准考证号：________ 姓名：________ 学校：________ 省市：________

装 订 线 内 不 要 答 题



# 第十届全国大学生数学竞赛 LaTeX 模板

## 非数学类答案

2018 年 10 月 27 号 9:00 - 11:30

考试形式： 闭卷 考试时间： 150 分钟 满分： 100 分

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 满分 | 24 | 8 | 14 | 12 | 14 | 14 | 14 | 100 |
| 得分 | | | | | | | | |

**注 意 事 项**

**考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求**

1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

| 得分 | 评卷人 | 复核人 |
| --- | --- | --- |
| | | |

**一、填空题（本题满分 24 分，每题 6 分）**

1. 设 $\alpha \in (0,1)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left((n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right)=$______.

**解** 等价无穷小 $(1+x)^{\alpha}-1 \backsim \alpha x$，得

$$\lim_{n\to\infty}\left((n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right)=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\left((1+1/n)^{\alpha}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\times\frac{\alpha}{n}=0$$

□

2.若曲线$y=f(x)$是由$\begin{cases} x=t+\cos t \\ e^{y}+ty+\sin t=1 \end{cases}$确定，则此曲线在$t=0$ 对应点处的切线方程为______.

**解** 易知 $t=0$ 处上的曲线为点 $(1,0)$，即方程组对 $t$ 求导得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1-\sin t,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{y+\cos t}{e^{y}+t}$$

$$\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{y+\cos t}{(e^{y}+1)(1-\sin t)}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=-1$$

故曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程为 $x+y-1=0$. □

3.$\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x =$______.

**解** 简单的凑微分，如下

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x &= \int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C\end{aligned}$$

□

4.$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} =$______.

**解** 由 $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2), \sqrt{1+z} = 1+\frac{z}{2}+o(z)$，即

$$\sqrt{\cos 2x} = 1-x^2+o(x^2),\quad \sqrt[3]{\cos 3x} = 1-\frac{3x^2}{2}+o(x^2),\quad \sqrt[3]{1+z} = 1+\frac{z}{3}+o(z)$$

即

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\left(1-x^2+o\left(x^2\right)\right)\left(1-\frac{3x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)}{x^2} = 3$$

这题方法除泰勒之外，还可简单的等价无穷小，或拆项，洛必达处理

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x\left(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{x^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}\\
&= \frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos\sqrt{2x}}{x^2}+\frac{\cos\sqrt{2x}\left(1-\sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{x^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{1+(\cos 2x-1)}}{x^2}+\frac{1-\sqrt[3]{1+(\cos 3x-1)}}{x^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2}\\
&= 3 \qquad \square
\end{aligned}$$

| 得分 | 评卷人 | 复核人 |
|---|---|---|
| | | |

## 二、解答题（本题满分 8 分）

设函数 $f(t)$ 在 $t\neq 0$ 时一阶连续可导，且 $f(1)=0$，求函数 $f(x^2-y^2)$，使得曲线积分 $\int_L y\left(2-f\left(x^2-y^2\right)\right)\mathrm{d}x+xf\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $L$ 为任一不与直线 $y=\pm x$ 相交的分段光滑闭曲线.

**解** 记 $\begin{cases} P(x,y) = y\left(2 - f\left(x^2 - y^2\right)\right) \\ Q(x,y) = x + xf\left(x^2 - y^2\right) \end{cases}$，于是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2 - f\left(x^2 - y^2\right) + 2y^2 f'\left(x^2 - y^2\right) \\ \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = f\left(x^2 + y^2\right) + 2x^2 f'\left(x^2 - y^2\right) \end{cases}$$

由题设可知，积分与路径无关，于是有

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \Longrightarrow \left(x^2 - y^2\right) f'\left(x^2 - y^2\right) + f\left(x^2 - y^2\right) = 1$$

……………………………………5 分

记 $t = x^2 - y^2$，即微分方程

$$tf'(t) + f(t) = 1 \Leftrightarrow (tf(y))' = 1 \Rightarrow tf(t) = y + C$$

又 $f(1) = 0$，可得 $C = -1$，$f(t) = 1 - \dfrac{1}{t}$，从而

$$f\left(x^2 - y^2\right) = 1 - \frac{1}{x^2 - y^2}$$

………………………8 分 □

| 得分 | 评卷人 | 复核人 |
|---|---|---|
| | | |

**三、解答题** (**本题满分** 14 **分**)

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$. 证明：

$$0 \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{3}$$

**证明** 由 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2 = 1$$

.................................... 4 分

又由基本不等式得：

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2$$

再由条件 $1 \leq f(x) \leq 3$，有 $(f(x)-1)(f(x)-3) \leq 0$，则

$$f(x) + \frac{3}{f(x)} \leq 4 \Rightarrow \int_0^1 \left(f(x) + \frac{3}{f(x)}\right)\mathrm{d}x \leq 4$$

.................................... 10 分

即可得

$$1 \leq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leq \frac{4}{3}$$

■

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14 分

| 得分 | 评卷人 | 复核人 |
|---|---|---|
| | | |

## 四、解答题（本题满分 12 分）

计算三重积分 $\iiint_{(V)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V$，其中 $(V)$ 是由 $x^2+y^2+(z-2)^2\geqslant 4$，$x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 9$ 及 $z\geqslant 0$ 所围成的空间图形.

