§1 欧间空间的基本定理

一、距离与收敛

定义1: Euclid 空间$\mathbb{R}^n$ 中任意两点$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的距离定义为

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^n + \cdots + (x_n - y_n)^2}。$$

并称$\mathbf{x}$ 与$\mathbf{0}$ 的距离为$\mathbf{x}$ 的范数，记为$\|\mathbf{x}\|$。

定义了距离即可引入邻域及收敛：

定义2: 设$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \delta > 0$，则称点集

$$\begin{aligned} O(\mathbf{a}, \delta) &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \, |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \, \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^+ \cdots + (x_n - a_n)^2} < \delta \right\} \end{aligned}$$

为$\mathbf{a}$ 的δ 邻域，$\mathbf{a}$ 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径。

定义2: 设$\mathbf{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n,\delta>0$，则称点集

$$
\begin{aligned}
O(\mathbf{a},\delta) &= \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \middle| |\mathbf{x}-\mathbf{a}|<\delta\right\} \\
&= \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \middle| \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^+\cdots+(x_n-a_n)^2}<\delta\right\}
\end{aligned}
$$

为$\mathbf{a}$ 的δ 邻域，$\mathbf{a}$ 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径。

特别地：$O(\mathbf{a},\delta)$ 在$\mathbb{R}$ 上是开区间，在$\mathbb{R}^2$ 上是开圆盘，在$\mathbb{R}^3$ 上是开球。

定义2: 设$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \delta > 0$，则称点集

$$\begin{aligned} O(\mathbf{a}, \delta) &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \middle| |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^+ \cdots + (x_n - a_n)^2} < \delta \right\} \end{aligned}$$

为$\mathbf{a}$ 的δ 邻域，$\mathbf{a}$ 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径。

特别地：$O(\mathbf{a}, \delta)$ 在$\mathbb{R}$ 上是开区间，在$\mathbb{R}^2$ 上是开圆盘，在$\mathbb{R}^3$ 上是开球。

定义3: 设$\{\mathbf{x}_k\}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的一个点列。若存在$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$，

$$\forall \epsilon > 0, \exists K > 0, \forall k > K, \text{有 } |\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| < \epsilon,$$

则称$\mathbf{x}_k$ 收敛于$\mathbf{a}$（或称$\mathbf{a}$ 为点列$\{\mathbf{x}_k\}$ 的极限），记为$\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$。点列若不收敛就称其发散。

记$\mathbf{x}_k=(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k),\mathbf{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则对$\forall j$,
$|x_j^k-a_j|\le|\mathbf{x}_k-\mathbf{a}|=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i^k-a_i)^2}\le\sum_{i=1}^n|x_i^k-a_i|$。故有

定理1: $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{x}_k=\mathbf{a}\iff\forall j=1,2,\cdots,n,\ \lim\limits_{n\to\infty}x_j^k=a_j$。

记$\mathbf{x}_k=(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k),\mathbf{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则对$\forall j$, $|x_j^k-a_j|\le|\mathbf{x}_k-\mathbf{a}|=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i^k-a_i)^2}\le\sum_{i=1}^n|x_i^k-a_i|$。故有

定理1: $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{x}_k=\mathbf{a}\iff\forall j=1,2,\cdots,n,\lim\limits_{n\to\infty}x_j^k=a_j$。

由该定理，我们可以利用对点列分量的讨论，将一维的结论平行推广到高维上去。

记$\mathbf{x}_k = (x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k), \mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，则对$\forall j$,
$|x_j^k - a_j| \le |\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^k - a_i)^2} \le \sum_{i=1}^n |x_i^k - a_i|$。故有

定理1: $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a} \iff \forall j = 1, 2, \cdots, n, \lim\limits_{n\to\infty} x_j^k = a_j$。

由该定理，我们可以利用对点列分量的讨论，将一维的结论平行推广到高维上去。

在$\mathbb{R}$ 中，数列极限具有唯一性、有界性、保序性、夹逼性及四则运算法则。在高维中，由于两点之间不存在大小关系，故保序性与夹逼性失效，其它三个性质仍成立。对有界性，有

定义4:设S 是$\mathbb{R}^n$ 上的点集。若$\exists M > 0, \forall \mathbf{x} \in S$，有$\|\mathbf{x}\| \le M$，则称$S$ 为有界集。

二、点的分类及性质

设S 为$\mathbb{R}^n$ 上的点集，记$S^c = \mathbb{R}^n \backslash S$。按照点与集合$S$ 的位置关系可将$\mathbb{R}^n$ 中的点分为三类。

(1) 内点：设$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，若$\exists O(\mathbf{x}, \delta)$, s.t. $O(\mathbf{x}, \delta) \subseteq S$，则称$\mathbf{x}$为$S$ 的内点。S 的内点全体记为S°。

二、点的分类及性质

设S 为$\mathbb{R}^n$ 上的点集，记$S^c = \mathbb{R}^n \backslash S$。按照点与集合$S$ 的位置关系可将$\mathbb{R}^n$ 中的点分为三类。

(1) 内点：设$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，若$\exists O(\mathbf{x}, \delta)$, s.t. $O(\mathbf{x}, \delta) \subseteq S$，则称$\mathbf{x}$ 为S 的内点。S 的内点全体记为S°。

(2) 外点：设$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，若$\exists O(\mathbf{x}, \delta)$, s.t. $O(\mathbf{x}, \delta) \subseteq S^c$（或$O(\mathbf{x}, \delta) \cap S = \emptyset$），则称$\mathbf{x}$ 为S 的外点。

