第九届全国大学生数学竞赛预赛参考答案

(非数学类, 2017 年 10 月 28 日)

绝密 ★ 启用前 (16 数学 – 胡八一)

考试形式：闭卷 考试时间：150 分钟 满分：100 分

题 号	一	二	三	四	五	总 分
满 分	42	14	14	15	15	100
得 分						

注意：1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

省市：________ 学校：________ 姓名：________ 准考证号：________

装 订 线 内 不 要 答 题

得分	评卷人	复核人

一、填空题（本题满分 42 分）

1. 已知可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}x=x+1$，则 $f(x)=$______.

【答案】$\sin x+\cos x$.

【解析】两边同时对 x 求导

$$f'(x)\cos x+f(x)\sin x=1 \Longrightarrow f'(x)+f(x)\tan x=\sec x.$$

由常数变易法，从而

$$\begin{aligned}
f(x)&=\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\Big(\int\sec x\,\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\Big)\\
&=\mathrm{e}^{\ln\cos x}\Big(\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{e}^{-\ln\cos x}\mathrm{d}x+C\Big)\\
&=\cos x\Big(\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+C\Big)\\
&=\cos x(\tan x+C)=\sin x+C\cos x
\end{aligned}$$

由于 $f(0)=1$，故 $f(x)=\sin x+\cos x$.

2. 极限 $\lim\limits_{n\to 0}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) =$______.

【答案】1

【解析】

$$\begin{aligned}\lim_{n\to 0}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) &= \lim_{n\to 0}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)\\ &= \lim_{n\to 0}\sin^2\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right) = 1\end{aligned}$$

3. 设 $w = f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $u = x - cy$，$v = x + cy$，其中 c 为非零常数。则 $w_{xx} - \frac{1}{c^2}w_{yy} =$______.

【答案】$4f_{12}$.

【解析】

$$w_x = f_1 + f_2, w_{xx} = f_{11} + 2f_{12} + f_{22}, w_y = c(f_2 - f_1),$$

$$w_{yy} = c\frac{\partial}{\partial x}(f_2 - f_1) = c(cf_{11} - cf_{12} - cf_{21} + cf_{22}) = c^2(f_{11} - 2f_{12} + f_{22}).$$

所以

$$w_{xx} - \frac{1}{c^2}w_{yy} = 4f_{12}.$$

4. 设 $f(x)$ 有二阶导数连续,且 $f(0) = f'(0) = 0$,$f''(0) = 6$,则 $\lim\limits_{n\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4} =$______.

【答案】3

【解析】$f(x)$ 在 $x = 0$ 处的泰勒展开式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

所以

$$f(\sin^2 x) = \frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x,$$

于是

$$\lim_{n\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4} = \lim_{n\to 0}\frac{\frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x}{x^4} = 3.$$

5. 不定积分 $\int \frac{\mathrm{e}^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x =$______.

【答案】$\frac{2\mathrm{e}^{-\sin x}}{1-\sin x}+C$.

【解析】令 $\sin x = v$，则

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int \frac{v\mathrm{e}^{-v}}{(1-v)^2}\mathrm{d}v \\
&= 2\int \frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v + 2\int \frac{\mathrm{e}^{-v}}{(v-1)^2}\mathrm{d}v \\
&= 2\int \frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v - 2\int \mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}\Big(\frac{1}{v-1}\Big) \\
&= 2\int \frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v - 2\Big(\frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1} + \int \frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v\Big) \\
&= -\frac{2\mathrm{e}^{v}}{v-1} + C = \frac{2\mathrm{e}^{-\sin x}}{1-\sin x} + C
\end{aligned}
$$

6. 记曲面 $z^2 = x^2+y^2$ 和 $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成空间区域 V，则三重积分 $\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
$=$______.

【答案】2π.

