

第四章 振 动

1、如图为一谐振动的振动曲线，

(1) 写出振动表达式；

(2) 求 $t = 1\text{s}$ 和 $t = 0.5\text{s}$ 时刻的位相差 $\Delta\varphi$

解：(1) 由振动曲线可知

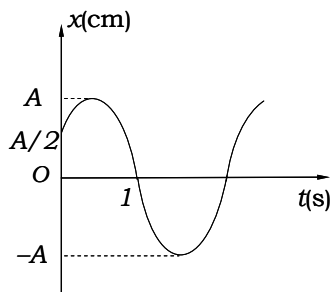
$$t = 0 \quad \varphi_0 = -\frac{\pi}{3} \quad t = 1 \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0 = \frac{5}{6}\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{5}{6}\pi$$

$$x = A\cos\left(\frac{5}{6}\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(2) \quad \frac{\Delta\varphi'}{2\pi} = \frac{\varphi_1 - \varphi_{0.5}}{2\pi} = \frac{t_1 - t_{0.5}}{T} \quad \Delta\varphi' = \frac{5}{12}\pi$$



2、质量为 $10 \times 10^{-3} \text{ kg}$ 的小球与轻弹簧组成的系统，按 $x = 0.1\cos(8\pi t + \frac{2\pi}{3})$ 规律

作谐振动，式中 t 以秒计， x 以米计，求：

(1) 振动的周期 T ，振幅 A 和初位相 Φ ；

(2) $t = 1\text{s}$ 时刻的位相、速度；

(3) 最大的回复力；

解：(1) 与简谐振动标准运动方程 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 比较得

$$\omega = 8\pi/\text{s} \quad \Phi = \frac{2}{3}\pi \quad A = 0.1\text{m} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.25\text{s}$$

$$(2) \text{ 当 } t = 1\text{ 时} \quad \text{位相: } \omega t + \varphi = 8\pi \times 1 + \frac{2}{3}\pi = 8\frac{2}{3}\pi$$

$$\text{速度: } v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) = -0.1 \times 8\pi \sin(8\pi + \frac{2}{3}\pi)$$

$$v_1 = -0.8\pi \sin(8\pi + \frac{2}{3}\pi) = -2.2\text{m/s}$$

$$(3) \quad F_{\max} = m a_{\max} = 10 \times 10^{-3} \times A \omega^2 = 10 \times 10^{-3} \times 0.1 \times (8\pi)^2 = 0.63\text{N}$$

3、一质点按余弦规律作简谐振动，其速度—时间关系曲线如图所示，周期 $T=2\text{s}$ ，试求振动表达式。

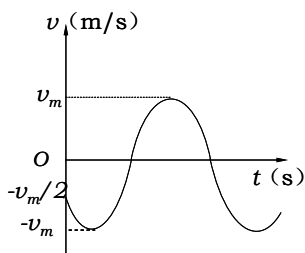
解： $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

$$A = \frac{V_m}{\omega} = \frac{V_m}{\pi}$$

根据 $-\frac{V_m}{2} = -V_m \sin \varphi$ 且 $V < 0$

得 $\varphi = \frac{\pi}{6}$

$$\therefore x = \frac{V_m}{\pi} \cos(\pi t + \frac{\pi}{6}) (\text{m})$$



4、一弹簧振子沿 X 轴作谐振动，已知振动物体最大位移 $x_m=0.4\text{m}$ ，最大恢复力 $F_m=0.8\text{N}$ ，最大速度 $V_m=0.8\pi\text{m/s}$ ，已知 $t=0$ ， $x_0=0.2\text{m}$ ， $V_0 < 0$ ，求：

(1) 振动能量；

(1) 振动表达式。

解：(1) $\because F_{\max} = kA$

$$\therefore k = \frac{F_{\max}}{A}$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} F_{\max} A = \frac{1}{2} \times 0.8 \times 0.4 = 0.16\text{J}$$

$$(2) \because t=0 \quad x_0 = \frac{A}{2} \quad v_0 < 0$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$$

又 $v_m = \omega A$ 所以 $\omega = \frac{v_m}{A} = 2\pi$

则 $x = 0.4 \cos(2\pi t + \frac{\pi}{3}) (\text{m})$

5、一弹簧振子，由弹性系数为 k 的弹簧和质量为 M 的物块组成，将弹簧一端与顶板连接，如图所示。开始时物块静止，一质量为 m 、速度为 v_0 的子弹由下而上射入物块，并停留在物块中，试求：

