第五次作业

一．填空题：

1．某班级 12 名女生毕业后第一年的平均月薪分别为

1800	2000	3300	1850	1500	2900
4100	3000	5000	2300	3000	2500

则样本均值为 2770.8 ，样本中位数为 2700 ，众数为 3000 ，极差为 3500 ，样本方差为 1039299

2．设随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$，则 $P\{\xi \ge a\} = \underline{1 - F(a-0)}$，

$P\{\xi = a\} = \underline{F(a) - F(a-0)}$

3. 设随机变量ξ的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ Ax^2, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

则常数 $A = \underline{\quad 1 \quad}$，$P\{0.5 \le \xi \le 0.8\} = \underline{\quad 0.39 \quad}$

二． 选择题：

1. 描述样本数据“中心”的统计量有（A,B,C），描述样本数据“离散程度”的统计量有（D,E）

   A．样本均值　B. 中位数　C. 众数　D. 极差　E. 样本方差

2. 下列表述为错误的有（C）

   A．分布函数一定是有界函数　B. 分布函数一定是单调函数

   C．分布函数一定是连续函数　D. 不同的随机变量也可能有相同的分布函数

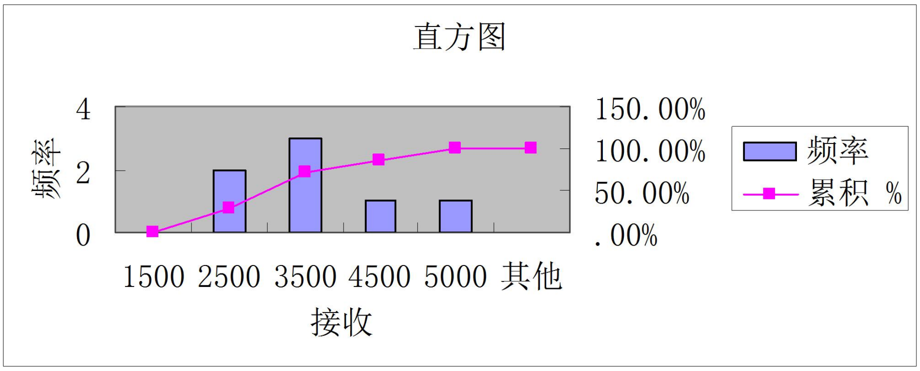
3．设概率 $\boldsymbol{P(X > x_1) \ge \beta}$，$\boldsymbol{P(X \le x_2) \ge \alpha}$，且 $\boldsymbol{x_1 < x_2}$，则 $\boldsymbol{P(x_1 < X \le x_2)}$ （ C ）

(A) $\le \alpha + \beta - 1$；　　(B) $\le 1 - (\alpha + \beta)$；

(C) $\ge \alpha + \beta - 1$；　　(D) $\ge 1 - (\alpha + \beta)$。

三. 计算题：

1. 利用 EXCEL 的数据分析工具验算填空题 1. 的计算结果，并把样本数据分为四组画出频率直方图（本题可选做）



2．设随机变量ξ的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0\ , & x<0 \\ 1/4\ , & 0\le x<1 \\ 1/3\ , & 1\le x<3 \\ 1/2\ , & 3\le x<6 \\ 1\ , & x\ge 6 \end{cases}$$

试求$P(\xi<3)$，$P(\xi\le 3)$，$P(\xi>1)$，$P(\xi\ge 1)$

解：由公式$P(\xi=x)=F(x)-F(x-0)$,得

$$P(\xi<3)=F(3-0)=\frac{1}{3},$$

$$P(\xi\le 3)=F(3)=\frac{1}{2},$$

$$P(\xi>1)=1-F(1)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

$$P(\xi\ge 1)=1-F(1-0)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

3．已知随机变量$\boldsymbol{\xi}$只能取-2，0，2，4 四个值，概率依次为$\frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{2}},\frac{\boldsymbol{c}}{3},\frac{\boldsymbol{c}}{4},\frac{\boldsymbol{c}}{6}$,求常数$\boldsymbol{c}$，并计算$P(\xi<1|\xi>-1)$

解：利用规范性，有$\frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{2}}+\frac{\boldsymbol{c}}{3}+\frac{\boldsymbol{c}}{4}+\frac{\boldsymbol{c}}{6}=\mathbf{1}\Rightarrow \boldsymbol{c}=\frac{4}{5}$.

