第二章 守恒定律
习题课

三个基本物理量：

机械能（$E_k + E_p$）、 动量（$m\vec{v}$）、 角动量（$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$）

三个定理：

$A_{外} = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \Delta E_k$ $\vec{I} = \int \vec{F} \cdot dt = \Delta \vec{P}$ $\int \vec{M} \cdot dt = \Delta \vec{L}$

三条守恒定律的条件：

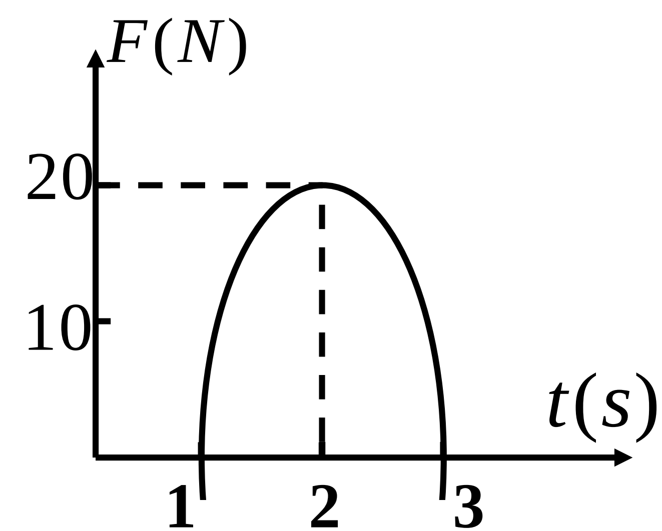
$A_{外} + A_{非保守} = 0$……………机械能守恒

$\vec{F}_{外} = 0$……………………动量守恒

$\vec{M}_{外} = 0$…………………角动量守恒

例:一物体在多个外力作用下作匀速直线运动,速率 $v=4m/s$,已知其中一力 $\vec{F}$ 的方向恒与运动方向一致,大小随时间的变化如图所示,为半个椭圆.

求(1) $\vec{F}$ 在1s到3s间作的功; (2)其它力在1s到3s间作的功



解:(1)

$$A=\int \vec{F}\bullet d\vec{r}=\int F\cdot ds$$

$$=\int F\cdot\frac{ds}{dt}\cdot dt=\int F\cdot v\cdot dt$$

$$=v\int F\cdot dt=v\cdot I=4\times\frac{\pi\times 20\times 1}{2}$$

$$=\ldots=125.6(J)$$

(2) $$A_{外}=A_F+A_{其它}=\Delta E_K=0$$

$$\rightarrow A_{其它}=-A_F=-125.6(J)$$

作业10：A、B两条船，质量都为m，静止在平静的湖面上，A船上有一质量为$m/2$的人，以水平速度u相对A船从A船跳到B船上，忽略水对船的阻力，求人跳到B船后，A船和B船的速度。

解：　设v_A、v_B　选地面参照系

人、A船为系统，研究人跳出A船的过程：

A船的速度方向与人跳出的速度方向相反

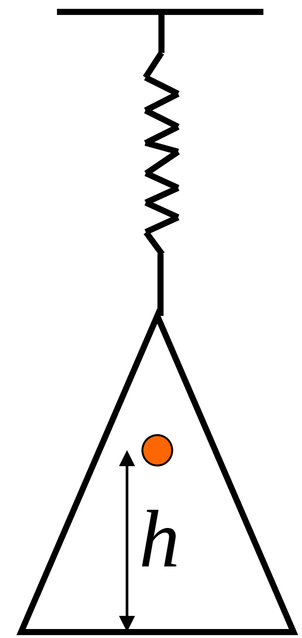
$$0 = mv_A + \frac{m}{2}v_{人} = mv_A + \frac{m}{2}(u + v_A) \rightarrow v_A = -\frac{u}{3}$$

人、B船为系统，研究人跳入B船的过程：

$$\left.\begin{aligned} \frac{m}{2}v_{人} &= \left(\frac{m}{2} + m\right)v_B \\ v_{人} &= u + v_A = u - \frac{u}{3} \end{aligned}\right\} \rightarrow v_B = \frac{2u}{9}$$

