⋆4.2.3 判别稳定性的直接法

Home Page
Title Page

Go Back
Full Screen
Close
Quit

⋆4.2.3 判别稳定性的直接法

- 对差分格式(45)中的格式

$$U^{k+1} = QU^k, \tag{50}$$

通过对Q^k或Q进行直接估计来给出稳定性条件，这就是直接法，也叫矩阵法。

⋆4.2.3 判别稳定性的直接法

- 对差分格式(45)中的格式

$$U^{k+1} = QU^k, \tag{50}$$

通过对Q^k或Q进行直接估计来给出稳定性条件，这就是直接法，也叫矩阵法。

- 定理4.3 差分格式(50)稳定的必要条件是存在与τ无关的常数M,使得

$$\rho(Q) \leq 1 + M\tau, \tag{51}$$

其中$\rho(Q)$是Q的谱半径。

⋆4.2.3 判别稳定性的直接法

- 对差分格式(45)中的格式

$$U^{k+1} = QU^k, \tag{50}$$

  通过对Q^k或Q进行直接估计来给出稳定性条件，这就是直接法，也叫矩阵法。

- 定理4.3 差分格式(50)稳定的必要条件是存在与τ无关的常数M,使得

$$\rho(Q) \leq 1 + M\tau, \tag{51}$$

  其中$\rho(Q)$是Q的谱半径。

- 定理4.4 若Q是正规矩阵，即满足$HH^* = H^*H$(H^*为H的共轭转置矩阵),则式(47)也是差分格式稳定的充分条件。

⋆4.2.3 判别稳定性的直接法

- 对差分格式(45)中的格式

$$U^{k+1} = QU^k, \tag{50}$$

通过对Q^k或Q进行直接估计来给出稳定性条件，这就是直接法，也叫矩阵法。

- 定理4.3 差分格式(50)稳定的必要条件是存在与τ无关的常数M,使得

$$\rho(Q) \leq 1 + M\tau, \tag{51}$$

其中$\rho(Q)$是Q的谱半径。

- 定理4.4 若Q是正规矩阵，即满足$HH^* = H^*H$(H^*为H的共轭转置矩阵),则式(47)也是差分格式稳定的充分条件。

- 推论若C是对称矩阵，Q是矩阵C的实系数有理函数$Q = R(C)$,则差分格式稳定的充要条件是

$$\rho(R(C)) \leq 1 + M\tau.$$

当C是前面已定义的$N-1$阶对称矩阵，即

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

当C是前面已定义的$N-1$阶对称矩阵，即

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

其特征值$\lambda_j^C=2\cos j\pi h, j=1,2,\cdots,N-1, h=\frac{1}{N}$,其特征向量$x^j$的分量$x_k^j=\sin jk\pi h, k=1,2,\cdots,N-1.$

当C是前面已定义的$N-1$阶对称矩阵，即

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

其特征值$\lambda_j^C = 2\cos j\pi h, j = 1,2,\cdots,N-1, h = \frac{1}{N}$,其特征向量$x^j$的分量$x_k^j = \sin jk\pi h, k = 1,2,\cdots,N-1.$

- 对于古典显格式(11),$Q=(1-2r)I+rC$,其特征值

$$\lambda_j^Q = 1-2r+2r\cos j\pi h = 1-4r\sin^2\frac{j\pi h}{2}, j=1,2,\cdots,N-1.$$

当C是前面已定义的$N-1$阶对称矩阵，即

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

其特征值$\lambda_j^C = 2\cos j\pi h, j = 1,2,\cdots,N-1, h = \frac{1}{N}$,其特征向量$x^j$的分量$x_k^j = \sin jk\pi h, k = 1,2,\cdots,N-1.$

- 对于古典显格式(11),$Q=(1-2r)I+rC$,其特征值

$$\lambda_j^Q = 1-2r+2r\cos j\pi h = 1-4r\sin^2\frac{j\pi h}{2}, j=1,2,\cdots,N-1.$$

要使$|\lambda_j^Q| \le 1+M\tau$,即$-1-M\tau \le \lambda_j^Q = 1-4r\sin^2\frac{j\pi h}{2} \le 1+M\tau$,化简为

$$4r\sin^2\frac{j\pi h}{2} \le 2+M\tau, j=1,2,\cdots,N-1$$

当C是前面已定义的$N-1$阶对称矩阵，即

$$C=\begin{bmatrix}0&1&&&\\1&0&1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&1&0&1\\&&&1&0\end{bmatrix}$$

其特征值$\lambda_j^C=2\cos j\pi h, j=1,2,\cdots,N-1, h=\frac{1}{N}$,其特征向量$x^j$的分量$x_k^j=\sin jk\pi h, k=1,2,\cdots,N-1.$

- 对于古典显格式(11),$Q=(1-2r)I+rC$,其特征值

$$\lambda_j^Q=1-2r+2r\cos j\pi h=1-4r\sin^2\frac{j\pi h}{2}, j=1,2,\cdots,N-1.$$

要使$|\lambda_j^Q|\le 1+M\tau$,即$-1-M\tau\le\lambda_j^Q=1-4r\sin^2\frac{j\pi h}{2}\le 1+M\tau$,化简为

$$4r\sin^2\frac{j\pi h}{2}\le 2+M\tau, j=1,2,\cdots,N-1$$

解得$r\le\frac{1}{2}$,即当且仅当$\frac{a\tau}{h^2}\le\frac{1}{2}$时，古典显格式稳定，即为条件稳定。

- 对于古典隐格式(14),$Q=[(1+2r)I-rC]^{-1}$，其特征值为

$$\lambda_j^Q=[(1+2r)-2r\cos j\pi h]^{-1}=[1+4r\sin^2\frac{j\pi h}{2}]^{-1}\le 1, j=1,2,\cdots,N-1,$$

因此对任何$r>0$,古典隐格式均稳定，即为绝对稳定。

- 对于古典隐格式(14),$Q=[(1+2r)I-rC]^{-1}$，其特征值为

$$\lambda_j^Q=[(1+2r)-2r\cos j\pi h]^{-1}=[1+4r\sin^2\frac{j\pi h}{2}]^{-1}\leq 1, j=1,2,\cdots,N-1,$$

因此对任何$r>0$,古典隐格式均稳定，即为绝对稳定。

- 对于六点对称格式(18),$Q=[(1+r)I-\frac{r}{2}C]^{-1}[(1-r)I+\frac{r}{2}C]$,其特征值为

$$\lambda_j^Q=\frac{1-2r\sin^2\frac{j\pi h}{2}}{1+2r\sin^2\frac{j\pi h}{2}}, j=1,2,\cdots,N-1.$$

对任何的$r>0$,有$|\lambda_j^Q|\leq 1$,因此六点对称格式也绝对稳定。

- 对于古典隐格式(14),$Q=[(1+2r)I-rC]^{-1}$，其特征值为

$$\lambda_j^Q=[(1+2r)-2r\cos j\pi h]^{-1}=[1+4r\sin^2\frac{j\pi h}{2}]^{-1}\leq 1, j=1,2,\cdots,N-1,$$

因此对任何$r>0$,古典隐格式均稳定，即为绝对稳定。

- 对于六点对称格式(18),$Q=[(1+r)I-\frac{r}{2}C]^{-1}[(1-r)I+\frac{r}{2}C]$,其特征值为

$$\lambda_j^Q=\frac{1-2r\sin^2\frac{j\pi h}{2}}{1+2r\sin^2\frac{j\pi h}{2}}, j=1,2,\cdots,N-1.$$

对任何的$r>0$,有$|\lambda_j^Q|\leq 1$,因此六点对称格式也绝对稳定。

- 对于双层加权平均格式(22).

$$Q = [(1+2\theta r)I - \theta rC]^{-1}[(1-2(1-\theta)r)I + (1-\theta)rC],$$

其特征值为

$$\lambda_j^Q = \frac{1-4(1-\theta)r\sin^2\frac{j\pi h}{2}}{1+4r\theta r\sin^2\frac{j\pi h}{2}}, j = 1, 2, \cdots, N-1,$$

- 对于双层加权平均格式(22).

$$Q = [(1+2\theta r)I - \theta r C]^{-1}[(1-2(1-\theta)r)I + (1-\theta)rC],$$

其特征值为

$$\lambda_j^Q = \frac{1-4(1-\theta)r\sin^2\frac{j\pi h}{2}}{1+4r\theta r\sin^2\frac{j\pi h}{2}}, j = 1, 2, \cdots, N-1,$$

要使$-1 \le \lambda_j^Q \le 1$,右侧的不等式恒成立，而左侧的不等式为

$$-1 - 4\theta r\frac{j\pi h}{2} \le 1 - 4(1-\theta)r\sin^2\frac{j\pi h}{2}$$

化简得$2r(1-2\theta)\sin^2\frac{j\pi h}{2} \le 1.$

  - 当$1-2\theta \le 0$时，不等式恒成立，即当$\frac{1}{2} \le \theta \le 1$时，对任意$r$，格式稳定。

- 对于双层加权平均格式(22).

$$Q=[(1+2\theta r)I-\theta rC]^{-1}[(1-2(1-\theta)r)I+(1-\theta)rC],$$

其特征值为

$$\lambda_j^Q=\frac{1-4(1-\theta)r\sin^2\frac{j\pi h}{2}}{1+4r\theta r\sin^2\frac{j\pi h}{2}},j=1,2,\cdots,N-1,$$

要使$-1\le\lambda_j^Q\le 1$,右侧的不等式恒成立，而左侧的不等式为

$$-1-4\theta r\frac{j\pi h}{2}\le 1-4(1-\theta)r\sin^2\frac{j\pi h}{2}$$

化简得$2r(1-2\theta)\sin^2\frac{j\pi h}{2}\le 1$.

