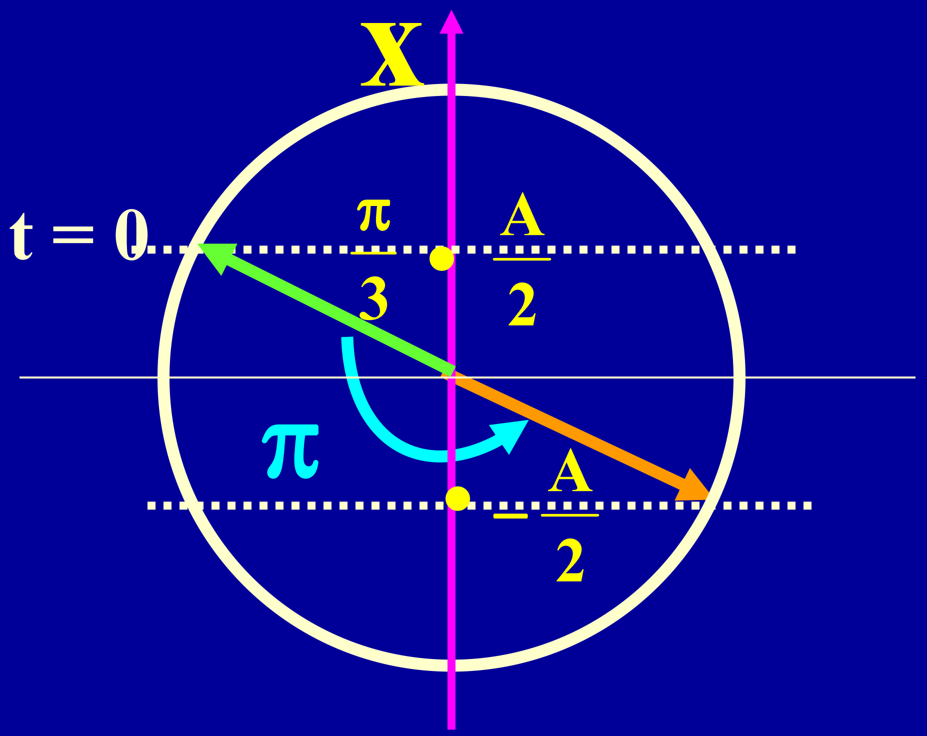
例题 1 振动方程 $x = 4\times10^{-2}\cos(2\pi t + \frac{1}{3}\pi)$ 求从t = 0 时刻起 , 到质点位置在 x = -2cm处，且向x轴正方向运动的最短时间

（自测题）

$\because\ \omega=2\pi$

$t = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}s$



例题 2　长为l 的均匀细棒悬于通过其一端的光滑水平轴上，成一复摆。已知细棒的转动惯量为 $J=\frac{1}{3}ml^2$ 求：此摆作微小振动的周期

自测题

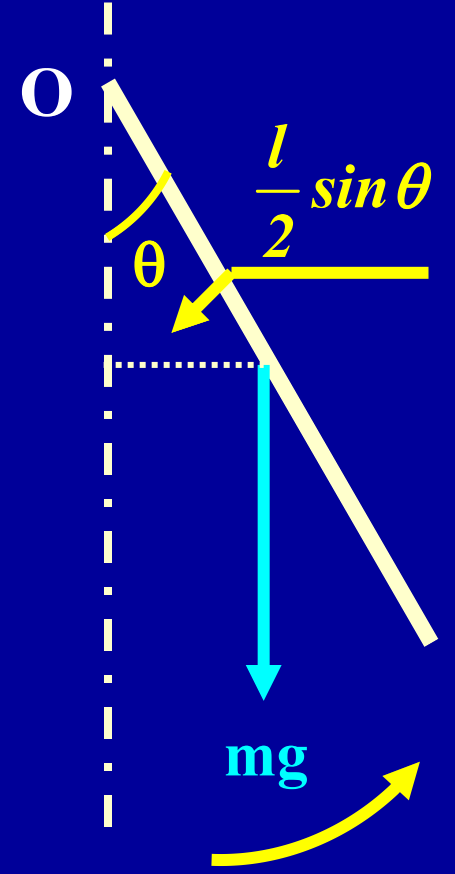
解：

$$-mg\frac{l}{2}\sin\theta = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{mgl}{2J}\theta = 0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{mgl}{2J}}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$$

