

TEMA 1. OPTIMIZACIÓN DE RECURSOS

PLANIFICACIÓN DE PROYECTOS Y ANÁLISIS DE RIESGOS

Grado en Ingeniería Informática. Mención Tecnologías de la Información

Dpto. Lenguajes y Ciencias de la Computación

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

1. Optimización de recursos

- Definición de problemas de programación lineal.
- Método gráfico.
- Método del SIMPLEX.
- Método de las dos fases.
- Análisis de sensibilidad y problema dual
- Problemas de transporte.
- Problemas de asignación.

LECTURA RECOMENDADA:

F. S. Hillier, G.J. Lieberman. *Introducción a la Investigación de Operaciones*.

Cap. 3, 4, 5, 6 y 8

Programación Lineal

- Técnica de modelado matemático diseñada para optimizar el empleo de recursos limitados
- Base para el desarrollo de algoritmos más complejos de modelos de IO, incluyendo la programación entera, no lineal y estocástica.

EJEMPLO

- La empresa Titan S.L. Se dedica a fabricar dos tipos de pinturas, P1 y P2, a partir de dos materiales básicos M1 y M2.

	Toneladas P1	Toneladas P2	Disponibilidad Máxima diaria (Tm)
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Utilidad por Tm (miles de Euros)	5	4	

- Una encuesta de mercado indica que la demanda diaria de P2 no puede ser mayor que 1 Tm más que de P1.
- Además, la demanda máxima diaria de P2 es de 2 Tm.
- Se desea determinar la mezcla óptima de P1 y P2 que maximice la utilidad diaria total.

Planteamiento del problema

- x_1 = Tm de P1 a fabricar a diario
- x_2 = Tm de P2 a fabricar a diario
- Objetivo: maximizar $z = 5x_1 + 4x_2$
- Restricciones:
 - $6x_1 + 4x_2 \leq 24$
 - $x_1 + 2x_2 \leq 6$
 - $x_2 \leq x_1 + 1$
 - $x_2 \leq 2$
 - $x_1, x_2 \geq 0$

Modelo de PL

- Elementos básicos (para plantear el problema):
 - Variables de decisión
 - Función objetivo (lineal)
 - Restricciones (lineales)
- Solución factible: cualquier solución que satisface todas las restricciones
- Solución factible óptima: solución factible que produce el valor óptimo en la función objetivo

Modelo de PL

- Propiedades intrínsecas en la linealidad:
 - Proporcionalidad: la contribución de cada variable de decisión en la función objetivo y en las restricciones es directamente proporcional al valor de la variable
 - Aditividad: la contribución total de todas las variables en la función objetivo y en las restricciones es la suma de la contribución individual de cada variable.

Solución de un problema PL

- Cuatro casos:
 - Solución óptima única
 - Varias soluciones óptimas: todo un segmento de soluciones
 - La región de soluciones factibles está vacía
 - La región de soluciones factibles no está acotada

Método Gráfico

- Válido para modelos de dos variables
- Pasos básicos:
 - Determinación del espacio de las soluciones factibles
 - Determinación de la solución óptima de entre todos los puntos en el espacio de solución factible:
 - Dibujar una recta con valor función objetivo constante (contorno)
 - Mover dicha recta de forma paralela en la dirección en la que se optimiza la función objetivo
- El espacio de las soluciones factibles es un conjunto convexo.
- Si un problema de PL tiene solución óptima, ésta es un punto extremo o esquina del espacio de las soluciones factibles.

