刚体：彼此间距离保持不变的“**质点系**”

刚体运动：大量质点运动的**总效应**

刚体的定轴转动：各点都有相同的$\Delta\theta$、ω、α

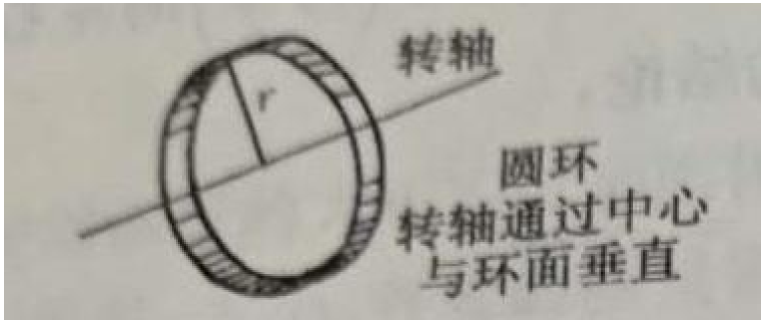
力矩是改变刚体转动状态的原因

$$M = J\alpha$$ ——转动定律

转动惯量：

$$J = \begin{cases} \sum_i r_i^2 \Delta m_i & \text{质量非连续分布} \\ \int_m r^2 dm & \text{质量连续分布} \end{cases}$$

