MAT-36 - CÁLCULO VETORIAL
MACACÁRIO

Prof. Alencar

200 e MACACOS

CURVAS NO PLANO

Definição 1. Curva Regular

γ de classe C^1; $\gamma'(t) \neq 0, \ \forall t$

Comprimento de arco:

$$L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)|| \, dt$$

Reta tangente e normal a $\gamma(t_0)$:

$$T: \ X = \gamma(t_0) + \lambda \cdot \gamma'(t_0)$$
$$N: \{ X \in \mathbb{R}^2 : \langle X - \gamma(t_0), \ \gamma'(t_0) \rangle = 0 \}$$

Orientação da curva:

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \ \gamma_-(t) = \gamma(a+b-t)$$

Definição 2. Curva SIMPLES

Injetiva

Definição 3. Curva FECHADA

$\gamma(a) = \gamma(b)$

Reparametrização: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ regular e $g : [c,d] \to [a,b]$ contínua e bijetiva

$$\Gamma(u) = \gamma(g(u))$$
$$\Gamma'(u) = \gamma'(g(u)) \cdot g'(u)$$
$$g'(u) \neq 0, \ \forall u \Rightarrow \Gamma \text{ regular}$$
$$L(\gamma) = L(\Gamma)$$

Parametrização pelo comprimento de arco:

$$s(t) = \int_0^t ||\gamma'(v)|| \, dv$$

$\Gamma(u) = \gamma(s^{-1}(u))$ está parametrizada pelo comprimento de arco:

$$\Gamma'(u) = \frac{\gamma'(s^{-1}(u))}{||\gamma'(s^{-1}(u))||} \Rightarrow ||\Gamma'(u)|| = 1$$

Referencial de Frenet:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}$$

$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ A(x,y) = (-y, x)$

$$N(t) = A(T(t))$$

$(T(t), N(t))$ é uma base **ORTONORMAL POSITIVA** e é chamado **REFERENCIAL DE FRENET (no plano)**.

$$K(s): \text{ Curvatura de } \gamma \text{ em } \gamma(s)$$
$$K(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$$
$$K(t) = \frac{1}{||\gamma'(y)||^2} \cdot \langle \gamma''(t), N(t) \rangle$$

Equações de Frenet:

$$\begin{cases} T'(s) = \ \ K(s) \cdot N(s) \\ N'(s) = -K(s) \cdot T(s) \end{cases}$$

Centro de curvatura:

$$R(s_0) = \frac{1}{||K(s_0)||}$$

$$C(s_0) = \gamma(s_0) + \frac{N(s_0)}{K(s_0)}$$

Obs.: A **evoluta** de γ é a curva

$$C(s) = \gamma(s) + \frac{N(s)}{K(s)}$$

CURVAS NO ESPAÇO

Vetor tangente unitário

$$T(s) = \gamma'(s) \qquad T(t) = \frac{\gamma'(s)}{||\gamma'(s)||}$$

Vetor normal principal

$$N \perp T \qquad N(s) = \frac{\gamma''(s)}{||\gamma''(s)||}$$

Vetor binormal

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

Triedro de Frenet

$(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ É uma base ortonormal positiva

Plano Normal a $\gamma(s)$

$$\langle\, X - \gamma(s),\ T(s)\,\rangle = 0$$

Plano osculador: Plano paralelo a T(s) e N(s).

$$X = \gamma(s) + \alpha T(s) + \beta N(s)$$

Plano retificante: Plano paralelo a T(s) e B(s)

$$X = \gamma(s) + \alpha T(s) + \beta B(s)$$

Curvatura (K)

$$K(s) = ||\gamma''(s)||$$

Equações de Frenet

$$\begin{cases} T'(s) = K(s) \cdot N(s) \\ N'(s) = -K(s) \cdot T(s) - \tau(s) \cdot B(s) \\ B'(s) = \tau(s) \cdot N(s) \end{cases}$$

Curvatura e Torção relativas a um parâmetro qualquer

$$\begin{cases} \tau(t) = -\dfrac{\langle \gamma' \times \gamma'',\ \gamma''' \rangle}{||\gamma' \times \gamma''||^2} \\ K(t) = \dfrac{||\gamma' \times \gamma''||}{||\gamma'||^3} \end{cases}$$

