第三章 椭圆型方程的差分法

Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x,y), & (x,y) \in \Omega, (1) \\ u = \phi(x,y), & (x,y) \in \Gamma \quad (2) \end{cases}$$

第三章 椭圆型方程的差分法

Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x,y), & (x,y) \in \Omega, (1) \\ u = \phi(x,y), & (x,y) \in \Gamma \quad (2) \end{cases}$$

- Γ 为二维有界区域Ω的边界。

第三章 椭圆型方程的差分法

Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x,y), & (x,y)\in\Omega, (1) \\ u=\phi(x,y), & (x,y)\in\Gamma \quad (2) \end{cases}$$

- Γ 为二维有界区域Ω的边界。
- $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$为二维Laplace算子。

第三章 椭圆型方程的差分法

Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x,y), & (x,y) \in \Omega, (1) \\ u = \phi(x,y), & (x,y) \in \Gamma \quad (2) \end{cases}$$

- Γ 为二维有界区域Ω的边界。
- $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$为二维Laplace算子。
- Poisson方程是最简单最典型的椭圆型方程。

第三章 椭圆型方程的差分法

Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x,y), & (x,y)\in\Omega, (1) \\ u = \phi(x,y), & (x,y)\in\Gamma \quad (2) \end{cases}$$

- Γ 为二维有界区域Ω的边界。
- $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$为二维Laplace算子。
- Poisson方程是最简单最典型的椭圆型方程。
- 若$f = 0$，则方程(1)称为Laplace方程或调和方程

第三章 椭圆型方程的差分法

Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x,y), & (x,y) \in \Omega, (1) \\ u = \phi(x,y), & (x,y) \in \Gamma \quad (2) \end{cases}$$

- Γ 为二维有界区域Ω的边界。
- $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$为二维Laplace算子。
- Poisson方程是最简单最典型的椭圆型方程。
- 若$f = 0$，则方程(1)称为Laplace方程或调和方程
- 边值问题(1)(2)的解析解通常求不出。

第三章 椭圆型方程的差分法

Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x,y), & (x,y)\in\Omega, (1) \\ u=\phi(x,y), & (x,y)\in\Gamma \quad (2) \end{cases}$$

- Γ 为二维有界区域Ω的边界。
- $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$为二维Laplace算子。
- Poisson方程是最简单最典型的椭圆型方程。
- 若$f=0$，则方程(1)称为Laplace方程或调和方程
- 边值问题(1)(2)的解析解通常求不出。
- 一般只能用数值方法求其数值解，

第三章 椭圆型方程的差分法

Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x,y), & (x,y) \in \Omega, (1) \\ u = \phi(x,y), & (x,y) \in \Gamma \quad (2) \end{cases}$$

- Γ 为二维有界区域Ω的边界。
- $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$为二维Laplace算子。
- Poisson方程是最简单最典型的椭圆型方程。
- 若$f = 0$，则方程(1)称为Laplace方程或调和方程
- 边值问题(1)(2)的解析解通常求不出。
- 一般只能用数值方法求其数值解，
- 数值方法主要有:差分法，有限元法，边界元法。

第三章 椭圆型方程的差分法

Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x,y), & (x,y) \in \Omega, (1) \\ u = \phi(x,y), & (x,y) \in \Gamma \quad (2) \end{cases}$$

- Γ 为二维有界区域Ω的边界。
- $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$为二维Laplace算子。
- Poisson方程是最简单最典型的椭圆型方程。
- 若$f = 0$，则方程(1)称为Laplace方程或调和方程
- 边值问题(1)(2)的解析解通常求不出。
- 一般只能用数值方法求其数值解，
- 数值方法主要有:差分法，有限元法，边界元法。
- 本章介绍差分法主要包括：五点差分格式，九点差分格式，三角形网格以及差分解的惟一性、收敛性

第三章 椭圆型方程的差分法

Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x,y), & (x,y) \in \Omega, (1) \\ u = \phi(x,y), & (x,y) \in \Gamma \quad (2) \end{cases}$$

- Γ 为二维有界区域Ω的边界。
- $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$为二维Laplace算子。
- Poisson方程是最简单最典型的椭圆型方程。
- 若$f = 0$，则方程(1)称为Laplace方程或调和方程
- 边值问题(1)(2)的解析解通常求不出。
- 一般只能用数值方法求其数值解，
- 数值方法主要有:差分法，有限元法，边界元法。
- 本章介绍差分法主要包括：五点差分格式，九点差分格式，三角形网格以及差分解的惟一性、收敛性

⋆3.1 矩形网格

⋆3.1.1五点差分格式

⋆3.1 矩形网格

⋆3.1.1五点差分格式

剖分：

- 在平面上取一个固定点(x_0, y_0),过该点分别以步长h和τ作垂直于x轴和y轴的两族平行线(称为网格线).

