§1 不定积分的基本概念及运算法则

一、不定积分的定义

在实际问题中，往往需要解决和微分运算正好相反的问题。如已知速率函数，要求位移函数；或已知一条平面曲线在任一点处的切线斜率，要求这条曲线等。这就是不定积分。

§1 不定积分的基本概念及运算法则

一、不定积分的定义

在实际问题中，往往需要解决和微分运算正好相反的问题。如已知速率函数，要求位移函数；或已知一条平面曲线在任一点处的切线斜率，要求这条曲线等。这就是不定积分。

定义:若在某一区间上，$F'(x)=f(x)$，则称在这个区间上，函数$F(x)$ 是$f(x)$ 的一个原函数。

显然，若$F(x)$ 是$f(x)$ 的一个原函数，则$\forall c \in \mathbb{R}$, $F(x) + c$ 为$f(x)$ 的原函数。事实上，$f(x)$ 的所有原函数构成的集合为$\{F(x) + c | c \in \mathbb{R}\}$，这便是前面学过的不定积分基本定理。

显然，若$F(x)$ 是$f(x)$ 的一个原函数，则$\forall c \in \mathbb{R}$, $F(x)+c$ 为$f(x)$ 的原函数。事实上，$f(x)$ 的所有原函数构成的集合为$\{F(x)+c|c \in \mathbb{R}\}$，这便是前面学过的不定积分基本定理。

不定积分基本定理： 若在区间I 上处处有$f'(x)=g'(x)$，则存在常数C，满足$f(x)=g(x)+C$。

显然，若$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$\forall c \in \mathbb{R}$, $F(x)+c$为$f(x)$的原函数。事实上，$f(x)$的所有原函数构成的集合为$\{F(x)+c|c \in \mathbb{R}\}$，这便是前面学过的不定积分基本定理。

不定积分基本定理： 若在区间I上处处有$f^{'}(x)=g^{'}(x)$，则存在常数C，满足$f(x)=g(x)+C$。

因此，只要求出$f(x)$的任意一个原函数$F(x)$，就可以用$F(x)+C$代替$f(x)$的全部原函数。

注：关于原函数有三个基本问题

（1）存在性（下一章解决）；

（2）唯一性（不定积分基本定理，在相差一常数意义下唯一）；

（3）如何求（接下来关心的问题）。

注：关于原函数有三个基本问题

（1）存在性（下一章解决）；

（2）唯一性（不定积分基本定理，在相差一常数意义下唯一）；

（3）如何求（接下来关心的问题）。

定义:函数$f(x)$ 的原函数全体称为这个函数的不定积分，记作$\int f(x)\,\mathrm{d}x$。$\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$\mathrm{d}x$ 中的x 称为积分变量。

注：关于原函数有三个基本问题

（1）存在性（下一章解决）；

（2）唯一性（不定积分基本定理，在相差一常数意义下唯一）；

（3）如何求（接下来关心的问题）。

定义:函数$f(x)$ 的原函数全体称为这个函数的不定积分，记作$\int f(x)\,\mathrm{d}x$。$\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$\mathrm{d}x$ 中的x 称为积分变量。

注1：不定积分与原函数这两个概念是整体与个体的关系，原函数的全体称不定积分。微分运算d 与不定积分运算$\int$ 构成逆运算。$\mathrm{d}(\int f(x)\mathrm{d}x) = f(x)\mathrm{d}x$。

注2：初等函数$f(x)$ 的原函数$\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 未必为初等函数。e.g. $\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$, $\int \sin x^2\mathrm{d}x$, $\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$。

注2：初等函数$f(x)$的原函数$\int f(x)\,\mathrm{d}x$未必为初等函数。e.g. $\displaystyle\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$, $\int \sin x^2 \mathrm{d}x$, $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$。

若$\int f(x)\,\mathrm{d}x$也为初等函数，则称$\int f(x)\,\mathrm{d}x$可积，反之，则称为不可积。不定积分的计算就是求原函数为初等函数的不定积分。

