第5章 正则语言的性质

主要内容：

5.1 FA与RG的等价性

5.2 正则语言的泵引理

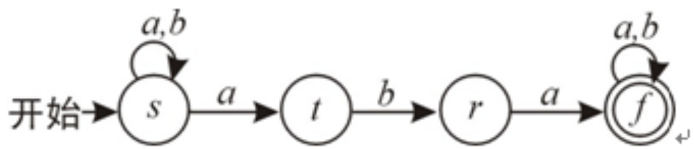
5.3 正则语言的封闭性

5.4 正则语言的判定算法

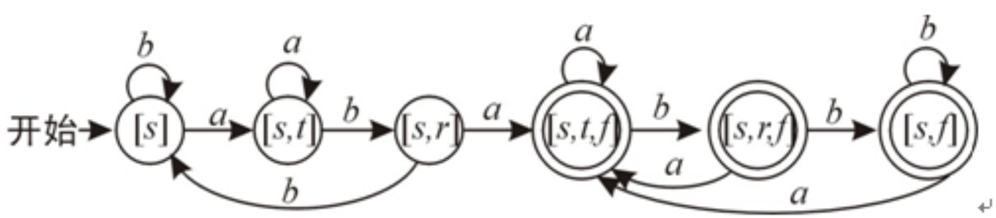
5.5 自动机的等价性与最小化

5. 5 自动机的等价性与最小化

例5.6　由下图给出的NFA共有4个状态，它接受字母表{a,b}上所有包含aba的字符串。

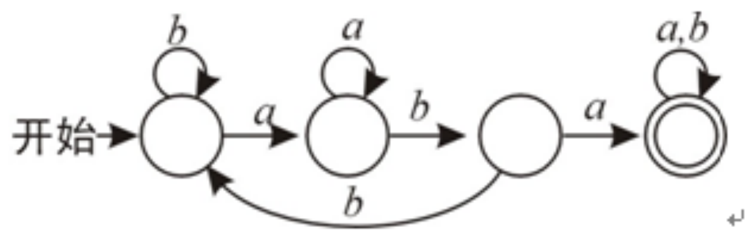


若按照第三章定理给出的方法，构造一个等价的DFA，需要设2^4=16个状态，除去不可到达的状态外，还剩下6个状态。这个DFA如下图所示。



5.5 自动机的等价性与最小化

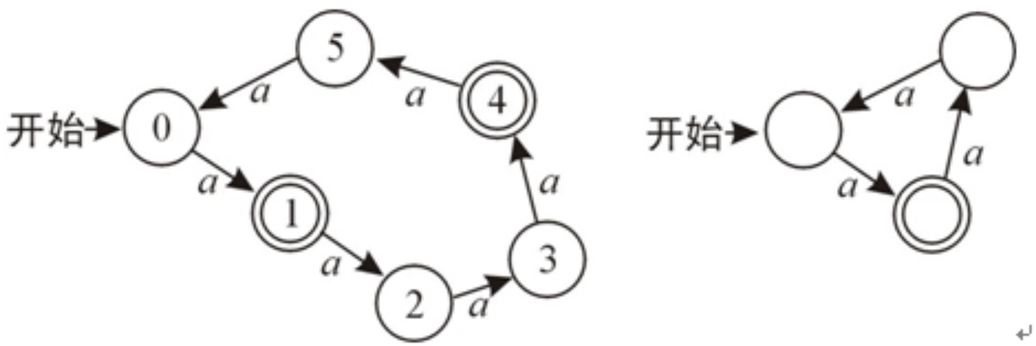
- 注意，在上图中最右边的三个终结状态可以合并为一个，这样一来，接受同一集合的DFA只用4个状态就够了。这个DFA如下：



- 后面将要证明，接受上述集合的任何DFA都不能少于4个状态。换句话说，最后这个DFA已经是最简单的了。

5. 5 自动机的等价性与最小化

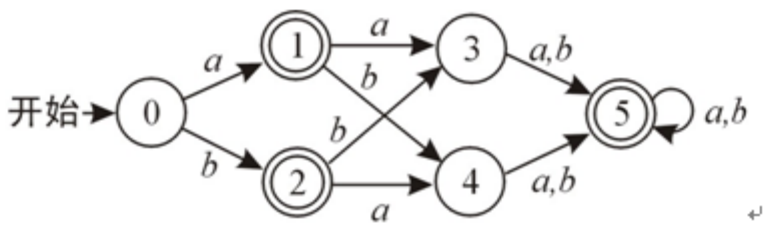
- 例5.7 由下图给出的DFA接受集合$\{a^m | m \bmod 3 = 1\}$，即$\{a, a^4, a^7, a^{10}, \ldots\}$。



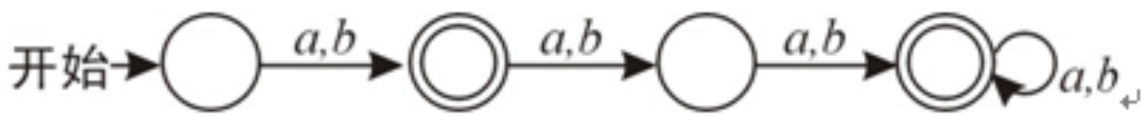
- 左边的图所示的DFA共用6个状态，显然是太多了。我们可以将状态1，4合并，状态2，5合并，状态0，3合并，得出的DFA只用3个状态，也能接受同样的集合。这个化简后的DFA示于原图的右边。

5. 5 自动机的等价性与最小化

例5.8　给出一个DFA接受集合 $\{x|x\in\{a,b\}^+$，并且$|x|\neq 2\}$，图示如下：



在图中，状态1、2的功能相同，它们都表明读入的串的长度为1，应当接受。状态3、4的功能也相同，它们都表明读入的串的长度为2，不能接受。因此，状态1、2可以合并，状态3、4也可以合并。上图可以化简为的等价的DFA（见下图）：



总结：从上面的四个例子发现，在保持等价的条件下，有穷自动机确实存在化简的问题。对于简单的有穷自动机，可以根据它所接受的字符串的集合，分析每个状态的作用，决定哪些可以合并。但是对于复杂的有穷自动机，这种直观的方法就不行了，必须寻求形式化的方法，给出一个化简的算法。

5.5 自动机的等价性与最小化

问题提出：

存在最小化的**DFA**吗？如果存在，唯一吗？

Myhill–Nerode theorem provides a necessary and sufficient condition for a language to be regular.

The theorem is named for John Myhill and Anil Nerode, who proved it at the University of Chicago in 1958 (Nerode 1958).

