

第一章 质点的运动规律 习题参考解答

1、电子受到磁力后，在半径为R的圆形轨道上，以速率v从O点开始作顺时针方向的匀速圆周运动，当它经过 $\overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OP}| = 2R \cos 30^\circ = \sqrt{3}R$ 圆周时，求：

- (1) 电子的位移；
- (2) 电子经过的路程等于多少；
- (3) 在这段时间内的平均速度；
- (4) 在该点的瞬时速度

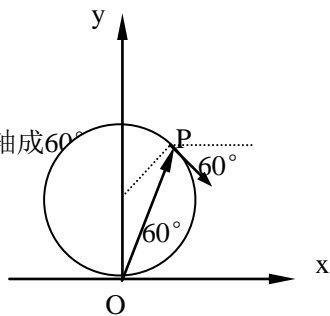
解：(1) 位移大小 $|\overrightarrow{OP}| = 2R \cos 30^\circ = \sqrt{3}R$ 方向与x轴成 60°

(2) 路程 $S = \frac{2}{3} \times 2\pi R = \frac{4}{3} \pi R$

(3) $\therefore \Delta t = \frac{2}{3} \times \frac{2\pi R}{v} = \frac{4\pi R}{3v}$

平均速度的大小 $\therefore \bar{v} = \frac{|\overrightarrow{OP}|}{\Delta t} = \frac{\sqrt{3}R}{\frac{4\pi R}{3v}} = \frac{3\sqrt{3}v}{4\pi}$ 方向与x轴成 60°

(4) 速度的大小为v，方向与x轴成 -60°



2、一人自原点出发，25 s 内向东走 30 m，又 10 s 内向南走 10 m，再用 15 s 向正西北走 18 m. 求在这 50 s 内，

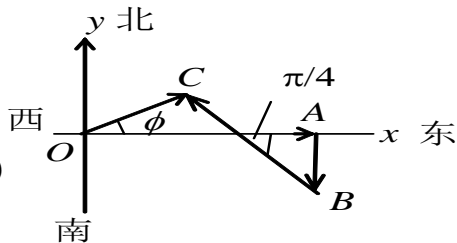
- (1) 平均速度的大小和方向；
- (2) 平均速率的大小.

答：解：(1) 位移 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
 $= 30\vec{i} + (-10\vec{j}) + 18(-\cos 45^\circ \vec{i}) + \sin 45^\circ \vec{j}$
 $= 17.27\vec{i} + 2.73\vec{j}$

位移大小为： $|\overrightarrow{OC}| = 17.48 \text{ m}$ ，方向 $\phi = 8.98^\circ$ (东偏北)

平均速度大小为 $|\bar{v}| = |\Delta \vec{r} / \Delta t| = |\overrightarrow{OC} / \Delta t| = 0.35 \text{ m/s}$ 方向东偏北 8.98°

(2) (路程) $\Delta S = (30 + 10 + 18) \text{ m} = 58 \text{ m}$ ，平均速率为： $\bar{v} = \Delta S / \Delta t = 1.16 \text{ m/s}$



3、已知质点的位矢随时间的函数形式为 $\vec{r} = R(\cos \omega t \vec{i} + \sin \omega t \vec{j})$ ，式中 R, ω 为常量求：

(1) 质点的轨迹；

(2) 速度和加速度，并证明其加速度总指向一点。

解：(1) 质点位置的坐标为： $x = R \cos \omega t$ $y = R \sin \omega t$

$$\text{质点的运动轨迹： } x^2 + y^2 = R^2$$

$$(2) \text{ 质点的速度： } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -R\omega \sin \omega t \vec{i} + R\omega \cos \omega t \vec{j}$$

$$\text{质点的加速度： } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - R\omega^2 \sin \omega t \vec{j} = -\omega^2 \vec{r}$$

由上式可知加速度总是指向圆心。

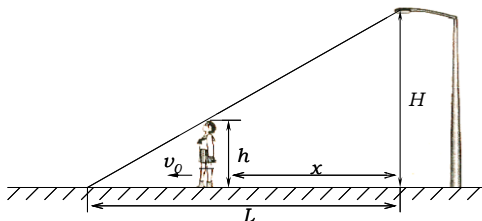
4、路灯距地面高度为 H ，行人身高为 h ，若人以匀速度 v_0 背离路灯行走，问人头影的移动速度为多大？

