第三章 常见的曲面

在右手直角坐标系下

§1球面和旋转面

1.球面的普通方程

球心为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为 **R** 的球面方程:

点 $M(x, y, z)$ 在 这 个 球 面 上 $\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{M_0M}\right| = R$ 即

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

点 $M(x, y, z)$ 满足三元二次方程

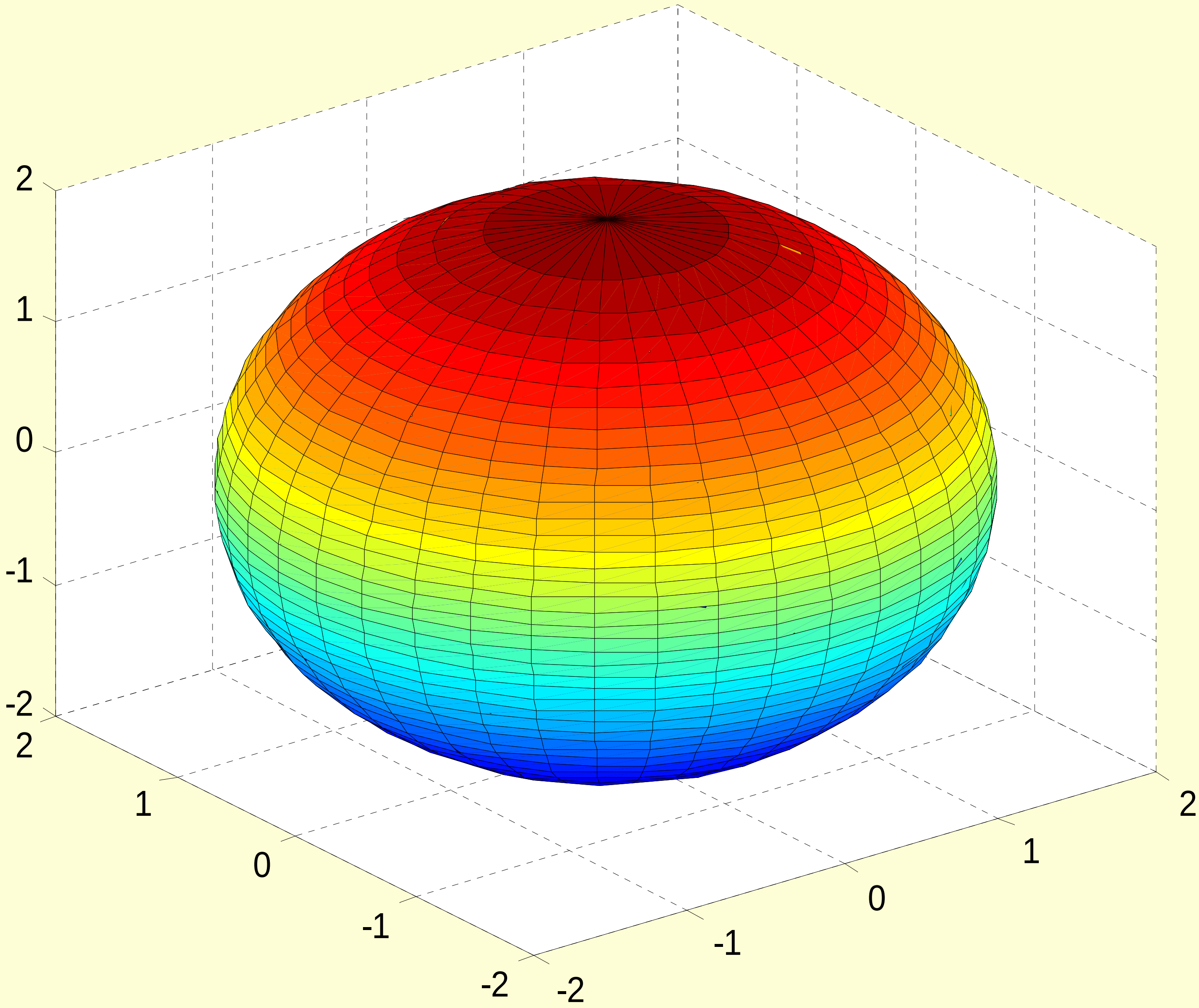
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

$\Leftarrow\Rightarrow$ 它在球面上。

当 $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 > c$ 时它表示一个球心在 $(-b_1, -b_2, -b_3)$，半径为 $\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - c}$ 的球面；

当 $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c$ 时，它表示一个点，$(-b_1, -b_2, -b_3)$；

当 $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 < c$ 时，它没有轨迹（虚球面）。


2
1
0
-1
-2
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2

2.球面的参数方程　点的球面坐标

球心在原点，半径 **R** 的球面的参数方程：

$$\begin{cases} x = R\cos\vartheta\cos\varphi \\ y = R\cos\vartheta\sin\varphi \\ z = R\sin\vartheta \end{cases} \qquad \begin{array}{c} 0 \le \varphi < 2\pi \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \vartheta \le \dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

其中 φ 称为经度，ϑ 称为纬度。

球面上的点与（ϑ，φ）一一对应，称（ϑ，φ）为球面上的曲纹坐标

称（**R**，ϑ，φ）为空间中点 **M** 的球面坐标（空间极坐标）

3.曲面和曲线的普通方程、参数方程

曲面的实例： 水桶的表面、台灯的罩子面等.

曲面在空间解析几何中被看成是点的几何轨迹.

曲面方程的定义：

如果曲面S与三元方程$F(x,y,z)=0$有下述关系：

（1） 曲面S上任一点的坐标都满足方程；

（2）不在曲面S上的点的坐标都不满足方程；

那么，方程$F(x,y,z)=0$就叫做曲面 S的方程，而曲面S就叫做方程的图形.

曲面的普通方程是一个三元方程**F**（***x***，***y***，***z***）**=0**

曲面的参数方程是含两个参数的方程：

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad \begin{matrix} a \le u \le b \\ c \le v \le d \end{matrix}$$

其中（**u**，**v**）称为曲面上点的曲纹坐标

曲线的普通方程是两个三元方程的联立 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

曲线的参数方程是含有一个参数的方程

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \qquad a\le t\le b \\ z=z(t) \end{cases}$$

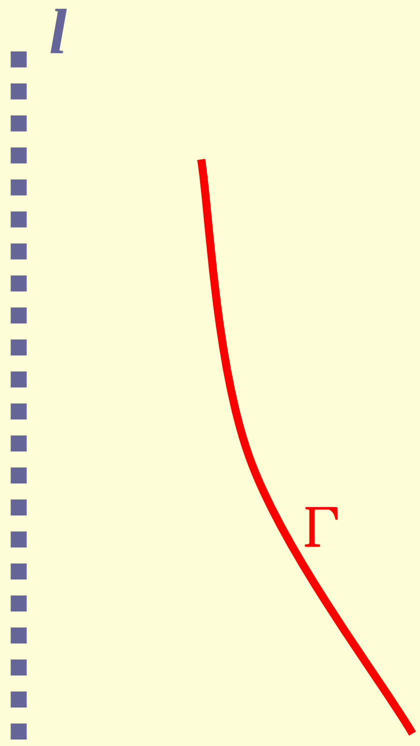
4.旋转面

定义：一条曲线Γ绕一条直线l旋转所得到的曲面称为旋转面，l称为轴，Γ称为母线

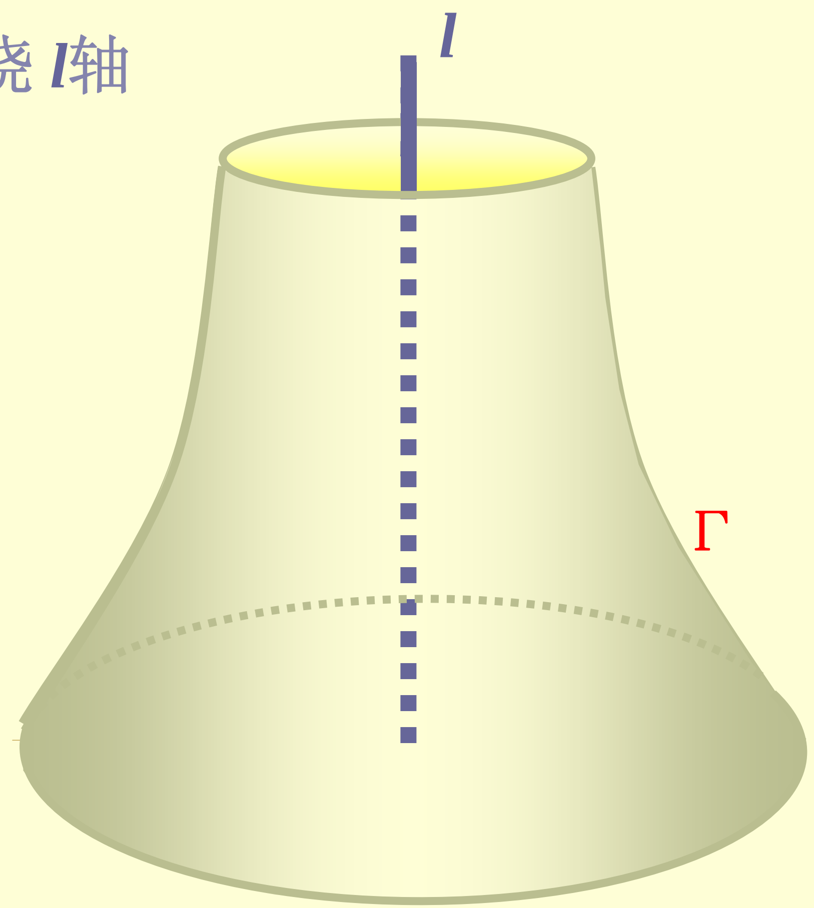
母线Γ上每个点M_0绕l旋转得到一个圆，称为纬圆，纬圆与轴垂直，过l的半平面与旋转面的交线称为经线（或子午线）。

