

Capítulo 2. Transformaciones en el dominio espacial

Parte I

2.1 Representación de una imagen digital: matrices vinculadas.

2.2 Relaciones básicas entre píxeles.

2.3 Operaciones aritméticas, geométricas, lógicas y vectoriales.

2.4 Filtros lineales de promedio (máscaras o plantillas).

2.5 Filtros no lineales.

Capítulo 2. Representación de imágenes digitales

- Vamos a considerar un modelo de imagen simple según el cual la imagen viene dada por:

$$f(x,y)$$

función de intensidad luminosa bidimensional.

- El valor $f(x,y)$ nos dice la intensidad luminosa de la imagen en el punto (x,y) .
- La luz es una forma de energía, $f(x,y) \in [0, \infty)$.
- La luz que incide en un objeto se difunde en él y nuestros ojos y el cerebro elaboran la imagen del objeto. La imagen percibida por una persona procede de la luz reflejada por los objetos que la componen.

Capítulo 2. Representación de imágenes digitales

⇒ La intensidad luminosa $f(x,y)$ se puede caracterizar por dos componentes:

a) La cantidad de **luz incidente** en la escena visualizada (iluminación), que representaremos por $i(x,y) \in [0, \infty)$.

Esta componente viene determinada por la fuente luminosa.

Ejemplo: nivel de iluminación en oficina comercial, 100 candelas-pies.

b) La cantidad de **luz reflejada** por los objetos de la escena (capacidad reflectora), que representaremos por $r(x,y) \in [0,1]$, donde el valor 0 representa absorción total y el valor 1 reflexión total.

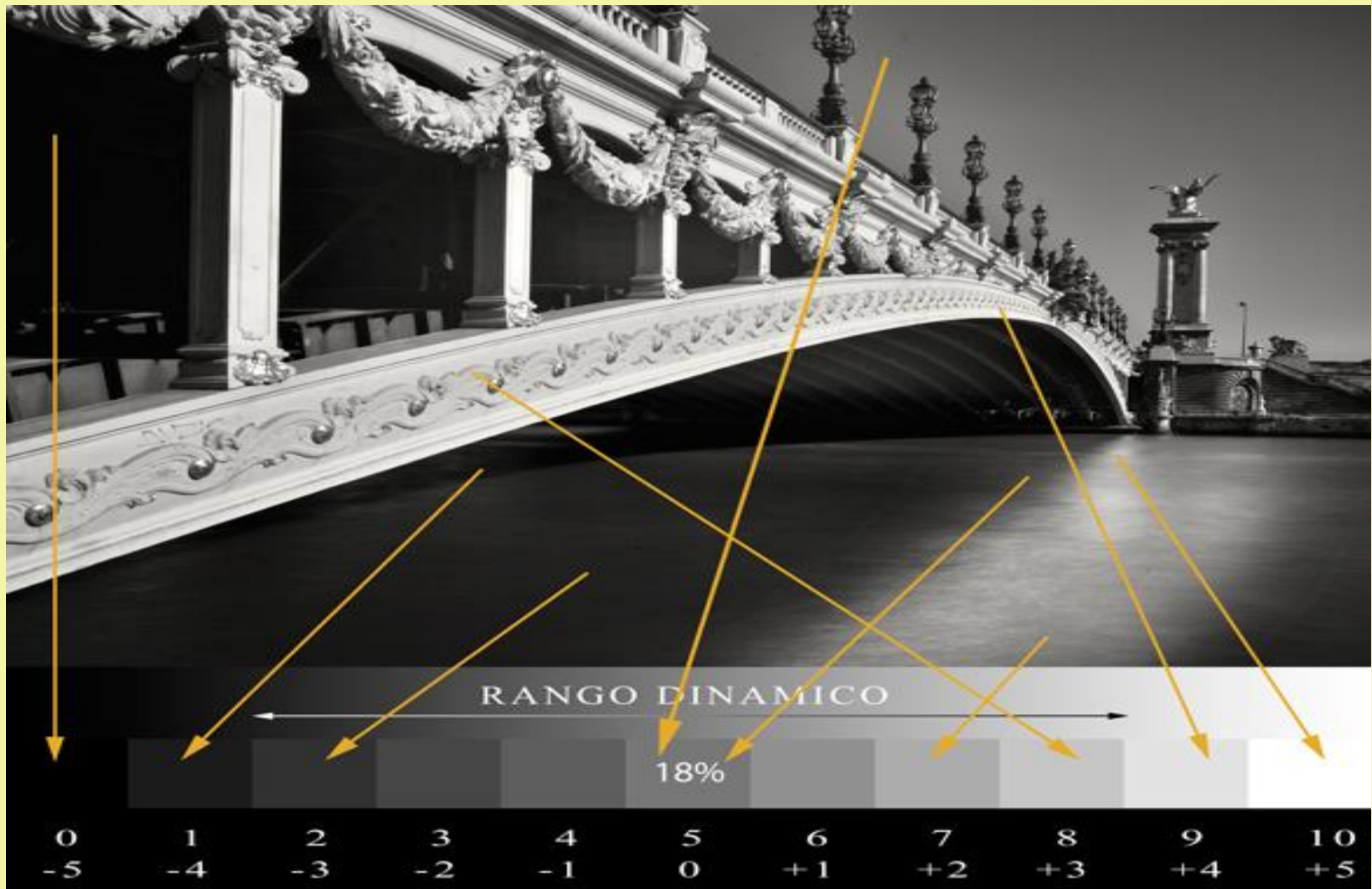
Esta componente viene determinada por las características de los objetos de la escena.

Ejemplo: el acero tiene 0.65 y la nieve 0.93.

$$f(x, y) = i(x, y) \times r(x, y)$$

⇒ Las escenas dinámicas donde aparecen objetos en movimiento complican más todavía la visión por ordenador.

Capítulo 2. Representación de imágenes digitales



⇒ <http://www.centraldefotografia.com/luz-incidente-reflejada-gris-12-5-y-18/#more-969>

Capítulo 2. Representación de imágenes digitales

- Para procesar una imagen por ordenador se debe *discretizar* (digitalizar) tanto espacialmente como en intensidad luminosa.
- La digitalización de la coordenada espacial (x,y) se llama *muestreo de la imagen* y la digitalización de la intensidad luminosa se llama *cuantificación del tono de gris*.
- Llamaremos tono o nivel de gris de una imagen monocromática en el punto (x,y) a la intensidad luminosa de la misma el punto (x,y) .
- El nivel de gris estará comprendido entre un valor mínimo L_{\min} y un valor máximo L_{\max} .

Al intervalo $[L_{\min}, L_{\max}]$ lo llamaremos la *escala de gris*.

Capítulo 2. Representación de imágenes digitales

Representación cartesiana

- Una **imagen digital (ID)** es una función cuyo dominio es un conjunto discreto

$$D = \{(i,j) : i=1,2,\dots,M, j=1,2,\dots,N\}$$

y cuyo rango es el conjunto

$$R = \{0, 1, 2, \dots, L-1\}.$$

- En la **ID**, los valores de los tonos de gris pertenecen al conjunto discreto $\{0, 1, 2, \dots, L-1\}$, *discretización* del intervalo original $[L_{\min}, L_{\max}]$ de tonos de gris de la imagen analógica.

Capítulo 2. Representación de imágenes digitales

- Los valores de M y N y el número L de niveles de gris suelen ser potencias de 2 para facilitar su representación binaria.
- Para representar los L tonos de gris necesitamos B bits, siendo $L=2^B$.
Ejemplo: para 256 tonos de gris necesitamos 8 bits, el vector binario $(0,0,0,0,0,0,0,0)$ representa al negro y $(1,1,1,1,1,1,1,1)$ al blanco.
- De esta forma la imagen puede venir dada por un vector binario (de ceros y unos), donde los L primeros valores binarios corresponden al tono de gris del primer píxel de la imagen y así sucesivamente.
- El número de bits requeridos para almacenar una imagen digitalizada es $M \times N \times B$.
- Como la representación matricial anterior es una aproximación a una imagen continua, cuanto mayores sean los valores de
 M, N y L , mejor será la resolución conseguida
(grado de detalle en la percepción de la imagen).

Capítulo 2. Representación de imágenes digitales

Representación matricial especial que especifique la posición de la submatriz de interés en la imagen completa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{is} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rj} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix}_{p,q}$$

⇒ **Matriz vinculada** a una imagen

⇒ Una **matriz vinculada** es:

- a) Una matriz cuyos elementos $a_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{*\}$
- b) Un indicador (p,q) que especifica la posición del primer elemento de la matriz en la rejilla utilizada en la digitalización de la imagen.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & * & 2 & * \\ * & 3 & 3 & 3 & 1 \\ * & 1 & 0 & 2 & 7 \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}_{0,2}$$

⇒ **Densidad de información, d**

Se define como el n° de elementos de la matriz (reales)/ n° total de elementos

Para $d=1$, diremos que la matriz está saturada.

