

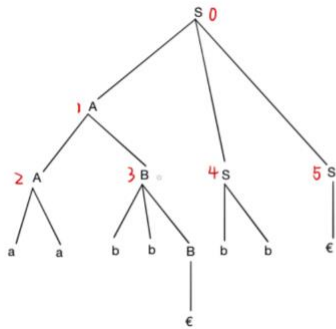
## 第 5 次作业 上下文无关文法及其性质——参考答案

习题 1: 教材 p122 6.2

(1) 本语法树的边缘的最左推导为：

$S \Rightarrow ASS \Rightarrow ABSS \Rightarrow aaBSS \Rightarrow aabbBSS \Rightarrow aabbSS \Rightarrow aabbbbS \Rightarrow aabbbb$

(2)



如图所示，将语法分析树中的各个节点进行标记。

通过对语法分析树的结构进行分析，可知：如果一棵语法树的根节点至少含两个子节点，并且至少有两个子节点又含有子节点，那么该语法树对应句型存在不同的推导序列，否则，只有一种推导序列。在此，假设以结点  $i$  为根节点的语法分析树的推导序列种类数为  $K_i$ ，以  $i$

为根节点的语法分析树推导步骤数为  $s_i$ ，可得出：

$$s_2=1, s_3=2, s_1=s_2+s_3+1=4, s_4=1, s_5=1;$$

将该语法分析树从根结点 0 逐个向下分解为子树，最底层的子树对应的  $K_i$  分别是：

$$K_2=1, K_3=1, K_4=1, K_5=1;$$

由组合数学知识可知：

1、一个步骤序列 A 含有  $n(n > 1)$  个步骤，在不打乱其原来有序顺序的情况下进行组合，组合

后含有  $i(i \leq n)$  个步骤的组合数为  $C_{n-1}^{i-1}$  个；当  $n=1$  时，组合数为 1 个。

2、将含有  $m$  个有序步骤的 A 序列插入到含有  $n(n \geq m)$  个有序步骤的 B 序列中，不打乱原来有序顺序，并且插入完后，要求 A 原来的任意两个相邻步骤不再相邻，则插入方法有  $C_{n+1}^m$  种。

$$\text{由上述方法计算：} K_k = K_i \times K_j \times \sum_{i=1}^{\min(s_i, s_j)} C_{\min(s_i, s_j)-1}^{i-1} C_{\max(s_i, s_j)+1}^i$$

$$K_1 = K_2 \times K_3 \times \sum_{i=1}^{s_2} C_{s_2-1}^{i-1} C_{s_3+1}^i = 1 \times 1 \times 3 = 3$$

$$K_{14} = K_1 \times K_4 \times \sum_{i=1}^{s_4} C_{s_4-1}^{i-1} C_{s_1+1}^i = 3 \times 1 \times 5 = 15$$

$$K_0 = K_{14} \times K_5 \times \sum_{i=1}^{s_5} C_{s_5-1}^{i-1} C_{s_{14}+1}^i = 15 \times 1 \times C_{4+1+1}^1 = 90$$

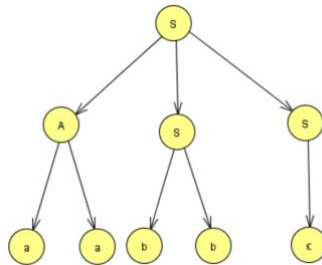
$K_0$  即为所求，故共有 90 个不同推导。

(参考文献：《语法树推导种类的求解模型》2006 年 12 月第 26 卷，文章编号：1001 - 9081 (2006) 12Z - 0236 - 03，作者：张超群 1，毛建兰 2，方丽菁 1)

注：本小题答案摘自赵得泽同学的作业。

(3)  $G = \{ \{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow ASS | bb | \epsilon, A \rightarrow AB | aa, B \rightarrow bbB | \epsilon\}, S \}$

(4) ① aabb 是 CFG 的句子，aabb 的最右推导为： $S \Rightarrow ASS \Rightarrow AS \Rightarrow Abb \Rightarrow aabb$ ，语法分析树如下所示：



② abab 不是 CFG 的句子，因为根据本题的 CFG 的定义，只有 A 可以推导出 a，而且 aa 都是成对出现的，所以 abab 不可能推出的。

习题 2：教材 p123 6.9

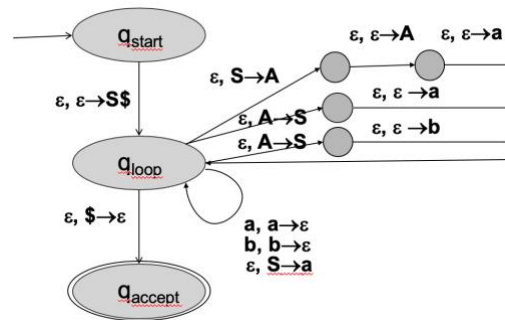
$S \rightarrow C_a B \mid B C_a ;$   
 $A \rightarrow C_a S \mid C_b C_{AA} \mid a ;$   
 $B \rightarrow C_b S \mid C_a C_{BB} \mid C_b ;$   
 $C_a \rightarrow a ;$   
 $C_b \rightarrow b ;$   
 $C_{AA} \rightarrow AA ;$   
 $C_{BB} \rightarrow BB ;$

