本周教学内容

典型的分治算法

选择问题

- 选第k小
- 选第二大
- 选最大与最小
- 选最大

信号平滑处理

- 快速傅立叶变换FFT算法
- 卷积计算
- 卷积及应用

计算几何

- 计算平面点集的凸包

选最大与最小

选择问题

输入：集合 L (含n个不等的实数)
输出：L中第 i 小元素

i=1, 称为最小元素

i=n，称为最大元素

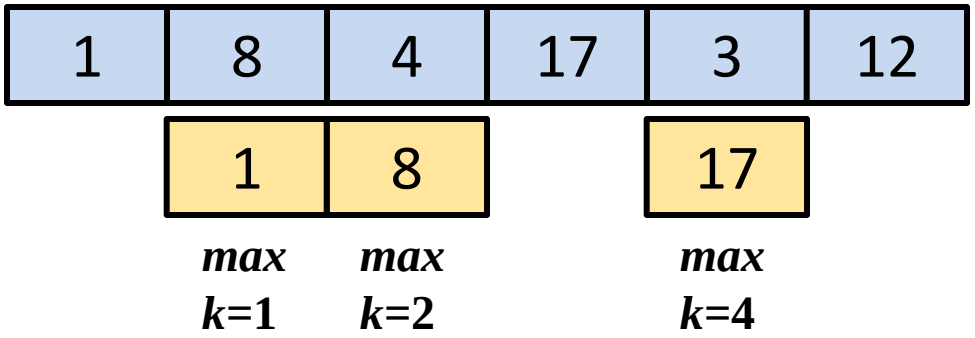
位置处在中间的元素，称为中位元素

n为奇数，中位数唯一，i = (n+1)/2

n为偶数，可指定 i = n/2+1

选最大

算法：顺序比较



输出：$max = 17$，$k=4$

算法最坏情况下的时间$W(n)=n-1$

伪码

算法 **Findmax**
输入：n 个数的数组 L
输出：max, k

1. $max \leftarrow L[1]$
2. for $i \leftarrow 2$ to n do
3. if $max < L[i]$
4. then $max \leftarrow L[i]$
5. $k \leftarrow i$
6. return max, k

选最大最小

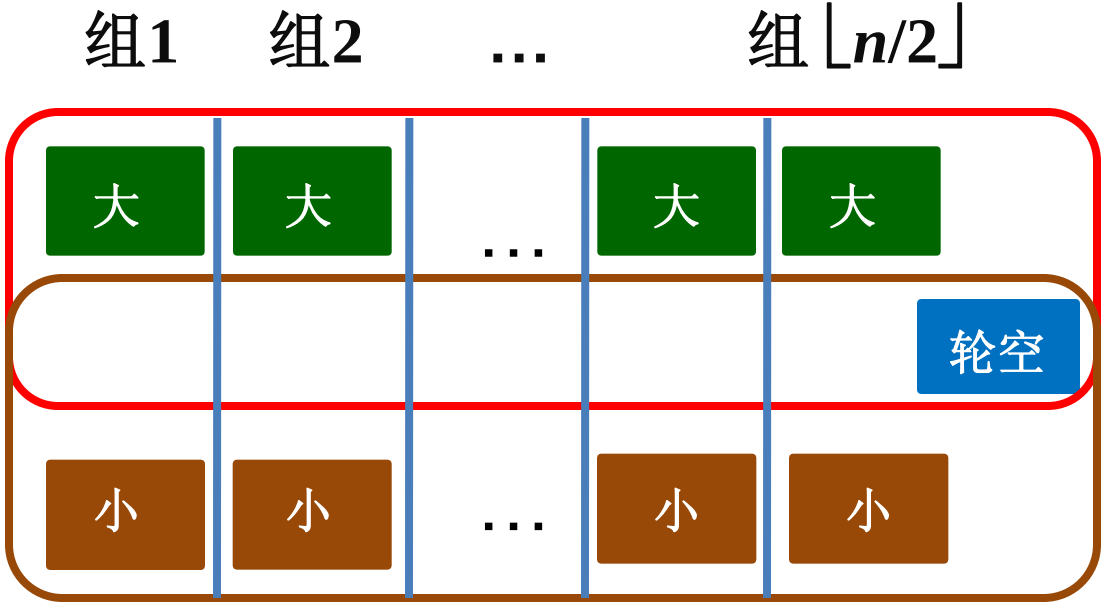
通常算法：

1. 顺序比较，先选最大 *max*
2. 顺序比较，在剩余数组中选最小 *min*，类似于选最大算法，但比较时保留较小的数

时间复杂性：

$$W(n) = n\text{-}1 + n\text{-}2 = 2n-3$$

分组算法



伪码

算法 **FindMaxMin**

输入：n个数的数组L

输出：max，min

1. 将 n 个元素两两一组分成$\lfloor n/2 \rfloor$组
2. 每组比较，得到$\lfloor n/2 \rfloor$个较小和$\lfloor n/2 \rfloor$个较大
3. 在$\lceil n/2 \rceil$个较大（含轮空元素）中找最大 max
4. 在$\lceil n/2 \rceil$个较小（含轮空元素）中找最小 min

最坏情况时间复杂度

行2 的组内比较：$\lfloor n/2 \rfloor$ 次

行3--4 求 *max* 和 *min* 比较：

至多　　$2\lceil n/2 \rceil - 2$次

$$W(n) = \lfloor n/2 \rfloor + 2\lceil n/2 \rceil - 2$$

$$= n + \lceil n/2 \rceil - 2$$

$$= \lceil 3n/2 \rceil - 2$$

分治算法

1. 将数组 L从中间划分为两个子数组 L_1 和 L_2
2. 递归地在 L_1中求最大 max_1 和 min_1
3. 递归地在 L_2中求最大 max_2 和 min_2
4. $max \leftarrow \max\{ max_1 , max_2\}$
5. $min \leftarrow \min\{ min_1 , min_2\}$

最坏情况时间复杂度

假设 $n = 2^k$,

$W(n) = 2W(n/2) + 2$

$W(2) = 1$

解 $W(2^k) = 2W(2^{k-1}) + 2$

$= 2[2W(2^{k-2}) + 2] + 2$

$= 2^2W(2^{k-2}) + 2^2+2 = \ \ldots$

$= 2^{k-1} + 2^{k-1} + \ldots \ + 2^2 + 2$

$= 3 \cdot 2^{k-1} - 2 = 3n/2 - 2$

选择算法小结

选最大：顺序比较, 比较次数 $n-1$

选最大最小

- 选最大+ 选最小, 比较次数 $2n-3$
- 分组： 比较次数 $\lceil 3n/2 \rceil - 2$
- 分治：$n=2^k$，比较次数 $3n/2-2$

选第二大

选第二大

输入：*n*个数的数组 *L*

输出：第二大的数 *second*

通常算法：顺序比较

1. 顺序比较找到最大 *max*
2. 从剩下 *n* –1个数中找最大，就是第二大*second*

时间复杂度：

$$W(n) = n - 1 + n - 2 = 2n - 3$$

提高效率的途径

- 成为第二大数的条件：仅在与最大数的比较中被淘汰.
- 要确定第二大数，必须知道最大数.
- 在确定最大数的过程中记录下被最大数直接淘汰的元素.
- 在上述范围（被最大数直接淘汰的数）内的最大数就是第二大数.
- 设计思想： 用空间换时间.

