

概率论与数理统计

第一次作业

一. 填空题:

1. 设样本空间 $\Omega = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, 事件 $A = \left\{x \left| \frac{1}{2} < x \leq 1 \right.\right\}$, $B = \left\{x \left| \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{2} \right.\right\}$,

具体写出下列各事件: $\overline{AB} = \left\{x \left| \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ 或者 } 1 < x < \frac{3}{2} \right.\right\}$, $\overline{A} \cup B = \underline{\Omega}$,

$$\overline{\overline{AB}} = \underline{B}, \quad \overline{AB} = \underline{A}.$$

2. 设 A 、 B 、 C 表示三个随机事件, 试将下列事件用 A 、 B 、 C 表示出来:

(1) 事件 \underline{ABC} 表示 A 、 B 、 C 都发生;

(2) 事件 $\underline{\overline{ABC}}$ 表示 A 、 B 、 C 都不发生;

(3) 事件 $\underline{\overline{ABC}}$ 表示 A 、 B 、 C 不都发生;

(4) 事件 $\underline{A \cup B \cup C}$ 表示 A 、 B 、 C 中至少有一事件发生;

(5) 事件 $\underline{\overline{AB \cup AC \cup BC}}$ 或 $\underline{\overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}}$ 表示 A 、 B 、 C 中最多有一事件发生。

3. 化简事件算式 $\overline{(A \cup B)} \cap (A - \overline{B}) = \underline{\emptyset}$ 。

二. 选择题:

1. 设 $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 7\}$, $C = \{1, 3, 4, 7\}$, 则事件

$$\overline{A} - BC = (A).$$

A. $\{1, 6, 8, 9, 10\}$ B. $\{2, 5\}$ C. $\{2, 6, 8, 9, 10\}$ D. $\{1, 2, 5, 6, 8, 9, 10\}$

2. 对飞机进行两次射击, 每次射一弹, 设事件 $A =$ “恰有一弹击中飞机”, 事件 $B =$ “至少有一弹击中飞机”, 事件 $C =$ “两弹都击中飞机”, 事件 $D =$ “两弹都没击中飞机”, 又设随机变量 ξ 为击中飞机的次数, 则下列事件中 (C) 不表示 $\{\xi = 1\}$ 。

件。

证:

由于 A 与 B 互为对立事件, 故 $AB = \emptyset, A \cup B = \Omega$, 因此就有 $\bar{A} \cup \bar{B} = \Omega, \bar{A}\bar{B} = \emptyset$, 所以 \bar{A} 与 \bar{B} 也互为对立事件。

4. 化简事件算式 $(AB) \cup (A\bar{B}) \cup (\bar{A}B) \cup (\bar{A}\bar{B})$ 。

解: $(AB) \cup (A\bar{B}) \cup (\bar{A}B) \cup (\bar{A}\bar{B}) = (AB \cup A\bar{B}) \cup (\bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B}) = A \cup \bar{A} = \Omega$ 。

5. 证明下列等式 $(A - AB) \cup B = \overline{\bar{A}\bar{B}}$ 。

证明: 因为

$$\begin{aligned}\overline{(A - AB) \cup B} &= \overline{(A - AB)}\bar{B} = \overline{(A \cap \bar{B})}\bar{B} = (\bar{A} \cup AB)\bar{B} \\ &= (\bar{A}\bar{B}) \cup (AB\bar{B}) = (\bar{A}\bar{B}) \cup \emptyset = \bar{A}\bar{B}\end{aligned}$$

所以: $(A - AB) \cup B = \overline{\bar{A}\bar{B}}$ 。

6. 设 A 、 B 为两个事件, 若 $AB = \bar{A} \cap \bar{B}$, 问 A 和 B 有什么关系?

解: A 和 B 为对立事件。

第二次作业

一. 填空题:

1. 10个螺丝钉有3个是坏的, 随机抽取4个。则恰好有两个是坏的概率是 0.3, 4个全是好的概率是 0.1667。

2. 把12本书任意地放在书架上, 则其中指定的4本书放在一起的概率

$$\frac{9!4!}{12!} = \frac{1}{55}。$$

3. 袋中装有编号为 $1, 2, \dots, n$ 的 n 个球, 每次从中任意摸一球。若按照有放回方

式摸球, 则第 k 次摸球时, 首次摸到1号球的概率为 $\frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$ 。若按照无放

回方式摸球, 则第 k 次摸球时, 首次摸到1号球的概率为 $\frac{1}{n}$ 。

二. 选择题:

1. 为了减少比赛场次, 把20个球队任意分成两组(每组10队)进行比赛, 则

最强的两个队被分在不同组内的概率为(B)。

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{10}{19}$ C. $\frac{5}{19}$ D. $\frac{1}{10}$

2. 从一副扑克牌(52 张)中任取 4 张,4 张牌的花色各不相同的概率(C)。

- A. $\frac{1}{13}$ B. $\frac{13}{C_{52}^4}$ C. $\frac{13^4}{C_{52}^4}$ D. $\frac{13^4}{52 \times 51 \times 50 \times 49}$

