华东理工大学 2017–2018 学年第二学期

《高等数学(下)》(11 学分) 课程期末考试试卷答案 (A) 2018.7

一、解下列各题（每小题 6 分，共 12 分）:

1. 已知曲线 L 的方程为 $x = \mathrm{e}^t \cos t$，$y = \mathrm{e}^t \sin t$，$z = \mathrm{e}^t$，$0 \le t \le 1$，计算积分 $I = \int_L \mathrm{d}s$.

解: L 上的弧长微元 $\mathrm{d}s = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$ (2 分)

$I = \int_L \mathrm{d}s = \int_0^1 \sqrt{3}\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$ (2 分)

$= \sqrt{3}(\mathrm{e} - 1)$. (2 分)

2. 计算积分 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 为曲面 $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ 在平面 $z = 2$ 下方的部分.

解: 对于 $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ 有 $z_x = x, z_y = y$.

因此曲面面积元素 $\mathrm{d}S = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. (2 分)

由 $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ 和 $z = 2$ 消去 z 得 $x^2 + y^2 = 4$，

因此 Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D: $x^2 + y^2 \le 4$. (2 分)

$\iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{D} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\pi$. (2 分)

二、解下列各题（每小题 6 分，共 18 分）:

1. 求微分方程 $y''' - 5y'' + 6y' = 0$ 的通解.

解: 所给微分方程的特征方程为 $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0$， (2 分)

即 $\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$.

特征根为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. (2 分)

故原方程的通解为 $y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{2x} + C_3\mathrm{e}^{3x}$. (2 分)

2. 求经过点 $(-1, 0, 2)$ 且与两条直线 $x = y = z$ 及 $\frac{x+1}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ 都垂直的直线方程.

解: 所求直线的方向向量为 $\{1, 1, 1\} \times \{0, 1, -1\} = \{-2, 1, 1\}$, (3 分)

由直线的点向式方程知所求直线为 $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$. (3 分)

3. 求微分方程 $y'' + \frac{y'}{x} = 0$ 满足初始条件 $y(1) = y'(1) = 1$ 的特解.

解: 令 $p = y'$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, 原方程化为 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{p}{x} = 0$. (2 分)

分离变量得 $\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

两边积分得 $\ln p = -\ln x + \ln c_1$, 即 $p = \frac{c_1}{x}$. (2 分)

将 $x = 1, p = 1$ 代入得 $c_1 = 1$. 因此 $y' = \frac{1}{x}$.

两边积分得 $y = \ln x + c_2$.

将 $x = 1, y = 1$ 代入得 $c_2 = 1$. 因此 $y = 1 + \ln x$. (2 分)

三、解下列各题（每小题 6 分，共 18 分）:

1. 求由方程 $\frac{x}{z} = \arctan\frac{z}{y}$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z$, 以及偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解法一: 微分法

所给方程两边微分得 $\mathrm{d}\left(\frac{x}{z}\right) = \frac{\mathrm{d}(\frac{z}{y})}{1+(\frac{z}{y})^2}$,

即 $\frac{z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z}{z^2} = \frac{\frac{y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y}{y^2}}{1+(\frac{z}{y})^2}$, (3 分)

解得 $\mathrm{d}z = \frac{y^2 z + z^3}{xy^2 + yz^2 + z^2 x}\mathrm{d}x + \frac{z^3}{xy^2 + yz^2 + z^2 x}\mathrm{d}y$,

于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2 z + z^3}{xy^2 + yz^2 + z^2 x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^3}{xy^2 + yz^2 + z^2 x}$. (3 分)

解法二: 直接法

所给方程两边对 x 求偏导(视 z 为中间变量)得

$$\frac{1}{z}-\frac{x}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+(\frac{z}{y})^2}\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}$$

解得 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2z+z^3}{xy^2+yz^2+z^2x}.$$ (3 分)

同理可得 $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^3}{xy^2+yz^2+z^2x}.$$