5.5 自动机的等价性与最小化

- 二元关系 ---是一个集合
  - 任意的R⊆A×B，R是A到B的二元关系。
  - (a，b) ∈R，也可表示为：aRb。
  - A称为定义域(domain)，B称为值域(range)。
  - 当A=B时，则称R是A上的二元关系。
- 二元关系的性质
  - 自反(reflexive)性、反自反(irreflexive)性、对称(symmetric)性、反对称(asymmetric)性、传递(transitive)性。
- 等价关系(equivalence relation)
  - 具有自反性、对称性、传递性的二元关系称为等价关系。
  - 如：“=”关系是等价关系。

5.5 自动机的等价性与最小化

■ 等价类（equivalence class)---由等价关系R决定的

S的满足如下要求的划分：S_1、S_2、S_3、…、S_n…称为S关于R的等价划分，S_i称为等价类。

(1) $S= S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cdots \cup S_n \cup \cdots$;

(2) 如果$i \neq j$，则$S_i \cap S_j = \Phi$;

(3) 对任意的i，S_i中的任意两个元素a、b，aRb恒成立;

(4) 对任意的i，j，$i \neq j$，S_i中的任意元素a和S_j中的任意元素b，aRb恒不成立 。

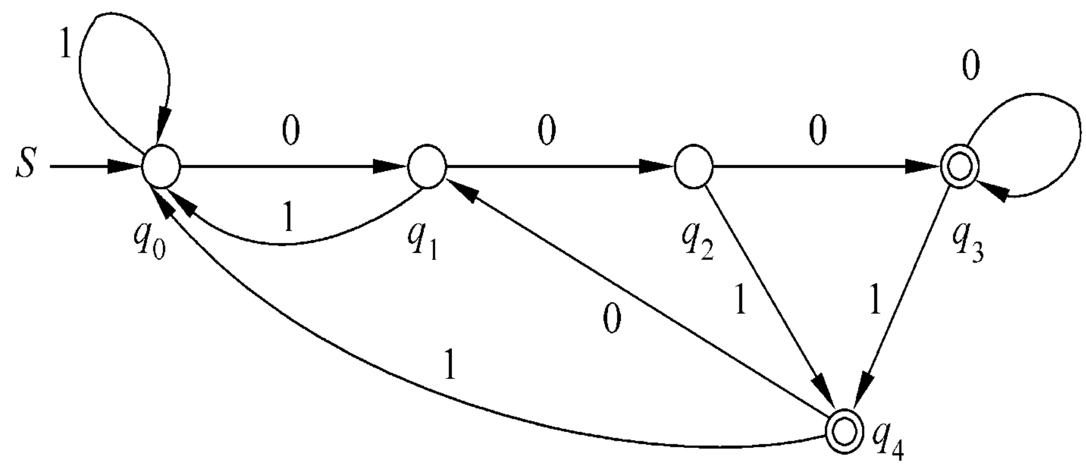
- **等价类**：指的是该类中的元素之间存在等价关系。
- 等价关系R将S分成的等价类的个数称为是R在S上的**指数**。

5.5 自动机的等价性与最小化

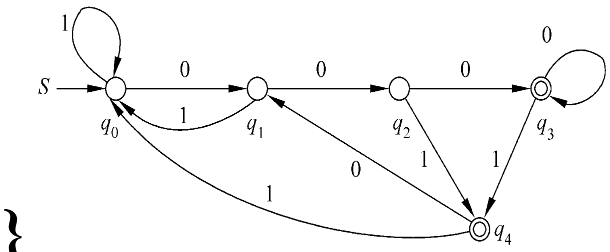
定义5.6-1 能引导**FA**从开始状态q_0到达状态q的字符串的集合为：

$$set(q)=\{x \mid x\in \Sigma^*,\ \delta(q_0, x) = q\}$$

对下图所给的**DFA** 中的所有q，求**set(q)**。



5.5 自动机的等价性与最小化



set(q_0)={x | x∈Σ*， x= ε 或者x以1结尾}

set(q_1)={x | x∈Σ*， x=0或者x以10结尾}

set(q_2)={x | x∈Σ*， x=00或者x以100结尾}

set(q_3)={x | x∈Σ*， x以000结尾}

set(q_4)={x | x∈Σ*， x以001结尾}

这5个集合具有如下性质（涉及概念：等价关系、等价类、划分、指数）：

1. 是两两互不相交；
2. 5个集合的并，构成了该DFA的输入字母表｛0，1｝的克林闭包；
3. 这5个集合是｛0，1｝*的一个划分；
4. 按照这个划分，可以定义一个等价关系，每个集合中的字符串满足该等价关系；

5. 5 自动机的等价性与最小化

定义5.6 DFA M确定的Σ^*上的等价关系 R_M。

$M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$，对于$\forall x, y\in\Sigma^*$