已知轴l过点$\mathbf{M_1}(x_1, y_1.z_1)$，方向向量$v(l, m, n)$，母线$\Gamma$的方程为$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$,求旋转面。

曲线 Γ $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 绕 l轴

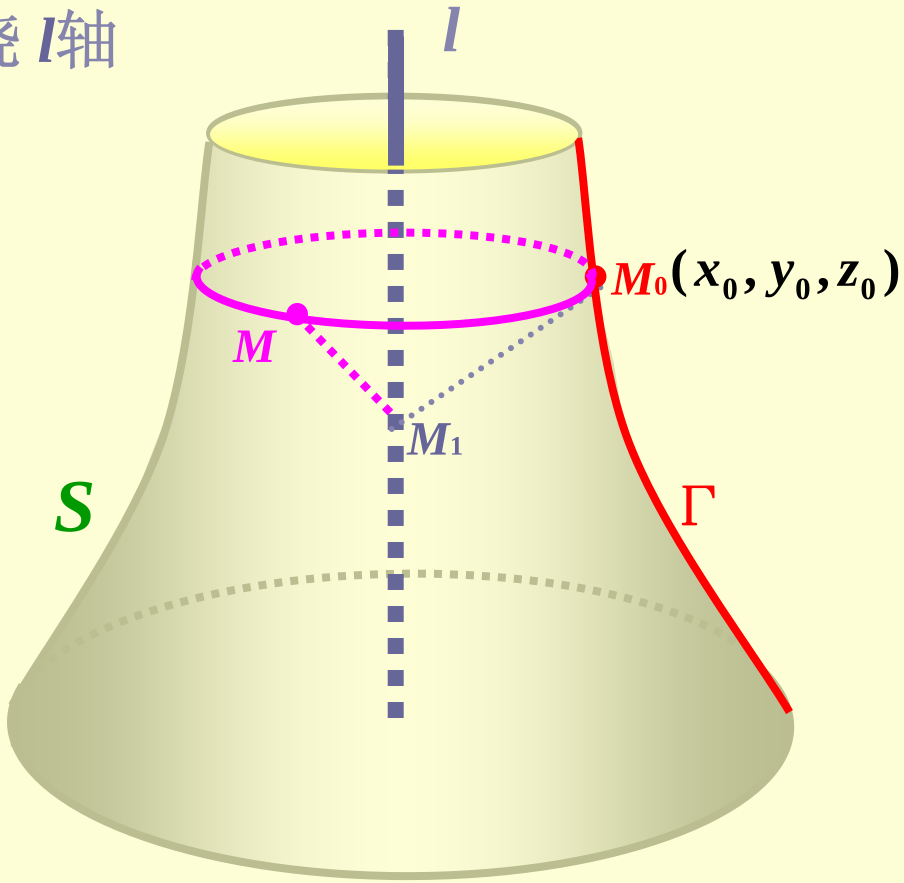


曲线 Γ $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 绕 l轴



曲线 Γ $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 绕 l轴

旋转一周得旋转曲面 S



$\forall$ $M(x,y,z)$ $\in S$

$$\begin{cases} F(x_0,y_0,z_0)=0 \\ G(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases}$$

$$\frac{\left|\overrightarrow{MM_1}\times\vec{v}\right|}{|\vec{v}|}=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{v}\right|}{|\vec{v}|}$$

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0$$

建立旋转曲面的方程：

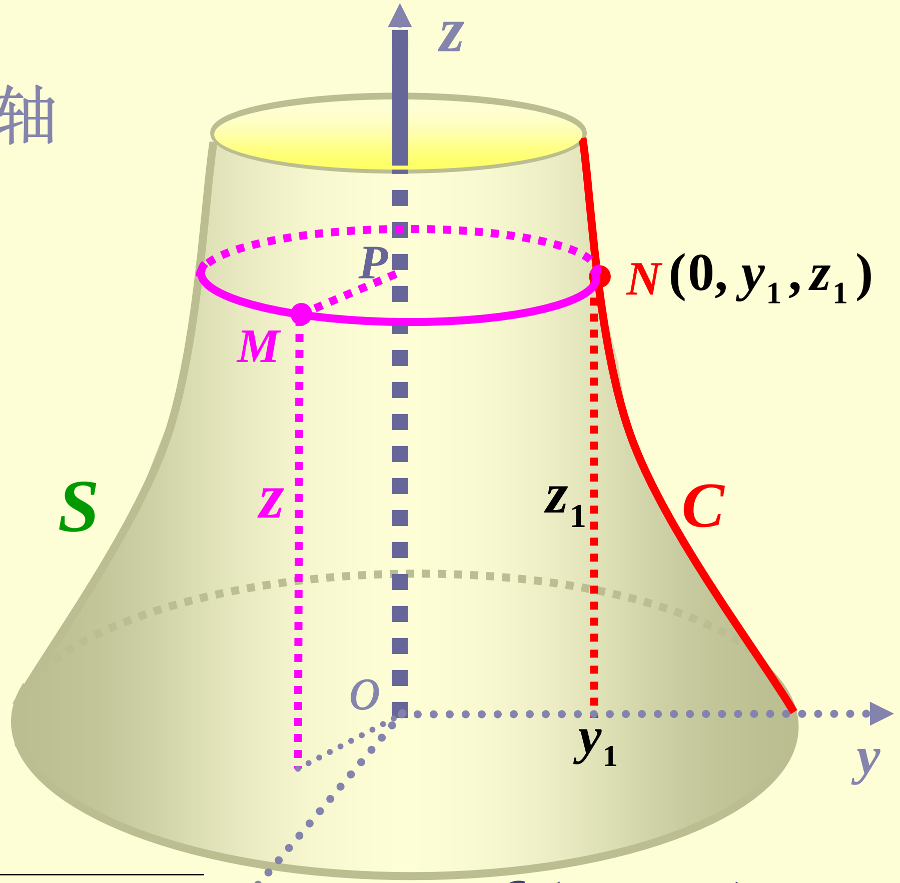
点 $M(x, y, z)$ 在旋转面上 $\Leftrightarrow$ M 在经过母线 Γ 上某一点 $M_0(x_0, y_0.z_0)$ 的纬圆上。

$M_0(x_0, y_0.z_0) \in \Gamma$ 使 M 和 M_0 到轴 l 的距离相等，并且 $\overrightarrow{MM_0} \perp l$

$$\begin{cases} F(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ G(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \dfrac{\left|\overrightarrow{MM_1} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = d_1 = d_2 = \dfrac{\left|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} \\ l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0 \end{cases}$$

曲线 C $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z轴

旋转一周得旋转曲面 S



$\forall\ M(x,y,z)\ \in S$

$f(y_1, z_1)=0$

$z_1 = z$

$|y_1| = \left|\overline{MP}\right| = \sqrt{x^2+y^2}$

将 $z = z_1,\quad y_1 = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入 $f(y_1, z_1) = 0$

得方程 $f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z\right) = 0,$

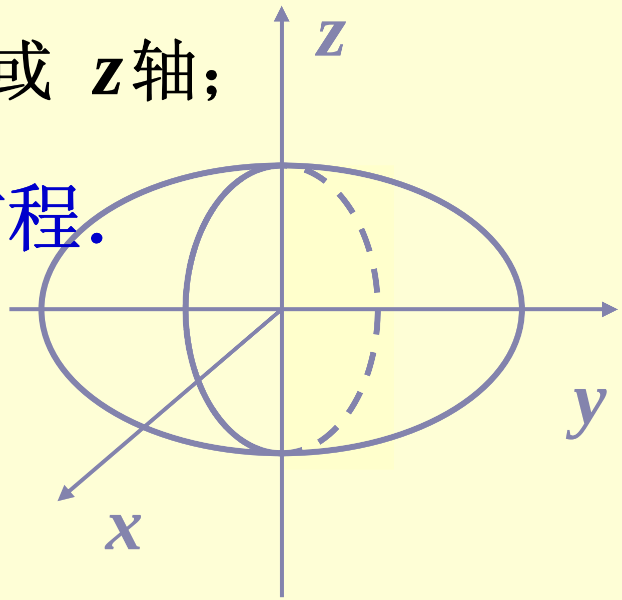
若母线 Γ 为一条空间曲线 Γ： $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$

$$a \le t \le b$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{[f(t_0)]^2 + [g(t_0)]^2}\cos\vartheta \\ y = \sqrt{[f(t_0)]^2 + [g(t_0)]^2}\sin\vartheta \\ z = h(t_0) \end{cases}$$

例1 将 椭圆 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 y轴或 z轴；

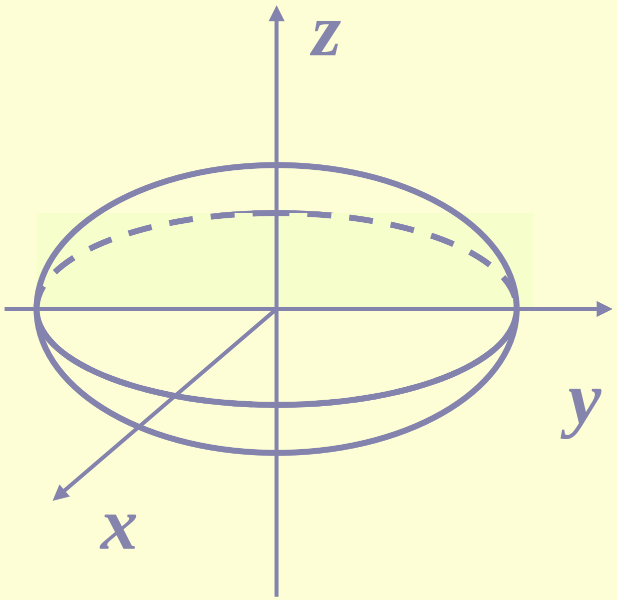
旋转一周，求生成的旋转曲面的方程.



