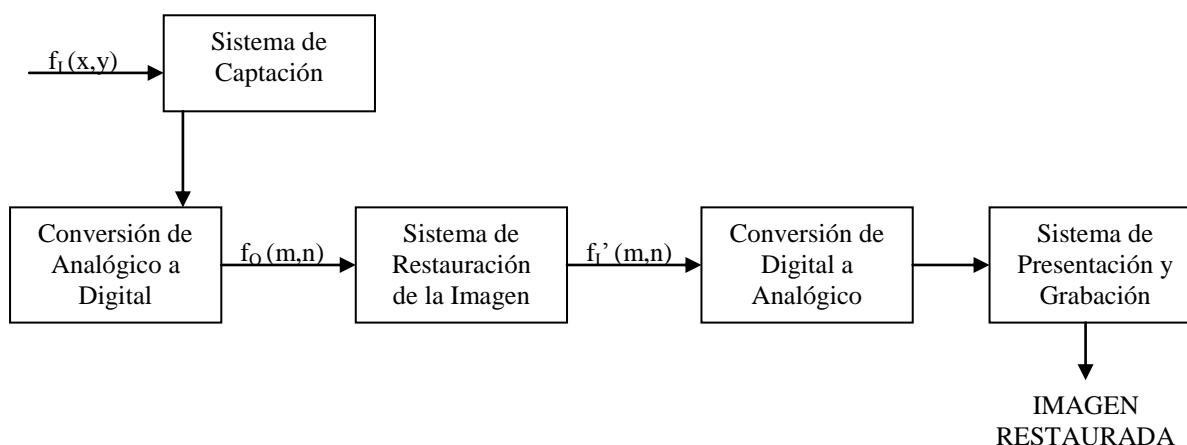


Capítulo 3

Restauración de imágenes

3.1. Introducción

La imagen captada por un dispositivo electrónico, óptico o electro-óptico puede presentar *degradaciones* producidas por ruidos en el sensor, borrosidad debida, por ejemplo, a un mal enfoque de la cámara, al movimiento de la cámara, o a turbulencias atmosféricas. La borrosidad se presenta cuando se produce un movimiento relativo, durante la exposición, entre el objeto o escena y la cámara. La turbulencia atmosférica es debida a variaciones aleatorias en el índice de refracción del medio entre el objeto y el sistema de captación de la imagen, como ocurre en la captación de imágenes astronómicas. En los sistemas CCD, donde se utilizan matrices para la adquisición de la imagen, se producen interacciones locales entre los elementos adyacentes de las matrices que producen la borrosidad en la imagen. Así, la restauración de imágenes se ocupa del filtrado de la imagen observada para minimizar los efectos de la degradación (eliminar la borrosidad, eliminar ruidos, corregir las distorsiones geométricas, etc.). La efectividad de los filtros que utilicemos para la restauración de la imagen dependerá de la cantidad de conocimiento que tengamos acerca del proceso de degradación y del criterio que se elija para el diseño de los filtros. Generalmente se utiliza el criterio del error cuadrático medio. Nosotros también estudiaremos el criterio basado en la entropía.



En el realzado de imágenes es difícil encontrar criterios que se puedan representar de forma matemática. Sin embargo, los problemas de restauración de imágenes se pueden cuantificar de forma precisa.

3.2. Modelos de captación de imágenes

Cada objeto de una escena real emite o refleja energía radiante (energía óptica, energía acústica, partículas nucleares, etc.). Un *sistema para la captura de imágenes* es un dispositivo que es capaz de interceptar alguna de la energía radiante emitida o reflejada por los objetos de una escena real y tiene la función de enfocar la energía interceptada y formar una imagen, es decir, una representación de los objetos de la escena original que emitieron dicha energía. Por lo tanto, una imagen es una representación imperfecta de una escena real. Así, se puede considerar como una proyección de una escena de un espacio 3-D en 2-D. La pérdida de esa coordenada suele ocasionar una gran pérdida de información.

