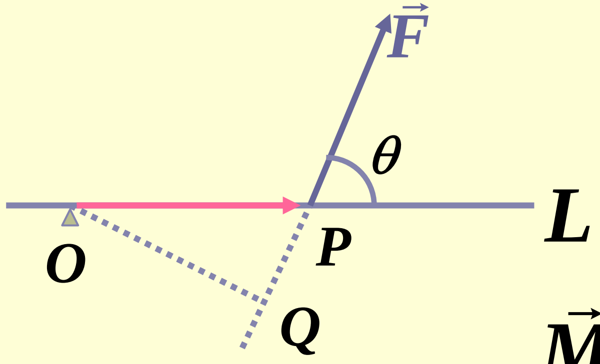
§4 向量的外积

实例

设O为一根杠杆L的支点，有一力$\vec{F}$作用于这杠杆上P点处．力$\vec{F}$与OP的夹角为θ，力$\vec{F}$对支点O的力矩是一向量$\vec{M}$，它的模



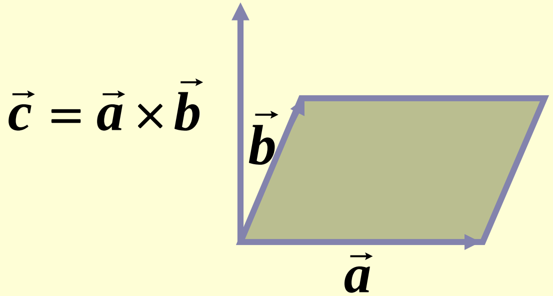
$$|\vec{M}| = |OQ||\vec{F}|$$

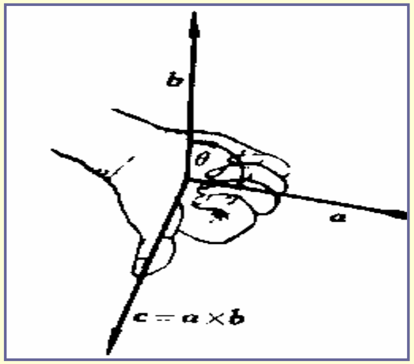
$$= |\overrightarrow{OP}||\vec{F}|\sin\theta$$

$\vec{M}$的方向垂直于OP与$\vec{F}$所决定的平面，指向符合右手系.

1.向量的外积的定义

定义：两个向量$\vec{a},\vec{b}$的外积是一个向量，用$\vec{a}\times\vec{b}$表示，它的长度：$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin < \vec{a},\vec{b} >$　其中$0 \le < \vec{a},\vec{b} > \le \pi$．它的方向既垂直$\vec{a}$又垂直于$\vec{b}$，而且按$\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$次序构成右手系.





基本结论：

(1) $\vec{a}\times\vec{b}$ 的长 $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ 等于以 $\vec{a},\vec{b}$ 为边的平行四边形面积;

(2) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b}$ 共线;

(3) $\vec{a}\times\vec{a}=0$;

(4) $(-\vec{a})\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$;

(5)若 $\vec{a},\vec{b}$ 为互相垂直的单位向量，则 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ 也是单位

向量，且 $\vec{a},\vec{b}$ $\vec{c}$ 互相垂直，且 $\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c},\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$.

2.向量的外积运算规律

命题：若 $\vec{a} \neq 0, \vec{b}_2$ 是 $\vec{b}$ 的外射影，则 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_2$

命题：设 $\vec{e}$ 是单位向量，$\vec{b} \perp \vec{e}$ 。则 $\vec{e} \times \vec{b}$ 等于 $\vec{b}$ 按右手螺旋规律 $\vec{e}$ 旋转 90^0 得到的向量 $\overrightarrow{b'}$.

运算规律：

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

(2) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

(3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

(4) $(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}$

例 1、求$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$.

例 **2**、已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$不共线，试从等式

$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$，推出：$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$.

3.用坐标计算向量的外积

仿射标架$\left[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right]$,

设 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_1b_2-b_1a_2)\vec{e}_1\times\vec{e}_2+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{e}_3\times\vec{e}_1+(a_2b_3-a_3b_2)\vec{e}_2\times\vec{e}_3$$

定理:若$\left[O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right]$是右手直角标架，则

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{e}_2$$

$$+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{e}_3$$

$\vec{a}\times\vec{b}$的坐标为$\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)$,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$$

§5 向量的混合积

1.向量的混合积的几何意义和性质

$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$ 表示以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积。且如果 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}>0$，则 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 呈右手系，否则为左手系。$\therefore$ 称 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 为定向平行六面体的定向体积。记为 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

性质:

① 三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面$\Leftrightarrow (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$

②三向量混合积只要保持三向量的循环次序，$\times$号可与$\cdot$号互换而混合积的值不变。

即 (1) $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{c}\times\vec{a}\cdot\vec{b}$;

(2) $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}$.

2.用坐标计算向量的混合积

在仿射坐标系$[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$下　$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，

$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$

则$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\vec{e}_1\times\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3$.

当$\left[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right]$为右手直角标系时

$$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

例1 已知$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=2$,

计算$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

例 2 已知空间内不在一平面上的四点

$A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$、$C(x_3,y_3,z_3)$、

$D(x_4,y_4,z_4)$, 求四面体的体积.

$$\overrightarrow{AC}=\{x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1\}$$

$$\overrightarrow{AD}=\{x_4-x_1,y_4-y_1,z_4-z_1\}$$

$$\therefore V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$

式中正负号的选择必须和行列式的符号一致.

4.二重外积

命题：对任意向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，有

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

称为二重外积公式

注意：一般情况下 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

公式：$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=0$

3.三向量（或四点）共面

定理：设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的仿射坐标分别为 (a_1,a_2,a_3)，

(b_1,b_2,b_3)，(c_1,c_2,c_3)，则 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面充要条件

是 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$

推论：设四点 A、B、C、D 的仿射坐标分别为 $(x_i, y_i, z_i), i=1,2,3,4$，则 A、B、C、D 共面的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4.拉格朗日恒等式及其应用

定理：对任意四个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$,有

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}$$

称之为拉格朗日（**Lagrange**）恒等式.

例：三直角棱锥的斜面面积的平方等于其他三个面的面积的平方和。（二维的勾股定理）

例：设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面，设向量 $\vec{x}$ 满足

$$\vec{a}\cdot\vec{x}=f,\vec{b}\cdot\vec{x}=g,\vec{c}\cdot\vec{x}=h$$

证明：$$\vec{x}=\frac{f(\vec{b}\times\vec{c})+g(\vec{c}\times\vec{a})+h(\vec{a}\times\vec{b})}{\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}}$$