Mathematik Lernzettel für das Abitur

Erstellt von Horsti98

Gliederung

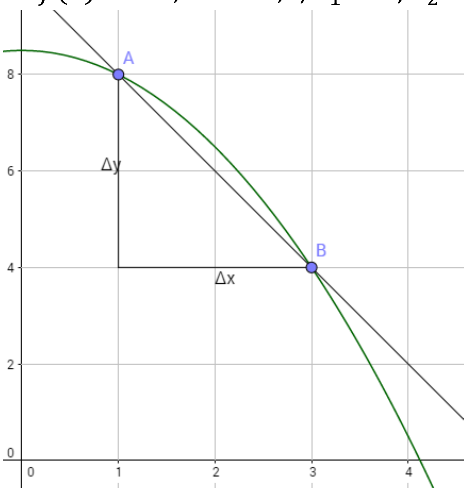
--- *Version: 1.6 vom 1. Mai 2017*

1 Analysis

1.1 Kurvendiskussion

- In der *Kurvendiskussion* werden Funktionen und deren Funktionsgraphen auf spezifische Merkmale analysiert und untersucht oder es wird mittels spezifisch gegebener Eigenschaften eine Funktion gebildet

1.1.1 Sekantensteigung

- Synonyme: (durchschnittliche) Änderungsrate; mittlere Änderungsrate; durchschnittliche Steigung
- Ziel: Gibt die durchschnittliche Steigung zwischen zwei Punkten auf einer Funktion an
- Herleitung:
  - Es wird eine Gerade durch zwei (nicht gleiche) Punkte einer Funktion gezogen
  - Die Gerade wird jetzt Sekante genannt, und es gilt nun, deren Steigung zu ermitteln
  - Man bildet ein Steigungsdreieck und berechnet damit die Sekantensteigung m
- Berechnung:
  - $m = \frac{f_1(x_1) - f_2(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- Beispiel: Berechnen Sie die Sekantensteigung der Funktion $f(x) = -0{,}5x^2 + 8{,}5$ von $x_1 = 1$ bis $x_2 = 3$
  - Gegeben: $f(x) = -0{,}5x^2 + 8{,}5$; $x_1 = 1$; $x_2 = 3$
  - Skizze: 

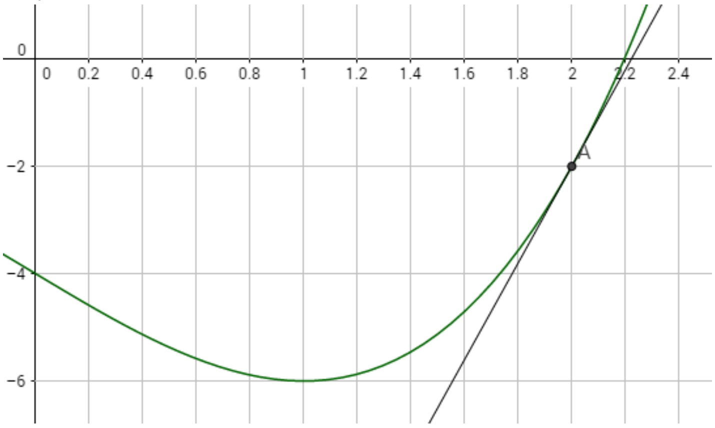
    Horizontale Achse: x; Vertikale Achse: f(x). Gilt für dieses und alle folgenden zweidimensionalen Koordinatensysteme
  - Rechnung:
    - $f_1(1) = -0{,}5 * 1^2 + 8{,}5 = 8$
    - $f_2(3) = -0{,}5 * 3^2 + 8{,}5 = 4;$
    - $m = \frac{8-4}{1-3} = -2$
  - Lösung: Die Sekantensteigung zwischen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ beträgt $m = -2$

1.1.2 Tangensteigung

- Synonyme: Momentane Änderungsrate; Mittlere Änderungsrate; Momentane Höhenzunahme / -abnahme
- Ziel: Gibt die genaue Steigung eines spezifischen Punktes auf einer Funktion an
- Herleitung:
  - Es wird eine Tangente an einer Stelle der Funktion gezeichnet mit der gleichen Steigung wie die Funktion an dieser Stelle hat
  - Da man nicht durch 0 teilen darf, kann man nicht einfach so den aktuellen Punkt mittels eines Steigungsdreiecks berechnen, da dann $\Delta x = 0$ gelten würde

- Es wird die Variable h zu x dazu addiert, und dann ein Steigungsdreieck gebildet
- Nun wird die Tangentensteigung m berechnet, indem man $h = 0$ setzt

- Berechnung:
  - $m = \frac{f_1(x_1) - f_2(x_1+h)}{x_1 - (x_1+h)}$
- Beispiel: Berechnen Sie die Tangentensteigung m der Funktion $f(x) = x^3 - 3x - 4$ an der Stelle $x_1 = 2$
  - Gegeben: $f(x) = x^3 - 3x - 4$; $x_1 = 2$
  - Skizze:



  - Rechnung:
    - $f_1(2) = 2^3 - 3 * 2 - 4 = -2$
    - $f_2(2+h) = (2+h)^3 - 3 * (2+h) - 4 = h^3 + 6h^2 + 9h - 2$
    - $m = \frac{-2-(h^3+6h^2+9h-2)}{2-(2+h)} = h^2 + 6h + 9$
    - $h = 0 \rightarrow m = h^2 + 6h + 9 = 9$
  - Lösung: Die Tangentensteigung an der Stelle $x_1 = 2$ beträgt $m = 9$
- Taschenrechner: F6 → Funktion eingeben → F3 → F5 → 6: Ableitung → 1: dy/dx → x_1 eingeben → Unten links steht die Tangentensteigung m
  Diese und alle folgenden Taschenrechnererklärung sind ausgelegt für den GTR Texas Instruments TI-89 Titanium

1.1.3 Potenzgesetze

- Synonyme: Potenzregeln, Wurzelgesetze; Wurzelregeln;
- Ziel: Wurzeln und/oder Potenzen umformen und vereinfachen
- Potenzregeln:

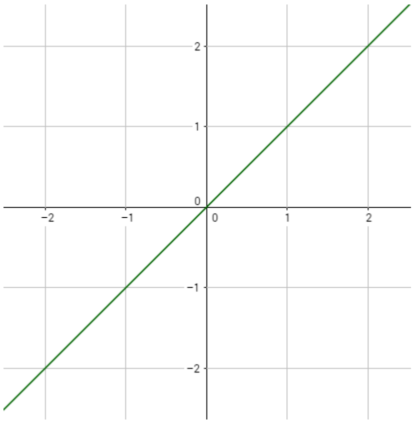
1. $a^n * a^m = a^{n+m}$
2. $a^n / a^m = a^{n-m}$
3. $a^n * b^n = (a * b)^n$
4. $a^n / b^n = (a/b)^n$
5. $(a^n)^m = a^{n*m}$
6. $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
8. Sonderfälle:
   a. $a^{1/2} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$
   b. $a^1 = a$
   c. $a^0 = 1$
   d. $\frac{1}{a} = a^{-1}$

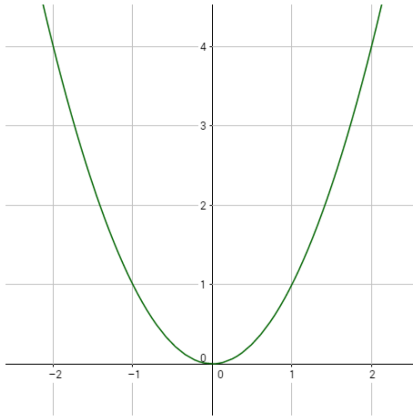
- Beispiele:
  - $\sqrt[3]{\frac{2}{(t+5)^2}} = \sqrt[3]{2 * (t^2 + 5)^{-2}} = (2 * (t^2 + 5)^{-2})^{1/3} = 2^{1/3} * (t^2 + 5)^{-2/3}$

- $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt{x}} = \sqrt[5]{2} * \sqrt{x}^{-1} = 2^{1/5} * x^{-1/2}$
- $\frac{19^2 * 19^{-8}}{19^{-6}} = 19^{2-8-(-6)} = 19^0 = 1$
- $(a^7 * a^4 * a^4)^2 = (a^{15})^2 = a^{30}$

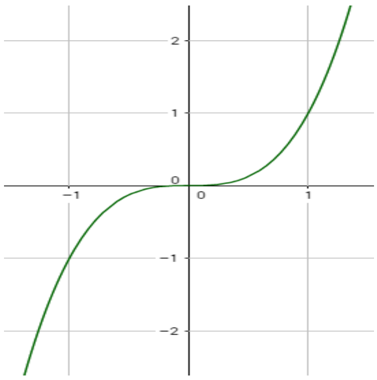
1.1.4 Funktionsgraphen

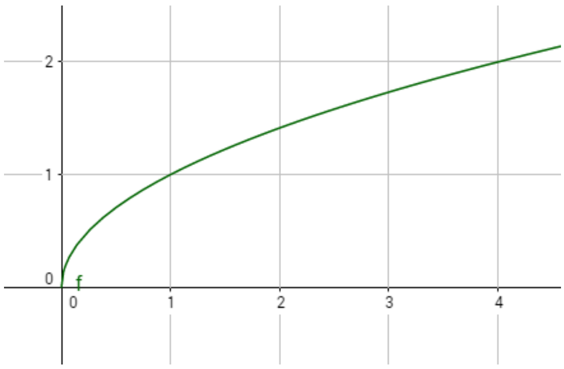
- Synonyme: Graphen, Grafen, Funktionsgrafen
- Ziel: Bestimmte Funktionen haben einen spezifischen Funktionsgraphen, den man erkennen und beschreiben soll
- Funktionsgraphen:
  - Linearer Funktionsgraph: $f(x) = x$ Quadratischer Funktionsgraph: $f(x) = x^2$



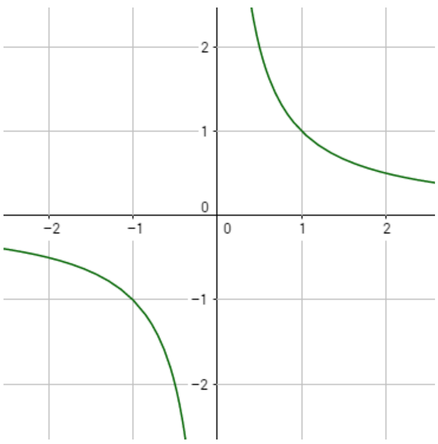


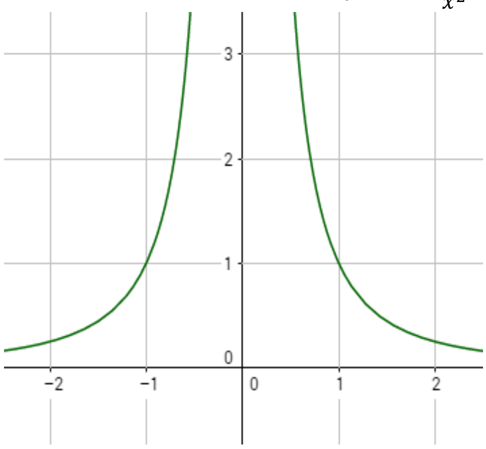
  - Kubischer Funktionsgraph: $f(x) = x^3$ Wurzelfunktionsgraph: $f(x) = \sqrt{x}$





  - Asymptotischer Funktionsgraph: $f(x) = \frac{1}{x}$ Asymptotischer Fktgraph: $f(x) = \frac{1}{x^2}$





1.1.5 Ableitung I

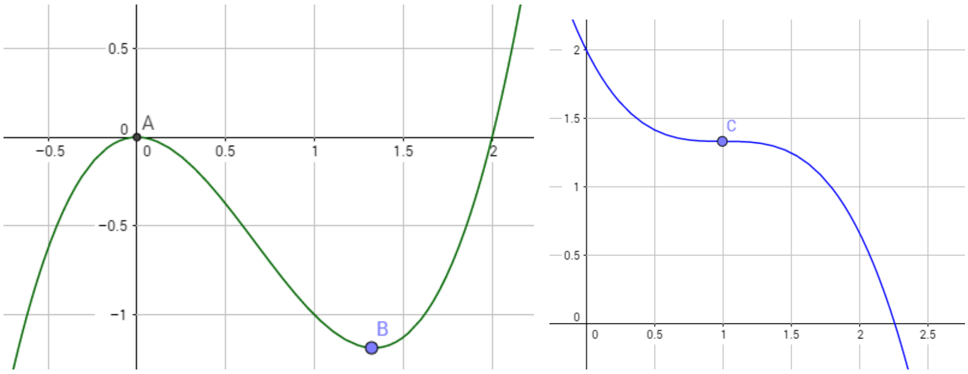
- Synonyme: Steigungsfunktion; Ableitungsfunktion; (momentane Änderungsrate)
- Ziel: Steigung einer Funktion mittels einer Ableitungsfunktion an jeder Stelle ermitteln zu können, da es mit der Tangentensteigung sehr aufwendig ist
- Definition und Berechnung:
    - Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ wird mit einem Strich gekennzeichnet: $f'(x)$
    - Die Anzahl der Striche gibt an, wie oft die Funktion differenziert (abgeleitet) wurde:
        - 1. Ableitung: $f'(x)$
        - 2. Ableitung: $f''(x)$ usw.
    - Ableitungsregeln
        - Potenzregel: Für eine Funktion f mit $f(x) = x^r$ gilt: $f'(x) = r * x^{r-1}$
        - Faktorregel: Für eine Funktion f mit $f(x) = s * x^r$ gilt: $f'(x) = s * r * x^{r-1}$
        - Summenregel: Für eine Funktion f mit $f(x) = x^r + x^s$ gilt: $f'(x) = r * x^{r-1} + s * x^{s-1}$
    - Konstanten fallen weg: Für eine Funktion Funktion f mit $f(x) = x^r + c$ gilt: $f'(x) = r * x^{r-1}$
    - Summen und Differenzen von Potenzfunktionen der Form $f(x) = a * x^n; n \in \mathbb{N}; a \in \mathbb{R}$ heißen ganzrationale Funktionen, wobei die höchste im Funktionsterm vorkommende Hochzahl der Variablen x den Grad einer Funktion angibt. Somit ist z.B. $f(x) = -3x^7 + 2x^5 - 2$ eine ganzrationale Funktion siebten Grades
- Beispiele:
    - Ermitteln Sie die Steigung an der Stelle $x = 3$ der Funktion f:
        - $f(x) = x^3 - 19x + 5 \ \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 19; f'(3) = 8$
        - $f(x) = 2 * \sqrt[3]{x} = 2 * x^{1/3} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} * x^{-2/3}; f'(3) \approx 0{,}3205$
        - $f(x) = \frac{2}{x^2} + 5 = 2 * x^{-2} + 5 \rightarrow f'(x) = -4 * x^{-3}; f'(3) \approx -0.15$
        - $f(x) = c^2 - 5c \ \rightarrow f'(x) = 0; f'(3) = 0$
    - Ermitteln Sie die Steigung der Steigung an der Stelle $x = -0{,}5$ der Funktion f:
        - $f(x) = x^2 + 2x + 5 \rightarrow f'(x) = 2x + 2 \rightarrow f''(x) = 2; f''(-0.5) = 2$
        - $f(x) = x^3 - 4x^2 + ax \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 8x + a \ \rightarrow f''(x) = 6x - 8; \ \ f''(-0.5) = -11$