$x R_M y \Leftrightarrow \delta(q_0, x)=\delta(q_0, y)$。

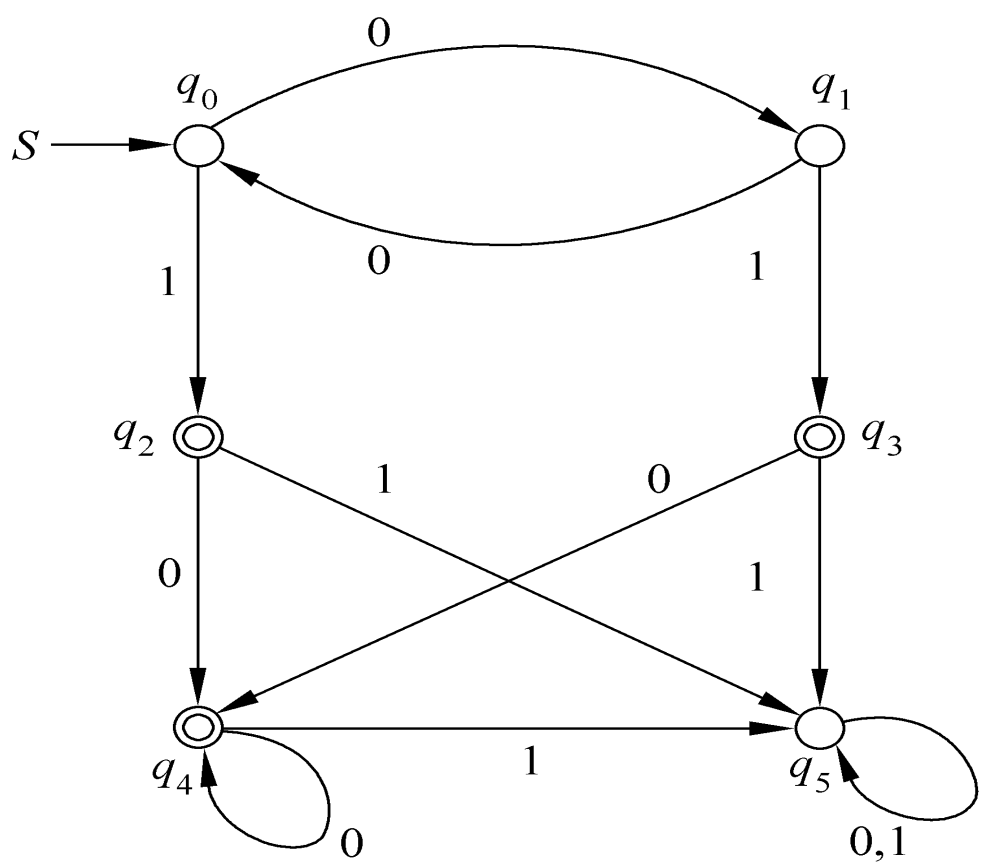
显然，

$x R_M y \Leftrightarrow \exists q\in Q, x, y\in set(q)$

根据定义5.6-1而得

x R_M y的直观含义：从初始状态q_0出发，x和y都能把自动机M引导到相同的状态q， $q\in Q$ 。

例 5.9 设 $L=0^*10^*$，它对应的DFA M如下图。



5.5 自动机的等价性与最小化

对应于q_0：$(00)^n R_M (00)^m$　　n，m≥0；

对应于q_1：$0(00)^n R_M 0(00)^m$　　n，m≥0；

对应于q_2：$(00)^n 1 R_M (00)^m 1$　　n, m≥0；

对应于q_3：$0(00)^n 1 R_M 0(00)^m 1$　　n，m≥0；

对应于q_4：

$0(00)^n 10^k R_M 0(00)^m 10^h$　　n, m≥0,　k, h≥1；

$(00)^n 10^k R_M (00)^m 10^h$　　n, m≥0，k, h≥1；

$0(00)^n 10^k R_M (00)^m 10^h$　　n, m≥0，k, h≥1；

也就是：　$0^n 10^k R_M 0^m 10^h$　　n, m≥0，k, h≥1；

对应于q_5：$x R_M y$——x，y为至少含两个1的串。

5. 5 自动机的等价性与最小化

定义5-7 语言L确定的Σ^*上的关系R_L。

对于$\forall x$，$y \in \Sigma^*$，

$$x\ R_L\ y \Leftrightarrow (\text{对}\forall z \in \Sigma^*,\ xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$$

即：对于$\forall x$，$y \in \Sigma^*$，如果$x\ R_L\ y$，则在x和y后无论接Σ^*中的任何串z，xz和yz要么都是L的句子，要么都不是L的句子。

注意：这里的语言L不一定是正则的。但是，如果L是正则的，又会怎么样呢？

5.5 自动机的等价性与最小化

试证：如果xR_My，则一定有xR_Ly。

证明：因为L是正则的，所以一定存在DFA M 识别语言L。

任意x，y∈set(q)，$\delta(q_0, x)=\delta(q_0, y)=q$。

对于$\forall z\in\Sigma^*$,

$\delta(q_0, xz)=\delta(\delta(q_0, x), z)$

$=\delta(q, z)$

$=\delta(\delta(q_0, y), z)$

$=\delta(q_0, yz)$

这就是说，

$\delta(q_0, xz)\in F \Leftrightarrow \delta(q_0, yz)\in F$

接下页

5.5 自动机的等价性与最小化

即，对于$\forall z \in \Sigma^*$，

$xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$。

表明，

$x\ R_L\ y$，

也就是

$x\ R_{L(M)}\ y$。

讨论：R_L、$R_{L(M)}$，R_M 三者之间的关系？

1. 如果xR_My，则一定有xR_Ly 。反之不一定成立。
2. $R_{L(M)}$中的M是DFA，L(M)是正则语言，但R_L中的L不一定是正则的。

例5.10 if $\Sigma=\{0,1\}$ and $L=\Sigma^*0\Sigma$, then R_L has four equivalence classes:

1. $S_1 = \Sigma^*00$
2. $S_2 = \Sigma^*01$
3. $S_3 = \Sigma^*10 \cup 0$
4. $S_4 = \Sigma^*11 \cup 1 \cup \varepsilon$

5.5 自动机的等价性与最小化

R_M与$R_{L(M)}$的关系

- $R_{L(M)}$---按区域划分
- R_M ---按省份划分

5. 5 自动机的等价性与最小化

例5.11 If $\Sigma = \{0, 1\}$ and $B = \{0^n1^n : n \geq 0\}$, then R_L has infinitely many equivalence classes:

1. $S1=\{0^n1^m : m>n\geq 0\} \cup \Sigma^*1\Sigma^*0\Sigma^*$
2. $S2 =\{0^n1^n : n\geq 0\}$
3. $S3 =\{0^n1^{n-1} : n\geq 1\}$
4. $S4 =\{0^n1^{n-2} : n\geq 2\}$
5. $S5 =\{0^n1^{n-3} : n\geq 3\}$

……

定义5-8 右不变的(right invariant)等价关系

设R是Σ*上的等价关系，对于∀x，y∈Σ*，如果 x R y，则必有xz R yz ，对于∀z∈Σ*成立，则称R是右不变的等价关系。

注意：这里的R不一定是R_M，也不一定是R_L。

命题 5-1 对于任意DFA $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$，M所确定的$\Sigma^*$上的关系$R_M$为右不变的等价关系。

证明：

(1) R_M是等价关系。

自反性显然 。

对称性：$\forall x, y \in \Sigma^*$,

$x\ R_M\ y \Leftrightarrow \delta(q_0, x) = \delta(q_0, y)$ 根据R_M的定义；

$\Leftrightarrow \delta(q_0, y) = \delta(q_0, x)$ "=" 的对称性；

$\Leftrightarrow y\ R_M\ x$ 根据R_M的定义。

5.5 自动机的等价性与最小化

传递性：设$x\ R_M\ y$，$y\ R_M\ z$。

由于$x\ R_M\ y$，$\delta(q_0, x)=\delta(q_0, y)$

由于$y\ R_M\ z$，$\delta(q_0, y)=\delta(q_0, z)$

由“=”的传递性知，

$\delta(q_0, x)=\delta(q_0, z)$

再由R_M的定义得：

$x\ R_M\ z$

即R_M是等价关系。

(2) R_M 是右不变的

设$x\ R_M\ y$。则$\delta(q_0, x)=\delta(q_0, y)=q$

所以，对于$\forall z\in\Sigma^*$,

$\delta(q_0, xz)=\delta(\delta(q_0, x), z))$

$=\delta(q, z)$

$=\delta(\delta(q_0, y), z)$

$=\delta(q_0, yz)$

这就是说，$\delta(q_0, xz)=\delta(q_0, yz)$，再由$R_M$的定义，

$xz\ R_M\ yz$

所以，R_M 是右不变的等价关系。

命题 5-2 对于任意$L\subseteq\Sigma^*$，L所确定的Σ^*上的关系R_L为右不变的等价关系 。

证明：

(1) R_L是等价关系。

自反性显然。

对称性：不难看出：$x\ R_L\ y \Leftrightarrow$（对$\forall z\in\Sigma^*$，$xz\in L \Leftrightarrow yz\in L$）$\Leftrightarrow y\ R_L\ x$

