

第十届全国大学生数学竞赛预赛参考答案

(非数学类, 2018 年 10 月 27 日)

绝密 ★ 启用前

(16 数学 – 胡八一)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满分	24	8	14	12	14	14	14	100
得分								

注意: 1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	评卷人	复核人

一、填空题 (本题满分 24 分, 每题 6 分)

1. 设 $\alpha \in (0, 1)$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((n+1)^\alpha - n^\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】0.

【解析】等价无穷小 $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^\alpha - n^\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha ((1+1/n)^\alpha - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \times \frac{\alpha}{n} = 0$$

2. 若曲线 $y = f(x)$ 是由 $\begin{cases} x = t + \cos t \\ e^y + ty + \sin t = 1 \end{cases}$ 确定, 则此曲线在 $t = 0$ 对应点处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x + y - 1 = 0$.

【解析】易知 $t = 0$ 处上的曲线为点 $(1, 0)$, 即方程组对 t 求导得

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{y + \cos t}{e^y + t}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = -\frac{y + \cos t}{(e^y + 1)(1 - \sin t)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{t=0} = -1$$

故曲线在 $t = 0$ 对应点处的切线方程为 $x + y - 1 = 0$.

$$3. \int \frac{\ln(1 + \sqrt{1 + x^2})}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$

【解析】简单的凑微分，如下

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) d\left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) \\ &= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \int \frac{x}{1 + x^2} dx \\ &= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C \end{aligned}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 3.

【解析】这题方法很多，简单的等价无穷小，或拆项、洛必达以及泰勒都可以。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} + \frac{\cos x (1 - \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos \sqrt{2x}}{x^2} + \frac{\cos \sqrt{2x} (1 - \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sqrt{1 + (\cos 2x - 1)}}{x^2} + \frac{1 - \sqrt[3]{1 + (\cos 3x - 1)}}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

得分	评卷人	复核人

二、解答题 (本题满分 8 分)

设函数 $f(t)$ 在 $t \neq 0$ 时一阶连续可导, 且 $f(1) = 0$, 求函数 $f(x^2 - y^2)$, 使得曲线积分 $\int_L y(2 - f(x^2 - y^2))dx + xf(x^2 - y^2)dy$ 与路径无关, 其中 L 为任一不与直线 $y = \pm x$ 相交的分段光滑闭曲线.

【解析】记 $\begin{cases} P(x, y) = y(2 - f(x^2 - y^2)) \\ Q(x, y) = x + xf(x^2 - y^2) \end{cases}$, 于是

$$\begin{cases} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2 - f(x^2 - y^2) + 2y^2 f'(x^2 - y^2) \\ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = f(x^2 + y^2) + 2x^2 f'(x^2 - y^2) \end{cases}$$

由题设可知, 积分与路径无关, 于是有

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \implies (x^2 - y^2) f'(x^2 - y^2) + f(x^2 - y^2) = 1$$

.....5 分

记 $t = x^2 - y^2$, 即微分方程

$$tf'(t) + f(t) = 1 \Leftrightarrow (tf(t))' = 1 \Rightarrow tf(t) = y + C$$

又 $f(1) = 0$, 可得 $C = -1$, $f(t) = 1 - \frac{1}{t}$, 从而

$$f(x^2 - y^2) = 1 - \frac{1}{x^2 - y^2}$$

.....8 分

得分	评卷人	复核人

三、解答题 (本题满分 14 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 且 $1 \leq f(x) \leq 3$. 证明:

$$0 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{4}{3}$$

【证明】由 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \geq \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)} \sqrt{\frac{1}{f(x)}} dx \right)^2 = 1$$

.....4 分

又由基本不等式得:

$$\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{3}{f(x)} dx \leq \frac{1}{4} \left(\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 \frac{3}{f(x)} dx \right)^2$$

再由条件 $1 \leq f(x) \leq 3$, 有 $(f(x) - 1)(f(x) - 3) \leq 0$, 则

$$f(x) + \frac{3}{f(x)} \leq 4 \Rightarrow \int_0^1 \left(f(x) + \frac{3}{f(x)} \right) dx \leq 4$$

..... 10 分

即可得

$$1 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{4}{3}$$

..... 14 分

得分	评卷人	复核人

四、解答题 (本题满分 12 分)

计算三重积分 $\iiint_{(V)} (x^2 + y^2) dV$, 其中 (V) 是由 $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \geq 4$, $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 9$ 及 $z \geq 0$ 所围成的空间图形.