  - 当$1-2\theta\le 0$时，不等式恒成立，即当$\frac{1}{2}\le\theta\le 1$时，对任意$r$，格式稳定。
  - 当$1-2\theta>0$时，必须$2r(1-2\theta)\le 1$,即当$0\le\theta<\frac{1}{2}$时，格式稳定的充分条件为$r=\frac{a\tau}{h^2}\le\frac{1}{2(1-2\theta)}$.

- 对于双层加权平均格式(22).

$$Q=[(1+2\theta r)I-\theta rC]^{-1}[(1-2(1-\theta)r)I+(1-\theta)rC],$$

其特征值为

$$\lambda_j^Q=\frac{1-4(1-\theta)r\sin^2\frac{j\pi h}{2}}{1+4r\theta r\sin^2\frac{j\pi h}{2}},j=1,2,\cdots,N-1,$$

要使$-1\le\lambda_j^Q\le 1$,右侧的不等式恒成立，而左侧的不等式为

$$-1-4\theta r\frac{j\pi h}{2}\le 1-4(1-\theta)r\sin^2\frac{j\pi h}{2}$$

化简得$2r(1-2\theta)\sin^2\frac{j\pi h}{2}\le 1$.

- 当$1-2\theta\le 0$时，不等式恒成立，即当$\frac{1}{2}\le\theta\le 1$时，对任意$r$，格式稳定。
- 当$1-2\theta>0$时，必须$2r(1-2\theta)\le 1$,即当$0\le\theta<\frac{1}{2}$时，格式稳定的充分条件为$r=\frac{a\tau}{h^2}\le\frac{1}{2(1-2\theta)}$.

Richardson 格式

- 由于它是三层格式，由(46)Q的表达式，设$x = (x_1^T, x_2^T)^T$为Q的对应于特征值λ的特征向量，于是有

$$2r(C-2I)x_1 + x_2 = \lambda x_1, x_1 = \lambda x_2$$

Richardson 格式

- 由于它是三层格式，由(46)Q的表达式，设$x = (x_1^T, x_2^T)^T$为Q的对应于特征值λ的特征向量，于是有

$$2r(C-2I)x_1 + x_2 = \lambda x_1, x_1 = \lambda x_2$$

- 显然$x_2 \neq 0$,将最后一式代入前一式，得

$$2\lambda r(C-2I)x_2 + x_2 = \lambda^2 x_2.$$

Richardson 格式

- 由于它是三层格式，由(46)Q的表达式，设$x = (x_1^T, x_2^T)^T$为Q的对应于特征值λ的特征向量，于是有

$$2r(C-2I)x_1 + x_2 = \lambda x_1, x_1 = \lambda x_2$$

- 显然$x_2 \neq 0$,将最后一式代入前一式，得

$$2\lambda r(C-2I)x_2 + x_2 = \lambda^2 x_2.$$

- 从而

$$2\lambda rCx_2 = \lambda^2 x_2 - x_2 + 4\lambda r x_2, \Rightarrow Cx_2 = (2 + \frac{\lambda}{2r} - \frac{1}{2\lambda r})x_2$$

- 可见$\mu = 2 + \frac{\lambda}{2r} - \frac{1}{2\lambda r}$是$C$的特征值，同时，又有$\mu = 2\cos j\pi h$

- 于是

$$4\lambda r \cos j\pi h = 4\lambda r + r^2 - 1$$

化简得

$$\lambda^2 d + (8r\sin^2\frac{j\pi h}{2})\lambda - 1 = 0$$

- 于是

$$4\lambda r \cos j\pi h = 4\lambda r + r^2 - 1$$

化简得

$$\lambda^2 d + (8r\sin^2\frac{j\pi h}{2})\lambda - 1 = 0$$

- 其根按模的最大值为

$$\max_j(|\lambda_1(j)|, |\lambda_2(j)|) = \max_j |4r\sin^2\frac{j\pi h}{2} + \sqrt{16r^2\sin^4\frac{j\pi h}{2} + 1}|$$

- 于是

$$4\lambda r\cos j\pi h = 4\lambda r + r^2 - 1$$

化简得

$$\lambda^2 d + (8r\sin^2\frac{j\pi h}{2})\lambda - 1 = 0$$

- 其根按模的最大值为

$$\max_j(|\lambda_1(j)|, |\lambda_2(j)|) = \max_j |4r\sin^2\frac{j\pi h}{2} + \sqrt{16r^2\sin^4\frac{j\pi h}{2} + 1}|$$

- 由$h = \frac{1}{N}, \sin\frac{j\pi h}{2} \leq \sin\frac{(N-1)\pi h}{2} = \cos\frac{\pi h}{2} > \frac{1}{2}$(当$h$充分小时),故

$$上式 > r + \sqrt{1+r^2} > 1 + r, \forall r > 0$$

- 对于任意的$r > 0$,Richardson格式绝对不稳定。

⋆4.2.4 判别稳定性的分离变量法

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

⋆4.2.4 判别稳定性的分离变量法

- 用直接法分析稳定性时，若空间变量是高维的，需要计算高阶矩阵的特征值，往往比较困难。

⋆4.2.4 判别稳定性的分离变量法

- 用直接法分析稳定性时，若空间变量是高维的，需要计算高阶矩阵的特征值，往往比较困难。
- 下面讨论利用分离变量法是对求解偏微分方程的分离变量法在离散情形下的应用。

⋆4.2.4 判别稳定性的分离变量法

- 用直接法分析稳定性时，若空间变量是高维的，需要计算高阶矩阵的特征值，往往比较困难。
- 下面讨论利用分离变量法是对求解偏微分方程的分离变量法在离散情形下的应用。
- 此方法用了Fourier级数或Fourier变换，故又称为Fourier方法。

⋆4.2.4 判别稳定性的分离变量法

- 用直接法分析稳定性时，若空间变量是高维的，需要计算高阶矩阵的特征值，往往比较困难。
- 下面讨论利用分离变量法是对求解偏微分方程的分离变量法在离散情形下的应用。
- 此方法用了Fourier级数或Fourier变换，故又称为Fourier方法。
- 假设所考虑的微分方程的系数是常数，对于一维的两层差分格式，可写成

$$\sum_{m\in\Omega_1} a_m u_{j+m}^{k+1} = \sum_{m\in\Omega_0} b_m u_{j+m}^{k}, j = 1, 2, \cdots, N-1, \qquad (52)$$

⋆4.2.4 判别稳定性的分离变量法

- 用直接法分析稳定性时，若空间变量是高维的，需要计算高阶矩阵的特征值，往往比较困难。
- 下面讨论利用分离变量法是对求解偏微分方程的分离变量法在离散情形下的应用。
- 此方法用了Fourier级数或Fourier变换，故又称为Fourier方法。
- 假设所考虑的微分方程的系数是常数，对于一维的两层差分格式，可写成

$$\sum_{m\in\Omega_1} a_m u_{j+m}^{k+1} = \sum_{m\in\Omega_0} b_m u_{j+m}^{k}, j = 1, 2, \cdots, N-1, \qquad (52)$$

- Ω_0与Ω_1分别表示在第$k, k+1$层m可取值的集合。

⋆4.2.4 判别稳定性的分离变量法

- 用直接法分析稳定性时，若空间变量是高维的，需要计算高阶矩阵的特征值，往往比较困难。
- 下面讨论利用分离变量法是对求解偏微分方程的分离变量法在离散情形下的应用。
- 此方法用了Fourier级数或Fourier变换，故又称为Fourier方法。
- 假设所考虑的微分方程的系数是常数，对于一维的两层差分格式，可写成

$$\sum_{m\in\Omega_1} a_m u_{j+m}^{k+1} = \sum_{m\in\Omega_0} b_m u_{j+m}^{k}, j = 1, 2, \cdots, N-1, \qquad (52)$$

- Ω_0与Ω_1分别表示在第$k, k+1$层m可取值的集合。
- 古典显格式$\Omega_0 = \{-1, 0, 1\}, \Omega_1 = \{0\}, a_0 = 1, b_{-1} = b_1 = r, b_0 = 1 - 2r$.

下面考虑齐次的第一边界条件：

下面考虑齐次的第一边界条件：

- 半延拓函数：设$x \in [0,1]$,对差分方程的解在x方向上的延拓函数$u^k(x)$有$u^k(0) = u^k(1) = 0$,$u^k(x)$可以是阶梯函数，如在$x \in (x_j - \frac{h}{2}, x_j + \frac{h}{2})$上,有$u^k(x) = u^k_j$.

下面考虑齐次的第一边界条件：

- 半延拓函数：设$x \in [0,1]$,对差分方程的解在x方向上的延拓函数$u^k(x)$有$u^k(0) = u^k(1) = 0$,$u^k(x)$可以是阶梯函数，如在$x \in (x_j - \frac{h}{2}, x_j + \frac{h}{2})$上,有$u^k(x) = u_j^k$.
- 思想：对固定的k,把离散网格函数u_j^k化成连续变量的函数$u^k(x)$作Fourier变换。

下面考虑齐次的第一边界条件：

- 半延拓函数：设$x \in [0,1]$,对差分方程的解在x方向上的延拓函数$u^k(x)$有$u^k(0) = u^k(1) = 0$,$u^k(x)$可以是阶梯函数，如在$x \in (x_j - \frac{h}{2}, x_j + \frac{h}{2})$上,有$u^k(x) = u^k_j$.
- 思想：对固定的k,把离散网格函数u^k_j化成连续变量的函数$u^k(x)$作Fourier变换。
- 将$u^k(x)$周期性的延拓到整个整数轴,对其展成Fourier级数

$$u^k(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v^k_m e^{i2m\pi x}, \tag{53}$$

$$v^k_m = \int_0^1 u^k(x) e^{-2i\pi m x} dx, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots ,$$

下面考虑齐次的第一边界条件：

- 半延拓函数：设$x \in [0,1]$,对差分方程的解在x方向上的延拓函数$u^k(x)$有$u^k(0) = u^k(1) = 0$,$u^k(x)$可以是阶梯函数，如在$x \in (x_j - \frac{h}{2}, x_j + \frac{h}{2})$上,有$u^k(x) = u_j^k$.
- 思想：对固定的k,把离散网格函数u_j^k化成连续变量的函数$u^k(x)$作Fourier变换。
- 将$u^k(x)$周期性的延拓到整个整数轴,对其展成Fourier级数

$$u^k(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_m^k e^{i2m\pi x}, \tag{53}$$

$$v_m^k = \int_0^1 u^k(x) e^{-2i\pi mx} dx, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots ,$$

- 网格函数的范数与连续变量的函数$u^k(x)$的L_2模相等，由Parseval等式

$$||u^k||_{L^2}^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^k|^2, \tag{54}$$

思想:

思想：

- 把差分格式写成连续空间变量的差分格式

$$\sum_{j\in\Omega_1} a_j u^{k+1}(x+jh) = \sum_{j\in\Omega_o} b_j u^k(x+jh). \tag{55}$$

思想：

- 把差分格式写成连续空间变量的差分格式

$$\sum_{j\in\Omega_1} a_j u^{k+1}(x+jh) = \sum_{j\in\Omega_o} b_j u^k(x+jh). \tag{55}$$

- 将$u^k(x)$的F-级数代入上式

$$\sum_{j\in\Omega_1} a_j \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_m^{k+1} e^{i2m\pi(x+jh)} = \sum_{j\in\Omega_o} b_j \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_m^k e^{i2m\pi(x+jh)}.$$

思想：

- 把差分格式写成连续空间变量的差分格式

$$\sum_{j\in\Omega_1} a_j u^{k+1}(x+jh) = \sum_{j\in\Omega_o} b_j u^k(x+jh). \tag{55}$$

- 将$u^k(x)$的F-级数代入上式

$$\sum_{j\in\Omega_1} a_j \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_m^{k+1} e^{i2m\pi(x+jh)} = \sum_{j\in\Omega_o} b_j \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_m^k e^{i2m\pi(x+jh)}.$$

- 交换求和顺序则有

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i2m\pi x}[\sum_{j\in\Omega_1} a_j e^{i2m\pi jh}]v_m^{k+1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i2m\pi x}[\sum_{j\in\Omega_0} b_j e^{i2\pi mjh}]v_m^k$$

思想：

- 把差分格式写成连续空间变量的差分格式

$$\sum_{j\in\Omega_1} a_j u^{k+1}(x+jh) = \sum_{j\in\Omega_o} b_j u^k(x+jh). \tag{55}$$

- 将$u^k(x)$的F-级数代入上式

$$\sum_{j\in\Omega_1} a_j \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_m^{k+1} e^{i2m\pi(x+jh)} = \sum_{j\in\Omega_o} b_j \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_m^{k} e^{i2m\pi(x+jh)}.$$

- 交换求和顺序则有

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i2m\pi x}[\sum_{j\in\Omega_1} a_j e^{i2m\pi jh}]v_m^{k+1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i2m\pi x}[\sum_{j\in\Omega_0} b_j e^{i2\pi mjh}]v_m^{k}$$

- 利用

$$\int_0^1 e^{i2\pi mx} e^{i2\pi nx} dx = \delta_{mn},$$

- 可推出

$$[\sum_{j\in\Omega_1} a_j e^{i2m\pi jh}]v_m^{k+1} = [\sum_{j\in\Omega_0} b_j e^{i2\pi mjh}]v_m^k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots . \tag{56}$$

- 可推出

$$[\sum_{j\in\Omega_1} a_j e^{i2m\pi jh}]v_m^{k+1} = [\sum_{j\in\Omega_0} b_j e^{i2\pi mjh}]v_m^k, m = 0, \pm1, \pm2, \cdots . \tag{56}$$

- 记$\sigma = 2m\pi, G(\sigma,\tau) = (\sum_{j\in\Omega_1} a_j e^{i\sigma jh})^{-1}(\sum_{j\in\Omega_0} b_j e^{i\sigma jh})$ 则有

$$v_m^{k+1} = G(\sigma,\tau)v_m^k, m = 0, \pm1, \pm2, \cdots . \tag{57}$$

- 可推出

$$[\sum_{j\in\Omega_1} a_j e^{i2m\pi jh}]v_m^{k+1} = [\sum_{j\in\Omega_0} b_j e^{i2\pi mjh}]v_m^k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{56}$$

- 记$\sigma = 2m\pi, G(\sigma,\tau) = (\sum_{j\in\Omega_1} a_j e^{i\sigma jh})^{-1}(\sum_{j\in\Omega_0} b_j e^{i\sigma jh})$ 则有

$$v_m^{k+1} = G(\sigma,\tau)v_m^k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{57}$$

- $G(\sigma,\tau)$称为传播因子或增长因子。
- 反复利用(57)式，有

$$v_m^k = G^k(\sigma,\tau)v_m^0.m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{58}$$

- 可推出

$$[\sum_{j\in\Omega_1} a_j e^{i2m\pi jh}]v_m^{k+1} = [\sum_{j\in\Omega_0} b_j e^{i2\pi mjh}]v_m^k, m = 0, \pm1, \pm2, \cdots . \tag{56}$$

- 记$\sigma = 2m\pi, G(\sigma,\tau) = (\sum_{j\in\Omega_1} a_j e^{i\sigma jh})^{-1}(\sum_{j\in\Omega_0} b_j e^{i\sigma jh})$ 则有

$$v_m^{k+1} = G(\sigma,\tau)v_m^k, m = 0, \pm1, \pm2, \cdots . \tag{57}$$

- $G(\sigma,\tau)$称为传播因子或增长因子。
- 反复利用(57)式，有

$$v_m^k = G^k(\sigma,\tau)v_m^0.m = 0, \pm1, \pm2, \cdots . \tag{58}$$

- 代入(54)式，得

$$||u^k(x)||_{L^2}^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^k|^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |G^k(\sigma,\tau)v_m^0|^2. \qquad (59)$$

若差分格式稳定，则存在常数$K > 0$,使上式$\leq K^2||u^0(x)||_{L^2}^2$.