5.5 自动机的等价性与最小化

传递性：设$x\ R_L\ y$，$y\ R_L\ z$。

$x\ R_L\ y \Leftrightarrow$ (对$\forall w\in\Sigma^*$，$xw\in L \Leftrightarrow yw\in L$)

$y\ R_L\ z \Leftrightarrow$ (对$\forall w\in\Sigma^*$，$yw\in L \Leftrightarrow zw\in L$)

所以，

($\forall w\in\Sigma^*, xw\in L \Leftrightarrow yw\in L$ 且$yw\in L \Leftrightarrow zw\in L$)

即：

(对$\forall w\in\Sigma^*$，$xw\in L \Leftrightarrow zw\in L$)

故：

$x\ R_L\ z$

即R_L是等价关系。

(2) R_L 是右不变的。

设 x R_L y。由 R_L 的定义，对 ∀x，w，v∈Σ*，

$xwv \in L \Leftrightarrow zwv \in L$，注意到v的任意性，知，

xw R_L yw。

所以，R_L是右不变的等价关系。

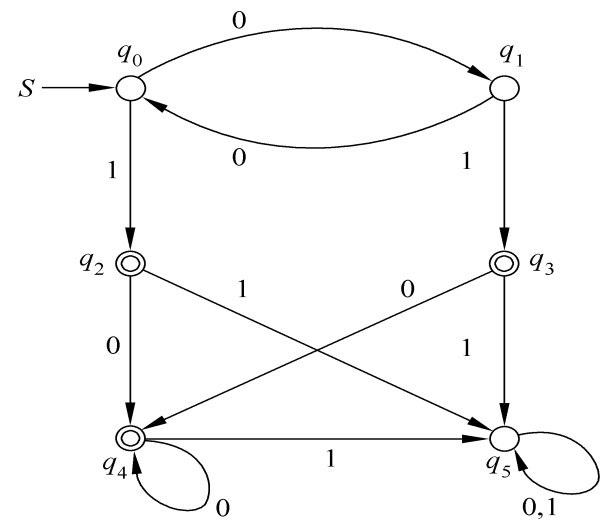
定义5-9

关系R的指数（index）———设R是Σ^*上的等价关系，则称$|\Sigma^*/R|$是R关于Σ^*的指数（index），简称为R的指数。注意：Σ^*/R是指关系对Σ^*的划分。

R的一个等价类——— Σ^*的关于R的一个等价类，也就是Σ^*/R的任意一个元素（这里指一个集合，或一个划分），简称为R的一个等价类 。

5.5 自动机的等价性与最小化

例 5.12 下图所示DFA M所确定的R_M的指数为6。R_M将Σ^*分成6个等价类： *（见例5.9）*



$set(q_0)=\{(00)^n \mid n\geqslant 0\}$；

$set(q_1)=\{0(00)^n \mid n\geqslant 0\}$；

$set(q_2)=\{(00)^n1 \mid n，m\geqslant 0\}$；

$set(q_3)=\{0(00)^n 1 \mid n\geqslant 0\}$；

$set(q_4)=\{0^n 10^k \mid n\geqslant 0，k\geqslant 1\}$；

$set(q_5)=\{x \mid x$为至少含两个1的串$\}$。

5.5 自动机的等价性与最小化

R_M与$R_{L(M)}$的关系讨论：

1. $\forall x$，$y \in \Sigma^*$，如果$x\ R_M\ y$，必有$x\ R_{L(M)}\ y$成立；如果$x\ R_{L(M)}\ y$成立，$x\ R_M\ y$不一定成立；

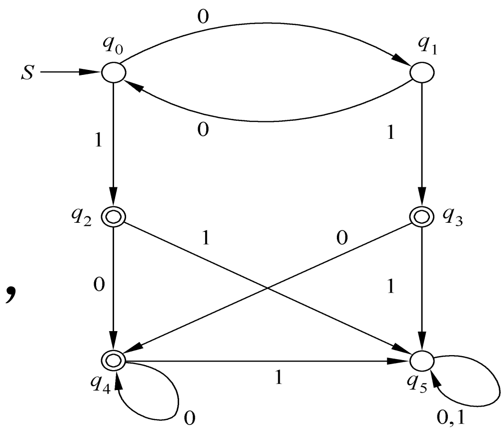
如：例5.9中，$0R_M00$不成立，但$0R_{L(M)}00$成立（为什么？）；即对于任意DFA $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$。必有：

$|\Sigma^*/R_{L(M)}| \leqslant |\Sigma^*/R_M| \leqslant |Q|$

2. R_M是$R_{L(M)}$的"加细"(refinement)

- 按照R_M中被分在同一等价类的串，在按照$R_{L(M)}$分类时，一定会被分在同一个等价类。
- R_M对Σ^*的划分比$R_{L(M)}$对Σ^*的划分更"细"。称R_M是$R_{L(M)}$的"加细"(refinement)。

5.5 自动机的等价性与最小化



以例5.9为例，解释R_M和$R_{L(M)}$之间的区别

第一步：以R_M进行等价划分（等价分类）

$\Sigma^*/R_M = \{set(q_0), set(q_1), set(q_2), set(q_3), set(q_4), set(q_5)\}$ ————分类依据$set(q_i)$

第二步：以$R_{L(M)}$进行等价分类

(1) 取$00 \in set(q_0)$，$000 \in set(q_1)$。

对于任意的$x \in \Sigma^*$，当x含且只含一个1时，$00x \in L(M)$，$000x \in L(M)$；当x不含1或者含多个1时，$00x \notin L(M)$，$000x \notin L(M)$。这就是说，对于任意的$x \in \Sigma^*$，$\mathbf{00x \in L(M) \Leftrightarrow 000x \in L(M)}$。即按照$R_{L(M)}$的定义，00与000被分在同一个等价类中。所以，$set(q_0)$和$set(q_1)$被包含在$R_{L(M)}$的同一个等价类中。

