山东大学-算法分析与设计期末考试2020-12-18

这门课自从2019年开始就不是水课了，除了一些基本的证明外，基本不会考原题，都是改编题，但是原理都是学过的，题量很大，一定要好好学！！！

一、

（1）一个英文题是关于安全边定理的改编

（2）强连通分量的伪代码，时间复杂度，正确性证明

（3）最大流<=最小割的变式

二、

（1）将3SAT问题规约为Indenpent problem（独立集问题）

（2）证明增广后得到的流仍然是合法的流（容量限制和流量守恒）

三、动态规划最长路径改编

四、所有顶点对之间的最短路径-基本思想，填表（Ford-wall算法）

五、关于背包问题的改编（能达到某个价值的最小重量-大体就是这个意思）

确实很难

做个好事，希望算法成绩可以回报我一下。

(2) 强连通分量的伪代码. 时间复杂度

1. 对图 $G=(V,E)$ 进行 DFS 深搜. $O(V+E)$ $O(n\log n)$
2. 将 G 中 DFS 所得点、按结束时间由大到小排序
3. 计算 G 的转置图 G^T
4. for 每 vertext in G^T order by $v.f$ 由大到小
   DFS-VISIT(G^T, V_i)
   搜索到的每个连通分支便是强连通分支

正确性证明 数学归纳法

1、在算法第4行搜到的第一个连通分支为 G 中的强连通分支.

① 树中的点、均为 SCC_1 中的点、
由于根结点 V_1 是结束时间最大的点，因此 $f(SCC_1)$ 最大，故其在 G^T 中 SCC_1 无出边，因此搜不到 SCC_1 外的点、

② SCC_1 的点均被搜索到
∵在 DFS-VISIT(V_1) 时，V_1 到 SCC_1 中的所有点均有白色路径，
所以、SCC_1 的点均被搜索到

2、假设前 k 个连通分支都分别为 $SCC_{1\sim k}$，证第 k+1 个连通分支为 SCC_{k+1}

① 树中点均为 SCC_{k+1} 中点、
由于根结点为所有剩于节点中结束时间最大的点，因此 $f(SCC_{k+1})$ 最大，在 G^T 中 SCC_{k+1} 无出边，搜不到 SCC_{k+1} 外的点

② SCC_{k+1} 的点均被搜到
有白色路径

(1) 安全边定理

安全边：已有 树 $T \in MST$，若边 E 有 $T+\{E\} \in MST$ 则 E为最小生成树.

切割：将顶点分为两个集 V_1和V_2 有 $V_1 \cup V_2 = V$ $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

穿过割的最小边为轻边，$Cut(V_1,V_2)$ 尊重 T，(u,v)为轻边 则 (u,v)为安全边

证 若 $\{(u,v)\} \cup T \in MST$ 成立

若 $\{(u,v)\} \cup T \notin MST$ 则在 MST中加入边 (u,v)形成环路

在切割(V_1,V_2)上 一定有两条穿过的边 令另一条边为 e_2 则$w(e_2) \geq w(u,v)$

有 $MST - e_2 + (u,v)$ 为 T

$$w(T) = w(MST) - w(e_2) + w(u,v) \leq w(MST)$$

∴ T为最小生成树

(3) 最大流 ≤ 最小割.

① 若切割 (S,T)为最小切割 则有 $f(S,T) = \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u)$

有 $f(S,T) \leq \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) \leq \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v)$

②

山东大学算法设计与分析期末考试2019—2020回忆版

证明f'是一个流（容量约束 流守恒约束）。（课本证明和上课讲的证明方法不同，两者都可，但个人倾向于课本证明，理解以后证明思路很清晰）

强连通分支的证明

dpli2

设计最小生成树算法（通过安全边），算法正确性证明，时间复杂度分析

DAG中最长路径的算法设计，bellman方程，时间复杂度分析

迭代次数与所求点到源点s边数相等证明

类似于最短路径的算法设计，给予每条边一个宽度，计算出每条路径的最小宽度，设计算法并证明正确性，时间复杂度分析。

最大流有关的问题，证明路径条数和最大流容量的关系
（此题还有一个证明我给忘了，总的来说这题证明过程似乎不是很难，但是没讲过，也没有类似的题目，得自己考试时想，又作为最后一题，考试时间较为紧迫，我好像没写很多步骤也证出来了？记不清了，打扰了）

