况：$f(t) \longrightarrow f(at - t_0)$

其中 a, t_0 是给定的实数

运 算 步 骤

(1) 移位

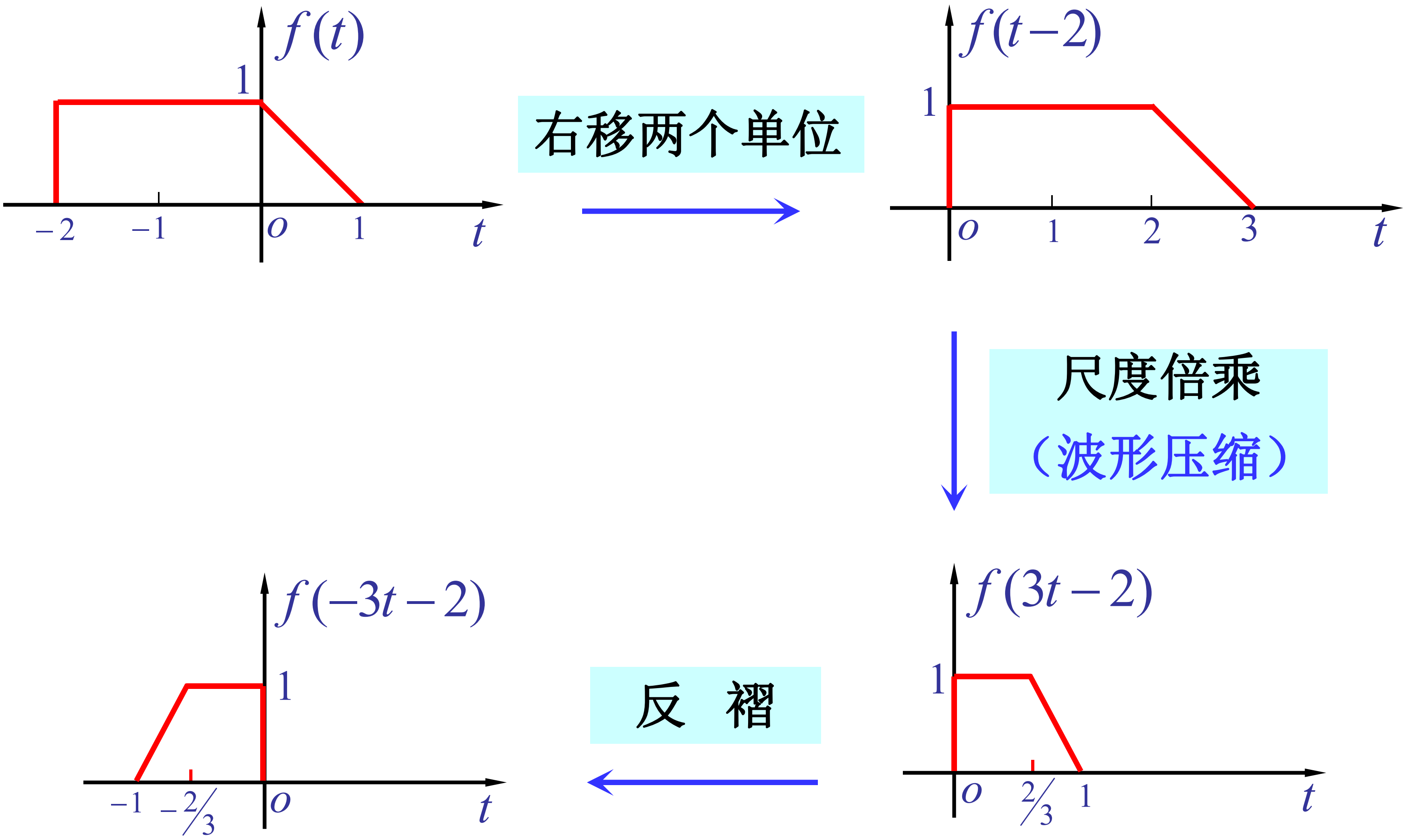
$$f(t) \longrightarrow f(t - t_0) \begin{cases} t_0 > 0 & \text{右移 } t_0 \\ t_0 < 0 & \text{左移 } |t_0| \end{cases}$$

(2) 尺度变换

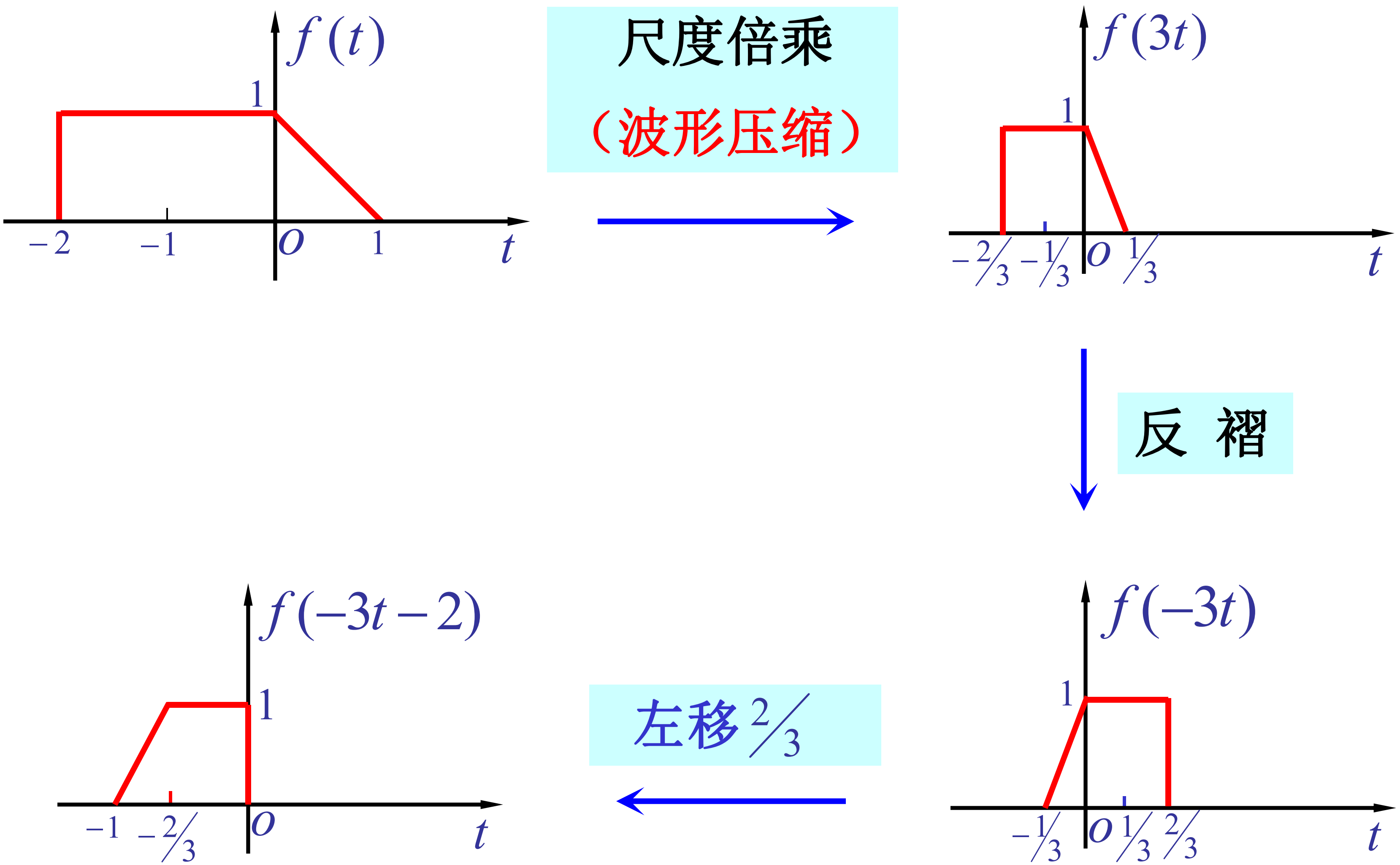
$$f(t - t_0) \longrightarrow f(at - t_0) \begin{cases} |a| > 1 & \text{波形压缩} \\ 0 < |a| < 1 & \text{波形扩展} \end{cases}$$

若 $a < 0$，信号还要反褶

例1　已知信号$f(t)$的波形，试画出$f(-3t-2)$的波形。



方 法 二



$f(t)$
1
−2
−1
O
1
t
尺度倍乘
（波形压缩）
$f(3t)$
1
$-2/3$
$-1/3$
O
$1/3$
t
反 褶
$f(-3t)$
1
$-1/3$
O
$1/3$
$2/3$
t
左移 $2/3$
$f(-3t-2)$
1
−1
$-2/3$
O
t

离散信号：

移位： $x(n) \longrightarrow x(n-n_0)$

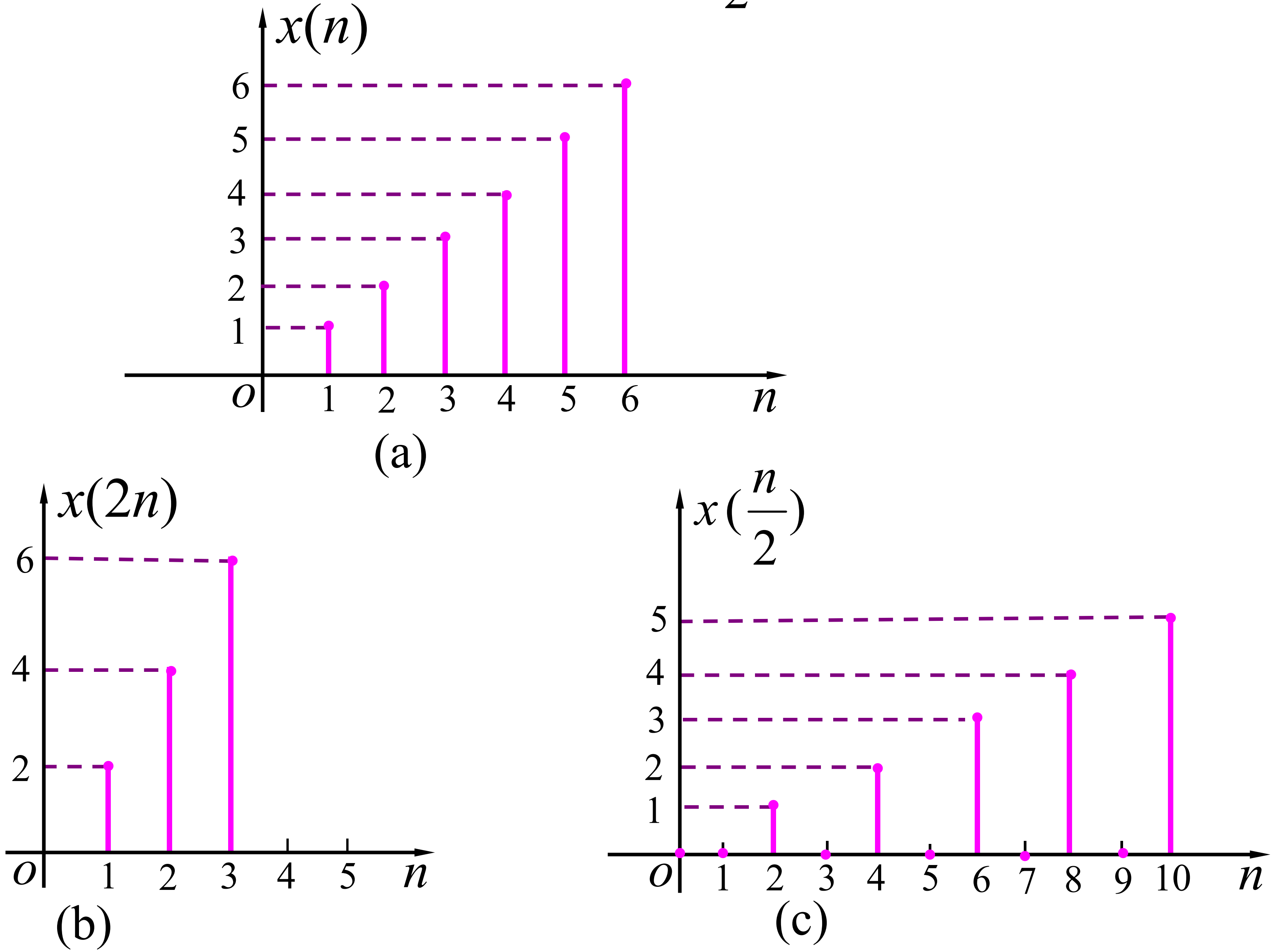
$$\begin{cases} n_0 > 0 & \text{右移 } n_0 \\ n_0 < 0 & \text{左移 } |n_0| \end{cases}$$

