《微分几何》课程电子课件

教师：杨勤民

Tel: (021)64253147

Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程QQ群号：1045698545

§3.2 活动标架

一、合同变换群

二、活动标架

三、活动标架法

一、合同变换群

空间合同变换: $\mathbb{R}^3$中保持空间距离不变的变换

例: $\mathbb{R}^3$中的平移、旋转、对某一平面的反射.

每一个空间合同变换T由它对直角坐标系$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$的作用效果所确定的:

即如果 ① $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$为另一直角坐标系;

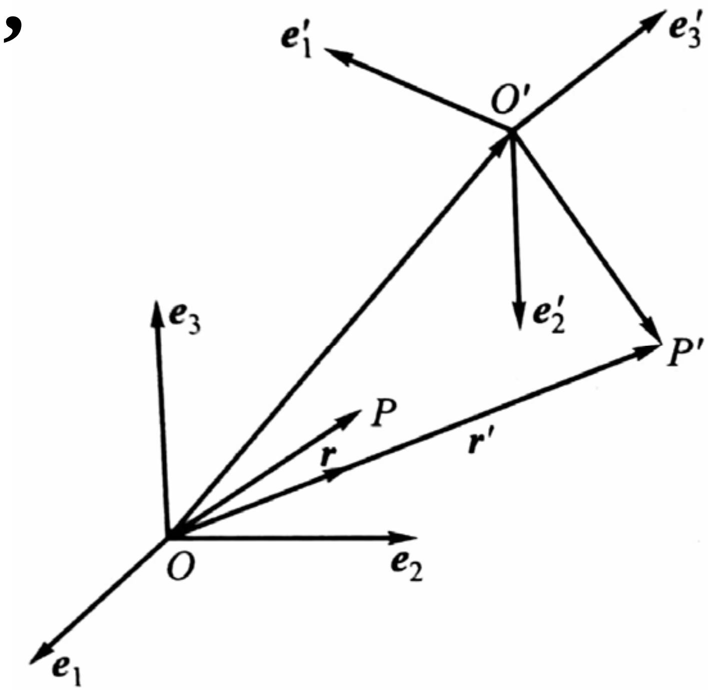
② $T(O)=O'=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$;

③ $T(\vec{e}_i)=\vec{e}_i'=(a_{1i},a_{2i},a_{3i})^{\mathrm{T}}\ (i=1,2,3)$,

则T的变换公式为 $x_i'=\sum\limits_{j=1}^{3}a_{ij}x_j+a_i\ (i=1,2,3)$,

且(a_{ij})为正交阵.

证 在空间中任取一点$P(x_1, x_2, x_3)$,



设 $P' = T(P)$, 坐标为(x_1', x_2', x_3').

则$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'}$

$$= [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + [\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3']\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

即 $$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

因此 $x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j + a_i \ (i = 1, 2, 3).$

矩阵$(a_{ij}) = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$,

$\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$为两两正交的单位向量,

即矩阵(a_{ij})的列向量为两两正交的单位向量,

因此矩阵(a_{ij})为正交矩阵.

称$\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$为$\mathbb{R}^3$中的一个单位正交标架(简称标架).

选定坐标系后,空间合同变换和$\mathbb{R}^3$中的标架一一对应.

P143命题7 $\mathbb{R}^3$中全体合同变换构成一个群.

回忆群的概念： ①封闭性;

②结合律;

③存在单位元;

④存在逆元.

称空间合同变换构成的群为空间合同变换群.

空间合同变换群可看成是$\mathbb{R}^3$中全体标架的集合.

二、活动标架

$\mathbb{R}^3$中的标架可以看成是空间合同变换群的元素的具体表示.

设标架$\{\vec{r};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$是变动的,光滑地依赖于$p$个参数

$$u^1,u^2,\cdots,u^p,$$

即向量$\vec{r},\vec{e}_i$是 p个参数$u^1,u^2,\cdots,u^p$的C^∞-函数:

$$\vec{r}=\vec{r}(u^1,u^2,\cdots,u^p),\ \vec{e}_i=\vec{e}_i(u^1,u^2,\cdots,u^p),\quad i=1,2,3.$$

则称$\{\vec{r};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$为 p 参数的活动标架.

