ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

MÔN: ĐỒ HỌA MÁY TÍNH

Vẽ các đối tượng đồ họa 2D

Học viên:
Đoàn Minh Hiếu – 1612198

Giáo viên phụ trách:
Võ Hoài Việt

October 14, 2018

1 Đường thẳng

Phương trình đường thẳng tổng quát:

$$F(x, y) = ax + by + c \tag{1}$$

Đề bài: Cho 2 điểm A(xa,ya), B(ya,yb). Vẽ đường thẳng đi từ A đến B.
Ta chỉ vẽ đường thẳng chạy từ trái sang phải và x tăng. Vì các trường hợp khác có thể hoán đổi tọa độ và lấy đối xứng qua đường thẳng y=x.

1.1 Digital Different Analyzer Algorithm (DDA)

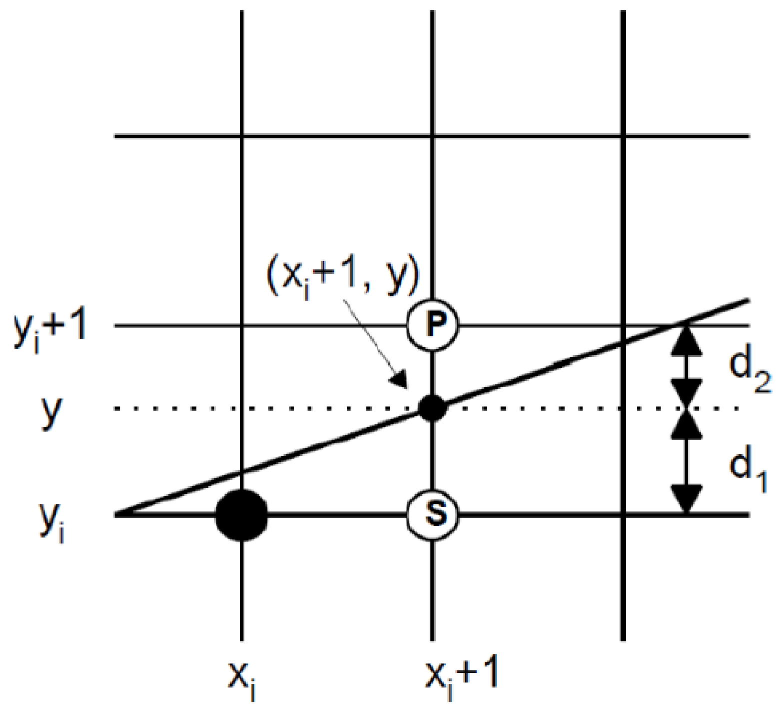
Xét

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yb - ya}{xb - xa}$$

Nếu $\frac{dy}{dx} < 1$: Biến chạy là x, dùng x thế vào (1) để tính y. Làm tròn y ta được round_y, sau đó vẽ pixel(x,round_y) với round_y = (int)(y+0.5)

Nếu $\frac{dy}{dx} > 1$: Biến chạy là y, dùng y thế vào (1) để tính x. Làm tròn x ta được round_x, sau đó vẽ pixel(round_x,y) với round_x = (int)(x+0.5)

1.2 Bresenham Algorithm



Ta xét trường hợp x chạy, chọn y ($dx > dy$).
Từ điểm (x_i, y_i) ta tiến đến điểm tiếp theo là điểm $P(x_i + 1, y_i + 1)$ hoặc điểm $S(x_i + 1, y_i)$.
Tọa độ y đúng theo công thức sẽ là:

$$y = \frac{dy}{dx}(x_i + 1) + b$$

Vì tọa độ các pixel đều là số nguyên nên ta chỉ có thể chọn giữa điểm P hay điểm S trong hình vẽ. Hay nói cách khác là $y_{i+1} = y_i$ hoặc $y_{i+1} = y_i + 1$.Tham số quyết định chọn điểm nào từ điểm xuất phát (x_i, y_i) là p_i.
Ta có:

$$d_1 = y - y_i = \frac{dy}{dx}(x_i + 1) + b - y_i$$

$$d_2 = (y_i + 1) - y = (y_i + 1) - \frac{dy}{dx}(x_i + 1) - b$$

$$d_1 - d_2 = (y - y_i) - (y_i + 1 - y)$$

$$d_1 - d_2 = \frac{dy}{dx}(x_i + 1) + b - y_i - ((y_i + 1) - \frac{dy}{dx}(x_i + 1) - b)$$

$$d_1 - d_2 = 2\frac{dy}{dx}(x_i + 1) - 2y_i + 2b - 1$$

$$p_i = dx(d_1 - d_2) = 2dy(x_i + 1) - 2dx.y_i + 2bdx - dx$$

Đặt

$$p_i = dx(d_1 - d_2) = 2dy(x_i + 1) - 2dx.y_i + 2bdx - dx$$

Ta được tham số quyết đinh p_i (Decision Parameter).
Từ

$$p_i \Rightarrow p_{i+1} = 2dy(x_i + 2) - 2dxy(i + 1) + 2bdx - 1dx$$

Ta xét dấu của tham số quyết định p_i:
Nếu $p_i \geq 0$: nghĩa là $d1 > d2 \Rightarrow$ chọn điểm S $\Rightarrow y_{i+1} = y_i$

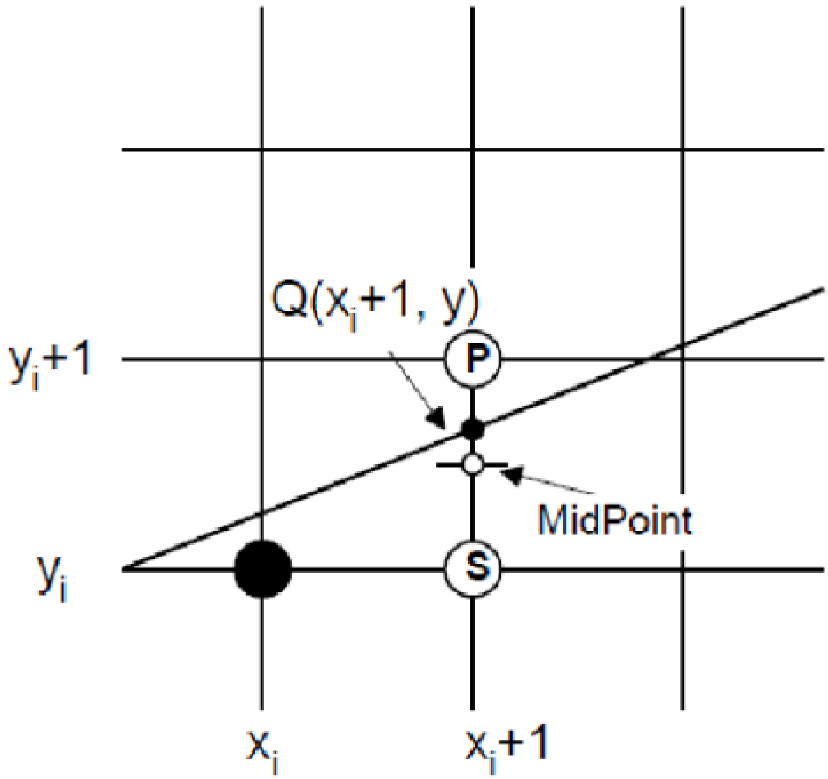
$$\Rightarrow p_{i+1} - p_i = 2dy$$

Nếu $p_i < 0$: nghĩa là $d1 < d2 \Rightarrow$ chọn điểm P $\Rightarrow y_{i+1} = y_i + 1$

$$\Rightarrow p_{i+1} - p_i = 2dy - 2dx$$

Tham số khởi tạo p_0, điểm đầu tiên ta vẽ là (xa,ya)
$\Rightarrow p_0 = 2dy - dx$ (với $b = ya - \frac{dy}{dx}xa$)

1.3 Midpoint Algorithm



Ý tưởng: xét vị trí tương đối của điểm chính giữa P và S (midpoint M). Nếu M nằm dưới đường thẳng, chứng tỏ P nằm gần đường thẳng hơn, ta chọn P. Ngược lại ta chọn S.
Với ý tưởng đó, ta đặt:

$$P_i = F(x_i + 1, y_i + \frac{1}{2})$$

$$P_i = F(x_i + 1, y_i + \frac{1}{2}) = a(x_i + 1) + b(y_i + \frac{1}{2}) + c$$

$$P_{i+1} = a(x_i + 2) + b(y_{i+1} + \frac{1}{2}) + c$$

Trường hợp:
Với giả thiết vẽ đường thẳng như đề bài thì:
$P_i < 0$: M nằm trên AB, chọn S, tức là $y_{i+1} = y_i$

$$P_{i+1} - P_i = 2a + 2b$$

$P_i > 0$: M nằm dưới AB, chọn P, tức là $y_{i+1} = y_i + 1$

$$P_{i+1} - P_i = 2a$$

Tham số khởi tạo p_0, điểm đầu tiên ta vẽ là (xa,ya)

$$P_0 = F(xa + 1, ya + \frac{1}{2}) = 2a + b$$

1.4 Xiaolin Wu Algorithm

Khi sử dụng các thuật toán DDA, Bresenham hay Midpoint thì không thể tránh khỏi hiện tượng răng cưa. Để khắc phục hiện tượng đó (antialiasing), ta dùng thuật toán vẽ đường thẳng Xiaolin Wu.

Ý tưởng: Ta cho x là biến chạy, tại mỗi thời điểm ta vẽ 2 pixel tại $S(x_i+1, yi)$ và $P(x_i + 1, y_i + 1)$ với độ tương phản trùng với tỉ lệ khoảng cách của y_i và y_{i+1} tới y thực. Điểm nào gần hơn ta vẽ pixel tại đó đậm hơn.