注2：初等函数$f(x)$的原函数$\int f(x)\,\mathrm{d}x$未必为初等函数。e.g. $\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$, $\int \sin x^2 \mathrm{d}x$, $\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$。

若$\int f(x)\,\mathrm{d}x$也为初等函数，则称$\int f(x)\,\mathrm{d}x$可积，反之，则称为不可积。不定积分的计算就是求原函数为初等函数的不定积分。

下列等式是否正确，说明理由

(1)$\mathrm{d}(\int f(x)\mathrm{d}x) = f(x)$; (2)$\mathrm{d}(\int f(x)\mathrm{d}x) = f(x)\mathrm{d}x$;

(3) $\int \mathrm{d}f(x) = f(x)$; (4)$\mathrm{d}\int \mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}f(x)$。

例1：求$\int \sin x \mathrm{d}x$。

例1：求 $\int \sin x \mathrm{d}x$。

例2：求 $\int x^{\alpha} \mathrm{d}x$。

例1：求 $\int \sin x \mathrm{d}x$。

例2：求 $\int x^{\alpha} \mathrm{d}x$。

利用导数和微分的关系可以得到最基本的不定积分表，见P_{244} 左、右两栏。

例1：求$\int \sin x\mathrm{d}x$。

例2：求$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x$。

利用导数和微分的关系可以得到最基本的不定积分表，见P_{244} 左、右两栏。

二、不定积分的基本性质

定理:若函数$f(x)$ 和$g(x)$ 的原函数均存在，则对任意常数$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$，函数$k_1 f(x) + k_2 g(x)$ 的原函数也存在，且

$$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1 \int f(x)\mathrm{d}x + k_2 \int g(x)\mathrm{d}x.$$

注：不考虑$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 是因为$[F(x)G(x)]' \neq f(x)g(x)$（设$F(x), G(x)$ 分别是$f(x), g(x)$ 的原函数）。

注：不考虑$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 是因为$[F(x)G(x)]' \neq f(x)g(x)$（设$F(x), G(x)$ 分别是$f(x), g(x)$ 的原函数）。

例3：求$\displaystyle\int \tan^2 x\mathrm{d}x$。

注：不考虑$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 是因为$[F(x)G(x)]' \neq f(x)$ $g(x)$（设$F(x), G(x)$ 分别是$f(x), g(x)$ 的原函数）。

例3：求$\displaystyle\int \tan^2 x\mathrm{d}x$。

例4：求$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$。

注：不考虑$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 是因为$[F(x)G(x)]' \neq f(x)g(x)$（设$F(x), G(x)$ 分别是$f(x), g(x)$ 的原函数）。

例3：求$\displaystyle\int \tan^2 x\mathrm{d}x$。

例4：求$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$。

例5：求$\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

注：不考虑$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 是因为$[F(x)G(x)]' \neq f(x)g(x)$（设$F(x), G(x)$ 分别是$f(x), g(x)$ 的原函数）。

例3：求$\displaystyle\int \tan^2 x\mathrm{d}x$。

例4：求$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$。

例5：求$\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

例6：求$\displaystyle\int \frac{(x+\sqrt{x})(x-2\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$。

作业： 课本P_{246} 1 奇数题。

§2 不定积分的计算

一、第一类换元法（凑微分法）

例1：求$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a}$。

§2 不定积分的计算

一、第一类换元法（凑微分法）

例1：求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a}$。

例2：求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$。

§2 不定积分的计算

一、第一类换元法（凑微分法）

例1：求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a}$。

例2：求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$。

定理： 若u 为自变量时，有$\int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C$，则当$u$ 是x 的可微函数时，有

$$\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = \int f(u(x))\mathrm{d}(u(x)) = F(u(x))+C。$$

