

直流馬達的模型化與參數判別

課程講義 CN-09

內 容：[1. 直流馬達的模型](#) [2. 直流馬達的轉換函數](#) [3. 直流馬達的等效電路模型](#)
[4. 直流馬達的參數判別](#) [參考文獻](#)

瀏覽次數:  (Since 1996/12/03, 12:00)

鄒應嶼 博士

交通大學 控制工程系所

中華民國84年12月13日

版面製作：王倩英

更新日期：1996/12/03

摘 要

本章說明直流伺服馬達的模型化與參數判別方法，說明各馬達參數的物理意義，並從控制的觀點分析其動態特性。在設計直流伺服驅動器時，功率放大級是一個相當重要的關鍵，為了進行功率放大器的分析設計，也建立了以SPICE電路模擬分析軟體為基礎的直流馬達等效電路模型。

1. 直流馬達的模型

圖1.1所示為一外激式直流馬達的電氣機械等效電路模型。在電樞線圈的電路模型裡包含了電樞電阻(armature resistance) R_a 、電樞電感 (armature inductance) L_a 與一個因馬達旋轉時磁力線在線圈上切割所感應出之反電勢 V_g 。磁場線圈則可由磁場組 (field resistance) R_f 與磁場電感 (field inductance) L_f ，組氣隙磁通則以 ϕ 表示。馬達轉軸之旋轉角速度以 ω 表示，其相關參數與符號說明如表 1.1所列。直流馬達的電樞線圈形成一迴路，其電壓方程式可表示為

$$v_a(t) = i_a(t)R_a + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + v_g(t) \quad (1.1)$$

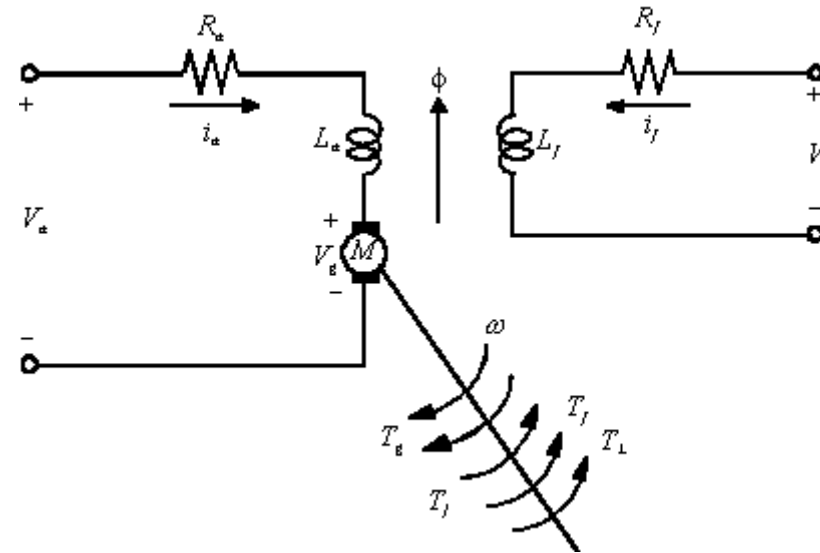


圖1.1 外激式直流馬達的電氣機械模型

表1.1 直流馬達模型之符號說明

V_a	電樞電壓 (V)
i_a	電樞電流 (A)
v_f	磁場激磁電壓 (V)
i_f	磁場激磁電流 (A)
f	氣隙磁通 (weber)
v_g	旋轉反電勢 (V)
T_g	馬達產生之扭矩 (N·m)
T_f	磨擦扭矩 (N·m)
T_J	馬達轉子慣量扭矩 (N·m)
T_L	負載扭矩 (N·m)
w	馬達轉軸角速度 (rad/sec)
q	馬達轉軸角度 (rad)
R_a	電樞電阻 (ohm)
L_a	電樞電感 (H)

R_f	磁場電阻 (ohm)
L_f	磁場電感 (H)
K_T	扭矩常數 (N · m/A)
K_E	反電勢常數 (V/(rad/sec))
B	旋轉磨擦係數 (N · m/(rad/sec))
t_e	電氣時間常數 (sec)
t_m	機械時間常數 (sec)

其中 V_g 是電樞線圈在內激磁電流 i_f 在磁場線圈(field winding)所造成之磁場因旋轉切割磁力線而感應出的反電勢 (back emf)，由法拉第定律可知切割一個線圈磁通量的變化會產生一個感應電動勢：

$$v(t) = \frac{d\lambda(t)}{dt} \quad (1.2)$$

其中 λ 表示線圈的(magnetic flux linkage)。在旋轉的轉子電樞線圈，每一個線圈皆會因為轉子轉動切割磁力線而造成感應電動勢，此反抗電動勢 ($v_g(t)$) 與轉速、線圈數、磁場強度皆成正比，可表示為

$$v_g(t) = K\phi(t)\omega(t) \quad (1.3)$$

如果磁場電流保持固定，則氣隙磁通為定值，上式可簡化為

$$v_g(t) = K_E\omega(t) \quad (1.4)$$

其中 K_E 為馬達的旋轉反電勢常數，單位為 $V/(\text{rad/sec})$ 。

轉子電樞線圈載有電流的導線在與其垂直的定子磁場下會受到力的作用，此力的大小與導線內之電流、導線的長度與磁場的強度成正比，此力作用在轉子的軸心上即造成一扭矩。由於電樞線圈導線之長度是固定的，因此在激磁電流保持定值的情況下，轉子產生之扭矩即與電樞電流成正比

$$T_g(t) = K_T i_a(t) \quad (1.5)$$

其中 K_T 為扭矩常數，單位為 $\text{N}\cdot\text{m}/\text{A}$ 。在轉子上所產生之扭矩無法全數施於負載，有些將消耗在克服轉子本身之磨擦，有些則用以帶動轉子本身的慣量，可將其歸納為

$$T_g(t) = T_f(t) + T_L(t) + J \frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t) \quad (1.6)$$

