一般力的功：

$$A=\int dA=\int \vec{F}\cdot d\vec{s}=\int F\cos\theta ds=\frac{1}{2}mv_b^2-\frac{1}{2}mv_a^2$$

保守力的功：$\boxed{A_{保内}=-(E_{pb}-E_{pa})}$

$$E_{P重}=mgh$$

$$\boxed{E_p(x,y,z)=\int_{(x,y,z)}^{E_{pa}=0}\vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

$$E_{P弹}=\frac{1}{2}kx^2$$

$$E_{P引}=-\frac{GMm}{r}$$

系统的动能定理

$$A=A_{外}+A_{保内}+A_{非保内}=E_{k2}-E_{k1}$$

系统的功能原理

$$A_{外}+A_{非保内}=E_2-E_1$$

机械能守恒定律

当$A_{外}+A_{非保内}=0$　　则：$E_{k2}+E_{P2}=E_{k1}+E_{P1}=C$

2.2 动量守恒

一.冲量和动量定理

1. 冲量(impulse)

牛顿定律的变化形式：

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

冲量　力对时间的积累效果（矢量）$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t$

2. 动量定理

在给定的时间内，外力(external force)作用在质点上的冲量，等于质点在此时间内动量的增量 .

（1）质点的动量定理

$$\vec{I}=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$$

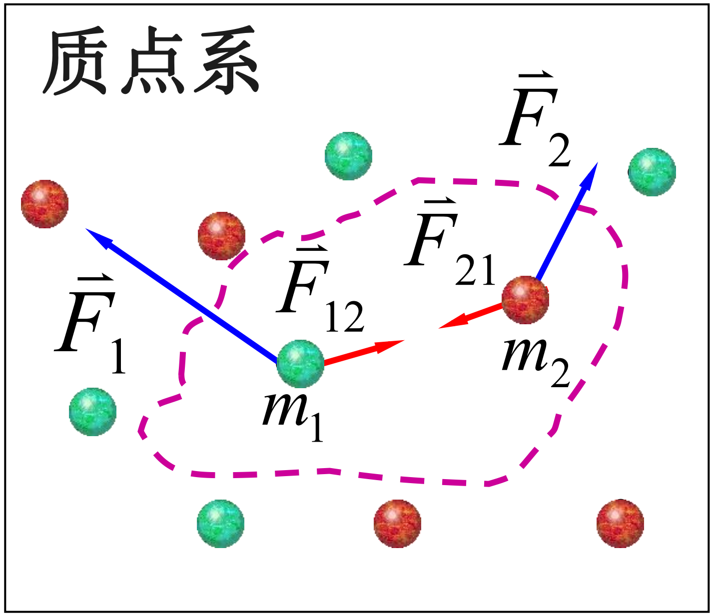
分量形式：

$$\vec{I}=I_x\vec{i}+I_y\vec{j}+I_z\vec{k}\quad\begin{cases}I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x\mathrm{d}t=mv_{2x}-mv_{1x}\\ I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_y\mathrm{d}t=mv_{2y}-mv_{1y}\\ I_z=\int_{t_1}^{t_2}F_z\mathrm{d}t=mv_{2z}-mv_{1z}\end{cases}$$

（2）质点系的动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_{12})\mathrm{d}t=m_1\vec{v}_1-m_1\vec{v}_{10}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_2+\vec{F}_{21})\mathrm{d}t=m_2\vec{v}_2-m_2\vec{v}_{20}$$



因为内力 $\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0$，故

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\mathrm{d}t=(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)-(m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20})$$

- **质点系动量定理**　作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量.

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i0}}$$

$$\boxed{\vec{I}=\vec{p}-\vec{p}_0}$$

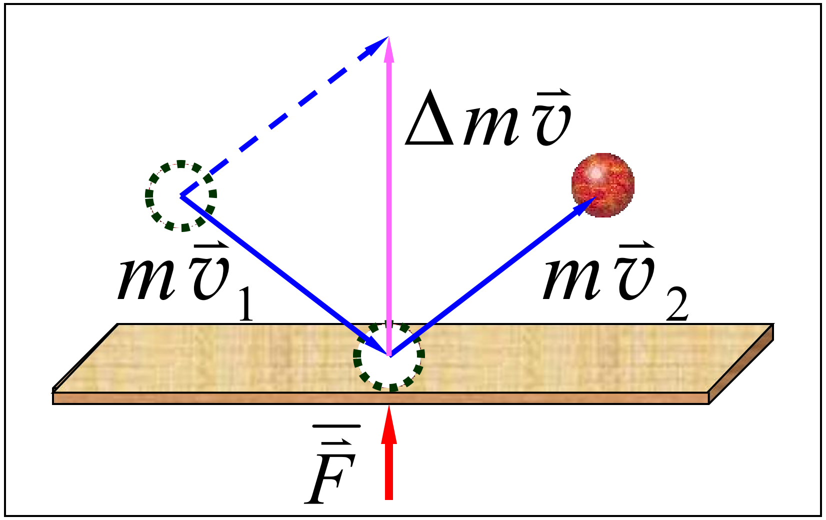
讨论：

➢ **动量定理：**

1. 仅适用于惯性系。
2. 式中各速度都必须对同一个惯性系。
3. 式中各速度都必须相对同一个时刻。

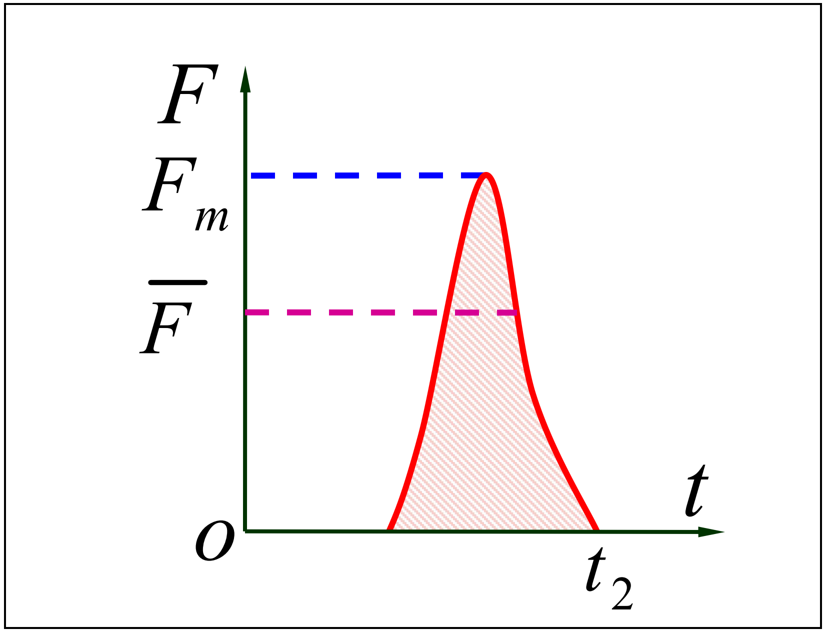
➢ 动量定理常应用于碰撞问题

$$\overline{\vec{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t}{t_2 - t_1} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$



