# §1 上极限和下极限

## 一、有界数列的上、下极限

Bolzano-Weierstrauss 定理（致密性定理）说明：有界数列必存在收敛子列。对不存在极限的数列，可以用它子列的极限情况刻画它本身的变化情况。

# §1 上极限和下极限

## 一、有界数列的上、下极限

Bolzano-Weierstrauss 定理（致密性定理）说明：有界数列必存在收敛子列。对不存在极限的数列，可以用它子列的极限情况刻画它本身的变化情况。

**定义1：** 在有界数列$\{x_n\}$中，若存在它的一个子列$\{x_{n_k}\}$，s.t. $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = \xi$，则称$\xi$为数列$\{x_n\}$的一个极限点。

$\iff \forall \epsilon > 0, O(\xi, \epsilon)$ 中含数列$\{x_n\}$的无穷多项。

# §1 上极限和下极限

## 一、有界数列的上、下极限

Bolzano-Weierstrauss 定理（致密性定理）说明：有界数列必存在收敛子列。对不存在极限的数列，可以用它子列的极限情况刻画它本身的变化情况。

**定义1：** 在有界数列$\{x_n\}$ 中，若存在它的一个子列$\{x_{n_k}\}$，s.t. $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = \xi$，则称$\xi$ 为数列$\{x_n\}$ 的一个极限点。

$\iff \forall \epsilon > 0, O(\xi, \epsilon)$ 中含数列$\{x_n\}$ 的无穷多项。

设$E = \{\xi | \xi$ 是数列 $\{x_n\}$ 的极限点$\}$，则$E \neq \emptyset, E$ 有界，故$H = \sup E, h = \inf E$ 均存在。

# §1 上极限和下极限

## 一、有界数列的上、下极限

Bolzano-Weierstrauss 定理（致密性定理）说明：有界数列必存在收敛子列。对不存在极限的数列，可以用它子列的极限情况刻画它本身的变化情况。

**定义1**：在有界数列$\{x_n\}$中，若存在它的一个子列$\{x_{n_k}\}$，s.t. $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}=\xi$，则称$\xi$为数列$\{x_n\}$的一个极限点。

$\Longleftrightarrow$ $\forall\epsilon>0, O(\xi,\epsilon)$ 中含数列$\{x_n\}$的无穷多项。

设$E=\{\xi|\xi$ 是数列 $\{x_n\}$ 的极限点$\}$，则$E\neq\emptyset, E$ 有界，故$H=\sup E, h=\inf E$ 均存在。

**定理2**：$H\in E, h\in E$，即$\sup E=\max E, \inf E=\min E$。

**定义3：** $H = \max E$ 称为数列$\{x_n\}$ 的上极限，记为$H = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$； $h = \min E$ 称为数列$\{x_n\}$ 的下极限，记为$h = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$。

**定义3**：$H=\max E$ 称为数列$\{x_n\}$ 的上极限，记为$H=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$；$h=\min E$ 称为数列$\{x_n\}$ 的下极限，记为$h=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$。

**定理4**：(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=H$ 的充要条件是$\forall\epsilon>0$，

(i) $\exists N>0$, s.t. $\forall n>N$, 有$x_n<H+\epsilon$；

(ii) 存在$\{x_n\}$ 的子列$\{x_{n_k}\}$ 满足$x_{n_k}>H-\epsilon$。

**定义3**：$H=\max E$ 称为数列$\{x_n\}$ 的上极限，记为$H=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$；$h=\min E$ 称为数列$\{x_n\}$ 的下极限，记为$h=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$。

**定理4**：(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=H$ 的充要条件是$\forall\epsilon>0$，

(i) $\exists N>0$, s.t. $\forall n>N$, 有$x_n<H+\epsilon$；

(ii) 存在$\{x_n\}$ 的子列$\{x_{n_k}\}$ 满足$x_{n_k}>H-\epsilon$。

(2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=h$ 的充要条件是$\forall\epsilon>0$，

(i) $\exists N>0$, s.t. $\forall n>N$, 有$x_n>h-\epsilon$；

(ii) 存在$\{x_n\}$ 的子列$\{x_{n_k}\}$ 满足$x_{n_k}<h+\epsilon$。

**定义3：** $H = \max E$ 称为数列$\{x_n\}$ 的上极限，记为$H = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$； $h = \min E$ 称为数列$\{x_n\}$ 的下极限，记为$h = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$。

**定理4：** (1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = H$ 的充要条件是$\forall \epsilon > 0$，

(i) $\exists N > 0$, s.t. $\forall n > N$, 有$x_n < H + \epsilon$；

(ii) 存在$\{x_n\}$ 的子列$\{x_{n_k}\}$ 满足$x_{n_k} > H - \epsilon$。

(2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = h$ 的充要条件是$\forall \epsilon > 0$，

(i) $\exists N > 0$, s.t. $\forall n > N$, 有$x_n > h - \epsilon$；

(ii) 存在$\{x_n\}$ 的子列$\{x_{n_k}\}$ 满足$x_{n_k} < h + \epsilon$。

**定理5：** $\{x_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$。

## 二、上、下极限的推广定义

由于一个无上界（下界）数列中必有子列发散至正（负）无穷大，可以将极限点的定义推广至

## 二、上、下极限的推广定义

由于一个无上界（下界）数列中必有子列发散至正（负）无穷大，可以将极限点的定义推广至

**定义1′**：在数列$\{x_n\}$中，若存在它的一个子列$\{x_{n_k}\}$，s.t. $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}=\xi(-\infty\leq\xi\leq\infty)$，则称$\xi$为数列$\{x_n\}$的一个极限点。

$\xi=+\infty \iff \forall G>0, \exists\{x_n\}$的无穷多项$\{x_{n_k}\}$, s.t. $x_{n_k}>G$。

## 二、上、下极限的推广定义

由于一个无上界（下界）数列中必有子列发散至正（负）无穷大，可以将极限点的定义推广至

**定义1$'$**：在数列$\{x_n\}$ 中，若存在它的一个子列$\{x_{n_k}\}$，s.t. $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}=\xi(-\infty\le\xi\le\infty)$，则称$\xi$ 为数列$\{x_n\}$ 的一个极限点。

$\xi=+\infty \iff \forall G>0,\exists\{x_n\}$ 的无穷多项$\{x_{n_k}\}$, s.t. $x_{n_k}>G$。

仍定义$E=\{\xi|\xi$ 是数列 $\{x_n\}$ 的极限点$\}$

$\xi=+\infty(-\infty)$ 为$\{x_n\}$ 的极限点，定义$\sup E=+\infty$ （或$\inf E=-\infty$）；$\xi=+\infty(-\infty)$ 为$\{x_n\}$ 的唯一极限点，定义$\sup E=\inf E=+\infty$ （或$\sup E=\inf E=-\infty$）。

则定理2、定理5成立。

例1：求数列$\left\{x_n = \cos\frac{2n\pi}{5}\right\}$的上极限与下极限。

例1：求数列$\left\{x_n = \cos\frac{2n\pi}{5}\right\}$的上极限与下极限。

例2：求数列$\left\{x_n = n^{(-1)^n}\right\}$的上极限与下极限。

例1：求数列$\left\{x_n = \cos\frac{2n\pi}{5}\right\}$的上极限与下极限。

例2：求数列$\left\{x_n = n^{(-1)^n}\right\}$的上极限与下极限。

例3：求数列$\{x_n = -n\}$的上极限与下极限。

例1：求数列$\left\{x_n = \cos\frac{2n\pi}{5}\right\}$的上极限与下极限。

例2：求数列$\left\{x_n = n^{(-1)^n}\right\}$的上极限与下极限。

例3：求数列$\{x_n = -n\}$的上极限与下极限。

## 三、上、下极限的运算

上、下极限的运算一般不具有“极限的四则运算性质”

如$x_n = (-1)^n, y_n = (-1)^{n+1}$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \neq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$。

**定理1：** 在不出现$(\pm\infty)+(\mp\infty)$ 的情况下，成立以下不等式

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n+\varliminf_{n\to\infty} y_n \le \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \varliminf_{n\to\infty} x_n+\varlimsup_{n\to\infty} y_n \le \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n+\varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

# 10.1.上极限和下极限

**定理1：** 在不出现$(\pm\infty)+(\mp\infty)$ 的情况下，成立以下不等式

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n+\varliminf_{n\to\infty} y_n \le \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \varliminf_{n\to\infty} x_n+\varlimsup_{n\to\infty} y_n \le \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n+\varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

注：特别地，若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，则

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty} x_n+\varlimsup_{n\to\infty} y_n;\ \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty} x_n+\varliminf_{n\to\infty} y_n.$$

# 10.1.上极限和下极限

**定理1：** 在不出现$(\pm\infty)+(\mp\infty)$ 的情况下，成立以下不等式

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n+\varliminf_{n\to\infty} y_n \le \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \varliminf_{n\to\infty} x_n+\varlimsup_{n\to\infty} y_n \le \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n+\varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

注：特别地，若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，则

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty} x_n+\varlimsup_{n\to\infty} y_n;\ \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty} x_n+\varliminf_{n\to\infty} y_n.$$

**定理2：** 设$x_n\ge 0, y_n\ge 0$，则有

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n\cdot\varliminf_{n\to\infty} y_n \le \varliminf_{n\to\infty} x_n\cdot y_n \le \varliminf_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty} y_n \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n\cdot y_n \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

# 10.1.上极限和下极限

**定理1：** 在不出现$(\pm\infty)+(\mp\infty)$ 的情况下，成立以下不等式

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n+\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n+\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n+\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n.$$

注：特别地，若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，则

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty} x_n+\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n;\ \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty} x_n+\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n.$$

**定理2：** 设$x_n\ge 0, y_n\ge 0$，则有

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n\cdot\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n\cdot y_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n\cdot\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n\cdot y_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n\cdot\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n.$$

**定理3：** $\overline{\lim}_{n\to\infty}(cx_n)=\begin{cases} c\,\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n, & c>0 \\ c\,\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n, & c<0 \end{cases}$ 。特别可取$c=-1$。

注：在上述定理中，若将条件改成$x_n \geq 0, y_n \leq 0$，则有

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \varliminf_{n\to\infty} -(x_n)(-y_n) = -\varlimsup_{n\to\infty} x_n(-y_n) \geq -\varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} (-y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n.$$

# 10.1.上极限和下极限

注：在上述定理中，若将条件改成$x_n \geq 0, y_n \leq 0$，则有

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \varliminf_{n\to\infty} -(x_n)(-y_n) = -\varlimsup_{n\to\infty} x_n(-y_n) \geq -\varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty}(-y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n.$$

运算上、下极限时，必须非常小心。

**作业：** 课本$P_{15}$ $1, 2(2)$。

补充1：证明：若$x_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$ 及$\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 1$，则$\{x_n\}$ 收敛。

补充2：设$x_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$，证明：

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

并由此推出，当$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell$。

# §2 数项级数的收敛性

古希腊伊利亚学派Zeno 提出过4个著名悖论，其中Achilles 悖论如下：（Achilles是荷马史诗《伊利亚特》中名将）设乌龟在Achilles 前面$S_1$ 处向前爬行，Achilles 在后面追赶，当Achilles 用了$t_1$ 秒时间跑完$S_1$ 米时，乌龟已向前爬了$S_2$ 米；当Achilles 再用$t_2$ 秒时间跑完了$S_2$ 米时，乌龟又向前爬了$S_3$ 米……这样一直下去，因此Achilles 永远追不上乌龟。 显然这一结论荒谬。

# §2 数项级数的收敛性

古希腊伊利亚学派Zeno 提出过4个著名悖论，其中Achilles 悖论如下：（Achilles是荷马史诗《伊利亚特》中名将）设乌龟在Achilles 前面$S_1$ 处向前爬行，Achilles 在后面追赶，当Achilles 用了$t_1$ 秒时间跑完$S_1$ 米时，乌龟已向前爬了$S_2$ 米；当Achilles 再用$t_2$ 秒时间跑完了$S_2$ 米时，乌龟又向前爬了$S_3$ 米⋯⋯这样一直下去，因此Achilles 永远追不上乌龟。显然这一结论荒谬。

很自然地会问，这“无限个数相加”是否一定有意义？若不一定，怎么判别？这就有了数项级数的概念。

## 一、级数的概念

**定义1：** 设$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是无穷可列个实数。称它们的“和” $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$ 为无穷数项级数（简称级数），记为$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n$ 称为通项或一般项。

## 一、级数的概念

**定义1：** 设$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是无穷可列个实数。称它们的"和" $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$ 为无穷数项级数（简称级数），记为$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n$ 称为通项或一般项。

定义部分和数列$\{S_n\}$ : $S_1 = x_1, S_2 = x_1 + x_2, \cdots, S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$。

## 一、级数的概念

**定义1：** 设$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是无穷可列个实数。称它们的“和” $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$ 为无穷数项级数（简称级数），记为$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, x_n$ 称为通项或一般项。

