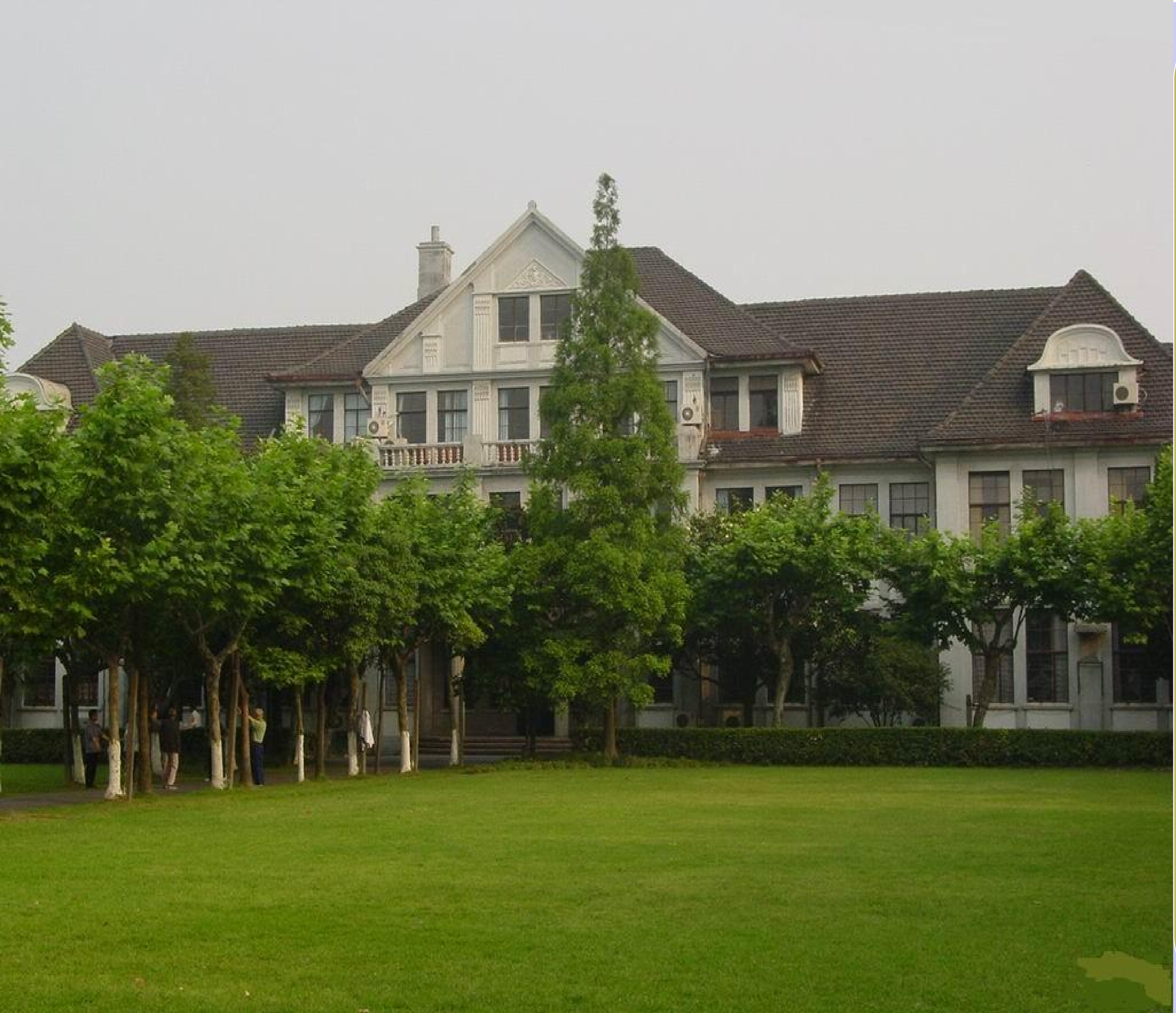

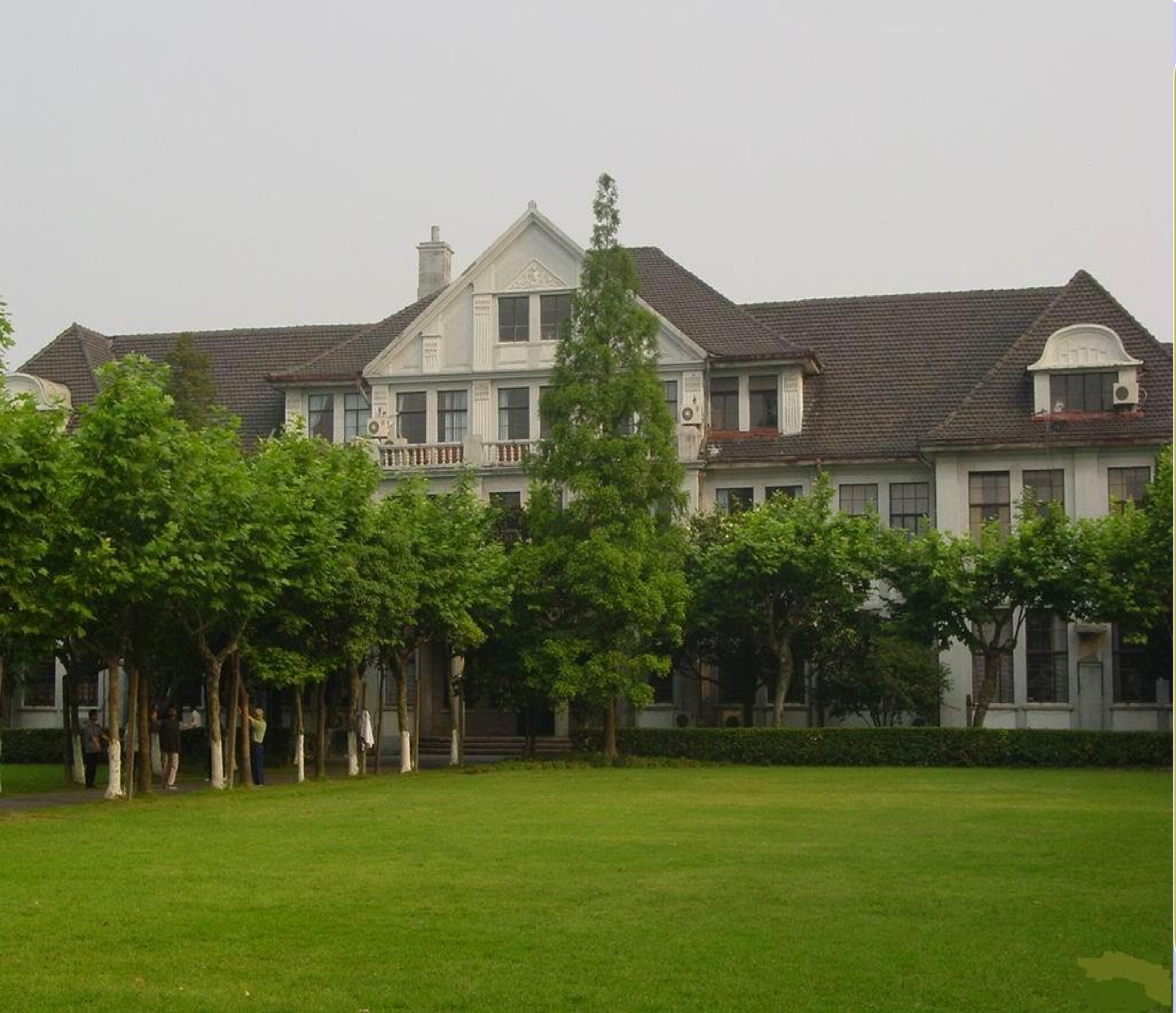

⋆2热传导方程

⋆2热传导方程

模型 各向同性的物体，内部有热源，与周围介质有热交换，求物体内部的温度分布。

$\star$2热传导方程

模型　各向同性的物体，内部有热源，与周围介质有热交换，求物体内部的温度分布。

物理规律

- **(1)** 能量守恒：在物体Ω内任取一部分$V \subset \Omega$,任取时间段$[t_1, t_2]$,则有

$$
\begin{aligned}
&[t_1, t_2]\ \text{时段内}V\text{中增加的热量}\\
&= [t_1, t_2]\text{时段内通过边界}\partial V\text{流入的热量}\\
&+[t_1, t_2]\text{时段内由内部热源产生的热量}
\end{aligned}
$$

⋆2热传导方程

模型 各向同性的物体，内部有热源，与周围介质有热交换，求物体内部的温度分布。

物理规律

- **(1)** 能量守恒：在物体Ω内任取一部分$V\subset\Omega$,任取时间段$[t_1,t_2]$,则有

$$
\begin{aligned}
&[t_1,t_2]\text{ 时段内}V\text{中增加的热量}\\
=&[t_1,t_2]\text{时段内通过边界}\partial V\text{流入的热量}\\
+&[t_1,t_2]\text{时段内由内部热源产生的热量}
\end{aligned}
$$

- **(2) Fourier热力学定律：**热流密度q $= -k\bigtriangledown u$,即热流量与温度的梯度成正比，两者方向相反，k是热传导系数

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- **(2) Fourier热力学定律：**热流密度$\mathbf{q} = -k \bigtriangledown u$,即热流量与温度的梯度成正比，两者方向相反，$k$是热传导系数
- ρ表示物体的密度，u表示温度，c表示比热，$\mathbf{q}$表示热流密度，f_0表示热源强度。假设物体的密度不随时间变化,物体是各向同性的,所以$c(x,t) = c$为常数

- **(2) Fourier热力学定律**：热流密度$\mathbf{q}=-k\bigtriangledown u$,即热流量与温度的梯度成正比，两者方向相反，$k$是热传导系数
- ρ表示物体的密度，u表示温度，c表示比热，$\mathbf{q}$表示热流密度，f_0表示热源强度。假设物体的密度不随时间变化,物体是各向同性的,所以$c(x,t)=c$为常数

- 在$[t_1,t_2]$时段内V中因温度升高而增加的热量为

$$Q=\iiint_V c\rho(u|_{t=t_2}-u|_{t=t_1})dxdydz$$

$$=\iiint_V(\int_{t_1}^{t_2}u_t dt)c\rho dxdydz.$$

- **(2) Fourier热力学定律**：热流密度$\mathbf{q} = -k\bigtriangledown u$,即热流量与温度的梯度成正比，两者方向相反，$k$是热传导系数
- ρ表示物体的密度，u表示温度，c表示比热，$\mathbf{q}$表示热流密度，f_0表示热源强度。假设物体的密度不随时间变化,物体是各向同性的,所以$c(x,t)=c$为常数

- 在$[t_1,t_2]$时段内V中因温度升高而增加的热量为

$$Q = \iiint_V c\rho(u|_{t=t_2} - u|_{t=t_1})dxdydz$$

$$= \iiint_V (\int_{t_1}^{t_2} u_t dt)c\rho dxdydz.$$

- 在dt时间段通过V的边界∂V上小块进入区域V的热量为$-q \cdot ndSdt$,所以$[t_1, t_2]$时间段通过边界$\partial V = S$流入V的热量为

- 在dt时间段通过V的边界∂V上小块进入区域V的热量为$-q\cdot ndSdt$,所以$[t_1,t_2]$时间段通过边界$\partial V = S$流入V的热量为

$$Q_1=-\int_{t_1}^{t_2}(\oint_S \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}dS)dt=\int_{t_1}^{t_2}(\oint_S k\nabla u\cdot\mathbf{n}dS)dt$$

- 在dt时间段通过V的边界∂V上小块进入区域V的热量为$-q \cdot ndSdt$,所以$[t_1, t_2]$时间段通过边界$\partial V = S$流入V的热量为

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2} (\oint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\oint_S k \nabla u \cdot \mathbf{n} dS) dt$$

- 内部热源产生的热量为

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} (\iiint_V \rho f_0 dx dy dz) dt$$

- 在dt时间段通过V的边界∂V上小块进入区域V的热量为$-\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}dSdt$,所以$[t_1,t_2]$时间段通过边界$\partial V=S$流入$V$的热量为

$$Q_1=-\int_{t_1}^{t_2}(\oint_S \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}dS)dt=\int_{t_1}^{t_2}(\oint_S k\nabla u\cdot\mathbf{n}dS)dt$$

- 内部热源产生的热量为

$$Q_2=\int_{t_1}^{t_2}(\iiint_V \rho f_0 dxdydz)dt$$

- 假设u_t,u_{xx},u_{yy},u_{zz}连续,利用Stokes公式推出

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}(\iiint_V \nabla\cdot(k\nabla u)dxdydz)dt$$

能量守恒关系用数学公式表达出来就是

$$\iiint_V \left(\int_{t_1}^{t_2} u_t dt\right) c\rho\, dxdydz = \int_{t_1}^{t_2} \left(\iiint_V \nabla\cdot(k\nabla u) dxdydz\right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\iiint_V \rho f_0 dxdydz\right) dt$$

能量守恒关系用数学公式表达出来就是

$$\iiint_V \left(\int_{t_1}^{t_2} u_t dt\right) c\rho dxdydz = \int_{t_1}^{t_2} \left(\iiint_V \nabla\cdot(k\nabla u) dxdydz\right) dt$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \left(\iiint_V \rho f_0 dxdydz\right) dt$$

利用Fubini交换积分次序定理以及V和t_1, t_2的任意性(命题1的结论),可得

$$c\rho u_t - \nabla\cdot(k\nabla u) = \rho f_0.$$

上式称为三维热传导方程.

能量守恒关系用数学公式表达出来就是

$$\iiint_V \left(\int_{t_1}^{t_2} u_t dt\right) c\rho dxdydz = \int_{t_1}^{t_2} \left(\iiint_V \nabla\cdot(k\nabla u) dxdydz\right) dt$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \left(\iiint_V \rho f_0 dxdydz\right) dt$$

利用Fubini交换积分次序定理以及V和t_1, t_2的任意性(命题1的结论),可得

$$c\rho u_t - \nabla\cdot(k\nabla u) = \rho f_0.$$

上式称为三维热传导方程.如果物体是均匀的,则c, ρ, k为常数,上式又可以写成

$$u_t - a^2 \Delta u = f(x,t),$$

其中$a^2 = \frac{k}{c\rho}, f = \frac{f_0}{c}.\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$

⋆1.1.2变分原理

求泛函的极值问题称为变分问题

⋆1.1.2变分原理

求泛函的极值问题称为变分问题

⋆1.极小曲面问题

$\star$1.1.2变分原理

求泛函的极值问题称为变分问题

$\star$1.极小曲面问题

设Ω是平面上的一个有界区域，边界$\partial\Omega$充分光滑，$\partial\Omega$作为平面曲线方程为$x = x(t), y = y(t), 0 \leq t \leq t_0$
在$\partial\Omega$上给定一条空间闭曲线

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \ \ 0 \leq t \leq t_0 \\ \phi = \phi(t), \end{cases}$$

$\star$1.1.2变分原理

求泛函的极值问题称为变分问题

$\star$1.极小曲面问题

设Ω是平面上的一个有界区域，边界$\partial\Omega$充分光滑，$\partial\Omega$作为平面曲线方程为$x = x(t), y = y(t), 0 \le t \le t_0$

在$\partial\Omega$上给定一条空间闭曲线

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad 0 \le t \le t_0 \\ \phi = \phi(t), \end{cases}$$

问题 求一张定义在$\bar{\Omega}$上的光滑曲面$\sum$,使得：

(1) $\sum$以Γ为边界；

(2)$\sum$的表面积最小

⋆1.1.2变分原理

求泛函的极值问题称为变分问题

⋆1.极小曲面问题

设Ω是平面上的一个有界区域，边界$\partial\Omega$充分光滑，$\partial\Omega$作为平面曲线方程为$x = x(t), y = y(t), 0 \le t \le t_0$ 在$\partial\Omega$上给定一条空间闭曲线

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad 0 \le t \le t_0 \\ \phi = \phi(t), \end{cases}$$

问题 求一张定义在$\bar{\Omega}$上的光滑曲面$\sum$,使得：

(1) $\sum$以Γ为边界；

(2)$\sum$的表面积最小

- 记曲面$\sum$的方程是$u = u(x, y)$,则曲面的面积为

$$J(u) = \iint_{\Omega} (1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}} dxdy.$$

- 记曲面$\sum$的方程是$u=u(x,y)$,则曲面的面积为

$$J(u)=\iint_{\Omega}(1+u_x^2+u_y^2)^{\frac{1}{2}}dxdy.$$

- 把Γ的方程写成$\phi=\phi(x,y),(x,y)\in(\partial\Omega)$。因为曲面以$\Gamma$为边界，所以$u|_{\partial\Omega}=\phi(x,y)$,记

$$M_\phi=\{u\in C^1(\bar{\Omega}):u|_{\partial\Omega}=\phi(x,y)\},$$

则$J:M_\phi\rightarrow R^1$称为定义在M_ϕ上的泛函

- 记曲面$\sum$的方程是$u=u(x,y)$,则曲面的面积为

$$J(u)=\iint_{\Omega}(1+u_x^2+u_y^2)^{\frac{1}{2}}dxdy.$$

- 把Γ的方程写成$\phi=\phi(x,y),(x,y)\in(\partial\Omega)$。因为曲面以$\Gamma$为边界，所以$u|_{\partial\Omega}=\phi(x,y)$,记

$$M_\phi=\{u\in C^1(\bar{\Omega}):u|_{\partial\Omega}=\phi(x,y)\},$$

则$J:M_\phi\to R^1$称为定义在M_ϕ上的泛函

- 希望求一个函数$u\in\Omega_\phi$,使得

$$J(u)=\min_{v\in M_\phi}J(v), \qquad (1.1.14)$$

这个u就是泛函J在集合M_ϕ上达到极小值的点。

- 记曲面$\sum$的方程是$u = u(x,y)$,则曲面的面积为

$$J(u) = \iint_{\Omega} (1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}} dxdy.$$

- 把Γ的方程写成$\phi = \phi(x,y), (x,y) \in (\partial\Omega)$。因为曲面以$\Gamma$为边界，所以$u|_{\partial\Omega} = \phi(x,y)$,记

$$M_\phi = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = \phi(x,y)\},$$

则$J : M_\phi \to R^1$称为定义在M_ϕ上的泛函

- 希望求一个函数$u \in \Omega_\phi$,使得

$$J(u) = \min_{v \in M_\phi} J(v), \qquad (1.1.14)$$

这个u就是泛函J在集合M_ϕ上达到极小值的点。

- 这种求一个泛函的极小问题为**变分问题**,函数集合M_ϕ称为变分问题的**容许函数类**,u称为变分问题的解。

- 记曲面$\sum$的方程是$u=u(x,y)$,则曲面的面积为

$$J(u)=\iint_{\Omega}(1+u_x^2+u_y^2)^{\frac{1}{2}}dxdy.$$

- 把Γ的方程写成$\phi=\phi(x,y),(x,y)\in(\partial\Omega)$。因为曲面以$\Gamma$为边界，所以$u|_{\partial\Omega}=\phi(x,y)$,记

$$M_\phi=\{u\in C^1(\bar{\Omega}):u|_{\partial\Omega}=\phi(x,y)\},$$

则$J:M_\phi\to R^1$称为定义在M_ϕ上的泛函

- 希望求一个函数$u\in\Omega_\phi$,使得

$$J(u)=\min_{v\in M_\phi}J(v), \qquad (1.1.14)$$

这个u就是泛函J在集合M_ϕ上达到极小值的点。

- 这种求一个泛函的极小问题为**变分问题**,函数集合M_ϕ称为变分问题的**容许函数类**,u称为变分问题的解。

先导出u满足的方程.

先导出u满足的方程.

- 对任意的$v \in M_0 = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$,以及$\epsilon \in R^1$,有$u + \epsilon v \in M_\phi$.

先导出u满足的方程.

- 对任意的$v \in M_0 = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$,以及$\epsilon \in R^1$,有$u + \epsilon v \in M_\phi$.
- 记$j(\epsilon) = J(u + \epsilon v)$,则

$$j(\epsilon) = J(u + \epsilon v) \geq J(u) = j(0), \forall \epsilon \in R^1$$

即函数$j(\epsilon)$作为ϵ的函数在$\epsilon = 0$达到最小值,

先导出u满足的方程.

- 对任意的$v \in M_0 = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$,以及$\epsilon \in R^1$,有$u + \epsilon v \in M_\phi$.
- 记$j(\epsilon) = J(u + \epsilon v)$,则

$$j(\epsilon) = J(u + \epsilon v) \geq J(u) = j(0), \forall \epsilon \in R^1$$

即函数$j(\epsilon)$作为ϵ的函数在$\epsilon = 0$达到最小值,

- 从而有

$$j'(0) = \iint\limits_\Omega \frac{u_x v_x + u_y v_y}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{1/2}} dxdy = 0, \forall v \in M_0. \tag{1.1.15}$$

假设$u \in C^1(\bar{\Omega}) \cup C^2(\Omega)$,利用(1.1.15)以及Green公式

$$\int_{\Omega}[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{u_x}{(1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{u_y}{(1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}})]vdxdy$$

利用1.1.15的结果,上式可写成

假设$u \in C^1(\bar{\Omega}) \cup C^2(\Omega)$,利用(1.1.15)以及Green公式

$$\int_\Omega [\frac{\partial}{\partial x}(\frac{u_x}{(1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{u_y}{(1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}})]v dxdy$$

利用1.1.15的结果,上式可写成

$$= \int_\Omega [\frac{\partial}{\partial x}(\frac{u_x}{(1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{u_y}{(1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}})]v dxdy + \int_\Omega \frac{u_x v_x + u_y v_y}{(1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}} dxdy$$

分别把关于x, y求导的项结合一下

$$= \int_\Omega [\frac{\partial}{\partial x}(\frac{u_x v}{(1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{u_y v}{(1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}})]v dxdy$$

利用Green公式(或者Stokes公式中$n = 1$)

$$= \int_{\partial\Omega} [\frac{v}{(1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}} u_x \cos(\mathbf{n}, x) + \frac{v}{(1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}} u_y \cos(\mathbf{n}, y)] dl$$

$$= \int_{\partial\Omega} \frac{v}{(1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dl = 0$$

$v \in M_0$即$v|_{\partial\Omega} = 0$,利用函数v的任意性(利用命题2的结论)即可得

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\frac{u_x}{(1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{u_y}{(1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}}) = 0, \ x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \phi(x, y). \end{cases} \quad (1.1.16)$$

$v \in M_0$即$v|_{\partial\Omega} = 0$,利用函数v的任意性(利用命题2的结论)即可得

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\frac{u_x}{(1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{u_y}{(1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}}) = 0, \ x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \phi(x, y). \end{cases} \qquad (1.1.16)$$

现在要问：(1.1.16)式是否是一个充分条件？即边值问题(1.1.16)的解是否是变分问题(1.1.14)的解？回答是肯定的，因为

$$j^{'}(0) = 0$$

$$j^{''}(\epsilon) = \int_\Omega \frac{v_x^2 + v_y^2 + [v_y(u_x + \epsilon v_x) - v_x(u_y + \epsilon v_y)]^2}{[1 + (u_x + \epsilon v_x)^2 + (u_y + \epsilon v_y)^2]^{3/2}} dxdy > 0$$

$v \in M_0$即$v|_{\partial\Omega} = 0$,利用函数v的任意性(利用命题2的结论)即可得

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{(1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{(1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}}\right) = 0, \ x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \phi(x,y). \end{cases} \tag{1.1.16}$$

现在要问：(1.1.16)式是否是一个充分条件？即边值问题(1.1.16)的解是否是变分问题(1.1.14)的解？回答是肯定的，因为

$$j'(0) = 0$$

$$j''(\epsilon) = \int_\Omega \frac{v_x^2 + v_y^2 + [v_y(u_x + \epsilon v_x) - v_x(u_y + \epsilon v_y)]^2}{[1 + (u_x + \epsilon v_x)^2 + (u_y + \epsilon v_y)^2]^{3/2}} dxdy > 0$$

结论：若$u \in C^1(\bar{\Omega}) \cup C^2(\Omega)$是边值问题(1.1.16)的解，则$u$必是变分问题(1.1.14)的解。反之亦然

$v \in M_0$即$v|_{\partial\Omega} = 0$,利用函数v的任意性(利用命题2的结论)即可得

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{(1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{(1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}}\right) = 0, \ x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \phi(x, y). \end{cases} \qquad (1.1.16)$$

现在要问：(1.1.16)式是否是一个充分条件？即边值问题(1.1.16)的解是否是变分问题(1.1.14)的解？回答是肯定的，因为

$$j^{'}(0) = 0$$

$$j^{''}(\epsilon) = \int_\Omega \frac{v_x^2 + v_y^2 + [v_y(u_x + \epsilon v_x) - v_x(u_y + \epsilon v_y)]^2}{[1 + (u_x + \epsilon v_x)^2 + (u_y + \epsilon v_y)^2]^{3/2}} dxdy > 0$$

结论：若$u \in C^1(\bar{\Omega}) \cup C^2(\Omega)$是边值问题(1.1.16)的解，则$u$必是变分问题(1.1.14)的解。反之亦然

这样就把变分问题转化成一个偏微分方程的边值问题

1.2 偏微分方程的基本概念

1.2 偏微分方程的基本概念

1.2.1 定义

- 含有未知函数的偏导数的方程叫偏微分方程

1.2 偏微分方程的基本概念

1.2.1 定义

- 含有未知函数的偏导数的方程叫偏微分方程
- 方程的个数是一个的称为方程式

1.2 偏微分方程的基本概念

1.2.1 定义

- 含有未知函数的偏导数的方程叫偏微分方程
- 方程的个数是一个的称为方程式
- 方程的个数多于1个的称为方程组

1.2 偏微分方程的基本概念

1.2.1 定义

- 含有未知函数的偏导数的方程叫偏微分方程
- 方程的个数是一个的称为**方程式**
- 方程的个数多于1个的称为**方程组**
- 方程的个数少于未知函数的个数，称方程组是欠**定的**

1.2 偏微分方程的基本概念

1.2.1 定义

- 含有未知函数的偏导数的方程叫偏微分方程
- 方程的个数是一个的称为**方程式**
- 方程的个数多于1个的称为**方程组**
- 方程的个数少于未知函数的个数，称方程组是**欠定的**
- 方程的个数多于未知函数的个数，称方程组是**超定的**

1.2 偏微分方程的基本概念

1.2.1 定义

- 含有未知函数的偏导数的方程叫偏微分方程
- 方程的个数是一个的称为**方程式**
- 方程的个数多于1个的称为**方程组**
- 方程的个数少于未知函数的个数，称方程组是**欠定的**
- 方程的个数多于未知函数的个数，称方程组是**超定的**
- 方程(组)中出现的未知函数的最高阶偏导数的阶数称为方程(组)的阶数

1.2 偏微分方程的基本概念

1.2.1 定义

- 含有未知函数的偏导数的方程叫偏微分方程
- 方程的个数是一个的称为**方程式**
- 方程的个数多于1个的称为**方程组**
- 方程的个数少于未知函数的个数，称方程组是**欠定的**
- 方程的个数多于未知函数的个数，称方程组是**超定的**
- 方程(组)中出现的未知函数的最高阶偏导数的阶数称为方程(组)的阶数

