2018-3-12 第 3,4 次作业答案

课本：

思考题 1-4:

下列说法是否正确：

1、质点做圆周运动时的加速度指向圆心；**错,法向加速度指向圆心,切向加速度指向速度方向.**

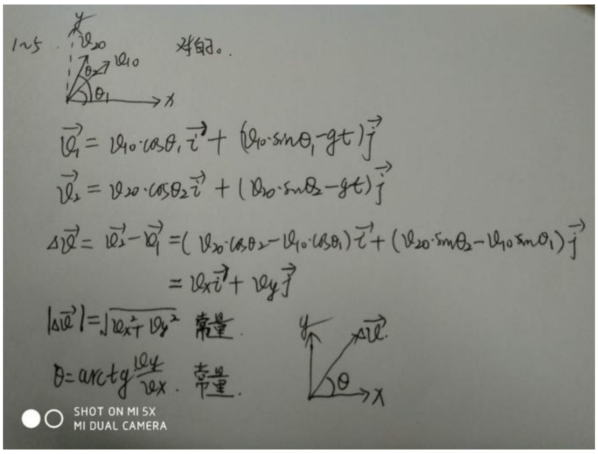
2、匀速圆周运动的加速度为恒量；**错,加速度方向一直在变化.**

3、只有法向加速度的运动一定是圆周运动；**错，要是法向加速度的大小未知,就会是曲线运动而非圆周了..**

4、只有切向加速度的运动一定是直线运动。**对.加速度与合外力的方向相同,既然只有切向加速度就说明了加速度和初速度的方向相同!**

思考题 1-5:

1-5 如果有两个质点分别以初速 $\boldsymbol{v}_{10}$ 和 $\boldsymbol{v}_{20}$ 抛出，$\boldsymbol{v}_{10}$ 和 $\boldsymbol{v}_{20}$ 在同一平面内且与水平面的夹角分别为 θ_1 和 θ_2，有人说，在任意时刻，两质点的相对速度是一常量，你说对吗？



1-5 对的。

$\vec{v}_1 = v_{10}\cdot\cos\theta_1\vec{i} + (v_{10}\cdot\sin\theta_1 - gt)\vec{j}$

$\vec{v}_2 = v_{20}\cdot\cos\theta_2\vec{i} + (v_{20}\cdot\sin\theta_2 - gt)\vec{j}$

$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (v_{20}\cdot\cos\theta_2 - v_{10}\cdot\cos\theta_1)\vec{i} + (v_{20}\cdot\sin\theta_2 - v_{10}\sin\theta_1)\vec{j}$

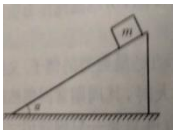
$= v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$

$|\Delta\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ 常量.

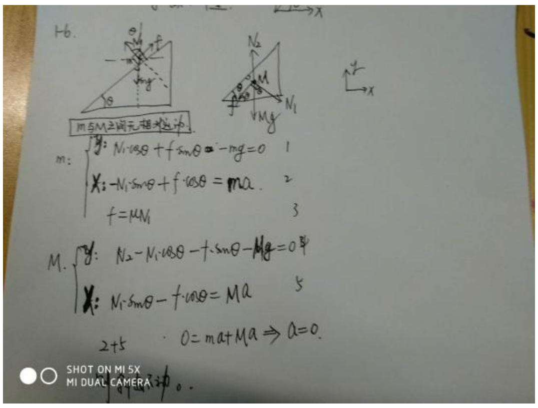
$\theta = \arctan\frac{v_y}{v_x}$. 常量.

思考题 1-6:

1-6 把一块砖轻轻放在原来静止着的斜面上，并使其放牢. 如果斜面与地面之间无摩擦，那么斜面由于受到砖块的作用力，是否也会沿水平方向运动？为什么？



思考题 1-6 图



1-6.

$\boxed{\text{m与M之间无相对运动}}$

m: $\begin{cases} y:\ N_1\cdot\cos\theta + f\cdot\sin\theta - mg = 0 & 1 \\ x:\ -N_1\cdot\sin\theta + f\cdot\cos\theta = ma. & 2 \\ f = \mu N_1 & 3 \end{cases}$

M. $\begin{cases} y:\ N_2 - N_1\cdot\cos\theta - f\cdot\sin\theta - Mg = 0 & 4 \\ x:\ N_1\cdot\sin\theta - f\cdot\cos\theta = Ma & 5 \end{cases}$

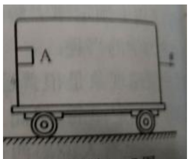
2+5 $0 = ma + Ma \Rightarrow a = 0.$

思考题 1-7:

1-7 质量为 m 的物体 A 与车壁之间的静摩擦因数为 μ_0，当小车向右作加速运动时，A 能贴在壁上不滑下来，试问：

(1) 小车至少以多大加速度前进？

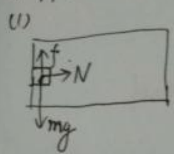
(2) 当小车前进的加速度增加时，物体运动状态会变化吗？车厢壁对 A 的正压力如何变化？物体与车壁间的静摩擦力会变化吗？



思考题 1-7 图

1-7. A.

