第五章　波 动

1、一频率为500HZ的平面波，波速为350m/s，求：

（1）在波传播方向上位相差为π/3的两点相距多远？

（2）介质中任意一点在时间间隔10^{-3}s内两位移间的位相差是多少？

解：（1）　$\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$\Delta x=\frac{\Delta\varphi}{2\pi}\lambda=\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}\frac{u}{\nu}=\frac{1}{6}\frac{350}{500}=0.12m$$

（2）$\Delta x=0$

$$\Delta\varphi=\omega\Delta t=2\pi\nu\Delta t=2\pi\times500\times10^{-3}=\pi$$

2、一横波沿细绳传播时的波动方程为 y=0.20cosπ(2.5t-x)(SI),求：

（1）波的振幅、速度、频率和波长；

（2） x=L处质点振动的初位相以及与该处质点速度大小相同但方向相反的其它各质点位置。

解：（1）$y=0.20\cos(2.5\pi t-\pi x)=0.20\cos[2.5\pi(t-\dfrac{x}{2.5})]$

$\therefore\quad A=0.20(m)\qquad u=2.5m/s\qquad \omega=2.5\pi=2\pi\nu$

$$\nu=\frac{2.5}{2}=1.25\left(1/s\right)$$

$$\lambda=\frac{u}{\nu}=\frac{2.5}{1.25}=2\ (m)$$

（2）$y=0.20\cos(2.5\pi t-\pi L)$

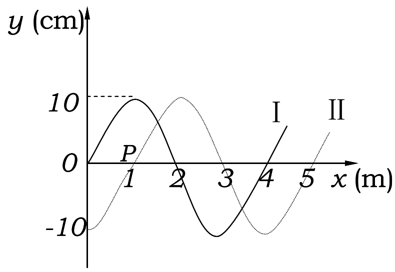
$\therefore\ \varphi=-\pi L$

根据旋转矢量图可知，只有反相的各点才能速度相等而方向相反

$\therefore\Delta\varphi=(2.5\pi t-\pi L)-(2.5\pi t-\pi x)=(2k+1)\pi$

$x=L+(2k+1)\qquad(k=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots)$

3、如图所示，已知 t=0 的波形曲线Ⅰ，波沿 X 轴正向传播，经过 0.5s 后波形变为曲线Ⅱ。试根据图中绘出的条件求



（1）波的表达式；

（2）P 点振动表达式。

解：（1）由图可知 $A=10cm \quad \lambda=4m \quad T=2s$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi \qquad \varphi=\frac{\pi}{2}$$

O 点振动方程 $\quad y_0=A\cos(\omega t+\varphi)=0.1\cos(\pi t+\frac{\pi}{2})$

波动方程 $\quad y=A\cos(\omega t+\varphi-\frac{2\pi}{\lambda}x)=0.1\cos(\pi t+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x)\ (cm)$

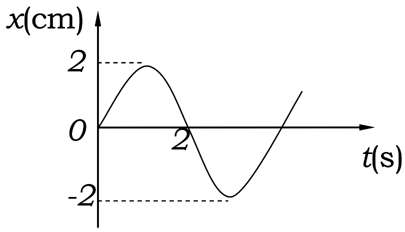
（2）P 点振动方程以 $x=1m$ 代入波动方程得

$$y_P=0.1\cos(\pi t+\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{4})=0.1\cos\pi t \text{（cm）}$$

4、一平面简谐波在媒质中以波速 u=5m/s 沿 x 轴正方向传播，原点 O 处质元的振动曲线如图所示。

（1）求 x=25m 处质元的振动方程及 t=1s 时刻此处质元振动的速度和加速度。

（2）画出 t=3s 时刻的波形曲线。



解：（1）根据振动曲线可知 $T=4s \qquad \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}$

$$\varphi=-\frac{\pi}{2} \qquad \lambda=uT=4\times5=20\ (m)$$

波动方程 $\quad y=2\times10^{-2}\cos[\frac{\pi}{2}(t-\frac{x}{5})-\frac{\pi}{2}]$

$x=25m$ 处的振动方程 $\quad y=2\times10^{-2}\cos[\frac{\pi}{2}(t-\frac{25}{5})-\frac{\pi}{2}]=2\times10^{-2}\cos[\frac{\pi}{2}t-\pi]$

$$v=y'=-2\times10^{-2}\times\frac{\pi}{2}\sin[\frac{\pi}{2}t-\pi] \qquad v(1)=\pi\times10^{-2}\ m/s$$