其中 J 為馬達本身的慣量以及負載反映在馬達軸上的等效慣量， B 為馬達與負載合成之旋轉動黏滯係數， T_f 則代表磨擦扭矩之總和， T_L 為負載扭矩。

方程式(1.1)、(1.4)、(1.5)、與(1.6)決定了直流馬達的動態行為，為了得到直流馬達模型的控制方塊圖，可將這些式子取拉氏轉換，如此可得：

$$v_a(s) - v_g(s) = (R_a + sL_a)i_a(s) \quad (1.7)$$

$$v_g(s) = K_E\omega(s) \quad (1.8)$$

$$T_g(s) = K_T i_a(s) \quad (1.9)$$

$$T_a(s) - T_f(s) - T_L(s) = (B + sJ)\omega(s) \quad (1.10)$$

將上述之關係以方塊圖表示，可得圖1.2。

假設施予一固定電壓於馬達的電樞端子，則在穩態時，馬達將以定速旋轉，此時所產生之機械功率 (mechanical power) 為

$$P_g = T_g \cdot \omega = K_T I_a \omega \quad (1.11)$$

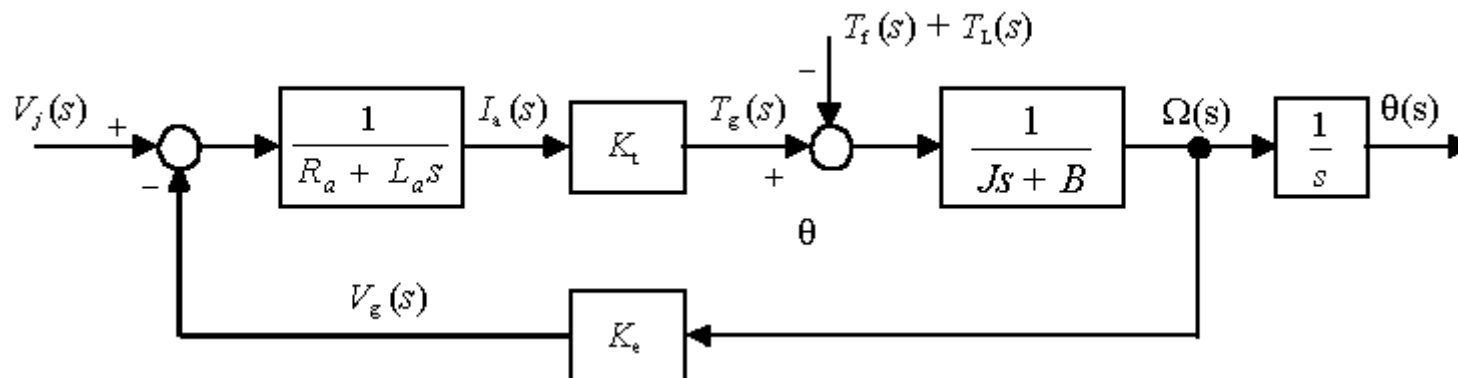


圖1.2 直流馬達模型的方塊圖

上式中的各物理量皆為定值。而樞線圈所吸收的電氣功率(electrical Power)應為

$$P_e = v_g \cdot i_a = K_E \omega i_a \quad (1.12)$$

由於電樞線圈所吸收之電氣功率應等於產生之機械功率，因此

$$P_g = P_e \quad (1.13)$$

所以在MKS制時， $K_T = K_E$ 。由此可知直流馬達的扭矩常數與反電勢常數是相依常數，也就是說決定了其中的一個，另一個也就被決定了，這有相當重要的物理意義。例如一個直流馬達的扭矩常數為 $5 \text{ Kg} \cdot \text{cm/A}$ ， $\text{Kg} \cdot \text{cm}$ 為慣用的扭矩單位，其中 Kg 為重量單位，一個 $\text{Kg} \cdot \text{cm}$ 約等於 $0.1 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。因此 $5 \text{ Kg} \cdot \text{cm} = 0.5 \text{ N} \cdot \text{m}$ ，也就是說其旋轉反電勢常數應為 $K_E = 0.5 \text{ V}/(\text{rad/sec})$ ， 1000 rpm 為 $1000 \times 2\pi/60 \text{ (rad/sec)}$ ，由此可知馬達如旋轉在 1000 rpm ，則其反電勢約為 50 V 。由上述之說明應可瞭解，扭矩常數愈大，表示單位電流產生之扭矩也就愈大，而其反電勢常數也就愈大，因此旋轉時，產生之反電勢也就愈大。一般高扭矩馬達其扭矩常數都非常高，且應用在高扭矩低轉速的場合，而高速馬達則旋轉反電勢常數就非常小，多用在高轉速低扭矩的應用場合。

2. 直流馬達的轉換函數

圖1.2直流馬達方塊圖，其磨擦扭矩 T_f 與負載扭矩 T_L 可視為一干擾扭矩(disturbance torque) T_d ，輸入之控制變數為電樞電壓 V_a ，輸出變數為轉子速度 ω 與位置 q ，電樞電流可視為回授變數。馬達轉速 ω 與輸入電樞電壓 V_a 與干擾扭矩 T_d 間之關係可表示為

$$\omega(s) = G_1(s)v_a(s) + G_2(s)T_d(s) \quad (2.1)$$

其中

$$G_1(s) = \left. \frac{\omega(s)}{v_a(s)} \right|_{T_d(s)=0} \quad (2.2)$$

$$G_2 = \left. \frac{\omega(s)}{T_d(s)} \right|_{v_a(s)=0} \quad (2.3)$$

馬達的電壓—轉速轉換函數 $G_1(s)$ 為

$$G_1(s) = \frac{\omega(s)}{v_a(s)} = \frac{K_T}{(sL_a + R_a)(sJ + B) + K_T K_E} \quad (2.4)$$

