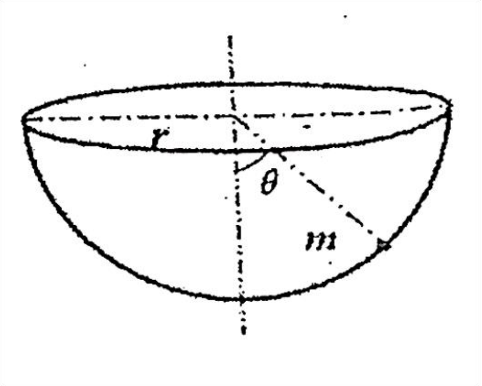
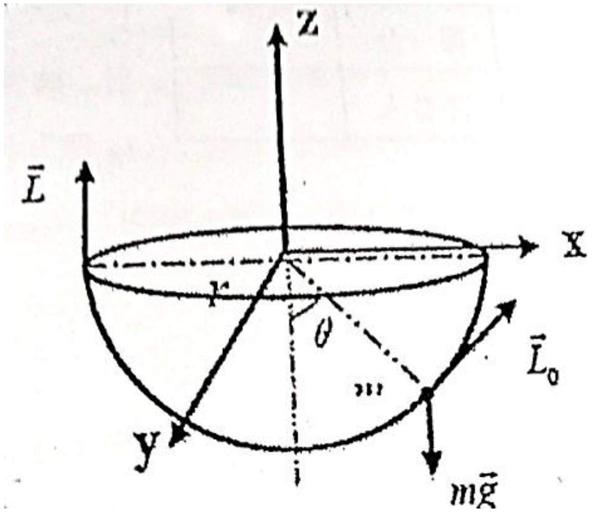
1. 将一质点沿半径为 r 的光滑半球形碗的内表面切线方向水平投射，碗保持静止，设 v_0 是质点恰好到达碗口时所需的初始速率，试求 v_0 与 θ_0 之间的函数表达式，θ_0 是用角度表示的质点的初始位置。



解：取球心为原点，建立坐标系如图。
分析运动质点m对O点的合外力矩，
即质点重力对O点的力矩不为零，运
动质点总角动量不守恒。但重力总在
xOy平面内，因而角动量在z轴分量守恒
并且质点绕行上升时只有重力做功，机
械能守恒。