(2) 取00∈$set(q_0)$，001∈$set(q_2)$。

取特殊的字符串1∈Σ^*，001∈L(M)，但0011∉L(M)。所以，根据$R_{L(M)}$，$set(q_0)$和$set(q_2)$不能被“合并”到一个等价类中。

类似地，根据$R_{L(M)}$的定义，$set(q_3)$、$set(q_4)$、$set(q_5)$也都不能被“合并”到$set(q_0)$的句子所在的等价类中。

(3) 取001∈set(q_2)，01∈set(q_3)。

对于任意的x∈Σ*，x要么不含1，要么含有1。当x不含1时，001x∈L(M)，01x∈L(M)；当x含有1时，001x∉L(M)，01x∉L(M)。这就是说，对于任意的x∈Σ*，001x∈L(M) ⇔ 01x∈L(M)。即按照$R_{L(M)}$，001与01属于$R_{L(M)}$的同一个等价类中。从而set(q_2)和set(q_3)被包含在$R_{L(M)}$的同一个等价类中。

5.5 自动机的等价性与最小化

(4) 取$1\in set(q_2)$， $10\in set(q_4)$。

对于任意的$x\in\Sigma^*$，x要么不含1，要么含有1。当x不含1时，$1x\in L(M)$，$10x\in L(M)$；当x含有1时，$1x\notin L(M)$，$10x\notin L(M)$。这就是说，对于任意的$x\in\Sigma^*$，$1x\in L(M) \Leftrightarrow 10x\in L(M)$。即按照$R_{L(M)}$，1与10被分在$R_{L(M)}$的同一个等价类中。从而在$set(q_2)$和$set(q_4)$被包含在$R_{L(M)}$的同一个等价类中。

(5) 取$1\in set(q_2)$， $11\in set(q_5)$。

注意到$1\varepsilon=1$，$11\varepsilon=11$；而$1\in L(M)$，$11\notin L(M)$。

即1和11不满足关系$R_{L(M)}$，所以，$set(q_2)$和$set(q_5)$不能被“合并”到$R_{L(M)}$的同一个等价类中。

在这里，$\varepsilon\in\Sigma^*$是一个特殊的字符串。

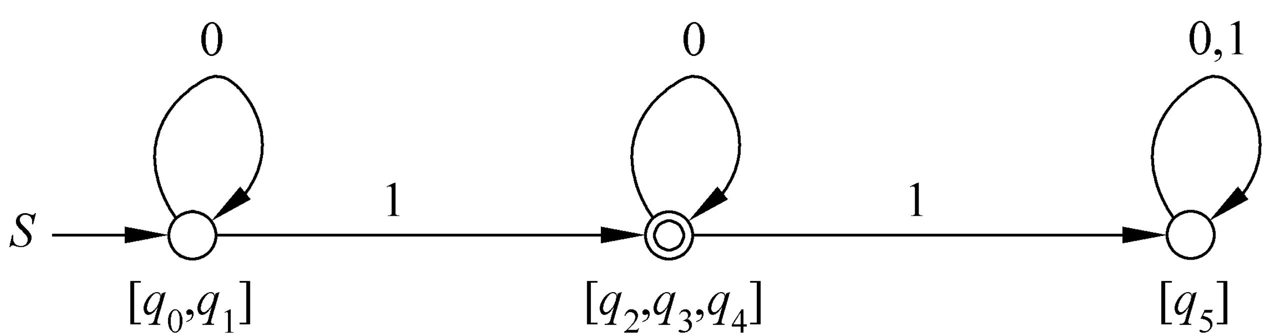
5.5 自动机的等价性与最小化

综合上述分析，得：

$\Sigma^*/R_{L(M)}$={ set(q_0)∪set(q_1)， set(q_2)∪set(q_3)∪set(q_4)， set(q_5)}

不妨采用新的符号标记这3个等价类：

1. 不含1： [ε] = set(q_0)∪set(q_1)=0^*；
2. 含一个1：[1] = set(q_2)∪set(q_3)∪set(q_4)=0^*10^*；
3. 含多个1：[11] = set(q_5)=$0^*10^*1(0+1)^*$。



根据$R_{L(M)}$构造的DFA

5.5 自动机的等价性与最小化

定理5-1 (Myhill-Nerode定理)下列三个命题等价:

(1) $L \subseteq \Sigma^*$是 RL ;

(2) L是Σ^*上的某一个具有有穷指数的右不变等价关系R的某些等价类的并;

(3) R_L具有有穷指数。

证明：

由(1)可以推出(2)

设L⊆Σ*是 RL ，所以，存在DFA M=(Q，Σ， δ， q_0，F)，使得L(M)=L。由命题5-3-1，R_M是Σ*上的右不变等价关系，而且|Σ*/R_M|≤|Q|，所以，R_M具有有穷指数。而

$$L=\bigcup_{q\in F} set(q)$$

L是Σ*上的具有有穷指数的右不变等价关系R_M的对应于M的接受状态的等价类的并。

⇕

某些等价类

由(2)可以推出(3)

思路：已知R的指数是有穷，如果R是R_L的加细（即$xRy \Rightarrow xR_Ly$），则R_L的指数也是有穷的。

设x R y，由R的右不变性可知，对于任意$z \in \Sigma^*$，

xz R yz

而L是R的某些等价类的并，所以，

$xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$　　　何时L才是R的所有等价类的并？

根据R_L的定义，

$x\ R_L\ y$

故R是R_L的加细。由于R具有有穷指数，所以，R_L具有有穷指。

5.5 自动机的等价性与最小化

由(3)可以推出(1)

思路：由R_L对Σ^*的分类构造DFA M，且L(M)=L。

一、根据R_L, 构造 $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

其中：$Q=\Sigma^*/R_L$ ，$q_0=[\varepsilon]$，$F=\{[x] \mid x\in L\}$

[ε]表示ε所在的等价类对应的状态；

[x] 表示x所在的等价类对应的状态。

对于$\forall([x],a)\in(\Sigma^*/R_L)\times\Sigma$，$\delta([x],a)=[xa]$

- δ具有相容性(无论在等价类[x]中取哪个元素为代表，得到的函数值都是相同的，又称一致性)

二、证明L(M)=L? 注意：L是R_L中的L，L(M)是M识别的语言

1. 若$x\in L(M)$，则$\delta([\varepsilon],x)\in F$，即$[x]\in F$。根据F的定义，$x\in L$;

2. 若$x\in L$，则$[x]\in F$。 ∵ $\delta([\varepsilon],x)=[x]$，∴$x\in L(M)$。

例5.13 证明$\{0^n1^n \mid n\geq 0\}$不是 RL

- 根据L的句子的特征来寻找R_L的等价类。
- L的句子的主要特点有两个：

（1）句子中所含的字符0的个数与所含的字符1的个数相同。

（2）所有的0都在所有的1的前面.

