§2.3 曲面的第二基本形式

一、曲面的第二基本形式

二、曲面曲线的曲率

三、Dupin指标线

四、曲面的渐近方向和共轭方向

五、曲面的主方向和曲率线

六、曲面的主曲率、Gauss曲率和平均曲率

七、曲面在一点邻近的结构

八、Gauss映射

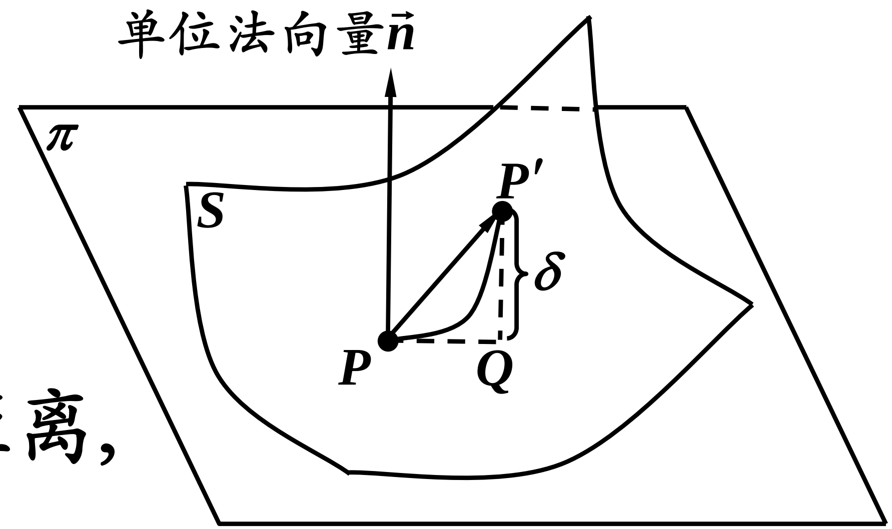
一、曲面的第二基本形式

曲面 S：$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$，S上的曲线Γ: $\vec{r}=\vec{r}(u(s),v(s))$，

切点$P(u(s),v(s))$，

另一点$P'(u(s+\mathrm{d}s),v(s+\mathrm{d}s))$，

记δ为P的切平面π到P'的有向距离，



则$\delta\approx\frac{1}{2}\vec{n}\cdot\ddot{\vec{r}}\,\mathrm{d}s^2=\frac{1}{2}(L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2)\triangleq\frac{1}{2}\mathrm{II}$

其中$L(u,v)=\vec{r}_{uu}(u,v)\cdot\vec{n}(u,v)$，$M=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}$，$N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}$.

称$\mathrm{II}=\vec{n}\mathrm{d}^2\vec{r}=L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2$为曲面的第二基本形式，

称 $L(u,v),M(u,v),N(u,v)$为曲面的第二类基本量.

第二基本形式和第二类基本量的其他表达式

(1)

$$L=\frac{(\vec{r}_{uu},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}},\quad M=\frac{(\vec{r}_{uv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}},\quad N=\frac{(\vec{r}_{vv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

(2)

$$\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0\Rightarrow \mathrm{d}\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\vec{n}\mathrm{d}^2\vec{r}=0\Rightarrow \mathrm{II}=\vec{n}\mathrm{d}^2\vec{r}=-\mathrm{d}\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

(3)

$$L=-\vec{r}_u\cdot\vec{n}_u,\qquad M=-\vec{r}_u\cdot\vec{n}_v=-\vec{r}_v\cdot\vec{n}_u,\qquad N=-\vec{r}_v\cdot\vec{n}_v$$

例 P114-2

计算抛物面$2x_3 = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$在原点的第一、第二基本形式.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

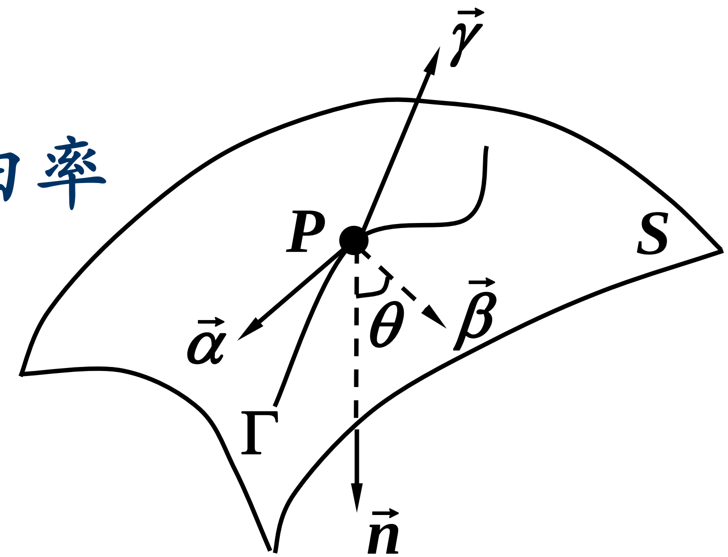
P114: 3

补充作业题

1. 求曲面 $\vec{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, \sin 2v)$ 的第一类基本形式和第二类基本形式.