Método Gráfico

Maximizar $z = 5x_1 + 4x_2$

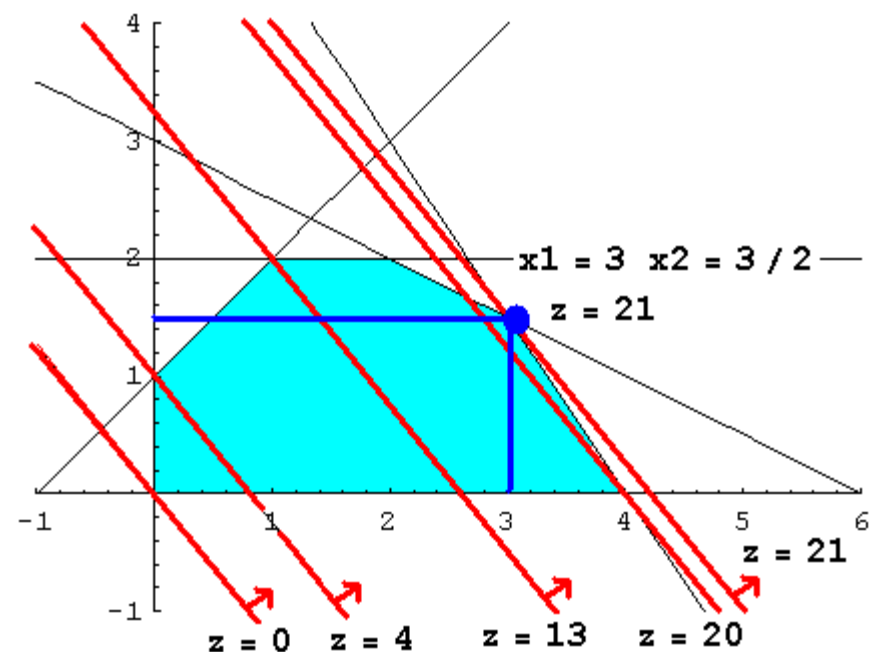
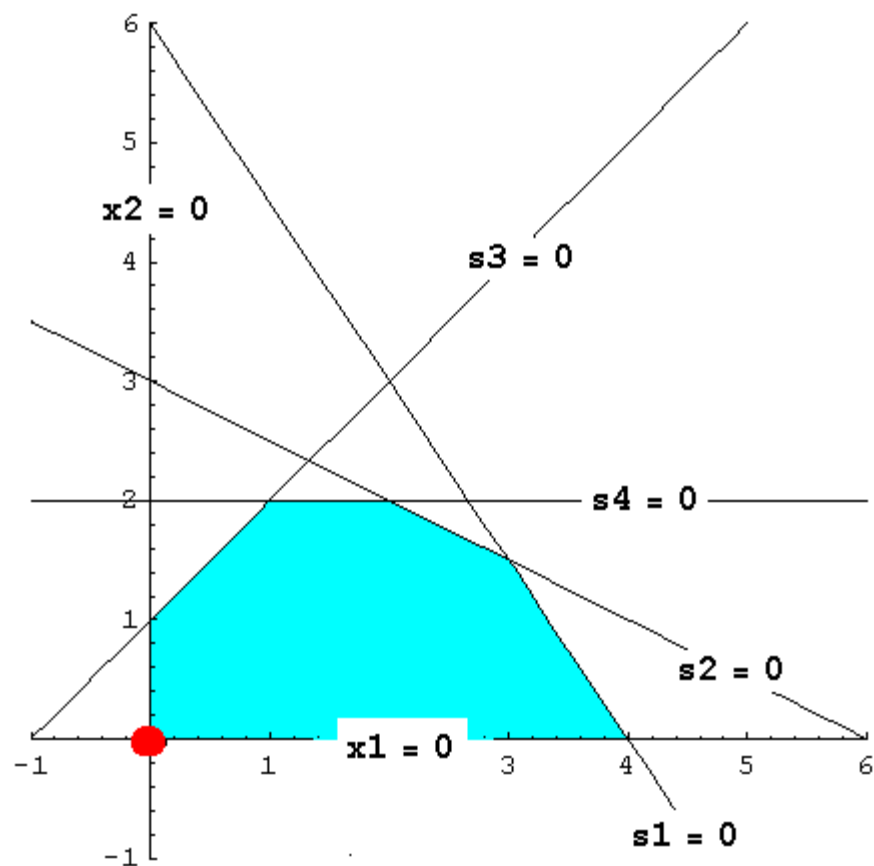
SA $6x_1 + 4x_2 \leq 24$

$x_1 + 2x_2 \leq 6$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$x_2 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$



Método del SIMPLEX

- Método algebraico para la determinación de la solución factible óptima de un problema de PL con cualquier número de variables de decisión.
- Requiere que el problema esté en forma estándar: todas las restricciones deben ser de igualdad y todas las variables no negativas
- La idea básica es: partiendo de un vértice de la región factible buscar otro adyacente en el que mejore el valor de la función objetivo.