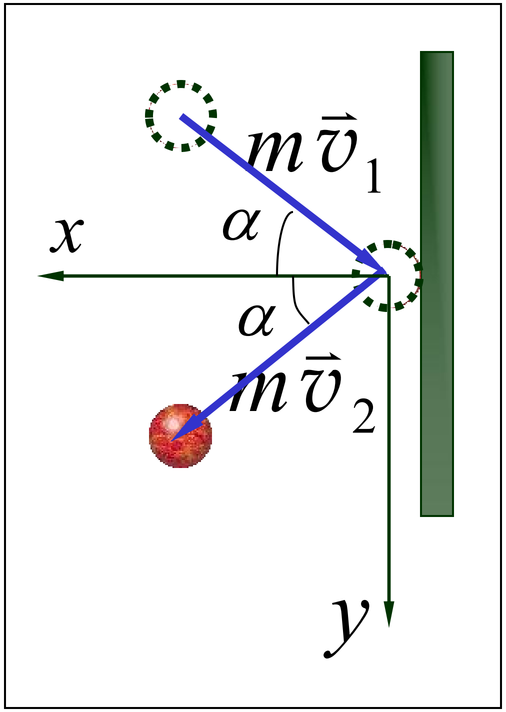
注意

在 $\Delta\vec{p}$ 一定时 Δt 越小，则 $\overline{F}$ 越大．例如人从高处跳下、飞机与鸟相撞、打桩等碰撞事件中，作用时间很短，冲力很大．



例 1 一质量为0.05kg、速率为10m·s^{-1}的刚球，以与钢板法线呈45°角的方向撞击在钢板上，并以相同的速率和角度弹回来．设碰撞时间为0.05s．求在此时间内钢板所受到的平均冲力.

解 建立如图坐标系，设小球受到的力为$\vec{F}'$，$\vec{F}'=-\vec{F}$ ，由动量定理得



$$\overline{\vec{F}}'\Delta t=-\overline{\vec{F}}\Delta t=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$$

$$\vec{v}_1=-v\cos\alpha\,\vec{i}+v\sin\alpha\,\vec{j}$$

$$\vec{v}_2=v\cos\alpha\,\vec{i}+v\sin\alpha\,\vec{j}$$

代入即得：

$$\overline{\vec{F}}=-\frac{2mv\cos\alpha}{\Delta t}\vec{i}=-14.1\vec{i}\ (N)$$

二. 动量守恒定律(conservation law)

质点系动量定理 $$\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \sum_i \vec{F}_i \mathrm{d}t = \sum_i \vec{p}_i - \sum_i \vec{p}_{i0}$$

动量守恒定律

若质点系所受的合外力为零 $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$

则系统的总动量守恒，即 $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$ 保持不变 .

讨论

1）系统的动量守恒是指系统的总动量不变，系统内任一物体的动量是可变的, 各物体的动量必相对于同一惯性参考系 .

$$m\vec{v} = m\vec{u} + m\vec{v}\,'$$

2）守恒条件　合外力为零　$\vec{F}=\sum_i \vec{F}_i=0$

当 外力远远小于内力时，可略去外力的作用，近似地认为系统动量守恒． 例如在碰撞，打击，爆炸等问题中.

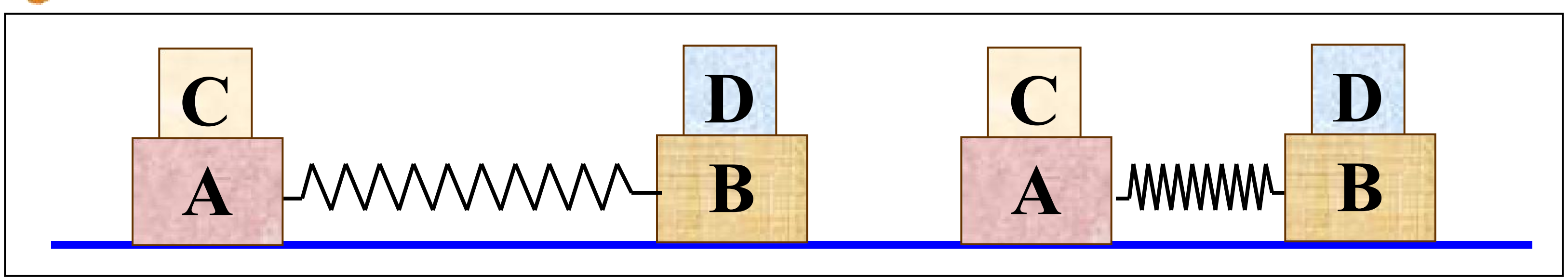
3）若某一方向合外力为零，则此方向动量守恒．

$$\begin{cases} F_x=0, & p_x=\sum m_i v_{ix}=C_x \\ F_y=0, & p_y=\sum m_i v_{iy}=C_y \\ F_z=0, & p_z=\sum m_i v_{iz}=C_z \end{cases}$$

