

前言
○○○

Model I
○
○○
○○○
○○○

Model II
○
○○
○○
○○

Model III
○
○○
○○
○○
○○
○○○○

Model IV
○
○○
○○
○○
○○

Model V
○
○○○
○○○
○○○
○○○

Model VI
○
○○
○○○○○
○○○○○

网络流

模型与例题

清华大学计算机系 胡泽聪

前言
○○○

Model I
○
○○
○○○
○○

Model II
○
○○
○○

Model III
○
○○
○○
○○
○○
○○○○○

Model IV
○
○○
○○
○○

Model V
○
○○○
○○○
○○○

Model VI
○
○○
○○○○○

目录

- 1 前言
- 2 流量表示变迁
- 3 最小割
- 4 最大权闭合子图
- 5 平面图对偶图
- 6 费用递增
- 7 流量平衡

预备知识

为了能听懂下面的题，你需要：

- 了解网络流模型的定义与含义。
- 熟悉至少一种求网络流最大流的算法。如Dinic或者SAP。
- 熟悉至少一种求费用流最小费用最大流的算法。如连续最短路算法或者ZKW改进版费用流。

一些定义

- $x \rightarrow y: w$ 代表从 x 到 y 容量为 w 的边。
- $x \rightarrow y: w, c$ 代表这条边有 c 的费用。
- $x \rightarrow y: [l, r]$ 代表这条边下界为 l 上界为 r 。
- S 代表源点, T 代表汇点。

由于网络流和费用流的算法基本上是固定的, 故如非必要, 则不会写出题目的数据范围。

常用方法

- 增设源点汇点。
- 增设超级源点超级汇点。
- 拆点限流。
- 拆点表出入。
-

流量表示变迁

最直观的应用。

用流量表示事物的变迁。

例如，某条路上走过了多少人，某个仓库流入流出的物品量，等等。

也可以说是流量代表一种方案。

POJ2391

Ombrophobic Bovines¹ - 题意

给定一张的无向图，每条边有长度。点 i 处有 a_i 头牛，以及一个能容纳 b_i 头牛的牛棚。牛可以沿边移动，每条边上可以同时有任意头牛经过。一头牛经过一条边所需时间即为道路长度。

给出一个将牛分配到牛棚的方案，并最小化所需移动时间 T 。

¹<http://poj.org/problem?id=2391>

POJ2391

Ombrophobic Bovines - 模型

二分答案。

建立源点汇点。对每个点拆点，一个表示牛，一个表示牛棚。

对于一堆点，如果其最短路不超过二分的答案，则在其拆出的点之间连边，容量为无穷大。

如果满流则可行。

不拆点会错。（想想为什么？）

POJ1149

PIGS² - 题意

有 m 个猪圈，每个猪圈里初始时有若干头猪。一开始所有猪圈都是关闭的。依次来了 n 个顾客，每个顾客分别会打开指定的几个猪圈，从中买若干头猪。

每个顾客分别都有他能够买的数量的上限。

每个顾客走后，他打开的那些猪圈中的猪，都可以被任意地调换到其它开着的猪圈里，然后所有猪圈重新关上。

问最多总共能卖出多少头猪。

$1 \leq m \leq 1000$ 、 $1 \leq n \leq 100$ 。

²<http://poj.org/problem?id=1149>

POJ1149

PIGS - 模型

先考虑朴素的模型。

一共有 n 轮交易，那么我们建 n 排点，每排 m 个，代表每轮交易之前的猪圈。

再对 n 个顾客设点。

对于每个顾客，向汇连边，容量为购买上限。

源向第一轮猪圈的连边，容量为初始的数量。

对于第 i 个顾客能打开的猪圈，从第 i 轮的这些猪圈向该顾客连边，容量为无穷大。同时向第 $i+1$ 轮的这些猪圈连边，容量同样为无穷大。

点数为 $O(nm)$ 。

POJ1149

PIGS - 模型

分开考虑每个猪圈。考虑能对其产生影响的若干顾客。
只有这些顾客才能买，也只有他们才能移动猪圈里的猪。
那么从源向每个猪圈的第一个顾客连边，容量为初始的数量。
每个猪圈的第 i 个顾客向第 $i+1$ 个顾客连边，容量为无穷大。
易知两模型等价。