PL estándar en forma matricial

Maximizar o minimizar $z = CX$

Sujeta a

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

donde $b \geq 0$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Forma estándar

- Variable de holgura:
 - En las restricciones (\leq) el lado derecho representa el límite sobre la disponibilidad de un recurso y el lado izquierdo el uso de ese recurso limitado. Una holgura representa la cantidad del recurso que no se utiliza.
- Variable de superávit:
 - Las restricciones (\geq) determinan requerimientos mínimos de especificaciones. Un superávit representa el exceso del lado izquierdo sobre el requerimiento mínimo.
- Variable no restringida:
 - El método del símplex exige trabajar con variables no negativas. Las variables no restringidas pueden expresarse como la diferencia de dos variables no negativas.

Conversión a forma estándar

- Conversión de desigualdades a igualdades:

(\leq) : se introduce una variable de holgura

$$\text{Ej: } x_1 + x_2 \leq 3 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + s_1 = 3, s_1 \geq 0$$

(\geq) : se introduce una variable de superavit

$$\text{Ej: } x_1 + 3x_2 \geq 7 \Leftrightarrow x_1 + 3x_2 - s_2 = 7, s_2 \geq 0$$

- Conversión de una variable no restringida a variables no negativas:

$$x = x^+ - x^-, x^+, x^- \geq 0$$

Soluciones básicas

- La forma estándar de PL incluye m ecuaciones y n variables ($m < n$).
- A $n-m$ variables se les asigna el valor 0
- Las m variables restantes se determinan resolviendo las m ecuaciones.
- Si se obtiene una solución única a las m variables asociadas se les llama variables básicas y a las $n-m$ restantes variables no básicas: solución básica.
- Si todas las variables de la solución básica toman valores no negativos la solución básica es factible, si no, es no factible.
- El número máximo de posibles soluciones básicas para m ecuaciones con n incógnitas es:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Soluciones básicas

- $AX = b$, sistema de m ecuaciones y n incógnitas
- X_B un subconjunto de m elementos de X
- B matriz $m \times m$ que incluye los elementos de A asociados a X_B
- Al asignarles el valor 0 a los $n-m$ elementos restantes de X el sistema se reduce a

$$BX_B = b$$

- Si B es una base obtenemos solución única:

$$X_B = B^{-1}b \text{ solución básica de } AX = b$$

- Si $B^{-1}b \geq 0$ X_B es factible
- Si $X_B > 0$ solución no degenerada
- B y B' son adyacentes si tienen $m-1$ columnas comunes

Claves del algoritmo del símplex

- El conjunto Q de todas las soluciones factibles es convexo
- La solución óptima para el problema de la programación lineal:

Maximice $z=CX$, sujeta a $AX=b$, $X \geq 0$

cuando es finita debe ocurrir en un extremo de su espacio factible Q

- Un factor necesario y suficiente para que X sea un punto extremo del espacio factible Q es que X sea una solución básica factible (SBF)

Condición de factibilidad

- Dado x , SBF, asociado a la base B (índices J) buscamos $x^* = x + t_{\max} d$ adyacente a x también SBF:
 - d dirección de búsqueda

$$d_{\hat{j}} = 1, \quad d_k = 0 \quad k \notin J \cup \{\hat{j}\}$$

$$- Ax^* = b \Rightarrow Ad = 0 \Rightarrow \sum_{j \in J} a_j d_j + a_{\hat{j}} = 0 \Rightarrow d_j = -B^{-1} a_{\hat{j}}$$

$$- x^* \geq 0$$

$$t_{\max} = \min \left\{ -\frac{x_j}{d_j}, j \in J, d_j < 0 \right\}$$

Condición de optimalidad

- Beneficio reducido

- Beneficio en la dirección $x+td$:

$$c^T(x+td) = c^T x + tc^T d = c^T x + t(c_{\hat{j}} + c_J^T d_J) = c^T x + t(c_{\hat{j}} - c_J^T B^{-1} a_{\hat{j}})$$

- Beneficio reducido para la variable no básica j :

$$c_j - c_J^T B^{-1} a_j$$

- Condición de optimalidad: elegir j no básica para que el beneficio reducido sea máximo

Algoritmo del SIMPLEX

1. Determinar una solución básica factible y su base asociada B con índices J .
2. Calcular los beneficios reducidos: $\bar{c}_j = c_j - c_J^T B^{-1} a_j$
3. Si $\bar{c}_j \leq 0$ terminar (la solución es óptima) si no, elegir un j con $\bar{c}_j > 0$ j entra en J
4. Calcular la dirección d , $d_j = -B^{-1} a_j$
5. Si $d \geq 0$ terminar (beneficio óptimo ∞) si no, determinar
$$t_{\max} = \min \left\{ -\frac{x_k}{d_k}, k \in J, d_k < 0 \right\} = -\frac{x_K}{d_K}$$
6. K sale de J
7. Nueva solución factible básica $x + t_{\max} d$, actualizar J y B

