1 第2次补充版

第一章、距离空间

知道距离空间.

可分性*; 可分的例子*，不可分的例子，会证明;

$L^p[0,1](1 \le p < \infty; p = \infty)$是否可分;

l^∞是否可分*? c_0和$C[a,b]$是否可分*? 如何证明*?

c_0={ 收敛于零的复数列全体}. $c_0 \subseteq l^\infty$ 是否可分?

列紧性*;

知道距离空间的完备化；

知道常见距离空间的完备化,例如$C[0,1]$在$L^p[0,1]$诱导的范数下不是完备的，

其完备化是$L^p[0,1]$; 默认的范数是？

闭球套定理. 反例

压缩映射定理*. 习题*

第二章、线性赋范空间

赋范空间*;

赋范空间不是内积空间的例子*;

距离空间不是赋范空间的例子*;

了解常见空间的范数

$C[0,1]$; $L^1[0,1]$, $L^\infty[0,1]$,$L^p[0,1](1 < p < \infty)$;

$C[0,1]$在不同范数(主要是p-范数)下的完备化.

$l^1, l^\infty; l^p(1 < p < \infty)$

Banach空间*. 例子*;

第三章内积空间与Hilbert空间

内积空间定义*; 例子*;

知道l^2和$L^2[0,1]$*

掌握正交分解定理;

标准正交列；Bessel不等式

知道正交列的完备性.

知道Gram-Schmidt算法，即正交化算法

无限维Hilbert 空间$\mathcal{H}$没有可数代数基：不存在线性无关的集合$\{x_n : n \ge 1\}$使得span $\{x_n : n \ge 1\} = \mathcal{H}$。

第四章、有界线性算子

第一纲集*具体的例子. ；第二纲集*

Baire纲定理*. 例子*

知道无限维赋范空间的有限维子空间一定是疏朗集（事实上有更一般的结果）

知道有限维赋范空间到有限维赋范空间的线性算子一定有界*.

会计算低阶矩阵的特征值和范数.*

例子：c_0 在l^∞中是否是第一纲集；

l^1 在l^2中是否第一纲集；

l^2 在c_0中是否第一纲集；等等.

共鸣定理*;

开映射定理*;

逆算子定理*, 例子;

闭图像定理* 闭算子;

第五章、共轭空间和共轭算子
Hahn-Banach定理*;
Riesz表示定理*.
会求简单的Hilbert空间有界线性算子的共轭算子;

第六章，第七章
会计算特殊的乘法算子，等等.
待定
会利用有限秩算子的逼近来证明一个算子是紧算子
以上打*部分表示强记.
虚则实之实则虚之

还需要看的例子和习题（包括但不限）**:**
例子1.3.19* , 例子1.3.20*;例子1.3.21*，c_0的可分性证明*
例子1.4.11,
例子1.4.12 ;
命题3.4.2, 定理4.1.6*
定理3.4.11
例子3.5.2 ;
page 58-59练习17, 28, 29, 36*,39,
page 88- 练习8**,14*, 17, 21*, 27, 29
page 121-123练习1*,2*, 5, 11,13*, 17, 19**, 20,24; 25; 27, 30, 31.
page 158-159练习1, 2, 5, 6, 10, 13.
page 196-198练习6, 11, 24, 25, 17,20, 30**，42
这个版本后续还会有微小改动。

习题1

设$1 \le p, q \le \infty$. 已知对于无穷数列(a_i)，任给$(x_i) \in l^p$,有$(a_i x_i) \in l^q$, 证明: $T : l^p \to l^q$, $(x_i) \to (a_i x_i)$有界，

证明：首先证明T 是闭算子. 为此，取$x^n \in l^p$,且$x^n \to x, T x^n \to y \in l^q$.

由于$x^n \to x$，$\{x^n\}$ 依照坐标收敛于x，所以对$k = 1, 2, \cdots$,

$$x_k^n \to x_k, (n \to \infty).$$

由于k固定，

$$a_k x_k^n \to a_k x_k.$$

另一方面，$T x^n \to y \in l^q$. 所以$\{T x^n\}$ 依照坐标收敛于y, 对$k = 1, 2, \cdots$,

$$a_k x_k^n \to y_k.$$

因此$y_k = a_k x_k$.由k的任意性，$y = T x$,因此T 是闭算子.

由于l^p, l^q都是Banach空间，由闭图像定理，T 有界.

习题2. 对于何种无穷数列(a_i)，任给$(x_i) \in l^1$,有$(a_i x_i) \in l^2$, 刻画所有可能的数列(a_i).

