大学物理

范鹏东

华东理工大学物理系

February 26, 2019

1. 自我介绍

- 姓名：范鹏东
- 办公室：实验二楼217西(徐汇校区)
- 电话：15201800058
- E-mail: 910490822@qq.com
- 课程QQ群：336332154

2. 教材，参考书，学习资料

- 教材：普通物理学(第七版) 程守洙、江之永编

  高等教育出版社

- 参考书：大学物理 张三慧 编著 清华大学出版社

- 学习资料：

  - 大学物理习题册 华东理工大学出版社
  - 大学物理自测 华东理工大学出版社
  - 大学物理学习指导 华东理工大学出版社

    阴其俊 钱水兔 汪溶 陆慧 编著

3. 课程评分标准

- 出勤：7.5%
- 作业：7.5%
- 期中考试：15%
- 期末考试：70%

4. 课堂规范

- 迟到：尽量避免迟到，迟到者尽快找座位坐下，尽量避免影响其他同学.
- 手机静音或关机
- 遵守课堂纪律，不影响他人，学生老师彼此尊重.

5. 为什么学习大学物理?

- 物理学是许多其它自然科学和工程技术的基础: 化学，生物学，电子技术，半导体技术，生物技术，等等

- 学习大学物理是现代人需要具备的基本素质的要求: 就像每一个人都会认字。

6. 大学物理学什么？

大学物理上

- 力学

  1. 质点的运动
  2. 刚体的运动
  3. 振动和波

- 热学

  1. 气体动理论
  2. 热力学

大学物理下

- 电学和光学
- 相对论和量子物理

第一章 运动和力

- 力学的研究对象：机械运动的规律及其应用

- 力学的主要内容：
  - **运动学**: 研究物体位置随时间的变化
  - **动力学**: 研究机械运动发生的原因
  - **静力学**: 研究物体平衡的条件

1.1 质点运动的描述

一、质点: 没有物体的形状和大小，只具有该物体全部质量的点。

注意:

- 由于研究的运动不同，同一个物体有时可看作一个质点，有时则不可!

例如：地球的运动

- 公转: 形状和大小可以忽略，可以看作质点.
- 自转: 形状和大小不可以忽略，不可以看作质点.

1.1 质点运动的描述

二、参考系和坐标系

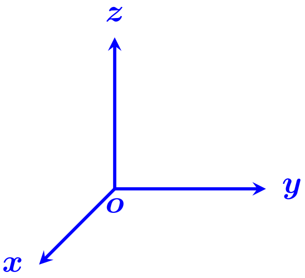
- **绝对性:** 不存在绝对静止的物体
- **相对性:** 描述物体的运动需要以别的物体(参照系)作参照， 在不同的参照系中，对同一物体的运动具有不同的描述。

例如：匀速运动的车厢中的自由落体运动，车厢中的观测者看到的是自由落体运动，地面上的观测者看到的是平抛运动。

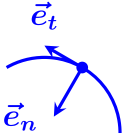
1.1 质点运动的描述

坐标系：固定于参照系，用于对运动的定量描述。

常用坐标系：



直角坐标系



自然坐标系

1.1 质点运动的描述

三、 空间和时间

- **空间:** 反映了物质的广延性，与物体的体积和位置的变化联系在一起。

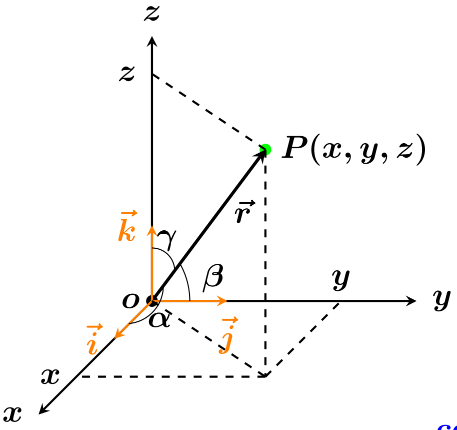
- **时间:** 反映物理事件的顺序性和持续性。

- **时空范围:** 宇宙的尺度10^{26}m($\sim$ 150亿光年)到微观粒子尺度10^{-15}m，从宇宙的年龄10^{18}s($\sim$ 150亿年)到微观粒子的最短寿命10^{-24}s。