绕y轴旋转

旋转椭球面

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1$$



绕z轴旋转

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

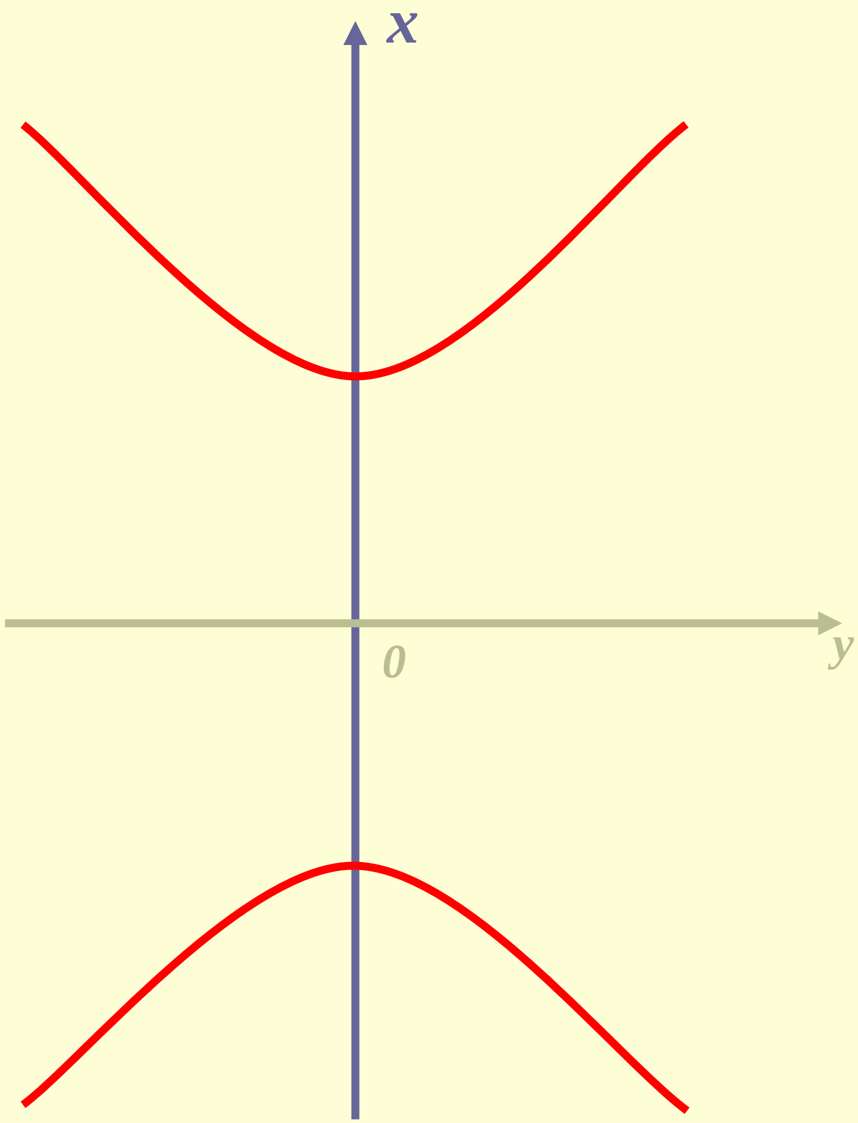
几种 特殊旋转曲面

- 1 双叶旋转曲面
- 2 单叶旋转曲面
- 3 旋转锥面
- 4 旋转抛物面
- 5 环面

1 双叶旋转双曲面

双曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

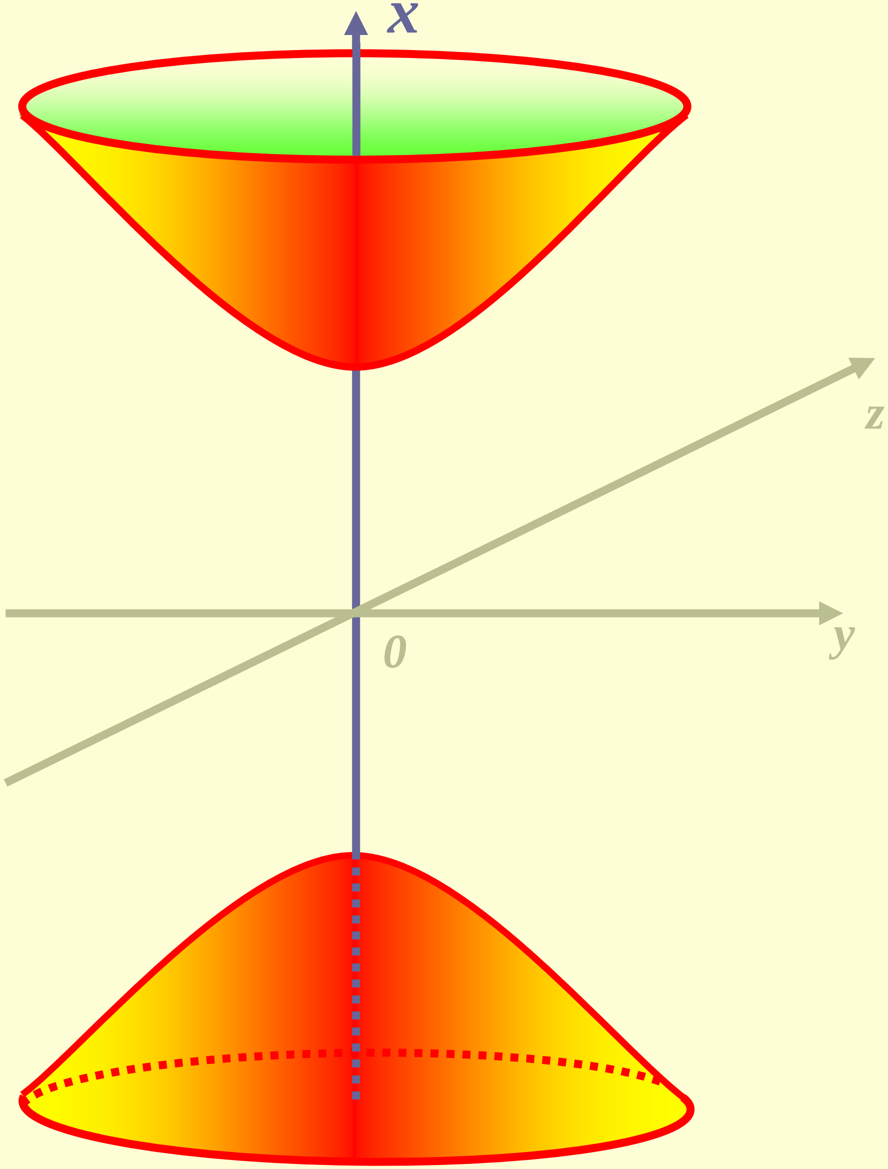
绕 x 轴一周



1 双叶旋转双曲面

双曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$

绕 x 轴一周



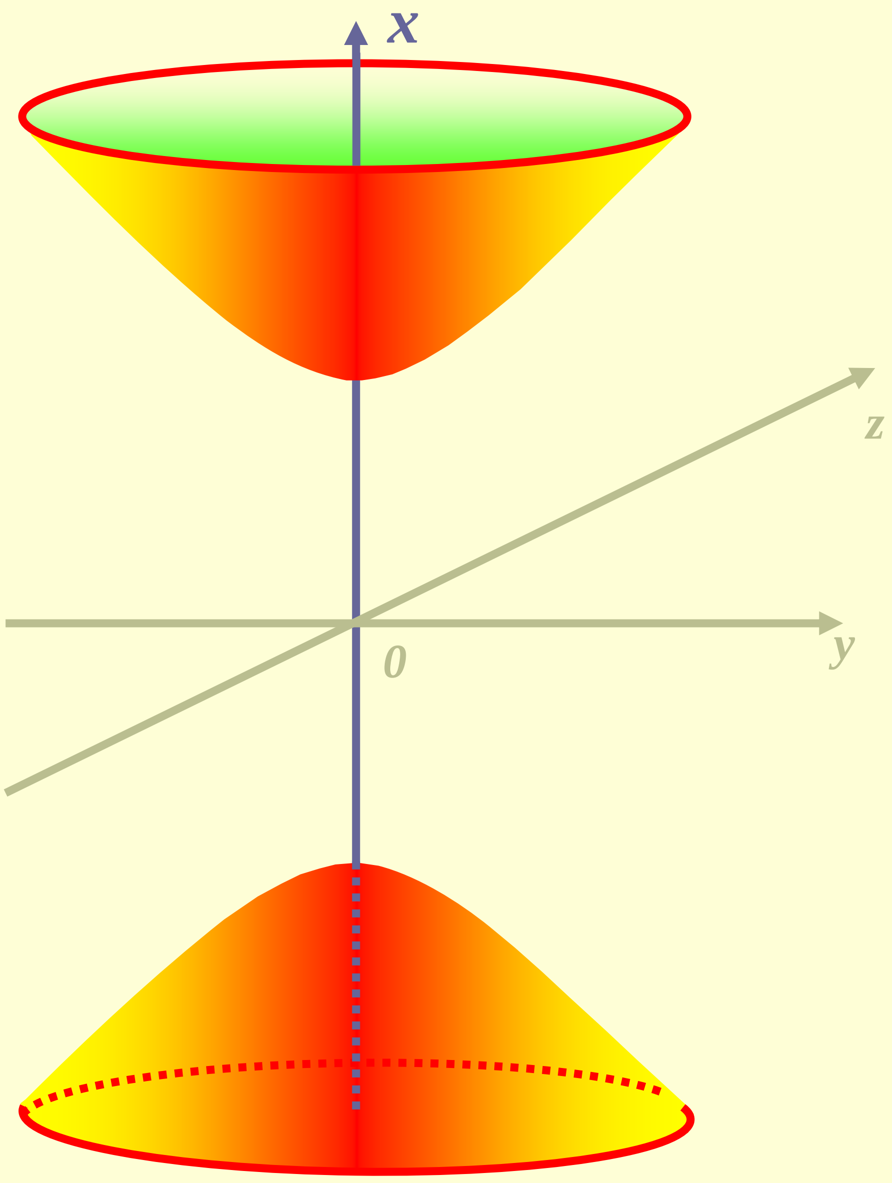
1 双叶旋转双曲面

双曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

绕 x 轴一周

得双叶旋转双曲面

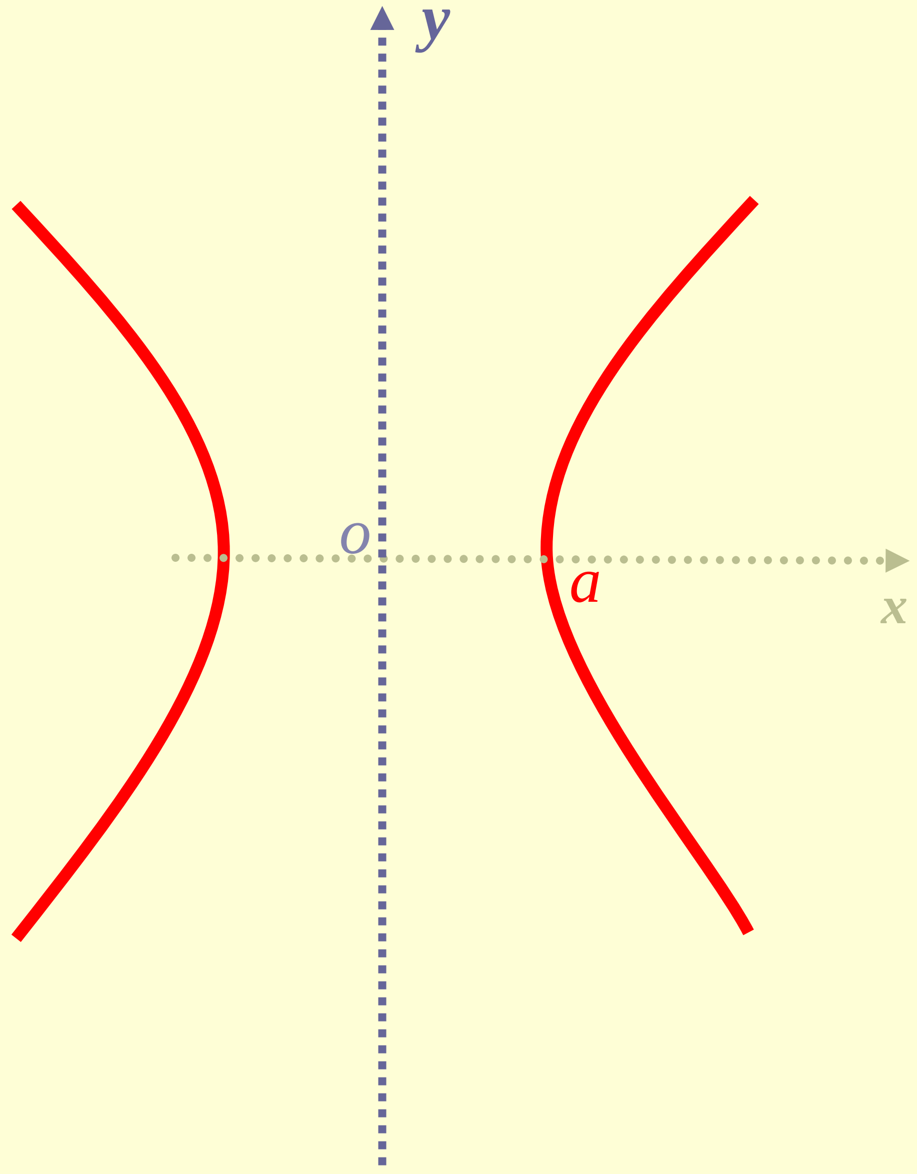
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$



