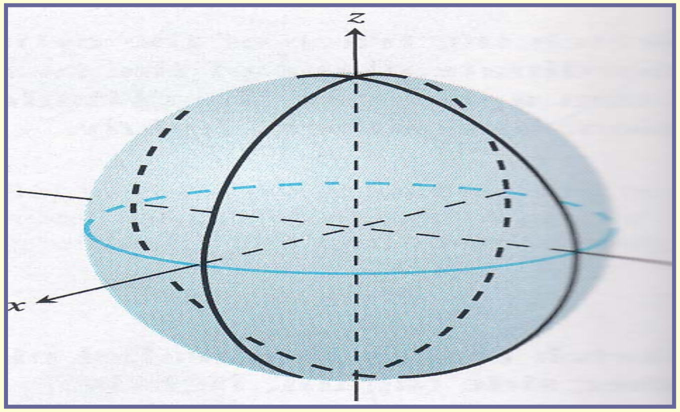
§3二次曲面

1.椭球面

由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$　　（标准方程）（***a***，***b***，***c***>**0**）

所表示的曲面称为椭球面（椭圆面）

特别：当 ***a*=*b*=*c*** 时，就是球面。



性质：

对称性：椭球面关于三个坐标面、三个坐标轴以及原点都对称.

有界性：椭球面在由六个平面 $x=\pm a, y=\pm b, z=\pm c$ 所围成的长方体内

椭圆面的顶点和半轴

顶点 $(\pm a,0,0),(0,\pm b,0),(0,0,\pm c)$

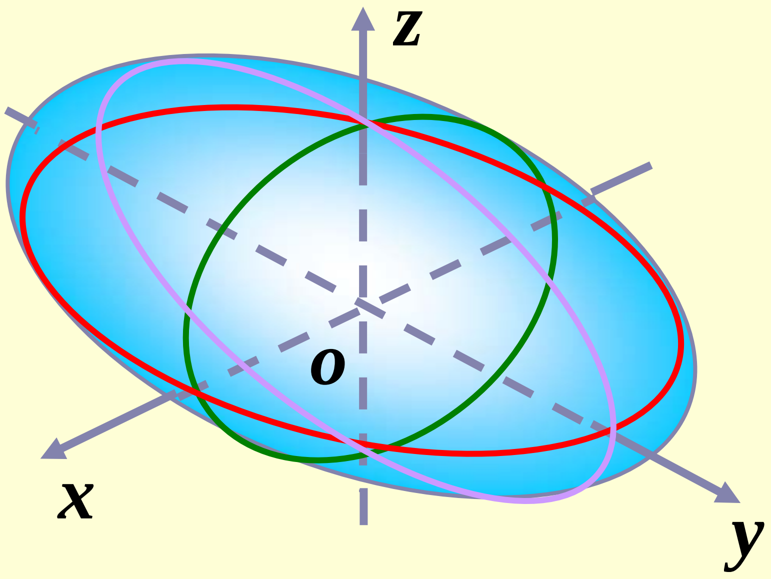
如果 $a \geq b \geq c$，则 a，b，c 分别称为椭球面的长半轴，中半轴，短半轴。

椭球面与三个坐标面的交线：

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0 \end{cases}$$

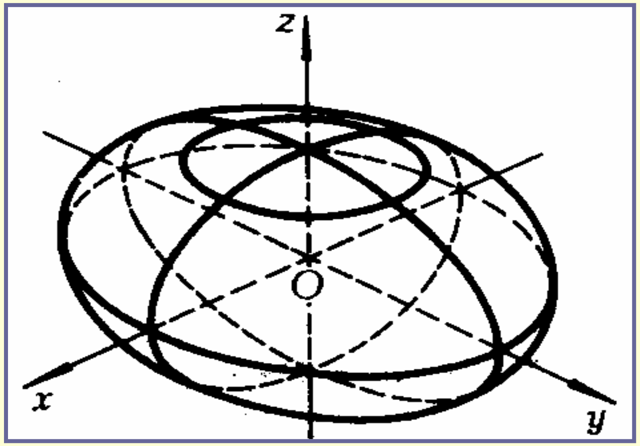
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. \\ x=0 \end{cases}$$



椭球面与平面 $z=z_1$ 的交线为椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-z_1^2)}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-z_1^2)}=1 \\ z=z_1 \end{cases} \qquad |z_1|<c$$

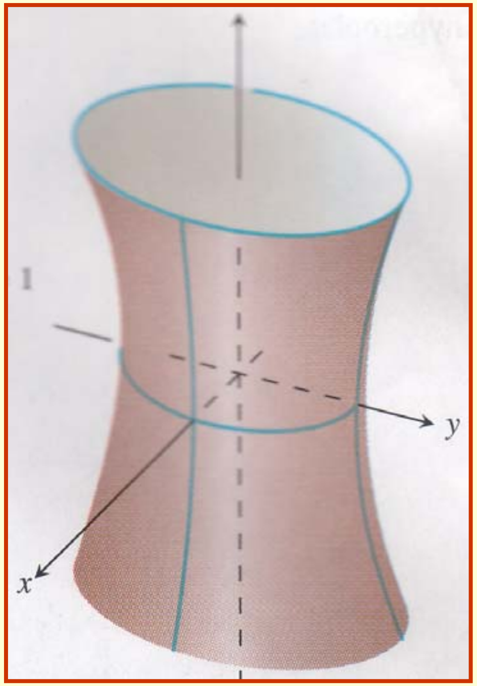


同理与平面 $x=x_1$ 和 $y=y_1$ 的交线也是椭圆.

椭圆截面的大小随平面位置的变化而变化.

2.双曲面

①单叶双曲面



由 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ （**a，b，c>0**）

所确定的曲面称单叶双曲面

性质：

对称性：单叶双曲面关于三个坐标面、三个坐标轴以及原点都对称.

范围：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\geq 1$

形状：z=0 与曲面的交线为椭圆 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$

称为腰椭圆。

与平面 $z=z_1$ 的交线为椭圆.

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{z_1^2}{c^2}\\ z=z_1\end{cases}$$

当 z_1 变动时，这种椭圆的**中心**都在 z 轴上.

用坐标面 xoz $(y=0)$ 与曲面相截

截得中心在原点的双曲线.

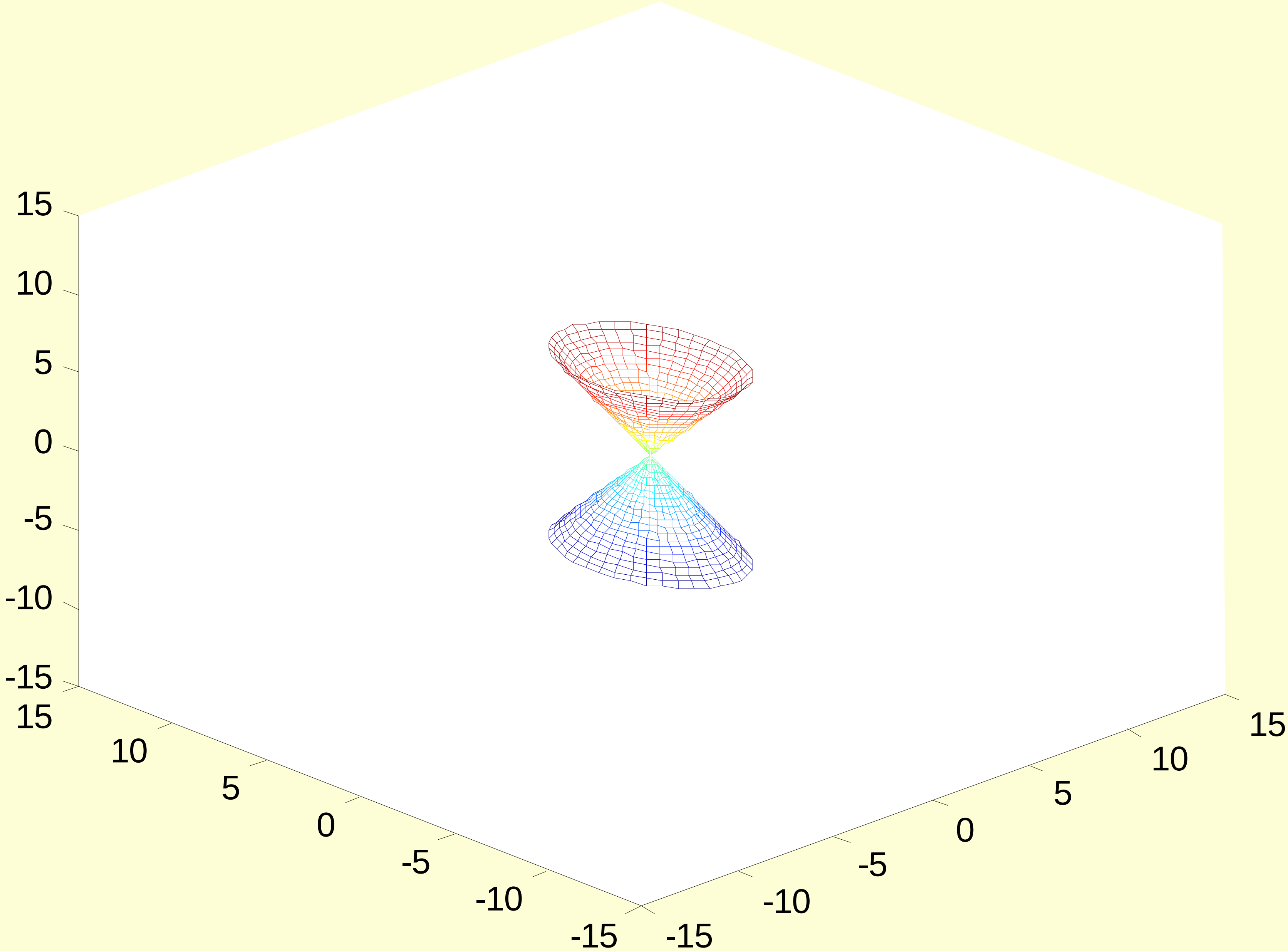
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$$