锦标赛算法

1. 两两分组比较，大者进入下一轮，直到剩下 1个元素 *max* 为止
2. 在每次比较中淘汰较小元素，将被淘汰元素记录在淘汰它的元素的链表上
3. 检查 *max* 的链表，从中找到最大元，即*second*

伪码

算法 **FindSecond**

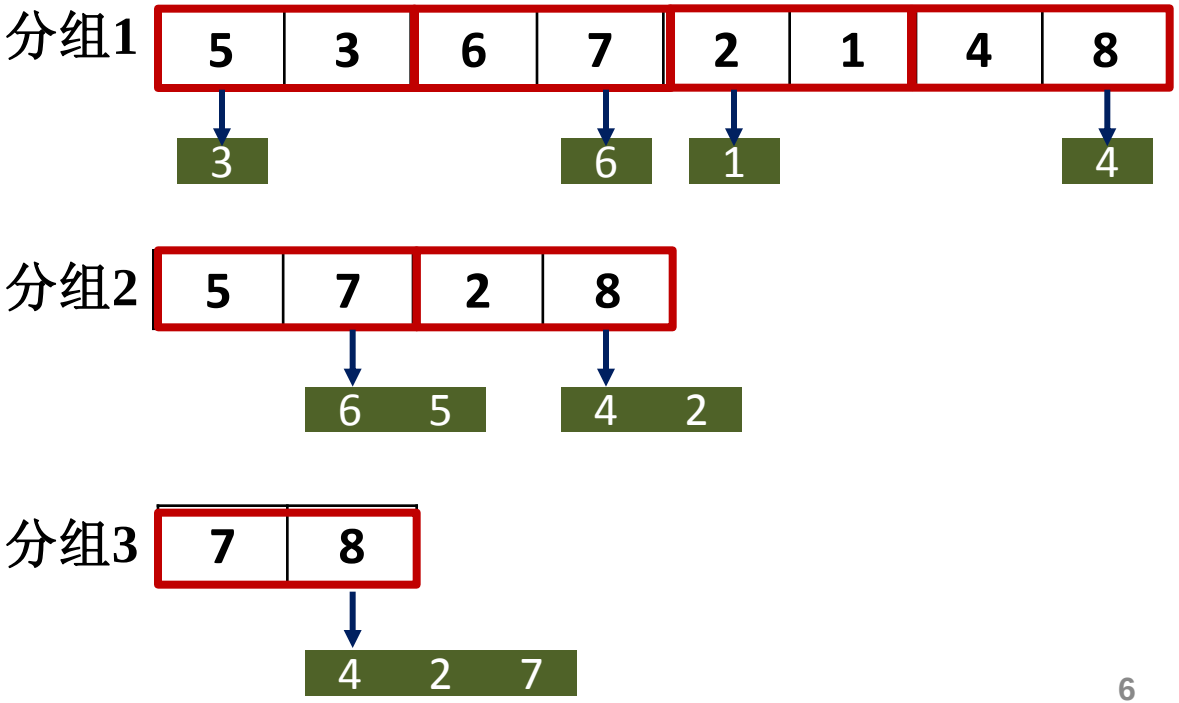
输入: n个数的数组 L，输出: $second$

1. $k \leftarrow n$ // 参与淘汰的元素数
2. 将k个元素两两1组, 分成$\lfloor k/2 \rfloor$组
3. 每组的2个数比较，找到较大数
4. 将被淘汰数记入较大数的链表
5. if k 为奇数 then $k \leftarrow \lfloor k/2 \rfloor + 1$
6. else $k \leftarrow \lfloor k/2 \rfloor$
7. if $k>1$ then goto 2
8. $max \leftarrow$最大数
9. $second \leftarrow max$ 的链表中的最大

一轮淘汰

继续分组淘汰

实例



时间复杂度分析

命题1 设参与比较的有 t 个元素，经过 i 轮淘汰后元素数至多为 $\lceil t/2^i \rceil$.

证 对 i 归纳. $i=1$,分 $\lfloor t/2 \rfloor$ 组，淘汰 $\lfloor t/2 \rfloor$ 个元素，进入下一轮元素数是

$$t - \lfloor t/2 \rfloor = \lceil t/2 \rceil$$

假设 i 轮分组淘汰后元素数至多为 $\lceil t/2^i \rceil$，那么 $i+1$ 轮分组淘汰后元素数为

$$\lceil \lceil t/2^i \rceil /2 \rceil = \lceil t/2^{i+1} \rceil$$

时间复杂度分析（续）

命题2 *max* 在第一阶段分组比较中总计进行了$\lceil \log n \rceil$次比较.

证　假设到产生 *max* 时总计进行 k 轮淘汰, 根据命题 1有$\lceil n/2^k \rceil = 1$.

若 $n=2^d$，那么有

$$k = d = \log n = \lceil \log n \rceil$$

若 $2^d < n < 2^{d+1}$，那么

$$k = d + 1 = \lceil \log n \rceil$$

时间复杂度分析（续）

第一阶段元素数：n
比较次数：$n-1$
淘汰了 $n-1$个元素

第二阶段：元素数$\lceil \log n \rceil$
比较次数：$\lceil \log n \rceil - 1$
淘汰元素数为$\lceil \log n \rceil - 1$

时间复杂度是

$$W(n) = n - 1 + \lceil \log n \rceil - 1$$
$$= n + \lceil \log n \rceil - 2.$$

小结

求第二大算法

- 调用2次找最大：$2n-3$
- 锦标赛算法：$n+\lceil \log n \rceil -2$

  主要的技术：用空间换时间

一般选择问题的算法设计

一般性选择问题

问题：选第 k 小.

输入：数组 S, S 的长度 n, 正整数 k,

$1 \le k \le n$.

