华东理工大学

线性代数

作业簿（第一册）

学　院____________专　业____________班　　级____________

学　号____________姓　名____________任课教师____________

1.1 矩阵的概念

1. 矩阵 $A=\left[a_{ij}\right]=\left[2i-j\right]_{2\times 3}=$ ____________________.

解：$A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\3&2&1\end{bmatrix}$.

2．设

$$A=\begin{bmatrix}5&2\\0&4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&3&0\\0&4&1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix},$$

其中对角阵为__________，三角阵有____________.

解：对角阵为 D；三角阵有 A，C，D.

1.2 矩阵的运算

1. 已知$2\begin{bmatrix}3&-1&1\\-2&0&2\end{bmatrix}-3X+\begin{bmatrix}-2&-1&1\\3&1&1\end{bmatrix}=O$，求矩阵 X .

解：依题意，由

$$3X=\begin{bmatrix}6 & -2 & 2\\ -4 & 0 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -3 & 3\\ -1 & 1 & 5\end{bmatrix},$$

即得 $X=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & -1 & 1\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3}\end{bmatrix}$.

2. 如果矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{t\times s}$ 满足 $AB=BA$，试求 m,n,t,s 之间的关系.

解： $m=n=t=s$.

3. 填空：

(1) $\begin{bmatrix}4 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 3\\ 5 & 7 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=$ __________；

(2) $[1,\ 2,\ 3]\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=$ __________；

(3) $\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}[-1,\ 2]=$ __________；

(4) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 4 & 0\\ 1 & -1 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 1\\ 4 & 0 & -2\end{bmatrix}=$ __________.

解： (1) $\begin{bmatrix}35\\ 6\\ 49\end{bmatrix}$； (2) 14； (3) $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 4\\ -3 & 6\end{bmatrix}$； (4) $\begin{bmatrix}6 & -7 & 8\\ 20 & -5 & -6\end{bmatrix}$.

4. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，试求与 A 可交换的所有矩阵.

解：由可交换矩阵的定义，知道所求矩阵必为 3 阶方阵，不妨设其为 $B=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$，于是有

$$AB=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d&e&f\\g&h&i\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$BA=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a&b\\0&d&e\\0&g&h\end{bmatrix},$$

由 $AB=BA$，即得 $\begin{bmatrix}d&e&f\\g&h&i\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a&b\\0&d&e\\0&g&h\end{bmatrix}$，

由相应元素相等，则得 $d=g=h=0,a=e=i,b=f$，

故 $B=\begin{bmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{bmatrix}$（$a,b,c$ 均为任意常数）为与 A 可交换的所有矩阵.

5. 计算下列各题：

(1) $\begin{bmatrix}x_1, & x_2, & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$；

解：原式等于：

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+(a_{12}+a_{21})x_1x_2+(a_{13}+a_{31})x_1x_3+(a_{23}+a_{32})x_2x_3$$

(2) $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，求 A^{2008}；

解：记 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，则 $A^2=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$，

$A^3=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=-I$，$\because 2008=3\times 669+1$

$$\therefore \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{2008}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{2007}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$=(-I)^{669}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=-A.$$

(3) $A=\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{bmatrix}$，求 A^9.

解：

$$A^9=\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}^8\begin{bmatrix} 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{bmatrix}=2^8A=256\begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ -2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

6. 利用等式

$$\begin{bmatrix}17 & -6\\35 & -12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 3\\5 & -2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}-7 & 3\\5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},$$

计算$\begin{bmatrix}17 & -6\\35 & -12\end{bmatrix}^5$.

解：$\begin{bmatrix}17 & -6\\35 & -12\end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}-7 & 3\\5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3197 & -1266\\7385 & -2922\end{bmatrix}$.

7. 某公司为了技术革新，计划对职工实行分批脱产轮训，已知该公司现有 2000 人正在脱产轮训，而不脱产职工有 8000 人，若每年从不脱产职工中抽调 30%的人脱产轮训，同时又有 60%脱产轮训职工结业回到生产岗位，设职工总数不变，令

$$A=\begin{bmatrix}0.7 & 0.6\\0.3 & 0.4\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}8000\\2000\end{bmatrix}$$

试用 A 与 X 通过矩阵运算表示一年后和两年后的职工状况，并据此计算届时不脱产职工与脱产职工各有多少人.

解：一年后职工状况为：$AX=\begin{bmatrix}6800\\3200\end{bmatrix}$

不脱产职工 6800 人，轮训职工 3200 人.

两年后职工状况为：$A\begin{bmatrix}6800\\3200\end{bmatrix}=A^2X=\begin{bmatrix}6680\\3320\end{bmatrix}$

不脱产职工 6680 人，轮训职工 3320 人.

8. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\-4 & -2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & -1\\-6 & 2\end{bmatrix}$,

求:(1) $A^TB^T-B^TA^T$;　　(2) A^2-B^2.

解：(1) $A^TB^T-B^TA^T=\begin{bmatrix}2&-4\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-6\\-1&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&-6\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-4\\1&-2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}10&-20\\5&-10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&-20\\5&-10\end{bmatrix};$$

(2) $A^2-B^2=\begin{bmatrix}2&1\\-4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-4&-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&-1\\-6&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\-6&2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}15&-5\\-30&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-15&5\\30&-10\end{bmatrix}.$$

9. 设 A 是对称矩阵，B 是反对称矩阵，则（　　）是反对称矩阵.

（A）$AB-BA$；（B）$AB+BA$；（C）$(AB)^2$；（D）BAB.

解：B.

10. 试将矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&0&1\\-2&2&3\end{bmatrix}$ 表示成对称矩阵与反对称矩阵之和.

解：

$$A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)=\begin{bmatrix}1&\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}\\\frac{5}{2}&0&\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}.$$

11. 设 A 是反对称矩阵，B 是对称矩阵，试证：AB 是反对称矩阵的充分必要条件为 $AB=BA$.

证：必要性:

由 $(AB)^T=-AB$ 及 $(AB)^T=B^TA^T=B(-A)=-BA$ 即得 $AB=BA$.

充分性: 若 $AB=BA$，则

$\boldsymbol{(AB)^T = B^T A^T = B(-A) = -BA = -AB}$，知 AB 是反对称阵.

12. 设 $f(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x + a_0$，记 $f(A)$ 为方阵 A 的多项式，即

$$f(A)=a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1 A + a_0 I$$

（1） 设 $\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$，证明 $f(\Lambda)=\begin{bmatrix}f(\lambda_1) & 0\\ 0 & f(\lambda_2)\end{bmatrix}$；

（2） 设 $A=P\Lambda P^{-1}$，证明 $f(A)=Pf(\Lambda)P^{-1}$.

解：（1）$\because \Lambda^k=\begin{bmatrix}\lambda_1^{\ k} & 0\\ 0 & \lambda_2^{\ k}\end{bmatrix}$

$$\therefore f(\Lambda)=a_m\begin{bmatrix}\lambda_1^{\ m} & 0\\ 0 & \lambda_2^{\ m}\end{bmatrix}+a_{m-1}\begin{bmatrix}\lambda_1^{\ m-1} & 0\\ 0 & \lambda_2^{\ m-1}\end{bmatrix}+\cdots+a_1\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}+a_0\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_m\lambda_1^{\ m}+a_{m-1}\lambda_1^{\ m-1}+\cdots+a_1\lambda_1+a_0 & 0\\ 0 & a_m\lambda_2^{\ m}+a_{m-1}\lambda_2^{\ m-1}+\cdots+a_1\lambda_2+a_0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}f(\lambda_1) & 0\\ 0 & f(\lambda_2)\end{bmatrix}$$

（2）$A=P\Lambda P^{-1}\Rightarrow A^k=P\Lambda^k P^{-1}$

$$\therefore f(A)=f(P\Lambda P^{-1})=a_m P\Lambda^m P^{-1}+a_{m-1}P\Lambda^{m-1}P^{-1}+\cdots+a_1 P\Lambda P^{-1}+a_0 PP^{-1}$$

$$=Pf(\Lambda)P^{-1}$$

13. 设矩阵 $A=I-2\dfrac{\alpha\alpha^T}{\alpha^T\alpha}$，其中 I 为 n 阶单位阵，α 为 n 维列向量，

试证 A 为对称矩阵，且 $A^2=I$.

证：

$$A^T=(I-2\frac{\alpha\alpha^T}{\alpha^T\alpha})^T=I^T-2(\frac{\alpha\alpha^T}{\alpha^T\alpha})^T=I-\frac{2}{\alpha^T\alpha}(\alpha\alpha^T)^T=I-2\frac{\alpha\alpha^T}{\alpha^T\alpha}=A$$

故 A 是对称矩阵，且

$$A^2=(I-2\frac{\alpha\alpha^T}{\alpha^T\alpha})(I-2\frac{\alpha\alpha^T}{\alpha^T\alpha})=I-4\frac{\alpha\alpha^T}{\alpha^T\alpha}+4\frac{\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T}{(\alpha^T\alpha)^2}=I.$$

1.3 逆矩阵

1. 设 A 为 n 阶矩阵，且满足 $A^2=A$，则下列命题中正确的是（ ）.

（A）$A=O$；（B）$A=I$；

（C）若 A 不可逆，则 $A=O$；（D）若 A 可逆，则 $A=I$.

解：D.

2. 设 n 阶矩阵 A、B、C 满足 $ABAC=I$，则必有（ ）.

（A）$CA^2B=I$；（B）$A^TB^TA^TC^T=I$；

（C）$BA^2C=I$；（D）$A^2B^2A^2C^2=I$.

解：B.

3. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}$，求 A^n 及 A^{-1}（n 是正整数）.

证：由 $A^2=4I$，即可得

$$A^n=\begin{cases}(A^2)^{\frac{n}{2}}=(4I)^{\frac{n}{2}}=2^n I,\ n\text{为偶数}\\ A^{n-1}A=(4I)^{\frac{n-1}{2}}A=2^{n-1}A,\ n\text{为奇数}\end{cases}$$

及 $A\cdot(\frac{1}{4}A)=I$，亦即 $A^{-1}=\frac{1}{4}A$.

4. 已知n阶矩阵A满足$A^2+2A-3I=O$，

求：A^{-1}，$(A+2I)^{-1}$，$(A+4I)^{-1}$.

解：依题意，有 $A(A+2I)=3I$，即 $A\frac{(A+2I)}{3}=I$，故

$$A^{-1}=\frac{1}{3}(A+2I)\ ;\quad (A+2I)^{-1}=\frac{1}{3}A\,,$$

再由已知凑出$(A+4I)(A-2I)=-5I$，即得

$$(A+4I)^{-1}=-\frac{1}{5}(A-2I).$$

5. 设A、B、$AB-I$为同阶可逆阵，试证：(1) $A-B^{-1}$可逆；

(2) $\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}$也可逆，且有$\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]^{-1}=ABA-A$.

证：(1) $A-B^{-1}=ABB^{-1}-B^{-1}=(AB-I)B^{-1}\quad\Rightarrow\quad A-B^{-1}$可逆.

(2) 证法一：

$$\begin{aligned}\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}&=\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-\left(A-B^{-1}\right)^{-1}\left(A-B^{-1}\right)A^{-1}\\&=\left(A-B^{-1}\right)^{-1}\left(I-I+B^{-1}A^{-1}\right)=\left[AB\left(A-B^{-1}\right)\right]^{-1}\\&=(ABA-A)^{-1}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}$可逆，且$\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]^{-1}=ABA-A$.

证法二：由（1）得$\left(A-B^{-1}\right)^{-1}=B(AB-I)^{-1}$，因此

$$\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right](ABA-A)=\left[B(AB-I)^{-1}-A^{-1}\right](ABA-A)$$

$$=B(AB-I)^{-1}(AB-I)A-A^{-1}A(BA-I)=BA-BA+I=I$$

$\Rightarrow$ $\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}$可逆，且$\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]^{-1}=ABA-A$.

华东理工大学

线性代数

作业簿（第二册）

学　院____________专　业____________班　　级____________

学　号____________姓　名____________任课教师____________

1.4 矩阵的分块

1．设 $A=\begin{bmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}3&2&0&0\\4&5&0&0\\0&0&4&1\\0&0&6&2\end{bmatrix}$,求（1）$AB$；（2）$A^4$.

解：

(1) $\because AB=\begin{bmatrix}A_1&\\&A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1&\\&B_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1B_1&\\&A_2B_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25&26&0&0\\0&-7&0&0\\0&0&8&2\\0&0&20&6\end{bmatrix}$;

(2) $A^4=\begin{bmatrix}A_1^4&\\&A_2^4\end{bmatrix}$, $A_1^4=(25I)^2=625I$,

$A_2^4=16\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}=16\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}$

$\therefore A^4=\begin{bmatrix}625&0&0&0\\0&625&0&0\\0&0&16&0\\0&0&64&16\end{bmatrix}$

2．设 $A=\begin{bmatrix}0&0&2&0\\0&0&0&-3\\0&4&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=$ ________________ .

解： $A=\begin{bmatrix} & A_2\\ A_1 & \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} & A_1^{-1}\\ A_2^{-1} & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&\frac{1}{4}&0\\\frac{1}{2}&0&0&0\\0&-\frac{1}{3}&0&0\end{bmatrix}$.

3. 已知分块矩阵 $W=\begin{pmatrix}W_{11}&W_{12}\\W_{21}&O\end{pmatrix}$，则 $W^T=$（　　）.

(A) $\begin{pmatrix}W_{11}&W_{21}\\W_{12}&O\end{pmatrix}$； (B) $\begin{pmatrix}W_{12}&O\\W_{11}&W_{21}\end{pmatrix}$；

(C) $\begin{pmatrix}W_{11}{}^T&W_{12}{}^T\\W_{21}{}^T&O\end{pmatrix}$； (D) $\begin{pmatrix}W_{11}{}^T&W_{21}{}^T\\W_{12}{}^T&O\end{pmatrix}$.

解：D.

4. 求满足 $AX-X+I=A^2$ 的矩阵 X，其中 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$.

解：由原式，整理得 $(A-I)X=A^2-I=(A-I)(A+I)$，而

$A-I=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ 可逆，故由上式可得 $X=A+I=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$.

5. 设n阶矩阵A,B满足$A+B=AB$.

(1) 证明$A-I$可逆，且$AB=BA$；

(2) 若已知$B=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求矩阵$A$.

解：（1）由$A+B=AB,$ 移项得 $AB-A-B=O$，即$AB-A-B+I=I$，亦即$(A-I)(B-I)=I,$从而得到$A-I$可逆；

且由上式可得$(B-I)(A-I)=I$，展开得$BA-A-B=O,$ 即$BA=A+B$，结合条件知$AB=BA$.

（2）由（1）知$A-I=(B-I)^{-1}$，即$A=(B-I)^{-1}+I,$而

$$(B-I)^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -3 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ 故A=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{3} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

6. 设$A=(a_{ij})$是一个$m\times n$矩阵，(1) 计算$e_i^T A,\ \ Ae_j$，$e_i^T Ae_j$，其中e_i为m阶单位矩阵的第i列，e_j为n阶单位矩阵的第j列；

(2) 试证：对任一m维列向量x, $x^T A=0\Leftrightarrow A=O$；

(3) 试证：对任一m维列向量x和任一n维列向量y，$x^T Ay=0\Leftrightarrow A=O$.