例3：求$\int \tan x \mathrm{d}x$。

例3：求$\int \tan x \mathrm{d}x$。

例4：求$\int \sec x \mathrm{d}x$。

例3：求$\int \tan x\mathrm{d}x$。

例4：求$\int \sec x\mathrm{d}x$。

例5：求$\int \cos^4 x\mathrm{d}x$。

例3：求$\int \tan x\mathrm{d}x$。

例4：求$\int \sec x\mathrm{d}x$。

例5：求$\int \cos^4 x\mathrm{d}x$。

例6：求$\int \cos^5 x\mathrm{d}x$。

作业： 课本P_{259} 1(2)(3)(12)(14)(18 – 20)。

补充题：求下列不定积分。

(1) $\int \sqrt{\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}\mathrm{d}x$; (2) $\int \dfrac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x$。

二、第二类换元法

例7：求$\int x(2x-1)^{100}\mathrm{d}x$.

二、第二类换元法

例7：求$\int x(2x-1)^{100}\mathrm{d}x$.

定理:设$x=\phi(t)$ 是一个单调可微的函数，$\phi'(t)\neq 0$，且$f(\phi(t))\phi'(t)$ 具有原函数$F(t)$，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C=F(\phi^{-1}(x))+C.$$

二、第二类换元法

例7：求$\int x(2x-1)^{100}\mathrm{d}x$.

定理: 设$x=\phi(t)$ 是一个单调可微的函数，$\phi^{'}(t)\neq 0$，且$f(\phi(t))\phi^{'}(t)$ 具有原函数$F(t)$，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\phi(t))\phi^{'}(t)\mathrm{d}t=F(t)+C=F(\phi^{-1}(x))+C.$$

凑微分法：$\int f(u(x))u^{'}(x)\mathrm{d}x$(难求)$=\int f(u)\mathrm{d}u$(易求)。

二、第二类换元法

例7：求$\int x(2x-1)^{100}\mathrm{d}x.$

定理:设$x=\phi(t)$ 是一个单调可微的函数，$\phi'(t)\neq 0$，且$f(\phi(t))\phi'(t)$ 具有原函数$F(t)$，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C=F(\phi^{-1}(x))+C.$$

凑微分法：$\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x$(难求) $=\int f(u)\mathrm{d}u$(易求)。

拆分法：$\int f(x)\mathrm{d}x$(难求) $=\int f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$(易求)。

例8：求$\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x(a>0)$。

例8：求$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x(a>0)$。

注：第二类换元法主要用于含根式的积分，寻找$x=\phi(t)$，使被积函数去根号。

例8：求$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x(a>0)$。

注：第二类换元法主要用于含根式的积分，寻找$x=\phi(t)$，使被积函数去根号。

例9：计算$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}(a>0)$。

例8：求$\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x (a > 0)$。

注：第二类换元法主要用于含根式的积分，寻找$x = \phi(t)$，使被积函数去根号。

例9：计算$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2 + a^2}} (a > 0)$。

作业： 课本P_{260} $2(1-3), (6-7), (11-13), (15), (20)$。

三、分部积分法

设$u(x), v(x)$ 可微，则由两函数乘积的导数公式

$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$，得
$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$。两边不定积分，
$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$
$\Longleftrightarrow \int u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\mathrm{d}u(x)$。