- 代入(54)式，得

$$||u^k(x)||_{L^2}^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^k|^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |G^k(\sigma,\tau)v_m^0|^2. \tag{59}$$

若差分格式稳定，则存在常数$K > 0$,使上式$\le K^2||u^0(x)||_{L^2}^2$.

- 若$\{u^0(x)\}$在$L^2(0,1)$中稠密，故由上式得

$$|G^k(\sigma,\tau)| \le K, 0 < \tau \le \tau_0, 0 < k\tau \le T, \tag{60}$$

即$G^k(\sigma,\tau)$一致有界，反之，若$G^k(\sigma,\tau)$一致有界，由(59)式，可得

$$||u^k(x)||_{L^2}^2 \le K^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^0|^2 = K^2||u^0||_{L^2}^2.$$

从而差分格式稳定

- 代入(54)式，得

$$||u^k(x)||_{L^2}^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^k|^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |G^k(\sigma,\tau)v_m^0|^2. \qquad (59)$$

若差分格式稳定，则存在常数$K > 0$,使上式$\leq K^2||u^0(x)||_{L^2}^2$.

- 若$\{u^0(x)\}$在$L^2(0,1)$中稠密，故由上式得

$$|G^k(\sigma,\tau)| \leq K, 0 < \tau \leq \tau_0, 0 < k\tau \leq T, \qquad (60)$$

即$G^k(\sigma,\tau)$一致有界，反之，若$G^k(\sigma,\tau)$一致有界，由(59)式，可得

$$||u^k(x)||_{L^2}^2 \leq K^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^0|^2 = K^2||u^0||_{L^2}^2.$$

从而差分格式稳定

- $|G^k(\sigma,\tau)| \leq K$,等价于

$$|G^k(\sigma,\tau)| \leq 1 + M\tau = 1 + O(\tau).$$

此不等式成为von Meumann条件，它是单个常系数方程的双层格式按上述的L^2范数稳定的充要条件。

- 代入(54)式，得

$$||u^k(x)||_{L^2}^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^k|^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |G^k(\sigma,\tau)v_m^0|^2. \tag{59}$$

若差分格式稳定，则存在常数$K > 0$,使上式$\le K^2||u^0(x)||_{L^2}^2$.

- 若$\{u^0(x)\}$在$L^2(0,1)$中稠密，故由上式得

$$|G^k(\sigma,\tau)| \le K, 0 < \tau \le \tau_0, 0 < k\tau \le T, \tag{60}$$

即$G^k(\sigma,\tau)$一致有界，反之，若$G^k(\sigma,\tau)$一致有界，由(59)式，可得

$$||u^k(x)||_{L^2}^2 \le K^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^0|^2 = K^2||u^0||_{L^2}^2.$$

从而差分格式稳定

- $|G^k(\sigma,\tau)| \le K$,等价于

$$|G^k(\sigma,\tau)| \le 1 + M\tau = 1 + O(\tau).$$

此不等式成为von Meumann条件，它是单个常系数方程的双层格式按上述的L^2范数稳定的充要条件。

- 对于具体的差分格式，只要取$u^k(x) = v_m^k e^{i\sigma x}$代入式(55),消去公因子，即可得式(56),从而求出传播因子。

- 代入(54)式，得

$$||u^k(x)||_{L^2}^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^k|^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |G^k(\sigma,\tau)v_m^0|^2. \qquad (59)$$

若差分格式稳定，则存在常数$K > 0$,使上式$\leq K^2||u^0(x)||_{L^2}^2$.

- 若$\{u^0(x)\}$在$L^2(0,1)$中稠密，故由上式得

$$|G^k(\sigma,\tau)| \leq K, 0 < \tau \leq \tau_0, 0 < k\tau \leq T, \qquad (60)$$

即$G^k(\sigma,\tau)$一致有界，反之，若$G^k(\sigma,\tau)$一致有界，由(59)式，可得

$$||u^k(x)||_{L^2}^2 \leq K^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^0|^2 = K^2||u^0||_{L^2}^2.$$

从而差分格式稳定

- $|G^k(\sigma,\tau)| \leq K$,等价于

$$|G^k(\sigma,\tau)| \leq 1 + M\tau = 1 + O(\tau).$$

此不等式成为von Meumann条件，它是单个常系数方程的双层格式按上述的L^2范数稳定的充要条件。

- 对于具体的差分格式，只要取$u^k(x) = v_m^k e^{i\sigma x}$代入式(55),消去公因子，即可得式(56),从而求出传播因子。

例3.讨论古典格式(9)的稳定性

例3.讨论古典格式(9)的稳定性

古典显格式写成(55)的形式为

$$u^{k+1}(x) = (1-2r)u^k(x) + r[u^k(x-h) + u^k(x+h)].$$

令$u^k(x) = v_m^k e^{i\sigma x}$,代入，消去公因子$e^{i\sigma x}$得

$$v_m^{k+1} = [(1-2r) + r(e^{-i\sigma h} + e^{i\sigma h}]v_m^k = [1-2r(1-\cos\sigma h)]v_m^k$$

$$= (1-4r\sin^2\frac{\sigma h}{2})v_m^k$$

例3.讨论古典格式(9)的稳定性
古典显格式写成(55)的形式为

$$u^{k+1}(x)=(1-2r)u^k(x)+r[u^k(x-h)+u^k(x+h)].$$

令$u^k(x)=v_m^k e^{i\sigma x}$,代入，消去公因子$e^{i\sigma x}$得

$$v_m^{k+1}=[(1-2r)+r(e^{-i\sigma h}+e^{i\sigma h}]v_m^k=[1-2r(1-\cos\sigma h)]v_m^k$$

$$=(1-4r\sin^2\frac{\sigma h}{2})v_m^k$$

即得传播因子$G(\sigma,\tau)=1-4r\sin^2\frac{\sigma h}{2}$.因此von Neumann条件满足的充要条件，也就是格式稳定的充要条件是$r\le\frac{1}{2}$.

- 分离变量法也可用于分析纯初值问题的抛物型方程组问题和多维空间变量的抛物型方程的差分格式的稳定性。

- 分离变量法也可用于分析纯初值问题的抛物型方程组问题和多维空间变量的抛物型方程的差分格式的稳定性。
- 一般地，式(57)或(58)中的v^k是向量，传播因子$G(\sigma,\tau)$是矩阵，对此有以下的结论：

- 分离变量法也可用于分析纯初值问题的抛物型方程组问题和多维空间变量的抛物型方程的差分格式的稳定性。
- 一般地，式(57)或(58)中的v^k是向量，传播因子$G(\sigma,\tau)$是矩阵，对此有以下的结论：
- 定理4.5 差分格式按$||\cdot||_{L^2}$意义下稳定的充分必要条件是传播矩阵的模$||G^k(\sigma,\tau)||$(可以是任一种范数)一致有界

- 分离变量法也可用于分析纯初值问题的抛物型方程组问题和多维空间变量的抛物型方程的差分格式的稳定性。
- 一般地，式(57)或(58)中的v^k是向量，传播因子$G(\sigma,\tau)$是矩阵，对此有以下的结论：
- 定理4.5 差分格式按$||\cdot||_{L^2}$意义下稳定的充分必要条件是传播矩阵的模$||G^k(\sigma,\tau)||$(可以是任一种范数)一致有界
- 定理4.6 差分方程稳定的必要条件是以下的non Neumann条件成立：

$$\rho(G(\sigma,\tau)) \leq 1 + M\tau(M\text{为正常数})$$

为了能用von Neumann条件讨论格式的稳定性，下面给出可将它用作充分条件的部分条件。

定理4.7 当传播矩阵$G(\sigma,\tau)$满足下列条件之一时，von Neumann条件也是格式稳定的充分条件：

- (1) 格式是双层的(即$G(\sigma,\tau)$是一阶的);
- (2) $G(\sigma,\tau)$是正规矩阵(特别是对称矩阵);
- (3) $G(\sigma,\tau)$有完全特征向量系$X(\sigma,\tau), X(\sigma,\tau)$的条件数$||X^{-1}||||X||$关于$\sigma,\tau$一致有界；
- (4)$G(\sigma,\tau) = Y^{-1}(\sigma,\tau)J(\sigma,\tau)Y(\sigma,\tau), J(\sigma,\tau)$是它的Jordan标准型，$Y(\sigma,\tau)$的条件数一致有界，且$\rho(G(\sigma,\tau)) < 1$;
- (5)在(4)的条件下，$\rho(G(\sigma,\tau)) \le 1$,而模为1的特征值是非亏损的；
- (6)$G(\sigma,\tau)$有完全特征向量系$X(\sigma,\tau)$(其列向量是单位长度的),且存在正常数α,有$|det(X(\sigma,\tau)| \ge \alpha > 0$;
- (7) $G(\sigma,\tau)$是二阶上三角阵，$G(\sigma,\tau) = \begin{bmatrix} \lambda_1(\sigma,\tau) & g(\sigma,\tau) \\ 0 & \lambda_2(\sigma,\tau) \end{bmatrix}$，其中$|\lambda(\sigma,\tau)| \le c_0 < 1, |\lambda_2(\sigma,\tau)| \le 1, g(\sigma,\tau)$有界；
- (8)$G(\sigma,\tau)$是二阶矩阵，其元素有界(与σ,τ无关),其按模较小的特征值$\lambda_1| \le \delta < 1$($\delta$与$\tau,\sigma$无关)。