(1) 振子振动的振幅和周期；

(2) 物块由初位置运动到最高点所需的时间；

解：(1) 子弹打入木块动量守恒 $mv_0 = (m+M)V$

$$\text{初时位置 } mg = kx_0 \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V^2}{\omega^2}} = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{mv_0}{M+m}\right)^2} \cdot \frac{k}{M+m}$$

$$= \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{kv_0^2}{(m+M)g^2}}$$

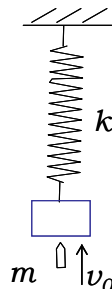
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m+M}{k}}$$

$$(2) \quad \tan \varphi = -\frac{v}{x_0 \omega} = -\frac{\frac{mv_0}{M+m}}{\frac{mg}{k} \sqrt{\frac{k}{m+M}}} = -\frac{v_0}{g} \sqrt{\frac{k}{m+M}} \quad (\text{取向上为正, 平衡位置 } x_0 = \frac{mg}{k})$$

$$\text{最高点 } x = A \quad \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\therefore \frac{0 - \varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = \omega$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{M+m}{k}} \tan^{-1} \left(\frac{v_0}{g} \sqrt{\frac{k}{M+m}} \right)$$



6、如图所示，有一水平弹簧，倔强系数 $k=24\text{N/m}$ ，重物质量 $m=6\text{kg}$ ，重物静止在平衡位置上。设以一水平恒力 $F=10\text{N}$ 向左作用于物体（不计摩擦），使由平衡位置向左运动了 0.05m ，此时撤去力 F ，当重物运动到左方最远位置时开始计时，求物体的运动方程。

解：根据动能定理

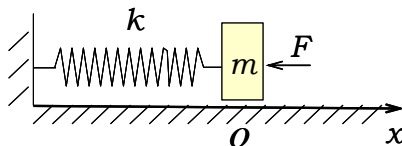
$$Fx = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\therefore A = \sqrt{\frac{2Fx}{k}} = 0.204$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2$$

$$\varphi = \pi$$

$$\therefore x = 0.204 \cos(2t + \pi) (\text{m})$$



7、如图所示, 物体的质量为 m , 放在光滑的斜面上, 斜面与水平面的倾角为 α , 弹簧的弹性系数为 k , 滑轮的转动惯量为 J , 半径为 R 。先把物体托住, 使弹簧维持原长, 然后由静止释放, 试证明物体作谐振动, 并求振动周期。

解: 以物体受力平衡点为坐标原点, 如图建立坐标

$$mg \sin \alpha - T_1 = ma \quad (1)$$

$$(T_1 - T_2)R = J\alpha \quad (2)$$

$$T_2 = k(x + x_0) \quad (3)$$

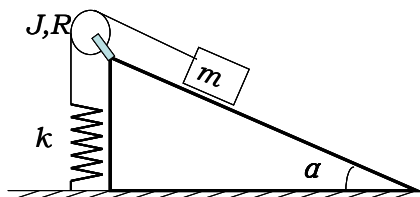
$$mg \sin \alpha = kx_0 \quad (4)$$

$$a = R\alpha \quad (5)$$

由 (1) (2) (3) (4) (5) 解得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{\frac{J}{R^2} + m} x = 0 \quad \text{此为谐振动方程}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{J}{R^2} + m}{k}}$$

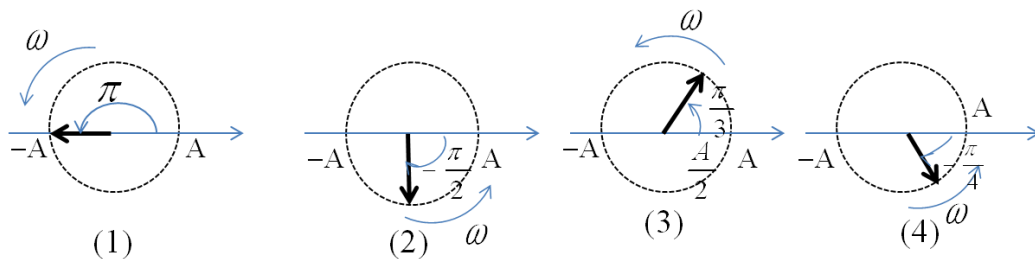


8、一个沿 x 轴作谐振动的弹簧振子, 振幅为 A , 周期为 T , 其振动方程用余弦函数表示。如果在 $t = 0$ 时, 质点的状态分别是:

(1) 在负方向的端点; (2) 过平衡位置向 x 正方向运动;

(3) 位移为 $\frac{A}{2}$, 且向负方向运动; (4) 位移为 $\frac{A}{\sqrt{2}}$, 且向正方向运动,

试在旋转矢量图上表示质点的初相, 并写出相应的谐振动方程。



$$(1) \quad x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \pi\right)$$

$$(2) \quad x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(3) \quad x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