2 单叶旋转双曲面

上题双曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

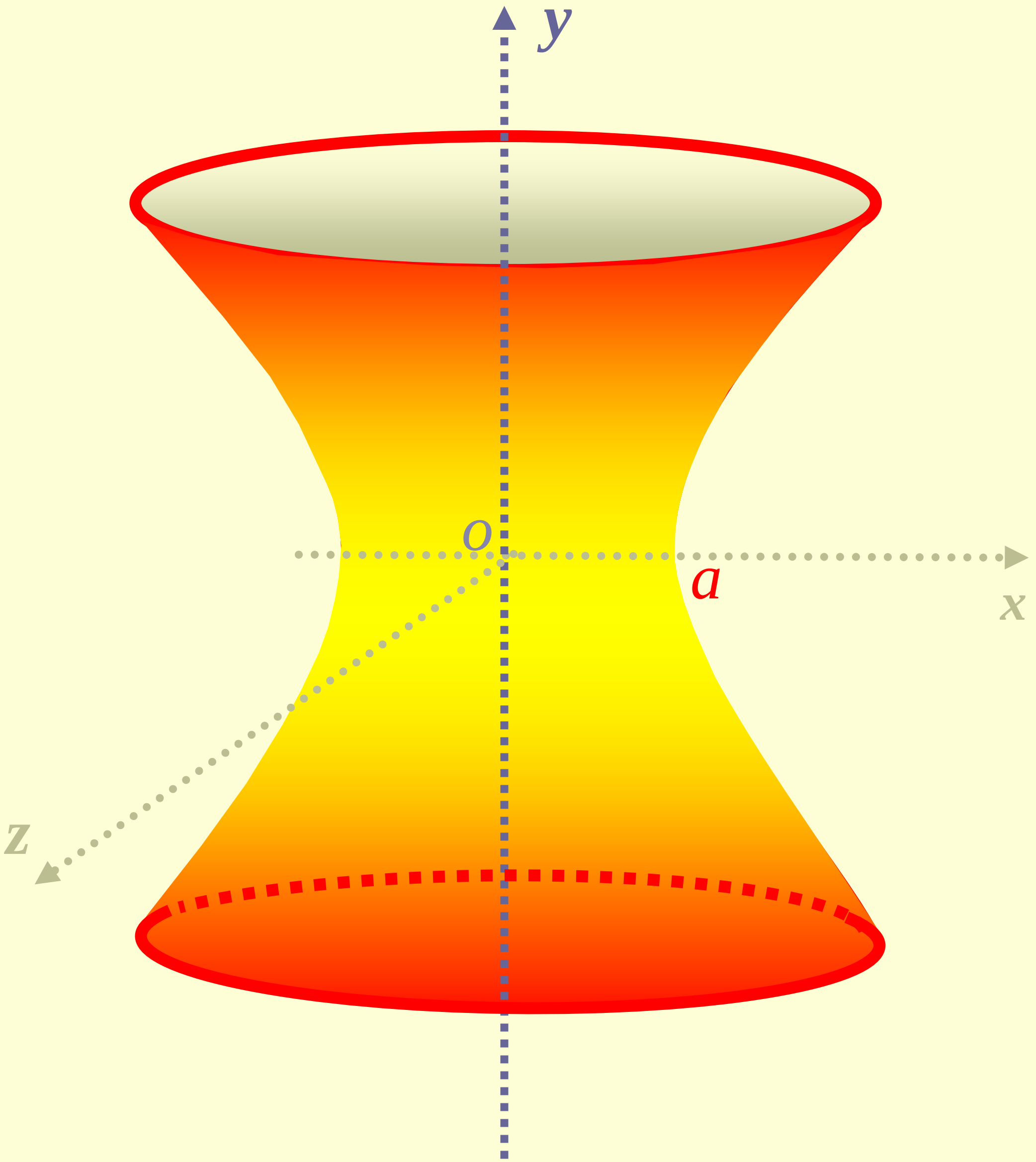
绕 y 轴一周



2 单叶旋转双曲面

上题双曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

绕 y 轴一周



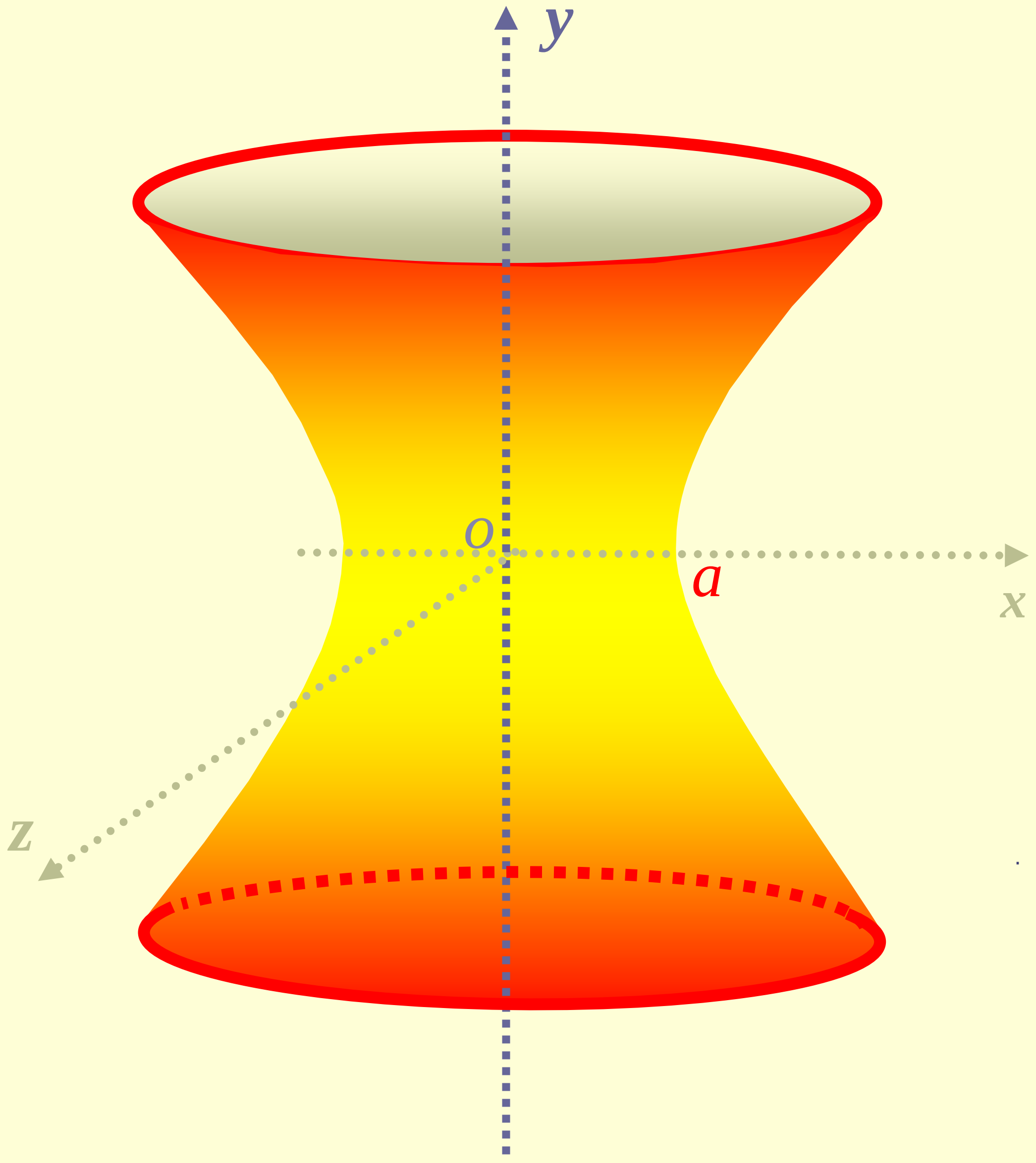
2 单叶旋转双曲面

上题双曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$

绕 y 轴一周

得单叶旋转双曲面

