数学建模与系统仿真

课程负责人:许春根 教授

主讲老师：许春根、范金华、窦本年、谢建春

量纲齐次原理以及其应用

主讲人：范金华

Tel: 84315877(O)

Email:jinhuafan@hotmail.com

齐次

设$p= f(x,y,z)$

对 x,y,z的任何两组量测值x_1,y_1,z_1 和x_2,y_2,z_2,

$p_1 = f(x_1,y_1,z_1)$, $p_2 = f(x_2, y_2,z_2)$

x,y,z的缩小a,b,c倍 $p_1' = f(ax_1, by_1, cz_1),\ p_2' = f(ax_2, by_2, cz_2)$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_1'}{p_2'} \Rightarrow \frac{f(x_1, y_1, z_1)}{f(x_2, y_2, z_2)} = \frac{f(ax_1, by_1, cz_1)}{f(ax_2, by_2, cz_2)}$$

$\Rightarrow$ $p= f(x,y,z)$的形式为 $f(x, y, z) = \lambda x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$

量纲齐次原则

物理等式两端的量纲一致

量纲分析：在经验和实验的基础上利用物理定律的量纲齐次原则,确定各物理量之间的关系.

物理量的量纲

长度 l 的量纲记 $L=[l]$

质量 m的量纲记 $M=[m]$

时间 t 的量纲记 $T=[t]$

→ 动力学中基本量纲 L, M, T

速度 v 的量纲 $[v]=LT^{-1}$

加速度 a 的量纲 $[a]=LT^{-2}$

力 f 的量纲 $[f]=LMT^{-2}$

→ 导出量纲

引力常数 k 的量纲 $[k]=[f][l]^2[m]^{-2}=L^3M^{-1}T^{-2}$

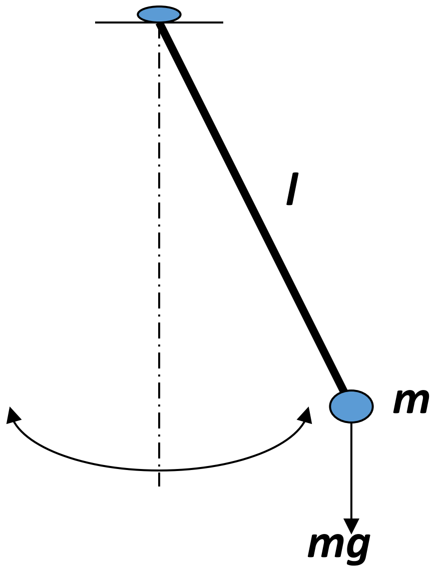
$$f = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

对无量纲量α，$[\alpha]=1(=L^0M^0T^0)$

例1：求摆动周期 *t* 的表达式

通过实验可以得到，物理量 *t, m, l, g* 之间关系式为齐次

$$t = \lambda m^{\alpha_1} l^{\alpha_2} g^{\alpha_3} \quad (1)$$



$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为待定系数，λ为无量纲量

(1)的量纲表达式 $$[t] = [m]^{\alpha_1}[l]^{\alpha_2}[g]^{\alpha_3}$$

$$\Rightarrow \quad T = M^{\alpha_1} L^{\alpha_2+\alpha_3} T^{-2\alpha_3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1/2 \\ \alpha_3 = -1/2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{t = \lambda\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

实际 $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

摆动周期 t 的表达式的一般解决方案

设单摆运动中 t, m, l, g 的一般表达式 $f(t,m,l,g)=0$

$\Rightarrow\ t^{y_1}m^{y_2}l^{y_3}g^{y_4}=\pi$ y_1~y_4为待定常数，π为无量纲量

$$\begin{cases}[t]=L^0M^0T^1\\ [m]=L^0M^1T^0\\ [l]=L^1M^0T^0\\ [g]=L^1M^0T^{-2}\end{cases}$$

$$(L^0M^0T^1)^{y_1}(L^0M^1T^0)^{y_2}(L^1M^0T^0)^{y_3}(L^1M^0T^{-2})^{y_4}=L^0M^0T^0$$

