本周教学内容

回溯算法的设计与实现

搜索树结点数的估计

图的着色问题

回溯算法的递归与迭代实现

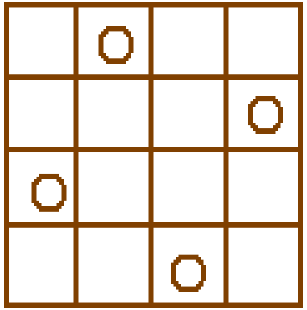
回溯算法的基本思想和适用条件

回溯算法的例子：
n后放置、0-1背包、货郎问题

几个回溯算法的例子

4后问题

4后问题： 在 4×4 的方格棋盘上放置4个皇后，使得没有两个皇后在同一行、同一列、也不在同一条45度的斜线上. 问有多少种可能的布局?



解是 4 维向量 $< x_1, x_2, x_3, x_4 >$

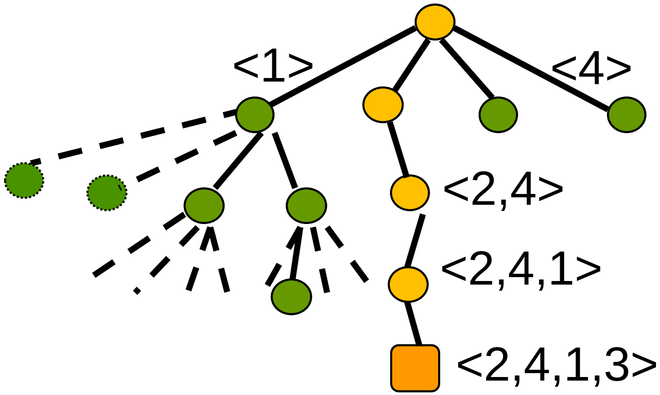
解：<2,4,1,3>，<3,1,4,2>

推广到8后问题

解： 8维向量，有 92个.

例如：<1,5,8,6,3,7,2,4>是解.

搜索空间：4叉树



每个结点有4个儿子，分别代表选择1,2,3,4列位置

第 *i* 层选择解向量中第 *i* 个分量的值

最深层的树叶是解

按深度优先次序遍历树，找到所有解

0-1背包问题

问题：

有n种物品，每种物品只有 1个. 第i 种物品价值为 v_i, 重量为 w_i, i =1,2,…, n. 问如何选择放入背包的物品，使得总重量不超过 B, 而价值达到最大？

实例：

V={12,11,9,8}，W={8,6,4,3}，B=13

最优解：

<0,1,1,1>，价值: 28，重量: 13

算法设计

解：n维0-1向量$<x_1, x_2, ..., x_n>$，

$x_i = 1 \Leftrightarrow$ 物品 i 选入背包

结点：$<x_1, x_2,..., x_k>$（部分向量）

搜索空间：0-1取值的二叉树，称为子集树，有2^n片树叶.

可行解:满足约束条件 $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le B$ 的解

最优解:可行解中价值达到最大的解

实例

输入：

V={12,11,9,8}，W={8,6,4,3}，B=13

2个可行解：

<0,1,1,1>，选入物品2,3,4，价值为28，重量为13

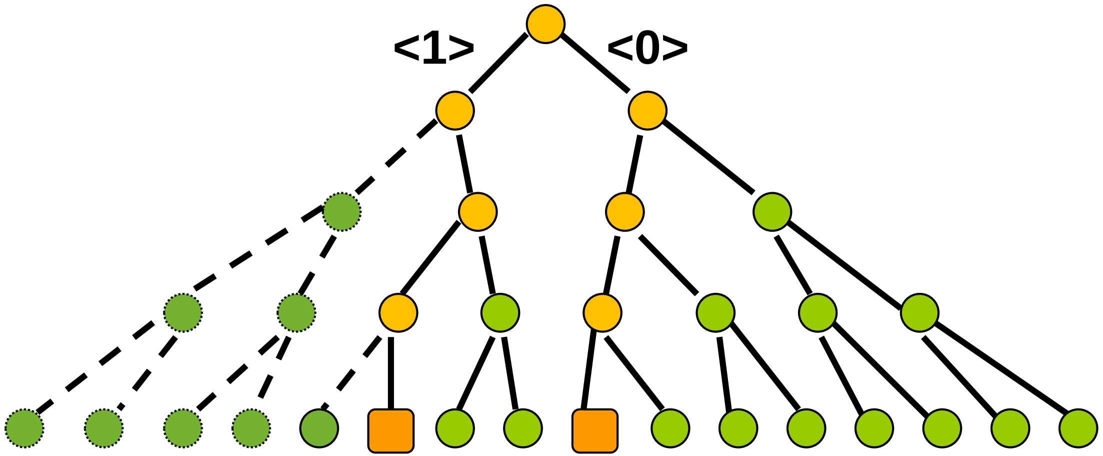
<1,0,1,0>，选入物品1,3，价值为21，重量为12

最优解：<0,1,1,1>

搜索空间

实例:V={12,11,9,8}, W={8,6,4,3}, B=13

搜索空间：子集树，2^n片树叶



<1,0,1,0>
可行解

<0,1,1,1>
最优解

货郎问题

问题：有n个城市，已知任两个城市之间的距离，求一条每个城市恰好经过一次的回路，使得总长度最小.