POJ3281

Dining³ - 题意

有 a 种食物和 b 种饮料，每种食物或饮料只能供一头牛享用，且每头牛只享用一种食物和一种饮料。

现在有 n 头牛，每头牛都有自己喜欢的食物种类列表和饮料种类列表。

问最多能使几头牛同时享用到自己喜欢的食物和饮料。

³<http://poj.org/problem?id=3281>

POJ3281

Dining - 模型

如果只有食物，那这就是一个二分图匹配。

考虑一次增广，我们会选择一头牛、一种食物和一种饮料。

那么我们设三排点，分别代表食物、牛和饮料。

喜欢的食物 \rightarrow 牛: 1, 牛 \rightarrow 喜欢的饮料: 1。

$S \rightarrow$ 食物: 1, 饮料 $\rightarrow T$: 1。

看似正确，实则错误。

需要对牛拆点限流。

最小割

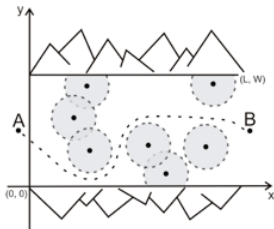
直观的应用，不好归进下面的分类中。反倒比较少见。
一般来说要使得两边断开的东西都是最小割。
可以有一些很厉害的应用。

<Unknown source>

Escape - 题意

有一条山谷，长度为 W ，宽度为 L 。有 n 个哨兵，第 i 个哨兵的视野为以其位置为圆心半径为 r_i 的圆。

现在需要从山谷的最左侧走到最右侧而不进入任意一个哨兵的视野。问最少需要提前解决掉多少个哨兵。



<Unknown source>

Escape - 模型

这货还能绕弯走……我们或许得绕开传统的思路。

实际上，有一条路径等价于，山谷没有被“封死”，不会有视野横断了山谷的宽。

我们对哨兵建两个点，之间连上容量为1的边，用来限流。

设山谷的下边界为源，上边界为汇。

对于两个哨兵，如果他们的视野相交，从左下的兵连向右上的兵，边权为无穷大。（对吗？）

对于视野碰到了边界的，从源或向汇连边。

实际上，我们应当从哨兵的入点连向出点。

最小割就是答案。

BZOJ2561

最小生成树⁴ - 题意

一张 n 个点 m 条边的图，每条边有边权。

现在在点 u 和点 v 之间加入一条权值为 L 的边。我们要使这条边既能出现在最小生成树上，又能出现在最大生成树上。

问要满足这一条件，至少需要删去多少条边。

⁴<http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2561>

BZOJ2561

最小生成树 - 模型

生成树和最小割有什么关系？

最大生成树和最小生成树的边之间又有什么关系？

考虑Kruskal算法。

为了使加入的边能出现在最小生成树上而删去的边，与为了使加入的边能出现在最大生成树上而删去的边，一定不会不重复。

求最小生成树时，边权小于 L 的边在这条边加入前，不能使得 u 和 v 连通。最大生成树类似。

即为两边的最小割之和。

最大权闭合子图

通常用来描述有依赖关系的若干物品的选择与否。其本质上是最小割。

假设有 n 个物品，每个有自己的收益。收益可以为负。

视从 S 可达的点为选择，可达 T 的点为不选择。

$S \rightarrow$ 收益为正的物品:收益, 收益为负的物品 $\rightarrow T$:收益的绝对值。

如果 a 依赖于 b ，那么 $b \rightarrow a : \infty$ 。

答案为所有收益为正的物品的收益之和减去最小割。

正确性证明：考虑一条增广路。

NOI2006

最大获利⁵ - 题意

有 n 个中转站的选址，在第 i 个地址处建造中转站的代价为 p_i 。
 有 m 个用户，第 i 个会在第 a_i 和 b_i 个中转站之间通讯，用户愿意支付 c_i 。
 求建造方案，使得获利最大。

