20162 华东理工大学数学分析（中）期末测试卷

一、（本题 30 分，每小题 5 分）计算下列各式：

1、$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sin2x}{sin2x+cos2x}dx$ ；　　2、$\int_0^{2\pi} xsgn(tanx)dx$ ；

3、$\int_0^2 \frac{1}{(4-x)\sqrt{2-x}}dx$ ；　　4、$\int_0^{+\infty} e^{-2x}cos2xdx$ ；

5、$\prod_{n=0}^{+\infty} e^{\frac{2^n}{n!}}$ ；　　6、$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n}$ ；

二、（本题 12 分，每小题 6 分）判断下列各式敛散性，若收敛，需指出条件收敛还是绝对收敛。

1、$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left[\sqrt[n]{2017}\right]-1\right)$ ；　　2、$\prod_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$ ；

三、（本题 12 分）D 是定义在 R 上的开集，f_1与f_2是定义在 D 上的实值函数，f是从 D 到R^2的函数，且对任意$\mathrm{x} \in \mathrm{D}$，$\mathrm{f(x)} = (f_1(\mathrm{x}), f_2(\mathrm{x}))$，$x_0 \in D$。

1、（4 分）用$\varepsilon-\delta$语言写出“f 在x_0可导”的定义；

2、（8 分）证明：f 在x_0可导的充分必要条件是f_1与f_2均在x_0可导。

四、（本题 8 分）小明看完本次数分卷后，一半都是心理阴影，jin 老师明白了，“你是指$\rho = 1-\sin\theta$所围区域的一半都是阴影吧”。试求小明心理阴影面积。

五、（本题 8 分）已知函数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$在(a,b)上一致收敛到φ，$x_0 \in (a,b)$，且对任意 n$\in N^+$，f_n在x_0连续，证明：φ在x_0连续。

六、（本题 8 分）已知[a,b]上的可积函数序列$\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$在[a,b]上一致收敛到[a,b]上的可积函数φ，函数 g 在[a,b]上绝对可积，证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)g(x)dx=\int_a^b \varphi(x)g(x)dx$$

七、（本题 22 分）正弦积分函数 Si 定义为 Si(x)=$\int_0^x \frac{sint}{t}dt$，

1、（6 分）求函数 Si 的定义域、导函数和一个原函数 ；

2、（4 分）证明：对任意$\alpha \neq 0$，$\int_0^x \frac{sin\alpha t}{t}dt = \mathrm{Si}(\alpha x)$ ；

3、（6 分）求函数 Si 在 0 展开的 Taylor 级数，并指出该级数的收敛范围；

4、（6 分）求积分$\int_0^{+\infty} \frac{sin^3 2t}{t}dt$ 。