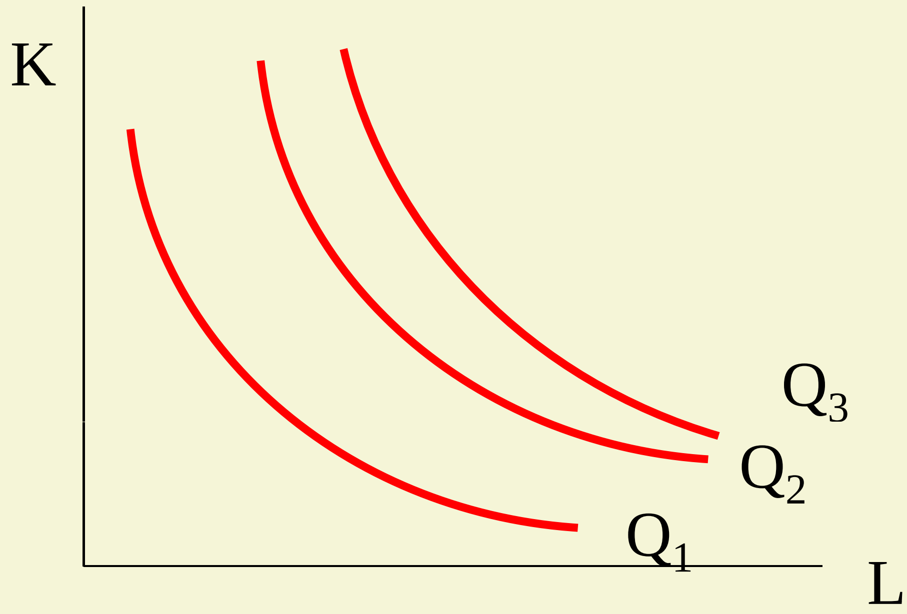
第六章
成本最小化和成本函数

- 成本最小化
- 成本函数
- 边际成本
- 长期成本
- 多车间任务安排

第一节　成本最小化

回顾：　等产量曲线

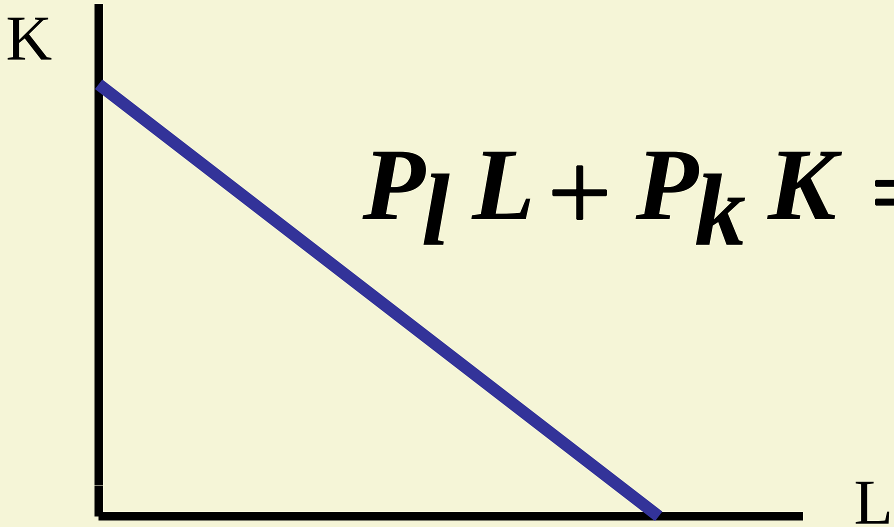
- 产出相同产量的所有可能的投入要素组合



- 等成本线：在给定预算（成本）条件下，可以购买的所有要素组合。

$$P_l L + P_k K \le C$$

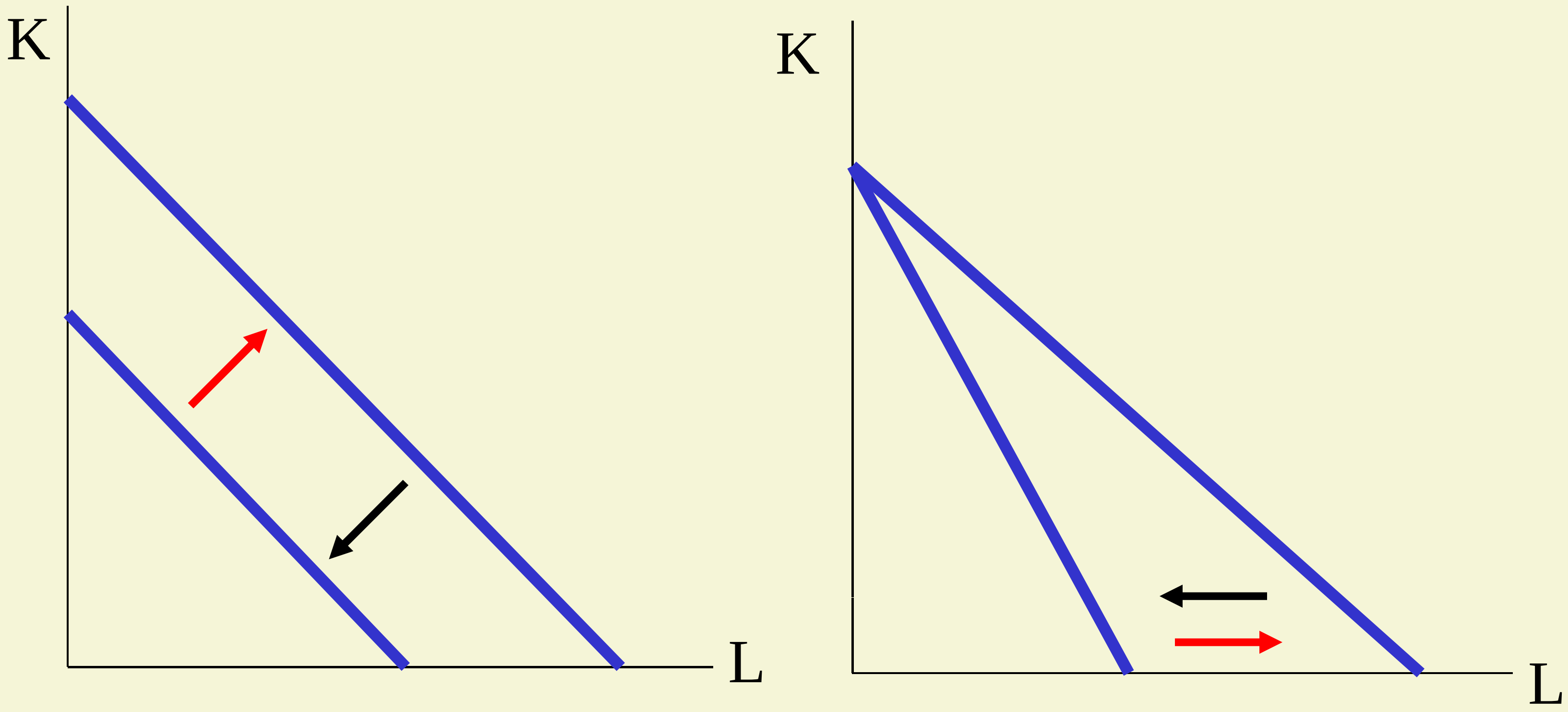
$$L \ge 0 , K \ge 0$$

- 

$$P_l L + P_k K = C$$

- 等成本线的特点（类似消费者预算线）

等成本线的变动



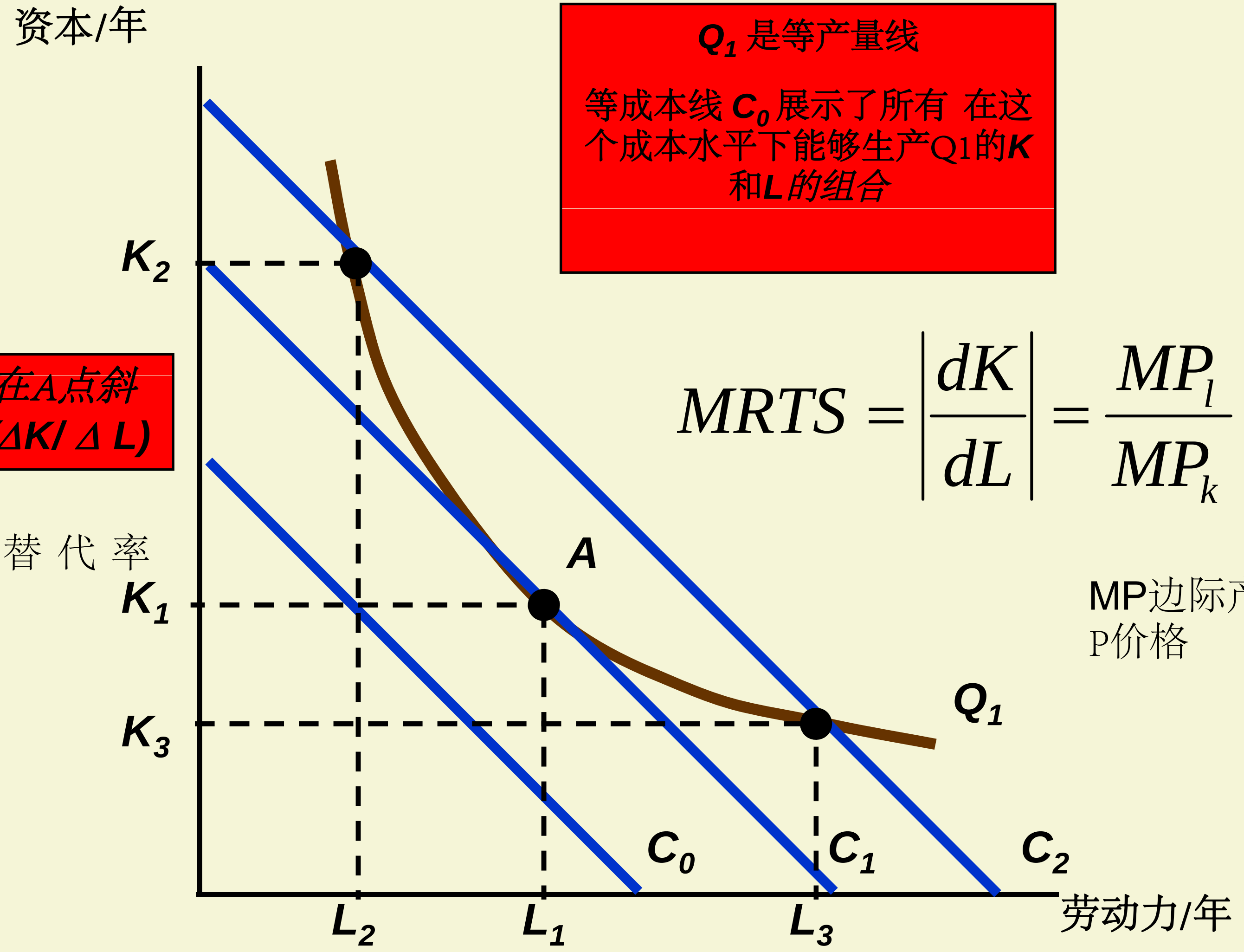
总成本增加或减少

工资率增加或减少

给定产量的成本最小化问题

- 要素投入均可变
- 一种要素投入固定

给定产量的成本最小化
——要素投入均可变



Q_1 是等产量线

等成本线 ***C_0*** 展示了所有 在这个成本水平下能够生产Q1的***K*** 和***L*** *的组合*

等产量线***Q_1*** *在A点斜率是* ***MRTS(ΔK/ Δ L)***

M R T S :
边 际 技 术 替 代 率

$$MRTS = \left|\frac{dK}{dL}\right| = \frac{MP_l}{MP_k} = \frac{P_l}{P_k}$$

MP边际产量
P价格

$$MRTS = \left|\frac{dK}{dL}\right| = \frac{MP_l}{MP_k} = \frac{P_l}{P_k}$$

在成本最小化的条件下，

两种投入的边际产量之比等于它们的价格之比，

两种投入的边际技术替代率等于它们的价格之比。

- 最优条件的推广

$$\frac{MP_x}{P_x} = \frac{MP_y}{P_y} = \cdots\cdots = \frac{MP_z}{P_z}$$

- 在成本最小化的生产过程中，要素的边际产量与其价格之比都互相相等。即：在各种投入上所花的最后一元钱都能换得相同的产品增量。

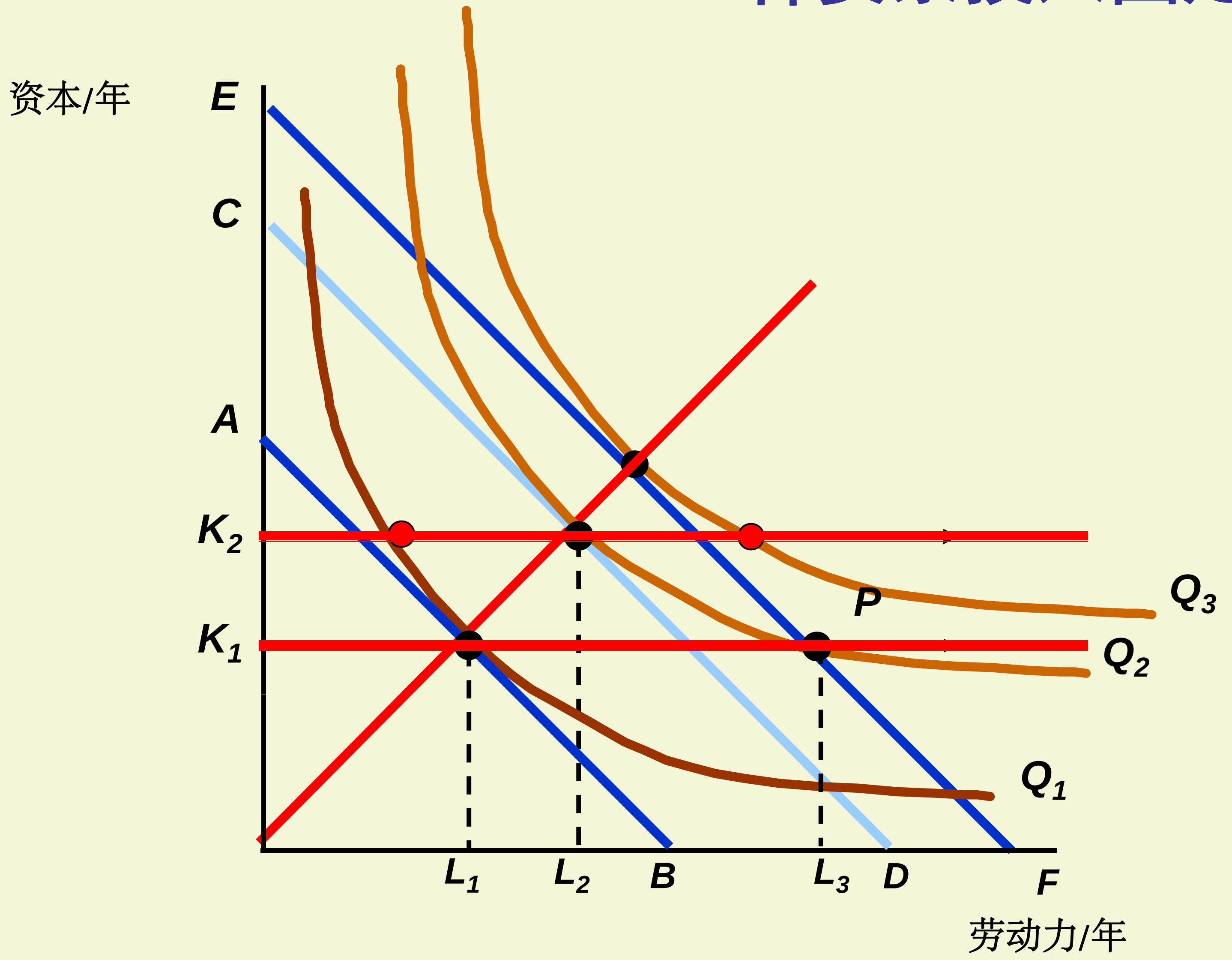
- 比较：　在最优消费条件下

MU：边际效益

$$MRS = \left|\frac{dy}{dx}\right| = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{P_x}{P_y}$$

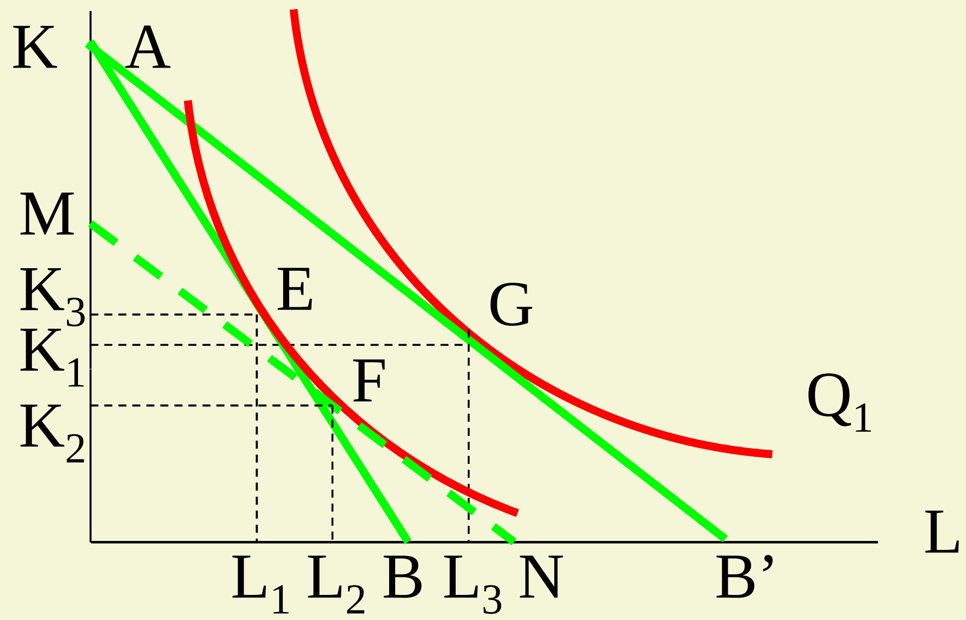
$$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y} = \cdots\cdots = \frac{MU_z}{P_z}$$

给定产量的成本最小化
—— 一种要素投入固定



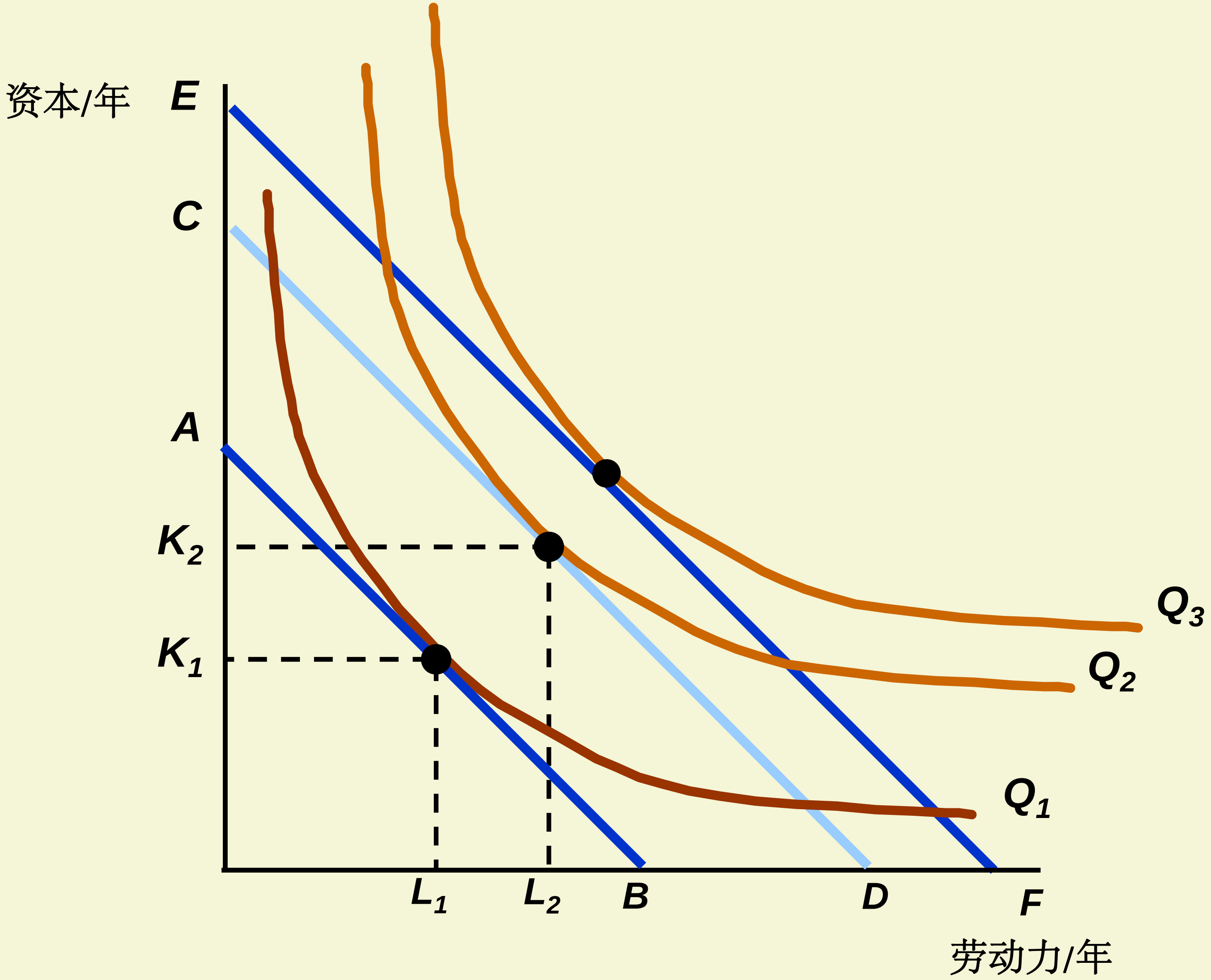
要素相对价格与生产技术的选择

- L的价格：w→w’



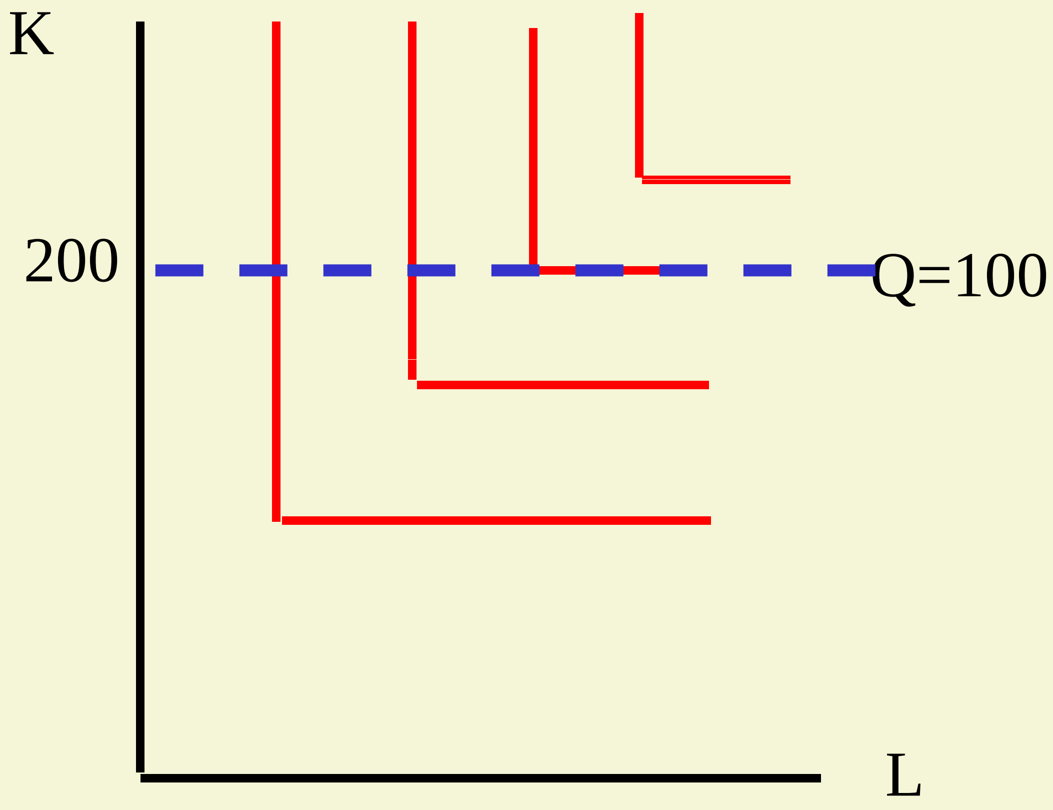
- 总效应L_1L_3=替代效应L_1L_2+成本效应L_2L_3

第二节、成本函数



- 成本函数：一定产量与生产该产量的最低成本之间的关系。

例　生产函数$Q=\min(L, K/2)$，$P_l=3$，$P_k=1$。在短期内，资本固定投入为200单元。求该生产过程的短期成本函数和长期成本函数。



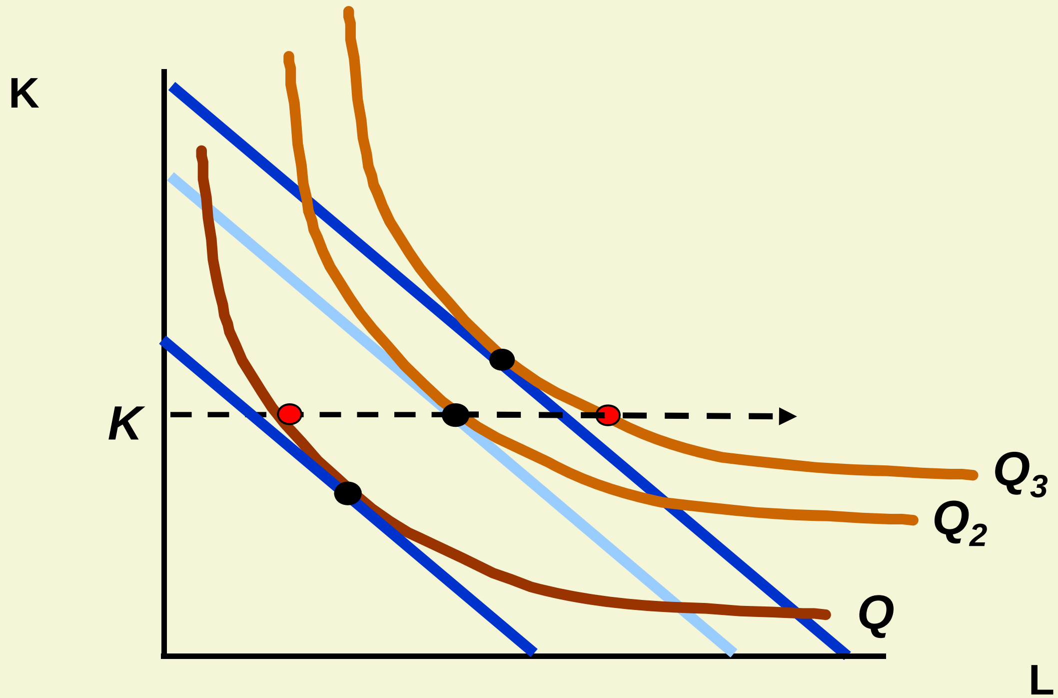
解：在短期内

$$C(Q)=\begin{cases}200+3Q & Q\le 100\\ \infty & Q>100\end{cases}$$

在长期内 $L=K/2=Q$

$$C(Q)=3\times Q+1\times 2Q=5Q$$

例　$Q = L^{1/2}K^{1/2}, P_l = w, P_k = r$。求短期成本函数和长期成本函数。



解：短期，资本固定，因此由生产函数得到劳动量

$$L = Q^2 / K$$

$$STC = rK + wQ^2 / K$$

长期，资本和劳动都可变，边际产量分别为

$$MP_k = \frac{1}{2} K^{-1/2} L^{1/2}$$

$$MP_l = \frac{1}{2} K^{1/2} L^{-1/2}$$

由最小化条件和生产函数

$$\frac{MP_l}{w} = \frac{MP_k}{r}$$

$$Q = K^{1/2} L^{1/2}$$

解得 $K^* = (\frac{w}{r})^{1/2} Q$ ， $L^* = (\frac{r}{w})^{1/2} Q$

因此长期成本为

$$LTC = rK^* + wL^* = 2\sqrt{rwQ}$$

第三节、边际成本

把投入品价格固定，成本是产量的函数。

1. 几个成本概念

- 总成本

  总成本：**TC(Q)=FC+VC(Q)**

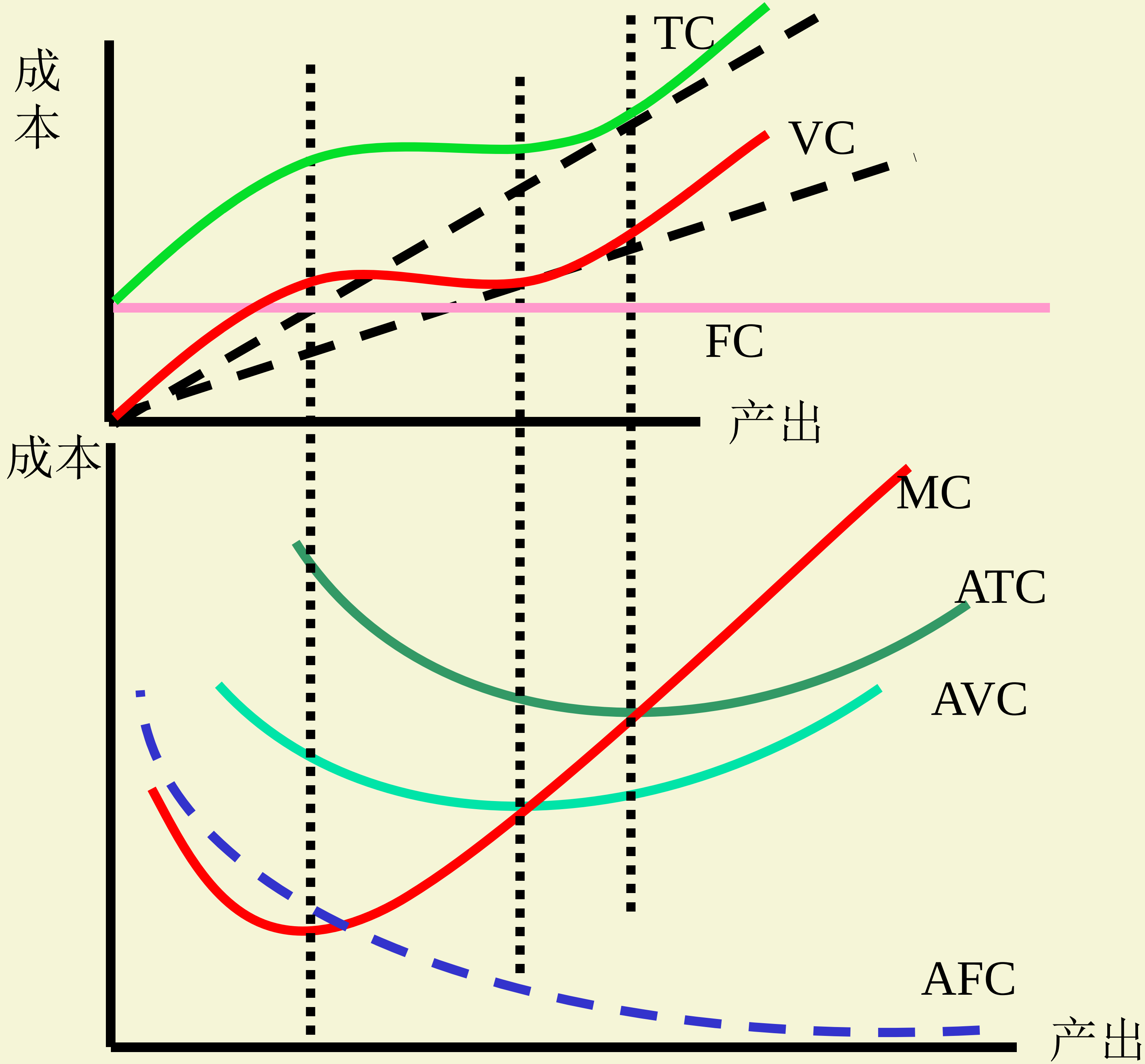
  固定成本：**FC**

  可变成本： **VC(Q)**

- 平均成本
  - 平均总成本 ： **ATC(Q) = TC(Q) / Q = AFC + AVC(Q)**
  - 平均固定成本：**AFC = FC / Q**
  - 平均可变成本：**AVC(Q) = VC(Q) / Q**

- 边际成本：产量增加一单元所增加的成本

$$MC(Q)=\frac{TC(Q+\Delta Q)-TC(Q)}{\Delta Q}=\frac{dTC}{dQ}=\frac{dVC}{dQ}$$



成本
TC
VC
FC
产出
成本
MC
ATC
AVC
AFC
产出

2. 边际成本的变化规律——一种可变投入

- 只有一种可变投入：边际产量递减等价于边际成本递增。

$Q = f(L, \bar{K})$ f（*，*）：生产函数

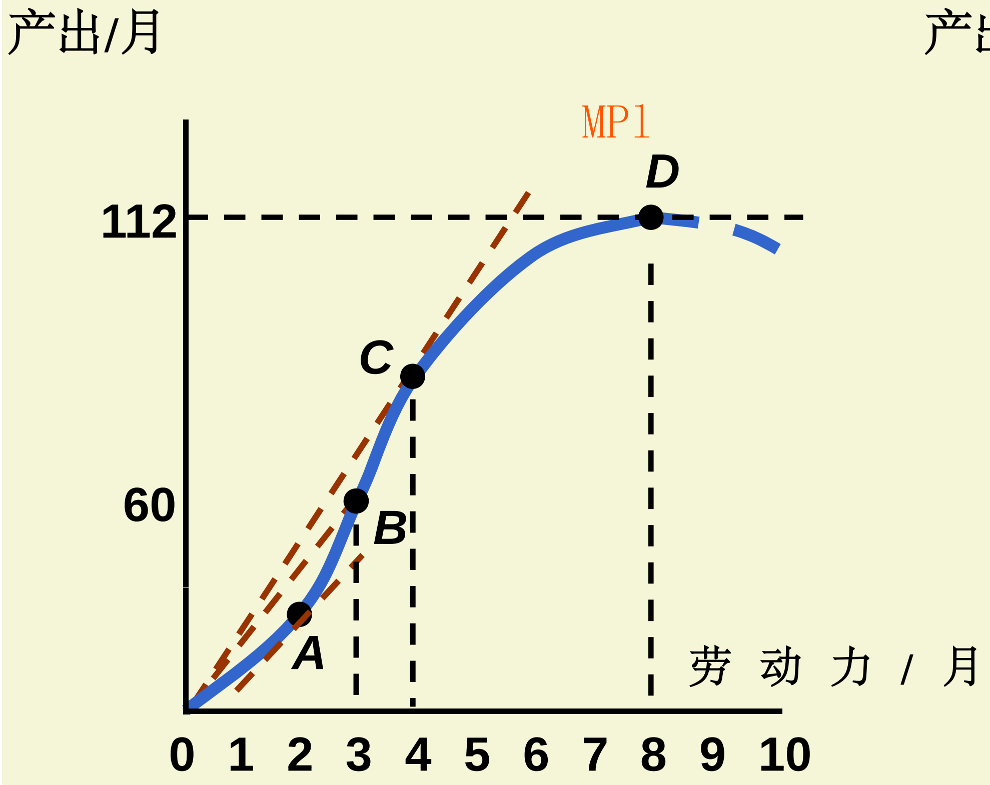
$$TC(Q) = w \cdot L(Q) + r \cdot \bar{K} = w \cdot L(Q) + FC$$

