第三章　刚 体 的 转 动

- 刚体的运动
- 刚体的转动定律
- 刚体的动能定理
- 刚体的角动量和角动量守恒定律

3.1、 刚体的运动

- 刚体的物理模型

刚体：物体的运动，与它的大小和形状有关，但忽略形变，即大小和形状不变

质点：物体的运动, 大小和形状可以忽略

质点运动规律的描述：

运动学：位置，速度，加速度

动力学： $\vec{F} = m\vec{a}$

•刚体的运动特征

a) 平动:运动物体上各点 $\vec{v}, \vec{a}$ 均相同

b) 转动:物体中各点都围绕某一固定直线（轴）作圆周运动。

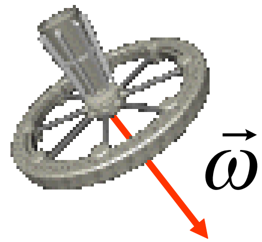
刚体：彼此间距离保持不变的“质点系”

质点运动规律
＋
微积分

→ 刚体基本运动规律

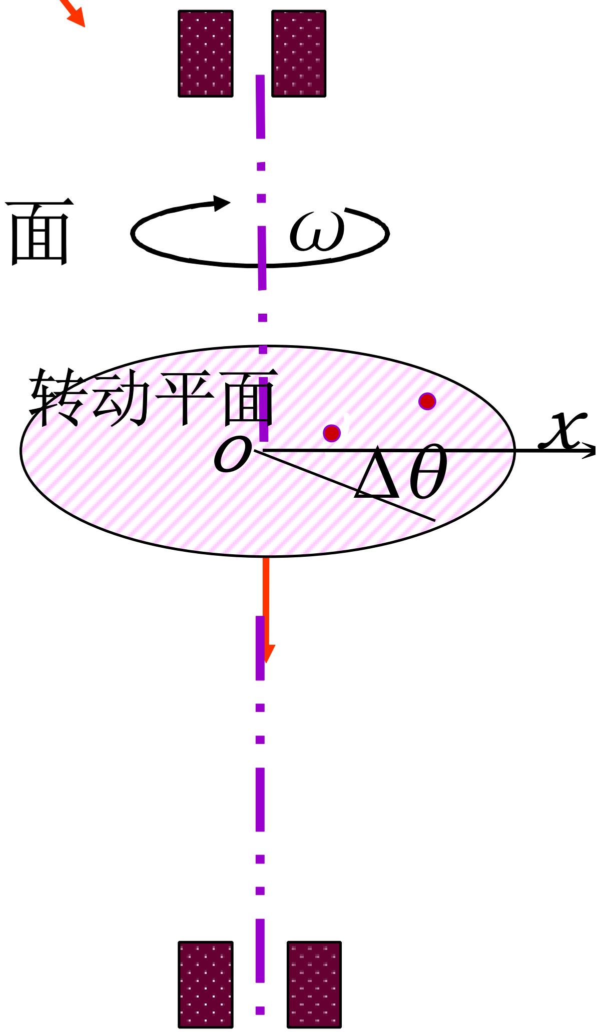
（大量质点运动的总效应）

•刚体的定轴转动



特征： s、v、a不同

$*\theta$、$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$、$\alpha=\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$相同 ⇨ 任意转动平面



* 角量与线量

$$s=r\cdot\theta \quad v=r\omega, a_t=r\alpha \quad a_n=r\omega^2$$

- **ω**（标量）⇨ $\vec{\omega}$

<u>右手螺旋法则</u> $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$

一刚体以每分钟**60**转绕**z**轴做逆时针匀速转动，设某时刻刚体上一点**P**的位置矢量 $\vec{r}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$，求该时刻**P**点的速度？

$$: \quad \omega = 2\pi \cdot \frac{60}{60} = 2\pi \ \mathrm{rad}/s \qquad \therefore \vec{\omega} = 2\pi\,\vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \ 2\pi\vec{k}\times(3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k})$$

$$= 6\pi(\vec{j}) + 8\pi(-\vec{i}) + 0$$

$$= -25.1\vec{i} + 18.8\vec{j}\,({}^{m}\!/\!{}_{s})$$

已知作圆周运动的某质 点质量m,圆半径r,初速度$v_0 = 0$,均匀地加速,t_1时间内达到n_1(转$/s$),求α,转数。

解：$\omega_0 = 0, \omega_1 = 2\pi \cdot n_1$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t_1} = \frac{2n_1\pi}{t_1}\left(rad/s^2\right)$$

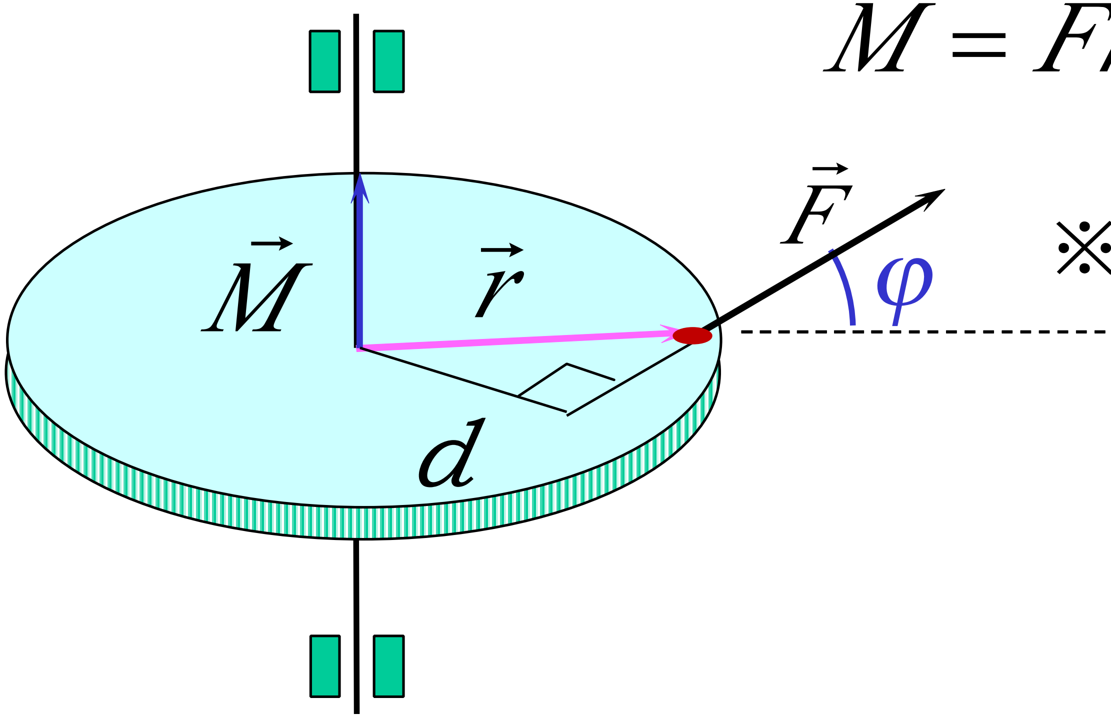
$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 = \frac{1}{2} \times \frac{2n_1\pi}{t_1} \cdot t_1^2 = n_1\pi t_1$$