对于$T : l^1 \to l^2$, $(x_i) \to (a_i x_i)$有界，并计算$\|T\|$.（写出过程）

解：刻画数列(a_i). 首先断言数列(a_i)有界. 为此，令$e_n = (0, \cdots, 1, 0, 0, \cdots)$(第n位上为1,其余为0.)

$$\frac{\|T e_n\|_2}{\|e_n\|_1} \le \|T\|,$$

即$|a_n| \le \|T\|$, 由于n的任意性，

$$\sup_n |a_n| \le \|T\| \quad (\clubsuit)$$

数列(a_i)有界.

若数列(a_i)有界，则必满足题目中的条件. 事实上,任取$(x_i) \in l^1$, 容易知道$(a_i x_i) \in l^1$. 但$l^1 \subseteq l^2$, 所以$(a_i x_i) \in l^2$.

下面求$\|T\|$.

由于对于任何非零向量$x \in l^1$，

$$\frac{\|T x\|_2}{\|x\|_1} \le \frac{\sup_n |a_n| \|x\|_2}{\|x\|_1} = \sup_n |a_n| \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} \le \sup_n |a_n|,$$

所以$\|T\| \le \sup_n |a_n|$,结合($\clubsuit$)，$\|T\| = \sup_n |a_n|$.

习题2. 对于何种无穷数列(a_i)，任给$(x_i) \in l^2$,有$(a_i x_i) \in l^1$, 刻画所有可能的数列(a_i). 任给$(x_n) \in l^2$,有$(a_n x_n) \in l^1$, 并计算$\|T\|$.（写出过程）

刻画数列(a_i). 首先断言$\sum_i |a_i|^2 < \infty$有界. 为此，令$X_n = (\overline{a_1}, \cdots, \overline{a_N}, 0, 0, \cdots)$

$$\|T\| \ge \frac{\|T X_n\|_1}{\|X_n\|_2} = \frac{\sum_{1 \le i \le N} |a_i|^2}{\sqrt{\sum_{1 \le i \le N} |a_i|^2}} = \sqrt{\sum_{1 \le i \le N} |a_i|^2},$$

$$\|T\|^2 \ge \sum_{1 \le i \le N} |a_i|^2.$$

由于N的任意性，

$$\sum_i |a_i|^2 \le \|T\|^2 < \infty. \quad (\spadesuit)$$

反之，若数列(a_i)满足$\sum_i |a_i|^2 < \infty$，任给$(x_n) \in l^2$,, 必然有$\sum_i |a_i x_i| < \infty.(a_i x_i) \in l^1$.

下面求$\|T\|$.

由于对于任何非零向量$x \in l^1$，

$$\frac{\|Tx\|_1}{\|x\|_2} \leq \frac{\sum_n |a_n x_n|}{\sqrt{\sum_n |x_n|^2}} \leq \sqrt{\sum_n |a_n|},$$

其中最后一式利用了Holder不等式. 所以$\|T\| \leq \sqrt{\sum_i |a_i|^2}$,结合♠得到$\|T\| = \sqrt{\sum_i |a_i|^2}$.

♡ 请您欣赏一题：

l^1 在l^2中是否第一纲集；

解析:l^2是Banach空间，是第二纲的. l^1可以看成l^2的一个稠密子空间，范数取l^2的范数$\|\cdot\|_2$所以不是疏集，不能马上判断它是不是第一纲的.

解：l^1 在l^2中是第一纲集. 这等价于说$(l^1, \|\cdot\|_2)$是第一纲集.

事实上, 反设$(l^1, \|\cdot\|_2)$是第二纲的.

考虑算子$T : (l^1, \|\cdot\|_1) \to (l^1, \|\cdot\|_2), x \to x$. 显然这是一个线性双射. 由于对于任何$x \in l^1 \subset l^2$,

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1,$$

即$\|Tx\|_2 \leq \|x\|_1$,T有界，那么由逆算子定理，$T^{-1} : (l^1, \|\cdot\|_2) \to (l^1, \|\cdot\|_1), x \to x$ 有界，但取$X_N = (1, \cdots, 1, 0, 0, \cdots)$ (N个1)，计算得

$$\frac{\|X_N\|_1}{\|X_N\|_2} = \sqrt{N}$$

所以T^{-1} 无界. 矛盾. 因此，$(l^1, \|\cdot\|_2)$是第一纲集.

page89 ex 17, 设$X^p(0 < p \leq 1)$表示全体满足Holder条件

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|^p$$

的函数. 线性运算和$C[a,b]$中的相同. 定义H^p 中的范数

$$\|x\| = |x(a)| + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^p}$$

证明H^p为Banach空间.

(这题讲起来花时间，大家看看，有问题答疑时交流)

（因为书上已经提到$\|\cdot\|$是范数，所以不需要证明是范数.）

只需证明X^p的完备性

设$\{x_n\}$是Cauchy列.

