练习二十八

一（1）曲面$xyz=8$上平行于平面$x+2y+4z+3=0$的切平面方程是**D**

$(A)\ x+2y+4z=17$

$(B)\ x+2y+4z=14$

$(C)\ x+2y+4z=21$

$(D)\ x+2y+4z=12$

（2）若曲线$\begin{cases} xyz=2 \\ x=y+z \end{cases}$上点$(2,1,1)$处切向量与 oz 轴夹锐角，则此切向量与 oy 轴所夹的角为 （ **B** ）

（A）$\dfrac{\pi}{4}$；　（B）$\dfrac{3\pi}{4}$；　（C）$\dfrac{\pi}{3}$；　（D）$\dfrac{2\pi}{3}$。

分析： 曲线在（2,1,1）的一个切向量为

$$\vec{l}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ yz & xz & xy \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}_{(2,1,1)} =\{0,3,-3\}=3\{0,1,-1\}$$

由于切向量与z轴夹锐角，所以取$\vec{l}_1=\{0,-1,1\}$

此向量与y轴夹角：$\cos\theta=\dfrac{\vec{l}_1\cdot\vec{j}}{|\vec{l}_1|}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$\therefore \theta=\dfrac{3\pi}{4}$

（3）函数$z=1-x^2-y^2$在点$M_0(3,-4)$处沿函数过该点的等值线外法向$\vec{n}$的方向导数$\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{n}}\right|_{M_0}=$ （C ）

（A）$-6\vec{i}+8\vec{j}$；（B）$3\vec{i}-4\vec{j}$；（C）-10；（D）10。

分析：由于$z_x=-2x, z_y=-2y$ $\nabla f(M_0)=\{-6,8\}$

所以 $\vec{n}=-\{-6,8\}$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{n}}\right|_{M_0}=\nabla f(M_0)\cdot\vec{n}^0=\{-6,8\}\cdot\{\frac{6}{10},-\frac{8}{10}\}=-10$$ 选(C)

一、（4）椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在点 $P_0=(-1,-1,1)$处的切平面与平面 $x+y+z=1$夹角为 **（D）**

（A） 0 ； （B） $\frac{\pi}{4}$； $(C)\ \frac{\pi}{3}$ ； $(D)\ \frac{\pi}{2}$

二．填空题：

(1) 空间曲线$x = f(y), y = g(z)$上对应于$z = z_0$点的切线方程是______.

分析：$x = f[g(z)], y = g(z), z = z.$

切向量$\vec{s} = \{ f'[g(z_0)] \cdot g'(z_0), g'(z_0), 1\}$

切线方程

$$\frac{x - f[g(z_0)]}{f'[g(z_0)] \cdot g'(z_0)} = \frac{y - g(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{z - z_0}{1}$$

（2）曲面 $z = x^2 + y^2$ 上垂直于直线 $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2z = 2 \end{cases}$ 的切平面方程是 $\underline{2x + 2y - z - 2 = 0}$。

分析：曲面上任意点处法向量为 $\vec{n} = \{2x, 2y, -1\}$

已知直线的方向向量为 $\vec{l} = \{1,0,2\} \times \{0,1,2\} = \{-2,-2,1\}$

由于 $\vec{l}$ 平行于 $\vec{n}$

所以，$\dfrac{2x}{-2} = \dfrac{2y}{-2} = -1$ 切点为（1,1,2）

切平面为 $2(x-1) + 2(y-1) - (z-2) = 0$

即 $2x + 2y - z - 2 = 0$

二、(3)曲线 $\vec{r}=\{1,t,t^2\}$ 上在

$M_0=(1,2,4)$ 点处的法平面方程是

$y+4z-18=0$

二、（4）曲面 $x^2+y^2-z^2=24$

上平行于平面 $3x-y-2z=0$

的切平面方程是 $3x-y-2z=\pm 12$

三．求平面 $y+z=x-1$ 与曲面 $x^3-y^2-z^3=1$ 的交线上点 $M_0=(1,1,-1)$ 处的切线方程.

解法1： $\begin{cases} y+z=x-1 \\ x^3-y^2-z^3=1 \end{cases}$ 两边对 x 求导得

$$\begin{cases} y_x+z_x=1 \\ 3x^2-2yy_x-3z^2z_x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_x=0 \\ z_x=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{切向量 } \vec{l}=\{1,0,1\}$$

切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+1}{1}$

解法2：设 $\begin{cases} F(x,y,z)=y+z-x+1=0 \\ G(x,y,z)=x^3-y^2-z^3-1=0 \end{cases}$

取切向量 $\vec{l}=\nabla F\times\nabla G$

四．求原点到椭球面 $x^2+y^2+2z^2=31$ 上 $M_0=(3,2,3)$ 点处切平面的距离。

解：切平面法向量

$$\vec{\boldsymbol{n}}=\{2\boldsymbol{x},2\boldsymbol{y},4\boldsymbol{z}\}\Big|_{M_0}=\{6,4,12\}\Big|//\{3,2,6\}\Big|$$

切平面方程为 $3(\boldsymbol{x}-3)+2(\boldsymbol{y}-2)+6(\boldsymbol{z}-3)=0$

即 $3\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+6\boldsymbol{z}-31=0$

所以 $\boldsymbol{d}=\dfrac{|-31|}{\sqrt{9+4+36}}=\dfrac{31}{7}$

五．求函数 $u=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 在点 $M_0=(1,2,-2)$ 处沿向量 $\vec{\tau}$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \tau}\right|_{M_0}$，其中 $\vec{\tau}$ 为曲线 $\vec{r}=\{t,2t^2,-2t^4\}$ 上点 M_0 处与 z 轴夹锐角的切向量.

解：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=-\left.\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_0}=-\frac{2}{27}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=\left.\frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_0}=\frac{5}{27}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=-\left.\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_0}=\frac{4}{27}$$

$$\therefore\quad \left.\nabla u\right|_{M_0}=\{-\frac{2}{27},\frac{5}{27},\frac{4}{27}\}$$

$\because \quad M_0(1,2,-2)$对应于参数 $t=1$

$\therefore$ 在M_0处切线方向关 $\{1,4t,-8t^3\}_{t=1}=\{1,4,-8\}$

由于$\vec{\tau}$与$\vec{k}=\{0,0,1\}$成锐角，所以，$\vec{\tau}\cdot\vec{k}>0$

应取 $\vec{\tau}=\{-1,-4,8\}$ $\quad \vec{\tau}^{\,0}=\{-\frac{1}{9},-\frac{4}{9},\frac{8}{9}\}$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{\tau}}\right|_{M_0}=\{-\frac{2}{27},\frac{5}{27},\frac{4}{27}\}\cdot\{-\frac{1}{9},-\frac{4}{9},\frac{8}{9}\}=\frac{14}{243}$$

六．证明曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$上任一点$P=(x,y,z)$ $(xyz\neq 0)$处切平面在三坐标轴上截距之和为定值.

解：　令　$F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$

$$F_x=\frac{1}{2\sqrt{x}},\qquad F_y=\frac{1}{2\sqrt{y}},\qquad F_z=\frac{1}{2\sqrt{z}},$$

在任一点处法向量为 $\vec{n}=\{\frac{1}{2\sqrt{x_0}},\frac{1}{2\sqrt{y_0}},\frac{1}{2\sqrt{z_0}}\}$

切平面：

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$$

与三个坐标轴的截距为： $x=\sqrt{x_0}(\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})+x_0$

$$y=\sqrt{y_0}(\sqrt{x_0}+\sqrt{z_0})+y_0 \quad z=\sqrt{z_0}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0})+z_0$$

$$x+y+z=2\sqrt{x_0y_0}+2\sqrt{y_0z_0}+2\sqrt{x_0z_0}+x_0+y_0+z_0$$

$$=(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})^2=a$$

七．试证曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t$, $y=\mathrm{e}^t\sin t$, $z=\mathrm{e}^t$ 在锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上，且曲线上任一点处的切线与锥面上过该点的母线夹角为定值．

证明：由于 $x^2+y^2=e^{2t}=z^2$， $z=e^t>0$ 所以曲线在锥面上.

连接点 $(e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$ 与锥面顶点 O 的锥面母线方程为

$$\frac{X}{e^t\cos t}=\frac{Y}{e^t\sin t}=\frac{Z}{e^t}$$

而曲线的切线方向向量为：

$$\vec{\tau}=\{e^t(\cos t-\sin t), e^t(\sin t+\cos t), e^t\}$$

该向量与母线方向向量 $\overrightarrow{OM}=\{e^t\cos t, e^t\sin t, e^t\}$ 夹角余弦：

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{\tau}}{|\overrightarrow{OM}||\vec{\tau}|}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

故结论成立。

八．证明曲面$z=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$上任一点$M_0=(x_0,y_0,z_0)$ $(x_0^2+y_0^2\neq 0)$处的法线都垂直于直线$\dfrac{x}{x_0}=\dfrac{y}{y_0}=\dfrac{z}{z_0}$.

证明：$z_x=\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$　　$z_y=\dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

所以法向量为 $\vec{n}=\{\dfrac{y_0^3}{(x_0^2+y_0^2)^{\frac{3}{2}}},\dfrac{y_0^3}{(x_0^2+y_0^2)^{\frac{3}{2}}},-1\}$

直线的方向向量$\vec{l}=\{x_0,y_0,z_0\}$　　$z_0=\dfrac{x_0y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$

于是$\vec{n}\cdot\vec{l}=\dfrac{x_0y_0^3}{(x_0^2+y_0^2)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{x_0^3y_0}{(x_0^2+y_0^2)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{x_0y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$

$$=\frac{x_0y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}-\frac{x_0y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=0\qquad\therefore\ \vec{n}\perp\vec{l}$$

九．设函数$F(x,y,z)$有一阶连续偏导数，且$\nabla F\neq 0$，对任意实数x,y,z和t有$F(tx,ty,tz)=t^kF(x,y,z)$（ k是正整数），证明曲面$F(x,y,z)=0$上任一点处的切平面都通过一个定点.

证明：$F(tx,ty,tz)=t^kF(x,y,z)$两端对t求导：

$$xF_x+yF_y+zF_z=kt^{n-1}F(x,y,z)$$

令$t=1$， 则$xF_x+yF_y+zF_z=kF$

曲面$F(x,y,z)=0$上任意点(x,y,z)处切平面的法向量

$$\vec{n}=\{F_x,F_y,F_z\}$$

切平面方程为:

$$F_x(X-x)+F_y(Y-y)+F_z(Z-z)=0$$

即 $XF_x+YF_y+ZF_z=xF_x+yF_y+zF_z=kF(x,y,z)=0$

当（$X,Y,Z)=(0,0,0)$时，满足上方程

所以，任意一点处的切平面都过定点（0,0,0）

十

在函数$u=xyz$的等值面族中求一个曲面,

使它和平面$3x+6y+2z=18$相切.

解: $\nabla u=\{yz,xz,xy\}//\{3,6,2\}$

有 $\dfrac{yz}{3}=\dfrac{xz}{6}=\dfrac{xy}{2}$ 于是$x=2y,z=3y$

代入$3x+6y+2z=18$

解得$x=2,y=1,z=3$ 此为切点坐标

因此所求曲面为$xyz=6$

十一

过直线$L:\begin{cases} x+y=b \\ x+ay-z=3 \end{cases}$作曲面$z=x^2+y^2$的切平面$\pi$,

已知切点坐标是$P=(1,-2,5)$,求a,b之值.

解：　曲面$z=x^2+y^2$的切平面π为

$$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$$

即$2x-4y-z-5=0$

由直线L的方程可以得到

$$x = b - y$$

及$z = x + ay - 3 = b - y + ay - 3$

代入π　　　有$(-5 - a)y + (b - 2) = 0$

得$-5 - a = 0$且$b - 2 = 0$

$$\therefore a = -5,\ b = 2$$

十二. 在曲线 $x=t+1,\ y=t^2, z=t^3-1$ 上，求：

（1）与x轴平行的切线；

（2）与x轴垂直的切线

解：切向量 $\vec{l}=\left\{1,2t,3t^2\right\}$

(1) $\vec{l}=\left\{1,2t,3t^2\right\}//i=\left\{1,0,0\right\}$

$\Rightarrow t=0$ 所以切点为 $(1,0,-1)$

切线方程为 $$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{0}$$

$$(2) \quad \vec{l} = \{1, 2t, 3t^2\} \perp i = \{1, 0, 0\}$$

$$\Rightarrow \{1, 2t, 3t^2\} \square \{1, 0, 0\} = 0$$

但这样的 t 不存在

所以这样的切线不存在

十三．若两个曲面Σ_1 和Σ_2在它们交线上任一点处的法向量都相互垂直，则称这两个曲面正交。证明曲面 $\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $\Sigma_2: ayz+bzx+cxy=0$ 正交（其中常数a，b，c，R均为正数）.

