TEMA 2. PROBLEMAS MULTIOBJETIVO

PLANIFICACIÓN DE PROYECTOS Y ANÁLISIS DE RIESGOS

Grado en Ingeniería Informática. Mención Tecnologías de la Información

Dpto. Lenguajes y Ciencias de la Computación

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

2. Problemas Multiobjetivo

- Conceptos básicos
- Programación de metas

LECTURA RECOMENDADA:

C. Romero. *Teoría de la Decisión Multicriterio: Conceptos, Técnicas y Aplicaciones*

Cap. 1, 2 y 4

Conceptos básicos

- Paradigma tradicional para la toma de decisiones: optimización
  1. Conjunto de soluciones posibles o factibles del problema analizado: puntos que cumplen las restricciones
  2. Grado de deseabilidad de cada solución factible: valor de la función objetivo
  3. Técnica matemática para determinar la solución factible con mayor grado de deseabilidad: optimización
- Estructura interna muy coherente desde el punto de vista lógico
- INCONVENIENTE: en los casos reales no suele haber un único criterio, sino varios contradictorios entre sí
- Dos tipos de problemas:
  – Problemas tecnológicos: problemas de decisión basados en un único criterio: problema de búsqueda, no de elección
  – Problemas económicos: se pretenden optimizar objetivos en conflictos: problema de decisión

Conceptos básicos

- ATRIBUTO: valores del centro decisor relacionados con una realidad objetiva. Pueden medirse independientemente de los deseos del centro decisor como una función matemática de las variables de decisión
- OBJETIVOS: direcciones de mejora de los atributos: proceso de minimizar o maximizar
- NIVEL DE ASPIRACIÓN: nivel aceptable de logro para un atributo
- META: combinación de un atributo con un nivel de aspiración
- CRITERIO: término general que engloba los tres conceptos: atributo, objetivo y meta

Conceptos básicos

DIFERENCIA ENTRE META Y RESTRICCIÓN:

Si no se satisface una restricción la solución no es factible. Las metas pueden alcanzarse o no.

META

$$\boxed{f(x) \begin{array}{c}\leq \\ = \\ \geq\end{array} A \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - s^{+} + s^{-} = A}$$

Desviaciones $s^{+}, s^{-} \geq 0$

Cada desigualdad se convierte en una meta flexible en la que la restricción puede violarse si es necesario.

Las variables s^+, s^- representan las desviaciones arriba o abajo respecto al lado derecho de la restricción. Estas variables son dependientes entre sí por lo que no pueden ser simultáneamente variables básicas (ambas distintas de 0)

Conceptos básicos

OPTIMALIDAD PARETIANA

Un conjunto de soluciones es eficiente o Pareto óptima cuando está formado por soluciones factibles tales que no existe otra solución factible que proporcione una mejora en un atributo sin producir un empeoramiento en al menos otro atributo .

Los enfoques multicriterio pretenden obtener soluciones eficientes en el sentido paretiano

Los objetivos se pueden expresar como minimizar las desviaciones s^+ (≤) s^- (≥) o su suma (=)

Programación de Metas

EJEMPLO: Ensamblaje de dos modelos de ordenadores:

- Modelo O1: 1 carcasa, 2 lectores ópticos, 1 hora de trabajo, 200€ de beneficio
- Modelo O2: 1 carcasa, 1 lector óptico, 1 lector tarjetas, 1.5 hora de trabajo, 500€ de beneficio

Restricciones:

- Se dispone de 1000 lectores ópticos, 500 tarjetas y 600 carcasas

METAS:

1. Producir al menos 200 ordenadores modelo O1
2. Producir al menos 500 ordenadores en total
3. Igualar las horas de trabajo dedicadas al ensamblaje de los dos modelos
4. Obtener un beneficio de al menos 250000€

Programación de Metas

EJEMPLO: Ensamblaje de dos modelos de ordenadores:

x_1= unidades de Modelo O1: 1 carcasa, 2 lectores ópticos, 1 hora de trabajo, 200€ de beneficio

x_2= unidades de Modelo O2: 1 carcasa, 1 lector óptico, 1 lector tarjetas, 1.5 hora de trabajo, 500€ de beneficio

Restricciones:

$2x_1 + x_2 \leq 1000$ (lectores ópticos disponibles)

$x_2 \leq 500$ (tarjetas disponibles)

$x_1 + x_2 \leq 600$ (carcasas disponibles)

METAS:

1. Producir al menos 200 ordenadores modelo O1: $x_1 + s_1^- - s_1^+ = 200$ (Min s_1^-)
2. Producir al menos 500 ordenadores en total: $x_1 + x_2 + s_2^- - s_2^+ = 500$ (Min s_2^-)
3. Igualar las horas de trabajo dedicadas al ensamblaje de los dos modelos:
   $x_1 - 1.5x_2 + s_3^- - s_3^+ = 0$ (Min $s_3^+ + s_3^-$)
4. Obtener un beneficio de al menos 250000€: $200x_1 + 500x_2 + s_4^- - s_4^+ = 250000$ (Min s_4^-)