输出：第 k 小的数

实例 1

S={ 3,4,8,2,5,9,18 }，k = 4，解：5

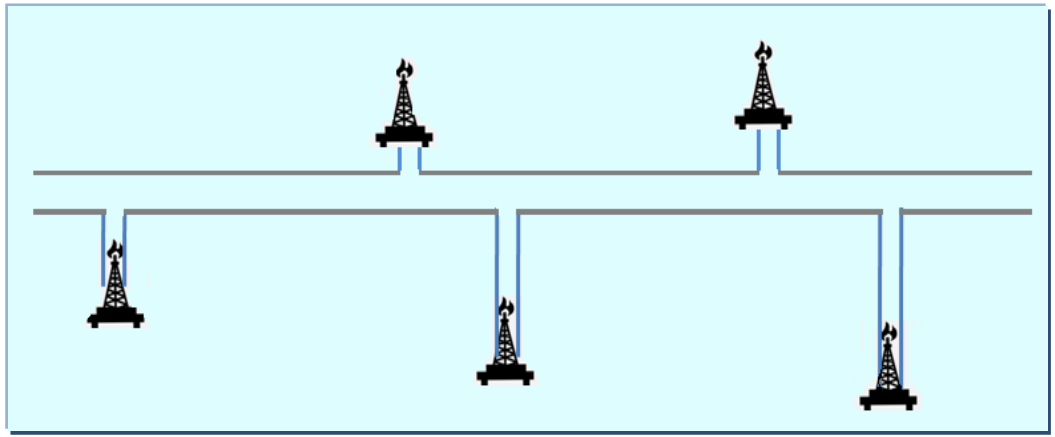
实例 2

统计数据的集合S，$|S|=n$，

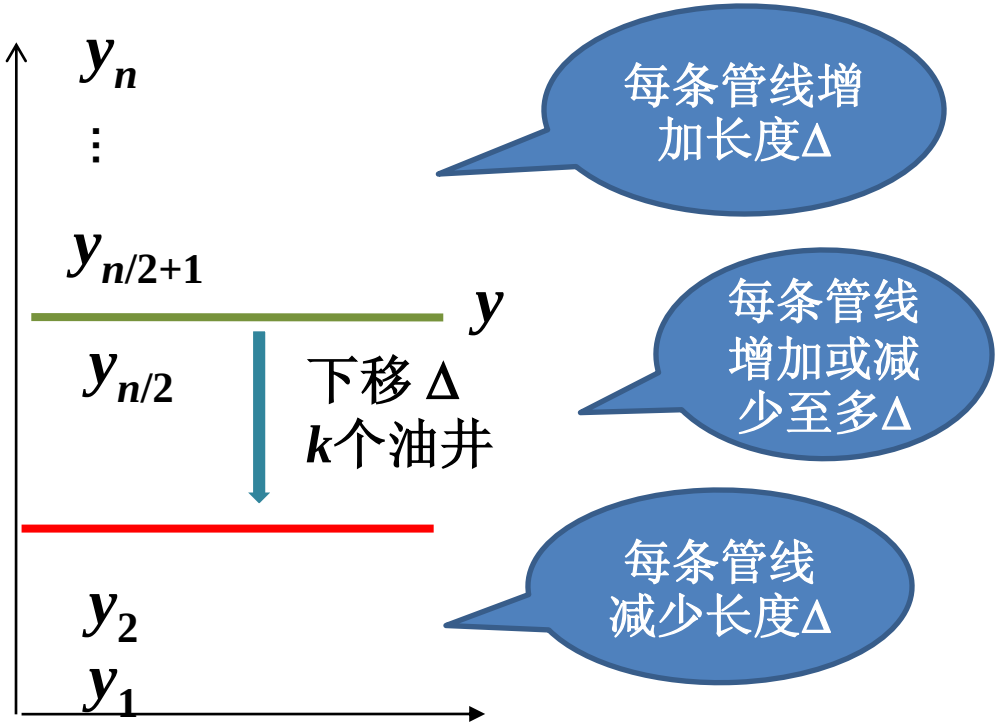
选中位数，$k=\lceil n/2 \rceil$

一个应用：管道位置

问题：某区域有n口油井，需要修建输油管道. 根据设计要求，水平方向有一条主管道，每口油井修一条垂直方向的支管道通向主管道. 如何选择主管道的位置，以使得支管道长度的总和最小？



最优解：Y坐标的中位数



下移后支管线总长度增加

简单的算法

算法一：

调用 k 次选最小算法

时间复杂度为 $O(kn)$

算法二：

先排序，然后输出第 k 小的数

时间复杂度为 $O(n \log n)$

分治算法

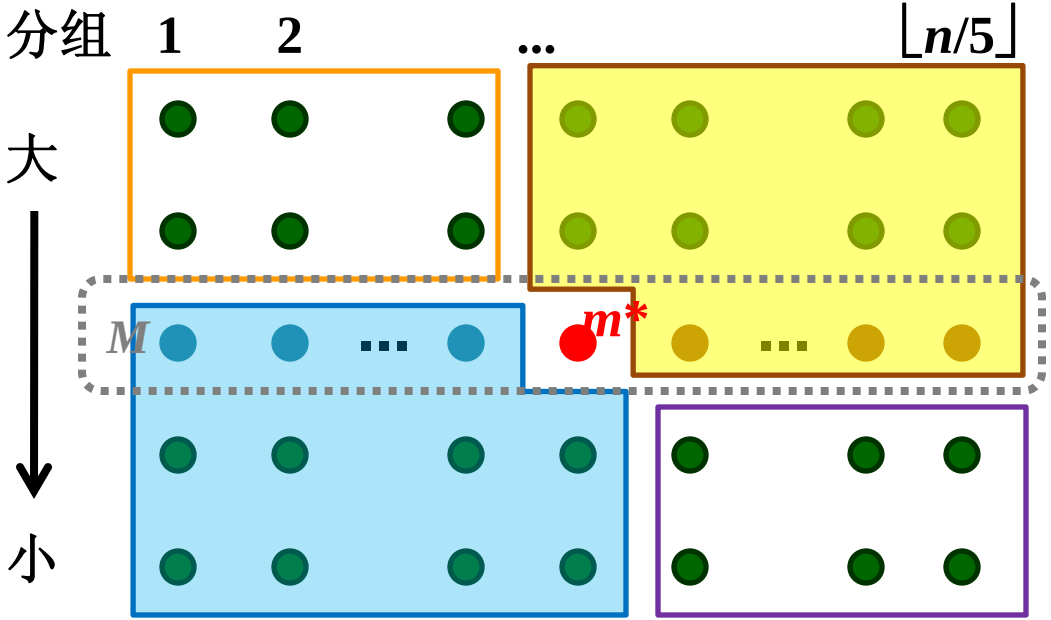
假设元素彼此不等，设计思想：

1. 用某个元素 m^*作为标准将 S 划分成 S_1 与 S_2，其中 S_1的元素小于 m^*，S_2 的元素大于等于 m^*.