$$x = x_0 + ih, i = 0, 1, \cdots, N_1$$

$$y = y_0 + j\tau, j = 0, 1, \cdots, N_2$$

使得区域$\Omega \subset \{(x, y)|x_0 \le x \le x_0 + N_1 h, y_0 \le y \le N_2\tau\}$

⋆3.1 矩形网格

⋆3.1.1五点差分格式

剖分：

- 在平面上取一个固定点(x_0,y_0),过该点分别以步长h和τ作垂直于x轴和y轴的两族平行线(称为网格线).

$$x=x_0+ih, i=0,1,\cdots,N_1$$

$$y=y_0+j\tau, j=0,1,\cdots,N_2$$

使得区域$\Omega\subset\{(x,y)|x_0\le x\le x_0+N_1h, y_0\le y\le N_2\tau\}$

- 网格点:记$x_i=x_0+ih, i=0,1,\cdots,N_1, y_j=y_0+j\tau, j=0,1,\cdots,N_2$,称网格线的交点$(x_i,y_j)$为网格点

⋆3.1 矩形网格

⋆3.1.1五点差分格式

剖分：

- 在平面上取一个固定点(x_0, y_0),过该点分别以步长h和τ作垂直于x轴和y轴的两族平行线(称为网格线).

$$x = x_0 + ih, i = 0, 1, \cdots, N_1$$

$$y = y_0 + j\tau, j = 0, 1, \cdots, N_2$$

  使得区域$\Omega \subset \{(x, y)|x_0 \leq x \leq x_0 + N_1 h, y_0 \leq y \leq N_2\tau\}$

- 网格点:记$x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \cdots, N_1, y_j = y_0 + j\tau, j = 0, 1, \cdots, N_2$,称网格线的交点$(x_i, y_j)$为网格点
- 内部节点：位于Ω内部的网格点称为内部节点，简称内点。它的全体记为Ω_h，$\Omega_h = \{(x_i, y_j), (x_i, y_j) \in \Omega\}$

⋆3.1 矩形网格

⋆3.1.1五点差分格式

剖分：

- 在平面上取一个固定点(x_0,y_0),过该点分别以步长h和τ作垂直于x轴和y轴的两族平行线(称为网格线).

$$x=x_0+ih, i=0,1,\cdots,N_1$$

$$y=y_0+j\tau, j=0,1,\cdots,N_2$$

使得区域$\Omega\subset\{(x,y)|x_0\le x\le x_0+N_1h, y_0\le y\le N_2\tau\}$

- 网格点:记$x_i = x_0+ih, i = 0,1,\cdots,N_1, y_j = y_0+j\tau, j = 0,1,\cdots,N_2$,称网格线的交点$(x_i,y_j)$为网格点
- 内部节点：位于Ω内部的网格点称为内部节点，简称内点。它的全体记为Ω_h，$\Omega_h=\{(x_i,y_j),(x_i,y_j)\in\Omega\}$
- 网格线与区域边界Γ的交点称为边界节点，简称边界点，他们的全体记为Γ_h，并记

$$\bar{\Omega}_h=\Omega_h\cup\Gamma_h.$$

⋆3.1 矩形网格

⋆3.1.1五点差分格式

剖分：

- 在平面上取一个固定点(x_0, y_0),过该点分别以步长h和τ作垂直于x轴和y轴的两族平行线(称为网格线).

$$x = x_0 + ih, i = 0, 1, \cdots, N_1$$

$$y = y_0 + j\tau, j = 0, 1, \cdots, N_2$$

使得区域$\Omega \subset \{(x, y) | x_0 \le x \le x_0 + N_1 h, y_0 \le y \le N_2 \tau\}$

- 网格点:记$x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \cdots, N_1, y_j = y_0 + j\tau, j = 0, 1, \cdots, N_2$,称网格线的交点$(x_i, y_j)$为网格点
- 内部节点：位于Ω内部的网格点称为内部节点，简称内点。它的全体记为Ω_h，$\Omega_h = \{(x_i, y_j), (x_i, y_j) \in \Omega\}$
- 网格线与区域边界Γ的交点称为边界节点，简称边界点，他们的全体记为Γ_h，并记

$$\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h.$$

- 为了以后讨论的方便，将内点分为两类：

- 为了以后讨论的方便，将内点分为两类：
- 正则内点：若某内点的网格线上四个相邻的网格点都是内点；正则内点的全体记为Ω_{h1}，

- 为了以后讨论的方便，将内点分为两类：
- 正则内点：若某内点的网格线上四个相邻的网格点都是内点；正则内点的全体记为Ω_{h1},
- 否则称它们为非正则内点，即非正则内点的网格线上四个相邻的网格至少有一个不是内点,非正则内点的全体记为Ω_{h2}.

- 为了以后讨论的方便，将内点分为两类：
- 正则内点：若某内点的网格线上四个相邻的网格点都是内点；正则内点的全体记为Ω_{h1},
- 否则称它们为非正则内点，即非正则内点的网格线上四个相邻的网格至少有一个不是内点,非正则内点的全体记为Ω_{h2}.
- $\Omega_{h_1} \cup \Omega_{h_2} = \Omega_h$.