反褶： $x(n) \longrightarrow x(-n)$ 反转

尺度变换： $x(n) \longrightarrow x(an)$

* 压缩时要按规律去除某些点值，
扩展时不够要补足相应的零值。

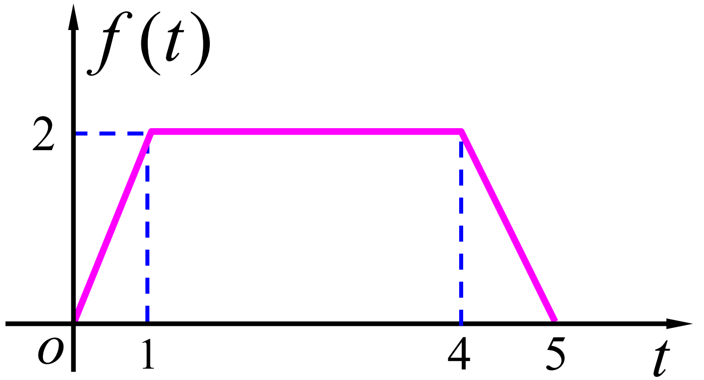
例2　已知$x(n)$波形，求 $x(2n)$和$x(\frac{n}{2})$的波形。

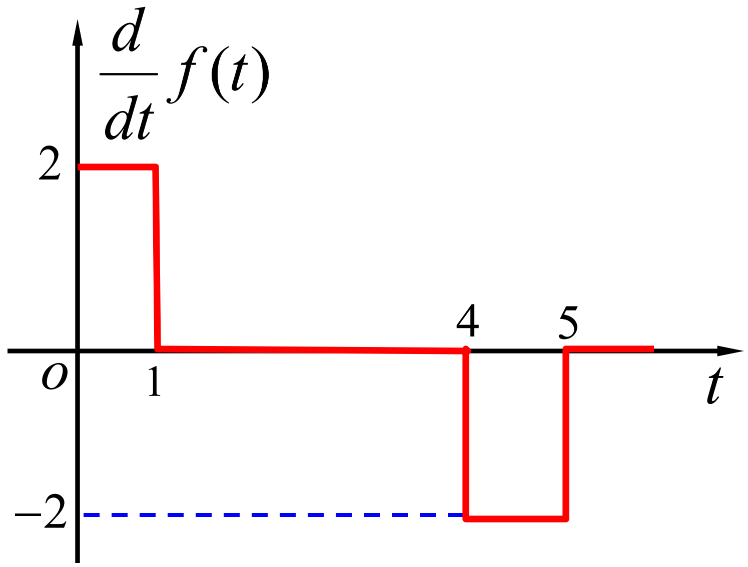


二. 连续信号的微分和积分

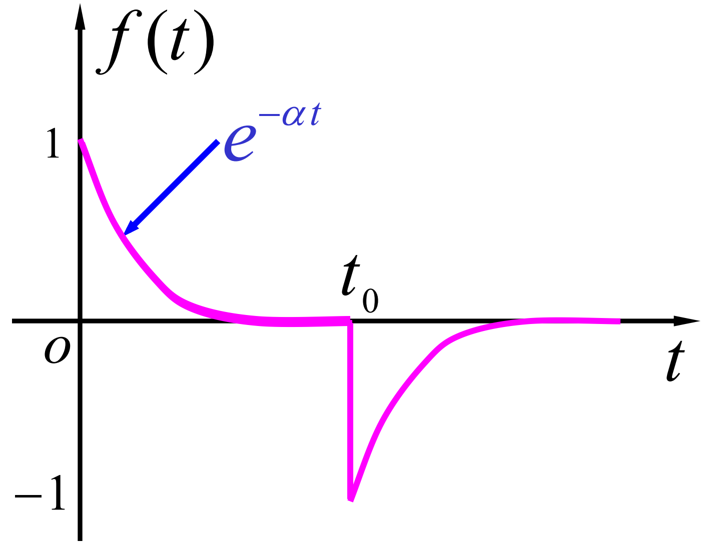
微分

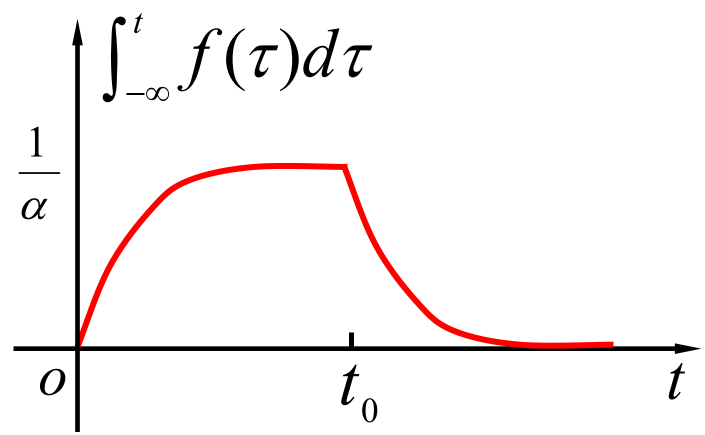
$$f(t) \xrightarrow{\text{微分}} f'(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$





$$f(t) \xrightarrow{\text{积分}} \boxed{\int_{-\infty}^{t}} f(\tau)d\tau$$





平滑

三. 离散信号的差分和求和

对应微分

一阶后向差分：$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$

对应积分

求和：$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$

作业1： 求下列序列的一阶差分与求和。

(1) $x(n)=nu(n)$

(2) $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n)$

四. 信号的相加和相乘

相加：

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

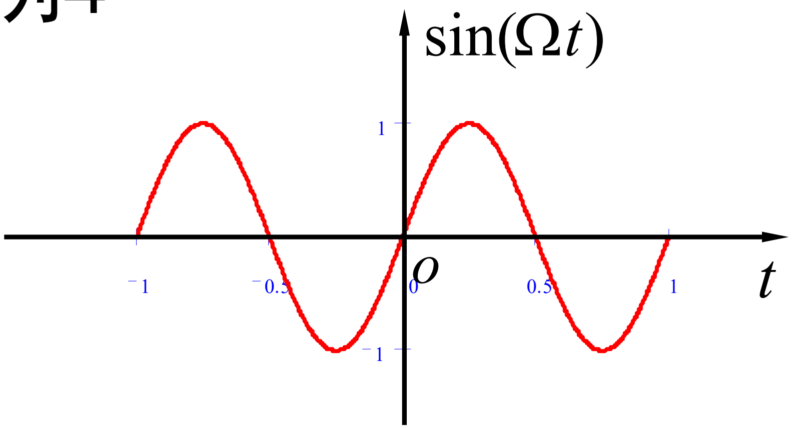
$$y(n) = y_1(n) + y_2(n)$$

相乘：

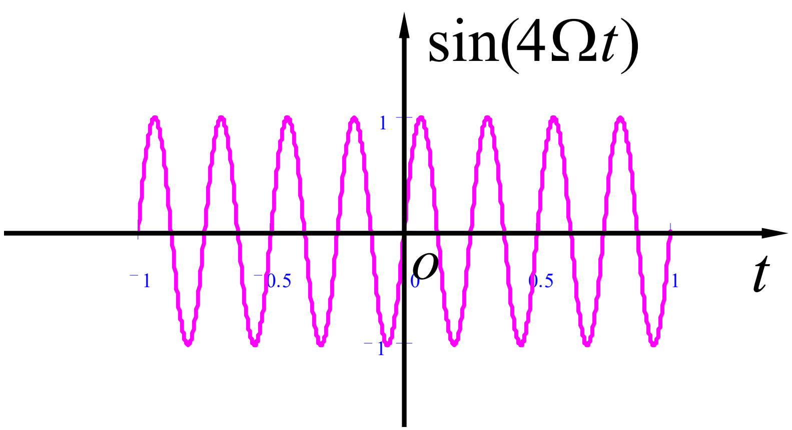
$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$$