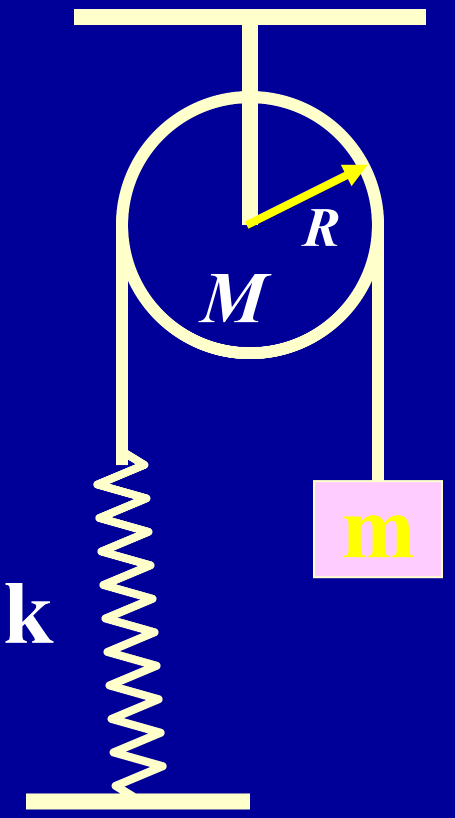


例题 3 一定滑轮质量为M，半径为R，一轻绳跨过滑轮，其一端系一质量为m的物块，另一端与一固定的轻弹簧（弹性系数为k)连结，若绳与轮之间无滑动，轮轴是光滑的。开始时托住弹簧，使之处于原长，然后放手使物块振动。求

（1）物块的振动表达式

（2) 物块振动的最大速度

（ 自测题 ）



解：须考虑M、m 一起运动。

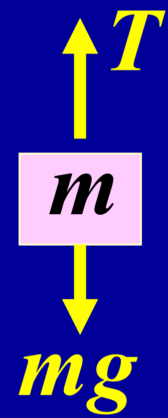
设物块有一个位移 x

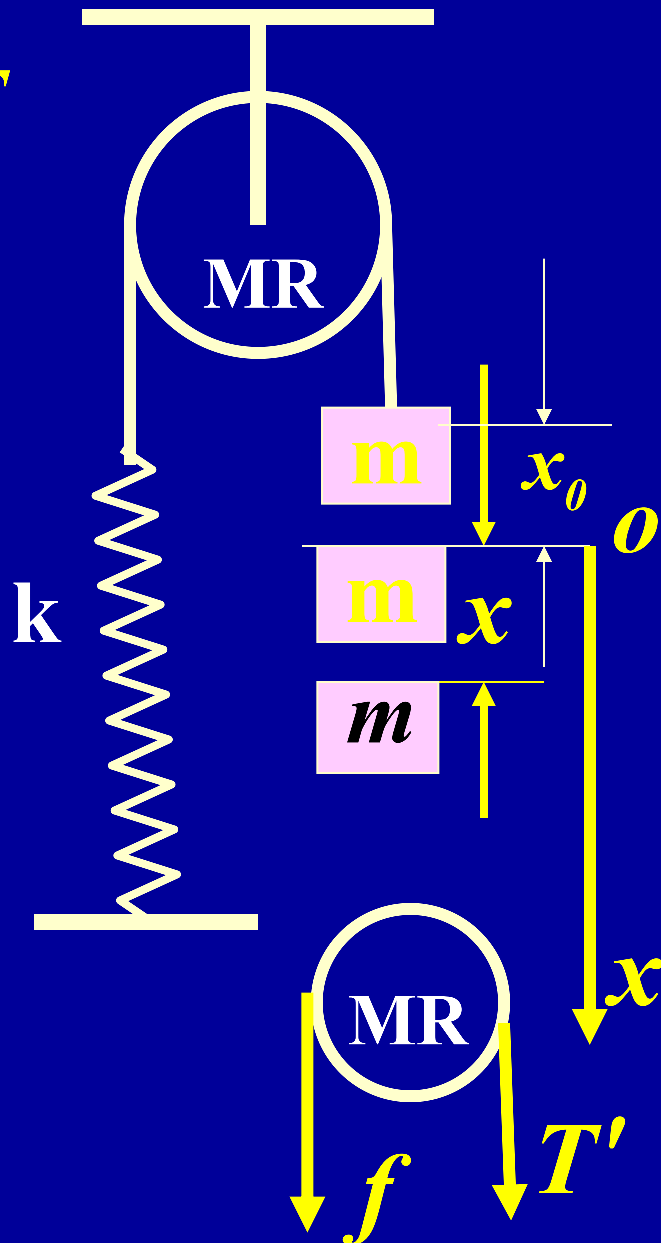
$$m: \quad mg-T=m\frac{d^2x}{dt^2} \quad ----(1)$$