Capítulo 2. Relaciones básicas entre píxeles

Características topológicas de los píxeles

⇒ El **entorno vertical y horizontal de tamaño 5** del píxel p , de coordenadas (i,j)

$$\{(i+1,j), (i-1,j), (i,j), (i,j+1), (i,j-1)\} \quad N_5(p)$$

⇒ El **entorno diagonal** de tamaño 5 del píxel p , de coordenadas (i,j) ,

$$\{(i+1,j+1), (i-1,j-1), (i,j), (i-1,j+1), (i+1,j-1)\} \quad N_D(p)$$

⇒ El conjunto de píxeles $N_5(p) \cup N_D(p)$ es un **entorno de tamaño 9** del píxel p $N_9(p)$.

⇒ Para estudiar la relación entre píxeles vamos a tener en cuenta su **proximidad espacial** y su **similitud** en los niveles de gris.

Capítulo 2. Relaciones básicas entre píxeles

⇒ Sea V el conjunto de valores de los tonos de gris utilizado para definir la conectividad

- **Conectividad de tipo 5:** los píxeles p y q con valores en V están conectados si $q \in N_5(p)$.
- **Conectividad de tipo 9:** los píxeles p y q con valores en V están conectados si $q \in N_9(p)$.
- **Conectividad de tipo mixto:** los píxeles p y q con valores en V están conectados si:
 $q \in N_5(p)$ ó
 $q \in N_D(p)$ y el conjunto $N_5(p) \cap N_5(q)$ no tiene píxeles con niveles de gris que pertenezcan a V .

Capítulo 2. Relaciones básicas entre píxeles

⇒ Ejemplo: tomando $V=\{1\}$, y dada la figura

0	1	1
0	1	0
0	1	1

Representa con flechas las distintas conectividades.

⇒ La conectividad de tipo mixto es una modificación de la conectividad de tipo 9, se introduce para eliminar conexiones con caminos múltiples

Capítulo 2. Relaciones básicas entre píxeles

- Se dice que el píxel p es **adyacente** al píxel q , si los dos están conectados.
- Dos subconjuntos de píxeles (imágenes) $S1$ y $S2$ se dice que son **adyacentes** si algún píxel de $S1$ es adyacente con algún píxel de $S2$.
- Un **camino** desde el píxel p , con coordenadas (x_o, y_o) , al píxel q , con coordenadas (x_n, y_n) , es una sucesión de diferentes píxeles con coordenadas

$$(x_o, y_o), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n),$$

donde (x_i, y_i) es adyacente a (x_{i-1}, y_{i-1}) .

Diremos que la **longitud** de este camino es n (secuencia de n nodos conectados).

Si p y q son pixeles de un subconjunto S , entonces diremos que p está **conectado** con q en S , si existe un camino de p a q formado sólo por pixeles de S . Para cualquier píxel p de S , el conjunto de pixeles de S que están conectados con p se dice que es una **componente conexa** de S .

Capítulo 2. Operaciones aritméticas, geométricas, lógicas y vectoriales

Operaciones aritméticas: las mismas que se pueden realizar con números reales, vectores y matrices.

$$[SUM(f, g)](i, j) = \begin{cases} f(i, j) + g(i, j) & \text{si } f(i, j), g(i, j) \in R \\ * & \text{si } f(i, j) \text{ ó } g(i, j) \text{ es } * \end{cases}$$

$$[MULT(f, g)](i, j) = \begin{cases} f(i, j) \cdot g(i, j) & \text{si } f(i, j), g(i, j) \in R \\ * & \text{si } f(i, j) \text{ ó } g(i, j) \text{ es } * \end{cases}$$

$$[ESCALAR(t; f)](i, j) = \begin{cases} t \cdot f(i, j) & \text{si } f(i, j) \neq * \\ * & \text{si } f(i, j) = * \end{cases}$$

$$[TRAS(f), u, v](i, j) = f(u - i, v - j)$$

$$[NOVENTA(f)](i, j) = f(-j, i)$$

$$[NOVENTA(f)](i, j) = f(j, -i)$$

$$[FLIP(f)](i, j) = f(-j, -i)$$

Capítulo 2. Operaciones aritméticas, geométricas, lógicas y vectoriales

Operaciones seleccionando parte de la imagen que está dentro de una ventana.

⇒ **Ventana** $W = \{ (i,j): h \leq i \leq h+r, k \leq j \leq k+s \}$

$$[SELECT(f; m, n, h, k)](i, j) = \begin{cases} f(i, j) & \text{para } (i, j) \in W \\ * & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$[EXTENSION(f, g)](i, j) = \begin{cases} f(i, j) & \text{si } f(i, j) \neq * \\ g(i, j) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$[CREAR(D, R)](i, j) = \begin{cases} y_k & \text{si } (i, j) = (i_k, j_k) \\ * & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$[UMBRAL(f; t)](i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(i, j) \geq t \\ 0 & \text{si } f(i, j) < t \\ * & \text{si } f(i, j) = * \end{cases}$$

$$[TRUNCAR(f; t)](i, j) = \begin{cases} f(i, j) & \text{si } f(i, j) \geq t \\ 0 & \text{si } f(i, j) < t \\ * & \text{si } f(i, j) = * \end{cases}$$

Capítulo 2. Operaciones aritméticas, geométricas, lógicas y vectoriales

$$[IGUAL(f;t)](i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(i,j) = t \\ 0 & \text{si } f(i,j) \neq t \text{ y } f(i,j) \neq * \\ * & \text{si } f(i,j) = * \end{cases}$$

$$[MAYOR(f;t)](i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(i,j) > t \\ 0 & \text{si } f(i,j) \leq t \\ * & \text{si } f(i,j) = * \end{cases}$$

$$PIXSUM(f) = \sum_{(i,j) \in D_f} f(i,j)$$

$$MEDIA(f) = \frac{PIXSUM(f)}{CARD(f)}$$

$$PRESC(f,g) = \begin{cases} \sum_{(i,j) \in D} f(i,j) \cdot g(i,j) & \text{si } f \text{ y } g \text{ tienen el mismo dominio} \\ * & \text{si } f \text{ y } g \text{ tienen el distinto dominio} \end{cases}$$

Capítulo 2. Operaciones aritméticas, geométricas, lógicas y vectoriales

Operaciones vectoriales

$$\|f(i, j)\|_{\infty} = \max \left\{ |f_1(i, j)|, |f_2(i, j)|, \dots, |f_n(i, j)| \right\}$$

$$\|f(i, j)\|_1 = |f_1(i, j)| + |f_2(i, j)| + \dots + |f_n(i, j)|$$

$$\|f(i, j)\|_2 = \left[|f_1(i, j)|^2 + |f_2(i, j)|^2 + \dots + |f_n(i, j)|^2 \right]^{1/2}$$

Capítulo 2. Filtros

Entorno del píxel $N(i,j)$, de tamaño $(2m+1) \times (2n+1)$:

$$N(2m+1) \times (2n+1)(i, j) = \{ (r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : i-m \leq r \leq i+m; \quad j-n \leq s \leq j+n \}$$

Máscara (o plantilla) g de tamaño $(2m+1) \times (2n+1)$

$$\begin{pmatrix} g(-m,n) & \dots & g(0,n) & \dots & g(m,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g(-m,0) & \dots & g(0,0) & \dots & g(m,0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g(-m,-n) & \dots & g(0,-n) & \dots & g(m,-n) \end{pmatrix}$$

Dado un entorno de un píxel podemos superponer una máscara o plantilla y sustituir el nivel de un determinado píxel por la suma ponderada de los niveles de gris de los píxeles del entorno con los valores correspondientes de la máscara.

