INFERENCIA PARAMÉTRICA SOBRE UNA MUESTRA

En esta práctica se realizarán PRUEBAS DE HIPÓTESIS E INTERVALOS DE CONFIANZA

- SOBRE LA MEDIA DE UNA LEY NORMAL
- SOBRE LA DESVIACIÓN TÍPICA DE UNA LEY NORMAL
- SOBRE LA PROBABILIDAD DE ÉXITO DE UNA LEY BINOMIAL
- SOBRE LA MEDIA DE UNA LEY DE POISSON

Para realizar inferencias sobre algún parámetro de una ley de probabilidad conocida, debe tomarse una muestra aleatoria de esa ley y obtener de ella los estadísticos que sean necesarios para contrastar hipótesis sobre ese parámetro o estimar su valor de forma puntual o mediante un intervalo de confianza.

El objetivo de esta práctica es conocer y manejar las opciones que ofrece el programa Statgraphics Centurión para realizar este tipo de inferencias.

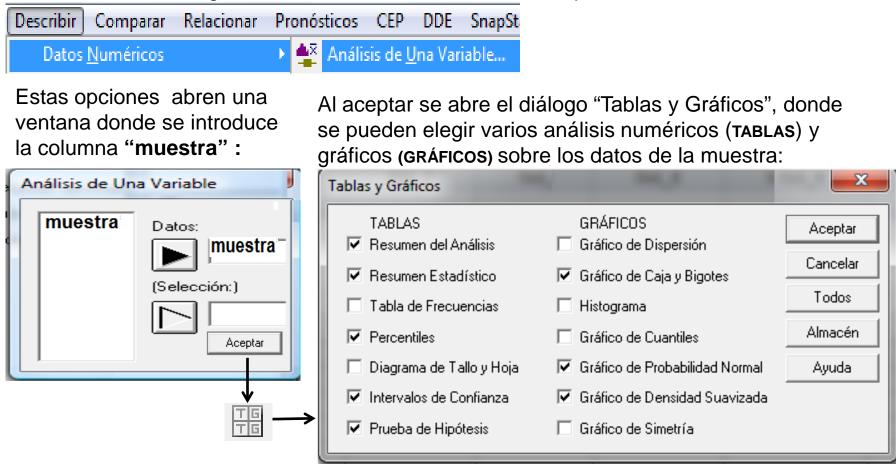
El programa ofrece dos métodos diferentes para realizar inferencias sobre parámetros de distribuciones conocidas, según la información muestral que se tenga.

- 1) Si se conocen todos los datos de la muestra.
- Si sólo se conocen el tamaño de la muestra y las estimaciones puntuales de esos parámetros que se han deducido de la muestra.

Las inferencias sobre los parámetros de las distribuciones de Poisson y binomial sólo pueden realizarse por medio de este segundo método.

Estudiaremos en primer lugar cómo se efectúan inferencias partiendo directamente de los datos de una muestra.

Si se conocen todos los datos de la muestra, éstos deben introducirse en una columna de la hoja de datos y darle un nombre (*en lo que sigue, este nombre será* "**muestra**") A continuación, se elige en la barra de menú la cadena de opciones



Recordaremos como se introducen los datos de una muestra en la hoja de datos del programa.

CREACIÓN DE UN FICHERO DE DATOS

EJEMPLO: En una investigación sobre los días que tarda una enfermedad en desaparecer, desde el momento en el que aparece el primer síntoma, se obtuvieron los siguientes datos:

8 14 16 9 12 13 9 12 10 8 5 9 11 13 15 9 12 13 8 14 7 8 12 12 8 6 8 9 9 15

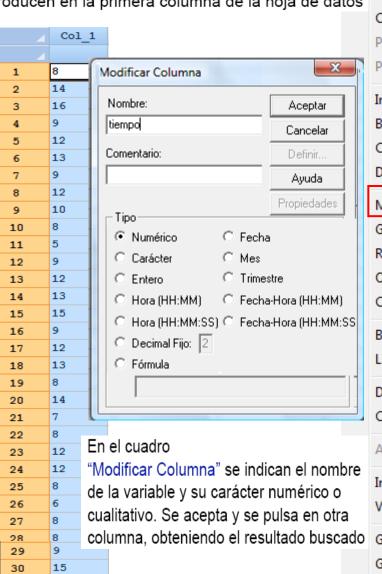
Los datos de esta muestra se introducen en la primera columna de la hoja de datos

4	Col_1	Para dar el nombre
		"tiempo" a esta co-
1	8	'
2	14	lumna, deben rea-
3	16	lizarse los pasos
4	9	siguientes:
5	12	0.940
6	13	1) Pulsar el nombre
7	9	de la columna con el
8	12	
9	10	botón izquierdo del
10	8	ratón: la columna se
11	5	pondrá azul.
12	9	pondra dzdi.
13	12	2) Pulsar sobre la
14	13	columna con el
15	15	
16	9	botón derecho del
17	12	ratón: se abre un
18	13	
19	8	cuadro para modi-
20	14	ficar la columna.
21	7	
22	8	3) Pulsar sobre
23	12	· .
24	12	"Modificar Colum-
25	8	na" con el botón
26	6	izquierdo del ratón:
27	8	
28	8	