- 如果方程(组)中的项关于未知函数及其各阶偏导数的全体都是线性的，就称方程(组)为线性，否则称为非线性的。

- 如果方程(组)中的项关于未知函数及其各阶偏导数的全体都是线性的，就称方程(组)为线性，否则称为非线性的。
- 非线性又分为半线性、拟线性和完全非线性

- 如果方程(组)中的项关于未知函数及其各阶偏导数的全体都是线性的，就称方程(组)为线性，否则称为非线性的。
- 非线性又分为半线性、拟线性和完全非线性
- 拟线性PDE：PDE中对最高阶导数是线性的，例如：

- 如果方程(组)中的项关于未知函数及其各阶偏导数的全体都是线性的，就称方程(组)为线性，否则称为非线性的。
- 非线性又分为半线性、拟线性和完全非线性
- 拟线性PDE：PDE中对最高阶导数是线性的，例如：

$$u_t + uu_x = e^u$$

- 如果方程(组)中的项关于未知函数及其各阶偏导数的全体都是线性的，就称方程(组)为线性，否则称为非线性的。
- 非线性又分为半线性、拟线性和完全非线性
- 拟线性PDE：PDE中对最高阶导数是线性的，例如：

$$u_t + uu_x = e^u$$

- 半线性PDE:拟线性PDE中，最高阶导数的系数仅为自变量的函数，例如：

- 如果方程(组)中的项关于未知函数及其各阶偏导数的全体都是线性的，就称方程(组)为线性，否则称为非线性的。
- 非线性又分为半线性、拟线性和完全非线性

- 拟线性PDE：PDE中对最高阶导数是线性的，例如：

$$u_t + uu_x = e^u$$

- 半线性PDE:拟线性PDE中，最高阶导数的系数仅为自变量的函数，例如：

$$a(x, y)(u_{xx} + u_{yy}) = e^u(u_x + u_y)$$

- 完全非线性PDE：PDE中对最高阶导数不是线性的,例如：

- 如果方程(组)中的项关于未知函数及其各阶偏导数的全体都是线性的，就称方程(组)为线性，否则称为非线性的。
- 非线性又分为半线性、拟线性和完全非线性
- 拟线性PDE：PDE中对最高阶导数是线性的，例如：

$$u_t + uu_x = e^u$$

- 半线性PDE:拟线性PDE中，最高阶导数的系数仅为自变量的函数，例如：

$$a(x,y)(u_{xx} + u_{yy}) = e^u(u_x + u_y)$$

- 完全非线性PDE：PDE中对最高阶导数不是线性的,例如：

$$u_x^2 + u_y^2 = u^2$$

⋆1.2.2定解条件和定解问题

- 常微分方程中，通解只要求满足方程，即满足某种物理定律，而不能完全确定一个物理状态，这种通解通常有无穷多个; 特解除了要求满足方程还要满足给定的外加条件。

⋆1.2.2定解条件和定解问题

- 常微分方程中，通解只要求满足方程，即满足某种物理定律，而不能完全确定一个物理状态，这种通解通常有无穷多个; 特解除了要求满足方程还要满足给定的外加条件。
- 对偏微分方程也是一样的，为了完全确定一个物理状态，只有相应的偏微分方程是不够的，必须给出它的初始状态和边界状态，即给出外加的特定条件，这种特定条件称为定解条件。

⋆1.2.2定解条件和定解问题

- 常微分方程中，通解只要求满足方程，即满足某种物理定律，而不能完全确定一个物理状态，这种通解通常有无穷多个; 特解除了要求满足方程还要满足给定的外加条件。
- 对偏微分方程也是一样的，为了完全确定一个物理状态，只有相应的偏微分方程是不够的，必须给出它的初始状态和边界状态，即给出外加的特定条件，这种特定条件称为定解条件。

$$\text{定解问题}\begin{cases} PDE \\ \text{定解条件}\begin{cases}\text{初值条件}\\ \text{边界条件}\end{cases}\end{cases}$$

⋆1.2.2定解条件和定解问题

- 常微分方程中，通解只要求满足方程，即满足某种物理定律，而不能完全确定一个物理状态，这种通解通常有无穷多个; 特解除了要求满足方程还要满足给定的外加条件。
- 对偏微分方程也是一样的，为了完全确定一个物理状态，只有相应的偏微分方程是不够的，必须给出它的初始状态和边界状态，即给出外加的特定条件，这种特定条件称为定解条件。

$$\text{定解问题}\begin{cases} PDE \\ \text{定解条件}\begin{cases}\text{初值条件}\\ \text{边界条件}\end{cases}\end{cases}$$

- 描述初始时刻物理状态的定解条件称为初始条件或初值条件

⋆1.2.2定解条件和定解问题

- 常微分方程中，通解只要求满足方程，即满足某种物理定律，而不能完全确定一个物理状态，这种通解通常有无穷多个; 特解除了要求满足方程还要满足给定的外加条件。
- 对偏微分方程也是一样的，为了完全确定一个物理状态，只有相应的偏微分方程是不够的，必须给出它的初始状态和边界状态，即给出外加的特定条件，这种特定条件称为定解条件。

$$\text{定解问题}\begin{cases} PDE \\ \text{定解条件}\begin{cases}\text{初值条件}\\ \text{边界条件}\end{cases}\end{cases}$$

- 描述初始时刻物理状态的定解条件称为初始条件或初值条件
- 描述边界上物理状态的条件称为**边界条件**或**边值条件**.

