UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Análisis y Diseño de Algoritmos
Ramificación y Poda
(2^o de Grado Ing. Inf., Ing. Sw., Ing. Comp.)
E.T.S.I. INFORMÁTICA

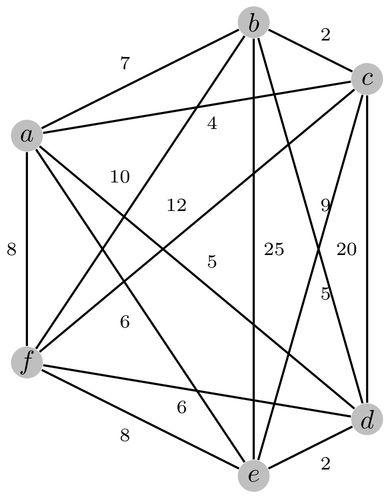
Ejercicios Básicos

1. Para cada una de las instancias de los siguientes problemas, construir el árbol de búsqueda implícitamente definido por el algoritmo de ramificación y poda visto en clase para los mismos.

   a) Problema de la mochila 0-1, con capacidad W=5 y los siguientes objetos:

objeto	peso	valor
1	2	12€
2	1	10€
3	3	20€
4	2	15€
5	1	5€

   b) TSP sobre el siguiente grafo:



   c) Problema de asignación con la siguiente matriz de costes (c_{ij} es el coste de asignar al agente a_i la tarea t_j):

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 7 & 8 & 1 \\ 6 & 4 & 3 & 7 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 9 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Resolver el problema del cambio de monedas en el caso en el que el número de monedas de cada tipo es limitado. Supóngase que hay k tipos de monedas con denominaciones d_i, cada uno con n_i monedas disponibles. M es la cantidad que se desea conseguir con el número mínimo de monedas.

   a) Definir la estructura de los subproblemas, el problema inicial, y el proceso de ramificación.

   b) Determinar una forma general de calcular la cota inferior de la solución alcanzable para un subproblema. ¿Cuál es la complejidad del cálculo de la cota? ¿Hay algún caso particular más eficiente?

c) Construir a partir de lo anterior el árbol de búsqueda que exploraría el algoritmo B&B con la estrategia best-first para la siguiente instancia: $M = 41$, denominaciones $d_i \in \langle 1, 2, 5, 10, 20 \rangle$, con $n_i \in \langle 0, 5, 5, 2, 2 \rangle$ monedas disponibles de cada tipo.

3. **[2.5p]** Tenemos n objetos de tamaños $t_1, \cdots, t_n$ que queremos enviar por correo. Para ello tenemos que agruparlos en paquetes cuyo tamaño máximo es T. Dado que habrá que pagar un fijo por cada paquete enviado, se desea encontrar la forma de agrupar los objetos de manera que se empleen el número mínimo de paquetes. Para ello se empleará un algoritmo de ramificación y poda.

   a) **[1.5p]** Determinar la estructura de los problemas, el proceso de ramificación, y la función de cota (¿se busca una cota inferior o superior?)

   b) **[1.0p]** Construir el árbol de búsqueda que exploraría el algoritmo B&B con la estrategia best-first para la siguiente instancia: $t_i \in \{1, 2, 3, 3, 2\}$ y $T = 3$.

Ejercicios Complementarios

1. Para cada uno de los siguientes problemas:

   - Determinar la estructura de las soluciones parciales y cómo se extienden al ramificar.
   - Definir una función de acotación optimista.

   a) Dado un grafo no dirigido $G(V, E)$, un clique $C \subseteq V$ es un conjunto de vértices tal que para todo $u, v \in C$, $(u, v) \in E$. Se desea hallar el mayor cliqué del grafo.

   b) Dado un grafo no dirigido $G(V, E)$, un conjunto dominante $D \subseteq V$ es un conjunto de vértices tal que para todo $u \in V \setminus D$, existe algún $v \in D$ para el que $(u, v) \in E$. Se desea hallar el menor conjunto dominante del grafo.

2. Dado un grafo completo con pesos (determinado por la matriz de distancias $D_{n \times n}$ entre nodos) se desea encontrar el camino hamiltoniano de longitud mínima (recuerde que a diferencia de los ciclos hamiltonianos, en un camino hamiltoniano se pasa una vez por cada ciudad, pero no se vuelve al origen). Definir un enfoque de ramificación y poda basado en relajación.

