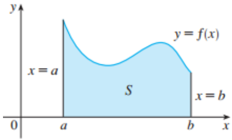
§1 定积分的概念

一、曲边梯形的面积

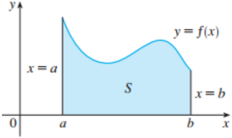
定义:设$f \in C[a,b]$，$f(x) \geq 0$，由曲线$y = f(x), x = a$, $x = b$ 及x 轴围成的平面图形，称为曲边梯形。

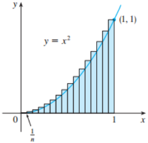


§1 定积分的概念

一、曲边梯形的面积

定义:设$f \in C[a,b]$，$f(x) \geq 0$，由曲线$y = f(x), x = a$, $x = b$ 及x 轴围成的平面图形，称为曲边梯形。

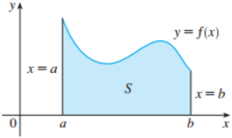


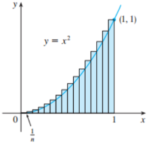


§1 定积分的概念

一、曲边梯形的面积

定义:设$f \in C[a,b]$，$f(x) \geq 0$，由曲线$y = f(x), x = a$, $x = b$ 及x 轴围成的平面图形，称为曲边梯形。



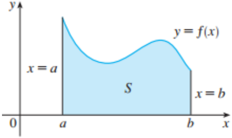


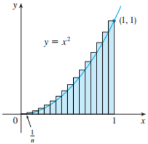
例1：求$[0,1]$ 上以$y = x^2$ 为曲边的曲边梯形的面积。

§1 定积分的概念

一、曲边梯形的面积

定义:设$f \in C[a,b]$，$f(x) \geq 0$，由曲线$y = f(x), x = a$, $x = b$ 及x 轴围成的平面图形，称为曲边梯形。





例1：求$[0,1]$ 上以$y = x^2$ 为曲边的曲边梯形的面积。

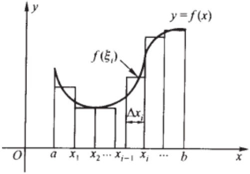
$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

8.1.定积分的概念

定义:设$f(x)$ 是定义在$[a,b]$ 上的函数，在$[a,b]$ 上依次插入分点$\{x_i\}_{i=0}^n$，作分划$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$。任意取点$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，记$[x_{i-1}, x_i]$ 的长度为$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，令$\lambda = \max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$。

8.1.定积分的概念

定义:设$f(x)$ 是定义在$[a,b]$ 上的函数，在$[a,b]$ 上依次插入分点$\{x_i\}_{i=0}^n$，作分划$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$。任意取点$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，记$[x_{i-1}, x_i]$ 的长度为$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，令$\lambda = \max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$。



若$\lambda \to 0$ 时，

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在，不依赖于分划P，且不依赖于ξ_i 的选择，则称$f(x)$ 在$[a,b]$ 上Riemann 可积。$\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的定积分或Riemann 积分，记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

注1：定积分的$\epsilon-\delta$语言表述如下：设有定数I, $\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall$ 分划$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，任意取点$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，只要$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\} < \delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \epsilon,$$

则称$f(x)$ 在$[a, b]$ 上Riemann 可积，称I 是$f(x)$ 在$[a, b]$ 上的定积分。

注1：定积分的$\epsilon-\delta$ 语言表述如下：设有定数I, $\forall\epsilon>0,\exists\,\delta>0,\forall$ 分划$P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，任意取点$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，只要$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}<\delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \epsilon,$$

则称$f(x)$ 在$[a,b]$ 上Riemann 可积，称I 是$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的定积分。

注2：在函数极限$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 中，对每个变量x，$f(x)$ 唯一确定；而对黎曼和极限，同一个λ 可对应不同的分划，从而使得Riemann 极限比通常极限复杂得多。

注1：定积分的$\epsilon-\delta$ 语言表述如下：设有定数I, $\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall$ 分划$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，任意取点$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，只要$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\} < \delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \epsilon,$$

则称$f(x)$ 在$[a, b]$ 上Riemann 可积，称I 是$f(x)$ 在$[a, b]$ 上的定积分。

注2：在函数极限$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 中，对每个变量x，$f(x)$ 唯一确定；而对黎曼和极限，同一个λ 可对应不同的分划，从而使得Riemann 极限比通常极限复杂得多。

注3：定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是数，值仅与f 及区间$[a, b]$ 有关，e.g. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \cdots$，这与不定积分不同。

二、定积分的几何意义

对于$[a,b]$ 上的连续函数$f(x)\geq 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线$y=f(x), x=a, x=b$ 及x 轴围成的曲边梯形的面积。

二、定积分的几何意义

对于$[a,b]$ 上的连续函数$f(x)\geq 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线$y=f(x), x=a, x=b$ 及x 轴围成的曲边梯形的面积。

当$f(x)\leq 0, \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b(-f(x))\mathrm{d}x$ 是位于x 轴下方的曲边梯形面积的相反数，不妨称为“负面积”。

二、定积分的几何意义

对于$[a,b]$ 上的连续函数$f(x) \geq 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线$y = f(x), x = a, x = b$ 及x 轴围成的曲边梯形的面积。

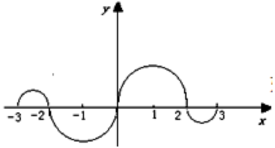
当$f(x) \leq 0, \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b(-f(x))\mathrm{d}x$ 是位于x 轴下方的曲边梯形面积的相反数，不妨称为“负面积”。

对于非定号的$f(x), \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示

曲线$y = f(x)$ 在x 轴上方部分所有曲边梯形的正面积，与下方所有曲边梯形负面积的代数和。

补充题1: 设连续函数$y=f(x)$在$[-3,-2]$和$[2,3]$上的图形分别是直径为1的上半圆周和下半圆周，在区间$[-2,0]$和$[0,2]$上的图形分别是直径为2的下半圆周和上半圆周。如果$G(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则$G(x)$的非负范围是多少？

A. $[-3,3]$ B. $[-3,-2]\cup[0,2]$ C. $[0,3]$ D. $[-3,-2]\cup[0,3]$



补充题2: 设有曲线$C_n: x^{2n}+y^{2n}=1$ (n为正整数)。D_n为C_n所围的平面区域的面积, 求$\lim\limits_{n\to\infty} D_n$。

§2 定积分存在的条件

一、必要条件

定理:若函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，则$f(x)$ 在$[a,b]$ 上有界。

§2 定积分存在的条件

一、必要条件

定理:若函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，则$f(x)$ 在$[a,b]$ 上有界。

注：可积函数一定有界，但有界函数未必可积。

例1：证明Dirichlet 函数$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$ 有界但不可积。

今后讨论可积性，总假定函数在$[a,b]$ 上有界。

二、充分条件

判别一个函数是否可积，用定义十分复杂，以下给出的准则只与被积函数有关，而不涉及定积分的值。

1 Darboux 和

定义:设$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 为$[a, b]$的一个分划，由于f 在$[a, b]$ 上有界，故由确界存在定理，对任意$i, f(x)$ 在$[x_{i-1}, x_i]$ 上有上下确界。定义

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$
$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

则M_i, m_i 与分划P 有关。

定义和式

$$\overline{S}(P)=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \underline{S}(P)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

分别称为对应于分划P 的Darboux 上和与Darboux 下和，统称Darboux 和。

定义和式

$$\overline{S}(P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\underline{S}(P)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i,$$

分别称为对应于分划P 的Darboux 上和与Darboux 下和，统称Darboux 和。

显然，$\underline{S}(P)\le\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\le\overline{S}(P)$。

定义和式

$$\overline{S}(P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\underline{S}(P)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i,$$

分别称为对应于分划P 的Darboux 上和与Darboux 下和，统称Darboux 和。

显然，$\underline{S}(P)\leq\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\leq\overline{S}(P)$。

注：与Riemann 和相比，Darboux 和仅与分划P 有关，与点集$\{\xi_i\}$ 无关。

8.2.定积分存在的条件

性质1：在原有的分划P 中加入新的分点形成新的分划P'，则$\overline{S}(P') \leq \overline{S}(P), \underline{S}(P') \geq \underline{S}(P)$（即增加分点，上和不增，下和不减）。

性质1：在原有的分划P 中加入新的分点形成新的分划P'，则$\overline{S}(P') \leq \overline{S}(P), \underline{S}(P') \geq \underline{S}(P)$（即增加分点，上和不增，下和不减）。

性质2：任一下和不超过任意上和。

性质1：在原有的分划P 中加入新的分点形成新的分划P'，则$\overline{S}(P') \leq \overline{S}(P), \underline{S}(P') \geq \underline{S}(P)$（即增加分点，上和不增，下和不减）。

性质2：任一下和不超过任意上和。

注：由上述性质知，所有上和的集合$\{\overline{S}(P)\}$ 有下确界，所有下和的集合$\{\underline{S}(P)\}$ 有上确界。

性质1：在原有的分划P 中加入新的分点形成新的分划P'，则$\overline{S}(P') \le \overline{S}(P), \underline{S}(P') \ge \underline{S}(P)$（即增加分点，上和不增，下和不减）。

性质2：任一下和不超过任意上和。

注：由上述性质知，所有上和的集合$\{\overline{S}(P)\}$ 有下确界，所有下和的集合$\{\underline{S}(P)\}$ 有上确界。

记$L = \inf\{\overline{S}(P)|P$ 为所有可能分划$\}$，称上积分；

记$\ell = \sup\{\underline{S}(P)|P$ 为所有可能分划$\}$，称下积分。

则对任意分划$P, Q, \underline{S}(P) \le \ell \le L \le \overline{S}(Q)$。

Darboux 定理: 对任意$[a, b]$ 上有界的函数$f(x)$，恒有$\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}(P) = L$, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}(P) = \ell$，其中$\lambda = \max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$。

Darboux 定理: 对任意$[a,b]$ 上有界的函数$f(x)$，恒有$\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}(P)=L$, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}(P)=\ell$，其中$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$。

注：该极限分割可任意，故区别于“单调函数极限等于确界”。

Darboux 定理: 对任意$[a, b]$ 上有界的函数$f(x)$，恒有$\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}(P) = L$, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}(P) = \ell$，其中$\lambda = \max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$。

注：该极限分割可任意，故区别于“单调函数极限等于确界”。

二、充要条件

定理:（定积分存在的第一充要条件）有界函数$f(x)$在$[a, b]$ 上可积 $\Longleftrightarrow$ $L = \ell$，即$\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}(P) = \lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}(P)$。