习题 3：教材 p135 7.4

方法一：PDA  $M = (\{q\}, \{a, b\}, \{S, A\}, \delta, q, S, \emptyset)$

$\delta(q, a, S) = \{(q, AA)\}$ ,  $\delta(q, a, A) = \{(q, S), (q, \epsilon)\}$ ,  $\delta(q, b, A) = \{(q, S)\}$

方法二：按照上课 PPT 中关于 PDA 与 CFG 等价性的证明（如下图所示）



习题 4: 证明  $\{0^{n^2} \mid n \geq 0\}$  不是 CFL。

证明 假设是 CFL, 取  $0^{n_0^2} = uvwxy$ , 则  $uv^2wx^2y = 0^{n_0^2 + |vx|}$ ,  $n_0^2 + |vx| < (n_0 + 1)^2$ ,  
不是完全平方数, 不应接受

习题 5: 证明  $\{0^p \mid p \text{ is prime}\}$  不是 CFL。

证明 假设是 CFL, 取  $0^p = uvwxy$ , 则  $uv^{p+1}wx^{p+1}y = 0^{p+p|vx|}$  不应接受。

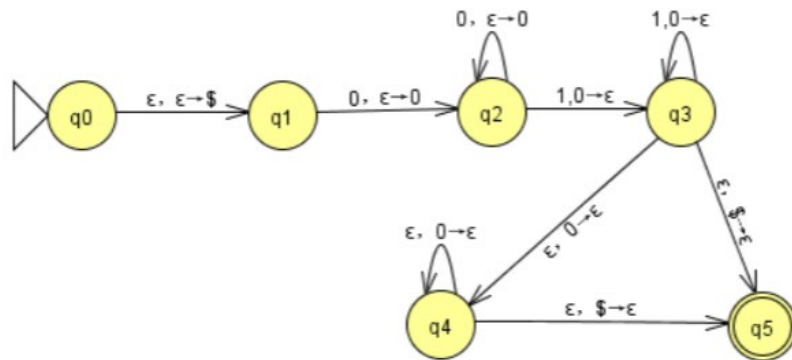
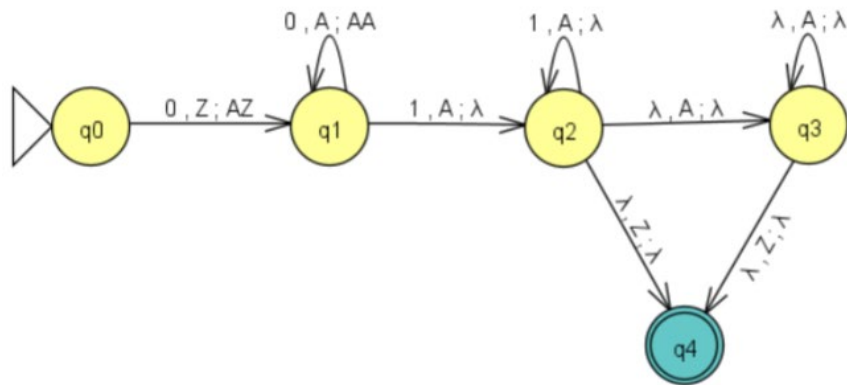
习题 6: 证明: 如果语言  $L$  是定义在一个终结符上的 CFL, 比如  $L \subseteq \{1\}^*$ , 则  $L$  一定是正则语言。

证明 设语言  $L$  是定义在终结符  $a$  上 CFL,  $L \subseteq \{a\}^*$ 。

因为正则文法  $G: S \rightarrow a|aS|\epsilon$  派生语言  $\{a\}^*$ , 所以  $\{a\}^*$  是正则语言, 其子集  $L$  也是正则语言。

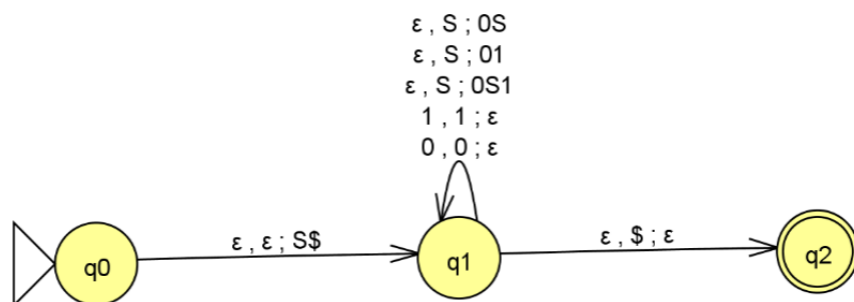
## 7.2 (1)