建模：城市集$C=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$, 距离

$$d(c_i,c_j)=d(c_j,c_i)\in Z^+,\ 1\le i<j\le n$$

求：$1,2,\ldots,n$的排列 $k_1,k_2,\ldots,k_n$使得

$$\boxed{\min\{\sum_{i=1}^{n-1} d(c_{k_i},c_{k_{i+1}})+d(c_{k_n},c_{k_1})\}}$$

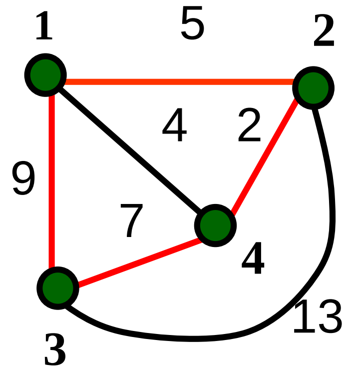
实例

$C=\{1,2,3,4\}$

$d(1,2)=5$, $d(1,3)=9$,

$d(1,4)=4$, $d(2,3)=13$,

$d(2,4)=2$, $d(3,4)=7$

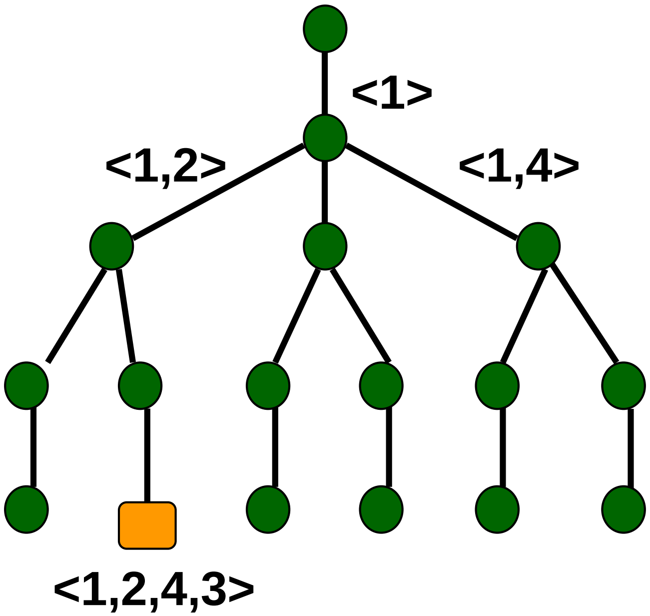


解： $< 1, 2, 4, 3 >$,

长度 $= 5 + 2 + 7 + 9 = 23$

搜索空间

排列树, 有(n-1)!片树叶



小结

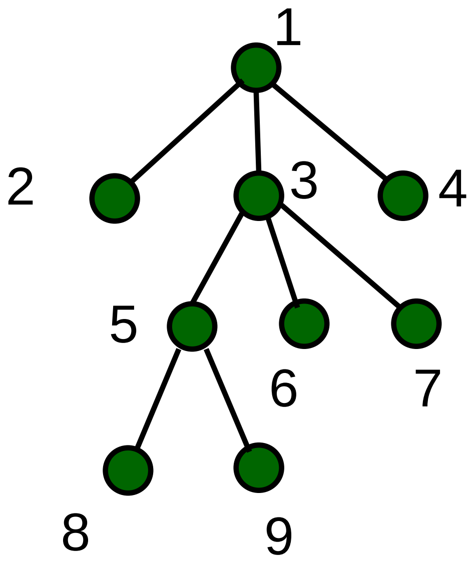
- 回朔算法的例子：*n*后问题，**0-1**背包问题，货郎问题
- 解：向量
- 搜索空间：树，可能是*n*叉树、子集树、排列树等等，树的结点对应于部分向量，可行解在叶结点
- 搜索方法：深度优先, 宽度优先, ... 跳越式遍历搜索树，找到解

回溯算法的设计
思想和适用条件

问题分析

问题	解性质	解描述向量	搜索空间	搜索方式	约束条件
n 后	可行解	$<x_1, x_2,\ldots,x_n>$ x_i：第 i 行列号	n叉树	深度,宽度优先	彼此不攻击
0-1背包	最优解	$<x_1, x_2,\ldots,x_n>$ $x_i = 0,1,$ $x_i =1 \Leftrightarrow$选 i	子集树	深度,宽度优先	不超背包重量
货郎	最优解	$< i_1=1, i_2,\ldots,i_n>$ $1,2,\ldots,n$的排列	排列树	深度,宽度优先	选没有经过的城市
特点	搜索解	向量，不断扩张部分向量	树	跳跃式遍历	约束条件回溯判定

深度与宽度优先搜索



深度优先访问顺序：

1→2→3→5→8→9 →6→7→4

宽度优先访问顺序：

1→2→3→4→5→6 →7→8→9

回溯算法基本思想

(1) 适用：求解搜索问题和优化问题.