Un sistema de captura de imágenes consta de:

- a) Un sistema de formación de imágenes
- b) Un detector
- c) Un registrador

Por ejemplo, un sistema electro-óptico (cámara de televisión) tiene un sistema óptico que concentra (enfoca) la imagen sobre un dispositivo fotoeléctrico que será escaneado para la transmisión o registro de la imagen. De forma similar, una cámara fotográfica utiliza una lente (objetivo) para formar la imagen sobre una placa o película sensible a los rayos luminosos y en la que se queda registrada la imagen de los objetos exteriores.

Un modelo general para la observación de la imagen es el siguiente:

$$f_o(x, y) = g[w(x, y)] + \eta(x, y)$$

donde

$$w(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y; x', y') \cdot f_I(x', y') \partial x' \partial y'$$

$$\eta(x, y) = T[g(w(x, y))] \eta_1 + \eta_2(x, y)$$

$f_I(x, y)$ representa la imagen inicial (original)

$f_o(x, y)$ representa la imagen observada

$h(x, y; x', y')$ es la función de esparcimiento puntual o función de degradación.

Las funciones g y T suelen ser funciones no lineales que representan las características de los mecanismos de detección y registro. El termino $\eta(x, y)$ representa el ruido aditivo que tiene una componente aleatoria dependiente de la propia imagen, $T(g(w)) \eta_1$, y otra componente aleatoria η_2 , independiente de la imagen.

Si el sistema es lineal, la imagen observada de un objeto o escena viene expresada como:

$$f_o(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y; x', y') \cdot f_I(x', y') \partial x' \partial y' + \eta_2(x, y)$$

En los sistemas invariantes en el espacio, la función de esparcimiento h es sólo función de $x-x'$ e $y-y'$, y así la representaremos por $h(x-x', y-y')$.

Modelos de formación de imágenes

Los modelos de degradación para sistemas invariantes en el espacio dependen de la función de esparcimiento puntual (respuesta de impulso) utilizada. Por ejemplo, la turbulencia atmosférica se debe a variaciones en el índice de refracción del medio que hay entre el objeto (o la escena) y el sistema de captación, como ocurre en imágenes de astros. Aquí, la respuesta de impulso viene dada por

$$h(x, y) = \exp\{-\pi\alpha^2(x^2 + y^2)\}$$

y la respuesta de frecuencias

$$H(w_1, w_2) = \frac{1}{\alpha^2} \exp\left[\frac{-\pi(w_1^2 + w_2^2)}{\alpha^2}\right]$$

Para sistemas coherentes que tienen limitación de difracción (con apertura rectangular), y que tienen el efecto de ser filtros de paso-baja ideales, la función de respuesta de impulso es:

$$h(x, y) = ab \cdot \text{senc}(ax) \cdot \text{senc}(by)$$

y su transformada en las frecuencias,

$$H(w_1, w_2) = \text{rect}\left(\frac{w_1}{a}, \frac{w_2}{b}\right)$$

Para sistemas incoherentes con apertura rectangular

$$h(x, y) = \text{senc}^2(ax) \cdot \text{senc}^2(by)$$

$$H(w_1, w_2) = \text{tri}\left(\frac{w_1}{a}, \frac{w_2}{b}\right)$$

Para sistemas CCD se producen interacciones locales entre los elementos adyacentes de las matrices CCD que producen borrosidad en la imagen. La respuesta de impulso es:

$$h(x, y) = \sum_{k=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 \alpha_{kj} \delta(x - k\Delta, y - j\Delta),$$

y la respuesta de frecuencias:

$$H(w_1, w_2) = \sum_{k=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 \alpha_{kj} \exp\{-i2\pi\Delta(kw_1 + jw_2)\}$$

Para sistema de escáner con apertura rectangular,

$$h(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$$

$$H(w_1, w_2) = ab \cdot \text{senc}(aw_1) \cdot \text{senc}(bw_2)$$

Modelos detectores y registradores

La respuesta de los detectores y registradores de imágenes es generalmente no lineal. Así, la respuesta de una película fotográfica o de un escáner de imágenes se pueden expresar mediante la función

$$g(w) = \alpha \cdot w^\beta \quad (1)$$

donde w es la variable de entrada y α y β son constantes propias del dispositivo. Para películas fotográficas la forma más utilizada del modelo es:

$$d = \gamma \log_{10} w - d_0$$

donde w representa la intensidad luminosa incidente, a γ se llama la *gamma de la película* y d es la *densidad óptica*. Una película se llama *positiva* si tiene negativa la gamma. Para dispositivos fotoelectrónicos, w representa la intensidad de luz incidente. La cantidad β suele ser próxima a 0.75.