$\mathbb{R}^3$中标架的自由度为6, 因此 $p\le 6$. p参数的活动标架的全体构成合同变换群的 p 维子空间.

活动标架法的主要思想(Cartan)

通过活动标架这个桥梁,把微分几何中所研究的图形嵌入到空间合同变换群*G*中,也就是把该图形看成*G*的子空间的元素,然后*G*的性质自然地传递到它的子空间上,从而得到所要研究的图形的性质.

活动标架法是克莱因(F. Klein)的埃尔朗根(Erlangen)纲领的精神在微分几何中的体现.

克莱因的变换群观点:把各种不同的几何看成是各种变换群的不变量与不变性的理论.

实例：将空间曲线嵌入到合同变换群

给出一条空间曲线(C) : $\vec{r} = \vec{r}(s)$, 设s为自然参数.

曲线上每一点$\vec{r}(s)$对应有一Frenet标架:

$$\vec{e}_1(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}, \quad \vec{e}_2(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_1}{\mathrm{d}s} \Bigg/ \left|\frac{\mathrm{d}\vec{e}_1}{\mathrm{d}s}\right|, \quad \vec{e}_3(s) = \vec{e}_1(s) \times \vec{e}_2(s).$$

于是$\{\vec{r}(s); \vec{e}_1(s), \vec{e}_2(s), \vec{e}_3(s)\}$构成单参数活动标架.

注：把一个几何图形嵌入到合同变换群中的方法不唯一.

实例：将空间曲面嵌入到空间合同变换群

给出一个曲面(S)：$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$，设其曲纹坐标网正交，

则曲面(S)上任一点$\vec{r}(u,v)$处存在三个有序的两两正

交的单位向量：

$$\vec{e}_1(u,v)=\vec{r}_u\Big/\left|\vec{r}_u\right|,\quad \vec{e}_2(u,v)=\vec{r}_v\Big/\left|\vec{r}_v\right|,\ \vec{e}_3(u,v)=\vec{n}(u,v).$$

则$\{\vec{r}(u,v);\vec{e}_1(u,v),\vec{e}_2(u,v),\vec{e}_3(u,v)\}$

构成一个双参数活动标架.

活动标架的无穷小位移

p参数活动标架

$$\{\vec{r}(u^1,u^2,\cdots,u^p);\vec{e}_i(u^1,u^2,\cdots,u^p)\ (i=1,2,3)\}$$

的无穷小位移是指它们的微分的坐标表达式：

$$\begin{cases} \mathrm{d}\vec{r}=\sum_{i=1}^{3}\omega^i(u^1,u^2,\cdots,u^p,\mathrm{d}u^1,\mathrm{d}u^2,\cdots,\mathrm{d}u^p)\vec{e}_i \\ \mathrm{d}\vec{e}_i=\sum_{j=1}^{3}\omega_i^j(u^1,u^2,\cdots,u^p,\mathrm{d}u^1,\mathrm{d}u^2,\cdots,\mathrm{d}u^p)\vec{e}_j \end{cases}$$

$$(i=1,2,3)$$

其中的ω^i和ω_i^j是系数为关于$(u^1,u^2,\cdots,u^p)$的C^∞-函数的$\mathrm{d}u^1,\mathrm{d}u^2,\cdots,\mathrm{d}u^p$的Pfaff形式, $i,j=1,2,3.$

活动标架的相对分量

ω^i和ω_i^j刻画了活动标架的无穷小位移,

称它们为活动标架$\{\vec{r};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$的相对分量.

由$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$的正交性知 $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}, i,j=1,2,3.$

将上式微分得到 $\mathrm{d}\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j+\vec{e}_i\cdot\mathrm{d}\vec{e}_j=0.$

即 $\sum_{k=1}^{3}\omega_i^k\vec{e}_k\cdot\vec{e}_j+\vec{e}_i\cdot\sum_{k=1}^{3}\omega_j^k\vec{e}_k=0.$

即 $\omega_i^j+\omega_j^i=0$, 其中$i,j=1,2,3.$

即 $\omega_1^1=\omega_2^2=\omega_3^3=0,$

$$\omega_1^2=-\omega_2^1,\ \omega_2^3=-\omega_3^2,\ \omega_3^1=-\omega_1^3.$$

实例：双参数活动标架的相对分量

考虑双参数活动标架

$$\{\boldsymbol{r}(u,v);\ \boldsymbol{e}_1(u,v),\ \boldsymbol{e}_2(u,v),\ \boldsymbol{e}_3(u,v)\},$$

其中 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 是曲面(S)的方程,其上已选取正交坐标网.

