内容：第一型曲线积分与曲面积分

1.第一型曲线积分

计算　化为定积分

$$\int_L f(x,y)\,ds \qquad (L: y = y(x))$$

$$= \int_a^b f[x, y(x)]\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$$

几何应用　曲线弧长

物理应用　曲线的质量,质心,转动惯量

练习三十二/二(2)

设L为椭圆$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$,已知其周长为$a$,

则$\oint_L (3x^2+5xy+2y^2)ds =$ ________.

分析：利用对称性

$$\oint_L (3x^2+5xy+2y^2)ds = \oint_L (3x^2+2y^2)\,ds$$

$$= \oint_L 6ds \;= 6a$$

上页 下页 返回

练习三十二/三 计算曲线积分$\oint_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})ds,$

其中L为星形线$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\ (a > 0).$

解：令$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t\ (0 \le t \le 2\pi)$

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt = 3a\,|\sin t\cos t|\,dt$$

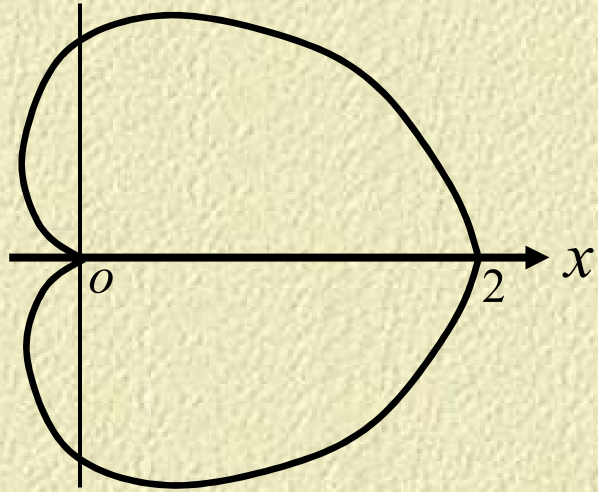
$$\oint_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})ds = 4\int_{L/4} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})ds$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^{\frac{4}{3}}\cos^4 t + a^{\frac{4}{3}}\sin^4 t)\cdot 3a\sin t\cos t\,dt = 4a^{\frac{7}{3}}$$

上页 下页 返回

例： 求心形线$\rho=1+\cos\theta$形心的直角坐标.

解：由对称性,得$\bar{y}=0$



$$\bar{x}=\frac{\int_L x\,ds}{\int_L ds}$$

$$ds=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\theta$$

$$=\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta=2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$

$$\int_L ds = \int_0^{2\pi} 2\,|\cos\frac{\theta}{2}|\,d\theta = 4\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}d\theta = 8$$

$$\int_L xds = 2\int_{L/2} xds$$

$$= 2\int_0^{\pi} (1+\cos\theta)\cos\theta \cdot 2\cos\frac{\theta}{2}d\theta = \frac{32}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{4}{5}$$

形心坐标 $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{4}{5}, 0)$

练习三十二/五 利用曲线积分计算

柱面$x^2+y^2=Rx$含在$0\le z\le \frac{1}{R}(x^2+y^2)$内的面积.

解：$A=\oint_L \frac{1}{R}(x^2+y^2)ds=\oint_L xds$

$L: x^2+y^2=Rx$ 或 $(x-\frac{R}{2})^2+y^2=(\frac{R}{2})^2$

令$x=\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t, y=\frac{R}{2}\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$