【解析】(1) 计算打球 (V_1) 的积分, 利用球坐标换元, 令

$$(V_1): \begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z - 1 = r \cos \varphi \\ 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

于是有

$$\iiint_{(V_1)} (x^2 + y^2) dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^3 r^3 \sin^2 \varphi r^2 \sin \varphi = \frac{8}{15} \cdot 3^5 \pi$$

.....4 分

(2) 计算小球 (V_2) 的积分，利用球坐标换元，令

$$(V_2) : \begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z - 2 = r \cos \varphi \\ 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

于是有

$$\iiint_{(V_2)} (x^2 + y^2) dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^2 r^2 \sin^2 \varphi r^2 \sin \varphi = \frac{8}{15} \cdot 2^5 \pi$$

.....8 分

(3) 计算大球 $z = 0$ 下部分的积分 V_3 ，利用球坐标换元，令

$$(V_3) : \begin{cases} x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, 1 - \sqrt{9 - r^2} \leq z \leq 0 \\ 0 \leq r \leq 2\sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned} \iiint_{(V_3)} (x^2 + y^2) dV &= \iint_{r \leq 2\sqrt{2}} r dr d\theta \int_{1 - \sqrt{9 - r^2}}^0 r^2 dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} r^3 (\sqrt{9 - r^2} - 1) \\ &= \left(124 - \frac{2}{5} \cdot 3^5 + \frac{2}{5} \right) \pi \end{aligned}$$

综上所述有

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} (x^2 + y^2) dV &= \iiint_{(V_1)} (x^2 + y^2) dV - \iiint_{(V_2)} (x^2 + y^2) dV - \iiint_{(V_3)} (x^2 + y^2) dV \\ &= \frac{8}{15} \cdot 3^5 \pi + \frac{8}{15} \cdot 2^5 \pi + \left(124 - \frac{2}{5} \cdot 3^5 + \frac{2}{5} \right) \pi \\ &= \frac{256}{3} \pi \end{aligned}$$

.....12 分

得分	评卷人	复核人

五、解答题 (本题满分 14 分)

设 $f(x, y)$ 在区域 D 内可微, 且 $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \leq M$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是 D 内两点, 线段 AB 包含在 D 内, 证明:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq M|AB|$$

其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度.

【证明】作辅助函数

$$\varphi(t) = f(x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1))$$

..... 2 分

显然 $\varphi(t)$ 在 $[0, 1]$ 可导, 根据 Lagrange 中值定理, 存在 $c \in (0, 1)$, 使得

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(c) = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}(x_2 - x_1) + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}(y_2 - y_1)$$

..... 8 分

即可得到

$$\begin{aligned} |\varphi(1) - \varphi(0)| &= |f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \\ &= \left| \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}(x_2 - x_1) + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}(y_2 - y_1) \right| \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\right)^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &\leq M|AB| \end{aligned}$$

..... 14 分

得分	评卷人	复核人

六、解答题 (本题满分 14 分)

证明: 对于连续函数 $f(x) > 0$, 有

$$\ln \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \ln f(x) dx$$

【证明】由定积分定义，将 $[0, 1]$ 分 n 等分，可取 $\Delta x = \frac{1}{n}$ ，由“算术平均数 \geq 几何平均数”得：

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} = \exp \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln f\left(\frac{k}{n}\right)$$

.....4 分

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \geq \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln f\left(\frac{k}{n}\right) = \exp \int_0^1 \ln f(x) dx$$

.....10 分

然后两边取对数即证

$$\ln \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \ln f(x) dx$$

.....14 分

或者考虑令 $g(x) = \ln x$ ，则 $g'(x) = \frac{1}{x}$ ， $g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ ，所以 $g(x)$ 为凹函数，可由琴声不等式定理即证.

得分	评卷人	复核人

七、解答题 (本题满分 14 分)

已知 a_k, b_k 是正数数列，且 $b_{k+1} - b_k \geq \delta > 0, k = 1, 2, \dots$ ， δ 为一切常数，证明：
若级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛，则级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k \sqrt[k]{(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_k)}}{b_{k+1} b_k}$ 收敛.

【证明】令 $S_k = \sum_{i=1}^k a_i b_i, a_k b_k = S_k - S_{k-1}, S_0 = 0, a_k = \frac{S_k - S_{k-1}}{b_k}, k = 1, 2, \dots$ 4 分

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N a_k &= \sum_{k=1}^N \frac{S_k - S_{k-1}}{b_k} = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{S_k}{b_k} - \frac{S_k}{b_{k+1}} \right) + \frac{S_N}{b_N} \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{b_{k+1} - b_k}{b_k b_{k+1}} S_k + \frac{S_N}{b_N} \geq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\delta}{b_k b_{k+1}} S_k \end{aligned}$$

所以 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k}{b_k b_{k+1}}$ 收敛.10 分

由算术-几何平均不等式得

$$\sqrt[k]{(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_k)} \leq \frac{a_1 b_1 + \cdots + a_k b_k}{k} = \frac{S_k}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sqrt[k]{(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_k)}}{b_{k+1} b_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k}{b_k b_{k+1}}$$

故结论成立.

.....14 分