Chapter5 整数规划(Integer Programming)

本章主要内容:

- 整数规划的特点及应用
- 分支定界法
- **0 – 1** 整数规划
- 指派问题

整数规划的特点及应用

- 在很多场合，我们建立最优化模型时，实际问题要求决策变量只能取整数值而非连续取值，如机器台数、完成工作的人数等。此时，这类最优化模型就称为整数规划（离散最优化）模型。

- 整数规划的求解往往比线性规划求解困难得多，而且，一般来说不能简单地将相应的线性规划的解取整来获得。

整数规划的特点及应用

整数规划（简称：IP）

要求一部分或全部决策变量取整数值的规划问题称为整数规划。不考虑整数条件，由余下的目标函数和约束条件构成的规划问题称为该整数规划问题的松弛问题。若该松弛问题是一个线性规划，则称该整数规划为整数线性规划。

整数线性规划数学模型的一般形式:

$$\max Z(\text{或}\min Z)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

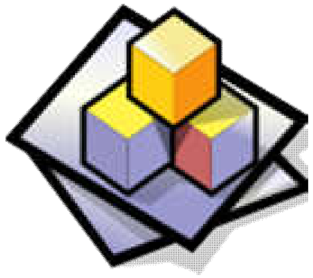
$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i & (i=1.2\cdots m)\\ x_j\geq 0\,(\mathrm{j}=1.2\cdots \mathrm{n})\text{且部分或全部为整数}\end{cases}$$

整数规划的特点及应用

整数线性规划问题的种类：

- 纯整数线性规划：指全部决策变量都必须取整数值的整数线性规划。
- 混合整数线性规划：决策变量中有一部分必须取整数值，另一部分可以不取整数值的整数线性规划。
- 0-1型整数线性规划：决策变量只能取值0或1的整数线性规划。

$$\text{整数规划}\begin{cases}\text{纯整数规划}\\ \mathbf{0-1}\ \text{规划}\\ \text{混合整数规划}\end{cases}$$



整数规划的特点及应用

整数规划的典型例子

例5.1 工厂A_1和A_2生产某种物资。由于该种物资供不应求，故需要再建一家工厂。相应的建厂方案有A_3和A_4两个。这种物资的需求地有B_1,B_2,B_3,B_4四个。各工厂年生产能力、各地年需求量、各厂至各需求地的单位物资运费c_{ij}，见下表：

	B_1	B_2	B_3	B_4	年生产能力
A_1	2	9	3	4	400
A_2	8	3	5	7	600
A_3	7	6	1	2	200
A_4	4	5	2	5	200
年需求量	350	400	300	150	

工厂A_3或A_4开工后，每年的生产费用估计分别为1200万或1500万元。现要决定应该建设工厂A_3还是A_4，才能使今后每年的总费用最少。

整数规划的特点及应用

解：这是一个物资运输问题，特点是事先不能确定应该建A_3还是A_4中哪一个，因而不知道新厂投产后的实际生产物资。为此，引入0-1变量：

$$y_i=\begin{cases}1 & 若建工厂\\ 0 & 若不建工厂\end{cases}\quad (i=3,4)$$

再设x_{ij}为由A_i运往B_j的物资数量，单位为千吨；z表示总费用，单位万元。

则该规划问题的数学模型可以表示为：

整数规划的特点及应用

$$\min z=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}+[1200y_3+1500y_4]$$

$$s.t\begin{cases}x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=350\\x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=400\\x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=300\\x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=150\\x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=400\\x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=600\\x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=200y_3\\x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=200y_4\\x_{ij}\geq 0\quad (i,j=1,2,3,4)\\y_i=0,1\ \ (i=1,2)\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 混合整数规划问题

整数规划的特点及应用

例5.2 现有资金总额为B。可供选择的投资项目有n个，项目j所需投资额和预期收益分别为a_j和c_j（$j = 1,2,..,n$），此外由于种种原因，有三个附加条件:

- 若选择项目1，就必须同时选择项目2。反之不一定;
- 项目3和4中至少选择一个;
- 项目5,6,7中恰好选择2个。

应该怎样选择投资项目，才能使总预期收益最大。

整数规划的特点及应用

解：对每个投资项目都有被选择和不被选择两种可能，因此分别用0和1表示，令x_j表示第j个项目的决策选择，记为：

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{对项目 } j \text{投资} \\ 0 & \text{对项目 } j \text{不投资} \end{cases} \quad (j = 1,2,\ldots, n)$$

投资问题可以表示为：

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le B \\ x_2 \ge x_1 \\ x_3 + x_4 \ge 1 \\ x_5 + x_6 + x_7 = 2 \\ x_j = 0 \text{或者} 1 \quad (j = 1, 2, \cdots n) \end{cases}$$

整数规划的特点及应用

例5.3 指派问题或分配问题。人事部门欲安排四人到四个不同岗位工作，每个岗位一个人。经考核四人在不同岗位的成绩（百分制）如表所示，如何安排他们的工作使总成绩最好。

工作 / 人员	A	B	C	D
甲	85	92	73	90
乙	95	87	78	95
丙	82	83	79	90
丁	86	90	80	88

整数规划的特点及应用

设

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{分配第}i\text{人做}j\text{工作时}\\ 0 & \text{不分配第}i\text{人做}j\text{工作时}\end{cases}$$

数学模型如下：

$$\begin{aligned}\max Z = {} & 85x_{11}+92x_{12}+73x_{13}+90x_{14}+95x_{21}+87x_{22}+\\ & +78x_{23}+95x_{24}+82x_{31}+83x_{32}+79x_{33}+90x_{34}+\\ & +86x_{41}+90x_{42}+80x_{43}+88x_{44}\end{aligned}$$

要求每人做一项工作，约束条件为：

$$\begin{cases}x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1\\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1\end{cases}$$

整数规划的特点及应用

每项工作只能安排一人，约束条件为:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1 \end{cases}$$

变量约束:

$$x_{ij}=0\text{或}1,\ \ i\text{、}j=1,2,3,4$$

整数规划的特点及应用

整数规划问题解的特征:

- 整数规划问题的可行解集合是它松弛问题可行解集合的一个子集，任意两个可行解的凸组合不一定满足整数约束条件，因而不一定仍为可行解。
- 整数规划问题的可行解一定是它的松弛问题的可行解（反之不一定），但其最优解的目标函数值不会优于后者最优解的目标函数值。

整数规划的特点及应用

例5.4 设整数规划问题如下

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 14x_1 + 9x_2 \le 51 \\ -6x_1 + 3x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0\text{且为整数} \end{cases}$$

首先不考虑整数约束，得到线性规划问题（一般称为松弛问题）。

$$\max Z = x_1 + x_2$$

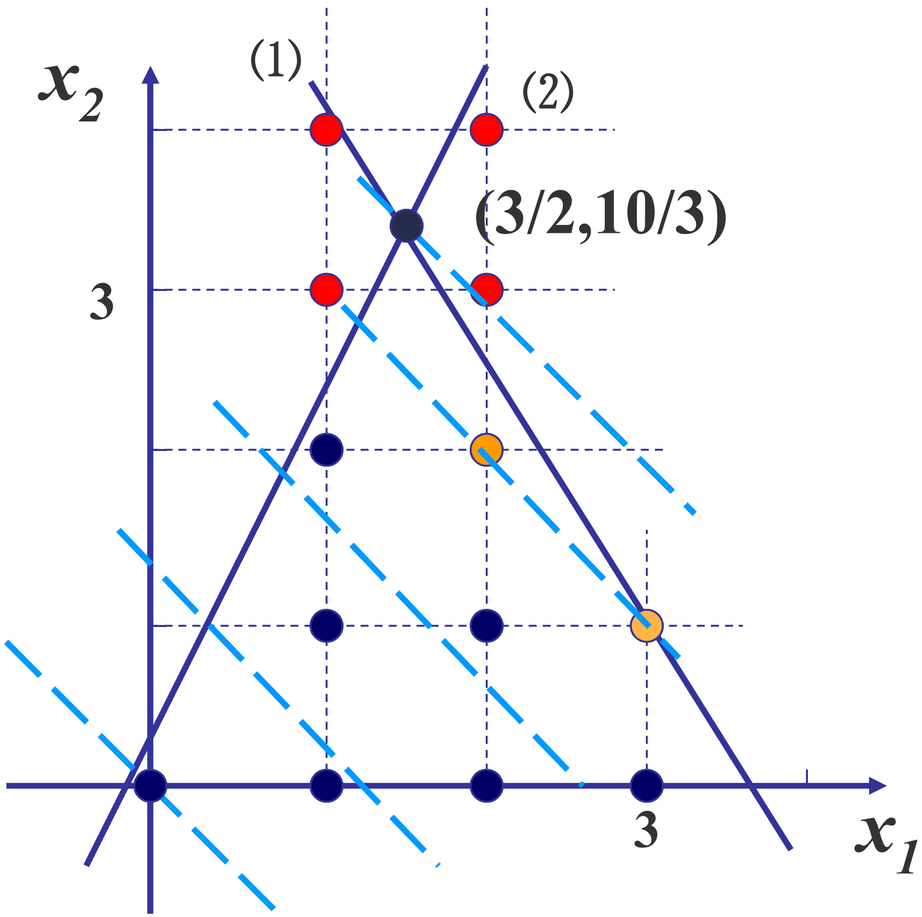
$$\begin{cases} 14x_1 + 9x_2 \le 51 \\ -6x_1 + 3x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

整数规划的特点及应用

用图解法求出最优解为：$x_1 = 3/2$，$x_2 = 10/3$，且有Z = 29/6

现求整数解(最优解):如用舍入取整法可得到4个点即(1，3),(2，3),(1，4),(2，4)。显然，它们都不可能是整数规划的最优解。

按整数规划约束条件，其可行解肯定在线性规划问题的可行域内且为整数点。故整数规划问题的可行解集是一个有限集，如右图所示。其中(2,2),(3,1)点的目标函数值最大，即为Z=4。



整数规划的特点及应用

在一些情况下，对于整数规划，可以不顾决策变量的整数值要求，先用线性规划的算法求解，然后对带有小数的解舍入化整即可，但一般说来，这样做面临两方面的问题：

（1）这样得到的解不一定是整数规划的可行解，特别是对于 $0-1$ 规划；

（2）由于每个决策变量有舍、入两种可能，n 个变量就有 2^n 种可能，舍入的计算量大，难于处理，例如， $n=60$， $2^n \approx 10^{18}$ 。

