

第四章 经典单方程计量经济学 模型：放宽基本假定的模型

线性回归模型的基本假定

假设1，解释变量是非随机的或固定的，且各X之间互不相关（无多重共线性）。

假设2，随机误差项具有零均值、同方差及不序列相关性

$$E(\mu_i) = 0$$

$$Var(\mu_i) = E(\mu_i^2) = \sigma^2 \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$Cov(\mu_i, \mu_j) = E(\mu_i \mu_j) = 0$$

假设3，解释变量与随机项不相关

$$Cov(X_{ji}, \mu_i) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, k$$

假设4，随机项满足正态分布

$$\mu_i \sim N(0, \sigma^2)$$

假设5，样本容量趋于无穷时，各解释变量的方差趋于有界常数，即 $n \rightarrow \infty$ 时，

$$\frac{1}{n} \sum x_{ji}^2 = \frac{1}{n} \sum (X_{ji} - \bar{X}_j)^2 \rightarrow Q_j$$

假设6，回归模型的设定是正确的。

基本假定违背： 不满足基本假定的情况。

主要包括：

- (1) 随机误差项序列存在**异方差性**；
- (2) 随机误差项序列存在**序列相关性**；
- (3) 解释变量之间存在**多重共线性**；
- (4) 解释变量是随机变量且与随机误差项相关（**随机解释变量**）；

计量经济检验： 对模型基本假定的检验

§ 4.1 异方差性

一、异方差的概念

二、异方差的类型

三、实际经济问题中的异方差性

四、异方差性的后果

五、异方差性的检验

六、异方差的修正

七、案例

一、异方差的概念

对于模型

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \mu_i$$

如果出现

$$Var(\mu_i) = \sigma_i^2$$

即对于不同的样本点，随机误差项的方差不再是常数，而互不相同，则认为出现了**异方差性 (Heteroskedasticity)**。

表 2.1.1 某社区家庭每月收入与消费支出统计表

	每月家庭可支配收入X (元)									
	800	1100	1400	1700	2000	2300	2600	2900	3200	3500
每 月 家 庭 消 费 支 出 Y (元)	561	638	869	1023	1254	1408	1650	1969	2090	2299
	594	748	913	1100	1309	1452	1738	1991	2134	2321
	627	814	924	1144	1364	1551	1749	2046	2178	2530
	638	847	979	1155	1397	1595	1804	2068	2266	2629
		935	1012	1210	1408	1650	1848	2101	2354	2860
		968	1045	1243	1474	1672	1881	2189	2486	2871
			1078	1254	1496	1683	1925	2233	2552	
			1122	1298	1496	1716	1969	2244	2585	
			1155	1331	1562	1749	2013	2299	2640	
			1188	1364	1573	1771	2035	2310		
			1210	1408	1606	1804	2101			
				1430	1650	1870	2112			
				1485	1716	1947	2200			
						2002				
共计	2420	4950	11495	16445	19305	23870	25025	21450	21285	15510

二、异方差的类型

同方差性假定： $\sigma_i^2 = \text{常数} \neq f(X_i)$

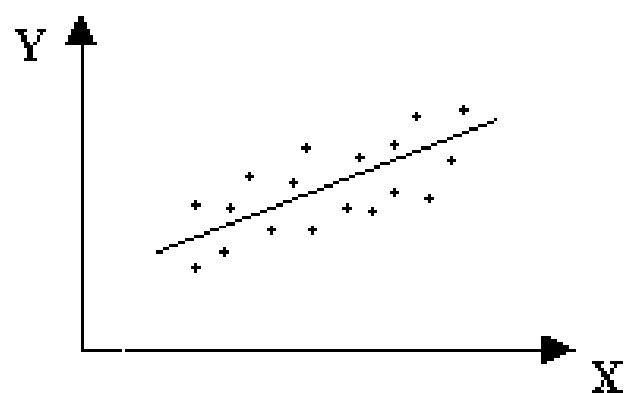
异方差时： $\sigma_i^2 = f(X_i)$

异方差一般可归结为三种类型：

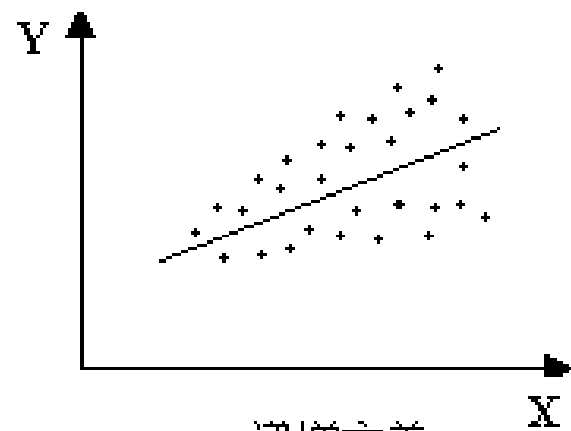
(1) 单调递增型： σ_i^2 随X的增大而增大

(2) 单调递减型： σ_i^2 随X的增大而减小

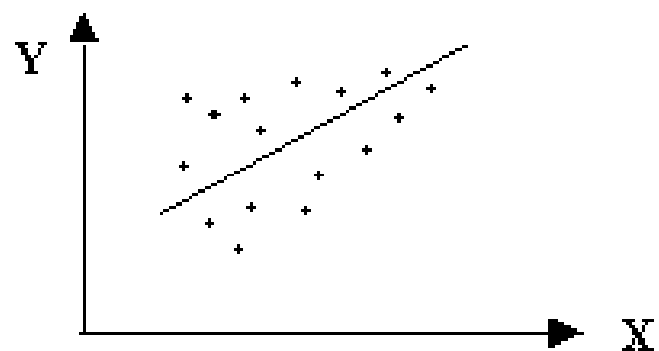
(3) 复杂型： σ_i^2 与X的变化呈复杂形式



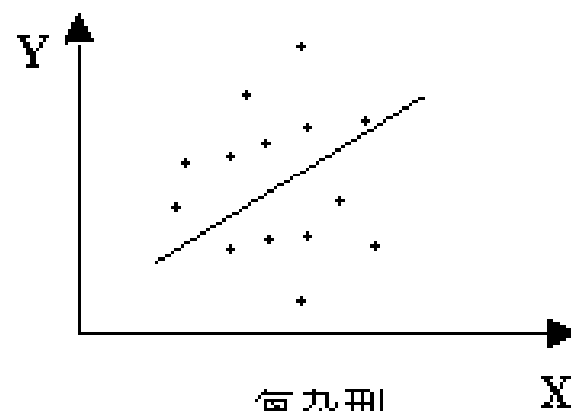
同方差



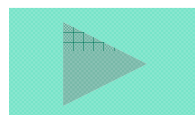
递增方差



递减方差



复杂型



四、异方差性的后果

计量经济学模型一旦出现异方差性，如果仍采用OLS估计模型参数，会产生下列不良后果：

1、参数估计量非有效

OLS估计量仍然具有无偏性，但不具有有效性

因为在有效性证明中利用了

$$E(\mu\mu')=\sigma^2\mathbf{I}$$

2、变量的显著性检验失去意义

变量的显著性检验中，构造了t统计量

$$t = \hat{\beta}_1 / S_{\hat{\beta}_1}$$

它是建立在 σ^2 不变而正确估计了参数方差 $S_{\hat{\beta}_1}$ 的基础之上的。

如果出现了异方差性，估计的 $S_{\hat{\beta}_1}$ 出现偏误（偏大或偏小），t检验失去意义。

其他检验也是如此。

- 考虑一元线性回归

$$\hat{b} = \sum k_i y_i \quad \text{其中: } k_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

在同方差假设下:

$$D(\hat{b}) = D(\sum k_i y_i) = \sum k_i^2 D(y_i) = \sigma^2 \sum k_i^2 = \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

若存在异方差, 令 $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$, 则

$$D(\hat{b}^*) = D(\sum k_i y_i) = \sum k_i^2 D(y_i) = \sum k_i^2 \sigma_t^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sigma_t^2}{\left(\sum (x_i - \bar{x})^2\right)^2}$$

3、模型的预测失效

当模型出现异方差性时，
参数OLS估计值的变异程度增大，
从而造成对 Y 的预测误差变大，降低预测精度，
预测功能失效。

五、异方差性的检验

- 检验思路：

由于**异方差性**就是相对于不同的解释变量观测值，随机误差项具有不同的方差。那么：

检验异方差性，也就是检验随机误差项的方差与解释变量观测值之间的相关性及其相关的“形式”。

问题在于用什么来表示随机误差项的方差
一般的处理方法：

首先采用 OLS 法估计模型，以求得随机误差项的估计量（注意，该估计量是不严格的），我们称之为“近似估计量”，用 \tilde{e}_i 表示。于是有

$$\tilde{e}_i = y_i - (\hat{y}_i)_{ols}$$

$$Var(\mu_i) = E(\mu_i^2) \approx \tilde{e}_i^2$$

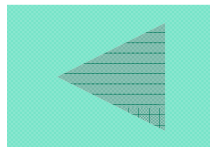
即用 \tilde{e}_i^2 来表示随机误差项的方差。

几种异方差的检验方法:

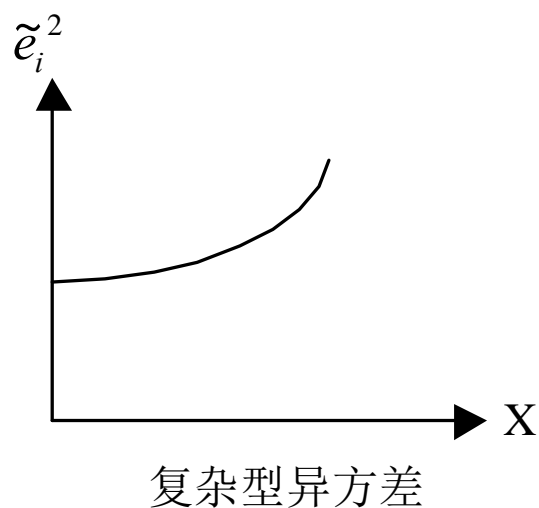
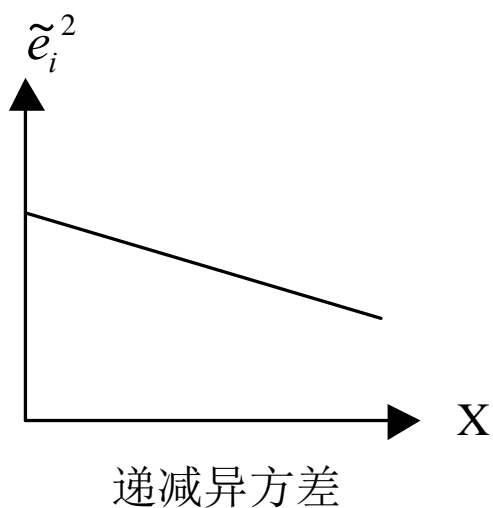
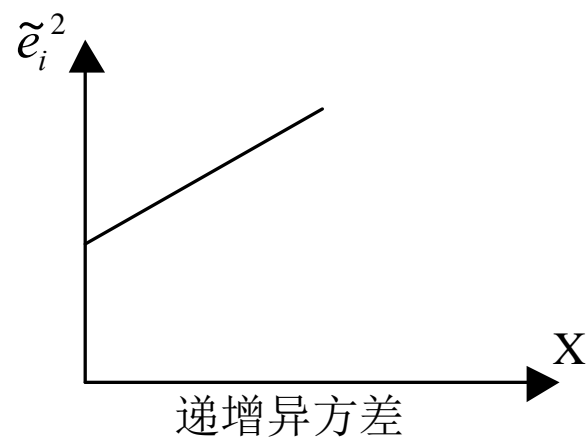
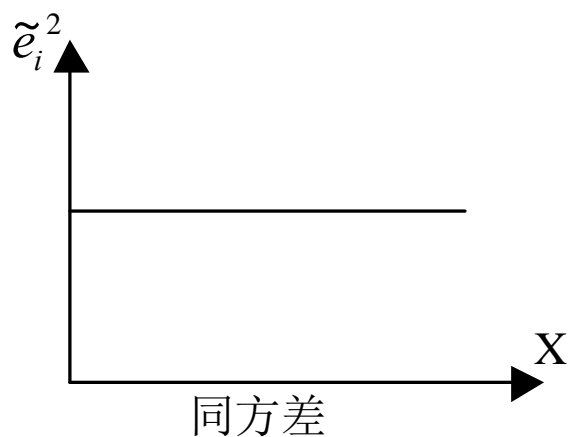
1、图示法

(1) 用X-Y的散点图进行判断

看是否存在明显的散点扩大、缩小或复杂型趋势（即不在一个固定的带型域中）



(2) $X-\tilde{e}_i^2$ 的散点图进行判断
看是否形成一斜率为零的直线



2、帕克(Park)检验与戈里瑟(Gleiser)检验

基本思想:

尝试建立方程:

$$\tilde{e}_i^2 = f(X_{ji}) + \varepsilon_i \quad \text{或} \quad |\tilde{e}_i| = f(X_{ji}) + \varepsilon_i$$

选择关于变量X的不同的函数形式, 对方程进行估计并进行显著性检验, 如果存在某一种函数形式, 使得方程显著成立, 则说明原模型存在异方差性。

如: 帕克检验常用的函数形式:

$$f(X_{ji}) = \sigma^2 X_{ji}^\alpha e^{\varepsilon_i} \quad \text{或} \quad \ln(\tilde{e}_i^2) = \ln \sigma^2 + \alpha \ln X_{ji} + \varepsilon_i$$

若 α 在统计上是显著的, 表明存在异方差性。

3、戈德菲尔德-匡特 (Goldfeld-Quandt) 检验

G-Q检验以F检验为基础，适用于样本容量较大、异方差递增或递减的情况。

G-Q检验的思想：

先将样本一分为二，对子样①和子样②分别作回归，然后利用两个子样的残差平方和之比构造统计量进行异方差检验。

由于该统计量服从F分布，因此假如存在递增的异方差，则F远大于1；反之就会等于1（同方差）、或小于1（递减方差）。

G-Q检验的步骤:

- ①将n对样本观察值(X_i, Y_i)按观察值 X_i 的大小排队
- ②将序列中间的 $c=n/4$ 个观察值除去, 并将剩下的观察值划分为较小与较大的容量相同的两个子样本, 每个子样本容量均为 $(n-c)/2$
- ③对每个子样分别进行OLS回归, 并计算各自的残差平方和

分别用 $\sum \tilde{e}_{1i}^2$ 与 $\sum \tilde{e}_{2i}^2$ 表示较小与较大的残差平方和(自由度均为 $\frac{n-c}{2}-k-1$);

④在同方差性假定下，构造如下满足F分布的统计量

$$F = \frac{\sum \tilde{e}_{2i}^2 / (\frac{n-c}{2} - k - 1)}{\sum \tilde{e}_{1i}^2 / (\frac{n-c}{2} - k - 1)} \sim F(\frac{n-c}{2} - k - 1, \frac{n-c}{2} - k - 1)$$

⑤给定显著性水平 α ，确定临界值 $F_{\alpha}(v_1, v_2)$ ，
若 $F > F_{\alpha}(v_1, v_2)$ ，则拒绝同方差性假设，表明
存在异方差。

当然，还可根据两个残差平方和对应的子样的顺序判断是递增型异方差还是递减异型方差。

3、怀特（White）检验

怀特检验不需要排序，且适合任何形式的异方差

怀特检验的基本思想与步骤（以二元为例）：

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \mu_i$$

先对该模型作OLS回归，得到 \tilde{e}_i^2

然后做如下辅助回归

$$\tilde{e}_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1i} + \alpha_2 X_{2i} + \alpha_3 X_{1i}^2 + \alpha_4 X_{2i}^2 + \alpha_5 X_{1i} X_{2i} + \varepsilon_i \quad (*)$$

可以证明，在同方差假设下：

$$nR^2 \stackrel{\cdot}{\sim} \chi^2(h)$$

R^2 为(*)的可决系数， h 为(*)式解释变量的个数，

$\stackrel{\cdot}{\sim}$ 表示渐近服从某分布。

注意：

辅助回归仍是检验 \tilde{e}_i^2 与解释变量可能的组合的显著性，因此，辅助回归方程中还可引入解释变量的更高次方。

如果存在异方差性，往往显示出有较高的可决系数以及某一参数的t检验值较大。

当然，在多元回归中，由于辅助回归方程中可能有太多解释变量，从而使自由度减少，有时可去掉交叉项。

六、异方差的修正

模型检验出存在异方差性，可用**加权最小二乘法**（**Weighted Least Squares, WLS**）进行估计。

加权最小二乘法的基本思想： 在采用OLS方法时

对较小的残差平方 e_i^2 赋予较大的权数，

对较大的残差平方 e_i^2 赋予较小的权数。

$$\sum W_i e_i^2 = \sum W_i [Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \cdots + \hat{\beta}_k X_k)]^2$$

加权最小二乘法是对原模型加权，使之变成一个新的不存在异方差性的模型，然后采用OLS估计其参数。

例如，如果对一多元模型，经检验知：

$$Var(\mu_i) = E(\mu_i)^2 = \sigma_i^2 = f(X_{ji})\sigma^2$$

可以用 $\sqrt{f(X_j)}$ 去除该模型，得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{f(X_{ji})}} Y_i &= \beta_0 \frac{1}{\sqrt{f(X_{ji})}} + \beta_1 \frac{1}{\sqrt{f(X_{ji})}} X_{1i} + \beta_2 \frac{1}{\sqrt{f(X_{ji})}} X_{2i} + \dots \\ &\quad + \beta_k \frac{1}{\sqrt{f(X_{ji})}} X_{ki} + \frac{1}{\sqrt{f(X_{ji})}} \mu_i \end{aligned}$$

新模型中，存在

$$Var\left(\frac{1}{\sqrt{f(X_{ji})}} \mu_i\right) = E\left(\frac{1}{\sqrt{f(X_{ji})}} \mu_i\right)^2 = \frac{1}{f(X_{ji})} E(\mu_i)^2 = \sigma^2$$

即满足同方差性，可用OLS法估计。

一般情况下:

对于模型

$$Y = X\beta + \mu$$

存在

$$E(\mu) = 0$$

$$Cov(\mu) = E(\mu \mu') = \sigma^2 \mathbf{W}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n \end{bmatrix}$$

即存在异方差性。

W是一对称正定矩阵，存在一可逆矩阵**D**使得

$$\mathbf{W} = \mathbf{D}\mathbf{D}'$$

用 \mathbf{D}^{-1} 左乘 $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\mu}$

两边，得到一个新的模型：

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Y} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\mu}$$

$$\mathbf{Y}_* = \mathbf{X}_*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\mu}_*$$

该模型具有同方差性。因为

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\mu}_* \boldsymbol{\mu}_*') &= E(\mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}' \mathbf{D}^{-1}') = \mathbf{D}^{-1} E(\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}') \mathbf{D}^{-1}' \\ &= \mathbf{D}^{-1} \sigma^2 \boldsymbol{\Omega} \mathbf{D}^{-1}' = \mathbf{D}^{-1} \sigma^2 \mathbf{D}\mathbf{D}'\mathbf{D}'^{-1} = \sigma^2 \mathbf{I} \end{aligned}$$

用OLS法估计新模型，记参数估计量为 $\hat{\beta}_*$ ，则

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_* &= (\mathbf{X}'_* \mathbf{X}_*)^{-1} \mathbf{X}'_* \mathbf{Y}_* \\ &= (\mathbf{X}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{Y} \\ &= (\mathbf{X}' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Y}\end{aligned}$$

这就是原模型 $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\mu}$

的加权最小二乘估计量，是无偏、有效的估计量。

这里权矩阵为 \mathbf{D}^{-1} ，它来自于原模型残差项 $\boldsymbol{\mu}$ 的方差-协方差矩阵 $\sigma^2 \mathbf{W}$ 。

如何得到 $\sigma^2 \mathbf{W}$ ？

从前面的推导过程看，它来自于原模型残差项 μ 的方差-协方差矩阵。因此

仍对原模型进行OLS估计，得到随机误差项的近似估计量 \tilde{e}_i ，以此构成权矩阵的估计量，即

$$\sigma^2 \hat{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{e}_n^2 \end{bmatrix}$$

这时可直接以 $\mathbf{D}^{-1} = \text{diag}\{1/|\tilde{e}_1|, 1/|\tilde{e}_2|, \dots, 1/|\tilde{e}_n|\}$ 作为权矩阵。

注意：

在实际操作中人们通常采用如下的经验方法：

不对原模型进行异方差性检验，而是直接选择加权最小二乘法，尤其是采用截面数据作样本时。

如果确实存在异方差，则被有效地消除了；

如果不存在异方差性，则加权最小二乘法等价于普通最小二乘法

七、案例--中国农村居民人均消费函数

例4.1.4 中国农村居民人均消费支出主要由人均纯收入来决定。

农村人均纯收入包括(1)从事农业经营的收入,(2)包括从事其他产业的经营性收入(3)工资性收入、(4)财产收入(4)转移支付收入。

考察从事农业经营的收入(X_1)和其他收入(X_2)对中国农村居民消费支出(Y)增长的影响:

$$\ln Y = \beta_0 + \beta_1 \ln X_1 + \beta_2 \ln X_2 + \mu$$

表 4.1.1 中国 2001 年各地区农村居民家庭人均纯收入与消费支出相关数据（单位：元）

地区	从事农业经营 其他收入			地区	从事农业经营 其他收入		
	人均消费 支出 Y	X_1	X_2		人均消费 支出 Y	X_1	X_2
北 京	3552.1	579.1	4446.4	湖 北	2703.36	1242.9	2526.9
天 津	2050.9	1314.6	2633.1	湖 南	1550.62	1068.8	875.6
河 北	1429.8	928.8	1674.8	广 东	1357.43	1386.7	839.8
山 西	1221.6	609.8	1346.2	广 西	1475.16	883.2	1088.0
内蒙古	1554.6	1492.8	480.5	海 南	1497.52	919.3	1067.7
辽 宁	1786.3	1254.3	1303.6	重 庆	1098.39	764.0	647.8
吉 林	1661.7	1634.6	547.6	四 川	1336.25	889.4	644.3
黑龙江	1604.5	1684.1	596.2	贵 州	1123.71	589.6	814.4
上 海	4753.2	652.5	5218.4	云 南	1331.03	614.8	876.0
江 苏	2374.7	1177.6	2607.2	西 藏	1127.37	621.6	887.0
浙 江	3479.2	985.8	3596.6	陕 西	1330.45	803.8	753.5
安 徽	1412.4	1013.1	1006.9	甘 肃	1388.79	859.6	963.4
福 建	2503.1	1053.0	2327.7	青 海	1350.23	1300.1	410.3
江 西	1720.0	1027.8	1203.8	宁 夏	2703.36	1242.9	2526.9
山 东	1905.0	1293.0	1511.6	新 疆	1550.62	1068.8	875.6
河 南	1375.6	1083.8	1014.1				

普通最小二乘法的估计结果：

$$\ln \hat{Y} = 1.655 + 0.3166 \ln X_1 + 0.5084 \ln X_2$$

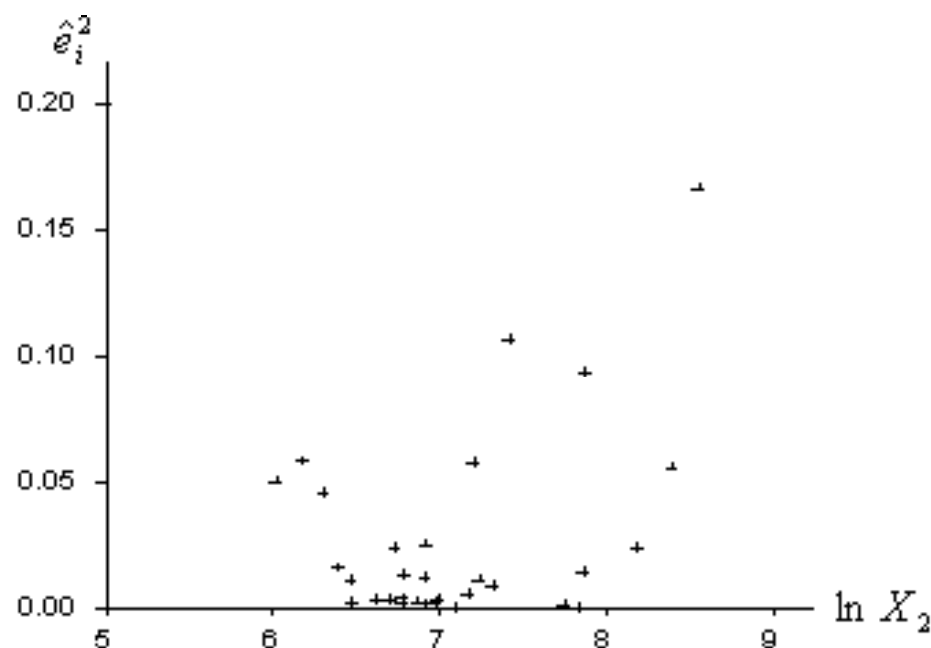
(1.87) (3.02) (10.04)

$R^2=0.7831$ $\bar{R}^2=0.7676$ DW=1.89 F=50.53 RSS=0.8232



异方差检验

OLS回归的
残差平方项
 \hat{e}_i^2 与 $\ln X_2$
的散点图



进一步的统计检验

(1)G-Q检验

将原始数据按 X_2 排成升序，去掉中间的7个数据，得两个容量为12的子样本。

对两个子样本分别作OLS回归，求各自的残差平方和 RSS_1 和 RSS_2 ：

$$\begin{array}{l} \text{子样本1:} \quad \ln \hat{Y} = 4.061 + 0.343 \ln X_1 + 0.119 \ln X_2 \\ \quad \quad \quad (3.18) \quad (4.13) \quad \quad (0.94) \end{array}$$

$$R^2=0.7068, \quad RSS_1=0.0648$$

$$\begin{array}{l} \text{子样本2:} \quad \ln \hat{Y} = 0.791 + 0.138 \ln X_1 + 0.776 \ln X_2 \\ \quad \quad \quad (0.43) \quad (0.73) \quad \quad (6.53) \end{array}$$

$$R^2=0.8339, \quad RSS_2=0.2729$$

计算F统计量:

$$F = \text{RSS}_2 / \text{RSS}_1 = 0.2792 / 0.0648 = 4.31$$

查表

给定 $\alpha=5\%$ ，查得临界值 $F_{0.05}(9,9)=2.97$

判断

$$F > F_{0.05}(9,9)$$

否定两组子样方差相同的假设，从而该总体随机项存在递增异方差性。

(2) 怀特检验

作辅助回归：

$$\begin{aligned}\hat{e}^2 = & -0.17 + 0.102 \ln X_1 + 0.015 (\ln X_1)^2 - 0.055 \ln X_2 + 0.026 (\ln X_2)^2 \\ & (-0.04) \quad (0.10) \quad (0.21) \quad (-0.12) \quad (1.47) \\ & - 0.043 \ln X_1 \ln X_2 \\ & (-1.11)\end{aligned}$$

$$R^2 = 0.4638$$

似乎没有哪个参数的t检验是显著的。但

$$n R^2 = 31 * 0.4638 = 14.38$$

$\alpha=5\%$ 下，临界值 $\chi^2_{0.05}(5)=11.07$ ，拒绝同方差性

去掉交叉项后的辅助回归结果

$$\hat{e}^2 = 3.842 - 0.570 \ln X_1 + 0.042 (\ln X_1)^2 - 0.539 \ln X_2 + 0.039 (\ln X_2)^2$$

(1.36) (-0.64) (0.64) (-2.76) (2.90)

$$R^2 = 0.4374$$

X_2 项与 X_2 的平方项的参数的t检验是显著的，且

$$n R^2 = 31 \times 0.4374 = 13.56$$

$\alpha=5\%$ 下，临界值 $\chi^2_{0.05}(4)=9.49$

拒绝同方差的原假设

原模型的加权最小二乘回归

对原模型进行OLS估计，得到随机误差项的近似估计量 \check{e}_i ，以此构成权矩阵 $\sigma^2 \mathbf{W}$ 的估计量；
再以 $1/|\check{e}_i|$ 为权重进行WLS估计，得

$$\ln \hat{Y} = 1.497 + 0.319 \ln X_1 + 0.527 \ln X_2$$

(5.12)

(5.94)

(28.94)

$$R^2=0.9999 \quad \bar{R}^2=0.9999 \quad DW=2.49 \quad F=924432 \quad RSS=0.0706$$

各项统计检验指标全面改善



例1： 书153页 1

例2 已知消费模型： $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{2t} + u_t$

其中： y_t ——消费支出

x_{1t} ——个人可支配收入

x_{2t} ——消费者的流动资产

$$E(u_t) = 0$$

$$V_{ar}(u_t) = \sigma^2 x_{1t}^2 \text{ (其中 } \sigma^2 \text{ 为常数)}$$

要求：

- (1) 进行适当变换消除异方差，并证明之；
- (2) 写出消除异方差后，模型的参数估计量的表达式。

例3 用简明的理由说明以下命题是正确的、错误的或者不确定的。

- a. 当异方差性出现时，OLS 估计量是有偏误的和非有效的。
- b. 如果出现异方差性，则惯用的 t 检验和 F 检验无效。
- c. 在异方差性的情况下，常用的 OLS 法必定高估了估计量的标准误。
- d. 如果 OLS 回归的残差表现出系统模式，这就说明数据中存在异方差性。
- e. 没有任何一般性的异方差性检验能独立于误差项与某一变量相关的假定。

作业 给出以下数据：

从前 30 个观测值算出的 $RSS_1 = 55$ ，自由度 $df = 25$ 。

从后 30 个观测值算出的 $RSS_2 = 140$ ，自由度 $df = 25$ 。

完成显著性水平为 5% 的戈德菲尔德-匡特异方差性检验。

§ 4.2 序列相关性

Serial Correlation

§ 4.2 序列相关性

- 一、序列相关性概念
- 二、实际经济问题中的序列相关性
- 三、序列相关性的后果
- 四、序列相关性的检验
- 五、具有序列相关性模型的估计
- 六、案例

一、序列相关性概念

对于模型

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + \mu_i \quad i=1, 2, \dots, n$$

随机项互不相关的基本假设表现为

$$\text{Cov}(\mu_i, \mu_j) = 0 \quad i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$$

如果对于不同的样本点，随机误差项之间不再是不相关的，而是存在某种相关性，则认为出现了序列相关性。

在其他假设仍成立的条件下，**序列相关**即意味着

$$E(\mu_i \mu_j) \neq 0$$

或

$$\text{Cov}(\boldsymbol{\mu}) = E(\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}') = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \cdots & E(\mu_1 \mu_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\mu_n \mu_1) & \cdots & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma^2 & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$= \sigma^2 \boldsymbol{\Omega} \neq \sigma^2 \mathbf{I}$$

如果仅存在

$$E(\mu_i \mu_{i-1}) \neq 0 \quad i=1, 2, \dots, n$$

称为一阶列相关，或自相关（autocorrelation）

自相关往往可写成如下形式：

$$\mu_i = \rho \mu_{i-1} + \varepsilon_i \quad -1 < \rho < 1$$

其中： ρ 被称为自协方差系数（coefficient of autocovariance）或一阶自相关系数（first-order coefficient of autocorrelation）

ε_i 是满足以下标准的OLS假定的随机干扰项：

$$E(\varepsilon_i) = 0, \quad \text{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2, \quad \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-s}) = 0 \quad s \neq 0$$

由于序列相关性经常出现在以时间序列为样本的模型中，因此，本节将用下标 t 代表 i 。

二、实际经济问题中的序列相关性

1、经济变量固有的惯性

大多数经济时间数据都有一个明显的特点：**惯性**，表现在时间序列不同时间的前后关联上。

2、模型设定的偏误

所谓模型**设定偏误**（**Specification error**）是指所设定的模型“不正确”。主要表现在模型中丢掉了重要的解释变量或模型函数形式有偏误。

例如，本来应该估计的模型为

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \mu_t$$

但在模型设定中做了下述回归：

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_1 X_{2t} + v_t$$

因此， $v_t = \beta_3 X_{3t} + \mu_t$ ，如果 X_3 确实影响 Y ，则出现序列相关。

又如：如果真实的边际成本回归模型应为：

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_t^2 + \mu_t$$

其中：Y=边际成本，X=产出，

但建模时设立了如下模型：

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + v_t$$

因此，由于 $v_t = \beta_2 X_t^2 + \mu_t$ ，包含了产出的平方对随机项的系统性影响，随机项也呈现序列相关性。

3、数据的“编造”

在实际经济问题中，有些数据是通过已知数据生成的。

因此，新生成的数据与原数据间就有了内在的联系，表现出序列相关性。

例如：季度数据来自月度数据的简单平均，这种平均的计算减弱了每月数据的波动性，从而使随机干扰项出现序列相关。

二、序列相关性的后果

计量经济学模型一旦出现序列相关性，如果仍采用OLS法估计模型参数，会产生下列不良后果：

1、参数估计量非有效

因为，在有效性证明中利用了

$$E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \sigma^2 \mathbf{I}$$

即同方差性和互相独立性条件。

2、变量的显著性检验失去意义

在变量的显著性检验中，统计量是建立在参数方差正确估计基础之上的，这只有当随机误差项具有同方差性和互相独立性时才能成立。

如果存在序列相关，估计的参数方差 $s_{\hat{\beta}_i}$ 出现偏误（偏大或偏小），t检验就失去意义。

其他检验也是如此。

3、模型的预测失效

区间预测与参数估计量的方差有关，在方差有偏误的情况下，使得预测估计不准确，预测精度降低。

所以，当模型出现序列相关性时，它的预测功能失效。

三、序列相关性的检验

三、序列相关性的检验

基本思路：

序列相关性检验方法有多种，但基本思路相同：

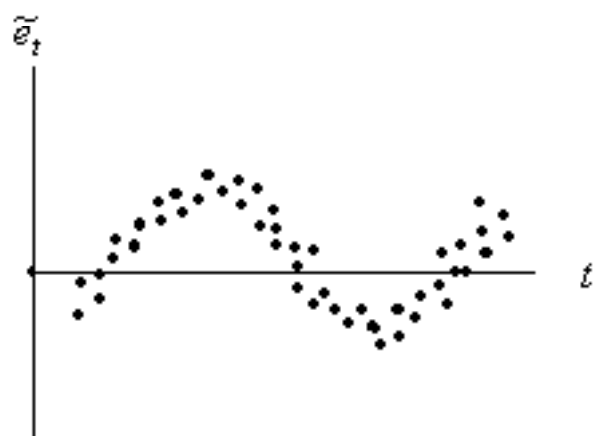
首先，采用 OLS 法估计模型，以求得随机误差项的“近似估计量”，用 \tilde{e}_i 表示：

$$\tilde{e}_i = Y_i - (\hat{Y}_i)_{ols}$$

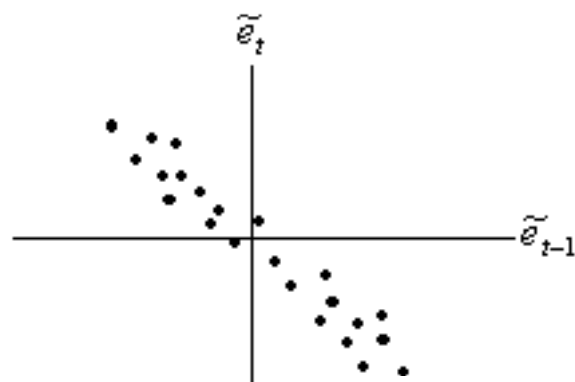
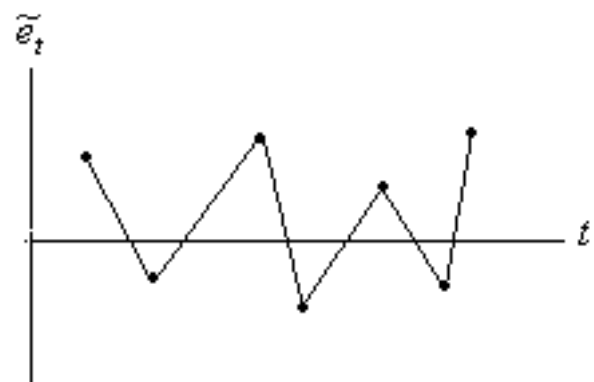
然后，通过分析这些“近似估计量”之间的相关性，以判断随机误差项是否具有序列相关性。

1、图示法

用 \tilde{e}_i 的变化图形来判断 μ_i 的序列相关性:



正序列相关 (正自相关)



负序列相关 (负自相关)

2、回归检验法

以 \tilde{e}_t 为被解释变量, 以各种可能的相关量, 诸如以 \tilde{e}_{t-1} 、 \tilde{e}_{t-2} 、 \tilde{e}_t^2 等为解释变量, 建立各种方程:

$$\tilde{e}_t = \rho \tilde{e}_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\tilde{e}_t = \rho_1 \tilde{e}_{t-1} + \rho_2 \tilde{e}_{t-2} + \varepsilon_t$$

.....

如果存在某一种函数形式, 使得方程显著成立, 则说明原模型存在序列相关性。

回归检验法的优点是: (1) 能够确定序列相关的形式, (2) 适用于任何类型序列相关性问题的检验。

3、杜宾-瓦森 (Durbin-Watson) 检验法

D-W 检验是杜宾 (J.Durbin) 和瓦森 (G. S. Watson) 于1951年提出的一种检验序列自相关的方法, 该方法的假定条件是:

- (1) 解释变量X非随机;
- (2) 随机误差项 μ_i 为一阶自回归形式:

$$\mu_i = \rho\mu_{i-1} + \varepsilon_i$$

- (3) 回归模型中不应含有滞后应变量作为解释变量, 即不应出现下列形式:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \dots + \beta_k X_{ki} + \gamma Y_{i-1} + \mu_i$$

- (4) 回归含有截距项

D.W. 统计量:

杜宾和瓦森针对原假设: $H_0: \rho=0$, 即不存在一阶自回归, 构造如下统计量:

$$D.W. = \frac{\sum_{t=2}^n (\tilde{e}_t - \tilde{e}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \tilde{e}_t^2}$$

该统计量的分布与出现在给定样本中的X值有复杂的关系, 因此其精确的分布很难得到。

但是, 他们成功地导出了临界值的下限 d_L 和上限 d_U , 且这些上下限只与样本的容量 n 和解释变量的个数 k 有关, 而与解释变量X的取值无关。

D.W检验步骤:

- (1) 计算DW值
- (2) 给定 α , 由 n 和 k 的大小查DW分布表, 得临界值 d_L 和 d_U
- (3) 比较、判断

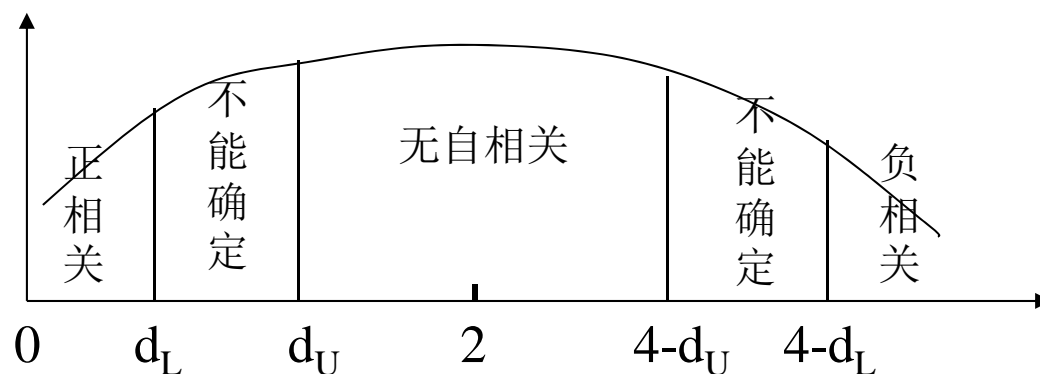
若 $0 < D.W. < d_L$ 存在正自相关

$d_L < D.W. < d_U$ 不能确定

$d_U < D.W. < 4 - d_U$ 无自相关

$4 - d_U < D.W. < 4 - d_L$ 不能确定

$4 - d_L < D.W. < 4$ 存在负自相关



特殊情况:

展开D.W.统计量:

$$D.W. = \frac{\sum_{t=2}^n (\tilde{e}_t - \tilde{e}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \tilde{e}_t^2}$$
$$D.W. = \frac{\sum_{t=2}^n \tilde{e}_t^2 + \sum_{t=2}^n \tilde{e}_{t-1}^2 - 2 \sum_{t=2}^n \tilde{e}_t \tilde{e}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n \tilde{e}_t^2} \quad (*)$$

当 n 较大时, $\sum_{t=2}^n \tilde{e}_t^2, \sum_{t=2}^n \tilde{e}_{t-1}^2, \sum_{t=1}^n \tilde{e}_t^2$ 大致相等, 则 $(*)$ 可以简化为:

$$D.W. \approx 2 \left(1 - \frac{\sum_{t=2}^n \tilde{e}_t \tilde{e}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n \tilde{e}_t^2} \right) \approx 2(1 - \rho)$$

$$D.W. \approx 2(1 - \frac{\sum_{t=2}^n \tilde{e}_t \tilde{e}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n \tilde{e}_t^2}) \approx 2(1 - \rho)$$

这里，

$$\frac{\sum_{t=2}^n \tilde{e}_t \tilde{e}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n \tilde{e}_t^2} \approx \frac{\sum_{t=2}^n \tilde{e}_t \tilde{e}_{t-1}}{\sum_{t=2}^n \tilde{e}_t^2} = \rho$$

为一阶自回归模型

$$\mu_i = \rho \mu_{i-1} + \varepsilon_i$$

的参数估计。

如果存在完全一阶正相关，即 $\rho=1$ ，则 $D.W. \approx 0$

完全一阶负相关，即 $\rho=-1$ ，则 $D.W. \approx 4$

完全不相关，即 $\rho=0$ ，则 $D.W. \approx 2$

4、拉格朗日乘数（Lagrange multiplier）检验

拉格朗日乘数检验克服了DW检验的缺陷，适合于高阶序列相关以及模型中存在滞后被解释变量的情形。

它是由布劳殊（Breusch）与戈弗雷（Godfrey）于1978年提出的，也被称为**GB检验**。

对于模型

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \mu_i$$

如果怀疑随机扰动项存在**p阶序列相关**：

$$\mu_t = \rho_1 \mu_{t-1} + \rho_2 \mu_{t-2} \cdots + \rho_p \mu_{t-p} + \varepsilon_t$$

作辅助回归：

$$\tilde{e}_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \tilde{e}_1 \mu_{t-1} + \cdots + \rho_p \tilde{e}_{t-p} + \varepsilon_t$$

计算：

$$LM = n R^2 \sim \chi^2(p)$$

其中， n 、 R^2 为辅助回归的样本容量、可决系数：

给定 α ，查临界值 $\chi_\alpha^2(p)$ ，与 LM 值比较，做出判断，
实际检验中，可从1阶、2阶、...逐次向更高阶检验。

四、序列相关的补救

如果模型被检验证明存在序列相关性，则需要发展新的方法估计模型。

最常用的方法是**广义最小二乘法**（**GLS: Generalized least squares**）和**广义差分法**（**Generalized Difference**）。

1、广义最小二乘法

对于模型

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\mu}$$

如果存在序列相关，同时存在异方差，即有

$$\text{Cov}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') = E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \boldsymbol{\Omega}$$

$\boldsymbol{\Omega}$ 是一对称正定矩阵，存在一可逆矩阵 \mathbf{D} ，使得

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{D}\mathbf{D}'$$

变换原模型：

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Y}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\mu}$$

即

$$\mathbf{Y}_*=\mathbf{X}_*\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\mu}_* \quad (*)$$

(*)式的OLS估计：

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}_* &= (\mathbf{X}_*' \mathbf{X}_*)^{-1} \mathbf{X}_*' \mathbf{Y}_* \\ &= (\mathbf{X}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{Y} \\ &= (\mathbf{X}' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{Y}\end{aligned}$$

这就是原模型的**广义最小二乘估计量(GLS estimators)**,
是无偏的、有效的估计量。

如何得到矩阵 Ω ?

对 Ω 的形式进行特殊设定后, 才可得到其估计值。

如设定随机扰动项为一阶序列相关形式

$$\mu_i = \rho \mu_{i-1} + \varepsilon_i$$

则

$$\text{Cov}(\mu, \mu') = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \cdots & \rho^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \sigma^2 \Omega$$

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1 + \rho^2 & -\rho & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1 + \rho^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 + \rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 + \rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

2、广义差分法

广义差分法是将原模型变换为满足OLS法的差分模型，再进行OLS估计。

如果原模型

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \mu_i$$

存在

$$\mu_t = \rho_1 \mu_{t-1} + \rho_2 \mu_{t-2} + \cdots + \rho_l \mu_{t-l} + \varepsilon_t$$

可以将原模型变换为：

$$\begin{aligned} Y_t - \rho_1 Y_{t-1} - \cdots - \rho_l Y_{t-l} &= \beta_0 (1 - \rho_1 - \cdots - \rho_l) + \beta_1 (X_{1t} - \rho_1 X_{1t-1} - \cdots - \rho_l X_{1t-l}) \\ &+ \cdots + \beta_k (X_{kt} - \rho_1 X_{kt-1} - \cdots - \rho_l X_{kt-l}) + \varepsilon_t \end{aligned}$$

该模型为**广义差分模型**，不存在序列相关问题。
可进行**OLS**估计。

注意：

- 广义差分法就是上述广义最小二乘法，但是却损失了部分样本观测值。

如：一阶序列相关的情况下，广义差分是估计

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1 - \rho) + \beta_1(X_{1t} - \rho X_{1t-1}) + \cdots + \beta_k(X_{kt} - \rho X_{kt-1}) + \varepsilon_t$$
$$t = 2, 3, \dots, n$$

这相当于

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

去掉第一行后左乘原模型 $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\mu}$ 。即运用了GLS法，但第一次观测值被排除了。

3、随机误差项相关系数的估计

应用广义最小二乘法或广义差分法，必须已知随机误差项的相关系数 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_L$ 。

实际上，人们并不知道它们的具体数值，所以必须首先对它们进行估计。

常用的估计方法有：

- 科克伦-奥科特（Cochrane-Orcutt）迭代法。
- 杜宾（durbin）两步法

(2) 杜宾 (durbin) 两步法

该方法仍是先估计 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l$, 再对差分模型进行估计

第一步, 变换差分模型为下列形式

$$Y_i = \rho_1 Y_{i-1} + \dots + \rho_l Y_{i-l} + \beta_0 (1 - \hat{\rho}_1 - \dots - \hat{\rho}_l) + \beta_1 (X_i - \hat{\rho}_1 X_{i-1} - \dots - \hat{\rho}_l X_{i-l}) + \varepsilon_i$$
$$i = 1+l, 2+l, \dots, n$$

进行OLS估计, 得各 Y_j ($j=i-1, i-2, \dots, i-l$) 前的系数 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l$ 的估计值 $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_L$

第二步，将估计的 $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_l$ 代入差分模型

$$Y_i - \rho_1 Y_{i-1} - \dots - \rho_l Y_{i-l} = \beta_0 (1 - \rho_1 - \dots - \rho_l) + \beta_1 (X_i - \rho_1 X_{i-1} - \dots - \rho_l X_{i-l}) + \varepsilon_i$$

$$i = 1 + l, 2 + l, \dots, n$$

采用 OLS 法估计，得到参数 $\beta_0 (1 - \hat{\rho}_1 - \dots - \hat{\rho}_l), \beta_1$ 的估计量，记为 $\hat{\beta}_0^*, \hat{\beta}_1^*$ 。

于是：

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}_0^* / (1 - \hat{\rho}_1 - \dots - \hat{\rho}_l), \quad \hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_1^*$$

五、案例：中国商品进口模型

我们主要研究中国商品进口与国内生产总值的关系。（下表）。

表 4.2.1 1978~2001 年中国商品进口与国内生产总值

	国内生产总值 GDP (亿元)	商品进口 M (亿美元)		国内生产总值 GDP (亿元)	商品进口 M (亿美元)
1978	3624.1	108.9	1990	18547.9	533.5
1979	4038.2	156.7	1991	21617.8	637.9
1980	4517.8	200.2	1992	26638.1	805.9
1981	4862.4	220.2	1993	34634.4	1039.6
1982	5294.7	192.9	1994	46759.4	1156.1
1983	5934.5	213.9	1995	58478.1	1320.8
1984	7171.0	274.1	1996	67884.6	1388.3
1985	8964.4	422.5	1997	74462.6	1423.7
1986	10202.2	429.1	1998	78345.2	1402.4
1987	11962.5	432.1	1999	82067.46	1657
1988	14928.3	552.7	2000	89442.2	2250.9
1989	16909.2	591.4	2001	95933.3	2436.1

资料来源：《中国统计年鉴》（1995、2000、2002）。

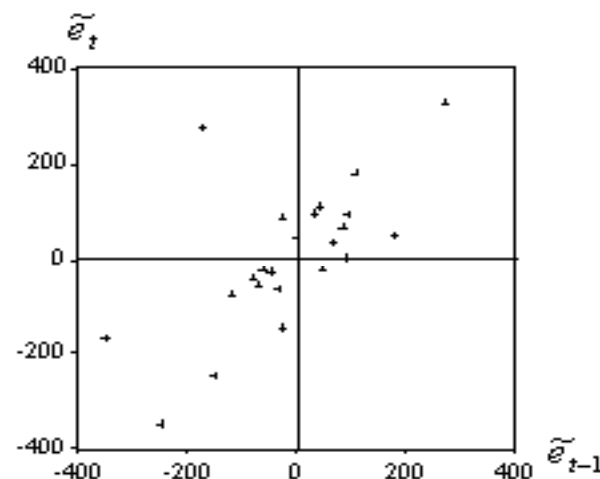
1. 通过OLS法建立如下中国商品进口方程:

$$\hat{M}_t = 152.91 + 0.02GDP_t$$

(2.32) (20.12)

$$R^2=0.948 \quad \bar{R}^2=0.946 \quad SE=154.9 \quad DW=0.628$$

2. 进行序列相关性检验。



- DW检验

取 $\alpha=5\%$ ，由于 $n=24$ ， $k=2$ (包含常数项)，查表得：

$$d_l=1.27, \quad d_u=1.45$$

由于 $DW=0.628 < d_l$ ，故：存在正自相关。

- 拉格朗日乘数检验

2阶滞后：

$$\tilde{e}_t = 6.593 - 0.0003GDP_t + 1.094\tilde{e}_{t-1} - 0.786\tilde{e}_{t-2}$$

$(0.23) \quad (-0.50) \quad (6.23) \quad (-3.69)$

$$R^2=0.6614$$

于是， $LM=22 \times 0.6614=13.89$

取 $\alpha=5\%$ ， χ^2 分布的临界值 $\chi^2_{0.05}(2)=5.991$

$$LM > \chi^2_{0.05}(2) \quad \text{故：存在自相关}$$

3阶滞后:

$$\tilde{e}_t = 6.692 - 0.0003GDP + 1.108\tilde{e}_{t-1} - 0.819\tilde{e}_{t-2} + 0.032\tilde{e}_{t-3}$$

$$(0.22) \quad (-0.497) \quad (4.541) \quad (-1.842) \quad (0.087)$$

$$R^2=0.6615$$

于是, $LM=21 \times 0.6615=14.55$

取 $\alpha=5\%$, χ^2 分布的临界值 $\chi^2_{0.05}(3)=7.815$

$$LM > \chi^2_{0.05}(3)$$

表明: 存在正自相关; 但 \tilde{e}_{t-3} 的参数不显著, 说明不存在3阶序列相关性。

3、运用广义差分法进行自相关的处理

(1) 采用杜宾两步法估计 ρ

第一步，估计模型

$$M_t = \beta_0^* + \rho_1 M_{t-1} + \rho_2 M_{t-2} + \beta_1^* GDP_t + \beta_2^* GDP_{t-1} + \beta_3^* GDP_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$\hat{M}_t = 78.09 + 0.938M_{t-1} - 0.469M_{t-2} + 0.055GDP_t - 0.096GDP_{t-1} + 0.054GDP_{t-2}$$

$$(1.76) \quad (6.64) \quad (-1.76) \quad (5.88) \quad (-5.19) \quad (5.30)$$

$$R^2 = 0.9913, \quad \bar{R}^2 = 0.9886, \quad D.W. = 2.31$$

第二步，作差分变换：

$$M_t^* = M_t - (0.938M_{t-1} - 0.469M_{t-2})$$

$$GDP_t^* = GDP_t - (0.938GDP_{t-1} - 0.469GDP_{t-2})$$

则**M***关于**GDP***的OLS估计结果为:

$$\hat{M}_t^* = 86.18 + 0.020GDP_t^*$$

$$(2.76) \quad (16.46)$$

$$R^2 = 0.9313 \quad \bar{R}^2 = 0.9279 \quad D.W. = 1.583$$

取 $\alpha=5\%$, $DW > d_u = 1.43$ (样本容量 $24-2=22$)

表明: 已不存在自相关

为了与OLS估计结果对比, 计算 $\hat{\beta}_0$:

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}_0^* / (1 - \hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_2) = 86.18 / (1 - 0.938 + 0.469) = 162.30$$

于是原模型为:

$$\hat{M}_t = 162.30 + 0.020GDP_t$$

与OLS估计结果的差别只在截距项: $\hat{M}_t = 152.91 + 0.02GDP_t$

(2) 采用科克伦-奥科特迭代法估计ρ

在Eviews软包下，2阶广义差分的结果为：

$$\hat{M}_t = 169.32 + 0.020GDP_t + 1.108AR[1] - 0.801AR[2]$$

(3.81) (18.45) (6.11) (-3.61)

$R^2 = 0.982$ $\bar{R}^2 = 0.979$ $D.W. = 1.85$

取 $\alpha=5\%$ ， $DW > d_u = 1.66$ (样本容量:22)

表明:广义差分模型已不存在序列相关性。

可以验证：仅采用1阶广义差分，变换后的模型仍存在1阶自相关性；

采用3阶广义差分，变换后的模型不再有自相关性，但AR[3]的系数的t值不显著。

例1 请判断下列各陈述是否正确：

(1) 当存在自相关时, 普通最小二乘法估计量是有偏的 (biased) 且失去有效性 (inefficient)。

(2) 在自回归模型中, 由于某些解释变量是被解释变量的滞后变量 (lagged), 如:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 y_{t-1} + u_t$$

那么杜宾—沃森 d 法不适用。

(3) 在杜宾—沃森 d 检验法中, 我们假定误差项的方差为同方差 (homoscedastic)。

(4) 在用一阶差分法消除自相关时, 我们假定自相关系数 ρ 为 -1 。

(5) 模型 $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + u_t$ 中的 R^2 与 $y_t - y_{t-1} = \beta_2 (x_t - x_{t-1}) + v_t$ 中的 R^2 不可以直接进行比较。

例2 有如下一个回归方程,共 95 个样本点:

$$\hat{y}_t = 1.3 + 9.23x_{1t} + 1.8x_{2t} - 4.8x_{3t} + 11.9x_{4t}$$

$$DW = 0.95$$

写出 D—W 检验法的步骤,并根据给出的数值,判断该模型是否存在自相关性。 $(\alpha = 0.05)$

例3 为研究劳动力在制造业中所占比率的变化趋势,我们得到以下两种回归推导(利用美国 1949—1964 年度数据):

$$\text{模型 A: } \hat{Y}_t = 0.4529 - 0.0041t \quad R^2 = 0.5484, d = 0.8252 \\ (-3.9608)$$

$$\text{模型 B: } \hat{Y}_t = 0.4786 - 0.00127t + 0.0005t^2 \\ (-3.2724) \quad (2.7777) \\ R^2 = 0.6629, \quad d = 1.82$$

其中, Y 代表劳动力比率, t 代表时间。

请回答以下问题:

- (1)模型 A 或 B 中存在自相关吗? ($\alpha = 0.05$)
- (2)如果模型 A 中存在自相关,而模型 B 中不存在,请问是什么原因?
- (3)此例告诉我们什么?

例4 对模型

$$Y = X\beta + U$$

已进行了最小二乘估计, 其中 X 为 $(n \times k)$ 矩阵, $n=20, k=4$, 并且已知

$$\hat{\rho} = \frac{\sum \hat{u}_i \hat{u}_{i-1}}{\sum \hat{u}_{i-1}^2} = 0.5$$

$$\hat{U}'\hat{U} = 40, \quad \hat{u}_1^2 = 1, \quad \hat{u}_{20}^2 = 4$$

求 D-W 统计量的值并以此检验自相关。

例5 已知模型 $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$, 一阶自相关 $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + v_t, \rho = 0.6$, 样本数据如下:

$$y_t = 4, 8, 6, 2, 9 \quad t = 1, 2, 3, 4, 5 .$$

$$x_t = 2, 5, 2, 1, 10 \quad t = 1, 2, 3, 4, 5 .$$

请回答以下问题:

(1) 计算变换后的 Y^* 和 X^* ($Y^* = BY, X^* = BX$)

(2) 用广义最小二乘法计算 α, β 。

作业： 下表是某地区年消费(y)和可支配收入(x)。

年份	y	x	年份	y	x
1(1985)	12.3	12.6	7	21.1	22.5
2	14.0	14.3	8	22.4	24.1
3	16.3	16.8	9	23.8	25.7
4	17.9	19.0	10	25.2	27.2
5	18.8	20.3	11	26.3	28.2
6	19.9	21.2	12	28.0	29.9

应用 OLS 法得如下结果：

$$\hat{y} = 1.09 + 0.89x \quad R^2 = 0.998$$

请回答以下问题：

- (1) 试求其残差，并检验 \hat{u} 的自相关性。
- (2) 对模型应用广义差分法，并将所得结果与 OLS 法的结果进行比较。

课堂练习

在对英国如何按要素成本对最终产品定价的一项研究中，根据 1951—1969 年间的年度数据，得到如下结果：

$$\begin{aligned}\widehat{PF_t} = & 2.033 + 0.273W_t - 0.521X_t + 0.256M_t + 0.028M_{t-1} + 0.121PF_{t-1} \\ \text{se} = & (0.992) \quad (0.127) \quad (0.099) \quad (0.024) \quad (0.039) \quad (0.119) \\ & R^2 = 0.984 \quad d = 2.54\end{aligned}$$

其中 PF = 按要素成本定价的最终产品价格， W = 每个雇员的工薪， X = 每个就业人员的国内总产值， M = 进口价格， M_{t-1} = 滞后一年的进口价格，以及 PF_{t-1} = 前一年按要素成本定价的最终产品价格。^①

“因对 18 个观测值和 5 个解释变量， d 值的 5% 下限和上限分别是 0.71 和 2.06，而估计的 d 值是 2.54，故表明无正的自相关。”试评论。