第九章 排队论

cmLiu@shufe

第九章　排队论

- 在生产和日常生活中，人们会遇到很多排队现象，比如去火车站购票、到医院就诊、上银行办理业务以及要求起降的飞机、进港待泊的船只、工厂待修的机器等等。在这些问题中，售票员与买票人、医生与患者、银行工作人员与顾客、机场跑道与起降的飞机、港口的泊位与进港的船只、维修工与待修的机器等等，均构成一个排队系统或服务系统。
- 在排队系统中，如果服务员（服务台）过少，会引起顾客的不满，影响排队系统的服务效率；如果服务员（服务台）过多，会增加服务机构的运营、维护成本。如何协调二者之间的关系，就需要用排队论的知识加以解决。
- 排队论就是研究排队系统（又称随机服务系统）的一门数学理论和方法。它是在对各种排队系统概率规律性进行研究的基础上，解决排队系统的最优设计和最优控制问题。
- 本章主要介绍排队论的基本概念、几个常用的概率分布、排队系统模型、排队系统的优化、电子表格的建模和求解以及案例分析。

第九章　排队论

9.1 基本概念

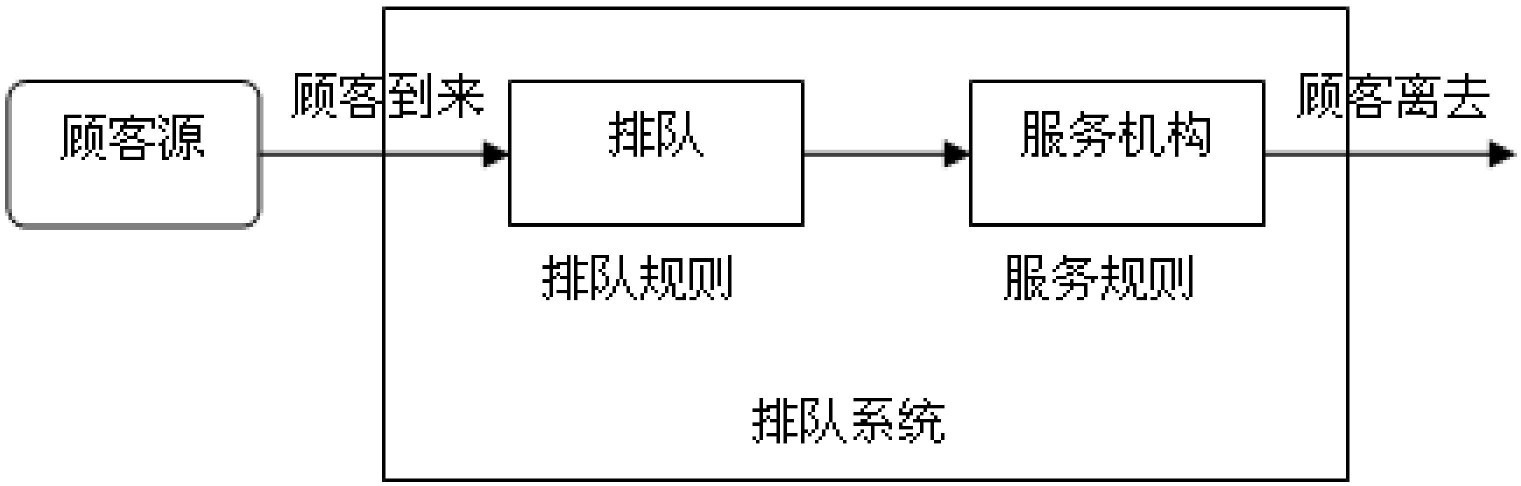
9.1.1 排队系统的描述和组成

9.1.2 排队模型的分类

9.1.3 排队论研究的基本问题

9.1.1 排队系统的描述和组成

一般的排队过程可以这样描述：顾客由顾客源出发，到达服务机构（服务台、服务员）前，按排队规则排队等待接受服务，服务机构按服务规则给顾客服务，顾客接受完服务后就离开。



9.1.1 排队系统的描述和组成

尽管排队系统是多种多样的，但所有的排队系统都是由输入过程、排队及排队规则、服务机构及服务规则三个基本部分组成的。

（1）**输入过程** 描述顾客来源以及顾客到达排队系统的规律。

一般从以下几个方面对输入过程进行描述：顾客源中顾客的数量是有限还是无限；顾客到达的方式是单个到达还是成批到达；顾客的到达是否相互独立（以前到达的顾客对以后达到的顾客没有影响，则称顾客的达到是相互独立的，否则就是有关联的）；顾客相继到达的间隔时间分布是确定型的还是随机型的（如果是随机分布，需要知道单位时间内的顾客到达数或者顾客相继到达时间间隔的概率分布）；输入的过程是平稳的还是非平稳的（若相继到达的间隔时间分布参数（如期望值、方差等）都是与时间无关的，则称输入过程是平稳的，否则称为非平稳）。

本章主要讨论顾客的到达是相互独立的、输入过程是平稳的情形。

9.1.1 排队系统的描述和组成

（2）**排队及排队规则** 描述顾客排队等待的队列和接受服务的次序，一般包括损失制、等待制和混合制三种。

①损失制：指排队空间为零的系统，即当顾客到达排队系统时，若所有的服务台均被占用（正在进行服务），则顾客离开系统，永不再来。

②等待制：当顾客到达排队系统时，若所有的服务台均被占用（正在进行服务），则顾客就加入排队行列等待服务，服务台按照下面的规则对顾客进行服务：先到先服务（FCFS）、后到先服务（FCLS）、随机服务（SIRO）、有优先权的服务（PR）

③混合制：是等待制和损失制系统的结合，一般是指允许排队，但又不允许队列无限长下去。具体来讲，分为以下三种：

- 队长有限，即系统的等待空间是有限的；
- 等待时间有限，即顾客在系统中的等待时间不超过某一给定的长度T，当等待时间超过T时，顾客将自动离去，并不再回来；
- 逗留时间有限（等待时间和服务时间之和）。

9.1.1 排队系统的描述和组成

（3）**服务机构及服务规则** 指服务机构服务设施的个数、排列方式及服务方式，一般从以下几个方面进行描述：

- 服务台（员）的数目：服务机构可以没有服务员，也可以有一个或者多个服务员；
- 服务台的排列情况：有单队—单服务台、单队—多服务台、多对—多服务台、串联多服务台及混合多服务台等多种形式；
- 服务台（员）的服务方式：对顾客是单个服务还是成批进行服务，本章只研究对顾客进行单个服务的方式；
- 服务时间：同输入过程一样，对顾客的服务时间也分确定型的还是随机型的，如果是随机分布，需要知道单位时间内服务的顾客数或者是对顾客相继服务的时间间隔的概率分布。服务时间的分布是平稳的，是指服务时间的分布参数（如期望值、方差等）都是与时间无关的。本章主要讨论服务时间的分布是平稳的情形。
- 在排队论中，一般假设顾客相继到达的间隔时间和服务时间至少有一个是随机的。

9.1.2 排队模型的分类

Kendall符号——X/Y/Z/A/B/C

X表示顾客相继到达的间隔时间分布

Y表示服务时间的分布

Z表示并列的服务台个数

A表示系统容量限制

B表示顾客源中的顾客数目

C表示服务规则（如先到先服务FCFS，后到先服务LCFS）

约定：如略去后三项，即指X/Y/Z/∞/∞/FCFS的情形。

例如M/M/1，表示顾客相继到达的间隔时间为负指数分布、服务时间为负指数分布、单服务台、系统容量无限、顾客源无限、先到先服务的排队系统模型。

9.1.2 排队模型的分类

表示相继到达间隔时间和服务时间的各种分布的符号是：

M —服从负指数分布

D —服从确定型分布

E_k —服从 k 阶爱尔朗（Erlang）分布

GI—服从一般相互独立（General Independant）的时间间隔分布

G——一般服务时间（General）分布

9.1.3 排队论研究的基本问题

排队论研究的基本问题包括以下3个方面。

（1）排队系统工作状况的衡量

一个排队系统运行状况的好坏不仅会影响顾客的利益，也会影响服务机构的利益，甚至会影响到社会效果的好坏。通过研究运行系统在平衡状态下的概率分布及其数字特征，了解排队系统运行的效率、服务质量等等，进而可以判断系统运行状况的优劣。

其常用的主要衡量指标如下：

1）**队长（Ls）**：排队系统中顾客的平均数（期望值），它是正在服务的顾客和等待接受服务的顾客总数的期望值。

2）**队列长（Lq）**：排队系统中平均等待服务顾客数的期望值。显然有

队长＝排队长＋正被服务的顾客数

3）**逗留时间（Ws）**：一个顾客从到达排队系统到服务完毕离去的总停留时间的期望值。

9.1.3 排队论研究的基本问题

其常用的主要衡量指标如下：

4）**等待时间 （Wq）**：一个顾客在系统中排队等待的平均时间。显然有

逗留时间＝等待时间＋服务时间

5）**忙期**：是指从顾客到达空闲着的服务机构，到服务机构再次成为空闲的这段时间，即服务机构连续忙碌的时间，它代表了服务员的工作强度。

6）**闲期**：即服务机构连续保持空闲的时间。

在排队系统中，忙期和闲期总是交替出现的。

7）**服务设备利用率**：服务设备工作时间占总时间的比例，这也是衡量服务机构利用效率的指标。

$$\text{服务机构工作强度}=\frac{\text{用于服务顾客的时间}}{\text{服务设备总的服务时间}}=1-\frac{\text{服务设备总的空闲时间}}{\text{服务设备总的服务时间}}$$

8）**顾客损失率**：由于服务能力不足而造成的顾客流失的概率。该指标过高高会造成服务系统利润的减少。

9.1.3 排队论研究的基本问题

（2）统计推断问题的研究

在建立实际问题的排队系统模型时，首先要对现实数据进行收集、处理，然后分析顾客相继到达的间隔时间是否相互独立，确定其分布的类型和相关参数，研究服务时间的独立性以及服务时间的分布等，在此基础上，选择适合该系统的排队模型，再用排队模型进行分析和研究。

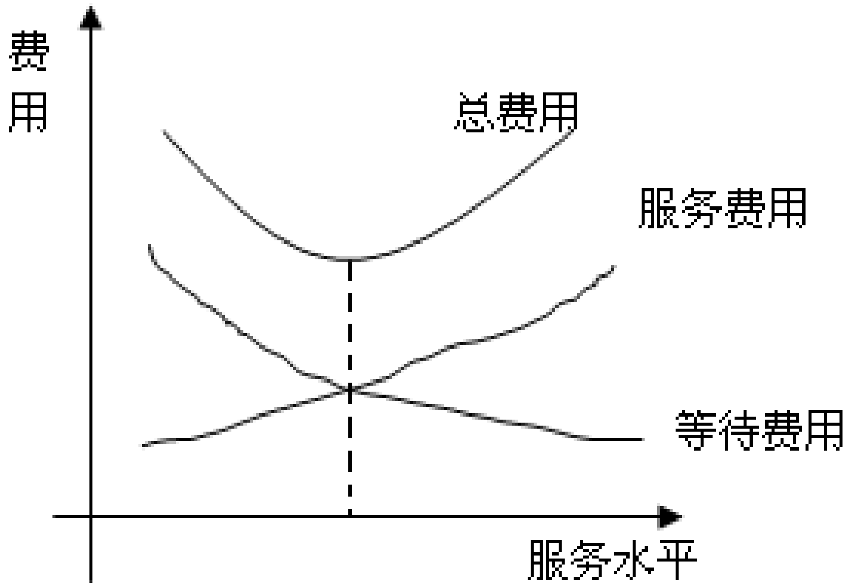
9.1.3 排队论研究的基本问题

（3）系统优化问题的研究

研究排队系统的目的就是通过对该系统概率规律的研究，实现系统的优化。系统的优化包括最优设计和最优运营问题。前者属于静态问题，它是在输入和服务参数给定的情况下，确定系统的设计参数，以使服务设施达到最大效益或者服务机构实现最为经济。后者属于动态问题，它是指对于一个给定的系统，在系统运行的参数可以随着时间或状态变化的情况下，考虑如何运营使某个目标函数达到最优。

9.1.3 排队论研究的基本问题

在一般情况下，随着服务水平的提高，服务费用会增加而等待费用会减少，系统的优化就是协调二者之间的矛盾，使服务系统既能适当地满足顾客的需求，又能使总费用最低（服务费用与等待费用之和）。其常用的优化的目标有二：一是确定最优的服务水平（最优服务率或最优的服务员（台）数）使总费用最小；二是使纯收入或利润（服务收入与服务成本之差）最大。



9.1.3 排队论研究的基本问题

这里的服务水平是指服务机构提供服务方面的能力，如服务台的个数、服务率等，服务费用是指达到相应服务水平所付出的费用，包括增加服务内容、提高服务率、组织动态服务台服务及管理支出的总费用，它一般随着服务水平的提高而上升；等待费用是指在相应的服务水平下，由于等待服务而产生的顾客及系统费用，包括顾客由于等待服务造成的损失费用、系统损失的顾客对系统造成的机会损失费用等，一般来讲它随着服务水平的提高而减少。