$$G_1(s) = \frac{K_m}{\alpha s^2 + \beta s + 1} \quad (2.5)$$

其中

$$K_m = \frac{K_T}{R_a B + K_T K_E}$$

$$\alpha = \frac{L_a J}{R_a B + K_T K_E}$$

$$\beta = \frac{R_a J + L_a B}{R_a B + K_T K_E}$$

(2.5)是在假設沒有干擾扭矩的情況下，由電樞電壓到轉子轉速的轉換函數，亦可改寫為

$$G_1(s) = \frac{K_T}{R_a B(1 + s\tau_e)(1 + s\tau_m) + K_T K_E} \quad (2.6)$$

其中 $\tau_e = L_a / R_a$ 為電氣時間常數， $\tau_m = J / B$ 為機械時間常數。假設電樞電感相當小，則 τ_e 可忽略不計，在此情況下，(2.6)可簡化為

$$G_v(s) = \frac{\omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_T}{R_a(J_s + B) + K_T K_E} = \frac{K_m}{s\tau + 1} \quad (2.7)$$

其中

$$\tau = \frac{R_a J}{R_a B + K_T K_E} \quad (2.8)$$

(2.7)中的 K_m 通常稱之為馬達常數 (motor constant)。負載扭矩轉換函數 $G_2(s)$ 可表示為

$$G_2(s) = \frac{\omega(s)}{T_d(s)} = \frac{-\frac{1}{J_s + B}}{1 + \frac{K_T K_E}{(J_s + B)(sL_a + R_a)}} = \frac{-\frac{R_a}{K_T} K_m \left[\frac{L_a}{R_a} s + 1 \right]}{1 + \frac{K_T K_E}{(J_{s+} B)(sL_a + R_a)}} \quad (2.9)$$

假設電樞電感忽略不計，則上式可簡化為

$$G_2(s) = \frac{\omega(s)}{T_d(s)} = \frac{-\frac{R_a}{K_T} K_m}{s\tau + 1} \quad (2.10)$$

實例說明

以飛船公司(Electro - Craft)的小型直流伺服馬達 E - 576為例，其規格如下：

$$V_a(\text{max}) = 30 \text{ volts}$$

$$i_a(\text{max}) = 2 \text{ amperes}$$

$$R_a = 30 \text{ ohms}$$

$$L_a = 6 \text{ mH}$$

$$K_T = 50 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m/A}$$

$$T_{(\text{rated})} = 0.1 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (額定扭矩)}$$

$$J_m = 40 \times 10^{-6} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$B_m = 35 \times 10^{-6} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2/\text{sec}$$

$$\omega_{(\text{rated})} = 300 \text{ rads/sec} \text{ (額定轉速)}$$

假設負載反映在馬達軸上的慣量與轉動磨擦係數分別為

$$J_L = 60 \times 10^{-6} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \text{ (} 1.5 \times J_m \text{)}$$

$$B_L = 65 \times 10^{-6} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 / \text{sec} \text{ (} 1.65 \times B_m \text{)}$$

根據馬達的規格與(2.7)可知

$$G_1(s) = \frac{17.9}{2.1 \times 10^{-4} s^2 + 0.107 s + 1}$$

馬達之電樞電感為6mH，如將之忽略，則上式可簡化為

$$G_v(s) = \frac{17.9}{0.107s + 1}$$

假設施予10 volts 的步階電壓於馬達，則轉速為

$$\omega(s) = \frac{10}{s} \cdot \frac{17.9}{0.107s + 1} = \frac{179}{s(0.107s + 1)}$$

將上式反拉氏轉換可得轉速之時域響應

$$\omega(t) = 179(1 - e^{-9.35t}) \text{ rad / sec}$$

當穩態時， $t \rightarrow \infty$ ， $\omega \rightarrow 179 \text{ rad/sec}$ 。

馬達的扭矩—轉速轉換函數可表示為

$$G_2(s) = \frac{-1074(2 \times 10^{-3}s + 1)}{2.1 \times 10^{-4}s^2 + 0.107s + 1}$$

將電樞電感忽略不計，則上式可簡化為

$$G_L(s) = \frac{-1074}{0.107s + 1}$$

假設有一步階負載扭矩變化，其大小為0.05N · m，則其速度變化為

$$\omega(s) = \frac{0.05}{s} \left[\frac{-1074}{0.107s + 1} \right] = \frac{-53.7}{s(0.107s + 1)}$$

其時域響應為

$$\omega(t) = -53.7(1 - e^{-9.35t}) \text{ rad/sec}$$

由此可知如扭矩增加 $0.05\text{N} \cdot \text{m}$ ，則速度將下降 53.7 rad/sec 。

3. 直流馬達的等效電路模型

建立以等效電路為基礎的直流馬達模型有下列之優點：

1. 可直接由馬達規格表之參數值建立馬達與驅動系統的模型，而不需要推導複雜的數學方程式，馬達與驅動系統的非線性特性也易於加入系統的模型。
2. 可經由電路模擬進型功率轉換器的電路設計與系統分析，在設計功率轉換器的驅動電路、緩震電路與分析功率元件特性時尤其方便。
3. 可藉由電路模擬軟體(如SPICE、SABER、EMTP等本身所提供之功能如時域與頻域響應模擬、靈敏度分析、可靠度分析等進行馬達驅動系統的設計。

直流馬達的等效電路模型根據其複雜度可分四個層次[5]：

- 模型(Level 0 Model)：此為理想的直流馬達模型。
- 模型(Level 1 Model)：加入磁場飽和現象模型。
- 模型(Level 2 Model)：除了考慮磁場飽和現象以外，再加入電樞反抗(armature reaction)模型。
- 模型(Level 3 Model)：除了考慮上述兩種非線性現象以外，再加入馬達之雜散損失以及與電流相關的繞線參數。