定义部分和数列$\{S_n\}: S_1 = x_1, S_2 = x_1 + x_2, \cdots, S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$。

**定义2：** 如果部分和数列$\{S_n\}$ 收敛于有限数$S$，则称无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，且称它的和为$S$，记为$S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$。如果部分和数列$\{S_n\}$ 发散，则称无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散。

## 一、级数的概念

**定义1：** 设$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是无穷可列个实数。称它们的"和" $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$ 为无穷数项级数（简称级数），记为$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, x_n$ 称为通项或一般项。

定义部分和数列$\{S_n\}: S_1 = x_1, S_2 = x_1 + x_2, \cdots, S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$。

**定义2：** 如果部分和数列$\{S_n\}$收敛于有限数$S$，则称无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，且称它的和为$S$，记为$S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$。如果部分和数列$\{S_n\}$ 发散，则称无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散。

注：由此可见，研究无穷级数的收敛问题，实质上就是研究部分和数列的收敛问题。

当级数收敛时，可构造余和数列$\{r_n\}$，其中$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots$。显然$r_n \to 0 (n \to \infty)$。

当级数收敛时，可构造余和数列$\{r_n\}$，其中$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots$。显然$r_n \to 0 (n \to \infty)$。

例1：设$|q| < 1$，则几何级数（即等比级数）$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ 收敛。

当级数收敛时，可构造余和数列$\{r_n\}$，其中$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots$。显然$r_n \to 0(n \to \infty)$。

例1：设$|q| < 1$，则几何级数（即等比级数）$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ 收敛。

例2：级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散。

当级数收敛时，可构造余和数列$\{r_n\}$，其中$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots$。显然$r_n \to 0 (n \to \infty)$。

例1：设$|q| < 1$，则几何级数（即等比级数）$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ 收敛。

例2：级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 发散。

例3：$p$ 级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当$p > 1$ 时收敛，$p \le 1$ 时发散。

注：$p$ 级数在判别其它级数的敛散性时起重要作用。

## 二、级数的基本性质

**定理3**（级数收敛的必要条件）：设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$。

## 二、级数的基本性质

**定理3**（级数收敛的必要条件）：设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$。

注1：该定理可判断级数发散性，如$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$。

## 二、级数的基本性质

**定理3**（级数收敛的必要条件）：设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$。

注1：该定理可判断级数发散性，如$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$。

注2：该定理只是级数收敛的必要条件，不是充分条件，如$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$。

## 二、级数的基本性质

**定理3**（级数收敛的必要条件）：设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$。

注1：该定理可判断级数发散性，如$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$。

注2：该定理只是级数收敛的必要条件，不是充分条件，如$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$。

**定理4**（线性性）：设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，则$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$。

## 二、级数的基本性质

**定理3**（级数收敛的必要条件）：设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$。

注1：该定理可判断级数发散性，如$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$。

注2：该定理只是级数收敛的必要条件，不是充分条件，如$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$。

**定理4**（线性性）：设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，则$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$。

例4：求级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1} - 3 \cdot 2^n}{5^n}$的值。

**定理5**：设级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则在它的求和表达式中任意添加括号后所得的级数仍收敛，其和不变。

**定理5**：设级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则在它的求和表达式中任意添加括号后所得的级数仍收敛，其和不变。

注：加括号后的级数收敛性并不能保证原级数的收敛性。

例5：级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$ 发散。
若加括号$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots = 0$ 收敛；
若加括号$1+(-1+1)+\cdots+(-1+1)+\cdots = 1$ 收敛。

**定理5：** 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则在它的求和表达式中任意添加括号后所得的级数仍收敛，其和不变。

注：加括号后的级数收敛性并不能保证原级数的收敛性。

例5：级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$ 发散。
若加括号$(1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots = 0$ 收敛；
若加括号$1 + (-1+1) + \cdots + (-1+1) + \cdots = 1$ 收敛。

例6：计算$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)/2^n$。

**定理5：** 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则在它的求和表达式中任意添加括号后所得的级数仍收敛，其和不变。

注：加括号后的级数收敛性并不能保证原级数的收敛性。

例5：级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$ 发散。
若加括号$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots = 0$ 收敛；
若加括号$1+(-1+1)+\cdots+(-1+1)+\cdots = 1$ 收敛。

例6：计算$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)/2^n$。

例7：计算$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan 1/(2n^2)$。

**作业：** 课本$P_7$ $1(5-9), 2(1)(3), 4-5.$

# §3 正项级数

## 一、定义

**定义1**：若级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$，对$\forall n, x_n \geq 0$，则称此级数为正项级数。

# §3 正项级数

## 一、定义

**定义1**：若级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$，对$\forall n, x_n \geq 0$，则称此级数为正项级数。

显然，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$ 是单调增加，有

**定理2**（正项级数收敛原理）：正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\{S_n\}$ 有上界。

# §3 正项级数

## 一、定义

**定义1**：若级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$，对$\forall n, x_n \geq 0$，则称此级数为正项级数。

显然，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$ 是单调增加，有

**定理2**（正项级数收敛原理）：正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\{S_n\}$ 有上界。

例1：级数$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\ln\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\right]$ 收敛。

## 二、级数收敛性的判别法

1 比较判别法

**定理3**（比较判别法）设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是两正项级数，若存在$A > 0$，s.t. $x_n \le Ay_n, n = 1, 2, \cdots$，则

(1) 当$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也收敛；
(2) 当$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 也发散。

## 二、级数收敛性的判别法

1 比较判别法

**定理3**（比较判别法）设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是两正项级数，若存在$A>0$，s.t. $x_n \le Ay_n, n=1,2,\cdots$，则

(1) 当$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也收敛；
(2) 当$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 也发散。

注：改变级数有限项，并不改变它的敛散性。故上述定理可放宽为“$\exists N>0, A>0$”，使得$x_n \le Ay_n$ 对一切$n>N$ 成立。

## 二、级数收敛性的判别法

1 比较判别法

**定理3**（比较判别法）设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是两正项级数，若存在$A > 0$，s.t. $x_n \le Ay_n, n = 1, 2, \cdots$，则

(1) 当$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也收敛；
(2) 当$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 也发散。

注：改变级数有限项，并不改变它的敛散性。故上述定理可放宽为“$\exists N > 0, A > 0$”，使得$x_n \le Ay_n$ 对一切$n > N$ 成立。

例2：判断正项级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2n^3 - n}$ 的敛散性。

## 二、级数收敛性的判别法

1 比较判别法

**定理3**（比较判别法）设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是两正项级数，若存在$A > 0$，s.t. $x_n \le Ay_n, n = 1, 2, \cdots$，则

