第九次作业

一． 填空题

1. 设 X 服从泊松分布，若 $EX^2=6$，则 $P(X>1)=$ ___$\underline{1-3e^{-2}}$。

解 $X\sim P(\lambda),\ 6=EX^2=DX+(EX)^2=\lambda+\lambda^2$ 故 $\lambda=2$.

$$P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-P(X=0)-P(X=1)$$
$$=1-e^{-2}-2e^{-2}=1-3e^{-2}.$$

2. 设随机变量 $\xi\sim B(n,p)$，已知 $E\xi=2.4,\quad D\xi=1.44$，则参数 n=__6______，p =__0.4_________。

解 $\begin{cases}E\xi=np=2.4,\\ D\xi=npq=1.44,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=6,\\ p=0.4.\end{cases}$

3. 某保险公司的某人寿保险险种有 1000 人投保，每个人在一年内死亡的概率为 0.005，且每个人在一年内是否死亡是相互独立的，欲求在未来一年内这 1000 个投保人死亡人数不超过 10 人的概率。用 Excel 的 **BINOMDIST** 函数计算。**BINOMDIST**（10 , 1000, 0.005, TRUE）= 0.986531_。

4. 运载火箭运行中进入其仪器仓的粒子数服从参数为 4 的泊松分布，用 Excel 的 **POISSON** 函数求进入仪器舱的粒子数大于 10 的概率。
POISSON（10 , 4 ，TRUE）=0.9972, 所求概率 p=_0.0028_。

5. $\xi\sim P(4)$，由切比雪夫不等式有 $P(|\xi-4|<6)\ge$ __8/9___。

二． 选择题

1. 在相同条件下独立的进行 3 次射击，每次射击击中目标的概率为 $\frac{2}{3}$，则至少击中一次的概率为 （ D ）

A. $\frac{4}{27}$ B. $\frac{12}{27}$ C. $\frac{19}{27}$ D. $\frac{26}{27}$

2. 设随机变量 X 服从泊松分布，且已知 P{X=1}=P{X=2} ，则 P{X=4}=（ C ）。

A.$\frac{1}{3}e^{-1}$ $B.\frac{1}{3}e^{-1}$ $C.\frac{2}{3}e^{-2}$ $D.\frac{4}{3}e^{-2}$

3、某种灯管的使用寿命 ξ 服从参数为 0.002 的指数分布 $E(0.002)$，现任取三只这种灯管，则在 500 小时内，三只灯管中至多有两只损坏的概率为（ A ）

（A）$1-(1-e^{-1})^3$ （B）$3e^{-2}(1-e^{-1})$ （C）$1-e^{-3}$ （D）$3e^{-1}(1-e^{-2})$

三．计算题

1. 设随机变量ξ的密度函数是

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le\pi \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对ξ独立的随机观察 4 次，η表示观察值大于$\frac{\pi}{3}$的次数，求

（1）η的概率分布（分布律），

（2）$E\eta$和$D\eta$。

解　$\eta\sim B(4,p)$。

（1）设 A=“观察值大于$\frac{\pi}{3}$”，则 $p=P(A)=P(\xi\ge\frac{\pi}{3})=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}$,

所以η的概率分布为：$P(\eta=k)=\binom{4}{k}\frac{1}{2}^{k}(1-\frac{1}{2})^{4-k}$，$(k=0,1,2,3,4)$。

或

η	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

（2）　$E\eta=4\times\frac{1}{2}=2,\quad D\eta=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1$

2. 随机变量ξ服从参数为p的几何分布，即

$$P(\xi=k)=p(1-p)^{k-1},\quad k=1,2,\cdots$$

（1）　求 $P(\xi>s)$，其中 s 是一个非负整数；

（2）　试证$P(\xi>s+t\mid\xi>s)=P(\xi>t)$，其中 s，t 是非负整数。（几何分布具有无记忆性）。

解　　（1）$P(\xi>s)=\sum_{k=s+1}^{\infty}P(\xi=k)=\sum_{k=s+1}^{\infty}p(1-p)^{k-1}$

$$=p(1-p)^s\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k=p(1-p)^s\ \frac{1}{p}=(1-p)^s$$

或者：$P(\xi>s)=1-P(\xi\le s)=1-\sum_{k=1}^{s}p(1-p)^{k-1}=1-p\cdot\frac{1-(1-p)^s}{1-(1-p)}=(1-p)^s$