解：设 t 时间人的位置坐标为 x ，人影的坐标为 L

$$\text{由几何关系 } \frac{L-x}{h} = \frac{L}{H} \text{ 得：}$$

$$L = \frac{H}{H-h} x$$

$$\therefore v = \frac{dL}{dt} = \frac{H}{H-h} \frac{dx}{dt} = \frac{H}{H-h} v_0$$



5、一质点以初速度 v_0 作直线运动，所受阻力与其速度的三次方成正比，即 $a = -kv^3$ ，试求质点速度和位置随时间的变化规律以及速度随位置的变化规律。

解：由题意有： $a = -kv^3 = \frac{dv}{dt}$

$$\text{则：} \frac{dv}{v^3} = -kdt; \text{积分得到：} \Rightarrow v = v_0 \left(\frac{1}{1 + 2kv_0^2 t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \left(\frac{1}{1 + 2kv_0^2 t} \right)^{\frac{1}{2}}; \text{积分得到：} \Rightarrow x = \frac{1}{kv_0} (\sqrt{1 + 2kv_0^2 t} - 1)$$

$$\text{可通过简单推倒得到} \Rightarrow v = \frac{v_0}{1 + kv_0 x}$$

$$\text{或使用变量转换：} \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = -kv^3; \text{积分得到：} \Rightarrow v = \frac{v_0}{1 + kv_0 x}$$

6、某质点的运动方程为 $\vec{r} = 2bt\vec{i} + bt^2\vec{j}$ (b 为常数)，求：

- (1) 轨道方程；
- (2) 质点的速度和加速度的矢量表示式；
- (3) 质点的切向加速度和法向加速度的大小。

解：(1) 由 $x = 2bt$ $y = bt^2$ 得轨迹方程 $y = \frac{x^2}{4b}$

$$(2) \text{质点的速度 } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} [2bt\vec{i} + bt^2\vec{j}] = 2b\vec{i} + 2bt\vec{j}$$

$$\text{质点的加速度 } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [2b\vec{i} + 2bt\vec{j}] = 2b\vec{j}$$

$$(3) \text{点的速率：} v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2b)^2 + (2bt)^2}$$

$$\text{质点的切向加速度 } a_t = \frac{d}{dt} \left[\sqrt{(2b)^2 + (2bt)^2} \right] = \frac{2bt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\text{质点的法向加速度 } a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{(2b)^2 + \left(\frac{2bt}{\sqrt{1+t^2}} \right)^2} = \frac{2b}{\sqrt{1+t^2}}$$

7、质点沿半径为0.1m的圆周运动，其角位移用下式表示 $\theta = 2 + 4t^3$ 式中 θ 为弧度(rad)， t 的单位为s，求：

(1) $t=2s$ 时，质点所在位置的切向加速度和法向加速度的大小；

(2) 当 θ 为何值时，其加速度和半径成 45° 角。

解：(1) 由题意得到圆周运动的角位移、角速度、角加速度：

$$\theta = 2 + 4t^3 \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} = 12t^2 \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = 24t$$

则圆周运动质点的法向加速度大小为： $\therefore a_n = R\omega^2 = R(12t^2)^2|_{t=2} = 230.4 \text{ m/s}^2$

质点圆周运动的切向加速度大小为： $a_t = R\alpha = 24Rt|_{t=2} = 4.8 \text{ m/s}^2$

(2) 当 \vec{a} 与半径成 45° 角时， \vec{a} 与 a_n 也成 45° 。所以 $|\vec{a}_n| = |\vec{a}_t|$

即 $144Rt^4 = 24Rt$

$$\theta = 2 + 4t^3 \bigg|_{t=\sqrt[3]{\frac{1}{6}}} = 2 + 4 \times \frac{1}{6} = 2\frac{2}{3} \text{ rad}$$

8、手球运动员以初速度 v_0 与水平方向成 α 的角度抛出一球，当球运动到M点处，它的速度与水平方向成 θ 角，若忽略空气阻力，求：

(1) 球在M点处速度的大小；

(2) 球在M点处的切向加速度和法向加速度的大小；

(3) 抛物线在该点处的曲率半径。

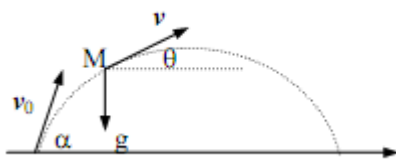
解：(1) 质点水平速度分量为 $v_0 \cos \alpha = v \cos \theta$

