§6 曲面上的测地线

一、曲面曲线的测地曲率

二、曲面上的测地线

三、曲面上的半测地坐标网

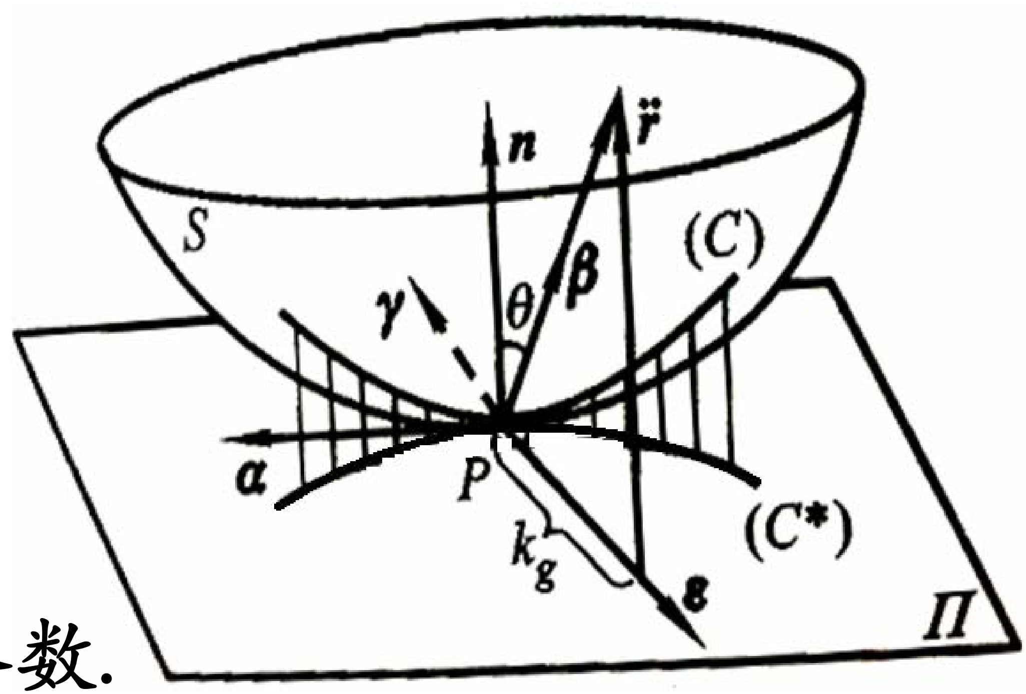
四、曲面上测地线的短程性

五、Gauss(高斯)-Bonnet(波涅)公式

六、曲面上向量的平行移动

*七、极小曲面

一、曲面曲线的测地曲率



曲面 S：$\vec{r}=\vec{r}(u^1,u^2)$

S上的曲线(C): $u^\alpha=u^\alpha(s)$

其中$\alpha=1,2$; s为(C)的自然参数.

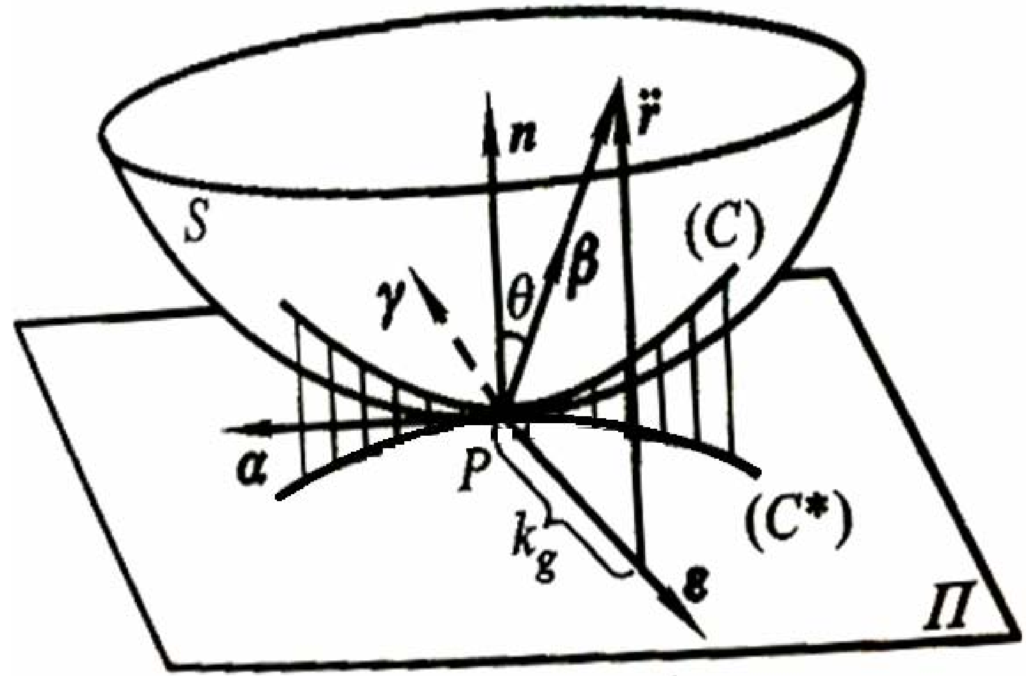
点P对应参数s，(C)在P点的基本向量为$\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$.