设质点刚好到达碗口的速度为v，质点在
碗内绕行的方程为

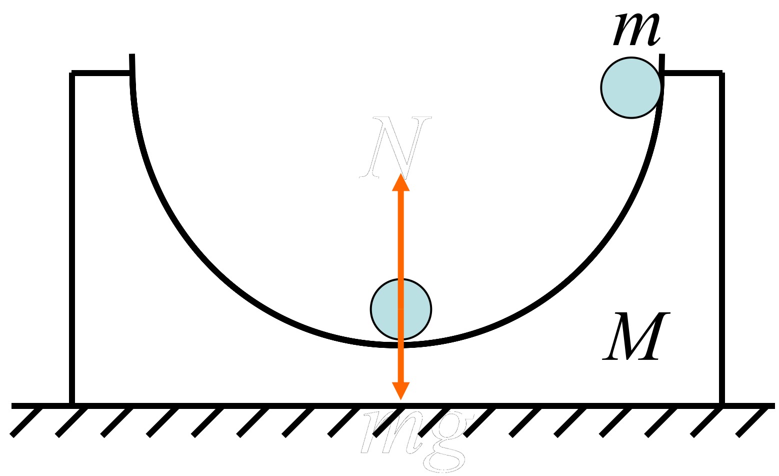
$$\mathrm{rmv}_0 \sin\theta_0 = rmv$$

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgr\cos\theta_0$$

联立解得$v_0 = \sqrt{\dfrac{2gr}{\cos\theta_0}}$

半圆形（R）凹槽的木块（M），放置在光滑地面上，质量为 m的质点从最高点由静止下滑，不计摩擦，求质点下滑至最低点时给木块的压力。

分析：$N - mg = ma_n = m\dfrac{v^2}{\rho}$



解:选地面参照系，以M、m、地球为系统

m下滑过程中，　$A_{外}+A_{非保守内}=0$

$$mgR = \frac{1}{2}Mv_M{}^2 + \frac{1}{2}mv_m{}^2 \ldots(1)$$

以***M***、***m*** 为系统，水平方向动量守恒 $Mv_M + mv_m = 0 \ldots(2)$

由（**1**）（**2**）可得：

$$v_m = \sqrt{\frac{2MRg}{M+m}} \qquad v_M = -\sqrt{\frac{2m^2Rg}{M(M+m)}}$$

选M为参照系：　**M**作圆周运动

$$N - mg = ma_n = m\frac{{v_{mM}}^2}{R}$$

$$\vec{v}_{mM} = \vec{v}_{m\text{地}} - \vec{v}_{M\text{地}}$$

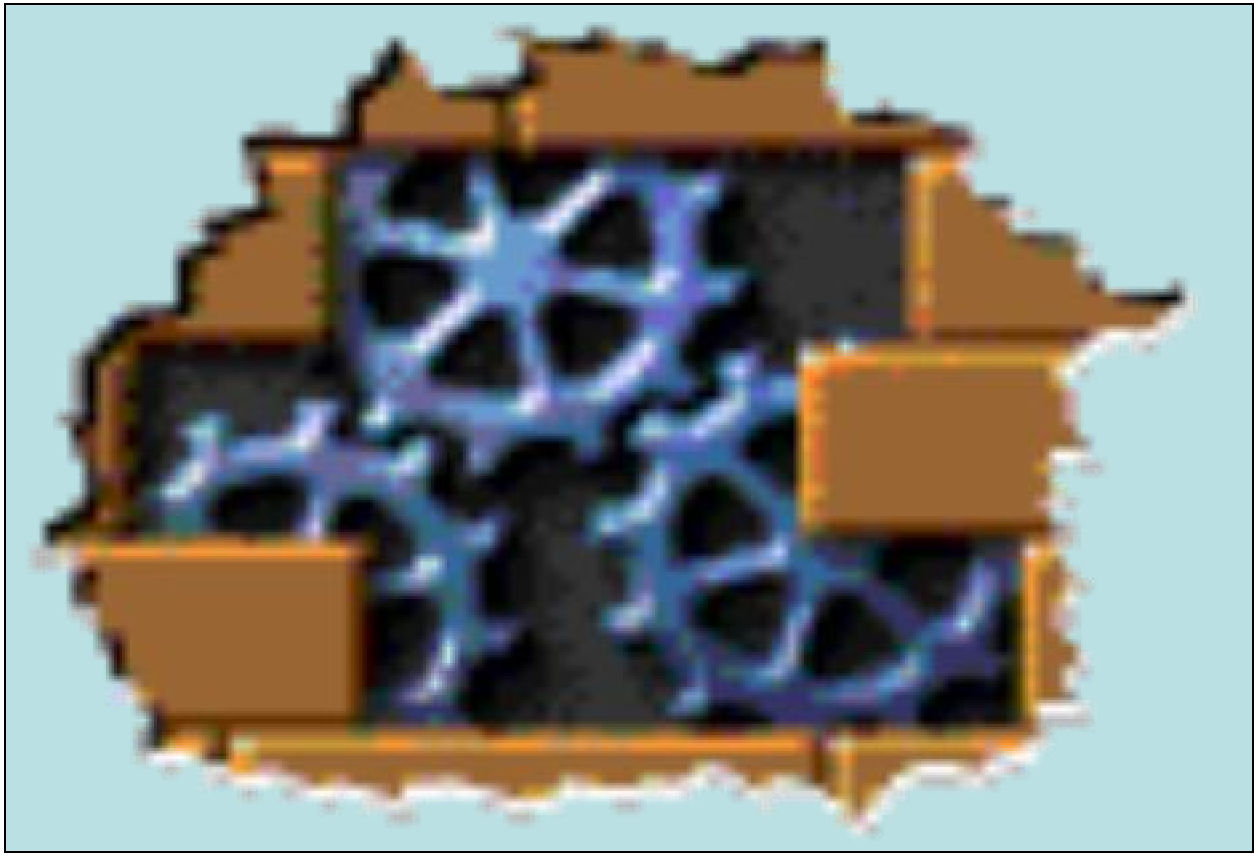
$$v_m = \sqrt{\frac{2MRg}{M+m}}$$

$$v_M = -\sqrt{\frac{2m^2Rg}{M(M+m)}}$$

$$\rightarrow v_{mM} = \sqrt{\frac{2(m+M)Rg}{M}}$$

$$\rightarrow N = \frac{(2m+3M)mg}{M}$$

第3章　　刚体的转动

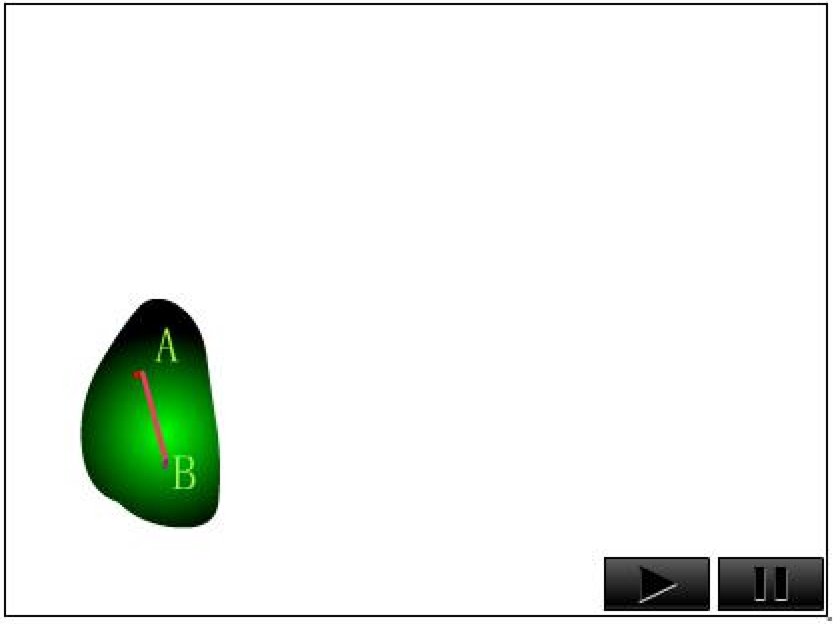


3.1 刚体的运动

刚体：在外力作用下，形状和大小都不发生变化的物体．（任意两质点间距离保持不变的特殊质点组）

刚体的运动形式：平动、转动．

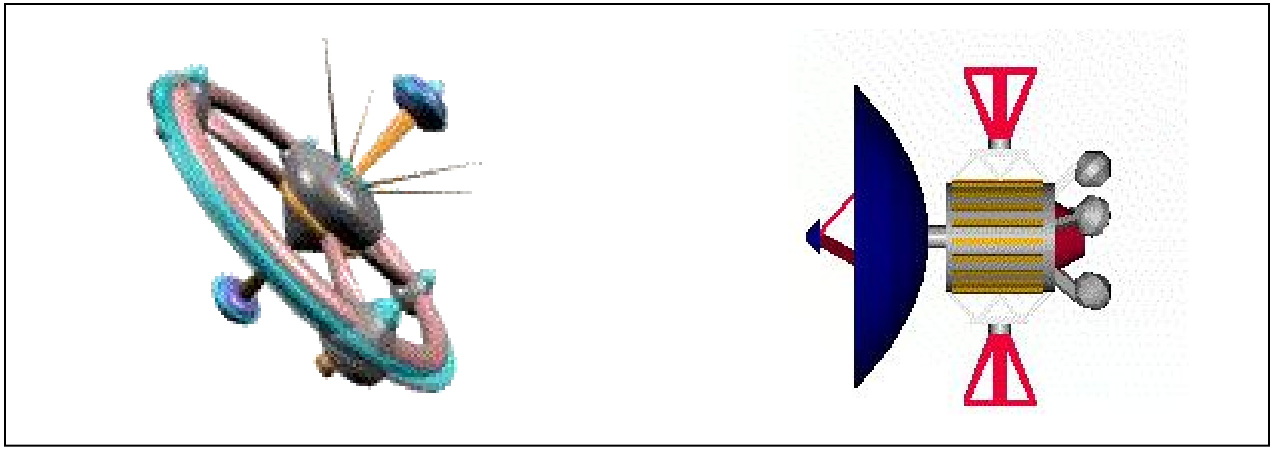
平动：若刚体中所有点的运动轨迹都保持完全相同，或者说刚体内任意两点间的连线总是平行于它们的初始位置间的连线．



