趣题选讲

THU CST 胡泽聪
Email: huzecong@163.com

About me

关于我

About me

关于我

NOIp2011 二等奖

关于我

NOIp2011 二等奖

APIO2012 铜牌

关于我

NOIp2011 二等奖

APIO2012 铜牌

WC2014 开幕式幸运奖 □

关于这次课程

题目来源：TC、CF、CC、ACM。

个人认为思路巧妙有趣的题。

分三个 Part，难度递增（可能吧）。 □

Paint Pearls

给定一个长度为 n 的序列，每一位有一个目标颜色。初始时每一位都没有颜色。每次可以选择一个区间，将区间内的所有元素改为其**目标颜色**。设区间内不同颜色的数量为 x ，则操作的代价为 x^2 。求最小代价。

$n \le 50000$ 。 □

Paint Pearls - Solution

朴素的 DP 为：令 $f[i]$ 表示前 i 个元素变为目标颜色的最小代价，方程为

$$f[i] = \min\{f[j-1] + w(j,i)\}$$

复杂度 $O(n^2)$ 。 □

Paint Pearls - Solution

容易发现答案的上界为 n —每次操作一个元素即可。

Paint Pearls - Solution

容易发现答案的上界为 n —每次操作一个元素即可。

基于上界又可以发现，如果一个区间内有超过 $\sqrt{n}$ 种颜色，我们一定不会去操作它。

Paint Pearls - Solution

容易发现答案的上界为 n —每次操作一个元素即可。

基于上界又可以发现，如果一个区间内有超过 $\sqrt{n}$ 种颜色，我们一定不会去操作它。

换句话说，对于一个 $f[i]$ ，只需要考虑 $\sqrt{n}$ 个不同的 $w(j,i)$ 的取值。

Paint Pearls - Solution

容易发现答案的上界为 n —每次操作一个元素即可。

基于上界又可以发现，如果一个区间内有超过 $\sqrt{n}$ 种颜色，我们一定不会去操作它。

换句话说，对于一个 $f[i]$ ，只需要考虑 $\sqrt{n}$ 个不同的 $w(j,i)$ 的取值。

而 f 显然单调不减，因此 $w(j,i)$ 相同时选择最靠左的 $f[j-1]$ 。

Paint Pearls - Solution

容易发现答案的上界为 n —每次操作一个元素即可。

基于上界又可以发现，如果一个区间内有超过 $\sqrt{n}$ 种颜色，我们一定不会去操作它。

换句话说，对于一个 $f[i]$ ，只需要考虑 $\sqrt{n}$ 个不同的 $w(j,i)$ 的取值。

而 f 显然单调不减，因此 $w(j,i)$ 相同时选择最靠左的 $f[j-1]$ 。

我们只需知道这些 j 的值。 □

Paint Pearls - Solution

只要记录当前位置往左出现的前 $\sqrt{n}$ 种颜色，及对应位置即可。

移动到下一个数时，如果颜色出现在了前 $\sqrt{n}$ 种之中，则暴力删除并移到最前面。

总复杂度 $O(n\sqrt{n})$ 。

Paint Pearls - Solution

只要记录当前位置往左出现的前 $\sqrt{n}$ 种颜色，及对应位置即可。

移动到下一个数时，如果颜色出现在了前 $\sqrt{n}$ 种之中，则暴力删除并移到最前面。

总复杂度 $O(n\sqrt{n})$ 。

其实，数据中最优解选的每个区间都只有不超过 5 种颜色⋯⋯ □

Explosion

n 个房间，每个房间内可能有其他一些房门的钥匙。初始时所有房门都是锁上的。你决定随机炸门，问期望炸几次才能打开所有门。

$n \le 1000$ 。 □

Explosion - Solution

形式化描述一下：

n 个点的有向图，每个点代表一个房间。如果 x 中有 y 的钥匙，那么 x 到 y 有一条有向边。炸开 x 则相当于删去 x 能到达的所有点。问期望删几次才能删掉整张图。 □

Explosion - Solution

考虑一个简单一些的问题：把有向图改成树（CF #172 C）。

Explosion - Solution

考虑一个简单一些的问题：把有向图改成树（CF #172 C）。

答案其实是

$$\sum \frac{1}{\mathrm{depth}_i}$$

其中 $\mathrm{depth}_{\mathrm{root}} = 1$ 。

Explosion - Solution

考虑一个简单一些的问题：把有向图改成树（CF #172 C）。

答案其实是

$$\sum \frac{1}{\mathrm{depth}_i}$$

其中 $\mathrm{depth}_{\mathrm{root}} = 1$ 。

由期望的线性性质，我们考虑每个点被删掉的概率。每个点只能被自己或自己的祖先删掉，其它点不会产生影响。那么点 i 被删一共 depth_i 种可能，其中只有一种可能是被自己删掉。而删掉的代价为 1 ，因此总的期望就是上式。

Explosion - Solution

考虑一个简单一些的问题：把有向图改成树（CF #172 C）。

答案其实是

$$\sum \frac{1}{\mathrm{depth}_i}$$

其中 $\mathrm{depth}_{\mathrm{root}} = 1$ 。

由期望的线性性质，我们考虑每个点被删掉的概率。每个点只能被自己或自己的祖先删掉，其它点不会产生影响。那么点 i 被删一共 depth_i 种可能，其中只有一种可能是被自己删掉。而删掉的代价为 1 ，因此总的期望就是上式。