（2） $P(\xi>s+t\,|\,\xi>s)=\frac{P(\{\xi>s+t\}\bigcap\{\xi>s\})}{P(\xi>s)}=\frac{P(\xi>s+t)}{P(\xi>s)}$

$$=\frac{(1-p)^{s+t}}{(1-p)^s}=(1-p)^t=P(\xi>t)\text{ 。}$$

3. 设随机变量 X 服从泊松分布，且 $P(X\le 1)=4P(X=2)$，求 $P(X=3)$。

解：$P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}$， $P(X=2)=\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$

由 $P(X\le 1)=4P(X=2)$ 知 $e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}=2\lambda^2 e^{-\lambda}$

即 $2\lambda^2-\lambda-1=0$ 解得 $\lambda=1$，故

$$P(X=3)=\frac{1}{6}e^{-1}.$$

4. 设在时间 t (单位：min)内，通过某路口的汽车服从参数与 t 成正比的泊松分布。已知在 1 分钟内没有汽车通过的概率为 0.2，求在 2 分钟内至少有 2 辆车通过的概率。（提示：设 ξ_t=“t时间内汽车数”,则 $\xi_t\sim P(\lambda t)$）

解: 设 ξ_t=“t时间内汽车数”,则 $\xi_t\sim P(\lambda t)$,

那么 $P(\xi_t=k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\quad(k=0,1,2,\cdots)$,

由已知,得 $P(\xi_1=0)=\frac{(\lambda)^0 e^{-\lambda}}{0!}=0.2\Rightarrow\lambda=\ln 5$,

所以 $P(\xi_2\ge 2)=1-P(\xi_2=0)-P(\xi_2=1)=1-\frac{(2\lambda)^0 e^{-2\lambda}}{0!}-\frac{(2\lambda)^1 e^{-2\lambda}}{1!}$

$$=1-e^{-2\lambda}-(2\lambda)e^{-2\lambda}=\frac{24-2\ln 5}{25}.$$

5. 在一次试验中事件 A 发生的概率为 p，把这个试验独立重复做两次。在下列两种情况下分别求 p 的值：

（1） 已知事件 A 至多发生一次的概率与事件 A 至少发生一次的概率相等；

（2）已知事件 A 至多发生一次的条件下事件 A 至少发生一次的概率为 $\frac{1}{2}$ 。

解 设 ξ 为两次试验中事件 A 发生的次数，则 $\xi \sim B(2,p)$ 。

（1）由题意知，$P(\xi \geq 1) = P(\xi \leq 1)$，即

$$P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1)$$

得　$P(\xi = 2) = P(\xi = 0)$，亦即 $C_2^2 p^2 = C_2^0 (1-p)^2$，解得 $p = \frac{1}{2}$。

（2）由条件概率公式

$$P(\xi \geq 1 \mid \xi \leq 1) = \frac{P(\{\xi \geq 1\} \cap \{\xi \leq 1\})}{P(\xi \leq 1)} = \frac{P(\xi = 1)}{P(\xi \leq 1)} = \frac{2p(1-p)}{1-p^2} = \frac{2p}{1+p},$$

根据题意，$\frac{2p}{1+p} = \frac{1}{2}$，解出，$p = \frac{1}{3}$。

第十次作业

一． 填空题：

1．若 ξ 在 $[0,5]$ 上服从均匀分布，则方程 $x^2 + \xi x + \xi^2 - 3\xi = 0$ 有实根的概率 0.8 。

2．设随机变量 X 在区间[2，6]上服从均匀分布，现对 X 进行了 3 次独立试验，则正好有 2 次观测值大于 4 的概率为 $\frac{3}{8}$ 。

3．设每人每次打电话的时间（单位：min）服从 $E(1)$，则在 808 人次的电话中有 3 次或以上超过 6 分钟的概率为 0.324

二． 选择题：

1．设 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则随着 σ 的增大，概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$（　C　）。

A.单调增大　B.单调减少　C.保持不变　D. 增减不定

2．若灯管的寿命 $\xi \sim E(\lambda)$，则该灯管已使用了 $a(a>0)$ 小时,能再使用 b 小时的概率（　A　）。

A. 与 a 无关　B. 与 a 有关　C. 无法确定　D. 以上答案都不对

3．随机变量 X 的概率密度函数为 $p(x)$，且 $p(x) = p(-x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 a，有（　B　）。