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

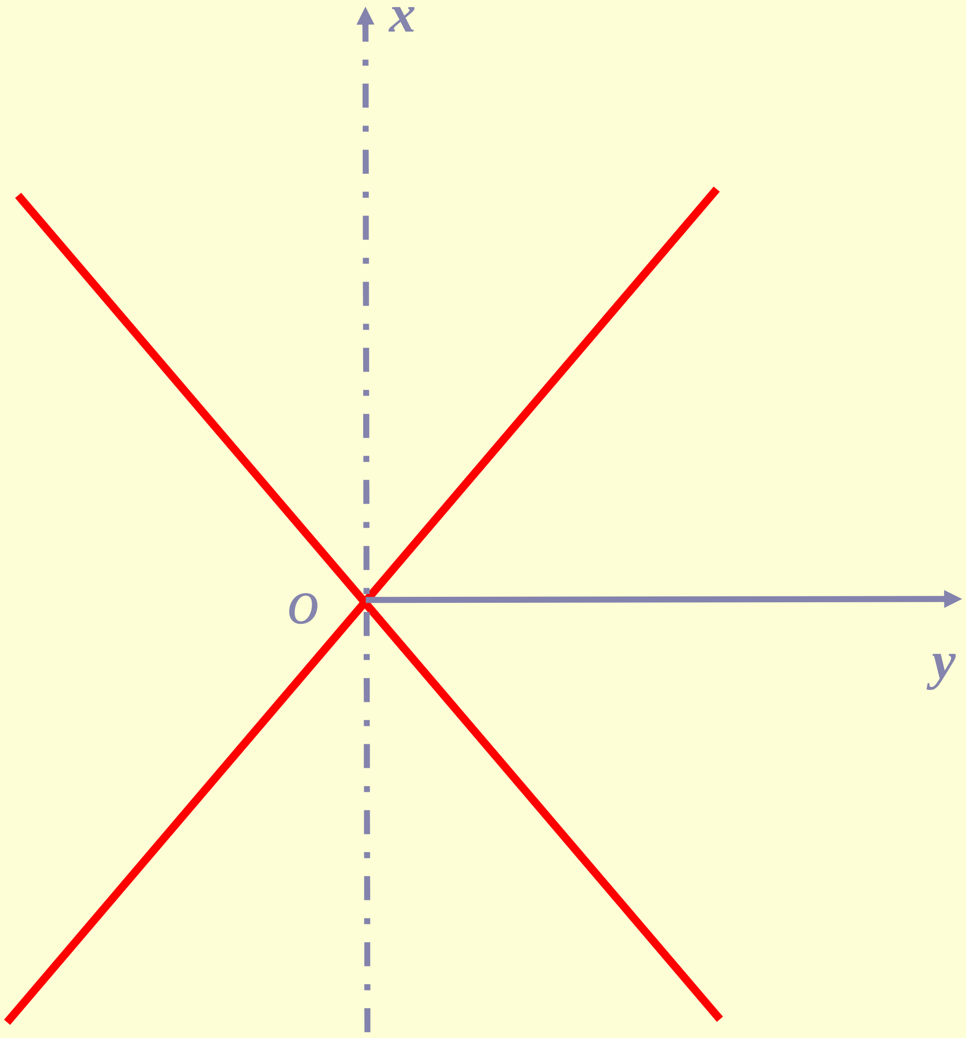


3 旋转锥面

两条相交直线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

绕 x 轴一周

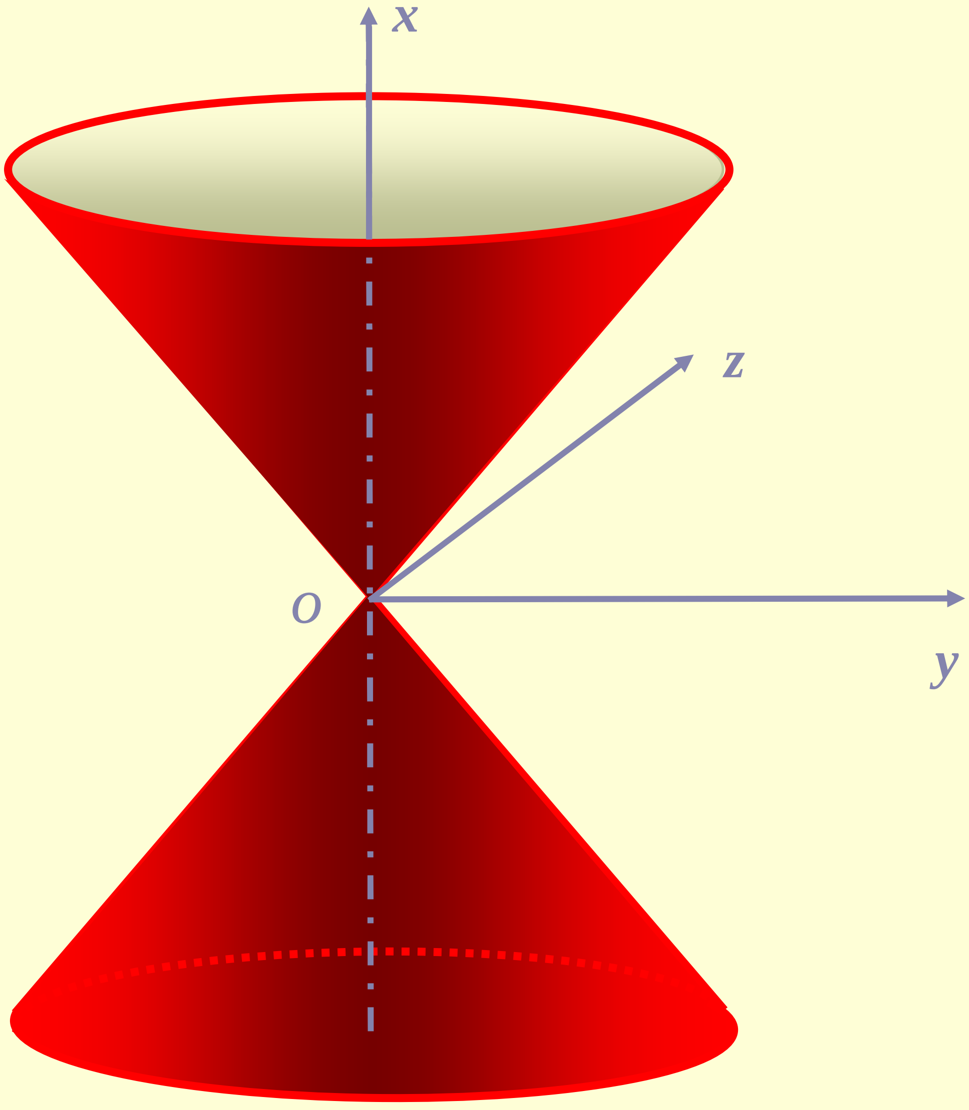


3 旋转锥面

两条相交直线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

绕 x 轴一周



3 旋转锥面

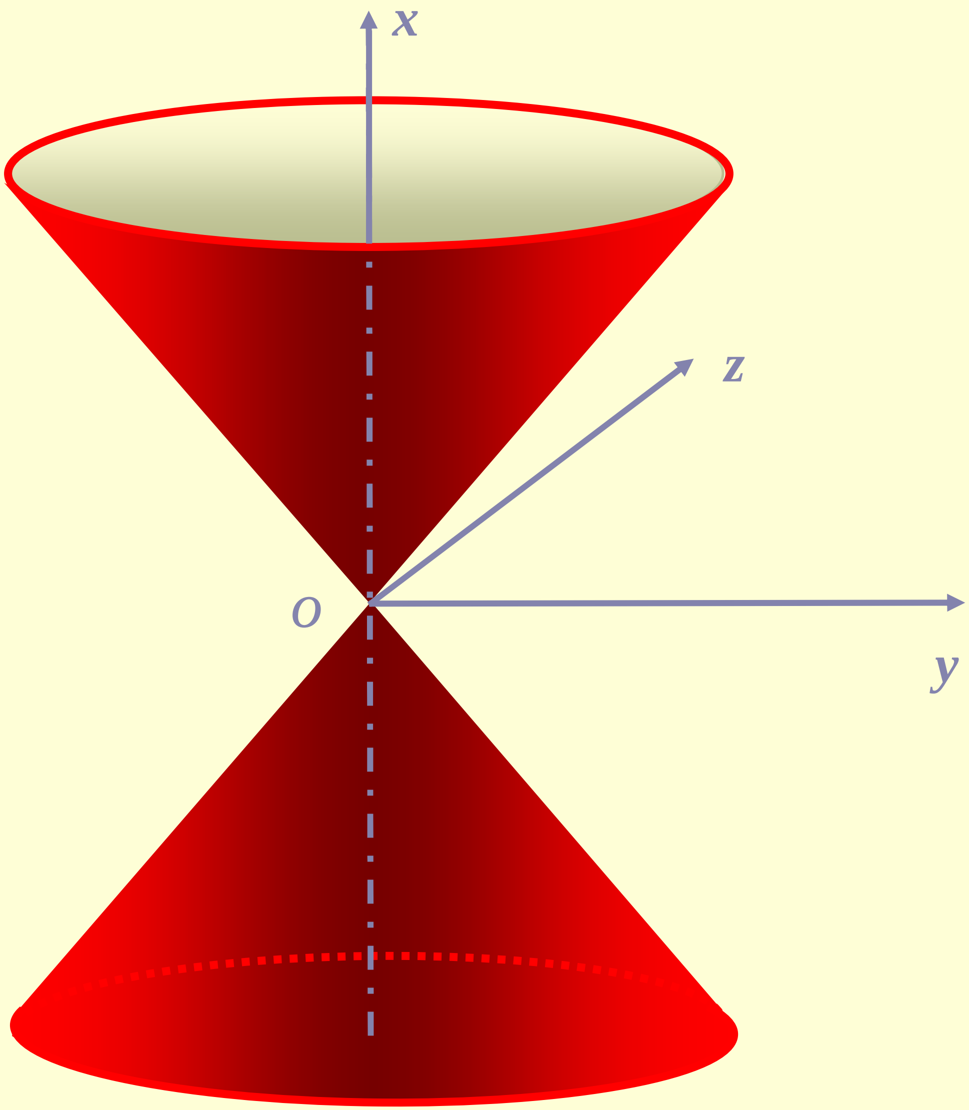