有球在M点处速度的大小： $\Rightarrow v = \frac{\cos \alpha}{\cos \theta} v_0$

(2) 球在 M 点处的切向加速度的大小 $\vec{a}_t = -g \sin \theta \hat{\tau}$

球在 M 点处法向加速度的大小 $\vec{a}_n = g \cos \theta \hat{n}$

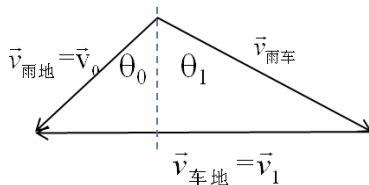
(3) 由 $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ ；得到抛物线在该点处的曲率半径 $\Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g \cos^3 \theta}$



9、火车静止时，车窗上雨痕向前倾斜 θ_0 角，火车以某一速度匀速前进时，火车车窗上雨痕向后倾斜 θ_1 角。火车加快以另一速度匀速前进时，车窗上雨痕向后倾斜 θ_2 角，求火车加快前后的速度之比。

解：由相对运动 $\vec{V}_{\text{车地}} = \vec{V}_{\text{车雨}} + \vec{V}_{\text{雨地}} = \vec{V}_{\text{雨地}} + (-\vec{V}_{\text{雨车}})$

由矢量合成图得：



相对地面静止时： $0 = V_0 \cos \theta_0 - V_{\text{雨车}} \cos \theta_1$

相对地面速率为 V_1 时： $V_1 = V_0 \sin \theta_0 + V_{\text{雨车}} \sin \theta_1 = V_0 \sin \theta_0 + V_0 \cos \theta_0 \tan \theta_1$

相对地面速率为 V_2 时： $V_2 = V_0 \sin \theta_0 + V_0 \cos \theta_0 \tan \theta_2$

所以
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_0 \sin \theta_0 + V_0 \cos \theta_0 \tan \theta_1}{V_0 \sin \theta_0 + V_0 \cos \theta_0 \tan \theta_2}$$

10、一升降机以加速度 1.22 m/s^2 上升，当上升速度为 2.44 m/s 时，有一螺帽自升降机的顶板上落下，升降机顶板与升降机的底面相距 2.74 m ，问：

(1) 螺帽相对于升降机作什么运动？其加速度为多少？螺帽相对于地面作什么运动？其加速度为多少？

(2) 螺帽从升降机顶板落到升降机底面需多少时间？

(3) 螺帽相对于升降机外固定柱子下降多少距离？

解：(1) 螺帽相对升降机作向下的匀加速直线运动

$$\vec{a}_{\text{m升}} = \vec{a}_{\text{m地}} + \vec{a}_{\text{地升}} = \vec{a}_{\text{m地}} - \vec{a}_{\text{升地}} \quad a_{\text{m升}} = -g - a = -11.02 \text{ m/s}^2$$

螺帽对地作竖直上抛运动 $\vec{a}_{\text{m地}} = \vec{g}$

(2) 取升降机为参照系，参照系内坐标系选竖直向下为正

$$h = \frac{1}{2}(g+a)t^2$$

$$\text{螺帽从升降机顶板落到升降机底面需多少时间 } t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = \sqrt{\frac{2 \times 2.74}{9.8 + 1.22}} = 0.71 \text{ s}$$

(3) 螺帽相对于升降机外固定柱子下降多少距离

$$s_{\text{螺地}} = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 2.44 \times 0.71 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times (0.71)^2 = -0.74 \text{ m}$$

11、一男孩乘坐一铁路平板车，在平直铁路上匀加速行驶，其加速度为 a ，他向车前进的斜上方抛出一球，设抛球过程对车的加速度 a 的影响可忽略，如果他不移动在车中的位置就能接住球，则抛出的方向与竖直方向的夹角 θ 应为多大？

解：设抛出时刻车的速度为 \vec{v}_0 ，球相对于车的速度为 \vec{v}'_0 ，与竖直方向成 θ 角。抛射过程中，在地面参照系中，车的位移水平分量：

$$\Delta x_1 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (1)$$

$$\text{球的位移水平分量: } \Delta x_2 = (v_0 + v'_0 \sin \theta) t \quad (2)$$

$$\text{球的位移竖直分量: } \Delta y_2 = (v'_0 \cos \theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3)$$

$$\text{小孩接住球的条件} \quad \Delta x_1 = \Delta x_2, \Delta y_2 = 0$$

$$\text{即 联} \quad \frac{1}{2} a t_2 = (v'_0 \sin \theta) t, \quad \frac{1}{2} g t_2 = (v'_0 \cos \theta) t$$

$$\text{两式相比得} \quad a/g = \tan \theta, \quad \therefore \quad \theta = \tan^{-1}(a/g)$$