$\vec{n}$为S在点P的单位法向量，θ为$\vec{\beta}$与$\vec{n}$之间的夹角.

$\vec{\varepsilon}=\vec{n}\times\vec{\alpha}$, 称$\ddot{\vec{r}}=\dot{\vec{\alpha}}=k\vec{\beta}$为$(C)$在$P$点的曲率向量.

称曲率向量在$\vec{\varepsilon}$上的投影k_g为(C)在P点的测地曲率.

测地曲率的性质



$$k_g = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{\varepsilon} = k\vec{\beta} \cdot \vec{\varepsilon}$$

$$= k\vec{\beta} \cdot (\vec{n} \times \vec{\alpha})$$

$$= k(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{n} \quad = k\,\vec{\gamma} \cdot \vec{n}$$

$$= k\cos(\frac{\pi}{2} \mp \theta) = \pm k\sin\theta.$$

P146命题1. $k^2 = k_g^2 + k_n^2.$

P146命题2.

曲面S上的曲线(C),它在P点的测地曲率的绝对值等于(C)在P点的切平面π上的正投影曲线(C^*)的曲率.

测地曲率的计算

$$k_g = \sqrt{g}\begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s} & \dfrac{\mathrm{d}^2u^1}{\mathrm{d}s^2} + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^1 \dfrac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s} \\ \dfrac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s} & \dfrac{\mathrm{d}^2u^2}{\mathrm{d}s^2} + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^2 \dfrac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s} \end{vmatrix}$$

k_g属于曲面的内蕴量(在保长变换中保持不变),即曲面曲线的曲率依赖于第一基本形式的部分.

该式容易记忆,但计算比较复杂.如果在曲面上取正交坐标网,则k_g能够写成比较简单的表达式(即Liouville公式).

Liouville(刘维尔)公式

设曲面S的曲纹坐标网为正交网，因而曲面的的第一基本形式是$I=E(\mathrm{d}u)^2+G(\mathrm{d}v)^2$. 设$(C)$： $u=u(s), v=v(s)$是曲面S上的一条曲线，其中s是弧长参数. 假定(C)与u-曲线的夹角是θ，则曲线(C)的测地曲率是

$$k_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta$$

还可写为$k_g=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}+k_{g_u}\cos\theta+k_{g_v}\sin\theta$

其中k_{g_u}和k_{g_v}分别为u-曲线和v-曲线的测地曲率.

(习题P171-1)

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

P170: 3, 4, 5

二、曲面上的测地线

平面上的直线: ①任一点的切向量平行; ②曲率为零;

③直线段是连接点与点之间的最短线段.

平面上的直线 $\longrightarrow$ 曲面上的测地线

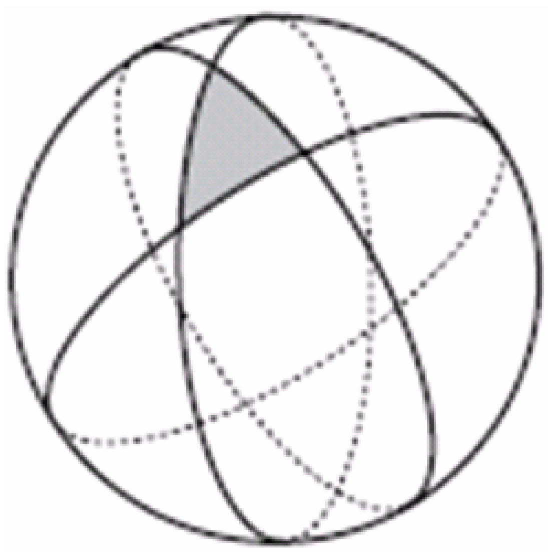
曲面上测地曲率恒等于零的曲线称为该曲面的测地线.

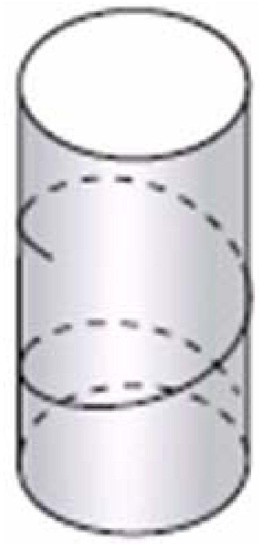
P149命题3.

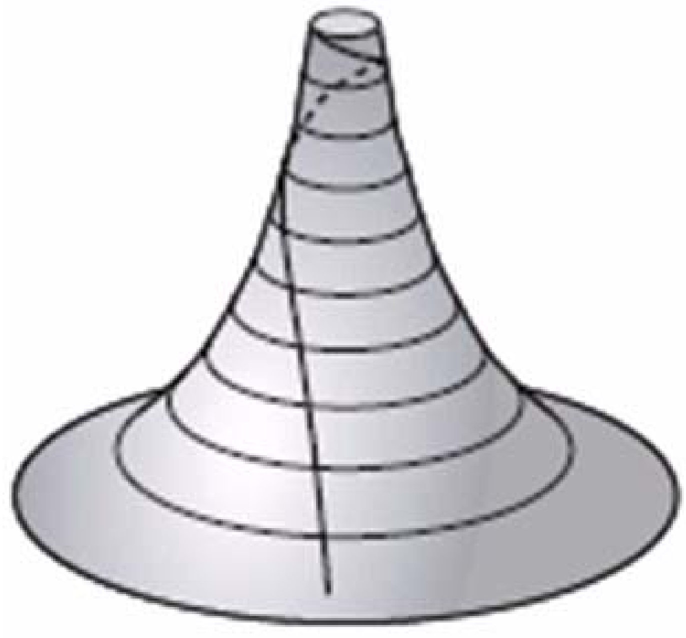
曲面上非直线的曲线是测地线的充要条件是除了曲率为零的点外, 曲线的主法线重合于曲面的法线.

P150推论

如果两曲面沿一条曲线相切, 并且此曲线是其中一个曲面的测地线, 那么它也是另一个曲面的测地线.







例 P171习题7

旋转曲面S上的经线(子午线)是该曲面S的测地线，而纬线(平行圆)仅当经线的切线平行于旋转轴时才是测地线.

例 如果在曲面S上运动的质点p只受到将它约束在S上的力的作用,则点p的轨迹C是S上的测地线.

提示

$$\because \quad \vec{F} = m\vec{r}''(t), \quad \vec{F} \perp \vec{r}'(t), \qquad \therefore \quad \vec{r}'(t)\cdot\vec{r}''(t) = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \vec{r}''(t) \perp \vec{r}'(t) \Rightarrow \quad \vec{r}''(t) \,//\, \vec{\beta} \\ \vec{r}''(t) \,//\, \vec{F} \,//\, \vec{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\beta} \,//\, \vec{n}.$$

测地线的方程

测地线上的点满足 $\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{r}_l=0\ (l=1,2)$

$$\ddot{\vec{r}}=\sum_k\left(\frac{\mathrm{d}^2u^k}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\right)\vec{r}_k+\sum_{i,j}L_{ij}\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\vec{n}$$

从而 $\sum_k g_{kl}\left(\frac{\mathrm{d}^2u^k}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\right)=0\quad(l=1,2)$

又 $\because g\neq0,\therefore$ 得到测地线的方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2u^k}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}=0\quad(k=1,2)$$

P152定理 过曲面上任一点,给定一个曲面的切方向,则存在唯一一条测地线切于此方向.

证明

满足方程 $$\frac{\mathrm{d}^2u^k}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}=0\quad(k=1,2)$$

的曲线都是测地线(各点的测地曲率为零).

初始条件: $u^k(s_0)=u_0^k,\ \dfrac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}s}(s_0)=t_0$

相当于给出曲面上一点和该点处的一个切方向.

由常微分方程的理论知该初值问题有且只有唯一解,

即有且只有一条过给定点且切于给定切方向的测地线.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

P171: 10, 11, 12

三、曲面上的半测地坐标网

如果曲面上的曲纹坐标网是正交网，且其中一族曲线是测地线，则称这个坐标网为**半测地坐标网**.

半测地坐标网是平面上的极坐标网在曲面上的推广.

P152命题4.

给出曲面上一条曲线，则总存在一个半测地坐标网，使得它的非测地坐标曲线族中包含给定的这条曲线.

半测地坐标网条件下的曲面第一基本形式

取曲面上的一条测地线(C)为v-曲线：$u=u_0$，再取与(C)正交的测地线族为u-曲线，另取该测地线族的正交轨线族为v-曲线族，则得一半测地坐标网. 对于这个坐标网而言，曲面的第一基本形式可以简化为$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2$，其中$G(u,v)$满足条件$G(u_0,v)=1, G_u(u_0,v)=0$.

并且这里的参数u,v具有如下几何意义：

u-曲线上介于$u=c_1$和$u=c_2$之间的弧长为$|c_2-c_1|$；

在曲线$u=u_0$上介于$v=d_1$和$v=d_2$之间的弧长为$|d_2-d_1|$.