证明：设$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$

$$G(x,y,z)=ayz+bzx+cxy$$

则曲面Σ_1上任意点处的法向量为

$$\vec{n}_1=\{F_x,F_y,F_z\}=\{2x,2y,2z\}$$

则曲面Σ_2上任意点处的法向量为

$$\vec{n}_2=\{G_x,G_y,G_z\}=\{bz+cy,az+cx,ay+bx\}$$

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=2(bxz+cxy+ayz+cxy+ayz+bxz)$$

$$=4(ayz+bzx+cxy)=0 \quad \therefore \vec{n}_1\perp\vec{n}_2$$ 即两曲面正交.

十四. 求曲线$L:\begin{cases} x+y+z=0, \\ xy+yz+zx=-3 \end{cases}$上的点P,

使L在点P处的切线平行于平面

$x+y-z=0$

解：曲线方程两边对x求导，$y=y(x)$，$z=z(x)$可得

$$\begin{cases} 1+y_x+z_x=0 \\ y+xy_x+zy_x+yz_x+xz_x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_x=\dfrac{x-z}{z-y} \\ z_x=\dfrac{y-x}{z-y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{切向量 } \vec{l} = \left\{1, \frac{x-z}{z-y}, \frac{y-x}{z-y}\right\}$$

由 $\vec{l} \perp \vec{n} = \{1,1,-1\}$

得 $\vec{l} \cdot \vec{n} = 0$

所以P点坐标为 $P_1(1,1,-2), P_2(-1,-1,2)$

十五. 求曲面 $xyz=1$ 上任一点 (α,β,γ) 处的法线方程和切平面方程，证明切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积是常数.

$$\vec{n}=\{F_x,F_y,F_z\}\Big|_{(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}=\{\beta\gamma,\alpha\gamma,\alpha\beta\}$$

法线方程为 $\dfrac{x-\alpha}{\beta\gamma}=\dfrac{y-\beta}{\alpha\gamma}=\dfrac{z-\gamma}{\alpha\beta}$

切平面方程为 $\beta\gamma(x-\alpha)+\alpha\gamma(y-\beta)+\alpha\beta(z-\gamma)=0$

即 $\dfrac{x}{3\alpha}+\dfrac{y}{3\beta}+\dfrac{z}{3\gamma}=1$

所以 $V=\dfrac{1}{6}\left|3\alpha\cdot3\beta\cdot3\gamma\right|=\dfrac{9}{2}$ $\qquad(\alpha\beta\gamma=1)$

十六. 求曲线 $x=t\,, y=-t^2\,, z=t^3$

上与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线方程.

解：切向量 $\vec{l}=\{1,-2t,3t^2\}$

$$\{1,-2t,3t^2\}\cdot\{1,2,1\}=0\Rightarrow t=1\ ,\ \frac{1}{3}$$

所以切点为 $M_1(1,-1,1)$ ， $M_2(\frac{1}{3},-\frac{1}{9},\frac{1}{27})$

对应的切向量为

$$\vec{l}_1=\{1,-2,3\},\ \vec{l}_2=\left\{1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\}//\{3,-2,1\}$$

切线方程为

$$L_1: \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$$

$$L_2: \quad \frac{x-\frac{1}{3}}{3}=\frac{y+\frac{1}{9}}{-2}=\frac{z-\frac{1}{27}}{1}$$

十七 求螺旋面$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v (u \geq 0, v \in R) \\ z = v \end{cases}$

在点(1,0,0)处的切平面与法线方程.

解1：$\dfrac{y}{x} = \tan v \qquad y = x\tan z$

$$F(x,y,z) = y - x\tan z$$

$$F_x = -\tan z, \quad F_y = 1, \quad F_z = -x\sec^2 z$$

$$\vec{n} = \{0,1,-1\}$$

切平面 $y - z = 0$ 法线 $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-1}$

解2　切点(1,0,0)，　$z_x = v_x$，$z_y = v_y$

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \end{cases} \text{两边对}x\text{求偏导} \begin{cases} 1 = u_x \cos v - u\sin v \cdot v_x \\ 0 = u_x \sin v + u\cos v \cdot v_x \end{cases}$$

代入$u=1$，$v=0$解得　　$v_x = 0$

同理可得　$v_y = 1$

$$\therefore \vec{n} = \{0,1,-1\}$$

切平面方程：　$y - z = 0$

法线方程：$\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-1}$