# 网络流
## 模型与例题

清华大学计算机系　胡泽聪

# 目录

## 预备知识

为了能听懂下面的题，你需要：

- 了解网络流模型的定义与含义。

## 预备知识

为了能听懂下面的题，你需要：

- 了解网络流模型的定义与含义。
- 熟悉至少一种求网络流最大流的算法。如Dinic或者SAP。

## 预备知识

为了能听懂下面的题，你需要：

- 了解网络流模型的定义与含义。
- 熟悉至少一种求网络流最大流的算法。如Dinic或者SAP。
- 熟悉至少一种求费用流最小费用最大流的算法。如连续最短路算法或者ZKW改进版费用流。

# 一些定义

- $x \to y : w$代表从$x$到$y$容量为$w$的边。
- $x \to y : w, c$代表这条边有$c$的费用。
- $x \to y : [l, r]$代表这条边下界为$l$上界为$r$。
- $S$代表源点，$T$代表汇点。

由于网络流和费用流的算法基本上是固定的，故如非必要，则不会写出题目的数据范围。

# 常用方法

- 增设源点汇点。
- 增设超级源点超级汇点。
- 拆点限流。
- 拆点表出入。
- ……

# 流量表示变迁

最直观的应用。
用流量表示事物的变迁。
例如，某条路上走过了多少人，某个仓库流入流出的物品量，等等。

## 流量表示变迁

最直观的应用。
用流量表示事物的变迁。
例如，某条路上走过了多少人，某个仓库流入流出的物品量，等等。
也可以说是流量代表一种方案。

## Ombrophobic Bovines [1] - 题意

给定一张的无向图，每条边有长度。点$i$处有$a_i$头牛，以及一个能容纳$b_i$头牛的牛棚。牛可以沿边移动，每条边上可以同时有任意头牛经过。一头牛经过一条边所需时间即为道路长度。

给出一个将牛分配到牛棚的方案，并最小化所需移动时间$T$。

[1] *http://poj.org/problem?id=2391*

## Ombrophobic Bovines - 模型

二分答案。

POJ2391

## Ombrophobic Bovines - 模型

二分答案。
建立源点汇点。对每个点拆点，一个表示牛，一个表示牛棚。

## Ombrophobic Bovines - 模型

二分答案。

建立源点汇点。对每个点拆点，一个表示牛，一个表示牛棚。

对于一堆点，如果其最短路不超过二分的答案，则在其拆出的点之间连边，容量为无穷大。

如果满流则可行。

## Ombrophobic Bovines - 模型

二分答案。
建立源点汇点。对每个点拆点，一个表示牛，一个表示牛棚。
对于一堆点，如果其最短路不超过二分的答案，则在其拆出的点之间连边，容量为无穷大。
如果满流则可行。
不拆点会错。（想想为什么？）

POJ1149

## PIGS [2] - 题意

有$m$个猪圈，每个猪圈里初始时有若干头猪。一开始所有猪圈都是关闭的。

依次来了$n$个顾客，每个顾客分别会打开指定的几个猪圈，从中买若干头猪。

每个顾客分别都有他能够买的数量的上限。

每个顾客走后，他打开的那些猪圈中的猪，都可以被任意地调换到其它开着的猪圈里，然后所有猪圈重新关上。

问最多总共能卖出多少头猪。

$1 \le m \le 1000$、$1 \le n \le 100$。

[2] *http://poj.org/problem?id=1149*

# PIGS - 模型

先考虑朴素的模型。

一共有$n$轮交易，那么我们建$n$排点，每排$m$个，代表每轮交易之前的猪圈。再对$n$个顾客设点。

## PIGS - 模型

先考虑朴素的模型。

一共有$n$轮交易，那么我们建$n$排点，每排$m$个，代表每轮交易之前的猪圈。再对$n$个顾客设点。

对于每个顾客，向汇连边，容量为购买上限。

源向第一轮的猪圈连边，容量为初始的数量。

## PIGS - 模型

先考虑朴素的模型。

一共有$n$轮交易，那么我们建$n$排点，每排$m$个，代表每轮交易之前的猪圈。再对$n$个顾客设点。

对于每个顾客，向汇连边，容量为购买上限。

源向第一轮的猪圈连边，容量为初始的数量。

对于第$i$个顾客能打开的猪圈，从第$i$轮的这些猪圈向该顾客连边，容量为无穷大。同时向第$i+1$轮的这些猪圈连边，容量同样为无穷大。

点数为$O(nm)$。

## PIGS - 模型

分开考虑每个猪圈。考虑能对其产生影响的若干顾客。
只有这些顾客才能买，也只有他们才能移动猪圈里的猪。

## PIGS - 模型

分开考虑每个猪圈。考虑能对其产生影响的若干顾客。
只有这些顾客才能买，也只有他们才能移动猪圈里的猪。
那么从源向每个猪圈的第一个顾客连边，容量为初始的数量。
每个猪圈的第$i$个顾客向第$i+1$个顾客连边，容量为无穷大。
易知两模型等价。

