华东理工大学 2014－2015 学年第二学期

《高等数学（上）》课程期末考试试卷（B）　2015.7

一．选择题（每小题 4 分，共 20 分）：

A B D B D

1. 异面直线 $\dfrac{x+2}{0}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+9}{8}$ 和 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-8}{2}=\dfrac{z}{12}$ 的距离为（　　）。

(A). 3;　　(B). 6;　　(C). 9;　　(D). 12

2. 曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上介于 $0\le z\le 4$ 之间的部分的面积为（　　）。

(A). $\dfrac{\pi}{6}[\sqrt{17}-1]$;　　(B). $\dfrac{\pi}{6}[17^{\frac{3}{2}}-1]$;

(C). $\dfrac{\pi}{4}[17^{\frac{3}{2}}-1]$;　　(D). $\dfrac{\pi}{4}[\sqrt{17}-1]$。

3. 设 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数都存在，则有（　　）。

(A). $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处沿任意方向的方向导数都存在;

(B). $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处连续;

(C). $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处可微;

(D). 函数 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处连续。

4. 以 $y=x$ 和 $y=\sin x$ 为特解的最低阶的线性常系数齐次微分方程为（　　）

(A). $y'''+y'=0$;　　(B). $y^{(4)}+y''=0$;

(C). $y'''-2y''+y'=0$;　　(D). $y^{(4)}-2y''+y=0$。

5. （11 学分）设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，且当 $x\in[-\pi,\pi]$ 时有 $f(x)=|x|$，

则 $f(x)$ 展开成的傅里叶级数为（　　）

(A). $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x$;　(B). $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x$;

(C). $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$;(D). $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$ 。

（8,9 学分）函数 $u=x^2+y^2+2z$ 在点 $P(-1,0,2)$ 处的梯度向量和向量 $\vec{l}=\{0,\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ 的夹角为 （ ）

(A). 0； (B). $\frac{\pi}{4}$； (C). $\frac{\pi}{6}$； (D). $\frac{\pi}{3}$。

二．求下列各题（每小题 5 分，共 10 分）：

1. 求过点 $P(2,3,4)$ 以及 P 在 x 轴和 yOz 坐标平面上的投影点的平面方程。

解：点 $P(2,3,4)$ 在 x 轴上的投影点为 $M(2,0,0)$，在 yOz 坐标平面上的投影点为 $Q(0,3,4)$。 2 分

所以所求平面的法向量为 $\vec{n}=\vec{PM}\times\vec{PQ}=\{0,8,-6\}$。 2 分

所以所求平面方程为 $4y-3z=0$。 1 分

2. 求二次积分 $I=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 e^{y^2}\mathrm{d}y$。

解： $I=\int_0^2 \mathrm{d}y\int_0^y e^{y^2}\mathrm{d}x$ 3 分

$=\int_0^2 y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(e^4-1)$ 2 分

三．解下列各题（每小题 5 分，共 10 分）：

1. （**11 学分**）计算曲线积分 $I=\int\limits_L\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}s$，其中 L 为曲线 $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t$ 上介于 $0\le t\le 2\pi$ 的弧段。

解：$\mathrm{d}s=\sqrt{3}e^t\mathrm{d}t$。 2 分

所以 $I=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}e^t\cdot\sqrt{3}e^t\mathrm{d}t$ 2 分

$=\frac{\sqrt{6}}{2}(e^{4\pi}-1)$。 1 分

(8,9 学分) 计算二重积分 $I=\iint\limits_D\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, x+y\ge 1\}$。

解：$I=\iint\limits_D(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$　　2 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1}(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\rho$　　2 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta-1)\mathrm{d}\theta=2-\frac{\pi}{2}$　　1 分

2. 已知直线 L: $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-\sqrt{2}}=\frac{z}{\sqrt{2}}$和平面$x+ay+6=0$的夹角为$\frac{\pi}{6}$，求参数$a$的值。

解：令$\vec{l}=\{2,-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$，$\vec{n}=\{1,a,0\}$。　　2 分

则有　$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{|\vec{l}\cdot\vec{n}|}{|\vec{l}||\vec{n}|}=\frac{2-\sqrt{2}a}{2\sqrt{2}\sqrt{1+a^2}}$　　2 分

