

5.1 设常数 $\sigma > 0$, 利用第一Green公式, 证明Laplace方程的Robin边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x \in \Omega \\ (\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u)|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

解的唯一性

解: 只要证明齐次方程齐次边界条件的定界问题只有零解即可, 即证明

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x \in \Omega \\ (\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

只有零解。在第一Green公式 $\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx$ 中取 $v = u$, 则

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = 0$$

由齐次边界条件 $(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u)|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = -\sigma u, x \in \partial\Omega$, 代入上式

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

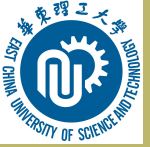
Page 1 of 3

Go Back

Full Screen

Close

Quit



$$\int_{\partial\Omega} \sigma u^2 ds + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = 0$$

因为 $\sigma > 0$ ，所以

$$\int_{\partial\Omega} \sigma u^2 ds = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = 0$$

即 u 是常数，且在 $\partial\Omega$ 上 $u = 0$ ，所以 $u = 0$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 2 of 3](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

5.4 验证 $\Gamma(x, y)$ 满足定义5.1.1中的条件(2),即证明

$$\Gamma(x, y) = \Gamma(|x - y|) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} |x - y|^{2-n}, n \geq 3,$$

满足

$$-\Delta_x \Gamma(x, y) = 0, x \in R^n \setminus \{y\}$$

其中 ω_n 是 R^n 中的单位球面的表面积, $|x - y| = [\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2]^{1/2}$.

证明: 证明类似ppt中 $n = 3$ 时的结论

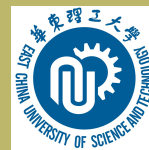
$$-\Delta_x \Gamma(x, y) = - \sum_{i=1}^n \Gamma(x, y)_{x_i x_i}$$

其中直接计算可得

$$\begin{aligned} \Gamma(x, y)_{x_i x_i} &= -\frac{1}{\omega_n} \{[(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2]^{-\frac{n}{2}} \\ &\quad - n[(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2]^{-\frac{n+2}{2}} (x_i - y_i)^2\} \end{aligned}$$

所以

$$- \sum_{i=1}^n \Gamma(x, y)_{x_i x_i} = 0$$



Home Page

Title Page



Page 3 of 3

Go Back

Full Screen

Close

Quit