第五章
生产技术和生产函数

- 生产过程和生产函数
- 边际报酬递减律和规模报酬
- 等产量曲线

第一节　生产过程和生产函数

一、生产函数

- 定义：
  - 在给定的生产技术条件下，一定数量的生产要素投入量与商品的最大产出量之间的数量关系。
  - $Q = f(L, K, M, \ldots)$
- 特征：
  - 投入不同，产出不同；
  - 生产技术决定了生产函数的具体形式。

- Leontief生产函数 $Q = 100\min\{L, K\}$
- Cobb-Douglas生产函数

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta} \quad , \alpha > 0, \beta > 0, A > 0$$

α, β 表示资本和劳动投入的产量弹性，

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} \qquad \frac{\partial Q / Q}{\partial K / K} = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q} = \alpha$$

A表示技术进步因素。

二、固定投入和可变投入

- 固定投入和可变投入
  固定投入：投入的数量不随产量的变化而变化
  可变投入：投入的数量随着产量的变化而变化

- 短期与长期的区分
  短期里，至少一种生产要素的数量不可变
  长期内，所有要素的投入都是可变的

三、平均产量和边际产量

- 平均产量： $AP_l = \dfrac{Q}{L}$

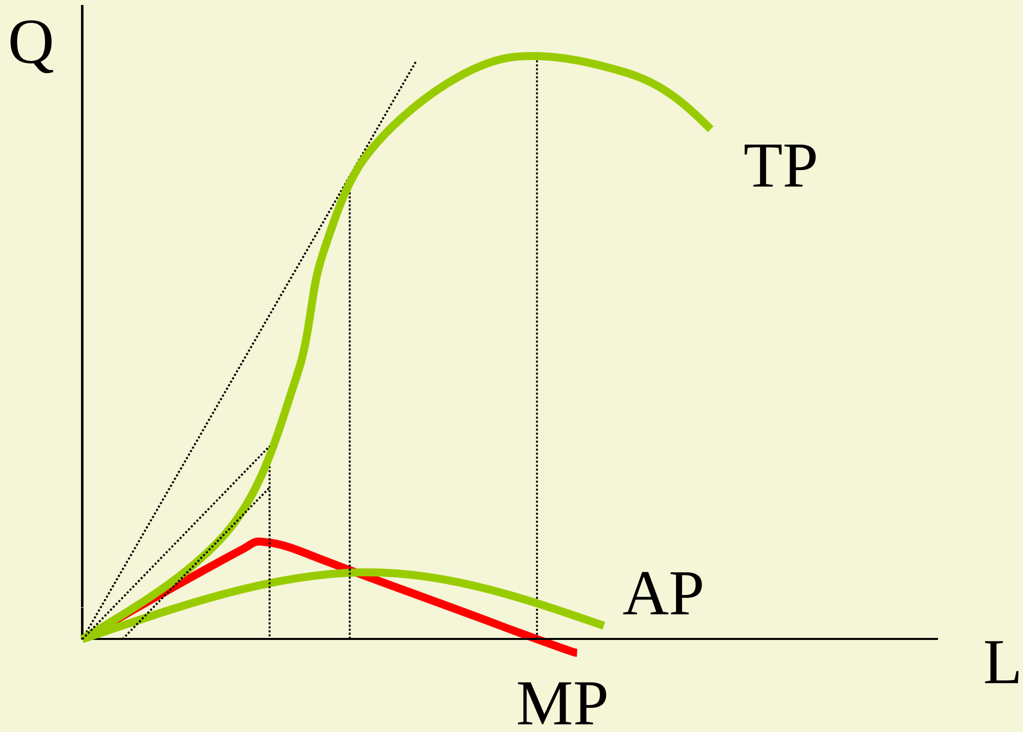
- 边际产量：在其他投入不变的条件下，增加一单位某一投入所能增加的产量。

$$\Delta Q = \Delta f = f(K, L+\Delta L) - f(K, L)$$

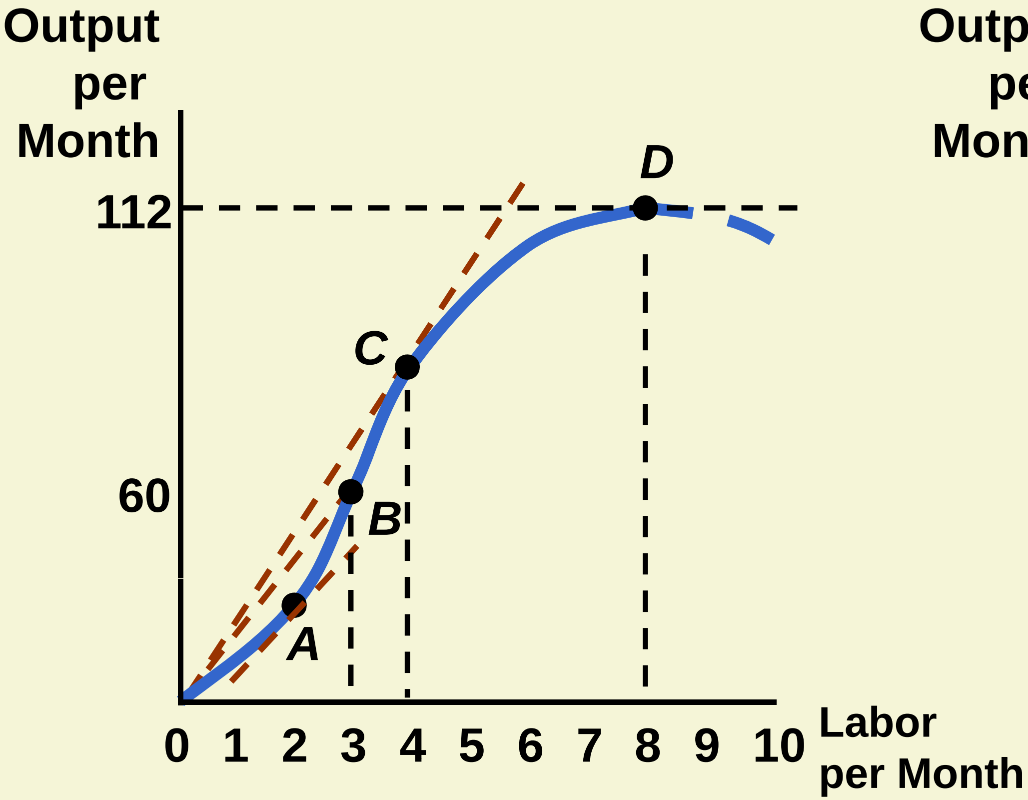
$$MP_l = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{\Delta f}{\Delta L} = \frac{\partial f}{\partial L}$$

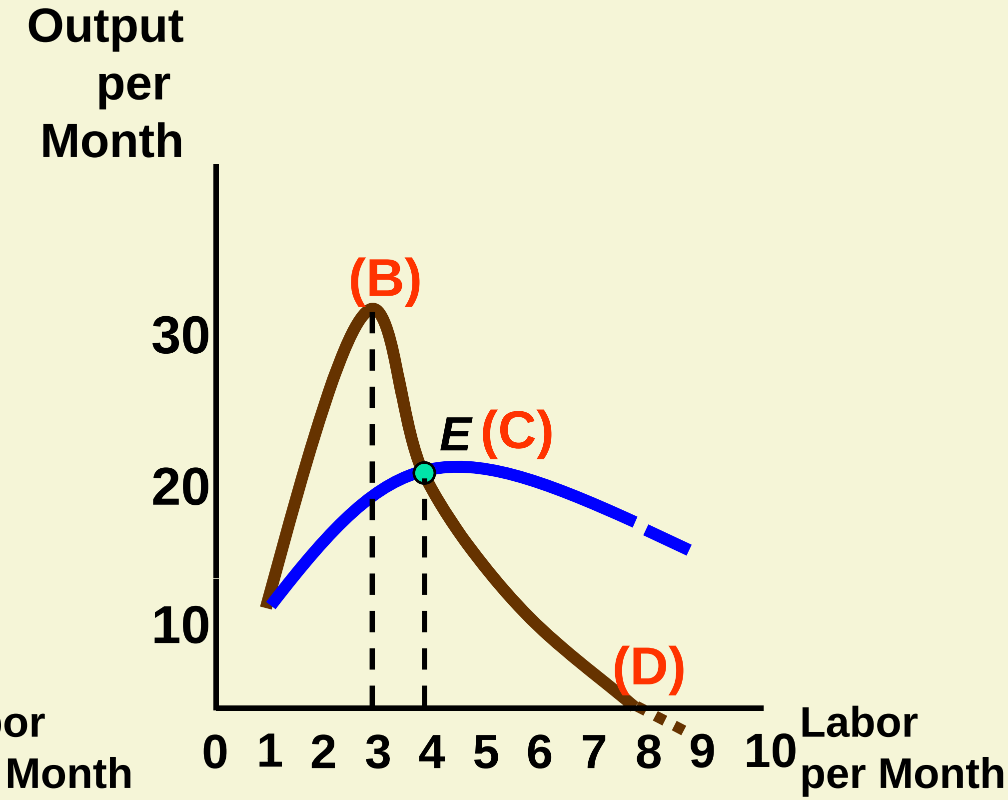
三个产量之间的关系

- 总产量与边际产量
- 总产量与平均产量
- 边际产量与平均产量



AP = slope of line from origin to a point on *TP*.
MP = slope of a tangent to any point on the *TP* line.





