# 华东理工大学 2018–2019 学年第一学期

## 《高等数学（上）11 学分》课程期中考试试卷答案　2018.11

**一. 填空题（本大题共 12 小题，每小题 4 分，共 48 分）：**

**1**、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}\right)=$ ________ .

**解：** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)=1$

**2**、极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$ ________ .

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\dfrac{2}{x}=\dfrac{6}{5}$

**3**、设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$ ________ .

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}\cdot\frac{3ax}{x-a}}=e^{3a}=8$，则 $a=\ln 2$ .

4、若 $x\to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小量，则 $a=$ ________ .

解：$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1\sim-\dfrac{1}{4}ax^2$，$x\sin x\sim x^2$，故 $a=-4$ .

**5**、设 $f(x)=\sqrt{1+x^2}+xe^{-x}$，则 $f'(1)=$ ________ .

**解：** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6、设 $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$，则导函数 $f'(x)$ 的间断点是 ________ .

**解：** $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\dfrac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\dfrac{2(1-x^2)}{\left(1+x^2\right)\left|1-x^2\right|}$，间断点是 $x=\pm 1$ .

7、设方程 $y^3+y^{\sin x}+3\cos x=2$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ 附近确定了隐函数 $y=y(x)$，则

$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=$ ______________ .

**解：** $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{4}$.

8、极坐标系下曲线 $\rho=\frac{1}{\theta}$ 上对应 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的点处切线与极轴的夹角是 ___________ .

解： $\arctan\frac{2}{\pi}$.

**9**、设 $y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 互为反函数， $f(x)$ 可导，且

$f'(x)\neq 0,\ f(3)=5,\ g(x)=f\left[\frac{1}{3}\varphi^2\left(4x-3\right)\right]$，则 $g'(2)=$ ___________ .

解：8.

10、设 $y=\sqrt[7]{x}+\sqrt[x]{7}+\sqrt[7]{7}$，则 $\left.\mathrm{d}y\right|_{x=2}=$ ___________ .

解： $\left(\frac{\sqrt[7]{2}}{14}-\frac{\sqrt{7}}{4}\ln 7\right)dx$ 或者写为 $\left(\frac{2^{-\frac{6}{7}}}{7}-\frac{\sqrt{7}}{4}\ln 7\right)dx$.

11、函数 $y=\ln(1-x)$ 的 $n$ 阶导数 $y^{(n)}=$ ____________________________________ .

解： $\left(-1\right)^{n-1}\frac{\left(n-1\right)!}{\left(x-1\right)^n}$

12、若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+nh)-f(a-mh)}{h}=$ ____________ .

解： $(n+m)f'(a)$

## 二．选择题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）：

**1**、设 $x_n\le z_n\le y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$ （　　）

（A）存在且等于 0　　（B）存在但不一定等于 0

（C）不一定存在　　（D）一定不存在

解 C

**2**、设函数 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 上有定义，且当 $x\in(-a,a)$ 时，恒有 $\left|f(x)\right|\le x^2$，则 $x=0$ 点必

是 $f(x)$ 的 （　　）

（A）间断点　　　　　　　　　　（B）连续但不可导点

（C）可导点且 $f'(0)=0$　　　　　　（D）可导点但 $f'(0)\neq 0$

解 C

**3**、函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n+x^{2n}}\,(x>0)$，则此函数　　　　（　　　）

（A）没有间断点　　　　　　　　（B）有一个第一类间断点

（C）有两个或以上间断点　　　　（D）有一个第二类间断点

解 B

**4**、若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，则　　　　（　　　）

（A）当 $g(x)$ 有界时，必有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)=0$

（B）当 $g(x)$ 为任意函数时，都有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)=0$

（C）只有当 $g(x)$ 在 $0$ 点的极限存在时，才有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)=0$

（D）只有当 $g(x)$ 为常数时，才有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)=0$

解 A

**5**、设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，对于命题

（1）若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必存在间断点；

（2）若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，则导函数 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界；

下列选项正确的是：

（A）仅（1）正确　　（B）仅（2）正确　　（C）都正确　　（D）都错误

解：A　其中(2)错误，　可以考虑函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\frac{4}{3}}\sin\frac{1}{x} & \text{当}x\neq 0\text{时} \\ 0 & \text{当}x=0\text{时} \end{cases}$

三、（**本题 8 分**）.

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}=2$，试确定常数 $a,b$，使得当 $x\to 0$ 时，$f(x)\sim ax^b$.

**解：** 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}=2$ 得

$$\lim_{x\to0}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}\cdot\lim_{x\to0}x^2=0,$$

即 $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}=1$ 或 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}f(x)=0$. 3 分

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{x}f(x)}{x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2x^3}=2$, 3 分

所以 $f(x)\sim4x^3$，即 $a=4,b=3$. 2 分

**四、（本题 8 分）.**

设 $y=f(x)$ 满足 $(1+x^2)^2y''=y$，且 $\begin{cases}x=\tan t\\ y=\dfrac{u(t)}{\cos t}\end{cases}$，试求 $\dfrac{d^2u}{dt^2}$.

**解：** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{du}{dt}\cos t+u\sin t}{\cos^2t}\cdot\dfrac{1}{\sec^2t}=\dfrac{du}{dt}\cos t+u\sin t$, 2 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2u}{dt^2}\cos t-\frac{du}{dt}\sin t+\frac{du}{dt}\sin t+u\cos t}{\sec^2t}=\cos^3t\left(\frac{d^2u}{dt^2}+u\right),$$ 2 分

代入 $(1+x^2)^2y''=y$ 得 $\sec^4t\cdot\cos^3t\left(\dfrac{d^2u}{dt^2}+u\right)=\dfrac{u}{\cos t}$, 2 分

因此 $\dfrac{d^2u}{dt^2}=0$. 2 分

**五、（本题 8 分）**

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$， $x_{n+1}=\sin x_n,(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

**证：** 由 $0<x_1<\pi$，得 $0<x_2=\sin x_1<x_1<\pi$；

若 $0<x_n<\pi$，则有 $0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n<\pi$；

所以由数学归纳法知 $\{x_n\}$ 单调下降且有界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. (单减 3 分，有下界 3 分)

记 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，

则由 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边取极限得 $a=\sin a$, 所以 $a=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.　　2 分

六、（**本题 8 分**）

设 $c$ 为正数，证明方程 $x^3+ax^2+bx=c$ 至少有一个不超过 $\max\left(1,|a|+|b|+|c|\right)$ 的正根.

证：令 $f(x)=x^3+ax^2+bx-c$，(2 分)　$L=\max\left(1,|a|+|b|+|c|\right)$，　则

$f(L)=L^3+aL^2+bL-c$

$\geq(|a|+|b|+|c|)L^2+aL^2+bL-c=(|a|+a)L^2+|b|L^2+bL+|c|L^2-c$

$\geq(|b|+b)L+|c|-c\geq 0$　　3 分

$f(0)=-c<0$，　　2 分

由于 $f(x)$ 是 $\left[0,L\right]$ 上的连续函数，由闭区间上连续函数的性质，可知至少存在一点

$\xi\in(0,L]$，使得 $f(\xi)=0$. 即所给方程至少有一个不超过 $L$ 的正根.　　1 分