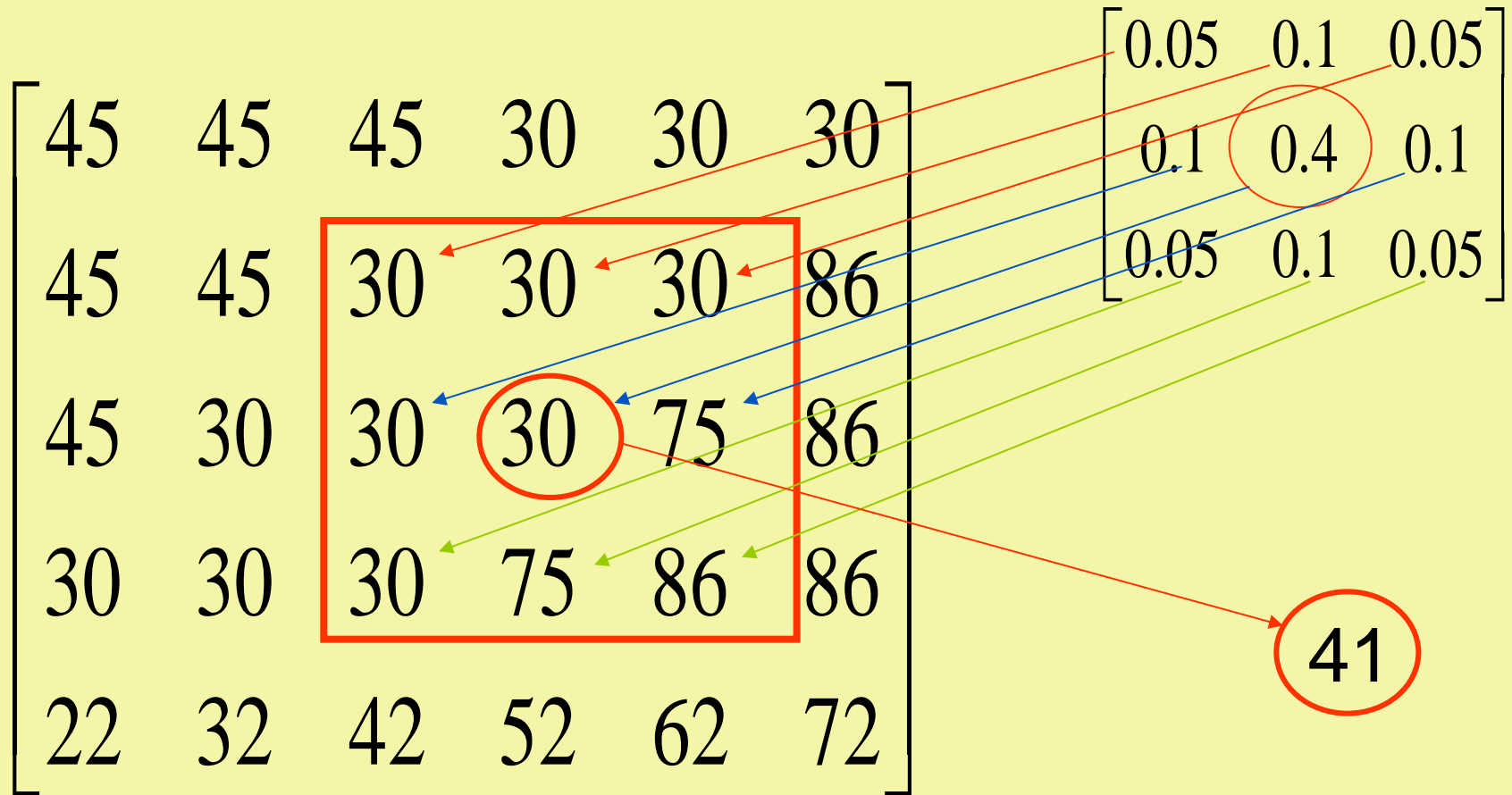
Filtro de promedio:

$$f * (i, j) = \sum_{(r,s) \in N} g(r,s) \cdot f(i+r, j+s)$$

$$f * (i, j) = \sum_{(h,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} g(h-i, k-j) \cdot f(h,k)$$

Capítulo 2. Filtros

Filtro de promedio:



$$30 \times 0.05 + 30 \times 0.1 + 30 \times 0.5 + 30 \times 0.1 + 30 \times 0.4 + 75 \times 0.1 + 30 \times 0.05 + 75 \times 0.1 + 86 \times 0.05 = 41$$

Capítulo 2. Filtros

Filtro de promedio de paso baja:

- Elementos de la máscara $a_{ij} \geq 0$
- Suman la unidad

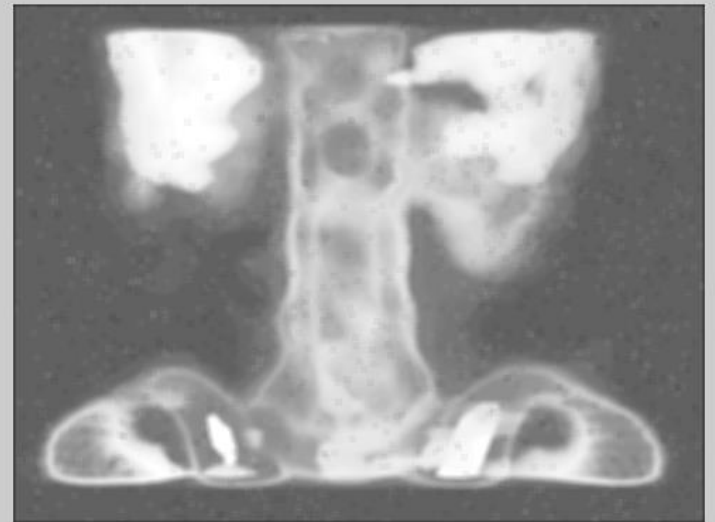
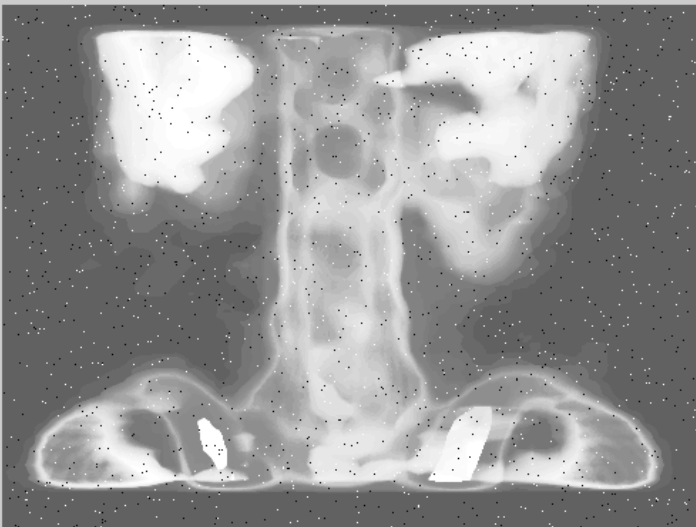
$$\sum_{i,j} a_{ij} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0.05 & 0.1 & 0.05 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.05 & 0.1 & 0.05 \end{bmatrix}$$

Capítulo 2. Filtros

Filtro de promedio de paso baja:

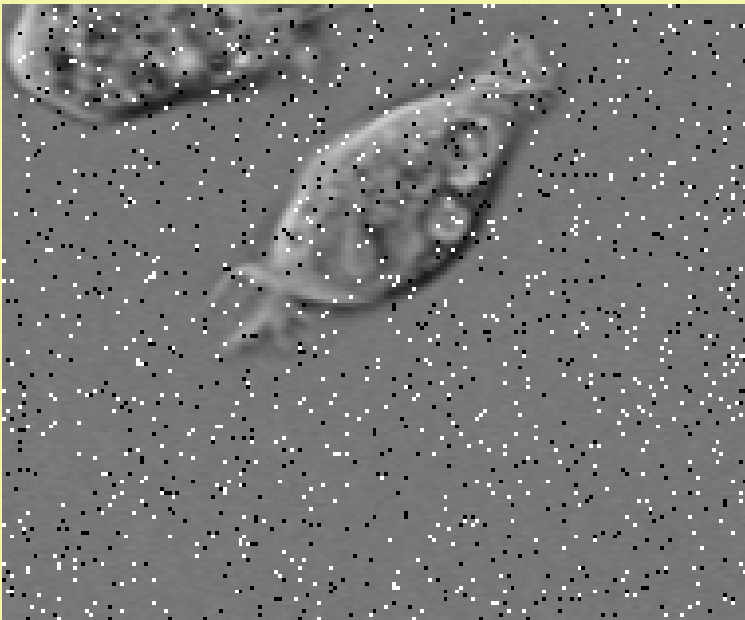
$$\begin{bmatrix} 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.04 \end{bmatrix}$$



Capítulo 2. Filtros

Filtro de promedio de paso baja:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Capítulo 2. Filtros

Filtro de promedio de paso alta:

- Elementos de la máscara: positivos y negativos
- Suelen sumar cero

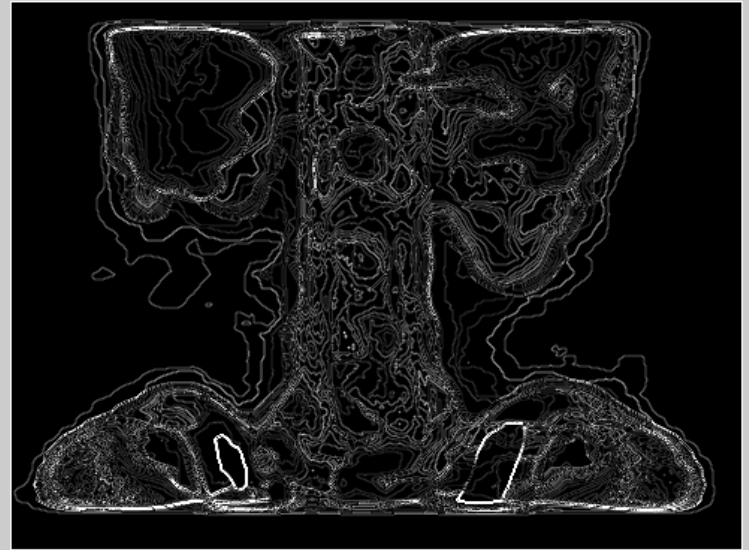
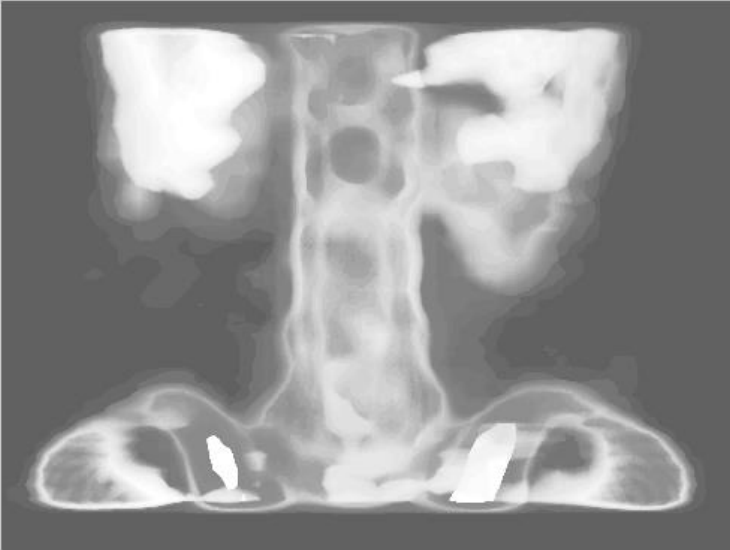
$$\begin{bmatrix} 0 & -0.25 & 0 \\ -0.25 & 1 & -0.25 \\ 0 & -0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Capítulo 2. Filtros

