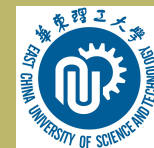


### ★3.4 Laplace变换

- 对函数施行Fourier变换时，要求函数定义在 $R$ 上且绝对可积这两个条件，这个条件太强，适用面窄（一般的常用函数、多项式函数等初等函数都不满足这个条件）



Home Page

Title Page



Page 1 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



### ★3.4 Laplace变换

- 对函数施行Fourier变换时，要求函数定义在 $R$ 上且绝对可积这两个条件，这个条件太强，适用面窄（一般的常用函数、多项式函数等初等函数都不满足这个条件）
- 许多时间 $t$ 作为自变量的函数往往在 $t < 0$ 时是无意义的，像这样的函数不能取Fourier变换

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 1 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



### ★3.4 Laplace变换

- 对函数施行Fourier变换时，要求函数定义在 $R$ 上且绝对可积这两个条件，这个条件太强，适用面窄（一般的常用函数、多项式函数等初等函数都不满足这个条件）
- 许多时间 $t$ 作为自变量的函数往往在 $t < 0$ 时是无意义的，像这样的函数不能取Fourier变换
- 对于任意一个函数 $\phi(t)$ ，能否经过适当地改造使其进行Fourier变换时克服上述两个缺点？

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

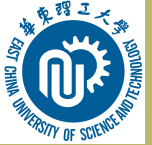
Page 1 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



### ★3.4 Laplace变换

- 对函数施行Fourier变换时，要求函数定义在 $R$ 上且绝对可积这两个条件，这个条件太强，适用面窄（一般的常用函数、多项式函数等初等函数都不满足这个条件）
- 许多时间 $t$ 作为自变量的函数往往在 $t < 0$ 时是无意义的，像这样的函数不能取Fourier变换
- 对于任意一个函数 $\phi(t)$ ，能否经过适当地改造使其进行Fourier变换时克服上述两个缺点？
- 引进单位阶梯函数 $H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$ ，以及指数衰减函数 $e^{-\beta t} (\beta > 0)$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

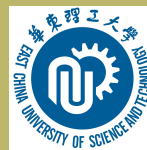
Page 1 of 20

Go Back

Full Screen

Close

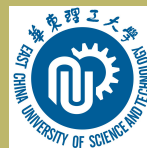
Quit



### ★3.4 Laplace变换

- 对函数施行Fourier变换时，要求函数定义在 $R$ 上且绝对可积这两个条件，这个条件太强，适用面窄（一般的常用函数、多项式函数等初等函数都不满足这个条件）
- 许多时间 $t$ 作为自变量的函数往往在 $t < 0$ 时是无意义的，像这样的函数不能取Fourier变换
- 对于任意一个函数 $\phi(t)$ ，能否经过适当地改造使其进行Fourier变换时克服上述两个缺点？
- 引进单位阶梯函数 $H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$ ，以及指数衰减函数 $e^{-\beta t} (\beta > 0)$
- 用前者乘以 $\phi(t)$ 可以使积分区间由 $(-\infty, \infty)$ 变为 $[0, \infty)$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 1 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### ★3.4 Laplace变换

- 对函数施行Fourier变换时，要求函数定义在 $R$ 上且绝对可积这两个条件，这个条件太强，适用面窄（一般的常用函数、多项式函数等初等函数都不满足这个条件）
- 许多时间 $t$ 作为自变量的函数往往在 $t < 0$ 时是无意义的，像这样的函数不能取Fourier变换
- 对于任意一个函数 $\phi(t)$ ，能否经过适当地改造使其进行Fourier变换时克服上述两个缺点？
- 引进单位阶梯函数 $H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$ ，以及指数衰减函数 $e^{-\beta t} (\beta > 0)$
- 用前者乘以 $\phi(t)$ 可以使积分区间由 $(-\infty, \infty)$ 变为 $[0, \infty)$
- 后者乘以 $\phi(t)$ 就有可能使其变得绝对可积

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

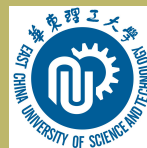
Page 1 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



### ★3.4 Laplace变换

- 对函数施行Fourier变换时，要求函数定义在 $R$ 上且绝对可积这两个条件，这个条件太强，适用面窄（一般的常用函数、多项式函数等初等函数都不满足这个条件）
- 许多时间 $t$ 作为自变量的函数往往在 $t < 0$ 时是无意义的，像这样的函数不能取Fourier变换
- 对于任意一个函数 $\phi(t)$ ，能否经过适当地改造使其进行Fourier变换时克服上述两个缺点？
- 引进单位阶梯函数 $H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$ ，以及指数衰减函数 $e^{-\beta t} (\beta > 0)$
- 用前者乘以 $\phi(t)$ 可以使积分区间由 $(-\infty, \infty)$ 变为 $[0, \infty)$
- 后者乘以 $\phi(t)$ 就有可能使其变得绝对可积
- 所以对于 $\phi(t)H(t)e^{-\beta t} (\beta > 0)$ 只要 $\beta$ 选得适当，一般来说这个函数的Fourier变换存在

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

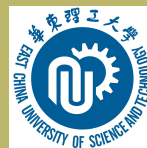
Page 1 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



### ★3.4 Laplace变换

- 对函数施行Fourier变换时，要求函数定义在 $R$ 上且绝对可积这两个条件，这个条件太强，适用面窄（一般的常用函数、多项式函数等初等函数都不满足这个条件）
- 许多时间 $t$ 作为自变量的函数往往在 $t < 0$ 时是无意义的，像这样的函数不能取Fourier变换
- 对于任意一个函数 $\phi(t)$ ，能否经过适当地改造使其进行Fourier变换时克服上述两个缺点？
- 引进单位阶梯函数 $H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$ ，以及指数衰减函数 $e^{-\beta t} (\beta > 0)$
- 用前者乘以 $\phi(t)$ 可以使积分区间由 $(-\infty, \infty)$ 变为 $[0, \infty)$
- 后者乘以 $\phi(t)$ 就有可能使其变得绝对可积
- 所以对于 $\phi(t)H(t)e^{-\beta t} (\beta > 0)$ 只要 $\beta$ 选得适当，一般来说这个函数的Fourier变换存在
- 对 $\phi(t)H(t)e^{-\beta t}$ 实行Fourier变换