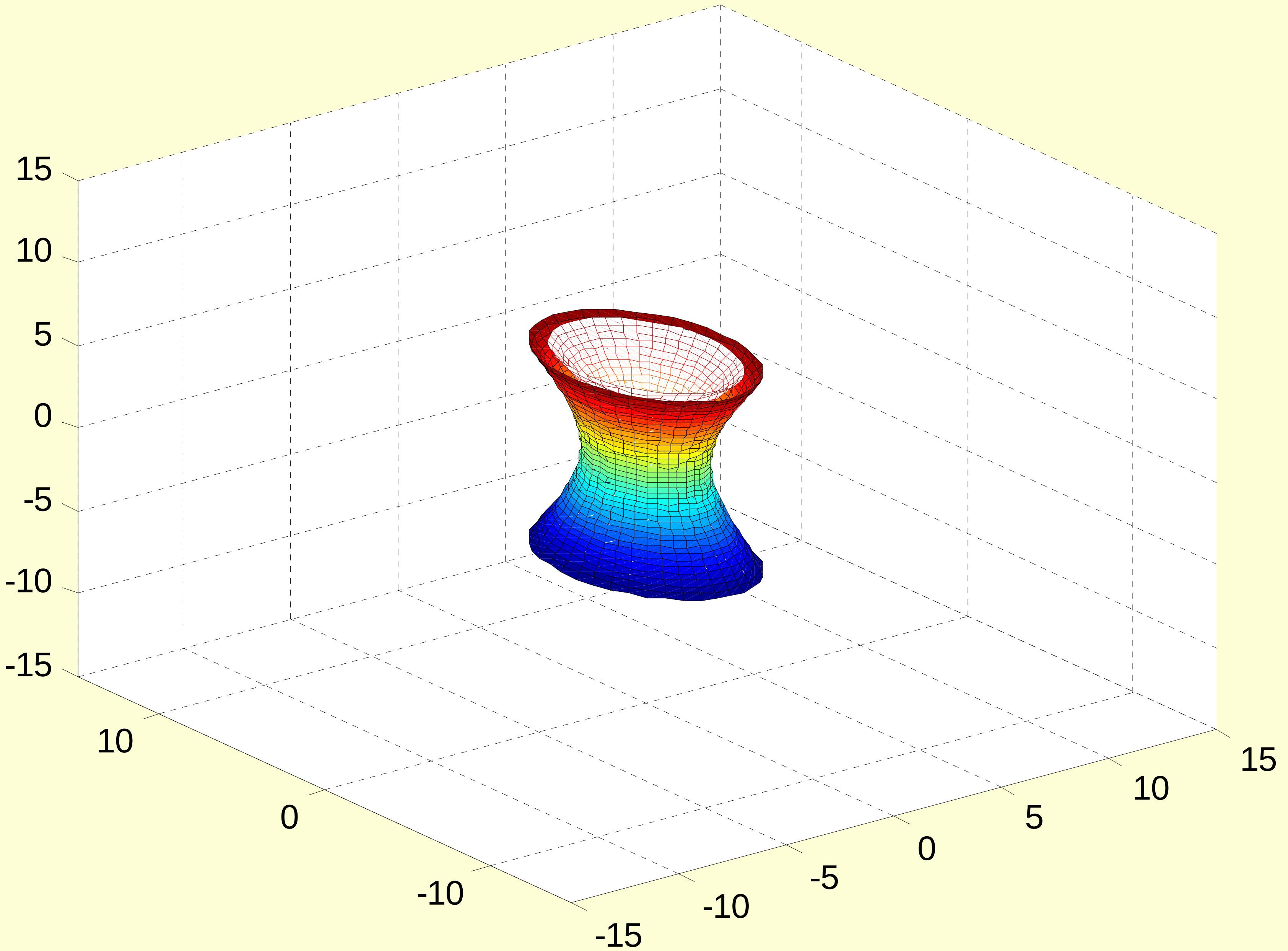
实轴与 x 轴相合，

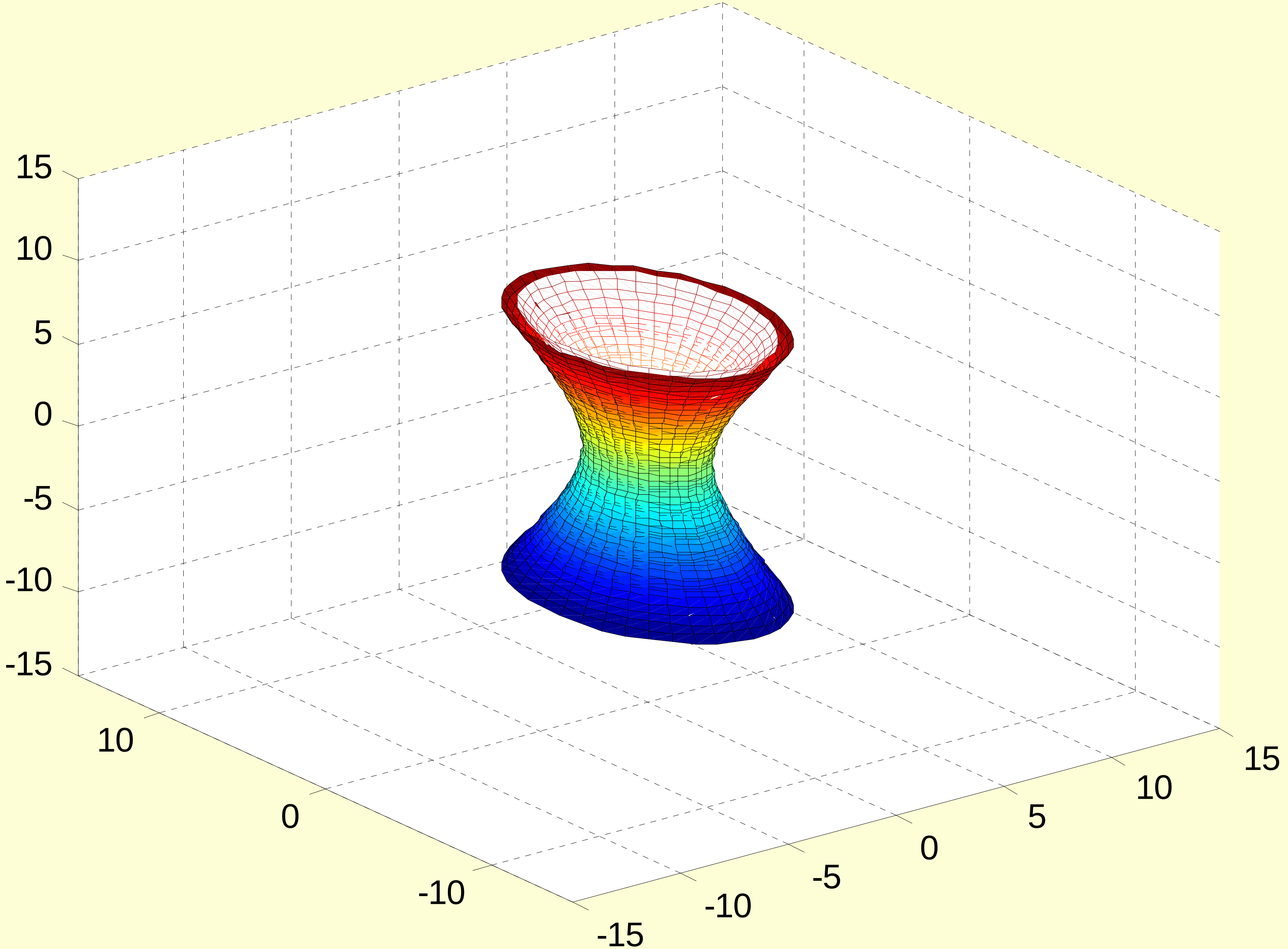
虚轴与 z 轴相合.