Filtro de promedio de paso alta:

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.25 & 0 \\ -0.25 & 1 & -0.25 \\ 0 & -0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

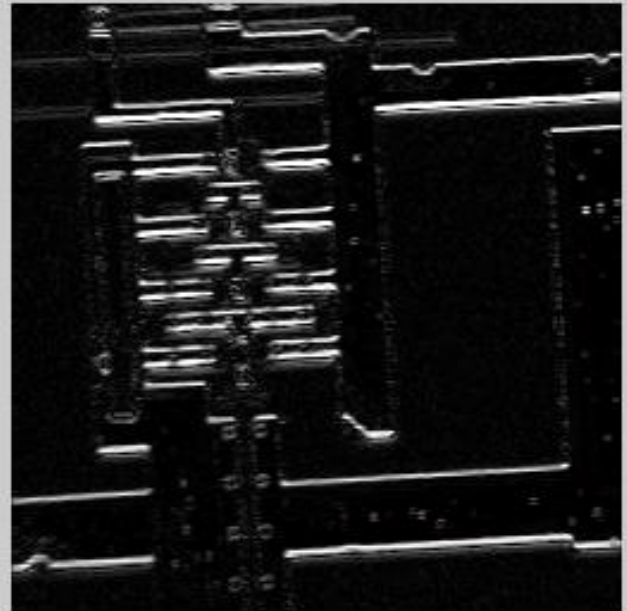
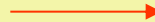
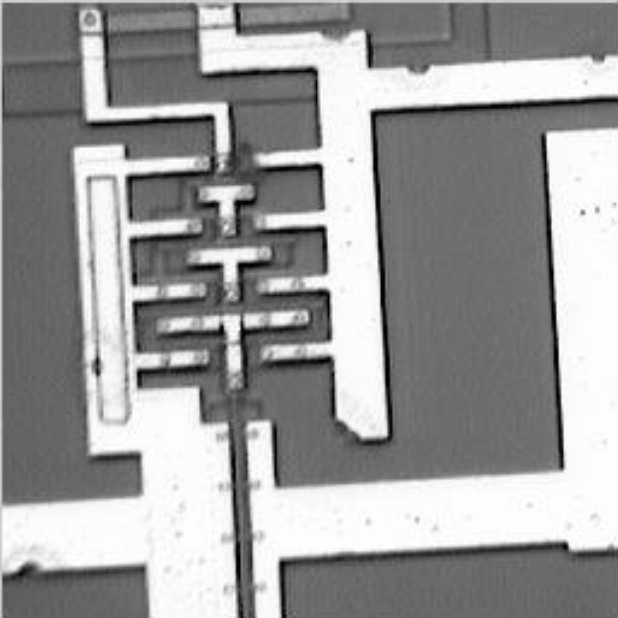


$$I \leftarrow 5 \cdot \text{abs}(E)$$

Capítulo 2. Filtros

Filtro de promedio de paso alta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



Capítulo 2. Filtros

Los filtros de promedio móvil pueden ser:

Invariantes en el espacio, en cuyo caso, la imagen filtrada se obtiene de la aplicación de la misma máscara a cada uno de los píxeles de la imagen.

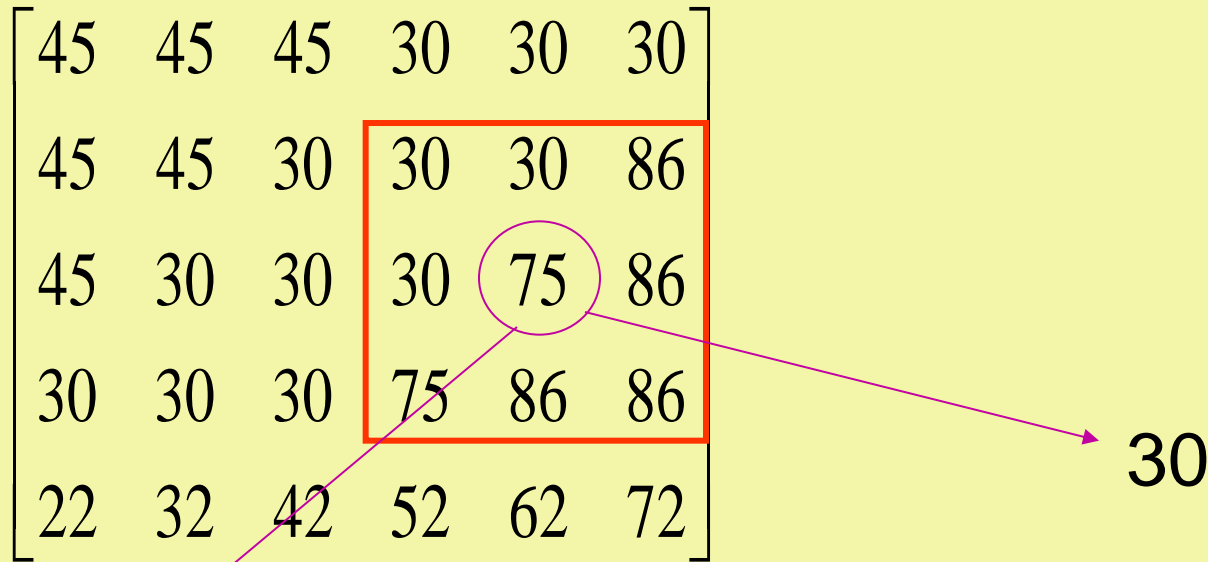
Variables en el espacio, cuando el filtro se realiza mediante la aplicación de una colección de máscaras, de manera que a subconjuntos diferentes de píxeles se le aplican máscaras diferentes.

Capítulo 2. Filtros

Filtros no lineales:

$$[\mathbf{MIN}(f, N)](i, j) = \text{Min} \{ f(r, s): (r, s) \in N(i, j) \}.$$

45	45	45	30	30	30
45	45	30	30	30	86
45	30	30	30	75	86
30	30	30	75	86	86
22	32	42	52	62	72