Modelos de Ruido

En los sistemas fotoelectrónicos el ruido en el haz de electrones viene modelado como:

$$\eta(x, y) = \sqrt{g(x, y)} \cdot \eta_1(x, y) + \eta_2(x, y)$$

donde g es la función potencia anterior (1) y η_1 y η_2 son dos ruidos blancos gaussianos mutuamente independientes y con media cero. El primer término depende de la señal porque el proceso de detección y registro acarrea emisión aleatoria de electrones que tiene una distribución de Poisson con valor medio g y desviación típica \sqrt{g} . El término η_2 representa el ruido térmico que viene dado por un ruido blanco gaussiano. En el caso de películas no hay ruido térmico y así el modelo de ruido es:

$$\eta(x, y) = \sqrt{g(x, y)} \cdot \eta_1(x, y)$$

donde g es igual a d (la densidad óptica).

La presencia en el ruido del término que es función de la señal supone una gran dificultad a la hora de diseñar algoritmos para la restauración de imágenes. Por ello, en muchos modelos se sustituye, en la función $T(g(w))$, w por su promedio espacial μ_w :

$$\eta(x, y) = T[g(\mu_w)] \cdot \eta_1(x, y) + \eta_2(x, y)$$

y así $\eta(x, y)$ es un ruido blanco. Si el detector opera en su región lineal, se obtiene, para dispositivos fotoelectrónicos, un modelo de observación lineal de la forma:

$$v(x, y) = w(x, y) + \sqrt{\eta_w} \cdot \eta_1(x, y) + \eta_2(x, y)$$

Para películas fotográficas (con $\gamma=1$) se obtiene,

$$v(x, y) = -\log_{10} w + a\eta_1(x, y) - d_0$$

donde $v(x, y)$ representa la densidad óptica observada.

La intensidad luminosa asociada con v viene dada por

$$i(x, y) = 10^{-v(x, y)} = w(x, y) \cdot 10^{-a\eta_1(x, y)} = w(x, y) \cdot n(x, y)$$

donde $n(x, y)$ es un ruido multiplicativo que sigue una distribución logarítmico-normal.

Un tipo de ruido que ocurre en los sistemas coherentes es el llamado *moteado*. Para objetos de baja resolución, este ruido es multiplicativo y ocurre siempre que la rugosidad de la superficie del objeto es del mismo orden que la longitud de onda de la radiación incidente. Se representa por el modelo,

$$v(x, y) = u(x, y) \cdot s(x, y) + \eta(x, y)$$

donde $s(x, y)$, la intensidad del moteado, es un ruido blanco con distribución exponencial.

Modelos de observación de imágenes muestreadas

Cuando se utiliza un muestreo uniforme, el modelo general se reduce a la aproximación discreta siguiente:

$$f_0(m, n) = g[w(m, n)] + \eta(m, n), \quad \forall m, n$$

donde

$$w(m, n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(m-k, n-j) \cdot f_I(k, j)$$

$$\eta(m, n) = T[g(w(m, n))] \cdot \eta_1(m, n) + \eta_2(m, n)$$

$w(m, n)$ representa los valores promediados de $f_I(x, y)$ en los píxeles del retículo de muestreo y $h(m, n)$ es la función de transferencia o de degradación del sistema muestreado.

Nosotros vamos a suponer que la función g es la identidad y que $\eta(m, n) = \eta_2(m, n)$. Es decir, que el ruido sólo tiene una componente aleatoria independiente de la imagen. Por lo tanto, vamos a estudiar el siguiente modelo lineal de degradación de la imagen:

$$f_0(m, n) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(m-k, n-j) \cdot f_I(k, j) \right] + \eta(m, n),$$

donde $h(m, n)$ es la función de esparsamiento puntual o función de degradación, $f_I(m, n)$ es la imagen inicial, $\eta(m, n)$ es el ruido aditivo y $f_0(m, n)$ es la imagen observada.