解：（1）

$e_i^{\mathrm{T}}A=\left[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}\right],\quad Ae_j=\left[a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}\right]^{\mathrm{T}}$，$e_i^{\mathrm{T}}Ae_j=a_{ij}$

(2)“$\Leftarrow$”显然；

“$\Rightarrow$” 由向量 x 的任意性，取 $x=e_i(i=1,2,...m,$ 且 e_i 为 m 阶单位矩阵的第 i 列），则由(1)得 $e_i^{\mathrm{T}}A=\left[a_{i1},a_{i2},...,a_{im}\right]=0$，即 A 的第 i 行为零向量，取遍 $i=1,2,...m,$ 知 A 的每一行均为零向量，即 $A=O$.

(3) “$\Leftarrow$”显然；

“$\Rightarrow$”由 x 与 y 的任意性，取 $x=e_i,\ y=e_j\ (i=1,2,...m,\ j=1,2,...n;e_i$ 与 e_j 分别为 m,n 阶单位阵的第 i,j 列），则由(1)得 $e_i^{\mathrm{T}}Ae_j=a_{ij}=0$，即 A 的每一个元素都为零，亦即 $A=O$.

7．设 n 阶矩阵 $A=[a_{ij}]$，n 维向量 $\alpha=[1,1,\cdots,1]^T$，(1) 计算 $A\alpha$；

(2) 若 A 可逆，其每一行元素之和都等于常数 c，试证：A^{-1} 的每一行元素之和也都相等，且等于 $\frac{1}{c}$.

解：（1）设 e_i 为 n 阶单位矩阵的第 i 列，则有

$$\alpha=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}=e_1+e_2+\cdots+e_n$$

又设 α_i 为 A 的第 i 列，则有

$$A\alpha=Ae_1+Ae_2+\cdots+Ae_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{n}a_{1k}\\ \sum_{k=1}^{n}a_{2k}\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{n}a_{nk}\end{bmatrix}$$

(2) 由题设及(1)的结论可得：$A\alpha=c\alpha \quad \Rightarrow \quad A^{-1}\alpha=\frac{1}{c}\alpha$，即 A^{-1} 的每一行元素之和都等于 $\frac{1}{c}$.

1.5 初等变换与初等矩阵

1. 用初等行变换求下列矩阵的逆矩阵.

（1）$\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}-11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{bmatrix}$.

解：（1）构造分块阵$\begin{bmatrix}1 & 2 & \vdots & 1 & 0\\ -3 & 4 & \vdots & 0 & 1\end{bmatrix}$，并对其进行初等行变换

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & \vdots & 1 & 0\\ -3 & 4 & \vdots & 0 & 1\end{bmatrix}\overset{r_{12}(3)}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 2 & \vdots & 1 & 0\\ 0 & 10 & \vdots & 3 & 1\end{bmatrix}\overset{r_2(\frac{1}{10})}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 2 & \vdots & 1 & 0\\ 0 & 1 & \vdots & \frac{3}{10} & \frac{1}{10}\end{bmatrix}$$

$\overset{r_{21}(-2)}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & \vdots & \frac{4}{10} & -\frac{2}{10}\\ 0 & 1 & \vdots & \frac{3}{10} & \frac{1}{10}\end{bmatrix}$，即得$\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$;

（2）$\begin{bmatrix}-11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 8\end{bmatrix}$

2. 已知$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 5\end{bmatrix}$,且有$XA=X+B$,求$X$.

解：$\because XA=X+B \quad\Rightarrow\quad X(A-I)=B \quad\Rightarrow\quad X=B(A-I)^{-1}$

$$[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}\vdots\boldsymbol{I}]=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1 & \vdots & -1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -1 & \vdots & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2\end{array}\right]$$

$$\therefore X=B(A-I)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 9 & -5\\ -2 & -8 & 6\\ -4 & -14 & 9\end{bmatrix}.$$

3. 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}8 & 4 & 1\\ 0 & 5 & 9\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$，计算

$$U=\left[B(C^T)^{-1}-I\right]^T(AB^{-1})^T+\left[(BA^{-1})^T\right]^{-1}.$$

解：

$$U=\left[AB^{-1}(B(C^{\mathrm T})^{-1}-I)\right]^{\mathrm T}+\left[(BA^{-1})^{\mathrm T}\right]^{-1}$$

$$=\left[A(C^{\mathrm T})^{-1}-AB^{-1}\right]^{\mathrm T}+(AB^{-1})^{\mathrm T}$$

$$=\left[C^{-1}A^{\mathrm T}-(B^{-1})^{\mathrm T}A^{\mathrm T}\right]+(B^{-1})^{\mathrm T}A^{\mathrm T}$$

$$=C^{-1}A^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

4. 已 知 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix},P=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},Q=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ ， 则

$P^{100}AQ^{101}=$ ______________________.

解：$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

5. 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{bmatrix}$，

$P_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则有（　　）.

（A）$AP_1P_2=B$；（B）$AP_2P_1=B$；（C）$P_1P_2A=B$；（D）$P_2P_1A=B$.

解：C.

6. 解矩阵方程：$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

解：X 左右的两个矩阵均为初等矩阵，故而可逆且其逆也是初等矩阵，于是有

$$X=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

7. 已知 A, B 为三阶方阵，且满足 $2A^{-1}B=B-4I$.

（1）证明 $A-2I$ 可逆；（2）若 $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，求矩阵 A.

解：

(1) $2A^{-1}B = B-4I \Rightarrow 2B = AB-4A \Rightarrow (AB-2B)-(4A-8I)=8I$

$$\Rightarrow (A-2I)(B-4I)=8I$$

所以 $A-2I$ 可逆且 $(A-2I)^{-1}=\frac{1}{8}(B-4I)$.

(2) $(A-2I)^{-1}=\frac{1}{8}(B-4I)$

$$\Rightarrow A = 8(B-4I)^{-1}+2I = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} + 2I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

8. 设矩阵 A 可逆，且 $A \overset{r_{ij}}{\sim}$ B. 试证：（1）矩阵 B 可逆；

（2）求 AB^{-1}；（3）试证 A^{-1} 交换第 i 、 j 列后可得矩阵 B^{-1}.

解：（1）依题意，有 $B=R_{ij}A$，其中 R_{ij} 为对应于初等变换 r_{ij} 的行初等矩阵，则由 R_{ij} 及 A 均可逆知 B 必可逆.

（2）由（1），得 $B^{-1}=(R_{ij}A)^{-1}=A^{-1}R_{ij}^{-1}=A^{-1}R_{ij}$,故而

$AB^{-1}=A(A^{-1}R_{ij})=R_{ij}$.

（3）由（1),得 $B^{-1}=A^{-1}R_{ij}$, 而 $R_{ij}=C_{ij}$, 故 $A^{-1}C_{ij}=B^{-1}$, 即 $A^{-1}\overset{c_{ij}}{\sim}B^{-1}$.

华东理工大学

线性代数

作业簿（第三册）

学　院_____________专　业_____________班　　级_____________

学　号_____________姓　名_____________任课教师_____________

2.1　行列式的定义

1．行列式$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 3x \end{vmatrix}$是关于 x 的____次多项式.

解：4

2. 已知 a、b 为整数，且满足$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1000 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0$，求 a 和 b.

解：$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1000 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 8(a^2 + b^2) = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 0$

因为 a、b 为整数，故有 $a = 0$，$b = 0$.

2.2　n 阶行列式的展开

1. 已知四阶行列式 D 之值为 92，它的第 2 行元素依次为 $1, 0, t+3, 2$，且第 2 行元素的余子式分别为 $1, 3, -5, 2$，则 $t =$________.

解：$\dfrac{74}{5}$.

2. 二阶行列式D中元素a_{ij}的余子式为M_{ij}，已知

$$M_{11}=1, M_{12}=2, M_{21}=4, M_{22}=-5$$

求D的值.

解：$\because M_{11}=a_{22}, M_{12}=a_{21}, M_{21}=a_{12}, M_{22}=a_{11}$

$$\therefore D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} M_{22} & M_{21} \\ M_{12} & M_{11} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-13.$$

3. 试证n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证明：

$$D_n=(-1)^{1+n}\lambda_1\begin{vmatrix} & & & \lambda_2 \\ & & \lambda_3 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}\lambda_1(-1)^{1+(n-1)}\lambda_2\begin{vmatrix} & & \lambda_3 \\ & \iddots & \\ \lambda_n & & \end{vmatrix}=\cdots$$

$$=(-1)^{1+n}\lambda_1(-1)^{1+(n-1)}\lambda_2\cdots(-1)^{1+1}\lambda_n$$

$$=(-1)^{2+3+\cdots+(n+1)}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

4. 计算行列式$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 0 \\ 4 & 10 & 11 & -5 & 0 \\ 8 & 1 & 3 & 7 & 5 \end{vmatrix}$的值.

解： 原式$=5\cdot(-1)^{5+5}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 4 & 10 & 11 & -5 \end{vmatrix}=5\cdot1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 4 & 10 & 11 \end{vmatrix}$

$$=-5\cdot2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}=-10\cdot(0\cdot10-4\cdot3)=120.$$

5. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$，求它的常数项.

解： $f(x)$ 的常数项 $c=f(0)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\times1\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$=1\times\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}+3\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-5$$

2.3 行列式的性质

1. 证明下列各等式

（1）$\begin{vmatrix} 2002 & 2003 & 2004 \\ 2005 & 2006 & 2007 \\ 2008 & 2009 & 2010 \end{vmatrix}=0$；

（2） $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

(1) 证明：

$$\begin{vmatrix} 2002 & 2003 & 2004 \\ 2005 & 2006 & 2007 \\ 2008 & 2009 & 2010 \end{vmatrix} \overset{c_{23}(-1)}{=} \begin{vmatrix} 2002 & 2003 & 1 \\ 2005 & 2006 & 1 \\ 2008 & 2009 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_{12}(-1)}{=} \begin{vmatrix} 2002 & 1 & 1 \\ 2005 & 1 & 1 \\ 2008 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(2) 证法一：

左式= $\begin{vmatrix} a_1 & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$=右式.

证法二：

左式 $\overset{c_{21}(-x)}{=} \begin{vmatrix} a_1(1-x^2) & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2(1-x^2) & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3(1-x^2) & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$\overset{c_{12}(-x)}{=} (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$ 右式.

2. 选择题：

(1) 设 A 为 n 阶方阵，若 A 经过若干次初等变换变成矩阵 B，则正确的选项是（　）.

（A）$|A|=|B|$；　　（B）若 $|A|=0$，则必有 $|B|=0$；

（C）$|A|\neq|B|$；　　（D）若 $|A|>0$，则必有 $|B|>0$.

解：B.

(2) 设ξ_1、ξ_2、ξ_3 是三维列向量，则与三阶行列式$|\xi_1,\xi_2,\xi_3|$等值的行列式是（　）.

（A）$|\xi_1,2\xi_1+\xi_2,\xi_1+3\xi_2-\xi_3|$；　（B）$|\xi_3,\xi_2,\xi_1|$；

（C）$|\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1|$；　（D）$|\xi_3-\xi_2,\xi_1-\xi_3,\xi_3|$.

解：D.

3.填空题

（1）代数方程

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}=0$$

的根的个数为_______.

解：2.

因 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & x-1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & x-1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} -1 & x-1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & x-1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & x-1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=-x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-5x\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=5x(x-1)$$

$\therefore f(x)=0$ 根的个数为 2.

（2）设 4 阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & b & d & a \\ d & b & c & a \\ a & b & d & c \end{vmatrix}$，则

$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}=$_____.

解：0

4. 设 $A=\left[\alpha_1,\alpha_2,\beta_1\right],B=\left[\alpha_1,\alpha_2,\beta_2\right]$ 均为 3 阶矩阵，若已知 $|A|=2,|B|=3$，求$\left|2A-5B\right|$的值.

解：$\left|2A-5B\right|=\left|-3a_1,-3a_2,2\beta_1-5\beta_2\right|=(-3)^2\left|a_1,a_2,2\beta_1-5\beta_2\right|$

$=9\left(\left|a_1,a_2,2\beta_1\right|+\left|a_1,a_2,-5\beta_2\right|\right)=9\left(2\left|A\right|+(-5)|B|\right)=9\left(2^2-5\times 3\right)=-99$

5. 证明奇数阶反对称矩阵必不可逆.

证：$A=-A^T \quad \Rightarrow \quad |A|=(-1)^n|A^T| \xlongequal{n=2k+1} -|A| \quad \Rightarrow \quad |A|=0$

6. 已知n阶矩阵A、B满足：$A^2=I$、$B^2=I$，且$\left|A\right|+\left|B\right|=0$，试证$\left|A+B\right|=0$.

证：依题意，有$\left|A\right|=\pm 1$，且$\left|A\right|=-\left|B\right|$，进而再由

$$\left|A+B\right|=\left|AB^2+A^2B\right|=\left|A\right|\left|A+B\right|\left|B\right|=-\left|A\right|^2\left|A+B\right|=-\left|A+B\right|$$

移项即得$\left|A+B\right|=0$.

7. 取 $A=B=-C=D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，验证

$$\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix}|A| & |B|\\ |C| & |D|\end{vmatrix}=|A||D|-|B||C|.$$

解：

$$\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=4,\begin{vmatrix}|A| & |B|\\ |C| & |D|\end{vmatrix}=|A||D|-|B||C|=1+1=2.$$

2.4 行列式的计算

1.计算行列式 $\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}$.

解：原式 $\overset{r_{21}(-1)}{\underset{r_{43}(-1)}{=}}\begin{vmatrix}x & x & 0 & 0\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 0 & 0 & y & y\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}=xy\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}$

$$=xy\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1-x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1-y\end{vmatrix}=xy\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1-x\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1-y\end{vmatrix}=x^2y^2.$$

2. 计算下列n阶行列式

（1）$\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 1 & & & \\ 2 & & 2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ n & & & & n\end{vmatrix}$；　（2）$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & n\\ 1 & 1 & \cdots & n & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & n & \cdots & 1 & 1\\ n & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}$.

解：（1）将第 2 列，…，第 n 列的（-1）倍加到第 1 列后，得

$$\text{原式}=\begin{vmatrix} -(1+2+\cdots+n) & 1 & 2 & \cdots & n \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & n \end{vmatrix}=-\frac{n(n+1)}{2}n!$$

（2）换行后，将第 $2,3....n$ 列全加到第一列，提取公因子后，再将第 1 行乘以（-1）加到以下各行得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & n \\ 1 & 1 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & 1 & 1 \\ n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\begin{vmatrix} n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\begin{vmatrix} 2n-1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2n-1 & n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2n-1 & 1 & \cdots & n & 1 \\ 2n-1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}(2n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}(2n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}(2n-1)(n-1)^{n-1}.$$

3.利用范德蒙行列式的结果计算行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

解：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a-n & \cdots & a-1 & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a-n)^{n-1} & \cdots & (a-1)^{n-1} & a^{n-1} \\ (a-n)^n & \cdots & (a-1)^n & a^n \end{vmatrix}=n!(n-1)!\cdots 1!=\prod_{1\le i<j\le n+1}(j-i)$$

4. 计算 $2n$ 阶行列式 $D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c & & & & & d & \\ c & & & & & & & d \end{vmatrix}$.