(2) 搜索空间：树，结点对应部分解向量，可行解在树叶上.

(3) 搜索过程：采用系统的方法隐含遍历搜索树.

(4) 搜索策略：深度优先，宽度优先，函数优先，宽深结合等.

回溯算法基本思想(续)

(5) 结点分支判定条件：

满足约束条件---分支扩张解向量

不满足约束条件，回溯到该结点的父结点.

(6) 结点状态：动态生成

白结点(尚未访问)

灰结点(正在访问该结点为根的子树)

黑结点(该结点为根的子树遍历完成)

(7) 存储：当前路径

结点状态

深度优先

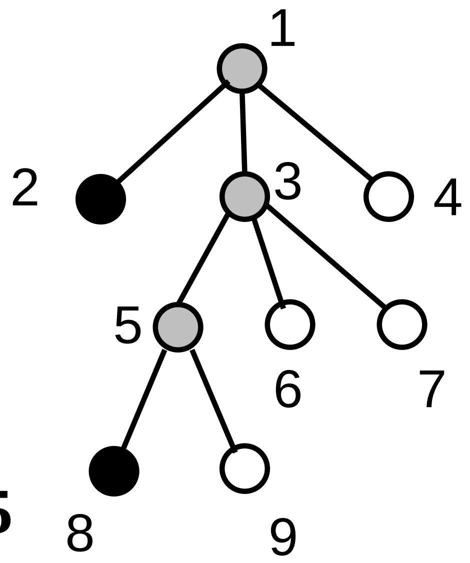
访问次序：

1→2→3→5→8

已完成访问：**2, 8**

已访问但未结束：**1, 3, 5**

尚未访问：**9, 6, 7, 4**



回溯算法的适用条件

在结点$<x_1,x_2,\ldots,x_k>$处

$P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ 为真

$\Leftrightarrow$ 向量$<x_1, x_2, \ldots, x_k>$ 满足某个性质

(*n*后中 *k*个皇后放在彼此不攻击的位置）

多米诺性质

$$P(x_1,x_2,\ldots,x_{k+1}) \rightarrow P(x_1,x_2,\ldots,x_k) \quad 0<k<n$$

$$\neg P(x_1,x_2,\ldots,x_k) \rightarrow \neg P(x_1,x_2,\ldots,x_{k+1}) \quad 0<k<n$$

k 维向量不满足约束条件，扩张向量到 *k*+1维仍旧不满足，可以回溯.

一个反例

例 求不等式的整数解

$$5x_1+4x_2-x_3\le 10,\ 1\le x_k\le 3,\ k=1,2,3$$

$P(x_1, \ldots, x_k)$: 将 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ 代入原不等式的相应部分，部分和小于等于10

不满足多米诺性质：

$$5x_1+4x_2-x_3\le 10 \nRightarrow 5x_1+4x_2\le 10$$

变换使得问题满足多米诺性质：

令 $x_3 = 3 - x_3'$,

$$5x_1+4x_2+x_3'\le 13$$

$$1\le x_1,\ x_2\le 3,\ 0\le x_3'\le 2$$

小结

- 回溯算法的适用条件：

  多米诺性质

- 回溯算法的设计步骤

  (1) 定义解向量和每个分量的取值范围

  解向量 为 $< x_1, x_2, \ldots, x_n >$

  确定 x_i 的取值集合为 X_i , $i = 1,2,\ldots, n$.

小结（续）

(2) 在<$x_1,x_2,\ldots,x_{k-1}$>确定如何计算 x_k 取值集合S_k，$S_k \subseteq X_k$

(3) 确定结点儿子的排列规则

(4) 判断是否满足多米诺性质

(5) 确定每个结点分支的约束条件

(6) 确定搜索策略: 深度优先,宽度优先等

(7) 确定存储搜索路径的数据结构

回溯算法的
实现及实例

回溯算法递归实现

算法 **ReBack** (k)

1. if $k>n$ then $<x_1,x_2,\ldots,x_n>$是解
2. else while $S_k \neq \varnothing$ do
3. $\quad x_k \leftarrow S_k$ 中最小值
4. $\quad S_k \leftarrow S_k - \{x_k\}$
5. $\quad$计算 S_{k+1}
6. $\quad$**ReBack** ($k+1$)

算法 **ReBacktrack** (n)

