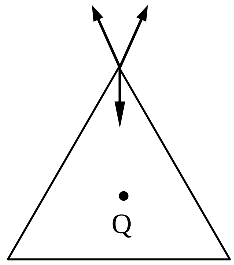
大学物理下 习题册一

1、三个电量为–q 的点电荷各放在边长为 r 的等边三角形的三个顶点上。电荷 Q（Q>0）放在三角形的重心上，为使每个负电荷受力为零，Q 之值应为多大？

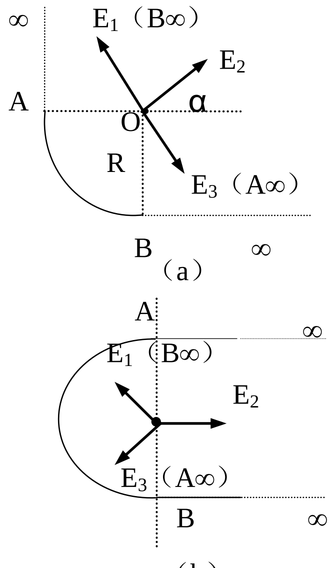
解：利用矢量合成可得



$$\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(\frac{\sqrt{3}}{3}r)^2}=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos 30^\circ\times 2$$

所以 $Q=\frac{\sqrt{3}}{3}q$

2、线电荷密度为λ的无限长均匀带电线，分别弯成如图 (a) 和 (b) 所示的两种形状，若圆半径为 R，试求(a)、(b) 图中 O 点的场强。



解：图（a）由两根半无限长带电直线和一段圆弧组成，方向如图所示。根据矢量合成

$$\vec{E}_O=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3=\vec{E}_2$$

$$E_O=E_2=\frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{E_y}{E_x}=1 \qquad \alpha=45^\circ \quad \text{即与水平成 } 45^\circ$$

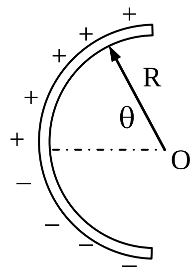
图（b）由两根半无限长带电直线和一段半圆弧组成，方向如图所示。根据矢量合成

$$E_{Ox}=E_2-2E_1\cos 45^0=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}-2\times\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}=0$$

$$E_{Oy}=E_1\sin 45^0-E_3\sin 45^0=0$$

$$E_O=0$$

3、有一细玻璃棒被弯成半径为 R 的半圆形，其上半部均匀分布有电荷+Q，下半部均匀分布有电荷–Q，如图所示．求半圆中心 O 处的场强。



解：由于对称性，dE_+、dE_-在 x 方向上的分量抵消 $E_x = 0$

$$dq = \lambda dl = \lambda R d\theta \qquad （\lambda = \frac{2Q}{\pi R}）$$

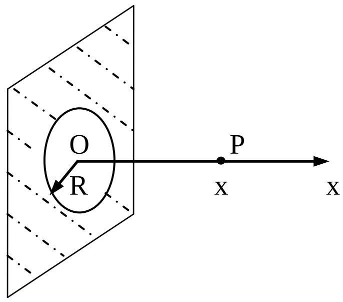
$$dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Rd\theta}{R^2} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$dE_y = dE\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta d\theta$$

$$E_y = 2\int dE\cos\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\theta}{R}\cos\theta = \frac{Q}{\varepsilon_0\pi^2R^2}$$

方向沿–y 方向

4、一无限大的均匀带电平板，电荷密度为σ，在平板上挖去一个半径为R的圆孔，求通过圆孔中心并垂直于板的轴上一点 P 的场强。



解：取圆环元半径为ρ， $dq = \sigma 2\pi\rho d\rho$

则圆环元在轴线上产生 dE 公式

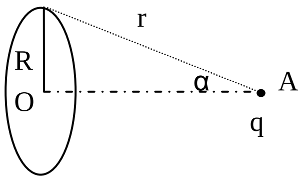
$$dE_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xdq}{(\rho^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_p = \int_R^\infty dE_p = \int_R^\infty \frac{2\pi\sigma x\rho d\rho}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