刚体平动 ⟹ 质点运动

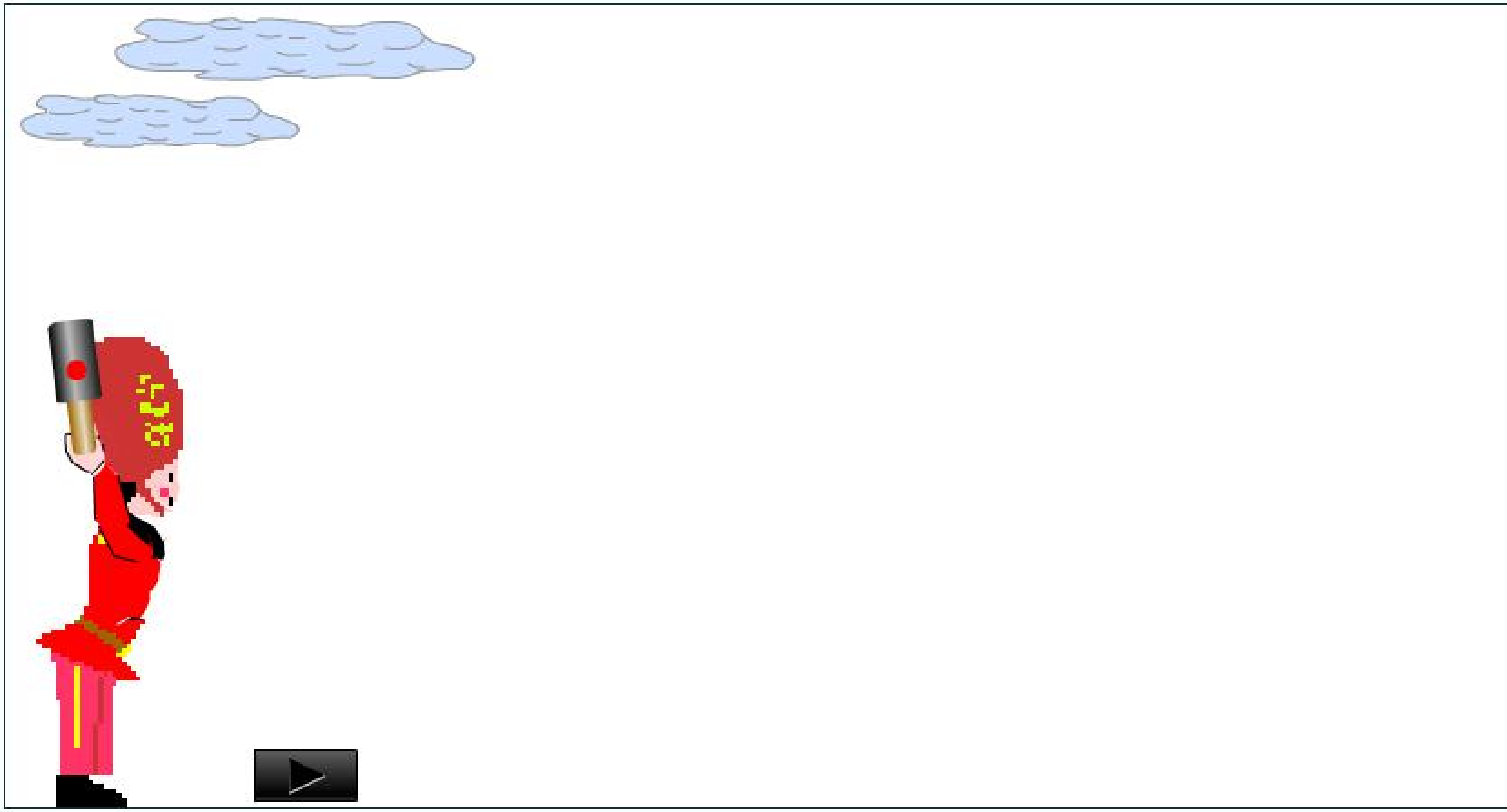
1

- 转动：刚体中所有的点都绕同一直线做圆周运动．转动又分非定轴转动和定轴转动．



- 刚体的平面运动．

➢ 刚体的一般运动 质心的平动 + 绕质心的转动



3

一. 刚体转动的角速度和角加速度

角坐标 $\theta=\theta(t)$

约定

$\vec{r}$ 沿逆时针方向转动 $\theta>0$

$\vec{r}$ 沿顺时针方向转动 $\theta<0$

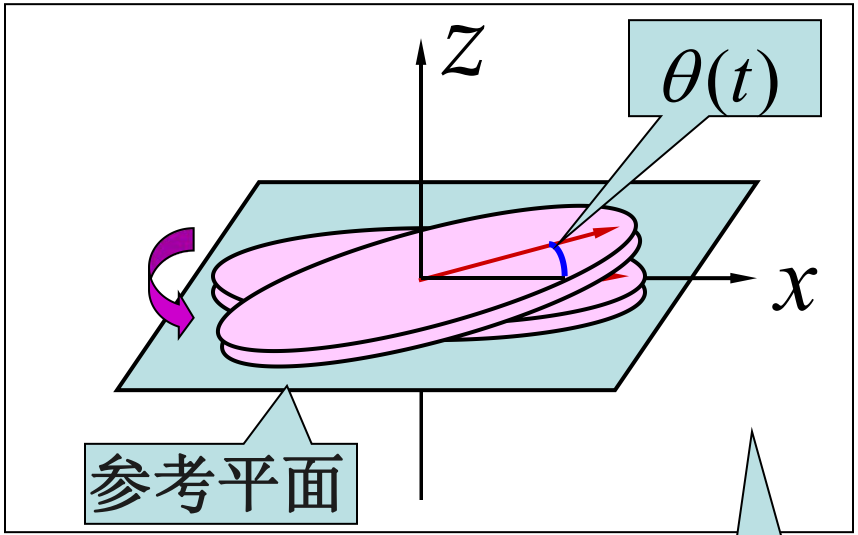
角位移

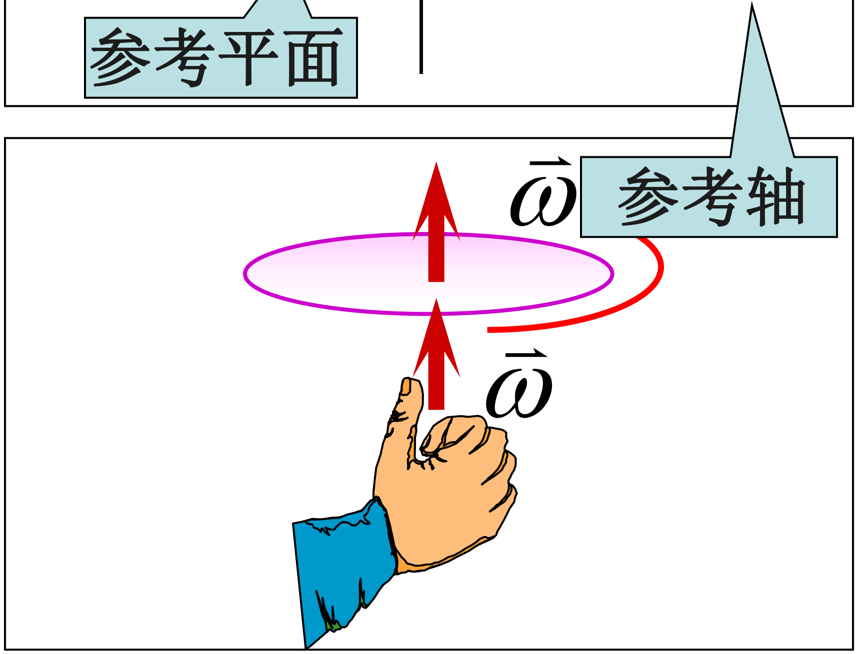
$$\Delta\theta=\theta(t+\Delta t)-\theta(t)$$

角速度矢量

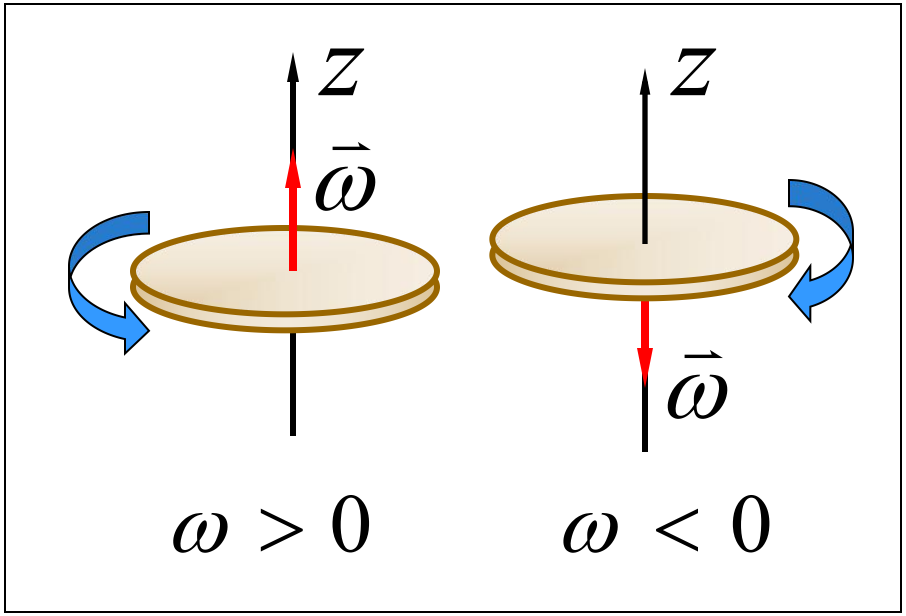
$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

- $\vec{\omega}$ 方向：右手螺旋方向