1.1.6 Nullstellen

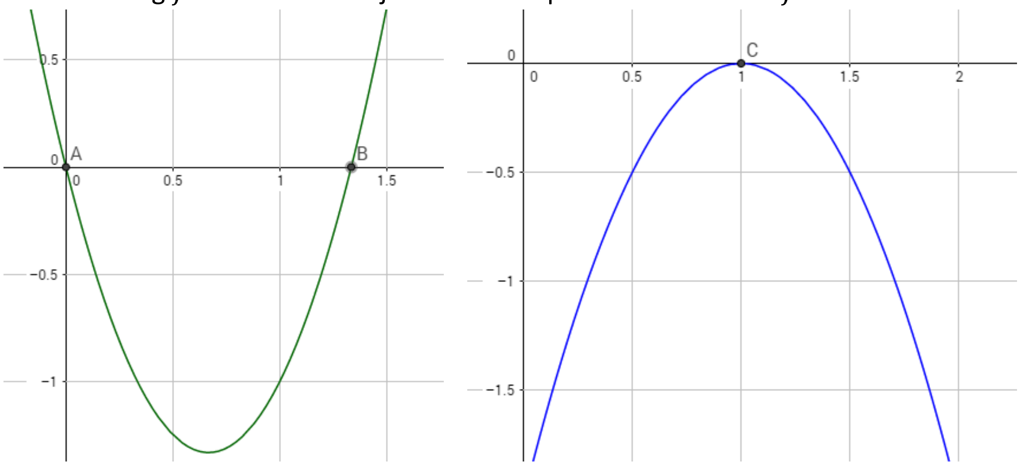
- Synonym: Nullpunkte, x-Achsenabschnitt
- Ziel: Ermittlung, wann ein Funktionsgraph die x-Achse berührt bzw. durchquert; insbesondere wichtig zur Ermittlung von Extrema *(1.1.7)* und Wendepunkten *(1.1.8)*
- Herleitung:
    - Eine Funktion f berührt die x-Achse, wenn $f(x) = 0$ gilt, also setzt man die Funktion mit 0 gleich und löst diese nach x auf
- Berechnung: Bei quadratischen Funktionen f der Form $f(x) = x^2 + px + q$ kann man die Nullstellen mittels der pq-Formel ermitteln: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
- Taschenrechner: Home → F2 → 1: Löse(→ Löse($f(x) = 0,x$)
- Beispiele:
    - $f(x) = x^2 - 8x + 15 = 0 \rightarrow x_{1,2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 15} \rightarrow \ x_1 = 5; x_2 = 3$
    - $f(x) = 2x^2 + 4x = 0 \rightarrow \ x^2 + 2x = 0 \ \rightarrow \ x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2} \rightarrow x_1 = 0; x_2 = -2$
- Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades kann maximal n Nullpunkte haben

1.1.7 Extrema

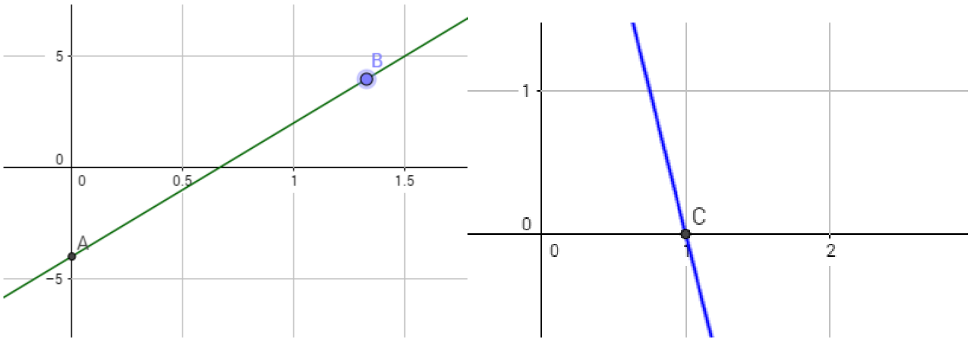
- Synonyme: Extrempunkte, Extremen, Hochpunkt, Tiefpunkt, Sattelpunkt, (Lokales) Maximum, (Lokales Minimum), Höchster / Größter / Tiefster / Niedrigster Punkt
- Ziel: Einen (oder mehrere) Hochpunkte, Tiefpunkte oder Sattelpunkte in einem Funktionsgraphen zu ermitteln
- A ist ein lokales Maximum, B ein lokales Minimum und C ein Sattelpunkt der Funktion f



- Die Ableitung f' hat immer bei jedem Extrempunkt der Funktion f eine Nullstelle



- Das Maximum A hat immer einen negativen, das Minimum B immer einen positiven Wert in der 2. Ableitung f'', während ein Sattelpunkt dort immer einen Nullpunkt hat

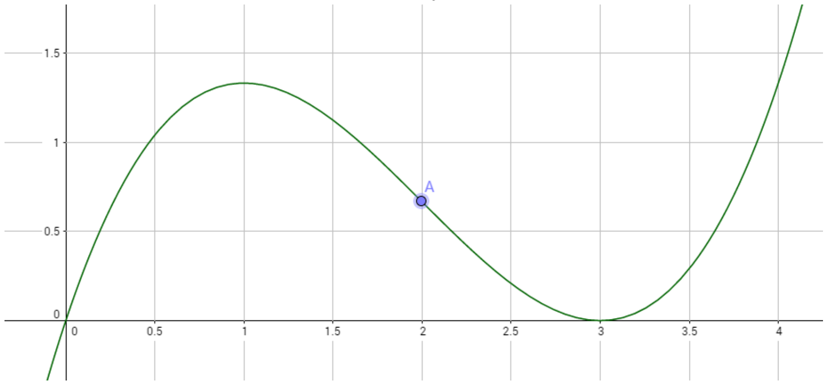


- Herleitung
  - Die Tangentensteigung an einem Extrempunkt beträgt immer 0, daher muss die Ableitung $f'(x) = 0$ gelten
  - Der Wert der zweiten Ableitung (positiv, negativ oder 0) ist charakteristisch für die jeweilige Art der Extrema
- Berechnung:
  - Maximum:
    - $f'(x) = 0$

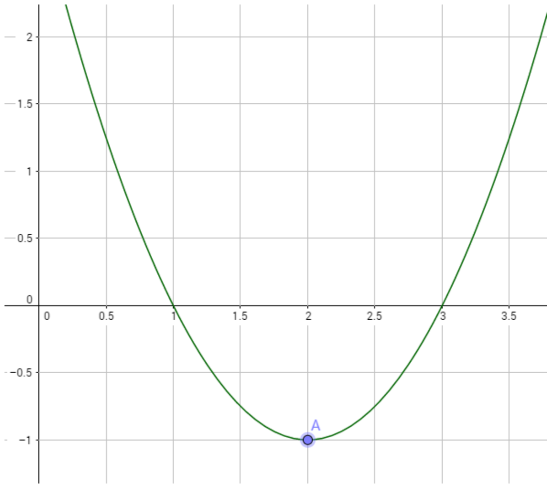
        - $f''(x) =$ negativ
    - Minimum:
        - $f'(x) = 0$
        - $f''(x) =$ positiv
    - Sattelpunkt:
        - $f'(x) = 0$
        - $f''(x) = 0$
        - $f'''(x) \neq 0$
- Eine Funktion kann mehrere Extrema (auch gleicher Art) haben
- Beispiel: Überprüfen Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 20x + 30$ auf Extrema
    - Gegeben: $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 20x + 30$
    - $f'(x) = 2x^3 - 6x^2 + 16x - 20$
    - $f''(x) = 6x^2 - 12x + 16$
    - $f'''(x) = 12x - 12$
    - $f'(x) = 2x^3 - 6x^2 + 16x - 20 = 0 \ \rightarrow x_1 \approx 1{,}72$
    - $f''(1{,}72) = 13{,}11 \rightarrow$ Positiv
      Es gibt einen Tiefpunkt bei $x = 1{,}72$

1.1.8 Wendepunkt

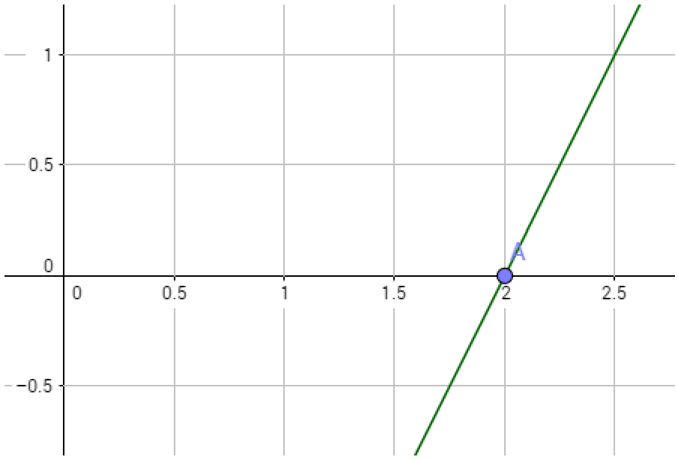
- Synonyme: Wendestellen
- Ziel: Einen Funktionsgraphen auf Wendestellen überprüfen
- A ist der Wendepunkt der Funktion f



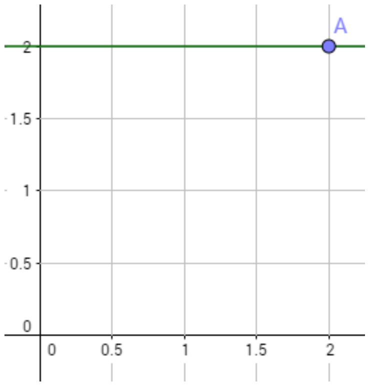
- Die Wendestelle A sieht bei der ersten Ableitung f' aus wie ein Extrempunkt



- Jeder Wendepunkt A hat an der Wendestelle in der zweiten Funktion f'' eine Nullstelle



- Die dritte Ableitung f''' zeigt uns, dass wenn A einen positiven Wert hat, der Wendepunkt von rechts nach links geht, und wenn A negativ ist, der Wendepunkt von links nach rechts geht



- Herleitung:
  - Jeder Wendepunkt hat einen Extrempunkt in der ersten Ableitung f', also eine Nullstelle in der zweiten Ableitung f''
  - Der Wert der dritten Ableitung gibt an, ob die Wendestelle von links nach rechts, oder von rechts nach links geht
- Berechnung:
  - Links-Rechts-Wendestelle:
    - $f''(x) = 0$
    - $f'''(x) =$ negativ
  - Rechts-Links-Wendestelle:
    - $f''(x) = 0$
    - $f'''(x) =$ positiv
- Beispiel: Berechnen Sie den Wendepunkt und seine Richtung von der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$
  - Gegeben: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$
  - $f'(x) = x^2 - 4x + 3$
  - $f''(x) = 2x - 4$
  - $f'''(x) = 2$
  - $f''(x) = 2x - 4 = 0 \rightarrow x_1 = 2$
  - $f'''(2) = 2 \rightarrow$ Positiv

    Der Wendepunkt liegt bei $x_1 = 2$ und geht von rechts nach links

1.1.9 Symmetrie

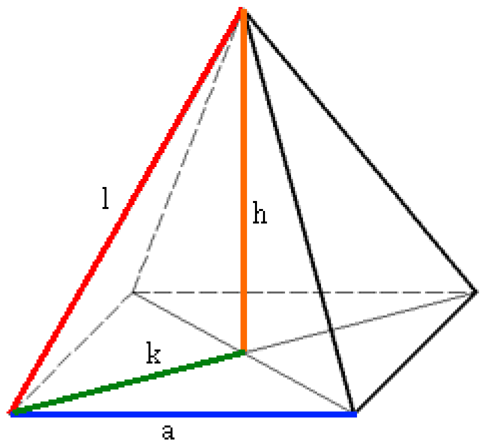
- Synonyme / Stichwörter: Spiegelung an der Achse; Spiegelung am Punkt; Punktsymmetrisch; Achsensymmetrisch
- Ziel: Symmetrische Ähnlichkeiten eines Funktionsgraphen f finden
- Berechnung:
    - Achsensymmetrisch zur y-Achse:
        - $f(-x) = f(x)$
        - Alle ganzrationalen Funktionen f, die nur gerade Exponenten bei x haben
    - Punktsymmetrisch zum Ursprung $(0|0)$:
        - $f(-x) = -f(x)$
        - Alle ganzrationalen Funktionen f, die nur ungerade Exponenten bei x haben
    - Keine Symmetrie
        - Alle ganzrationalen Funktionen f, die gerade und ungerade Exponenten bei x haben
        - Alle Funktionen, die weder Punkt- noch Achsensymmetrisch sind
- Beispiele:
    - $f(x) = x^4 - 13x^2 \rightarrow$ Achsensymmetrisch, da nur gerade Exponenten
    - $f(x) = x^5 + 12x \rightarrow$ Punktsymmetrisch, da nur ungerade Exponenten
    - $f(x) = 19x^2 - x \rightarrow$ Nicht symmetrisch, da gerade und ungerade Exponenten

1.1.10 Grenzverhalten

- Synonyme: Verhalten im Unendlichen, Verhalten bei 0
- Ziel: Es wird geschaut, wie sich einige (besondere) Funktionen im positiven und negativen Unendlichen verhalten und/oder bei 0
- Herleitung:
    - Da man nicht durch $\pm\infty$ und 0 teilen darf, muss man die Funktion diesen Werten annähern, indem man immer größere Zahlen (für $\pm\infty$) einsetzt und sich den Verlauf anschaut, oder immer mehr gegen 0 geht, um sich es dort anzuschauen
    - Man macht das mittels des Limes (lat. = Grenze)
- Berechnung:
    - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$
    - Man spricht: „Der Limes für x gegen $\pm\infty$ von $f(x)$ geht gegen a“
- Beispiel:
    - $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{x}$
        - $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{1} = 1$
        - $\lim\limits_{x \to 0{,}01} f(x) = \frac{1}{0{,}01} = 100$
        - $\lim\limits_{x \to 0{,}00001} f(x) = \frac{1}{0{,}00001} = 100\,000$
        - $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$
        - „Der Limes für x gegen 0 von $f(x)$ geht gegen ∞“
    - $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = x^{-3} + 31$
        - $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1^{-3} + 31 \approx 32$
        - $\lim\limits_{x \to 10} f(x) = 10^{-3} + 31 \approx 31{,}01$
        - $\lim\limits_{x \to 1000} f(x) = 1000^{-3} + 31 \approx 31{,}000000001$
        - $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 31$