12、如图所示，质量为 m 的摆球 A 悬挂在车架上。求在下述各种情况下，摆线与竖直方向的夹角 α 和线中的张力 T 。

(1) 小车沿水平方向作匀速运动；

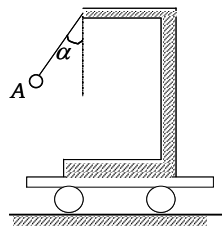
(2) 小车沿水平方向作加速度为 a 的运动。

解：(1) 由题意小车沿水平方向作匀速运动得： $\alpha = 0$

$$T = mg$$

(2) 小车沿水平方向作加速度为 a 的运动，由牛顿定律得：

$$T \sin \alpha = ma, \quad T \cos \alpha = mg$$



$$\tan \alpha = a/g \quad [\text{或 } \alpha = \tan^{-1}(a/g)]$$

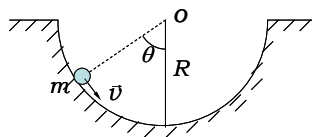
$$T = m\sqrt{a^2 + g^2}$$

13、如图所示, 质量为 m 的钢球 A 沿着中心在 O 、半径为 R 的光滑半圆形槽下滑. 当 A 滑到图示的位置时, 其速率为 v , 钢球中心与 O 的连线 OA 和竖直方向成 θ 角, 求这时钢球对槽的压力和钢球的切向加速度.

解: 球 A 受法向支持力 \vec{N} 和重力 $m\vec{g}$, 根据牛顿第二定律

$$\text{法向合力: } N - mg \cos \theta = mv^2 / R \quad ①$$

$$\text{切向合力: } mg \sin \theta = ma_t \quad ②$$



当 A 滑到图示的位置时, 由①式可得: $N = m(g \cos \theta + v^2 / R)$

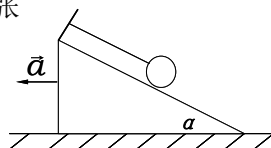
根据牛顿第三定律, 球对槽压力大小同上, 方向沿半径向外.

当 A 滑到图示的位置时, 由②式得: $a_t = g \sin \theta$

14、将质量为 10Kg 的小球挂在倾角 $\alpha = 30^\circ$ 的光滑斜面上 (如图所示).

(1) 当斜面以加速度 $a = \frac{1}{3}g$ 沿图示的方向运动时, 求绳中的张力及小球对斜面的正压力;

(2) 当斜面的加速度至少为多大时, 小球对斜面的正压力为零?



解: (1) 当斜面以加速度 $a = \frac{1}{3}g$ 沿图示的方向运动时 (小球未离开斜面):

$$\text{水平方向合力: } T \cos \alpha - N \sin \alpha = ma$$

$$\text{竖直方向合力: } T \sin \alpha + N \cos \alpha = mg$$

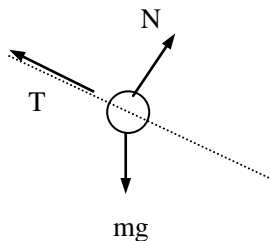
$$\text{解得当 } a = \frac{1}{3}g \text{ 时, } N = 68.4 \text{ (N)} \quad T = 77.3 \text{ (N)}$$

(2) 若 $N=0$, 则有

$$\text{水平方向合力: } T \cos \alpha = ma'$$

$$\text{竖直方向合力: } T \sin \alpha = mg$$

$$a' = g \cot \alpha = \sqrt{3}g = 17 \text{ (m/s)}$$



15、桌上有一质量为 M 的板，板上放一质量为 m 的物体，如图所示。设物体与板，板与桌面之间的动摩擦系数为 μ_k ，静摩擦系数为 μ_s ，(1) 今以水平力 F 拉板，使两者一起以加速度 a 运动，试计算板与桌面间的相互作用力；(2) 要将板从物体下面抽出，至少需用多大的力？

解：(1) 设板和桌面间的相互作用力 N 和 f_2

物体 m 与板竖直方向合力为： $\therefore \begin{aligned} N_1 &= mg \\ N &= N_1 + Mg = (m+M)g \end{aligned}$

