⋆3.4 Laplace变换

- 对函数施行Fourier变换时，要求函数定义在R上且绝对可积这两个条件，这个条件太强，适用面窄（一般的常用函数、多项式函数等初等函数都不满足这个条件）

⋆3.4 Laplace变换

- 对函数施行Fourier变换时，要求函数定义在R上且绝对可积这两个条件，这个条件太强，适用面窄（一般的常用函数、多项式函数等初等函数都不满足这个条件）
- 许多时间t作为自变量的函数往往在$t < 0$时是无意义的，像这样的函数不能取Fourier变换

⋆3.4 Laplace变换

- 对函数施行Fourier变换时，要求函数定义在R上且绝对可积这两个条件，这个条件太强，适用面窄（一般的常用函数、多项式函数等初等函数都不满足这个条件）
- 许多时间t作为自变量的函数往往在$t < 0$时是无意义的，像这样的函数不能取Fourier变换
- 对于任意一个函数$\phi(t)$，能否经过适当地改造使其进行Fourier变换时克服上述两个缺点？

⋆3.4 Laplace变换

- 对函数施行Fourier变换时，要求函数定义在R上且绝对可积这两个条件，这个条件太强，适用面窄（一般的常用函数、多项式函数等初等函数都不满足这个条件）
- 许多时间t作为自变量的函数往往在$t < 0$时是无意义的，像这样的函数不能取Fourier变换
- 对于任意一个函数$\phi(t)$，能否经过适当地改造使其进行Fourier变换时克服上述两个缺点？
- 引进单位阶梯函数$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$,以及指数衰减函数$e^{-\beta t}(\beta > 0)$

$\star$3.4 Laplace变换

- 对函数施行Fourier变换时，要求函数定义在R上且绝对可积这两个条件，这个条件太强，适用面窄（一般的常用函数、多项式函数等初等函数都不满足这个条件）
- 许多时间t作为自变量的函数往往在$t < 0$时是无意义的，像这样的函数不能取Fourier变换
- 对于任意一个函数$\phi(t)$，能否经过适当地改造使其进行Fourier变换时克服上述两个缺点？
- 引进单位阶梯函数$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$,以及指数衰减函数$e^{-\beta t}(\beta > 0)$
- 用前者乘以$\phi(t)$可以使积分区间由$(-\infty, \infty)$变为$[0, \infty)$

⋆3.4 Laplace变换

- 对函数施行Fourier变换时，要求函数定义在R上且绝对可积这两个条件，这个条件太强，适用面窄（一般的常用函数、多项式函数等初等函数都不满足这个条件）
- 许多时间t作为自变量的函数往往在$t<0$时是无意义的，像这样的函数不能取Fourier变换
- 对于任意一个函数$\phi(t)$，能否经过适当地改造使其进行Fourier变换时克服上述两个缺点？
- 引进单位阶梯函数$H(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$,以及指数衰减函数$e^{-\beta t}(\beta>0)$
- 用前者乘以$\phi(t)$可以使积分区间由$(-\infty,\infty)$变为$[0,\infty)$
- 后者乘以$\phi(t)$就有可能使其变得绝对可积

⋆3.4 Laplace变换

- 对函数施行Fourier变换时，要求函数定义在R上且绝对可积这两个条件，这个条件太强，适用面窄（一般的常用函数、多项式函数等初等函数都不满足这个条件）
- 许多时间t作为自变量的函数往往在$t<0$时是无意义的，像这样的函数不能取Fourier变换
- 对于任意一个函数$\phi(t)$，能否经过适当地改造使其进行Fourier变换时克服上述两个缺点？
- 引进单位阶梯函数$H(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$,以及指数衰减函数$e^{-\beta t}(\beta>0)$
- 用前者乘以$\phi(t)$可以使积分区间由$(-\infty,\infty)$变为$[0,\infty)$
- 后者乘以$\phi(t)$就有可能使其变得绝对可积
- 所以对于$\phi(t)H(t)e^{-\beta t}(\beta>0)$只要$\beta$选得适当，一般来说这个函数的Fourier变换存在

⋆3.4 Laplace变换

- 对函数施行Fourier变换时，要求函数定义在R上且绝对可积这两个条件，这个条件太强，适用面窄（一般的常用函数、多项式函数等初等函数都不满足这个条件）
- 许多时间t作为自变量的函数往往在$t<0$时是无意义的，像这样的函数不能取Fourier变换
- 对于任意一个函数$\phi(t)$，能否经过适当地改造使其进行Fourier变换时克服上述两个缺点？
- 引进单位阶梯函数$H(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$,以及指数衰减函数$e^{-\beta t}(\beta>0)$
- 用前者乘以$\phi(t)$可以使积分区间由$(-\infty,\infty)$变为$[0,\infty)$
- 后者乘以$\phi(t)$就有可能使其变得绝对可积
- 所以对于$\phi(t)H(t)e^{-\beta t}(\beta>0)$只要$\beta$选得适当，一般来说这个函数的Fourier变换存在
- 对$\phi(t)H(t)e^{-\beta t}$实行Fourier变换

•

$$\mathscr{F}[\phi(t)H(t)e^{-\beta t}] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)H(t)e^{-\beta t}e^{-i\lambda t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)H(t)e^{-(\beta+i\lambda)t}dt$$

令 $f(t) = \phi(t)H(t), p = \beta + i\lambda$

$$= \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

- $$\mathscr{F}[\phi(t)H(t)e^{-\beta t}] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)H(t)e^{-\beta t}e^{-i\lambda t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)H(t)e^{-(\beta+i\lambda)t}dt$$

  令$f(t) = \phi(t)H(t), p = \beta + i\lambda$

  $$= \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

- 取$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$即通过积分将关于$t$的函数转换为关于$p$的函数，这就是我们后面要介绍的Laplace变换

•

$$\mathscr{F}[\phi(t)H(t)e^{-\beta t}] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)H(t)e^{-\beta t}e^{-i\lambda t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)H(t)e^{-(\beta+i\lambda)t}dt$$

令$f(t) = \phi(t)H(t), p = \beta + i\lambda$

$$= \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

- 取$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$即通过积分将关于$t$的函数转换为关于$p$的函数，这就是我们后面要介绍的Laplace变换
- 对$\mathscr{F}[\phi(t)H(t)e^{-\beta t}]$实行Fourier逆变换

$$\phi(t)H(t)e^{-\beta t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)H(t)e^{-\beta t}e^{-i\lambda t}dt)e^{it\lambda}d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-(\beta+i\lambda)t}dt)e^{it\lambda}d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\beta + i\lambda)e^{it\lambda}d\lambda$$

- $$\mathscr{F}[\phi(t)H(t)e^{-\beta t}] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)H(t)e^{-\beta t}e^{-i\lambda t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)H(t)e^{-(\beta+i\lambda)t}dt$$

  令$f(t) = \phi(t)H(t), p = \beta + i\lambda$

  $$= \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

- 取$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$即通过积分将关于$t$的函数转换为关于$p$的函数，这就是我们后面要介绍的Laplace变换
- 对$\mathscr{F}[\phi(t)H(t)e^{-\beta t}]$实行Fourier逆变换

  $$\phi(t)H(t)e^{-\beta t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)H(t)e^{-\beta t}e^{-i\lambda t}dt\right)e^{it\lambda}d\lambda$$

  $$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-(\beta+i\lambda)t}dt\right)e^{it\lambda}d\lambda$$

  $$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\beta+i\lambda)e^{it\lambda}d\lambda$$

- 左右两端同乘以$e^{\beta t}$,其中$f(t) = \phi(t)H(t)$

- $$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\beta+i\lambda)e^{it\lambda+\beta t}d\lambda \quad (令p=\beta+i\lambda)$$
$$=\frac{1}{2i\pi}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(p)e^{pt}dp, t>0$$

- 上式就是Laplace逆变换，一般再做逆变换求原函数时，不是从定义出发，而是利用Laplace积分变换表和积分性质
- Fourier变换中介绍了卷积，即$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-s)g(s)ds$
- 如果当$t<0$时，$f(t)=g(t)=0$，则上式可化简为

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{0}f(t-s)g(s)ds+\int_{0}^{t}f(t-s)g(s)ds+\int_{t}^{\infty}f(t-s)g(s)ds$$
$$=\int_{0}^{t}f(t-s)g(s)ds$$

- 上式就是laplace变换中用到的卷积，注意它的积分范围

⋆3.4.1 Laplace变换的概念

⋆3.4.1 Laplace变换的概念

- 设$f(t)$在$t \geq 0$上有定义，对于复数p,定义f的Laplace变换为

$$\mathscr{L}[f] = \tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

有时也称$\tilde{f}$是f的像函数。

⋆3.4.1 Laplace变换的概念

- 设$f(t)$在$t \geq 0$上有定义，对于复数p,定义f的Laplace变换为

$$\mathscr{L}[f] = \tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt.$$

有时也称$\tilde{f}$是f的像函数。
关于Laplace变换的存在性，有如下定理:

⋆3.4.1 Laplace变换的概念

- 设$f(t)$在$t\geq 0$上有定义，对于复数p,定义f的Laplace变换为

$$\mathscr{L}[f]=\tilde{f}(p)=\int_0^{\infty}e^{-pt}f(t)dt.$$

有时也称$\tilde{f}$是f的像函数。
关于Laplace变换的存在性，有如下定理:

- **定理3.4.1** 若$f(t)$在$[0,\infty)$上分段连续且不超过指数型增长，即存在常数$M,\alpha>0$使得$|f(t)|\leq Me^{\alpha t}$,则$f(t)$的Laplace变换对满足$\mathbf{Re}p>\alpha$ 的所有p都存在。

⋆3.4.1 Laplace变换的概念

- 设$f(t)$在$t \geq 0$上有定义，对于复数p,定义f的Laplace变换为

$$\mathscr{L}[f] = \tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

有时也称$\tilde{f}$是f的像函数。
关于Laplace变换的存在性，有如下定理:

- **定理3.4.1** 若$f(t)$在$[0, \infty)$上分段连续且不超过指数型增长，即存在常数$M, \alpha > 0$使得$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$,则$f(t)$的Laplace变换对满足$\mathbf{Re}p > \alpha$ 的所有p都存在。

