

# 第六章

## 时间序列计量经济学模型

## § 6.1 时间序列的平稳性及其检验

# 一、问题的引出：非平稳变量与经典 回归模型

# 1.常见的数据类型

到目前为止，经典计量经济模型常用到的数据有：

- 时间序列数据（time-series data）;
- 截面数据(cross-sectional data)

★时间序列数据是最常见，也是最常用到的数据。

## 2.经典回归模型与数据的平稳性

- 经典回归分析暗含着一个重要假设：数据是平稳的。
  - 经典回归分析的假设之一：解释变量 $X$ 是非随机变量
  - 放宽该假设： $X$ 是随机变量，则需进一步要求：
    - (1) $X$ 与随机扰动项  $\mu$  不相关： $\text{Cov}(X, \mu)=0$
    - (2)  $\sum (X_i - \bar{X})^2 / n$  依概率收敛： $\underset{n \rightarrow \infty}{P} \lim (\sum (X_i - \bar{X})^2 / n) = Q$
- ▲如果 $X$ 是非平稳数据（如表现出向上的趋势），回归估计量不满足“一致性”，基于大样本的统计推断也就遇到麻烦。

### 3. 数据非平稳，往往导致出现“虚假回归”问题

表现在:两个本来没有任何因果关系的变量，却有很高的相关性（有较高的 $R^2$ ）:

情况往往是实际的时间序列数据是非平稳的，而且主要的经济变量如消费、收入、价格往往表现为一致的上升或下降。这样，仍然通过经典的因果关系模型进行分析，一般不会得到有意义的结果。

**时间序列分析模型方法**就是在这样的情况下，  
以通过揭示时间序列自身的变化规律为主线而发  
展起来的全新的计量经济学方法论。

**时间序列分析**已组成现代计量经济学的重要内  
容，并广泛应用于经济分析与预测当中。

- 随机时间序列分析最早产生于20世纪30年代，尤尔（Yule）和伍尔德（Wold）做了大量研究。但是因为计算复杂，进展不大。
- 随后计算机的出现和应用，计算上的困难得以解决。
- 美国的博克斯（Box）教授和英国的詹金斯（Jenkins）教授在这一领域做出了许多创造性研究，于20世纪70年代初提出了随机时间序列的理论分析和应用方法，使随机时间序列分析方法得到快速发展。
- 博克斯-詹金斯法（B-J法、ARMA法）是目前公认的最好的单一变量时间序列分析法，也是一种精确度较高的短期预测法。



## 二、时间序列数据的平稳性

假定某个时间序列 $\{X_t\}$  ( $t=1, 2, \dots$ ) 是由某一随机过程 (**stochastic process**) 生成的, 如果满足下列条件:

- 1) 均值 $E(X_t)=\mu$ 是与时间 $t$  无关的常数;
- 2) 方差 $\text{Var}(X_t)=\sigma^2$ 是与时间 $t$  无关的常数;
- 3) 协方差 $\text{Cov}(X_t, X_{t+k})=\gamma_k$  是只与时期间隔 $k$ 有关, 与时间 $t$  无关的常数;

则称该随机时间序列是平稳的 (**stationary**), 而该随机过程是一平稳随机过程 (**stationary stochastic process**) 。

例6.1.1. 一个最简单的随机时间序列是一具有零均值同方差的独立分布序列：

$$X_t = \mu_t, \quad \mu_t \sim N(0, \sigma^2)$$

该序列常被称为是一个白噪声（white noise）。

由于 $X_t$ 具有相同的均值与方差，且协方差为零，由定义，一个白噪声序列是平稳的。

例6.1.2. 另一个简单的随机时间列序被称为**随机游走 (random walk)**，该序列由如下随机过程生成：

$$X_t = X_{t-1} + \mu_t$$

这里， $\mu_t$ 是一个白噪声。

容易知道该序列有相同的**均值**： $E(X_t) = E(X_{t-1})$

为了检验该序列是否具有相同的方差，可假设 $X_t$ 的初值为 $X_0$ ，则易知

$$X_t = X_0 + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_t$$

由于 $X_0$ 为常数， $\mu_t$ 是一个白噪声，因此 $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$