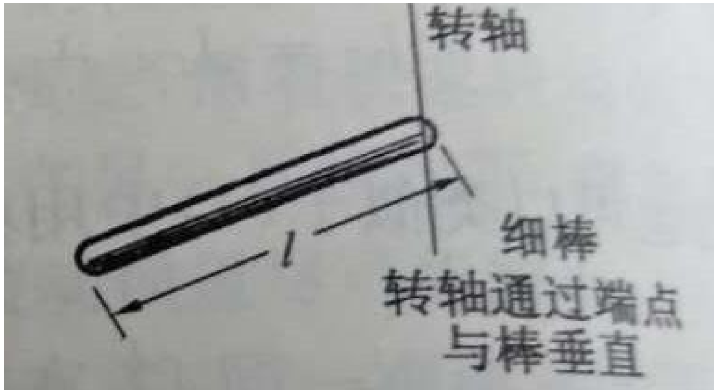
r为质元到转轴距离



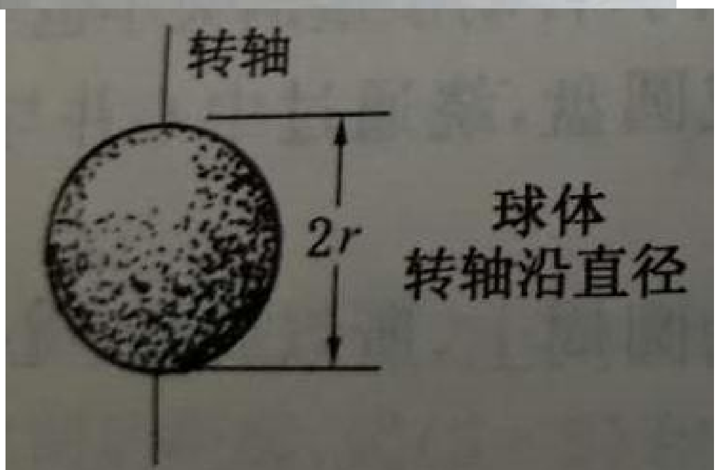
$$J=mr^2$$

$$J=\frac{mr^2}{2}$$

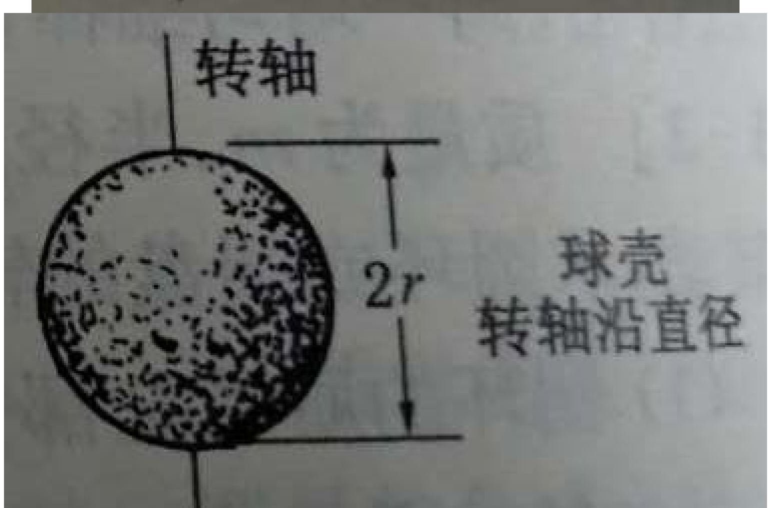
$$J=\frac{ml^2}{12}$$



$$J=\frac{ml^2}{3}$$

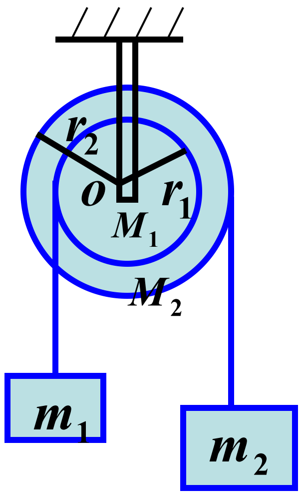


$$J=\frac{2mr^2}{5}$$

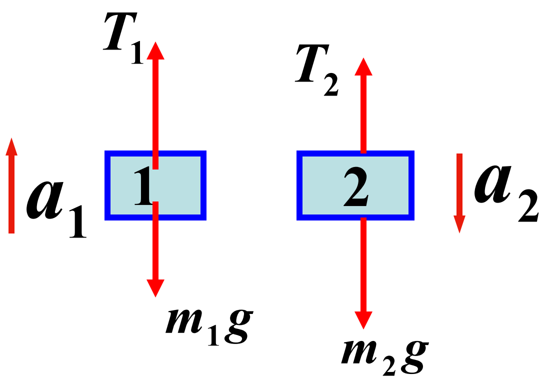


$$J=\frac{2mr^2}{3}$$

例4 已知m_1, m_2 ($m_1<m_2$), 滑轮组(M_1, r_1, M_2, r_2), 求两物体加速度、绳子张力、两滑轮角加速度。



两物体a相同吗？ 两滑轮α相同吗？两边绳子张力相同吗？



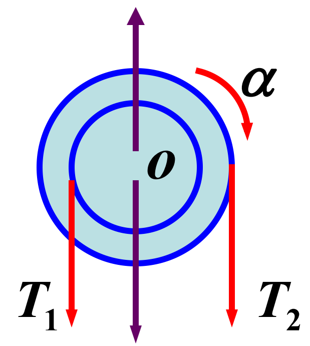
$$m_1: \quad \underline{T_1} - m_1 g = m_1 \underline{a_1}$$

$$m_2: \quad m_2 g - \underline{T_2} = m_2 \underline{a_2}$$

$$M: \quad T_2 r_2 - T_1 r_1 = J\underline{\alpha}$$

$$J = \tfrac{1}{2} M_1 r_1^2 + \tfrac{1}{2} M_2 r_2^2$$

$$a_1 = r_1 \alpha \qquad a_2 = r_2 \alpha$$



$$\alpha = \frac{2(m_2 r_2 - m_1 r_1) g}{2m_2 r_2^2 + 2m_1 r_1^2 + M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2}$$

例5：一轻绳扰过一定滑轮($M/4$)，质量M的人抓住绳的一端A，绳的另一端B系一质量为$M/2$的重物，$J_{轮}=\frac{M}{4}R^2$

问：当人相对绳以匀速向上爬时，B端重物上升的加速度.

