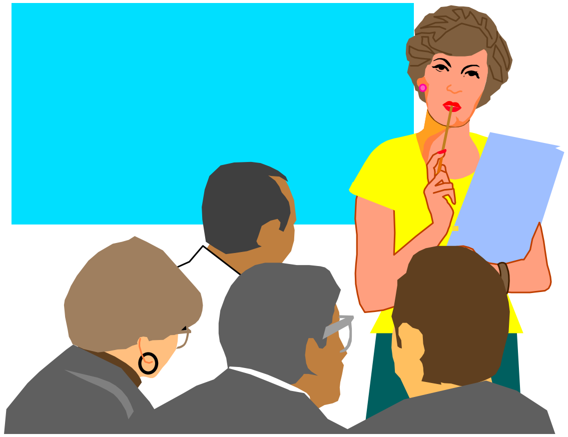
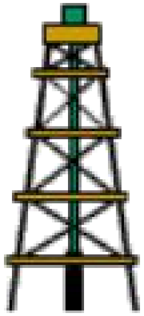
第四章





机 械 振 动

4.1谐振动

- 任一物理量在某一定值附近往复变化均称为振动.
- 机械振动　物体围绕一固定位置往复运动.

其运动形式有直线、平面和空间振动.

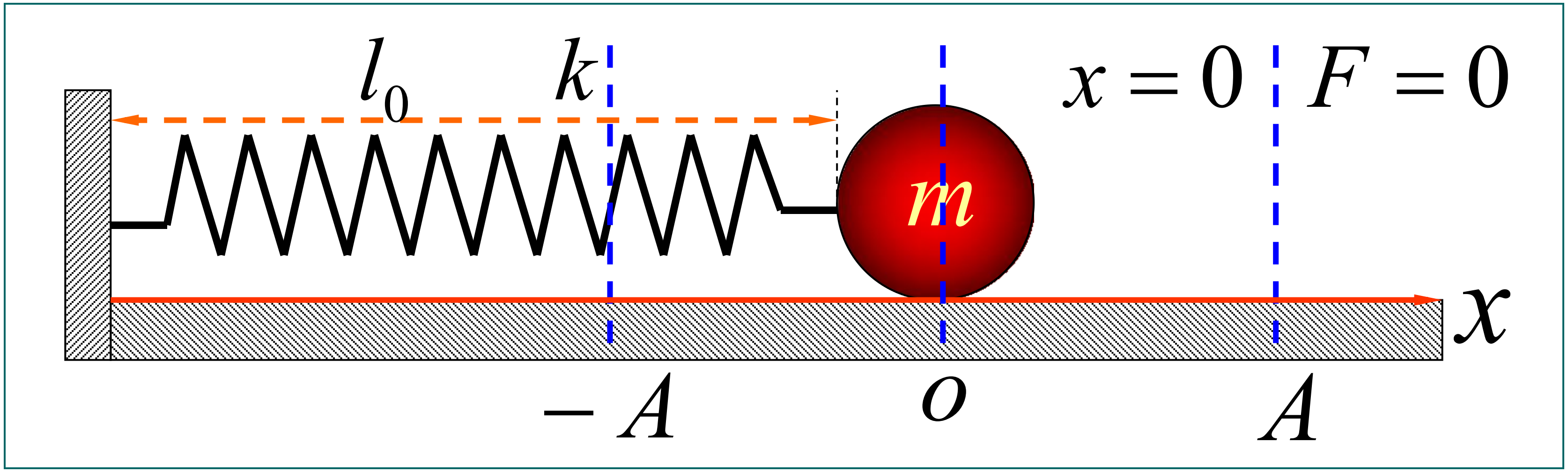
- 周期和非周期振动.
- 简谐运动　最简单、最基本的振动.