Darboux 定理: 对任意$[a, b]$ 上有界的函数$f(x)$，恒有$\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}(P) = L$, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}(P) = \ell$，其中$\lambda = \max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$。

注：该极限分割可任意，故区别于“单调函数极限等于确界”。

二、充要条件

定理:（定积分存在的第一充要条件）有界函数$f(x)$在$[a, b]$ 上可积 $\iff$ $L = \ell$，即$\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}(P) = \lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}(P)$。

注1：Dirichlet 函数的不可积性，正是由于上积分不等于下积分。

注2：记$w_i = M_i - m_i$，则$\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i$，故

$$\text{可积第一充要条件} \iff \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i = 0.$$

事实上，$w_i = \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x') - f(x'')|$。

注2：记$w_i = M_i - m_i$，则$\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum_{i=1}^n w_i \Delta x_i$，故

$$\text{可积第一充要条件} \iff \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i = 0.$$

事实上，$w_i = \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x') - f(x'')|$。

注3：第一充要条件有几何意义。

定理:（定积分存在的第二充要条件）有界函数f在$[a, b]$上可积$\iff \forall \epsilon > 0, \exists$ 分划P，s.t. $\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum_{\lambda(P)} w_i \Delta x_i < \epsilon$。

分析：要使和式当$\lambda(P)\to 0$ 时，$\sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i \to 0$

(1)$\lambda(P)$ 充分小时，w_i 都很小；

(2)w_i 不能很小，但与之对应的Δx_i 之和很小。

定理:（定积分存在的第三充要条件）有界函数$f(x)$在$[a,b]$ 上可积 $\iff$ $\forall \epsilon > 0, \forall \sigma > 0, \exists$ 分划P, s.t.振幅$w_i \geq \epsilon$的那些小区间$[x_{i-1}, x_i]$ 长度之和$\sum_{w_i \geq \epsilon} \Delta x_i < \sigma$。

三、充分条件（可积函数类）

1 闭区间$[a,b]$ 上有界单调函数必定可积。

分析：要使和式当$\lambda(P)\to 0$时，$\sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i \to 0$

(1)$\lambda(P)$充分小时，w_i都很小；

(2)w_i不能很小，但与之对应的Δx_i之和很小。

定理:（定积分存在的第三充要条件）有界函数$f(x)$在$[a,b]$上可积$\iff \forall \epsilon > 0, \forall \sigma > 0, \exists$分划$P$, s.t.振幅$w_i \geq \epsilon$的那些小区间$[x_{i-1}, x_i]$长度之和$\sum_{w_i \geq \epsilon} \Delta x_i < \sigma$。

三、充分条件（可积函数类）

1 闭区间$[a,b]$上有界单调函数必定可积。

2 闭区间$[a,b]$上的连续函数必定可积。

3 闭区间$[a, b]$ 上只有有限个不连续点的有界函数必定可积。

3 闭区间$[a,b]$ 上只有有限个不连续点的有界函数必定可积。

例2：$f(x)=\begin{cases} 1/x-[1/x], & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \in R[0,1]$ 。

3 闭区间$[a,b]$ 上只有有限个不连续点的有界函数必定可积。

例2：$f(x)=\begin{cases} 1/x-[1/x], & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \in R[0,1]$。

注：该题可推广至：设有界函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上不连续点为$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，则$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积（$P_{285}7$）。

3 闭区间$[a,b]$ 上只有有限个不连续点的有界函数必定可积。

例2：$f(x)=\begin{cases} 1/x-[1/x], & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}\in R[0,1]$ 。

注：该题可推广至：设有界函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上不连续点为$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，则$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积（$P_{285}7$ ）。

例3：Riemann 函数 $\begin{cases} 1/q, & x=p/q \\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c \end{cases}\in R[0,1]$ 且$\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x=0$。

3 闭区间$[a,b]$ 上只有有限个不连续点的有界函数必定可积。

例2： $f(x)=\begin{cases} 1/x-[1/x], & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \in R[0,1]$ 。

注：该题可推广至：设有界函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上不连续点为$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，则$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积（$P_{285}7$ ）。

例3：Riemann 函数

$\begin{cases} 1/q, & x=p/q \\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c \end{cases} \in R[0,1]$ 且$\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x=0$。

注：$R(x)$ 具有无穷多个不连续点且不满足例3的推广，但$R(x)$ 仍可积。

作业： 课本P_{285} 1(2) 5(2), 6。

补充1：设$f(x)$ 是在$[a,b]$ 上有定义的有界函数。利用可积第三充要条件证明：若对任给$\delta>0$，均有$f\in R[a+\delta,b]$，则$f\in R([a,b])$。并利用该题证明P_{285} 5(4)。

补充2：P_{286} 9。

若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，$A\le f(x)\le B, g(u)$ 在$[A,B]$ 上可积，是否有$g(f(x))$ 在$[a,b]$ 上可积？或是，给出证明；若不是，给出反例。

若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上不可积，$A\le f(x)\le B, g(u)$ 在$[A,B]$ 上不可积，是否有$g(f(x))$ 在$[a,b]$ 上一定不可积？或是，给出证明；若不是，给出反例。

§3 定积分的性质

一、定积分的性质

性质1（线性性质）：设$f(x), g(x)$ 均在$[a, b]$ 上可积，k_1, k_2 是常数，则函数$k_1 f(x) + k_2 g(x)$ 在$[a, b]$ 上也可积，且

$$\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1 \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k_2 \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

§3 定积分的性质

一、定积分的性质

性质1（线性性质）：设$f(x), g(x)$ 均在$[a, b]$ 上可积，k_1, k_2 是常数，则函数$k_1 f(x) + k_2 g(x)$ 在$[a, b]$ 上也可积，且

$$\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1 \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k_2 \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

性质2（乘积可积性）：设$f(x), g(x)$ 均在$[a, b]$ 上可积，则$f(x) \cdot g(x)$ 在$[a, b]$ 上可积。

§3 定积分的性质

一、定积分的性质

性质1（线性性质）：设$f(x), g(x)$ 均在$[a, b]$ 上可积，k_1, k_2 是常数，则函数$k_1 f(x) + k_2 g(x)$ 在$[a, b]$ 上也可积，且

$$\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1 \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k_2 \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

性质2（乘积可积性）：设$f(x), g(x)$ 均在$[a, b]$ 上可积，则$f(x) \cdot g(x)$ 在$[a, b]$ 上可积。

注1：一般$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x \neq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

§3 定积分的性质

一、定积分的性质

性质1（线性性质）：设$f(x), g(x)$ 均在$[a,b]$ 上可积，k_1, k_2 是常数，则函数$k_1 f(x)+k_2 g(x)$ 在$[a,b]$ 上也可积，且

$$\int_a^b [k_1 f(x)+k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

性质2（乘积可积性）：设$f(x), g(x)$ 均在$[a,b]$ 上可积，则$f(x)\cdot g(x)$ 在$[a,b]$ 上可积。

注1：一般$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x \neq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

注2：为何不考虑除法的可积性？

性质3（保号性）：若$f \in R[a,b], f(x) \geq 0$，则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$。

性质3（保号性）：若$f \in R[a,b], f(x) \geq 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$。

推论（保序性）：若$f, g \in R[a,b]$，且在$[a,b]$上恒有$f(x) \geq g(x)$，则成立$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

性质3（保号性）：若$f \in R[a,b], f(x) \geq 0$，则$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \geq 0$。

推论（保序性）：若$f, g \in R[a,b]$，且在$[a,b]$上恒有$f(x) \geq g(x)$，则成立$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

显然，若$f \in C[a,b]$，且$f(x) \geq 0$但不恒为0，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$。

性质3（保号性）：若$f \in R[a,b], f(x) \geq 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$。

推论（保序性）：若$f, g \in R[a,b]$，且在$[a,b]$上恒有$f(x) \geq g(x)$，则成立$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

显然，若$f \in C[a,b]$，且$f(x) \geq 0$但不恒为0，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$。

该命题可推广至：设$f \in R[a,b]$，且在$[a,b]$上$f(x) > 0$，则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$。

性质4（区间可加性）：设$a < c < b$

(1) 若$f \in R[a,b]$，则$f \in R[a,c]$ 且$f \in R[c,b]$；

(2) 若$f \in R[a,c]$ 且$f \in R[c,b]$，则$f \in R[a,b]$，并成立
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$。

性质4（区间可加性）：设$a < c < b$

(1) 若$f \in R[a, b]$，则$f \in R[a, c]$ 且$f \in R[c, b]$；

(2) 若$f \in R[a, c]$ 且$f \in R[c, b]$，则$f \in R[a, b]$，并成立
$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\mathrm{dx}$。

若函数f 的绝对值函数$|f|$ 在$[a, b]$ 上可积，则称f 在$[a, b]$ 绝对可积。

性质4（区间可加性）：设$a < c < b$

(1) 若$f \in R[a,b]$，则$f \in R[a,c]$ 且$f \in R[c,b]$；

(2) 若$f \in R[a,c]$ 且$f \in R[c,b]$，则$f \in R[a,b]$，并成立
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$。

若函数f 的绝对值函数$|f|$ 在$[a,b]$ 上可积，则称f 在$[a,b]$ 绝对可积。

以下讨论$f, f^2, |f|$ 三者可积性的关系。

(1) f 可积$\Longrightarrow$ $|f|$ 可积；

(2) f 可积$\Longrightarrow$ f^2 可积；

(3) f^2 可积 $\Longleftrightarrow$ $|f|$ 可积。

其余情况不可。

二、积分中值定理

定理:（积分第一中值定理）设$f(x)$ 和$g(x)$ 均在$[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在$[a,b]$ 上不变号，则$\exists\eta\in[m,M]$，s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\eta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

这里M,m 分别表示$f(x)$ 在$[a,b]$ 的上确界和下确界。

二、积分中值定理

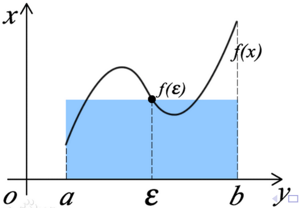
定理:（积分第一中值定理）设$f(x)$ 和$g(x)$ 均在$[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在$[a,b]$ 上不变号，则$\exists \eta \in [m,M]$，s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \eta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

这里M,m 分别表示$f(x)$ 在$[a,b]$ 的上确界和下确界。

特别地，若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，则$\exists \xi \in [a,b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$



注1：当$f \in C[a,b]$ 时，上述积分第一中值定理中$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 结论可加强为$\xi \in (a,b)$。

注1：当$f\in C[a,b]$时，上述积分第一中值定理中$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$结论可加强为$\xi\in(a,b)$。

注2：当$f\in C[a,b], g(x)\equiv 1$时，上述结论为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$。

注1：当$f \in C[a,b]$ 时，上述积分第一中值定理中$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 结论可加强为$\xi \in (a,b)$。

注2：当$f \in C[a,b], g(x) \equiv 1$ 时，上述结论为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$。

几何意义：当$f(x) \geq 0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线$y = f(x)$ 和直线$x = a, x = b$ 及x 轴围成的曲边梯形的面积。

注1：当$f \in C[a,b]$时，上述积分第一中值定理中$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$结论可加强为$\xi \in (a,b)$。

注2：当$f \in C[a,b], g(x) \equiv 1$时，上述结论为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$。

几何意义：当$f(x) \geq 0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$表示由曲线$y = f(x)$和直线$x = a, x = b$及x轴围成的曲边梯形的面积。

注3：$g(x)$的保号性条件不满足时，定理未必成立。e.g. $f(x) = g(x) = x, [a,b] = [-1,1]$，则

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \neq \mu \cdot \int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x = 0.$$

三、定积分与求和表达式的关系

例6：把下列极限表示成积分的形式。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k\pi}{n}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{2n}{n^2+k^2}$。

三、定积分与求和表达式的关系

例6：把下列极限表示成积分的形式。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k\pi}{n}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{2n}{n^2+k^2}$。

例7：设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，且$f(x)>0$，证明：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x \le \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right).$$

四、几个著名不等式

1 Cauchy 不等式及Schwarz 不等式

定理: （Cauchy 不等式）设$a_i, b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为任意实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

四、几个著名不等式

1 Cauchy 不等式及Schwarz 不等式

定理:（Cauchy 不等式）设$a_i, b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为任意实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Cauchy 不等式的积分形式称为Schwarz 不等式。

定理:（Schwarz 不等式）若$f(x), g(x)$ 在$[a, b]$ 上可积，则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

例8：已知$f(x) \geq 0$，在$[a,b]$上连续，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1, k$为任意实数，求证

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2 \leq 1.$$

例8：已知$f(x)\geq 0$，在$[a,b]$ 上连续，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1,k$ 为任意实数，求证

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2\leq 1.$$

2 Holder 不等式及Holder 不等式积分形式

定理: （Holder 不等式）

设$a_i,b_i\geq 0(i=1,2,\cdots,n),p,q$ 为满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的正数，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

特别地，$p=q=2$ 时即Cauchy 不等式，故Holder 不等式是Cauchy 不等式的推广。

定理: （Holder 不等式的积分形式）设$f(x), g(x)$在$[a, b]$ 上可积，p, q 为满足$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 的正数，则

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

定理: （Holder 不等式的积分形式）设$f(x), g(x)$在$[a, b]$ 上可积，p, q 为满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的正数，则

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \le \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

例9：证明$\int_0^{\pi} x a^{\sin x}\mathrm{d}x \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x}\mathrm{d}x \ge \frac{\pi^3}{4}(a>0)$.

3 Minkowski 不等式及其积分形式

定理:（Minkowski 不等式）

设$a_i, b_i \geq 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，则对$\forall p > 1$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

3 Minkowski 不等式及其积分形式

定理:（Minkowski 不等式）
设$a_i, b_i \geq 0(i = 1, 2, \cdots, n)$，则对$\forall p > 1$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

定理:（Minkowski 不等式的积分形式）
设$f(x), g(x) \geq 0$ 且$f(x), g(x)$ 在$[a, b]$ 上可积，则$\forall p > 1$，有

$$\left(\int_a^b (f(x) + g(x))^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b f^p(x) \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x) \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

此外，还有Young 不等式，见P_{294} 习题10。

五、积分估计及积分不等式

例16：设函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上二阶可导，$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，记$M=\sup_{a\le x\le b}|f''(x)|$，证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a)^3/24.$

五、积分估计及积分不等式

例16：设函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上二阶可导，$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，记$M=\sup_{a\le x\le b}|f''(x)|$，证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a)^3/24.$

例17：设$a,b>0, f(x)\ge 0$ 且$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，$\int_{-a}^{b} xf(x)\mathrm{d}x=0$。试证：$\int_{-a}^{b} x^2 f(x)\mathrm{d}x \le ab\int_{-a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$。

五、积分估计及积分不等式

例16：设函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上二阶可导，$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，记$M=\sup_{a\le x\le b}|f''(x)|$，证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a)^3/24.$

例17：设$a,b>0, f(x)\ge 0$ 且$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，$\int_{-a}^{b} xf(x)\mathrm{d}x=0$。试证：$\int_{-a}^{b} x^2 f(x)\mathrm{d}x \le ab\int_{-a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$。

作业：课本P_{293} $4(3)(4), 5, 7, 9, 10, 13$。

§4 微积分基本定理

一、变限积分

设$f \in R[a,b]$，则对$\forall x \in [a,b], \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 存在，且随x 的改变而改变，故它是定义在$[a,b]$ 上关于x 的函数，称为变上限积分。同理$\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ 称为变下限积分。

§4 微积分基本定理

一、变限积分

设$f \in R[a,b]$，则对$\forall x \in [a,b]$, $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 存在，且随x的改变而改变，故它是定义在$[a,b]$ 上关于x 的函数，称为变上限积分。同理$\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ 称为变下限积分。

注：变上限函数扩展了函数的形式，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 与我们所熟悉的初等函数形式迥异，但它确实是一种函数的表现形式。

§4 微积分基本定理

一、变限积分

设$f \in R[a,b]$，则对$\forall x \in [a,b]$, $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 存在，且随x的改变而改变，故它是定义在$[a,b]$ 上关于x 的函数，称为变上限积分。同理$\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ 称为变下限积分。

注：变上限函数扩展了函数的形式，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 与我们所熟悉的初等函数形式迥异，但它确实是一种函数的表现形式。

关于这两个积分具有如下性质：

命题1：设$f \in R[a,b]$，则$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是$[a,b]$ 上的连续函数。

命题2：设$f \in R[a,b], x \in [a,b]$ 是f 的连续点，则
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)。$$

命题2：设$f \in R[a,b], x \in [a,b]$ 是f 的连续点，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$。

原函数存在定理:若$f \in C[a,b]$，则f 在$[a,b]$ 上存在原函数（即连续函数的原函数可微）。

命题2：设$f \in R[a,b], x \in [a,b]$ 是f 的连续点，则
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$。

原函数存在定理:若$f \in C[a,b]$，则f 在$[a,b]$ 上存在原函数（即连续函数的原函数可微）。

注：$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(x)$ 给出了对积分上限求导的一个法则。

命题2：设$f \in R[a,b], x \in [a,b]$ 是f 的连续点，则
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)。$$

原函数存在定理:若$f \in C[a,b]$，则f 在$[a,b]$ 上存在原函数（即连续函数的原函数可微）。

注：$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(x)$ 给出了对积分上限求导的一个法则。

思考题：若$g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在某区间上处处可微，是否有在该区间上$g'(x) = f(x)$?

例3：计算$F(x)=\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\mathrm{d}t$ 的导数。

例3：计算$F(x)=\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\mathrm{d}t$ 的导数。

例4：求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\mathrm{d}t}{x^3}$。

例3：计算$F(x)=\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ 的导数。

例4：求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{x^3}$。

可以由变上限积分导出微积分基本定理：

微积分基本定理:设$f\in C[a,b]$, $F(x)$ 是$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的一个原函数，则成立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

注1：该定理的结论被称为Newton-Leibniz 公式，也常记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b$。它沟通了微分与积分的桥梁，是高等数学乃至整个数学领域最优美的结论之一。

注1：该定理的结论被称为Newton-Leibniz 公式，也常记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b$。它沟通了微分与积分的桥梁，是高等数学乃至整个数学领域最优美的结论之一。

注2：微积分基本定理的条件可以减弱：

设$f(x) \in R[a,b], F(x)$ 为$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的一个原函数，则$\forall x \in [a,b]$，成立N-L 公式：$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$。

注1：该定理的结论被称为Newton-Leibniz 公式，也常记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b$。它沟通了微分与积分的桥梁，是高等数学乃至整个数学领域最优美的结论之一。

注2：微积分基本定理的条件可以减弱：

设$f(x) \in R[a,b], F(x)$ 为$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的一个原函数，则$\forall x \in [a,b]$，成立N-L 公式：$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$。

注3：（1）可积函数未必有原函数。

（2）有原函数的函数未必可积。

例5：设$f\in R[A,B], a,b\in(A,B)$ 是f 的两个连续点，证明

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x = f(b)-f(a).$$

作业： 课本P_{310} 1(1)(3) 再加上$F(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, 2(2)(4), 3, 5.

补充1：设f 在$[a,b]$ 上可微，且满足$\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=\frac{x}{3}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，求$f$。

补充2：证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=0$。

变限积分的用法除了证明微积分基本定理外，还可以证明下叙积分第二中值定理：

积分第二中值定理:设函数$f \in R[a,b]$，则

(i) 若函数g 在$[a,b]$ 上减且$g(x) \geq 0$，则$\exists \xi \in [a,b]$, s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x$.

(ii) 若函数g 在$[a,b]$ 上增且$g(x) \geq 0$，则$\exists \eta \in [a,b]$, s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_{\eta}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

变限积分的用法除了证明微积分基本定理外，还可以证明下叙积分第二中值定理：

积分第二中值定理:设函数$f \in R[a,b]$，则

(i) 若函数g 在$[a,b]$ 上减且$g(x) \geq 0$，则$\exists \xi \in [a,b]$, s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$.

(ii) 若函数g 在$[a,b]$ 上增且$g(x) \geq 0$，则$\exists \eta \in [a,b]$, s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_\eta^b f(x)\mathrm{d}x$.

推论：设$f \in R[a,b]$，若g 为单调函数，则$\exists \xi \in [a,b]$, s.t.
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

变限积分的用法除了证明微积分基本定理外，还可以证明下叙积分第二中值定理：

积分第二中值定理: 设函数$f \in R[a,b]$，则

(i) 若函数g 在$[a,b]$ 上减且$g(x) \geq 0$，则$\exists \xi \in [a,b]$, s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$.

(ii) 若函数g 在$[a,b]$ 上增且$g(x) \geq 0$，则$\exists \eta \in [a,b]$, s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_\eta^b f(x)\mathrm{d}x$.

推论：设$f \in R[a,b]$，若g 为单调函数，则$\exists \xi \in [a,b]$, s.t.
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

注：积分第二中值定理及其推论是今后建立反常积分收敛判别法的工具。

§5 定积分的计算

一、定积分的基本计算

（补充）Newton-Leibniz 公式成立的条件：

§5 定积分的计算

一、定积分的基本计算

（补充）Newton-Leibniz 公式成立的条件：

(1) 若$f \in C[a,b]$，则对f 的任何原函数F，有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

§5 定积分的计算

一、定积分的基本计算

（补充）Newton-Leibniz 公式成立的条件：

(1) 若$f \in C[a,b]$，则对f 的任何原函数F，有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

(2) 若$f \in R[a,b]$，且有原函数F，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

§5 定积分的计算

一、定积分的基本计算

（补充）Newton-Leibniz 公式成立的条件：

(1) 若$f \in C[a,b]$，则对f 的任何原函数F，有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

(2) 若$f \in R[a,b]$，且有原函数F，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

(3) 若$f \in R[a,b]$，F 在$[a,b]$ 上连续，且在(a,b) 内除有限个点外有$F'(x) = f(x)$，则有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$。

§5 定积分的计算

一、定积分的基本计算

（补充）Newton-Leibniz 公式成立的条件：

(1) 若$f \in C[a,b]$，则对f 的任何原函数F，有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

(2) 若$f \in R[a,b]$，且有原函数F，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)$ $-F(a)$;

(3) 若$f \in R[a,b]$，F 在$[a,b]$ 上连续，且在(a,b) 内除有限个点外有$F'(x) = f(x)$，则有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$。

例1：计算$\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x$。

§5 定积分的计算

一、定积分的基本计算

（补充）Newton-Leibniz 公式成立的条件：

(1) 若$f \in C[a,b]$，则对f 的任何原函数F，有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

(2) 若$f \in R[a,b]$，且有原函数F，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

(3) 若$f \in R[a,b]$，F 在$[a,b]$ 上连续，且在(a,b) 内除有限个点外有$F'(x) = f(x)$，则有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$。

例1：计算$\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x$。

例2：求$\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x$。

§5 定积分的计算

一、定积分的基本计算

（补充）Newton-Leibniz 公式成立的条件：

(1) 若 $f \in C[a,b]$，则对 f 的任何原函数 F，有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

(2) 若 $f \in R[a,b]$，且有原函数 F，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)$ $-F(a)$;

(3) 若 $f \in R[a,b]$，F 在 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内除有限个点外有 $F'(x) = f(x)$，则有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$。

例1：计算 $\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x$。

例2：求 $\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x$。

例3：设 $n > 1$ 为自然数，求 $\int_0^n (x - [x])\mathrm{d}x$。

例4： $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in[-\frac{\pi}{2},0)\\ e^x, & x\in[0,1]\end{cases}$

例4： $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in[-\frac{\pi}{2},0)\\ e^x, & x\in[0,1]\end{cases}$

二、定积分的换元公式法

定理: 设$f(x)\in C[a,b], x=\phi(t)$ 在$[\alpha,\beta]$（或$[\beta,\alpha]$）上有连续导数，其值域包含于$[a,b]$，且满足$\phi(\alpha)=a,\phi(\beta)=b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t.$$

例4： $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\in[-\frac{\pi}{2},0) \\ e^x, & x\in[0,1] \end{cases}$

二、定积分的换元公式法

定理:设$f(x)\in C[a,b], x=\phi(t)$ 在$[\alpha,\beta]$ （或$[\beta,\alpha]$）上有连续导数，其值域包含于$[a,b]$，且满足$\phi(\alpha)=a,\phi(\beta)=b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t.$$

注1：换元后定积分$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$ 的上下限α,β 必须与原定积分上下限a,b 相对应，而不必考虑α 与β 谁大谁小。

注2：对定积分作变量代换$x = \phi(t)$ 时，并不要求$\phi(t)$是一个单调、一一对应的函数，这一点与不定积分换元法有所不同。

注2：对定积分作变量代换$x=\phi(t)$时，并不要求$\phi(t)$是一个单调、一一对应的函数，这一点与不定积分换元法有所不同。

求不定积分时，通过换元，求出新变量t的不定积分后，还需将变量t还原成x，故要求$x=\phi(t)$有反函数。

注2：对定积分作变量代换$x = \phi(t)$ 时，并不要求$\phi(t)$是一个单调、一一对应的函数，这一点与不定积分换元法有所不同。

求不定积分时，通过换元，求出新变量t 的不定积分后，还需将变量t 还原成x，故要求$x = \phi(t)$ 有反函数。

求定积分时，通过换元，写出关于新变量t 的被积函数与关于新变量t 的上下限后，可直接求出积分的值。

注2：对定积分作变量代换$x = \phi(t)$ 时，并不要求$\phi(t)$ 是一个单调、一一对应的函数，这一点与不定积分换元法有所不同。

求不定积分时，通过换元，求出新变量t 的不定积分后，还需将变量t 还原成x，故要求$x = \phi(t)$ 有反函数。

求定积分时，通过换元，写出关于新变量t 的被积函数与关于新变量t 的上下限后，可直接求出积分的值。

例5：求$\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^4)}$.

例6：求半径为r 的圆的面积。

例7：计算$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$。

作业： 课本P_{311} 6(4)(15 – 18)(20), 11(2)(3).

补充：计算$\int_{-2}^{2}\min\left\{\frac{1}{|x|},x^2\right\}\mathrm{d}x$ 和$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$。

例7：计算$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$。

作业： 课本P_{311} 6(4)(15 – 18)(20), 11(2)(3).

补充：计算$\int_{-2}^{2}\min\left\{\frac{1}{|x|},x^2\right\}\mathrm{d}x$ 和$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$。

三、定积分的分部积分法

由不定积分的分部积分公式$\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\mathrm{d}x$，可立即推出定积分的分部积分公式：

例7：计算$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$。

作业： 课本P_{311} 6(4)(15 – 18)(20), 11(2)(3).

补充：计算$\int_{-2}^{2}\min\left\{\frac{1}{|x|},x^2\right\}\mathrm{d}x$ 和$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$。

三、定积分的分部积分法

由不定积分的分部积分公式$\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\mathrm{d}x$，可立即推出定积分的分部积分公式：

定理:设$u(x),v(x)$ 在区间$[a,b]$ 上有连续导数，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x.$$

例8：设$f(x)=\begin{cases}\sin(x/2), & x\geq 0\\ x\arctan x, & x<0\end{cases}$，

求$\int_0^{\pi+1} f(x-1)\mathrm{d}x$。

例8：设$f(x) = \begin{cases} \sin(x/2), & x \geq 0 \\ x \arctan x, & x < 0 \end{cases}$，
求$\int_0^{\pi+1} f(x-1)\mathrm{d}x$。

例9：求$\int_1^{e+1} x^2 \ln(x-1)\mathrm{d}x$。

例8：设$f(x)=\begin{cases}\sin(x/2), & x\geq 0\\ x\arctan x, & x<0\end{cases}$，求$\int_0^{\pi+1} f(x-1)\mathrm{d}x$。

例9：求$\int_1^{e+1} x^2\ln(x-1)\mathrm{d}x$。

例10：设$F(x)=\int_0^x \sin(1/t)\mathrm{d}t$，求$F'(0)$。

作业： 课本P_{311} 6(8 – 10)(13), 15

四、对称性在定积分计算中的应用

定理: 设 $f \in R[-a,a]$，

(1) 若 f 是奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$；

(2) 若 f 是偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$。

四、对称性在定积分计算中的应用

定理: 设$f \in R[-a,a]$，

(1) 若f 是奇函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$；

(2) 若f 是偶函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$。

推广命题1：设$f \in R[0,a]$，且$f(x) = -f(a-x)$，即关于区间中点$a/2$ 为奇函数，则$\displaystyle\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$。

四、对称性在定积分计算中的应用

定理: 设$f \in R[-a,a]$，

(1) 若f 是奇函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$；

(2) 若f 是偶函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$。

推广命题1：设$f \in R[0,a]$，且$f(x) = -f(a-x)$，即关于区间中点$a/2$ 为奇函数，则$\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 0$。

推广命题2：设$f \in R[0,a]$，且$f(x) = f(a-x)$，即关于区间中点$a/2$ 为偶函数，则$\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{a/2} f(x)\mathrm{d}x$。

例11：计算$\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\mathrm{d}x$。

例11：计算$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\mathrm{d}x$。

例12：计算$\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

例11：计算 $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} \mathrm{d}x$。

例12：计算 $\int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \mathrm{d}x$。

注：对该题，被积函数的原函数不是初等函数。对定积分用换元法和分部积分法往往能使一些积分项相互抵消，从而有可能计算出定积分的值。这与不定积分计算完全不同。

作业：课本P_{312} 12。

补充1：设f 连续，证明下式，并用此计算P_{312}10(2)(3)。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$;

(2)
$$\int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\cos x)\mathrm{d}x。$$

补充2：计算$I = \int_0^{2\pi} \sin(\sin x + x)\mathrm{d}x$ 和$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\mathrm{d}x$。

作业：课本P_{312} 12。

补充1：设f 连续，证明下式，并用此计算P_{312}10(2)(3)。

(1) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$;

(2)

$$\int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\cos x)\mathrm{d}x。$$

补充2：计算$I = \int_0^{2\pi}\sin(\sin x + x)\mathrm{d}x$ 和$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\mathrm{d}x$。

五、利用递推法求定积分

例13：求$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$.