3.1 零階模型

理想的直流馬達其數學模型可以下列方程式表示

$$v_a = i_a R_a + L_a \frac{di_a}{dt} + k_m i_f \omega_m \quad (3.1)$$

$$v_f = i_f R_f + L_f \frac{di_f}{dt} \quad (3.2)$$

$$J \frac{d\omega_m}{dt} + f\omega_m + T_L = k_m i_f i_a \quad (3.3)$$

其所相對應之等效電路模型如圖3.1所示。

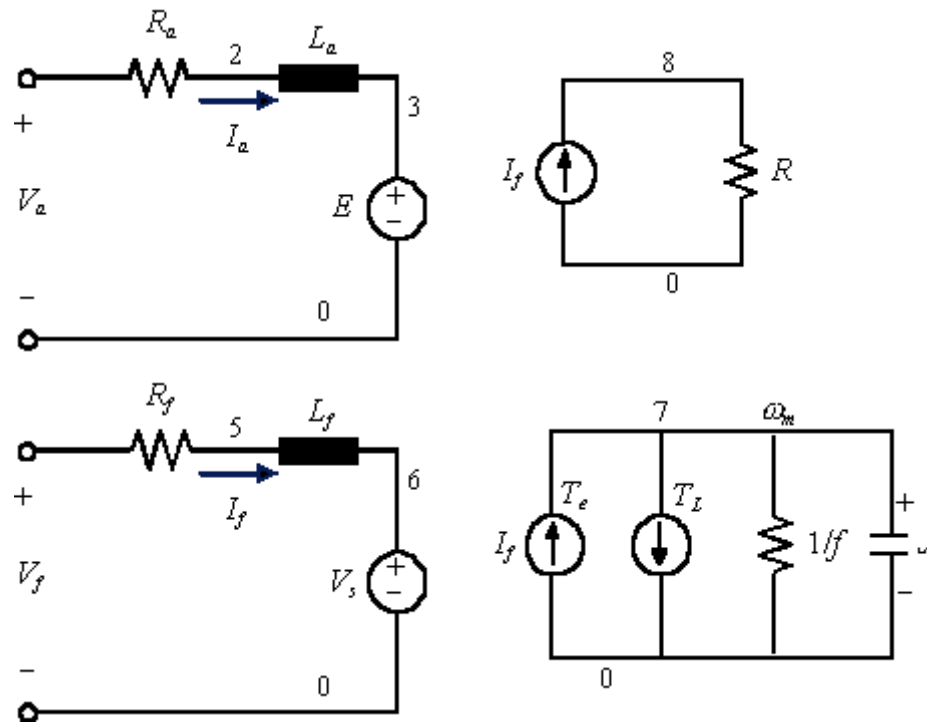