El problema de la restauración de la imagen inicial $f_I(m, n)$ (que suponemos desconocida) a partir de la imagen observada $f_0(m, n)$, suponiendo que conocemos la función de esparsamiento $h(m, n)$, consiste en determinar la *función de restauración* $h_R(m, n)$ que nos proporcione la estimación

$$\hat{f}_I(m, n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_R(m-k, n-j) \cdot f_0(k, j)$$

de $f_I(m, n)$ lo más "próxima posible" a $f_I(m, n)$. El error que cometeremos en la estimación, dado por

$$|f_I(m, n) - \hat{f}_I(m, n)|$$

es de naturaleza aleatoria, por serlo el ruido aditivo, es decir, como el ruido $\eta(m, n)$ es una variable aleatoria, para cada m y n , el error es una variable aleatoria, para cada m y n . Por lo tanto, un criterio para la selección de la función h_R sería minimizar el error cuadrático medio,

$$E|f_I(m, n) - \hat{f}_I(m, n)|^2$$

Como \hat{f}_I es la convolución de h_R y f_0 vamos a tratar de resolver el problema utilizando la transformada de Fourier.

3.3 Transformaciones de imágenes en el dominio de las frecuencias: La transformada de Fourier discreta

Jean Baptiste Joseph Fourier presentó en 1807 sus resultados sobre la propagación y difusión del calor en el Instituto de Francia en los cuales proponía que una señal periódica se podía representar mediante series sinusoidales. Por ejemplo, una onda cuadrada se puede representar de forma aproximada por la función $\sin(x)$ más el armónico $(1/3)\sin(3x)$ como se muestra en la figura 2.2. Si utilizamos 5 armónicos, la función

$$f(x) = \sin(x) + (1/3)\sin(3x) + (1/5)\sin(5x) + (1/7)\sin(7x) + (1/9)\sin(9x)$$

representa todavía mejor a la onda cuadrada (figura 1). De aquí se deduce que una onda cuadrada se puede describir como una composición de sinusoides que varían en frecuencia y amplitud, es decir, cualquier señal es una composición de señales de diferentes frecuencias. Las señales de audio serán unidimensionales mientras que las imágenes serán señales bidimensionales. La frecuencia espacial de una imagen se refiere a la tasa de cambio de la intensidad luminosa de los píxeles. Así, para estudiar la composición de las frecuencias de una señal es conveniente analizarla en el dominio de las frecuencias donde se muestra la magnitud de las diferentes componentes de frecuencias.

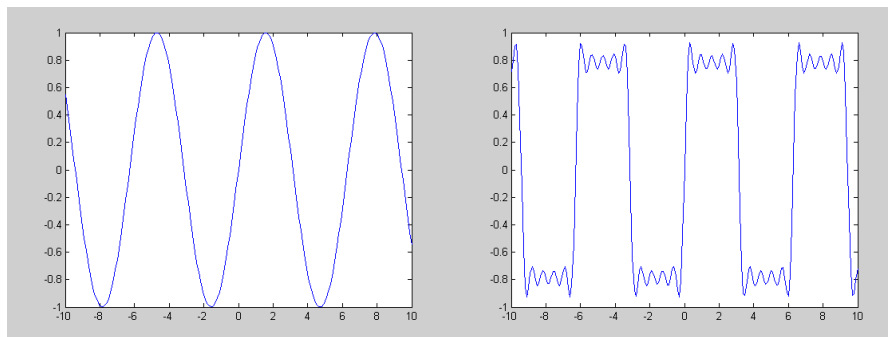


Figura 2.2. Representación mediante armónicos de una onda cuadrada.

La transformada de Fourier de una función $f(x, y)$ viene dada por la expresión:

$$T(f(x,y)) = F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-2\pi i(xu+yv)} dx dy$$

donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria y $e^{-ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. Es una descomposición de la imagen en estructuras periódicas. Las variables u y v se llaman *frecuencias absolutas*. También se pueden utilizar las variables $\omega_1 = 2\pi u$ y $\omega_2 = 2\pi v$, que se llaman *frecuencias angulares*.

