⋆4.2 稳定性和收敛性

⋆4.2 稳定性和收敛性

⋆4.2.1 基本概念

⋆4.2 稳定性和收敛性

⋆4.2.1 基本概念

- $U^k = [u_1^k, u_2^k, \cdots, u_{N-1}^k]^T$:差分方程在第$k$层上的值改写成向量形式。

⋆4.2 稳定性和收敛性

⋆4.2.1 基本概念

- $U^k = [u_1^k, u_2^k, \cdots, u_{N-1}^k]^T$:差分方程在第$k$层上的值改写成向量形式。
- $U(x, t_k) = [u(x_1, t_k), \cdots, u(x_{N-1}, t_k)]^T$: 微分方程的真解$u(x, t)$限制在$t = t_k$处的网格点上的向量。

$\star$4.2 稳定性和收敛性

$\star$4.2.1 基本概念

- $U^k = [u_1^k, u_2^k, \cdots, u_{N-1}^k]^T$:差分方程在第$k$层上的值改写成向量形式。
- $U(x, t_k) = [u(x_1, t_k), \cdots, u(x_{N-1}, t_k)]^T$: 微分方程的真解$u(x,t)$限制在$t = t_k$处的网格点上的向量。
- $\Phi = [\phi(x_1), \phi(x_2), \cdots, \phi(x_N)]^T$:初始条件在$x_j$处的值，则有$\Phi = U^0$.

⋆4.2 稳定性和收敛性

⋆4.2.1 基本概念

- $U^k = [u_1^k, u_2^k, \cdots, u_{N-1}^k]^T$:差分方程在第$k$层上的值改写成向量形式。
- $U(x, t_k) = [u(x_1, t_k), \cdots, u(x_{N-1}, t_k)]^T$: 微分方程的真解$u(x, t)$限制在$t = t_k$处的网格点上的向量。
- $\Phi = [\phi(x_1), \phi(x_2), \cdots, \phi(x_N)]^T$:初始条件在$x_j$处的值，则有$\Phi = U^0$.
- 对于向量U^k，将其在x方向上作一个连续延拓(延拓的方法不惟一),记延拓后的函数为$u^k(x)$使其满足：关于自变量x在其定义域上连续且$u^k(x_j) = u_j^k$.

⋆4.2 稳定性和收敛性

⋆4.2.1 基本概念

- $U^k = [u_1^k, u_2^k, \cdots, u_{N-1}^k]^T$:差分方程在第$k$层上的值改写成向量形式。
- $U(x,t_k) = [u(x_1,t_k), \cdots, u(x_{N-1},t_k)]^T$: 微分方程的真解$u(x,t)$限制在$t=t_k$处的网格点上的向量。
- $\Phi = [\phi(x_1), \phi(x_2), \cdots, \phi(x_N)]^T$:初始条件在$x_j$处的值，则有$\Phi = U^0$.
- 对于向量U^k，将其在x方向上作一个连续延拓(延拓的方法不惟一),记延拓后的函数为$u^k(x)$使其满足：关于自变量x在其定义域上连续且$u^k(x_j) = u_j^k$.
- $u^k(x)$被作为在$t=t_k$层上的微分方程的真解$u(x,t_k)$的近似，在讨论稳定性与收敛性过程中，要$u^k(x)$与$u^0(x)$(即$\phi(x)$)进行比较。

⋆4.2 稳定性和收敛性

⋆4.2.1 基本概念

- $U^k = [u_1^k, u_2^k, \cdots, u_{N-1}^k]^T$:差分方程在第$k$层上的值改写成向量形式。
- $U(x, t_k) = [u(x_1, t_k), \cdots, u(x_{N-1}, t_k)]^T$: 微分方程的真解$u(x,t)$限制在$t = t_k$处的网格点上的向量。
- $\Phi = [\phi(x_1), \phi(x_2), \cdots, \phi(x_N)]^T$:初始条件在$x_j$处的值，则有$\Phi = U^0$.
- 对于向量U^k，将其在x方向上作一个连续延拓(延拓的方法不惟一),记延拓后的函数为$u^k(x)$使其满足：关于自变量x在其定义域上连续且$u^k(x_j) = u_j^k$.
- $u^k(x)$被作为在$t = t_k$层上的微分方程的真解$u(x, t_k)$的近似，在讨论稳定性与收敛性过程中，要$u^k(x)$与$u^0(x)$(即$\phi(x)$)进行比较。
- 这种延拓只对x进行，而对t依然是离散的，故称为半延拓方法或半离散方法。

