⋆3.2.3 一维弦振动方程的初值问题

⋆3.2.3 一维弦振动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & x \in R^1 \end{cases} \tag{3.2.12}$$

⋆3.2.3 一维弦振动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & x \in R^1 \end{cases} \qquad (3.2.12)$$

解：对方程和初始条件关于x施行Fourier变换

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} = -a^2\lambda^2\hat{u}(\lambda,t), & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda,0) = \hat{\phi}(\lambda), \hat{u}_t(\lambda,0) = \hat{\psi}(\lambda) \end{cases}$$

⋆3.2.3 一维弦振动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & x \in R^1 \end{cases} \tag{3.2.12}$$

解：对方程和初始条件关于x施行Fourier变换

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} = -a^2\lambda^2\hat{u}(\lambda,t), & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda,0) = \hat{\phi}(\lambda), \hat{u}_t(\lambda,0) = \hat{\psi}(\lambda) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\lambda,t) = C_1(\lambda)e^{ia\lambda t} + C_2(\lambda)e^{-ia\lambda t}$$

⋆3.2.3 一维弦振动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & x \in R^1 \end{cases} \tag{3.2.12}$$

解：对方程和初始条件关于x施行Fourier变换

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} = -a^2\lambda^2\hat{u}(\lambda,t), & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda,0) = \hat{\phi}(\lambda), \hat{u}_t(\lambda,0) = \hat{\psi}(\lambda) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\lambda,t) = C_1(\lambda)e^{ia\lambda t} + C_2(\lambda)e^{-ia\lambda t}$$

(通解之所以写成上面形式是为了后面在做Fourier逆变换时容易写出原函数的表达形式）由初始条件

$$\begin{cases} C_1(\lambda) + C_2(\lambda) = \hat{\phi}(\lambda) \\ ia\lambda(C_1(\lambda) - C_2(\lambda)) = \hat{\psi}(\lambda) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(\lambda) = \frac{1}{2}\hat{\phi}(\lambda) - \frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi} \\ C_2(\lambda) = \frac{1}{2}\hat{\phi}(\lambda) + \frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi} \end{cases}$$

⋆3.2.3 一维弦振动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & x \in R^1 \end{cases} \tag{3.2.12}$$

解：对方程和初始条件关于x施行Fourier变换

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} = -a^2\lambda^2\hat{u}(\lambda,t), & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda,0) = \hat{\phi}(\lambda), \hat{u}_t(\lambda,0) = \hat{\psi}(\lambda) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\lambda,t) = C_1(\lambda)e^{ia\lambda t} + C_2(\lambda)e^{-ia\lambda t}$$

(通解之所以写成上面形式是为了后面在做Fourier逆变换时容易写出原函数的表达形式）由初始条件

$$\begin{cases} C_1(\lambda) + C_2(\lambda) = \hat{\phi}(\lambda) \\ ia\lambda(C_1(\lambda) - C_2(\lambda)) = \hat{\psi}(\lambda) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(\lambda) = \frac{1}{2}\hat{\phi}(\lambda) - \frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi} \\ C_2(\lambda) = \frac{1}{2}\hat{\phi}(\lambda) + \frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi} \end{cases}$$

得到

$$\hat{u}(\lambda,t) = \frac{1}{2}\hat{\phi}(\lambda)(e^{ia\lambda t} + e^{-ia\lambda t}) - \frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{ia\lambda t} - e^{-ia\lambda t}), \tag{3.2.13}$$

作Fourier逆变换求出原函数

一般作Fourier逆变换求原函数时，如果不能直接看出原函数的表达形式，可以先由Fourier逆变换定义写出来，然后再将积分进行化简，例如

$$\mathscr{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)e^{\pm ia\lambda t}] = \frac{1}{2\pi}\int_R \hat{\phi}(\lambda)e^{\pm ia\lambda t}e^{i\lambda x}d\lambda(\text{由Fourier逆变换定义})$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_R \hat{\phi}(\lambda)e^{i\lambda(x\pm at)}d\lambda(\text{指数函数合并化简，提出}i\lambda)$$

$$= \phi(x \pm at)(\text{由Fourier逆变换的定义，相当于定义中}x\text{变为}x \pm at)$$

一般作Fourier逆变换求原函数时，如果不能直接看出原函数的表达形式，可以先由Fourier逆变换定义写出来，然后再将积分进行化简，例如

$$\mathscr{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)e^{\pm ia\lambda t}] = \frac{1}{2\pi}\int_R \hat{\phi}(\lambda)e^{\pm ia\lambda t}e^{i\lambda x}d\lambda(\text{由Fourier逆变换定义})$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_R \hat{\phi}(\lambda)e^{i\lambda(x\pm at)}d\lambda(\text{指数函数合并化简，提出}i\lambda)$$

$= \phi(x \pm at)$(由Fourier逆变换的定义，相当于定义中x变为$x \pm at$)