刚体定轴转动（一维转动）的转动方向可以用角速度的正负来表示．



角加速度 $\vec{\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$

定轴转动的特点

1） 每一质点均作圆周运动，圆面为转动平面；

2） 任一质点运动$\Delta\theta, \vec{\omega}, \vec{\alpha}$均相同，但 $\vec{v}, \vec{a}$ 不同；

3） 运动描述仅需一个坐标．

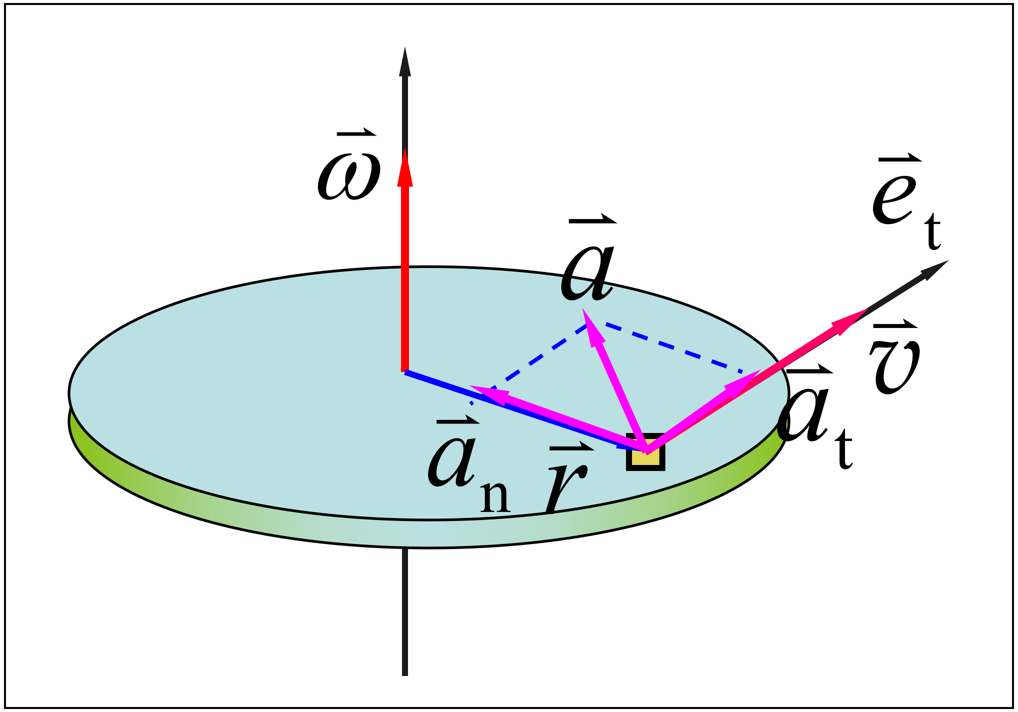
二. 角量与线量的关系

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}^2t}$$

$$\boxed{\vec{v}=r\omega\vec{e}_{\mathrm{t}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}a_{\mathrm{t}}&=r\alpha\\ a_{\mathrm{n}}&=r\omega^2\end{aligned}}$$