解：选地面参照系

$$B: T_1-\frac{M}{2}g=\frac{M}{2}a_B \ldots(1)$$

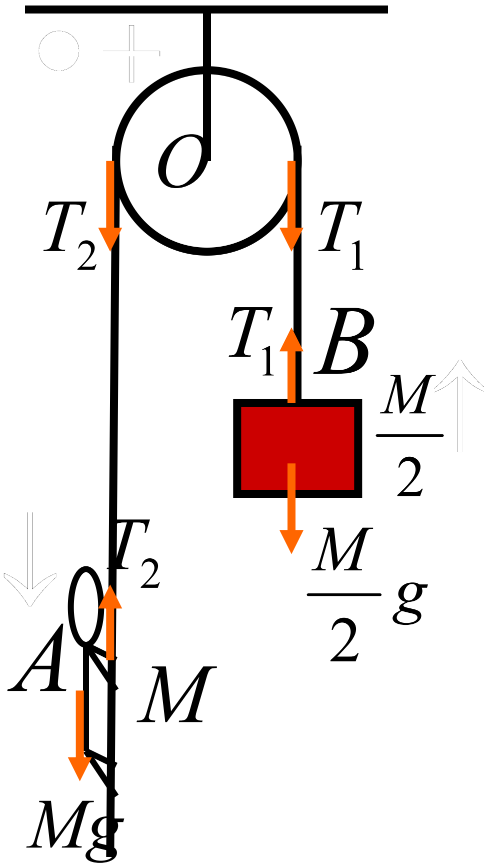
$$轮: T_2R-T_1R=\frac{M}{4}R^2\alpha \cdots(2)$$