二、曲面上曲线的曲率

1. 化曲面曲线的曲率为平面截线的曲率



曲面曲线$\Gamma: \vec{r} = \vec{r}(u(s), v(s))$

θ为$\vec{\beta}$与$\vec{n}$的夹角

则$\mathrm{II} = \vec{n} \cdot \mathrm{d}^2\vec{r} = \vec{n} \cdot \ddot{\vec{r}}\, \mathrm{d}s^2 = \vec{n} \cdot \dot{\vec{\alpha}} \cdot \mathrm{I} \ = k\cos\theta \cdot \mathrm{I}$

因此 $k\cos\theta = \dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \dfrac{L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2}$

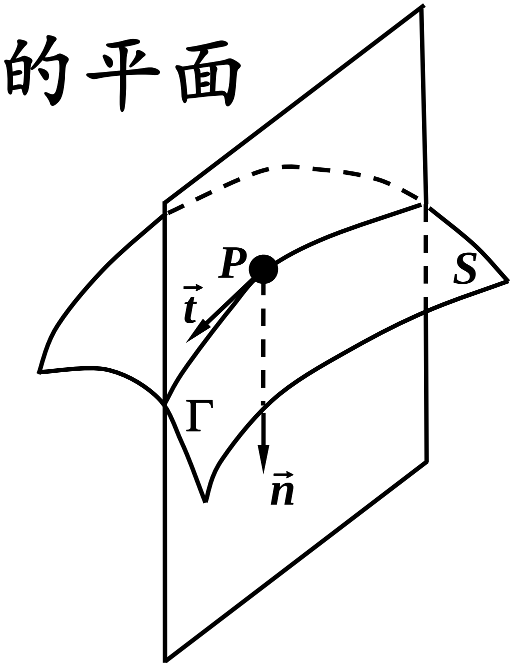
Γ在P点的曲率由$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$和$\vec{\beta}$的方向确定

＝该点的密切平面与S的交线在该点的曲率

2. 法曲率(法截线的有向曲率)

法截面：切方向$\vec{t}$与曲面的法线$\vec{n}$所确定的平面

法截线：法截面与曲面的交线



设法截线的曲率为k_0,其主法向为$\vec{\beta}_0$

则$\vec{\beta}_0 // \vec{n}$

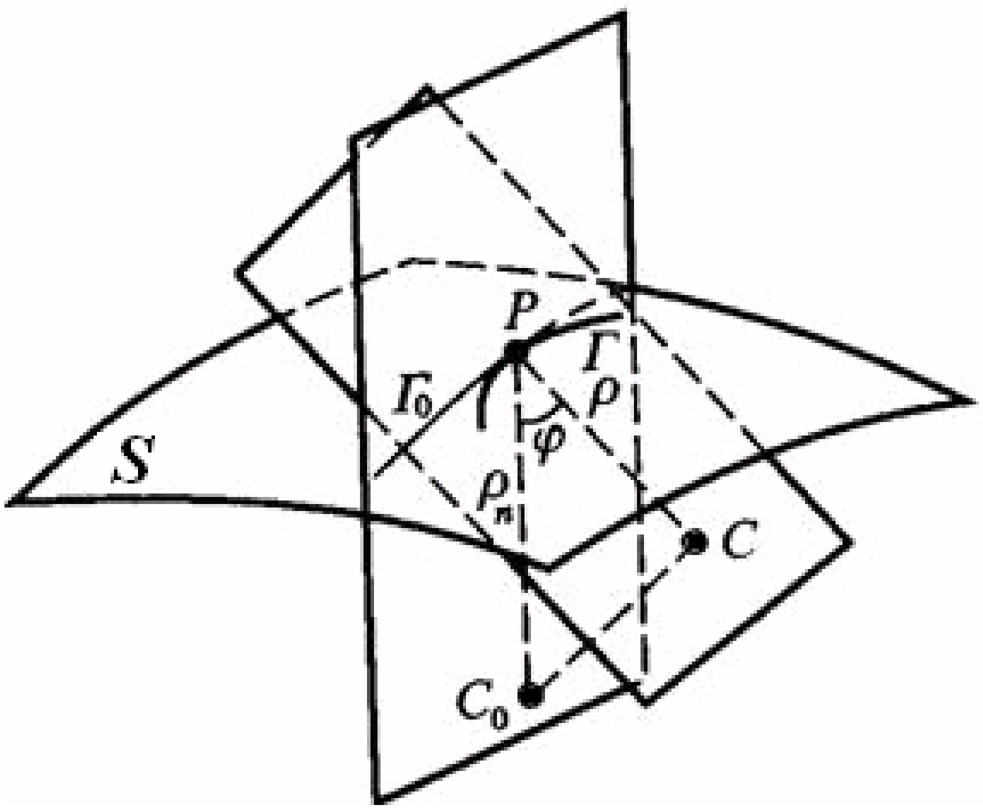
$\vec{\beta}_0$与$\vec{n}$同向时,法截线向$\vec{n}$的正侧弯曲,$k_0 = \dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$

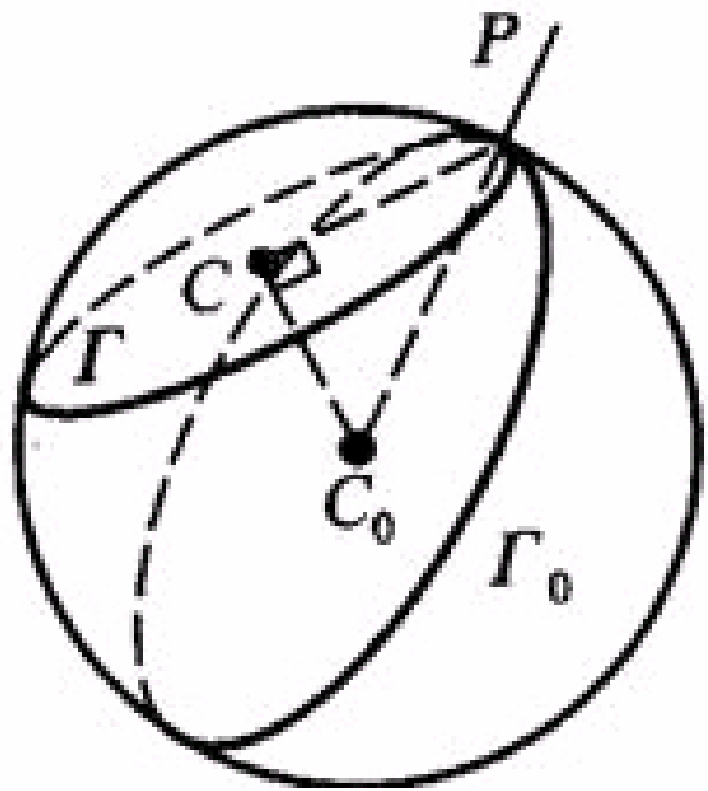
$\vec{\beta}_0$与$\vec{n}$反向时,法截线向$\vec{n}$的反侧弯曲,$k_0 = -\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$