方向沿 x 轴方向

5、如图所示，在点电荷 q 的电场中，取半径为 R 的平面，q 在该平面的轴线上的 A 点处．求通过此圆平面的电通量。



解法一：以 A 为中心，r 为半径作一球面，则通过圆平面的电通量与通过以圆平面为底的球冠电通量相等。

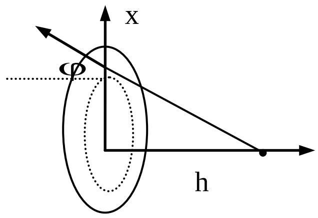
设球面积　$S_0=4\pi r^2$，　通量　$\Phi_0=\dfrac{q}{\varepsilon_0}$

球冠面积　$S=2\pi r(r-r\cos\alpha)$　通量　Φ

$$\frac{\Phi}{\Phi_0}=\frac{S}{S_0}=\frac{2\pi r^2(1-\cos\alpha)}{4\pi r^2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\therefore\quad \Phi=\Phi_0\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)=\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{(1-\cos\alpha)}{2}$$

解法二：



$$\Phi=\int\vec{E}\cdot d\vec{s}=\int E\cos\varphi ds=\int_0^R\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+h^2)}\cos\varphi 2\pi x dx$$

$$=\int_0^R\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(x^2+h^2)}\frac{h}{(x^2+h^2)^{1/2}}2\pi x dx$$

$$=\frac{q}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{h}{(R^2+h^2)^{1/2}}\right]=\frac{q}{2\varepsilon_0}(1-\cos\alpha)$$

6、无限长的两个共轴直圆筒，半径分别是 R_1 和 R_2，两圆筒面都均匀带电，沿轴线方向单位长度所带的电量分别是 λ_1 和 λ_2。

（1）求离轴线为 ***r*** 处的电场强度 E。

（2）当 $\lambda_2=\lambda_1$ 时，各处的电场强度 E 如何？

解：（1）作高为 h 的同轴圆柱形高斯面，由高斯定理 $\int\vec{E}\cdot d\vec{S}=E2\pi rh=\dfrac{\sum q}{\varepsilon_0}$

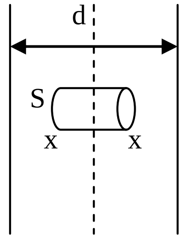
$r<R_1$　　$\sum q_1=0$　　$E_1=0$

$R_1<r<R_2$　　$\sum q_2=\lambda_1 h$　　$E_2=\dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$

$r>R_2$　　$\sum q_3=(\lambda_1+\lambda_2)h$　　$E_3=\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$

（2）E_1 和 E_2 不变，$E_3=2E_2$

7、一厚度为 d 的无限大平板，均匀带电，体电荷密度为 ρ，求平板体内、外场强的分布，并以其对称面为坐标原点作出 E – x 的分布曲线。



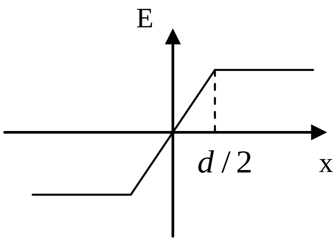
解：在平板内外取图示高斯面，由高斯定理 $\int \vec{E}\cdot d\vec{S}=\dfrac{\sum q}{\varepsilon_0}$

$-\dfrac{d}{2}<x<\dfrac{d}{2}$ $\oint \vec{E}_1\cdot d\vec{S}=2E_1S=\dfrac{\rho 2xS}{\varepsilon_0}$

$$E_1=\frac{\rho x}{\varepsilon_0}$$

$x>\dfrac{d}{2}$ or $x<-\dfrac{d}{2}$ $\oint \vec{E}_2\cdot d\vec{S}=2E_2S=\dfrac{\rho d\,S}{\varepsilon_0}$

$$E_2=\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$



8、半径为 R 的非金属球带有正电荷，电荷体密度随径向距离的变化满足 ρ=br，其中 b 为常数，r 为离球心的距离，求球内、外场强的分布。

解：由于 ρ 与 r 成线性关系，电场分布仍有球对称性，故可由高斯定理求解。

作同心球面为高斯面

$r<R$ $\int \vec{E}_{内}\cdot d\vec{S}=E_{内}4\pi r^2=\dfrac{\sum q}{\varepsilon_0}$