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{n_1 t_1}{2}$$

3.2、刚体的转动定律

一、力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

➢ 力在转动平面内



$$M = Fr\sin\varphi = Fd = F_t r$$

※定轴转动：**M**（标量）

＋：刚体逆时针转

－：刚体顺时针转

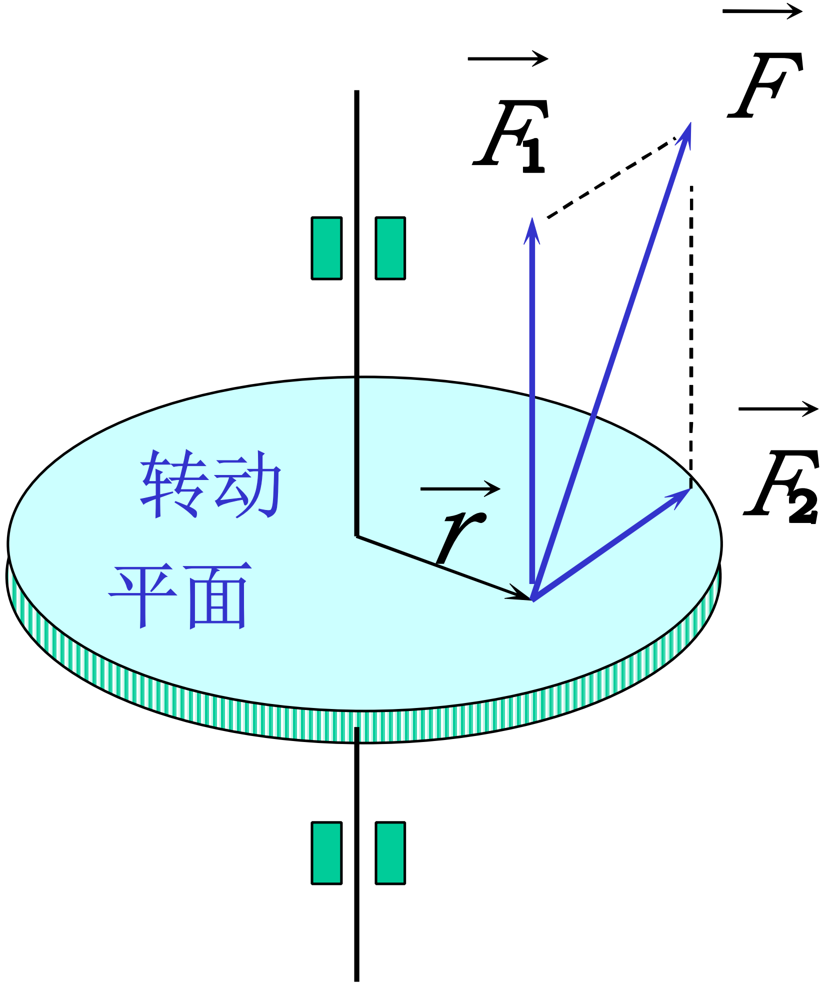
➢ 力不在转动平面内

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

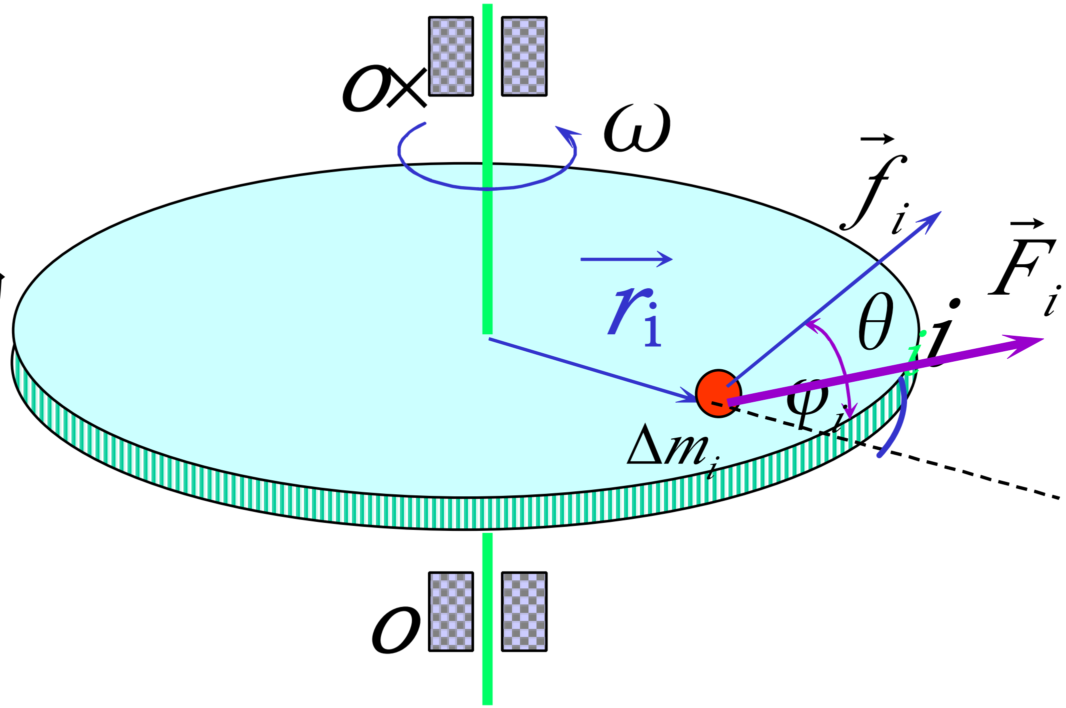
$$= \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2$$

$\vec{r} \times \vec{F}_1$ 只能引起轴的变形，对转动无贡献。



在定轴转动问题中，如不讨论轴上受力，所考虑的力矩是指力在转动平面内的分力对转轴的力矩。

二、转动定律



对 Δm_i 质点 $\begin{cases} F_i \longrightarrow \text{外力} \\ f_i \longrightarrow \text{内力} \end{cases}$

牛顿第二定律：

切向：$f_i \sin\theta_i + F_i \sin\varphi_i = \Delta m_i a_{it} = \Delta m_i \cdot (\alpha r_i)$ (1)

式(1)× r_i $\Rightarrow r_i f_i \sin\theta_i + r_i F_i \sin\varphi_i = \Delta m_i r_i^2 \cdot \alpha$

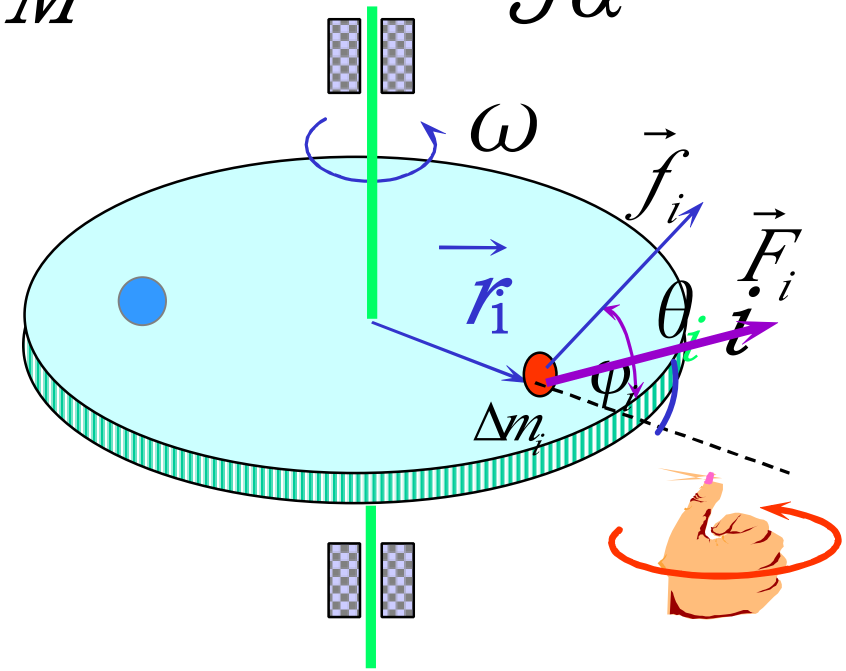
法向：$-f_i \cos\theta_i - F_i \cos\varphi_i = \Delta m_i r_i \omega^2$

整个刚体：

$$r_i f_i \sin\theta_i + r_i F_i \sin\varphi_i = \Delta m_i r_i^2 \alpha$$

$$\underbrace{\sum r_i f_i \sin\theta_i}_{0} + \underbrace{\sum r_i F_i \sin\varphi_i}_{M} = \underbrace{\sum \Delta m_i r_i^2 \alpha}_{J\alpha}$$

转动定律： $M = J\alpha$



平动： $F = ma$

转动： $M = J\alpha$

J是转动惯性大小的量度

三、转动惯量J

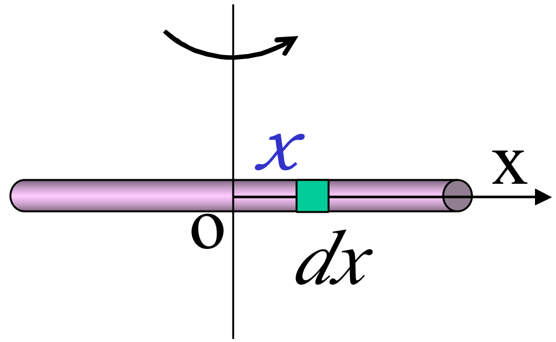
$$J \overset{def}{=} \begin{cases} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = J_1 + J_2 + \ldots & \text{质量非连续分布} \\ \int_m r^2 dm & \text{质量连续分布} \end{cases}$$

***J*的大小** $\begin{cases} \text{物体的质量} \\ \text{质量的分布} \\ \text{转轴的位置} \end{cases}$

- 质量均匀，几何形状规则
- 对固定轴的**J** 恒定的理论值可以计算得到

表3－1

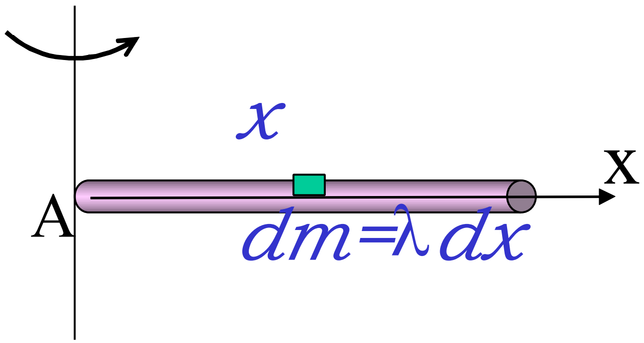
1. 均匀细棒细棒*m,l*



a）绕过中心与棒⊥轴的转动惯量

解： $dm = \lambda dx = \frac{m}{l} \cdot dx$

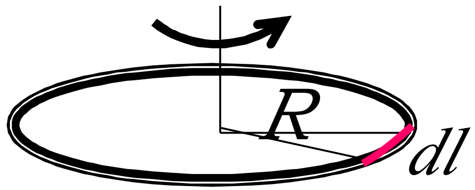
$$J_O = \int r^2 dm = \int_{-l/2}^{l/2} \lambda x^2 dx = \frac{1}{3}\lambda x^3 \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{12}\lambda l^3 = \frac{1}{12} m l^2$$



b）绕过棒端与棒⊥轴的转动惯量

$$J_A = \int_0^l \lambda x^2 dx = \frac{1}{3}\lambda x^3 \Big|_0^l = \frac{1}{3}\lambda l^3 = \frac{1}{3} m l^2$$

2. 均匀园环*m,R,*

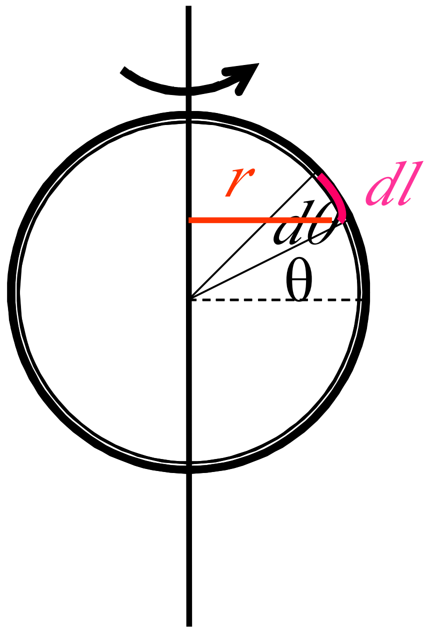


a）绕过中心与环面⊥轴的转动惯量

解： $dm = \lambda dl = \dfrac{m}{2\pi R} \cdot dl$

$$J = \int R^2 dm = \int R^2 \frac{m}{2\pi R} dl = mR^2$$

b) 绕沿直径轴的转动惯量



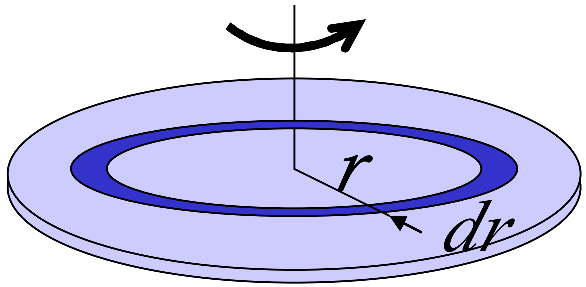
$$dJ = r^2 dm = r^2 \lambda dl = (R\cos\theta)^2 \cdot \lambda \cdot Rd\theta$$

$$J = \int r^2 dm = \int_0^{2\pi} (R\cos\theta)^2 \lambda R d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (R\cos\theta)^2 \frac{m}{2\pi R} R d\theta \Rightarrow J = \frac{mR^2}{2}$$