- 为了以后讨论的方便，将内点分为两类：
- 正则内点：若某内点的网格线上四个相邻的网格点都是内点；正则内点的全体记为Ω_{h1},
- 否则称它们为非正则内点，即非正则内点的网格线上四个相邻的网格至少有一个不是内点,非正则内点的全体记为Ω_{h2}.
- $\Omega_{h_1} \cup \Omega_{h_2} = \Omega_h$.
- 记$h_0 = \sqrt{h^2 + \tau^2}$.

- 为了以后讨论的方便，将内点分为两类：
- 正则内点：若某内点的网格线上四个相邻的网格点都是内点；正则内点的全体记为Ω_{h1},
- 否则称它们为非正则内点，即非正则内点的网格线上四个相邻的网格至少有一个不是内点,非正则内点的全体记为Ω_{h2}.
- $\Omega_{h_1} \cup \Omega_{h_2} = \Omega_h$.
- 记$h_0 = \sqrt{h^2 + \tau^2}$.
- 为简单起见，把点(x_i, y_j)记为(i, j).

- 为了以后讨论的方便，将内点分为两类：
- 正则内点：若某内点的网格线上四个相邻的网格点都是内点；正则内点的全体记为Ω_{h1},
- 否则称它们为非正则内点，即非正则内点的网格线上四个相邻的网格至少有一个不是内点,非正则内点的全体记为Ω_{h2}.
- $\Omega_{h_1} \cup \Omega_{h_2} = \Omega_h$.
- 记$h_0 = \sqrt{h^2 + \tau^2}$.
- 为简单起见，把点(x_i, y_j)记为(i, j).
- 设(i, j)是正则内点，应用Taylor公式，得

$$\frac{1}{h^2}[u(i+1,j)-2u(i,j)+u(i-1,j)] = \frac{\partial^2 u(i,j)}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u(\xi_i,j)}{\partial x^4}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{h^2}[u(i,j+1)-2u(i,j)+u(i,j-1)] = \frac{\partial^2 u(i,j)}{\partial y^2} + \frac{\tau^2}{12}\frac{\partial^4 u(i,\eta_j)}{\partial y^4}, \quad (4)$$

- 于是

$$\Delta u(i,j)=\frac{1}{h^2}[u(i+1,j)-2u(i,j)+u(i-1,j)]$$

$$+\frac{1}{\tau^2}[u(i,j+1)-2u(i,j)+u(i,j-1)]+R_{ij}, \tag{5}$$

其中

$$R_{ij}=-\frac{1}{12}(h^2\frac{\partial^4 u(\xi_i,j)}{\partial x^4}+\tau^2\frac{\partial^4 u(i,\eta_j)}{\partial y^4}),\xi\in(x_{i-1},x_{i+1}),\eta_j\in(y_{j-1},y_{j+1}). \tag{6}$$

- 于是

$$\Delta u(i,j) = \frac{1}{h^2}[u(i+1,j) - 2u(i,j) + u(i-1,j)]$$

$$+\frac{1}{\tau^2}[u(i,j+1) - 2u(i,j) + u(i,j-1)] + R_{ij}, \qquad (5)$$

其中

$$R_{ij} = -\frac{1}{12}(h^2\frac{\partial^4 u(\xi_i,j)}{\partial x^4} + \tau^2\frac{\partial^4 u(i,\eta_j)}{\partial y^4}), \xi \in (x_{i-1},x_{i+1}), \eta_j \in (y_{j-1},y_{j+1}). \qquad (6)$$

- 将式(5)代入微分方程(1),得

$$-\frac{1}{h^2}[u(i+1,j) - 2u(i,j) + u(i-1,j)] - \frac{1}{\tau^2}[u(i,j+1) - 2u(i,j) + u(i,j-1)]$$

$$= f(i,j) + R_{ij}, \qquad (7)$$

- 于是

$$\Delta u(i,j)=\frac{1}{h^2}[u(i+1,j)-2u(i,j)+u(i-1,j)]$$

$$+\frac{1}{\tau^2}[u(i,j+1)-2u(i,j)+u(i,j-1)]+R_{ij}, \qquad (5)$$

其中

$$R_{ij}=-\frac{1}{12}(h^2\frac{\partial^4 u(\xi_i,j)}{\partial x^4}+\tau^2\frac{\partial^4 u(i,\eta_j)}{\partial y^4}),\xi\in(x_{i-1},x_{i+1}),\eta_j\in(y_{j-1},y_{j+1}). \qquad (6)$$

- 将式(5)代入微分方程(1),得

$$-\frac{1}{h^2}[u(i+1,j)-2u(i,j)+u(i-1,j)]-\frac{1}{\tau^2}[u(i,j+1)-2u(i,j)+u(i,j-1)]$$

$$=f(i,j)+R_{ij}, \qquad (7)$$

- 略去余项，我们得到微分方程(1)在节点(i,j)的一个差分方程

$$-\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1.j})-\frac{1}{\tau^2}(u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1})=f_{ij}, \quad (8)$$

其中u_{ij}是$u(i,j)$的一个近似值，$f_{ij}=f(i,j)$

- 略去余项，我们得到微分方程(1)在节点(i,j)的一个差分方程

$$-\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1.j})-\frac{1}{\tau^2}(u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1})=f_{ij}, \quad (8)$$