$$\boxed{\vec{a}=r\alpha\vec{e}_{\mathrm{t}}+r\omega^2\vec{e}_{\mathrm{n}}}$$

二. 角量与线量的关系

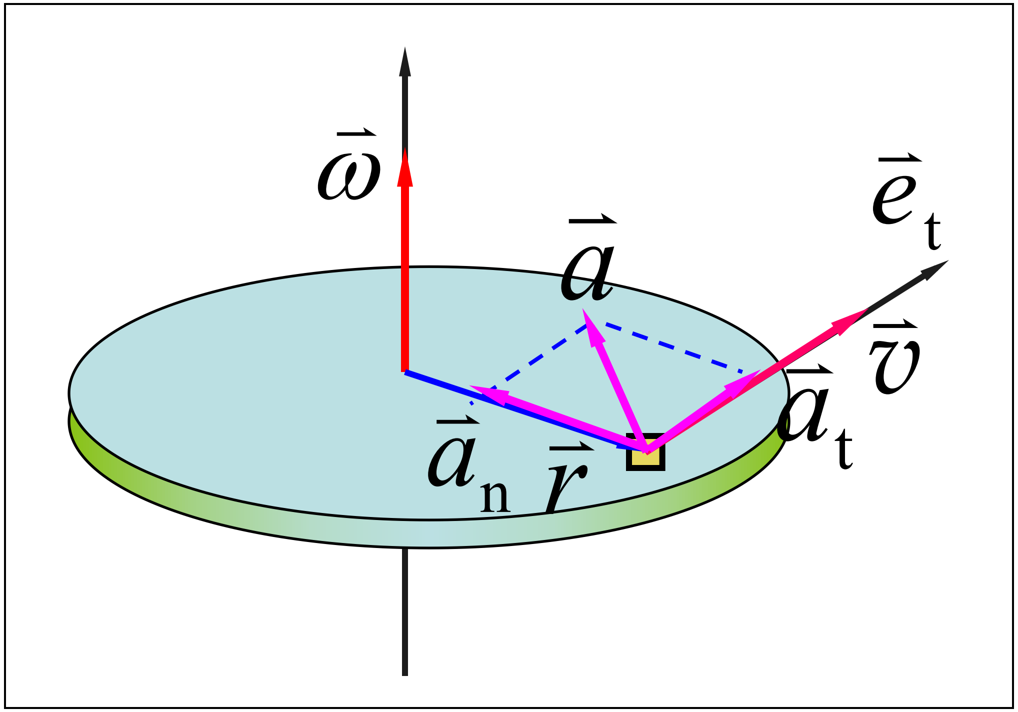
$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}^2 t}$$

$$\vec{v} = r\omega\vec{e}_{\mathrm{t}}$$

$$a_{\mathrm{t}} = r\alpha$$

$$a_{\mathrm{n}} = r\omega^2$$



$$\vec{a} = r\alpha\vec{e}_{\mathrm{t}} + r\omega^2\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

三. 匀变速转动公式

当刚体绕定轴转动的角加速度为恒量时，刚体做匀变速转动 .

质点匀变速直线运动与刚体匀变速转动公式对比

质点匀变速直线运动	刚体绕定轴作匀变速转动
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

3.2 刚体的转动定律

一. 力矩

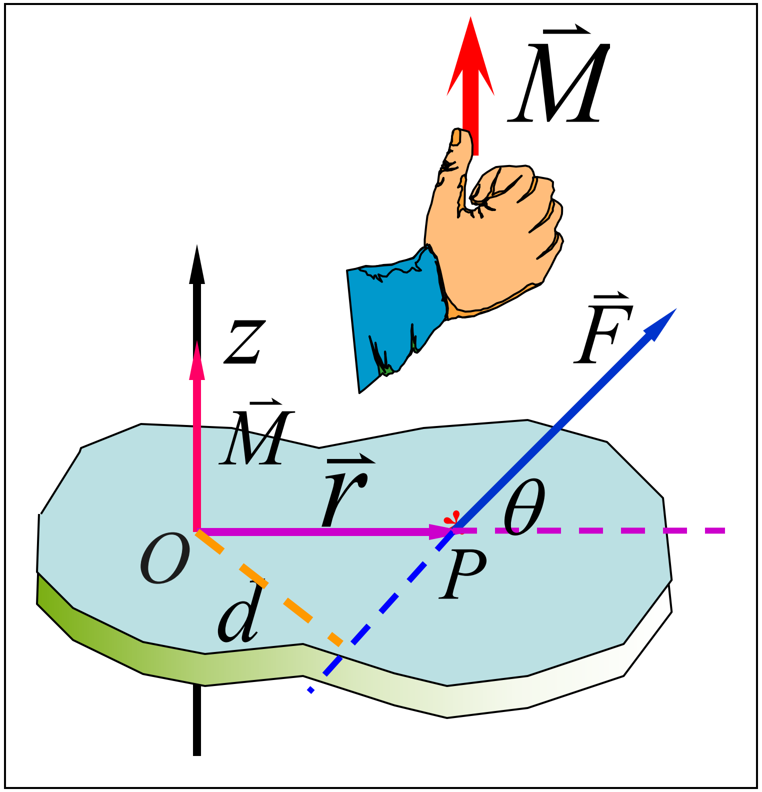
刚体绕OZ轴旋转

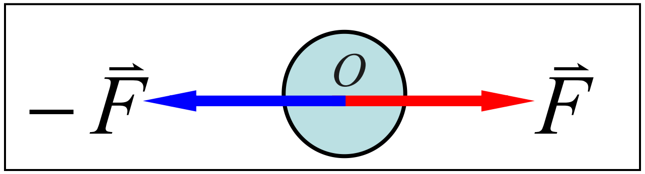
$\vec{F}$ 对转轴 Z 的力矩

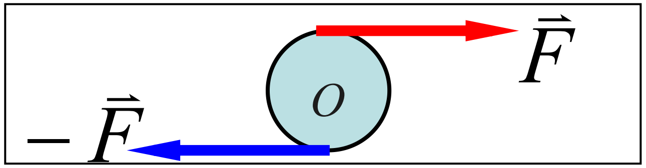
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = Fr\sin\theta = Fd$$