- **空间和时间的下限:** 分别为普朗克长度10^{-35}m和普朗克时间10^{-43}s 。

1.1 质点运动的描述

四、位置矢量



- $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- 大小：
  $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- 方向： $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{|\vec{r}|} \\ \cos\beta = \dfrac{y}{|\vec{r}|} \\ \cos\gamma = \dfrac{z}{|\vec{r}|} \end{cases}$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

1.1 质点运动的描述

位置矢量$\vec{r}$的性质:

- 矢量性: $\vec{r}$有大小，有方向。遵守矢量运算法则。
- 瞬时性: $\vec{r}(t)$是t的函数。
- 相对性: 质点P在同一时刻t相对于不同参照系的位置 矢量不同。

1.1 质点运动的描述

五、运动方程、轨道方程

- **运动方程**：位置矢量和时间的函数关系

  矢量式: $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

  标量式: $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$

  运动叠加原理: 质点的运动可以看作是各分运动的矢量合成。

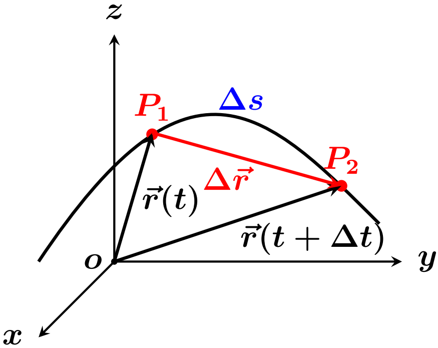
- **轨道方程**：质点位置坐标间的函数关系

  将质点的运动方程中的时间t消去，即可得质点的轨道方程。

  $x = x(y)$或$y = y(x)$

1.1 质点运动的描述

六、 位移：位置矢量的增量



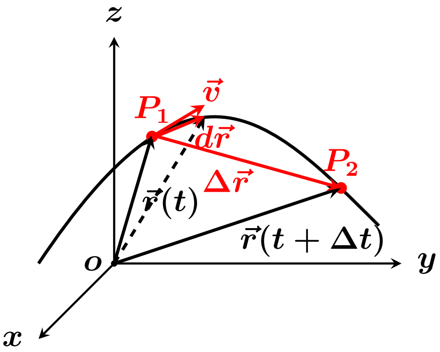
- t时刻，P_1点， 位矢为$\vec{r}(t)$
- $t+\Delta t$时刻，P_2点，位矢为$\vec{r}(t+\Delta t)$
- 从P_1到P_2的有向线段(位移)记为$\Delta\vec{r}$
- $\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$

注意:

- $\Delta\vec{r}$是矢量
- $|\Delta\vec{r}|\neq\Delta r$,
  $\Delta r=|\vec{r}_2|-|\vec{r}_1|$
- $|\Delta\vec{r}|\neq\Delta s$, Δs: 路程(标量)
  $\Delta t\to 0$时，$|d\vec{r}|=ds$

1.1 质点运动的描述

七、速度



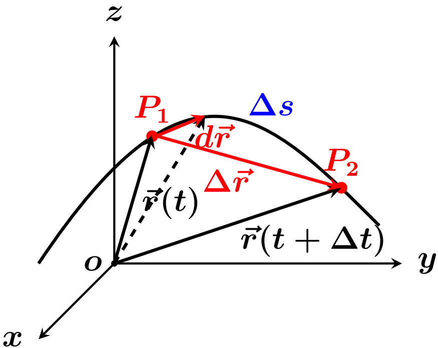
- 平均速度: $\overline{\vec{v}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$
- 方向：$\Delta\vec{r}$的方向
- 大小：$\overline{v} = \left|\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|$

- 瞬时速度:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- 方向：沿该时刻该位置轨道的切线方向并指向前进的一侧。
- 大小：$v = |\vec{v}| = \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|$

1.1 质点运动的描述



- 平均速率：$\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$
- 瞬时速率：

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

注意：

- $\Delta s \neq |\Delta\vec{r}|$，

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \neq \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \left|\bar{\vec{v}}\right|$$