$$A=\int_0^{2\pi}\frac{R}{2}(1+\cos t)\cdot\frac{R}{2}dt=\frac{1}{2}\pi R^2$$

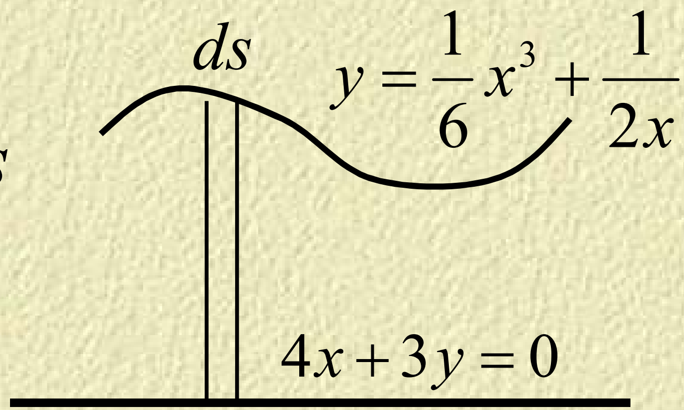
上页 下页 返回

练习三十二/六 利用曲线积分,

求曲线$C: y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2x}\ \ (\frac{1}{2}\le x\le 2)$绕直线

$L: 4x+3y=0$旋转所得的旋转曲面的面积.

解：$dS=2\pi\cdot\frac{|4x+3y|}{5}ds$



上页 下页 返回

$$S=\int_C \frac{2\pi}{5}|4x+3y|ds$$

在曲线C上, $4x+3y>0$.

$$S=\frac{2\pi}{5}\int_C (4x+3y)ds$$

$$=\frac{2\pi}{5}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(4x+\frac{x^3}{2}+\frac{3}{2x}\right)\sqrt{\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx$$

$$=\frac{8\pi}{5}\ln 2+\frac{1425\pi}{256}$$

上页 下页 返回

2. 第一型曲面积分

计算　化为二重积分

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS \qquad (\Sigma: z = z(x,y))$$

$$= \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dxdy$$

几何应用　曲面面积

物理应用　曲面的质量,质心,转动惯量

例：计算 $\iint\limits_{\Sigma}(ax+by+cz)^2\,dS$,

其中 Σ： $x^2+y^2+z^2=R^2$.

解：原式

$$=\iint\limits_{\Sigma}(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz)\,dS$$

(利用对称性)

$$=\iint\limits_{\Sigma}(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\,dS$$

$$= a^2 \iint_{\Sigma} x^2 dS + b^2 \iint_{\Sigma} y^2 dS + c^2 \iint_{\Sigma} z^2 dS$$

(利用轮换不变性)

$$= (a^2 + b^2 + c^2) \iint_{\Sigma} x^2 dS$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \iint_{\Sigma} R^2 dS = \frac{4}{3} \pi R^4 (a^2 + b^2 + c^2)$$

练习三十二/六

曲面$z=13-x^2-y^2$将球面$x^2+y^2+z^2=25$

分成三部分,求这三部分曲面面积之比.

解：$z=\pm\sqrt{25-x^2-y^2}$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\frac{5}{\sqrt{25-x^2-y^2}}dxdy$$

$\begin{cases} z=13-x^2-y^2 \\ x^2+y^2+z^2=25 \end{cases}$ 消去z, 得 $\begin{matrix} x^2+y^2=9 \\ x^2+y^2=16 \end{matrix}$

$$S_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\le 9} \frac{5}{\sqrt{25-x^2-y^2}}dxdy$$

$$= 5\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \frac{5}{\sqrt{25-\rho^2}}\rho d\rho = 10\pi$$

$$S_3 = \iint\limits_{x^2+y^2\le 16} \frac{5}{\sqrt{25-x^2-y^2}}dxdy$$

$$= 5\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \frac{5}{\sqrt{25-\rho^2}}\rho d\rho = 20\pi$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 100\pi$$

$$S_2 = 70\pi$$

$$S_1 : S_2 : S_3 = 10\pi : 70\pi : 20\pi = 1 : 7 : 2$$

上页 下页 返回

例：计算$\iint_{\Sigma} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dS$，其中$\Sigma$为

圆柱面$x^2+y^2=R^2$上$0 \le z \le H$的部分.

