一般力的功：

$$A=\int dA=\int \vec{F}\cdot d\vec{s}=\int F\cos\theta ds\ =\tfrac{1}{2}mv_b^2-\tfrac{1}{2}mv_a^2$$

保守力的功：

$$\boxed{A_{保内}=-\left(E_{pb}-E_{pa}\right)}$$

$$E_{P重}=mgh$$

$$\boxed{E_p(x,y,z)=\int_{(x,y,z)}^{E_{pa}=0}\vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

$$E_{P弹}=\frac{1}{2}kx^2$$

$$E_{P引}=-\frac{GMm}{r}$$

系统的动能定理

$$A=A_{外}+A_{保内}+A_{非保内}=E_{k2}-E_{k1}$$

系统的功能原理

$$A_{外}+A_{非保内}=E_2-E_1$$

机械能守恒定律

当$A_{外}+A_{非保内}=0$　　则：$E_{k2}+E_{P2}=E_{k1}+E_{P1}=C$

讨论：

1. 在非惯性系中应用动能定理、功能原理时，必须考虑惯性力作功。

2.封闭系统（$A_{外}=0$）

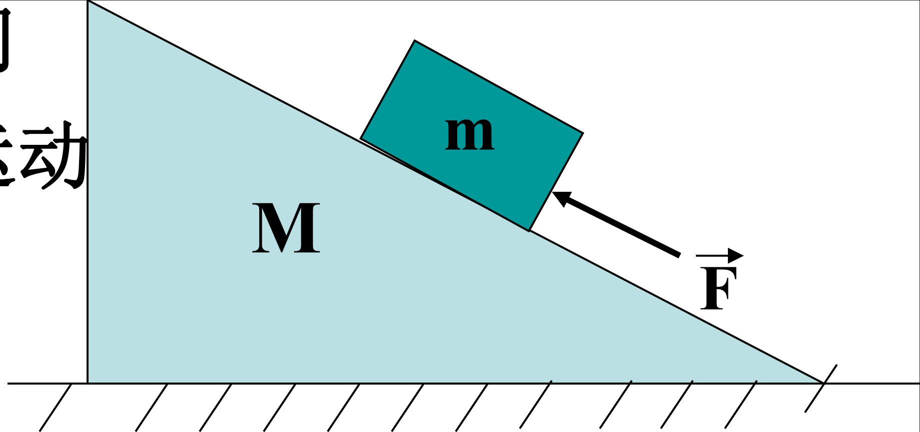
$$\begin{cases} A_{非保内}=0 \text{—— 机械能 守恒} \\ A_{非保内}\neq 0 \text{—— 机械能 不守恒} \end{cases}$$

