# 《微分几何》课程电子课件

教师：杨勤民

Tel: (021)64253147

Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程QQ群号：1045698545

## 六、一般螺线

曲率函数和挠率函数完全确定了曲线的形状和大小.

当曲率函数和挠率函数之间满足特定关系时,

就会得到特定类型的曲线.

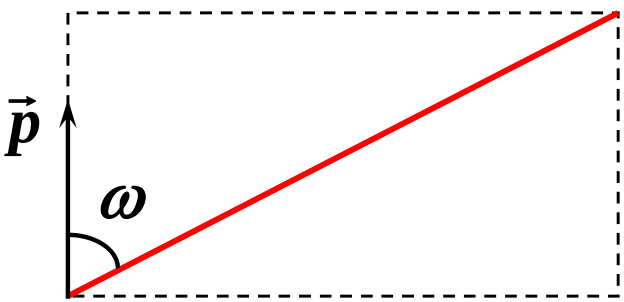
例如当$k(s)\equiv 0$时得到直线(见P28例4),

当$\tau(s)\equiv 0$时得到平面曲线(见P28例5),

当$k(s)$和$\tau(s)$都是常数时得到圆柱螺线.

特别地,当$\dfrac{k(s)}{\tau(s)}$为常数时得到一般螺线.

## 一般螺线的定义




将左图卷在圆柱面上得到圆柱螺线;

将其卷在一般柱面上得到一般螺线.

称切线始终和某固定方向成固定角的曲线为螺线.

**等价定义1** 主法向量始终和某个固定方向垂直的曲线.

**等价定义2** 副法向量始终和某固定方向成固定角的曲线.

**等价定义3** 使得 $\dfrac{k(s)}{\tau(s)}$ 为常数的曲线.

**等价定义1** 主法向量始终和某个固定方向垂直的曲线.

**证** $(\Rightarrow)$

设曲线的单位切向量$\vec{\alpha}(s)$与某个固定的单位向量$\vec{p}$

成固定角$\omega$, 则$\forall s, \vec{\alpha}(s)\cdot\vec{p}=\cos\omega$.

两边求导得$\dot{\vec{\alpha}}(s)\cdot\vec{p}=0$. 即$\forall s$, 主法向量$\vec{\beta}(s)\perp\vec{p}$.

$(\Leftarrow)$

设$\forall s$, 主法向量$\vec{\beta}(s)\perp\vec{p}$, 其中$\vec{p}$为某个固定的单位向量,

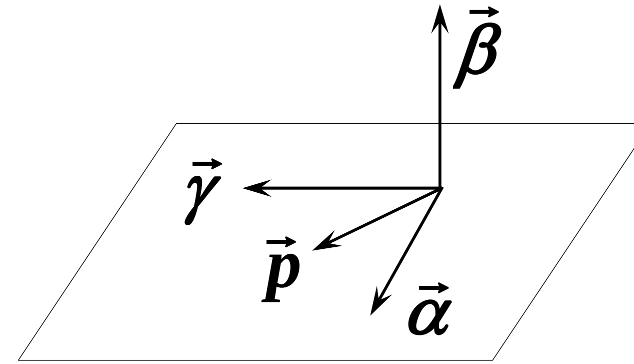
则$\dot{\vec{\alpha}}(s)\cdot\vec{p}=0$. 两边积分得$\vec{\alpha}(s)\cdot\vec{p}=c$为常数.

因此$\forall s, \vec{\alpha}(s)$与固定方向$\vec{p}$成固定角$\arccos c$.

**等价定义2** 副法向量始终和某固定方向成固定角的曲线.

**证** $(\Rightarrow)$ 由等价定义1, $\exists$单位向量$\vec{p}$使得$\forall s$, $\vec{\beta}(s)\perp\vec{p}$.

又$\because \vec{\beta}(s)\perp\vec{\alpha}(s), \vec{\beta}(s)\perp\vec{\gamma}(s)$,




$\therefore$ 三个向量$\vec{\alpha}(s), \vec{\gamma}(s), \vec{p}$共面.

$$\left.\begin{array}{r}\vec{\alpha}(s)\text{与}\vec{p}\text{成固定角}\\ \vec{\alpha}(s)\perp\vec{\gamma}(s)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{\gamma}(s)\text{与}\vec{p}\text{成固定角}.$$

$(\Leftarrow)$ 设$\exists$单位向量$\vec{p}$使得$\forall s$, $\vec{\gamma}(s)$与$\vec{p}$成固定角$\theta$.