d ： 力臂







$$\sum \vec{F}_i = 0 \,, \sum \vec{M}_i = 0$$

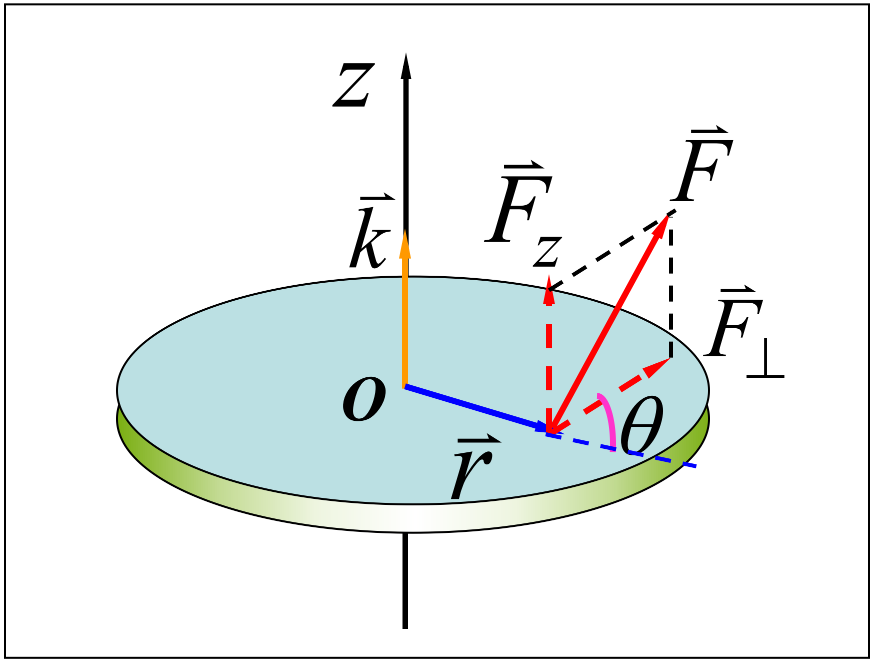
$$\sum \vec{F}_i = 0 \,, \sum \vec{M}_i \neq 0$$