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{r}_u}{|\boldsymbol{r}_u|}=\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_v|}=\frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}},\quad \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{n},$$

注意,由于坐标网正交,所以 $F=0$.

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v=(\sqrt{E}\,\mathrm{d}u)\boldsymbol{e}_1+(\sqrt{G}\,\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_2,$$

因而 $\omega^1=\sqrt{E}\,\mathrm{d}u,\quad \omega^2=\sqrt{G}\,\mathrm{d}v,\quad \omega^3=0,$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1=\mathrm{d}\left(\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}}\right)=\frac{\boldsymbol{r}_{uu}\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_{uv}\mathrm{d}v}{\sqrt{E}}-\frac{(E_u\mathrm{d}u+E_v\mathrm{d}v)\boldsymbol{r}_u}{2E^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E}}[(\Gamma_{11}^1 \boldsymbol{r}_u + \Gamma_{11}^2 \boldsymbol{r}_v + L\boldsymbol{n})\mathrm{d}u + (\Gamma_{12}^1 \boldsymbol{r}_u + \Gamma_{12}^2 \boldsymbol{r}_v + M\boldsymbol{n})\mathrm{d}v] -$$

$$\frac{1}{2E}(E_u \mathrm{d}u + E_v \mathrm{d}v) \cdot \frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}}$$

$$= \left(\Gamma_{11}^1 \mathrm{d}u + \Gamma_{12}^1 \mathrm{d}v - \frac{E_u \mathrm{d}u + E_v \mathrm{d}v}{2E}\right) \frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}} +$$

$$(\Gamma_{11}^2 \mathrm{d}u + \Gamma_{12}^2 \mathrm{d}v) \frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{E}} + \frac{1}{\sqrt{E}}(L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v)\boldsymbol{n}$$

$$= \left(\Gamma_{11}^1 \mathrm{d}u + \Gamma_{12}^1 \mathrm{d}v - \frac{E_u \mathrm{d}u + E_v \mathrm{d}v}{2E}\right) \boldsymbol{e}_1 +$$

$$\sqrt{\frac{G}{E}}(\Gamma_{11}^2 \mathrm{d}u + \Gamma_{12}^2 \mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{E}}(L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_3.$$

同理 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2 = \mathrm{d}\left(\dfrac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}}\right) = \sqrt{\dfrac{E}{G}}(\Gamma_{12}^1\mathrm{d}u + \Gamma_{22}^1\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_1 +$

$$\left(\Gamma_{12}^2\mathrm{d}u + \Gamma_{22}^2\mathrm{d}v - \frac{G_u\mathrm{d}u + G_v\mathrm{d}v}{2G}\right)\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{G}}(M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_3.$$

但是对于正交坐标网来说

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E},\quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G},\quad \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E},\quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G},\quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E},\quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G},$$

因此 $\omega_1^1 = 0,\quad \omega_2^2 = 0,\quad \omega_1^3 = \dfrac{1}{\sqrt{E}}(L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v),$

$$\omega_2^3 = \frac{1}{\sqrt{G}}(M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}v),\quad \omega_1^2 = -\omega_2^1 = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}(E_v\mathrm{d}u - G_u\mathrm{d}v),$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3 = \mathrm{d}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_u\mathrm{d}u + \boldsymbol{n}_v\mathrm{d}v$$

$$= (\mu_1^1\boldsymbol{r}_u + \mu_1^2\boldsymbol{r}_v)\mathrm{d}u + (\mu_2^1\boldsymbol{r}_u + \mu_2^2\boldsymbol{r}_v)\mathrm{d}v$$

对于正交坐标网来说

$\mu_1^1 = -\dfrac{L}{E}$，$\mu_1^2 = -\dfrac{M}{G}$，$\mu_2^1 = -\dfrac{M}{E}$，$\mu_2^2 = -\dfrac{N}{G}$，因此

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3 = -\frac{1}{E}(L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v)\boldsymbol{r}_u - \frac{1}{G}(M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}v)\boldsymbol{r}_v$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{E}}(L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{G}}(M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_2.$$