1.1.11 Nebenbedingungen

- Synonym: Extremwertaufgaben im Anwendungsbereich
- Ziel: In Klausuren wird häufig nicht explizit gefragt, dass man z.B. einen bestimmten Hochpunkt ausrechen soll, sondern häufig werden diese mit Anwendungsaufgaben (die häufig mit Körpern zu tun haben) in Verbindung gebracht
- Beispiel: Die Kanten von der Ecke zur Spitze einer Pyramide mit quadratförmiger Grundfläche haben alle die Länge $l = 1{,}5cm$. Bestimmen Sie Höhe h der Pyramide und das Volumen V, sodass das Volumen maximal ist.
  - Anfangs sollte man schauen, was solch eine Aufgabe verlangt:
    - „Bestimmen Sie die Höhe" → h ist gesucht
    - „Bestimmen Sie [...] das Volumen" → V ist gesucht
    - „das Volumen [soll] maximal" sein → $V'(a) = 0; V''(a) =$ negativ
  - Es bietet sich immer an, eine Skizze zu zeichnen, um sich einen Überblick zu verschaffen:



  - Nun muss man eine Funktion von dem Volumen V in Abhängigkeit von a erstellen:
    - Die Formel zur Berechnung des Volumens dieser Pyramide lautet: $V = \frac{1}{3}a^2h$
    - Mittels der grünen Linie k können wir a ermitteln in Abhängigkeit von h mittels des Satz des Pythagoras: $k = \sqrt{1{,}5^2 - h^2} \to a^2 = \sqrt{1{,}5^2 - h^2}^2 + \sqrt{1{,}5^2 - h^2}^2$
    - a^2 können wir nun so in V einsetzen und es von h abhängig machen: $V(h) = \frac{1}{3} * \sqrt{1{,}5^2 - h^2}^2 + \sqrt{1{,}5^2 - h^2}^2 * h = -\frac{2}{3}h^3 + 1{,}5h$
  - Nun muss man die erste und zweite Ableitung bilden:
    - $V'(h) = -2h^2 + 1{,}5$
    - $V''(h) = -4h$
  - Die erste Ableitung muss nun mit 0 gleichgesetzt werden (um die Extrema zu ermitteln) und es muss überprüft werden, ob die zweite Ableitung an x_1 negativ ist:
    - $V'(h) = -2h^2 + 1{,}5 = 0 \to\ h_1 = \sqrt{0{,}75};\ h_2 = -\sqrt{0{,}75} \to$ Fällt weg, da negativ
    - $V''\left(\sqrt{0{,}75}\right) = -4 * \sqrt{0{,}75} \approx -3{,}46 \to$ negativ
  - Nun muss zur Volumenermittlung V h eingesetzt werden:
    - $V(h) = -\frac{2}{3} * \sqrt{0{,}75}^3 + 1{,}5 * \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}87$
  - Einheiten nicht vergessen beim Lösungssatz: Die Pyramide hat bei einer Höhe von $h = \sqrt{0{,}75}$cm ein Volumen von $V = 0{,}87$cm³

1.1.12 Gauß-Verfahren

- Synonym: Lineare Gleichungssysteme lösen; LGS; Gauß-Algorithmus
- Ziel: Mehrere Gleichungen mit mehreren Variablen einfach lösen zu können
- Berechnung:
  - Um ein LGS eindeutig lösen zu können, benötigt man so viele Gleichungen, wie es auch an unbekannten Variablen gibt
  - Bei den Gleichungen nimmt man nun die einzelnen Variablen raus und lässt nur die Vorfaktoren und das Ergebnis stehen. Diese schreibt man nun in eine Matrix:
  - Beispiel:
    - $1x + 2y + 3z = 2$
    - $1x + 1y + 1z = 2 \rightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
    - $3x + 3y + 1z = 0$
  - Um ein LGS nach dem Gauß-Verfahren lösen zu können, müssen wir nun eine Stufe aus Nullen haben – die Stufenform - die so aussieht:
    $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & E_1 \\ 0 & y_2 & z_2 & E_2 \\ 0 & 0 & z_3 & E_3 \end{vmatrix}$
  - Um die Matrix jetzt auf diese Form zu bekommen, gibt es verschiedene Regeln:
    - Man darf komplette Zeilen mit Konstanten multiplizieren ($\neq 0$)
    - Man darf Zeilen zu anderen Zeilen dazu addieren oder subtrahieren
    - Man darf Zeilen tauschen
  - Sobald die Matrix die Stufenform erreicht hat, können wir die unbekannten Variablen wiedereinsetzen und können jetzt die 3. Gleichung eindeutig lösen. Das Ergebnis setzen wir in die 2. Gleichung ein, lösen auf und setzen das Ergebnis in die 1. Gleichung. Somit haben wir das LGS gelöst.
- Beispiel
  - $\begin{matrix} 1x + 2y + 3z = 2 \\ 1x + 1y + 1z = 2 \rightarrow \\ 3x + 3y + 1z = 0 \end{matrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
  - Zeile I von Zeile II subtrahieren: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
  - Zeile I mit 3 multiplizieren: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
  - $III - I$: $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & -6 \end{vmatrix}$
  - $III - 3 * II$: $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & -6 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{vmatrix}$
  - Daraus folgt:
    - $I: 3x + 6y + 9z = 6$
    - $II: -1y - 2z = 0$
    - $III: -2z = -6 \rightarrow z = 3$ | In II einsetzen
    - $II: -1y - 2 * 3 = 0 \rightarrow y = -6$ | In I eiinsetzen
    - $I: 3x - 6 * 6 + 9 * 3 = 6 \rightarrow x = 5$
  - Die Lösung schreibt man folgendermaßen auf:
    - $\mathbb{L} = \{5; -6; 3\}$
- Häufig werden statt „$x, y, z, \ldots, n$" auch die Variablen „$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$" verwendet

- Taschenrechner: Apps → Simultaneous Eqn Solver → 3: neu → Anzahl an Gleichungen und Unbekannten eingeben → Gleichungen ohne Variablen (nur Vorfaktoren) und das Ergebnis eintragen in die einzelnen Felder → F5
- Hat man in einer Gleichung noch eine Konstante Zahl ohne Variable, muss man diese einfach auf die andere Seite bringen
- Eine Matrix hat entweder genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen

1.1.13 Steckbriefaufgaben

- Ziel: Aus Eigenschaften einer Funktion auf die Funktionsgleichung schließen
- Berechnung:
  - Eine ganzrationale Funktion z.B. 3. Grades sieht so aus: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
  - Nun bedeuten verschiedene Eigenschaften unterschiedliches für diese Funktion, die man dann einsetzen muss. Häufige Eigenschaften sind z.B.:

Im Text beschrieben:	*Mathematisch:*
Punktsymmetrisch (zum Ursprung)	Nur ungerade Exponenten
Achsensymmetrisch (zur $\boldsymbol{y}$-Achse)	Nur gerade Exponenten
Die Funktion $\boldsymbol{f}$ geht durch $\boldsymbol{P(1\|5)}$	$f(1) = 5$
" hat eine Nullstelle bei $\boldsymbol{x = -4}$	$f(-4) = 0$
" hat einen Tiefpunkt bei $\boldsymbol{x = 1}$	$f'(1) = 0; f''(1) =$ positiv → irrelevant
" hat einen Wendepunkt bei $\boldsymbol{x = -4}$	$f''(-4) = 0$
" hat eine Steigung von $\boldsymbol{-\frac{3}{4}}$ bei $\boldsymbol{x = 0}$	$f'(0) = -\frac{3}{4}$
" hat eine waagerechte Tangente bei $\boldsymbol{x = -1}$ " ist parallel zur $\boldsymbol{x}$-Achse bei $\boldsymbol{x = -1}$	$f'(-1) = 0$

  - Nachdem man alle Gleichungen gebildet hat, löst man die Vorfaktoren (z.B. mit dem Gauß-Verfahren) auf und schreibt am Schluss die Funktion nieder
- Beispiel: Eine ganzrationale Funktion vierten Grades hat bei $x = 1$ und $x = 5$ Nullstellen und für $x = 1$ einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente. Außerdem geht der Graph durch den Punkt $(3|5)$. Bestimmen Sie den Funktionsterm
  - Zunächst sollte man sich alle Informationen raussuchen und sie mathematisch abschreiben:
    - I. NST bei $x = 1$ → $f(1) = 0$
    - II. NST bei $x = 5$ → $f(5) = 0$
    - III. WP bei $x = 1$ → $f''(1) = 0$
    - IV. Waagerechte Tangente bei $x = 1$ → $f'(1) = 0$
    - V. Geht durch $(3|5)$ → $f(3) = 5$
  - Nun sollte man die allgemeine Funktion schreiben und die ersten zwei Ableitungen bilden:
    - $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
    - $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$
    - $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
  - Nun setzt man die Informationen in die Funktionen ein:
    - I. $0 = a + b + c + d + e$
    - II. $0 = 625a + 125b + 25c + 5d + e$
    - III. $0 = 12a + 6b + 2c$
    - IV. $0 = 4a + 3b + 2c + d$
    - V. $5 = 81a + 27b + 9c + 3d + e$

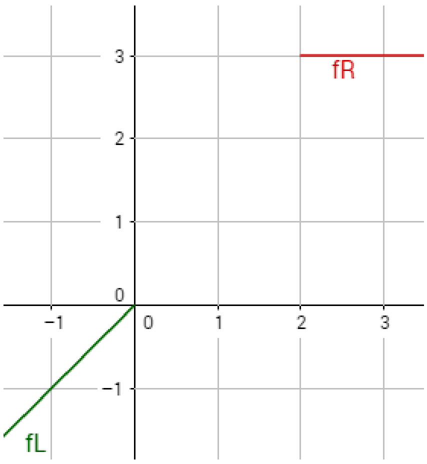
- Nun bildet man eine Matrix und löst die Gleichungen mittels des Gauß-Verfahren:

  $$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 625 & 125 & 25 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 81 & 27 & 9 & 3 & 1 & 5 \end{matrix}\right| \rightarrow \mathbb{L}\left\{-\frac{5}{16};\frac{5}{2};-\frac{45}{8};5;-\frac{25}{16}\right\}$$

- Im letzten Schritt setzt man die Vorfaktoren nun in die Funktion ein:
  $f(x) = -\frac{5}{16}x^4 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{45}{8}x^2 + 5x - \frac{25}{16}$

1.1.14 Trassierung

- Ziel: Eine Funktion für einen Bereich von x ermitteln, mit dem man zwei vorhandene Funktionen so verbinden kann, dass es knickfrei und krümmungsrückfrei ist
- Berechnung:
  - Die Funktion f soll am linken Ende die gleiche Steigung („knickfrei“) und Krümmung („krümmungsruckfrei“) wie die linke Funktion f_L und am rechten Ende die gleiche Steigung und Krümmung wie die rechte Funktion f_R haben
  - Außerdem soll die Funktion am linken und rechten Ende anschließen („sprungfrei“), also müssen auch die Punkte übereinstimmen
  - Man stellt die Bedingungen auf und löst diese schließlich mittels des Gauß-Verfahren auf; dazu muss man ggf. die Steigung und Krümmung der linken und rechten Funktion $f_{L,R}$ berechnen; dazu muss man ggf. die Funktion erst mittels einer Steckbriefaufgabe lösen
- Beispiel: Ermittle die Funktion f für den Bereich $[0 \leq x \leq 2]$



  - Funktionen f_L und f_R ermitteln (meist sind die simpel und lassen sich so erkennen)
    - $f_L = x$
    - $f_R = 3$
  - Bedingungen aufstellen:
    I. $f(0) = f_L(0) = 0$
    II. $f(2) = f_R(2) = 3$
    III. $f'(0) = f_L'(0) = 1$
    IV. $f'(2) = f_R'(2) = 0$
    V. $f''(0) = f_L''(0) = 0$
    VI. $f''(2) = f_R''(2) = 0$
  - 6 Bedingungen → Funktion 5. Grades
    - $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$
    - $f'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e$
    - $f''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d$
  - Bedingungen in die Funktion einsetzen:
    I. $0 = f$
    II. $3 = 32a + 16b + 8c + 4d + 2e + f$
    III. $1 = e$
    IV. $0 = 80a + 32b + 12c + 4d + e$
    V. $0 = 2d$
    VI. $0 = 160a + 48b + 12c + 2d$

- Nun bildet man eine Matrix und löst die Gleichungen mittels des Gauß-Verfahren:

$$\left|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 80 & 32 & 12 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 160 & 48 & 12 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \rightarrow \mathbb{L}\left\{\frac{3}{8}; -\frac{29}{16}; \frac{9}{4}; 0; 1; 0\right\}$$

- Wichtig ist, dass man hier den Bereich noch angibt, da die Funktion nur für diesen gelten soll: $f(x) = \frac{3}{8}x^5 - \frac{29}{16}x^4 + \frac{9}{4}x^3 + x;\ 0 \leq x \leq 2$

1.1.15 Spline-Interpolation

- Ziel: Bei einigen Aufgaben, soll man nicht nur eine Funktion zwischen zwei anderen Funktionen ermitteln, sondern in diesem Zwischenbereich mehrere Funktionen aufstellen die verschiedene Punkte durchqueren
- Berechnung:
  - Der Anfang ist ähnlich wie bei der Trassierung, allerdings müssen wir am Ende des Bereiches der Funktion f_1 nicht wie dort mit dem Punkt, der Steigung und der Krümmung von f_R gleichsetzen, sondern mit der uns unbekannten Steigung und Krümmung von f_2.
  - Nur der erste und letzte Funktionsbereich müssen mit dem Punkt und der Krümmung von $f_{L,R}$ gleichgesetzt werden (falls $f_{L,R}$ überhaupt vorhanden sind, ansonsten $f'' = 0$).
- Beispiel: Eine Vasenform soll durch folgende Punkte gehen:

	A	B	C	D	E
x-Koord.	0	3	5	7	9,5
y-Koord.	1,6	2,9	2,75	1,4	2,4

Bestimmen Sie die Spline-Interpolation für die Vase

  - Bedingungen bestimmen und in die quadratischen (ganzrationale Funktionen 2. Grades) Funktionsbereiche einsetzen:

I. $f_1(0) = 1{,}6 \rightarrow c_1 = 0$
II. $f_1(3) = 2{,}9 \rightarrow\ 9a_1 + 3b_1 + c_1 = 2{,}9$
III. $f_1''(0) = 0 \rightarrow 2a_1 = 0$
IV. $f_1'(3) = f_2'(3) \rightarrow 6a_1 + b_1 = 6a_2 + b_2 \rightarrow 0 = 6a_1 + a_2 - 6b_1 - b_2$
V. $f_1''(3) = f_2''(3) \rightarrow\ 2a_1 = 2a_2 \rightarrow 0 = 2a_1 - 2a_2$
VI. $f_2(3) = 2{,}9 \rightarrow 9a_2 + 3b_2 + c_1 = 2{,}9$
VII. $f_2(5) = 2{,}75 \rightarrow 25a_2 + 5b_2 + c_2 = 2{,}75$
VIII. $f_2'(5) = f_3'(5) \rightarrow 10a_2 + b_2 = 10a_3 + b_3 \rightarrow 0 = 10a_2 + b_2 - 10a_3 - b_3$
IX. $f_2''(5) = f_3''(5) \rightarrow 2a_2 = 2a_3 \rightarrow 0 = 2a_2 - 2a_3$
X. $f_3(5) = 2{,}75 \rightarrow 25a_3 + 5b_3 + c_3 = 2{,}75$
XI. $f_3(7) = 1{,}4 \rightarrow 49a_3 + 7b_3 + c_3 = 1{,}4$
XII. $f_3'(7) = f_4'(7) \rightarrow 14a_3 + b_3 = 14a_4 + b_4 \rightarrow 0 = 14a_3 + b_3 - 14a_4 - b_4$
XIII. $f_3''(7) = f_4(7) \rightarrow\ 2a_3 = 2a_4 \rightarrow 0 = 2a_3 - 2a_4$
XIV. $f_4(7) = 1{,}4 \rightarrow\ 49a_4 + 7b_4 + c_4 = 1{,}4$
XV. $f_4(9{,}5) = 2{,}4 \rightarrow 90{,}25a_4 + 9{,}5b_4 + c_4 = 2{,}4$
XVI. $f_4''(9{,}5) = 0 \rightarrow\ 2a_4 = 0$

- Nun bildet man eine Matrix und löst die Gleichungen mittels des Gauß-Verfahren:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}6 \\ 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}9 \\ 6 & 1 & 0 & -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}9 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}75 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & -10 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2{,}75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 1 & 0 & -14 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 7 & 1 & 1{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 90{,}25 & 9{,}5 & 1 & 2{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$\mathbb{L}\{0{,}38; -0{,}73; 1{,}6; -0{,}8375; 6{,}625; -9{,}4375; 0{,}5375; -7{,}125; 24{,}9375; 0; 0{,}4; -1{,}4\}$

- Nun muss man nur noch die Funktion aufstellen, mit den verschiedenen Bereichen:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} f_1 = 0{,}38x^2 - 0{,}73x + 1{,}6;\ 0 \leq x \leq 3 \\ f_2 = -0{,}8375x^2 + 6{,}625x - 9{,}4375; 3 \leq x \leq 5 \\ f_3 = 0{,}5375x^2 - 0{,}7125x + 24{,}9375; 5 \leq x \leq 7 \\ f_4 = 0{,}4x - 1{,}4; 7 \leq x \leq 9{,}5 \end{Bmatrix}$$

1.1.16 Funktionen mit Parametern

- Synonyme: Funktionsscharen
- Ziel: Bei Funktionsscharen haben die Funktionen neben dem x noch weitere variierbare Parameter
- Berechnung und Definition:
  - Eine solche Funktion f mit einem zusätzlichen Parameter wird als Index hinter dem f gesetzt
  - Nun kann man, wenn man z.B. den Parameter t der Funktion $f_t(x) = 5t * \sqrt{20 - x}$ variiert unterschiedliche Kurven mit teilweise gleichen Eigenschaften (z.B. $0 = f(20)$) feststellen

1.2 e-Funktionen

1.2.1 Exponentielles Wachstum

- Synonym: Exponentialfunktionen
- Ziel: Eine exponentielle Funktion ist eine Funktion mit mind. einem x als Exponent
- Berechnung: Eine exponentielle Funktion sieht allgemein so aus: $f(x) = a * b^x$, dabei ist a der Anfangswert, b der Wachstumsfaktor, x meistens die Zeit und $f(x)$ der Endwert
- Beispiel: Eine Bakterienkultur besteht zu Anfang aus 1000 Bakterien. Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich jede Stunde. Stellen Sie die Anzahl der Bakterien nach t Stunden als Funktion der Zeit dar
  - $a = 1000$
  - $b = 2$ („Verdoppeln“)
  - $f(t) = 1000 * 2^t$

1.2.2 e-Funktion

- Ziel: Man kann Exponentialfunktionen (nach 1.2.1) auch so umschreiben, dass die Basis zum Exponenten x der euler‘schen Zahl e (ca. 2,718) entspricht, doch wieso macht man das? Versucht man mittels der h-Methode eine Steigunsfunktion einer Exponentialfunktion zu bilden, erhält man stets einen Vorfaktor. Ist die Basis allerdings e, ist der Vorfaktor der Ableitung 1, also gilt: $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$

- Umschreibung aller exponentieller Funktionen auf die Basis e:
  - $f(x) = a * b^x$
  - $f(x) = a * e^{k*x}, k = \ln(b)$
- Eigenschaften von e-Funktionen nach: $f(x) = e^{ax+b}$
  - Keine Nullstellen ($e^x \neq 0, \ \forall\, x \in \ \mathbb{R}$)
  - Keine Extrempunkte
  - Keine Wendepunkte
  - Keine Symmetrie

1.2.3 Beschränktes Wachstum

- Synonyme: Schrankenfunktion, Grenzfunktion
- Ziel: Manche Funktionen „wachsen" nur bis zu einer bestimmten Grenze
- Aufbau: Eine beschränkte Funktion sieht so aus: $f(x) = S - c * e^{-k*x}$
  - S = Schranke / Grenze
  - $c = S - f(0)$
  - $k = \ln(b)$

1.2.4 Logistisches Wachstum

- Ziel: Manche Funktionen wachsen erst exponentiell, dann begrenzt. Diese Mischung nennt man logistisches Wachstum
- Allgemein: Erst wächst die Funktion zunehmend schneller an, dann nur noch sehr langsam
- Aufbau: Eine logistische Funktion sieht so aus: $f(x) = \frac{S}{1+a*e^{-k*x}}$
  - S = Schranke / Grenze
  - $f(0) = \frac{S}{1+a}$
  - $k = \ln(b)$

1.2.5 Ableitungsregeln II

- Synonyme: Steigungsfunktion; Ableitungsfunktion; (momentane Änderungsrate)
- Ziel: Steigung einer Funktion mittels einer Ableitungsfunktion an jeder Stelle ermitteln zu können, da es mit der Tangentensteigung nach der h-Methode sehr aufwendig ist. Da mit e-Funktionen sich viele neue Möglichkeiten bieten:
- Berechnung:
  - Ableitungsregeln
    - Produktregel: Für eine Funktion f mit $f(x) = u(x) * v(x)$ gilt:
      $f'(x) = u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)$
    - Quotientenregel: Für eine Funktion f mit $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ gilt:
      $f'(x) = \frac{u'(x)*v(x)-u(x)*v\prime(x)}{v(x)^2}$
    - Kettenregel: Für eine Funktion f mit $f(x) = u\big(v(x)\big)$ gilt:
      $f'(x) = u'\big(v(x)\big) * v'(x)$
- Beispiele: Bilden Sie die Ableitung der Funktion f
  - $f(x) = 3 * e^{4*x^2+3} \rightarrow u(x) = e^x, v(x) = 4x^2 + 3 \rightarrow u'(x) = e^x, v'(x) = 8x \rightarrow f'(x) = 3 * e^{4*x^2+3} * 8x$
  - $f(x) = 3x^2 * 4x \rightarrow u(x) = 3x^2, v(x) = 4x \rightarrow u'(x) = 6x, v'(x) = 4 \rightarrow f'(x) = 6x * 4x + 3x^2 * 4 = 24x^2 + 12x^2 = 36x^2$

1.3 Trigonometrische Funktionen

- Synonyme: Sinusfunktion, Cosinusfunktion
- Ziel: Fürs Abitur ist nur der Aufbau der Funktion und deren Ableitung wichtig
- Ableitungen: $f(x) = \sin(x) \to f'(x) = \cos(x) \to f''(x) = -\sin(x) \to f''(x) = -\cos(x)$
- Allgemeiner Aufbau: $f(x) = a * \sin\big(b * (x - c)\big) + d$
    - a = Amplitude, also die Höhe der Sinusfunktion
    - b = Änderung der Periodenlänge (Bei 1 beträgt die Periodenlänge: 360° bzw. 2π)
    - c = Verschiebung nach rechts / links
    - d = Verschiebung nach oben / unten

1.4 Integralrechnung

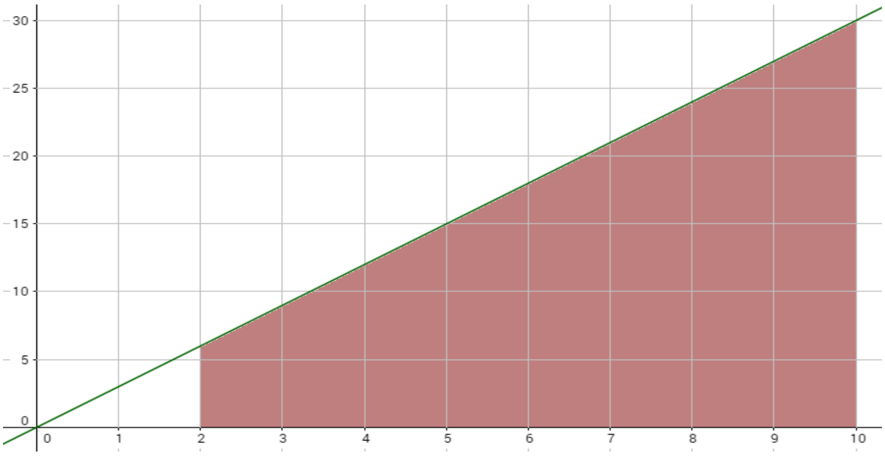
- In der Integralrechnung geht es hauptsächlich darum, die Fläche unterhalb einer Funktion zu ermitteln

1.4.1 Stammfunktion

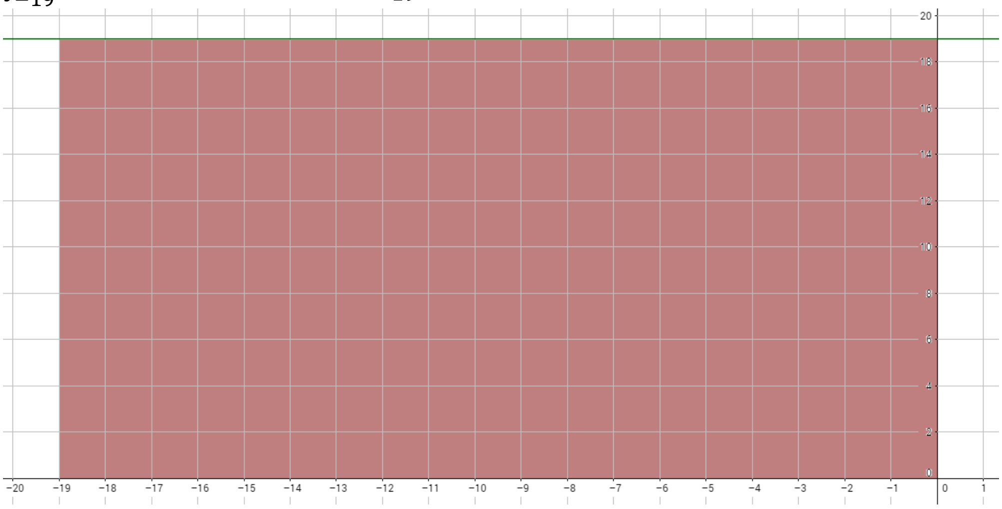
- Synonyme: Aufleitung (fachsprachlich falsch, also das niemals schreiben); Integration
- Ziel: Wird benötigt zur Berechnung von der Fläche unterhalb einer Funktion und ist die Rückrechnung (teilweise) zur Ableitung
- Definition und Berechnung:
    - Die Stammfunktion einer Funktion f wird mit einem großen F gekennzeichnet. Jede weitere Stammfunktion einer Stammfunktion wird mit einem Strich gekennzeichnet
    - Integrationsregeln
        - Potenzregel: $f(x) = x^n \to F(x) = (n+1)^{-1} * x^{n+1}$
        - Faktorregel: $f(x) = a * x^n \to F(x) = a * (n+1)^{-1} * x^{n+1}$
        - Summenregel: $f(x) = ax^n + bx^m \to F(x) = a * (n+1)^{-1} * x^{n+1} + b * (m+1)^{-1} * x^{m+1}$
- Beispiele:
    - $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \to F(x) = \frac{1}{3/2} * x^{3/2}$
    - $f(x) = x^{10} \to F(x) = \frac{1}{11} * x^{11}$

1.4.2 Integralberechnung

- Synonyme: Integrationsrechung; Fläche unterhalb einer Funktion
- Ziel: Berechnung der Fläche unterhalb einer Funktion
- Berechnung:
  - Es wird die Stammfunktion F der Funktion f gebildet, um den Flächeninhalt darunter auszurechnen
  - Nun muss man bei der Stammfunktion für x die linke Grenze a und die rechte Grenze b einzeln eingesetzt werden. Um die Fläche der Funktion f zu berechnen, bildet man das Integral mit a für x und zieht b (auch in x eingesetzt) ab.
  - Man nimmt immer den Betrag der Lösung (Achtung: Wenn sich ein Bereich im negativen befindet, muss man ggf. beide Teile separat voneinander ab der Nullstelle berechnen)
  - $\int_a^b f(x)\,dx = [F_b(x) - F_a(x)]_a^b$
  - $\int_a^b c * f(x)\,dx = c * \int_a^b f(x)\,dx$
  - $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- Beispiel:
  - $\int_2^{10} 3x\,dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^2\right]_2^{10} = 144$