$$\therefore MC = \frac{dTC(Q)}{dQ} = w\frac{dL}{dQ} + 0 = w\frac{1}{MP_L}$$

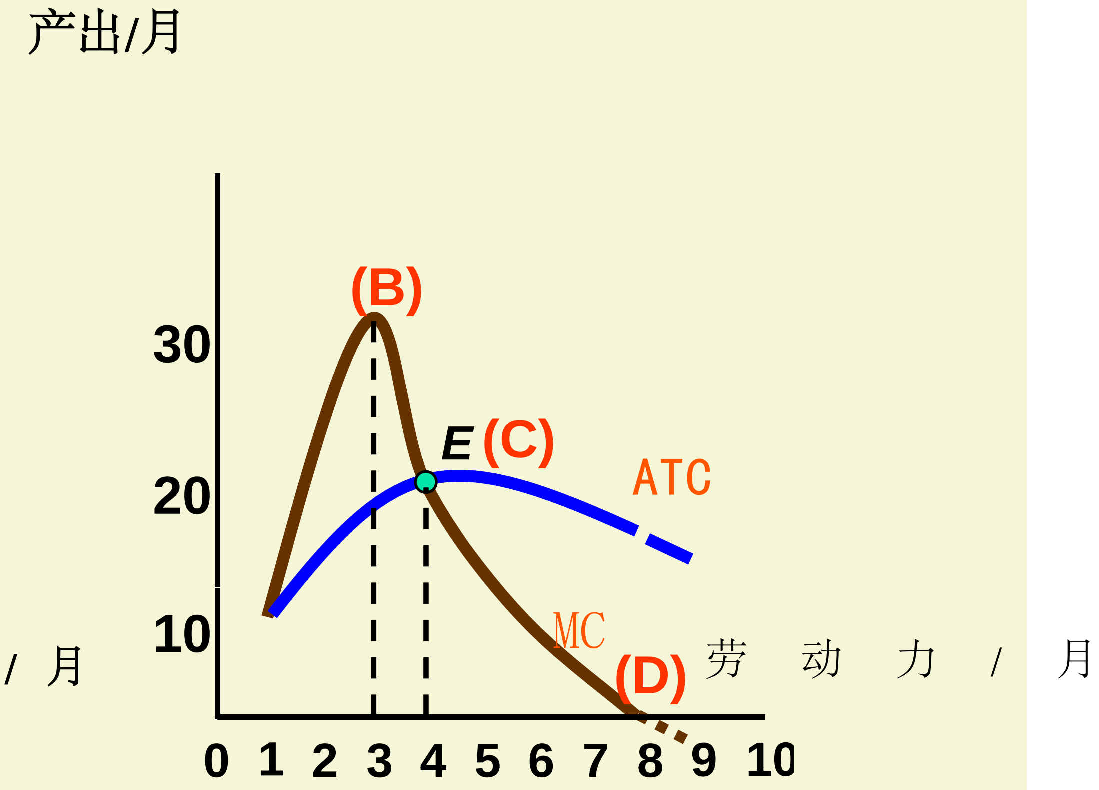
此处资本投入恒定，改变劳动力投入

- MP_L曲线上升段对应MC曲线的下降段；
  MP_L曲线下降段对应MC曲线的上升段；
  MP_L曲线最高点对应MC曲线的最低点；

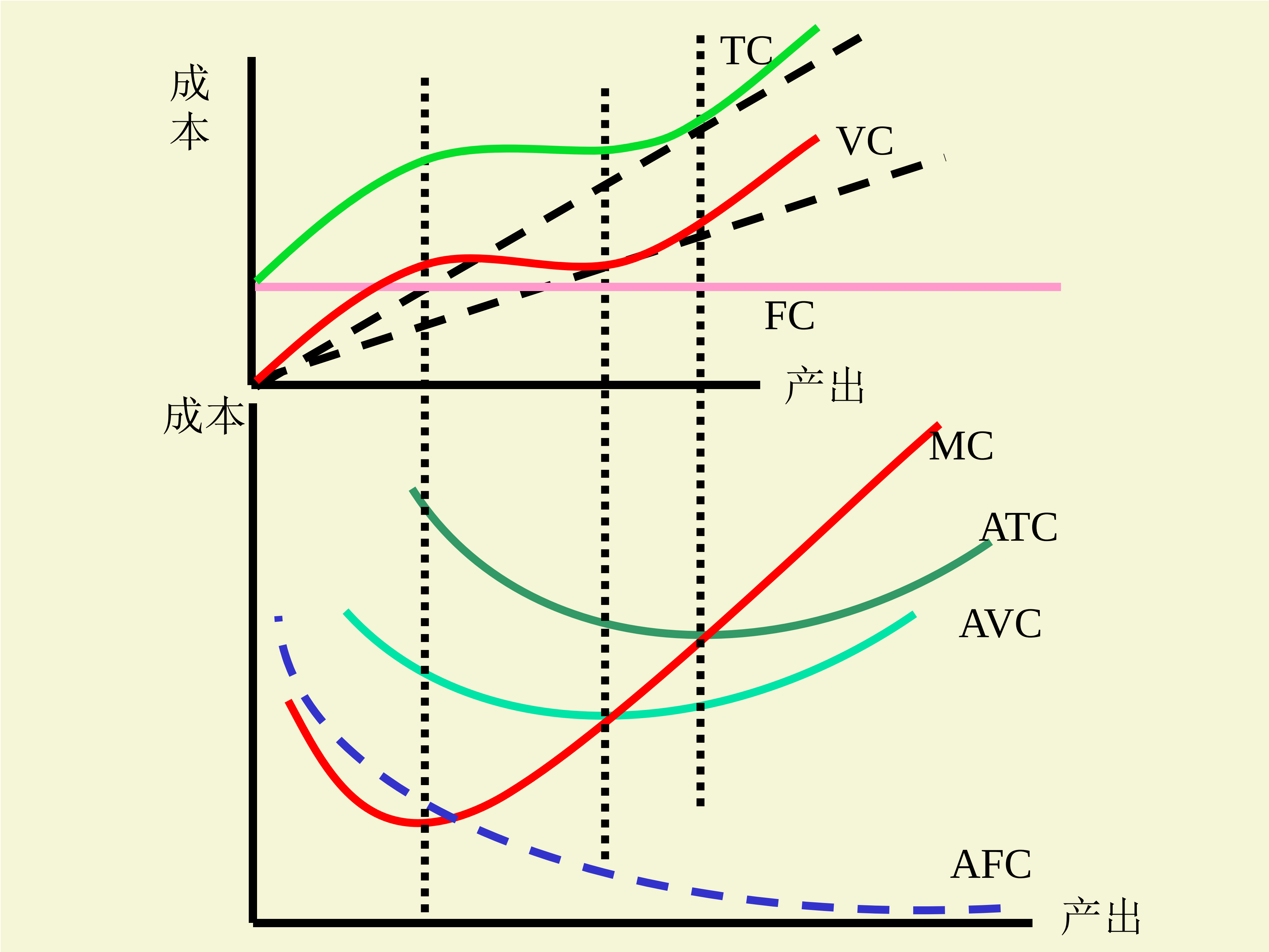
- TP_L曲线凸时，TC和VC曲线凹；
  TP_L曲线凹时，TC和VC曲线凸；
  TP_L曲线存在一个拐点时，TC和VC曲线也各存在一个拐点；

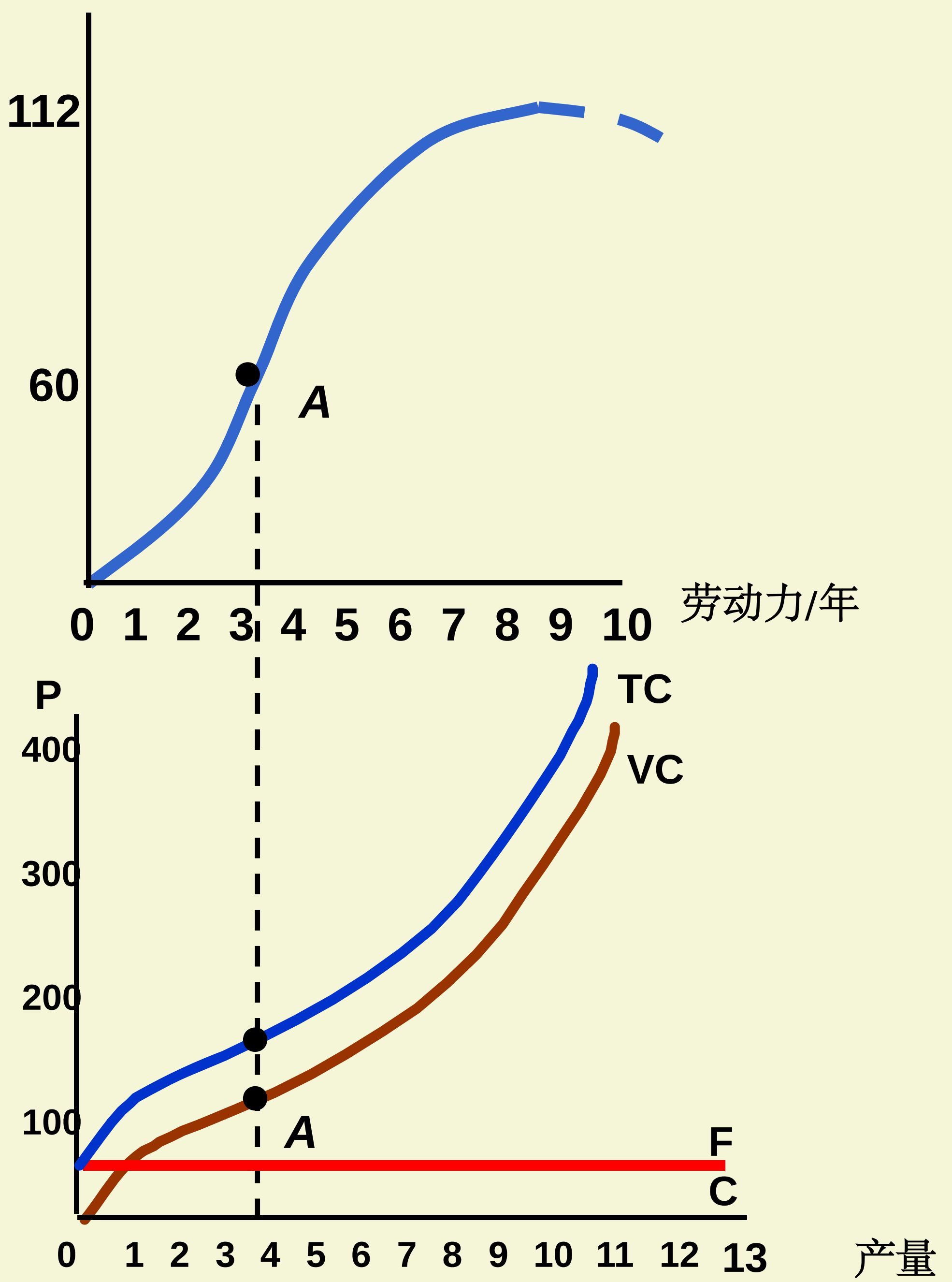


产出/月
MPl
D
112
C
60
B
A
劳 动 力 / 月
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10