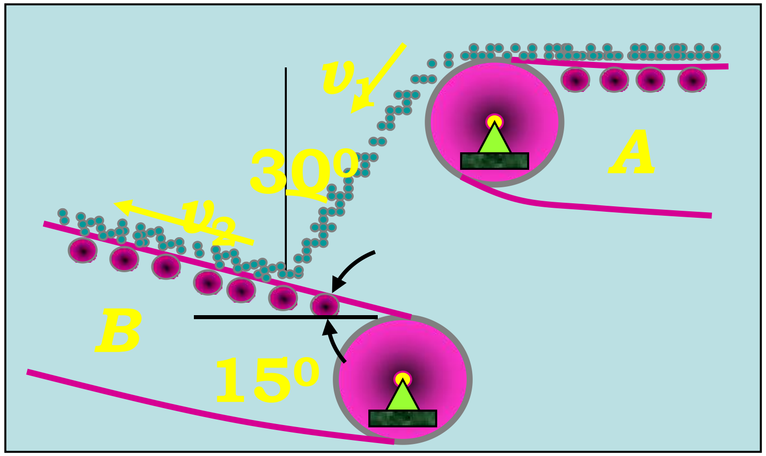
4） 动量守恒定律只在惯性参考系中成立， 是自然界最普遍，最基本的定律之一．

例2.　　如图的系统，物体 A，B 置于光滑的桌面上，物体 A 和 C，　B 和 D 之间摩擦因数均不为零，首先用外力沿水平方向相向推压 A 和 B，　使弹簧压缩，后拆除外力，　则 A 和 B 弹开过程中，对 A、B、C、D 组成的系统

（A）动量守恒，机械能守恒　．
（B）动量不守恒，机械能守恒．
（C）动量不守恒，机械能不守恒．
（D）动量守恒，机械能不一定守恒．



例3: 矿砂从传送带 *A* 落入传送带 *B*，其速度 v_1= 4m/s ,方向与竖直方向成 30^0 角，而传送带 *B* 与水平方向成15^0 角，其速度 v_2=2m/s传送带的运送量为 k = 20kg/s . 求：落到传送带 *B* 上的矿砂所受到的平均力的大小?

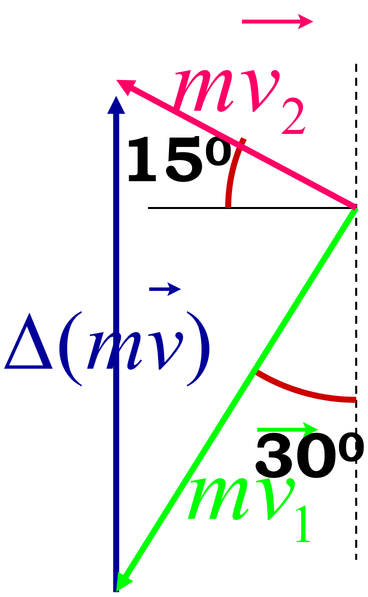


解：Δ t内落在传送带B上的矿砂质量为：

$$m = k\Delta t$$

这些矿砂的动量增量为：

$$\Delta(m\vec{v}) = m\vec{v_2} - m\vec{v_1}$$

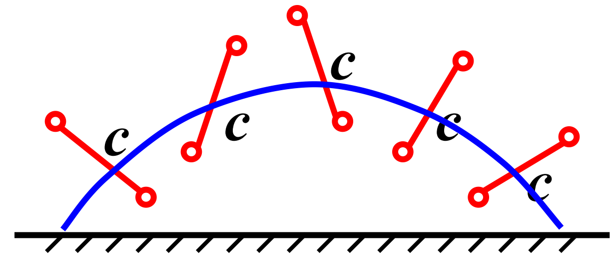


$$\left|\Delta(m\vec{v})\right| = m\sqrt{\left|\vec{v_1}\right|^2 + \left|\vec{v_2}\right|^2 - 2\left|\vec{v_1}\right|\left|\vec{v_2}\right|\cos 75^0}$$