二、点的分类及性质

设S 为$\mathbb{R}^n$ 上的点集，记$S^c = \mathbb{R}^n \backslash S$。按照点与集合$S$ 的位置关系可将$\mathbb{R}^n$ 中的点分为三类。

(1) 内点：设$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，若$\exists O(\mathbf{x}, \delta)$, s.t. $O(\mathbf{x}, \delta) \subseteq S$，则称$\mathbf{x}$ 为S 的内点。S 的内点全体记为S°。

(2) 外点：设$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，若$\exists O(\mathbf{x}, \delta)$, s.t. $O(\mathbf{x}, \delta) \subseteq S^c$ （或$O(\mathbf{x}, \delta) \cap S = \emptyset$），则称$\mathbf{x}$ 为S 的外点。

(3) 边界点：设$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，若$\forall O(\mathbf{x}, \delta)$, 有$O(\mathbf{x}, \delta) \cap S \neq \emptyset$ 且$O(\mathbf{x}, \delta) \cap S^c \neq \emptyset$，则称$\mathbf{x}$ 为S 的边界点。S 的全体边界点组成的集合称为S 的边界，记为∂S。

二、点的分类及性质

设S 为$\mathbb{R}^n$ 上的点集，记$S^c = \mathbb{R}^n \backslash S$。按照点与集合$S$ 的位置关系可将$\mathbb{R}^n$ 中的点分为三类。

(1) 内点：设$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，若$\exists O(\mathbf{x}, \delta)$, s.t. $O(\mathbf{x}, \delta) \subseteq S$，则称$\mathbf{x}$ 为S 的内点。S 的内点全体记为S°。

(2) 外点：设$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，若$\exists O(\mathbf{x}, \delta)$, s.t. $O(\mathbf{x}, \delta) \subseteq S^c$ （或$O(\mathbf{x}, \delta) \cap S = \emptyset$），则称$\mathbf{x}$ 为S 的外点。

(3) 边界点：设$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，若$\forall O(\mathbf{x}, \delta)$, 有$O(\mathbf{x}, \delta) \cap S \neq \emptyset$ 且$O(\mathbf{x}, \delta) \cap S^c \neq \emptyset$，则称$\mathbf{x}$ 为S 的边界点。S 的全体边界点组成的集合称为S 的边界，记为∂S。

内点$\in S$，外点$\notin S$，边界点可能$\in S$、可能$\notin S$。

(4) 聚点：设$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，$\forall \delta > 0$，$O(\mathbf{x}, \delta)$ 都含S 中无穷个点，则称$\mathbf{x}$ 是S 的聚点。S 的全体聚点组成的集合称为S 的导集，记为S'。

设$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，则$\mathbf{x}$ 是S 的聚点

$\Longleftrightarrow$ (1) $\forall O(\mathbf{x}, \delta)$ 含S 的无穷个点；

$\Longleftrightarrow$ (2) $\forall O(\mathbf{x}, \delta) \backslash \{\mathbf{x}\}$ 总含有S 的点（即$\forall O(\mathbf{x}, \delta) \backslash \{\mathbf{x}\} \cap S \neq \emptyset$）；

$\Longleftrightarrow$ (3) $\exists \{\mathbf{x}_k\} \subseteq S, \mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}$ 满足 $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$。

(4) 聚点：设$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，$\forall \delta > 0$，$O(\mathbf{x}, \delta)$ 都含S 中无穷个点，则称$\mathbf{x}$ 是S 的聚点。S 的全体聚点组成的集合称为S 的导集，记为S'。

设$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，则$\mathbf{x}$ 是S 的聚点

$\Longleftrightarrow$ (1) $\forall O(\mathbf{x}, \delta)$ 含S 的无穷个点；

$\Longleftrightarrow$ (2) $\forall O(\mathbf{x}, \delta) \backslash \{\mathbf{x}\}$ 总含有S 的点（即$\forall O(\mathbf{x}, \delta) \backslash \{\mathbf{x}\} \cap S \neq \emptyset$）；

$\Longleftrightarrow$ (3) $\exists \{\mathbf{x}_k\} \subseteq S, \mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}$ 满足 $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$。

例1：证明$(S')' \subseteq S'$。

(5) 孤立点：若$\mathbf{x} \in S$，$\exists \delta > 0$, 使得$O(\mathbf{x}, \delta) \cap S = \{\mathbf{x}\}$（即$\mathbf{x}$的$\delta$ 领域中只有$\mathbf{x}$ 点属于S），则称$\mathbf{x}$ 为S 的孤立点。

(5) 孤立点：若$\mathbf{x} \in S$，$\exists\delta > 0$, 使得$O(\mathbf{x}, \delta) \cap S = \{\mathbf{x}\}$（即$\mathbf{x}$的$\delta$ 领域中只有$\mathbf{x}$ 点属于S），则称$\mathbf{x}$ 为S 的孤立点。

内点一定是聚点；外点一定不是聚点；边界点可能是聚点，可能是孤立点；孤立点一定不是聚点。

(5) 孤立点：若$\mathbf{x} \in S$，$\exists \delta > 0$, 使得$O(\mathbf{x}, \delta) \cap S = \{\mathbf{x}\}$（即$\mathbf{x}$的$\delta$ 领域中只有$\mathbf{x}$ 点属于S），则称$\mathbf{x}$ 为S 的孤立点。