$$人: Mg-T_2=Ma_{人} \ldots(3)$$

$$a_B=R\alpha \ldots(4)$$

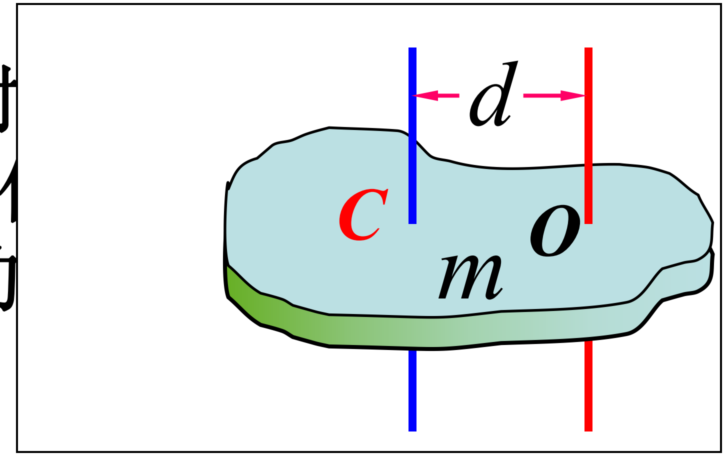
$$a_{人}=a_{人绳}+a_{绳地}=a_B \ldots(5)$$

由上五个方程可得：$a_B=\frac{2}{7}g$

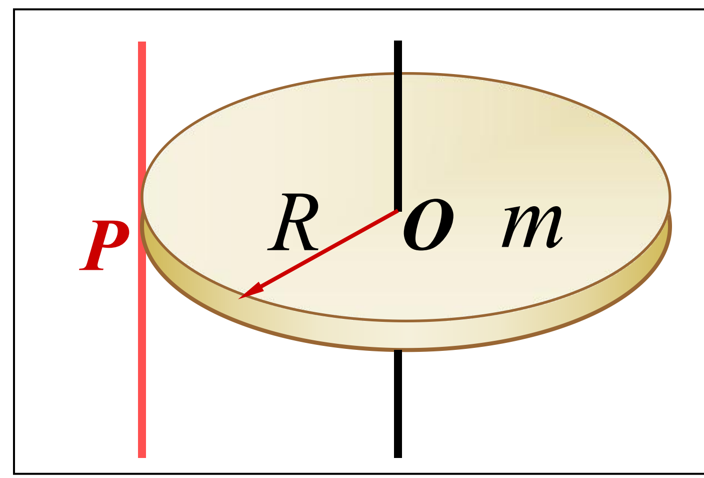


四. 平行轴定理

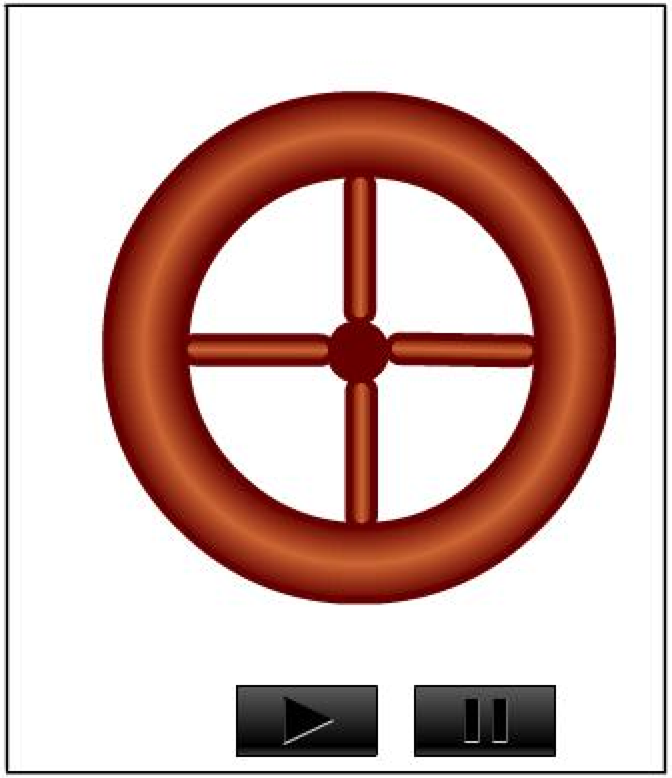
质量为 m 的刚体，如果对质心轴的转动惯量为J_C，则对任一与该轴平行，相距为 d 的轴的转动惯量