La transformada de Fourier de una función puede no existir. Un conjunto típico de condiciones para su existencia es el siguiente:

- a) Que $f(x,y)$ sea integrable
- b) Que tenga, a lo sumo, un número finito de discontinuidades y un número finito de máximos o mínimos en cualquier rectángulo finito
- c) Que no tenga discontinuidades infinitas.

Dicha función trata con números complejos, por lo tanto, tendrá una parte real $R(u,v)$ y una parte imaginaria $I(u,v)$. Su magnitud, que llamaremos espectro de Fourier, será

$$|F(u,v)| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)}$$

y su ángulo de fase (figura 2.3)

$$\theta(u,v) = \arctan \left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)} \right]$$

Así,

$$F(u,v) = |F(u,v)| e^{i\theta(u,v)}$$

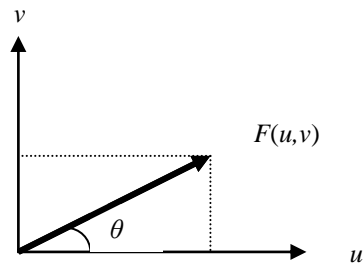


Figura 2.3. Representación del ángulo de fase.

La magnitud dependerá de la amplitud de las ondas seno y coseno que la configuran y la fase de la fase de las mismas. Al cuadrado del espectro de Fourier se le llama potencia (también densidad espectral).

La transformada de Fourier tiene inversa y viene dada por la expresión (teorema de inversión de Fourier)

$$T^{-1}(F(u,v)) = f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u,v) e^{2\pi i(xu+yv)} du dv$$

Así podemos interpretar la transformada de Fourier como los coeficientes de ponderación en las diferentes frecuencias de las funciones exponenciales complejas (patrones sinusoidales) que nos dan un valor de la función $f(x_o, y_o)$ como límite de estas sumas ponderadas.

La transformada de Fourier tiene dos propiedades interesantes para el análisis de imágenes:

- a) Es un operador lineal, es decir

$$T(af(x,y)+bg(x,y))=aT(f(x,y))+bT(g(x,y)), \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R},$$

- b) La transformada de Fourier de una *convolución* de funciones es el producto de las transformadas de Fourier de cada función.

En efecto, se define la *convolución* de las funciones f y g mediante la expresión:

$$f \otimes g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) g(x-s, y-t) ds dt$$

Se demuestra fácilmente que

$$T(f \otimes g(x, y)) = T(f(x, y))T(g(x, y)) = F(u, v)G(u, v)$$

Ejemplos:

1. Sea

$$f(x) = \begin{cases} M & \text{si } |x| \leq a \\ 0 & \text{si } |x| > a \end{cases}$$

La transformada de Fourier es la siguiente:

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i u x} dx \\ &= \int_{-a}^a M e^{-2\pi i u x} dx \\ &= M \left[-\frac{e^{-2\pi i u x}}{2\pi i u} \right]_{-a}^a \\ &= M \left[\frac{e^{2\pi i u a} - e^{-2\pi i u a}}{2i} \right] \frac{1}{\pi u} \\ &= M \frac{\text{sen}(2\pi u a)}{\pi u} \\ &= 2aM \frac{\text{sen}(2\pi u a)}{2\pi u a} \\ &= 2aM \text{senc}(2\pi u a). \end{aligned}$$

Su representación gráfica para $M=1$ y $a=2$ se muestra en la figura 2.4. Los puntos de corte con el eje de abscisas son $\{..., -1/a, -1/(2a), 1/(2a), 1/a, ...\}$. Se observa que es una función real pues la función original es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