Referencial de Frenet relativo a um parâmetro qualquer

$$\begin{cases} T(t) = \dfrac{\gamma'}{||\gamma'||} \\ B(t) = \dfrac{\gamma' \times \gamma''}{||\gamma' \times \gamma''||} \\ N(t) = B \times T \end{cases}$$

Obs: Se $K(s) \neq 0$ e $\tau(s) = 0,\ \forall s$, então a curva pertence a um plano normal a $B(s) =$ constante

INTEGRAIS DE LINHA

Definição 4. Integral de linha de um campo escalar

$$\int_\gamma f\ d\gamma = \int_a^b f(\gamma(t))||\gamma'(t)||\ dt$$

Definição 5. Integral de linha de um campo vetorial

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma = \int_a^b \langle\, F(\gamma(t)),\ \gamma'(t)\,\rangle\ dt$$

Teorema 1. Teorema de Green

$$\int_{\partial\Omega} P\ dx + Q\ dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$: domínio
$\partial\Omega$ (fronteira de Ω): C^1 por partes, simples, fechada e orientada positivamente.
P, Q: funções de classe C^1 em $U \supset \overline{\Omega}$

Definição 6. Campo Gradiente

$F = (P, Q, R)$ contínuo

$\xRightarrow[F(x,y,z)=\nabla f(x,y,z)]{\exists\ f \text{ campo escalar } C^1}$ **F é campo gradiente**

f é potencial escalar de F.

$$\text{F é gradiente} \iff \text{F é conservativo} \iff \int_\gamma F \cdot d\gamma = 0$$

γ simples e fechada

Definição 7. Campo Rotacional

$F = (P, Q, R)$ campo vetorial C^1

$$rot\ \mathrm{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

F é conservativo $\Rightarrow rot\ \mathrm{F} = 0$

$\not\Leftarrow$ A volta nem sempre ocorre

Obs.: No plano, por outro lado,

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ domínio simplesmente conexo} \\ \bullet\ F = (P, Q) \text{ de classe } C^1 \text{ em } \Omega \\ \bullet\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{F é conservativo}$$

Obs.: Potencial vetorial

F, G campos vetoriais

$rot\ \mathrm{G} = F \Rightarrow$ G é potencial vetorial para F

Definição 8. Divergente de um campo vetorial

$F = (P, Q, R)$ campo vetorial C^1

$$div\ \mathrm{F} = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)$$

div F é um campo escalar.

- F é solenoidal quando div F$= 0$
- $F = rot\ \mathrm{G} \Rightarrow div\ \mathrm{F} = 0$
- div $F \neq 0 \Rightarrow$ F não é rotacional ($\nexists G\ C^2\ /\ F = \text{rot } G$)

Diagrama de equivalências de um campo vetorial sobre um domínio Ω

$$\begin{tikzcd}
\textbf{F conservativo} \arrow[rr, Leftrightarrow, "\Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ domínio}"] \arrow[dr, Rightarrow, "\Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ domínio}"'] & & \textbf{F gradiente} \\
& rot\ \mathbf{F} = 0 \arrow[ur, Rightarrow, "\Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ domínio simplesmente conexo.}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$F(P, Q): \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

SUPERFÍCIES PARAMETRIZADAS

Definição 9. Superfície parametrizada do $\mathbb{R}^3$

$U \subset \mathbb{R}^2$ $(\mathring{U} \neq \emptyset)$. $X : U \to \mathbb{R}^3$, C^1 tal que $J(\chi)(u, v)$ tenha posto 2 $\forall (u, v) \in U$

$$\chi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),\ (u, v) \in U$$

$$J(\chi)(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

$$\chi_u(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)(u, v)$$

$$\chi_v(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)(u, v)$$

Definição 10. Produto Fundamental de χ

$$(\chi_u \times \chi_v)(u_0, v_0) = (\chi_u \times \chi_v)(u_0, v_0)$$

Definição 11. Superfície parametrizada regular

$S = \chi(U)$ diferenciável

$$(\chi_u \times \chi_v)(u, v) \neq \vec{0}\ \ \forall (u, v) \in U$$

Definição 12. Vetor normal principal

$S = \chi(U)$ é uma superfície regular

$$N(u_0, v_0) = \frac{(\chi_u \times \chi_v)(u_0, v_0)}{||(\chi_u \times \chi_v)(u_0, v_0)||}$$