$$M: \quad T'R-fR=J\frac{1}{R}\frac{d^2x}{dt^2} \quad ---(2)$$

$$f=k(x+x_0) \qquad T'=T$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{(m+J/R^2)}x=0$$





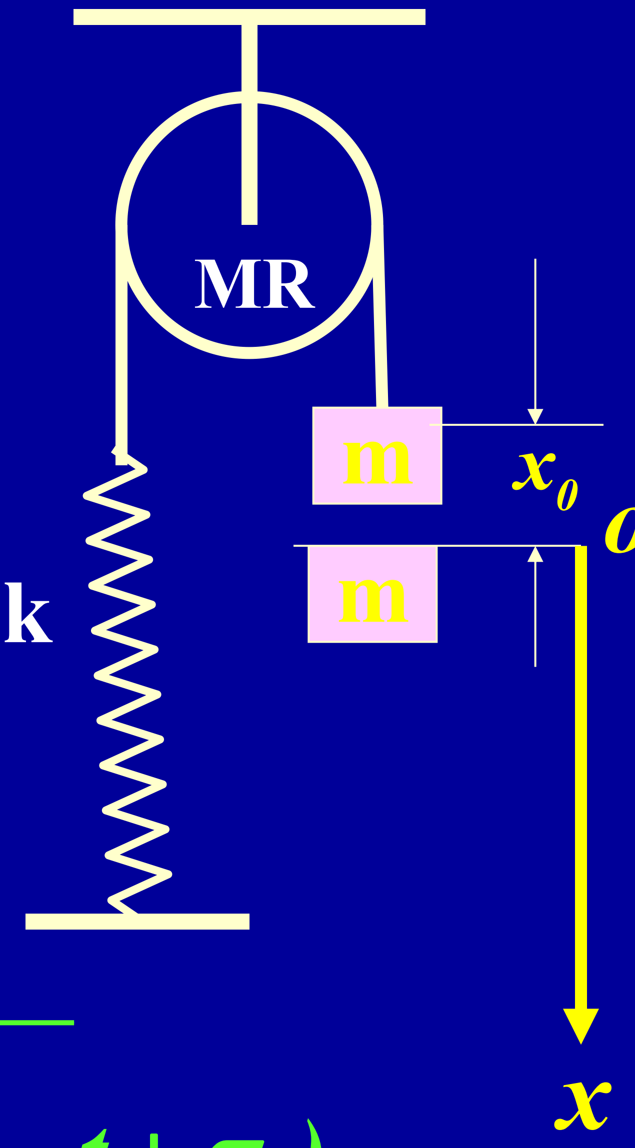
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{(m+J/R^2)}x=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m+\frac{J}{R^2}}}=\sqrt{\frac{K}{m+\frac{M}{2}}}=\sqrt{\frac{2K}{2m+M}}$$

$$t=0\quad\begin{cases}x_0=-\dfrac{mg}{k}\\ v_0=0\end{cases}\qquad \therefore A=x_0=\frac{mg}{k}$$

$$\therefore\varphi=\pi$$

$$x=\frac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{2m+M}}t+\pi\right)$$



$$x=\frac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{2m+M}}t+\pi\right)$$

