数理统计

-----CH4　假设检验

假设检验
- 参数检验
- 非参数检验
  - 分布拟合检验
  - 独立性检验

第四章：　假设检验

– 假设检验基本思想

--正态总体的参数检验

--广义似然比检验

--总体分布的拟合检验

– 正态分布的概率纸检验

– 独立性检验

4.1 假设检验基本思想

例 1 某车间用包装机装葡萄糖，按照标准，每袋平均净重应为 0.5（kg），现抽查 9 袋，测得净重（单位：kg）为

0.497，0.506，0.516，0.524，0.481，0.511，0.510，0.515，0.512。

问包装机工作是否正常？

可以认为，每袋糖的净重ξ服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，平均净重就是总体ξ的均值μ，包装机工作正常时，应该有$\mu=0.5$。所以，这相当于先提出了一个假设H_0：$\mu=0.5$，然后要求我们根据实际测得的样本数据，检验它是否成立。

例 2 对于某种针织品的强度，在 80°C 时，抽取 5 个样品，测得样本均值 $\overline{X}=19.6$ ，修正样本标准差 $S_x{}^*=0.42$ ；在 70°C 时，抽取 6 个样品，测得样本均值 $\overline{Y}=20.3$ ，修正样本标准差 $S_y{}^*=0.30$ 。设这种针织品的强度服从正态分布，问在 80°C 和 70°C 时的平均强度是否相同？

设针织品在$80°C$ 和$70°C$ 时的强度,分别为$\xi \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和$\eta \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ ，平均强度就是两个总体的均值μ_1 和μ_2 ，所以，问题相当于要求从样本观测值出发，检验假设$H_0:\mu_1=\mu_2$ 是否成立。

例 3 已知某班学生的一次考试成绩，问学生的考试成绩ξ是否服从正态分布？

学生的考试成绩可以看作是总体ξ 的样本观测值，问题相当于提出了这样一个假设H_0：$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，然后要求从样本出发，检验它是否成立。

引例: 某药厂包装硼酸粉，规定每袋净重为0.5（kg），设每袋重量服从正态分布，标准差$\sigma = 0.014$ (kg）。为检验包装机的工作是否正常，随机抽取10袋，称得净重分别为:

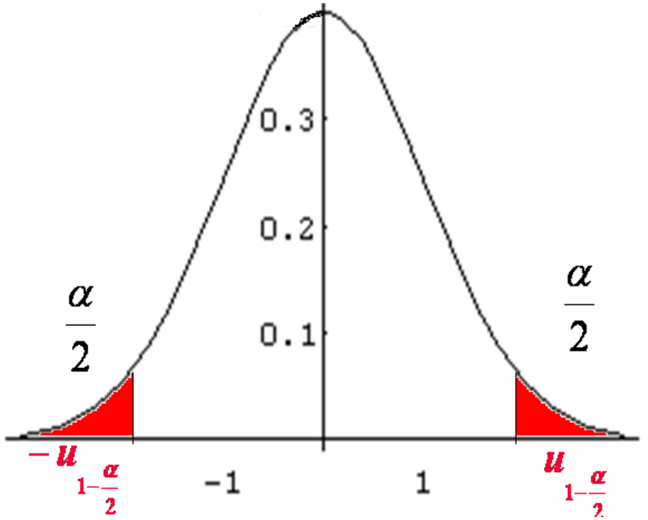
0.496　0.510　0.515　0.506　0.518

0.512　0.524　0.497　0.488　0.511

问给定显著性水平为$\alpha = 0.05$，能否认为这台包装机工作正常?

包装机工作正常是指其出袋量确实为0.5,至于每袋重量的差异只是由随机误差引起的,并不是机器故障造成的

设每袋净重为随机变量 X，则 $X \sim N(\mu, 0.014^2)$



若这台包装机工作正常，即: $\mu = 0.5$

$$U = \frac{\overline{X} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.014^2}{10}}} \sim N(0,1)$$

统计量U的取值应集中在其’中心’ 0附近,太偏离中心0的取值很少---如图:对于给定的一个小的概率比如0.01,0.05 (显著性水平), 红色区域表示U的取值只有很小的比例1%,5%落入的区间

带入观测值,若U的值在这个红色的区域内,我们可认为在 $\mu=0.5$ 情况下是不太可能发生的(小概率事件),因此,我们可以认为前提 $\mu=0.5$ 是不合适的.