9.2 几个常用的概率分布

9.2.1 经验分布

9.2.2 泊松分布

9.2.3 负指数分布

9.2.4 爱尔朗分布

9.2.1 经验分布

主要指标

$$平均间隔时间=\frac{总时间}{到达顾客总数}$$

$$平均服务时间=\frac{服务时间总和}{服务顾客总数}$$

$$平均到达率=\frac{到达顾客总数}{总时间}$$

$$平均服务率=\frac{服务顾客总数}{服务时间总和}$$

9.2.2 泊松分布

泊松分布也称为泊松流，在排队论中称为最简单流。

设 $N(t)$ 表示在时间区间 $[t_0, t_0+\Delta t)$ 内到达的顾客数，是随机变量。

当 $N(t)$ 满足下列三个条件时，我们说顾客的到达符合泊松分布

（1）**平稳性**：在时间区间 $[t_0, t_0+\Delta t)$ 内到达的顾客数 $N(t)$，只与区间长度有关而与时间起点 t_0 无关。

（2）**无后效性**：在时间区间 $[t_0, t_0+\Delta t)$ 内到达的顾客数 $N(t)$，与 t_0 以前到达的顾客数独立。

（3）**普通性**：在充分短的时间区间 Δt 内，到达两个或两个以上顾客的概率极小，可以忽略不计，即 $\sum_{n=2}^{\infty} P_n(\Delta t) = o(\Delta t)$

9.2.2 泊松分布

在满足上述三个条件下，可以推出在t时间段内有n个顾客到达服务系统的概率为

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \qquad n=0,1,2,\cdots$$

其中 $t \geq 0,\ \lambda > 0$ 为一常数，表示单位时间到达的顾客数，即为到达率。

9.2.2 泊松分布

可以证明，最简单流具有如下一些性质：

性质1　参数λ 代表单位时间内平均到达的顾客数，即达到率。

证明：$\mathrm{E}\left[N(t)\right]=\sum_{k=1}^{\infty}kP\{N(t)=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}=\lambda t$，则$\lambda=\frac{\mathrm{E}\left[N(t)\right]}{t}$。

性质2　在 $\left[t,t+\Delta t\right]$ 时间内没有顾客到达的概率为　$v_0\left(\Delta t\right)=1-\lambda\Delta t$

证明：$v_0\left(\Delta t\right)=e^{-\lambda\Delta t}=\left(1-\lambda\Delta t\right)+o\left(\Delta t\right)=1-\lambda\Delta t$。

性质3　在 $\left[t,t+\Delta t\right]$时间内恰好有一个顾客到达的概率为　$v_1\left(\Delta t\right)=\lambda\Delta t$

证明：$v_1\left(\Delta t\right)=1-v_0\left(\Delta t\right)-o\left(\Delta t\right)=\lambda\Delta t+o\left(\Delta t\right)=\lambda\Delta t$。

由于最简单流与实际顾客到达流的相似性，更由于最简单流容易处理，因此到目前为止排队论中大量的研究都是基于最简单流的情况。

9.2.3 负指数分布

若随机变量T的概率密度函数为

$$f(t)=\begin{cases}\mu e^{-\mu t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

则称T服从负指数分布。

用$F(t)$表示 t 的概率分布函数，则有

$$F(t)=P\{T\leq t\}=\int_0^t \mu e^{-\mu t}dt=-\int_0^t d\left[e^{-\mu t}\right]=1-e^{-\mu t}$$

9.2.3 负指数分布

负指数分布具有下列性质：

1. 若服务机构对每个顾客的服务时间服从负指数分布 $f(t)=\mu e^{-\mu t}$（$t\geq 0$），则服务机构对每个顾客的平均服务时间为 $\dfrac{1}{\mu}$。

证明：$E(t)=\int_0^{\infty} tf(t)dt=\int_0^{\infty} t\mu e^{-\mu t}dt=-\int_0^{\infty} td\left(e^{-\mu t}\right)=-\dfrac{1}{\mu}\int_0^{\infty} e^{-\mu t}d(-\mu t)=\dfrac{1}{\mu}$

2. 当服务机构对顾客的服务时间 t 服从参数为 μ 的负指数分布时，则有

（1）在 $[t,t+\Delta t]$ 时间内没有顾客离去的概率为 $1-\mu\Delta t$；

（2）在 $[t,t+\Delta t]$ 时间内恰好有一个顾客离去的概率为 $\mu\Delta t$；

9.2.3 负指数分布

负指数分布具有下列性质：

（3）如果 Δt 足够小的话，在 $[t, t+\Delta t]$ 时间内有多于两个以上顾客离去的概率为 $\psi(\Delta t) \to o(\Delta t)$。

3. 若服务机构对顾客的服务时间服从负指数分布，则不管对某位顾客的服务时间有多长，剩下来的服务时间的概率分布仍为同原先一样的负指数分布。即对任何 $t>0, \Delta t>0$ 有

$$P\{T>t+\Delta t \mid T>\Delta t\}=P\{T>t\}$$

证明： $$P\{T>t+\Delta t \mid T>\Delta t\}=\frac{P\{T>\Delta t, T>t+\Delta t\}}{P\{T>\Delta t\}}=\frac{P\{T>t+\Delta t\}}{P\{T>\Delta t\}}$$

$$=\frac{e^{-\mu(t+\Delta t)}}{e^{-\mu\Delta t}}=e^{-\mu t}=P\{T>t\}$$

9.2.3 负指数分布

负指数分布具有下列性质：

4. 若干独立的负指数分布的最小值是负指数分布。设$T_1, T_2, \cdots, T_n$分别表示参数为$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$独立的负指数分布的随机变量，若$U = \min(T_1, T_2, \cdots, T_n)$，则$U$也是服从负指数分布的随机变量。

证明：对任意$t \geq 0$，有

$$P\{U > t\} = P\{T_1 > t, T_2 > t, \cdots, T_n > t\} = P\{T_1 > t\} P\{T_2 > t\} \cdots P\{T_n > t\}$$

$$= \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \mu_i t\right\}$$

该性质说明两点：

一是，若到达服务机构有n种不同类型的顾客，如果每类顾客到达服务机构的间隔时间服从参数为μ_i的负指数分布，则到达服务机构的总体顾客的间隔时间仍服从负指数分布；

9.2.3 负指数分布

负指数分布具有下列性质：

二是，若一个服务机构有S个并联的服务台，如果各服务台对顾客的服务时间服从相同参数μ的指数分布，则整个服务机构的输出就是一个具有参数Sμ的负指数分布。于是，对具有多个并联服务站的服务机构就可以同具有单个服务站的服务机构一样处理。

5.当顾客的到达服从泊松分布时，顾客到达的间隔时间必服从负指数分布，即顾客的到达时间服从泊松分布和顾客到达的间隔时间服从负指数分布是等价的。

当依次到达排队系统的顾客服从负指数分布时，t时间区间内无顾客到达的概率为

$$P(T>t)=1-P(T\le t)=1-F(t)=e^{-\lambda t}=v_0(t)$$

因而泊松分布和负指数分布是对同一顾客流(无论到达或服务完毕离去)按不同方式进行统计时得到的两种不同分布。

9.2.4 爱尔朗分布

设 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 是 k 个相互独立的随机变量，服从相同参数 $k\mu$ 的负指数分布，那么

$$T = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$$

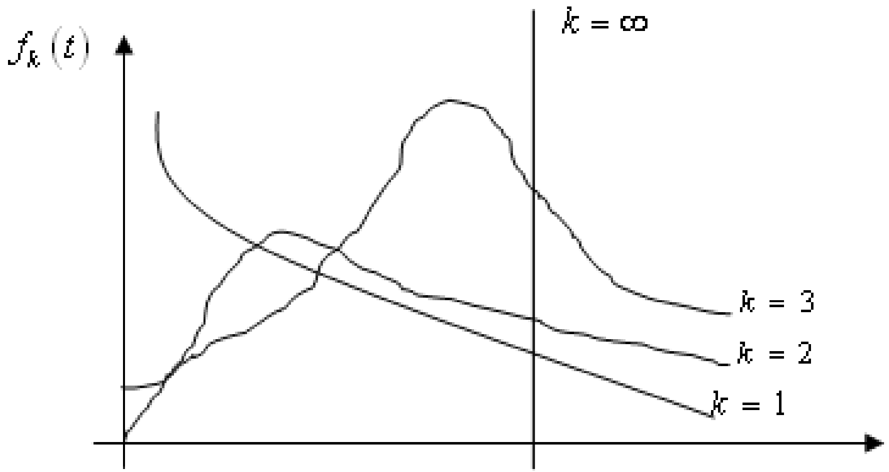
其概率密度函数为

$$f_k(t) = \frac{k\mu(k\mu t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\mu t} \quad ，\ t \ge 0，\ k \ge 0，\ \mu \ge 0$$

则称 T 服从 k 阶爱尔朗分布。

其均值和方差为 $E[T] = \dfrac{1}{\mu}$，$Var[T] = \dfrac{1}{k\mu^2}$

9.2.4 爱尔朗分布



爱尔朗分布图

当 $k=1$ 时，爱尔朗分布归结为负指数分布；

当 k 增大时，图形逐渐变为对称的；

当 $k \geq 30$ 时，近似于正态分布；

当 $k \to \infty$ 时，由 $Var(T)=0$ 可知，爱尔朗分布归结为定长分布。

9.3 单服务台负指数分布的排队系统

9.3.1 标准M/M/1模型(M/M/1/∞/∞)

9.3.2 系统容量有限的排队模型(M/M/1/N/∞)

9.3.3 顾客源为有限的排队模型(M/M/1/∞/m)

9.3.1 标准M/M/1模型(M/M/1/∞/∞)

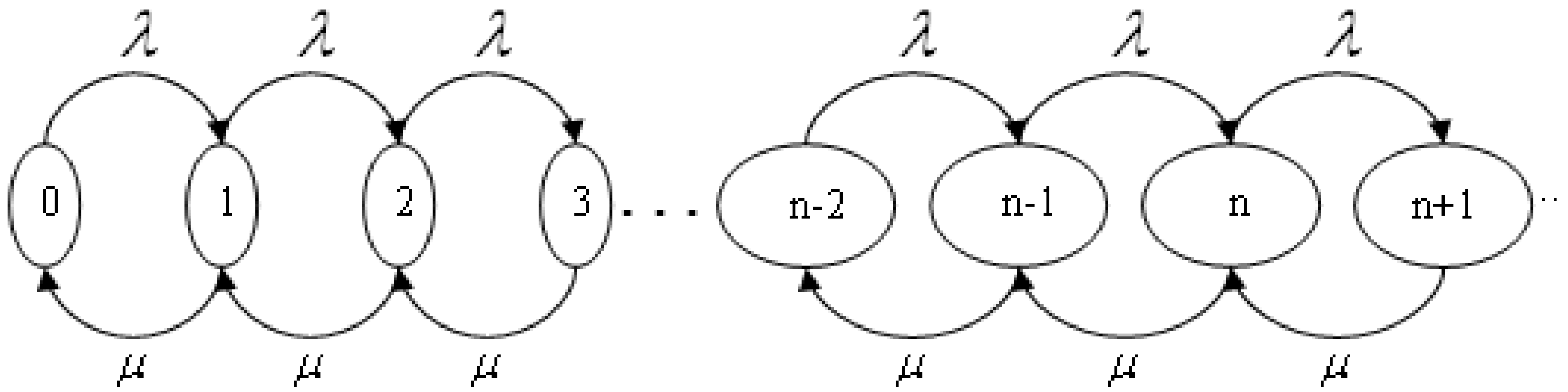
标准M/M/1模型(M/M/1/∞/∞)是排队模型中最简单的一个排队模型，它是指顾客的到达服从参数为λ的泊松分布，服务时间服从参数为μ负指数分布，服务台的个数为1，顾客源的数量无限，系统的容量无限，顾客到达间隔时间和服务时间之间相互独立，排队规则是先到先服务的排队系统。

对于排队模型的研究，首先要知道排队系统的瞬时状态N(t)将怎样随时间变化而变化。系统的状态N(t)随时间变化的过程称为**生灭过程**。

所谓生灭过程就是借用了一个生物学术语，每个顾客在任何时间段内到达和离开系统都是相互独立的，把一个顾客的到达看作是一个细胞的分裂，而服务完毕的一个顾客的离去看作是一个细胞的灭亡，生灭过程恰好反映了一个排队系统的瞬时状态N(t)随时间t的变化情况。

在生灭过程中，生与灭的发生都是随机的，它们的平均发生率依赖于系统当前的状态，为此，排队系统的生灭过程可以用系统的状态转移图加以表示，如下图所示。

9.3.1 标准M/M/1模型(M/M/1/∞/∞)



M/M/1/∞/∞排队系统的状态转移图

要求出系统在时刻t的瞬时状态的概率分布是很困难的，但当t足够大时系统将处于稳定状态，所以在后面的讨论中只考虑系统处于稳定状态的情形。

当系统达到稳定状态时，满足输入率等于输出率规则，基于上述规则建立的方程称为系统的状态平衡方程。

9.3.1 标准M/M/1模型(M/M/1/∞/∞)

依据输入率等于输出率，可以写出该系统的状态平衡方程。

首先考虑n=0的状态。当系统处于稳定状态时，状态0的输入仅仅来自状态1。而状态1的概率为P_1，从状态1进入状态0的平均转换率为μ，因此从状态1进入状态0的输入率为μP_1，又从其他状态直接进入状态0的概率为0，所以状态0的总输入率为μP_1。

同理，状态0的总输出率为λP1。于是，可以得出在状态0下的状态平衡方程：

$$\mu P_1 = \lambda P_0$$

对其它每一个状态，同样可以建立相应的状态平衡方程：

$$\lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} = \lambda P_n + \mu P_n \text{（} n \geq 1 \text{）}$$

这样就得到该系统的状态平衡方程

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1 \\ \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} = \lambda P_n + \mu P_n \ (n \geq 1) \end{cases}$$