由动量定理： $\overline{F}\cdot\Delta t = \left|\Delta(m\vec{v})\right|$

平均力： $\overline{F} = \dfrac{\left|\Delta(m\vec{v})\right|}{\Delta t}$

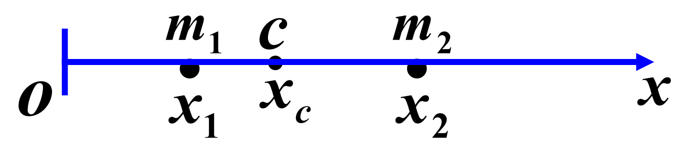
三. 质心和质心运动定律



1. 质心

m_1和m_2

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

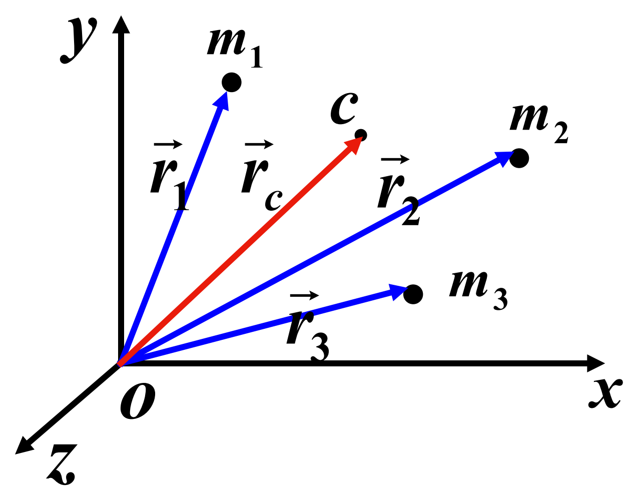


质点系

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{m}$$

$$y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{m} \qquad \vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}$$

$$z_c = \frac{\sum_i m_i z_i}{m}$$



质量连续分布 $\vec{r}_c = \dfrac{\int \vec{r}\,dm}{m}$

m：总质量

2. 质心运动定律

质心速度 $$\vec{\upsilon}_c=\frac{d\vec{r}_c}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{m}\right)=\frac{\sum_i m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m}=\frac{\sum_i m_i\vec{\upsilon}_i}{m}$$

$$m\vec{\upsilon}_c=\sum_i m_i\vec{\upsilon}_i$$

质点系总动量等于总质量与质心速度的乘积

即 $\vec{p}=m\vec{\upsilon}_c$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt}=m\vec{a}_c$$

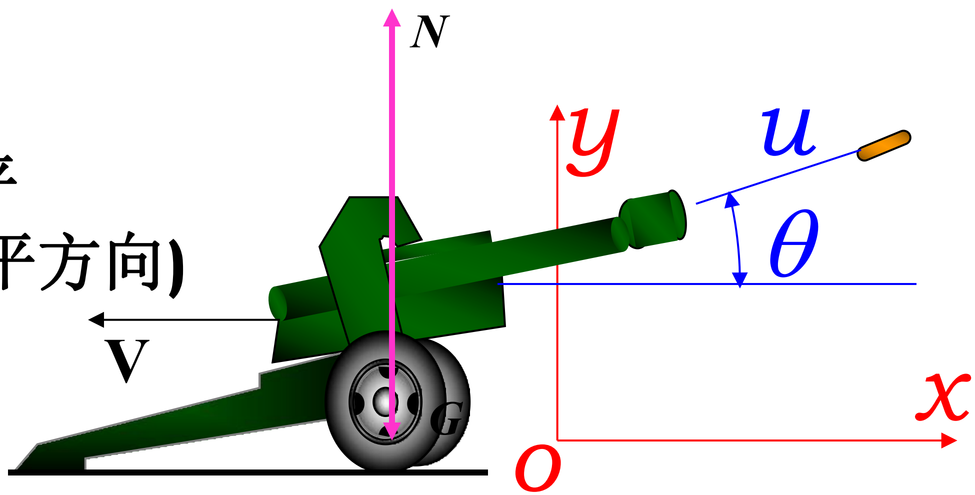
$$\sum\vec{F}_i=\frac{d\vec{p}}{dt}\Rightarrow\sum\vec{F}_i=m\vec{a}_c$$ 质心运动定律

