华东理工大学 2016－2017 学年第二学期

《高等数学（下）11 学分》课程期中考试评分标准　2017.4

一．填空题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）：

1、函数 $z=\arctan\dfrac{y}{x^2}$ 对 x 变量的偏导数 $z_x=$ ________________

解： $z_x=-\dfrac{2xy}{x^4+y^2}$

2、设 $u=f(xe^y,ye^x,xy^2\cos^2 x)$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=$ ________________

解： $\dfrac{\partial u}{\partial y}=xe^y f_1+e^x f_2+2xy\cos^2 xf_3$

3、设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xy^2z=x+y+z$ 所确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ = ________________

解： $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2xyz-1}{1-xy^2}$

4、设 $\vec{a}=\{1,-2,2\}$，$\vec{b}=\{3,0,-4\}$，则 $(\vec{a}+\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})=$ ________________

解： $(\vec{a}+\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})=\{4,-2,-2\}\times\{0,-6,10\}=\{-32,-40,-24\}$

5、微分方程 $y'''-5y''+4y'=0$ 的通解 $y=$ ________________

解： $y=c_1+c_2e^x+c_3e^{4x}$

6、微分方程 $(1+y^2)dx-xy(1+x^2)dy=0$ 的通解为 ________________

解： $x^2=c(1+x^2)(1+y^2)$

7、微分方程 $y'-(x+1)y''=0$ 的通解 $y=$ ________________

解： $y=c_1(x+1)^2+c_2$

8、设平面 π 过直线 $L:\begin{cases}x+5y+z=0,\\ x-z+4=0\end{cases}$ 且与平面 $\pi_1: x-4y-8z+12=0$ 成 45° 角，

则平面 π 的方程为 ________________

解：过直线 L 的平面束方程$\pi(\lambda)$： $x-z+4+\lambda(x+5y+z)=0$，即

$$\pi(\lambda):\quad (1+\lambda)x+5\lambda y+(\lambda-1)z+4=0$$

因平面π与π_1夹角为45°，所以

$$\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1+\lambda+5\lambda(-4)+(\lambda-1)(-8)}{\sqrt{1+16+64}\cdot\sqrt{(1+\lambda)^2+25\lambda^2+(\lambda-1)^2}}=\frac{1-3\lambda}{\sqrt{27\lambda^2+2}}$$

解得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=-\frac{4}{3}$.

所以所求平面π的方程为

$$x-z+4=0 \quad 或 \quad x+20y+7z-12=0。$$

9、微分方程 $y''-6y'+9y=(x+1)e^{3x}$ 的通解 $y=$ ______________________

解： $y=(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6})e^{3x}+(c_1+c_2x)e^{3x}$

10、设 $z=z(x,y)$ 由方程 $z+\ln z-\int_y^x e^{-t^2}dt=0$ 所确定，则 $dz=$ ______________

解： $dz=\frac{ze^{-x^2}}{1+z}dx-\frac{ze^{-y^2}}{1+z}dy$

二．选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）：BBACDC

1、微分方程 $y''+y=2x\sin x$ 的一个特解应具有形式 （ ）

（A）$(Ax+B)\sin x$ （B）$x(Ax+B)\sin x+x(Cx+D)\cos x$

（C）$x(Ax+B)(\cos x+\sin x)$ （D）$x(Ax+B)(C\sin x+D\cos x)$

解：B

2、曲面 $z=3\sqrt{x^2+y^2}$ 是 （ ）

（A）zox 平面上曲线 $z=3x$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面

（B）zoy 平面上曲线 $z=3|y|$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面

（C）zox 平面上曲线 $z=3x$ 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面

（D）zoy 平面上曲线 $z=3|y|$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面

解：（B）

3、已知方程 $xy''+y'=4x$ 的一个特解为 x^2，又其对应的齐次方程有一特解 $\ln x$，则它的通解

为 （ ）

（A） $y=c_1\ln x+c_2+x^2$ （B） $y=c_1\ln x+c_2x+x^2$

（C） $y=c_1\ln x+c_2e^x+x^2$ （D） $y=c_1\ln x+c_2e^{-x}+x^2$

解：（A）

4、设 $u=2xy-z^2$,则 u 在点 $(2,-1.1)$ 处的方向导数的最大值为 （ ）

(A) $\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{6}$ (D) $2\sqrt{2}$

解： （C）

5、函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+|y|^4}$ 在 $(0,0)$ 点处 （ ）

（A） $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$ 都存在； （B） $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$ 都不存在；

（C） $f_x'(0,0)$ 存在，但 $f_y'(0,0)$ 不存在； （D） $f_x'(0,0)$ 不存在，但 $f_y'(0,0)$ 存在.

解：（D）.