(1) 当$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也收敛；
(2) 当$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 也发散。

注：改变级数有限项，并不改变它的敛散性。故上述定理可放宽为“$\exists N > 0, A > 0$”，使得$x_n \le Ay_n$ 对一切$n > N$ 成立。

例2：判断正项级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2n^3 - n}$ 的敛散性。

例3：判别正项级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$ 的敛散性。

**定理4**（比较判别法的极限形式）设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是两正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \ell(0 \leq \ell \leq \infty)$

(1) 若$0 \leq \ell < +\infty$，则当$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也收敛；

(2) 若$0 < \ell \leq +\infty$，则当$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也发散。

**定理4**（比较判别法的极限形式）设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是两正项级数，且$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \ell (0 \le \ell \le \infty)$

(1) 若$0 \le \ell < +\infty$，则当$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也收敛；

(2) 若$0 < \ell \le +\infty$，则当$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也发散。

例4：判断正项级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{\frac{1}{n^2}} - \cos\frac{\pi}{n} \right)$ 的敛散性。

**定理4**（比较判别法的极限形式）设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是两正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \ell(0 \le \ell \le \infty)$

(1) 若$0 \le \ell < +\infty$，则当$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也收敛；

(2) 若$0 < \ell \le +\infty$，则当$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也发散。

例4：判断正项级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^2}} - \cos\frac{\pi}{n}\right)$ 的敛散性。

注：对比较判别法而言，不论是为了判别级数收敛还是发散，都不存在万能的比较级数。

**定理5**（du Bois Reymond 定理）：对于给定的收敛正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，必存在一个收敛的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} a_n / b_n = 0$。

注：该题说明判别级数收敛，不存在万能的比较级数。

**定理5**（du Bois Reymond 定理）：对于给定的收敛正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，必存在一个收敛的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$。

注：该题说明判别级数收敛，不存在万能的比较级数。

反证：假设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是万能比较级数，由定理5，存在$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} b_n/a_n = +\infty$。由$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，无法判别$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$的敛散性。

**定理5**（du Bois Reymond 定理）：对于给定的收敛正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，必存在一个收敛的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$。

注：该题说明判别级数收敛，不存在万能的比较级数。

反证：假设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是万能比较级数，由定理5，存在$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} b_n/a_n = +\infty$。由$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，无法判别$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$的敛散性。

**定理6**（Abel 定理）：对于一个给定的发散级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，一定存在一个发散的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n/a_n = 0$。

注：该题说明判别级数发散，不存在万能的比较级数。

2 Cauchy 判别法

比较判别法需找一敛散性已知的级数与之比较，但大部分情况有难度。故理想的判别方法应着眼于对级数自身元素的分析。

2 Cauchy 判别法

比较判别法需找一敛散性已知的级数与之比较，但大部分情况有难度。故理想的判别方法应着眼于对级数自身元素的分析。

**定理7**（Cauchy 判别法）：设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是正项级数，$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n}$，则

(1) 当$r < 1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛；

(2) 当$r > 1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散；

(3) 当$r = 1$ 时，判别法失效。

2 Cauchy 判别法

比较判别法需找一敛散性已知的级数与之比较，但大部分情况有难度。故理想的判别方法应着眼于对级数自身元素的分析。

**定理7**（Cauchy 判别法）：设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是正项级数，$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n}$，则

(1) 当$r < 1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛；

(2) 当$r > 1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散；

(3) 当$r = 1$ 时，判别法失效。

思考：为何在Cauchy 判别法中用上极限而非下极限？

2 Cauchy 判别法

比较判别法需找一敛散性已知的级数与之比较，但大部分情况有难度。故理想的判别方法应着眼于对级数自身元素的分析。

**定理7**（Cauchy 判别法）：设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是正项级数，$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n}$，则

(1) 当$r < 1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛；

(2) 当$r > 1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散；

(3) 当$r = 1$ 时，判别法失效。

思考：为何在Cauchy 判别法中用上极限而非下极限？

例5：判断正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}$ 的敛散性。

3 d'Alembert 判别法

**定理8**（d'Alembert 判别法）：设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n (x_n \neq 0)$ 是正项级数，则

(1) 当$\overline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \bar{r} < 1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛；

(2) 当 $\underline{\lim_{n\to+\infty}} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \underline{r} > 1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散；

(3) 当$\bar{r} \geq 1$ 或$\underline{r} \leq 1$ 时，判别法失效。

3 d'Alembert 判别法

**定理8**（d'Alembert 判别法）：设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n (x_n \neq 0)$是正项级数，则

(1) 当$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \bar{r} < 1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛；

(2) 当 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \underline{r} > 1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散；

(3) 当$\bar{r} \geq 1$ 或$\underline{r} \leq 1$ 时，判别法失效。

注：Cauchy 判别法包含d'Alembert 判别法。

3 d'Alembert 判别法

**定理8**（d'Alembert 判别法）：设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n (x_n \neq 0)$ 是正项级数，则

(1) 当$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \bar{r} < 1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛；

(2) 当 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \underline{r} > 1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散；

(3) 当$\bar{r} \geq 1$ 或$\underline{r} \leq 1$ 时，判别法失效。

注：Cauchy 判别法包含d'Alembert 判别法。

**命题**：设$\{x_n\}$ 是正项数列，则

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \underline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n}。$$

例6：判别$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$ 的敛散性。

例6：判别$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$ 的敛散性。

注1：尽管Cauchy 判别法的适用范围比d'Alembert 判别法广，但对某些例子，两种判别法均适用。可能d'Alembert 判别法比Cauchy 判别法更方便。

例6：判别$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$ 的敛散性。

注1：尽管Cauchy 判别法的适用范围比d'Alembert 判别法广，但对某些例子，两种判别法均适用。可能d'Alembert 判别法比Cauchy 判别法更方便。

例7：判别$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ 的敛散性。

例6：判别$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$ 的敛散性。

注1：尽管Cauchy 判别法的适用范围比d'Alembert 判别法广，但对某些例子，两种判别法均适用。可能d'Alembert 判别法比Cauchy 判别法更方便。

例7：判别$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$ 的敛散性。

注2：Cauchy 判别法与d'Alembert 判别法的本质是比较判别法，与之相比较的是几何级数$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$。

作业： $P_{27}$ $1(3-5)(8)(10-11)(14-15)(17), 2(2), 7-8, 11.$
补充：举出一个收敛的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的例子，使它满足条件$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} na_n = 1$。