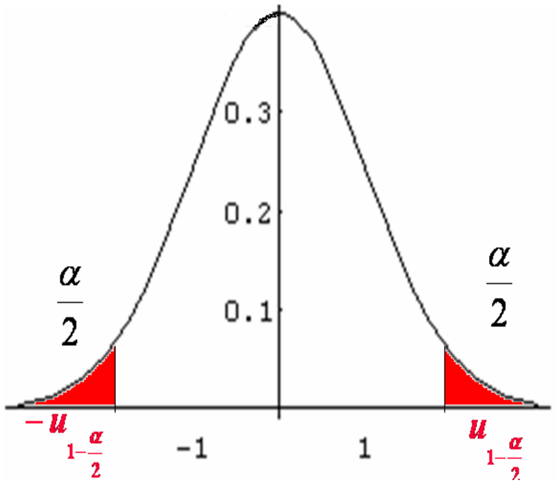
假设检验的一般步骤是：

（1）提出H_0, H_1

（2）选取统计量U，计算测试值$\hat{U}$

（3）对于给定的α求出临界值，划分W_0和W_1，使得：

$$P\{U \in W_1 \mid H_0\text{真}\} \le \alpha$$



(4)做出判断：若$\hat{U} \in W_1$拒绝H_0

若$\hat{U} \in W_0$不拒绝H_0

（一）提出假设（Hypothesis)

原假设H_0,备选假设H_1

H_0与H_1互不相容，

原假设的选取遵循3个原则：

（1）等号原则

（2）尊重原假设原则

（3）控制严重后果原则

$H_0: \mu = \mu_0 \quad (0.5);$ $H_1: \mu \neq \mu_0$

（二）选统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$，则有

$$P\{|U|\le u_{1-\alpha/2}\}=1-\alpha$$

计算 $\hat{U}=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}=1.7393$

（三）得到区间

$$W_0:[-u_{1-\alpha/2},u_{1-\alpha/2}]=[-1.96,1.96]$$ ——接受域

$$W_1:(-\infty,-u_{1-\alpha/2})\cup(u_{1-\alpha/2},+\infty)$$ ————拒绝域

（四）做出判断：若 $\hat{U}\in W_0$，接受；若 $\hat{U}\notin W_0$，拒绝

判断的依据：小概率反例否定法

假设检验中的两类错误

第一类错误（弃真）： H_0正确，$\hat{U} \in W_1$

拒真概率（厂方风险）$\alpha = P\{拒绝H_0 \mid H_0真\}$

第二类错误（取伪）： H_0错误，$\hat{U} \in W_0$

受伪概率（使用方风险）$\beta = P\{接受H_0 \mid H_0不真\}$

理想方法：α与β都尽可能地小

一定条件下不可能

	$U\in$接受域W_0，接受H_0	$U\in$拒绝域W_1，拒绝H_0
H_0为真，H_1不真	正确	犯第一类错误
H_0不真，H_1为真	犯第二类错误	正确

犯第一类错误的概率 $\boldsymbol{P\{\hat{U}\in W_1 \mid H_0}$**为真**$\boldsymbol{\}\le \alpha}$