9.3.1 标准M/M/1模型(M/M/1/∞/∞)

$$\boxed{\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1 \\ \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} = \lambda P_n + \mu P_n \ (n \geq 1) \end{cases}}$$

令n=1

$$\mu P_2 = (\lambda + \mu)(\frac{\lambda}{\mu})P_0 - \lambda P_0$$

即

$$P_2 = (\frac{\lambda}{\mu})^2 P_0$$

同理

$$P_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n P_0$$

9.3.1 标准M/M/1模型(M/M/1/∞/∞)

$$\boxed{\begin{cases}\lambda P_0 = \mu P_1 \\ \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} = \lambda P_n + \mu P_n \ (n \geq 1)\end{cases}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1\text{（否则队列将排至无限远）}$$

t时刻系统状态为n的概率为

$$P_0 = 1-\rho$$

$$P_n = (1-\rho)\rho^n,\quad n \geq 1$$

在该系统中 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ 是单位时间顾客平均达到率与平均服务率的比值，反映了服务机构的忙碌或利用的程度。

服务机构的工作强度为$(1-P_0)$，可知服务机构的繁忙率为$1-P_0=1-(1-\rho)=\rho$，这与直观的理解完全一致。

9.3.1 标准M/M/1模型(M/M/1/∞/∞)

其他指标：

（1）**平均队长**

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n$$

$$= (\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \cdots) - (\rho^2 + 2\rho^3 + 3\rho^4 + \cdots)$$

$$= \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}\text{，} \quad 0 < \rho < 1$$

9.3.1 标准M/M/1模型(M/M/1/∞/∞)

其他指标：

（2）平均排队长

$$L_q=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n-\sum_{n=1}^{\infty}P_n=L_s-\rho$$

$$=\frac{\rho^2}{(1-\rho)}=\frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

（3）正在接受服务的预期顾客数

$$L=0P_0+1(P_1+P_2+\ldots+P_n+\ldots)=1-P_0=1-(1-\rho)=\rho$$

$$L_s=L_q+L$$

9.3.1 标准M/M/1模型(M/M/1/∞/∞)

其他指标：

（4）**平均逗留时间** $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda}$

（5）**平均等待时间** $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda}$

每个顾客的平均服务时间为 $\dfrac{1}{\mu}$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

9.3.1 标准M/M/1模型(M/M/1/∞/∞)

例9.1　顾客到达只有一个服务员的快餐店的时间平均每6分钟一个，服务员对顾客的平均服务时间是4分钟，达到时间和服务时间都服从负指数分布。回答以下问题：

（1）服务员空闲的概率；

（2）排队等待服务员服务的平均顾客数；

（3）顾客在快餐店平均的逗留时间；

（4）服务员平均每小时将为多少顾客提供服务？

9.3.1 标准M/M/1模型(M/M/1/∞/∞)

解：依据题意，该模型是标准的 M/M/1 模型，

$\lambda=10$ 人/小时，$\mu=15$ 人/小时，$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=\dfrac{2}{3}$，有

（1）$P_0=1-\rho=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$　　（2）$L_q=\dfrac{\rho 2}{1-\rho}=\dfrac{(\frac{2}{3})^2}{1-\frac{2}{3}}=\dfrac{4}{3}$（人）

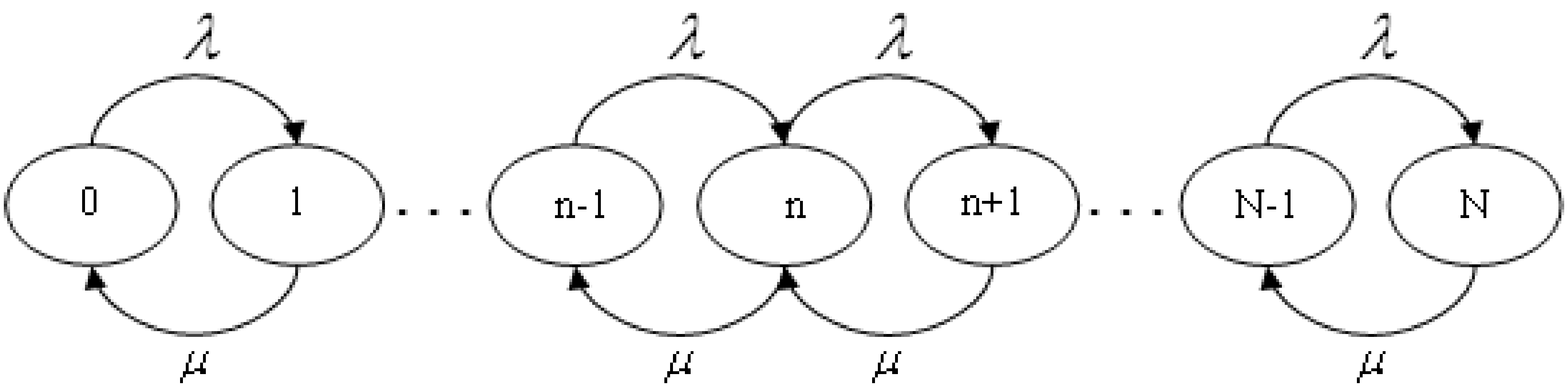
（3）$L_s=\dfrac{\rho}{1-\rho}=\dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2$（人）　　$W_s=\dfrac{L_s}{\lambda}=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$（小时）=12（分钟）

（4）如果服务员一直忙，他每小时平均服务 $\mu=15$ 人。由（1）知，服务员忙碌的时间为 $\dfrac{2}{3}$，所以，服务员将每小时平均服务 $\dfrac{2}{3}\times 15=10$ 人。

9.3.2 系统容量有限的排队模型(M/M/1/N/∞)

当系统的容量有限制(为 N)时，设平均到达率为 λ 、平均服务率为 μ ，

排队系统（M/M/1/N/∞）的生灭过程可用下面的状态转移图表示：



基于输入率等于输出率原则，建立该系统的状态平衡方程

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1 \\ \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} = \lambda P_n + \mu P_n \left(1 \le n < N\right) \\ \mu P_N = \lambda P_{N-1} \end{cases}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \neq 1 \qquad \sum_{n=0}^{N} P_n = 1$$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$$

$$P_n = P_0 \rho^n, \ n \le N$$

9.3.2 系统容量有限的排队模型(M/M/1/N/∞)

其他指标：

（1）**平均队长**

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}$$

（2）**平均排队长**

$$L_q = L_s - (1 - P_0)$$

9.3.2 系统容量有限的排队模型(M/M/1/N/∞)

其他指标：

（3）有效到达率

在 M/M/1/N/∞模型中的到达率是在系统中有空时的平均到达率 λ_e，

当系统已满时（$n=N$）时，则到达率为 0，因此需要求出有效到达率，其公式为：$\lambda_e=\lambda(1-P_N)=\mu(1-P_0)$

另外一种理解：有效到达率是指平均每单位时间进入系统的顾客数，

与之对应的是有效离去率 μ_e。在系统达到稳态的情况下二者相等，

因此有 $\lambda_e=\mu_e=\sum\lambda_n P_n=\sum\mu_n P_n$

9.3.2 系统容量有限的排队模型(M/M/1/N/∞)

其他指标：

（4）**平均逗留时间**

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_e}$$

（5）**平均等待时间**

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda_e}$$

9.3.2 系统容量有限的排队模型(M/M/1/N/∞)

例9.2 病人按照每小时30人速率的Poisson分布到达只有一个医生的某诊所，该诊所候诊室所容纳病人不能超过14个，每个病人的诊断时间服从平均每小时20人的负指数分布。

（1）求该诊所的实际到达率。

（2）一个到达的病人不等待的概率是多少？能找到一个空座位的概率是多少？

（3）直到从诊所走出一个病人为止的期望等待时间是多少？

9.3.2 系统容量有限的排队模型(M/M/1/N/∞)

解：根据题意，该模型是M/M/1/15/∞模型，其中λ=30人/小时，μ=20人/小时

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=1.5 \quad P_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}=0.0008, P_n=P_0\rho^n, n\le N$$

（1）$\lambda_e=\lambda\left(1-P_{15}\right)=30\times(1-0.0008\times1.5^{15})=19.4905$

（2）一个到达病人不等待的概率为$P_0=\dfrac{1-1.5}{1-1.5^{16}}=0.0008$

能找到空座位的概率为 $P=1-P_{15}=1-0.0008\times1.5^{15}=0.6497$

（3）$L_s=\dfrac{\rho}{1-\rho}-\dfrac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}=\dfrac{1.5}{-0.5}-\dfrac{16\times1.5^{16}}{1-1.5^{16}}=13.0244$ （人）

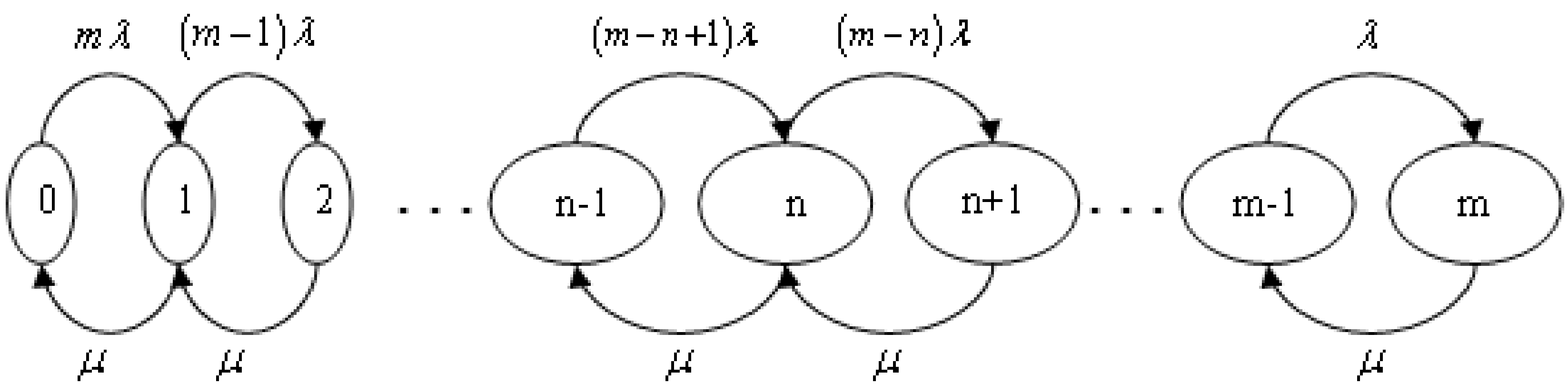
$W_q=W_s-\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{L_s}{\lambda_e}-\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{13.0244}{19.4905}-\dfrac{1}{20}=0.6182$（小时）

9.3.3 顾客源为有限的排队模型(M/M/1/∞/m)

顾客源为有限的排队模型(M/M/1/∞/m)中的第4项，写了∞，这表示对系统的容量没有限制，但实际上它永远不会超过m，所以和写成M/M/1/m/m的意义相同。

现实生活中的m个打字员共用一台打字机，m个会计员同用一个计算机终端等等都属于M/M/1/∞/m模型。

由于顾客源的数量是有限的，为m，当有n个顾客在服务系统内时，在服务系统外的潜在顾客数就减少为（m-n）。设每个顾客的平均到达率都为λ、服务台的平均服务率为μ，则从第n-1状态转移到第n状态的概率为（m-n+1）λ，则该排队系统的生灭过程状态转移图可用下图表示。



9.3.3 顾客源为有限的排队模型(M/M/1/∞/m)

根据图9.6，基于输入率等于输出率原则，建立该系统的状态平衡方程

状态平衡方程
$$\begin{cases} m\lambda P_0 = \mu P_1 \\ (m-n+1)\lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} = (m-n)\lambda P_n + \mu P_n \, (n < m) \\ \mu P_m = \lambda P_{m-1} \end{cases}$$

$$P_0 + P_1 + \cdots + P_m = 1$$

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{(m-i)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \right]^{-1}$$

$$P_n = \frac{m!}{(m-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, \ 1 \le n \le m$$

9.3.3 顾客源为有限的排队模型(M/M/1/∞/m)

其他指标:

（1）平均队长 $L_s = m - \frac{\mu}{\lambda}(1 - P_0)$

（2）平均排队长 $L_q = L_s - (1 - P_0)$

（3）有效到达率 $\lambda_e = \lambda(m - L_s) = \mu(1 - P_0)$

（4）平均逗留时间 $W_s = \frac{L_s}{\lambda_e}$

（5）平均等待时间 $W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda_e}$

9.3.3 顾客源为有限的排队模型(M/M/1/∞/m)

例9.3 设有一名技术工人照看5台机器，每台机器正常运转的时间服从负指数分布，平均为60分钟，每次修理时间服从负指数分布，平均为15分钟。回答下列问题：

（1）工人空闲的概率；

（2）发生故障机器的平均台数；

（3）排队等待维修机器的平均台数；

（4）机器平均停工时间；

（5）机器排队等待的平均时间。

9.3.3 顾客源为有限的排队模型(M/M/1/∞/m)

解：根据题意，该模型是 $M/M/1/\infty/5$ 模型，$\lambda=1$ 台/小时，

$\mu=4$ 台/小时，$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=0.25$，则有

（1）$P_0=\left[\sum_{k=0}^{5}\dfrac{5!}{(5-k)!}(0.25)^k\right]^{-1}=0.6154$

（2）$L_s=m-\dfrac{u}{\lambda}\left(1-P_0\right)=3.462$（台）

（3）$L_q=L_s-\left(1-P_0\right)=3.077$（台）

（4）$W_s=\dfrac{L_s}{\mu\left(1-P_0\right)}=2.25$ 小时（分钟）

（5）$W_q=W_s-\dfrac{1}{\mu}=2$ 小时（分钟）

9.4 多服务台负指数分布排队系统模型

9.4.1 标准的M/M/c/模型（M/M/c/∞/∞）

9.4.2 系统容量有限的排队模型

9.4.3 顾客源为有限的排队模型(M/M/c/∞/ m)