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 20

Go Back

Full Screen

Close

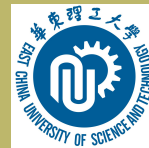
Quit



$$\mathcal{F}[\phi(t)H(t)e^{-\beta t}] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)H(t)e^{-\beta t}e^{-i\lambda t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)H(t)e^{-(\beta+i\lambda)t}dt$$

$$\text{令 } f(t) = \phi(t)H(t), p = \beta + i\lambda$$

$$= \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$



Home Page

Title Page



Page 2 of 20

Go Back

Full Screen

Close

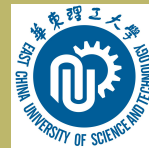
Quit

$$\mathcal{F}[\phi(t)H(t)e^{-\beta t}] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)H(t)e^{-\beta t}e^{-i\lambda t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)H(t)e^{-(\beta+i\lambda)t}dt$$

令  $f(t) = \phi(t)H(t)$ ,  $p = \beta + i\lambda$

$$= \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

- 取  $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$  即通过积分将关于  $t$  的函数转换为关于  $p$  的函数，这就是我们后面要介绍的Laplace变换



Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 2 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit

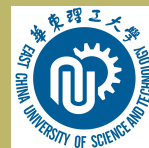
$$\mathcal{F}[\phi(t)H(t)e^{-\beta t}] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)H(t)e^{-\beta t}e^{-i\lambda t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)H(t)e^{-(\beta+i\lambda)t}dt$$

$$\text{令 } f(t) = \phi(t)H(t), p = \beta + i\lambda$$

$$= \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

- 取  $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$  即通过积分将关于  $t$  的函数转换为关于  $p$  的函数，这就是我们后面要介绍的Laplace变换
- 对  $\mathcal{F}[\phi(t)H(t)e^{-\beta t}]$  实行Fourier逆变换

$$\begin{aligned} \phi(t)H(t)e^{-\beta t} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)H(t)e^{-\beta t}e^{-i\lambda t}dt \right) e^{it\lambda}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\beta+i\lambda)t}dt \right) e^{it\lambda}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\beta + i\lambda)e^{it\lambda}d\lambda \end{aligned}$$


[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Page 2 of 20](#)
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

$$\mathcal{F}[\phi(t)H(t)e^{-\beta t}] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)H(t)e^{-\beta t}e^{-i\lambda t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)H(t)e^{-(\beta+i\lambda)t}dt$$

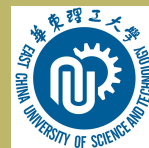
令  $f(t) = \phi(t)H(t)$ ,  $p = \beta + i\lambda$

$$= \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

- 取  $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$  即通过积分将关于  $t$  的函数转换为关于  $p$  的函数，这就是我们后面要介绍的Laplace变换
- 对  $\mathcal{F}[\phi(t)H(t)e^{-\beta t}]$  实行Fourier逆变换

$$\begin{aligned}\phi(t)H(t)e^{-\beta t} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)H(t)e^{-\beta t}e^{-i\lambda t}dt \right) e^{it\lambda}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\beta+i\lambda)t}dt \right) e^{it\lambda}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\beta + i\lambda)e^{it\lambda}d\lambda\end{aligned}$$

- 左右两端同乘以  $e^{\beta t}$ , 其中  $f(t) = \phi(t)H(t)$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\beta + i\lambda) e^{it\lambda + \beta t} d\lambda \quad (\text{令 } p = \beta + i\lambda) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} F(p) e^{pt} dp, t > 0 \end{aligned}$$

- 上式就是Laplace逆变换，一般再做逆变换求原函数时，不是从定义出发，而是利用Laplace积分变换表和积分性质
- Fourier变换中介绍了卷积，即  $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds$
- 如果当  $t < 0$  时，  $f(t) = g(t) = 0$ ，则上式可化简为

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_{-\infty}^0 f(t-s)g(s)ds + \int_0^t f(t-s)g(s)ds + \int_t^{\infty} f(t-s)g(s)ds \\ &= \int_0^t f(t-s)g(s)ds \end{aligned}$$

- 上式就是laplace变换中用到的卷积，注意它的积分范围



### ★3.4.1 Laplace变换的概念

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 4 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



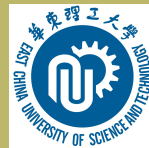
### ★3.4.1 Laplace变换的概念

- 设 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 上有定义, 对于复数 $p$ , 定义 $f$ 的Laplace变换为

$$\mathcal{L}[f] = \tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

有时也称 $\tilde{f}$ 是 $f$ 的像函数。

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 4 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### ★3.4.1 Laplace变换的概念

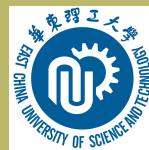
- 设 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 上有定义, 对于复数 $p$ , 定义 $f$ 的Laplace变换为

$$\mathcal{L}[f] = \tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

有时也称 $\tilde{f}$ 是 $f$ 的像函数。  
关于Laplace变换的存在性, 有如下定理:

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 4 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)





### ★3.4.1 Laplace变换的概念

- 设 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 上有定义, 对于复数 $p$ , 定义 $f$ 的Laplace变换为

$$\mathcal{L}[f] = \tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

有时也称 $\tilde{f}$ 是 $f$ 的像函数。

关于Laplace变换的存在性, 有如下定理:

- **定理3.4.1** 若 $f(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上分段连续且不超过指数型增长, 即存在常数 $M, \alpha > 0$ 使得 $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ , 则 $f(t)$ 的Laplace变换对满足 $\operatorname{Re} p > \alpha$ 的所有 $p$ 都存在。

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

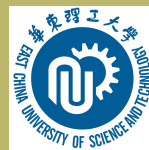
Page 4 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



### ★3.4.1 Laplace变换的概念

- 设 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 上有定义, 对于复数 $p$ , 定义 $f$ 的Laplace变换为

$$\mathcal{L}[f] = \tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

有时也称 $\tilde{f}$ 是 $f$ 的像函数。

关于Laplace变换的存在性, 有如下定理:

- **定理3.4.1** 若 $f(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上分段连续且不超过指数型增长, 即存在常数 $M, \alpha > 0$ 使得 $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ , 则 $f(t)$ 的Laplace变换对满足 $\operatorname{Re} p > \alpha$ 的所有 $p$ 都存在。