//这次不像往年考得比较简单，往年大多是上课讲的原题，很多人背背即可。今年大多需要同学们进行变通后再运用，题量不小，所以大部分考完还挺崩溃，不过老师提了不少分应该hhh。
//因此算法复习还是尽量理解为主啦，之后有空我会上传自己期末手写重点算法题和重点证明题
//预祝各位学弟学妹算法95+

算法
计算题：dfs（边的分类，d，f），bfs，floyed（3*3），二分图匹配
证明题：
强连通分量 f（C'）<f（c）：课本上有。
证明最小生成树中一定包含最小边（原题不记得，但是是这个逻辑，都是通过反证替换边得到。
证明
辨析题：1.最小生成子树 1 和 2 加上他们之间的安全边是最小生成树：不对，想想就不对 2.松弛后满足公式（对，课本上的原定理）。若干次松弛操作后，不可以再松弛（不对）
算法设计题：
DAG 求红蓝交错最长路径
模仿 dij，每个边有个容量，容量（s，u）是从源点 s 到 u 所有边容量最小的那个。并证明，类似于 dij 的正确性证明

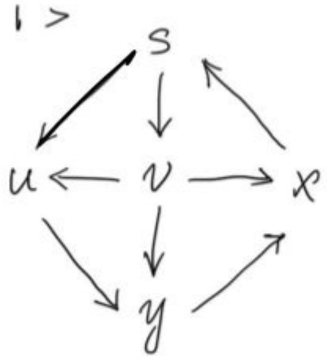
一、计算

1. （1）BFS 搜索树（2）DFS 搜索中，每个节点发现/结束时间；DFS 搜索树中的边种类

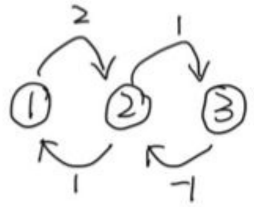
2. 求所有路径的最短路（写出距离矩阵与前驱矩阵）

3. 求最大二分匹配

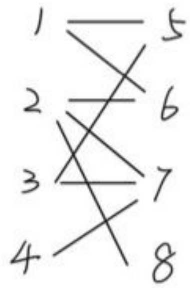
<1>

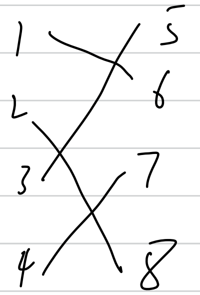


<2>



<3>



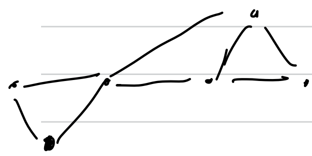


二、证明

4. C1、C2 为两个强连通分量，假设边(u,v)属于 E（u 属于 C1、v 属于 C2）；证明 f(C1)>f(C2)（f 表示 dfs 搜索结束时间）

5. 对于点集 S，有 S 真属于 V 且 S 非空；假设存在权值最小的边 e(u,v)（u 属于 S，v 属于 V−S），证明最小生成树必包含边 e

三、判断（正确给出证明，错误给出反例）

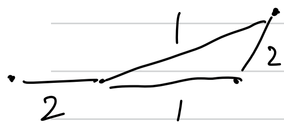


6. (X,Y)是图 G 的一个割，假设权值最小的边 e(u,v)（u 属于 X，v 属于 Y），T1 为 X 的最小生树、T2 为 Y 的最小生成树，判断：T=T1+T2+{e}是 G 的最小生成树

7. d 表示距离，p 表示前驱，对一个图执行下图初始化过程（INIT）并进行任意次松弛（Relax）操作：

（1）边 e(x,y)在经过 Relax(x,y,w)的瞬间，判断：d[y]≤d[x]+w(x,y)； √

（2）执行所有 Relax 后，对于 p[y]=x，判断：d[y]≤d[x]+w(x,y)；



<7>

```
INIT()
  for : u ∈ V
      d[u] = +∞
      p[u] = N
  d[s] = 0
```

```
Relax(x,y,w)
  if : d[y] > d[x] + w(x,y)
    then d[y] = d[x] + w(x,y)
         p[y] = x
```

SDU 2021.1 算法设计与分析考试 回忆版

原创 置顶 QiaoSu001 2021-01-03 17:20:16 310 收藏 8 版权

文章标签： 算法 数据结构

> SDU 2021.1 计科 算法设计与分析考试

计算题

- DFS：画出深度优先树；给出每个点的开始时间和结束时间；给出每条边的分类
- 有向图上的多源最短路径，要求计算$distance\ matrices\ and\ predecessor\ matrices$。
- 最大二分匹配