粗略地看，只是把求$u(x)v'(x)$的不定积分转化为求$u'(x)v(x)$的不定积分，两者形式差不多，但两者的难易程度可能不能同日而语。

当被积函数中出现幂函数、指数函数、三角函数这三类函数中两类或两类以上的函数乘积；或者出现对数函数、反三角函数，均可考虑用分部积分。

当被积函数中出现幂函数、指数函数、三角函数这三类函数中两类或两类以上的函数乘积；或者出现对数函数、反三角函数，均可考虑用分部积分。

运用分部积分法特点：

1° 被积函数为不同类型函数乘积。

当被积函数中出现幂函数、指数函数、三角函数这三类函数中两类或两类以上的函数乘积；或者出现对数函数、反三角函数，均可考虑用分部积分。

运用分部积分法特点：

1° 被积函数为不同类型函数乘积。

2° 寻找$u(x), v(x)$。原则：

(1)$v(x)$ 比较容易求出；

(2)$\int v(x)\mathrm{d}u(x)$ 比$\int u(x)\mathrm{d}v(x)$ 容易求出。

易选为$u(x)$ 的函数类型：反、对、幂（求导后变简单）；易选为$v(x)$ 的函数类型：三、指（易于求原函数）。

3° 反对幂三指

分部积分时，一般将排列次序在后面的函数优先与dx结合成dv。

3° 反对幂三指

分部积分时，一般将排列次序在后面的函数优先与$\mathrm{d}x$结合成$\mathrm{d}v$。

例10：求$\int x\cos x\mathrm{d}x$。

3° 反对幂三指

分部积分时，一般将排列次序在后面的函数优先与dx结合成dv。

例10：求$\int x\cos x\mathrm{d}x$。

例11：计算$I=\int x\tan x\sec^2 x\mathrm{d}x$。

熟练记牢 P_{256} 基本积分表。

3° 反对幂三指

分部积分时，一般将排列次序在后面的函数优先与dx结合成dv。

例10：求$\int x\cos x dx$。

例11：计算$I=\int x\tan x\sec^2 x dx$。

熟练记牢 P_{256} 基本积分表。

四、计算积分的其它方法

1、第一类、第二类换元法，分部积分法多种方法混合使用。

3° 反对幂三指

分部积分时，一般将排列次序在后面的函数优先与$\mathrm{d}x$结合成$\mathrm{d}v$。

例10：求$\int x\cos x\mathrm{d}x$。

例11：计算$I=\int x\tan x\sec^2 x\mathrm{d}x$。

熟练记牢 P_{256} 基本积分表。

四、计算积分的其它方法

1、第一类、第二类换元法，分部积分法多种方法混合使用。

例12：求$\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$。

例13：求$\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x$。

例13：求$\int (\arcsin x)^2 \mathrm{d}x$。

2、循环法

例14：求$\int e^x \sin x \mathrm{d}x$。

例13：求$\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x$。

2、循环法

例14：求$\int e^x\sin x\mathrm{d}x$。

注：适合用循环法的方法$\int P_n(\sin bx)e^{ax}\mathrm{d}x$, $\int P_n(\cos bx)e^{ax}\mathrm{d}x$, $P_n(x)$ 表示关于x 的n 次多项式。

例13：求$\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x$。

2、循环法

例14：求$\int e^x\sin x\mathrm{d}x$。

注：适合用循环法的方法$\int P_n(\sin bx)e^{ax}\mathrm{d}x$, $\int P_n(\cos bx)e^{ax}\mathrm{d}x$, $P_n(x)$ 表示关于x 的n 次多项式。

例15：求$\int\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$。

例13：求$\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x$。

2、循环法

例14：求$\int e^x\sin x\mathrm{d}x$。

注：适合用循环法的方法$\int P_n(\sin bx)e^{ax}\mathrm{d}x$, $\int P_n(\cos bx)e^{ax}\mathrm{d}x$, $P_n(x)$ 表示关于x 的n 次多项式。

例15：求$\int\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$。

例16：求$\int(x+1)\sqrt{x^2-2x+5}\mathrm{d}x$。

作业： 课本P_{260} 3(1)(2)(11)(13)(16), 4, 5, 6.