B船的速度方向与人跳入的速度方向相同

作业18：质量为$m_1=0.2\ kg$的框子，用一弹簧悬挂起来，弹簧伸长0.1 m，今有质量为$m_2=0.2\ kg$的油灰由距离框底0.3m高处的位置自由落到框上（如图）。求：油灰冲撞框子而使框向下移动的最大距离？



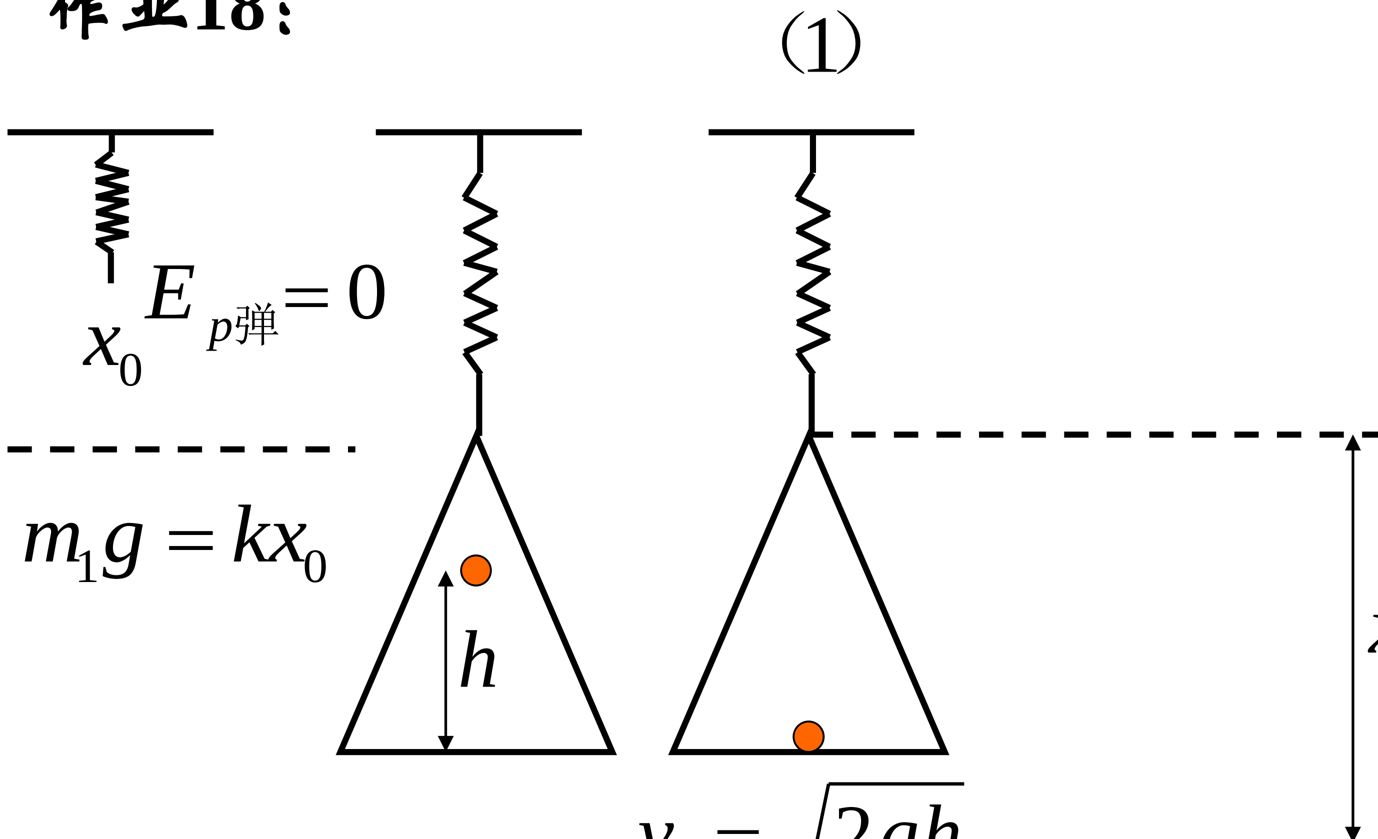
分析：

过程1：油灰m_2自由落体

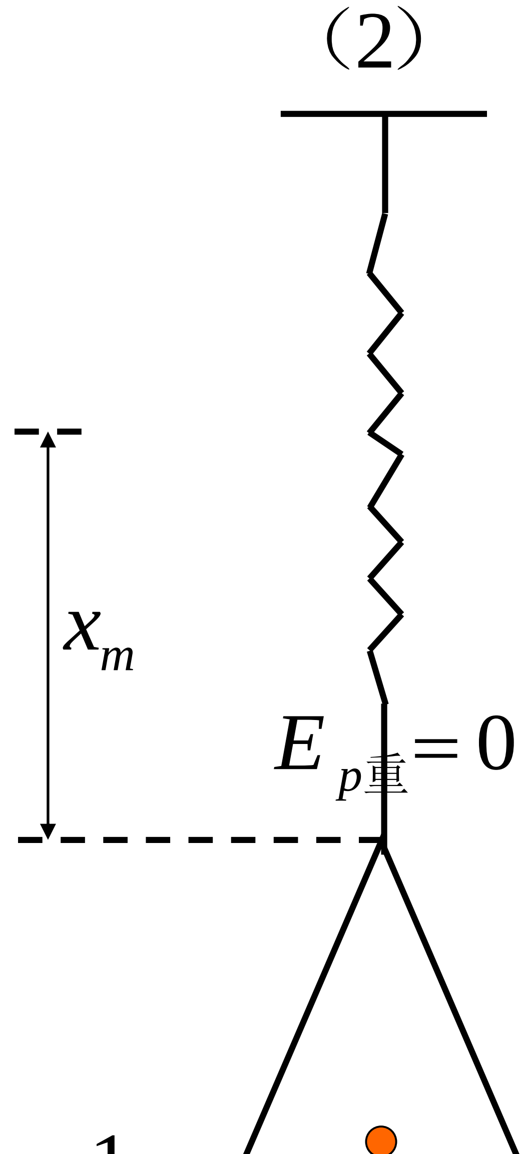
过程2：m_1 m_2完全非弹性碰撞

过程3：m_1、m_2、弹簧、地球系统机械能守恒

作业18：



$$m_1 g = k x_0$$



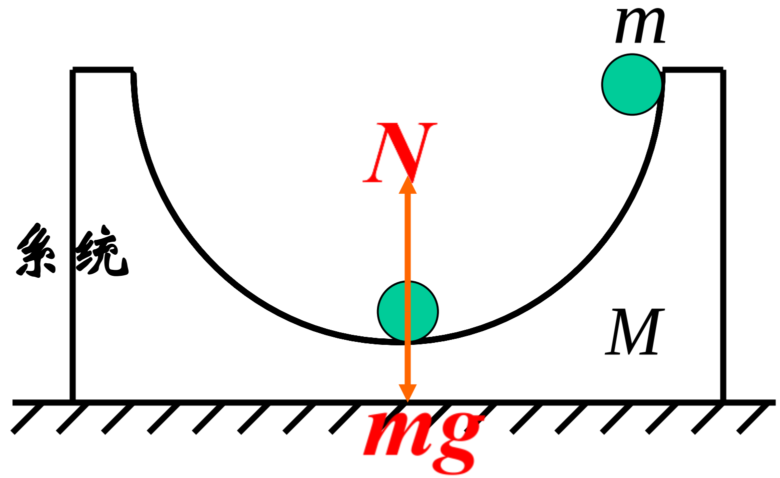
$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

$$m_2 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$$

(1) → (2)　机械能守恒

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_2^{\ 2} + (m_1+m_2) g x_m + \frac{1}{2} k x_0^{\ 2} = \frac{1}{2} k (x_0 + x_m)^2$$

半圆形（*R*）凹槽的木块（*M*），放置在光滑地面上，质量为 *m* 的质点从最高点由静止下滑，不计摩擦，
求质点下滑至最低点时给木块的压力。（自测 P6：4）