产出/月
(B)
30
E (C)
ATC
20
MC
10
(D)
劳 动 力 / 月
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


成本
TC
VC
FC
产出
成本
MC
ATC
AVC
AFC
产出


112
60
A
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
劳动力/年
P
400
300
200
100
TC
VC
A
F
C
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
产量

2. 边际成本的变化规律——两种以上可变投入

- 有两种以上可变投入：边际产量递减并不一定蕴涵边际成本递增。

例如：

$$Q = K^{2/3}L^{2/3} \qquad P_K = P_L = 1$$

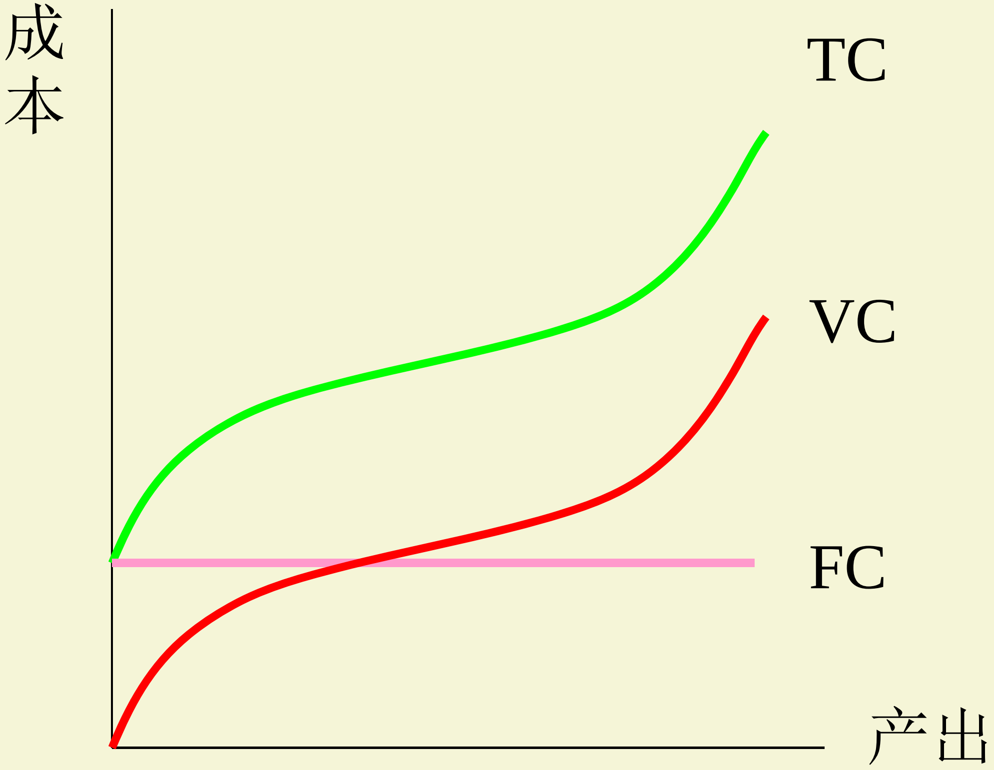
边际产量 $MP_K = \dfrac{2}{3}\dfrac{L^{2/3}}{K^{1/3}} \qquad MP_L = \dfrac{2}{3}\dfrac{K^{2/3}}{L^{1/3}}$

$$TC(Q) = 2Q^{3/4} \qquad MC(Q) = \frac{3}{2Q^{1/4}}$$

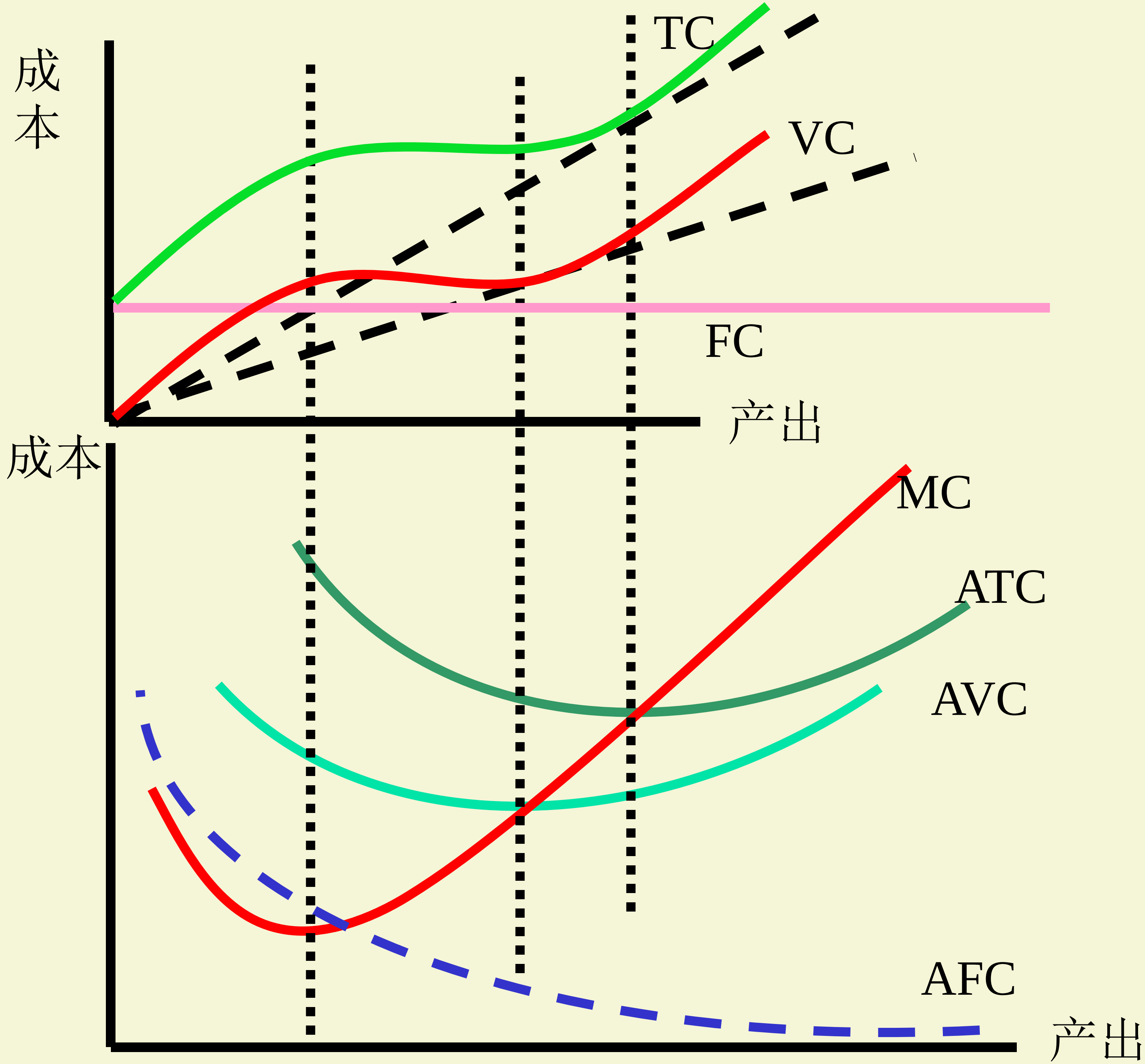
- 但是边际成本最终将递增。

3. 边际成本与平均成本

短期成本曲线



- FC——AFC
- VC——AVC
- TC——ATC
- TC、VC——MC



成本
TC
VC
FC
产出
成本
MC
ATC
AVC
AFC
产出

- 当边际成本高于平均成本时，平均成本为递增函数；当边际成本低于平均成本时，平均成本为递减函数。
- 在边际成本递增的假设下，边际成本曲线若与平均成本曲线相交，则交点必定是平均成本曲线的最低点。
- 使平均成本达到最低的生产水平称为经济规模或效率规模。

- 只有一种可变投入：平均产量 **VS** 平均可变成本

$$Q = f(L, \overline{K})$$

$$VC(Q) = w \cdot L(Q)$$

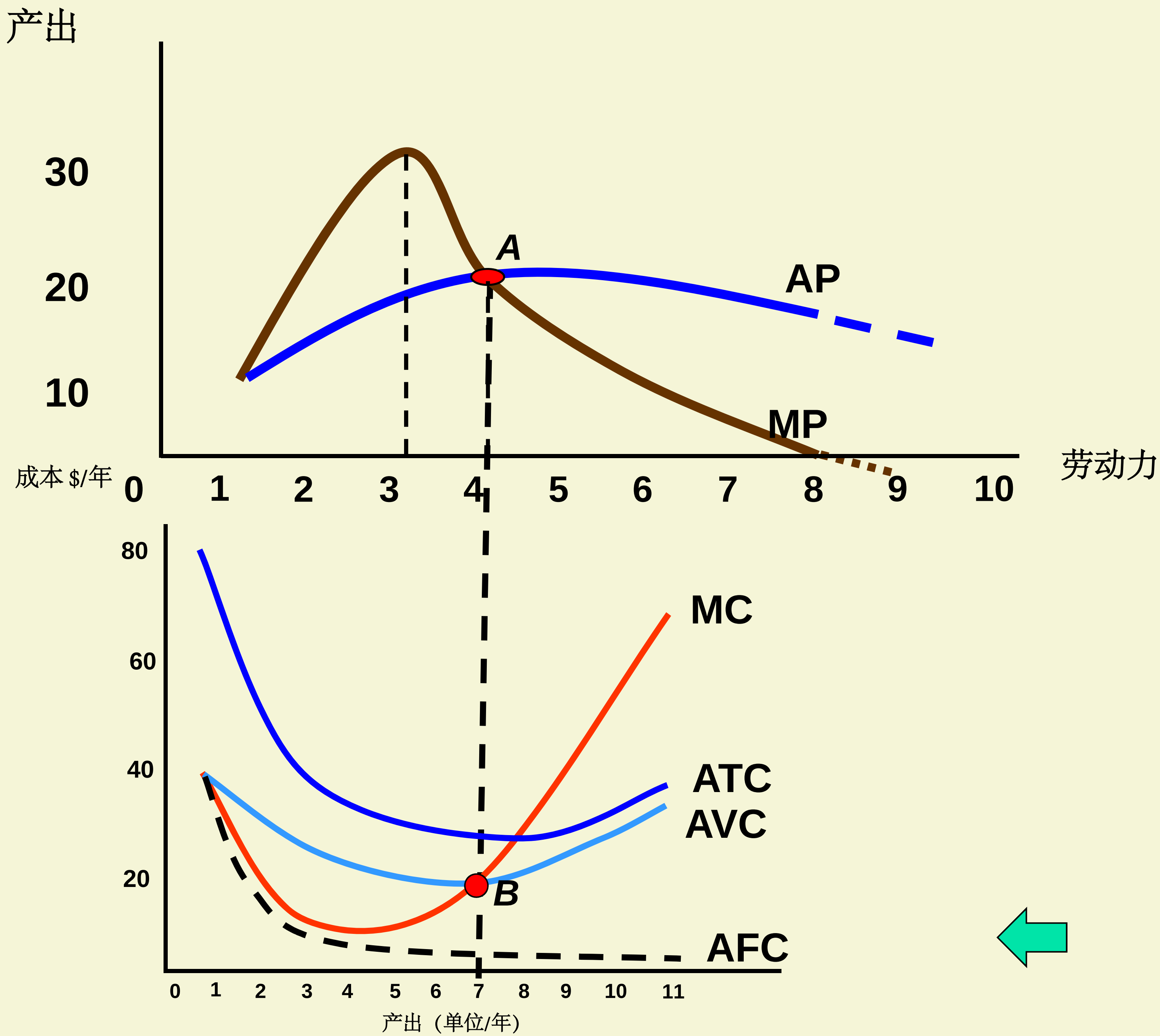
$$\therefore AVC(Q) = \frac{VC(Q)}{Q} = w\frac{L}{Q} = w\frac{1}{AP_L}$$