3. 均匀盘m, R

绕过中心与环面⊥轴转动惯量



$dm = \sigma 2\pi r dr$

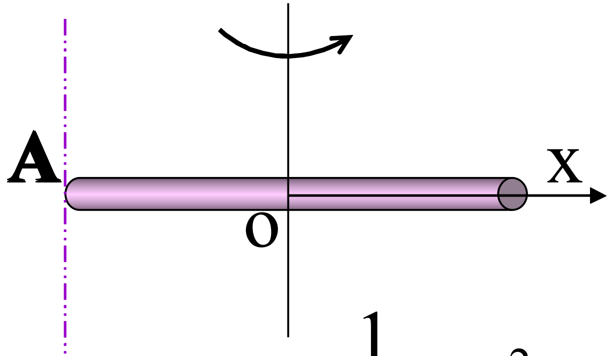
面密度 $\sigma = \dfrac{m}{\pi R^2}$ $dm = \sigma ds$

$$dJ = r^2 dm = r^2 \sigma ds = r^2 \sigma 2\pi r dr$$

$$J = \int_0^R 2\pi\sigma r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\sigma r^4 \Big|_0^R = \frac{1}{2} mR^2$$

4. 平行轴定理

$$J_A = \frac{1}{3}ml^2$$

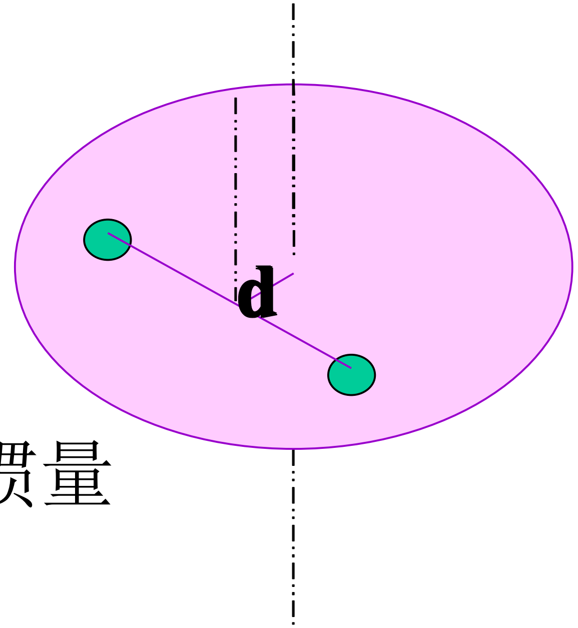


O轴与A轴间距$d=\dfrac{l}{2}$，且二轴平行

$$J_A - J_O = \frac{1}{4}ml^2 = m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = md^2$$

$$J_O = \frac{1}{12}ml^2$$

平行轴定理： $J_A = J_C + md^2$



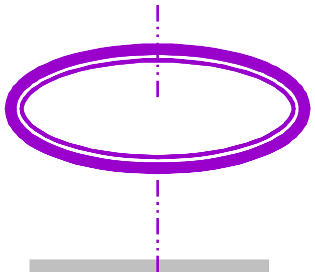
J_O:刚体对过质心轴的转动惯量

J:刚体对平行于过质心轴的轴的转动惯量

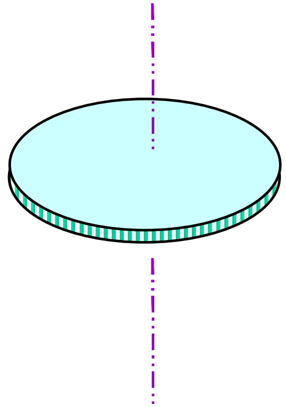
d:两平行轴间的距离

小结

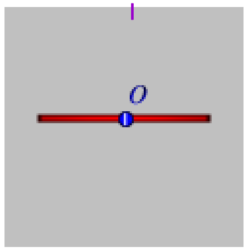
$$J \overset{def}{=} \begin{cases} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = J_1 + J_2 + \dots & \text{质量非连续分布} \\ \int_m r^2 dm & \text{质量连续分布} \end{cases}$$



$$J = mR^2$$

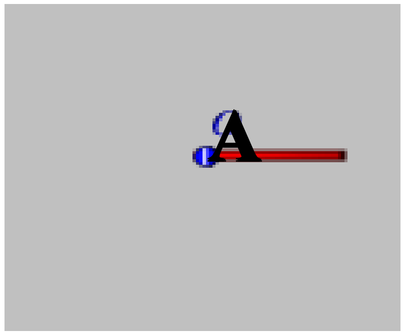


$$J = \frac{1}{2} mR^2$$



$$J = \frac{1}{12} ml^2$$

平行轴定理

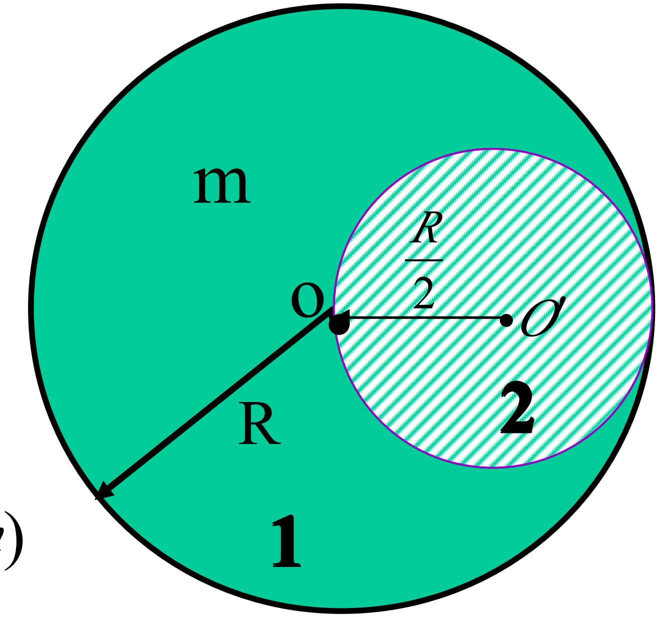


$$J = \frac{1}{3} ml^2$$

$$J_A = J_C + md^2$$

J是转动惯性大小的量度

一大圆板内挖去一个直径为大圆板的半径的圆孔，如果剩余部分质量为m,求它对经过O点且与板平面垂直的轴的转动惯量。



解： $$J_{1O}=J_{(1+2)O}-J_{2O}=\frac{13}{24}mR^2$$

$$J_{(1+2)O}=\frac{1}{2}m_{1+2}R^2=\frac{1}{2}(\frac{4}{3}m)R^2=\frac{2}{3}mR^2$$

$$(m_{1+2}=\sigma\cdot\pi R^2=\frac{m}{\pi R^2-\pi(\frac{R}{2})^2}\cdot\pi R^2=\frac{4}{3}m)$$

平行轴定理

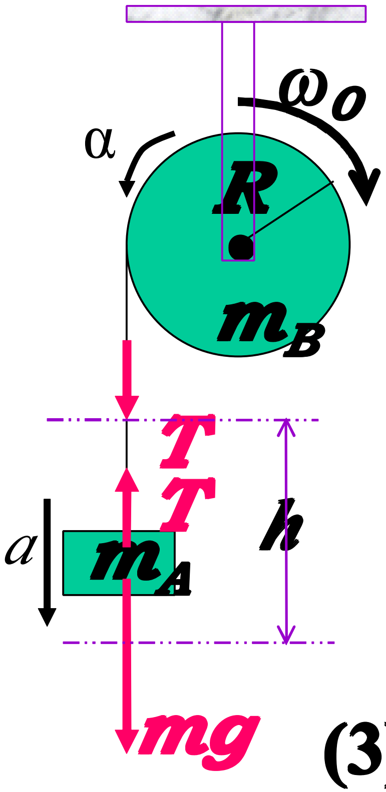
$$J_{2O}=J_{2O'}+md^2$$

$$\left.\begin{aligned}J_{2O}&=\frac{1}{2}m_2(\frac{R}{2})^2+m_2(\frac{R}{2})^2\\ m_2&=m_{1+2}-m=\frac{1}{3}m\end{aligned}\right\}\quad J_{2O}=\frac{3}{24}m\,R^2$$