Tablas para el método del simplex

$$\text{Max } z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{S.A. } 6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq x_1 + 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Forma
estándar



$$\text{Max } z = 5x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

$$\text{S.A. } 6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$$

$$-x_1 + x_2 + s_3 = 1$$

$$x_2 + s_4 = 2$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

		5	4	0	0	0	0	
V	v	x₁	x₂	s₁	s₂	s₃	s₄	C_j
s₁	24	6	4	1	0	0	0	0
s₂	6	1	2	0	1	0	0	0
s₃	1	-1	1	0	0	1	0	0
s₄	2	0	1	0	0	0	1	0
		5	4	0	0	0	0	

Tablas para el método del simplex

		5	4	0	0	0	0	
V	v	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	C_j
s_1	24	6	4	1	0	0	0	0
s_2	6	1	2	0	1	0	0	0
s_3	1	-1	1	0	0	1	0	0
s_4	2	0	1	0	0	0	1	0
		5	4	0	0	0	0	
x_1	4	1	$2/3$	$1/6$	0	0	0	5
s_2	2	0	$4/3$	$-1/6$	1	0	0	0
s_3	5	0	$5/3$	$1/6$	0	1	0	0
s_4	2	0	1	0	0	0	1	0
		0	$2/3$	$-5/6$	0	0	0	

Tablas para el método del simplex

		5	4	0	0	0	0	
V	v	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	C_j
x_1	4	1	2/3	1/6	0	0	0	5
s_2	2	0	4/3	-1/6	1	0	0	0
s_3	5	0	5/3	1/6	0	1	0	0
s_4	2	0	1	0	0	0	1	0
		0	2/3	-5/6	0	0	0	
x_1	3	1	0	1/4	-1/2	0	0	5
x_2	3/2	0	1	-1/8	3/4	0	0	4
s_3	5/2	0	0	3/8	-5/4	1	0	0
s_4	1/2	0	0	1/8	-3/4	0	1	0
		0	0	-3/4	-1/2	0	0	

Punto óptimo:

$x_1=3, x_2=1.5$

Valor objetivo:

$5*3+4*1.5=21$

Casos especiales

- Solución ilimitada
 - Si hay un vector P_r que ha de entrar en la base pero sus componentes son todas menores o iguales que 0 (no se puede aplicar criterio de salida)

$$\text{Max } z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{S.A. } x_2 \leq x_1 + 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

		5	4	0	0	
V	v	x₁	x₂	s₁	s₂	c_j
s₁	1	-1	1	1	0	0
s₂	2	0	1	0	1	0
		5	4	0	0	

Casos especiales

- Infinitas soluciones
 - Hay una variable no básica con beneficio reducido 0 en la tabla final (condición necesaria)

V	v	x₁	x₂	s₁	s₂	s₃	s₄
s₁	4	0	0	1	-6	0	8
s₃	1	0	0	0	1	1	-3
x₂	2	0	1	0	0	0	1
x₁	2	1	0	0	1	0	-2
		0	0	0	-1	0	0

Solución inicial artificial

- Encontrar una solución básica factible inicial es fácil si todas las restricciones son (\leq) y se consideran como variables básicas las variables de holgura
- Cuando esto no sucede hay que recurrir a variables artificiales que asumen el papel de las holguras en la primera iteración y que se eliminan en iteraciones posteriores

Método de las dos fases

- Primer paso: añadir variables artificiales a_1, \dots, a_k :
 - Modificar las restricciones para que el lado derecho sea no negativo
 - Convertir las desigualdades a su forma estándar.
 - Añadir una variable artificial no negativa (a) a las restricciones que en el paso 1 fueran $=$ o (\geq)

Método de las dos fases

- Resolver un problema LP cuya función objetivo (w) sea minimizar la suma de las variables artificiales (FASE 1)
 - Si el valor óptimo de w es positivo el problema original no tiene solución factible
 - Si el valor óptimo de w es 0 y no hay variables artificiales en la solución básica se eliminan las columnas de la tabla óptima de la fase 1 que corresponden a las variables artificiales y se combinan la función objetivo original con las restricciones de dicha tabla. (Fase 2).
 - Si el valor óptimo de w es 0 y hay variables artificiales en la solución básica, eliminamos de la tabla óptima de la fase 1 las variables artificiales no básicas y forzamos a las variables artificiales básicas en las iteraciones de la fase 2 a permanecer nulas o salir de la base.

