第八届中国大学生数学竞赛决赛试题

(数学类，2017 年 3 月 18 日)

(16 数学 – 胡八一)

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 100 分

一、填空题 (本题满分 20 分, 共 4 小题, 每小题 5 分)

1.设 $x^4+3x^2+2x+1=0$ 的 4 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$. 则行列式 $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} =$ ________

2.设 a 为实数，关于 x 的方程 $3x^4-8x^3-30x^2+72x+a=0$ 有虚根的充分必要条件是 a 满足 ________

3.计算曲面积分 $I=\iint_S \dfrac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(x+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ($a>0$ 为常数)，

其中 $S: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 取上侧. $I=$ ________

4.记两特征值为 1, 2 的 2 阶实对称矩阵全体为 Γ. $\forall A\in\Gamma$, a_{21} 表示 A 的 $(2,1)$ 位置元素. 则集合 $\cup_{A\in\Gamma}\{a_{21}\}$ 的最小元 = ________

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中设旋转抛物面 Γ 的方程为 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. 设 P 为空间中的平面, 它交抛物面 Γ 与曲线 C. 问: C 是何种类型的曲线? 证明你的结论.

三、证明题 (本题 15 分) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足: 秩 $(\boldsymbol{ABA})=$ 秩 $(\boldsymbol{B})$. 证明: $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

四、(本题 20 分) 对 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微的 (复值) 函数 $\varphi(x)$, 称 $\varphi(x)\in\mathscr{S}$, 如果 $\forall m,k\geqslant 0$ 成立 $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^m\varphi^{(k)}(x)\right|<+\infty$. 若 $f\in\mathscr{S}$, 可定义 $\hat{f}(x):=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(y)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y$, $(\forall x\in\mathbb{R})$. 证明: $\hat{f}(x)\in\mathscr{S}$, 且

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(y)e^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}y,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

五、(本题 15 分) 设 $n>1$ 为正整数. 令

$$S_n=\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

1.证明：数列 S_n 单调增且有界, 从而极限 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 存在.

2.求极限 $\lim_{n\to\infty}S_n$.

六、(本题 20 分) 求证: 常微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y^3+\sin x, x\in[0,2\pi]$ 有唯一的满足 $y(0)=y(2\pi)$ 的解.