- Observations:
  - When $MP = 0$, TP is at its maximum
  - When $MP > AP$, AP is increasing
  - When $MP < AP$, AP is decreasing
  - When $MP = AP$, AP is at its maximum

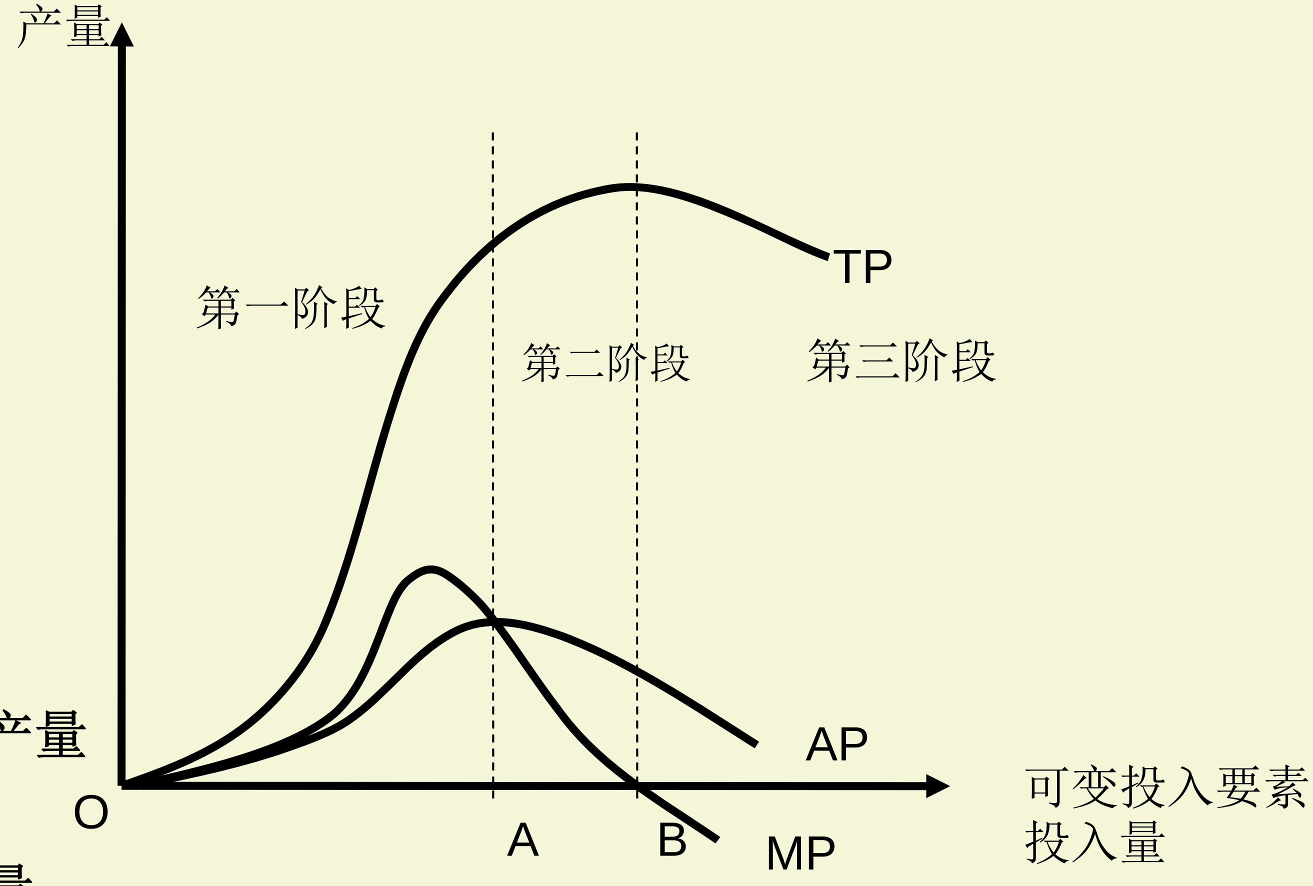
例：　已知生产函数为：$Q = KL - 0.5L^2 - 0.32K^2$ ，