可以得到如下一些等价类

[1]——0所在的等价类；

[2]——00所在的等价类；

[3]——000所在的等价类；

…

[n]——0^n所在的等价类；

[ε]——ε所在的等价类；

[10]=$\{x \mid x=0^n1^m\,(m>n)$或者x中含子串10$\}$

…

所以，R_L的指数是无穷的。因此，L不是 RL。

5.5 自动机的等价性与最小化

推论 5-2 对于任意的 RL L，如果DFA $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$满足$L(M)=L$，则$|\Sigma^*/R_L| \leqslant |Q|$。

- 表明，对于任意DFA $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$，$|Q| \geqslant |\Sigma^*/R_{L(M)}|$。
- 也表明，对任意一个 RL L，按照定理证明中（即，由(3) 推(1)的证明过程）所给的方法构造出来的DFA M是一个接受L的状态最少的DFA。这个DFA是惟一的么？

5.5 自动机的等价性与最小化

定义5.5　给出两个DFA

$M=(Q_m, \Sigma, \delta_m, q_m, F_m)$，$N=(Q_n, \Sigma, \delta_n, q_n, F_n)$。

如果在它们的状态集之间存在一个一对一的映射f: $Q_m \to Q_n$，满足：

（1）$f(q_m)=q_n$，

（2）$f(\delta_m(p,a))=\delta_n(f(p),a)$，对一切$p\in Q_m$，$a\in\Sigma$，

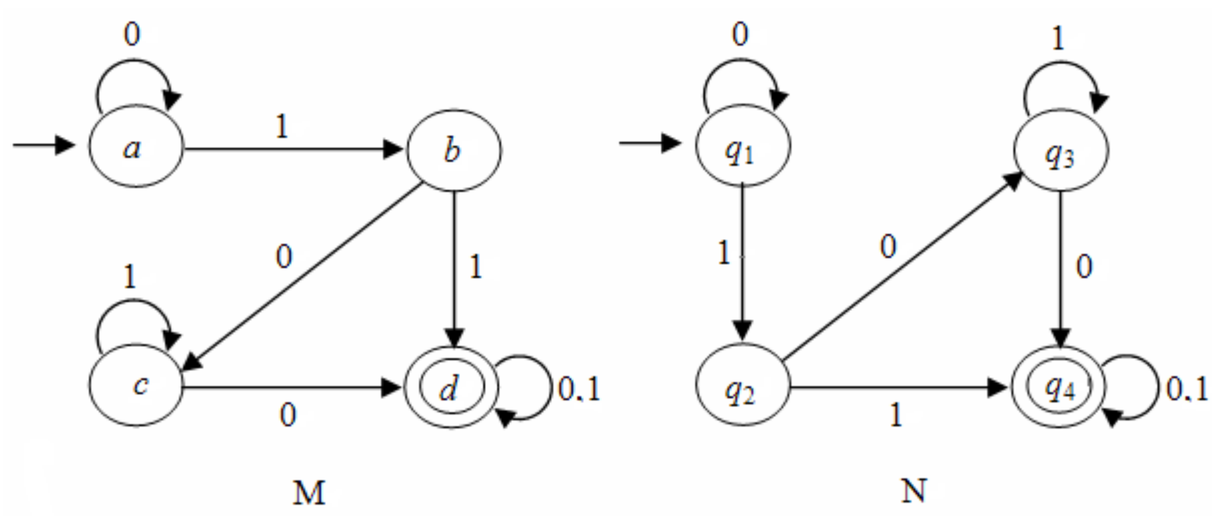
（3）$p\in F_m$ 当且仅当 $f(p)\in F_n$。

则称M 和N是**同构**的。

1. M、N的初始状态互相对应，终结状态（可能不只一个）一一对应。
2. M和N中两个对应的状态（对任何符号a∈∑）经过一次转移后，所得的状态仍然是对应的。
3. 实际上，两个同构的DFA，除了状态名字可以不同以外，本质上是同一个DFA。显然，两个同构的DFA是等价的。

5.5 自动机的等价性与最小化

例5.14 在下图中给出两个DFA M和N，它们各有4个状态，Q_m ={a，b，c，d}，Q_n ={q_1，q_2 ,q_3 ,q_4 }。一对一的映射f为：f(a)=q_1，f(b)=q_2，f(c)=q_3 , f(d)=q_4。其中a、q_1 为各自的初始状态，d、q_4 为各自的终结状态，满足互相对应的要求。另外，$f(\delta_m(a,0))=f(a)= q_1$，$\delta_n(f(a),0)=\delta_n(q_1 ,0)=q_1$；$f(\delta_m(a,1))=f(b)=q_2$，$\delta_n(f(a),1)=\delta_n(q_1 ,1)=q_2$；$f(\delta_m(b,0))=f(c)= q_3$，$\delta_n(f(b),0)=\delta_n(q_2 ,0)=q_3$ 等等，均满足定义5.5第（2）条的要求，因此M和N是两个同构的DFA。



推论5-3 对于任意的 RL L，在同构意义下，接受L的最小DFA是惟一的。

证明：

- 接受L的最小DFA $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$的状态数与$R_L$的指数相同，也就是说，这个最小DFA的状态数与Myhill-Nerode定理证明中构造的$M'=(\Sigma^*/R_L, \Sigma, \delta', [\varepsilon], \{[x] \mid x\in L\})$的状态数是相同的。

5.5 自动机的等价性与最小化

- DFA同构是指这两个DFA的状态之间有一个一一对应，而且这个一一对应还保持状态转移也是相应一一对应的。也就是说，如果q与[w]对应，p与[z]对应，当$\delta(q, a)=p$时，必定有$\delta([w], a)=[z]$。
- 这两个DFA是同构。定义映射f

$$f(q)=f(\delta(q_0, x))=\delta'([\varepsilon], x)=[x]$$

$$\Leftrightarrow \delta(q_0, x)=q$$

5.5 自动机的等价性与最小化

- f为Q与Σ^*/R_L之间的一一对应
  - 如果$\delta(q_0, x)=\delta(q_0, y)$，则$x\ R_M\ y$
  - 由于R_M是R_L的加细，所以，$x\ R_L\ y$
  - 故，$[x]=[y]$，即，$\delta'([\varepsilon], x)=\delta'([\varepsilon], y)$。
  - 如果，$\delta(q_0, x)\neq\delta(q_0, y)$
  - 则，$\delta'([\varepsilon], x)\neq\delta'([\varepsilon], y)$
  - 即，$[x]\neq[y]$
  - 否则，$|\Sigma^*/R_M|>|\Sigma^*/R_L|$。

