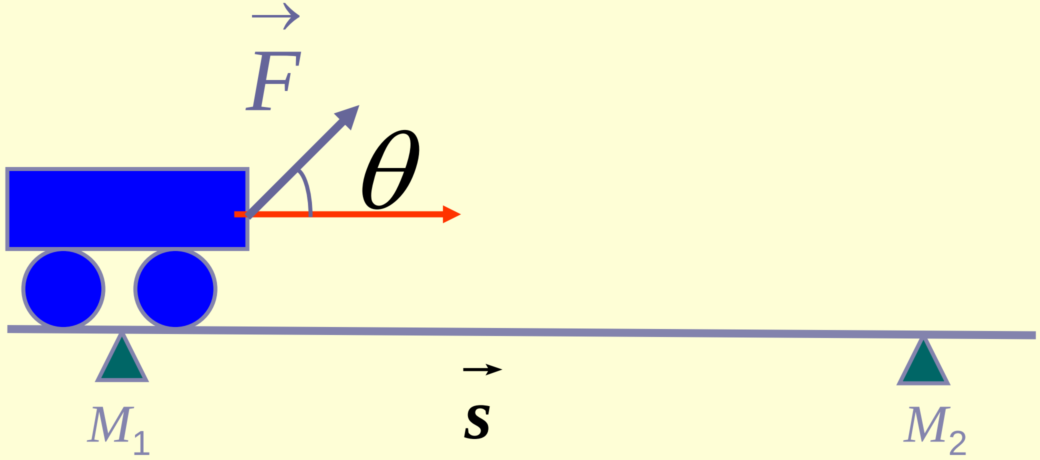
§3 向量的内积

实例



一物体在常力$\vec{F}$作用下沿直线从点M_1移动到点M_2，以$\vec{s}$表示位移，则力$\vec{F}$所作的功为

$$W = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta \quad (\text{其中}\theta\text{为}\vec{F}\text{与}\vec{s}\text{的夹角})$$

启示 两向量作这样的运算, 结果是一个数量.

1.射影和分量

对于单位向量$\vec{e}$和任一向量$\vec{a}$,$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2$，其中$\vec{a}_1 /\!/ \vec{e}$，$\vec{a}_2 \perp \vec{e}$。这样的分解是唯一的.

定义：若$\vec{a}_1$是$\vec{a}$在方向$\vec{e}$上的内射影，则∃唯一的实数λ，使得$\vec{a}_1=\lambda\vec{e}$，这个实数λ称为$\vec{a}$在$\vec{e}$的分量记作$\Pi_{\vec{e}}\vec{a}$，$\vec{a}$与$\vec{e}$的夹角记为$\langle \vec{a},\vec{e} \rangle$. $(0 \le \langle \vec{a}, \vec{e} \rangle \le \pi)$.

命题 1 向量 $\vec{a}$ 在方向 $\vec{e}$ 上的分量为：

$$\Pi_{\vec{e}}\vec{a} = |\vec{a}| \cos\langle \vec{a}, \vec{e} \rangle .$$

命题 2 设 $\vec{e}$ 为一个单位向量，则对任意向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 有

$$\Pi_{\vec{e}}(\vec{a}+\vec{b}) = \Pi_{\vec{e}}\vec{a} + \Pi_{\vec{e}}\vec{b}$$

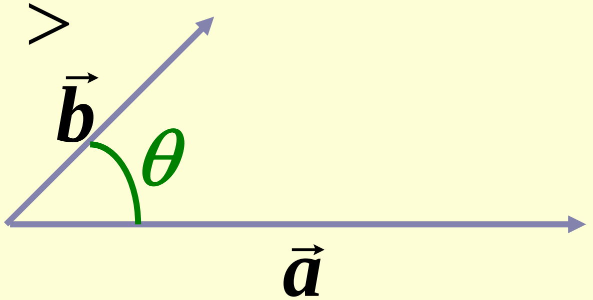
$$\Pi_{\vec{e}}(\lambda\vec{a}) = \lambda(\Pi_{\vec{e}}\vec{a})$$

2.向量的内积的定义和性质

定义：两向量$\vec{a},\vec{b}$ 的数积（内积）$\vec{a}\cdot\vec{b}$ （或$\vec{a}\vec{b}$ ）

是指数量

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$$



内积也称为“**点积**”、“数积”.

定理：两向量垂直的充要条件是它们的内积为零。

根据射影的定义 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\Pi_{\vec{b}} \vec{a}) \cdot |\vec{b}|$

当 $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$ 时，

两向量的夹角 $\cos < \vec{a}, \vec{b} >= \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

向量的长度 $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

运算规律：

对于任意的向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，任意实数λ，有

$$(1)\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$(2)\ (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$(3)\ (\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{b}$$

(4)若$\vec{a}\neq 0$，则$\vec{a}\cdot\vec{a}>0$

例1：平行四边形为菱形的充要条件是对角线互相垂直。

例 2：已给三角形两边上的向量 $\vec{a},\vec{b}$ ，第三边上的矢量为 $\vec{a}+\vec{b}$，证明不等式 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \leq \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$.

例 3　证明向量 $\vec{c}$ 与向量 $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ 垂直.

3.用坐标计算向量的内积

坐标系仿射 $[O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$，设 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}=\ & a_1b_1\vec{e}_1\vec{e}_1+a_1b_2\vec{e}_1\vec{e}_2+a_1b_3\vec{e}_1\vec{e}_3\\ & +a_2b_1\vec{e}_2\vec{e}_1+a_2b_2\vec{e}_2\vec{e}_2+a_2b_3\vec{e}_2\vec{e}_3\\ & +a_3b_1\vec{e}_3\vec{e}_1+a_3b_2\vec{e}_3\vec{e}_2+a_3b_3\vec{e}_3\vec{e}_3\end{aligned}$$

$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 任意两个向量的内积，这九个参数称为仿射坐标架 $[O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ 的度量参数.

特别为直角坐标系，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

长度 $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

在直角坐标系中，两个向量的内积等于它们对应坐标的乘积之和。

例 1 在直角坐标系下，已知 $\vec{a}=\{1,1,-4\}$，$\vec{b}=\{1,-2,2\}$，求（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}$；（2）$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角；（3）$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的分量.

4.方向角和方向余弦

直角坐标架$[o,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ 向量$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{e}_1=a_1,\vec{a}\cdot\vec{e}_2=a_2,\vec{a}\cdot\vec{e}_3=a_3$$

$\vec{a}$的单位向量$\overrightarrow{a^0}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(x,y,z)$

$$x=\cos<\vec{a},\vec{e}_1>,y=\cos<\vec{a},\vec{e}_2>,z=\cos<\vec{a},\vec{e}_3>$$

记向量$\vec{a}$与坐标基向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$的夹角分别为α，β，γ称为$\vec{a}$的方向角，则**cos**α，cosβ。cosγ为方向$\vec{a}$的方向余弦。

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$