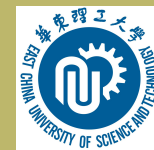


## 1.2 线性多步法

### 1.2.1 多步法的构造

- 若在计算 $u_{m+1}$ 时用到前 $k$ 步的值 $u_m, u_{m-1}, \dots, u_{m-k+1}$ , ( $k < 1$ ), 则称该方法为多步法, 也称为 $k$ 步法。



Home Page

Title Page



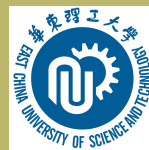
Page 1 of 23

Go Back

Full Screen

Close

Quit



## 1.2 线性多步法

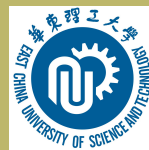
### 1.2.1 多步法的构造

- 若在计算 $u_{m+1}$ 时用到前 $k$ 步的值 $u_m, u_{m-1}, \dots, u_{m-k+1}$ , ( $k < 1$ ), 则称该方法为多步法, 也称为 $k$ 步法。
- 线性 $k$ 步法的一般形式为

$$u_{m+1} = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_{m-i+1} + h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{m-i+1}, m = k-1, k, \dots, \quad (34)$$

$\alpha_i, \beta_i$  为常数,  $f_{m-i+1} = f(x_{m-i+1}, u_{m-i+1})$ , 上式关于  $f_{m-i+1}$  是线性的, 故称为线性多步法

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 1 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



## 1.2 线性多步法

### 1.2.1 多步法的构造

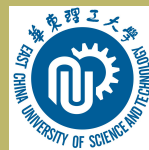
- 若在计算 $u_{m+1}$ 时用到前 $k$ 步的值 $u_m, u_{m-1}, \dots, u_{m-k+1}$ , ( $k < 1$ ), 则称该方法为多步法, 也称为 $k$ 步法。
- 线性 $k$ 步法的一般形式为

$$u_{m+1} = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_{m-i+1} + h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{m-i+1}, m = k-1, k, \dots, \quad (34)$$

$\alpha_i, \beta_i$  为常数,  $f_{m-i+1} = f(x_{m-i+1}, u_{m-i+1})$ , 上式关于  $f_{m-i+1}$  是线性的, 故称为线性多步法

- $\beta_0 = 0$ , 方法显式的,  $\beta_0 \neq 0$  方法隐式的

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 1 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



## 1.2 线性多步法

### 1.2.1 多步法的构造

- 若在计算 $u_{m+1}$ 时用到前 $k$ 步的值 $u_m, u_{m-1}, \dots, u_{m-k+1}$ , ( $k < \infty$ ), 则称该方法为多步法, 也称为 $k$ 步法。
- 线性 $k$ 步法的一般形式为

$$u_{m+1} = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_{m-i+1} + h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{m-i+1}, m = k-1, k, \dots, \quad (34)$$

$\alpha_i, \beta_i$  为常数,  $f_{m-i+1} = f(x_{m-i+1}, u_{m-i+1})$ , 上式关于  $f_{m-i+1}$  是线性的, 故称为线性多步法

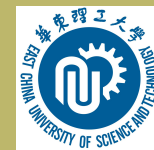
- $\beta_0 = 0$ , 方法显式的,  $\beta_0 \neq 0$  方法隐式的
- 定义1.6 对线性多步法(34), 记

$$R_{m+1} = u(x_{m+1}) - \left[ \sum_{i=1}^k \alpha_i u(x_{m-i+1}) + h \sum_{i=0}^k \beta_i f(x_{m-i+1}, u(x_{m-i+1})) \right], \quad (35)$$

则称 $R_{m+1}$ 为局部截断误差。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 1 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

三种构造线性多步法的方法：(1).用Taylor展开构造多步法



[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 2 of 23](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



三种构造线性多步法的方法：(1).用Taylor展开构造多步法

- 公式(34)中的系数可用待定系数法确定，利用Taylor展开使局部截断误差达到一定的阶数，并由此确定出系数。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 2 of 23

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



三种构造线性多步法的方法：(1).用Taylor展开构造多步法

- 公式(34)中的系数可用待定系数法确定，利用Taylor展开使局部截断误差达到一定的阶数，并由此确定出系数。
- 利用式(1)中的微分方程，式(35)可以重写为

$$R_{m+1} = u(x_{m+1}) - \left[ \sum_{i=1}^k \alpha_i u_{m-i+1} + h \sum_{i=0}^k \beta_i u'_{m-i+1} \right], \quad (36)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 23

Go Back

Full Screen

Close

Quit

### 三种构造线性多步法的方法：(1).用Taylor展开构造多步法

- 公式(34)中的系数可用待定系数法确定，利用Taylor展开使局部截断误差达到一定的阶数，并由此确定出系数。
- 利用式(1)中的微分方程，式(35)可以重写为

$$R_{m+1} = u(x_{m+1}) - \left[ \sum_{i=1}^k \alpha_i u_{m-i+1} + h \sum_{i=0}^k \beta_i u'_{m-i+1} \right], \quad (36)$$

- 将上式右端各项在点 $x_m$ 进行Taylor展开

$$u(x_{m+1}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} h^j u^{(j)}(x_m), \quad u(x_{m-i+1}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-i)^j}{j!} h^j u^{(j)}(x_m),$$

$$u'(x_{m+1}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-i)^{j-1}}{(j-1)!} h^{j-1} u^{(j)}(x_m),$$

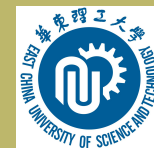


- 把它们代入(36)

$$R_{m+1} = \sum_{j=0}^k c_j h^j u^{(j)}(x_m), \quad (37)$$

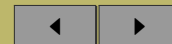
其中

$$c_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i, c_1 = 1 - \sum_{i=2}^k (1-i)\alpha_i - \sum_{i=0}^k \beta_i$$
$$c_j = \frac{1}{j!} \left[ 1 - \sum_{i=2}^k (1-i)^j \alpha_i - j \sum_{i=0}^k (1-i)^{j-1} \beta_i \right], j = 2, 3, \dots, \quad (38)$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 3 of 23

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

- 把它们代入(36)

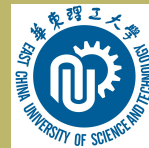
$$R_{m+1} = \sum_{j=0}^k c_j h^j u^{(j)}(x_m), \quad (37)$$

其中

$$c_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i, c_1 = 1 - \sum_{i=2}^k (1-i)\alpha_i - \sum_{i=0}^k \beta_i$$
$$c_j = \frac{1}{j!} \left[ 1 - \sum_{i=2}^k (1-i)^j \alpha_i - j \sum_{i=0}^k (1-i)^{j-1} \beta_i \right], j = 2, 3, \dots, \quad (38)$$

- 欲使方法是 $p$ 阶的, 则应有 $R_{m+1} = O(h^{p+1})$ , 于是 $\alpha_i, \beta_i$ 必须满足

$$c_j = 0, j = 0, 1, \dots, p, \quad (39)$$



Home Page

Title Page



Page 3 of 23

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 把它们代入(36)

$$R_{m+1} = \sum_{j=0}^k c_j h^j u^{(j)}(x_m), \quad (37)$$

其中

$$c_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i, c_1 = 1 - \sum_{i=2}^k (1-i)\alpha_i - \sum_{i=0}^k \beta_i$$

$$c_j = \frac{1}{j!} \left[ 1 - \sum_{i=2}^k (1-i)^j \alpha_i - j \sum_{i=0}^k (1-i)^{j-1} \beta_i \right], j = 2, 3, \dots, \quad (38)$$