其中Q表示产量，K表示资本，L表示劳动。令式中K=10，求：

（1）劳动的平均产量函数和边际产量函数。

（2）分别计算当总产量、平均产量和边际产量达到极大值时厂商雇佣的劳动。

生产的三个阶段



1、达到最大平均产量

2、达到最大总产量

3、总产量下降（边际产量为负）

第二节
边际报酬递减律和规模报酬

一. 边际报酬递减律

- 在技术给定和生产的其他要素投入不变的情况下，连续增加某种可变投入使其边际产量增加到某一点，超过该点后，增加可变投入会使其边际产量减少。

- 原因：不变投入和可变投入的组合比例变化

二. 边际产量和平均产量的关系

- 边际产量>平均产量，则平均产量上升
  边际产量<平均产量，则平均产量下降
- 证明：

$$\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{f(L)}{L}\right)=\frac{(\partial f/\partial L)\cdot L-f(L)}{L^2}=\frac{\partial f/\partial L}{L}-\frac{f(L)}{L^2}$$

$$=\frac{1}{L}(MP-AP)$$

三. 规模报酬

- 衡量当生产过程中所有的投入按同一比例变化，产量的变化。

给定 $f(K, L, \cdots, M)$ $\lambda > 1$

如果 $f(\lambda K, \lambda L, \cdots, \lambda M) > \lambda f(K, L, \cdots, M)$ 规模报酬递增

如果 $f(\lambda K, \lambda L, \cdots, \lambda M) = \lambda f(K, L, \cdots, M)$ 规模报酬不变

如果 $f(\lambda K, \lambda L, \cdots, \lambda M) < \lambda f(K, L, \cdots, M)$ 规模报酬递减

特例——柯布－道格拉斯生产函数

$$Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

规模报酬递增 $\alpha+\beta>1$

规模报酬不变 $\alpha+\beta=1$

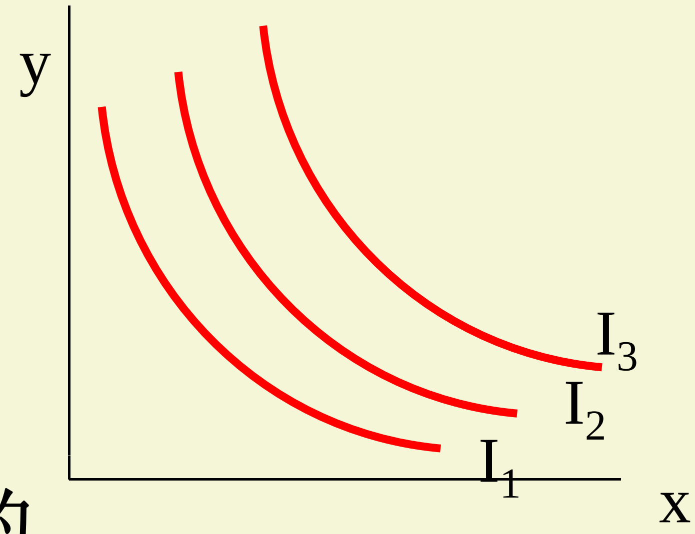
规模报酬递减 $\alpha+\beta<1$

第三节、等产量曲线

等产量曲线 **VS** 无差异曲线

回顾无差异曲线

- 定义：给消费者同等满意程度的所有商品组合所连接成的曲线或多维曲面



无差异曲线的性质

- 无数条，向右下方倾斜
- 无差异曲线不能相交
- 无差异曲线凸性（凸向原点）
- 离原点越远的无差异曲线代表的满意程度水平越高

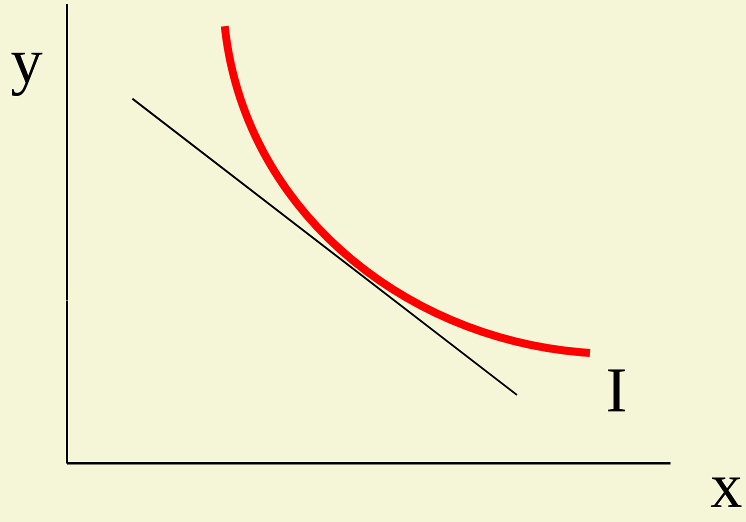
回顾边际替代率

- 边际替代率(MRS)：如果X商品的消费量变化为 Δx，为使消费者的效用不变，Y商品的消费量必须相应增加或减少 Δy ，比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的绝对值就是边际替代率。