例3.4.1

$$\mathscr{L}[c]=\int_0^{\infty} ce^{-pt}dt=\frac{c}{p},\quad Rep>0$$

例3.4.1

$$\mathscr{L}[c] = \int_0^{\infty} ce^{-pt}dt = \frac{c}{p}, \quad Rep > 0$$

$$\mathscr{L}[e^{at}] = \frac{1}{p-a}, \quad Rep > a$$

例3.4.1

$$\mathscr{L}[c] = \int_0^{\infty} ce^{-pt}dt = \frac{c}{p}, \quad Rep > 0$$

$$\mathscr{L}[e^{at}] = \frac{1}{p-a}, \quad Rep > a$$

$$\mathscr{L}[t^2] = \frac{2}{p^3}, \quad Rep > 0$$

例3.4.1

$$\mathscr{L}[c]=\int_0^{\infty} ce^{-pt}dt=\frac{c}{p},\quad Rep>0$$

$$\mathscr{L}[e^{at}]=\frac{1}{p-a},\quad Rep>a$$

$$\mathscr{L}[t^2]=\frac{2}{p^3},\quad Rep>0$$

$$\mathscr{L}[t^n]=\frac{n!}{p^{n+1}},\quad Rep>0$$

例3.4.1

$$\mathscr{L}[c] = \int_0^{\infty} ce^{-pt}dt = \frac{c}{p}, \quad Rep > 0$$

$$\mathscr{L}[e^{at}] = \frac{1}{p-a}, \quad Rep > a$$

$$\mathscr{L}[t^2] = \frac{2}{p^3}, \quad Rep > 0$$

$$\mathscr{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad Rep > 0$$

$$\mathscr{L}[\sin at] = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad Rep > 0$$

例3.4.1

$$\mathscr{L}[c] = \int_0^{\infty} c e^{-pt} dt = \frac{c}{p}, \quad Re p > 0$$

$$\mathscr{L}[e^{at}] = \frac{1}{p-a}, \quad Re p > a$$

$$\mathscr{L}[t^2] = \frac{2}{p^3}, \quad Re p > 0$$

$$\mathscr{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad Re p > 0$$

$$\mathscr{L}[\sin at] = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad Re p > 0$$

$$\mathscr{L}[\cos at] = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad Re p > 0$$

例3.4.2 Heaviside单位阶梯函数（通常简称为Heaviside函数）是

$$H(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

对正常数a,有

$$\mathscr{L}[H(t-a)]=\int_0^{\infty}H(t-a)e^{-pt}dt=\int_0^{a}H(t-a)e^{-pt}dt+\int_a^{\infty}H(t-a)e^{-pt}dt$$

$$=\int_a^{\infty}e^{-pt}dt=\frac{e^{-ap}}{p}$$

- 如果$\mathscr{L}[f(t)] = \tilde{f}(p)$,则称$f(t)$是$\tilde{f}(p)$的Laplace逆变换，有时也称$f$是$\tilde{f}(p)$的像原函数或原函数.

- 如果$\mathscr{L}[f(t)] = \tilde{f}(p)$,则称$f(t)$是$\tilde{f}(p)$的Laplace逆变换，有时也称$f$是$\tilde{f}(p)$的像原函数或原函数.它的形式是

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[\tilde{f}] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \tilde{f}(p)e^{tp}dp, t > 0$$

其中$\tilde{f}(p)$定义在半平面$\mathbf{Re}\,p > \beta$上。

- 如果$\mathscr{L}[f(t)] = \tilde{f}(p)$,则称$f(t)$是$\tilde{f}(p)$的Laplace逆变换，有时也称$f$是$\tilde{f}(p)$的像原函数或原函数.它的形式是

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[\tilde{f}] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \tilde{f}(p)e^{tp}dp, t > 0$$

其中$\tilde{f}(p)$定义在半平面$\mathbf{Re}p > \beta$上。

- 上式实际计算比较麻烦，可以利用Laplace变换的性质来求逆变换，但多数情况下，都需借助于Laplace积分变换表。

⋆3.4.2 Laplace变换的性质（证明过程和Fourier变换的性质类似）

⋆3.4.2 Laplace变换的性质（证明过程和Fourier变换的性质类似）

- 性 质1(线 性 性 质) $\mathscr{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathscr{L}[f] + \beta\mathscr{L}[g]$, $\mathscr{L}^{-1}[\alpha\tilde{f} + \beta\tilde{g}] = \alpha\mathscr{L}^{-1}[\tilde{f}] + \beta\mathscr{L}^{-1}[\tilde{g}]$

$\star$3.4.2 Laplace变换的性质（证明过程和Fourier变换的性质类似）

- 性质1(线性性质) $\mathscr{L}[\alpha f+\beta g]=\alpha\mathscr{L}[f]+\beta\mathscr{L}[g]$, $\mathscr{L}^{-1}[\alpha\tilde{f}+\beta\tilde{g}]=\alpha\mathscr{L}^{-1}[\tilde{f}]+\beta\mathscr{L}^{-1}[\tilde{g}]$

- 性质2(位移性质) $\mathscr{L}[e^{\alpha t}f(t)]=\tilde{f}(p-a), \mathbf{Re}p>a,$

$\star$3.4.2 Laplace变换的性质（证明过程和Fourier变换的性质类似）

- 性质1(线性性质) $\mathscr{L}[\alpha f+\beta g]=\alpha\mathscr{L}[f]+\beta\mathscr{L}[g]$, $\mathscr{L}^{-1}[\alpha\tilde{f}+\beta\tilde{g}]=\alpha\mathscr{L}^{-1}[\tilde{f}]+\beta\mathscr{L}^{-1}[\tilde{g}]$
- 性质2(位移性质) $\mathscr{L}[e^{\alpha t}f(t)]=\tilde{f}(p-a)$, $\mathbf{Re}p>a$, 由此推知$\mathscr{L}[t^n e^{\alpha t}]=\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$, $\mathbf{Re}p>a$.