四、曲面上测地线的短程性

P155定理

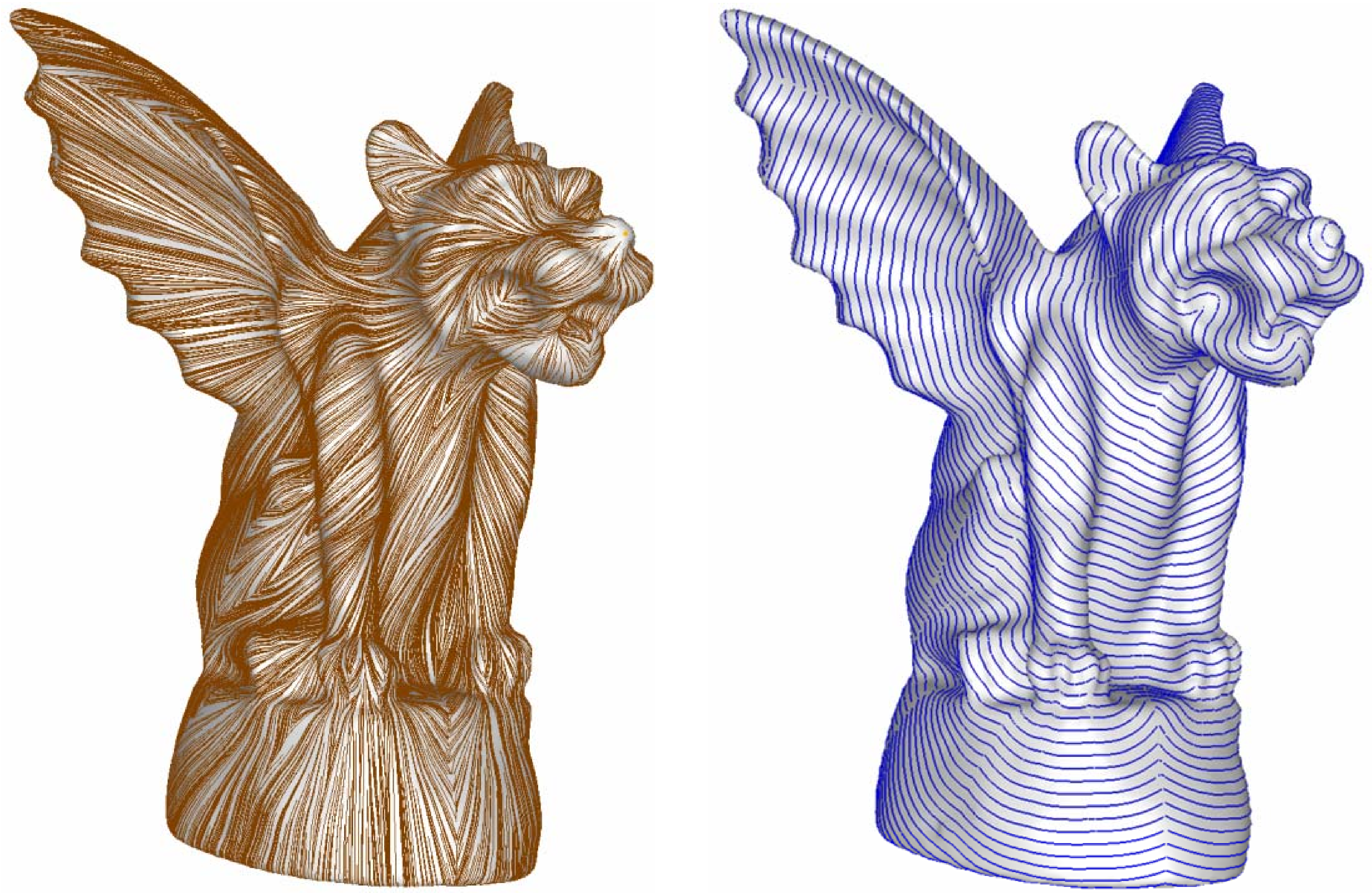
若给出曲面上充分小邻域内的两点P和Q,则过P,Q两点在小邻域内的测地线段是连接P,Q两点的曲面上的曲线中弧长最短的曲线.

注

在不是充分小的邻域内,该定理不一定成立.

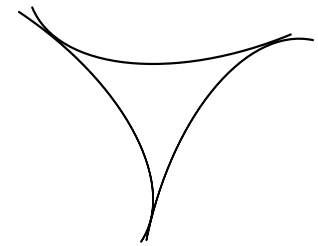
例如球面上的大圆是测地线,所以球面上不是直径两端的两点,连结它们的大圆弧有两段,显然长的不是连结它们两点的最短线,而短的是.