$$MRS = \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|$$

- 一般 $$MRS = \left| \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|$$

- 边际替代率可以表示为无差异曲线上某点的斜率的绝对值，即无差异曲线在该点的切线的斜率的绝对值。



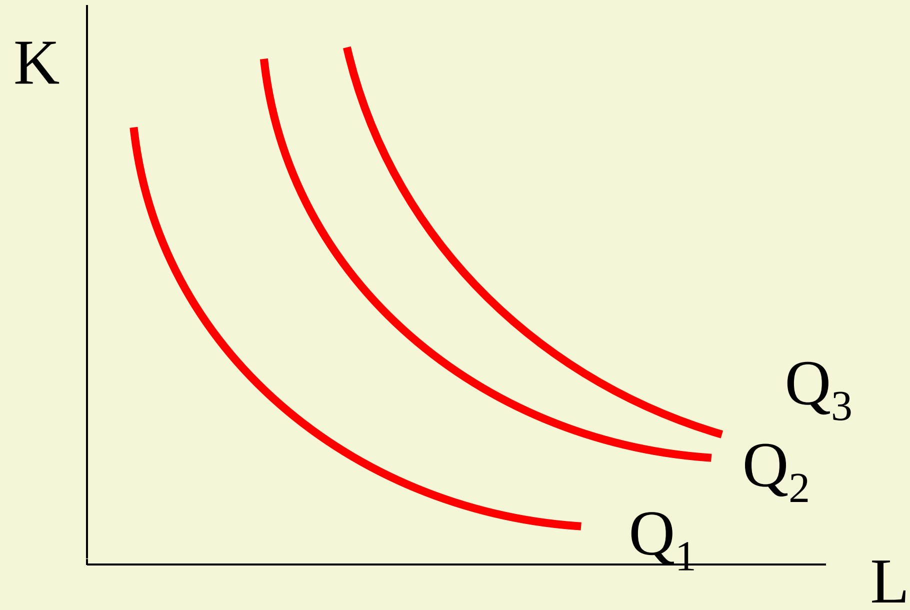
回顾边际效用

- 商品的边际效用（Marginal Utilities）：某商品的消费量变化一单位，而其它商品的消费量保持不变，所引起的效用变化。
- $$MU_x = \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$MRS = \left| -\frac{dy}{dx} \right| = \frac{MU_x}{MU_y}$$