Definição 13. Plano tangente

$$\Big\langle (x, y, z) - P,\ (\chi_u \times \chi_v)(u_0, v_0) \Big\rangle = 0$$

ou

$$\chi = \chi(u_0, v_0) + \lambda \chi_u(x_0, y_0) + \mu \chi_v(u_0, v_0)$$

Definição 14. Área de uma superfície

$S = \chi(U)$ uma superfície regular limitada.

$$A(S) = \iint_U ||(\chi_u \times \chi_v)(u, v)||\ du dv$$

INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

Definição 15. Orientação de Superfície
$S = \chi(U)$ é **orientável** quando existe um campo de vetores unitários e ortogonais a S de maneira contínua

$$(u,v) \in U \longmapsto \left(\chi(u,v), \frac{(\chi_u \times \chi_v)(u,v)}{||(\chi_u \times \chi_v)(u,v)||}\right)$$

Definição 16. Integral de superfície
$S = \chi(U)$: superfície regular.
Campo escalar:

$$\iint_S f\ dS = \iint_U f(\chi(u,v))||(\chi_u \times \chi_v)(u,v)||dudv$$

Campo vetorial:

$$\iint_S F \cdot n\ dS = \pm \iint_U F(\chi(u,v)) \cdot (\chi_u \times \chi_v)\ dudv$$

$+$ se n tiver o mesmo sentido de $(\chi_u \times \chi_v)$
$-$ se tiver sentido contrário a $(\chi_u \times \chi_v)$.

$$= \iint_U \Big\langle F(\chi(u,v)), n(u,v)\Big\rangle ||\chi_u \times \chi_v||\ dudv$$

Massa e centro de massa

ρ: densidades linear, superficial ou volumétrica.
(a) Fio $C = \gamma(t)$:

$$M = \int_C \rho(t)\ d\gamma$$

$$\overline{x} \cdot M = \int_C x(t)\rho(t)\ d\gamma$$

(b) Superfície $S = \chi(u,v)$:

$$M = \iint_S \rho(u,v)\ dS$$

$$\overline{x} \cdot M = \iint_S x(u,v)\rho(u,v)\ dS$$

(c) Sólido Ω:

$$M = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)\ dV$$

$$\overline{x} \cdot M = \iiint_\Omega x\rho(x,y,z)dV$$

Análogos para $\overline{y}$ e $\overline{z}$.

Momento de Inércia

Superfície $S = \chi(u,v)$:

$$I_L = \iint_S \delta^2(u,v)\rho(u,v)\ dS$$

$\delta(u,v)$: distância do ponto $\chi(u,v) \in S$ ao eixo L.
Obs.: Raio de Giração (r_L)

$$I_L = r_L^2 \cdot M$$

M: massa de V.

Teorema 2. Teorema de Pappus para a área

$$A(S) = 2\pi d L(C)$$

d: distância do centro de massa de C ao eixo z
L(C): comprimento de C.
S: revolução de C em torno do eixo z.

Teorema 3. Teorema de Pappus para o volume

$$V(S) = 2\pi d A(R)$$

d: distância do centro de massa de R ao eixo z.
A(R): área de R.
S: revolução de R em torno do eixo z.

Definição 17. Bordo de uma superfície
$S = \chi(U)$ regular por partes. γ com tr $\gamma \in S$ é bordo de S $\iff \forall P \in$ tr γ (exceto eventualmente num número finito de pontos), $\exists D_r(P)$ um disco contido no plano normal à γ em P tal que $D_r(P) \cap S$ seja curva contínua de S em que P é ponto extremo.