两条相交直线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

绕 x 轴一周

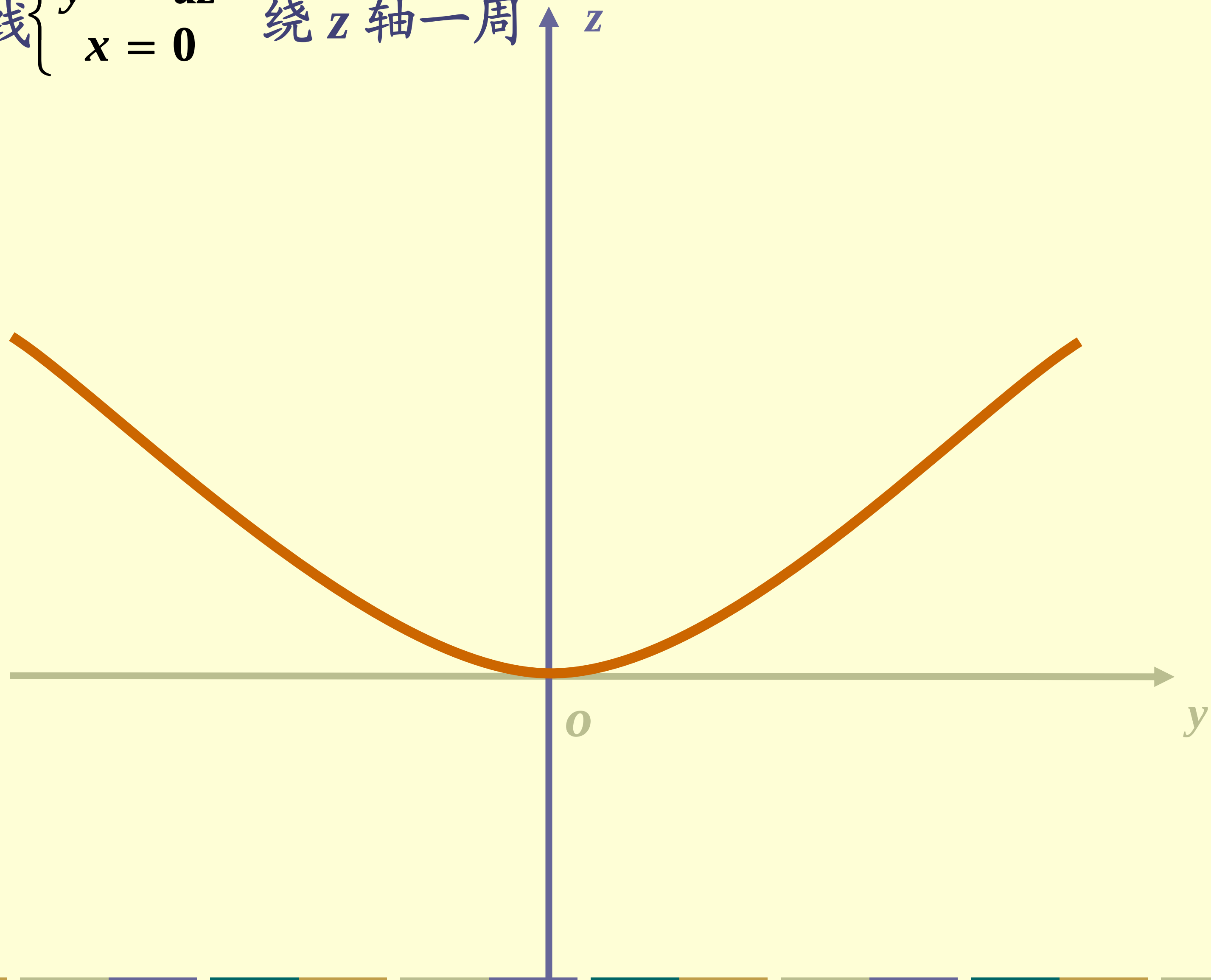
得旋转锥面

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 0$$



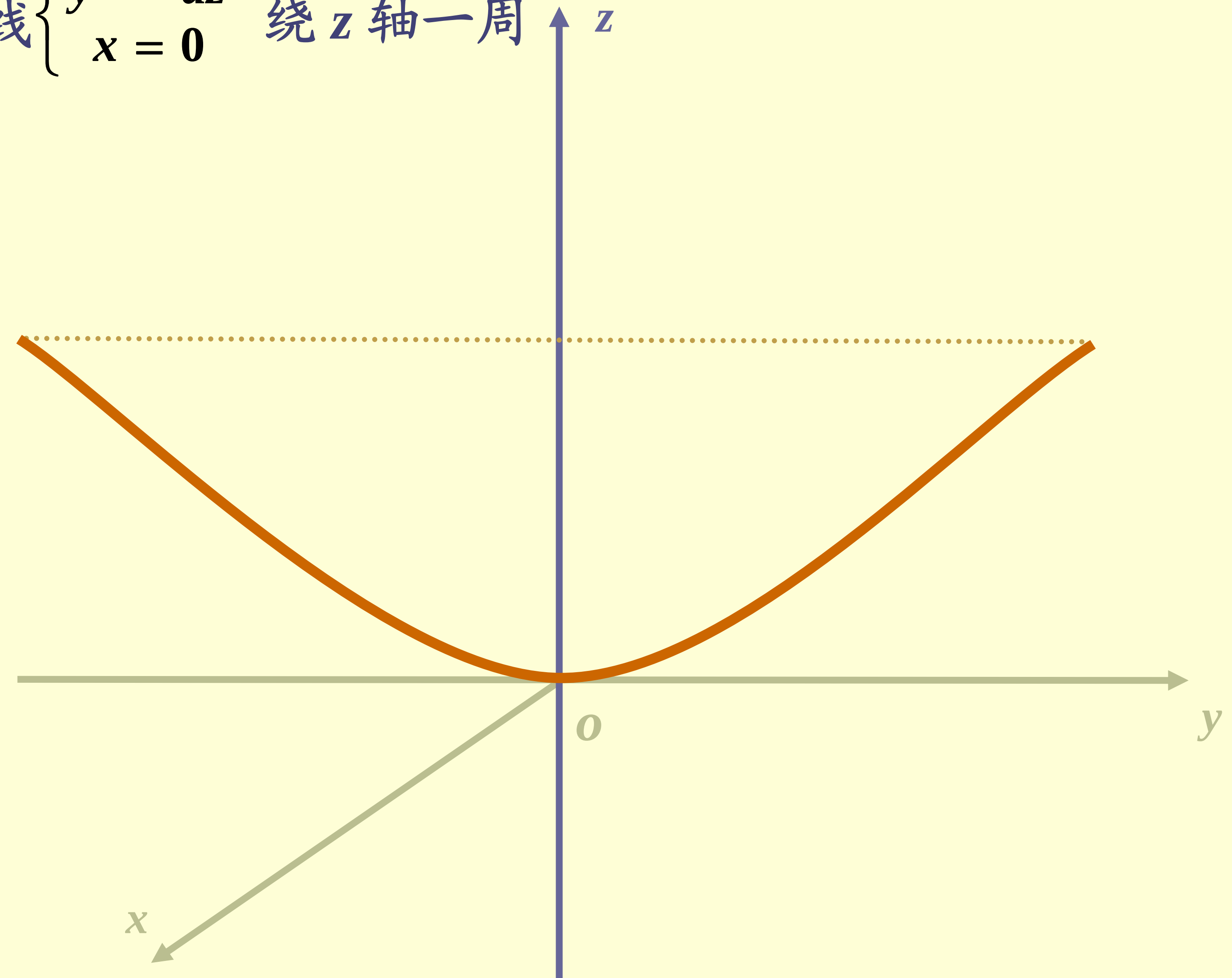
4 旋转抛物面

抛物线 $\begin{cases} y^2 = az \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴一周