【解析】使用球面坐标

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 \rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho \\
&= 2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\pi/4}\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^2 \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

得分	评卷人	复核人

二、解答题 (本题满分 14 分)

设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶导数，对任意角 α，定义一元函数

$$g_\alpha(t) = f(t\cos\alpha, t\sin\alpha).$$

若对任何 α 都有 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$ 且 $\dfrac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$。证明：$f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值。

【证明】由于

$$\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=(f_x,f_y)_{(0,0)}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=0$$

对一切 α 成立，故 $(f_x,f_y)_{(0,0)}=(0,0)$，即 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点。

......................................4 分

记

$$H_f=(x,y)=\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}=0,$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(f_x,f_y)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right]_{(0,0)}\\ &=(\cos\alpha,\sin\alpha)H_f(0,0)\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}>0\end{aligned}$$

......................................10 分

上式对任何单位向量 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 成立，故 $H_f(0,0)$ 是一个正定矩阵，而 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值。

......................................14 分

装 订 线 内 不 要 答 题

省市：________ 学校：________ 姓名：________ 准考证号：________

装 订 线 内 不 要 答 题

得分	评卷人	复核人

三、解答题（本题满分 14 分）

设曲线 Γ 为曲线

$$x^2+y^2+z^2=1, x+z=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$$

上从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,0,1)$ 的一段，求曲线积分 $I=\int_{\Gamma} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z.$

【解析】记 Γ_1 为从 B 到 A 的直线段，则 $x=t, y=0, z=1-t, 0\leqslant t\leqslant 1,$

$$\int_{\Gamma_1} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_0^1 t\mathrm{d}(1-t)=-\frac{1}{2}.$$

......................................4 分

设 Γ 和 Γ_1 围成的平面区域 $\sum$，方向按右手法则。由 Stokes 公式得到

$$\left(\int_{\Gamma}+\int_{\Gamma_1}\right)y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_{\sum}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}$$

$$=-\iint_{\sum}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

......................................8 分

右边三个积分都是 $\sum$ 在各个坐标面上的投影面积，而 $\sum$ 在 xOz 面上的投影面积为零。故

$$I+\int_{\Gamma_1}=-\iint_{\sum}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

曲线 Γ 在 xOy 面上投影的方程为 $\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1.$ ......12 分

又该投影（半个椭圆）的面积为 $\iint_{\sum}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$, 同理 $\iint_{\sum}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}.$

所以

$$I=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

......................................14 分

得分	评卷人	复核人

四、解答题（本题满分 15 分）

设函数 $f(x)>0$ 且在实轴上连续，若对任意实数 t，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1,$$

证明：$\forall a,b,a<b$，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a+2}{2}.$$

【证明】由于 $\forall a,b,a<b$，有 $\int_a^{+b} \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1,$

因此

$$\int_a^b \mathrm{d}t \int_a^b \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x)\mathrm{d}x \leqslant b-a.$$

…………………………………4 分

然而

$$\int_a^b \mathrm{d}t \int_a^b \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\Big(\int_a^b \mathrm{e}^{-|t-x|}\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}x,$$

其中

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-|t-x|}\mathrm{d}t = \int_a^x \mathrm{e}^{t-x}\mathrm{d}t + \int_x^b \mathrm{e}^{x-t} = 2-\mathrm{e}^{a-x}-\mathrm{e}^{x-b}.$$

这样就有

$$\int_a^b f(x)(2-\mathrm{e}^{a-x}-\mathrm{e}^{x-b})\mathrm{d}x \leqslant b-a. \qquad (*)$$

…………………………………10 分

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}\Big[\int_a^b \mathrm{e}^{a-x} f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \mathrm{e}^{x-b} f(x)\mathrm{d}x\Big].$$

注意到

$$\int_a^b \mathrm{e}^{a-x} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{e}^{-|a-x|} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1, \int_a^b \mathrm{e}^{x-b} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1.$$

…………………………………13 分

把以上两个式子代入（$*$），即得结论。

. . . . 15 分