$$J_O = J_C + md^2$$

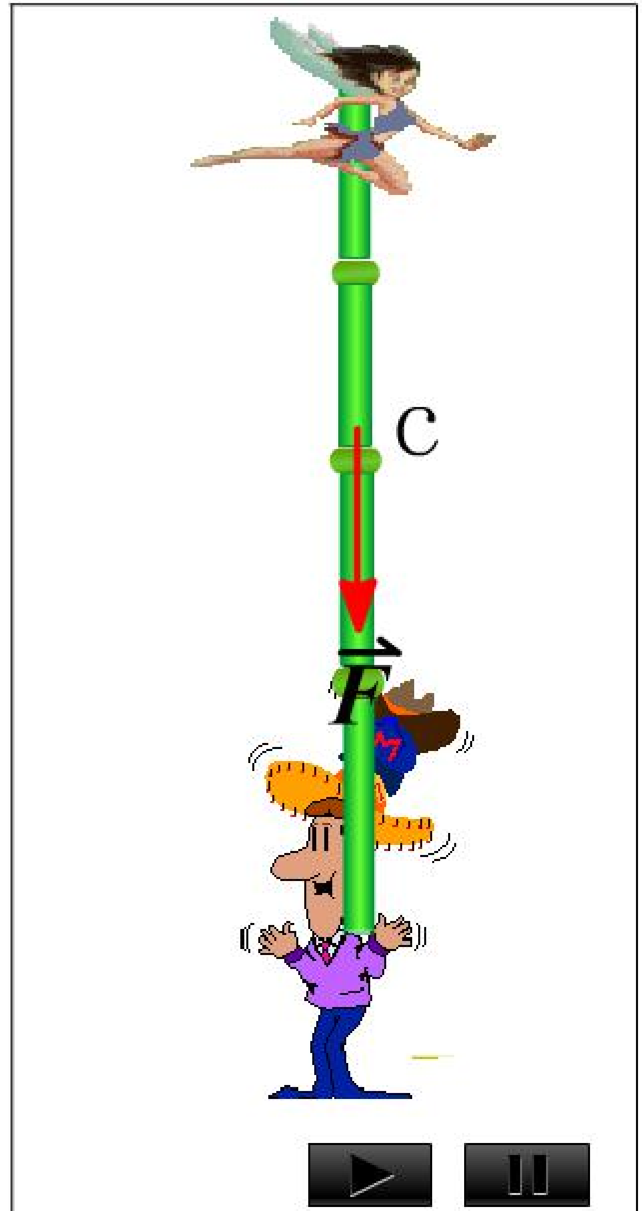


圆盘对P 轴的转动惯量 $J_P = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2$



1

飞轮的质量为什么
大都分布于外轮缘？



2

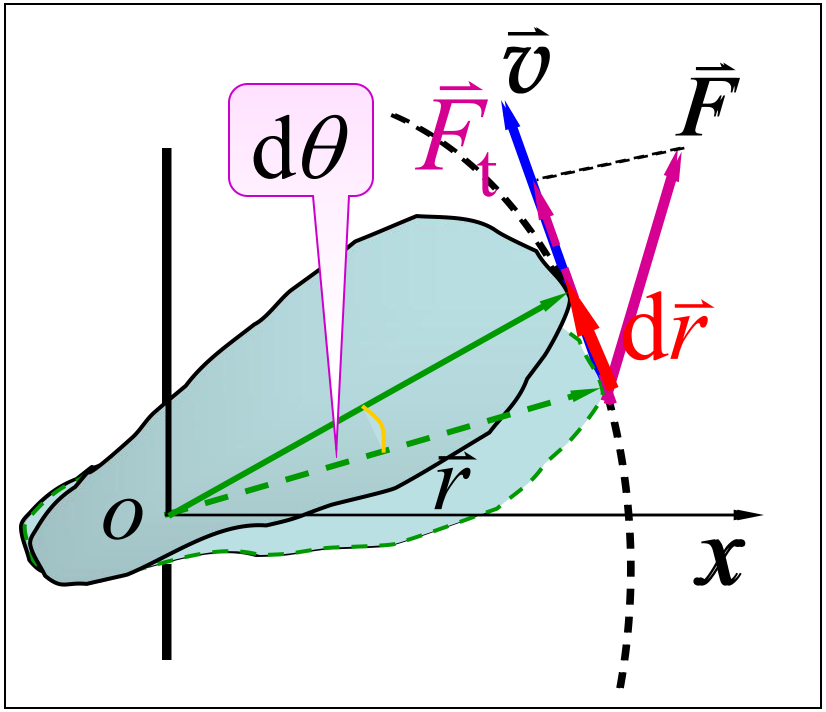
竿子长些还是短些较安全？

3.3 刚体转动中的功能关系

力的空间累积效应 ⟹ 力的功, 动能, 动能定理.

力矩的空间累积效应 ⟹ 力矩的功, 转动动能, 动能定理.

一. 力矩作功



$$\mathrm{dA} = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = F_t \mathrm{d}s$$

$$= F_t r \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{dA} = M \mathrm{d}\theta$$

力矩的功 $\boxed{A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \mathrm{d}\theta}$

二. 力矩的功率

$$P = \frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M\omega$$

三. 转动动能

$$E_k=\sum_i\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2=\frac{1}{2}(\sum_i\Delta m_i r_i^2)\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2$$

四. 刚体绕定轴转动的动能定理

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_1}J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta=\int_{\omega_1}^{\omega_2}J\omega\mathrm{d}\omega$$

$$\boxed{A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2}$$

合外力矩对绕定轴转动的刚体所作的功等于刚体转动动能的增量 .