## POJ3281

### Dining [3] - 题意

有$a$种食物和$b$种饮料，每种食物或饮料只能供一头牛享用，且每头牛只享用一种食物和一种饮料。

现在有$n$头牛，每头牛都有自己喜欢的食物种类列表和饮料种类列表。

问最多能使几头牛同时享用到自己喜欢的食物和饮料。

[3] http://poj.org/problem?id=3281

## Dining - 模型

如果只有食物，那这就是一个二分图匹配。

## Dining - 模型

如果只有食物，那这就是一个二分图匹配。
考虑一次增广，我们会选择一头牛、一种食物和一种饮料。
那么我们设三排点，分别代表食物、牛和饮料。
喜欢的食物→牛: 1，牛→喜欢的饮料: 1。
$S \rightarrow$食物: 1，饮料$\rightarrow T:1$。

POJ3281

## Dining - 模型

如果只有食物，那这就是一个二分图匹配。
考虑一次增广，我们会选择一头牛、一种食物和一种饮料。
那么我们设三排点，分别代表食物、牛和饮料。
喜欢的食物→牛: 1，牛→喜欢的饮料: 1。
$S\rightarrow$食物: 1，饮料$\rightarrow T:1$。
看似正确，实则错误。
需要对牛拆点限流。

## 最小割

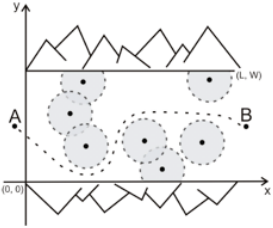
直观的应用，不好归进下面的分类中。反倒比较少见。
一般来说要使得两边断开的东西都是最小割。
可以有一些很厉害的应用。

<Unknown source>

## Escape - 题意

有一条山谷，长度为$W$，宽度为$L$。有$n$个哨兵，第$i$个哨兵的视野为以其位置为圆心半径为$r_i$的圆。

现在需要从山谷的最左侧走到最右侧而不进入任意一个哨兵的视野。问最少需要提前解决掉多少个哨兵。



<Unknown source>

## Escape - 模型

这货还能绕弯走……我们或许得绕开传统的思路。

## Escape - 模型

这货还能绕弯走……我们或许得绕开传统的思路。

实际上，有一条路径等价于，山谷没有被“封死”，不会有视野横断了山谷的宽。

## Escape - 模型

这货还能绕弯走……我们或许得绕开传统的思路。

实际上，有一条路径等价于，山谷没有被“封死”，不会有视野横断了山谷的宽。

我们对哨兵建两个点，之间连上容量为1的边，用来限流。

设山谷的下边界为源，上边界为汇。

对于两个哨兵，如果他们的视野相交，从左下的兵连向右上的兵，边权为无穷大。（对吗？）

对于视野碰到了边界的，从源或向汇连边。

<Unknown source>

## Escape - 模型

这货还能绕弯走……我们或许得绕开传统的思路。

实际上，有一条路径等价于，山谷没有被“封死”，不会有视野横断了山谷的宽。

我们对哨兵建两个点，之间连上容量为1的边，用来限流。

设山谷的下边界为源，上边界为汇。

对于两个哨兵，如果他们的视野相交，从左下的兵连向右上的兵，边权为无穷大。（对吗？）

对于视野碰到了边界的，从源或向汇连边。

实际上，我们应当从哨兵的入点连向出点。

最小割就是答案。

## 最小生成树 [4] - 题意

一张$n$个点$m$条边的图，每条边有边权。

现在在点$u$和点$v$之间加入一条权值为$L$的边。我们要使这条边既能出现在最小生成树上，又能出现在最大生成树上。

问要满足这一条件，至少需要删去多少条边。

[4] *http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2561*

## 最小生成树 - 模型

生成树和最小割有什么关系？

## 最小生成树 - 模型

生成树和最小割有什么关系？
最大生成树和最小生成树的边之间又有什么关系？

## BZOJ2561

### 最小生成树 - 模型

生成树和最小割有什么关系？
最大生成树和最小生成树的边之间又有什么关系？

考虑Kruskal算法。

为了使加入的边能出现在最小生成树上而删去的边，与为了使加入的边能出现在最大生成树上而删去的边，一定不会不重复。

## 最小生成树 - 模型

生成树和最小割有什么关系？
最大生成树和最小生成树的边之间又有什么关系？

考虑Kruskal算法。
为了使加入的边能出现在最小生成树上而删去的边，与为了使加入的边能出现在最大生成树上而删去的边，一定不会不重复。
求最小生成树时，边权小于$L$的边在这条边加入前，不能使得$u$和$v$连通。最大生成树类似。