$$v=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

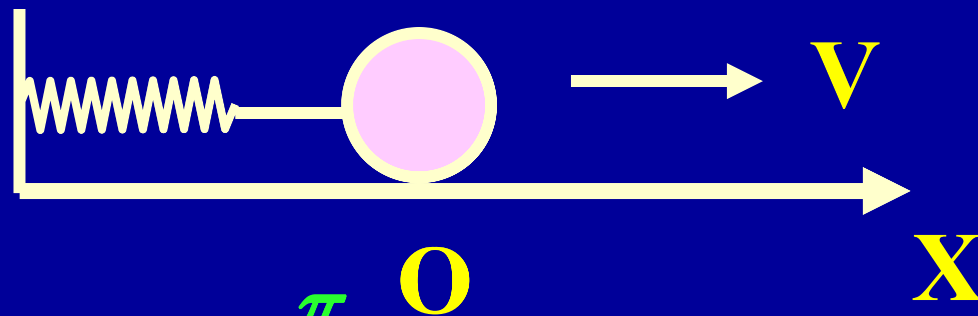
$$=-v_m\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\therefore v_m=\frac{mg}{k}\sqrt{\frac{2k}{2m+M}}$$

例题 4 水平面上弹簧振子，如果小球经平衡位置向右运动时动能为E_{K0},振动周期为T=1秒，则再经过1/3 秒时小球的动能E_K与E_{K0}之比等于多少？

解：

$$t=0\quad\begin{cases}x_0=0\\ v_0>0\end{cases}\quad\therefore\varphi=-\frac{\pi}{2}$$



$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi$$

$$x=A\cos(2\pi t-\frac{\pi}{2})$$

$$v=-2\pi A\sin(2\pi t-\frac{\pi}{2})$$

$t=\frac{1}{3}s$ 时

$$x=A\cos(2\pi\frac{1}{3}-\frac{\pi}{2})=A\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}A$$

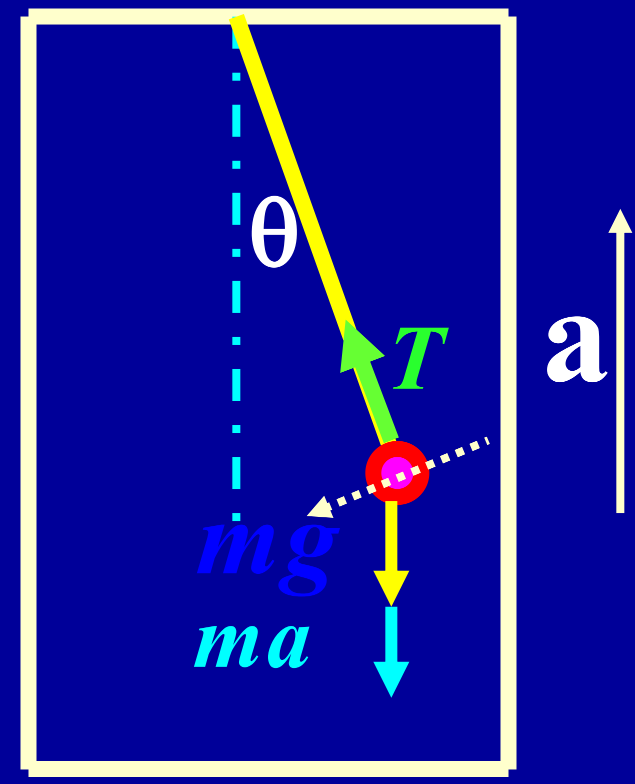
$$x = A\cos\left(2\pi\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = A\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}A$$