4 Raabe 判别法

**定理9**（Raabe 判别法）设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n (x_n \neq 0)$ 是正项级数，$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(x_n/x_{n+1} - 1\right) = r$，则

(1) 当$r > 1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛；

(2) 当$r < 1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散。

4 Raabe 判别法

**定理9**（Raabe 判别法）设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n (x_n \neq 0)$ 是正项级数，$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(x_n/x_{n+1} - 1\right) = r$，则

(1) 当$r > 1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛；

(2) 当$r < 1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散。

例8：判断级数$1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \dfrac{1}{2n+1}$ 的敛散性。

4 Raabe 判别法

**定理9**（Raabe 判别法）设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n (x_n \neq 0)$ 是正项级数，$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(x_n/x_{n+1} - 1\right) = r$，则

(1) 当$r > 1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛；

(2) 当$r < 1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散。

例8：判断级数$1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \dfrac{1}{2n+1}$ 的敛散性。

注1：当$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(x_n/x_{n+1} - 1\right) = 1$ 时，Raabe 判别法失效，还可建立比Raabe 判别法更有效的判别法。逐次建立更有效的判别法过程是无限的。虽然每次都能得到新的适用范围更广的判别法，但证明也更复杂。

注2：d'Alembert 判别法与部分情况下的Raabe 判别法只能用于$\{a_n\}$ 为单调的情况，至少在$n$ 充分大时必须单调。从这个意义上，它们是通项↓ 的正项级数判别法。Cauchy 判别法是个例外。

注2：d'Alembert 判别法与部分情况下的Raabe 判别法只能用于$\{a_n\}$为单调的情况，至少在$n$充分大时必须单调。从这个意义上，它们是通项↓的正项级数判别法。Cauchy 判别法是个例外。

5 积分判别法

建立在广义积分基础上的Cauchy 积分判别法很有用，它不依赖于比较级数。

设$\forall x \in [a, +\infty), f(x) \geq 0$，且$\forall A > a, f(x) \in R[a, A]$。取一单调增加趋于$+\infty$的数列$\{a_n\} : a = a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$，令$u_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$。

**定理10**（Cauchy 积分判别法）：广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或发散于$+\infty$，且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

特别地，当$f(x)$ 单调减少时，取$a_n = n$，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\sum_{n=N}^{\infty} f(n)(N = [a] + 1)$ 同敛散。

**定理10**（Cauchy 积分判别法）：广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或发散于$+\infty$，且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

特别地，当$f(x)$ 单调减少时，取$a_n = n$，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\sum_{n=N}^{\infty} f(n)(N = [a] + 1)$ 同敛散。

例9：判别$p$ 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 的敛散性。

**定理10**（Cauchy 积分判别法）：广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或发散于$+\infty$，且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

特别地，当$f(x)$ 单调减少时，取$a_n = n$，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\sum_{n=N}^{\infty} f(n)(N = [a] + 1)$ 同敛散。

例9：判别$p$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性。

注1：同理$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^q n}$ 在$q > 1$ 时收敛；$q \leq 1$ 时发散。

注2：Cauchy 判别法中$f(x) \geq 0$，若去除该条件，则

注2：Cauchy 判别法中$f(x)\geq 0$，若去除该条件，则
$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。
因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$。

注2：Cauchy 判别法中$f(x) \geq 0$，若去除该条件，则

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

因为$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$。

由$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛$\not\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。理由：

由$\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$ 存在$\not\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

注2：Cauchy 判别法中$f(x)\geq 0$，若去除该条件，则

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$。

由$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛$\not\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。理由：

由$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$ 存在$\not\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

反例：$\int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$ 发散。取$a_n=2n\pi$, $u_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$
$=0$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

注2：Cauchy 判别法中$f(x) \geq 0$，若去除该条件，则

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

因为$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$。

由$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛$\not\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。理由：

由$\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$ 存在$\not\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

反例：$\int_0^{+\infty} \sin x\mathrm{d}x$ 发散。取$a_n = 2n\pi$, $u_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$
$= 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

例10：证明(1) 广义积分$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^4 \sin^2 x}$ 收敛；

注2：Cauchy 判别法中$f(x)\geq 0$，若去除该条件，则

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$。

由$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛$\not\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。理由：
由$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$ 存在$\not\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

反例：$\int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$ 发散。取$a_n = 2n\pi$, $u_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$
$= 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

例10：证明(1) 广义积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x}$ 收敛；

(2) 广义积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\sin^2 x}$ 发散。

6 Cauchy 凝聚判别法

**定理11**（Cauchy 凝聚判别法）：设$\{a_n\}$ 是$\downarrow$ 的正数数列，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 凝聚项级数$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 收敛。

6 Cauchy 凝聚判别法

**定理11**（Cauchy 凝聚判别法）：设$\{a_n\}$ 是$\downarrow$ 的正数数列，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 凝聚项级数$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 收敛。

例11：利用Cauchy 凝聚判别法判别$p$ 级数的敛散性。

6 Cauchy 凝聚判别法

**定理11**（Cauchy 凝聚判别法）：设$\{a_n\}$是$\downarrow$的正数数列，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛$\Longleftrightarrow$凝聚项级数$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$收敛。

例11：利用Cauchy 凝聚判别法判别$p$级数的敛散性。

**作业：** 课本$P_{27}$ 4, 5, 9, 13 及证明Cauchy 凝聚判别法。

并利用第5 题讨论$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}}{n}$的敛散性。

补充题1：设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$为正项级数，$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$。证明：$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} x_n/S_n$同敛散。

补充题2：设$x_n \le y_n \le z_n, \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 均收敛，证明：$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛。

补充题3：若两正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} \max\{u_n, v_n\}$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} \min\{u_n, v_n\}$ 两级数敛散性如何？

思考题：用积分判别法讨论下列级数的收敛性

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p};\ (2) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n};$$

$$(3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1+\sigma} \ln \ln n}(\sigma > 0);\ (4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p (\ln \ln n)^q}.$$

# §4 任意项级数

以下讨论正、负项可以任意出现的级数的收敛问题。

## 一、Cauchy 收敛准则

**定理1**（Cauchy 收敛准则）：$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall m > n > N$，有$|\sum_{k=n+1}^{m} x_k| < \epsilon$。

# §4 任意项级数

以下讨论正、负项可以任意出现的级数的收敛问题。

## 一、Cauchy 收敛准则

**定理1**（Cauchy 收敛准则）：$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall m > n > N$，有$|\sum_{k=n+1}^{m} x_k| < \epsilon$。

注：与数列极限类似，级数的Cauchy 收敛准则有另一种叙述方式：$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{Z}^+$，有

