

# 三维磁传感器最大似然估计椭球拟合补偿算法

龙 礼 张 合 , 丁立波

( 南京理工大学 机械工程学院 , 江苏 南京 210094 )

**摘 要:** 误差环境对地磁传感器姿态检测系统的输出精度影响较大 , 为了校正三维磁传感器的误差 , 该文提出一种基于最大似然估计的椭球拟合补偿算法。分析了三维磁传感器的各种误差来源 , 建立了椭球误差模型 , 采用最大似然估计法对磁传感器采集的数据进行椭球拟合 , 最后利用牛顿优化法获得误差补偿参数。仿真和实验表明 , 椭球模型能够准确地描述三维磁传感器的各种误差 , 输出精度在 2% 以内 , 补偿算法满足要求。

**关键词:** 三维磁传感器; 地磁; 最大似然估计; 椭球拟合; 误差补偿

**中图分类号:** TJ765.4      **文章编号:** 1005 - 9830( 2013) 05 - 0716 - 04

## Ellipsoid fitting compensation algorithm of 3-axis magnetometer based on maximum likelihood estimator

Long Li , Zhang He , Ding Libo

( School of Mechanical Engineering , NUST , Nanjing 210094 , China )

**Abstract:** The output accuracy of the magnetometers-attitude-system is badly effected by the error environment. In order to compensate 3-axis magnetometers errors , an ellipsoid fitting compensation algorithm based on the maximum likelihood estimator is derived. After analyzing the error sources of the sensor , an equivalent error model is derived by the maximum likelihood estimator. The parameter of the error compensation is solved by the Newton descent methods. The simulation and experimental data show that the ellipsoid model can be adopted for all the 3-axis sensor errors and the output accuracy is less than 2% , and the proposed compensation algorithm can meet requirements.

**Key words:** 3-axis magnetometers; magnetic fields; maximum likelihood estimator; ellipsoid fitting; error compensation

收稿日期: 2012 - 05 - 09      修回日期: 2012 - 10 - 11

作者简介: 龙礼 ( 1987 - ) , 男 , 博士生 , 主要研究方向: 引信智能化与灵巧化技术 , E-mail: longliv5mail@ 163. com;

通讯作者: 张合 ( 1957 - ) , 男 , 教授 , 博士生导师 , 主要研究方向: 引信新探测技术、引信智能化与灵巧化技术 , E-mail: hezhangz@ mail. njust. edu. cn。

引文格式: 龙礼 , 张合 , 丁立波. 三维磁传感器最大似然估计椭球拟合补偿算法 [J]. 南京理工大学学报 , 2013 , 37 ( 5 ) : 716 - 719.

投稿网址: <http://njlgdxxb.paperonce.org>

磁传感器以其低价格、高性能优点在姿态探测方面占据着重要地位,在商业和军事方面的应用也越来越广泛。在已知地球磁场参数的条件下,通过分析地球磁场坐标系和三维磁传感器坐标系之间的转换关系和姿态角解算,可以得到精确的姿态角信息<sup>[1]</sup>。然而,磁传感器的测量结果受到多种误差的影响,这使得姿态角的解算精度大打折扣。文献[2]介绍了一种基于最小二乘法的椭球拟合校准算法,补偿效果明显,但无法解决从椭球矩阵到补偿矩阵的转换。文献[3]通过二步法对磁传感器误差进行校正,得到了补偿矩阵,但由于两步校正并非互相独立,精度不高。本文在此基础上,利用最大似然估计法分析误差方程,建立磁传感器误差的校正矩阵,该算法以二步法的结果为初值,进行迭代计算,可直接得到补偿矩阵。

## 1 三维磁传感器误差分析

三维磁传感器的误差来源主要包括传感器附近的磁化材料受到地球磁场影响产生的磁场畸变、永久磁性的铁磁材料产生的磁场影响以及磁传感器安装工艺的限制<sup>[4]</sup>。本文对弹体环境下存在的各种误差因素进行分析,将三维磁传感器的误差归纳为以下几个方面。

(1) 硬磁干扰和软磁干扰:硬磁干扰是由传感器周围的具有永久磁性的铁磁性材料引起的,其大小和方向是固定的,不随位置和方向的变化而变化,其误差影响可设为矢量  $b_h$ 。软磁干扰是传感器附近的磁化物质受到地球磁场影响产生的磁场畸变,软磁干扰的作用力的方向与软铁与传感器的相互位置有关,其大小与软铁材料、软铁的姿态、激励磁场、软铁与磁传感器的距离有关<sup>[5]</sup>。其误差矩阵为对称矩阵

$$C_s = \begin{bmatrix} 1 + a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{xy} & 1 + a_{yy} & a_{yz} \\ a_{xz} & a_{yz} & 1 + a_{zz} \end{bmatrix}$$