2. 如果 $k \le |S_1|$，则在 S_1中找第 k 小.
   如果 $k = |S_1|+1$，则 m^*是第 k 小
   如果 $k > |S_1|+1$，则在 S_2中找第 $k-|S_1|-1$小

算法效率取决于子问题规模，
如何通过m^*控制子问题规模？

*m**的选择与划分过程



A: 数需要与*m**比大小，*B*：数大于*m**

C: 数小于*m**，　*D*:数需要与*m**比大小

实例：$n=15, k=6$

8	2	3	5	7	6	11	14	1	9	13	10	4	12	15

M

8	14	15
7	11	13
5	9	12
3	6	10
2	1	4

$m^* = 9$

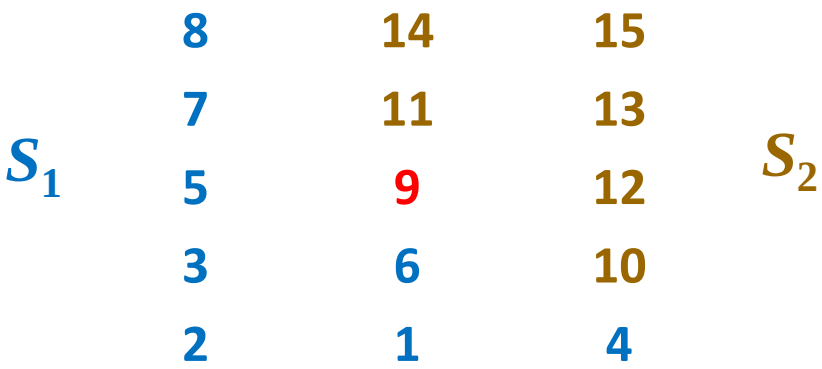
	8	14	15
A	7	11	13
	5	9	12
C	3	6	10
	2	1	4

B

D

8, 7, 10, 4 需要与9比较

归约为子问题



子问题

8 7 5 3 2 6 1 4

子问题规模 = 8，k=6

伪码

算法 Select (S, k)

输入：数组 S，正整数 k，

输出：S 中的第 k 小元素

1. 将S分5个一组, 共 $n_M = \lceil n/5 \rceil$组
2. 每组排序,中位数放到集合 M
3. $m^* \leftarrow$Select(M,$\lceil |M|/2 \rceil$) //S分A,B,C,D
4. A,D元素小于m^*放 S_1,大于m^*放S_2
5. $S_1 \leftarrow S_1 \cup C$; $S_2 \leftarrow S_2 \cup B$ 划分
6. if $k = |S_1| + 1$ then 输出 m^*
7. else if $k \le |S_1|$ ⇐ 递归计算子问题
8. then Select (S_1, k)
9. else Select (S_2, $k - |S_1| - 1$)

小结

选第 k 小的算法：

- 分治策略
- 确定m^*
- 用m^*划分数组归约为子问题
- 递归实现

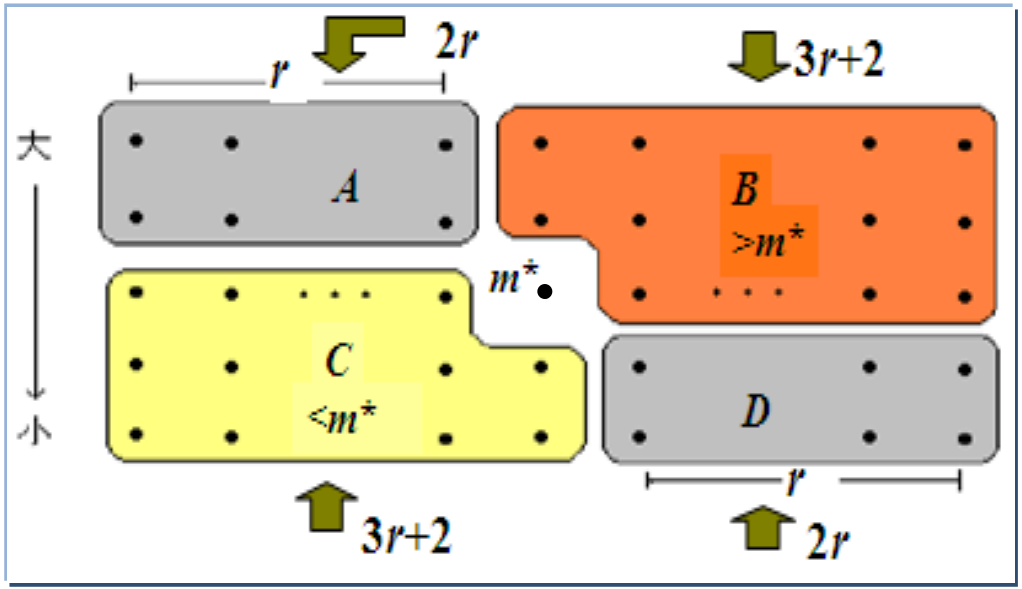
选择问题的算法分析

伪码

算法 Select (S, k)

1. 将S分5个一组, 共 $n_M = \lceil n/5 \rceil$组
2. 每组排序,中位数放到集合 M
3. $m^* \leftarrow$Select(M,$\lceil |M|/2 \rceil$) //S分A,B,C,D
4. A,D元素小于m^*放 S_1,大于m^*放S_2
5. $S_1 \leftarrow S_1 \cup C$; $S_2 \leftarrow S_2 \cup B$
6. if $k = |S_1| + 1$ then 输出 m^*
7. else if $k \le |S_1|$
8. then Select (S_1, k)
9. else Select (S_2, $k - |S_1| - 1$)