内点一定是聚点；外点一定不是聚点；边界点可能是聚点，可能是孤立点；孤立点一定不是聚点。

三、开集与闭集

定义5:设$S \subseteq \mathbb{R}^n$，若$S^\circ = S$（即S 中每一点都为内点），则称S 为开集。

(5) 孤立点：若$\mathbf{x} \in S$，$\exists \delta > 0$, 使得$O(\mathbf{x}, \delta) \cap S = \{\mathbf{x}\}$（即$\mathbf{x}$的$\delta$ 领域中只有$\mathbf{x}$ 点属于S），则称$\mathbf{x}$ 为S 的孤立点。

内点一定是聚点；外点一定不是聚点；边界点可能是聚点，可能是孤立点；孤立点一定不是聚点。

三、开集与闭集

定义5:设$S \subseteq \mathbb{R}^n$，若$S^\circ = S$（即S 中每一点都为内点），则称S 为开集。

开集具有性质：(1) 任意多个开集的的并是开集；(2) 有限多个开集的交是开集。

(5) 孤立点：若$\mathbf{x} \in S$，$\exists\delta > 0$, 使得$O(\mathbf{x},\delta) \cap S = \{\mathbf{x}\}$（即$\mathbf{x}$的$\delta$ 领域中只有$\mathbf{x}$ 点属于S），则称$\mathbf{x}$ 为S 的孤立点。

内点一定是聚点；外点一定不是聚点；边界点可能是聚点，可能是孤立点；孤立点一定不是聚点。

三、开集与闭集

定义5:设$S \subseteq \mathbb{R}^n$，若$S^\circ = S$（即S 中每一点都为内点），则称S 为开集。

开集具有性质：(1) 任意多个开集的的并是开集；(2) 有限多个开集的交是开集。

注：任意多个开集的交未必是开集。e.g. $\cap_{n=1}^{\infty}(-1/n, 1/n)$ $= \{0\}$。

定义6:若$S' \subseteq S$（S 的任一聚点均属于S），称S 为闭集。

定义6:若$S' \subseteq S$（S 的任一聚点均属于S），称S 为闭集。

记$\overline{S} = S \cup S'$，则$\overline{S}$ 为闭集。S 是闭集 $\Longleftrightarrow$ $S = \overline{S}$。

定义6:若$S' \subseteq S$（S 的任一聚点均属于S），称S 为闭集。

记$\overline{S} = S \cup S'$，则$\overline{S}$ 为闭集。S 是闭集 $\iff$ $S = \overline{S}$。

例2：设$S = \{(x, y)|1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$，求$S^\circ, \partial S, S', \overline{S}$。

定义6:若$S' \subseteq S$（S 的任一聚点均属于S），称S 为闭集。

记$\overline{S} = S \cup S'$，则$\overline{S}$ 为闭集。S 是闭集 $\Longleftrightarrow$ $S = \overline{S}$。

例2：设$S = \{(x, y)|1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$，求$S^\circ, \partial S, S', \overline{S}$。

定理2：在$\mathbb{R}^n$ 中，S 为闭集 $\Longleftrightarrow$ S^c 为开集。

定义6:若$S' \subseteq S$（S 的任一聚点均属于S），称S 为闭集。

记$\overline{S} = S \cup S'$，则$\overline{S}$ 为闭集。S 是闭集 $\Longleftrightarrow$ $S = \overline{S}$。

例2：设$S = \{(x, y)|1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$，求$S^\circ, \partial S, S', \overline{S}$。

定理2：在$\mathbb{R}^n$ 中，S 为闭集 $\Longleftrightarrow$ S^c 为开集。

定理3 (De Morgan 公式)：设$\{S_\alpha\}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中一组（有限或无限多个）子集，则

$$\left(\bigcup_\alpha S_\alpha\right)^c = \bigcap_\alpha S_\alpha^c; \quad \left(\bigcap_\alpha S_\alpha\right)^c = \bigcup_\alpha S_\alpha^c.$$

定义6:若$S' \subseteq S$（S 的任一聚点均属于S），称S 为闭集。

记$\overline{S} = S \cup S'$，则$\overline{S}$ 为闭集。S 是闭集 $\Longleftrightarrow$ $S = \overline{S}$。

例2：设$S = \{(x, y)|1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$，求$S^\circ, \partial S, S', \overline{S}$。

定理2：在$\mathbb{R}^n$ 中，S 为闭集 $\Longleftrightarrow$ S^c 为开集。

定理3 (De Morgan 公式)：设$\{S_\alpha\}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中一组（有限或无限多个）子集，则

$$\left(\bigcup_\alpha S_\alpha\right)^c = \bigcap_\alpha S_\alpha^c; \quad \left(\bigcap_\alpha S_\alpha\right)^c = \bigcup_\alpha S_\alpha^c.$$

注：无限多闭集的并未必是闭集。e.g. $\cup_{n=2}^\infty [1/n, 1 - 1/n]$。

作业： 课本P_{119} 2, 4, 5, 8, 9。

补充1：证明：$S = S' \iff S$ 闭，且S 无孤立点。

补充2：若E, F 分别为$\mathbb{R}$ 中的开集与闭集，则E, F 是否仍为$\mathbb{R}^2$ 中的开集和闭集？

四、Euclid 空间的基本定理

在直线上,有七大基本定理，且这些定理彼此等价。

确界存在定理$\Longrightarrow$ 单调有界收敛定理$\Longrightarrow$ 闭区间套定理$\Longrightarrow$ 聚点原理$\Longrightarrow$ 致密性定理$\Longrightarrow$ Cauchy 收敛定理$\Longrightarrow$ 有限覆盖定理