Método de las dos fases

- Para forzar artificiales básicas a permanecer nulas hay que tener en cuenta que una vez determinada la variable que entra en la solución:
 - si el coeficiente correspondiente a la variable artificial es positivo, la variable artificial sale de la solución básica
 - si el coeficiente correspondiente a la variable artificial vale 0, esta variable no sufrirá cambios
 - si el coeficiente es negativo, de todas formas forzamos la salida de la variable artificial lo que no afectará a la factibilidad de la solución porque el valor de la v.a. es 0.

Método de las dos fases

- Coeficiente a_1 0

V	v	x_1	c_2	s_1	s_2	a_1
x_1	1	1	0	1	1	0
x_2	3	0	1	-2	1	0
a_1	0	0	0	0	0	1
		0	0	4	5	0
s_1	1	1	0	1	1	0
x_2	2	-1	1	-3	0	0
a_1	0	0	0	0	0	1

- Coeficiente a_1 negativo

V	v	x_1	c_2	s_1	s_2	a_1
x_1	1	1	0	1	1	0
x_2	3	0	1	-2	1	0
a_1	0	0	0	-1	-1	1
		0	0	4	-5	0
x_1	1	1	0	0	0	1
x_2	3	0	1	0	3	-2
s_1	0	0	0	1	1	-1

Valor por unidad de un recurso

- Modelo PL= modelo de entrada y salida en el que entran los recursos limitados y sale el valor de la solución objetivo

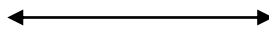


- Valor por unidad de recurso (precio dual, precio sombra)= tasa de cambio en el valor de la función objetivo debido a cambios en la cantidad disponible de recursos, es decir, lo que aumenta (o disminuye) el valor objetivo al aumentar (o disminuir) en 1 la cantidad de recurso.

Problema dual

Maximizar $z = c^t \cdot x$

Sujeto a $Ax \leq b, x \geq 0$



Minimizar $w = b^t \cdot y$

Sujeto a $A^t \cdot y \geq c, y \geq 0$

Lema 1: Si x, y son soluciones factibles, entonces $z(x) \leq w(y)$

Corolario: La solución del problema dual da una cota superior del problema original

Lema 2: x, y soluciones factibles. Si $z(x) = w(y)$ entonces x e y son óptimas.

Lema 3: Si el problema original es no acotado, el problema dual es no factible

Lema 4: Si el problema dual es no acotado, entonces el problema original no es factible

Teorema dual

- Si B es una base óptima para el problema primal entonces $C_B B^{-1}$ es una solución óptima del problema dual. Además los valores objetivos óptimos de ambos problemas coinciden.
- Si x_B es factible, entonces es óptimo si y sólo si la solución dual asociada $C_B B^{-1}$ es factible en el dual.

Idea de la demostración:

B base óptima $\Rightarrow y_B = c_B \cdot B^{-1}$ factible

x_B solución con valor objetivo óptimo $c_B B^{-1} b = z(x_B) = y_B b = w(y_B)$
valor óptimo dual

Relación entre el primario y el dual

- El dual del problema dual es el problema original (primario)
- Para cualquier par de soluciones factibles primaria y dual el valor del objetivo en el problema de maximización es menor o igual que el valor del objetivo en el problema de minimización. En el óptimo, la relación es válida con la igualdad.
- Cualquiera de los dos problemas tiene solución si y sólo si la tiene el otro.
- Si no hay solución óptima sólo pueden darse dos relaciones:
 - Inconsistente-Inconsistente
 - Inconsistente-Ilimitado

Análisis de sensibilidad

- Permite determinar los cambios en la solución óptima que resultan de hacer cambios en los parámetros del modelo: conducta dinámica de la solución óptima.
- Analiza cambios discretos en los parámetros del modelo.
- Si la base actual permanece óptima después de cambiar el coeficiente de una variable no básica en la función objetivo, los valores de las variables de decisión y el valor objetivo óptimo no cambian.
- Si cambia el coeficiente de una variable básica, los valores de las variables de decisión pueden permanecer constantes, pero el valor objetivo óptimo puede cambiar
- Si cambia el lado derecho de una restricción los valores de las variables de decisión y de la función objetivo pueden cambiar