用m^*划分



$n = 5\,(2r+1)$, $|A| = |D| = 2r$

子问题规模至多： $2r+2r+3r+2 = 7r+2$

子问题规模估计

不妨设 $n = 5(2r+1)$，$|A|=|D|=2r$,

$$r = \frac{n/5-1}{2} = \frac{n}{10} - \frac{1}{2}$$

划分后子问题规模至多为

$$7r+2 = 7(\frac{n}{10} - \frac{1}{2}) + 2$$

$$= \frac{7n}{10} - \frac{3}{2} < \frac{7n}{10}$$

时间复杂度递推方程

算法工作量 $W(n)$

行2: $O(n)$ //每5个数找中位数,构成M

行3: $W(n/5)$ // M 中找中位数 m^*

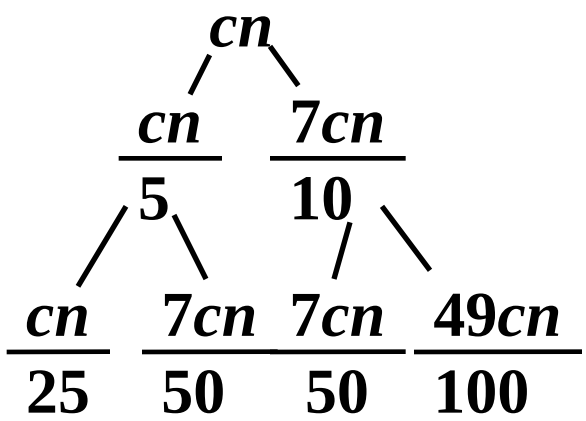
行4: $O(n)$ // 用m^*划分集合 S

行8-9： $W(7n/10)$ //递归

$$W(n) \le W(n/5) + W(7n/10) + O(n)$$

递归树

$W(n)=W(n/5)+W(7n/10)+cn$



cn

$0.9cn$

$0.81cn$

$W(n) \le cn\ (1+0.9+0.9^2+...)=O(n)$

讨论

分组时为什么5个元素一组？
3个一组或 7个一组行不行？

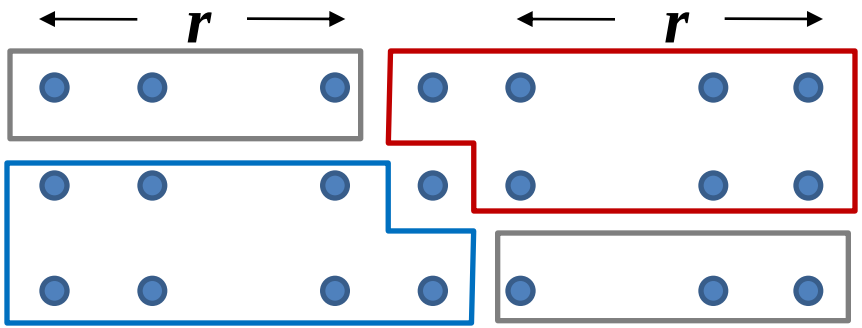
分析：递归调用

1. 求 m*的工作量与 $|M| = n/t$ 相关，t 为每组元素数. t大, $|M|$小

2. 归约后子问题大小与分组元素数t 有关 . t 大，子问题规模大

3分组时的子问题规模

假设 t =3，3个一组：



$n = 3(2r + 1)$

$r = (n/3 - 1)/2 = n/6 - 1/2$

子问题规模最多为 $4r+1 = 4n/6-1$

算法的时间复杂度

算法的时间复杂度满足方程

$$W(n) = W(n/3) + W(4n/6) + cn$$

由递归树得 $W(n)=\Theta(n\log n)$

关键：

$|M|$与归约后子问题规模之和小于 n，

递归树每行的工作量构成公比小于 1 的等比级数， 算法复杂度才是$O(n)$.

小结

选第 k 小算法的时间分析

- 递推方程
- 分组时每组元素数的多少对时间复杂度的影响

卷积及其应用

向量计算

给定向量 $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$

$b = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$

向量和 $a+b = (a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots, a_{n-1}+b_{n-1})$

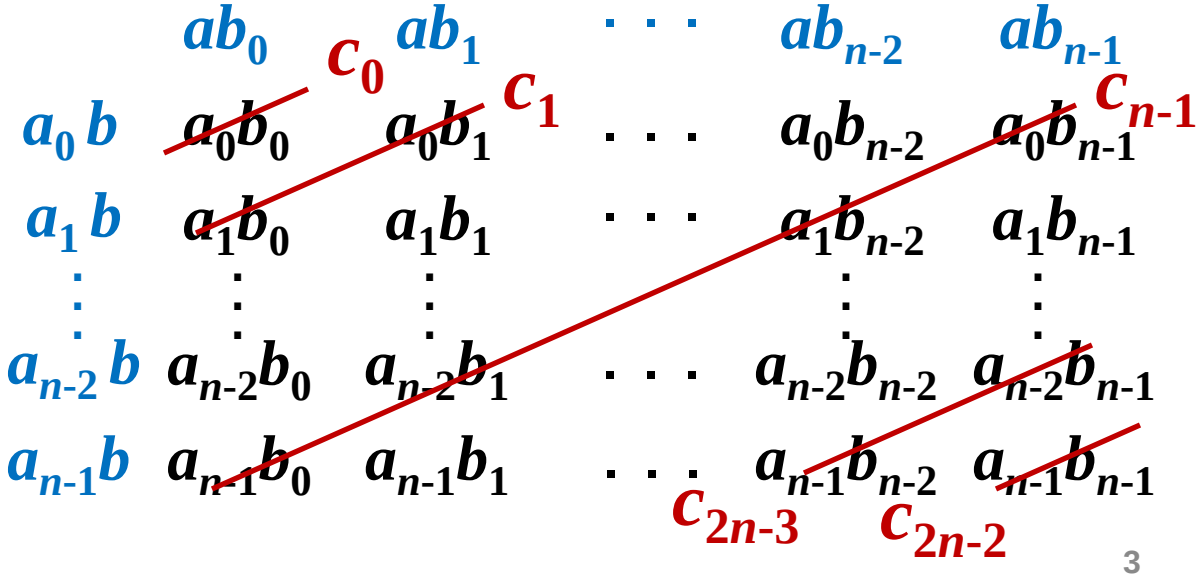
内积 $a \cdot b = a_0b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_{n-1}b_{n-1}$

卷积 $a*b = (c_0, c_1, \ldots, c_{2n-2})$，其中

$$c_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j<n}} a_i b_j, \quad k = 0,1,\ldots,2n-2$$

卷积的含义

在下述矩阵中，每个斜线的项之和恰好是卷积中的各个分量



计算实例

向量 $a = (1, 2, 4, 3)$, $b = (4, 2, 8, 0)$

则 $a+b = (5, 4, 12, 3)$

$a \cdot b = (4, 4, 32, 0)$

$a * b = (4, 10, 28, 36, 38, 24, 0)$

	ab_0	ab_1	ab_2	ab_3
a_0b	1×4	1×2	1×8	1×0
a_1b	2×4	2×2	2×8	2×0
a_2b	4×4	4×2	4×8	4×0
a_3b	3×4	3×2	3×8	3×0

$c_2 = 4\times4 + 2\times2 + 1\times8 = 28$

卷积与多项式乘法

多项式乘法：$C(x) = A(x)\,B(x)$

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{m-1} x^{m-1}$$

$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}$$

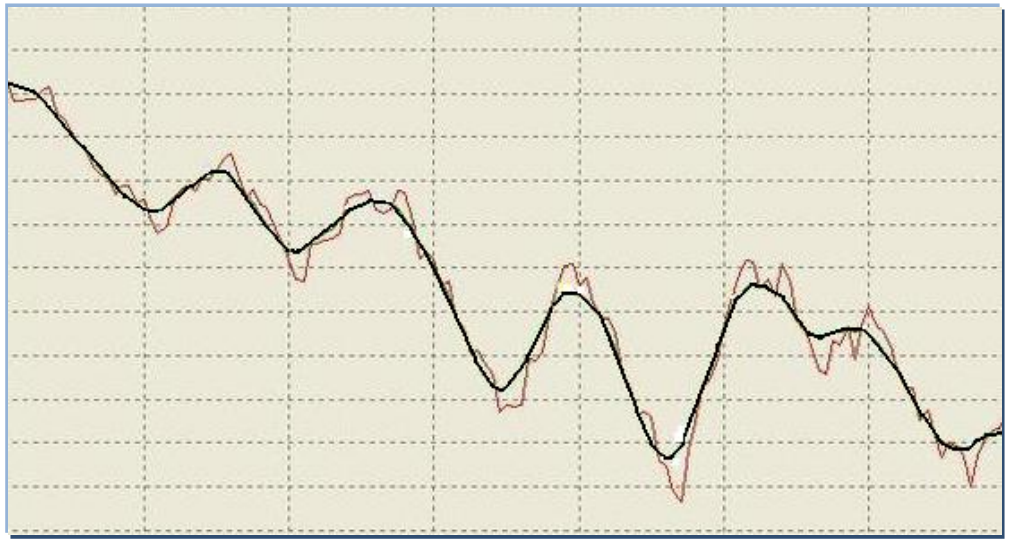
$$C(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, x + \ldots + a_{m-1} b_{n-1}\, x^{m+n-2}$$