求解整数规划的基本方法：分支定界法和割平面法

整数规划的特点及应用

整数规划问题的求解方法:

- 分支定界法和割平面法
- 匈牙利法（指派问题）

分支定界法

分支定界法是一种“聪明的”枚举法（隐式枚举）。它把问题的可行域一步步地划分成愈来愈小的子集。

对于极小化问题，确定子问题目标函数值的一个下界，当下界大于某个已知可行解的目标函数值时，该子集上将不会有最优解；

对于极大化问题，确定子问题目标函数值的一个上界，当上界小于某个已知可行解的目标函数值时，该子集上将不会有最优解，

因此在进一步划分时可以排除有关的子集，从而大大减少计算量。

分支定界法

分支定界法的解题步骤：

1）求整数规划的松弛问题最优解；

若松弛问题的最优解满足整数要求，得到整数规划的最优解,否则转下一步；

2）分支与定界：任意选一个非整数解的变量x_i，在松弛问题中加上约束：　$x_i \leq [x_i]$　和　$x_i \geq [x_i]+1$

组成两个新的松弛问题，称为分枝。

3) 剪枝**:** 检查所有分枝的解及目标函数值，若某分枝的解是整数并且目标函数值大于（**max**）等于其它分枝的目标值，则将其它分枝剪去不再计算，若还存在非整数解并且目标值大于(**max**)整数解的目标值，需要继续分枝，再检查，直到得到最优解。

分支定界法

例5.4 用分枝定界法求解整数规划问题

$$\min\ Z = -x_1 - 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0\text{且全为整数} \end{cases} \qquad \text{IP}$$

解：首先去掉整数约束，变成一般线性规划问题(原整数规划问题的松弛问题)

$$\min\ Z = -x_1 - 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \text{LP}$$

分支定界法

用图解法求松弛问题的最优解，如图所示。

$x_1 = 18/11, x_2 = 40/11$

Z= – 218/11≈(– 19.8)

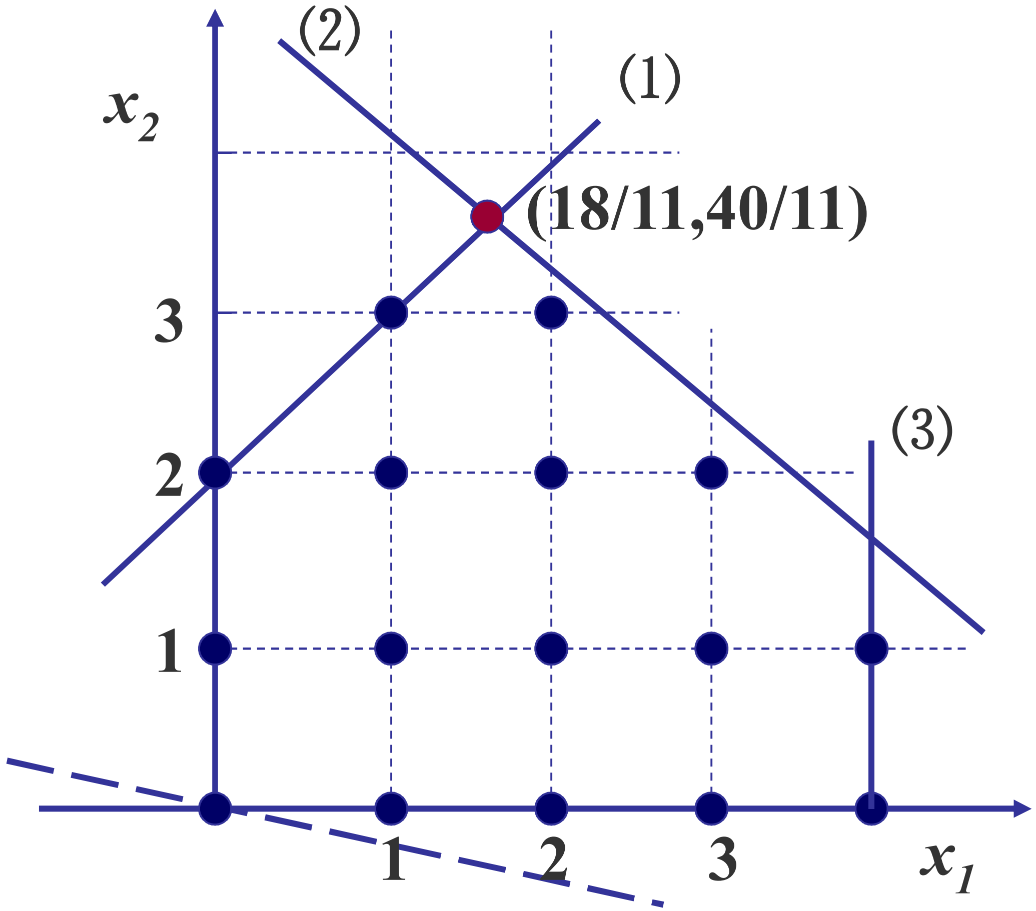
即Z 也是*IP*最小值的下限。

对于$x_1 = 18/11 \approx 1.64$，

取值$x_1 \le 1$， $x_1 \ge 2$

对于$x_2 = 40/11 \approx 3.64$，取值$x_2 \le 3$ ， $x_2 \ge 4$

先将（LP）划分为（LP1）和（LP2）,取x1 ≤1, x1 ≥2



分支定界法

分支:

$$\min\ Z = -x_1 - 5x_2$$

$$(IP1)\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

$$\min\ Z = -x_1 - 5x_2$$

$$(IP2)\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

分别求出（*LP1*）和（*LP2*）的最优解。

分支定界法

先求*LP1*,如图所示。此时在*B*点取得最优解。

$x_1 = 1, x_2 = 3, Z^{(1)} = -16$

找到整数解，问题已探明，此枝停止计算。

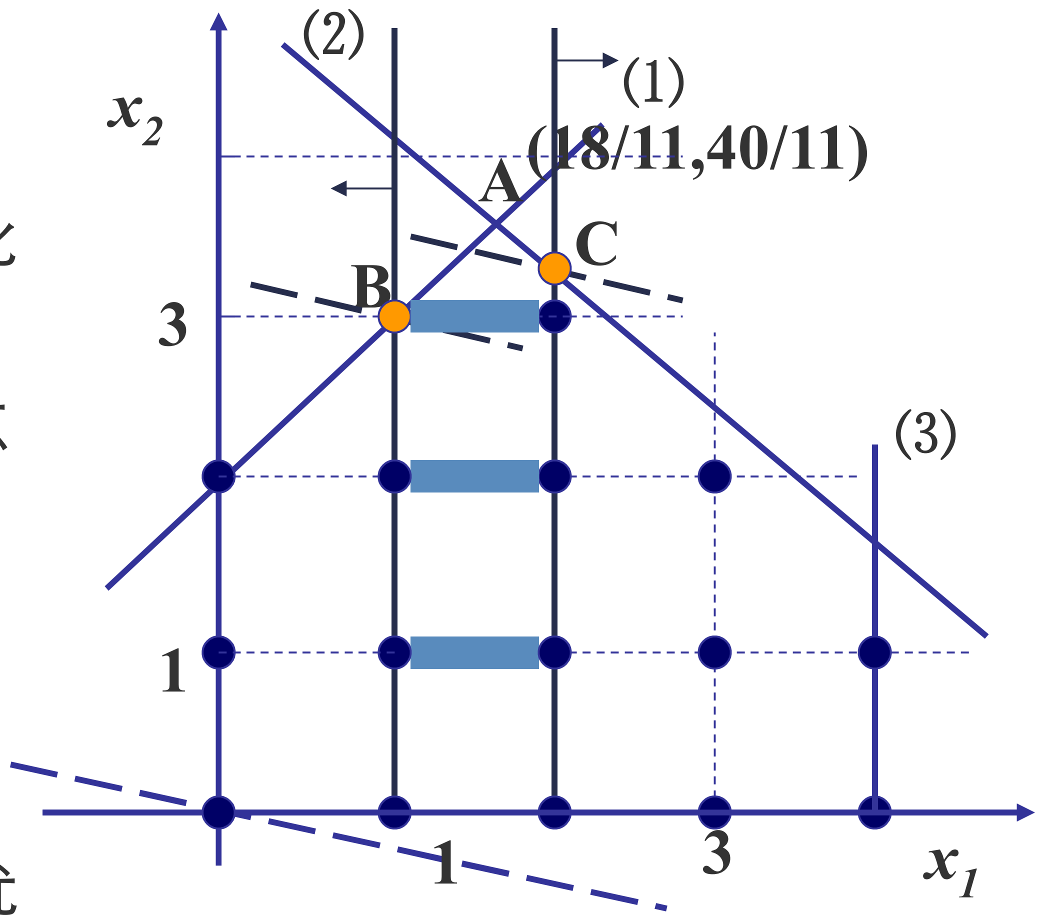
同理求*LP2*,如图所示。在*C*点取得最优解。即:

$x_1 = 2, x_2 = 10/3,$

$Z^{(2)} = -56/3 \approx -18.7$

$\because Z^{(2)} < Z^{(1)} = -16$

$\therefore$原问题有比-16更小的最优解，但x_2不是整数，故继续分支。



分支定界法

在IP2中分别再加入条件：$x_2 \leq 3, x_2 \geq 4$　得下式两支：

$$\min\ Z = -x_1 - 5x_2 \qquad\qquad \min\ Z = -x_1 - 5x_2$$

$$(IP\,21)\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0\text{且为整数} \end{cases} \qquad (IP\,22)\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0\text{且为整数} \end{cases}$$