## 最小生成树 - 模型

生成树和最小割有什么关系？
最大生成树和最小生成树的边之间又有什么关系？

考虑Kruskal算法。
为了使加入的边能出现在最小生成树上而删去的边，与为了使加入的边能出现在最大生成树上而删去的边，一定不会不重复。
求最小生成树时，边权小于$L$的边在这条边加入前，不能使得$u$和$v$连通。最大生成树类似。
即为两边的最小割之和。

## 最大权闭合子图

通常用来描述有依赖关系的若干物品的选择与否。其本质上是最小割。
假设有$n$个物品，每个有自己的收益。收益可以为负。

# 最大权闭合子图

通常用来描述有依赖关系的若干物品的选择与否。其本质上是最小割。
假设有$n$个物品，每个有自己的收益。收益可以为负。
视从$S$可达的点为选择，可达$T$的点为不选择。
$S\rightarrow$收益为正的物品:收益，收益为负的物品$\rightarrow T$:收益的绝对值。
如果$a$依赖于$b$，那么$b\rightarrow a:\infty$。
答案为所有收益为正的物品的收益之和减去最小割。

## 最大权闭合子图

通常用来描述有依赖关系的若干物品的选择与否。其本质上是最小割。
假设有$n$个物品，每个有自己的收益。收益可以为负。
视从$S$可达的点为选择，可达$T$的点为不选择。
$S\rightarrow$收益为正的物品:收益，收益为负的物品$\rightarrow T$:收益的绝对值。
如果$a$依赖于$b$，那么$b\rightarrow a:\infty$。
答案为所有收益为正的物品的收益之和减去最小割。
正确性证明：考虑一条增广路。

## NOI2006

# 最大获利 [5] - 题意

有$n$个中转站的选址，在第$i$个地址处建造中转站的代价为$p_i$。
有$m$个用户，第$i$个会在第$a_i$和$b_i$个中转站之间通讯，用户愿意支付$c_i$。
求建造方案，使得获利最大。

[5] *http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=1497*

# 最大获利 - 模型

作为网络流在NOI中的第一次亮相，难度还是非常平易近人的。
就是最大权闭合子图的直接应用。

# 最大获利 - 模型

作为网络流在NOI中的第一次亮相，难度还是非常平易近人的。
就是最大权闭合子图的直接应用。

将用户和中转站都视为物品，中转站收益为负，用户收益为正。
用户依赖于相应两个中转站。

## Order - 题意

有$n$个项目和$m$台机器，每个项目依赖于一些机器。

项目有正的收益。机器可以买，也可以租，都有各自的代价。借一次机器可以给一个项目用一次。

求最大收益。

# Order - 模型

如果机器不能借，那么就是最经典的最大权闭合子图。

## Order - 模型

如果机器不能借，那么就是最经典的最大权闭合子图。

这个题目的难点在于机器可以借。

我们先按照最大权闭合子图的模型建图。考虑一条增广路，一定是$S\rightarrow$项目$\rightarrow$机器$\rightarrow T$。

割第一条边是放弃项目，割第三条边是买机器。第二条边是无穷大。

## Order - 模型

如果机器不能借，那么就是最经典的最大权闭合子图。

这个题目的难点在于机器可以借。
我们先按照最大权闭合子图的模型建图。考虑一条增广路，一定是$S\rightarrow$项目$\rightarrow$机器$\rightarrow T$。
割第一条边是放弃项目，割第三条边是买机器。第二条边是无穷大。
如果我们设割第二条边是租机器呢？把无穷大改为租用费用。
答案是项目收益之和减去最小割。

## Biologist [6] - 题意

有$n$个点，每个可以是白色或者黑色。可以花$v_i$的代价改变第$i$个点的颜色。

有$m$条件，每个条件都是要求某一些点都是某种颜色。如果满足了第$i$个条件可以得到$g_i$的收益，没有满足则须付出$l_i$的代价。

求最大收益。

[6] *http://codeforces.com/contest/311/problem/E*

## Codeforces Round #185 (Div. 1) - E

# Biologist - 模型

没有条件的话，也就是经典模型了。
白点→ $T$:代价，$S$ →黑点:代价。

# Biologist - 模型

没有条件的话，也就是经典模型了。
白点$\rightarrow T$:代价，$S\rightarrow$黑点:代价。
我们可以也对条件建点。
如果条件是都是黑色，$S\rightarrow$条件:收益+代价。条件$\rightarrow$点: $\infty$。
如果条件是都是白色，条件$\rightarrow T$:收益+代价。点$\rightarrow$条件: $\infty$。
正确性证明同样考虑增广路。