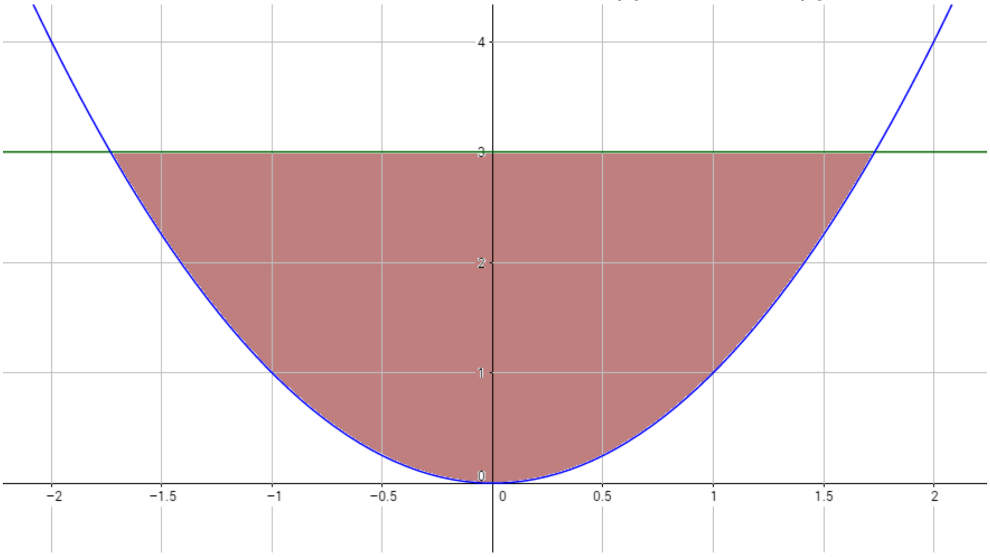
  - $\int_{-19}^{0} 19\,dx = [19 * x - 19 * x]_{-19}^{0} = -361 \rightarrow 361$



- Taschenrechner: Home → 2nd + 5 → B: Analysis → 2: $\int($ integriere → $\int(f(x), x, a, b)$

1.4.3 Integral zwischen zwei Funktionen

- Synonyme: Integral zwischen zwei Graphen; Zwischenintegral
- Ziel: Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen ermitteln
- Herleitung:
    - Wenn man den Flächeninhalt berechnen soll, den zwei Flächen umschließen, muss man die Schnittstellen berechnen und dann die Stammfunktion $F_O(x)$ von der unteren Stammfunktion $F_U(x)$ von den Grenzen an abziehen
    - $\int_a^b f_O(x)\,dx - \int_a^b f_U(x)\,dx = [\,F_O(b) - F_O(a) - F_U(b) - F_U(a)]$
    - $\int_a^b f_O(x)\,dx - \int_a^b f_U(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$
- Beispiel: Berechnen Sie die Fläche, die die Funktion $f_O(x) = 3$ und $f_U(x) = x^2$ einschließen:

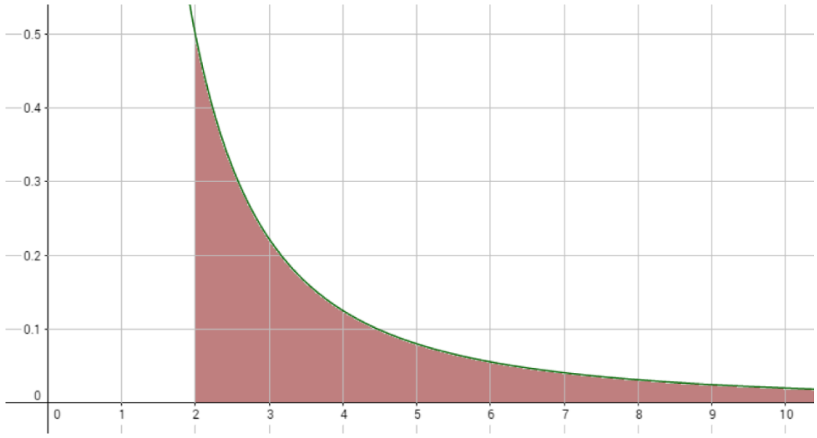


- Berechnung der Schnittpunkte: $f_O = f_U \rightarrow 3 = x^2 \rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$
- Einsetzen in die Formel: $A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 3\,dx - \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x^2\,dx = 4 * \sqrt{3}$

1.4.4 Uneigentliche Integrale

- Synonyme: Unbegrenzte Flächen; Uneigentliche Integration
- Ziel: Bei der Untersuchung von unbegrenzten Flächen auf einen Flächeninhalt untersucht man Integrale mit einer variablen Grenze und einer festen Grenze auf einen Grenzwert
- Berechnung:
    - Ist eine Funktion f eine Asymptote, so setzt man die obere oder untere (je nachdem was berechnet werden soll) Grenze z in das Integral ein und benutzt den Limes
    - Wenn man die Stammfunktionen gebildet hat, lässt man diese gegen den Grenzwert (meistens 0 oder $\pm\infty$) laufen
    - $\lim\limits_{z \to \infty} \int_a^z f(x) = \lim\limits_{z \to \infty} [F(z) - F(a)]$

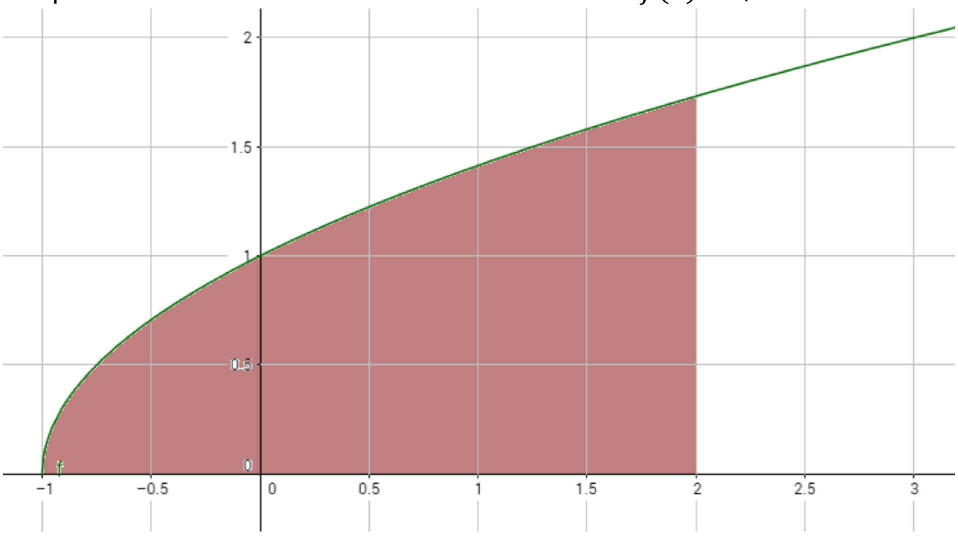
- Beispiel: Berechnen Sie die Fläche von $x_a = 2$ bis $x_b = \infty$ der Funktion $f(x) = \frac{2}{x^2}$



  - $\lim\limits_{z \to \infty} \int_2^z \frac{2}{x^2} = \lim\limits_{z \to \infty} \left[-\frac{2}{x} - (-\frac{2}{x})\right]_2^z = 1$

1.4.5 Rotationsvolumen

- Synonym: Integral und Rauminhalt; Rotationskörper; Drehkörper; Rotationsintegral; Drehintegral
- Ziel: Man stellt sich vor, dass eine Funktion sich um die x-Achse dreht und so ein Volumen entsteht, dessen Volumen man berechnen kann
- Herleitung:
  - Da ein Kreisinhalt sich mittels $A = \pi r^2$ berechnen lässt, setzt man für r den Flächeninhalt an der jeweiligen Stelle ein. So berechnet sich das Volumen aus allen unendlich dünnen Kreisinhalten
- Berechnung:
  - $V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$
  - Wichtig bei Rotationskörpern eines partiellen Integrals:
    $V \neq \pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx$, sondern $V = \pi \int_a^b (\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2) dx$
- Beispiel: Bestimmen Sie das Volumen V der Funktion $f(x) = \sqrt{x+1}$ von $x = -1$ bis $x = 2$



  - $V = \pi \int_{-1}^{2} (\sqrt{x+1})^2 dx = 12\pi \approx 37{,}70$

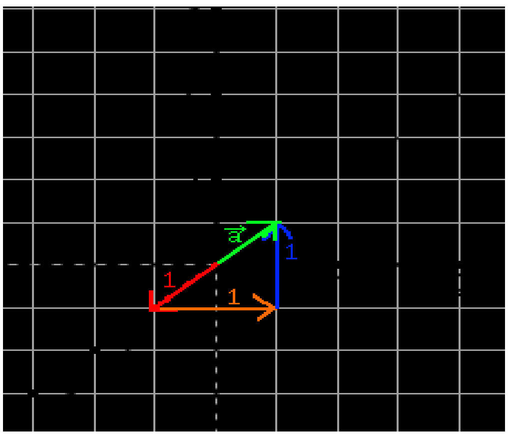
2 Analytische Geometrie

- Synonyme: Vektorrechnung; Vektorenrechnung
- In der analytischen Geometrie werden Vektoren in (meist) dreidimensionalen Koordinatensysteme analysiert

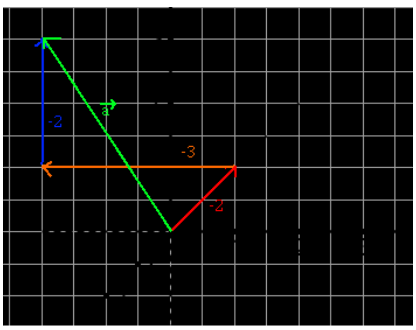
2.1 Vektoren

2.1.1 Allgemein

- Synonyme: Richtungspfeile; Richtungskoordinaten; Pfeile; Wege im Raum
- Ziel: Ein Vektor gibt den Weg innerhalb eines Koordinatensystems an. Man kann ihn sich als Pfeil mit einer bestimmen Länge und Richtung vorstellen
- Definition:
  - Ein Vektor in einem zweidimensionalen System besteht aus zwei Zahlen übereinander in einer Klammer. Die obere Zahl gibt die Anzahl Einheiten an, auf denen man sich in der x_1-Richtung bewegt an, die untere Zahl die auf der x_2-Richtung
  - Vektoren in einem n-dimensionalen Koordinatensystem haben demnach n Zeilen, die dann immer für die jeweilige Richtung zählt; demnach ist die letzte Zeile für die n-te Richtung zuständig
  - Am häufigsten sind Vektoren im dreidimensionalen Raum vertreten
  - Man setzt Vektoren zur Berechnung mit kleinen Buchstaben die einen nach rechts zeigenden Pfeil oben drüber haben gleich
- Beispiele:



  - $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



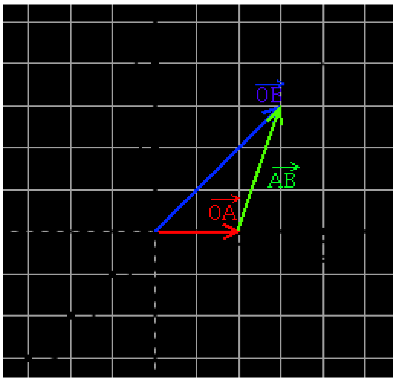
  - $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
- Taschenrechner: $[x_1; x_2; x_3]$

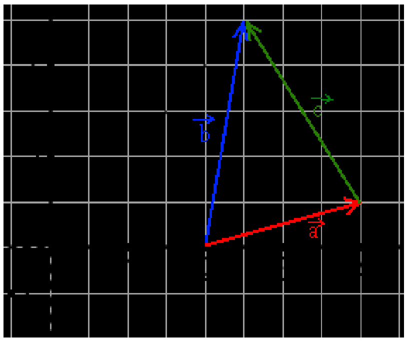
2.1.2 Addition und Subtraktion

- Synonyme: Vektoraddition; Vektorsubtraktion; Vektorbildung
- Ziel: Man kann Vektoren auch mit anderen Vektoren addieren und subtrahieren
- Berechnung:
  - Ein Ortsvektor ist ein Punkt im Koordinatensystem der den Abstand des spezifischen Vektors vom Koordinatenursprung hat; er beschreibt den „Ort“ des Vektors
  - Ein Ortsvektor hat folgende Bezeichnung: $\overrightarrow{0A}$, wobei 0 für den Ursprung und A für den Punkt im Koordinatensystem steht
  - Einen Vektor allgemein berechnet man, indem man den ersten Vektor vom zweiten Vektor abzieht, und zwar Zeile für Zeile
  - Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ beschreibt also den Vektor vom Ortsvektor $\overrightarrow{0A}$ nach $\overrightarrow{0B}$:

    $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A}$

    $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$

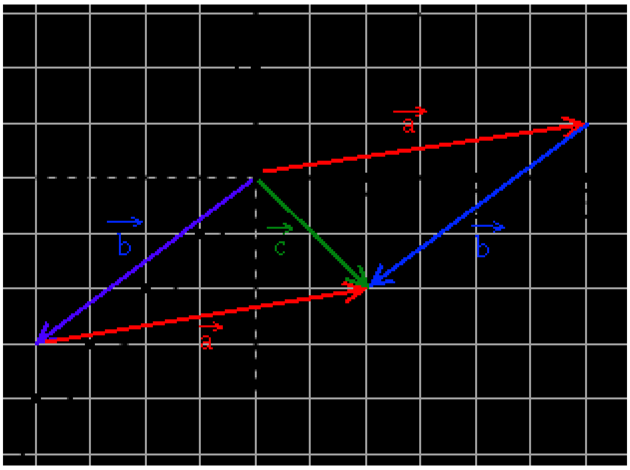




  - Auch kann man einen neuen Vektor bilden, indem man zwei addiert (auch Zeile für Zeile). Der Summand, den man dazu addiert, nennt man Richtungsvektor, den anderen Ortsvektor (die Reihenfolge ist egal):

    $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

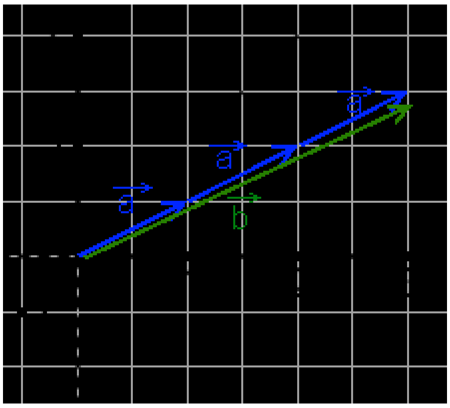
    $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$

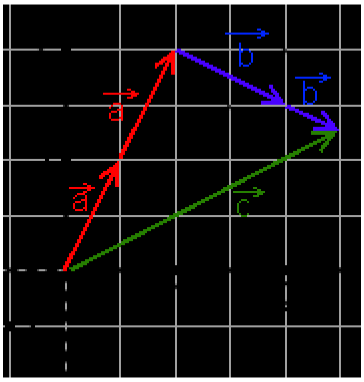


- Beispiele:
  - $\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix} = \overrightarrow{0A}; \begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} = \overrightarrow{0B} \rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-2-5\\3-2\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\1\\-1\end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \overrightarrow{0A}; \begin{pmatrix}-3\\-4\\-5\end{pmatrix} = \overrightarrow{0B} \rightarrow \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}0-(-3)\\1-(-4)\\2-(-5)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \overrightarrow{0A}; \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \overrightarrow{0B} \rightarrow \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0A} = \overrightarrow{0C} = \begin{pmatrix}2+1\\2+1\\2+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$

