

5 Численное дифференцирование и интегрирование

5.1 Конечно-разностная формула на произвольном шаблоне

Написать программу для вычисления приближенного значения производной заданного порядка по значениям функции в заданных узлах.

1. Программа должна содержать функцию, принимающую на вход: массив координат узлов x_1, \dots, x_n , массив значений функции в узлах f_1, \dots, f_n , порядок производной $k \geq 1$, и точку x_0 в которой нужно вычислить значение производной.
2. Функция должна вычислять и возвращать коэффициенты конечно-разностной формулы и приближенное значение производной $f^{(k)}(x_0)$.
3. Программа должна содержать тестовый расчет для гладкой функции: функция должна вызываться для последовательности наборов одного фиксированного количества узлов, чтобы величина $x_i - x_0$ уменьшалась каждый раз вдвое. Программа должна строить график зависимость ошибки от шага $h = \max_i |x_i - x_0|$ в логарифмической шкале. На этом же графике нужно нарисовать прямую с углом наклона, равным порядку аппроксимации.

5.2 Матрицы дифференцирования для чебышёвских узлов

Напишите программу для приближенного вычисления производной функции в узлах, в которых заданы значения самой функции.

1. Программа должна содержать функцию, которая принимает на вход границы отрезка $[a, b]$, число узлов, функцию f . Функция должна вычислять чебышёвские узлы, создавать *плотную* матрицу дифференцирования по этим узлам. Матрица получается путем дифференцирования интерполяционного многочлена, построенного *по всем узлам сетки*.

Функция должна вычислять массив приближенных значений производных в узлах через умножение матрицы дифференцирования

на вектор значений f в узлах. Функция должна возвращать массив значений производной.

2. Программа должна вызывать реализованную функцию для тестовой функции f в цикле для разного количества узлов, и вычислять ∞ -норму ошибки для каждого количества узлов.
3. Программа должна строить график зависимости ошибки от числа узлов в логарифмической шкале.
4. Ошибка в логарифмической шкале должна убывать быстрее, чем линейно (сверхлинейно)! Если это не так – ищите ошибку.

5.3 Квадратуры Гаусса

Написать программу для вычисления интеграла с помощью квадратурной формулы Гаусса.

1. Программа должна содержать функцию, которая принимает на вход ссылку на функцию f , отрезок $[a, b]$, и число узлов n .
2. Функция должна вычислять узлы квадратуры Гаусса: нужно создать 3-х диагональную матрицу с коэффициентами 3-х членного рекуррентного соотношения (коэффициенты можно взять из литературы) и вычислить собственные числа с помощью готовой функции.
3. Функция должна вычислять веса квадратурной формулы через интегралы от базовых многочленов Лагранжа по узлам квадратуры. Для вычисления интегралов можно вывести аналитические формулы или использовать встроенную функцию для интегрирования. Для проверки правильности вычисления весов и узлов можно использовать функцию [numpy.polynomial.legendre.leggauss](#)
4. Функция должна возвращать приближенное значение интеграла, вычисленное по квадратурной формуле Гаусса.
5. Программа должна вызывать функцию для многочленов и сравнивать значение с точным значением интеграла. Нужно подтвердить, что формула точна для многочленов нужной степени.

6. Программа должна вычислять интеграл для тестовой функции (не многочлена) и сравнивать полученное значение со значением, которая вернула стандартная функция

5.4 Составные квадратурные формулы

Написать программу для вычисления интеграла по составной квадратурной формуле.

1. Сначала нужно вычислить веса квадратурной формулы с узлами

$$-1, -1/3, 1/3, +1$$

для стандартного отрезка $[-1, +1]$.

2. Программа должна содержать функцию, которая принимает на вход ссылку на функцию f , отрезок $[a, b]$, и точность tol .
3. Функция должна вычислять интеграл $\int_a^b f(x) dx$ по составной квадратурной формуле на основе выведенной формулы на сгущающихся равномерных сетках. Функция должна вычислять оценку ошибки по правилу Рунге, и прекращать сгущение, когда оценка ошибки станет меньше tol .
4. Функция должна возвращать значение интеграла и число отрезков в последней сетке, для которой выполнен критерий остановки сгущения.
5. Программой должна вычислять интеграл для гладкой функции для разных значений $tol = 2^{-5}, 2^{-10}, \dots$ и строить график зависимости tol от числа отрезков разбиения в логарифмической шкале.
6. Порядок убывания ошибки должен совпадать с теоретической оценкой