又因 $\sum q=\int_0^r br4\pi r^2dr=\int_0^r 4b\pi r^3dr=b\pi r^4$

$$E_{内}=\frac{b\pi r^4}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{br^2}{4\varepsilon_0}$$

$r>R$ $\sum q=\int \rho dV=\int_0^R 4br\pi r^2dr=\int_0^R b4\pi r^3dr=b\pi R^4$

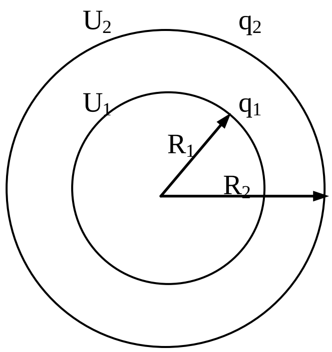
$$\int \vec{E}_{外}\cdot d\vec{S}=E_{外}4\pi r^2=\frac{b\pi R^4}{\varepsilon_0}$$

$$E_{外}=\frac{bR^4}{4\varepsilon_0 r^2}$$

9、两个同心的均匀带电球面，半径分别为 R_1=5.0cm，R_2 =20.0cm，已知内球面的电势为 U_1=60V，外球面的电势 U_2= –30V．求：

(1) 内、外球面上所带电量；

(2) 在两个球面之间何处的电势为零。



解：（1） $\Delta U_{R_1R_2} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) = 60 - (-30) = 90V$

$$q_1 = 6.67 \times 10^{-10} C$$

又 $$U_{R_1} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = 60V$$

$$q_2 = -1.33 \times 10^{-9} C$$

（2）令 r 处　U（r）=0

即 $$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = 0$$

所以　　r=0.10m=10.0cm

10、电荷 Q 均匀地分布在半径为 R 的球体内，试证明离球心 r (r<R) 处的电动势为

$$U = \frac{Q\left(3R^2 - r^2\right)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

解：先由高斯定理分别求出球内、球外 E

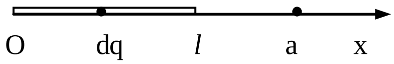
$$E = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R \end{cases}$$

$$U = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{R} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_R^{\infty} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \frac{Q\left(3R^2 - r^2\right)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

11、一均匀带电细杆，长为ℓ =15.0cm，电荷线密度 $\lambda = 2.0\times10^{-7}\,C/m$ 求:

(1) 细杆延长线上与杆的一端相距 a=5.0cm 处的电势。

(2) 细杆中垂线上与细杆相距 b=5.0cm 处的电势。

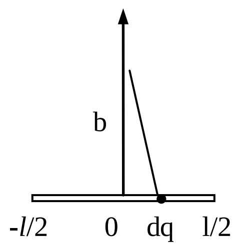


解：（1） $dU = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0(l+a-x)} = \dfrac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(l+a-x)}$

$$U = \int_0^l \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(l+a-x)} = 2.5\times10^3\,V$$

（2） $dU = \dfrac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+b^2}}$

$$U = \int_{-\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+b^2}} = 4.3\times10^3\,V$$



12、半径为 R 的无限长圆柱体中，电荷按体密度ρ均匀分布，分别以 (1) 轴线处为零电势位置；(2) 圆柱体表面为零电势位置。求圆柱体内、外的电势。

解：场强分布

$r<R$ $\quad \oint \vec{E}d\vec{s} = E\cdot 2\pi r l = \dfrac{\rho\pi r^2 l}{\varepsilon_0}$ $\quad E = \dfrac{\rho\, r}{2\varepsilon_0}$