## 二元费用问题 - 题意

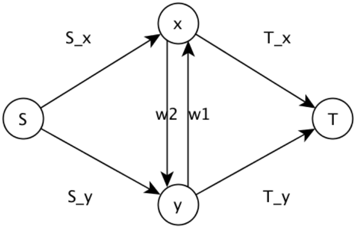
有$n$个点，选和不选各自有收益。有$m$个条件，有三种：

- 如果$x$和$y$都选了，获得$w$的收益；
- 如果$x$和$y$都没选，获得$w$的收益；
- 如果$x$和$y$都一个选了一个没选，付出$w$的代价。

求最大收益。

## 二元费用问题 - 模型

我们用类似最大权闭合子图的方法建图。
只考虑有关系的两个点，可以得出长成下面这个样子的东西。




我们的目标是确定$S_x$、$S_y$、$T_x$、$T_y$和$w$的值。

# 二元费用问题 - 模型

设选$x$的收益为$VA_x$，不选的是$VB_x$，$x$和$y$都选的收益为$EA$，都不选的收益为$EB$，一选一不选的代价为$EC$。

# 二元费用问题 - 模型

设选$x$的收益为$VA_x$，不选的是$VB_x$，$x$和$y$都选的收益为$EA$，都不选的收益为$EB$，一选一不选的代价为$EC$。

考虑每种情况：

- $x$和$y$都选。此时被割的边为$S_x+S_y$。
- $x$和$y$都没选。此时被割的边为$T_x+T_y$。
- $x$选$y$没选。此时被割的边为$S_x+T_y+w1$。
- $x$没选$y$选。此时被割的边为$T_x+S_y+w2$。

## 二元费用问题 - 模型

我们知道被割的边是损失掉的代价。所以有

$$\begin{aligned} S_x + S_y &= VB_x + VB_y + EB \\ T_x + T_y &= VA_x + VA_y + EA \\ S_x + T_y + w1 &= VB_x + VA_y + EA + EB + EC \\ T_x + S_y + w2 &= VA_x + VB_y + EA + EB + EC \\ w1 &= w2 \end{aligned}$$

其中最后一个是我们的假设。

# 二元费用问题 - 模型

我们知道被割的边是损失掉的代价。所以有

$$
\begin{aligned}
S_x + S_y &= VB_x + VB_y + EB \\
T_x + T_y &= VA_x + VA_y + EA \\
S_x + T_y + w1 &= VB_x + VA_y + EA + EB + EC \\
T_x + S_y + w2 &= VA_x + VB_y + EA + EB + EC \\
w1 &= w2
\end{aligned}
$$

其中最后一个是我们的假设。

这个方程组的自变量多于方程数，有无穷组解。

## 二元费用问题 - 模型

下面是其中一组解：

$$
\begin{aligned}
S_x &= VB_x + \frac{EB}{2} \\
T_x &= VA_x + \frac{EA}{2} \\
w1 = w2 &= \frac{EA + EB}{2} + EC
\end{aligned}
$$