即有　$\sqrt{2}-a=\sqrt{1+a^2}$，

解得　$a=\frac{\sqrt{2}}{4}$。　　1 分

四．解下列各题（每小题 6 分，共 12 分）：

1. 求曲面$x^2+2y^2+2z^2=8$在点$(2,1,1)$处的切平面方程。

解：曲面在该点的切平面的法向量为$\vec{n}=\{2x,4y,4z\}|_{(2,1,1)}=\{4,4,4\}$。　4 分

所以切平面为 $x+y+z=4$。　　2 分

2. 设$f(x,y)$有二阶连续偏导数，设$z=f(x^2,xy^3)$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$z_x=2xf_1+y^3f_2$，　　3 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y^2f_{12}+3y^2f_2+3xy^5f_{22}$。　　3 分

五．解下列各题（每小题 6 分，共 12 分）：

1. (11 学分) 求积分 $I=\int_L (1-2x)e^{y-2x}\mathrm{d}x + xe^{y-2x}\mathrm{d}y$，其中 L 为曲线 $y=2x^2$ 上从原点到点 $A(1,2)$ 的弧段。

解：记 $P=(1-2x)e^{y-2x}$，$Q=xe^{y-2x}$，则有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=(1-2x)e^{y-2x}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以积分和路径无关。 3 分

构造路径 $L': y=2x$，$0\le x\le 1$。

则有 $I=\int_{L'}(1-2x)e^{y-2x}\mathrm{d}x + xe^{y-2x}\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1[(1-2x)+x\cdot 2]\mathrm{d}x=1。$$ 3 分

（8 学分）求定积分 $I=\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$

解：$I=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x$。

令 $x-1=\sin t$，则有 2 分

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cdot\cos^2 t\,\mathrm{dt}$$ 2 分

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{dt}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{dt}=\frac{\pi}{2}$$ 2 分

（9 学分）判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}}$ 的收敛性。

解： 因为 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}}}{\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{6}}}=0$， 4 分

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ 收敛，所以原级数收敛。 2 分

2. 求微分方程 $x^2\mathrm{d}y+(2xy-x+1)\mathrm{d}x=0$ 满足 $y(1)=0$ 的特解。

解：方程变形为

$$y'+\frac{2}{x}y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}。$$ 2 分

共通解为 $y=e^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}[\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})e^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$

$=\frac{C}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$。 2 分

因为 $y(1)=0$，解得 $C=\frac{1}{2}$。

所以特解为 $y=\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$。 2 分

六．解下列各题（每小题 6 分，共 12 分）：

1. 已知可微函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，$f'(0)=8$，求极限

$$I=\lim_{t\to 0^+}\frac{\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{t^4}。$$

解：$I=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$ 2 分

$=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi\int_0^t f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho}{t^4}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi f(t^2)t}{4t^3}$ 2 分

$=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t^2)-f(0)}{t^2-0}=\frac{\pi}{2}\cdot f'(0)=4\pi$ 2 分

2. 给定正常数 a，求函数 $f(x,y)=3axy-x^3-y^3$ 的极值。

解：令 $\begin{cases}f_x=3ay-3x^2=0\\ f_y=3ax-3y^2=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_1=0\\ y_1=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=a\\ y_2=a\end{cases}$。 2 分

因为 $f_{xx}=-6x$，$f_{xy}=3a$，$f_{yy}=-6y$。

在点（0，0）处：$H(0,0)=\begin{vmatrix}0 & 3a\\ 3a & 0\end{vmatrix}=-9a^2<0$，所以（0，0）点不是极值点。

2 分

在点 (a,a) 处：$H(a,a)=\begin{vmatrix}-6a & 3a\\ 3a & -6a\end{vmatrix}=27a^2>0$，所以 (a,a) 点是极大值点，

极大值为 $f(a,a)=a^3$。 2 分

七．解下列各题（每小题 6 分，共 12 分）：

1. （11 学分） 求积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为立体

$\Omega: \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{6-x^2-y^2}$ 的外侧边界曲面。

解：山高斯公式可得

$I = \iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$　　3 分

山立体Ω的对称性可得

$I = 2\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{6}} r^3\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}r = 9\pi$　　3 分