所以 $$\omega_3^1 = -\frac{1}{\sqrt{E}}(L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v) = -\omega_1^3,$$

$$\omega_3^2 = -\frac{1}{\sqrt{G}}(M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}v) = -\omega_2^3.$$

双参数活动标架的相对分量小结

曲面(S): $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, 设其坐标网正交, $F=0$.

$$\vec{e}_1=\vec{r}_u/|\vec{r}_u|=\frac{\vec{r}_u}{\sqrt{E}},\quad \vec{e}_2=\vec{r}_v/|\vec{r}_v|=\frac{\vec{r}_v}{\sqrt{G}},\quad \vec{e}_3=\vec{n}.$$

$$\omega^1=\sqrt{E}\,\mathrm{d}u,\quad \omega^2=\sqrt{G}\,\mathrm{d}v,\quad \omega^3=0;$$

$$\omega_1^1=0,\quad \omega_1^2=-\frac{E_v\,\mathrm{d}u-G_u\,\mathrm{d}v}{2\sqrt{EG}},\quad \omega_1^3=\frac{L\,\mathrm{d}u+M\,\mathrm{d}v}{\sqrt{E}};$$

$$\omega_2^1=-\omega_1^2,\quad \omega_2^2=0,\quad \omega_2^3=\frac{M\,\mathrm{d}u+N\,\mathrm{d}v}{\sqrt{G}};$$

$$\omega_3^1=-\omega_1^3,\quad \omega_3^2=-\omega_2^3,\quad \omega_3^3=0.$$

活动标架的结构方程

活动标架$\{\vec{r};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$的相对分量$\omega^i$和$\omega_i^j$应满足

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega^i = \sum_{j=1}^{3} \omega^j \wedge \omega_j^i \quad (\text{由}\,\mathrm{d}\mathrm{d}\vec{r} = 0\text{得到}) \\ \mathrm{d}\omega_i^j = \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^j \quad (\text{由}\,\mathrm{d}\mathrm{d}\vec{e}_i = 0\text{得到}) \\ \omega_i^j + \omega_j^i = 0 \quad (\text{由}\,\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}\text{得到}) \\ \text{其中}\; i,j = 1,2,3. \end{cases}$$

称上式为活动标架$\{\vec{r};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$的结构方程.

证 $\mathrm{d}\vec{r}=\sum_{i=1}^{3}\omega^i\vec{e}_i.$

1-形式 0-形式

$$\mathrm{d}\mathrm{d}\vec{r}=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}(\boxed{\omega^i}\,\boxed{\vec{e}_i})=\sum_{i=1}^{3}(\mathrm{d}\omega^i\vec{e}_i-\omega^i\wedge\mathrm{d}\vec{e}_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}\omega^i\vec{e}_i-\sum_{i=1}^{3}\omega^i\wedge(\sum_{j=1}^{3}\omega_i^j\vec{e}_j)=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}\omega^i\vec{e}_i-\sum_{i,j=1}^{3}\omega^i\wedge\omega_i^j\vec{e}_j$$

$$=\sum_{i=1}^{3}(\mathrm{d}\omega^i-\omega^j\wedge\omega_j^i)\vec{e}_i\quad=0\quad(\text{由Poincaré引理}\mathrm{d}\mathrm{d}\vec{r}=0).$$

所以 $\mathrm{d}\omega^i=\sum_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega_j^i\quad(i=1,2,3).$

类似地，由 $\mathrm{d}\mathrm{d}\vec{e}_i=0$ 得到 $\mathrm{d}\omega_i^j=\sum_{k=1}^{3}\omega_i^k\wedge\omega_k^j\ \ (i,j=1,2,3).$

实例：双参数活动标架结构方程的具体化

①由$\omega^3=0$得$\mathrm{d}\omega^3=\sum_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega_j^3=\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3=0$,

因此由Cartan引理得存在函数$a(u,v),b(u,v),c(u,v)$使

$$\omega_1^3=a\omega^1+b\omega^2,\ \omega_2^3=b\omega^1+c\omega^2.$$

②设$\omega_1^2=g_1(u,v)\mathrm{d}u+g_2(u,v)\mathrm{d}v$,

则$\omega_1^2=\dfrac{g_1}{\sqrt{E}}\sqrt{E}\mathrm{d}u+\dfrac{g_2}{\sqrt{G}}\sqrt{G}\mathrm{d}v=\dfrac{g_1}{\sqrt{E}}\omega^1+\dfrac{g_2}{\sqrt{G}}\omega^2$.