平均速率≠平均速度的大小

- $ds = |d\vec{r}|$，

$$|\vec{v}| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt} = v$$

瞬时速度的大小=瞬时速率

1.1 质点运动的描述

- 直角坐标系中，速度的表达式

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

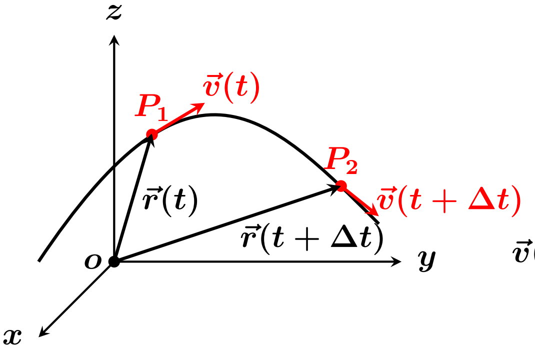
$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

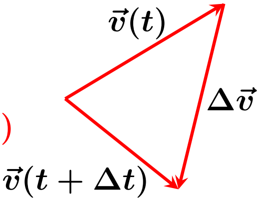
$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

- 瞬时速度$\vec{v}$的性质：矢量性、瞬时性、相对性

八、 加速度





- 平均加速度: $\overline{\vec{a}} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

方向：速度增量$\Delta\vec{v}$的方向。

1.1 质点运动的描述

- 瞬时加速度: $\vec{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

  方向：当$\Delta t\to 0$时，速度增量$\Delta\vec{v}$的极限方向，

  性质：矢量性、瞬时性、相对性

- 直角坐标系中，加速度的表达式

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= d\vec{v}/dt=(dv_x/dt)\vec{i}+(dv_y/dt)\vec{j}+(dv_z/dt)\vec{k}\\
&= (d^2x/dt^2)\vec{i}+(d^2y/dt^2)\vec{j}+(d^2z/dt^2)\vec{k}\\
&= a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\\
a &= |\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}
\end{aligned}
$$

1.1 质点运动的描述

九、运动学的两类问题

- **求导问题:**

已知：$\vec{r}=\vec{r}(t)$，求：$\vec{v}=\vec{v}(t)$，$\vec{a}=\vec{a}(t)$

- **积分问题:**

已知：$\vec{a}=\vec{a}(t)$和初始条件$t=0$，(x_0,y_0,z_0)，(v_{0x},v_{0y},v_{0z})，求：$\vec{v}=\vec{v}(t)$，$\vec{r}=\vec{r}(t)$

1.1 质点运动的描述

例题1.1-1. 已知$\vec{r}=t^3\vec{i}+t^2\vec{j}$ (r以m计，以s计) 求：

- $t=1s$到$t=2s$的位移

  $\vec{r}(t=1)=\vec{i}+\vec{j},\qquad \vec{r}(t=2)=8\vec{i}+4\vec{j}$

  $\Delta\vec{r}=\vec{r}(t=2)-\vec{r}(t=1)=7\vec{i}+3\vec{j}$

- 上述时间内的平均速度

  $$\overline{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=7\vec{i}+3\vec{j}$$

- $t=1s$及$t=2s$时刻的瞬时速度

  $$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=3t^2\vec{i}+2t\vec{j}$$

  $\vec{v}(t=1)=3\vec{i}+2\vec{j},\qquad \vec{v}(t=2)=12\vec{i}+4\vec{j}$

1.1 质点运动的描述

- 上述时间内的平均加速度

$$\overline{\vec{a}} = \frac{\vec{v}(t=2) - \vec{v}(t=1)}{\Delta t}, \qquad \vec{v} = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j}$$

$$\vec{v}(t=2) = 12\vec{i} + 4\vec{j}, \qquad \vec{v}(t=1) = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\overline{\vec{a}} = 9\vec{i} + 2\vec{j}$$