答案即$\sum VA + VB + EA + EB$减去最小割。为避免小数可以给所有权值乘以2。

# 平面图对偶图

什么是平面图？

# 平面图对偶图

什么是平面图？

什么是平面图的对偶图？

## 平面图对偶图

什么是平面图？

什么是平面图的对偶图？

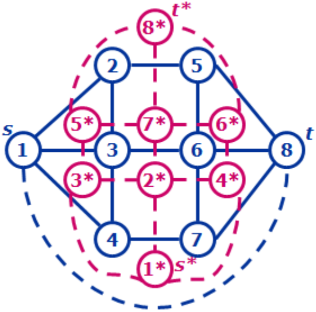
如何构造平面图的对偶图？

## 平面图对偶图

什么是平面图？

什么是平面图的对偶图？

如何构造平面图的对偶图？



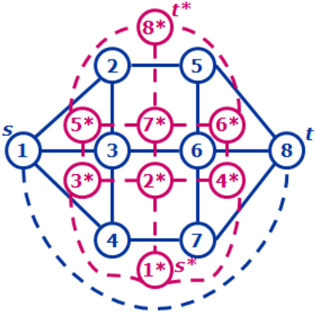
# 平面图对偶图

什么是平面图？

什么是平面图的对偶图？

如何构造平面图的对偶图？

如何把问题转换到对偶图上？



# 平面图对偶图

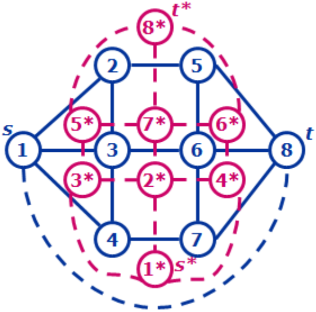
什么是平面图？

什么是平面图的对偶图？

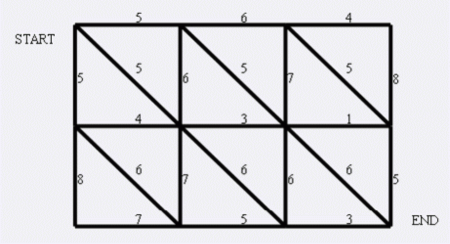
如何构造平面图的对偶图？

如何把问题转换到对偶图上？

为何要使用对偶图来求解？



## 狼抓兔子[7] - 题意




$n \times m$的类似网格的图，如上所示。求从“START”到“END”的最小割。
$n, m \leq 1000$。

[7] *http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=1001*

## 狼抓兔子 - 模型

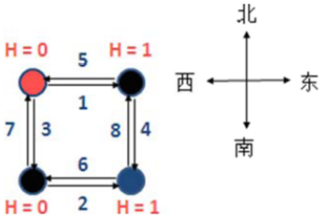
数据范围很大，直接做网络流会超时。
故转换成对偶图上的最短路。

## NOI2010 (BZOJ2007)

### 海拔 [8] - 题意

$n \times n$的网格图，每条边双向通行。已知每条边两个方向的人流量，你需要给每个点$x$设定海拔高度$h_x$。左上角的高度为0，右下角的高度为1。对于$x$到$y$的流量为$w$的边，代价为$w \times \max(0, h_y - h_x)$。求最小代价。

$n \leq 500$。




[8] *http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2007*

NOI2010 (BZOJ2007)

## 海拔 - 模型

## 海拔 - 模型

结论1 每个点的海拔非0即1。

## NOI2010 (BZOJ2007)

### 海拔 - 模型

结论1 每个点的海拔非0即1。

结论2 海拔为0的点构成一个连通块，
海拔为1的点亦同。

## NOI2010 (BZOJ2007)

# 海拔 - 模型

结论1 每个点的海拔非0即1。

结论2 海拔为0的点构成一个连通块，
海拔为1的点亦同。

其实就是求左上角和右下角的最小割。转换成对偶图上的最短路。

边的方向呢？

## NOI2010 (BZOJ2007)

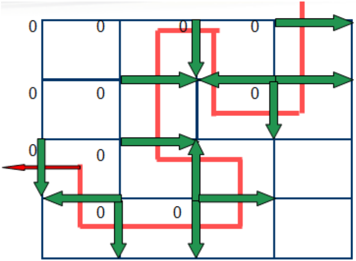
# 海拔 - 模型

结论1 每个点的海拔非0即1。

结论2 海拔为0的点构成一个连通块，
海拔为1的点亦同。

其实就是求左上角和右下角的最小割。转换成对偶图上的最短路。

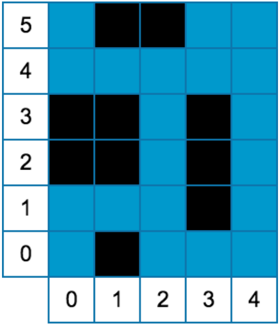
边的方向呢？



## Don’t Break The Nile [9] - 题意

$n \times m$的网格图，底部的每个格子接受1的入流量，顶部的每个格子可以流出1的流量，每个格子可以流过1的流量。图中有$k$个长方形区域是不能走流量的，这些长方形互不相交，但可以有公共边。求图的最大流。