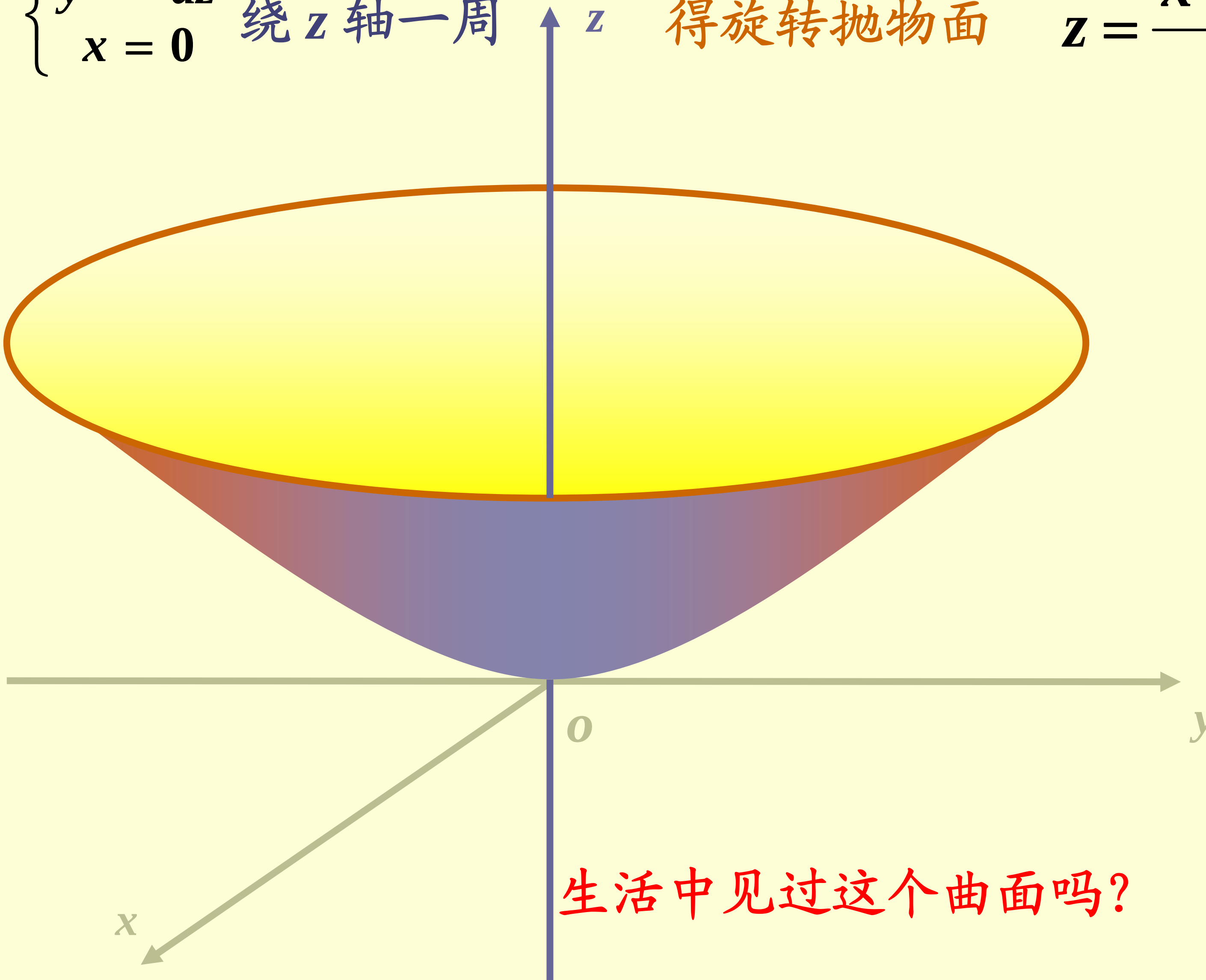
4 旋转抛物面

抛物线$\begin{cases} y^2 = az \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴一周



4 旋转抛物面

抛物线 $\begin{cases} y^2 = az \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴一周 得旋转抛物面 $z = \dfrac{x^2 + y^2}{a}$

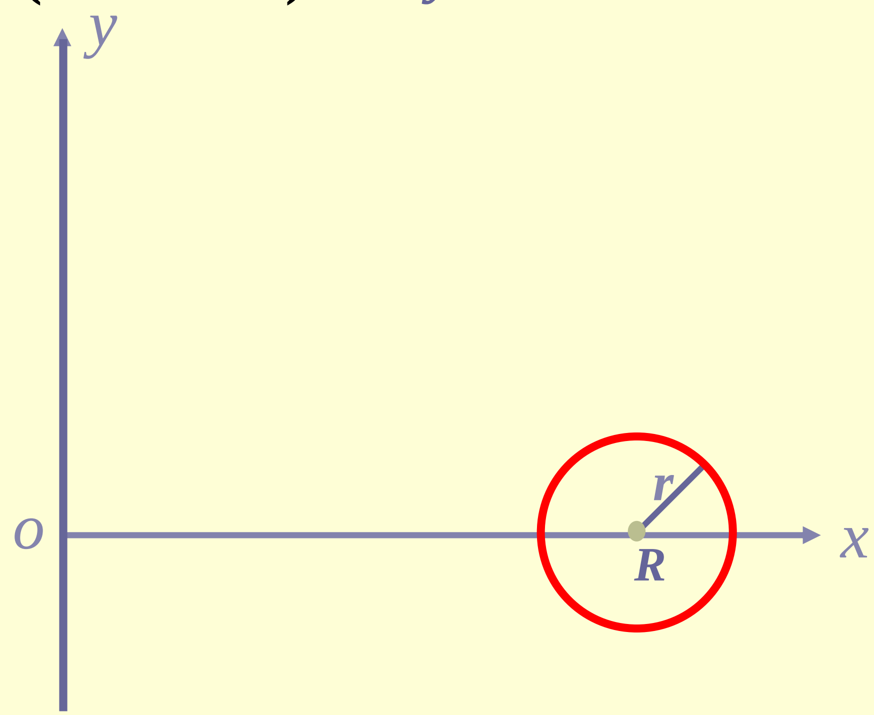


生活中见过这个曲面吗?

