华东理工大学 2017–2018 学年第二学期

《高等数学（下）》（11 学分）课程期中考试试卷　2018.5

一、（本题 8 分）已知函数 $y=f(x)$ 的图形是经过两点 $P(0,1)$ 和 $Q(1,0)$ 的一段向上凸的曲线弧，点 $M(x,y)$ 为该曲线上任意一点，弧 $\overset{\frown}{PM}$ 与弦 $\overline{PM}$ 之间的面积为 $2x^3$，求函数 $f(x)$.

解：由题设条件知 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}[1+f(x)]x=2x^3$.　(2 分)

上式两边对 x 求导得 $f(x)-\frac{1}{2}[1+xf'(x)+f(x)]=6x^2$.　(2 分)

即 $f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=-12x-\frac{1}{x}$，此为一阶线性微分方程，其通解为

$$f(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[C+\int(-12x-\tfrac{1}{x})\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\right]=1-12x^2+Cx.\quad(2\text{ 分})$$

曲线经过点 Q，因此 $f(1)=0$，代入上式得 $C=11$.

故 $f(x)=1+11x-12x^2$.　(2 分)

二、（本题 8 分）设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为非零向量，且 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$，$\vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}$，$\vec{c}\times\vec{a}=\vec{b}$，证明 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$.

证：由 $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}$ 得 $\vec{a}\perp\vec{b}$. 同理可得 $\vec{a}\perp\vec{c},\vec{b}\perp\vec{c}$　(得到垂直关系 3 分)

因此 $|\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\dfrac{\pi}{2}=|\vec{a}||\vec{b}|$. 同理可得 $|\vec{a}|=|\vec{b}||\vec{c}|$，$|\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{c}|$.

(得到数量关系 3 分)

再结合 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为非零向量，得 $|\vec{a}|\neq0,|\vec{b}|\neq0,|\vec{c}|\neq0$. 因此

$$|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|=(|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|)^2\text{，即}|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|=1$$

从而有 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$.　(其他推导 2 分)

三、（本题 8 分）设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，而且 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y)$ 满足方程 $z_{xx}+z_{yy}=\mathrm{e}^{2x}z$，求 $f(u)$.

解：令 $u=\mathrm{e}^x\sin y$，则 $z=f(u)=f(\mathrm{e}^x\sin y)$，$u_x=\mathrm{e}^x\sin y$，$u_y=\mathrm{e}^x\cos y$.

$z_x=f'(u)\mathrm{e}^x\sin y$，　$z_{xx}=f''(u)\,\mathrm{e}^{2x}\sin^2 y+f'(u)\,\mathrm{e}^x\sin y$，

(一阶偏导至少有一个正确给 2 分)

$z_y = f'(u)\mathrm{e}^x \cos y$， $z_{yy} = f''(u)\,\mathrm{e}^{2x}\cos^2 y - f'(u)\,\mathrm{e}^x \sin y$

(二阶偏导至少有一个正确给 2 分)

代入到方程 $z_{xx} + z_{yy} = \mathrm{e}^{2x} z$ 得

$$f''(u)\,\mathrm{e}^{2x}\sin^2 y + f'(u)\,\mathrm{e}^x \sin y + f''(u)\,\mathrm{e}^{2x}\sin^2 y - f'(u)\,\mathrm{e}^x \sin y = \mathrm{e}^{2x} f(u),$$

即 $f''(u) - f(u) = 0$. (代入得到正确的微分方程给 2 分)

其特征方程为 $\lambda^2 - 1 = 0$, 特征根为 $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

通解为 $f(u) = c_1\mathrm{e}^u + c_2\mathrm{e}^{-u}$，其中 c_1, c_2 为任意常数. (微分方程求解正确给 2 分)

四、(本题 8 分) 求直线 l_0: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 π: $x - y + 2z - 1 = 0$ 上的投影直线 l 的方程, 并求 l 绕 y 轴旋转一周而得到的曲面方程.

解: (1)解法一. 在 l_0 上可取一点 $(1, 0, 1)$. 经过直线 l_0 且与平面 π 垂直的平面为

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

(此处也可用点法式方程求解, 方法正确 2 分)

即 $x - 3y - 2z + 1 = 0$.

故投影直线 l 的方程为 $\begin{cases} x - 3y - 2z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$. (2 分)

解法二. 采用平面束方程求解.

将直线 l_0 的方程改写为一般式方程得 $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$,

经过 l_0 的平面束方程为 $x - y - 1 + \lambda(y + z - 1) = 0$, (2 分)

即 $x + (\lambda - 1)y + \lambda z - 1 - \lambda = 0$，法向量为 $\{1, \lambda - 1, \lambda\}$.

平面束中与 π 垂直的平面应使得 $\{1, \lambda - 1, \lambda\} \cdot \{1, -1, 2\} = 0$，即 $\lambda = -2$.

因此经过直线 l_0 且与平面 π 垂直的平面为 $x + (-2-1)y - 2z - 1 - (-2) = 0$，

即 $x - 3y - 2z + 1 = 0$.