$$y(n) = y_1(n) \cdot y_2(n)$$

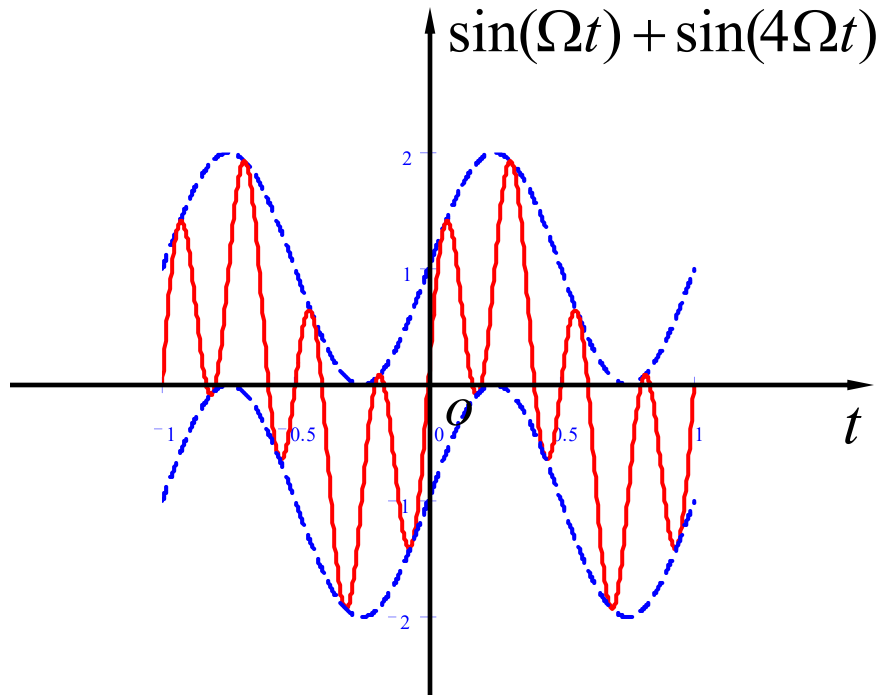
例4



$\sin(\Omega t)$
1
−1
−1
−0.5
0
0.5
1
O
t



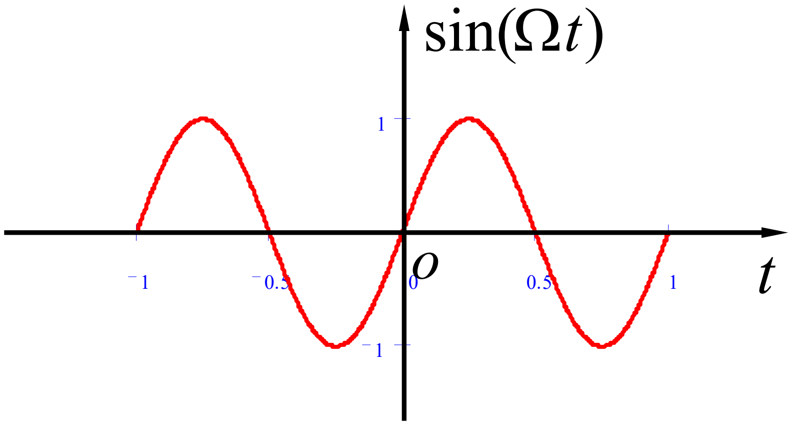
$\sin(4\Omega t)$
1
−1
−1
−0.5
0
0.5
1
O
t

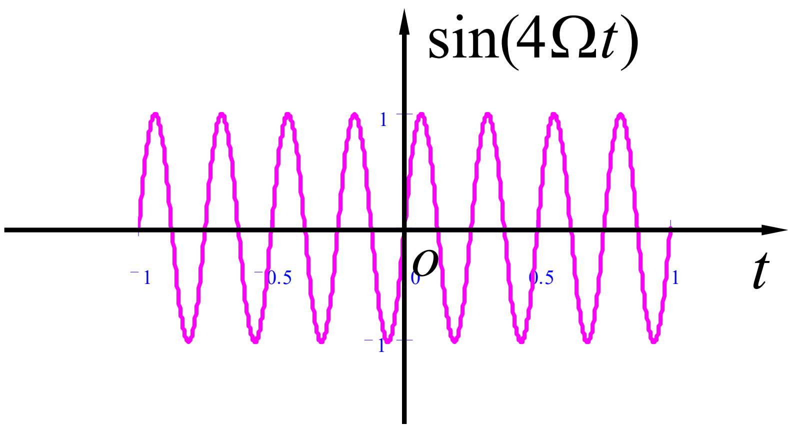


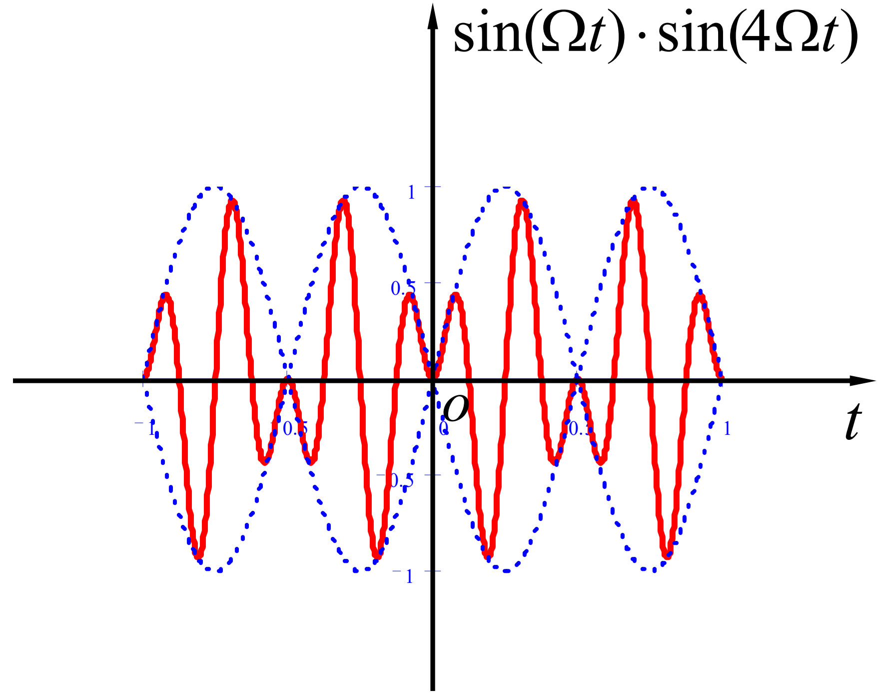
$\sin(\Omega t)+\sin(4\Omega t)$
2
1
−1
−2
−1
−0.5
0
0.5
1
O
t

相加

例5



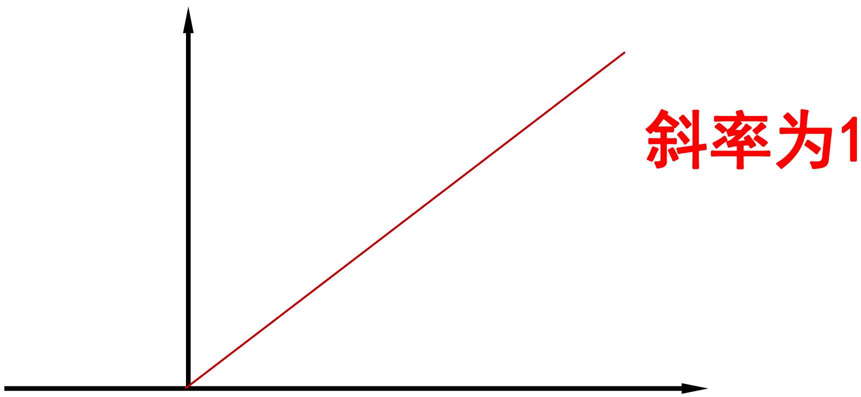




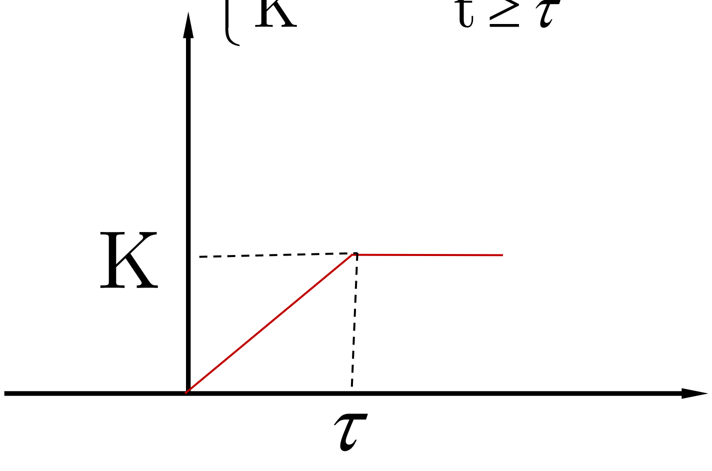
相乘

1.4 单位斜变信号

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t\geq 0\end{cases}$$

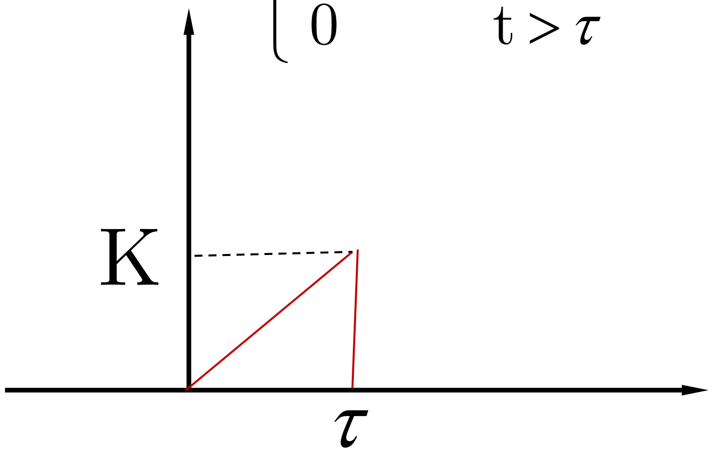


$$f_1(t)=\begin{cases}\dfrac{K}{\tau}f(t) & t<\tau\\ K & t\geq\tau\end{cases}$$



截平斜变信号

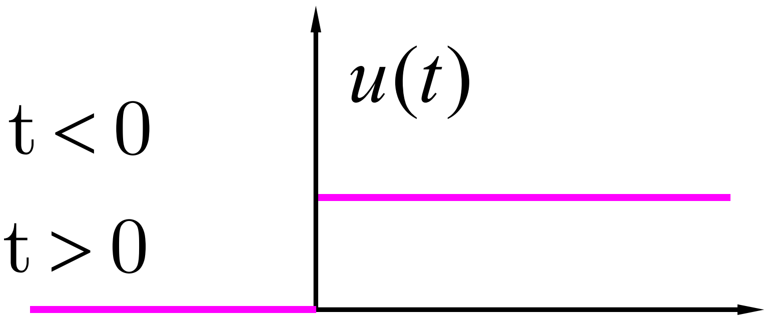
$$f_2(t)=\begin{cases}\dfrac{K}{\tau}f(t) & t\leq\tau\\ 0 & t>\tau\end{cases}$$