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 4 of 20

Go Back

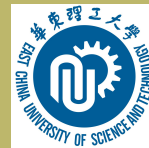
Full Screen

Close

Quit

### 例3.4.1

$$\mathcal{L}[c] = \int_0^{\infty} ce^{-pt} dt = \frac{c}{p}, \quad \text{Re } p > 0$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 5 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

### 例3.4.1

$$\mathcal{L}[c] = \int_0^{\infty} ce^{-pt} dt = \frac{c}{p}, \quad \text{Re } p > 0$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{p - a}, \quad \text{Re } p > a$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 5 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

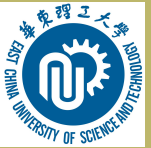
[Quit](#)

### 例3.4.1

$$\mathcal{L}[c] = \int_0^{\infty} ce^{-pt} dt = \frac{c}{p}, \quad \text{Re } p > 0$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{p-a}, \quad \text{Re } p > a$$

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{p^3}, \quad \text{Re } p > 0$$



Home Page

Title Page



Page 5 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit

### 例3.4.1

$$\mathcal{L}[c] = \int_0^{\infty} ce^{-pt} dt = \frac{c}{p}, \quad \text{Re } p > 0$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{p-a}, \quad \text{Re } p > a$$

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{p^3}, \quad \text{Re } p > 0$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \text{Re } p > 0$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 5 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

### 例3.4.1

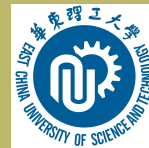
$$\mathcal{L}[c] = \int_0^{\infty} ce^{-pt} dt = \frac{c}{p}, \quad \text{Re } p > 0$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{p-a}, \quad \text{Re } p > a$$

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{p^3}, \quad \text{Re } p > 0$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \text{Re } p > 0$$

$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{p^2 + a^2}, \quad \text{Re } p > 0$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 5 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

### 例3.4.1

$$\mathcal{L}[c] = \int_0^{\infty} ce^{-pt} dt = \frac{c}{p}, \quad \text{Re } p > 0$$

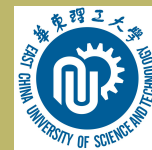
$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{p-a}, \quad \text{Re } p > a$$

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{p^3}, \quad \text{Re } p > 0$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \text{Re } p > 0$$

$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{p^2 + a^2}, \quad \text{Re } p > 0$$

$$\mathcal{L}[\cos at] = \frac{p}{p^2 + a^2}, \quad \text{Re } p > 0$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 5 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)





例3.4.2 Heaviside单位阶梯函数（通常简称为Heaviside函数）是

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

对正常数 $a$ ,有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[H(t-a)] &= \int_0^{\infty} H(t-a)e^{-pt}dt = \int_0^a H(t-a)e^{-pt}dt + \int_a^{\infty} H(t-a)e^{-pt}dt \\ &= \int_a^{\infty} e^{-pt}dt = \frac{e^{-ap}}{p} \end{aligned}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 6 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 如果  $\mathcal{L}[f(t)] = \tilde{f}(p)$ , 则称  $f(t)$  是  $\tilde{f}(p)$  的 Laplace 逆变换, 有时也称  $f$  是  $\tilde{f}(p)$  的像原函数或原函数.

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 7 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

- 如果  $\mathcal{L}[f(t)] = \tilde{f}(p)$ , 则称  $f(t)$  是  $\tilde{f}(p)$  的 Laplace 逆变换, 有时也称  $f$  是  $\tilde{f}(p)$  的像原函数或原函数. 它的形式是

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \tilde{f}(p) e^{tp} dp, t > 0$$

其中  $\tilde{f}(p)$  定义在半平面  $\text{Re } p > \beta$  上。

- 如果  $\mathcal{L}[f(t)] = \tilde{f}(p)$ , 则称  $f(t)$  是  $\tilde{f}(p)$  的 Laplace 逆变换, 有时也称  $f$  是  $\tilde{f}(p)$  的像原函数或原函数. 它的形式是

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \tilde{f}(p) e^{tp} dp, t > 0$$

其中  $\tilde{f}(p)$  定义在半平面  $\text{Re } p > \beta$  上。

- 上式实际计算比较麻烦, 可以利用 Laplace 变换的性质来求逆变换, 但多数情况下, 都需借助于 Laplace 积分变换表。



## ★3.4.2 Laplace变换的性质（证明过程和Fourier变换的性质类似）

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 8 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



### ★3.4.2 Laplace变换的性质（证明过程和Fourier变换的性质类似）

- 性质1(线性性质)  $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g]$ ,  $\mathcal{L}^{-1}[\alpha \tilde{f} + \beta \tilde{g}] = \alpha \mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}] + \beta \mathcal{L}^{-1}[\tilde{g}]$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### ★3.4.2 Laplace变换的性质（证明过程和Fourier变换的性质类似）

- 性质1(线性性质)  $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g]$ ,  $\mathcal{L}^{-1}[\alpha \tilde{f} + \beta \tilde{g}] = \alpha \mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}] + \beta \mathcal{L}^{-1}[\tilde{g}]$
- 性质2(位移性质)  $\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \tilde{f}(p - a)$ ,  $\text{Re } p > a$ ,

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### ★3.4.2 Laplace变换的性质（证明过程和Fourier变换的性质类似）

- 性质1(线性性质)  $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g]$ ,  $\mathcal{L}^{-1}[\alpha \tilde{f} + \beta \tilde{g}] = \alpha \mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}] + \beta \mathcal{L}^{-1}[\tilde{g}]$
- 性质2(位移性质)  $\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = \tilde{f}(p - a)$ ,  $\text{Re } p > a$ , 由此推知  $\mathcal{L}[t^n e^{\alpha t}] = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$ ,  $\text{Re } p > a$ .