注：I_n 在n 为奇数和偶数时表达式的不同是今后导出Wallis 公式的关键：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$。

例14：求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x \mathrm{d}x$。

例14：求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x dx$。

归纳：形如$\int_\alpha^\beta \sin^m x \cos^n x dx$ 的积分。

(1) 若m 与n 中至少有一奇，可用本例中换元积分法。

(2) 若m, n 均偶，一般只能通过三角函数恒等变形（如半角公式等），将三角函数的幂指数降低到1后解决。

例14：求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x\mathrm{d}x$。

归纳：形如$\int_\alpha^\beta \sin^m x \cos^n x\mathrm{d}x$ 的积分。

(1) 若m 与n 中至少有一奇，可用本例中换元积分法。

(2) 若m, n 均偶，一般只能通过三角函数恒等变形（如半角公式等），将三角函数的幂指数降低到1后解决。

但对$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\mathrm{d}x$，只要$m, n$ 中有一偶，即可利用例13递推公式求得定积分。

例14：求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x\mathrm{d}x$。

归纳：形如$\int_\alpha^\beta \sin^m x \cos^n x\mathrm{d}x$ 的积分。

(1) 若m 与n 中至少有一奇，可用本例中换元积分法。

(2) 若m, n 均偶，一般只能通过三角函数恒等变形（如半角公式等），将三角函数的幂指数降低到1后解决。

但对$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\mathrm{d}x$，只要$m, n$ 中有一偶，即可利用例13递推公式求得定积分。

六、变上限积分及积分中值定理的应用

例15：设f 是周期为T 的可积函数，证明：对任意实数a，成立$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$。

例16：设$f(x)\in R[0,a]$，对$\forall x>0$，有$f(x)>0$，满足方程$f(x)=\sqrt{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}(0\le x\le a)$，求$f(x)$。

例16：设$f(x)\in R[0,a]$，对$\forall x>0$，有$f(x)>0$，满足方程$f(x)=\sqrt{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}(0\leq x\leq a)$，求$f(x)$。

例17：设$f\in C[0,2\pi]$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x。$$

例16：设$f(x)\in R[0,a]$，对$\forall x>0$，有$f(x)>0$，满足方程$f(x)=\sqrt{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}(0\le x\le a)$，求$f(x)$。

例17：设$f\in C[0,2\pi]$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x。$$

例18：设$f\in C[0,\pi]$，且$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0, \int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$。证明：在$(0,\pi)$ 内至少存在两不同点ξ_1,ξ_2, s.t. $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$

例16：设$f(x)\in R[0,a]$，对$\forall x>0$，有$f(x)>0$，满足方程$f(x)=\sqrt{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}(0\le x\le a)$，求$f(x)$。

例17：设$f\in C[0,2\pi]$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x。$$

例18：设$f\in C[0,\pi]$，且$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0,\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$。证明：在$(0,\pi)$内至少存在两不同点$\xi_1,\xi_2$, s.t. $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$

作业： 课本P_{312} 14, 17, 19, 20, 23.

§6 定积分在几何计算中的应用

一、微元法

回忆求曲边梯形面积S 的步骤：

对区间$[a, b]$ 作划分$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，取$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，记$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，得到小曲边梯形面积的近似值$\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$，求和，取极限

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

§6 定积分在几何计算中的应用

一、微元法

回忆求曲边梯形面积S 的步骤：

对区间$[a,b]$ 作划分$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，取$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，记$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，得到小曲边梯形面积的近似值$\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$，求和，取极限

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

换一个角度，将分点x_{i-1} 和x_i 分别记为x 和$x + \Delta x$，将区间$[x, x+\Delta x]$ 上小曲边梯形的面积记为ΔS，取$\xi_i = x$，则$\Delta S \approx f(x)\Delta x$。

8.6.定积分在几何计算中的应用

一般地，(1) 若U 是一个与变量x 的变化区间$[a, b]$ 有关的量；

一般地，(1) 若U 是一个与变量x 的变化区间$[a, b]$ 有关的量；

(2) U 对于区间$[a, b]$ 具有可加性。也即，若把区间$[a, b]$ 分成许多区间，则U 相应地分成许多部分量，而U 等于所有部分量之和；

一般地，(1) 若U 是一个与变量x 的变化区间$[a, b]$ 有关的量；

(2) U 对于区间$[a, b]$ 具有可加性。也即，若把区间$[a, b]$ 分成许多区间，则U 相应地分成许多部分量，而U 等于所有部分量之和；

(3) 在任意$[x, x + \Delta x]$ 上，ΔU 可近似表示成Δx 的线性函数，即$\Delta U \approx f(x)\Delta x$，且$\Delta x \to 0$ 时，$\Delta U - f(x)\Delta x = o(\Delta x)$ （即$\mathrm{d}U = f(x)\mathrm{d}x$），这时可考虑用$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 来表示这个量U。这种方法称为微元法。

一般地，(1) 若U 是一个与变量x 的变化区间$[a,b]$ 有关的量；

(2) U 对于区间$[a,b]$ 具有可加性。也即，若把区间$[a,b]$ 分成许多区间，则U 相应地分成许多部分量，而U 等于所有部分量之和；

(3) 在任意$[x,x+\Delta x]$ 上，ΔU 可近似表示成Δx 的线性函数，即$\Delta U \approx f(x)\Delta x$，且$\Delta x \to 0$ 时，$\Delta U - f(x)\Delta x = o(\Delta x)$ （即$\mathrm{d}U = f(x)\mathrm{d}x$），这时可考虑用$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 来表示这个量U。这种方法称为微元法。

注1：微元法的关键是给出近似表达式$\Delta U \approx f(x)\Delta x$。一般情况下，严格检验$\Delta U - f(x)\Delta x$ 是否为Δx 的高阶无穷小并不容易，因此，对$\Delta \approx f(x)\Delta x$ 的合理性要特别小心。

一般地，(1) 若U 是一个与变量x 的变化区间$[a, b]$ 有关的量；

(2) U 对于区间$[a, b]$ 具有可加性。也即，若把区间$[a, b]$ 分成许多区间，则U 相应地分成许多部分量，而U 等于所有部分量之和；

(3) 在任意$[x, x + \Delta x]$ 上，ΔU 可近似表示成Δx 的线性函数，即$\Delta U \approx f(x)\Delta x$，且$\Delta x \to 0$ 时，$\Delta U - f(x)\Delta x = o(\Delta x)$ （即$\mathrm{d}U = f(x)\mathrm{d}x$），这时可考虑用$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 来表示这个量U。这种方法称为微元法。

注1：微元法的关键是给出近似表达式$\Delta U \approx f(x)\Delta x$。一般情况下，严格检验$\Delta U - f(x)\Delta x$ 是否为Δx 的高阶无穷小并不容易，因此，对$\Delta \approx f(x)\Delta x$ 的合理性要特别小心。

注2：微元法略去了$\Delta x \to 0$ 的极限过程及运算过程中可能出现的高阶无穷小，故使用方便。

二、求平面图形的面积

1直角坐标系下平面图形的面积

连续曲线$y = f(x)(f(x) \geq 0)$ 及两直线$x = a, x = b(a < b)$ 所围成的曲边梯形的面积，则$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

二、求平面图形的面积

1直角坐标系下平面图形的面积

连续曲线$y = f(x)(f(x) \geq 0)$ 及两直线$x = a, x = b(a < b)$ 所围成的曲边梯形的面积，则$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

若$y = f(x)(f(x) \leq 0)$，则$A = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

二、求平面图形的面积

1直角坐标系下平面图形的面积

连续曲线$y = f(x)(f(x) \geq 0)$ 及两直线$x = a, x = b(a < b)$ 所围成的曲边梯形的面积，则$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

若$y = f(x)(f(x) \leq 0)$，则$A = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

问题： 求由曲线$y = f_{上}(x), y = f_{下}(x)$ （其中$f_{上}(x)$, $f_{下}(x) \geq 0$），$x = a, x = b$ 所围成的图形面积。

二、求平面图形的面积

1直角坐标系下平面图形的面积

连续曲线$y=f(x)(f(x)\geq 0)$ 及两直线$x=a,x=b(a<b)$ 所围成的曲边梯形的面积，则$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

若$y=f(x)(f(x)\leq 0)$，则$A=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

问题： 求由曲线$y=f_{上}(x),y=f_{下}(x)$（其中$f_{上}(x)$, $f_{下}(x)\geq 0$），$x=a,x=b$ 所围成的图形面积。

例1：计算由两条抛物线$y=x^2$ 和$x=y^2$ 所围区域的面积。

二、求平面图形的面积

1直角坐标系下平面图形的面积

连续曲线$y = f(x)(f(x) \geq 0)$ 及两直线$x = a, x = b(a < b)$ 所围成的曲边梯形的面积，则$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

若$y = f(x)(f(x) \leq 0)$，则$A = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

问题： 求由曲线$y = f_{上}(x), y = f_{下}(x)$ （其中$f_{上}(x)$, $f_{下}(x) \geq 0$）, $x = a, x = b$ 所围成的图形面积。

例1：计算由两条抛物线$y = x^2$ 和$x = y^2$ 所围区域的面积。

例2：设(x, y) 是等轴双曲线$x^2 - y^2 = 1$ 上的任意一点，求由双曲线与连接点(x, y) 和原点的线段，连接点$(x, -y)$ 和原点的线段所围成的曲边三角形的面积。

2参数方程所决定的图形面积

若$y=f(x)$ 是用参数形式$\left\{\begin{array}{l} x=x(t) \\ y=y(t) \end{array}\right.$,$t\in[T_1,T_2]$ 表达的，$x'(t)\in C[T_1,T_2]$，且$x'(t)$ 在$[T_1,T_2]$ 上不变号，则

$A=\int_{T_1}^{T_2}|y(t)x'(t)|\mathrm{d}t$。

2参数方程所决定的图形面积

若$y = f(x)$ 是用参数形式$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,$t \in [T_1, T_2]$ 表达的，$x'(t) \in C[T_1, T_2]$，且$x'(t)$ 在$[T_1, T_2]$ 上不变号，则 $A = \int_{T_1}^{T_2} |y(t)x'(t)|\mathrm{d}t$。

例3：求旋轮线（摆线）$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$,$t \in [0, 2\pi]$ 与x 轴所围成的区域的面积。

2参数方程所决定的图形面积

若$y=f(x)$ 是用参数形式$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$,$t\in[T_1,T_2]$ 表达的，$x'(t)\in C[T_1,T_2]$，且$x'(t)$ 在$[T_1,T_2]$ 上不变号，则
$A=\int_{T_1}^{T_2}|y(t)x'(t)|\mathrm{d}t$。

例3：求旋轮线（摆线）$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$,$t\in[0,2\pi]$ 与x 轴所围成的区域的面积。

例4：求叶形线$\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=2t^2-t^3 \end{cases}$,$t\in[0,2]$ 所围的图形面积。

3极坐标下求面积

设曲线的极坐标方程$r = r(\theta)$ 是区间$[\alpha, \beta]$ 上的连续函数，其中$\beta - \alpha \leq 2\pi$，求两条极径$\theta = \alpha, \theta = \beta$ 与$r = r(\theta)$ 所围成的图形面积。

3极坐标下求面积

设曲线的极坐标方程$r = r(\theta)$ 是区间$[\alpha, \beta]$ 上的连续函数，其中$\beta - \alpha \le 2\pi$，求两条极径$\theta = \alpha, \theta = \beta$ 与$r = r(\theta)$ 所围成的图形面积。