9.4.1 标准的M/M/c/模型（M/M/c/∞/∞）

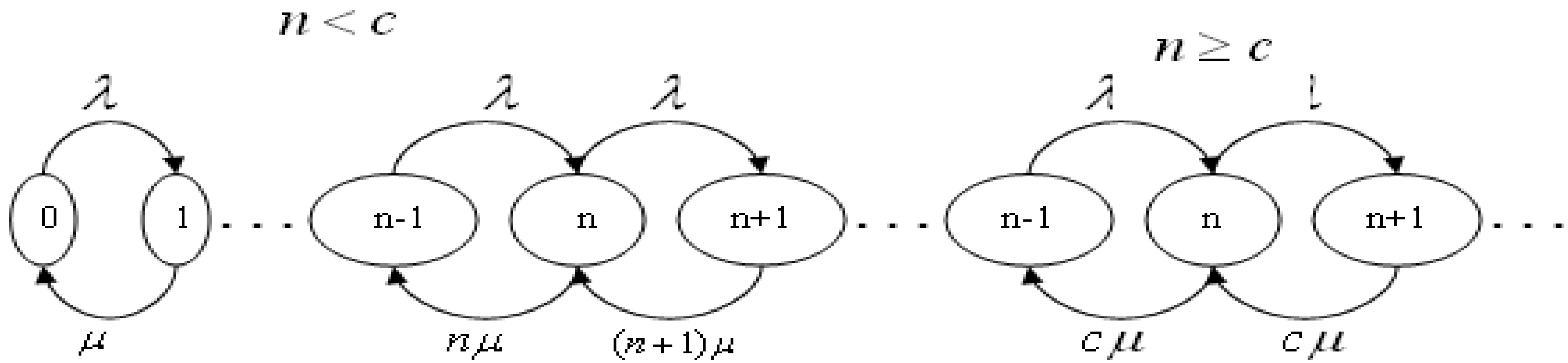
按照单服务台排队系统模型讨论的思路，类似地来研究多服务台排队系统模型。我们仍然从最基本的M/M/c/∞/∞模型开始讨论。

M/M/c/∞/∞模型是指顾客的到达服从参数为λ的泊松分布，服务时间服从参数为μ的负指数分布，服务台的个数为c个，顾客源的数量无限，系统容量无限，顾客到达的间隔时间和服务时间之间相互独立，排队规则是先到先服务的排队系统。

由于每个服务台工作是相互独立的（不搞协作）且平均的服务率相同 $\mu_1=\mu_2=\dots\mu_c=\mu$。于是整个服务机构的平均服务率为 $c\mu$（当 $n\geq c$）或 $n\mu$（当 $n<c$）。

令 $\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}$，只有 $\dfrac{\lambda}{c\mu}<1$ 时才不会排成无限的队列，ρ 为服务强度。则该排队系统的生灭过程状态转移图可用图 9.7 表示。

9.4.1 标准的M/M/c/模型（M/M/c/∞/∞）



在分析这排队系统时，仍从状态间的转移关系开始，

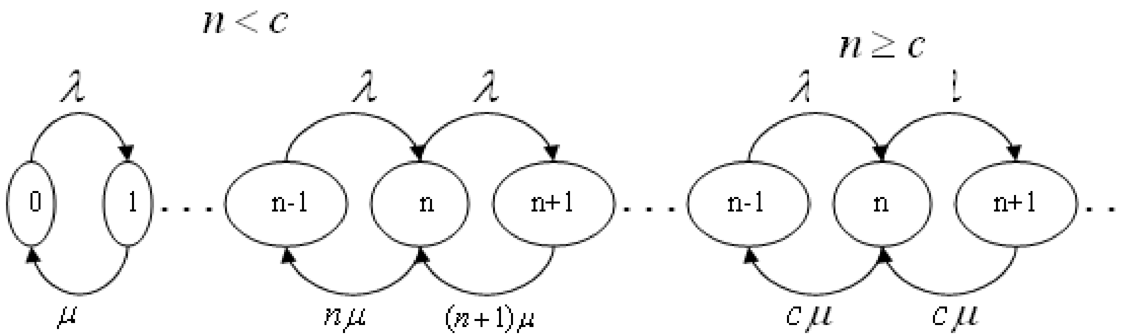
如状态1转移到状态0，即系统中有一个顾客被服务完了的转移率为μP_1。

状态2转移到状态1时，就意味两个服务台上的任意一台有一个顾客被服务完了而离去，那么状态2的转移率为$2\mu P_2$。

首先考虑n=0的状态。当系统处于稳定状态时，状态0的输入仅仅来自状态1。而状态1的概率为P_1，从状态1进入状态0的平均转换率为μ，因此从状态1进入状态0的输入率为μP_1。

同理，由n状态转移到n-1状态，当n<c时，状态转移率为μP_n；当n≥c时，状态转移率为μP_n。

9.4.1 标准的M/M/c/模型（M/M/c/∞/∞）



依输入率等于输出率的原则，系统处于稳态时的概率方程为

状态平衡方程 $\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1 \\ \lambda P_{n-1} + (n+1)\mu P_{n+1} = (\lambda + n\mu) P_n \ (1 \leq n < c) \\ c\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} = (\lambda + c\mu) P_n \ (n \geq c) \end{cases}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1 \qquad \rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{c!} \frac{1}{1-\rho} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \ (n < c) \\ \dfrac{1}{c!\, c^{n-c}} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \ (n \geq c) \end{cases}$$

9.4.1 标准的M/M/c/模型（M/M/c/∞/∞）

其他指标：

（1）平均排队长 $L_q=\sum_{n=c+1}^{\infty}(n-c)P_n=\frac{(c\rho)^c\rho}{c!(1-\rho)^2}P_0$

（2）平均队长 $L_s=L_q+\frac{\lambda}{\mu}$

（3）平均逗留时间 $W_s=\frac{L_s}{\lambda}$

（4）平均等待时间 $W_q=\frac{L_q}{\lambda}$

9.4.1 标准的M/M/c/模型（M/M/c/∞/∞）

例9.4　某银行有3个出纳员，顾客的达到服从泊松分布，平均每小时达到30人，所有的顾客排成一队。出纳员对顾客的服务时间服从负指数分布，平均每小时可服务12人。试求：

（1）三名出纳员都忙的概率及该银行的主要运行指标；

（2）若所有的顾客排成三队，顾客平均每小时达到10人，计算该银行的主要运行指标。

（3）将（1）、（2）进行比较，会得出什么结论？

9.4.1 标准的M/M/c/模型（M/M/c/∞/∞）

解：（1）根据题意，该模型是标准的 $M/M/c/\infty/\infty$ 模型， c=3， $\lambda=30$ 人/小时，

$\mu=12$ 人/小时， $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{5}{2}$， $\rho=\frac{\lambda}{c\mu}=\frac{5}{6}$，则有

$$P_0=\left[\frac{(\frac{5}{2})^0}{0!}+\frac{(\frac{5}{2})^1}{1!}+\frac{(\frac{5}{2})^2}{2!}+\frac{(\frac{5}{2})^3}{3!}\times\frac{1}{1-\frac{5}{6}}\right]^{-1}=0.0449$$

$$P(n\geq 3)=1-\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^0}{0!}\times 0.0449-\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^1}{1!}\times 0.0449-\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{2!}\times 0.0449=0.7025$$

$$L_q=\frac{(\frac{5}{2})^3\times\frac{5}{6}}{6\times(1-\frac{5}{6})}\times 0.0449=3.51\text{（人）}\qquad L_s=L_q+\frac{\lambda}{\mu}=3.51+2.5=6.01$$

（人）

$$W_s=\frac{L_s}{\lambda}=\frac{6.01}{30}=0.2\text{（小时）}\qquad W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{3.51}{30}=0.12\text{（小时）}$$

9.4.1 标准的M/M/c/模型（M/M/c/∞/∞）

（2）该模型为 3 个标准的 $M/M/1/\infty/\infty$ 模型， $\lambda=10$ 人/小时，

$\mu=12$ 人/小时， $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=\dfrac{10}{12}=\dfrac{5}{6}$，则有

$$P_0=1-\rho=\frac{1}{6} \qquad P(n\geq 1)=1-P_0=\frac{5}{6}$$

$$L_s=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{10}{12-10}=5 \text{（人）} \qquad L_q=L_s-\rho=\frac{25}{6}=4.17 \text{（人）}$$

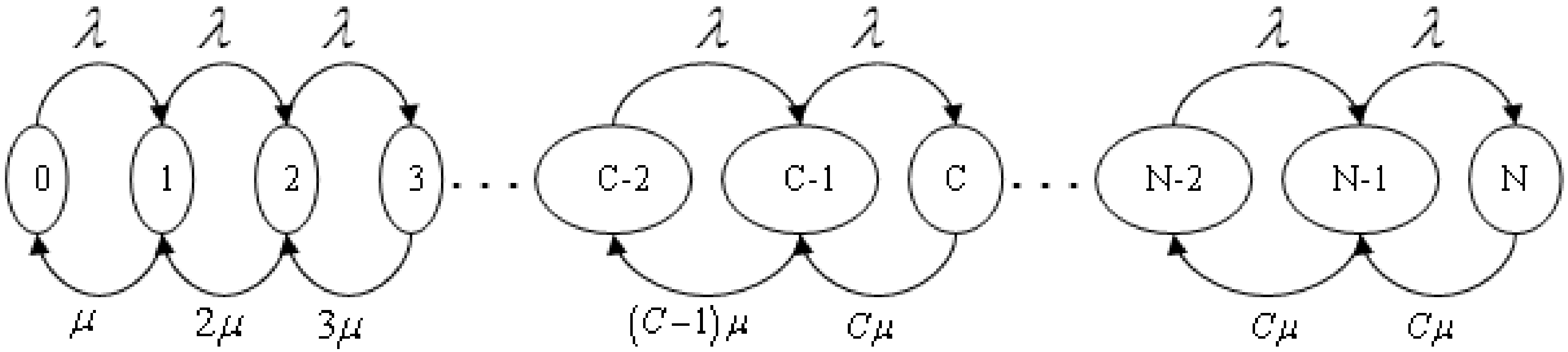
$$W_s=\frac{L_s}{\lambda}=\frac{5}{10}=0.5 \text{（小时）} \qquad W_q=W_s-\frac{1}{\mu}=0.5-\frac{1}{12}=0.417 \text{（小时）}$$

9.4.1 标准的M/M/c/模型（M/M/c/∞/∞）

（3） 比较（1）和（2）不难发现，多队列的排队系统比单队列的排队系统的空闲概率高，而且多队列排队长比单队列长，逗留时间和等待时间也都比单队列长很多。可见，排队的方式对排队系统运行指标的影响还是比较大，因此在排队系统中应注重排队方式。

9.4.2 系统容量有限的排队模型

系统容量有限的排队模型为 M/M/c/N/∞ ,设系统的容量最大限制为 N （$N \ge c$），当系统中顾客数 n 已达到 N 时，再来的顾客即被拒绝，其他条件与标准的 M/M/c 模型相同。其生灭过程的状态转移图如下图所示。



状态平衡方程

$$
\begin{cases}
\lambda P_0 = \mu P_1 \\
\lambda P_{n-1} + (n+1)\mu P_{n+1} = (\lambda + n\mu) P_n \ (1 \le n < c) \\
c\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} = (\lambda + c\mu) P_n \ (c \le n < N) \\
c\mu P_N = \lambda P_{N-1}
\end{cases}
$$

9.4.2 系统容量有限的排队模型

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1 \\ \lambda P_{n-1} + (n+1)\mu P_{n+1} = (\lambda + n\mu) P_n \ (1 \le n < c) \\ c\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} = (\lambda + c\mu) P_n \ (c \le n < N) \\ c\mu P_N = \lambda P_{N-1} \end{cases}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{c^c}{c!} \cdot \frac{\rho(\rho^c - \rho^N)}{1-\rho}}, \quad \rho \ne 1$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(c\rho)^n}{n!} P_0 (1 \le n \le c) \\ \frac{c^c}{c!} \rho^n P_0 (c \le n \le N) \end{cases}$$

其中 $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$

9.4.2 系统容量有限的排队模型

其他指标:

（1）平均排队长 $L_q=\dfrac{P_0\rho(c\rho)^c}{c!(1-\rho)^2}\left[1-\rho^{N-c}-(N-c)\rho^{N-c}(1-\rho)\right]$

（2）平均队长 $L_s=L_q+c\rho(1-P_N)$

（3）平均等待时间 $W_q=\dfrac{L_q}{\lambda(1-P_N)}$

（4）平均逗留时间 $W_s=W_q+\dfrac{1}{\mu}$

9.4.2 系统容量有限的排队模型

当$N=c$时，系统的最大容量与服务台个数相等时，系统将不存在可供等待的空位，混合制变成即时制的情形，例如在街头的停车场就不允许排队等待空位，这时系统的状态概率为：

$$P_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{c}\frac{(c\rho)^k}{k!}} \qquad P_n=\frac{(c\rho)^n}{n!}P_0, 0\le n\le c$$

该系统的主要运行指标如下

$$L_q=0 \quad W_q=0 \quad W_s=\frac{1}{\mu} \quad L_s=\sum_{n=1}^{c}nP_n=\frac{c\rho\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^{n-1}}{n!}}{\sum_{n=0}^{c}\frac{(c\rho)^n}{n!}}=c\rho(1-P_c)$$