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)





### ★3.4.2 Laplace变换的性质（证明过程和Fourier变换的性质类似）

- 性质1(线性性质)  $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g]$ ,  $\mathcal{L}^{-1}[\alpha \tilde{f} + \beta \tilde{g}] = \alpha \mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}] + \beta \mathcal{L}^{-1}[\tilde{g}]$
- 性质2(位移性质)  $\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = \tilde{f}(p - a)$ ,  $\text{Re } p > a$ , 由此推知  $\mathcal{L}[t^n e^{\alpha t}] = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$ ,  $\text{Re } p > a$ .
- 性质3(相似性质)  $\mathcal{L}[f(ct)] = \frac{1}{c} \tilde{f}(\frac{p}{c})$ ,  $c > 0$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### ★3.4.2 Laplace变换的性质（证明过程和Fourier变换的性质类似）

- 性质1(线性性质)  $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g]$ ,  $\mathcal{L}^{-1}[\alpha \tilde{f} + \beta \tilde{g}] = \alpha \mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}] + \beta \mathcal{L}^{-1}[\tilde{g}]$
- 性质2(位移性质)  $\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = \tilde{f}(p - a)$ ,  $\text{Re } p > a$ , 由此推知  $\mathcal{L}[t^n e^{\alpha t}] = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$ ,  $\text{Re } p > a$ .
- 性质3(相似性质)  $\mathcal{L}[f(ct)] = \frac{1}{c} \tilde{f}(\frac{p}{c})$ ,  $c > 0$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 性质4 (微分性质)若在 $[0, \infty)$ 上,  $f'(t)$ 分段连续,  $f(t)$ 连续且不超过指数型增长, 即存在常数 $M, \alpha > 0$ 使得 $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ , 则当 $\text{Re } p > \alpha$ 时,  $f'(t)$ 的Laplace变换存在, 且成立 $\mathcal{L}[f'(t)] = p\tilde{f}(p) - f(0)$ .

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 9 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 性质4 (微分性质)若在 $[0, \infty)$ 上,  $f'(t)$ 分段连续,  $f(t)$ 连续且不超过指数型增长, 即存在常数 $M, \alpha > 0$ 使得 $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ , 则当 $\text{Re } p > \alpha$ 时,  $f'(t)$ 的Laplace变换存在, 且成立 $\mathcal{L}[f'(t)] = p\tilde{f}(p) - f(0)$ .

● 对于高阶导数, 也有类似的结论: 如果 $[0, \infty)$ 上,  $f^{(n)}(t)$ 分段连续,  $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ 连续, 且不超过指数型增长, 那么 $f^{(n)}(t)$ 的Laplace变换存在, 且成立

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n \tilde{f}(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \text{Re } p > \alpha.$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 9 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 性质4 (微分性质)若在 $[0, \infty)$ 上,  $f'(t)$ 分段连续,  $f(t)$ 连续且不超过指数型增长, 即存在常数 $M, \alpha > 0$ 使得 $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ , 则当 $\text{Re } p > \alpha$ 时,  $f'(t)$ 的Laplace变换存在, 且成立 $\mathcal{L}[f'(t)] = p\tilde{f}(p) - f(0)$ .

● 对于高阶导数, 也有类似的结论: 如果 $[0, \infty)$ 上,  $f^{(n)}(t)$ 分段连续,  $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ 连续, 且不超过指数型增长, 那么 $f^{(n)}(t)$ 的Laplace变换存在, 且成立

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n \tilde{f}(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \text{Re } p > \alpha.$$

常用的微分性质:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = p\tilde{f}(p) - f(0).$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = p^2\tilde{f}(p) - pf'(0) - f(0).$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 20

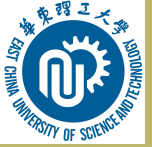
Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 性质5 (积分性质)  $\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{1}{p}\tilde{f}(p).$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 10 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

- 性质5 (积分性质)  $\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{1}{p}\tilde{f}(p)$ .
- 性质6(乘多项式性质)

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \tilde{f}(p) = (-1)^n \tilde{f}^{(n)}(p),$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}^{(n)}(p)] = (-1)^n t^n f(t), n = 1, 2, 3, \dots .$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 10 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

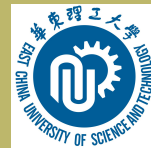
• 性质5 (积分性质)  $\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{1}{p}\tilde{f}(p)$ .

• 性质6(乘多项式性质)

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \tilde{f}(p) = (-1)^n \tilde{f}^{(n)}(p),$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}^{(n)}(p)] = (-1)^n t^n f(t), n = 1, 2, 3, \dots .$$

• 性质7(延迟性质)  $\mathcal{L}[f(t - \tau)H(t - \tau)] = e^{-\tau p}\tilde{f}(p)$ , 或者  $\mathcal{L}^{-1}[e^{-\tau p}\tilde{f}(p)] = f(t - \tau)H(t - \tau)$ .



Home Page

Title Page



Page 10 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit





• 性质5 (积分性质)  $\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{1}{p}\tilde{f}(p)$ .

• 性质6(乘多项式性质)

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \tilde{f}(p) = (-1)^n \tilde{f}^{(n)}(p),$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}^{(n)}(p)] = (-1)^n t^n f(t), n = 1, 2, 3, \dots$$

• 性质7(延迟性质)  $\mathcal{L}[f(t - \tau)H(t - \tau)] = e^{-\tau p}\tilde{f}(p)$ , 或者  $\mathcal{L}^{-1}[e^{-\tau p}\tilde{f}(p)] = f(t - \tau)H(t - \tau)$ .  
证明:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t - \tau)H(t - \tau)] &= \int_0^\infty f(t - \tau)H(t - \tau)e^{-pt}dt \\ &= \int_0^\tau f(t - \tau)H(t - \tau)e^{-pt}dt + \int_\tau^\infty f(t - \tau)H(t - \tau)e^{-pt}dt\end{aligned}$$

右边第一项积分为零, 对于第二个积分中, 令  $t - \tau = s$

$$= \int_0^\infty f(s)e^{-p(\tau+s)}ds = e^{-p\tau}\tilde{f}(p)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 性质8(初值定理)  $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} p\tilde{f}(p).$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 11 of 20

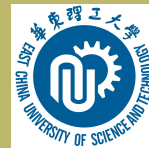
[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

- 性质8(初值定理)  $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p\tilde{f}(p).$
- 性质9(终值定理)  $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\tilde{f}(p).$



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 11 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 性质8(初值定理)  $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p\tilde{f}(p).$
- 性质9(终值定理)  $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\tilde{f}(p).$
- 定义3.4.1称

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

为函数 $f$ 与 $g$ 的卷积.

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 性质8(初值定理)  $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \tilde{f}(p).$
- 性质9(终值定理)  $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{f}(p).$
- 定义3.4.1称

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

为函数 $f$ 与 $g$ 的卷积.