解法一： $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$

$$dS = \sqrt{1+(\frac{\partial x}{\partial y})^2+(\frac{\partial x}{\partial z})^2}\, dydz$$

$$= \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}} dydz$$

$$\text{原式} = 2\iint_{D_{yz}} \frac{1}{R^2+z^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}} dydz$$

$$= 2R\int_0^H \frac{1}{R^2+z^2}dz\int_{-R}^{R} \frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}dy = 2\pi \arctan\frac{H}{R}$$

解法二：令$x = R\cos\theta, y = R\sin\theta, z = z$

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^H \frac{1}{R^2+z^2} \cdot Rdz$$

$$= 2\pi \arctan\frac{H}{R}$$

例：计算$\iint_{\Sigma} xyz\,dS$,其中Σ为球面

$x^2+y^2+z^2=R^2$在第一卦限的部分.

解法一：$\iint_{\Sigma} xyz\,dS$

$$=\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}} Rxy\,dxdy$$

$$=R\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^R \rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\rho\,d\rho=\frac{1}{8}R^5$$

上页 下页 返回

解法二：

令$x = R\sin\varphi\cos\theta, y = R\sin\varphi\sin\theta, z = R\cos\varphi$

$$\iint_{\Sigma} xyz dS$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta \cdot R^2 \sin\varphi d\varphi$$

$$= R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos\varphi d\varphi$$

$$= \frac{1}{8} R^5$$

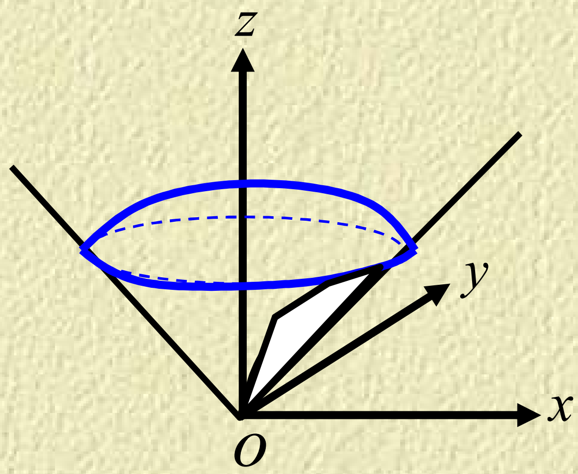
上页 下页 返回

练习三十二/十

计算$I=\iint\limits_S \frac{dS}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$,其中$S$为锥面

$z=\sqrt{x^2+y^2}$上被柱面$z^2=x$所截下的部分.

解: $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=x \end{cases}$



消去z,得$x^2+y^2=x$

上页 下页 返回

S在xoy坐标面上的投影$D_{xy}: x^2+y^2 \le x.$

$$S: z=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy$$

$$I=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\cdot\sqrt{2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\rho d\rho=\sqrt{2}(\pi-2)$$

上页 下页 返回

练习三十二/十二

计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{x^2+y^2+z^2}dS$，其中积分区域为曲面

$\Sigma=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2=R^2, 0\le z\le H\}, (R>0, H>0)$

解： $\Sigma: x=\pm\sqrt{R^2-y^2}$

$$dS=\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,dydz=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz$$

$$\text{原式}=2\iint\limits_{D_{yz}}\frac{z}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz$$

$$=2R\int_0^H\frac{z}{R^2+z^2}dz\int_{-R}^{R}\frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}dy=\pi R\ln\frac{R^2+H^2}{R^2}$$

练习三十三/三

求曲线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$围成的均匀薄板(面密度μ为常数) 对坐标原点的转动惯量.