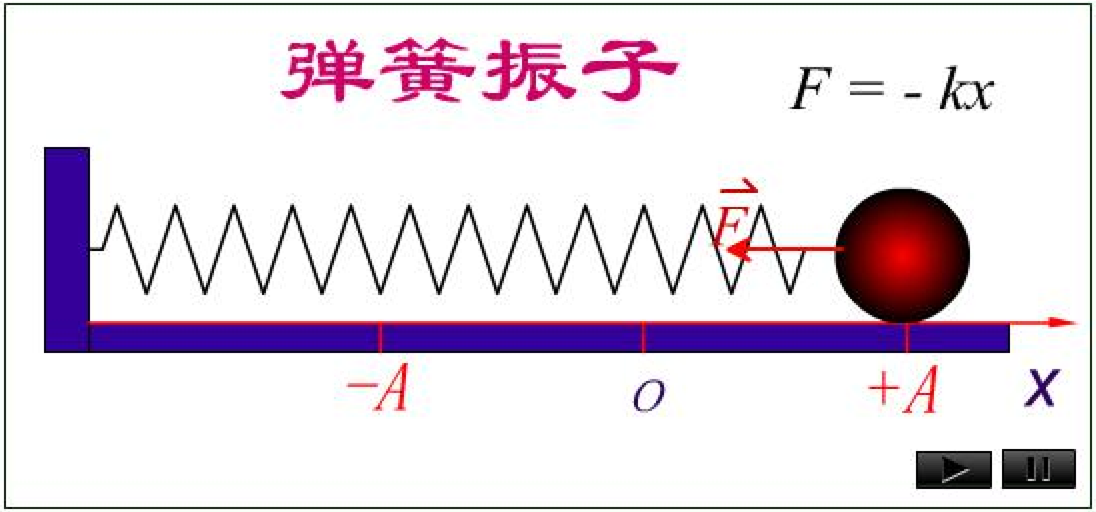
简谐运动 $\xleftrightarrow[\text{分解}]{\text{合成}}$ 复杂振动

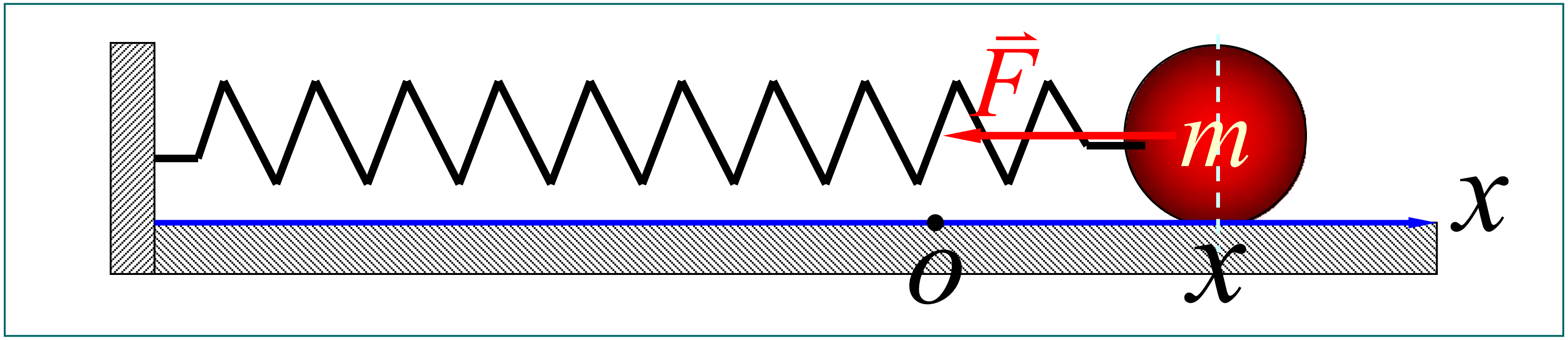
谐振子　作简谐运动的物体.

一. 谐振动的动力学方程和运动学方程

◆ 弹簧振子的振动







$$F = -kx = ma$$

$$x = \boxed{A}\cos(\omega t + \boxed{\varphi})$$

积分常数，根据初始条件确定

令 $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$

$$a = -\omega^2 x$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{取} \quad \varphi = 0$$