（8、9 学分）利用多元函数微分学的方法求$1.02^{\cos 0.03}$的近似值（精确到小数点后两位）。

解：令 $z = x^{\cos y}$。　　2 分

令 $x_0 = 1$， $y_0 = 0$，代入方程可得 $z_0 = 1^{\cos 0} = 1$。

因为 $z_x = x^{\cos y - 1}\cos y$， $z_y = -\sin y x^{\cos y}\ln x$。

代入可得： $z_x(1,0) = 1, z_y(1,0) = 0$。　　2 分

所以 $z(1.02, 0.03) \approx z(1,0) + 1\times(1.02-1) + 0 = 1.02$　　2 分

2. 求微分方程 $y' + y'' = xy''$ 满足初值条件 $y'(2) = y(2) = 1$ 的特解。

解：令 $p = y'$，　　2 分

则有 $y'' = p'$。所以 $p + p' = xp'$，

即 $\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$。解得 $\ln p = \ln(x-1) + \ln C_1$。

即 $p = C_1(x-1)$。　　2 分

山 $y'(2) = 1$ 可得 $C_1 = 1$。

所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x - 1$。解得 $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + C_2$。

山 $y(2) = 1$ 可得 $C_2 = \frac{1}{2}$。

所以特解为 $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}$。　　2 分

八.（本题 6 分）（11 学分）求密度为常数 u 的均匀曲面 $\Sigma: |x|+|y|+|z|=1$ 绕 z 轴的转动惯量。

解：令 Σ 在第一卦限内的部分为 Σ_1，Σ_1 在 xoy 面的投影区域为 $D_{xy}: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x$。

曲面 Σ_1 的方程为：$z = 1-x-y$，所以 $z_x = -1, z_y = -1$。

则转动惯量为

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2+y^2) u dS \qquad 2 \text{ 分}$$

$$= 8u \iint_{\Sigma_1} (x^2+y^2) dS$$

$$= 8u \iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)\sqrt{3} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad 2 \text{ 分}$$

$$= 8\sqrt{3}u \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (x^2+y^2)\mathrm{d}y = \frac{4\sqrt{3}}{3}u \qquad 2 \text{ 分}$$

（8 学分）计算广义积分 $I = \int_1^{+\infty} (\frac{\ln x}{x})^2 \mathrm{d}x$。

解：$I = \int_1^{+\infty} \ln^2 x \mathrm{d}(\frac{1}{x}) = \left.\frac{-\ln^2 x}{x}\right|_1^{+\infty} + 2\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$ 　　3 分

$$= -2\int_1^{+\infty} \ln^2 x \mathrm{d}(\frac{1}{x}) = \left.\frac{-2\ln x}{x}\right|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \left.\frac{-2}{x}\right|_1^{+\infty} = 2 \qquad 3 \text{ 分}$$

（9 学分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n-1}}{n^2 4^n}$ 的收敛域。

解：令 $u_n = \frac{(x-1)^{2n-1}}{n^2 4^n}$。因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^2 n^2}{4(n+1)^2}\right| = \frac{(x-1)^2}{4}。 \qquad 3 \text{ 分}$$

当 $\frac{(x-1)^2}{4} < 1$，即 $-1 < x < 3$ 时幂级数绝对收敛。

当 $x=-1$ 时，幂级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n^2}$，收敛；

当 $x=3$ 时，幂级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$，收敛；

所以幂级数的收敛域为 $[-1,3]$。　　　　3 分

九．（本题 6 分）：已知函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$（$a>0$）上连续，证明 $\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x]^2$。

证明：证法一：令区域 $D_1: 0\le x\le a, 0\le y\le x$，区域 $D_2: 0\le y\le a, 0\le x\le y$。

$$I=\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y=\iint_{D_1} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

山于二重积分和变量符号无关，因此交换变量 x,y，可得

$$I=\iint_{D_2} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}[\iint_{D_1} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y]$$　　3 分

$$I=\frac{1}{2}\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a f(x)f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_0^a f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2$$　　3 分

证法二：令 $g(t)=\int_0^t \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y-\frac{1}{2}[\int_0^t f(x)\mathrm{d}x]^2$，　　2 分

则有　$g'(t)=f(t)\int_0^t f(y)\mathrm{d}y-f(t)\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\equiv 0$。　　2 分

所以 $g(t)\equiv g(0)=0$。

所以 $g(a)=0$，原式得证。　　2 分