Hàm vẽ pixel với độ sáng tương ứng.

```
void  plotWithBrightness(ref Bitmap bitmap, int x, int y,float bright)
    {
        int c = (int)(bright * 255);
        int w = bitmap.Width, h = bitmap.Height;
        if (x >= 0 && x < w && y >= 0 && y < h)
        {
            bitmap.SetPixel(x, y, Color.FromArgb(255, c, c, c));
        }
    }
```

1.5 Đánh giá

Bảng đánh giá thời gian chạy của các thuật toán trên cùng một tập các đường thẳng như nhau. Đơn vị: ms

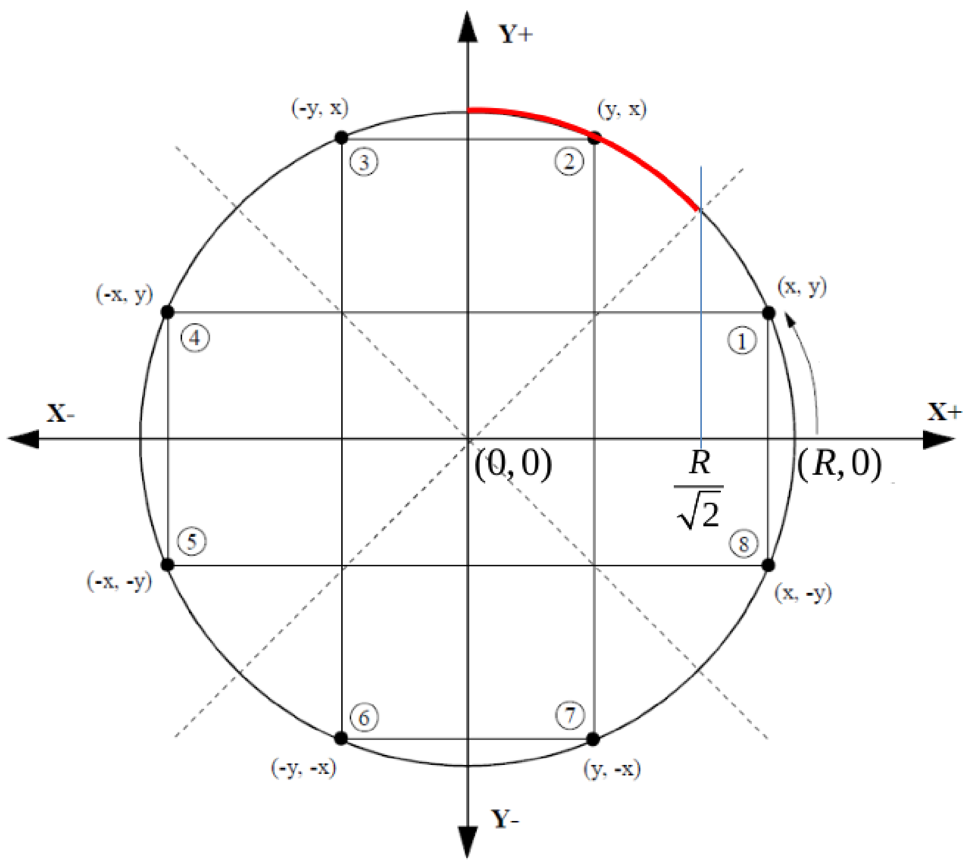
n	DDA	Bresenham	Midpoint	Xiaolin
1000	406	390	413	817
5000	2059	1980	1972	4080
10000	3994	3867	3873	8131

2 Đường tròn

Phương trình đường tròn tổng quát:

$$F(x, y) = (x - xc)^2 + (y - yc)^2 - R^2 \tag{2}$$

Ta xét tâm $(xc, yc) = (0, 0)$ vì nếu khác $(0, 0)$ ta có thể tịnh tiến hình tròn. Để ý ta thấy, đường tròn chia làm 8 phần đối xứng. Chỉ cần vẽ 1 phần và lấy đối xứng qua Ox, Oy hay phân giác là có thể hoàn thiện đường tròn.



Ta đi vẽ cung màu đỏ. Sau đó dùng hàm đối xứng để hoàn thiện đường tròn.

```
void circlePlotPoints(ref Bitmap bitmap, int x, int y)
    {
        int xCenter = center.X, yCenter = center.Y;
        mySetPixel(ref bitmap, xCenter + x, yCenter + y);
        mySetPixel(ref bitmap, xCenter - x, yCenter + y);
        mySetPixel(ref bitmap, xCenter + x, yCenter - y);
        mySetPixel(ref bitmap, xCenter - x, yCenter - y);
        mySetPixel(ref bitmap, xCenter + y, yCenter + x);
        mySetPixel(ref bitmap, xCenter - y, yCenter + x);
        mySetPixel(ref bitmap, xCenter + y, yCenter - x);
        mySetPixel(ref bitmap, xCenter - y, yCenter - x);
    }
```

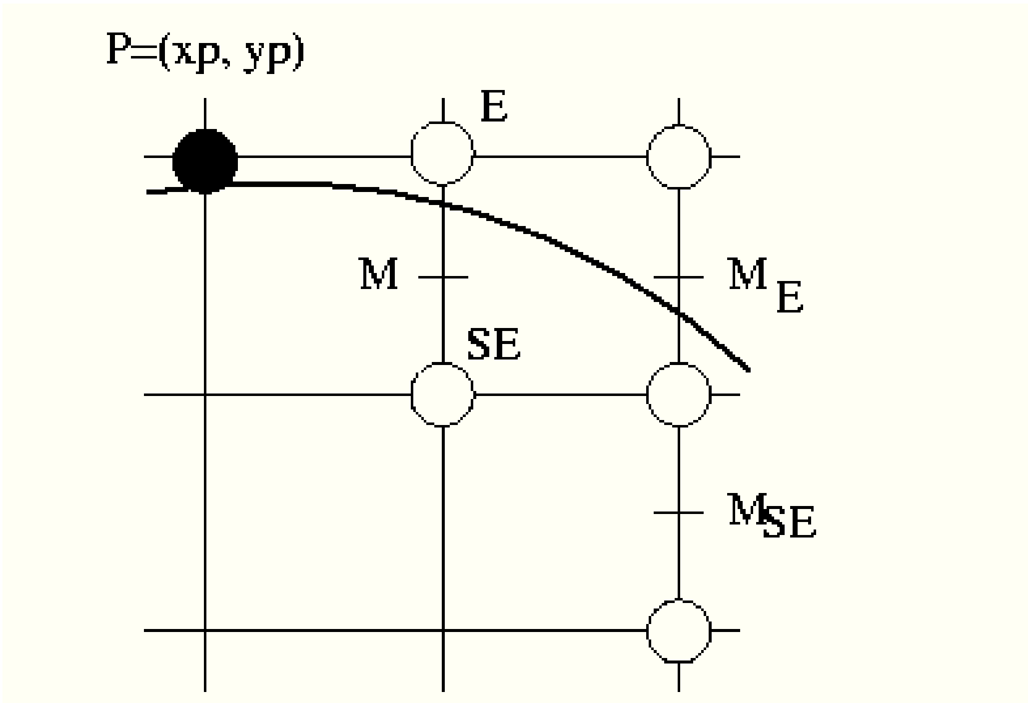
2.1 Digital Different Analyzer Algorithm (DDA)

Xét cung màu đỏ, thì biến chạy là x.
Ta cho x_i chạy từ 0 đến $x_i = y_i$, và tính y_i

$$y_i = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Ta vẽ pixel tại (xi, round_yi) với round_yi=(int)(yi+0.5)
Cùng với đó vẽ 7 pixel còn lại.

2.2 Bresenham Algorithm



Với cung ta vẽ thì x chạy và xét y. Từ điểm $P(x_i, y_i)$ thì điểm tiếp theo cần vẽ là $E(x_i + 1, y_i)$ hoặc $SE(x_i + 1, y_i - 1)$.
Khoảng cách từ E, SE đến đường tròn lần lượt là:

$$d_E = F(x_i + 1, y_i) = (x_i + 1)^2 + y_i^2 - R^2$$

$$d_{SE} = F(x_i + 1, y_i - 1) = (x_i + 1)^2 + (y_i - 1)^2 - R^2$$

Dễ thấy, SE nằm trong đường tròn nên $d_{SE} < 0$, còn $d_E > 0$. Do vậy ta xét tham số quyết định P_i.

$$P_i = d_E + d_{SE} = 2(x_i^2 + y_i^2 - R^2) - 2y_i + 4x_i + 3$$

Nếu $P_i > 0$, E ở xa hơn $\Rightarrow$ chọn SE, nên $y_{i+1} = y_i - 1$. Khi đó:

$$P_{i+1} - P_i = 4(x - y) + 10 = 4(x_{i+1} - y_{i+1}) + 2$$

Nếu $P_i < 0$, SE ở xa hơn $\Rightarrow$ chọn E, nên $y_{i+1} = y_i$. Khi đó:

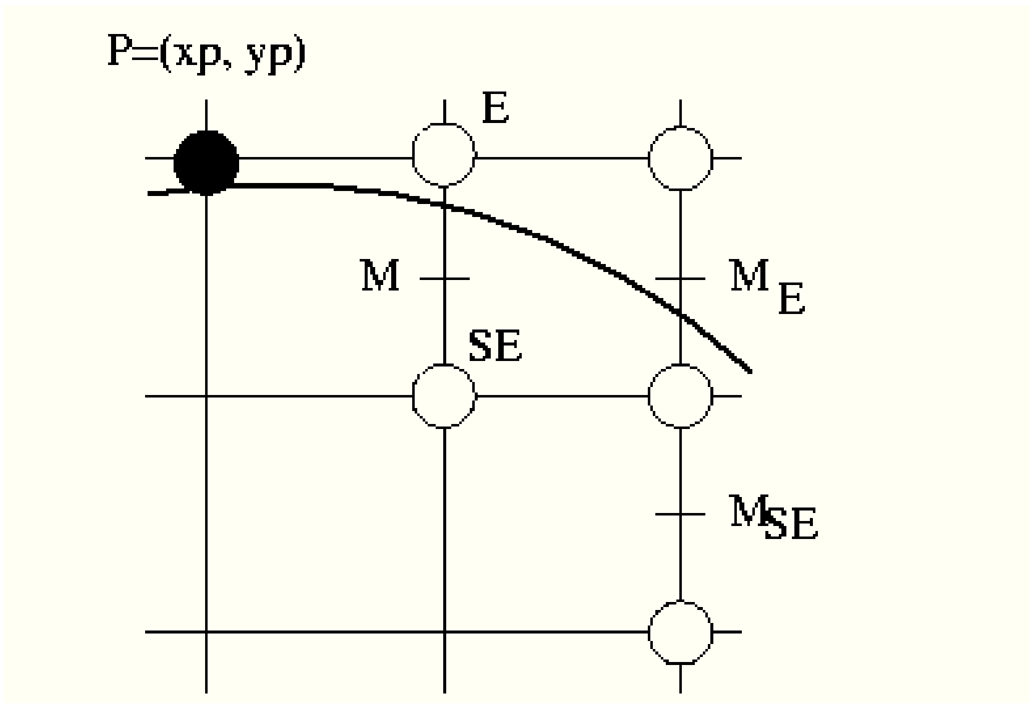
$$P_{i+1} - P_i = 4x_i + 6 = 4x_{i+1} + 2$$

Giá trị khởi tạo P_0. Vì điểm đầu tiên vẽ là (O, R), nên:

$$P_0 = 3 - 2R$$

Vẽ xong cung đỏ và dùng hàm đối xứng vẽ các phần còn lại là ta được 1 đường tròn hoàn thiện.

2.3 Midpoint Algorithm



Ý tưởng: xét vị trí tương đối của điểm chính giữa E và SE (midpoint M). Nếu M nằm trong đường tròn, chứng tỏ E nằm gần đường tròn hơn, ta chọn vẽ E. Ngược lại ta chọn vẽ SE.
Với ý tưởng đó, ta đặt:

$$P_i = F(x_i + 1, y_i + \frac{1}{2})$$

$$P_i = (x_i + 1)^2 + (y_i + \frac{1}{2})^2 - R^2$$

$$P_{i+1} = (x_i + 2)^2 + (y_{i+1} + \frac{1}{2})^2 - R^2$$

Trường hợp:
$P_i < 0$: M nằm trong đường tròn $\Rightarrow$ chọn E, tức là

$$y_{i+1} = y_i$$

$$P_{i+1} - P_i = 2x_{i+1} + 1$$

$P_i > 0$: M nằm ngoài đường tròn $\Rightarrow$ chọn SE, tức là

$$y_{i+1} = y_i - 1$$

$$P_{i+1} - P_i = 2(x_{i+1} - y_{i+1}) + 1$$

Giá trị khởi tạo P_0. Vì điểm đầu tiên vẽ là (O, R), nên:

$$P_0 = 1 - R$$

Vẽ xong cung đỏ và dùng hàm đối xứng vẽ các phần còn lại là ta được 1 đường tròn hoàn thiện.

2.4 Đánh giá

Bảng đánh giá thời gian chạy của các thuật toán trên cùng một tập các đường thẳng như nhau. Đơn vị: ms

n	DDA	Bresenham	Midpoint
1000	659	671	653
5000	3375	3359	3345
10000	6705	6676	6888

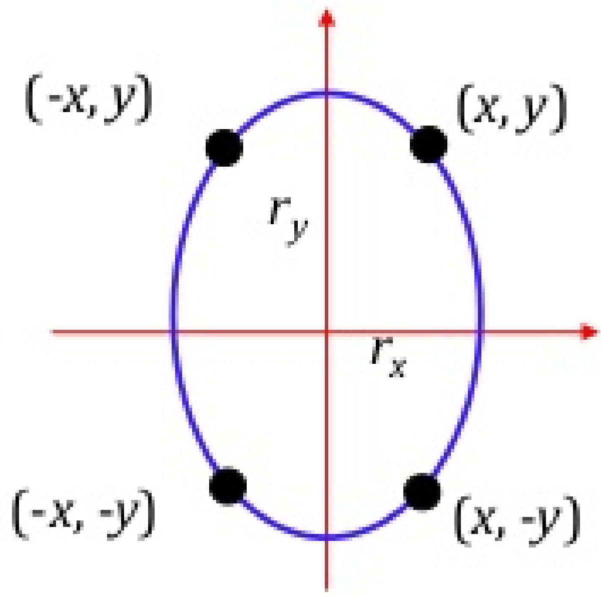
3 Đường Ellipse

Phương trình Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \quad (3)$$

Ta xét tâm $(xc, yc) = (0, 0)$ vì nếu khác $(0, 0)$ ta có thể tịnh tiến Ellipse. Để ý ta thấy, Ellipse chia làm 4 phần đối xứng. Chỉ cần vẽ 1 phần và lấy đối xứng qua Ox, Oy là có thể hoàn thiện Ellipse.



Ta đi vẽ cung (x,y). Sau đó dùng hàm đối xứng để hoàn thiện Ellipse.

```
void ellipsePlotPoints(ref Bitmap bitmap, int x, int y)
    {
        int xCenter = center.X, yCenter = center.Y;
        mySetPixel(ref bitmap, xCenter + x, yCenter + y);
        mySetPixel(ref bitmap, xCenter - x, yCenter + y);
        mySetPixel(ref bitmap, xCenter + x, yCenter - y);
        mySetPixel(ref bitmap, xCenter - x, yCenter - y);
    }
```

Ta có:

$$\frac{d_y}{d_x} = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

$$\Rightarrow |\frac{d_y}{d_x}| = \frac{b^2x}{a^2y}$$

$|\frac{d_y}{d_x}| < 1 \Leftrightarrow b^2x < a^2y$: x là biến chạy.
$|\frac{d_y}{d_x}| > 1 \Leftrightarrow b^2x > a^2y$: y là biến chạy.
Vậy trên góc phần tư I của Ellipse chia làm 2 giai đoạn.
Giai đoạn 1: $0 \leq x \leq \frac{a^2y}{b^2}$, x là biến chạy
Giai đoạn 2: $x > \frac{a^2y}{b^2}$, y là biến chạy

3.1 Digital Different Analyzer Algorithm (DDA)

Trong giai đoạn 1, biến chạy là x.
Ta cho x_i chạy từ 0 đến $x_i = \frac{a^2y}{b^2}$, và tính y_i

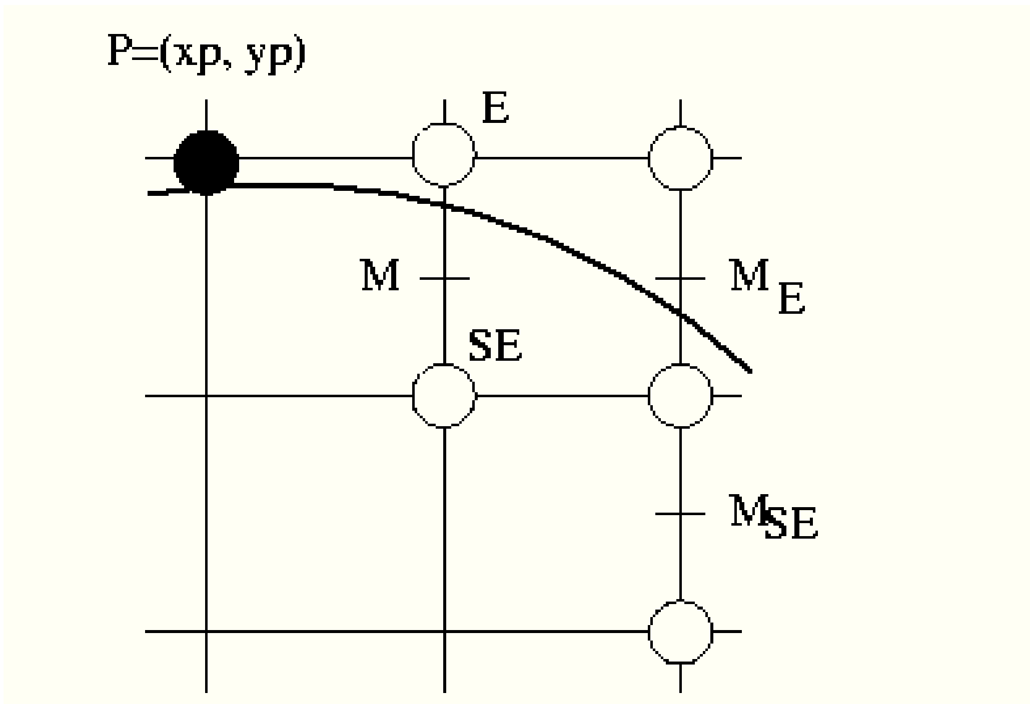
$$y_i = \sqrt{1 - (\frac{x_i^2}{a^2})b^2}$$

Ta vẽ pixel tại (xi, round_y_i) với round_y_i=(int)(y_i+0.5) cùng với 3 điểm đối xứng còn lại.
Trong giai đoạn 2, biến chạy là y.
Ta cho y_i chạy từ cuối giai đoạn 1 đến $y_i = 0$ và tính x_i

$$x_i = \sqrt{1 - (\frac{y_i^2}{b^2})a^2}$$

Ta vẽ pixel tại (round_x_i, y_i) với round_x_i=(int)(x_i+0.5) cùng với 3 điểm đối xứng còn lại.

3.2 Bresenham Algorithm



Giai đoạn 1: $0 < x < \frac{a^2 y}{b^2}$, x là biến chạy
Từ điểm $P(x_i, y_i)$ thì điểm tiếp theo cần vẽ là $E(x_i + 1, y_i)$ hoặc $SE(x_i + 1, y_i - 1)$.
Khoảng cách từ E, SE đến Ellipse lần lượt là:

$$d_E = F(x_i + 1, y_i) = F(x, y) = \frac{(x_i + 1)^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} - 1$$

$$d_{SE} = F(x_i + 1, y_i - 1) = F(x, y) = \frac{(x_i + 1)^2}{a^2} + \frac{(y_i - 1)^2}{b^2} - 1$$

Dễ thấy, SE nằm trong Ellipse nên $d_{SE} < 0$, còn $d_E > 0$. Do vậy ta xét tham số quyết định P_i.

$$P_i = a^2 b^2 (d_E + d_{SE}) = a^2(2y_i^2 - 2y_i + 1) - 2(a^2 b^2 - b^2 x_i^2)$$

Nếu $P_i > 0$, E ở xa hơn $\Rightarrow$ chọn SE, nên $y_{i+1} = y_i - 1$. Khi đó:

$$P_{i+1} - P_i = 4b^2 x_{i+1} - 4a^2 y_{i+1} - 2a^2 - 2b^2$$

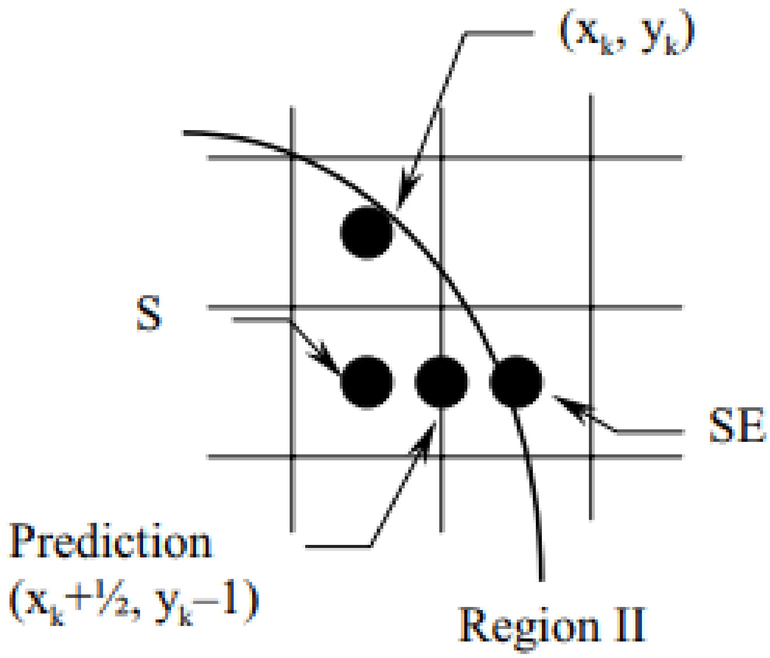
Nếu $P_i < 0$, SE ở xa hơn $\Rightarrow$ chọn E, nên $y_{i+1} = y_i$. Khi đó:

$$P_{i+1} - P_i = 4b^2 x_{i+1} - 2b^2$$

Giá trị khởi tạo P_0. Vì điểm đầu tiên vẽ là (O, b), nên:

$$P_0 = -2a^2 b + a^2$$

Giai đoạn 2: y chạy từ điểm cuối giai đoạn 1 đến $y = 0$



$$d_S = F(x_i, y_i - 1) = \frac{x_i^2}{a^2} + \frac{(y_i - 1)^2}{b^2} - 1$$

$$d_{SE} = F(x_i + 1, y_i - 1) = \frac{(x_i + 1)^2}{a^2} + \frac{(y_i - 1)^2}{b^2} - 1$$

Dễ thấy, S nằm trong Ellipse nên $d_S < 0$, còn $d_{SE} > 0$. Do vậy ta xét tham số quyết định P_i.

$$P_i = a^2 b^2 (d_E + d_{SE}) = 2b^2(x_i^2 - x_i + 1) + 2a^2(y_i - 1)^2 - 2a^2 b^2$$

Nếu $P_i > 0$, SE ở xa hơn $\Rightarrow$ chọn S, nên $x_{i+1} = x_i + 1$. Khi đó:

$$P_{i+1} - P_i = -4b^2 y_{i+1}$$

Nếu $P_i < 0$, S ở xa hơn $\Rightarrow$ chọn S, nên $x_{i+1} = x_i$. Khi đó:

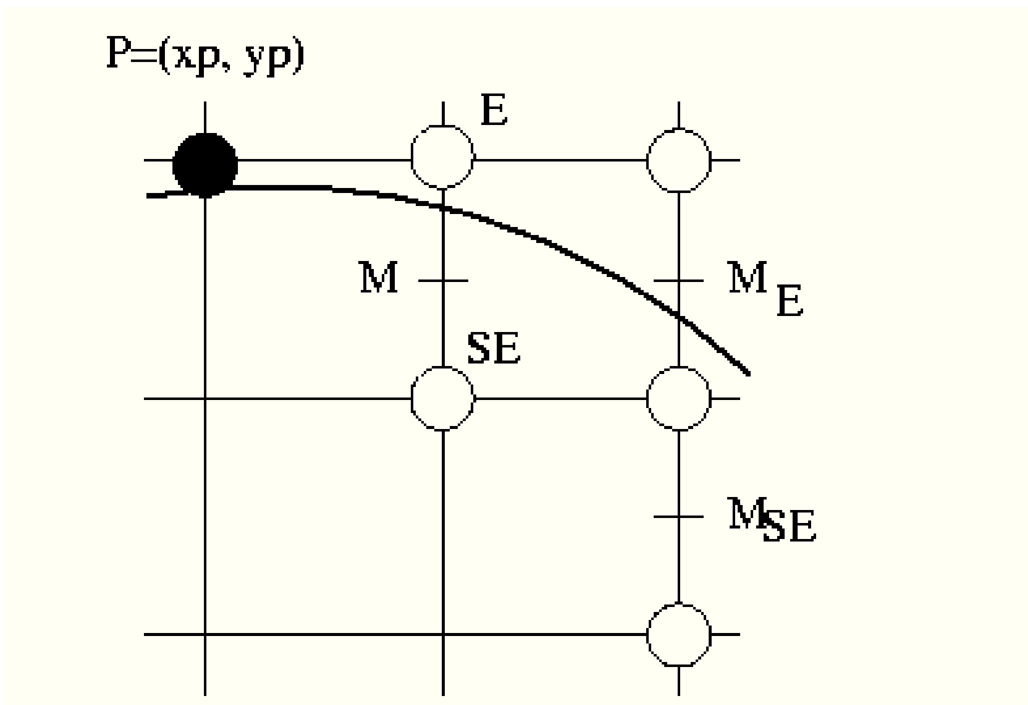
$$P_{i+1} - P_i = 2b^2 - 4b^2 y_{i+1} + 4a^2 x_{i+1}$$

Giá trị khởi tạo P_0. Vì điểm đầu tiên vẽ là điểm cuối của giai đoạn 1 (x_0, y_0), nên:

$$P_0 = a^2(2y_0^2 - 2y_0 + 1) - 2(a^2b^2 - b^2x_0^2)$$

Dùng hàm đối xứng vẽ các phần còn lại là ta được 1 đường Ellipse hoàn thiện.

3.3 Midpoint Algorithm



Ý tưởng: xét vị trí tương đối của điểm chính giữa E và SE (midpoint M). Nếu M nằm trong Ellipse, chứng tỏ E nằm gần đường tròn hơn, ta chọn vẽ E. Ngược lại ta chọn vẽ SE.

Giai đoạn 1: $0 < x < \frac{a^2y}{b^2}$, x là biến chạy
Với ý tưởng đó, ta đặt:

$$P_i = a^2b^2F(x_i + 1, y_i + \frac{1}{2})$$

$$P_i = b^2(x_i + 1)^2 + a^2(y_i + \frac{1}{2})^2 - a^2b^2$$

$$P_{i+1} = b^2(x_i + 2)^2 + a^2(y_{i+1} + \frac{1}{2})^2 - a^2b^2$$

Trường hợp:
$P_i < 0$: M nằm trong đường tròn $\Rightarrow$ chọn E, tức là $y_{i+1} = y_i$

$$P_{i+1} - P_i = 4b^2 + 8b^2x_{i+1}$$

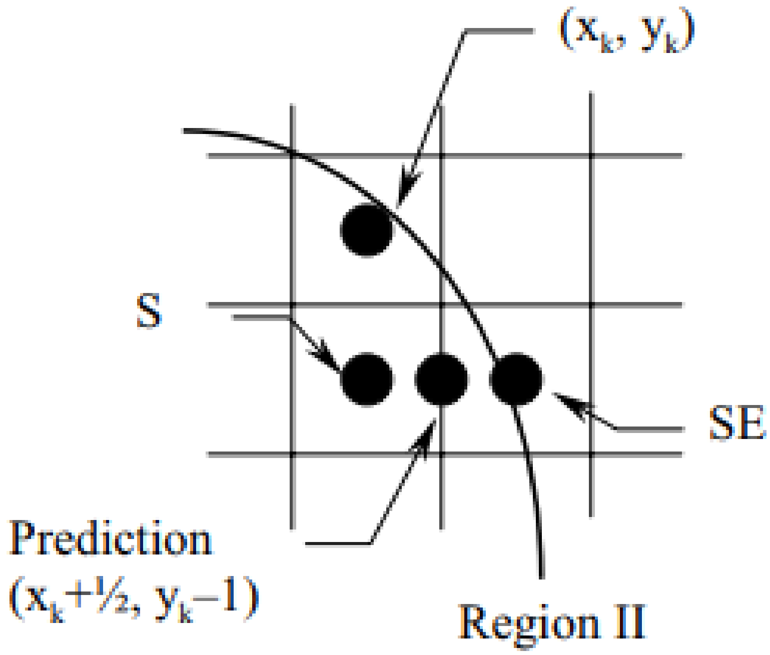
$P_i > 0$: M nằm ngoài đường tròn $\Rightarrow$ chọn SE, tức là $y_{i+1} = y_i - 1$