微元法：$\forall [\theta, \theta + \Delta\theta] \subseteq [\alpha, \beta]$，则$\Delta S \approx \frac{1}{2} r^2(\theta)\Delta\theta$，故由微元法可知$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$。

3极坐标下求面积

设曲线的极坐标方程$r=r(\theta)$是区间$[\alpha,\beta]$上的连续函数，其中$\beta-\alpha\le 2\pi$，求两条极径$\theta=\alpha,\theta=\beta$与$r=r(\theta)$所围成的图形面积。

微元法：$\forall[\theta,\theta+\Delta\theta]\subseteq[\alpha,\beta]$，则$\Delta S\approx\frac{1}{2}r^2(\theta)\Delta\theta$，故由微元法可知$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$。

例5：求三叶玫瑰线$r=a\sin 3\theta,\theta\in[0,\pi]$所围的图形面积。

3极坐标下求面积

设曲线的极坐标方程$r = r(\theta)$ 是区间$[\alpha, \beta]$ 上的连续函数，其中$\beta - \alpha \leq 2\pi$，求两条极径$\theta = \alpha, \theta = \beta$ 与$r = r(\theta)$ 所围成的图形面积。

微元法：$\forall [\theta, \theta + \Delta\theta] \subseteq [\alpha, \beta]$，则$\Delta S \approx \frac{1}{2} r^2(\theta)\Delta\theta$，故由微元法可知$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$。

例5：求三叶玫瑰线$r = a\sin 3\theta, \theta \in [0, \pi]$ 所围的图形面积。

例6：求$r = 3\cos\theta$ 与$r = 1 + \cos\theta(-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3})$ 所围的图形面积。

作业： 课本P_{329} 1(1)(2)(13)(15), 2.

三、求曲线的弧长

定义弧长：设平面曲线参数方程

为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in [T_1, T_2]$，对区间$[T_1, T_2]$ 作划分：$T_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$ 得到曲线上顺次排列的$n + 1$ 个点$P_0, P_1, \cdots, P_n$，$P_i = (x(t_i), y(t_i))$。

三、求曲线的弧长

定义弧长：设平面曲线参数方程

为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in [T_1, T_2]$，对区间$[T_1, T_2]$ 作划分：$T_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$ 得到曲线上顺次排列的$n+1$ 个点$P_0, P_1, \cdots, P_n$，$P_i = (x(t_i), y(t_i))$。

用$\overline{P_{i-1}P_i}$ 表示连结点P_{i-1} 和P_i 直线段的长度，则相应折线的长度可表示为$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}$。

三、求曲线的弧长

定义弧长：设平面曲线参数方程

为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in [T_1, T_2]$，对区间$[T_1, T_2]$作划分：$T_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$得到曲线上顺次排列的$n+1$个点$P_0, P_1, \cdots, P_n$，$P_i = (x(t_i), y(t_i))$。

用$\overline{P_{i-1}P_i}$表示连结点P_{i-1}和P_i直线段的长度，则相应折线的长度可表示为$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}$。

若当$\lambda = \max_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\} \to 0$时，极限$\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}$存在，且与$[T_1, T_2]$的划分无关，则称该曲线可求长，称$\ell = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}$为该条曲线的弧长。

定义： 若$x'(t), y'(t) \in C[T_1, T_2]$，且$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$，则由参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $, t \in [T_1, T_2]$所确定的曲线称为光滑曲线。

定义： 若$x'(t), y'(t) \in C[T_1, T_2]$，且$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$，则由参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $, t \in [T_1, T_2]$所确定的曲线称为光滑曲线。

定理： （弧长公式）若由参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $, t \in [T_1, T_2]$确定的曲线是光滑曲线，则它可求长，弧长

$$\ell = \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

定义： 若$x'(t), y'(t) \in C[T_1, T_2]$，

且$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$，则由参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [T_1, T_2]$

所确定的曲线称为光滑曲线。

定理： （弧长公式）若由参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [T_1, T_2]$确定的曲线是光滑曲线，则它可求长，弧长

$$\ell = \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

应用(1)：曲线段由$y = f(x)(a \leq x \leq b)$给出的弧长公式$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases}, x \in [a, b]$，此时$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x$。

应用(2)：曲线段极坐标方程$r = r(\theta)(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ 给出。假定$r(\theta)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数。此时$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$。

应用(2)：曲线段极坐标方程$r = r(\theta)(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ 给出。假定$r(\theta)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数。此时$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$。

例7：求半径为a 的圆的周长。

作业： 课本P_{330} 3(2)(4)(6), 4

应用(2)：曲线段极坐标方程$r=r(\theta)(\alpha\le\theta\le\beta)$ 给出。假定$r(\theta)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数。此时$\ell=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$。

例7：求半径为a 的圆的周长。

作业： 课本P_{330} 3(2)(4)(6), 4

四、求某些特殊的几何体体积

只考虑两种情况（1）已知几何体的截面积，求此几何体的体积；（2）求旋转体的体积。至于一般的几何体体积在重积分中给出。

1 已知几何体的截面积，求几何体的体积。

设三维空间中一个几何体夹在平面$x = a$ 和$x = b$ 之间。对$\forall x \in [a, b]$，过x 点且与x 轴垂直的平面与该几何体相截，截面面积$A(x)$ 已知，且$A(x) \in C[a, b]$。

1 已知几何体的截面积，求几何体的体积。

设三维空间中一个几何体夹在平面$x = a$ 和$x = b$ 之间。对$\forall x \in [a, b]$，过x 点且与x 轴垂直的平面与该几何体相截，截面面积$A(x)$ 已知，且$A(x) \in C[a, b]$。

微元法：$\forall [x, x + \Delta x] \subseteq [a, b], \Delta V \approx A(x)\Delta x$, 故

$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x$。

1 已知几何体的截面积，求几何体的体积。

设三维空间中一个几何体夹在平面$x=a$ 和$x=b$ 之间。对$\forall x\in[a,b]$，过x 点且与x 轴垂直的平面与该几何体相截，截面面积$A(x)$ 已知，且$A(x)\in C[a,b]$。

微元法：$\forall[x,x+\Delta x]\subseteq[a,b], \Delta V\approx A(x)\Delta x$, 故

$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$。

注：《九章算术》记载，南北朝数学家祖暅（祖冲之之子）在求出球体积的同时，得到被后人称为“祖暅原理”的结论：夫叠基成立积，缘幂势既同，则积不容异。与上述求体积公式的推导完全一样。

例8：已知一个直圆柱体的底面半径为a，平面P_1过其底面圆周上的一点，且与其底面所在的平面P_2成夹角θ，求圆柱体被P_1与P_2所截得的那部分的体积。

例8：已知一个直圆柱体的底面半径为a，平面P_1 过其底面圆周上的一点，且与其底面所在的平面P_2 成夹角θ，求圆柱体被P_1 与P_2 所截得的那部分的体积。

注：若采用与x 轴垂直的平面与该几何体相截，则截面是一个直角梯形，处理起来麻烦很多。故对几何体作截面的方式与计算是否简便关系很大，在实际计算时要根据具体情况分析，找到最简便的方案。

例8：已知一个直圆柱体的底面半径为a，平面P_1 过其底面圆周上的一点，且与其底面所在的平面P_2 成夹角θ，求圆柱体被P_1 与P_2 所截得的那部分的体积。

注：若采用与x 轴垂直的平面与该几何体相截，则截面是一个直角梯形，处理起来麻烦很多。故对几何体作截面的方式与计算是否简便关系很大，在实际计算时要根据具体情况分析，找到最简便的方案。

例9：求直圆柱面$x^2+y^2=a^2$ 和$x^2+z^2=a^2$ 所围成的几何体体积。

作业： 课本P_{330} 5(2)(4)

2 旋转体的体积

（1）直角坐标系下旋转体的体积

$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x$ 的一个重要用途就是求旋转体的体积。

2 旋转体的体积

（1）直角坐标系下旋转体的体积

$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x$ 的一个重要用途就是求旋转体的体积。

设$f(x) \in C[a, b]$，对于由$0 \le y \le |f(x)|$ 与$a \le x \le b$ 所界定的平面图形绕x 轴旋转一周所得到的旋转体，若用过x 点且与x 轴垂直的平面去截，得到的截面为半径为$|f(x)|$ 的圆，故$A(x) = \pi[f(x)]^2$，从而旋转体的体积

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

2 旋转体的体积

（1）直角坐标系下旋转体的体积

$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x$ 的一个重要用途就是求旋转体的体积。

设$f(x) \in C[a, b]$，对于由$0 \leq y \leq |f(x)|$ 与$a \leq x \leq b$ 所界定的平面图形绕x 轴旋转一周所得到的旋转体，若用过x 点且与x 轴垂直的平面去截，得到的截面为半径为$|f(x)|$ 的圆，故$A(x) = \pi[f(x)]^2$，从而旋转体的体积

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

例10：求$x^2 + (y - b)^2 = a^2 (0 < a \leq b)$ 绕x 轴所围成的旋转体的体积。

（2）参数方程下旋转体的体积

设曲线参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，$t \in [T_1, T_2]$，设在$[T_1, T_2]$上$x'(t)$和$y(t)$连续，$x'(t)$在$[T_1, T_2]$上不变号，则

$$V = \pi \int_{T_1}^{T_2} y^2(t)|x'(t)|\mathrm{d}t.$$

（2）参数方程下旋转体的体积

设曲线参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，$t \in [T_1, T_2]$，设在$[T_1, T_2]$上$x'(t)$和$y(t)$连续，$x'(t)$在$[T_1, T_2]$上不变号，则

$$V = \pi \int_{T_1}^{T_2} y^2(t)|x'(t)|\mathrm{d}t.$$

例11：求旋轮线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$，$t \in [0, 2\pi]$一拱与$x$轴围成的图形绕$x$轴旋转一周所得到的旋转体体积。

（3）极坐标下旋转体的体积

定理： 极坐标下由$0 \le r \le r(\theta)(\theta \in [\alpha, \beta] \subseteq [0, \pi])$ 所表示的区域绕极轴旋转一周所得的旋转体的体积为

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\theta) \sin\theta \mathrm{d}\theta.$$

（3）极坐标下旋转体的体积

定理： 极坐标下由$0 \le r \le r(\theta)(\theta \in [\alpha,\beta] \subseteq [0,\pi])$ 所表示的区域绕极轴旋转一周所得的旋转体的体积为

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\theta) \sin \theta \mathrm{d}\theta.$$

注：不可利用$x(\theta) = r(\theta) \cos \theta, y(\theta) = r(\theta) \sin \theta$，代入$V = \pi \int_{T_1}^{T_2} y^2(t)|x'(t)|\mathrm{d}t$.

