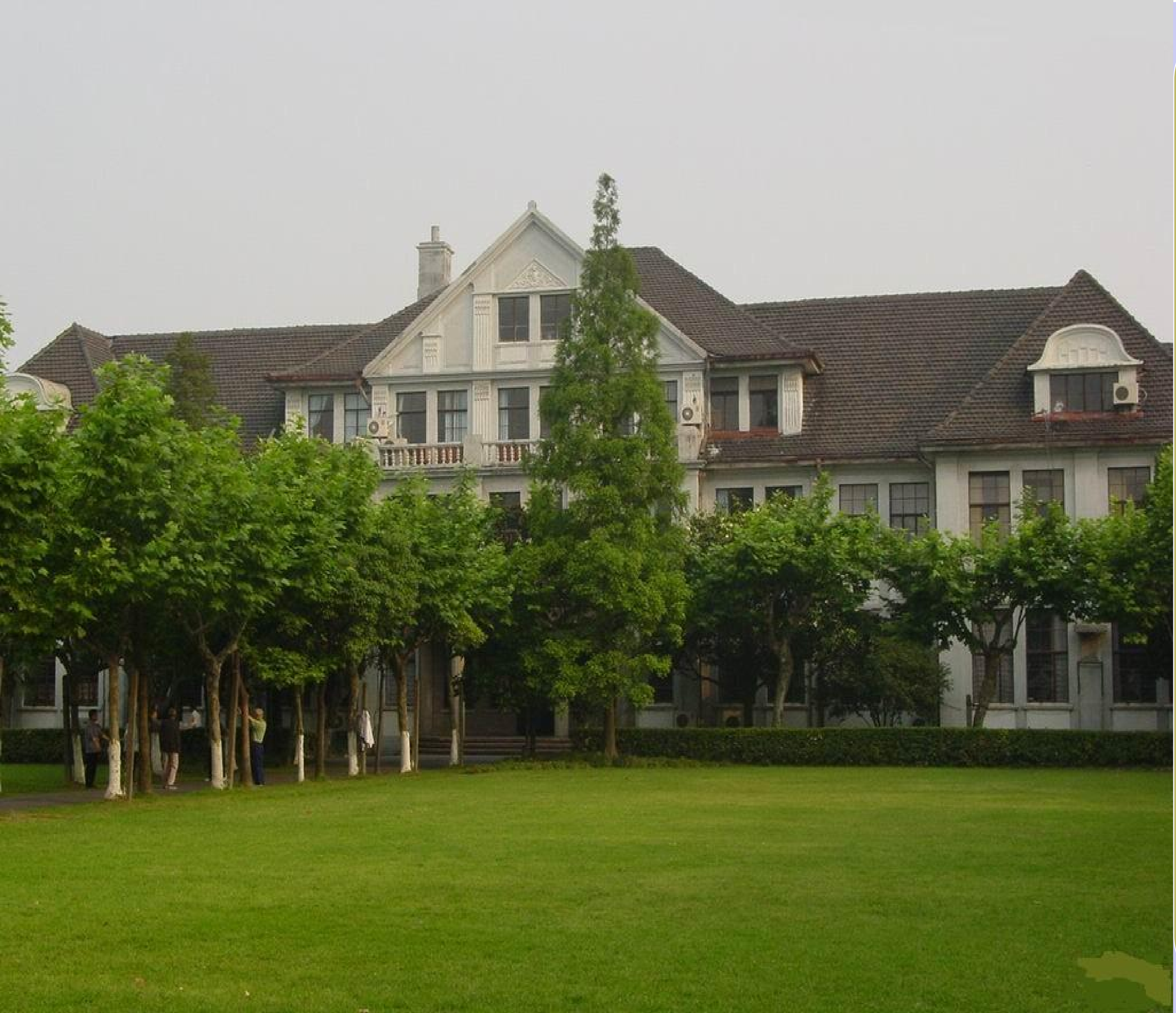

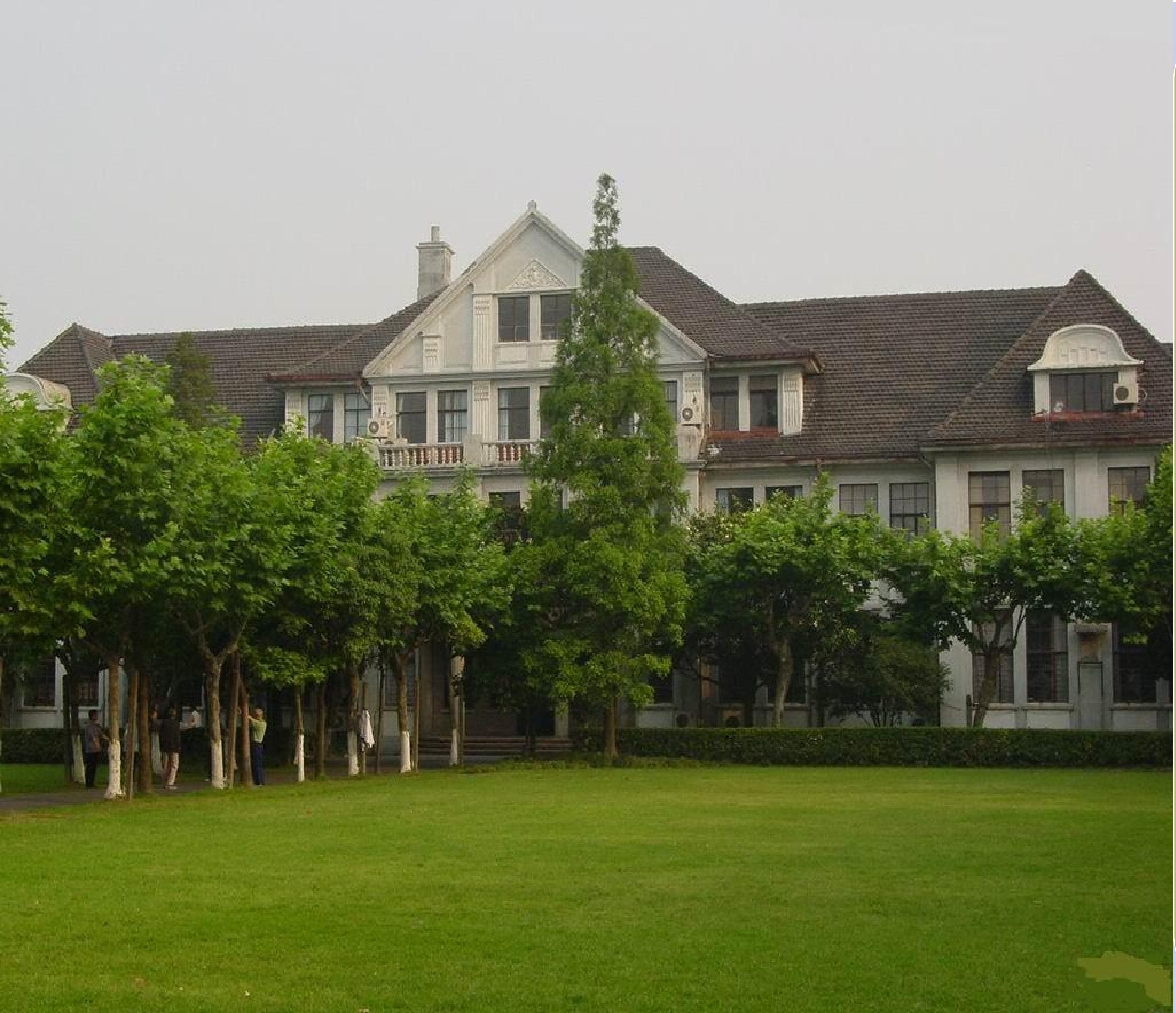

数学物理方程

邓淑芳

sfangd@163.com

- 数学物理方程以具有物理背景的偏微分方程（组）作为研究的主要对象。它与其他数学分支及物理、化学等自然科学和工程技术的很多领域都有着广泛的联系

- 数学物理方程作为大学的一门基础课，主要是通过对一些典型意义的模型方程的深入剖析，阐明和介绍偏微分方程的基本理论、解题技巧以及它们的物理背景

- 在研究数学物理方程的同时，人们对偏微分方程的性质也了解得越来越多，越来越深入，形成了数学中的一门重要分支—-偏微分方程理论。

- 近年来的热门课题：将偏微分方程应用于计算机图像处理及金融领域;

教材

《数学物理方程》作者：王明新；

出版社：清华大学出版社

参考书

《数学物理方程》作者：谷超豪；李大潜；

第三版．北京：高等教育出版社

《数学物理方程讲义》(第二版)作者：姜礼尚．

北京：高等教育出版社

- 微分方程：含有未知函数以及未知函数导数的方程。
- 常微分方程(ODE: Ordinary Differential Equation)：未知函数是一元函数
- 偏微分方程(PDE: Partial Differential Equation)：未知函数是多元函数
- 数学物理方程：侧重于模型的建立和定解问题的解题方法。
- 本书主要介绍三类典型方程双曲型方程、椭圆型方程、抛物型方程的导出(偏微分方程模型的建立)；定解问题的解法，以及三类典型方程的基本理论。

主要内容

第一章　典型方程的导出、定解问题及二阶方程的分类与化简

⋆三类典型方程：
双曲型方程、椭圆型方程、抛物型方程

⋆导出三类典型方程的基本思想：

- 利用两大物理定律：守恒律、变分原理
- 两种数学基本方法：微元法、Fubini交换积分次序定理

- 微元法:通俗地说就是把研究对象分为无限多个无限小地部分,取出有代表性的极小一部分进行分析处理, 再从局部到全体综合起来加以考虑的数学思维方法.

- Fubini交换积分次序:

$$\iint_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_A (\int_B f(x,y)dy)dx$$

也就是把二重积分转化为两个单积分.所得结论完全适用于将$n=s+t$重积分转换为相继的s重积分与t重积分的求解.

⋆预备知识

设Ω是$\mathbb{R}^n$中的一个有界光滑区域，k是非负整数，或者$k=\infty$，$\partial\Omega$表示Ω的边界

- R^1或R表示直线(一维)，R^2表示平面(二维)，R^3表示空间(三维),R^n表示n维，
- $C^k(\Omega)$和$C^k(\bar{\Omega})$表示在Ω内和$\bar{\Omega}$上k次连续可微函数构成的空间
- 当$k=0$时，通常记$C^0(\Omega)=C(\Omega), C^0(\bar{\Omega})=C^(\bar{\Omega})$.
- u的支集：集合$\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$的闭包，记为supp u
- 如果supp u是Ω内的紧集(有界闭集)，则称u具有紧支集，记为$u \in C_c(\Omega)$或$u \in C_0(\Omega)$

- 记$C_0^k(\Omega) = C^k(\bar{\Omega}) \bigcap C_0(\Omega)$, 称$C_0^k(\Omega)$ 是在Ω内k次连续可微且有紧支集的函数的全体。
- $\int_\Omega f(x)dX$ 表示函数$f(x)$在Ω上的n重积分

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{n} f(x)dx_1 \cdots dx_n$$

- $\int_{\partial\Omega} g(x)dS$表示$g(x)$沿封闭曲面$\partial\Omega$的外侧的第二型曲面积分$\oint_{\partial\Omega} dS$

- **命题1.0.1**
  设开集$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, f在Ω内连续. 如果对于任意的子集$\Omega' \subset \Omega$,都有$\int_{\Omega'} f(x)dx = 0$,则在$\Omega$上$f = 0$.

- **命题1.0.2**
  设开集$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, f在Ω内连续. 如果对于任意的$v \in C_0^\infty(\Omega)$,都有$\int_\Omega f(x)v(x)dx = 0$,则在$\Omega$上$f = 0$.

- **命题1.0.3**(Stokes公式、散度定理或分部积分公式)
  设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$是一个有界光滑区域,对于$C^1$的$n$维向量值函数v, 下面积分等式成立

$$\int_\Omega \bigtriangledown \cdot \mathbf{v} \mathbf{dx} = \int_\Omega \mathbf{div} \mathbf{v} \mathbf{dx} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \mathbf{dS}$$

其中n是$\partial\Omega$上的单位法外向量,dS是$\partial\Omega$上的面积元素.当$n = 1, 2, 3$时，分别是牛顿-莱布尼茨公式、Green公式和奥高公式。

（在利用守恒律推导方程时，会利用命题1的结论；在利用变分原理推导方程时会利用命题2的结论；在涉及到区域积分和边界积分之间的关系时，会利用命题3的结论）

几个基本符号:
S :纯量函数,V :向量场;

- 梯度:grad. ∇, 描述了数量场变化最大的方向和数值.

$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n})^T; \Omega \to R^N, \ \ \nabla : S \to V$$

- 方向导数:给定单位向量$\overrightarrow{\alpha}$, $|\overrightarrow{\alpha}| = 1$, u沿方向$\overrightarrow{\alpha}$ 的方向导数:$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \nabla u \cdot \overrightarrow{\alpha}$,特别当$\overrightarrow{\alpha}$ 是$\partial\Omega$的法向量(内外法向量),外法向量$\overrightarrow{n}$时,$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \overrightarrow{n}$.

- 散度,div, $div A$表示$\overrightarrow{A}$穿过某点处单位体积的边界向外的流量

$$div\overrightarrow{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$$

- Laplacian; $\Delta = div\nabla, S \to S$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

1.1　典型方程的导出

物理定律的数量形式(数学表达)

⋆1.1.1 守恒律

利用守恒律推导微分方程的基本方法：
守恒律+Stokes公式+Fubini交换积分次序定理⇒偏微分方程。

- 守恒律:质量守恒；能量守恒；动量守恒；
- Stokes公式:
- Fubini交换积分次序定理:

$\star$1弦振动方程

模型　一根拉紧的柔软细弦，假设在外力的作用下，弦在平面上作微小横振动一振动方向与弦的平衡位置垂直。

问题 研究弦的振动规律

建立坐标系以弦的平衡位置x轴，在弦作振动的平面上取与x轴垂直的方向为u轴，弦的一端为原点，弦长为l.