板和桌面间的滑动摩擦力 f_2 为： $f_2 = \mu_k N = \mu_k (M+m)g$

(2) 设抽出板所需的力为 F ，且抽出时 $a_M > a_m$

物体 m 水平方向合力： $f_1 = ma_m$

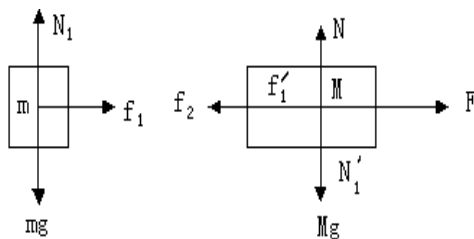
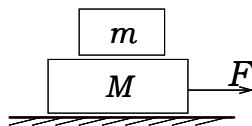
板水平方向合力为： $M: F - f_1 - f_2 = Ma_M$

$$\text{即} \quad f_1 < \frac{m(F - f_2)}{m + M}$$

$$\therefore F \geq \frac{f_1(m+M) + mf_2}{m} = f_1 + f_2 + \frac{M}{m}f_1$$

$$\therefore f_1 \leq \mu_s mg$$

代入 f_1 得到 F ： $F \geq (\mu_k + \mu_s)(M+m)g$



16、有一质量为 $m=5\text{kg}$ 的物体，在0到10s内受到如图所示的变力 F 作用，由静止开始作直线运动。假定物体的初始位置为坐标的原点，求：

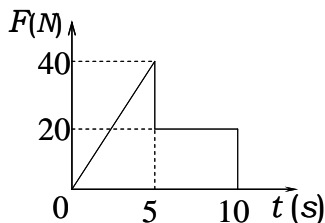
(1) 第5秒末和第10秒末的速度；

(2) 0到5秒内和5到10秒内物体所通过的路程。

解：(1) 由 $F-t$ 图可知： $F = \begin{cases} 8t & 0 \leq t \leq 5 \\ 20 & 5 \leq t \leq 10 \end{cases}$

根据牛顿定律可得 a 与时间关系为

$$a = \frac{F}{m} = \begin{cases} \frac{8}{5}t & 0 \leq t \leq 5 \\ 4 & 5 \leq t \leq 10 \end{cases} \quad (a = \frac{dv}{dt})$$



直线运动： $\therefore v_5 = \int_0^5 a dt = \int_0^5 \frac{8}{5} t dt = 20 \text{ m/s}$ ； $v_{10} = v_5 + \int_5^{10} a dt = 20 + \int_5^{10} 4 dt = 40 \text{ m/s}$

(2) 速度随时间变化关系

$$v = \begin{cases} \int_0^t \frac{8}{5} t dt = \frac{4}{5} t^2 & 0 \leq t \leq 5 \\ \int_5^t 4 dt = 4t & 5 \leq t \leq 10 \end{cases} \quad (v = \frac{dx}{dt})$$

$$x_5 = \int v dt = \int_0^5 \frac{4}{5} t^2 dt = \frac{4}{15} t^3 \Big|_0^5 = 33.3 \text{ m}$$

$$x_{10} - x_5 = \int_5^{10} v dt = \int_5^{10} 4t dt = 150 \text{ m}$$

17、如图所示，有一轻滑轮A，两边分别挂着质量为 m_1 和 m_2 的两物体，当滑轮A在外力作用下以加速度 a_0 上升时，求两物体 m_1 和 m_2 的加速度 a_1 和 a_2 （设 $m_2 > m_1$ ）。

解： m_1 对地加速度为 $\vec{a}_1 = \vec{a}_{1A} + \vec{a}_{A地}$ $a_1 = a' + a_0$

m_2 对地加速度为 $\vec{a}_2 = \vec{a}_{2A} + \vec{a}_{A地}$ $a_2 = a' - a_0$

$$m_1 \quad T - m_1 g = m_1 a_1 = m_1 (a' + a_0) \quad (1)$$

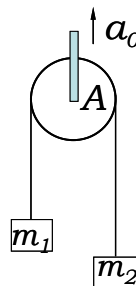
$$m_2 \quad m_2 g - T = m_2 a_2 = m_2 (a' - a_0) \quad (2)$$

由 (1) + (2) 得

$$\text{相对滑轮的加速度为: } a' = \frac{(m_2 - m_1)g - (m_1 - m_2)a_0}{m_1 + m_2}$$

$$\text{物体 } m_1 \text{ 相对地面的加速度: } \therefore a_1 = a' + a_0 = \frac{2m_2}{m_2 + m_1} a_0 - \frac{(m_1 - m_2)g}{m_2 + m_1}$$

$$\text{物体 } m_2 \text{ 相对地面的加速度: } a_2 = a' - a_0 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} a_0 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$