**即 $X_t$ 的方差与时间 $t$ 有关而非常数，它是一非平稳序列。**

- 然而，对X取一阶差分（**first difference**）：

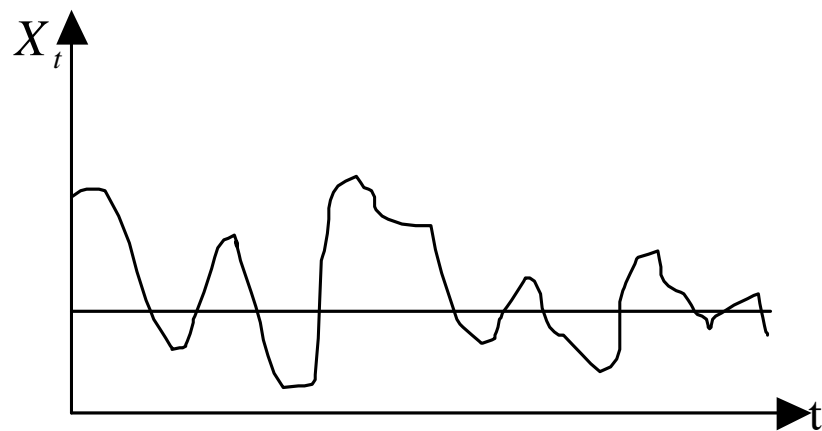
$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \mu_t$$

由于 $\mu_t$ 是一个白噪声，则序列 $\{\Delta X_t\}$ 是平稳的。

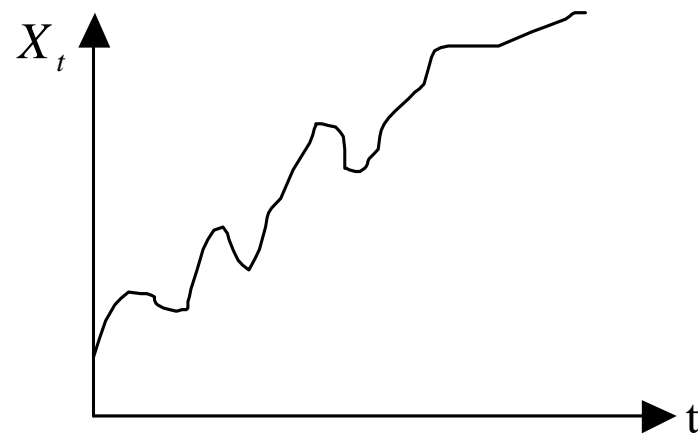
后面将会看到：如果一个时间序列是非平稳的，它常常可通过取差分的方法而形成平稳序列。

### 三、平稳性检验的图示判断

- 给出一个随机时间序列，首先可通过该序列的**时间路径图**来粗略地判断它是否是平稳的。
- 一个**平稳的时间序列**在图形上往往表现出一种围绕其均值不断波动的过程；
- 而**非平稳序列**则往往表现出在不同的时间段具有不同的均值（如持续上升或持续下降）。



(a)



(b)

图 9.1 平稳时间序列与非平稳时间序列图



- 进一步的判断:

## 检验样本自相关函数及其图形

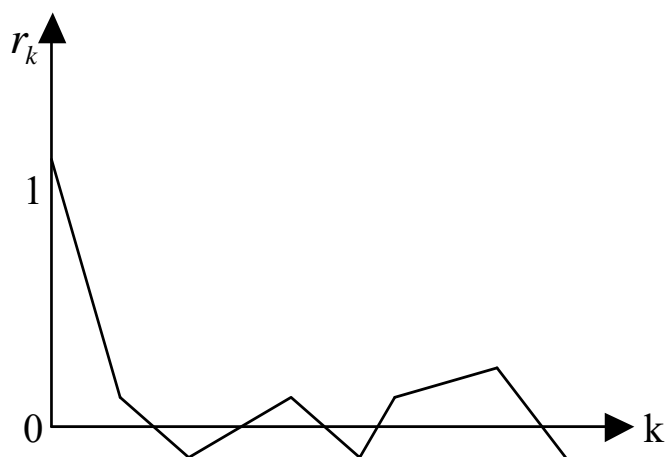
定义随机时间序列的**自相关函数**（**autocorrelation function, ACF**）如下：

$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$$

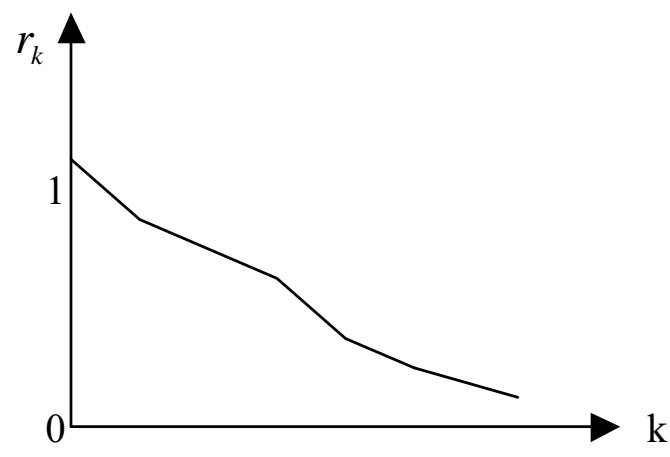
**样本自相关函数**（Sample autocorrelation function）。

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

易知，随着 $k$ 的增加，样本自相关函数下降且趋于零。但从下降速度来看，平稳序列要比非平稳序列快得多。



(a)



(b)

图 9.1.2 平稳时间序列与非平稳时间序列样本相关图

## 四、平稳性的单位根检验

**单位根检验 (unit root test)** 是统计检验中普遍应用的一种检验方法。

## 1、DF检验

我们已知道，随机游走序列

$$X_t = X_{t-1} + \mu_t$$

是非平稳的，其中 $\mu_t$ 是白噪声。

而该序列可看成是随机模型

$$X_t = \rho X_{t-1} + \mu_t$$

中参数 $\rho=1$ 时的情形。

也就是说，我们对式

$$X_t = \rho X_{t-1} + \mu_t \quad (*)$$

做回归，如果确实发现 $\rho=1$ ，就说随机变量 $X_t$ 有一个单位根。

- $(*)$  式可变形形式成差分形式：

$$\begin{aligned} \Delta X_t &= (\rho - 1)X_{t-1} + \mu_t \\ &= \delta X_{t-1} + \mu_t \end{aligned} \quad (**)$$

检验  $(*)$  式是否存在单位根 $\rho=1$ ，也可通过  $(**)$  式判断是否有 $\delta=0$ 。

一般地：

- 检验一个时间序列 $X_t$ 的平稳性，可通过检验带有截距项的一阶自回归模型

$$X_t = \alpha + \rho X_{t-1} + \mu_t \quad (*)$$

中的参数 $\rho$ 是否小于1。

或者：检验其等价变形式

$$\Delta X_t = \alpha + \delta X_{t-1} + \mu_t \quad (**)$$

中的参数 $\delta$ 是否小于0。

在第二节中将证明，(\*)式中的参数 $\rho > 1$ 或 $\rho = 1$ 时，时间序列是非平稳的；

对应于(\*\*)式，则是 $\delta > 0$ 或 $\delta = 0$ 。

Dicky和Fuller于1976年提出了这一情形下t统计量服从的分布（这时的t统计量称为 $\tau$ 统计量），即**DF分布**（见表9.1.3）。

表 9.1.3 DF 分布临界值表

显著性水平	样 本 容 量					t分布临界值 ( $n=\infty$ )
	25	50	100	500	$\infty$	
0.01	-3.75	-3.58	-3.51	-3.44	-3.43	-2.33
0.05	-3.00	-2.93	-2.89	-2.87	-2.86	-1.65
0.10	-2.63	-2.60	-2.58	-2.57	-2.57	-1.28