犯第二类错误的概率$\boldsymbol{P\{\hat{U}\in W_0 \mid H_0}$**不真**$\boldsymbol{\}=\beta}$

降低错误的方法：

（1）取定α，增大样本容量使β减小

不足：带来检验和试验成本的增加

（2）n给定，规定α，使β尽可能地小

——最优势检验

不足：检测方法不一定存在

（3）限定α，找出$W_0(W_1)$

——显著性检验

不足: 只控制α, 不控制β, 使得H_0与H_1地位不平等

4.2 正态总体参数的检验

根据样本数据，对(单/双)正态总体的参数进行检验

单正态总体方差已知时，均值的检验

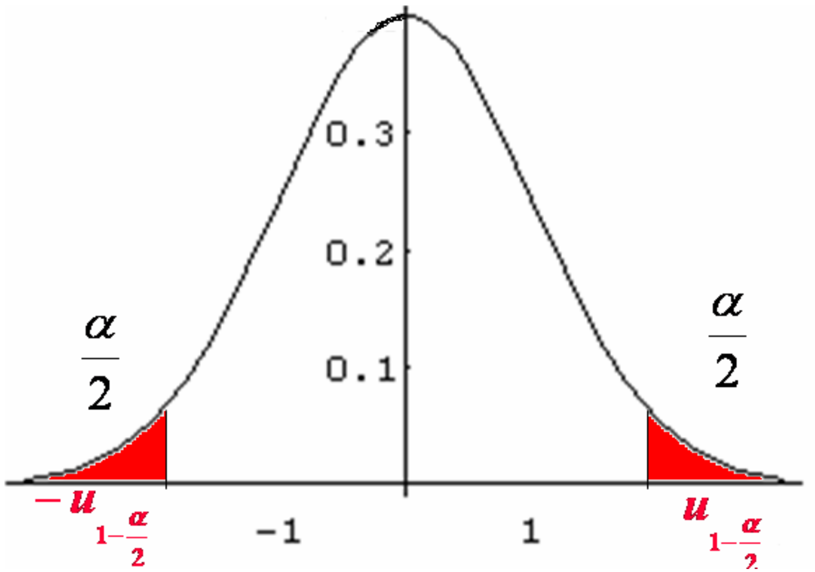
问题 设总体 $\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，已知其中 $\sigma=\sigma_0$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是 ξ 的样本，要检验H_0： $\mu=\mu_0$ 。

提出假设 H_0: $\mu=\mu_0$, H_1: $\mu\neq\mu_0$

选统计量$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$

接受域W_0 : $|U|\le u_{1-\alpha/2}$

拒绝域W_1 : $|U|> u_{1-\alpha/2}$



检验法：“U 检验法”或“Z 检验法”

例4 某药厂包装硼酸粉，规定每袋净重为0.5（kg），设每袋重量服从正态分布，标准差$\sigma=0.014$(kg）。为检验包装机的工作是否正常，随机抽取10袋，称得净重分别为：

