# 20162 华东理工大学高等代数期末测试卷

一、（本题 14 分）$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，求该二次型的矩阵、标准形、规范形以及正负惯性指数。

二、（本题 12 分）证明：

（1）数域 P 上的任意方阵都能表示成一对称矩阵与一反对称矩阵的和；

（2）记所有对称矩阵组成的线性空间为$V_1$，所有反对称矩阵组成的线性空间为$V_2$，则$P^{n\times n}=V_1\oplus V_2$。

三、（本题 12 分）若线性空间 V 上的线性变换 $\hat{A}$ 满足$\hat{A}^2=\hat{A}$，证明：

（1）对 V 中的任意元素$\beta$，$\beta=\hat{A}\beta$的充要条件是$\beta\in\hat{A}V$

（2）$V=\hat{A}V\oplus\hat{A}^{-1}$（0）

四、（本题 14 分）已知线性变换$\hat{A}$在基$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$，$\varepsilon_3$下的矩阵是

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，求$\hat{A}$在基$2\varepsilon_3$，$\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$\varepsilon_1$下的矩阵。

五、（本题 14 分）已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&2\end{pmatrix}$，求 A 的不变因子、初等因子、最小多项式以及 Jordan 标准形。

六、（本题 12 分）

（1）写出正交变换的定义，以及它的至少两种等价形式；

（2）如果$\hat{A}$是线性空间 V 上的正交变换，$V_1$是 V 上的$\hat{A}$-子空间，证明$\hat{A}$是$V_1$上的正交变换，从而$\hat{A}|_{V_1}$可逆。

七、（本题 14 分）已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，求正交矩阵 T，使得$T'AT$成对角形。

八、（本题 8 分）若 A 是实对称矩阵，B 是正定矩阵，证明矩阵 AB 的特征值均为实数。