三、特征值问题

$$\begin{cases} (p(x)y')' + (q(x) + \lambda r(x))y = 0 \\ \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0 \\ \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0 \end{cases} \qquad (3.1)$$

其中 $p(x), r(x)$ 为正函数， $r(x) \neq 0,$

$\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0, \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$ 。

问题：求数 λ，使得方程（3.1）有非零解 $y(x)$，称为特征值问题，（sturm-Liouville问题）

其中 λ 称为特征值， $y(x)$ 称为特征函数。

性质1：特征值问题（3.1）的所有特征值都是实数。

证明：设特征值 $\lambda = \alpha + i\beta$ ，与它对应的特征函数为：
$y(x) = u(x) + iv(x)$ 。

代入微分方程有：

$$(pu')' + (q + \alpha r)u - \beta rv = 0 ,$$

$$(pv')' + (q + \alpha r)v + \beta ru = 0 。$$

上面两式分别乘以 v 和 u 后再相减，得

$$\beta r(u^2 + v^2) = v(pu')' - u(pv')'$$

$$= (v(pu') - u(pv'))'$$

上式两边从 a 到 b 积分，得：

$$\beta\int_a^b r(u^2+v^2)dx=\left[p(u'v-uv')\right]_a^b \qquad （3.2）$$

从（3.1）的边值条件有：（a 点）

$$\alpha_1 u'(a)+\beta_1 u(a)=0,\alpha_1 v'(a)+\beta_1 v(a)=0$$

因为 $\alpha_1^2+\beta_1^2\neq 0$，于是

$$\begin{vmatrix} u'(a) & u(a) \\ v'(a) & v(a) \end{vmatrix}=u'(a)v(a)-u(a)v'(a)=0$$

同样在 b 点有：$u'(b)v(b)-u(b)v'(b)=0$

于是（3.2）得：$\beta=0$，即 λ 是实数。

上页 下页 返回

性质 2: 对应于不同特征值 λ_i 和 λ_j 的特征函数 $y_i(x)$ 和 $y_j(x)$ 满足 $\int_a^b r(x)y_i(x)y_j(x)dx = 0$

证明：把特征值和特征函数代入方程（3.1），有：

$$(py_i')' + (q+\lambda_i r)y_i = 0,$$

$$(py_j')' + (q+\lambda_j r)y_j = 0,$$

上式分别乘以 y_j 和 y_i 后再相减，得：

$$(\lambda_i - \lambda_j)ry_iy_j = \left[y_i(py_j')' - y_j(py_i')'\right]$$

$$= \left[py_iy_j' - py_jy_i'\right]'$$

上式两边从 a 到 b 积分，得：

$$(\lambda_i - \lambda_j)\int_a^b ry_iy_jdx = \left[p(y_iy_j' - y_jy_i')\right]\Big|_a^b$$

以（3.1）式在 a 点的边值条件，有：

$$\alpha_1 y_i'(a) + \beta_1 y_i(a) = 0,$$

$$\alpha_1 y_j'(a) + \beta_1 y_j(a) = 0,$$

因为 $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$，于是

$$\begin{vmatrix} y_i'(a) & y_i(a) \\ y_j'(a) & y_j(a) \end{vmatrix} = y_i'(a)y_j(a) - y_j'(a)y_i(a) = 0$$

同样以 b 点的边值条件，得：

$$y_i'(b)y_j(b) - y_j'(b)y_i(b) = 0$$

得：$(\lambda_i - \lambda_j)\int_a^b r y_i y_j dx = 0$

由 $\lambda_i \neq \lambda_j$，得 $\int_a^b r(x)y_i(x)y_j(x)dx = 0$。

上页 下页 返回

性质3：对应于每个特征值的特征函数可以相差一个常数倍，除了一个常数因子外它是唯一的。

证：因特征值问题（3.1）中的微分方程和边值条件都是齐次的，如果 $y(x)$ 是对应于特征值 λ 的特征函数，则对任意常数 c， $cy(x)$ 也是特征函数。