讨论

1）若力 $\vec{F}$ 不在转动平面内，把力分解为平行和垂直于转轴方向的两个分量

$$\vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_\perp$$

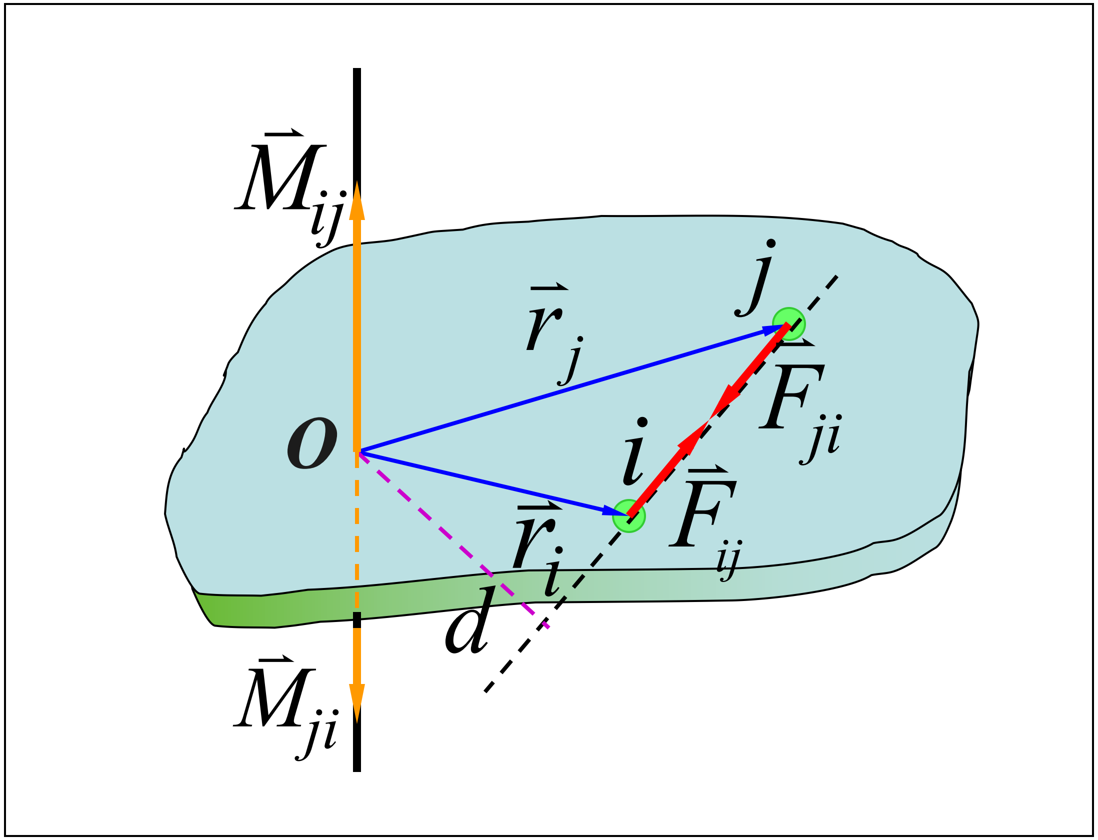
其中 $\vec{F}_z$ 对转轴的力矩为零，



2）合力矩等于各分力矩的矢量和

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \cdots$$

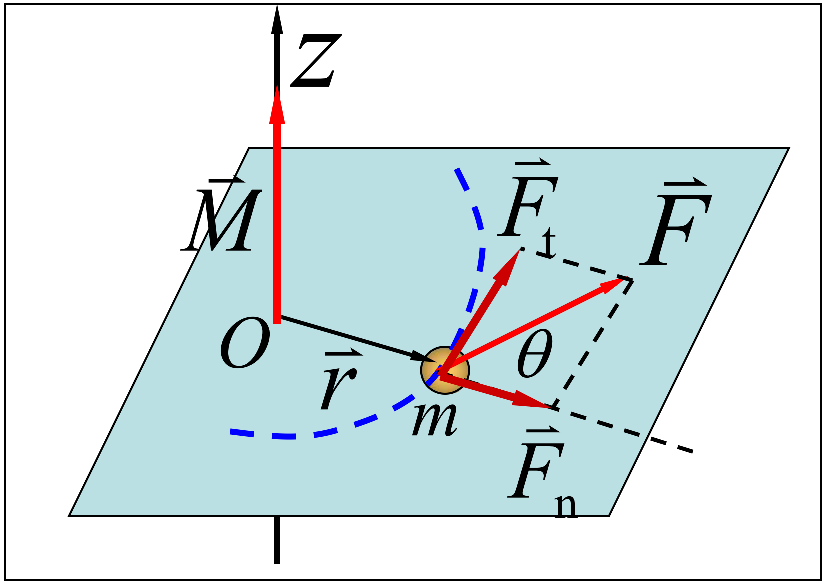
3） 刚体内作用力和反作用力的力矩互相抵消



$$\vec{M}_{ij} = -\vec{M}_{ji}$$

二. 转动定律

1）单个质点 m 与转轴刚性连接



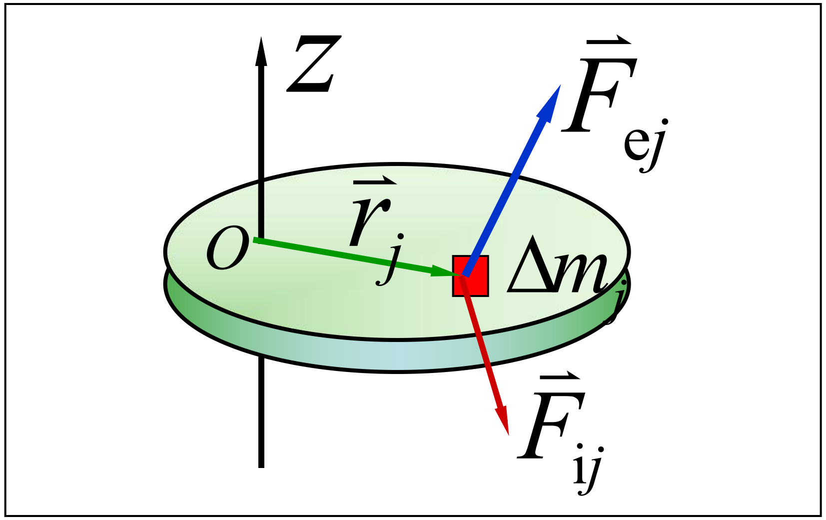
$$F_{\mathrm{t}} = ma_{\mathrm{t}} = mr\alpha$$

$$M = rF\sin\theta$$

$$M = rF_{\mathrm{t}} = mr^2\alpha$$

$$M = mr^2\alpha$$

2）刚体



质量元受外力 $\vec{F}_{\mathrm{e}j}$，内力 $\vec{F}_{\mathrm{i}j}$

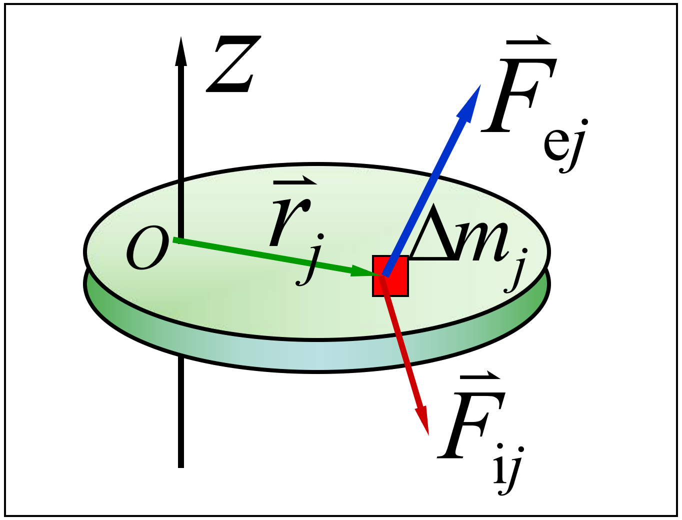
$$M_{\mathrm{e}j} + M_{\mathrm{i}j} = \Delta m_j r_j^2 \alpha$$

外力矩　　内力矩

$$\sum_j M_{ej} + \sum_j M_{ij} = \sum \Delta m_j r_j^2 \alpha$$

$$\because M_{ij} = -M_{ji} \qquad \therefore \sum_j M_{ij} = 0$$

$$\sum_j M_{ej} = (\sum \Delta m_j r_j^2)\alpha$$



定义转动惯量 $J = \sum_j \Delta m_j r_j^2$

- 转动定律 $\boxed{M = J\alpha}$

刚体定轴转动的角加速度与它所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比．

三. 转动惯量

$$J=\sum_j \Delta m_j r_j^2 \ , \ J=\int r^2 \mathrm{d}m$$

➢ 物理意义：转动惯性的量度 .