法曲率k_n定义为 $k_n = \dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$

3. Meusnier(梅尼埃)定理

曲面曲线Γ在给定点P的曲率中心C就是与曲线Γ具有共同切线的法截线Γ_0上同一个点P的曲率中心C_0在曲线Γ的密切平面上的投影.





Meusnier定理揭示了平面截线与法截线之间的联系.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业！

P114：4，5

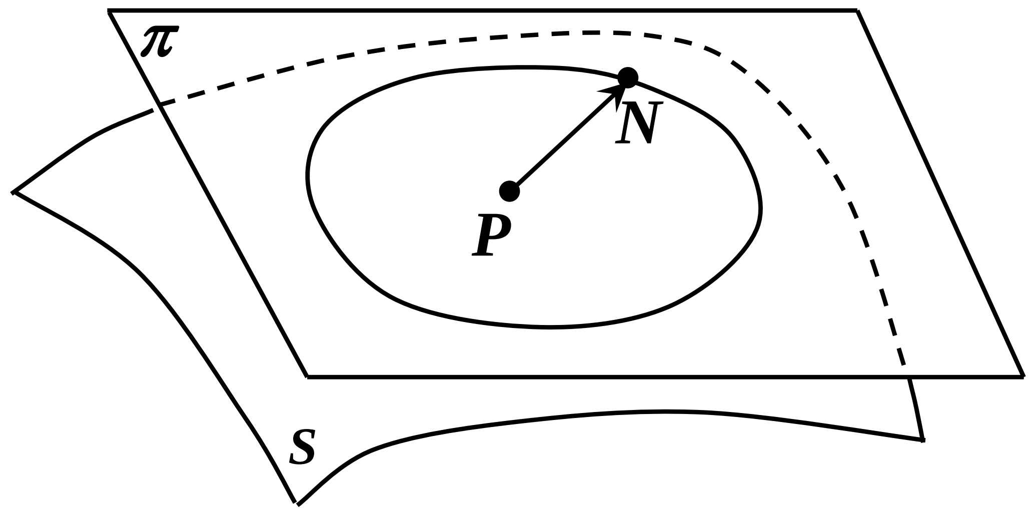
补充作业题

2. 求C^3类曲线$\vec{r}(u)$的切线面$\vec{R}(u,v)=\vec{r}(u)+v\vec{r}'(u)$上的曲线$u+v=c$ (c为常数)的法曲率.

三、Dupin(迪潘)指标线

1. 定义

取 $|PN| = \sqrt{\dfrac{1}{|k_n|}}$



2. 几何意义

$|PN|$越短，沿 $\overrightarrow{PN}$ 方向的法截线的弯曲程度越大；

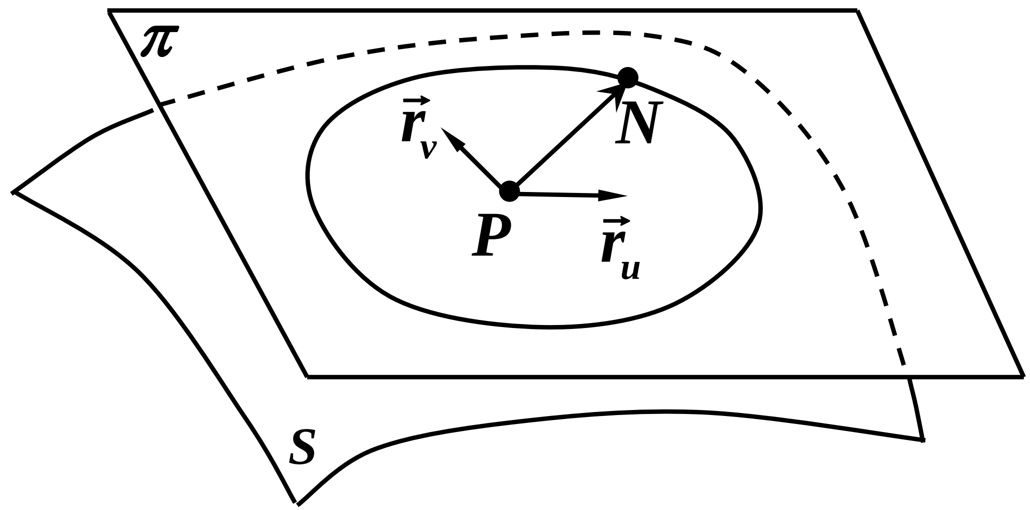
当$|PN| \to +\infty$时，沿 $\overrightarrow{PN}$ 方向的法曲率趋于零.