设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都是对应于特征值 λ 的特征函数，代入（3.1）中，采用性质 2 的证明方法得到：

$$
\begin{aligned}
0 &= y_1(py_2')' - y_2(py_1')' \\
&= (y_1 py_2')' - py_2'y_1' - (y_2 py_1')' + py_1'y_2' \\
&= \left[p(y_1y_2' - y_2y_1')\right]'
\end{aligned}
$$

从而 $p(y_1y_2' - y_2y_1') = c$

在上式中，取 $x = 0$，并利用 a 点的边值条件可得 $c = 0$，于是

$y_1y_2' - y_2y_1' = 0$，

即：$\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = 0 \Rightarrow \dfrac{y_2}{y_1} = c, y_2 = cy_1$。

例 1：解特征值问题 $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < l, \\ y'(0) = 0, & y(l) = 0. \end{cases}$

解：特征根为 $\pm\sqrt{-\lambda}$，分三种情况讨论：

1．当 $\lambda < 0$ 时，方程的通解是：$y = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

从边值条件得：$c_1 = c_2 = 0$

2．当 $\lambda = 0$ 时，方程的通解是：$y = c_1 + c_2 x$

从边值条件得：$c_1 = c_2 = 0$

3．当 $\lambda > 0$ 时，方程的通解是：

$y = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x$

求导后有：$y' = \sqrt{\lambda}(-c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}x)$

从 $y'(0) = 0$ 得：$c_2 = 0$，

从 $y(l) = 0$ 得：$c_1 \cos\sqrt{\lambda}l = 0$，

为了要有非零解，c_1 不能为零，必须 $\cos\sqrt{\lambda}l = 0$

从而 $\sqrt{\lambda}l = n\pi + \frac{\pi}{2}$ $\quad n = 0,1,2,\cdots$

$$\lambda_n = \left(\frac{2n\pi + \pi}{2l}\right)^2 \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

特征函数为：$y_n = \cos\frac{2n\pi + \pi}{2l}x$ $\quad n = 0,1,2,\cdots$。

上页 下页 返回

例 2：解特征值问题

$$\begin{cases} xy'' + y' - \dfrac{\lambda+1}{x} y = 0, \quad 1 < x < e^3 \\ y(1) = y(e^3) = 0 \end{cases}$$

解：将方程改写为： $x^2 y'' + xy' - (\lambda+1)y = 0$

记 $\mu = -(\lambda+1)$，令 $\tau = \ln x$，则方程化为

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \mu y = 0$$

分三种情况讨论：

1．当 $\mu < 0$ 时，方程的通解是：

$$y = c_1 e^{\sqrt{-\mu}\tau} + c_2 e^{-\sqrt{-\mu}\tau} = c_1 x^{\sqrt{-\mu}} + c_2 x^{-\sqrt{-\mu}}$$

从边值条件得： $c_1 = c_2 = 0$ 只有零解；

2．当 $\mu = 0$ 时，方程的通解是：

$$y = c_1 + c_2\tau = c_1 + c_2 \ln x$$

从边值条件得：$c_1 = c_2 = 0$，也只有零解；

3．当 $\mu > 0$ 时，方程的通解是：

$$y = c_1 \cos\sqrt{\mu}\tau + c_2 \sin\sqrt{\mu}\tau$$

$$= c_1 \cos(\sqrt{\mu}\ln x) + c_2 \sin(\sqrt{\mu}\ln x)$$

从 $y(1) = 0$ 得 $c_1 = 0$，从 $y(e^3) = 0$ 得 $c_2 \sin 3\sqrt{\mu} = 0$

为了有非零解，c_2 不能取零，必须 $\sin 3\sqrt{\mu} = 0$，

从而 $3\sqrt{\mu} = n\pi \qquad n = 1,2,\cdots$

$$\mu_n = \frac{n^2\pi^2}{9} \qquad n = 1,2,\cdots$$

因此特征值是：

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{9} - 1 \qquad n = 1,2,\cdots$$

对应的特征函数是：

$$y_n = \sin(\frac{n\pi}{3}\ln x) \qquad n = 1,2,\cdots$$ 。