因此 $\mathrm{d}z=\dfrac{y^2z+z^3}{xy^2+yz^2+z^2x}\mathrm{d}x+\dfrac{z^3}{xy^2+yz^2+z^2x}\mathrm{d}y.$ (3 分)

解法三：公式法

令 $F(x,y,z)=\dfrac{x}{z}-\arctan\dfrac{z}{y}$，则

$$F_x=\frac{1}{z},F_y=\frac{z}{y^2+z^2},F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{y}{y^2+z^2}$$

故 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{y^2z+z^3}{xy^2+yz^2+z^2x}.$$

同理可得 $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^3}{xy^2+yz^2+z^2x}.$$

2. 求曲线 L： $xy+yz+zx=11$， $xyz=6$ 在点 $M(3,2,1)$ 处的切线方程和法平面方程.

解: 令 $F(x,y,z)=xy+yz+zx-11$， $G(x,y,z)=xyz-6$， (2 分)

则 $\nabla F(M)=\{y+z,\ z+x,\ x+y\}\big|_{(3,2,1)}=\{3,4,5\}$，

$\nabla G(M)=\{yz,\ zx,\ xy\}\big|_{(3,2,1)}=\{2,3,6\}$. (2 分)

L 的切向量 $\vec{n}(M)=\nabla F(M)\times\nabla G(M)=\{9,-8,1\}$.

所求切线方程为 $\dfrac{x-3}{9}=\dfrac{y-2}{-8}=\dfrac{z-1}{1}$，

法平面方程为 $9(x-3)-8(y-2)+(z-1)=0$，即 $9x-8y+z-12=0$. (2 分)

3. 用拉格朗日乘数法求表面积为 S，体积最大的圆柱体的体积.

解: 设圆柱体的底圆半径为 r，高为 h，则 $r>0,h>0$，

体积$V=\pi r^2 h$，$2\pi r^2+2\pi rh=S$.

作拉格朗日函数 $L(r,h,\lambda)=\pi r^2 h+\lambda(2\pi r^2+2\pi rh-S)$. (2 分)

令$\nabla L=\vec{0}$得 $\begin{cases}2\pi rh+4\pi r\lambda+2\pi h\lambda=0\\ \pi r^2+2\pi r\lambda=0\\ 2\pi r^2+2\pi rh-S=0\end{cases}$，解之得 $r=\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$，$h=\sqrt{\dfrac{2S}{3\pi}}$. (2 分)

由题意知，最大体积一定存在，故当$r=\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$，$h=\sqrt{\dfrac{2S}{3\pi}}$时体积最大，

该最大值为$\pi\left(\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}\right)^2\sqrt{\dfrac{2S}{3\pi}}=\dfrac{S}{6}\sqrt{\dfrac{2S}{3\pi}}=\dfrac{S\sqrt{6\pi S}}{18\pi}$. (2 分)

(注：本题若不用拉格朗日乘数法求解，给零分)

四、解下列各题（每小题 6 分，共 18 分）：

1. 计算二次积分$\int_0^{\pi}\mathrm{d}y\int_y^{\pi}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

解：原式$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{x}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}y$ (3 分)

$=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=2$. (3 分)

2. 计算二重积分$\iint\limits_D(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$D$为圆$x^2+y^2=4$所围成的区域.

解：原式$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(\rho^2-1)\rho\,\mathrm{d}\rho$ (3 分)

$=2\pi(\dfrac{1}{4}\rho^4-\dfrac{1}{2}\rho^2)\Big|_0^2=4\pi$. (3 分)

3. 判别二重极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$是否存在？若存在，请计算其值；若不存在，请说明理由.