$(\pm a,0,0),(0,\pm b,0)$ 叫做单叶双曲面的顶点，对称中心（原点）称为它的中心。

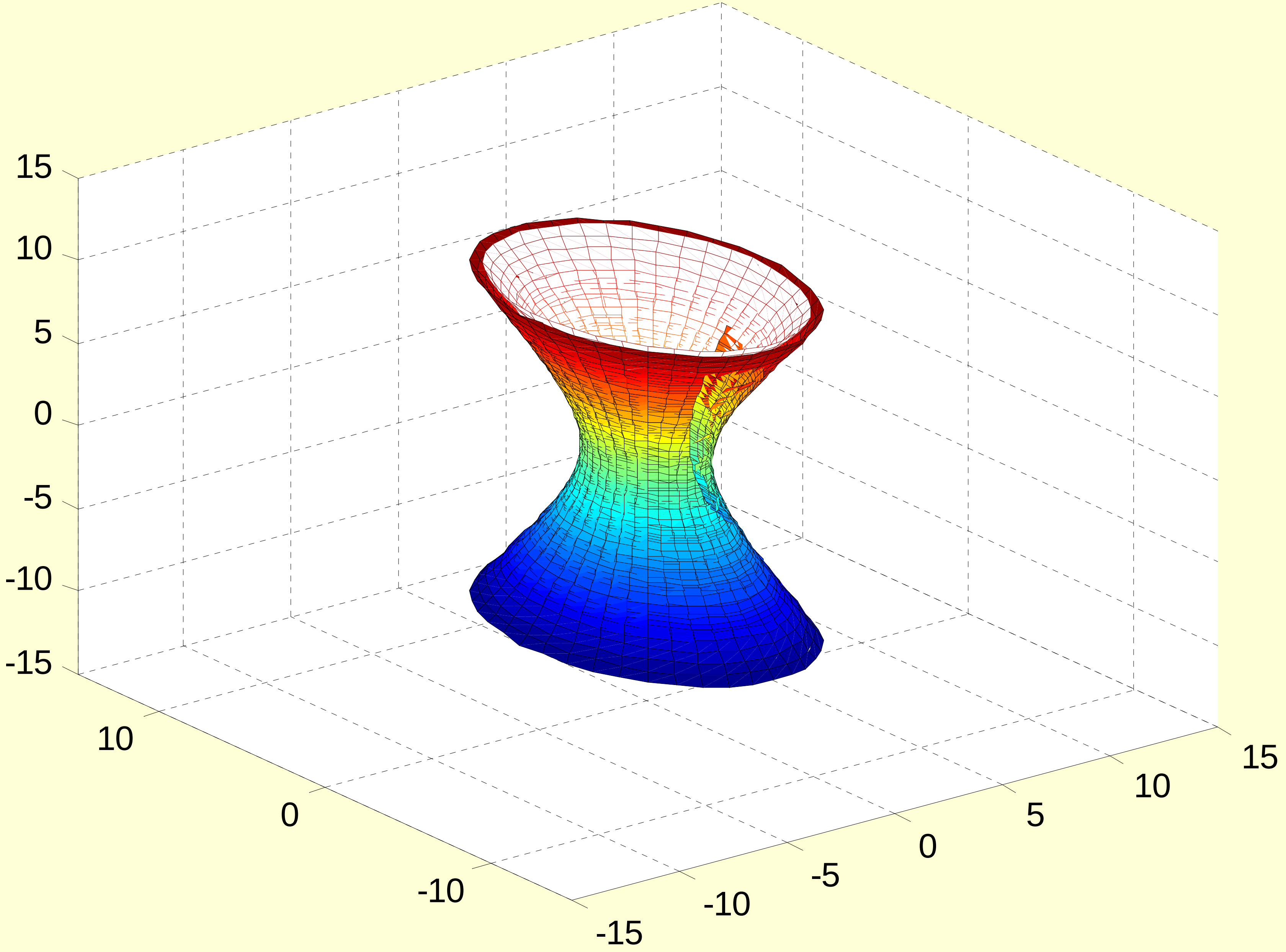
渐近锥面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$