Programación de Metas

MÉTODOS

- Método de los factores de ponderación
- Método de jerarquías

No dan la misma solución

Ninguno es mejor que el otro porque cada técnica satisface preferencias distintas en la toma de decisiones

Programación de Metas

MÉTODO DE JERARQUÍAS

Problema con n metas: MINIMIZAR G_i i=1,2,…,n

Quien toma las decisiones clasifica las metas en orden de importancia

MINIMIZAR $G_1=\rho_1$ (máxima prioridad)

⋮

MINIMIZAR $G_n=\rho_n$ (mínima prioridad)

La variable ρ_i es la variable de desviación correspondiente para la meta i

Paso 0. Identificar las metas del modelo y clasificarlas en orden de prioridad. Igualar i=1

Paso i. Resolver el problema MINIMIZAR G_i y hacer que $\rho_i = \rho_i^*$ defina el valor óptimo correspondiente de la variable de desviación.

Si i=n PARAR: se ha resuelto el problema con las n metas

Si no: añadir la restricción $\rho_i = \rho_i^*$ a las restricciones del problema G_i para asegurar que no se degrada en los siguientes paso. Igualar i=i+1 y repetir Paso i

Programación de Metas

EJEMPLO: Ensamblaje de dos modelos de ordenadores:

- x_1= unidades de Modelo O1: 1 carcasa, 2 lectores ópticos, 1 hora de trabajo, 200€ de beneficio
- x_2= unidades de Modelo O2: 1 carcasa, 1 lector óptico, 1 lector tarjetas, 1.5 hora de trabajo, 500€ de beneficio

Restricciones:

- $2x_1 + x_2 \leq 1000$ (lectores ópticos disponibles)
- $x_2 \leq 500$ (tarjetas disponibles)
- $x_1 + x_2 \leq 600$ (carcasas disponibles)

METAS: en orden de prioridad

1. Producir al menos 200 ordenadores modelo O1: $x_1 + s_1^- - s_1^+ = 200$ (Min s_1^-)
2. Producir al menos 500 ordenadores en total: $x_1 + x_2 + s_2^- - s_2^+ = 500$ (Min s_2^-)
3. Igualar las horas de trabajo dedicadas al ensamblaje de los dos modelos:
   $x_1 - 1.5x_2 + s_3^- - s_3^+ = 0$ (Min $s_3^+ + s_3^-$)
4. Obtener un beneficio de al menos 250000€: $200x_1 + 500x_2 + s_4^- - s_4^+ = 250000$ (Min s_4^-)

Programación de Metas

EJEMPLO: Ensamblaje de dos modelos de ordenadores:

x_1= unidades de Modelo O1, x_2= unidades de Modelo O2

Método de jerarquías

Resolvemos primero:

Min s_1^- sujeto a

$2x_1 + x_2 \leq 1000$ (lectores ópticos disponibles)

$x_2 \leq 500$ (tarjetas disponibles)

$x_1 + x_2 \leq 600$ (carcasas disponibles)

$x_1 + s_1^- - s_1^+ = 200$ (Meta: $x_1 \geq 200$)

SOLUCIÓN:

Infinitas soluciones: una de ellas x_1=200, x_2=0, s_1^-=s_1^+=0

Pasamos al segundo problema exigiendo el cumplimiento de la meta 1

Programación de Metas

EJEMPLO: Ensamblaje de dos modelos de ordenadores:

x_1= unidades de Modelo O1, x_2= unidades de Modelo O2

Método de jerarquías

A continuación:

Min s_2^- sujeto a

$2x_1 + x_2 \leq 1000$ (lectores ópticos disponibles)

$x_2 \leq 500$ (tarjetas disponibles)

$x_1 + x_2 \leq 600$ (carcasas disponibles)

$x_1 - s_1^+ = 200$ (Meta: $x_1 \geq 200$)

$x_1 + x_2 + s_2^- - s_2^+ = 500$ (Meta: $x_1 + x_2 \geq 500$)

SOLUCIÓN:

Infinitas soluciones: una de ellas x_1=200, x_2=300, s_2^-=s_2^+=s_1^+=0

Pasamos al tercer problema exigiendo el cumplimiento de las metas 1 y 2

Programación de Metas

EJEMPLO: Ensamblaje de dos modelos de ordenadores:

x_1= unidades de Modelo O1, x_2= unidades de Modelo O2

Método de jerarquías

A continuación:

Min $s_3^+ + s_3^-$ sujeto a

$2x_1 + x_2 \leq 1000$ (lectores ópticos disponibles)

$x_2 \leq 500$ (tarjetas disponibles)

$x_1 + x_2 \leq 600$ (carcasas disponibles)

$x_1 - s_1^+ = 200$ (Meta: $x_1 \geq 200$)

$x_1 + x_2 - s_2^+ = 500$ (Meta: $x_1 + x_2 \geq 500$)

$x_1 - 1.5x_2 + s_3^- - s_3^+ = 0$ (Meta: $x_1 = 1.5x_2$)

SOLUCIÓN:

Infinitas soluciones: una de ellas x_1=300, x_2=200, s_3^-=s_3^+=s_2^+=0, s_1^+=100

