Ejercicios de clase

Ejercicio 1

Sea el espacio muestral equiprobable $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y los sucesos descritos a continuación:

Suceso A: «Sacar un número par».

Suceso B: «Sacar un número mayor que 3».

¿Cuál es la probabilidad de A?

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{(3)}{(6)} = \frac{1}{2}$$

¿Cuál es la probabilidad de B?

$$B = \{4, 5, 6\}$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|E|} = \frac{(3)}{(6)} = \frac{1}{2}$$

¿Cuál es la probabilidad de B condicionado a A?

Es decir, «si sale un número par», la probabilidad de que «sea mayor que 3».

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{(\frac{1}{3})}{(\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cap B) = P(\{4, 6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$P(A) = P(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

▼ Proceso que refleja la fórmula.

Sea el espacio muestral E.

1. Si ha salido par, entonces se sabe que ha salido algún número de A.
2. Ahora se interpreta A como un nuevo espacio muestral de 3 elementos.
3. Si tiene que ser mayor que 3 y $A = \{2, 4, 6\}$, hay una probabilidad de $\frac{2}{3}$, el resultado obtenido.

¿Cuál es la probabilidad de A condicionado a B?

Es decir, «si sale un número mayor que 3», la probabilidad de que «sea par».

$$P(A/B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{(\frac{1}{3})}{(\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$$

$$P(B \cap A) = P(A \cap B) = \frac{1}{3}$$
$$P(B) = P(\{4,5,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

📝 $P(B/A) = P(A/B)$ no es una regla, sino que en este caso ha sido casualidad.

¿Cuál es la probabilidad de B condicionado a $\overline{A}$?

Es decir, «si no sale un número par», la probabilidad de que «sea mayor que 3».

$$P(B/\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{(\frac{1}{6})}{(\frac{1}{2})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\{5\}) = \frac{1}{6}$$
$$P(\overline{A}) = P(\{1,3,5\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

¿Cuál es la probabilidad de $\overline{A}$ condicionado a B?

Es decir, «si sale un número mayor que 3», la probabilidad de que «no sea par».

$$P(\overline{A}/B) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(B)} = \frac{(\frac{1}{6})}{(\frac{1}{2})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(B \cap \overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{6}$$
$$P(B) = P(\{4,5,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

📝 $P(B/A) = P(A/B)$ no es una regla, sino que en este caso ha sido casualidad.

Ejercicio 2

Sea el espacio muestral equiprobable $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ y los sucesos descritos a continuación:

Suceso A: «Sacar un número impar».

Suceso B: «Sacar un número mayor o igual que 5».

¿Cuál es la probabilidad de A?

$$A = \{1,3,5\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{(3)}{(6)} = \frac{1}{2}$$

¿Cuál es la probabilidad de B?

$$B = \{5,6\}$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|E|} = \frac{(2)}{(6)} = \frac{1}{3}$$

¿Cuál es la probabilidad de B condicionado a A?

Es decir, «si sale un número impar», la probabilidad de que «sea mayor o igual que 5».

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{(\frac{1}{6})}{(\frac{1}{2})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = P(\{5\}) = \frac{1}{6}$$
$$P(A) = P(\{1,3,5\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

¿Cuál es la probabilidad de A condicionado a B?

Es decir, «si sale un número mayor o igual que 5», la probabilidad de que «sea impar».

$$P(A/B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{(\frac{1}{6})}{(\frac{1}{3})} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B \cap A) = P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$
$$P(B) = P(\{5, 6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

¿Cuál es la probabilidad de B condicionado a $\overline{A}$?

Es decir, «si no sale un número impar», la probabilidad de que «sea mayor o igual que 5».

$$P(B/\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{(\frac{1}{6})}{(\frac{1}{2})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$
$$P(\overline{A}) = P(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

¿Cuál es la probabilidad de $\overline{A}$ condicionado a B?

Es decir, «si sale un número mayor que 3», la probabilidad de que «no sea par».

$$P(\overline{A}/B) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(B)} = \frac{(\frac{1}{6})}{(\frac{1}{3})} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B \cap \overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{6}$$
$$P(B) = P(\{5, 6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 3

Hallar la probabilidad de sacar 3 cartas sin reemplazamiento de una baraja española modificada* y obtener:

1. **Un As, un Rey y un Caballo, en ese orden.**
2. **Un As, un Rey y un Caballo.**
3. **3 Ases.**
4. **2 cartas ♠ y 1 carta ♦.**

* en lugar de los palos habituales, esta tiene los palos del póker.

- Si en cada turno se sacan 3 cartas, entonces el espacio muestral E estará **formado por tuplas de 3 elementos** (la primera, segunda y tercera carta).
  - También hay que tener en cuenta que en este caso, $(x, y, z) \neq (z, x, y) \neq (y, x, z) \neq (z, y, x)$, ya que **el orden en el que se saca la carta es importante**.
- Cada elemento de la tupla puede ser de **un palo**: ♠, ♣, ❤ o ♦.
  - **Cada palo tiene 10 cartas**: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12\}$.
- Además, **no hay cartas repetidas**, así que al sacar una carta x, esta ya no forma parte de la baraja.