15
10
5
0
-5
-10
-15
15
10
5
0
-5
-10
-15
-15
-10
-5
0
5
10
15

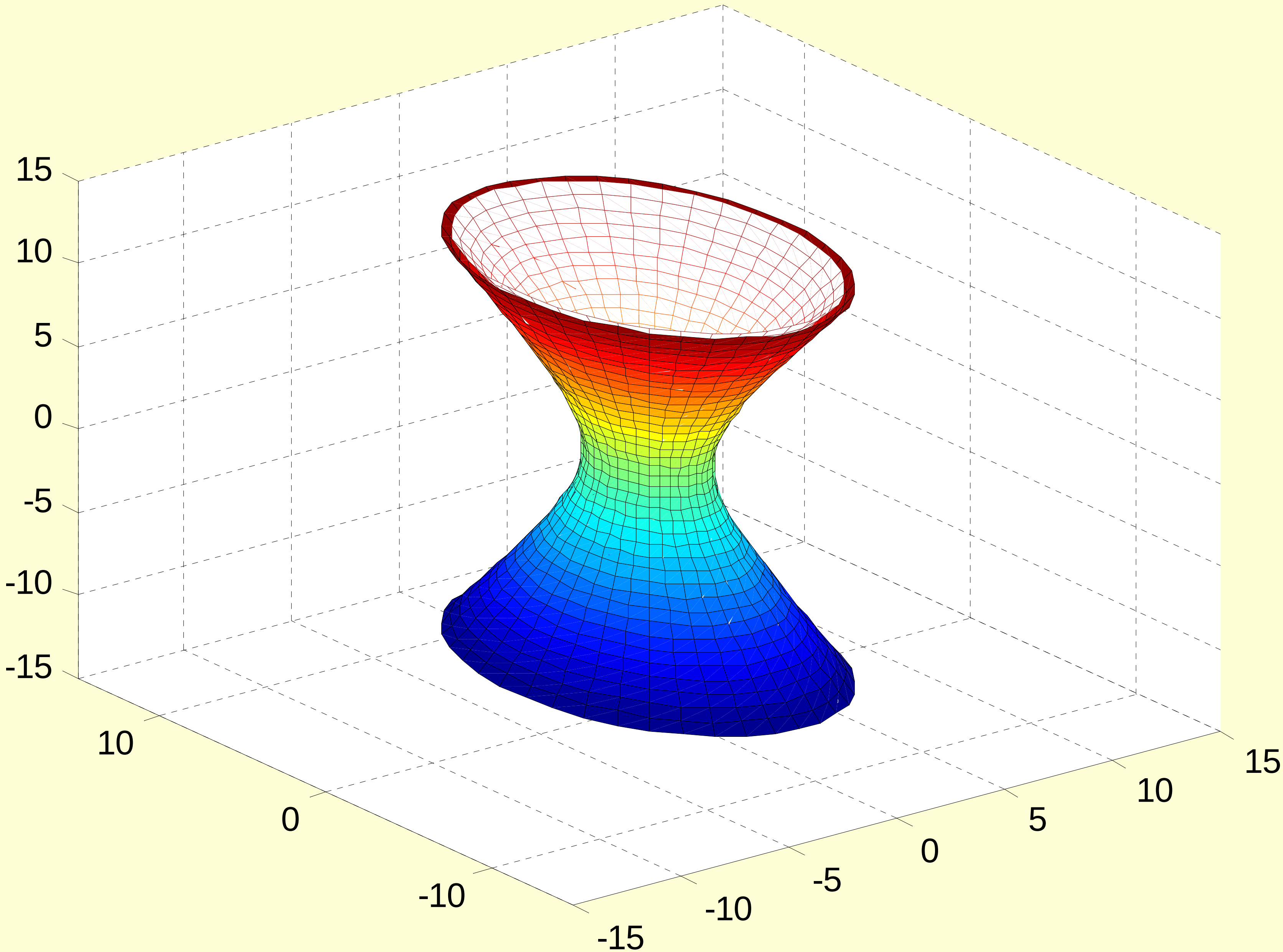

15
10
5
0
-5
-10
-15
10
0
-10
-15
-10
-5
0
5
10
15

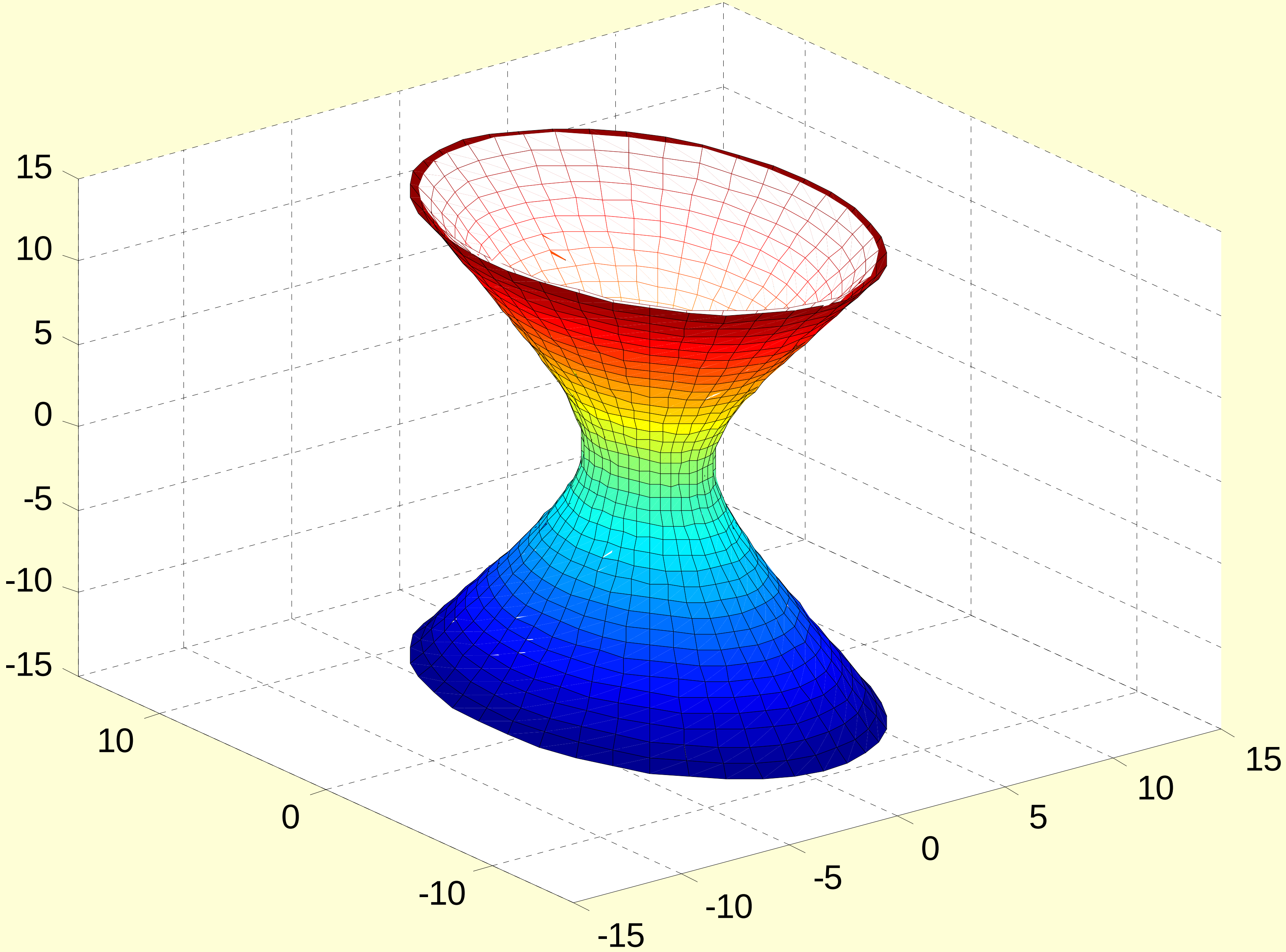


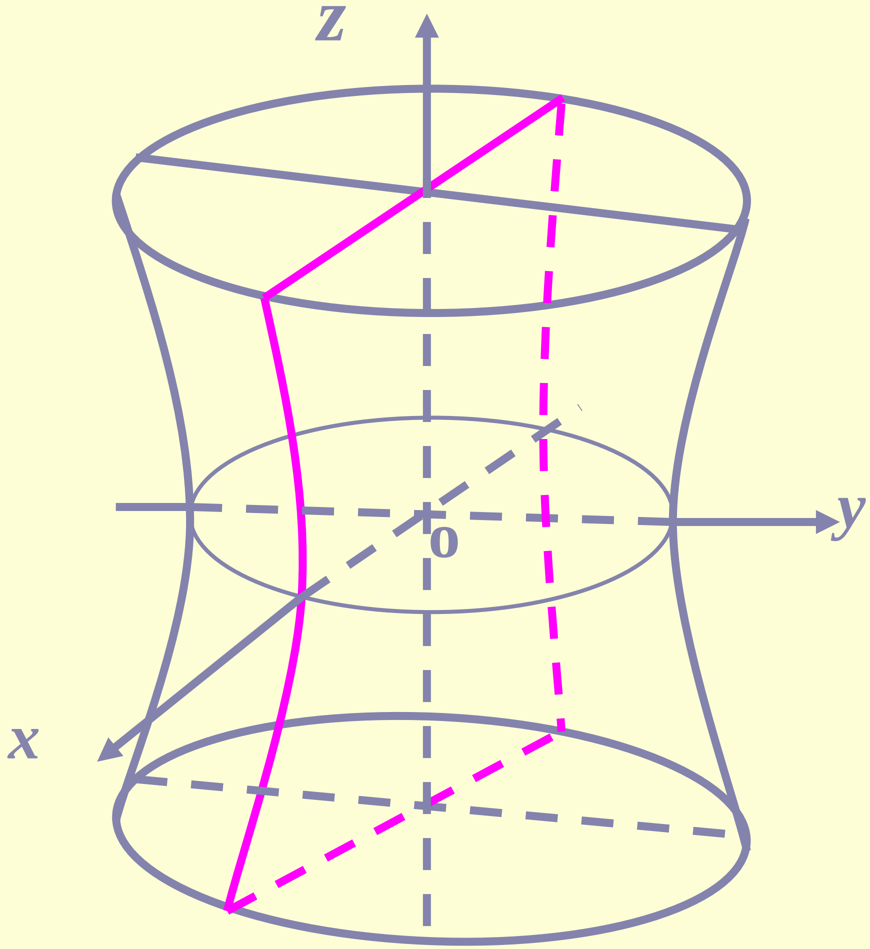
15
10
5
0
-5
-10
-15
10
0
-10
-15
-10
-5
0
5
10
15