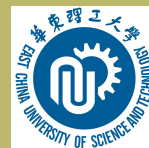
- 欲使方法是 $p$ 阶的, 则应有 $R_{m+1} = O(h^{p+1})$ , 于是 $\alpha_i, \beta_i$ 必须满足

$$c_j = 0, j = 0, 1, \dots, p, \quad (39)$$

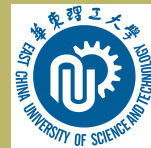
- 此时局部截断误差为

$$R_{m+1} = c_{p+1} h^{p+1} u^{(p+1)}(x_m) + \dots. \quad (40)$$

上式右端第一项称为局部截断误差的主项


[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀](#) [▶](#)
[◀](#) [▶](#)
[Page 3 of 23](#)
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

- 对任意给定的 $p$ ,由线性方程组(39)确定出 $\alpha_i, \beta_i$ ,这样可构造出各种各样的线性多步方法,并能同时得到局部截断误差



Home Page

Title Page



Page 4 of 23

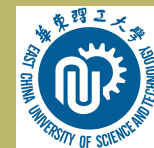
Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 对任意给定的 $p$ ,由线性方程组(39)确定出 $\alpha_i, \beta_i$ ,这样可构造出各种各样的线性多步方法,并能同时得到局部截断误差
- 线性方程组(39)共有 $p + 1$ 个方程,  $2k + 1$ 个未知数,  $p$ 最多可取 $2k$ ,也就是说,有可能构造出 $2k$ 阶的 $k$ 步方法



Home Page

Title Page



Page 4 of 23

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 对任意给定的 $p$ ,由线性方程组(39)确定出 $\alpha_i, \beta_i$ ,这样可构造出各种各样的线性多步方法,并能同时得到局部截断误差
- 线性方程组(39)共有 $p + 1$ 个方程,  $2k + 1$ 个未知数,  $p$ 最多可取 $2k$ ,也就是说,有可能构造出 $2k$ 阶的 $k$ 步方法
- 例如 $p = 4, k = 2$ ,则方程组(39)为

$$\begin{cases} 1 - \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \\ 1 + \alpha_2 - \beta_0 - \beta_1 - \beta_2 = 0 \\ 1 - \alpha_2 - 2(\beta_0 - \beta_2) = 0, \\ 1 + \alpha_2 - 3(\beta_0 + \beta_2) = 0 \\ 1 - \alpha_2 - 4(\beta_0 - \beta_2) = 0 \end{cases}$$

它有唯一解

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \beta_1 = \frac{4}{3}, \beta_2 = \beta_3 = \frac{1}{3}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 4 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 对任意给定的 $p$ ,由线性方程组(39)确定出 $\alpha_i, \beta_i$ ,这样可构造出各种各样的线性多步方法,并能同时得到局部截断误差
- 线性方程组(39)共有 $p+1$ 个方程,  $2k+1$ 个未知数,  $p$ 最多可取 $2k$ ,也就是说,有可能构造出 $2k$ 阶的 $k$ 步方法
- 例如 $p=4, k=2$ ,则方程组(39)为

$$\begin{cases} 1 - \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \\ 1 + \alpha_2 - \beta_0 - \beta_1 - \beta_2 = 0 \\ 1 - \alpha_2 - 2(\beta_0 - \beta_2) = 0, \\ 1 + \alpha_2 - 3(\beta_0 + \beta_2) = 0 \\ 1 - \alpha_2 - 4(\beta_0 - \beta_2) = 0 \end{cases}$$

它有唯一解

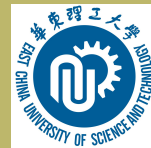
$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \beta_1 = \frac{4}{3}, \beta_2 = \beta_3 = \frac{1}{3}$$

- 于是得到一个四阶二步方法

$$u_{m+1} = u_{m-1} + \frac{h}{3}(f_{m+1} + 4f_m + f_{m-1}). \quad (41)$$

- 式(41)是二步法中阶最高的方法，称为Milne（米尔尼）方法，它的局部截断误差为

$$R_{m+1} = -\frac{1}{90}h^5 u^{(5)}(x_m) + O(h^6). \quad (42)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 5 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



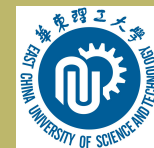
- 式(41)是二步法中阶最高的方法，称为Milne（米尔尼）方法，它的局部截断误差为

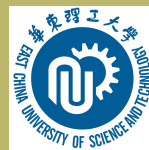
$$R_{m+1} = -\frac{1}{90}h^5 u^{(5)}(x_m) + O(h^6). \quad (42)$$

- 如果对式(1)中的微分方程两边从 $x_{m-1}$ 到 $x_{m+1}$ 积分，则有

$$u(x_{m+1}) = u(x_{m-1}) + \int_{x_{m-1}}^{x_{m+1}} f(x, u(x)) dx$$

再对上式中的积分用Simpson(辛普生)积分也可得式(41),所以式(41)有时也称为Simpson公式

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 5 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 式(41)是二步法中阶最高的方法，称为Milne（米尔尼）方法，它的局部截断误差为

$$R_{m+1} = -\frac{1}{90}h^5 u^{(5)}(x_m) + O(h^6). \quad (42)$$

- 如果对式(1)中的微分方程两边从 $x_{m-1}$ 到 $x_{m+1}$ 积分，则有

$$u(x_{m+1}) = u(x_{m-1}) + \int_{x_{m-1}}^{x_{m+1}} f(x, u(x)) dx$$

再对上式中的积分用Simpson(辛普生)积分也可得式(41),所以式(41)有时也称为Simpson公式

- 两个四阶公式

$$u_{m+1} = \frac{1}{8}(9u_m - u_{m-2}) + \frac{3}{8}h(f_{m+1} + 2f_m - f_{m-1}), R_{m+1} = -\frac{1}{40}h^5 u^{(5)}(x_m) + O(h^6) \quad (43)$$

$$u_{m+1} = u_{m-3} + \frac{4}{3}h(2f_m - f_{m-1} + 2f_{m-2}), R_{m+1} = \frac{14}{45}h^5 u^{(5)}(x_m) + O(h^6), \quad (44)$$

它们分别是三步方法和四步方法

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 5 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



例3、求 $a, b, c, d$ 使二步公式

$$u_{m+1} = au_m + bu_{m-1} + h(cf_m + df_{m-1})$$

的阶尽量高，并求局部截断误差的主项

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 6 of 23

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



例3、求 $a, b, c, d$ 使二步公式

$$u_{m+1} = au_m + bu_{m-1} + h(cf_m + df_{m-1})$$

的阶尽量高，并求局部截断误差的主项  
解：局部截断误差为

$$R_{m+1} = u(x_{m+1}) - \{au(x_m) + bu(x_{m-1}) + h[cu'(x_m) + du'(x_{m-1})]\}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 6 of 23

Go Back

Full Screen

Close

Quit

例3、求 $a, b, c, d$ 使二步公式

$$u_{m+1} = au_m + bu_{m-1} + h(cf_m + df_{m-1})$$

的阶尽量高，并求局部截断误差的主项

解：局部截断误差为

$$R_{m+1} = u(x_{m+1}) - \{au(x_m) + bu(x_{m-1}) + h[cu'(x_m) + du'(x_{m-1})]\}$$