若：$A_{非保内}>0$ —— 其它能量 $\rightarrow$ 机械能

$A_{非保内}<0$ —— 机械能 $\rightarrow$ 其它能量

注意：一个封闭系统经历任何变化时，该系统的所有能量的总和是不变的——**能量守恒定律**

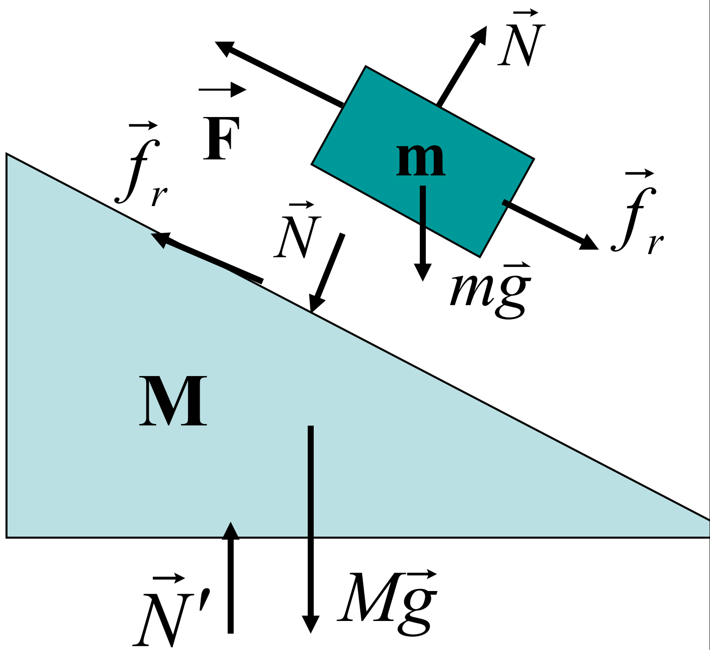
例1 M，m间有摩擦，M与地面间无摩擦，m相对于M斜向上运动



以m, M, 地面为**系统**，**作用力**

外力：$\vec{F}$

内力 $\begin{cases} \text{保守力：} mg, Mg \\ \text{非保守力：} f_r, N, N' \end{cases}$



系统的动能定理

$$A = A_{外} + A_{保内} + A_{非保内} = E_{k2} - E_{k1}$$

系统的功能原理

$$A_{外} + A_{非保内} = E_2 - E_1$$

机械能守恒定律

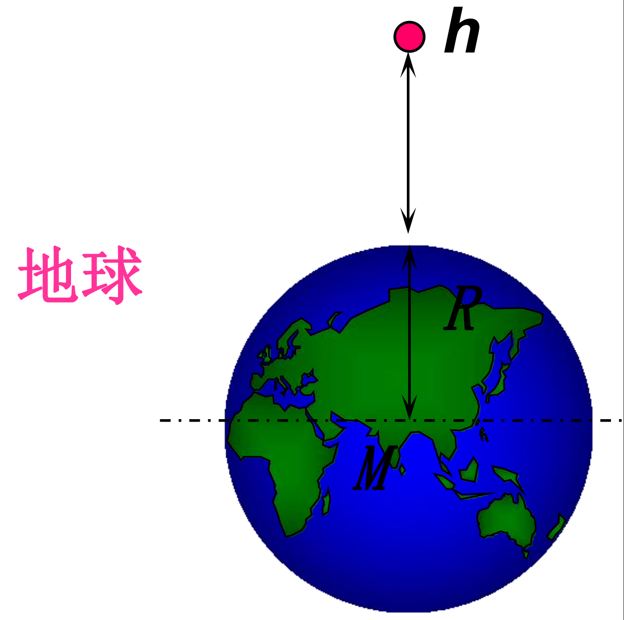
当 $A_{外} + A_{非保内} = 0$ 　则：$E_{k2} + E_{P2} = E_{k1} + E_{P1} = C$

例2 地球***M*,*R*,**质点***m* 距地面高**h**, 取地球面为0势能，求质点地球系统在此相对位置的引力势能。

解：

$$E_p = A = \int_{h+R}^{R} -G\frac{Mm}{r^2}dr$$

$$= G\frac{Mm}{R} - G\frac{Mm}{R+h} = GMm\frac{h}{R(R+h)}$$



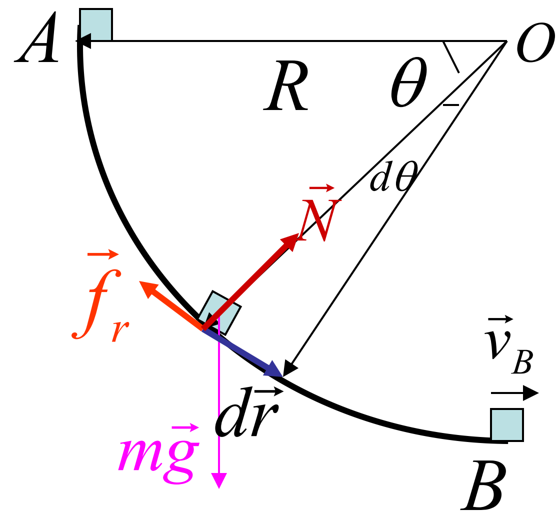
$$\because h << R$$

$$\therefore R(R+h) \approx R^2$$

$$\left.\begin{array}{l} E_P = GMm\dfrac{h}{R^2} \\ \text{又：} mg = G\dfrac{Mm}{R^2} \end{array}\right\} \Rightarrow E_P = mgh$$

可见重力势能是万有引力势能在地球表面附近的一个特例

例3. 一质量为m的物体, 由静止开始沿着四分之一的圆周, 从A滑到B, 在B处速度的大小为v_B, 圆半径为R. 求:物体从A到B, 摩擦力所做之功.