式中:  $a_{ij}$  ( $i = x, y, z$  和  $j = x, y, z$ ) 表示  $i$  方向上的磁场分量在  $j$  方向上的软磁误差系数。软磁干扰与硬磁干扰的综合误差可以表示为

$$H' = C_s H_i + b_h \quad (1)$$

式中:  $H'$  为软硬磁场畸变后地磁矢量,  $H_i$  为真实磁场。

(2) 标定因数不一致:由于标定技术条件的限制,对传感器的标定因素造成的误差可用灵敏

度对角阵  $C_k$  表示。

(3) 传感器轴非正交:由于制作及安装水平的限制,三维传感器的三个轴并非完全正交的对应于一个空间直角坐标系,如图 1 所示。传感器轴非正交造成的误差可以用  $C_n$  表示

$$C_n = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma} & \cos \beta & \cos \gamma \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

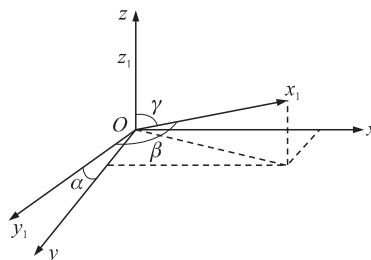


图 1 地磁传感器空间坐标系

## 2 三维磁传感器误差模型

根据前面的介绍,三维磁传感器的测量值  $H_m$  与真实值  $H_i$  的关系可表示为

$$H_m = C_k C_n (C_s H_i + b_h) + b_o + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

可进一步可改写成

$$H_m = S H_i + b + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

式中:  $S = C_k C_n C_s$ ,  $b = C_k C_n b_h + b_o$  为测量系统的零偏,  $\varepsilon_i$  测量噪声误差。需要注意的是,三维磁传感器还存在其他误差来源,但误差类型都可以归类到式(4)中的  $S$  和  $b$  两类,所以通过式(4)可以准确地分析三维磁传感器的误差。

根据文献[6, 7]的推导,知道  $H_m$  的轨迹为椭球面。其椭球方程可以表示为

$$H_m = R_L S_L H_i^L + b + \varepsilon_i \quad (5)$$

式中:  $b$  表示椭球球心的位置,  $S = R_L S_L V_L'$ ,  $R_L$  为椭球的旋转矩阵,  $S_L$  为椭球的长短轴缩放。而  $V_L$  在参数求解过程中并不会参与计算,  $V_L$  可看成将球体  $H_i$  的坐标系由原坐标系转化成  $L$  坐标系,所以三维磁传感器的误差模型可以由  $R_L$ 、 $S_L$ 、 $b$  表示。

## 3 三维磁传感器误差补偿算法

本文使用最大似然估计法对式(5)中的参数进行求解,根据式(4)

$$H_m - (R_L S_L H_i^L + b) = \varepsilon_i$$

由于传感器的噪声误差  $\varepsilon_i$  服从正态分布(设其均

值为 0, 方差为  $\sigma^2$ ) , 则传感器测量值的概率密度函数也服从正态分布, 即

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow (H_m - (R_L S_L H_i^L + b)) \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow H_m \sim N(R_L S_L H_i^L + b, \sigma^2) \quad (6)$$

似然函数为

$$L(H_1^L, H_2^L, \dots, H_n^L | R_L S_L H_i^L + b, \sigma^2) = (1/2\pi\sigma^2)^n \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n \| (H_m - b) - R_L S_L H_i^L \|^2}{2\sigma^2}\right)$$

求最大似然估计值的问题可以转换为求似然函数最大值问题, 通过对似然函数取对数可以转化成最小值问题

$$\min \sum_{i=1}^n \| (H_m - b) - R_L S_L H_i^L \|^2 \quad (7)$$

式(7)的取最小值等价于椭圆面上的点  $(H_m - b)$  拟合成椭圆面  $(R_L S_L H_i^L)$  那么, 也可把式(7)改写成球面上的点  $(S_L^{-1} R_L^T (H_m - b))$  拟合成球面  $H_i^L$  即

$$\min \sum_{i=1}^n \| S_L^{-1} R_L^T (H_m - b) - H_i^L \|^2 \quad (8)$$

经过简单变换可将(8)写为

$$\min \sum_{i=1}^n \| S_L^{-1} R_L^T (H_m - b) - C \|^2 \quad (9)$$

其中  $\| H_i^L \|^2 = C^2$  为真实磁场强度, 假设  $(R_L, S_L, b)$  为式(9)的解, 由于

$$\| V_L S_L^{-1} R_L^T (H_m - b) \| = \| S_L^{-1} R_L^T (H_m - b) \|^2$$

可将(9)简化为

$$\min \sum_{i=1}^n \| T(H_m - b) - C \|^2 \quad (10)$$

其解为  $(T, b)$  , 并且有奇异值分解  $T = U_1 S_1 V_1^T$  , 则式(9)的解  $R_L = V_1, S_L = S_1^{-1}$  。式(5)中参数可通过求解式(10)和分解  $T$  得到, 而式(10)可通过牛顿优化法进行求解, 其具体步骤可以归纳为:

(1) 给定终止误差值  $0 \leq \xi \leq 1$  , 初始点  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  , 令  $k=0$  ;

(2) 计算  $g_k = \nabla f(x_k)$  , 若  $\| g_k \| < \xi$  , 停算, 输出  $x^* = x_k$  ;

(3) 计算  $G_k = \nabla^2 f(x_k)$  , 并求解线性方程组的解  $d_k: G_k d_k = -g_k$  ;

(4) 令  $x_{k+1} = x_k + d_k$  ,  $k = k+1$  , 转二步;

其初值  $x_0$  可以用二步最小二乘法<sup>[3, 8]</sup>拟合得到, 利用 matlab 软件编程对式(10)进行求解, 得到参数解  $(R_L, S_L, b)$  , 进而可得到  $L$  坐标系中误差补偿方程

$$H_i^L = S_L^{-1} R_L^T (H_m - b) \quad (11)$$

但是磁姿态探测模块需要的数据为  $H_i$  , 由前面的推导可知  $H_i^L = V_L^T H_i$  , 将式(11)的计算结果  $H_i^L$  和磁场实际值  $H_i$  用最小二乘法拟合, 可以得到  $V_L^T$  。从而得到磁传感器误差补偿方程为

$$H_i = V_L S_L^{-1} R_L^T (H_m - b) \quad (12)$$

## 4 三维传感器误差补偿算法验证

首先利用仿真对算法进行验证。假设地磁场强度  $H = 48\ 152$  nT, 磁偏角  $\xi = -4.57^\circ$  , 磁倾角  $\xi = 44.57^\circ$  ,  $S_k = \text{diag}(1, 0.9, 1.2)$  ,

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2^\circ \\ 87.6^\circ \\ 87^\circ \end{bmatrix}, \mathbf{b}_h = \begin{bmatrix} 700 \\ 750 \\ 800 \end{bmatrix} \text{ nG}, \mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} 900 \\ 850 \\ 750 \end{bmatrix} \text{ nG},$$

$$C_s = \begin{bmatrix} 1.23 & 0.23 & 0.32 \\ 0.23 & 1.45 & 0.45 \\ 0.32 & 0.45 & 1.56 \end{bmatrix}.$$

令弹体绕弹体坐标系的三个坐标轴先分别旋转一周再同时旋转一周, 根据地磁传感器的综合误差模型, 即式(3), 以  $1^\circ$  为间隔产生一组叠加了各种误差的地磁传感器输出数据。

通过最大似然估计对传感器数据进行拟合, 拟合椭圆面如图 1 所示, 粗线表示传感器输出数据, 椭圆为拟合的误差模型。利用牛顿优化法获得的补偿参数, 并对传感器输出数据进行补偿, 补偿结果如图 2 所示。通过仿真可以看出椭圆误差模型可以描述各种来源的误差, 最大似然估计法补偿效果比较明显, 输出精度控制在 2% 以内。

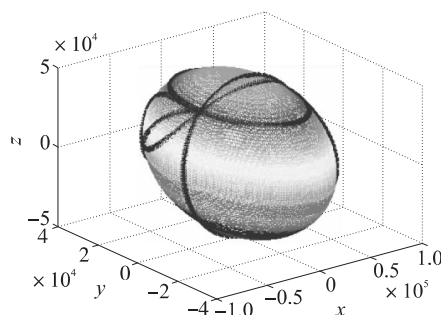


图 2 拟合模型图

为了验证算法的有效性, 设定设偏航角为  $90^\circ$  , 俯仰角为  $-33.1^\circ$  , 在设置各种干扰的三轴无磁转台上利用三维磁传感器模块测得一组数据, 利用文中方法进行补偿, 补偿前后的总磁场强度如图 4 所示, 可以看到, 补偿后的磁场强度基本稳定在真实磁场附近。补偿前后的滚转角误差如图 5 所示, 通过补偿, 滚转角误差由最大  $27^\circ$  减小到

1°。补偿前后的俯仰角误差如图 6 所示,通过补偿,俯仰角误差由最大 13°减小到 2.2°。滚转角误差和俯仰角误差均大幅度减小。仿真和实验验证了椭球模型的正确性,以及补偿算法的有效性。