其实这并不是严谨的证明，但或许可以感受得到正确性吧 = =
严谨证明可以去看 CF 的题解。

Explosion - Solution

也就是说，我们只需知道每个点可以被多少点删掉，就能求出期望。。

换言之，我们只要求出对于每个点，有多少个点可以到达它。

对于树而言，这就是点的深度。对于一般的图呢？

Explosion - Solution

也就是说，我们只需知道每个点可以被多少点删掉，就能求出期望。。

换言之，我们只要求出对于每个点，有多少个点可以到达它。

对于树而言，这就是点的深度。对于一般的图呢？

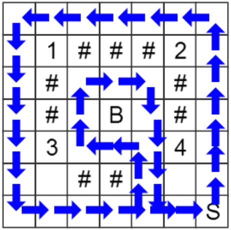
求出原图的强连通分量后，缩成一个 DAG。

之后用`bitset`等压位大法优化暴力。复杂度 $O(n^3/32)$ 。似乎没有更好做法了。 □

Circling Round Treasures

在一个 $n \times m$ 的地图上，有一些障碍，还有 a 个宝箱和 b 个炸弹。你从 (sx, sy) 出发，走四连通的格子。你需要走一条闭合的路径，可以自交，且围出来的复杂多边形内不能包含任何炸弹。你围出来的复杂多边形中包含的宝箱的价值和就是你的收益。求最大收益。

$n, m \leq 20$ ， $a + b \leq 8$ 。



Circling Round Treasures - Solution

先考虑这个问题：如何判断一个点是否被复杂多边形所包含（不考虑在边上）？

Circling Round Treasures - Solution

先考虑这个问题：如何判断一个点是否被复杂多边形所包含（不考虑在边上）？

射线法。找一条由该点发出且不经过多边形上点的射线，然后看这条射线与多边形交了几次。如果交了奇数次，则在多边形内，否则在多边形外。

Circling Round Treasures - Solution

先考虑这个问题：如何判断一个点是否被复杂多边形所包含（不考虑在边上）？

射线法。找一条由该点发出且不经过多边形上点的射线，然后看这条射线与多边形交了几次。如果交了奇数次，则在多边形内，否则在多边形外。

是否可以把这一方法用到这道题中？ □

Circling Round Treasures - Solution

其实是可以的。我们对于每个宝箱和炸弹维护一条射线，然后维护这些射线中哪些穿过了路径奇数次。

Circling Round Treasures - Solution

其实是可以的。我们对于每个宝箱和炸弹维护一条射线，然后维护这些射线中哪些穿过了路径奇数次。

令 $f[x][y][k]$ 表示，当前在 (x, y) ，且集合 k 中的射线穿过了路径奇数次，这样的状态是否可行。

转移时枚举下一步，然后看两步之间的线段穿过了哪些射线，并更新集合 k 。

最后枚举所有集合 k ，要求炸弹的射线穿过路径偶数次，且 $f[sx][sy][k] = \texttt{true}$。用集合中宝箱的价值和更新答案。

复杂度 $O(nmk2^k)$ 。 □

Graph of Inversions

对于长度为 n 的序列 a ，定义其逆序图 G 如下：无向图 G 有 n 个节点，编号为 $1 \sim n$ ；对于任意的 $1 \le i < j \le n$ ，如果有 $a[i] > a[j]$ ，那么 G 中存在一条 i 和 j 之间的边。给定一个逆序图 G ，求 G 有多少个点集既是独立集又是覆盖集。

$n \le 1000$ ，$0 \le m \le \frac{n(n-1)}{2}$ 。 □

Graph of Inversions - Solution

一般图的独立集问题是 NP 问题，因此逆序图肯定有良好的性质。

Graph of Inversions - Solution

一般图的独立集问题是 NP 问题，因此逆序图肯定有良好的性质。

不过逆序图也并非二分图，如序列 $\{3, 2, 1\}$ 的逆序图就是一个奇环。所以把它当做图来做肯定是不靠谱的。我们不妨考虑逆序图对应的序列。 □

Graph of Inversions - Solution

可以发现，逆序图对应唯一的序列，两者之间存在一一对应关系。问题在于如何构造出这个序列。

Graph of Inversions - Solution

可以发现，逆序图对应唯一的序列，两者之间存在一一对应关系。问题在于如何构造出这个序列。

图中编号为 i 的节点即为序列中的第 i 个元素，一条边则代表一个逆序对。那么点 i 与所有编号大于 i 的点之间连的边数，就是序列中第 i 个数后面比 i 小的元素的个数。

Graph of Inversions - Solution

可以发现，逆序图对应唯一的序列，两者之间存在一一对应关系。问题在于如何构造出这个序列。

图中编号为 i 的节点即为序列中的第 i 个元素，一条边则代表一个逆序对。那么点 i 与所有编号大于 i 的点之间连的边数，就是序列中第 i 个数后面比 i 小的元素的个数。