9.4.2 系统容量有限的排队模型

例 9.5 某车辆维修站有 2 个维修工。车辆的到来服从参数 $\lambda=4$ 辆/小时的泊松分布，维修时间服从 $\mu=1$ 辆/小时的负指数分布。维修站里最多只能停放 3 辆车（不包括正在维修的车辆）。试求：

（1）该系统的各项运行指标。

（2）若要使维修站损失顾客的概率小于 0.35，应至少增设多少个维修工人？

解：（1）根据题意，该模型是M/M/2/5/∞模型，$\dfrac{\lambda}{\mu}=\dfrac{4}{1}=4$，

$\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}=\dfrac{4}{2\times 1}=2$，则有

$$P_0=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{c}\dfrac{(c\rho)^k}{k!}+\dfrac{c^c}{c!}\cdot\dfrac{\rho(\rho^c-\rho^N)}{1-\rho}}=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{2}\dfrac{(4)^k}{k!}+\dfrac{2^2}{2!}\cdot\dfrac{2(2^2-2^5)}{1-2}}=0.008$$

9.4.2 系统容量有限的排队模型

$$P_5=\frac{c^c}{c!}\rho^n P_0=\frac{2^2}{2!}2^5\times 0.008=0.512$$

① 有效达到率 $\lambda_e=\lambda(1-P_5)=0.976$

② 等待维修的车辆的平均数

$$L_q=\frac{P_0\rho(c\rho)^c}{c!(1-\rho)^2}\left[1-\rho^{N-c}-(N-c)\rho^{N-c}(1-\rho)\right]=2.176\text{(辆)}$$

③ 维修站中车辆的平均数 $L_s=L_q+c\rho(1-P_N)=4.128\text{(辆)}$

④ 车辆在维修站的平均等待时间

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda(1-P_N)}=2.230\text{(小时)}$$

⑤ 车辆在维修站的平均逗留时间

$$W_s=W_q+\frac{1}{\mu}=3.230\text{(小时)}$$

9.4.2 系统容量有限的排队模型

（2）设维修站共有c个维修工人，这样就形成了一个M/M/c/5/∞模型，故维修站损失顾客的概率为

$$p_5(c)=\frac{c^c}{c!}\rho^n P_0(c)=\frac{c^c}{c!}\rho^c\frac{1}{\sum_{k=0}^{c}\frac{(c\rho)^k}{k!}+\frac{c^c}{c!}\cdot\frac{\rho(\rho^c-\rho^c)}{1-\rho}}$$

当 $n=3$ 时，$\rho=\frac{\lambda}{3\mu}=\frac{4}{3\times1}=1.333$，$P_5=\frac{c^c}{c!}\rho^c P_0=0.334<0.35$

上述结果表明，增加一名维修工人才能使维修站的损失顾客概率低于0.35。

9.4.3 顾客源为有限的排队模型(M/M/c/∞/ m)

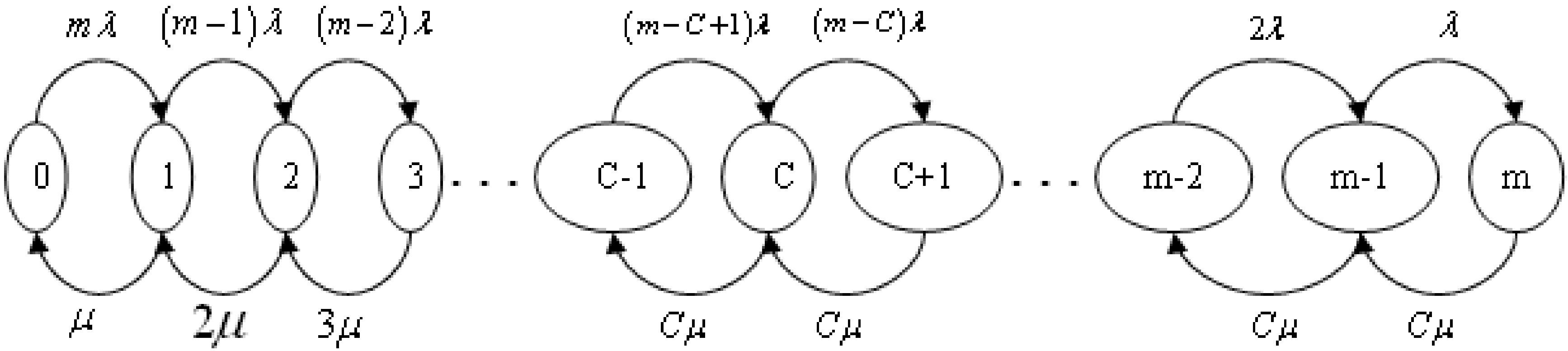
和单服务台的情形一样，设每个顾客的到达率为 λ，顾客源的数量是有限的，为 m 个，且 $m > c$。当系统的状态为 n 时，系统外顾客的到达率为 $\lambda_e = \lambda(m - L_s)$，同时假定每个服务台工作是相互独立的，且每个服务台的平均服务率 μ 也相同。

就整个服务机构而言，平均服务率也随着系统状态的变化而变化，即

$$\mu_n = \begin{cases} c\mu, c \le n \le m \\ n\mu, n < c \end{cases}$$

9.4.3 顾客源为有限的排队模型(M/M/c/∞/ m)

该系统生灭过程的状态转移图如下



$$\rho=\frac{m\lambda}{c\mu}$$

$$P_0=\frac{1}{m!}\cdot\frac{1}{\sum_{k=0}^{c}\frac{1}{k!(m-k)!}\left(\frac{c\rho}{m}\right)^k+\frac{c^c}{c!}\sum_{k=c+1}^{m}\frac{1}{(m-k)!}\left(\frac{\rho}{m}\right)^k}$$

$$P_n=\begin{cases}\frac{m!}{(m-n)!n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad (0\le n\le c)\\ \frac{m!}{(m-n)!c!c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad (c+1\le n\le m)\end{cases}$$

9.4.3 顾客源为有限的排队模型(M/M/c/∞/ m)

各项指标如下：

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu} = L_q + \frac{\lambda}{\mu}(m - L_s)$$

（1）平均队长 $L_s = \sum_{n=1}^{m} nP_n$

（2）平均排队长 $L_q = \sum_{n=c+1}^{m} (n-c)P_n$

（3）平均逗留时间 $W_s = \frac{L_s}{\lambda_e}$

（4）平均等待时间 $W_q = \frac{L_q}{\lambda_e}$

（5）有效到达率 $\lambda_e = \lambda(m - L_s)$

9.4.3 顾客源为有限的排队模型(M/M/c/∞/ m)

例9.6　某工厂有6台同类设备，按参数为$\lambda=1$台/天的泊松流发生故障；现安排两名工人同时负责修理这6台设备，修理时间服从负指数分布，每个工人每天可修理3台设备。

试求：

（1）修理工空闲的概率、发生故障的机器台数、等待修理的机器台数、有效到达率、平均逗留时间及设备完好率；

（2）若安排每个修理工人负责修理3台设备，试与（1）的指标进行比较。

9.4.3 顾客源为有限的排队模型(M/M/c/∞/ m)

解：（1）根据题意，该模型是一个 M/M/2/∞/6 系统， $\lambda=1$（台/天），

$\mu=3$（台/天）， $c=2$， $m=6$， $\rho=\dfrac{m\lambda}{c\mu}=\dfrac{6\times1}{2\times3}=1$，则有

$$P_0=\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{\frac{1}{6!}+\frac{1}{5!}\left(\frac{2\times1}{6}\right)+\frac{1}{2!\times4!}\left(\frac{2\times1}{6}\right)^2+\frac{2^2}{2!}\left[\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^4+\left(\frac{1}{6}\right)^5+\left(\frac{1}{6}\right)^6\right]}=0.1527$$

$P_1=2P_0=0.3054$， $P_2=\dfrac{5}{3}P_0=0.2545$， $P_3=\dfrac{10}{9}P_0=0.1697$

$P_4=\dfrac{5}{9}P_0=0.0848$， $P_5=\dfrac{5}{27}P_0=0.0283$， $P_6=\dfrac{5}{162}P_0=0.0047$

$L_s=P_1+2P_2+3P_3+4P_4+5P_5+6P_6=1.8324$， $L_q=P_3+2P_4+3P_5+4P_6=0.443$

$\lambda_e=\lambda(m-L_s)=6-1.8324=4.1676$， $W_s=L_s/\lambda_e=0.4397$（天）

设备完好率 $=m-\lambda_e=1.8324$

9.4.3 顾客源为有限的排队模型(M/M/c/∞/ m)

（2）若安排每个修理工人负责修理3台设备，则是两个M/M/1/∞/3模型，与原模型相比如下表所示

指标	M/M/2/∞/6 模型	M/M/1/∞/3模型
P_0	0.1527	0.346（每个子系统）
L_s	1.8324	1.038
L_q	0.443	0.385
λ_e	4.1676	1.962
W_s	0.4397（天）	0.529（天）
设备完好率	1.8324	1.038

9.5 一般服务时间M/G/1模型

9.5.1 Pollaczek-Khintchine (P—K)公式

9.5.2 输入为泊分布服务时间为定长分布的排队系统

9.5.3 输入为泊分布服务时间为爱尔朗分布的排队系统

9.5.1 Pollaczek-Khintchine (P—K)公式

9.3和9.4讨论的模型都具有马尔可夫性，即由系统当前的状态可以推断未来的状态。但是，当输入的过程不是泊松分布或者服务时间不服从负指数分布时，仅知道系统内当前的顾客数，对于推断系统未来的状态是不够的，因为正在接受服务的顾客已经被服务了多长时间，将影响其离开系统的时间。对于这类系统可以通过“嵌入马尔可夫链”的方法，设法找出从状态 $n\left(n=0,1,2,\cdots\right)$ 到状态 $n+1$ 的概率转移方程，这样就可以将一个非马尔可夫问题转化为一个离散的马尔可夫链，从而求得分析问题的解。

9.5.1 Pollaczek-Khintchine (P—K)公式

对于一般的服务系统，假定

（1）顾客的到达为参数为λ的泊松分布；

（2）服务机构对每个顾客的服务时间t是相互独立的并且具有相同概率分布的随机变量，其概率分布函数为$F(t)$，其期望值和方差分别为

$$E(t)=\int_0^{\infty} t dF(t)=\frac{1}{\mu}, Var(t)=\sigma^2$$

（3）$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\lambda E(t)<1$

（4）有一个服务站

9.5.1 Pollaczek-Khintchine (P—K)公式

将该问题转化为一个离散的马尔可夫链，可求得该系统的平均队长为

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma^2}{2(1-\rho)}$$

上式被称为Pollaczek-Khintchine公式，其他的指标如下：

$$L_q = L_s - \rho = \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma^2}{2(1-\rho)}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma^2}{2\lambda(1-\rho)}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma^2}{2\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}$$

9.5.2 输入为泊分布服务时间为定长分布的排队系统（M/D/1）

输入为泊松分布服务时间为定长分布的排队系统（**M/D/1**），**即**服务时间是确定的常数。例如，在一条装配线上完成一件工作的时间、自动的汽车冲洗台冲洗一辆汽车的时间就是一个常数。在生产和生活实践中，当一个服务机构提供固定的服务项目，服务时间偏差很小时，可以近似地看作服务时间是定长分布。

此时 $E[t]=\dfrac{1}{\mu}, Var[t]=0$，于是有

$$L_s=\rho+\frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \qquad L_q=\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}=\frac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W_s=\frac{\rho^2}{2\lambda(1-\rho)}+\frac{1}{\mu} \qquad W_q=\frac{\rho^2}{2\lambda(1-\rho)}=\frac{\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)}$$

9.5.2 输入为泊分布服务时间为定长分布的排队系统（M/D/1）

例9.7　有一自动汽车冲洗台，汽车按泊松分布到达，平均每小时达到 16 辆，冲洗时间 t 的数学期望和方差为 $E[t]=0.05$辆/小时, $Var[t]=0$，求系统有关的运行指标。

解：根据题意，$\lambda=16$，$\rho=\lambda E[t]=0.8$，$Var[t]=0$，则有

$$L_s=\rho+\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}=0.8+\frac{0.8^2}{2(1-0.8)}=2.4\text{（辆）}$$

$$L_q=\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}=\frac{0.8^2}{2(1-0.8)}=1.6\text{（辆）}$$

$$W_q=\frac{\rho^2}{2\lambda(1-\rho)}=\frac{0.8^2}{2\times16(1-0.8)}=0.1\text{（小时）}=6\text{（分钟）}$$

$$W_s=\frac{\rho^2}{2\lambda(1-\rho)}+\frac{1}{\mu}=\frac{0.8^2}{2\times16(1-0.8)}+0.05=0.15\text{（小时）}=9\text{（分钟）}$$

9.5.3输入为泊分布服务时间为爱尔朗分布的排队系统（M/Ek/1）

如果服务机构对顾客进行的服务不是一项，而是按序进行的k项任务，若每一项服务的持续时间都是具有相同分布的负指数分布，则总的服务时间服从爱尔朗分布。如一种产品的生产需要4道加工工序，在每一道工序上加工的时间都服从相同分布的负指数分布，那么整个产品的加工时间就服从爱尔朗分布。

9.5.3输入为泊分布服务时间为爱尔朗分布的排队系统（M/Ek/1）

设v_1，v_2，$\cdots$，v_k是 k 个相互独立的随机变量，服从相同参

数$k\mu$的负指数分布，则 $T = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$

其概率密度函数为

$$f_k(t) = \frac{k\mu(k\mu t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\mu t}, t \geq 0, k, \mu \geq 0$$