四、Euclid 空间的基本定理

在直线上,有七大基本定理，且这些定理彼此等价。

确界存在定理$\Longrightarrow$ 单调有界收敛定理$\Longrightarrow$ 闭区间套定理$\Longrightarrow$ 聚点原理$\Longrightarrow$ 致密性定理$\Longrightarrow$ Cauchy 收敛定理$\Longrightarrow$ 有限覆盖定理

由于“确界存在定理”与“单调有界收敛定理”涉及点的大小关系而在高维空间中不再有意义，其余结论在高维中仍成立。

四、Euclid 空间的基本定理

在直线上,有七大基本定理，且这些定理彼此等价。

确界存在定理$\Longrightarrow$ 单调有界收敛定理$\Longrightarrow$ 闭区间套定理$\Longrightarrow$ 聚点原理$\Longrightarrow$ 致密性定理$\Longrightarrow$ Cauchy 收敛定理$\Longrightarrow$ 有限覆盖定理

由于“确界存在定理”与“单调有界收敛定理”涉及点的大小关系而在高维空间中不再有意义，其余结论在高维中仍成立。

定理3（Cantor 闭区域套定理）：设$\{S_k\}$ 是$\mathbb{R}^n$ 上的非空闭集序列，满足$S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_k \supseteq \cdots$ 及 $\lim\limits_{k\to\infty} diam\ S_k = 0$，则存在唯一点属于$\cap_{k=1}^{\infty} S_k$。这里$diam\ S_k = \sup\{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| : \mathbf{x},\mathbf{y} \in S\}$。

例3：证明：三角形的三条中线交于一点。

例3：证明：三角形的三条中线交于一点。

定理4（聚点原理）：$\mathbb{R}^n$ 上有界无限点集必存在聚点。

例3：证明：三角形的三条中线交于一点。

定理4（聚点原理）：$\mathbb{R}^n$ 上有界无限点集必存在聚点。

定理5（Bolzano-Weierstrass 原理）：$\mathbb{R}^n$ 上的有界点列$\{\mathbf{x}_k\}$必有收敛子列。

例3：证明：三角形的三条中线交于一点。

定理4（聚点原理）：$\mathbb{R}^n$ 上有界无限点集必存在聚点。

定理5（Bolzano-Weierstrass 原理）：$\mathbb{R}^n$ 上的有界点列$\{\mathbf{x}_k\}$必有收敛子列。

定义7：若$\mathbb{R}^n$ 上的点列$\{\mathbf{x}_k\}$满足：$\forall\epsilon > 0, \exists K > 0, \forall k, \ell > K$，成立$|\mathbf{x}_\ell - \mathbf{x}_k| < \epsilon$，则称$\{\mathbf{x}_k\}$为基本点列（或Cauchy 点列）。

为了推广一维的有限覆盖定理，我们需要引入一个重要的概念——紧集。

定义8：设S 为$\mathbb{R}^n$ 的点集，如果$\mathbb{R}^n$ 中一组开集$\{U_\alpha\}$ 满足$\cup_\alpha U_\alpha \supseteq S$，则称$\{U_\alpha\}$ 为S 的一个开覆盖。

如果S 的任意一个开覆盖$\{U_\alpha\}$ 中总存在一个有限子覆盖，即存在$\{U_\alpha\}$ 中的有限个开集$\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{p}$，满足$\cup_{i=1}^{p} U_{\alpha_i} \supseteq S$，则称$S$ 为紧集。

定理（Heine-Borel 定理、紧集定理）：S 为$\mathbb{R}^n$ 的点集，则S 是紧集 $\iff$ S 是有界闭集。

注：在$\mathbb{R}$ 上，有限闭区间为有界闭集（反之不成立，e.g. $[0,1]\cup[2,3]$），故为紧集，故有限覆盖定理成立。

作业：课本P_{120} $11, 12, 13, 15$。

§2 多元连续函数

一、多元函数极限

圆柱体体积V 和底面半径r及高h 之间关系：$V=\pi r^2 h$；

平行四边形面积A 与它相邻两边长x,y 及夹角θ 决定：$S=xy\sin\theta$。

它们表示因变量随着多个自变量的变化而相应变化的规律，这是一元函数的推广，即多元函数。

§2 多元连续函数

一、多元函数极限

圆柱体体积V 和底面半径r及高h 之间关系：$V = \pi r^2 h$；

平行四边形面积A 与它相邻两边长x, y 及夹角θ 决定：$S = xy \sin\theta$。

它们表示因变量随着多个自变量的变化而相应变化的规律，这是一元函数的推广，即多元函数。

定义1：设$D \subseteq \mathbb{R}^n$，D 到$\mathbb{R}$ 的映射$f : D \to \mathbb{R}(x \mapsto z)$ 称为n元函数，记为$z = f(\mathbf{x})$。

§2 多元连续函数

一、多元函数极限

圆柱体体积V 和底面半径r及高h 之间关系：$V = \pi r^2 h$;

平行四边形面积A 与它相邻两边长x, y 及夹角θ 决定：$S = xy\sin\theta$。

它们表示因变量随着多个自变量的变化而相应变化的规律，这是一元函数的推广，即多元函数。

定义1：设$D \subseteq \mathbb{R}^n$，D 到$\mathbb{R}$ 的映射$f : D \to \mathbb{R}(x \mapsto z)$ 称为n元函数，记为$z = f(\mathbf{x})$。

D 称为定义域；
$f(D) = \{z \in \mathbb{R} | z = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D\}$ 称为f 的值域；
$\Gamma = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^{n+1} | z = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D\}$ 称为f 的图像。

例1：$z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ 是一个二元函数，其定义域为$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x^2/a^2+y^2/b^2\leq 1\right\}$。