圖3.1 直流馬達零階等效電路模型

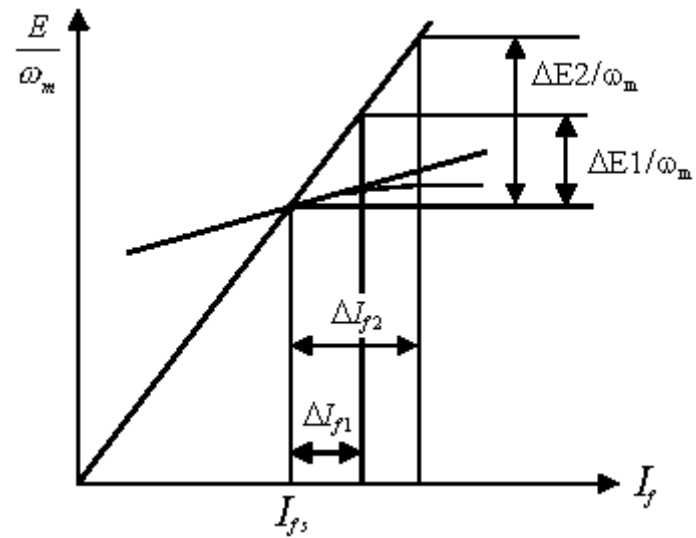


圖3.2 直流馬達的磁飽和曲線

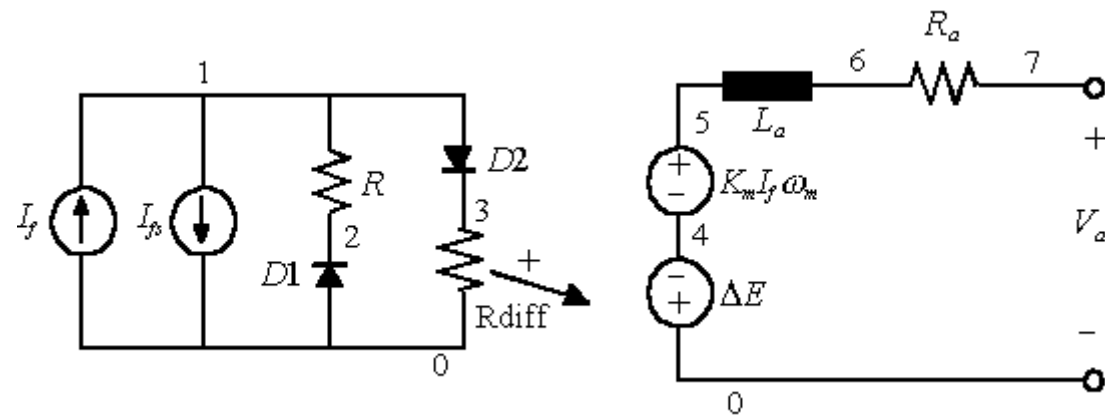


圖3.3 以SPICE建立的兩段線性近似開關等效電路模型

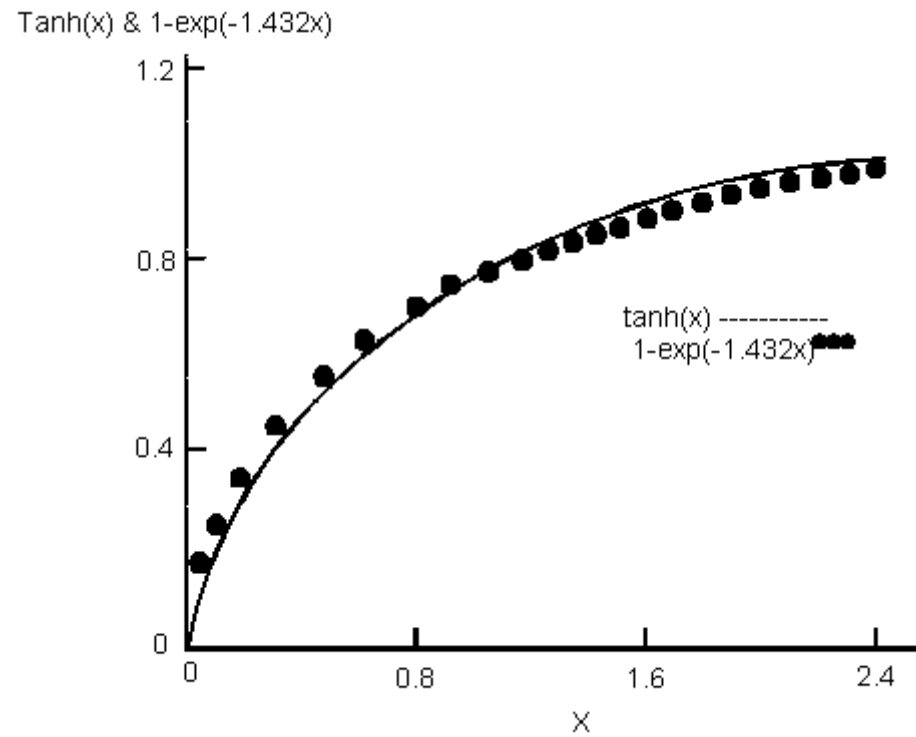


圖3.4 $\tanh(x)$ 與 $1-e^{-1.432x}$ 曲線的近似程度

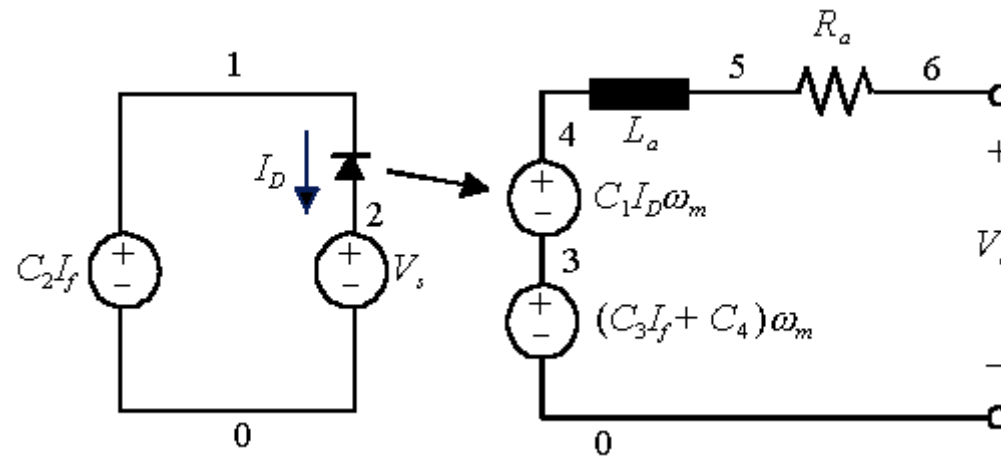


圖3.5 直流馬達一階等效電路模型

