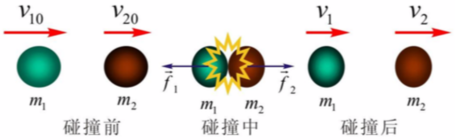
# 2.7 碰撞

如果两个或几个物体在相遇中，物体之间的相互作用仅持续一个极为短暂的时间，这些现象就是碰撞．如:撞击、打桩、锻铁等，以及微观粒子间的非接触相互作用过程即散射等．

讨论两球的对心碰撞或称正碰撞：即碰撞前后两球的速度在两球的中心连线上．

1．碰撞过程系统动量守恒:

$$m_1v_{10}+m_2v_{20}=m_1v_1+m_2v_2$$



# 2.7 碰撞

2. 牛顿的碰撞定律：碰撞后两球的分离速度$(v_2 - v_1)$，与碰撞前两球的接近速度$(v_{10} - v_{20})$成正比，比值由两球的材料性质决定。即恢复系数：

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$

完全弹性碰撞：

$$e = 1, \quad v_2 - v_1 = v_{10} - v_{20}$$

非弹性碰撞：

$$0 < e < 1$$

完全非弹性碰撞：

$$e = 0, \quad v_2 = v_1$$

# 2.7 碰撞

## 1. 完全弹性碰撞:

$$e = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &= \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} \\ v_2 &= \frac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1 v_{10}}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

机械能损失:

$$\Delta E = -\frac{1}{2}(1 - e^2)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_{10} - v_{20})^2 = 0$$

完全弹性碰撞过程，系统的机械能(动能)也守恒。

# 2.7 碰撞

讨论:

(1) 当$m_1 = m_2$时，则 $v_1 = v_{20}$，$v_2 = v_{10}$;

质量相等的两个质点在碰撞中交换彼此的速度.

(2) 若$v_{20} = 0$且$m_1 \ll m_2$，则$v_1 \approx -v_{10}$，$v_2 \approx 0$

质量很小的质点与质量很大的静止质点碰撞后，反方向运动，而质量很大的质点几乎保持不动.

若$v_{20} = 0$且$m_1 \gg m_2$，则$v_1 \approx v_{10}$，$v_2 = 2v_{10}$

质量很大的质点与质量很小的静止质点碰撞后速度几乎不变，但质量很小的质点却以近两倍的速度运动起来.

# 2.7 碰撞

## 2. 完全非弹性碰撞

$$e = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2 = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

## 3. 非弹性碰撞

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2, \qquad e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$

碰后两球的速度为

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{10} - \frac{(1+e) m_2 (v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2}, \\ v_2 &= v_{20} + \frac{(1+e) m_1 (v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

# 2.7 碰撞

机械能损失:

$$\Delta E = -\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(v_{10}-v_{20})^2$$

如打桩、打铁时 $v_{20}=0$

$$\left|\Delta E\right| = (1-e^2)\frac{1}{1+\frac{m_1}{m_2}}\frac{1}{2}m_1 v_{10}^2$$

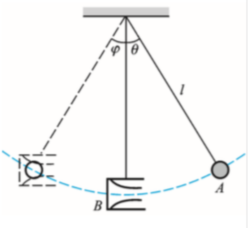
$m_1/m_2$越小，机械能损失越大；$\Rightarrow$ 打桩

$m_1/m_2$越大，机械能损失越小。$\Rightarrow$ 打铁

# 2.7 碰撞

例2.7-1 如图，$A$为一小球，$B$为蹄状物，质量分别为$m_1$和$m_2$. 开始时，将$A$球从张角$\theta$处落下，然后与静止的$B$物相碰撞，嵌入$B$中一起运动，求两物到达最高处 的张角$\varphi$.