不难得出一个时间复杂度为 $O(n^2)$ 的算法。 □

Graph of Inversions - Solution

独立集和覆盖集在原序列中对应什么？

Graph of Inversions - Solution

独立集和覆盖集在原序列中对应什么？

独立集的点之间都不存在边，也就是说在序列中，选出来的子序列不构成逆序对。

也就是说，选出来的应该是一个上升子序列。

Graph of Inversions - Solution

独立集和覆盖集在原序列中对应什么？

独立集的点之间都不存在边，也就是说在序列中，选出来的子序列不构成逆序对。

也就是说，选出来的应该是一个上升子序列。

所有没有被选入覆盖集的点都与覆盖集中的至少一个点存在边相连。

换句话说，对于序列中所有没有被选择的点，必须与至少一个被选择的点构成逆序对。

也即，要么是选择了在它之前而且比它大的数，要么是选择了在它之后而且比它小的数。 □

Graph of Inversions - Solution

我们将两个条件结合起来考虑。

Graph of Inversions - Solution

我们将两个条件结合起来考虑。

我们将序列从被选择的点的位置切开，分成许多不同的段。假设某个段的左端点为 l ，右端点为 r ，l 与 r 均为被选择的点。

独立集要求选择一个上升子序列。那么覆盖集的条件等价于

$$\forall i \in (l, r), a[i] < a[l] \text{或} a[i] > a[r]$$

□

Graph of Inversions - Solution

我们可以考虑这样的问题：假设目前被选择的子序列的结尾为点 i，可以选择哪些点加入被选择的子序列？

假设选择点 j，那么应该满足：

$$a[j] > a[i] \text{ 且 } \min_{\substack{i<k<j \\ a[k]>a[i]}} \{a[k]\} > a[j]$$

□

Graph of Inversions - Solution

基于上面的结论我们可以得到一个 DP 算法。令 $f[i]$ 代表以第 i 位结尾的被选择子序列的方案数。

为了处理方便，我们在序列的开头和结尾分别加上无穷小和无穷大，并强制选择这两个数。只要令 $f[0] = 1$ 即可，$f[n+1]$ 即为答案。转移方程则是

$$f[j] = \sum_{\text{all valid } i} f[i]$$

直接判断是否可行可以得到一个 $O(n^3)$ 的算法。

实际上没有必要直接判断。我们可以枚举 i，然后向右枚举 j，同时维护最小的满足条件的 k。这样复杂度就成了 $O(n^2)$。 $\square$

ForbiddenSum

定义一个多重集 S 的 ForbiddenSum 为，不能表示为 S 的某个子集中所有元素之和的最小元素。比如，多重集 $\{1,1,3,7\}$ 的 ForbiddenSum 为 6。

给定长度为 n 的序列 a ，有 m 次询问，每次给定 l_i 和 r_i ，询问多重集 $S=\{a_l,a_{l+1},\dots,a_r\}$ 的 ForbiddenSum。

$n,m\le 100000$ ，$\sum a_i\le 10^9$ 。 □

ForbiddenSum - Solution

有个问题和这个问题长得有点像：

ForbiddenSum - Solution

有个问题和这个问题长得有点像：

Subset Sum 问题。问是否存在给定集合的一个子集，使得子集中元素的和为给定的数。很遗憾这个问题是 NP 问题。因此二分答案判定什么的肯定是不行的。

ForbiddenSum - Solution

有个问题和这个问题长得有点像：

Subset Sum 问题。问是否存在给定集合的一个子集，使得子集中元素的和为给定的数。很遗憾这个问题是 NP 问题。因此二分答案判定什么的肯定是不行的。

这个问题和 Subset Sum 问题的不同之处在于，这个问题只要求不能表示为 Subset Sum 的最小值。我们尝试从这个地方入手。 □

ForbiddenSum - Solution

对集合中的元素排序，记为 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 。令 $a_0 = 0$ ，同时令 sum_i 为 a 的前缀和。

再定义布尔值 f_i ，表示答案是否大于 sum_i 。f_0 显然为真。如何求出所有的 f_i ？

ForbiddenSum - Solution

对集合中的元素排序，记为 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 。令 $a_0 = 0$ ，同时令 sum_i 为 a 的前缀和。

再定义布尔值 f_i ，表示答案是否大于 sum_i 。f_0 显然为真。如何求出所有的 f_i ？

考虑从 f_{i-1} 推到 f_i 。如果 f_{i-1} 为假，显然 f_i 为假。否则，就意味着可以用 $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ 凑出 $0 \sim sum_{i-1}$ 的所有数。

ForbiddenSum - Solution

对集合中的元素排序，记为 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 。令 $a_0 = 0$ ，同时令 sum_i 为 a 的前缀和。

再定义布尔值 f_i ，表示答案是否大于 sum_i 。f_0 显然为真。如何求出所有的 f_i ？

考虑从 f_{i-1} 推到 f_i 。如果 f_{i-1} 为假，显然 f_i 为假。否则，就意味着可以用 $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ 凑出 $0 \sim sum_{i-1}$ 的所有数。

此时 f_i 为真就等价于，可以用 $0 \sim sum_{i-1}$ 中的任意一个数以及 a_i 本身凑出 $sum_{i-1} + 1 \sim sum_i$ 的所有数。这又等价于 $a_i \leq sum_{i-1} + 1$ 。