- AP_L曲线上升段对应AVC曲线的下降段；

  AP_L曲线下降段对应AVC曲线的上升段；

  AP_L曲线最高点对应AVC曲线的最低点；

- AP_L曲线和MP_L曲线的交点，对应于MC和AVC曲线的交点；

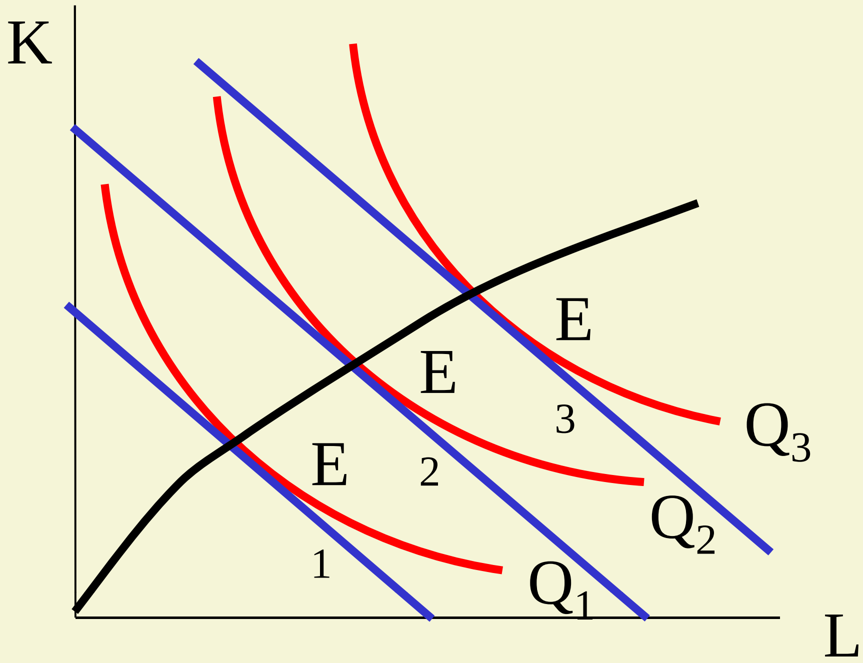


产出
30
20
10
A
AP
MP
成本 $/年
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
劳动力
80
60
40
20
MC
ATC
AVC
B
AFC
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
产出（单位/年）

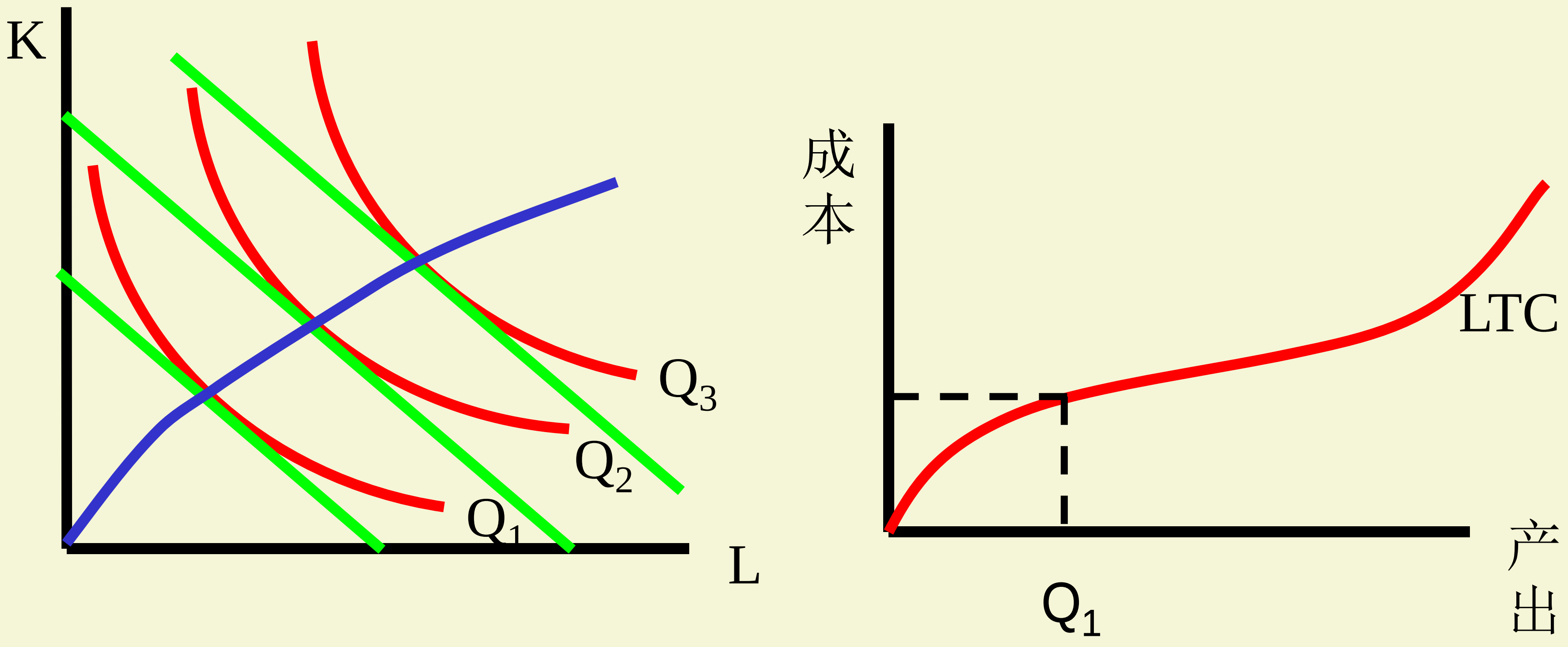
第四节、长期成本

- 扩展线 VS 短期、长期总成本曲线
- 短期总成本曲线 VS 长期总成本曲线
- 短期平均成本曲线 VS 长期平均成本曲线
- 短期边际成本曲线 VS 长期边际成本曲线