解: (1) 先求小球从开始位置下落$h_1$到最低位置时的速度




$$
\begin{aligned}
E_1 &= m_1 g h_1 = m_1 g l(1-\cos\theta) \\
E_2 &= \frac{1}{2} m_1 v^2
\end{aligned}
$$

根据机械能守恒定律 $\frac{1}{2} m_1 v^2 = m_1 g l(1-\cos\theta)$

$$v = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$$

# 2.7 碰撞

(2) 小球与蹄状物碰撞，不受外力作用．根据动量守恒

$$m_1 v = (m_1 + m_2) v'$$

(3) 小球与蹄状物一起沿圆弧运动，上升到最大角处，悬线的拉力不做功，根据机械能守恒

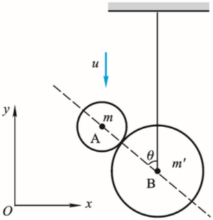
$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v'^2 = (m_1 + m_2) g l (1 - \cos\varphi)$$

从前三式消去$v$和$v'$，可得

$$\cos\varphi = 1 - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 (1 - \cos\theta)$$

# 2.7 碰撞

例2.7-2 一质量为$m$光滑球$A$，竖直下落，以速度$u$与质量为$m'$的球$B$碰撞．球$B$由一根细绳悬挂着，绳长被看作一定．设碰撞时两球的连心线与竖直方向成$\theta$角，已知恢复系数为$e$，求碰撞后球$A$的速度．




解：设$A$在碰撞后的速度分别为$v_x$与$v_y$，$B$只能沿水平方向运动，速度为$v'$．

在$x$方向所受外力为零，根据动量守恒

$$mv_x + m'v' = 0$$

设碰撞相互作用力为$F$，应用动量定理

$$\left.\begin{aligned} mv_x &= -F\sin\theta\Delta t \\ mv_y - (-mu) &= F\cos\theta\Delta t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{v_y + u}{v_x} = -\cot\theta$$

# 2.7 碰撞

接近速度: $-u\cos\theta$;

分离速度: $-(v'-v_x)\sin\theta - v_y\cos\theta$;

$$e = \frac{-(v'-v_x)\sin\theta - v_y\cos\theta}{-u\cos\theta}$$

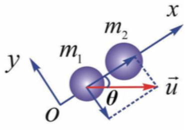
联立解得

$$\begin{aligned} v_x &= -u\frac{m'(1+e)\sin\theta\cos\theta}{m'+m\sin^2\theta} \\ v_y &= -u\left[1-\frac{m'(1+e)\cos^2\theta}{m'+m\sin^2\theta}\right] \end{aligned}$$

# 2.7 碰撞

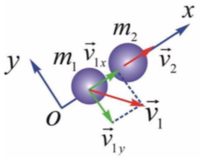
例2.7-3 光滑桌面上，质量为$m_1$的小球以速度$u$碰在质量为$m_2$的静止小球上，$u$与两球的连心线成$\theta$角(称为斜碰)。设两球表面光滑，它们相互撞击力的方向沿着两球的连心线，已知恢复系数为$e$，求碰撞后两球的速度。

解：设碰后两球速度分别为$v_1$、$v_2$，方向如图所示。




$x$、$y$方向动量分别守恒：

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_2 = m_1 u \cos\theta$$
$$m_1 v_{1y} = m_1 u \sin\theta$$




恢复系数：$e = \dfrac{v_2 - v_{1x}}{u\cos\theta}$

# 2.7 碰撞

联立三个方程后求解，得

$$
\begin{aligned}
v_{1x} &= \frac{(m_1 - e m_2) u \cos\theta}{m_1 + m_2}, \quad v_{1y} = -u \sin\theta \\
v_2 &= \frac{m_1 (1+e) u \cos\theta}{m_1 + m_2} \\
\vec{v}_1 &= v_{1x} \vec{i} - v_{1y} \vec{j}, \quad \vec{v}_2 = v_2 \vec{i}
\end{aligned}
$$

讨论：两个质量相等的小球发生弹性斜碰：

$m_1 = m_2$, $e = 1$ 时，有 $v_{1x} = 0$, 即 $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$