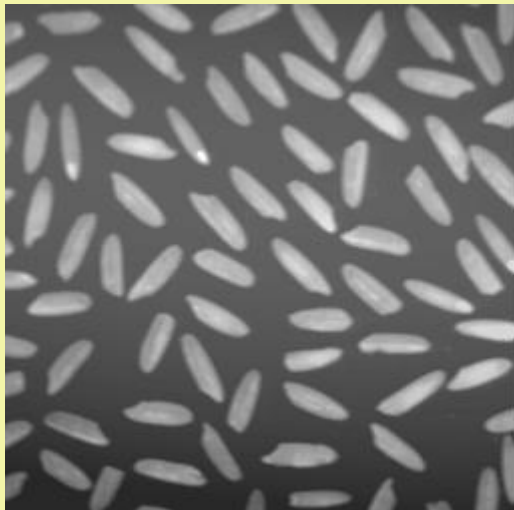


$$[\mathbf{MAX}(f, N)](i, j) = \text{Max} \{ f(r, s): (r, s) \in N(i, j) \}.$$

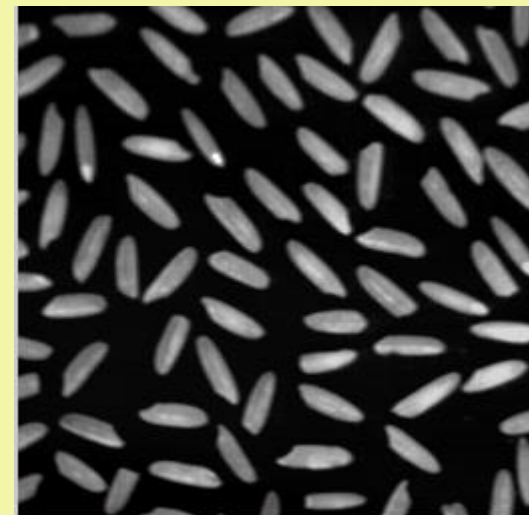
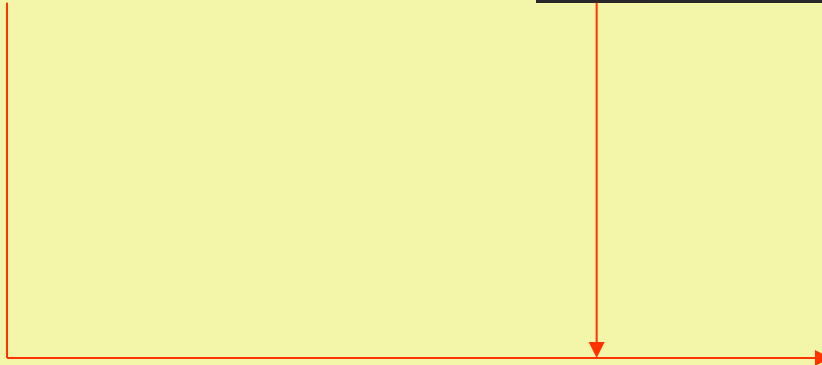
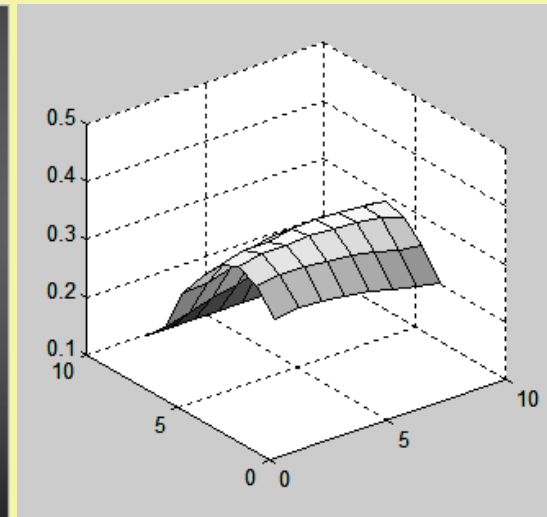
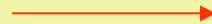
86

Capítulo 2. Filtros

Aplicación: Corrección de una iluminación no uniforme:



$\text{MIN}_{32 \times 32}$



Capítulo 2. Filtros

Filtros no lineales:

$$[\text{MEDIANA}(f, N)](i, j) = \text{Mediana} \{ f(r, s): (r, s) \in N(i, j) \}.$$

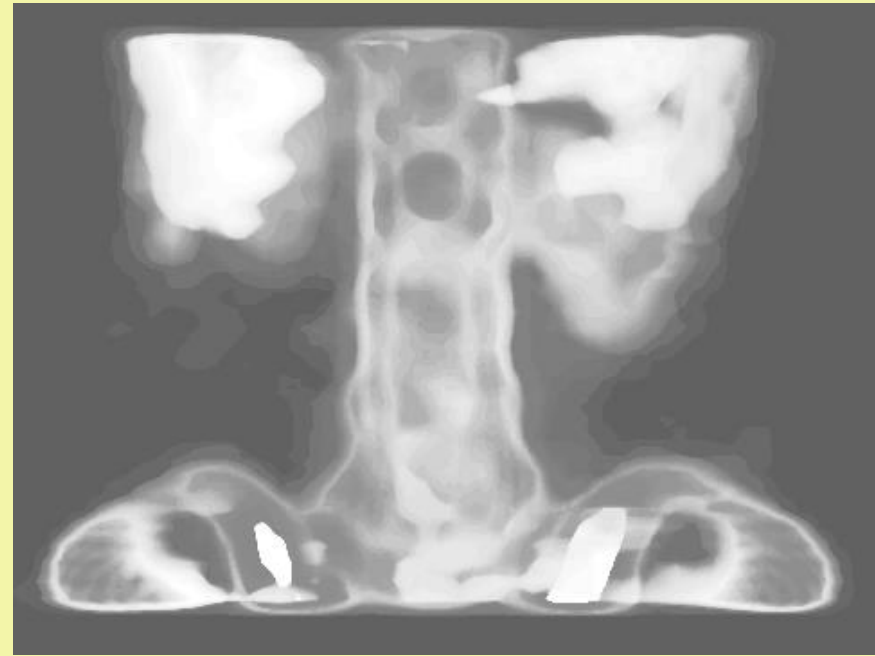
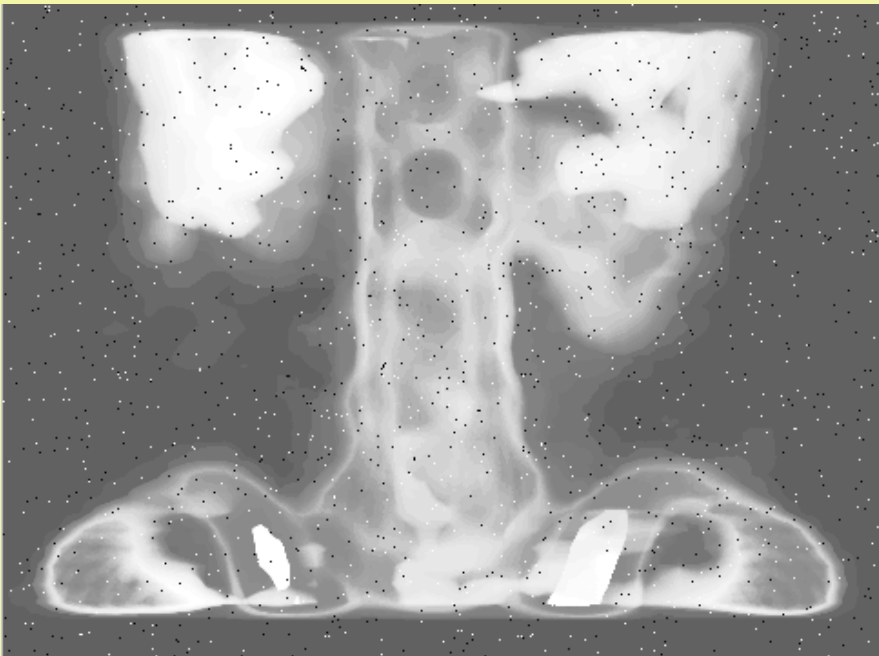
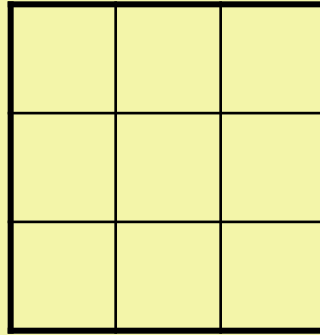
45	45	45	30	30	30
45	45	30	30	30	86
45	30	30	30	75	86
30	30	30	75	86	86
22	32	42	52	62	72

75

30 52 63 72 75 75 86 86 86

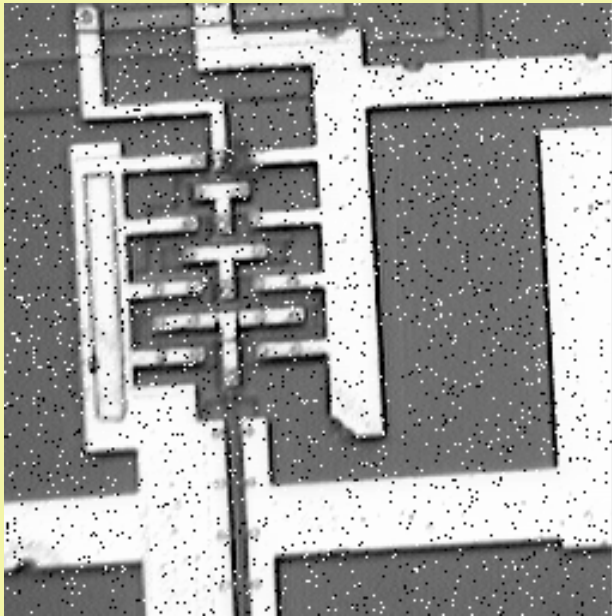
Capítulo 2. Filtros

Filtro MEDIANA

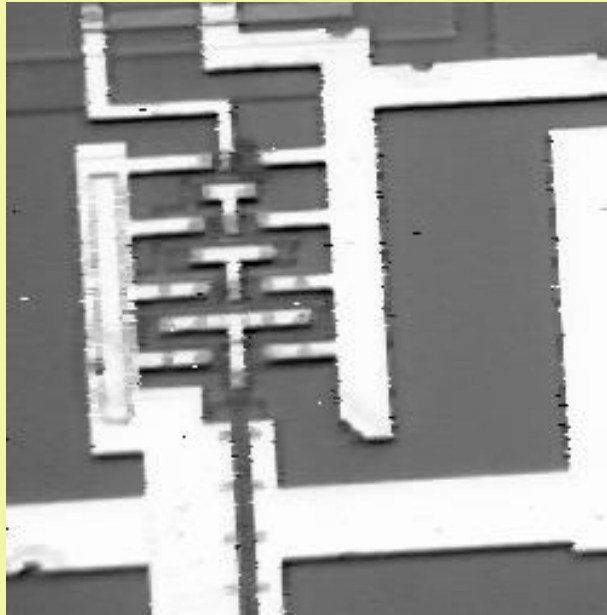


Capítulo 2. Filtros

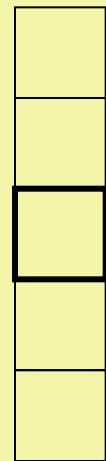
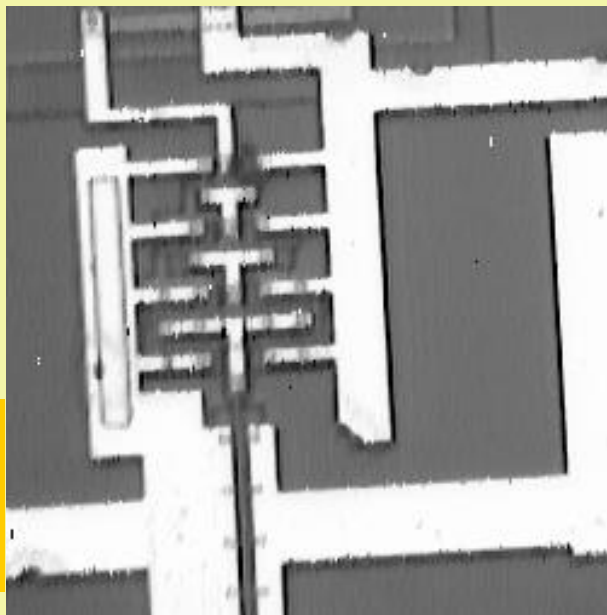
Filtro MEDIANA