$m \leq 1000$，$n \leq 10^8$，$k \leq 1000$。




[9] https://code.google.com/codejam/contest/3014486/dashboard#s=p2&a=2

## Don't Break The Nile - 模型

暴力怎么做？

# Don't Break The Nile - 模型

暴力怎么做？
需要拆点吗？

## Don't Break The Nile - 模型

暴力怎么做？
需要拆点吗？
虽然要，但考虑其最小割，割掉的一定是点内部的边。

## Don't Break The Nile - 模型

暴力怎么做？

需要拆点吗？

虽然要，但考虑其最小割，割掉的一定是点内部的边。

割掉内部边相当于把格子填成黑色。

Codejam Round 2 2014 C

# Don't Break The Nile - 模型

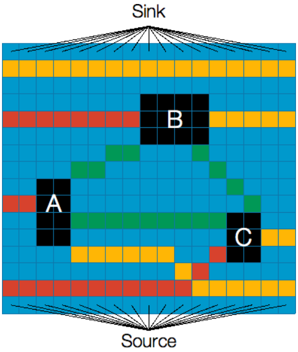
暴力怎么做？

需要拆点吗？

虽然要，但考虑其最小割，割掉的一定是点内部的边。

割掉内部边相当于把格子填成黑色。

可以转换成河两岸之间的最短路问题，如右图。



## 费用递增

这类模型是一类费用流模型，它代表着某个东西可以选择若干次，而次数每加1所需要的代价是递增的。一种常见情况是选择$x$的代价为$x^2$。

## 球队收益[10] - 题意

有$n$支球队，有些球队之间已经打了一些比赛了，现给出每个球队的数据$win$、$lose$、$C$和$D$，分别表示已胜场数、已负场数，以及计算收益的两个系数。

一支球队的收益为$Cw^2 + Dl^2$，其中$w$和$l$是最后胜负的场数。接下来还有$m$场比赛。给出接下来$m$场比赛的对阵情况，求出$n$支球队收益和的最小值。接下来$m$场比赛的胜负是你可以决定的。

[10] *http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=1449*

## 球队收益 - 模型

应该可以想到是费用流模型，关键在于建模。

## 球队收益 - 模型

应该可以想到是费用流模型，关键在于建模。

一场比赛必然有一个赢家和一个输家，但是似乎不太好同时在模型中表示。不妨先假设后面的$m$场比赛中双方都是输家，这样我们只要在模型中表示一方成为赢家即可。

## 球队收益 - 模型

应该可以想到是费用流模型，关键在于建模。

一场比赛必然有一个赢家和一个输家，但是似乎不太好同时在模型中表示。不妨先假设后面的$m$场比赛中双方都是输家，这样我们只要在模型中表示一方成为赢家即可。

至此应该有一个初步的模型了：对于$n$支球队和$m$场比赛各建一个点，从源向每场比赛连流量1费用0的边，从比赛向参与这场比赛的两支队伍各连一条流量1费用0的边。剩下的就是队伍收益的费用表示了。

## 球队收益 - 模型

我们考虑费用的增量：多赢一场比赛产生的收益。

即$(C(w+1)^2 + D(l-1)^2) - (Cw^2 + Dl^2) = 2wC - 2lD + C + D$。

## 球队收益 - 模型

我们考虑费用的增量：多赢一场比赛产生的收益。

即$(C(w+1)^2+D(l-1)^2)-(Cw^2+Dl^2)=2wC-2lD+C+D$。

对于第$i$支队伍，假设后$m$场中$i$参加的有$x$场，那么最初$w=win$，$l=lose+x$，之后每赢一场$w$加一，$l$减一。我们从第$i$支队伍的点向汇连$x$条边，分别代表第$i$支队伍赢了$j$场比赛时相对赢$j-1$场时收益的增量。由于增量一定越来越大，所以流量最先流过的一定是费用较小的边，即$j$最小的边。

JSOI2009 (BZOJ1449)

## 球队收益 - 模型

我们考虑费用的增量：多赢一场比赛产生的收益。
即$(C(w+1)^2 + D(l-1)^2) - (Cw^2 + Dl^2) = 2wC - 2lD + C + D$。
对于第$i$支队伍，假设后$m$场中$i$参加的有$x$场，那么最初$w = win$，$l = lose + x$，之后每赢一场$w$加一，$l$减一。我们从第$i$支队伍的点向汇连$x$条边，分别代表第$i$支队伍赢了$j$场比赛时相对赢$j-1$场时收益的增量。由于增量一定越来越大，所以流量最先流过的一定是费用较小的边，即$j$最小的边。

至此模型完成，答案即所有队伍最初收益+最小费用最大流的费用。

## 修车 - 题意

有$n$辆车和$m$名修理工，一名修理工在一个时刻只能修一辆车，并且在修完一辆之后才能开始修下一辆。已知每位修理工修每辆车的时间，求顾客的最小平均等待时间。顾客的等待时间为他的车被修好的时间。

# 修车 - 模型

所求即最小的总等待时间。假设已经确定了每辆车被谁修理，以及每个人修理的顺序，如何计算代价？

## 修车 - 模型

所求即最小的总等待时间。假设已经确定了每辆车被谁修理，以及每个人修理的顺序，如何计算代价？

对于每个人分开算，如果一个人一共修理$k$辆车，那么修的第$i$辆车对于代价的贡献为$k-i+1$倍。

此处费用递减，而且我们无法确定一共有多少车！怎么办？

SCOI2007 (BZOJ1070)