- $t = 1s$时刻的瞬时加速度

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \qquad \vec{v} = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j}$$

$$\vec{a} = 6t\vec{i} + 2\vec{j}, \qquad \vec{a}(t=1) = 6\vec{i} + 2\vec{j}$$

1.1 质点运动的描述

- $t=1$到$t=2$的路程

$$
\begin{aligned}
ds &= |d\vec{r}|,\ \vec{r}=t^3\vec{i}+t^2\vec{j},\ d\vec{r}=(3t^2dt)\vec{i}+(2tdt)\vec{j},\\
|d\vec{r}| &= \sqrt{9t^4(dt)^2+4t^2(dt)^2}=\sqrt{9t^4+4t^2}dt=ds,\\
\Delta s &= \int_{s(t=1)}^{s(t=2)} ds=\int_{t=1}^{t=2}\sqrt{9t^4+4t^2}\,dt\\
&= \int_{t=1}^{t=2} t\sqrt{9t^2+4}\,dt\\
&= \frac{1}{27}(9t^2+4)^{3/2}\Big|_{t=1}^{t=2}\\
&= \frac{1}{27}[(9\times 4+4)^{3/2}-(9+4)^{3/2}]\\
&= \frac{1}{27}[(40)^{3/2}-(13)^{3/2}]
\end{aligned}
$$

1.1 质点运动的描述

- $t=1$到$t=2$的平均速率

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{1}{27}[(40)^{3/2}-(13)^{3/2}]$$

- $t=1$时刻的瞬时速率

$$v(t)=|\vec{v}|=\sqrt{(3t^2)^2+(2t)^2}=t\sqrt{9t^2+4},$$

$$v(t=1)=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

例题1.1-2. 已知：$\vec{r} = 3\cos(\frac{\pi}{6}t)\vec{i} + 3\sin(\frac{\pi}{6}t)\vec{j}$

试求：1. 轨迹方程； 2. 瞬时速度； 3. 瞬时加速度。

解：1. 运动方程的标量式为

$$x = 3\cos(\frac{\pi}{6}t), \qquad y = 3\sin(\frac{\pi}{6}t)$$

从标量式中消去t得轨迹方程：$x^2 + y^2 = 3^2$

1.1 质点运动的描述

2. 瞬时速度：

$$\begin{aligned}\vec{r} &= 3\cos(\frac{\pi}{6}t)\vec{i} + 3\sin(\frac{\pi}{6}t)\vec{j} \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = -3\times\frac{\pi}{6}\sin(\frac{\pi}{6}t)\vec{i} + 3\times\frac{\pi}{6}\cos(\frac{\pi}{6}t)\vec{j} \\ &= -\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{6}t)\vec{i} + \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{6}t)\vec{j}\end{aligned}$$

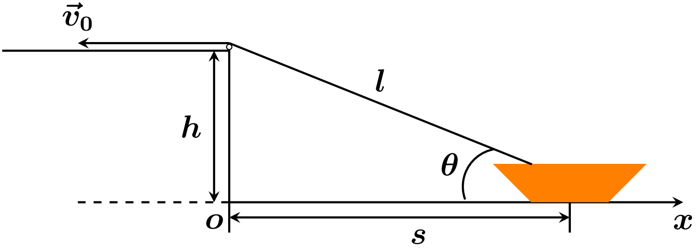
3. 瞬时加速度

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = -3(\frac{\pi}{6})^2\cos(\frac{\pi}{6}t)\vec{i} - 3(\frac{\pi}{6})^2\sin(\frac{\pi}{6}t)\vec{j} \\ &= -(\frac{\pi}{6})^2[3\cos(\frac{\pi}{6}t)\vec{i} + 3\sin(\frac{\pi}{6})\vec{j}] = -(\frac{\pi}{6})^2\vec{r}\end{aligned}$$

$\vec{a}$与$\vec{r}$方向相反，可见加速度指向圆心。

1.1 质点运动的描述

例题1.1-3. 在离水面高度为h的岸边，有人用绳子拉船靠岸， 收绳的速率恒为v_0，任一时刻船离岸边的距离为s，求船靠岸的速率.



解：把绳子的速度分解，其中一个水平分量就是船的速度 $v = v_0 \cos\theta$ ✗ $\quad v_0 = -\dfrac{dl}{dt}$, $s = \sqrt{l^2 - h^2}$,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2l\frac{dl}{dt}}{2\sqrt{l^2 - h^2}} = -v_0\frac{l}{s} = -\frac{v_0}{\cos\theta}, \qquad \left|\vec{v}_{船}\right| = \frac{v_0}{\cos\theta}$$

1.1 质点运动的描述

求加速度的大小.

