可测函数

Real Analysis

Hansong Huang

ECUST

At East China Normal University

2019.03

1. 可测函数
2. 可测函数

可测函数

外测度，
知道Lebesgue测度的构造
Caratheodory条件* p69, 知道环的概念，
实直线上Lebesgue可测集的等价定义*， σ-代数*p48,
测度* p48, 知道测度的一些具体例子*,

可测函数

p. 81. ex73

$A \subseteq \mathbb{R}, mA < \infty$. $\forall \varepsilon > 0$,存在有限个开区间δ_i,使得$m(A \triangle \cup_i \delta_i) < \varepsilon$.

提示：1. 当A是开集的情形.

2. $A \in \mathcal{L} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, 存在$\mathbb{R}$中的闭集$F$与开集$G$,使得$F \subseteq A \subseteq G$且$m(G - F) < \varepsilon$.

可测函数

1. $\mathbb{R}^n$中开集的Lebesgue测度怎么定义?

2. 对于正交矩阵W，和$\mathbb{R}^n$中的可测集合A，$WA=\{Wx : x \in A\}$ 是否可测？怎么证明你的结论?

- (闭集$F \subseteq A \subseteq$开集G, $WF \subseteq WA \subseteq WG$，...)
- $m(WA) = m(A)$?

当A是立方体时，是否成立？

当A是开集时，是否成立？半开半闭的不交立方体之并可以“组成”任何一个开集A.

用开集逼近一般的可测集.

可测函数

实函数- 广义函数，
取值$[-\infty, +\infty]$，但是不取"∞".

回忆几个记号的意义：
$X(f > 0) = \{x \in X : f(x) > a\}$.
$X(a < f < b) =?$
$X(f > g) =?$

实函数- 广义函数，
取值$[-\infty, +\infty]$，但是不取 “∞”.

回忆几个记号的意义：
$X(f > 0) = \{x \in X : f(x) > 0\}$.
$X(a < f < b) = \{x \in X : a < f(x) < b\}$.
$X(f > g) = \{x \in X : f(x) > g(x)\}$.

定义2.3.1 设f是X上的实函数，且对任意$a \in \mathbb{R}$，$X(f > a)$是可测集，则称f是X上的可测函数.

什么是可测集？

定义2.3.1 设f是X上的实函数，且对任意$a \in \mathbb{R}$, $X(f > a)$是可测集，则称f是X上的可测函数.

什么是可测集？可测集对应σ-代数

定义2.3.1 设f是X上的实函数，且对任意$a \in \mathbb{R}$，$X(f > a)$是可测集，则称f是X上的可测函数.

什么是可测集？可测集对应σ-代数$\mathcal{A}$.

定义2.3.1' 设f是X上的实函数，且对任意$a \in \mathbb{R}$，$X(f > a)$是$\mathcal{A}$-可测集，则称f是X上的$\mathcal{A}$-可测函数.

定义2.3.1' 设f是X上的实函数，且对任意$a \in \mathbb{R}$, $X(f > a)$是$\mathcal{A}$-可测集，则称f是X上的$\mathcal{A}$-可测函数.

$$X(f > a) \in \mathcal{A}$$

定义2.3.1" 设f是X上的实函数，且对任意$a \in \mathbb{R}$, $X(f > a)$是$\mathcal{L}$-可测集，则称f是X上的$\mathcal{L}$-可测函数.(Lebesgue可测函数)

例1. $\mathbb{R}$上的连续函数是否是$\mathcal{L}$-可测函数？
一般，$\mathbb{R}$上的连续函数是否是$\mathcal{A}$-可测函数？

例2. X为全集，$\mathcal{A}_0 = 2^X$, 证明：X上任意实函数为$\mathcal{A}_0$-可测.

例1. $\mathbb{R}$上的连续函数是否是$\mathcal{L}$-可测函数？
一般，$\mathbb{R}$上的连续函数是否是$\mathcal{A}$-可测函数？

例2. X为全集，$\mathcal{A}_0 = 2^X$, 证明：X上任意实函数为$\mathcal{A}_0$-可测.