2.1.3 Skalarmultiplikation

- Synonyme: Multiplikation von Vektoren
- Ziel: Vektoren kann man auch mit reellen Zahlen multiplizieren
- Berechnung:
    - Schreibt man vor einen Richtungsvektor eine reelle Zahl, wird jede Zeile einzeln mit dieser Zahl vor dem Vektor multipliziert
    - Ist die Zahl vor dem Vektor n , wird der Vektor n mal hintereinander addiert
    - Ist n z.B. 0,5, wird nur der halbe Vektor genommen, heißt er reicht nur halb so lang
    - Allgemein: $a * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a * x_1 \\ a * x_2 \\ a * x_3 \end{pmatrix}$
    - $3\vec{a} = \vec{b}$
    - $\vec{c} = 2\vec{a} + 1{,}5\vec{b}$





- Beispiele:
    - $3 * \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix}$
    - $-2 * \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2a \end{pmatrix}$

2.1.4 Lineare Un-/Abhängikeit

- Ziel: Untersuchung, ob ein Richtungsvektor ein Vielfaches eines anderen Richtungsvektors ist
- Berechnung:
    - Zwei Richtungsvektoren sind unabhängig, wenn folgendes gilt: $t * \vec{a} = \vec{b}, t \neq 0$
    - Man stellt drei Gleichungen auf und löst diese nach t auf. t muss überall gleich sein
    - Drei Richtungsvektoren sind abhängig, wenn es eine Lösung für: $a * \vec{a} + b * \vec{b} + c * \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a, b, c \neq 0$ gibt
- Beispiele:
    - $t * \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} I: t_I = 1{,}5 \\ II: t_{II} = -5 \\ III: t_{III} = 7/4 \end{matrix}$ $\rightarrow t$ ist nicht überall gleich, daher → lin. unabh.
    - $t * \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ -20 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} I: t_I = -5/3 \\ II: t_{II} = -5/3 \\ III: t_{III} = -5/3 \end{matrix}$ $\rightarrow t$ ist überall gleich, daher → lin. abh.
    - $t * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} I: t_I = 3 \\ II: t_{II} = 3 \\ III: t_{III} = 4 \end{matrix}$ $\rightarrow t$ ist nicht überall gleich, daher → lin. unabh.

2.1.5 Längenberechnung

- Synonyme: Betrag eines Vektors; Betrachrechnung; Länge eines Vektors; Länge eines Pfeiles
- Ziel: Die Pfeillänge eines Vektors berechnen
- Definition und Berechnung:
    - Die Pfeillänge eines Vektors $\vec{a}$ wird als Betrag von $\vec{a}$ bezeichnet
    - Man schreibt für den Betrag eines Vektors $\vec{a}$ folgendes: $|\vec{a}|$
    - Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$
    - Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
    - Der Vektor $\overrightarrow{a_0}$ heißt Einheitsvektor zum Vektor $\vec{a}$, wenn $|\vec{a}_0| = 1$ gilt und $\vec{a}_0$ und $\vec{a}$ dieselbe Richtung haben. Es gilt $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} * \vec{a}$
    - Der Abstand zweier Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$ und $Q(q_1|q_2|q_3)$ ist gleich dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ und es gilt: $\overrightarrow{PQ} = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$
- Beispiel: Bestimmen Sie den Abstand der Punkte $P(4{,}5|{-3{,}2}|5{,}7)$ und $Q(9|-2|11)$:
    - $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(9 - 4{,}5)^2 + \left(-2 - (-3{,}2)\right)^2 + (11 - 5{,}7)^2} = \sqrt{49{,}78} \approx 7{,}06$

2.1.6 Ebenen im Koordinatensystem

- Ziel: Feststellung, ob ein Punkt in einer bestimmen Ebene eines dreidimensionalen Koordinatensystems liegt
- Berechnung:
    - Punkte auf der x_1-Achse haben die Koordinaten P$(p_1|0|0)$
    - Punkte auf der x_2-Achse haben die Koordinaten P$(0|p_2|0)$
    - Punkte auf der x_3-Achse haben die Koordinaten P$(0|0|p_3)$
    - Punkte in der x_2x_3-Ebene haben die Koordinaten P$(0|p_2|p_3)$
    - Punkte in der x_1x_3-Ebene haben die Koordinaten P$(p_1|0|p_3)$
    - Punkte in der x_1x_2-Ebene haben die Koordinaten P$(p_1|p_2|0)$

2.2 Geraden

2.2.1 Geradengleichung

- Synonyme: Parametergleichung einer Geraden; Geraden im Raum
- Ziel: Mithilfe von Vektoren kann man Geraden im Raum beschreiben
- Berechnung:
    - Jede Gerade lässt sich durch eine Gleichung der Form $g: \vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u}$ beschreiben
    - Der Vektor $\vec{p}$ heißt Stützvektor. Er ist der Ortsvektor zu einem Punkt P, der auf der Geraden g liegt
    - Der Vektor $\vec{u}$ heißt Richtungsvektor
- Beispiel:
    - Die Punkte A$(1|-2|5)$ und B$(4|6|-2)$ liegen auf der Geraden g. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g
        - Da A auf g liegt, ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ein möglicher Stützvektor von g
        - Da A und B auf g liegen, ist der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 6 - (-2) \\ -2 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$ ein möglicher Richtungsvektor von g

- Man erhält $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$
- Auch $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ als Stützvektor und $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor können für die Geradengleichung g gewählt werden

2.2.2 Lagebeziehungen: Punkt – Gerade

- Ziel: Überprüfung, wie ein Punkt und eine Gerade zueinanderstehen können
- Berechnung:
  - Punkt P liegt auf der Geraden g
    - Setzt man einen Punkt mit einer Geradengleichung gleich, macht man eine Punktprobe und überprüft, ob dieser Punkt auf der Gerade liegt
    - Der Parameter vor dem Richtungsvektor der Geradengleichung muss bei allen drei Gleichungen die gleiche Lösung ergeben
  - Punkt P liegt nicht auf der Geraden g
    - Es gibt keine Lösung, wenn man einen Punkt P mit der Gerade g gleichsetzt
- Beispiel: Überprüfen Sie, ob der Punkt A$(-7|-5|8)$ auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ liegt:
  - $\overrightarrow{0A} = g \rightarrow \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} I: t_I = -2 \\ II: t_{II} = -2 \\ III: t_{III} = -2 \end{matrix}$ $\rightarrow t$ ist überall gleich, daher Punktprobe erfüllt → A liegt somit auf g

2.2.3 Lagebeziehungen: Gerade – Gerade

- Ziel: Überprüfung, wie zwei Geraden zueinanderstehen können
- Berechnung: Zwei Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s * \vec{v}$:
  - sind identisch, wenn die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind und der Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{p}$ auf der Geraden h liegt
  - sind parallel, wenn die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind und der Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{p}$ nicht auf der Geraden h liegt
  - schneiden sich, wenn die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig sind und die Gleichung $\vec{p} + r * \vec{u} = \vec{q} + s * \vec{v}$ eine einzige Lösung hat
  - sind windschief, wenn die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig sind und die Gleichung $\vec{p} + r * \vec{u} = \vec{q} + s * \vec{v}$ keine Lösung hat
- Beispiel: Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \neq t * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ → linear unabhängig → g und h schneiden sich, oder sind windschief
  - $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow r = -1, t = 1 \rightarrow$ g und h schneiden sich
  - Setzt man $t = 1$ in h ein, erhält man den Ortsvektor $\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt $P(5|-5|1)$

2.2.4 Skalarprodukt

- Synonym: Vektor * Vektor
- Ziel: Orthogonalität zweier Richtungsvektoren überprüfen
- Berechnung:
    - Das Skalarprodukt zu den Richtungsvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ist $\vec{a} * \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
    - Zwei Richtungsvektoren sind zueinander orthogonal ($\vec{a} \perp \vec{b}$) wenn das Skalarprodukt 0 ergibt
    - Zwei Geraden stehen orthogonal aufeinander, wenn sie sich schneiden und das Skalarprodukt 0 ergibt
- Beispiel:
    - $\vec{s} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = (-4 * 2) + (1 * 9) + \big(1 * (-1)\big) = 0 \rightarrow$ Die Richtungsvektoren $\vec{s}$ und $\vec{t}$ stehen orthogonal zueinander
- Taschenrechner: Home → 2nd + 5 → 4: Matrix → L: VektorOp → 3: SkalarP(

2.2.5 Schnittwinkel: Gerade – Gerade

- Synonyme: Winkel zweier Geraden; Winkel zwischen Vektoren
- Ziel: Den Winkel berechnen, der sich zwischen zwei sich schneidenden Geraden befindet
- Berechnung:
    - Der Winkel zweier Richtungsvektoren $\vec{s}$ und $\vec{t}$ ist $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{s} * \vec{t}|}{|\vec{s}| * |\vec{t}|}, 0° \leq \alpha \leq 90°$
    - Um den Winkel α zu ermitteln, nimmt man den $\cos^{-1}(\alpha) = \alpha$, dass soll man aber niemals so schreiben, denn das ist mathematisch an sich falsch
    - Die beiden Richtungsvektoren müssen beide zueinander zeigen oder beide voneinander weg
- Beispiel:
    - $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2 * -1) + (2 * -1) + (1 + 1) = -3$
    - $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3; |\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$
    - $\cos(\alpha) = \frac{|-3|}{3 * \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}^{-1} \rightarrow \alpha \approx 54{,}74°$

2.2.6 Geradenscharen

- Ziel: Auch Geradengleichungen können Unbekannte in ihren Vektoren haben, die man dann ermitteln muss, damit z.B. zwei Geraden sich schneiden
- Definition:
    - Ist im Stützvektor eine Unbekannte, verschiebt sich nur die Gerade mittels der Position im Raum, die Richtung bleibt gleich

      z.B. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$
    - Ist eine Unbekannte im Richtungsvektor, so verschiebt sich die Richtung der Gerade

      z.B. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ x \end{pmatrix}$

2.2.7 Abstand: Punkt – Gerade

- Ziel: Es ist (eigentlich immer) der kleinste Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden gesucht
- Berechnung:
  - Liegt der Punkt P in der Gerade g ist der kleinste Abstand 0
  - Zur Berechnung des kleinsten Abstandes muss man zuerst die Geradengleichung als allgemeinen Vektor angeben:
    $$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + tb_1 \\ a_2 + tb_2 \\ a_3 + tb_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0P_t}$$
  - Nun bildet man einen allgemeinen Vektor von der Geradengleichung zum Punkt
    $$\overrightarrow{P_tR} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 + tb_1 \\ a_2 + tb_2 \\ a_3 + tb_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 - (a_1 + tb_1) \\ r_2 - (a_2 + tb_2) \\ r_3 - (a_3 + tb_3) \end{pmatrix}$$
  - 1. Möglichkeit (Extremwertbedingung)
    - Die Funktion f mit der Gleichung $f(t) = \left|\overrightarrow{P_tR}\right|$ gibt für jedes t den Betrag des Vektors $\overrightarrow{P_tR}$ an:
      $$f(t) = \sqrt{(r_1 - (a_1 + tb_1))^2 + (r_2 - (a_2 + tb_2))^2 + (r_3 - (a_3 + tb_3))^2}$$
    - Mittels des GTR muss man nun das Minimum dieser Funktion ermitteln
  - 2. Möglichkeit (Orthogonalitätsbedingung)
    - Man bildet man das Skalarprodukt vom allgemeinen Vektor $\overrightarrow{P_tR}$ mit dem Richtungsvektor $\vec{b}$ der Geraden g und löst nach t auf:
      $$\overrightarrow{P_tR} * \vec{b} = \begin{pmatrix} r_1 - (a_1 + tb_1) \\ r_2 - (a_2 + tb_2) \\ r_3 - (a_3 + tb_3) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0$$
    - t setzt man dann in $\overrightarrow{P_tR}$ ein und ermitteln den Betrag davon
- Beispiel: Berechnen Sie den Abstand von der Geraden g zum Punkt P auf zwei Arten
  - $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; R(1|2|0{,}08)$
  - $\overrightarrow{P_tR} = \begin{pmatrix} -2t \\ 1 - 3t \\ 0{,}08 - t \end{pmatrix}$
  - 1. Möglichkeit (Extremwertbedingung)
    - $f(t) = \sqrt{(-2t)^2 + (1 - 3t)^2 + (0{,}08 - t)^2}$
    - Minimum bei $t = 0{,}22 \rightarrow f(0{,}22) \approx 0{,}573$
  - 2. Möglichkeit: $\begin{pmatrix} -2t \\ 1 - 3t \\ 0{,}08 - t \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow t = 0{,}22 \rightarrow \left|\overrightarrow{P_{0,22}R}\right| \approx 0{,}573$

2.2.8 Abstand: Gerade – Gerade

- Ziel: Den kleinsten Abstand zwischen zwei Geraden bestimmen
- Berechnung:
  - Wenn beide Geraden identisch zueinander sind, ist der kleinste Abstand an jeder Stelle beider Geraden 0
  - Wenn sich beide Geraden schneiden, ist der kleinste Abstand an der Schnittstelle 0
  - Wenn beide Geraden parallel zueinander sind, nimmt man den Stützvektor einer Geraden als Punkt und ermittelt den kleinsten Abstand wie in 2.2.7

- Abstand windschiefer Geraden:
  - Man macht aus den Geradengleichungen $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ wie in 2.2.7 allgemeine Vektoren
  - Nun bildet man den allgemeinen Vektor zwischen beiden Geraden: $\overrightarrow{P_tR_s} = \begin{pmatrix} (c_1 + sd_1) - (a_1 + tb_1) \\ (c_2 + sd_2) - (a_2 + tb_2) \\ (c_3 + sd_3) - (a_3 + tb_3) \end{pmatrix}$
  - Nun muss man jeweils ein Skalarprodukt mit dem Vektor $\overrightarrow{P_tR_s}$ und jeweils dem Richtungsvektor beider Geraden bilden, der jeweils 0 ergeben muss: Daraus folgt das LGS $\begin{matrix} (1)\ \overrightarrow{P_tR_s} * \vec{b} = 0 \\ (2)\ \overrightarrow{P_tR_s} * \vec{d} = 0 \end{matrix}$ → Man erhält Werte für t und s
  - Nun setzt die Werte t und s in $|\overrightarrow{P_tR_s}|$ ein und hat den kleinsten Abstand