$r>R$ $\quad E\cdot 2\pi r l = \dfrac{\rho\pi R^2 l}{\varepsilon_0}$ $\quad E = \dfrac{R^2\rho}{2\varepsilon_0 r}$

（1） $r<R$ $\quad U = \int_r^0 \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}dr = -\dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}r^2$

$r>R$ $\quad U = \int_r^R \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_R^0 \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}(2\ln\dfrac{r}{R}+1)$

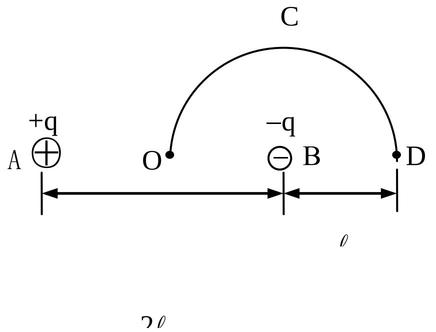
（2） $r<R$ $\quad U = \int_r^R E\,dr = \dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}(R^2-r^2)$

$r>R$ $\quad U = \int_r^R Edr = -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R}$

13、如图所示，$\overline{AB}=2\ell$，弧 OCD 是以 B 为中心，ℓ为半径的半圆。A 点有点电荷+q，B 点有点电荷−q。

(1) 把单位正电荷从 O 点沿弧 OCD 移到 D 点，电场力作了多少功?

(2) 若把单位负电荷从 D 点沿 AB 的延长线移到无穷远处，电场力作功又为多少?



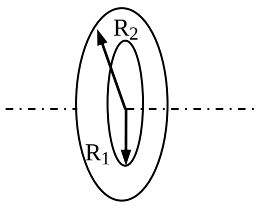
解：（1） $U_0=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}+\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 l}=0$

$$U_D=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 3l}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}=-\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

$$A_1=q(U_0-U_D)=U_0-U_D=\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

(2) $A_2=-(U_0-U_\infty)=\dfrac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$

14、在静电透镜实验装置中，有一均匀带电的圆环，内半径为 R_1，外半径为 R_2，其电荷面密度为 σ(负电)，现有一电子沿着轴线从无限远射向带负电的圆环，欲使电子能穿过圆环，它的初始动能至少要多大?



解：设电子在无穷远处初动能为 E_k ,0 点电子动能 ≥ 0

$$A=e(U_0-U_\infty)=\Delta E_K=E_K$$

$$U_0=\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}=\int_{R_1}^{R_2}-\sigma\frac{2\pi r\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R_2-R_1)$$

$$E_K=-eU_0=\frac{\sigma e}{2\varepsilon_0}(R_2-R_1)$$

15、一电偶极子原来与均匀电场平行，将它转到与电场反平行时，外力作功为 A，则当此电偶极子与场强成 45°角时，此电偶极子所受的力矩为多少?

解：$\because A=\int M d\theta=\int_0^{\pi} PE\sin\theta d\theta=2PE$

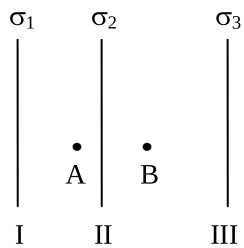
$$M=PE\sin 45°=\frac{A}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}A}{4}$$

($A=P_eE-(-P_eE)=2P_eE$)

16、如图所示，三块互相平行的均匀带电大平面，电荷密度为 σ_1=1.2×10^{-4}C/m^2，　σ_2=0.2×10^{-4}C/m^2，σ_3=1.1×10^{-4}C/m^2，A 点与平面 II 相距为 5.0cm，B 点与平面 II 相距 7.0cm，求:

(1) A、B 两点的电势差；

(2) 把电量 q_0= −1.0×10^{-8}C 的点电荷从 A 点移到 B 点，外力克服电场力作功多少?



