

HW11-1

古宜民

2019.10.27

题目

计算 2 维正方格子中 GSAW 的指数值,并定性地加以讨论。

分析&算法

理论分析

对于这道题目，只要按照讲义上的内容对GSAW进行模拟，记录行走历史，再按要求求出 N 和 $\langle r^2 \rangle$ ，然后进行分析即可。为了提高计算效率，使用权重法模拟大量行走。使用Monte-Carlo方法，设链长为 N ，进行 M 次随机行走。在每次随机行走中，需要记录的是每一步 $n(0 \leq n \leq N+1)$ 时粒子到远点的距离 r ，以及当前点的权重。之后对 M 次模拟求平均值，即可得到所需要的 $\langle r^2 \rangle$ 。

待求的指数值理论为

$$\langle r^2(N) \rangle = aN^{2\nu}(1 + bN^{-\Delta})$$

在 N 不大的情况可以忽略高阶修正，从而可以通过 $\log \langle r^2(N) \rangle - \log N$ 对数曲线作图，并用比值法或线性拟合法求出斜率，即为 $k = 2\nu$ 。

模拟实现

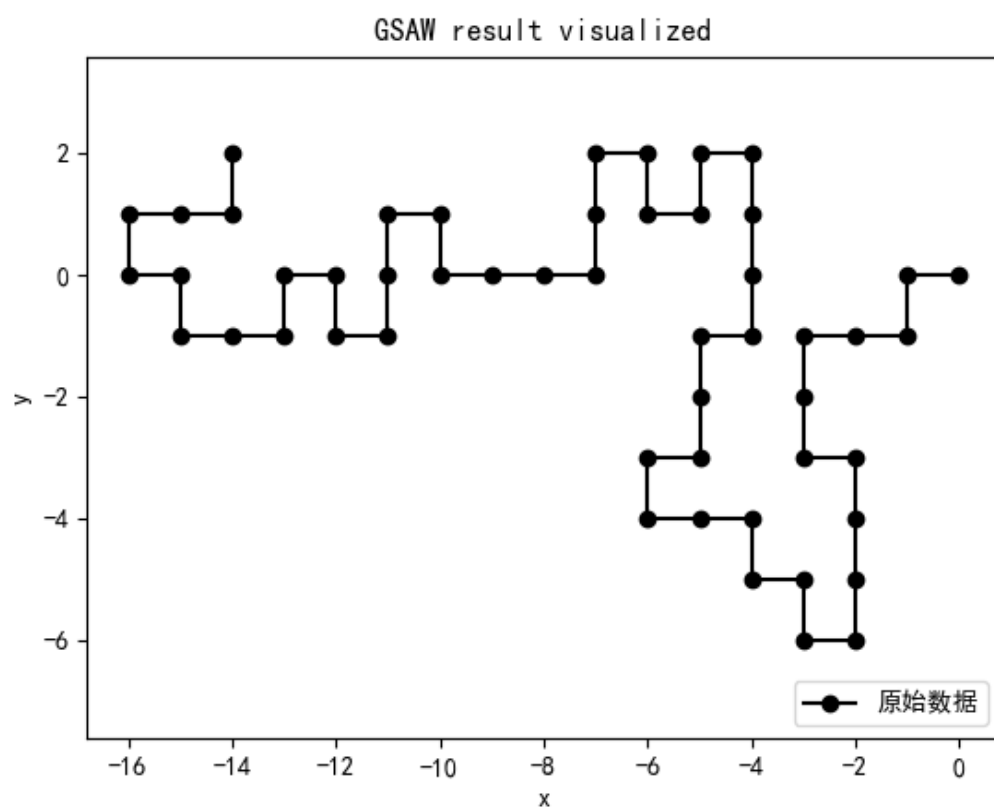
程序实现上，对于每次长度为 N 的随机行模拟，需要记录全部的历史，并在模拟过程中，每新走一步，都要检测四周是否有之前走过而不能再经过的点。如果没有可走的路径，那么本次SAW模拟失败。如果使用最少的内存，可以用 $O(N)$ 空间记录历史，但是查找时需要 $O(N^2)$ 的时间对历史进行线性查找。而这是很浪费时间的。如果使用空间换时间，则可以使用一个 $(2N)^2$ 大小的地图数组来记录历史，这样可以以常数时间进行查找，但是内存使用就要到 $O(N^2)$ 量级了。如果 $N=10000$ ，就需要1.5G内存。但综合考虑，如果 N 很大时，限制因素是SAW失败的概率非常大， $N=300$ 时基本需要百余次左右尝试才能成功，而 $N=500$ 时模拟根本无法得到一组成功的SAW。因此用时间换取空间是非常合适的。