解：将第 $2n$ 行与其上各行逐次交换至第 2 行，再将第 $2n$ 列与其前各列逐次交换至第 2 列，得

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & b & & & & & & \\ c & d & & & & & & \\ & & a & & & & & b \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a & b & & \\ & & & & c & d & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ & & c & & & & & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}D_{2n-2}=(ad-bc)D_{2n-2}$$

$$=(ad-bc)^2 D_{2n-4}=\ldots=(ad-bc)^{n-1}D_2=(ad-bc)^n.$$

2.5 行列式的应用

1. 设 A,B 为 n 阶方阵, 则（　　）.

(A) 若 A,B 都可逆，则 $A+B$ 必可逆;

(B) 若 A,B 都不可逆，则 $A+B$ 必不可逆;

(C) 若 AB 可逆，则 A,B 都可逆;

(D) 若 AB 不可逆，则 A,B 都不可逆.

解：C.

2. 已知 3 阶方阵 A 的行列式为 $|A|=3$，求行列式 $\begin{vmatrix} A^{-1}A^T & O \\ O & A^* \end{vmatrix}$ 的值.

解：由 $|A^{-1}|=|A|^{-1}=\dfrac{1}{3}, |A^T|=|A|=3$ 及 $|A^*|=|A|^{3-1}=9$, 得

$$\begin{vmatrix} A^{-1}A^T & O \\ O & A^* \end{vmatrix}=|A^{-1}A^T||A^*|=|A^{-1}||A^T||A^*|=9$$

3. 已知 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=\dfrac{1}{3}$，求 $\left|\left(\dfrac{1}{7}A\right)^{-1}-12A^*\right|$.

解：由 $|A^*|=|A|^{3-1}=\dfrac{1}{9}$, 及 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$, 得

$$\left|\left(\frac{1}{7}A\right)^{-1}-12A^*\right|=|7A^{-1}-12A^*|=|21A^*-12A^*|=9^3|A^*|=81.$$

4. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，求 $|A|$ 中所有元素的代数余子式之和.

解：解法一：直接计算各代数余子式

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=1,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=0,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}=0,\ A_{14}=(-1)^{1+4}\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=0,$$

$$A_{21}=-1,\ A_{22}=1,\ A_{23}=0,\ A_{24}=0,$$
$$A_{31}=0,\ A_{32}=-1,\ A_{33}=1,\ A_{34}=0,$$
$$A_{41}=0,\ A_{42}=0,\ A_{43}=-1,\ A_{44}=1.$$

于是 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{44}=1$.

解法二：先求 A^{-1}

$$[A\vdots I]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-1&0&0\\0&1&0&0&0&1&-1&0\\0&0&1&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

故 $A^{*}=|A|A^{-1}=A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}&A_{41}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}&A_{42}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}&A_{43}\\A_{14}&A_{24}&A_{34}&A_{44}\end{bmatrix}$

于是 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{44}=1$.

解法三:

$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{44}$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}=1$$

5. 设齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x+y+z=0\\x+\lambda y+z=0\\x+y+\lambda z=0\end{cases}$ ，试问：

（1） λ 取何值时，方程组只有零解？

（2） λ 取何值时，方程组有非零解？

解: 系数行列式 $\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$，

所以当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$ 时只有零解；

当 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$ 时有非零解.

6. 已知 $\begin{cases}x+\ \ y+\ \ z=1\\ax+\ by+\ cz=d\\a^2x+b^2y+c^2z=d^2\end{cases}$ ，问 a,b,c 满足什么条件时，此线性方程组有唯一解，并求这个解.

解：由克拉默法则知方程组有唯一解的充分必要条件是系数行列式不等于零，即 $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}\neq0$,再由范德蒙德行列式知

$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$，故只有当 a,b,c 互不相等时，方程组有唯一解，且解为

$$x=\frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}, y=\frac{(d-a)(c-d)}{(b-a)(c-b)}, z=\frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

7. 已知 3 阶方阵 $A=\left[a_{ij}\right]$，且对任意的$1\le i, j\le 3$都有代数余子式 $A_{ij}=a_{ij}$ 及 $a_{11}=-1$，求: (1) $|A|$；（2）$Ax=e_1$ 的解，其中 $e_1=[1,0,0]^T$.

解：（1）依题意，有 $A^*=A^T$, 即有 $\left|A^*\right|=\left|A^T\right|$, 再由 $\left|A^*\right|=|A|^{3-1}$ 及 $\left|A^T\right|=|A|$ 得 $|A|(|A|-1)=0$；再由

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2\ge(-1)^2=1$$

知必有 $|A|=1$.

（2）由（1）可知 $a_{12}=0, a_{13}=0,$ 及 $A^*=A^T$，所以在 $Ax=e_1$ 的两端同时左乘 A^T，得 $A^TAx=A^Te_1$，即

$$|A|Ix=\left[a_{11},a_{12},a_{13}\right]^T=\left[-1,0,0\right]^T, \text{亦即 } x=\left[-1,0,0\right]^T.$$

华东理工大学

线性代数

作业簿（第四册）

学　院_____________专　业_____________班　　级_____________

学　号_____________姓　名_____________任课教师_____________

3.1 矩阵的秩

1. 设$m\times n$矩阵A的秩为r，则下列结论错误的是（　）.
（A）A有r阶子式非零；　　（B）A的所有$r+1$阶子式为零；
（C）A没有r阶子式为零；　　（D）$r(A)\le \min(m,n)$.

解：C.

2. 设$r\begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 1 & -1 & a & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}=2$，则$a=$________

解：$a=$_-1 或 0　______

3．设A为4×3矩阵，$B=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,则$r(AB)-r(A)=$_____.

解：0.

4．确定矩阵$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$的秩，并给出一个最高阶非零子式.

解：利用初等行变换化成行阶梯形矩阵来求矩阵的秩.

由 $A\sim\begin{bmatrix}1&-1&2&-3\\0&5&0&10\\0&5&0&10\\0&-1&0&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&2&-3\\0&1&0&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 知 $r(A)=2$，最高阶非零子式可取 $\begin{vmatrix}2&3\\1&-1\end{vmatrix}$.

5. 当参数取不同数值时，求矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&a&7&-1\\1&-1&-6&-1&b\end{bmatrix}$ 的秩。

解：由 $B\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&3&0\\0&-1&-2&-2&-1\\0&-1&6+a&-2&-1\\0&-2&-4&-4&b\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&3&0\\0&1&2&2&1\\0&0&8+a&0&0\\0&0&0&0&b+2\end{bmatrix}$ 知

①当 $a=-8$ 且 $b=-2$ 时， $r(B)=2$;

②当 $a=-8$ 且 $b\neq-2$，或 $a\neq-8$ 且 $b=-2$ 时， $r(B)=3$;

③当 $a\neq-8$ 且 $b\neq-2$ 时， $r(B)=4$.

6. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{bmatrix}$，求 $r(A)$ 及 $r(A^2)$.

解: 设 $\alpha=\left[a_1,a_2,\cdots a_n\right]^{\mathrm{T}},\beta=\left[b_1,b_2,\cdots b_n\right]^{\mathrm{T}}$, 则 $A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$, 且有当 $\alpha\neq0$ 且 $\beta\neq0$ 时， $r(A)=1$; 当 $\alpha=0$ 或 $\beta=0$ 时， $r(A)=0$，又

$A^2=AA=(\alpha\beta^{\mathrm{T}})(\alpha\beta^{\mathrm{T}})=\alpha(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)\beta^{\mathrm{T}}=(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)\alpha\beta^{\mathrm{T}}$,则有

$$r(A^2)=\begin{cases}0 & \beta^{\mathrm{T}}\alpha=0\\ 1 & \text{其他}\end{cases}.$$

7．设 A 是 m 阶满秩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，试证明 $ABx=0$ 与 $Bx=0$ 是同解方程组，并进一步利用齐次线性方程组的有关定理，说明 $r(AB)=r(B)$.

证：①先证 $Bx=0$ 的解均为 $ABx=0$ 的解，若 x 是 $Bx=0$ 的解，则以 $Bx=0$ 代入 ABx，显然有 $ABx=0$；

②再证 $ABx=0$ 的解均为 $Bx=0$ 的解，其实由 A 为满秩阵，在 $ABx=0$ 两边同时左乘 A^{-1}，即得 $Bx=A^{-1}0=0$；

由①、②即知 $ABx=0$ 与 $Bx=0$ 是同解方程组，且它们在能得出其任一解的通解式中含有的任意参数个数必相同，即

$$n-r(AB)=n-r(B)\text{，亦即 } r(AB)=r(B).$$

3.2 齐次线性方程组

1． 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & a & 1\\ 1 & 1 & b\end{bmatrix}$, 设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1, & 0, & 1\end{bmatrix}^T$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}0, & 1, & 1\end{bmatrix}^T$ 为 $Ax=0$ 的两个解向量，则 $a=$____, $b=$_____.

解: $-1,-1$.

2.若线性方程组 $\begin{cases}x_1+3x_2+ax_3=1\\ 2x_1+6x_2-8x_3=1\end{cases}$ 无解,则常数 $a=$_____.

解: $a=\underline{-4}$.

3. 方程组 $A_{3\times5}x_{5\times1}=0$ 必（　）.

（A） 无解；　　（B）仅有零解；

（C） 有非零解；　　（D）以上都不是.

解：C.

4. 讨论下列齐次线性方程组是否有非平凡解（即非零解）？若有，则求出其通解.

（1）$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0 \\ x_2-3x_3=0 \\ x_1-2x_2+5x_3=0 \\ -2x_1+x_3=0 \end{cases}$；（2）$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0 \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0 \end{cases}$.

（1）解：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由 $r(A)=3$=未知数个数，知原方程只有零解.

（2）解：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{bmatrix}\underset{r_{13}(-1)}{\overset{r_{12}(-2)}{\sim}}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由 $r(A)=2<3$ 知原方程组有非零解，且原方程组的解为

$\begin{cases} x_1=2x_3+\dfrac{5}{3}x_4 \\ x_2=-2x_3-\dfrac{4}{3}x_4 \end{cases}$，令 $x_3=c_1, x_4=c_2$，则得通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, (c_1, c_2 \in R)$$

5.设线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2 x_3 = 0 \end{cases}$ 与方程 $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$ 有公共解,求 a 的值及所有公共解.

解: 因为方程组**错误！未找到引用源。**与**错误！未找到引用源。**的公共解,即为联立方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2 x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \end{cases}$$

的解.对方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 施以行初等变换:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{array}\right] = B$$

因为方程组有解, 所以 $a = 1$或$a = 2$,

当 $a = 1$时, $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, **错误！未找到引用源。**与**错误！未找到引用源。**的公共解为 $x = c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

当 $a=2$时，$B\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right]$，**错误！未找到引用源。**与**错误！未找到引用源。**的公共解为 $x=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$.

6．已知三阶非零矩阵 B 的每一列都是方程组 $\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-1&\lambda\\3&1&-1\end{bmatrix}x=0$ 的解，求：（1）λ 的值；　　（2）$|B|$；　　（3）一个矩阵 B．

解:（1）若记矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-1&\lambda\\3&1&-1\end{bmatrix}$，则由题意可知 $Ax=0$ 有非零解，

故由 $\begin{vmatrix}1&2&-2\\2&-1&\lambda\\3&1&-1\end{vmatrix}=0$，解得 $\lambda=1$.

（2）由（1）知方程组的系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-1&1\\3&1&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&-5&5\\0&-5&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

即 $r(A)=2$，故方程组 $Ax=0$ 有无穷多个解，但通解表达式中只有 $3-r(A)=3-2=1$ 个任意参数，且由通解为 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},(c\in R)$

知矩阵 B 的每一列必为向量$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$的倍数，即各列对应成比例，故由行列式性质，知$|B|=0$.

另解（2）：假设$|B|\neq 0$，则 B 为可逆阵，由题意知 $AB=O$，右乘 B^{-1}可得 $A=O$ 矛盾，所以$|B|=0$.

（3）由（2）的分析，可取矩阵 $B=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$即可.

3.3 非齐次线性方程组

1．填空题：

（1）线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2=a_1\\x_2-x_3=a_2\\x_3-x_4=a_3\\x_4-x_5=a_4\\x_5-x_1=a_5\end{cases}$有解的充分必要条件是________.

解：$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$.

(2) 设方程组(I) $\begin{cases}-2x_1+x_2+ax_3-5x_4=1\\x_1+x_2-x_3+bx_4=4\\3x_1+x_2+x_3+2x_4=c\end{cases}$ 与(II) $\begin{cases}x_1+x_4=1\\x_2-2x_4=2\\x_3+x_4=-1\end{cases}$ 同解，则 $a=$_______， $b=$_______， $c=$_______ .

解：$a=-1, b=-2, c=4$.

2. 选择题：

(1)设 $Ax=0$ 是对应 $Ax=b$ 的齐次线性方程组，则下列结论正确的

是（　）.

（A）若 $Ax=0$ 仅有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解；

（B）若 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷多解；

（C）若 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 仅有零解；

（D）若 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 有非零解.

(2) 设 $m\times n$ 矩阵 A 秩为 r，则非齐次线性方程组 $Ax=b$（　）.

（A） $r=m$ 时有解；　　（B） $r=n$ 时有唯一解；

（C） $m=n$ 是有唯一解；　　（D） $r<n$ 时有无穷多个解.

(3)设 A 为 $m\times n$ 矩阵, $b\neq 0$, 且 $r(A)=n$, 则线性方程组 $Ax=b$ (　).

（A）有唯一解；　　（B）有无穷多解；

（C）无解；　　（D）可能无解.

解: (1)D;　(2)A;　(3)D.

3. 设 a_1,a_2,a_3 是互不相同的常数, 证明方程组 $\begin{cases} x_1+a_1x_2=a_1^2 \\ x_1+a_2x_2=a_2^2 \\ x_1+a_3x_2=a_3^2 \end{cases}$ 无解.

证：$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & a_1 & \vdots & a_1^2 \\ 1 & a_2 & \vdots & a_2^2 \\ 1 & a_3 & \vdots & a_3^2 \end{bmatrix}$，由范德蒙德行列式知

$$\left|\overline{A}\right|=(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_2-a_1)\neq 0,$$

故 $r(\overline{A})=3$, 而 $r(A)=2$，所以由 $r(A)\neq r(\overline{A})$, 知方程组无解.

4. 求解下列非齐次线性方程组

（1）$\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3-2x_4=3 \\ x_1-2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4=2 \end{cases}$；（2）$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5 \end{cases}$.

（1）解：由

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}2&1&2&-2&\vdots&3\\1&-2&3&-1&\vdots&1\\3&-1&5&-3&\vdots&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&3&-1&\vdots&1\\0&5&-4&0&\vdots&1\\0&5&-4&0&\vdots&-1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&-2&3&-1&\vdots&1\\0&5&-4&0&\vdots&1\\0&0&0&0&\vdots&-2\end{bmatrix}$$

知 $r(A)=2\neq 3=r(\overline{A})$，故方程组无解.

（2）解：由

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&-2&1&1&\vdots&1\\1&-2&1&-1&\vdots&-1\\1&-2&1&5&\vdots&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&1&1&\vdots&1\\0&0&0&-2&\vdots&-2\\0&0&0&4&\vdots&4\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&-2&1&0&\vdots&0\\0&0&0&1&\vdots&1\\0&0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}$$

知 $r(A)=r(\overline{A})=2<4$，故方程组有无穷多个解，且有

$$\begin{cases}x_1=2x_2+(-1)x_3\\ x_4=1\end{cases}$$

令 $x_2=c_1,x_3=c_2$，则通解为 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix},(c_1,c_2\in R)$.