3、配对积分法

例17：计算$I=\int \frac{\sin x}{2\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x$。

3、配对积分法

例17：计算$I=\int\frac{\sin x}{2\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x$。

例18：求不定积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$。

3、配对积分法

例17：计算$I=\int\frac{\sin x}{2\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x$。

例18：求不定积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$。

注1：在个别点分母为零（甚至定义域上可数个点分母为零），积分值不受影响。

3、配对积分法

例17：计算$I=\int \frac{\sin x}{2\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x$。

例18：求不定积分$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$。

注1：在个别点分母为零（甚至定义域上可数个点分母为零），积分值不受影响。

注2：本题在后面学到有理函数的不定积分后可用标准方法做，但计算量大得多。

4、拆分法

例19：求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

4、拆分法

例19：求$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

注：拆一法适用于$\int \frac{1}{\sin^m x \cos^n x}\mathrm{d}x$ 的情形，其中$m, n \in \mathbb{Z}^+$。

4、拆分法

例19：求$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

注：拆一法适用于$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^m x \cos^n x}\mathrm{d}x$ 的情形，其中$m, n \in \mathbb{Z}^+$。

例20：求$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$。

5、递推法

例21：求$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^n}$。

例22：设对自然数$n > 2$，定义$I_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x$。证明$I_n = \frac{2}{n-1}\sin(n-1)x + I_{n-2}$。

作业：课本P_{261} 7, 8(2)(6)(7)(8), 9, 10(1)(3).

§3 有理函数的不定积分

一、有理函数的不定积分

有理函数$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中$P(x), Q(x)$ 是多项式。

§3 有理函数的不定积分

一、有理函数的不定积分

有理函数$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中$P(x), Q(x)$ 是多项式。

考虑$\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$，总假定$\partial(P(x)) < \partial(Q(x))$。

否则，由带余除法

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}, 0 \le \partial(r(x)) < \partial(Q(x))$$

$$\Rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x = \int R(x)\mathrm{d}x + \int \frac{r(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x。$$

设$\partial(Q(x)) = n$。由代数基本定理，$Q(x)$ 在复数域上恰有n 个根，且虚根成对出现。设$Q(x)$

设$\partial(Q(x))=n$。由代数基本定理，$Q(x)$ 在复数域上恰有n 个根，且虚根成对出现。设$Q(x)$

$$\begin{cases} \text{实根为 } \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i; \text{ 重数为 } m_1,m_2,\cdots,m_i \\ \text{复根为 } \beta_1\pm i\gamma_1,\beta_2+i\gamma_2,\cdots,\beta_j+i\gamma_j; \text{ 重数为 } n_1,n_2,\cdots,n_j \end{cases}$$

则$\sum_{k=1}^{i} m_k+2\sum_{k=1}^{j} n_k=n$。

设$\partial(Q(x))=n$。由代数基本定理，$Q(x)$ 在复数域上恰有n 个根，且虚根成对出现。设$Q(x)$

$$\begin{cases} \text{实根为 } \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i;\ \text{重数为 } m_1,m_2,\cdots,m_i \\ \text{复根为 } \beta_1\pm i\gamma_1,\beta_2+i\gamma_2,\cdots,\beta_j+i\gamma_j;\ \text{重数为 } n_1,n_2,\cdots,n_j \end{cases}$$

则$\sum_{k=1}^{i} m_k + 2\sum_{k=1}^{j} n_k = n$。

记$\xi_k=-\beta_k,\eta_k^2=\beta_k^2+\gamma_k^2$，则

$$Q(x)=\prod_{k=1}^{i}(x-\alpha_k)^{m_k}\cdot\prod_{k=1}^{j}(x^2+2\xi_k x+\eta_k^2)^{n_k}\text{。}$$

设$\partial(Q(x)) = n$。由代数基本定理，$Q(x)$ 在复数域上恰有n 个根，且虚根成对出现。设$Q(x)$

$$\begin{cases} \text{实根为 } \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i;\ \text{重数为 } m_1, m_2, \cdots, m_i \\ \text{复根为 } \beta_1 \pm i\gamma_1, \beta_2 + i\gamma_2, \cdots, \beta_j + i\gamma_j;\ \text{重数为 } n_1, n_2, \cdots, n_j \end{cases}$$