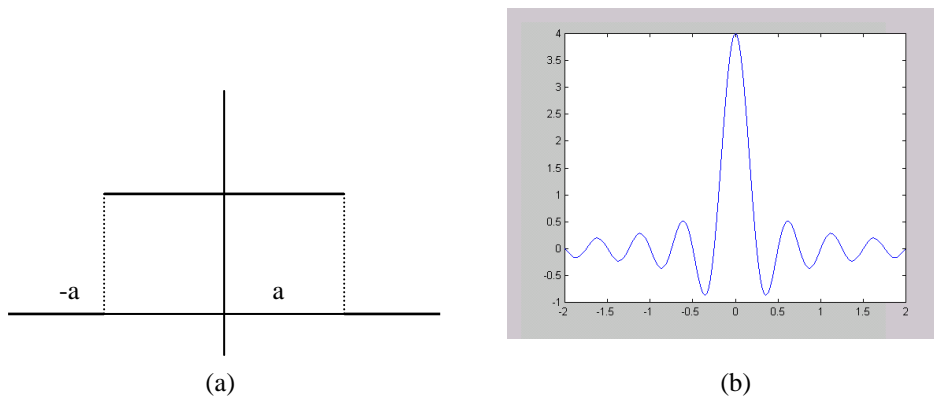


Figura 2.4. a) Función constante en $[-a, a]$. b) Transformada de Fourier

Como hemos visto, la transformada de Fourier se aplica sobre funciones definidas en \mathbb{R}^2 . Sin embargo, las imágenes digitales están definidas sobre valores enteros, es decir, $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Por ello vamos a utilizar una nueva transformada, que es un caso particular de la anterior, a la que llamaremos **transformada de Fourier discreta**. La transformada de Fourier discreta de la imagen $\{f(m,n): m=0,1,\dots,M-1, n=0,1,\dots,N-1\}$ de tamaño $M \times N$ viene dada por la expresión:

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) e^{-2\pi i \left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right)}, \quad u=0,1,\dots,M-1, v=0,1,\dots,N-1.$$

El valor de esta función en el origen nos da la intensidad luminosa media por píxel, es decir,

$$F(0,0) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)$$

Nos va a permitir descomponer una imagen digital en sus componentes periódicas. Se puede demostrar que la **transformación inversa** es:

$$f(m,n) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{2\pi i \left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right)}, \quad m=0,1,\dots,M-1, n=0,1,\dots,N-1.$$

Para la representación del espectro de Fourier, es decir, de $|F(u,v)|$, como una imagen digital, suele ser mejor representar la función $D(u,v) = c \log(1 + |F(u,v)|)$, donde c es una constante de escala, y evitamos así que la imagen obtenida sea prácticamente blanca.

Ejemplo:

Vamos a determinar la transformada de Fourier discreta de una imagen digital que es un filtro de pasa baja, es decir, la imagen digital cuyo elemento central, $(2,2)$, está sobre el origen de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 0 \end{bmatrix}$$

La transformada de Fourier discreta viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned} F(u,v) &= \frac{1}{9} \left[\frac{1}{6} e^{-2\pi i \left(\frac{0u}{3} + \frac{1v}{3} \right)} + \frac{1}{6} e^{-2\pi i \left(\frac{(-1)u}{3} + \frac{0v}{3} \right)} + \frac{1}{6} e^{-2\pi i \left(\frac{0u}{3} + \frac{0v}{3} \right)} + \frac{1}{6} e^{-2\pi i \left(\frac{1u}{3} + \frac{0v}{3} \right)} + \frac{1}{6} e^{-2\pi i \left(\frac{0u}{3} + \frac{(-1)v}{3} \right)} \right] \\ &= \frac{1}{54} \left[e^{-2\pi i v/3} + e^{2\pi i v/3} + 1 + e^{2\pi i u/3} + e^{-2\pi i u/3} \right] \\ &= \frac{1}{54} \left[1 + \cos(2\pi u/3) + \cos(2\pi v/3) \right] \end{aligned}$$

Hay que resaltar que la imagen la hemos considerado centrada en el origen, y por tanto, $m=-1,0,1$ y $n=-1,0,1$. Su representación gráfica se muestra en la figura 2.5.

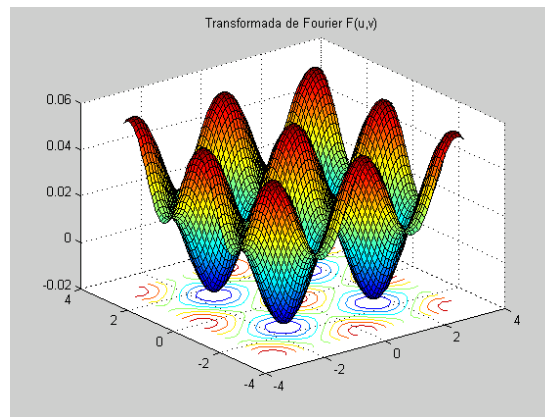


Figura 2.5. Transformada de Fourier de F(u,v).