利用Taylor展开，得

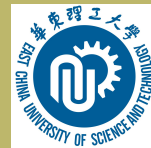
$$u(x_{m-1}) = u(x_m) - hu'(x_m) + \frac{h^2}{2}u''(x_m) - \frac{h^3}{6}u'''(x_m) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_m) + \cdots$$

$$u'(x_{m-1}) = u'(x_m) - hu''(x_m) + \frac{h^2}{2}u'''(x_m) - \frac{h^3}{6}u^{(4)}(x_m) + \cdots$$

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + hu'(x_m) + \frac{h^2}{2}u''(x_m) + \frac{h^3}{6}u'''(x_m) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_m) + \cdots$$

于是

$$\begin{aligned} au(x_m) + bu(x_{m-1}) + h[cu'(x_m) + du'(x_{m-1})] &= (a+b)u(x_m) + (-b+c+d)hu'(x_m) \\ &+ (b-2d)\frac{h^2}{2}u''(x_m) + (-b+3d)\frac{h^3}{6}u'''(x_m) + (b-4d)\frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_m) + \cdots \end{aligned}$$



Home Page

Title Page



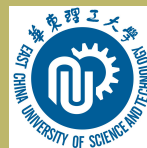
Page 7 of 23

Go Back

Full Screen

Close

Quit



于是

$$\begin{aligned} au(x_m) + bu(x_{m-1}) + h[cu'(x_m) + du'(x_{m-1})] &= (a+b)u(x_m) + (-b+c+d)hu'(x_m) \\ &+ (b-2d)\frac{h^2}{2}u''(x_m) + (-b+3d)\frac{h^3}{6}u'''(x_m) + (b-4d)\frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_m) + \cdots \end{aligned}$$

把上式同 $u(x_{m+1})$ 的Taylor展开式相比较, 得

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -b + c + d = 1 \\ b - 2d = 1, \\ -b + 3d = 1 \end{cases}$$

解方程组, 得

[Home Page](#)

[Title Page](#)



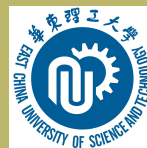
Page 7 of 23

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



于是

$$au(x_m) + bu(x_{m-1}) + h[cu'(x_m) + du'(x_{m-1})] = (a+b)u(x_m) + (-b+c+d)hu'(x_m) \\ + (b-2d)\frac{h^2}{2}u''(x_m) + (-b+3d)\frac{h^3}{6}u'''(x_m) + (b-4d)\frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_m) + \cdots$$

把上式同 $u(x_{m+1})$ 的Taylor展开式相比较, 得

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -b + c + d = 1 \\ b - 2d = 1, \\ -b + 3d = 1 \end{cases}$$

解方程组, 得

$$a = -4, b = 5, c = 4, d = 2$$

从而所求公式是

$$u_{m+1} = -4u_m + 5u_{m-1} + 2h(2f_m + f_{m-1})$$

它是三阶的, 局部截断误差的主项是 $\frac{1}{6}h^4u^{(4)}(x_m)$ .

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 23

Go Back

Full Screen

Close

Quit



## (2).用数值积分构造多步法(Adams(阿达姆斯)法)



[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 8 of 23](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

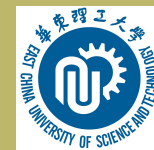
[Close](#)

[Quit](#)

## (2).用数值积分构造多步法(Adams(阿达姆斯)法)

- 对式(1)中的微分方程从 $x_m$ 到 $x_{m+1}$ 积分, 有

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, u(x))dx. \quad (45)$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 8 of 23

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

## (2).用数值积分构造多步法(Adams(阿达姆斯)法)

- 对式(1)中的微分方程从 $x_m$ 到 $x_{m+1}$ 积分, 有

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, u(x))dx. \quad (45)$$

- 如果以 $x_m, x_{m-1}, \dots, x_{m-k}$ 为插值节点构造 $f(x, u(x))$ 的 $k$ 次Lagrange (拉格朗日) 插值多项式 $L_k(x)$ , 记差值余项为 $r_k(x)$ , 则

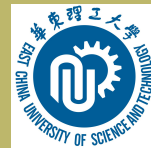
$$f(x, u(x)) = L_k(x) + r_k(x)$$

$$L_k(x) = \sum_{i=0}^k \left( \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{x - x_{m-j}}{x_{m-i} - x_{m-j}} \right) f(x_{m-i}, u(x_{m-i})),$$

$$r_k(x) = \frac{u^{(k+2)}(\xi_m)}{(k+1)!} \prod_{j=0}^k (x - x_{m-j}), \xi_m \in (x_{m-k}, x_{m+1})$$

于是

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} L_k(x)dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} r_k(x)dx$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 8 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

略去余项，得公式

$$u_{m+1} = u_m + h \sum_{i=0}^k \beta_{ki} f_{m-i}, \quad (46)$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 9 of 23

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

略去余项，得公式

$$u_{m+1} = u_m + h \sum_{i=0}^k \beta_{ki} f_{m-i}, \quad (46)$$

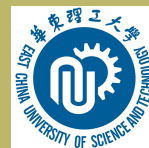
局部截断误差为

$$R_{m+1} = \int_{x_m}^{x_{m+1}} r_k(x) dx = c_{k+2} h^{k+2} u^{(k+2)}(\eta_m), \eta_m \in (x_{m-k}, x_{m+1}). \quad (47)$$

其中

$$\beta_{ki} = \frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{x - x_{m-j}}{x_{m-i} - x_{m-j}} dx = \frac{(-1)^i}{i!(k-i)!} \int_0^1 \prod_{j=0, j \neq i} (t+j) dt, \quad (48)$$

$$c_{k+2} = \frac{h^{-(k+2)}}{(k+1)!} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{j=0}^k (x - x_{m-j}) dx = \frac{1}{(k+1)!} \int_0^1 \prod_{j=0, j \neq i} (t+j) dt, \quad (49)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 9 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

略去余项，得公式

$$u_{m+1} = u_m + h \sum_{i=0}^k \beta_{ki} f_{m-i}, \quad (46)$$

局部截断误差为

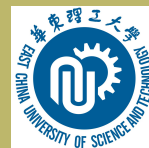
$$R_{m+1} = \int_{x_m}^{x_{m+1}} r_k(x) dx = c_{k+2} h^{k+2} u^{(k+2)}(\eta_m), \eta_m \in (x_{m-k}, x_{m+1}). \quad (47)$$

其中

$$\beta_{ki} = \frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{x - x_{m-j}}{x_{m-i} - x_{m-j}} dx = \frac{(-1)^i}{i!(k-i)!} \int_0^1 \prod_{j=0, j \neq i} (t+j) dt, \quad (48)$$

$$c_{k+2} = \frac{h^{-(k+2)}}{(k+1)!} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{j=0}^k (x - x_{m-j}) dx = \frac{1}{(k+1)!} \int_0^1 \prod_{j=0, j \neq i} (t+j) dt, \quad (49)$$

上面积分中已经作了变量变换  $x = x_m + th$ , 公式(46)称为Adams-Bashforh方法，它是  $k+1$  步  $k+1$  阶的显式方法。因为  $L_k(x)$  是  $f(x, u(x))$  的外插多项式 ( $x \in [x_m, x_{m+1}]$  在插值节点所决定的最大区间  $[x_{m-k}, x_m]$  之外), 故又称公式(46)为Adams外插公式



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 23

Go Back

Full Screen

Close

Quit

记

$$\alpha_j = \frac{1}{j!} \int_0^1 t(t+1) \cdot (t+j-1) dt, \quad (50)$$



Home Page

Title Page



Page 10 of 23

Go Back

Full Screen

Close

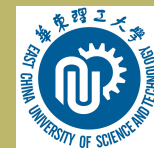
Quit

记

$$\alpha_j = \frac{1}{j!} \int_0^1 t(t+1) \cdot (t+j-1) dt, \quad (50)$$

由于

$$\begin{aligned} 1 + t + i + \frac{(t+i)(t+i+1)}{2!} + \cdots + \frac{(t+i)(t+i+1) \cdots (t+k-1)}{(k-i)!} \\ = \frac{(t+i+1)(t+i+2) \cdots (t+k)}{(k-i)!} \end{aligned}$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 10 of 23

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



记

$$\alpha_j = \frac{1}{j!} \int_0^1 t(t+1) \cdot (t+j-1) dt, \quad (50)$$

由于

$$\begin{aligned} 1+t+i+\frac{(t+i)(t+i+1)}{2!}+\cdots+\frac{(t+i)(t+i+1)\cdots(t+k-1)}{(k-i)!} \\ = \frac{(t+i+1)(t+i+2)\cdots(t+k)}{(k-i)!} \end{aligned}$$

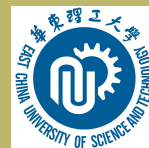
则

$$\begin{aligned} \beta_{ki} &= \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^1 t(t+1)\cdots(t+i-1) \frac{(t+i+1)(t+i+2)\cdots(t+k)}{(k-i)!} dt \\ &= (-1)^i \sum_{j=i}^k \frac{1}{i!(j-i)!} \int_0^1 t(t+1)\cdots(t+j-1) dt = (-1)^i \sum_{j=i}^k \binom{j}{i} \alpha_j, \end{aligned} \quad (51)$$

$$c_{k+2} = \alpha_{k+1}, \quad (52)$$

其中

$$\binom{j}{i} = \frac{j(j-1)\cdots(j-i+1)}{i!}$$



Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 10 of 23

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 这样处理的好处是 $\alpha_j$ 与 $k$ 和 $i$ 无关，简化了 $\beta_{ki}$ 的计算

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 23

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 这样处理的好处是 $\alpha_j$ 与 $k$ 和 $i$ 无关，简化了 $\beta_{ki}$ 的计算
- 教材上表1.4列出了 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_5$ 的值，表1.5列出了 $\beta_{ki}$ 的值。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 11 of 23

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 这样处理的好处是 $\alpha_j$ 与 $k$ 和 $i$ 无关，简化了 $\beta_{ki}$ 的计算
- 教材上表1.4列出了 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_5$ 的值，表1.5列出了 $\beta_{ki}$ 的值。
- 当 $k = 0$ 时，式(46)就是Euler公式

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 11 of 23

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 这样处理的好处是 $\alpha_j$ 与 $k$ 和 $i$ 无关，简化了 $\beta_{ki}$ 的计算
- 教材上表1.4列出了 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_5$ 的值，表1.5列出了 $\beta_{ki}$ 的值。
- 当 $k = 0$ 时，式(46)就是Euler公式
- 当 $k = 3$ 时，则

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{24}(55f_m - 59f_{m-1} + 37f_{m-2} - 9f_{m-3}), \quad (53)$$

$$R_{m+1} = \frac{251}{720}h^5 u^{(5)}(\eta_m), \eta_m \in (x_{m-3}, x_{m+1}).$$

这是四阶Adams外插公式

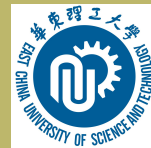
[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 11 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

以  $x_{m+1}, x_m, \dots, x_{m-k+1}$  为插值节点构造  $f(x, u(x))$  的  $k$  次 Lagrange 插值多项式  $L_k^*(x)$ , 记余项为  $r_k^*(x)$ , 则

$$f(x, u(x)) = L_k^*(x) + r_k^*(x),$$

$$L_k^*(x) = \sum_{i=0}^k \left( \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}} \right) f(x_{m-i+1}, u(x_{m-i+1})),$$

$$r_k^*(x) = \frac{u^{(k+2)}(\xi_m)}{(k+1)!} \prod_{j=0}^k (x - x_{m-j+1}), \xi_m \in (x_{m-k+1}, x_{m+1}).$$


[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀](#)
[▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Page 12 of 23

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

以 $x_{m+1}, x_m, \dots, x_{m-k+1}$ 为插值节点构造 $f(x, u(x))$ 的 $k$ 次Lagrange插值多项式 $L_k^*(x)$ ,记余项为 $r_k^*(x)$ ,则

$$f(x, u(x)) = L_k^*(x) + r_k^*(x),$$

$$L_k^*(x) = \sum_{i=0}^k \left( \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}} \right) f(x_{m-i+1}, u(x_{m-i+1})),$$

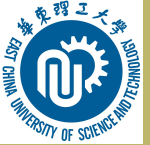
$$r_k^*(x) = \frac{u^{(k+2)}(\xi_m)}{(k+1)!} \prod_{j=0}^k (x - x_{m-j+1}), \xi_m \in (x_{m-k+1}, x_{m+1}).$$

将它们代入式(45),得

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} L_k^*(x) dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} r_k^*(x) dx$$

略去上式右端的余项得到公式

$$u_{m+1} = u_m + h \sum_{i=0}^k \beta_{ki}^* f_{m-i+1}, \quad (54)$$


[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀](#)
[▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Page 12 of 23

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

以 $x_{m+1}, x_m, \dots, x_{m-k+1}$ 为插值节点构造 $f(x, u(x))$ 的 $k$ 次Lagrange插值多项式 $L_k^*(x)$ ,记余项为 $r_k^*(x)$ ,则

$$f(x, u(x)) = L_k^*(x) + r_k^*(x),$$

$$L_k^*(x) = \sum_{i=0}^k \left( \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}} \right) f(x_{m-i+1}, u(x_{m-i+1})),$$

$$r_k^*(x) = \frac{u^{(k+2)}(\xi_m)}{(k+1)!} \prod_{j=0}^k (x - x_{m-j+1}), \xi_m \in (x_{m-k+1}, x_{m+1}).$$

将它们代入式(45),得

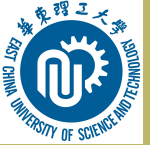
$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} L_k^*(x) dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} r_k^*(x) dx$$

略去上式右端的余项得到公式

$$u_{m+1} = u_m + h \sum_{i=0}^k \beta_{ki}^* f_{m-i+1}, \quad (54)$$

局部截断误差

$$R_{m+1} = c_{k+2}^* h^{k+2} u^{(k+2)}(\eta_m), \eta_m \in (x_{m-k+1}, x_{m+1}). \quad (55)$$


[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀](#) [▶](#)
[◀](#) [▶](#)

Page 12 of 23

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

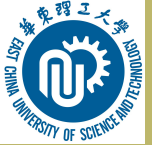


这里

$$\begin{aligned}\beta_{ki}^* &= \frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}} dx \\ &= \frac{(-1)^i}{i!(k-i)!} \int_{-1}^0 \prod_{j=0, j \neq i}^k (t+j) dt = (-1)^i \sum_{j=i}^k \binom{j}{i} \alpha_j^*,\end{aligned}\quad (56)$$

$$c_{k+2}^* = \frac{1}{(k+1)!} \int_{-1}^0 \prod_{j=0}^k (t+j) dt = \alpha_{k+1}^*, \quad (57)$$

$$\alpha_j^* = \frac{1}{j!} \int_{-1}^0 t(t+1) \cdots (t+j-1) dt, \quad (58)$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 13 of 23

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

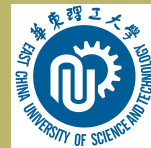
这里

$$\begin{aligned}\beta_{ki}^* &= \frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}} dx \\ &= \frac{(-1)^i}{i!(k-i)!} \int_{-1}^0 \prod_{j=0, j \neq i}^k (t+j) dt = (-1)^i \sum_{j=i}^k \binom{j}{i} \alpha_j^*,\end{aligned}\quad (56)$$

$$c_{k+2}^* = \frac{1}{(k+1)!} \int_{-1}^0 \prod_{j=0}^k (t+j) dt = \alpha_{k+1}^*, \quad (57)$$

$$\alpha_j^* = \frac{1}{j!} \int_{-1}^0 t(t+1) \cdots (t+j-1) dt, \quad (58)$$

- 上面积分中已作变换  $x = x_{m+1} + th$ , 并用了类似于外插公式中计算  $\beta_{ki}$  的技巧

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 13 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

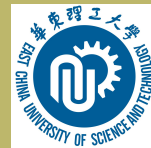
这里

$$\begin{aligned}\beta_{ki}^* &= \frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}} dx \\ &= \frac{(-1)^i}{i!(k-i)!} \int_{-1}^0 \prod_{j=0, j \neq i}^k (t+j) dt = (-1)^i \sum_{j=i}^k \binom{j}{i} \alpha_j^*,\end{aligned}\quad (56)$$

$$c_{k+2}^* = \frac{1}{(k+1)!} \int_{-1}^0 \prod_{j=0}^k (t+j) dt = \alpha_{k+1}^*, \quad (57)$$

$$\alpha_j^* = \frac{1}{j!} \int_{-1}^0 t(t+1) \cdots (t+j-1) dt, \quad (58)$$

- 上面积分中已作变换  $x = x_{m+1} + th$ , 并用了类似于外插公式中计算  $\beta_{ki}$  的技巧
- 公式(54)称为Adams-Molton方法, 它是  $k$  步  $k+1$  阶的隐式方法

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 13 of 23

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

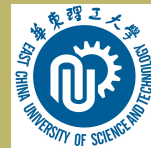
这里

$$\begin{aligned}\beta_{ki}^* &= \frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}} dx \\ &= \frac{(-1)^i}{i!(k-i)!} \int_{-1}^0 \prod_{j=0, j \neq i}^k (t+j) dt = (-1)^i \sum_{j=i}^k \binom{j}{i} \alpha_j^*,\end{aligned}\quad (56)$$

$$c_{k+2}^* = \frac{1}{(k+1)!} \int_{-1}^0 \prod_{j=0}^k (t+j) dt = \alpha_{k+1}^*, \quad (57)$$

$$\alpha_j^* = \frac{1}{j!} \int_{-1}^0 t(t+1) \cdots (t+j-1) dt, \quad (58)$$

- 上面积分中已作变换  $x = x_{m+1} + th$ , 并用了类似于外插公式中计算  $\beta_{ki}$  的技巧
- 公式(54)称为Adams-Molton方法, 它是  $k$  步  $k+1$  阶的隐式方法
- 因为  $L_k^*(x)$  是  $f(x, u(x))$  的内插多项式 ( $x \in [x_m, x_{m+1}]$  在插值节点所决定的最大区间  $[x_{m-k+1}, x_{m+1}]$  之内), 故又称公式(54)为Adams内插公式



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 13 of 23

Go Back

Full Screen

Close

Quit

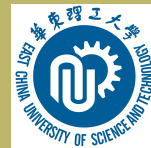
这里

$$\begin{aligned}\beta_{ki}^* &= \frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}} dx \\ &= \frac{(-1)^i}{i!(k-i)!} \int_{-1}^0 \prod_{j=0, j \neq i}^k (t+j) dt = (-1)^i \sum_{j=i}^k \binom{j}{i} \alpha_j^*,\end{aligned}\quad (56)$$

$$c_{k+2}^* = \frac{1}{(k+1)!} \int_{-1}^0 \prod_{j=0}^k (t+j) dt = \alpha_{k+1}^*, \quad (57)$$

$$\alpha_j^* = \frac{1}{j!} \int_{-1}^0 t(t+1) \cdots (t+j-1) dt, \quad (58)$$

- 上面积分中已作变换  $x = x_{m+1} + th$ , 并用了类似于外插公式中计算  $\beta_{ki}$  的技巧
- 公式(54)称为Adams-Molton方法, 它是  $k$  步  $k+1$  阶的隐式方法
- 因为  $L_k^*(x)$  是  $f(x, u(x))$  的内插多项式 ( $x \in [x_m, x_{m+1}]$  在插值节点所决定的最大区间  $[x_{m-k+1}, x_{m+1}]$  之内), 故又称公式(54)为Adams内插公式
- 当  $k=0$  时, 式(54)就是向后的Euler法, 当  $k=1$  时, 它是梯形法



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 13 of 23

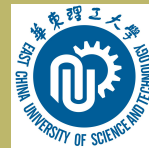
Go Back

Full Screen

Close

Quit

### (3).用数值微分构造多步法(Gear(吉尔)方法)



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 14 of 23

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

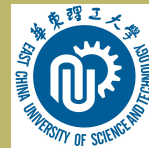
(3).用数值微分构造多步法(Gear(吉尔)方法)

以 $x_{m+1}, x_m, \dots, x_{m-k+1}$ 构造函数 $u(x)$ 的 $k$ 次Lagrange插值多项式 $L_k(x)$ ,记余项为 $r_k(x)$ , 则

$$u(x) = L_k(x) + r_k(x)$$

$$L_k(x) = \sum_{i=0}^k \left( \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}} \right) u(x_{m-i+1})$$

$$r_k(x) = \frac{u^{(k+1)}(\xi_m)}{(k+1)!} \prod_{j=0}^k (x - x_{m-j+1}), \xi_m(x_{m-k+1}, x_{m+1})$$



Home Page

Title Page



Page 14 of 23

Go Back

Full Screen

Close

Quit

(3).用数值微分构造多步法(Gear(吉尔)方法)

以 $x_{m+1}, x_m, \dots, x_{m-k+1}$ 构造函数 $u(x)$ 的 $k$ 次Lagrange插值多项式 $L_k(x)$ ,记余项为 $r_k(x)$ , 则

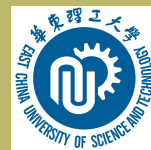
$$u(x) = L_k(x) + r_k(x)$$

$$L_k(x) = \sum_{i=0}^k \left( \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}} \right) u(x_{m-i+1})$$

$$r_k(x) = \frac{u^{(k+1)}(\xi_m)}{(k+1)!} \prod_{j=0}^k (x - x_{m-j+1}), \xi_m(x_{m-k+1}, x_{m+1})$$

将上面 $u(x)$ 的表达式代入式(1)中的微分方程, 并令 $x = x_{m+1}$ , 于是有

$$L'_k(x_{m+1}) = f(x_{m+1}, u(x_{m+1})) - r'_k(x_{m+1}), \quad (60)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 14 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



(3).用数值微分构造多步法(Gear(吉尔)方法)

以 $x_{m+1}, x_m, \dots, x_{m-k+1}$ 构造函数 $u(x)$ 的 $k$ 次Lagrange插值多项式 $L_k(x)$ ,记余项为 $r_k(x)$ , 则

$$u(x) = L_k(x) + r_k(x)$$

$$L_k(x) = \sum_{i=0}^k \left( \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}} \right) u(x_{m-i+1})$$

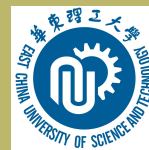
$$r_k(x) = \frac{u^{(k+1)}(\xi_m)}{(k+1)!} \prod_{j=0}^k (x - x_{m-j+1}), \xi_m(x_{m-k+1}, x_{m+1})$$

将上面 $u(x)$ 的表达式代入式(1)中的微分方程, 并令 $x = x_{m+1}$ , 于是有

$$L'_k(x_{m+1}) = f(x_{m+1}, u(x_{m+1})) - r'_k(x_{m+1}), \quad (60)$$

记

$$b_{ki} = h \left( \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}} \right)'_{x=x_{m+1}} = \begin{cases} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}, & \text{当 } i = 0 \text{ 时} \\ \frac{(-1)^i}{i} \binom{k}{i}, & \text{当 } i > 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (61)$$



Home Page

Title Page

« »

◀ ▶

Page 14 of 23

Go Back

Full Screen

Close

Quit



$$L'_k(x_{m+1}) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k b_{ki} u(x_{m-i+1}) = \frac{b_{k0}}{h} [u(x_{m+1}) - \sum_{i=1}^k \alpha_{ki} u(x_{m-i+1})].$$

又

$$r'_k(x_{m+1}) = \frac{h^k}{k+1} u^{(k+1)}(\eta_m), \eta_m \in (x_{m-k+1}, x_{m+1})$$

把上面两式代入式(60),得

$$u(x_{m+1}) = \sum_{i=1}^k \alpha_{ki} u(x_{m-i+1}) + \alpha_{k0} h f(x_{m+1}, u(x_{m+1})) - \frac{\alpha_{k0}}{k+1} h^{k+1} u^{(k+1)}(\eta_m).$$

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 15 of 23

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



$$L'_k(x_{m+1}) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k b_{ki} u(x_{m-i+1}) = \frac{b_{k0}}{h} [u(x_{m+1}) - \sum_{i=1}^k \alpha_{ki} u(x_{m-i+1})].$$

又

$$r'_k(x_{m+1}) = \frac{h^k}{k+1} u^{(k+1)}(\eta_m), \eta_m \in (x_{m-k+1}, x_{m+1})$$

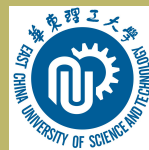
把上面两式代入式(60),得

$$u(x_{m+1}) = \sum_{i=1}^k \alpha_{ki} u(x_{m-i+1}) + \alpha_{k0} h f(x_{m+1}, u(x_{m+1})) - \frac{\alpha_{k0}}{k+1} h^{k+1} u^{(k+1)}(\eta_m).$$

略去上式右边的余项得公式

$$u_{m+1} = \sum_{i=1}^k \alpha_{ki} u_{m-i+1} + \alpha_{k0} h f_{m+1}, \quad (63)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 15 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



$$L'_k(x_{m+1}) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k b_{ki} u(x_{m-i+1}) = \frac{b_{k0}}{h} [u(x_{m+1}) - \sum_{i=1}^k \alpha_{ki} u(x_{m-i+1})].$$

又

$$r'_k(x_{m+1}) = \frac{h^k}{k+1} u^{(k+1)}(\eta_m), \eta_m \in (x_{m-k+1}, x_{m+1})$$

把上面两式代入式(60),得

$$u(x_{m+1}) = \sum_{i=1}^k \alpha_{ki} u(x_{m-i+1}) + \alpha_{k0} h f(x_{m+1}, u(x_{m+1})) - \frac{\alpha_{k0}}{k+1} h^{k+1} u^{(k+1)}(\eta_m).$$

略去上式右边的余项得公式

$$u_{m+1} = \sum_{i=1}^k \alpha_{ki} u_{m-i+1} + \alpha_{k0} h f_{m+1}, \quad (63)$$

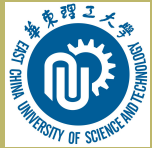
其局部截断误差是

$$R_{m+1} = -\frac{\alpha_{k0}}{k+1} h^{k+1} u^{(k+1)}(\eta_m). \quad (64)$$

公式(63)称为Gear法, 它是 $k$ 步 $k$ 阶的隐式方法

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 15 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

### 1.2.3 多步法的稳定性与收敛性



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 16 of 23

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



### 1.2.3 多步法的稳定性与收敛性

将线性 $k$ 步法公式(34)改写成

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j u_{m+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{m+j}, m = 0, 1, \dots, \quad (78)$$

其中  $\alpha_k = 1, |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$ . 即在确定  $u_{m+k}$  时用到了  $u_{m+k-1}, u_{m+k-2}, \dots, u_m$  这  $k$  个值。

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)

Page 16 of 23

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### 1.2.3 多步法的稳定性与收敛性

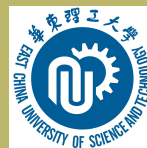
将线性 $k$ 步法公式(34)改写成

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j u_{m+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{m+j}, m = 0, 1, \dots, \quad (78)$$

其中  $\alpha_k = 1, |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$ . 即在确定  $u_{m+k}$  时用到了  $u_{m+k-1}, u_{m+k-2}, \dots, u_m$  这  $k$  个值。

- 定义1.7 如果多步法(78)至少是一阶的, 则称该方法是相容的。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 16 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### 1.2.3 多步法的稳定性与收敛性

将线性 $k$ 步法公式(34)改写成

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j u_{m+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{m+j}, m = 0, 1, \cdots, \quad (78)$$

其中 $\alpha_k = 1, |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$ .即在确定 $u_{m+k}$ 时用到了 $u_{m+k-1}, u_{m+k-2}, \cdots, u_m$ 这 $k$ 个值。

- 定义1.7 如果多步法(78)至少是一阶的,则称该方法是相容的。
- 定义1.8 如果多步法(78)满足:存在正常数 $c$ 和 $h_0$ ,使得用任意步长 $h \in (0, h_0]$ 以及用任意两组初值 $u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}$ 和 $v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}$ 计算得到的两组数值 $u_k, u_{k+1}, \cdots, u_n$ 和 $v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n$ 成立

$$\max_{k \leq m \leq n} |u_m - v_m| \leq c \max_{0 \leq j \leq k-1} |u_j - v_j|,$$

则称该方法是稳定的,其中 $n = \lceil \frac{b-x_0}{h} \rceil$ .

[Home Page](#)[Title Page](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

Page 16 of 23

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)





定义1.9 如果多步法(78)满足：对 $(x_0, b]$ 中任意一个固定的点 $a$ ,当 $k$ 个初值满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} (u(x_m) - u_m) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, k-1$$

时, 成立

$$\lim_{h \rightarrow 0, x_0 + mh = a} u_m = u(a)$$

则称该方法是收敛的。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 17 of 23

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定义1.9 如果多步法(78)满足：对 $(x_0, b]$ 中任意一个固定的点 $a$ ,当 $k$ 个初值满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} (u(x_m) - u_m) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, k-1$$

时, 成立

$$\lim_{h \rightarrow 0, x_0 + mh = a} u_m = u(a)$$

则称该方法是收敛的。  
记

$$\rho(\lambda) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \lambda^j, \quad \sigma(\lambda) = \sum_{j=0}^k \beta_j \lambda^j$$

这两个多项式由多步法(78)完全确定, 分别称 $\rho(\lambda)$ 和 $\sigma(\lambda)$ 是多步法(78)的第一和第二特征多项式。

定义1.9 如果多步法(78)满足：对 $(x_0, b]$ 中任意一个固定的点 $a$ ,当 $k$ 个初值满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} (u(x_m) - u_m) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, k-1$$

时, 成立

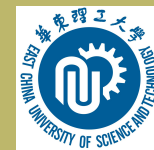
$$\lim_{h \rightarrow 0, x_0 + mh = a} u_m = u(a)$$

则称该方法是收敛的。  
记

$$\rho(\lambda) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \lambda^j, \quad \sigma(\lambda) = \sum_{j=0}^k \beta_j \lambda^j$$

这两个多项式由多步法(78)完全确定, 分别称 $\rho(\lambda)$ 和 $\sigma(\lambda)$ 是多步法(78)的第一和第二特征多项式。

定理1.8 多步法(78)相容的充分必要条件是 $\rho(1) = 0, \rho'(1) = \sigma(1)$ .



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 18 of 23

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

定理1.8 多步法(78)相容的充分必要条件是 $\rho(1) = 0, \rho'(1) = \sigma(1)$ .  
证: 利用Taylor展开, 公式(78)的局部截断误差是

$$\begin{aligned} R_{m+k} &= \sum_{j=0}^k \alpha_j u(x_{m+j}) - h \sum_{j=0}^k \beta_j u'(x_{m+j}) \\ &= \left( \sum_{j=0}^k \alpha_j \right) u(x_m) + \sum_{j=0}^k (j\alpha_j - \beta_j) h u'(x_m) + \cdots \\ &= \rho(1) u(x_m) + [\rho'(1) - \sigma(1)] h u'(x_m) + \cdots \end{aligned}$$

于是多步法至少是一阶的充要条件是 $\rho(1) = \rho'(1) - \sigma(1) = 0$ .再由相容性定义便得到定理。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 18 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

定理1.8 多步法(78)相容的充分必要条件是 $\rho(1) = 0, \rho'(1) = \sigma(1)$ .  
证: 利用Taylor展开, 公式(78)的局部截断误差是

$$\begin{aligned} R_{m+k} &= \sum_{j=0}^k \alpha_j u(x_{m+j}) - h \sum_{j=0}^k \beta_j u'(x_{m+j}) \\ &= \left( \sum_{j=0}^k \alpha_j \right) u(x_m) + \sum_{j=0}^k (j\alpha_j - \beta_j) h u'(x_m) + \cdots \\ &= \rho(1) u(x_m) + [\rho'(1) - \sigma(1)] h u'(x_m) + \cdots \end{aligned}$$

于是多步法至少是一阶的充要条件是 $\rho(1) = \rho'(1) - \sigma(1) = 0$ .再由相容性定义便得到定理。

- 定理1.9 多步法稳定的充分必要条件是 $\rho(\lambda)$ 满足根条件: $\rho(\lambda)$ 的所有根的模小于或等于1, 并且模等于1 的根为单根。

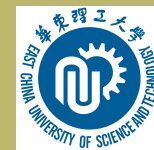
定理1.8 多步法(78)相容的充分必要条件是 $\rho(1) = 0, \rho'(1) = \sigma(1)$ .  
证: 利用Taylor展开, 公式(78)的局部截断误差是

$$\begin{aligned} R_{m+k} &= \sum_{j=0}^k \alpha_j u(x_{m+j}) - h \sum_{j=0}^k \beta_j u'(x_{m+j}) \\ &= \left( \sum_{j=0}^k \alpha_j \right) u(x_m) + \sum_{j=0}^k (j\alpha_j - \beta_j) h u'(x_m) + \cdots \\ &= \rho(1) u(x_m) + [\rho'(1) - \sigma(1)] h u'(x_m) + \cdots \end{aligned}$$

于是多步法至少是一阶的充要条件是 $\rho(1) = \rho'(1) - \sigma(1) = 0$ .再由相容性定义便得到定理。

- 定理1.9 多步法稳定的充分必要条件是 $\rho(\lambda)$ 满足根条件: $\rho(\lambda)$ 的所有根的模小于或等于1, 并且模等于1 的根为单根。
- 定理1.10 多步法(78)收敛的充分必要条件是它是相容的和稳定的。

下面讨论绝对稳定性：



*Home Page*

*Title Page*



*Page 19 of 23*

*Go Back*

*Full Screen*

*Close*

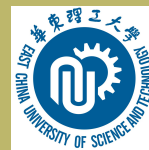
*Quit*



下面讨论绝对稳定性：  
对于模型

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \mu u, & x_0 \leq x \leq b \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

其中 $\mu$ 是常数(可以是复数),



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 19 of 23

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

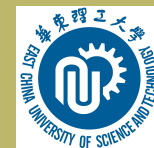
下面讨论绝对稳定性：  
对于模型

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \mu u, & x_0 \leq x \leq b \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

其中 $\mu$ 是常数(可以是复数),多步法公式为

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j u_{m+j} = \bar{h} \sum_{j=0}^k \beta_j u_{m+j}, \quad (80)$$

其中 $\bar{h} = \mu h$ ,



Home Page

Title Page



Page 19 of 23

Go Back

Full Screen

Close

Quit

下面讨论绝对稳定性：  
对于模型

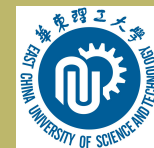
$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \mu u, & x_0 \leq x \leq b \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

其中 $\mu$ 是常数(可以是复数),多步法公式为

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j u_{m+j} = \bar{h} \sum_{j=0}^k \beta_j u_{m+j}, \quad (80)$$

其中 $\bar{h} = \mu h$ ,记

$$\phi(\lambda, \bar{h}) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \lambda^j - \bar{h} \sum_{j=0}^k \beta_j \lambda^j, \quad (81)$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 19 of 23

Go Back

Full Screen

Close

Quit

下面讨论绝对稳定性：  
对于模型

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \mu u, & x_0 \leq x \leq b \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

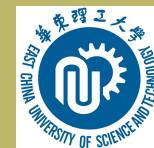
其中 $\mu$ 是常数(可以是复数),多步法公式为

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j u_{m+j} = \bar{h} \sum_{j=0}^k \beta_j u_{m+j}, \quad (80)$$

其中 $\bar{h} = \mu h$ ,记

$$\phi(\lambda, \bar{h}) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \lambda^j - \bar{h} \sum_{j=0}^k \beta_j \lambda^j, \quad (81)$$

- 公式(81)是多步法的特征多项式。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 19 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

下面讨论绝对稳定性：  
对于模型

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \mu u, & x_0 \leq x \leq b \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

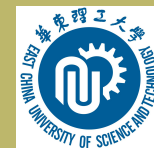
其中 $\mu$ 是常数(可以是复数),多步法公式为

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j u_{m+j} = \bar{h} \sum_{j=0}^k \beta_j u_{m+j}, \quad (80)$$