首先证明$\{x_n\}$点点收敛. 注意$|x_n(a) - x_m(a)| \leq \|x_n - x_m\|$，因为$\{x_n\}$是Cauchy列，所以$\{x_n(a)\}$ 也是Cauchy列（复数列），设$\{x_n(a)\}$ 收敛于一个常数，记为$x(a)$.

令$t_2 = a, t_1 = t$,由已知条件得到

$$\frac{|x_n(t) - x_m(t) - (x_n(a) - x_m(a))|}{|t - a|^p} \leq \|x_n - x_m\|,$$

由此得

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leq |t - a|^p \|x_n - x_m\| + |(x_n(a) - x_m(a))|,$$

又因为$\{x_n\}$和$\{x_n(a)\}$ 都是Cauchy列，上式表明对于$a < t \leq b$, $\{x_n(t)\}$ 也是Cauchy列,设其收敛于$x(t)$.

接下来证明$x \in H^p$且$\|x_n - x\| \to 0, n \to \infty$.

$\{x_n\}$ 是Cauchy列,所以存在常数$M > 0$, 使得$\|x_n\| \leq M$.对固定的$t_1, t_2, t_1 \neq t_2$,

$$\frac{|x_n(t_1) - x_n(t_2)|}{|t_1 - t_2|^p} \leq M$$

令$n \to \infty$,

$$\frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^p} \leq M,$$

所以

$$\sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^p} \leq M.$$

所以$x \in H^p$

类似，对任意$\varepsilon > 0$,存在自然数n_0使得当$n, m \geq n_0$ 时

$$\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

对固定的$t_1, t_2, t_1 \neq t_2$,

$$\frac{|(x_n - x_m)(t_1) - (x_n - x_m)(t_2)|}{|t_1 - t_2|^p} \leq \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon,$$

令$m \to \infty$.

$$\frac{|(x_n - x)(t_1) - (x_n - x)(t_2)|}{|t_1 - t_2|^p} \leq \varepsilon,$$

$$\sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|(x_n - x)(t_1) - (x_n - x)(t_2)|}{|t_1 - t_2|^p} \leq \varepsilon,$$

又由于

$$|(x_n - x)(a)| \to 0, \ n \to \infty,$$

由范数定义可知

$$\|x_n - x\| \to 0, \ n \to \infty.$$

page 123 ex 19, (2)
$X = C[-1,1]$, $M = \{f \in X : f(0) = 0\}$, 求$M^\perp$.

解: $M^\perp = \{0\}$.
事实上，显然有$M^\perp \supseteq \{0\}$. 只需证明$M^\perp \subseteq \{0\}$.
设$h \in M^\perp$, 无妨设$|h(x)| \le 1, x \in [-1,1]$.对$n \ge 2$, 构造$f_n(x)$ 使得当$|x| \ge \frac{1}{n}$, $f_n(x) = h(x)$; 当$0 \le x < \frac{1}{n}$, $f(x) = h(\frac{1}{n})nx$; 当$-\frac{1}{n} < x < 0$,, 令$f(x) = -h(-\frac{1}{n})nx$, 那么$f_n \in C[-1,1]$ 且$f_n(0) = 0$.
于是$f_n \in M$.

$$(h, f_n) = 0.$$

即$\int_{-1}^1 h(x)\overline{f_n(x)}dx = 0$. 注意到$|f_n(x)| \le 1$,且$\{f_n\}$几乎处处收敛到$h$, 令$n \to \infty$, 由有界收敛定理知道，

$$\int_{-1}^1 |h(x)|^2 dx = 0.$$

因为在$[-1,1]$ 上$|h|^2$非负连续，所以$h = 0$. 证毕.
思考题：$M_1 = \{f \in X : f(t) = 0, -1 \le t \le 0\}$, 求$M_1^\perp$. (用上面的办法)

Exercise
设X为赋范空间，证明X是完备的当且仅当其单位球面$S = \{x \in X | \|x\| = 1\}$完备.