- 因此，可通过OLS法估计

$$\Delta X_t = \alpha + \delta X_{t-1} + \mu_t$$

并计算t统计量的值，与DF分布表中给定显著性水平下的临界值比较：

如果：t < 临界值，则拒绝零假设  $H_0: \delta = 0$ ，  
认为时间序列不存在单位根，是平稳的。



## 2、ADF检验

**DF**检验假定了时间序列是由具有白噪声随机误差项的一阶自回归过程**AR(1)**生成的。

但在实际检验中，时间序列可能由更高阶的自回归过程生成的，或者随机误差项并非白噪声，这样用**OLS**法进行估计均会表现出随机误差项出现自相关（autocorrelation），导致DF检验无效。

另外，如果时间序列包含有明显的随时间变化的某种趋势（如上升或下降），则也容易导致上述检验中的自相关随机误差项问题。

为了保证DF检验中随机误差项的白噪声特性，Dicky和Fuller对DF检验进行了扩充，形成了**ADF（Augment Dickey-Fuller）**检验。

**ADF检验是通过下面三个模型完成的：**

模型 1: 
$$\Delta X_t = \delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^m \beta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (*)$$

模型 2: 
$$\Delta X_t = \alpha + \delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^m \beta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (**)$$

模型 3: 
$$\Delta X_t = \alpha + \beta t + \delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^m \beta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (***)$$

- **模型3 中的t是时间变量**，代表了时间序列随时间变化的某种趋势（如果有的话）。
- **检验的假设都是：针对H1:  $\delta < 0$ , 检验 H0:  $\delta = 0$ , 即存在一单位根。**

每个模型中选取适当的滞后差分项，估计出上述三个模型的适当形式。然后从模型3开始，然后模型2、模型1进行检验

1) 只要其中有一个模型的检验结果拒绝了零假设，就可以认为时间序列是平稳的；

2) 当三个模型的检验结果都不能拒绝零假设时，则认为时间序列是非平稳的。

**检验原理**与DF检验相同，只是对模型1、2、3进行检验时，有各自相应的临界值。

表 9.1.4 不同模型使用的 ADF 分布临界值表

模型	统计量	样本容量	0.01	0.025	0.05	0.10
1	$\tau_{\delta}$	25	-2.66	-2.26	-1.95	-1.60
		50	-2.62	-2.25	-1.95	-1.61
		100	-2.60	-2.24	-1.95	-1.61
		250	-2.58	-2.23	-1.95	-1.61
		500	-2.58	-2.23	-1.95	-1.61
		>500	-2.58	-2.23	-1.95	-1.61
2	$\tau_{\delta}$	25	-3.75	-3.33	-3.00	-2.62
		50	-3.58	-3.22	-2.93	-2.60
		100	-3.51	-3.17	-2.89	-2.58
		250	-3.46	-3.14	-2.88	-2.57
		500	-3.44	-3.13	-2.87	-2.57
		>500	-3.43	-3.12	-2.86	-2.57
	$\tau_{\alpha}$	25	3.41	2.97	2.61	2.20
		50	3.28	2.89	2.56	2.18
		100	3.22	2.86	2.54	2.17
		250	3.19	2.84	2.53	2.16
		500	3.18	2.83	2.52	2.16
		>500	3.18	2.83	2.52	2.16
3	$\tau_{\delta}$	25	-4.38	-3.95	-3.60	-3.24
		50	-4.15	-3.80	-3.50	-3.18
		100	-4.04	-3.73	-3.45	-3.15
		250	-3.99	-3.69	-3.43	-3.13
		500	-3.98	-3.68	-3.42	-3.13
		>500	-3.96	-3.66	-3.41	-3.12
	$\tau_{\alpha}$	25	4.05	3.59	3.20	2.77
		50	3.87	3.47	3.14	2.75
		100	3.78	3.42	3.11	2.73
		250	3.74	3.39	3.09	2.73
		500	3.72	3.38	3.08	2.72
		>500	3.71	3.38	3.08	2.72
	$\tau_{\beta}$	25	3.74	3.25	2.85	2.39
		50	3.60	3.18	2.81	2.38
		100	3.53	3.14	2.79	2.38
		250	3.49	3.12	2.79	2.38
		500	3.48	3.11	2.78	2.38
		>500	3.46	3.11	2.78	2.38