3.4. El filtro inverso.

El filtrado inverso es el proceso de recuperar la imagen de entrada de un sistema a partir de la imagen observada (salida del sistema) suponiendo que se conoce la función de esparcimiento h , utilizando las respectivas transformadas de Fourier. Se considera el modelo de degradación siguiente:

$$f_0(m,n) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(m-k, n-j) \cdot f_I(k, j) \right] + \eta(m,n) = [h(m,n) \otimes f_I(m,n)] + \eta(m,n)$$

Se trata de obtener $f_I(m,n)$ a partir de los valores de f_0 y h .

El sistema de restauración de la imagen inicial (ideal) $f_I(m,n)$ consta de un filtro invariante en el espacio definido por la función de restauración $h_R(x,y)$. Después de la restauración con este filtro, la imagen reconstruida es:

$$\begin{aligned}\hat{f}_I(m,n) &= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_R(m-k, n-j) \cdot f_0(k, j) \right] \\ &= h_R(m,n) \otimes f_0(m,n) \\ &= h_R(m,n) \otimes \{h(m,n) \otimes f_I(m,n) + \eta(m,n)\}\end{aligned}$$

Si utilizamos la transformación de Fourier, tenemos

$$\hat{F}_I(w_1, w_2) = H_R(w_1, w_2) \cdot [H(w_1, w_2) \cdot F_I(w_1, w_2) + N(w_1, w_2)]$$

donde \hat{F}_I , H_R , H , F_I y N son las transformadas de Fourier de \hat{f}_I , h_R , h , f_I y η respectivamente.

Si ahora elegimos

$$H_R(w_1, w_2) = \frac{1}{H(w_1, w_2)}$$

entonces

$$\hat{F}_I(w_1, w_2) = F_I(w_1, w_2) + N(w_1, w_2) / H(w_1, w_2)$$

Por lo tanto, en ausencia de ruido ($N(w_1, w_2)=0$) se puede reconstruir la imagen perfectamente, siempre que conozcamos la función h . Pero, en general, este filtro será muy sensible al ruido, como se desprende de la expresión anterior.

La transformación de Fourier inversa nos da:

$$\hat{f}_I(m,n) = f_I(m,n) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [N(w_1, w_2) / H(w_1, w_2)] \cdot \exp\{i[2\pi(w_1 x + w_2 y)]\} \partial w_1 \partial w_2$$

que tiene un término de error aditivo cuyo valor puede ser bastante grande en las frecuencias para las que $H(w_1, w_2)$ es muy pequeño. Por ello, la siguiente modificación de este filtro trata de paliar este efecto.

El *filtro pseudoinverso* viene dado por la siguiente expresión:

$$H_R^*(w_1, w_2) = \begin{cases} H_R(w_1, w_2) & \text{si } H(w_1, w_2) \neq 0 \\ 0 & \text{si } H(w_1, w_2) = 0 \end{cases}$$

y con el se suele conseguir una mejora sustancial en la restauración de una imagen con respecto al filtro inverso. Pero sigue siendo muy sensible al ruido. El filtrado siguiente es un método de restauración de imágenes con presencia tanto de borrosidad como de ruido.