(1)



$$\left.\begin{aligned} N &= ma \\ f - mg &= 0 \\ f &= \mu_0 N \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \frac{g}{\mu_0}$$

(2). $a\uparrow$，物体的加速度增加。车厢壁对A的正压力增加。

物体与车壁间的静摩擦力不变，永远等于 mg.

物体相对于车是静止的。

习题：1-6 到 1-14

1-6

某质点的运动方程为 $\vec{r} = 2bt\,\vec{i} + bt^2\,\vec{j}$（b为常数），求：

（1）轨道方程；

（2）质点的速度和加速度的矢量表示式；

（3）质点的切向加速度和法向加速度的大小。

解：（1）由 $x = 2bt$　$y = bt^2$ 得轨迹方程　$y = \dfrac{x^2}{4b}$

（2）质点的速度 $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[2bt\vec{i} + bt^2\vec{j}\right] = 2b\vec{i} + 2bt\vec{j}$

质点的加速度 $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[2b\vec{i} + 2bt\vec{j}\right] = 2b\vec{j}$

（3）点的速率：$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2b)^2 + (2bt)^2}$

质点的切向加速度 $a_t = \dfrac{d}{dt}\left[\sqrt{(2b)^2 + (2bt)^2}\right] = \dfrac{2bt}{\sqrt{1+t^2}}$

质点的法向加速度 $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{(2b)^2 + \left(\dfrac{2bt}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2} = \dfrac{2b}{\sqrt{1+t^2}}$

1-7 设从某一点 O 以同样的速率沿着同一竖直面内各个不同方向同时抛出几个物体,试证:在任意时刻这几个物体总是散落在某一圆周上.

证: $x=v_0t\cos\theta$

$y=v_0t\sin\theta -gt^2/2$

消去θ,任意时刻轨迹方程

$$x^2+(y+\frac{1}{2}gt^2)^2=(v_0t)^2$$

以$(0,-gt^2/2)$为圆心,v_0t为半经的圆方程.

1-8

一质点沿半径为R的圆周按规律 $s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$ 而运动，v_0、b都是常量；（1）求t时刻质点的总加速度；（2）t为何值时总加速度在数值上等于b？（3）当总加速度达到b时，质点已沿圆周运行了多少圈？

解:（1）由 $s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$ 得: $v=\frac{ds}{dt}=v_0-bt$

加速度的切向分量为: $a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}=-b$

加速度的法向分量为: $a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$

所以，加速度的大小为:

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\frac{\sqrt{R^2b^2+(v_0-bt)^2}}{R}$$

加速度的方向与切线间的夹角为:

$$\theta=arctg\frac{a_n}{a_t}=arctg\left[-\frac{(v_0-bt)^2}{Rb}\right]$$

（2）要使$|\vec{a}|=b$，由 $\frac{1}{R}\sqrt{R^2b^2+(v_0-bt)^4}=b$ 得到, $t=\frac{v_0}{b}$

即，当$t=v_0/b$ 时，总加速度在数值上等于b。

（3）从$t=0$开始到$t=v_0/b$ 时，质点经过的路程为:

$$s=s_t-s_0=\frac{v_0^2}{2b}$$

所以，质点运行孤圈数n为: $n=\frac{s}{2\pi R}=\frac{v_0^2}{4\pi bR}$

1-9

质点沿半径为0.1m的圆周运动，其角位移用下式表示 $\theta=2+4t^3$ 式中 θ 为弧度(rad)，

t 的单位为s，求：

（1）t=2s时，质点所在位置的切向加速度和法向加速度的大小；

（2）当 θ 为何值时，其加速度和半径成45^0角。

解：（1）由题意得到圆周运动的角位移、角速度、角加速度：

$$\theta=2+4t^3 \quad \omega=\frac{d\theta}{dt}=12t^2 \quad \alpha=\frac{d\omega}{dt}=24t$$

则圆周运动质点的法向加速度大小为：$\therefore \quad a_n=R\omega^2=R(12t^2)^2\Big|_{t=2}=230.4\,m/s^2$