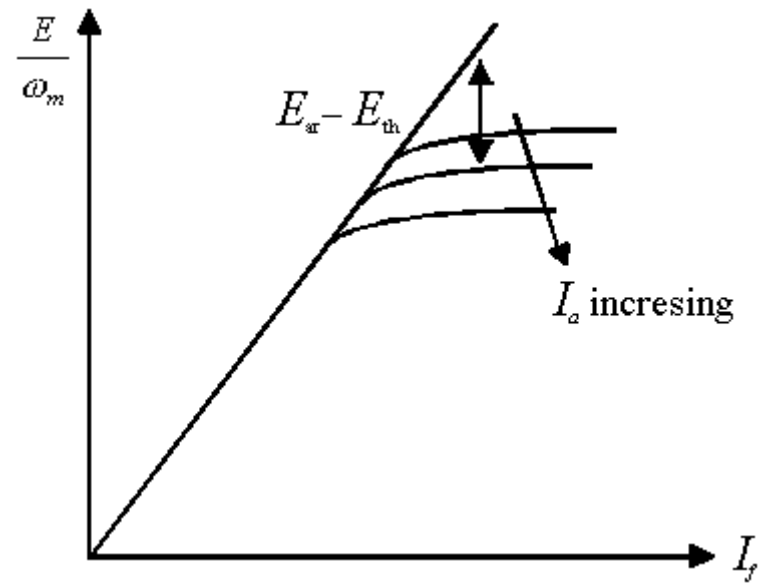


圖3.6 直流馬達的電樞反抗效應

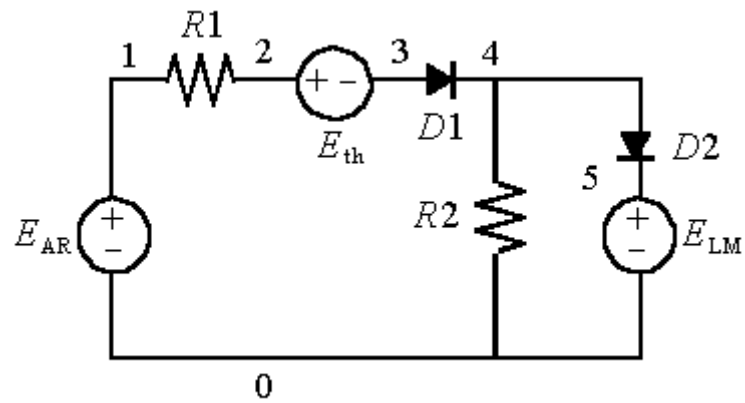


圖3.7 模擬電樞反抗電壓降的電路模型

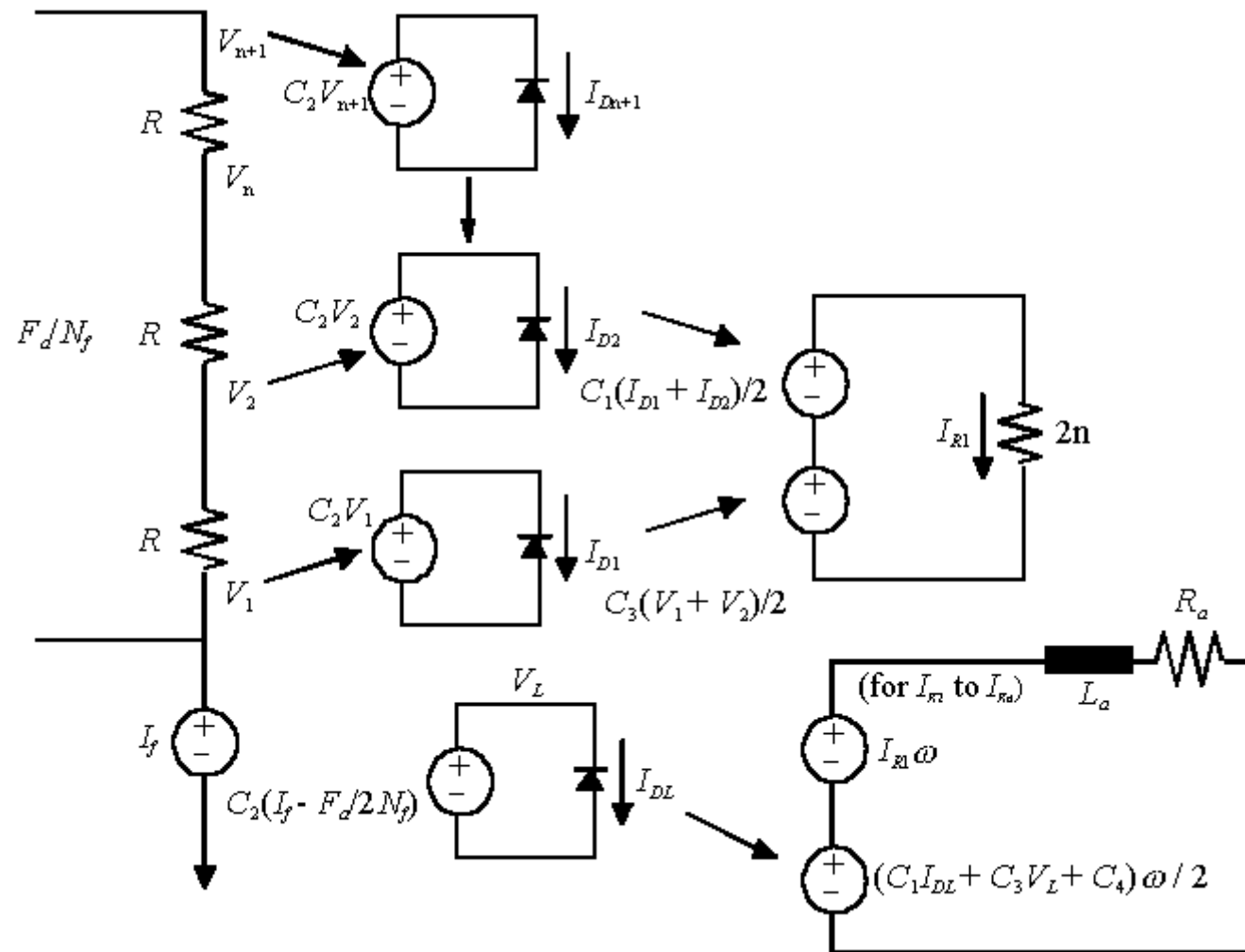


圖3.8 直流馬達二階等效電路模型

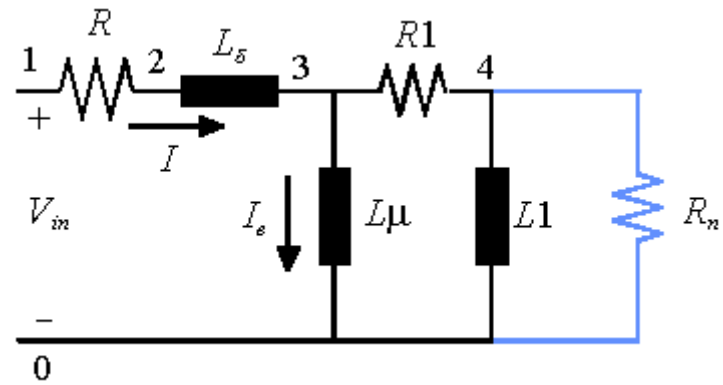
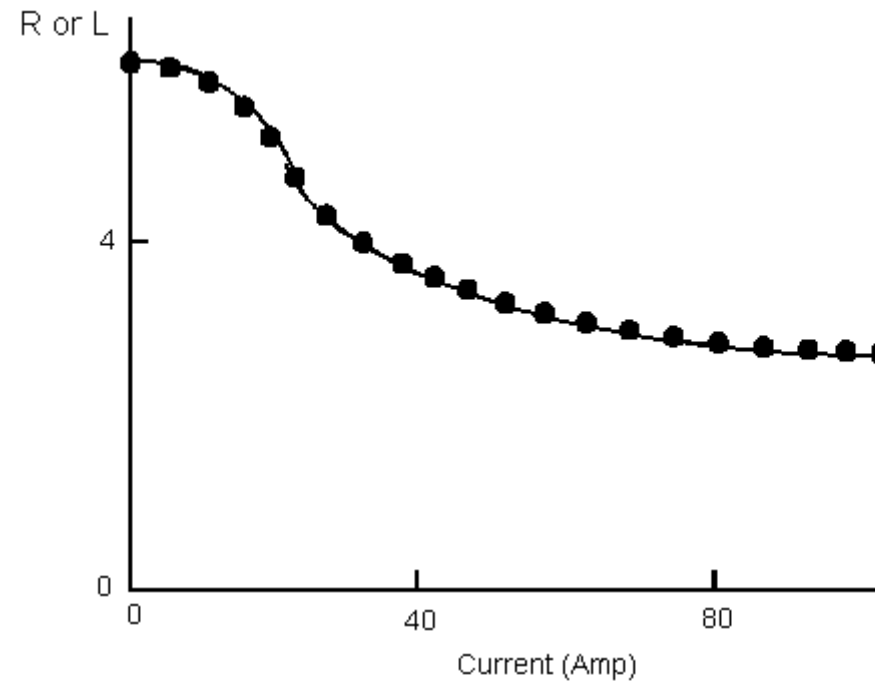
