

# 信息论基础

李 莹

liying2009@ecust.edu.cn

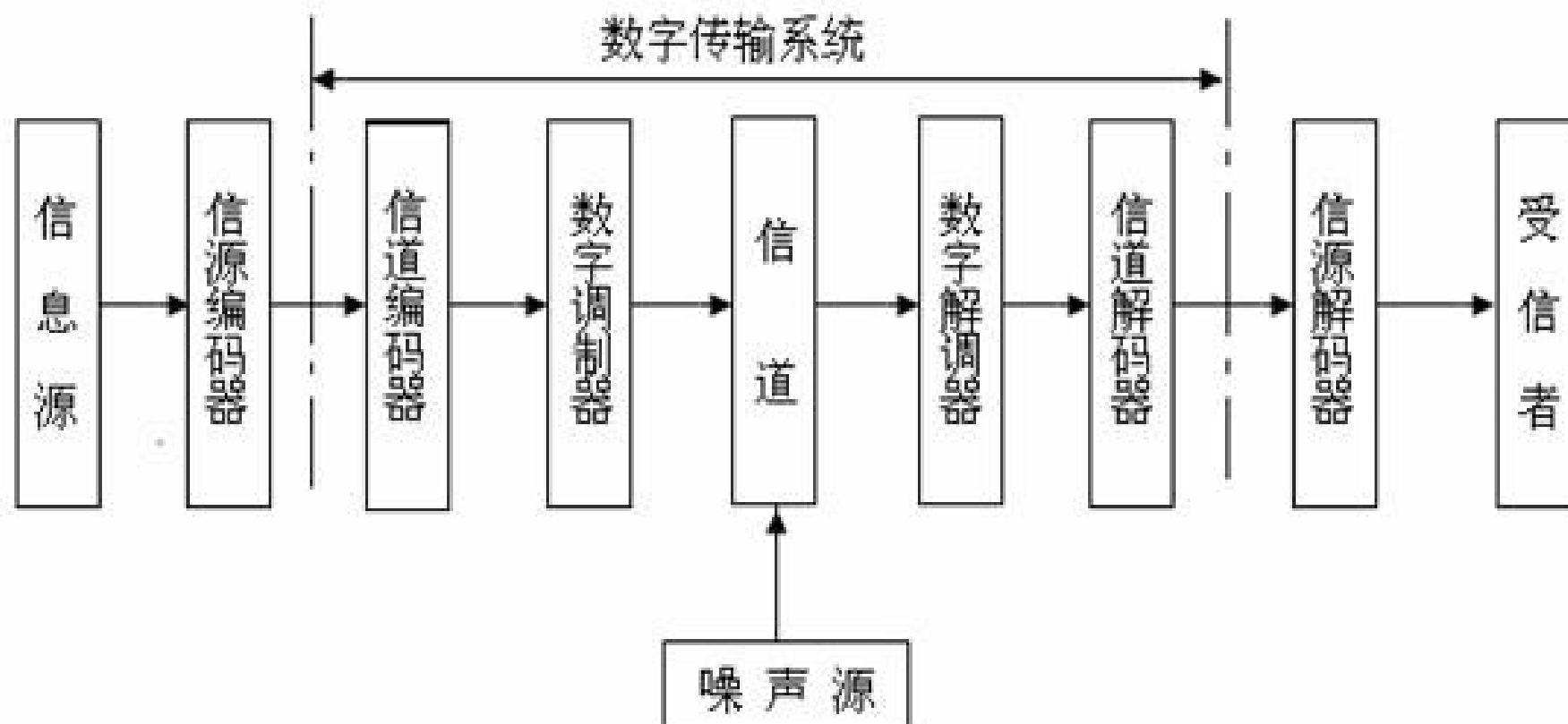
# 第七章 限失真信源编码

## 7.1 失真测度

## 7.2 信息率失真函数

## 7.3 限失真信源编码定理

## 概述



## 7.1.1 失真函数

$$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_r \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_r) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_s \\ p(y_1) & p(y_2) & \cdots & p(y_s) \end{bmatrix}$$

$$d(x_i, y_j) \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r, j = 1, 2, \cdots, s$$

### 7.1.1 失真函数

失真矩阵

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d(x_1, y_1) & d(x_1, y_2) & \cdots & d(x_1, y_s) \\ d(x_2, y_1) & d(x_2, y_2) & \cdots & d(x_2, y_s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d(x_r, y_1) & d(x_r, y_2) & \cdots & d(x_r, y_s) \end{bmatrix}$$