分别求出LP21和LP22的最优解

分支定界法

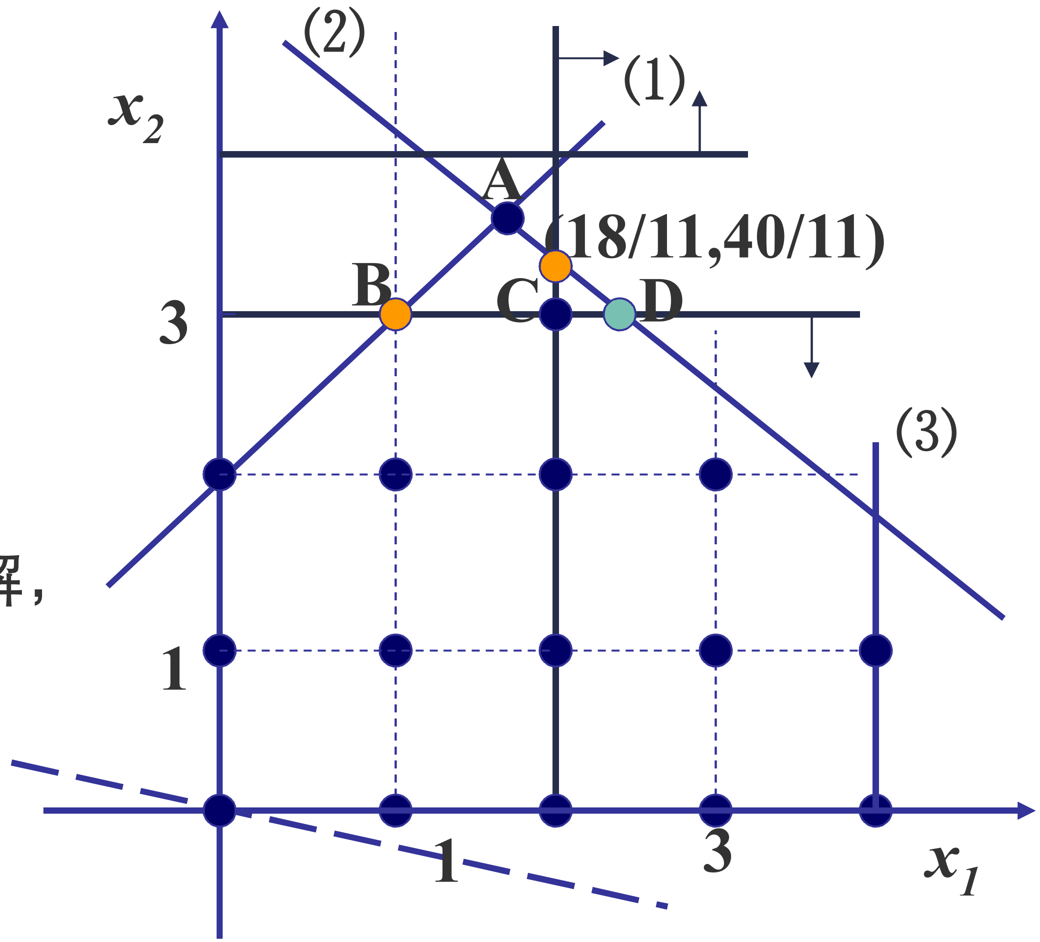
先求LP21,如图所示。此时D在点取得最优解。

即 $x_1 = 12/5 \approx 2.4$, $x_2 = 3$,

$Z^{(21)} = -87/5 \approx -17.4 < Z^{(1)} = -16$

但$x_1 = 12/5$不是整数，可继续分枝。即 $3 \le x_1 \le 2$。

求LP22，如图所示。无可行解，故不再分枝。



分支定界法

在（LP21）的基础上继续分枝。加入条件$3 \le x_1 \le 2$有下式：

$$
\min\ Z = -x_1 - 5x_2
$$

$$
(IP\,211)\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 2 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0\text{且为整数} \end{cases}
$$

$$
\min\ Z = -x_1 - 5x_2
$$

$$
(IP\,212)\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 2 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0\text{且为整数} \end{cases}
$$

分别求出（LP211）和（LP212）的最优解

分支定界法

先求（*LP211*）,如图所示。此时在*E*点取得最优解。即

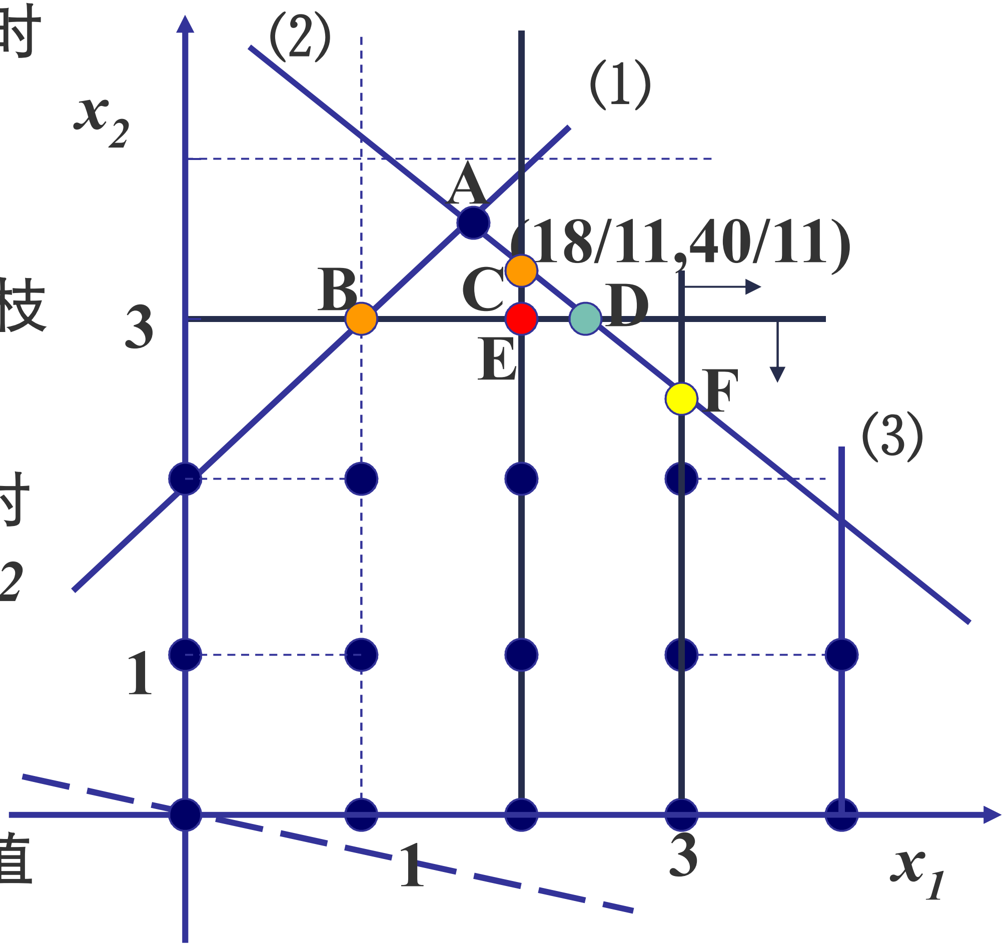
$x1 = 2, x2 = 3, Z^{(211)} = -17$

找到整数解，问题已探明，此枝停止计算。

求（*LP212*），如图所示。此时F在点取得最优解。即$x1 = 3, x2 = 2.5$,

$Z^{(212)} = -31/2 \approx -15.5 > Z^{(211)}$

如对LP212继续分解，其最小值也不会低于－15.5，问题探明,剪枝。

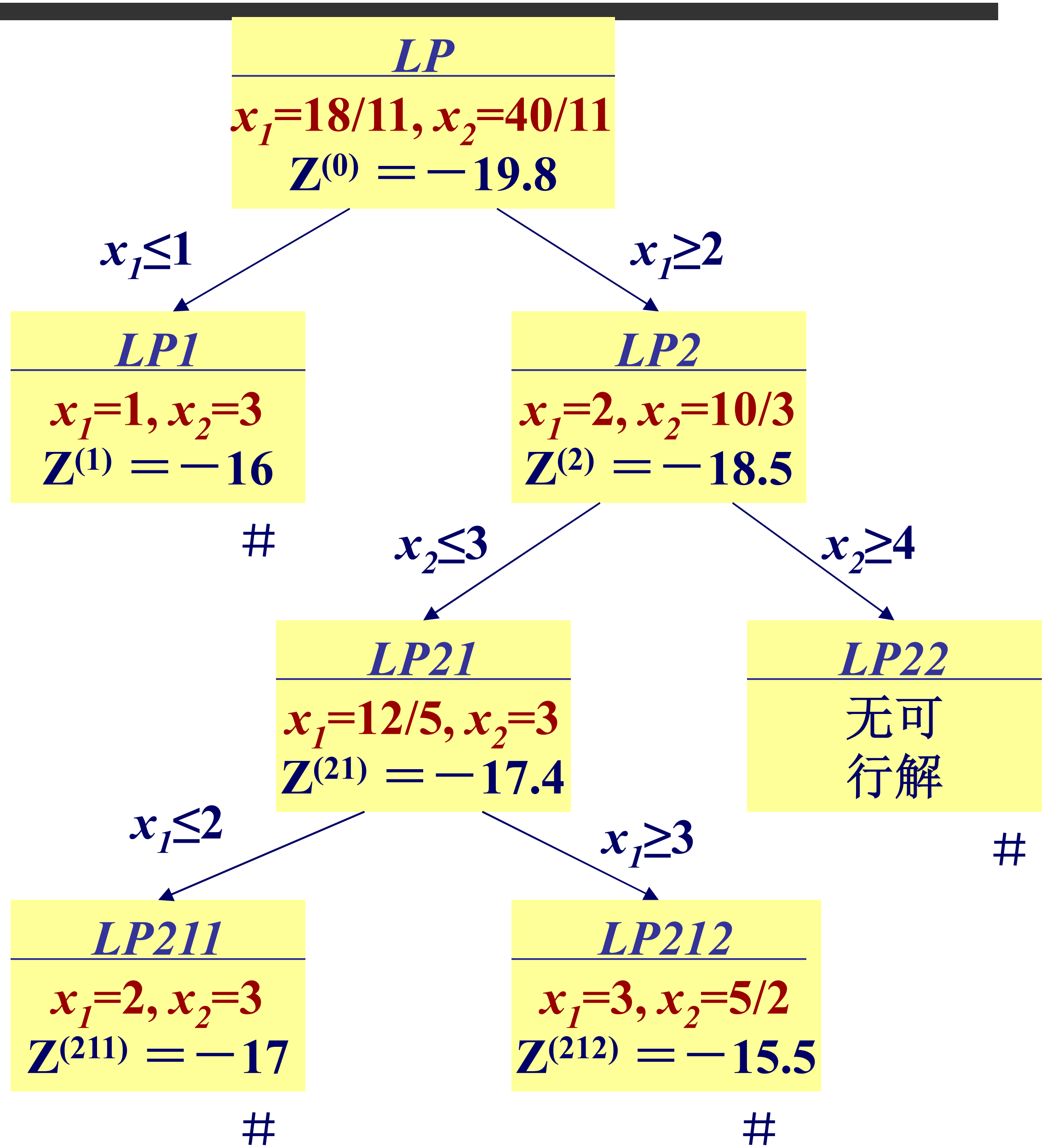


分支定界法

原整数规划问题的最优解为:

$x_1=2, x_2=3, Z^*=-17$

以上的求解过程可以用一个树形图表示如右:



分支定界法

例5.5 用分枝定界法求解

$$\max\ Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{且均取整数} \end{cases}$$

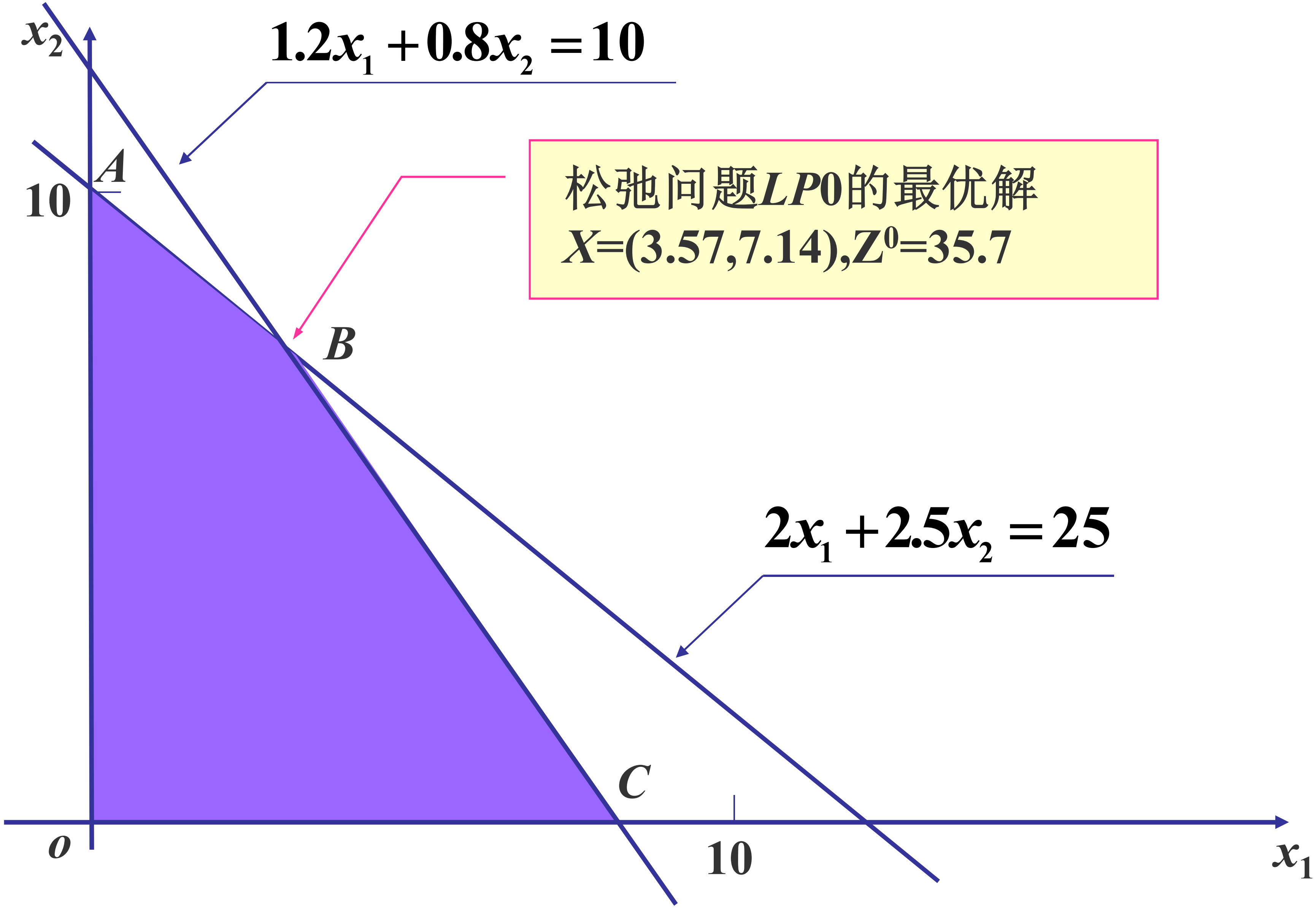
解：先求对应的松弛问题（记为LP^0）

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$st\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (LP^0)$$

用图解法得到最优解$X = (3.57, 7.14)$,$Z^0 = 35.7$,如下图所示。

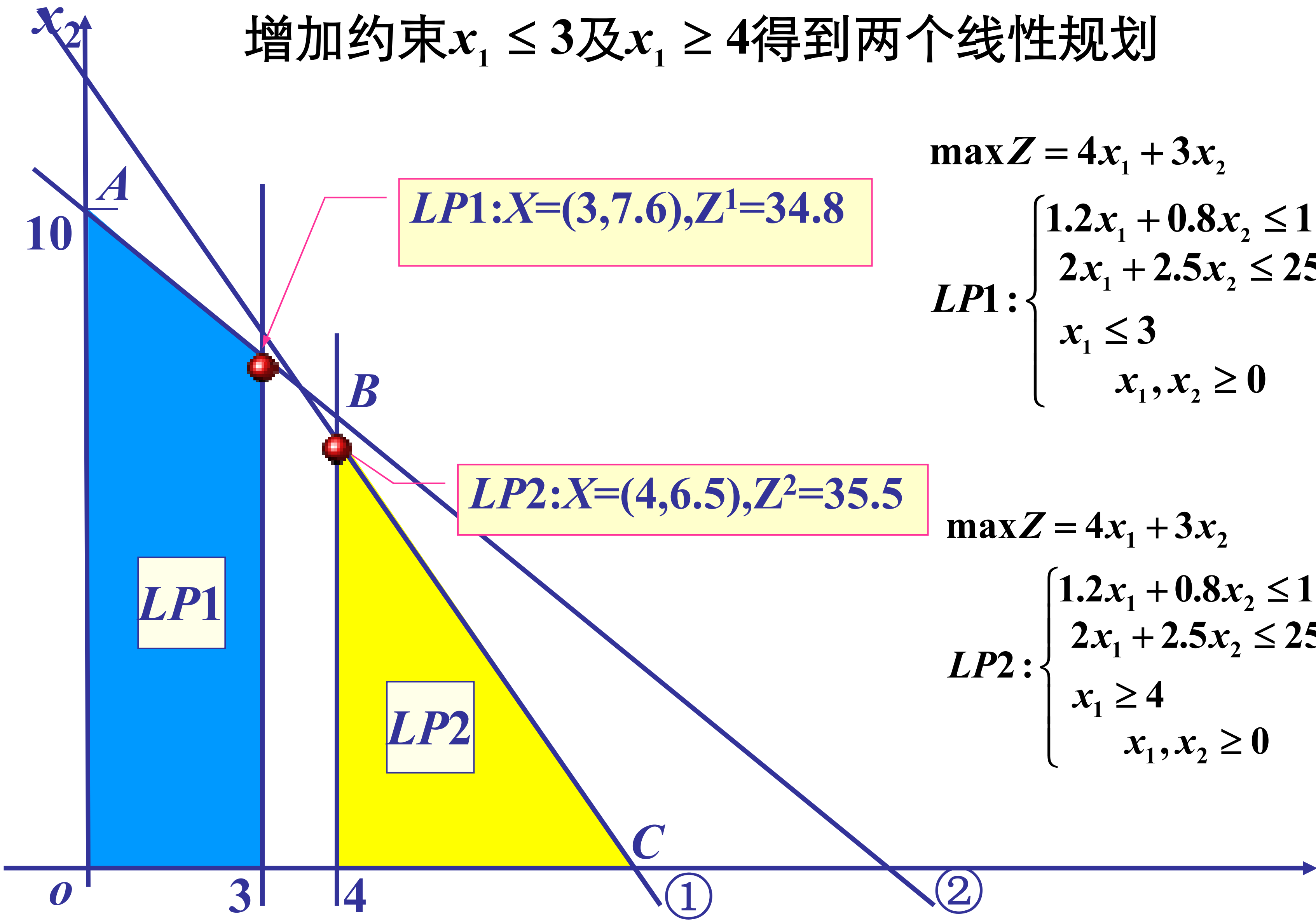
分支定界法



x_2
$1.2x_1 + 0.8x_2 = 10$
A
10
B
松弛问题LP0的最优解
X=(3.57,7.14),Z⁰=35.7
$2x_1 + 2.5x_2 = 25$
C
o
10
x_1