29

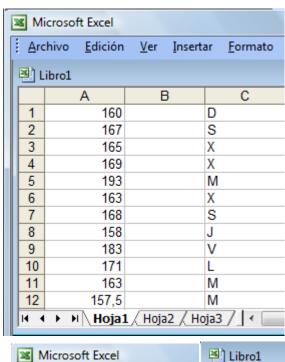
30

15



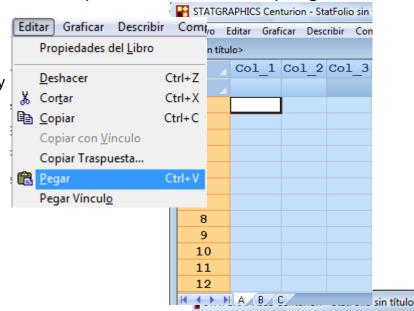
Propiedades del Libro de Datos	
Deshacer Entrada	Ctrl+Z
Cortar	Ctrl+X
Copiar	Ctrl+C
Copiar Traspuesta	
Pegar	Ctrl+V
Pegar con Vínculo	Ctrl+L
Insertar	
Borrar	
Congelar Filas y Columnas	
Descongelar Filas y Columnas	
Modificar Columna	Mayú+F5
Generar Datos	Mayú+F7
Recodificar Datos	
Ordenar Archivo	
Convertir de Excel Fecha-Hora	
Buscar y Reemplazar	
Limpiar Filas Iluminadas	
Dividir archivo	
Combinar columnas	
Actualizar Fórmulas	
Imprimir	F4
Vista Preliminar	Mayú+F3
Guardar Datos	Mayú+F12
Guardar Datos Como	F12

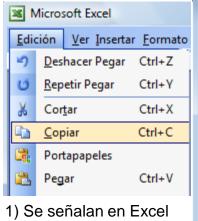
Otra posibilidad de crear un fichero de datos es importar los datos de otro programa donde ya los tengamos guardados. En esta práctica sólo se importarán datos del programa Excel.



 Se señalan en el libro de datos de Statgraphics las columnas donde se quieren copiar los datos y se marca ctrl + V

3) En la opción "pegar" se abre un diálogo donde debe marcarse "sólo datos"





las columnas cuyos datos

se quieren copiar y se

marca ctrl + C

С 160 D 2 S 167 3 165 Х 4 169 Χ 5 193 M 6 163 7 168 S 8 158 9 183 V 10 171 11 163 M 12 157.5 Hoja1 / Hoja2 / Hoja3 /

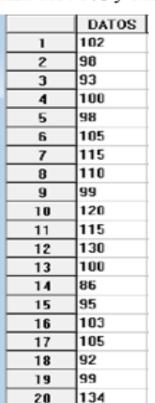
El resultado de estas
3 acciones es la copia
de los datos de las
tres columnas de Excel
en las columnas que se
han elegido en el libro
de datos de Statgraphics

Archivo E	ditar Grafica	ar Describir	Comparar F	
sin títu	sin título>			
4	Col_1	Co1_2	Co1_3	
4				
1	160		D	
2	167		S	
3	165		X	
4	169		X	
5	193		M	
6	163		X	
7	168		S	
8	158		J	
9	183		V	
10	171		L	
11	163		M	
12	157,5		M	
	→ M A B C			

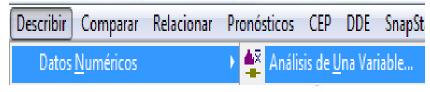
EJEMPLO 1: Los valores sobre las longitudes en micras de 20 filamentos de la producción de una maquina (que se supone que siguen una distribución normal) son los siguientes:

- a) Hallar intervalos de confianza para la media de la producción basados en la muestra anterior con niveles de confianza del 95% y del 90%.
- b) Contrastar la hipótesis nula de que la longitud media de los filamentos de la producción es 100 a los niveles de significación $\alpha = 0.05$ y $\alpha = 0.1$
- c) Contrastar la hipótesis nula de que la desviación típica es 9 a los niveles de significación $\alpha=0.05$ y $\alpha=0.01$
- d) Hallar intervalos de confianza para la desviación típica de la producción basados en la muestra anterior con niveles de confianza del 95% y del 99%.