例4.讨论Dufort-Frankel格式

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} = a\frac{u_{j+1}^k - u_j^{k+1} - u_j^{k-1} + u_{j-1}^k}{h^2}, \tag{62}$$

$j = 1, 2, \cdots, N-1, k = 1, 2, \cdots, M-1$的稳定性。

例4.讨论Dufort-Frankel格式

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^{k-1}}{2\tau}=a\frac{u_{j+1}^k-u_j^{k+1}-u_j^{k-1}+u_{j-1}^k}{h^2}, \qquad (62)$$

$j=1,2,\cdots,N-1, k=1,2,\cdots,M-1$的稳定性。

解：记$W_j^k=[u_j^k,u_{j-1}^k]^T$,则可将格式(62)化为

$$\begin{bmatrix} 1+2r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W_j^{k+1}=\begin{bmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(W_{j+1}^k+W_{j-1}^k)+\begin{bmatrix} 0 & 1-2r \\ 1 & 0 \end{bmatrix} W_j^k$$

例4.讨论Dufort-Frankel格式

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^{k-1}}{2\tau}=a\frac{u_{j+1}^k-u_j^{k+1}-u_j^{k-1}+u_{j-1}^k}{h^2}, \tag{62}$$

$j=1,2,\cdots,N-1,k=1,2,\cdots,M-1$的稳定性。

解：记$W_j^k=[u_j^k,u_{j-1}^k]^T$,则可将格式(62)化为

$$\begin{bmatrix} 1+2r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W_j^{k+1}=\begin{bmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(W_{j+1}^k+W_{j-1}^k)+\begin{bmatrix} 0 & 1-2r \\ 1 & 0 \end{bmatrix} W_j^k$$

由此可求出格式的传播矩阵

$$G(\sigma,\tau)=\frac{1}{1+2r}\begin{bmatrix} 4r\cos\sigma h & 1-2r \\ 1+2r & 0 \end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$\lambda^2-\frac{4r\cos\sigma h}{1+2r}\lambda-\frac{1-2r}{1+2r}=0.$$

例4.讨论Dufort-Frankel格式

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^{k-1}}{2\tau}=a\frac{u_{j+1}^k-u_j^{k+1}-u_j^{k-1}+u_{j-1}^k}{h^2}, \tag{62}$$

$j=1,2,\cdots,N-1,k=1,2,\cdots,M-1$的稳定性。

解：记$W_j^k=[u_j^k,u_{j-1}^k]^T$,则可将格式(62)化为

$$\begin{bmatrix} 1+2r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W_j^{k+1}=\begin{bmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(W_{j+1}^k+W_{j-1}^k)+\begin{bmatrix} 0 & 1-2r \\ 1 & 0 \end{bmatrix} W_j^k$$

由此可求出格式的传播矩阵

$$G(\sigma,\tau)=\frac{1}{1+2r}\begin{bmatrix} 4r\cos\sigma h & 1-2r \\ 1+2r & 0 \end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$\lambda^2-\frac{4r\cos\sigma h}{1+2r}\lambda-\frac{1-2r}{1+2r}=0.$$

可以证明，对实系数二次方程$\lambda^2-b\lambda-c=0$的根按模不大于1的充要条件$|b|\le 1-v\le 2$.

例4.讨论Dufort-Frankel格式

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^{k-1}}{2\tau}=a\frac{u_{j+1}^k-u_j^{k+1}-u_j^{k-1}+u_{j-1}^k}{h^2}, \tag{62}$$

$j=1,2,\cdots,N-1, k=1,2,\cdots,M-1$的稳定性。

解：记$W_j^k=[u_j^k,u_{j-1}^k]^T$,则可将格式(62)化为

$$\begin{bmatrix} 1+2r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W_j^{k+1}=\begin{bmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(W_{j+1}^k+W_{j-1}^k)+\begin{bmatrix} 0 & 1-2r \\ 1 & 0 \end{bmatrix} W_j^k$$

由此可求出格式的传播矩阵

$$G(\sigma,\tau)=\frac{1}{1+2r}\begin{bmatrix} 4r\cos\sigma h & 1-2r \\ 1+2r & 0 \end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$\lambda^2-\frac{4r\cos\sigma h}{1+2r}\lambda-\frac{1-2r}{1+2r}=0.$$

可以证明，对实系数二次方程$\lambda^2-b\lambda-c=0$的根按模不大于1的充要条件$|b|\le 1-v\le 2$.

显然上述特征方程的系数满足此条件，故对任意$r = \frac{a\tau}{h^2} > 0$,有

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq 1.$$

又由于$|\lambda_1||\lambda_2| = |\frac{1-2r}{1+2r}| < 1$,得

$$|\lambda_1| \leq \sqrt{|\frac{1-2r}{1+2r}| < 1} < 1.$$

由定理4.7中的(8),可知Dufort-Frankel格式对任意$r > 0$稳定

分离变量法也适用于多个空间变量；例如：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & 0 < x, y < 1, 0 < t \leq T, \\ u(x, y, 0) = \phi(x, y), & 0 \leq x, y \leq 1, \\ u(0, y, t) = u(1, y, t)0, \\ u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0 \end{cases}$$

分离变量法也适用于多个空间变量；例如：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & 0 < x, y < 1, 0 < t \leq T, \\ u(x, y, 0) = \phi(x, y), & 0 \leq x, y \leq 1, \\ u(0, y, t) = u(1, y, t)0, \\ u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0 \end{cases}$$

- 取两个空间步长都为h,差分格式为：

$$\sum_{\beta \in \Omega_1} \alpha_{\beta_1, \beta_2} u_{i+\beta_1, j+\beta_2}^{k+1} = \sum_{\beta \in \Omega_0} b_{\beta_1, \beta_2} u_{i+\beta_1, j+\beta_2}^{k}. \tag{64}$$

其中$\beta = (\beta_1, \beta_2)^T$,初值条件为

$$\begin{cases} u_{ij}^0 = \phi_{ij}, \\ u_{0j}^k = u_{Nj}^k = u_{i0}^k = u_{iN}^k = 0, \end{cases}$$

$i, j = 0, 1, \cdots, N$

- 将u_{ij}^k延拓为$0 \le x \le y \le 1$上的二元函数$u^k(x,y)$,则有

$$\sum_{\beta\in\Omega_1} \alpha_{\beta_1,\beta_2} u^{k+1}(x+\beta_1 h, y+\beta_2 h) = \sum_{\beta\in\Omega_0} b_{\beta_1,\beta_2} u^k(x+\beta_1 h, y+\beta_2 h).$$

- 将u_{ij}^k延拓为$0 \le x \le y \le 1$上的二元函数$u^k(x,y)$,则有

$$\sum_{\beta\in\Omega_1} \alpha_{\beta_1,\beta_2} u^{k+1}(x+\beta_1 h, y+\beta_2 h) = \sum_{\beta\in\Omega_0} b_{\beta_1,\beta_2} u^k(x+\beta_1 h, y+\beta_2 h).$$

- 将$u^k(x,y)$周期的延拓到整个二维空间，展开Fourier级数

$$u^k(x,y) = \sum_{m_1,m_2} v^k_{m_1,m_2} e^{i2\pi(m_1 x + m_2 y)}$$

- 将u_{ij}^k延拓为$0 \le x \le y \le 1$上的二元函数$u^k(x,y)$,则有

$$\sum_{\beta\in\Omega_1} \alpha_{\beta_1,\beta_2} u^{k+1}(x+\beta_1 h, y+\beta_2 h) = \sum_{\beta\in\Omega_0} b_{\beta_1,\beta_2} u^k(x+\beta_1 h, y+\beta_2 h).$$