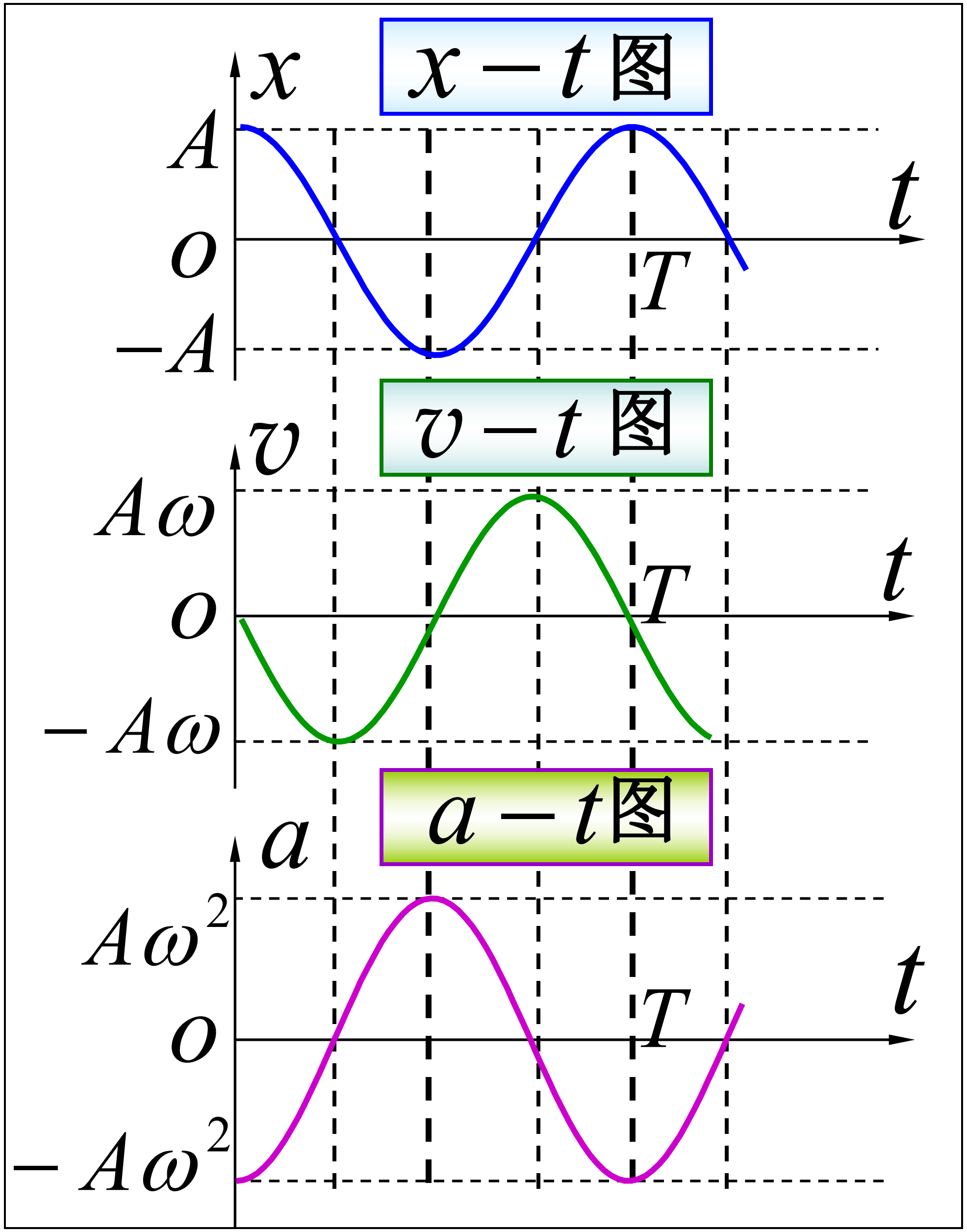
$$\boxed{x = A\cos(\omega t)}$$

$$\boxed{v = -A\omega\sin(\omega t)}$$

$$= A\omega\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$\boxed{a = -A\omega^2\cos(\omega t)}$$

$$= A\omega^2\cos(\omega t + \pi)$$



◆ 单摆的振动

$$\theta < 5^\circ \text{ 时}, \sin\theta \approx \theta$$

$$M = -mgl\sin\theta \approx -mgl\theta$$

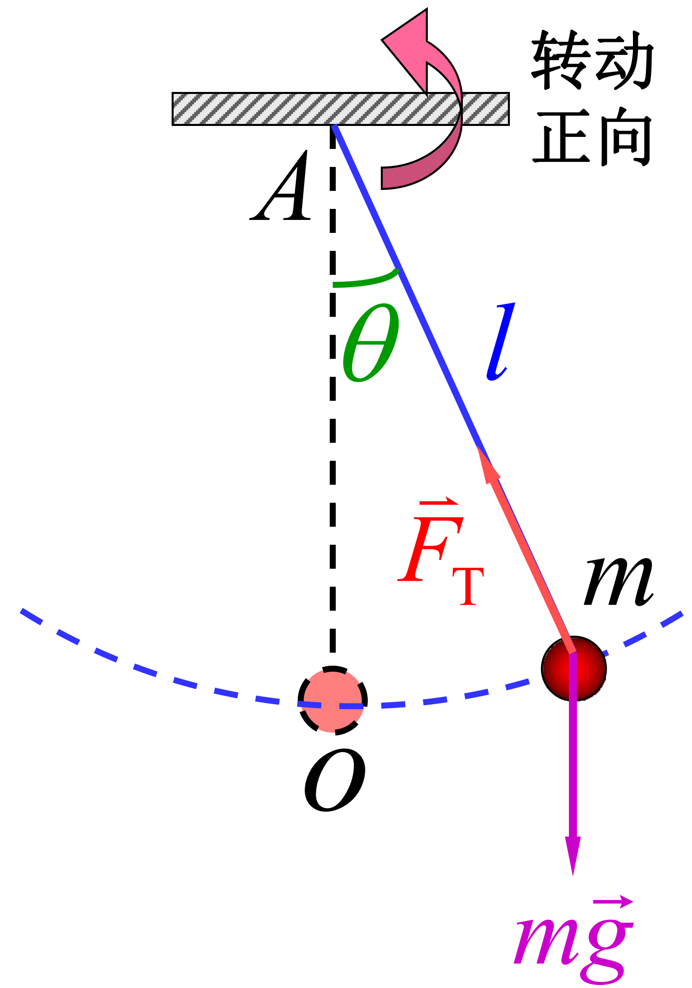
$$-mgl\theta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta \qquad \text{令 } \omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\theta$$