15
10
5
0
-5
-10
-15
10
0
-10
-15
-10
-5
0
5
10
15


15
10
5
0
-5
-10
-15
10
0
-10
-15
-10
-5
0
5
10
15

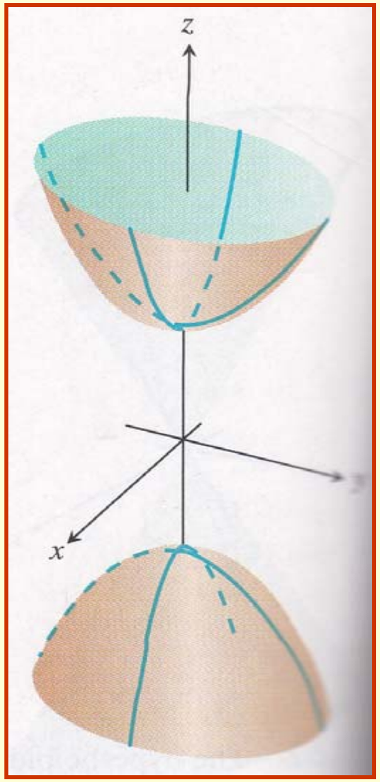

15
10
5
0
-5
-10
-15
10
0
-10
-15
-10
-5
0
5
10
15


z
y
o
x

②双叶双曲面

由 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

（**a**，**b**，**c>0**）所确定的曲面称为双叶双曲面



性质：

对称性：双叶双曲面关于三个坐标面、三个坐标轴以及原点都对称.

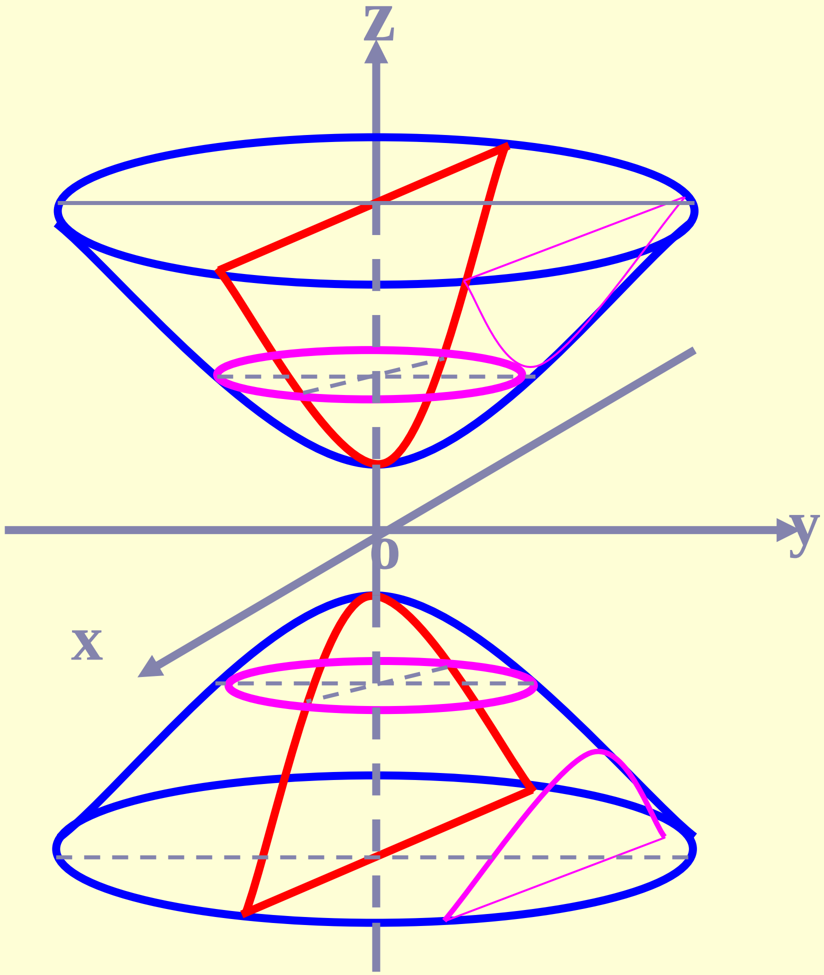
范围：$|z| \geq c$

形状：曲面与 x=k，（或 y=k）的交线为双曲线

曲面与 z=k（$|k| \geq c$）的交线为椭圆

顶点（0，0，$\pm c$）

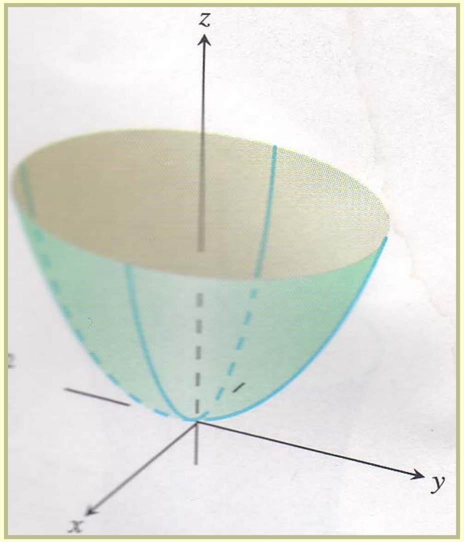
渐近锥面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$


z
y
0
x

3.抛物面

①椭圆抛物面

由 $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$ 所确定的曲面称为椭圆抛物面.（p, q 同号）



性质：

对称性：xoz 面，yoz 是它的对称平面 z 轴是对称轴

范围：$z \geq 0$

顶点（0，0，0）

与平面 $z = z_1 \ (z_1 > 0)$ 的交线为椭圆.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2pz_1} + \dfrac{y^2}{2qz_1} = 1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