已知：$m_B=2Kg, m_A=5Kg, R=0.1m, \omega_0=10rad/s$,

(1)求α、(2)$\omega=0$时,A上升h、(3)A回到原位置时,求ω。

解:(1) M, m受力如图所示



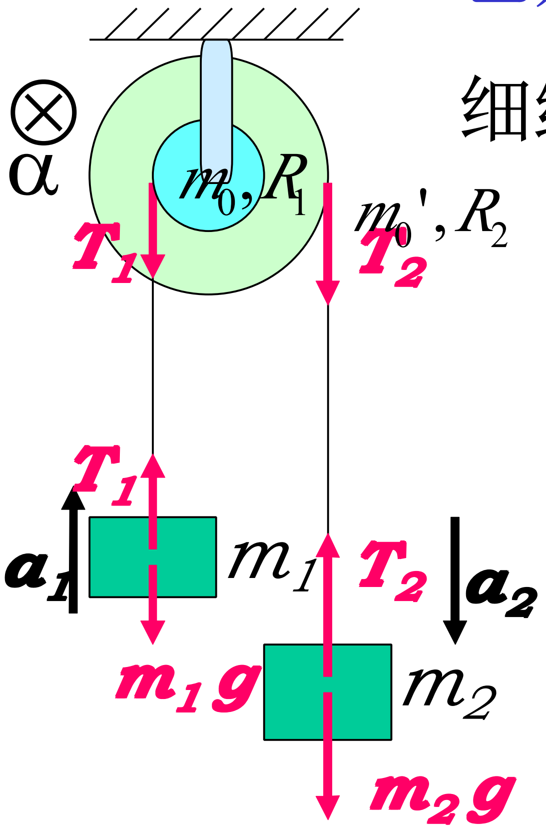
$$\left.\begin{aligned} m_A g - T &= m_A a \\ a = a_t &= \alpha \cdot R \\ M = TR = J\alpha &= (\frac{1}{2} m_B R^2)\alpha \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{m_A g R}{m_A R^2 + m_B R^2/2} \\ &= 81.7 rad/s^2 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \left.\begin{aligned} h = S &= \underline{\underline{R\Delta\theta}} \\ \omega^2 - \omega_0^2 &= -2\alpha\Delta\theta \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow h = R \times \frac{\omega_0^2}{2\alpha} \\ &= 6.12 \times 10^{-2} m \end{aligned}$$

(3) 从ω_0, 回到原位置，$\Delta\theta = 0$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0 = 10 rad/s$$

[习题3-6]



已知: $m_1 = m_2, m_0, R_1, m_0', R_2$, 两边都有细绳，求：α、 T_1 、 T_2

解: 受力及运动状态分析如图所示

$$\begin{cases} m_1 : T_1 - m_1 g = m_1 a_1 & (1) \\ m_2 : m_2 g - T_2 = m_2 a_2 & (2) \end{cases}$$

刚体：$T_2 R_2 - T_1 R_1 = (\frac{1}{2} m_0 R_1^2 + \frac{1}{2} m_0' R_2^2)\alpha \quad (3)$

$$a_1 = \alpha R_1 \quad (4)$$

$$a_2 = \alpha R_2 \quad (5)$$

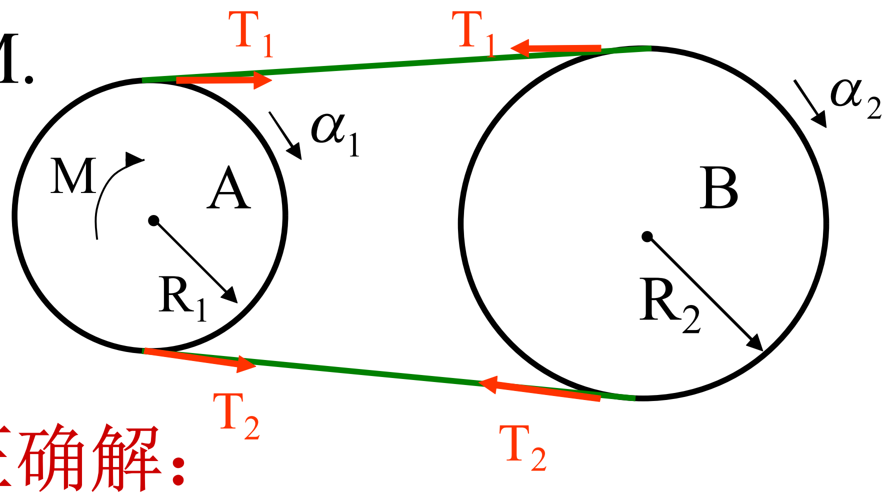
由（1）（2）（3）（4）（5）解得：α、T_1、T_2

已知：A轮：R_1, m_1，受恒力矩M.

B轮：R_2, m_2

轮与皮带间无滑动。

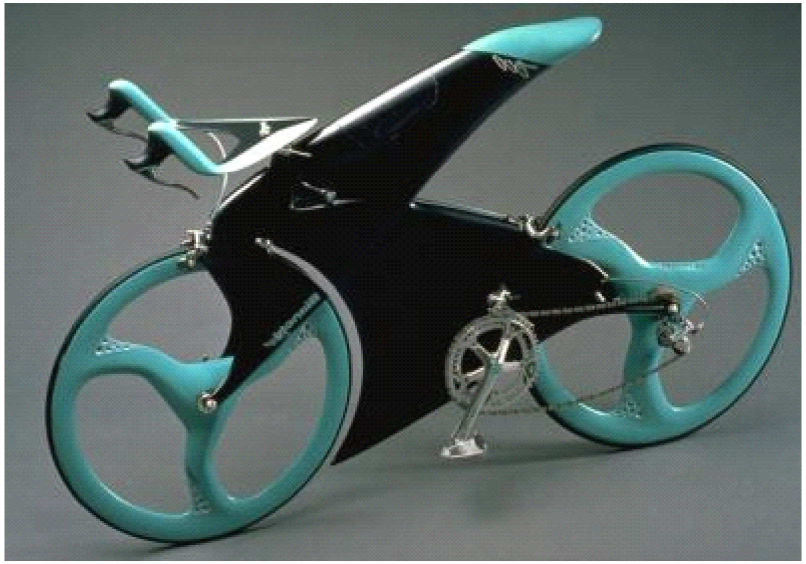
求：两轮的角加速度。



解:$\{A、B\}$

$$M = J_1\alpha_1 + J_2\alpha_2$$

转动定律：同一个刚体



正确解:

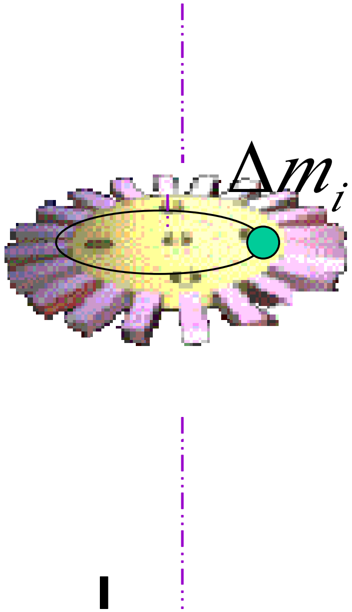
$$\left.\begin{array}{l}
\{A\}: M + T_1R_1 - T_2R_1 = J_1\alpha_1 \\
\{B\}: T_2R_2 - T_1R_2 = J_2\alpha_2 \\
J_1 = \dfrac{1}{2}m_1R_1^2 \\
J_2 = \dfrac{1}{2}m_2R_2^2 \\
R_1\alpha_1 = R_2\alpha_2
\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{array}$$

3.3 刚体转动中的功能关系

- 刚体的转动动能
- 力矩的功
- 动能定理
- 机械能守恒定律

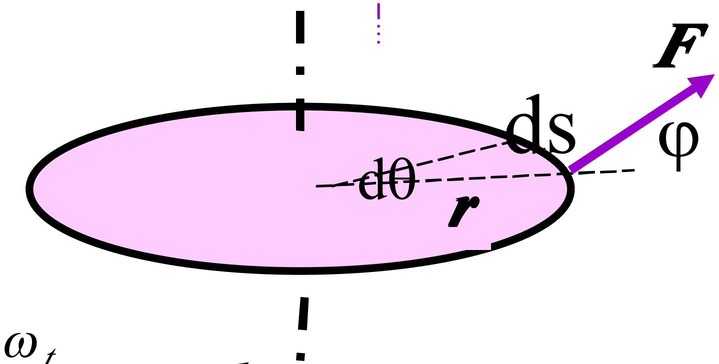
一、定轴转动中的动能 ⟹ 转动动能

$$E_{ki}=\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2=\frac{1}{2}\Delta m_i(\omega r_i)^2=\frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\omega^2$$



$$E_k=\sum_i E_{ki}=\frac{1}{2}\sum_i(\Delta m_i r_i^2)\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2$$

二、力矩的功

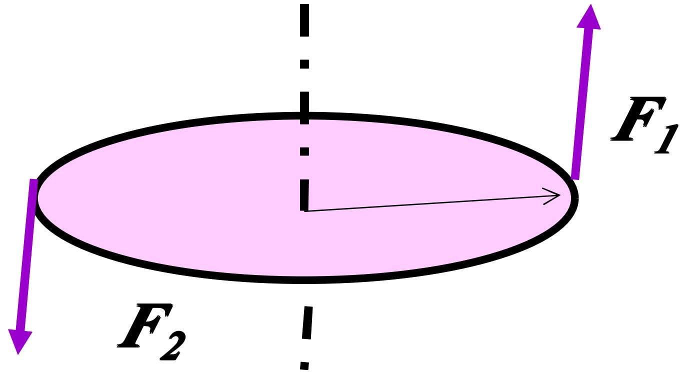


$$\int dA=\int F_t\cdot ds=\int(F\sin\varphi)\cdot(rd\theta)$$

$$=\int Md\theta \quad =\int J\alpha\cdot\left(\frac{d\theta}{d\omega}d\omega\right)=\int_{\omega_0}^{\omega_t}J\omega d\omega$$

$$=\frac{1}{2}J(\omega^2-\omega_0^2)=\Delta E_k$$

三、定轴转动中动能定理



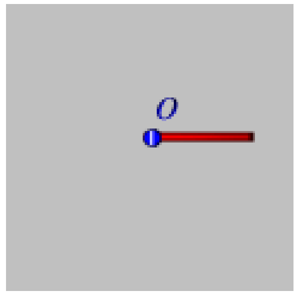
$$A=\int F_t ds=\int M d\theta=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$$

合外力矩对定轴转动刚体所作的功等于刚体转动动能的增量

平动：$A=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$

※ $A_{\text{保守力矩}}=A_{\text{保守力}}=E_{P1}-E_{P2}$

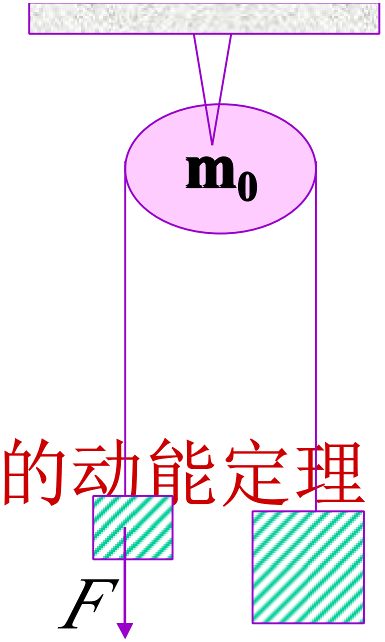
※刚体的重力势能：$\boldsymbol{E_p=mgh_c}$



其中：h_c为刚体质心到参照面的距离

竖直平面内

四、含有定轴转动系统的机械能守恒



既有质点平动又有刚体定轴转动的系统：

$$A_{所有力矩} + A_{所有力} = E_{k2} - E_{k1}$$

——系统的动能定理

其中：$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$

$$A_{外力矩} + A_{外力} + A_{非保内力矩} + A_{非保内力} = E_2 - E_1$$

其中：$E = E_k + E_p$ ——系统的功能原理

若：$\boxed{A_{外力矩}} + A_{外力} + \boxed{A_{非保内力矩}} + A_{非保内力} = 0$

则：$E_2 = E_1$ ——系统机械能守恒

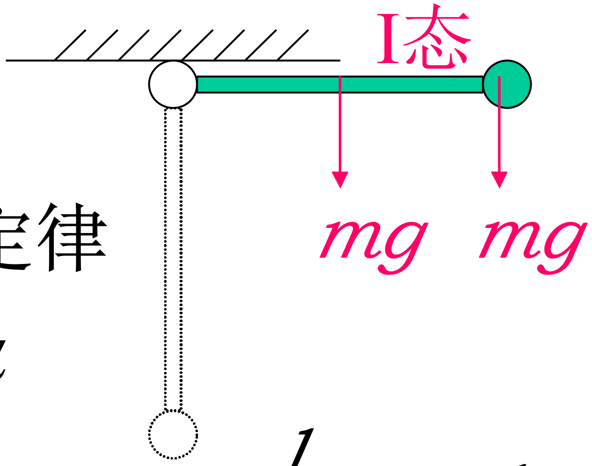
力矩针对刚体，外力，非保守内力针对质点

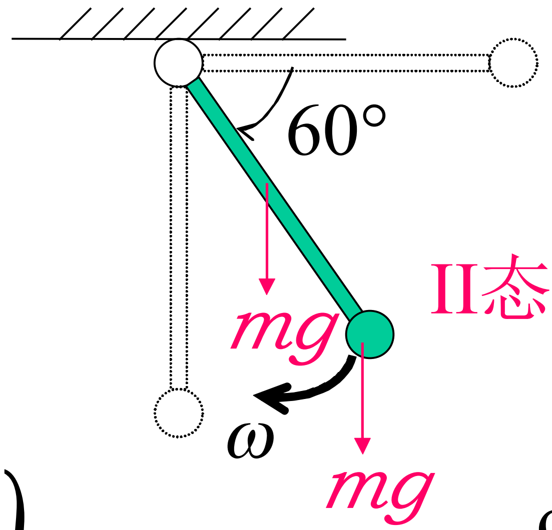
[例题]已知均质棒**m,l,**半径忽略的小球**m**组成图示系统，求**I**态的α; ***(2)*** **II**态的棒中心ω ,a_t ,a_n

•刚体

•转动定律

$M = J\alpha$





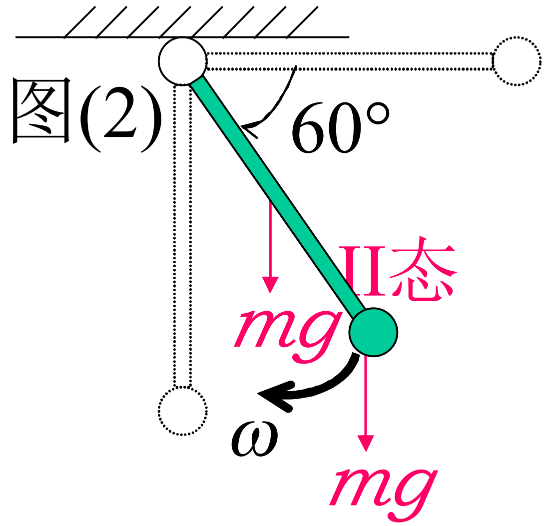
解(1)

$$\left.\begin{aligned} M &= mg\frac{l}{2} + mgl = \frac{3}{2}mgl \\ J &= \frac{1}{3}ml^2 + ml^2 = \frac{4}{3}ml^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = M/J = \frac{9g}{8l}$$

(2) I态→II态E守恒 $E_2 = E_1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}ml^2\right)\omega^2 - \left(mgl\sin 60^0 + mg\frac{l}{2}\sin 60^0\right) = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{9\sqrt{3}g}{8l}}$$

$$M = mg\frac{l}{2}\sin 30^0 + mgl\sin 30^0 = \frac{3}{4}mgl$$



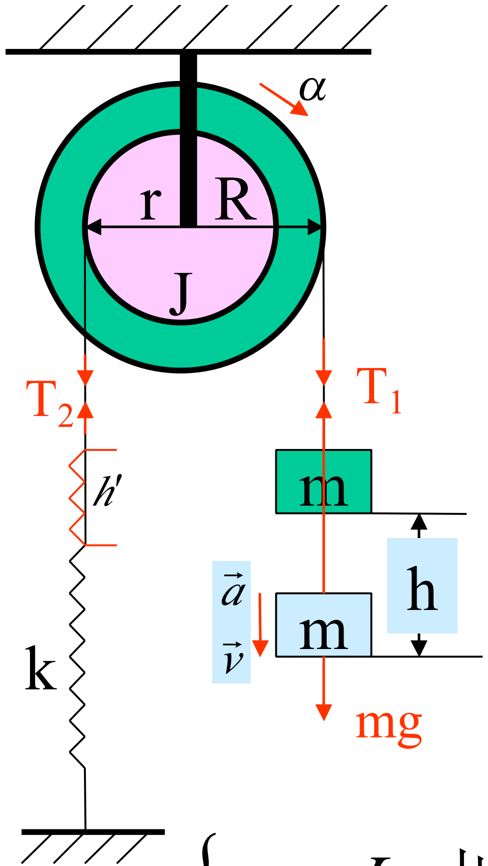
$$\Rightarrow \alpha = M/J = \frac{9g}{16l}$$

$$a_t = \alpha\frac{l}{2} = \frac{9g}{32}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{9\sqrt{3}g}{8l}}$$

$$a_n = \omega^2(\frac{l}{2}) = \frac{9\sqrt{3}g}{16}$$

$$J = \frac{4}{3}ml^2$$



已知：J、K、m、r、R

开始时m静止，弹簧处于自然长度

求：释放m后，m下落h时a=?,v=?

解：$\{m\}$: $mg - T_1 = ma$ (1)

$\{J\}$: $T_1 R - T_2 r = J\alpha$ (2)

$T_2 = kh' = k\dfrac{r}{R}h$ (3)

$a = R\alpha$ (4)

$\Rightarrow$ ***a***

$\{m$、J、地面、弹簧$\}$: $E_1 = E_2$

$$0 = -mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kh'^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$h' = \frac{r}{R}h, \qquad v = R\omega$$

$\Rightarrow$ ***v***

定轴转动动能定理

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta=\frac{1}{2}J\omega_2{}^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$$

既有质点平动又有刚体定轴转动的系统：

$$A_{所有力矩}+A_{所有力}=E_{k2}-E_{k1}$$ ——系统的动能定理

其中：$E_k=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2$

$$A_{外力矩}+A_{外力}+A_{非保内力矩}+A_{非保内力}=E_2-E_1$$

其中：$E=E_k+E_p$ ——系统的功能原理

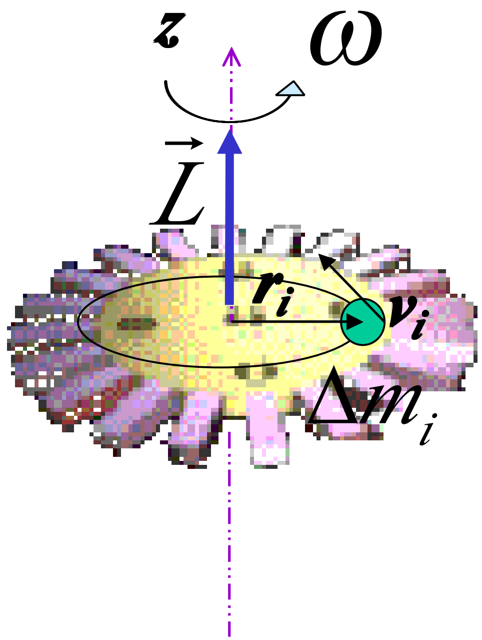
若：$A_{外力矩}+A_{外力}+A_{非保内力矩}+A_{非保内力}=0$

则：$E_2=E_1$ ——系统机械能守恒

3.4 刚体的角动量和角动量守恒定律

- 刚体定轴转动中的角动量
- 角动量定理
    - ➢角动量守恒定律及应用

一、刚体定轴转动的角动量



单个质点 Δm_i：$\boxed{\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{P} = \Delta m \cdot \vec{r}_i \times \vec{v}_i}$

$$\vec{L}_i \begin{cases} |\vec{L}_i| = \Delta m_i v_i r_i = \Delta m_i r_i^2 \omega \\ \text{方向：沿Z轴正向，同}\ \omega\ \text{的方向} \end{cases}$$

整个刚体：

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = J\vec{\omega} \quad \begin{cases} |\vec{L}_i| = \sum \Delta m_i v_i r_i = (\sum \Delta m_i r_i^2)\omega = J\omega \\ \text{方向：沿Z轴正向} \end{cases}$$

即刚体绕定轴转动角动量为绕该轴转动惯量与角速度矢量之积

力矩是角动量变化的原因

定轴转动

质点：$\vec{M}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}=\dfrac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v})$　　刚体：$\vec{M}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}=\dfrac{d}{dt}(J\vec{\omega})$