3. 方程

设$N=(x,y)$,

则$\overrightarrow{PN}=x\vec{r}_u+y\vec{r}_v$,

由$\left|\overrightarrow{PN}\right|=\sqrt{\dfrac{\mathrm{I}}{|\mathrm{II}|}}$得



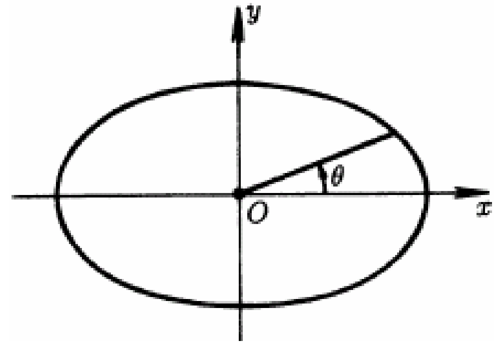
$$Ex^2+2Fxy+Gy^2=\frac{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}{|L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2|}$$

将切方向$\mathrm{d}u:\mathrm{d}v=x:y$代入上式得到指标线方程:

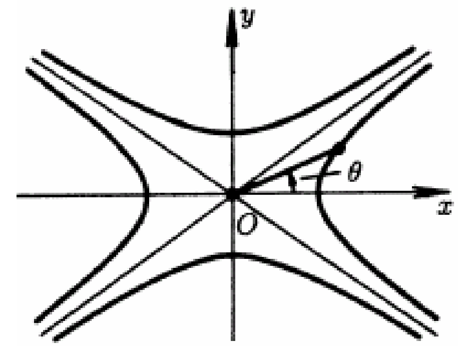
$$Lx^2+2Mxy+Ny^2=\pm1.$$

4. 根据Dupin指标线的形状对切点进行分类

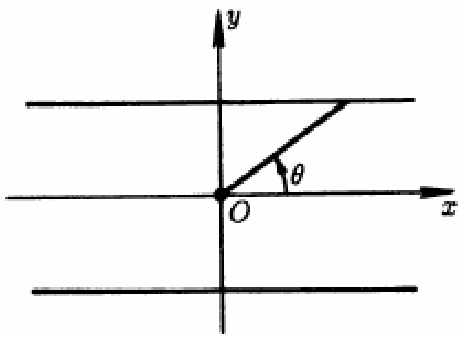
(1) 椭圆点 $LN-M^2>0$



(2) 双曲点 $LN-M^2<0$



(3) 抛物点 $\begin{cases} LN-M^2=0 \\ L,M,N\text{不同时为}0 \end{cases}$



(4) 平点 $L=M=N=0$ Dupin指标线不存在

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

P115: 24

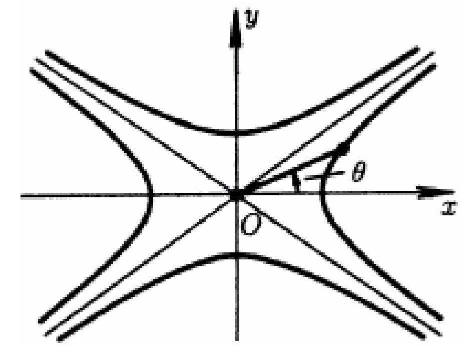
补充作业题

3. 求曲面 $\vec{r}(u,v)=(u,v,u^2+v^3)$ 上的抛物点、椭圆点和双曲点的集合.

四、曲面的渐近方向和共轭方向

1. 渐近方向 (法曲率为零的切方向)

当点P是曲面的双曲点时,它的Dupin指标线是一对共轭双曲线,这对双曲线有一对渐近线,把沿这些渐近线的切方向称为**曲面在P点的渐近方向**.



渐近方向(du:dv)的方程

$$L_P du^2 + 2M_P du dv + N_P dv^2 = 0$$

或写为: $\mathrm{II}_P = 0$, 或写为: $k_n\big|_P = 0$.

2. 渐近曲线

每一点的切方向都是渐近方向的曲面曲线.

渐近曲线的微分方程

$$L(u,v)\mathrm{d}u^2 + 2M(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N(u,v)\mathrm{d}v^2 = 0$$

P93 命题1

如果曲面上有直线, 则它一定是曲面的渐近曲线.

P94 命题2

曲面在渐近曲线上一点处的切平面一定是渐近曲线的密切平面.

3. 渐近网

如果曲面上的点都是双曲点, 则每个点处都有两个不相切的渐近方向, 在曲面上会有两族渐近曲线, 称这两族曲线为**曲面上的渐近网**.

此时渐近曲线的微分方程就是**渐近网的微分方程**.

P94 命题3

曲纹坐标网为渐近网的充要条件是 $L \equiv N \equiv 0$.

4. 共轭方向

直径　一族平行弦的中点的轨迹.

直径AB的共轭直径

平行于AB的弦的中点的轨迹.

设曲面上点P处的某两个切方向所在的某直线段是P点处Dupin指标线的共轭直径,则称这两个切方向互相共轭,为曲面的共轭方向.

共轭方向的等价定义

曲面上点P处的两个切方向$(\mathrm{d})=\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$和$(\delta)=\delta u:\delta v$为曲面的共轭方向当且仅当

$$L_P \mathrm{d}u\delta u + M_P(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + N_P \mathrm{d}v\delta v = 0.$$

其他等价定义

共轭 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{d}\vec{n}\cdot\delta\vec{r}=0$ $\Leftrightarrow$ $\delta\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0$

渐近方向为自共轭方向.

5. 共轭网

如果曲面上的两族曲线使得过曲面上的每一点，此两族曲线的两条曲线的切方向都是共轭方向，则称这两族曲线为**曲面的共轭网**.

共轭网的微分方程(已知一族曲线，求它的共轭曲线族)

$$L(u,v)\mathrm{d}u\delta u+M(u,v)(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+N(u,v)\mathrm{d}v\delta v=0.$$

P96 命题4

曲纹坐标网为共轭网的充要条件是 $M(u,v)\equiv 0$.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

P114: 10

补充作业题

4. 求曲面 $z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ 上的渐近曲线.