则称 T 服从 k 阶爱尔朗分布。

其均值和方差为 $E[T] = \frac{1}{\mu}$，$Var[T] = \frac{1}{k\mu^2}$

带入 P-K 模型可得该系统的运行指标。

9.5.3输入为泊分布服务时间为爱尔朗分布的排队系统（M/Ek/1）

运行指标

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \dfrac{\lambda^2}{k\mu^2}}{2(1-\rho)} = \rho + \frac{(k+1)\rho^2}{2k(1-\rho)}$$

$$L_q = \frac{(k+1)\rho^2}{2k(1-\rho)}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{(k+1)\lambda}{2k\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

9.5.3输入为泊分布服务时间为爱尔朗分布的排队系统（M/Ek/1）

例9.8 设有一电话亭，其顾客的达到服从泊松分布，平均每小时到达8人，通话时间服从爱尔朗分布，其平均通话时间为6分钟，方差为12分钟²。求该系统的平均排队长和顾客平均等待时间。

解：根据题意，$\lambda = 8$人/小时，$\mu = \frac{60}{6} = 10$人/小时，$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.8$

又$E[T] = \frac{1}{\mu} = 6$，$Var[T] = \frac{1}{k\mu^2} = 12$，$k = \frac{(E[T])^2}{Var[T]} = \frac{6^2}{12} = 3$，

则有

$$L_q = \frac{(k+1)\rho^2}{2k(1-\rho)} = \frac{(3+1)\times 0.8^2}{2\times 3(1-0.8)} = 2.13（人）$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{(3+1)\times 0.8^2}{2\times 3\times(1-0.8)\times 8} = 16（分钟）$$

9.6 排队系统的建模与优化

9.6.1 排队系统的建模

9.6.2 排队系统的优化

9.6.1 排队系统的建模

构建实际问题的排队系统模型时，首先要对实际问题的背景资料进行仔细的分析和认真的研究，根据问题的特征，如果能将该系统完全地归结为某一类排队模型（前面介绍的模型），则根据相应公式求出系统的运行指标；如果不能完全归结为前面介绍的排队模型，则需要画出系统的状态转移图，依据输入率等于输出率原则，建立系统的稳态方程，在此基础上求出系统的各项运行指标。

9.6.1 排队系统的建模

例9.9 某汽车修理部有4个停车位，当所有车位被占满时，新到达待修车辆则离去另求服务。前来寻求修理的汽车按泊松流到达，平均每天到达2辆。该修理部现有4个修理工，当待修车辆不足4辆时，空闲的修理工会协助修理。修理一辆汽车所需时间服从负指数分布，若1个修理工修理1辆汽车，则平均需3天；若4个修理工修理3辆汽车，则平均需2.5天；若4个修理工修理2辆汽车，则平均需2天；若4个修理工修理1辆汽车，则平均需4/3天。根据以上资料，回答下列问题：

（1）画出系统的状态转移图；

（2）求系统的状态概率；

（3）求系统的损失率；

（4）求系统中平均的汽车数量；

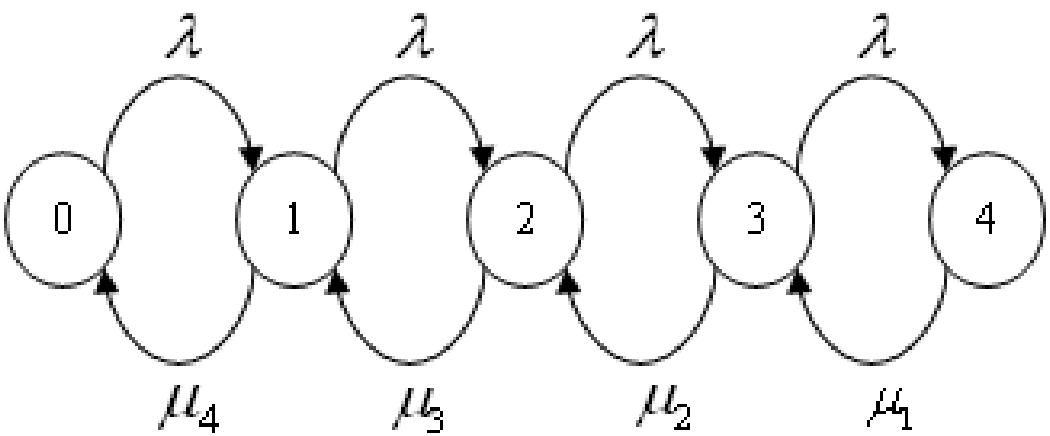
（5）求每辆汽车在系统中逗留的时间。

9.6.1 排队系统的建模

解：（1）根据题意，该系统可归结为M/M/4/4/∞系统，λ=2 辆/天，

$$\mu_k=\begin{cases}\frac{4}{3} & k=1\\ \frac{6}{5} & k=2\\ 1, & k=3\\ \frac{3}{4}, & k=4\end{cases}$$

则该系统的状态转移图如下



9.6.1 排队系统的建模

（2）根据输入率与输出率相等，该系统的状态转移方程为

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu_4 P_1 = 0 \\ \lambda P_0 - \lambda P_1 + \mu_3 P_2 - \mu_4 P_1 = 0 \\ \lambda P_1 - \lambda P_2 + \mu_2 P_3 - \mu_3 P_2 = 0 \\ \lambda P_2 - \lambda P_3 + u_1 P_4 - u_2 P_3 = 0 \\ \lambda P_3 - \mu_1 P_4 = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -2P_0 + \frac{3}{4} P_1 = 0 \\ 2P_0 - 2P_1 + P_2 - \frac{3}{4} P_1 = 0 \\ 2P_1 - 2P_2 + \frac{6}{5} P_3 - P_2 = 0 \\ 2P_2 - 2P_3 + \frac{4}{3} P_4 - \frac{6}{5} P_3 = 0 \\ 2P_3 - \frac{4}{3} P_4 = 0 \end{cases}$$

计算得 $P_0 = 0.0320$,$P_1 = 0.0854$，$P_2 = 0.1708$, $P_3 = 0.2847$，$P_4 = 0.4270$

9.6.1 排队系统的建模

（3） 系统损失率 $= P_4 = 0.4270$

（4） $L_s = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 = 2.9891$（辆/天）

（5） $\lambda_e = \lambda(1 - P_4) = 1.1459$

$W_s = L_s / \lambda_e = 2.6085$（天）

9.6.2 排队系统的优化

排队系统的总费用包括服务费用和等待费用，一般来讲，随着服务水平的提高，服务费用会增加而等待费用会减少，系统的优化就是通过确定最优的服务水平，即最优服务率或最优的服务员（台）数，从而协调二者之间的矛盾，使服务系统既能适当地满足顾客的需求，又能使总费用最低。针对变量为离散变量和连续变量的不同，可分别采用边际分析法和微分法进行求解。

9.6.2 排队系统的优化

（1）确定最优服务率 μ

假设顾客的到达服从参数为 λ 的泊松分布，服务机构的服务时间服从负指数分布，其平均服务率为 μ。再设

$TC(\mu)$：单位时间内服务费用和等待费用（顾客的损失费用）之和；

c_s：单位时间内 $\mu=1$ 时服务机构的服务费用；

c_w：每名顾客单位等待（含服务）时间的费用，则有

$$TC(\mu)=c_s\mu+c_wL_s$$

9.6.2 排队系统的优化

对于标准的M/M/1模型

$$TC(\mu)=c_s\mu+c_w\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

要使 $TC(\mu)$ 最小，必须满足 $\dfrac{dTC(\mu)}{d\mu}=0$，于是有

$$\mu^*=\lambda+\sqrt{\frac{c_w}{c_s}\lambda}$$

当 c_s 和 c_w 已知时，系统的最优服务率只与顾客的平均到达率 λ 有关。

9.6.2 排队系统的优化

（2）确定最优服务员（台）数c

假设顾客的到达服从参数为λ的泊松分布，服务机构的服务时间服从负指数分布，其平均服务率为μ。再设

$TC(c)$：服务员个数为c时，单位时间内服务费用和等待费用（顾客的损失费用）之和；

c'_s：单位时间内服务机构聘用一名服务员时的开支费用；

c_w：每名顾客单位等待（含服务）时间的费用，则有：

$$TC(c) = c'_s c + c_w L_s$$

9.6.2 排队系统的优化

对于标准的M/M/c模型，由于c只能取整数值，$TC(c)$不是连续变量的函数，所以采用边际分析法进行分析，要使 $TC(c)$ 最小，必须满足

$$\begin{cases} TC(c^*) \le TC(c^*-1) \\ TC(c^*) \le TC(c^*+1) \end{cases}$$

将 $TC(c) = c'_s c + c_w L_s$代入上式，有

$$\begin{cases} c'_s c^* + c_w L_s(c^*) \le c'_s(c^*-1) + c_w L_s(c^*-1) \\ c'_s c^* + c_w L_s(c^*) \le c'_s(c^*+1) + c_w L_s(c^*+1) \end{cases}$$

化简后得最优服务台数应满足下式

$$L(c^*) - L(c^*+1) \le \frac{c'_s}{c_w} \le L(c^*-1) - L(c^*)$$

9.6.2 排队系统的优化

例 9.10 某厂有一机修组专门修理某种类型的设备。已知该设备的损坏率服从泊松分布，平均每天 2 台。修复时间服从负指数分布，平均每台的修理时间为 $\frac{1}{\mu}$ 天，μ 是一个与每月机修费用 K 相关的函数（假设每月 30 天）。已知

$$\mu(K)=1+0.01K \text{（} K \le 2000\text{元）}$$

又已知设备损坏后，每台每天的停产损失为 375 元，试决定该厂修理最经济的 K 值及 μ 值。

9.6.2 排队系统的优化

解：根据题意有 $\lambda=2$

每天设备故障停产损失 $c_w=375$ 元

每天机修费用 $c_s=\frac{1}{30}K$

则每天的服务费用和等待费用之和为

$$TC(\mathrm{K})=c_s+\mathrm{c_w L_s}=c_s+\mathrm{c_w}\frac{\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{1}{30}K+\left(\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\right)\times 375$$

$$=\frac{1}{30}K+\left(\frac{2}{1+0.01K-2}\right)\times 375=\frac{750}{0.01K-1}+\frac{1}{30}K$$

令 $TC'(K)=\frac{1}{30}-\frac{750\times 0.01}{(0.01K-1)^2}=0$

解得 $K=1600$元/月， $\mu=17$台/天。

即 $K=1600$元/月， $\mu=17$台/天时，该厂修理最经济。

9.6.2 排队系统的优化

例9.11 某公司有三台复印机供其雇员使用，但由于等待时间过长，经理正在考虑添加一台或多台复印机。该公司每年的工作时间为2000小时，来复印的雇员按平均每小时30人的泊松分布到达，对每名顾客的服务时间为平均5分钟的负指数分布。由于雇员在复印时造成效率的损失估计为每小时25元，每台复印机的租用费用为每年3000元。试决定该公司应配备多少台复印机，使其每小时总的期望费用为最小？

9.6.2 排队系统的优化

解：根据题意：$\lambda=30$人/小时，$u=12$人/小时，$\dfrac{\lambda}{\mu}=\dfrac{5}{2}$

每台复印机每小时的租赁成本 $c_s=\dfrac{3000}{2000}=1.5$

每个雇员在复印室停留每小时的成本 $c_w=25$

每小时的总期望费用为 $z=cc_s+L_s c_w$

L_s 为复印室内的平均顾客数量，c 是服务台的个数，则有：$z=1.5c+25L_s$

9.6.2 排队系统的优化

根据 $z(c^*)$ 是最小值的特点，它必然满足以下条件

$$z(c^*) \le z(c^*+1)$$

$$z(c^*) \le z(c^*-1)$$

将 $z = 1.5c + 25L$ 代入上面两式中并整理则有：

$$L_s(c^*) - L_s(c^*+1) \le \frac{c_s}{c_w} \le L_s(c^*-1) - L_s(c^*)$$

因此只需找出 $\frac{c_s}{c_w}$ 落入的区间即可。

9.6.2 排队系统的优化

由 M/M/C 模型的计算公式

$$P_0=\left[\sum_{k=0}^{c-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k+\frac{1}{c!}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\right]^{-1}$$

$$L_q=\frac{\rho(c\rho)^c}{c!(1-\rho)^2}P_0$$

$$L_s=L_q+\frac{\lambda}{\mu}$$

根据不同的服务台数量 c 进行计算

9.6.2 排队系统的优化

当$c=3$时，$\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}=\dfrac{5}{6}$，$\dfrac{1}{1-\rho}=6$，则

$$P_0=\left[\sum_{k=0}^{2}\frac{1}{k!}\left(\frac{5}{2}\right)^k+\frac{1}{3!}\times 6\times\left(\frac{5}{2}\right)^3\right]^{-1}=0.0449$$

$$L_q=\frac{\rho(c\rho)^c}{c!(1-\rho)^2}P_0=\frac{\frac{5}{6}\times\left(\frac{5}{2}\right)^3}{3!\times\left(1-\frac{5}{6}\right)^2}\times 0.0449=3.5112$$

$$L_s=L_q+\frac{\lambda}{\mu}=6.0112$$

9.6.2 排队系统的优化

当$c=4$时，$\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}=\dfrac{5}{8}$，$\dfrac{1}{1-\rho}=\dfrac{8}{3}$，则

$$P_0=\left[\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!}\left(\frac{5}{2}\right)^k+\frac{1}{4!}\times\frac{8}{3}\times\left(\frac{5}{2}\right)^4\right]^{-1}=0.0737$$

$$L_q=\frac{\rho(c\rho)^c}{c!(1-\rho)^2}P_0=\frac{\frac{5}{8}\times\left(\frac{5}{2}\right)^4}{4!\times\left(1-\frac{5}{8}\right)^2}\times 0.0737=0.5331$$

$$L_s=L_q+\frac{\lambda}{\mu}=3.0331$$

9.6.2 排队系统的优化

当$c=5$时，$\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{1-\rho}=2$，则

$$P_0=\left[\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{k!}\left(\frac{5}{2}\right)^k+\frac{1}{5!}\times2\times\left(\frac{5}{2}\right)^5\right]^{-1}=0.0801$$

$$L_q=\frac{\rho(c\rho)^c}{c!(1-\rho)^2}P_0=\frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}\right)^5}{5!\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\times0.0801=0.1304$$

$$L_s=L_q+\frac{\lambda}{\mu}=2.6304$$

同理，可以计算当$c=6、7、8$时，P_0、L_s、L_q的值。

9.6.2 排队系统的优化

不同服务台数量所对应的总成本

台数	L_s	$L_s(c)-L_s(c+1)$	$L_s(c-1)-L_s(c)$	总成本
3	6.0012	2.9681	——	154.7809
4	3.0331	0.4027	2.9681	81.8274
5	2.6304	0.0855	0.4027	73.2600
6	2.5449	0.0364	0.0855	72.6236
7	2.5085	0.0065	0. 0364	73.2122
8	2.5020	——	0.0065	74.5511

