Problema de la Mochila (0,1)

Un objeto entra completo, no una parte

1) Definir las dimensiones

- El peso de la mochila P.
- El peso de los objetos p_i
- El valor de los objetos v_i

Conjunto de objetos.

Dimensiones del problema: $< P, \{obj_1, obj_2, \dots\} >$.

2) Instancias triviales

Se buscan los casos extremos, donde la solución es obvia.

$\begin{cases} \text{Peso} = n \\ \text{Objetos} = \{\ \} = \emptyset \end{cases} \rightarrow$ En la mochila caben ∞ objetos para que pese P.

Porque resulta imposible

$\begin{cases} \text{Peso} = 0 \\ \text{Objetos} = \{obj_1, obj_2, \dots\} \end{cases} \rightarrow$ En la mochila caben 0 objetos, ya que $P, p_i > 0$.

3) Representación de las soluciones triviales

$\xrightarrow{\dots\ n}$

Tabla A	0	1	2	3	4	5
{ }	0	0	0	0	0	0
{1}	0					
{1, 2}	0					
{1, 2, 3}	0					
{1, 2, 3, 4}	0					

Podrían ser ∞, pero en este caso usaré 0 para cambiar (y se ve mejor)

En este ejemplo, los datos son:

ID	peso	valor
1	2	12
2	1	10
3	3	20
4	2	15

P = 5

- Las soluciones intermedias se van razonando.

… n →

Tabla A	0	1	2	3	4	5
$\{\}$	0	0	0	0	0	0
$\{1\}$	0	0	12 1	12 1	12 1	12 1
$\{1, 2\}$	0	10 2	12 $1 > 2$	22 $1 \cup 2$	22 $1 \cup 2$	22 $1 \cup 2$
$\{1, 2, 3\}$	0	10 2	12 $1 > 2$	22 $1 \cup 2 > 3$	30 $2 \cup 3 > 1 \cup 2$	32 $1 \cup 3 > 1 \cup 2$
$\{1, 2, 3, 4\}$	0	10 2	15 $4 > 1$	25 $1 \cup 4 > 1 \cup 2 > 3$	30 $2 \cup 3 > 1 \cup 4 > 1 \cup 2$	37 $1 \cup 2 \cup 4$

Cada posición simboliza el valor máximo de la mochila para una capacidad concreta y disponiendo de los objetos (p_i, v_i) indicados.

4) Ecuación de Bellman

Partiendo de las soluciones triviales descritas en el paso 2 y representadas en la tabla, resulta:

$$A_{f,c} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f = 0 \lor c = 0 \end{cases}$$

Esto es obvio, por lo razonado antes

Ahora, para los pasos intermedios, la lógica que se ha seguido al rellenar la tabla ha sido:

Expresar mejor

« Cuando el p_i del objeto nuevo es mayor que la capacidad en ese momento, se usa el valor anterior; y por otra parte, con un objeto nuevo puede que no se meta (ya mencionado) o sí, entonces será el máximo entre eso y lo nuevo ».

$$A_{f,c} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f=0 \lor c=0 \\ A_{f-1,c} & \text{si} \quad p_f > c \\ \text{máx}\left(\underbrace{A_{f-1,c}}_{\substack{\text{El objeto nuevo} \\ \text{no se añade}}}, \underbrace{v_f + A_{f-1,c-p_f}}_{\substack{\text{El objeto nuevo se mete,} \\ \text{por lo que se añade su} \\ \text{valor, y como no puede} \\ \text{repetirse, se salta a} \\ \text{la fila anterior (donde} \\ \text{el nuevo objeto no existe)}}}\right) & \text{si} \quad \text{« otro caso »} \end{cases}$$

El razonamiento (ejemplo: $P = 5$) es el siguiente:

Como se busca el valor $(v_a + v_b + \ldots + v_n)$ máximo que quepa en la mochila, hay que ver si el resultado de un paso es mayor que otro anterior.

- En $\{1, 2, 3, 4\}$ para $\boxed{5}$ se tiene que $5 - 3 = 2$, por lo que hay que ver si en $\{1, 2, 3\}$ hay x valor acumulado como para que sea solución óptima.
  - Se acaba de usar $v_4 = 15$, la solución ya lleva 15 de valor.