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| = |\sum_{k=1}^{p} x_{n+k}| < \epsilon.$$

# §4 任意项级数

以下讨论正、负项可以任意出现的级数的收敛问题。

## 一、Cauchy 收敛准则

**定理1**（Cauchy 收敛准则）：$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall m > n > N$，有$|\sum_{k=n+1}^{m} x_k| < \epsilon$。

注：与数列极限类似，级数的Cauchy 收敛准则有另一种叙述方式：$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{Z}^+$，有

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| = |\sum_{k=1}^{p} x_{n+k}| < \epsilon.$$

特别地，取$p = 1$，上式即$|x_{n+1}| < \epsilon$。故$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛$\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$。

## 一、交错级数

**定义：** 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n(u_n>0)$称为交错级数。

## 一、交错级数

**定义**：级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n(u_n>0)$称为交错级数。

初学者可能以为在变号级数中交错级数不是很多，其实不然。

回顾课本$P_4$ 定理9.1.3：若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则在它的求和表达式中任意添加括号所得的级数仍收敛，其和不变。

**定理2**：若对级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$加括号后得到的级数收敛，且在每个括号内各项的符号相同，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

## 一、交错级数

**定义：** 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n(u_n>0)$称为交错级数。

初学者可能以为在变号级数中交错级数不是很多，其实不然。

回顾课本$P_4$定理9.1.3：若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则在它的求和表达式中任意添加括号所得的级数仍收敛，其和不变。

**定理2：** 若对级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$加括号后得到的级数收敛，且在每个括号内各项的符号相同，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

故任何变号级数都可采用加括号的方法使它成为一个交错级数，且两级数的敛散性等价。

**定义：** 若交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 满足$u_n\downarrow 0$，则称为Leibniz 级数。

**定义**：若交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 满足$u_n\downarrow 0$，则称为Leibniz 级数。

**定理3**（Leibniz 判别法）：Leibniz 级数必收敛。

**定义**：若交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 满足$u_n \downarrow 0$，则称为Leibniz 级数。

**定理3**（Leibniz 判别法）：Leibniz 级数必收敛。

注1：(1) $0 \le \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n \le u_1$;

(2) 对Leibniz 级数的余和$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}u_k$，成立$|r_n| \le u_{n+1}$。

**定义**：若交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 满足$u_n\downarrow 0$，则称为Leibniz 级数。

**定理3**（Leibniz 判别法）：Leibniz 级数必收敛。

注1：(1) $0\le\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n\le u_1$;

(2) 对Leibniz 级数的余和$r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}u_k$，成立$|r_n|\le u_{n+1}$。

注2：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}(p>0),\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln^q n}(q>0),\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$ 等都是Leibniz 型级数，故收敛。

**定义**：若交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 满足$u_n\downarrow 0$，则称为Leibniz 级数。

**定理3**（Leibniz 判别法）：Leibniz 级数必收敛。

注1：(1) $0\le\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n\le u_1$;

(2) 对Leibniz 级数的余和$r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}u_k$，成立$|r_n|\le u_{n+1}$。

注2：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}(p>0),\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln^q n}(q>0),\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$ 等都是Leibniz 型级数，故收敛。

例1：证明$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)$ 收敛。

**作业**： 课本$P_{44}$ 2(1), 3, 4.

## 三、任意项级数的收敛判别法

例2：若$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n/y_n = 1$，是否有$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛？

## 三、任意项级数的收敛判别法

例2：若$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n/y_n = 1$，是否有$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$收敛？

考察$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$。

## 三、任意项级数的收敛判别法

例2：若$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n/y_n = 1$，是否有$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛？

$$\text{考察}\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\text{。}$$

为讨论更广泛的任意项级数，引入Abel 变换。

**引理4**（Abel 变换）：设$\{a_n\},\{b_n\}$ 是两数列，记$B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i (k = 1, 2, \cdots)$，则

$$\sum_{k=1}^{p} a_k b_k = a_p B_p - \sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k.$$

## 三、任意项级数的收敛判别法

例2：若$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/y_n = 1$，是否有$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛？

$$考察\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}。$$

为讨论更广泛的任意项级数，引入Abel 变换。

**引理4（Abel 变换）**：设$\{a_n\},\{b_n\}$ 是两数列，记$B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i (k = 1, 2, \cdots)$，则

$$\sum_{k=1}^{p} a_k b_k = a_p B_p - \sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k.$$

注1：上式也称分部求和公式，具有几何意义。

注2：记$B_{n+k}=\sum_{i=n+1}^{n+k} b_i (k=1,2,\cdots)$，则

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = a_{n+p}B_{n+p} - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_{k+1}-a_k)B_k.$$

即Abel 变换中把下标均加上$n$，该式可用于用Cauchy 收敛准则证明$\sum_{k=1}^{\infty} a_k B_k$ 的收敛性。

注2：记$B_{n+k}=\sum_{i=n+1}^{n+k} b_i (k=1,2,\cdots)$，则

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = a_{n+p}B_{n+p} - \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}-a_k)B_k.$$

即Abel 变换中把下标均加上$n$，该式可用于用Cauchy 收敛准则证明$\sum_{k=1}^{\infty} a_k B_k$ 的收敛性。

由Abel 变换可以得到如下Abel 引理

**引理5（Abel 引理）**：设(1) $\{a_k\}$ 为单调数列；

(2) $\{B_k\}(B_k=\sum_{i=1}^{k} b_i, k=1,2,\cdots)$ 为有界数列，即$\exists M>0$，对$\forall k$，成立$|B_k|\le M$。

则$\left|\sum_{k=1}^{p} a_k B_k\right| \le M(|a_1|+2|a_p|)$。

**定理6**（级数的A-D 判别法）：若下列两个条件之一满足，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛。

(1)(Dirichlet 判别法)$\{a_n\}$ 单调趋于0，$\{\sum_{i=1}^{n} b_i\}$ 有界；

(2)(Abel 判别法)$\{a_n\}$ 单调有界，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。

**定理6**（级数的A-D 判别法）：若下列两个条件之一满足，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛。

(1)(Dirichlet 判别法)$\{a_n\}$ 单调趋于0，$\{\sum_{i=1}^{n} b_i\}$ 有界；

(2)(Abel 判别法)$\{a_n\}$ 单调有界，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。

例3：设$\{a_n\}$ 单调趋于0，则对$\forall x \in \mathbb{R}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 收敛。

**定理6**（级数的A-D 判别法）：若下列两个条件之一满足，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛。

(1)(Dirichlet 判别法)$\{a_n\}$ 单调趋于0，$\{\sum_{i=1}^{n} b_i\}$ 有界；

(2)(Abel 判别法)$\{a_n\}$ 单调有界，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。