⁵<http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=1497>

NOI2006

最大获利 - 模型

作为网络流在NOI中的第一次亮相，难度还是非常平易近人的。
就是最大权闭合子图的直接应用。

将用户和中转站都视为物品，中转站收益为负，用户收益为正。
用户依赖于相应两个中转站。

Order - 题意

有 n 个项目和 m 台机器，每个项目依赖于一些机器。

项目有正的收益。机器可以买，也可以租，都有各自的代价。借一次机器可以给一个项目用一次。

求最大收益。

Order - 模型

如果机器不能借，那么就是最经典的最大权闭合子图。

这个题目的难点在于机器可以借。

我们先按照最大权闭合子图的模型建图。考虑一条增广路，一定是 $S \rightarrow$ 项目 \rightarrow 机器 $\rightarrow T$ 。

割第一条边是放弃项目，割第三条边是买机器。第二条边是无穷大。

如果我们设割第二条边是租机器呢？把无穷大改为租用费用。

答案是项目收益之和减去最小割。

Codeforces Round #185 (Div. 1) - E

Biologist⁶ - 题意

有 n 个点，每个可以是白色或者黑色。可以花 v_i 的代价改变第 i 个点的颜色。
有 m 条件，每个条件都是要求某一些点都是某种颜色。如果满足了第 i 个条件可以得到 g_i 的收益，没有满足则须付出 l_i 的代价。
求最大收益。

⁶<http://codeforces.com/contest/311/problem/E>

Codeforces Round #185 (Div. 1) - E

Biologist - 模型

没有条件的话，也就是经典模型了。

白点 $\rightarrow T$: 代价, $S \rightarrow$ 黑点: 代价。

我们可以也对条件建点。

如果条件是都是黑色, $S \rightarrow$ 条件: 收益+代价。条件 \rightarrow 点: ∞ 。

如果条件是都是白色, 条件 $\rightarrow T$: 收益+代价。点 \rightarrow 条件: ∞ 。

正确性证明同样考虑增广路。

一类经典问题

二元费用问题 - 题意

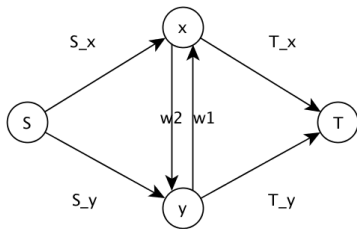
有 n 个点，选和不选各自有收益。有 m 个条件，有三种：

- 如果 x 和 y 都选了，获得 w 的收益；
 - 如果 x 和 y 都没选，获得 w 的收益；
 - 如果 x 和 y 都一个选了一个没选，付出 w 的代价。
- 求最大收益。

一类经典问题

二元费用问题 - 模型

我们用类似最大权闭合子图的方法建图。
只考虑有关系的两个点，可以得出长成下面这个样子的东西。



我们的目标是确定 S_x 、 S_y 、 T_x 、 T_y 和 w 的值。

一类经典问题

二元费用问题 - 模型

设选 x 的收益为 VA_x ，不选的是 VB_x ， x 和 y 都选的收益为 EA ，都不选的收益为 EB ，一选一不选的代价为 EC 。

考虑每种情况：

- x 和 y 都选。此时被割的边为 $S_x + S_y$ 。
- x 和 y 都没选。此时被割的边为 $T_x + T_y$ 。
- x 选 y 没选。此时被割的边为 $S_x + T_y + w_1$ 。
- x 没选 y 选。此时被割的边为 $T_x + S_y + w_2$ 。