因此$\boldsymbol{P(\xi}=-2)=\frac{2}{5},\boldsymbol{P(\xi}=0)=\frac{4}{15},\boldsymbol{P(\xi}=2)=\frac{1}{5},\boldsymbol{P(\xi}=4)=\frac{2}{15},$

$$P(\xi<1|\xi>-1)=\frac{P\{(\xi>-1)\bigcap(\xi<1)\}}{P(\xi>-1)}=\frac{P(\xi=0)}{P(\xi=0)+P(\xi=2)+P(\xi=4)}=\frac{4}{9}.$$

4．一批产品，其中有 9 件正品，3 件次品。现逐一取出使用，直到取出正品为止，求在取到正品以前已取出次品数的分布律、分布函数。

解：分布律：

X	0	1	2	3
p_k	3/4	9/44	9/220	1/220

分布函数：$F(x)=\begin{cases} 0,\ x<0 \\ 3/4,\ 0\le x<1 \\ 21/22, 1\le x<2 \\ 219/220,\ 2\le x<3 \\ 1,\ x\ge 3 \end{cases}$.

5. 设连续随机变量 X 的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} ax, & 0\le x\le 1, \\ 2-x, & 1<x\le 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 (1) 常数 a;

(2) X 的分布函数;

(3) $P(0.5\le X\le 1.5)$.

（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_0^1 axdx+\int_1^2(2-x)dx=1$ **得** $a=1$.

(2) 当 $x<0$ **时，** $F(x)=\int_{-\infty}^0 0dt=0;$

当 $0\le x<1$ **时，** $F(x)=\int_{-\infty}^0 0dt+\int_0^x tdt=0.5x^2;$

当 $1\le x<2$ **时，** $F(x)=\int_{-\infty}^0 0dt+\int_0^1 tdt+\int_1^x(2-t)dt=2x-0.5x^2-1;$

当 $x\ge 2$ **时，** $F(x)=1$.

所以 X **的分布函数为**

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 0.5x^2, & 0\le x<1, \\ 2x-0.5x^2-1, & 1\le x<2, \\ 1, & x\ge 2. \end{cases}$$

（3） $P(0.5\le X\le 1.5)=F(1.5)-F(0.5)=0.75$

第六次作业

一. 填空题：

1. 若随机变量 $\xi \sim U[1,6]$,则方程 $x^2+\xi x+1=0$ 有实根的概率为**0.8**

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}Ax^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，则 $A=$__3__

3. 设离散型随机变量 ξ 的分布函数为

$$\boldsymbol{F(x)}=\begin{cases}0 & \boldsymbol{x}<-10\\ 0.7 & -10\le \boldsymbol{x}<0\\ 1 & \boldsymbol{x}\ge 0\end{cases}$$

则 ξ 的分布律为 $P(\xi=-10)=0.7$, $P(\xi=0)=0.3$

4. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}\sqrt{x}, & x\in(0,1)\\ 0, & x\notin(0,1)\end{cases}$$

则分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^{3/2}, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

二. 选择题：

1．在下列函数中，可以作为随机变量的概率密度函数的是（A ）

A. $f(x)=\begin{cases}2x & , & 0<x<1\\ 0 & , & 其他\end{cases}$　　B． $f(x)=\begin{cases}x^2 & , & 0<x<1\\ 0 & , & 其他\end{cases}$

C． $f(x)=\begin{cases}\cos x & , & 0\le x\le \pi\\ 0 & , & 其他\end{cases}$　　D． $f(x)=\begin{cases}2e^{-x} & , & x>0\\ 0 & , & x\le 0\end{cases}$

2．下列表述中不正确有（A，D）

A． $F(x)$ 为离散型随机变量的分布函数的充要条件是 $F(x)$ 为阶梯型函数

B．　连续型随机变量的分布函数一定是连续函数

C．　连续型随机变量取任一单点值的概率为零

D．　密度函数就是分布函数的导数

3. 设随机变量 X 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}K(4x-2x^2), & 1<x<2,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$ 则 K=（ D ）。C

A. $\frac{5}{16}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{5}$

三. 计算题

1. （柯西分布）设连续随机变量ξ的分布函数为

$$F(x)=A+B\arctan x \qquad -\infty<x<+\infty$$

求：（1）系数A及B；

(2) 随机变量ξ落在区间$(-1,1)$内的概率；

（3）随机变量ξ的概率密度。

解: (1) 按照分布函数的定义,有

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}A+B\arctan x=A-\frac{\pi}{2}B=0,$$

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}A+B\arctan x=A+\frac{\pi}{2}B=1,$$

得 $A=\frac{1}{2},B=\frac{1}{\pi}$.