※定轴转动：

$$M=\frac{dL}{dt}=\frac{d}{dt}(J\omega)=J\frac{d\omega}{dt}+\omega\frac{dJ}{dt}$$

1）若质点系为刚体（J为常数）

则：$M=J\dfrac{d\omega}{dt}=J\alpha$ ……转动定律

2）若质点系不是刚体（J 变化）

则：$M=J\alpha$　不成立　但$M=\dfrac{d}{dt}(J\omega)$　成立

二、刚体定轴转动的角动量定理

$$M = \frac{d}{dt}(J\omega)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M dt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} d(J\omega) = J\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega = J\omega_2 - J\omega_1 = L_2 - L_1$$

其中: $\int_{t_1}^{t_2} M dt$……冲量矩

当 $\boldsymbol{M=0}$, 即物体合外力矩为零,

则: $\boldsymbol{J\omega = J_0\omega_0}$ 角动量守恒

1. 单一刚体: $\boldsymbol{J}$不变, $\boldsymbol{\omega}$也不变

2. 非刚体, $\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{\omega}$都改变, 但 $\boldsymbol{J\omega}$不变

花样滑冰运动员通过改变身体姿态，即改变转动惯量来改变转速

滑冰

$$M=0$$

$$J\omega=J_0\omega_0$$

开始：$J_0\uparrow,\omega_0$小

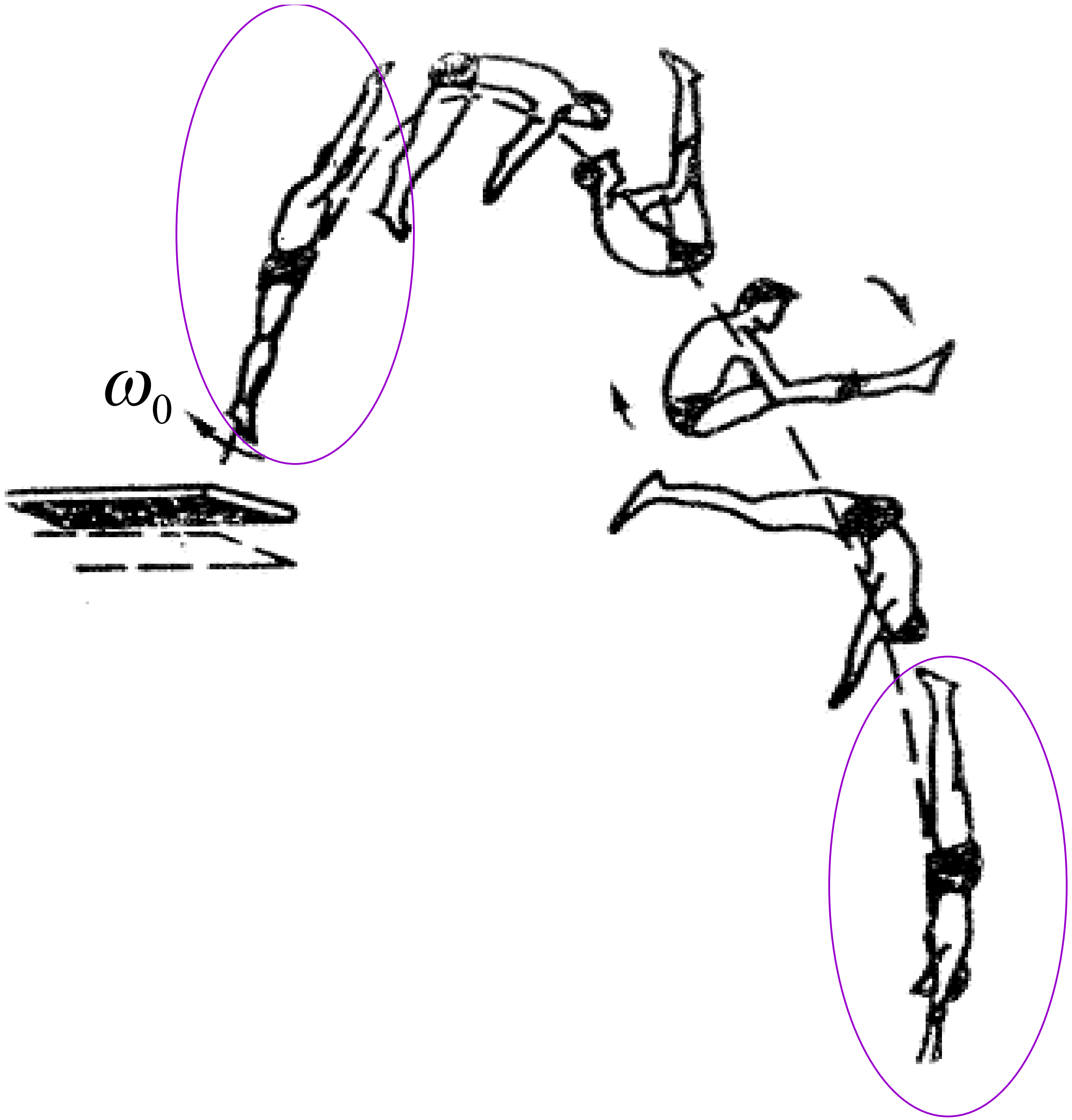


图 3－19　运动员跳水时转动惯量和角速度变化的情况

$J\omega = J_0\omega_0$

$J\downarrow, \omega\uparrow$

$J\uparrow, \omega\downarrow$

跳水

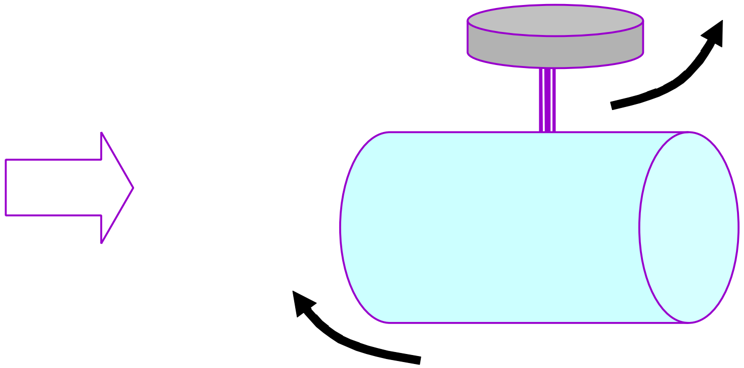
多个物体组成的系统

即若系统的合力矩为零，则系统的角动量守恒。

$$M_{合}=0\text{时}, L=\sum_i J_i\omega_i=\text{常数}$$

同轴转动：角动量守恒只与外力矩有关，与内力矩无关。

$$J_1\omega_1+J_2\omega_2=0$$



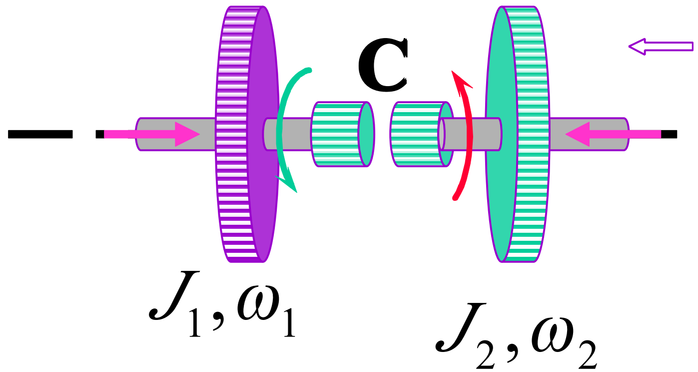
$$M_f=\sum_i r_i f_{it}=0$$

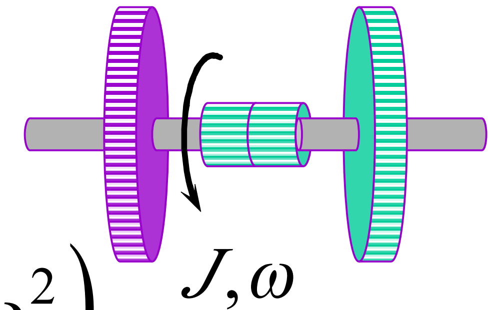
控制飞船的航向，厚重的飞轮高速转动时，

[例] 若对接前两飞轮的角速度分别为 ω_1、 ω_2

求：1. 对接后共同的角速度 ω

2. 对接过程中的机械能损失





解：由角动量守恒得：

$$J_1\omega_1 - J_2\omega_2 = (J_1 + J_2)\omega$$

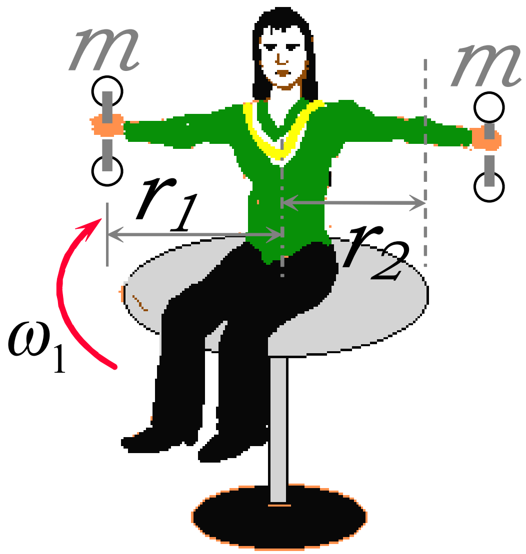
$$\omega = \frac{J_1\omega_1 - J_2\omega_2}{J_1 + J_2}$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\omega^2 - \left(\frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2\right)$$