则$\sum_{k=1}^{i} m_k + 2\sum_{k=1}^{j} n_k = n$。

记$\xi_k = -\beta_k, \eta_k^2 = \beta_k^2 + \gamma_k^2$，则

$$Q(x) = \prod_{k=1}^{i}(x-\alpha_k)^{m_k} \cdot \prod_{k=1}^{j}(x^2 + 2\xi_k x + \eta_k^2)^{n_k}\text{。}$$

求$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x$ 的关键：将$\frac{P(x)}{Q(x)}$ 分解成简单分式之和。

以下假定$P(x)/Q(x)$ 是真分式。

定理： 设$Q(x)=(x-\alpha)^kQ_1(x), Q_1(\alpha)\neq 0$。则存在实数$\lambda_1$ 与多项式$P_1(x)$，$\partial(P_1(x))<\partial((x-\alpha)^{k-1}Q_1(x))$，成立

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lambda_1}{(x-\alpha)^k}+\frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1}Q_1(x)}。$$

以下假定$P(x)/Q(x)$ 是真分式。

定理： 设$Q(x)=(x-\alpha)^kQ_1(x)$, $Q_1(\alpha)\neq 0$。则存在实数λ_1 与多项式$P_1(x)$，$\partial(P_1(x))<\partial((x-\alpha)^{k-1}Q_1(x))$，成立

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lambda_1}{(x-\alpha)^k}+\frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1}Q_1(x)}。$$

定理： 设$Q(x)=(x^2+2\xi x+\eta^2)^\ell Q^*(x)$, $Q^*(\beta+i\gamma)\neq 0$。其中$\xi=-\beta,\eta^2=\beta^2+\gamma^2$。则存在实数$\mu,v$ 和多项式$P^*(x)$，$\partial(P^*(x))<\partial((x^2+2\xi x+\eta^2)^{\ell-1}Q^*(x))$，成立

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\mu x+v}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^\ell}+\frac{P^*(x)}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^{\ell-1}Q^*(x)}。$$

总结1：若$Q(x)$ 中含因子$(x-\alpha)^m$，则分解出的因式中含项$\dfrac{\lambda_1}{x-\alpha}, \dfrac{\lambda_2}{(x-\alpha)^2}, \cdots, \dfrac{\lambda_m}{(x-\alpha)^m}$。

总结1：若$Q(x)$ 中含因子$(x-\alpha)^m$，则分解出的因式中含项$\dfrac{\lambda_1}{x-\alpha}, \dfrac{\lambda_2}{(x-\alpha)^2}, \cdots, \dfrac{\lambda_m}{(x-\alpha)^m}$。

总结2：若$Q(x)$ 中含因子$(x^2+2\xi x+\eta^2)^n$，则分解出的因式中含项

$$\frac{\mu_1 x+v_1}{x^2+2\xi x+\eta^2}, \frac{\mu_2 x+v_2}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^2}, \cdots, \frac{\mu_n x+v_n}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n},$$

其中系数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m; \mu_1, v_1, \mu_2, v_2, \cdots, \mu_n, v_n$ 可用待定系数法求出。

$$(1)\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^m}=\begin{cases}-\dfrac{(x-\alpha)^{-m+1}}{m-1}+C, & m\neq -1\\ \ln|x-\alpha|+C, & m=-1\end{cases}$$

$$(1)\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^m}=\begin{cases}-\dfrac{(x-\alpha)^{-m+1}}{m-1}+C, & m\neq -1\\ \ln|x-\alpha|+C, & m=-1\end{cases}$$

$$(2)\int\frac{\mu x+v}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n}\mathrm{d}x(\xi^2<\eta^2)$$

$$=\frac{\mu}{2}\int\frac{2x+2\xi}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n}\,\mathrm{d}x+(v-\mu\xi)\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n}$$

$$=\frac{\mu}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2\xi x+\eta^2)}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n}+(v-\mu\xi)\int\frac{\mathrm{d}(x+\xi)}{[(x+\xi)^2+(\eta^2-\xi^2)]^n}$$

