最 优 捕 鱼 策 略 模 型

为保护人类赖以生存的自然环境，可再生资源（如渔业，林业等）的开发利用必须适度，一种合理简化的策略是，在实现可持续收获的前提下，追求最大产量或最佳效益。

考虑对某种鱼（鳀鱼）的最优捕捞策略：

假设这种鱼分 4 个年龄组，称 1 龄鱼，…，4 龄鱼。各年龄组每条鱼的平均重量分别为：5.07，11.55，17.86，22.99（克），各年龄组鱼的自然死亡率均为$\alpha = 0.8\ (1/\text{年})$。这种鱼为季节性集中产卵繁殖，平均每条 4 龄鱼的产卵量为$\beta = 1.109 \times 10^5$（个）。3 龄鱼的产卵量为这个数的一半，2 龄鱼和 1 龄鱼不产卵，产卵和孵化期为每年的最后 4 个月，卵孵化后成活为 1 龄鱼，成活率（新生的 1 龄鱼条数与产卵总量 n 之比）为$\dfrac{1.22 \times 10^{11}}{1.22 \times 10^{11} + n}$。

渔管部门规定，每年只允许在产卵孵化期前面的 8 个月内进行捕捞作业，如果每年投入的捕捞能力（如鱼船数，下网次数等）固定不变，这时单位时间捕捞量将与各年龄组鱼群条数呈正比，比例系数称为捕捞强度系数。通常使用$13mm$网眼的拉网，这种网只能捕捞 3 龄鱼和 4 龄鱼，其两个捕捞强度系数之比为$0.42:1$，渔业上称这种方式为固定努力量捕捞。

请完成下列工作：

1）建立模型分析如何实现可持续捕捞，并在此前提下得到最高的年捕捞总重量。

2）某渔业公司承包这种鱼的捕捞业务 5 年，合同要求 5 年后鱼群的生产能力不能受到太大的破坏。已知承包时各年龄组鱼群的数量分别为：$122, 29.7, 10.1, 3.29 (\times 10^9)$条，如果仍然采用固定努力量捕捞方式，确定该公司的捕捞策略以获得最高的捕捞总重量。

一、鱼群数量变化、生长示意图：

1. **数量变化示意图：**

死亡　　死亡　　死亡⊕捕捞　　死亡⊕捕捞

↑　　↑　　↑　　↑

1 龄鱼---→2 龄鱼-----------→3 龄鱼------------→4 龄鱼

↓　　↓

产卵孵化　　产卵孵化

2.

3. **生长示意图：**

年初		8月末		年末		下年初
1龄鱼	-----	1龄鱼	$\rightarrow$	1龄鱼	$\rightarrow$	2龄鱼
2龄鱼	-----	2龄鱼	$\rightarrow$	2龄鱼	$\rightarrow$	3龄鱼
3龄鱼	-----	3龄鱼	$\rightarrow$	3龄鱼	$\rightarrow$	4龄鱼
4龄鱼	-----	4龄鱼	$\rightarrow$	4龄鱼	$\rightarrow$	4龄鱼

二、问题分析

1. 鱼群数量变化包含如下几种方式：自然死亡、捕捞、产卵孵化、成长。
2. 应讨论各年龄组鱼群数量在一年内的变化规律、各年龄组鱼群的转化规律。
3. 问题提到 1、2、3、4 龄鱼，是否可假设今年为i龄鱼，到明年就长成为$i+1$龄鱼？
4. 一年内，各龄鱼群数量如何变化？今年的数量如何转化成下一年的数量？
5. 可持续捕捞的含义：每年年初各年龄组的鱼群数量基本保持一致。
6. 自然死亡与产卵孵化是确定量，捕捞强度的改变可控制鱼群数量----控制变量。
7. 每条鱼的重量已知，可先讨论鱼群条数的变化规律及捕捞条数，即可得到捕捞总重量。

三、建模思路

1） 自然死亡与捕捞均造成鱼群数量的减少，作用相同？

无捕捞时鱼群数量的变化规律---$\rightarrow$有捕捞时鱼群数量的变化规律。

2）分时段讨论鱼群数量变化规律。

每年前 8 个月是捕捞期，含自然死亡、人工捕捞，

后 4 个月是产卵孵化期，无捕捞，仅含自然死亡；

3） 可持续捕捞==每年保持平衡？

按年为周期，时间变量$0 \le t \le 1$。

下年初各龄鱼数量由上年末各龄鱼数量生长一岁转化而来？

四、模型假设

1. 本年产的卵，下年初集中孵化生长为 1 龄鱼；
2. 上年末的 i 龄鱼，下年初突变成 $i+1$ 龄鱼（$i=1,2,3$）；
3. 上年末的 4 龄鱼，下年初仍然留在 4 龄鱼（或者假设全部死掉）；
4. 捕捞过程不会引起各龄鱼死亡的变化；

不考虑外水域鱼群对本水域鱼群数量变化的影响。

五、模型建立

1. 一般性模型

（1）捕捞强度系数与自然死亡率的统一

“单位时间捕捞量与各年龄组鱼群条数呈正比，比例系数 k 称为捕捞强度系数”

$$k=\frac{\text{单位时间捕捞鱼数量}}{\text{鱼群总数量}}$$ 量纲为“1/时间”，

“各年龄组鱼的自然死亡率均为$\alpha=0.8(1/\text{年})$”

两者量纲一致，可将自然死亡率理解为：

$$\alpha=\frac{\text{单位时间死亡鱼数量}}{\text{鱼群总数量}}$$

（2）α，k 都体现鱼群数量的减少，但α 是已知量，k 是待优化的控制变量。

（3）不考虑捕捞时，鱼群数量$S(t)$的变化规律为：

$$\alpha=\frac{\text{单位时间死亡鱼数量}}{\text{鱼群总数量}}=\frac{\dfrac{S(t)-s(t+\Delta t)}{\Delta t}}{S(t)}$$

$$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t)-S(t+\Delta t)}{\Delta t\cdot S(t)}=\frac{-1}{S(t)}\cdot\frac{dS}{dt},$$ （导数定义）

即 $$\frac{dS}{dt}=-\alpha S(t)\quad,\quad S\big|_{t=0}=S_0$$ 建立微分方程

求解得 $$S(t)=S_0\cdot e^{-\alpha t}$$ 微分方程求解

（4）有捕捞时，α，k 同时使鱼群数量减少，鱼群数量变化规律为：

$$S(t)=S_0\cdot e^{-(\alpha+k)t}$$

2. 各年龄组鱼群数量在一年内的变化规律：

设 S_{10}，S_{20}，S_{30}，S_{40} 分别表示各龄鱼在年初时的数量，则

（1）8 月末各龄鱼的数量 S_{11}，S_{21}，S_{31}，S_{41} 为（有死亡、也有捕捞）

$$S_{11}=S_{10}\cdot e^{\frac{-2}{3}\alpha}$$ （1~8 月，时间$t=\dfrac{2}{3}$）

$$S_{21}=S_{20}\cdot e^{\frac{-2}{3}\alpha}$$ （1，2 龄鱼无捕捞）

$$S_{31}=S_{30}\cdot e^{\frac{-2}{3}(\alpha+0.42k)}$$ （3、4 龄鱼的捕捞强度系数之比为$0.42:1$）

$$S_{41}=S_{40}\cdot e^{\frac{-2}{3}(\alpha+k)}$$

（2）9~12 月为无捕捞的产卵孵化期，到 12 月末各龄鱼数量 S_1, S_2, S_3, S_4 为：

$$S_1=S_{11}\cdot e^{\frac{-1}{3}\alpha}=S_{10}\cdot e^{-\alpha}$$ （9~12 月，时间 $t=\frac{1}{3}$）

$$S_2=S_{21}\cdot e^{\frac{-1}{3}\alpha}=S_{20}\cdot e^{-\alpha}$$

$$S_3=S_{31}\cdot e^{\frac{-1}{3}\alpha}=S_{30}\cdot e^{-\alpha-\frac{0.84k}{3}}$$

$$S_4=S_{41}\cdot e^{\frac{-1}{3}\alpha}=S_{40}\cdot e^{-\alpha-\frac{2k}{3}}$$

3．当年鱼群产卵总量 n 的计算

（1）在产卵孵化期内 3、4 龄鱼的数量变化规律为

$$S_3(t)=S_{31}\cdot e^{-\alpha t}\,,\quad 0\le t\le\frac{1}{3}\,,$$

$$S_4(t)=S_{41}\cdot e^{-\alpha t}\,,\quad 0\le t\le\frac{1}{3}\,,$$

（2）微积分求函数平均值的方法：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，则

$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值为： $\bar{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$。

