

第四章 光的衍射-例题选

例1：某波带片对考察点露出5个奇数半波带

该点合振幅： $A(P_0) = A_1 + A_3 + A_5 + A_7 + A_9 \approx 5A_1 = 10A'(P_0)$

自由传播时： $A'(P_0) = \frac{1}{2}A_1$

光强：

$$I(P_0) = A^2(P_0) = 100I'(P_0)$$

波带片有如会聚透镜

例2: $\lambda=632\text{nm}$ 的He-Ne激光通过直径 $d=2.76\text{mm}$ 的圆孔, 在距圆孔 1m 处屏上, 正对圆孔中心的P点是明还是暗? 若使P点变成相反情况, 屏向前或向后移动多少距离?

解: P点亮暗取决于圆孔相对P点包含波带数是奇或偶数

$$\text{平行光入射, } R = \infty \rightarrow \rho_k^2 = \frac{bRk\lambda}{R+b} = kb\lambda$$

$$k = \frac{\rho^2}{b\lambda} = \frac{(2.76/2)^2}{632 \times 10^{-6} \times 10^3} = 3 \quad \text{P为亮点}$$

$$\text{P向前移, } k \text{ 增加: } b' = \frac{\rho^2}{4\lambda} = 750\text{mm} \rightarrow \Delta b = 100 - 75 = 25\text{cm}$$

$$\text{P向后移, } k \text{ 减少: } b' = \frac{\rho^2}{2\lambda} = 1500\text{mm} \rightarrow \Delta b = 150 - 100 = 50\text{cm}$$

例3: $a = 0.5 \text{ mm}$, $f = 100 \text{ cm}$, 可见光垂直照射狭缝,
 $x = 1.5 \text{ mm}$ 处为一亮纹。

- 求: 1) $x = 1.5 \text{ mm}$ 处亮纹级数 $k = ?$, $\lambda = ?$
2) 对应 x 处, 狭缝波面可分几个半波带?
3) 中央明纹宽度

解: 1) $a \sin \varphi = a \frac{x}{f} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda = \frac{2ax}{(2k + 1)f}$

$$k = 1 \rightarrow \lambda = 500 \text{ nm}$$

$$k = 2 \rightarrow \lambda = 300 \text{ nm}$$

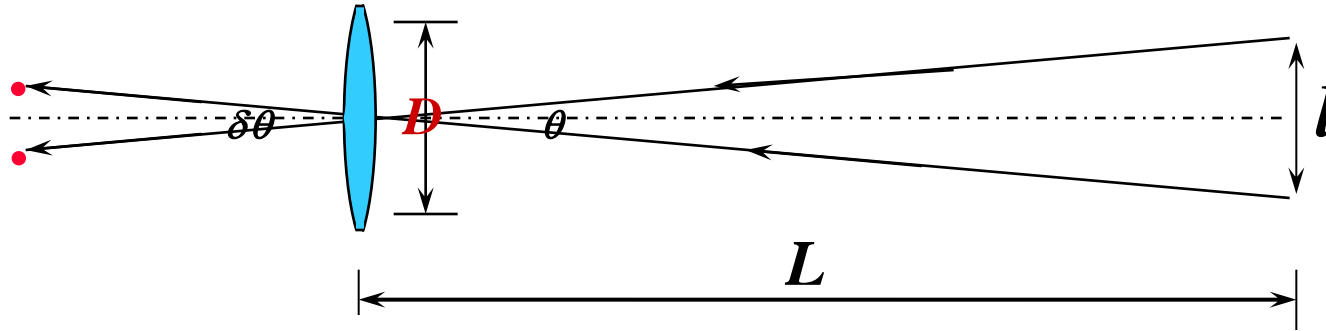
\vdots

$$\therefore k = 1, \lambda = 500 \text{ nm}$$

$$2) a \sin \varphi = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} = 3 \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \therefore \text{分3个半波带}$$

$$3) \Delta x_0 = 2 \frac{\lambda f}{a} = 2 \text{ mm}$$

例4：迎面驶来的汽车上，两盏前灯相距120cm。问汽车距人多远时，眼睛恰能分辨两盏前灯？设夜间人眼瞳孔直径5.0mm，入射光波长550nm。



$$\theta = \frac{l}{L} = 1.22 \frac{\lambda}{D} = \frac{1.20}{L} \rightarrow L = 8.9 \text{ km}$$

例5: $\lambda = 600nm$ 的单色光垂直入射到光栅上, 相邻两明纹分别出现在 $\sin\theta = 0.2$ 和 $\sin\theta = 0.3$, 第四级缺级。

求: 1) 相邻两缝间距? 2) 缝宽? 3) 屏上可看到几条明纹?
4) 单缝衍射中央主极大内包含有几条明纹?