**解** (1) 计算打球 $(V_1)$ 的积分，利用球坐标换元，令

$$(V_1):\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z-1=r\cos\varphi \\ 0\leqslant r\leqslant 3, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \end{cases}$$

于是有

$$\iiint_{(V_1)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^3 r^3\sin^2\varphi r^2\sin\varphi=\frac{8}{15}\cdot 3^5\pi$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 分

(2) 计算小球 $(V_2)$ 的积分，利用球坐标换元，令

$$(V_2):\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z-2=r\cos\varphi \\ 0\leqslant r\leqslant 2, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \end{cases}$$

于是有

$$\iiint_{(V_2)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2}r^2\sin^2\varphi r^2\sin\varphi=\frac{8}{15}\cdot 2^5\pi$$

........................................8 分

(3) 计算大球 $z=0$ 下部分的积分 $V_3$，利用球坐标换元，令

$$(V_3):\begin{cases}x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, 1-\sqrt{9-r^2}\leqslant z\leqslant 0\\0\leqslant r\leqslant 2\sqrt{2}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned}\iiint_{(V_3)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V&=\iint_{r\leqslant 2\sqrt{2}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\int_{1-\sqrt{9-r^2}}^{0}r^2\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{2}}r^3\left(\sqrt{9-r^2}-1\right)\\&=\left(124-\frac{2}{5}\cdot 3^5+\frac{2}{5}\right)\pi\end{aligned}$$

综上所述有

$$\begin{aligned}\iiint_{(V)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V&=\iiint_{(V_1)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V-\iiint_{(V_2)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V-\iiint_{(V_3)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V\\&=\frac{8}{15}\cdot 3^5\pi+\frac{8}{15}\cdot 2^5\pi+\left(124-\frac{2}{5}\cdot 3^5+\frac{2}{5}\right)\pi\\&=\frac{256}{3}\pi\end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 12 分 $\square$

| 得分 | 评卷人 | 复核人 |
| --- | --- | --- |
| | | |

**五、解答题（本题满分** 14 分)

设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微，且 $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \leqslant M$，$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ 是 D 内两点，线段 AB 包含在 D 内，证明：

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| \leqslant M|AB|$$

其中 $|AB|$ 表示线段 $AB$ 的长度.

**证明** 作辅助函数

$$\varphi(t)=f\left(x_1+t\left(x_2-x_1\right)\cdot y_1+t\left(y_2-y_1\right)\right)$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2 分

显然 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 可导，根据 Lagrange 中值定理，存在 $c\in(0,1)$，使得

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(c)=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\left(x_2-x_1\right)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\left(y_2-y_1\right)$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 8 分

即可得到

$$
\begin{aligned}
|\varphi(1)-\varphi(0)| &= |f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)| \\
&= \left|\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2-x_1)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2-y_1)\right| \\
&\leqslant \sqrt{\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right)^2}\cdot\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\
&\leqslant M|AB|
\end{aligned}
$$

........................14 分 ■

| 得分 | 评卷人 | 复核人 |
|---|---|---|
| | | |

**六、解答题（本题满分 14 分）**

证明：对于连续函数 $f(x)>0$，有

$$\ln\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x$$

**证明** 由定积分定义，将 $[0,1]$ 分 $n$ 等分，可取 $\Delta x=\dfrac{1}{n}$，由“算术平均数 $\geqslant$ 几何平均数”得：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \geqslant \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} = \exp\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4$ 分

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \exp \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln f\left(\frac{k}{n}\right) = \exp\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10$ 分

然后两边取对数即证

$$\ln\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x$$

■

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 14$ 分

或者考虑令 $g(x)=\ln x$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}$，$g''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$，所以 $g(x)$ 为凹函数，可由琴声不等式定理即证.

| 得分 | 评卷人 | 复核人 |
| --- | --- | --- |
| | | |

**七、解答题 ( 本题满分 14 分)**

已知 $a_k$，$b_k$ 是正数数列，且 $b_{k+1}-b_k \geqslant \delta > 0, k=1,2,\cdots$，$\delta$ 为一切常数，证明：若级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$ 收敛.

**证明** 令 $S_k=\sum_{i=1}^{k}a_ib_i, a_kb_k=S_k-S_{k-1}, S_0=0, a_k=\frac{s_k-S_{k-1}}{b_k}, k=1,2,\cdots$ ..4 分

$$\sum_{k=1}^{N}a_k=\sum_{k=1}^{N}\frac{S_k-S_{k-1}}{b_k}=\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{S_k}{b_k}-\frac{S_k}{b_{k+1}}\right)+\frac{S_N}{b_N}$$

$$=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{b_{k+1}-b_k}{b_kb_{k+1}}S_k+\frac{S_N}{b_N}\geqslant\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\delta}{b_kb_{k+1}}S_k$$

所以 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_k}{b_kb_{k+1}}$ 收敛. ............................10 分

由算术-几何平均不等式得

$$\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}\leqslant\frac{a_1b_1+\cdots+a_kb_k}{k}=\frac{S_k}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_k}{b_kb_{k+1}}$$

故结论成立.

..........................14 分 ■