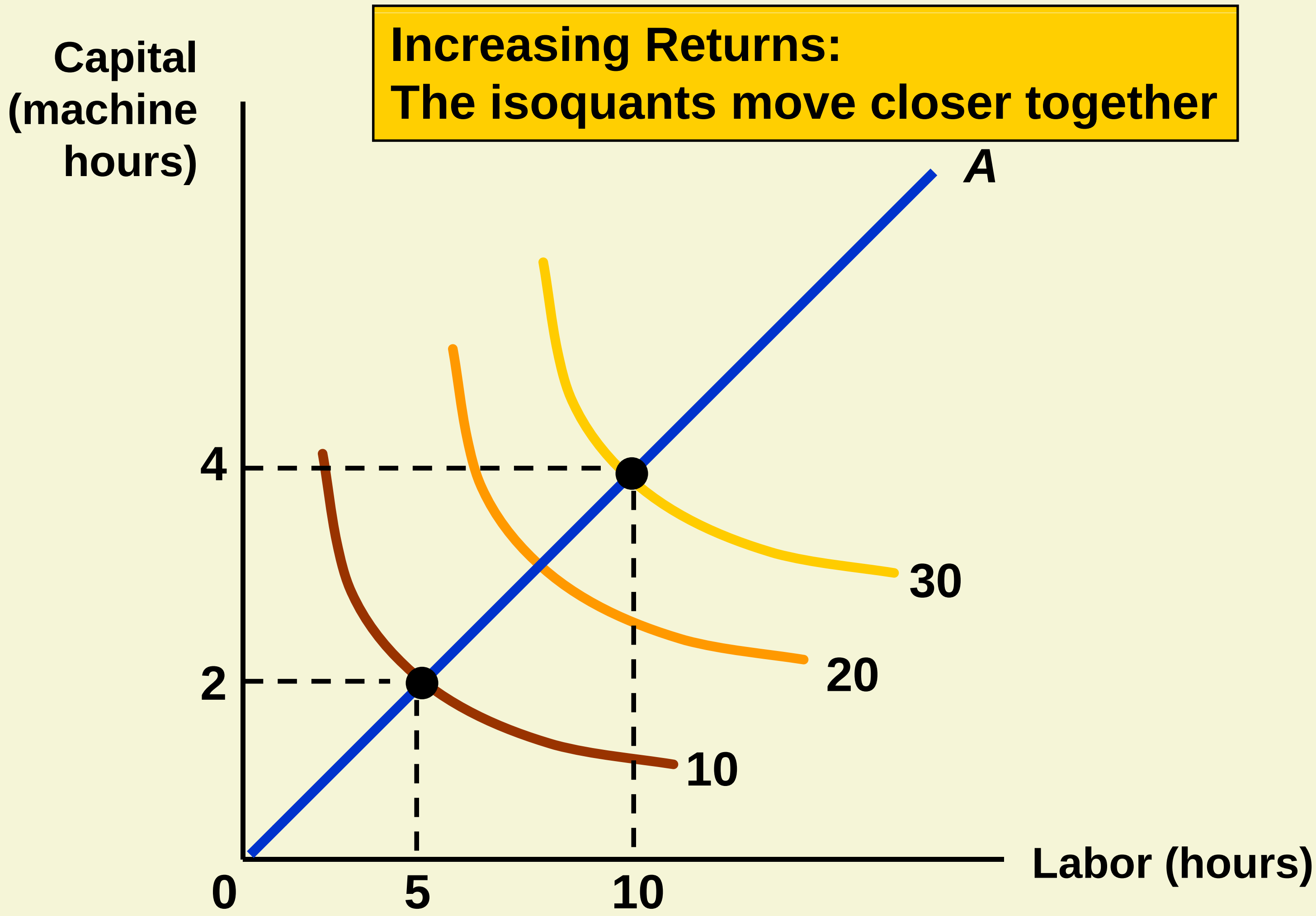
一、等产量曲线

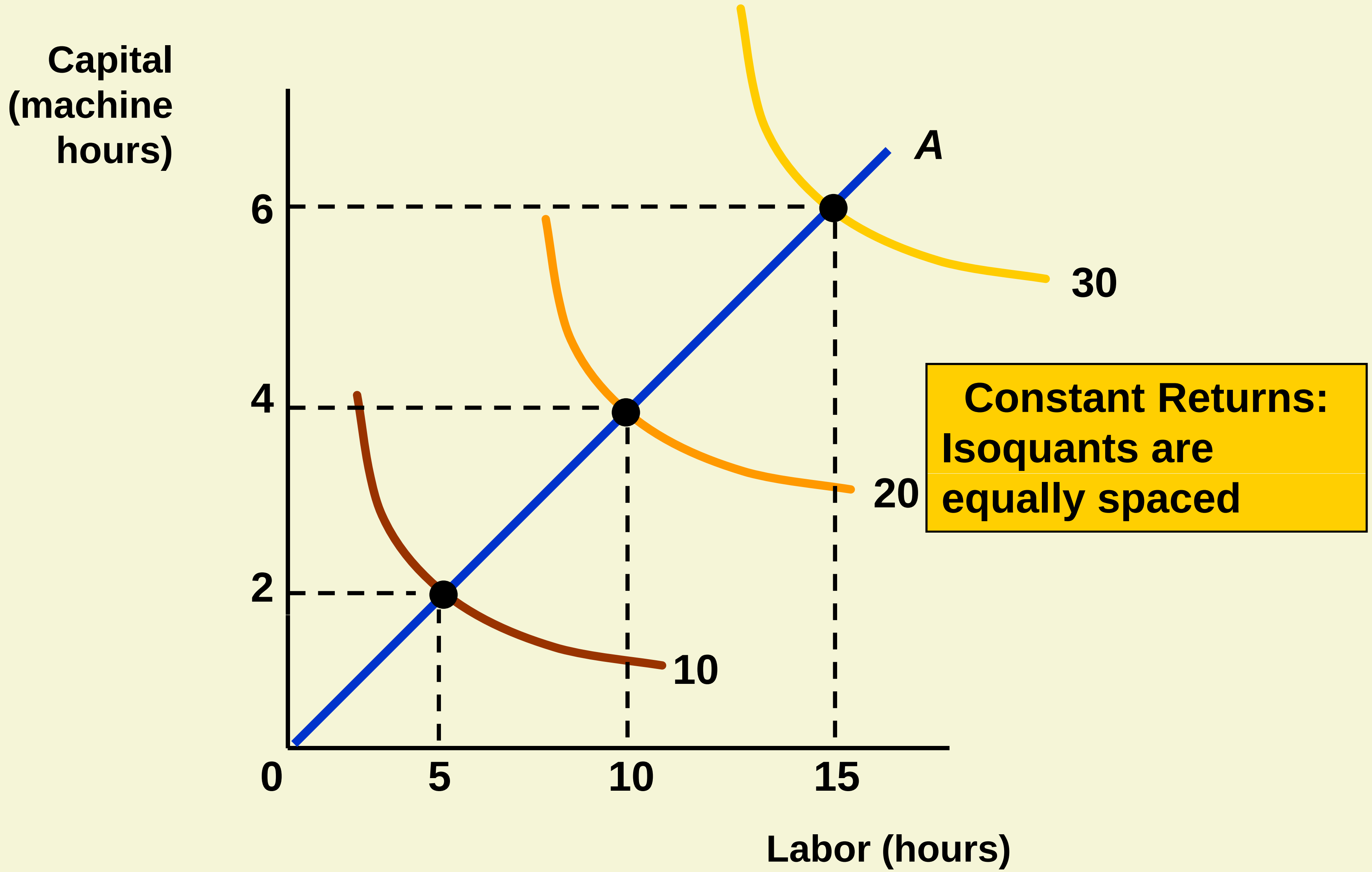
- 产出相同产量的所有可能的投入要素组合



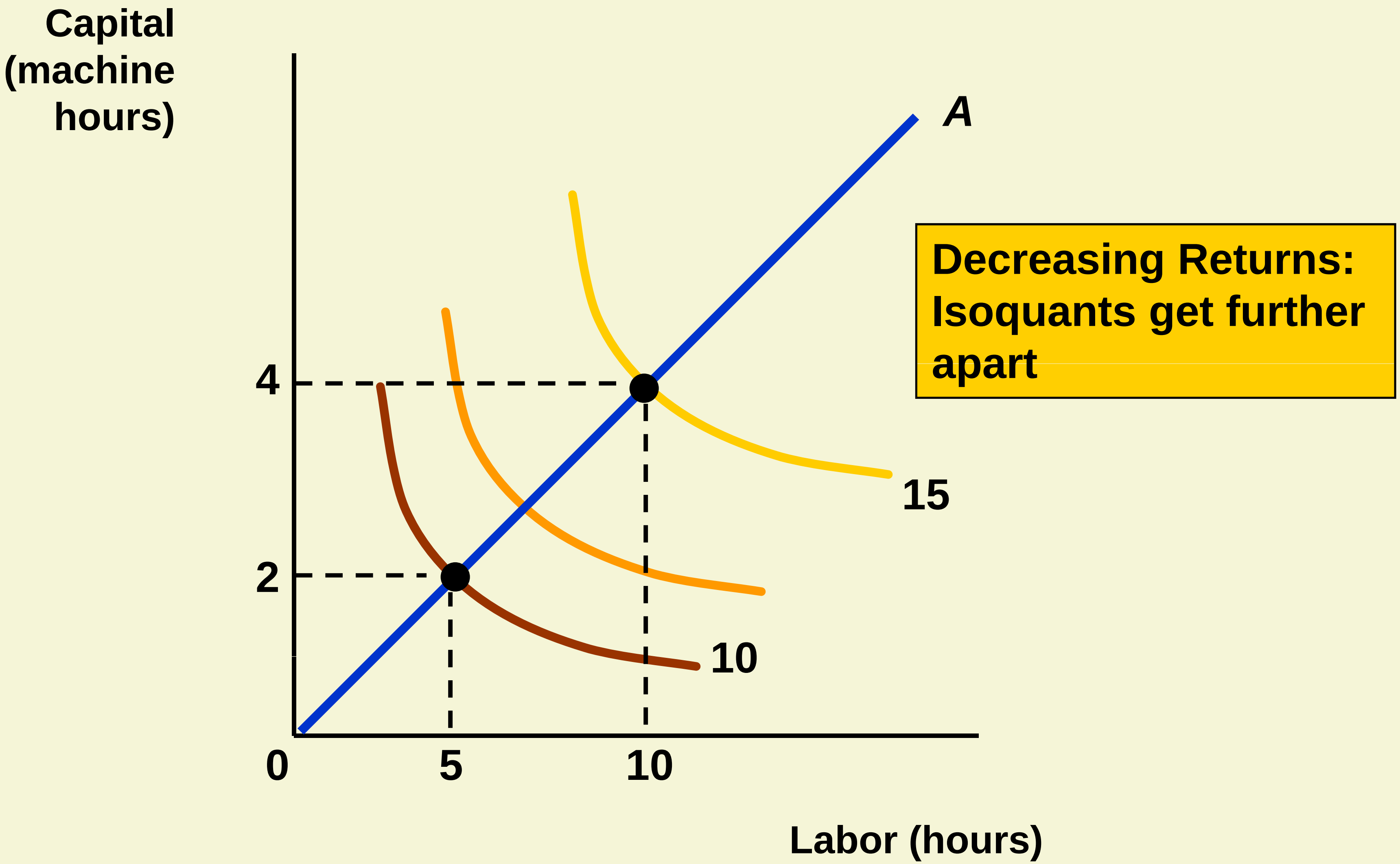
- 等产量线的特点（类同于无差异曲线）

不同规模报酬特征的等产量曲线





Capital (machine hours)
A
6
4
2
30
20
10
Constant Returns: Isoquants are equally spaced
0
5
10
15
Labor (hours)


Capital
(machine
hours)
A
Decreasing Returns:
Isoquants get further
apart
4
2
15
10
0
5
10
Labor (hours)