首先证明$\Rightarrow$
设$\{x_n\}$为S中的Cauchy列， 由于X完备，存在元素$x \in X$使得$\{x_n\}$依范数收敛于x,由于对任意n, $\|x_n\| = 1$, 取极限得$\|x\| = 1$.因此$S = \{z \in X | \|z\| = 1\}$完备.
$\Leftarrow$ 设$\{x_n\}$为X中的Cauchy列, 由三角不等式可推知

$$|\|x_n\| - \|x_m\|| \le \|x_n - x_m\|,$$

因此$\{\|x_n\|\}$为$\mathbb{C}$中的Cauchy列,收敛.
若$\{\|x_n\|\}$收敛于0(数值)，则$\{x_n\}$收敛于(X中)的0元素，
否则，$\{\|x_n\|\}$收敛于某个常数$2a > 0$. 无妨设对所有n, $\|x_n\| > a$. 令$y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$，下面验证$\{y_n\}$为$S$中的Cauchy列.
注意$\frac{1}{\|x_n\|}$ 收敛，设其收敛于b

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|} = (\frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_m}{\|x_n\|}) + (\frac{x_m}{\|x_n\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|})$$

下面的步骤请自行考虑. (目标：$\{y_n\}$为S中的Cauchy列.)
由于S完备，可设$\{y_n\}$收敛于$y \in S$. 所以

$$\|x_n - ay\| = \| \|x_n\|y_n - ay\| = \|(\|x_n\| - a)y_n + (ay_n - ay)\|$$

$$\le \|(\|x_n\| - a)y_n\| + \|(ay_n - ay)\| = |\|x_n\| - a| + |a|\|y_n - y\| \to 0, (n \to \infty)$$

所以$\{x_n\}$收敛.由序列$\{x_n\}$的任意性，X完备.

- 定理3.3.4 page 107-108

设$\{e_n : n \ge 1\}$是内积空间X中的标准正交系，$x \in X$，a_k复数，用两种方法证明：
当且仅当$a_k = (x, e_k)$, $k = 1, \cdots, n$ 时，$\|x - \sum_{k=1}^n a_k e_k\|$取得最小值。

证明（方法一）：记$\widetilde{x} = x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$,

$$M = span\{e_1, \cdots, e_n\}.$$

$\|x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\|$取得最小值当且仅当对任意$b_k \in \mathbb{C}, 1 \le k \le n$,

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k - \sum_{k=1}^{n} b_k e_k\| \ge \|x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\|,$$

即

$$\|\widetilde{x} - y\| \ge \widetilde{x}, y \in M$$

这等价于$\widetilde{x} \in M^{\perp}$. (定理3.2.8)

换句话说，

$$(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, e_j) = 0, j = 1, \cdots, n.$$

$\Leftrightarrow (x, e_j) - a_k(e_j, e_j) = 0, j = 1, \cdots, n;$

即，$a_k = (x, e_j), j = 1, \cdots, n.$

• Baire纲定理的应用:

无限维Banach 空间$\mathcal{X}$没有可数代数基*：不存在线性无关的集合$\{x_n : n \geq 1\}$使得$\text{span}\,\{x_n : n \geq 1\} = \mathcal{X}$.

证明：用反证法. 反设存在线性无关的集合$\{x_n : n \geq 1\}$使得$\text{span}\,\{x_n : n \geq 1\} = \mathcal{X}$，那么

$$\mathcal{X} = \cup_{n\geq 1} X_n, \quad (*)$$

其中$X_n = \text{span}\,\{x_1, \cdots, x_n\}$. 注意到$X_n$是有限维线性子空间，$X_n$是$\mathcal{X}$的疏集，所以由(*)$\mathcal{X}$ 是第一纲集.

但由Baire纲定理，Banach空间$\mathcal{X}$ 是第二纲集，矛盾. 所以无限维Banach 空间$\mathcal{X}$没有可数代数基.

• 推论：无限维Hilbert 空间$\mathcal{H}$没有可数代数基.

另一种证明：用反证法. 反设存在线性无关的集合$\{x_n : n \geq 1\}$使得$\text{span}\,\{x_n : n \geq 1\} = \mathcal{H}$. 由Gram-Schmidt 算法，可以得到标准正交系$\{e_n : n \geq 1\}$使得$\text{span}\,\{x_n : n \geq 1\} = \text{span}\,\{e_n : n \geq 1\} = \mathcal{H}$.

由于$\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2} < \infty$. 则$\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n} e_n$收敛,记为$x$. 那么$x$在$\text{span}\,\{e_n : n \geq 1\}$的闭包中，所以$x \in \mathcal{H} = \text{span}\,\{e_n : n \geq 1\}$. 矛盾(想想为什么?). 所以无限维Hilbert 空间$\mathcal{H}$没有可数代数基.

• 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, x \mapsto Ax$$

的范数.

步骤1. 写出A^*(共轭转置)

2. 求A^*A，以及A^*A的特征值

3. $\|A\| = \sqrt{\|A^*A\|}$, $\|A^*A\|$等于A^*A特征值的最大值.

解：

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det(\lambda I - A^*A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1. \end{pmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - 1),$$

$\det(\lambda I - A^*A)$的根的最大值为4.