- 卷积有下列性质:

$$f * g = g * f, (f * g) * h = f * (g * h), f * (g + h) = f * g + f * h.$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 性质8(初值定理)  $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p\tilde{f}(p)$ .
- 性质9(终值定理)  $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\tilde{f}(p)$ .
- 定义3.4.1称

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

为函数 $f$ 与 $g$ 的卷积.

- 卷积有下列性质:

$$f * g = g * f, (f * g) * h = f * (g * h), f * (g + h) = f * g + f * h.$$

- 性质10(卷积定理)

$$\mathcal{L}[f * g] = \tilde{f}(p)\tilde{g}(p), \text{ 或者 } \mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}(p)\tilde{g}(p)] = f * g.$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 20

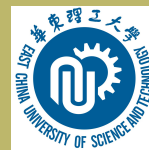
Go Back

Full Screen

Close

Quit

例3.4.4求Laplace逆变换 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2(1+p)^2}\right]$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 12 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

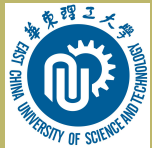
[Close](#)

[Quit](#)

例3.4.4求Laplace逆变换 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2(1+p)^2}\right]$

解： 因为(可利用积分变换表里的结论)

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{p^2}, \mathcal{L}[te^{-t}] = \frac{1}{(1+p)^2},$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 12 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)





例3.4.4求Laplace逆变换 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2(1+p)^2}\right]$

解：因为(可利用积分变换表里的结论)

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{p^2}, \mathcal{L}[te^{-t}] = \frac{1}{(1+p)^2},$$

记 $f(t) = t, g(t) = te^{-t}$ ,则

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

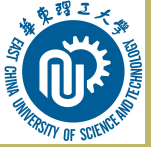
Page 12 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



例3.4.4求Laplace逆变换 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2(1+p)^2}\right]$

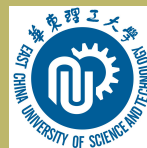
解： 因为(可利用积分变换表里的结论)

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{p^2}, \mathcal{L}[te^{-t}] = \frac{1}{(1+p)^2},$$

记 $f(t) = t, g(t) = te^{-t}$ , 则

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2(1+p)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{(1+p)^2}\right]$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 12 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



例3.4.4求Laplace逆变换 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2(1+p)^2}\right]$

解：因为(可利用积分变换表里的结论)

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{p^2}, \mathcal{L}[te^{-t}] = \frac{1}{(1+p)^2},$$

记 $f(t) = t, g(t) = te^{-t}$ , 则

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2(1+p)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{(1+p)^2}\right]$$

利用性质(10)

$$\begin{aligned} &= \mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}(p)\tilde{g}(p)] = (f * g)(t) = \int_0^t (t-s)ss^{-s}ds \\ &= (t+2)e^{-t} + t - 2 \end{aligned}$$

注意：(1)利用Laplace逆变换求原函数一般是利用积分变换表和Laplace变换的性质

(2)Laplace变换中卷积的积分范围

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 12 of 20

Go Back

Full Screen

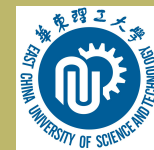
Close

Quit

### ★3.5 Laplace变换的应用

考虑半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0 \\ u(0, t) = f(t), & \lim_{x \rightarrow \infty} |u(x, t)| < \infty \end{cases}$$



Home Page

Title Page



Page 13 of 20

Go Back

Full Screen

Close

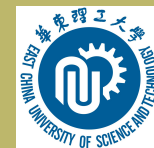
Quit

### ★3.5 Laplace变换的应用

考虑半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0 \\ u(0, t) = f(t), & \lim_{x \rightarrow \infty} |u(x, t)| < \infty \end{cases}$$

解：由于 $x, t$ 都在 $[0, \infty)$ 内变换，所以采用Laplace变换方法求解。



Home Page

Title Page



Page 13 of 20

Go Back

Full Screen

Close

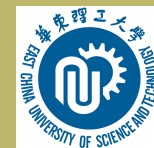
Quit

### ★3.5 Laplace变换的应用

考虑半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0 \\ u(0, t) = f(t), & \lim_{x \rightarrow \infty} |u(x, t)| < \infty \end{cases}$$

解：由于 $x, t$ 都在 $[0, \infty)$ 内变换，所以采用Laplace变换方法求解。又因为方程关于 $t$ 是一阶导数，关于 $x$ 是二阶导数，且没有给出 $u_x$ 在 $x = 0$ 的值，故只能关于 $t$ 施行Laplace变换。



Home Page

Title Page



Page 13 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit

### ★3.5 Laplace变换的应用

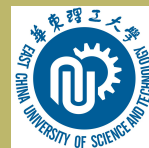
考虑半直线上热传导方程的定解问题

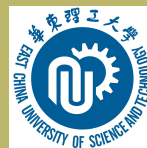
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0 \\ u(0, t) = f(t), & \lim_{x \rightarrow \infty} |u(x, t)| < \infty \end{cases}$$

解：由于 $x, t$ 都在 $[0, \infty)$ 内变换，所以采用Laplace变换方法求解。又因为方程关于 $t$ 是一阶导数，关于 $x$ 是二阶导数，且没有给出 $u_x$ 在 $x = 0$ 的值，故只能关于 $t$ 施行Laplace变换。

记 $\tilde{u}(x, p) = \mathcal{L}[u(x, t)]$ ,  $p > 0$ , 对方程和定解条件关于 $t$ 施行Laplace变换，由 $u(x, 0) = 0$ , 所以

$$\begin{cases} p\tilde{u}(x, p) - u(x, 0) - a^2 \tilde{u}_{xx}(x, p) = 0, \\ \tilde{u}(0, p) = \tilde{f}(p). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{u}_{xx}(x, p) = \frac{p}{a^2} \tilde{u}(x, p), & x > 0 \\ \tilde{u}(0, p) = \tilde{f}(p). \end{cases}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 13 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### ★3.5 Laplace变换的应用

考虑半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0 \\ u(0, t) = f(t), & \lim_{x \rightarrow \infty} |u(x, t)| < \infty \end{cases}$$

解：由于 $x, t$ 都在 $[0, \infty)$ 内变换，所以采用Laplace变换方法求解。又因为方程关于 $t$ 是一阶导数，关于 $x$ 是二阶导数，且没有给出 $u_x$ 在 $x = 0$ 的值，故只能关于 $t$ 施行Laplace变换。