五、曲面的主方向和曲率线

1. 主方向

如果曲面上点P处的两个切方向既正交又共轭，则称这两个切方向为曲面在P点的两个主方向.

主方向的方程

$$\begin{vmatrix} \boxed{\mathrm{d}v^2 \quad -\mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad \mathrm{d}u^2} \\ E_P \quad F_P \quad G_P \\ L_P \quad M_P \quad N_P \end{vmatrix} = 0$$

或写为

$$[(EM-FL)\mathrm{d}u^2+(EN-GL)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+(FN-GM)\mathrm{d}v^2]\big|_P=0$$

$$[(EM-FL)\mathrm{d}u^2+(EN-GL)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+(FN-GM)\mathrm{d}v^2]\Big|_P=0$$

$$\Delta_P=[(EN-GL)^2-4(EM-FL)(FN-GM)]\Big|_P$$

$$=\left\{\left[(EN-GL)-\frac{2F}{E}(EM-FL)\right]^2+\frac{4(EG-F^2)}{E^2}(EM-FL)^2\right\}\Bigg|_P$$

当$\Delta_P>0$时,在P点处有两个主方向.

当$\Delta_P=0$(即$\dfrac{E}{L}=\dfrac{F}{M}=\dfrac{G}{N}$)时,称$P$点为脐点.

此时主方向方程恒成立,每个切方向都是主方向.

称使得L_P,M_P,N_P同时为零的脐点P为平点.

称使得L_P,M_P,N_P不同时为零的脐点P为圆点.

2. 主方向判别定理(Rodrigues(罗德里格斯)定理)

$(\mathrm{d})=(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$是主方向的充要条件是$\exists\lambda$使$\mathrm{d}\vec{n}=\lambda\mathrm{d}\vec{r}$;

在上述条件下有$\lambda=-k_n$,其中k_n为沿方向(d)的法曲率.

3. 曲率线

若曲面上一光滑曲线上的每一点的切方向都是主方向，则称该曲线为**曲面的曲率线**.

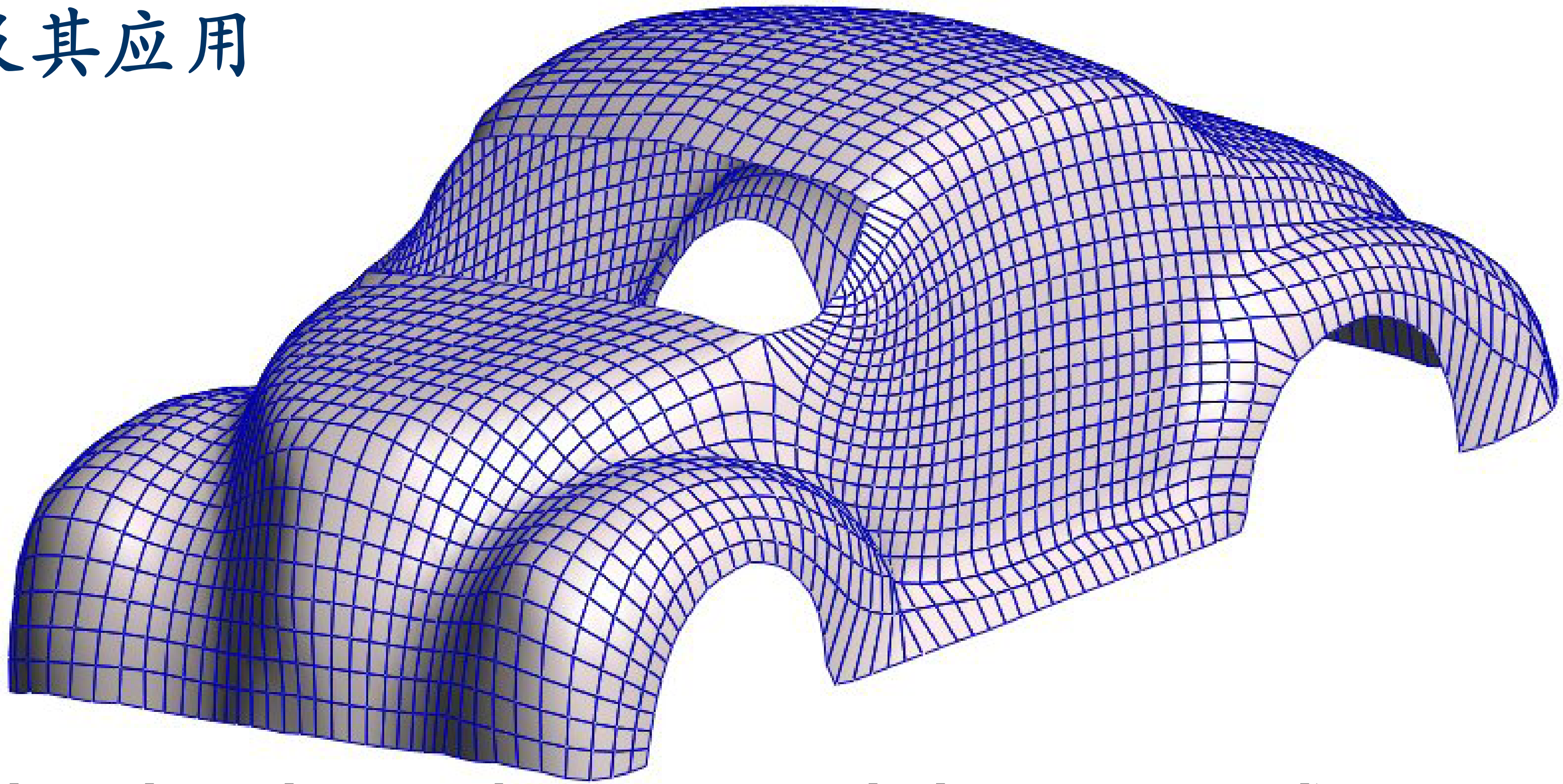
曲率线的方程

$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}v^2 & -\mathrm{d}u\mathrm{d}v & \mathrm{d}u^2 \\ E(u,v) & F(u,v) & G(u,v) \\ L(u,v) & M(u,v) & N(u,v) \end{vmatrix} = 0$$

