第1次作业：有穷自动机-参考答案

1. L = { ω | $\omega = \omega^T$ ， $\omega \in \sum^*$ }， 或L(G)={ $\omega x \omega^T$ | $\omega \in \{0,1\}^*, x \in \{0,1,\varepsilon\}$} ；

$L(G) = \{0, 1, \alpha_1 0 \alpha_1^T, \alpha_1 1 \alpha_1^T, \alpha_1 \alpha_1^T, \alpha_2 0 \alpha_2^T, \alpha_2 1 \alpha_2^T, \alpha_2 \alpha_2^T, \ldots, \alpha_n 0 \alpha_n^T, \alpha_n 1 \alpha_n^T, \alpha_n \alpha_n^T\}$，其中 $\alpha_i (i \in N^+)$是若干0、1组成的字符串

2.

1）G=（{S}，{a，b}，P，S），P 中有产生式：

$S \rightarrow aS$

$S \rightarrow Sb$

$S \rightarrow ab$

2) G=（{S}，{a，b}，P，S），P 中有产生式：

$S \rightarrow abS \mid bS$

$S \rightarrow Sb$

$S \rightarrow a \mid b$

3）G=（{S}，{0，1}，P，S），P 中有产生式：

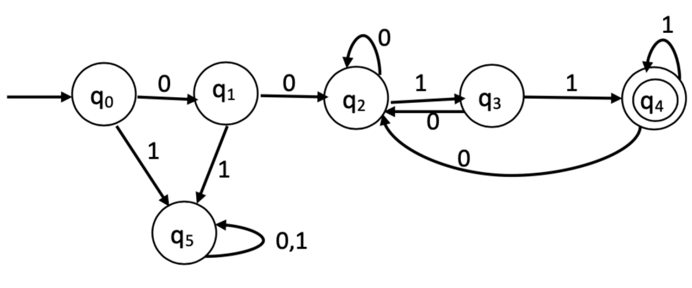
$S \rightarrow 0S0 \mid 1S1$

$S \rightarrow 0 \mid 1 \mid 00 \mid 11$

3.1（对应教材的3.2（2））

解：构造DFA如下：

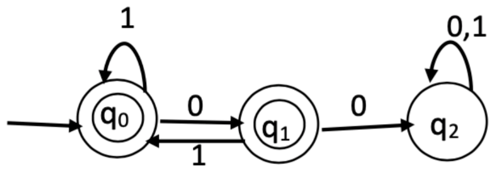
M=({q_0,q_1,q_2,q_3,q_4,q_5}，{0，1}，δ，q_0，{q_4})，转移图如下所示：



3.2（对应教材的3.2（3））

解：构造DFA如下：

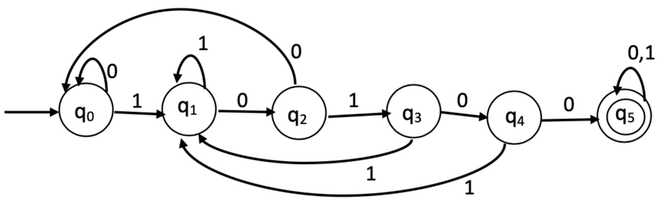
$M=(\{q_0,q_1,q_2\}，\{0，1\}，\delta，q_0，\{q_0,q_1\})$，转移图如下所示：



4.1 （对应教材的3.3（2））

解：构造DFA如下：

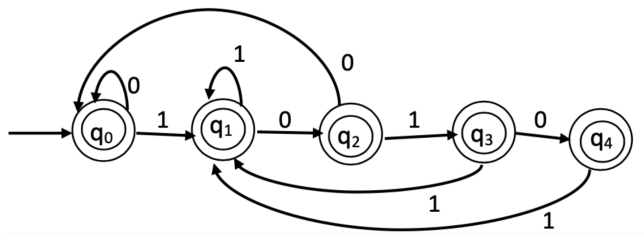
$M=(\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4,q_5\}，\{0，1\}，\delta，q_0，\{q_4\})$，转移图如下所示：