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\frac{3}{4}A^2 = \frac{3}{4}E$$

$$E_K = E - E_P = \frac{1}{4}E$$

$$\because E_{KO} = E \qquad \therefore E_K : E_{KO} = 1 : 4$$

例题 5　　升降机里有一单摆在升降机静止时作简谐振动，当升降机以加速度a上升时，则单摆的振动频率如何变化？



解：切向方程：

$$-m(g+a)\sin\theta = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

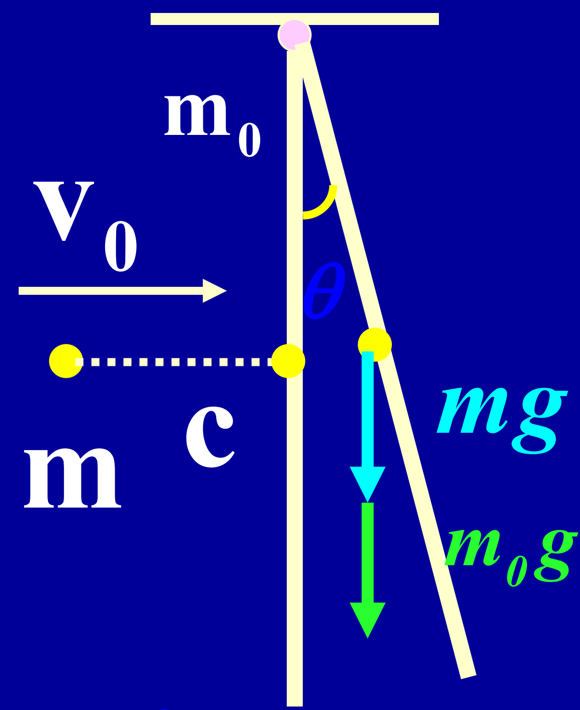
$$-\frac{(g+a)}{l}\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g+a}{l}\right)\theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g+a}{l}} \qquad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g+a}{l}}$$

例题 6　细杆质量为m_0长为l， 竖直悬挂。质量为m的子弹以水平速度 v_0 射入杆的中心。

证明杆作谐振动，并求振动周期。



解：振动系统是子弹和杆

刚体的转动方程：

$$-mg\frac{l}{2}\sin\theta-m_0g\frac{l}{2}\sin\theta$$

$$=(m\frac{l^2}{4}+\frac{1}{3}m_0l^2)\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-(mg+m_0g)\frac{l}{2}\theta=(m\frac{l^2}{4}+\frac{1}{3}m_0l^2)\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-(mg+m_0g)\frac{l}{2}\theta=(m\frac{l^2}{4}+\frac{1}{3}m_0l^2)\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{(m+m_0)g\frac{l}{2}}{(\frac{m}{4}+\frac{m_0}{3})l^2}\theta=0$$

证毕

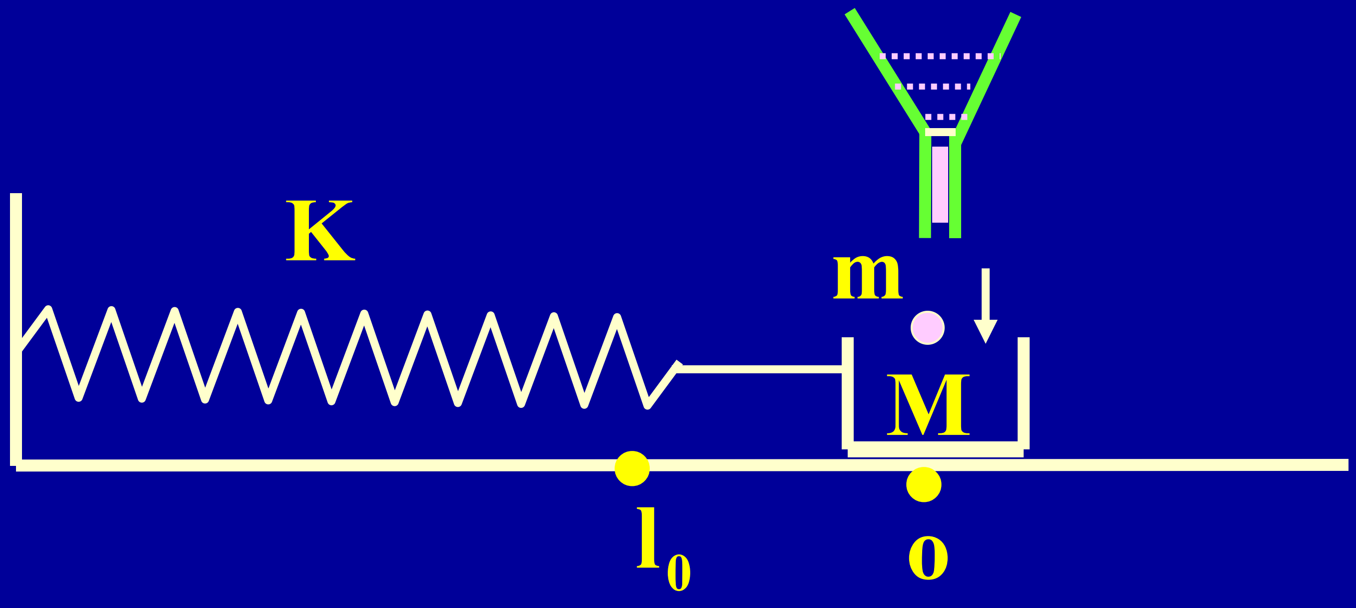
$$\omega=\sqrt{\frac{6(m+m_0)g}{(3m+4m_0)l}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{(3m+4m_0)l}{6(m+m_0)g}}$$