$$= -\frac{J_1 J_2(\omega_1 + \omega_2)^2}{J_1 + J_2} < 0$$

内力矩：摩擦力矩作负功，机械能损失,不守恒。

[例] 人和转盘的转动惯量为J_0，哑铃的质量为m，初始状态为r_1，转速ω_1。求：双臂收缩为r_2时的角速度及机械能增量。



解：由角动量守恒

$$(J_0+2mr_1^2)\omega_1=(J_0+2mr_2^2)\omega_2$$

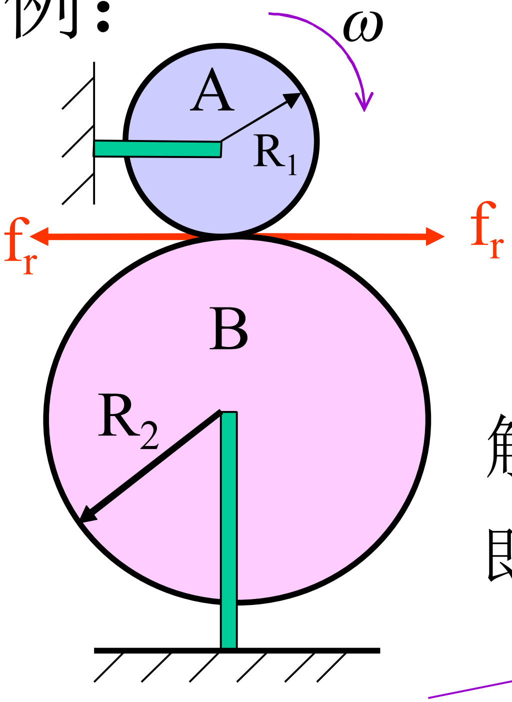
解得：$$\omega_2=\frac{(J_0+2mr_1^2)}{(J_0+2mr_2^2)}\omega_1$$

$$\Delta E_k=\frac{1}{2}(J_0+2mr_2^2)\ \omega_2^2-\frac{1}{2}(J_0+2mr_1^2)\ \omega_1^2$$

$$=\frac{1}{2}(J_0+2mr_1^2)\ \omega_1^2\left[\frac{J_0+2mr_1^2}{J_0+2mr_2^2}-1\right]>0$$

非保守内力作正功

例：



已知：A轮：m_1、R_1、ω_{A0}

B轮：m_2、R_2、$\omega_{B0}=0$

A、B间摩擦系数为μ

求：$\Delta t=?$时，$v_B=v_A$

解:$\{A、B\}$ $\because M_{外}=0$ $\therefore$系统角动量守恒

即：$J_A\omega_{A0}=J_A\omega_A+J_B\omega_B$ (1)

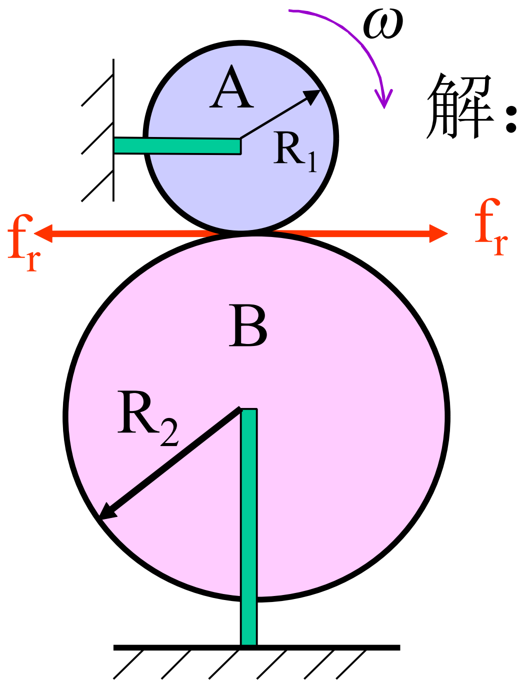
内力矩 $\sum \int M_{fr}dt \overset{?}{=} 0$

由于 $f_r R_1 \neq f_r R_2$

$\therefore J_A\omega_{A0} \neq J_A\omega_A+J_B\omega_B$——系统角动量不守恒

非同轴转动，内力矩不一定为**0**

非同轴转动



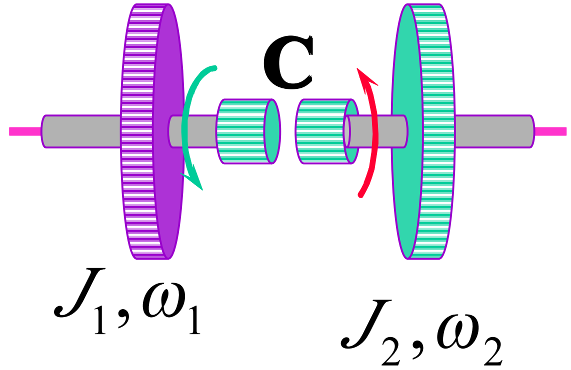
解：根据角动量定理

$$\left.\begin{aligned} & M_A\Delta t = -f_r R_1 \Delta t = J_A\omega_A - J_A\omega_{A0} \\ & M_B\Delta t = f_r R_2 \Delta t = J_B\omega_B - 0 \\ & \omega_A R_1 = \omega_B R_2 \\ & f_r = \mu m_1 g \\ & J_A = \frac{1}{2}m_1R_1^2, \quad J_B = \frac{1}{2}m_2R_2^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

求：$\Delta t = ?$时，$v_B = v_A$

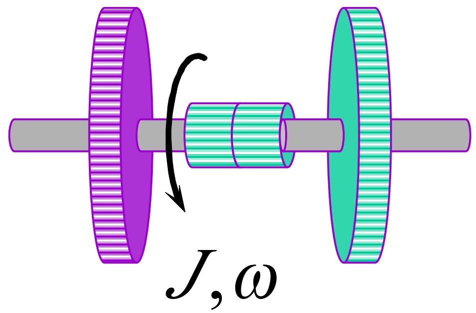
$$\Delta t = \frac{m_2 R_1 \omega}{2\mu(m_1 + m_2)g}$$

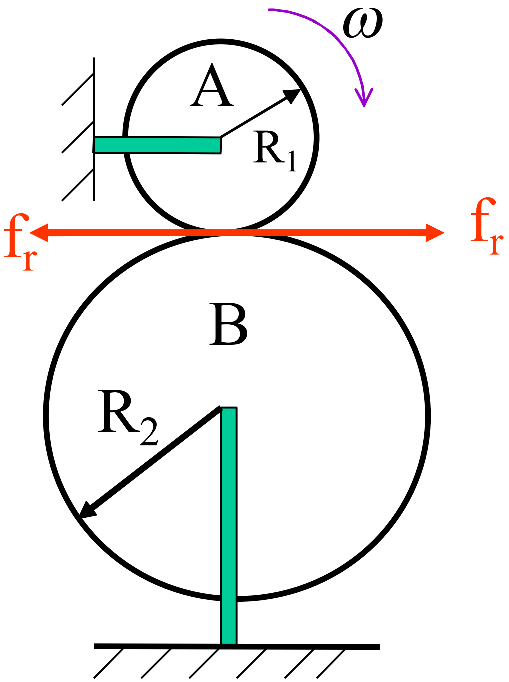
3.系统角动量守恒的条件:



***a*).**系统中各物体均绕同一转轴转动

条件:　$\Sigma \boldsymbol{M}_{外力}=\mathbf{0}$





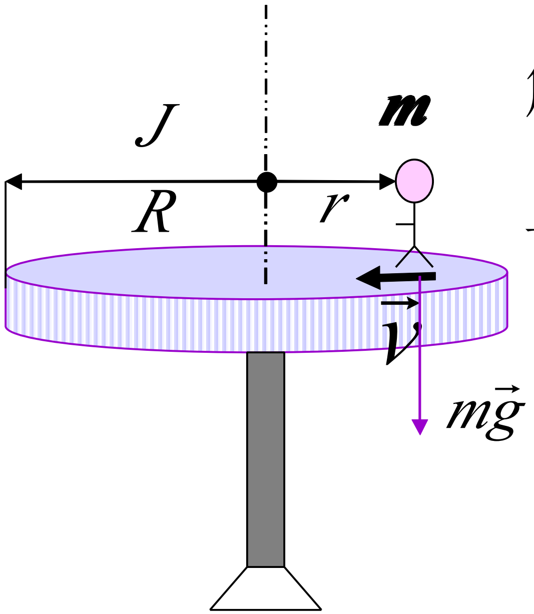
***b*).**系统中各物体均绕不同转轴转动

条件:　$\Sigma \boldsymbol{M}_{外力}=\mathbf{0}$,　且$\Sigma \boldsymbol{M}_{内力}=\mathbf{0}$

满足条件

例：

已知：人对盘的速度为 v，距离转轴 r，求：盘转动的 ω



解：$\{m、M\}$ $M_{合外}=0$，

且 m、M 绕同一轴转动 $\therefore$ 系统 L 守恒

$$(1)\quad mv - J_M\omega = 0$$

$$(2)\quad mvr - J_M\omega = 0$$

$$(3)\quad mr(v - r\omega) - J_M\omega = 0$$ ✓

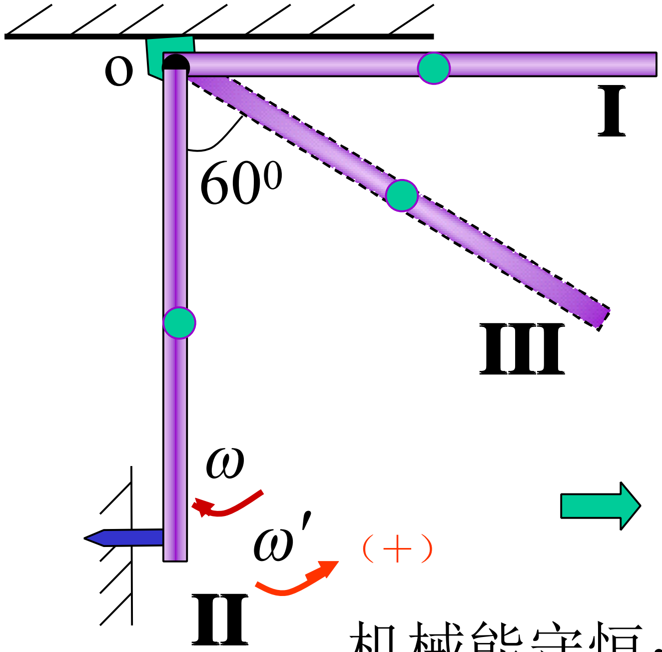
$$(4)\quad mr(v + r\omega) - J_M\omega = 0$$

$$\vec{v}_{人地} = \vec{v}_{人盘} + \vec{v}_{盘地}$$

c. 转动平面内 $F_{外}=0$

d. 角动量定理、角动量守恒定律中各角速度或速度均需相对同一惯性参照系。

例：细杆质量为**m**,长***l***, **I**处静止释放，**II**处杆下端恰好与墙上的小钉子碰撞，碰后杆能弹至**III**处，求：碰撞时钉子受到的冲量多大？