综上：1. 有理函数原函数是初等函数（有理函数的不定积分是有理函数、对数函数和反正切函数的有限次四则运算或复合运算构成）。

综上：1. 有理函数原函数是初等函数（有理函数的不定积分是有理函数、对数函数和反正切函数的有限次四则运算或复合运算构成）。

2. 有理函数经带余除法分解成多项式+真分式，真分式又可分解成若干简单分式之和。

综上：1. 有理函数原函数是初等函数（有理函数的不定积分是有理函数、对数函数和反正切函数的有限次四则运算或复合运算构成）。

2. 有理函数经带余除法分解成多项式+真分式，真分式又可分解成若干简单分式之和。

真分式分解方法：待定系数法。如何求待定系数？例如：确定系数A, B, C, D, E，s.t.

$$\frac{2(x+1)}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}。$$

综上：1. 有理函数原函数是初等函数（有理函数的不定积分是有理函数、对数函数和反正切函数的有限次四则运算或复合运算构成）。

2. 有理函数经带余除法分解成多项式+真分式，真分式又可分解成若干简单分式之和。

真分式分解方法：待定系数法。如何求待定系数？例如：确定系数A, B, C, D, E，s.t.

$$\frac{2(x+1)}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}。$$

例1：求$\int \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$。

7.3.有理函数的不定积分

综上：1. 有理函数原函数是初等函数（有理函数的不定积分是有理函数、对数函数和反正切函数的有限次四则运算或复合运算构成）。

2. 有理函数经带余除法分解成多项式+真分式，真分式又可分解成若干简单分式之和。

真分式分解方法：待定系数法。如何求待定系数？例如：确定系数A, B, C, D, E，s.t.

$$\frac{2(x+1)}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}。$$

例1：求$\int \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$。

作业： 课本P_{269} 1(1)(6)(7)(11)(14)(16), 2。

二、其它类型的积分举例

1、三角函数有理式的积分

设$R(u,v)$ 表示两个变量u,v 的有理函数（即分子、分母都是关于u,v 的二元多项式）。

由于三角函数的有理函数均可化成$\sin x$ 和$\cos x$ 的有理函数，故只需研究$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$。

二、其它类型的积分举例

1、三角函数有理式的积分

设$R(u,v)$ 表示两个变量u,v 的有理函数（即分子、分母都是关于u,v 的二元多项式）。

由于三角函数的有理函数均可化成$\sin x$ 和$\cos x$ 的有理函数，故只需研究$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$。

利用万能公式：令$t=\tan\frac{x}{2}$，则

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int\frac{2}{1+t^2}R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t。$$

例2：求$\int \frac{\cot x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$。

例2：求$\int \frac{\cot x}{1+\sin x} \mathrm{d}x$。

万能公式比较可靠，但计算量大。因此，在求三角函数有理式的不定积分时，不要滥用万能公式。

例2：求$\int \frac{\cot x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$。

万能公式比较可靠，但计算量大。因此，在求三角函数有理式的不定积分时，不要滥用万能公式。

以下几种变换计算量往往比万能公式小。

(1)若$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$，则令$t = \cos x$。

(2)若$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$，则令$t = \sin x$。

(3)若$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$，则令$t = \tan x$。

例2：求 $\int \frac{\cot x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$。

万能公式比较可靠，但计算量大。因此，在求三角函数有理式的不定积分时，不要滥用万能公式。

以下几种变换计算量往往比万能公式小。

(1)若 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$，则令 $t = \cos x$。

(2)若 $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$，则令 $t = \sin x$。

(3)若 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$，则令 $t = \tan x$。

例3：计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos 2x}$.

