ODE review

一、初等积分法

1.一阶线性 ODE 通解

$$y' + p(x)y = f(x) \longrightarrow y = \frac{1}{\mu}(\int f(x)\mu \mathrm{d}x + C) \quad \mu = e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$$

一些换元方法:

a.齐次换元

$$y' = f(\frac{y}{x}) \quad \frac{y}{x} \to u$$

b.伯努利方程

$$y' + p(x)y = f(x)y^n \longrightarrow y'y^{-n} + p(x)y^{-n+1} = f(x) \quad y^{-n+1} \to z$$

要求$p(x)$与y'间相差一个y.

c.降阶

$$y' \to p \quad \begin{cases} y'' = f(y', x) & (\text{不含}y\text{的情况}) \\ y'' = f(y', y) & (\text{不含}x\text{的情况}) \end{cases}$$

2.全微分方程 *exact differential*

$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$成为全微分方程的充要条件:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

则可以积分解出原函数u:

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\mathrm{d}u\to P=\frac{\partial u}{\partial x}\to u=\int P+\varphi(y)\to\frac{\partial u}{\partial y}=Q\to\varphi(y).$$

$$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0\to u=C$$

可以寻找积分因子μ使得$\mu P\mathrm{d}x+\mu Q\mathrm{d}y$是全微分.

常见形式:

$$\begin{cases}\mu=e^{\int f(x)\mathrm{d}x} & f(x)=\frac{1}{P}(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})\\ \mu=e^{\int f(y)\mathrm{d}x} & f(y)=\frac{1}{Q}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\end{cases}$$

也可以凑微分:

$$y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\mathrm{d}(xy)\quad\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}(xy)$$

$$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}(\arctan\frac{x}{y})\quad\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2-y^2}=\mathrm{d}(\frac{1}{2}\ln|\frac{x-y}{x+y}|)$$

二、线性微分方程 *Linear ODE*

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)$$

基本结论:

1. 若系数$p_i(x)$连续，则方程在初值条件下**存在唯一解**.
2. $y_1,y_2\cdots y_n$线性无关$\iff$ Wronsky行列式$=0$.
3. n阶齐次线性微分方程的通解一定由n个线性无关的特解张成.
4. 非齐次线性微分方程的通解由对应**齐次方程的通解**加**非齐次部分的特解**组成.

1.常系数

a.齐次部分:

考虑微分方程对应的特征方程.

k重实根λ:

$$(c_0 + c_1 x + \cdots + c_{k-1} x^{k-1}) e^{\lambda x}$$

k重虚根$\alpha \pm \beta i$:

$$[(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1} x^{k-1}) \cos \beta x + (b_0 + b_1 x + \cdots + b_{k-1} x^{k-1}) \sin \beta x] e^{\alpha x}$$

b.非齐次部分:

- $f(x) = (c_0 + c_1 x + \cdots + c_{m-1} x^{m-1}) e^{\lambda x} = P_m(x) e^{\lambda x}$
  特解：$y^* = x^k R_m(x) e^{\lambda x}$，$k$为$\lambda$作为特征根的重数.
- $f(x) = P_m(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_l(x) e^{\alpha x} \sin \beta x \quad h = max\{m, l\}$
  特解：$y^* = x^k e^{\alpha x} (M_h(x) \cos \beta x + N_h(x) \sin \beta x)$，$k$为$\alpha \pm \beta i$作为特征根的重数.
- 可将非齐次部分拆成上面的形式，分别求出特解后再相加.

2.变系数

(1)欧拉方程

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \quad x \to e^t$$

(2)刘维尔公式

对于$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$，若已得到一非零解$y_1$,则其通解为

$$y = y_1 [c_1 + c_2 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) \mathrm{d}x} \mathrm{d}x]$$

(3)换元法

对于$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$，如果其系数满足条件

$$2p' + p^2 - 4q = a$$

则令$v=e^{-\int\frac{2}{p}}$，$y=uv$，方程即化简为

$$u''-\frac{a}{4}u=0$$

(4)常数变易法

对于$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f(x)$，若已得到其对应齐次方程的通解$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$，设$y=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$为其特解，则

$$\begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1'\\ u_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ f(x)\end{pmatrix}$$

也即

$$\begin{cases}u_1'y_1(x)+u_2'y_2(x)=0\\ u_1'y_1'(x)+u_2'y_2'(x)=f(x)\end{cases}$$

三、线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x}(t)=A\vec{x}(t)+\vec{f}(t)$$

1.齐次

求出系数矩阵A的特征值与对应特征向量，可得解中一项 $\vec{v}e^{\lambda t}$.

- 特征值为复数：通过欧拉公式展开，分别取实部虚部即可得两项.
- 特征值重数大于1：
  对于特征值λ，由$(A-\lambda I)\vec{v}=0$求出**广义特征向量**$\vec{v_0}^{(1)},\vec{v_0}^{(2)},\cdots,\vec{v_0}^{(n)}$，并按需计算$\vec{v_1}^{(1)}=(A-\lambda I)\vec{v_0}^{(1)},\vec{v_2}^{(1)}=(A-\lambda I)\vec{v_1}^{(1)}\cdots$
  则可得到解中一项

$$\vec{x}=(\vec{v_0}^{(k)}+\vec{v_1}^{(k)}t+\vec{v_2}^{(k)}\frac{t^2}{2!}+\cdots)e^{\lambda t}$$

2.非齐次

设对应齐次方程组的解矩阵为$X(t)$,用常数变易法:

$$\vec{x}=X(t)c\to\vec{x}=X(t)u(t)$$

其中

$$X(t)u'(t)=f(t)\to u(t)=\int X^{-1}(t)f(t)\mathrm{d}t$$

由此得到通解

$$\vec{x}=X(t)(c+u(t))$$

> `2023/7/1 by 1639.`