记 $\tilde{u}(x, p) = \mathcal{L}[u(x, t)]$ ,  $p > 0$ , 对方程和定解条件关于 $t$ 施行Laplace变换，由 $u(x, 0) = 0$ , 所以

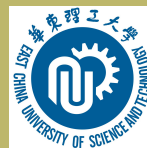
$$\begin{cases} p\tilde{u}(x, p) - u(x, 0) - a^2 \tilde{u}_{xx}(x, p) = 0, \\ \tilde{u}(0, p) = \tilde{f}(p). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{u}_{xx}(x, p) = \frac{p}{a^2} \tilde{u}(x, p), & x > 0 \\ \tilde{u}(0, p) = \tilde{f}(p). \end{cases}$$

把 $p$ 看作参数，上式即为两阶齐次常微分方程初值问题，求出它的通解

$$\tilde{u}(x, p) = C_1(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2(p)e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 13 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)





### ★3.5 Laplace变换的应用

考虑半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0 \\ u(0, t) = f(t), & \lim_{x \rightarrow \infty} |u(x, t)| < \infty \end{cases}$$

解：由于 $x, t$ 都在 $[0, \infty)$ 内变换，所以采用Laplace变换方法求解。又因为方程关于 $t$ 是一阶导数，关于 $x$ 是二阶导数，且没有给出 $u_x$ 在 $x = 0$ 的值，故只能关于 $t$ 施行Laplace变换。

记 $\tilde{u}(x, p) = \mathcal{L}[u(x, t)]$ ,  $p > 0$ , 对方程和定解条件关于 $t$ 施行Laplace变换，由 $u(x, 0) = 0$ , 所以

$$\begin{cases} p\tilde{u}(x, p) - u(x, 0) - a^2 \tilde{u}_{xx}(x, p) = 0, \\ \tilde{u}(0, p) = \tilde{f}(p). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{u}_{xx}(x, p) = \frac{p}{a^2} \tilde{u}(x, p), & x > 0 \\ \tilde{u}(0, p) = \tilde{f}(p). \end{cases}$$

把 $p$ 看作参数，上式即为两阶齐次常微分方程初值问题，求出它的通解

$$\tilde{u}(x, p) = C_1(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2(p)e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

由 $\lim_{x \rightarrow \infty} |u(x, t)| < \infty$ 知 $u$ 有界，从而 $\tilde{u}$ 也有界，故 $C_2(p) = 0$ 。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

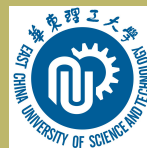
Page 13 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



### ★3.5 Laplace变换的应用

考虑半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0 \\ u(0, t) = f(t), & \lim_{x \rightarrow \infty} |u(x, t)| < \infty \end{cases}$$

解：由于 $x, t$ 都在 $[0, \infty)$ 内变换，所以采用Laplace变换方法求解。又因为方程关于 $t$ 是一阶导数，关于 $x$ 是二阶导数，且没有给出 $u_x$ 在 $x = 0$ 的值，故只能关于 $t$ 施行Laplace变换。

记 $\tilde{u}(x, p) = \mathcal{L}[u(x, t)], p > 0$ , 对方程和定解条件关于 $t$ 施行Laplace变换，由 $u(x, 0) = 0$ , 所以

$$\begin{cases} p\tilde{u}(x, p) - u(x, 0) - a^2 \tilde{u}_{xx}(x, p) = 0, \\ \tilde{u}(0, p) = \tilde{f}(p). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{u}_{xx}(x, p) = \frac{p}{a^2} \tilde{u}(x, p), & x > 0 \\ \tilde{u}(0, p) = \tilde{f}(p). \end{cases}$$

把 $p$ 看作参数，上式即为两阶齐次常微分方程初值问题，求出它的通解

$$\tilde{u}(x, p) = C_1(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2(p)e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

由 $\lim_{x \rightarrow \infty} |u(x, t)| < \infty$ 知 $u$ 有界，从而 $\tilde{u}$ 也有界，故 $C_2(p) = 0$ 。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 13 of 20

Go Back

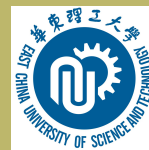
Full Screen

Close

Quit

利用  $\tilde{u}(0, p) = \tilde{f}(p)$  可推知  $C_1(p) = \tilde{f}(p)$ , 因而

$$\tilde{u}(x, p) = \tilde{f}(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$



Home Page

Title Page



Page 14 of 20

Go Back

Full Screen

Close

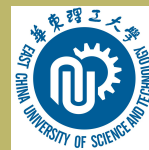
Quit

利用  $\tilde{u}(0, p) = \tilde{f}(p)$  可推知  $C_1(p) = \tilde{f}(p)$ , 因而

$$\tilde{u}(x, p) = \tilde{f}(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

所以（利用性质10的卷积定理）

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{u}(x, p)] = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}] = f * \mathcal{L}^{-1}[e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}]$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 14 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

利用  $\tilde{u}(0, p) = \tilde{f}(p)$  可推知  $C_1(p) = \tilde{f}(p)$ , 因而

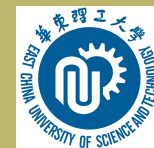
$$\tilde{u}(x, p) = \tilde{f}(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

所以（利用性质10的卷积定理）

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{u}(x, p)] = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}] = f * \mathcal{L}^{-1}[e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}]$$

查表知

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{\sqrt{t}}}}^{\infty} e^{-y^2} dy$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 14 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit

利用  $\tilde{u}(0, p) = \tilde{f}(p)$  可推知  $C_1(p) = \tilde{f}(p)$ , 因而

$$\tilde{u}(x, p) = \tilde{f}(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

所以 (利用性质10的卷积定理)

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{u}(x, p)] = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}] = f * \mathcal{L}^{-1}[e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}]$$

查表知

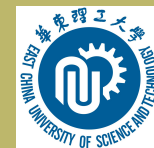
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{\sqrt{t}}}}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

利用微分性质得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[p \frac{1}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right] = \frac{d}{dt} \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{\sqrt{t}}}}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \frac{x}{2a\sqrt{\pi}t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}. \end{aligned}$$

最后求出

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-s)}\right) ds$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 14 of 20

Go Back

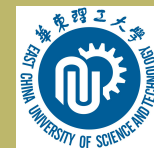
Full Screen

Close

Quit

### 例3.5.2求解一阶偏微分方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t + xu_x = x, & x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x > 0 \end{cases}$$