解：（1）$E_A=E_1-E_2-E_3=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}=\frac{-10^{-3}}{2\varepsilon_0}$

$$E_B=E_1+E_2-E_3=\frac{3\times10^{-3}}{2\varepsilon_0}$$

$$U_A-U_B=E_Ad_1+E_Bd_2=\frac{-10^{-3}}{2\varepsilon_0}\times5\times10^{-2}+\frac{3\times10^{-3}}{2\varepsilon_0}\times7\times10^{-2}$$

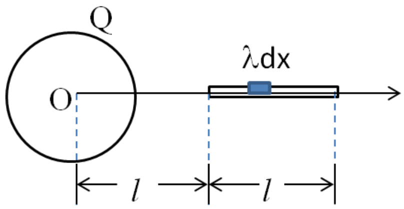
$$=\frac{16\times10^{-7}}{2\varepsilon_0}=\frac{16\times10^{-7}}{2\times8.85\times10^{-12}}=9.1\times10^{4}\,V$$

（2）$A_{外}+A_{静}=0$

$$A_{外}=-A_{静}=\Delta W=q_0(U_B-U_A)$$

$$=1.0\times10^{-2}\times9.1\times10^{4}=9.1\times10^{-4}\,J$$

17、半径为 R 的均匀带电球面，带电量为 Q，沿半径方向上有一均匀带电细线，线电荷密度为λ，长度为 *l*, 细线近端离球心的距离为 *l*, 如图所示。设球和细线上的电荷分布固定，求细线在电场中的电势能。



解：$dW = \lambda\, dx \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}$

$$W = \int_l^{2l} \lambda\, dx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln 2$$

18、有一半径为 R，电荷密度为 σ 的均匀带电的圆盘，求:

(1) 圆盘轴线上任意一点的电势；

(2) 利用场强和电势梯度的关系求该点场强。

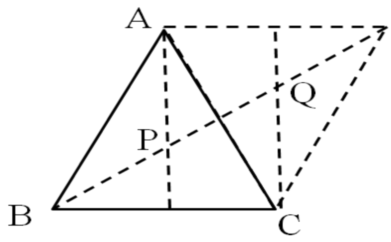
解：取 $dq = 2\pi r dr$

$$U = \int_0^R \frac{\sigma\, 2\pi\, r dr}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{x^2 + R^2} - x)$$

$$E = -\frac{dU}{dx} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + R^2}} - 1\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)$$

拓展题

1、如图所示，三根等长的带电绝缘细棒连成正三角形，每根棒上均匀分布等量同号电荷，测得图中 P、Q 两点(均为相应正三角形的中心)的电势分别为 U_P 和 U_Q。若将棒 BC 取走，试求此时 P 点和 Q 点的电势。



解：设三棒对 P 点及 AC 对 Q 点的电势为 U_1，AB、BC 棒对 Q 点的电势为 U_2，则

$$U_P = 3U_1,\quad U_Q = U_1 + 2U_2$$

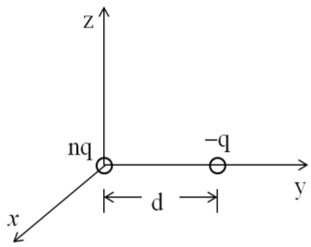
解得：$U_1 = \frac{1}{3}U_P,\quad U_2 = \frac{1}{2}U_Q - \frac{1}{6}U_P$

抽去 BC 棒后：$U'_P = U_P - U_1 = \frac{2}{3}U_P$

$$U'_Q = U_Q - U_2 = \frac{1}{2}U_Q + \frac{1}{6}U_P$$

2、有两个点电荷带电量为 nq 和–q（n >1），相距为 d，如图所示。试证电势为零的等势面为一个球面，并求出球面半径及球心坐标（设无限远处为电势零点）。

解：任意 P 点的电势为



$$U_P = \frac{nq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+(y-d)^2+z^2}}$$

令 $U_P = 0$

得 $x^2 + (y - \frac{n^2 d}{n^2-1})^2 + z^2 = (\frac{nd}{n^2-1})$ ——圆方程