5. a,b 取何值时，线性方程组

$$\begin{bmatrix}1&3&-2&-1\\0&1&3&2\\1&4&a&1\\1&7&10&a+6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\b\end{bmatrix}$$

有唯一解、无穷多个解、无解？并在有无穷多个解时求出其通解。

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&3&-2&-1&\vdots 0\\0&1&3&2&\vdots 1\\1&4&a&1&\vdots 1\\1&7&10&a+6&\vdots b\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&-2&-1&\vdots&0\\0&1&3&2&\vdots&1\\0&0&a-1&0&\vdots&0\\0&0&0&a-1&\vdots&b-4\end{bmatrix}$$

(1) 当$a\neq 1$时，$r(A)=r(\overline{A})=4$有唯一解;

(2) 当$a=1$且$b\neq 4$时,$r(A)\neq r(\overline{A})$无解;

(3) 当$a=1$且$b=4$时，$r(A)=r(\overline{A})=2<4$有无穷多解,此时,由

$$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&0&-11&-7&\vdots&-3\\0&1&3&2&\vdots&1\\0&0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}$$,得所求通解

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\boldsymbol{c}_1\begin{bmatrix}11\\-3\\1\\0\end{bmatrix}+\boldsymbol{c}_2\begin{bmatrix}7\\-2\\0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\in\boldsymbol{R}.$$

6. 问λ 取何值时方程组有唯一解、无穷多个解、无解？并在有无穷多个解时求出其通解。

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}.$$

解：考虑到系数矩阵是个含所有参数的方阵，且由

$$\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+3)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+3)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+3)\lambda^2$$

可知

①当$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq -3$时，方程有唯一解；

② 当λ=0时，$\bar{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&0\\1&1&1&\vdots&3\\1&1&1&\vdots&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&3\\0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}$,由$r(A)\neq r(\bar{A})$

知方程组无解；

③当λ=−3时，

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}-2&1&1&\vdots&0\\1&-2&1&\vdots&3\\1&1&-2&\vdots&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&\vdots&-3\\0&-3&3&\vdots&6\\0&3&-3&\vdots&-6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&\vdots&-1\\0&1&-1&\vdots&-2\\0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}$$

由$r(A)=r(\bar{A})=2<3$,知方程组有无穷多个解，且有$\begin{cases}x_1=-1+x_3\\x_2=-2+x_3\end{cases}$，

令$x_3=c$，则通解为$x=\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},(c\in R)$.

华东理工大学

线性代数

作业簿（第五册）

学　院____________专　业____________班　　级____________

学　号____________姓　名____________任课教师____________

4.1 向量组的线性相关与线性无关

1. 向量组 $\alpha_1=[1,3,0,0]^T$，$\alpha_2=[5,0,-3,0]^T$，$\alpha_3=[2,0,0,6]^T$ 线性______关．

解：无.

2. 选择题：

（1）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是（　）.

（A）存在全为零的一组数 $k_1,k_2,...,k_s$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$；

（B）存在不全为零的一组数 $k_1,k_2,...,k_s$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$；

（C）对于任何一组不全为零的数 $k_1,k_2,...,k_s$，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$；

（D）$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 中任意两个向量线性相关.

解：(C).

（2）下列命题中正确的是(　　).

（A）若整个向量组线性相关,则必有部分组也线性相关;

（B）若整个向量组线性相关,则其中必有零向量;

（C）若有一部分组线性无关,则其整个向量组必线性无关;

（D）若有一部分组线性相关,则其整个向量组必线性相关.

解：(D).

3. 向量$\beta=[1,1,1]^T$能否由下列向量组线性表示？若能，请表示出来.

（1）$\alpha_1=[1,0,-3]^T$，$\alpha_2=[2,0,5]^T$，$\alpha_3=[6,0,8]^T$；

（2）$\alpha_1=[1,-3,0]^T$，$\alpha_2=[1,-7,0]^T$，$\alpha_3=[0,0,1]^T$.

解:（1）若记矩阵$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，则问题转变为非齐次线性方程组$Ax=\beta$是否有解，故只需判断$r(A)$是否等于$r(A|\beta)$.

而$[A\,|\,\beta]=\begin{bmatrix}1&2&6&1\\0&0&0&1\\-3&5&8&1\end{bmatrix}$，显然$r(A)=2\neq 3=r(A|\beta)$，故$Ax=\beta$无解，即$\beta$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

（2）由$[A\,|\,\beta]=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\-3&-7&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$得$r(A)=\ r(A|\beta)$，故$\beta$能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且$\beta=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

4. 已知向量$\alpha_1=[\lambda,\lambda,\lambda]^T$，$\alpha_2=[\lambda,2\lambda-1,\lambda]^T$，$\alpha_3=[2,3,\lambda+3]^T$，$\beta=[1,1,2\lambda-1]^T$，问$\lambda$取何值时，

（1）β可由α_1，α_2，α_3线性表示，且表达式唯一？

（2）β可由α_1 ，α_2，α_3线性表示，且表达式不唯一？

（3）β不可由α_1 ，α_2，α_3线性表示？

解：记$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，则问题转变为判断非齐次方程组$Ax=\beta$是否有唯一解，有无穷多个解以及无解.

由$[A\,|\,\beta]=\begin{bmatrix} \lambda & \lambda & 2 & \vdots\, 1 \\ \lambda & 2\lambda-1 & 3 & \vdots\, 1 \\ \lambda & \lambda & \lambda+3 & \vdots\, 2\lambda-1 \end{bmatrix}$及$A$是含参方阵，知可通过$|A|$来讨论$Ax=\beta$解的情况.

$$|A|=\begin{vmatrix} \lambda & \lambda & 2 \\ \lambda & 2\lambda-1 & 3 \\ \lambda & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$$

①当$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq -1$且$\lambda\neq 1$时，由克拉默法则知$Ax=\beta$有唯一解，即β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一线性表示；

②当$\lambda=0$时，

$$[A\,|\,\beta]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & \vdots\, 1 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots\, 1 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots\, -1 \end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & \vdots\, -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots\, \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots\, -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

即$r(A)\neq r(A|\beta)$，亦即$Ax=\beta$无解，故β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；

③ $\lambda=1$时，$[A\mid\beta]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & \vdots 1\\ 1 & 1 & 3 & \vdots 1\\ 1 & 1 & 4 & \vdots 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & \vdots 1\\ 0 & 0 & 1 & \vdots 0\\ 0 & 0 & 0 & \vdots 0\end{bmatrix}$

即$r(A)=r(A|\beta)=2$ ＜3，亦即$Ax=\beta$有无穷多个解，故β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不唯一地线性表示；

④ $\lambda=-1$时，

$$[A\mid\beta]=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2 & \vdots 1\\ -1 & -3 & 3 & \vdots 1\\ -1 & -1 & 2 & \vdots -3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & \vdots -1\\ 0 & -2 & 1 & \vdots 0\\ 0 & 0 & 0 & \vdots -4\end{bmatrix}$$

即$r(A)\neq r(A|\beta)$，故β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；

综合上述得：

（1） 当$\lambda\neq0$且$\lambda\neq-1$且$\lambda\neq1$时，即β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一线性表示

（2） 当$\lambda=1$时，β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表达式不唯一；

（3） 当$\lambda=0$或$\lambda=-1$时，β不可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示。

5. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$中, 前 $n-1$个向量线性相关, 后 $n-1$个向量线性无关, 试讨论:

(1) α_1能否用$\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$线性表示;

(2) α_n能否用$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$线性表示;

解:（1）因为后 $n-1$个向量线性无关，也就是向量$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n$线性无关, 所以 $\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{n-1}$线性无关；又因为前 $n-1$个向量线性相关, 即$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$线性相关，所以$\alpha_1$能用$\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$线性

表示;

(2) 反证法. 假设 α_n 可以用$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$线性表示, 由(1)可知 α_n 可以用$\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$线性表示, 也就是$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n$线性相关, 与题设矛盾. 所以$\alpha_n$不能用$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$线性表示.

6. 判别下列各组向量的线性相关性:

(1) $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$;

(2) $\alpha_1=\begin{bmatrix}17\\8\\-6\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}6\\15\\9\\23\end{bmatrix}$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}29\\-2\\0\\0\end{bmatrix}$;

(3) $\alpha_1=\begin{bmatrix}16\\-12\\33\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}23\\-4\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}15\\16\\27\end{bmatrix}$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}-5\\6\\9\end{bmatrix}$.

解:(1) 因为存在$k_1=0$及$k_2=1$使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$成立, 所以这两向量线性相关.

解:(2) 观察后, 将这四个向量重新排列, 构造矩阵 $A=[\alpha_2,\alpha_4,\alpha_1,\alpha_3]=\begin{bmatrix}3&29&17&6\\0&-2&8&15\\0&0&-6&9\\0&0&0&23\end{bmatrix}$, 则因为$r(A)=4$, 知此四个向量线性无关.

(3) 很明显, 这是 4 个三维向量, 将它们排列成一个矩阵后, 矩阵的秩最多为 3<4, 所以知此四个向量线性相关.

7. 试讨论向量 $\alpha_1=[3,1,2,12]^T$, $\alpha_2=[-1,a,1,1]^T$,

$\alpha_3=\left[1,-1,0,2\right]^T$ 的线性相关性.

解：构造矩阵 $A=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right]$，对 A 做初等行变换

$$A=\begin{bmatrix}3&-1&1\\1&a&-1\\2&1&0\\12&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&a&-1\\0&1&-2/5\\0&0&3-a\\0&0&0\end{bmatrix}，所以$$

①若 $a=3$，向量组线性相关；

②若 $a\neq 3$，向量组线性无关.

8．已知向量组 α_1，α_2，… ，α_n 线性无关，且 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，

$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，… $\beta_n=\alpha_n+\alpha_1$，试讨论 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_n$，的线性相关性.

解：记矩阵 $A=\left[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right]$，$B=\left[\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\right]$依题意，则有

$$B=\left[\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\right]=\left[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right]\begin{bmatrix}1&&&&1\\1&1&&&\\&1&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&1&1\end{bmatrix}=AC$$

其中 C 为 n 阶方阵，而 $|C|=\begin{cases}0, & n\text{为偶数时}\\2, & n\text{为奇数时}\end{cases}$，由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关知矩阵 A 满秩，所以

① 当 n 为偶数时，即 C 为降秩阵时，由 B=AC 及 $r(B)\leq\min\{r(A),r(C)\}<n$ 知 B 必为降秩阵，亦即 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 线性相关；

当 n 为奇数时，即 C 为满秩阵时，由 B=AC 及 $r(B)=r(A)=n$ 知 B 必为满秩阵，亦即 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 线性无关.

9. 设 A 为 3 阶方阵, α 为 3 维列向量, 已知向量组 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$ 线性无关, 且 $A^3\alpha = 5A\alpha - 3A^2\alpha$, 求证矩阵 $B = (\alpha, A\alpha, A^4\alpha)$ 可逆.

证明: 由于 $A^3\alpha = 5A\alpha - 3A^2\alpha$, 所以

$A^4\alpha = 5A^2\alpha - 3A^3\alpha = 5A^2\alpha - 3(5A\alpha - 3A^2\alpha) = 14A^2\alpha - 15A\alpha$.

从而 $B = (\alpha, A\alpha, A^4\alpha) = (\alpha, A\alpha, A^2\alpha)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$, 所以

$|B| = |(\alpha, A\alpha, A^2\alpha)|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 14 \end{vmatrix} \neq 0$, 所以 B 可逆.

4.2 向量组的秩

1. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩都等于 3, 而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 的秩等于 4, 那么向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 + \alpha_5$ 的秩为____.

解: 4.

2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 是两个 n 维向量组, 且两个向量组的秩都为 r, 则(　)

(A)两个向量组等价

(B)向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 的秩也为 r

(C)当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表示时, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 也可

以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示

(D)当 $t=s$ 时，两向量组等价

解：C.

3. 已知 $Q=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & 6 & t\\ -3 & -9 & 6\end{bmatrix}$，$P\neq O$ 是三阶方阵，且 $PQ=O$，则( ).

(A) $t=-4$ 时，$r(P)=1$；　　(B) $t\neq-4$ 时，$r(P)=1$；

(C) $t=-4$ 时，$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{P})=2$；　　(D) $t\neq-4$ 时，$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{P})=2$.

解：B.

4. 设 A,B 为 n 阶方阵，P,Q 为 n 阶可逆矩阵，下列命题不正确的是( )

(A) 若 $B=AQ$，则 A 的列向量组和 B 的列向量组等价

(B) 若 $B=PA$，则 A 的行向量组和 B 的行向量组等价

(C) 若 $B=PAQ$，则 A 的行(列)向量组和 B 的行(列)向量组等价

(D) 若 A 的行(列)向量组和 B 的行(列)向量组等价，则矩阵 A 和 B 等价

解：C

5. 求下列向量组的秩，并求出一个最大无关组.

(1) $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\4\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\3\\1\\2\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}3\\0\\7\\2\end{bmatrix}$，$\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix}$，$\alpha_5=\begin{bmatrix}2\\1\\5\\6\end{bmatrix}$；

（2）$\beta_1=\begin{bmatrix}-1\\4\\0\\2\end{bmatrix}$，$\beta_2=\begin{bmatrix}5\\1\\3\\0\end{bmatrix}$，$\beta_3=\begin{bmatrix}3\\-2\\4\\-1\end{bmatrix}$.

解：（1）构造 $A=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\right]$，则由 $A\sim\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&3&1&2\\0&0&0&0&4\end{bmatrix}$知

$r(A)$=4，即向量组的秩为 4，并可取非零行首非零元所在列对应的原向量作为最大无关组，取$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$或$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$即可.

解：（2）由 $B=\left[\beta_1,\beta_2,\beta_3\right]\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$知$r(B)$=3，即向量组的秩为 3，且最大无关组即向量组本身.

6. 证明下列两个向量组是等价的.

（1）$\alpha_1=\left[3,-1,1,0\right]^T$，$\alpha_2=\left[1,0,3,1\right]^T$，$\alpha_3=\left[-2,1,2,1\right]^T$；

（2）$\beta_1=\left[0,1,8,3\right]^T$，$\beta_2=\left[-1,1,5,2\right]^T$.

解：若记 $A=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right]$，$B=\left[\beta_1,\beta_2\right]$，由两向量组等价即可以互相线性表示，知问题转化为矩阵方程 $AX=B$ 及 $BY=A$ 同时有解，由非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 解的理论知 $AX=B$ 及 $BY=A$ 有解的充要条件是$r(A)=r(A|B)$及$r(B)=r(B|A)$，亦即

$$r(A)=r(B)=r(A|B)$$

现由 $\left[A \mid B\right]=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & \vdots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 知

$r(A)=r(B)$

$=r(A|B)$=2，即向量组（1）和（2）等价.

7. 已知向量组 e_1，e_2，…e_n 可由向量组 α_1，α_2，…，α_n 线性表示，试证 α_1，α_2，…，α_n 线性无关，其中 e_i（i=1，2，…，n）是 n 阶单位矩阵的第 i 列.

证：由定理“若向量组 A 可由向量组 B 线性表示则向量组 A 的秩不大于向量组 B 的秩”，及 $e_1,e_2,\ldots,e_n$ 的秩为 n，知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的秩必大于等于 n，而它只含 n 个向量，故 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的秩只能为 n，亦即 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的线性无关.

8. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，求证：（1）如果 $m>n$，则 $|AB|=0$；（2）如果 $m<n$ 且 $AB=I$，则 $r(B)=m$.

证：（1）由矩阵秩的理论，可知 $r(A)\le\min\{m,n\}=n$，$r(B)\le\min\{m,n\}=n$ 以及 $r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$，于是 $r(AB)\le n$，而 AB 是 $m\times m$ 矩阵，故由 $m>n$ 知 AB 是降秩阵，即 $|AB|=0$；

（2）若 $m<n$，则一方面 $r(B)\le\min\{m,n\}=m$；另一方面由 $r(I)=r(AB)\le r(B)$ 及 AB 是 $m\times m$ 矩阵知有 $m\le r(B)$，综合得 $r(B)=m$.

9. 称满足$A^2=I$的矩阵$\boldsymbol{A}$为对合阵，试证对任一$\boldsymbol{n}$阶对合阵$\boldsymbol{A}$，有$r(A+I)+r(A-I)=n$.

证：由$A^2=I$，一方面知A是满秩阵，另一方面得$(A+I)(A-I)=O$，由矩阵的不等式，一方面，有$0=r(O)=r((A+I)(A-I))\geq r(A+I)+r(A-I)-n$，即

$$r(A+I)+r(A-I)-n\leq 0,$$

另一方面

$n=r(2I)=r((A+I)+(I-A))\leq r(A+I)+r(I-A)=r(A+I)+r(A-I)$

即$r(A+I)+r(A-I)\geq n$，综合可得$r(A+I)+r(A-I)=n$.

10. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关, 向量$\beta_1$可由这组向量线性表示, 而向量$\beta_2$不能由这组向量线性表示, 证明：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,c\beta_1+\beta_2$必线性无关(其中$c$为常数).

证明：设存在常数$k_1,k_2,\ldots,k_n,k$使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_n\alpha_n+k(c\beta_1+\beta_2)=0$

则一定有$k=0$,否则，β_2就可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta_1$线性表示, 进而可以由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性表示, 这与题设矛盾, 故$k=0$,即

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_n\alpha_n=0$

又因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关, 所以有$k_1=k_2=\ldots=k_n=0$.

从而可知当$k_1 = k_2 = \ldots = k_n = k = 0$时, 式子

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_n\alpha_n + k(c\beta_1 + \beta_2) = 0$$

成立, 故向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, c\beta_1 + \beta_2$线性无关.

华东理工大学

线性代数

作业簿（第六册）

学　院_____________专　业_____________班　　级_____________

学　号_____________姓　名_____________任课教师_____________

4.3　向量空间

1．设 A^* 为 6 阶方阵 A 的伴随矩阵，则当 A 的秩为 2 时，齐次线性方程组 $A^*x=0$ 的解空间的维数为______,而当 A 的秩为 5 时，齐次线性方程组 $A^*x=0$ 的解空间的维数为_____.

解：6；5.

2.　设 A^* 为 $n\quad(n>2)$ 阶方阵 A 的伴随矩阵，设对任意的 n 维向量 x 均有 $A^*x=0$，则齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系中所含向量个数 k 满足(　　)

(A)　$k=n$　；　　　　(B)　$\boldsymbol{k}=1$；

(C)　$\boldsymbol{k}=0$；　　　　(D)　$\boldsymbol{k}>1$.

解：D.

3. 设 A 为 n 阶矩阵，若 $r(A)=n-3$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 $Ax=0$ 的三个线性无关的解向量，则下列各组中为 $Ax=0$ 的基础解系是（　　）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$　；　　(B)　$\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$；

(C)　$2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,0$；　　　　(D)　$\boldsymbol{\alpha}_1,3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,-2\boldsymbol{\alpha}_1$.

解：B.

4. 设 $V_1 = \left\{ x = [x_1, x_2, x_3]^T \middle| x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ \ x_i \in R,\ \ i = 1,2,3 \right\}$，

$V_2 = \left\{ x = [x_1, x_2, x_3]^T \middle| x_1 + x_2 + x_3 = -1,\ \ x_i \in R,\ \ i = 1,2,3 \right\}$, 问 R^3的这两个子集，对 R^3的线性运算是否构成向量空间，为什么？

解：按向量空间理论，只需验证每个子集对 R^3 的线性运算是否满足封闭性.

先看V_1， $\forall x = [x_1, x_2, x_3]^T$， $y = [y_1, y_2, y_3]^T \in V_1$，及常数 k，有

$x + y = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3]^T$ 及

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) = 0 + 0 = 0$$

即对加法满足封闭性；而 $kx = [kx_1, kx_2, kx_3]^T$， 及

$$kx_1 + kx_2 + kx_3 = k(x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

亦即对数乘满足封闭性，故V_1构成向量空间.

再看V_2， $\forall x, y \in V_2$，有 $x + y = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3]^T$， 但

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) = -1 - 1 = -2$$

即 $x + y \notin V_2$，亦即对加法不满足封闭性，故V_2不构成向量空间.

5．试求由α_1， α_2， α_3生成的向量空间 V=*span*（α_1， α_2， α_3）的一个基及 V 的维数 dim$V$， 其中 $\alpha_1 = [1, 2, -3, 0]^T$ ，$\alpha_2 = [-1, -1, 5, 2]^T$， $\alpha_3 = [0, 1, -2, 2]^T$.

解：由于 V 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的生成子空间，故 V 的基及维数完全等价于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的最大无关组及秩. 由

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&-3&1\\-3&5&-2\\0&2&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&-1&1\\-3&5&-2\\0&2&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&-1&1\\0&2&-2\\0&2&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

知可取 α_1,α_2 为 V 的一个基，且 $\dim V=2$.

6. 已知一个四维向量组 $\alpha_1=[1,3,-2,1]^T$，$\alpha_2=[0,-1,5,2]^T$，$\alpha_3=[3,8,-1,5]^T$，$\alpha_4=[1,6,-17,-5]^T$，（1）求 α_1，α_2，α_3，α_4 的一个最大无关组及秩；（2）将其余向量用这个最大无关组来线性表示；

解：构造矩阵 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$ 并进行初等行变换，由

$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$=

$$\begin{bmatrix}1&0&3&1\\3&-1&8&6\\-2&5&-1&-17\\1&2&5&-5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&-1&-1&3\\0&5&5&-15\\0&2&2&-6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

知

（1） 秩为 2，可取 α_1,α_2 为一个最大无关组；

（2） 由初等行变换的结果矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，知

$\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 - 3\alpha_2$.

7. 求下列齐次线性方程组的基础解系

（1）$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 + 7x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$；

（2）$nx_1 + (n-1)x_2 + \ldots + 2x_{n-1} + x_n = 0$.

解：（1）由 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 7 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 即 $r(A)=3<4$，知方程组有非零解，且基础解系中含有 $4-r(A)=1$ 个线性无关解向量. 解为 $\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$, 即知基础解系为 $\xi = [-1, 2, 1, 0]^T$.

解：（2）显然方程组有非零解，且基础解系中含 $n-1$ 个线性无关解向量，由解为 $x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \ldots - 2x_{n-1}$ ，即知基础解系为

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -n \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1-n \end{bmatrix}, \ldots, \eta_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，试证 $r(A^n)=r(A^{n+1})$.

证：我们通过证明 $A^n x=0$与$A^{n+1}x=0$ 是同解方程组来说明问题.

显然，$A^n x=0$ 的解都是 $A^{n+1}x=0$ 的解，下证 $A^{n+1}x=0$ 的解 x 是 $A^n x=0$ 的解. 否则，若 $A^n x\neq 0$，考虑向量组 $x, Ax, A^2x,\ldots,A^{n-1}x$，$A^n x$, 若

$$k_0x+k_1Ax+k_2A^2x+\ldots+k_{n-1}A^{n-1}x+k_nA^nx=0 \qquad (*)$$

在上式两边左乘 A^n，利用 $A^{n+1}x=A^{n+2}x=\ldots=A^{2n}x=0,$ 得 $k_0A^nx=0$，而 $A^nx\neq 0$，故必有 k_0=0，此时，（*）式变为

$$k_1Ax+k_2A^2x+\ldots+k_{n-1}A^{n-1}x+k_nA^nx=0,$$

再用 $A^{n-1}x$ 左乘上式两端，必得 $k_1=0$，依次类推，最终必有 $k_0=k_1=k_2=\ldots=k_{n-1}=k_n=0$，这说明 n+1 个向量 $x, Ax, A^2x,\cdots,$ $A^{n-1}x, A^nx$ 是线性无关的，而这显然与“n+1 个 n 维向量必线性相关”矛盾，故说明假设错误，即只有 $A^nx=0$.

综合上述，知 $A^nx=0$与$A^{n+1}x=0$ 同解，进而有 $r(A^n)=r(A^{n+1})$.

4.4 线性方程组解的结构

1．填空题

(1) 已知非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有通解表达式 $x=\left[2,3,6,-5\right]^T t+\left[0,5,5,3\right]^T,(t\in R)$, 则 $r\left(A\right)=$______.

解：3.

(2) 设 A 是3阶方阵，$r(A)=2$，且 A 中每行元素之和均为零, 则

齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解为________________.

解： $x=\left(c,\quad c,\quad c\right)^{T},c\in R$.

(3) 已 知 ξ_1,ξ_2,ξ_3 为 非 齐 次 线 性 方 程 组 的 三 个 解 ， 又 $\xi_1+\xi_2=\left(3,\quad 0,\quad 1\right)^{T}$，$\xi_3=\left(2,\quad -1,\quad 0\right)$ 且 $\boldsymbol{r(A)=2}$，则 $Ax=b$ 的通解为__________________________________.

解： $x=\left(1,\quad -2,\quad -1\right)^{T}c+\left(2,\quad -1,\quad 0\right)^{T},c\in R$.

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 $Ax=b$ 的解，则（　　）是 $Ax=0$ 的解.

（A）$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$；　　（B）$2\alpha_1+3\alpha_2-5\alpha_3$；

（C）$\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$；　　（D）$\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$.

解：B.

3．已知非齐次线性方程组系数矩阵的秩为 2，又已知该非齐次线性方程组的三个解向量为 $x_1=\left[1,-1,-2,3\right]^{T}$，$x_2=\left[3,2,0,-4\right]^{T}$，$x_3=\left[1,-5,3,1\right]^{T}$，试求该方程组的通解.

解：由方程组未知数个数为 4 及系数矩阵的秩为 2，知其对应的齐次线性方程组的基础解系中只含两个线性无关解向量，再由“非齐次线性方程组两个解的差必为对应的齐次线性方程组的解”，以及 $x_1-x_2=\left[-2,-3,-2,7\right]^{T}$，$x_1-x_3=\left[0,4,-5,2\right]^{T}$ 线性无关. 知非齐次线性方程组的通解等于它自身的一个特解加上它对应的齐次线性方程组的通解，即通解 $\boldsymbol{\xi=x_1+c_1(x_1-x_2)+c_2(x_1-x_3)}$

$$\boldsymbol{=\left[1,-1,-2,3\right]^{T}+c_1\left[-2,-3,-2,7\right]^{T}+c_2\left[0,4,-5,2\right]^{T}\ \left(c_1,c_2\in R\right)}.$$

4. 设非齐次线性方程 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩 $r(A_{5\times3})=2$， η_1,η_2 是

该方程组的两个解，且有 $\eta_1+\eta_2=\left[2,-1,1\right]^T$，$3\eta_1+5\eta_2=\left[-6,0,5\right]^T$，求该方程组的通解.

解：依题意，非齐次线性方程组 $Ax=b$ 对应的齐次线性方程组的基础解系中只含 3- $r(A)$ =1 个解向量，按照非齐次线性方程组与其对应的齐次线性方程组两者解的结构及相互关系，可取 $\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)$为$Ax=b$的一个特解，可取 $\mathbf{\frac{1}{8}(3\eta_1+5\eta_2)-\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)}$ 为对应的齐次线性方程组的基础解系，则 $Ax=b$ 的通解为

$$\eta=\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)+c\left[\frac{1}{8}(3\eta_1+5\eta_2)-\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\right]$$

$$=\left[1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^T+c\left[-\frac{7}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right]^T(c\in R).$$

5. 已知向量η_0，η_1，…，η_{n-r} 为 $A_{m\times n}\ x=b$ 的 n-r+1 个线性无关解，且 $r(A)$ =r. 试证：(1) $\eta_1-\eta_0$，$\eta_2-\eta_0$，…，$\eta_{n-r}-\eta_0$ 为 $Ax=0$ 的一个基础解系；（2）$Ax=b$ 的通解可由 η_0，η_1，…，η_{n-r} 线性表示，且系数和为 1.

证：(1) 依题意，只要证明 $\eta_1-\eta_0$，$\eta_2-\eta_0$，…，$\eta_{n-r}-\eta_0$ 是 Ax=0 的线性无关的解向量即可，而它们是 Ax=0 的解向量很显然，故下证 $\eta_1-\eta_0$，$\eta_2-\eta_0$，…，$\eta_{n-r}-\eta_0$ 线性无关. 考虑

k_1（$\eta_1-\eta_0$）+k_2（$\eta_2-\eta_0$）+…+k_{n-r}（$\eta_{n-r}-\eta_0$）=0，即

$$-（k_1+k_2+\ldots+k_{n-r}）\eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\ldots+k_{n-r}\eta_{n-r}=0,$$

由 η_0，η_1，η_2，…，η_{n-r} 线性无关，知必有

$$\begin{cases} -(k_1+k_2+\ldots+k_{n-r}) & =0 \\ k_1 & =0 \\ k_2 & =0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ k_{n-r} & =0 \end{cases}$$

故而$\eta_1-\eta_0$，$\eta_2-\eta_0$，…，$\eta_{n-r}-\eta_0$线性无关.

证：(2) 由解的结构知$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解为

$$k_1（\eta_1-\eta_0）+k_2（\eta_2-\eta_0）+\ldots+k_{n-r}（\eta_{n-r}-\eta_0）+\eta_0$$

$$=[1-（k_1+k_2+\ldots+k_{n-r}）]\eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\ldots+k_{n-r}\eta_{n-r}$$

且其系数和为 1.

4.5 向量的内积

1. 将向量组$\alpha_1=[1,1,1]^T$，$\alpha_2=[2,0,0]^T$，$\alpha_3=[1,1,0]^T$规范正交化.

解：利用施密特正交化公式，即得$\beta_1=\alpha_1=[1,1,1]^T$；

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{<\alpha_2,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1=[1,1,1]^T-\frac{1}{3}[2,0,0]^T=\left[\frac{4}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right]^T;$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{<\alpha_3,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1-\frac{<\alpha_3,\beta_2>}{<\beta_2,\beta_2>}\beta_2=\left[0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right]^T.$$

再进行单位化，即得

$$\varepsilon_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]^T,\varepsilon_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}[2,-1,-1]^T,\varepsilon_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}[0,1,-1]^T.$$

2．已知α_1，α_2，α_3为 n 维规范正交向量组，且$\beta_1=2\alpha_1+2\alpha_2+$

$\lambda\alpha_3$，β_2=2α_1−2$\lambda\alpha_2$+$\lambda\alpha_3$，问λ为何值时，向量β_1，β_2正交？当它们正交时，求出$\|\beta_1\|$，$\|\beta_2\|$.