二、边际技术替代率（MRTS）

- 边际技术替代率(MRTS)：如果投入X变化为 Δx ，为使产量保持不变，Y的投入量必须相应改变 Δy，比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的绝对值就是边际技术替代率。

$$MRTS = \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| = \left|\frac{dy}{dx}\right|$$

- 边际技术替代率是等产量曲线的斜率的绝对值。

- 边际技术替代率(MRTS)与边际产量：

$$Q = f(x, y)$$

$$dQ = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

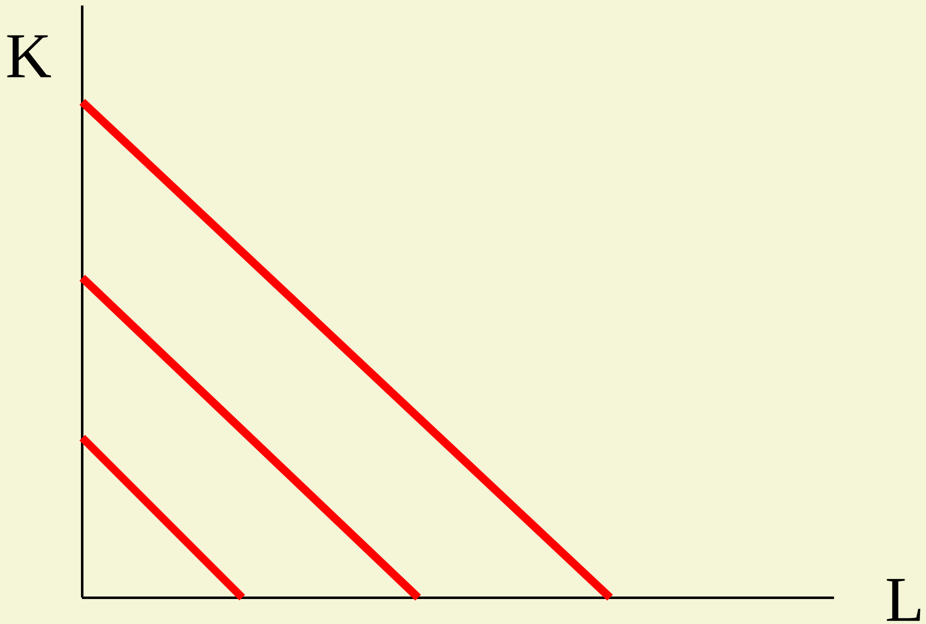
$$0 = MP_x dx + MP_y dy$$

$$MRTS = \left| -\frac{dy}{dx} \right| = \frac{MP_x}{MP_y}$$

- 边际技术替代率递减

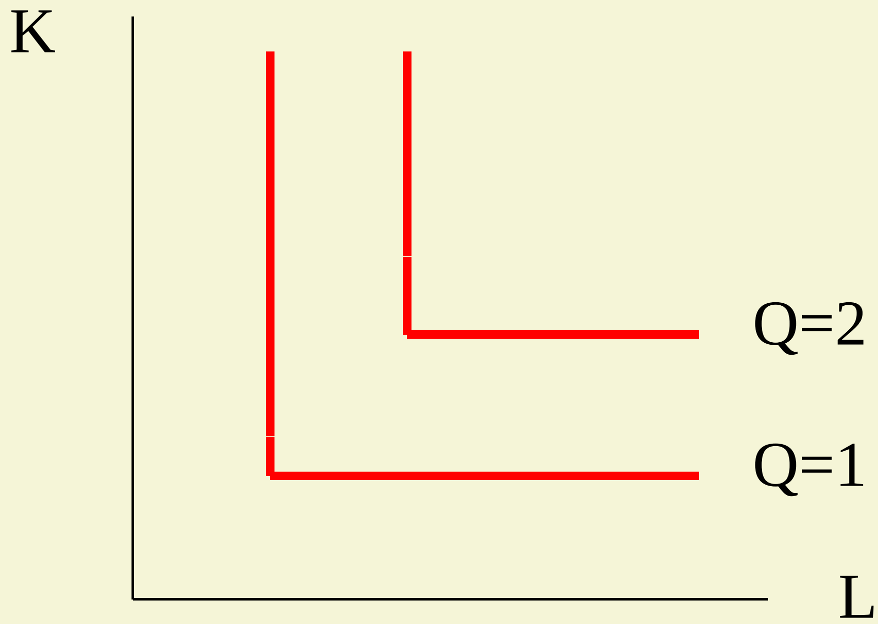
特例——投入要素完全可替代

- MRTS是常数
- 等产量线是直线



特例——投入要素比例固定

- Leontief生产函数（固定投入比例生产函数）



- 作业：109页

  2、4