假设只有一次询问，我们可以对区间排序之后，在 $O(n)$ 时间内求出所有 f_i 的值。记 p 为满足 f_p 为假的最小值，答案即为 $sum_{p-1} + 1$ 。如果不存在这样的 p ，答案就是 $sum_n + 1$ 。 $\square$

ForbiddenSum - Solution

我们接着考虑怎么用数据结构优化这一过程。

ForbiddenSum - Solution

我们接着考虑怎么用数据结构优化这一过程。

套用区间无修改问题的万能做法—莫队算法。用平衡树维护当前区间中所有数的有序序列。对于每个节点，维护 $v_i = a_i - sum_{i-1}$ ，以及子树中 v_i 的最大值 m_i 。我们要找的就是第一个 $v_i > 1$ 的节点，这可以通过在平衡树中走一遍得出。

ForbiddenSum - Solution

我们接着考虑怎么用数据结构优化这一过程。

套用区间无修改问题的万能做法—莫队算法。用平衡树维护当前区间中所有数的有序序列。对于每个节点，维护 $v_i = a_i - sum_{i-1}$ ，以及子树中 v_i 的最大值 m_i 。我们要找的就是第一个 $v_i > 1$ 的节点，这可以通过在平衡树中走一遍得出。

这个算法的复杂度为 $O(n\sqrt{n}\log n)$ ，而且常数较大，没有办法通过这道题。 □

ForbiddenSum - Solution

我们回到之前只有一次询问的暴力做法。我们能不能在这个算法上稍加优化？

ForbiddenSum - Solution

我们回到之前只有一次询问的暴力做法。我们能不能在这个算法上稍加优化？

我们稍微改一下这个暴力做法。假设当前已知 f_i 为真，我们找到最大的满足 $a_j \le sum_i + 1$ 的 j ，显然有 f_j 为真。不断重复，直到能找到的最大的 $j = i$ 。

这个算法和之前的算法有什么区别？

ForbiddenSum - Solution

我们回到之前只有一次询问的暴力做法。我们能不能在这个算法上稍加优化？

我们稍微改一下这个暴力做法。假设当前已知 f_i 为真，我们找到最大的满足 $a_j \le sum_i + 1$ 的 j ，显然有 f_j 为真。不断重复，直到能找到的最大的 $j = i$ 。

这个算法和之前的算法有什么区别？

每次找最大的 j 可以用二分查找。而不难发现，每次 sum_j 至少会是 sum_i 的两倍，也即，最多查找 $O(\log W)$ 次，其中 W 是权值。那么这个算法就是 $O(\log n \log W)$ 的。 $\square$

ForbiddenSum - Solution

我们再尝试用数据结构来优化这个新算法。

ForbiddenSum - Solution

我们再尝试用数据结构来优化这个新算法。

我们只需要查询，区间中权值在某个范围内的数之和。用可持久化线段树可以轻松做到单次查询 $O(\log n)$ 。

总复杂度 $O(n \log n \log W)$ 。 □

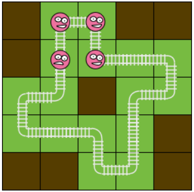
CurvyonRails

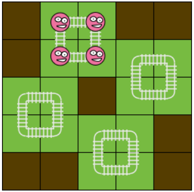
一块 $n \times n$ 的地图，每个格子均为空地或者障碍。

现在要铺铁轨，每块空地都要被覆盖，每条路线必须闭合，且不能相交。

有些空地上住着基佬，在这种空地上铺一块直的铁路需要花费 1 的代价。

给定地图，求是否能够铺铁轨，以及最小代价。





CurvyonRails - Solution

第一眼看上去……插头 DP？

CurvyonRails - Solution

第一眼看上去……插头 DP？

插头 DP 是会 TLE 的。
这题和需要用插头 DP 的题有什么区别？

CurvyonRails - Solution

第一眼看上去……插头 DP？

插头 DP 是会 TLE 的。

这题和需要用插头 DP 的题有什么区别？

需要用插头 DP 的题对所求路径有特殊要求（比如为哈密尔顿回路），而且有些题需要求方案数。而此题只需覆盖每个格子，且所求为某个最小值。或许……

CurvyonRails - Solution

第一眼看上去……插头 DP？

插头 DP 是会 TLE 的。

这题和需要用插头 DP 的题有什么区别？

需要用插头 DP 的题对所求路径有特殊要求（比如为哈密尔顿回路），而且有些题需要求方案数。而此题只需覆盖每个格子，且所求为某个最小值。或许……

网络流？ □

CurvyonRails - Solution

先考虑判断是否有解。即，存在一些不相交不重复的回路可以覆盖所有空地且不覆盖任意障碍。

CurvyonRails - Solution

先考虑判断是否有解。即，存在一些不相交不重复的回路可以覆盖所有空地且不覆盖任意障碍。

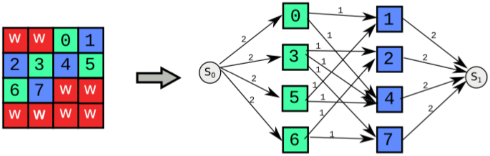
也即，每个空地向相邻的空地连出恰好两条轨道。

CurvyonRails - Solution

先考虑判断是否有解。即，存在一些不相交不重复的回路可以覆盖所有空地且不覆盖任意障碍。

也即，每个空地向相邻的空地连出恰好两条轨道。

那么构建网络流模型。对地图（只考虑空地）黑白染色，从源向黑点、从白点向汇连容量为 2 的边。从黑点向相邻的白点连容量为 1 的边。满流即有解。



CurvyonRails - Solution

那么弯的和直的铁轨怎么判断?