例3：设$\{a_n\}$ 单调趋于0，则对$\forall x \in \mathbb{R}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 收敛。

注：同理可证，对$\forall x \neq 2k\pi, \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 收敛。

**定理6**（级数的A-D 判别法）：若下列两个条件之一满足，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛。

(1)(Dirichlet 判别法)$\{a_n\}$ 单调趋于0，$\{\sum_{i=1}^{n} b_i\}$ 有界；

(2)(Abel 判别法)$\{a_n\}$ 单调有界，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。

例3：设$\{a_n\}$ 单调趋于0，则对$\forall x \in \mathbb{R}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 收敛。

注：同理可证，对$\forall x \neq 2k\pi, \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 收敛。

## 四、级数的绝对收敛与条件收敛

**定义7**：如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 为绝对收敛级数；如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛而$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 发散，则称$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 为条件收敛级数。

注：$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ 收敛$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛；

$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛$\not\Longleftarrow \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ 收敛。e.g. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$。

注：$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ 收敛$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛；

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛$\not\Longleftarrow \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ 收敛。e.g. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$。

例4：讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^p}$ 的敛散性。

注：$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ 收敛$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛；

$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛$\not\Longleftarrow \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ 收敛。e.g. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$。

例4：讨论级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$ 的敛散性。

例5：讨论级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}(0<x<\pi)$ 的敛散性。

注：$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ 收敛$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛；

$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛$\not\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ 收敛。e.g. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$。

例4：讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^p}$ 的敛散性。

例5：讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^p}(0<x<\pi)$ 的敛散性。

**作业：** 课本$P_{43}$ 1(1)(3 – 4), (7 – 8), (10 – 12), 8, 10 – 12.

思考题：证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛。

## 五、绝对收敛与条件收敛的本质差异

1 绝对收敛与条件收敛的性质

设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是任意项级数，令

$$x_n^+ = \frac{|x_n| + x_n}{2} = \begin{cases} x_n, & x_n > 0 \\ 0, & x_n \leq 0 \end{cases}, x_n^- = \frac{|x_n| - x_n}{2} = \begin{cases} -x_n, & x_n < 0 \\ 0, & x_n \geq 0 \end{cases}$$

则$x_n = x_n^+ - x_n^-, |x_n| = x_n^+ + x_n^-$。

## 五、绝对收敛与条件收敛的本质差异

1 绝对收敛与条件收敛的性质

设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是任意项级数，令

$$x_n^+ = \frac{|x_n| + x_n}{2} = \begin{cases} x_n, & x_n > 0 \\ 0, & x_n \le 0 \end{cases}, x_n^- = \frac{|x_n| - x_n}{2} = \begin{cases} -x_n, & x_n < 0 \\ 0, & x_n \ge 0 \end{cases}$$

则$x_n = x_n^+ - x_n^-, |x_n| = x_n^+ + x_n^-$。

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ (\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-)$ 分别是由$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的所有正项（负项变号后）依次构成的级数，它们均为正项级数。

## 五、绝对收敛与条件收敛的本质差异

1 绝对收敛与条件收敛的性质

设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是任意项级数，令

$$x_n^+ = \frac{|x_n| + x_n}{2} = \begin{cases} x_n, & x_n > 0 \\ 0, & x_n \le 0 \end{cases}, x_n^- = \frac{|x_n| - x_n}{2} = \begin{cases} -x_n, & x_n < 0 \\ 0, & x_n \ge 0 \end{cases}$$

则$x_n = x_n^+ - x_n^-, |x_n| = x_n^+ + x_n^-$。

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ (\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-)$ 分别是由$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的所有正项（负项变号后）依次构成的级数，它们均为正项级数。

**定理8：**(1) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛 $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 均收敛；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛$\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = +\infty$。

2 更序级数

**定义9：** 将一个级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的项任意重新排列，得到新级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$，该级数称为$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的更序级数。

2 更序级数

**定义9：** 将一个级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的项任意重新排列，得到新级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$，该级数称为$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的更序级数。

问题：(1) 若$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，是否有$\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$ 收敛？

(2) 若$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$ 均收敛，是否有$\sum_{n=1}^{\infty} x_n' = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$？

2 更序级数

**定义9**：将一个级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的项任意重新排列，得到新级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$，该级数称为$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的更序级数。

问题：(1) 若$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，是否有$\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$ 收敛？

(2) 若$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$ 均收敛，是否有$\sum_{n=1}^{\infty} x_n' = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$？

问题(1) 解答见后面Riemann 重排定理；问题(2) 反例如下：

例6：考虑Leibniz 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$。

2 更序级数

**定义9**：将一个级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的项任意重新排列，得到新级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$，该级数称为$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的更序级数。

问题：(1) 若$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，是否有$\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$ 收敛？

(2) 若$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$ 均收敛，是否有$\sum_{n=1}^{\infty} x_n' = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$？

问题(1) 解答见后面Riemann 重排定理；问题(2) 反例如下：

例6：考虑Leibniz 级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$。

令$d_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1}{n}$，则可证$\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \ln 2$。

考虑$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$的更序级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n'$：顺次地在每一个正项后面接两个负项，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n' = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots。$$

可证明该级数的和为$\ln 2/2$。

考虑$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$的更序级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n'$：顺次地在每一个正项后面接两个负项，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n'=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots。$$

可证明该级数的和为$\ln 2/2$。

故尽管$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$收敛，但交换律不成立。

考虑$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$的更序级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n'$：顺次地在每一个正项后面接两个负项，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n' = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots。$$

可证明该级数的和为$\ln 2/2$。

故尽管$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$收敛，但交换律不成立。

**定理10**：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$绝对收敛，则它的更序级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n'$也绝对收敛，其和不变，即$\sum_{n=1}^{\infty}x_n' = \sum_{n=1}^{\infty}x_n$。

考虑$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ 的更序级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n'$：顺次地在每一个正项后面接两个负项，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n' = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots。$$

可证明该级数的和为$\ln 2/2$。

故尽管$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ 收敛，但交换律不成立。

**定理10：** 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 绝对收敛，则它的更序级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n'$ 也绝对收敛，其和不变，即$\sum_{n=1}^{\infty}x_n' = \sum_{n=1}^{\infty}x_n$。

**定理11：** （Riemann 重排定理）设级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 条件收敛，则对$\forall a(-\infty \leq a \leq \infty)$，必存在$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 的更序级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n'$ 满足$\sum_{n=1}^{\infty}x_n' = a$。