18、用两根长为 a 的绳子连住一质量为 m 的小球，两绳的另一端分别固定在相距为 a 的棒的两点上，今使小球在水平面内作匀速圆周运动，如图所示。当转速为 ω 时，下面一根绳子刚刚伸直，求转速为 2ω 时，上下绳子的拉力各为多大？

解 由几何条件知 $\alpha = 30^\circ$ ，且当角速度为 ω 时，此时， $T_2 = 0$ ，水平与竖直方向的合力为：

$$T_1 \cos \alpha = m\omega^2 (a \cos \alpha)$$

$$T_1 \sin \alpha = mg$$

$$\omega^2 = \frac{g}{a \sin \alpha}$$

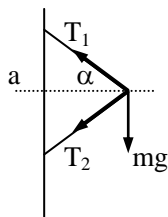
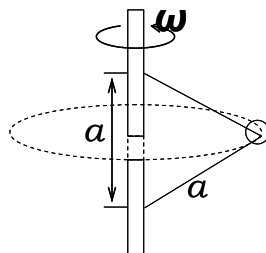
当 $T_2 \neq 0$ ；水平与竖直方向的合力为：

$$T_1' \cos \alpha + T_2' \cos \alpha = m(2\omega)^2 a \cos \alpha \quad (1)$$

$$T_1' \sin \alpha = T_2' \sin \alpha + mg \quad (2)$$

$$\therefore T_1' = 5mg$$

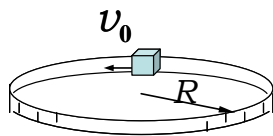
$$T_2' = T_1' - 2mg = 3mg$$



19、在光滑水平桌面上平放一固定的圆环，其半径为 R ，物体与环内侧的摩擦系数为 μ ，当 $t_0=0$ ，物体的速率为 v_0 ，求：

(1) t 时刻物体的速率；

(2) 在时间 t 内物体经过的路程。



解：(1) 法向合力为： $F_n = m \frac{v^2}{R}$

$$\text{切向合力为：} F_t = m \frac{dv}{dt} = -\mu F_n = -\mu \frac{mv^2}{R}$$

$$\text{有：} \therefore \frac{dv}{dt} = -\mu \frac{v^2}{R}$$

$$\text{积分 } \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = \int_0^t -\frac{\mu}{R} dt \quad ; \quad \text{得到：} v = \frac{v_0 R}{R + \mu v_0 t} = \frac{v_0}{1 + \frac{\mu v_0 t}{R}}$$

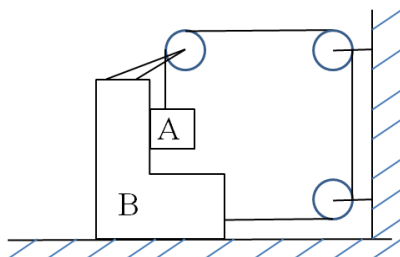
$$(2) \quad \text{速率：} v = \frac{ds}{dt} = \frac{v_0}{1 + \frac{\mu v_0 t}{R}}$$

$$\text{积分 } \int_0^s ds = \int_0^t \frac{v_0}{1 + \frac{\mu v_0 t}{R}} dt \quad ; \quad \text{得到：} s = \frac{R}{\mu} \ln\left(1 + \frac{\mu v_0 t}{R}\right)$$

20、图示为一力学装置，滑块B的质量为 m_B ，悬

块A的质量为 m_A ，两者用无伸长的细绳相连，所

有接触面皆为光滑。试求：滑块B和滑块A的加速度各为多少？



解：对悬块A水平合力： $N = m_A a_{Ax}$ (1)

对悬块A竖直合力： $m_A g - T = m_A a_{Ay}$ (2)

对滑块B水平合力为： $B: 2T - N' = m_B a_{Bx}$ (3)

牵连关系： $a_{Ay} = 2a_{Bx} = 2a_{Ax}$ (4)

由(1) — (4)联解得

$$\vec{a}_A = \frac{2m_A g}{5m_A + m_B} \vec{i} + \frac{4m_A g}{5m_A + m_B} \vec{j}$$

$$\vec{a}_B = \frac{2m_A g}{5m_A + m_B} \vec{i}$$