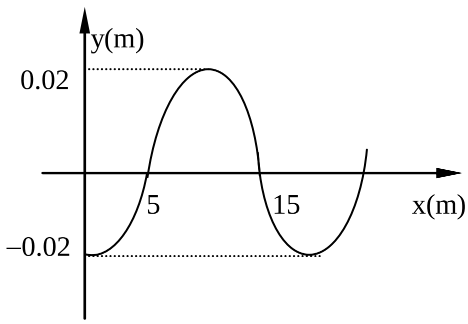
$$a=y''|_{t=1}=-2\times10^{-2}(\frac{\pi}{2})^2\cos[\frac{\pi}{2}t-\pi]=0$$

（2）根据波动方程

$$y=2\times10^{-2}\cos[\frac{\pi}{2}(3-\frac{x}{5})-\frac{\pi}{2}]=2\times10^{-2}\cos[\frac{\pi}{10}x-\pi]$$

$$y=0\Rightarrow\frac{\pi}{10}x-\pi=(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

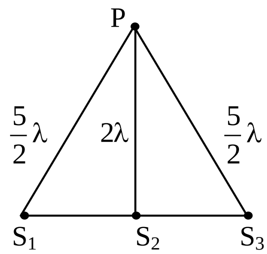
$$x=10(k+\frac{3}{2}) \qquad k=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots$$



5、如图所示，三个同频率、振动方向相同（垂直于纸面）的平面简谐波在传播过程中相遇于 P 点。若三个简谐波各自单独在 S_1、S_2、S_3 的振动表达式分别为

$y_1 = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$、$y_2 = A\cos(\omega t)$ 和 $y_3 = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$。

而 $\overline{S_2P} = 2\lambda$，$\overline{S_1P} = \overline{S_3P} = \frac{5}{2}\lambda$（λ为波长）求 P 点的合振动的表达式。



解：由波的特性可知

$$y_1^p = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$y_2^p = A\cos\omega t$$

$$y_3^p = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$y^p = y_1^p + y_2^p + y_3^p = A\cos\omega t$$

6、一正弦式空气波，沿直径为 0.14m 的圆柱形管道传播。波的平均强度为 9×10^{-3}W/m^2，频率为 300Hz，波速为 300m/s。问波中的平均能量密度和最大能量密度各是多少？每两个相邻同相面间波段中包含多少能量？

解：$\bar{I} = \bar{\omega}u$

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{I}}{u} = \frac{9\times10^{-3}}{300} = 3\times10^{-5}\ J/m^3$$

$$\omega_{max} = 2\omega = 6\times10^{-5}\ J/m^3$$

$$E = \bar{\omega}\Delta v = \bar{\omega}(\lambda s) = 3\times10^{-5}\times1\times\pi(0.7)^2 = 4.62\times10^{-7}\ J$$

7、一弹性波在介质中传播速度 $u=10^3$m/s，振幅 $A=1.0\times10^{-4}$m，频率 $\nu=10^3$Hz，若该介质的密度为 800kg/m^3。求：

（1）该波的平均能流密度；

（2）一分钟内垂直通过一面积为 $S=4\times10^{-4}$m^2 的总能量。

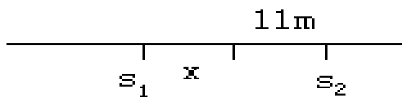
解：（1）$I=\overline{\omega}u=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2u=\frac{1}{2}800\times(1.0\times10^{-4})^2(2\pi10\times10^2)^2\times10^3$

$$=1.578\times10^5\ \mathrm{W/m^2}$$

(2) $w=\overline{p}\cdot t=\overline{\omega}ust=1.578\times10^5\times4\times10^{-4}\times60=3.74\times10^3\ \mathrm{J}$

8、相干波源 s_1、s_2，相距 11m，s_1 的位相比 s_2 超前 $\pi/2$，这两个相干波源在 s_1、s_2 连线和延长线上传播时可看成两等幅的平面余弦波，它们的频率都等于 100Hz，波速都等于 400m/s，试求在 s_1 和 s_2 的连线及延长线上，因干涉而静止不动的各点的位置。

解：$\lambda=\frac{u}{\nu}=4\,(\mathrm{m})$



在 s_1s_2 之间

$$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2-\frac{2\pi}{\lambda}[x-(11-x)]$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}(2x-11)=(2k+1)\pi\qquad(k=0,\pm1\pm2\pm3\cdots\cdots)$$

$\therefore\ x=5-2k$

又 $0\le x\le11$ 所以 $\frac{5}{2}\ge k\ge-3$

取 $k=-3、-2、-1、0、1、2$ $\quad x=11，9，7，5，3，1$

在 s_1 外侧 $\quad\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2-\frac{2\pi}{\lambda}[x-(11+x)]=6\pi$ 无静止点

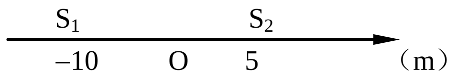
在 s_2 外侧 $\quad\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2-\frac{2\pi}{\lambda}(x+11-x)=5\pi$ 各点均为静止点

$\therefore$ 干涉静止的点为 $x=1,3,5,7,9,11$ 及 s_2 外侧各点

9、有两相干波源 s_1 和 s_2 在 x 轴上的位置是 $x_1=-10m$，$x_2=5m$ 两波源振动周期都是 0.5s，波长均为 10m。振幅均为 $1.0\times10^{-2}m$。当 t=0 时，s_1 振动的位移为 0 并向正方向运动，s_2 振动位相比 s_1 落后 $\pi/2$，求 x=10m 处介质中 P 点的振动方程。

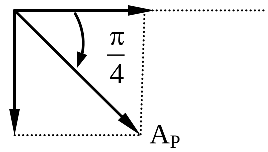
解：由初始条件知 $\varphi_1=-\frac{\pi}{2}$ $\qquad \varphi_2-\varphi_1=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\varphi_2=-\pi$

$$y_{1P}=A\cos\left[\omega(t-\frac{20}{\frac{\lambda}{T}})-\frac{\pi}{2}\right]=A\cos[4\pi t-\frac{\pi}{2}]$$



$$y_{2p}=A\cos[4\pi(t-\frac{5}{20})-\pi]=A\cos(4\pi t)$$

$$A_p=\sqrt{2}A \qquad \varphi=-\frac{\pi}{4}$$



$$\therefore y_p=\sqrt{2}\times1.0\times10^{-2}\cos[4\pi t-\frac{\pi}{4}]$$

10、两波在一很长的弦线上传播，其表达式为

$$y_1=6.0\cos\frac{\pi}{2}(0.02x-8.0t)cm \qquad y_2=6.0\cos\frac{\pi}{2}(0.02x+8.0t)cm$$

求：（1）各波频率、波长、波速；（2）节点的位置；（3）振幅最大的位置。

解：（1）由波动方程 $y_1=60\cos\frac{\pi}{2}(0.02x-8.0t)=6.0\cos(4\pi t-0.01\pi x)$

$$y_2=6.0\cos(4\pi t+0.01\pi x)$$

与标准型 $y=A\cos(\omega t+\varphi-\frac{2\pi}{\lambda}x)$ 比较

$$\omega=4\pi \qquad v=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{4\pi}{2\pi}=2Hz \qquad \lambda=200cm \qquad u=\lambda v=200\times2=400cm/s$$

（2）合成波形成驻波，波动方程 $y=(2A_0\cos\frac{2\pi}{\lambda}x)\cos\frac{2\pi}{T}t$

波节（A=0）：$A=2A_0\cos\frac{2\pi}{\lambda}x=0$

即 $\frac{2\pi}{200}x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $\qquad x=50(2k+1)cm \qquad k=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots$

（3）振幅最大：$\left|\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|=1$

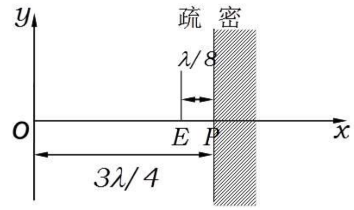
即 $\frac{2\pi}{200}x=k\pi$

$x=100k \qquad (k=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots)$

11、一列波长为λ的平面简谐波沿 x 轴的正方向传播，已知 x=λ/2 处质点的振动方程为 y =Acosωt。

（1）求该平面简谐波的方程；

（2）若在 x=3λ/4 的 P 点处放一如图所示的反射面，求



反射波的方程和 E 点（PE=λ/8）的合振动方程。

解：（1） $y_{入}=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x-\frac{\lambda}{2}}{u}\right)\right]=A\cos[\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\pi]$　　$(\frac{\omega}{u}=\frac{2\pi}{\lambda})$

（2） $y_{入p}=A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{3}{4}\lambda+\pi)=A\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})$

$$y_{反p}=A\cos(\omega t-\frac{\pi}{2}+\pi)=A\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$$

$$y_{反}=A\cos[\omega(t-\frac{\frac{3}{4}\lambda-x}{u})+\frac{\pi}{2}]=A\cos(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x\pm\pi)$$ （±均可）

$$y_{全}=y_{入}+y_{反}=2A\cos\omega t\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(\frac{3}{4}\lambda-\frac{1}{8}\lambda)]=\sqrt{2}A\cos\omega t$$

12、一弦上的驻波表达式为 $y=0.02\cos16x\cos750t$（SI）。试求：

（1）组成此波的各分行波的波幅及波速为多少？

（2）节点间距为多大/

（3） $t=2\times10^{-3}s$ 时位于 x=0.05m 处质点的速度为多大？

解：（1）与驻波一般表达式 $y=2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\frac{2\pi}{T}t$ 比较可得

$$A=0.01\qquad \lambda=\frac{\pi}{8}\qquad T=\frac{\pi}{375}\qquad u=\frac{\lambda}{T}=47m/s$$

（2）相邻节点间距离　$\Delta x=\frac{\lambda}{2}=\frac{\pi}{16}=0.2\ (m)$

（3） $v=\frac{dy}{dt}=-15\cos16x\sin750t$

当 $t=2\times10^{-3}s$　$x=0.05m$ 时　$v=-10.4(m/s)$

13、汽车驶过车站时，车站上的观测者测得声音频率由 1200Hz 变到 1000Hz，设空气中声速为 330m/s，求汽车速度。

解：设波源相对介质的运动速度为V_s，观察测得声源的频率为v_s，声速为u

由多普勒效应：$$v_s=\frac{u}{u-V_s}v \qquad (1)$$

$$v_s'=\frac{u}{u-(-V_s)}v \qquad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \qquad \frac{v}{v'}=\frac{u+V_s}{u-V_s}=\frac{1200}{1000}=\frac{6}{5}$$

$$V_s=\frac{u}{11}=\frac{330}{11}=30\,\text{m/s}$$

14、两列火车分别以 72km/h 和 54km/h 的速度相向而行，第一列火车发出一个 600Hz 的汽笛声，若声速为 340m/s，求在第二列火车上的乘客听见该声音的频率在相遇前是多少？在相遇后是多少？

解：设u为声速，V_B为第二列火车上的观察者速度，V_s为火车波源速度

接近时 $$v=\frac{u+V_B}{u+(-V_s)}v=\frac{340+{}^{54000}\!/_{3600}}{340-{}^{72000}\!/_{3600}}=665.6\text{Hz}$$

相遇后 $$v=\frac{u+(-V_B)}{u+V_s}v=\frac{340+(-{}^{54000}\!/_{3600})}{340+{}^{72000}\!/_{3600}}=547.1\text{Hz}$$