已知: m, v_B, R, $v_A=0$

求: A_{fr}

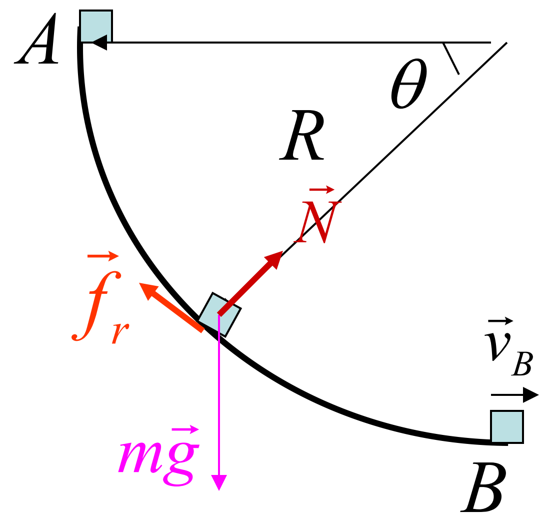
(1). 由功的定义解:

$$A_{f_r}=\int \vec{f}_r d\vec{r}=-\int f_r dr$$

切向: $mg\cos\theta - f_r = ma_t = m\dfrac{dv}{dt} \Rightarrow f_r = mg\cos\theta - m\dfrac{dv}{dt}$

$$A_{f_r}=\int dA=\int_0^{v_B} mvdv-\int_0^{\frac{\pi}{2}} mgR\cos\theta\cdot d\theta=\frac{1}{2}mv_B{}^2-mgR$$

(2). 应用动能定理解



以m为研究对象： $A = E_{k2} - E_{k1}$

$$
\text{合力}\begin{cases} \textbf{mg}\begin{cases}\textbf{mg}\cos\theta\text{——做功}\\ \textbf{mg}\sin\theta\text{——不做功}\end{cases} \\ \textbf{N}\text{——不做功} \\ \mathbf{f_r}\text{——做功}\end{cases}
$$

$$A = A_{mg\cos\theta} + A_{f_r} = \int mg\cos\theta \cdot ds + A_{f_r} = mgR + A_{f_r}$$

$$= \frac{1}{2}mv_B^{\ 2} - \frac{1}{2}mv_A^{\ 2} = \frac{1}{2}mv_B^{\ 2}$$

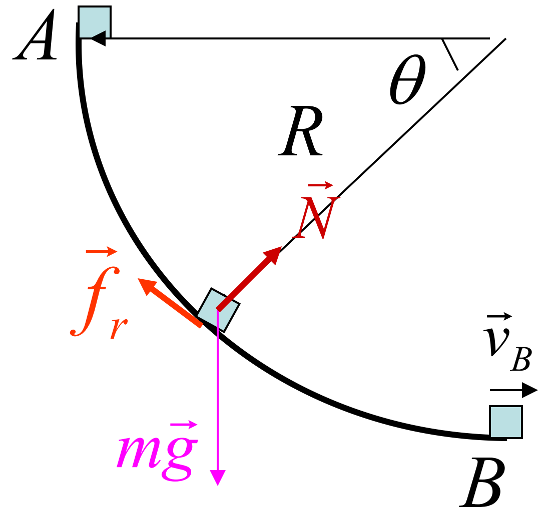
$$\therefore A_{f_r} = \frac{1}{2}mv_B^{\ 2} - mgR$$

(3). 应用功能原理解

以m和地球为研究系统:

$$A_{外} + A_{非保内} = E_2 - E_1 = (E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1})$$