故投影直线l的方程为$\begin{cases} x-3y-2z+1=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$. (2 分)

解法三. 将l_0的方程改写为参数方程得到$x=1+t$, $y=t$, $z=1-t$, 代入到平面π的方程, 解得$t=1$, 故l_0与π的交点为$M(1+1,1,1-1)=(2,1,0)$. (1 分)

在l_0上可取一点P $(1,0,1)$, 过点P且与平面π垂直的直线为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$, 改写为参数方程得到$x=1+t$, $y=-t$, $z=1+2t$, 代入到平面π的方程, 解得$t=-\frac{1}{3}$, 故该垂线与π的交点为$H\left(1-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},1-2\cdot\dfrac{1}{3}\right)=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$. (1 分)

由直线的两点式方程得到投影直线l的方程为$\dfrac{x-2}{\frac{2}{3}-2}=\dfrac{y-1}{\frac{1}{3}-1}=\dfrac{z}{\frac{1}{3}}$, 即$\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$.

注: 其他最后结果比较典型的有: $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{-1}$, $\dfrac{3x-2}{4}=\dfrac{3y-1}{2}=\dfrac{3z-1}{-1}$. (2 分)

(2) 设(x,y,z)为所有旋转曲面上的任意一点, 且它是由l上的点(x_1,y_1,z_1)旋转而来, 则

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{x_1^2+z_1^2} \\ y=y_1 \\ \dfrac{x_1-2}{4}=\dfrac{y_1-1}{2}=\dfrac{z_1}{-1} \text{(此方程可换为(1)中得到的其他方程)} \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

从中消去x_1,y_1,z_1得到所求旋转曲面的方程为

$x^2+z^2=(2y)^2+\left(\dfrac{y-1}{2}\right)^2$, 即$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$. (2 分)

五、(每小题 4 分，共 52 分) 填空题: 请将最后结果直接填写在相应的横线上

1. 微分方程$(1+x^2)y'=xy$的通解为______________________.

答: $y=C\sqrt{1+x^2}$

2. 微分方程$x^2y'+xy=y^2$的通解为______________________.

答: $y-2x=Cx^2y$

3. 微分方程$yy''+(y')^2=0$满足$y(0)=1$, $y'(0)=\dfrac{1}{2}$的特解为____________________.

答： $y=\sqrt{1+x}$

4. 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{x^2+y}$ 的通解为________________________.

答： $x^2=C\mathrm{e}^{2y}-y-\dfrac{1}{2}$

5. 与曲线族 $y=\dfrac{1}{x+C}$ 正交的曲线族方程为_____________________.

答： $y^3=3x+C$

6. 微分方程 $y''+3y'+2y=\mathrm{e}^{2x}$ 满足 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解为_____________________.

答： $y=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{12}\mathrm{e}^{2x}$

7. 在平面 $x+y+z=1$ 上且与直线 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-2}$ 垂直相交的直线方程为为_____________.

答： $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+2}{-1}$

8. 曲面 $z=x^2+y^2$ 上垂直于直线 $\begin{cases}x+z=1\\ y+z=1\end{cases}$ 的切平面方程为_______________________.

答： $2x+2y-2z-1=0$.

9. 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xyz=x+y+z$ 所确定，则 $\mathrm{d}z=$_____________________.

答： $\dfrac{yz-1}{1-xy}\mathrm{d}x+\dfrac{xz-1}{1-xy}\mathrm{d}y$ 注：答案也可改写为 $-\dfrac{y^2+1}{(xy-1)^2}\mathrm{d}x-\dfrac{x^2+1}{(xy-1)^2}\mathrm{d}y$

10. 设 $u=x\ln(xy)$，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=$ _________.

答： $\dfrac{1}{y}$

11. 方程 $z^3-3xyz+1=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 处沿方向 $\{-1,2\}$ 的方向导数为_________.

答： $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

12. 曲线 $\begin{cases}xy+yz+zx=5\\ xyz=2\end{cases}$ 在点 $(1,1,2)$ 处的切线方程为____________________________.

答：　$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{0}$　　注: 答案也可写为$\begin{cases}x+y-2=0\\z=2\end{cases}$

13. 二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=$ ________.

答： 0

六、(每小题 4 分，共 16 分) 选择题: 请选出每一小题中唯一正确的选项

1. 若微分方程 $y'=f(x,y)$ 的通解为 $y=g(x,C)$, 则 $y'=f(2x,2y)$ 的通解为　(　　)

(A) $y=\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{1}{2}x,C\right)$; (B) $y=\dfrac{1}{2}g(2x,C)$; (C) $y=2g\left(\dfrac{1}{2}x,C\right)$; (D) $y=2g(2x,C)$

答：B

2. 方程 $2x^2+3y^2-4z^2=-1$ 所表示的曲面是　(　　)

(A) 双曲抛物面;　(B) 椭球面;　(C) 单叶双曲面;　(D) 双叶双曲面

答：D

3. 对于函数 $f(x,y)=\sqrt{|x|^3+y^2}$, 下列结论正确的是　(　　)

(A) $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$ 都存在;　(B) $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$ 都不存在;

(C) $f_x'(0,0)$ 存在, 但 $f_y'(0,0)$ 不存在;　(D) $f_x'(0,0)$ 不存在, 但 $f_y'(0,0)$ 存在

答：C

4. 设函数 $f(x,y)$ 在点 M 处的二阶偏导数都存在, 则 $f(x,y)$ 在点 M 处　(　　)

(A) 一阶偏导数不一定连续;　(B) 一阶偏导数必连续;

(C) 必可微;　(D) 所有方向导数都存在

答：A