4.2 （对应教材的3.3（3））

解：构造DFA如下：

$M=(\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\}，\{0，1\}，\delta，q_0，\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\})$，转移图如下所示：



5.**（寻宝谜题）**Alice 在一个藏宝山洞门口。山洞有一个门，门上有 n 个硬币，它们排列成一个圈，Alice 无法知道它们的正反情况，每次只能翻转其中的 $k(k\leq n)$ 个，且每次翻转之后，这些 硬币会随机顺时针旋转(硬币之间的相对位置不变)，随机旋转的角度未知。已知只有将这些硬币全部翻成正面或全部翻成反面才能打开这扇门。 聪明的小朋友，你能不能帮 Alice 想一个办法，使得硬币无论每次怎样旋转，一定能在某一限定操作次数内打开这扇门?

解

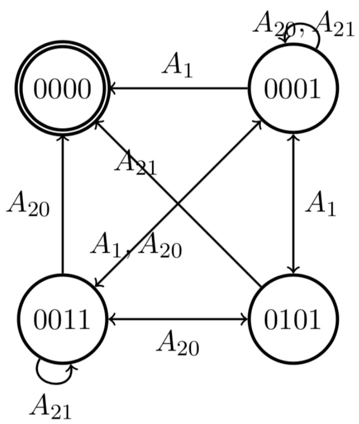
答案:

• n=4 的情形

由于无法知道硬币的具体位置和正反情况，只能将它们的状态用 01 串来指代。其中，0 表示正面，1 表示反面。由于翻成 0000 和 1111 都是接受状态，根据对称性，可以将一些状态归纳成同一种。状态集合写为 {0000, 0001, 0011, 0101}。

所有操作可以根据所翻硬币的个数来指代，同时还需要区分所翻硬币的相对位置。由不同的操作所组成的字母表写为 {A1, A20, A21}(根据上面所描述的对称性，一些操作被合并为一种，例如 A1 和 A3)，它们分别表示翻 1 个硬币、翻两个相邻的硬币和翻两个相对的硬币。

由此，可以画出自动机示意图。



根据这个示意图，可以求出它的解，输入串是 A21; A20, A21; A1, A20, A21。分号表示对不同起始状态的求解，按顺序分别尝试 0101，0011 和 0001 的情况。在每一步之后检查门是否已经打开即可。

如果将 n = 4 的题目要求改为将硬币翻成全部正面朝上，即全 0，只需在每次操作之后加一次 A4 (将所有硬币全部翻转)操作检查门是否打开即可。

• n=8 的情形由于已经求出了 n=4 的解，可以利用 n=4 的解来解决 n=8 的情况。

将相对的硬币分为一组，8 个硬币被分成四个组，用 X1,X2,X3,X4 来表示它们的异或值，要将门打开，需要先将任意的 Xi 翻成 0，然后成对地翻动相对的硬币。用两层循环来检查门是否被打开，外层翻动相邻的 4 个硬币，以改变异或值，内层循环将相对的硬币视为同一个，每次翻动时成对翻动硬币，这样就转化为 n = 4 的问题进行求解。