- $U(x,k)$为差分格式在第k层上的值，它可以取离散值，也可以是x的连续函数,$u(x,k)$为微分方程在$t = t_k$处的真解，$u(x,k)$和$\phi(x)$取离散或连续形式取决于$U(x,k)$,

Home Page

Title Page

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- $U(x,k)$为差分格式在第k层上的值，它可以取离散值，也可以是x的连续函数,$u(x,k)$为微分方程在$t = t_k$处的真解，$u(x,k)$和$\phi(x)$取离散或连续形式取决于$U(x,k)$,
  - 采用离散化方法时

$$U(x,k) = U^k, \text{则} u(x,k) = U(x,t_k), \phi(x) = \Phi;$$

- $U(x,k)$为差分格式在第k层上的值，它可以取离散值，也可以是x的连续函数,$u(x,k)$为微分方程在$t = t_k$处的真解，$u(x,k)$和$\phi(x)$取离散或连续形式取决于$U(x,k)$,
  - 采用离散化方法时

$$U(x,k) = U^k, \text{则} u(x,k) = U(x,t_k), \phi(x) = \Phi;$$

  - 采用半离散方法时

$$U(x,k) = u^k(x), \text{则} u(x,k) = u(x,t_k), \phi(x) = u^0(x),$$

- 设X是定义在某个给定区域$\bar{D}$上的具有某种性质的函数组成的Banach空间，对于$u \in X$，定义范数

$$||u||_\infty = \max_{x \in D} |u(x)| \text{或} ||u||_{L^2} = \sqrt{\int_D |u(x)|^2 dx}.$$

- 设X是定义在某个给定区域$\bar{D}$上的具有某种性质的函数组成的Banach空间，对于$u \in X$，定义范数

$$||u||_\infty = \max_{x \in D} |u(x)| \text{或} ||u||_{L^2} = \sqrt{\int_D |u(x)|^2 dx}.$$

- 将u在x_j离散化，得$u = [u_1, u_2, \cdots, u_n]^T$,则可定义相应的Euclid范数

$$||u||_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |u_j|^2}, ||u||_{2,h} = \sqrt{h \sum_{j=1}^{n} |u_j|^2}, ||u||_\infty = \max_{1 \le j \le n} |u_j|$$

这些范数可推广到$u = [\cdots, u_{-1}, u_0, u_1, \cdots]^T$上。

- 若在二维空间中，$u = u(x, y)$,将u在(x_i, y_j)离散时的u_{ij},则可得相应的范数定义,比如

$$||u||_{2,h} = \sqrt{h_1 h_2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |u_{ij}|^2}.$$

- 若在二维空间中，$u=u(x,y)$,将u在(x_i,y_j)离散时的u_{ij},则可得相应的范数定义,比如

$$||u||_{2,h}=\sqrt{h_1h_2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|u_{ij}|^2}.$$

- 对于X上的算子$H:X\to X$,可以定义其范数

$$||H||=\max_{u\neq 0,u\in X}\frac{||Hu||}{||u||}=\max_{||u||=1,u\in X}||Hu||$$

- 后面的讨论都将在某种范数的意义下进行，而不指明哪一种范数

- 后面的讨论都将在某种范数的意义下进行，而不指明哪一种范数
- L :为微分算子，对热传导方程(7)，有$L = \frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

- 后面的讨论都将在某种范数的意义下进行，而不指明哪一种范数
- L :为微分算子，对热传导方程(7)，有$L = \frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.
- L_h :为差分算子，对古典显格式(8),有

$$L_h u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2},$$

- 后面的讨论都将在某种范数的意义下进行，而不指明哪一种范数
- L :为微分算子，对热传导方程(7)，有$L = \frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.
- L_h :为差分算子，对古典显格式(8),有

$$L_h u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2},$$

- 记第k层上的局部阶段误差为$R^k(x)$,则有

$$R^k(x) = Lu(x,k) - L_k U(x,k). \tag{49}$$

- 定义4.1 若微分方程$Lu=0$在初始条件$u|_{t=0}=\phi(x), x\in D$(也可再加上某些边值条件)下满足：
  (1)$\forall\phi(x)\in X$,以$\phi(x)$为初值的方程存在惟一解$u(x,t)$;
  (2)存在常数c,使$\forall t\in(0,T]$,成立

