第二章　空间的平面和直线

§1仿射坐标系中平面的方程
两平面的相关位置

1.平面的参数和普通方程

问题：在仿射坐标系 $\left[O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right]$ 下，已知一个点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和两个不共线向量 $\vec{V}_1=(X_1,Y_1,Z_1),\vec{V}_2=(X_2,Y_2,Z_2)$，确定过 **M₀** 且平行于 $\vec{V}_1$，$\vec{V}_2$ 的平面 π.

参数方程:

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{V}_1 + \mu \vec{V}_2$， λ, μ 为参数

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda X_1 + \mu X_2 \\ y = y_0 + \lambda Y_1 + \mu Y_2 \\ z = z_0 + \lambda Z_1 + \mu Z_2 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M}，\ \vec{V}_1，\ \vec{V}_2 \text{ 共面} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & X_1 & X_2 \\ y - y_0 & Y_1 & Y_2 \\ z - z_0 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$

$Ax+By+Cz+D=0$

其中 $A=\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}, B=-\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}, Z=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix}$,

$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$

称为平面 π 的普通方程.

在直角坐标系下,法方程为: $\dfrac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0.$

若 $M_0(\vec{r}_0), M_1(\vec{r}_1), M_2(\vec{r}_2)$ 是空间中不共线的三点，其中 $\vec{r}_i=(x_i, y_i, z_i)$ $i=0,1,2$，则由这三点可确定一个平面

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\lambda(\vec{r}_1-\vec{r}_0)+\mu(\vec{r}_2-\vec{r}_0)$$

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda(x_1-x_0)+\mu(x_2-x_0) \\ y=y_0+\lambda(y_1-y_0)+\mu(y_2-y_0) \\ z=z_0+\lambda(z_1-z_0)+\mu(z_2-z_0) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

定理：向量 $\vec{w}=(r,s,t)$ 平行于平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$

$\Leftrightarrow Ar+Bs+Ct=0$

推论：平面 π：$\boldsymbol{Ax+By+Cz+D=0}$，则平面 π 平行于 **x** 轴（或 **y** 轴，或 **z** 轴）$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A=0}$（或 $\boldsymbol{B=0}$，或 $\boldsymbol{C=0}$）

平面 π 通过原点 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{D=0}$

定理：每个平面都可以用含三个变数 **x**，**y**，**z** 的一个三元一次方程表示，反之，每个含 **x**，**y**，**z** 的三元一次方程代表一个平面。

例 1：画平面 π：$2x+y+4z-6=0$

例 2：画平面 π：$y+z-2=0$

2.两平面的相关位置

定理：取定一个仿射标架，设平面 π_1 和 π_2 的方程分别是

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

则① π_1 与 π_2 相交 $\Leftrightarrow$ 它们方程中的一次系数不成比例

② π_1 与 π_2 平行 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$

③ π_1 与 π_2 重合 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$

3.三平面恰交于一点的条件

命题：三个平面 π_i ： $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$

i =1，2，3 交于一点 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$

三个平面的相对位置: