

1.8、判断方程的类型

$$(1)y^2u_{xx} + x^3u_{yy} = 0$$

$$(3)u_{xx} + (x^2 + y)u_{yy} = 0$$

解: (1) $\Delta = -y^2x^3$

$\Delta > 0$, 即 $y^2x^3 < 0 \Rightarrow y \neq 0$ 且 $x < 0$, 双曲型

$\Delta = 0$, 即 $y^2x^3 = 0 \Rightarrow y = 0$ 或 $x = 0$, 抛物型

$\Delta < 0$, 即 $y^2x^3 > 0 \Rightarrow y \neq 0$ 且 $x > 0$, 椭圆型

(3) $\Delta = -(x^2 + y)$

$\Delta > 0$, 即 $(x^2 + y) < 0$, 双曲型

$\Delta = 0$, 即 $(x^2 + y) = 0$, 抛物型

$\Delta < 0$, 即 $(x^2 + y) > 0$, 椭圆型

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 1 of 5](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

1.9、化简下列方程为标准形式

$$(1) u_{xx} + 2u_{xy} + 3u_{yy} + u_x + u_y = 0$$

$$(3) u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = \sin y$$

解: (1) $\Delta = 1^2 - 1 \cdot 3 = -2 < 0$ 所以方程属于椭圆型
特征方程

$$(dy)^2 - 2dx dy + 3(dx)^2 = 0$$

$$\Rightarrow y - x \pm \sqrt{2}i = c_{\pm}$$

令 $\xi = y - x, \eta = \sqrt{2}x$, 则原方程可化为

$$u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} + \frac{\sqrt{2}}{2}u_{\eta} = 0$$



$$(3) u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = \sin y$$

解: $\Delta = (-2)^2 - 1 \cdot 4 = 0$ 所以方程是抛物型

特征方程

$$(dy)^2 + 4dx \cdot dy + 4(dx)^2 = 0$$

积分曲线为 $y + 2x = c$, 令

$$\xi = y + 2x, \eta = y$$

则原方程可化为

$$u_{\eta\eta} = \frac{1}{4} \sin \eta$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 3 of 5](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



1.10、(1) $u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$

解：特征方程为

$$(dy)^2 - 3dx dy + 2(dx)^2 = 0$$

令

$$\xi = y - 2x, \eta = y - x$$

原方程可化为

$$u_{\xi\eta} = 0$$

所以

$$u = f(y - 2x) + g(y - x)$$

其中 $f(y - 2x), g(y - x)$ 关于 $y - 2x, y - x$ 的任意的二次连续可微的函数

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

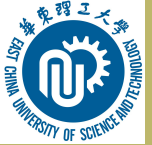
Page 4 of 5

Go Back

Full Screen

Close

Quit



第一章作业注意的地方：

- 掌握 $\Delta > 0, = 0, < 0$ 时,对应的自变量非奇异变换的选取, 我们作业题中
 - 1.9(1)是 $\Delta < 0$ 时, 根据特征方程复形式的积分曲线的实部和虚部的函数分别给出 ξ, η 的变换。
 - 1.9(3)是 $\Delta = 0$ 时, 根据特征方程的一簇积分曲线, 给出 ξ 的变换, 另一个变换一般会取 $\eta = y$, 或者 $\eta = x$, (可以利用Jacobi行列式验证两个函数是否无关)
 - 1.10(1)是当 $\Delta > 0$ 时, 根据特征方程的两簇不同的积分曲线, 给出 ξ, η 的变换
- 方程化简时, 一般利用复合函数的求导进行化简就行, 不建议记带星的系数和原系数之间的关系, 因为很容易记错误。
- 偏微分方程在利用积分求通解时, 要加上其他自变量的任意函数, 不用加常数了, 常数会包含在其他自变量任意函数中
- 后面几章介绍的是三类标准型方程不同定界条件的求解方法, 所以第一章中我们先介绍判断方程的类型与化简

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 5 of 5](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)