其中u_{ij}是$u(i,j)$的一个近似值，$f_{ij}=f(i,j)$

- 由于在建立差分方程(8)时用到节点(i,j)及其相邻的四个节点，所以称式(8)为五点差分格式，

- 略去余项，我们得到微分方程(1)在节点(i,j)的一个差分方程

$$-\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1.j})-\frac{1}{\tau^2}(u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1})=f_{ij}, \quad (8)$$

  其中u_{ij}是$u(i,j)$的一个近似值，$f_{ij}=f(i,j)$

- 由于在建立差分方程(8)时用到节点(i,j)及其相邻的四个节点，所以称式(8)为五点差分格式，
- R_{ij} 又称为五点差分格式的截断误差.在每一个正则内点都可以建立一个像式(8)的差分方程

- 略去余项，我们得到微分方程(1)在节点(i,j)的一个差分方程

$$-\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1.j})-\frac{1}{\tau^2}(u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1})=f_{ij}, \quad (8)$$

  其中u_{ij}是$u(i,j)$的一个近似值，$f_{ij}=f(i,j)$
- 由于在建立差分方程(8)时用到节点(i,j)及其相邻的四个节点，所以称式(8)为五点差分格式，
- R_{ij} 又称为五点差分格式的截断误差.在每一个正则内点都可以建立一个像式(8)的差分方程
- 差分方程(8)相当于在(i,j)分别用沿x,y方向的二阶中心差商代替二阶导数u_{xx},u_{yy}的结果。

- 略去余项，我们得到微分方程(1)在节点(i,j)的一个差分方程

$$-\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1.j})-\frac{1}{\tau^2}(u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1})=f_{ij}, \quad (8)$$

  其中u_{ij}是$u(i,j)$的一个近似值，$f_{ij}=f(i,j)$

- 由于在建立差分方程(8)时用到节点(i,j)及其相邻的四个节点，所以称式(8)为五点差分格式，
- R_{ij} 又称为五点差分格式的截断误差.在每一个正则内点都可以建立一个像式(8)的差分方程
- 差分方程(8)相当于在(i,j)分别用沿x,y方向的二阶中心差商代替二阶导数u_{xx},u_{yy}的结果。

- 若$\tau = h$,即用正方形网格，差分方程为

$$\frac{1}{h^2}(4u_{ij} - u_{i-1.j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}) = f_{ij} \tag{9}$$

- 若$\tau = h$,即用正方形网格，差分方程为

$$\frac{1}{h^2}(4u_{ij} - u_{i-1.j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}) = f_{ij} \tag{9}$$

- 若$\tau = h, f = 0$即调和方程的差分方程为

$$u_{ij} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1})$$

即差分解在(i, j)的值等于其周围四点值的平均。

Home Page
Title Page
Page 6 of 15
Go Back
Full Screen
Close
Quit

- 若$\tau = h$,即用正方形网格，差分方程为

$$\frac{1}{h^2}(4u_{ij} - u_{i-1.j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}) = f_{ij} \tag{9}$$

- 若$\tau = h, f = 0$即调和方程的差分方程为

$$u_{ij} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1})$$

即差分解在(i, j)的值等于其周围四点值的平均。

- 对于(i, j)是边界点，很容易处理$u_{i,j} = \phi(i, j)$,

下面介绍三种处理非正则内点的方法：

下面介绍三种处理非正则内点的方法:
(1)简 单 转 移 法 :

下面介绍三种处理非正则内点的方法：
(1)简单转移法：若边界点E最靠近非正则内点(i,j),取$u_{ij}=\phi(E)$,其截断误差为$O(h_0)$,这种处理方法十分简单。

下面介绍三种处理非正则内点的方法：

(1)简单转移法：若边界点E最靠近非正则内点(i,j),取$u_{ij} = \phi(E)$,其截断误差为$O(h_0)$,这种处理方法十分简单。

(2)不等距格式:

下面介绍三种处理非正则内点的方法：
(1)简单转移法：若边界点E最靠近非正则内点(i,j),取$u_{ij}=\phi(E)$,其截断误差为$O(h_0)$,这种处理方法十分简单。
(2)不等距格式:

- 设P是非正则内点，与它相邻的四个节点记为Q,R,S,T,其中任何一点都可以是边界点，记$h_1=|PQ|,h_2=|PR|,\tau_1=|PS|,\tau_2=|PT|$,

下面介绍三种处理非正则内点的方法：
(1)简单转移法：若边界点E最靠近非正则内点(i,j),取$u_{ij}=\phi(E)$,其截断误差为$O(h_0)$,这种处理方法十分简单。
(2)不等距格式:

- 设P是非正则内点，与它相邻的四个节点记为Q,R,S,T,其中任何一点都可以是边界点，记$h_1=|PQ|,h_2=|PR|,\tau_1=|PS|,\tau_2=|PT|$,
- 由Taylor展开，得

$$u(Q)=u(P)-h_1\frac{\partial u(P)}{\partial x}+\frac{h_1^2}{2}\frac{\partial^2 u(P)}{\partial x^2}-\frac{h_1^3}{6}\frac{\partial u(P)}{\partial x^3}+\cdots.$$

$$u(R)=u(P)+h_2\frac{\partial u(P)}{\partial x}+\frac{h_2^2}{2}\frac{\partial^2 u(P)}{\partial x^2}+\frac{h_2^3}{6}\frac{\partial u(P)}{\partial x^3}+\cdots.$$

下面介绍三种处理非正则内点的方法：
(1)简单转移法：若边界点E最靠近非正则内点(i,j),取$u_{ij}=\phi(E)$,其截断误差为$O(h_0)$,这种处理方法十分简单。
(2)不等距格式:

- 设P是非正则内点，与它相邻的四个节点记为Q,R,S,T,其中任何一点都可以是边界点，记$h_1=|PQ|,h_2=|PR|,\tau_1=|PS|,\tau_2=|PT|$,
- 由Taylor展开，得

$$u(Q)=u(P)-h_1\frac{\partial u(P)}{\partial x}+\frac{h_1^2}{2}\frac{\partial^2 u(P)}{\partial x^2}-\frac{h_1^3}{6}\frac{\partial u(P)}{\partial x^3}+\cdots.$$

$$u(R)=u(P)+h_2\frac{\partial u(P)}{\partial x}+\frac{h_2^2}{2}\frac{\partial^2 u(P)}{\partial x^2}+\frac{h_2^3}{6}\frac{\partial u(P)}{\partial x^3}+\cdots.$$

- 从上面两式中消去$\frac{\partial u(P)}{\partial x}$项，得

$$\frac{1}{h_1+h_2}[h_1u(R)+h_2u(Q)]=u(P)+\frac{h_1h_2}{2}[\frac{\partial^2 u(P)}{\partial x^2}-\frac{h_1-h_2}{3}\frac{\partial^3 u(P)}{\partial x^3}+\cdots]. \tag{10}$$

- 同理，得

$$\frac{1}{\tau_1+\tau_2}[\tau_1 u(T)+\tau_2 u(S)] = u(P)+\frac{\tau_1\tau_2}{2}[\frac{\partial^2 u(P)}{\partial y^2}-\frac{\tau_1-\tau_2}{3}\frac{\partial^3 u(P)}{\partial y^3}+\cdots]. \tag{11}$$

- 同理，得

$$\frac{1}{\tau_1+\tau_2}[\tau_1 u(T)+\tau_2 u(S)] = u(P)+\frac{\tau_1\tau_2}{2}[\frac{\partial^2 u(P)}{\partial y^2}-\frac{\tau_1-\tau_2}{3}\frac{\partial^3 u(P)}{\partial y^3}+\cdots]. \tag{11}$$

- 注意到微分方程(1),从式(10)和(11),得

$$-\frac{2}{h_1+h_2}(\frac{u(R)-u(P)}{h_2}-\frac{u(P)-u(Q)}{h_1})-\frac{2}{\tau_1+\tau_2}(\frac{u(T)-u(P)}{\tau_2}-\frac{u(P)-u(S)}{\tau_1})$$

$$= f(P)+\frac{h_1-h_2}{3}\frac{\partial^3 u(P)}{\partial x^3}+\frac{\tau_1-\tau_2}{3}\frac{\partial^3 u(P)}{\partial y^3}+\cdots.$$

- 同理，得

$$\frac{1}{\tau_1+\tau_2}[\tau_1 u(T)+\tau_2 u(S)] = u(P)+\frac{\tau_1\tau_2}{2}[\frac{\partial^2 u(P)}{\partial y^2}-\frac{\tau_1-\tau_2}{3}\frac{\partial^3 u(P)}{\partial y^3}+\cdots]. \quad (11)$$

- 注意到微分方程(1),从式(10)和(11),得

$$-\frac{2}{h_1+h_2}(\frac{u(R)-u(P)}{h_2}-\frac{u(P)-u(Q)}{h_1})-\frac{2}{\tau_1+\tau_2}(\frac{u(T)-u(P)}{\tau_2}-\frac{u(P)-u(S)}{\tau_1})$$

$$= f(P)+\frac{h_1-h_2}{3}\frac{\partial^3 u(P)}{\partial x^3}+\frac{\tau_1-\tau_2}{3}\frac{\partial^3 u(P)}{\partial y^3}+\cdots.$$

- 略去上式的余项，得到在P点的差分方程

$$-\frac{2}{h_1+h_2}(\frac{u_R-u_P}{h_2}-\frac{u_P-u_Q}{h_1})-\frac{2}{\tau_1+\tau_2}(\frac{u_T-u_P}{\tau_2}-\frac{u_P-u_S}{\tau_1}) = f(P) \quad (12)$$