解：角动量定理 $\int \vec{M}\cdot dt = J\vec{\omega}' - J\vec{\omega}$

$$\int \vec{M}\cdot dt = \int l\overline{\vec{F}}dt = l\int \overline{\vec{F}}dt = l\vec{I}$$

$$lI = J\omega' - (-J\omega) = J(\omega' + \omega)$$

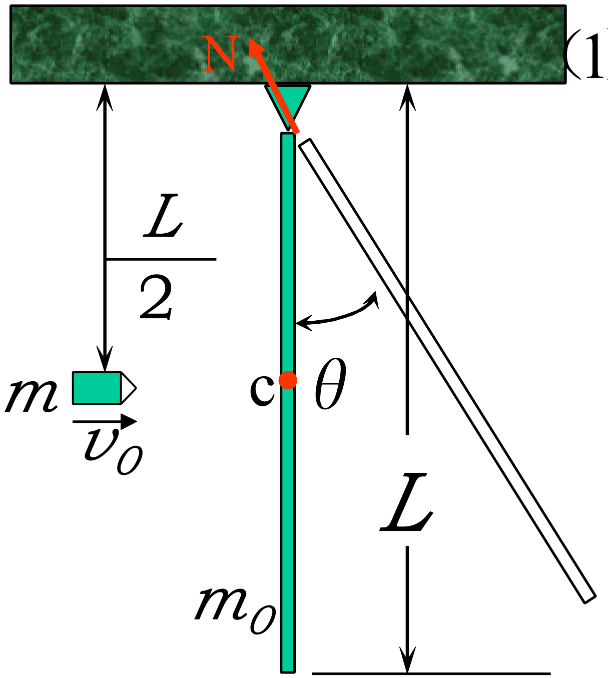
$$I = \frac{J(\omega + \omega')}{l} = \frac{1}{3}ml\left(\sqrt{\frac{3g}{l}} + \sqrt{\frac{3g}{2l}}\right)$$

机械能守恒：$I \to II$

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2 - mg\frac{l}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

同理：$II \to III, E$守恒 $\Rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$

例：　　　　已知v_0,求：三种不同情况下的　v_c



(1) $e=1$,(2) $e=0$,(3)$0<e<1$(棒转过θ角)

分析:$\{m、m_0\}$.冲力是内力,

重力mg, m_0g及轴对棒的约束力N均为外力,

且$\vec{F}_{合}\neq 0$　　$\therefore$系统$\vec{P}$不守恒

但$\vec{M}_{合}=0$　$\therefore$系统$\vec{L}$守恒

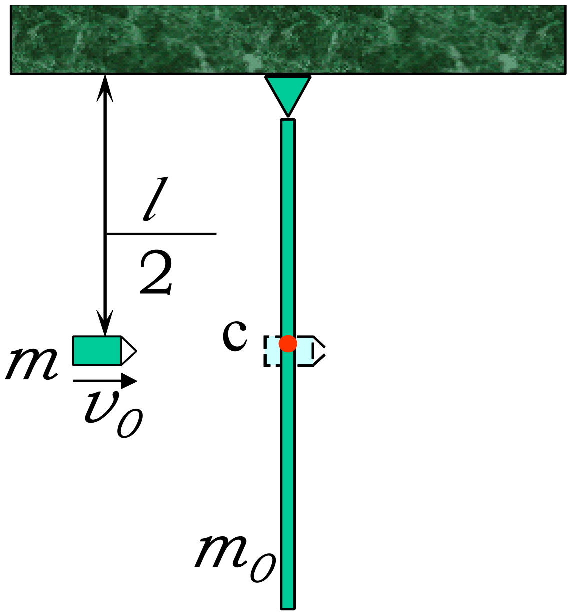
解：1） 设碰撞后子弹的速度为v

$$\because e=1 \quad \therefore E_k\text{守恒}: \frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_0l^2\right)\omega^2+\frac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

$$\because M=0 \quad \therefore L\text{守恒}: \quad mv_0\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{1}{3}m_0l^2\omega+mv\left(\frac{l}{2}\right) \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\end{array}\right\}\Rightarrow v_c$$

角量与线量的关系：$v_c=\dfrac{l}{2}\omega$　　(3)

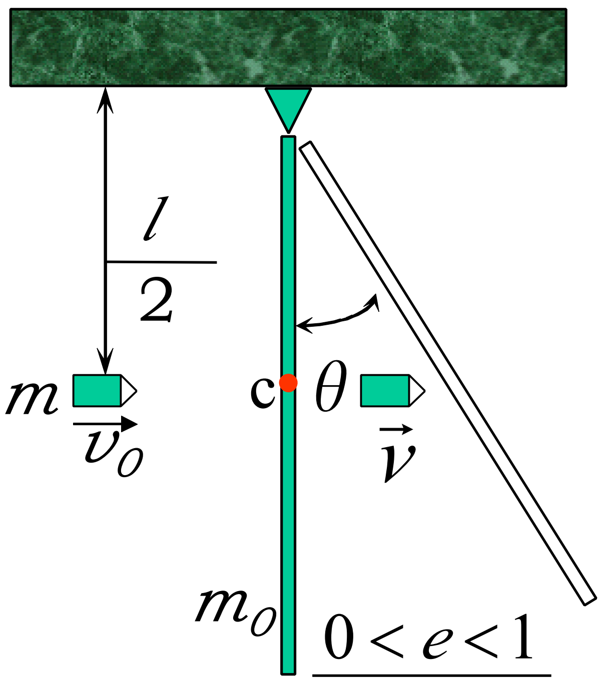


(2) $\because e=0$, 且 $M=0 \quad \therefore L$ 守恒

即：$mv_0(\frac{l}{2})=\frac{1}{3}m_0l^2\omega+mv_c(\frac{l}{2})$

$$=\left[\frac{1}{3}m_0l^2+m(\frac{l}{2})^2\right]\omega$$

$$\Rightarrow \omega=\ldots, v_c=\ldots$$

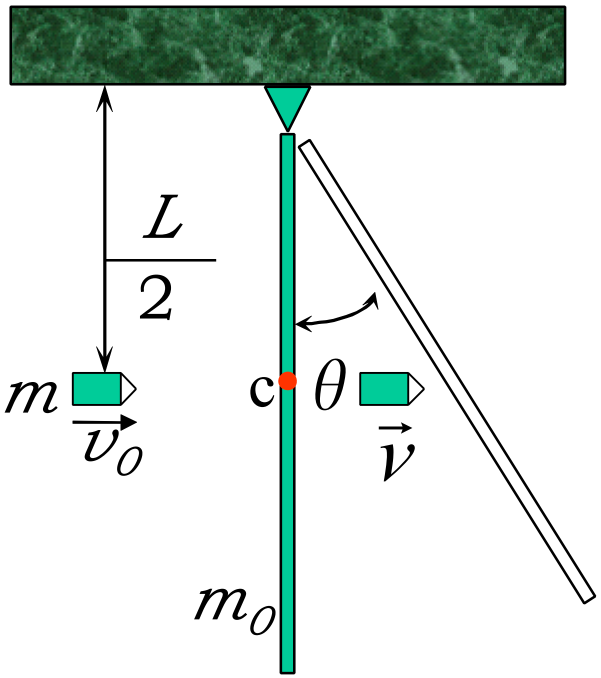


3) $mv_0(\frac{l}{2})=\frac{1}{3}m_0l^2\omega+mv\ (\frac{l}{2})$

{地、棒}：棒转动过程 E 守恒

即：$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_0l^2)\omega^2=m_0g\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$

$$\Rightarrow \omega=\ldots, v_c=\ldots, v=\ldots$$



结论：质点与转动刚体碰撞，由于存在约束力，所以 系统动量不守恒，但系统角动量守恒。

$$e=1\left\{\begin{array}{l}E_k\text{守恒}\\ L\text{守恒}\end{array}\right\}\omega, v$$

$$e=0\left\{\begin{array}{l}L\text{守恒} \Rightarrow \omega\\ v=r\omega\end{array}\right\}v$$

$$0<e<1\left\{\begin{array}{l}L\text{守恒}\\ \text{刚体碰后机械能守恒（}E_K\text{转化为}E_P)\end{array}\right\}\omega, v$$

	质点运动	刚体定轴转动
规律：	$\vec{F} = m\vec{a}$	$M = J\alpha$
状态量：	$\vec{P} = m\vec{v}$	$L = J\omega$
	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$
	$E_p = mgh$	$E_p = mgh_c$
累积效应：	$\int \vec{F} \cdot dt = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$	$\int M \cdot dt = L_2 - L_1$
	$\int \vec{F} \cdot d\vec{S} = E_{k2} - E_{k1}$	$\int M \cdot d\theta = E_{k2} - E_{k1}$

刚体：彼此间距离保持不变的“质点系”

刚体运动：大量质点运动的总效应

刚体的定轴转动：各点都有相同的$\Delta\theta$、ω、α

力矩是改变刚体转动状态的原因

$$M = J\alpha \text{——转动定律}$$

$$J=\begin{cases} \sum_i r_i^2 \Delta m_i & \text{质量非连续分布} \\ \int_m r^2 dm & \text{质量连续分布} \end{cases} \quad r\text{为质元到转轴距离}$$

定轴转动动能定理

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \frac{1}{2} J\omega_2{}^2 - \frac{1}{2} J\omega_0^2$$