分析：$$N - mg = ma_n = m\frac{v^2}{\rho}$$

解：选地面参照系，以*M*、*m*、地球为系统

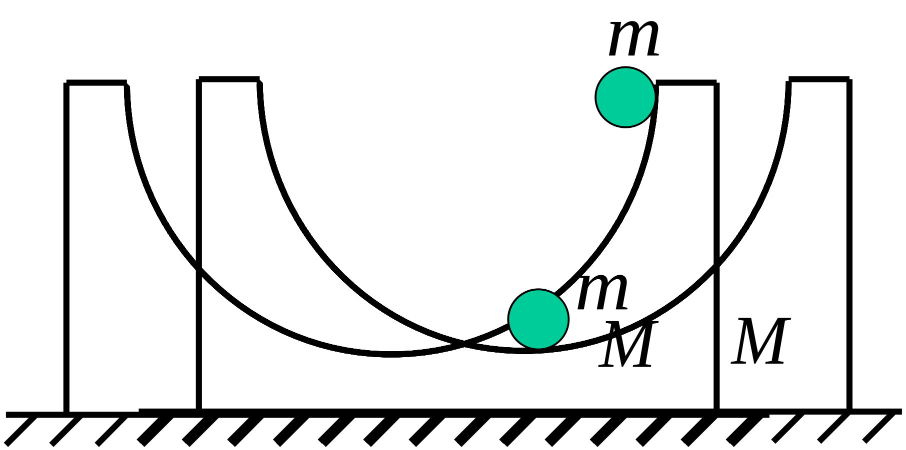
*m*下滑过程中，$A_{外}+A_{非保守内}=0$

$$mgR = \frac{1}{2}Mv_M{}^2 + \frac{1}{2}mv_m{}^2 \ldots(1)$$

以*M*、*m* 为系统，水平方向动量守恒 $$Mv_M + mv_m = 0\ldots(2)$$

由（1）（2）可得： $$v_m = \sqrt{\frac{2MRg}{M+m}} \qquad v_M = -\sqrt{\frac{2m^2Rg}{M(M+m)}}$$

判断：$$N \overset{?}{=} m\frac{v_m{}^2}{R} + mg$$ ✗



$$N - mg = ma_n = m\frac{v_{\mathrm{mM}}^2}{R}$$

$$mgR = \frac{1}{2}Mv_{M地}^2 + \frac{1}{2}mv_{m地}^2$$

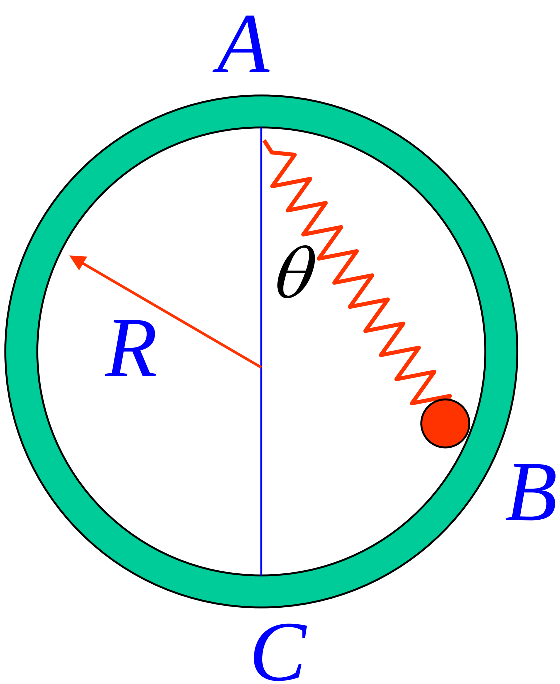
$$Mv_{M地} + mv_{m地} = 0$$

$$\vec{v}_{m地} = \vec{v}_{mM} + \vec{v}_{M地}$$

弹簧原长等于光滑圆环半径R.当弹簧下端悬挂质量为m的小环状重物时,弹簧的伸长也为R.现将弹簧一端系于竖直放置的圆环上顶点A,将重物套在圆环的B点,AB长为$1.6R$,如图,放手后重物由静止沿圆环滑动.

求当重物滑到最低点C时,重物的加速度和对圆环压力的大小.