- 将$u^k(x,y)$周期的延拓到整个二维空间，展开Fourier级数

$$u^k(x,y) = \sum_{m_1,m_2} v^k_{m_1,m_2} e^{i2\pi(m_1 x + m_2 y)}$$

- 由等式

$$||u^k||^2_{L^2} = \int_0^1\int_0^1 (u^k(x,y))^2 dxdy = \sum_{m_1,m_2} |v^k_{m_1,m_2}|^2.$$

- 将u_{ij}^k延拓为$0 \le x \le y \le 1$上的二元函数$u^k(x,y)$,则有

$$\sum_{\beta\in\Omega_1} \alpha_{\beta_1,\beta_2} u^{k+1}(x+\beta_1 h, y+\beta_2 h) = \sum_{\beta\in\Omega_0} b_{\beta_1,\beta_2} u^k(x+\beta_1 h, y+\beta_2 h).$$

- 将$u^k(x,y)$周期的延拓到整个二维空间，展开Fourier级数

$$u^k(x,y) = \sum_{m_1,m_2} v_{m_1,m_2}^k e^{i2\pi(m_1x+m_2y)}$$

- 由等式

$$||u^k||_{L^2}^2 = \int_0^1 \int_0^1 (u^k(x,y))^2 dxdy = \sum_{m_1,m_2} |v_{m_1,m_2}^k|^2.$$

- 可推出

$$v_{m_1,m_2}^{k+1} = G(\sigma,\tau) v_{m_1,m_2}^k.$$

- 传播因子为

$$G(\sigma,\tau)=[\sum_{\beta\in\Omega_1}a_{\beta_1,\beta_2}e^{ih(\beta_1\sigma_1+\beta_2\sigma_2)}]^{-1}[\sum_{\beta\in\Omega_0}b_{\beta_1,\beta_2}e^{ih(\beta_1\sigma_1+\beta_2\sigma_2)}]$$

- 传播因子为

$$G(\sigma,\tau) = [\sum_{\beta\in\Omega_1} a_{\beta_1,\beta_2} e^{ih(\beta_1\sigma_1+\beta_2\sigma_2)}]^{-1}[\sum_{\beta\in\Omega_0} b_{\beta_1,\beta_2} e^{ih(\beta_1\sigma_1+\beta_2\sigma_2)}]$$

- 由此推出，von Neumann条件是差分格式(64)稳定的充要条件。

- 传播因子为

$$G(\sigma,\tau)=[\sum_{\beta\in\Omega_1}a_{\beta_1,\beta_2}e^{ih(\beta_1\sigma_1+\beta_2\sigma_2)}]^{-1}[\sum_{\beta\in\Omega_0}b_{\beta_1,\beta_2}e^{ih(\beta_1\sigma_1+\beta_2\sigma_2)}]$$

- 由此推出，von Neumann条件是差分格式(64)稳定的充要条件。
- 分离变量法要求方程是常系数的，且具有周期性的边界条件。

- 传播因子为

$$G(\sigma,\tau)=[\sum_{\beta\in\Omega_1} a_{\beta_1,\beta_2}e^{ih(\beta_1\sigma_1+\beta_2\sigma_2)}]^{-1}[\sum_{\beta\in\Omega_0} b_{\beta_1,\beta_2}e^{ih(\beta_1\sigma_1+\beta_2\sigma_2)}]$$

- 由此推出，von Neumann条件是差分格式(64)稳定的充要条件。
- 分离变量法要求方程是常系数的，且具有周期性的边界条件。
- 对于变系数问题一般不能用分离变量法或直接法讨论差分格式的稳定性。

- 传播因子为

$$G(\sigma,\tau)=[\sum_{\beta\in\Omega_1} a_{\beta_1,\beta_2}e^{ih(\beta_1\sigma_1+\beta_2\sigma_2)}]^{-1}[\sum_{\beta\in\Omega_0} b_{\beta_1,\beta_2}e^{ih(\beta_1\sigma_1+\beta_2\sigma_2)}]$$

- 由此推出，von Neumann条件是差分格式(64)稳定的充要条件。
- 分离变量法要求方程是常系数的，且具有周期性的边界条件。
- 对于变系数问题一般不能用分离变量法或直接法讨论差分格式的稳定性。
- 除了以上两种方法之外，比较常用的有效方法还有能量估计式(或称能量不等式方法),从稳定性出发，通过一系列范数的估计式来完成的。

⋆4.3 高维方程的差分格式

- 对于空间变量是多维的情况，4.1中提出的差分格式一般都可以推广到高维情形。

⋆4.3 高维方程的差分格式

- 对于空间变量是多维的情况，4.1中提出的差分格式一般都可以推广到高维情形。
- 对于稳定性，显格式是条件稳定，隐格式是绝对稳定的。

⋆4.3 高维方程的差分格式

- 对于空间变量是多维的情况，4.1中提出的差分格式一般都可以推广到高维情形。
- 对于稳定性，显格式是条件稳定，隐格式是绝对稳定的。
- 对于隐格式，一维：每次解一个三对角方程组，N-1阶，可用追赶法求解；。

⋆4.3 高维方程的差分格式

- 对于空间变量是多维的情况，4.1中提出的差分格式一般都可以推广到高维情形。
- 对于稳定性，显格式是条件稳定，隐格式是绝对稳定的。
- 对于隐格式，一维：每次解一个三对角方程组，N-1阶，可用追赶法求解；。
- 二维：每次解一个五队角，$(N-1)^2$阶，不能用追赶法
- 在n维情形是$2n+1$对角的，而系数矩阵的阶为$(N-1)^n$

⋆4.3 高维方程的差分格式

- 对于空间变量是多维的情况，4.1中提出的差分格式一般都可以推广到高维情形。
- 对于稳定性，显格式是条件稳定，隐格式是绝对稳定的。
- 对于隐格式，一维：每次解一个三对角方程组，N-1阶，可用追赶法求解；。
- 二维：每次解一个五队角，$(N-1)^2$阶，不能用追赶法
- 在n维情形是$2n+1$对角的，而系数矩阵的阶为$(N-1)^n$
- 此时不能使用追赶法，即使采用各种最佳迭代格式，其计算量也大大高于显格式。

⋆4.3 高维方程的差分格式

- 对于空间变量是多维的情况，4.1中提出的差分格式一般都可以推广到高维情形。
- 对于稳定性，显格式是条件稳定，隐格式是绝对稳定的。
- 对于隐格式，一维：每次解一个三对角方程组，N-1阶，可用追赶法求解；。
- 二维：每次解一个五队角，$(N-1)^2$阶，不能用追赶法
- 在n维情形是$2n+1$对角的，而系数矩阵的阶为$(N-1)^n$
- 此时不能使用追赶法，即使采用各种最佳迭代格式，其计算量也大大高于显格式。
- 交替方向隐格式：是一类绝对稳定的，而每层计算能分解成若干个隐格式(可用追赶法求解)的计算格式。

⋆4.3 高维方程的差分格式

- 对于空间变量是多维的情况，4.1中提出的差分格式一般都可以推广到高维情形。
- 对于稳定性，显格式是条件稳定，隐格式是绝对稳定的。
- 对于隐格式，一维：每次解一个三对角方程组，N-1阶，可用追赶法求解；。
- 二维：每次解一个五队角，$(N-1)^2$阶，不能用追赶法
- 在n维情形是$2n+1$对角的，而系数矩阵的阶为$(N-1)^n$
- 此时不能使用追赶法，即使采用各种最佳迭代格式，其计算量也大大高于显格式。
- 交替方向隐格式：是一类绝对稳定的，而每层计算能分解成若干个隐格式(可用追赶法求解)的计算格式。
- δ_x^2, δ_y^2分别表示关于x和y的二阶中心差分，即

$$\delta_x^2 u_{ij}^k = u_{i+1,j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1,j}^k, \delta_y^2 u_{ij}^k = u_{i,j+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{i,j-1}^k,$$

这里k可以不是整数。

⋆4.3 高维方程的差分格式

- 对于空间变量是多维的情况，4.1中提出的差分格式一般都可以推广到高维情形。
- 对于稳定性，显格式是条件稳定，隐格式是绝对稳定的。
- 对于隐格式，一维：每次解一个三对角方程组，N-1阶，可用追赶法求解；。
- 二维：每次解一个五队角，$(N-1)^2$阶，不能用追赶法
- 在n维情形是$2n+1$对角的，而系数矩阵的阶为$(N-1)^n$
- 此时不能使用追赶法，即使采用各种最佳迭代格式，其计算量也大大高于显格式。
- 交替方向隐格式：是一类绝对稳定的，而每层计算能分解成若干个隐格式(可用追赶法求解)的计算格式。
- δ_x^2, δ_y^2分别表示关于x和y的二阶中心差分，即

$$\delta_x^2 u_{ij}^k = u_{i+1,j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1,j}^k, \delta_y^2 u_{ij}^k = u_{i,j+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{i,j-1}^k,$$

  这里k可以不是整数。
- 交替方向隐格式，简称为ADI格式，有时也称为可分裂格式。

⋆4.3.1 P-R格式

- 作为模型，考虑二维热传导方程的边值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & 0 < x, y < 1, 0 < t \le T \\
u(x, y, 0) = \phi(x, y), & 0 \le x, y < 1 \\
u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0 & \\
u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, &
\end{cases}
$$

⋆4.3.1 P-R格式

- 作为模型，考虑二维热传导方程的边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & 0 < x, y < 1, 0 < t \le T \\ u(x, y, 0) = \phi(x, y), & 0 \le x, y < 1 \\ u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0 & \\ u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, & \end{cases}$$

- 取x, y方向的空间步长均为$h = \frac{1}{N}$,时间步长为τ.