所以$\|A\| = \sqrt{\|A^*A\|} = \sqrt{4} = 2$.

page 123

ex 24 设H 为Hilbert空间，$\{x_n\}$为H中的正交集，则下列等价：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛

（2）$\forall y \in H, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y)$ 收敛

（3）$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ 收敛.

证明：$(3) \Rightarrow (1)$ 要证明$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，我们先证明

$$\{\sum_{n=1}^{k} x_n\}$$

是Cauchy列.

为此，注意到$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ 收敛. 可知对于任意$\varepsilon > 0$, 存在自然数n_0, 使得

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \|x_n\|^2 < \varepsilon^2.$$

对任意$l > k \geq n_0$, 注意到$\{x_n\}$为H中的正交集，利用勾股定理得

$$\|\sum_{n=k}^{l} x_n\|^2 = \sum_{n=k}^{l} \|x_n\|^2 \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \|x_n\|^2 < \varepsilon^2$$

所以

$$\|\sum_{n=k}^{l} x_n\| < \varepsilon.$$

这表明$\{\sum_{n=1}^{k} x_n\}$ 是Cauchy列. 由于H 完备，所以$\{\sum_{n=1}^{k} x_n\}$收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

$(1) \Rightarrow (2)$ 固定y,

$$\sum_{n=1}^{k}(x_n, y) = (\sum_{n=1}^{k} x_n, y),$$

由内积的连续性，以及$\sum_{n=1}^{k} x_n \to \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, 可知数列$\{(\sum_{n=1}^{k} x_n, y)\}$ 收敛于复数$(\sum_{n=1}^{\infty} x_n, y)$. 即$\{\sum_{n=1}^{k}(x_n, y)\}$ 收敛于复数$(\sum_{n=1}^{\infty} x_n, y)$.

$(2) \Rightarrow (3)$ 这里给出构造性的证明.

用反证法，反设

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 = \infty.$$

由此可以取自然数$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ 使得

$$\sum_{n=1}^{n_1} \|x_n\|^2 \geq 1$$

$$\sum_{n=n_1+1}^{n_2} \|x_n\|^2 \geq 2^4$$

$$\cdots$$

$$\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \|x_n\|^2 \geq (k+1)^4$$

(想想为什么)

取$y_1 = \sum_{n=1}^{n_1} x_n, y_2 = \sum_{n=n_1+1}^{n_2} x_n, \cdots$, 计算知

$$\|y_n\| \geq n^2.$$

取

$$y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{y_n}{\|y_n\|},$$

注意$\{\sum_{n=1}^{k}(y_n, y_0)\}$是$\{\sum_{n=1}^{k}(x_n, y_0)\}$的子列.

因为$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y_0)$ 收敛, 所以$\sum_{n=1}^{\infty}(y_n, y_0)$收敛，

因为$\{x_n\}$是正交集，由$\{y_n\}$的构造知道$\{y_n\}$也是正交集, 计算知

$$(y_n, y_0) = \frac{1}{n^2} \frac{(y_n, y_n)}{\|y_n\|} = \frac{\|y_n\|}{n^2} \geq 1$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}(y_n, y_0)$发散，矛盾.

- 一致有界原理的一个应用.

用一致有界原理证明(2) $\Rightarrow$ (3)

设H 为Hilbert空间，$\{x_n\}$为H中的正交集

（2）$\forall y \in H, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y)$ 收敛

（3）$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ 收敛.

证明：作$T_n : H \to \mathbb{C}, y \mapsto \sum_{k=1}^{n}(y, x_k)$. 即$T_n(y) = (y, \sum_{k=1}^{n} x_k)$. 计算知

$$\|T_n\|^2 = \|\sum_{k=1}^{n} x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

$\forall y \in H, \quad \sum_{k=1}^{\infty}(x_k, y)$ 收敛，所以$\{\sum_{k=1}^{n}(x_k, y) : n \geq 1\}$有界，$\{\sum_{k=1}^{n}(y, x_k) : n \geq 1\}$有界. 因此由一致有界原理，

$$\sup_n \|T_n\| < \infty,$$

$$\sup_n \|T_n\|^2 < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \leq \sup_j \|T_j\|^2 < \infty,$$

令$n \to \infty$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty.$$

page 158 ex 1. 设$\sup|a_n| < \infty$.在l^1上定义算子$y = Tx$,其中$x = (x_n)$, $y = (a_n x_n)$, 证明：T是l^1上的有界线性算子且$\|T\| = \sup|a_n|$.

证明: 设$M = \sup|a_n| < \infty$.

由于

$$\|Tx\| = \sum_n |a_n x_n| \le \sum_n M|x_n| = M\|x\|,$$

T有界，且$\|T\| \le M$.