解: 1)
$$\left. \begin{aligned} (a+b)\sin\theta_1 &= k\lambda \\ (a+b)\sin\theta_2 &= (k+1)\lambda \end{aligned} \right\} \begin{aligned} k &= 2 \\ a+b &= 10\lambda = 6 \times 10^{-6} m \end{aligned}$$

2) $k = \frac{a+b}{a} k' \rightarrow \text{缺级} \quad \therefore \frac{a+b}{a} = 4 \rightarrow a = 1.5 \times 10^{-6} m$

3) $k_m \lambda < (a+b) \sin \frac{\pi}{2} \rightarrow k_m < 10 \rightarrow k_m = 9$

可以看到15条明纹。 $k = \pm 4, \pm 8 \rightarrow \text{缺级}$

可以看到的明纹为:

$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \quad \pm 5, \pm 6, \pm 7, \quad \pm 9$

4) 中央包络线内共有7条明纹。

例6：用波长 $589.3nm$ 的钠黄光垂直照射每毫米500条狭缝的光栅，在光栅后放一 $f=20cm$ 的凸透镜，求：

- (1) 第1和第3级谱线之间的距离；
- (2) 最多能看到第几级谱线；
- (3) 若光线以 30° 斜入射时，最多能看到第几级谱线？
- (4) 白光 $400nm-760nm$ 入射时，求第二级光谱的张角。

解： (1) $(a+b) = \frac{L}{N} = \frac{1mm}{500} = 2000nm$

第 k 级明纹位置： $x_k = k \frac{f\lambda}{a+b}$

$\Delta x = x_3 - x_1$

$\Delta x = 0.12m$

(2) $|\theta| < 90^\circ \rightarrow k_m < \frac{a+b}{\lambda} = 3.4$

最多看到第3级谱线

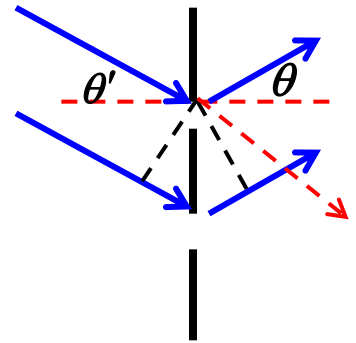
(3) 斜入射时, θ 衍射角对应的明纹条件:

$$(a + b)(\sin \theta' + \sin \theta) = \pm k \lambda$$

中心处: $\theta = 0 \rightarrow \Delta = (a + b) \sin \theta' \neq 0$

非0级明纹

0级明纹: $\Delta = (a + b)(\sin \theta' + \sin \theta) = 0 \rightarrow \theta = -\theta'$
沿入射线方向