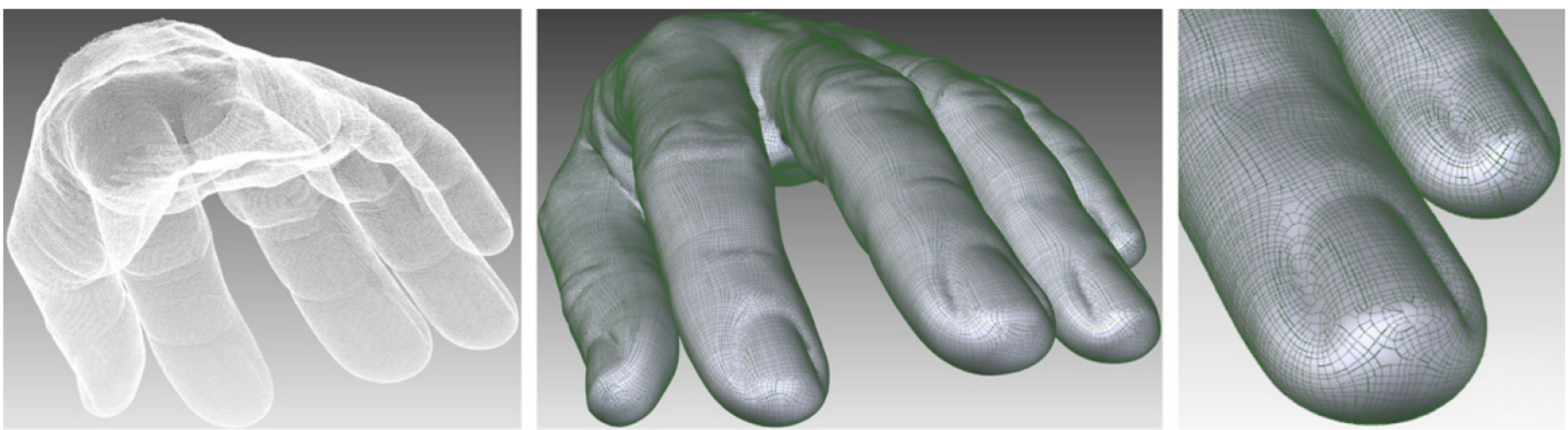
该方程确定了曲面上两族曲线，

称之为**曲面的曲率线网**.

曲率线网及其应用



(Ref: Spectral Quadrangulation with Orientation and Alignment Control)



(Ref: Extracting lines of curvature from noisy point clouds

对于曲面上任意两族不相切的曲线族,都可以通过参数选择,使其成为曲纹坐标网.

特别地,在不含脐点的曲面上,可以经过参数选择,使曲率线网成为曲纹坐标网.

P99 命题5

曲面上的曲纹坐标网是曲率线网的充要条件是 $F(u,v)\equiv M(u,v)\equiv 0.$

例如 在旋转面$\vec{r}(t,\theta)=(\varphi(t)\cos\theta,\varphi(t)\sin\theta,\ \psi(t))$中,

$F\equiv M\equiv 0$, 它的曲纹坐标网就是曲率线网.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

P114： 13

补充作业题

5. 求曲面 $xyz=1$ 上的脐点.

六、曲面的主曲率、Gauss曲率和平均曲率

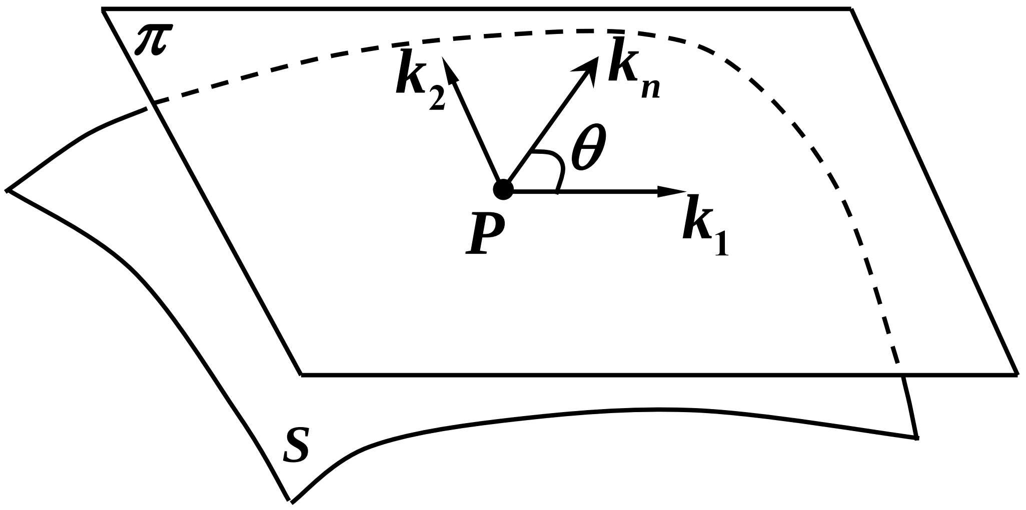
1. 主曲率

曲面上一点处主方向上的法曲率.