作业： 课本 P_{270} 6(1)(3)(4)(6)(9)(10)(11)(12)。

2、可化成有理函数的无理函数的不定积分

一般来说，无理函数的不定积分并不总能积出，例如看似简单的$\int x^m(a+bx^n)^p \mathrm{d}x$，其中$a, b \in \mathbb{R}, m, n, p \in \mathbb{Q}$，仅在$p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n}+p$ 为整数这三种情况下才可积。

2、可化成有理函数的无理函数的不定积分

一般来说，无理函数的不定积分并不总能积出，例如看似简单的$\int x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x$，其中$a,b\in\mathbb{R},m,n,p\in\mathbb{Q}$，仅在$p,\frac{m+1}{n},\frac{m+1}{n}+p$ 为整数这三种情况下才可积。

以下考虑几类特殊的无理函数的不定积分。

(1)$R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})(n>1,n\in\mathbb{Z}^+,ad-bc\neq 0)$.

2、可化成有理函数的无理函数的不定积分

一般来说，无理函数的不定积分并不总能积出，例如看似简单的 $\int x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x$，其中 $a,b\in\mathbb{R}, m,n,p\in\mathbb{Q}$，仅在 $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n}+p$ 为整数这三种情况下才可积。

以下考虑几类特殊的无理函数的不定积分。

$$(1)R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})(n>1, n\in\mathbb{Z}^+, ad-bc\neq 0).$$

特点：1° 不能根式套根式；2° 根式内为同一线性分式。

例4：求$\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$。

例4：求$\int\frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$。

例5：计算$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}(a<x<b)$。

例4：求$\int \frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$。

例5：计算$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}(a<x<b)$。

注：不定积分解法答案表面上可能不同，但导函数必须相同。因此要养成用求导运算来检验不定积分计算结果是否正确的习惯。

7.3.有理函数的不定积分

例4：求$\int \frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$。

例5：计算$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}(a<x<b)$。

注：不定积分解法答案表面上可能不同，但导函数必须相同。因此要养成用求导运算来检验不定积分计算结果是否正确的习惯。

(2)$R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b}\right)$, 其中$m, n \in \mathbb{Z}$, $R(u, v, w)$表示u, v, w 的有理函数.

例4：求$\int \frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$。

例5：计算$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}(a<x<b)$。

注：不定积分解法答案表面上可能不同，但导函数必须相同。因此要养成用求导运算来检验不定积分计算结果是否正确的习惯。

(2)$R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b}\right)$, 其中$m, n \in \mathbb{Z}$, $R(u, v, w)$表示u, v, w 的有理函数.

例6：求$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\right)}$。

作业： 课本P_{270} 4(1)(5)(10)(11)(12), 5, 7。

(3)$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$.

注：有些教材上的$\displaystyle\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x(a \neq 0)$
与$\displaystyle\int (Mx+N)\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$ 均属于此类型。

(3) $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$.

注：有些教材上的 $\int \dfrac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x (a \neq 0)$ 与 $\int (Mx+N)\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$ 均属于此类型。

欧拉变换 (菲·赫金哥尔茨 《微积分学教程》)

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \begin{cases} t \pm \sqrt{a}x, & a > 0 \\ tx \pm \sqrt{c}, & c > 0 \\ t(x-\alpha), & \text{若 } ax^2+bx+c \\ & = a(x-\alpha)(x-\beta). \end{cases}$$

(3)$R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$.

注：有些教材上的$\displaystyle\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x(a\neq 0)$
与$\displaystyle\int(Mx+N)\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$ 均属于此类型。

欧拉变换 (菲·赫金哥尔茨 《微积分学教程》)

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\begin{cases} t\pm\sqrt{a}x, & a>0\\ tx\pm\sqrt{c}, & c>0\\ t(x-\alpha), & \text{若 } ax^2+bx+c\\ & =a(x-\alpha)(x-\beta). \end{cases}$$

应用：P_{270} 5 求 $\int R(x,\sqrt{a+x},\sqrt{b+x})\,\mathrm{d}x$。