其中 $\bar{h} = \mu h$ ,记

$$\phi(\lambda, \bar{h}) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \lambda^j - \bar{h} \sum_{j=0}^k \beta_j \lambda^j, \quad (81)$$

- 公式(81)是多步法的特征多项式。
- 特征多项式的所有根的模都小于1时,则多步法关于 $\bar{h}$ 是绝对稳定的。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 19 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

下面讨论绝对稳定性：  
对于模型

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \mu u, & x_0 \leq x \leq b \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

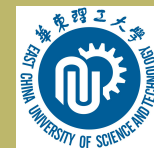
其中 $\mu$ 是常数(可以是复数),多步法公式为

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j u_{m+j} = \bar{h} \sum_{j=0}^k \beta_j u_{m+j}, \quad (80)$$

其中 $\bar{h} = \mu h$ ,记

$$\phi(\lambda, \bar{h}) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \lambda^j - \bar{h} \sum_{j=0}^k \beta_j \lambda^j, \quad (81)$$

- 公式(81)是多步法的特征多项式。
- 特征多项式的所有根的模都小于1时,则多步法关于 $\bar{h}$ 是绝对稳定的。
- 所有这样的 $\bar{h}$ 在复平面上组成了该方法的绝对稳定区域。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 19 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 当 $\mu$ 是实数时，要确定绝对稳定区间就是讨论在什么条件下实系数多项式的根按模小于1.

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 20 of 23

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 当 $\mu$ 是实数时，要确定绝对稳定区间就是讨论在什么条件下实系数多项式的根按模小于1.
- 定理1.11 (1)实系数二次多项式 $x^2 + px + q$ 的两个根的模都小于1的充分必要条件是

$$1 + p + q > 0, 1 - p + q > 0, 1 - q > 0;$$

(2)实系数三次多项式 $x^3 + px^2 + qx + r$ 的三个根的模都小于1的充分必要条件是

$$1 + r > 0, 1 - r > 0, 1 + p + q + r > 0$$

$$1 - p + q - r > 0, 1 - q + pr - r^2 > 0$$

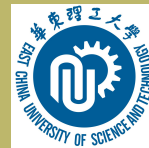
[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 20 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### 例5.求三阶Adams外插公式

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{12}(23f_m - 16f_{m-1} + 5f_{m-2}), \quad (82)$$

的绝对稳定区间



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 21 of 23

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

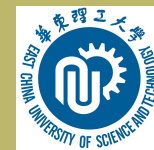
### 例5.求三阶Adams外插公式

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{12}(23f_m - 16f_{m-1} + 5f_{m-2}), \quad (82)$$

的绝对稳定区间

解：它的特征多项式是

$$\begin{aligned} \phi(\lambda, \bar{h}) &= \lambda^3 - \lambda^2 - \frac{\bar{h}}{12}(23\lambda^2 - 16\lambda + 5) \\ &= \lambda^2 - (1 + \frac{23}{12}\bar{h})\lambda^2 + \frac{16}{12}\bar{h}\lambda - \frac{5}{12}\bar{h} \end{aligned}$$



Home Page

Title Page



Page 21 of 23

Go Back

Full Screen

Close

Quit

### 例5.求三阶Adams外插公式

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{12}(23f_m - 16f_{m-1} + 5f_{m-2}), \quad (82)$$

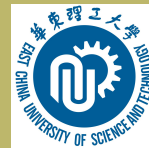
的绝对稳定区间

解：它的特征多项式是

$$\begin{aligned}\phi(\lambda, \bar{h}) &= \lambda^3 - \lambda^2 - \frac{\bar{h}}{12}(23\lambda^2 - 16\lambda + 5) \\ &= \lambda^2 - (1 + \frac{23}{12}\bar{h})\lambda^2 + \frac{16}{12}\bar{h}\lambda - \frac{5}{12}\bar{h}\end{aligned}$$

根据定理1.11,它的所有根按模小于1的充要条件是

$$\begin{aligned}-1 &< \frac{5}{12}\bar{h} < 1, \bar{h} < 0, \\ 2 + \frac{11}{3}\bar{h} &> 0, 1 - \frac{11}{12}\bar{h} + \frac{5}{8}\bar{h}^2 > 0.\end{aligned}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 21 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

### 例5.求三阶Adams外插公式

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{12}(23f_m - 16f_{m-1} + 5f_{m-2}), \quad (82)$$

的绝对稳定区间

解：它的特征多项式是

$$\begin{aligned}\phi(\lambda, \bar{h}) &= \lambda^3 - \lambda^2 - \frac{\bar{h}}{12}(23\lambda^2 - 16\lambda + 5) \\ &= \lambda^2 - (1 + \frac{23}{12}\bar{h})\lambda^2 + \frac{16}{12}\bar{h}\lambda - \frac{5}{12}\bar{h}\end{aligned}$$

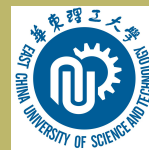
根据定理1.11,它的所有根按模小于1的充要条件是

$$\begin{aligned}-1 &< \frac{5}{12}\bar{h} < 1, \bar{h} < 0, \\ 2 + \frac{11}{3}\bar{h} &> 0, 1 - \frac{11}{12}\bar{h} + \frac{5}{8}\bar{h}^2 > 0.\end{aligned}$$

前面三个不等式可得

$$-\frac{6}{11} < \bar{h} < 0$$

第四个不等式对任何 $\bar{h}$ 都成立，所以三阶Adams外插公式地绝对稳定区间是 $(-\frac{6}{11}, 0)$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 21 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



## $p$ 阶Adams方法的绝对稳定区间

p	外插公式	内插公式
1	$(-2, 0)$	$(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
2	$(-1, 0)$	$(-\infty, 0)$
3	$(-\frac{6}{11}, 0)$	$(-6, 0)$
4	$(-\frac{3}{10}, 0)$	$(-3, 0)$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 22 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

## $p$ 阶Adams方法的绝对稳定区间

$p$	外插公式	内插公式
1	$(-2, 0)$	$(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
2	$(-1, 0)$	$(-\infty, 0)$
3	$(-\frac{6}{11}, 0)$	$(-6, 0)$
4	$(-\frac{3}{10}, 0)$	$(-3, 0)$

- 内插的绝对稳定区间比外插大得多。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 22 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

## $p$ 阶Adams方法的绝对稳定区间

$p$	外插公式	内插公式
1	$(-2, 0)$	$(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
2	$(-1, 0)$	$(-\infty, 0)$
3	$(-\frac{6}{11}, 0)$	$(-6, 0)$
4	$(-\frac{3}{10}, 0)$	$(-3, 0)$

- 内插的绝对稳定区间比外插大得多。
- 外插的绝对稳定区间比同阶的Runge-Kutta法小。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 22 of 23](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



作业:

14、求 $\alpha$ ,使线性多步法

$$u_{m+2} - (1 + \alpha)u_{m+1} + \alpha u_m = \frac{h}{2}[(3 - \alpha)f_{m+1} + (1 + \alpha)f_m]$$

是相容的和稳定的

15、证明三阶Adams内插公式

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{12}(5f_{m+1} + 8f_m - f_{m-1})$$

的绝对稳定区间是 $(-6, 0)$

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#)

[▶](#)

[◀](#)

[▶](#)

Page 23 of 23

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)