- Beispiel: Berechnen Sie den kleinsten Abstand der windschiefen Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
  - $G_S(s|-1-s|1);\ H_t(9+2t|-8-3t|6+2t);\ \overrightarrow{G_sH_t} = \begin{pmatrix} -s+2t+9 \\ s-3t-7 \\ 2t+5 \end{pmatrix}$
  - $I: \begin{pmatrix} -s+2t+9 \\ s-3t-7 \\ 2t+5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und
  - $II: \begin{pmatrix} -s+2t+9 \\ s-3t-7 \\ 2t+5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$
  - Daraus ergibt sich das LGS $\begin{matrix} I: -2s+5t = -16 \\ II: -5s+17t = -49 \end{matrix}$ mit den Lösungen $s = 3$ und $t = 2$
  - Das Einsetzen in $|\overrightarrow{P_tR_s}|$ ergibt: $|\overrightarrow{P_tR_s}| = \sqrt{(5-3)^2 + \left(-2-(-4)\right)^2 + (2-1)^2} = 3$

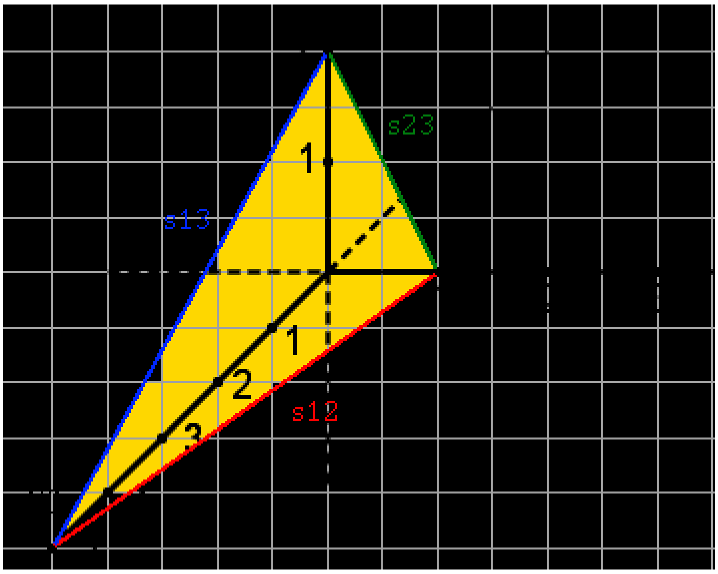
2.3 Ebene

2.3.1 Parameterform

- Synonyme: Ebenen im Raum in Parameterform
- Ziel: Mithilfe von Vektoren werden Ebenen im Raum beschrieben
- Definition und Berechnung:
  - Eine Ebene E wird durch einen Stützvektor $\vec{p}$ und zwei linear unabhängigen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ beschrieben
  - $E: \vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u} + s * \vec{v}$
  - Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ heißen Spannvektoren
- Beispiel: Bestimmen Sie eine Parametergleichung die durch die Punkte A, B und C festgelegt ist: $A(1|-1|1); B(1{,}5|1|0); C(0|1|1)$
  - $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1{,}5-1 \\ 1-(-1) \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-(-1) \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.3.2 Spurpunkte / -gerade

- Synonyme: Schnittpunkt mit den Koordinatenachsen /-ebenen
- Ziel: Zur Veranschaulichung von Ebenen in einem Koordinatensystem orientiert man sich an den jeweiligen Schnittpunkten der Ebene mit den Koordinatenachsen / -ebenen
- Berechnung:
  - Eine Ebene E geht durch die:
    - x_1-Achse bei k_1, wenn gilt: $E = \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
    - x_2-Achse bei k_2, wenn gilt: $E = \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix}$
    - x_3-Achse bei k_3, wenn gilt: $E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_3 \end{pmatrix}$
  - Die Spurpunkte sind somit $S_1(k_1|0|0), S_2(0|k_2|0)$ und $S_3(0|0|k_3)$
  - Die Spurgerade:
    - s_{12} ist die Schnittgerade durch S_1 und S_2 und geht durch die x_1x_2-Ebene
    - s_{23} ist die Schnittgerade durch S_2 und S_3 und geht durch die x_2x_3-Ebene
    - s_{13} ist die Schnittgerade durch S_1 und S_3 und geht durch die x_1x_3-Ebene
  - Eine Ebene schneidet entweder alle drei, genau zwei oder eine einzige, aber nie keine Koordinatenachse
  - Zur Veranschaulichung einer Ebene in einem räumlichen Koordinatensystem verwendet man ihre Spurgeraden bzw. Parallelen zu den Spurgeraden
- Beispiel: Veranschaulichen Sie die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow k_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow S_1(5|0|0)$
  - $\begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow k_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow S_2(0|1|0)$
  - $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow k_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow S_3(0|0|2)$



2.3.3 Normalenform

- Ziel: Andere Darstellungsweise für Ebenen mittels eines Normalenvektors
- Berechnung:
  - Der Normalenvektor $\vec{n}$ einer Ebene ist der Vektor der orthogonal zu den beiden anderen Spannvektoren $\vec{v}$ und $\vec{u}$ steht:
    1. $\vec{v} \perp \vec{n} \leftrightarrow \vec{v} * \vec{n} = 0$
    2. $\vec{u} \perp \vec{n} \leftrightarrow \vec{u} * \vec{n} = 0$
  - Löst man beide Gleichungen auf, erhält man den Normalenvektor $\vec{n}$
  - $E = \left(\vec{x} - \overrightarrow{OP}\right) * \vec{n} = 0$
- Beispiel: Bestimmen Sie eine Parametergleichung die durch die Punkte A, B und C festgelegt ist: $A(1|-1|1); B(1{,}5|1|0); C(0|1|1)$
  - $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1{,}5-1 \\ 1-(-1) \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-(-1) \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
    1. $\vec{v} \perp \vec{n} \leftrightarrow \vec{v} * \vec{n} = 0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0{,}5n_1 + 2n_2 - n_3$
    2. $\vec{u} \perp \vec{n} \leftrightarrow \vec{u} * \vec{n} = 0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = -n_1 + 2n_2$
  - $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
  - $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

2.3.4 Koordinatenform

- Ziel: Andere Darstellungsweise für Ebenen
- Berechnung:
  - Ein Normalenvektor wird ausmultipliziert:

    → Normalenform $E: \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$

    → Koordinatenform $E: 0 = (x_1 - P_1) * n_1 + (x_2 - P_2) * n_2 + (x_3 - P_3) * n_3$
- Beispiel: Bilden Sie die Koordinatenform der Ebene $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$
  - $E: \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$
  - $E: (x_1 - 1) * 2 + (x_2 + 1) * 1 + (x_3 - 1) * 3 = 0$ |Vereinfachen
  - $E: 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4$

2.3.5 Lagebeziehungen: Punkt – Ebene

- Ziel: Überprüfung, wie ein Punkt und eine Ebene zueinander stehen können
- Berechnung:
  - Punkt P liegt in der Ebene E
    - Man setzt den Ortsvektor $\overrightarrow{0P}$ mit der Parametergleichung gleich und macht eine Punktprobe. Gibt es für beide Parameter eine Lösung, liegt P in E
    - Man setzt den Ortsvektor $\overrightarrow{0P}$ für $\vec{x}$ in der Normalenform ein. Lässt sich die Gleichung lösen, liegt P in E
    - Man setzt die einzelnen Koordinaten von $P(P_1|P_2|P_3)$ in die Koordinatenform für x ein. Lässt sich die Gleichung lösen, liegt P in E
  - Punkt P liegt nicht in der Ebene E
    - Es gibt keine Lösung für eine und damit alle der oberen Gleichungen

2.3.6 Lagebeziehungen: Gerade – Ebene

- Ziel: Überprüfung, wie eine Gerade und eine Ebene zueinander stehen können
- Berechnung:
  - Man setzt die Geradengleichung g mit der Parametergleichung E gleich:
    - Bei genau einer Lösung, schneiden sich die Geraden g und die Ebene E
    - Bei keiner Lösung, sind die Gerade g und die Ebene E zueinander parallel
    - Bei unendlich viele Lösungen, liegt die Gerade g in der Ebene E
  - Den Punkt P, an dem die Gerade g die Ebene E schneidet (falls dieses geschieht) wird Durchstoßpunkt bezeichnet
  - Eine Gerade g kann nicht windschief zu einer Ebene E stehen

2.3.7 Lagebeziehungen: Ebene – Ebene

- Ziel: Überprüfung, wie zwei Ebenen zueinander stehen können
- Berechnung:
  - Hier kann man nicht die zwei Parameterformen der beiden Ebenen gleichsetzen, da es zu viele unbekannte Parameter (4) gibt, die sich nicht mit so vielen (3) Gleichungen lösen lassen
  - Man verwendet bei der ersten Gleichung die Normalenform und setzt die Parameterform als allgemeinen Vektor für $\vec{x}$ ein:
    - Gibt es unendlich viele Lösungen, unabhängig von den Parametern, sind beide Ebenen identisch zueinander
    - Gibt es keine Lösung, sind beide Ebenen parallel zueinander
    - Gibt es eine Lösung, die von den Parametern abhängig ist, schneiden sich die Ebenen

2.3.8 Schnittwinkel: Gerade – Ebene

- Ziel: Kleinsten Winkel einer Gerade und einer Ebene ermitteln
- Berechnung:
  - Der Schnittwinkel α der Geraden g (mit dem Richtungsvektor $\vec{u}$) und der Ebene E (mit dem Normalenvektor $\vec{n}$) lässt sich folgendermaßen berechnen: $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} * \vec{n}|}{|\vec{u}| * |\vec{n}|}$
  - Um den Winkel α zu ermitteln nimmt man den $\sin^{-1}(\alpha) = \alpha$, das ist aber mathematisch falsch und sollte niemals so irgendwo hingeschrieben werden
  - Es gibt nur einen Winkel, wenn die Gerade g die Ebene E durchstößt

2.3.9 Schnittwinkel: Ebene – Ebene

- Ziel: Kleinsten Winkel zweier Ebenen Ebene ermitteln
- Berechnung:
    - Der Schnittwinkel α beider Ebenen (mit den jeweiligen Normalenvektoren $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$) lässt sich folgendermaßen berechnen: $\cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n_1} * \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| * |\overrightarrow{n_2}|}$
    - Um den Winkel α zu ermitteln nimmt man den $\cos^{-1}(\alpha) = \alpha$, das ist aber mathematisch falsch und sollte niemals so irgendwo hingeschrieben werden
    - Es gibt nur einen Winkel, wenn sich beide Ebenen schneiden

2.3.10 Ebenenscharen

- Ziel: Auch Ebenengleichungen können Unbekannte in ihren Vektoren haben, die man dann ermitteln muss, damit z.B. zwei Ebenen schneiden
- Definition:
    - Ist im Stützvektor eine Unbekannte, verschiebt sich nur die Gerade mittels der Position im Raum, die Ebene bleibt gleich aufgespannt
      z.B. $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$
      Ist eine Unbekannte in den Richtungsvektoren, so verschiebt sich die Richtung in der die Ebene aufgespannt ist
      z.B. $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ x \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$
    - Auch in der Normalenform können Unbekannte sein: Ist die Unbekannte in $\overrightarrow{0P}$ so verändert sich der Stützvektor und damit die Position im Raum, und ist sie in $\vec{n}$, so verschiebt sich die Richtung, in der die Ebene aufgespannt ist

2.3.11 Abstand: Punkt – Ebene

- Ziel: Kleinsten Abstand eines Punktes R von der Ebene E ermitteln
- Berechnung:
    - Liegt der Punkt P in der Ebene E ist der kleinste Abstand 0
    - Liegt der Punkt P nicht in der Ebene E macht man folgendes:
        - Es wird der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene benötigt
        - Man bildet eine Geradengleichung g mit dem Punkt R als Stützvektor und dem Normalenvektor $\vec{n}$ als Richtungsvektor
        - Nun muss man die Gerade g durch die Ebene E durchstoßen lassen
        - Am Durchstoßpunkt D wird der Vektor $\overrightarrow{DR}$ gebildet und dessen Betrag $|\overrightarrow{DR}|$ genommen, welches der kleinste Abstand zwischen Punkt P und Ebene E ist

2.3.12 Abstand: Gerade – Ebene

- Ziel: Kleinsten Abstand einer Geraden g von der Ebene E ermitteln
    - Liegt die Gerade g in der Ebene E ist der kleinste Abstand 0 an jeder Stelle
    - Durchstößt die Gerade g die Ebene E am Durchstoßpunkt D ist der kleinste Abstand 0 an der Stelle des Durchstoßpunktes
    - Liegt die Gerade g parallel zur Ebene E, nimmt man einen Punkt R auf der Geraden g (z.B. der Stützvektor) und ermittelt den kleinsten Abstand nach 2.3.11

2.3.13 Abstand: Ebene – Ebene

- Ziel: Kleinsten Abstand zweier Ebenen ermitteln
- Berechnung:
    - Liegt E_1 in E_2 ist der kleinste Abstand 0 an jeder Stelle
    - Schneidet E_1 E_2 ist der kleinste Abstand an der Schnittgeraden s 0
    - Liegen E_1 und E_2 parallel zueinander, nimmt man einen Punkt R auf der Ebene E (z.B. den Stützvektor) und ermittelt den kleinsten Abstand nach 2.3.11

2.4 Geometrische Formen

- In Klausuren und Aufgaben wird sehr häufig verlangt, Punkte und deren Vektoren auf geometrische Formen hin zu untersuchen; die wichtigsten Bedingungen solcher Flächen sollte man kennen
- Auf Seite 26ff. von „Das große Tafelwerk“ findet man außerdem auch die Bedingungen

2.4.1 Dreiecke

- Rechtwinkliges Dreieck:
    - Das Skalarprodukt zweier Richtungsvektoren muss 0 ergeben $(\vec{a} * \vec{b} = 0)$
- Gleichseitiges Dreieck:
    - Der Betrag aller Richtungsvektoren müssen identisch sein $(|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|)$
    - Oder: Alle Winkel sind identisch $(\alpha = \beta = \gamma)$
- Gleichschenkliges Dreieck:
    - Der Betrag von zwei Richtungsvektoren ist identisch $(|\vec{a}| = |\vec{b}|)$
    - Oder: Zwei Winkel sind identisch