$$L^{y_3+y_4}M^{y_2}T^{y_1-2y_4}=L^0M^0T^0$$

$$\begin{cases}y_3+y_4=0\\ y_2=0\\ y_1-2y_4=0\end{cases}\ \Rightarrow$$

基本解

$$y=(y_1,y_2,y_3,y_4)^T=(2,0,-1,1)^T$$

$$t^2l^{-1}g=\pi \qquad F(\pi)=0$$

$$(t=\lambda\sqrt{l/g}\ )$$

Pi定理 (Buckingham) 设 $f(q_1, q_2, \ldots, q_m) = 0$

是与量纲单位无关的物理定律，$X_1, X_2, \ldots X_n$ 是基本量纲，$n \le m$，$q_1, q_2, \ldots q_m$ 的量纲可表为

$$[q_j] = \prod_{i=1}^{n} X_i^{a_{ij}}, \quad j = 1, 2, \cdots, m$$

量纲矩阵记作 $A = \{a_{ij}\}_{n \times m}$，若 $rank A = r$

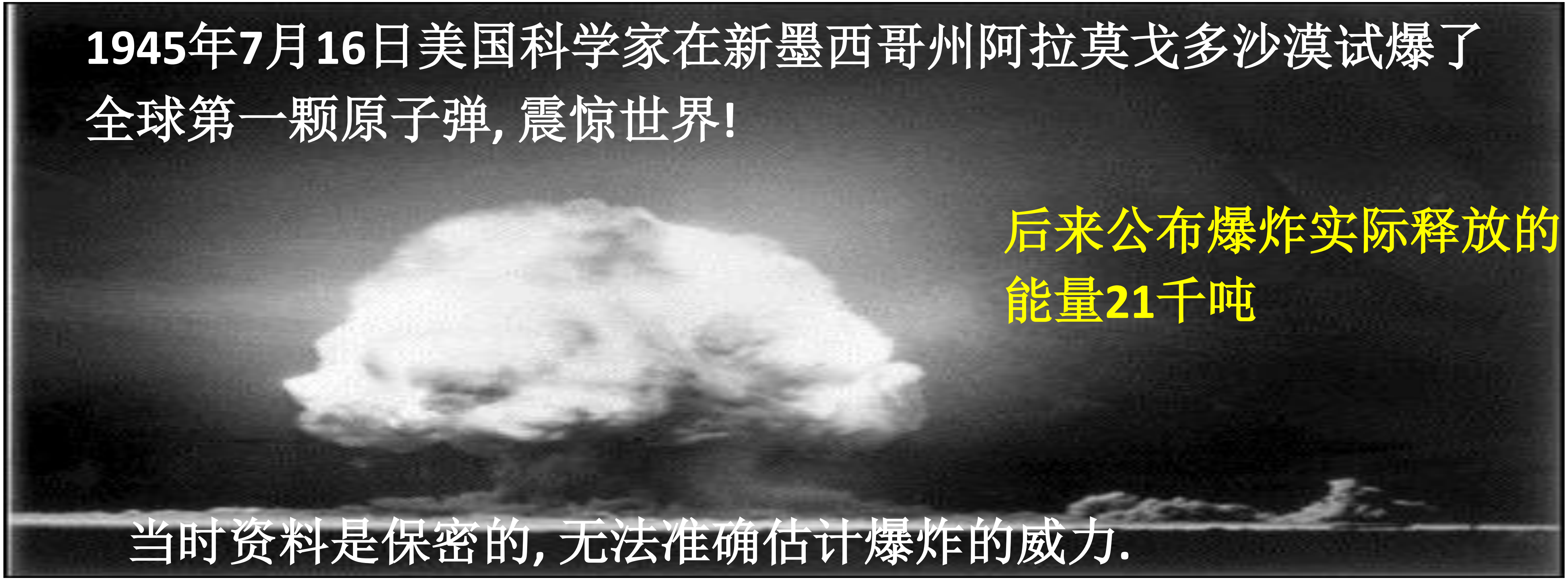
线性齐次方程组 $Ay = 0$ 有 $m\text{-}r$ 个基本解，记作

$$y_s = (y_{s1}, y_{s2}, \ldots, y_{sm})^T, \quad s = 1, 2, \ldots, m\text{-}r$$

则 $\pi_s = \prod_{j=1}^{m} q_j^{y_{sj}}$ 为$m\text{-}r$个相互独立的无量纲量, 且

$F(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{m-r}) = 0$ 与 $f(q_1, q_2, \ldots, q_m) = 0$ 等价, F未定.