输入：n

输出：所有的解

1. for $k \leftarrow 1$ to n 计算 X_k且$S_k \leftarrow X_k$
2. ReBack (1)

迭代实现

迭代算法 Backtrack

输入：n

输出：所有的解

1. 对于 i =1, 2, … , n 确定X_i
2. $k \leftarrow 1$
3. 计算 S_k
4. while $S_k \neq \varnothing$ do
5. $x_k \leftarrow S_k$中最小值；$S_k \leftarrow S_k - \{x_k\}$
6. if $k < n$ then
7. $k \leftarrow k+1$；计算 S_k
8. else $< x_1, x_2, \ldots, x_n >$是解
9. if $k > 1$ then $k \leftarrow k-1$；goto 4

确定初始取值

满足约束分支搜索

回溯

装载问题

问题：有n个集装箱，需要装上两艘载重分别为c_1和c_2的轮船. w_i为第 i 个集装箱的重量，且 $w_1+w_2+\ldots+w_n \le c_1+c_2$

问：是否存在一种合理的装载方案把这 n 个集装箱装上船？如果有，请给出一种方案.

实例：

$W = <\underline{90},80,\underline{40},30,20,\underline{12,10}>$

c_1=152, c_2=130

解: 1,3,6,7装第一艘船，其余第2艘船

求解思路

输入: $W=<w_1,w_2, ..., w_n>$为集装箱重量

c_1和c_2为船的最大载重量

算法思想：令第一艘船的装入量为W_1,

1. 用回溯算法求使得c_1-W_1达到最小的装载方案.
2. 若满足

$$w_1+w_2+...+w_n-W_1 \le c_2$$

则回答“Yes”, 否则回答“No”

伪码

B为当前空隙
best 最小空隙

算法 Loading (W, c_1),

1. Sort(W);
2. $B \leftarrow c_1$; $best \leftarrow c_1$; $i \leftarrow 1$;
3. while $i \le n$ do
4. if 装入 i后重量不超过 c_1
5. then $B \leftarrow B - w_i$; $x[i] \leftarrow 1$; $i \leftarrow i+1$;
6. else $x[i] \leftarrow 0$; $i \leftarrow i+1$;
7. if $B < best$ then 记录解; $best \leftarrow B$;
8. Backtrack(i); 回溯
9. if i=1 then return 最优解
10. else goto 3 .

子过程 Backtrack

算法 Backtrack(i)

```
while i >1 and x[ i ] = 0 do
      i←i–1;
if  x[i]=1
then  x[i]←0;
          B←B+w_i ;
          i←i+1.
```

沿右分支一
直回溯发现
左分支边，
或到根为止

实例

$W = < 90,80,40,30,20,12,10 >$

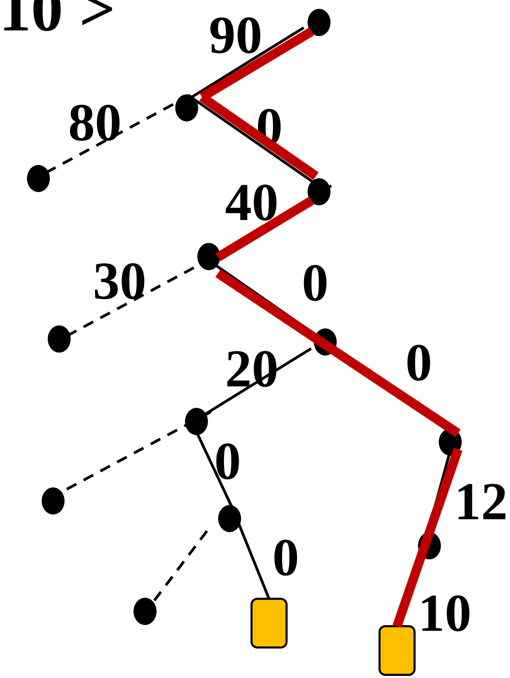
c_1=152, c_2=130

解:

可以装，方案如下:

1,3,6,7 装第一艘船

2,4,5 装第二艘船



时间复杂性:

$W(n)=O(2^n)$

小结

- 回溯算法的实现：
  递归实现、迭代实现

- 装载问题
  问题描述
  算法伪码
  最坏情况下时间复杂度$O(2^n)$

图的着色

着色问题

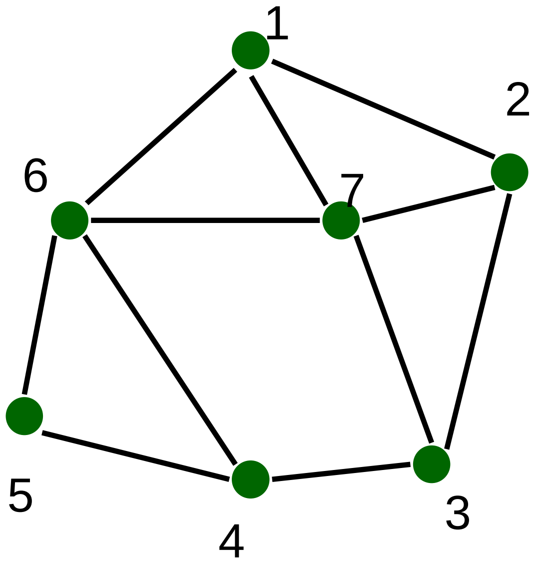
输入：

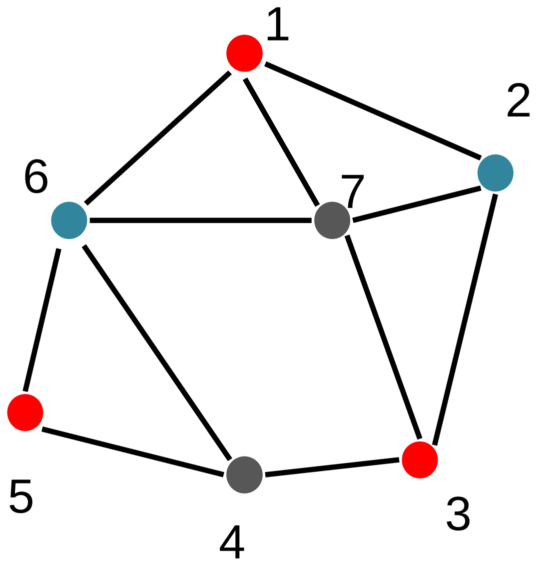
无向连通图 G和 m 种颜色的集合

用这些颜色给图的顶点着色，每个顶点一种颜色. 要求是：G 的每条边的两个顶点着不同颜色.

输出：所有可能的着色方案.
如果不存在着色方案，回答 “No”.

实例





***n*=7，*m*=3**

解向量

设 $G=(V,E)$，$V=\{1,2, \ldots , n\}$

颜色编号：1, 2, … , m

解向量：$<x_1, x_2, \ldots, x_n>$,

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{1,2, .., m\}$

结点的部分向量 $<x_1, x_2, \ldots, x_k>$

$x_1, x_2, \ldots, x_k, 1 \leq k \leq n$,

表示只给顶点1,2,...,k着色的部分方案

算法设计

搜索树：m叉树

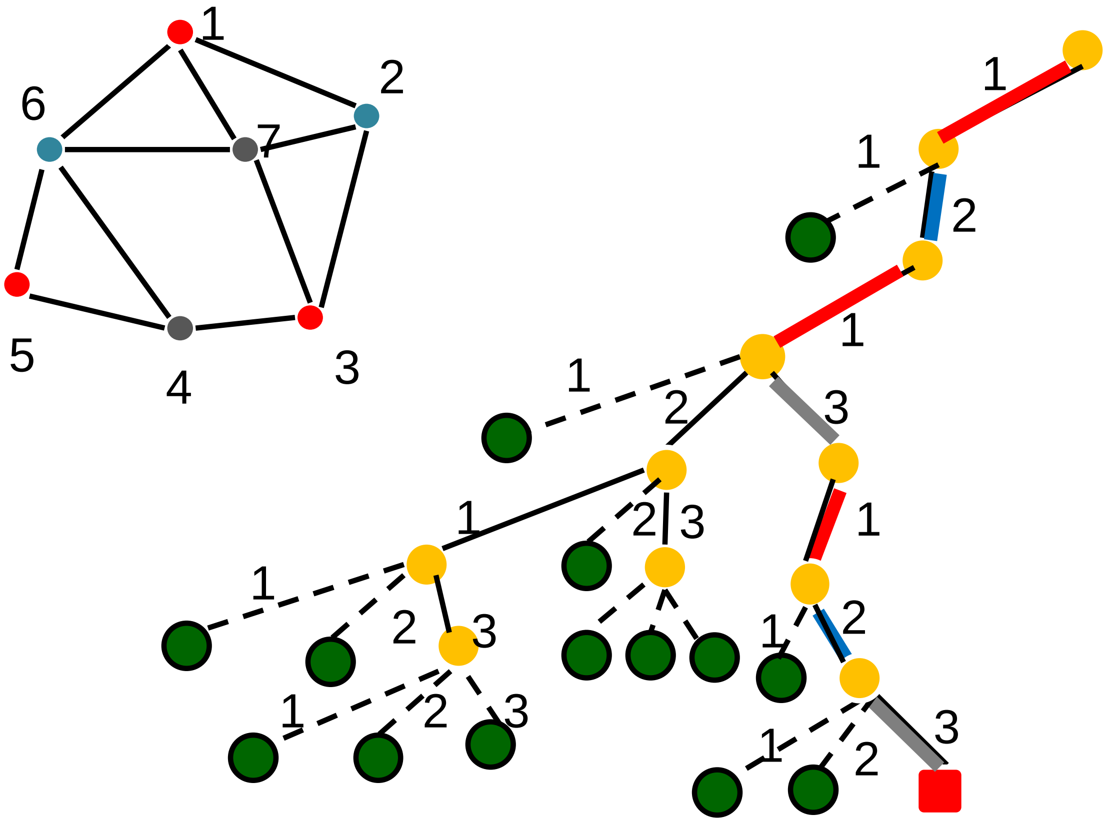
约束条件：在结点$<x_1, x_2, \ldots, x_k>$处，顶点 $k+1$ 的邻接表中结点已用过的颜色不能再用