所以

$$\mathscr{F}^{-1}[\frac{1}{2}\hat{\phi}(\lambda)(e^{ia\lambda t} + e^{-ia\lambda t})] = \frac{1}{2}[\phi(x+at) + \phi(x-at)], \qquad (3.2.14)$$

一般作Fourier逆变换求原函数时，如果不能直接看出原函数的表达形式，可以先由Fourier逆变换定义写出来，然后再将积分进行化简，例如

$$\mathscr{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)e^{\pm ia\lambda t}] = \frac{1}{2\pi}\int_R \hat{\phi}(\lambda)e^{\pm ia\lambda t}e^{i\lambda x}d\lambda(\text{由Fourier逆变换定义})$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_R \hat{\phi}(\lambda)e^{i\lambda(x\pm at)}d\lambda(\text{指数函数合并化简，提出}i\lambda)$$

$= \phi(x \pm at)$(由Fourier逆变换的定义，相当于定义中x变为$x \pm at$)

所以

$$\mathscr{F}^{-1}[\frac{1}{2}\hat{\phi}(\lambda)(e^{ia\lambda t} + e^{-ia\lambda t})] = \frac{1}{2}[\phi(x+at) + \phi(x-at)], \qquad (3.2.14)$$

对于

$$\mathscr{F}^{-1}[\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{ia\lambda t} - e^{-ia\lambda t})] =$$

Home Page

Title Page

Page 3 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

对于

$$\mathscr{F}^{-1}[\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{ia\lambda t}-e^{-ia\lambda t})]=\frac{1}{2\pi}\int_R\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{ia\lambda t}-e^{-ia\lambda t})e^{ix\lambda}d\lambda$$

对于

$$\mathscr{F}^{-1}[\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{ia\lambda t}-e^{-ia\lambda t})]=\frac{1}{2\pi}\int_R \frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{ia\lambda t}-e^{-ia\lambda t})e^{ix\lambda}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R \frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{i(x+at)\lambda}-e^{i(x-at)\lambda})d\lambda$$

括号里的表达形式可以看成是原函数在上限的值减去下限的值

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R \hat{\psi}(\lambda)\frac{i}{2a\lambda}(\int_{x-at}^{x+at} e^{i\lambda y}i\lambda dy)d\lambda$$

对于

$$\mathscr{F}^{-1}[\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{ia\lambda t}-e^{-ia\lambda t})]=\frac{1}{2\pi}\int_R\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{ia\lambda t}-e^{-ia\lambda t})e^{ix\lambda}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{i(x+at)\lambda}-e^{i(x-at)\lambda})d\lambda$$

括号里的表达形式可以看成是原函数在上限的值减去下限的值

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R\hat{\psi}(\lambda)\frac{i}{2a\lambda}(\int_{x-at}^{x+at}e^{i\lambda y}i\lambda dy)d\lambda$$

$$=-\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}(\frac{1}{2\pi}\int_R\hat{\psi}(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda)dy$$

对于

$$\mathscr{F}^{-1}[\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{ia\lambda t}-e^{-ia\lambda t})]=\frac{1}{2\pi}\int_R\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{ia\lambda t}-e^{-ia\lambda t})e^{ix\lambda}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{i(x+at)\lambda}-e^{i(x-at)\lambda})d\lambda$$

括号里的表达形式可以看成是原函数在上限的值减去下限的值

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R\hat{\psi}(\lambda)\frac{i}{2a\lambda}(\int_{x-at}^{x+at}e^{i\lambda y}i\lambda dy)d\lambda$$

$$=-\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}(\frac{1}{2\pi}\int_R\hat{\psi}(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda)dy=-\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy,\quad(3.2.15)$$

由(3.2.13),(3.2.14)和(3.2.15)可得

由(3.2.13),(3.2.14)和(3.2.15)可得

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x+at) + \phi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi, \qquad (3.2.16)$$

这就是著名的d'Alembert 公式。若$\phi \in C^2(R^1), \psi \in C^1(R^1)$,则由公式(3.2.16)给出的$u(x,t)$是问题(3.2.12)的古典解。

由(3.2.13),(3.2.14)和(3.2.15)可得

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, \qquad (3.2.16)$$

这就是著名的d'Alembert 公式。若$\phi\in C^2(R^1),\psi\in C^1(R^1)$,则由公式(3.2.16)给出的$u(x,t)$是问题(3.2.12)的古典解。

由

$$\frac{1}{2}(e^{ia\lambda t}+e^{-ia\lambda t})=\cos a\lambda t,\quad \frac{i}{2a\lambda}(e^{ia\lambda t}-e^{-ia\lambda t})=-\frac{1}{a\lambda}\sin a\lambda t$$

由(3.2.13),(3.2.14)和(3.2.15)可得

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, \qquad (3.2.16)$$

这就是著名的d'Alembert 公式。若$\phi\in C^2(R^1),\psi\in C^1(R^1)$,则由公式(3.2.16)给出的$u(x,t)$是问题(3.2.12)的古典解。