- 截断误差为$O(h_0)$

- 截断误差为$O(h_0)$
- 同差分方程(8)相比，差分方程(12)的截断误差低了一阶。

- 截断误差为$O(h_0)$
- 同差分方程(8)相比，差分方程(12)的截断误差低了一阶。
- 破坏了差分方程组系数矩阵的对称性，为保持对称性把差分方程(12)改为

$$-\frac{1}{h}\left(\frac{u_R-u_P}{h_2}-\frac{u_P-u_Q}{h_1}\right)-\frac{1}{\tau}\left(\frac{u_T-u_P}{\tau_2}-\frac{u_P-u_S}{\tau_1}\right)=f(P) \quad (13)$$

- 截断误差为$O(h_0)$
- 同差分方程(8)相比，差分方程(12)的截断误差低了一阶。
- 破坏了差分方程组系数矩阵的对称性，为保持对称性把差分方程(12)改为

$$-\frac{1}{h}\left(\frac{u_R-u_P}{h_2}-\frac{u_P-u_Q}{h_1}\right)-\frac{1}{\tau}\left(\frac{u_T-u_P}{\tau_2}-\frac{u_P-u_S}{\tau_1}\right)=f(P) \quad (13)$$

(3)线性插值:

- 若Q,R中至少有一个是边界点，从式(10)得到在点P的差分方程

$$u_P-\frac{1}{h_1+h_2}(h_1u_R+h_2u_Q)=0, \quad (14)$$

其截断误差为$O(h^2)$

- 截断误差为$O(h_0)$
- 同差分方程(8)相比，差分方程(12)的截断误差低了一阶。
- 破坏了差分方程组系数矩阵的对称性，为保持对称性把差分方程(12)改为

$$-\frac{1}{h}\left(\frac{u_R-u_P}{h_2}-\frac{u_P-u_Q}{h_1}\right)-\frac{1}{\tau}\left(\frac{u_T-u_P}{\tau_2}-\frac{u_P-u_S}{\tau_1}\right)=f(P) \quad (13)$$

(3)线性插值:

- 若Q,R中至少有一个是边界点，从式(10)得到在点P的差分方程

$$u_P-\frac{1}{h_1+h_2}(h_1u_R+h_2u_Q)=0, \quad (14)$$

其截断误差为$O(h^2)$

- 上式相当于对函数u在Q和R两点之间采用线性插值所得到的结果

- 截断误差为$O(h_0)$
- 同差分方程(8)相比，差分方程(12)的截断误差低了一阶。
- 破坏了差分方程组系数矩阵的对称性，为保持对称性把差分方程(12)改为

$$-\frac{1}{h}\left(\frac{u_R-u_P}{h_2}-\frac{u_P-u_Q}{h_1}\right)-\frac{1}{\tau}\left(\frac{u_T-u_P}{\tau_2}-\frac{u_P-u_S}{\tau_1}\right)=f(P) \quad (13)$$

(3)线性插值:

- 若Q,R中至少有一个是边界点，从式(10)得到在点P的差分方程

$$u_P-\frac{1}{h_1+h_2}(h_1u_R+h_2u_Q)=0, \qquad (14)$$

  其截断误差为$O(h^2)$
- 上式相当于对函数u在Q和R两点之间采用线性插值所得到的结果

- 若S,T至少有一个是边界点，则从式(11)得到在点P的又一个差分方程

$$u_P - \frac{\tau_1 u_T + \tau_2 u_S}{\tau_1 + \tau_2} = 0 \qquad (15),$$

- 若S,T至少有一个是边界点，则从式(11)得到在点P的又一个差分方程

$$u_P - \frac{\tau_1 u_T + \tau_2 u_S}{\tau_1 + \tau_2} = 0 \qquad (15),$$

其截断误差为$O(\tau^2)$上式相当于对函数u在S和T两点之间采用线性插值的结果.

- 若S,T至少有一个是边界点，则从式(11)得到在点P的又一个差分方程

$$u_P - \frac{\tau_1 u_T + \tau_2 u_S}{\tau_1 + \tau_2} = 0 \qquad (15),$$

其截断误差为$O(\tau^2)$上式相当于对函数u在S和T两点之间采用线性插值的结果.

- 方程(14)和(15)也可以分别写成等价的形式

$$-\frac{1}{h}(\frac{u_R - u_P}{h_2} - \frac{u_P - u_Q}{h_1}) = 0, -\frac{1}{\tau}(\frac{u_T - u_P}{\tau_2} - \frac{u_P - u_S}{\tau_1}) = 0,$$

此时方程组的系数矩阵是对称的。

- 若S,T至少有一个是边界点，则从式(11)得到在点P的又一个差分方程

$$u_P - \frac{\tau_1 u_T + \tau_2 u_S}{\tau_1 + \tau_2} = 0 \qquad (15),$$

其截断误差为$O(\tau^2)$上式相当于对函数u在S和T两点之间采用线性插值的结果.

