华东理工大学

概率论与数理统计

第一次作业

- 一. 填空题:
- 1. 设样本空间 $\Omega = \{x | 0 \le x \le 2\}$, 事件 $A = \{x | \frac{1}{2} < x \le 1\}$, $B = \{x | \frac{1}{4} \le x < \frac{3}{2}\}$, 具体写出下列各事件: $\overline{A}B = \{x | \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \text{ 或者} 1 < x < \frac{3}{2}\}$, $\overline{A} \cup B = \underline{\Omega}$, $\overline{A}\overline{B} = \underline{B}$, $AB = \underline{A}$.
- 2. 设 $A \times B \times C$ 表示三个随机事件, 试将下列事件用 $A \times B \times C$ 表示出来:
 - (1) 事件 ABC 表示 $A \setminus B \setminus C$ 都发生;
 - (2) 事件 \overline{ABC} 表示 $A \setminus B \setminus C$ 都不发生;
 - (3) 事件 \overline{ABC} 表示 $A \setminus B \setminus C$ 不都发生;
 - (4) 事件 $A \cup B \cup C$ 表示 $A \setminus B \setminus C$ 中至少有一件事件发生;
- (5) 事件 $\overline{AB \cup AC \cup BC}$ 或 $\overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$ 表示 $A \setminus B \setminus C$ 中最多有一事件发生。
- 3. 化简事件算式 $\overline{(A \cup B)} \cap (A \overline{B}) = \underline{\emptyset}$ 。
 - 二. 选择题:
- 1. 设 $\Omega = \{1,2,3,\cdots,10\}$, $A = \{2,3,5\}$, $B = \{3,4,5,7\}$, $C = \{1,3,4,7\}$,则事件 $\overline{A} BC = (A)$ 。

A. {1,6,8,9,10} B. {2,5} C. {2,6,8,9,10} D. {1,2,5,6,8,9,10}

2. 对飞机进行两次射击,每次射一弹,设事件 A = "恰有一弹击中飞机",事件 B = "至少有一弹击中飞机",事件 C = "两弹都击中飞机",事件 D = "两弹都没击中飞机",又设随机变量 ξ 为击中飞机的次数,则下列事件中(C)不表示 $\{\xi = 1\}$ 。

- A. 事件 A B. 事件 B-C C. 事件 $B-\overline{C}$ D. 事件 $\overline{D}-C$
- 3. 设 $A \setminus B$ 是两个事件,且 $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$,则 $(A + B)(\overline{A} + \overline{B})$ 表示 (D)。
 - A. 必然事件

- B. 不可能事件
- C. A = B 不能同时发生 D. A = B 中恰有一个发生

三. 计算题:

- 1. 写出下列随机试验的样本空间,并把指定的事件表示为样本点的集合:
- (1) 随机试验: 考察某个班级的某次数学考试的平均成绩(以百分制记分, 只取整数):

设事件 A 表示: 平均得分在 80 分以上。

(2) 随机试验:同时掷三颗骰子,记录三颗骰子点数之和:

设事件 A 表示: 第一颗掷得 5 点;

设事件 B 表示: 三颗骰子点数之和不超过 8 点。

- (3) 随机试验: 某篮球运动员投篮练习,直至投中十次,考虑累计投篮的次 数:设事件A表示:至多只要投50次。 解:
 - (1) 样本空间可以表示为 $\Omega = \{0.1, 2, 3, \dots, 100\}$; 事件 $A = \{81, 82, \dots, 100\}$ 。
- (2) 样本空间可以表示为 $\Omega = \{3,4,5,\cdots,18\}$;事件 $A = \{7,8,\cdots,17\}$, $B = \{3,4,\cdots,8\}$ o
 - (3) 样本空间可以表示为 $\Omega = \{10.11.12...\}$ 事件 $A = \{10.11.12.....50\}$ 。
- 某电视台招聘播音员,现有三位符合条件的女士和两位符合条件的男士前 2. 来应聘:
- (1) 写出招聘男女播音员各一名的样本空间;
- (2) 写出招聘两名播音员的样本空间。设事件 A 表示"招聘到两名女士",把该 事件表示为样本点的集合。
- 解: 用 W_i 表示招聘了的第i (i = 1,2,3) 位女士, 用 M_i 表示招聘了第j (j = 1,2) 位 男士。
- (1) $\Omega = \{W_1M_1, W_1M_2, W_2M_1, W_2M_2, W_3M_1, W_3M_2\}$
- $(2) \Omega = \{W_1M_1, W_1M_2, W_1W_2, W_1W_3, W_2M_1, W_2M_2, W_3W_3, W_3M_1, W_3M_2, M_1M_2\}$ $A = \{W_1W_2, W_1W_3, W_2W_3\}$
- 如果事件 A 与事件 B 互为对立事件,证明:事件 \overline{A} 与事件 \overline{B} 也互为对立事 3.