由

$$\frac{1}{2}(e^{ia\lambda t}+e^{-ia\lambda t})=\cos a\lambda t,\quad \frac{i}{2a\lambda}(e^{ia\lambda t}-e^{-ia\lambda t})=-\frac{1}{a\lambda}\sin a\lambda t$$

以及(3.2.14)和(3.2.15),有

$$\begin{cases}\mathscr{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)\cos a\lambda t]=\frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)]\\ \mathscr{F}^{-1}[\hat{\psi}(\lambda)\frac{\sin a\lambda t}{a\lambda}]=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy,\end{cases} \qquad (3.2.17)$$

((3.2.17)的结果，在以后的计算中可直接利用其结果)

对于非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^1, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases} \tag{3.2.18}$$

对于非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^1, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases} \tag{3.2.18}$$

关于x施行Fourier变换

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} = -a^2\lambda^2\hat{u}(\lambda,t) + \hat{f}(\lambda,t), \\ \hat{u}(\lambda,0) = \hat{\phi}(\lambda), \hat{u}_t(\lambda,0) = \hat{\psi}(\lambda) \end{cases}$$

利用常数变易公式可得

$$\hat{u}(\lambda,t) = \hat{\phi}(\lambda)\cos a\lambda t + \frac{1}{a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)\sin a\lambda t + \int_0^t \hat{f}(\lambda,s)\frac{\sin a\lambda(t-s)}{a\lambda}ds$$

对于非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^1, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases} \tag{3.2.18}$$

关于x施行Fourier变换

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} = -a^2\lambda^2\hat{u}(\lambda,t) + \hat{f}(\lambda,t), \\ \hat{u}(\lambda,0) = \hat{\phi}(\lambda), \hat{u}_t(\lambda,0) = \hat{\psi}(\lambda) \end{cases}$$

利用常数变易公式可得

$$\hat{u}(\lambda,t) = \hat{\phi}(\lambda)\cos a\lambda t + \frac{1}{a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)\sin a\lambda t + \int_0^t \hat{f}(\lambda,s)\frac{\sin a\lambda(t-s)}{a\lambda}ds$$

利用(3.2.17),我们有

$$\mathscr{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)\cos a\lambda t] = \frac{1}{2}[\phi(x+at) + \phi(x-at)]$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\frac{1}{a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)\sin a\lambda t] = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\int_0^t \hat{f}(\lambda,s)\frac{\sin a\lambda(t-s)}{a\lambda}ds] = \int_0^t \mathscr{F}^{-1}[\hat{f}(\lambda,s)\frac{\sin a\lambda(t-s)}{a\lambda}]ds$$

利用(3.2.17)中的第二个关系式，直接可得

$$= \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(\xi,s)d\xi ds$$

所以定解问题(3.2.18)的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(\xi,s)d\xi ds. \tag{3.2.19}$$

定理3.2.4对于n维波动方程的定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x). & x \in R^n, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in R^n. \end{cases}$$

定理3.2.4对于n维波动方程的定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x). & x \in R^n, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in R^n. \end{cases}$$

如果$\phi(x), \psi(x), f(x,t)$关于x都是实解析函数，则问题的解可以写成

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^{2k}}{(2k)!}\Delta^k\phi(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k\psi(x) \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{(2k+1)!}\int_0^t (t-\tau)^{2k+1}\Delta_x^k f(x,\tau)d\tau. \end{aligned}$$

定理3.2.4对于n维波动方程的定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x). & x \in R^n, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in R^n. \end{cases}$$

如果$\phi(x), \psi(x), f(x,t)$关于x都是实解析函数，则问题的解可以写成

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^{2k}}{(2k)!}\Delta^k\phi(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k\psi(x)$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{(2k+1)!}\int_0^t (t-\tau)^{2k+1}\Delta_x^k f(x,\tau)d\tau.$$

- 对于高维波动方程的初值问题，类似于高维热传导方程，也可以利用Fourier变换方法求解，但比较复杂。这里不做详细的介绍

利用Fourier变换求解无界区域上的初始问题

- 首先观察定解问题中自变量的范围，选择合适的变量进行Fourier变换。（热传导、弦振动定解问题一般都是空间变量x实行Fourier变换）
- 将方程和初始条件实行Fourier变换，原偏微分定界问题就转换为常微分方程的初值问题（此过程主要利用Fourier的微分性质，特别是函数一阶，二阶导数的Fourier变换）
- 利用第二章预备知识中介绍的常微分方程的求解方法，求出其解
- 最后作Fourier逆变换
- 最后一步中，主要会利用性质10中的第三个关系式，热传导方程会用到（3.1.3）的表达式，弦振动方程一般会用到(3.2.17)。
- 在Fourier逆变换求原函数时，如果不能判断出原函数的表达形式，建议先利用定义将Fourier逆变换写出来，再将积分进行化简。化简的技巧本学期主要掌握ppt上例题的技巧就可以

回家作业:

3.6、(2) $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t\sin x, & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \cos x, & x \in R \end{cases}$

做题的时候不建议直接套用公式，按照Fourier变换求解的一般过程计算