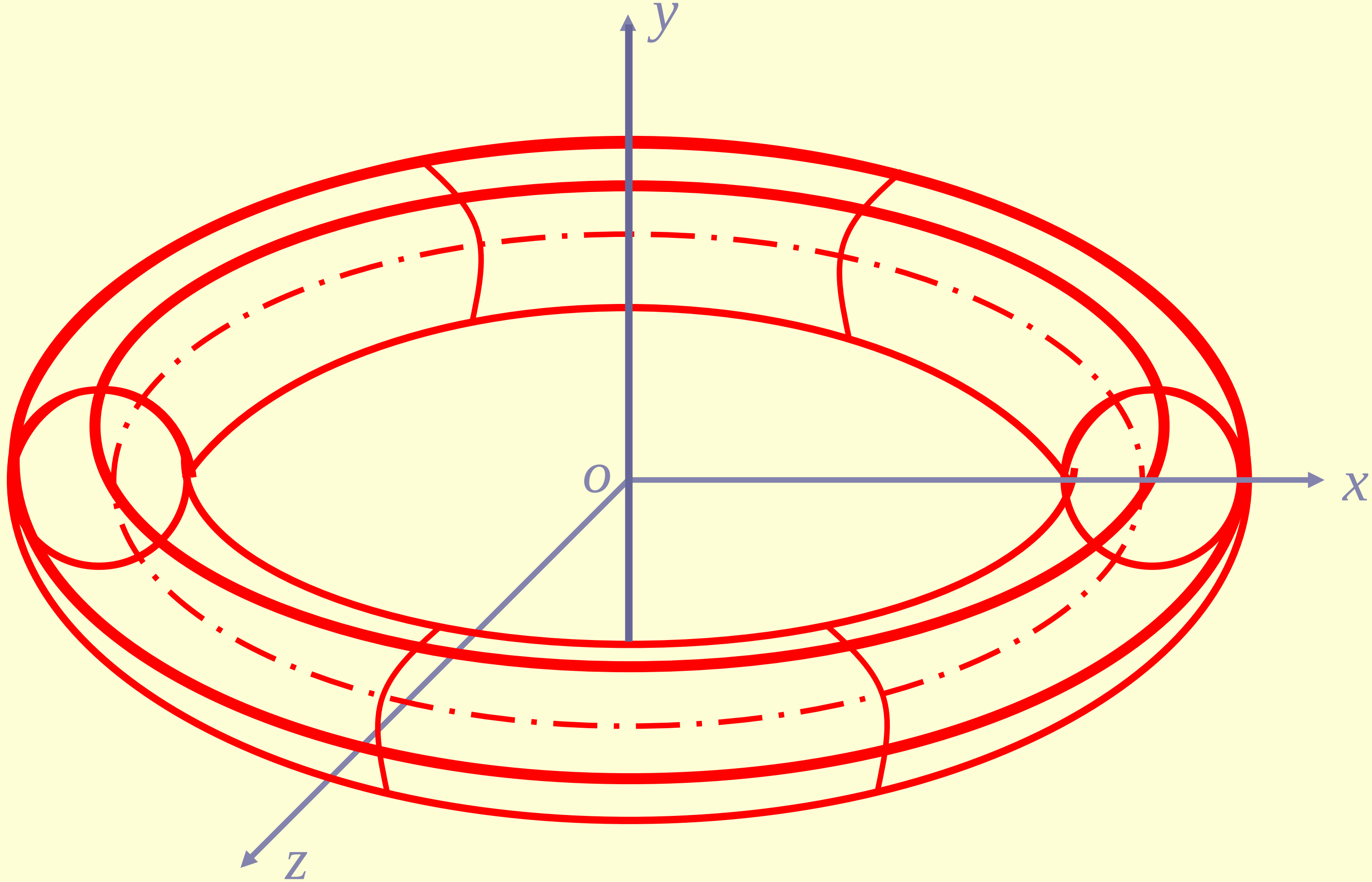
例

卫星接收装置

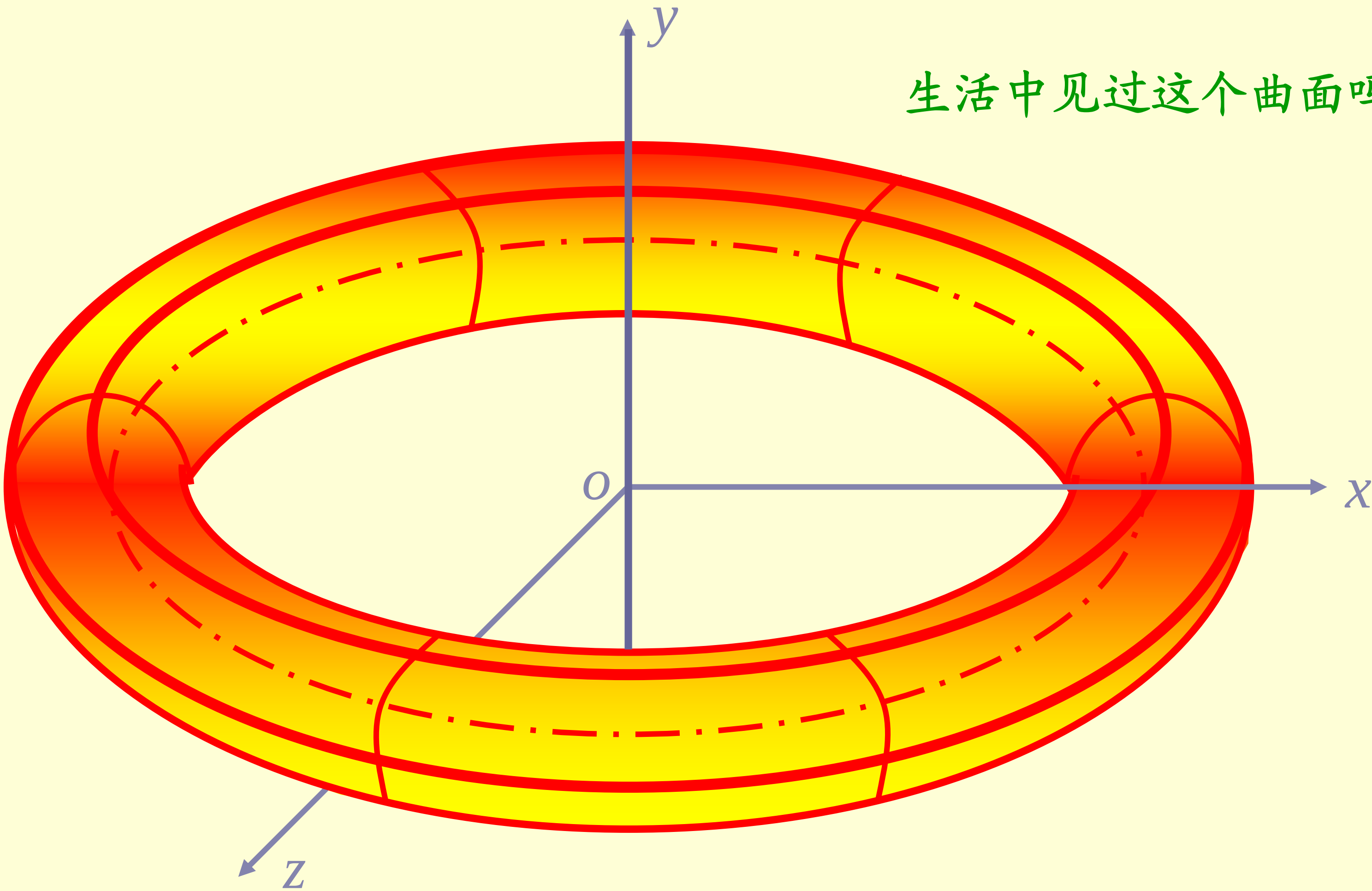
5环面 圆 $(x-R)^2+y^2=r^2 (R>r>0)$ 绕 y轴 旋转所成曲面



5环面 圆 $(x-R)^2+y^2=r^2(R>r>0)$ 绕 y轴 旋转所成曲面



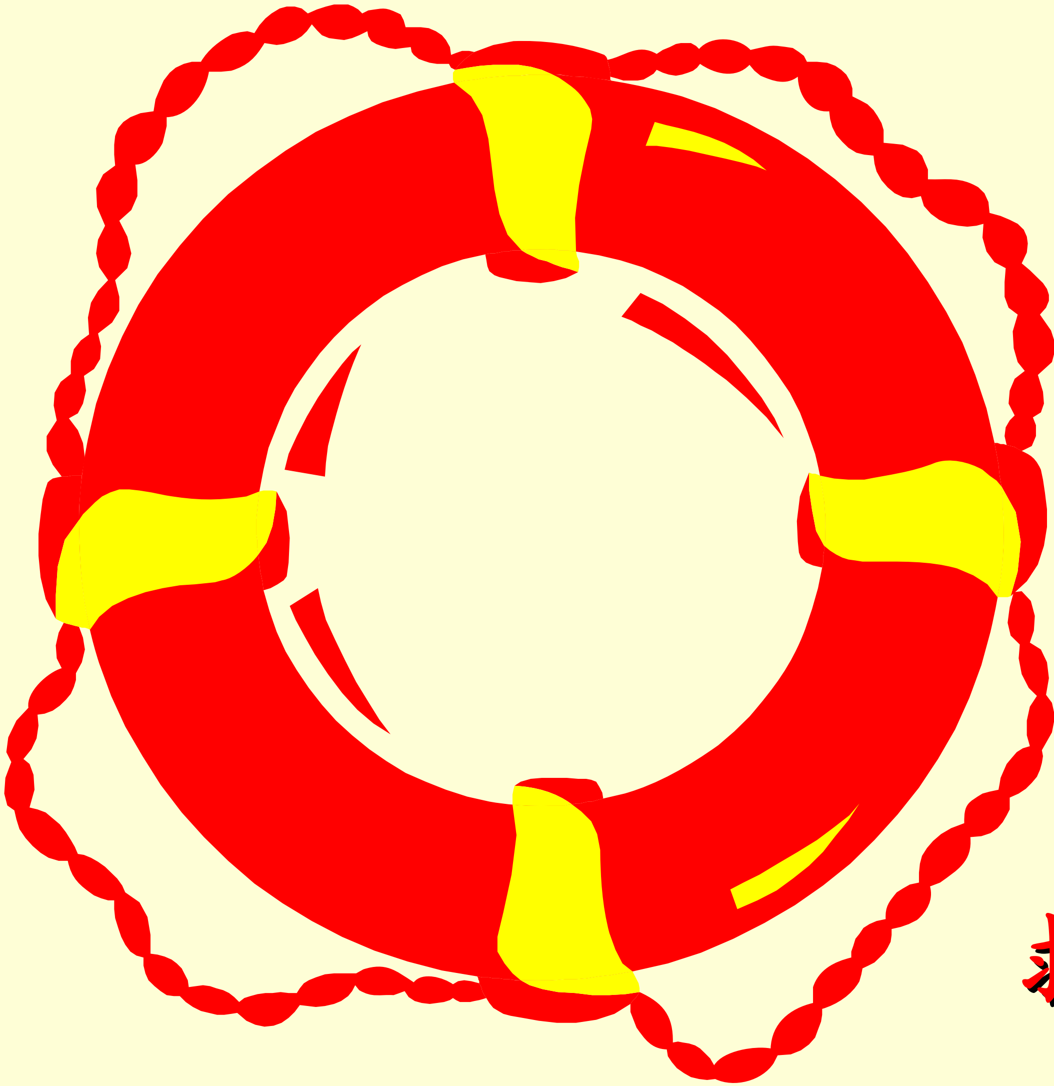
5环面 圆 $(x-R)^2+y^2=r^2 (R>r>0)$ 绕 y轴 旋转所成曲面



环面方程 $$(\pm\sqrt{x^2+z^2}-R)^2+y^2=r^2$$

或 $$(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2)^2=4R^2(x^2+z^2)$$

5 环面



救生圈

例：设l_1和l_2为两条异面直线，求l_2绕l_1旋转所得曲面的方程。