Problema de las Monedas

1) Dimensiones relevantes.

- El precio a pagar P.
- Las denominaciones $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ de las monedas.

Dimensiones del problema: $\langle P, \{1,4,6\} \rangle$.

2) Instancias triviales.

Se buscan los casos extremos,
en los que la solución es obvia.

$$\begin{cases} \text{Precio} = n \\ \text{Denom} = \{\ \} = \varnothing \end{cases} \longrightarrow \text{Se necesitan } \overbrace{\infty}^{\text{Porque resulta imposible}} \text{ monedas para pagar un precio } n.$$

$$\begin{cases} \text{Precio} = 0 \\ \text{Denom} = \{1, 4, 6\} \end{cases} \longrightarrow \text{Se necesitan } 0 \text{ monedas para pagar un precio de } 0.$$

3) Representación de soluciones triviales.

Tabla A	0	1	2	3	4	5	6	...	n
$\{\ \}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$\{1\}$	0								
$\{1,4\}$	0				$\ddots$				$\vdots$
$\{1,4,6\}$	0				...				

Las soluciones en azul son las más básicas.

- Las soluciones intermedios para este problema se van razonando en orden.

Tabla A	0	1	2	3	4	5	6	7	8 $\xrightarrow{\cdots\ n}$
$\{\ \}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$\{1\}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\{1, 4\}$	0	1	2	3	**1**	2	3	4	2
$\{1, 4, 6\}$	0	1	2	3	1	2	**1**	2	2

Pagar $P = 3$ teniendo monedas de 1 ó 4 implica usar 3 monedas (tres de 1).

Cada posición simboliza el mínimo de monedas para pagar un precio disponiendo de las denominaciones indicadas.

4) Ecuación de Bellman.

Partiendo de los soluciones triviales descritas en el paso 2 y representadas en la tabla, resulta:

$$A_{f,c} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad c = 0 \\ \infty & \text{si} \quad f = 0,\ c > 0 \end{cases}$$

Esto es obvio, por lo razonado antes.

Ahora, para los casos intermedios, la lógica que se ha seguido al rellenar la tabla ha sido « copiar el valor de arriba hasta que la denominación que se añade nueva, es mayor que la cantidad a devolver ».

$$A_{f,c} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad c = 0 \\ \infty & \text{si} \quad f = 0,\ c > 0 \\ A_{f-1,c} & \text{si} \quad d_f > c,\ f > 0,\ c > 0 \end{cases}$$

↳ Denominación de la fila

También ocurre que cuando aparece una nueva denominación, a veces no se usa, y es que hay que tener en cuenta los casos anteriores.

Tabla A	0	1	2	3	4	5	6	7	8 … n →
{ }	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
{1}	0	1	2	3	4	5	6	7	8
{1, 4}	0	1	2	3	**1**	2	3	4	2
{1, 4, 6}	0	1	2	3	1	2	**1**	2	**2**

Para estos casos, se ha cambiado el uso de 4 por una de 6 porque es mejor.

Para P = 8 existen 2 posibilidades: 4 4 ó 6 1 1, pero aún con la nueva denominación 6 se usa la solución más óptima.

Por tanto, la ecuación de Bellman resultante es:

$$A_{f,c} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad c = 0 \\ \infty & \text{si} \quad f = 0,\ c > 0 \\ A_{f-1,c} & \text{si} \quad d_f > c,\ f > 0,\ c > 0 \\ \min\left(A_{f-1,c},\ 1 + A_{f,\,j-d_f}\right) & \text{si} \quad \text{« en otro caso »} \end{cases}$$

↳ Se añade la moneda que se ha usado.

El razonamiento (ejemplo: P=8) es el siguiente:

Como se busca el mínimo de monedas, hay que ver si el resultado de un paso es menor que otro anterior.

- En {1,4,6} para $\boxed{8}$ se tiene que $\boxed{8} \% 6 = \boxed{2}$, por lo que hay que ver si en {1,4,6} para $\boxed{2}$ hay X monedas como para que sea solución óptima.
    - Se acaba de usar 6, la solución ya lleva 1 moneda.

      +1 por buscar atrás

- En {1,4,6} para $\boxed{2}$ se tiene que $\boxed{2} \% 1 = 2$, y como 1 es la moneda más pequeña, necesitaría 2 monedas 1.
    - Se usó 1 1, la solución devuelve 3 monedas: 1 1 6.

      Solución → 2 + 1 ← Buscar

8 − 6 = 2

... n →

Tabla A	0	1	2	3	4	5	6	7	8
{ }	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
{1}	0	1	2	3	4	5	6	7	8
{1, 4}	0	1	2	3	**1**	2	3	4	2
{1, 4, 6}	0	1	2	3	1	2	**1**	2	2

1 1

+1 6