Real Analysis

Hansong Huang

ECUST

At ECUST

2019.03

可测函数列的收敛性

可测函数列的收敛性

本节中，f与$f_n(n \geq 1)$是X上几乎处处有限的可测函数.

定义2.4.1

1. <u>一致收敛</u> 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$N \geq 1$, 如果

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ n \geq N, x \in X,$$

则称$\{f_n\}$在X上一致收敛于f. 记为$f_n \rightrightarrows f$

定义2.4.1

1. <u>一致收敛</u> 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$N \geq 1$, 如果

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ n \geq N, x \in X,$$

则称$\{f_n\}$在X上一致收敛于f. 记为$f_n \rightrightarrows f$

2. <u>几乎一致收敛</u> 对任意$\delta > 0$, 存在可测集$X_\delta \subseteq X$,使得$\mu(X - X_\delta) < \delta$, 且在$X_\delta$上$f_n \rightrightarrows f$, 则称$\{f_n\}$在$X$上几乎一致收敛于$f$. 记为

$f_n \to f$, a.u.

定义2.4.1

2. <u>几乎一致收敛</u> 对任意$\delta > 0$, 存在可测集$X_\delta \subseteq X$,使得$\mu(X - X_\delta) < \delta$, 且在$X_\delta$上$f_n \rightrightarrows f$, 则称$\{f_n\}$在$X$上几乎一致收敛于$f$. 记为

$f_n \to f$, a.u.

3. <u>依测度收敛</u> 对任意$\sigma > 0$, $\mu(\{|f_n - f| \geq \sigma\}) \to 0$, $n \to \infty$, 则称$\{f_n\}$在X上依测度μ 收敛于f. 记为:

$f_n \to f$, a.e. 的意义.

例: $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$,
考虑f_n的一致收敛性，几乎一致收敛性.

例:

(a) $f_n(x)=\frac{[nx]}{n}$,在$\mathbb{R}$上一致收敛于$f(x)=x$.
($[y]$表示y的整数不足近似值.)

(b) $p_n(x)=\chi_{[n,+\infty)}(x)$, 证明$\{p_n\}$点点收敛于$0$.

练习：下列条件等价:

(i)$\{f_n\}$ 依测度μ 收敛于f.

(ii)对任意$\varepsilon > 0$和$\delta > 0$, 存在$N \geq 1$使得

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \delta, \, n \geq N.$$

(iii)对任意$\varepsilon > 0$, 存在$N \geq 1$使得

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon, \, n \geq N.$$

练习：下列条件等价:

(i)$\{f_n\}$ 依测度μ 收敛于f.

(ii)对任意$\varepsilon > 0$和$\delta > 0$, 存在$N \geq 1$使得

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \delta,\ n \geq N.$$

(iii)对任意$\varepsilon > 0$, 存在$N \geq 1$使得

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon,\ n \geq N.$$

(i)$\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii).

三种收敛性的关系？

三种收敛性的关系？

定理2.4.2 (i) $\{f_n\}$ 几乎一致收敛于f 则$\{f_n\}$几乎处处收敛于f.

反之，如果$\mu X < \infty$, $\{f_n\}$几乎处处收敛于f，则$\{f_n\}$ 几乎一致收敛于f.

三种收敛性的关系？

定理2.4.2 (i) $\{f_n\}$ 几乎一致收敛于f 则$\{f_n\}$几乎处处收敛于f.

(Egorov定理) 反之，如果$\mu X < \infty$, $\{f_n\}$几乎处处收敛于f，则$\{f_n\}$ 几乎一致收敛于f.

(ii) (练习) 若$\{f_n\}$ 几乎一致收敛于f，则$\{f_n\}$ 依测度μ 收敛于f.

(Riesz定理) 若$\{f_n\}$ 依测度μ 收敛于f，则$\{f_n\}$有子列几乎一致收敛于f

定理2.4.2 (i) $\{f_n\}$ 几乎一致收敛于f 则$\{f_n\}$几乎处处收敛于f. (**Egorov定理**) 反之，如果$\mu X < \infty$, $\{f_n\}$几乎处处收敛于f，则$\{f_n\}$ 几乎一致收敛于f.

(ii) (练习) 若$\{f_n\}$ 几乎一致收敛于f，则$\{f_n\}$ 依测度μ 收敛于f. (**Riesz定理**) 若$\{f_n\}$ 依测度μ 收敛于f，则$\{f_n\}$有子列几乎一致收敛于f

(iii) 若$\{f_n\}$ 依测度μ 收敛于f，$\{f_n\}$有子列几乎处处收敛于f. 如果$\mu X < \infty$,$\{f_n\}$有几乎处处收敛于f，那么$\{f_n\}$ 依测度μ 收敛于f.