受力分析
- 外力: 无
- 保守内力: **mg**
- 非保守内力
  - **N:** 不做功
  - ***f*r:** 做功



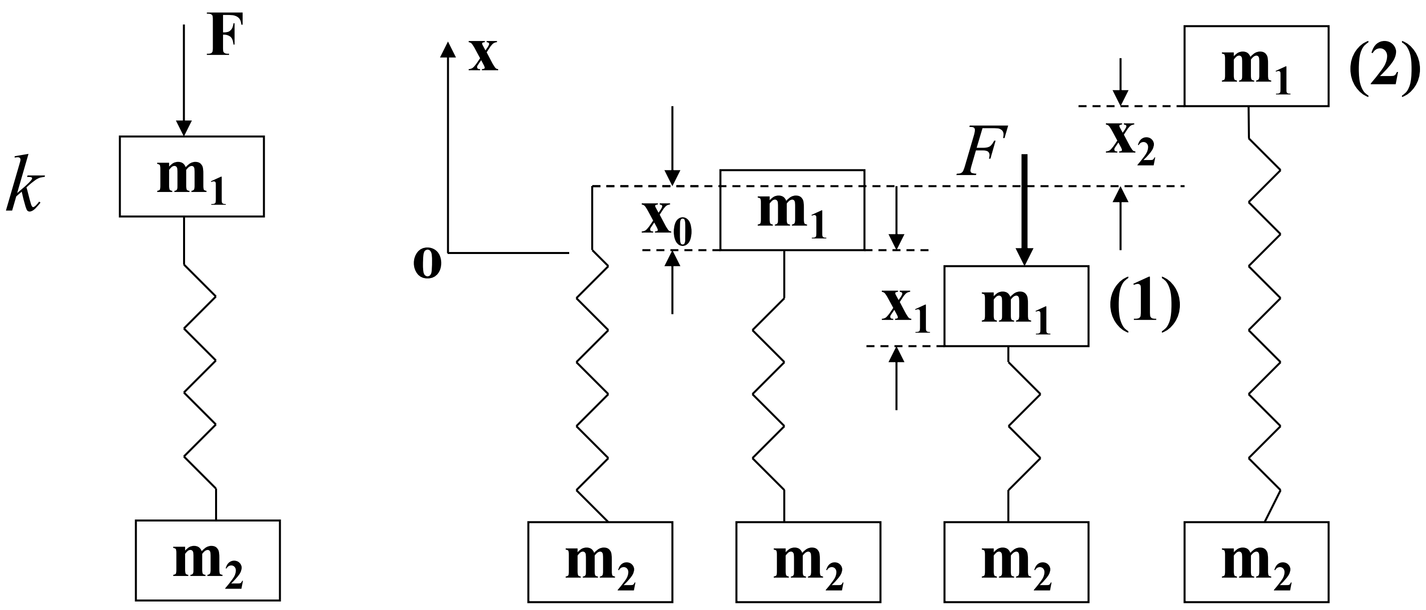
$$\therefore A_{f_r} = (\frac{1}{2}mv_B{}^2 + 0) - (0 + mgR)$$

(以B点为重力势能零点)

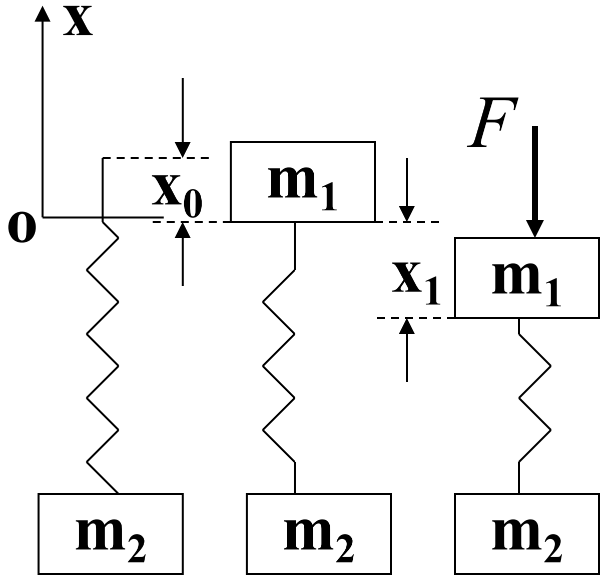
$$= \frac{1}{2}mv_B{}^2 - mgR$$

例4. m_2放在在地面上，m_1与m_2之间弹簧（k）相连，问：（1）以m_1的平衡位置为弹性势能和重力势能的零点，写出系统（m_1，弹簧，地球）的总势能表达式？（2）F力为多大，才能使力突然撤除时，上面板跳起，并能使下面的板刚好被提起？