6、下列函数中,在原点处连续的是 （ ）

（A）$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ （B）$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

（C）$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin x\sin y}{xy}, & xy\neq 0\\ 1, & xy=0\end{cases}$ （D）$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 1, & x^2+y^2=0\end{cases}$

解：**(C)**

三、（**本题 9 分**） 求解初值问题：$\begin{cases}2yy''=(y')^2+y^2\\ y(0)=1, y'(0)=-1\end{cases}$

解： 令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$， 2 分

代入方程得 $2yp\dfrac{dp}{dy}=p^2+y^2\Rightarrow\dfrac{d(p^2)}{dy}-\dfrac{1}{y}p^2=y$，令 $u=p^2$， 3 分

则有 $\dfrac{du}{dy}-\dfrac{1}{y}u=y$，其通解 $u=y(y+c_1)$

令 $x=0,y=1,p=-1$，得 $c_1=0$ $\Rightarrow p^2=y^2$ $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\pm y$

由初始条件 $x=0,y=1,p=-1$ 知 $\dfrac{dy}{dx}=-y$，解得 $y=ce^{-x}$

再令 $x=0,y=1$ 得 $c=1$，所以初值问题的解 $y=e^{-x}$。 4 分

四、（本题 9 分）求过直线 $\begin{cases}x+2y+z-1=0\\x-y-2z+3=0\end{cases}$ 的平面使之平行于曲线 $\begin{cases}2x^2+2y^2=z^2\\x+y+2z=4\end{cases}$ 在点 $(1,-1,2)$ 处的切线。

解：过直线 L 的平面束方程 $\pi(\lambda)$: $x+2y+z-1+\lambda(x-y+2z+3)=0$， 2 分

$\pi(\lambda)$ 的法向：$\vec{n}(\lambda)=\{1+\lambda,2-\lambda,1-2\lambda\}$

因为 $\nabla(2x^2+2y^2-z^2)\times\nabla(x+y+2z-4)\big|_{(1,-1,2)}=4\{-1,-3,2\}$， 3 分

曲线 $\begin{cases}2x^2+2y^2=z^2\\x+y+2z=4\end{cases}$ 在点 $(1,-1,2)$ 处的切线方向：$\vec{l}=\{-1,-3,2\}$

由条件 $\vec{n}(\lambda)\cdot\vec{l}=0\Rightarrow\lambda=-\dfrac{5}{2}$，

所以所求平面方程：$3x-9y-12z+17=0$。 4 分

五、（本题 9 分）试证明曲面 $f(x^2+y^2,z)=0$ 上任一点处的法线与 z 轴都共面。

解： 设 $M(x,y,z)$ 是曲面上的任意一点，则曲面在 $M(x,y,z)$ 点处的法线方向为

$$\vec{l}=\nabla f=\{2xf_1,2yf_1,f_2\},$$

经 $M(x,y,z)$ 点的法线方程 L：$\dfrac{X-x}{2xf_1}=\dfrac{Y-y}{2yf_1}=\dfrac{Z-z}{f_2}$

由于 z 轴经过原点 O，且 $(\vec{k}\times\vec{l})\cdot\overrightarrow{OM}=\begin{vmatrix}0&0&1\\2xf_1&2yf_1&f_2\\x&y&z\end{vmatrix}=2xyf_1-2xyf_1=0$

所以法线与 z 轴共面。

六、（本题 9 分）已知 $y_1=e^x$ 是二阶线性齐次方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的一个解,求此方程的通解。

解法一： 用常数变易法。设方程的另一解为 $y_2 = u(x)e^x$， 2 分

则 $y_2' = u'e^x + ue^x$， $y_2'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x$，代入方程得

$$(2x-1)u'' + (2x-3)u' = 0 \text{，即} \frac{u''}{u'} = -\frac{2x-3}{2x-1}$$

积分得 $u' = c(2x-1)e^{-x}$。

取 $c=1$，则 $u' = (2x-1)e^{-x}$，积分得 $u = -(2x+1)e^{-x}$。 4 分

所以方程有一解 $y_2 = -(2x+1)$，且与解 $y_1 = e^x$ 线性无关，

所以方程的通解 $y = c_1e^x + c_2(2x+1)$。 3 分

解法二： 取 $y_2 = 2x+1$， 3 分

显然 $(2x-1)y_2'' - (2x+1)y_2' + 2y_2 = (2x-1)0 - (2x+1)\cdot 2 + 2(2x+1) = 0$

即 $y_2 = 2x+1$ 是原方程的特解. 3 分

又因为 y_1, y_2 线性无关，且原方程为二阶线性微分方程，因此方程的通解为

$$y = c_1e^x + c_2(2x+1) \text{。} \quad 3 \text{ 分}$$