分析

- **(1) 细:** 横截面的直径$d \ll l$,运动状态在同一横截面上处处相同，即弦可以看成无粗细的线。
- **(2) 拉紧:**指的是弦线在弹性范围内，因此Hooke定律成立，张力与弦线的相对伸长成正比。
- **(3) 柔软:**弦在每一点处，该点两端的部分之间相互作用力，这个力的分量一般来讲有切向力和法向力。柔软是指没有抗弯曲的张力，张力只是沿切线方向的。
- **(4) 微小位移:**弦的位置只作了微小变化，即$|u_x| \ll 1.$
- **(5) 横振动:**只有沿u轴方向的位移

利用动量守恒导出u的变化规律：

- 任取一小段弦$[a,b]$以及小时段$[t_1,t_2]$,在$[a,b] \times [t_1,t_2]$上研究弦的变化情况。
- 这时的动量守恒律可以写成：
  $\boxed{t=t_2\text{时的动量}} - \boxed{t=t_1\text{时的动量}} = \boxed{[a,b]\times[t_1,t_2]\text{内的冲量}}$
- ρ表示单位长度的质量(密度),f_0表示在u轴的正方向、单位长度上的外力密度，T表示张力，u表示位移。

- 在t时刻，位移为u,弦长$s=\int_a^b\sqrt{1+u_x^2}dx\approx b-a$,即弦并未伸长，所以$\rho$与$t$无关。
- 在$[a,b]$上，由Hooke定律得，$T_t-T_{t_0}=k\times$弦长的伸长量≈ 0,所以T与t无关。
- 沿水平方向，由于弦没有位移，所以速度为零，从而动量为零，冲量为零。
- 由于弦在水平方向未受外力作用，利用牛顿定律知$T_b\cos\alpha_b=T_a\cos\alpha_a$.又因为

$$\cos\alpha_a=\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}\Big|_{x=a}\approx 1,\cos\alpha_b=\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}\Big|_{x=b}\approx 1,$$

所以$T_a=T_b$,即$T=T_0$与x,t无关。

- 沿垂直方向

$\boxed{t=t_2\text{时的动量}} - \boxed{t=t_1\text{时的动量}} = \boxed{\text{外力在}[a,b]\times[t_1,t_2]\text{内产生的冲量}} + \boxed{\text{张力在垂直方向内产生的冲量}}$

- 用数学表述

$$\int_a^b \rho u_t|_{t=t_2}dx - \int_a^b \rho u_t|_{t=t_1}dx = \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_0 dxdt + \int_{t_1}^{t_2}(T_b\sin\alpha_b - T_a\sin\alpha_a)dt.$$

  - 其中

$$\sin\alpha_a = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}|_{x=a} \approx u_x|_{x=a}, \sin\alpha_b = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}|_{x=b} \approx u_x|_{x=b},$$

- 这时上式变为

$$\int_a^b \rho u_t|_{t=t_2} dx - \int_a^b \rho u_t|_{t=t_1} dx = \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_0 dx dt$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} T_0[u_x(b,t) - u_x(a,t)]dt.$$

其中

$$\int_a^b \rho u_t|_{t=t_2} dx - \int_a^b \rho u_t|_{t=t_1} dx = \int_a^b \rho(u_t|_{t=t_2} - u_t|_{t=t_1})dx$$

$$= \int_a^b \int_{t_1}^{t_2} \rho u_{tt} dt dx$$

- 如果u_{tt}, u_{xx}连续，上式又可写成

$$\int_a^b \int_{t_1}^{t_2} \rho u_{tt} dt dx = \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_0 dx dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b T_0 u_{xx} dx dt.$$

- 根据Fubini交换积分次序定理以及a, b, t_1, t_2的任意性可得

$$\rho u_{tt} = T_0 u_{xx} + f_0.$$

- 如果弦是均匀的，则ρ为常数，上式可以改写成

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \qquad (1.1.1)$$

其中$a = \sqrt{T_0/\rho}, f = f_0/\rho$.方程(1.1.1)称为一维弦振动方程。

- 在平面上放置一个框架，对于固定在该框架上作横振动的薄膜，类似可得膜的的振动方程，即二维波动方程

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y, t), \quad x \in \Omega \subset R^2, a > 0$$

- n维薄膜的横振动方程，即n维波动方程

$$u_{tt} - a^2 \triangle u = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset R^n, a > 0$$

其中$\triangle u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots + u_{x_nx_n}$

- 如果薄膜处于平衡状态，那么位移和时间t无关，可得n维Poisson方程或位势方程

$$-a^2 \triangle u = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset R^n, a > 0$$

此时当$f = 0$时，即得n维Laplace方程或调和方程

$$-a^2 \triangle u = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset R^n, a > 0$$