（3）产卵孵化期内 3、4 龄鱼的平均数量为

$$\bar{S_3}=\frac{1}{\frac{1}{3}-0}\int_0^{\frac{1}{3}}S_3(t)dt=\frac{3}{\alpha}S_{31}(1-e^{\frac{-\alpha}{3}})$$ 定积分积分中值定理

$$\bar{S_4}=\frac{1}{\frac{1}{3}-0}\int_0^{\frac{1}{3}}S_4(t)dt=\frac{3}{\alpha}S_{41}(1-e^{\frac{-\alpha}{3}})$$ 定积分积分中值定理

（4）3、4 龄鱼产卵总量 n 的计算，$\beta=1.109\times10^5$ 表示每条 4 龄鱼的产卵量，

$$n=\frac{\beta}{2}\cdot\bar{S_3}+\beta\cdot\bar{S_4}=\frac{3\beta}{2\alpha}(S_{31}+2S_{41})(1-e^{\frac{-\alpha}{3}})$$

$$=\frac{3\beta}{2\alpha}(S_{30}\cdot e^{\frac{-2}{3}(\alpha+0.42k)}+2S_{40}\cdot e^{\frac{-2}{3}(\alpha+k)})(1-e^{\frac{-\alpha}{3}})$$

4. 可持续捕捞前提下各龄鱼数量的动态平衡关系

（1）动态平衡：设 S_{12} ,S_{22} ,S_{32} ,S_{42} 分别表示下年初各龄鱼数量，则

$S_{12} = n \times \delta$　　n 是 3、4 龄鱼产卵总量，$\delta = \dfrac{1.22\times10^{11}}{1.22\times10^{11}+n}$

$S_{22} = S_1$　　当年末的 1 龄鱼数量全部转化成下年初 2 龄鱼数量

$S_{32} = S_2$　　当年末的 2 龄鱼数量全部转化成下年初 3 龄鱼数量

$S_{42} = S_3 + S_4$　　当年末的 3、4 龄鱼数量全部转化成下年初 4 龄鱼数量；

$$
\begin{cases}
S_{12} = n \times \dfrac{1.22\times10^{11}}{1.22\times10^{11}+n} \\
\quad = \dfrac{3\beta(1-e^{\frac{-\alpha}{3}})[S_{30}\cdot e^{\frac{-2(\alpha+0.42k)}{3}} + 2S_{40}\cdot e^{\frac{-2(\alpha+k)}{3}}]\times1.22\times10^{11}}{2\alpha\times1.22\times10^{11} + 3\beta(1-e^{\frac{-\alpha}{3}})\cdot[S_{30}\cdot e^{\frac{-2(\alpha+0.42k)}{3}} + 2S_{40}\cdot e^{\frac{-2(\alpha+k)}{3}}]} \\
S_{22} = S_1 = S_{10}\cdot e^{-\alpha} \\
S_{32} = S_2 = S_{20}\cdot e^{-\alpha} \\
S_{42} = S_3 + S_4 = S_{30}\cdot e^{-\alpha-\frac{0.84k}{3}} + S_{40}\cdot e^{-\alpha-\frac{2k}{3}}
\end{cases}
$$

（2）矩阵表示形式

$$
S_0 = \begin{pmatrix} S_{10} \\ S_{20} \\ S_{30} \\ S_{40} \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} S_{12} \\ S_{22} \\ S_{32} \\ S_{42} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_3 & F_4 \\ e^{-\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\alpha-\frac{0.84k}{3}} & e^{-\alpha-\frac{2k}{3}} \end{pmatrix}
$$

则 $S_1 = A\cdot S_0$,

$$
F_3 = \frac{3\beta(1-e^{\frac{-\alpha}{3}})\cdot e^{\frac{-2(\alpha+0.42k)}{3}}\times1.22\times10^{11}}{2\alpha\times1.22\times10^{11} + 3\beta(1-e^{\frac{-\alpha}{3}})\cdot[S_{30}\cdot e^{\frac{-2(\alpha+0.42k)}{3}} + 2S_{40}\cdot e^{\frac{-2(\alpha+k)}{3}}]}
$$

$$
F_4 = \frac{6\beta(1-e^{\frac{-\alpha}{3}})\cdot e^{\frac{-2(\alpha+k)}{3}}\times1.22\times10^{11}}{2\alpha\times1.22\times10^{11} + 3\beta(1-e^{\frac{-\alpha}{3}})\cdot[S_{30}\cdot e^{\frac{-2(\alpha+0.42k)}{3}} + 2S_{40}\cdot e^{\frac{-2(\alpha+k)}{3}}]}
$$