分支定界法

增加约束$x_1 \le 3$及$x_1 \ge 4$得到两个线性规划



$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

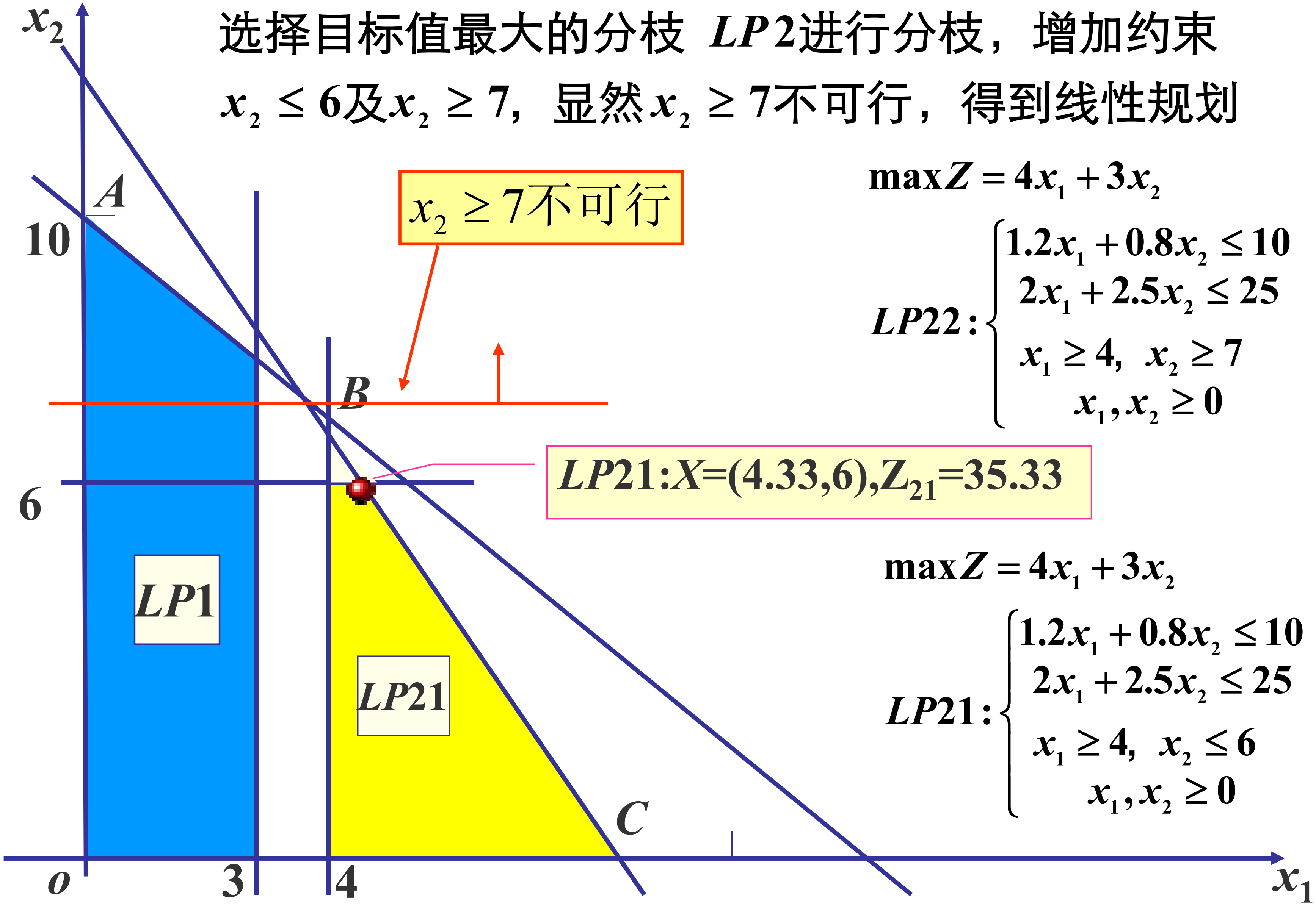
$$LP1:\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$LP2:\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

分支定界法

选择目标值最大的分枝 $LP2$进行分枝，增加约束 $x_2 \le 6$及$x_2 \ge 7$，显然$x_2 \ge 7$不可行，得到线性规划



$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

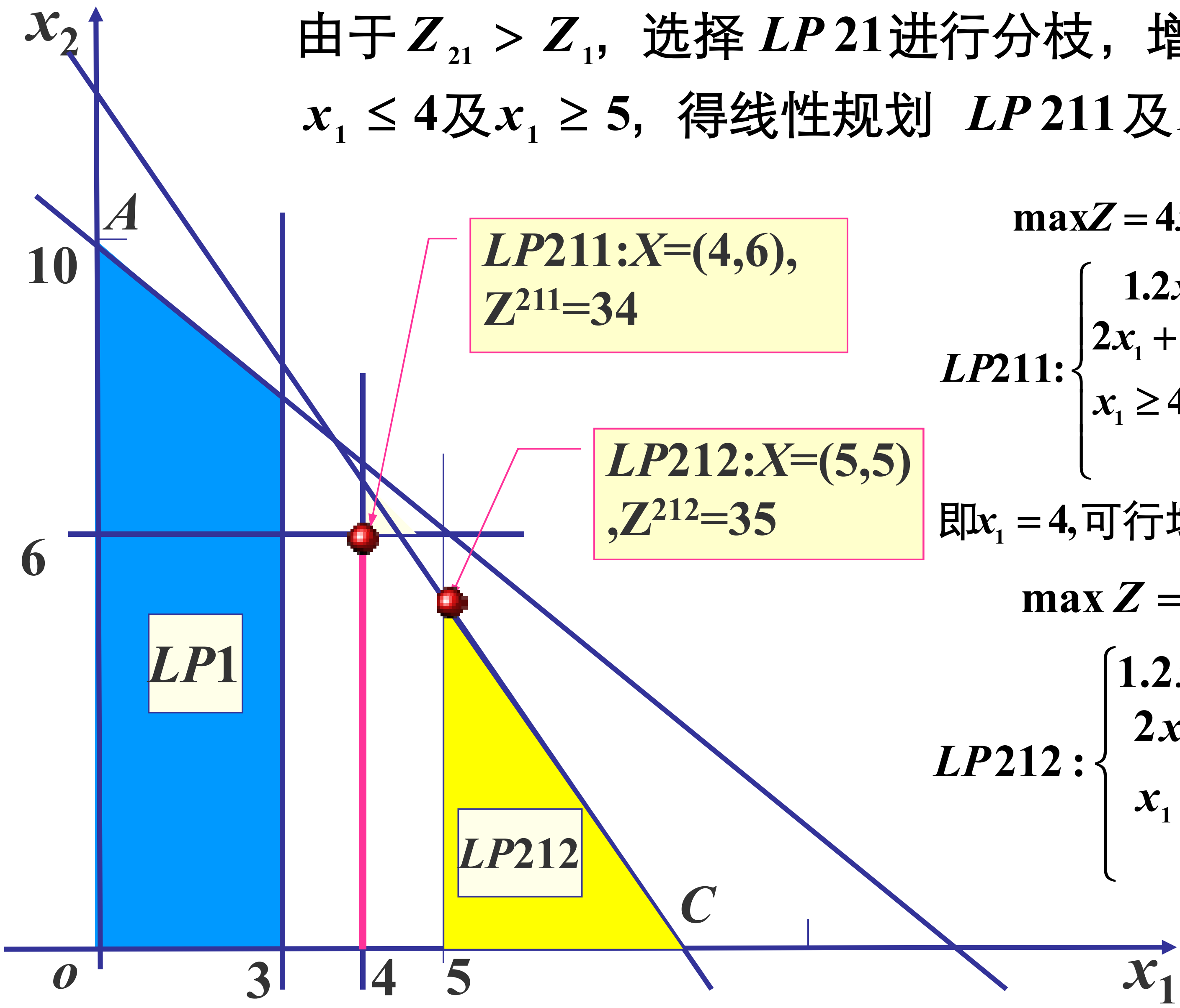
$$LP22: \begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \ge 4,\ \ x_2 \ge 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$LP21: \begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \ge 4,\ \ x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

分支定界法

由于 $Z_{21} > Z_{1}$，选择 $LP21$ 进行分枝，增加约束 $x_1 \le 4$ 及 $x_1 \ge 5$，得线性规划 $LP211$ 及 $LP212$：



$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$LP211:\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \ge 4,\ \ x_2 \le 6,\ \ x_1 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

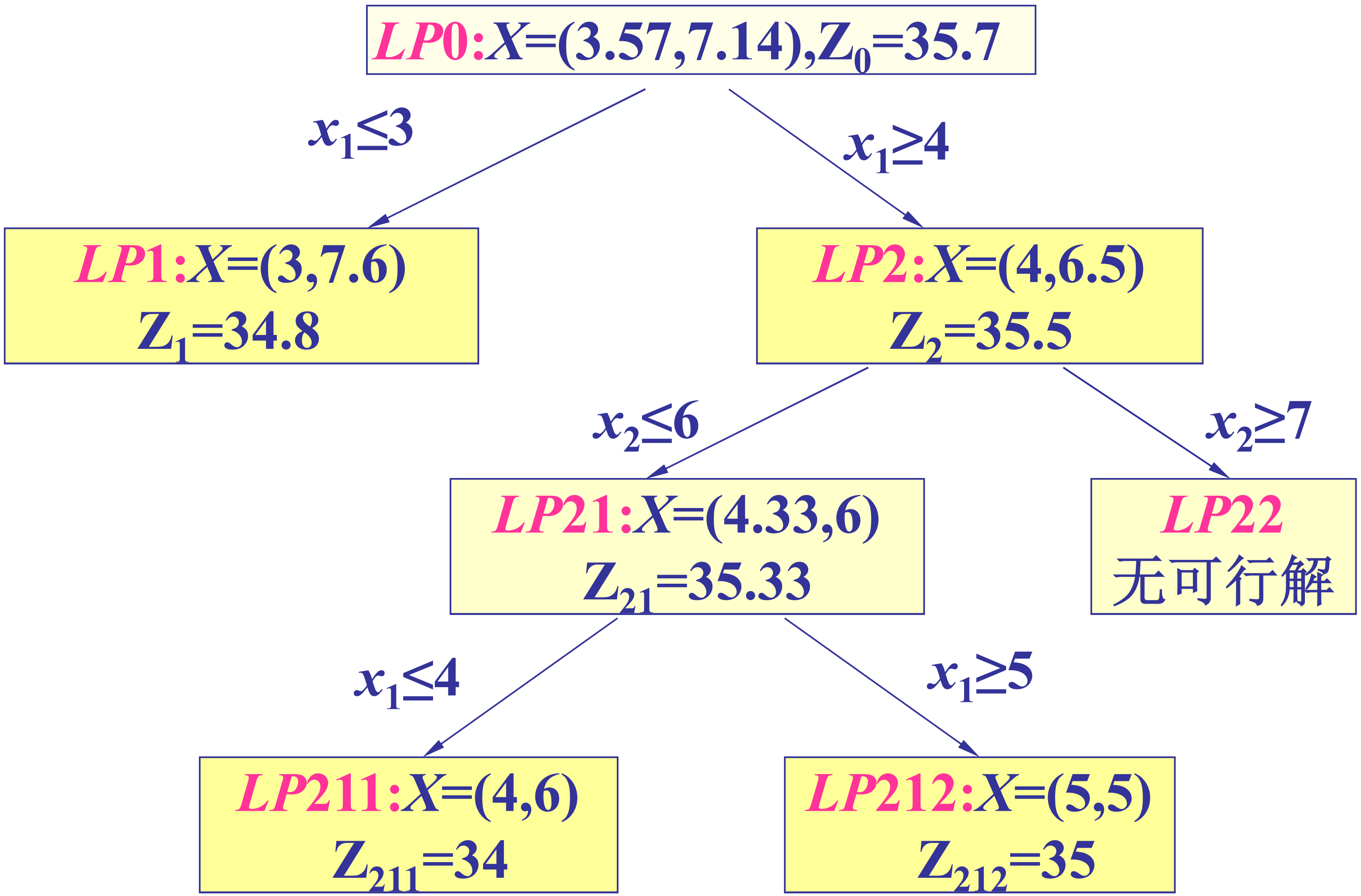
即$x_1 = 4$，可行域是一条线段

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$LP212:\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \ge 5,\ \ x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