$$||u(x,t)||\leq c||u(x,0)||=c||\phi(x)||.$$

  则称该定解问题在X上对于变量$x\in D$和$t\in(0,T]$在$||\cdot||$意义下是适定的。

- 定义4.1 若微分方程$Lu=0$在初始条件$u|_{t=0}=\phi(x), x\in D$(也可再加上某些边值条件)下满足：
  (1)$\forall\phi(x)\in X$,以$\phi(x)$为初值的方程存在惟一解$u(x,t)$;
  (2)存在常数c,使$\forall t\in(0,T]$,成立

$$||u(x,t)||\le c||u(x,0)||=c||\phi(x)||.$$

  则称该定解问题在X上对于变量$x\in D$和$t\in(0,T]$在$||\cdot||$意义下是适定的。

- 定义4.2 设$u(x,t)$是上述定义中定解问题的解，L_h是求解此问题的差分算子，对所有k, 满足$0<k\le[\frac{T}{\tau}]$,若截断误差(41)满足

$$\lim_{h\to 0}||R^k(x)||=0, \tag{42}$$

  则称该差分格式是相容的，式(42)也称为相容条件

- 定义4.1 若微分方程$Lu=0$在初始条件$u|_{t=0}=\phi(x), x\in D$(也可再加上某些边值条件)下满足：
  (1)$\forall\phi(x)\in X$,以$\phi(x)$为初值的方程存在惟一解$u(x,t)$;
  (2)存在常数c,使$\forall t\in(0,T]$,成立

$$||u(x,t)||\le c||u(x,0)||=c||\phi(x)||.$$

  则称该定解问题在X上对于变量$x\in D$和$t\in(0,T]$在$||\cdot||$意义下是适定的。

- 定义4.2 设$u(x,t)$是上述定义中定解问题的解，L_h是求解此问题的差分算子，对所有k, 满足$0<k\le[\frac{T}{\tau}]$,若截断误差(41)满足

$$\lim_{h\to 0}||R^k(x)||=0, \tag{42}$$

  则称该差分格式是相容的，式(42)也称为相容条件

- 若$||R^k||=O(\tau^\alpha+h^\beta)$则称$L_h$对$L$的逼近具有$(\alpha,\beta)$阶精度，当$\alpha,\beta$ 为正数时，此逼近格式是相容的。

- 对前一节引进的二层差分格式，都可用矩阵和向量记号表示成

$$AU^{k+1} = BU^k + \tau F. \tag{43}$$

假设A可逆，令$Q = A^{-1}B$,则上式又可化为

$$U^{k+1} = QU^k + \tau A^{-1}F. \tag{44}$$

- 对前一节引进的二层差分格式，都可用矩阵和向量记号表示成

$$AU^{k+1} = BU^k + \tau F. \tag{43}$$

假设A可逆，令$Q = A^{-1}B$,则上式又可化为

$$U^{k+1} = QU^k + \tau A^{-1}F. \tag{44}$$

- 由于差分方程的近似解(设在第k_0层有误差ϵ^{k_0}时得到的第k层的解) 和差分方程的精确解之差满足齐次的差分方程

$$AU^{k+1} = BU^k \text{或} U^{k+1} = QU^k. \tag{45}$$

所以下面只考虑齐次的情形

- 对前一节引进的二层差分格式，都可用矩阵和向量记号表示成

$$AU^{k+1} = BU^k + \tau F. \tag{43}$$

假设A可逆，令$Q = A^{-1}B$,则上式又可化为

$$U^{k+1} = QU^k + \tau A^{-1}F. \tag{44}$$

- 由于差分方程的近似解(设在第k_0层有误差ϵ^{k_0}时得到的第k层的解) 和差分方程的精确解之差满足齐次的差分方程

$$AU^{k+1} = BU^k \text{或} U^{k+1} = QU^k. \tag{45}$$

所以下面只考虑齐次的情形

- 对于三层格式，可适当引进新变量化成二层格式，如Richardson格式的齐次形式为

$$U^{k+1} = 2r(C-2I)U^k + U^{k-1}.$$

令$W^k = \begin{bmatrix} U^k \\ U^{k-1} \end{bmatrix}$,则化为二层格式$W^{k+1} = QW^k$,其中

$$Q = \begin{bmatrix} 2r(C-2I) & I \\ I & 0 \end{bmatrix}. \tag{46}$$

下面限于讨论系数及右端与时间t无关的线性抛物方程，此时A, B, F和Q都与k无关，设h与τ之间满足一定关系，设$h = g(\tau), g(\tau)$连续且$g(0) = 0$,于是$A = A(\tau), B = B(\tau), Q = Q(\tau)$.