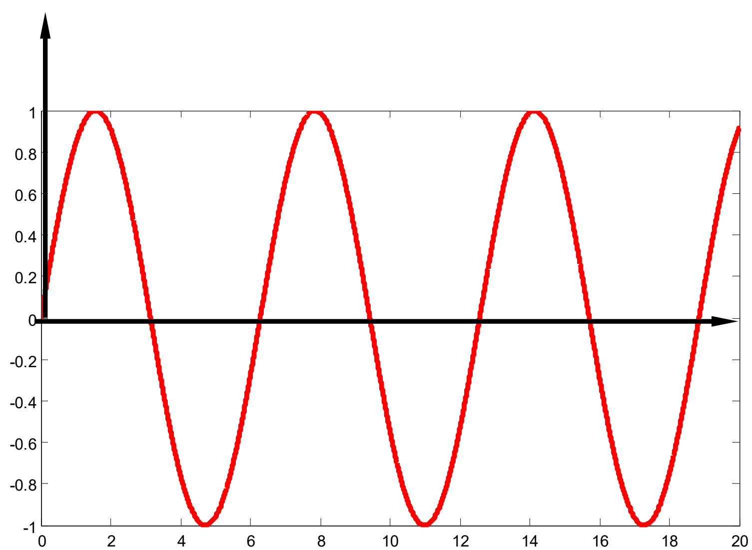
三角脉冲信号

1.4 单位阶跃信号

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$



作用：表示单边信号！

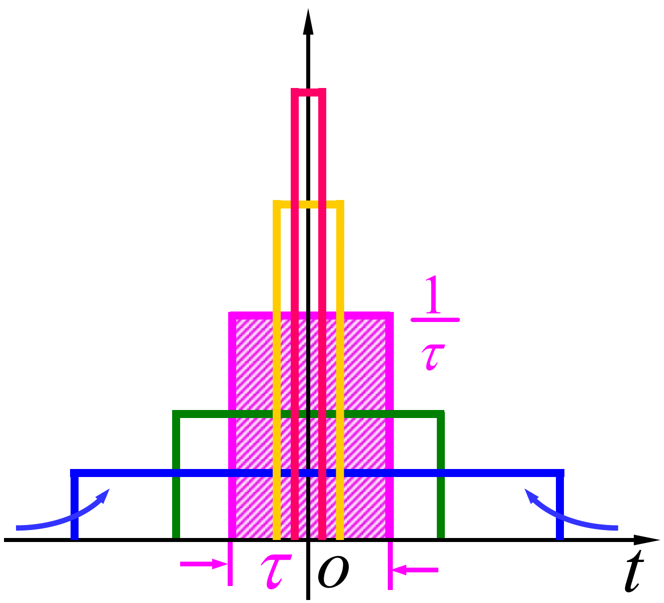


$$f_1(t)=\sin(t)u(t)$$

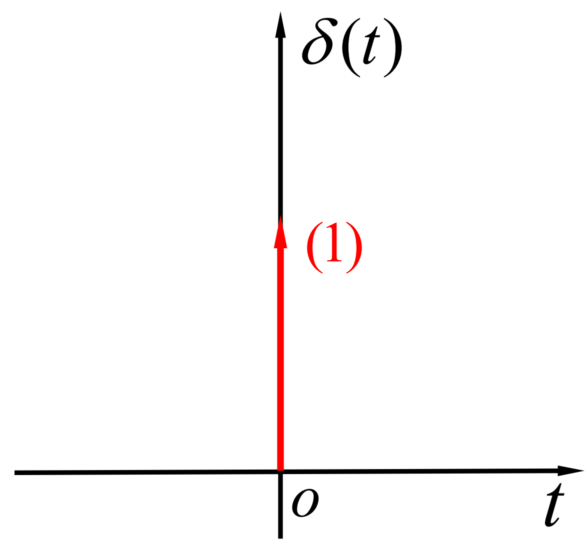
1.4 单位冲激信号

一. 冲激信号的定义（三种方式）

（1）规则函数序列的极限



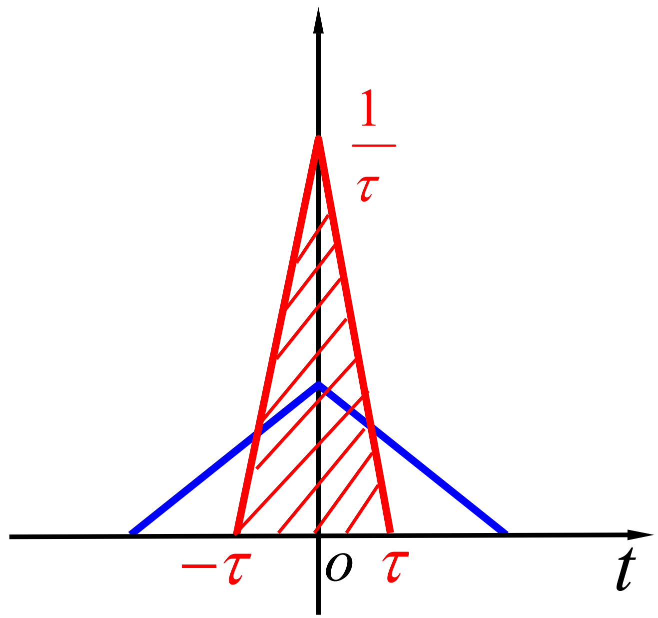
矩形脉冲演变为冲激函数



$$\boxed{\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]}$$

其它规则函数如：

- 三角形脉冲
- 双边指数脉冲
- 钟形脉冲
- 抽样函数



三角形脉冲演变为冲激函数

$$\boxed{\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\left\{\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{|t|}{\tau}\right)[u(t+\tau)-u(t-\tau)]\right\}}$$

(2) 狄拉克定义

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad (\text{当} t \neq 0) \end{cases}$$

(3) 用广义函数理论定义（定义严格）

定义冲激函数(广义函数):

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt \ = \ f(0)}$$

这里$f(t)$（称为检验函数)，要求是连续的，具有各阶连续导数，而且在t的一个有限区间内有值，即$f(t) \neq 0, -\infty < t < \infty$。

二. 冲激信号的性质

（1） 抽样性（筛选性）

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(0)dt=f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=f(0)}$$

$f(t)$是普通函数，在 $t=0$ 处连续。

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$

移位：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$$

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$$

(2) $\delta(t)$是偶函数

$$\boxed{\delta(t)=\delta(-t)}$$

(3) 尺度变换

$$\boxed{\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t) \qquad a\neq 0}$$

（4）冲激函数与阶跃函数的关系

定义阶跃函数(广义函数)：

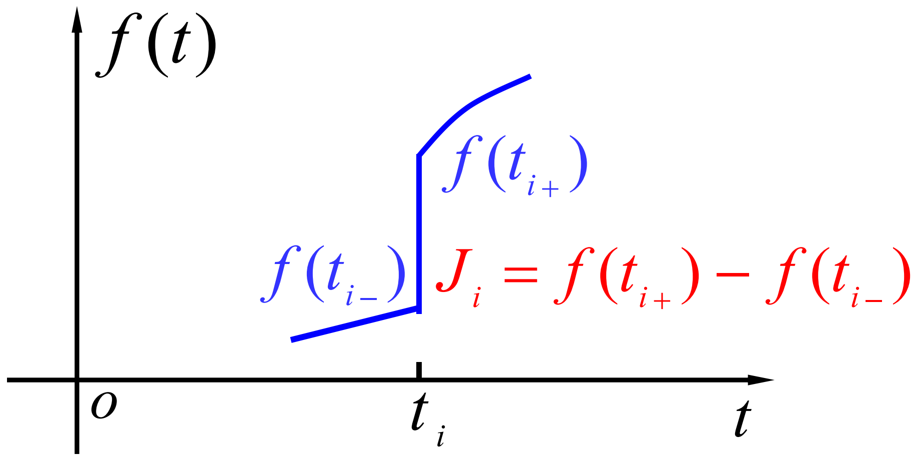
$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} u(t) f(t) dt = \int_{0}^{\infty} f(t) dt}$$

$$\begin{cases} u(t) = 1, t > 0 \\ u(t) = 0, t < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = 1, t > 0 \\ \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = 0, t < 0 \end{cases}$$

关系:

$$\boxed{\begin{cases} u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau \\ \dfrac{du(t)}{dt} = \delta(t) \end{cases}}$$

按广义函数的概念，信号在整个区间的导数均存在（普通函数则不然）。

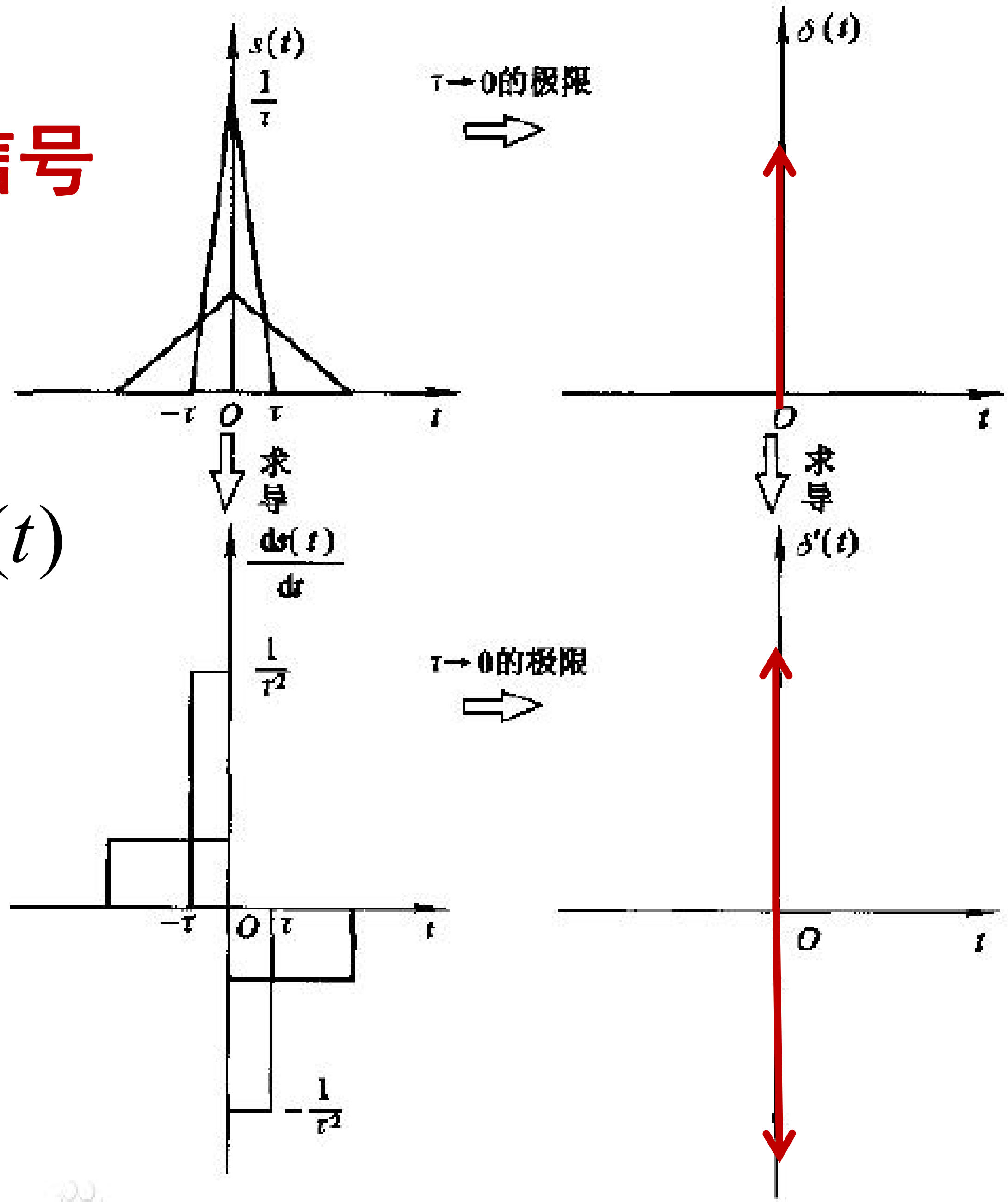


设$f(t)$是分段连续函数，在 $t=t_i(i=1,2,\cdots)$处有间段点，设$f(t)$各连续段的常义导数为$f_c'(t)$，则$f(t)$的导数为：

$$\boxed{f'(t) = f_c'(t) + \sum_i J_i \delta(t - t_i)}$$

三. 冲激偶信号

$$\int_{-\infty}^{t}\delta'(t)dt=\delta(t)$$



（1） 定义（用广义函数理论）

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) f(t) dt = -f'(0)}$$

同理定义$\delta(t)$的k阶导数:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{k}(t) f(t) dt = (-1)^{k} f^{(k)}(0)}$$

