

# 网络流

## 模型与例题

### 进阶篇

清华大学计算机系 胡泽聪

无需多言。

## 区间选择

对于长度为 $n$ 的数组，我们设立 $n + 1$ 个点构成一条链，相邻的点之间连边，费用为对应数组中元素的值。再从 $S$ 向前 $n$ 个点，从后 $n$ 个点向 $T$ 连边，一条增广路就对应一个区间。

非常简洁而且直观模型。

然而，简洁却不简单。

# Array Transformations<sup>1</sup> - 题意

给定序列 $a$ ，记 $a$ 的元素个数为 $n$ 。

称一次变换为：选定区间 $[i, j]$ ，满足 $1 \leq i \leq j \leq n$ ，对序列 $a$ 在区间中的每个数减1，如果已经为0则不操作。这样一次变换的代价为 $j - i + 1$ 。

对于给定序列 $a$ ，最大变换次数 $k$ 和最大代价和 $m$ ，求：在使用不超过 $k$ 次变换，总变换代价不超过 $m$ 的前提下， $a$ 中最大元素的最小值是多少。

$n \leq 250$ 。

---

<sup>1</sup>[http://community.topcoder.com/stat?c=problem\\_statement&pm=10428](http://community.topcoder.com/stat?c=problem_statement&pm=10428) □ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ 🔍 ↺

# Array Transformations - 模型

首先二分答案，把问题转换成判定性问题。

现在的问题是，能否在限制下使 $a$ 中最大元素不超过一个值 $p$ 。



## Array Transformations - 模型

首先二分答案，把问题转换成判定性问题。

现在的问题是，能否在限制下使 $a$ 中最大元素不超过一个值 $p$ 。

容易发现，变换的顺序并不影响最后的结果。

对于 $a_i$ ，变换的最小代价应为 $\max(a_i - P, 0)$ 。那么我们

令 $b_i = \max(a_i - P, 0)$ 。

那么限制条件实际上就是要确定不超过 $K$ 条线段，使得数轴上 $i$ 的位置被覆盖了至少 $b_i$ 次，且线段总长不超过 $M$ 。

## Array Transformations - 模型

据此可以建立下面的网络流模型：

建立标号为 $1$ 到 $n+1$ 的点，以及 $S'$ 和 $T'$ 节点。

从 $S$ 向 $S'$ 连一条容量为 $K$ 的边、从 $T'$ 向 $T$ 连一条容量为 $K$ 、费用为 $0$ 的边。

从 $i$ 号点向 $i+1$ 号点连一条容量为 $\infty$ 、容量下界为 $a_i - P$ 、费用为 $1$ 的边。

从 $S'$ 向 $1 \sim n$ 号节点、从 $2 \sim n+1$ 号节点向 $T'$ 连一条容量为 $\infty$ 、费用为 $0$ 的边。

一次变换，即一条线段 $[i, j]$ ，在网络中会

是 $S \rightarrow S' \rightarrow i \rightarrow i+1 \rightarrow \dots \rightarrow j \rightarrow T' \rightarrow T$ 的一条增广路。

如果最小费用最大可行流得到的费用不超过 $M$ ，那么答案合法。

## k-Maximum Subsequence Sum<sup>2</sup> - 题意

给定一个长度为 $n$ 的序列，有 $q$ 次操作。操作有2种：

- 1 修改一个元素的值。
- 2 查询一个区间中的最大 $k$ -子段和。

$n, m \leq 10^5$ ,  $k \leq 20$ 。

---

<sup>2</sup> <http://codeforces.com/contest/280/problem/D>



## k-Maximum Subsequence Sum - 模型

吓到了吧，这题可是大数据结构题，怎么会和网络流有关？

首先单次  $O(k^2 \log n)$  的算法是不难的，但是会超时。我们需要一个  $O(k \log n)$  的算法。

## k-Maximum Subsequence Sum - 模型

吓到了吧，这题可是大数据结构题，怎么会和网络流有关？

首先单次  $O(k^2 \log n)$  的算法是不难的，但是会超时。我们需要一个  $O(k \log n)$  的算法。

我们按照类似上题中的方法建费用流模型。显然最大费用最大流就是答案。但这样反而比暴力还慢。

不妨考察连续最短路算法的执行过程：我们每次是在干什么？

## k-Maximum Subsequence Sum - 模型

结合这个模型的性质，我们可以发现我们每次要么选择一个与已有区间完全不相交的区间，要么从已有区间中间挖掉一段。

换句话说就是：每次贪心选择一个最大和子区间，然后取负。

我们还可以发现，每次都会使区间数 $+1$ 。因此我们可以用线段树维护最大子段和，并支持取负操作，然后每次询问就在线段树上询问 $k$ 次，之后复原即可。修改也很容易实现。

Fin.

谢谢大家！欢迎课后交流。