$r \times s$

常用的失真函数有：

(1) 汉明失真

$$d(x_i, y_j) = \begin{cases} 0 & x_i = y_j \\ 1 & x_i \neq y_j \end{cases}$$

(2) 平方误差失真函数

$$d(x_i, y_j) = (x_i - y_j)^2$$

失真函数是根据人们的实际需要和失真引起的损失、风险大小等人为规定的。

例7.1.1 设信道输入  $X = \{0,1\}$  输出  $Y = \{0,1,2\}$   
规定失真函数

$$d(0,0)=d(1,1)=0,$$

$$d(0,1)=d(1,0)=1,$$

$$d(0,2)=d(1,2)=0.5, \text{ 求 } \mathbf{D}。$$

解：

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

## 符号序列的失真函数

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$$

$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$$

$$\mathbf{X} = X_1 X_2 \cdots X_N$$

$$\mathbf{Y} = Y_1 Y_2 \cdots Y_N$$

$$\mathbf{x}_i = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_N}$$

$$\mathbf{y}_j = y_{j_1} y_{j_2} \cdots y_{j_N}$$

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j) &= d(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_N}, y_{j_1} y_{j_2} \cdots y_{j_N}) \\ &= d(x_{i_1}, y_{j_1}) + d(x_{i_2}, y_{j_2}) + \cdots + d(x_{i_N}, y_{j_N}) \\ &= \sum_{k=1}^N d(x_{i_k}, y_{j_k}) \end{aligned}$$



例7.1.2 假设信源输出序列  $\mathbf{X} = X_1 X_2 X_3$ ，其中每个随机变量均取值于  $X = \{0,1\}$ 。经信道传输(编码)后的输出为  $\mathbf{Y} = Y_1 Y_2 Y_3$ ，其中每个随机变量均取值于  $Y = \{0,1\}$ 。定义失真函数

$$d(0,0) = d(1,1) = 0,$$

$$d(0,1) = d(1,0) = 1, \text{ 求失真矩阵 } \mathbf{D}(N)。$$

$$d(000,000) = d(0,0) + d(0,0) + d(0,0) = 0$$

$$d(000,001) = d(0,0) + d(0,0) + d(0,1) = 1$$

$$\mathbf{D}(N) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 7.1.2 平均失真

$$\begin{aligned}\bar{D} &= E[d(x_i, y_j)] = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s p(x_i y_j) d(x_i, y_j) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s p(x_i) p(y_j | x_i) d(x_i, y_j)\end{aligned}$$

例：

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_{2r}\}$$

$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$$

$$p(x_i) = \frac{1}{2r}, i = 1, 2, \dots, 2r$$

$$d(x_i, y_j) = \begin{cases} 0 & x_i = y_j \\ 1 & x_i \neq y_j \end{cases}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \sum_{i=1}^{2r} \sum_{j=1}^r p(x_i) p(y_j | x_i) d(x_i, y_j) \\ &= \frac{1}{2r} \sum_{i=1}^{2r} \sum_{j=1}^r p(y_j | x_i) d(x_i, y_j) = \frac{1}{2r} \cdot r = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

例：

$$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overline{D} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s p(x_i) p(y_j | x_i) d(x_i, y_j) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

## 7.2 信息率失真函数

### 7.2.1 $D$ 允许信道

保真度准则  $\overline{D} \leq D$

$D$ 失真允许信道

$$B_D = \left\{ p(y_j | x_i) : \overline{D} \leq D \quad i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s \right\}$$

### 7.2.2 信息率失真函数的定义

$$R(D) = \min_{p(y_j | x_i) \in B_D} I(X; Y)$$

$$C = \max_{p(x_i)} I(X; Y)$$

是在信道固定前提下，选择一种信源概率分布使信息传输率最大（求极大值）。它反映了信道传输信息的能力，是信道可靠传输的最大信息传输率。信道容量与信源无关，是反映信道特性的参量，不同的信道其信道容量不同。

$$R(D) = \min_{p(y_j|x_i): D \leq D} I(X;Y)$$

是在信源固定，满足保真度准则的条件下的信息传输率的最小值。反映了满足一定失真度的条件下信源可以压缩的程度，也就是满足失真要求而再现信源消息所必须获得的最少平均信息量。是信源特性的参量，一旦求到就与求极值过程中选择的试验信道无关，不同的信源率失真函数不同。



这两个概念适用范围是不一样的。研究信道容量 $C$ 是为了解决在已知信道中尽可能多地传送信息的问题，是为了充分利用已给定的信道，使传输的信息量最大而错误概率任意小，以提高通信的可靠性，这是信道编码的问题。

研究信息率失真函数是为了解决在已知信源和允许失真度条件下，使信源输出的信息率尽可能小，也就是在允许一定失真度 $D$ 的条件下，使信源必须传送给信宿的信息量最少，尽可能用最少的码符号来传送信源信息，使信源的信息可以尽快地传送出去，以提高通信的有效性，这是信源编码问题。

### 7.3 限失真信源编码定理

定理7.1 设  $R(D)$  是离散无记忆信源的信息率失真函数。对于任意的允许失真度  $D \geq 0$  和任意小的正数  $\varepsilon > 0$ ，当信源序列长度  $N$  足够长时，一定存在一种编码  $C$  其码字个数

$$M = e^{N[R(D) + \varepsilon]}$$

其编码后的实际传输信息率  $R > R(D)$

而编码后的平均失真度  $\bar{D}(C) \leq D + \varepsilon$ 。

## 7.4 限失真信源编码定理

定理7.2 否则，如果  $M < e^{NR(D)}$

即传输信息率  $R < R(D)$

则编码后的平均失真度  $\bar{D}(C) > D$ 。