$$\begin{aligned}
v &= -v_0\frac{l}{s} \\
a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d(-v_0 l/s)}{dt} = -v_0\left[\frac{dl}{dt}\frac{1}{s} + l(-\frac{1}{s^2})\frac{ds}{dt}\right] \\
&= -v_0\left[(-v_0)\frac{1}{s} - \frac{l}{s^2}(-v_0)\frac{l}{s}\right] = \frac{v_0^2}{s}\left[1 - \frac{l^2}{s^2}\right] \\
&= \frac{v_0^2}{s}\left[\frac{s^2 - l^2}{s^2}\right] = -\frac{v_0^2 h^2}{s^3} \\
|\vec{a}| &= \frac{v_0^2 h^2}{s^3}
\end{aligned}$$

1.1 质点运动的描述

已知$t=0$时刻，小船距离岸边s_0，求小船的运动方程.

$$\frac{ds}{dt}=-v_0\frac{l}{s}=-v_0\frac{\sqrt{h^2+s^2}}{s},$$

$$\frac{sds}{\sqrt{s^2+h^2}}=-v_0dt,$$

$$\int_{s_0}^{s}\frac{sds}{\sqrt{s^2+h^2}}=\int_0^t(-v_0)dt,$$

$$\sqrt{s^2+h^2}-\sqrt{s_0^2+h^2}=-v_0t,$$

$$s^2+h^2=\left(\sqrt{s_0^2+h^2}-v_0t\right)^2,$$

$$s=\sqrt{\left(\sqrt{s_0^2+h^2}-v_0t\right)^2-h^2}.$$

1.1 质点运动的描述

例题1.1-4. 已知质点做直线运动，加速度 (1) $a =$ 常量; (2) $a = k_1 t$; (3) $a = -k_2 v$; (4) $a = -k_3 x$, 求质点在任意时刻的速度和运动学方程(开始时$x = x_0$, $v = v_0$, k_1, k_2, k_3为正值常量).

解: (1) $a =$ 常量

$$\begin{aligned} a &= dv/dt, \quad dv = a dt, \quad \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a dt, \\ & v = v_0 + at \\ v &= dx/dt, \quad dx = v dt, \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_0 + at) dt, \\ & x = x_0 + v_0 t + (1/2) a t^2 \end{aligned}$$

1.1 质点运动的描述

(2) $a = k_1 t$

$$a = dv/dt, \quad dv = adt, \quad \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t k_1 t dt,$$

$$v = v_0 + (1/2)k_1 t^2$$

$$v = dx/dt, \quad dx = vdt, \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_0 + \frac{1}{2}k_1 t^2)dt,$$

$$x = x_0 + v_0 t + (1/6)k_1 t^3$$

1.1 质点运动的描述

(3) $a = -k_2 v$

$$
\begin{aligned}
a &= dv/dt, \quad dv = a dt, \quad dv = -k_2 v dt, \quad dv/v = -k_2 dt, \\
&\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = \int_0^t (-k_2) dt, \quad \ln v - \ln v_0 = -k_2 t, \\
&v = v_0 e^{-k_2 t} \\
v &= dx/dt, \quad dx = v dt, \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_0 e^{-k_2 t} dt, \\
&x = x_0 + \frac{v_0}{k_2}(1 - e^{-k_2 t})
\end{aligned}
$$

1.1 质点运动的描述

(4) $a = -k_3 x$

$$
\begin{aligned}
a \;=\;& dv/dt = d^2x/dt^2, \quad -k_3 x = \frac{d^2x}{dt^2},\\
& x = c_1\cos(\sqrt{k_3}t + c_2),\\
& v = dx/dt = -c_1\sqrt{k_3}\sin(\sqrt{k_3}t + c_2),\\
& \because t = 0, v = v_0, x = x_0;\\
& \therefore x_0 = c_1\cos(c_2), \quad v_0 = -c_1\sqrt{k_3}\sin(c_2);\\
& c_1 = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\sqrt{k_3}})^2}, \quad \tan c_2 = -\frac{v_0}{x_0\sqrt{k_3}}.
\end{aligned}
$$