注1：事实上，Riemann 重排定理的结论可以加强：设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛，$\forall -\infty \le \alpha \le \beta \le +\infty$ 的$\alpha, \beta$，必存在$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的更序级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$，s.t. 该更序级数的部分和序列$\{S_n'\}$ 满足：$\underline{\lim}_{n\to+\infty} S_n' = \alpha, \overline{\lim}_{n\to\infty} S_n' = \beta$。

注1：事实上，Riemann 重排定理的结论可以加强：设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛，$\forall -\infty \le \alpha \le \beta \le +\infty$ 的$\alpha,\beta$，必存在$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的更序级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$，s.t. 该更序级数的部分和序列$\{S_n'\}$ 满足：$\underline{\lim}_{n\to+\infty} S_n' = \alpha, \overline{\lim}_{n\to\infty} S_n' = \beta$。

注2：条件收敛级数中部分和数列$\{S_n\}$ 为$\infty - \infty$ 型不定式($\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = +\infty$)，故由此可知条件收敛级数是依赖于正项和负项在求和过程中相互抵消而收敛的。

注1：事实上，Riemann 重排定理的结论可以加强：设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛，$\forall -\infty \le \alpha \le \beta \le +\infty$ 的$\alpha,\beta$，必存在$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的更序级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$，s.t. 该更序级数的部分和序列$\{S_n'\}$ 满足：$\underline{\lim}_{n\to+\infty} S_n' = \alpha, \overline{\lim}_{n\to\infty} S_n' = \beta$。

注2：条件收敛级数中部分和数列$\{S_n\}$ 为$\infty - \infty$ 型不定式($\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = +\infty$)，故由此可知条件收敛级数是依赖于正项和负项在求和过程中相互抵消而收敛的。

3 级数的乘法

对两个收敛的级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，仿照有限项和数乘积的规则，写出诸如$a_ib_j(i = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots)$ 的项。

注1：事实上，Riemann 重排定理的结论可以加强：设$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛，$\forall -\infty \le \alpha \le \beta \le +\infty$ 的$\alpha,\beta$，必存在$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的更序级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$，s.t. 该更序级数的部分和序列$\{S_n'\}$ 满足：$\varliminf\limits_{n\to+\infty} S_n' = \alpha, \varlimsup\limits_{n\to\infty} S_n' = \beta$。

注2：条件收敛级数中部分和数列$\{S_n\}$ 为$\infty - \infty$ 型不定式($\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = +\infty$)，故由此可知条件收敛级数是依赖于正项和负项在求和过程中相互抵消而收敛的。

3 级数的乘法

对两个收敛的级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，仿照有限项和数乘积的规则，写出诸如$a_ib_j(i = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots)$ 的项。

问题：如何将它们排成一个数列？

尽管级数运算一般不满足交换律和结合律，就产生了排列的方式问题。尽管排列的方式多种多样，但最常用的是“对角线法”和“正方形法”。

尽管级数运算一般不满足交换律和结合律，就产生了排列的方式问题。尽管排列的方式多种多样，但最常用的是“对角线法”和“正方形法”。

“正方形法”

令$d_1 = a_1 b_1$，$d_2 = a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1, \cdots$

$d_n = a_1 b_n + a_2 b_n + \cdots a_n b_n + a_n b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$，

则称$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 为$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 按正方形法排列所得的乘积。

尽管级数运算一般不满足交换律和结合律，就产生了排列的方式问题。尽管排列的方式多种多样，但最常用的是“对角线法”和“正方形法”。

“正方形法”

令$d_1 = a_1 b_1$，$d_2 = a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1, \cdots$

$d_n = a_1 b_n + a_2 b_n + \cdots a_n b_n + a_n b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$，

则称$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 为$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 按正方形法排列所得的乘积。

因为$\sum_{k=1}^{n} d_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$，故只要$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$。

“对角线法”

令$c_1 = a_1 b_1$, $c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1, \cdots$

$c_n = \sum_{i+j=n+1} a_i b_j = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1$，
则称$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 为$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的Cauchy 乘积。

“对角线法”

令$c_1=a_1b_1, c_2=a_1b_2+a_2b_1,\cdots$

$c_n=\sum_{i+j=n+1}a_ib_j=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_2+a_nb_1$，
则称$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$的Cauchy 乘积。

与正方形法不同，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$的收敛性不足以保证Cauchy 乘积$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$的收敛性。

“对角线法”

令$c_1=a_1b_1,\ c_2=a_1b_2+a_2b_1,\cdots$

$c_n=\sum_{i+j=n+1}a_ib_j=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_2+a_nb_1$，则称$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的Cauchy 乘积。

与正方形法不同，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的收敛性不足以保证Cauchy 乘积$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 的收敛性。

例7：设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$，考察$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的Cauchy 乘积。

**定理12**：若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$绝对收敛，则将$a_i b_j$ $(i = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots)$按任意方式排列求和而成的级数也绝对收敛，其和为$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$。

**定理12**：若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛，则将$a_i b_j$ $(i = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots)$ 按任意方式排列求和而成的级数也绝对收敛，其和为$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$。

下例反映了Cauchy 乘积的应用价值。

例8：证明$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$。

**定理12**：若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛，则将$a_i b_j$ $(i = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots)$ 按任意方式排列求和而成的级数也绝对收敛，其和为$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$。

下例反映了Cauchy 乘积的应用价值。

例8：证明$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$。

注：事实上$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$，故本题即证$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$。

**作业：** 课本$P_{45}$ 14, 15(1).

补充题：将以下级数按对角线作乘积，并讨论乘积级数的敛散。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n + \cdots$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$

并利用该题说明“绝对收敛”只是乘积级数收敛的充分条件，而非必要条件。

作业： 课本$P_{45}$ 14, 15(1).

补充题：将以下级数按对角线作乘积，并讨论乘积级数的敛散。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n + \cdots$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$

并利用该题说明“绝对收敛”只是乘积级数收敛的充分条件，而非必要条件。

对无穷乘积，需掌握

Wallis 公式$\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2}{1} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{6}{5} \cdot \dfrac{6}{7} \cdots \dfrac{2n}{2n-1} \cdot \dfrac{2n}{2n+1} \cdots$

**作业：** 课本$P_{45}$ 14, 15(1).

补充题：将以下级数按对角线作乘积，并讨论乘积级数的敛散。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n + \cdots$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$

并利用该题说明“绝对收敛”只是乘积级数收敛的充分条件，而非必要条件。

对无穷乘积，需掌握

Wallis 公式$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdots$

Sterling 公式$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\ (n \to \infty)$