一类经典问题

二元费用问题 - 模型

我们知道被割的边是损失掉的代价。所以有

$$S_x + S_y = VB_x + VB_y + EB$$

$$T_x + T_y = VA_x + VA_y + EA$$

$$S_x + T_y + w1 = VB_x + VA_y + EA + EB + EC$$

$$T_x + S_y + w2 = VA_x + VB_y + EA + EB + EC$$

$$w1 = w2$$

其中最后一个是我们的假设。

这个方程组的自变量多于方程数，有无穷组解。

一类经典问题

二元费用问题 - 模型

下面是其中一组解：

$$\begin{aligned} S_x &= VB_x + \frac{EB}{2} \\ T_x &= VA_x + \frac{EA}{2} \\ w1 = w2 &= \frac{EA + EB}{2} + EC \end{aligned}$$

答案即 $\sum VA + VB + EA + EB$ 减去最小割。为避免小数可以给所有权值乘以2。

平面图对偶图

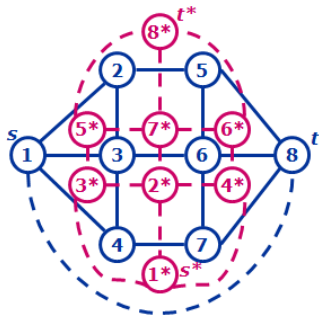
什么是平面图？

什么是平面图的对偶图？

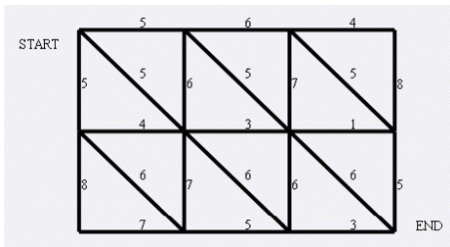
如何构造平面图的对偶图？

如何把问题转换到对偶图上？

为何要使用对偶图来求解？



BeiJing2006 (BZOJ1001)

狼抓兔子⁷ - 题意

$n \times m$ 的类似网格的图，如上所示。求从“START”到“END”的最小割。
 $n, m \leq 1000$ 。

⁷ <http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=1001>

前言
○○○

Model I
○
○○
○○○
○○

Model II
○
○○
○○

Model III
○
○○
○○
○○
○○
○○○○

Model IV
○
○○●
○○
○○
○○

Model V
○
○○○
○○○
○○○
○○○

Model VI
○
○○
○○○○○

BeiJing2006 (BZOJ1001)

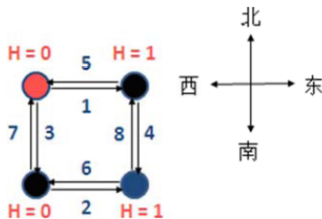
狼抓兔子 - 模型

数据范围很大，直接做网络流会超时。
故转换成对偶图上的最短路。

NOI2010 (BZOJ2007)

海拔⁸ - 题意

$n \times n$ 的网格图，每条边双向通行。已知每条边两个方向的人流量，你需要给每个点 x 设定海拔高度 h_x 。左上角的高度为 0，右下角的高度为 1。对于 x 到 y 的流量为 w 的边，代价为 $w \times \max(0, h_y - h_x)$ 。求最小代价。
 $n \leq 500$ 。



⁸<http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2007>

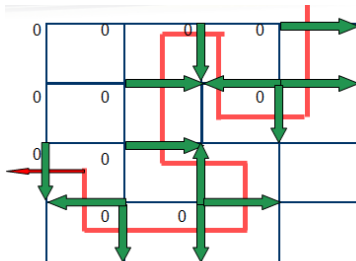
NOI2010 (BZOJ2007)

海拔 - 模型

结论1 每个点的海拔非0即1。

结论2 海拔为0的点构成一个连通块，
海拔为1的点亦同。

其实就是求左上角和右下角的最
小割。转换成对偶图上的最短路。
边的方向呢？

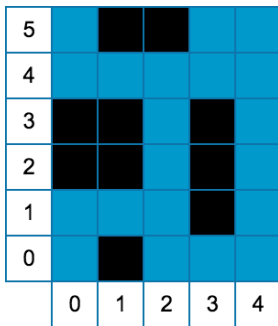


Codejam Round 2 2014 C

Don't Break The Nile⁹ - 题意

$n \times m$ 的网格图，底部的每个格子接受1的入流量，顶部的每个格子可以流出1的流量，每个格子可以流过1的流量。图中有 k 个长方形区域是不能走流量的，这些长方形互不相交，但可以有公共边。求图的最大流。