解：正交即内积为零，为使β_1,β_2正交，必有$<\beta_1,\beta_2>=0$,也即

$$<\beta_1,\beta_2>=\beta_1^T\beta_2=(2\alpha_1+2\alpha_2+\lambda\alpha_3)^T(2\alpha_1-2\lambda\alpha_2+\lambda\alpha_3)$$

$$=4\alpha_1^T\alpha_1+4\alpha_2^T\alpha_1+2\lambda\alpha_3^T\alpha_1-4\lambda\alpha_1^T\alpha_2-4\lambda\alpha_2^T\alpha_2-2\lambda^2\alpha_3^T\alpha_2$$

$+2\lambda\alpha_1^T\alpha_3+2\lambda\alpha_2^T\alpha_3+\lambda^2\alpha_3^T\alpha_3=4-4\lambda+\lambda^2=(\lambda-2)^2=0$（注意，化简过程中利用了$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为规范正交向量组），

故当$\lambda=2$时，β_1,β_2正交.

此时，$\beta_1=2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3,\beta_2=2\alpha_1-4\alpha_2+2\alpha_3$,

于是

$$\begin{aligned}\|\beta_1\|&=\sqrt{<\beta_1,\beta_1>}=\sqrt{\beta_1^T\beta_1}=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}\\ \|\beta_2\|&=\sqrt{<\beta_2,\beta_2>}=\sqrt{\beta_2^T\beta_2}=\sqrt{2^2+(-4)^2+2^2}=2\sqrt{6}\end{aligned}.$$

3. 已知两个正交单位向量$\alpha_1=(\frac{1}{9},-\frac{8}{9},-\frac{4}{9})^T$，$\alpha_2=(-\frac{8}{9},\frac{1}{9},-\frac{4}{9})^T$，试求列向量$\alpha_3$使得以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列向量组成的矩阵$Q$是正交矩阵.

解：依题意，所求的向量α_3应该满足，

$\alpha_1^T\alpha_3=0,\alpha_2^T\alpha_3=0,\|\alpha_3\|=1$.

设向量$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)$，由$\alpha_1^T\alpha_3=0,\alpha_2^T\alpha_3=0$有

$\begin{cases}(1/9)x_1-(8/9)x_2-(4/9)x_3=0;\\(-8/9)x_1+(1/9)x_2-(4/9)x_3=0.\end{cases}$解得：$x_1=-\frac{4}{7}x_3,x_2=-\frac{4}{7}x_3$

再利用$\|\alpha_3\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$得： $x_3 = \pm\frac{7}{9}$

于是所求的向量为

$\alpha_3 = (-\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{7}{9})^T$, 或者 $\alpha_3 = (\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{7}{9})^T$.

华东理工大学

线性代数

作业簿（第七册）

学　院____________专　业____________班　　级____________

学　号____________姓　名____________任课教师____________

5.1 方阵的特征值与特征向量

1. 选择题

(1) 设λ为方阵A的特征值，则 (　).

(A) 矩阵A的对应特征值λ的所有特征向量构成一个向量空间;

(B) 矩阵A的对应特征值λ的特征向量一定有无穷多个;

(C) 对应特征值λ的特征子空间的维数等于矩阵$(A-\lambda I)$的秩;

(D) 矩阵$(A-\lambda I)$一定可逆.

解：B. 若ξ是对应λ的特征向量，那么$k\xi\ \ (k\neq 0)$也是对应λ的特征向量，故有无穷多个。注：特征向量一定是非零向量，矩阵A的对应特征值λ的所有特征向量和零向量一起才构成向量空间，即特征子空间。

(2) 设λ为方阵A的特征值，则矩阵$(A-\lambda I)$一定有特征值 (　).

(A) λ;　　(B) $-\lambda$;　　(C) $1/\lambda$;　　(D) 0.

解：D. 因λ为方阵的A特征值，故矩阵$(A-\lambda I)$的行列式等于0，故0一定是矩阵$(A-\lambda I)$的特征值。

(3) 设n阶方阵A和B有完全相同的特征值，如下错误的是 (　).

(A) $|A|=|B|$;

(B) $tr(A)=tr(B)$;

(C) 矩阵A和B有完全相同的特征向量;

(D) 矩阵A和B有相同的奇异性(同为可逆或同为不可逆).

解：C. 比如二阶矩阵$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$有相同的特征值

$\lambda=1$（二重特征值），但A和B的对应$\lambda=1$的特征向量不同.

(4) 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & a\\ -3 & -3 & 5\end{bmatrix}$，且$A$有特征值$\lambda_1=6, \lambda_2=\lambda_3=2$，则 $a=($ $)$.

(A) 2; (B) -2; (C) 4; (D) -4.

解: B. 一方面$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=24$；又$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & a\\ -3 & -3 & 5\end{vmatrix}=6(6+a)$，

所以得$a=-2$.

(5) 设A为实正交矩阵，即$A^TA=I$，则A的特征值只能是 ( ).

(A) 1; (B) -1; (C) 0; (D) ±1.

解: D. 设λ是A的特征值，x是对应λ的特征向量，即有

$$Ax=\lambda x,$$

所以有

$$(Ax)^T Ax=(\lambda x)^T\lambda x=\lambda^2 x^T x,$$

另一方面，又有

$$(Ax)^T Ax=x^T A^T Ax=x^T Ix=x^T x,$$

结合上述两式得$\lambda^2=1$，即$\lambda=\pm1$.

2. 计算题

（1）求矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$的特征值与特征向量.

解: 由$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 1-\lambda & 2\\ 2 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(5-\lambda)=0$，

得A的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda_3=5$,

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，解方程 $(A+I)x=0$，由

$$A+I=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$，得基础解系为

$$p_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, p_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},$$

故对应$\lambda_1=\lambda_2=-1$的全部特征向量为

$k_1p_1+k_2p_2$　(k_1，k_2不全为零)；

当$\lambda_3=5$时，解方程　$(A-5I)x=0$，由

$$A-5I=\begin{bmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系为　$p_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$,

故对应$\lambda_3=5$的全部特征向量为kp_3　$(k\neq 0)$。.

(2) 已知 3 阶矩阵A有特征值$1,-1,2$, $B=A^3-5A^2$,求B的特征值.

解：当λ是A的特征值时，则矩阵A的多项式$f(A)$必有特征值$f(\lambda)$．记$B=f(A)=A^3-5A^2$，故B有特征值:

$f(1)=-4$，　$f(-1)=-6$，　$f(2)=-12$.

(3) 设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\x&y&z\\0&0&1\end{bmatrix}$，且$A$的特征值为$1,2,3$，求$x,y,z$.

解：$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&3\\x&y-\lambda&z\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)[(1-\lambda)(y-\lambda)-2x]=0$,

因为A有特征值为$1,2,3$得：$\begin{cases}(1-2)[(1-2)(y-2)-2x]=0\\(1-3)[(1-3)(y-3)-2x]=0\end{cases}$,

即$\begin{cases}2x+y-2=0\\x+y-3=0\end{cases}$，解得　$\begin{cases}x=-1\\y=4\end{cases}$，$z$无限制，故

$x=-1, y=1, z\in R$.

(4) 设向量 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量，试求常数 k 的值.

解：设 $A^{-1}\alpha=\lambda\alpha$，左乘 A 得 $\alpha=\lambda A\alpha$，即

$$\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix},$$

即 $\begin{cases}1=\lambda(3+k)\\k=\lambda(2+2k)\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\lambda_1=1\\k_1=-2\end{cases}$，$\begin{cases}\lambda_2=1/4\\k_2=1\end{cases}$，故有 $k=-2$ 或 $k=1$.

3. 证明题

(1) 设 ξ_1,ξ_2 分别是矩阵 A 属于不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，试证：$\xi_1+\xi_2$ 不可能是 A 的特征向量.

证明：设 $\xi_1+\xi_2$ 是 A 的对应于特征值 λ_0 的特征向量，即有

$$A(\xi_1+\xi_2)=\lambda_0(\xi_1+\xi_2)=\lambda_0\xi_1+\lambda_0\xi_2,$$

另一方面，又有

$$A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2,$$

综上得

$$(\lambda_0-\lambda_1)\xi_1+(\lambda_0-\lambda_2)\xi_2=0,$$

再由定理“矩阵对应于不同特征值的特征向量是线性无关的”，知必有 $\lambda_0-\lambda_1=\lambda_0-\lambda_2=0$，即得 $\lambda_1=\lambda_2$，与已知条件 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾，故命题得证.

(2) 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，$\varphi(x)=x^{2010}-3x^{2009}-9x^{2008}-5x^{2007}+1$，

试证明 $\varphi(A)$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，并求 $\varphi(A)$.（本题可选做. 提示：利用哈密尔顿----卡莱定理：若 $f(\lambda)$ 为矩阵 A 的特征多项式，则 $f(A)$ 为零矩阵）

证明：根据计算题(1)知 A 的特征多项式为：

$$f(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 1-\lambda & 2\\ 2 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(5-\lambda),$$

因 A 的特征值为 -1，-1，5，故 $\varphi(A)$ 的特征值为：

$$\varphi(-1),\ \varphi(-1),\ \varphi(5).$$

用 $f(\lambda)$ 去除 $\varphi(\lambda)$ 得：$\varphi(\lambda)=-\lambda^{2007}f(\lambda)+1$，

因 $f(\lambda)$ 为 A 的特征多项式，故 $f(-1)=f(5)=0$，代入得

$\varphi(-1)=\varphi(5)=1$，即 $\varphi(A)$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$.

由 $\varphi(\lambda)=-\lambda^{2007}f(\lambda)+1$，知 $\varphi(A)=-A^{2007}f(A)+I$，

又因 $f(A)=O$，代入得 $\varphi(A)=I$.

5.2 相似矩阵

1.选择题

(1) 设两个不同的 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则错误的选项是 (　　).

(A) $|A|=|B|$;

(B) A 与 B 有相同的特征值;

(C) A 与 B 等价;

(D) 若存在可逆阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵，则 $P^{-1}BP$ 也是对角阵.

解：D. 选项 A，B 显然正确. 又若 A 与 B 相似，则存在可逆阵 P 使 $P^{-1}AP=B$，即 A 可通过矩阵初等变换化为 B，故 A 与 B 等价，即选项 C 也正确.

(2) 已知 A 是 n 阶可逆矩阵，如果 A 与矩阵 B 相似，则下列四个命题中，正确的命题共有(　　)个.

a) AB 与 BA 相似;　　b) A^2 与 B^2 相似;

c) A^{-1} 与 B^{-1} 相似;　　d) A^{T} 与 B^{T} 相似.

(A) 4;　　(B) 3;　　(C) 2;　　(D) 1.

解：A. 选项 b、c、d 显然成立；因为 $A^{-1}(AB)A=BA$，故选项 a 也成立.

(3) 设矩阵 A 与对角阵 $diag(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$ 相似，其中 $\lambda_1\lambda_2...\lambda_n\neq 0$，则如下错误的选项是(　).

(A) 矩阵 A 可逆;　　(B) $tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+,...,+\lambda_n$;

(C) A 与单位阵相似;　　(D) A 有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$.

解：C.　可逆阵一定与单位阵等价，但未必与单位阵相似。选项 A、B、D 显然成立.

2. 判断下列矩阵能否与对角阵相似，并说明理由.

(1) $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{bmatrix}$; (2) $A=\begin{bmatrix}-2&0&-4\\1&2&1\\1&0&3\end{bmatrix}$; (3) $A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$.

解：(1)显然 A 有三个不同的特征值1,2,3，故 A 有三个线性无关的特征向量，　从而 A 相似于对角阵.

(2)　$A-\lambda I=\begin{bmatrix}-2-\lambda&0&-4\\1&2-\lambda&1\\1&0&3-\lambda\end{bmatrix}$,

由 $|A-\lambda I|=-(2-\lambda)^2(\lambda+1)=0$ 得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-1$.

由 $A-2I=\begin{bmatrix}-4&0&-4\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

知方程组 $(A-2I)x=0$ 有两个线性无关的特征向量；

而单根 $\lambda_3=-1$ 必有另一特征向量，故 A 有三个线性无关的特征向量，从而三阶矩阵 A 能够相似于对角阵.

(3) $A-\lambda I=\begin{bmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&-3-\lambda&3\\-1&0&-2-\lambda\end{bmatrix}$,

由 $|A-\lambda I|=-(\lambda+1)^3=0$ 得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

又 $A+I=\begin{bmatrix}3&-1&2\\5&-2&3\\-1&0&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$,

故方程组 $(A+I)x=0$ 只有一个线性无关的特征向量，三阶矩

阵A没有三个线性无关的特征向量，故A不能相似于对角阵.

3. 设矩阵$A=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$，求$A^n$.

解：由$|A-\lambda I|=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，可得矩阵$A$的特征值$\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-2$. 易求：对应特征值$\lambda_1=\lambda_2=1$，有两个线性无关特征向量 $p_1=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$p_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$；

对应特征值$\lambda_3=-2$，有一个线性无关特征向量 $p_3=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$；

令$P=[p_1,p_2,p_3]=\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，则 $P^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

由$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$，得 $A=P\Lambda P^{-1}$， 故

$$A^n=(P\Lambda P^{-1})^n=P\Lambda^n P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^n & & \\ & 1^n & \\ & & (-2)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2-(-2)^n & 2-2(-2)^n & 0 \\ -1+(-2)^n & -1+2(-2)^n & 0 \\ -1+(-2)^n & -2+2(-2)^n & 1 \end{bmatrix}.$$

4．已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 相似，

(1)求 x,y；　(2)求一个可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$.

解: (1) 由 A 相似于 B，得 $|A|=|B|$，$tr(A)=tr(B)$，即

$$-2=-2y,\ 2+0+x=2+y-1,$$

解之得 $x=0,y=1$；

(2) A 与 B 有相同的特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$,

解方程组 $(A-2I)x=0$，得特征向量 $p_1=[1,0,0]^T$,

解方程组 $(A-I)x=0$，得特征向量 $p_2=[0,1,1]^T$,

解方程组 $(A+I)x=0$，得特征向量 $p_3=[0,1,-1]^T$,

令 $P=[p_1,p_2,p_3]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=B$.

5.3 实对称矩阵的对角化

1. 选择题

(1) 设 A 为 n 阶实对称矩阵且有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$，下述错误的选项是 ( ).

(A) 矩阵 A 的特征值均为实数;

(B) 矩阵 A 的特征向量均为实向量;

(C) 矩阵 A 一定与对角阵相似;

(D) 若 $Q^{-1}AQ=diag(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$，则 Q 一定为正交阵.

解：D.

(2) 设 λ 为实对称矩阵 A 的一个 3 重特征根，则 ( ).

(A) 矩阵 A 的对应特征值 λ 的特征向量线性无关;

(B) 矩阵 A 的对应特征值 λ 的特征向量两两正交;

(C) 矩阵 A 有 3 个对应 λ 的两两正交的特征向量;

(D) 矩阵 A 的对应特征值 λ 的特征向量的个数恰好是 3 个.

解：C.

2. 求正交矩阵Q，将下列矩阵正交对角化.