其中 x^k 的系数

$$c_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ i\in\{0,1,\ldots,m-1\} \\ j\in\{0,1,\ldots,n-1\}}} a_i b_j, \quad k = 0, 1, \ldots, m+n-2$$

卷积应用：信号平滑处理

由于噪音干扰，对信号需要平滑处理

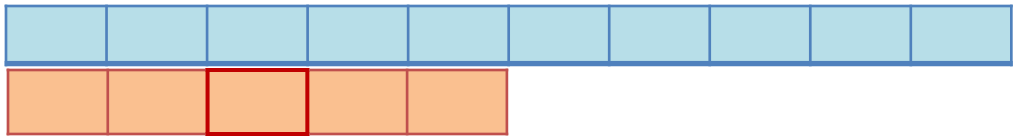


平滑处理

信号向量： $a=(a_0, a_1, \dots, a_{m-1})$

$b=(b_{2k},b_{2k-1},\dots,b_0) =(w_{-k}, \dots, w_k)$

$$a_i' = \sum_{s=-k}^{k} a_{i+s} b_{k-s} = \sum_{s=-k}^{k} a_{i+s} w_s$$



把向量 b 看作$2k+1$长度窗口在a上移动计算 $a*b$, 得到 $(a_0', a_1', \dots, a_{m-1}')$. 有少数项有误差.

实例

信号向量：$a = (a_0, a_1, \dots, a_8)$

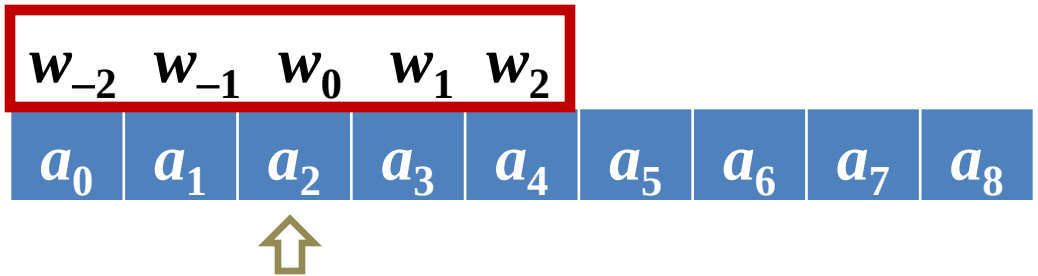
步长：$k = 2$

权值：$w = (w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2)$

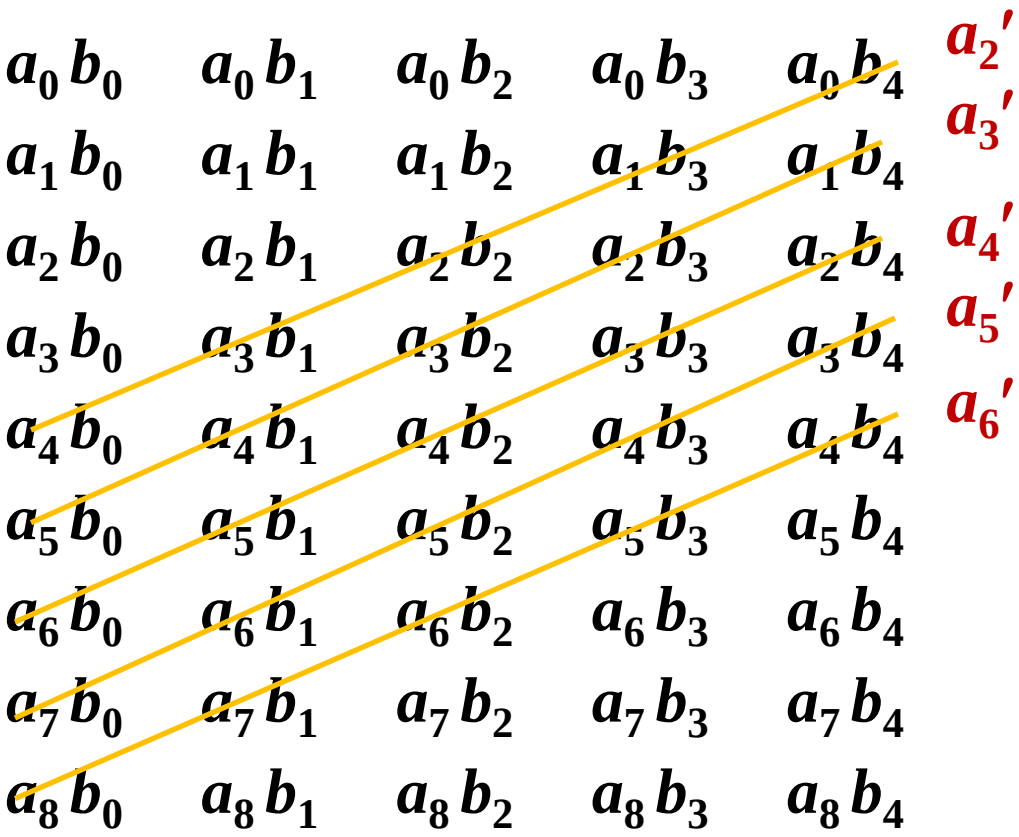
$= (b_4, b_3, b_2, b_1, b_0)$

$a_i' = a_{i-2}b_4 + a_{i-1}b_3 + a_ib_2 + a_{i+1}b_1 + a_{i+2}b_0$

下标之和为 $i + k$



$$a_i' = a_{i-2}b_4 + a_{i-1}b_3 + a_i b_2 + a_{i+1}b_1 + a_{i+2}b_0$$



小结

- 卷积的定义
- 卷积与多项式乘法的关系
- 卷积的应用——信号平滑处理

卷积计算

卷积计算：蛮力算法

向量 $a=(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1})$和$b=(b_0,b_1,\ldots,b_{n-1})$

$$A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$$

$$B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_{n-1}x^{n-1}$$

$$C(x)=A(x)B(x)$$

$$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)\,x+\ldots+a_{n-1}b_{n-1}\,x^{2n-2}$$

$C(x)$的系数向量就是$a*b$.