测地线族与它的正交轨线族示例

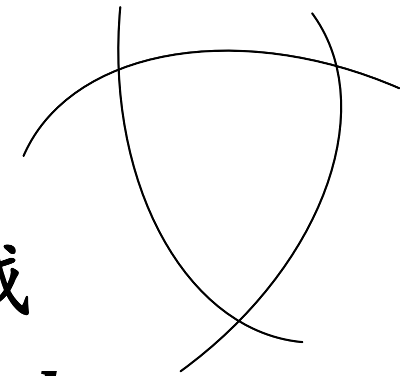


Ref: Fast Exact and Approximate Geodesics on Meshes

五、Gauss-Bonnet(高斯-波涅)公式



在平面上，三角形的内角和等于180度，但在曲面上的情形可能不大一样，如图. 这一节就是把平面上的结果推广到曲面上去.



在曲面S上给出一个由l条光滑曲线段所围成的曲边多边形∂G，它围成了一个单连通曲面域G. 设S的高斯曲率和∂G的测地曲率分别为K和k_g，曲面的面积元素和弧长元素分别为$\mathrm{d}\sigma$和$\mathrm{d}s$，则有

$$\iint_G K\mathrm{d}\sigma+\oint_{\partial G} k_g \mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{l}(\pi-\alpha_i)=2\pi \quad \text{(Gauss-Bonnet公式)}$$

其中α_i是∂G的第i个内角的弧度数.

引理：若$ds^2 = du^2 + G dv^2$，则

$$k_g ds = d\left[\arctan\left(\sqrt{G}\frac{dv}{du}\right)\right] + (\sqrt{G})_u dv \quad \text{(p171习题13)}$$

证明：由于坐标网正交，$F=0$，由Liouville公式

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u}\sin\theta,$$

知 $k_g ds = d\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{1}{G}G_u \sin\theta ds = d\theta + \frac{1}{2G}G_u \sin\theta ds$

又 $\frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E}}\cos\theta = \cos\theta, \quad \frac{dv}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}}\sin\theta, \qquad \text{(P149)}$

所以 $\theta = \arctan\left(\sqrt{G}\frac{dv}{du}\right)$. 代入即得结论.

Gauss-Bonnet公式的证明

在曲面上引进半测地坐标网, 则$ds^2 = du^2 + G dv^2$,

由引理知 $k_g ds = d\left[\arctan\left(\sqrt{G}\dfrac{dv}{du}\right)\right] + (\sqrt{G})_u dv$

两边沿边缘积分得到

$$\oint_{\partial G} k_g ds + \oint_{\partial G} -(\sqrt{G})_u dv = \oint_{\partial G} d\left[\arctan(\sqrt{G}\frac{dv}{du})\right] \qquad (*)$$

对第二个积分应用Green公式得到

$$\oint_{\partial G} -(\sqrt{G})_u dv = \iint_G -(\sqrt{G})_{uu} du dv$$

由p139中Gauss曲率的表达式知$K = -\dfrac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}$

$\Rightarrow -(\sqrt{G})_{uu} = K\sqrt{G}$ 而$d\sigma = \sqrt{g} du dv$, $g = G$

因 此$\oint\limits_{\partial G} -(\sqrt{G})_u \mathrm{d}v = \iint\limits_G -(\sqrt{G})_{uu} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint\limits_G K\mathrm{d}\sigma$

对于(*)式第三个积分，设∂G的$\vec{\alpha}$和u-曲线所成的角为θ

$$\cos\theta = \vec{r}_u \cdot \vec{\alpha} = \vec{r}_u \cdot \frac{\vec{r}_u \mathrm{d}u + \vec{r}_v \mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{E\mathrm{d}u + F\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}$$

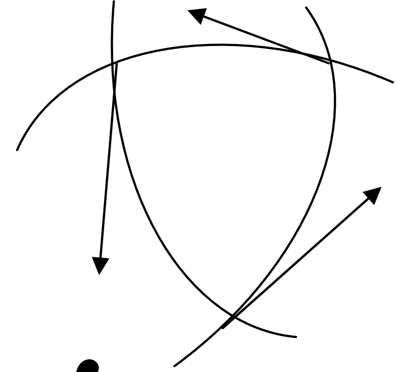
$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2 \Rightarrow 1 - \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2 = G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} = \pm\sqrt{1-\left(\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2} = \pm\sqrt{G}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \pm\sqrt{G}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$$

其中正负号的产生是由沿边界积分时有两种不同的方向，若符合右手法则，则取正号，于是

$$\tan\theta=\sqrt{G}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\quad\Rightarrow\quad\theta=\arctan\left(\sqrt{G}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)$$



(*)式第三个积分变为$\oint\limits_{\partial G}\mathrm{d}\left[\arctan(\sqrt{G}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u})\right]=\oint\limits_{\partial G}\mathrm{d}\theta$

(*)式变为 $\oint\limits_{\partial G}k_g\mathrm{d}s+\iint\limits_{G}K\mathrm{d}\sigma=\oint\limits_{\partial G}\mathrm{d}\theta$