   - Indicar qué restricción se relaja, que problema relajado resulta, y cómo puede resolverse eficientemente.
   - Describir la estructura de los subproblemas y cómo se realiza la ramificación.
   - Aplicar este procedimiento para generar el árbol de búsqueda para el grafo mostrado en el ejercicio 1*b*

   Pista: En un camino hamiltoniano cada nodo tiene dos aristas incidentes (salvo el primero y el último que sólo tienen una). ¿Qué ocurre si se elimina la restricción de grado?

3. Dado un conjunto S y una serie de subconjuntos del mismo $S_1, \cdots, S_n$, se desea encontrar una colección de dichos subconjuntos tal que $\cup_{S_i \in C} S_i = S$ y el tamaño de la colección (el número de subconjuntos que contiene) sea mínimo. Este problema se resolverá mediante ramificación y poda.

   a) Definir la estructura de los subproblemas, el problema inicial, y el proceso de ramificación.

   b) Determinar una forma de calcular la cota de la solución alcanzable para un subproblema. ¿Necesitamos una cota superior o inferior?

   c) Construir a partir de lo anterior el árbol de búsqueda que exploraría el algoritmo B&B con la estrategia best-first para la siguiente instancia:

S	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
S_1	$\{1, 2, 3\}$
S_2	$\{4\}$
S_3	$\{1, 2, 4, 5\}$
S_4	$\{2, 6, 7\}$
S_5	$\{3, 5, 8\}$
S_6	$\{1, 6, 9, 10\}$
S_7	$\{5, 7, 9\}$
S_8	$\{1, 10\}$

4. Vd. es el responsable del departamento de préstamos del Primer Banco Nacional, y tiene que tomar decisiones sobre a qué clientes les será concedido o no los préstamos solicitados. Para orientarse en dicha decisión, decide analizar los datos de los préstamos concedidos anteriormente. Dispone de una base de datos de m clientes, a los que se les realizó un cuestionario de n preguntas sobre su estado laboral y financiero, cada una de las cuales tenía por respuesta sí o no. Asimismo, cada cliente i ($1 \leqslant i \leqslant m$) tiene asociado un valor lógico f_i que indica si fue moroso o no. La base de datos está entonces representada por la matriz $R = \{r_{ij}\}^{m \times n}$ (donde r_{ij} es la respuesta –sí o no, `CIERTO` o `FALSO`, 1 ó 0– que el cliente i dio a la pregunta j), y el vector $F = \{f_i\}^{m \times 1}$. El objetivo es determinar un subconjunto <u>mínimo</u> de preguntas, tal que sabiendo sus respuestas se pueda determinar si el cliente será moroso o no. Dicho de otra forma, si i_1 e i_2 son dos clientes (uno moroso y el otro no, da igual cuál), y $S \subseteq \{1, \cdots, n\}$ es el subconjunto de preguntas elegido, siempre deberá haber al menos una pregunta $j \in S$, tal que i_1 e i_2 dieron una respuesta diferente ($r_{i_1 j} \neq r_{i_2 j}$).

   a) Definir la estructura de los subproblemas, el problema inicial, y el proceso de ramificación.

   b) Determinar una forma de calcular la cota de la solución alcanzable para un subproblema, y confeccionar un algoritmo para ello. ¿Necesitamos una cota superior o inferior?

   c) Construir a partir de lo anterior el árbol de búsqueda que exploraría el algoritmo B&B con la estrategia best-first para la siguiente instancia con 5 clientes y 4 preguntas:

R	1	2	3	4	f_i
1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	1	1
3	1	0	1	0	1
4	1	0	0	0	0
5	1	0	0	1	0

5. Sean n ciudades y sea d_{ij} la distancia entre la ciudad i y la j. Se desea conectar estas ciudades mediante una red de telecomunicaciones de coste mínimo.

   a) Indicar cómo se podría resolver eficientemente este problema.

   b) Supóngase ahora que debido a restricciones en la red, cada nodo (ciudad) sólo puede estar conectado a otros $k \geqslant 2$ nodos como máximo. Usar un enfoque de relajación para resolver el problema mediante B&B. Definir la estructura de los subproblemas, el problema inicial, el proceso de ramificación y la forma de evaluar cada subproblema.

   c) Definir una instancia de 7 ciudades y $k = 2$ no trivial (i.e., en la que el problema inicial no sea solución), y construir a partir de lo anterior el árbol de búsqueda que exploraría el algoritmo B&B con la estrategia best-first.