例题 7　　如图所示，容器质量为M，　O点为弹簧原长处，当簧的弹性系数为K 。 今使容器自平衡位置O点的左端 l_0 处，从静止开始运动，每经过o点一次, 从上方滴管滴入一质量为m的液滴，求：

（1）滴到n滴时，容器运动到最远处是多少？

（2）第n+1滴与第n滴的时间间隔。



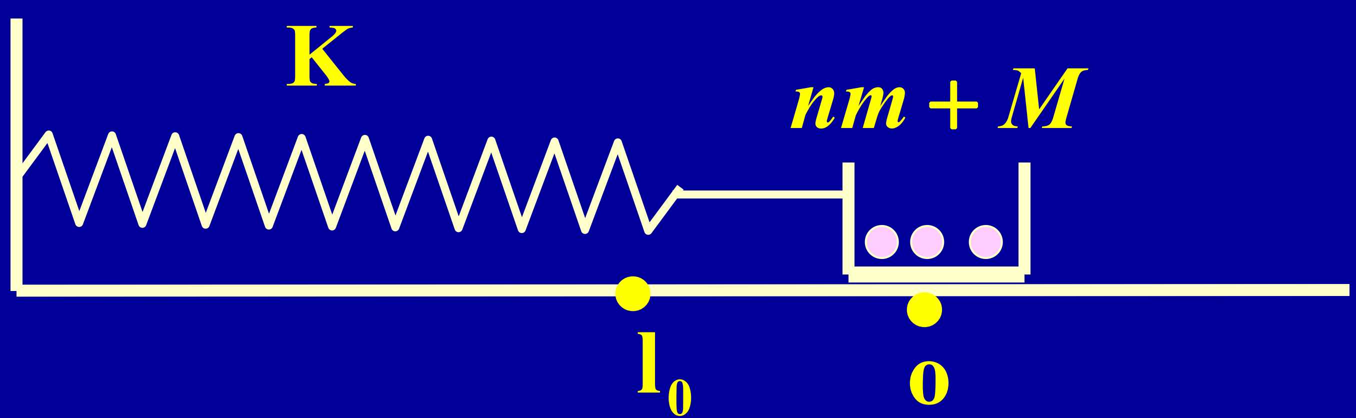
解： (1) 动量守恒 $Mv_m = (M+nm)v'$ $v' = \frac{Mv_m}{(M+nm)}$

机械能守恒：未滴入时 $\frac{1}{2}kl_0^2 = \frac{1}{2}Mv_m^2 \rightarrow v_m = l_0\sqrt{\frac{k}{M}}$

n滴滴入后:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(M+nm)v'^2 = \frac{1}{2}kl_0^2\left(\frac{M^2}{M+nm}\right)$$