证明：

利用分部积分运算

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) f(t) dt$$

$$= f(t)\delta(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\delta(t) dt$$

$$= -f'(0)$$

同理可得：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t-t_0)dt = -f'(t_0)$$

(2)

1.

$$[f(t)\delta(t)]' = f(t)\delta'(t) + f'(t)\delta(t)$$

$$f(t)\delta'(t) = [f(t)\delta(t)]' - f'(t)\delta(t)$$
$$= f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

2. 普通函数 $f(t)$ 与 $\delta'(t)$ 相乘

$$\boxed{f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)}$$

3. 积分为零

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)dt = 0}$$

冲激函数的性质总结

（1）取样性

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t=f(0)$$

（2）奇偶性

$$\delta(-t)=\delta(t)$$

（3）比例性

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

（4）微积分性质

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\varepsilon(t)$$

（5）冲激偶

$$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$$

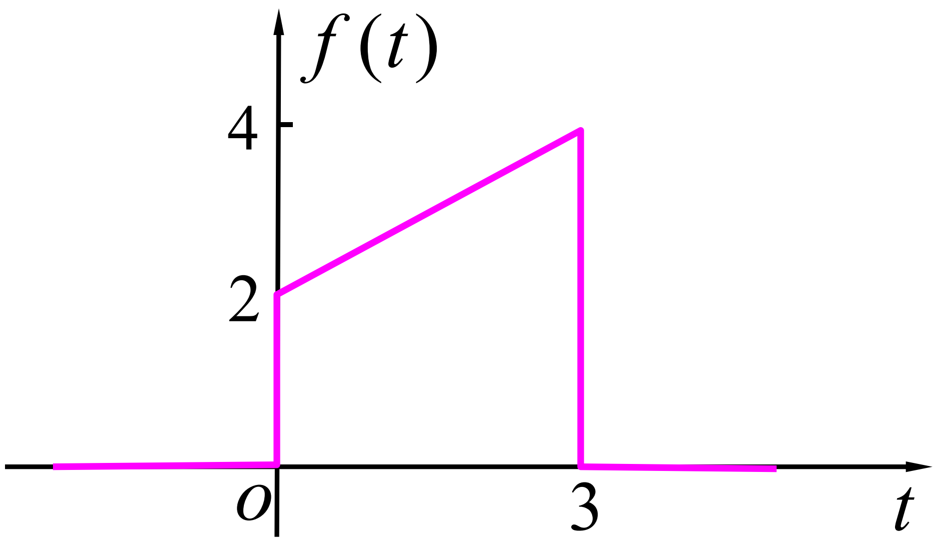
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)\,\mathrm{d}t=-f'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{t}\delta'(t)\,\mathrm{d}t=\delta(t)$$

$$\delta'(-t)=-\delta'(t)$$

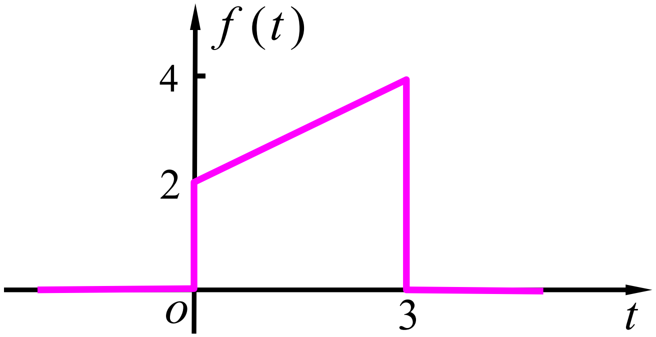
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\,\mathrm{d}t=0$$

例　图示信号，求其一、二阶导数。



1）信号表示式

$$f(t)=\left(\frac{2}{3}t+2\right)[u(t)-u(t-3)]$$



2）一阶导数

$$f'(t)=\frac{2}{3}[u(t)-u(t-3)]+\left(\frac{2}{3}t+2\right)\left(\delta(t)-\delta(t-3)\right)$$

$$=\frac{2}{3}[u(t)-u(t-3)]+2\delta(t)-4\delta(t-3)$$

3）二阶导数

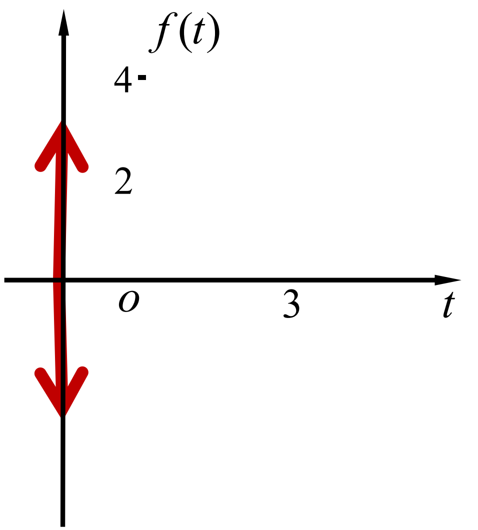
$$f''(t)=\frac{2}{3}[\delta(t)-\delta(t-3)]+2\delta'(t)-4\delta'(t-3)$$

例：化简信号 $\frac{d}{dt}\left[e^{-t}\delta(t)\right]$ ，并画出其波形。

$$f'(t) = -e^{-t}\delta(t) + e^{-t}\delta'(t)$$

$$= \left(-e^{-t}\big|_{t=0}\right)\delta(t) + \left(e^{-t}\big|_{t=0}\right)\delta'(t) - \left(-e^{-t}\big|_{t=0}\right)\delta(t)$$

$$= -\delta(t) + \delta'(t) + \delta(t) = \delta'(t)$$



课堂练习：化简如下信号，并画出其波形。

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-\tau}\delta'(\tau)\,d\tau$$

作业2：化简如下信号，并画出其波形。

1. $2u(4t-2)\delta(t-1)$
2. $t\delta'(t)$
3. $\dfrac{d}{dt}\left[e^{-t}\sin t\,u(t)\right]$

1.5　信号的分解

一． 直流分量与交流分量

直流分量：信号的平均值。

交流分量：从原信号中去掉直流分量。

$$\boxed{f(t) = f_D + f_A(t)}$$

二. 偶分量与奇分量

任何信号都可分解成偶分量与奇分量之和。

$$\boxed{f(t) = f_e(t) + f_o(t)}$$

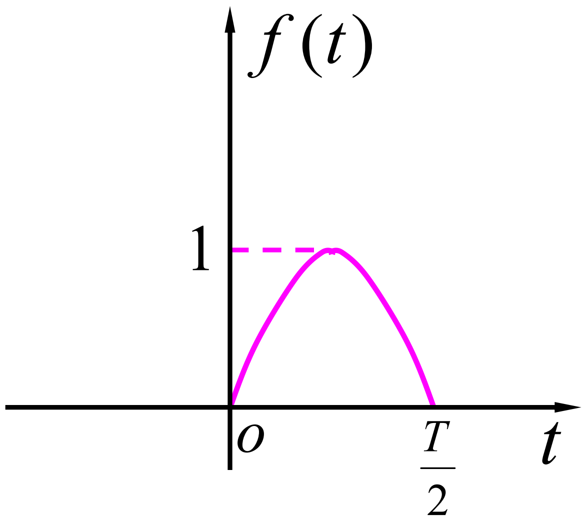
偶分量的定义： $f_e(t) = f_e(-t)$

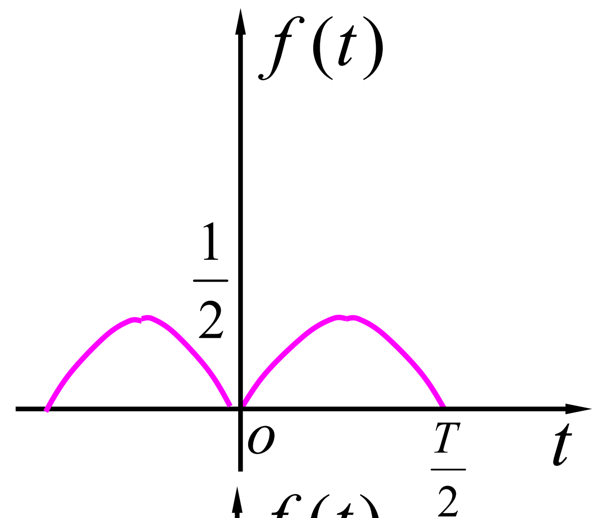
奇分量的定义： $f_o(t) = -f_o(-t)$

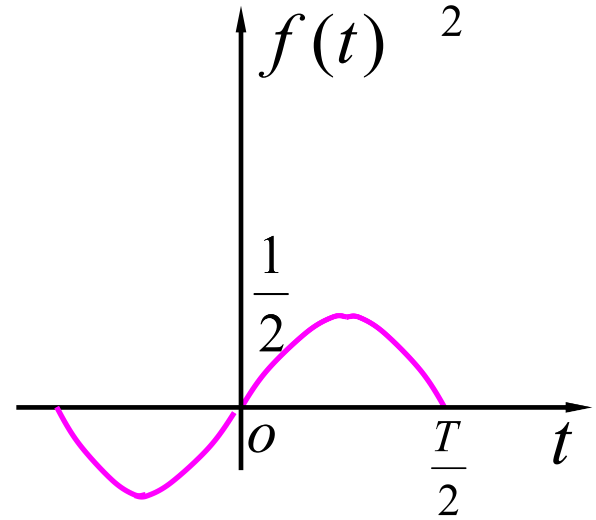
$$f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$$