## 修车 - 模型

倒着考虑。我们考虑一辆车是倒数第几个修的。
对车和修理工的倒数第几个“修车位”设点，连边：
车$\rightarrow$第$k$个修车位: $(k-i+1)$倍时间。
最小费用最大流即为答案。

# 剪刀石头布 [11] - 题意

有$n$个人，两两之间进行一次比赛。有些比赛已经进行了，有些还没有。我们用一个竞赛图来表示输赢情况，一场比赛的有向边从输家连向赢家。

你可以决定尚未进行的比赛的输赢情况，使得下面这种三元组的数量最多：$(a, b, c)$表示一个无序三元组（$(a, b, c)$的任意排列都算同一种），其中存在有向边$a \to b$、$b \to c$、$c \to a$。

需要输出方案。$n \leq 100$。

[11] *http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2597*

WC2007 (BZOJ2597)

## 剪刀石头布 - 模型

有种即视感？似乎和上面的题很像，但是这里的东西似乎更不好表示。不如我们先考虑，给定这样一个图，求这样的三元组的数目。

WC2007 (BZOJ2597)

## 剪刀石头布 - 模型

有种即视感？似乎和上面的题很像，但是这里的东西似乎更不好表示。不如我们先考虑，给定这样一个图，求这样的三元组的数目。

从$n$个点中任选3个的方案数为$\binom{n}{3}$，考虑怎么样的三元组是不合法的：这样的三元组的导出子图中一定有一个点的入度为2。设第$i$个点的入度为$d_i$，那么不合法的三元组数为$\sum\binom{d_i}{2}$。所有合法方案为：

## 剪刀石头布 - 模型

$$
\begin{aligned}
& \binom{n}{3} - \sum \binom{d_i}{2} \\
= \quad & \binom{n}{3} - \frac{1}{2} \sum (d_i(d_i - 1)) \\
= \quad & \binom{n}{3} + \frac{1}{2} \sum d_i - \frac{1}{2} \sum d_i^2
\end{aligned}
$$

WC2007 (BZOJ2597)

## 剪刀石头布 - 模型

$$
\begin{aligned}
& \binom{n}{3} - \sum \binom{d_i}{2} \\
= \quad & \binom{n}{3} - \frac{1}{2} \sum (d_i(d_i - 1)) \\
= \quad & \binom{n}{3} + \frac{1}{2} \sum d_i - \frac{1}{2} \sum d_i^2
\end{aligned}
$$

注意$\sum d_i$是定值，就是$\binom{n}{2}$。那么剩下的就和上面那题一模一样了吧？至于输出方案，只要看比赛的点连出的边连向了哪个点即可。

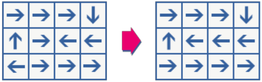
# 流量平衡

网络流模型中，除了源点和汇点以外，每个点都满足流量平衡条件。
即，每个点流入的流量等于其流出的流量。
利用这个性质来解决一些拥有类似性质的题目。

## TCO2013 R1AL3 / BZOJ3171

### DirectionBoard [12] - 题意

一块$n \times m$的地图，每个格子内有一个箭头。
从某个格子出发，沿着箭头的方向走，从一侧出了边界就从另一侧进入。
如果从任意一个格子出发都能回到出发的格子，那么地图就是合法的。
给定地图，求至少要改变几个格子的箭头的方向，才能使得地图合法。



[12] *http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3171*

## DirectionBoard - 模型

先考虑判断一个地图是否合法。

## DirectionBoard - 模型

先考虑判断一个地图是否合法。

把每个格子抽象成节点，向箭头指向的格子连边。
每个格子可以沿箭头回到自己，等价于模型中的每个节点都在一个环中。
而每个节点的出度为1，所以即图中每个连通块都是环。也即每个点的入度为1，出度为1。

## DirectionBoard - 模型

先考虑判断一个地图是否合法。

把每个格子抽象成节点，向箭头指向的格子连边。
每个格子可以沿箭头回到自己，等价于模型中的每个节点都在一个环中。
而每个节点的出度为1，所以即图中每个连通块都是环。也即每个点的入度为1，出度为1。
也就是流量平衡。那么我们建立网络流模型，对每个点拆点成入点和出点。满流即合法。

## DirectionBoard - 模型

先考虑判断一个地图是否合法。

把每个格子抽象成节点，向箭头指向的格子连边。
每个格子可以沿箭头回到自己，等价于模型中的每个节点都在一个环中。
而每个节点的出度为1，所以即图中每个连通块都是环。也即每个点的入度为1，出度为1。
也就是流量平衡。那么我们建立网络流模型，对每个点拆点成入点和出点。满流即合法。