下面限于讨论系数及右端与时间t无关的线性抛物方程，此时A, B, F和Q都与k无关，设h与τ之间满足一定关系，设$h = g(\tau), g(\tau)$连续且$g(0) = 0$,于是$A = A(\tau), B = B(\tau), Q = Q(\tau)$.

- 定义4.3对于差分格式(45),如存在$\tau_0 > 0$和常数$K > 0$,对一切$U^0 \in X, 0 < \tau \leq \tau_0$ 和$0 \leq K \leq [\frac{T}{\tau}] - 1$成立

$$||U^{k+1}|| = ||Q^{k+1}U^0|| \leq K||U^0||. \tag{47}$$

则称此差分格式在范数$||\cdot||$意义下，关于初值稳定

下面限于讨论系数及右端与时间t无关的线性抛物方程，此时A, B, F和Q都与k无关，设h与τ之间满足一定关系，设$h = g(\tau), g(\tau)$连续且$g(0) = 0$,于是$A = A(\tau), B = B(\tau), Q = Q(\tau)$.

- 定义4.3对于差分格式(45),如存在$\tau_0 > 0$和常数$K > 0$,对一切$U^0 \in X, 0 < \tau \leq \tau_0$ 和$0 \leq K \leq [\frac{T}{\tau}] - 1$成立

$$||U^{k+1}|| = ||Q^{k+1}U^0|| \leq K||U^0||. \tag{47}$$

则称此差分格式在范数$||\cdot||$意义下，关于初值稳定

- 显然式(47)成立当且仅当

$$||Q^{k+1}|| \leq K, \tag{47'}$$

因此也可以用(47')代替(47)作为稳定的定义。

- 定义4.4 若初值没有误差，即$U^0=0$,对于格式(43)或(44),如存在$\tau_0>0$和常数$K>0$，使对一切$0<\tau\leq\tau_0$和$0\leq K\leq[\frac{T}{\tau}]-1$成立

$$||U^{k+1}||\leq K||F||,$$

则称此格式(43)或(44)在范数$||\cdot||$的意义下关于右端稳定。

- 定义4.4 若初值没有误差，即$U^0=0$,对于格式(43)或(44),如存在$\tau_0>0$和常数$K>0$，使对一切$0<\tau\le\tau_0$ 和$0\le K\le[\frac{T}{\tau}]-1$成立
$$||U^{k+1}||\le K||F||,$$
则称此格式(43)或(44)在范数$||\cdot||$的意义下关于右端稳定。
- 由差分格式(44),可推出当$||A^{-1}||\le K^{'}$和$||Q^k(\tau)||\le K^{''}$(即差分格式按初值稳定)时，有
$$||U^{k+1}||\le \tau(k+1)K^{'}K^{''}||F||\le TK^{'}K^{''}||F||$$
,即可知差分格式按右端稳定，因此我们下面只考虑格式按初值的稳定性。

- 定义4.4 若初值没有误差，即$U^0=0$,对于格式(43)或(44),如存在$\tau_0>0$和常数$K>0$，使对一切$0<\tau\le\tau_0$和$0\le K\le[\frac{T}{\tau}]-1$成立