$$P_{i+1} - P_i = 4b^2 + 8b^2x - 8a^2y$$

Giá trị khởi tạo P_0. Vì điểm đầu tiên vẽ là (O, b), nên:

$$P_0 = 4b^2 - 4(a^2b) + a^2$$

Giai đoạn 2: y chạy từ điểm cuối giai đoạn 1 đến $y = 0$



Với ý tưởng đó, ta đặt:

$$P_i = a^2b^2F(x_i + \frac{1}{2}, y_i - 1)$$

$$P_i = b^2(x_i + \frac{1}{2})^2 + a^2(y_i - 1)^2 - a^2b^2$$

$$P_{i+1} = b^2(x_{i+1} + \frac{1}{2})^2 + a^2(y_i - 2)^2 - a^2b^2$$

Trường hợp:
$P_i < 0$: M nằm trong đường tròn $\Rightarrow$ chọn SE, tức là $x_{i+1} = x_i + 1$

$$P_{i+1} - P_i = 4b^2 + 8b^2x$$

$P_i > 0$: M nằm ngoài đường tròn $\Rightarrow$ chọn S, tức là $x_{i+1} = x_i$

$$P_{i+1} - P_i = 4b^2 + 8b^2x - 8a^2y$$

Giá trị khởi tạo P_0. Vì điểm đầu tiên vẽ là điểm cuối của giai đoạn 1 (x_0, y_0), nên:

$$P_0 = b^2(2x+1)(2x+1) + 4a^2(y-1)(y-1) - 4a^2b^2$$

Dùng hàm đối xứng vẽ các phần còn lại là ta được 1 đường Ellipse hoàn thiện.

3.4 Đánh giá

Bảng đánh giá thời gian chạy của các thuật toán trên cùng một tập các đường thẳng như nhau. Đơn vị: ms

n	DDA	Bresenham	Midpoint
1000	534	531	533
5000	2664	2677	2651
10000	5359	5400	5527

4 Parabola

Phương trình Parabola ta vẽ:

$$F(x,y) = ax^2 + by \tag{4}$$

Ta xét tâm $(xc, yc) = (0,0)$ vì nếu khác $(0,0)$ ta có thể tịnh tiến Parabola.
Để ý ta thấy, Parabola đang xét đối xứng qua Oy.
Ta đi vẽ nửa trái, sau đó lấy đối xứng qua Oy.

```
public void paraPlotPoint(ref Bitmap bitmap, int x, int y)
        {
            int xCenter = center.X, yCenter = center.Y;
            mySetPixel(ref bitmap, xCenter + x, yCenter - y);
            mySetPixel(ref bitmap, xCenter - x, yCenter - y);
        }
```

Ta có:

$$\frac{d_y}{d_x} = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{2ax}{b}$$

$$\Rightarrow |\frac{d_y}{d_x}| = \frac{2ax}{b}$$

$|\frac{d_y}{d_x}| < 1 \Leftrightarrow x < \frac{b}{2a}$: x là biến chạy.
$|\frac{d_y}{d_x}| > 1 \Leftrightarrow x > \frac{b}{2a}$: y là biến chạy.
Vậy Parabola được chia làm 2 giai đoạn.
Giai đoạn 1: $0 \leq x \leq \frac{b}{2a}$, x là biến chạy
Giai đoạn 2: $x > \frac{b}{2a}$, y là biến chạy

4.1 Digital Different Analyzer Algorithm (DDA)

Trong giai đoạn 1, biến chạy là x.
Ta cho x_i chạy từ 0 đến $x_i = \frac{b}{2a}$, và tính y_i

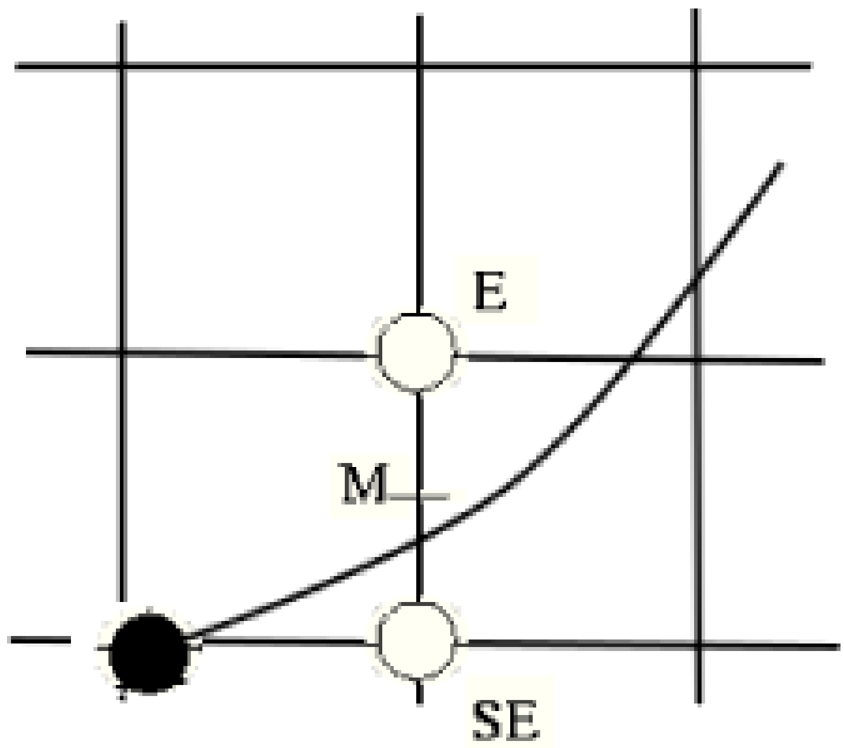
$$y_i = -\frac{a * x^2}{b}$$

Ta vẽ pixel tại (xi, round_y_i) với round_y_i=(int)(y_i+0.5) cùng với điểm đối xứng qua Oy.
Trong giai đoạn 2, biến chạy là y.
Ta cho y_i chạy từ cuối giai đoạn 1 đến chặn trên tùy ý vì Parabola kéo dài vô tận và tính x_i

$$x_i = \sqrt{\frac{|by|}{a}}$$

Ta vẽ pixel tại (round_x_i, y_i) với round_x_i=(int)(x_i+0.5) cùng với điểm đối xứng qua Oy.

4.2 Bresenham Algorithm



Giai đoạn 1: $0 < x < \frac{b}{2a}$, x là biến chạy
Từ điểm $P(x_i, y_i)$ thì điểm tiếp theo cần vẽ là $E(x_i+1, y_i+1)$ hoặc $SE(x_i+1, y_i)$.
Khoảng cách từ E, SE đến Parabola lần lượt là:

$$d_E = F(x_i+1, y_i+1) = a^(x_i+1)^2 + b(y_i+1)$$

$$d_{SE} = F(x_i+1, y_i) = a^(x_i+1)^2 + by_i$$

Dễ thấy, E nằm trong Parabola nên $d_E < 0$, còn $d_{SE} > 0$. Do vậy ta xét tham số quyết định P_i.

$$P_i = d_E + d_{SE} = 2a(x_i+1)^2 + 2by_i + b$$

Nếu $P_i > 0$, SE ở xa hơn $\Rightarrow$ chọn E, nên $y_{i+1} = y_i + 1$. Khi đó:

$$P_{i+1} - P_i = 4ax_{i+1} + 2a + 2b$$

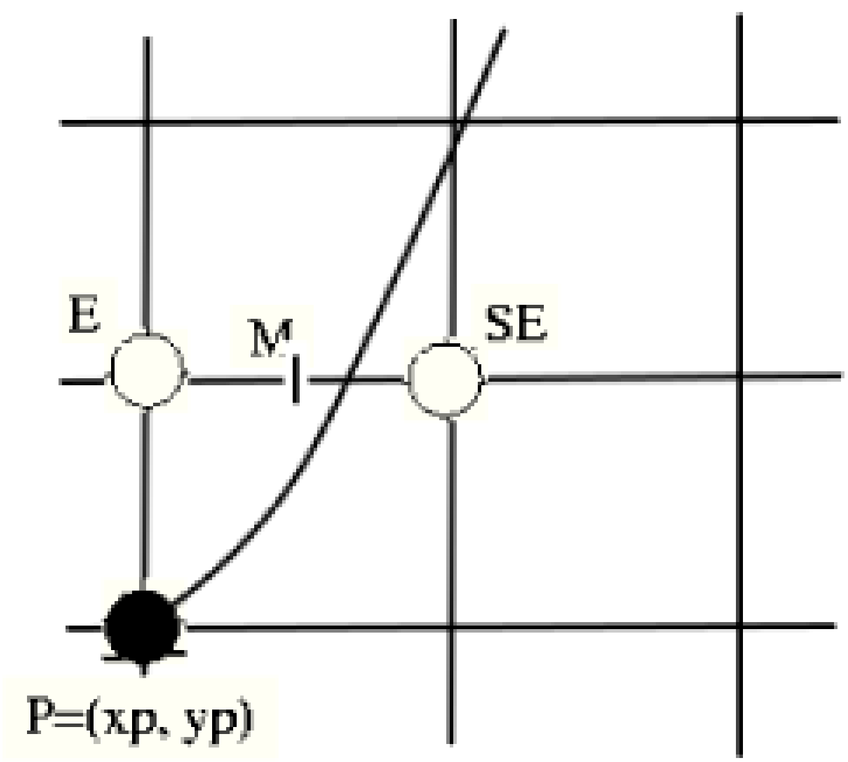
Nếu $P_i < 0$, E ở xa hơn $\Rightarrow$ chọn SE, nên $y_{i+1} = y_i + 1$. Khi đó:

$$P_{i+1} - P_i = 4ax_{i+1} + 2a$$

Giá trị khởi tạo P_0. Vì điểm đầu tiên vẽ là $(O, 0)$, nên:

$$P_0 = 2a + b^2$$

Giai đoạn 2: y chạy từ điểm cuối giai đoạn 1 đến chặn trên tùy ý vì Parabola kéo dài vô tận



$$d_E = F(x_i, y_i + 1) = ax_i^2 + b(y_i + 1)$$

$$d_{SE} = F(x_i + 1, y_i + 1) = a^(x_i + 1)^2 + b(y_i + 1)$$

Dễ thấy, E nằm trong Parabola nên $d_E < 0$, còn $d_{SE} > 0$. Do vậy ta xét tham số quyết định P_i.

$$P_i = d_E + d_{SE} = 2ax_i^2 + 2ax_i + a + 2b(y_i + 1)$$

Nếu $P_i > 0$, SE ở xa hơn $\Rightarrow$ chọn E, nên $x_{i+1} = x_i$. Khi đó:

$$P_{i+1} - P_i = 2b$$

Nếu $P_i < 0$, E ở xa hơn $\Rightarrow$ chọn SE, nên $x_{i+1} = x_i + 1$. Khi đó:

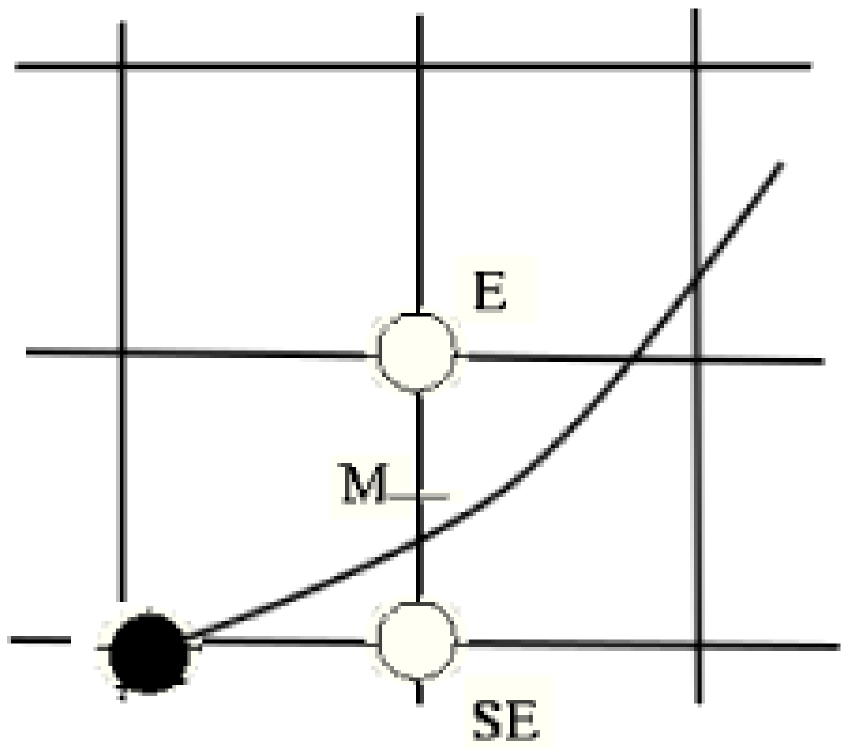
$$P_{i+1} - P_i = 4ax_{i+1} + 2b$$

Giá trị khởi tạo P_0. Vì điểm đầu tiên sẽ là điểm cuối cùng của giai đoạn 1 (x_0, y_0), nên:

$$P_0 = a * (x_0^2 + (x_0 + 1)^2) + 2B(y_0 + 1)$$

Vẽ phần đối xứng qua trục Oy ta được Parabola hoàn thiện của (4).

4.3 Midpoint Algorithm



Ý tưởng: xét vị trí tương đối của điểm M (midpoint) chính giữa E (nằm trong) và SE (nằm ngoài). Nếu M nằm trong Parabola, chứng tỏ SE nằm gần Parabola hơn, ta chọn vẽ SE. Ngược lại ta chọn vẽ E.
Giai đoạn 1: $0 < x < \frac{b}{2}$, x là biến chạy
Với ý tưởng đó, ta đặt:

$$P_i = 2F(x_i + 1, y_i + \frac{1}{2})$$

$$P_i = 2a(x_i + 1)^2 + 2b(y_i + \frac{1}{2})$$

$$P_{i+1} = 2a(x_i + 2)^2 + 2b(y_{i+1} + \frac{1}{2})$$

Trường hợp:
$P_i < 0$: M nằm trong Parabola $\Rightarrow$ chọn SE, tức là $y_{i+1} = y_i$

$$P_{i+1} - P_i = 4ax_{i+1} + 2a$$

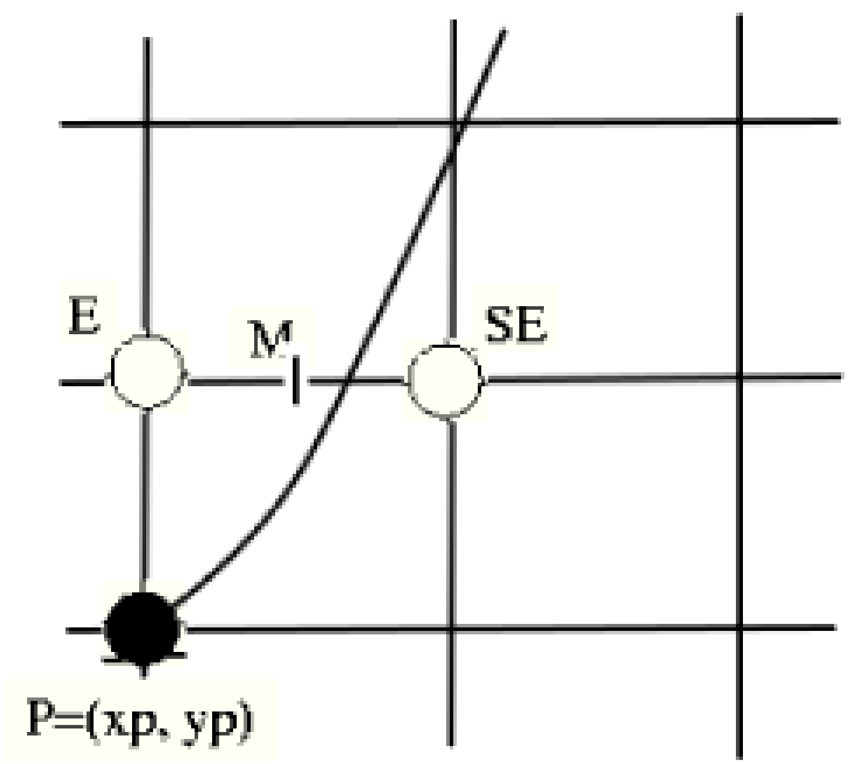
$P_i > 0$: M nằm ngoài đường tròn $\Rightarrow$ chọn E, tức là $y_{i+1} = y_i + 1$

$$P_{i+1} - P_i = 4ax_{i+1} + 2a + 2b$$

Giá trị khởi tạo P_0. Vì điểm đầu tiên vẽ là $(O, 0)$, nên:

$$P_0 = 2F(1, \frac{1}{2}) = 2a + b$$

Giai đoạn 2: y chạy từ điểm cuối giai đoạn 1 đến chặn trên tùy ý vì Parabola kéo dài vô tận



Ta có:

$$P_i = 4aF(x_i + \frac{1}{2}, y_i + 1)$$

$$P_i = 4a^2(x_i + \frac{1}{2})^2 + 4ab(y_i + 1)$$

$$P_{i+1} = 4a^2(x_{i+1} + \frac{1}{2})^2 + 4ab(y_i + 2)$$

Trường hợp:
$P_i < 0$: M nằm trong đường tròn $\Rightarrow$ chọn SE, tức là $x_{i+1} = x_i + 1$

$$P_{i+1} - P_i = 8ax_{i+1} + 4b$$

$P_i > 0$: M nằm ngoài đường tròn $\Rightarrow$ chọn E, tức là $x_{i+1} = x_i$

$$P_{i+1} - P_i = 4ab$$

Giá trị khởi tạo P_0. Vì điểm đầu tiên vẽ là điểm cuối của giai đoạn 1 (x_0, y_0), nên:

$$P_0 = 4aF(\frac{b}{2a} + \frac{1}{2}, -\frac{b}{4a} + 1)$$

$$P_0 = a^2 + 6ab$$

Vẽ phần đối xứng qua trục Oy ta được Parabola hoàn thiện của (4).

4.4 Đánh giá

Bảng đánh giá thời gian chạy của các thuật toán trên cùng một tập các đường thẳng như nhau. Đơn vị: ms

n	DDA	Bresenham	Midpoint
1000	451	325	322
5000	2275	1577	1500
10000	4470	3150	3164

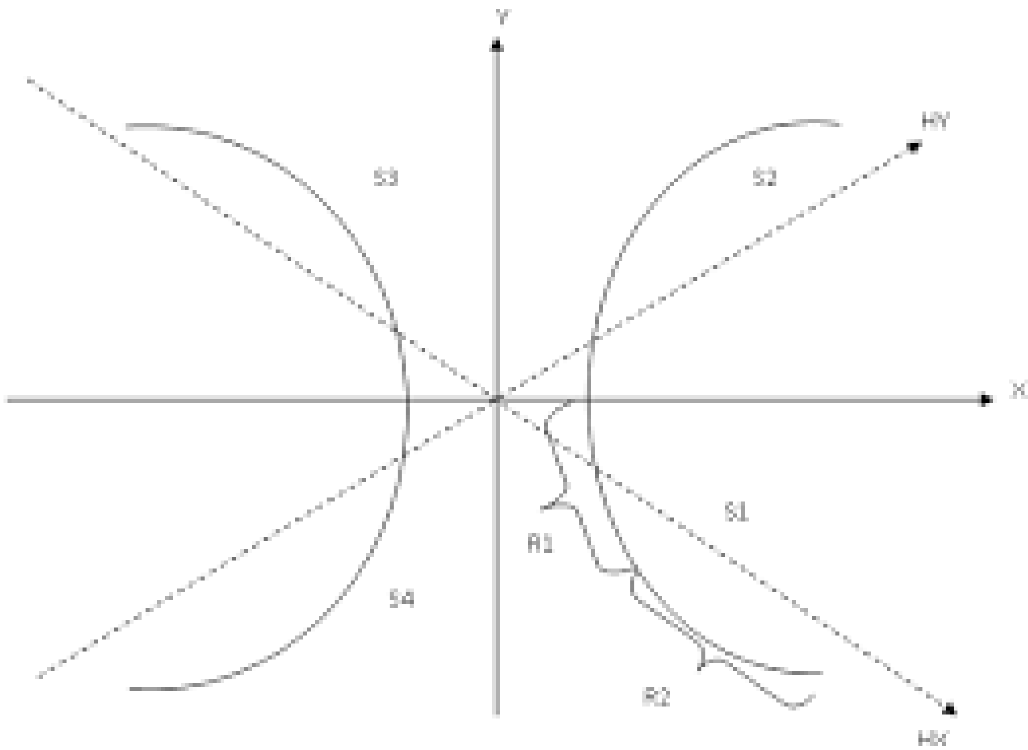
5 Hyperbola

Phương trình Hyperbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 \quad (5)$$

Ta xét tâm $(xc, yc) = (0,0)$ vì nếu khác $(0,0)$ ta có thể tịnh tiến Hyperbola. Để ý ta thấy, Hyperbola chia làm 4 phần đối xứng. Chỉ cần vẽ 1 phần và lấy đối xứng qua Ox, Oy là có thể hoàn thiện Hyperbola.



Ta có:

$$\frac{d_y}{d_x} = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = \frac{b^2x}{a^2y}$$

$$\Rightarrow |\frac{d_y}{d_x}| = \frac{b^2x}{a^2y}$$

$|\frac{d_y}{d_x}| < 1 \Leftrightarrow b^2x < a^2y$: x là biến chạy.
$|\frac{d_y}{d_x}| > 1 \Leftrightarrow b^2x > a^2y$: y là biến chạy.
Vậy trên góc phần tư I của Hyperbola chia làm 2 giai đoạn.
Giai đoạn 1: $0 \leq y \leq \frac{b^2x}{a^2}$, y là biến chạy
Giai đoạn 2: $y > \frac{b^2x}{a^2}$, x là biến chạy

5.1 Digital Different Analyzer Algorithm (DDA)

Trong giai đoạn 1, biến chạy là y.
Ta cho y_i chạy từ 0 đến $y_i = \frac{b^2x}{a^2}$, và tính x_i

$$x_i = \sqrt{(1 + \frac{y_i^2}{b^2})a^2}$$

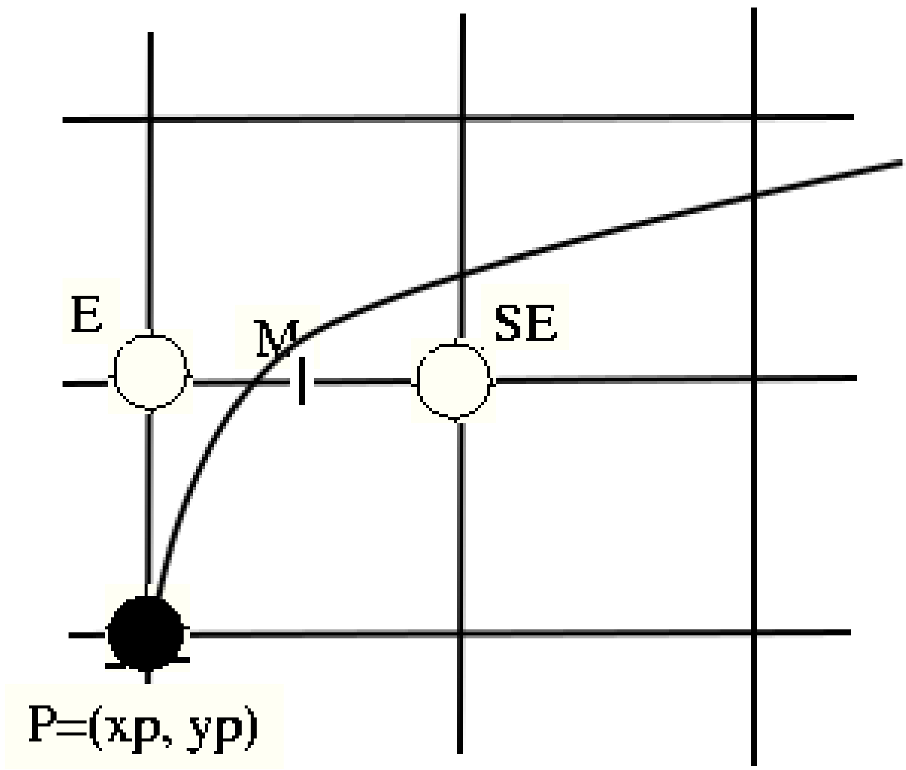
Ta vẽ pixel tại (round_x_i, y_i) với round_x_i=(int)(x_i+0.5) cùng với 3 điểm đối xứng còn lại.
Trong giai đoạn 2, biến chạy là x.
Ta cho x_i chạy từ cuối giai đoạn 1 đến chặn trên tùy ý của x và tính y_i

$$y_i = \sqrt{(\frac{x^2}{a^2} - 1)b^2}$$

Ta vẽ pixel tại (x_i, round_y_i) với round_y_i=(int)(y_i+0.5) cùng với 3 điểm đối xứng còn lại.

5.2 Bresenham Algorithm

Giai đoạn 1: $0 < y < \frac{b^2x}{a^2}$, y là biến chạy



Từ điểm $P(x_i, y_i)$ thì điểm tiếp theo cần vẽ là $E(x_i, y_i + 1)$ hoặc $SE(x_i + 1, y_i + 1)$.
Khoảng cách từ E, SE đến Hyperbola lần lượt là:

$$d_E = F(x_i, y_i + 1) = \frac{x_i^2}{a^2} - \frac{(y_i + 1)^2}{b^2} - 1$$

$$d_{SE} = F(x_i + 1, y_i + 1) = \frac{(x_i + 1)^2}{a^2} - \frac{(y_i + 1)^2}{b^2} - 1$$

Dễ thấy, SE nằm trong Hyperbola nên $d_{SE} < 0$, còn $d_E > 0$. Do vậy ta xét tham số quyết định P_i.

$$P_i = a^2b^2(d_E + d_{SE}) = 2b^2x_i^2 + 2b^2x_i + b^2) - 2a^2(y_i + 1)^2 - 2a^2b^2$$

Nếu $P_i > 0$, E ở xa hơn $\Rightarrow$ chọn SE, nên $x_{i+1} = x_i + 1$. Khi đó:

$$P_{i+1} - P_i = -4a^2(2y_{i+1} + 1)$$

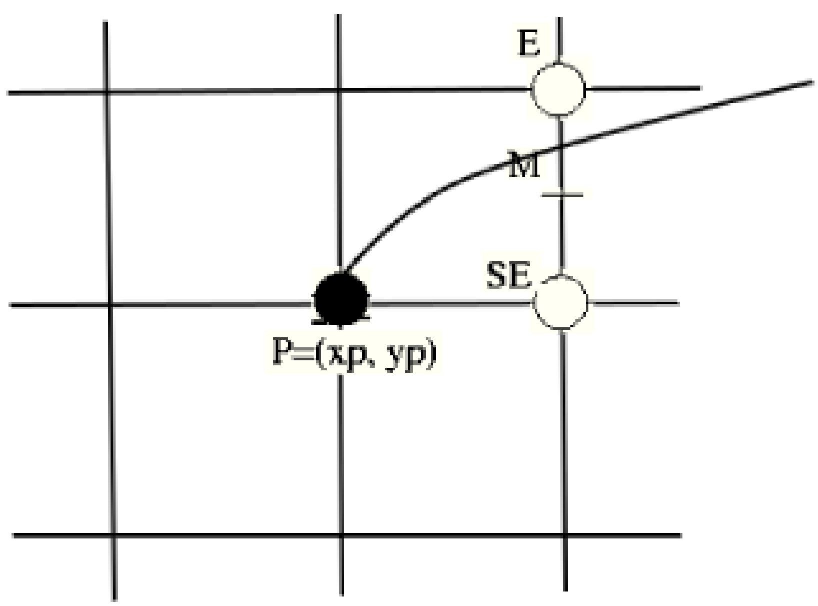
Nếu $P_i < 0$, SE ở xa hơn $\Rightarrow$ chọn E, nên $x_{i+1} = x_i$. Khi đó:

$$P_{i+1} - P_i = 8b^2x_{i+1} - 4a^2(2_{y+1} + 1)$$

Giá trị khởi tạo P_0. Vì điểm đầu tiên vẽ là $(a, 0)$, nên:

$$P_0 = -4a^2b + 4ab^2 + b^2$$

Giai đoạn 2: x chạy từ điểm cuối giai đoạn 1 đến chặn trên tùy ý (vì Hyperbola ra vô tận)



$$d_E = F(x_i + 1, y_i + 1) = \frac{(x_i + 1)^2}{a^2} - \frac{(y_i + 1)^2}{b^2} - 1$$

$$d_{SE} = F(x_i + 1, y_i) = \frac{(x_i + 1)^2}{a^2} - \frac{y_i^2}{b^2} - 1$$

Dễ thấy, SE nằm trong Hyperbola nên $d_{SE} < 0$, còn $d_E > 0$. Do vậy ta xét tham số quyết định P_i.