则$\vec{\gamma}(s)\cdot\vec{p}=\cos\theta$. 两边求导得$\dot{\vec{\gamma}}(s)\cdot\vec{p}=0$. 即$\dot{\vec{\gamma}}(s)\perp\vec{p}$.

由挠率的定义知$\dot{\vec{\gamma}}(s)/\!/\vec{\beta}(s)$. 因此$\vec{\beta}(s)\perp\vec{p}$.

结合等价定义1知该曲线为一般螺线.

**等价定义3** 使得 $\dfrac{k(s)}{\tau(s)}$ 为常数的曲线.

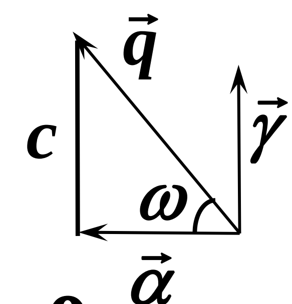
**证** **($\Rightarrow$)** 设 $\forall s, \vec{\alpha}(s)$ 与某固定的单位向量 $\vec{p}$ 成固定角 $\omega$,

由 $\vec{\beta}(s)\cdot\vec{p}=0$ 得 $\dot{\vec{\beta}}(s)\cdot\vec{p}=0\Rightarrow[\tau(s)\vec{\gamma}(s)-k(s)\vec{\alpha}(s)]\cdot\vec{p}=0.$

将 $\vec{\gamma}(s)\cdot\vec{p}=\pm\sin\omega$ 和 $\vec{\alpha}(s)\cdot\vec{p}=\cos\omega$,

代入解得 $\dfrac{k(s)}{\tau(s)}=\dfrac{\vec{\gamma}(s)\cdot\vec{p}}{\vec{\alpha}(s)\cdot\vec{p}}=\pm\tan\omega$ 为常数.

**($\Leftarrow$)** 设 $\dfrac{k(s)}{\tau(s)}=c,\ \vec{q}(s)=\vec{\alpha}(s)+c\vec{\gamma}(s).$

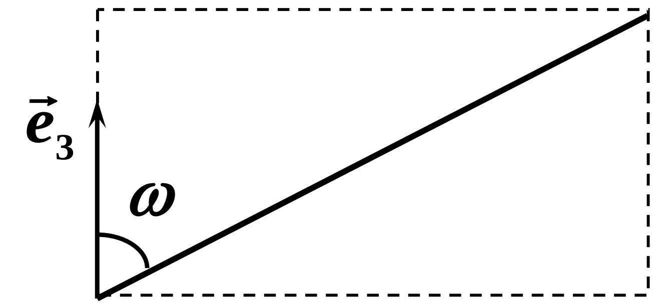



则 $\dot{\vec{q}}(s)=\dot{\vec{\alpha}}(s)+c\dot{\vec{\gamma}}(s)=k(s)\vec{\beta}(s)+c[-\tau(s)\vec{\beta}(s)]=0.$

即 $\vec{q}(s)$ 与 $s$ 无关. 而 $\vec{\alpha}(s)\cdot\vec{q}=\vec{\alpha}(s)\cdot\vec{\alpha}(s)+c\vec{\alpha}(s)\cdot\vec{\gamma}(s)=1$

为常数. 故 $\vec{\alpha}(s)$ 与常向量 $\vec{q}$ 夹固定角.

## 一般螺线的标准方程




设有螺线$\vec{r}(s)=(x(s),y(s),z(s))$,

螺线所在柱面的母线平行于

$\vec{e}_3=(0,0,1)$, 切线与$\vec{e}_3$夹固定角$\omega$，$s$为自然参数.

由$|\vec{r}'(s)|=1$得$x'^2(s)+y'^2(s)+z'^2(s)=1.\qquad(*)$

由$\vec{r}'(s)\cdot\vec{e}_3=\cos\omega$得$z'(s)=\cos\omega\Rightarrow z(s)=s\cos\omega+c.$

为使方程简单, 取$c=0$, 则有$z(s)=s\cos\omega.$

代入(*)式得$x'^2(s)+y'^2(s)=\sin^2\omega.$

故螺线方程为$\vec{r}=(x(s),y(s),s\cos\omega)$,

其中$x(s),y(s)$满足$x'^2(s)+y'^2(s)=\sin^2\omega.$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

**1.17** 证明一条曲线$\vec{r}=\vec{r}(s)$(其中$s$为弧长参数)为一般螺线的充要条件是$(\ddot{\vec{r}},\dddot{\vec{r}},\ddddot{\vec{r}})=0$.