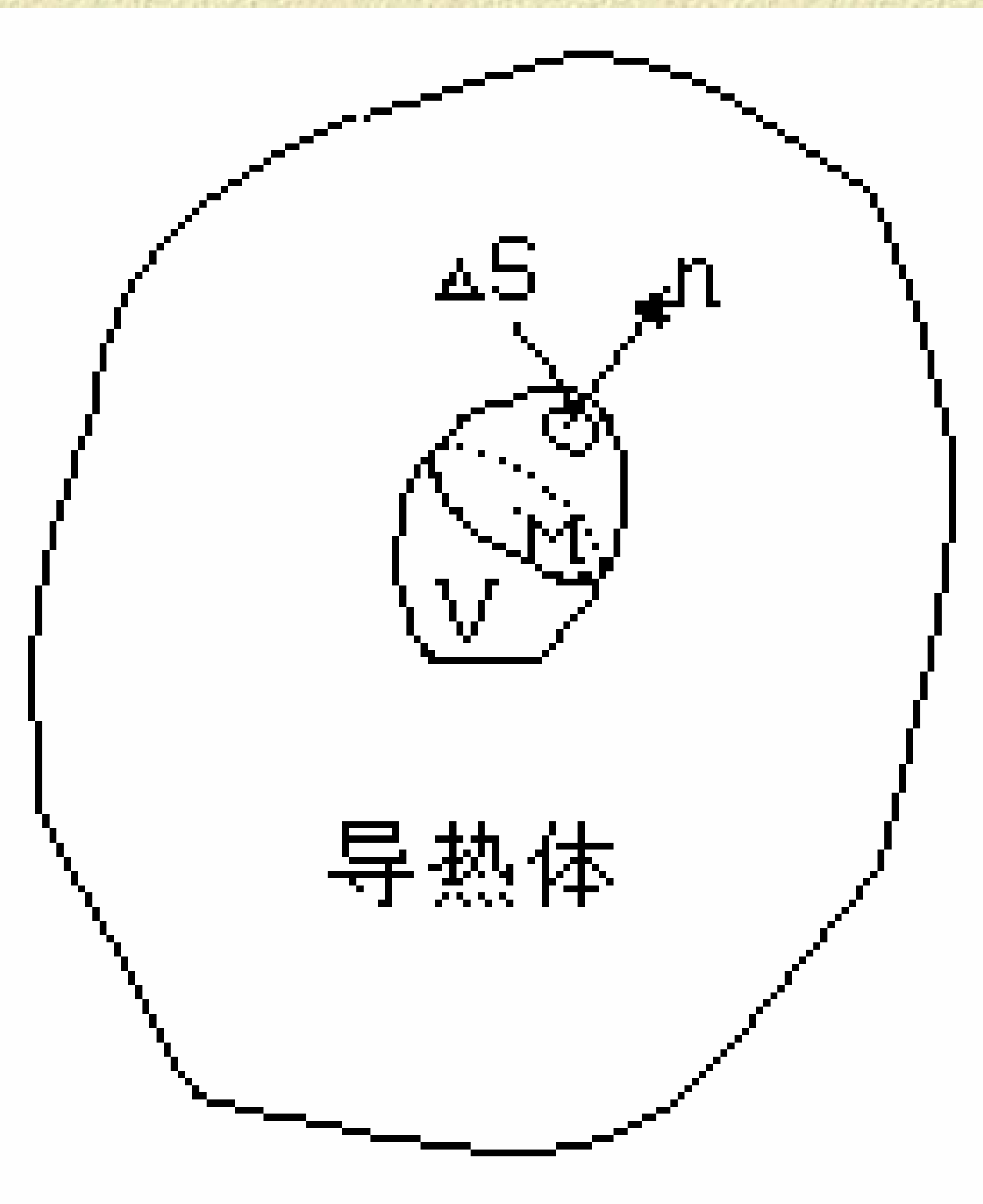
二、热传导方程

2.1 热传导方程的导出和定解问题

一块热的物体，如果体内每一点的温度不全一样，则在温度较高的点处的热能就要向温度较低的点处流动，称为热传导。由于热能的传导过程总是表现为温度随时间和点的位置的变化，故问题归结为求物体内温度的分布。