9.6.2 排队系统的优化

又 $\dfrac{c_s}{c_w}=\dfrac{1.5}{25}=0.06$

由上表可知，0.06 落在（0.0364，0.0855）内，

故 $c^*=6$时，总成本最小，为72.6236 元/小时

9.7 电子表格建模和求解

例9.12 某乡镇月末水电费的收缴工作由甲乙两名职员完成。收电费的甲窗口的单据平均到达率服从每小时16的泊松分布，收水费的乙窗口的单据平均到达率服从每小时14的泊松分布。无论缴纳电费或水费，每次操作都服从平均3分钟的负指数分布。为了减少顾客的等待时间，有关部门提出了下列建议：

（a）培训甲乙两名职员使其均熟悉缴纳电费和水费的操作流程；

（b）将交纳电费和水费的群众排成一队，由两名职员来处理。

试求：

（1）按现有工作情况分别计算交纳电费和缴纳水费的顾客在系统中的停留时间，然后计算他们结合在一起的期望等待时间；

（2）假定上述建议被采纳，试计算顾客在系统中的停留时间。

9.7 电子表格建模和求解

解：（1）按现有工作情况，缴纳电费和水费的两个系统均为标准的M/M/1模型

缴纳电费的窗口：

平均到达率 λ_1=16（人/小时）

平均服务率 $\mu_1 = \dfrac{60}{3} = 20$（人/小时）

停留时间 $W_{s_1} = \dfrac{1}{\mu_1 - \lambda_1} = \dfrac{1}{4}$（小时）=15（分钟）

等待时间 $W_{q_1} = W_{s_1} - \dfrac{1}{\mu_1} = 12$（分钟）

9.7 电子表格建模和求解

缴纳水费的窗口：

平均到达率 $\lambda_2=14$（人/小时）

平均服务率 $\mu_2=\frac{60}{3}=20$（人/小时）

停留时间 $W_{s_2}=\frac{1}{\mu_2-\lambda_2}=\frac{1}{6}$（小时）$=10$（分钟）

等待时间 $W_{q_2}=W_{s_2}-\frac{1}{\mu_2}=7$（分钟）

结合在一起的期望等待时间

$$Wq=\frac{\lambda_1 W_{q_1}+\lambda_2 W_{q_2}}{\lambda_1+\lambda_2}=9\frac{2}{3}（分钟）$$

9.7 电子表格建模和求解

其电子表格建模如下图

	A	B
1	例题12（1） 标准的M/M/1系统模型	
2	缴纳电费的窗口	
3	系统参数	
4	顾客平均到达率λ（人/小时）	16
5	平均服务时间1/μ（小时/人）	0.05
6	中间参数	
7	平均服务率μ（人/小时）	=1/B5
8	服务强度ρ	=B4/B7
9	运行指标	
10	整个系统空闲概率P0	=1-B8
11	排队等待服务顾客的期望数Lq	=B8*B4/(B7-B4)
12	系统中顾客的期望数Ls（队长）	=B4/(B7-B4)
13	每个顾客排队等待时间的期望值Wq(分钟)	=B11*60/B4
14	每个顾客停留时间的期望值Ws（分钟）	=B12*60/B4

9.7 电子表格建模和求解

16	缴纳水费的窗口	
17	系统参数	
18	顾客平均到达率λ（人/小时）	14
19	平均服务时间1/μ（小时/人）	0.05
20	中间参数	
21	平均服务率μ（人/小时）	=1/B19
22	服务强度ρ	=B18/B21
23	运行指标	
24	整个系统空闲概率P0	=1-B22
25	排队等待服务顾客的期望数Lq	=B22*B18/(B21-B18)
26	系统中顾客的期望数Ls（队长）	=B18/(B21-B18)
27	每个顾客排队等待时间的期望值Wq(分钟)	=B25*60/B18
28	每个顾客停留时间的期望值Ws（分钟）	=B26*60/B18

9.7 电子表格建模和求解

求解结果为

	A	B
1	例题12（1） 标准的M/M/1系统模型	
2	缴纳电费的窗口	
3	系统参数	
4	顾客平均到达率λ（人/小时）	16
5	平均服务时间1/μ（小时/人）	0.05
6	中间参数	
7	平均服务率μ（人/小时）	20
8	服务强度ρ	0.8
9	运行指标	
10	整个系统空闲概率P0	0.2
11	排队等待服务顾客的期望数Lq	3.2
12	系统中顾客的期望数Ls（队长）	4
13	每个顾客排队等待时间的期望值Wq(分钟)	12
14	每个顾客停留时间的期望值Ws（分钟）	15

9.7 电子表格建模和求解

16	缴纳水费的窗口	
17	系统参数	
18	顾客平均到达率λ（人/小时）	14
19	平均服务时间1/μ（小时/人）	0.05
20	中间参数	
21	平均服务率μ（人/小时）	20
22	服务强度ρ	0.7
23	运行指标	
24	整个系统空闲概率P0	0.3
25	排队等待服务顾客的期望数Lq	1.633333333
26	系统中顾客的期望数Ls（队长）	2.333333333
27	每个顾客排队等待时间的期望值Wq(分钟)	7
28	每个顾客停留时间的期望值Ws（分钟）	10

9.7 电子表格建模和求解

（2）采纳意见后该系统为 M/M/c 模型，有

平均到达率 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2=16+14=30$（人/小时）

平均服务率 $\mu=\mu_1=\mu_2=20$（人/小时）

服务台个数 $c=2$

服务强度 $\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}=\dfrac{30}{2\times 20}=\dfrac{3}{4}$

9.7 电子表格建模和求解

系统空闲的概率 $$P_0=\left[\sum_{k=0}^{c-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k+\frac{1}{c!}\cdot\frac{1}{1-\rho}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\right]^{-1}=\frac{1}{7}$$

队列长期望值 $$L_q=\frac{(c\rho)^c\rho}{c!(1-\rho)^2}P_0=\frac{27}{14}$$

队长期望值 $$L_s=L_q+\frac{\lambda}{\mu}=\frac{24}{7}$$

停留时间 $$W_s=\frac{Ls}{\lambda}=\frac{4}{35}(\text{小时})=\frac{48}{7}(\text{分钟})$$

9.7 电子表格建模和求解

其电子表格建模如下图

	A	B
1	例题12（2） 标准的M/M/c系统模型(c=2)	
2		
3	系统参数	
4	顾客平均到达率λ（人/小时）	30
5	平均服务时间1/μ（小时/人）	0.05
6		
7	中间参数	
8	平均服务率μ（人/小时）	=1/B5
9	服务强度ρ	=B4/(2*B8)
10		
11	运行指标	
12	整个系统空闲概率P0	=(1+B4/B8+(1/2)*(1/(1-B9))*(B4/B8)^2)^(-1)
13	排队等待服务顾客的期望数Lq	=(((2*B9)^2)*B9)/(FACT(2)*(1-B9)^2)*B12
14	系统中顾客的期望数Ls（队长）	=B13+B4/B8
15	每个顾客排队等待时间的期望值Wq(小时)	=B13/B4
16	每个顾客停留时间的期望值Ws（小时）	=B14/B4

9.7 电子表格建模和求解

求解结果为

	A	B
1	例题12（2） 标准的M/M/c系统模型(c=2)	
2		
3	系统参数	
4	顾客平均到达率λ（人/小时）	30
5	平均服务时间1/μ（小时/人）	0.05
6		
7	中间参数	
8	平均服务率μ（人/小时）	20
9	服务强度ρ	0.75
10		
11	运行指标	
12	整个系统空闲概率P0	0.142857143
13	排队等待服务顾客的期望数Lq	1.928571429
14	系统中顾客的期望数Ls（队长）	3.428571429
15	每个顾客排队等待时间的期望值Wq(小时)	0.064285714
16	每个顾客停留时间的期望值Ws（小时）	0.114285714

9.7 电子表格建模和求解

（3）电子表格建模如下图

	A	B
1	例题12（3） 标准的M/M/c系统模型(c=2)	
2		
3	系统参数	
4	顾客平均到达率λ（人/小时）	30
5	平均服务时间1/μ（小时/人）	0.05
6	平均服务时间变化量△(1/μ)（小时/人）	0
7		
8	中间参数	
9	平均服务率μ（人/小时）	=1/(B5+B6)
10	服务强度ρ	=B4/(2*B9)
11		
12	运行指标	
13	整个系统空闲概率P0	=(1+B4/B9+(1/2)*(1/(1-B10))*(B4/B9)^2)^(-1)
14	排队等待服务顾客的期望数Lq	=(((2*B10)^2)*B10)/(FACT(2)*(1-B10)^2)*B13
15	系统中顾客的期望数Ls（队长）	=B14+B4/B9
16	每个顾客排队等待时间的期望值Wq(小时)	=B14/B4
17	每个顾客停留时间的期望值Ws（小时）	=B15/B4
18		

9.7 电子表格建模和求解

求解结果为

	A	B
1	例题12（3） 标准的M/M/c系统模型(c=2)	
2		
3	系统参数	
4	顾客平均到达率λ（人/小时）	30
5	平均服务时间1/μ（小时/人）	0.05
6	平均服务时间变化量△(1/μ) （小时/人）	0
7		
8	中间参数	
9	平均服务率μ（人/小时）	20
10	服务强度ρ	0.75
11		
12	运行指标	
13	整个系统空闲概率P0	0.142857143
14	排队等待服务顾客的期望数Lq	1.928571429
15	系统中顾客的期望数Ls（队长）	3.428571429
16	每个顾客排队等待时间的期望值Wq(小时)	0.064285714
17	每个顾客停留时间的期望值Ws（小时）	0.114285714

9.7 电子表格建模和求解

例9.13 某快餐店午餐时间顾客按平均每小时66人的泊松分布到达，对每名顾客的服务时间为平均2分钟的负指数分布。该快餐店经理意识到提高服务效率是吸引顾客的关键，因此他决定增加午餐时间的收银员（只负责对顾客付货和收款）来减少顾客的等待时间。若每个收银员每小时支付的工资为9元，且估计顾客在队伍中每等待一分钟的损失为0.3元。试确定在午餐时间雇多少收银员，才能使该快餐店每小时的期望总成本为最小。

9.7 电子表格建模和求解

解：根据题意，顾客平均到达率$\lambda=66$人/小时，平均服务率$\mu=30$人/小时，$\dfrac{\lambda}{\mu}=2.2$。

设c表示收银员数，$c_s^{'}$为每个收银员每小时的成本($c_s^{'}=9$元/小时)，c_w为每个顾客在快餐店停留每小时的费用($c_w=0.3\times 60=18$元/小时)；L_s是店内顾客的平均数，则每小时全部费用的期望值

$$z=c_s^{'}c+c_wL_s$$

由M/M/C模型的计算公式

$$p_0=\left[\sum_{k=0}^{c-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k+\frac{1}{c!}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\right]^{-1}$$

$$L_q=\frac{\rho(c\rho)^c}{c!(1-\rho)^2}P_0$$

$$L_s=L_q+\frac{\lambda}{\mu}$$

9.7 电子表格建模和求解

当 c=1 或者 2 时，$\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}=\dfrac{11}{5c}>1$，故 1，2 个收银员不可能应付所有顾客。

所以从c=3时开始讨论。

当 c=3 时，$\rho=\dfrac{11}{5c}=\dfrac{5}{6}$。

$$p_0=\left[\sum_{k=0}^{c-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k+\frac{1}{c!}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\right]^{-1}=0.0815$$

$$L_q=\frac{\rho(c\rho)^c}{c!(1-\rho)^2}P_0=1.4909$$

$$L_s=L_q+\frac{\lambda}{\mu}=3.6909$$

同理，可以计算当c=3,4,5,6,7,8时,P_0、Ls、Lq的值，具体结果如下表所示。

9.7 电子表格建模和求解

表 9.3 不同服务台数量所对应的总成本

台数	L_s	$L_s(c)-L_s(c+1)$	$L_s(c-1)-L_s(c)$	总成本
3	3.690937	1.213738	——	93.43686
4	2.477199	0.211255	1.213738	80.58957
5	2.265944	0.050036	0.211255	85.78699
6	2.215908	0.012245	0.050036	93.88635
7	2.203663	0.002875	0.012245	102.6659
8	2.200789	——	0.002875	111.6142