⋆3.4.2 Laplace变换的性质（证明过程和Fourier变换的性质类似）

- 性 质1(线 性 性 质) $\mathscr{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathscr{L}[f] + \beta\mathscr{L}[g]$, $\mathscr{L}^{-1}[\alpha\tilde{f} + \beta\tilde{g}] = \alpha\mathscr{L}^{-1}[\tilde{f}] + \beta\mathscr{L}^{-1}[\tilde{g}]$
- 性质2(位移性质) $\mathscr{L}[e^{\alpha t}f(t)] = \tilde{f}(p-a)$, $\mathbf{Re}p > a$, 由此推知$\mathscr{L}[t^n e^{\alpha t}] = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$, $\mathbf{Re}p > a$.
- 性质3(相似性质) $\mathscr{L}[f(ct)] = \frac{1}{c}\tilde{f}(\frac{p}{c}), c > 0$

⋆3.4.2 Laplace变换的性质（证明过程和Fourier变换的性质类似）

- 性质1(线性性质) $\mathscr{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathscr{L}[f] + \beta\mathscr{L}[g]$, $\mathscr{L}^{-1}[\alpha\tilde{f} + \beta\tilde{g}] = \alpha\mathscr{L}^{-1}[\tilde{f}] + \beta\mathscr{L}^{-1}[\tilde{g}]$

- 性质2(位移性质) $\mathscr{L}[e^{\alpha t}f(t)] = \tilde{f}(p-a)$, $\mathbf{Re}\,p > a$, 由此推知$\mathscr{L}[t^n e^{\alpha t}] = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$, $\mathbf{Re}\,p > a$.

- 性质3(相似性质) $\mathscr{L}[f(ct)] = \frac{1}{c}\tilde{f}(\frac{p}{c}), c > 0$

- 性质4 (微分性质)若在$[0,\infty)$上，$f'(t)$分段连续，$f(t)$连续且不超过指数型增长，即存在常数$M,\alpha>0$使得$|f(t)|\leq Me^{\alpha t}$,则当$\mathbf{Re}p>\alpha$时,$f'(t)$的Laplace变换存在，且成立$\mathscr{L}[f'(t)]=p\tilde{f}(p)-f(0)$.
-

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 性质4 (微分性质)若在$[0,\infty)$上，$f'(t)$分段连续，$f(t)$连续且不超过指数型增长，即存在常数$M,\alpha>0$使得$|f(t)|\le Me^{\alpha t}$,则当$\mathbf{Re}p>\alpha$时,$f'(t)$的Laplace变换存在，且成立$\mathscr{L}[f'(t)]=p\tilde{f}(p)-f(0)$.
- 对于高阶导数，也有类似的结论：如果$[0,\infty)$上,$f^{(n)}(t)$分段连续，$f(t),f'(t),\cdots,f^{(n-1)}(t)$连续，且不超过指数型增长，那么$f^{(n)}(t)$的Laplace变换存在，且成立

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=p^n\tilde{f}(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0),\mathbf{Re}p>\alpha.$$

- 性质4 (微分性质)若在$[0,\infty)$上，$f'(t)$分段连续，$f(t)$连续且不超过指数型增长，即存在常数$M,\alpha > 0$使得$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$,则当$\mathbf{Re}p > \alpha$时,$f'(t)$的Laplace变换存在，且成立$\mathscr{L}[f'(t)] = p\tilde{f}(p) - f(0)$.
- 对于高阶导数，也有类似的结论：如果$[0,\infty)$上,$f^{(n)}(t)$分段连续，$f(t), f'(t), \cdots, f^{(n-1)}(t)$连续，且不超过指数型增长，那么$f^{(n)}(t)$的Laplace变换存在，且成立

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = p^n\tilde{f}(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0), \mathbf{Re}p > \alpha.$$

常用的微分性质：

$$\mathscr{L}[f'(t)] = p\tilde{f}(p) - f(0).$$

$$\mathscr{L}[f''(t)] = p^2\tilde{f}(p) - pf'(0) - f(0).$$

- 性质5 (积分性质) $\mathscr{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{1}{p}\tilde{f}(p)$.

- 性质5 (积分性质) $\mathscr{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{1}{p}\tilde{f}(p)$.
- 性质6(乘多项式性质)

$$\mathscr{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\tilde{f}(p) = (-1)^n \tilde{f}^{(n)}(p),$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\tilde{f}^{(n)}(p)] = (-1)^n t^n f(t), n = 1, 2, 3, \cdots .$$

- 性质5 (积分性质) $\mathscr{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{1}{p}\tilde{f}(p)$.
- 性质6(乘多项式性质)

$$\mathscr{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\tilde{f}(p) = (-1)^n \tilde{f}^{(n)}(p),$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\tilde{f}^{(n)}(p)] = (-1)^n t^n f(t), n = 1, 2, 3, \cdots .$$

- 性质7(延迟性质)$\mathscr{L}[f(t-\tau)H(t-\tau)] = e^{-\tau p}\tilde{f}(p)$,或者$\mathscr{L}^{-1}[e^{-\tau p}\tilde{f}(p)] = f(t-\tau)H(t-\tau)$.

- 性质5 (积分性质) $\mathscr{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{1}{p}\tilde{f}(p)$.
- 性质6(乘多项式性质)

$$\mathscr{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\tilde{f}(p) = (-1)^n \tilde{f}^{(n)}(p),$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\tilde{f}^{(n)}(p)] = (-1)^n t^n f(t), n = 1, 2, 3, \cdots .$$

- 性质7(延迟性质)$\mathscr{L}[f(t-\tau)H(t-\tau)] = e^{-\tau p}\tilde{f}(p)$,或者$\mathscr{L}^{-1}[e^{-\tau p}\tilde{f}(p)] = f(t-\tau)H(t-\tau)$.