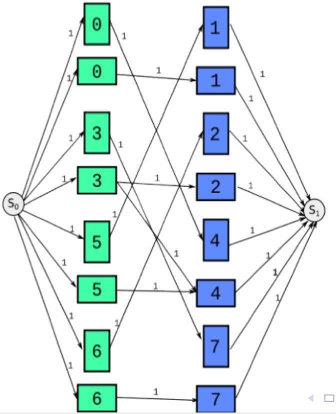
CurvyonRails - Solution

那么弯的和直的铁轨怎么判断？
直的铁轨即，一块空地连出两条横向或纵向的轨道。
弯的铁轨即，一块空地连出一条横向和一条纵向的轨道。

CurvyonRails - Solution

那么弯的和直的铁轨怎么判断?
直的铁轨即，一块空地连出两条横向或纵向的轨道。
弯的铁轨即，一块空地连出一条横向和一条纵向的轨道。
先强制所有铁轨都是弯的，判断是否有解。
在已有的网络流模型基础上改进。
把每块空地拆成两个点，一个代表横向，一个代表纵向。
横向点向横向相邻的空地的横向点连一条容量为 1 的边，纵向的类似。满流即有解。 □

CurvyonRails - Solution



CurvyonRails - Solution

如果要把一块铁轨改成直的呢？

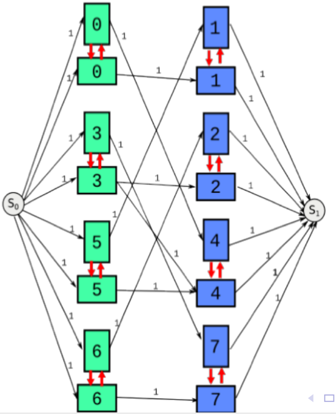
CurvyonRails - Solution

如果要把一块铁轨改成直的呢？
如果是没人的空地，随便改；如果是有人的空地，收取费用。

CurvyonRails - Solution

如果要把一块铁轨改成直的呢？
如果是没人的空地，随便改；如果是有人的空地，收取费用。
把网络流模型改成费用流模型，已有的边费用为 0 。
在一块空地拆出的两个点之间连一条流量为 1 的双向边。
如果空地有人，双向边的费用为 1 ；否则为 0 。
如果这类边有流量，就说明有一条轨道改变了方向。答案即为最小费用最大流。 □

CurvyonRails - Solution



Chef and Graph Queries

给定一个 n 个点 m 条边的图，每条边编号为 $1 \sim m$ 。有 q 次询问，每次给定 l 和 r ，询问当仅保留编号为 $l \sim r$ 的边时，图中有多少个连通块。