例1：$z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ 是一个二元函数，其定义域为$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2/a^2+y^2/b^2\le 1\right\}$。

下面将一元函数的极限定义推广到多元函数。

定义2：设D 是$\mathbb{R}^n$ 上的开集，$\{\mathbf{x_0}\}=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in D$ 为一定点，$z=f(\mathbf{x})$ 是定义在$D\backslash\{\mathbf{x}_0\}$ 上的n 元函数，A 是一实数。

若$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall\mathbf{x}\in O(\mathbf{x}_0,\delta)\backslash\{\mathbf{x}_0\}$ 时，成立$|f(\mathbf{x})-A|<\epsilon$，

则称当$\mathbf{x}$ 趋于$\mathbf{x}_0$ 时f 收敛，并称A 为$f(\mathbf{x})$ 当$\mathbf{x}$ 趋于$\mathbf{x}_0$ 时的(n 重)极限，记为$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}f(\mathbf{x})=A$ （或$f(\mathbf{x})\to A(\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0)$）。

例1：$z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ 是一个二元函数，其定义域为$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x^2/a^2+y^2/b^2\leq 1\right\}$。

下面将一元函数的极限定义推广到多元函数。

定义2：设D 是$\mathbb{R}^n$ 上的开集，$\{\mathbf{x_0}\}=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in D$ 为一定点，$z=f(\mathbf{x})$ 是定义在$D\backslash\{\mathbf{x}_0\}$ 上的n 元函数，A 是一实数。

若$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall\mathbf{x}\in O(\mathbf{x}_0,\delta)\backslash\{\mathbf{x}_0\}$ 时，成立$|f(\mathbf{x})-A|<\epsilon$，

则称当$\mathbf{x}$ 趋于$\mathbf{x}_0$ 时f 收敛，并称A 为$f(\mathbf{x})$ 当$\mathbf{x}$ 趋于$\mathbf{x}_0$ 时的(n 重)极限，记为$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}f(\mathbf{x})=A$ （或$f(\mathbf{x})\to A(\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0)$）。

注：在上面定义中，$\mathbf{x}\in O(\mathbf{x}_0,\delta)\backslash\{\mathbf{x}_0\}$ 也可用条件“$|x_1-x_1^0|<\delta,|x_2-x_2^0|<\delta,\cdots,|x_n-x_n^0|<\delta,\mathbf{x}\neq\mathbf{x}_0$” 替代。

例2：设$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{y}{x^2+y^2}$，证明$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$。

例2：设$f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{y}{x^2+y^2}$，证明$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
$=0$。

例3：求$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$。

例2：设$f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{y}{x^2+y^2}$，证明$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$。

例3：求$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$。

对一元函数而言，只要$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$存在且相等，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在。对多元函数而言，要求$\mathbf{x}$以任何方式趋于$\mathbf{x}_0$时，函数趋向于同一极限。故若自变量以两种方式趋于某一定点时，函数的极限不同或不存在，则函数在该点的极限不存在。

例2：设$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{y}{x^2+y^2}$，证明$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$。

例3：求$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$。

对一元函数而言，只要$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$存在且相等，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在。对多元函数而言，要求$\mathbf{x}$以任何方式趋于$\mathbf{x}_0$时，函数趋向于同一极限。故若自变量以两种方式趋于某一定点时，函数的极限不同或不存在，则函数在该点的极限不存在。

例4：设$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)$，求$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

例5：设$f(x,y)=\dfrac{(y^2-x)^2}{y^4+x^2},(x,y)\neq(0,0)$，求$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$。

例5：设$f(x,y)=\dfrac{(y^2-x)^2}{y^4+x^2},(x,y)\neq(0,0)$，求$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$。

一元函数的极限性质，如唯一性、局部有界性、局部保序性、局部夹逼性及极限的四则运算法则，对二元函数依然成立。

例5：设$f(x,y)=\dfrac{(y^2-x)^2}{y^4+x^2},(x,y)\neq(0,0)$，求$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$。

一元函数的极限性质，如唯一性、局部有界性、局部保序性、局部夹逼性及极限的四则运算法则，对二元函数依然成立。

二、累次极限

定义3：设D 是$\mathbb{R}^2$ 上的开集，$(x_0,y_0)\in D$ 为一定点，$z=f(x,y)$ 为定义在$D\backslash\{(x_0,y_0)\}$ 上的二元函数。如果对每个固定的$y\neq y_0$，极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在，且极限

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

存在，称此极限值为$f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 先对x 后对y 的二次极限。

同理，可定义先对y 后对x 的二次极限$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$。

例6：$f(x,y)=\begin{cases}\sin(1/x)\sin(1/y), & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$。
该题是二次极限与二重极限均不存在之例。

例6：$f(x,y)=\begin{cases}\sin(1/x)\sin(1/y), & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$。

该题是二次极限与二重极限均不存在之例。

例7：$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin(1/x)\cos(1/y), & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$。

该题是二重极限存在，但两个二次极限均不存在之例。

例6：$f(x,y)=\begin{cases}\sin(1/x)\sin(1/y), & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$。

该题是二次极限与二重极限均不存在之例。

例7：$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin(1/x)\cos(1/y), & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$。

该题是二重极限存在，但两个二次极限均不存在之例。

例8：$f(x,y)=\begin{cases}y\sin(1/x), & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$。

该题是二重极限存在，两个二次极限中有一个不存在之例。

例6：$f(x,y)=\begin{cases}\sin(1/x)\sin(1/y), & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$。

该题是二次极限与二重极限均不存在之例。

例7：$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin(1/x)\cos(1/y), & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$。

