第二章 赋范空间

习题 2

1. 设在线性空间 X 中定义的距离 d 满足平移不变性和相似性, 即 $d(x+z, y+z) = d(x, y)$, $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$. 令 $\|x\| = d(x, 0)$. 证明 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间.
2. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, 对于 $x, y \in X$, 令

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y; \\ \|x-y\| + 1, & x \neq y. \end{cases}$$

证明 d 是距离, 但不是由范数诱导的距离, 即不存在 X 上的范数 $\|\cdot\|_1$, 使得

$$d(x,y) = \|x-y\|_1, x, y \in X.$$

3. 设 X 表示复序列 $x = (x_1, x_2, \cdots)$ 的全体, 定义

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min(1, |x_n|).$$

(1) $\|\cdot\|$ 是否是 X 上的范数?

(2) $\|x-y\|$ 是否可定义为 X 上的距离? 假若可以, 说明 $\|x^{(n)} - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$ 的意义.

4. 在 $C^1[a,b]$ 中令

$$\|x\|_1 = (\int_a^b (|x(t)|^2 + |x'(t)|^2) \mathrm{d}t)^{1/2}, \forall x \in C^1[a,b].$$

(1) 证明 $\|\cdot\|_1$ 是 $C^1[a,b]$ 上的范数;

(2) 问 $(C^1[a,b], \|\cdot\|_1)$ 是否完备?

5. 在 $\mathbb{C}^n$ 中定义范数 $\|x\| = \max\limits_i |x_i|$, 证明它是 Banach 空间.
6. 设 X 是 $[0,1]$ 上所有连续函数 $x = x(t)$ 的集合. 证明

$$\|x\| = (\int_0^1 |x(t)|^2 \ \mathrm{d}t)^{1/2}$$

是 X 上的范数, 但 X 在这种范数下不完备.

7. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, $X \neq \{0\}$. 证明 X 为 Banach 空间的充要条件是 X 中的单位球面 $S = \{x \in X \big| \ \|x\| = 1\}$ 完备的.

8. 设 $C^k[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上具有 k 阶连续导数的函数全体. 定义

$$d(f,g)=\sum_{i=0}^{k}\max_{x\in[a,b]}|f^{(i)}(x)-g^{(i)}(x)|,\quad f,g\in C^k[a,b].$$

证明 (1) $(C^k[a,b],d)$ 是完备的距离空间;

(2) 若定义 $\|f\|=d(f,0)$, 则 $(C^k[a,b],\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

9. 设 H 是在直线 $\mathbb{R}$ 上平方可积, 导数也平方可积的连续函数集合, 对于每个 $f\in H$, 定义

$$\|f\|=(\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{\infty}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}.$$

证明 H 是 Banach 空间.

10. 设 M 是 $[a,b]$ 上有界函数的全体. 线性运算的定义与 $C[a,b]$ 中相同. 在 M 中定义范数 $\|x\|=\sup_{a\le t\le b}|x(t)|$. 证明 M 是 Banach 空间.

11. 设 $0<p<1$, 考虑空间 $L^p[0,1]$, 其中

$$\|x\|=\int_0^1|x(t)|^p\mathrm{d}t<\infty,\quad x\in L^p[0,1].$$

证明 $\|x\|$ 不是 $L^p[0,1]$ 上的范数, 但 $d(x,y)=\|x-y\|$ 是 $L^p[0,1]$ 上的距离. (提示: 若 $0\leqslant\alpha\leqslant1$, 则 $\alpha\leqslant\alpha^p\leqslant1$.)

12. 在 l^∞ 中, 按坐标定义线性运算且对 $x\in l^\infty$, $x=\{\xi_k\}$ 定义 $\|x\|=\sup_n|\xi_n|$. 证明 l^∞ 是一个赋范空间.

13. 证明 l^p $(1\le p<\infty)$ 是可分的 Banach 空间.

14. 设 H_p $(1\leqslant p<\infty)$ 表示具有性质

$$\|f\|_p=\sup_{0<r<1}\{\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta\}^{1/p}<\infty$$

的解析函数 $f(z)$ $(|z|<1)$ 的全体. 证明 $\|f\|_p$ 是范数并且$(H_p,\|\cdot\|_p)$ 是 Banach 空间.

15. 设 H^p $(0<p\leqslant1)$ 表示 $[a,b]$ 上全体满足 Hölder 条件

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant M|(t_1-t_2)|^p$$

的函数, 线性运算的定义与 $C[a,b]$ 中的相同. 在 H^p 中定义范数

$$\|x\|=|x(a)|+\sup_{a\leqslant t_1<t_2\leqslant b}\frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^p},$$

证明 H^p 为 Banach 空间.

16. 设 $x(t)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 令

$$\|x\|_p=(\int_a^b|x(t)|^pdt)^{\frac{1}{p}},\quad \|x\|_\infty=\max_{a\le t\le b}|x(t)|,$$

证明 $\lim_{p\to\infty}\|x\|_p=\|x\|_\infty$.

17. 证明线性空间 X 中任何一族凸集的交仍是凸集; 对任何 $x_0 \in X$, 凸集 A "移动" x_0 后所得的集合 $A + x_0 = \{y + x_0 | y \in A\}$ 仍是凸集.

18. 设 M 线性空间 X 中的子集, 证明

$$C_0(A) = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \in X \mid n \text{ 是任意自然数}, x_k \in A, \alpha_k \geq 0 \text{ 且 } \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1\}.$$

19. 设 $C(0,1]$ 表示 $(0,1]$ 上连续且有界的函数 $x(t)$ 的全体. 令

$$\|x\| = \sup\{|x(t)|\,|0 < t \leq 1\}.$$

证明 (1) $\|\cdot\|$ 是 $C(0,1]$ 空间上的范数;

(2) l^∞ 与 $C(0,1]$ 的一个子空间等距同构.

20. 设 X 为 n 维赋范线性空间, E_0 是 X 的真闭子空间, 证明存在 $x_0 \in X$, 使得 $\|x_0\| = 1$,

$$d(x_0, E_0) = \inf_{x \in E_0} \|x_0 - x\| = 1.$$

21. 在 $L^2[0,1]$ 上规定不同范数:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t, \quad \|f\|_2 = (\int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}, \quad \|f\|_3 = (\int_0^1 (1+t)|f(t)|^2\,\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}.$$

哪些是等价范数? 试说明理由.

