

层次分析模型

主讲人： 窦本年



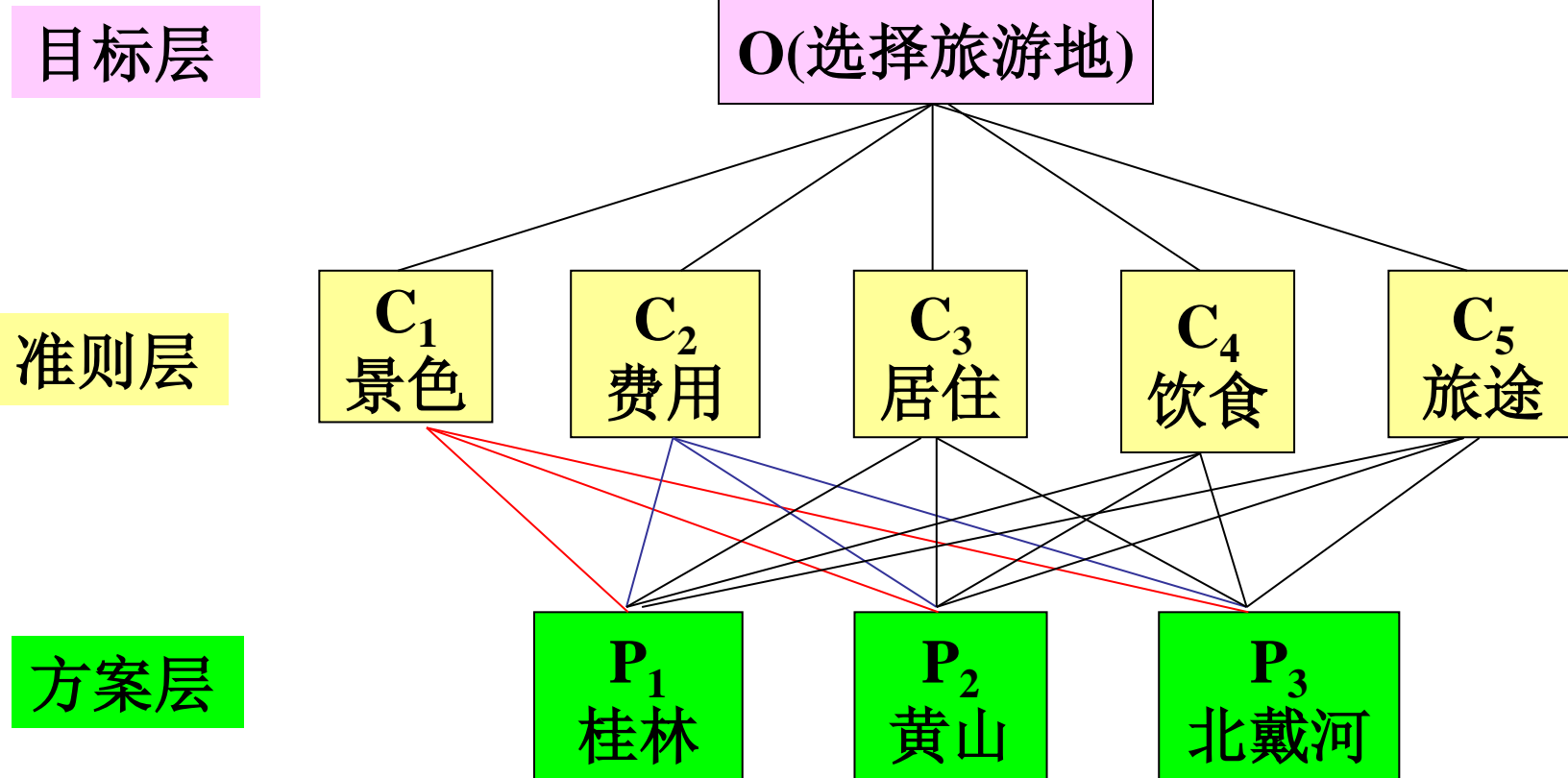
背景

- 日常工作、生活中的决策问题.
- 涉及经济、社会等方面的因素.
- 作比较判断时人的主观选择起相当大的作用，各因素的重要性难以量化.
- Saaty于20世纪70年代提出层次分析法
AHP (Analytic Hierarchy Process)
- AHP——一种**定性**与**定量**相结合的、**系统化、层次化**的分析方法

选择旅游地



如何在3个目的地中按照景色、费用、居住条件等因素选择.