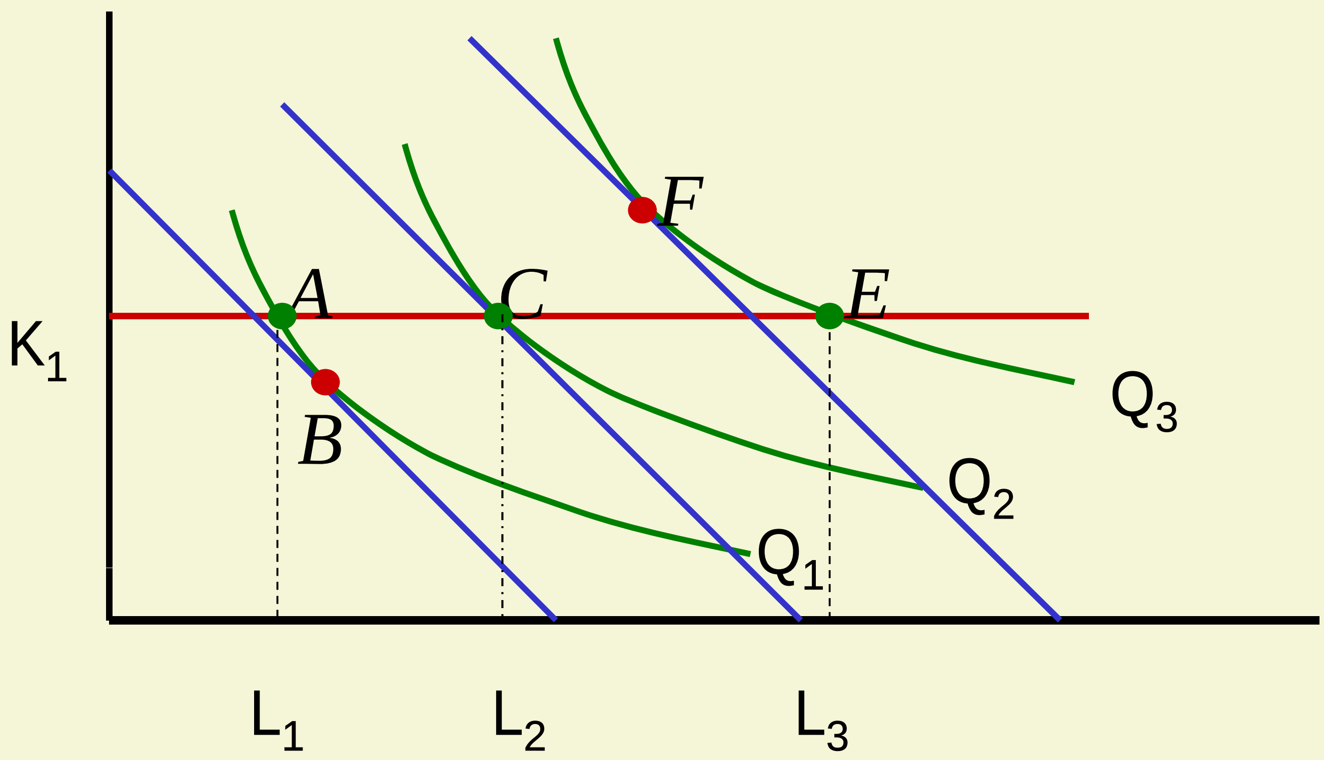
1、扩展线：描绘了企业在每一产出水平上所选择的成本最小化的各种劳动和资本组合。

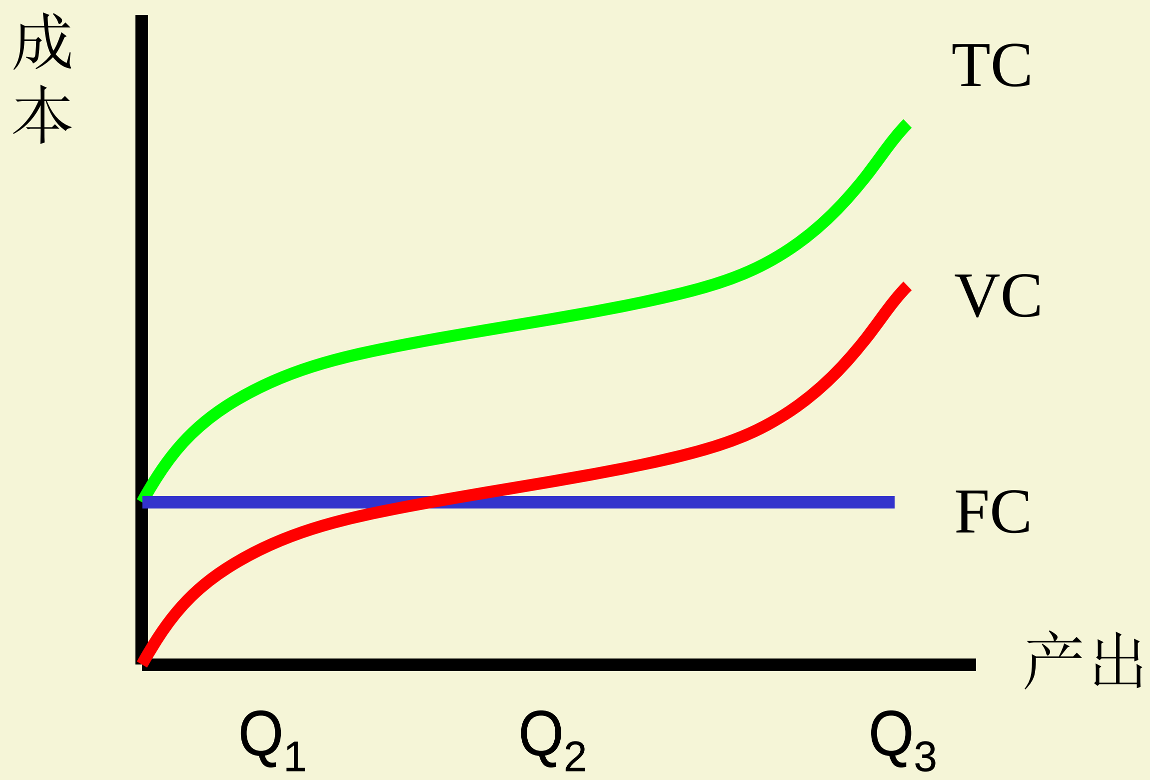


从扩展线到长期成本曲线



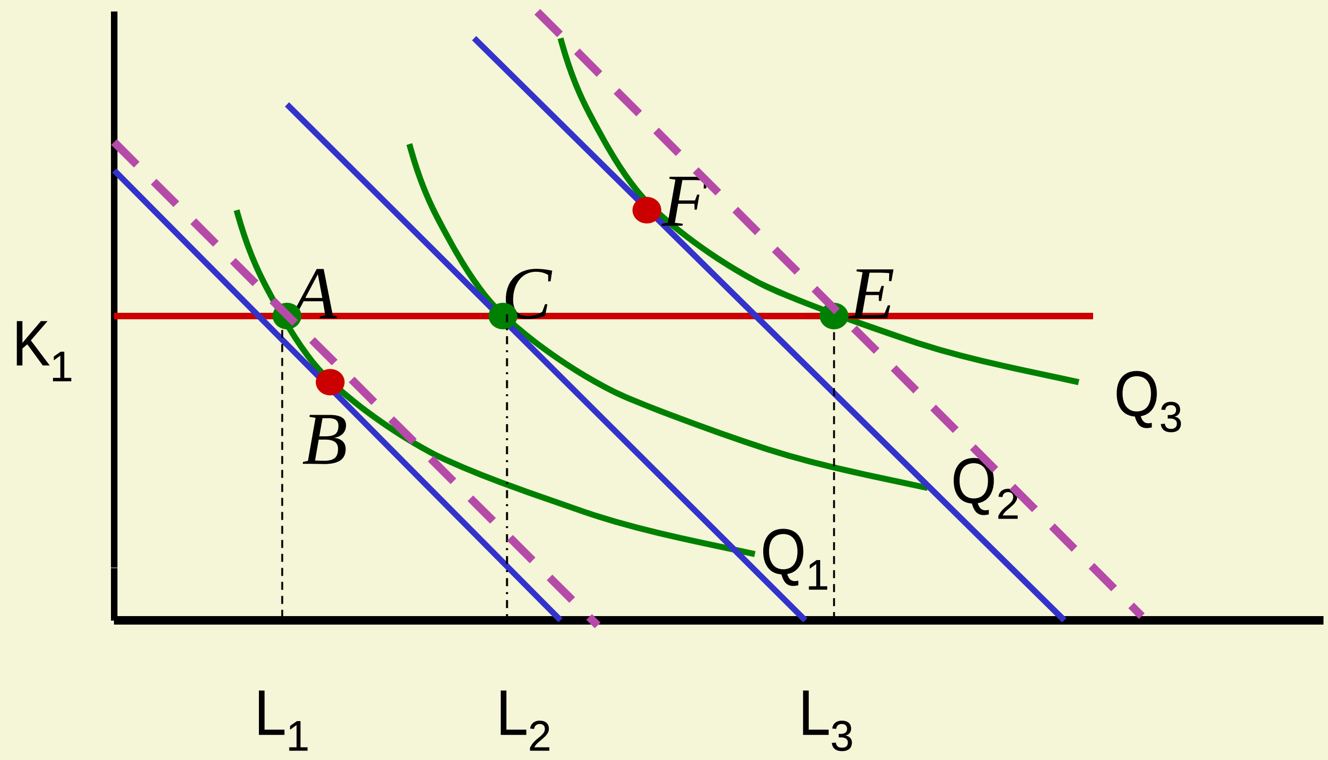
从扩展线到短期成本曲线





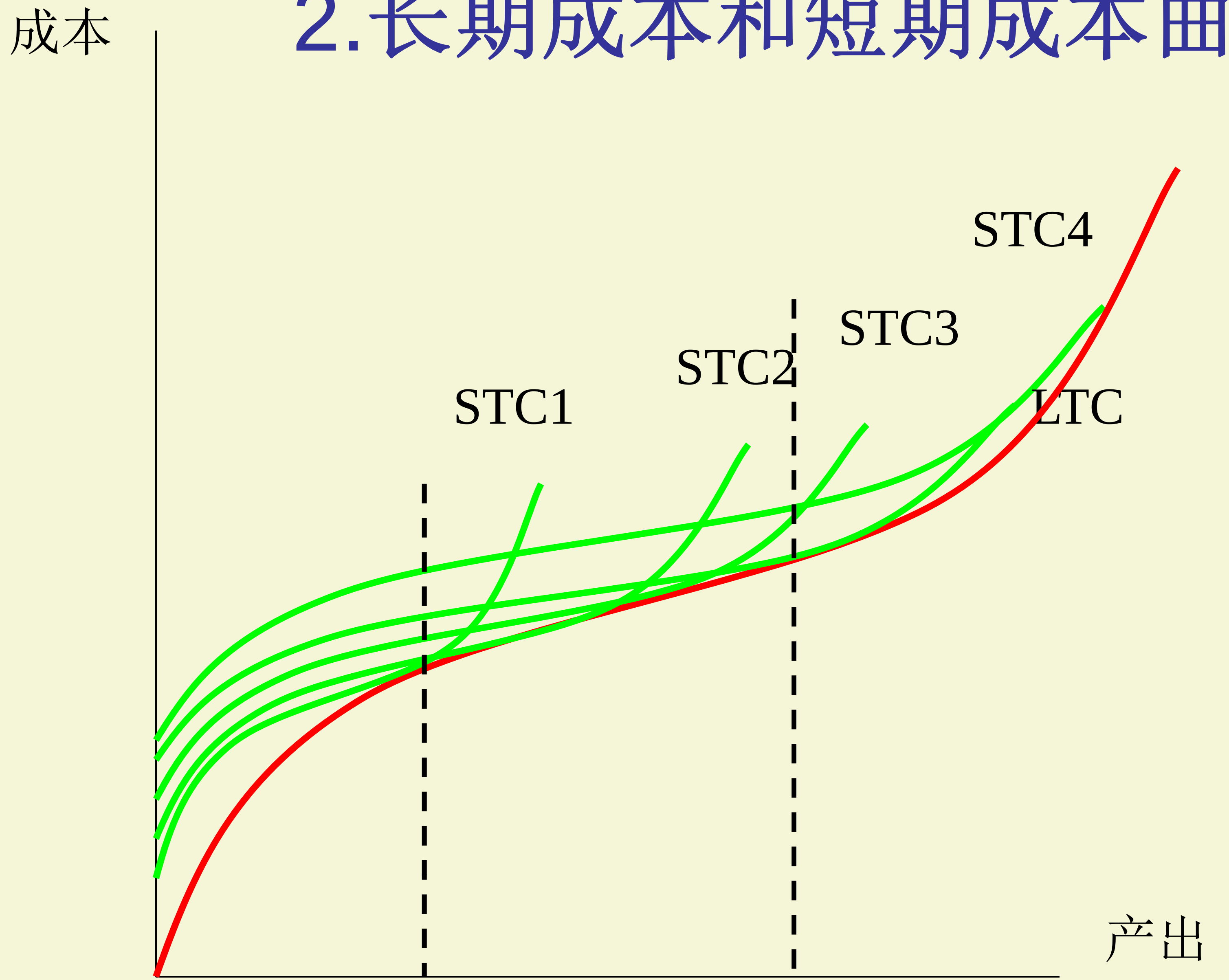
成本
TC
VC
FC
产出
Q_1
Q_2
Q_3

- 在长期，所有生产要素均可调整变化。
- 对于任何生产水平，长期成本应该不会高于短期成本。



F
A
C
E
B
K1
Q3
Q2
Q1
L1
L2
L3

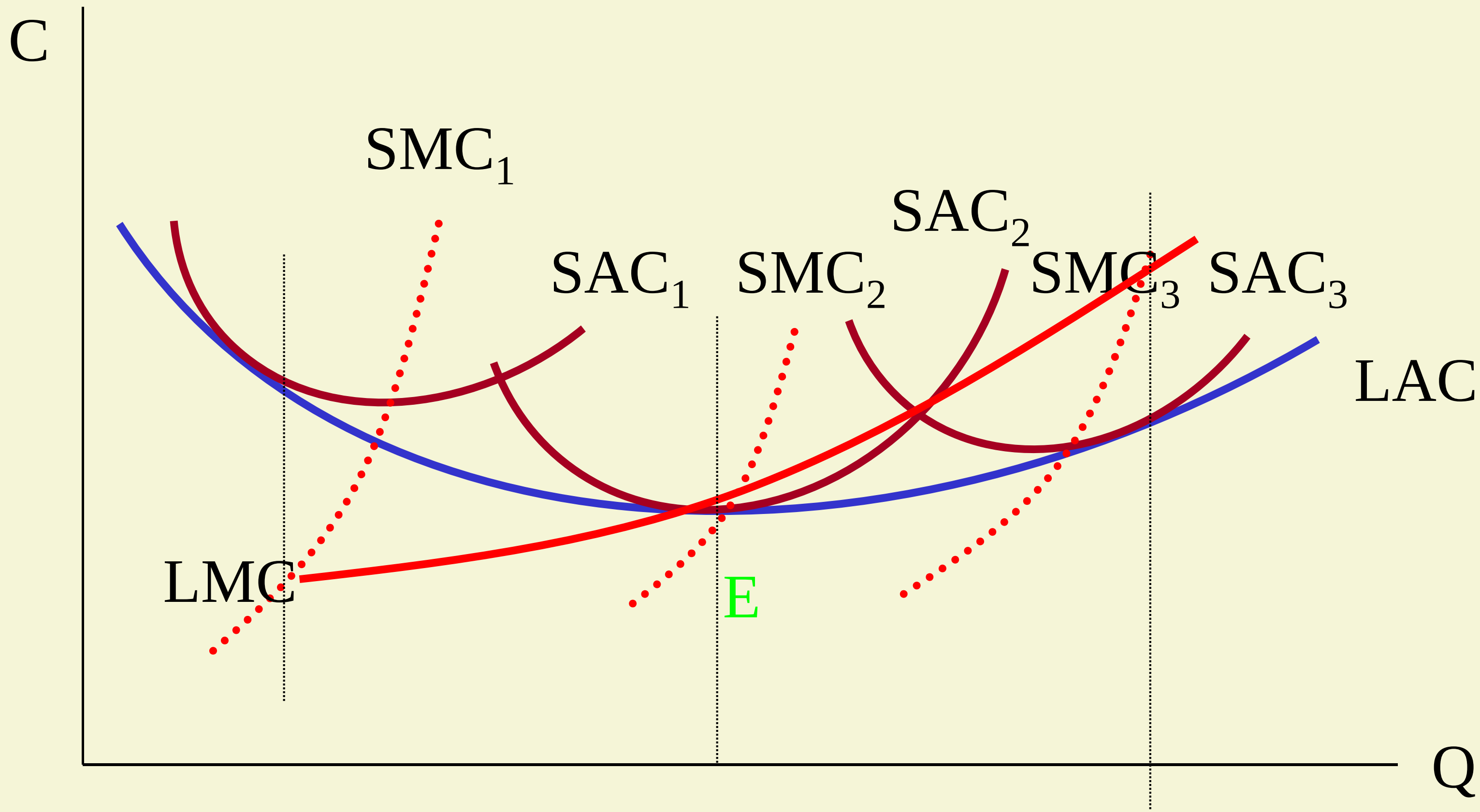
2.长期成本和短期成本曲线



$$LTC(Q) = \min_{\mathbf{x}_f} STC(Q, \mathbf{x}_f)$$

- 长期成本曲线是短期成本的下包络线
- 在包络线上，对于每一个产量水平，都存在着LTC曲线和一条STC曲线的相切点，该STC曲线所代表的生产规模就是生产该产量的最优生产规模，该切点所对应的总成本就是生产该产量的最低总成本。
- 长期总成本曲线经过所有短期总成本曲线的最低点。