- Atenúa el ruido
- Preserva aristas verticales



- Atenúa el ruido
- Preserva aristas horizontales



Capítulo 2. Transformaciones en el dominio espacial

Parte II

2.6 Filtros de tipo Gradiente.

2.7 Matrices de relación espacial.

2.8 Transformaciones de imágenes en el dominio de las frecuencias:
La transformada de Fourier discreta.

Capítulo 2. Filtros de tipo Gradiente

⇒ Si $f(x, y)$ es una función de valores reales de dos variables reales,

$$\partial f / \partial x$$

tasa de cambio instantánea en las direcciones del eje de abscisas y

$$\partial f / \partial y$$

tasa de cambio instantánea en las direcciones del eje de ordenadas

⇒ Con el fin de estudiar las tasas de cambio de los niveles de gris, definimos los **operadores basados en diferencias**.

Capítulo 2. Filtros Gradiente

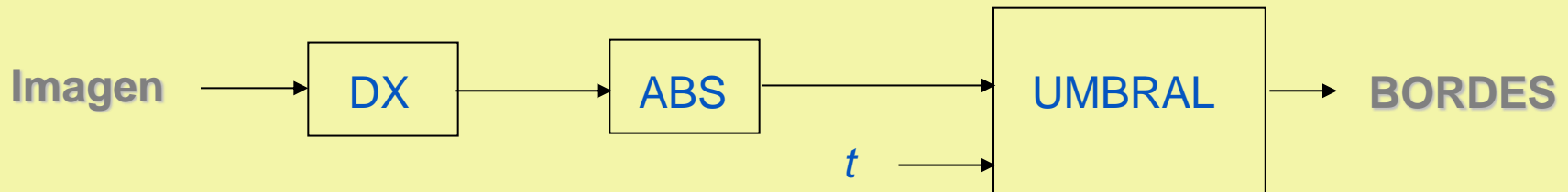
Filtros Diferencia:

$$[DX(f)](i, j) = f(i, j) - f(i-1, j)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[DY(f)](i, j) = f(i, j) - f(i, j-1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



Operador Gradiente:

$$[GRAD(f)](i, j) = ([DX(f)](i, j), [DY(f)](i, j))$$

Capítulo 2. Filtros Gradiente

- ⇒ El operador gradiente tiene una única imagen de entrada y dos imágenes de salida.
- ⇒ Como el gradiente es un vector, se le puede aplicar una norma, que nos mide la magnitud del gradiente.

Así, los operadores

$\text{MAG0}(\text{GRAD}(f))$,
 $\text{MAG1}(\text{GRAD}(f))$ y
 $\text{MAG2}(\text{GRAD}(f))$

son el resultado de aplicarle a una imagen el operador $\text{GRAD}(f)$ y luego la magnitud (norma) correspondiente respectivamente.

El operador **$\text{MAG2}(\text{GRAD}(f))$** es *isotrópico* (es decir, invariante a giros).

Capítulo 2. Filtros Gradiente

Considerando ambos lados del pixel (i,j)

Filtros diferencia simétrica:

$$[\text{SIMDX}(f)](i, j) = ([\text{DX}(f)](i, j) + [\text{DX}(f)](i+1, j)) / 2$$

$$= [f(i+1, j) - f(i-1, j)] / 2$$

$$[\text{SIMDY}(f)](i, j) = ([\text{DY}(f)](i, j) + [\text{DY}(f)](i, j+1)) / 2$$

$$= [f(i, j+1) - f(i, j-1)] / 2$$

$-1/2$	0	$1/2$
--------	---	-------

$1/2$
0
$-1/2$

Operador gradiente simétrico:

SIMGRAD(f) = (SIMDX(f), SIMDY(f)), que viene dado por

el operador compuesto MAG0(SIMGRAD(f))

Capítulo 2. Filtros Gradiente

Filtro de Prewitt:

$$\begin{aligned} [\text{PREWDX}(f)](i,j) &= ([DX(f)](i+1,j+1) + [DX(f)](i,j+1) + [DX(f)](i+1,j) + \\ &\quad [DX(f)](i,j) + [DX(f)](i+1,j-1) + [DX(f)](i,j-1))/6 \\ &= [f(i+1,j+1) + f(i+1,j) + f(i+1,j-1) - f(i-1,j+1) - f(i-1,j) - f(i-1,j-1)]/6. \end{aligned}$$

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

1	1	1
0	0	0
-1	-1	-1

$$\text{PREWDX}(f) = \text{ESCALAR}[1/6; \text{FILTRO}(f; \text{PREW1})]$$

$$\text{PREWDY}(f) = \text{ESCALAR}[1/6; \text{FILTRO}(f; \text{PREW2})]$$

Operador gradiente de Prewitt:

$$\text{PREWGRAD}(f) = (\text{PREWDX}(f), \text{PREWDY}(f))$$

Para cuantificar el vector aplicaremos una norma y con ello obtenemos...

Capítulo 2. Filtros Gradiente

Operador que promedia los valores de gris de los mismos píxeles pero con pesos diferentes.

Filtro de Sobel:

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

1	2	1
0	0	0
-1	-2	-1

Operador diferencia de Sobel en X

$$\text{SOBDX}(f) = \text{ESCALAR}[1/8; \text{FILTRO}(f; \text{SOB1})]$$

$$\text{SOBDY}(f) = \text{ESCALAR}[1/8; \text{FILTRO}(f; \text{SOB2})]$$

Operador gradiente de Sobel:

$$\text{SOBGRAD}(f) = (\text{SOBDX}(f), \text{SOBDY}(f)).$$

El **gradiente de Sobel** utiliza el factor 2 para ponderar dos píxeles.

Generalización utilizar el factor λ y en lugar de dividir por 8, se dividirá por, $(4+2\lambda)$.

Capítulo 2. Filtros Gradiente

Operador que pondera los píxeles que están en la dirección 45° y -45°

Filtro de Roberts:

-1	0
0	1

0	1
-1	0

Operador gradiente cruzado de Roberts

$$[\mathbf{ROBGRAD}(f)](i, j) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} [f(i, j) - f(i-1, j+1)] , \frac{\sqrt{2}}{2} [f(i, j+1) - f(i-1, j)] \right)$$

El factor $\sqrt{2}/2$ resulta del hecho de que la distancia que hay entre estos píxeles es $\sqrt{2}$.

Capítulo 2. Filtros Gradiente

Diferencias en el contraste local mediante la detección de ejes.

- ⇒ Un **eje** es una zona de demarcación o transición entre dos regiones que difieren según alguna medida de homogeneidad (como variaciones en el nivel de gris).
- ⇒ Una **arista** se puede presentar de dos formas:
 - Como el **borde** entre dos regiones diferentes, siendo cada una de estas regiones homogéneas con respecto a algún criterio de homogeneidad.
 - Como un **arco** delgado que destaque sobre el fondo.

⇒ GRADIENTE → MAGNITUD → UMBRAL

Capítulo 2. Filtros gradiente

Filtro de promedio de paso alta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} NO & N & NE \\ E & - & O \\ SO & S & SE \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Capítulo 2. Filtros gradiente

Filtros de Prewitt:

Imagen original



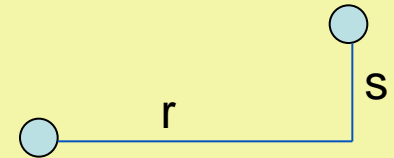
Detección de bordes con prewitt



Capítulo 2. Matrices de relación espacial

- Se pretenden analizar las **relaciones espaciales** entre los píxeles con tonos de gris parecidos
- Se establece una **relación espacial**

$$R(r, s): (i, j) \longrightarrow (i + r, j + s)$$



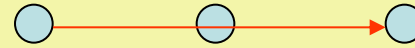
- Dada una relación **R** , representaremos por **$h_R(p, q)$** el número de pares de píxeles (i, j) y (i', j') tales que:
 - $(i, j) R (i', j')$** , es decir, (i, j) está relacionado con (i', j')
 - $f(i, j) = p$ y $f(i', j') = q$**

Matriz de relación espacial

$$h(f; R) = \begin{pmatrix} h_R(0,0) & \dots & h_R(0,s) & \dots & h_R(0,L-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_R(r,0) & \dots & h_R(r,s) & \dots & h_R(r,L-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_R(L-1,0) & \dots & h_R(L-1,s) & \dots & h_R(L-1,L-1) \end{pmatrix}$$

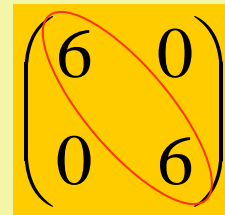
Capítulo 2. Matrices de relación espacial

- **Búsqueda de texturas**
- Relación espacial: $R_{2,0}$
- Imagen binaria (textura):



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matriz de relación espacial:


$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Capítulo 2. Matrices de relación espacial

- ¿Texturas más finas?