下面证明$\|T\| \ge M$以完成证明.

为此，取$e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$, 其中0出现在第$n$位. $\|Te_n\| = |a_n| = |a_n|\|e_n\|$,

$$\|T\| \ge \frac{\|Te_n\|}{\|e_n\|} = |a_n|,$$

两边取上确界得到$\|T\| \ge M$. 证毕.

page 158 ex 2. 设Y是X的子空间. $x_0 \in X$. 证明：$x_0 \in \overline{Y}$ 当且仅当对任一满足$f|_Y = 0$的有界线性泛函都有$f(x_0) = 0$.

$\Rightarrow$ 如果$x_0 \in \overline{Y}$，那么存在Y中的点列$\{x_n\}$收敛于x_0. 对满足$f|_Y = 0$的有界线性泛函f都有$f(x_n) = 0$. 对n取极限得到$f(x_0) = 0$.

$\Leftarrow$ 由命题5.1.6(没错，是第五章的结论) 存在有界线性泛函$\widetilde{f}$满足$\widetilde{f}(x_0) \ne 0$, 且$\widetilde{f}|_Y = 0$.

page 158 ex 5.设f 是线性赋范空间X上的线性泛函，

证明：（1）f连续的充要条件是f的零空间$N(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$是$X$中的闭子空间.

证明：$\Rightarrow$ 设f连续. 任取点列$\{x_n\}$属于$N(f)$且$\{x_n\}$收敛于y. 要证$y \in N(f)$.

因为$x_n \in N(f)$, $f(x_n) = 0$, 由于f连续，取极限得到$f(y) = 0$, 即$y \in N(f)$.

$\Leftarrow$ 设$N(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$是$X$中的闭子空间. 要证明$f$连续.

反设f不连续，这等价于f无界. 所以存在X中的序列x_n使得

$$|f(x_n)| > n\|x_n\|.$$

记$y_n = \dfrac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|}$. $|f(y_n)| > 1$, 取$c_n = \frac{1}{f(y_n)}$. $f(c_n y_n) = 1$ 且

$$\|c_n y_n\| \to 0.$$

因此，对任意x, $f(x - f(x)c_n y_n) = 0$,

$$x - f(x)c_n y_n \in N(f).$$

但$\{x - f(x)c_n y_n\}$收敛于x, 所以$x \in N(f)$. 那么$X = N(f)$,因此$f = 0$, 这和f不连续矛盾.

所以f连续.

page 158 ex 5.设f 是线性赋范空间X上的线性泛函，

证明：（2）设$f \ne 0$, f不连续的充要条件是$N(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$在$X$中稠密.

证明：$\Rightarrow$ 这部分的证明参考上面.

$\Leftarrow$ $N(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$在$X$中稠密. 假设$f$ 连续，那么$N(f)$是闭集，因此$N(f) = X$，这等价于$f = 0$,矛盾.

请您欣赏一

定理3.1.10 设X为赋范空间，并且范数满足平行四边形法则，那么存在X上的内积，它所诱导的范数就是该范数.

证明: 1. X为实的赋范空间的情形.

定义

$$(x,y)_1 = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

要证明$(x,y)_1$定义了内积.

• $(x,x)_1 = \frac{1}{4}\|2x\|^2 = \frac{1}{4}4\|x\|^2 = \|x\|^2 \geq 0.$

且$(x,x)_1 = 0$ 等价于$\|x\|^2 = 0, \Leftrightarrow x = 0.$

• $(x,y)_1 = (y,x)_1$，显然. (注意X是实空间)

•验证内积空间的性质(4).

为此，首先证明$(x+y,z)_1 = (x,z)_1 + (y,z)_1$.

$$\begin{aligned}
(x,z)_1 + (y,z)_1 &= \frac{1}{4}(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2) \\
&= \frac{1}{4}\{\|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 - (\|x-z\|^2 + \|y-z\|^2)\} \\
&= \frac{1}{8}\{\|x+y+2z\|^2 + \|x-y\|^2 - (\|x+y-2z\|^2 + \|x-y\|^2)\} \quad (*) \\
&= \frac{1}{8}(\|x+y+2z\|^2 - \|x+y-2z\|^2) \\
&= \frac{1}{2}(\|\frac{x+y}{2}+z\|^2 - \|\frac{x+y}{2}-z\|^2) \\
&= 2(\frac{x+y}{2},z)_1.
\end{aligned}$$

. 其中(*)两次使用了平行四边形法则.