分支定界法

上述分枝过程可用下图表示：



割平面法

R.E. Gomory 提出：先解对应的线性规划问题得最优解 x^*，若 x^* 是整向量，则得整数规划的最优解，否则，设法增加一个线性约束（即割平面）使得在原可行域中切割掉包括 x^* 在内的一部分非整数解，但不切割掉任何整数可行解，接着解增加了线性约束的线性规划问题，重复上述做法。

问题：如何找割平面？

考虑问题： $\max\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0, x \text{ 是整向量}\}$

设 $A = (P_1, P_2, \cdots, P_n)$， $B = (P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_m})$ 为线性规划 $\max\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ 的一个最优基，则

$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$ 。 下面看看整数解应该满足怎么条件

割平面法　　下面看看整数解应该满足怎么条件

设LP问题一个可行解为 $x=(x_B, x_N)$，则满足方程

$$Ax=(B,N)\begin{pmatrix}x_B\\x_N\end{pmatrix}=Bx_B+Nx_N=b$$ 即 $x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b$。

对基变量 x_{i_s} 满足 $$x_{i_s}+\sum_{j\in N}(B^{-1}P_j)_s x_j=(B^{-1}b)_s$$

由于 $x\geq 0$，所以 $$x_{i_s}+\sum_{j\in N}\left\lfloor (B^{-1}P_j)_s\right\rfloor x_j\leq (B^{-1}b)_s$$

当 x 为整向量时，上式意味着

$$x_{i_s}+\sum_{j\in N}\left\lfloor (B^{-1}P_j)_s\right\rfloor x_j\leq \left\lfloor (B^{-1}b)_s\right\rfloor$$

所以

$$\sum_{j\in N}\left((B^{-1}P_j)_s-\left\lfloor (B^{-1}P_j)_s\right\rfloor\right)x_j\geq (B^{-1}b)_s-\left\lfloor (B^{-1}b)_s\right\rfloor$$

割平面法

即 $$-\sum_{j\in N}\left\langle (B^{-1}P_j)_s \right\rangle x_j \le -\left\langle (B^{-1}b)_s \right\rangle \qquad (1)$$

其中 $\langle\lambda\rangle=\lambda-\lfloor\lambda\rfloor$，如 $\langle 2.8\rangle=0.8$，$\langle -1.1\rangle=0.9$。

注：条件 (1) 是任何整数可行解必须满足的，称为 **Gomory** 割，但它对于非整数解不一定成立，特别地，对于 x^* 不成立，因为

$$x_j^*=0\ (j\in N),\quad -\left\langle (B^{-1}b)_s \right\rangle<0\text{。}$$

在线性规划松弛中增加约束条件 (1) 将从可行域中割掉包括 x^* 在内的一部分非整数解。增加约束条件 (1) 并将 (1) 的松弛变量 x_{n+1} 视为第 $m+1$ 个基变量，则原来以 B 为基的单纯形表将增加一行一列，但非基变量的检验数不变，可以用对偶单纯形算法继续求解。

割平面法

	x_B^T	$x_j\ (j \in N)$	x_{n+1}	
x_B	I_m	$B^{-1}P_j$	0	$B^{-1}b$
x_{n+1}	0	$-\langle (B^{-1}P_j)_s \rangle$	1	$-\langle (B^{-1}b)_s \rangle$
	0^T	δ_j	0	

问题：随着 **Gomory** 割一次次增加，单纯形表越来越大，基变量越来越多（可能有多个基变量是**Gomory**割中的松弛变量），怎么办?

可以证明：当某个 **Gomory** 割引入的松弛变量在迭代中再次成为基变量时，可以从单纯形表中删去该基变量对应的行与列，即去掉对应的 **Gomory** 割。

割平面法

例. $\max \quad z = 4x_1 + 3x_2$

$s.t. \quad 4x_1 + x_2 + x_3 = 10, \quad 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 8$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$，整数

解. 用单纯形算法求解线性规划松弛得到单纯形表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{11}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_5	0	0	$\boxed{-\frac{4}{5}}$	$-\frac{2}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$
	0	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	$-\frac{62}{5}$

（Gomory割）

引入 Gomory 割： $-\frac{4}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 \leq -\frac{1}{5}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{17}{8}$	
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	
x_6	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{-\frac{3}{4}}$	1	$-\frac{1}{4}$	（Gomory割）
	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{49}{4}$	

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	
x_2	0	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	
x_3	0	0	1	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	
x_5	0	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	（删去该无效行）
	0	0	0	0	0	-1	-12	（与原变量x_{123}无关）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_7	
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
x_2	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
x_3	0	0	1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
x_7	0	0	0	$\boxed{-\frac{1}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$
	0	0	0	0	-1	0	-12

（Gomory割）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_7	0
x_1	1	0	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	3
x_2	0	1	0	0	-1	2	0
x_3	0	0	1	0	$\boxed{-3}$	4	-2
x_4	0	0	0	1	1	-3	2
	0	0	0	0	-1	0	-12

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_7		
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{7}{3}$	
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	
x_6	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	（删去该行）
x_4	0	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	
	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{34}{3}$	

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_7	x_8		
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{7}{3}$	
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\leftarrow$
x_4	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	
x_8	0	0	$\boxed{-\frac{2}{3}}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	（Gomory割）
	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	0	$-\frac{34}{3}$	

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_7	x_8	
x_1	1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
x_2	0	1	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	1
x_4	0	0	0	1	-2	$\frac{1}{2}$	1
x_3	0	0	1	0	1	$-\frac{3}{2}$	1
	0	0	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	-11

最优解 $x^* = (2, 1, 1, 1)$， 最优值 $z^* = 11$

0—1 整数规划

一、0－1变量及其应用

0－1变量常被用来表示系统是否处于某个特定状态，或者决策时是否取某个特定方案。例如:

$$x=\begin{cases}1, & \text{当决策取方案P时}\\ 0, & \text{当决策不取方案P时}\end{cases}$$

当问题有多项要素，每项要素皆有两种选择时，可用一组0－1变量来描述。设问题有有限项要素E_1，E_2，----，E_n,其中每项E_j有两种选择A_j和不选择A_j（j=1,2,----,n）,则令

$$x_j=\begin{cases}1, & \text{若}E_j\text{选择}A_j\\ 0, & \text{若}E_j\text{选择}\overline{A}_j\end{cases}\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

0－1 整数规划

在应用中，有时会遇到变量可以取多个整数值的问题。如果用0－1变量来表示，也可以用一组0－1变量来取代。

如x取0－9之间的任意整数时。

$$x=2^0x_0+2^1x_1+2^2x_2+2^3x_3\le 9$$

0—1 整数规划

例5.7　　含有相互排斥的约束条件的问题

（1）两个约束中，只有一个起作用。

例：$a_{11}x_1+a_{12}x_2<B_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2<B_2$

解：引入0-1变量Y_1, Y_2和足够大的正数M，则

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2<B_1+M_1Y_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2<B_2+M_2Y_2$$

$$Y_1+Y_2=1$$

0－1 整数规划

（2）互相排斥的多个约束中，只有一个起作用

互相排斥m个约束，只有一个起作用:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \le b_i \ (i=1,\ldots,m)$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n \le b_i+y_i M \ (i=1,\ldots,m) \\ y_1+\ldots+y_m = m-1 \\ y_i \text{为0或1} \qquad M>0 \end{cases}$$

（3）若a个约束条件中只能有b个起作用。

则令0－1变量之和为a-b。

注意：可用统一M，但M的取值必须足够的大。

0—1 整数规划

例5.8　固定费用问题

单耗量 产品 / 资源	I	II	III	资源量
A	2	4	8	500
B	2	3	4	300
C	1	2	3	100
单件可变费用	4	5	6	
固定费用	100	150	200	
单件售价	8	10	12	

解：设X_j是第j种产品的产量。Y_j是0－1变量，表示是（Y_j=1）否（Y_j=0）生产第j种产品。

0－1 整数规划

$$\max Z=4x_1+5x_2+6x_3-100y_1-150y_2-200y_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1+4x_2+8x_3\le 500 \\ 2x_1+3x_2+4x_3\le 300 \\ x_1+2x_2+3x_3\le 100 \\ x_1\le M_1y_1 \\ x_2\le M_2y_2 \\ xX_3\le M_3y_3 \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \ \text{整数} \ y_1,y_2,y_3\ \text{为} 0-1 \text{变量。} \end{cases}$$

0—1 整数规划

例5.9　　工件排序问题

用4台机床加工3件产品。各产品的机床加工顺序，以及产品I在机床j上加工工时a_{ij}见表。

产品1	a_{11} 机床1		a_{13} 机床3	a_{14} 机床4
产品2	a_{21} 机床1	a_{22} 机床2		a_{24} 机床4
产品3		a_{32} 机床2	a_{33} 机床3	

　　由于某种原因，产品2的加工总时间不得超过d，现要求确定各件产品在机床上的加工方案，使在最短的时间内加工完全部产品。

0－1 整数规划

解：设产品i在机床j上开始加工的时间为x_{ij}

（1）同一件产品在不同机床上的加工顺序约束

产品1： $x_{11}+a_{11} \le x_{13}$ 及 $x_{13}+a_{13} \le x_{14}$

产品2： $x_{21}+a_{21} \le x_{22}$ 及 $x_{22}+a_{22} \le x_{24}$

产品3： $x_{32}+a_{32} \le x_{33}$

（2）每一台机床对不同产品上的加工顺序约束

机床1： $x_{11}+a_{11} \le x_{21}+My_1$ 及 $x_{21}+a_{21} \le x_{11}+M(1-y_1)$

机床2： $x_{22}+a_{22} \le x_{32}+My_2$ 及 $x_{32}+a_{32} \le x_{22}+M(1-y_2)$

机床3： $x_{13}+a_{13} \le x_{33}+My_3$ 及 $x_{33}+a_{33} \le x_{13}+M(1-y_3)$

机床4: $x_{14}+a_{14} \le x_{24}+My_4$ 及 $x_{24}+a_{24} \le x_{14}+M(1-y_4)$

0－1 整数规划

（3）产品2的加工时间总约束

$$x_{24}+a_{24}-x_{21} \leq d$$

（4）目标函数的建立

$$min\ z=w$$

$$w \geq x_{14}+a_{14} \quad w \geq x_{24}+a_{24} \quad w \geq x_{33}+a_{33}$$

$$min\ z=max(x_{14}+a_{14},\ x_{24}+a_{24},\ x_{33}+a_{33})$$

0－1 整数规划

0－1 整数规划是一种特殊形式的整数规划，这时的决策变量x_i只取两个值0或1，一般的解法为隐枚举法。

隐枚举法(max)