$\sum\vec{F}_i$ 是合外力, $\sum\vec{F}_i=0,$ 质心静止或匀速直线运动

[例4]. 炮车以仰角 θ 发射一炮弹，炮车和炮弹的质量分别为M和m, 炮弹射出炮口时相对炮身的速度为u，不计炮车与地面之间的摩擦。试求：

（1）炮弹射出炮口时，炮车的反冲速度。

解(1)： $\{M、m\}$

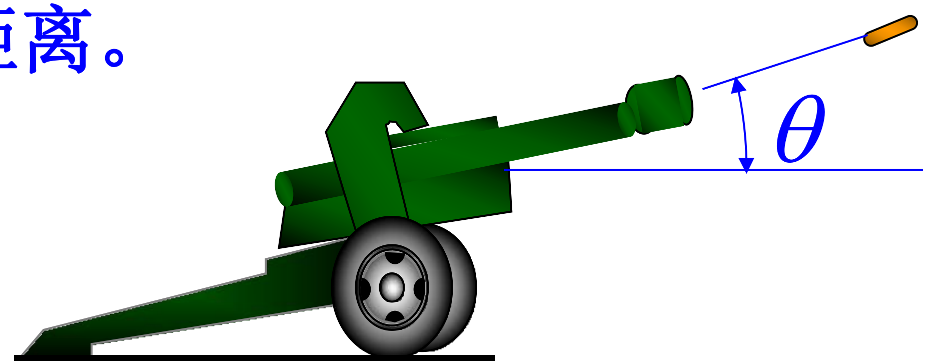


设炮弹出口时相对地面的水平分速度为v_x,炮车速度为V (在水平方向)

$$\because \vec{F}_x = 0$$

$$\left.\begin{aligned} MV_x + mv_x &= 0 \\ v_x &= u\cos\theta + V_x \end{aligned}\right\} \quad V_x = -\frac{m}{m+M}u\cos\theta$$

（2）若炮筒长为l(即炮弹在发射过程中相对于炮的行程），则在发射过程中炮车移动的距离。



解(2)：方法一

$$V_x(t)=-\frac{m}{m+M}u(t)\cos\theta$$

$$\left.\begin{aligned}&(\Delta x)_{炮}=\int_0^t V_x(t)dt=-\frac{m}{m+M}\int_0^t u\ (t)\cos\theta dt\\&其中：\int_0^t u(t)dt=l\end{aligned}\right\}(\Delta x)_{炮}=-\frac{ml\cos\theta}{m+M}$$

解(2)：方法二

$$\{m、M\}\ \because \vec{F}_x=0$$

$$\left.\begin{aligned}&\therefore \vec{a}_{cx}=0\\&又：\quad v_c=0\end{aligned}\right\}\Delta x_c=0$$

$$\left.\begin{aligned}&\Delta x_c=0\\&按定义：\quad x_c=\frac{Mx_{炮}+mx_{弹}}{M+m}\end{aligned}\right\}M\Delta x_{炮}+m\Delta x_{弹}=0$$

$$\left.\begin{aligned}&M\Delta x_{炮}+m\Delta x_{弹}=0\\&\Delta x_{弹}=l\cos\theta+\Delta x_{炮}\end{aligned}\right\}(\Delta x)_{炮}=-\frac{ml\cos\theta}{m+M}$$