“选择旅游地”思维过程的归纳



- 将决策问题分为3个层次：目标层 O ，准则层 C ，方案层 P ；每层有若干元素，各层元素间的关系用相连的直线表示。
- 通过相互比较确定各准则对目标的权重，及各方案对每一准则的权重。
- 将上述两组权重进行综合，确定各方案对目标的权重。

层次分析法将定性分析与定量分析结合起来完成以上步骤，给出决策问题的定量结果。

层次分析法的基本步骤

成对比较阵 和权向量

元素之间两两对比，对比采用相对尺度

设要比较各准则 C_1, C_2, \dots, C_n 对目标 O 的重要性

$$C_i : C_j \Rightarrow a_{ij} \quad A = (a_{ij})_{n \times n}, a_{ij} > 0, a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$A \sim$ 成对比较阵

A 是正互反阵

要由 A 确定 C_1, \dots, C_n 对 O 的权向量

1~9尺度—— a_{ij} 取值1,2,...,9及其互反数1,1/2,...,1/9

成对比较阵和权向量

成对比较的不一致情况

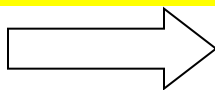
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & \dots \\ 2 & 1 & 7 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$



$$a_{12} = 1/2 (C_1 : C_2)$$

$$a_{13} = 4 (C_1 : C_3)$$

一致比较



$$a_{23} = 8 (C_2 : C_3)$$

不一致

允许不一致，但要确定不一致的允许范围

考察完全一致的情况

$$W(=1) \Rightarrow w_1, w_2, \dots, w_n$$

$$\text{令 } a_{ij} = w_i / w_j$$

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T \sim \text{权向量}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

成对比较阵和权向量

成对比较完全一致的情况

满足 $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$, $i, j, k = 1, 2, \dots, n$
的正互反阵 A 称**一致阵**, 如

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ w_1 & w_2 & & w_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \\ w_1 & w_2 & & w_n \end{bmatrix}$$

一致阵 性质

- A 的秩为1, A 的唯一非零特征根为 n
- A 的任一系列向量是对应于 n 的特征向量
- A 的归一化特征向量可作为权向量

对于不一致(但在允许范围内)的成对比较阵 A ,
建议用对应于最大特征根 λ 的特征向量作为权
向量 w , 即 **$Aw = \lambda w$**

一致性检验

对A确定不一致的允许范围

已知： n 阶一致阵的唯一非零特征根为 n

可证： n 阶正互反阵最大特征根 $\lambda \geq n$ ，且 $\lambda = n$ 时为一致阵

定义一致性指标： $CI = \frac{\lambda - n}{n - 1}$ CI 越大，不一致越严重

为衡量 CI 的大小，引入随机一致性指标 RI ——随机模拟得到 a_{ij} ，形成A，计算 CI 即得 RI 。

Saaty的结果如下

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

定义一致性比率 $CR = CI/RI$

当 $CR < 0.1$ 时通过一致性检验

“选择旅游地”中
准则层对目标的权
向量及一致性检验

最大特征根 $\lambda=5.073$

准则层对目标的成对比较阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

权向量(特征向量) $w=(0.263,0.475,0.055,0.090,0.110)^T$

$$\text{一致性指标 } CI = \frac{5.073 - 5}{5 - 1} = 0.018$$

随机一致性指标 $RI=1.12$ (查表)

$$\text{一致性比率 } CR = 0.018 / 1.12 = 0.016 < 0.1$$

通过一致性
检验!

组合权向量

记第2层（准则）对第1层（目标）
的权向量为 $w^{(2)} = (w_1^{(2)}, \dots, w_n^{(2)})^T$

同样求第3层(方案)对第2层每一元素(准则)的权向量

方案层对 C_1 (景色)
的成对比较阵

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

方案层对 C_2 (费用)
的成对比较阵

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/8 \\ 3 & 1 & 1/3 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$\dots C_n$

$\dots B_n$

最大特征根 λ_1

λ_2

$\dots \lambda_n$

权向量 $w_1^{(3)}$

$w_2^{(3)}$

$\dots w_n^{(3)}$

组合权向量

第3层对第2层的计算结果

k	1	2	3	4	5	$w^{(2)}$
$w_k^{(3)}$	0.595	0.082	0.429	0.633	0.166	0.263
	0.277	0.236	0.429	0.193	0.166	0.475
	0.129	0.682	0.142	0.175	0.668	0.055
λ_k	3.005	3.002	3	3.009	3	0.090
CI_k	0.003	0.001	0	0.005	0	0.110

$RI=0.58$ ($n=3$), CI_k 均可通过一致性检验

方案 P_1 对目标的组合权重为 **$0.595 \times 0.263 + \dots = 0.300$**

方案层对目标的组合权向量为 $(0.300, 0.246, 0.456)^T$

层次分析法的基本步骤



1) 建立层次分析结构模型

深入分析实际问题，将有关因素自上而下分层（目标—准则或指标—方案或对象），上层受下层影响，而层内各因素基本上相对独立。

2) 构造成对比较阵

用成对比较法和1~9尺度，构造各层对上一层每一因素的成对比较阵。

3) 计算权向量并作一致性检验

对每一成对比较阵计算最大特征根和特征向量，作一致性检验，若通过，则特征向量为权向量。

4) 计算组合权向量（作组合一致性检验*）

组合权向量可作为决策的定量依据。