$$\theta = \theta_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}$$



$$J = ml^2$$

◆ 复摆的振动

$$(\theta < 5^\circ)$$

$$M \approx -mgl\,\theta$$

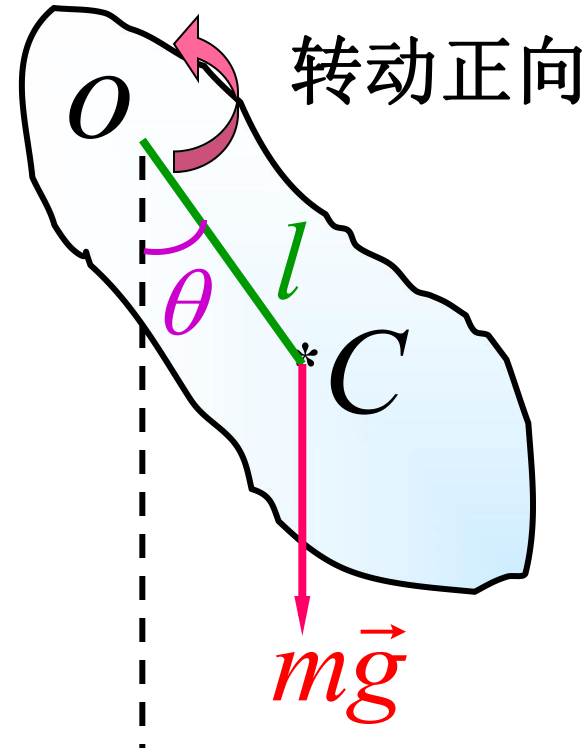
$$-mgl\,\theta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

令 $\omega^2 = \dfrac{mgl}{J}$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\theta$$

$$\theta = \theta_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$T = 2\pi\sqrt{J/mgl}$$



（C点为质心）

简谐运动的描述和特征

1）物体受线性回复力作用 $F = -kx$ 平衡位置 $x = 0$

2）简谐运动的动力学描述 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$

3）简谐运动的运动学描述 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

4）加速度与位移成正比而方向相反 $a = -\omega^2 x$

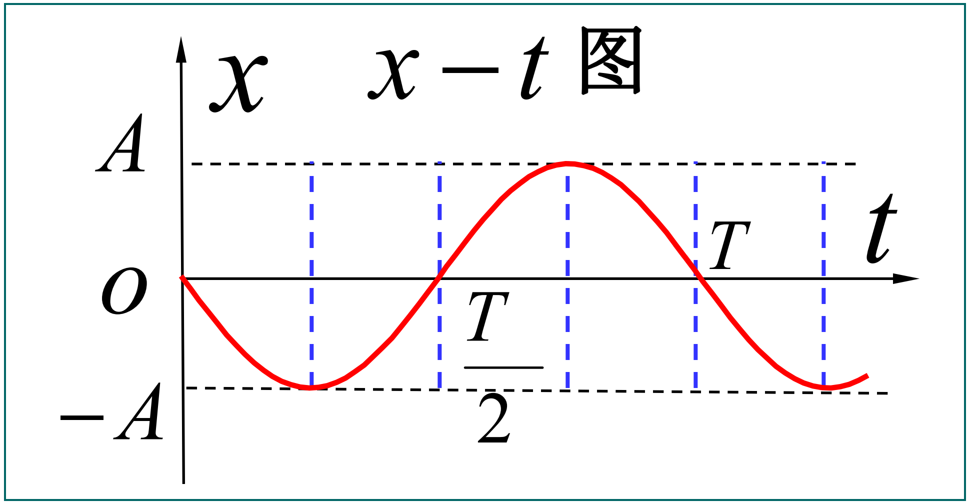
弹簧振子 $\omega = \sqrt{k/m}$　　单摆 $\omega = \sqrt{g/l}$