我们得到$(x,z)_1 + (y,z)_1 = 2(\frac{x+y}{2},z)_1$. (△)

取$y = 0$, 上式写成

$$(\widetilde{x},z)_1 = 2(\frac{\widetilde{x}}{2},z)_1.$$

令$\widetilde{x} = x+y$,得到

$$(x+y,z)_1 = 2(\frac{x+y}{2},z)_1.$$

结合(△)，立得

$$(x,z)_1 + (y,z)_1 = (x+y,z)_1.$$

只要证明$(tx,y)_1 = t(x,y)_1$. 为此，对$t \in \mathbb{R}$, 定义$h(t) = (tx,y)_1$. 由定义可以验证h是联系的，并且满足$h(s+t) = h(s) + h(t)$. 那么可以推出（exercise）$h(t) = th(1)$. 所以有$(tx,y)_1 = t(x,y)_1$.

X为复空间的情形.

由极化恒等式，定义

$$(x,y) = (x,y)_1 + i(x,iy)_1 = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2).$$

可验证

$$(ix, y)_1 = -(x, iy)_1$$

对实数a,, 容易验证$(ax, y) = a(x, y)$,以及$i(x, y) = i(x, y)$. 由此，对复数$\lambda = a + ib$, a, b为实数，我们有

$$(\lambda x, y) = (ax, y) + (ibx, y) = a(x, y) + i(bx, y) = (a + ib)(x, y) = \lambda(x, y).$$

•

$$\overline{(y, x)} = (y, x)_1 - i(y, ix)_1 = (x, y)_1 + i(iy, x)_1 = (x, y)$$

• 正定性由$\|x + ix\| = \|x - ix\| = \sqrt{2}\|x\|$,计算知道$(x, x) = (x, x)_1 \geq 0$. 并且$(x, x) = 0 \Leftrightarrow (x, x)_1 \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$.

请您欣赏二page 124

ex 33 称$H_n(t)=(-1)^n e^{t^2}\frac{d^n}{dt^n}e^{-t^2}$为Hermite多项式, 令

$$e_n(t)=(2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}}H_n(t),\ n=1,2,\cdots$$

证明：$\{e_n;n=1,2,\cdots\}$组成$L^2(-\infty,+\infty)$中的一个完备的标准正交系.

证明：记$\exp(t)=e^t$, 作$f_n(x)=\exp(\frac{x^2}{2})\frac{d^n}{dx^n}(\exp(-x^2))$.

首先证明存在n次多项式P_n使得$f_n(x)=P_n(x)\exp(-\frac{x^2}{2})$.

计算得$f_0(x)=\exp(-\frac{x^2}{2})$, 由归纳法知，对于任意$l<n$,存在$l$次多项式$P_l$使得$f_l(x)=P_l(x)\exp(-\frac{x^2}{2})$. 那么

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \exp(\frac{x^2}{2})\frac{d^{n-1}(-2xe^{-x^2})}{dx^{n-1}} \\ &= \exp(\frac{x^2}{2})\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{d^k}{dx^k}(-2x)\,\frac{d^{n-1-k}}{dx^{n-1-k}}e^{-x^2} \\ &= -2xf_{n-1}(x)-2(n-1)f_{n-2}(x). \end{aligned}$$

所以$P_n(x)=-2xP_{n-1}(x)-2(n-1)P_{n-2}(x)$. check

记P_n的首项系数为a_n, 由上式得到

$$a_n=-2a_{n-1},$$

又由$a_0=1$可推知

$$a_n=(-2)^n.$$

下面证明正交性. 设$l\le n$,

$$f_l=P_l\exp(-\frac{x^2}{2}), f_n=\exp(x^2)\frac{d^n}{dx^n}\exp(-x^2)=\exp(x^2)[\exp(-x^2)]^{(n)}$$

$$\begin{aligned} \langle f_l,f_n\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}P_l(x)[\exp(-x^2)]^{(n)}dx \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty}P_l(x)'[\exp(-x^2)]^{(n-1)}dx \\ &= \cdots=\int_{-\infty}^{+\infty}(-1)^l P_l(x)^{(l)}[\exp(-x^2)]^{(n-l)}dx. \end{aligned}$$

当$l<n$ 时，可验证$\langle f_l,f_n\rangle=0$.

$l=n$时,

$$\langle f_n,f_n\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{n-1}P_n(x)^{(n-1)}d[\exp(-x^2)]=\cdots=2^n n!\sqrt{\pi}.$$

由此，不难知道$\{e_n;n=1,2,\cdots\}$组成$L^2(-\infty,+\infty)$中的一个标准正交系

完备性由下面的例子得到：

例子：$\mathcal{S} = span\{x^n e^{-\frac{x^2}{2}} : n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 则$\mathcal{S}$在$L^p(\mathbb{R})(1 \le p < +\infty)$中稠密.