3.长期平均成本与短期平均成本



- 长期平均成本曲线是短期平均成本的下包络线

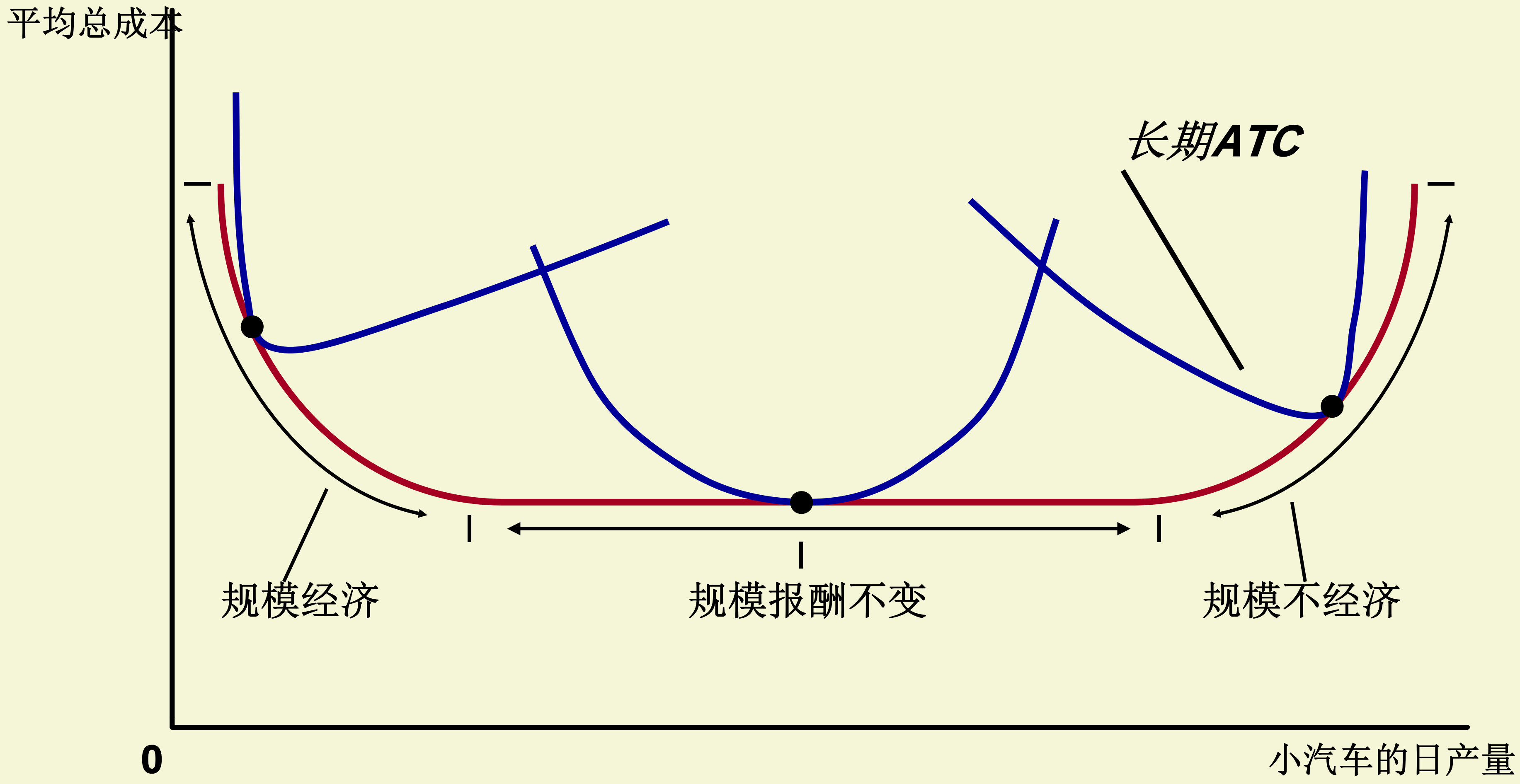
$$LAC(q)=\min_{\mathbf{x}_f}\ SAC(q,\mathbf{x}_f)$$

- 在包络线上，对于每一个产量水平，都存在着LAC曲线和一条SAC曲线的相切点，该SAC曲线所代表的生产规模就是生产该产量的最优生产规模，该切点所对应的平均成本就是生产该产量的最低平均成本。

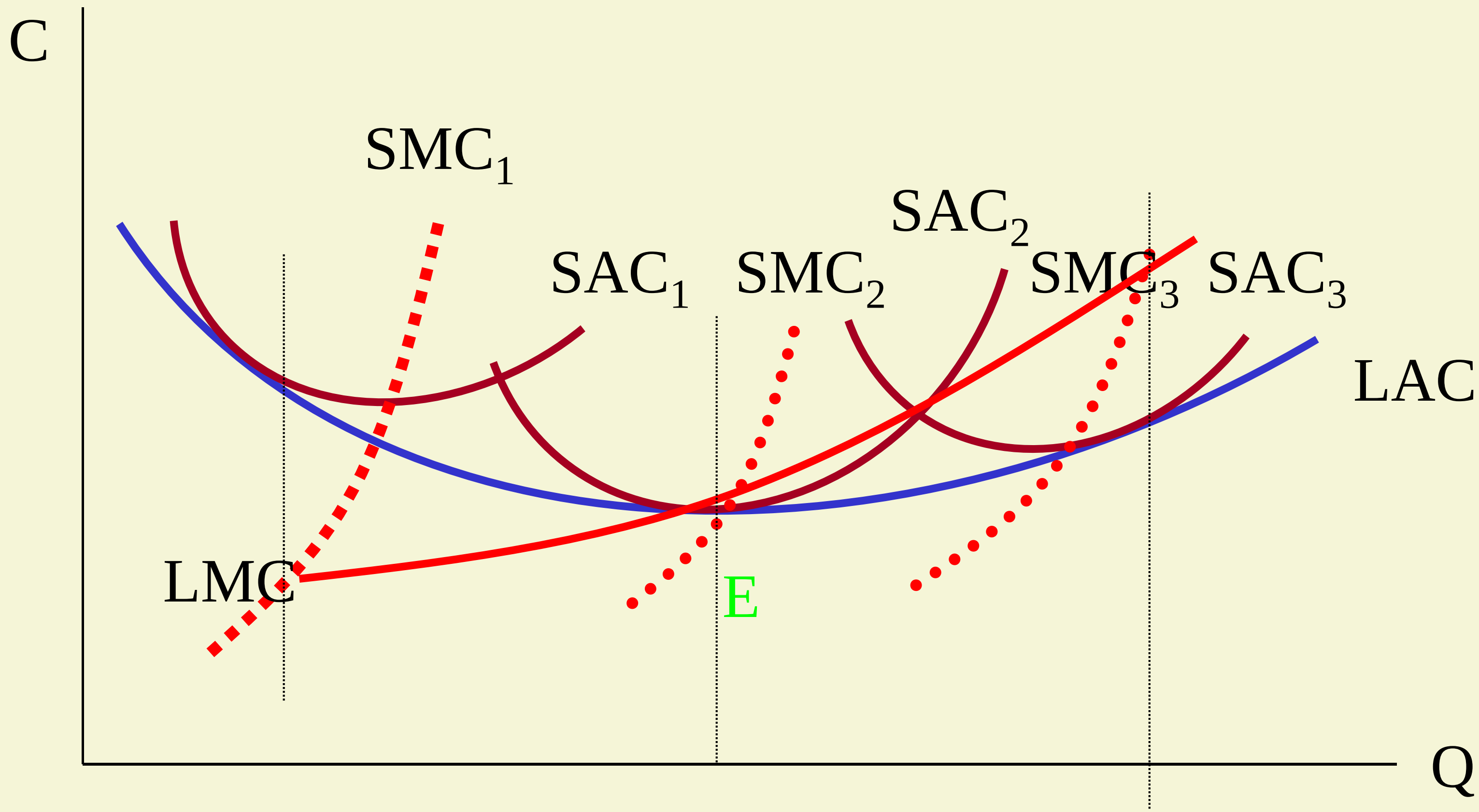
规模经济和规模不经济

- 当长期平均总成本随着产出增加而减少时就是规模经济。
- 当长期平均总成本随着产出增加而增加时就是规模不经济。
- 当长期平均总成本随着产出增加而保持不变时就是 规模报酬不变。

规模经济和规模不经济



4.长期边际成本与短期边际成本



■长期边际成本曲线不是短期边际成本曲线的下包络线

第五节、多车间任务安排

- 2个车间，成本分别为TC_i，一起生产Q件产品，应该如何安排生产，使得成本达到最小？
- 当两个车间都生产时，最优条件：

$$MC_1(q_1) = MC_2(q_2)$$

$$q1+q2=Q$$

例：某公司有甲、乙两厂，成本函数分别为$TC_1 = 16 + 6q_1^2$，$TC_2 = 240 + 2q_2^2$。若该公司要生产32件产品，应该如何安排生产？

解：(1) 如果都安排生产，则

$$MC_1(q_1) = 12q_1 = MC_2(q_2) = 4q_2 \text{，} \quad q_1 + q_2 = 32$$

解得 $q_1 = 8$，$q_2 = 24$，$TC = 16 + 6\times 8^2 + 240 + 2\times 24^2 = 1792;$

（2）如果全部由甲生产 $TC = 16 + 6\times 32^2 = 6160;$

（3）如果全部由乙生产 $TC = 240 + 2\times 32^2 = 2288;$

因此安排甲生产8，乙生产24。

例：某公司有甲、乙两厂，成本函数分别为$TC_1=16+6q_1^2$，$TC_2=240+2q_2^2$。若该公司要生产6件产品，应该如何安排生产？

解：(1)如果都安排生产，则

$$MC_1(q_1)=12q_1=MC_2(q_2)=4q_2\,,\qquad q_1+q_2=6$$

解得 $q_1=1.5$，$q_2=4.5$，$TC=310;$

（2）如果全部由甲生产　$TC=232;$

（3）如果全部由乙生产　$TC=312;$

因此安排甲生产6，乙不生产。

- 作业：121页

  1，4，6，8