⋆4.3.1 P-R格式

- 作为模型，考虑二维热传导方程的边值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & 0 < x, y < 1, 0 < t \le T \\
u(x, y, 0) = \phi(x, y), & 0 \le x, y < 1 \\
u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0 & \\
u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, &
\end{cases}
$$

- 取x, y方向的空间步长均为$h = \frac{1}{N}$,时间步长为τ.
- 第一个ADI格式是由D.W.Peaceman和H.H.Rachford(1955)提出的

⋆4.3.1 P-R格式

- 作为模型，考虑二维热传导方程的边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & 0 < x, y < 1, 0 < t \le T \\ u(x, y, 0) = \phi(x, y), & 0 \le x, y < 1 \\ u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0 & \\ u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, & \end{cases}$$

- 取x, y方向的空间步长均为$h = \frac{1}{N}$,时间步长为τ.
- 第一个ADI格式是由D.W.Peaceman和H.H.Rachford(1955)提出的
- 他们在第k层到第$k+1$层分两步走中引进一个过渡层，即第$k+\frac{1}{2}$层，：

⋆4.3.1 P-R格式

- 作为模型，考虑二维热传导方程的边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & 0 < x, y < 1, 0 < t \leq T \\ u(x,y,0) = \phi(x,y), & 0 \leq x, y < 1 \\ u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0 \\ u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0, \end{cases}$$

- 取x, y方向的空间步长均为$h = \frac{1}{N}$,时间步长为τ.
- 第一个ADI格式是由D.W.Peaceman和H.H.Rachford(1955)提出的
- 他们在第k层到第$k+1$层分两步走中引进一个过渡层，即第$k+\frac{1}{2}$层，：
  - 从第k层到第$k+\frac{1}{2}$层时，对$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$在过渡层，对$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$在第$k$层上用二阶中心差商逼近，

⋆4.3.1 P-R格式

- 作为模型，考虑二维热传导方程的边值问题

$$
\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & 0 < x, y < 1, 0 < t \le T \\
u(x, y, 0) = \phi(x, y), & 0 \le x, y < 1 \\
u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0 & \\
u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, &
\end{cases}
$$

- 取x, y方向的空间步长均为$h = \frac{1}{N}$,时间步长为τ.
- 第一个ADI格式是由D.W.Peaceman和H.H.Rachford(1955)提出的
- 他们在第k层到第$k+1$层分两步走中引进一个过渡层，即第$k+\frac{1}{2}$层，：
  - 从第k层到第$k+\frac{1}{2}$层时，对$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$在过渡层，对$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$在第$k$层上用二阶中心差商逼近，
  - 从第$k+\frac{1}{2}$层到第$k+1$层时，对$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$在过渡层，对$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$在第$k+1$层上用二阶中心差商逼近，

⋆4.3.1 P-R格式

- 作为模型，考虑二维热传导方程的边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & 0 < x, y < 1, 0 < t \le T \\ u(x, y, 0) = \phi(x, y), & 0 \le x, y < 1 \\ u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, \end{cases}$$

- 取x, y方向的空间步长均为$h = \frac{1}{N}$,时间步长为τ.
- 第一个ADI格式是由D.W.Peaceman和H.H.Rachford(1955)提出的
- 他们在第k层到第$k+1$层分两步走中引进一个过渡层，即第$k+\frac{1}{2}$层，：
  - 从第k层到第$k+\frac{1}{2}$层时，对$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$在过渡层，对$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$在第$k$层上用二阶中心差商逼近，
  - 从第$k+\frac{1}{2}$层到第$k+1$层时，对$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$在过渡层，对$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$在第$k+1$层上用二阶中心差商逼近，
  - 每一层解$N-1$个$N-1$阶三对角方程组

- P-R格式

$$\begin{cases} \dfrac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}-u_{ij}^{k}}{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{h^2}[\delta_x^2 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \delta_y^2 u_{ij}^{k}], \\ \dfrac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{h^2}[\delta_x^2 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \delta_y^2 u_{ij}^{k+1}]. \end{cases}$$

$$i,j = 1,2,\cdots,N-1, k = 0,1,\cdots,[\frac{T}{\tau}]-1,$$

- P-R格式

$$\begin{cases} \dfrac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - u_{ij}^{k}}{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{h^2}[\delta_x^2 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \delta_y^2 u_{ij}^{k}], \\ \dfrac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{h^2}[\delta_x^2 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \delta_y^2 u_{ij}^{k+1}]. \end{cases}$$

$$i, j = 1, 2, \cdots, N-1, k = 0, 1, \cdots, [\frac{T}{\tau}] - 1,$$

- 若记$r = \frac{\tau}{h^2}$, I为恒等算子，上式可改写成：

$$\begin{cases} (I - \frac{r}{2}\delta_x^2) u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = (I + \frac{r}{2}\delta_y^2) u_{ij}^{k}, \\ (I - \frac{r}{2}\delta_y^2) u_{ij}^{k+1} = (I + \frac{r}{2}\delta_x^2) u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- P-R格式

$$\begin{cases} \dfrac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}-u_{ij}^{k}}{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{h^2}[\delta_x^2 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \delta_y^2 u_{ij}^{k}], \\ \dfrac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{h^2}[\delta_x^2 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \delta_y^2 u_{ij}^{k+1}]. \end{cases}$$

$$i,j=1,2,\cdots,N-1, k=0,1,\cdots,[\frac{T}{\tau}]-1,$$

- 若记$r=\frac{\tau}{h^2}$, I为恒等算子，上式可改写成：

$$\begin{cases} (I-\frac{r}{2}\delta_x^2)u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = (I+\frac{r}{2}\delta_y^2)u_{ij}^{k}, \\ (I-\frac{r}{2}\delta_y^2)u_{ij}^{k+1} = (I+\frac{r}{2}\delta_x^2)u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- 截断误差阶为$L_h[u]_{ij}^k-[Lu]_{ij}^k=O(\tau^2+h^2)$.

- P-R格式

$$\begin{cases} \frac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - u_{ij}^{k}}{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{h^2}[\delta_x^2 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \delta_y^2 u_{ij}^{k}], \\ \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{h^2}[\delta_x^2 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \delta_y^2 u_{ij}^{k+1}]. \end{cases}$$

$$i, j = 1, 2, \cdots, N-1, k = 0, 1, \cdots, [\frac{T}{\tau}] - 1,$$

- 若记$r = \frac{\tau}{h^2}$, I为恒等算子，上式可改写成：

$$\begin{cases} (I - \frac{r}{2}\delta_x^2)u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = (I + \frac{r}{2}\delta_y^2)u_{ij}^{k}, \\ (I - \frac{r}{2}\delta_y^2)u_{ij}^{k+1} = (I + \frac{r}{2}\delta_x^2)u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- 截断误差阶为$L_h[u]_{ij}^k - [Lu]_{ij}^k = O(\tau^2 + h^2)$.
- 稳定性：对任意$r > 0$,均有$|G(\sigma, \tau)| \le 1$,即P-R格式绝对稳定。

- P-R格式

$$\begin{cases} \dfrac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}-u_{ij}^{k}}{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{h^2}[\delta_x^2 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \delta_y^2 u_{ij}^{k}], \\ \dfrac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{h^2}[\delta_x^2 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \delta_y^2 u_{ij}^{k+1}]. \end{cases}$$

$$i, j = 1, 2, \cdots, N-1, k = 0, 1, \cdots, [\frac{T}{\tau}] - 1,$$

- 若记$r = \frac{\tau}{h^2}$, I为恒等算子，上式可改写成：

$$\begin{cases} (I - \frac{r}{2}\delta_x^2)u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = (I + \frac{r}{2}\delta_y^2)u_{ij}^{k}, \\ (I - \frac{r}{2}\delta_y^2)u_{ij}^{k+1} = (I + \frac{r}{2}\delta_x^2)u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- 截断误差阶为$L_h[u]_{ij}^k - [Lu]_{ij}^k = O(\tau^2 + h^2)$.
- 稳定性：对任意$r > 0$,均有$|G(\sigma, \tau)| \le 1$,即P-R格式绝对稳定。
- 缺点：不能推广到三维。