证明:

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)H(t-\tau)] = \int_0^{\infty} f(t-\tau)H(t-\tau)e^{-pt}dt$$

$$= \int_0^{\tau} f(t-\tau)H(t-\tau)e^{-pt}dt + \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)H(t-\tau)e^{-pt}dt$$

右边第一项积分为零，对于第二个几积分中，令$t-\tau = s$

$$= \int_0^{\infty} f(s)e^{-p(\tau+s)}ds = e^{-p\tau}\tilde{f}(p)$$

Home Page
Title Page
Page 10 of 20
Go Back
Full Screen
Close
Quit

- 性质8(初值定理) $f(0)=\lim\limits_{t\to 0} f(t)=\lim\limits_{t\to\infty} p\tilde{f}(p)$.

- 性质8(初值定理) $f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to\infty} p\tilde{f}(p)$.

- 性质9(终值定理) $f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p\tilde{f}(p)$.

- 性质8(初值定理) $f(0)=\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{t\to\infty} p\tilde{f}(p)$.

- 性质9(终值定理) $f(\infty)=\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{p\to 0} p\tilde{f}(p)$.

- **定义3.4.1**称

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

为函数f与g的卷积.

- 性质8(初值定理) $f(0) = \lim\limits_{t \to 0} f(t) = \lim\limits_{t \to \infty} p\tilde{f}(p)$.

- 性质9(终值定理) $f(\infty) = \lim\limits_{t \to \infty} f(t) = \lim\limits_{p \to 0} p\tilde{f}(p)$.

- **定义3.4.1称**

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

为函数f与g的卷积.

- 卷积有下列性质:

$$f * g = g * f, (f * g) * h = f * (g * h), \quad f * (g + h) = f * g + f * h.$$

- 性质8(初值定理) $f(0)=\lim\limits_{t\to 0} f(t)=\lim\limits_{t\to\infty} p\tilde{f}(p)$.

- 性质9(终值定理) $f(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{p\to 0} p\tilde{f}(p)$.

- **定义3.4.1称**

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

为函数f与g的卷积.

- 卷积有下列性质：

$$f*g=g*f,(f*g)*h=f*(g*h),\quad f*(g+h)=f*g+f*h.$$

- 性质10(卷积定理)

$$\mathscr{L}[f*g]=\tilde{f}(p)\tilde{g}(p),\text{或者}\mathscr{L}^{-1}[\tilde{f}(p)\tilde{g}(p)]=f*g.$$

例3.4.4求Laplace逆变换$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p^2(1+p)^2}]$

例3.4.4求Laplace逆变换$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p^2(1+p)^2}]$

解：因为(可利用积分变换表里的结论)

$$\mathscr{L}[t] = \frac{1}{p^2}, \mathscr{L}[te^{-t}] = \frac{1}{(1+p)^2},$$

例3.4.4求Laplace逆变换$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p^2(1+p)^2}]$

解：因为(可利用积分变换表里的结论)

$$\mathscr{L}[t]=\frac{1}{p^2},\mathscr{L}[te^{-t}]=\frac{1}{(1+p)^2},$$

记$f(t)=t,g(t)=te^{-t}$,则

例3.4.4求Laplace逆变换$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p^2(1+p)^2}]$

解：因为(可利用积分变换表里的结论)

$$\mathscr{L}[t]=\frac{1}{p^2},\mathscr{L}[te^{-t}]=\frac{1}{(1+p)^2},$$

记$f(t)=t,g(t)=te^{-t}$,则

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p^2(1+p)^2}]=\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{(1+p)^2}]$$

例3.4.4求Laplace逆变换$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p^2(1+p)^2}]$
解：因为(可利用积分变换表里的结论)

$$\mathscr{L}[t]=\frac{1}{p^2},\mathscr{L}[te^{-t}]=\frac{1}{(1+p)^2},$$

记$f(t)=t,g(t)=te^{-t}$,则

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p^2(1+p)^2}]=\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{(1+p)^2}]$$

利用性质(10)

$$=\mathscr{L}^{-1}[\tilde{f}(p)\tilde{g}(p)]=(f*g)(t)=\int_0^t(t-s)ss^{-s}ds$$

$$=(t+2)e^{-t}+t-2$$

注意：(1)利用Laplace逆变换求原函数一般是利用积分变换表和Laplace变换的性质
(2)Laplce变换中卷积的积分范围

⋆3.5 Laplace变换的应用

考虑半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0 \\ u(0, t) = f(t), & \lim\limits_{x \to \infty} |u(x, t)| < \infty \end{cases}$$

⋆3.5 Laplace变换的应用

考虑半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x \geq 0 \\ u(0,t) = f(t), & \lim\limits_{x\to\infty} |u(x,t)| < \infty \end{cases}$$

解：由于x, t都在$[0, \infty)$内变换，所以采用Laplace变换方法求解。

⋆3.5 Laplace变换的应用

考虑半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x \geq 0 \\ u(0,t) = f(t), & \lim\limits_{x\to\infty} |u(x,t)| < \infty \end{cases}$$

解： 由于x, t都在$[0,\infty)$内变换， 所以采用Laplace变换方法求解。又因为方程关于t是一阶导数，关于x是二阶导数，且没有给出u_x在$x=0$的值，故只能关于t施行Laplace变换。

⋆3.5 Laplace变换的应用

考虑半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x \geq 0 \\ u(0,t) = f(t), & \lim\limits_{x\to\infty} |u(x,t)| < \infty \end{cases}$$

解：由于x, t都在$[0,\infty)$内变换，所以采用Laplace变换方法求解。又因为方程关于t是一阶导数，关于x是二阶导数，且没有给出u_x在$x=0$的值，故只能关于t施行Laplace变换。