Análisis de sensibilidad

- Cambios en costes: mirar última tabla del método del símplex: ¿sigue siendo óptima al cambiar el valor del coeficiente de la función objetivo?

		c_1	c_2	0	0	0	0	
V	v	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	c_j
x_1	3	1	0	1/4	-1/2	0	0	C_1
x_2	3/2	0	1	-1/8	3/4	0	0	c_2
s_3	5/2	0	0	3/8	-5/4	1	0	0
s_4	1/2	0	0	1/8	-3/4	0	1	0
		0	0	$(c_2 - 2c_1)/8$	$(2c_1 - 3c_2)/4$	0	0	

Tablas para el método del simplex

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 5x_1 + 4x_2 \\ \text{S.A. } 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq x_1 + 1 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma
estándar



$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 5x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 \\ \text{S.A. } 6x_1 + 4x_2 + s_1 &= 24 \\ x_1 + 2x_2 + s_2 &= 6 \\ -x_1 + x_2 + s_3 &= 1 \\ x_2 + s_4 &= 2 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

		5	4	0	0	0	0	
V	v	x₁	x₂	s₁	s₂	s₃	s₄	C_j
s₁	24	6	4	1	0	0	0	0
s₂	6	1	2	0	1	0	0	0
s₃	1	-1	1	0	0	1	0	0
s₄	2	0	1	0	0	0	1	0
		5	4	0	0	0	0	

Tablas para el método del simplex

		5	4	0	0	0	0	
V	v	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	C_j
x_1	4	1	2/3	1/6	0	0	0	5
s_2	2	0	4/3	-1/6	1	0	0	0
s_3	5	0	5/3	1/6	0	1	0	0
s_4	2	0	1	0	0	0	1	0
		0	2/3	-5/6	0	0	0	
x_1	3	1	0	1/4	-1/2	0	0	5
x_2	3/2	0	1	-1/8	3/4	0	0	4
s_3	5/2	0	0	3/8	-5/4	1	0	0
s_4	1/2	0	0	1/8	-3/4	0	1	0
		0	0	-3/4	-1/2	0	0	

Punto óptimo:

$x_1=3, x_2=1.5$

Valor objetivo:

$5*3+4*1.5=21$

Análisis de sensibilidad

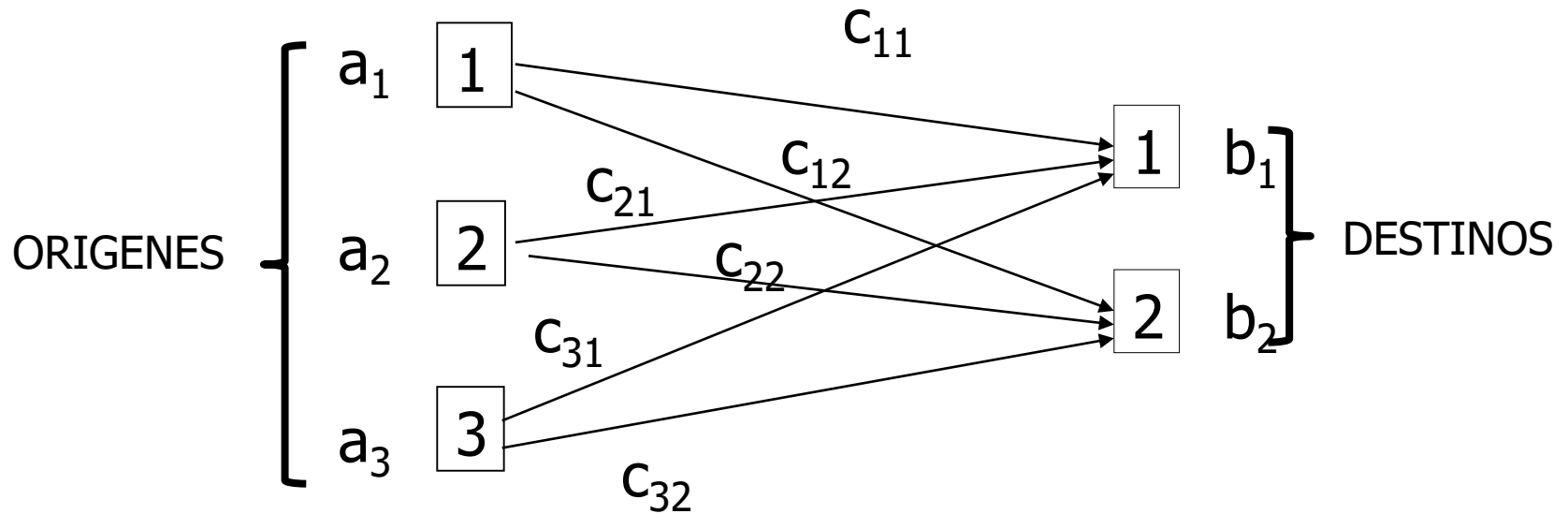
- Cambios en recursos: mirar la tabla óptima del método del simplex para el problema dual: ¿sigue siendo óptima al cambiar el valor de los recursos?