A. $F(-a)=1-\int_0^a p(x)dx$　　B. $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a p(x)dx$

C. $F(-a)=F(a)$　　D. $F(-a)=2F(a)-1$

三．　计算题：

1．某地区 18 岁的女青年的血压服从$N(110,121)$。在该地区任选一 18 岁的女青年，测量她的血压，

（1）　求$P(X\le 100),\quad P(105.5\le X\le 121)$

（2）　确定最小的x，使$P(X>x)\le 0.05$

解：设女青年的血压为ξ，则$\xi\sim N(110,121)$，$\frac{\xi-110}{11}\sim N(0,1)$

（1）$$P(X<100)=P(\frac{X-110}{11}<\frac{100-110}{11})=\Phi(-0.091)$$
$$=1-\Phi(0.091)=1-0.5359=0.4641$$

$$P(105.5\le X\le 121)=\Phi(\frac{121-110}{11})-\Phi(\frac{105.5-110}{11})=\Phi(1)-\Phi(-0.5)$$
$$=\Phi(1)+\Phi(0.5)-1=0.8413+0.6915-1=0.5328$$

（2）要使$P(X>x)\le 0.05$，只须$P(X\le x)>0.95$

$$\because \Phi(1.65)=0.95\ \therefore \frac{x-110}{11}>1.65\Rightarrow x>128.15$$

2．修理某机器所需时间（单位：小时）服从参数为$\frac{1}{2}$的指数分布。试问：

（1）　修理时间超过 2 小时的概率是多少？

（2）　若已持续修理了 9 小时，总共需要至少 10 小时才能修好的条件概率是多少？

解：设ξ是修理时间，$\xi\sim E(\frac{1}{2})$，ξ的分布函数为$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$。

（1）$P\{\xi>2\}=1-P\{\xi\le 2\}=1-F(2)=1-(1-e^{-\frac{2}{2}})=e^{-1}\approx 0.367879$；

（2）$P\{\xi>10|\xi>9\}=\frac{P\{\xi>10\}}{P\{\xi>9\}}=\frac{1-(1-e^{-\frac{10}{2}})}{1-(1-e^{-\frac{9}{2}})}=\frac{e^{-\frac{10}{2}}}{e^{-\frac{9}{2}}}=e^{-\frac{1}{2}}\approx 0.606531$。

3．假设测量的随机误差$\xi\sim N(0,10^2)$，试求在 100 次独立重复测量中，至少有二次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率α。

解：$P(|\xi|>19.6)=P(\xi>19.6)+P(\xi<-19.6)=2[1-\Phi(\frac{19.6}{10})]=0.05$

令η为 100 次独立重复测量中，误差的绝对值大于 19.6 的次数，

则$\eta\sim b(100,0.05)$

$P(\eta\geq 2)=1-P(\eta=0)-P(\eta=1)=1-(0.95)^{100}-C_{100}^{1}(0.05)(0.95)^{99}=0.9629$

4. 若$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$且$P(\xi<89)=0.90$，$P(\xi<94)=0.95$，求μ和σ^2.

解：根据

$0.90=P(\xi<89)=\Phi(\frac{89-\mu}{\sigma})$，和 $0.95=P(\xi<94)=\Phi(\frac{94-\mu}{\sigma})$，

利用随机变量分布函数的单调性，有

$\frac{89-\mu}{\sigma}=1.2816$，和 $\frac{94-\mu}{\sigma}=1.6449$，

解得$\mu=71.3617$，$\sigma=13.7627$，即$\sigma^2=189.4128$

5．测量至某一目标的距离时发生的随机误差X（米）的概率密度为

$f(x)=\frac{1}{20\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{800}}$ $(-\infty<x<+\infty)$

求在三次测量中至少有一次误差的绝对值不超过 20 米的概率.

解： X~N(10,202)

设Y为三次测量中误差绝对值不超过$20m$的次数，则$Y\sim B(3,p)$，其中

$p=P(|X|<20)=P(-20<X<20=\Phi(\frac{20-10}{20})-\Phi(\frac{-20-10}{20})$

$=\Phi(0.5)-\Phi(-1.5)=\Phi(0.5)+\Phi(1.5)-1=0.6915+0.9332-1=0.6247$

所求概率为$P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)=1-(1-p)^3=1-(1-0.6274)^3=0.9471.$