

第三次作业

一. 填空题:

1. 已知 $P(A) = 0.7, P(A-B) = 0.3, P(B) = 0.6$, 则 $P(\bar{A}\bar{B}) = \underline{0.1}$.
2. 设 A, B 是任意两个事件, 则 $P\{(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})\} = \underline{0}$.
3. 设事件 A, B 满足 $AB = \bar{A}\bar{B}$, 则 $P(A \cup B) = \underline{1}$, $P(AB) = \underline{0}$.

二. 选择题:

1. 从数列 $1, 2, \dots, n$ 中随机地取三个数 ($1 < k < n$), 则一个数小于 k , 一个数等于 k , 而一个数大于 k 的概率 (D)
A. $\frac{k-1}{n}$ B. $\frac{(k-1)(n-k)}{n^2}$ C. $\frac{(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)}$ D. $\frac{6(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)}$
2. 箱子中装有 5 个白球和 6 个黑球, 一次取出 3 只球, 发现都是同一种颜色的, 在此前提下得到的全是黑色概率为 (A)
A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{11}$ C. $\frac{6}{11}$ D. $\frac{4}{33}$
3. 设事件 A 与 B 互不相容, 则 (D).
A. $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$ B. $P(AB) = P(A)P(B)$
C. $P(A) = 1 - P(B)$ D. $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$

三. 计算题

1. 设 $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, 试就下列三种情况下分别求出 $P(\bar{A}B)$ 的值:

(1) A 与 B 互不相容;

(2) $A \subset B$;

(3) $P(AB) = \frac{1}{8}$.

解:

$$(1) P(\bar{A}B) = P(B - A) = P(B) = \frac{1}{2};$$

$$(2) P(\bar{A}B) = P(B - A) = P(B) - P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6};$$

$$(3) P(\bar{A}B) = P(B - A) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

2. 已知 10 只晶体管中有两只是次品, 在其中取两次, 每次任取一只, 作不放回抽样, 求下列事件的概率:

- (1) 两只都是正品;
- (2) 两只都是次品;
- (3) 一只是正品, 一只是次品;
- (4) 第二次取出的是次品

解: 设 A_i = “第 i 次取出的是正品”, 则

$$(1) P(A_1 A_2) = P(A_2 | A_1) P(A_1) = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{28}{45};$$

$$(2) P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) P(\bar{A}_1) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{45};$$

$$(3) P(A_1 \bar{A}_2 \cup \bar{A}_1 A_2) = P(A_1 \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 A_2) = \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{8}{9} = \frac{16}{45};$$

$$(4) P(\bar{A}_2) = P\left((A_1 \cup \bar{A}_1) \bar{A}_2\right) = P(A_1 \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{5}。$$

3. 某旅行社 100 人中有 43 人会讲英语, 35 人会讲日语, 32 人会讲日语和英语, 9 人会讲法语、英语和日语, 且每人至少会讲英语、日语、法语 3 种语言中的一种。试求:

- (1) 此人会讲英语和日语, 但不会讲法语的概率;
- (2) 此人只会讲法语的概率。

解: 设 A 、 B 、 C 分别为会讲英语、日语、法语。

$$(1) P(AB\bar{C}) = P(AB) - P(ABC) = \frac{32}{100} - \frac{9}{100} = 0.23;$$

(2)

$$\begin{aligned} P(\bar{ABC}) &= P(A \cup B \cup C - A \cup B) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \left(\frac{43}{100} + \frac{35}{100} - \frac{32}{100} \right) = 0.54 \end{aligned}$$

4. 在空战中, 甲机先向乙机开火, 击落乙机的概率是 0.2; 若乙机未被击落, 就进行还击, 击落甲机的概率是 0.3; 若甲机未被击落, 则再攻击乙机, 击落乙机的概率是 0.4。试求在这几个回合中

- (1) 甲机被击落的概率;
- (2) 乙机被击落的概率。

解: 设在这三次攻击中, “击落敌机” 事件分别为 A 、 B 、 C , 则依题意有

$$P(A) = 0.2, P(B|\bar{A}) = 0.3, P(C|\bar{A}\bar{B}) = 0.4。$$

$$(1) P(\text{甲机被击落}) = P(\bar{AB}) = P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0.24;$$

(2)

$$P(\text{乙机被击落}) = P(A \cup \bar{A} \bar{B} C) = P(A) + P(\bar{A} \bar{B} C) \\ = P(A) + P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})P(C|\bar{A} \bar{B}) = 0.424$$

5. 设 A 、 B 是两个随机事件，已知 $P(B) = \frac{1}{3}$ ， $P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{1}{4}$ ， $P(\bar{A}|B) = \frac{1}{5}$ ，试求 $P(A)$ 。

解：

$$P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(AB) = 1 - P(\bar{A} \bar{B}) - P(B) + P(B)P(A|B) \\ = 1 - P(\bar{B})P(\bar{A}|\bar{B}) - P(B) + P(B)[1 - P(\bar{A}|B)] \\ = 1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{23}{30} = 0.7667$$

6. 从数字 1, 2, 3, ..., 9 中（可重复地）任取 n 次，求 n 次所取的数字的乘积能被 10 整除的概率。

解：定义事件 A = “取到数字 5”，定义事件 B = “取到偶数”。

$$P(AB) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - [P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \bar{B})] = 1 - \frac{8^n + 5^n - 4^n}{9^n}.$$

7. 某班 n 个战士各有一支归个人保管使用的枪，外形完全一样，在一次夜间紧急集合中，每人随机地取了一支枪，求至少有一人拿到自己枪的概率。

解 这是一个配对问题。设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 个战士拿到自己的枪}\}$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。则所求的概率为 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ 。

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = \frac{1}{n};$$

$$P(A_1 A_2) = P(A_1 A_3) = \dots = P(A_{n-1} A_n) = \frac{1}{n(n-1)}; \quad (\text{共 } C_n^2 \text{ 个})$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1 A_2 A_4) = \dots = P(A_{n-2} A_{n-1} A_n) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}; \quad (\text{共 } C_n^3 \text{ 个})$$

.....

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = \frac{1}{n!}.$$

所以由概率的加法公式得

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \frac{n}{n} - C_n^2 \frac{1}{n(n-1)} + C_n^3 \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}.$$

第四次作业

一. 填空题:

1. 设事件 A, B 相互独立, 且 $P(\bar{A}) = 0.2, P(B) = 0.5$, 则 $P(B|A \cup \bar{B}) = \underline{4/9}$ 。
2. 设 A, B, C 两两独立, 且 $ABC = \Phi$, $P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}$, $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$, 则 $P(C) = \underline{0.25}$ 。
3. 已知事件 A, B 的概率 $P(A) = 0.4, P(B) = 0.6$ 且 $P(A \cup B) = 0.8$, 则 $P(A|B) = \underline{\frac{1}{3}}$, $P(B|A) = \underline{\frac{1}{2}}$ 。

二. 选择题:

1. 设袋中有 a 只黑球, b 只白球, 每次从中取出一球, 取后不放回, 从中取两次, 则第二次取出黑球的概率为 (A); 若已知第一次取到的球为黑球, 那么第二次取到的球仍为黑球的概率为 (B)

A. $\frac{a}{(a+b)}$ B. $\frac{a-1}{a+b-1}$ C. $\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$ D. $\frac{a^2}{(a+b)^2}$

2. 已知 $P(A) = 0.7, P(B) = 0.6, P(B|A) = 0.6$, 则下列结论正确的为 (B)。

A. A 与 B 互不相容; B. A 与 B 独立;
C. $A \supset B$; D. $P(B|\bar{A}) = 0.4$.

3. 对于任意两事件 A 和 B , 则下列结论正确的是 (C)。
A. 若 $AB = \emptyset$, 则 A, B 一定不独立; B. 若 $AB \neq \emptyset$, 则 A, B 一定独立;
C. 若 $AB \neq \emptyset$, 则 A, B 有可能独立; D. 若 $AB = \emptyset$, 则 A, B 一定独立

三. 计算题:

1. 设有 2 台机床加工同样的零件, 第一台机床出废品的概率为 0.03, 第二台机床出废品的概率为 0.06, 加工出来的零件混放在一起, 并且已知第一台机床加工的零件比第二台机床多一倍。

- (1) 求任取一个零件是废品的概率；
 (2) 若任取的一个零件经检查后发现是废品，则它是第二台机床加工的概率。

解：(1) 设 $B = \{\text{取出的零件是废品}\}$ ， $A_1 = \{\text{零件是第一台机床生产的}\}$ ，

$A_2 = \{\text{零件是第二台机床生产的}\}$ ，则 $P(A_1) = \frac{2}{3}$ ， $P(A_2) = \frac{1}{3}$ ，

由全概率公式得：

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = 0.03 \times \frac{2}{3} + 0.06 \times \frac{1}{3} = 0.04$$

$$(2) P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)} = \frac{0.02}{0.04} = 0.5$$

