# 《微分几何》课程电子课件

教师：杨勤民

Tel: (021)64253147

Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程QQ群号：1045698545

# §1.2 曲线的概念

一、曲线的参数表示

二、光滑曲线、正则点、正则曲线

三、曲线的切线与法平面

四、曲线的弧长与自然参数

## 一、曲线的向量参数表示法

向量函数$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)) \quad t\in I$

可用于表示曲线

曲线的参数

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \quad t\in I \\ z=z(t) \end{cases}$$

将$\vec{r}(t)$的起点固定于原点$O$,

则$\vec{r}(t)$的终点的轨迹就是这条曲线.

称这样的向量函数为曲线的向量参数表示.

## 二、光滑曲线、正则点、正则曲线

### 光滑曲线($C^1$类曲线、一阶光滑曲线)

若曲线上每点都存在切线, 并且切线连续变化.

### $C^k$类曲线($k$阶光滑曲线)

若曲线为 $\vec{r}=\vec{r}(t), t\in I$, 且 $\vec{r}(t)$ 为 $I$ 上的 $C^k$ 类函数,

则称这样的曲线为 $C^k$**类曲线**或 $k$ **阶光滑曲线**.

## 正则点

若对于曲线$\vec{r}=\vec{r}(t)$上一点$(t=t_0)$有$\vec{r}'(t_0)\neq\vec{0}$，

则称该点为曲线的正则点.

否则称为曲线的奇异点.

本课程只研究曲线上的正则点.

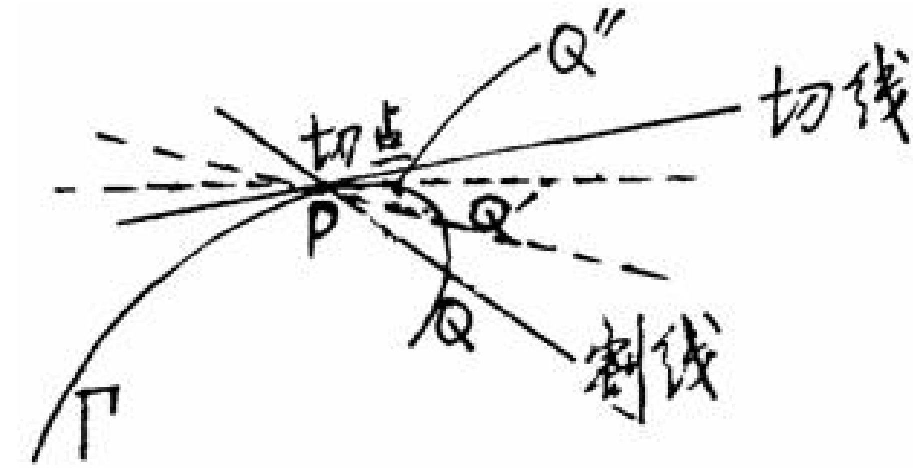
## 正则曲线

若某曲线上的每一点都是正则点，

则称该曲线为正则曲线.

## 三、曲线的切线和法平面

**切线的定义** (割线的极限)




曲线$\Gamma \in C^1$：$\vec{r}=\vec{r}(t)$

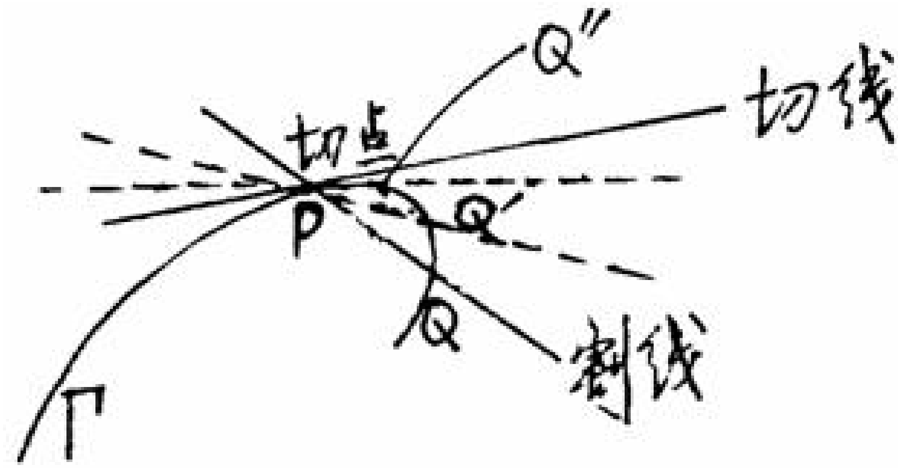
切点$P$：$\vec{r}(t_0)$

曲线上点$P$附近的一点$Q$：$\vec{r}(t_0+\Delta t)$

当$\Delta t \to 0$时，$Q \to P$，直线$PQ \to$ 曲线在点$P$处的切线.