$m \leq 1000$, $n \leq 10^8$, $k \leq 1000$ 。



⁹<https://code.google.com/codejam/contest/3014486/dashboard#s=p2&a=2>

Codejam Round 2 2014 C

Don't Break The Nile - 模型

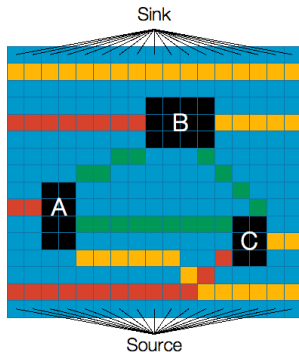
暴力怎么做？

需要拆点吗？

虽然要，但考虑其最小割，割掉的一定是点内部的边。

割掉内部边相当于把格子填成黑色。

可以转换成河两岸之间的最短路径问题，如右图。



费用递增

这类模型是一类费用流模型，它代表着某个东西可以选择若干次，而次数每加1所需要的代价是递增的。一种常见情况是选择 x 的代价为 x^2 。

JSOI2009 (BZOJ1449)

球队收益¹⁰ - 题意

有 n 支球队，有些球队之间已经打了一些比赛了，现给出每个球队的数据 win 、 $lose$ 、 C 和 D ，分别表示已胜场数、已负场数，以及计算收益的两个系数。

一支球队的收益为 $Cw^2 + Dl^2$ ，其中 w 和 l 是最后胜负的场数。接下来还有 m 场比赛。给出接下来 m 场比赛的对阵情况，求出 n 支球队收益和的最小值。接下来 m 场比赛的胜负是你决定的。

¹⁰<http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=1449>

JSOI2009 (BZOJ1449)

球队收益 - 模型

应该可以想到是费用流模型，关键在于建模。

一场比赛必然有一个赢家和一个输家，但是似乎不太好同时在模型中表示。不妨先假设后面的 m 场比赛中双方都是输家，这样我们只要在模型中表示一方成为赢家即可。

至此应该有一个初步的模型了：对于 n 支球队和 m 场比赛各建一个点，从源向每场比赛连流量1费用0的边，从比赛向参与这场比赛的两支队伍各连一条流量1费用0的边。剩下的就是队伍收益的费用表示了。

JSOI2009 (BZOJ1449)

球队收益 - 模型

我们考虑费用的增量：多赢一场比赛产生的收益。

即 $(C(w+1)^2 + D(l-1)^2) - (Cw^2 + Dl^2) = 2wC - 2lD + C + D$ 。

对于第 i 支队伍，假设后 m 场中 i 参加的有 x 场，那么最初 $w = win$, $l = lose + x$ ，之后每赢一场 w 加一， l 减一。我们从第 i 支队伍的点向汇连 x 条边，分别代表第 i 支队伍赢了 j 场比赛时相对赢 $j-1$ 场时收益的增量。由于增量一定越来越大，所以流量最先流过的一定是费用较小的边，即 j 最小的边。

至此模型完成，答案即所有队伍最初收益+最小费用最大流的费用。

前言
○○○

Model I
○
○○
○○○
○○

Model II
○
○○
○○

Model III
○
○○
○○
○○
○○
○○○○

Model IV
○
○○
○○
○○

Model V
○
○○○
●○○
○○○

Model VI
○
○○
○○○○○

SCOI2007 (BZOJ1070)

修车 - 题意

有 n 辆车和 m 名修理工，一名修理工在一个时刻只能修一辆车，并且在修完一辆之后才能开始修下一辆。已知每位修理工修每辆车的时间，求顾客的最小平均等待时间。顾客的等待时间为他的车被修好的时间。