Para realizar inferencias a partir de los datos de una muestra, éstos se Introducen en la primera columna de la hoja de datos y se da a esta columna el nombre "DATOS"



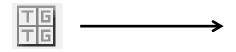
A continuación, se elige en el menú del programa la cadena de opciones



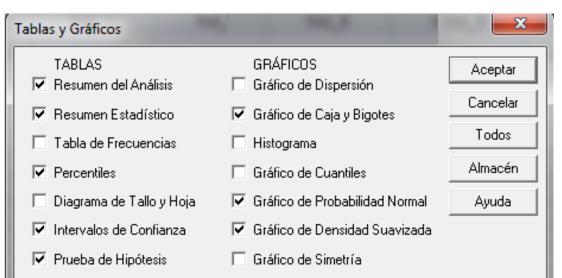
y se introduce la columna "DATOS" en el diálogo que se obtiene

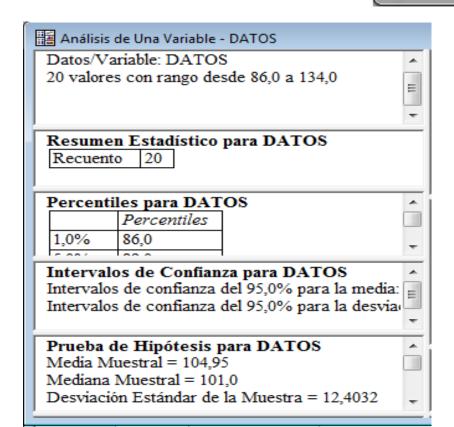


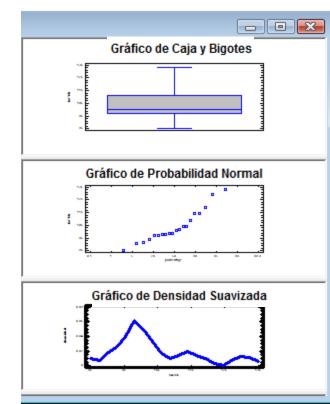
Al aceptar se abre el diálogo "Tablas y Gráficos"



en el que se pueden elegir análisis numéricos y gráficos sobre los datos de una muestra







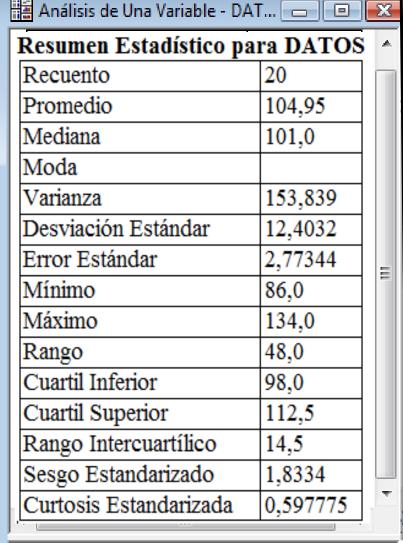
Análisis de Una Variable - DATOS	
Resumen Estadístico para DATOS	
Recuento 20	
Opciones de Ventana	

Esta opción sirve para dos propósitos:

- Obtener medidas que resumen la información contenida en los datos
- Hallar estimaciones de los parámetros de la distribución de la que proceden los datos.

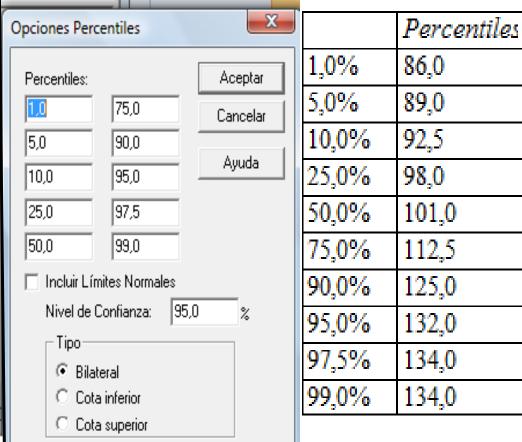
Opciones Resumen Estadíst	tico		
✓ Promedio	Desviación Estándar	✓ Máximo	Rango Intersexu
✓ Mediana	Coef. de Variación	✓ Rango	Sesgo
✓ Moda	✓ Error Estándar	Cuartil Inferior	✓ Sesgo Estd.
☐ Media Geométrica	🔲 Sigma Winsorizada	Cuartil Superior	Curtosis
☐ Media Recortada 1 %	☐ DAM	Rango Intercuartil	Curtosis Estd.
☐ Media Winsorizada	□ Sbi	☐ 1/6 Sextil	☐ Suma
✓ Varianza	✓ Mínimo	☐ 5/6 Sextil	Suma de
Aceptar	Cancelar	Todos	Cuadrados Ayuda

Las medidas elegidas en el cuadro anterior para la columna DATOS se dan en la siguiente tabla.



Ĺ	Percent	tiles para DATOS
		Percentiles
	1,0%	86,0
L		1000

En "Percentiles" se pueden hallar a la vez hasta 10 percentiles de los datos de la muestra, introdu ciendo 10 porcentajes en el cuadro de Opciones.