计算结果

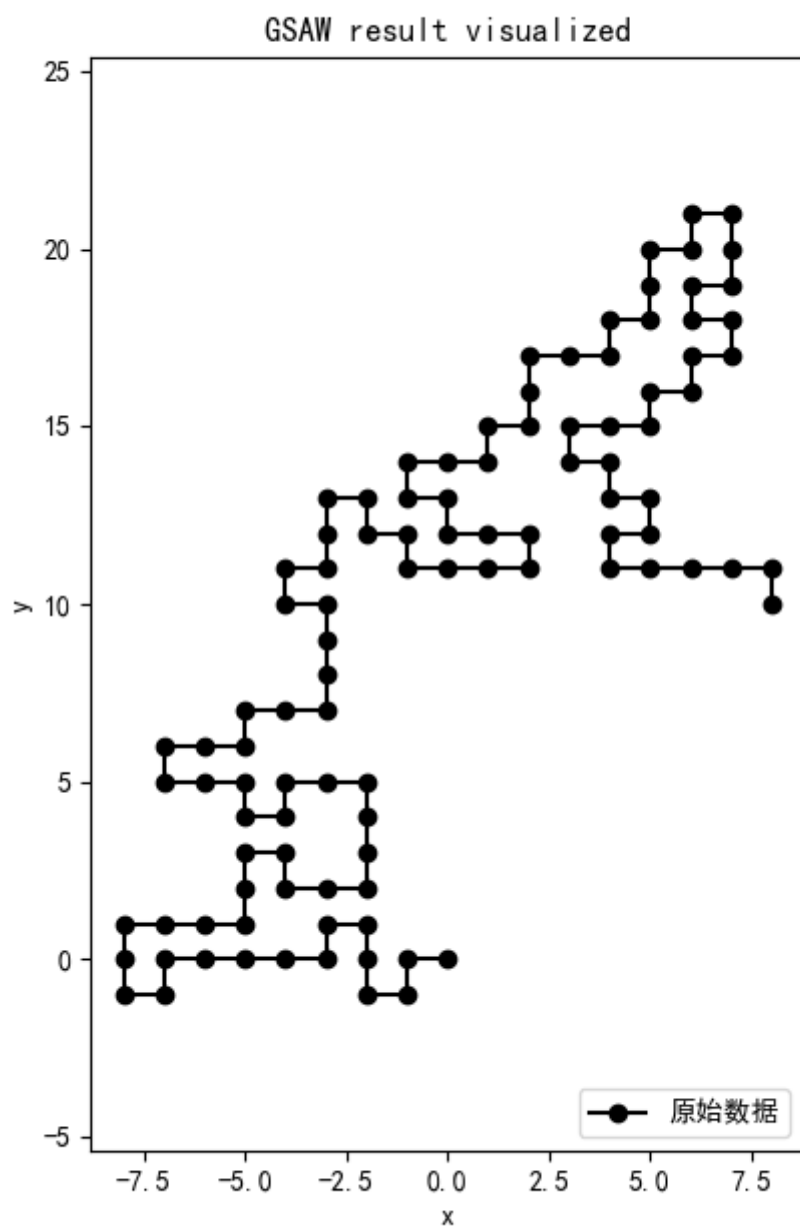
结果概览

打印出整条SAW路径并作图，得到以下图像：

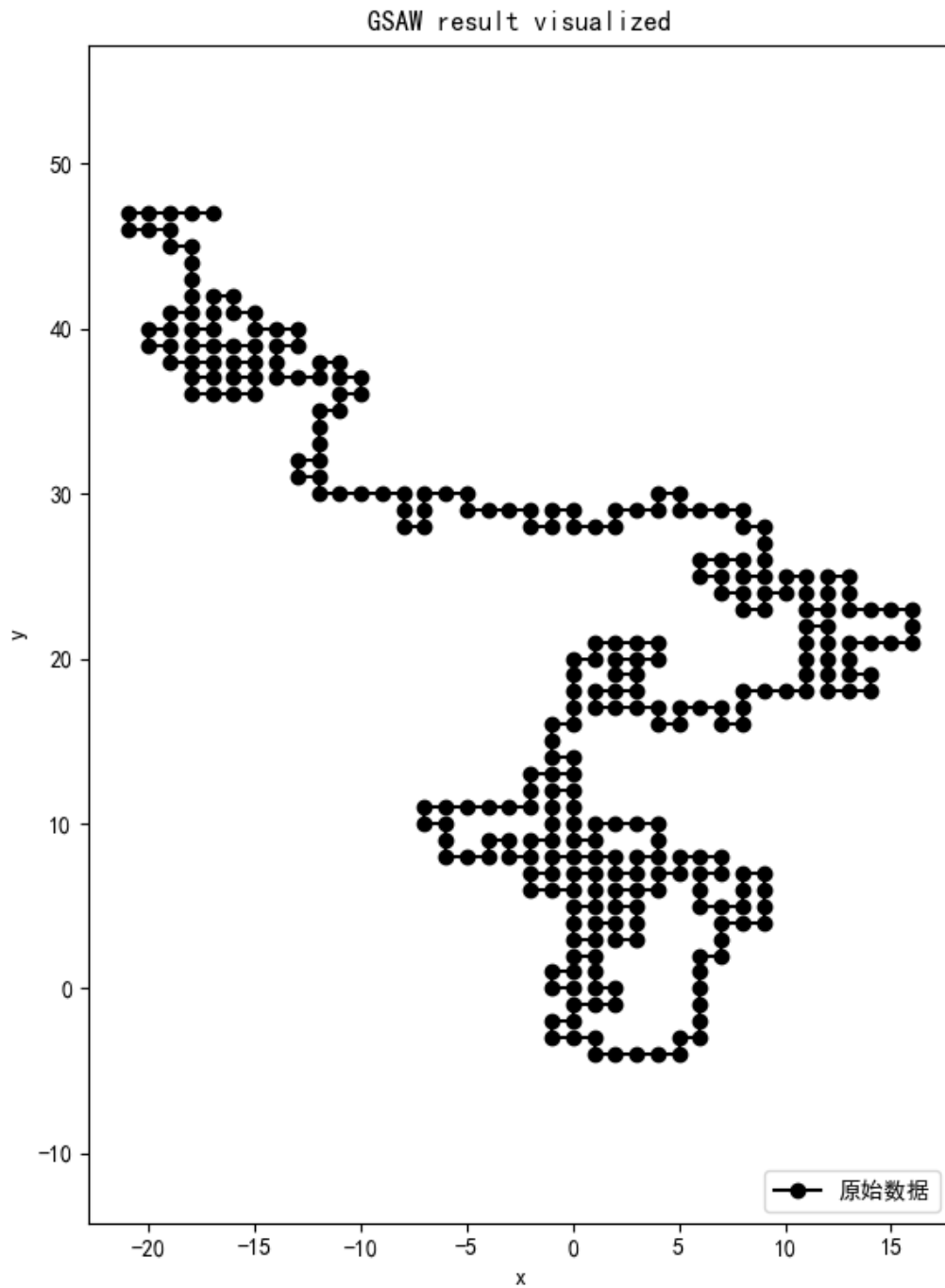
长度 $N=50$



N=100



N=300

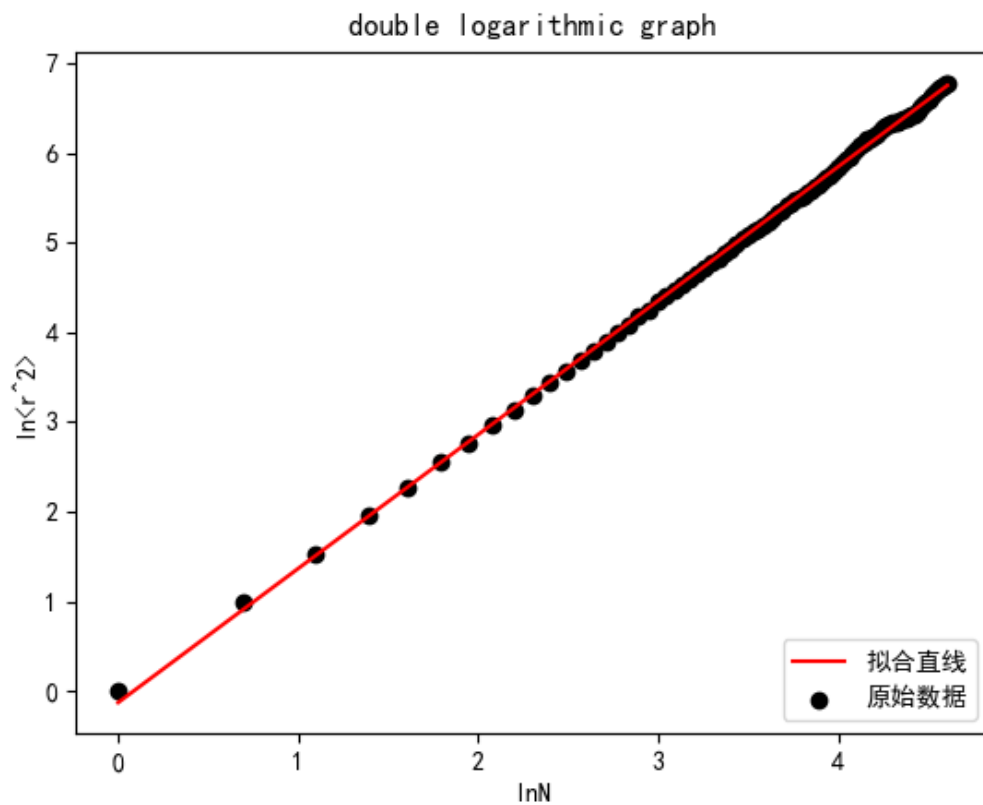