记$\tilde{u}(x,p) = \mathscr{L}[u(x,t)], p > 0$,对方程和和定解条件关于$t$施行Laplace变换，由$u(x,0)=0$,所以

$$\begin{cases} p\tilde{u}(x,p) - u(x,0) - a^2\tilde{u}_{xx}(x,p) = 0, \\ \tilde{u}(0,p) = \tilde{f}(p). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{u}_{xx}(x,p) = \frac{p}{a^2}\tilde{u}(x,p), & x > 0 \\ \tilde{u}(0,p) = \tilde{f}(p). \end{cases}$$

⋆3.5 Laplace变换的应用

考虑半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x \geq 0 \\ u(0,t) = f(t), & \lim\limits_{x\to\infty} |u(x,t)| < \infty \end{cases}$$

解：由于x, t都在$[0,\infty)$内变换，所以采用Laplace变换方法求解。又因为方程关于t是一阶导数，关于x是二阶导数，且没有给出u_x在$x=0$的值，故只能关于t施行Laplace变换。

记$\tilde{u}(x,p) = \mathscr{L}[u(x,t)], p > 0$,对方程和和定解条件关于$t$施行Laplace变换，由$u(x,0)=0$,所以

$$\begin{cases} p\tilde{u}(x,p) - u(x,0) - a^2\tilde{u}_{xx}(x,p) = 0, \\ \tilde{u}(0,p) = \tilde{f}(p). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{u}_{xx}(x,p) = \frac{p}{a^2}\tilde{u}(x,p), & x > 0 \\ \tilde{u}(0,p) = \tilde{f}(p). \end{cases}$$

把p看作参数，上式即为两阶齐次常微分方程初值问题，求出它的通解

$$\tilde{u}(x,p) = C_1(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2(p)e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

⋆3.5 Laplace变换的应用

考虑半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x \geq 0 \\ u(0,t) = f(t), & \lim\limits_{x\to\infty} |u(x,t)| < \infty \end{cases}$$

解：由于x, t都在$[0,\infty)$内变换，所以采用Laplace变换方法求解。又因为方程关于t是一阶导数，关于x是二阶导数，且没有给出u_x在$x = 0$的值，故只能关于t施行Laplace变换。

记$\tilde{u}(x,p) = \mathscr{L}[u(x,t)], p > 0$,对方程和和定解条件关于$t$施行Laplace变换，由$u(x,0) = 0$,所以

$$\begin{cases} p\tilde{u}(x,p) - u(x,0) - a^2\tilde{u}_{xx}(x,p) = 0, \\ \tilde{u}(0,p) = \tilde{f}(p). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{u}_{xx}(x,p) = \frac{p}{a^2}\tilde{u}(x,p), & x > 0 \\ \tilde{u}(0,p) = \tilde{f}(p). \end{cases}$$

把p看作参数，上式即为两阶齐次常微分方程初值问题，求出它的通解

$$\tilde{u}(x,p) = C_1(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2(p)e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

由$\lim\limits_{x\to\infty} |u(x,t)| < \infty$|知$u$有界，从而$\tilde{u}$也有界，故$C_2(p) = 0$.

⋆3.5 Laplace变换的应用

考虑半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x \geq 0 \\ u(0,t) = f(t), & \lim\limits_{x\to\infty} |u(x,t)| < \infty \end{cases}$$

解：由于x, t都在$[0,\infty)$内变换，所以采用Laplace变换方法求解。又因为方程关于t是一阶导数，关于x是二阶导数，且没有给出u_x在$x = 0$的值，故只能关于t施行Laplace变换。

记$\tilde{u}(x,p) = \mathscr{L}[u(x,t)], p > 0$,对方程和和定解条件关于$t$施行Laplace变换，由$u(x,0) = 0$,所以

$$\begin{cases} p\tilde{u}(x,p) - u(x,0) - a^2\tilde{u}_{xx}(x,p) = 0, \\ \tilde{u}(0,p) = \tilde{f}(p). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{u}_{xx}(x,p) = \frac{p}{a^2}\tilde{u}(x,p), & x > 0 \\ \tilde{u}(0,p) = \tilde{f}(p). \end{cases}$$

把p看作参数，上式即为两阶齐次常微分方程初值问题，求出它的通解

$$\tilde{u}(x,p) = C_1(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2(p)e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

由$\lim\limits_{x\to\infty} |u(x,t)| < \infty|$知$u$有界，从而$\tilde{u}$也有界，故$C_2(p) = 0$.

利用$\tilde{u}(0,p)=\tilde{f}(p)$可推知$C_1(p)=\tilde{f}(p)$,因而

$$\tilde{u}(x,p)=\tilde{f}(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

利用$\tilde{u}(0,p)=\tilde{f}(p)$可推知$C_1(p)=\tilde{f}(p)$,因而

$$\tilde{u}(x,p)=\tilde{f}(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

所以（利用性质10的卷积定理）

$$u(x,t)=\mathscr{L}^{-1}[\tilde{u}(x,p)]=\mathscr{L}^{-1}[\tilde{f}(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}]=f*\mathscr{L}^{-1}[e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}]$$

利用$\tilde{u}(0,p)=\tilde{f}(p)$可推知$C_1(p)=\tilde{f}(p)$,因而

$$\tilde{u}(x,p)=\tilde{f}(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

所以（利用性质10的卷积定理）

$$u(x,t)=\mathscr{L}^{-1}[\tilde{u}(x,p)]=\mathscr{L}^{-1}[\tilde{f}(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}]=f*\mathscr{L}^{-1}[e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}]$$

查表知

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{\sqrt{t}}}}^{\infty}e^{-y^2}dy$$