（3）极坐标下旋转体的体积

定理： 极坐标下由$0 \le r \le r(\theta)(\theta \in [\alpha,\beta] \subseteq [0,\pi])$ 所表示的区域绕极轴旋转一周所得的旋转体的体积为

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta.$$

注：不可利用$x(\theta) = r(\theta)\cos\theta, y(\theta) = r(\theta)\sin\theta$，代入$V = \pi \int_{T_1}^{T_2} y^2(t)|x'(t)|\mathrm{d}t$.

以$r(\theta)$ 为半径，与极线成θ 角的扇形绕极轴旋转一周，所得的体积为:

$$V = \frac{1}{3}\pi(r(\theta)\sin\theta)^2(r\cos\theta) + \pi\int_{r\cos\theta}^{r}(r^2 - x^2)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)(1-\cos\theta).$$
$$\forall[\theta,\theta+\Delta\theta]\subseteq[\alpha,\beta],$$
$$\Delta V \approx \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)(1-\cos(\theta+\Delta\theta)) - \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)(1-\cos\theta)$$
$$= \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)(\cos\theta - \cos(\theta+\Delta\theta))$$
$$= \frac{4}{3}\pi r^3(\theta)\sin(\theta+\frac{\Delta\theta}{2})\sin\frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)\sin\theta\Delta\theta.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(r(\theta)\sin\theta)^2(r\cos\theta) + \pi\int_{r\cos\theta}^{r}(r^2 - x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)(1-\cos\theta).$$

$$\forall[\theta, \theta+\Delta\theta] \subseteq [\alpha, \beta],$$

$$\Delta V \approx \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)(1-\cos(\theta+\Delta\theta)) - \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)(1-\cos\theta)$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)(\cos\theta - \cos(\theta+\Delta\theta))$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3(\theta)\sin(\theta+\frac{\Delta\theta}{2})\sin\frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)\sin\theta\Delta\theta.$$

故由微元法$V = \dfrac{2}{3}\pi\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^3(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta.$

作业： 课本P_{330} 7(6)(8), 12.

作业： 课本P_{330} 7(6)(8), 12.

五、求旋转曲面的面积

1 直角坐标下旋转曲面的面积

设将曲线$y=f(x)(a\le x\le b)(f(x)\ge 0, f'(x)$ 连续) 绕x轴旋转，得一旋转面，求该旋转面的面积。

$$
\begin{aligned}
&\forall [x, x+\Delta x] \subseteq [a, b], \\
&\Delta S \approx \pi f(x+\Delta x)\overline{MB} - \pi f(x)\overline{MA} \\
&= \pi[f(x+\Delta x) - f(x)]\overline{MB} + \pi f(x)\overline{AB}
\end{aligned}
$$

$$\forall[x, x+\Delta x] \subseteq [a, b],$$
$$\Delta S \approx \pi f(x+\Delta x)\overline{MB} - \pi f(x)\overline{MA}$$
$$= \pi[f(x+\Delta x) - f(x)]\overline{MB} + \pi f(x)\overline{AB}$$

由 $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \dfrac{f(x+\Delta x)}{f(x+\Delta x) - f(x)}$，从而

$$\Delta S \approx \pi(f(x) + f(x+\Delta x))\overline{AB}$$
$$= \pi(f(x) + f(x+\Delta x))\sqrt{(\Delta x)^2 + [f(x+\Delta x) - f(x)]^2}$$
$$\approx 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\Delta x$$

$$\forall [x, x+\Delta x] \subseteq [a, b],$$
$$\Delta S \approx \pi f(x+\Delta x)\overline{MB} - \pi f(x)\overline{MA}$$
$$= \pi[f(x+\Delta x) - f(x)]\overline{MB} + \pi f(x)\overline{AB}$$

由 $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \dfrac{f(x+\Delta x)}{f(x+\Delta x) - f(x)}$，从而

$$\Delta S \approx \pi(f(x) + f(x+\Delta x))\overline{AB}$$
$$= \pi(f(x) + f(x+\Delta x))\sqrt{(\Delta x)^2 + [f(x+\Delta x) - f(x)]^2}$$
$$\approx 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\Delta x$$

故由微分法，$S_{表} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x$

若$f(x) < 0$，则$y = f(x)$ 绕x 轴旋转一周所得到的表面积与$y = -f(x)$ 绕x 轴旋转一周所得到的表面积相等，故

若$f(x)<0$，则$y=f(x)$ 绕x 轴旋转一周所得到的表面积与$y=-f(x)$ 绕x 轴旋转一周所得到的表面积相等，故

$$S_{表}=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x=2\pi\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}\ell。$$

若$f(x) < 0$，则$y = f(x)$ 绕x 轴旋转一周所得到的表面积与$y = -f(x)$ 绕x 轴旋转一周所得到的表面积相等，故

$$S_{表} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x = 2\pi \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}\ell。$$

例12：设曲线$y = \sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求该曲线、所作切线及x 轴所围成的图形绕x 轴旋转一周所得旋转体的表面积。

若$f(x)<0$，则$y=f(x)$ 绕x 轴旋转一周所得到的表面积与$y=-f(x)$ 绕x 轴旋转一周所得到的表面积相等，故

$$S_{表}=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x=2\pi\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}\ell。$$

例12：设曲线$y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求该曲线、所作切线及x 轴所围成的图形绕x 轴旋转一周所得旋转体的表面积。

注：利用弧长在不同直角坐标系下的不变性，可得：若曲线绕某旋转轴旋转，则得到的旋转体的表面积$S_{表}=\int_a^b 2\pi D(\ell)\mathrm{d}\ell$，其中$D(\ell)$ 为该曲线到旋转轴ℓ 的距离，$\mathrm{d}\ell$ 为弧长微分。

2 参数方程下旋转曲面的面积

设$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [T_1, T_2]$ 确定平面上的一段光滑曲线，则它绕x 轴旋转一周得到一旋转曲面。

2 参数方程下旋转曲面的面积

设$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,$t \in [T_1, T_2]$ 确定平面上的一段光滑曲线，则它绕x 轴旋转一周得到一旋转曲面。

在$S_{表} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x$ 中

令$x = x(t), y = y(t)$,

2 参数方程下旋转曲面的面积

设$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [T_1, T_2]$ 确定平面上的一段光滑曲线，则它绕x 轴旋转一周得到一旋转曲面。

在$S_{表} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x$ 中

令$x = x(t), y = y(t)$，

则$S_{表} = 2\pi \int_{T_1}^{T_2} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$。

2 参数方程下旋转曲面的面积

设$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,$t \in [T_1, T_2]$ 确定平面上的一段光滑曲线，则它绕x 轴旋转一周得到一旋转曲面。

在$S_{表} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x$ 中

令$x = x(t), y = y(t)$,

则$S_{表} = 2\pi \int_{T_1}^{T_2} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$。

例13：求旋轮线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$,$t \in [0, 2\pi]$ 一拱绕x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积。

3 极坐标下旋转曲面的面积

由$r = r(\theta)(\theta \in [\alpha, \beta] \subseteq [0, \pi])$ 所决定的曲线绕极轴旋转一周所得到的旋转体的表面积为（将$x(\theta) = r(\theta)\cos\theta$, $y(\theta) = r(\theta)\sin(\theta)$ 代入）：

$$S_{表} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta.$$

3 极坐标下旋转曲面的面积

由$r=r(\theta)(\theta\in[\alpha,\beta]\subseteq[0,\pi])$ 所决定的曲线绕极轴旋转一周所得到的旋转体的表面积为（将$x(\theta)=r(\theta)\cos\theta$, $y(\theta)=r(\theta)\sin(\theta)$ 代入）：

$$S_{表}=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta.$$

例14：求双纽线$r^2=a^2\cos 2\theta$ (i) 绕极轴；(ii) 绕$\theta=\dfrac{\pi}{2}$；(3) 绕$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 所得到的旋转曲面的面积。

作业：课本P_{332} 13(5)。

补充：求$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\le t\le 2\pi$ (i)绕y 轴；(ii) 绕直线$y=2a$ 所得到的旋转曲面的面积。

六、求曲线的曲率

1 曲率的定义

在生产实践中，常常需要考虑曲线的弯曲程度。如厂房结构中的钢梁、车床上的轴等，它们在外力的作用下会发生弯曲，弯曲到一定程度就要断裂。故在计算梁或轴的长度时，需考虑弯曲程度。

六、求曲线的曲率

1 曲率的定义

在生产实践中，常常需要考虑曲线的弯曲程度。如厂房结构中的钢梁、车床上的轴等，它们在外力的作用下会发生弯曲，弯曲到一定程度就要断裂。故在计算梁或轴的长度时，需考虑弯曲程度。

曲线的弯曲程序不仅与切线方向变化角度$\Delta\phi$ 大小有关，而且还与所考察的曲线段的弧长Δs 有关。故一段曲线的弯曲程度通常用$\overline{K} = \left|\frac{\Delta\phi}{\Delta s}\right|$ 衡量。$\overline{K}$ 称为曲线段$\widehat{AB}$ 的平均曲率，刻画了曲线段$\widehat{AB}$ 的平均弯曲程度（取绝对值为使曲率不负）。

令$\Delta s \to 0, B \to A, \overset{\frown}{AB}$ 上的平均曲率的极限能精确地刻画曲线在A 的弯曲程度，定义

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \phi}{\Delta s} \right| = \left| \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} \right|,$$

则K 称为曲线在A 点的曲率。

令$\Delta s \to 0, B \to A, \overset{\frown}{AB}$ 上的平均曲率的极限能精确地刻画曲线在A 的弯曲程度，定义

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \phi}{\Delta s} \right| = \left| \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} \right|,$$

则K 称为曲线在A 点的曲率。

注1：对半径为R 的圆，圆周上任意弧段$\overset{\frown}{AB}$ 的切线方向变化角度$\Delta \phi = \Delta \alpha$，其中$\Delta \alpha$ 为圆心角。

令$\Delta s \to 0, B \to A, \widehat{AB}$ 上的平均曲率的极限能精确地刻画曲线在A 的弯曲程度，定义

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \phi}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|,$$

则K 称为曲线在A 点的曲率。

注1：对半径为R 的圆，圆周上任意弧段$\widehat{AB}$ 的切线方向变化角度$\Delta \phi = \Delta \alpha$，其中$\Delta \alpha$ 为圆心角。