选平衡位置为坐标原点o



（1）选平衡位置为坐标原点o，且以o点为弹性势能和重力势能的零点。



以F存在时的位置为研究对象

则： $E_{PG} = mgh_B - mgh_A$

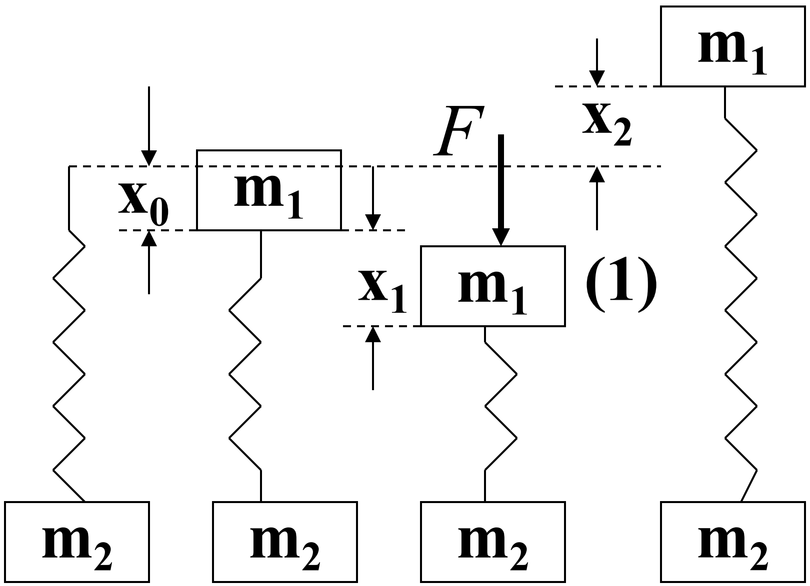
$= -m_1 g x_1 = -k x_0 x_1$

$$E_{PK} = \int_{x_1}^{0} -k(x + x_0)dx$$

$$E_{PK} = \frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2 \qquad = \frac{1}{2}k(x_1 + x_0)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$= \frac{1}{2}kx_1^2 + kx_1 x_0$$

总势能：$E_P = E_{PK} + E_{PG} = \frac{1}{2}kx_1^{\ 2}$



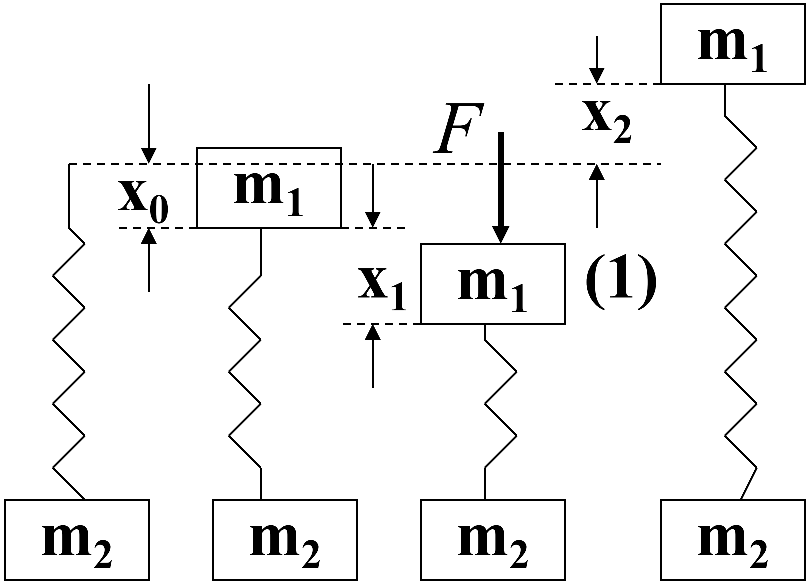
（2）（2）F力为多大，才能使力突然撤除时，上面板跳起，并能使下面的板刚好被提起？

方法一

机械能守恒定律

平衡位置为重力势能零点和弹性势能零点

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}kx_1{}^2=\frac{1}{2}k(x_2+x_0)^2\\&m_1g=kx_0\\&F+m_1g=k(x_1+x_0)\\&m_2g=kx_2\end{aligned}\right\}\quad F=(m_1+m_2)\ g$$



（2）F力为多大，才能使力突然撤除时，上面板跳起，并能使下面的板刚好被提起？

方法二

机械能守恒定律

平衡位置为重力势能零点

弹簧自然伸长处为弹性势能零点

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}k(x_0+x_1)^2+m_1g(-x_1)=\frac{1}{2}kx_2{}^2+m_1g(x_2+x_0)\\&m_1g=kx_0\\&F+m_1g=k(x_1+x_0)\\&m_2g=kx_2\end{aligned}\right\}$$

$F=$

$(m_1+m_2)\ g$