§5 应用举例

本节介绍函数微分的一些应用，包括极值和最值问题、函数作图以及在数学建模中的应用。

极值问题

$f(x)$ 的全部极值点必定都在使得 $f'(x)=0$ 和使得 $f'(x)$ 不存在的点集之中。使 $f'(x)=0$ 的点称为 $f(x)$ 的**驻点**。

定理 5.5.1（极值点判定定理） 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某一领域中有定义，且 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

(1) 设存在 $\delta > 0$，使得 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上可导，

(i) 若在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 上有 $f'(x) \geq 0$，在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上有 $f'(x) \leq 0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点;

(ii) 若在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 上有 $f'(x) \leq 0$，在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上有 $f'(x) \geq 0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点;

(iii) 若 $f'(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上同号，则 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点。

定理 5.5.1（极值点判定定理） 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某一领域中有定义，且 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

(1) 设存在 $\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 与 $(x_0,x_0+\delta)$ 上可导，

(i) 若在 $(x_0-\delta,x_0)$ 上有 $f'(x)\ge 0$，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上有 $f'(x)\le 0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点;

(ii) 若在 $(x_0-\delta,x_0)$ 上有 $f'(x)\le 0$，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上有 $f'(x)\ge 0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点;

(iii) 若 $f'(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 与 $(x_0,x_0+\delta)$ 上同号，则 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点。

(2) 设 $f'(x_0)=0$，且 $f(x)$ 在 x_0 点二阶可导，

(i) 若 $f''(x_0)<0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点;

(ii) 若 $f''(x_0)>0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点;

(iii) 若 $f''(x_0)=0$，则 x_0 可能是 $f(x)$ 的极值点，也可能不是 $f(x)$ 的极值点。

证 (1)的结论显然，我们只证(2)。

因为 $f'(x_0)=0$， 由 Taylor 公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

$$=f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

得到

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=\frac{1}{2!}f''(x_0)+\frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2}\text{。}$$

因为当 $x \to x_0$ 时上式右侧第二项趋于 0，所以当 $f''(x_0)<0$ 时，由极限的性质可知在 x_0 点附近成立

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}<0,$$

所以

$$f(x)<f(x_0),$$

从而 $f(x)$ 在 x_0 取极大值。同样可讨论 $f''(x_0)>0$ 的情况。 证毕

关于定理 5.5.1 中(2)(iii)，可分别考察函数$y=x^4$，$y=-x^4$和$y=x^3$。$x=0$是$y=x^4$的极小值点，是$y=-x^4$的极大值点，而不是$y=x^3$的极值点。但它们都满足$y'(0)=0$和$y''(0)=0$的条件。

关于定理 5.5.1 中(2)(iii)，可分别考察函数 $y=x^4$，$y=-x^4$ 和 $y=x^3$。$x=0$ 是 $y=x^4$ 的极小值点，是 $y=-x^4$ 的极大值点，而不是 $y=x^3$ 的极值点。但它们都满足 $y'(0)=0$ 和 $y''(0)=0$ 的条件。

例 5.5.1 求函数 $f(x)=\sqrt[3]{(2x-x^2)^2}$ 的极值。

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。由

$$f'(x)=\frac{4}{3}(2x-x^2)^{-\frac{1}{3}}(1-x),$$

可知 $f(x)$ 的驻点为 $x=1$，使得 $f'(x)$ 不存在的点为 $x=0$ 和 $x=2$。由于

（1）当 $-\infty<x<0$ 时，$f'(x)<0$；

（2）当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$；

（3）当 $1<x<2$ 时，$f'(x)<0$；

（4）当 $2<x<+\infty$ 时，$f'(x)>0$，

由定理 5.5.1 中(1)的结论知 $f(0)=0$ 是极小值，$f(1)=1$ 是极大值，$f(2)=0$ 是极小值。

例 5.5.2 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值。

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。计算得

$$f'(x)=6x(x^2-1)^2, \quad f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)。$$

显然 $f(x)$ 的驻点为 $x=0$，$x=1$ 和 $x=-1$。由于 $f''(0)=6>0$，所以由定理 5.5.1 中 (2) 的结论知 $f(0)=0$ 是极小值。

由于 $f''(\pm1)=0$，不能用定理 5.5.1 中 (2) 的结论。但由于 $f'(x)$ 在 $x=1$ 与 $x=-1$ 的左、右两侧保持同号，由定理 5.5.1 中 (1) 的结论，知 $f(1)$ 和 $f(-1)$ 都不是函数 $f(x)$ 的极值。

最值问题

闭区间上的连续函数必定能取到最大值与最小值。

函数的最大值与最小值统称为函数的最值，使函数取到最大值（或最小值）的点称为函数的最大值点（或最小值点），也称为函数的最值点。

对于一个定义于闭区间$[a,b]$上的函数$f(x)$来说，区间的两个端点a与b有可能成为它的最值点。同时，若最值点属于开区间(a,b)的话，那它一定是函数的极值点。因此，只要找出所有$f(x)$的驻点与使$f'(x)$不存在的点，再加上区间的端点，从中找出使函数取最大值或最小值的点就可以了。

例 5.5.3 求函数 $f(x)=\sqrt[3]{(2x-x^2)^2}$ 在区间 $[-1,4]$ 上的最大值与最小值。

解 由例 5.5.1，已知函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,4]$ 上的极大值点为 $x=1$，极大值为 $f(1)=1$，极小值点为 $x=0$ 与 $x=2$，两个极小值都为 0。为了求最大值与最小值，还须加上函数在区间端点的值 $f(-1)=\sqrt[3]{9}$ 与 $f(4)=4$。对这些值进行比较，就得到函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,4]$ 上的最大值点为 $x=4$，最大值为 $f(4)=4$，最小值点为 $x=0$ 与 $x=2$，最小值为 0。

例 5. 5. 4 用铝合金制造容积固定的圆柱形罐头，罐身（侧面和底部）用整块材料拉制而成，顶盖是另装上去的，设顶盖的厚度是罐身厚度的三倍。问如何确定它的底面半径和高才能使得用料最省？

解 设罐身的厚度为δ，则顶盖的厚度是3δ。

记罐头的容积为V，底面半径为r，则高为$h=\dfrac{V}{\pi r^2}$。于是，罐身的用料为

$$U_1(r)=\delta\left(\pi r^2+2\pi rh\right)=\delta\left(\pi r^2+2\frac{V}{r}\right),$$

顶盖的用料为

$$U_2(r)=3\delta\pi r^2,$$

因此问题化为求函数

$$U(r)=U_1(r)+U_2(r)=\delta\left(4\pi r^2+2\frac{V}{r}\right),\quad r\in(0,+\infty)$$

的最小值。

对$U(r)$求导，$U'(r)=2\delta\left(4\pi r-\frac{V}{r^2}\right)$，因此$U'(r)$只有唯一的零点

$r_0=\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$。由于

$$U''(r)=4\delta\left(2\pi+\frac{V}{r^3}\right)>0\text{，}\quad r\in(0,+\infty)\text{，}$$

所以r_0是$U(r)$的最小值点。

这时，相应的高为

$$h_0=\frac{V}{\pi r_0^2}=\frac{4\pi r_0^3}{\pi r_0^2}=4r_0\quad\text{。}$$

也就是说，当罐头的高为底面直径的 2 倍时用料最省。

对$U(r)$求导，$U'(r)=2\delta\left(4\pi r-\dfrac{V}{r^2}\right)$，因此$U'(r)$只有唯一的零点$r_0=\sqrt[3]{\dfrac{V}{4\pi}}$。由于

$$U''(r)=4\delta\left(2\pi+\frac{V}{r^3}\right)>0\text{，}\quad r\in(0,+\infty)\text{，}$$

所以r_0是$U(r)$的最小值点。

这时，相应的高为

$$h_0=\frac{V}{\pi r_0^2}=\frac{4\pi r_0^3}{\pi r_0^2}=4r_0\text{。}$$

也就是说，当罐头的高为底面直径的 2 倍时用料最省。

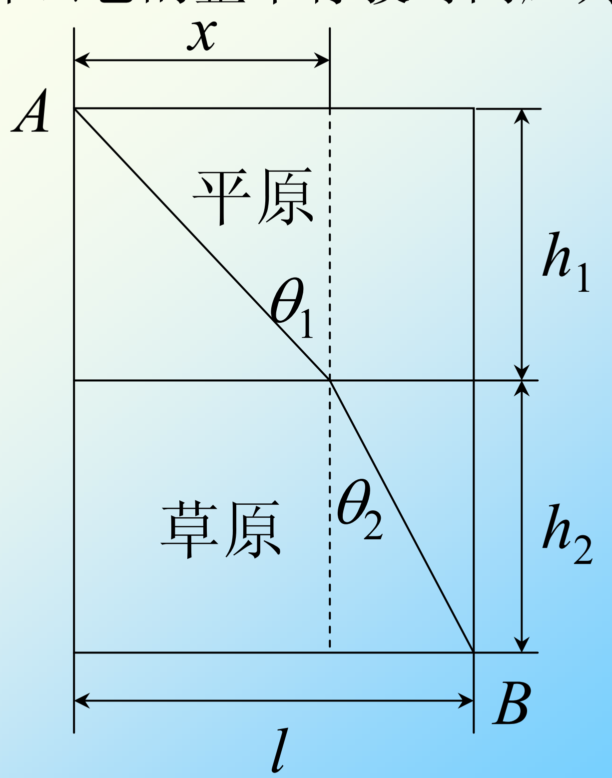
用同样的方法可以推出，若圆柱形的有盖容器是用厚薄相同的材料制成的，那么当它的底面直径和高相等的时候用料最省。许多圆柱形的日常用品，如漱口杯、保暖桶等，都是采用这样的比例（或近似这样的比例）设计的。

例 5.5.5 设一辆汽车在平原上的行驶速度为 v_1，在草原上的行驶速度为 v_2，现要求它以最短的时间从平原上的A点到达草原上的B点，问应该怎么走？

解 显然，在同一种地形上，汽车应沿直线行进，所以它从 A 到 B 的运动轨迹应是由两条直线段组成的折线。

设汽车的行驶路径如图 5.5.2 所示，那么它的整个行驶时间应为

$$T(x)=\frac{\sqrt{h_1^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{h_2^2+(l-x)^2}}{v_2}。$$



由

$$T'(x)=\frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2+x^2}}-\frac{l-x}{v_2\sqrt{h_2^2+(l-x)^2}},$$

可知 $T'(0)<0$， $T'(l)>0$。

由于

$$T''(x)=\frac{h_1^2}{v_1(h_1^2+x^2)^{3/2}}+\frac{h_2^2}{v_2(h_2^2+(l-x)^2)^{3/2}}>0\text{，}$$

可知存在唯一的$x_0\in(0,l)$，使得$T'(x_0)=0$。因此x_0是$T(x)$的唯一的极小值点，也就是它的最小值点。这时我们得到关系式

$$\frac{x_0}{v_1\sqrt{h_1^2+x_0^2}}=\frac{l-x_0}{v_2\sqrt{h_2^2+(l-x_0)^2}}\text{。}$$

由于

$$T''(x)=\frac{h_1^2}{v_1(h_1^2+x^2)^{3/2}}+\frac{h_2^2}{v_2(h_2^2+(l-x)^2)^{3/2}}>0\text{，}$$

可知存在唯一的 $x_0\in(0,l)$，使得 $T'(x_0)=0$。因此 x_0 是 $T(x)$ 的唯一的极小值点，也就是它的最小值点。这时我们得到关系式

$$\frac{x_0}{v_1\sqrt{h_1^2+x_0^2}}=\frac{l-x_0}{v_2\sqrt{h_2^2+(l-x_0)^2}}\text{。}$$

由于光线在传播过程中所花的时间总是最短的,即光线总是走“捷径”的，所以光线的传播问题在本质上与本题是相同的。我们可以将本题中汽车的行驶换成光线的传播，将平原和草原换成光线传播过程中的两种不同的介质，这样就得到了光学中著名的折射定律

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2}\text{。}$$

例 5.5.6 对产品从生产到销售的过程进行经济核算时，至少要涉及到三个方面的问题：成本、收益和利润。设产量为 Q，则总成本 $\mathrm{C}(Q)$ 一般可以表示成两部分的和

$$\mathrm{C}(Q)=f+v(Q)\cdot Q。$$

这里，$f>0$ 称为固定成本（如厂房和设备的折旧、工作人员的工资、财产保险费等），一般可以认为与产量的大小无关，而 $v(Q)\cdot Q$ 称为可变成本（如原材料、能源等），$v(Q)$ 是一个正值函数，表示在总共生产 Q 件产品的情况下，每生产一件的可变成本，最简单的情形是 $v(Q)=v=$ 正常数。

$\mathrm{C}(Q)$ 的导数 $\mathrm{C}'(Q)$ 称为**边际成本**，其经济学意义是在总共生产 Q 件产品的情况下，生产第 Q 件产品的成本。

总收益 $\mathrm{E}(Q)=p(Q)\cdot Q$ 是指把 Q 件产品销售出去后得到的收入，这里 $p(Q)$ 称为价格函数，表示在总共生产 Q 件产品的情况下，每件产品的销售价格。一般说来，生产量越大，每件产品的价格就越便宜，因此 $p(Q)$ 是 Q 的单调减少函数。

$E(Q)$的导数$E'(Q)$相应地称为**边际收益**，其经济学意义是在总共生产销售了Q件产品的情况下，销售出第Q件产品所得到的收入。

总收益减去总成本便是总利润。将利润函数记为$P(Q)$，则

$$P(Q)=E(Q)-C(Q),$$

当$E(Q)$和$C(Q)$二阶可导时，利用 Lagrange 中值定理的推论 2，就可以得到经济学中的“**最大利润原理**”：

“当且仅当边际成本与边际收益相等，并且边际成本的变化率大于边际收益的变化率时，可取得最大利润。”

这里的第一个条件即为

$$P'(Q)=E'(Q)-C'(Q)=0,$$

而第二个条件可表示为

$$P''(Q)=E''(Q)-C''(Q)<0,$$

请读者自行思考它们的经济学意义。

比如，某产品的价格 $p(Q)=a-bQ,(a,b>0,Q<\frac{a}{b})$，成本 $\mathrm{C}(Q)=f+vQ$，于是利润

$$\mathrm{P}(Q)=\mathrm{E}(Q)-\mathrm{C}(Q)=-bQ^2+(a-v)Q-f,$$

要使得整个生产经营不亏本，显然在定价时须保证 $a-v>0$。

容易算出，当产量 $Q_0=\frac{a-v}{2b}$ 时有 $\mathrm{P}'(Q_0)=0$ 和 $\mathrm{P}''(Q_0)<0$，这时所获取的利润为最大。

数学建模

例 5. 5. 7（Malthus 人口模型） 设 $p(t)$ 是某地区的人口数量函数，则在单位时间中的人口增长数，即人口增长速率应为人口数量函数的导数 $p'(t)$。

显然，某一时刻的人口数量越多，在单位时间中的人口增长数也就越多。Malthus 假定这两者成比例关系，设比例系数为 λ，他在 1798 年提出了人类历史上的第一个人口模型

$$\begin{cases} p'(t) = \lambda p(t) \\ p(t_0) = p_0 \end{cases},$$

将“$p'(t) = \lambda p(t)$”写成微分形式 $\dfrac{dp}{p} = \lambda dt$，得到

$$\ln p = \lambda t + C, \quad \text{或} \quad p = C_1 e^{\lambda t},$$

其中 $C_1 = e^C$。令 $t = t_0$ 并利用初始条件 $p(t_0) = p_0$，可以定出 $C_1 = p_0 e^{-\lambda t_0}$，最终得到人口数量函数

$$p(t) = p_0 e^{\lambda(t-t_0)}。$$

例 5. 5. 8 在供水、化工生产等过程中，都有一个对液体进行过滤，除去渣滓的问题。现以过滤式净水器的使用为例，来建立相应的数学模型。

要对液体进行过滤，首先要设置一个由过滤物质组成的过滤层（称为滤芯）。在过滤的过程中，水中的杂质沉积在过滤层上，也成为过滤层的一部分。假设杂质在水中的含量和进水的压力都是常数，那么杂质沉积的厚度与累积的总滤出流量$Q(t)$成正比，同时，流速的减少与杂质沉积的厚度也成正比。若设初始时刻的流速为q_0，由导数的意义即知t时刻的流速应当是$Q'(t)$，从而流速的减少量为$q_0-Q'(t)$，由上所述，它应与总滤出流量$Q(t)$成正比。这样，就得到了它的数学模型为

$$\begin{cases} Q'(t)=q_0-\lambda Q(t), \\ Q(0)=0. \end{cases}$$

作代换$Q_1(t)=q_0-\lambda Q(t)$，便有

$$\begin{cases} Q_1'(t)=-\lambda Q_1(t), \\ Q_1(0)=q_0. \end{cases}$$

采用例 5. 5. 7 类似的方法，可以求出

$$Q_1(t)=q_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\text{，}$$

即得到累积的总滤出流量为

$$Q(t)=\frac{1}{\lambda}(q_0-Q_1(t))=\frac{q_0}{\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})\text{。}$$

因为

$$\lim_{t\to+\infty}Q(t)=\frac{q_0}{\lambda}\quad\text{及}\quad\lim_{t\to+\infty}Q'(t)=0\text{，}$$

所以我们可以知道，在定压的过滤过程中，并不是想滤多少就可以不受限制地滤多少，其流出的总量是有上限 $\frac{q_0}{\lambda}$ 的。在流量接近这个上限的时候，其流速将趋近于零，也就是说，此时杂质已沉积得过厚，需要清洗或更换滤芯了。

函数作图

函数作图的过程一般可分为以下几个步骤：

（1）考察函数 $f(x)$ 的定义域极其在定义域内的连续性, 找出函数的不连续点，并以这些点作为分点，将定义域分成若干个区间，使函数在每个区间上连续。

函数作图

函数作图的过程一般可分为以下几个步骤：

（1）考察函数 $f(x)$ 的定义域极其在定义域内的连续性, 找出函数的不连续点，并以这些点作为分点，将定义域分成若干个区间，使函数在每个区间上连续。

（2）计算 $f'(x)$，找出 $f(x)$ 的驻点与导数不存在的点，从而求出 $f(x)$ 的极值点与极值，并以这些点为分点，对区间进行再划分，使函数在每个区间上保持单调。

函数作图

函数作图的过程一般可分为以下几个步骤：

（1）考察函数 $f(x)$ 的定义域极其在定义域内的连续性, 找出函数的不连续点，并以这些点作为分点，将定义域分成若干个区间，使函数在每个区间上连续。

（2）计算 $f'(x)$，找出 $f(x)$ 的驻点与导数不存在的点，从而求出 $f(x)$ 的极值点与极值，并以这些点为分点，对区间进行再划分，使函数在每个区间上保持单调。

（3）计算 $f''(x)$，找出所有使 $f''(x)=0$ 的点与使 $f''(x)$ 不存在的点，从而求出 $f(x)$ 的拐点，并以这些点为分点，继续对区间进行再划分，使函数在每个区间上保持固定的凸性。

（4）对上述（1），（2），（3）三个步骤所得到的结果列出表格，在表格中标出函数在每个分点上的函数值（如果有定义的话），以及函数在每个区间上的单调性与凸性。

（4）对上述（1），（2），（3）三个步骤所得到的结果列出表格，在表格中标出函数在每个分点上的函数值（如果有定义的话），以及函数在每个区间上的单调性与凸性。

（5）求出曲线 $y = f(x)$ 的渐近线，包括水平渐近线、垂直渐近线和斜渐近线。

（4）对上述（1），（2），（3）三个步骤所得到的结果列出表格，在表格中标出函数在每个分点上的函数值（如果有定义的话），以及函数在每个区间上的单调性与凸性。

（5）求出曲线 $y=f(x)$ 的渐近线，包括水平渐近线、垂直渐近线和斜渐近线。

通过上述步骤，就可作出函数 $y=f(x)$ 的图象。

须注意的是，在作图之前，先应该考察函数的几何性质如奇偶性、周期性等，如 $f(x)$ 是奇函数或偶函数，那么只要画出一半图形，而另一半可通过对称画出；对于周期函数，只要画出一个周期的图形就可以了，而其余部分可通过周期延拓画出。

例 5.5.9 作出函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图象。

解 因为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 是定义于整个实数域上的偶函数，我们只要考察 $x\ge 0$ 就可以了。

$$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}，\quad f''(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)。$$

$f(x)$ 的可能极值点为 $f'(x)$ 的零点 $x=0$，可能的拐点的横坐标为 $f''(x)$ 的零点 $x=1$。

经检验，$f'(x)$ 在 $x=0$ 的右侧和左侧的符号分别为负和正，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点；$f''(x)$ 在 $x=1$ 的右侧和左侧的符号分别为正和负，所以 $(1,f(1))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

上面的分析可以列表如下：

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	极大值 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$		拐点 $\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$	

上面的分析可以列表如下：

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	极大值 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$		拐点 $\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$	

当 $x\to\infty$ 时， $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\to 0$，因此 $y=0$ 即 x 轴是 $y=f(x)$ 的水平渐近线，容易看出，曲线 $y=f(x)$ 不再有其它的渐近线。

根据这些信息，便可作出函数$y=f(x)$在右半平面的图象，然后利用对称性，就可以作出函数的整个图象了（图 5. 5. 3）。

以后学习概率论时会知道，$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$是一个非常重要的函数。

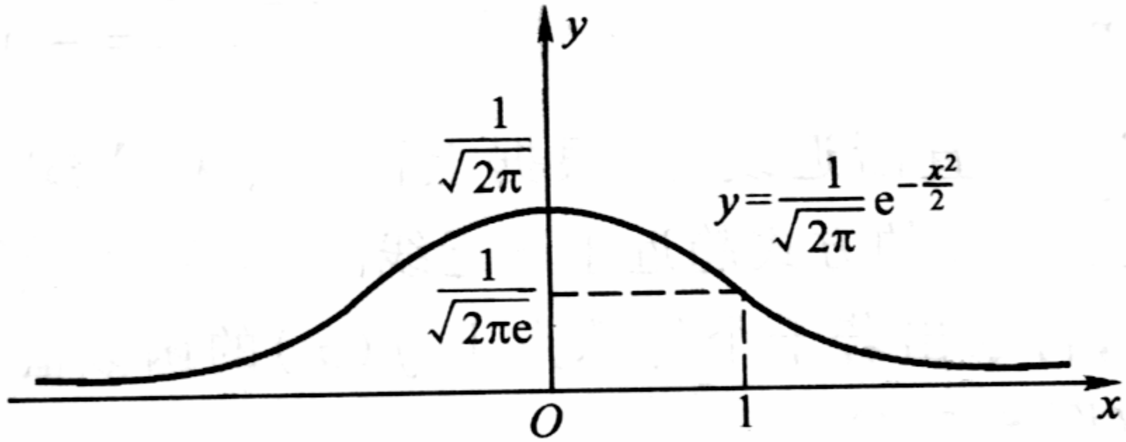


图 5.5.3

例 5. 5. 10 作出函数 $y=\dfrac{(x-1)^2}{3(x+1)}$ 的图象。

解 由于函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{3(x+1)}$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，可知函数的图象包含两条曲线，它们被直线 $x=-1$ 左右分开。

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x+1)-(x-1)^2}{3(x+1)^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{3(x+1)^2}.$$

$f'(x)$ 有零点 $x=1$ 和 $x=-3$。由于 $f'(x)$ 在 $x=-3$ 的右侧和左侧的符号分别为负和正，而在 $x=1$ 的右侧和左侧的符号分别为正和负，所以 $x=-3$ 是 $f(x)$ 的极大值点， $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点。

$$f''(x)=\frac{8}{3(x+1)^3},$$

因为 $f''(x)$ 在定义域中没有零点，所以曲线上没有拐点。

根据上述结果即可列出下面的表格：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	无定义	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	无定义	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		极大值 $-\frac{8}{3}$		无定义		极小值 0	

由例 5. 4. 14 ， $y=\dfrac{(x-1)^2}{3(x+1)}$ 的斜渐近线方程为

$$y=\frac{x}{3}-1。$$

又因为

$$\lim_{x\to-1+}\frac{(x-1)^2}{3(x+1)}=+\infty，\quad \lim_{x\to-1-}\frac{(x-1)^2}{3(x+1)}=-\infty，$$

所以 $x=-1$ 是它的垂直渐近线，且根据上面两个极限式，可以知道曲线在 $x=-1$ 的左右两侧以怎样的方式趋近于渐近线的。

根据这些信息，就不难作出函数 $y=f(x)$ 的图形了（图 5. 5. 4）。

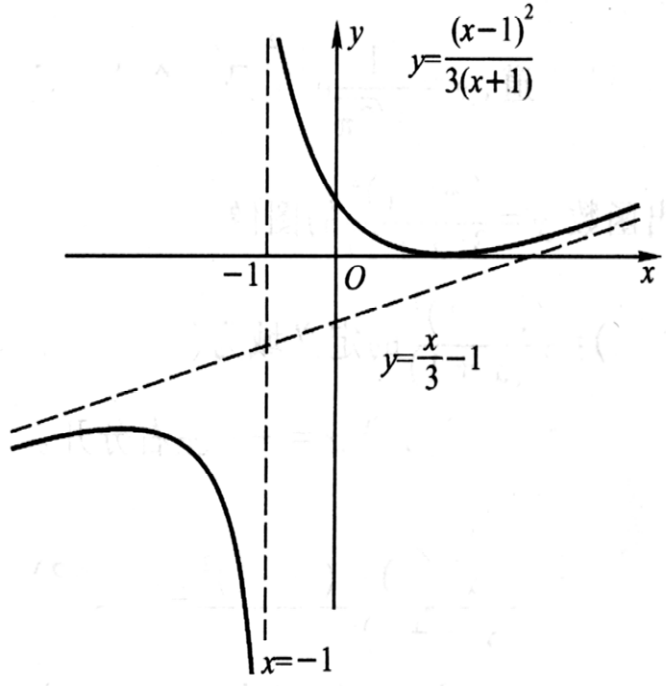


图 5.5.4

例 5. 5. 11 作出函数 $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$ 的图象。

解 函数

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}=\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot\sqrt[3]{x+1}$$

的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

$$f'(x)=\left[\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot\sqrt[3]{x+1}\right]'=\frac{1}{3}\left(2\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}+\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\frac{2(x+1)+(x-1)}{\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\frac{(x+\frac{1}{3})}{\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}},$$

$f'(x)$ 有零点 $x=-\dfrac{1}{3}$，并且在 $x=\pm1$ 处 $f'(x)$ 不存在。经检测 $f'(x)$ 在这些点左右两侧的符号，即可知道 $x=-1$ 不是函数的极值点，$x=-\dfrac{1}{3}$ 是函数的极大值点，$x=1$ 是函数的极小值点。

$$f''(x)=\left[\frac{(x+\frac{1}{3})}{\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right]'$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}-\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left[\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+2\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}}\right]}{\left[\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}\right]^2}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}\right)}{\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\frac{-8}{9\cdot\sqrt[3]{(x-1)^4}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^5}},$$

即知 $f(x)$ 的二阶导数没有零点，但在 $x=\pm1$ 处 $f''(x)$ 不存在。由于 $f''(x)$ 在 $x=-1$ 的两侧符号相反，而在 $x=1$ 的两侧符号相同，所以 $x=-1$ 是曲线的拐点，而 $x=1$ 不是曲线的拐点。

根据上述结果即可列出下面的表格:

	$(-\infty, 1)$	-1	$(-1, -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	不存在	$+$	0	$-$	不存在	$+$
$f''(x)$	$+$	不存在	$-$	$-$	$-$	不存在	$-$
$f(x)$		拐点 $(-1, 0)$		极大值 $\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$		极小值 0	

由例 5.4.15，$y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$ 的渐近线方程为

$$y=x-\frac{1}{3}\quad。$$

根据这些信息，就可作出函数 $y=f(x)$ 的图形了(图 5.5.5)。

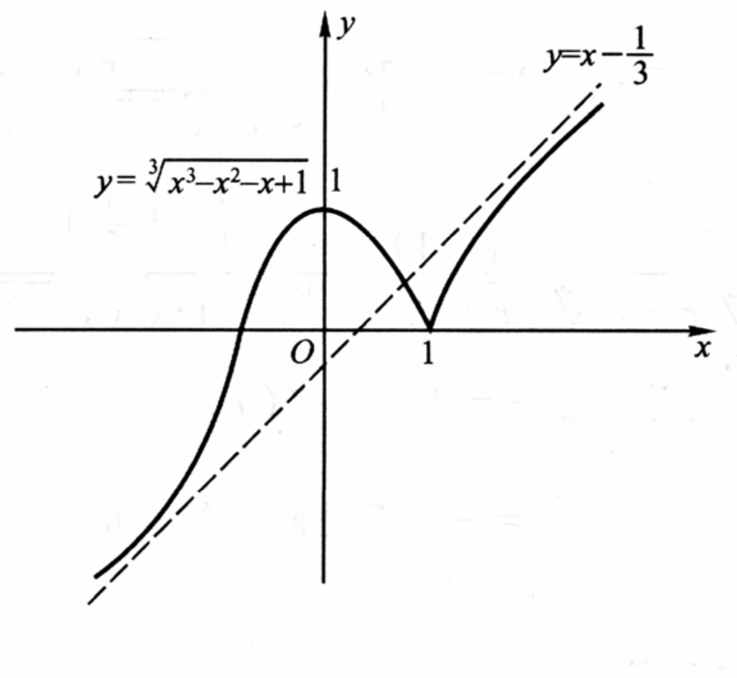


图 5.5.5