复摆 $\omega = \sqrt{mgl/J}$

二. 描述谐振动的三个物理量

1、 振幅

$$A = |x_{\max}|$$



2、周期、频率

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= A\cos[\omega(t+T)+\varphi]$$

注意

弹簧振子周期

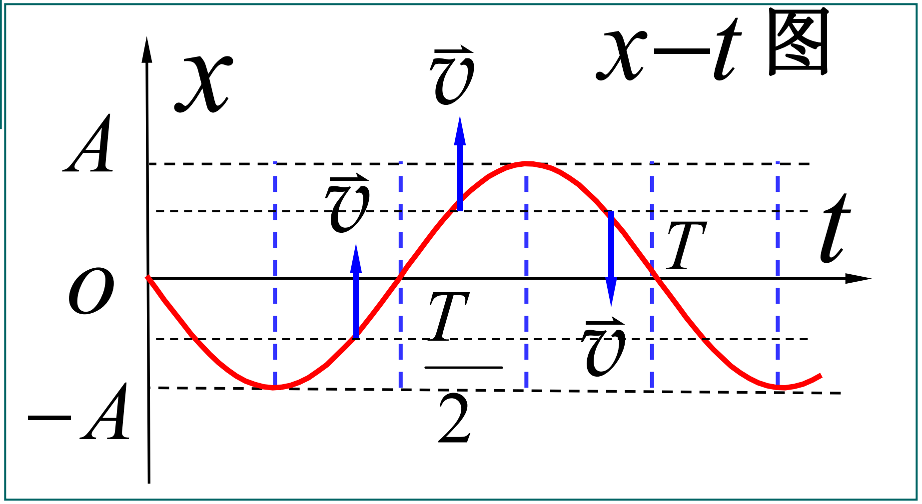
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

- 周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$
- 频率 $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$
- 圆频率 $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$

周期和频率仅与振动系统**本身**的物理性质有关

简谐运动中， x和v间不存在一一对应的关系.

$$\begin{cases} x = A\cos(\boxed{\omega t + \varphi}) \\ v = -A\omega\sin(\boxed{\omega t + \varphi}) \end{cases}$$



3、 相位 $\boxed{\omega t + \varphi}$

1） $\omega t + \varphi \rightarrow (x, v)$ 存在一一对应的关系；

2）相位在 $0 \sim 2\pi$ 内变化，质点无相同的运动状态；

相差 $2n\pi$ (n为整数)质点运动状态全同.（周期性）

3）初相位 $\varphi(t=0)$ 描述质点初始时刻的运动状态.

（ φ 取 $[-\pi \rightarrow \pi]$ 或 $[0 \rightarrow 2\pi]$ ）

4、 常数 A 和 φ 的确定

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

初始条件 $t = 0 \quad x = x_0 \quad v = v_0$

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \tan\varphi = \dfrac{-v_0}{\omega x_0} \end{cases}$$

对给定振动系统，周期由系统本身性质决定，振幅和初相由初始条件决定.