### 例9.1.6 检验1978~2000年间GDP时间序列的平稳性。

1) 经过尝试, 模型3取了2阶滞后:

$$\Delta GDP_t = -1011.33 + 229.27T + 0.0093GDP_{t-1} + 1.50\Delta GDP_{t-1} - 1.01\Delta GDP_{t-2}$$

(-1.26)    (1.91)            (0.31)            (8.94)            (-4.95)

通过拉格朗日乘数检验 (Lagrange multiplier test) 对随机误差项的自相关性进行检验:

$$LM(1) = 0.92, \quad LM(2) = 4.16,$$

小于5%显著性水平下自由度分别为1与2的 $\chi^2$ 分布的临界值, 可见不存在自相关性, 因此该模型的设定是正确的。

从 $\delta$ 的系数看,  $t >$  临界值, 不能拒绝存在单位根为零假设。

时间T的t统计量小于ADF分布表中的临界值, 因此不能拒绝不存在趋势项的零假设。需进一步检验模型2。

## 回顾：拉格朗日乘数（Lagrange multiplier）检验

拉格朗日乘数检验适合于：高阶序列相关以及模型中存在滞后被解释变量的情形。

对于模型

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \mu_i$$

如果怀疑随机扰动项存在**p阶序列相关**：

$$\mu_t = \rho_1 \mu_{t-1} + \rho_2 \mu_{t-2} \cdots + \rho_p \mu_{t-p} + \varepsilon_t$$

作辅助回归：

$$\tilde{e}_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \tilde{e}_1 \mu_{t-1} + \cdots + \rho_p \tilde{e}_{t-p} + \varepsilon_t$$

## 回顾：拉格朗日乘数（Lagrange multiplier）检验

计算：

$$LM = (n - p)R^2 \sim \chi^2(p)$$

其中， $n$ 为样本容量， $R^2$ 为如下辅助回归的可决系数：

给定 $\alpha$ ，查临界值 $\chi_{\alpha}^2(p)$ ，与LM值比较，做出判断，

实际检验中，可从1阶、2阶、...逐次向更高阶检验。

2) 经试验, 模型2中滞后项取2阶:

$$\Delta GDP_t = 357.45 + 0.057GDP_{t-1} + 1.65\Delta GDP_{t-1} - 1.15\Delta GDP_{t-2}$$

$$\begin{array}{cccc} (-0.90) & (3.38) & (10.40) & (-5.63) \end{array}$$

$$\text{LM (1)} = 0.57 \quad \text{LM (2)} = 2.85$$

LM检验表明模型残差不存在自相关性, 因此该模型的设定是正确的。

从 $GDP_{t-1}$ 的参数值看, 其t统计量为正值, 大于临界值, 不能拒绝存在单位根为零假设。

常数项的t统计量小于AFD分布表中的临界值, 不能拒绝不存常数项的零假设。需进一步检验模型1。



3) 经试验，模型1中滞后项取2阶：

$$\Delta GDP_t = 0.063GDP_{t-1} + 1.701\Delta GDP_{t-1} - 1.194\Delta GDP_{t-2}$$