22. 设 $\{x_n\}$ 是 Banach 空间 X 中的点列. 若存在 $(0,\infty)$ 上非负递减的可积函数 $g(t)$, 使得 $\|x_n\| \leq g(n)$ $(n = 1,2,3,\cdots)$. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

23. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, Y 是 X 的子空间, 对于 $x \in X$, 命

$$\delta = d(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|.$$

如果存在 $y_0 \in Y$, 使得 $\|x - y_0\| = \delta$, 称 y_0 是 x 的最佳逼近.

(1) 证明如果 Y 是 X 的有穷维子空间. 则对每一 $x \in X$, 存在最佳逼近.

(2) 试举例说明, 当 Y 不是有穷维空间时, (1) 的结论不成立.

(3) 试举例说明, 一般地, 最佳逼近不唯一.

(4) 证明对于每一点 $x \in X$, x 关于子空间 Y 的最佳逼近点集是凸集.

24. 设 $(X_k, \|\cdot\|_k)$ 是一列赋范空间, $x = \{x_k\}, x_k \in X_k (k = 1,2,\cdots)$ 且满足条件 $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_k^p < \infty$, 用 X 表示所有 x 的全体. 按坐标定义线性运算构成的线性空间, 在 X 中定义

$$\|x\| = (\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_k^p)^{1/p} (p \geq 1).$$

证明 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间.

25. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 赋范空间, X_0 是 X 中的稠密子集. 证明对于每一 $x \in X$, 存在 $\{x_n\} \subset X_0$, 使得 $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

26. 设 X 是赋范线性空间, M 是 X 的闭子空间. 证明若 X 可分, 则 X/M 也可分.

27. 设 X 是赋范线性空间, M 是 X 的闭子空间. 如果 M 以及 X/M 是 Banach 空间. 证明 X 也是 Banach 空间.

28. 设 $(X_1,\|x\|_1),(X_2,\|x\|_2)$ 是赋范空间, 在乘积线性空间 $Z=X_1\times X_2$ 中定义

$$\|z\|=\|x_1\|_1+\|x_2\|_2,$$

其中 $z\in Z, z=(x_1,x_2)$. 设 $\{(x_n,y_n)\}$ 是 Z 中的一序列. 证明
(1) $\{(x_n,y_n)\}$ 在 Z 中收敛于 (x,y), 当且仅当 $\{x_n\}$ 在 X_1 中收敛于 x, $\{y_n\}$ 在 X_2 中收敛于 y.
(2) $\{(x_n,y_n)\}$ 是 Z 中 Cauchy 列, 当且仅当 $\{x_n\}$ 是 X_1 中 Cauchy 列, $\{y_n\}$ 是 X_2 中 Cauchy 列.

29. 设 $(X_1,\|x\|_1),(X_2,\|x\|_2)$ 是 Banach 空间, 在乘积线性空间 $Z=X_1\times X_2$ 中定义

$$\|z\|=\|x_1\|_1+\|x_2\|_2,$$

其中 $z\in Z, z=(x_1,x_2)$. 证明 Z 是 Banach 空间.

30. 设 $(X_1,\|x\|_1),(X_2,\|x\|_2)$ 是赋范空间, 在乘积线性空间 $X_1\times X_2$ 中定义

$$\|z\|_1=\|x_1\|_1+\|x_2\|_2,\ \|z\|_2=\max\{\|x_1\|_1,\|x_2\|_2\}.$$

其中 $z\in X_1\times X_2, z=(x_1,x_2)$. 证明 $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$ 是 $X_1\times X_2$ 上的等价范数.

第二章习题简答

1. 证明(i)$\|x\| = d(x,0) \geq 0$ (非负性);
   (ii)$\|x\| = 0 \Leftrightarrow d(x,0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (正定性);
   (iii)根据相似性
   $$d(\alpha x, 0) = d(\alpha x, \alpha 0) = |\alpha| d(x,0),$$
   我们有
   $$\|\alpha x\| = d(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x,0) = |\alpha| \|x\| \text{ (正齐次)};$$
   (iv)由距离的三角不等式有
   $$\|x+y\| = d(x+y, 0) \leq d(x+y, y) + d(y, 0),$$
   再根据平移不变性
   $$d(x+z, y+z) = d(x,y),$$
   可得 $d(x+y,y) = d(x,0)$, 故
   $$\|x+y\| \leq d(x,0) + d(y,0) = \|x\| + \|y\| \text{ (三角不等式)}.$$
   所以 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间.

2. 证明 $d(x,y)$ 满足非负性、严格正、对称性是明显的. 下证三角不等式成立.
   若 $x = y$, 则 $d(x,y) = 0 \leq d(x,z) + d(z,y)$;
   根据范数三角不等式, 我们有:
   $$d(x,y) = \|x-y\| + 1 \leq \|x-z\| + \|z-y\| + 1.$$
   由于 z 不能同时等于 x 和 y, 不妨假定 $x \neq z$, 上式成为:
   $$d(x,y) = \|x-y\| + 1 \leq \|x-z\| + \|z-y\| + 1 = d(x,z) + \|z-y\| \ \leq d(x,z) + d(z,y).$$
   即三角不等式成立. 所以 $d(x,y)$ 是距离. 但因为
   $$d(\alpha x, 0) = \begin{cases} \|\alpha x\| + 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
   显然若 $\alpha \notin \{1, -1, 0\}$, $x \neq 0$, 则 $d(\alpha x, 0) \neq |\alpha| d(x,0)$, 即不满足正齐次性. 所以 $d(x,y)$ 不是范数诱导的距离.

3. 证明 (1) $\|\cdot\|$ 不是 X 上的范数, 因为 $\|\cdot\|$ 不满足齐次性. 事实上, 对 $\alpha = 2 \in \mathbb{C}$, $x_0 = \{i, 2i, \cdots, ni, \cdots\}$ 有
   $$\|\alpha x_0\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min(1, |\alpha x_k|) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

但

$$|\alpha|\|x_0\| = 2(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\min(1,|x_k|)) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 2.$$

(2) 由 $\|\cdot\|$ 的定义易知, $\|x-y\|$ 满足非负性、正定性、对称性和三角不等式, 则

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

可定义为 X 上的距离, 即 (X,d) 为距离空间. 而且对任意的 $\{x^{(n)}\} \subset X$,

$$\|x^{(n)} - x\| \to 0 \ (n \to \infty)$$

等价于 $\{x^{(n)}\}$ 按坐标收敛到 x.

4. 证明 (1) $\|\cdot\|$ 显然满足范数前三个条件(非负性, 正定性, 正齐性)，再利用 Minkowski 不等式容易验证其满足三角不等式.
(2) $(C^1[a,b], \|\cdot\|_1)$ 不完备. 考虑$C^1[a,b]$中的函数列:

$$\left\{x_n(t) = \sqrt{(t-c)^2 + \frac{1}{n^2}}\ ,\ (a \le t \le b)\right\}_{n=1}^{\infty},\ 其中\ c \in (a,b).$$

容易证得 $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 按范数 $\|\cdot\|_1$ 是基本列, 且点点收敛到 $x(t) = |t-c|$, 但$x(t) \notin C^1[a,b]$. 即在 $(C^1[a,b], \|\cdot\|_1)$ 中存在不收敛的基本列 $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, 从而 $(C^1[a,b], \|\cdot\|_1)$ 不完备.

5. 证明 易证 $\|\cdot\|$ 是范数, 下面证明 $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ 是完备的. 设 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中 Cauchy 列, 其中 $x_k = \{x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k\}$. 故对 $\forall\varepsilon$ 存在 K, 当 $k,l > K$ 时

$$\|x_k - x_l\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$|x_i^k - x_i^l| < \frac{\varepsilon}{2},\quad i = 1,2,\cdots,n.$$

这表明对于每一个 i $(i = 1,2,\cdots,n)$, $\{x_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的 Cauchy 列. 由 $\mathbb{C}$ 的完备性知存在 $x_i \in \mathbb{C}$ 使得

$$x_i^k \to x_i,\ (k \to \infty).$$

令 $x = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 显然 $x \in \mathbb{C}^n$. 由于 $|x_i^k - x_i^l| < \frac{\varepsilon}{2}$, $(i = 1,2,\cdots,n)$, 两边令 $l \to \infty$ 得到

$$|x_i^k - x_i| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,\ (i = 1,2,\cdots,n),$$

故

$$\|x_k - x\| = \max_{1\le i\le n}|x_i^k - x_i| < \varepsilon.$$

则 $\{x_k\}$ 收敛, 即 $\mathbb{C}^n$ 是完备的.

6. 证明 (1) $\|\cdot\|$ 显然满足范数前三个条件(非负性, 正定性, 正齐性), 再利用 Minkowski 不等式容易验证其满足三角不等式.

(2) 下面我们构造一个这个空间中的Cauchy 列, 但它在这个空间中不收敛. 考虑连续函数列 $\{x_n(t)\}$ $(n>2)$:

$$x_n(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le \frac{1}{2}-\frac{1}{n},\\ 1, & \frac{1}{2}\le t\le 1,\\ \text{直线连接}, & \text{其它}.\end{cases}$$

易知, $\{x_n\}$ 是X 中的Cauchy 列. 若 X 完备, 则存在X 中的连续函数$y(t)$, 使得

$$d(x_n,y)\to 0,\ (n\to\infty).$$

考虑

$$x(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<\frac{1}{2},\\ 1, & \frac{1}{2}<t\le 1,\\ \frac{1}{2}, & t=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

故由三角不等式

$$\int_0^1 \mid x(t)-y(t)\mid dt=0,$$

即 $x(t)$几乎处处等于 $y(t)$. 因为 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 $[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1]$ 上连续, 两个连续函数几乎处处相等, 就是点点相等. 于是在$[0,\frac{1}{2})$ 上$y(t)=x(t)=0$, 在$(\frac{1}{2},1]$ 上$y(t)=x(t)=1$, 则$y(t)$ 在$t=\frac{1}{2}$ 点不连续(左右极限不相等), 与$y(t)$ 连续矛盾.

7. 证明 必要性: 设 $\{x_n\}\subset S$ 为基本列, 因为 X 完备, 所以存在 $x\in X$ 使得

$$x_n\to x,$$

则由范数的连续性, 我们有

$$\|x\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=1,$$

故 $x\in S$, 即 S 完备.

充分性: 设 S 完备, 任取 X 中基本列 $\{x_n\}$, 因为

$$|\|x_n\|-\|x_m\||\le\|x_n-x_m\|\to 0\qquad(n,m\to\infty),$$

所以 $\{\|x_n\|\}$ 为收敛数列.

(1) 若 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=0$, 则$\lim_{n\to\infty}x_n=0$;

(2) 若 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=a>0$, 则 n 充分大时 $\|x_n\|\ge\frac{a}{2}>0$, 令 $x_n'=\frac{x_n}{\|x_n\|}$, 则 $x_n'\in S$.

$$\begin{aligned}\|x_n'-x_m'\|&=\|\frac{\|x_m\|x_n-\|x_n\|x_m}{\|x_n\|\cdot\|x_m\|}\|\le\frac{\|x_n-x_m\|}{\|x_n\|}+\frac{|\|x_m\|-\|x_n\||}{\|x_n\|}\\&\le\frac{2}{a}(\|x_n-x_m\|+|\|x_m\|-\|x_n\||)\quad(n\text{充分大}),\end{aligned}$$

故 $\lim_{n,m\to\infty}\|x'_n-x'_m\|=0$, $\{x'_n\}$ 为 S 中的基本列, 因为 S 完备, 必存在 $x'\in S$, 使得 $x'_n\to x'$ $(n\to\infty)$. 于是 $x_n=\|x_n\|x'_n\to ax'\in X$, 即 X 完备.

8. 证明 易证 d 为 $C^k[a,b]$ 上的距离, 下面证明 $(C^k[a,b],d)$ 是完备的. 设 $\{f_n\}$ 是 $C^k[a,b]$ 上的 Cauchy 列, 则当 $n,m\to\infty$ 时有

$$d(f_n,f_m)=\sum_{i=0}^{k}\max_{x\in[a,b]}|f_n^{(i)}(x)-f_m^{(i)}(x)|\to 0.$$

这就说明对 $i=0,1,\cdots,k$ 当 $n,m\to\infty$ 时有

$$\max_{x\in[a,b]}|f_n^{(i)}(x)-f_m^{(i)}(x)|\to 0,$$

即 $\{f_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $C[a,b]$ 中的 Cauchy 列. 由 $C[a,b]$ 的完备性知, 存在 $g_i\in C[a,b]$ 使得当 $n\to\infty$ 时

$$\max_{x\in[a,b]}|f_n^{(i)}(x)-g_i(x)|\to 0,$$

即当 $n\to\infty$ 时 $\{f_n^{(i)}\}$ 一致收敛到 g_i. 由此推知 g_i 是可微的且 $g'_{i-1}=g_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$. 令 $f=g_0$, 则 $g_i=f^{(i)}$ 在且

$$\sum_{i=0}^{k}\max_{x\in[a,b]}|f_n^{(i)}(x)-f^{(i)}(x)|\to 0, n\to\infty.$$

所以在 $C^k[a,b]$ 中 $d(f_n,f)\to 0$ $(n\to\infty)$. 故 $(C^k[a,b],d)$ 是完备的距离空间.

(2) 易证 $\|\cdot\|$ 是 $C^k[a,b]$ 上的范数且 d 是由该范数诱导的, 故由 (1) 易知 $(C^k[a,b],\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

9. 证明 易证 $\|\cdot\|$ 是范数. 下面证明 $(H,\ \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间. 设 f_n 是 $(H,\ \|\cdot\|)$ 中的基本列, 则对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\, n\in N$, 当 $m,n>N$ 时,

$$\|f_m-f_n\|=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f_m-f_n|^2+\int_{-\infty}^{\infty}|f'_m-f'_n|^2\right\}^{\frac{1}{2}}<\varepsilon, \tag{2.0.1}$$

从而知 $\{f_n\}$, $\{f'_n\}$ 都是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的基本列. 记 $f_0:=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$, $g_0:=\lim_{n\to\infty}f'_n$ (依 L^2 范数极限), 并记 $f(x):=f_0(0)+\int_0^x g_0(t)dt$, 则由 $f_n(x):=f_n(0)+\int_0^x f'_n(t)dt$, 易知 f_n 几乎处处收敛到 f. 由每个 $\int_{-\infty}^{\infty}|\,f_n\,|^2+\int_{-\infty}^{\infty}|\,f'_n\,|^2<\infty$ 知 $f\in H$. 最后, 在 (2.0.1) 式中令 $n\to\infty$ 得 $\|f_m-f\|\le\varepsilon$, $(m\to\infty)$.

10. 证明 $\|\cdot\|$ 满足范数公理显然, 我们仅证明完备性. 设 $x_n(t)$ 是 M 中任一基本列, 则对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $m,n>N$ 时, 有

$$\sup_{t\in[a,b]}|\,x_m(t)-x_n(t)\,|<\varepsilon,$$

故 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于某一函数 $x(t)$. 又因为 $|x(t)|\le|x(t)-x_n(t)|+|x_n(t)|$, 所以 $x(t)\in M$, 最后根据 M 中范数收敛与一致收敛等价可得

$$\|x_n-x\|\to 0\qquad(n\to\infty)$$

故 M 是巴拿赫空间.

11. 证明 对 $x \in L^p[0,1]$ $(0<p<1)$, 有

$$\|\frac{1}{2}x\| = \int_0^1 |\frac{1}{2}x(t)|^p dt = \frac{1}{2^p}\int_0^1 |x(t)|^p dt > \frac{1}{2}\|x\|.$$

故 $\|\cdot\|$ 不满足齐次性, 即不是 $L^p[0,1]$ 上的范数. 但 $d(x,y)=\|x-y\|$ 是 $L^p[0,1]$ 上的距离. 事实上, 易知距离的非负性、正定性、对称性成立的, 下面考虑三角不等式. 因为

$$(a+b)^p \le a^p + b^p \ (a,b>0),$$

故对任意的 $x,y,z \in L^p[0,1]$, 有

$$\begin{aligned} d(x,y) = \int_0^1 |x(t)-y(t)|^p dt &\le \int_0^1 (|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|)dt \\ &\le \int_0^1 |x(t)-z(t)|^p dt + \int_0^1 |z(t)-y(t)|^p dt = d(x,z)+d(z,y). \end{aligned}$$

则 $d(x,y)=\|x-y\|$ 是 $L^p[0,1]$ 上的距离.

12. 证明 (i)$\|x\| = \sup_n |\xi_n| \ge 0$ (非负性);

(ii)$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sup_n |\xi_n| = 0 \Leftrightarrow \xi_n = 0 \to x = 0$ (正定性);

(iii)$\|\alpha x\| = \sup_n |\alpha\xi_n| = |\alpha|\sup_n |\xi_n| = |\alpha|\|x\|$ (正齐次);

(iv)$\|x+y\| = \sup_n |\xi_n+\eta_n| \le \sup_n |\xi_n| + \sup_n |\eta_n| = \|x\|+\|y\|$ (三角不等式)

故 $(l^\infty,\ \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间.

13. 证明 l^p, $1\le p<\infty$ 上的范数为 $\|x\|_p = (\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}}$, 范数诱导的距离是

$$d(x,y) = (\sum_{n=1}^\infty |\xi_n - \eta_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

下证它是可分的和完备的.

(i)完备性:

设 $\{x_n\}\subset l^p$ 为基本列, 其中 $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}_{i=1}^\infty$, 则对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n,m\ge N$ 时, 有

$$d(x_n,x_m) = (\sum_{i=1}^\infty |\xi_i^{(n)} - \eta_i^{(m)}|^p)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \tag{2.0.2}$$

则当 $n,m\ge N$ 时, 有

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| < \varepsilon \quad (i=1,2,3,\cdots).$$

故对每个 i, $\{\xi_i^{(n)}\}$ 收敛. 现设 $\xi_i = \lim_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}$, $x=\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$, 下面证明 $x\in l^p$, 且 $x_n\to x$.

由(2.0.2) 式知对任意的自然数 k 都有

$$\sum_{i=1}^k |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p < \varepsilon^p \quad (n,m\ge N),$$

固定 $n \geq N$, 让 $m \to \infty$, 得

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p \leq \varepsilon^p \quad (n \geq N),$$

再令 $k \to \infty$, 得

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p \leq \varepsilon^p \quad (n \geq N),$$

故 $x \in l^p$, $x_n \to x$, 完备性得证.

(ii)可分性:

令 $E_0 = \{x:\ x = (r_1, r_2, \cdots, r_n, 0, 0, \cdots),\ \ n \in \mathbb{N}^+,\ r_i \in \mathbb{Q}\}$, 这里不妨设 l^p 为实空间, 则 E_0 为 l^p 的一个可数子集. 下面证明 E_0 在 l^p 中稠密.

对于 $\forall x \in l^p$, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N, 使得

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2},$$

对于 ξ_i $(i = 1, 2, \cdots, N)$ 必存在 $r_1, r_2, \cdots, r_N$, 使得

$$\sum_{i=1}^{N} |\xi_i - r_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2},$$

故存在点 $x_0 = (r_1, r_2, \cdots, r_N, 0, 0, \cdots) \in \mathbb{Q}$, 使得

$$\sum_{i=1}^{N} |\xi_i - r_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2},$$

故存在点 $x_0 = (r_1, r_2, \cdots, r_N, 0, 0, \cdots) \in E_0$, 使得

$$d(x, x_0) = (\sum_{i=1}^{N} |\xi_i - r_i|^p + \sum_{i=N+1}^{\infty} |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2})^{\frac{1}{p}} = \varepsilon,$$

即 l^p 可分.

14. 证明 (1) 先证明 $\|\cdot\|_p$ 是一个范数. 令 $D = \{z|\ |z| < 1\}$, 记

$$M_p(f, r) = \left\{ \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \right\}^{1/p},$$

则有

$$\|f\|_p = \sup_{r<1} M_p(f, r).$$

固定 r . 若 $f : D \to \mathbf{c}$ 是解析的, 令 $f_r : [0, 2\pi] \to \mathbf{c}$ 定义为

$$f_r(\theta) = f(re^{i\theta}).$$

则 $M_p(f, r)$ 是 f_r 关于 Lebesgue 测度的 L^p 范数. 因此 $M_p(f, r) = 0$ 当且仅当 x 在圆周 $|z| = |r|$ 上是 0. 另外

$$M_p(kf, r) = |k| M_p(f, r), \tag{2.0.3}$$

$$M_p(f+g,r) \le M_p(f,r) + M_p(g,r) \tag{2.0.4}$$

由 (2.0.3) 式可得

$$M_p(kf,r) = |k|M_p(f,r) \le |k|\|x\|,$$

从而

$$\|kx\| \le |k|\|x\|.$$

所以若$k \ne 0$有

$$\|x\| = \|\frac{1}{k}kx\| \le |\frac{1}{k}|\|kx\|,$$

即 $|k|\|x\| \le \|kx\|$. 当 $k=0$ 时，这个不等式是平凡的，所以我们有

$$\|kx\| = |k|\|x\|. \tag{2.0.5}$$

类似地, 由 (2.0.4) 式得

$$M_p(f+g,r) \le \|f\| + \|g\|,$$

所以

$$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|. \tag{2.0.6}$$

由 (2.0.5) 式和由 (2.0.6) 式知 H^p 是线性空间且 $\|\cdot\|_p$ 是其上的范数.
(2) 证明 $(H^p, \|\cdot\|_p)$ 是完备的. 设 $\{x_n\}$ 是它中的Cauchy 列. 固定 r 且取 R 使得$|r| < R < 1$.
若 f 在 D 中解析的且 $|z| < |r|$, 则由Cauchy 积分公式知

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\omega|=R} \frac{f(\omega)}{\omega - z}\, d\omega;$$

$$|f(z)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(Re^{i\theta})|}{R-r}\, R\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\frac{R}{R-r}M_p(f,R).$$

若 $1 < p < \infty$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则由 *Hölder* 不等式知

$$\begin{aligned} |f(z)| &\le \frac{R}{2\pi(R-r)}\left\{\int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{1/p}\left\{\int_0^{2\pi} 1^q\ d\theta\right\}^{1/p} \\ &\le \frac{R}{R-r}(2\pi)^{\frac{1}{q}-1}M_p(f,R). \end{aligned}$$

所以对$|z| < |r|$, 有

$$|f(z)| \le \frac{R}{R-r}(2\pi)^{-\frac{1}{p}}M_p(f,R) \le \frac{R}{R-r}M_p(f,R) \le \frac{R}{R-r}\|f\|_p.$$

对 $f = x_n - x_m$ 应用这个结果: 对 $|z| < |r|$, 我们有

$$|x_n(z) - x_m(z)| \le \frac{R}{(R-r)}\|x_n(z) - x_m(z)\|_p.$$

这就得到 $\{x_n\}$ 对 $|z| < |r|$, 关于一致收敛满足Cauchy准则. 这对任意r都是成立的. 所以 $\{x_n\}$ 在紧子集D上一致收敛到D上的某个解析函数x.

设对所有的 $n, m \geq N, \|x_n(z) - x_m(z)\|_p < \varepsilon$. 当 $n, m \geq N$, 则

$$M_p(x_n - x_m, r) \leq \|x_n(z) - x_m(z)\|_p < \varepsilon,$$

$$\int_0^{2\pi} |x_n(re^{it}) - x_m(re^{it})|^p \ dt < \varepsilon^p.$$

固定n, 令 $m \to \infty$, 对 $|z| = r$ 有

$$|x_n(z) - x_m(z)| \to |x_n z - x(z),$$

为一致的, 所以

$$\int_0^{2\pi} |x_n(re^{it}) - x_m(re^{it})|^p \ dt < \varepsilon^p, \quad n \geq N,$$

$$M_p(x_n - x, r) \leq \varepsilon, \quad n \geq N.$$

当任取的 $r < 1$, 这都是成立的且 N 是与 r 无关的.这就说明 $\|x_n - x\|_p \leq \varepsilon, \quad n \geq N$. 这就说明 $x_n - x \in H^p(D)$, 因此 $x \in H^p(D)$ 且在 $H^p(D)$ 中有 $x_n \to x$. 这就完成了证明.

15. 证明 容易验证 $\|\cdot\|$ 满足范数公理. 下面证明 H^p 完备性. 设 $\{x_n\}$ 是 H^p 中的基本列, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|x_n(a) - x_m(a)| + \sup_{a \leq t_1 < t_2 \leq b} \frac{|x_n(t_1) - x_n(t_2) - x_m(t_1) + x_m(t_2)|}{|t_1 - t_2|^p} < \varepsilon$$

由此可得 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a, b]$ 上处处收敛. 记极限函数为 $x(t)$, 下面证明 $x(t) \in H^p$, 且 $\|x_n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$, 在上式中令 $m \to \infty$, 得

$$|x_n(a) - x(a)| + \sup_{a \leq t_1 < t_2 \leq b} \frac{|x_n(t_1) - x_n(t_2) - x(t_1) + x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^p} < \varepsilon,$$

此即 $\|x_n - x\| \leq \varepsilon$, 故 $x_n \to x$. 另外从上面的式子可以得出

$$\frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^p} \leq \varepsilon + \|x_n\|,$$

即 $x(t) \in H^p$. 故 H^p 是巴拿赫空间.

16. 证明 若 $x(t) \equiv 0$, 命题显然成立. 若 $x(t)$ 不恒等于零, $|x(t)|$ 是连续函数. 由闭区间上的连续函数的性质, 存在 $t_0 \in [a, b]$ 使得 $|x(t_0)| = \max\limits_{a \leq x \leq b} |x(t)| = \|x\|_\infty > 0$. 因为

$$\|x\|_p = (\int_a^b |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_a^b |x(t_0)|^p dt)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_\infty (b - a)^{\frac{1}{p}},$$

于是 $\overline{\lim\limits_{p \to \infty}} \|x\|_p \leq \|x\|_\infty$.

另一方面, 由 $|x(t)|$ 在 t_0 点处的连续性, 对 $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$, 使得

$$|x(t)| > |x(t_0)| - \varepsilon, \quad \forall\ t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset [a, b].$$

于是

$$\|x\|_p = (\int_a^b |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \geq (\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} (|x(t_0)| - \varepsilon)^p dt)^{\frac{1}{p}} = (\|x\|_\infty - \varepsilon)(2\delta)^{\frac{1}{p}},$$

所以 $\underline{\lim}_{p\to\infty}\|x\|_p \geq \|x\|_\infty - \varepsilon$, 由 ε 的任意性可知

$$\underline{\lim}_{p\to\infty}\|x\|_p \geq \|x\|_\infty.$$

综上 $\lim_{p\to\infty}\|x\|_p = \|x\|_\infty$.

17. 证明 (1) 设 $\{A_\alpha|\alpha\in I\}$ 是 X 中任何一族凸集. 故对于 $\forall x,y\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$, $\forall\lambda\ (0\leq\lambda\leq 1)$, 有

$$\lambda x+(1-\lambda)y\in A_\alpha, \forall\alpha\in I.$$

则 $\lambda x+(1-\lambda)y\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$, 即 $\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$ 是凸集.
(2) 对于任意的 $\widetilde{x}=x+x_0$, $\widetilde{y}=y+x_0\in A+x_0$, 其中 $x,y\in A$, $\forall\alpha(0\leq\alpha\leq 1)$ 有

$$\alpha\widetilde{x}+(1-\alpha)\widetilde{y}=\alpha x+(1-\alpha)y+x_0.$$

由于 A 是凸的, 故 $\alpha x+(1-\alpha)y\in A$, 即 $\alpha x+(1-\alpha)y+x_0\in A+x_0$. 则凸集 A ”移动” x_0 后所得集合 $A+x_0$ 仍然是凸集合

18. 证明 令

$$B \xlongequal{\triangle} \{\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n\in X \mid n \text{ 是任意自然数}, x_k\in A, \alpha_k\geq 0 \text{ 且 } \sum_{k=1}^{n}\alpha_k=1\}.$$

显然 B 是凸集, 则由 $C_0(A)$ 的定义易知 $C_0(A)\subseteq B$. 若 $B\neq C_0(A)$, 那么存在 $x_0\in B$ 使得

$$x_0=\sum_{k=1}^{n}\alpha_kx_k,\ x_k\in A,\ \alpha_k>0,\ \sum_{k=1}^{n}\alpha_k=1,\ x_0\notin C_0(A).$$

那么由 $C_0(A)$ 是凸集且 $x_1\in C_0(A)$ 可知 $\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_1}x_k\notin C_0(A)$, 同理可得 $\sum\limits_{k=3}^{n}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_1-\alpha_2}x_k\notin C_0(A)$. 以此类推得

$$\frac{\alpha_{n-1}}{1-\sum\limits_{k=1}^{n-2}\alpha_k}x_{n-1}+\frac{\alpha_n}{1-\sum\limits_{k=1}^{n-2}\alpha_k}x_n\notin C_0(A)\notin C_0(A).$$

但另一方面,

$$\frac{\alpha_{n-1}}{1-\sum\limits_{k=1}^{n-2}\alpha_k}x_{n-1}+\frac{\alpha_n}{1-\sum\limits_{k=1}^{n-2}\alpha_k}x_n=\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}+\alpha_n}x_{n-1}+\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}+\alpha_n}x_n,$$

矛盾, 则 $C_0(A)=B$.

19. 证明 (1). 容易验证 $\|\cdot\|$ 满足范数公理.
(2)$\forall x\in C[0,1]$,

$$\alpha_x=\left\{x(1),x\left(\frac{1}{2}\right),\cdots,x\left(\frac{1}{n}\right),\cdots\right\}\in l^\infty,$$

$$\|\alpha_x\|_\infty=\sup_{n\geq 1}|x\left(\frac{1}{n}\right)|\leq\|x\|.$$

反之，$\forall \alpha=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^\infty$，将点列 $(1,\xi_1),(\frac{1}{2},\xi_2),\cdots,(\frac{1}{n},\xi_n),\cdots$ 用折线连接起来，得到一个函数 $x_\alpha(t)$：

$$x_\alpha(t)\in C[0,1],\quad \|x_\alpha\|\le \sup_{n\ge 1}|\xi_n|=\|\alpha\|_\infty,$$

$$\left.\begin{array}{l}\|\alpha_x\|_\infty\le\|x\|\\ \|x_\alpha\|\le\|\alpha\|_\infty\end{array}\right\}\ \Rightarrow \|\alpha\|_\infty=\|x\|.$$

20. 证明 取 $\varepsilon_k=\frac{1}{2^k}$, 根据 Riesz 引理 (引理 2.3.12), 对每个 k, 存在 $x_k\in X$, 使得 $\|x_k\|=1$ 以及

$$d(x_k,E_0)\ge 1-\frac{1}{2^k}.$$

因为 X 为有限维空间, $\{\|x_k\|\}$ 有界, 于是列紧的, 即 $\{\|x_k\|\}$ 有收敛子列. 不妨可设 $x_k\to x_0$, 则 $\|x_0\|=1$. 进一步, 我们有

$$d(x_0,E_0)=\lim_{k\to\infty}d(x_k,E_0)\ge 1.$$

另一方面, 因为 $0\in E_0$,

$$1=\|x_0\|=\|x_0-0\|\ge\inf_{x\in E_0}\|x_0-x\|=d(x_0,E_0),$$

故 $d(x_0,E_0)=1$.

21. 证明 $\|\cdot\|_2$ 与 $\|\cdot\|_3$ 等价.显然$\|\cdot\|_2\le\|\cdot\|_3$. 考虑

$$\|x\|_3^2=\int_0^1(1+t)\ |x(t)|^2dt=\int_0^1|x(t)|^2dt+\int_0^1 t\cdot|x(t)|^2dt\le 2\int_0^1|x(t)|^2dt=2\|x\|_2^2,$$

故 $\|x\|_3\le\sqrt{2}\|x\|_2$. 则$\|\cdot\|_2$ 与 $\|\cdot\|_3$ 等价. $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 不是等价范数.

22. 证明 由 g 非负递减性

$$\sum_{n=0}^\infty g(n+1)\le\sum_{n=0}^\infty\int_n^{n+1}g(x)dx=\int_0^{+\infty}g(x)dx<\infty$$

故 $\sum_{n=1}^\infty g(n)$ 收敛,再据条件 $\|x_n\|\le g(n)$, $(\forall n)$ 可知 $\sum_{n=0}^\infty\|x_n\|$ 收敛,
因为

$$\|\sum_{k=1}^{n+p}x_k-\sum_{k=1}^{n}x_k\|\le\sum_{k=n+1}^{n+p}\|x_k\|$$

$\sum_{k=1}^\infty\|x_k\|$ 收敛, 所以 $\sum_{k=1}^n x_k$ 为 X 中的基本列, X 完备,故 $\sum_{n=1}^\infty x_n$ 收敛.

23. 解 (1) 由下确界的定义, 存在 $\{y_n\}\subset Y$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|=d(x,Y)=\delta.$$

由 $\|y_n\|\le\|x-y_n\|+\|x\|$ 可知 $\{y_n\}$ 是有界的. 因为 Y 是 X 的有穷维子空间, 故 $\{y_n\}$ 存在收敛子列, 不妨设 $y_n\to y_0\in Y$. 于是

$$\|x-y_0\|=d(x,Y),$$

即最佳逼近元存在.

(2) 设 M 是 l^∞ 中只有有限多项不为零的序列构成的子空间. 显然 M 是 l^∞ 的无穷维线性子空间. 令 $x=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}\in l^\infty$, 因为存在

$$\{x_n\}\subset M,\ x_n=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},0,\cdots\},$$

使得 $\|x_n-x\|\to 0\ (n\to\infty)$, 即 $d(x,M)=0$. 但 $x\notin M$, 故对于 x, M 中不存在最佳逼近元.

(3) M 是平面上的一个圆周, x 是圆的中心, 那么 x 到集合 M 的最佳逼近点可以是圆周上的任意一点, 不是唯一的.

(4) 对于每一点 $x\in X$, 令 $A=\{z\in Y|\|z-x\|=d(x,Y)\}$, 下证 A 是一个凸集. 事实上, 对于 $\forall y_1,y_2\in A$, $\forall\alpha\ (0\le\alpha\le 1)$, 因为 Y 是线性子空间, 故 $\alpha y_1+(1-\alpha)y_2\in Y$. 由下确界的定义可知 $d(x,Y)\le\|\alpha y_1+(1-\alpha)y_2-x\|$. 另一方面,

$$\begin{aligned}\|\alpha y_1+(1-\alpha)y_2-x\|&=\|\alpha y_1+(1-\alpha)y_2-\alpha x-(1-\alpha)x\|\le\alpha\|y_1-x\|+(1-\alpha)\|y_2-x\|\\&=\alpha d(x,Y)+(1-\alpha)d(x,Y)=d(x,Y).\end{aligned}$$

综上知, $\|\alpha y_1+(1-\alpha)y_2-x\|=d(x,Y)$, 即 $\alpha y_1+(1-\alpha)y_2\in A$, A 是凸集.

24. 证明 $\|x\|\ge 0$, 且 $\|x\|=0\Longleftrightarrow x=0$ 是显然的. 又

$$\begin{aligned}\|ax\|&=(\sum_{k=1}^{\infty}\|ax_k\|_k^p)^{\frac{1}{p}}=(\sum_{k=1}^{\infty}(|\alpha|\ \|x_k\|_k)^p)^{\frac{1}{p}}\\&=|\alpha|(\sum_{k=1}^{\infty}\ \|x_k\|_k^p)^{\frac{1}{p}}=|a|\ \|x\|,\quad\forall\alpha\in K.\end{aligned}$$

依据闵可夫斯基不等式,有

$$\begin{aligned}\|x+y\|&=(\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k+y_k\|_k^p)^{\frac{1}{p}}\le(\sum_{k=1}^{\infty}(\|x_k\|_k+\|y_k\|_k)^p)^{\frac{1}{p}}\\&\le(\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|_k^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{k=1}^{\infty}\|y_k\|_k^p)^{\frac{1}{p}}=\|x\|+\|y\|,\quad\forall x,y\in X.\end{aligned}$$

所以 $\|\cdot\|$ 是范数，而 $(X,\ \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间.

25. 证明 对任意 $x\in X$, 因为 $\overline{X_0}=X$, 故存在 $x_1\in X_0$ 使 $\|x-x_1\|<1/2^3$, 此时 $\|x_1\|=\|x-(x-x_1)\|\le\|x\|+\|x-x_1\|<\|x\|+1/2^3$, 对 $x-x_1\in X$, 仍因 $\overline{X_0}=X$, 故存在 $x_2\in X_0$ 使 $\|x-x_1-x_2\|<1/2^4$, 此时

$$\begin{aligned}\|x_2\|&=\|(x-x_1)-(x-x_1-x_2)\|\\&\le\|x-x_1\|+\|x-x_1-x_2\|\\&<1/2^3+1/2^4<1/2^2.\end{aligned}$$

同理找到 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, 则对 $x-\sum_{k=1}^{n-1} x_k \in X$, 由于 $\overline{X_0}=X$, 故存在 $x_n \in X_0$ 使 $\|x-\sum_{k=1}^{n-1} x_k - x_n\| < 1/2^{n+2}$, 此时, 由 $\|x-\sum_{k=1}^{n-1} x_k\| < 1/2^{n+1}$ 可知

$$\begin{aligned}\|x_n\| &= \|(x-\sum_{k=1}^{n-1} x_k)-(x-\sum_{k=1}^{n} x_k)\| \\ &\leq \|x-\sum_{k=1}^{n-1} x_k\| + \|x-\sum_{k=1}^{n} x_k\| \\ &< 1/2^{n+1}+1/2^{n+2} < 1/2^n,\end{aligned}$$

于是得到 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_0$:

$$\|x-\sum_{k=1}^{n} x_k\| < 1/2^{n+2}; \tag{2.0.7}$$

$$\|x_1\| < \|x\| + 1/2^3; \quad \|x_n\| < 1/2^n \quad (n \geq 2). \tag{2.0.8}$$

对 (2.0.7) 式令 $n \to \infty$ 得 $x=\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, 且由 (2.0.8) 式得 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ 收敛,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq \|x\| + 1 < \infty.$$

26. 证明 设 E 是 X 的可数稠密子集,

$$F=\{y+M : y \in E\},$$

则 F 是可数的. 设$x+M$是X/M中任一个元素. 给定$\varepsilon>0$, 则存在 E 中的y使得$\|y-x\|<\varepsilon$. 所以由商范数的定义可知

$$\|(x+M)-(y+M)\| = \|x-y+M\| \leq \varepsilon.$$

这就说明$\overline{F}=X/M$. 所以X/M是可分的.

27. 证明 设 M, X/M 均完备, 则对任意的 $x \in X$, $x+M$ 也完备. 现任取 X 中的基本列 $\{x_n\}$, 易知 $\{\widetilde{x}_n = x_n + L\}$ 是 X/M 中的基本列, 由于 x/M 完备, 必存在 $\widetilde{x} \in X/M$, 使得 $\widetilde{x_n} \to x$ $(n \to \infty)$. 又因为

$$\|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}\| = \inf_{x_0 \in \widetilde{x}_n,\ y \in \widetilde{x}} \|x_0 - y\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

则对每一个自然数 k, 存在 $x_{n_k} \in \widetilde{x}_{n_k}$, $y_k \in \widetilde{x}$, 使得

$$\|x_{n_k} - y_k\| < \frac{1}{k},$$

于是

$$\|y_{k+p} - y_k\| \leq \|y_{k+p} - x_{n_{k+p}}\| + \|x_{n_{k+p}} - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - y_k\|.$$

故 $\{y_k\}$ 是 $x+M$ 中的基本列, 由 $x+M$ 完备, 必存在 $y \in x+M$, 使得 $y_k \to y$ $(k \to \infty)$. 又因为

$$\|x_{n_k} - y\| \leq \|x_{n_k} - y_k\| + \|y_k - y\|,$$

所以 $x_{n_k} \to y \in X$. 而 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本列, 故必有 $x_n \to y$ $(n \to \infty)$. 这就证明了 X 的完备性.

28. 证明 (1) 设 $\{(x_n, y_n)\}$ 是 Z 中的一序列, $(x, y) \in Z$. 因为

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| = \|x_n - x\|_1 + \|y_n - y\|_2,$$

故

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| \to 0 \text{ 当且仅当 } \|x_n - x\|_1 \to 0,\ \|y_n - y\|_2 \to 0\ (n \to \infty).$$

(2) 设 $\{(x_n, y_n)\}$ 是 Z 中的一序列. 因为

$$\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\| = \|x_n - x_m\|_1 + \|y_n - y_m\|_2,$$

故

$$\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\| \to 0 \text{ 当且仅当 } \|x_n - x_m\|_1 \to 0 \text{ 且 } \|y_n - y_m\|_2 \to 0\ (n \to \infty).$$

29. 证明 设 $\{x_n, y_n\}$ 是 Z 上的柯西列. 由于

$$\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\| = \|(x_n - x_m, y_n - y_m)\| = \|x_n - x_m\|_1 + \|y_n - y_m\|_2,$$

所以对所有 $n, m \geq 1$, 有

$$\|x_n - x_m\|_1 \leq \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|,$$

$$\|y_n - y_m\|_2 \leq \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|.$$

这就证明了 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 分别是 X_1 和 X_2 中的柯西列.因为 X_1 和 X_2 是 Banach 空间, 所以它们都收敛. 设 $\{x_n\} \to x$ 且 $\{y_n\} \to y$, 则

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| = \|(x_n - x, y_n - y)\| = \|x_n - x\|_1 + \|y_n - y\|_2 \to 0,$$

即在 Z 中 $(x_n, y_n) \to (x, y)$. 这就证明了 $(Z, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

30. 证明 因为

$$\max\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2\} \leq \|x_1\| + \|x_2\| \leq 2\max\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2\},$$

即

$$\|z\|_2 \leq \|z\|_1 \leq 2\|z\|_2,$$

故 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 $X_1 \times X_2$ 上的等价范数.