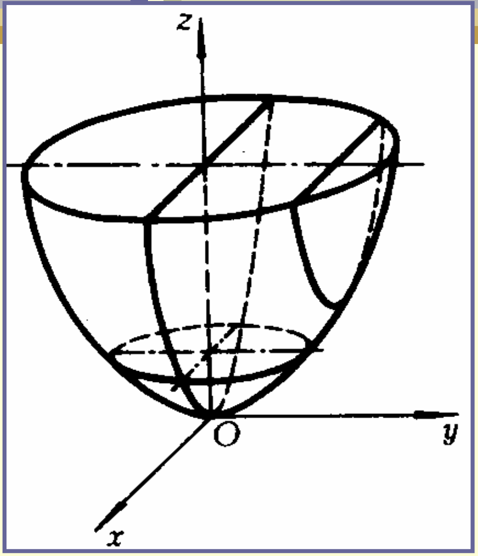
当 z_1 变动时，这种椭圆的中心都在 z 轴上.

与平面 $z = z_1 \ (z_1 < 0)$ 不相交.

用坐标面 $xoz \ (y = 0)$ 与曲面相截

截得抛物线 $\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$

与平面 $y=y_1$ 的交线为抛物线.



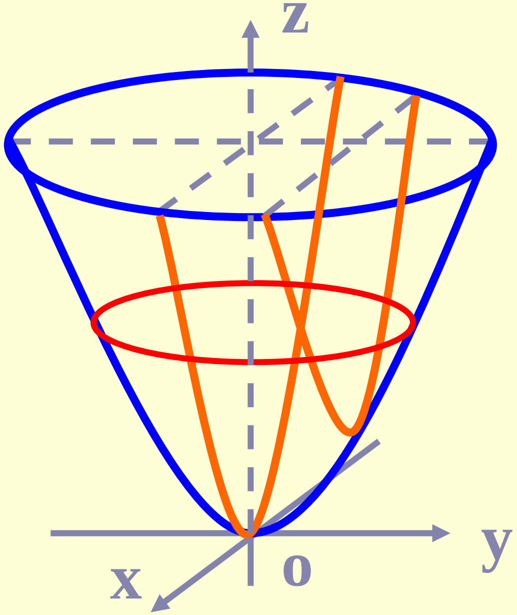
$$\begin{cases} x^2 = 2p\left(z - \dfrac{y_1^2}{2q}\right) \\ y = y_1 \end{cases}$$

它的轴平行于 z 轴. 顶点 $\left(0,\ y_1,\ \dfrac{y_1^2}{2q}\right)$

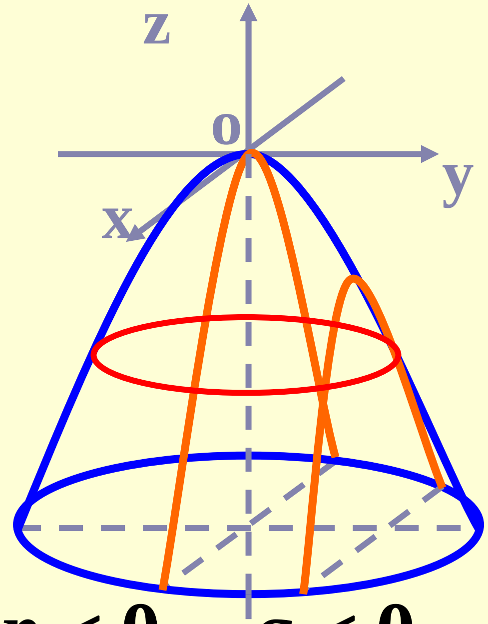
用坐标面 $yoz\ (x=0)$, $x=x_1$ 与曲面相截

均可得抛物线.

椭圆抛物面的图形如下：



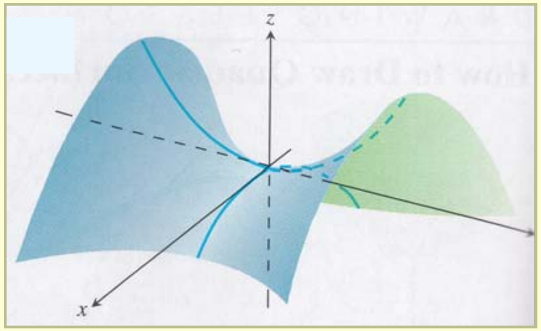
$p > 0, \quad q > 0$



$p < 0, \quad q < 0$

②双曲抛物面

由 $-\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ （p，q>0）所确定的曲面称为双曲抛物面（马鞍面）



性质：

对称性：xoz 面，yoz 面是对称平面，z 轴是对称轴.