- 方程(14)和(15)也可以分别写成等价的形式

$$-\frac{1}{h}\left(\frac{u_R - u_P}{h_2} - \frac{u_P - u_Q}{h_1}\right) = 0, -\frac{1}{\tau}\left(\frac{u_T - u_P}{\tau_2} - \frac{u_P - u_S}{\tau_1}\right) = 0,$$

此时方程组的系数矩阵是对称的。

- 对于每一个非正则内点都可以建立一个方程，将它们同正则内点的差分方程(8)联立起来就产生一个线性方程组，方程组的阶数等于内部节点的数目，通过解方程组便得到边值问题(1),(2)的解u在节点(i,j)的近似值u_{ij}.

⋆3.1.2第三类边界条件的处理

⋆3.1.2第三类边界条件的处理

- 第一类边界条件(又称Dirichlet(狄利克雷)边界条件)

$$u|_{\Gamma} = \phi(x, y)$$

⋆3.1.2第三类边界条件的处理

- 第一类边界条件(又称Dirichlet(狄利克雷)边界条件)

$$u|_\Gamma = \phi(x, y)$$

- 第二类边界条件(又称Neumann(诺伊曼)边界条件)

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = \phi(x, y).$$

⋆3.1.2第三类边界条件的处理

- 第一类边界条件(又称Dirichlet(狄利克雷)边界条件)

$$u|_\Gamma = \phi(x, y)$$

- 第二类边界条件(又称Neumann(诺伊曼)边界条件)

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = \phi(x, y).$$

- 第三类边界条件(又称Robin(罗宾)边界条件)

$$(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x, y)u)|_\Gamma = \phi(x, y), \tag{18}$$

⋆3.1.2第三类边界条件的处理

- 第一类边界条件(又称Dirichlet(狄利克雷)边界条件)

$$u|_\Gamma = \phi(x,y)$$

- 第二类边界条件(又称Neumann(诺伊曼)边界条件)

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = \phi(x,y).$$

- 第三类边界条件(又称Robin(罗宾)边界条件)

$$(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x,y)u)|_\Gamma = \phi(x,y), \tag{18}$$

- 其中n是区域Ω的边界Γ的外法线方向，$\sigma \geq 0$, 但至少在Γ的一部分上$\sigma > 0$.在这样的假设条件下，边值问题(1),(18)有惟一解。

⋆3.1.2第三类边界条件的处理

- 第一类边界条件(又称Dirichlet(狄利克雷)边界条件)

$$u|_{\Gamma} = \phi(x, y)$$

- 第二类边界条件(又称Neumann(诺伊曼)边界条件)

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = \phi(x, y).$$

- 第三类边界条件(又称Robin(罗宾)边界条件)

$$(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x, y)u)|_{\Gamma} = \phi(x, y), \tag{18}$$

- 其中n是区域Ω的边界Γ的外法线方向，$\sigma \geq 0$, 但至少在Γ的一部分上$\sigma > 0$.在这样的假设条件下，边值问题(1),(18)有惟一解。
- 当$\sigma = 0$，式(18)便成第二类边界条件。

⋆3.1.2第三类边界条件的处理

- 第一类边界条件(又称Dirichlet(狄利克雷)边界条件)

$$u|_\Gamma = \phi(x,y)$$

- 第二类边界条件(又称Neumann(诺伊曼)边界条件)

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = \phi(x,y).$$

- 第三类边界条件(又称Robin(罗宾)边界条件)

$$(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x,y)u)|_\Gamma = \phi(x,y), \tag{18}$$

- 其中n是区域Ω的边界Γ的外法线方向，$\sigma \geq 0$, 但至少在Γ的一部分上$\sigma > 0$.在这样的假设条件下，边值问题(1),(18)有惟一解。
- 当$\sigma = 0$，式(18)便成第二类边界条件。
- 下面仅讨论如何处理第三类边界条件。

- 如果P是边界点，因为

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} \approx \frac{u(P)-u(T)}{|PT|}$$

$$u(T) \approx \frac{1}{h}[|TR|u(S)+|TS|u(R)]$$

于是

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} \approx \frac{1}{|PT|}\{u(P)-\frac{1}{h}[|TR|u(S)+|TS|u(R)]\}$$

- 如果P是边界点，因为

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} \approx \frac{u(P) - u(T)}{|PT|}$$

$$u(T) \approx \frac{1}{h}[|TR|u(S) + |TS|u(R)]$$

于是

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} \approx \frac{1}{|PT|}\{u(P) - \frac{1}{h}[|TR|u(S) + |TS|u(R)]\}$$

- 把它代入式(18),得

$$\frac{1}{|PT|}\{u(P) - \frac{1}{h}[|TR|u(S) + |TS|u(R)]\} + \sigma(P)u(P) \approx \phi(P),$$

- 如果P是边界点，因为

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} \approx \frac{u(P)-u(T)}{|PT|}$$

$$u(T) \approx \frac{1}{h}[|TR|u(S)+|TS|u(R)]$$

于是

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} \approx \frac{1}{|PT|}\{u(P)-\frac{1}{h}[|TR|u(S)+|TS|u(R)]\}$$

- 把它代入式(18),得

$$\frac{1}{|PT|}\{u(P)-\frac{1}{h}[|TR|u(S)+|TS|u(R)]\}+\sigma(P)u(P) \approx \phi(P),$$