$n, m, q \leq 200000$ 。可能有自环与重边。 $\square$

Chef and Graph Queries - Solution

我们还是先看一个与之类似的问题：

AHOI2013 连通图。与本题不同的是，每次询问只会删去最多 4 条边。而该题的做法是对询问分治。

Chef and Graph Queries - Solution

我们还是先看一个与之类似的问题：

AHOI2013 连通图。与本题不同的是，每次询问只会删去最多 4 条边。而该题的做法是对询问分治。

在本题中是行不通的，因为无法保证询问中删去的边（或保留的边）与询问数同阶。

Chef and Graph Queries - Solution

我们还是先看一个与之类似的问题：

AHOI2013 连通图。与本题不同的是，每次询问只会删去最多 4 条边。而该题的做法是对询问分治。

在本题中是行不通的，因为无法保证询问中删去的边（或保留的边）与询问数同阶。

万能的莫队算法也难以实现，需要动态维护连通性。 □

Chef and Graph Queries - Solution

我们考虑按照 $1 \sim m$ 的顺序依次向空图中加边。加入一条边时，只会有两种情况：

1. 合并了两个连通块；
2. 形成了一个环。

Chef and Graph Queries - Solution

我们考虑按照 $1 \sim m$ 的顺序依次向空图中加边。加入一条边时，只会有两种情况：

1. 合并了两个连通块；
2. 形成了一个环。

先看第一种，只有合并两个连通块时才会产生贡献。我们要求的实际上就是一个区间中这类边有多少条。

Chef and Graph Queries - Solution

我们考虑按照 $1 \sim m$ 的顺序依次向空图中加边。加入一条边时，只会有两种情况：

1. 合并了两个连通块；
2. 形成了一个环。

先看第一种，只有合并两个连通块时才会产生贡献。我们要求的实际上就是一个区间中这类边有多少条。

再看第二种，形成环则代表可以删去图中的一条边，并保持当前的连通性。

不妨删去环上加入时间最早（即编号最小）的一条边。我们发现了什么？ □

Chef and Graph Queries - Solution

假设加入的边为 i ，删去的边为 a_i 。只有当 i 加入的时候才能"安全"删除 a_i ，否则会导致一个连通块分成两个。

Chef and Graph Queries - Solution

假设加入的边为 i ，删去的边为 a_i 。只有当 i 加入的时候才能“安全”删除 a_i ，否则会导致一个连通块分成两个。

换句话说，i 会产生贡献 $\iff$ 选择的区间中有 i 且没有 a_i $\square$

Chef and Graph Queries - Solution

假设我们已求得 a 。当我们询问 $[l, r]$ 时，我们实际上需要知道什么？

Chef and Graph Queries - Solution

假设我们已求得 a 。当我们询问 $[l, r]$ 时，我们实际上需要知道什么？

我们需要知道在 $[l, r]$ 中有多少 $a_i < l$ 。设其个数为 x ，连通块的个数就是 $n - x$ 。

Chef and Graph Queries - Solution

假设我们已求得 a 。当我们询问 $[l, r]$ 时，我们实际上需要知道什么？

我们需要知道在 $[l, r]$ 中有多少 $a_i < l$ 。设其个数为 x ，连通块的个数就是 $n - x$ 。

用可持久化线段树可以轻松解决这一询问。 □

Chef and Graph Queries - Solution

至于求 a ，只需维护一棵 LCT，按 $1 \sim m$ 的顺序加边。

加入一条边时，判断是否成环。如果构成了环，则找到环上编号最小的边的编号，即为 a_i 。

如果没有成环，则记 $a_i = 0$ 。注意当边为自环时，$a_i = i$ 。

总复杂度 $O((n+m)\log n)$ 。 $\square$

Gangsters of Treeland

给定一棵 n 个点的树，1 号节点为根。初始时每一个点都被染成了一种不同的颜色。如果一条边的两个端点颜色不同，则其费用为 1 ，否则费用为 0 。

有 q 次操作，操作有下面两种：

- 将从点 u 到根的路径上的所有点染成一种新的颜色。
- 询问点 u 子树中所有点走到根的费用的平均数。

$n, q \le 100000$ 。 □

Gangsters of Treeland - Solution

直接维护每个点的颜色，查询时数链上有多少种不同的颜色？

Gangsters of Treeland - Solution

直接维护每个点的颜色，查询时数链上有多少种不同的颜色？
带修改的树上第 k 大？或者是分块乱搞？无论哪个复杂度都太高。

Gangsters of Treeland - Solution

直接维护每个点的颜色，查询时数链上有多少种不同的颜色？带修改的树上第 k 大？或者是分块乱搞？无论哪个复杂度都太高。

为什么非得纠结颜色呢？可不可以利用“每次修改的颜色是一种新颜色”这样的性质？ □

Gangsters of Treeland - Solution

我们考虑直接维护边的费用。

Gangsters of Treeland - Solution

我们考虑直接维护边的费用。

初始时所有边的费用均为 1 ，修改一个点时，这个点到根的路径上的所有边的费用变为 0 ，而其他和这条路径上的点相连的费用变为 1 。

Gangsters of Treeland - Solution

我们考虑直接维护边的费用。

初始时所有边的费用均为 1 ，修改一个点时，这个点到根的路径上的所有边的费用变为 0 ，而其他和这条路径上的点相连的费用变为 1 。

一次操作影响的边可能达到 $O(n)$ ，直接操作是肯定不行的。一定还有别的性质。

Gangsters of Treeland - Solution

我们考虑直接维护边的费用。