在时刻 t 点 $M(x,y,z)$ 的温度为 $u(x,y,z,t)$

在物体中任取一闭曲面 S，它所包围的区域记作 V（如图），$\vec{n}$ 为曲面 ΔS 的法向（从 V 内指向 V 外）。

由热传学中的 **Fourier** 实验定律可知：物体在无穷小时间段 dt 内流过一个无穷小面积 dS 的热量 dQ 与时间段 dt 、曲面面积 dS ，以及物体温度 u 沿法线方向的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 三者成正比,即

$$dQ = -k\frac{\partial u}{\partial n}dSdt$$

$$= -k(grad\ \ u)_n dSdt$$

$$= -k\, grad\ \ u \cdot d\vec{S}dt$$

其中 $k = k(x, y, z)$ 称为物体的热传导系数($k \geq 0$)

上页 下页 返回

从时刻t_1到时刻t_2，通过曲面S流入区域V的全部热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S k \, grad \; u \cdot d\vec{S} dt$$

利用奥高公式

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(k \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k \frac{\partial u}{\partial z}) \right\} dxdydzdt$$

流入的热量使V内温度发生了变化，在时间间隔$[t_1, t_2]$内V内温度升高所需的热量为：

$$Q_2 = \iiint_\Omega c\rho \left[u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1) \right] dxdydz$$

上页 下页 返回

$$= \iiint_{\Omega} c\rho \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dtdxdydz$$

由于热量守恒，故 $Q_1 = Q_2$，即 $Q_1 - Q_2 = 0$。

交换积分次序,得

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} \left[c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial u}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial u}{\partial z}) \right] dxdydzdt = 0$$

由于时间间隔$[t_1, t_2]$及区域Ω是任意取的,并且被积函数是连续的，得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{c\rho}[\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial u}{\partial z})]$$

如果物体是均匀的,即c, ρ, k为常数，得到方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

其中$a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$。该方程称为三维的热传导方程。

初始条件$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$.

上页 下页 返回

边界条件

（1）第一类边界条件(**Dirichlet** 边界条件)

$$u\big|_{\Gamma} = g(x, y, z, t)$$

（2） 第二类边界条件(**Neumann** 边界条件)

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = g(x, y, z, t)$$

（3）第三类边界条件(**Robin** 边界条件)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\bigg|_{\Gamma} = g(x, y, z, t)$$

2.2 混合问题的分离变量法

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad 0 < x < L, t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \qquad (2.1)$$

找变量分离的解

$u(x,t) = X(x)T(t)$ 代入方程（2.1），得：

$$XT' = a^2 X'' T$$

$$\therefore \frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda$$（常数）得：

于是得到：$X'' + \lambda X = 0$

$$T' + \lambda a^2 T = 0$$

从边界条件知：$X(0)=X(L)=0$，从而得到一个特征值问题：

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0)=X(L)=0 \end{cases}$$

对λ分三种情况讨论：

当$\lambda<0$时，方程的通解是：

$$X = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

从边值条件得：$c_1=c_2=0$，此时特征值问题只有零解。

当$\lambda=0$时，方程的通解是：

$$X = c_1 + c_2 x$$

从边值条件也得：$c_1=c_2=0$。

当 $\lambda > 0$ 时，方程的通解是：

$$X = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

从 $X(0) = 0$ 得 $c_1 = 0$，从 $X(L) = 0$ 得 $c_2 \sin\sqrt{\lambda}L = 0$。

为了有非零解，必须 $\sin\sqrt{\lambda}L = 0$

于是 $\sqrt{\lambda}L = n\pi \qquad n = 1,2,\cdots$

特征值是：$\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2 \qquad n = 1,2,\cdots$

对应的特征函数是：$X_n = \sin\dfrac{n\pi}{L}x \qquad n = 1,2,\cdots$

讨论 $T' + \left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 T = 0$

其通解是：$T_n = A_n e^{-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t}$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{L}x$$

将初始条件代入，得：$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{L}x = \varphi(x)$

求解得：$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{L}\xi d\xi$

考虑非齐次方程的混合问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \qquad (2.2)$$

1. 利用特征函数法

求解形如下式的解： $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$

将 $f(x,t)$ 也按特征函数系展开，得：

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

其中： $f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi,t) \sin \frac{n\pi}{L} \xi d\xi$

代入方程（2.2），得

$$\begin{cases} u_n'(t)+\left(\dfrac{an\pi}{L}\right)^2 u_n(t)=f_n(t) \\ u_n(0)=0 \end{cases}$$