SCOI2007 (BZOJ1070)

修车 - 模型

所求即最小的总等待时间。假设已经确定了每辆车被谁修理，以及每个人修理的顺序，如何计算代价？

对于每个人分开算，如果一个人一共修理 k 辆车，那么修的第 i 辆车对于代价的贡献为 $k - i + 1$ 倍。

此处费用递减，而且我们无法确定一共有多少车！怎么办？

SCOI2007 (BZOJ1070)

修车 - 模型

倒着考虑。我们考虑一辆车是倒数第几个修的。
对车和修理工的倒数第几个“修车位”设点，连边：
车→第 k 个修车位: $(k - i + 1)$ 倍时间。
最小费用最大流即为答案。

WC2007 (BZOJ2597)

剪刀石头布¹¹ - 题意

有 n 个人，两两之间进行一次比赛。有些比赛已经进行了，有些还没有。我们用一个竞赛图来表示输赢情况，一场比赛的有向边从输家连向赢家。

你可以决定尚未进行的比赛的输赢情况，使得下面这种三元组的数量最多： (a, b, c) 表示一个无序三元组（ (a, b, c) 的任意排列都算同一种），其中存在有向边 $a \rightarrow b$ 、 $b \rightarrow c$ 、 $c \rightarrow a$ 。

需要输出方案。 $n \leq 100$ 。

¹¹<http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2597>

前言
○○○

Model I
○
○○
○○○
○○

Model II
○
○○
○○

Model III
○
○○
○○
○○
○○
○○○○

Model IV
○
○○
○○
○○

Model V
○
○○○
○○○
○○●○

Model VI
○
○○
○○○○○

WC2007 (BZOJ2597)

剪刀石头布 - 模型

有种即视感？似乎和上面的题很像，但是这里的東西似乎更不好表示。不如我们先考虑，给定这样一个图，求这样的三元组的数目。

从 n 个点中任选3个的方案数为 $\binom{n}{3}$ ，考虑怎么样的三元组是不合法的：这样的三元组的导出子图中一定有一个点的入度为2。设第 i 个点的入度为 d_i ，那么不合法的三元组数为 $\sum \binom{d_i}{2}$ 。所有合法方案为：

前言
○○○

Model I
○
○○
○○○
○○

Model II
○
○○
○○

Model III
○
○○
○○
○○
○○
○○○○

Model IV
○
○○
○○
○○

Model V
○
○○○
○○○
○○○
○○●

Model VI
○
○○
○○○○○

WC2007 (BZOJ2597)

剪刀石头布 - 模型

$$\begin{aligned} & \binom{n}{3} - \sum \binom{d_i}{2} \\ = & \binom{n}{3} - \frac{1}{2} \sum (d_i(d_i - 1)) \\ = & \binom{n}{3} + \frac{1}{2} \sum d_i - \frac{1}{2} \sum d_i^2 \end{aligned}$$

注意 $\sum d_i$ 是定值，就是 $\binom{n}{2}$ 。那么剩下的就和上面那题一模一样了吧？至于输出方案，只要看比赛的点连出的边连向了哪个点即可。

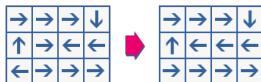
流量平衡

网络流模型中，除了源点和汇点以外，每个点都满足流量平衡条件。
即，每个点流入的流量等于其流出的流量。
利用这个性质来解决一些拥有类似性质的题目。

TCO2013 R1A13 / BZOJ3171

DirectionBoard¹² - 题意

一块 $n \times m$ 的地图，每个格子内有一个箭头。
 从某个格子出发，沿着箭头的方向走，从一侧出了边界就从另一侧进入。
 如果从任意一个格子出发都能回到出发的格子，那么地图就是合法的。
 给定地图，求至少要改变几个格子的箭头的方向，才能使得地图合法。