故$\overline{K} = \frac{\Delta \phi}{\Delta s} = \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{1}{R}$，即在任一点的曲率为$K = \frac{1}{R}$。

设曲线在点A 处曲率$K \neq 0$，若过点A 作一个半径为$\dfrac{1}{K}$的圆，使它在A 点处与曲线有相同的切线，且在该点附近与该曲线位于切线的同一侧。我们把这个圆称为曲线在A处的曲率圆或密切圆。曲率圆的半径$R = \dfrac{1}{K}$ 和圆心A_0 分别称为曲线在A 处的曲率半径和曲率中心。

设曲线在点A处曲率$K \neq 0$，若过点A作一个半径为$\frac{1}{K}$的圆，使它在A点处与曲线有相同的切线，且在该点附近与该曲线位于切线的同一侧。我们把这个圆称为曲线在A处的曲率圆或密切圆。曲率圆的半径$R = \frac{1}{K}$和圆心A_0分别称为曲线在A处的曲率半径和曲率中心。

由曲率圆的定义可知：曲线在点A处与曲率圆既有相同的切线，又有相同的曲率和凸性。

设曲线在点A处曲率$K \neq 0$，若过点A作一个半径为$\frac{1}{K}$的圆，使它在A点处与曲线有相同的切线，且在该点附近与该曲线位于切线的同一侧。我们把这个圆称为曲线在A处的曲率圆或密切圆。曲率圆的半径$R = \frac{1}{K}$和圆心A_0分别称为曲线在A处的曲率半径和曲率中心。

由曲率圆的定义可知：曲线在点A处与曲率圆既有相同的切线，又有相同的曲率和凸性。

注2：对直线，因沿着它的切线方向没有变化，即$\Delta\phi = 0$，故$K = 0$，即“直线不曲”。

2 曲率的计算

(1) 直角坐标系下曲率的计算

由导数几何意义，曲线在A 点切线斜率为$\tan\phi$,

即$y' = \tan\phi$，故$\phi = \arctan y'$，从而$\mathrm{d}\phi = \dfrac{y''}{1+(y')^2}\mathrm{d}x$，又

弧长微分$\mathrm{d}s = \sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$，故$K = \left|\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$。

2 曲率的计算

(1) 直角坐标系下曲率的计算

由导数几何意义，曲线在A 点切线斜率为$\tan\phi$,

即$y' = \tan\phi$，故$\phi = \arctan y'$，从而$\mathrm{d}\phi = \dfrac{y''}{1+(y')^2}\mathrm{d}x$，又

弧长微分$\mathrm{d}s = \sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$，故$K = \left|\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$。

(2) 参数方程下曲率计算

设光滑曲线由参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in [T_1, T_2]$ 确定，

且$x(t), y(t)$ 有二阶导数。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} =$$

$$\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'^3(t)}.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=$$
$$\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{x'^3(t)}.$$

故在$K=\left|\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$中把$y''$与$y'$的表达式代入得

$$K=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{(x'^2(t)+y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=$$

$$\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{x'^3(t)}.$$

故在$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$中把$y''$ 与y' 的表达式代入得

$$K=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{(x'^2(t)+y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}.$$

例15：求椭圆$x=a\cos t, y=b\sin t(0\le t\le 2\pi, 0<b\le a)$ 上曲率最大和最小点。

(3) 极坐标下曲率计算

设曲线的极坐标方程为$r=r(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]\subseteq[0,2\pi]$ 且$r(\theta)$ 二阶可导，则它在点(r,θ) 的曲率为

$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(3) 极坐标下曲率计算

设曲线的极坐标方程为$r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta] \subseteq [0, 2\pi]$ 且$r(\theta)$ 二阶可导，则它在点(r, θ) 的曲率为

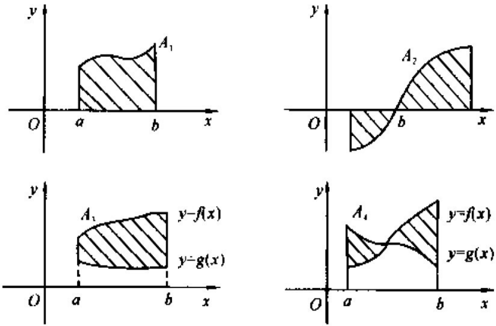
$$K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

作业： 课本P_{332} 17(1)(2), 18.

定积分的应用总结

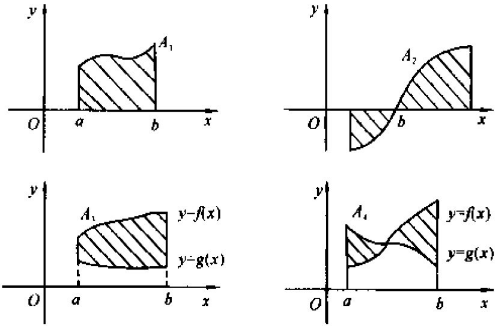
一、求平面图形的面积

(1) 直角坐标



一、求平面图形的面积

(1) 直角坐标



$A_1 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, A_2 = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$，

$A_3 = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x, A_4 = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$。

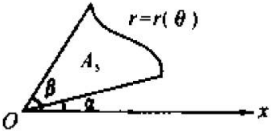
(2) 参数方程

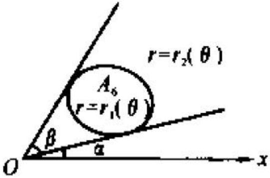
$A=\int_{T_1}^{T_2}|y(t)x'(t)|\mathrm{d}t$，注意对$x'(t)$ 在$[T_1,T_2]$ 上不变号。

(2) 参数方程

$A = \int_{T_1}^{T_2} |y(t)x'(t)|\mathrm{d}t$，注意对$x'(t)$ 在$[T_1, T_2]$ 上不变号。

(3) 极坐标



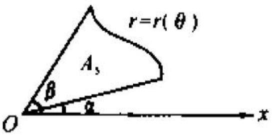


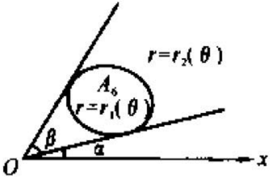
定积分的应用总结

(2) 参数方程

$A = \int_{T_1}^{T_2} |y(t)x'(t)|\mathrm{d}t$，注意对$x'(t)$ 在$[T_1, T_2]$ 上不变号。

(3) 极坐标





$A_5 = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\mathrm{d}\theta, A_6 = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta))\mathrm{d}\theta$。

二、求曲线的弧长

对于有向曲线弧，弧长元素$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$

直角坐标：$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x = \sqrt{1 + x'^2(y)}\mathrm{d}y$

参数方程：$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$

极坐标：$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$

二、求曲线的弧长

对于有向曲线弧，弧长元素$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$

直角坐标：$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x=\sqrt{1+x'^2(y)}\mathrm{d}y$

参数方程：$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$

极坐标：$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$

(1) 对直角坐标

$y=f(x),a\leq x\leq b,L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$

$x=g(y),c\leq y\leq d,L=\int_c^d\sqrt{1+x'^2(y)}\mathrm{d}y$

定积分的应用总结

(2) 对参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (T_1 \le t \le T_2), \quad L = \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

定积分的应用总结

(2) 对参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (T_1 \leq t \leq T_2), \quad L = \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

(3) 对极坐标

$$r = r(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta, L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

(2) 对参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (T_1 \le t \le T_2), \quad L = \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

(3) 对极坐标

$$r = r(\theta), \alpha \le \theta \le \beta, L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

三、求体积

(1) 平行截面已知的立体体积 $V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x$

(2) 旋转体体积

1° 直角坐标

曲边梯形$y=f(x), a \le x \le b,$

$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$, $V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$

(2) 旋转体体积

1° 直角坐标

曲边梯形$y = f(x), a \leq x \leq b$,

$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$, $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$

2° 参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (T_1 \leq t \leq T_2), \quad V = \pi \int_{T_1}^{T_2} y^2(t)|x'(t)|\mathrm{d}t$$

(2) 旋转体体积

1° 直角坐标

曲边梯形$y = f(x), a \leq x \leq b$,

$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$, $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$

2° 参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (T_1 \leq t \leq T_2), \quad V = \pi \int_{T_1}^{T_2} y^2(t)|x'(t)|\mathrm{d}t$$

3° 极坐标

$0 \leq r \leq r(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$，绕极轴$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta$。

四、旋转体的表面积

(1) 直角坐标

曲线绕旋转轴旋转$S_{表}=2\pi\int_a^b D(\ell)\mathrm{d}\ell$，$D(\ell)$ 表示曲线到旋转轴的距离。

$$y=f(x), a\le x\le b, S_x=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x,$$

$$x=g(y), c\le y\le d, S_y=2\pi\int_c^d |g(y)|\sqrt{1+x'^2(y)}\mathrm{d}y$$

四、旋转体的表面积

(1) 直角坐标

曲线绕旋转轴旋转 $S_{\text{表}} = 2\pi \int_a^b D(\ell)\mathrm{d}\ell$，$D(\ell)$ 表示曲线到旋转轴的距离。

$y = f(x), a \le x \le b, S_x = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x$，

$x = g(y), c \le y \le d, S_y = 2\pi \int_c^d |g(y)| \sqrt{1 + x'^2(y)}\mathrm{d}y$

(2) 参数方程

$S_{\text{表}} = 2\pi \int_{T_1}^{T_2} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$

四、旋转体的表面积

(1) 直角坐标

曲线绕旋转轴旋转$S_{表} = 2\pi \int_a^b D(\ell)\mathrm{d}\ell$，$D(\ell)$ 表示曲线到旋转轴的距离。

$$y = f(x), a \le x \le b, S_x = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x,$$

$$x = g(y), c \le y \le d, S_y = 2\pi \int_c^d |g(y)| \sqrt{1 + x'^2(y)}\mathrm{d}y$$

(2) 参数方程

$$S_{表} = 2\pi \int_{T_1}^{T_2} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

(3) 极坐标 $r = r(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$

$$S_{表} = 2\pi \int_\alpha^\beta |r(\theta)\sin\theta| \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

五、曲率

(1) 直角坐标

$$K = \left| \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|$$

五、曲率

(1) 直角坐标

$$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$$

(2) 参数方程

$$K=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{(x'^2(t)+y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

五、曲率

(1) 直角坐标

$$K = \left| \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|$$

(2) 参数方程

$$K = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

(3) 极坐标

$$K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$