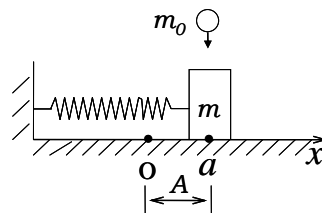
$$(4) \quad x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{4}\right)$$

9、如图所示，一质量为 m 的弹簧振子，在光滑水平面上作谐振动， O 为平衡位置，振动的振幅为 A 。当 m 运动到最大位移点 a 时，突然一质量为 m_0 的物体竖直落下并粘在 m 上，与 m 一起振动，求：（1）该系统的圆频率和振幅；（2）若 m 运动到 O 点时， m_0 落下并与 m 粘在一起振动，则系统振动的圆频率和振幅。

解：（1） m 到最大位移 a 点时速度为 $v=0$ ， m_0 竖直落下，所以 $m+m_0$ 的速度为零

$$\therefore A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = A_0 \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m+m_0}}$$

$$(2) \text{ 圆频率 } \omega' = \sqrt{\frac{k}{m+m_0}} \text{ 不变}$$



$$m_0 \text{ 未落下前, } m \text{ 运动到 } O \text{ 时速度为 } v_0 = A_0 \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} A_0$$

当 m_0 落在 m 上时系统速度变为 v' ，根据系统动量守恒

$$mv_0 = (m+m_0)v'$$

$$\therefore A' = \frac{v'}{\omega} = \frac{\frac{m}{m+m_0} \sqrt{\frac{k}{m}} A_0}{\sqrt{\frac{k}{m+m_0}}} = \sqrt{\frac{m}{m+m_0}} A_0$$

10、在一块平板下装有弹簧，平板上放一质量为 1Kg 的重物。现使平板沿竖直方向作上下简谐振动，周期为 0.5s ，振幅为 $2 \times 10^{-2}\text{m}$ ，求：

- （1）平板到最低点时，重物对平板的作用力；
- （2）若频率不变，则平板以多大振幅振动时，重物会跳离平板？
- （3）若振幅不变，则平板以多大频率振动时，重物会跳离平板？

解：（1）当重物在最低点时 $F_N - mg = ma_{\max} = mA\omega^2$

$$F_N = mg + mA\omega^2 = mg + mA \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = 12.96(N)$$

重物对木板的作用力与 F_N 大小相等，方向相反。

（2）当重物在最高点时 $mg - F_N = mA'\omega^2$

$$\text{当 } \omega \text{ 不变, } F_N = 0 \quad A' = \frac{g}{\omega^2} = 6.2 \times 10^{-2}(\text{m})$$

$$(3) \text{ 当振幅不变时 } F_N = 0 \quad v' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{A}} = 3.52(\text{Hz})$$

11、有两个同方向的谐振动，它们的方程为

$$x_1 = 0.05 \cos\left(10t + \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$x_2 = 0.06 \cos\left(10t + \frac{1}{4}\pi\right)$$

式中 x 以 m 计， t 以 s 计，求：

(1) 它们合成振动的振幅和初位相；

(2) 若另有一振动 $x_3 = 0.07 \cos(10t + \phi)$ ，则 ϕ 为何值时， $x_1 + x_3$ 的振幅为最大？ ϕ 为何值时， $x_2 + x_3$ 的振幅为最小？

解：(1)

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}$$

$$= \sqrt{(0.05)^2 + (0.06)^2 + 2 \times 0.05 \times 0.06 \cos\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{3}{4}\pi\right)}$$

$$= 0.078m$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2}{A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2} = 11$$

$$\varphi = 84^\circ 48'$$

$$(2) \quad \varphi_3 - \frac{3}{4}\pi = 0 \quad \varphi_3 = \frac{3}{4}\pi$$

$$\varphi'_3 - \frac{1}{4}\pi = \pi \quad \varphi'_3 = \frac{5}{4}\pi$$

12、两个同频率同方向的谐振动的合振幅为20cm，合振动与第一谐振动的位相差为

$\phi - \phi_1 = \frac{\pi}{6}$ ，若第一个谐振动的振幅为 $10\sqrt{3}$ cm，求：

(1) 第二个振动的振幅 A_2 ；

(2) 第一、第二两个谐振动的位相差。

解：(1) $A_2 = \sqrt{A_1^2 + A^2 - 2AA_1 \cos\frac{\pi}{6}} = 10\text{cm}$

$$(2) \quad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\Delta\varphi \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$