例1. 已知 $t=0, x=0, v<0$ 求 φ

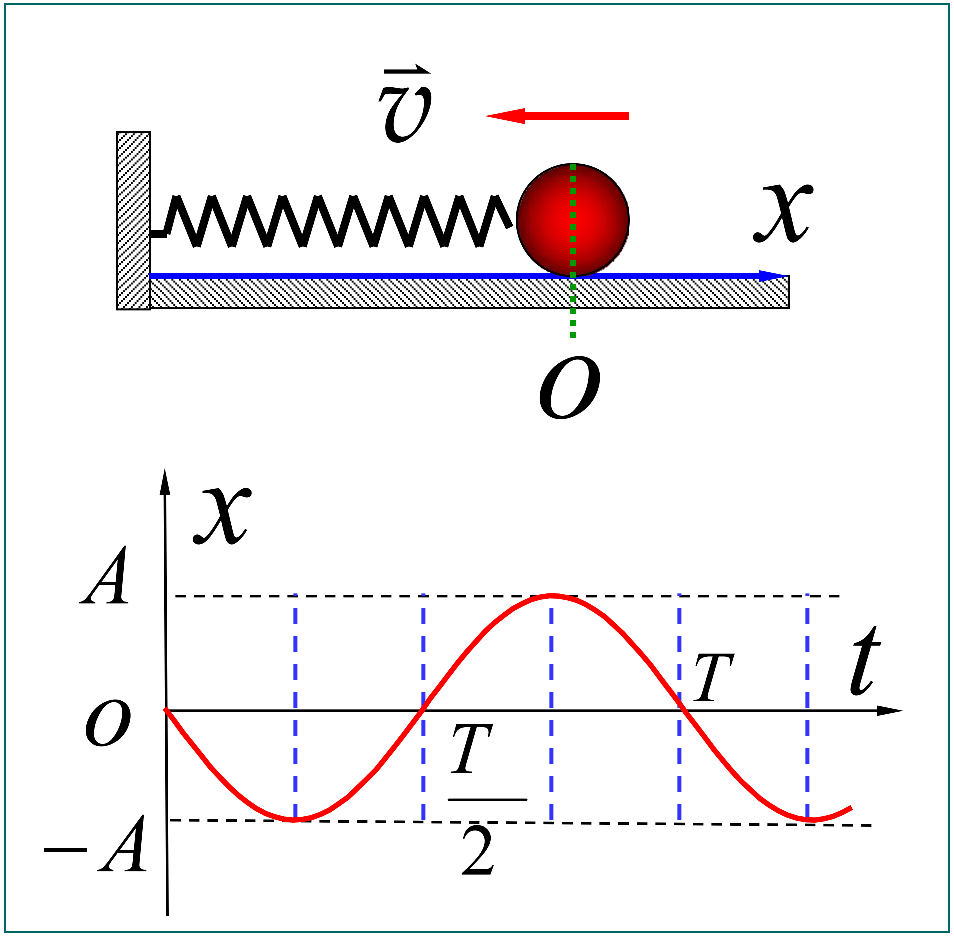
$$0 = A\cos\varphi$$

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\because v_0 = -A\omega\sin\varphi < 0$$

$\therefore \sin\varphi > 0$ 取 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

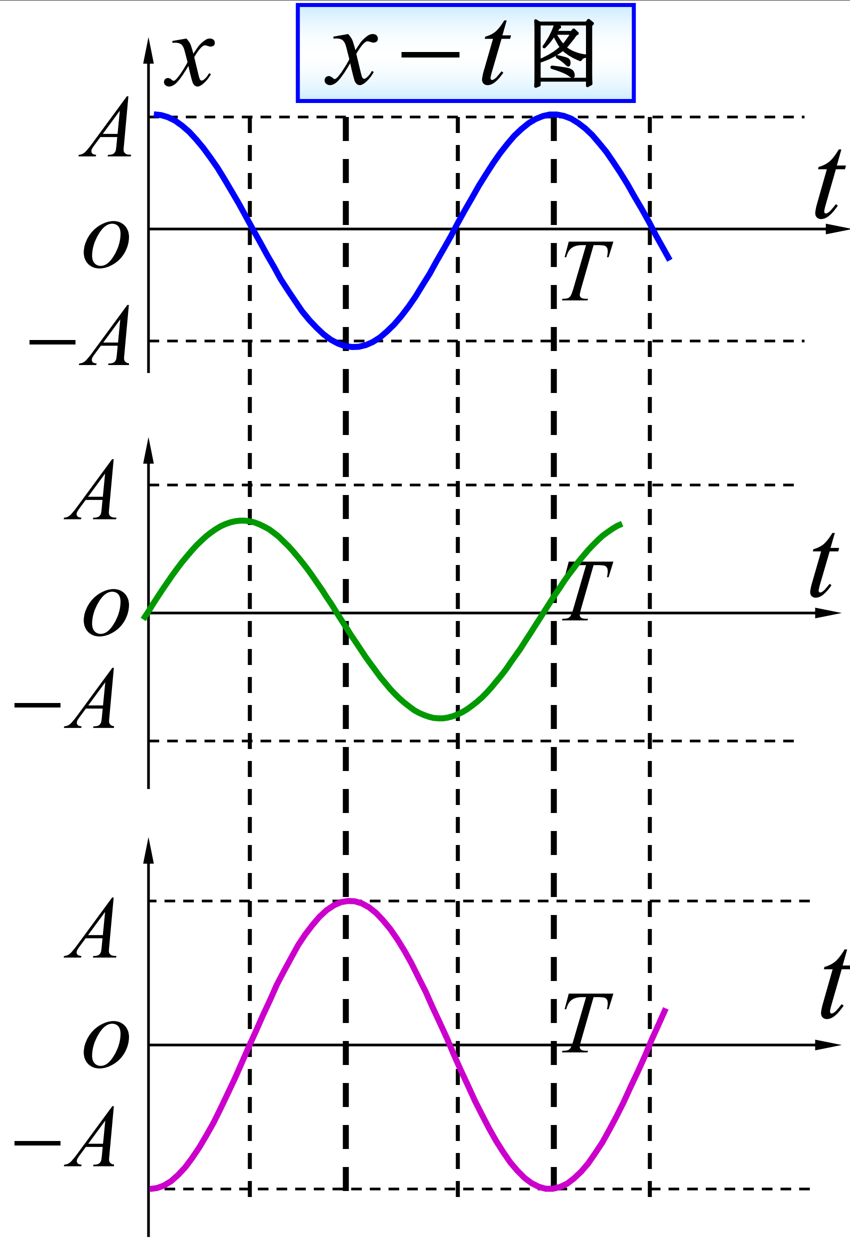
$$x = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