即：曲面上一点处沿曲率线方向的法曲率.

2. Euler公式 (反映法曲率随着切方向变化的规律)

$$k_n = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$$



P101 命题6

曲面上一点(非脐点)的主曲率是曲面在该点所有切方向的法曲率的最大值和最小值.

3. 主曲率的计算

曲面上点P处的主曲率K_N满足方程：

$$\begin{vmatrix} L_P - K_N E_P & M_P - K_N F_P \\ M_P - K_N F_P & N_P - K_N G_P \end{vmatrix} = 0$$

即：

$$[(EG-F^2)K_N^2 - (LG-2MF+NE)K_N + (LN-M^2)]\big|_P = 0$$

4. Gauss曲率和平均曲率

Gauss曲率 $$K = k_1 k_2 = \left.\frac{LN - M^2}{EG - F^2}\right|_P$$

平均曲率 $$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \left.\frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}\right|_P$$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

P114: 18

补充作业题

6. 求双曲抛物面 $xy = 2z$ 的两个主曲率之比.

7. 求螺旋面 $\vec{r} = (u\cos v, u\sin v, u+v)$ 的Gauss曲率 K、平均曲率 H 和主曲率 k_1, k_2.

8. 证明：如果曲面 S 上的渐近曲线网的夹角是常数，则曲面 S 的Gauss曲率 K 和平均曲率 H 的平方成比例.

七、曲面在一点邻近的结构

考虑与曲面上一点P邻近的曲面形状.

由Euler公式,沿方向(d)的法曲率$k_n = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta$.

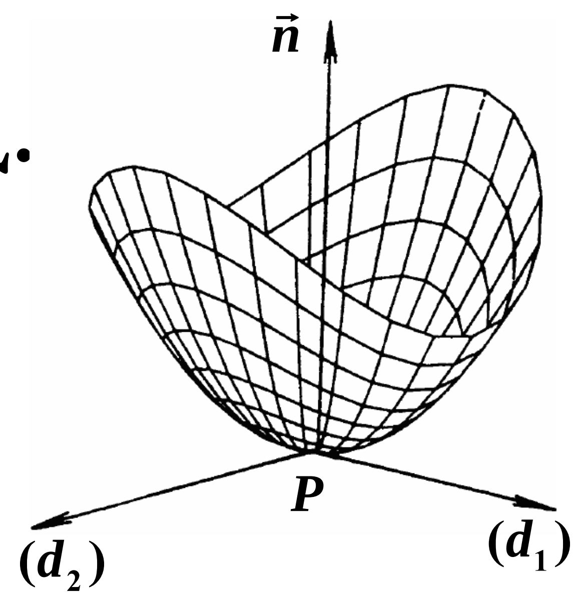
1. 当$K = k_1k_2 > 0$时，$LN - M^2 = K(EG - F^2) > 0$,

P为椭圆点.

法截线的近似为$y = \dfrac{k_n}{2}x^2$,为一抛物线.

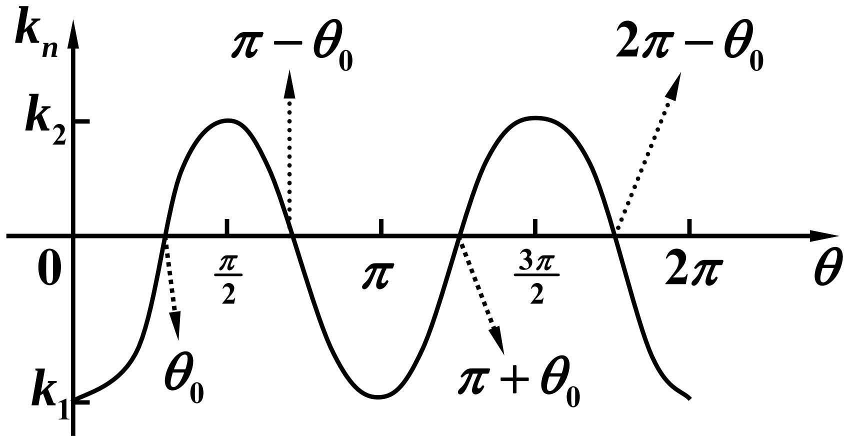
k_n的符号不变,抛物线开口方向不变.

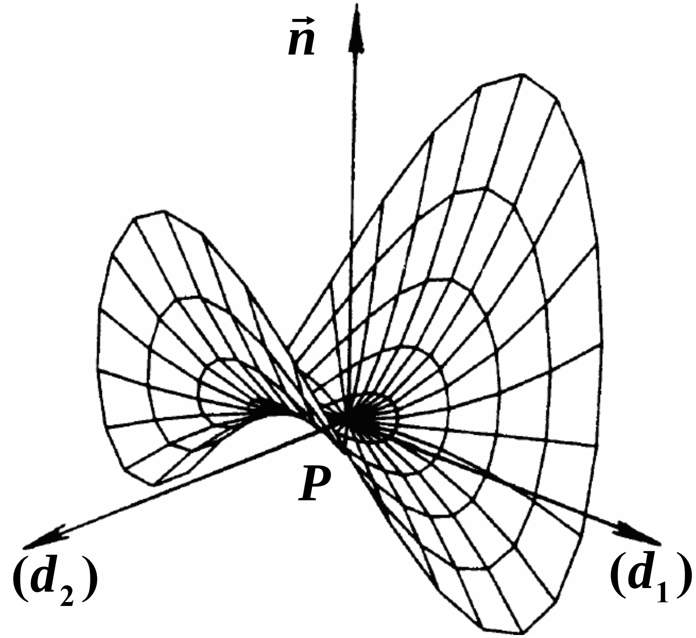
邻近曲面近似于椭圆抛物面.