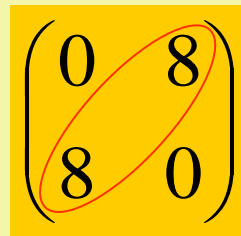
- Relación espacial: $R_{1,0}$



- Imagen binaria (textura):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matriz de relación espacial:

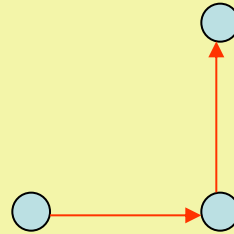


A 2x2 matrix of spatial relationship values, enclosed in a yellow square. The matrix is $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$. Red arcs connect the top-left element (0) to the bottom-right element (0) and the top-right element (8) to the bottom-left element (8), indicating a symmetric relationship.

Capítulo 2. Matrices de relación espacial

- ¿Texturas?

- Relación espacial: $R_{1,1}$



- Imagen binaria (textura):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matriz de relación espacial:

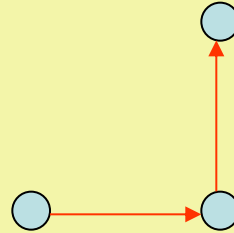
$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

The matrix is displayed on a yellow background. Two red curved arrows are drawn: one from the top-left '6' to the bottom-right '6', and another from the top-right '0' to the bottom-left '0', indicating a symmetric relationship.

Capítulo 2. Matrices de relación espacial

- ¿Texturas? ¿Bordes?

- Relación espacial: $R_{1,1}$



- Imagen binaria (textura):

$$f = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

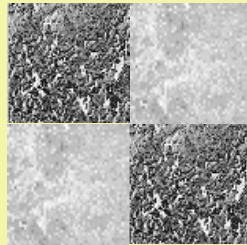
- Matriz de relación espacial:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Capítulo 2. Matrices de relación espacial

Examen Febrero 04:

¿Cómo detectarías la textura de una imagen constituida por dos elementos de textura de tamaño 32×32 que se repiten según se muestra en la figura 3?



Respuesta:

Mediante la matriz de relación espacial tomando como relación espacial la siguiente:

$$R_{0,64} : (i, j) \rightarrow (i, j + 64)$$

o bien,

$$R_{64,0} : (i, j) \rightarrow (i + 64, j)$$

Dicha matriz va a tener todos sus elementos nulos fuera de la diagonal principal

Capítulo 2. Matrices de relación espacial

Varianza cero, cuando todos los píxeles presentan el mismo nivel de gris, es una medida del contraste de una imagen.

Entropía de la variable aleatoria que toma valores con sus probabilidades respectivas, como una medida de contraste

$$E = \sum_{k=1}^L p_k \ln p_k$$

tal que

Si $p_1=1$ y $p_k=0$, $k=1,2,3,\dots,L$, entonces todos los píxeles presentan el mismo nivel de gris, con valor r_1 , y la **entropía vale 0**, mientras que cuando la distribución de los tonos de gris de los píxeles es uniforme, es decir, $p_k = 1/L$, entonces la entropía alcanza su valor máximo que es $\ln(L)$, que corresponde a una imagen con **máximo contraste**.

Una medida normalizada en el intervalo $[0,1]$ del contraste de una imagen será

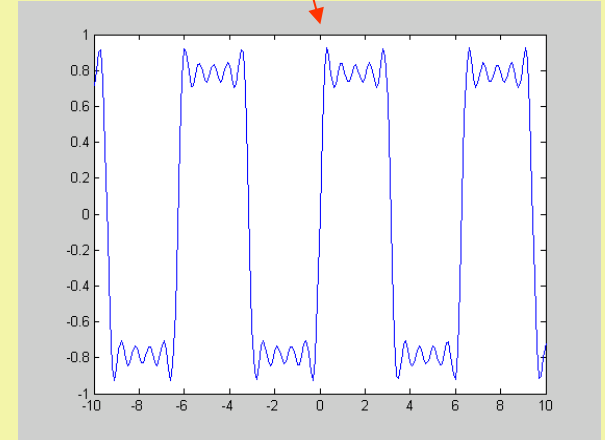
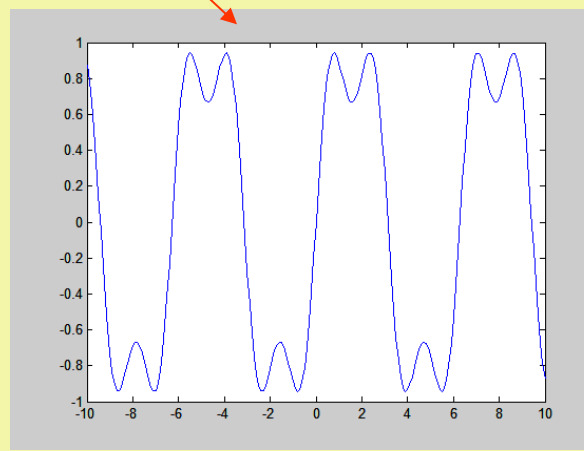
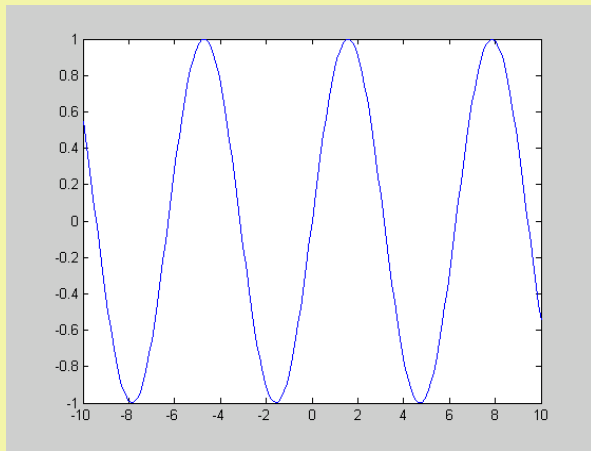
$$E/\ln(L)$$

La **entropía** es también una medida de incertidumbre, cuando **vale cero** corresponde a máxima información y al mismo tiempo mínimo contraste, mientras que para una imagen con **distribución uniforme**, corresponde a una incertidumbre máxima con máximo contraste.

Capítulo 2. La transformada de Fourier

- Jean Baptiste Joseph **Fourier** presentó en 1807 sus resultados sobre la propagación y \Rightarrow difusión del calor en el Instituto de Francia.
- Proponía que una señal periódica se podía representar mediante series sinusoidales.
- Onda cuadrada: $\text{sen}(x)$ más el armónico $(1/3)\text{sen}(3x)$
- Representación de ondas cuadradas:

$$f(x) = \text{sen}(x) + \frac{1}{3} \text{sen}(3x) + \frac{1}{5} \text{sen}(5x) + \frac{1}{7} \text{sen}(7x) + \frac{1}{9} \text{sen}(9x)$$



Capítulo 2. Transformada de Fourier

Onda cuadrada

una composición de sinusoides que varían en **frecuencia y amplitud**.

Cualquier señal es una composición de señales de diferentes frecuencias.

Las señales de audio serán unidimensionales.

Las **imágenes** serán señales **bidimensionales**.

La frecuencia espacial de una imagen se refiere a la tasa de cambio de la intensidad luminosa de los píxeles.

Para estudiar la composición de las frecuencias de una señal es conveniente analizarla en el **dominio de las frecuencias** donde se muestra la magnitud de las diferentes componentes de frecuencias.

Capítulo 2. La transformada de Fourier

Transformada de Fourier:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(xu + yv)} dx dy$$

$$e^{-ix} = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x)$$

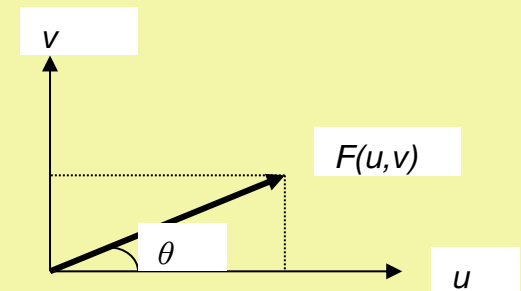
- ¿Qué es? **Es una descomposición de la imagen en estructuras periódicas.**
- Las variables u y v se llaman **frecuencias absolutas**. También se pueden utilizar las variables $\omega_1 = 2\pi u$ y $\omega_2 = 2\pi v$, que se llaman **frecuencias angulares**.