$\frac{C_s'}{C_w}=0.50$，落在区间（0.211255，1.213738）内，所以$c^*=4$。即设 4 个收银员时每小时的期望总成本最小，$Z(c^*)=Z(4)=80.58957$（元）。

9.7 电子表格建模和求解

其电子表格建模求解结果见下图

	A	B	C	D	E	F	G
1	例题9.13 M/M/c模型 求解最优服务台数c*的问题						
2							
3	系统参数						
4	顾客平均到达率λ	66					
5	顾客平均服务率μ	30					
6	每个收银员每小时的雇佣成本Cs	9					
7	每个顾客在快餐店停留每小时的损失费用Cw	18					
8							
9	运行指标						
10		收银员数目c					
11	各项指标	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
12	服务强度ρ	=$B$4/(B$11*$B$5)	=$B$4/(C$11*$B$5)	=$B$4/(D$11*$B$5)	=$B$4/(E$11*$B$5)	=$B$4/(F$11*$B$5)	=$B$4/(G$11*$B$5)

9.7 电子表格建模和求解

其电子表格建模求解结果见下图

13	系统空闲概率Po	=1/(SUMPRODUCT(1/FACT(ROW(1:3)-1)*($B$4/$B$5)^(ROW(1:3)-1))+1/FACT(B11)*1/(1-B12)*($B$4/$B$5)^B11)	=1/(SUMPRODUCT(1/FACT(ROW(1:4)-1)*($B$4/$B$5)^(ROW(1:4)-1))+1/FACT(C11)*1/(1-C12)*($B$4/$B$5)^C11)	=1/(SUMPRODUCT(1/FACT(ROW(1:5)-1)*($B$4/$B$5)^(ROW(1:5)-1))+1/FACT(D11)*1/(1-D12)*($B$4/$B$5)^D11)	=1/(SUMPRODUCT(1/FACT(ROW(1:6)-1)*($B$4/$B$5)^(ROW(1:6)-1))+1/FACT(E11)*1/(1-E12)*($B$4/$B$5)^E11)	=1/(SUMPRODUCT(1/FACT(ROW(1:7)-1)*($B$4/$B$5)^(ROW(1:7)-1))+1/FACT(F11)*1/(1-F12)*($B$4/$B$5)^F11)	=1/(SUMPRODUCT(1/FACT(ROW(1:8)-1)*($B$4/$B$5)^(ROW(1:8)-1))+1/FACT(G11)*1/(1-G12)*($B$4/$B$5)^G11)
14	队长Lq	=B13*B12*(B11*B12)^B11/(FACT(B11)*(1-B12)^2)	=C13*C12*(C11*C12)^C11/(FACT(C11)*(1-C12)^2)	=D13*D12*(D11*D12)^D11/(FACT(D11)*(1-D12)^2)	=E13*E12*(E11*E12)^E11/(FACT(E11)*(1-E12)^2)	=F13*F12*(F11*F12)^F11/(FACT(F11)*(1-F12)^2)	=G13*G12*(G11*G12)^G11/(FACT(G11)*(1-G12)^2)

9.7 电子表格建模和求解

其电子表格建模求解结果见下图

15	排队长Ls	=B14+$B$4/$B$5	=C14+$B$4/$B$5	=D14+$B$4/$B$5	=E14+$B$4/$B$5	=F14+$B$4/$B$5	=G14+$B$4/$B$5
16	逗留时间Ws	=B15/$B$4	=C15/$B$4	=D15/$B$4	=E15/$B$4	=F15/$B$4	=G15/$B$4
17	等待时间Wq	=B14/$B$4	=C14/$B$4	=D14/$B$4	=E14/$B$4	=F14/$B$4	=G14/$B$4
18		注：当c=1,2时，$\rho>1$，故c≠1,2					
19	目标函数						
20	系统总费用TC	=$B$6*B11+$B$7*B15	=$B$6*C11+$B$7*C15	=$B$6*D11+$B$7*D15	=$B$6*E11+$B$7*E15	=$B$6*F11+$B$7*F15	=$B$6*G11+$B$7*G15
21	最优选择	=IF(B20=MIN($B$20:$G$20),"Minimum","")	=IF(C20=MIN($B$20:$G$20),"Minimum","")	=IF(D20=MIN($B$20:$G$20),"Minimum","")	=IF(E20=MIN($B$20:$G$20),"Minimum","")	=IF(F20=MIN($B$20:$G$20),"Minimum","")	=IF(G20=MIN($B$20:$G$20),"Minimum","")

9.7 电子表格建模和求解

其电子表格建模求解结果见下图

	A	B	C	D	E	F	G
1	例题9.13 M/M/c模型 求解最优服务台数c*的问题						
2							
3	系统参数						
4	顾客平均到达率λ	66					
5	服务员平均服务率μ	30					
6	每个收银员每小时的雇佣成本Cs	9					
7	每个顾客在快餐店停留每小时的损失费用Cw	18					
8							
9	运行指标						
10		收银员数目c					
11	各项指标	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
12	服务强度ρ	0.733	0.550	0.440	0.367	0.314	0.275
13	系统空闲概率Po	0.081	0.105	0.109	0.111	0.111	0.111
14	排队长Lq	1.491	0.277	0.066	0.016	0.004	0.001
15	队长Ls	3.691	2.477	2.266	2.216	2.204	2.201
16	逗留时间Ws	0.056	0.038	0.034	0.034	0.033	0.033
17	等待时间Wq	0.023	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
20	系统总费用TC	93.44	**80.59**	85.79	93.89	102.67	111.61
21	最优选择		**Minimum**				

9.8案例分析 办公室设施公司（OEI）服务能力分析

位于印第安纳州韦恩堡的办公室设施公司（简称OEI）向商业客户出租自动邮递机器。公司的成功来自它提供及时的维修和享有修理服务的良好声誉，每份OEI服务合同都会做出承诺，从客户设备出现问题通知OEI，到OEI的服务技师到达客户的企业所在地，这中间的时间平均不会超过3小时。

对以往服务纪录的一次统计分析显示：系统运行过程中，每名客户的报修率为平均每50小时一次。目前，OEI有10名签订了服务合同的客户，有一名服务技师负责处理所有要求的来电。若某客户来电要求服务时，该技师正好空闲，那么技师平均要花1个小时赶到客户的办公室，并且平均花1.5个小时完成修理服务（返程时间忽略）。服务技师的薪水是每小时80美元，而从客户角度看，设备停工时间内造成的损失是每小时100美元。

9.8案例分析 办公室设施公司（OEI）服务能力分析

OEI正在计划扩展业务。公司计划在1年内争取到20名客户，2年内有30名客户。尽管OEI对一名服务技师能接待10名现有客户的状况感到满意，公司管理层还是有这样一层担忧：当OEI的客户群扩大时，一名技师是否有能力确保在接到客户电话3小时内为客户提供维修服务。在最近的一次规划会议上，营销经理提出一项建议：OEI在客户数达到20名时增加一名服务技师，客户数达到30名时再增加一名服务技师。在做出最终决策之前，公司管理层要求对OEI的服务能力进行分析。公司尤其希望能以尽可能的最低总成本来实现平均3小时的等候时间的承诺。

拟一份管理报告，总结你对OEI服务能力的分析，并就OEI客户群达到20名和30名时分别应雇佣的技师人数而提出你的建议。你的报告需要对下列问题进行讨论：

9.8案例分析 办公室设施公司（OEI）服务能力分析

（1）每名客户的平均到达率是多少？

（2）每名服务技师的平均服务率是多少？（注意：平均一小时的交通时间也是服务时间的一部分，因为服务技师处理一个要求服务电话的时间包括交通时间加上完成检修所需要的时间。）

（3）OEI对一名服务技师能接待10名现有客户的状况感到满意。利用顾客源有限的排队模型来确定下列信息：

a) 系统中没有客户的概率；
b) 系统中客户的平均人数；
c) 等候处理报修的客户平均人数；
d) 机器正常运转之前，客户等候的平均时间；
e) 服务技师到达之前，客户等候的平均时间；
f) 服务系统运行时每小时的总成本。

你是否同意OEI管理层的意见，即一名技师就能实现平均3小时内提供服务的承诺？并说出你的理由。

9.8案例分析 办公室设施公司（OEI）服务能力分析

（4）当OEI客户群扩大到20名时，你建议公司雇佣几名服务技师？利用问题3中得出的信息来证明你的答案。

（5）当OEI客户群扩大到30名时，你建议公司雇佣几名服务技师？利用问题3中得出的信息来证明你的答案。

（6）假设每年有250天营业，每天营业8小时，与OEI计划委员会提出的关于30名客户需要雇佣3名服务技师的建议相比，你在问题5中提出的建议每年可以为OEI节约多少成本？

9.8案例分析 办公室设施公司（OEI）服务能力分析

案例分析

此排队系统为技师呼叫中心的商业服务系统，外部顾客接受OEI服务技师的服务。在该系统中，**顾客**是指需要维修的商业客户；**顾客到达**是指打给每一个技术服务代表的报修电话；**服务者**是指服务技师；**服务时间**是指服务技师处理一个要求服务电话的时间，包括交通时间加上完成检修所需要的时间；**队列**是指在等待处理报修的客户，该系统属于顾客源有限的排队系统模型。

9.8案例分析 办公室设施公司（OEI）服务能力分析

案例解答

解：（1）每名客户的平均到达率

$$\lambda = \frac{1}{50} = 0.02 \text{（名客户/小时）}$$

（2）每名服务技师的平均服务率

$$\mu = \frac{1}{1+1.5} = 0.4 \text{（名客户/小时）}$$

9.8案例分析 办公室设施公司（OEI）服务能力分析

（3）当客户群为10名时，该系统为 M/M/1/∞/10模型

a）系统中没有客户的概率

$$P_0=\frac{1}{\sum_{n=0}^{N}\frac{N!}{(N-n)!}(\frac{\lambda}{\mu})^n}=\frac{1}{\sum_{n=0}^{10}\left[\frac{10!}{(10-n)!}\cdot(\frac{0.02}{0.4})^n\right]}=0.5380$$

b）系统中客户的平均数目

$$L_s=N-\frac{\mu}{\lambda}\left(1-P_0\right)=10-\frac{0.4}{0.02}\left(1-0.5380\right)=0.7600\text{（人）}$$

c）等待处理报修的客户平均数

$$L_q=L_s-(1-P_0)=0.7600-(1-0.5380)=0.2980\text{（人）}$$

9.8案例分析 办公室设施公司（OEI）服务能力分析

d）机器正常运转之前客户等候的平均时间

$$W_s = \frac{N}{\mu(1-P_0)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{10}{0.4\times(1-0.5380)} - \frac{1}{0.02} = 4.1126\text{（小时）}$$

e）每次报修的平均维修时间$t_0 = 1.5$小时

服务技师到达之前客户等候的平均时间

$$W_q = W_s - t_0 = 4.1126 - 1.5 = 2.6126\text{（小时）} < \textbf{3小时}$$

满足能实现平均3小时内提供服务”的承诺

9.8案例分析 办公室设施公司（OEI）服务能力分析

f） 单位时间OEI成本（人工费用）：$c_s = 80$（美元）

美元设备停工时间内造成的损失：$c_w = 100$（美元）

服务台数量：$c = 1$

服务系统运行时每小时的总成本：

$$TC = c_s(1-P_0)c + c_w L_s = 80\times(1-0.5380)\times1+100\times0.76 = 112.96 \text{（美元）}$$

所以，管理层的意见“一名技师就能实现平均3小时内提供服务的承诺”是合理的。

9.8案例分析 办公室设施公司（OEI）服务能力分析

（4）当OEI客户群扩大到**20**名时，服务系统的各项运行参数如下

服务技师数目	1	2
系统中没有客户的概率	0.1589	0.3525
系统中的客户平均数	3.1778	1.1527
等待处理报修的客户平均数	2.3367	0.2104
机器正常运转之前客户等候的平均时间	9.4454	3.0581
服务技师到达之前客户等候的平均时间	7.9454	1.5581
服务系统运行时每小时的总成本	385.07	210.87
服务系统运行时每小时OEI的成本	67.29	103.59

由于服务技师数目为2人时，服务技师到达之前客户等候的平均时间低于3小时，所以，建议公司雇佣2名服务技师。

9.8案例分析 办公室设施公司（OEI）服务能力分析

（5）当OEI客户群扩大到30名时，服务系统的各项运行参数如下

服务技师数目	1	2	3
系统中没有客户的概率	0.0085	0.1760	0.2227
系统中的客户平均数	10.1700	2.3194	1.5708
等待处理报修的客户平均数	9.1785	0.9353	0.1493
机器正常运转之前客户等候的平均时间	25.6430	4.1895	2.7626
服务技师到达之前客户等候的平均时间	24.1430	2.6895	1.2626
服务系统运行时每小时的总成本	1096.23	363.78	343.63
服务系统运行时每小时OEI的成本	79.32	131.84	186.55

尽管服务技师数目为2和3人时，服务技师到达之前客户等候的平均时间都低于3小时，但是服务技师为2人时的服务系统每小时运行成本要低于服务技师为3人时的成本，所以，建议公司雇佣2名服务技师。

9.8案例分析 办公室设施公司（OEI）服务能力分析

（6）采用上题中的建议，只雇佣两名服务技师可节约的成本为

$$(186.55-131.84)\times 8\times 250=109420$$（美元）

The End