$$\mathrm{d}\omega^1=\sum_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega_j^1=\omega^2\wedge\omega_2^1$$

$$=\omega^2\wedge\left(-\frac{g_1}{\sqrt{E}}\omega^1-\frac{g_2}{\sqrt{G}}\omega^2\right)=\frac{g_1}{\sqrt{E}}\omega^1\wedge\omega^2.$$

$$\mathrm{d}\omega^2=\sum_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega_j^2=\omega^1\wedge\omega_1^2$$

$$=\omega^1\wedge\left(\frac{g_1}{\sqrt{E}}\omega^1+\frac{g_2}{\sqrt{G}}\omega^2\right)=\frac{g_2}{\sqrt{G}}\omega^1\wedge\omega^2.$$

在形式上记 $\dfrac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2}\triangleq\dfrac{g_1}{\sqrt{E}}$, $\dfrac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1\wedge\omega^2}\triangleq\dfrac{g_2}{\sqrt{G}}$,

则 $\omega_1^2=\left(\dfrac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2}\right)\omega^1+\left(\dfrac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1\wedge\omega^2}\right)\omega^2.$

③ $\mathrm{d}\omega_3^1=\omega_3^2\wedge\omega_2^1$和 $\mathrm{d}\omega_3^2=\omega_3^1\wedge\omega_1^2$ $(\Leftrightarrow \mathrm{d}\mathrm{d}\vec{e}_3=0)$

相当于曲面论中的Codazzi-Mainardi公式;

④ $\mathrm{d}\omega_1^2=\omega_1^3\wedge\omega_3^2$ 相当于曲面论中的Gauss公式.

活动标架的基本定理(P149-P150)

给出六个p参数$u^1,u^2,\cdots,u^p(p\le 6)$的Pfaff形式

$$\omega^1(u,\mathrm{d}u),\omega^2(u,\mathrm{d}u),\ \omega^3(u,\mathrm{d}u),$$

$$\omega_1^2(u,\mathrm{d}u),\omega_2^3(u,\mathrm{d}u),\ \omega_3^1(u,\mathrm{d}u),$$

如果它们满足结构方程(设$i,j=1,2,3$):

$$\mathrm{d}\omega^i=\sum_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega_j^i,\ \mathrm{d}\omega_i^j=\sum_{k=1}^{3}\omega_i^k\wedge\omega_k^j,\ \omega_i^j+\omega_j^i=0,$$

则存在 p 参数活动标架

$$\{\vec{r}(u^1,u^2,\cdots,u^p);\vec{e}_i(u^1,u^2,\cdots,u^p)\,(i=1,2,3)\}$$

使得它们的相对分量就是给定的ω^i和ω_i^j,并且同一结构方程的不同p参数活动标架之间只差一空间位置.

证明：

Step1. 构造以$\vec{r}(u),\vec{e}_1(u),\vec{e}_2(u),\vec{e}_3(u)$为未知函数的**Pfaff方程组**;

$$\begin{cases}\pi = \mathrm{d}\vec{r} - \omega^1\vec{e}_1 - \omega^2\vec{e}_2 - \omega^3\vec{e}_3 = 0 \\ \pi_i = \mathrm{d}\vec{e}_i - \omega_i^1\vec{e}_1 - \omega_i^2\vec{e}_2 - \omega_i^3\vec{e}_3 = 0\ (i = 1,2,3)\end{cases}$$

Step2. 证明该Pfaff方程组完全可积(即证明该方程组满足Frobenius条件);

$$\mathrm{d}\pi = \sum_{i=1}^{3}\left(-\mathrm{d}\omega^i + \sum_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega_j^i\right)\vec{e}_i + \sum_{i=1}^{3}\omega^i\wedge\pi_i$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\omega^i\wedge\pi_i$$

$$\mathrm{d}\pi_i=\sum_{j=1}^{3}\left(-\mathrm{d}\omega_i^j+\sum_{k=1}^{3}\omega_i^k\wedge\omega_k^j\right)\vec{e}_j+\sum_{j=1}^{3}\omega_i^j\wedge\pi_j$$

$$=\sum_{j=1}^{3}\omega_i^j\wedge\pi_j$$

Step3. 叙述结论.