定轴转动动能定理

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta=\frac{1}{2}J\omega_2{}^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$$

既有质点平动又有刚体定轴转动的系统：

$$A_{\text{所有力矩}}+A_{\text{所有力}}=E_{k2}-E_{k1}$$ ——系统的动能定理

其中：$E_k=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2$

$$A_{\text{外力矩}}+A_{\text{外力}}+A_{\text{非保内力矩}}+A_{\text{非保内力}}=E_2-E_1$$

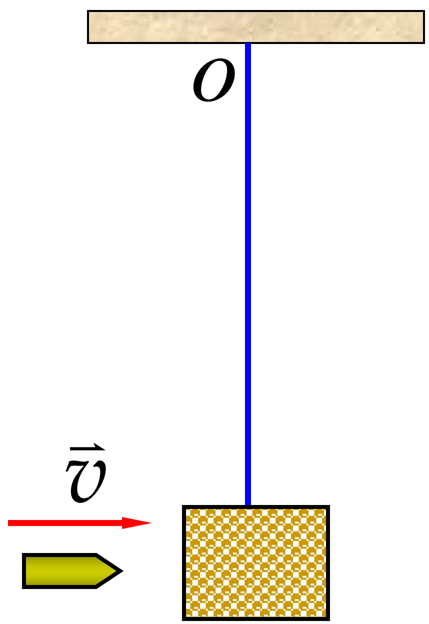
其中：$E=E_k+E_p$ ——系统的功能原理

若：$A_{\text{外力矩}}+A_{\text{外力}}+A_{\text{非保内力矩}}+A_{\text{非保内力}}=0$

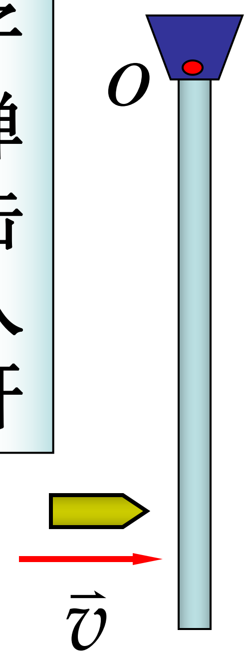
则：$E_2=E_1$ ——系统机械能守恒

讨 论

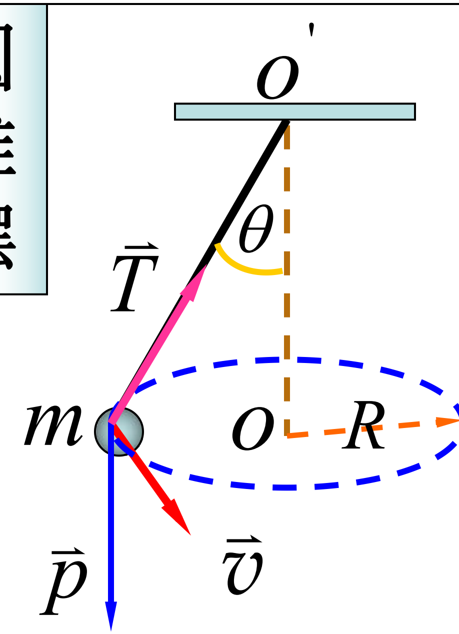
子弹击入沙袋
细绳质量不计



子弹击入杆

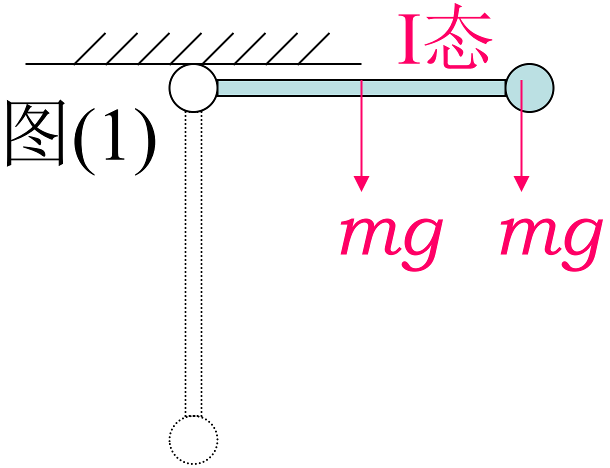


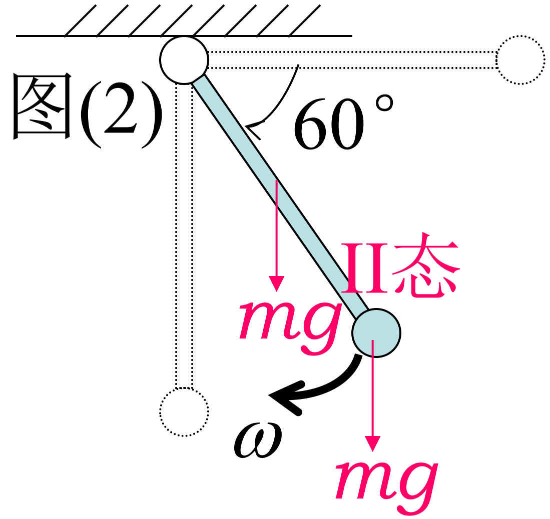
圆锥摆



以子弹和沙袋为系统	以子弹和杆为系统	圆锥摆系统
动量守恒；	动量不守恒；	动量不守恒；
角动量守恒；	角动量守恒；	角动量守恒；
机械能不守恒．	机械能不守恒．	机械能守恒．