卷积 $a*b$ 计算等价于多项式相乘

蛮力算法的时间：$O(n^2)$

计算$2n$-1次多项式$C(x)$

1. 选择值 $x_0, x_1, \cdots, x_{2n-1}$，
   求出 $A(x_j)$ 和 $B(x_j)$，
   $j = 0, 1, \cdots, 2n-1$

主要步骤:多项式求值

2. 对每个 j,计算$C(x_j)=A(x_j)B(x_j)$

3. 利用多项式插值方法，由$C(x)$ 在
   $x = x_0, x_1, \cdots, x_{2n-1}$
   的值求出多项式 $C(x)$的系数

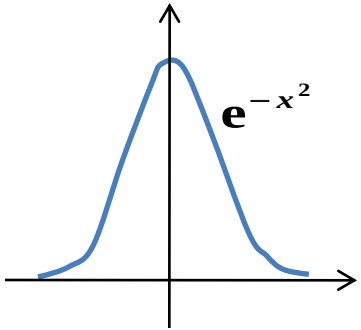
如何选择$x_0,x_1,\ldots,x_{2n-1}$的值？
高效多项式求值算法

高斯滤波的权值函数

高斯滤波的权值函数为

$$w_s = \frac{1}{z} e^{-s^2}, \quad s = 0, \pm 1, \ldots, \pm k$$

$$w = (w_{-k}, \ldots, w_{-1}, w_0, w_1, \ldots, w_k)$$



其中 z 用于归一化处理，使所有的权值之和为1. 处理结果

$$a_i' = \sum_{s=-k}^{k} a_{i+s} w_s$$

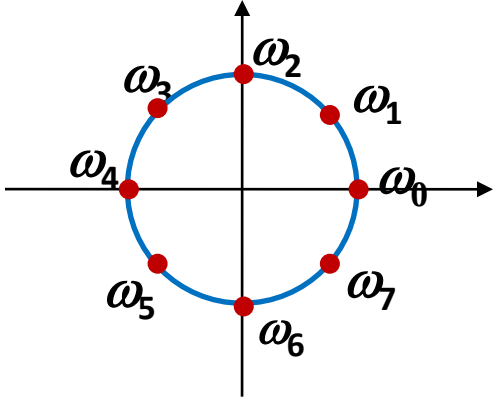
2n个数的选择:1的2n次根

$$\omega_j = e^{\frac{2\pi j}{2n}i} = e^{\frac{\pi j}{n}i}$$

$$= \cos\frac{\pi j}{n} + i\sin\frac{\pi j}{n}$$

$$j = 0,1,\ldots,2n-1,\quad i = \sqrt{-1}$$

$n=4$ 的实例



$$\omega_0 = 1, \qquad \omega_1 = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 \cdot \mathrm{i},$$

$$\omega_2 = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = \mathrm{i}, \quad \omega_3 = \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}} = -\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 \cdot \mathrm{i},$$

$$\omega_4 = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = -1, \ \omega_5 = \mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}\mathrm{i}} = -\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2 \cdot \mathrm{i},$$

$$\omega_6 = \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}} = -\mathrm{i}, \ \omega_7 = \mathrm{e}^{\frac{7\pi}{4}\mathrm{i}} = \sqrt{2}/2 - \sqrt{2/2} \cdot \mathrm{i}$$

快速傅立叶变换FFT

1. 对 $x=1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n-1}$, 分别计算 $A(x)$，$B(x)$

2. 利用步1的结果对每个 $x=1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n-1}$, 计算 $C(x)$，得到 $C(1)=d_0, C(\omega_1)=d_1, \ldots, C(\omega_{2n-1})=d_{2n-1}$

3. 构造多项式

   $$D(x) = d_0+d_1x+d_2x^2+\ldots+d_{2n-1}x^{2n-1}$$

4. 对$x=1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n-1}$, 计算$D(x)$, $D(1)$, $D(\omega_1)$, $\ldots$, $D(\omega_{2n-1})$

快速傅立叶变换FFT(续)

可以证明：

$$D(1) = 2n\,c_0$$
$$D(\omega_1) = 2n\,c_{2n-1}$$
$$\cdots$$
$$D(\omega_{2n-1}) = 2nc_1$$

$$c_0 = D(1)/2n$$
$$c_{2n-1} = D(\omega_1)/2n$$
$$\cdots$$
$$c_1 = D(\omega_{2n-1})/2n$$

知道了$D(x)$的值，就能求$C(x)$的系数

算法的关键

令 $x = 1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n-1}$,

- 步 1对 $2n$个x值分别求值多项式 $A(x), B(x)$
- 步2 做 $2n$次乘法
- 步3 对$2n$个x值求值多项式 $D(x)$

关键：一个对所有的 x 快速多项式求值算法

小结

卷积计算

- 蛮力算法$O(n^2)$
- 快速傅立叶变换FFT算法

  确定x的取值：1 的 $2n$ 次根

  关键步骤：多项式对x求值

如何设计多项式求值的快速算法？

快速傅立叶变换:FFT算法

多项式求值算法

给定多项式：

$$A(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$$

设 x 为1 的 $2n$ 次方根，对所有的 x 计算 $A(x)$ 的值.

算法1：对每个 x 做下述运算：

依次计算每个项 $a_i\,x^i$，$i=1,\ldots,n\text{-}1$

对 $a_i\,x^i$ $(i=0,1,\ldots,n\text{-}1)$求和.

蛮力算法的时间复杂度

$$T_1(n)=O(n^3)$$

改进的求值算法

算法2： 依次对 每个 x 做下述计算

$A_1(x)=a_{n-1}$

$A_2(x) = a_{n-2}+xA_1(x) = a_{n-2}+a_{n-1}x$

$A_3(x) = a_{n-3}+xA_2(x) = a_{n-3}+a_{n-2}x+a_{n-1}x^2$

…

$A_n(x) = a_0+ x A_{n-1}(x) = A(x)$

时间复杂度

$$T_2(n) = O(n^2)$$

偶系数与奇系数多项式

$n=4$

$$A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$$

$$A_{even}(x) = a_0+a_2x$$

$$A_{odd}(x) = a_1+a_3x$$

$$A(x) = A_{even}(x^2) + xA_{odd}(x^2)$$

$$= a_0+a_2x^2 + x(a_1+a_3x^2)$$

分治多项式求值算法

一般公式（n为偶数）

$$A(x)= a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$$

$$A_{\text{even}}(x)=a_0+a_2x+a_4x^2+\ldots+a_{n-2}x^{(n-2)/2}$$

$$A_{\text{odd}}(x)=a_1+a_3x+a_5x^2+\ldots+a_{n-1}x^{(n-2)/2}$$

$$A(x) = A_{\text{even}}(x^2) + xA_{\text{odd}}(x^2)$$

- x^2 也是1 的 $2n$ 次根
- 偶次数与奇次数多项式计算作为 $n/2$ 规模的子问题，然后利用子问题的解 $A_{\text{even}}(x^2)$ 与 $A_{\text{odd}}(x^2)$ 得到 $A(x)$

分治求值算法设计

算法 3：

1. 计算 1 的所有的 $2n$ 次根

   $1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n-1}$

2. 分别计算$A_{even}(x^2)$与$A_{odd}(x^2)$

3. 利用步2 的结果计算 $A(x)$

   $A(x) = A_{even}(x^2) + x A_{odd}(x^2)$

注意：x^2不需要重新计算，所有根在单位圆间隔分布，隔一取一即可.

