

第九届全国大学生数学竞赛预赛参考答案

(非数学类, 2017 年 10 月 28 日)

绝密 ★ 启用前

(16 数学 – 胡八一)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	总分
满分	42	14	14	15	15	100
得分						

注意: 1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	评卷人	复核人

一、填空题 (本题满分 42 分)

1. 已知可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x) \cos x + 2 \int_0^x f(t) \sin t dx = x + 1$, 则 $f(x) =$ _____.

【答案】 $\sin x + \cos x$.

【解析】 两边同时对 x 求导

$$f'(x) \cos x + f(x) \sin x = 1 \implies f'(x) + f(x) \tan x = \sec x.$$

由常数变易法, 从而

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\int \tan x dx} \left(\int \sec x e^{\int \tan x dx} dx + C \right) \\ &= e^{\ln \cos x} \left(\int \frac{1}{\cos x} e^{-\ln \cos x} dx + C \right) \\ &= \cos x \left(\int \frac{1}{\cos^2 x} dx + C \right) \\ &= \cos x (\tan x + C) = \sin x + C \cos x \end{aligned}$$

由于 $f(0) = 1$, 故 $f(x) = \sin x + \cos x$.

2. 极限 $\lim_{n \rightarrow 0} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】1

【解析】

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow 0} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) &= \lim_{n \rightarrow 0} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi) \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \sin^2\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right) = 1\end{aligned}$$

3. 设 $w = f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $u = x - cy$, $v = x + cy$, 其中 c 为非零常数。则 $w_{xx} - \frac{1}{c^2}w_{yy} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $4f_{12}$.

【解析】

$$\begin{aligned}w_x &= f_1 + f_2, w_{xx} = f_{11} + 2f_{12} + f_{22}, w_y = c(f_2 - f_1), \\ w_{yy} &= c \frac{\partial}{\partial x}(f_2 - f_1) = c(cf_{11} - cf_{12} - cf_{21} + cf_{22}) = c^2(f_{11} - 2f_{12} + f_{22}).\end{aligned}$$

所以

$$w_{xx} - \frac{1}{c^2}w_{yy} = 4f_{12}.$$

4. 设 $f(x)$ 有二阶导数连续, 且 $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 6$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x)}{x^4} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】3

【解析】 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的泰勒展开式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

所以

$$f(\sin^2 x) = \frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x,$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x}{x^4} = 3.$$

5. 不定积分 $\int \frac{e^{-\sin x} \sin 2x}{(1 - \sin x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2e^{-\sin x}}{1 - \sin x} + C$.

【解析】 令 $\sin x = v$, 则

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{ve^{-v}}{(1-v)^2} dv \\ &= 2 \int \frac{e^{-v}}{v-1} dv + 2 \int \frac{e^{-v}}{(v-1)^2} dv \\ &= 2 \int \frac{e^{-v}}{v-1} dv - 2 \int e^{-v} d\left(\frac{1}{v-1}\right) \\ &= 2 \int \frac{e^{-v}}{v-1} dv - 2 \left(\frac{e^{-v}}{v-1} + \int \frac{e^{-v}}{v-1} dv \right) \\ &= -\frac{2e^v}{v-1} + C = \frac{2e^{-\sin x}}{1 - \sin x} + C \end{aligned}$$

6. 记曲面 $z^2 = x^2 + y^2$ 和 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 围成空间区域 V , 则三重积分 $\iiint_V z dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2π .

【解析】 使用球面坐标

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V z dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^2 \rho \cos \varphi \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \Big|_0^{\pi/4} \cdot \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^2 \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

得分	评卷人	复核人

二、解答题 (本题满分 14 分)

设二元函数 $f(x, y)$ 在平面上有连续的二阶导数, 对任意角 α , 定义一元函数

$$g_\alpha(t) = f(t \cos \alpha, t \sin \alpha).$$

若对任何 α 都有 $\frac{dg_\alpha(0)}{dt} = 0$ 且 $\frac{d^2 g_\alpha(0)}{dt^2} > 0$. 证明: $f(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值.

【证明】由于

$$\frac{dg_{\alpha}(0)}{dt} = (f_x, f_y)_{(0,0)} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = 0$$

对一切 α 成立，故 $(f_x, f_y)_{(0,0)} = (0, 0)$ ，即 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的驻点。

.....4 分

记

$$H_f = (x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = 0,$$

则

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g_{\alpha}(0)}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[(f_x, f_y) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \right]_{(0,0)} \\ &= (\cos \alpha, \sin \alpha) H_f(0, 0) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} > 0 \end{aligned}$$

..... 10 分

上式对任何单位向量 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 成立，故 $H_f(0, 0)$ 是一个正定矩阵，而 $f(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值。

..... 14 分

得分	评卷人	复核人

三、解答题 (本题满分 14 分)

设曲线 Γ 为曲线

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

上从点 $A(1, 0, 0)$ 到点 $B(0, 0, 1)$ 的一段, 求曲线积分 $I = \int_{\Gamma} ydx + zdy + xdz$.

【解析】记 Γ_1 为从 B 到 A 的直线段, 则 $x = t, y = 0, z = 1 - t, 0 \leq t \leq 1$,

$$\int_{\Gamma_1} ydx + zdy + xdz = \int_0^1 t d(1 - t) = -\frac{1}{2}.$$

.....4 分

设 Γ 和 Γ_1 围成的平面区域 Σ , 方向按右手法则。由 Stokes 公式得到

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Gamma} + \int_{\Gamma_1} \right) ydx + zdy + xdz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} \\ &= - \iint_{\Sigma} dydz + dzdx + dxdy. \end{aligned}$$

.....8 分

右边三个积分都是 Σ 在各个坐标面上的投影面积, 而 Σ 在 xOz 面上的投影面积为零。故

$$I + \int_{\Gamma_1} = - \iint_{\Sigma} dydz + dxdy.$$

曲线 Γ 在 xOy 面上投影的方程为 $\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$ 12 分

又该投影 (半个椭圆) 的面积为 $\iint_{\Sigma} dxdy = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$, 同理 $\iint_{\Sigma} dydz = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

所以

$$I = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

..... 14 分

得分	评卷人	复核人

四、解答题 (本题满分 15 分)

设函数 $f(x) > 0$ 且在实轴上连续, 若对任意实数 t , 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x) dx \leq 1,$$

证明: $\forall a, b, a < b$, 有

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a+2}{2}.$$

【证明】由于 $\forall a, b, a < b$, 有 $\int_a^{+b} e^{-|t-x|} f(x) dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x) dx \leq 1$,

因此

$$\int_a^b dt \int_a^b e^{-|t-x|} f(x) dx \leq b-a.$$

..... 4 分

然而

$$\int_a^b dt \int_a^b e^{-|t-x|} f(x) dx = \int_a^b f(x) \left(\int_a^b e^{-|t-x|} dt \right) dx,$$

其中

$$\int_a^b e^{-|t-x|} dt = \int_a^x e^{t-x} dt + \int_x^b e^{x-t} dt = 2 - e^{a-x} - e^{x-b}.$$

这样就有

$$\int_a^b f(x) (2 - e^{a-x} - e^{x-b}) dx \leq b-a. \quad (*)$$

..... 10 分

即

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} \left[\int_a^b e^{a-x} f(x) dx + \int_a^b e^{x-b} f(x) dx \right].$$

注意到

$$\int_a^b e^{a-x} f(x) dx = \int_a^b e^{-|a-x|} f(x) dx \leq 1, \int_a^b e^{x-b} f(x) dx \leq 1.$$

..... 13 分

把以上两个式子代入 (*), 即得结论。

..... 15 分