$$(4.15) \qquad (11.46) \qquad (-6.05)$$

$$LM(1) = 0.17 \qquad LM(2) = 2.67$$

LM检验表明模型残差项不存在自相关性，因此模型的设定是正确的。

从 $GDP_{t-1}$ 的参数值看，其t统计量为正值，大于临界值，不能拒绝存在单位根为零假设。

- 可断定中国支出法GDP时间序列是非平稳的。

- 例9.1.7 检验 § 2. 10中关于人均居民消费与人均国内生产总值这两时间序列的平稳性。

1)对中国人均国内生产总值GDPPC来说，经过尝试，三个模型的适当形式分别为

模型 3:

$$\Delta GDPPC_t = -75.08 + 45.36t - 0.15GDPPC_{t-1} + 1.03\Delta GDPPC_{t-1}$$

$$\begin{array}{cccc} (-0.75) & (1.93) & (-1.04) & (2.31) \\ LM(1) = 2.88 & & LM(2) = 1.86 & \end{array}$$

模型 2:

$$\Delta GDPPC_t = -192.02 + 0.652GDPPC_{t-1} + 0.040\Delta GDPPC_{t-1} - 1.425\Delta GDPPC_{t-2}$$

$$\begin{array}{cccc} (-1.78) & (3.26) & (0.08) & (-2.96) \end{array}$$

$$- 0.412\Delta GDPPC_{t-3} - 1.403\Delta GDPPC_{t-4}$$

$$\begin{array}{cccc} (-0.67) & & (-2.20) & \\ LM(1) = 1.67 & LM(2) = 1.71 & LM(3) = 6.28 & LM(4) = 10.92 \end{array}$$

模型 1:

$$\Delta GDP_{PC_t} = 0.196 GDP_{PC_{t-1}} + 0.875 \Delta GDP_{PC_{t-1}} - 0.975 \Delta GDP_{PC_{t-2}}$$

(2.63)

(2.61)

(-2.72)

LM (1) = 0.20

LM (2) = 3.53

- 三个模型中参数的估计值的t统计量均大于各自的临界值，因此不能拒绝存在单位根为零假设。
- 结论：人均国内生产总值（GDP<sub>PC</sub>）是非平稳的。

## 2) 对于人均居民消费CPC时间序列来说, 三个模型的适当形式为

模型 3:

$$\Delta CPC_t = -26.23 + 34.98t - 0.3646CPC_{t-1} + 1.4627\Delta CPC_{t-1}$$

$$(-0.477) \quad (2.175) \quad (-1.478) \quad (2.318)$$

$$LM(1)=1.577 \quad LM(2)=1.834$$

模型 2:

$$\Delta CPC_t = -79.88 + 0.545CPC_{t-1} + 0.508\Delta CPC_{t-1} - 1.655\Delta CPC_{t-2} - 0.027\Delta CPC_{t-3}$$

$$(-1.37) \quad (3.37) \quad (1.16) \quad (-3.44) \quad (-0.05)$$

$$-1.824\Delta CPC_{t-4}$$

$$(-3.03)$$

$$LM(1)=3.57 \quad LM(2)=4.10 \quad LM(3)=4.89 \quad LM(4)=10.99$$

模型 1:

$$\Delta CPC_t = 0.37CPC_{t-1} + 0.88\Delta CPC_{t-1} - 1.48\Delta CPC_{t-2} + 0.08\Delta CPC_{t-3} - 1.71\Delta CPC_{t-4}$$

(3.60)	(2.37)	(-2.97)	(0.12)	(-2.68)
LM(1)=1.83	LM(2)= 1.84	LM(3)=2.00	LM(4)=2.33	

- 三个模型中参数 $CPC_{t-1}$ 的t统计量的值均比ADF临界值表中各自的临界值大，不能拒绝该时间序列存在单位根的假设，
- 因此，可判断人均居民消费序列CPC是非平稳的。

