$$2.7、(2)\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & 0<x<l, t>0 \\ u_x(0,t)=0, u(l,t)=0, & t\geq 0 \\ u(x,0)=\cos\frac{\pi}{2l}x, & \\ u_t(x,0)=\cos\frac{3\pi}{2l}x+\cos\frac{5\pi}{2l}x & 0\leq x\leq l \end{cases}$$

解： 对应的特征值问题为$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X'(0)=X(l)=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$特征函数$\{\cos\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\}_{n=1}^{\infty}$.

$u(x,t)$按特征函数系展开，代入方程和初始条件可得

$$\begin{cases} u_n''(t)+a^2[\frac{(2n-1)\pi}{2l}]^2u_n(t)=0 \\ u_n(0)=u_n'(0)=0, \end{cases} \quad n\neq 1,2,3 \qquad \begin{cases} u_1''(t)+a^2[\frac{\pi}{2l}]^2u_1(t)=0 \\ u_1(0)=1, u_1'(0)=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_i''(t)+a^2[\frac{(2i-1)\pi}{2l}]^2u_i(t)=0 \\ u_i(0)=0, u_i'(0)=1, \end{cases} \quad i=2,3$$

求解以上方程组$\Rightarrow$ $u_1(t)=\cos\frac{a\pi}{2l}t$, $u_2(t)=\frac{2l}{3a\pi}\sin\frac{3a\pi}{2l}t, u_3(t)=\frac{2l}{5\pi a}\sin\frac{5a\pi}{2l}t$, $u_n(t)=0, n=4,5,\cdots$

所以定解问题得解为

$$u(x,t)=\cos\frac{a\pi}{2l}t\cos\frac{\pi}{2l}x+\frac{2l}{3a\pi}\sin\frac{3a\pi}{2l}t\cos\frac{3\pi}{2l}x+\frac{2l}{5\pi a}\sin\frac{5a\pi}{2l}t\cos\frac{5\pi}{2l}x$$

2.7、(3) $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\sin\frac{2\pi}{l}x\sin\frac{2\pi}{l}t, & 0<x<l, t>0 \\ u(0,t)=0, u(l,t)=0, & t\geq 0 \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq l \end{cases}$

解： 对 应 的 特 征 值 问 题 为 $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$特 征 函 数$\{\sin\frac{n\pi}{l}x\}_{n=1}^{\infty}$.

$u(x,t)$按特征函数系展开，代入方程和初始条件可得

$\begin{cases} u_n''(t)+(\frac{n\pi}{l})^2u_n(t)=0 \\ u_n(0)=u_n'(0)=0, \qquad n\neq 2 \end{cases}$ (1) $\begin{cases} u_2''(t)+(\frac{2\pi}{l})^2u_2(t)=\sin\frac{2\pi}{l}t \\ u_2(0)=u_2'(0)=0, \end{cases}$ (2)

定解问题(1)的解$u_n(t)=0, n\neq 2$,定解问题(2)利用齐次化原理有

$$u_2(t)=\int_0^t \frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{l}\tau\sin\frac{2\pi}{l}(t-\tau)d\tau$$

$$=-\frac{l}{4\pi}t\cos\frac{2\pi t}{l}+\frac{l^2}{8\pi^2}\sin\frac{2\pi}{l}t$$

所以原定解问题的解为

$$u(x,t)=(-\frac{l}{4\pi}t\cos\frac{2\pi t}{l}+\frac{l^2}{8\pi^2}\sin\frac{2\pi}{l}t)\sin\frac{2\pi}{l}x$$

2.9、(2) $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = \cos x, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, u_x(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \cos 2x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

解： 对应的特征值问题为 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$特征函数$\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$.

$u(x,t)$按特征函数系展开，代入方程和初始条件可得

$\begin{cases} u_1'(t) + a^2 u_1(t) = 1 \\ u_1(0) = 0, \end{cases}$ (1) $\qquad$ $\begin{cases} u_2'(t) + 4a^2 u_2(t) = 0 \\ u_2(0) = 1, \end{cases}$ (2)

$\begin{cases} u_n'(t) + a^2 u_n(t) = 0, \\ u_n(0) = 0, & n = 3, 4, \cdots \end{cases}$ (3)

方程(1)的解$u_1(t) = \frac{1}{a^2}(1 - e^{-a^2 t})$,,方程(2)的解$u_2(t) = e^{-4a^2 t}$,定解问题(3)的解为$u_n(t) = 0, n \geq 0$,所以原定解问题的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{a^2}(1 - e^{-a^2 t}) \cos x + e^{-4a^2 t} \cos 2x$$

Home Page
Title Page
Page 3 of 4
Go Back
Full Screen
Close
Quit

对于特征展开法作业注意：

- 由齐次方程和齐次边界条件给出相应的特征值问题，由特征值问题直接给出特征值和特征函数即可，这里不要推导特征值的过程；
- 将已知函数和未知函数按特征函数展开，代回原定解问题的方程和初始条件，利用特征函数的正交性这时会得到一系列的常微分方程的初值问题，
- 在这些常微分方程的初值问题中，如果出现了类似2.7(3)中齐次方程齐次初始条件的方程组(1),我们可判断出这类方程组只有零解
- 如果是非齐次方程，要利用齐次化原理求出解，这里求解的时候需要将积分的最后表达形式计算出来，一般积分会涉及到三角函数，指数函数，还有多项式函数的积分不会有很复杂的计算