$$P_i = a^2 b^2 (d_E + d_{SE}) = 2b^2(x_i + 1)^2 - a^2(2y_i^2 + 2y_i + 1) - 2a^2 b^2$$

Nếu $P_i > 0$, E ở xa hơn $\Rightarrow$ chọn SE, nên $y_{i+1} = y_i$. Khi đó:

$$P_{i+1} - P_i = b^2(2x_{i+1} + 1) - 2a^2 y_{i+1}$$

Nếu $P_i < 0$, SE ở xa hơn $\Rightarrow$ chọn E, nên $y_{i+1} = y_i + 1$. Khi đó:

$$P_{i+1} - P_i = 2b^2 x + b^2$$

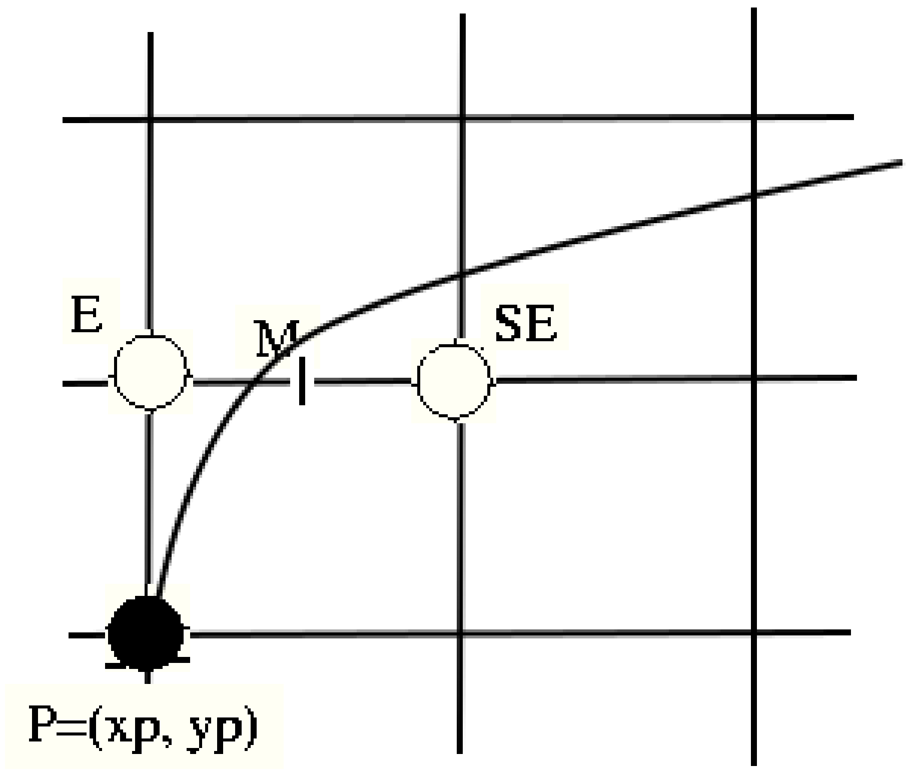
Giá trị khởi tạo P_0. Vì điểm đầu tiên vẽ là điểm cuối của giai đoạn 1 (x_0, y_0), nên:

$$P_0 = b^2(x + 1)^2 - a^2(y + \frac{1}{2})^2 - a^2 b^2$$

Dùng hàm đối xứng vẽ các phần còn lại là ta được 1 Hyperbola hoàn thiện.

5.3 Midpoint Algorithm

Giai đoạn 1: $0 < y < \frac{b^2 x}{a^2}$, y là biến chạy



Từ điểm $P(x_i, y_i)$ thì điểm tiếp theo cần vẽ là $E(x_i, y_i + 1)$ hoặc $SE(x_i + 1, y_i + 1)$.
Đặt

$$P_i = a^2 b^2 F(x_i + \frac{1}{2}, y_i + 1)$$

$$P_i = b^2 (x_i + \frac{1}{2})^2 - a^2 (y_i + 1)^2 - a^2 b^2$$

$$P_{i+1} = b^2 (x_{i+1} + \frac{1}{2})^2 - a^2 (y_i + 2)^2 - a^2 b^2$$

Nếu $P_i > 0$, M nằm ngoài Hyperbola $\Rightarrow$ chọn SE, nên $x_{i+1} = x_i + 1$. Khi đó:

$$P_{i+1} - P_i = -4a^2(2y_{i+1} + 1)$$

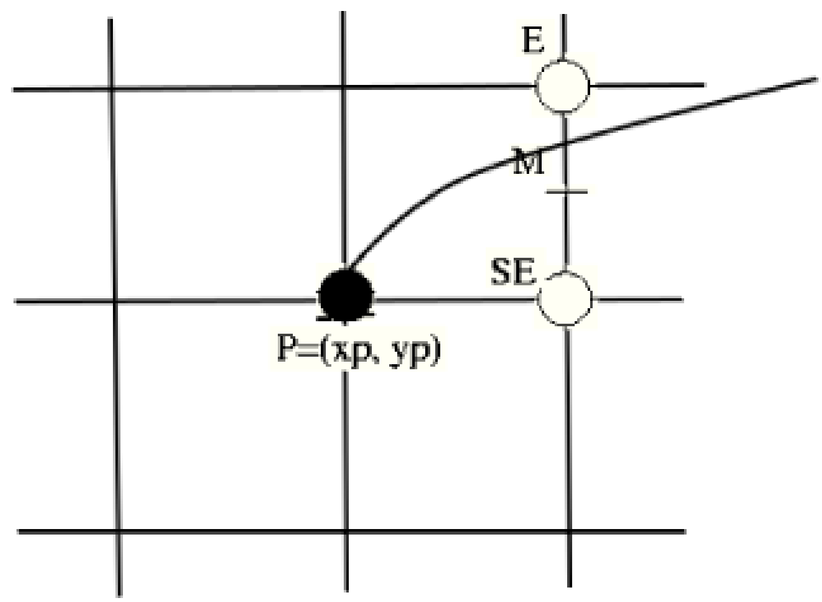
Nếu $P_i < 0$, M nằm ở trong $\Rightarrow$ chọn E, nên $x_{i+1} = x_i$. Khi đó:

$$P_{i+1} - P_i = 8b^2 x_{i+1} - 4a^2(2_{y+1} + 1)$$

Giá trị khởi tạo P_0. Vì điểm đầu tiên vẽ là $(a, 0)$, nên:

$$P_0 = -4a^2 b + 4ab^2 + b^2$$

Giai đoạn 2: x chạy từ điểm cuối giai đoạn 1 đến chặn trên tùy ý (vì Hyperbola ra vô tận)



Từ điểm $P(x_i, y_i)$ thì điểm tiếp theo cần vẽ là $E(x_i + 1, y_i + 1)$ hoặc $SE(x_i + 1, y_i)$.

Đặt

$$P_i = a^2 b^2 F(x_i + 1, y_i + \frac{1}{2})$$

$$P_i = b^2(x_i + 1)^2 - a^2(y_i + \frac{1}{2})^2 - a^2 b^2$$

$$P_{i+1} = b^2(x_i + 2)^2 - a^2(y_{i+1} + 1)^2 - a^2b^2$$

Nếu $P_i > 0$, M nằm ngoài Hyperbola $\Rightarrow$ chọn SE, nên $y_{i+1} = y_i$. Khi đó:

$$P_{i+1} - P_i = b^2(2x_{i+1} + 1) - 2a^2y_{i+1}$$

Nếu $P_i < 0$, M nằm ở trong Hyperbola $\Rightarrow$ chọn E, nên $y_{i+1} = y_i$. Khi đó:

$$P_{i+1} - P_i = 2b^2x + b^2$$

Giá trị khởi tạo P_0. Vì điểm đầu tiên sẽ là điểm cuối của giai đoạn 1 (x_0, y_0) nên:

$$P_0 = b^2(x + 1)^2 - a^2(y + \frac{1}{2})^2 - a^2b^2$$

Dùng hàm đối xứng vẽ các phần còn lại là ta được 1 Hyperbola hoàn thiện.

5.4 Đánh giá

Thời gian vẽ còn phụ thuộc vào việc random ra a,b. Bảng đánh giá thời gian chạy của các thuật toán trên cùng một tập các đường thẳng như nhau. Đơn vị: ms

n	DDA	Bresenham	Midpoint
1000	834	731	733
5000	3664	3677	3351
10000	6959	6400	6527

6 Tài liệu tham khảo

1. Computer Graphic của Hearn M.Baker
2. Slide bài giảng