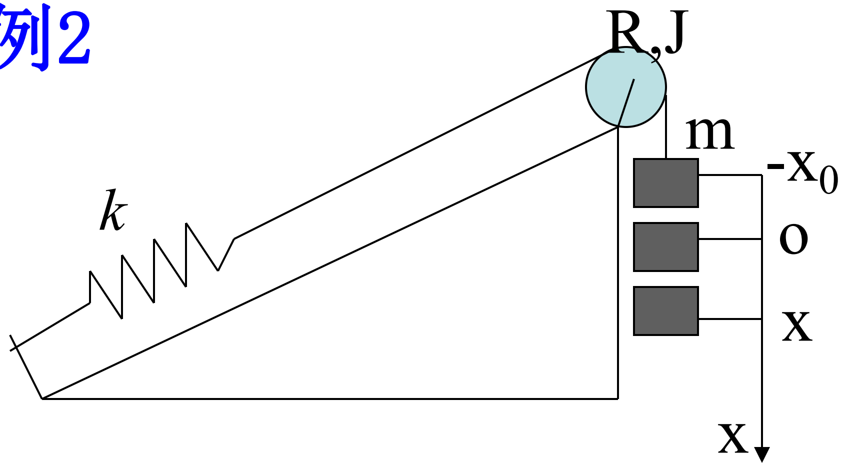
$$x = A\cos(\omega t)$$

$$x = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$x = A\cos(\omega t + \pi)$$



例2



已知：初态时弹簧处于原长

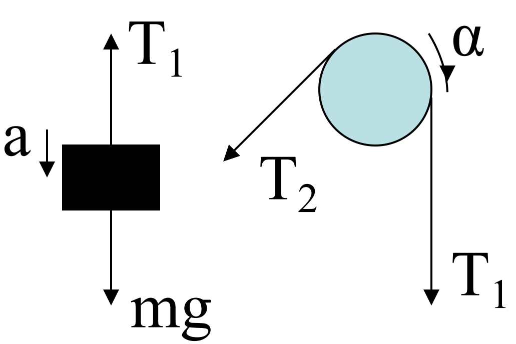
（1）证明物块作谐振动，

（2）写出振动表达式。

解:(1).确定平衡位置

$$mg = kx_0 \Rightarrow x_0 = \frac{mg}{k} \cdots\cdots(1)$$

(2).写出任意位置处物块的加速度



$$mg - T_1 = ma \cdots\cdots(2)$$

$$(T_1 - T_2)R = J\alpha = J\frac{a}{R} \cdots(3)$$

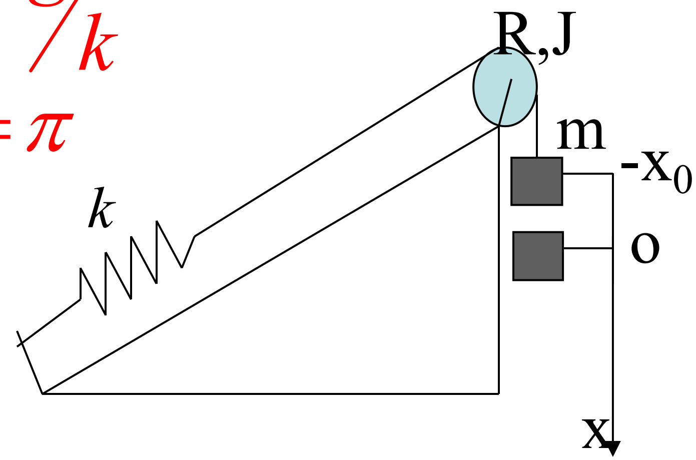
$$T_2 = k(x_0 + x\ ) \cdots\cdots(4)$$

$$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{matrix}\right\} \Rightarrow a = -\frac{kR^2}{J+mR^2}x \text{——谐振动}$$