⋆1.2.2定解条件和定解问题

- 常微分方程中，通解只要求满足方程，即满足某种物理定律，而不能完全确定一个物理状态，这种通解通常有无穷多个; 特解除了要求满足方程还要满足给定的外加条件。
- 对偏微分方程也是一样的，为了完全确定一个物理状态，只有相应的偏微分方程是不够的，必须给出它的初始状态和边界状态，即给出外加的特定条件，这种特定条件称为定解条件。

$$\text{定解问题}\begin{cases} PDE \\ \text{定解条件}\begin{cases}\text{初值条件}\\ \text{边界条件}\end{cases}\end{cases}$$

- 描述初始时刻物理状态的定解条件称为初始条件或初值条件
- 描述边界上物理状态的条件称为**边界条件**或**边值条件**.
- 一个方程匹配上定解条件就构成**定解问题**.

⋆1弦振动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), 0 < x < l, t > 0.$$

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

⋆1弦振动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), 0 < x < l, t > 0.$$

初值条件是初始时刻($t = 0$)的位移和速度:$\begin{cases} u(x,0) = \phi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$

⋆1弦振动方程

$$u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x,t), 0 < x < l, t > 0.$$

初值条件是初始时刻$(t = 0)$的位移和速度: $\begin{cases} u(x,0) = \phi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$

边界条件一般有三种

⋆1弦振动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), 0 < x < l, t > 0.$$

初值条件是初始时刻$(t = 0)$的位移和速度:$\begin{cases} u(x,0) = \phi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$

边界条件一般有三种

- 第一类边界条件(Dirichlet边界条件):

⋆1弦振动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), 0 < x < l, t > 0.$$

初值条件是初始时刻($t = 0$)的位移和速度:$\begin{cases} u(x,0) = \phi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$

边界条件一般有三种

- 第一类边界条件(Dirichlet边界条件):

  已知端点$x = a$($a = 0$或$a = l$)处弦的位移$u(a,t) = g(t)$.当$g(t) = 0$时，表示弦在该端点处弦是固定的；

⋆1弦振动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), 0 < x < l, t > 0.$$

初值条件是初始时刻($t = 0$)的位移和速度: $\begin{cases} u(x,0) = \phi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$

边界条件一般有三种

- 第一类边界条件(Dirichlet边界条件):

  已知端点$x = a$($a = 0$或$a = l$)处弦的位移$u(a,t) = g(t)$.当$g(t) = 0$时，表示弦在该端点处弦是固定的；

- 第二类边界条件(Neumann边界条件):

- 第二类边界条件(Neumann边界条件):

  已知端点处弦所受的垂直于弦线的外力:

$$-Tu_x(0,t)=g_0(t)\text{或}Tu_x(l,t)=g_l(t)$$

  当$g_0(t)=0$或$g_l(t)=0$时，表示弦在该端点处($x=0$或$x=l$)自由滑动

- 第二类边界条件(Neumann边界条件):

  已知端点处弦所受的垂直于弦线的外力:

$$-Tu_x(0,t)=g_0(t)\text{或}Tu_x(l,t)=g_l(t)$$

  当$g_0(t)=0$或$g_l(t)=0$时，表示弦在该端点处($x=0$或$x=l$)自由滑动

- 第三类边界条件(混合边界条件或Robin边界条件):

- 第二类边界条件(Neumann边界条件):

  已知端点处弦所受的垂直于弦线的外力:

  $$-Tu_x(0,t)=g_0(t)\text{或}Tu_x(l,t)=g_l(t)$$

  当$g_0(t)=0$或$g_l(t)=0$时，表示弦在该端点处($x=0$或$x=l$)自由滑动

- 第三类边界条件(混合边界条件或Robin边界条件):

  已知端点处弦的位移和所受的垂至于弦线的外力之和,即

  $$-Tu_x(0,t)+k_0u(0,t)=g_0(t),\quad Tu_x(l,t)+k_lu(l,t)=g_l(t),k_0,k_l>0$$

  其中k_0,k_l分别表示两端支承的弹性系数，当$g_0(t)\equiv 0$或$g_l(t)\equiv 0$时，表示弦在该端点处被固定在一个弹性支承上。

$\star$2热传导方程

$$u_t - a^2 \triangle u = f(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \Omega \subset R^n, t > 0$$

$\star$2热传导方程

$$u_t - a^2 \triangle u = f(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \Omega \subset R^n, t > 0$$

初值条件——已知初始时刻的温度分布:$u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega$.

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

⋆2热传导方程

$$u_t - a^2 \triangle u = f(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \Omega \subset R^n, t > 0$$

初值条件——已知初始时刻的温度分布:$u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega.$

边界条件——根据边界上温度受周围介质的影响情况，分三种:

$\star$2热传导方程

$$u_t - a^2 \triangle u = f(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \Omega \subset R^n, t > 0$$

初值条件——已知初始时刻的温度分布:$u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega.$

边界条件——根据边界上温度受周围介质的影响情况，分三种:

- 第一类边界条件:

⋆2热传导方程

$$u_t - a^2\triangle u = f(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \Omega \subset R^n, t > 0$$

初值条件——已知初始时刻的温度分布:$u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega.$
边界条件——根据边界上温度受周围介质的影响情况，分三种:

- 第一类边界条件：已知边界上的温度分布：

$$u|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = g(x, t)|_{\partial\Omega\times(0,\infty)}$$

当$g \equiv$常数时，表示物体表面恒温。

- 第二类边界条件：

- 第二类边界条件：已知通过边界进入内部的热量

$$k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = g(x,t)|_{\partial\Omega\times(0,\infty)}$$