⋆4.3.2 Douglas格式

- Douglas 格式：

$$
\begin{cases}
\dfrac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}-u_{ij}^{k}}{\tau}=\dfrac{1}{h^2}[\delta_x^2(\dfrac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}+u_{ij}^{k}}{2})+\delta_y^2u_{ij}^{k}],\\
\dfrac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau}=\dfrac{1}{h^2}[\delta_x^2(\dfrac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}+u_{ij}^{k}}{2})+\delta_y^2(\dfrac{u_{ij}^{k+1}+u_{ij}^{k}}{2})]
\end{cases}
$$

⋆4.3.2 Douglas格式

- Douglas 格式：

$$\begin{cases} \dfrac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}-u_{ij}^{k}}{\tau} = \dfrac{1}{h^2}[\delta_x^2(\dfrac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}+u_{ij}^{k}}{2}) + \delta_y^2 u_{ij}^{k}], \\ \dfrac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau} = \dfrac{1}{h^2}[\delta_x^2(\dfrac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}+u_{ij}^{k}}{2}) + \delta_y^2(\dfrac{u_{ij}^{k+1}+u_{ij}^{k}}{2})] \end{cases}$$

- 与P-R格式一样每层只要求解具有三对角系数矩阵的方程组。

⋆4.3.2 Douglas格式

- Douglas 格式：

$$\begin{cases} \dfrac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}-u_{ij}^{k}}{\tau} = \dfrac{1}{h^2}[\delta_x^2(\dfrac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}+u_{ij}^{k}}{2}) + \delta_y^2 u_{ij}^{k}], \\ \dfrac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau} = \dfrac{1}{h^2}[\delta_x^2(\dfrac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}+u_{ij}^{k}}{2}) + \delta_y^2(\dfrac{u_{ij}^{k+1}+u_{ij}^{k}}{2})] \end{cases}$$

- 与P-R格式一样每层只要求解具有三对角系数矩阵的方程组。
- 式(70)可改写成

$$(I - \frac{r}{2}\delta_x^2)(I - \frac{r}{2}\delta_y^2)\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k}}{\tau} = \frac{1}{h^2}(\delta_x^2 + \delta_y^2)u_{ij}^{k}. \qquad (72)$$

⋆4.3.2 Douglas格式

- Douglas 格式：

$$\begin{cases} \frac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}-u_{ij}^k}{\tau} = \frac{1}{h^2}[\delta_x^2(\frac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}+u_{ij}^k}{2}) + \delta_y^2 u_{ij}^k], \\ \frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^k}{\tau} = \frac{1}{h^2}[\delta_x^2(\frac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}+u_{ij}^k}{2}) + \delta_y^2(\frac{u_{ij}^{k+1}+u_{ij}^k}{2})] \end{cases}$$

- 与P-R格式一样每层只要求解具有三对角系数矩阵的方程组。
- 式(70)可改写成

$$(I - \frac{r}{2}\delta_x^2)(I - \frac{r}{2}\delta_y^2)\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = \frac{1}{h^2}(\delta_x^2 + \delta_y^2)u_{ij}^k. \qquad (72)$$

- Douglas格式也可由(72)分裂得到，因此在二维空间变量的情形：Douglas格式与P-R格式是等价的，两者具有相同的稳定性和截断误差。

⋆4.3.2 Douglas格式

- Douglas 格式：

$$\begin{cases} \frac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}-u_{ij}^k}{\tau} = \frac{1}{h^2}[\delta_x^2(\frac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}+u_{ij}^k}{2}) + \delta_y^2 u_{ij}^k], \\ \frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^k}{\tau} = \frac{1}{h^2}[\delta_x^2(\frac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}+u_{ij}^k}{2}) + \delta_y^2(\frac{u_{ij}^{k+1}+u_{ij}^k}{2})] \end{cases}$$

- 与P-R格式一样每层只要求解具有三对角系数矩阵的方程组。
- 式(70)可改写成

$$(I - \frac{r}{2}\delta_x^2)(I - \frac{r}{2}\delta_y^2)\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = \frac{1}{h^2}(\delta_x^2 + \delta_y^2)u_{ij}^k. \tag{72}$$

- Douglas格式也可由(72)分裂得到，因此在二维空间变量的情形：Douglas格式与P-R格式是等价的，两者具有相同的稳定性和截断误差。
- Douglas格式可以推广到三维情形。

设三维模型方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

相应的Douglas格式为

$$\begin{cases}\frac{u_{ijm}^{k+\frac{1}{3}}-u_{ij}^{k}}{\tau}=\frac{1}{h^2}[\delta_x^2(\frac{u_{ijm}^{k+\frac{1}{3}}+u_{ijm}^{k}}{2})+(\delta_y^2+\delta_z^2)u_{ijm}^{k}],\\ \frac{u_{ijm}^{k+\frac{2}{3}}-u_{ij}^{k}}{\tau}=\frac{1}{h^2}[\delta_x^2(\frac{u_{ijm}^{k+\frac{1}{3}}+u_{ijm}^{k}}{2})+\delta_y^2(\frac{u_{ijm}^{k+\frac{2}{3}}+u_{ijm}^{k}}{2})+\delta_z^2u_{ijm}^{k}],\\ \frac{u_{ijm}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau}=\frac{1}{h^2}[\delta_x^2(\frac{u_{ijm}^{k+\frac{1}{3}}+u_{ijm}^{k}}{2})+\delta_y^2(\frac{u_{ijm}^{k+\frac{2}{3}}+u_{ijm}^{k}}{2})+\delta_z^2(\frac{u_{ijm}^{k+1}+u_{ijm}^{k}}{2})],\end{cases}$$

整理可得：

$$\begin{cases}(I-\frac{r}{2}\delta_x^2)\frac{u_{ijm}^{k+\frac{1}{3}}-u_{ijm}^{k}}{\tau}=\frac{1}{h^2}[\delta_x^2+(\delta_y^2+\delta_z^2)u_{ijm}^{k}],\\ \frac{u_{ijm}^{k+\frac{2}{3}}-u_{ijm}^{k+\frac{1}{3}}}{\frac{\tau}{2}}=\frac{1}{h^2}\delta_y^2(u_{ijm}^{k+\frac{2}{3}}-u_{ijm}^{k}),\\ \frac{u_{ijm}^{k+1}-u_{ijm}^{k}}{\tau}=\frac{1}{h^2}[\delta_x^2(\frac{u_{ijm}^{k+\frac{1}{3}}+u_{ijm}^{k}}{2})+\delta_y^2(\frac{u_{ijm}^{k+\frac{2}{3}}+u_{ijm}^{k}}{2})+\delta_z^2(\frac{u_{ijm}^{k+1}+u_{ijm}^{k}}{2})]\end{cases}$$

可以合并成以下形式：

$$(I-\frac{r}{2}\delta_x^2)(I-\frac{r}{2}\delta_y^2)(I-\frac{r}{2}\delta_z^2)\frac{u_{ijm}^{k+1}-u_{ijm}^k}{\tau}=\frac{1}{h^2}(\delta_x^2+\delta_y^2+\delta_z^2)u_{ijm}^k.$$

- 截断误差为O(τ^2+h^2),且绝对稳定，每一步的计算都是沿一个坐标方向解具有三对角系数矩阵的方程组。

作业：

5.证明以下两种差分格式均是绝对稳定

(2).$(1+\theta)\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}-\theta\frac{u_j^k-u_j^{k-1}}{\tau}=\frac{a}{h^2}\delta_x^2 u_j^{k+1}$

(3).$\frac{1}{12}\frac{u_{j+1}^{k+1}-u_{j+1}^k}{\tau}+\frac{5}{6}\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}+\frac{1}{12}\frac{u_{j-1}^{k+1}-u_{j-1}^k}{\tau}=\frac{a}{2h^2}(\delta_x^2 u_j^{k+1}+\delta_x^2 u_j^k)$

6.证明扩散方程的Saul'ev格式

$$\begin{cases} u_j^{k+1}-u_j^k=ar(u_{j+1}^k-u_j^k-u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}), \\ u_j^{k+2}-u_j^{k+1}=ar(u_{j+1}^{k+2}-u_j^{k+2}-u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}) \end{cases}$$

是绝对稳定的($a>0, r=\frac{\tau}{h^2}$)