(1) $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$； (2) $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

解：(1) 由$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4)$，可得特征值为$\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$，

当$\lambda_1=-2$，解方程组$(A+2I)x=0$，得基础解系$\xi_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$，单位化得 $q_1=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$；

当$\lambda_2=1$，解方程组$(A-I)x=0$，得基础解系$\xi_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$，单位化得$q_2=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$；

当$\lambda_3=4$，解方程组$(A-4I)x=0$，得基础解系$\xi_3=\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$，单位化得$q_3=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$；

取$Q=[q_1,q_2,q_3]=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$，则有

$$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 4\end{bmatrix}.$$

(2) 由 $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)$，可得

特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$，

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$, 解方程组 $(A-I)x=0$，

得基础解系 $\xi_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$，正交化得 $\beta_1=\xi_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$,

$$\beta_2=\xi_2-\frac{<\xi_2,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{-4}{5}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix},$$

再单位化得 $q_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$，$q_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix}$；

当 $\lambda_3=10$, 解方程组 $(A-10I)x=0$,

得基础解系 $\xi_3=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$，单位化得 $q_3=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$，

取 $Q=[q_1,q_2,q_3]=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$，则有

$$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 10\end{bmatrix}.$$

3. 已知 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 6,3,3, 对应于特征值 3 的特

征向量为 $\alpha_1=[-1,0,1]^T$，$\alpha_2=[1,-2,1]^T$，求 A 的对应于特征值 6 的特征向量及矩阵 A.

解：设 A 的对应特征值 6 的特征向量为 $\alpha_3=[x_1,x_2,x_3]^T$，实对称矩阵的不同特征值所对应的特征向量是正交的，由 α_3 与 α_1,α_2 正交得

$$-x_1+x_3=0 \text{ 和 } x_1-2x_2+x_3=0,$$

任取一非零解，如 $\alpha_3=[1,1,1]^T$，

再令 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}-1&1&1\\0&-2&1\\1&1&1\end{bmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&6\end{pmatrix}$，

所以

$$A=P\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&6\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&1\\0&-2&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&&\\&3&\\&&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&1\\0&-2&1\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&1&1\\0&-2&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&&\\&3&\\&&6\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-3&0&3\\1&-2&1\\2&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}.$$

华东理工大学

线性代数

作业簿（第八册）

学　院____________专　业____________班　　级____________

学　号____________姓　名____________任课教师____________

6.1 二次型及其标准型

1. 填空题

（1） 设矩阵 A 与任意的 n 阶矩阵都合同，则 A=_____.

解：$O_{n\times n}$

（2） 设 n 阶矩阵 A 与正交阵 B 合同，则 $r(A)=$ _____ .

解：n. 因 B 为正交阵，故 B 可逆。A 与 B 合同即存在可逆矩阵 C，使得 $C^{\mathrm{T}}AC=B$，故 $r(A)=r(B)=n$.

(3) 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^2$，则此二次型的矩阵 A = __________，二次型的秩为______，二次型的正交变换标准型为________________.

解：$\begin{bmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-1 & \ldots & -1 \\ & & \ldots & \\ -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{bmatrix}$，$n-1$，$ny_1^2+ny_2^2+\cdots+ny_{n-1}^2$,

提示：二次型的秩就是二次型的矩阵的秩，也是其标准型中非零项的个数（注：标准型不唯一）。因此求二次型的秩有两种方法，

1）直接求二次型的矩阵A的秩，2）先求A的特征值，A有几个非零特征值（重根按重数计算），二次型的秩就是几。

（4）二次型$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax,$ 其中$A^{\mathrm{T}}\neq A$，则二次型的矩阵为__________.

解：$\dfrac{1}{2}(A+A^T)$．提示：A不是二次型的矩阵，因A不是对称阵。注意到$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$的值是一个数，即$f(x)=f^{\mathrm{T}}(x)$，故有$f(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f^{\mathrm{T}}(x)]=x^{\mathrm{T}}\dfrac{1}{2}(A+A\ \ )x$。而$\dfrac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})$为对称阵**.**

（5）设n元（$n>2$）实二次型$f(x)=x^TAx\quad(其中A^{\mathrm{T}}=A)$的正交变换标准型为$y_1^2-2y_2^2$，则$|A|=$ ______，矩阵A的迹为 _____.

解：0, -1．提示：A的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$，根据$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=tr(A),\ \prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$ 易得**.**

（6）若二次型$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$的秩为 2，则参数$c$＝ _____，$f(x_1,x_2,x_3)=1$表示的曲面为__________.

解：3, 椭圆柱面．提示：二次型的矩阵$A_{3\times3}$的秩为 2，故$|A|=0$，由此可求得c=3．再求出A的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$，即标准型为$f=4y_2^2+9y_3^2$，由此知$f(x_1,x_2,x_3)=1$为椭圆柱面.

2．已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1{}^2+3x_2{}^2+3x_3{}^2+2ax_2x_3$（$a>0$）通过正交变换化成标准型$f=y_1{}^2+2y_2{}^2+5y_3{}^2$，求$a$的值及所用的正交变换矩阵$Q$.

解：　二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{bmatrix}$，$|A|=2(9-a^2)$，由

$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 即 $2(9-a^2)=10$　得　$a=2$。A 有三个不同的特征值 1, 2, 5, 故对应这三个特征值的特征向量线性无关。分别求出对应的特征向量 $\xi_1=[0,1,-1]^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=[1,0,0]^{\mathrm{T}}$，$\xi_3=[0,1,1]^{\mathrm{T}}$ 并把它们单位化，得正交变换矩阵为 $Q=\begin{bmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$.

3. 已知二次曲面方程　$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$

可以通过正交变换

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{bmatrix}$$

化为椭圆柱面 $\eta^2+4\zeta^2=4$。求 a, b 的值和正交矩阵 P.

解：由 $A=\begin{bmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&4\end{bmatrix}$ 相似，故 $tr(A)=tr(B)=5$，

$|A|=|B|=0$，进而得 $a=3,\ \ b=1$．代入后分别求出 A 的线性无关的特征向量 $\xi_1=[1,0,-1]^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=[1,-1,1]^{\mathrm{T}}$，$\xi_3=[1,2,1]^{\mathrm{T}}$，显然他们两两正交，把它们单位化，可得正交变换矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}.$$

6.2 正定二次型与正定矩阵

1. 选择题

(1) 设 n 阶方阵 A,B 都正定，则下述选项不正确的是（　　）.

（A）$A+B$ 正定；　　（B）AB 正定；

（C）$\begin{pmatrix}A & \\ & B\end{pmatrix}$ 正定；　　（D）A^*+B^{-1} 正定.

解：B.　AB 未必对称，故不正定**.**

(2) 与“实二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ （其中 $A^{\mathrm{T}}=A$）是正定的”等价的选项是（　　）.

（A） 对任意 x，恒有 $f(x)>0$；

（B） 二次型的负惯性指数为零；

（C） 存在可逆阵 P，使得 $A=P^{\mathrm{T}}P$；

（D）A 的特征值均不小于零**.**

解：C.

(3) 若用 $A<0$ 表示 A 为负定矩阵，则下述选项正确的是（　）.

（A）若 $A<0$，则 $|A|<0$；

（B）若 $A<0$，则 A 的顺序主子式均小于零；

（C）若 $A<0$，则对任意与 A 同阶的可逆阵 C 都有 $C^{\mathrm{T}}AC<0$；

（D）若 $A_1+A_2+\ldots+A_n<0$，则其中至少有一个 $A_i<0$.

解：C. 提示：事实上，$C^{\mathrm{T}}AC<0$ 等价于 $f=x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACx<0$

$(\forall x\neq 0)$，即 $y^{\mathrm{T}}Ay<0 \quad (\forall y\neq 0)$，等价于 $A<0$.

2. 填空题

(1) 设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定二次型，则 t 的取值范围是__________.

解：$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$. 提示：根据二次型矩阵的各阶顺序主子式大于零求解.

(2) 设 A 为一个三阶矩阵，其特征值为−1，−1，2，则当 k 满足______条件时，$f(x)=x^T(A+kI)^3x$ 为正定二次型，此时的规范型为_____________.

解：$k>1$，$x_1^2+x_2^2+x_3^2$. 提示：由 A 的特征值为−1，−1，2 知

$(A+kI)^3$ 的特征值为 $(-1+k)^3,(-1+k)^3,(2+k)^3$，又

$f(x)=x^T(A+kI)^3x$ 为正定二次型，其特征值必须全部都大于零，故得 $k>1$.

3. 设二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 经正交变换 $x=Py$ 可化为标准型 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，证明：二次型 $g(x)=x^{\mathrm{T}}Ax+kx^{\mathrm{T}}x \quad (k\in R)$ 经相同的正交变换 $x=Py$ 可化为标准型 $(\lambda_1+k)y_1^2+(\lambda_2+k)y_2^2+\cdots+(\lambda_n+k)y_n^2$.

证明：$g(x)=(Py)^TA(Py)+k(Py)^T(Py)$

$=y^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}AP)y+ky^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}P)y$

$=(\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2)+(ky_1^2+ky_2^2+\cdots+ky_n^2)$

$$=(\lambda_1+k)y_1^2+(\lambda_2+k)y_2^2+\cdots+(\lambda_n+k)y_n^2.$$

4. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+tx_2^2+tx_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$，试用正交变换化 f 为标准型，并讨论当 t 取何值时 f 为负定二次型.

解：根据上一题的结论，我们只需先求出二次型 $g=-4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$ 的正交变换矩阵及其标准型。经计算得二次型 g 的矩阵的特征值为−2, −2, 4. 对应的线性无关的特征向量为 $[1,1,0]^{\mathrm{T}},[1,0,1]^{\mathrm{T}},[-1,1,1]^{\mathrm{T}}$. 经施密特正交化，单位化可得所求的正交变换矩阵为 $P=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$，而 g 在正交变换下的标准型为 $g=-2y_1^2-2y_2^2+4y_3^2$. 故有：

$f(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+tx_2^2+tx_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$ 在正交变换 $x=Py$ 下的标准型为 $(t-2)y_1^2+(t-2)y_2^2+(t+4)y_3^2$.

二次型 f 为负定二次型，即 $t-2<0$， $t+4<0$，故有 $t<-4$（也可用顺序主子式来解）.

5. 证明对任意的实对称阵 A，一定存在实数 t，使得 $tI+A$ 是正定矩阵.

证明：设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $tI+A$ 特征值为 $t+\lambda_1,t+\lambda_2,\cdots,t+\lambda_n$，取 $t>\max(-\lambda_1,-\lambda_2,\cdots,-\lambda_n)$，则可使 $tI+A$ 特征值全部大于零，即 $tI+A$ 是正定矩阵.

华东理工大学线性代数课程考试考卷答案

（第十册）

试卷(1)答案

一、选择题（3.5 分一题，共 21 分）

1.A;　2.D;　3.B;　4.C;　5.A;　6.B.

二、填空题（3.5 分一题，共 21 分）

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;　2. -18;　3.1;　4.0;

5. $x=(\alpha_1-\alpha_2)t, t\in R$;　6. 2.

三、解：二次型 $f(x_1,x_2)=2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2$ 对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$|A-\lambda I|=0$，得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=3$.

对于 $\lambda=1$，由 $(A-I)\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，知对应的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

对于 $\lambda=3$，由 $(A-I)\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，知对应的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. 取 $\alpha_1^0=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$，$\alpha_2^0=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ 令 $Q=\begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \alpha_2^0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ 正交矩阵，$x=Qy$ 正交变换，化二次型 $\boldsymbol{f(x_1,x_2)=2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2}$ 为标准形 $\boldsymbol{f(x_1,x_2)=y_1^2+3y_2^2}$.

四、**解:(1)** $\because \boldsymbol{(A+I)(A^2-A+I)=A^3+I=O+I=I,}$

(2) $\because AX = B - X$, $\therefore X = (A+I)^{-1}B = (A^2 - A + I)B$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

五、解：$\begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 \\ (n-1)^2 & n^2 & (n+1)^2 \\ (n-1)^3 & n^3 & (n+1)^3 \end{vmatrix}$

$$= (n-1)n(n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (n-1) & n & (n+1) \\ (n-1)^2 & n^2 & (n+1)^2 \end{vmatrix} = 2(n-1)n(n+1).$$

六、解：（1）由 $\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$，知 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$，即 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$为$Ax = 0$的解，

且α_1、α_2、α_3线性相关，由α_1，α_2线性无关，

得 $r(A) = 2$，$Ax = 0$的通解为 $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}t, t \in R.$

（2）由 $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = b$，知 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = b$，即

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$**为 $Ax = b$ 的一个特解**

（3） $Ax = b$ 的通解为 $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in R.$

七、 **解**:$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}3&1&2&1\\1&1&0&-1\\2&1&1&0\\5&2&3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\3&1&2&1\\2&1&1&0\\5&2&3&1\end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&-2&2&4\\0&-1&1&2\\0&-3&3&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&-1&1&2\\0&-2&2&4\\0&-3&3&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&-1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$ 一个最大线性无关组为α_1，α_2;秩为 2;

且 $\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1-2\alpha_2.$

八、解： A的特征值为$1,-1,2$，则矩阵 $B=A^3-5A^2$ 的特征值为-4，-6，-12，

与 B 相似的对角矩阵为$\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-6&0\\0&0&-12\end{pmatrix},$

$|B|=(-4)(-6)(-12)=-288.$

九、证：(1)由$\alpha\neq 0,$知 $\alpha\alpha^T\neq O$，故 $r(\alpha\alpha^T)\geq 1,$而 $r(\alpha\alpha^T)\leq\min(r(\alpha),r(\alpha^T))=1,$所以 $r(\alpha\alpha^T)=1.$

（或说明 $\alpha\alpha^T$ 为每两行对应成比例的非零矩阵，初等变换得秩为 1）.

$\forall x\neq 0, x^T\alpha\alpha^T x=(\alpha^T x)^T(\alpha^T x)=\left|\alpha^T x\right|^2\geq 0$，而 $r(\alpha^T)=1,$ 得 $\alpha^T x=0$有非零解，所以 $\alpha\alpha^T$ 为半正定阵.

(2) 解法 1:由$(\alpha\alpha^T)\alpha=(\alpha^T\alpha)\alpha$，得 α 是矩阵 $\alpha\alpha^T$ 对应特征值为 $\alpha^T\alpha(>0)$ 的特征向量. 由(1) $\alpha\alpha^T$ 为半正定阵知特征值全大于等于零，而 $tr(\alpha\alpha^T)=\alpha^T\alpha$=特征值之和，故其余 n-1 个特征值全等于零.

解法 2:由$(\alpha\alpha^T)x=0\Rightarrow(\alpha^T\alpha)\alpha^T x=\alpha^T 0=0\Rightarrow\alpha^T x=0,$因为 $r(\alpha^T)=1,$ 所以方程组 $\alpha^T x=0$ 有 n-1 个无关解，由几何重数 $\rho_\lambda\leq m_\lambda$ 代数重数，知零特征值至少 n-1 个，而已知一个特征值 $\alpha^T\alpha$ 非零，得零特征值恰为 n-1 个.

解法 3:由

$$\left|\lambda I-\alpha\alpha^T\right|=\frac{|\lambda I|}{1}(1-\alpha^T(\lambda I)^{-1}\alpha)=\lambda^n(1-\frac{\alpha^T\alpha}{\lambda})=\lambda^{n-1}(\lambda-\alpha^T\alpha)=0 \Rightarrow \lambda_1=\alpha^T\alpha,$$ 其余 n-1 个特征值为零.

试卷(2)答案

一、选择题（3.5 分一题，共 21 分）

1.C; 2.B; 3.B; 4.B; 5.D; 6.C.