- Su magnitud se llama **espectro de Fourier**:

$$|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}$$

- Ángulo de **fase**:

$$\theta(u, v) = \operatorname{arctang} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$



Capítulo 2. La transformada de Fourier

Transformada inversa de Fourier:


$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i(xu + yv)} du dv$$

Interpretación de la Transformada de Fourier: Nos da los coeficientes de ponderación en las diferentes frecuencias de las funciones exponenciales complejas (patrones sinusoidales) que nos conducen al valor de la función $f(x, y)$ como límite de estas sumas ponderadas.

Propiedades de la Transformada de Fourier:

Operador lineal $T(af(x, y) + bg(x, y)) = aT(f(x, y)) + bT(g(x, y)), \quad a \in R, b \in R.$

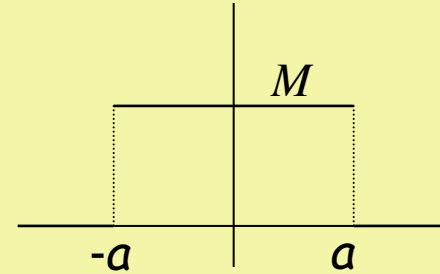
Convolución $T([f \otimes g](x, y)) = T(f(x, y)) \times T(g(x, y)) = F(u, v) \times G(u, v)$


$$[f \otimes g](x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) g(x - s, y - t) ds dt$$

Capítulo 2. La transformada de Fourier

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} M & \text{si } |x| \leq a \\ 0 & \text{si } |x| > a \end{cases}$$

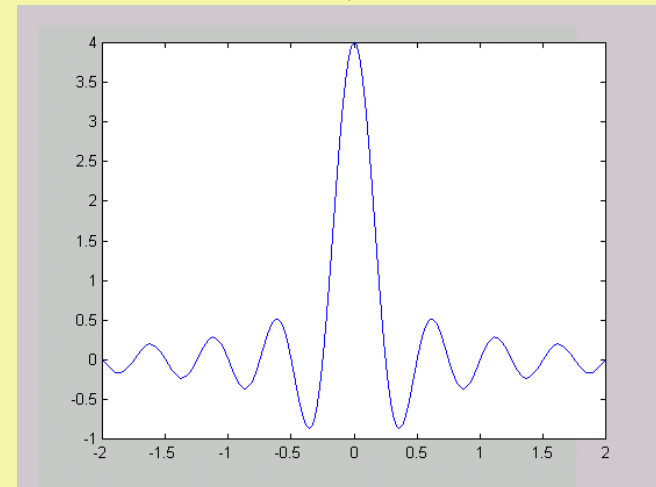


$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i u x} dx = \int_{-a}^a M e^{-2\pi i u x} dx$$

$$= M \left[-\frac{e^{-2\pi i u x}}{2\pi i u} \right]_{-a}^a = M \left[\frac{e^{2\pi i u a} - e^{-2\pi i u a}}{2i} \right] \frac{1}{\pi u}$$

$$= M \frac{\text{sen}(2\pi u a)}{\pi u} = 2aM \frac{\text{sen}(2\pi u a)}{2\pi u a}$$

$$= 2aM \text{senc}(2\pi u a)$$



Capítulo 2. La transformada de Fourier

Fuente puntual: sucesión de imágenes cuyos valores no nulos se van concentrando sucesivamente en un punto del espacio, manteniendo su nivel total de luminosidad.

Cualquier imagen se puede considerar como una suma de fuentes puntuales.

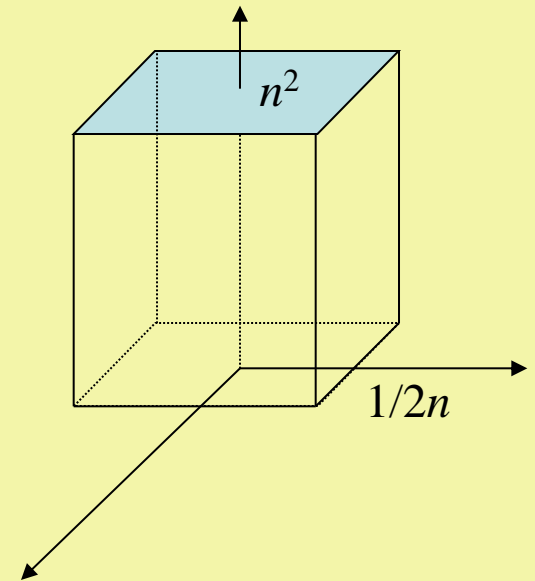
La función que transforma una fuente puntual se llama *función de esparsamiento*.

$$\delta_n(x, y) = \begin{cases} n^2 & \text{si } |x| \leq 1/(2n), |y| \leq 1/(2n) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x, y) dx dy = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Función Delta de Dirac. $\delta_n(x, y)$

$$T(\delta_n(x, y)) = \frac{\text{sen}(\pi u / n)}{\pi u / n} \frac{\text{sen}(\pi v / n)}{\pi v / n} \rightarrow 1$$



Capítulo 2. La transformada de Fourier discreta

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) e^{-2\pi i \left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right)}$$

$$u = 0, 1, 2, \dots, M-1, \quad v = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$F(0, 0) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)$$

Inversa:

$$f(m, n) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2\pi i \left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right)}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, M-1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Capítulo 2. La transformada de Fourier discreta

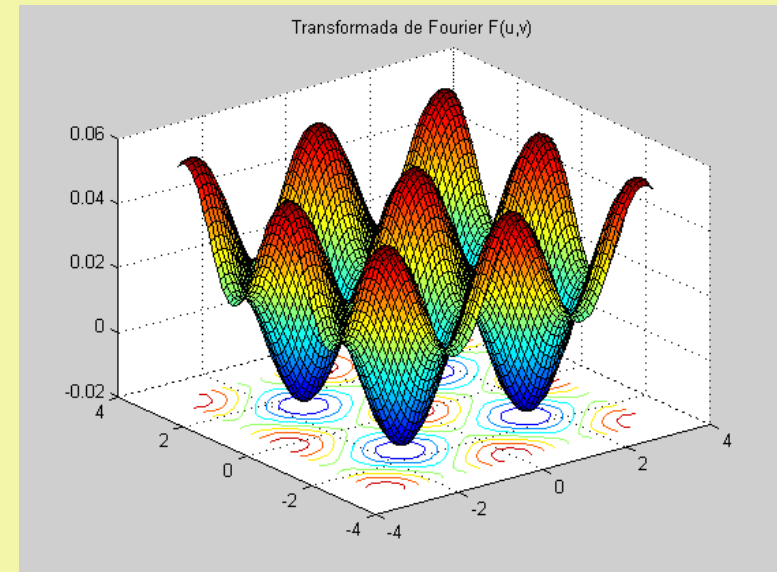
Ejemplo:

$$f \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} n= \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}$$
$$m = \begin{matrix} -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

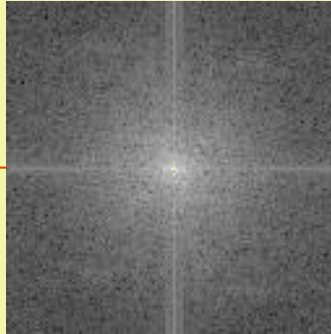
$$F(u, v) = \frac{1}{9} \left[\frac{1}{6} e^{-2\pi i \left(\frac{0u}{3} + \frac{1v}{3} \right)} + \frac{1}{6} e^{-2\pi i \left(\frac{(-1)u}{3} + \frac{0v}{3} \right)} + \frac{1}{6} e^{-2\pi i \left(\frac{0u}{3} + \frac{0v}{3} \right)} + \frac{1}{6} e^{-2\pi i \left(\frac{1u}{3} + \frac{0v}{3} \right)} + \frac{1}{6} e^{-2\pi i \left(\frac{0u}{3} + \frac{(-1)v}{3} \right)} \right]$$

$$= \frac{1}{54} \left[e^{-2\pi i v/3} + e^{2\pi i v/3} + 1 + e^{2\pi i u/3} + e^{-2\pi i u/3} \right]$$

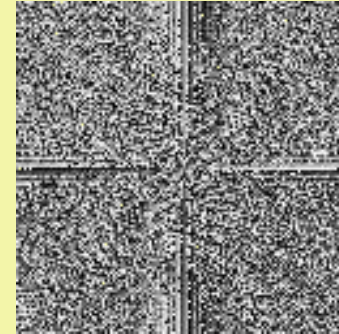
$$= \frac{1}{54} \left[1 + \cos(2\pi u/3) + \cos(2\pi v/3) \right]$$



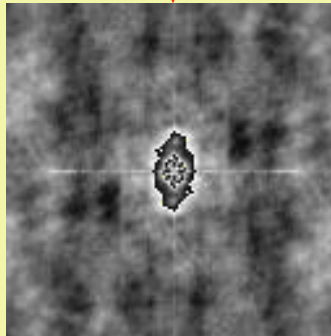
Capítulo 2. La transformada de Fourier discreta



Log (Magnitud)



Fase



Reconstrucción a
partir de la magnitud
(con fase=0)



Reconstrucción a
partir de la fase (con
módulo constante)