解为：$u_n(t)=e^{-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t}\int_0^t f_n(\tau)e^{\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 \tau}d\tau$

于是混合问题（2.2）的解为

$$u(x,t)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 \tau}\left(\int_0^L f(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi}{L}\xi d\xi\right)d\tau\right]$$

$$\times e^{-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

定理 1（齐次化原理）若 $w(x,t,\tau)$ 是混合问题

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0 \quad 0 < x < L, t > \tau \\ w(0,t,\tau) = w(L,t,\tau) = 0 \\ w(x,\tau,\tau) = f(x,\tau) \end{cases}$$

的解（其中 $\tau \geq 0$ 是参数），则 $u(x,t) = \int_0^t w(x,t,\tau)d\tau$ 是混合问题（2.2）的解

证明：

$$u_t(x,t) = w(x,t,t) + \int_0^t w_t(x,t,\tau)d\tau$$

$$= f(x,t) + \int_0^t w_t(x,t,\tau)d\tau$$

$$= f(x,t) + \int_0^t a^2 w_{xx}(x,t,\tau)d\tau = f(x,t) + a^2 u_{xx}(x,t)$$

上页 下页 返回

且 $u(0,t)=u(L,t)=0$， $u(x,0)=0$。

$\therefore u(x,t)$ 是方程（2.2）的解

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0 \quad 0 < x < L, t > \tau \\ w(0,t,\tau) = w(L,t,\tau) = 0 \\ w(x,\tau,\tau) = f(x,\tau) \end{cases}$$

令 $t' = t - \tau$，则 $w(x,t,\tau) = w(x,t' + \tau,\tau)$

$$\begin{cases} w_{t'} - a^2 w_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, t' > 0 \\ w(0,t' + \tau,\tau) = w(L,t' + \tau,\tau) = 0 \\ t' = 0\text{时}, \quad w = f(x,\tau) \end{cases}$$

解为： $$w(\tau,t'+\tau,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(\tau)e^{-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t'}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

其中： $$B_n(\tau)=\frac{2}{L}\int_0^L f(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi}{L}\xi d\xi$$

$$w(x,t,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(\tau)e^{-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$u(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)d\tau$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t B_n(\tau)e^{-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2(t-\tau)}d\tau\right]\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2\tau}\left(\int_0^L f(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi}{L}\xi d\xi\right)d\tau\right]\cdot e^{-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

对于一般的一维热传导方程

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) \quad 0 < x < L, t > 0 \\ u(0,t) = g(t), u(L,t) = h(t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{2.3}$$

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

（III）$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = g(t), u(L,t) = h(t) \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$

（I)、（II）已解决，（III）可令

$$v(x,t) = u(x,t) - g(t) - \frac{x}{L}(h(t) - g(t))$$

（III）化为 $\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = -g'(t) - \dfrac{x}{L}(h'(t) - g'(t)) \\ v(0,t) = v(L,t) = 0 \\ v(x,0) = -g(0) - \dfrac{x}{L}(h(0) - g(0)) \end{cases}$

又可分解为（I）、（II）。

2.2 Fourier变换与初值问题的解

设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续可导函数，将它展开成 Fourier 级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

其中 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi d\xi$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi$$

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)d\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}(x-\xi)d\xi$$

假设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积和绝对可积

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad n = 1,2,\cdots$$

$$\Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{l} = \Delta\lambda$$

令 $l \to \infty \Leftrightarrow \Delta\lambda \to 0$

因为 $\lim\limits_{l\to\infty} \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)d\xi = 0$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\Delta\lambda\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\lambda_n \int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\lambda_n(x-\xi)d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi$$

上页 下页 返回

由于$\cos\lambda(x-\xi)$是λ的偶函数，$\sin\lambda(x-\xi)$是λ的奇函数，故：

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi$$

定义：$\hat{f}(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-i\xi\lambda}d\xi$

称为$f(x)$的 Fourier 变换，记为$F\left[f\right]$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$

称为$\hat{f}(\lambda)$的 Fourier 逆变换，记为$F^{-1}\left[\hat{f}\right]$

Fourier 变换的性质：

1、 线性 $F\left[c_1 f_1 + c_2 f_2\right] = c_1 F\left[f_1\right] + c_2 F\left[f_2\right]$