记 n = 4 的解串(将所有硬币全部翻成正面)为 S。

for A in S do

  任取 4 个相邻的硬币，进行 A 操作

  for B in S do

    将 8 个硬币看成 4 对硬币，成对进行 n = 4 的 B 操作

if 门已经打开 then

结束循环

• $n=2^p$ 的情形

参考 n = 8 的情形，利用已经求解的情况来求解。

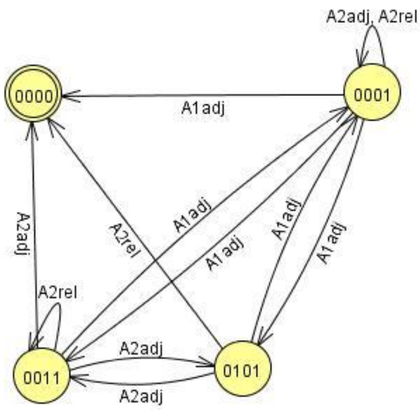
假设 $n=2^{p-1}$ 的情况已经求解。将 2^p 个硬币分为 2^{p-1} 个组，每组是相对的两个硬币。在外层循 环任取 2^{p-1} 个硬币，对其进行 2^{p-1} 的求解操作，内层循环对每组硬币成对进行 $2p^{-1}$ 的求解操作。这样就可以解出 的情形。

• 其他情况

并非所有 n 的取值都有解。例如 n = 3 或 5 就不能找到可行的解。在 n = 3 的情况下，翻转一个可以等价于同时翻转两个，无论怎样翻转，都可能会存在一个永远不满足要求的硬币。

学生优秀解答：

- 当 n=1 和 n=2 时，操作是显然的，不需要翻转或者只需要翻动任意一个硬币一次就可以打开门。
- 考虑 n=4 的情况。用 0 代表处于反面的硬币，1 代表处于正面的硬币。由题 目，0000 与 1111 是等价的，故只采用 0000 来进行表示，其余同理。用$A_{n,adj}$ 来表示翻转 n 个相邻的硬币的行动，用$A_{n,rel}$来代表翻转 n 个相对的硬币(两 个硬币之间有间隔其它的硬币)的行动。注意到，在 n=4 的情况中，$A_{1,adj}$和$A_{3,adj}$产生的效果是相同的，可以记做同一种行动且对于翻转相对硬币的 行动只存在$A_{2,rel}$的情况。因此，可以做出自动机$M = (\{0000,0001,0011,0101\}, \{A_{1,adj},A_{2,adj},A_{2,rel}\}, \delta, \{0001,0011,0101\}, \{0000\})$ 自动机的状态图如图:



则对于 n=4 的情况，只要按顺序分别测试 0001、0011、0101 三种状态转移到 0000 受态的行动，每次测试一个非受态状态转移到受态的行动，若门没有 打开，则测试下一个非受态状态的行动，则一定能在有限次数内将门打开。

对于 n=8，n=16，...，n=2^k(k≥3)的情形，可以将其先分为 2^{k-1} 组硬币，每 一组中各两个硬币，且同一组中的硬币为原排序中相对的硬币。

- 例如在 n=8 的情况下，则 8 个硬币被分成 4 组，每组中根据硬币正反面的 不同会产生每组硬币的异或值(一正一反为 1，两正或两反为 0)。每次 行动先翻转相邻的 4 个硬币，改变 4 个硬币组的异或值，然后以硬币组为 单位，进行 n=4 情况下的行动，每次行动后检查门是否打开。即一个二 重循环的模式，第一层循环改变硬币组的异或值，第二层循环进行 n=4 硬币组的操作。由于 n=4 情况下可以在有限次数内将门打开，故 n=8 情况 下也可以在有限次数内将门打开。
- 推广到 n=2^k(k≥3)的情形，同样以双重循环的模式，第一层循环翻转 相邻的 2^{k-1} 个硬币改变硬币组的异或值，第二层循环进行 n=2^{k-1} 情况下的 操作。而 n=2^{k-1} 情况下的操作最终都可递推到 n=4 的情形，故都可以在有限次数内将门打开。

对于其它上述未提到的 n 值的情形，未必能够在有限次数内打开门。如 n=3 的情形下，由于翻转一个硬币的效果与翻转两个硬币的效果是等价的，考 虑如下情况:初始硬币状态为 010(顺时针顺序)，每次翻转前两个硬币， 每次操作后硬币顺时针旋转一个顺位。在这种情况下，永远无法将门打 开，始终有一个硬币与另外两个硬币不同面。