Pi定理的运用，例二： 原子弹爆炸的能量估计



英国物理学家泰勒研究了两年后美国公开的录像带，利用**数学模型估计**这次爆炸释放的能量为**19.2千吨**.

原子弹爆炸的能量估计

爆炸产生的冲击波以爆炸点为中心呈球面向四周传播,爆炸的能量越大,在一定时刻冲击波传播得越远.

冲击波由爆炸形成的“蘑菇云”反映出来.

泰勒测量:时刻t所对应的“蘑菇云”的半径r

t(ms)	r(m)	t(ms)	r(m)	t(ms)	r(m)	t(ms)	r(m)	t(ms)	r(m)
0.10	11.1	0.80	34.2	1.50	44.4	3.53	61.1	15.0	106.5
0.24	19.9	0.94	36.3	1.65	46.0	3.80	62.9	25.0	130.0
0.38	25.4	1.08	38.9	1.79	46.9	4.07	64.3	34.0	145.0
0.52	28.8	1.22	41.0	1.93	48.7	4.34	65.6	53.0	175.0
0.66	31.9	1.36	42.8	3.26	59.0	4.61	67.3	62.0	185.0

泰勒用量纲分析方法建立数学模型, 辅以小型试验,又利用测量数据对爆炸的能量进行估计.

原子弹爆炸能量估计的量纲分析方法建模

记爆炸能量为*E*，将“蘑菇云”近似看成一个球形.

时刻 *t* 球的半径为 *r*

***r*与哪些因素有关？**

t*, *E

空气密度 ρ，大气压强*P*

$$r=\varphi(t,E,\rho,P)$$

$$\Rightarrow \quad f(r,t,E,\rho,P)=0$$

基本量纲：***L*, *M*, *T***

$$[r]=L;[t]=T;$$

$$[E]=L^2MT^{-2};$$

$$[\rho]=L^{-3}M;$$

$$[P]=L^{-1}MT^{-2}$$

量纲矩阵

$$A_{3\times5}=\begin{array}{c@{}c}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2\end{bmatrix} & \begin{array}{c}L\\ M\\ T\end{array}\\ \begin{array}{ccccc}r & t & E & \rho & P\end{array} & \end{array}$$

原子弹爆炸能量估计的量纲分析方法建模

$Rank\ A = 3$ $\Rightarrow$ $Ay = 0,\ y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T$ 有2个基本解

$y=(1,-2/5,-1/5,1/5,0)$ $y=(0,6/5,-2/5,-3/5,1)^T$

$\Rightarrow$ 两个无量纲量

$$\pi_1 = rt^{-2/5}E^{-1/5}\rho^{1/5} = r\left(\frac{\rho}{t^2 E}\right)^{1/5}$$

$$\pi_2 = t^{6/5}E^{-2/5}\rho^{-3/5}P = \left(\frac{t^6 P^5}{E^2 \rho^3}\right)^{1/5}$$

$$F(\pi_1, \pi_2) = 0$$

$$r\left(\frac{\rho}{t^2 E}\right)^{1/5} = \psi\left(\frac{t^6 P^5}{E^2 \rho^3}\right)^{1/5} \Rightarrow r = \left(\frac{t^2 E}{\rho}\right)^{1/5} \psi\left(\frac{t^6 P^5}{E^2 \rho^3}\right)^{1/5}$$

原子弹爆炸能量估计的数值计算

$$r=\left(\frac{t^2E}{\rho}\right)^{1/5}\psi\left(\left(\frac{t^6P^5}{E^2\rho^3}\right)^{1/5}\right)$$

时间 ***t*** 非常短

能量 ***E*** 非常大

$$\psi\left(\left(\frac{t^6P^5}{E^2\rho^3}\right)^{1/5}\right)\approx\psi(0)$$

泰勒根据一些小型爆炸试验的数据建议

$$\psi(0)\approx 1$$

$$r=\left(\frac{t^2E}{\rho}\right)^{1/5} \Rightarrow E=\frac{\rho r^5}{t^2}$$

空气密度 ρ=1.25 (kg/m^3)

用***r*, *t*** 的实际数据做平均 ⇨ ***E***=8.2825×10^{13}(焦耳) ⇩ ***E***=19.7957 (千吨)

1千吨(TNT能量)

= 4.184*10^{12}焦尔

实际值21千吨