



网络流

模型与例题 进阶篇

清华大学计算机系 胡泽聪



无需多言。



基础概念

这类模型是一类网络流最小割模型，用于描述每个点有若干种不同选择，标号为连续的整数，选择有各自的代价。同时有若干限制条件，为 $x_i - x_j \leq d$ 的形式，其中 x_i 和 x_j 为 i 和 j 的选择的标号。



HNOI2013 (BZOJ3144)

切糕¹ - 题意

$p \times q$ 的网格，每个位置都有 r 个取值的选择，每个选择有各自的代价。要求四连通相邻的两个位置的值相差不超过 d 。问最小代价和。

$p, q, r \leq 40$ 。

¹ <http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3144>



HNOI2013 (BZOJ3144)

切糕 - 模型

对每个位置的每个选择设点，形成一条链，相邻位置的边的流量为选择的代价。



切糕 - 模型

对每个位置的每个选择设点，形成一条链，相邻位置的边的流量为选择的代价。

由于每个位置只能选择一个取值，因此自然想到最小割。现在加入距离限制。限制可以描述为 $x_i \geq x_j - d$ ，其中 i 和 j 相邻。网络流中的限制通常用无穷大的边来描述。



HNOI2013 (BZOJ3144)

切糕 - 模型

对每个位置的每个选择设点，形成一条链，相邻位置的边的流量为选择的代价。

由于每个位置只能选择一个取值，因此自然想到最小割。现在加入距离限制。限制可以描述为 $x_i \geq x_j - d$ ，其中 i 和 j 相邻。网络流中的限制通常用无穷大的边来描述。

因此对于相邻的 (x, y) 和 (x', y') 以及 $d \leq k \leq r$ ，连边 $(x, y, k) \rightarrow (x', y', k - d) : \infty$ 。

这个图的最小割就是答案。

FoxAndCity² - 题意

给定 n 个点的无向图，边权均为1。每个点有一个属性 w_i 。现在可以在图中任意加边，记加边后每个点到1号点的距离为 d_i ，最小化 $\sum (w_i - d_i)^2$ 。

²http://community.topcoder.com/stat?c=problem_statement&pm=12727



FoxAndCity - 模型

我们考察一下最终的距离应当满足怎样的性质。

性质1 $d_1 = 0$ 。



FoxAndCity - 模型

我们考察一下最终的距离应当满足怎样的性质。

性质1 $d_1 = 0$ 。

性质2 对于已经存在的边 $i \leftrightarrow j$, 必有 $|d_i - d_j| \leq 1$ 。



FoxAndCity - 模型

我们考察一下最终的距离应当满足怎样的性质。

性质1 $d_1 = 0$ 。

性质2 对于已经存在的边 $i \leftrightarrow j$, 必有 $|d_i - d_j| \leq 1$ 。

除此之外呢？



FoxAndCity - 模型

我们考察一下最终的距离应当满足怎样的性质。

性质1 $d_1 = 0$ 。

性质2 对于已经存在的边 $i \leftrightarrow j$, 必有 $|d_i - d_j| \leq 1$ 。

除此之外呢?

事实上, 只要满足这两个条件, 就能构造出符合条件的图。



FoxAndCity - 模型

我们考察一下最终的距离应当满足怎样的性质。

性质1 $d_1 = 0$ 。

性质2 对于已经存在的边 $i \leftrightarrow j$, 必有 $|d_i - d_j| \leq 1$ 。

除此之外呢？

事实上，只要满足这两个条件，就能构造出符合条件的图。

此时相当于每个点有 $n - 1$ 个选择，原本有边相连的两点 i 和 j 应满足 $d_i - d_j \leq 1$ 以及 $d_j - d_i \leq 1$ 。变成了上面一题的模型。



移民站选址³ - 题意

已有 n 个移民站，第 i 个坐标为 (u_i, v_i) 。还需建立 m 个新的移民站，记坐标为 (x_i, y_i) 。移民站之间需要传输数据，第 i 个旧站和第 j 个新站之间要传 a_{ij} 的数据，第 i 个新站和第 j 个新站之间要传 b_{ij} 的数据。传输代价是两个站之间传输的数据量乘上两个站之间的曼哈顿距离。求最小代价和。

虽说是提交答案题，但可以当成普通题来做。

³ 提交答案题



移民站选址 - 模型

我们需要先得出一些结论：

结论1 横纵坐标无关，可以分开当成一维问题做。

移民站选址 - 模型

我们需要先得出一些结论：

结论1 横纵坐标无关，可以分开当成一维问题做。

结论2 一定存在一个最优方案，使得每个新站都与某个旧站重合。



移民站选址 - 模型

那么问题可以变成， m 个位置，每个有 n 种选择，代价即为其与旧站的传输代价和。不同位置间的选择也会带来代价。



移民站选址 - 模型

那么问题可以变成, m 个位置, 每个有 n 种选择, 代价即为其与旧站的传输代价和。不同位置间的选择也会带来代价。

我们这样连边: 对于任意的新站 i 和 j 以及任意的 $1 < k \leq n$, 连边 $(i, k) \leftrightarrow (j, k) : b_{ij}$ 。不难发现, 如果 i 的选择是 p_i , j 的选择是 p_j , 则还会有 $|p_i - p_j|$ 条这样的边被割掉, 即为应有的传输代价。

最后的答案就是最小割。

Fin.

谢谢大家！欢迎课后交流。