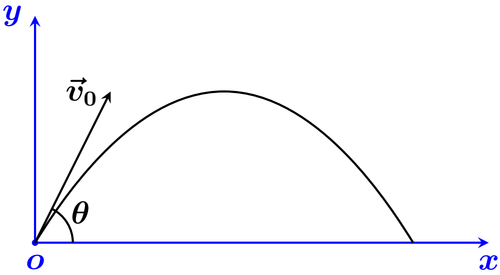
1.1 质点运动的描述

速度v和位置x的关系:

$$
\begin{aligned}
a \;&=\; dv/dt = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}, \quad -k_3 x = v\frac{dv}{dx}, \\
&-k_3 x dx = v dv, \quad \int_{x_0}^{x} -k_3 x dx = \int_{v_0}^{v} v dv, \\
&v = \pm\sqrt{v_0^2 - k_3(x^2 - x_0^2)}
\end{aligned}
$$

1.2 抛体运动

- **定义:** 不计空气阻力，从地面附近抛出物体所作的运动



初始条件: $t = 0$时, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $v_{0x} = v_0 \cos\theta$, $v_{0y} = v_0 \sin\theta$;

1.2 抛体运动

- 加速度: $a_x = 0,\ a_y = -g$
- 速度: $v_x = v_0 \cos\theta,\ v_y = v_0 \sin\theta - gt$
- 运动方程: $x = (v_0 \cos\theta)t,\ y = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$
- 轨迹方程: $$y = x\tan\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$
- 水平射程: $$y = x\tan\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 = 0$$

  $$\Rightarrow x = 0\ (\text{舍去});\ x = \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$$

1.2 抛体运动

- 最高点: $x=?$, $y=y_{\max}=?$

$$y = x\tan\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\bar{x}} = \tan\theta - \frac{g}{v_0^2\cos^2\theta}\bar{x} = 0$$

$$\bar{x} = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\theta, \qquad y_{\max} = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$$

- 飞行时间:

$$y = (v_0\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t = 0(\text{舍去});$$

$$t = \frac{2v_0\sin\theta}{g}.$$

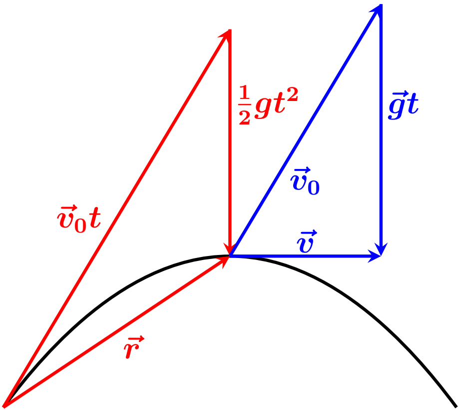
1.2 抛体运动

- 抛体运动的另一种运动合成:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t,$$

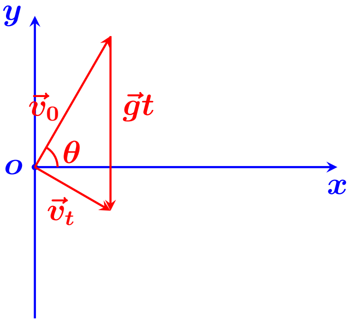
$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

初速$\vec{v}_0$的匀速直线运动和竖直方向上自由落体运动的合成



1.2 抛体运动

例1.2-1: 一人在平地上以$\vec{v}_0$抛出一个铅球，抛射角为$\theta(>45^\circ)$. 试问：经过多少时间后， 铅球得速度方向于$\vec{v}_0$相垂直，此时铅球 的速度大小为多少?



解：由抛体运动的速度矢量图可知，当$v_t \perp v_0$时，有：

$$gt\sin\theta = v_0 \Rightarrow$$

$$t = \frac{v_0}{g\sin\theta}$$

$$\frac{v_0}{v_t} = \tan\theta \Rightarrow v_t = \frac{v_0}{\tan\theta}$$

1.2 抛体运动

$\theta > 45°$?