如果邻接表中结点已用过m种颜色，则结点 $k+1$没法着色，从该结点回溯到其父结点. 满足多米诺性质

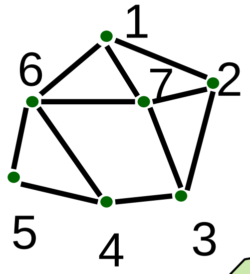
搜索策略：深度优先

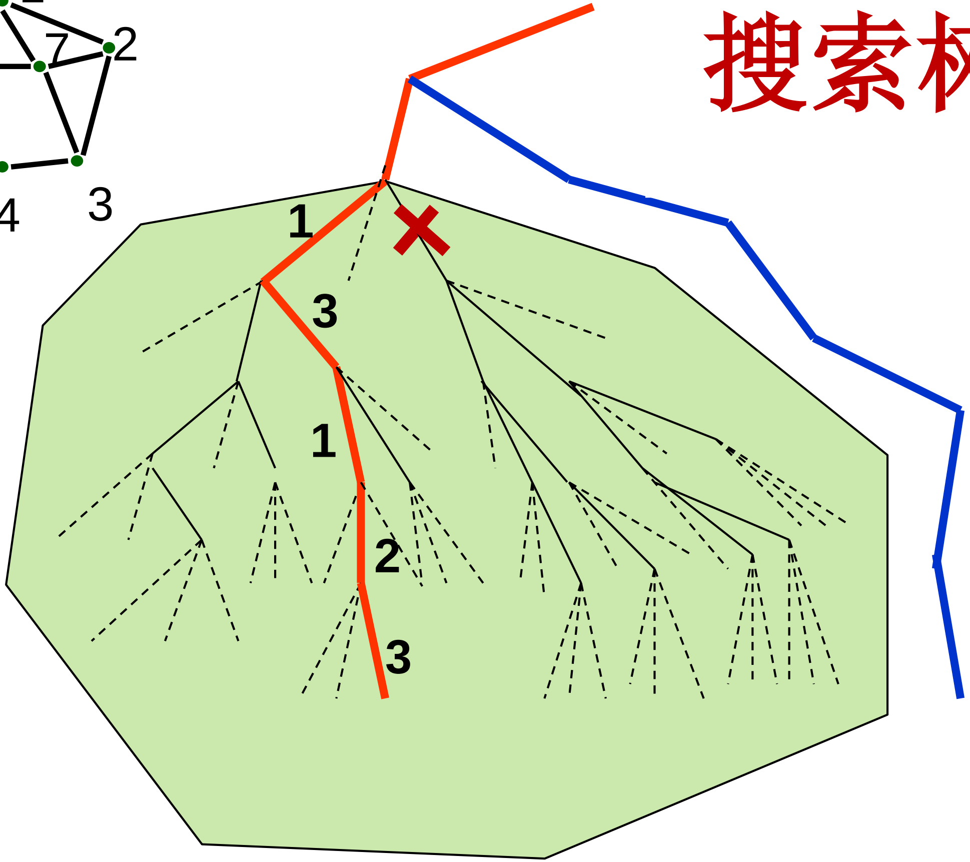
时间复杂度：$O(n\, m^n)$

运行实例



搜索树





第一个解向量：< 1, 2, 1, 3, 1, 2, 3 >

时间复杂度与改进途径

时间复杂度：$O(nm^n)$

根据对称性，只需搜索 1/3 的解空间．当1和2确定，即<1,2> 以后，只有 1 个解，在 <1,3> 为根的子树中也只有 1 个解．由于3个子树的对称性，总共6个解.

在取定<1,2>后，不可扩张成<1,2,3>, 因为7和1,2,3都相邻． 7没法着色． 可以从打叉的结点回溯，而不必搜索其子树.

着色问题的应用

会场分配问题：

有 n项活动需要安排, 对于活动 i, j, 如果 i, j 时间冲突，就说 i 与 j 不相容．如何分配这些活动,使得每个会场的活动相容且占用会场数最少?

建模：

活动作为图的顶点，如果i, j不相容, 则在 i 与 j之间加一条边，会场标号作为颜色标号. 求图的一种着色方案, 使得使用的颜色数最少.