质点圆周运动的切向加速度大小为：$a_t=R\alpha=24Rt\Big|_{t=2}=4.8\,m/s^2$

（2）当 $\vec{a}$ 与半径成 45^0 角时，$\vec{a}$ 与 a_n 也成 45^0。所以 $|\vec{a}_n|=|\vec{a}_t|$

即 $\quad 144Rt^4=24Rt$

$$\theta=2+4t^3\Big|_{t=\sqrt[3]{\frac{1}{6}}}=2+4\times\frac{1}{6}=2\frac{2}{3}\text{rad}$$

1-10

一车技演员在半径为 R 的圆形轨道内进行车技表演，其速率与时间的关系为 $v=ct^2$（式中 c 为常量），求：

（1）他运动的路程与时间的关系；

（2）t 时刻他的切向加速度和法向加速度。

（1）$\frac{ds}{dt}=ct^2; s=\frac{1}{3}ct^3$

（2）$a_t=2ct; a_n=\frac{c^2t^4}{R}$

1-11

一升降机以加速度1.22m/s^2 上升，当上升速度为2.44m/s 时，有一螺帽自升降机的顶板上落下，升降机顶板与升降机的底面相距2.74m ，问：

（1）螺帽相对于升降机作什么运动？其加速度为多少？螺帽相对于地面作什么运动?其加速度为多少？

（2）螺帽从升降机顶板落到升降机底面需多少时间？

（3）螺帽相对于升降机外固定柱子下降多少距离？

解：（1）螺帽相对升降机作向下的匀加速直线运动

$$\vec{a}_{m升} = \vec{a}_{m地} + \vec{a}_{地升} = \vec{a}_{m地} - \vec{a}_{升地} \qquad a_{m升} = -g - a = -11.02\,m/s^2$$

螺帽对地作竖直上抛运动 $\vec{a}_{m地} = \vec{g}$

（2）取升降机为参照系，参照系内坐标系选竖直向下为正

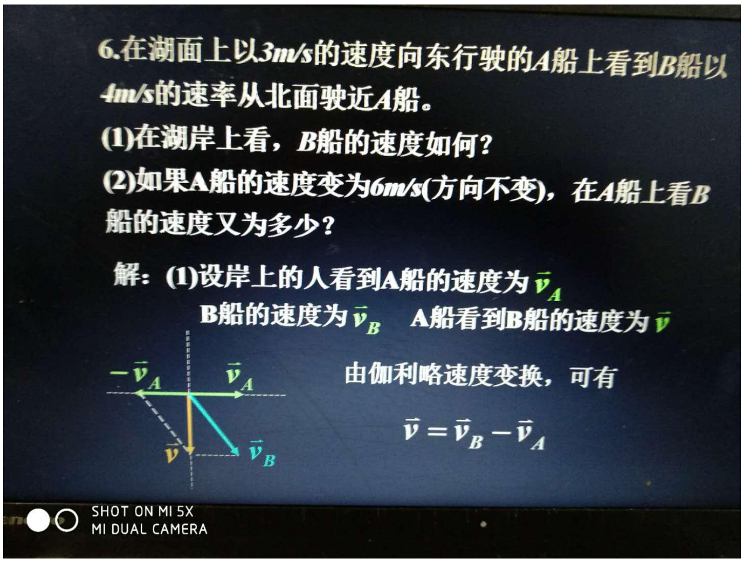
$$h = \frac{1}{2}(g+a)t^2$$

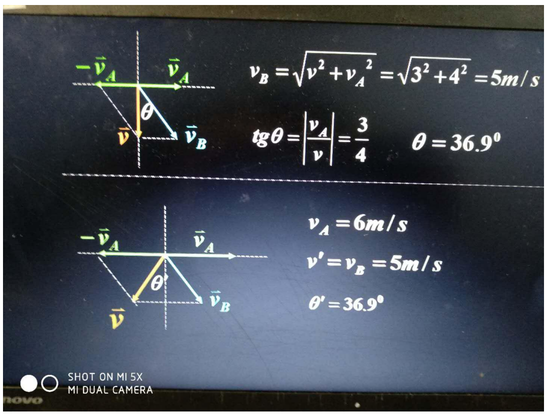
螺帽从升降机顶板落到升降机底面需多少时间 $t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = \sqrt{\frac{2\times 2.74}{9.8+1.22}} = 0.71s$

（3）螺帽相对于升降机外固定柱子下降多少距离

$$s_{螺地} = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 2.44\times 0.71 - \frac{1}{2}\times 9.8\times(0.71)^2 = -0.74m$$