Home Page

Title Page



Page 15 of 20

Go Back

Full Screen

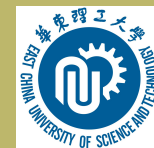
Close

Quit

### 例3.5.2求解一阶偏微分方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t + xu_x = x, & x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x > 0 \end{cases}$$

解：两个自变量 $x, t$ 的变换范围都是 $[0, \infty)$ ，既可以关于 $t$ 施行Laplace变换，也可以关于 $x$ 施行Laplace变换。

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 15 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)





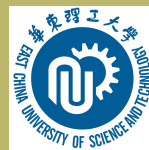
### 例3.5.2求解一阶偏微分方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t + xu_x = x, & x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x > 0 \end{cases}$$

解：两个自变量 $x, t$ 的变换范围都是 $[0, \infty)$ ，既可以关于 $t$ 施行Laplace变换，也可以关于 $x$ 施行Laplace变换。这里关于 $t$ 施行Laplace变换，利用Laplace变换的性质（取 $p$ 是正实数）

$$p\tilde{u}(x, p) - u(0, p) + x\frac{d}{dx}\tilde{u}(x, p) = \frac{x}{p}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 15 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### 例3.5.2求解一阶偏微分方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t + xu_x = x, & x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x > 0 \end{cases}$$

解：两个自变量 $x, t$ 的变换范围都是 $[0, \infty)$ ，既可以关于 $t$ 施行Laplace变换，也可以关于 $x$ 施行Laplace变换。这里关于 $t$ 施行Laplace变换，利用Laplace变换的性质（取 $p$ 是正实数）

$$p\tilde{u}(x, p) - u(0, p) + x\frac{d}{dx}\tilde{u}(x, p) = \frac{x}{p}$$

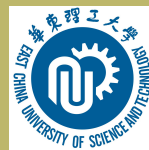
利用条件 $u(x, 0) = 0$ ，上式可写成

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} + \frac{p}{x}\tilde{u} = \frac{1}{p}.$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 15 of 20

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### 例3.5.2求解一阶偏微分方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t + xu_x = x, & x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x > 0 \end{cases}$$

解：两个自变量 $x, t$ 的变换范围都是 $[0, \infty)$ ，既可以关于 $t$ 施行Laplace变换，也可以关于 $x$ 施行Laplace变换。这里关于 $t$ 施行Laplace变换，利用Laplace变换的性质（取 $p$ 是正实数）

$$p\tilde{u}(x, p) - u(0, p) + x\frac{d}{dx}\tilde{u}(x, p) = \frac{x}{p}$$

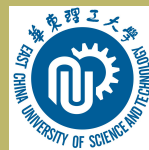
利用条件 $u(x, 0) = 0$ ，上式可写成

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} + \frac{p}{x}\tilde{u} = \frac{1}{p}.$$

由此解出

$$\tilde{u}(x, p) = \frac{C(p)}{x^p} + \frac{x}{p(p+1)}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 15 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### 例3.5.2求解一阶偏微分方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t + xu_x = x, & x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x > 0 \end{cases}$$

解：两个自变量 $x, t$ 的变换范围都是 $[0, \infty)$ ，既可以关于 $t$ 施行Laplace变换，也可以关于 $x$ 施行Laplace变换。这里关于 $t$ 施行Laplace变换，利用Laplace变换的性质（取 $p$ 是正实数）

$$p\tilde{u}(x, p) - u(0, p) + x\frac{d}{dx}\tilde{u}(x, p) = \frac{x}{p}$$

利用条件 $u(x, 0) = 0$ ，上式可写成

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} + \frac{p}{x}\tilde{u} = \frac{1}{p}.$$

由此解出

$$\tilde{u}(x, p) = \frac{C(p)}{x^p} + \frac{x}{p(p+1)}$$

其中 $C(p)$ 是积分常数，再由 $u(0, t) = 0, \Rightarrow \tilde{u}(0, p) = 0, \Rightarrow C(p) = 0$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 15 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



从而

$$\tilde{u}(x, p) = \frac{x}{p(p+1)} = x\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 16 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



从而

$$\tilde{u}(x, p) = \frac{x}{p(p+1)} = x\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$$

所以

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{u}(x, p)] = x\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] - x\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right] = x(1 - e^{-t})$$

Home Page

Title Page



Page 16 of 20

Go Back

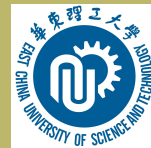
Full Screen

Close

Quit

### 例3.5.3 利用Laplace变换求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = k \sin \pi x, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Home Page

Title Page



Page 17 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



### 例3.5.3 利用Laplace变换求解定解问题

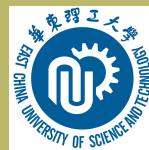
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = k \sin \pi x, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

解：关于 $t$ 施行Laplace变换，得

$$p^2 \tilde{u}(x, p) - pu(x, 0) - u_t(x, 0) - \frac{d^2}{dx^2} \tilde{u}(x, p) = \frac{k}{p} \sin \pi x$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 17 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)





### 例3.5.3 利用Laplace变换求解定解问题

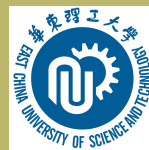
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = k \sin \pi x, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

解：关于 $t$ 施行Laplace变换，得

$$p^2 \tilde{u}(x, p) - pu(x, 0) - u_t(x, 0) - \frac{d^2}{dx^2} \tilde{u}(x, p) = \frac{k}{p} \sin \pi x$$

利用条件 $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \Rightarrow$

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 17 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### 例3.5.3 利用Laplace变换求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = k \sin \pi x, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

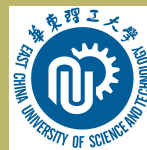
解：关于 $t$ 施行Laplace变换，得

$$p^2 \tilde{u}(x, p) - pu(x, 0) - u_t(x, 0) - \frac{d^2}{dx^2} \tilde{u}(x, p) = \frac{k}{p} \sin \pi x$$

利用条件 $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \Rightarrow$

$$p^2 \tilde{u}(x, p) - \frac{d^2}{dx^2} \tilde{u}(x, p) = \frac{k}{p} \sin \pi x$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 17 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### 例3.5.3 利用Laplace变换求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = k \sin \pi x, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