小结

- 着色问题的描述
- 着色问题的算法设计
- 时间复杂度及改进途径
- 着色问题的应用

搜索树结点数的估计

搜索树结点数估计

Monte Carlo方法

1. 从根开始，随机选择一条路经，直到不能分支为止, 即从 $x_1, x_2, \ldots,$ 依次对 x_i 赋值，每个 x_i 的值是从当时的 S_i 中随机选取，直到向量不能扩张为止.

2. 假定搜索树的其他 $|S_i|-1$ 个分支与以上随机选出的路径一样，计数搜索树的点数.

3. 重复步骤 1 和 2，将结点数进行概率平均.

伪码

Monte Carlo

输入：*n* 为皇后数，*t* 为抽样次数

输出：*sum*, 即*t* 次抽样路长平均值

```
sum←0
for i ←1 to  t  do      // 取样次数 t
    m←Estimate(n)  // m为结点数
    sum ← sum + m
sum ←sum / t
```

一次抽样结果

一次抽样

m为本次取样得到的树结点总数

k 为层数

r_2为上层结点数

r_1为本层结点数

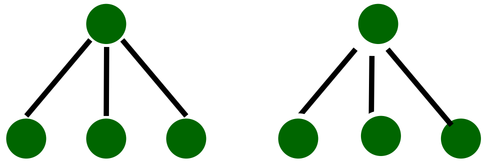
$r_1 = r_2 \cdot$ 分支数

n 为树的层数

从树根向下计算,随机选择,直到树叶.

$r_2 = 2$

$r_1 = r_2 \cdot 3 = 6$



子过程的伪码

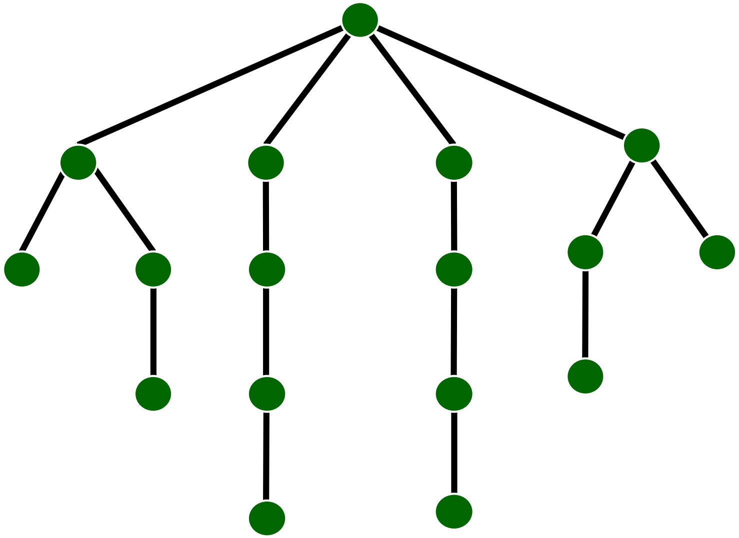
算法Estimate(n)

1. $m \leftarrow 1$; $r_2 \leftarrow 1$; $k \leftarrow 1$ // m 为结点总数
2. while $k \le n$ do
3.   if $S_k = \varnothing$ then return m
4. $r_1 \leftarrow |S_k| * r_2$ // r_1为扩张后结点总数
5. $m \leftarrow m + r_1$ // r_2为扩张前结点总数
6. $x_k \leftarrow$随机选择 S_k 的元素
7. $r_2 \leftarrow r_1$
8. $k \leftarrow k+1$