## 切向量

$$\overrightarrow{PQ}=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)$$




割线方向: $\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta t}//\overrightarrow{PQ}$

割线方向的极限: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta t}=\vec{r}'(t_0)$

$\vec{r}'(t_0)$与切线方向一致,称$\vec{r}'(t_0)$为**曲线在 $P$ 点的切向量**.

**注** $\vec{r}'(t_0)$的正向与曲线的参数 $t$ 的增加方向一致.

## 切线方程(切线的向量参数表示)

曲线$\Gamma \in C^1$: $\vec{r}=\vec{r}(t)$, 切点$P$: $\vec{r}(t_0)$

设$\vec{R}$为切线上任意一点的向径,

则 $[\vec{R}-\vec{r}(t_0)] // \vec{r}'(t_0)$

即 $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $s.t.$ $\vec{R}-\vec{r}(t_0)=\lambda \vec{r}'(t_0)$

所以切线方程为$\vec{R}=\vec{r}(t_0)+\lambda \vec{r}'(t_0)$, 其中$\lambda$为参数.

## 切线方程(切线的点向式方程)

设 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $\vec{R}=(X,Y,Z)$

代入切线方程 $\vec{R}=\vec{r}(t_0)+\lambda\vec{r}'(t_0)$ 得到切线的参数方程:

$$\begin{cases} X = x(t_0)+\lambda x'(t_0) \\ Y = y(t_0)+\lambda y'(t_0) \\ Z = z(t_0)+\lambda z'(t_0) \end{cases}$$

消去参数 $\lambda$ 得到切线的点向式方程:

$$\frac{X-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{Y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{Z-z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

法平面方程(法平面的向量表示)

法平面：过切点且与切线垂直的平面.

曲线$\Gamma \in C^1$：$\vec{r}=\vec{r}(t)$，切点$P$：$\vec{r}(t_0)$

设$\vec{R}$为法平面上任意一点的向径,

则$[\vec{R}-\vec{r}(t_0)] \perp \vec{r}'(t_0)$

即$[\vec{R}-\vec{r}(t_0)]\cdot\vec{r}'(t_0)=0$

所以法平面的方程为$[\vec{R}-\vec{r}(t_0)]\cdot\vec{r}'(t_0)=0$.

## 法平面方程(法平面的点法式方程)

设 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\quad \vec{R}=(X,Y,Z)$

代入法平面方程 $[\vec{R}-\vec{r}(t_0)]\cdot\vec{r}'(t_0)=0$ 得到

$$[X-x(t_0)]x'(t_0)+[Y-y(t_0)]y'(t_0)+[Z-z(t_0)]z'(t_0)=0$$

它就是法平面的点法式方程.

## 四、曲线的弧长与自然参数

设有光滑曲线$\Gamma$：$\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$,

则以$t=a$为起点,$t=t$为终点的曲线弧的**有向弧长**为

弧长微元ds

$$s(t)=\int_a^t \boxed{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t}=\int_a^t \boxed{|\vec{r}'(t)|\,\mathrm{d}t}$$

$s'(t)=|\vec{r}'(t)|>0 \;\Rightarrow\; s(t)$为关于$t$的严格单调递增函数

$\Rightarrow s(t)$存在反函数. 设其为$t=t(s)$,并代入曲线方程得

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=\vec{r}(t(s))=(x(t(s)),y(t(s)),z(t(s)))$$

它是一个以弧长$s$为参数的曲线方程.

称以弧长 $s$ 为参数的曲线表示为曲线的自然参数表示.

称弧长参数 $s$ 为曲线的自然参数.

命题 向径关于自然参数的微商的模等于1.

证 $$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\vec{r}\,'(t)\frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}\right| = \left|\vec{r}\,'(t)\frac{1}{|\vec{r}\,'(t)|}\right| = 1.$$

采用自然参数 $s$ 后,切向量变成单位切向量.

以后用“$\cdot$”代替“$'$”表示关于自然参数的微商,

即 $\dot{\vec{r}}(s) \triangleq \vec{r}\,'(s) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}$, $\ddot{\vec{r}}(s) \triangleq \vec{r}\,''(s) = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2}, \cdots$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

**1.4** 求曲线$\vec{r}(t)=(at,bt^2,ct^3)$在点$t_0$的切线和法平面.

**1.5** 求圆柱螺线$x=3a\cos t, y=3a\sin t, z=4at \ (a>0)$从它与$xOy$面的交点到任意点$M(t)$的弧长.

**1.6** 将圆柱螺线$\vec{r}=(a\cos t, a\sin t, bt) \ (a>0)$化为自然参数表示.

**1.7** 求用极坐标方程$\rho=\rho(\theta)$给定的曲线的弧长表达式.