绕∂G一周,θ的增量是2π,即边界曲线的切向量转了2π,

它等于分段曲线所转过的角度之和加上所有外角

即 $\oint\limits_{\partial G}\mathrm{d}\theta+(\pi-\alpha_1)+(\pi-\alpha_2)+\cdots+(\pi-\alpha_k)=2\pi$

故(*)式变成 $\oint\limits_{\partial G}k_g\mathrm{d}s+\iint\limits_{G}K\mathrm{d}\sigma+\sum\limits_{i=1}^{k}(\pi-\alpha_i)=2\pi.$

推论1 如果∂G为一条光滑曲线，则外角为零，有

$$\oint_{\partial G} k_g \mathrm{d}s + \iint_G K \mathrm{d}\sigma = 2\pi$$

推论2 如果∂G为一个测地三角形，即它的三条边由三条测地线组成，则有

$$\iint_G K \mathrm{d}\sigma = 2\pi - (\pi - \alpha_1) - (\pi - \alpha_2) - (\pi - \alpha_3)$$

$$= 2\pi - 3\pi + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = S(\Delta) - \pi,$$

其中 $S(\Delta)$ 表示测地三角形的内角和.

可见 $K > 0 \Rightarrow S(\Delta) > \pi$

$K = 0 \Rightarrow S(\Delta) = \pi$

$K < 0 \Rightarrow S(\Delta) < \pi$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

P171: 16, 17, 18

六、曲面上向量的平行移动

曲面上的测地线相当于平面上的直线，简单对比：

平面直线	曲面上的测地线
①曲率为零;	①测地曲率为零;
②两点间最短距离是直线段的长度;	②两点间(小范围)最短距离是测地线的长度;
③给定一个方向和一点决定一条直线.	③给定一个方向和一点决定一条测地线.

直线上任一点处的切向量都是平行的，该性质是否也可以推广到曲面的测地线上？另一个问题是：平面中的向量平移具有两条基本的性质：保持线性关系和保持内积，曲面上的平移至少要保持这两个性质.

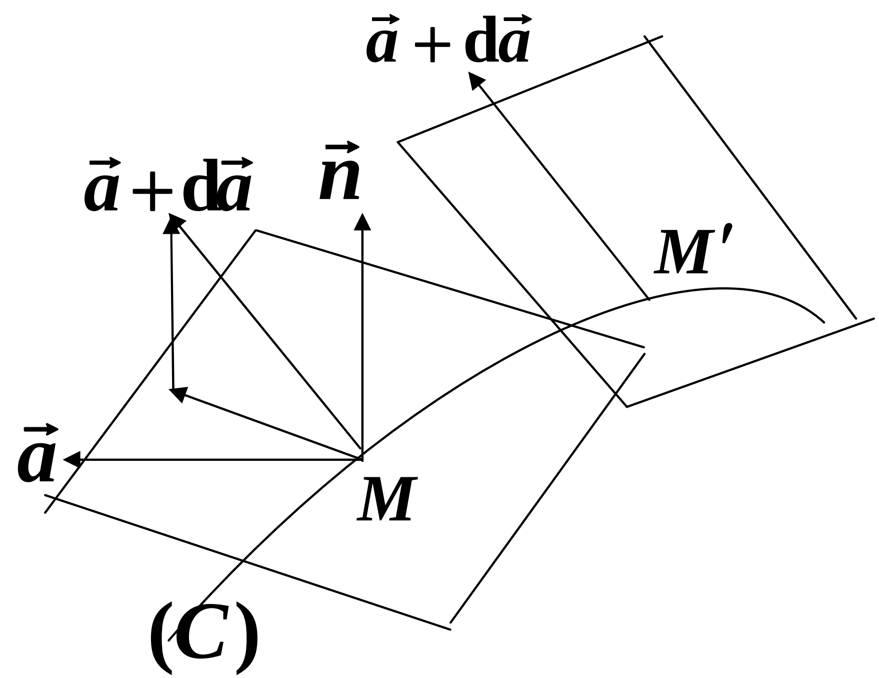
1. 曲面上的向量及平行移动

A. 绝对微分与Levi-Civita(列维-奇维塔)平移

曲面S上的曲线$(C): u^i = u^i(t), (i=1,2)$

沿它上面的点$M(t)$, 给出向量$\vec{a}(t)$在点M处切于曲面.

当把M点在(C)上的邻近点M'处的切向量$\vec{a}(t)+\mathrm{d}\vec{a}(t)$平移至点$M$处时, 这个向量一般来说不在点$M$的切平面上. 现将$\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a}$分解为在切平面上的和沿曲面法向$\vec{n}$方向的两个分量.