该题是二重极限存在，但两个二次极限均不存在之例。

例8：$f(x,y)=\begin{cases}y\sin(1/x), & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$。

该题是二重极限存在，两个二次极限中有一个不存在之例。

例9：$f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$。

该题是二次极限存在且相等，但二重极限不存在之例。

在何种情况下，两个二次极限可以交换次序？

定理1：若$f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 点二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在。且当$x\neq x_0$ 时极限 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\phi(x)$ 存在，则

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\phi(x)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

在何种情况下，两个二次极限可以交换次序？

定理1：若$f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 点二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在。且当$x \neq x_0$ 时极限 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\phi(x)$ 存在，则

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\phi(x)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

同理：在二重极限存在的情况下，若$y \neq y_0, x \to x_0$ 时极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\psi(y)$ 存在，则

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\psi(y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

故若函数$f(x,y)$ 的二重极限及两个二次极限都存在，则三者必相等，即

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

此时极限运算可以交换次序。

作业： 课本P_{128} $3,4(2-4),8(2)(3)$。

故若函数$f(x,y)$ 的二重极限及两个二次极限都存在，则三者必相等，即

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

此时极限运算可以交换次序。

作业： 课本P_{128} $3,4(2-4),8(2)(3)$。

三、多元函数的连续性

定义4： 设D 是$\mathbb{R}^n$ 上的开集，$z=f(\mathbf{x})$ 定义域为D，$\mathbf{x}_0\in D$ 为一定点。如果$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}=f(\mathbf{x}_0)$，则称函数$f$ 在$\mathbf{x}_0$ 处连续。即

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall\mathbf{x}\in O(\mathbf{x}_0,\delta)\text{ 时，成立 }|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)|<\epsilon.$$

如果函数f 在D 上每一点均连续，则称f 在D 上连续，或称f 是D 上的连续函数。

例10：证明：函数$f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$在$\mathbb{R}^2$上连续。

一元连续函数和、差、积、商及复合函数性质可平行推广到多元连续函数。

例10：证明：函数$f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$在$\mathbb{R}^2$上连续。

一元连续函数和、差、积、商及复合函数性质可平行推广到多元连续函数。

例11：计算$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

例10：证明：函数$f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$在$\mathbb{R}^2$上连续。

一元连续函数和、差、积、商及复合函数性质可平行推广到多元连续函数。

例11：计算$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

例12：计算极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin[(y+1)\sqrt{x^2+y^2}]}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

例10：证明：函数$f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$在$\mathbb{R}^2$上连续。

一元连续函数和、差、积、商及复合函数性质可平行推广到多元连续函数。

例11：计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

例12：计算极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin[(y+1)\sqrt{x^2+y^2}]}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

例13：计算极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(x^2+e^{y^2})}{x^2+y^2}$。

四、全面连续与单变量连续之间的关系

多元函数连续$\Longrightarrow$对每个变量都连续。即

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x^i\to x_0^i} f(x_0^1,\cdots,x^i,\cdots,x_0^n) = f(x_0^1,\cdots,x_0^i,\cdots,x_0^n)。$$

四、全面连续与单变量连续之间的关系

多元函数连续$\Longrightarrow$ 对每个变量都连续。即

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x^i\to x_0^i} f(x_0^1,\cdots,x^i,\cdots,x_0^n) = f(x_0^1,\cdots,x_0^i,\cdots,x_0^n)。$$

对每个变量连续$\not\Longrightarrow$ 多元函数连续

$$\text{e.g. } f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

只有对单变量连续补充条件，才能保证对多元函数连续。

条件1：若$f(x,y)$ 分别是单变量x 及y 的连续函数，又对其中一个变量单调，则$f(x,y)$ 是二元连续函数。

条件2：若$f(x,y)$ 分别是单变量x 及y 的连续函数，又对某中的一个变量满足Lipschitz 条件，则$f(x,y)$ 是二元连续函数。此处对变量y 满足Lipschitz 条件是指：$\exists L>0,\forall x,\forall y_1,y_2$，有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|.$$

开放思考题：还可以加何种条件，保证多元函数的连续性？

作业： 课本P_{129} $7(2)(4)(6-8),9-11$。

补充：讨论$f(x,y)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Q}^c\\ y, & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ 在$\mathbb{R}^2$ 上的连续性。

五、向量值函数

定义5：设D 是$\mathbb{R}^n$ 上的点集，D 到$\mathbb{R}^m$ 的映射$f: D \to \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto \mathbf{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_m)$$

称为n 元m 维向量值函数，记为$\mathbf{z} = f(\mathbf{x})$。$D$ 称为f 的定义域，$f(D) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m | \mathbf{z} = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D\}$ 称为f 的值域。

五、向量值函数

定义5：设D 是$\mathbb{R}^n$ 上的点集，D 到$\mathbb{R}^m$ 的映射$f : D \to \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto \mathbf{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_m)$$

称为n 元m 维向量值函数，记为$\mathbf{z} = f(\mathbf{x})$。$D$ 称为f 的定义域，$f(D) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m | \mathbf{z} = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D\}$ 称为f 的值域。

显然，多元函数是$m = 1$ 的特殊情形。

五、向量值函数

定义5：设D 是$\mathbb{R}^n$ 上的点集，D 到$\mathbb{R}^m$ 的映射$f : D \to \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto \mathbf{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_m)$$

称为n 元m 维向量值函数，记为$\mathbf{z} = f(\mathbf{x})$。$D$ 称为f 的定义域，$f(D) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m | \mathbf{z} = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D\}$ 称为f 的值域。