[例1]已知均质棒m, l,半径忽略的小球m组成图示系统，求图(1)α;图(2)棒中心a_t a_n ω





解(1)

$$\left.\begin{array}{l} M = mg\dfrac{l}{2} + mgl = \dfrac{3}{2}mgl \\ J = \dfrac{1}{3}ml^2 + ml^2 = \dfrac{4}{3}ml^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = M/J = \frac{9g}{8l}$$

(2) I态→II态, 动能定理

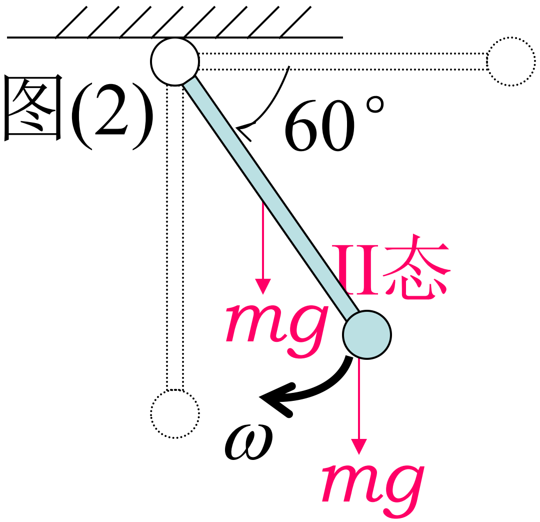
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}ml^2\right)\omega^2 = mgl\sin 60^0 + mg\frac{l}{2}\sin 60^0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{9\sqrt{3}g}{8l}}$$

$$M = mg\frac{l}{2}\cos 60^0 + mgl\cos 60^0$$

$$= \frac{3}{4}mgl \Rightarrow \alpha = M/J = \frac{9g}{16l}$$

$$a_t = \alpha\frac{l}{2} = \frac{9g}{32} \qquad a_n = \omega^2(\frac{l}{2}) = \frac{9\sqrt{3}g}{16}$$

图(2)



$$\omega = \sqrt{\frac{9\sqrt{3}g}{8l}}$$

$$J = \frac{4}{3}ml^2$$

一般情况：

求： α 用$M=J\alpha$

ω用动能定理或E守恒定律

a_t、a_n、v用线量和角量关系式