初始时所有边的费用均为 1 ，修改一个点时，这个点到根的路径上的所有边的费用变为 0 ，而其他和这条路径上的点相连的费用变为 1 。

一次操作影响的边可能达到 $O(n)$ ，直接操作是肯定不行的。一定还有别的性质。

每个点和儿子的连边中，至多一条费用为 0 。

Gangsters of Treeland - Solution

我们考虑直接维护边的费用。

初始时所有边的费用均为 1 ，修改一个点时，这个点到根的路径上的所有边的费用变为 0 ，而其他和这条路径上的点相连的费用变为 1 。

一次操作影响的边可能达到 $O(n)$ ，直接操作是肯定不行的。一定还有别的性质。

每个点和儿子的连边中，至多一条费用为 0 。

这似乎让人想起了什么……特别熟悉的东西……

Gangsters of Treeland - Solution

我们考虑直接维护边的费用。

初始时所有边的费用均为 1 ，修改一个点时，这个点到根的路径上的所有边的费用变为 0 ，而其他和这条路径上的点相连的费用变为 1 。

一次操作影响的边可能达到 $O(n)$ ，直接操作是肯定不行的。一定还有别的性质。

每个点和儿子的连边中，至多一条费用为 0 。

这似乎让人想起了什么……特别熟悉的东西……

这不就是一棵 Link-Cut Tree 吗？ □

Gangsters of Treeland - Solution

费用为 0 的边就是 LCT 的实边，费用为 1 的边就是 LCT 的虚边。每次操作一个点就相当于 expose（也称 access）一个点。

而一个点走到根的费用就是到根路径上的虚边条数。

容易发现这个和原问题是等价的。

Gangsters of Treeland - Solution

费用为 0 的边就是 LCT 的实边，费用为 1 的边就是 LCT 的虚边。每次操作一个点就相当于 expose（也称 access）一个点。

而一个点走到根的费用就是到根路径上的虚边条数。

容易发现这个和原问题是等价的。

还记得 LCT 的复杂度吗？expose 操作是均摊 $O(\log n)$ 的。

Gangsters of Treeland - Solution

费用为 0 的边就是 LCT 的实边，费用为 1 的边就是 LCT 的虚边。每次操作一个点就相当于 expose（也称 access）一个点。

而一个点走到根的费用就是到根路径上的虚边条数。

容易发现这个和原问题是等价的。

还记得 LCT 的复杂度吗？expose 操作是均摊 $O(\log n)$ 的。

也就是说，expose 时的“关键点”，即改变了实边的点，是均摊 $O(\log n)$ 的。

换言之，我们只有至多 $O(n \log n)$ 次实质上的修改！ □

Gangsters of Treeland - Solution

我们实现一棵 LCT，修改一个点时进行 expose 操作，每找到一个关键点就修改一次。

而我们要维护的，就是每个点到根的虚边条数。

Gangsters of Treeland - Solution

我们实现一棵 LCT，修改一个点时进行 expose 操作，每找到一个关键点就修改一次。

而我们要维护的，就是每个点到根的虚边条数。

这个就很简单了。求出 DFS 序之后建线段树，每次虚边和实边切换的时候就做一次段修改。查询则直接是段查询。

总复杂度 $O(n\log^2 n)$ 。 □

Gangsters of Treeland - Extras

是不是觉得转化略神？

实际上还可以更神。由于问题等价于 LCT，我们可以增加其它 LCT 支持的操作，比如换根。

Gangsters of Treeland - Extras

是不是觉得转化略神？

实际上还可以更神。由于问题等价于 LCT，我们可以增加其它 LCT 支持的操作，比如换根。

回忆换根的实现：先把要提成根的点 expose，再 splay 到根，之后再打翻转标记。那么我们可以给题目增加这么一个操作：换根，同时把新旧根之间的路径染成新的颜色。

Gangsters of Treeland - Extras

是不是觉得转化略神？

实际上还可以更神。由于问题等价于 LCT，我们可以增加其它 LCT 支持的操作，比如换根。

回忆换根的实现：先把要提成根的点 expose，再 splay 到根，之后再打翻转标记。那么我们可以给题目增加这么一个操作：换根，同时把新旧根之间的路径染成新的颜色。

问题在于线段树那部分要怎么实现。我们需要支持子树查询、子树修改，以及换根。

Gangsters of Treeland - Extras

是不是觉得转化略神？

实际上还可以更神。由于问题等价于 LCT，我们可以增加其它 LCT 支持的操作，比如换根。

回忆换根的实现：先把要提成根的点 expose，再 splay 到根，之后再打翻转标记。那么我们可以给题目增加这么一个操作：换根，同时把新旧根之间的路径染成新的颜色。

问题在于线段树那部分要怎么实现。我们需要支持子树查询、子树修改，以及换根。

实际上也是可做的。这里就不说了，有兴趣的同学可以自己思考或者在课后与我交流。

Gangsters of Treeland - Extras

是不是觉得转化略神？

实际上还可以更神。由于问题等价于 LCT，我们可以增加其它 LCT 支持的操作，比如换根。

回忆换根的实现：先把要提成根的点 expose，再 splay 到根，之后再打翻转标记。那么我们可以给题目增加这么一个操作：换根，同时把新旧根之间的路径染成新的颜色。

问题在于线段树那部分要怎么实现。我们需要支持子树查询、子树修改，以及换根。

实际上也是可做的。这里就不说了，有兴趣的同学可以自己思考或者在课后与我交流。

至于 LCT 的别的操作能不能支持呢？这个我没有细想，同样，有兴趣的同学可以自己思考这个问题。 □

Sereja and Arcs

给定一个长度为 n 的序列 a ，对于任意的 $x \neq y$ ，如果 $a[x] = a[y]$ ，则在 x 和 y 之间画一条弧。称两条弧 x, y 和 l, r 相交当且仅当 $x < l < y < r$ 或者 $l < x < r < y$ 。求有多少条异色弧相交。