- 第二类边界条件：已知通过边界进入内部的热量

$$k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = g(x,t)|_{\partial\Omega\times(0,\infty)}$$

k是热传导系数，$\mathbf{n}$是$\partial\Omega$上的单位外法向量。当$g\equiv 0$时，表示物体表面绝热。

- 第二类边界条件：已知通过边界进入内部的热量

$$k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = g(x,t)|_{\partial\Omega\times(0,\infty)}$$

k是热传导系数，$\mathbf{n}$是$\partial\Omega$上的单位外法向量。当$g\equiv 0$时，表示物体表面绝热。

- 第三类边界条件：

- 第二类边界条件：已知通过边界进入内部的热量

$$k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = g(x,t)|_{\partial\Omega\times(0,\infty)}$$

k是热传导系数，$\mathbf{n}$是$\partial\Omega$上的单位外法向量。当$g\equiv 0$时，表示物体表面绝热。

- 第三类边界条件：通过边界物体与周围介质有热交换

$$(k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u)|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = \alpha g_0|_{\partial\Omega\times(0,\infty)},$$

- 第二类边界条件：已知通过边界进入内部的热量

$$k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = g(x,t)|_{\partial\Omega\times(0,\infty)}$$

k是热传导系数，$\mathbf{n}$是$\partial\Omega$上的单位外法向量。当$g\equiv 0$时，表示物体表面绝热。

- 第三类边界条件：通过边界物体与周围介质有热交换

$$(k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u)|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = \alpha g_0|_{\partial\Omega\times(0,\infty)},$$

其中$k > 0$是热传导系数，$\alpha > 0$是热交换系数，g_0是周围介质的温度。

⋆3Poisson 方程或Laplace方程

$$-a^2 \Delta u = f(x), x \in \Omega \subset R^n$$

$\star$3Poisson 方程或Laplace方程

$$-a^2\Delta u = f(x), x \in \Omega \subset R^n$$

只有边界条件，没有初值条件。

⋆3Poisson 方程或Laplace方程

$$-a^2\Delta u = f(x), x \in \Omega \subset R^n$$

只有边界条件，没有初值条件。

注意：对于波动方程和热传导方程。若$\Omega \equiv R^n$,则Ω没有边界，当然也没有边界条件，只有初值条件.

$\star$3Poisson 方程或Laplace方程

$$-a^2\Delta u = f(x), x \in \Omega \subset R^n$$

只有边界条件，没有初值条件。

注意： 对于波动方程和热传导方程。若$\Omega \equiv R^n$,则Ω没有边界，当然也没有边界条件，只有初值条件.

- 偏微分方程+初值条件+边界条件，称为**初边值问题或混合问题**

⋆3Poisson 方程或Laplace方程

$$-a^2\Delta u = f(x), x \in \Omega \subset R^n$$

只有边界条件，没有初值条件。

注意： 对于波动方程和热传导方程。若$\Omega \equiv R^n$,则Ω没有边界，当然也没有边界条件，只有初值条件.

- 偏微分方程+初值条件+边界条件，称为**初边值问题或混合问题**
- 偏微分方程+初值条件, 称为**初值问题**或叫做Cauchy问题

⋆3Poisson 方程或Laplace方程

$$-a^2\Delta u = f(x), x \in \Omega \subset R^n$$

只有边界条件，没有初值条件。

注意： 对于波动方程和热传导方程。若$\Omega \equiv R^n$,则Ω没有边界，当然也没有边界条件，只有初值条件.

- 偏微分方程+初值条件+边界条件，称为**初边值问题或混合问题**
- 偏微分方程+初值条件, 称为**初值问题**或叫做Cauchy问题
- 偏微分方程 + 边界条件, 称为**边值问题**

⋆3Poisson 方程或Laplace方程

$$-a^2\Delta u = f(x), x \in \Omega \subset R^n$$

只有边界条件，没有初值条件。

注意： 对于波动方程和热传导方程。若$\Omega \equiv R^n$,则Ω没有边界，当然也没有边界条件，只有初值条件.

- 偏微分方程+初值条件+边界条件，称为**初边值问题或混合问题**
- 偏微分方程+初值条件, 称为**初值问题**或叫做Cauchy问题
- 偏微分方程 + 边界条件, 称为**边值问题**

⋆1.2.3定解问题的适定性 对不同的物理问题，一般来讲其定解条件也是不同的。从数学上看，一个定解问题提的是否合理，即是否能够完全描述一个给定的物理状态，一般来讲有以下三个标准：

⋆1.2.3定解问题的适定性 对不同的物理问题，一般来讲其定解条件也是不同的。从数学上看，一个定解问题提的是否合理，即是否能够完全描述一个给定的物理状态，一般来讲有以下三个标准：

- 解的存在性: 所给的定解问题有解

⋆1.2.3定解问题的适定性 对不同的物理问题，一般来讲其定解条件也是不同的。从数学上看，一个定解问题提的是否合理，即是否能够完全描述一个给定的物理状态，一般来讲有以下三个标准：

- 解的存在性: 所给的定解问题有解
- 解的唯一性: 所给的定解问题只有一个解

⋆1.2.3定解问题的适定性 对不同的物理问题，一般来讲其定解条件也是不同的。从数学上看，一个定解问题提的是否合理，即是否能够完全描述一个给定的物理状态，一般来讲有以下三个标准：

- 解的存在性: 所给的定解问题有解
- 解的唯一性: 所给的定解问题只有一个解
- 解的稳定性: 当定解条件以及方程中的系数有微小变动时，相应的解也只有微小变动。

⋆1.2.3定解问题的适定性 对不同的物理问题，一般来讲其定解条件也是不同的。从数学上看，一个定解问题提的是否合理，即是否能够完全描述一个给定的物理状态，一般来讲有以下三个标准：

- 解的存在性: 所给的定解问题有解
- 解的唯一性: 所给的定解问题只有一个解
- 解的稳定性: 当定解条件以及方程中的系数有微小变动时，相应的解也只有微小变动。

解的存在性，唯一性和稳定性，三者合起来称为解的适定性