## 五、单整、趋势平稳与差分平稳随机过程

## 1.单整

随机游走序列

$$X_t = X_{t-1} + \mu_t$$

经差分后等价地变形为

$$\Delta X_t = \mu_t$$

由于 $\mu_t$ 是一个白噪声，因此差分后的序列 $\{\Delta X_t\}$ 是平稳的。

如果一个时间序列经过一次差分变成平稳的，就称原序列是一阶单整（**integrated of 1**）序列，记为**I(1)**。

一般地，如果一个时间序列经过**d**次差分后变成平稳序列，则称原序列是**d 阶单整**（**integrated of d**）**序列**，记为**I(d)**。

显然，**I(0)**代表一平稳时间序列。

现实经济生活中：

大多数非平稳的时间序列一般可通过一次或多次差分的形式变为平稳的。

但也有一些时间序列，无论经过多少次差分，都不能变为平稳的。这种序列被称为**非单整的**（**non-integrated**）。



## 2. 趋势平稳与差分平稳随机过程

考虑如下的含有一阶自回归的随机过程：

$$X_t = \alpha + \beta t + \rho X_{t-1} + \mu_t \quad (*)$$

其中： $\mu_t$ 是一白噪声， $t$ 为一时间趋势。

1)如果 $\rho=1$ ， $\beta=0$ ，则 $(*)$ 式成为一带位移的随机游走过程：

$$X_t = \alpha + X_{t-1} + \mu_t \quad (**)$$

根据 $\alpha$ 的正负， $X_t$ 表现出明显的上升或下降趋势。这种趋势称为**随机性趋势 (stochastic trend)**。

2)如果 $\rho=0$ ， $\beta \neq 0$ ，则 $(*)$ 式成为一带时间趋势的随机变化过程：

$$X_t = \alpha + \beta t + \mu_t \quad (***)$$

根据 $\beta$ 的正负， $X_t$ 表现出明显的上升或下降趋势。这种趋势称为**确定性趋势 (deterministic trend)**。

3) 如果 $\rho=1$ ,  $\beta \neq 0$ , 则 $X_t$ 包含有**确定性与随机性两种趋势**。

判断一个非平稳的时间序列, 它的趋势是随机性的还是确定性的, 可通过ADF检验中所用的第3个模型进行。

因此, **(1)如果检验结果表明所给时间序列有单位根, 且时间变量前的参数显著为零, 则该序列显示出随机性趋势;**

**(2)如果没有单位根, 且时间变量前的参数显著地异于零, 则该序列显示出确定性趋势。**

随机性趋势可通过差分的方法消除

如：对式

$$X_t = \alpha + X_{t-1} + \mu_t$$

可通过差分变换为

$$\Delta X_t = \alpha + \mu_t$$

该时间序列称为**差分平稳过程（difference stationary process）**；

确定性趋势无法通过差分的方法消除，而只能通过除去趋势项消除，

如：对式

$$X_t = \alpha + \beta t + \mu_t$$

可通过除去 $\beta t$ 变换为

$$X_t - \beta t = \alpha + \mu_t$$

该时间序列是平稳的，因此称为**趋势平稳过程**（**trend stationary process**）。

例1 设  $\{\varepsilon_t\}$  是一个均值为0，方差为1的独立同分布随机时间序列，定义如下随机过程

$$X_t = \varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-2}$$

- (1) 求  $E(X_t), Var(X_t)$ .
- (2) 证明自相关函数  $\rho_1 = -\frac{1}{2}, \rho_2 = \frac{1}{3}$
- (3) 当  $k > 2$  时，自相关函数  $\rho_k$  应为多少？

例2 设 $X_t$ 为一随机游走序列:  $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ .  
其中 $\varepsilon_t$ 是白噪声序列,且 $X_0=0$ .  
证明 $X_t$ 与 $X_{t+k}$ 的相关系数为:

$$\text{Corr}(X_t, X_{t+k}) = \sqrt{\frac{t}{t+k}}.$$