NANJING UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

随机模型

主讲人：谢建春

随机模型

- 随机因素可以忽略
- 随机因素影响可以简单地以平均值的作用出现

确定性模型

- 随机因素影响必须考虑

随机性模型

概率模型与统计模型

概率模型--用随机变量和概率分布描述随机因素的影响，建立随机模型。

统计模型--由于客观事物内部规律的复杂性及人们认识程度的限制，无法分析实际对象内在的因果关系，建立合乎机理规律的模型，通常要搜集大量的数据，基于对数据的统计分析建立随机模型。

随机人口模型

背景

• 一个人的出生和死亡是随机事件

一个国家或地区	平均生育率平均死亡率	确定性模型
一个家族或村落	出生概率死亡概率	随机性模型

对象

$X(t)$ ~ 时刻 t 的人口, 随机变量.

$P_n(t)$ ~概率$P(X(t)=n)$, n=0,1,2,…

研究$P_n(t)$的变化规律；得到$X(t)$的期望和方差

模型假设

若$X(t)=n$, 对t 到 $t+\Delta t$ 的出生和死亡概率作以下假设

1) 出生一人的概率与 Δt 成正比，记 $b_n\Delta t$; 出生二人及二人以上的概率为 $o(\Delta t)$.

2) 死亡一人的概率与Δt 成正比，记 $d_n\Delta t$; 死亡二人及二人以上的概率为 $o(\Delta t)$.

3) 出生和死亡是相互独立的随机事件。

进一步假设

b_n 与 n 成正比，记$b_n=\lambda n$, λ ~ 出生概率；

d_n 与 n 成正比，记$d_n=\mu n$，μ ~ 死亡概率。

模型建立

为得到 $P_n(t)=P(X(t)=n)$ 的变化规律，考察 $P_n(t+\Delta t)=P(X(t+\Delta t)=n)$.

事件 $X(t+\Delta t)=n$ 的分解	概率 $P_n(t+\Delta t)$
$X(t)=n-1$, Δt 内出生一人	$P_{n-1}(t)\, b_{n-1}\Delta t$
$X(t)=n+1$, Δt 内死亡一人	$P_{n+1}(t)\, d_{n+1}\Delta t$
$X(t)=n$, Δt 内没有出生和死亡	$P_n(t)(1-b_n\Delta t-d_n\Delta t)$
其它(出生或死亡二人，出生且死亡一人，… …)	$o(\Delta t)$

$$P_n(t+\Delta t)=P_{n-1}(t)b_{n-1}\Delta t+P_{n+1}(t)d_{n+1}\Delta t$$
$$+P_n(t)(1-b_n\Delta t-d_n\Delta t)+o(\Delta t)$$

微分方程建模

$$\frac{dP_n}{dt} = b_{n-1}P_{n-1}(t) + d_{n+1}P_{n+1}(t) - (b_n + d_n)P_n(t)$$

$b_n=\lambda n$， $d_n=\mu n$

$$\frac{dP_n}{dt} = \lambda(n-1)P_{n-1}(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t) - (\lambda+\mu)nP_n(t)$$

$$P_n(0) = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

(t=0时已知人口为n_0)

~一组递推微分方程——求解的困难和不必要

转而考察$X(t)$的期望和方差

模型求解

$$\frac{dE}{dt} = (\lambda - \mu)E(t)$$

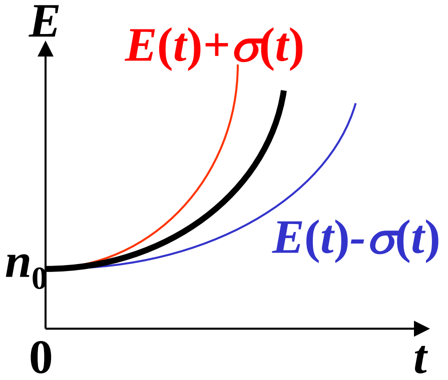
$$E(0) = n_0$$

⇨ $E(t) = n_0 e^{rt}, \; r = \lambda - \mu$　　**r ~ 增长概率**

比较：确定性指数增长模型　　$x(t) = x_0 e^{rt}$　　**r ~ 平均增长率**

X(t)的方差 $D(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n(t) - E^2(t)$

⇨ $D(t) = n_0 \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} e^{(\lambda-\mu)t}[e^{(\lambda-\mu)t} - 1]$



X(t)大致在 E(t)±2σ(t) 范围内（σ(t) ~均方差）

$\lambda - \mu = r$ ↑→ $D(t)$↑　　　　λ, μ↑→ $D(t)$↑

THANKS