例3. (思考) X为全集，$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X\}$,
$f : X \to \mathbb{R}$为$\mathcal{A}_1$-可测当且仅当...?

例4. $f=\chi_A$，f可测等价于A可测.
χ_A 的取值范围$\{0,1\}$,

$$\{\chi_A>a\}=?$$

例5. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$是单增函数，则对于任意$a\in\mathbb{R}$, $\{f>a\}=\emptyset$ 或者$\{f>a\}$为一区间. 因此f Borel可测. (f为$\mathcal{B}$-可测.)

$$\overline{R} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

命题2.3.2 $f : X \to \overline{R}$, $\mathcal{A}$ 是X上的σ-代数，则下列等价

(i) f 为$\mathcal{A}$-可测.

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{f \le a\} \in \mathcal{A}$

(iii)$\forall a \in \mathbb{R}$, $\{f < a\} \in \mathcal{A}$

(iv) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{f \ge a\} \in \mathcal{A}$

命题2.3.2 $f: X \to \overline{R}$, $\mathcal{A}$ 是X上的σ-代数，则下列等价

(i) f 为$\mathcal{A}$-可测.

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{f \leq a\} \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{f < a\} \in \mathcal{A}$

(iv) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{f \geq a\} \in \mathcal{A}$

(ii) $\Rightarrow$(iii) ; (iii) $\Rightarrow$ (ii)

在四则运算下，可测函数类是否保持封闭？
极限运算下，可测函数类是否保持封闭？
引入一些记号$f \vee g$
$f \wedge g$
$\sup_n f_n$
$\inf_n f_n$

可测函数

$$
\begin{aligned}
(f \vee g)(x) &= \max\{f(x), g(x)\} \\
(f \wedge g)(x) &= \min\{f(x), g(x)\} \\
(\sup_n f_n)(x) &= \sup_n f_n(x) \\
(\inf_n f_n)(x) &= \inf_n f_n(x)
\end{aligned}
$$

可测函数

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$
$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$
$$(\sup_n f_n)(x) = \sup_n f_n(x)$$
$$(\inf_n f_n)(x) = \inf_n f_n(x)$$

$$(\liminf f_n)(x) = \sup_n \inf_{k \geq n} f_n(x)$$

$$(\limsup f_n)(x) = \inf_n \sup_{k \geq n} f_n(x)$$

可测函数

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$
$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$
$$(\sup_n f_n)(x) = \sup_n f_n(x)$$
$$(\inf_n f_n)(x) = \inf_n f_n(x)$$

$$(\liminf f_n)(x) = \sup_n \inf_{k \geq n} f_n(x)$$

$$(\limsup f_n)(x) = \inf_n \sup_{k \geq n} f_n(x)$$

$$f^+ = \max(f, 0), \quad f^- = \max(-f, 0)$$

可测函数

$$f^+ = \max(f,0), \quad f^- = \max(-f,0)$$

$$|f| = f^+ + f^-$$

$$|f| = f^+ - f^-$$

命题2.3.4 设$f, g, f_n (n \geq 1)$ 为X上的广义实函数,

1. 如果f可测, g可测,
那么$|f|, f^2, f+g$可测.
2. 如果对任意的n, f_n可测,
那么$\sup f_n, \inf f_n$可测.

命题2.3.4 设$f, g, f_n(n \geq 1)$ 为X上的广义实函数，

1. 如果f可测，g可测，
那么$|f|$, f^2, $f+g$可测.
2. 如果对任意的n，f_n可测，
那么$\sup f_n$, $\inf f_n$可测.

$$(\liminf f_n)(x) = \sup_n \inf_{k\geq n} f_n(x)$$

$$(\limsup f_n)(x) = \inf_n \sup_{k\geq n} f_n(x)$$

推论：如果对任意的n，f_n可测，
那么$\liminf f_n$ 和$\limsup f_n$可测.

任务一 证明$|f|$可测.
任务二 证明f^2可测.
任务三 证明$f+g$可测.