解：$\lim\limits_{\substack{y=x\\x\to0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{x^4+x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^2+1}=0$,

$\lim\limits_{\substack{y=x^2\\x\to0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4}{x^4+x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$, (4 分)

上述两个极限不相等，故所给极限不存在. (2 分)

五、选择题(在每小题中选出唯一正确的选项，每小题 4 分，共 16 分)

1. 设$u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, u)=$ ( )

(A) $\dfrac{2}{x^2+y^2+z^2}$ (B) $\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

(C) $\vec{0}$ (D) $\dfrac{-2\{yz, zx, xy\}}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

解：选(B)

2. 设函数$f(x,y)$可微，且对任意的x,y都有$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$和$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，则使不等式$f(x_1,y_1)>f(x_2,y_2)$成立的一个充分条件是 ( )

(A) $x_1<x_2, y_1<y_2$ (B) $x_1>x_2, y_1>y_2$

(C) $x_1>x_2, y_1<y_2$ (D) $x_1<x_2, y_1>y_2$

解：选(C)

3. 设Σ是正方体$|x|\le 1$，$|y|\le 1$，$|z|\le 1$的外表面，则$\oiint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$的值为 ( )

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 24

解：选(D)

4. 设L为上半椭圆$x^2+xy+y^2=1\,(y\ge 0)$上从点$(-1,0)$到点$(1,0)$的弧段，则

$I=\int_L[1+(xy+y^2)\sin x]\,\mathrm{d}x+(x^2+xy)\sin y\,\mathrm{d}y=$ ( )

(A) 0； (B) 1; (C) 2; (D) -1.

解：选(C)

由$x^2+xy+y^2=1$ 得$xy+y^2=1-x^2$，$x^2+xy=1-y^2$，代入所求积分得

$$I=\int_L[1+(1-x^2)\sin x]\,\mathrm{d}x+(1-y^2)\sin y\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}[1+(1-x^2)\sin x]\,\mathrm{d}x+\int_0^0(1-y^2)\sin y\,\mathrm{d}y=2.$$

六、(本题 6 分) 计算$I=\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=4$，方向为逆时针方向.

解：L所围所围区域为D：$x^2+y^2\le 4$.

$$I=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4}=\frac{1}{4}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$ (2 分)

$$=\frac{1}{4}\iint_D\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ (2 分)

$$=\frac{1}{2}\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\cdot 4\pi=2\pi\,.$$ (2 分)

七、(本题 6 分) 计算 $\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=2$ 围成.

解法一: Ω 在 z 轴上的投影为区间 $[0, 2]$.

$\forall z\in[0, 2]$，竖坐标为 z 的平面截 Ω 产生的截面区域为 $D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le z^2\}$.

原式 $=\int_0^2\mathrm{d}z\iint_{D_z}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (3 分)

$$=\int_0^2 z\,\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2 z\cdot\pi z^2\,\mathrm{d}z=4\pi\,.$$ (3 分)

解法二: Ω 在 xOy 面上的投影为区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2^2\}$.

对于 Ω 内的任意一点 (x,y,z) 有 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2$.

原式 $=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 z\,\mathrm{d}z$ (3 分)

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}[4-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(4-\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho=4\pi\,.$$ (3 分)

八、(本题 6 分) 求定义在 $[0,+\infty)$ 上的连续函数 $f(t)$ 使得

$$f(t)=2\iint_{x^2+y^2\le t^2}(x^2+y^2)f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+t^4.$$

解: 采用极坐标计算所给方程中的二重积分，则有

$$f(t)=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\rho^2 f(\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho+t^4=4\pi\int_0^t\rho^3 f(\rho)\,\mathrm{d}\rho+t^4\,.$$ (2 分)

因为 $f(\rho)$ 连续，所以上式中的变限积分关于上限 t 可导，进而 $f(t)$ 可导.

上式两边对t求导得 $f'(t)=4\pi t^3 f(t)+4t^3$，即 $f'(t)-4\pi t^3 f(t)=4t^3$.

它为一阶线性微分方程，由一阶线性微分方程的通解公式得

$$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi\int t^3\mathrm{d}t}\left(C+\int 4t^3\mathrm{e}^{-4\pi\int t^3\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right)=C\mathrm{e}^{\pi t^4}-\frac{1}{\pi}.$$ (2 分)

将 $f(0)=0$ 代入得 $C=\dfrac{1}{\pi}$.

因此 $f(t)=\dfrac{1}{\pi}(\mathrm{e}^{\pi t^4}-1)$. (2 分)