飞行时间: $t = \dfrac{2v_0 \sin\theta}{g} > \dfrac{v_0}{g\sin\theta} \Rightarrow \sin^2\theta > \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

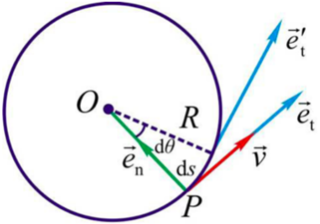
$\sin\theta > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta > 45°$

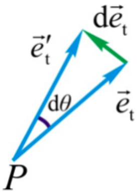
1.3 圆周运动和一般曲线运动

一、切向加速度和法向加速度

1. 自然坐标系：

在质点的运动轨迹上任一点建立坐标系，其中一根坐标轴沿轨迹在该点 P 的切线方向，该方向单位矢量用$\vec{e}_t$ 表示；另一坐标轴沿该点轨迹的法线并指向曲线凹侧，相应单位矢量用$\vec{e}_n$表示.





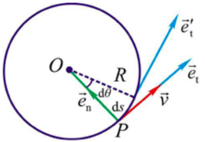
沿轨迹上各点，自然坐标轴的方位是不断地变化着的。

1.3 圆周运动和一般曲线运动

2. **速度和加速度:**

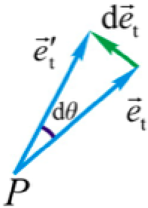
质点速度的方向沿着轨迹的切向，表示为:

$$\vec{v} = v\vec{e}_t = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t$$



加速度为:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt} \\
d\vec{e}_t &= d\theta\vec{e}_n \\
\frac{d\vec{e}_t}{dt} &= \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_n = \omega\vec{e}_n = \frac{v}{R}\vec{e}_n \\
\vec{a} &= \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n
\end{aligned}$$

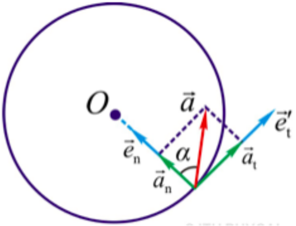


1.3 圆周运动和一般曲线运动

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n$$

- 切向加速度：表示速率变化的快慢。

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$



- 法向加速度：表示速度方向变化的快慢。

$$a_n = v^2/R$$

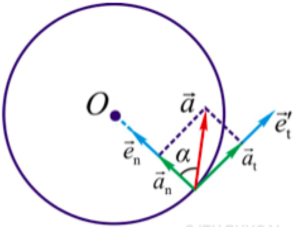
1.3 圆周运动和一般曲线运动

- 总加速度的大小：

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

- 方向(与法向的夹角):

$$\alpha = \arctan(a_t/a_n)$$



- 匀速圆周运动:

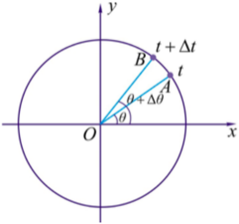
$$a_t = dv/dt = 0, \quad a_n = v^2/R = 常量$$

速度只改变方向，大小不变。

1.3 圆周运动和一般曲线运动

二、圆周运动的角量描述

设质点在Oxy平面内绕O点、沿半径为R的轨道做圆周运动，以Ox轴为参考方向。



- 角位置：θ
- 角位移：$\Delta\theta$ (rad) (规定逆时针方向为正)
- 角速度：

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \ (\mathrm{rad/s})$$

1.3 圆周运动和一般曲线运动

- 角加速度;

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \ (\mathrm{rad/s^2})$$

匀变速圆周运动 (角量描述)	v.s.	匀变速直线运动 (线量描述)
$\omega = \omega_0 + \alpha t$		$v = v_0 + at$
$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + (1/2)\alpha t^2$		$x = x_0 + v_0 t + (1/2)at^2$
$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\varphi - \varphi_0)$		$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

1.3 圆周运动和一般曲线运动

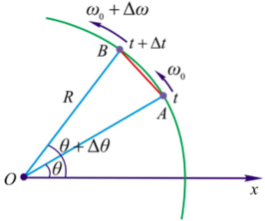
三、角量和线量的关系

质点做圆周运动时，线量(速度、加速度)和角量(角速度、角加速度)之间，存在着一定的关系：

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{(R\theta)}{dt} = R\omega$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R\alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$



圆周运动中，法向加速度也叫向心加速度。

1.3 圆周运动和一般曲线运动

例1.3-1 计算地球自转时地面上各点的速度和加速度。

解: 地球自转周期$T=24\times 60\times 60$ s, 角速度大小为

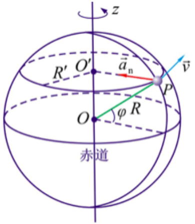
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=7.27\times 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$$