$(0.8g)$　　$(0.8mg)$



$$N_C+F_{弹C}-mg=ma_n=m\frac{v_C^2}{R}$$

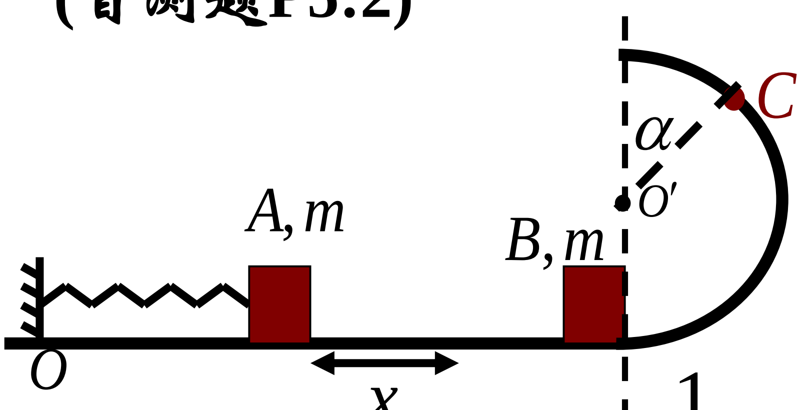
$$F_{弹C}=kR=mg$$

$$\frac{1}{2}kx_B^2+mg(2R-1.6R\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{2}kx_C^2+\frac{1}{2}mv_C^2$$

$$\cos\theta=\frac{0.8R}{R}=0.8\qquad x_B=0.6R$$

例：如图装置,光滑水平面与半径为R的竖直光滑半圆环轨道相接，两滑块A、B的质量均为m，弹簧(k)一端固定在O点，另一端与滑块A相接触，开始时滑块B静止于半圆环轨道的底端，今用外力推滑块A，使弹簧压缩一段距离 X后释放，滑块A脱离弹簧后与B作完全弹性碰撞，碰后B将沿半圆环轨道上升，到C点与轨道脱离，$O'C$与竖直方向成 $\alpha=60^0$ 角，求弹簧被压缩的距离X (自测题P5:2)



解：

$$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mv_A{}^2 \quad ①$$

$$v_B=v_A \quad ②$$

质量相等，速度互换

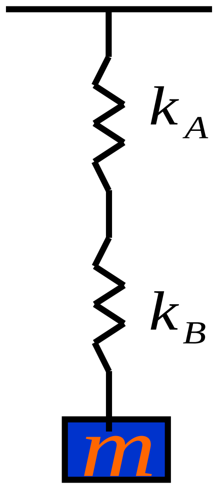
$$\frac{1}{2}mv_B{}^2=mgR(1+\cos\alpha)+\frac{1}{2}mv_C{}^2 \quad ③$$

$$mg\cos\alpha=m\frac{v_C{}^2}{R} \quad ④$$

由①②③④

$$\rightarrow x=\sqrt{\frac{7mgR}{2k}}$$

例：A（k_A）,B（k_B）两弹簧，质量忽略，连接一起，竖直悬挂，如图，系统静止时，两弹簧的弹性势能E_{PA}与E_{PB}之比？



$$(A)\frac{E_{PA}}{E_{PB}}=\frac{k_A}{k_B} \qquad (B)\frac{E_{PA}}{E_{PB}}=\frac{k_A{}^2}{k_B{}^2}$$

$$mg=k_B x_B$$

以弹簧B为对象

$$(C)\frac{E_{PA}}{E_{PB}}=\frac{k_B}{k_A} \qquad (D)\frac{E_{PA}}{E_{PB}}=\frac{k_B{}^2}{k_A{}^2}$$