解：关于 $t$ 施行Laplace变换，得

$$p^2 \tilde{u}(x, p) - pu(x, 0) - u_t(x, 0) - \frac{d^2}{dx^2} \tilde{u}(x, p) = \frac{k}{p} \sin \pi x$$

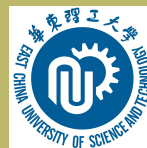
利用条件 $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \Rightarrow$

$$p^2 \tilde{u}(x, p) - \frac{d^2}{dx^2} \tilde{u}(x, p) = \frac{k}{p} \sin \pi x$$

解之得

$$\tilde{u}(x, p) = C_1(p)e^{px} + C_2(p)e^{-px} + \frac{k}{p(p^2 + \pi^2)} \sin \pi x$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 17 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### 例3.5.3 利用Laplace变换求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = k \sin \pi x, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

解：关于 $t$ 施行Laplace变换，得

$$p^2 \tilde{u}(x, p) - pu(x, 0) - u_t(x, 0) - \frac{d^2}{dx^2} \tilde{u}(x, p) = \frac{k}{p} \sin \pi x$$

利用条件 $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \Rightarrow$

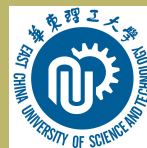
$$p^2 \tilde{u}(x, p) - \frac{d^2}{dx^2} \tilde{u}(x, p) = \frac{k}{p} \sin \pi x$$

解之得

$$\tilde{u}(x, p) = C_1(p)e^{px} + C_2(p)e^{-px} + \frac{k}{p(p^2 + \pi^2)} \sin \pi x$$

利用条件 $u(0, t) = u(1, t) = 0, \Rightarrow C_1(p) = 0, C_2(p) = 0 \Rightarrow$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 17 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### 例3.5.3 利用Laplace变换求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = k \sin \pi x, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

解：关于 $t$ 施行Laplace变换，得

$$p^2 \tilde{u}(x, p) - pu(x, 0) - u_t(x, 0) - \frac{d^2}{dx^2} \tilde{u}(x, p) = \frac{k}{p} \sin \pi x$$

利用条件 $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \Rightarrow$

$$p^2 \tilde{u}(x, p) - \frac{d^2}{dx^2} \tilde{u}(x, p) = \frac{k}{p} \sin \pi x$$

解之得

$$\tilde{u}(x, p) = C_1(p)e^{px} + C_2(p)e^{-px} + \frac{k}{p(p^2 + \pi^2)} \sin \pi x$$

利用条件 $u(0, t) = u(1, t) = 0, \Rightarrow C_1(p) = 0, C_2(p) = 0 \Rightarrow$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 17 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



$$\tilde{u}(x, p) = \frac{k}{p(p^2 + \pi^2)} \sin \pi x = \frac{k}{\pi^2} \left( \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \pi^2} \right) \sin \pi x$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 18 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



$$\tilde{u}(x, p) = \frac{k}{p(p^2 + \pi^2)} \sin \pi x = \frac{k}{\pi^2} \left( \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \pi^2} \right) \sin \pi x$$

所以

$$u(x, t) = \frac{k}{\pi^2} (1 - \cos \pi t) \sin \pi x$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 18 of 20

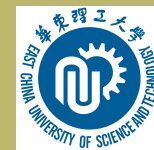
[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

用积分变换方法求解定解问题的过程大致如下：



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 19 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)





用积分变换方法求解定解问题的过程大致如下：

- (1)根据自变量的变化范围以及定解条件的具体情况，选取合适的积分变换，把偏微分方程转化成像函数的常微分方程；

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 19 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



用积分变换方法求解定解问题的过程大致如下：

- (1)根据自变量的变化范围以及定解条件的具体情况，选取合适的积分变换，把偏微分方程转化成像函数的常微分方程；
- (2)对定解条件取相应的变换，导出像函数所满足的常微分方程的定解条件；

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 19 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



用积分变换方法求解定解问题的过程大致如下：

- (1)根据自变量的变化范围以及定解条件的具体情况，选取合适的积分变换，把偏微分方程转化成像函数的常微分方程；
- (2)对定解条件取相应的变换，导出像函数所满足的常微分方程的定解条件；
- (3)求解这个常微分方程的定解问题，得到像函数；

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[«](#) [»](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 19 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



用积分变换方法求解定解问题的过程大致如下：

- (1)根据自变量的变化范围以及定解条件的具体情况，选取合适的积分变换，把偏微分方程转化成像函数的常微分方程；
- (2)对定解条件取相应的变换，导出像函数所满足的常微分方程的定解条件；
- (3)求解这个常微分方程的定解问题，得到像函数；
- (4)取逆变换，得到原问题的形式解；

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[«](#) [»](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 19 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



用积分变换方法求解定解问题的过程大致如下：

- (1)根据自变量的变化范围以及定解条件的具体情况，选取合适的积分变换，把偏微分方程转化成像函数的常微分方程；
- (2)对定解条件取相应的变换，导出像函数所满足的常微分方程的定解条件；
- (3)求解这个常微分方程的定解问题，得到像函数；
- (4)取逆变换，得到原问题的形式解；
- (5)进行综合过程，给出形式解成为真正解所需要的条件，从而得到解的存在性。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[«](#) [»](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 19 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



作业:

$$3.16、(2) \begin{cases} u_{xy} = x^2y, & x > 1, y > 0 \\ u(x, 0) = x^2, & x \geq 1 \\ u(1, y) = \cos y, & y \geq 0 \end{cases}$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 20 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



作业:

$$\begin{aligned} 3.16、(2) & \begin{cases} u_{xy} = x^2 y, & x > 1, y > 0 \\ u(x, 0) = x^2, & x \geq 1 \\ u(1, y) = \cos y, & y \geq 0 \end{cases} \\ 3.16、(3) & \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = \sin t, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & x > 0 \\ u(x, t) \text{有界} \end{cases} \end{aligned}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 20 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



作业:

$$\begin{aligned} 3.16、(2) & \begin{cases} u_{xy} = x^2y, & x > 1, y > 0 \\ u(x, 0) = x^2, & x \geq 1 \\ u(1, y) = \cos y, & y \geq 0 \end{cases} \\ 3.16、(3) & \begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = \sin t, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & x > 0 \\ u(x, t) \text{有界} \end{cases} \end{aligned}$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 20 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)