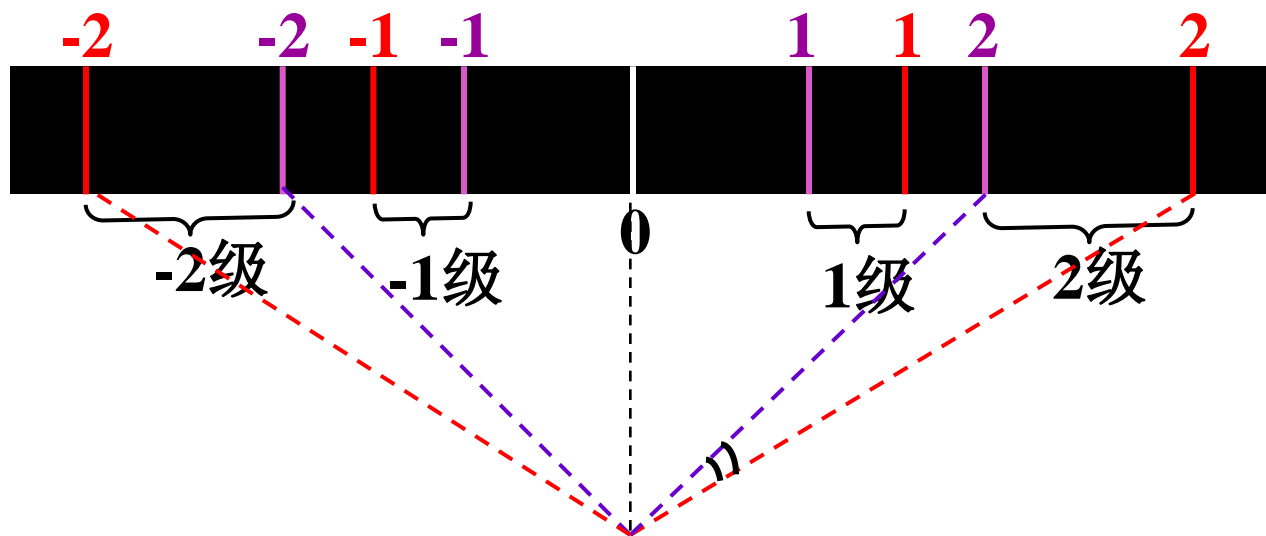


$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow k_m < \frac{(a + b)(\sin \theta' + 1)}{\lambda} \rightarrow \text{增大} \\ \theta = -\frac{\pi}{2} \rightarrow k_{-m} > \frac{(a + b)(\sin \theta' - 1)}{\lambda} \rightarrow \text{减小} \end{cases}$$

$$30^\circ \text{ 斜入射时: } k_m < \frac{(a + b)(\sin 30^\circ + \sin 90^\circ)}{\lambda} = 5.09$$

最多能看到第5级谱线

(4)



$$\begin{cases} (a+b)\sin\theta_1 = 2\lambda_{\text{紫}} \\ (a+b)\sin\theta_2 = 2\lambda_{\text{红}} \end{cases} \rightarrow \Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \approx 25^\circ$$

例7: 宽度 10cm , 每 mm 有100条均匀刻线的光栅, 当 $\lambda = 500\text{nm}$ 的平行光垂直入射时, 第四级谱线消失, 求:

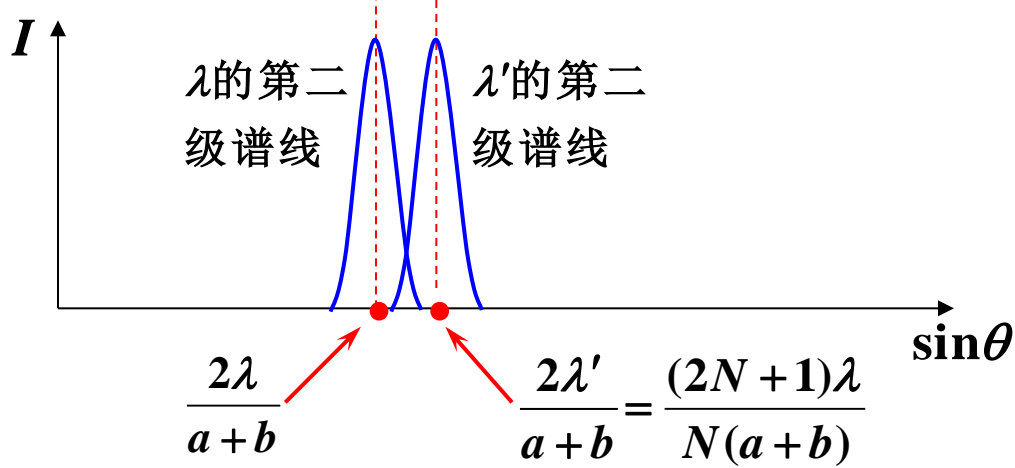
- (1) 缝宽 a , (2) 通光缝总数 N
 (3) 第二级谱线处可分辨的最小波长差 $\Delta\lambda$

解: (1)
$$\left. \begin{aligned} a + b &= \frac{1 \times 10^3}{100} = 10^{-5} \text{m} \\ \frac{a + b}{a} &= 4 \end{aligned} \right\} a = 2.5 \times 10^{-5} \text{m}$$

(2) $N = 100 \times 100 = 10000$ 条

(3) 波长 λ 和 λ' 的两条谱线恰能分辨的条件:

瑞利判据—— λ 谱线的极小值正好落在 λ' 谱线的极大值处



$$\theta \begin{cases} (a+b)\sin\theta = \frac{m\lambda}{N} = \frac{(2N+1)\lambda}{N} \rightarrow \lambda \text{第2级谱线后} \\ \text{第一个极小值位置} \\ (a+b)\sin\theta = 2\lambda' \rightarrow \lambda' \text{第2级谱线的极大值位置} \end{cases}$$

$$\therefore 2\lambda' = \frac{(2N+1)\lambda}{N} \rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{2N} = \frac{5 \times 10^{-7}}{2 \times 10^4} = 0.025 \text{ nm}$$

光栅第 k 级谱线能分辨的最小波长差: $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{kN}$

第 k 级谱线的分辨本领: $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN$

例8：一光栅4000条/cm，入射光400~700nm。问：

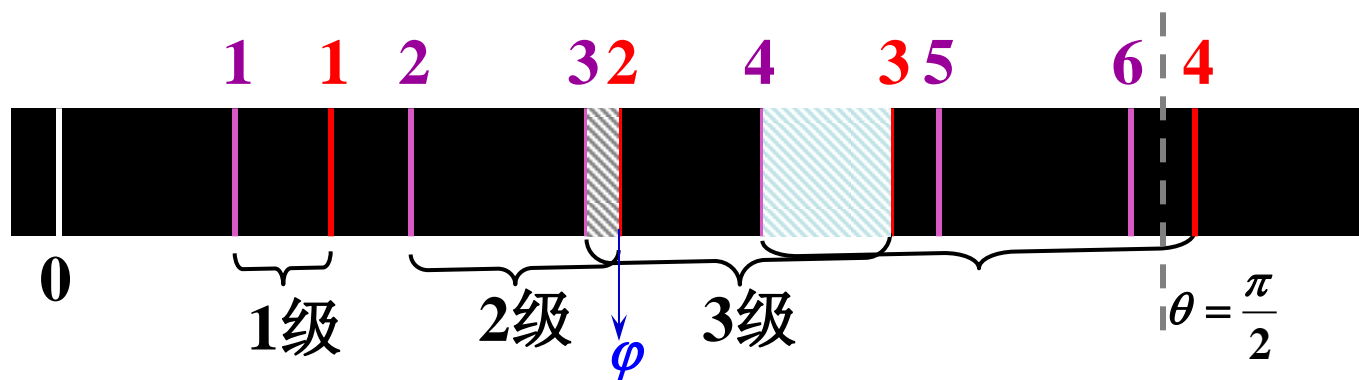
1) 可产生多少级完整的可见光谱？

2) 第3级光谱中与第2级重叠的波长范围？

3) 光栅宽度2cm，则500nm处，第2级谱线可分辨的最小波长差？

解：1) $a + b = \frac{1}{4000} = 2.5 \times 10^{-4} \text{ cm}$

$$(a + b) \sin \theta = k \lambda \rightarrow \sin \theta = 1 \begin{cases} k_{m\text{红}} = 3 \\ k_{m\text{紫}} = 6 \end{cases} \quad \text{可见3级完整的光谱}$$



$$\begin{aligned} 2) \quad (a + b) \sin \phi &= 2 \lambda_{\text{红}} \\ (a + b) \sin \phi &= 3 \lambda_x \rightarrow \lambda_x = 466.7 \text{ nm} \end{aligned} \quad \text{重叠范围：400~467 nm}$$

$$3) \quad \Delta \lambda = \frac{\lambda}{kN} = \frac{500 \text{ nm}}{2 \times (4000 \text{ cm}^{-1} \cdot 2 \text{ cm})} = 0.031 \text{ nm}$$

例9：两种波长组成的平行光垂直照射某光栅，
 $\lambda_1 = 440nm$ ， $\lambda_2 = 660nm$ ，两种波长的谱线第二次重合于 60° 方向上（不计中央明纹）。

求：光栅常数 d

解：谱线重合 $d \sin \varphi = k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2$

$$\therefore \frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{3}{2}, \quad \frac{6}{4}, \quad \frac{9}{6}, \quad \dots$$

60° 衍射角处第二次重合，取 $k_1=6$ ， $k_2=4$

$$\therefore d \sin 60^\circ = 6\lambda_1 \rightarrow d = 3.05 \times 10^{-3} mm$$