考虑改变方向，我们可以花费代价搬迁连出去的边。

TCO2013 R1AL3 / BZOJ3171

## DirectionBoard - 模型

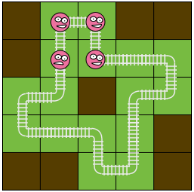
先考虑判断一个地图是否合法。

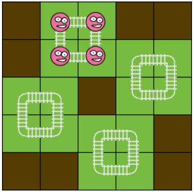
把每个格子抽象成节点，向箭头指向的格子连边。
每个格子可以沿箭头回到自己，等价于模型中的每个节点都在一个环中。
而每个节点的出度为1，所以即图中每个连通块都是环。也即每个点的入度为1，出度为1。
也就是流量平衡。那么我们建立网络流模型，对每个点拆点成入点和出点。满流即合法。

考虑改变方向，我们可以花费代价搬迁连出去的边。
把网络流改成费用流，原有边的费用为0，每个格子的出点向相邻的非箭头所指格子的入点连一条费用为1的边。

## CurvyonRails - 题意

一块$n \times n$的地图，每个格子均为空地或者障碍。
现在要铺铁轨，每块空地都要被覆盖，每条路线必须闭合，且不能相交。
有些空地上住着弯星人，在这种空地上铺一块直的铁路需要花费1的代价。
给定地图，求是否能够铺铁轨，以及最小代价。





## CurvyonRails - 模型

先考虑判断是否有解。

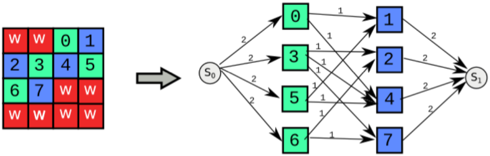
## CurvyonRails - 模型

先考虑判断是否有解。
有解即，存在一些不相交的回路可以覆盖所有空地且不覆盖任意障碍。
也即，每个空地向相邻的空地连出恰好两条轨道。

## CurvyonRails - 模型

先考虑判断是否有解。
有解即，存在一些不相交的回路可以覆盖所有空地且不覆盖任意障碍。
也即，每个空地向相邻的空地连出恰好两条轨道。

那么构建网络流模型。
对空地黑白染色，从源向黑点、从白点向汇连容量为2的边。
从黑点向相邻的白点连容量为1的边。满流即有解。



# CurvyonRails - 模型

那么弯的和直的铁轨怎么判断？

## CurvyonRails - 模型

那么弯的和直的铁轨怎么判断？

直的铁轨即，一块空地连出两条横向或纵向的轨道。
弯的铁轨即，一块空地连出一条横向和一条纵向的轨道。
先强制所有铁轨都是弯的，判断是否有解。

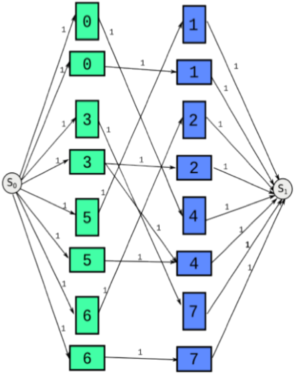
## CurvyonRails - 模型

那么弯的和直的铁轨怎么判断？

直的铁轨即，一块空地连出两条横向或纵向的轨道。
弯的铁轨即，一块空地连出一条横向和一条纵向的轨道。
先强制所有铁轨都是弯的，判断是否有解。

在已有的网络流模型基础上改进。
把每块空地拆成两个点，一个代表横向，一个代表纵向。
横向点向横向相邻的空地的横向点连一条容量为1的边，纵向的类似。满流即有解。

## CurvyonRails - 模型



## CurvyonRails - 模型

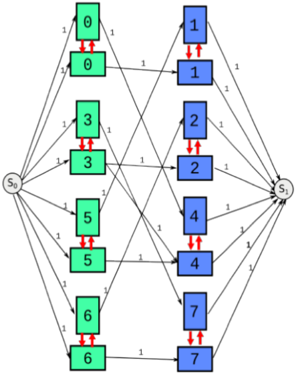
如果要把一块铁轨改成直的呢？
如果是没人的空地，随便改；如果是有人的空地，收取费用。

## CurvyonRails - 模型

如果要把一块铁轨改成直的呢？
如果是没人的空地，随便改；如果是有人的空地，收取费用。

把网络流模型改成费用流模型，已有的边费用为0。
在一块空地拆出的两个点之间连一条流量为1的双向边。
如果空地有人，双向边的费用为1；否则为0。
如果这类边有流量，就说明有一条轨道改变了方向。答案即为最小费用最大流。

## CurvyonRails - 模型



## Fin.

谢谢大家！欢迎课后交流。