由完全可积的定义知在给出初始条件时上述

Pfaff方程组存在唯一解.

条件$\omega_i^j+\omega_j^i=0$保证了$\vec{e}_1(u),\vec{e}_2(u),\vec{e}_3(u)$两两正交,

该组解构成一个p参数活动标架.

不同初始条件下的解只相差一个空间合同变换.

故…….

三、活动标架法

Step1. 设法找到一族活动标架,使所研究的图形与这族活动标架一一对应起来;

Step2. 把活动标架微分一次得到活动标架的相对分量;

Step3. 把得到的相对分量外微分一次,得到它们应满足的结构方程;

Step4. 利用相对分量去描述图形的几何特点.

实例：用活动标架法研究空间曲线

空间曲线(C)：$\vec{r}=\vec{r}(s)$，s为自然参数.

Step1. 构建活动标架：$\{\vec{r}(s);\vec{e}_1(s),\vec{e}_2(s),\vec{e}_3(s)\}$

$$\text{其中}\ \vec{e}_1=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s},\ \vec{e}_2=\frac{\mathrm{d}\vec{e}_1}{\mathrm{d}s}\bigg/\left|\frac{\mathrm{d}\vec{e}_1}{\mathrm{d}s}\right|,\quad \vec{e}_3=\vec{e}_1\times\vec{e}_2.$$

Step2. 计算相对分量:

$$\mathrm{d}\vec{r}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=\mathrm{d}s\vec{e}_1+0\vec{e}_2+0\vec{e}_3,$$

因此$\omega^1=\mathrm{d}s,\quad \omega^2=0,\quad \omega^3=0;$

$$\mathrm{d}\vec{e}_1 = 0\vec{e}_1 + \omega_1^2\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 \Rightarrow \omega_1^1 = \omega_1^3 = 0 = -\omega_3^1.$$

记$\omega_1^2 = k(s)\mathrm{d}s$, 则$\omega_2^1 = -k(s)\mathrm{d}s$.

$$\mathrm{d}\vec{e}_2 = \omega_2^1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \omega_2^3\vec{e}_3 = -k(s)\mathrm{d}s\vec{e}_1 + \omega_2^3\vec{e}_3 \Rightarrow \omega_2^2 = 0.$$

记$\omega_2^3 = \tau(s)\mathrm{d}s$,

则$\omega_3^2 = -\tau(s)\mathrm{d}s$, $\quad \mathrm{d}\vec{e}_2 = -k(s)\mathrm{d}s\vec{e}_1 + \tau(s)\mathrm{d}s\vec{e}_3$.

$$\mathrm{d}\vec{e}_3 = \omega_3^1\vec{e}_1 + \omega_3^2\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = 0\vec{e}_1 - \tau(s)\mathrm{d}s\vec{e}_2 = -\tau(s)\mathrm{d}s\vec{e}_2.$$

无穷小位移为：

$$\begin{cases} \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}s\vec{e}_1 \\ \mathrm{d}\vec{e}_1 = k(s)\mathrm{d}s\vec{e}_2 \\ \mathrm{d}\vec{e}_2 = -k(s)\mathrm{d}s\vec{e}_1 + \tau(s)\mathrm{d}s\vec{e}_3 \\ \mathrm{d}\vec{e}_3 = -\tau(s)\mathrm{d}s\vec{e}_2 \end{cases}$$

Step3. 计算结构方程：

$\because$ 单参数Pfaff形式的外微分为零,

$\therefore$ 无结构方程,

即无需可积条件就能确定曲线方程.

Step4. 应用……

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

3.7 设 $f(x,y,z)$是定义在$\mathbb{R}^3$上的一个C^∞类的函数,
令 $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{e}_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin f, 1, -\cos f)$,
$\vec{e}_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin f, -1, -\cos f)$, $\vec{e}_3=(-\cos f, 0, -\sin f)$
验证$\{\vec{r};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$是$\mathbb{R}^3$中的一个单位正交标架场,
并求它的相对分量.

3.8 在旋转曲面$\vec{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, g(u))$上
建立一个单位正交标架场,并计算它的相对分量.