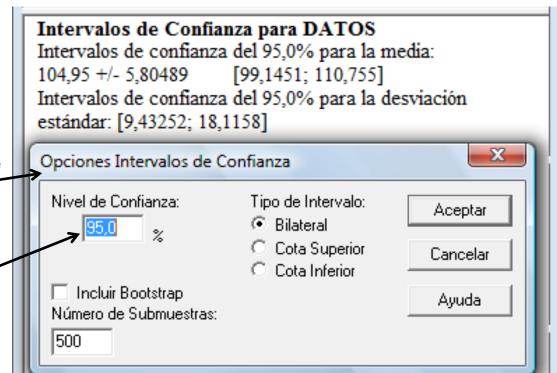
Intervalos de Confianza para DATOS

Intervalos de confianza del 95,0% para la media: Intervalos de confianza del 95,0% para la desvia

En esta opción se pueden construir intervalos de confianza de los parámetros de la distribución que se supone que siguen los datos de la muestra

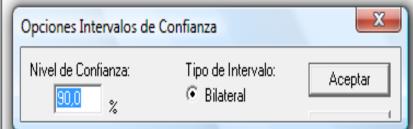
En el cuadro de Opciones debemos indicar y señalar el tipo de intervalo deseado, que puede ser bilateral o unilateral (cota superior e inferior) el nivel de confianza Por defecto, se da un intervalo bilateral con un nivel del 95%.

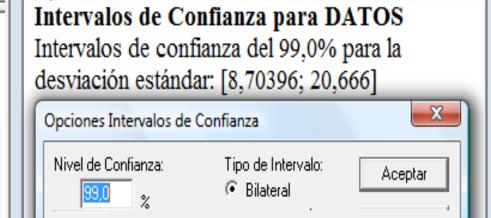
En este caso, se piden intervalos bilaterales de la media y de la desviación típica de una ley normal a unos niveles del 90% y del 99%, respectivamente.



Intervalos de Confianza para DATOS

Intervalos de confianza del 90,0% para la media: 104,95 +/- 4,79566 [100,154; 109,746]





Prueba de Hipótesis para DATOS Media Muestral = 104,95 Mediana Muestral = 101,0 Desviación Estándar de la Muestra = 12,4032 -

En esta opción se pueden realizar varios tests de hipótesis sobre los parámetros de la distribución que se supone que siguen los datos muestrales.

En el cuadro de Opciones se indican

- El valor del parámetro en cada hipótesis nula
- Los niveles de significación, en porcentajes
- La hipótesis alternativa de cada contraste, que puede ser bilateral (diferente de)

o unilateral (menor que o mayor que)

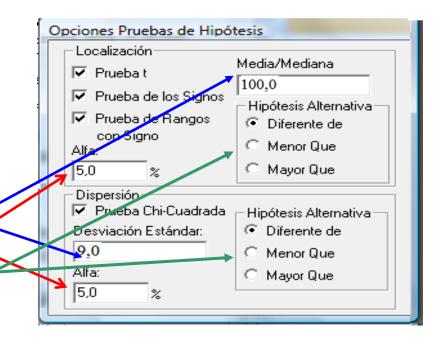
Por defecto, el programa da los valores $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ en las hipótesis nulas; un contraste **bilateral** y un **nivel** de significación del **5%**.

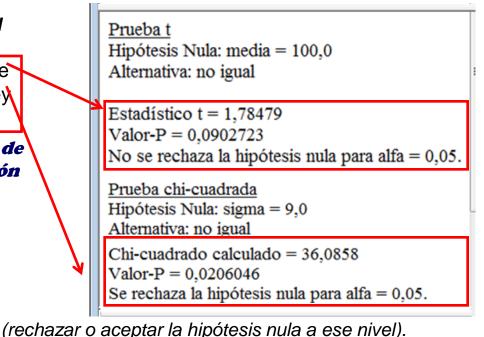
En este ejemplo, se realizan tests bilaterales de la media y de la desviación típica, para una ley normal, a un nivel del 5% en ambos tests.

El test sobre la media se realiza con la ayuda de la ley t de Student y el test sobre la desviación típica, con ayuda de la ley chi cuadrado.

Los resultados de cada contraste son:

- El valor del estadístico de contraste
 - Estadístico t
 - Chi-cuadrado calculado
- El P-valor del contraste (Valor P)
- La decisión del contraste al nivel propuesto





Esta opción también sirve para realizar tests de hipótesis sobre la mediana de una distribución continua cualquiera, que no es una ley normal (test no paramétrico), con el mismo nivel de significación que el test de la media. Estos métodos de contraste son:

Prueba de los signos
Hipótesis Nuía: mediana = 100,0
Alternativa: no igual

Número de valores menores a la mediana hipotética: 8
Número de valores mayores a la mediana hipotética: 10

Estadístico para Grandes Muestras = 0,235702 (aplicada la corrección por continuidad)
Valor-P = 0,813659
No se rechaza la hipótesis nula para alfa = 0,05.