显然，多元函数是$m = 1$ 的特殊情形。

每个分量$z_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 都是$\mathbf{x}$ 的函数$z_i = f_i(\mathbf{x})$，它称为f 的第i 个坐标函数（或分量）函数，故f 可表达成分量形式

$$\begin{cases} z_1 = f_1(\mathbf{x}) \\ z_2 = f_2(\mathbf{x}) \\ \quad \cdots \\ z_m = f_m(\mathbf{x}) \end{cases}$$

，也即 f 可表示成 $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$

例14：设映射$f:[0,+\infty)\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3((r,\theta)|\to(x,y,z))$。

具体分量形式

$$\begin{cases} x=x(r,\theta)=r\cos\theta \\ y=y(r,\theta)=r\sin\theta \\ z=r \end{cases},r\in[0,+\infty),\theta\in[0,2\pi]$$

例14：设映射$f:[0,+\infty)\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3((r,\theta)|\to(x,y,z))$。

具体分量形式

$$\begin{cases} x=x(r,\theta)=r\cos\theta \\ y=y(r,\theta)=r\sin\theta \quad ,r\in[0,+\infty),\theta\in[0,2\pi] \\ z=r \end{cases}$$

向量值函数的极限及连续均可仿照多元函数定义，且连续性可转化成坐标函数的连续性进行研究。

作业： 课本P_{130} 14。

§3 连续函数的性质

一、紧集上的连续映射

拟将一元连续函数闭区间上性质（有界性定理、最值定理、零点存在定理、介值定理、Cantor定理）推广到多元连续函数。

§3 连续函数的性质

一、紧集上的连续映射

拟将一元连续函数闭区间上性质（有界性定理、最值定理、零点存在定理、介值定理、Cantor定理）推广到多元连续函数。

一元：定义开区间上的连续性——》单侧极限——》单侧连续——》闭区间上连续。高维空间也作类似处理。

§3 连续函数的性质

一、紧集上的连续映射

拟将一元连续函数闭区间上性质（有界性定理、最值定理、零点存在定理、介值定理、Cantor定理）推广到多元连续函数。

一元：定义开区间上的连续性——》单侧极限——》单侧连续——》闭区间上连续。高维空间也作类似处理。

定义1：设$K \subseteq \mathbb{R}^n, f : K \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数，$x_0 \in K$。若

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{x} \in O(\mathbf{x}_0, \delta) \cap K$，成立 $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \epsilon$，

则称f 在点$\mathbf{x}_0$ 点连续。若f 在K 上每一点连续，就称f 在K 上连续。

注：若$\mathbf{x}_0 \in K^\circ$，则$\exists \delta' > 0, s.t. O(\mathbf{x}_0, \delta') \subseteq K$。
取$\delta'' = \min\{\delta, \delta'\}$，则$\forall \mathbf{x} \in O(\mathbf{x}_0, \delta'')$，有$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \epsilon$。

注：若$\mathbf{x}_0 \in K^\circ$，则$\exists \delta' > 0, s.t. O(\mathbf{x}_0, \delta') \subseteq K$。取$\delta'' = \min\{\delta, \delta'\}$，则$\forall \mathbf{x} \in O(\mathbf{x}_0, \delta'')$，有$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \epsilon$。

若$\mathbf{x}_0 \in \partial K$，只要求函数在$\mathbf{x}_0$的$\delta$领域内属于$K$的那些点成立$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \epsilon$。例如：对$[a, b]$左端点$a$，$\forall 0 < \delta < b - a$，$x \in O(a, \delta) \cap [a, b] = [a, a + \delta)$。

注：若$\mathbf{x}_0 \in K^\circ$，则$\exists \delta' > 0, s.t. O(\mathbf{x}_0, \delta') \subseteq K$。取$\delta'' = \min\{\delta, \delta'\}$，则$\forall \mathbf{x} \in O(\mathbf{x}_0, \delta'')$，有$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \epsilon$。

若$\mathbf{x}_0 \in \partial K$，只要求函数在$\mathbf{x}_0$的$\delta$领域内属于$K$的那些点成立$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \epsilon$。例如：对$[a, b]$左端点$a$，$\forall 0 < \delta < b - a$，$x \in O(a, \delta) \cap [a, b] = [a, a + \delta)$。

一维闭区间“推广到高维”即为有界区集（即紧集），以下讨论紧集上的连续映射的性质。

注：若$\mathbf{x}_0 \in K^\circ$，则$\exists \delta' > 0, s.t. O(\mathbf{x}_0, \delta') \subseteq K$。取$\delta'' = \min\{\delta, \delta'\}$，则$\forall \mathbf{x} \in O(\mathbf{x}_0, \delta'')$，有$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \epsilon$。

若$\mathbf{x}_0 \in \partial K$，只要求函数在$\mathbf{x}_0$的$\delta$领域内属于$K$的那些点成立$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \epsilon$。例如：对$[a, b]$左端点$a$，$\forall 0 < \delta < b - a$，$x \in O(a, \delta) \cap [a, b] = [a, a + \delta)$。

一维闭区间“推广到高维”即为有界区集（即紧集），以下讨论紧集上的连续映射的性质。

定理1：连续映射将紧集映成紧集。

注：若$\mathbf{x}_0 \in K^\circ$，则$\exists \delta' > 0, s.t. O(\mathbf{x}_0, \delta') \subseteq K$。取$\delta'' = \min\{\delta, \delta'\}$，则$\forall \mathbf{x} \in O(\mathbf{x}_0, \delta'')$，有$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \epsilon$。