¹²<http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3171>

TCO2013 R1A13 / BZOJ3171

DirectionBoard - 模型

先考虑判断一个地图是否合法。

把每个格子抽象成节点，向箭头指向的格子连边。

每个格子可以沿箭头回到自己，等价于模型中的每个节点都在一个环中。

而每个节点的出度为1，所以即图中每个连通块都是环。也即每个点的入度为1，出度为1。

也就是流量平衡。那么我们建立网络流模型，对每个点拆点成入点和出点。满流即合法。

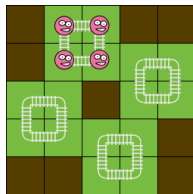
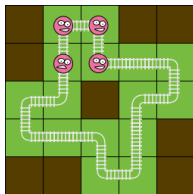
考虑改变方向，我们可以花费代价搬迁连出去的边。

把网络流改成费用流，原有边的费用为0，每个格子的出点向相邻的非箭头所指格子的入点连一条费用为1的边。

SRM570 D1L3

CurvyonRails - 题意

一块 $n \times n$ 的地图，每个格子均为空地或者障碍。
现在要铺铁轨，每块空地都要被覆盖，每条路线必须闭合，且不能相交。
有些空地上住着弯星人，在这种空地上铺一块直的铁路需要花费1的代价。
给定地图，求是否能够铺铁轨，以及最小代价。



SRM570 D1L3

CurvyonRails - 模型

先考虑判断是否有解。

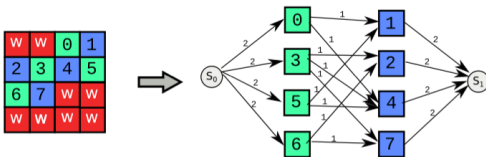
有解即，存在一些不相交的回路可以覆盖所有空地且不覆盖任意障碍。

也即，每个空地相邻的空地连出恰好两条轨道。

那么构建网络流模型。

对空地黑白染色，从源向黑点、从白点向汇连容量为2的边。

从黑点向相邻的白点连容量为1的边。满流即有解。



SRM570 D1L3

CurvyonRails - 模型

那么弯的和直的铁轨怎么判断？

直的铁轨即，一块空地连出两条横向或纵向的轨道。

弯的铁轨即，一块空地连出一条横向和一条纵向的轨道。

先强制所有铁轨都是弯的，判断是否有解。

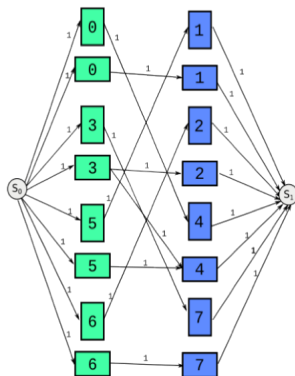
在已有的网络流模型基础上改进。

把每块空地拆成两个点，一个代表横向，一个代表纵向。

横向点向横向相邻的空地的横向点连一条容量为1的边，纵向的类似。满流即有解。

SRM570 D1L3

CurvyonRails - 模型



SRM570 D1L3

CurvyonRails - 模型

如果要把一块铁轨改成直的呢？

如果是没人的空地，随便改；如果是有人空地，收取费用。

把网络流模型改成费用流模型，已有的边费用为0。

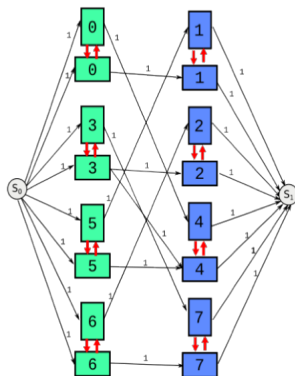
在一块空地拆出的两个点之间连一条流量为1的双向边。

如果空地有人，双向边的费用为1；否则为0。

如果这类边有流量，就说明有一条轨道改变了方向。答案即为最小费用最大流。

SRM570 D1L3

CurvyonRails - 模型



Fin.

谢谢大家！欢迎课后交流。