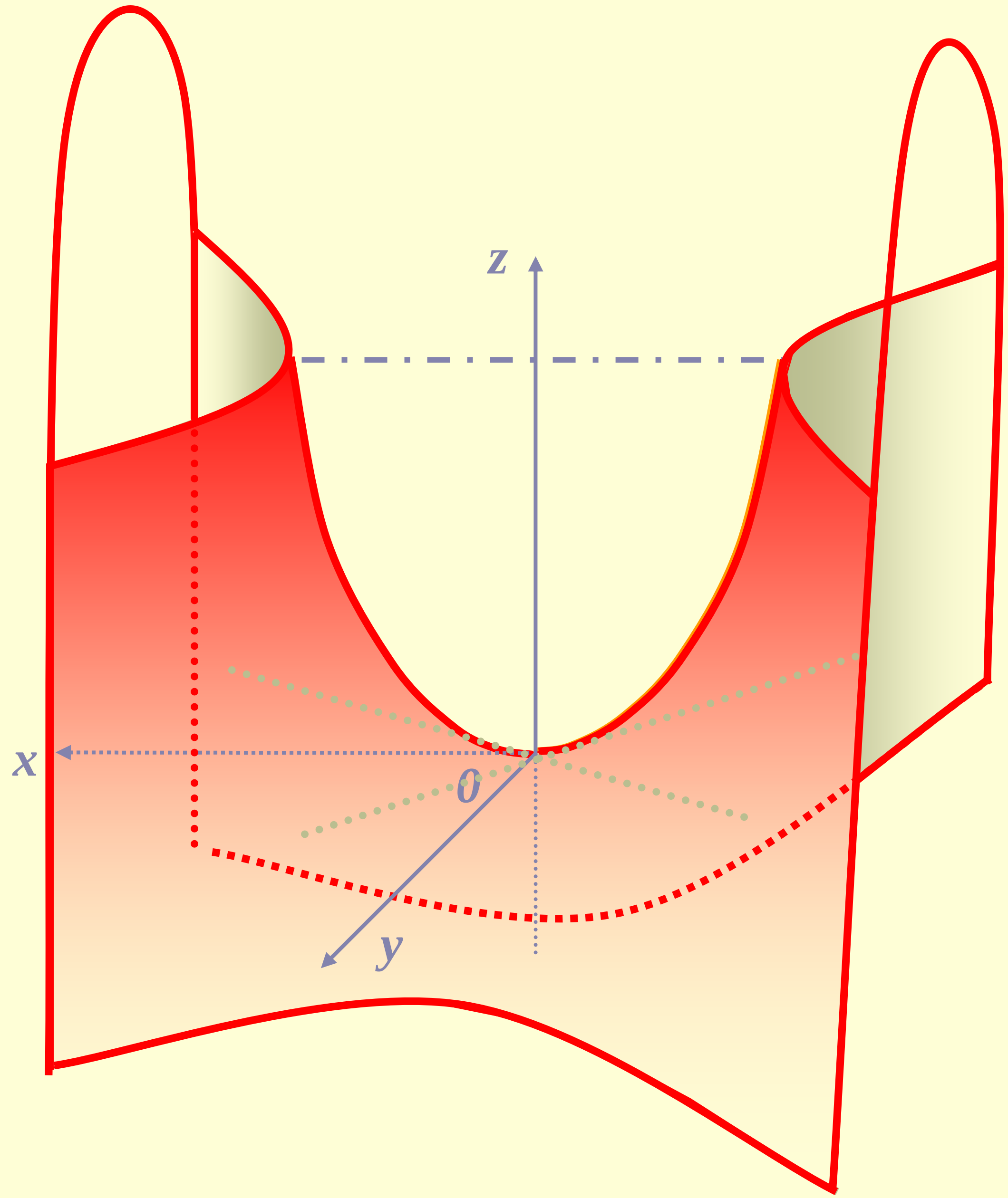
范围：可向上、下、左、右、前、后，无限伸展

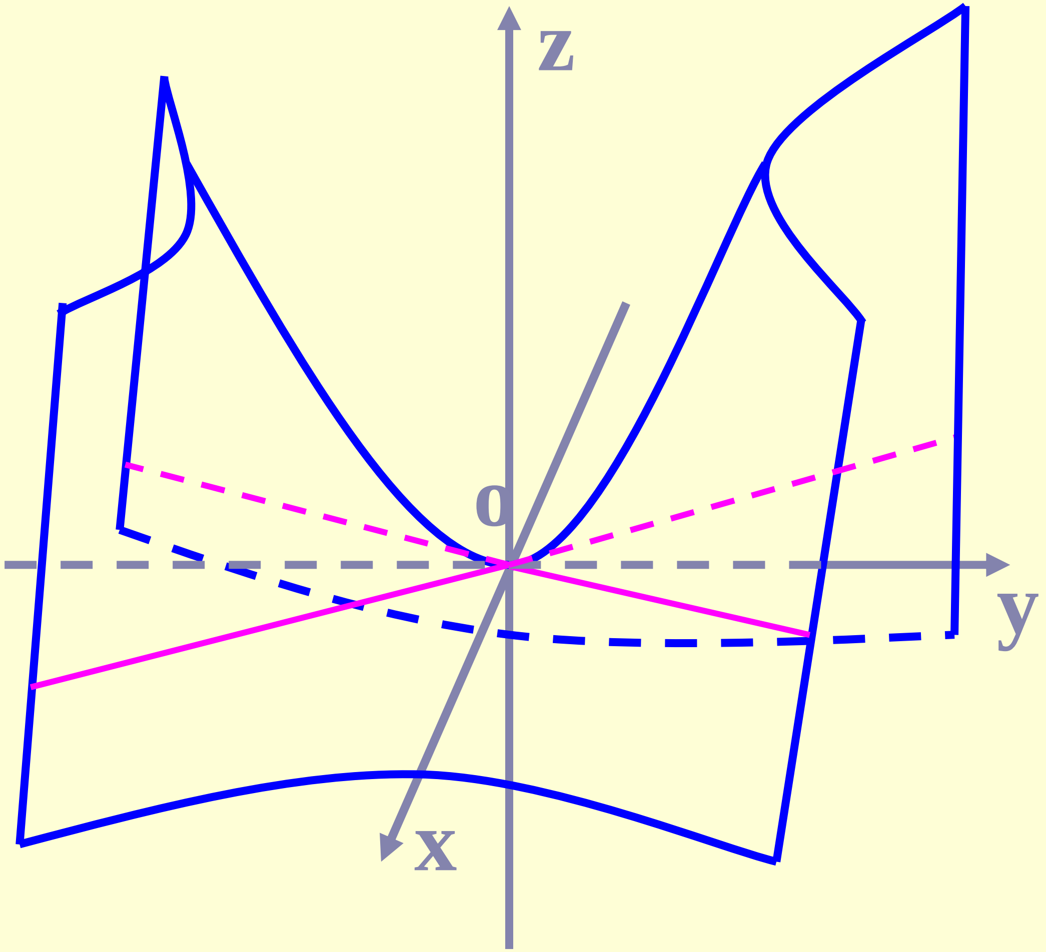
截痕法

用 $z = a$ 截曲面

用 $y = 0$ 截曲面

用 $x = b$ 截曲面




z
o
y
x

4.二次曲面的种类（共十七种）

（一）、椭球面

(1)、椭球面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

特别球面： $x^2+y^2+z^2=k^2$

(2)、虚椭球面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

(3)、点 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

（二）、双曲面

(4)、单叶双曲面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(5)、双叶双曲面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

（三）、抛物面

(6)、椭圆抛物面 $$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$ （p，q>0）

(7)、双曲抛物面 $$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$ （p，q>0）

（四）、二次锥面

⑻、二次锥面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

（五）、二次柱面

⑼、椭圆柱面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

⑽、虚椭圆柱面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

⑾、直线 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

⑿、双曲柱面 $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

⒀、一对相交平面 $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

⒁、抛物柱面 $$x^2=2py$$

⒂、一对平行平面 $$x^2=a^2$$

⒃、一对虚平行平面 $$x^2=-a^2$$

⒄、一对重合平面 $$x^2=0$$