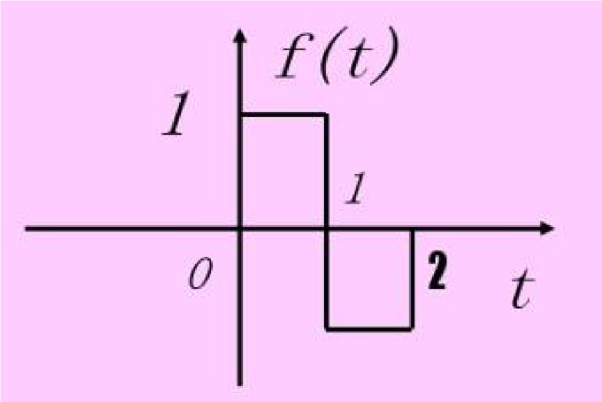
例 将图示信号分解为偶分量与奇分量。

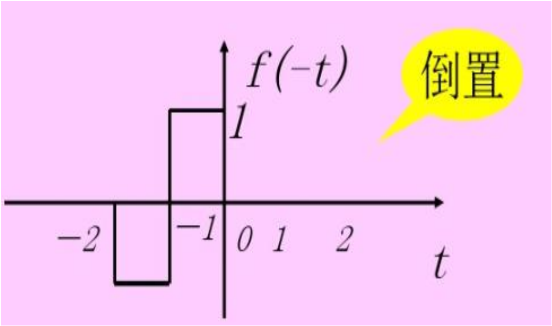


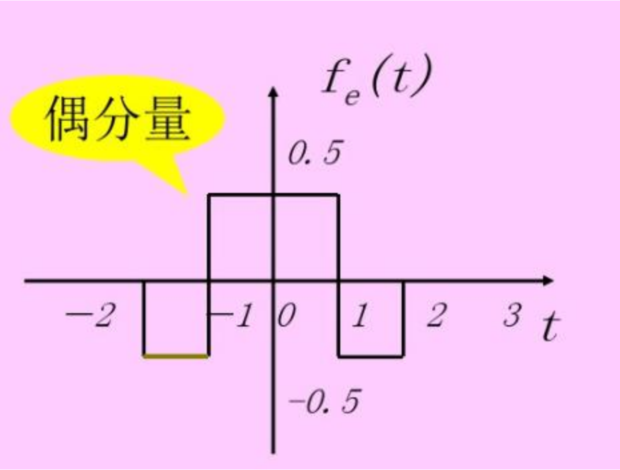


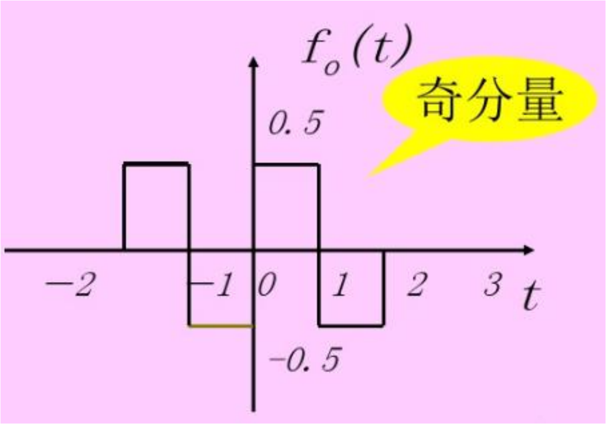


例 将图示信号分解为偶分量与奇分量。

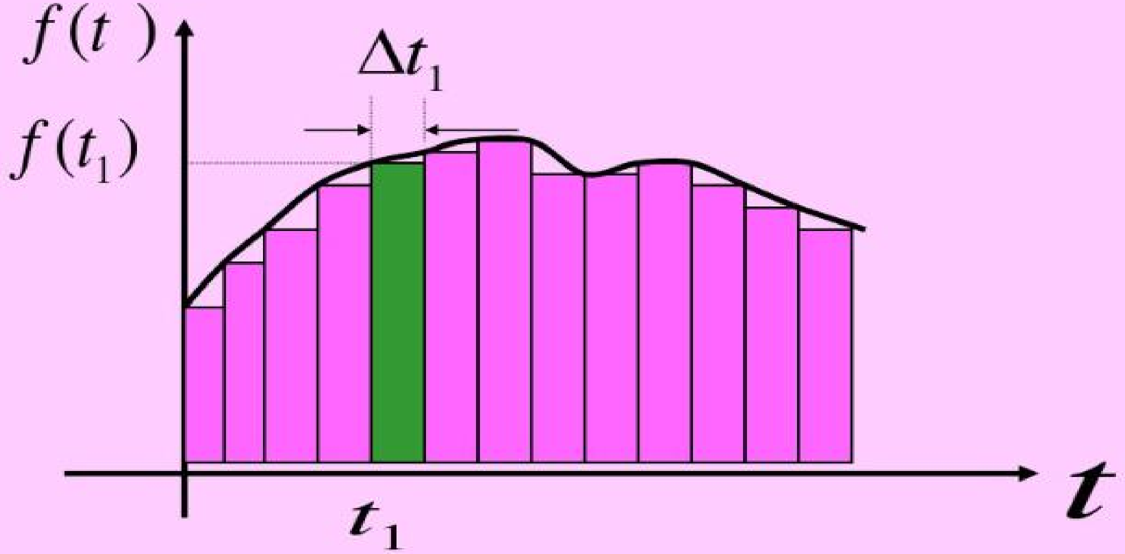








三. 冲击脉冲分量



$$f(t) \approx \sum_{t_1=0}^{t} f(t_1)[u(t-t_1) - u(t-t_1-\Delta t_1)]$$

$$\text{令}\Delta t_1 \to 0\text{可得：} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1)\delta(t-t_1)dt_1$$

1.6 系统模型及其分类

一. 系统的描述 —— 系统模型

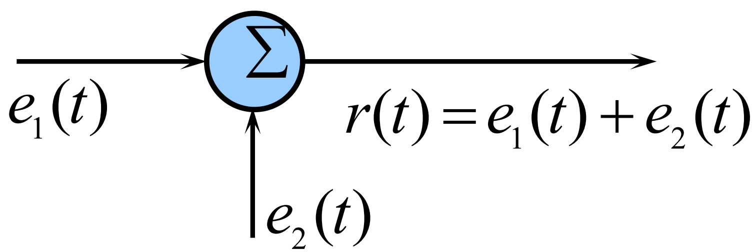
系统模型：是系统物理特性的数学抽象，以数学表达式或具有理想特性的符号组合成的图形，用来表征系统特性。

连续系统的数学模型：微分方程式（输入输出方程）
或一阶联立微分方程组（状态方程）

离散系统的数学模型：差分方程式（输入输出方程）
或一阶联立差分方程组（状态方程）

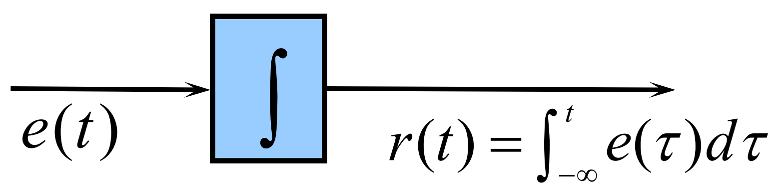
二. 用方框图表示的系统模型（系统模拟）

连续系统的基本运算单元：



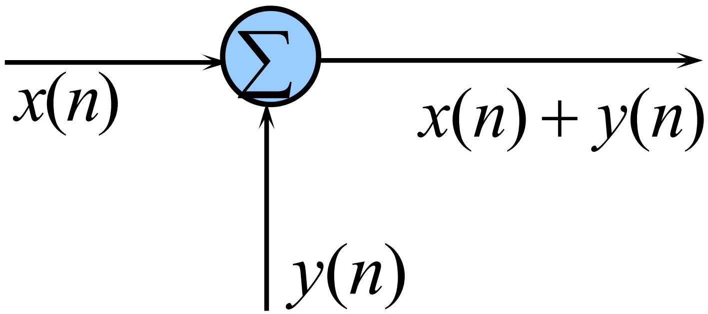
（a） 相加

（b） 倍乘



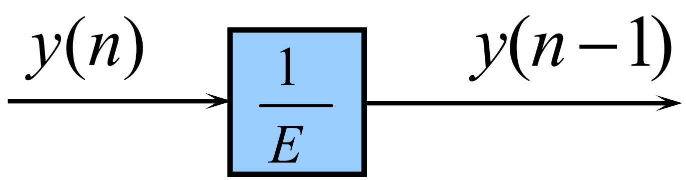
（c） 积分

离散系统的基本运算单元：

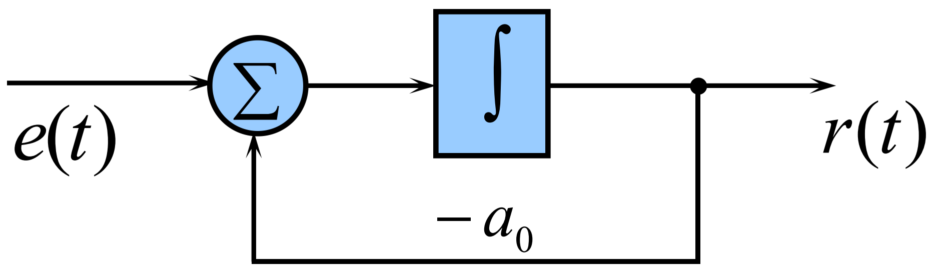


（a） 相加

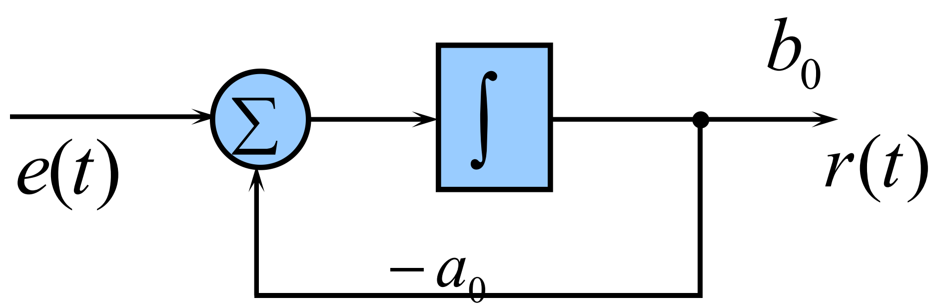
(b) 倍乘



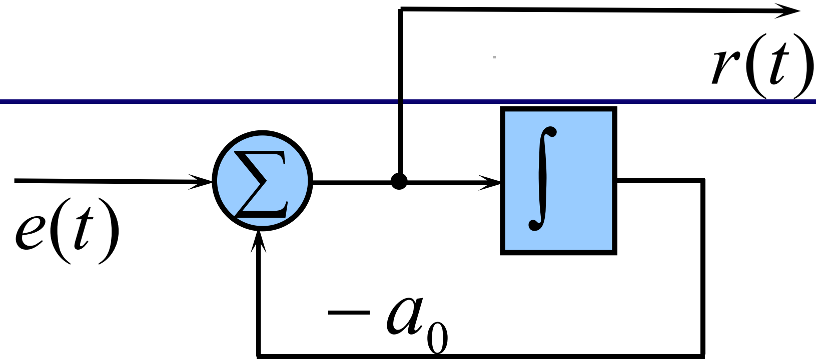
（c） 延时器



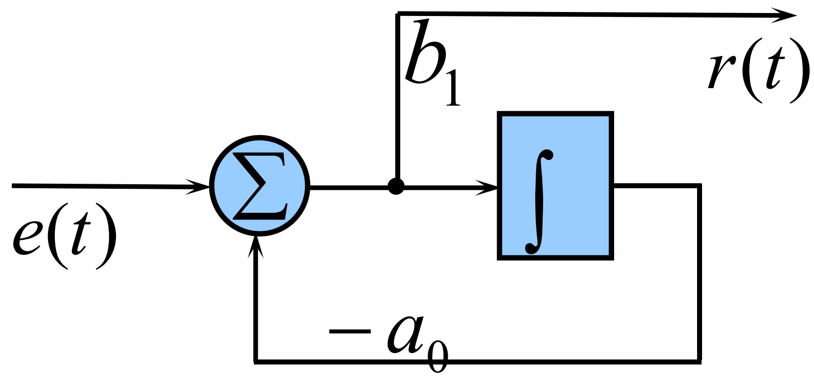
一阶微分方程式为： $\frac{d}{dt}r(t)+a_0 r(t)=e(t)$