3.5. Filtrado de mínimo error cuadrático medio: el filtro de Wiener.

Consideremos el modelo de degradación siguiente:

$$f_0(m, n) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(m-k, n-j) \cdot f_I(k, j) \right] + \eta(m, n) \quad (2)$$

donde $\{f_I(m, n), m, n \in \mathbb{Z}\}$ y $\{\eta(m, n), m, n \in \mathbb{Z}\}$ son dos familias de variables aleatorias. Se trata de predecir $f_I(m, n)$ a partir de los valores observados $f_0(m, n)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$. Si para ello elegimos el criterio de mínimo error cuadrático medio, se trata de elegir el estimador $\hat{f}_I(m, n)$ que minimiza

$$E[f_I(m, n) - \hat{f}_I(m, n)]^2$$

La solución a este problema es la curva de regresión, es decir,

$$\hat{f}_I(m, n) = E[f_I(m, n) / f_0(i, j), \forall (i, j)]$$

que es la media de la distribución condicionada de $f_I(m, n)$ a $\{f_0(i, j), i, j \in \mathbb{Z}\}$. Pero este estimador es difícil de obtener, pues es una expresión no lineal y además esta distribución condicionada es difícil de calcular. Por ello vamos a limitarnos a determinar el *estimador lineal* de la forma

$$\hat{f}_I(m, n) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_R(m-k, n-j) \cdot f_0(k, j) \right] \quad (3)$$

que minimiza el error cuadrático medio. Es decir, se trata de encontrar la función de restauración $h_R(m, n)$ que hace mínimo el error cuadrático medio: $\varepsilon(m, n) = E[f_I(m, n) - \hat{f}_I(m, n)]^2$.

Para ello derivamos el error cuadrático medio con respecto a $h_R(m', n')$ e igualamos la derivada a cero, para cada $m', n' \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{\partial \varepsilon(m, n)}{\partial h_R(m-k, n-j)} = -2 E \left\{ [f_I(m, n) - \hat{f}_I(m, n)] \cdot f_0(k, j) \right\} = 0, \quad \forall (m, n), (m-k, n-j)$$

Ahora suponemos, sin pérdida de generalidad, que $E(f_0(m, n))=0$, y $E(\eta(m, n))=0$. Entonces las ecuaciones anteriores se pueden escribir de la forma siguiente:

$$r_{(f_I, f_0)}(m, n; k, j) = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} h_R(m-m', n-n') \cdot r_{(f_0, f_0)}(m', n'; k, j)$$

Donde $r_{(f_I, f_0)}(m, n; k, j)$ coeficiente de correlación lineal de las variables aleatorias $f_I(m, n)$ y $f_0(m, n)$. Supondremos que las variables aleatorias $f_I(m, n)$ y $f_0(m, n)$ son estacionarias conjuntamente, es decir, que $r_{(f_I, f_0)}(m, n; k, j)$ sólo depende de $m-k$ y $n-j$. Así, la expresión anterior no indica que

$$r_{(f_I, f_0)}(m, n; k, j)$$

sea la convolución de h_R y $r_{(f_0, f_0)}$. Si tomamos la transformada de Fourier en ambos lados nos queda:

$$R_{(f_I, f_0)}(w_1, w_2) = H_R(w_1, w_2) \cdot R_{(f_0, f_0)}(w_1, w_2)$$

Por lo tanto,

$$H_R(w_1, w_2) = R_{(f_I, f_0)}(w_1, w_2) \cdot R_{(f_0, f_0)}^{-1}(w_1, w_2)$$

Para determinar

$$R_{(f_I, f_0)}(w_1, w_2)$$

utilizamos la expresión (2) multiplicándola por f_0 . Tomamos esperanza matemática y obtenemos r ; y finalmente, aplicamos la transformada de Fourier, resultando:

$$R_{(f_I, f_0)}(w_1, w_2) = H^*(w_1, w_2) \cdot R_{(f_I, f_I)}(w_1, w_2)$$

Análogamente, se determina

$$R_{(f_0, f_0)}(w_1, w_2)$$

obteniéndose

$$R_{(f_0, f_0)}(w_1, w_2) = |H(w_1, w_2)|^2 \cdot R_{(f_I, f_I)}(w_1, w_2) + R_{(\eta, \eta)}(w_1, w_2)$$

Por lo tanto, el filtro de Wiener viene determinado por la siguiente expresión que determina su transformada de Fourier:

$$H_R(w_1, w_2) = \frac{H^*(w_1, w_2) \cdot R_{(f_I, f_I)}(w_1, w_2)}{|H(w_1, w_2)|^2 \cdot R_{(f_I, f_I)}(w_1, w_2) + R_{(\eta, \eta)}(w_1, w_2)}$$