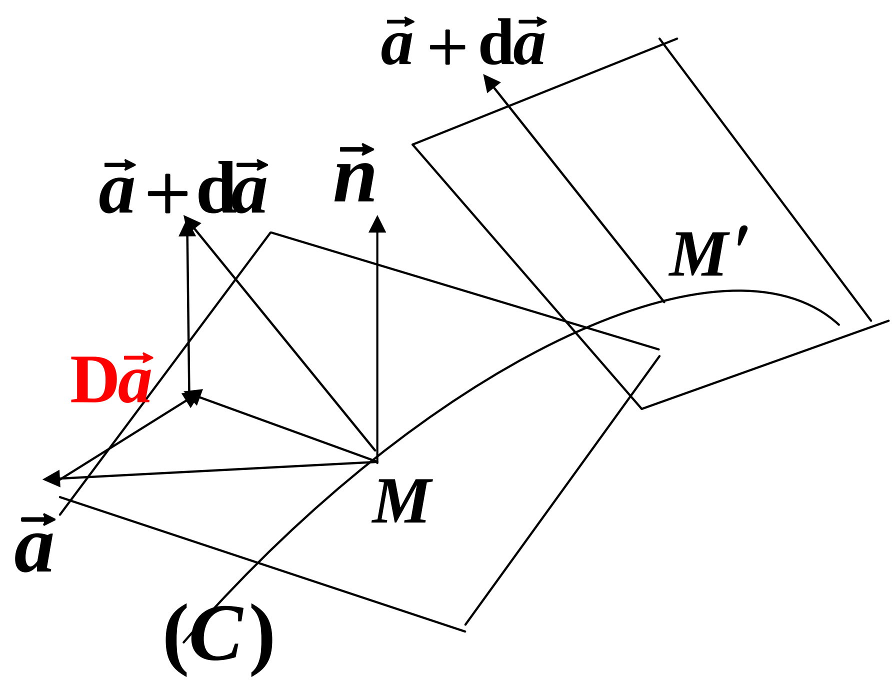
沿法线方向的分量为$[(\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a})\cdot\vec{n}]\vec{n}=(\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{a})\vec{n}$

沿切平面的分量为$(\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a})_t=\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a}-(\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{a})\vec{n}$

定义$\vec{a}(t)$从点M沿曲线(C)移动到点M'的绝对微分为

$$\mathrm{D}\vec{a}\triangleq(\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a})_t-\vec{a}=\mathrm{d}\vec{a}-(\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{a})\vec{n}.$$

当$\mathrm{D}\vec{a}=\vec{0}$时，把向量$\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a}$投影到点$M$的切平面上时得到向量$\vec{a}$. 这时称向量$\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a}$是向量$\vec{a}$从点$M$沿$(C)$的方向到邻近点$M'$经过平行移动而得到的向量. 此时称$\vec{a}$与$\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a}$为沿$(C)$在Levi-Civita意义下的平行向量.



B. 绝对微分与平行移动的分析表达式

设$\vec{a}(t)=a^1(t)\vec{r}_1(t)+a^2(t)\vec{r}_2(t)=\sum_i a^i\vec{r}_i$

则$$\mathrm{d}\vec{a}=\sum_i(\mathrm{d}a^i\vec{r}_i+a^i\mathrm{d}\vec{r}_i)=\sum_i(\mathrm{d}a^i\vec{r}_i+a^i\sum_j\vec{r}_{ij}\mathrm{d}u^j)$$

$$=\sum_i\left[\mathrm{d}a^i\vec{r}_i+a^i\sum_j\left(\sum_k\Gamma_{ij}^k\vec{r}_k+L_{ij}\vec{n}\right)\mathrm{d}u^j\right]$$

$$=\sum_i\left(\mathrm{d}a^i+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^i a^\alpha\mathrm{d}u^\beta\right)\vec{r}_i+(\cdots\cdots)\vec{n}$$

$$\therefore\ \mathrm{D}\vec{a}=\sum_i\left(\mathrm{d}a^i+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^i a^\alpha\mathrm{d}u^\beta\right)\vec{r}_i.$$

当$\mathrm{D}\vec{a}=\vec{0}$时，$\mathrm{d}a^i=-\sum_{\alpha,\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^i a^\alpha\mathrm{d}u^\beta\quad(i=1,2)$

C. 绝对微分的运算性质

设$\vec{a}(t),\vec{b}(t)$是定义在曲面上某曲线(C)上的切于曲面的向量场, $f(t)$是定义在(C)上的数量场, 则有

(1) $\mathrm{D}(\vec{a}+\vec{b})=\mathrm{D}\vec{a}+\mathrm{D}\vec{b}$

(2) $\mathrm{D}(f\vec{a})=(\mathrm{d}f)\vec{a}+f\,\mathrm{D}\vec{a}$

(3) $\mathrm{d}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\mathrm{D}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\mathrm{D}\vec{b}$ (习题P172-19)

由公式 $\mathrm{D}\vec{a}=\sum_i\left(\mathrm{d}a^i+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}a^\alpha\mathrm{d}u^\beta\right)\vec{r}_i$ 可直接验证上述运算, 下面只证(3).