$n \leq 100000$ ， $a[i] \leq 100000$ 。时限 5s。 □

Sereja and Arcs - Solution

我们把圆弧视为线段，问题就是求有多少对有交且端点形如1212的异色线段。

Sereja and Arcs - Solution

我们把圆弧视为线段，问题就是求有多少对有交且端点形如1212的异色线段。

将颜色按出现次数分类，次数大于 T 的为大块，其他的为小块。那么我们需要处理三种情况：

1. 大块之间的贡献；
2. 小块与大块之间的贡献；
3. 小块之间的贡献。

□

Sereja and Arcs - Solution

大块之间的贡献

Sereja and Arcs - Solution

大块之间的贡献

我们枚举1212中的第二个1，再枚举另外一种颜色。

可以发现，答案为第二个1右边2的出现次数，乘上左边每个2的左侧的1的个数之和。

Sereja and Arcs - Solution

大块之间的贡献

我们枚举1212中的第二个1，再枚举另外一种颜色。

可以发现，答案为第二个1右边2的出现次数，乘上左边每个2的左侧的1的个数之和。

由于大块个数不超过 $O\left(\frac{n}{T}\right)$ ，我们可以预处理每个位置左侧每种颜色的出现次数。

用这个就能维护，对于某种颜色 col ，和某个位置以左与这个位置颜色相同的所有位置，其左侧的 col 颜色的个数之和。

计算时枚举一个位置和一种颜色。总复杂度 $O\left(\frac{n^2}{T}\right)$ 。 □

Sereja and Arcs - Solution

小块与大块之间的贡献

Sereja and Arcs - Solution

小块与大块之间的贡献
枚举每个大块，再枚举每个小块。

Sereja and Arcs - Solution

小块与大块之间的贡献

枚举每个大块，再枚举每个小块。

按照小块的每个元素把大块的元素划成若干区间，求出每个区间里的大块元素个数，记这个序列为 a 。

假设我们枚举小块的左右端点，那么大块的两个元素的选择就是 $($左边 $+$ 右边$) \times$ 中间。 □

Sereja and Arcs - Solution

小块与大块之间的贡献

Sereja and Arcs - Solution

小块与大块之间的贡献

考虑当 a 的某一个元素成为"中间"部分时的贡献，我们需要求出这个元素为"中间"时可能的"左右"之和。

这个元素左边第一块会被算一次，第二块被算两次，以此类推。整个这一部分还要再乘上右端点的可能的个数。

右边也是类似的。这一部分是可以通过一些简单的预处理求出来的。

那么复杂度也是 $O\left(\frac{n^2}{T}\right)$。 □

Sereja and Arcs - Solution

小块之间的贡献

Sereja and Arcs - Solution

小块之间的贡献

先考虑一个 $O(n^3)$ 的算法，枚举1212中2的左右端点，再枚举另外一种颜色。

此时相交的线段数就是该颜色在两个2之间的出现次数，乘上第一个2左边的出现次数。

Sereja and Arcs - Solution

小块之间的贡献

先考虑一个 $O(n^3)$ 的算法，枚举1212中2的左右端点，再枚举另外一种颜色。

此时相交的线段数就是该颜色在两个2之间的出现次数，乘上第一个2左边的出现次数。

如果左端点从右往左扫，则可以在 $O(1)$ 的时间内处理变化，并直接计算对答案的贡献的增量，从而优化到 $O(n^2)$ 。

Sereja and Arcs - Solution

小块之间的贡献

先考虑一个 $O(n^3)$ 的算法，枚举1212中2的左右端点，再枚举另外一种颜色。

此时相交的线段数就是该颜色在两个2之间的出现次数，乘上第一个2左边的出现次数。

如果左端点从右往左扫，则可以在 $O(1)$ 的时间内处理变化，并直接计算对答案的贡献的增量，从而优化到 $O(n^2)$ 。

令 $f[i]$ 代表在当前右端点下，左端点为 i 时相交的线段数。不妨考虑，右端点右移时，f 会如何变化。

如果我们能维护 f ，那么只需要枚举与右端点颜色相同的位置。 □

Sereja and Arcs - Solution

小块之间的贡献

THU CST 胡泽聪

Sereja and Arcs - Solution

小块之间的贡献

我们考虑只枚举与右端点颜色相同的位置，此时对 f 的影响是按照这些位置分段的，每一段内的增量相同。

也就是说，右端点右移会导致若干个段的修改，因此我们可以用树状数组维护答案。

Sereja and Arcs - Solution

小块之间的贡献

我们考虑只枚举与右端点颜色相同的位置，此时对 f 的影响是按照这些位置分段的，每一段内的增量相同。

也就是说，右端点右移会导致若干个段的修改，因此我们可以用树状数组维护答案。

令 x_i 为颜色 i 的出现次数，复杂度应该是 $O((\sum x_i^2)\log n)$ 。

而 $\max\{\sum x_i^2\}$ 其实是 $O(nT)$ 级别的。

考虑给某个 x_i 加 1 带来的增量 $\Delta = 2x_i + 1$ ，因此一定会选择最大的 x_i 去加 1。

换句话说，当有 $\frac{n}{T}$ 个 x_i 为 T 时原式取到最大值。因此复杂度为 $O(nT\log n)$ 。 □

Sereja and Arcs - Solution

综上，取

$$T = \sqrt{\frac{n}{\log n}}$$

可得最优复杂度 $O(n\sqrt{n \log n})$ 。时限有 5s，毫无压力。

Sereja and Arcs - Solution

综上，取
$$T = \sqrt{\frac{n}{\log n}}$$
可得最优复杂度 $O(n\sqrt{n\log n})$ 。时限有 5s，毫无压力。

但可以发现，$O\left(\frac{n^2}{T}\right)$ 的有两个部分，$O(nT\log n)$ 的只有一部分，因此应适当调大 T 。

经过实测，取 $T = \left\lfloor 1.8 \cdot \sqrt{\frac{n}{\log n}} \right\rfloor$ 时效果最好，只需要 2.48s 即可通过全部数据。 □

The End

谢谢大家！欢迎课后提问。

E-mail: huzecong@163.com