二、填空题（3.5 分一题，共 21 分）

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;   2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$;

3. $x=t_1v_1+t_2v_2+\cdots+t_rv_r+(1,\ 1,\ \cdots\ ,1)^T, t_1,t_2\cdots,t_r\in R.$;

4. -1;   5. -I;   6. 0,-1.

三、解：由 $A^2+AB-A=O$, 得 $AB=A-A^2$, 由 $|A|\neq 0$, 知 A 可逆，进而得 $B=I-A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

四、解: $\begin{vmatrix} a & b & b & b & b \\ b & a & b & b & b \\ b & b & a & b & b \\ b & b & b & a & b \\ b & b & b & b & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+4b & b & b & b & b \\ a+4b & a & b & b & b \\ a+4b & b & a & b & b \\ a+4b & b & b & a & b \\ a+4b & b & b & b & a \end{vmatrix}.$

$$=\begin{vmatrix} a+4b & b & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}=(a+4b)(a-b)^4.$$

五、解: 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，由性质显然可得 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+3\alpha_1$ 也是 $Ax=0$ 的解，而

$$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+3\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&3\\1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix},\quad \begin{vmatrix}1&0&3\\1&1&0\\0&2&1\end{vmatrix}\neq 0,$$
故 $r(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+3\alpha_1)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 即 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+3\alpha_1$ 线性无关, 所以它是 $Ax=0$ 的基础解系.

六、解:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\-1&1&0&1\\0&1&1&1\\1&2&3&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&2&2&2\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

一个最大线性无关组为 α_1,α_2; 秩为 2; $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_4=\alpha_2$.

七、解:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-1-\lambda&0&0\\-2&1-\lambda&0\\2&0&1-\lambda\end{vmatrix}=-(1-\lambda)^2(1+\lambda)=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=-1.$$
对 $\lambda_{1,2}=1$,

由 $(A-I)=\begin{pmatrix}-2&0&0\\-2&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 得基础解系为 $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$;

对 $\lambda_3=-1$,

由 $(A+I)=\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&2&0\\2&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 得基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$;

令 $P=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$, 有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

八、解：$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$ 对应实对称矩阵 $\begin{pmatrix}3&2&0\\2&4&-2\\0&-2&5\end{pmatrix}$，而 3>0, $\begin{vmatrix}3&2\\2&4\end{vmatrix}>0$, $\begin{vmatrix}3&2&0\\2&4&-2\\0&-2&5\end{vmatrix}>0$ 故二次型为正定二次型.

九、解：由 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是 n 维单位正交列向量,

$\alpha=x_1\beta_1+\cdots+x_n\beta_n=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=Bx$, $B^TB=I$, 故 $\|\alpha\|=\sqrt{\alpha^T\alpha}=\sqrt{x^TB^TBx}=\sqrt{x^Tx}=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$.

试卷(3)答案

一、选择题（4 分一题，共 20 分）

1. B; 2. C; 3. C; 4. B; 5. D.

二、填空题（4 分一题，共 20 分）

1. 0; 2. $3^{n-1}\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$; 3. $-\frac{37}{5}$; 4. λ^2+1; 5. 1.

三、解：$\mathbf{D}=\begin{vmatrix}1&b&a&b\\a&b&1&b\\b&0&b&a\\b&a&b&0\end{vmatrix}\underset{r_{34}(-1)}{\overset{r_{12}(-1)}{=}}\begin{vmatrix}1&b&a&b\\a-1&0&1-a&0\\b&0&b&a\\0&a&0&-a\end{vmatrix}$

$$= (a-1)a\begin{vmatrix} 1 & b & a & b \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & b & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{c_{42}(1)}{=} (a-1)a\begin{vmatrix} 1 & 2b & a & b \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ b & a & b & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -(a-1)a\begin{vmatrix} 1 & 2b & a \\ 1 & 0 & -1 \\ b & a & b \end{vmatrix} \overset{c_{13}(1)}{=} -(a-1)a\begin{vmatrix} 1 & 2b & a+1 \\ 1 & 0 & 0 \\ b & a & 2b \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)a\begin{vmatrix} 2b & a+1 \\ a & 2b \end{vmatrix} = (a-1)a[4b^2-(a+1)a]$$

四、解： $4 = |\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3| = |\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_1|$

$$= |\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_1| + |\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_1|$$

$$= |\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_3| + |\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_1|$$

$$= |\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3| + |\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_1| = 2|\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3|$$

所以 $|\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3| = 2$.

五、解： 因为 $|\boldsymbol{A}| = 1 \neq 0$， 所以， $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^*$。

由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A} \Rightarrow (\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{A}^{-1} \Rightarrow (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{I}$$ 。

因此 $$\boldsymbol{X} = 2(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ 。

六、解： $$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1+\frac{2}{3}\lambda & \frac{2}{3}\lambda \\ 0 & 0 & -2\lambda(1+\frac{1}{3}\lambda) & 3-\lambda-\frac{2}{3}\lambda^2 \end{array}\right)$$

（1） $-2\lambda(1+\frac{1}{3}\lambda)\neq 0 \quad \Rightarrow \lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 且表示式唯一

（2） $-2\lambda(1+\frac{1}{3}\lambda)=0$ 但 $3-\lambda-\frac{2}{3}\lambda^2\neq 0 \quad \Rightarrow \lambda=0$ 不能表示

（3） $-2\lambda(1+\frac{1}{3}\lambda)=0$ 且 $3-\lambda-\frac{2}{3}\lambda^2=0 \quad \Rightarrow \lambda=-3$ 无穷多表示

$\lambda=-3$ 时，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,|\,\boldsymbol{\beta})\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

此时 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，其中 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$， $k\in R$。

七、解：二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

（1）由 $1+a+1=0+1+4 \quad \Rightarrow a=3$。

（2） 特征值 $\lambda_1=0$ 时，

特征矩阵 $\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

特征值 $\lambda_2=1$ 时

特征矩阵 $A-I=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\Rightarrow p_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

特征值 $\lambda_3=4$ 时

特征矩阵 $A-4I=\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-1&1\\1&1&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\Rightarrow p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

所以，$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$。

八、**证：** （1） 由 $BA=B\Rightarrow B(A-I)=O$，所以 $A-I$ 的列向量是齐次方程 $Bx=0$ 的解向量。因为矩阵 B 列满秩，故 $Bx=0$ 只有唯一零解。即 $A-I=O$ 亦即 $A=I$。

（2）由 $A^2=A\Rightarrow A(A-I)=O$。 因为，

$$n=r(I)=r(A+I-A)\le r(A)+r(I-A)$$
$$=r(A)+r(A-I)\le n+r(A(A-I))=n$$

所以 $r(A)+r(A-I)=n$。而 $r(A)=1$ 故 $r(A-I)=n-1,\ (n\ge 2)$。

试卷(4)答案

一、解：对方程 $12A=AXA^{-1}-AX$，两边同时左乘以 A^{-1}，得 $12I=XA^{-1}-X$，合并 X，得 $X(A^{-1}-I)=12I$；由 $A^*=\begin{pmatrix}\frac{1}{28}&0&0\\0&\frac{1}{14}&0\\0&0&\frac{1}{8}\end{pmatrix}$ 知 $|A|^2=|A^*|=\frac{1}{3136}$，解

之得$|A| = \pm\frac{1}{56}$，再由$A = |A|(A^*)^{-1}$，结合A的元素非负，即知$|A| = \frac{1}{56}$，且有

$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$，进而有 $(A^{-1} - I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$，及 $(A^{-1} - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

于是由$X(A^{-1} - I) = 12I$，即知 $X = 12(A^{-1} - I)^{-1} = 12\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$，最后解得

$X = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

二、解：对方程组的增广矩阵施以初等变换，有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

由矩阵T易见：

(1) 当$a \neq 1$时，有唯一解；

(2) 当$a = 1$，$b \neq -1$时，无解；

(3) 当$a = 1$，$b = -1$时，有无穷多解

此时，由T可知，原方程组等价于方程组：

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 & = & -1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = & 1 \end{cases}$$

取 x_3， x_4为自由未知量，则有通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$，其中 k_1， k_2为任意常数。

三、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. B ；2. C； 3.D； 4. D ； 5. B ； 6. C.

四、解：

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2a+b & a & b & a \\ 2a+b & 0 & a & b \\ 2a+b & a & 0 & a \\ 2a+b & b & a & 0 \end{vmatrix} = (2a+b) \begin{vmatrix} 1 & a & b & a \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (2a+b) \begin{vmatrix} 1 & a & b & a \\ 0 & -a & a-b & b-a \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & b-a & a-b & -a \end{vmatrix} = (2a+b) \begin{vmatrix} -a & a-b & b-a \\ 0 & -b & 0 \\ b-a & a-b & -a \end{vmatrix}$$

$$= (2a+b)(-b) \begin{vmatrix} -a & b-a \\ b-a & -a \end{vmatrix} = (2a+b)(-b)(a^2-(b-a)^2)$$

$$= b^2(b^2-4a^2)$$ 。

五、解：设有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$，线性相关即求方程组

$$\begin{cases} 2k_2 + (1-t)k_3 & = & 0 \\ 4k_1 + (3-t)k_2 + 2k_3 & = & 0 \\ (2-t)k_1 + k_2 + 3k_3 & = & 0 \end{cases}$$

何时有非零解，此时其系数矩阵的行列式一定为零，即

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1-t \\ 4 & 3-t & 2 \\ 2-t & 1 & 3 \end{vmatrix} = (t-6)(t^2+3) = 0$$，

所以 $t = 6$时，这三个向量线性相关。

设 $\alpha_1 = c\alpha_2 + d\alpha_3$，可得方程组 $\begin{cases} 2c-5d &= 0 \\ -3c+2d &= 4 \\ c+3d &= -4 \end{cases}$，解得 $c=-\dfrac{20}{11}$，$d=-\dfrac{8}{11}$，因此 $\alpha_1 = -\dfrac{20}{11}\alpha_2 - \dfrac{8}{11}\alpha_3$。

六、填空题（4 分一题，共 24 分）

1、8；　　2、 -5；　　3、 $(-3)^{-1}2^{2n-1}$；

4、-1/2 ；　　5、2，-2；　　6、 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$.

七、证：依题意，有 $(A-I)A=O$，利用矩阵秩的性质“$r(A+B)\le r(A)+r(B)$”及“$r(kA)=r(A)\quad(k\ne 0)$”可得

$$r(A-I)+r(A)=r(I-A)+r(A)\ge r(I-A+A)=r(I)=n \qquad ①$$

另一方面，利用性质“$r(A)+r(B)\le r(AB)+n$”，可得

$$r(I-A)+r(A)\le r(O)+n=n \qquad ②$$

结合①、②两式，即得 $r(I-A)+r(A)=n$.

由 $A^2=A$，故 $r(A^2)=r(A)$；另一方面，由 $(I-A)^2=I-A$，可知 $r((A-I)^2)=r((I-A)^2)=r(I-A)$，综合即得

$$r((A-I)^2)+r(A^2)=n.$$

八、解： 变换前后的二次型矩阵分别为 $A=\begin{bmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{bmatrix}$ 和 $\Lambda=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，故二次型的特征值为 0，1，2。

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -1\\ -a & \lambda-1 & -b\\ -1 & -b & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda^2-(a^2+b^2-2)\lambda+(a-b)^2$$

与 $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)=\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda$ 比较系数可得 $a=b=0$。

求得 A 对应于 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$ 和 $\lambda_3=2$ 的特征向量分别为

$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，单位化得

$\beta_1=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

故正交变换矩阵为 $Q=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$。

试卷(5)答案

一、解：（1）

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\-1&1&0&1\\0&1&1&1\\1&2&3&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&2&2&2\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

一个最大线性无关组可取为 α_1,α_2；且秩为 2.

(2) 依题意，有 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]\begin{bmatrix}1&&&-1\\1&1&&\\&1&1&\\&&1&1\end{bmatrix}$，简记为 $B=AC$，由 $|C|=2\neq 0$，知矩阵 C 可逆，结合向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩等于 2，即 $r(A)=2$，可得 $r(B)=2$，亦即向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的秩为 2.

二、解：依题意，A 的特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的特征向量必然与 $\xi_1=[2,-1,1]^T$ 正交，即必满足方程组 $\xi_1^T x=0$，即 $[2,-1,1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$，解之即得两个线性无关的特征向量 $\eta_1=[1,0,-2]^T$，$\eta_2=[0,1,1]^T$，此时，若取 $P=[\xi_1,\eta_1,\eta_2]=\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&0&1\\1&-2&1\end{bmatrix}$

则 $P^{-1}=\begin{bmatrix}1/3&-1/6&1/6\\1/3&1/3&-1/3\\1/3&5/6&1/6\end{bmatrix}$，且满足 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}8&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}$，

进而解得 $A=P\begin{bmatrix}8&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}6&-2&2\\-2&3&-1\\2&-1&3\end{bmatrix}$.

三、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1、B ； 2、A； 3、A ； 4、A； 5、B； 6、B.

四、解：由 $AA^*=A^*A=|A|I$，得 $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=|A^{-1}|A$。利用初等行变换可以求出矩阵 $A=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，从而有

$$(A^*)^{-1}=\left|A^{-1}\right|A=2\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2 & -1\\ -2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

。

五、解：由 $0=\left|xI-A\right|=$

$$\begin{vmatrix}x & 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & x & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & x & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & x & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0 & x\end{vmatrix}\overset{\substack{r_{12}(-1)\\ r_{15}(x)}}{=}\begin{vmatrix}x & 0 & -1 & -1 & -1\\ -x & x & 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & x & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & x & 0\\ x^2-1 & -1 & -x & -x & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\begin{vmatrix}-x & x & 0 & 0\\ -1 & -1 & x & 0\\ -1 & -1 & 0 & x\\ x^2-1 & -1 & -x & -x\end{vmatrix}=(-x^2)\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & x & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\\ x^2-1 & -1 & -x & -1\end{vmatrix}$$

$$=(-x^2)\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -2 & x & 0\\ -1 & -2 & 0 & 1\\ x^2-1 & x^2-2 & -x & -1\end{vmatrix}=x^2\begin{vmatrix}-2 & x & 0\\ -2 & 0 & 1\\ x^2-2 & -x & -1\end{vmatrix}$$

$$=x^3\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ x^2-6 & -1 & -1\end{vmatrix}=x^2(x^3-6x)=x^3(x^2-6)$$

即得 $x=\sqrt{6}$ 或 $x=-\sqrt{6}$ 或 $x=0$ 。

六、填空题（4 分一题，共 28 分）

1、2； 2、$abc=1$； 3、4； 4、1； 5、8，7； 6、-2； 7. $k>1$.

七、 解：由于方程组的系数矩阵 A 是含参数的方阵，所以考虑“行列式”法。

由 $\left|A\right|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda\\ 1 & \lambda & 1\end{vmatrix}=-(\lambda+2)(\lambda-1)^2$ ，即知

（1）当 $\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq 1$ 时，$|A| \neq 0$，由克拉默法则即知此时方程组有唯一解；

（2）当 $\lambda = -2$ 时，由 $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$，即 $r(A) = 2 < r(\overline{A}) = 3$，即知此时方程组无解；

（3）当 $\lambda = 1$ 时，由 $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$，即 $r(A) = r(\overline{A}) = 1 < 3$，即知此时方程组有无穷多解，且由等价方程组

$x_1 + x_2 + x_3 = -2$

可解得其通解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$k_1, k_2 \in R$.