5. 年捕鱼量 G 的确定

（1） $S(t)=S_0\cdot e^{-\varepsilon t}$ 表示鱼群数量变化规律（条数），

因为捕捞强度系数 $k=\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}\cdot\dfrac{1}{S(t)}$， $\Delta S(t)=k\cdot S(t)\cdot\Delta t$，则捕捞条数

$$P=\sum\Delta S(t)=\sum\Delta S(t)=\sum k\cdot S(t)\cdot\Delta t=k\int_0^T S(t)dt$$

一年内（事实上是前 8 个月）的捕鱼总条数为：

$$P=k\int_0^{\frac{2}{3}} S_0e^{-\varepsilon t}dt=\frac{kS_0}{\varepsilon}(1-e^{\frac{-2\varepsilon}{3}})$$

定积分定义

（2）一年内 3 龄鱼捕捞总条数 P_3 为（捕捞强度系数为 $0.42k$ ）

$$S_3(t)=S_{30}\cdot e^{-(\alpha+0.42k)t}\quad,\ 0\le t\le\frac{2}{3},$$

$$P_3=0.42k\int_0^{\frac{2}{3}} S_3(t)dt=\frac{0.42kS_{30}}{\alpha+0.42k}(1-e^{\frac{-2(\alpha+0.42k)}{3}})$$

（3）一年内 4 龄鱼捕捞总条数 P_4 为（捕捞强度系数为 k ）

$$S_4(t)=S_{40}\cdot e^{-(\alpha+k)t}\quad,\ 0\le t\le\frac{2}{3},$$

$$P_4=k\int_0^{\frac{2}{3}} S_4(t)dt=\frac{k\,S_{40}}{\alpha+k}(1-e^{\frac{-2(\alpha+k)}{3}})$$

（4）每条 3、4 龄鱼的平均重量分别是 m_3、m_4，则年捕捞总重量 G 为：

$$G=m_3P_3+m_4P_4$$

$$=m_3\frac{0.42kS_{30}}{\alpha+0.42k}(1-e^{\frac{-2(\alpha+0.42k)}{3}})_3+m_4\frac{k\,S_{40}}{\alpha+k}(1-e^{\frac{-2(\alpha+k)}{3}})$$

6．模型总体结构

$$\begin{cases}\max\ G=m_3P_3+m_4P_4\\ \quad s.t\ \ AS_0=S_1\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\max\ G = m_3 \dfrac{0.42kS_{30}}{\alpha+0.42k}(1-e^{\frac{-2(\alpha+0.42k)}{3}})_3 + m_4 \dfrac{k\,S_{40}}{\alpha+k}(1-e^{\frac{-2(\alpha+k)}{3}}) \\
s.t \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_3 & F_4 \\ e^{-\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\alpha-\frac{0.84k}{3}} & e^{-\alpha-\frac{2k}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{1t} \\ s_{2t} \\ s_{3t} \\ s_{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1\,t+1} \\ s_{2\,t+1} \\ s_{3\,t+1} \\ s_{4\,t+1} \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

$$
t = 0,1,2,3,4
$$

$$
\begin{cases}
F_3 = \dfrac{3a\times(1-e^{-0.8/3})\times e^{-90.8+0.42k)\times\frac{2}{3}}\times 1.22\times10^{11}}{1.6\times[1.22\times10^{11}+\dfrac{3a}{1.6}(1-e^{-0.8/3})\times[e^{-0.84k/3}\times s_{30}+2e^{-2k/3}\times s_{40}]\times e^{-0.8\times\frac{2}{3}}} \\
F_4 = \dfrac{3a\times(1-e^{-0.8/3})\times e^{-(0.8+k)\times\frac{2}{3}}\times 2\times1.22\times10^{11}}{1.6\times[1.22\times10^{11}+\dfrac{3a}{1.6}(1-e^{-0.8/3})\times[e^{-0.84k/3}\times s_{30}+2e^{-2k/3}\times s_{40}]\times e^{-0.8\times\frac{2}{3}}}
\end{cases}
$$

六、模型求解

省略