假如上述任务光荣完成，那么...

$$f \vee g = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$$

$$f \wedge g = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

任务三 证明$f+g$可测.

$$\{f+g>a\}=\bigcup_{r\in\mathbb{R}}\{x: f(x)>r, \quad g(x)>a-r\}$$

$$\begin{aligned}\{f+g>a\} \ ?=? & \bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\{x: f(x)>r, \quad g(x)>a-r\} \\ = & \bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\left(\{f>r\}\cap\{g>a-r\}\right).\end{aligned}$$

可测函数

$$A = \{x : \lim_n f(x)\text{存在}\}.$$

$$A = \{-\infty < \liminf f_n = \limsup f_n < +\infty\} \cup$$

$$\{\limsup f_n = -\infty\} \cup \{\liminf f_n = +\infty\}$$

$$A = \{x : \lim_n f(x)\text{存在}\}.$$

$$A = \{-\infty < \liminf f_n = \limsup f_n < +\infty\} \cup$$

$$\{\limsup f_n = -\infty\} \cup \{\liminf f_n = +\infty\}$$

$$A = \{\limsup f_n - \liminf f_n = 0\}$$

$$\{-\infty < \liminf f_n\} \cap \{\limsup f_n < +\infty\}$$

定义：可测函数$\varphi : X \to \mathbb{R}$仅取有限个值，则称$\varphi$为<u>简单函数</u>.

在定义中，我们要求简单函数是可测函数.

设f仅仅取$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 验证：$X = \bigsqcup_{i=1}^{n}\{f = a_i\}$

练习:证明

$$f = \sum a_i \chi_{\{f=a_i\}}.$$

练习:证明

$$f = \sum a_i \chi_{\{f=a_i\}}.$$

反之，给定有限个可测集A_i, (A_i相互之间可以"重叠")

作$h = \sum c_i \chi_{A_i} = c_1 \chi_{A_1} + \cdots + c_m \chi_{A_m}$.

最多有几个取值?

练习:证明

$$f = \sum a_i \chi_{\{f=a_i\}}.$$

反之，给定有限个可测集A_i, (A_i相互之间可以"重叠")

作$h = \sum c_i \chi_{A_i} = c_1\chi_{A_1} + \cdots + c_m \chi_{A_m}$.

最多有几个取值?

所以，$h = \sum c_i \chi_{A_i}$只取有限个值，又是可测函数（?）

把h写成f, 可以找到有限个不相交的可测集e_i, 使得

$$f = \sum a_i \chi_{e_i}.$$

可以找到有限个不相交的可测集e_i, 使得

$$f = \sum a_i \chi_{e_i}.$$

当$X = \mathbb{R}$或者一个区间，e_i取为区间(开区间，闭区间，半开半闭区间)时，f称为阶梯函数.

注：是“有限台阶”.

例*: Cantor函数的构造.

练习：$0 \leq f \leq 1$,且f可测，则存在单增简单函数列$\{\varphi_n\}$，使得$\{\varphi_n\}$一致收敛于f.

练习：$0 \le f \le 1$,且f可测，则存在单增简单函数列$\{\varphi_n\}$，使得$\{\varphi_n\}$一致收敛于f.

思考：$0 \le f \le 1$,且f可测，则存在单减简单函数列$\{\varphi_n\}$，使得$\{\varphi_n\}$一致收敛于f.

练习：$0 \le f \le 1$,且f可测，则存在单增简单函数列$\{\varphi_n\}$，使得$\{\varphi_n\}$一致收敛于f.

思考：f有界且f可测，则存在简单函数列$\{\varphi_n\}$，使得$\{\varphi_n\}$一致收敛于f.

可测函数

(Homework) 定理2.3.6. f是X上的可测函数，则存在简单函数列$\{\varphi_n\}$，使得$\{\varphi_n\}$点点收敛于f, 且$|\varphi_n| \leq |f|$.

(Homework) 定理2.3.6. f是X上的可测函数，则存在简单函数列$\{\varphi_n\}$，使得$\{\varphi_n\}$点点收敛于f, 且$|\varphi_n| \leq |f|$.

何时可以要求$\{\varphi_n\}$是单增的？

可测函数

Thank you!