一阶微分方程式为： $\frac{d}{dt}r(t)+a_0 r(t)=b_0 e(t)$



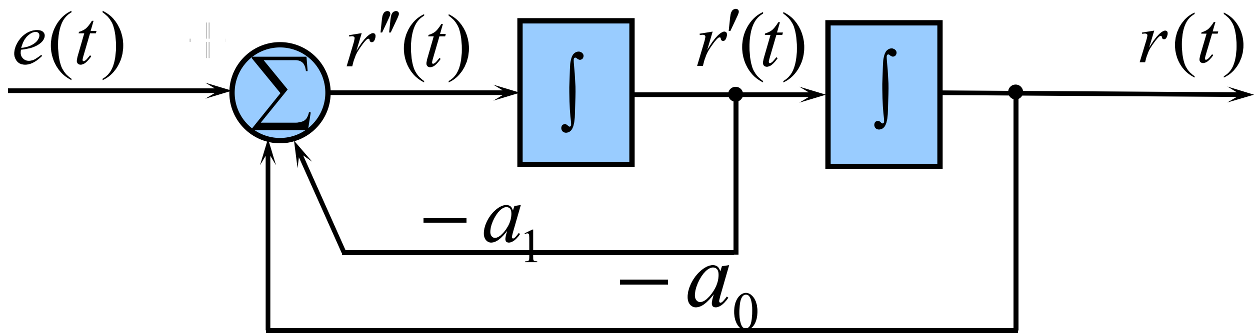
一阶微分方程式为：$\frac{d}{dt}r(t)+a_0r(t)=\frac{d}{dt}e(t)$



齐次性

一阶微分方程式为：$\frac{d}{dt}r(t)+a_0r(t)=b_1\frac{d}{dt}e(t)$

例 列出图示系统框图的微分方程式，并指出其阶次。

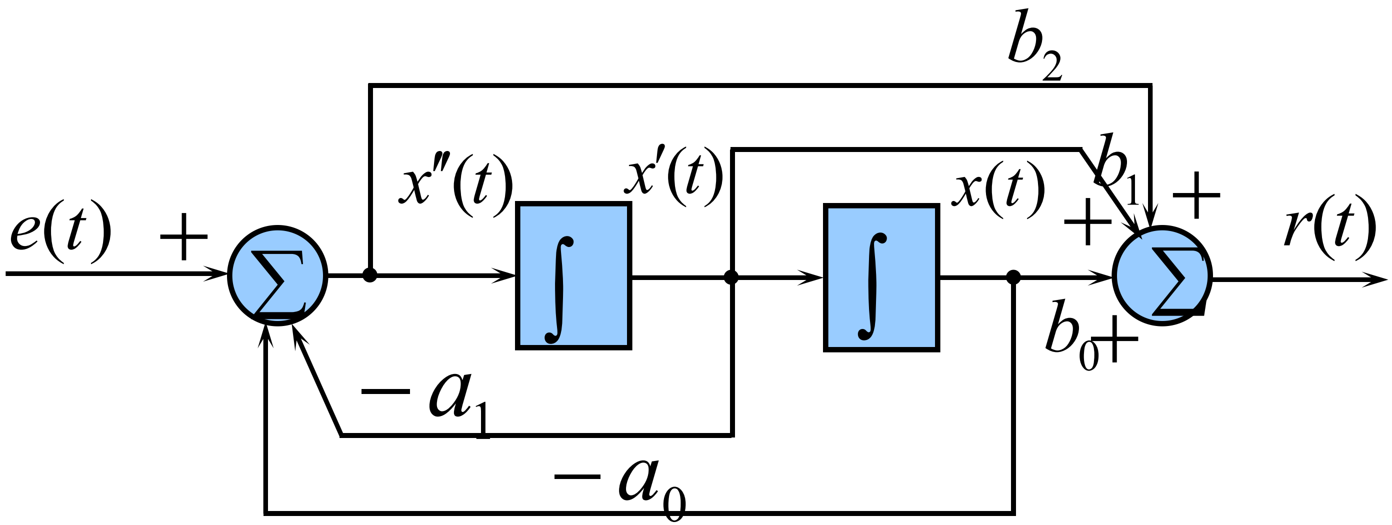


图（a）

微分方程式为：$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+a_1\frac{dr(t)}{dt}+a_0r(t)=e(t)$$

二阶微分方程

例



图（b）

左侧加法器输出： $x''(t) = -a_1 x'(t) - a_0 x(t) + e(t)$

右侧加法器输出： $r(t) = b_2 x''(t) + b_1 x'(t) + b_0 x(t)$

对第二个公式进行处理：

$$a_0 r(t) = b_2 a_0 x''(t) + b_1 a_0 x'(t) + b_0 a_0 x(t)$$

$$a_1 r'(t) = b_2 (a_1 x''(t))' + b_1 (a_1 x'(t))' + b_0 (a_1 x(t))'$$

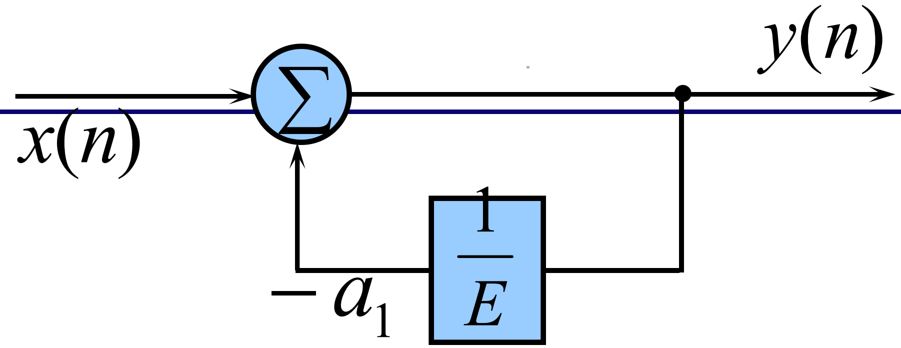
$$r''(t) = b_2 (x''(t))'' + b_1 (x'(t))'' + b_0 (x(t))''$$

以上三式相加：

$$\underline{r''(t) + a_1 r'(t) + a_0 r(t)} = b_2 \left(x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t)\right)''$$

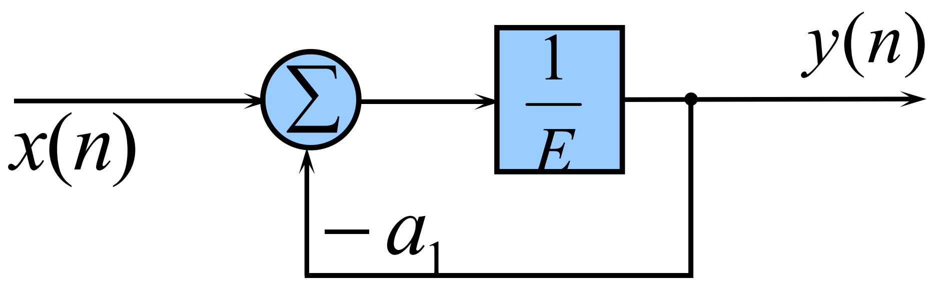
$$+ b_1 \left(x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t)\right)' + b_0 \left(x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t)\right)$$

$$= \underline{b_2 e''(t) + b_1 e'(t) + b_0 e(t)}$$



一阶差分方程式为：$y(n)+a_1y(n-1)=x(n)$

（后向形式）



一阶差分方程式为：$y(n+1)+a_1y(n)=x(n)$

（前向形式）

$$\boxed{y(n)+a_1y(n-1)=x(n-1)}$$

例2 列出图示系统的差分方程式，并指出其阶次。

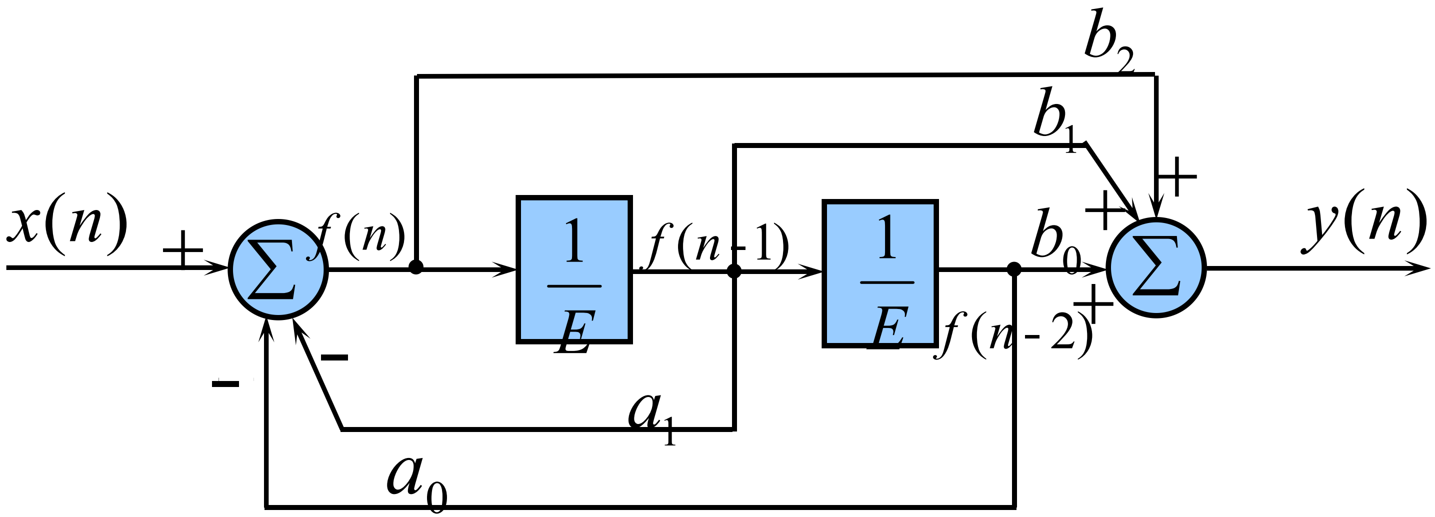


图 (b)