(2) $P(-1<\xi<1)=P(-1<\xi\le 1)=F(1)-F(-1)=\frac{1}{2}$.

(3) $p(x)=F'(x)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x\right)'=\frac{1}{\pi(x^2+1)},-\infty<x<+\infty$

2．学生完成一道作业的时间 X 是一个随机变量，单位为小时，它的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}cx^2+x & 0\le x\le 0.5\\ 0 & 其他\end{cases}$$

（1） 确定常数c；

（2） 写出 X 的分布函数；

（3） 试求在 20 min 内完成一道作业的概率；

（4） 试求 10 min 以上完成一道作业的概率。

解:

(1)利用规范性,有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_0^{0.5}(cx^2+x)dx=\frac{c}{24}+\frac{1}{8}\Rightarrow c=21.$$

(2)当 $x<0$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$,

当 $0\le x<0.5$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int_{0}^{x}(21t^2+t)dt=7x^3+\frac{1}{2}x^2$,

当 $x\ge 0.5$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int_{0}^{0.5}(21t^2+t)dt=1$,

综上所述,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 7x^3+\frac{1}{2}x^2, & 0\le x<0.5,\\ 1, & x\ge 0.5.\end{cases}$$

(3) $P\left(0<\xi\le\frac{1}{3}\right)=F(\frac{1}{3})-F(0)=\frac{17}{54}$.

(4) $P\left(\xi>\frac{1}{6}\right)=1-F(\frac{1}{6})=\frac{103}{108}\quad(or\int_{1/6}^{1/2}(21x^2+x)dx=\frac{103}{108})$

3. 袋内有 5 个黑球 3 个白球,每次抽取一个不放回,直到取得黑球为至。记 Y 为抽取次数，求 Y 的概率分布及至少抽取 3 次的概率。

解： (1) Y 的可能取值为 1，2，3，4

P(Y=1)=5/8，

P(Y=2)=3/8×5/7=15/56，

P(Y=3)= 3/8×2/7×5/6=5/56，

P(Y=4)= 3/8×2/7×1/6=1/56。

所以 Y 的概率分布为

Y	1	2	3	4
P	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

(2) P(Y⩾3)=P(Y=3)+P(Y=4)=6/56=3/28

4. 某种灯具的寿命 ξ 具有概率密度：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{10}{x^2}, & x>10\\ 0, & x\le 10\end{cases}$$

任取三只这种灯具，问 150 小时内，三只灯具全部完好的概率是多少？又问 150 小时内，至少有两只损坏的概率又是多少？

解： 设 $\boldsymbol{p}$ 表示 150 小时内，一只灯具完好的概率， $\boldsymbol{\eta}$ 表示损坏灯具的个数，

$$p = P\{\xi < 150\} = \int_{10}^{150} \frac{10}{x^2} \mathrm{d}\, x = -\left.\frac{10}{x}\right|_{10}^{150} = \frac{14}{15}$$

$$P\{\eta = 0\} = \left(\frac{1}{15}\right)^3 \approx 0.0003$$

$$P\{\eta \geq 2\} = C_3^2 \left(\frac{14}{15}\right)^2 \cdot \frac{1}{15} + \left(\frac{14}{15}\right)^3 \approx 0.987$$

5．已知随机变量X的概率密度为$f(x) = ae^{-\lambda|x|}$，$\lambda > 0$，$-\infty < x < +\infty$。

求系数a和分布函数$F(x)$。

解：由$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} ae^{-\lambda|x|}dx = 2\int_0^{+\infty} ae^{-\lambda x}dx = \frac{2a}{\lambda}$可得$a = \frac{\lambda}{2}$。

故$f(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$，$\lambda > 0$，$-\infty < x < +\infty$。

由于$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$，

当$x < 0$时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{\lambda}{2}e^{\lambda t}dt = \frac{1}{2}e^{\lambda x}$；

当$x \geq 0$时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{2}e^{\lambda t}dt + \int_0^{x} \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda t}dt = 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x}$。

所以，

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda x}, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$