Real Analysis

Hansong Huang

ECUST

At ECUST

2019.03

积分收敛定理

Levi引理
Fatou定理
Lebesgue控制收敛定理

Levi引理

3.3.1 Levi引理 如果$f_n \geq 0$, $f_n \in M(X)$, 且f_n单调递增趋于f, 那么$\int f_n \to \int f$.

3.3.1 Levi引理 如果$f_n \geq 0$, $f_n \in M(X)$, 且f_n单调递增趋于f, 那么$\int f_n \to \int f$.

若$f_n \in M^+(X), \forall n$, 则

$$\int_X \sum_n f_n = \sum_n \int_X f_n.$$

例：如果$f_n \in M(X)$, f_n单调递增趋于f. 且$f_n \geq f_0$, $f_0 \in L^1$, 那么$\int f_n \to \int f$.

例：如果$f_n \in M(X)$, f_n单调递增趋于f.
$\underline{且f_n \geq f_0,\ f_0 \in L^1}$, 那么$\int f_n \to \int f$.

事实：$h \geq 0, g \in L^1$,
则$h + g \in L^1$,且$\int (h+g) = \int h + \int g$.

例2. 求$I=\int_0^{\infty}\frac{x}{e^x-1}dx.$

解：

$$\frac{x}{e^x-1}=x\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}xe^{-nx}.$$

由Levi引理，

$$I=...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

演算：$(L)\int_0^{\infty}xe^{-nx}dx=(R)\int_0^{\infty}xe^{-nx}dx=\frac{1}{n^2}.$

例3 P102. $a_n > 0$. $\sum_n a_n < \infty$.

$$\{r_n : n \geq 1\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

例3 P102. $a_n > 0$. $\sum_n a_n < \infty$.

$$\{r_n : n \geq 1\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

$$f(x) = \sum_n a_n \frac{1}{\sqrt{|x - r_n|}}, \; 0 < x < 1.$$

证明:$f(x)$ 几乎处处有限.

例3 P102. $a_n > 0$. $\sum_n a_n < \infty$.

$$\{r_n : n \geq 1\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

$$f(x) = \sum_n a_n \frac{1}{\sqrt{|x - r_n|}}, \; 0 < x < 1.$$

证明:$f(x)$ 几乎处处有限.

提示: $f \geq 0$, 证明$\int f < \infty$.

$$\int_0^1 f(x) = \int_0^1 (\sum_n a_n \frac{1}{\sqrt{|x - r_n|}}) = \sum_n \int_0^1 a_n \frac{1}{\sqrt{|x - r_n}}$$

记住：若$f_n \geq 0$可测，要判定$\sum f_n$几乎处处收敛（或证明$f_n(x) \to 0$, a.e.）只要判定$\sum \int_X f_n < +\infty$.

Levi引理的证明

3.3.1 Levi引理 如果$f_n \geq 0$, $f_n \in M(X)$, 且f_n单调递增趋于f, 那么$\lim \int f_n = \int f$.

$\leq$显然.

$f_n \leq f$

$$\int f_n \leq \int f.$$

$$\lim \int f_n \leq \int f.$$

Levi引理的证明

3.3.1 Levi引理 如果$f_n \geq 0$, $f_n \in M(X)$, 且f_n单调递增趋于f, 那么$\lim \int f_n = \int f$.

$\geq$方向.

Step 1. 断言：对$0 < r < 1$, $\varphi \leq f$且$\varphi \in S^+(X)$(简单函数),

$$\int r\varphi \leq \lim \int f_n.$$

Step 2. 利用$\int f = \sup \int \varphi$.推出$\geq$.

Fatou定理

Fatou定理 若对$n = 1, 2, \cdots$, $f_n \geq 0$可测, 则
$$\int_X \liminf f_n \leq \liminf \int_X f_n.$$

Fatou定理 若对$n=1,2,\cdots,\ f_n\geq 0$可测, 则

$$\int_X \liminf f_n \leq \liminf \int_X f_n.$$

分析

$$\liminf f_n = \lim_n \underline{\inf_{k\geq n} f_k} \equiv \lim_n F_n$$

F_n单调递增.
由Levi引理,

$$\int \liminf f_n = \lim \int F_n.$$

$$\inf_{k\geq n} f_k = F_n$$

由Levi引理，

$$\int \liminf f_n = \lim \int F_n.$$

$\int F_n \leq \int f_{n+j},\ j = 1, 2, \cdots$

$$\inf_{k\geq n} f_k = F_n$$

由Levi引理，

$$\int \liminf f_n = \lim \int F_n.$$

$\int F_n \leq \int f_{n+j},\ j = 1, 2, \cdots$

$$\underline{\int F_n} \leq \liminf_j \int f_{n+j} = \underline{\liminf_k \int f_k}$$

Homework. f_n是$\mathbb{N}$上的非负函数，则

$$\sum_1^\infty \liminf f_n(k) = \liminf \sum_1^\infty f_n(k).$$

控制收敛定理 f_n可测，设$f_n \to f$ a.e.或$\{f_n\}$依测度μ收敛于f, 如果存在$g \in L^1$, 使得

$$|f_n| \leq g, n = 1, 2, \cdots,$$

则$f \in L^1$,

$$\int_X |f_n - f| \to 0.$$

控制收敛定理 f_n可测，设$f_n \to f$ a.e.或$\{f_n\}$依测度μ收敛于f, 如果存在$g \in L^1$, 使得

$$|f_n| \leq g, n = 1, 2, \cdots,$$

则$f \in L^1$,

$$\int_X |f_n - f| \to 0.$$

Homework：书上证明.

有界收敛定理 f_n可测，且一致有界. 设$f_n \to f$ a.e.或$\{f_n\}$依测度μ收敛于f, 如果$\mu X < \infty$ 则$f \in L^1$,

$$\int_X |f_n - f| \to 0.$$

另外一种证明. 一致收敛.

控制收敛定理 1. 给出估计，找到控制函数g

2. 确认$g \in L^1$

3. 由控制收敛定理，得极限=

例：定理3.3.6

Thank you!