5.5 自动机的等价性与最小化

- 如果$\delta(q, a)=p$，$f(q)=[x]$，必有$f(p)=[xa]$
  - $\forall q\in Q$，如果，$f(q)=f(\delta(q_0, x))=[x]$
  - 所以，$\forall a\in\Sigma$，如果，
  - $p=\delta(q, a)=\delta(\delta(q_0, x), a)=\delta(q_0, xa)$
  - 则$f(p)=f(\delta(q, a))=f(\delta(\delta(q_0, x), a))=f(\delta(q_0, xa))=[xa]$
  - 即，如果M在状态q读入字符a时进入状态p，则M在q对应的状态$f(\delta(q_0, x))=[x]$读入字符a时，进入p对应的状态$f(\delta(q_0, xa))=[xa]$。所以，f是M和M′之间的同构映射。

5.5 自动机的等价性与最小化

定义5.10 可以区分的(distinguishable）状态对

设DFA $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$，如果$\exists x \in \Sigma^*$， 对Q中的两个状态q和p，使得$\delta(q, x) \in F$ 和$\delta(p, x) \in F$中，有且仅有一个成立，则称p和q是可以区分的。否则，称q和p等价。并记作$q \equiv p$ 。

极小化算法

① 为所有状态对(p,q)(p,q∈Q)画一张表，开始时表中每个格子内均为空白（未做任何标记）。

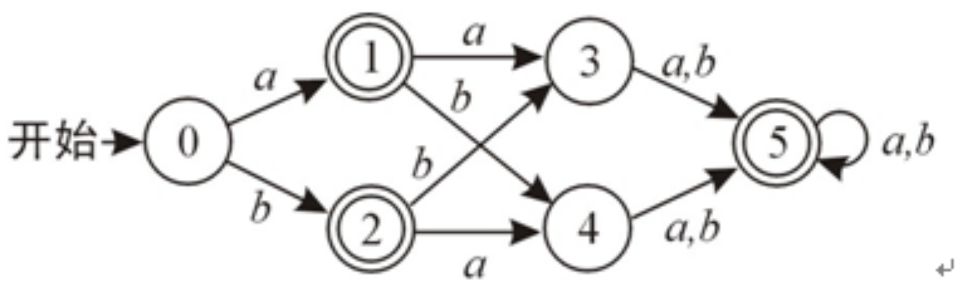
② 对p∈F, q∉ F的一切状态对(p,q)，在相应的格子内做标记（例如画一个×）， 表示(p,q)是可以区分的 。

③ 重复下述过程，直到表中内容不再改变为止：

如果存在一个未被标记的状态对(p,q)，且对于某个a∈∑，如果（r=δ(p,a)，s=δ(q,a)）已做了标记，则在(p,q) 相应的格子内做标记。

④ 在完成1，2，3之后，所有未被标记的状态对(p,q)都是等价的，即p≡q，状态p和状态q可以合并。

例 5.15 对下图 给出的DFA用极小化算法进行化简， 该DFA接受$\{x|x\in\{a,b\}^+$，并且$|x|\neq 2\}$ 。



3. 5 自动机的等价性与最小化

例 5.16 对下图 给出的DFA用极小化算法进行化简。

- 在算法的第1步，我们对该DFA中的6个状态建立一个空白表，表中所有格子皆为空。因为p和q等价是对称的，所以只用表的下三角部分即可（阶梯形的）。这张表如左下图所示。
- 在算法的第2步之后，对终结状态和非终结状态的状态对的格子内做了标记。这个结果如右下图所示。

1					
2					
3					
4					
5					
	0	1	2	3	4

1	×				
2	×				
3		×	×		
4		×	×		
5	×			×	×
	0	1	2	3	4

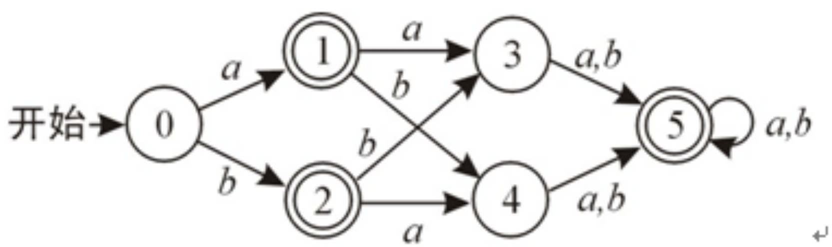
3.5 自动机的等价性与最小化

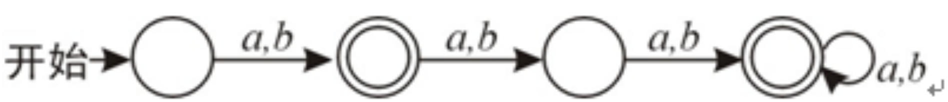
- 在第3步，我们找出尚未标记的状态对，例如（0，3），对于a∈∑，有δ(0,a)=1，δ(3,a)=5，因为（1，5）未被标记，所以现在也不能标记（0，3）。对于b∈∑，有δ(0,b)=2, δ(3,b)=5，因为（2，5）未被标记，所以现在仍不能标记（0，3）。由于∑中只有a、b两个符号，故对（0，3）的考察暂时停止。再看（0，4）和（1，2），基于同样的理由也不能被标记。但是对于（1，5），对a∈∑，有δ(1,a)=3，δ(5,a)=5，而此时（3，5）已被标记，所以（1，5）也应被标记，对b就不用再看了。类似地，可以标记（2，5）。

1	×				
2	×				
3		×	×		
4		×	×		
5	×	×	×	×	×
	0	1	2	3	4

3.5 自动机的等价性与最小化

- 现在开始下一遍考察。对于（0，3），仍和上次一样，有δ(0,a)=1，δ(3,a)=5。但此时（1，5）已于上一遍被标记，所以这一遍我们标记（0，3）。类似地，可以标记（0，4）。
- 最后得出的结论是：1≡2和3≡4。
- 依照这个算法，得出等价状态后构造的自动机，就是具有4个状态的那个DFA。