El espacio muestral tendría una forma parecida a esta:

$$E = \{(1♠, 2♠, 3♠), (1♠, 2♠, 4♠), \ldots, (12♦, 11♦, 9♦), (12♦, 11♦, 10♦)\}$$

Un As, un Rey y un Caballo, en ese orden.

Suceso A:
«sacar un As a la primera».

Suceso R:
«sacar un Rey a la segunda».

Suceso C:
«sacar un Caballo a la tercera».

Sacar el As:
$P(A)$

Sacar el Rey:
$P(A \cap R) = P(A) \cdot P(R/A)$

Sacar el Caballo:
$P(A \cap R \cap C) = P(A \cap R) \cdot P(C/(A \cap R))$

$$P(A) = \frac{4}{40}$$

1 as / palo, y 4 palos.

4 ases totales.

10 cartas / palo.

40 cartas totales.

$$P(R/A) = \frac{4}{39}$$

1 rey / palo.

4 reyes totales.

10 cartas / palo, menos 1 (el as sacado).

39 cartas totales.

$$P(R/A) = \frac{P(A \cap R)}{P(A)} \quad \rightarrow \quad P(A \cap R) = P(A) \cdot P(R/A) \qquad P(A \cap R) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39}$$

$$P(C/(A \cap R)) = \frac{4}{38}$$

1 caballo / palo, y 4 palos.

4 caballos totales.

10 cartas / palo, menos 2 (el as y el rey sacados).

38 cartas totales.

$$P(A \cap R \cap C) = P(A \cap R) \cdot P(C/(A \cap R)) = \left(\frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39}\right) \cdot \frac{4}{38}$$

Un As, un Rey y un Caballo.

Como en este caso el orden en el que se saquen no importa, se puede deducir que la probabilidad total ($P(X)$) será n veces la probabilidad anterior $P(A \cap R \cap C)$, siendo n el número de posibles combinaciones sin repetición de los elementos A, R y C, a las que llamo X.

Ya que la probabilidad sigue siendo la misma, lo único que cambia es el orden de las cartas.

$$X = \{ARC, ACR, RAC, RCA, CAR, CRA\} \quad \rightarrow \quad n = |X| = 6$$

$$P(X) = \left(\frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38}\right) \cdot 6 = \frac{24}{3705}$$

3 Ases.

Suceso A_1:
«sacar un As a la primera».

Suceso A_2:
«sacar un As a la segunda».

Suceso A_3:
«sacar un As a la tercera».

Sacar el primer As:
$P(A_1)$

Sacar el segundo As:
$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1)$

Sacar el tercer As:
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) \cdot P(A_3/(A_1 \cap A_2))$

$$P(A_1) = \frac{4}{40}$$

1 as / palo, y 4 palos.

4 ases totales.

10 cartas / palo.

40 cartas totales.

$$P(A_2/A_1) = \frac{3}{39}$$

1 as / palo, y 4 palos, menos 1 (el anterior).

3 ases totales.

10 cartas / palo, menos 1 (el as sacado).

39 cartas totales.

$$P(A_2/A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \quad \rightarrow \quad P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \qquad P(A_1 \cap A_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39}$$

$$P(A_3/(A_1 \cap A_2)) = \frac{2}{38}$$

1 as / palo, y 4 palos, menos 2 (los anteriores).

2 ases totales.

10 cartas / palo, menos 2 (los anteriores).

38 cartas totales.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) \cdot P(A_3/(A_1 \cap A_2)) = \left(\frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39}\right) \cdot \frac{2}{38}$$

2 cartas ♠ y 1 carta ♦.

Como en este caso el orden en el que se saquen no importa, se puede deducir que la probabilidad total ($P(Y)$) será n veces la probabilidad de obtener 2 cartas ♠ y 1 carta ♦, siendo n el número de posibles combinaciones sin repetición de 2 elementos S y 1 elemento D, a las que llamo Y.

Ya que la probabilidad sigue siendo la misma, lo único que cambia es el orden de las cartas.

$$Y = \{SSD, SDS, DSS\} \quad \rightarrow \quad n = |Y| = 3$$

La probabilidad de sacar 2 cartas ♠ y 1 carta **♦:**

$$P(S) = \frac{10}{40}$$

10 ♠ en total.

40 cartas en total.

$$P(S) = \frac{9}{39}$$

10 ♠ en total, menos 1 (la anterior).

9 ♠ en total.

40 cartas en total, menos 1 (la anterior).

39 cartas en total.

$$P(D) = \frac{10}{38}$$

10 **♦ en total.**

40 cartas en total, menos 2 (las anteriores).

38 cartas en total.

$$P(Y) = \left(\frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{10}{38}\right) \cdot 3 = \frac{45}{998}$$