$$a = -\omega^2 x$$

$$\omega = R\sqrt{\frac{k}{J+mR^2}}$$

$$*\text{初态为}t=0\begin{cases}x_0=-{mg}/{k}\\ v_0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A={mg}/{k}\\ \varphi=\pi\end{cases}$$



$$x=\frac{mg}{k}\cos(R\sqrt{\frac{k}{J+mR^2}}t+\pi)$$

$$*\text{平衡位置为}t=0\text{，则：}x_0=0$$

$$mgx_0=\frac{1}{2}kx_0^2+\frac{1}{2}mv_o^{\ 2}+\frac{1}{2}J(\frac{v_0}{R})^2\Rightarrow v_0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A={mg}/{k}\\ \varphi=-\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

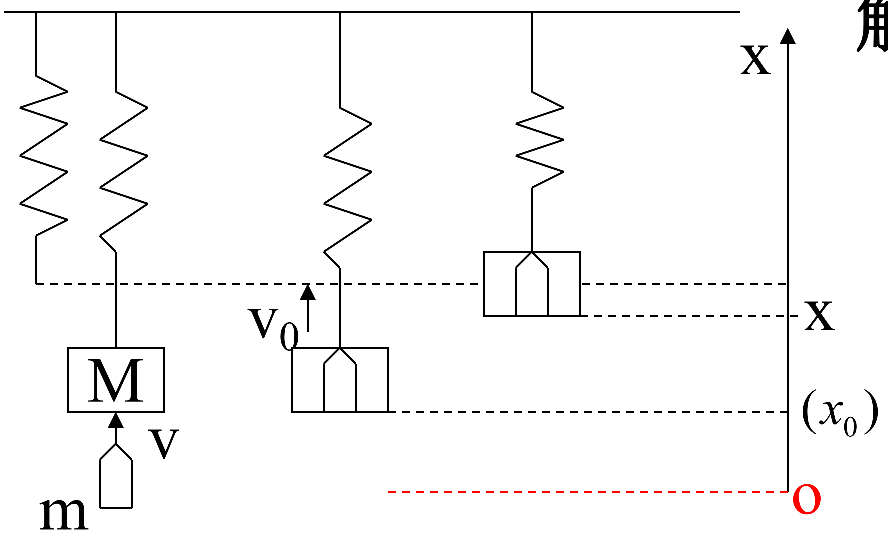
$$x=\frac{mg}{k}\cos(R\sqrt{\frac{k}{J+mR^2}}t-\frac{\pi}{2})$$

证明系统作简谐振动的方法：

- 1. 选系统，找到平衡位置（系统所受合力为零）
- 2. 建立坐标系，（以平衡位置为原点）
- 3. 在任意位移处(x)进行受力分析
- 4. 写出合力的表达式 $\boldsymbol{F = -Kx}$
- 动力学的微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$
- 方程的解 $X = A\cos(\omega t + \varphi)$

【例3】弹簧振子（M ，k）竖直悬挂，处于平衡，子弹（m）以速度v由下而上射入物块并嵌入其内。求：(1).物块振动的T和A;

(2).物块从开始运动到最远处所需的时间。



解：(1).x处物块动力学方程

$$(m+M)\frac{d^2x}{dt^2}=-(m+M)g+k\left[\frac{(m+M)g}{k}-x\right]=-kx$$

$$\therefore \omega=\sqrt{\frac{k}{m+M}} \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

$$*初态为 t=0\left\{\begin{array}{l} x_0 = {mg}/{k} \\ v_0 = \dfrac{mv}{m+M} \end{array}\right.$$

（可由动量守恒得）

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$$

$$\Rightarrow \quad A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}$$

$$(2).\quad x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

最远点：$x = A$，　　即 $\omega t + \varphi = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{\varphi}{\omega}$

$$\because \varphi = tg^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \qquad \left\{\begin{array}{l} \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m+M}} \\ x_0 = {mg}/{k} \\ v_0 = \dfrac{mv}{m+M} \end{array}\right.$$

$$\varphi \Rightarrow t$$