转动惯量的计算方法

➢ 质量离散分布刚体的转动惯量

$$J=\sum_j \Delta m_j r_j^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots$$

➢ 质量连续分布刚体的转动惯量

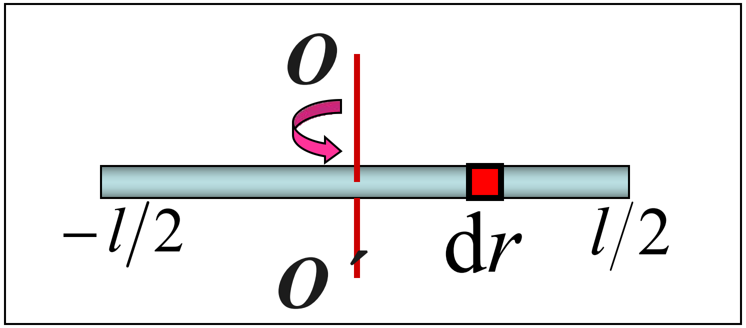
$$J=\sum_j \Delta m_j r_j^2 = \int r^2 \mathrm{d}m$$

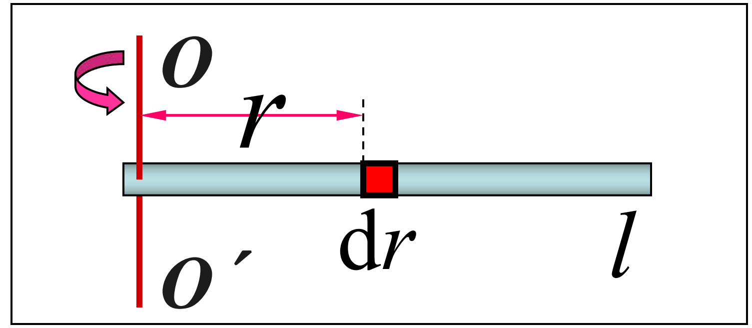
$\mathrm{d}m$ ：质量元

$$\mathrm{d}m=\lambda \mathrm{d}l \qquad \mathrm{d}m=\sigma \mathrm{d}S \qquad \mathrm{d}m=\rho \mathrm{d}V$$

注意 转动惯量的大小取决于刚体的质量、形状及转轴的位置 .

例1 一质量为 m 、长为 l 的均匀细长棒，求通过棒中心并与棒垂直的轴的转动惯量 .





解 设棒的线密度为 λ ，取一距离转轴 OO' 为 r 处的质量元 $\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}r$ $\mathrm{d}J=r^2\mathrm{d}m=\lambda r^2\mathrm{d}r$

$$J=2\lambda\int_0^{l/2}r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{12}\lambda l^3$$

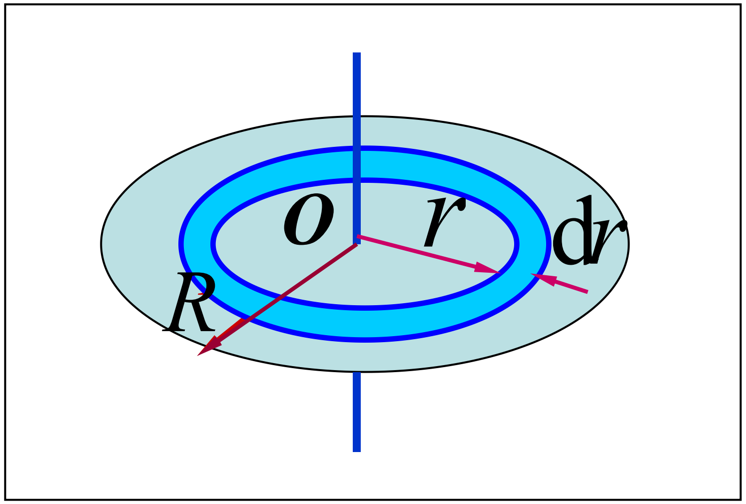
$$=\frac{1}{12}ml^2$$

如转轴过端点垂直于棒

$$J=\lambda\int_0^{l}r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{3}ml^2$$

例2　一质量为m 、半径为R 的均匀圆盘，求通过盘中心 O 并与盘面垂直的轴的转动惯量 .

解　设圆盘面为 σ ，在盘上取半径为 r ，宽为$\mathrm{d}r$ 的圆环



圆环质量　$\mathrm{d}m=\sigma 2\pi\, r\mathrm{d}r$

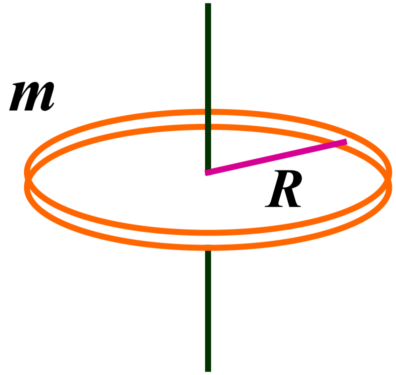
圆环对轴的转动惯量

$$\mathrm{d}J=r^2\mathrm{d}m=2\pi\,\sigma r^3\mathrm{d}r$$

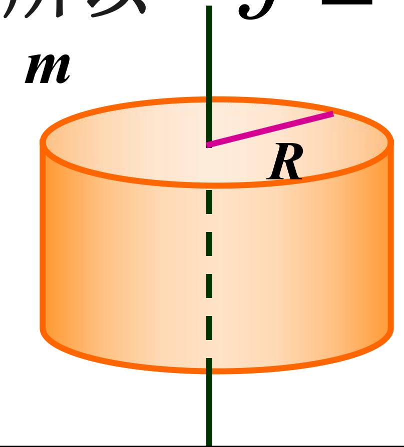
而　$\sigma=m/\pi R^2$

$$J=\int_0^R 2\pi\,\sigma r^3\mathrm{d}r=\frac{\sigma}{2}\pi R^4$$

所以　$J=\dfrac{1}{2}mR^2$

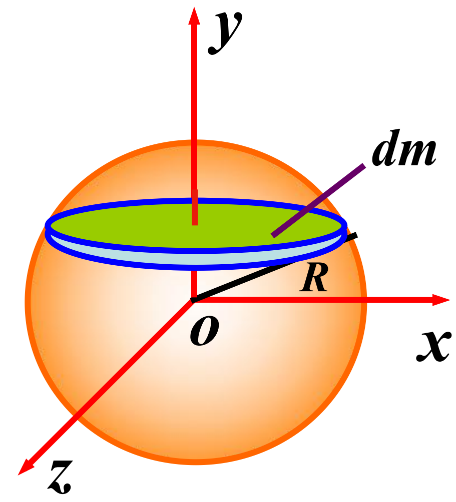


圆环



圆柱体

例3 圆球体，轴沿直径 (y)



$$dJ = \frac{1}{2}dmx^2 = \frac{1}{2}(\rho\pi\, x^2 dy)x^2$$

$$dm = \rho dV = \rho\pi\, x^2 dy$$

$$R^2 = x^2 + y^2$$

$$J = \int dJ = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\rho\pi(R^2 - y^2)^2 dy = \frac{2}{5}mR^2$$