原则:

1、用试探法，求出一个可行解，以它的目标值作为当前最好值Z^0

2、增加过滤条件$Z \geq Z^0$

3、将x_i按c_i由小→大排列（min 大→小）

0—1 整数规划

例5.10：$\max Z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 & \text{①} \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 & \text{②} \\ x_1 + x_2 \le 3 & \text{③} \\ 4x_2 + x_3 \le 6 & \text{④} \\ x_1, x_2, x_3 \text{为0或1} \end{cases}$$

解： 观察得解$(x_1, x_2, x_3)=(1, 0, 0)$ $Z^0=3$

过滤条件：$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \ge 3$

将$(x_1, x_2, x_3) \to (x_2, x_1, x_3)$

0—1 整数规划

解(x_2, x_1, x_3)	目标值	Z^0	① ② ③ ④	当前最好值
$(0,0,0)$	0	$<$		3
$(0,0,1)$	5	$>$	√ √ √ √	5
$(0,1,0)$	3	$<$		
$(0,1,1)$	8	$>$	√ √ √ √	8
$(1,0,0)$	-2	$<$		
$(1,0,1)$	3	$<$		
$(1,1,0)$	1	$<$		
$(1,1,1)$	6	$<$		

最优解 $x=(1,0,1)^T$ $Z=8$

指派问题

一、指派问题的数学模型的标准形式：

设**n** 个人被分配去做**n** 件工作，规定每个人只做一件工作，每件工作只有一个人去做。已知第**i**个人去做第**j** 件工作的效率（时间或费用）为$C_{ij}(i=1.2\ldots n;j=1.2\ldots n)$并假设$C_{ij}\geq 0$。问应如何分配才能使总效率（时间或费用）最高?

设决策变量

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{指派第 } i\text{个人做第 } j\text{件事}\\ 0 & \text{不指派第 } i\text{个人做第 } j\text{件事}\end{cases}\qquad (i,j=1,2,\ldots,n)$$

指派问题

指派问题的数学模型为:

指派问题完全由目标函数之系数矩阵 $(c_{ij})_{n\times n}$ 确定

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

0–1 解矩阵 $(x_{ij})_{n\times n}$ 的每行每列应恰有一个元素 1

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{指派第 } i \text{ 个人去完成第 } j \text{ 项任务} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

指派问题

如果有一个解矩阵 (x_{ij}) 使得： $x_{ij}=1$ 时 $c_{ij}=0$，

则目标值为零，一定是 最优解。

性质：从系数矩阵 (c_{ij}) 的某行（或某列）减去常数 δ 得到 (c'_{ij})，则以 (c'_{ij}) 为系数矩阵的指派问题与原问题有相同的最优解，最优值相差 δ。

证明：设从第 k 行减去 δ，则对任何可行解 (x_{ij}) 有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x_{ij} = \sum_{i\neq k}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n}(c_{kj}-\delta)x_{kj}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \delta\sum_{j=1}^{n} x_{kj} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \delta。$$

指派问题

二、匈牙利法

如果有一个解矩阵 (x_{ij}) 使得：$x_{ij}=1$ 时 $c_{ij}=0$，则目标值为零，一定是 最优解。

克尼格定理：

从系数矩阵 (c_{ij}) 的某行（或某列）减去常数 u_i 得到 (c'_{ij})，则以 (c'_{ij}) 为系数矩阵的指派问题与原问题有相同的最优解，最优值相差 u_i。

指派问题

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1(n-1)} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2(n-1)} & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{(n-1)1} & c_{(n-1)2} & \cdots & c_{(n-1)(n-1)} & c_{(n-1)n} \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{n(n-1)} & c_{nn} \end{bmatrix} - u_1$$

$$\begin{bmatrix} c'_{11} & c'_{12} & \cdots & c'_{1(n-1)} & c'_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2(n-1)} & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{(n-1)1} & c_{(n-1)2} & \cdots & c_{(n-1)(n-1)} & c_{(n-1)n} \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{n(n-1)} & c_{nn} \end{bmatrix}$$

指派问题

$$\min \quad Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} c_{1j}x_{1j} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\min \quad Z' = \sum_{j=1}^{n} c'_{1j}x_{1j} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$Z - Z' = \sum_{j=1}^{n} c_{1j}x_{1j} - \sum_{j=1}^{n} c'_{1j}x_{1j} = \sum_{j=1}^{n}\left(c_{1j}x_{1j} - c'_{1j}x_{1j}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(c_{1j} - c'_{1j}\right)x_{1j} = \sum_{j=1}^{n} u_{1}x_{1j} = u_{1}$$

指派问题

- 利用这个性质，可使原系数矩阵变换为含有很多0元素的新系数矩阵，而最优解保持不变。
- 具体来说就是从系数矩阵 (c_{ij}) 的各行各列减去各自的最小元素，指派问题的最优解不变，但这可以使得新的系数矩阵中每行和每列都之手有一个零元素

指派问题

例.

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 12 & 8 & 9 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 17 & 12 & 14 & 9 \\ 15 & 14 & 7 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 7 & 10 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} -\mathbf{7} \\ -\mathbf{6} \\ -\mathbf{7} \\ -\mathbf{6} \\ -\mathbf{4} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & -1 & & & \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 7 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

要保证 (x_{ij}) 为最优解，$x_{ij}=1$ 对应的 (c'_{ij}) 的零元素应不同行、不同列 。

指派问题

- 在系数矩阵(c_{ij})中，我们关心位于不同行不同列的0元素，以下简称为独立的0元素。
- 若能在系数矩阵(b_{ij})中找出n个独立的0元素；则令解矩阵(x_{ij})中对应这n个独立的0元素的元素取值为1，其他元素取值为0。将其代入目标函数中得到z_b=0，它一定是最小。
- 这就是以(b_{ij})为系数矩阵的指派问题的最优解。也就得到了原问题的最优解。

指派问题

指派问题的匈牙利法求解步骤:

1) 变换指派问题的系数矩阵(c_{ij})为(b_{ij})，使在(b_{ij})的各行各列中都出现0元素，即

- 从(c_{ij})的每行元素都减去该行的最小元素；
- 再从所得新系数矩阵的每列元素中减去该列的最小元素。

2) 进行试指派，以寻求最优解。

在(b_{ij})中找尽可能多的独立0元素，若能找出n个独立0元素，就以这n个独立0元素对应解矩阵(x_{ij})中的元素为1，其余为0，这就得到最优解。

指派问题

找独立0元素，常用的步骤为：

- 从只有一个0元素的行开始，给该行中的0元素加圈，记作◎ 。然后划去◎ 所在列的其它0元素，记作Ø；这表示该列所代表的任务已指派完，不必再考虑别人了。依次进行到最后一行。
- 从只有一个0元素的列开始（画Ø的不计在内），给该列中的0元素加圈，记作◎；然后划去◎ 所在行的0元素，记作Ø ，表示此人已有任务，不再为其指派其他任务了。依次进行到最后一列。
- 若仍有没有划圈的0元素，且同行(列)的0元素至少有两个，比较这行各0元素所在列中0元素的数目，选择0元素少这个0元素加圈(表示选择性多的要“礼让”选择性少的)。然后划掉同行同列的其它0元素。可反复进行，直到所有0元素都已圈出和划掉为止。

指派问题

- 若◎ 元素的数目m 等于矩阵的阶数n（即：$m=n$），那么这指派问题的最优解已得到。若$m<n$，则转入下一步。

3) 用最少的直线通过所有0元素。其方法：

① 对没有◎的行打“√”；

② 对已打“√” 的行中所有含∅元素的列打“√” ；

③ 再对打有“√”的列中含◎ 元素的行打“√” ；

④ 重复①、②直到得不出新的打√号的行、列为止；

⑤ 对没有打√号的行画横线，有打√号的列画纵线，这就得到覆盖所有0元素的最少直线数 l 。

注：l 应等于m，若不相等，说明试指派过程有误，回到第2步，另行试指派；若 l＝m ＜ n，表示还不能确定最优指派方案，须再变换当前的系数矩阵，以找到n个独立的0元素，为此转第4步。

指派问题

4) 变换矩阵(b_{ij})以增加0元素

在没有被直线通过的所有元素中找出最小值，没有被直线通过的所有元素减去这个最小元素；直线交点处的元素加上这个最小值。新系数矩阵的最优解和原问题仍相同。转回第2步。

匈牙利法

例**4.6** 有一份中文说明书，需译成英、日、德、俄四种文字，分别记作**A**、**B**、**C**、**D**。现有甲、乙、丙、丁四人，他们将中文说明书译成不同语种的说明书所需时间如下表所示，问如何分派任务，可使总时间最少?

任务 / 人员	A	B	C	D
甲	6	7	11	2
乙	4	5	9	8
丙	3	1	10	4
丁	5	9	8	2

匈牙利法

解：1）变换系数矩阵，增加0元素。

$$(c_{ij})=\begin{bmatrix}6&7&11&2\\4&5&9&8\\3&1&10&4\\5&9&8&2\end{bmatrix}\begin{matrix}-2\\-4\\-1\\-2\end{matrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}4&5&9&0\\0&1&5&4\\2&0&9&3\\3&7&6&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}4&5&4&0\\0&1&0&4\\2&0&4&3\\3&7&1&0\end{bmatrix}$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -5$$

2）试指派（找独立0元素）

$$\begin{bmatrix}4&5&4&◎\\◎&1&Ø&4\\2&◎&4&3\\3&7&1&Ø\end{bmatrix}$$

找到 3 个独立零元素

但 $m=3<n=4$

匈牙利法

3）作最少的直线覆盖所有0元素

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & \cancel{0} & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & \cancel{0} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \surd \\ \\ \\ \surd \end{array} \\ \begin{array}{cccc} & & & \surd \end{array} & \end{array}$$

独立零元素的个数m等于最少直线数l，即$l = m=3<n=4$；

4）没有被直线通过的元素中选择最小值为1，变换系数矩阵，将没有被直线通过的所有元素减去这个最小元素；直线交点处的元素加上这个最小值。得到新的矩阵，重复2）步进行试指派

匈牙利法

$$
\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\Longrightarrow
\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & \circledcirc \\ \circledcirc & 1 & \varnothing & 5 \\ 2 & \circledcirc & 4 & 4 \\ 2 & 6 & \circledcirc & \varnothing \end{bmatrix}
$$