练习：(i) $\{f_n\}$ 几乎一致收敛于f 则$\{f_n\}$几乎处处收敛于f.

(Egorov定理) 如果$\mu X < \infty$, $\{f_n\}$几乎处处收敛于f，则$\{f_n\}$ 几乎一致收敛于f.

提示：设

$$\bigcup_m \{|f_n - f| < \frac{1}{k} : n \geq m\} = X.$$

(思考题)证明**Riesz定理**: 若$\{f_n\}$ 依测度μ 收敛于f，则$\{f_n\}$有子列几乎一致收敛于f

例3(p. 64). 一个依测度收敛于0的函数列，无处收敛（在每一点都发散）.

P. 85 ex 105. (推论)

$\mu X < \infty$, $\{f_n\}$有子列依测度收敛当且仅当$\{f_n\}$有子列几乎处处收敛.

P. 85 ex 105. (推论)

$\mu X < \infty$, $\{f_n\}$有子列依测度收敛当且仅当$\{f_n\}$有子列几乎处处收敛.

例4. $\{f_n\}$ 依测度收敛于f,$\{g_n\}$ 依测度收敛于g, $f_n \leq g_n$, a.e., 证明：$f \leq g$, a.e.

依测度基本列

秘笈：设$\mu X < \infty$,则下列等价：

i) $\{f_n\}$ 依测度收敛于f,

ii) $\{f_n\}$的任意子列都有子列几乎处处收敛于f.

例5. 设$\mu X < \infty$, $\{f_n\}$ 依测度收敛于f, $\{g_n\}$ 依测度收敛于g, 则$\{f_n g_n\}$ 依测度收敛于fg.

(a) 证明?

(b) 书上的证明. (Homework)

(c) 反例：条件$\mu X < \infty$ 是否可以去掉?

Lusin定理 设$X \subseteq \mathbb{R}^n$是一个可测集，f是X上几乎处处有限的可测函数.则对于任意$\varepsilon > 0$, 存在$\mathbb{R}^n$上的连续函数g使得$m\{f \neq g\} < \varepsilon$, 且

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |g(x)| \leq \sup_{x\in X} f(x).$$

Lusin定理

推论：$X=\mathbb{R}$, f是X上几乎处处有限的实值函数，则f Lebesgue可测当且仅当存在X上的连续函数列$\{g_k\}$, $g_k \to f$, a.e.

Lusin定理

推论：$X = \mathbb{R}$, f是X上几乎处处有限的实值函数，则f Lebesgue可测当且仅当存在X上的连续函数列$\{g_k\}$, $g_k \to f$, a.e.

证明推论.（ex110）

1. Lebesgue不可测集的存在性.

1. Lebesgue不可测集的存在性.

2. 一个Lebesgue零集，它不是Borel集.

(通过构造一个连续单调函数，它把零测集映为正测集)

3. 一个单调递增的非常数连续函数，导数几乎处处为零.

回顾：1. 什么是Lebesgue可测集？
如何描述它？是否$\mathbb{R}$的每个子集都是Lebesgue可测集？

2. 如何定义Lebesgue测度？

3. 一般的可测集如何定义？
一般测度如何定义？什么是测度空间？什么是σ代数?

4. 给出一般测度和σ代数的具体例子.

5. 给出连续函数不是可测函数的例子.

本次习题：page 82 ex 87, 设f^2与$\{f>0\}$可测，则f可测.

88. f是有限可测函数，$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$连续或单调，则$g\circ f(x)=g(f(x))$可测.

本次习题：page 82 ex 87, 设f^2与$\{f > 0\}$可测，则f可测.

88. f是有限可测函数，$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$连续或单调，则$g \circ f(x) = g(f(x))$可测.

问：$f \circ g$是否可测.

本次习题：page 82 ex 90, 设f 在$[a,b]$上可微，则f'可测.

ex. 93 设$f(x,y)$是$X\times[0,1]$上的函数. 对任意固定y, $f(x,y)$是关于x的可测函数; 且$f(x,y)$关于y连续, 则$\varphi(X)=\max_{y\in[0,1]}f(x,y)$可测.

ex 102.

$\mu X<+\infty$, f_n依测度收敛于f,证明：$|f_n|^p$依测度收敛于$|f|$

Thank you!