§3 伯努利试验与直线上的随机游动

引入随机变量的概念：

在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 下，满足下面可测性条件的实值函数 $\xi=\xi(\omega)$（$\omega\in\Omega$）称为随机变量，如果对一切 $x\in R$，有事件 $A=\{\xi(\omega)<x\}\in\mathcal{F}$，有时为强调 ξ 与 $\mathcal{F}$ 的关系，ξ 又称为 $\mathcal{F}$ 可测的随机变量（简记为 $r.v.$），记为 $\xi\in\mathcal{F}$。

也 可 以 用 大 写 的 英 文 字 母 $X,Y,\ldots$ 表 示 .

1. 伯努利概型

1) 伯努利试验

——只有两个可能结果的随机试验

2) 重复独立试验

——试验在相同的条件下重复进行，各试验结果互不影响。

3) n 重伯努利试验

——进行 n 次重复独立试验，每次试验的结果只有两个且事件 A 的概率都保持不变，记为 E^n

n重伯努利试验的概率空间的样本点 ：$(A_1, A_2, ..., A_n)$

其中 $A_i = A_i \ or \ \overline{A_i}$

事件域 ：所有样本点的子集构成

若有 l 个 A，$n-l$ 个 $\overline{A}$

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n) = p^l q^{n-l}$$

可列重伯努利试验的概率空间：$(A_1, A_2, ..., A_n, ...)$

二、伯努利概型的一些分布

1. 0–1分布(两点分布，伯努利分布)

分布律：

X	0	1
P	q	p

$$P(X=m)=p^{m}q^{1-m},\qquad m=0,1;\ p+q=1$$

2. 二项分布 $b(k;n,p)$ （Binomial Distribution）

（n次伯努利试验中A成功k次的概率）

$$b(k;n,p)=C_n^k p^k q^{n-k}, q=1-p, k=0,1,\cdots,n$$

（1） $\sum_{k=0}^{n} b(k;n,p)=1$

（2） $b(k;n,p)$ 是 $(px+q)^n$ 展开式中 x^k 的系数，

$$(px+q)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k (px)^k q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} x^k$$

例1. 产品次品率 20%，进行重复抽样检查，共取 5 件，

求（1）其中恰有 2 件次品，

（2）至少有 2 件次品的概率

解： $n=5, p=0.2$

(1) $P_5(2)=C_5^2(0.2)^2(0.8)^3=0.2048$

(2) $P_5(2)+P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)$

$=0.2048+0.0512+0.0064+0.0003=0.2627$

或者，用对立事件来处理，即

$1-P_5(0)-P_5(1)=1-0.32768-0.4096=0.2627$

3、几何分布 $g(k,p)$ (Geometrical Distribution)

（首次成功发生在第 k 次）

p —— A 发生的概率

$$g(k,p)=P(\eta=k)=(1-p)^{k-1}p,\quad k=1,2,3,\cdots$$

记为 $\xi\sim Ge(p)$

4、巴斯卡分布 $f(k;r,p)$

第 r 次成功发生在第 k 次

$$f(k;r,p)=\binom{k-1}{r-1}p^{r}q^{k-r}, \quad k=r,r+1\cdots$$

验证规范性

$$\sum_{k=r}^{\infty} f(k;r,p)=\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}=\sum_{l=0}^{\infty}\binom{r+l-1}{r-1}p^r q^l$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\binom{r+l-1}{l}p^r q^l=\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-r}{l}(-1)^l p^r q^l=p^r(1-q)^{-r}=1$$

$$\binom{-r}{l}=(-1)^l\binom{r+l-1}{l},\left(1+x\right)^l=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{l}{r}x^r$$

P87（分赌注问题）

甲、乙两个赌徒按某种方式下注赌博，说定先胜 t 局者将赢得全部赌注，但进行到甲胜 r 局，乙胜 s 局（r<t，s<t）时，因故不得不中止，试问如何分配这些赌注才公平合理？

令$n=t-r, m=t-s$

问题： 在出现 m 次$\overline{A}$之前出现 n 次A的概率 ？

$$p_{甲}=\sum_{k=0}^{m-1}\binom{n+k-1}{k}p^n q^k=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{m+k-1}{k}p^k q^m$$

$$=\sum_{k=n}^{m+n-1}\binom{m+n-1}{k}p^k q^{m+n-1-k}$$

$$p_{甲}=\sum_{k=0}^{m-1}\binom{n+k-1}{k}p^n q^k$$

$$p_{甲}=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{m+k-1}{k}p^k q^m$$

$$p_{甲}=\sum_{k=n}^{m+n-1}\binom{m+n-1}{k}p^k q^{m+n-1-k}$$

P88 例 4（巴拿赫火柴盒问题）

数学家的左、右衣袋中各放有一盒装有 N 根火柴的火柴盒，求发现一盒用光时，另一盒有 r 根的概率.

解： 看作 $p=\frac{1}{2}$ 的伯努利试验，要左边空而右边剩 r 根，

应该是左边摸过 $N+1$ 次而右边摸过 $N-r$ 次，这事件

的概率为

$$f\left(2N-r+1;N+1,\frac{1}{2}\right)=\binom{2N-r}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r+1}$$

所求的概率为

$$u_r=2\cdot f\left(2N-r+1;N+1,\frac{1}{2}\right)=\binom{2N-r}{N}2^{-2N+r}$$

3. 直线上的随机游动

考虑 x 轴上的一个质点，假定它只能位于整数点，在时刻 $t=0$ 时，它处于初始位置 a（整数），以后每隔单位时间，分别以概率 p ($q=1-p$)向正的(负的)动一个单位，求质点在时刻 $t=n$ 时的位置，用这种方式描述的质点运动称为随机游动.