证明：记q为p的共轭数，($p = 2$时，$q = 2$). 对于任意$f \in L^q(\mathbb{R}) = (L^p(\mathbb{R}))^*$. 设$f \in \mathcal{S}^\perp$(一般，这不叫正交补), 即

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,\ n = 0, 1, \cdots, \quad (*).$$

我们要证明f几乎处处为零.

事实上，由Levi引理,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{(-2\pi itx)^n}{n!}| dx \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{-\frac{x^2}{2}} e^{2\pi|tx|} dx < +\infty.$$

令$g(x) = f(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$, $g \in L^1(\mathbb{R})$. 求Fourier 逆变换,

$$\begin{aligned} \widehat{g}(t) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} e^{(-2\pi itx)} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{(-2\pi itx)^n}{n!} dx = 0, \end{aligned}$$

最后一个等式来自（$*$）. 所以由Fourier 逆变换的性质，f几乎处处为0. 由Hahn-Banach延拓定理的推论知道，$\mathcal{S}$在$L^p(\mathbb{R})(1 \le p < +\infty)$中稠密.

请您欣赏ex 34 令L_n为Laguerre函数$e^t\dfrac{d^n}{dt^n}t^ne^{-t}$ 证明：$\{\frac{1}{n!}e^{-\frac{t}{2}}L_n(t); n=1,2,\cdots\}$组成$L^2(0,+\infty)$的一个完备的标准正交系.

写$L_n(x)=P_n(x)\exp(-\frac{x}{2})$.

我们要证明递推关系

$$P_{n+1}(x)=(1+2n-x)P_n-n^2P_{n-1}(x).$$

事实上，

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(x) &= e^x(x^{n+1}e^{-x})^{(n+1)}\\
&= e^x\frac{d^n(x^{n+1}e^{-x})'}{dx^n}\\
&= e^x(n+1)(x^ne^{-x})^{(n)}-e^x(x\cdot x^ne^{-x})^{(n)}\\
&= (n+1)P_n(x)-(xP_n(x)+e^xn(x^ne^{-x})^{(n-1)}(**)
\end{aligned}$$

$e^x(x^ne^{-x})^{(n-1)}=e^x(nx^{n-1}e^{-x})^{(n-1)}-\underline{e^x(x^ne^{-x})^{(n-1)}}$ 所以$e^x(x^ne^{-x})^{(n-1)}=nP_{n-1}-P_n$. 代入(**)得

$$P_{n+1}(x)=(1+2n-x)P_n-n^2P_{n-1}(x).$$

注意$P_0=1$, $P_1(x)=1-x$,可以证明P_n的首项系数$a_n=(-1)^n$

正交性：

$$\begin{aligned}
\langle L_k,L_n\rangle &= \int_0^{+\infty}P_k(x)[x^n\exp(-x)]^{(n)}dx\\
&= \int_0^{+\infty}(-1)^lP_k(x)^{(l)}[x^n\exp(-x)]^{(n-l)}dx.
\end{aligned}$$

不难验证$k<n$时，$\langle L_k,L_n\rangle=0$.

$l=n$时,

$$\langle L_n,L_n\rangle=(-1)^nP_n^{(n)}(0)\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx=n!|P_n^{(n)}(0)|=n!^2.$$

(注意$\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx$是关于$n$的Gamma函数)

定义$f_n=t^ne^{-t}$，证明完备性等价于证明$span\{f_n:n\geq 1\}$ 在$L^2(0,+\infty)$中稠密.

为此，注意到$L^2(0,+\infty)$是Hilbert空间，设$g\in L^2(0,+\infty)$ 使得$g\perp span\{f_n:n\geq 1\}$. 那么$\int_0^{\infty}t^ne^{-t}\overline{g(t)}dt=0$.

定义

$$F(z)=\int_0^{\infty}e^{-tz}\overline{g(t)},\ Re\,z>0.$$

计算知

$$F^{(n)}(z)|_{z=1}=\int_0^{\infty}(-t)^ne^{-t}\overline{g(t)}dt=0.$$

那么由F在右半平面$\{z\in\mathbb{C}; Re\,z>0\}$上的解析性知道$F\equiv 0$.

由于$F(1+iy)=0$,

$$\int_0^{\infty}e^{-t}\overline{g(t)}e^{-ity}dt=0.$$

即$e^{-t}\overline{g(t)}$的Fourier 逆变换恒为零. 于是$e^{-t}\overline{g(t)}=0$, a.e.即$g(t)=0$, a.e. 由g的任意性知道$span\{f_n:n\geq 1\}^{\perp}=\{0\}$，所以$span\{f_n:n\geq 1\}$ 在$L^2(0,+\infty)$中稠密.