Esta prueba es válida para cualquier distribución continua

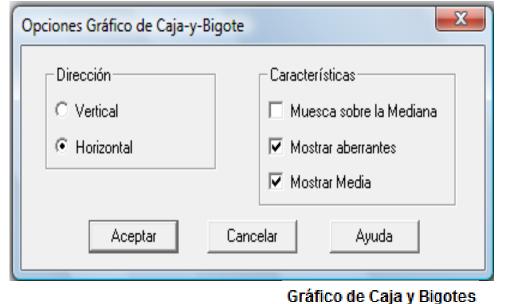
Prueba de rangos con signo
Hipótesis Nula: mediana = 100,0
Alternativa: no igual
Rango medio de valores menores a la mediana hipotética: 6,625
Rango medio de valores mayores a la mediana hipotética: 11,8

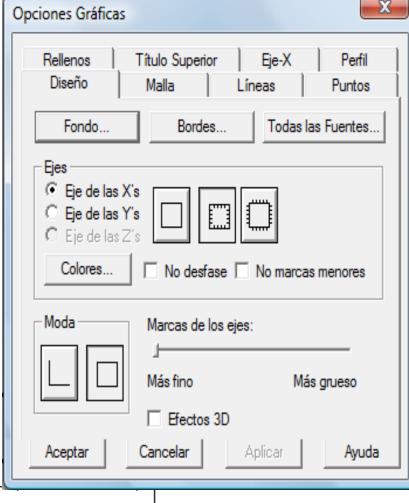
Estadístico para Grandes Muestras = 1,39527
(aplicada la corrección por continuidad)
Valor-P = 0,162935
No se rechaza la hipótesis nula para alfa = 0,05.

Esta prueba sólo es válida para distribuciones continuas y simétricas.

Gráfico de Caja y Bigotes

Esta opción da una visión gráfica directa sobre la media, la mediana, la dispersión y la simetría de los datos, y sirve para detectar observaciones anómalas.



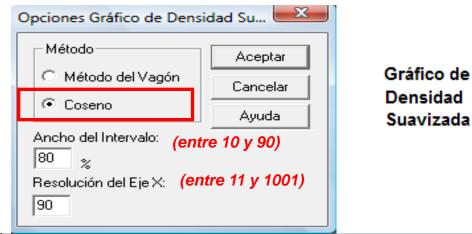


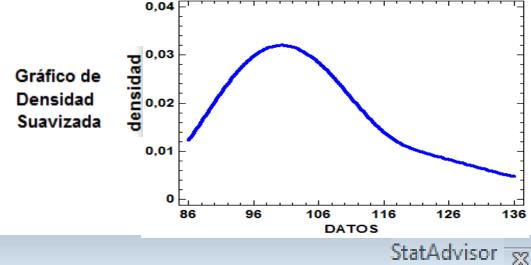
Mediana Media tercer cuartil

primer cuartil

86 96 106 116 126 136

En Opciones Gráficas se pueden cambiar los colores, las escalas y valores de los ejes, así como el grosor de las líneas y los puntos del diagrama.