利用$\tilde{u}(0,p)=\tilde{f}(p)$可推知$C_1(p)=\tilde{f}(p)$,因而

$$\tilde{u}(x,p)=\tilde{f}(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

所以（利用性质10的卷积定理）

$$u(x,t)=\mathscr{L}^{-1}[\tilde{u}(x,p)]=\mathscr{L}^{-1}[\tilde{f}(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}]=f*\mathscr{L}^{-1}[e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}]$$

查表知

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{\sqrt{t}}}}^{\infty}e^{-y^2}dy$$

利用微分性质得

$$\mathscr{L}^{-1}[e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}]=\mathscr{L}^{-1}[p\frac{1}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}]=\frac{d}{dt}(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{\sqrt{t}}}}^{\infty}e^{-y^2}dy)$$

$$=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

最后求出

$$u(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{f(s)}{(t-s)^{3/2}}\exp(-\frac{x^2}{4a^2(t-s)})ds$$

例3.5.2求解一阶偏微分方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t + xu_x = x, & x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x > 0 \end{cases}$$

例3.5.2求解一阶偏微分方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t + xu_x = x, & x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x > 0 \end{cases}$$

解：两个自变量x, t的变换范围都是$[0, \infty)$，既可以关于t施行Laplace变换，也可以关于x施行Laplce变换。

例3.5.2求解一阶偏微分方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t + xu_x = x, & x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x > 0 \end{cases}$$

解： 两个自变量x, t的变换范围都是$[0, \infty)$， 既可以关于t施行Laplace变换， 也可以关于x施行Laplce变换。这里关于t施行Laplace变换，利用Laplace变换的性质（取p是正实数）

$$p\tilde{u}(x,p) - u(0,p) + x\frac{d}{dx}\tilde{u}(x,p) = \frac{x}{p}$$

例3.5.2求解一阶偏微分方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t + xu_x = x, & x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x > 0 \end{cases}$$

解： 两个自变量x, t的变换范围都是$[0,\infty)$，既可以关于t施行Laplace变换，也可以关于x施行Laplce变换。这里关于t施行Laplace变换，利用Laplace变换的性质（取p是正实数）

$$p\tilde{u}(x,p) - u(0,p) + x\frac{d}{dx}\tilde{u}(x,p) = \frac{x}{p}$$

利用条件$u(x,0) = 0$，上式可写成

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} + \frac{p}{x}\tilde{u} = \frac{1}{p}.$$

例3.5.2求解一阶偏微分方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t + xu_x = x, & x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x > 0 \end{cases}$$

解： 两个自变量x, t的变换范围都是$[0,\infty)$，既可以关于t施行Laplace变换，也可以关于x施行Laplce变换。这里关于t施行Laplace变换，利用Laplace变换的性质（取p是正实数）

$$p\tilde{u}(x,p) - u(0,p) + x\frac{d}{dx}\tilde{u}(x,p) = \frac{x}{p}$$

利用条件$u(x,0) = 0$，上式可写成

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} + \frac{p}{x}\tilde{u} = \frac{1}{p}.$$

由此解出

$$\tilde{u}(x,p) = \frac{C(p)}{x^p} + \frac{x}{p(p+1)}$$

例3.5.2求解一阶偏微分方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t + xu_x = x, & x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x > 0 \end{cases}$$

解： 两个自变量x,t的变换范围都是$[0,\infty)$， 既可以关于t施行Laplace变换， 也可以关于x施行Laplce变换。这里关于t施行Laplace变换，利用Laplace变换的性质（取p是正实数）

$$p\tilde{u}(x,p) - u(0,p) + x\frac{d}{dx}\tilde{u}(x,p) = \frac{x}{p}$$

利用条件$u(x,0)=0$，上式可写成

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} + \frac{p}{x}\tilde{u} = \frac{1}{p}.$$

由此解出

$$\tilde{u}(x,p) = \frac{C(p)}{x^p} + \frac{x}{p(p+1)}$$

其中$C(p)$是积分常数，再由$u(0,t)=0, \Rightarrow \tilde{u}(0,p)=0, \Rightarrow C(p)=0$

从而

$$\tilde{u}(x,p) = \frac{x}{p(p+1)} = x(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1})$$

从而

$$\tilde{u}(x,p) = \frac{x}{p(p+1)} = x(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1})$$

所以

$$u(x,t) = \mathscr{L}^{-1}[\tilde{u}(x,p)] = x\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p}] - x\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p+1}] = x(1-e^{-t})$$

例3.5.3 利用Laplace变换求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = k \sin \pi x, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

例3.5.3 利用Laplace变换求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = k\sin \pi x, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

解：关于t施行Laplace变换，得

$$p^2\tilde{u}(x,p) - pu(x,0) - u_t(x,0) - \frac{d^2}{dx^2}\tilde{u}(x,p) = \frac{k}{p}\sin \pi x$$

例3.5.3 利用Laplace变换求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = k\sin\pi x, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

解：关于t施行Laplace变换，得

$$p^2\tilde{u}(x,p) - pu(x,0) - u_t(x,0) - \frac{d^2}{dx^2}\tilde{u}(x,p) = \frac{k}{p}\sin\pi x$$

利用条件$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \Rightarrow$

例3.5.3 利用Laplace变换求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = k\sin\pi x, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

解：关于t施行Laplace变换，得

$$p^2\tilde{u}(x,p) - pu(x,0) - u_t(x,0) - \frac{d^2}{dx^2}\tilde{u}(x,p) = \frac{k}{p}\sin\pi x$$

利用条件$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \Rightarrow$

$$p^2\tilde{u}(x,p) - \frac{d^2}{dx^2}\tilde{u}(x,p) = \frac{k}{p}\sin\pi x$$

例3.5.3 利用Laplace变换求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = k\sin\pi x, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