Pasamos al cuarto problema exigiendo el cumplimiento de las metas 1, 2 y 3

Programación de Metas

EJEMPLO: Ensamblaje de dos modelos de ordenadores:

x_1= unidades de Modelo O1, x_2= unidades de Modelo O2

Método de jerarquías

A continuación:

Min s_4^- sujeto a

$2x_1 + x_2 \leq 1000$ (lectores ópticos disponibles)

$x_2 \leq 500$ (tarjetas disponibles)

$x_1 + x_2 \leq 600$ (carcasas disponibles)

$x_1 - s_1^+ = 200$ (Meta: $x_1 \geq 200$)

$x_1 + x_2 - s_2^+ = 500$ (Meta: $x_1 + x_2 \geq 500$)

$x_1 - 1.5x_2 = 0$ (Meta: $x_1 = 1.5x_2$)

$200x_1 + 500x_2 + s_4^- - s_4^+ = 250000$ (Meta: $200x_1 + 500x_2 \geq 250000$)

SOLUCIÓN:

Solución $óptima$ x_1=360, x_2=240, $s_4^- = 58000, s_4^+ = 0, s_2^+$=100, s_1^+=160

La última meta no se puede cumplir: el beneficio obtenido es de 58000 euros menos

Programación de Metas

MÉTODO DE LOS FACTORES DE PONDERACIÓN

Problema con n metas: MINIMIZAR G_i $i=1,2,\ldots,n$

Función objetivo combinada: MINIMIZAR $w_1G_1+w_2G_2+\ldots+w_nG_n$

$w_i \geq 0$ son factores de ponderación que reflejan las preferencias del centro decisor

Se obtiene una solución eficiente del problemas pero no necesariamente la óptima.

Se satisfacen todas las metas pero no se considera la optimización

Dudas sobre la viabilidad de la programación de metas como técnica de optimización

Programación de Metas

EJEMPLO: Ensamblaje de dos modelos de ordenadores:

x_1= unidades de Modelo O1, x_2= unidades de Modelo O2

Método de ponderación

A continuación:

Min $s_1^- + s_2^- + s_3^- + s_3^+ + s_4^-$ sujeto a

$2x_1 + x_2 \leq 1000$ (lectores ópticos disponibles)

$x_2 \leq 500$ (tarjetas disponibles)

$x_1 + x_2 \leq 600$ (carcasas disponibles)

$x_1 + s_1^- - s_1^+ = 200$ (Meta: $x_1 \geq 200$)

$x_1 + x_2 + s_2^- - s_2^+ = 500$ (Meta: $x_1 + x_2 \geq 500$)

$x_1 - 1.5x_2 + s_3^- + s_3^+ = 0$ (Meta: $x_1 = 1.5x_2$)

200$x_1 + 500x_2 + s_4^- - s_4^+ = 250000$ (Meta: 200$x_1 + 500x_2 \geq 250000$)

SOLUCIÓN:

Solución $óptima$ x_1=166.667, x_2=433.333 $s_4^- = 0, s_4^+ = 0, s_2^+$=100, s_1^-=33.333 s_3^-=483.333

No se cumplen las metas 1 ni 3

Programación de Metas

EJEMPLO: Ensamblaje de dos modelos de ordenadores:

x_1= unidades de Modelo O1, x_2= unidades de Modelo O2

Método de ponderación

A continuación:

Min $\frac{1}{200}s_1^- + \frac{1}{500}s_2^- + s_3^- + s_3^+ + \frac{1}{250000}s_4^-$ sujeto a

$2x_1 + x_2 \leq 1000$ (lectores ópticos disponibles)

$x_2 \leq 500$ (tarjetas disponibles)

$x_1 + x_2 \leq 600$ (carcasas disponibles)

$x_1 + s_1^- - s_1^+ = 200$ (Meta: $x_1 \geq 200$)

$x_1 + x_2 + s_2^- - s_2^+ = 500$ (Meta: $x_1 + x_2 \geq 500$)

$x_1 - 1.5x_2 + s_3^- + s_3^+ = 0$ (Meta: $x_1 = 1.5x_2$)

200$x_1 + 500x_2 + s_4^- - s_4^+ = 250000$ (Meta: 200$x_1 + 500x_2 \geq 250000$)

SOLUCIÓN:

Solución $óptima$ x_1=360, x_2=240, $s_4^- = 58000, s_4^+ = 0, s_2^+$=100, s_1^+=160

La última meta no se puede cumplir: el beneficio obtenido es de 58000 euros menos

Programación de Metas

EJEMPLO: Diseño de un sistema de impuestos municipales para una pequeña ciudad

Base impositiva anual:

para propiedad catastral: 550 millones €

para alimentos y medicinas: 35 millones €

para ventas: 55 millones €

Consumo local anual de gasolina: 7.5 millones de galones

METAS:

1. Ingresos impositivos de al menos 16 millones €
2. Impuestos en alimentos y medicinas máximo 10% del total
3. Impuestos por ventas como mucho 20% del total
4. Impuesto a la gasolina como mucho 2 ctmos por galón