2.4.2 Vierecke

- Trapez
    - Zwei linear abhängige Richtungsvektoren $(\vec{a} = t * \vec{c})$
- Parallelogramm
    - Zwei mal Zwei lineare abhängige Richtungsvektoren $(\vec{a} = t * \vec{c}; \vec{b} = t * \vec{d})$
    - Es gilt außerdem: $\alpha = \gamma;\ \beta = \delta$
- Rhombus / Raute
    - Zwei mal zwei lineare abhängige Richtungsvektoren $(\vec{a} = t * \vec{c}; \vec{b} = t * \vec{d})$
    - Der Betrag aller Richtungsvektoren ist identisch $(|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}|)$
- Drachenviereck
    - Zwei mal zwei gleiche Beträge der Richtungsvektoren, die beide am jeweils gleichen Punkt gebunden sind (sich nicht gegenüberstehen): $(|\vec{a}| = |\vec{b}|; |\vec{c}| = |\vec{d}|)$
- Rechteck:
    - Zwei mal zwei gleiche Beträge der Richtungsvektoren (die sich gegenüberstehen) $(|\vec{a}| = |\vec{c}|; |\vec{b}| = |\vec{d}|)$
    - Das Skalarprodukt zweier Richtungsvektoren die am gleichen Punkt gebunden sind muss 0 ergeben $(\vec{a} * \vec{b} = 0)$
- Quadrat:
    - Der Betrag aller Richtungsvektoren ist identisch $(|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}|)$
    - Das Skalarprodukt zweier Richtungsvektoren die am gleichen Punkt gebunden sind muss 0 ergeben $(\vec{a} * \vec{b} = 0)$

3 Stochastik

- Synonym: Wahrscheinlichkeitsrechnung
- In der Stochastik werden Zufallsversuche untersucht. Das sind Vorgänge, bei denen es vom Zufall abhängt, welches Ergebnis auftritt

3.1 Definitionen und Gesetzte

- Eine Ergebnismenge S gibt alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsversuchs an, z.B. $S = \{1; 2; 3{,}4; 5; 6\}$ oder $S = \{Rot, Rot; Schwarz, Rot; Rot, Schwarz; Schwarz, Schwarz\}$
- P gibt die Wahrscheinlichkeit für ein spezifisches Ergebnis der Ergebnismenge an, z.B. $P(Rot\ im\ 1. Zug) = \frac{1}{5}$ oder $P(Schwarz\ in\ beiden\ Zügen) = \frac{1}{15}$
- Die Wahrscheinlichkeit einer Wahrscheinlichkeit liegt immer zwischen 0 und 1
- Alle möglichen Ergebnisse zusammen ergeben immer die Wahrscheinlichkeit 1
- Das Gesetz der großen Zahlen besagt, dass sich mit zunehmender Durchführung des Versuchs sich die relative Häufigkeit eines Ergebnisses ändert und sich der Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses annähert
- Die Gegenwahrscheinlichkeit für $P(E)$ ist $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

3.2 Mehrstufige Zufallsexperimente

- Ziel: Wahrscheinlichkeiten berechnen von Zufallsexperimenten, die mehrmals hintereinander ausgeführt werden
- Für jede Runde werden die Wahrscheinlichkeiten in einem Baumdiagramm aufgezeichnet
- Eine Teilmenge der Ergebnismenge eines mehrstufigen Zufallsexperimentes nennt man Ereignis
- Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des dazugehörigen Pfades multipliziert
- Summenregel: Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eines Ereignisses E erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse addiert

3.3 Absolute / Relative Häufigkeit

- Eine absolute Häufigkeit gibt an, wie häufig in ganzen Zahlen ein spezifisches Ergebnis aufgetreten ist, wie z.B.:

Note	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Gesamt
Absolute Häufigkeit	3	4	7	3	2	0	19

- Eine relative Häufigkeit ist, wenn alle absoluten Häufigkeiten als Dividend durch den Divisor der gesamten Anzahl geteilt werden, also z.B:

Note	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Gesamt
Relative Häufigkeit	0,16	0,21	0,37	0,16	0,11	0	1

3.4 Erwartungswert / Standardabweichung

- Synonyme: Durchschnitt; Mittelwert; Streuungsverhalten; Streuverhalten; Durchschnittliche Abweichung
- Ziel: Den Durchschnitt einer Häufigkeitsverteilung ermitteln und wie weit die Ergebnisse davon gestreut sind
- Berechnung:
  - Der Erwartungswert wird als $E(x)$, $\overline{x}$ oder μ bezeichnet und gibt den Durchschnitt einer Häufigkeitsverteilung an
    - Bei absoluten Häufigkeiten berechnet sich $\mu = \frac{x_1 * N_1 + x_2 * N_2 + x_3 * N_3 + \ldots + x_n * N_n}{n}$

- Bei relativen Häufigkeiten ist $\mu \approx p_1 * N_1 + p_2 * N_2 + \ldots + p_n * N_N$

- Die Standardabweichung gibt an, in welchem Bereich sich durchschnittlich 68,3% aller Ergebnisse vom Mittelwert befinden
- Die Standardabweichung wird mit einem σ bezeichnet
  - Bei absoluten Häufigkeiten ist $\sigma = \sqrt{\frac{(\overline{x}-x_1)^2+(\overline{x}-x_2)^2+\ldots+(\overline{x}-x_n)^2}{n}}$
  - Bei relativen Häufigkeiten ist $\sigma \approx \sqrt{p_1 * (\overline{x} - x_1)^2 + p_2 * (\overline{x} - x_2)^2 + \ldots + p_n * (\overline{x} - x_n)^2}$
- Die Standardabweichung addiert und subtrahiert man jeweils einmal vom Erwartungswert und erhält den Intervall für ca. 68% aller Ergebnisse $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$

3.5 Kombinatorik

- Ziel: Es gibt verschiedene Arten, ein Zufallsexperiment mit verschiedenen Ereignissen durchzuführen, wofür es immer andere Rechenwege gibt. Hier gilt es, herauszufinden, wie viele Ereignisse ein mehrstufiges Zufallsexperiment haben kann
- Erklärung:
  - „Mit Zurücklegen" meint, dass die Kugeln (wenn z.B. Kugeln gezogen werden) nach dem Ziehen zurückgelegt werden → Die Wahrscheinlichkeiten bleiben konstant
  - „Mit Reihenfolge" meint, dass es wichtig ist, in welcher Reihenfolge die Kugeln gezogen werden, also z.B. $P(Schwarz, Rot, Schwarz)$ wäre ein Ereignis, bei dem die Reihenfolge wichtig ist
  - „Ohne Reihenfolge" meint, dass es nur auf die Anzahl ankommt, die Reihenfolge aber egal ist, also z.B. $P(1 * Rot, 2 * Schwarz)$
- Berechnung:

$\boldsymbol{n}$ = Anzahl der Elemente $\boldsymbol{k}$ = Anzahl der gezogenen Elemente	**mit Reihenfolge**	**ohne Reihenfolge**
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

  - $n! \triangleq n$ Fakultät
  - $5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1$
  - $\binom{n}{k} \triangleq$ Binomialkoeffizient
  - $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$
  - Taschenrechner: Home → 2nd + 5 → 7: Wahrscheinlichkeit → 3: Kombinat(n, k)

3.6 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- Ziel: Wahrscheinlichkeiten, die sich gegenseitig bedingen, ermitteln
- Die Wahrscheinlichkeiten B der zweiten Stufe eines Zufallsexperiments sind je nachdem, ob A oder $\overline{A}$ gilt, unterschiedlich
- $P_A(B)$ bedeutet Wahrscheinlichkeit B unter der Bedingung von A
- $P(A \cap B)$ bedeutet Wahrscheinlichkeit für A und B

3.7 Bernoulli-Experiment / Binomialverteilung

3.7.1 Bedingungen

- Eine Binomialverteilung liegt vor, wenn:
    - es genau 2 mögliche Ergebnisse gibt $S = \{A; \overline{A}\}$
    - die Wahrscheinlichkeiten unabhängig voneinander sind
    - p für eine Wahrscheinlichkeit konstant bleibt

3.7.2 Bernoulliformel

- Ziel: Die Wahrscheinlichkeit für (ein) Ergebnis/se eines Bernoulli-Experimentes einfach berechnen
- $n \triangleq$ Anzahl der Möglichkeiten
- $k \triangleq$ Anzahl der gewünschten Möglichkeiten
- $p \triangleq$ Wahrscheinlichkeit der gewünschten Möglichkeit
- $X \triangleq$ Name des gewünschten Ergebnisses
- $P(X = k) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$
- Taschenrechner „Eine Wahrscheinlichkeit“: Home → Catalog → F3 → BinEwkt(n, p, k)
- Taschenrechner „Summe aller Wahrscheinlichkeiten von $k = a$ bis $k = b$“: Home → Catalog → F3 → BinIwkt(n, p, a, b)
- $P(X \geq k) = 1 - P(X < k) = 1 - P(X \leq k - 1)$

3.7.3 Erwartungswert / Standardabweichung

- Ziel: μ und σ eines Bernoulli-Experimentes einfach berechnen
- Berechnung:
    - $\mu = np$
    - $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

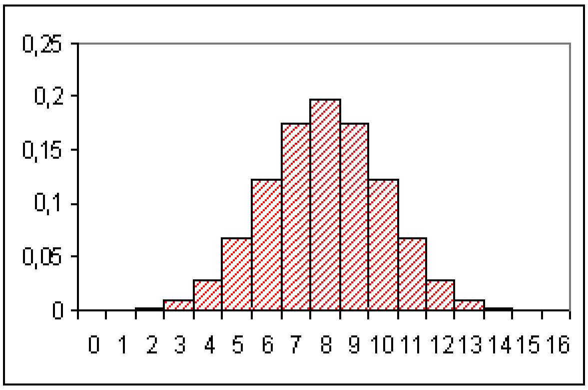
3.7.4 σ-Umgebungen

- Ziel: Überprüfen, wie viel % der gesamten Ereignismenge sich in einer Vielfachen σ-Umgebung von μ befinden
- $[\mu - k\sigma; \mu + k\sigma]$
    - $k = 1 \rightarrow P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0{,}683$
    - $k = 2 \rightarrow P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$
    - $k = 3 \rightarrow P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$
- Alle Werte befinden sich im Tafelwerk auf Seite 43

3.7.5 Histogramme

- Ziel: Wahrscheinlichkeitsverteilungen grafisch darstellen
- Von jeder natürlichen Ergebnismenge wird ein Balken in Höhe der Wahrscheinlichkeit p gezeichnet, der $\pm 0{,}5$ Einheiten in beide Richtungen breit ist
- Der Flächeninhalt dieser Fläche entspricht somit der Wahrscheinlichkeit

- Histogramme sehen z.B. so aus:



- Der höchste Balken eines Histogramms ist immer der Erwartungswert μ der Binomialverteilung

3.7.6 Parameter bestimmen

- Ziel: Manchmal fehlen gewisse Parameter bei einer Binomialverteilung, die man berechnen muss
- Berechnungen mit Beispielen:
  - Ein Flugzeug hat 194 Plätze. Die Fluggesellschaft verkauft aber 200 Tickets, weil laut ihrer Statistik durchschnittlich nur 95% aller Gäste, die gebucht haben, zum Flug erscheinen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss mehr als ein Fluggast entschädigt werden?
    - Wenn mindestens 196 Fluggäste erscheinen, muss mehr als ein Fluggst entschädigt werden: $P(X \geq 196) = 1 - P(X \leq 195) = 0{,}0264$
  - Parameter n bestimmen: In einem Land sind 4% der männlichen Bevölkerung farbenblind. Wie groß muss eine Gruppe von Männern in dem Land mindestens sein, damit mit mindestens 90 Prozent Wahrscheinlichkeit fünf auf der Gruppe farbenblind sind?
    - Es muss gelten: $P(F \geq 5) \geq 0{,}9$ bzw. $P(F \leq 4) \leq 0{,}1$
    - Man bildet eine Funktion im y-Editor: $y = BinIwkt(X, 0.04, 4)$ und schaut in der Tabelle, ab welcher natürlichen Zahl 0,1 unterschritten wird
  - Parameter p bestimmen: Jedes Bauteil in einer Produktionsserie fällt mit der Wahrscheinlichkeit p aus. Wie groß darf p höchstens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80% höchstens zehn von 100 Bauteilen ausfallen?
    - Es muss gelten: $P(A \leq 10) \geq 0{,}8$
    - Man stellt zwei Gleichungen im y-Editor auf, einmal die kumulierte Wahrscheinlichkeit mit x für den Parameter p als Unbekannte und einmal $y = 0{,}8$ um den Schnittpunkt ermitteln zu können
    - Der Schnittpunkt sagt einem, wie groß p sein muss

3.7.7 Konfidenzintervall für p

- Ziel: Relative Häufigkeitsangaben in denen sich bestimmte prozentuale Anteile der Gesamtergebnisse befinden (vergleichbar mit der σ-Umgebung)
- Berechnung:
  - $p \approx h$
  - Um eine bestimmte prozentuale Anzahl von Wahrscheinlichkeiten in einem Bereich angeben zu können, benutzt man das folgende Intervall (k aus dem Tafelwerk entnehmen)
  - $k\%: \left[h - k\sqrt{\frac{h*(1-h)}{n}}; h + k\sqrt{\frac{h*(1-h)}{n}}\right]$

3.8 Dichteverteilung / Normalverteilung

- Ziel: Wird verwendet, wenn es als Ergebnis reelle Zahlen gibt
- Ist eine Verteilung nicht normalverteilt, so gilt:
  - Dichtefkt.: $\leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall\, x \in [a; b]$
  - $\int_a^b f(x)\, dx = 1 \rightarrow$ Wahrscheinlichkeit $P \triangleq$ Fläche
  - $\mu = \int_a^b (x * f(x))\, dx$
  - $\sigma = \sqrt{\int_a^b (x-\mu)^2 * f(x)\, dx}$
- Die häufigste Dichtefunktion ist die Gaußsche Glockenkurve:
  $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{(-\frac{x^2}{2})}$, sie ist normalverteilt
- Die Wahrscheinlichkeit ist die Fläche, also die Stammfunktion der Gaußschen Glockenkurve:
  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) = 1 \rightarrow$ Indem man die Grenzen neu setzt, kann man die Dichteverteilung innerhalb zweier Grenzen ermitteln
- Näherungsweise Berechnung von Intervallwahrscheinlichkeiten bei Binomialverteilung:
  - Für eine Binomialverteilung mit n Stufen und der Erfolgswahrscheinlichkeit p, also mit dem Erwartungswert $\mu = np$ und der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{np(1-p)} > 3$ gilt für die Anzahl X der Erfolge:
  - $P(k \leq X \leq l) = \int_{k-0,5}^{l+0,5} \varphi(x)\, dx$
- Taschenrechner: Home → Catalog → F3 → $NV\_Dfkt(x, \mu, \sigma)$ zum Berechnen einer Einzelwahrscheinlichkeit
- Taschenrechner: Home → Catalog → F3 → $NV\_Iwkt(\text{"von","bis"},\mu,\sigma)$