解: $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2) \Rightarrow \rho^2=a^2\cos 2\theta$

$$I_o=\iint_D (x^2+y^2)\mu d\sigma=4\iint_{D/4}\mu(x^2+y^2)d\sigma$$

$$=4\mu\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}\rho^2\cdot\rho d\rho=\frac{1}{8}\pi\mu a^4$$

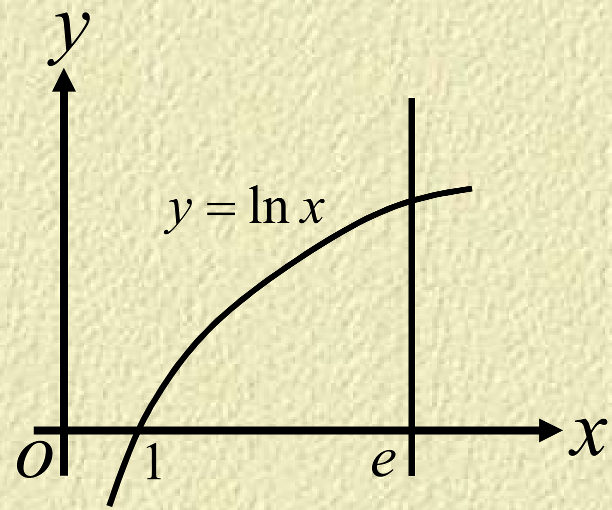
上页 下页 返回

练习三十三/四

设有一个由曲线$y=\ln x, y=0, x=e$所围成的均匀薄片,其面密度为$\mu=1$,若此薄片关于直线$x=t$的转动惯量为$I(t)$,求使$I(t)$取得最小值的t.

解：$I(t)=\iint\limits_{D}\mu(x-t)^2 d\sigma$

$$=\mu\int_1^e (x-t)^2 dx\int_0^{\ln x} dy$$



上页 下页 返回

$$I(t)=\mu\int_1^e (x-t)^2\ln x dx$$

$$=\mu\int_1^e x^2\ln x dx-2\mu t\int_1^e x\ln x dx+\mu t^2\int_1^e \ln x dx$$

$$I'(t)=0-2\mu\int_1^e x\ln x dx+2\mu t\int_1^e \ln x dx$$

令$I'(t)=0$, 得驻点$t=\dfrac{\int_1^e x\ln x dx}{\int_1^e \ln x dx}=\dfrac{1}{4}(e^2+1)$

$$I''(t)=0+2\mu\int_1^e \ln x dx=2\mu>0$$

$\therefore t=\dfrac{1}{4}(e^2+1)$是最小点

上页 下页 返回

练习三十三/六 求立体的形心坐标，

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\}.$$

解：由对称性，$\bar{x}=\bar{y}=0.$ $\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} z\,dv$

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^2dr=\pi$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r\cos\varphi\cdot r^2dr=\frac{7\pi}{6}$$

$\bar{z}=\dfrac{7}{6}$ 形心坐标 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,\dfrac{7}{6})$

上页 下页 返回

练习三十三/七 立体Ω由曲面

$(x^2+y^2+z^2)^2 = R^2(x^2+y^2)(R>0)$围成,其密度

μ为常数,求该物体关于z轴的转动惯量I_z.

解: $(x^2+y^2+z^2)^2 = R^2(x^2+y^2) \Rightarrow r = R\sin\varphi$

$$I_z = \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mu dv$$

$$= \mu\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{R\sin\varphi} r^2\sin^2\varphi\cdot r^2 dr$$

$$= \frac{7}{64}\pi^2\mu R^5$$

练习三十三/十二

求上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$的质心坐标,

已知曲面上任一点(x,y,z)处密度为$\mu=z$.

解：由对称性,得$\bar{x}=\bar{y}=0$. $\bar{z}=\dfrac{M_{xy}}{M}$

$$M=\iint\limits_{\Sigma} z dS$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy=\pi R^3$$

上页 下页 返回

$$M_{xy}=\iint_{\Sigma} z\cdot z dS$$

$$=\iint_{D_{xy}}(\sqrt{R^2-x^2-y^2})^2\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho=\frac{2}{3}\pi R^4$$

$$\bar{z}=\frac{2}{3}R$$

质心坐标 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,\frac{2}{3}R)$