从图片可以直观的看到SAW自规避的特点。

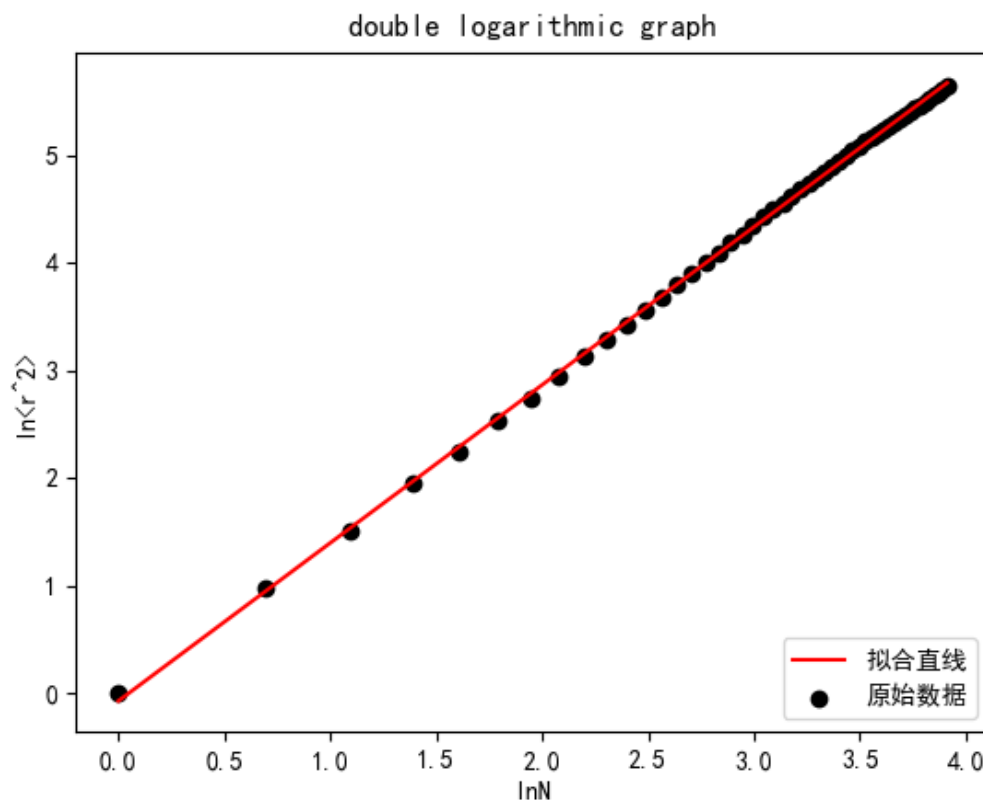
$\langle r^2(N) \rangle$ 随 N 变化

使用对数坐标对 $\log \langle r^2(N) \rangle - \log N$ 作图如下：

$N=100$ ，Monte-Carlo次数 $M=3000$ ，拟合斜率 1.495



N=50, M=5000, 拟合斜率1.468



可见结果为对数坐标中的直线。并且拟合得到的斜率（除以2之后）与二维SAW的理论值0.75相符合。N=100时，拟合得到的斜率为0.748，与理论值十分接近。

结论&其他

本实验中使用了RK方法模拟了正弦外力场中粒子的布朗运动，并计算相关物理量与理论值进行对比。整体结果是符合理论的，但也存在着与理论不相符的地方，还需进一步深入研究。