3. 进行一系列独立的实验, 每次试验成功的概率为 p , 则在第二次成功之前已经失败了 3 次的概率为 (A)。

- A. $4p^2(1-p)^3$ B. $4p(1-p)^3$ C. $10p^2(1-p)^3$ D. $p^2(1-p)^3$

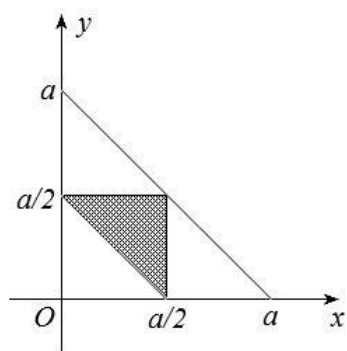
三. 计算题:

1. 将长为 a 的细棒折成三段, 求这三段能构成三角形的概率。

解 : 设 三 段 分 别 为 $x, y, a-x-y$, 样 本 空 间

$\Omega: (0 < x < a) \cap (0 < y < a) \cap (x+y \leq a)$ 能构成三角形须满足(图中阴影部分)

$$\begin{cases} x+y > a-x-y \\ y+a-x-y > x \\ a-x-y+x > y \\ 0 < x < a, 0 < y < a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y > \frac{a}{2} \\ 0 < x < \frac{a}{2} \\ 0 < y < \frac{a}{2} \end{cases}$$



故这三段能够成三角形的概率为 $\frac{1}{4}$.

2. 同时掷五颗骰子, 求下列事件的概率:

- (1) A= “点数各不相同”;
- (2) B= “至少出现两个 6 点 ”;
- (3) C= “恰有两个点数相同”;
- (4) D= “某两个点数相同, 另三个同是另一个点数”;

解：(1) $P(A) = \frac{P_6^5}{6^5}$;

(2) $P(B) = 1 - \frac{5^5}{6^5} - 5 \times \frac{5^4}{6^5}$;

(3) $P(C) = \frac{C_5^2 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{6^5} = \frac{25}{54}$;

(4) $P(D) = \frac{C_5^2 \times 6 \times 5}{6^5} = \frac{25}{648}$;

3. 将 10 根绳的 20 个头任意两两相接，求事件 $A = \{\text{恰结成 10 个圈}\}$ 的概率。

解：

$$P(A) = \frac{20!!}{20!} = \frac{1}{19!!}$$

4. 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数，求两数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率。

解：样本空间为 $\Omega = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$,

$$\text{记 } A = \left\{ (x, y) \mid (x, y) \in \Omega, |x - y| < \frac{1}{2} \right\},$$

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{3}{4}.$$

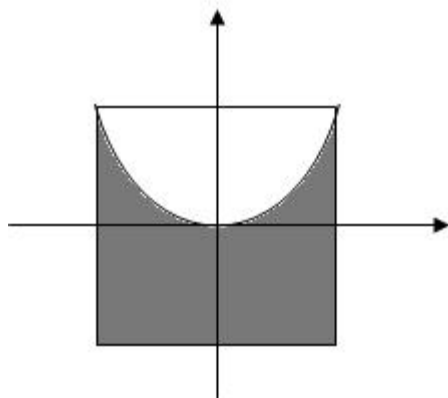
5. 在正方形 $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ 中任取一点，求使得关于 u 的方程

$u^2 + xu + y = 0$ 有 (1) 两个实根的概率；(2) 有两个正根的概率。

解：(1) 方程有两个实根，要求 $x^2 - 4y \geq 0$ ，即点的坐标满足：

$\{(x, y) | (x, y) \in D, x^2 - 4y \geq 0\}$ ，见如图阴影部分。因此概率为：

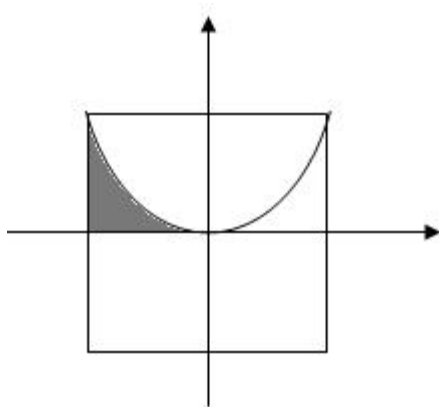
$$P = \frac{S_{\text{阴}}}{S_D} = \frac{2 + 2 \times \int_0^1 \frac{x^2}{4} dx}{4} = \frac{13}{24}$$



(2) 方程有正根, 要求 $\frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4y}}{2} > 0$, 也就是要求 $x < 0, y > 0$ 。

因此点的坐标满足 $\{(x, y) | (x, y) \in D, x^2 - 4y \geq 0, x < 0, y > 0\}$, 见图阴影部分。因此概率为:

$$P = \frac{S_{\text{阴}}}{S_D} = \frac{\int_{-1}^0 \frac{x^2}{4} dx}{4} = \frac{1}{48}。$$



6. n 个人随机地围绕圆桌就座, 试问其中 A 、 B 两人的座位相邻的概率是多少?

解: $P\{A, B \text{ 两人座位相邻}\} = \begin{cases} \frac{2}{n-1} & n \geq 3 \\ 1 & n = 2 \end{cases}。$

7. 一部五卷的选集, 按任意顺序放在书架上, 求:

- (1) 各卷自左至右或者自右至左的卷号顺序恰为 1,2,3,4,5 的概率;
- (2) 第一卷及第五卷分别在两端的概率;
- (3) 第一卷及第五卷都不在两端的概率。

解: (1) $P = \frac{2}{5!} = \frac{1}{60};$

(2) $P = \frac{2!3!}{5!} = \frac{1}{10};$

(3) $P = \frac{P_3^2 3!}{5!} = \frac{3}{10}。$