$$||U^{k+1}||\le K||F||,$$

则称此格式(43)或(44)在范数$||\cdot||$的意义下关于右端稳定。

- 由差分格式(44),可推出当$||A^{-1}||\le K^{'}$和$||Q^k(\tau)||\le K^{''}$(即差分格式按初值稳定)时，有

$$||U^{k+1}||\le\tau(k+1)K^{'}K^{''}||F||\le TK^{'}K^{''}||F||$$

,即可知差分格式按右端稳定，因此我们下面只考虑格式按初值的稳定性。

- 差分格式关于初值稳定的实际含义是，若格式的解在某层存在误差，则由它所引起的以后各层上的误差不超过原始误差的常数倍，因此每层的误差传播时能得到控制的。

- 定义4.4 若初值没有误差，即$U^0=0$,对于格式(43)或(44),如存在$\tau_0>0$和常数$K>0$，使对一切$0<\tau\leq\tau_0$和$0\leq K\leq[\frac{T}{\tau}]-1$成立
$$||U^{k+1}||\leq K||F||,$$
则称此格式(43)或(44)在范数$||\cdot||$的意义下关于右端稳定。
- 由差分格式(44),可推出当$||A^{-1}||\leq K^{'}$和$||Q^k(\tau)||\leq K^{''}$(即差分格式按初值稳定)时，有
$$||U^{k+1}||\leq\tau(k+1)K^{'}K^{''}||F||\leq TK^{'}K^{''}||F||$$
,即可知差分格式按右端稳定，因此我们下面只考虑格式按初值的稳定性。
- 差分格式关于初值稳定的实际含义是，若格式的解在某层存在误差，则由它所引起的以后各层上的误差不超过原始误差的常数倍，因此每层的误差传播时能得到控制的。
- 定义4.5对于微分方程的解$u(x,t)$和差分方程在k层上的解$U(x,k)$,若对任意的初值条件$\phi\in X$,对任意的$t\in(0,T]$, 成立
$$\lim_{h\to0,k\tau\to t}||u(x,t)-U(x,k)||=0,\tag{48}$$
则称该差分方程是收敛的。

⋆4.2.2 稳定性与收敛性的关系

一个差分格式的相容性在构造计算格式时就可以判断，下面的定理给出了差分格式的稳定性与收敛性之间的关系

⋆4.2.2 稳定性与收敛性的关系

一个差分格式的相容性在构造计算格式时就可以判断，下面的定理给出了差分格式的稳定性与收敛性之间的关系

- 定理4.1(Lax等价定理)对一个适定的初值问题，若给出的差分格式是相容的，则差分格式稳定的充分必要条件是它是收敛的。

⋆4.2.2 稳定性与收敛性的关系

一个差分格式的相容性在构造计算格式时就可以判断，下面的定理给出了差分格式的稳定性与收敛性之间的关系

- 定理4.1(Lax等价定理)对一个适定的初值问题，若给出的差分格式是相容的，则差分格式稳定的充分必要条件是它是收敛的。
- 由于一个可用的差分格式总是相容的，为得到格式的收敛性，由上述定理，只要讨论它的稳定性即可，因此无论从理论上还是应用上，格式的稳定性理论都应是我们研究的重点。

⋆4.2.2 稳定性与收敛性的关系

一个差分格式的相容性在构造计算格式时就可以判断，下面的定理给出了差分格式的稳定性与收敛性之间的关系

- 定理4.1(Lax等价定理)对一个适定的初值问题，若给出的差分格式是相容的，则差分格式稳定的充分必要条件是它是收敛的。
- 由于一个可用的差分格式总是相容的，为得到格式的收敛性，由上述定理，只要讨论它的稳定性即可，因此无论从理论上还是应用上，格式的稳定性理论都应是我们研究的重点。
- 定理4.2 (Lax定理) 对于两层差分格式(43)或(44),如果它是相容的，且按初值是稳定的，则它是收敛的，且当$||R^k|| = O(\tau^\alpha + h^\beta)$时，有$||u(x,t) - U(x,k)|| = O(\tau^\alpha + h^\beta)$.

⋆4.2.2 稳定性与收敛性的关系

一个差分格式的相容性在构造计算格式时就可以判断，下面的定理给出了差分格式的稳定性与收敛性之间的关系

- 定理4.1(Lax等价定理)对一个适定的初值问题，若给出的差分格式是相容的，则差分格式稳定的充分必要条件是它是收敛的。
- 由于一个可用的差分格式总是相容的，为得到格式的收敛性，由上述定理，只要讨论它的稳定性即可，因此无论从理论上还是应用上，格式的稳定性理论都应是我们研究的重点。
- 定理4.2 (Lax定理) 对于两层差分格式(43)或(44),如果它是相容的，且按初值是稳定的，则它是收敛的，且当$||R^k|| = O(\tau^\alpha + h^\beta)$时，有$||u(x,t) - U(x,k)|| = O(\tau^\alpha + h^\beta)$.
- 此定理说明差分格式的稳定性可导出收敛性，且若差分格式的截断误差是(α,β)阶精度的，则差分格式的解具有相同的收敛阶。