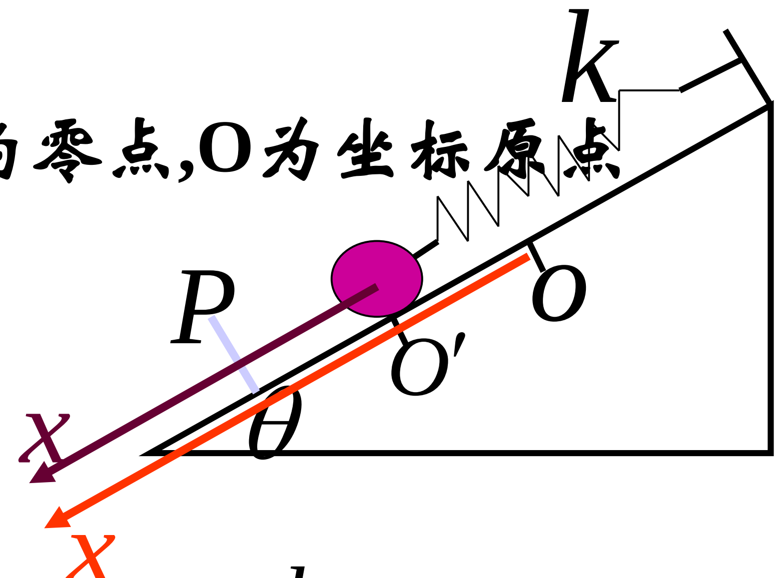
$$k_B x_B=k_A x_A$$

例：质量m的宇宙飞船关闭发动机返回地球时。可认为飞船只在地球引力场中运动，地球质量M，万有引力常数G，则当它从距地球中心R_1处下降到R_2处时，飞船增加的动能等于

$$(A)\frac{GMm}{R_2} \qquad (B)\frac{GMm}{R_2{}^2} \qquad (C)GMm\frac{R_1-R_2}{R_1R_2}$$

$$(D)GMm\frac{R_1-R_2}{R_1{}^2} \qquad (D)GMm\frac{R_1-R_2}{R_1{}^2R_2{}^2}$$

例：设弹簧原长位于O点,平衡位置位于O'点,若以O点为重力势能和弹性势能的零点,O为坐标原点,则小球位于P处的总势能=? 若以O'点为重力势能和弹性势能的零点,O'为坐标原点,则小球位于P处的弹性势能=?;重力势能=?;总势能=?



解:O点为重力势能和弹性势能的零点,O为坐标原点

$$E_P = -mgx\sin\theta + \frac{1}{2}kx^2$$

O'点为重力势能和弹性势能的零点,O'为坐标原点

$$E_{P重力} = -mgx\sin\theta$$

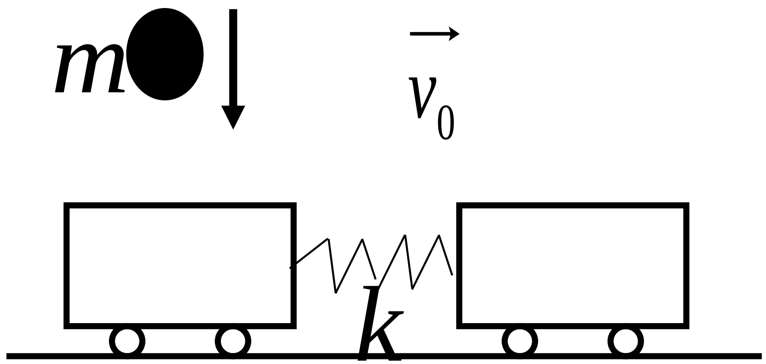
$$E_{P弹力} = \int_x^0 \vec{F}_{弹力}\cdot\vec{dx} = \int_x^0 -k(x+x_0)\cdot dx = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0$$

$$kx_0 = mg\sin\theta$$

$$\rightarrow E_{P弹力} = \frac{k}{2}x^2 + xmg\sin\theta$$

$$\rightarrow E_P = \frac{k}{2}x^2$$

例:两辆质量都为M的平板车,以同一速度$\vec{v}_0$在光滑水平面上运动,中间有弹簧(k)相连接,此时弹簧无形变,今有一质量为m的沙袋竖直落在后车上,求弹簧发生的最大形变?



解: m与后车作用:

$$Mv_0=(M+m)v_1 \quad ①$$

m与后车慢,前车快 ⟶ 弹簧发生形变(伸长)

⟶ m与后车加速,前车减速快 ⟶ $\boxed{\text{m与后车和前车速度相同}V_2}$

最大形变X_m

$$Mv_0+(M+m)v_1=(2M+m)v_2 \quad ②$$

$$\frac{1}{2}(M+m){v_1}^2+\frac{1}{2}M{v_0}^2=\frac{1}{2}(2M+m){v_2}^2+\frac{1}{2}k{x_m}^2 \quad ③$$

由①②③ $$x_m=mv_0\sqrt{\frac{M}{k(M+m)(2M+m)}}$$