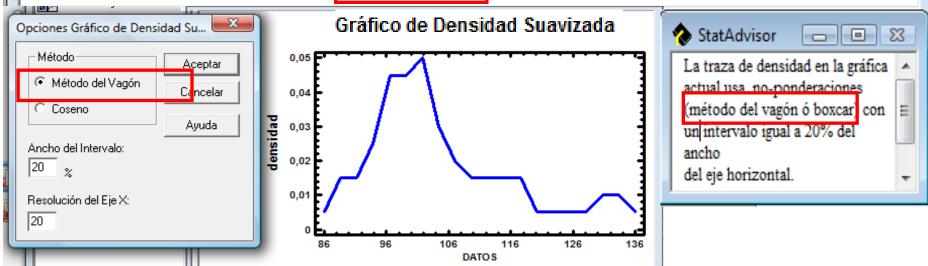


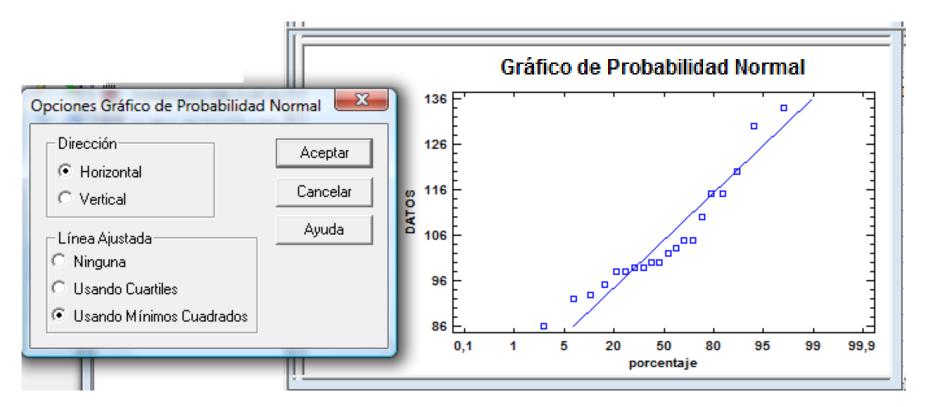




StatAdvisor

Esta gráfica despliega la traza de densidad para DATOS. Esencialmente, una traza de densidad es un histograma suavizado, el cual despliega la distribución de la cual proviene la muestra. La traza se construye contando el número de observaciones dentro de un intervalo de ancho fijo conforme éste se mueve a lo largo del eje X, y ponderándolos de modo que den un estimado suavizado de la función de densidad subyacente. Se puede controlar el ancho del intervalo y los factores de ponderación aplicados a los recuentos, pulsando el botón secundario del ratón y escogiendo Opciones de Ventana. La traza de densidad en la gráfica actual usa los recuentos ponderados (método del coseno) on un intervalo igual a 80% del ancho del eje horizontal.



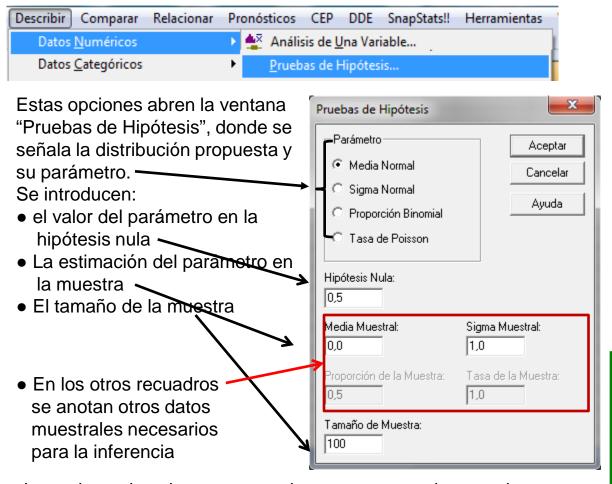




Este gráfico despliega la gráfica de probabilidad normal para DATOS. Para generar esta gráfica, los datos se ordenan de menor a mayor. Se han graficado versus los valores (i-0.375)/(n+0.25), en donde n es el tamaño de la muestra. Si los datos provienen de una distribución normal, los puntos deberán quedar aproximadamente a lo largo de una línea recta. Para ayudarle a juzgar que tan cerca de una línea recta se encuentran, se ha sobrepuesto en la gráfica una línea de referencia. La línea de referencia se ha ajustado a la gráfica utilizando mínimos cuadrados. Si los puntos muestran una curvatura significativa, bien puede ser una indicación de sesgo en los datos.

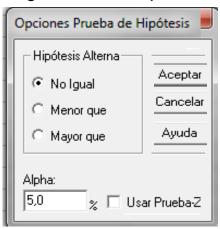
Si los datos provienen de una ley normal, los puntos deben quedar aproximadamente a lo largo de una línea recta.

Estudiaremos en segundo lugar cómo se efectúan inferencias sobre los parámetros de una distribución, si sólo se conoce el tamaño muestral y las estimaciones puntuales de esos parámetros que se han deducido de la muestra. En este caso, se elige en la barra de menú la cadena de opciones



Los valores inscritos en estas dos ventanas son los que da por defecto el programa.

Al aceptar se abre el diálogo "Opciones Prueba de Hipótesis", donde se eligen La hipótesis alternativa y el nivel de significación, en porcentaje.



Para hallar un intervalo de confianza se procede de igual forma, pero se elige siempre la opción "No igual" y se toma Alpha = 1 - nivel de confianza

Para hallar un intervalo, da igual el valor de la hipótesis nula.

EJEMPLO 2: Inferencias sobre los parámetros de distribuciones normales

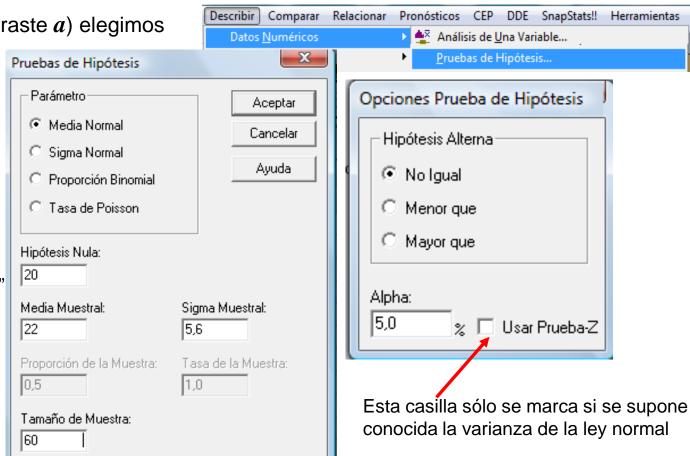
En este ejemplo realizaremos un contraste sobre la media de una ley normal y un contraste sobre la desviación típica de otra ley normal con dos muestras aleatorias, cuyos tamaños y estimaciones se dan a continuación, junto con las hipótesis y los niveles de significación:

- a) $H_0: \mu = 20, \quad H_1: \mu \neq 20, \text{ con } \alpha = 0.05.$ Tamaño muestral: n = 60, media muestral: $\bar{x} = 22$ y cuasidesviación típica: s = 5.6
- b) $H_0: \sigma = 1.67$, $H_1: \sigma < 1.67$; con $\alpha = 0.1$, Tamaño muestral: n = 25, media muestral: $\bar{x} = 40$ y cuasidesviación típica: s = 1.2

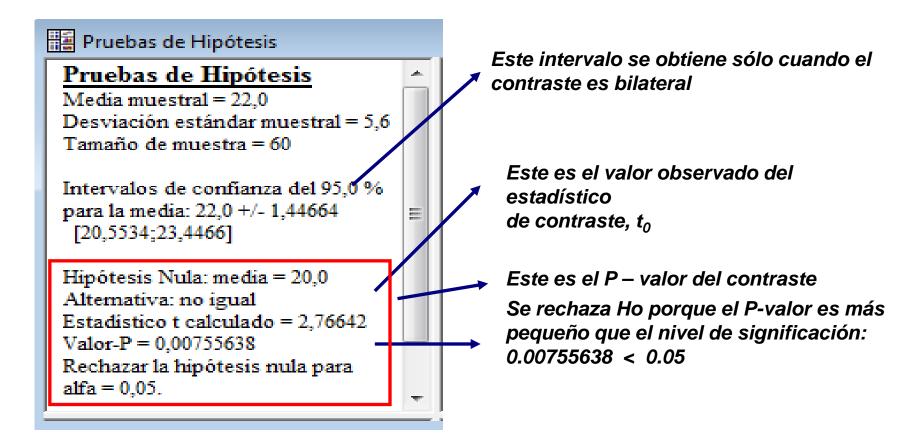
Para realizar el contraste *a*) elegimos

En la ventana "Pruebas de Hipótesis" se señala "Media Normal" y se inscriben la media dada en la hipótesis nula, la media y la desviación típica estimadas y el tamaño de la muestra.

En "Opciones de ventana" se señala la alternativa "no igual" y se introduce 5% en el nivel Alpha



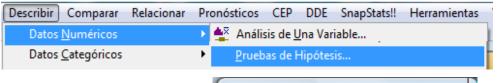
Los resultados de este contraste son los siguientes:



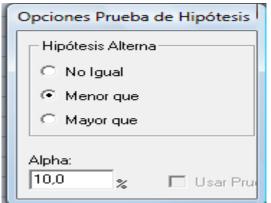
Para realizar el contraste b) elegimos

En la ventana "Pruebas de Hipótesis" se señala "Sigma Normal" y se inscriben la desviación típica dada en la hipótesis nula, la desviación típica estimada y el tamaño de la muestra.

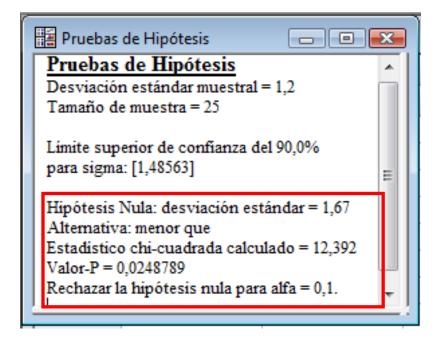




En "Opciones de ventana" se señala la alternativa "Menor que" y se introduce 10% en el nivel Alpha.



Los resultados de este contraste son los siguientes:



EJEMPLO 2: Inferencias sobre la proporción de éxitos de una ley Binomial

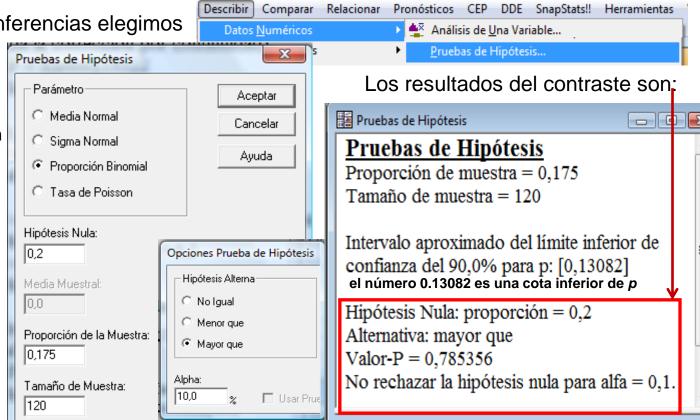
En este ejemplo hallaremos un intervalo de confianza a un nivel del 95% sobre la proporción, p, de animales de una especie de ungulados que presentan una determinada mutación, y contrastaremos, a un nivel de significación del 10%, la hipótesis nula de que esa proporción no supera el 20%, contra la alternativa de que sí es superior al 20%. Para ello se han tomado al azar 120 animales de esta especie, de los cuales 21 tienen esa mutación.