$$x(n) = f(n) + a_1 f(n-1) + a_0 f(n-2)$$

$$y(n) = b_2 f(n) + b_1 f(n-1) + b_0 f(n-2)$$

$$x(n) = f(n) + a_1 f(n-1) + a_0 f(n-2)$$

$$y(n) = b_2 f(n) + b_1 f(n-1) + b_0 f(n-2)$$

对第二个公式进行处理：

$$a_1 y(n-1) = b_2 a_1 f(n-1) + b_1 a_1 f(n-2) + b_0 a_1 f(n-3)$$

$$a_2 y(n-2) = b_2 a_0 f(n-2) + b_1 a_0 f(n-3) + b_0 a_0 f(n-4)$$

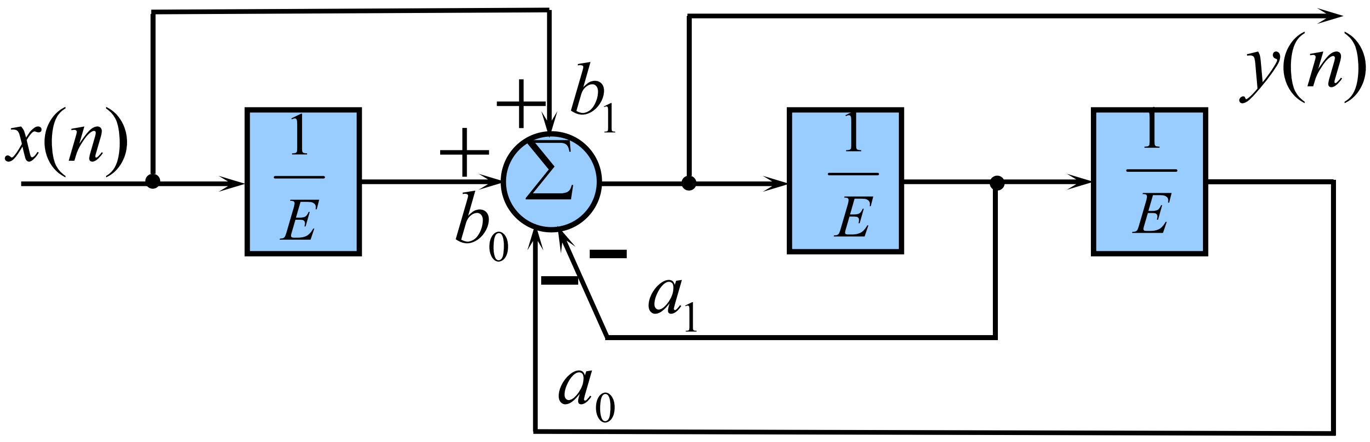
三式相加：

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = b_2\left[f(n) + a_1 f(n-1) + a_0 f(n-2)\right]$$
$$+ b_1\left[f(n-1) + a_1 f(n-2) + a_0 f(n-3)\right] + b_0\left[f(n-2) + a_1 f(n-3) + a_0 f(n-4)\right]$$

二阶差分方程式为：

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_0 y(n-2) = b_2 x(n) + b_1 x(n-1) + b_0 x(n-2)$$

作业3：列出图示系统的差分方程式，并指出其阶次



图（a）

三. 系统的分类

（1）连续时间系统与离散时间系统

连续系统： 系统的输入和输出都是连续时间信号。

离散系统： 系统的输入和输出都是离散时间信号。

（2）记忆系统与无记忆系统（即时系统与动态系统）

无记忆系统： 系统的输出只决定于同时刻的激励信号，而与它过去的工作状态无关。

记忆系统： 系统的输出不仅取决于同时刻的激励信号，而且与它过去的工作状态有关。

（3） 线性系统与非线性系统

线性系统：同时满足叠加性和均匀性的系统。否则即为非线性系统。

若

$$e_1(t) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow r_1(t)$$

$$e_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow r_2(t)$$

则：

1. $e_1(t)+e_2(t) \Rightarrow r_1(t)+r_2(t)$ —— 叠加性

2. $C_1e_1(t) \Rightarrow C_1r_1(t)$ —— 均匀性

两条性质合在一起，可以写成：

$$C_1e_1(t)+C_2e_2(t) \Rightarrow C_1r_1(t)+C_2r_2(t)$$

（4） 时变系统与时不变系统

时不变系统： 如果系统的参数或特性不随时间而变化，在相同的起始状态下，系统响应与激励作用于系统的时刻无关。

否则即为时变系统。

若

则：

时不变特性

1.7　线性时不变系统（LTI系统）

一. 线性 —— 叠加性和均匀性

二. 时不变特性

三. 微分特性

若　$e(t) \longrightarrow r(t)$

则　$\dfrac{de(t)}{dt} \longrightarrow \dfrac{dr(t)}{dt}$

微分特性的证明：

已知 $e(t) \rightarrow r(t)$

由时不变性，$e(t-\Delta t) \rightarrow r(t-\Delta t)$

再由线性，$\dfrac{e(t)-e(t-\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow \dfrac{r(t)-r(t-\Delta t)}{\Delta t}$

取$\Delta t \rightarrow 0$的极限，得到导数关系。

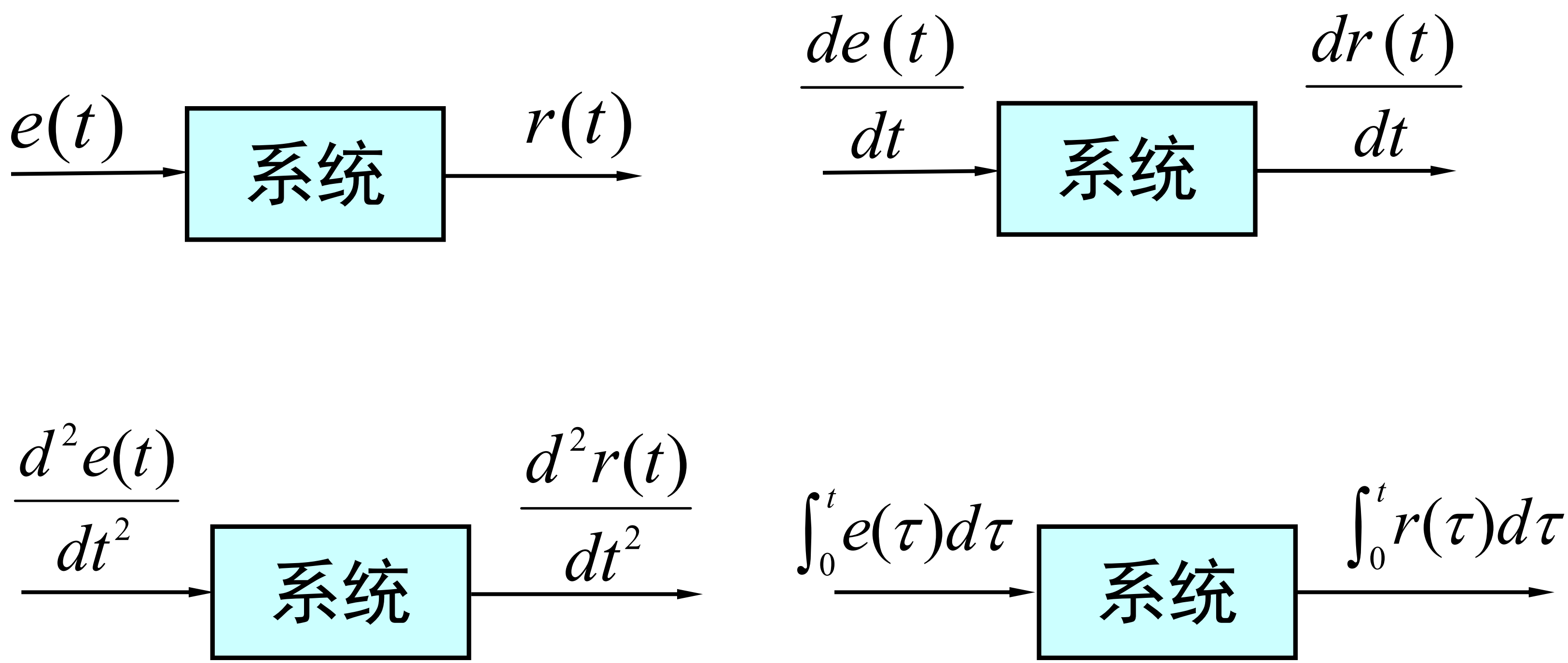
若激励为

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(t)-e(t-\Delta t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} e(t)$$

则响应为

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t)-r(t-\Delta t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} r(t)$$

可将此结论推广至高阶导数与积分。



四. 因果性

因果系统是指系统在 t_0时刻的响应只与 $t = t_0$和$t < t_0$时刻的输入有关，否则 即为非因果系统。

例：(1) $r_1(t) = e_1(t-1)$ 因果

(2) $r_2(t) = e_2(t+1)$ 非因果

(3) $r_3(t) = e_3(2t)$ 因果

例　判别下列各系统是否是线性、时不变、因果的。

1）

$$r(t)=\sin\left[e(t)\right]$$

解：令　$r_1(t)=\sin\left[e_1(t)\right], r_2(t)=\sin\left[e_2(t)\right]$

$$c_1r_1(t)+c_2r_2(t)=c_1\sin\left[e_1(t)\right]+c_2\sin\left[e_2(t)\right]$$

$$\neq\sin\left[c_1e_1(t)+c_2e_2(t)\right]$$

∴ 非线性

$$r(t-t_0)=\sin\left[e(t-t_0)\right]$$

系统时不变

系统响应只与当前激励有关，因此满足因果性

2） $$r(t)=\int_{-\infty}^{3t}e(\tau)d\tau$$

解：令 $$r_1(t)=\int_{-\infty}^{3t}e_1(\tau)d\tau,\ r_2(t)=\int_{-\infty}^{3t}e_2(\tau)d\tau$$

$$c_1r_1(t)+c_2r_2(t)=c_1\int_{-\infty}^{3t}e_1(\tau)d\tau+c_2\int_{-\infty}^{3t}e_2(\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{3t}\left[c_1e_1(t)+c_2e_2(t)\right]d\tau$$

∴ 线性

$$\int_{-\infty}^{3t}e(\tau-t_0)d\tau\overset{\tau-t_0=a}{=}\int_{-\infty}^{3t-t_0}e(a)da=r(t-\frac{t_0}{3})\neq r(t-t_0)$$

∴系统时变

当$t=1$时，有$r(1)=\int_{-\infty}^{3}e(\tau)d\tau$，系统与未来输入有关，非因果

课堂练习：判别下列各系统是否是线性、时不变、因果

（1）$r(t)=e(2t)$ （2）$y(n)=x(n)\cdot\sin(\frac{2\pi}{7}n)$

作业4：判别下列各系统是否是线性、时不变、因果

（1）$r(t)=\sin(2t)\cdot e(t)$ （2）$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m)$

1.8　系统分析方法

一. 系统数学模型的描述方法

1. 输入—输出描述法

着眼于系统激励与响应之间的关系，不关心系统内部变量的情况。

2. 状态变量描述法

不仅可以给出系统的响应，还可提供系统内部变量的情况。

二. 系统数学模型的求解方法

1. 时间域方法：直接分析时间变量的函数，研究系统的时间响应特性。

$$\begin{cases}\text{经典法解微分或差分方程}\\ \text{卷积方法}\end{cases}$$

2. 变换域方法：将信号与系统模型的时间变量函数变换成相应变换域的某种变量函数。

$$\begin{cases}\text{傅里叶变换(频域)}\\ \text{拉氏变换（s域）}\\ \text{z变换（z域）}\end{cases}$$

对LTI系统的研究，以线性、时不变特性为分析问题的基础，时间域方法与变换域方法是统一的。

课　程　内　容

研究确定信号的特性、线性时不变系统的特性，以及信号通过线性时不变系统的基本分析方法。

讲　授　顺　序

先输入输出描述后状态变量描述，先时间域后变换域，连续与离散并行的顺序。

本章小结

1，信号分类及常用信号波形

2，信号基本运算及波形绘制

3，冲激信号及其性质

4，信号分解

5，利用方块图描绘系统模型并写出其数学模型（微分差分方程）

6，线性时不变系统基本性质及判断