得到4个独立零元素， 所以最优解矩阵为：

$$
\Longrightarrow
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

即完成4个任务的总时间最少为：$2+4+1+8=15$

匈牙利法

例4.7 已知四人分别完成四项工作所需时间如下表，求最优分配方案。

任务 人员	A	B	C	D
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

匈牙利法

解：1）变换系数矩阵，增加0元素。

$$\begin{bmatrix}2&15&13&4\\10&4&14&15\\9&14&16&13\\7&8&11&9\end{bmatrix}\begin{matrix}-2\\-4\\-9\\-7\end{matrix} \longrightarrow \begin{array}{c}\begin{bmatrix}0&13&11&2\\6&0&10&11\\0&5&7&4\\0&1&4&2\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}&&-4&-2\end{matrix}\end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix}0&13&7&0\\6&0&6&9\\0&5&3&2\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

2）试指派（找独立0元素）

$$\begin{bmatrix}\emptyset&13&7&\circledcirc\\6&\circledcirc&6&9\\\circledcirc&5&3&2\\\emptyset&1&\circledcirc&\emptyset\end{bmatrix}$$

独立0元素的个数为4，指派问题的最优指派方案即为甲负责D工作，乙负责B工作，丙负责A工作，丁负责C工作。这样安排能使总的工作时间最少，为4＋4＋9＋11＝28。

匈牙利法

例4.8　已知五人分别完成五项工作耗费如下表，求最优分配方案。

任务 人员	A	B	C	D	E
甲	7	5	9	8	11
乙	9	12	7	11	9
丙	8	5	4	6	8
丁	7	3	6	9	6
戊	4	6	7	5	11

匈牙利法

解：1）变换系数矩阵，增加0元素。

$$\begin{bmatrix}7&5&9&8&11\\9&12&7&11&9\\8&5&4&6&9\\7&3&6&9&6\\4&6&7&5&11\end{bmatrix}\begin{array}{c}-5\\-7\\-4\\-3\\-4\end{array}\rightarrow\begin{array}{c}\begin{bmatrix}2&0&4&3&6\\2&5&0&4&2\\4&1&0&2&5\\4&0&3&6&3\\0&2&3&1&7\end{bmatrix}\\\begin{array}{ccccc}&&&-1&-2\end{array}\end{array}\rightarrow$$

匈牙利法

2）试指派（找独立0元素）

$$
\begin{bmatrix}
2 & 0 & 4 & 2 & 4 \\
2 & 5 & 0 & 3 & 0 \\
4 & 1 & 0 & 1 & 3 \\
4 & 0 & 3 & 5 & 1 \\
0 & 2 & 3 & 0 & 5
\end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix}
2 & \circledcirc & 4 & 2 & 4 \\
2 & 5 & \emptyset & 3 & \circledcirc \\
4 & 1 & \circledcirc & 1 & 3 \\
4 & \emptyset & 3 & 5 & 1 \\
\circledcirc & 2 & 3 & \emptyset & 5
\end{bmatrix}
$$

独立0元素的个数$l=4<5$，故画直线调整矩阵。

匈牙利法

$$
\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
2 & \circledcirc & 4 & 2 & 4 \\
2 & 5 & \emptyset & 3 & \circledcirc \\
4 & 1 & \circledcirc & 1 & 3 \\
4 & \emptyset & 3 & 5 & 1 \\
\circledcirc & 2 & 3 & \emptyset & 5
\end{bmatrix} & \begin{matrix} \surd \\ \\ \\ \surd \\ \\ \end{matrix} \\
\begin{matrix} & \surd & & & \end{matrix} &
\end{array}
$$

选择直线外的最小元素为1；直线外元素减1，直线交点元素加1，其他保持不变。

匈牙利法

$$\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
1 & ◎ & 3 & 1 & 3 \\
2 & 6 & \text{Ø} & 3 & ◎ \\
4 & 2 & ◎ & 1 & 3 \\
3 & \text{Ø} & 2 & 4 & \text{Ø} \\
◎ & 3 & 3 & \text{Ø} & 5
\end{bmatrix} & \begin{matrix} \surd \\ \surd \\ \surd \\ \surd \\ \ \end{matrix} \\
\begin{matrix} \ & \ \ \surd & \ \ \surd & \ \ \ \ & \ \ \surd \end{matrix} &
\end{array}$$

$l=m=4 < n=5$

选择直线外最小元素为1，直线外元素减1，直线交点元素加1，其他保持不变，得到新的系数矩阵。

匈牙利法

$$\begin{bmatrix} \emptyset & \circledcirc & 3 & \emptyset & 3 \\ 1 & 6 & \circledcirc & 2 & \emptyset \\ 3 & 2 & \emptyset & \circledcirc & 3 \\ 2 & \emptyset & 2 & 3 & \circledcirc \\ \circledcirc & 4 & 4 & \emptyset & 6 \end{bmatrix}$$

总费用为

=5+7+6+6+4=28

注：此问题有多个最优解

匈牙利法

$$
\begin{bmatrix}
\circledcirc & \varnothing & 3 & \varnothing & 3 \\
1 & 6 & \varnothing & 2 & \circledcirc \\
3 & 2 & \circledcirc & \varnothing & 3 \\
2 & \circledcirc & 2 & 3 & \varnothing \\
\varnothing & 4 & 4 & \circledcirc & 6
\end{bmatrix}
$$

总费用为=7+9+4+3+5=28

匈牙利法

$$\begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & 3 & \circledcirc & 3 \\ 1 & 6 & \emptyset & 2 & \circledcirc \\ 3 & 2 & \circledcirc & \emptyset & 3 \\ 2 & \circledcirc & 2 & 3 & \emptyset \\ \circledcirc & 4 & 4 & \emptyset & 6 \end{bmatrix}$$

总费用为=8+9+4+3+4=28

匈牙利法

课堂练习：用匈牙利法求解下列指派问题。

练习1：

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 & 10 & 12 \\ 13 & 12 & 16 & 17 \\ 15 & 16 & 14 & 15 \\ 11 & 12 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

练习2：

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & 10 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 10 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

匈牙利法

答案:

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 & \boxed{10} & 12 \\ 13 & \boxed{12} & 16 & 17 \\ 15 & 16 & 14 & \boxed{15} \\ \boxed{11} & 12 & 15 & 16 \end{pmatrix}_{48} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & 10 & \boxed{3} \\ 8 & 7 & \boxed{2} & 9 & 7 \\ 6 & \boxed{4} & 2 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 2 & \boxed{3} & 5 \\ \boxed{9} & 10 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}_{21}$$

指派问题

非标准型的指派问题:

匈牙利法的条件是：模型求最小值、效率$c_{ij}\geq 0$。

当遇到各种非标准形式的指派问题时，处理方法是先将其转化为标准形式，然后用匈牙利法来求解。

指派问题

1. 最大化指派问题

处理方法：设m为最大化指派问题系数矩阵C中最大元素。令矩阵B＝（m-c_{ij}）$_{nn}$则以B为系数矩阵的最小化指派问题和原问题有相同的最优解。

例4.9 某人事部门拟招聘4人任职4项工作，对他们综合考评的得分如下表（满分100分），如何安排工作使总分最多。

$$C = \begin{array}{c} 甲 \\ 乙 \\ 丙 \\ 丁 \end{array} \begin{bmatrix} 85 & 92 & 73 & 90 \\ 95 & 87 & 78 & 95 \\ 82 & 83 & 79 & 90 \\ 86 & 90 & 80 & 88 \end{bmatrix}$$

指派问题

解: $M = 95$，令 $C' = (95 - c_{ij})$

$$C' = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 22 & 5 \\ 0 & 8 & 17 & 0 \\ 13 & 12 & 16 & 5 \\ 9 & 5 & 15 & 7 \end{bmatrix}$$

用匈牙利法求解C’，最优解为:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

即甲安排做第二项工作、乙做第三项、丙做第四项、丁做第三项, 最高总分$Z = 92 + 95 + 90 + 80 = 357$

指派问题

2. 不平衡的指派问题

- 当人数m大于工作数n时，加上m－n项虚拟工作，例如：

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 & 10 \\ 11 & 6 & 3 \\ 8 & 14 & 17 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 9 & 10 & 0 & 0 \\ 11 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 14 & 17 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 当人数m小于工作数n时，加上n－m个人，例如

$$\begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \\ 10 & 13 & 16 & 17 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \\ 10 & 13 & 16 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

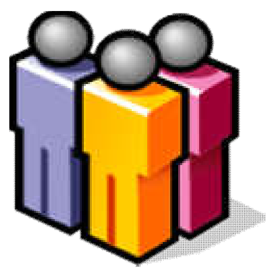
指派问题

3. 一个人可做几件事的指派问题

若某人可做几件事，则将该人化作相同的几个“人”来接受指派，且费用系数取值相同。

例如：丙可以同时任职两项工作，求最优指派方案。

$$
\begin{array}{c} 甲 \\ 乙 \\ 丙 \end{array}
\begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \\ 10 & 13 & 16 & 17 \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \\ 10 & 13 & 16 & 17 \\ 10 & 13 & 16 & 17 \end{bmatrix}
$$



指派问题

4. 某事一定不能由某人做的指派问题

将该人做此事的效率系数取做足够大的数，可用M表示。

例4.10　分配甲、乙、丙、丁四个人去完成A、B、C、D、E五项任务。每个人完成各项任务的时间如表所示。由于任务数多于人数，考虑任务E必须完成，其他4项中可任选3项完成。试确定最优分配方案，使完成任务的总时间最少。

任务 / 人员	A	B	C	D	E
甲	25	29	31	42	37
乙	39	38	26	20	33
丙	34	27	28	40	32
丁	24	42	36	23	45

指派问题

解: 1) 这是不平衡的指派问题，首先转换为标准型，再用匈牙利法求解。

2) 由于任务数多于人数，所以假定一名虚拟人，设为戊。因为工作E必须完成，故设戊完成E的时间为M（M为非常大的数），其余效率系数为0，则标准型的效率矩阵表示为:

任务 人员	A	B	C	D	E
甲	25	29	31	42	37
乙	39	38	26	20	33
丙	34	27	28	40	32
丁	24	42	36	23	45
戊	0	0	0	0	M

指派问题

用匈牙利法求出最优指派方案为:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即甲 – B，乙 – D，丙 – E，丁 – A, 任务C放弃。

最少时间为105。