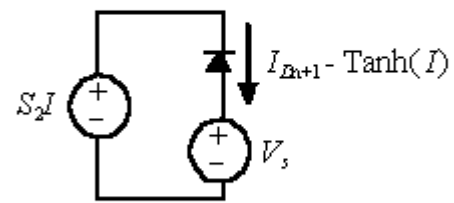


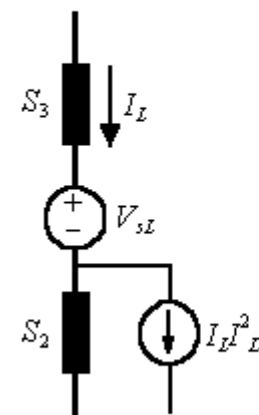
圖3.9 馬達繞線雜散效應的等效電路模型



(a)



(b)



(c)

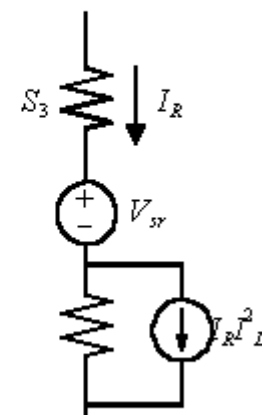


圖3.10 (a)與電流相關之馬達繞線參數之非線性區線，(b)電感電流等效電路模型，(c)電阻-電流等效電路模型

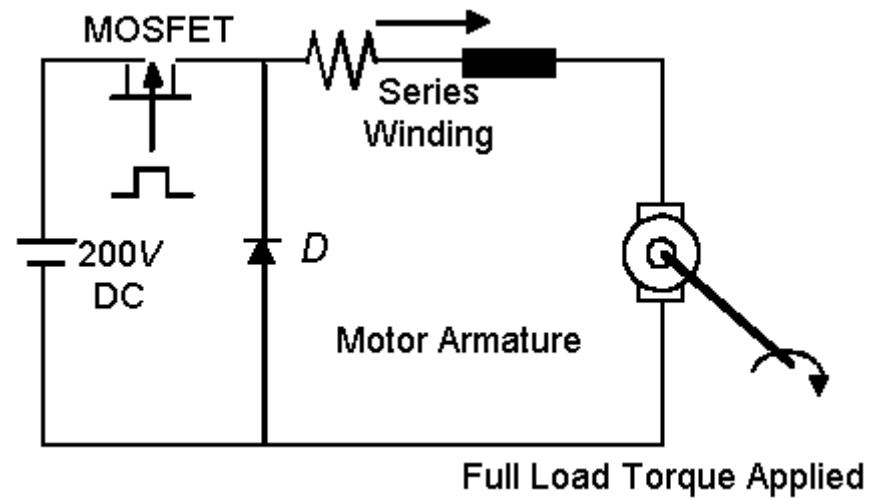
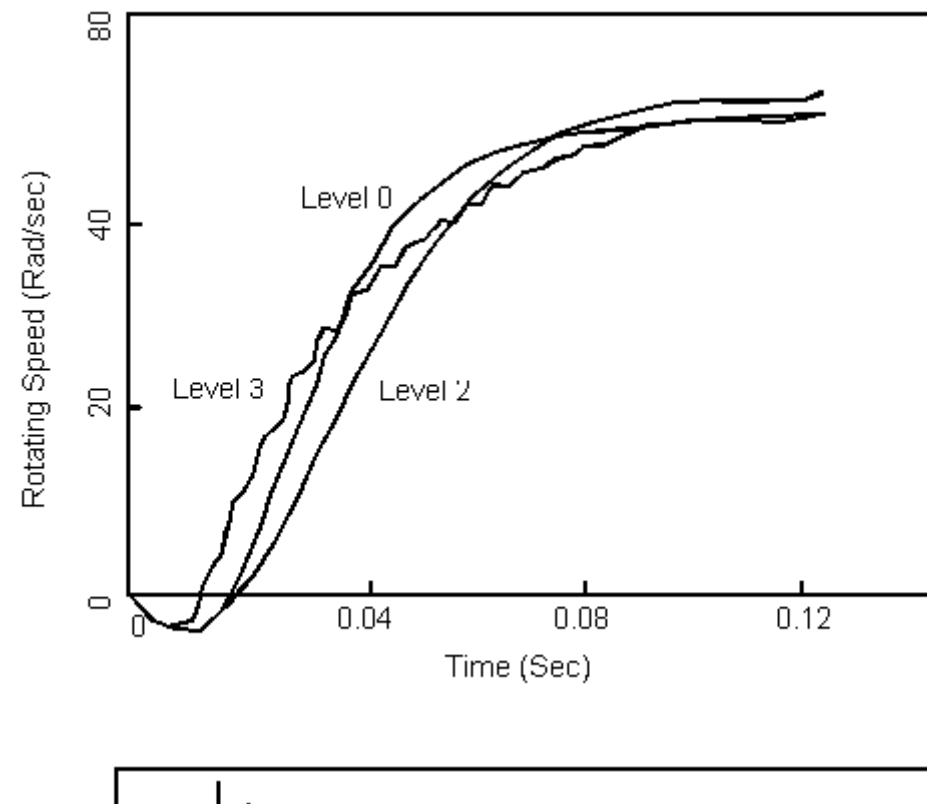