La estimación de la proporción p es $\hat{p} = 21/120 = 0.175$ Las hipótesis son: $p \le 0.20$ contra $p \ge 0.20$

Para realizar estas inferencias elegimos

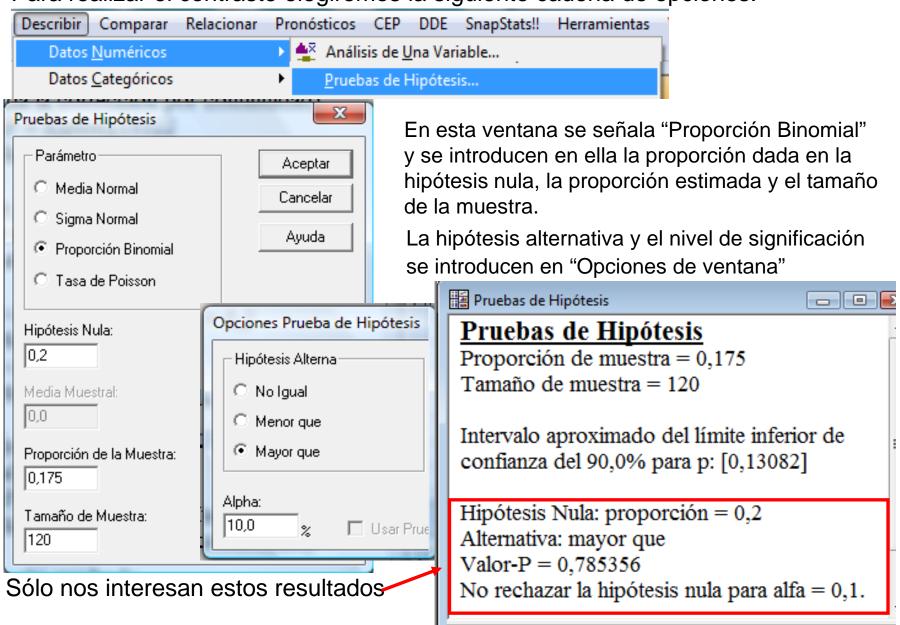
En la ventana "Pruebas de Hipótesis" se señala "Proporción Binomial" y se inscriben la proporción dada en la hipótesis nula, la proporción estimada y el tamaño de la muestra.

La hipótesis alternativa y el nivel de significación se introducen en "Opciones de ventana"



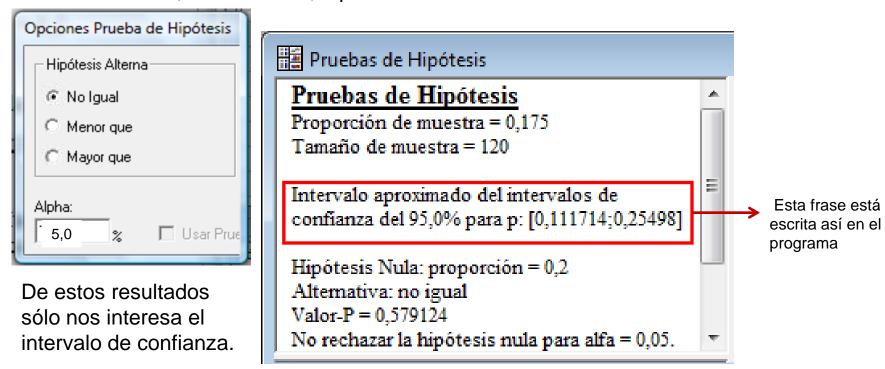
Inferencias sobre la proporción de éxitos de una ley Binomial

Para realizar el contraste elegiremos la siguiente cadena de opciones:



Inferencias sobre la proporción de éxitos de una ley Binomial

Para construir el intervalo de confianza se procede exactamente igual que para realizar el contraste de hipótesis, pero en "Opciones de ventana" elegiremos siempre la opción "No igual", que corresponde a un contraste bilateral y tomaremos Alpha igual a 100 menos el nivel de confianza, en este caso, Alpha = 5%.



Para hallar la proporción de éxitos de una muestra debe dividirse el número de éxitos observados entre el número total de observaciones de la muestra.

Inferencias sobre la media (tasa) de una ley de Poisson con una muestra de esa ley,

Ejercicio 4: Se sabe que las bacterias coliformes se distribuyen al azar en el agua de un río contaminado y se quiere contrastar a un nivel $\alpha = 0.05$ si el número medio de esas bacterias en un cm³ de agua no es inferior a 10; para ello se tomaron al azar 40 cm³ del agua de este río y se hallaron 352 de estas bacterias. Decida si estos datos avalan esta hipótesis al nivel $\alpha = 0.05$ y calcule el P-valor del contraste.

En este ejercicio se plantea un contraste sobre la media de una ley de Poisson con los siguientes datos: La hipótesis nula es $\lambda \ge 10$ contra la alternativa $\lambda > 10$; El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ El tamaño muestral es n = 40 y el número medio de bacterias es 352/40 = 8.80