件。

iF:

由于 A 与 B 互为对立事件,故 $AB=\varnothing$, $A\cup B=\Omega$, 因此就有 $\overline{A}\cup \overline{B}=\Omega$, 所以 \overline{A} 与 \overline{B} 也互为对立事件。

- 4. 化简事件算式(AB) \cup $(A\overline{B})$ \cup (\overline{AB}) \cup (\overline{AB}) \circ 解: (AB) \cup $(A\overline{B})$ \cup (\overline{AB}) \cup (\overline{AB})
- 5. 证明下列等式 $(A-AB) \cup B = \overline{\overline{A}\overline{B}}_{\circ}$

证明:因为

$$\overline{(A-AB) \cup B} = \overline{(A-AB)}\overline{B} = \overline{(A\overline{AB})}\overline{B} = (\overline{A} \cup AB)\overline{B}$$
$$= (\overline{A}\overline{B}) \cup (AB\overline{B}) = (\overline{A}\overline{B}) \cup \varnothing = \overline{A}\overline{B}$$

所以: $(A-AB) \cup B = \overline{\overline{AB}}$ 。

6. 设A、B为两个事件,若 $AB = \overline{A} \cap \overline{B}$,问A和B有什么关系?解:A和B为对立事件。

第二次作业

- 一. 填空题:
- 1. 10 个螺丝钉有 3 个是坏的,随机抽取 4 个。则恰好有两个是坏的概率是 0.3 , 4 个全是好的概率是 0.1667 。
- 2. 把 12 本书任意地放在书架上,则其中指定的 4 本书放在一起的概率 $\frac{9!4!}{12!} = \frac{1}{55}.$
- 3. 袋中装有编号为1,2,…,n的n个球,每次从中任意摸一球。若按照有放回方式摸球,则第k次摸球时,首次摸到1号球的概率为 $\frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$ 。若按照无放回方式摸球,则第k次摸球时,首次摸到1号球的概率为 $\frac{1}{n}$ 。
- 二. 选择题:
- 1. 为了减少比赛场次,把 20 个球队任意分成两组(每组 10 队)进行比赛,则

最强的两个队被分在不同组内的概率为(B)。

A.
$$\frac{1}{2}$$
 B. $\frac{10}{19}$ C. $\frac{5}{19}$ D. $\frac{1}{10}$

2. 从一副扑克牌(52张)中任取 4张,4张牌的花色各不相同的概率(C)。

A.
$$\frac{1}{13}$$
 B. $\frac{13}{C_{52}^4}$ C. $\frac{13^4}{C_{52}^4}$ D. $\frac{13^4}{52 \times 51 \times 50 \times 49}$

3. 进行一系列独立的实验,每次试验成功的概率为 $p_{,}$ 则在第二次成功之前已经失败了 3 次的概率为 (\mathbf{A})。

A.
$$4p^2(1-p)^3$$
 B. $4p(1-p)^3$ C. $10p^2(1-p)^3$ D. $p^2(1-p)^3$

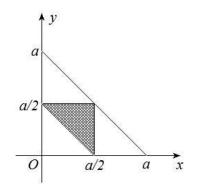
三. 计算题:

1. 将长为a的细棒折成三段, 求这三段能构成三角形的概率。

解: 设三段分别为
$$x,y,a-x-y$$
,样本空间

 $\Omega: (0 < x < a) \cap (0 < y < a) \cap (x + y \le a)$ 能构成三角形须满足(图中阴影部分)

$$\begin{cases} x+y > a-x-y \\ y+a-x-y > x \\ a-x-y+x > y \\ 0 < x < a, 0 < y < a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y > \frac{a}{2} \\ 0 < x < \frac{a}{2} \\ 0 < y < \frac{a}{2} \end{cases}$$



故这三段能够成三角形的概率为 $\frac{1}{4}$.