证明: $\mathrm{D}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\mathrm{D}\vec{b}$

$$=\sum_i \vec{r}_i(\mathrm{d}a^i+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}a^\alpha\mathrm{d}u^\beta)\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\sum_i\vec{r}_i(\mathrm{d}b^i+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}b^\alpha\mathrm{d}u^\beta)$$

$$=\sum_i \vec{r}_i(\mathrm{d}a^i+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}a^\alpha\mathrm{d}u^\beta)\cdot\sum_j b^j\vec{r}_j$$

$$+\sum_i a^i\vec{r}_i\cdot\sum_j\vec{r}_j(\mathrm{d}b^j+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^j_{\alpha\beta}b^\alpha\mathrm{d}u^\beta)$$

$$=\sum_{i,j}\mathrm{d}a^i\cdot b^j g_{ij}+\sum_{i,j}a^i\mathrm{d}b^j g_{ij}+\sum_{i,j}\sum_{\alpha,\beta}a^\alpha b^j g_{ij}\Gamma^i_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\beta$$

$$+\sum_{i,j}\sum_{\alpha,\beta}a^i b^\alpha g_{ij}\Gamma^j_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\beta$$

$$=\sum_{i,j}g_{ij}\mathrm{d}a^i\cdot b^j+\sum_{i,j}g_{ij}a^i\cdot\mathrm{d}b^j+\sum_{i,j,\alpha,\beta}(\Gamma^\alpha_{i\beta}g_{\alpha j}+\Gamma^\alpha_{j\beta}g_{\alpha i})a^i b^j\mathrm{d}u^\beta$$

$$(i\leftrightarrow\alpha)\quad(\alpha\leftrightarrow j)$$

$$= \sum_{i,j} g_{ij} \mathrm{d}a^i \cdot b^j + \sum_{i,j} g_{ij} a^i \cdot \mathrm{d}b^j$$

$$+ \sum_{i,j,\beta} ([i\beta, j] + [j\beta, i]) a^i b^j \mathrm{d}u^\beta$$

$$= \sum_{i,j} g_{ij} \mathrm{d}a^i \cdot b^j + \sum_{i,j} g_{ij} a^i \cdot \mathrm{d}b^j + \sum_{i,j,\beta} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\beta} \mathrm{d}u^\beta a^i b^j$$

$$= \sum_{i,j} g_{ij} \mathrm{d}a^i \cdot b^j + \sum_{i,j} g_{ij} a^i \cdot \mathrm{d}b^j + \sum_{i,j} \mathrm{d}g_{ij} a^i b^j$$

$$= \mathrm{d}(\sum g_{ij} a^i b^j) = \mathrm{d}(\sum a^i \vec{r}_i \cdot \sum b^j \vec{r}_j) = \mathrm{d}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

2. 平行移动的性质

对于欧氏平面上的平行移动，它①保持向量的长度和角度不变，②直线上的切向量都是平行的.

下面说明曲面上的平移也具有这两个性质.

定理1. Levi-Civita平移保持两个向量的内积不变，因而保持向量的长度和夹角不变.　　(习题P172-20)

证. 设$\vec{a}(t),\vec{b}(t)$是曲面S上沿曲线(C)的Levi-Civita意义下的两个平行向量场，则$\mathrm{D}\vec{a}\equiv\vec{0},\ \mathrm{D}\vec{b}\equiv\vec{0}.$

$$\mathrm{d}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\mathrm{D}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\mathrm{D}\vec{b}=0\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\text{常数}$$

这说明Levi-Civita平移保持内积不变. 由于向量的长度与夹角都是由内积所定义的，故也保持向量的长度和夹角不变.

定理2. 曲线(C)为**测地线**的充要条件是它的**切向量**在**Levi-Civita**平行移动的意义下沿(C)是**相互平行**的.

证. 设(C)为$u^i=u^i(s), i=1,2, s$为自然参数, 它的切向量沿(C)作平行移动.

以$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}=a^i$代入平移表达式$\mathrm{d}a^i=-\sum\limits_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}a^\alpha \mathrm{d}u^\beta$

并除以ds得到$\frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}}{\mathrm{d}s}=-\sum\limits_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}$

即 $$\frac{\mathrm{d}^2u^i}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}=0.$$

这是测地线方程, 即充分性成立.

反之逆推可知必要性成立.

平行移动的作图法

定理3. 向量沿曲面上一条已知曲线作平行移动的充要条件是沿此曲线所作的切平面的包络所得可展曲面展开在平面上时, 所得的向量在平面上为平行移动.

由这个定理可得沿曲线平行移动的向量的作图法, 这个作图法在理论上成立.

*七、极小曲面

对于过空间光滑闭曲线(C)的曲面S来说，如果(C)所包围的曲面面积最小，则曲面S的平均曲率恒等于零．即，极小曲面的平均曲率为零．