不能分支

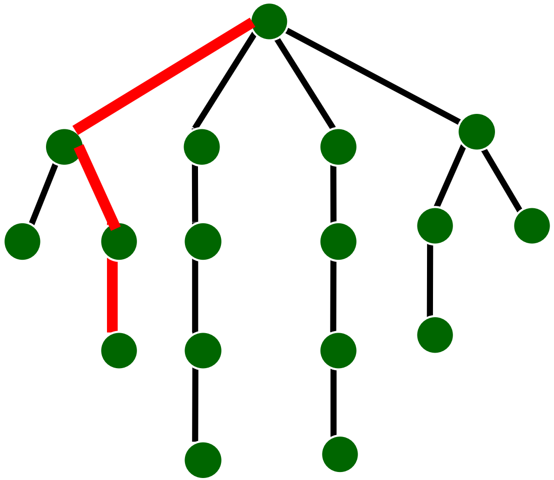
随机选择一步

4后搜索树遍历的结点

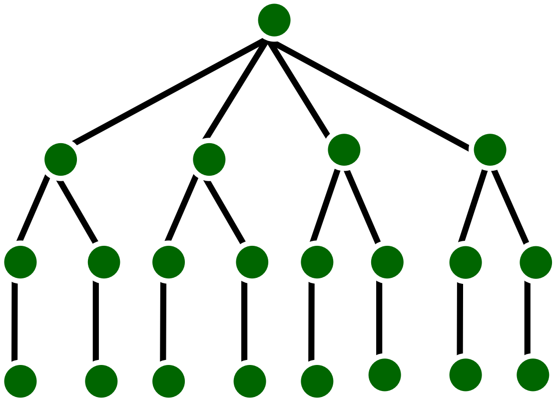


结点数=17

随机选择路径1

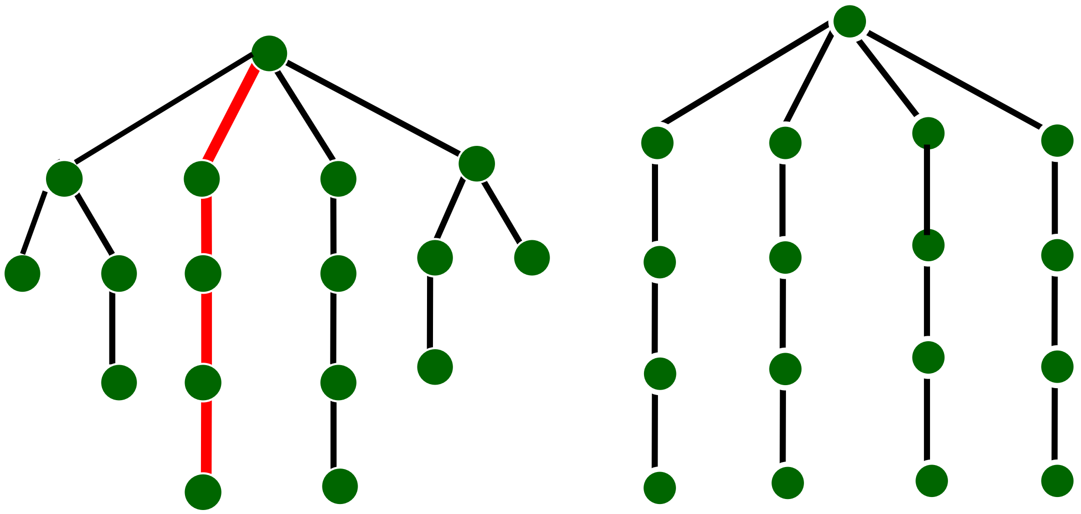


Case1: <1,4,2>,



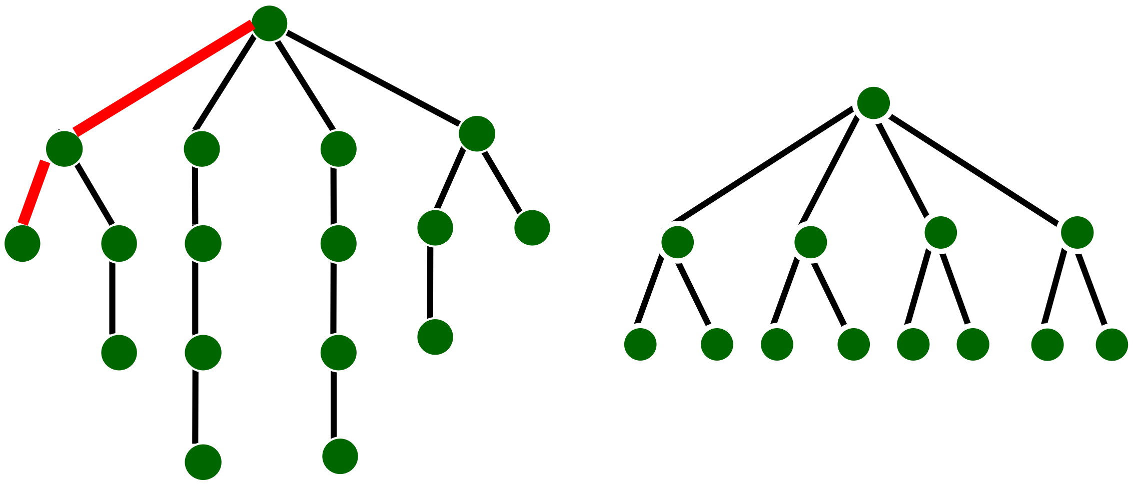
结点数 21

随机选择路径2



Case1: <2,4,1,3>， 结点数 17

随机选择路径3



Case3: <1,3>, **结点数 13**

估计结果

假设 4 次抽样测试：

case1：1次，

case2：1次，

case3：2次，

平均结点数 $=(21\times1+17\times1+13\times2)/4=16$

搜索空间访问的结点数为 17

小结

- **Monte Carlo 方法**

目的： 估计搜索树真正访问结点数

步骤：

随机抽样，选择一条路径

用这条路径代替其他路径

逐层累加树的结点数

多次选择，取结点数的平均值