- 2. 同时掷五颗骰子,求下列事件的概率:
 - (1) A="点数各不相同";
 - (2) B= "至少出现两个 6 点";
 - (3) C= "恰有两个点数相同";
 - (4) D="某两个点数相同,另三个同是另一个点数";

解: (1)
$$P(A) = \frac{P_6^5}{6^5}$$
;

(2)
$$P(B) = 1 - \frac{5^5}{6^5} - 5 \times \frac{5^4}{6^5}$$
;

(3)
$$P(C) = \frac{C_5^2 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{6^5} = \frac{25}{54};$$

(4)
$$P(D) = \frac{C_5^2 \times 6 \times 5}{6^5} = \frac{25}{648};$$

3. 将 10 根绳的 20 个头任意两两相接, 求事件 A={恰结成 10 个圈}的概率。解:

$$P(A) = \frac{20!!}{20!} = \frac{1}{19!!}$$

4. 在区间(0, 1)中随机地取两个数,求两数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率。

解: 样本空间为 $\Omega = \{(x,y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1 \}$

$$\exists A = \left\{ (x,y) \middle| (x,y) \in \Omega, \middle| x-y \middle| < \frac{1}{2} \right\},$$

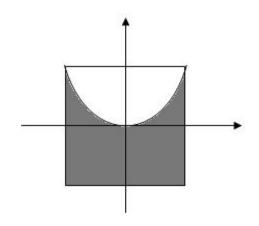
$$P(A) = \frac{S_A}{S_{\Omega}} = \frac{3}{4}$$

5. 在正方形 $D = \{(x,y) | -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$ 中任取一点,求使得关于 $u^2 + xu + y = 0$ 有(1)两个实根的概率;(2)有两个正根的概率。

解: (1) 方程有两个实根,要求 $x^2-4y \ge 0$,即点的坐标满足:

 $\{(x,y)|(x,y)\in D, x^2-4y\geq 0\}$,见如图阴影部分。因此概率为:

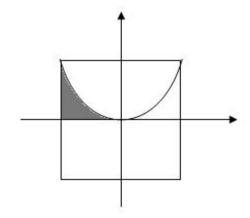
$$P = \frac{S_{\text{BH}}}{S_{\text{D}}} = \frac{2 + 2 \times \int_{0}^{1} \frac{x^{2}}{4} dx}{4} = \frac{13}{24}$$



(2) 方程有正根,要求 $\frac{-x\pm\sqrt{x^2-4y}}{2}>0$,也就是要求x<0,y>0。

因此点的坐标满足 $\{(x,y)|(x,y)\in D, x^2-4y\geq 0, x<0,y>0\}$, 见图阴影部分。因此概率为:

$$P = \frac{S_{\text{BH}}}{S_D} = \frac{\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{4} dx}{4} = \frac{1}{48} .$$



6. n个人随机地围绕圆桌就座,试问其中A、B两人的座位相邻的概率是多少?

解:
$$P\{A, B两人座位相邻\} = \begin{cases} \frac{2}{n-1} & n \geq 3\\ 1 & n=2 \end{cases}$$

- 7. 一部五卷的选集,按任意顺序放在书架上,求:
 - (1) 各卷自左至右或者自右至左的卷号顺序恰为 1,2,3,4,5 的概率;
 - (2) 第一卷及第五卷分别在两端的概率;
 - (3) 第一卷及第五卷都不在两端的概率。

$$\mathfrak{M}: \quad (1) \quad P = \frac{2}{5!} = \frac{1}{60};$$

(2)
$$P = \frac{2!3!}{5!} = \frac{1}{10};$$

(3)
$$P = \frac{P_3^2 3!}{5!} = \frac{3}{10}$$
.