Teorema 4. Teorema de Gauss no plano

$$\int_\gamma F \cdot N\ d\gamma = \iint_R \text{div}\ F\ dxdy$$

γ: curva regular por partes, simples e fechada.
R: região limitada por γ
N: normal exterior.
F: campo vetorial de classe C^1 sobre $\overline{R}$

Teorema 5. Teorema de Gauss no espaço

$$\iint_S F \cdot N\ dS = \iiint_R \text{div}\ F\ dxdydz$$

$S = \chi(U)$: regular, simples e fechada orientada com a normal exterior N
F: campo vetorial de classe C^1 sobre a região limitada por S.

Teorema 6. Teorema de Stokes no espaço

$$\int_{\partial S} V \cdot d\gamma = \iint_S (\text{rot } V \cdot n)\, dS$$

S: superfície regular orientável e limitada
V: campo vetorial de classe C^1 sobre S
∂S com orientação induzida por n.

Teorema 7. Teorema de Stokes no plano

$$\int_{\partial S} V \cdot d\gamma = \iint_S (\text{rot } V \cdot n)\, dS$$

S: superfície plana e simplesmente conexa com bordo de classe C^1.
V: campo vetorial de classe C^1 sobre S.
∂S com orientação induzida por n. .

Corolário 1:
S regular fechada com normal exterior n.

$$\iint_S \text{rot } V \cdot n\, dS \overset{Gauss}{=\!=} \iiint_R \text{div}(\text{rot } V)\, dxdydz = 0$$

R: região limitada por S.
V: campo vetorial de classe C^2 sobre R.

Corolário 2:
S: superfície regular por partes, simples e fechada.

$$\iint_S \text{rot } V \cdot n\, dS = 0$$

V: campo vetorial de classe C^1 sobre S.
n: orientação de S.

Corolário 3:
S_1 e S_2: superfícies regulares por partes tais que

$$\partial S_1 = \partial S_2$$

n_1 e n_2: orientações de S_1 e S_2, respectivamente, de modo que n_1 e n_2 induzem a mesma orientação γ no bordo comum de S_1 e S_2.
V: campo vetorial de classe C^1 sobre $S_1 \cap S_2$

$$\iint_{S_1} \text{rot } V \cdot n_1\, dS = \iint_{S_2} \text{rot } V \cdot n_2\, dS$$

Interpretação: A integral de superfície de um campo rotacional depende apenas do bordo.

Pontencial Vetorial

Definição 18. Conjunto estrelado ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$):

$$\exists P \in \Omega \text{ tal que } \overline{PQ} \subset \Omega,\ \forall Q \in \Omega$$

$$\begin{matrix}\text{F é rotacional} \\ (F = \text{rot } G,\ G\ C^2)\end{matrix} \xLeftrightarrow{\Omega\subset\mathbb{R}^3:\ \text{CONVEXO}} \text{div } F = 0$$

Satisfeito o teorema acima, para encontrar G, podemos supor que uma das coordenadas de G é zero.

$$\text{div } F = 0 \xRightarrow[\text{estrelado}]{\Omega\subset\mathbb{R}^3:\ \text{conjunto}} \text{F é rotacional}$$

Rotacional e campos conservativos no $\mathbb{R}^3$

Definição 19. Conjunto simplesmente conexo no $\mathbb{R}^3$:

$$\forall \gamma\ C^1,\ \exists\ S \subset \Omega,\ C^1 \text{ tal que } \partial S = \text{tr } \gamma$$

$\gamma:\ C^1$ por partes, simples e fechada de Ω
$S:\ C^1$ por partes, simples e orientável

$$\text{F é conservativo} \xLeftrightarrow[\text{conexo, F classe } C^2]{\Omega\subset\mathbb{R}^3\ \text{simplesmente}} \text{rot } F = 0$$

Equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,y,z,t) = -\text{div } (\rho v)(x,y,z,t)$$

ρ: densidade
v: velocidade

Fluido incompressível ($\rho = cte$)

$$\text{div } (v)(x,y,z,y) = 0$$

"Só o macaco salva!"

O 200 e macacos não se responsabiliza por quaisquer surpresas durante a prova =)