地面上纬度为φ 的P点，其圆周运动的半径为

$$R'=R\cos\varphi$$

P点速度的大小为

$$\begin{aligned} v &= R'\omega=\omega R\cos\varphi \\ &= 4.65\times 10^{2}\cos\varphi\ \mathrm{m/s}\end{aligned}$$



速度的方向与运动圆周相切。

1.3 圆周运动和一般曲线运动

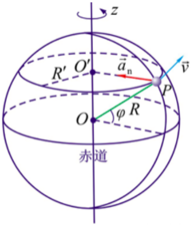
P点只有运动平面上的向心加速度，
其大小为

$$
\begin{aligned}
a_n &= R'\omega^2 = \omega^2 R\cos\varphi \\
&= 3.37\times 10^{-2}\cos\varphi\ \mathrm{m/s^2}
\end{aligned}
$$

方向在运动平面上由P指向地轴

如已知北京的纬度是北纬 39°57′, 则

$$
\begin{aligned}
v &= 356\ \mathrm{m/s} \\
a_n &= 2.58\times 10^{-2}\ \mathrm{m/s^2}
\end{aligned}
$$

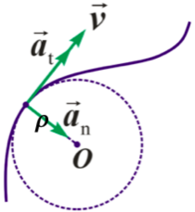


1.3 圆周运动和一般曲线运动

四、一般平面曲线运动中的加速度

设曲线的任意一点处的曲率半径为ρ

- 切向加速度：$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t$
- 法向加速度：$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$



$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

法向加速度$\vec{a}_n$处处指向曲率中心。

1.3 圆周运动和一般曲线运动

例1.3-2: 一飞轮边缘上一点所经过的路程与时间的关系为$s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$，v_0、b 都是正的常量。(1) 求该点在时刻t的加速度。(2) t 为何值时，该点的切向加速度与法向加速度的大小相等？已知飞轮的半径为R。

解: (1) 该点的速率为

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}(v_0t-\frac{1}{2}bt^2)=v_0-bt$$

该点做匀变速圆周运动。

切向加速度为: $a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(v_0-bt)=-b$

法向加速度为: $a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$

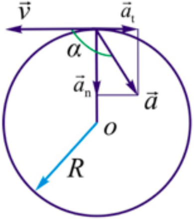
1.3 圆周运动和一般曲线运动

t时刻该点的加速度为

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\frac{1}{R}\sqrt{R^2b^2+(v_0-bt)^4}$$

加速度的方向和速度的夹角为

$$\alpha=\arctan\left[\frac{(v_0-bt)^2}{-Rb}\right]$$



(2) 切向加速度与法向加速度的大小相等，即

$$|a_t|=a_n,\ b=\frac{(v_0-bt)^2}{R},\Rightarrow t=\frac{(v_0-\sqrt{bR})}{b}$$

1.3 圆周运动和一般曲线运动

例1.3-3 一气球从地面以速率v_0匀速上升，由于风的影响，在上升过程中，其水平速率按$v_x = by$的规律增大。求: (1)气球的运动学方程; (2) 气球运动的切向加速度和法向加速度; (3) 轨迹曲率半径与高度y的关系。

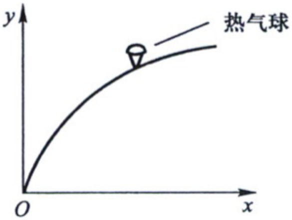
解: (1) 如图所示，可以写出

$$dx/dt = by, \quad dy/dt = v_0$$

$$y = v_0 t, \quad x = \frac{1}{2} b v_0 t^2$$

$$x = (b/2v_0) y^2$$

运动轨迹是一条抛物线。



1.3 圆周运动和一般曲线运动

(2) 气球的速度大小

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{b^2y^2+v_0^2}=v_0\sqrt{b^2t^2+1}$$

$$a_t=dv/dt=\frac{b^2v_0y}{\sqrt{b^2y^2+v_0^2}},\quad a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=b^2v_0$$

$$a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=\frac{bv_0^2}{\sqrt{b^2y^2+v_0^2}}$$

(3) 曲率半径

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{(b^2y^2+v_0^2)^{3/2}}{bv_0^2}$$