无限制随机游动

有吸收壁的随机游动

有反射壁及弹性壁的随机游动

无限制随机游动

问题： 初始位置： 原点； $t=n$的位置： S_n

分析： x： 前 n 次游动中向右游动的次数，
y： 前 n 次游动中向左移动的次数，

则 $\begin{cases} x+y=n \\ x-y=k \end{cases}$ 即 $x=\dfrac{n+k}{2}$，（k 必须与 n 具有相同的奇偶性）

$$P\{S_n=k\}=\binom{n}{\frac{n+k}{2}}q^{\frac{n-k}{2}}p^{\frac{n+k}{2}}$$

当 k 与 n 奇偶性相反时，概率为 0

两端带吸收壁的随机游动

问题： 初始位置：$t=0,\quad x=a$，

吸收壁：$x=0$ 及 $x=a+b$

q_n：初始位置为 n，最终在 $x=a+b$ 被吸收的概率

分析： $q_0=0, q_{a+b}=1$

$$q_n = pq_{n+1}+qq_{n-1} \qquad n=1,2,\cdots,a+b-1$$

$$p(q_{n+1}-q_n)=q(q_n-q_{n-1})$$

记 $c_n=q_{n+1}-q_n, r=\dfrac{q}{p}$

则有 $c_n=rc_{n-1}$

$$c_n = rc_{n-1}$$

下面分两种情况求解：　　　赌徒破产模型

（i）　对称随机游动

$r=1$ 即 $p=q=\dfrac{1}{2}$，　这时 $c_n = c_{n-1}$，

$$q_{n+1}-q_n = q_n - q_{n-1} = \cdots = q_1 - q_0 = d$$

$$\begin{cases} q_n = q_0 + nd \\ q_0 = 0, q_{a+b} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_n = \frac{n}{a+b}, \quad q_a = \frac{a}{a+b}$$

（ii）$r \neq 1$，即 $p \neq q$

$$c_n = rc_{n-1} = r^2 c_{n-2} = \cdots = r^n c_0$$

$$q_n - q_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(q_{k+1} - q_k) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k = \sum_{k=0}^{n-1} r^k c_0 = \frac{1-r^n}{1-r} c_0$$

$$q_0 = 0, q_{a+b} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1-r^{a+b}}{1-r} c_0 = 1 \quad \Rightarrow q_n = \frac{1-r^n}{1-r^{a+b}}$$

$$q_a = \frac{1-r^a}{1-r^{a+b}} = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

4. 推广的伯努利试验与多项分布

n 次重复独立试验每次试验的可能结果记为 $A_1, A_2, \cdots, A_r$

$P(A_i) = p_i, i = 1,2,\cdots r$

$\boldsymbol{p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1} \qquad \boldsymbol{p_i \geq 0}$

在 n 次试验中 A_1 出现 k_1 次，……A_r 出现 k_r 次的概率为

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$$

这里 $k_i \geq 0$，且 $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$

称为多项分布

P93 例 5.

人类的血型分为O, A, B, AB四型，假定某地区的居民中这四种血型的人的百分比分别为 0.4，0.3，0.25，0.05，若从此地区居民中随机地选出 5 人，求有两个为O型，其他三个分别为A, B, AB型的概率.

解：概率为$P=\dfrac{5!}{2!1!1!1!}\times 0.4^2\times 0.3\times 0.25\times 0.05=0.036$

P93 例 6.（平面上随机游动）

一质点从平面上某点出发，等可能地向上、下、左、右方向移动，每次移动的距离为 1，求经过 $2n$ 次移动后回到出发点的概率.

解： A_1,A_2,A_3,A_4表示质点向上、下、左、右移动一格，

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)=\frac{1}{4}$$

$$P=\sum_{k+m=n}\frac{(2n)!}{(k!)^2(m!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(k!)^2[(n-k)!]^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{n!}{k!(n-k)!}\right]^2=\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\binom{2n}{n}^2$$

例2. 赌徒破产模型

甲有本金a元, 决心再赢b元停止赌博. 设甲每局赢的概率是 0.5, 每局输赢都是一元钱, 甲输光后停止赌博, 求甲输光的概率 .

解： 用 ***A*** 表示甲前一局赢,用 B_k 表示甲有本金 ***k*** 元时最后输光.

$$p(0)=1,\ p(a+b)=0$$

$$p(k)=P(B_k)=P(A)P(B_k\mid A)+P(\bar{A})P(B_k\mid \bar{A})$$

$$=\frac{1}{2}P(B_{k+1})+\frac{1}{2}P(B_{k-1})=\frac{1}{2}p(k+1)+\frac{1}{2}p(k-1)$$

$$p(k+1)-p(k)=p(k)-p(k-1)=\cdots=p(1)-p(0)=p(1)-1$$

上式两边对 $k=n-1,n-2,\cdots,0$ 求和后得到

$$p(n)-1=n(p(1)-1)$$

取 $n=a+b$,得到

$$0-1=p(a+b)-1=(a+b)(p(1)-1) \qquad p(1)-1=-\frac{1}{a+b}$$

$$p(a)=1+a(p(1)-1)=\frac{b}{a+b}$$