0.496 0.510 0.515 0.506 0.518

0.512 0.524 0.497 0.488 0.511

问这台包装机的工作是否正常（显著性水平0.05）

解：设每袋净重为随机变量X，则$X \sim N(\mu, 0.014^2)$

$$H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

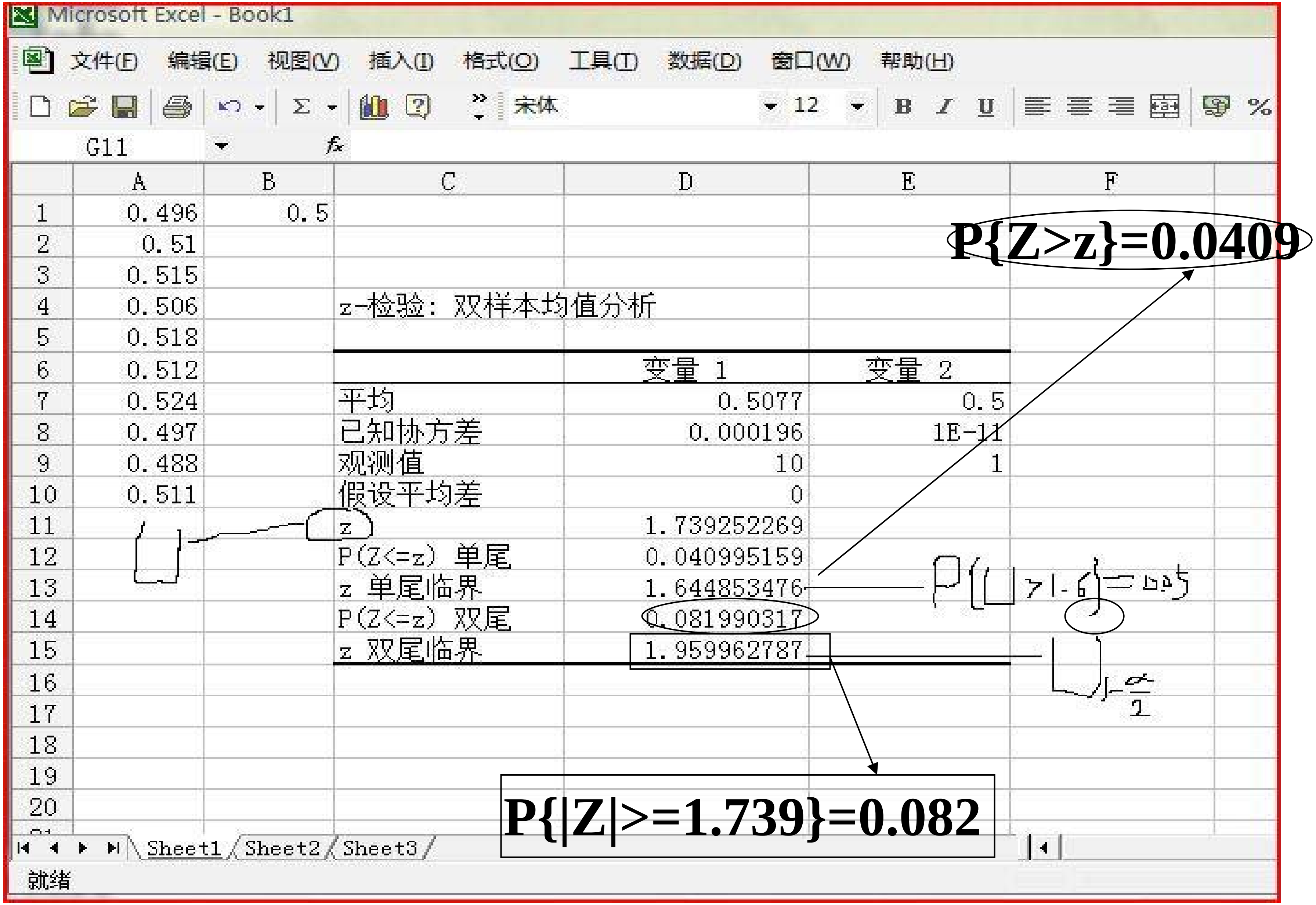
取统计量$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = \dfrac{\overline{X} - 0.5}{0.014 / \sqrt{10}}$

计算得$\hat{U} = \dfrac{0.5077 - 0.5}{0.014 / \sqrt{10}} = 1.7393$

查表得$u_{1-\alpha/2} = u_{1-0.05/2} = u_{0.975} = 1.96$

拒绝域为$W_1 = (-\infty, -1.96) \cup (1.96, +\infty)$

$\because \hat{U} \notin W_1 \quad \therefore$ 不拒绝H_0



	A	B	C	D	E
1	0.496	0.5			
2	0.51				
3	0.515				
4	0.506		z-检验：双样本均值分析		
5	0.518				
6	0.512			变量 1	变量 2
7	0.524		平均	0.5077	0.5
8	0.497		已知协方差	0.000196	1E-11
9	0.488		观测值	10	1
10	0.511		假设平均差	0	
11			z	1.739252269	
12			P(Z<=z) 单尾	0.040995159	
13			z 单尾临界	1.644853476	
14			P(Z<=z) 双尾	0.081990317	
15			z 双尾临界	1.959962787	
16					
17					
18					
19					
20					

思考题

对上例

假设检验中的显著性水平一般标准是选为0.05或0.01。现在，若某商家要从该药厂进货,商家要检测产品是否合格，问商家希望选取的显著性水平是0.05还是0.01？