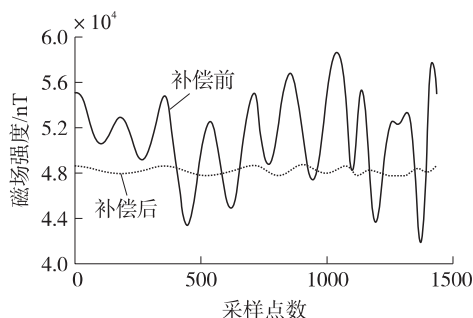


图 3 补偿后总磁场强度对比

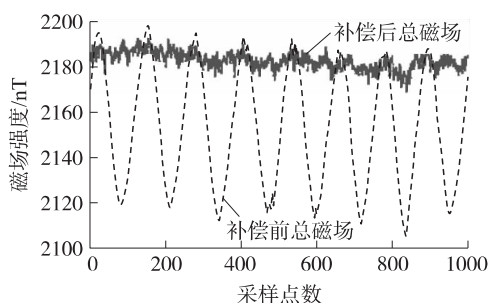


图 4 补偿前后总磁场强度对比

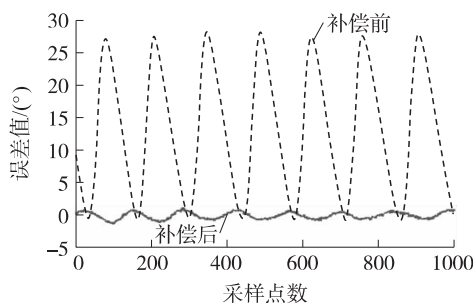


图 5 滚转角误差校正效果图

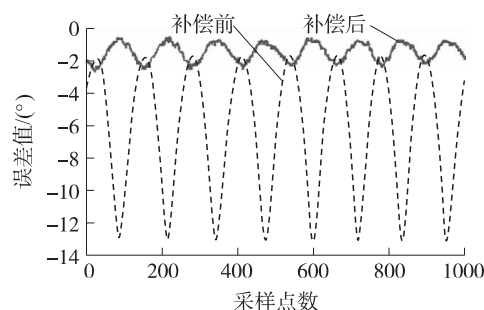


图 6 俯仰角误差校正效果图

## 5 结论

本文根据三维磁传感器的椭球模型,利用最大似然估计算法推导误差模型的补偿方程,运用

牛顿最优化求解补偿参数,经过仿真和实验可得以下结论:(1)通过分析三维磁传感器各种误差来源所建立的椭球误差模型,不仅能够描述软硬磁干扰、非正交误差、安装误差、零漂等已知误差,并且能够归纳其他未知误差来源。(2)通过最大似然估计对传感器数据进行拟合,以二步法的结果为初值,利用牛顿优化法获得的椭球补偿参数可以直接对误差进行补偿,省去了将椭球系数转化为补偿矩阵的复杂计算,同时能提高解算精度。经过实验验证,补偿后的滚转角精度提高 10 倍以上,俯仰角精度提高 5 倍以上,补偿结果比较理想,能够满足相关需求。

## 参考文献:

- [1] Pylvanainen T. Automatic and adaptive calibration of 3D field sensors [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2007, 32(4): 575-587.
- [2] 黄学功,王灵. 地磁信号检测系统误差分析与补偿方法研究[J]. *兵工学报*, 2011, 32(1): 33-36.  
Huang Xuegong, Wang Jiong. Error analysis and compensation methods for geomagnetic signal detection system [J]. *Acta Armamentarii*, 2011, 32(1): 33-36.
- [3] Alonso R, Shuster M. Complete linear attitude independent magnetometer calibration [J]. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 2002, 50(4): 477-490.
- [4] 杨新勇,黄圣国. 磁罗盘的罗差分析与验证[J]. *电子科技大学学报*, 2004(5): 47-55.  
Yang Xinyong, Huang Shengguo. Magnetic deviation analysis and verification for magnetic compass [J]. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 2004(5): 47-55.
- [5] Lay D C(美). 线性代数及其应用[M]. 刘深泉译. 北京: 机械工业出版社, 2011.
- [6] Gebre D E. Magnetometer auto calibration leveraging measurement locus constraints [J]. *Journal of aircraft*, 2007, 44(4): 1361-1368.
- [7] Munsch M, Boulange D. Magnetic mapping for the detection and characterization of UXO: Use of multi-sensor fluxgate 3-axis magnetometers and methods of interpretation [J]. *Journal of Applied Geophysics*, 2007, 61(4): 168-183.
- [8] Fitzgibbon A, Pilu M, Fisher R B. Direct least square fitting of ellipses [J]. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1999, 21(5): 476-480.