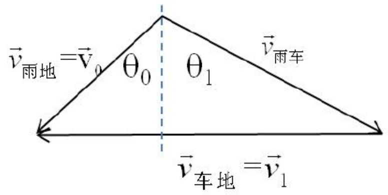
1-12





1-13

火车静止时，车窗上雨痕向前倾斜θ$_0$角，火车以某一速度匀速前进时，火车车窗上雨痕向后倾斜θ$_1$角。火车加快以另一速度匀速前进时，车窗上雨痕向后倾斜θ$_2$角，求火车加快前后的速度之比。



解：由相对运动 $\vec{V}_{车地}=\vec{V}_{车雨}+\vec{V}_{雨地}=\vec{V}_{雨地}+(-\vec{V}_{雨车})$

由矢量合成图得：

相对地面静止时：$0=V_0\cos\theta_0-V_{雨车}\cos\theta_1$

相对地面速率为V_1时：$V_1=V_0\sin\theta_0+V_{雨车}\sin\theta_1=V_0\sin\theta_0+V_0\cos\theta_0\mathrm{tg}\theta_1$

相对地面速率为V_2时：$V_2=V_0\sin\theta_0+V_0\cos\theta_0\mathrm{tg}\theta_2$

所以 $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{V_0\sin\theta_0+V_0\cos\theta_0\mathrm{tg}\theta_1}{V_0\sin\theta_0+V_0\cos\theta_0\mathrm{tg}\theta_2}$

1-14

设河面宽l=1km，河水由北向南流动，流速 v=2m / s,有一船相对于河水以v'=1.5m / s的速率从西岸驶向东岸。

（**1**）如果船头与正北方向成 $\alpha=15^0$ 角，船到达对岸要花多少时间？到达对岸时，船在下游何处？

（**2**）如果船到达对岸的时间为最短，船头与河岸应成多大角度？最短时间等于多少？到达对岸时，船在下游何处？

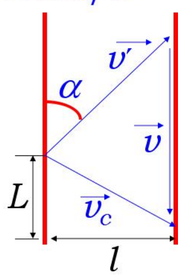
（**3**）如果船相对于岸走过的路程为最短，船头与岸应成多大角度？到对岸时，船又在下游何处？要花多少时间。

已知：$l=1\text{km}\quad v=2\text{m/s}\quad v'=1.5\text{m/s}$

(1) 当$a=15^0$　求：$t\quad L$

(2) 当 $t=t_{\min}$ 求：$\alpha_1\quad L_1$

(3) 当 $L=L_{\min}$ 求：L_2



解：(1)　$l=v'\sin\alpha t$

$$t=\frac{l}{v'\sin\alpha}=\frac{1000}{1.5\times\sin15^{\circ}}=2564\text{s}$$

$$L=(v-v'\cos15^{\circ})t$$

$$=(2-1.5\times\cos15^{\circ})\times2564=1.41\text{km}$$

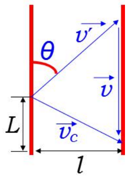
(2) 欲使时间最短 $\alpha' = 90^0$

$$l = v' t$$

$$t = \frac{l}{v'} = \frac{1000}{1.5} = 667\text{s}$$

$$L_1 = v t = 1.33\text{km}$$

(3) $l = v' \sin\theta\, t$



$$L_2 = (v - v' \cos\theta) t$$

$$t = \frac{l}{v' \sin\theta}$$

$$L_2 = (v - v' \cos\theta)\frac{l}{v' \sin\theta}$$

令：$\dfrac{\mathrm{d}L_2}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[(v - v' \cos\theta)\dfrac{l}{v' \sin\theta}\right] = 0$

得：$l = \dfrac{(v - v' \cos\theta)\, l v' \cos\theta}{v'^2 \sin^2\theta}$

$$l = \frac{(v - v' \cos\theta)\, l v' \cos\theta}{v'^2 \sin^2\theta}$$

$$v'^2 \sin^2\theta = v v' \cos\theta - v'^2 \cos^2\theta$$

$$v'^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta) = v v' \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{v'^2}{v v'} = \frac{2.25}{3} = 0.75 \Longrightarrow \theta = 41.1^0$$

$$L_2 = (v - v' \cos\theta)\frac{l}{v' \sin\theta}$$

$$= (2 - 1.5 \times \cos 41.4^0)\frac{1000}{1.5 \times \sin 41.4^0}$$

$$= 0.89\text{km}$$

$$t = \frac{l}{v' \sin\theta} = \frac{1000}{1.5 \times \sin 41.4^0} = 1010\text{s}$$

结束