2. 三个元件串联的电路中，每个元件发生断电的概率依次为 0.1，0.2，0.5，且各元件是否断电相互独立，求电路断电的概率是多少？

解：设 A_1, A_2, A_3 分别表示第 1，2，3 个元件断电， A 表示电路断电，

则 A_1, A_2, A_3 相互独立， $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ，

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) \\ &= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) \\ &= 1 - (1-0.1)(1-0.2)(1-0.5) \\ &= 0.64 \end{aligned}$$

3. 有甲、乙、丙三个盒子，其中分别有一个白球和两个黑球、一个黑球和两个白球、三个白球和三个黑球。掷一枚骰子，若出现 1，2，3 点则选甲盒，若出现 4 点则选乙盒，否则选丙盒。然后从所选的中盒子中任取一球。求：

(1) 取出的球是白球的概率；

(2) 当取出的球为白球时，此球来自甲盒的概率。

解：设 $A = \{\text{选中的为甲盒}\}$ ， $B = \{\text{选中的为乙盒}\}$ ， $C = \{\text{选中的为丙盒}\}$ ， $D = \{\text{取出一球为白球}\}$ ，则

$$P(A) = \frac{3}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{6}, \quad P(C) = \frac{2}{6}$$

$$P(D|A) = \frac{1}{3}, \quad P(D|B) = \frac{2}{3}, \quad P(D|C) = \frac{3}{6}$$

$$(1) P(D) = \frac{3}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{4}{9}$$

$$(2) \quad P(A|D) = \frac{\frac{3}{6} \times \frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{8}$$

4. 某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而随机的拨号，求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率是多少？如果已知最后一个数字是奇数，那么此概率是多少？

解：记 H 表示拨号不超过三次而能接通。

A_i 表第 i 次拨号能接通。

$$H = A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$$

$$\begin{aligned} P(H) &= P(A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(A_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} + \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

记 B 表示最后一个数字是奇数，有

$$\begin{aligned} P(H|B) &= P(A_1|B) + P(\bar{A}_1 A_2|B) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3|B) \\ &= P(A_1|B) + P(\bar{A}_1|B)P(A_2|B\bar{A}_1) + P(\bar{A}_1|B)P(\bar{A}_2|B\bar{A}_1)P(A_3|B\bar{A}_1\bar{A}_2) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

5. 设三个工厂生产的一种产品，次品率分别为 0.1、0.15 和 0.2，这三个工厂的这种产品在市场的占有率分别为 0.5、0.4 和 0.1，现在从市场中任意抽取一件这种产品，经检验后发现它是次品，求这件产品分别是这三家工厂生产的概率，并判断它最有可能是由哪家工厂生产的？

解：设 A 、 B 、 C 分别表示三个厂的产品， D 表示是次品。则

$$P(A) = 0.5, P(B) = 0.4, P(C) = 0.1; P(D|A) = 0.1, P(D|B) = 0.15, P(D|C) = 0.2$$

由全概率公式有

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) \\ &= 0.1 \times 0.5 + 0.15 \times 0.4 + 0.2 \times 0.1 = 0.13 \end{aligned}$$

由贝叶斯公式分别有

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{0.1 \times 0.5}{0.13} = \frac{5}{13}$$

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \frac{0.15 \times 0.4}{0.13} = \frac{6}{13}$$

$$P(C|D) = \frac{P(D|C)P(C)}{P(D)} = \frac{2}{13}$$

相比较而言，这件次品是工厂 B 生产的可能性最大。

6. 三个人同时射击树上的一只鸟，设他们各自射中的概率分别为 0.5, 0.6, 0.7。

若无人射中的鸟不会坠地；只有一人射中的鸟坠地的概率为 0.2；两人射中的鸟坠地的概率为 0.6；三人射中的鸟一定坠地。三人同时向鸟射击一次,求鸟坠地的概率？

解：设 $A_i = \{\text{第}i\text{个人射中}\}$, ($i=1, 2, 3$)，由题意知

$$P(A_1) = 0.5, P(A_2) = 0.6, P(A_3) = 0.7$$

假 设 $B_0 = \{\text{三人都射不中}\}$, $B_1 = \{\text{只有一人射中}\}$, $B_2 = \{\text{恰有两人射中}\}$,

$B_3 = \{\text{三人同时射中}\}$, $C = \{\text{鸟坠地}\}$ 。

$$P(C|B_0) = 0, P(C|B_1) = 0.2, P(C|B_2) = 0.6, P(C|B_3) = 1,$$

$$P(B_0) = 0.06, P(B_1) = 0.29, P(B_2) = 0.44, P(B_3) = 0.21 \quad .$$

由全概公式

$$P(C) = \sum_{i=0}^3 P(B_i)P(C|B_i) = 0.532$$