		$-b_1$	$-b_2$	$-b_3$	$-b_4$	0	0	
V	v	y₁	y₂	y₃	y₄	e₁	e₂	c_j
y₁	3/4	1	0	-3/8	-1/8	-1/4	1/8	-b₁
y₂	1/2	0	1	5/4	3/4	1/2	-3/4	$-b_2$
		0	0	$(-8b_3+10b_2-3b_1)/8$	$(-8b_4-b_1+6b_2)/8$	$(2b_2-b_1)/4$	$(b_1-6b_2)/8$	

Problemas de transporte.

- Existen m orígenes que contienen diversas cantidades de un producto que deben ser enviadas a n destinos para satisfacer su demanda.
- El origen i dispone de una cantidad a_i de producto y el destino j necesita una cantidad b_j .
- El sistema está balanceado: la oferta es igual a la demanda.
- Existe un coste asociado para cada arco c_{ij} .
- El problema consiste en encontrar la cantidad a enviar por cada camino x_{ij} satisfaciendo las restricciones y minimizando el coste total

Problemas de transporte.



Minimizar

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} c_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

Problemas de transporte.

- Si la oferta y la demanda no están balanceadas puede suceder:
 - **Oferta > demanda:** el problema tiene solución: añadimos un destino ficticio al que irá con coste 0 el excedente de oferta
 - **Demanda > oferta:** el problema no tiene solución pero puede interesar calcular la mejor solución posible sin cubrir toda la demanda: añadimos un origen ficticio con coste de distribución 0. Si se quiere priorizar algún destino para que no se quede sin abastecer se pone un coste grande al transporte desde el origen ficticio a dicho destino.

Problemas de transporte

Una empresa X tiene dos plantas ensambladoras en España en Madrid (A) y Sevilla (B).

El producto a ensamblar se produce en América y llegan por vía marítima a los puertos de Málaga (1) y Bilbao (2).

En la planta de Madrid se necesitan 400 máquinas y en la de Sevilla 300.

El nº de máquinas disponibles en cada puerto es 450 en Málaga y 250 en Bilbao.

La empresa debe decidir cuántas máquinas se envían de cada puerto a cada planta.

Las máquinas se envía por tren y se paga cierta cantidad por cada máquina siendo los costes en decenas de euros:

Destino Origen	Madrid	Sevilla
Málaga	4	2
Bilbao	3	5

Problemas de asignación.

- Caso especial del problema de transporte:
 - Aparece en áreas distintas
 - Su estructura especial tiene importancia teórica
- Asignar de forma óptima n trabajadores a n tareas:
 - Si al trabajador i se le asigna el trabajo j : beneficio c_{ij}
 - A cada trabajador se le asigna un solo trabajo
 - A cada trabajo se le asigna un solo trabajador
 - Objetivo: maximizar el beneficio total

Problemas de asignación.

- Maximizar

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} c_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

donde $x_{ij}=1$ si al trabajador i se le asigna el trabajo j , 0 en caso contrario

Problemas de asignación.

Una empresa dispone de tres trabajadores para realizar tres tareas. El coste de realizar un trabajo es función de los conocimientos de los trabajadores y puede verse en la siguiente tabla en euros.

Trabajador \ Trabajo	1	2	3
	1	2	3
1	50	40	60
2	50	50	70
3	60	45	80