方法一：根据语言特点直接构造 PDA



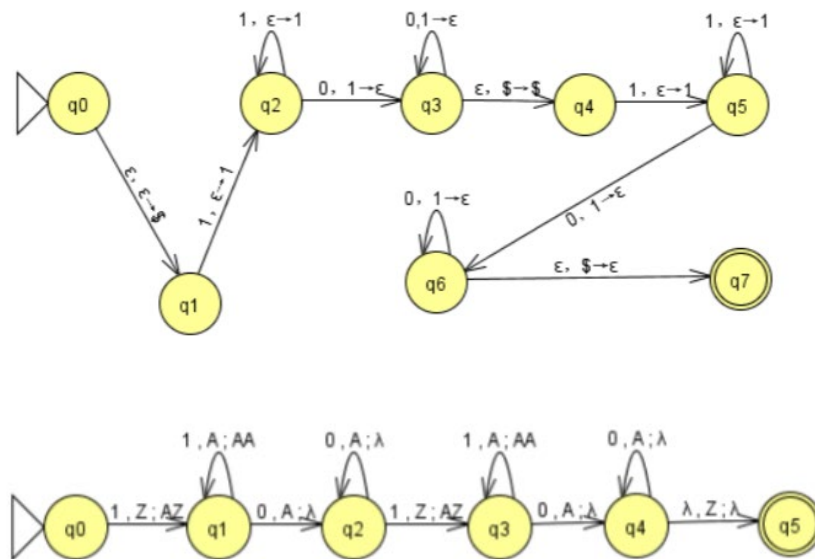
方法二：先将语言转成 CFG，再根据 CFG 构造 PDA

该语言文法为：  $S \rightarrow 0S1 \mid 0S \mid 01$



## 7.2 (3)

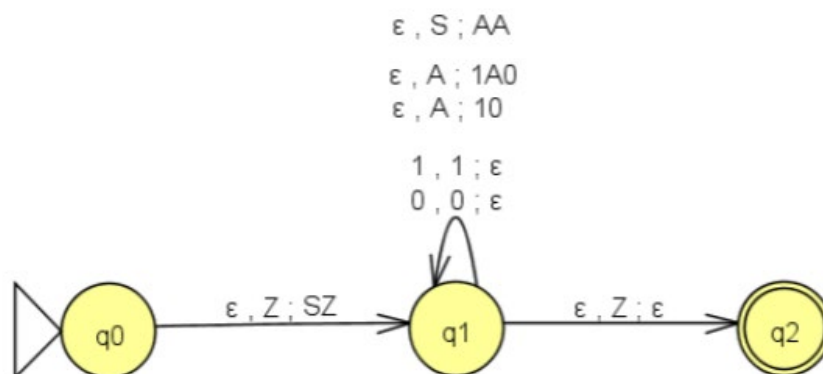
方法一：根据语言特点直接构造 PDA



方法二：先将语言转成 CFG，再根据 CFG 构造 PDA

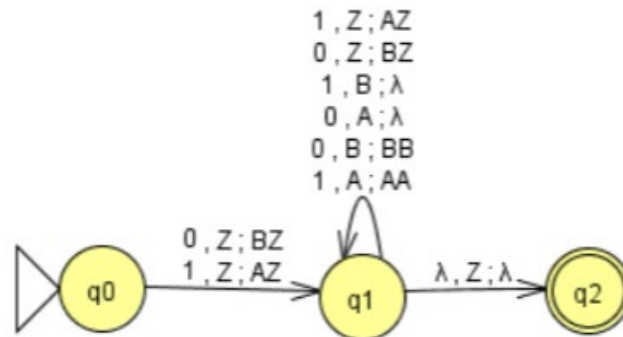
该语言文法为：  $S \rightarrow AA$

$A \rightarrow 1A0 \mid 10$



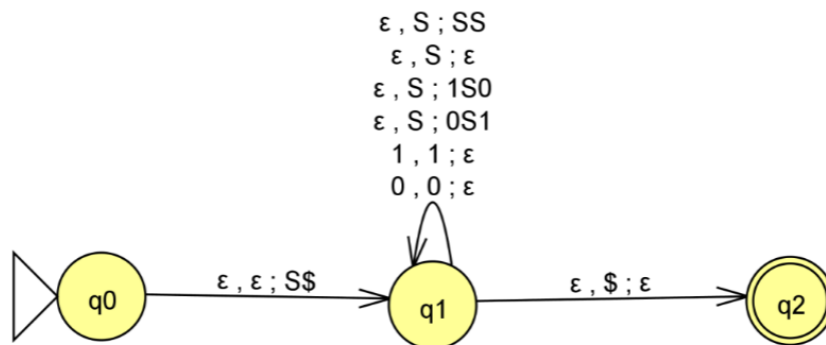
## 7.2 (5)

方法一：根据语言特点直接构造 PDA



方法二：先将语言转成 CFG，再根据 CFG 构造 PDA

该语言文法为：  $S \rightarrow SS \mid 1S0 \mid 0S1 \mid \epsilon$



或者：  $S \rightarrow 0AS \mid 1BS \mid \epsilon$

$A \rightarrow 1 \mid 0AA$

$B \rightarrow 0 \mid 1BB$