2、 $\dfrac{d}{d\lambda} F\left[f\right] = F\left[-ixf\right]$

3、 $F\left[f'\right] = i\lambda F\left[f\right]$

定义卷积：

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t) f_2(t) dt$$

显然 $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$

4、 $F\left[f_1 * f_2\right] = F\left[f_1\right] F\left[f_2\right]$

或 $F^{-1}\left[\hat{f}_1 \hat{f}_2\right] = f_1 * f_2 = F^{-1}\left[\hat{f}_1\right] * F^{-1}\left[f_2\right]$

5、 $F\left[f_1 f_2\right] = \dfrac{1}{2\pi} F\left[f_1\right] * F\left[f_2\right]$

利用 Fourier 变换求解一维热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (2.4)$$

解：对 u, f, φ 作 Fourier 变换，记：

$$\hat{u}(\lambda,t) = F\left[u(x,t)\right], \hat{f}(\lambda,t) = F\left[f(x,t)\right],$$

$$\hat{\varphi}(\lambda) = F\left[\varphi(x)\right].$$

对（2.4）的等式两边关于 x 进行 Fourier 变换，得：

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{u}}{dt} + a^2\lambda^2\hat{u} = \hat{f}(\lambda,t) \\ \hat{u}(\lambda,0) = \hat{\varphi}(x) \end{cases}$$

上页 下页 返回

其解为： $\hat{u}(\lambda,t)=e^{-a^2\lambda^2 t}\left[\hat{\varphi}(\lambda)+\int_0^t \hat{f}(\lambda,\tau)e^{a^2\lambda^2\tau}d\tau\right]$

两边进行 Fourier 逆变换，得：

$$u(x,t)=F^{-1}\left[e^{-a^2\lambda^2 t}\hat{\varphi}(\lambda)\right]+\int_0^t F^{-1}\left[\hat{f}(\lambda,\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\right]d\tau$$

由于：

$$F^{-1}\left[e^{-a^2\lambda^2 t}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}e^{i\lambda x}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x dx$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2yx dx=\frac{\sqrt{x}}{2}e^{-y^2}$$

得： $$F^{-1}\left[e^{-a^2\lambda^2 t}\right]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

类似地： $$F^{-1}\left[e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\right]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

于是得：

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}d\xi$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}f(\xi,\tau)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi$$

例 1：求解方程$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = x^2 + 1 \end{cases}$

解：利用初值问题的解，得：

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 + 1) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

由于$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{2a^2 t} = 2a\sqrt{\pi t}$

而$\xi^2 + 1 = (\xi - x)^2 + 2x(\xi - x) + x^2 + 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = -2a^2 t e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi - x)^2 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}(\xi - x)d\left[-2a^2te^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\right]$$

$$= -2a^2t(\xi - x)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + 2a^2t\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi$$

$$= 4a^3t\sqrt{\pi t}$$

故 $u(x,t) = 2a^2t + (x^2 + 1)$

上页 下页 返回

利用延拓方法可以求解半直线上热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & x > 0, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \qquad (2.5)$$

解：作 $\varphi(x)$ 的偶延拓：$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \geq 0 \\ \varphi(-x) & x < 0 \end{cases}$.

于是初值问题：

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0 & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ v(x,0) = \overline{\varphi}(x) \end{cases}$$

的解 $v(x,t)$ 是 x 的偶函数且 $v_x(0,t) = 0$。

上页 下页 返回

当 $x \geq 0$ 时，$v(x,t)$ 就是（2.5）的解，故

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\int_0^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi+\int_{-\infty}^{0}\varphi(-\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi\right]$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\varphi(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi \qquad x\geq 0$$

2.3 极限原理及其应用

定理 3:（极限原理）设函数 $u(x,t)$ 在闭矩形区域 $\overline{\Omega}=\{(x,t)\mid\alpha\le x\le\beta,0\le t\le T\}$ 上连续，在 $\Omega=\{(x,t)\mid\alpha<x<\beta,0<t\le T\}$ 上满足热传导方程: $u_t-a^2u_{xx}=0$，用 Γ 表示 $\overline{\Omega}$ 的两条侧边 $x=\alpha$ 和 $x=\beta$ 以及底边 $t=0$，则函数 $u(x,t)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的最大值和最小值一定在 Γ 上取值。

定理 4：若热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(\alpha,t) = g(t), u(\beta,t) = h(t) \end{cases}$$

有解，则解唯一，并且解连续依赖于初始条件和边界条件。