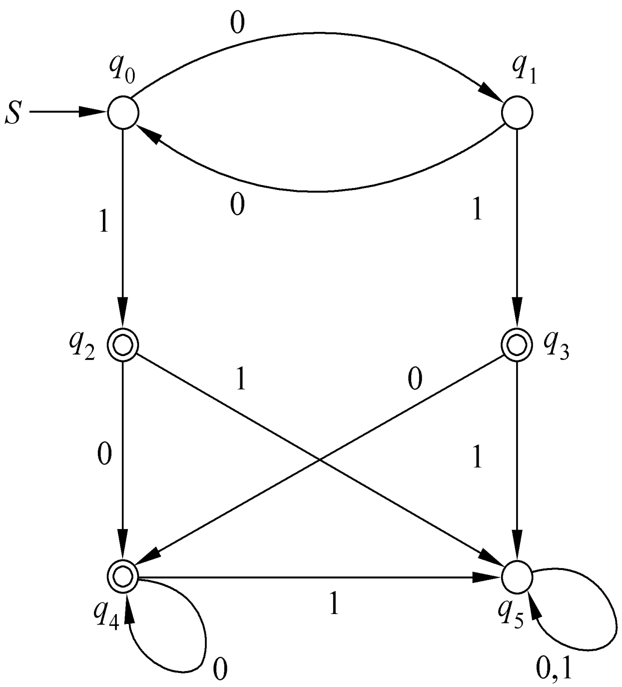


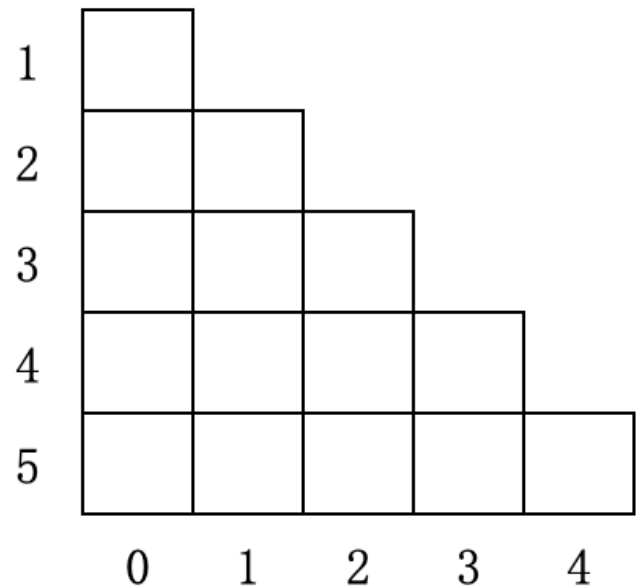


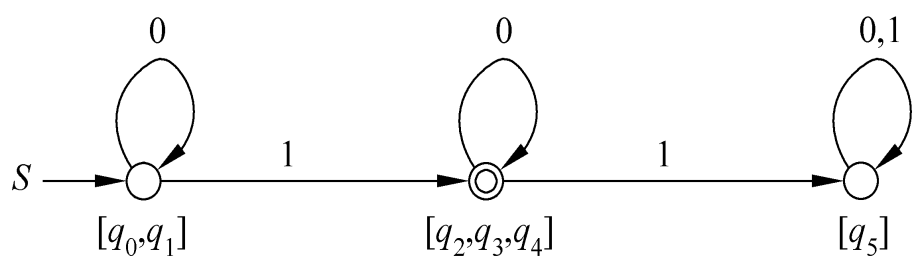
1	×				
2	×				
3	×	×	×		
4	×	×	×		
5	×	×	×	×	×
	0	1	2	3	4

3.5 自动机的等价性与最小化

例5.16 对下图所示的DFA进行极小化。







Myhill–Nerode定理的应用：

1. The Myhill–Nerode theorem may be used to show that a language *L* is regular by proving that the number of equivalence classes of R_L is finite.（证明一个语言是正则的）
2. Another immediate corollary of the theorem is that if a language defines an infinite set of equivalence classes, it is *not* regular. It is this corollary that is frequently used to prove that a language is not regular.（证明一个语言是非正则的）
3. 极小化DFA

5. 5 自动机的等价性与最小化

如何求R_L的等价类

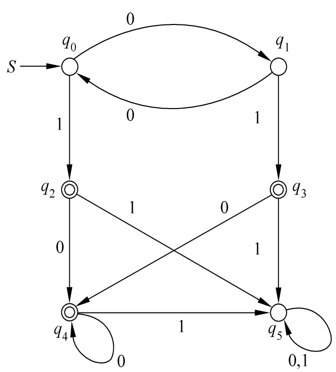
方法一：间接法（适用于L是正则语言）

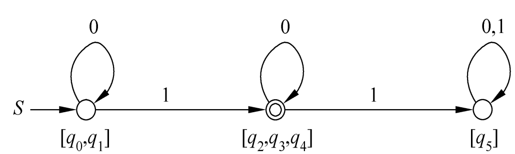
如果L是正则语言，DFA M识别语言L。先根据DFA M求R_M的等价类，再对R_M的等价类进行合并，得到R_L的等价类。

说明：

1. $\{set(q)|q\in Q\}=\Sigma^*/R_M$，即$\{set(q)|q\in Q\}$就是$R_M$的等价划分，见定义5.6-1。

2. DFA的极小化算法（主要是合并不可区分的状态部分）。





5. 5 自动机的等价性与最小化

方法二：直接法

根据语言的结构特征，对$\sum^*$进行划分。举例如下：

例17. L1={w∈{0,1}*|w包含的数字之和能被3整除}

首先，分析句子的结构特征---和数模3取0，这是关键步骤。

[0]：模3取0，比如00，011100
[1]：模3取1，比如001，1111
[2]：模3取2，比如11，011

特别提醒：

1、必须考虑[ε]（表示ε所在的等价类），因为自动机起始状态的输入总是ε。例17中的[ε]= [0]，这是比较特殊的情况。
2、求得的等价类是必需的，也就是不能再合并了。见例18的分析。

例18. $L2 = \{0w \mid w \in \Sigma^*, \Sigma=\{0,1\}\}$，求$R_L$的等价类。

分析句子的特征，都是以0开头的，这是关键步骤。

$[\varepsilon]=\{\varepsilon\}$

$[0]=\{x \mid x$以0开头的所有字符串$\}$

$[1]=\{x \mid x$以1开头的所有字符串$\}$

注意：

1. 这三个等价类并，正好是Σ^*。
2. 在R_L的约束下，这三个等价类不能再合并了，举例如下：
   令$z=\varepsilon$，因为$0z \in L2$，而$1z \notin L2$，根据R_L的定义，$0R_{L2}1$是不成立的；同理，$1\ R_{L2}\ \varepsilon$，$\varepsilon\ R_{L2}0$ 也是不成立的。所以，$[\varepsilon]$、$[0]$、$[1]$是不能再合并了。

例19. L3=$\{\Sigma^*0\Sigma \mid \Sigma=\{0,1\}\}$，求$R_L$的等价类。