证明题

- 对于两个连通分量$C1\ C2$，存在边(u,v)，$u \in C1, v \in C2$。证明$f(C1) > f(C2)$
- 对于有向图G，各边权重不同。目前存在一划分$S, V-S, S \neq \emptyset$，边$e=(u,v), u \in S, v \in V-S$，且$e$是横跨划分权重最小的边。证明：任何一棵$MST$均包括$e$。

判断题

对于一连通图G，我们有一划分$S\quad V-S$，并且G中权重最小的边$e=(u,v)$，$u \in S, v \in V-S$，记$S\quad V-S$的生成子图分别为$X\ Y$，$X\ Y$的最小生成树分别记为$T1\ T2$，判断$T1 \cup T2 \cup e$是否是G的最小生成树。如果是，给出简短解释，否则举出反例。（不确定表述是否和原题完全一致，大概意思如此）

给出初始化的操作和$RELAX(u,v,w)$的伪代码（与课本一致），之后进行一系列的松弛操作（原题并未明确说明具体顺序之类的详细信息，仅仅指明进行了松弛操作）

- 在完成$RELAX(u,v,w)$的瞬间，$d[y] \le d[x] + w(u,v)$
- 在完成所有松弛操作之后，如果$y.\pi = x$，则$d[y] \le d[x] + w(u,v)$

以上两个命题，哪个是正确的，哪个是错误的？如果正确给出证明，否则举出反例。

（注：一对一错，上面为正确，下面是错误的，关键在于题目未给出松弛操作的详细信息——不保证解答正确）

算法设计题

在有向图中每个节点都有颜色。或者为红色，或者为蓝色，设计一个DP算法找出s到t的**最长**红蓝交替路径。（红蓝交替路径即路径上节点颜色交替）

要求：给出变量定义；给出变量的递推关系；在给出的实例上运行算法

有向图G中每条边的权重表示容量，记为$c(u,v)$。对于一条路径$p=< s,...,t >$来说，其容量为路径上各边容量的最小者。对于除起点s之外的图中的每一点t，存在一个最大容量的路径，原题定义$\phi(t)$表示该值。

要求：

- 模仿$Dijkstra$算法，设计算法求出每个点的ϕ值
- 在给出的实例上运行你的算法。给出了一个表格，包括每个点的最后结果及其前驱节点。
- 证明你的算法。

算法设计题

D_{ij}^{n}　i到j路上节点不超过n个

W_{ij}^{R}　i到j的距离

$$W_{ij}^{R} = \begin{cases} 0 & i=j \\ weight & i\neq j \text{ 且 } i\text{为蓝 } j\text{为红 } (i,j)\in E \\ \infty & i\neq j \text{ 且 } (i,j)\notin E \text{ 或 } j\text{为蓝}, i\text{为红} \end{cases}$$

W_{ij}^{B}　i到j的距离

$$D_{ij}^{n+1} = \min_{1\le k\le n}\left(D_{ik}^{n} + W_{kj}^{R}\right) \quad \text{or} \quad D_{ij}^{n+1} \min_{1\le k\le n}\left(D_{ik}^{n} + W_{kj}^{B}\right)$$

Dijkstra

```
For each vertex v ∈ V
    π(v) = Null
    φ(v) = 0
Q = G.V
φ(s) = ∞
while Q ≠ φ
    u = Q.extract_Max
    For each v ∈ adj(u)
        if φ(v) < min(φ(u), w(u,v))
            φ(v) = min(φ(u), w(u,v))
```

证明
设 v是第一个 $\varphi(v) \neq \delta(s,v)$的
在其选中前一瞬间

最佳路径 $s \to x \to y \to v$
其中 x已被选中　y未被选中

有 $\varphi(y) = \delta(s,y)$
$\varphi(y) > \varphi(v)$
v已被选　$\varphi(v) \geq \varphi y$

有　$\varphi(y) = \delta(s,y) = \varphi(v) = \delta(s,v)$

有向图 各边权重均不相同

证 轻边e一定在MST中

反证 存在一棵MST，e不在MST中

若将e加入到MST中，则形成回路C，且回路C必定两次穿过割$(S, V-S)$

不妨将穿过割的另一条边命名为e_2 有$e_2 > e$ （边权各不同）

则将e_2从$MST+\{e\}$中去除得到一棵新的树T

有 $w(T) = w(MST) - w(e_2) + w(e) < w(MST)$

则 MST不为最小生成树