若$\mathbf{x}_0 \in \partial K$，只要求函数在$\mathbf{x}_0$的$\delta$领域内属于$K$的那些点成立$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \epsilon$。例如：对$[a, b]$左端点$a$，$\forall 0 < \delta < b - a$，$x \in O(a, \delta) \cap [a, b] = [a, a + \delta)$。

一维闭区间“推广到高维”即为有界区集（即紧集），以下讨论紧集上的连续映射的性质。

定理1：连续映射将紧集映成紧集。

定理2：紧集上的连续函数必有界，且存在最大、最小值。

问题：是否有介值定理？

问题：是否有介值定理？

例：$K=\{0,1\}, f=I$，则f为连续函数，但f不满足介值性，为此后面引入连通性。

问题：是否有介值定理？

例：$K = \{0, 1\}, f = I$，则f 为连续函数，但f 不满足介值性，为此后面引入连通性。

注：事实上，定义在K 上的任意函数均为连续函数。

问题：是否有介值定理？

例：$K=\{0,1\}, f=I$，则f为连续函数，但f不满足介值性，为此后面引入连通性。

注：事实上，定义在K上的任意函数均为连续函数。

定义2：设$K\subseteq\mathbb{R}^n, f:K\to\mathbb{R}^m$为映射，若

$$\forall\epsilon, \exists\delta(\epsilon)>0, \forall\mathbf{x}', \mathbf{x}''\in K, |\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|<\delta,\ \text{有}\ |f(\mathbf{x}')-f(\mathbf{x}'')|<\epsilon,$$

则称f在K上一致连续。

问题：是否有介值定理？

例：$K=\{0,1\}, f=I$，则f为连续函数，但f不满足介值性，为此后面引入连通性。

注：事实上，定义在K上的任意函数均为连续函数。

定义2：设$K\subseteq\mathbb{R}^n, f:K\to\mathbb{R}^m$为映射，若

$$\forall\epsilon, \exists\delta(\epsilon)>0, \forall\mathbf{x}', \mathbf{x}''\in K, |\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|<\delta,\ \text{有}\ |f(\mathbf{x}')-f(\mathbf{x}'')|<\epsilon,$$

则称f在K上一致连续。

同$\mathbb{R}$上类似，一致连续必连续；连续未必一致连续。

定理3（Cantor 定理）：设$K\subseteq\mathbb{R}^n, f:K\to\mathbb{R}^m$为连续映射，则$f$在$K$上一致连续。

二、连通性上的连续映射

定义3：设$S \subseteq \mathbb{R}^n$，若连续映射$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ 的值域满足$\gamma[0,1] \subseteq S$，则称γ 为S 中的道路，$\gamma(0)$ 与$\gamma(1)$ 分别称为道路的起点和终点。

二、连通性上的连续映射

定义3：设$S \subseteq \mathbb{R}^n$，若连续映射$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ 的值域满足$\gamma[0, 1] \subseteq S$，则称γ 为S 中的道路，$\gamma(0)$ 与$\gamma(1)$ 分别称为道路的起点和终点。

若S 中的任意两点之间都存在S 中以x 为起点，y 为终点的道路，则称S 为（道路）连通，或称S 为连通集。直观地说：意味着S 中任意两点都可以用全部位于S 中的曲线相联结。

二、连通性上的连续映射

定义3：设$S \subseteq \mathbb{R}^n$，若连续映射$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ 的值域满足$\gamma[0,1] \subseteq S$，则称γ 为S 中的道路，$\gamma(0)$ 与$\gamma(1)$ 分别称为道路的起点和终点。

若S 中的任意两点之间都存在S 中以x 为起点，y 为终点的道路，则称S 为（道路）连通，或称S 为连通集。直观地说：意味着S 中任意两点都可以用全部位于S 中的曲线相联结。

显然：$\mathbb{R}$ 上的连通子集为区间；$\mathbb{R}$ 上连通紧子集 $\Longleftrightarrow$ 有界闭区间。

定义4：连通的开集称为（开）区域。（开）区域的闭包称为闭区域。

定义4：连通的开集称为（开）区域。（开）区域的闭包称为闭区域。

注：有教材如下定义区域：设S是开集，若S中任意两点之间都可用一条完全含于S的有限折线相连接，则称S为开区域。

定义4：连通的开集称为（开）区域。（开）区域的闭包称为闭区域。

注：有教材如下定义区域：设S 是开集，若S 中任意两点之间都可用一条完全含于S 的有限折线相连接，则称S 为开区域。

例1：若$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$，则$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \middle| |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r \right\}$ 是开球，为区域；$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$ 为区域；$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \middle| |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \le r \right\}$ 为闭区域。

定义4：连通的开集称为（开）区域。（开）区域的闭包称为闭区域。

注：有教材如下定义区域：设S 是开集，若S 中任意两点之间都可用一条完全含于S 的有限折线相连接，则称S 为开区域。

例1：若$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$，则$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \middle| |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\right\}$ 是开球，为区域；$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$ 为区域；$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \middle| |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \le r\right\}$ 为闭区域。

定理4：连续映射将连通集映为连通集。

推论：连续函数将连通的紧集映成闭区间。从而得到

定理5（中间值定理）：设$K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是连通紧集，$f \in C(K)$，则$f(K)$ 可取到最小值m 及最大值M。即f 的值域是闭区间$[m, M]$。

作业： 课本P_{134} $2, 3, 5$。

补充：设f 是定义在$\mathbb{R}^n$ 上的函数，证明：若$f(x)$ 连续 $\Longleftrightarrow$ 开集的原像是开集。