2. 当$K = k_1 k_2 < 0$时，$LN - M^2 < 0$，P为双曲点.

选取法向$\vec{n}$的方向使$k_1 < 0, k_2 > 0$，令$\theta_0 = \arctan\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$.





θ	$[0, \theta_0)$	$(\theta_0, \pi - \theta_0)$	$(\pi - \theta_0, \pi + \theta_0)$	$(\pi + \theta_0, 2\pi - \theta_0)$	$(2\pi - \theta_0, 2\pi]$
法截线形状	开口向下的抛物线	开口向上的抛物线	开口向下的抛物线	开口向上的抛物线	开口向下的抛物线

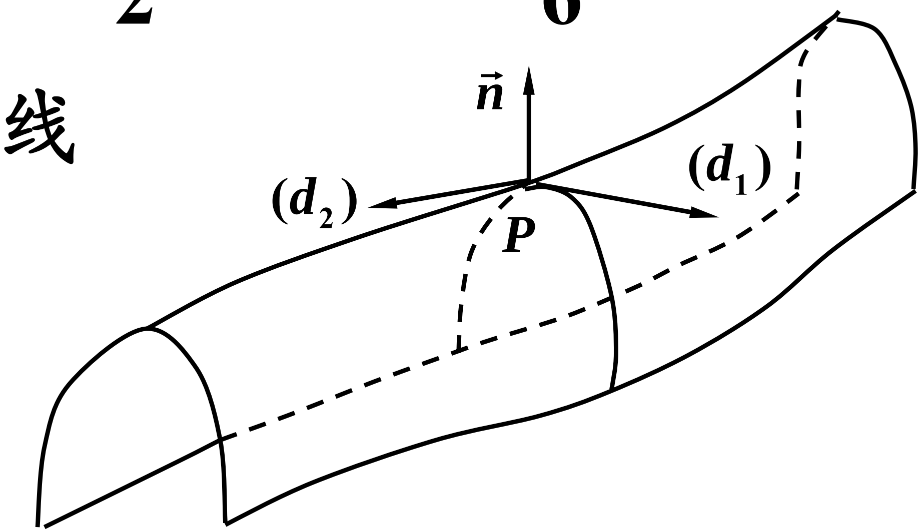
3. 当$K=k_1k_2=0$时，$LN-M^2=0$， P为抛物点或平点.

若为抛物点，选取法向$\vec{n}$的方向使$k_1<0, k_2=0$.

主方向上的法截线近似为$y=\dfrac{k_1}{2}x^2$和$y=\dfrac{\dot{k}_2}{6}x^3$,

分别为朝$\vec{n}$反向弯曲的抛物线

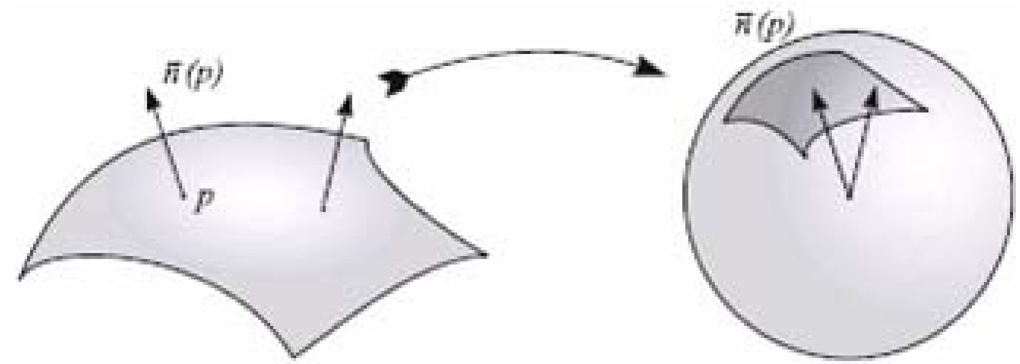
和立方抛物线.



若为平点，$k_1=k_2=0$，两条主法截线近似为

$y=\dfrac{\dot{k}_1}{6}x^3$和$y=\dfrac{\dot{k}_2}{6}x^3$， 为两条立方抛物线.

八、Gauss曲率的几何意义



1. Gauss映射

$$\vec{r}(u,v) \xrightarrow{\text{Gauss映射}} \vec{n}(u,v) = \frac{\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)}{|\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)|}$$

称$\vec{n}(u,v)$为曲面$\vec{r}(u,v)$的球面表示.

称球面表示$\vec{n}(u,v)$的第一基本形式为原曲面$\vec{r}(u,v)$的第三基本形式. 记作

$\mathrm{III} = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$，其中$e = \vec{n}_u^2,\ f = \vec{n}_u\vec{n}_v,\ g = \vec{n}_v^2$.

称e, f, g为曲面$\vec{r}(u,v)$的第三类基本量.

2. 曲面的第一、二、三类基本形式之间的联系

$$\mathrm{III} - 2H\,\mathrm{II} + K\,\mathrm{I} = 0$$

3. Gauss曲率的几何意义 ——曲线曲率的推广

设 f 是Gauss映射，则

$$\text{曲线曲率} = \lim_{P'\to P} \frac{f(P)\text{与}f(P')\text{之间单位圆的弧长}}{P\text{与}P'\text{之间曲线的弧长}}$$

$$\left|\text{Gauss曲率}\right| = |K| = \lim_{\sigma\to P} \frac{f(\sigma)\text{的面积}}{\sigma\text{的面积}}$$