圖3.11 以MOSFET截波器驅動的直流馬達



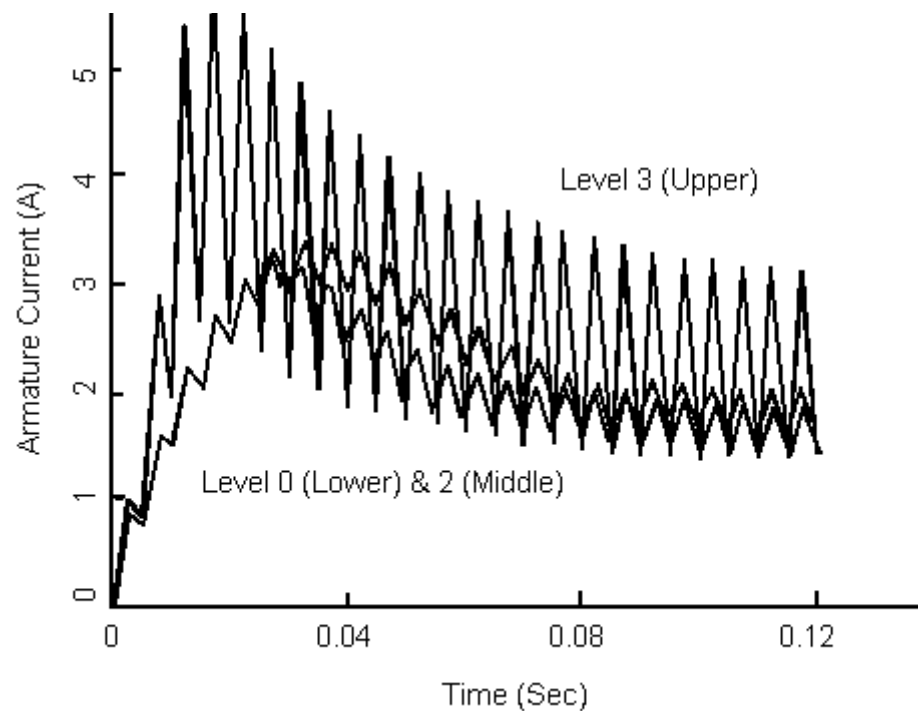


圖3.12 以MOSFET截波器驅動的直流馬達的模擬結果

4. 直流馬達的參數判別

在實際狀況下，有時無從得知馬達的參數，因此必須藉由量測以及參數判別(parameter identification)的方法間接計算出馬達的參數。對於未知線性系統的參數判別方法一般可區分為兩大類：

- 頻域法(Frequency domain method) [8]-[10]
- 時域法(Time domain method) [11]-[12]

4.1 由頻率響應量測判別直流馬達的參數

4.2 由時間響應量測判別直流馬達的參數

參考文獻

1. S. J. Chapman, **Electric Machinery Fundamentals**, McGraw-Hill, Inc., 1991.
2. **DC Motors, Speed Controls, Servo Systems, including Optical Encoders**, *An Engineering Handbook by Electro-Craft Corporation*, Hopkins, MN, 5th Edition, 1980.
3. B. C. Kuo and T. Jacob, *DC Motors in Incremental Motion Systems*, Chap. 5 of **Incremental Motion Control: DC Motors and Control Systems**, 1978.
4. A. E. Fitzgerald, C.K. Jr., and S.D. Umans, **Electric Machinery**, 5th Edition, McGraw-Hill Book Company, 1990.
5. P. C. Krause, **Analysis of Electric Machinery**, McGraw-Hill, 1987
6. Y. C. Liang and V. J. Gosbell, **DC machine models for SPICE2 simulation**, *IEEE Trans. on Power Electronics*, vol. 5, no. 1, pp. 16-20, Jan. 1990.
7. S. N. Singh, D. R. Kohli, Analysis and performance of a chopper controlled separately excited dc motor, *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 29, no. 1, pp. 1-6, Feb. 1982.
8. J. S. Ewing, Lumped circuit impedance representation for dc machines, *IEEE Trans. Power App. Syst.*, vol. 87, no. 4, pp. 1106-1110, April 1968.
9. R. A. Schulz, A frequency response method for determining the parameters of high-performance dc motors, *IEEE Trans. on Ind. electron.*, vol. 30, no. 1, pp. 39-42, Feb. 1983
10. J. L. Adcock, Analyzer synthesizes frequency response of linear systems, *Hewlett-Packard Journal*, pp. 25-32, Jan. 1987.
11. J. L. Adcock, Curve fitter for pole-zero analysis, *Hewlett-Packard Journal*, pp. 33-36, Jan. 1987.
12. G. A. Perdikaris and K. W. VanPatten, Computer schemes for modeling, tuning, and control of dc motor drive systems, *PCI Proc.*, pp. 83-90, March 1982.
13. S. Meshkat, A servo system parameter identification for optimum compensation design, *MOTOR-CON Proc.*, pp. 348-354, April 1985.