分治求值算法分析

$$T(n) = T_1(n) + f(n)$$

$f(n)=O(n)$ 是步 1 计算$2n$次根的时间

递归过程 $T_1(n) = 2T_1(n/2) + g(n)$

$T_1(1) = O(1)$，

$g(n) = O(n)$ 是对所有$2n$次根在步3组合解的时间

$$T_1(n)=O(n\log n)$$

$$T(n)=O(n\log n)+O(n)=O(n\log n)$$

FFT算法伪码

1. 求值$A(\omega_j)$和$B(\omega_j)$，$j=0,1,\ldots,2n-1$
2. 计算 $C(\omega_j)$，　　$j=0,1,\ldots,2n-1$
3. 构造多项式

$$D(x)=C(\omega_0)+C(\omega_1)x+\ldots+C(\omega_{2n-1})x^{2n-1}$$

4. 计算所有的 $D(\omega_j)$，$j=0,1,\ldots,2n-1$
5. 利用下式计算$C(x)$的系数 c_j，

$$D(\omega_j)=2nc_{2n-j}$$

$$j=0,1,\ldots,2n-1$$

FFT算法分析

步1: 求值 $A(\omega_j)$ 和 $B(\omega_j)$ $O(n\log n)$

步2: 计算所有的 $C(\omega_j)$ $O(n)$

步3:

步4: 计算所有的 $D(\omega_j)$ $O(n\log n)$

步5: 计算所有的 c_j $O(n)$

算法时间为 $O(n\log n)$

小结

- 多项式求值算法

  蛮力算法：$O(n^3)$

  改进的求值算法：$O(n^2)$

  FFT算法：$O(n\log n)$

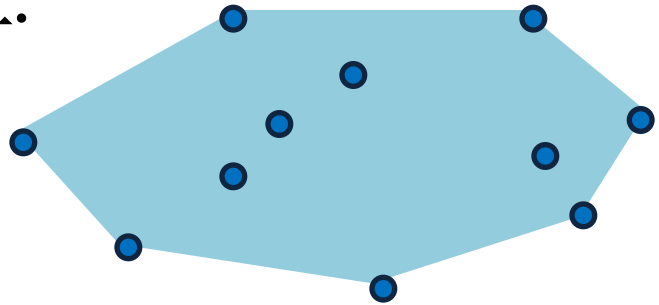
- FFT算法的设计与分析

平面点集的凸包

平面点集的凸包

问题（平面点集的凸包）

给定大量离散点的集合Q，求一个最小的凸多边形，使得Q中的点在该多边形内或者边上.

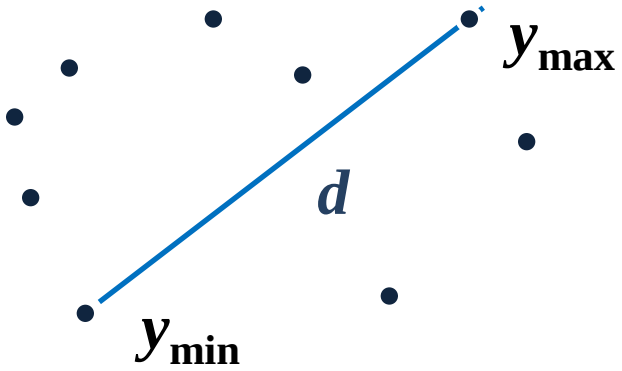


应用背景

图形处理中用于形状识别：字形识别、碰撞检测等

分治算法

1. 以 连接最大纵坐标点 y_{max} 和最小纵坐标点 y_{min} 的线段d=$\{y_{max},y_{min}\}$划分L 为左点集 L_{left} 和右点集 L_{right}



2. Deal (L_{left})；Deal (L_{right})

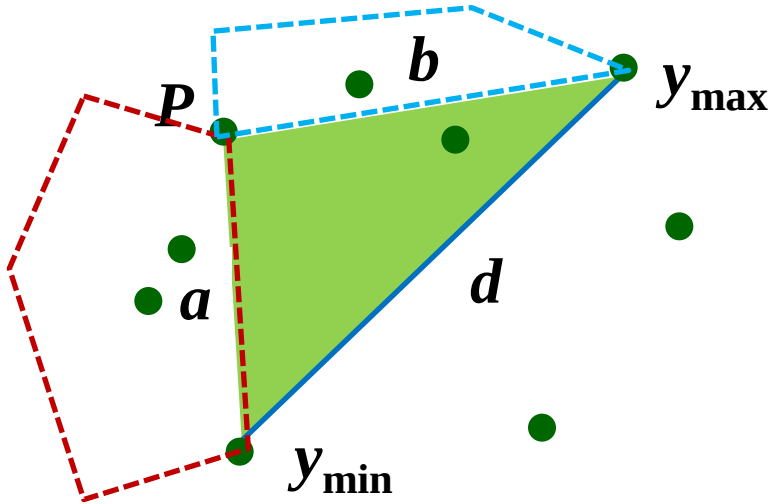
Deal (L_{left})

考虑 L_{left}：确定距d 最远的点P

在三角形内的点，删除；

a 外的点与 a 构成 L_{left} 的子问题;

b 外的点与 b 构成 L_{left} 的子问题 .



伪码

Deal (L_{left})

1. 以 d 和距离 d 最远点 P 构成三角形，P加入凸包，另外两条边分别记作 a 和 b

2. 检查 L_{left} 中其他点是否在三角形内；在则从 L中删除；否则根据在 a 或 b 边的外侧划分在两个子问题中

3. **Deal (*a*)**

4. **Deal (*b*)**

算法分析

- 初始用d 划分　　$O(n)$
- Deal 递归调用　　$W(n)$
  - 找凸包顶点 P　　$O(n)$
  - 根据点的位置划分子问题　$O(n)$
- $W(n) = W(n-1) + O(n)$
  $W(3) = O(1)$

  最坏情况为$O(n^2)$

  $T(n) = O(n) + W(n) = O(n^2)$
- Graham扫描算法 $O\ (n\log n)$

小结：分治算法设计

- 将原问题归约为子问题
  - 直接划分注意尽量均衡
  - 通过计算归约为特殊的子问题
  - 子问题与原问题具有相同的性质
  - 子问题之间独立计算

- 算法实现：
  - 递归或迭代实现
  - 注意递归执行的边界

小结：分治算法的分析及改进

- 时间复杂度分析
  - 给出关于时间复杂度函数的递推方程和初值
  - 求解方程
- 提高效率的途径
  - 减少子问题个数
  - 预处理

重要的分治算法

- 检索算法：二分检索
- 排序算法：快速排序、二分归并排序
- 选择算法
- 快速傅立叶变换 FFT 算法
- 平面点集的凸包