- 可得在点P的差分方程

$$\frac{1}{|PT|}[u_P - \frac{1}{h}(|TR|u_S + |TS|u_R)] + \sigma(P)u_P = \phi(P), \qquad (19)$$

- 可得在点P的差分方程

$$\frac{1}{|PT|}[u_P - \frac{1}{h}(|TR|u_S + |TS|u_R)] + \sigma(P)u_P = \phi(P), \qquad (19)$$

- 其截断误差为$O(h_0)$

- 可得在点P的差分方程

$$\frac{1}{|PT|}[u_P - \frac{1}{h}(|TR|u_S + |TS|u_R)] + \sigma(P)u_P = \phi(P), \qquad (19)$$

- 其截断误差为$O(h_0)$
- 如果对每一个边界点都作这样处理，最后线性方程组未知数的数目等于$\bar{\Omega}$中节点的数目。

- 可得在点P的差分方程

$$\frac{1}{|PT|}[u_P - \frac{1}{h}(|TR|u_S + |TS|u_R)] + \sigma(P)u_P = \phi(P), \qquad (19)$$

- 其截断误差为$O(h_0)$
- 如果对每一个边界点都作这样处理，最后线性方程组未知数的数目等于$\bar{\Omega}$中节点的数目。
- 为了减少未知数的数目，A, B是边界点，P是非正则内点，我们不在点A, B建立方程，而在点P建立方程.

- 可得在点P的差分方程

$$\frac{1}{|PT|}[u_P - \frac{1}{h}(|TR|u_S + |TS|u_R)] + \sigma(P)u_P = \phi(P), \qquad (19)$$

- 其截断误差为$O(h_0)$
- 如果对每一个边界点都作这样处理，最后线性方程组未知数的数目等于$\bar{\Omega}$中节点的数目。
- 为了减少未知数的数目，A, B是边界点，P是非正则内点，我们不在点A, B建立方程，而在点P建立方程.
- 在Γ上取一点P_1,使得$\overrightarrow{PP_1}$是Γ在点P_1的外法方向，则

$$\frac{\partial u(P_1)}{\partial n} \approx \frac{\partial u(P)}{\partial n}, u(P_1) \approx u(P)$$

从(18)式，得

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} + \sigma(P_1)u(P) \approx \phi(P_1).$$

- 用前面处理方向导数的方法，得到在点P的一个差分方程

$$\frac{1}{|PT|}[u_P - \frac{1}{h}(|TR|u_s + |TS|u_R)] + \sigma(P_1)u_P = \phi(P_1). \qquad (20)$$

- 用前面处理方向导数的方法，得到在点P的一个差分方程

$$\frac{1}{|PT|}[u_P - \frac{1}{h}(|TR|u_s + |TS|u_R)] + \sigma(P_1)u_P = \phi(P_1). \qquad (20)$$

- 由于

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} = (\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y))|_P$$

$$\approx \frac{u(P)-u(Q)}{h}\frac{|TR|}{|PT|} + \frac{u(P)-u(R)}{\tau}\frac{|PR|}{|PT|},$$

- 用前面处理方向导数的方法，得到在点P的一个差分方程

$$\frac{1}{|PT|}[u_P - \frac{1}{h}(|TR|u_s + |TS|u_R)] + \sigma(P_1)u_P = \phi(P_1). \qquad (20)$$

- 由于

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} = (\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y))|_P$$
$$\approx \frac{u(P)-u(Q)}{h}\frac{|TR|}{|PT|} + \frac{u(P)-u(R)}{\tau}\frac{|PR|}{|PT|},$$

从而又得一个在点P的差分方程

$$\frac{|TR|}{|PT|}\frac{u_P - u_Q}{h} + \frac{|PR|}{|PT|}\frac{u_P - u_R}{\tau} + \sigma(P_1)u_P = \phi(P_1) \qquad (21)$$

- 用前面处理方向导数的方法，得到在点P的一个差分方程

$$\frac{1}{|PT|}[u_P - \frac{1}{h}(|TR|u_s + |TS|u_R)] + \sigma(P_1)u_P = \phi(P_1). \qquad (20)$$

- 由于

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} = (\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y))|_P$$

$$\approx \frac{u(P)-u(Q)}{h}\frac{|TR|}{|PT|} + \frac{u(P)-u(R)}{\tau}\frac{|PR|}{|PT|},$$

从而又得一个在点P的差分方程

$$\frac{|TR|}{|PT|}\frac{u_P - u_Q}{h} + \frac{|PR|}{|PT|}\frac{u_P - u_R}{\tau} + \sigma(P_1)u_P = \phi(P_1) \qquad (21)$$

- 差分方程(20)和(21)的截断误差都是$O(h_0)$.

作业：1、用五点差分格式解下列椭圆型方程边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 2, & 0 < x, y < 1 \\ u(0,y) = 0, & u(1,y) = 1 + y \\ u(x,0) = x^2, & u(x,1) = x^2 + x \end{cases}$$

取$h = \tau = \frac{1}{3}$