解：关于t施行Laplace变换，得

$$p^2\tilde{u}(x,p) - pu(x,0) - u_t(x,0) - \frac{d^2}{dx^2}\tilde{u}(x,p) = \frac{k}{p}\sin\pi x$$

利用条件$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \Rightarrow$

$$p^2\tilde{u}(x,p) - \frac{d^2}{dx^2}\tilde{u}(x,p) = \frac{k}{p}\sin\pi x$$

解之得

$$\tilde{u}(x,p) = C_1(p)e^{px} + C_2(p)e^{-px} + \frac{k}{p(p^2+\pi^2)}\sin\pi x$$

例3.5.3 利用Laplace变换求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = k\sin\pi x, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

解：关于t施行Laplace变换，得

$$p^2\tilde{u}(x,p) - pu(x,0) - u_t(x,0) - \frac{d^2}{dx^2}\tilde{u}(x,p) = \frac{k}{p}\sin\pi x$$

利用条件$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \Rightarrow$

$$p^2\tilde{u}(x,p) - \frac{d^2}{dx^2}\tilde{u}(x,p) = \frac{k}{p}\sin\pi x$$

解之得

$$\tilde{u}(x,p) = C_1(p)e^{px} + C_2(p)e^{-px} + \frac{k}{p(p^2+\pi^2)}\sin\pi x$$

利用条件$u(0,t) = u(1,t) = 0, \Rightarrow C_1(p) = 0, C_2(p) = 0 \Rightarrow$

例3.5.3 利用Laplace变换求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = k\sin\pi x, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

解：关于t施行Laplace变换，得

$$p^2\tilde{u}(x,p) - pu(x,0) - u_t(x,0) - \frac{d^2}{dx^2}\tilde{u}(x,p) = \frac{k}{p}\sin\pi x$$

利用条件$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \Rightarrow$

$$p^2\tilde{u}(x,p) - \frac{d^2}{dx^2}\tilde{u}(x,p) = \frac{k}{p}\sin\pi x$$

解之得

$$\tilde{u}(x,p) = C_1(p)e^{px} + C_2(p)e^{-px} + \frac{k}{p(p^2+\pi^2)}\sin\pi x$$

利用条件$u(0,t) = u(1,t) = 0, \Rightarrow C_1(p) = 0, C_2(p) = 0 \Rightarrow$

$$\tilde{u}(x,p) = \frac{k}{p(p^2+\pi^2)}\sin \pi x = \frac{k}{\pi^2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+\pi^2}\right)\sin \pi x$$

$$\tilde{u}(x,p)=\frac{k}{p(p^2+\pi^2)}\sin\pi x=\frac{k}{\pi^2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+\pi^2}\right)\sin\pi x$$

所以

$$u(x,t)=\frac{k}{\pi^2}(1-\cos\pi t)\sin\pi x$$

用积分变换方法求解定解问题的过程大致如下：

用积分变换方法求解定解问题的过程大致如下：

- (1)根据自变量的变化范围以及定解条件的具体情况，选取合适的积分变换，把偏微分方程转化成像函数的常微分方程;

用积分变换方法求解定解问题的过程大致如下：

- (1)根据自变量的变化范围以及定解条件的具体情况，选取合适的积分变换，把偏微分方程转化成像函数的常微分方程;
- (2)对定解条件取相应的变换，导出像函数所满足的常微分方程的定解条件；

用积分变换方法求解定解问题的过程大致如下：

- (1)根据自变量的变化范围以及定解条件的具体情况，选取合适的积分变换，把偏微分方程转化成像函数的常微分方程;
- (2)对定解条件取相应的变换，导出像函数所满足的常微分方程的定解条件；
- (3)求解这个常微分方程的定解问题，得到像函数；

用积分变换方法求解定解问题的过程大致如下：

- (1)根据自变量的变化范围以及定解条件的具体情况，选取合适的积分变换，把偏微分方程转化成像函数的常微分方程;
- (2)对定解条件取相应的变换，导出像函数所满足的常微分方程的定解条件；
- (3)求解这个常微分方程的定解问题，得到像函数；
- (4)取逆变换，得到原问题的形式解；

用积分变换方法求解定解问题的过程大致如下：

- (1)根据自变量的变化范围以及定解条件的具体情况，选取合适的积分变换，把偏微分方程转化成像函数的常微分方程;
- (2)对定解条件取相应的变换，导出像函数所满足的常微分方程的定解条件；
- (3)求解这个常微分方程的定解问题，得到像函数；
- (4)取逆变换，得到原问题的形式解；
- (5)进行综合过程，给出形式解成为真正解所需要的条件，从而得到解的存在性.

作业：

3.16、(2) $\begin{cases} u_{xy} = x^2 y, & x > 1, y > 0 \\ u(x,0) = x^2, & x \geq 1 \\ u(1,y) = \cos y, & y \geq 0 \end{cases}$

作业：

3.16、(2) $\begin{cases} u_{xy} = x^2 y, & x > 1, y > 0 \\ u(x,0) = x^2, & x \geq 1 \\ u(1,y) = \cos y, & y \geq 0 \end{cases}$

3.16、(3) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = \sin t, & t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & x > 0 \\ u(x,t)\text{有界} \end{cases}$

作业：

$$3.16、(2)\begin{cases} u_{xy} = x^2 y, & x > 1, y > 0 \\ u(x,0) = x^2, & x \geq 1 \\ u(1,y) = \cos y, & y \geq 0 \end{cases}$$

$$3.16、(3)\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = \sin t, & t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & x > 0 \\ u(x,t)\text{有界} \end{cases}$$