$$x = l_0\sqrt{\frac{M}{(M+nm)}}$$

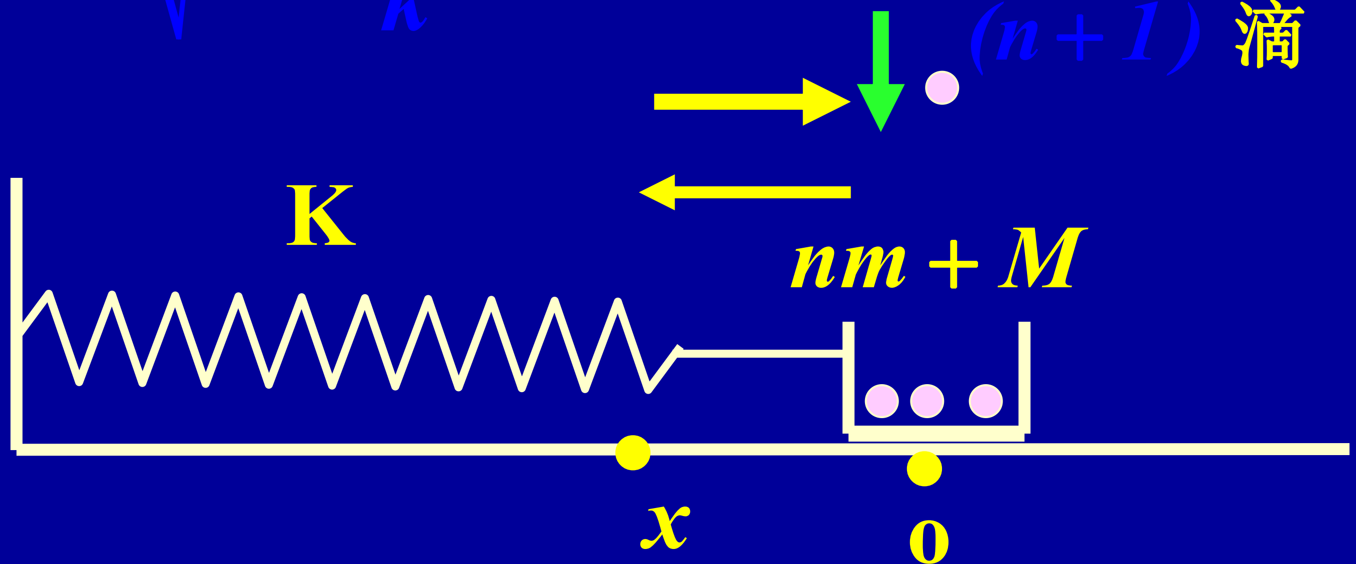


(2)滴入n滴后，周期变为：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(M+nm)}{k}}$$

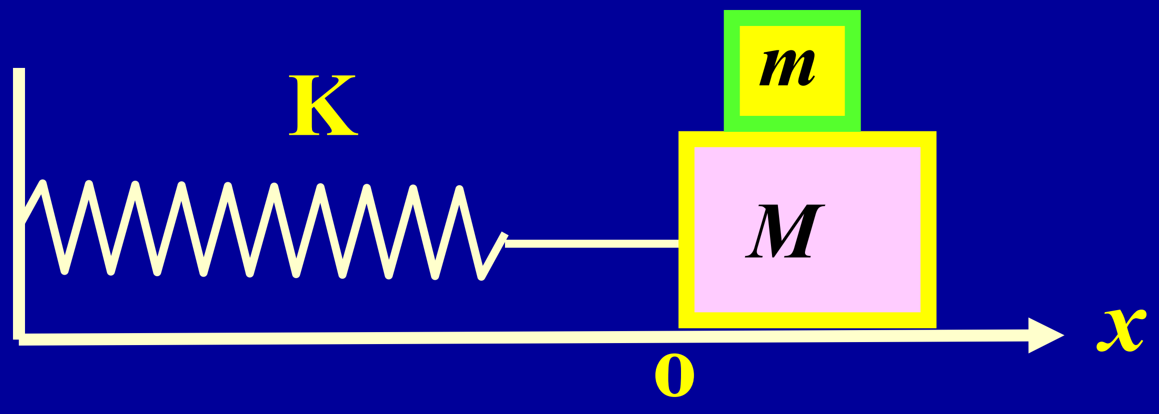
在（n+1)滴滴入前，从o —x— o为半个周期

$$\therefore t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{(M+nm)}{k}}$$



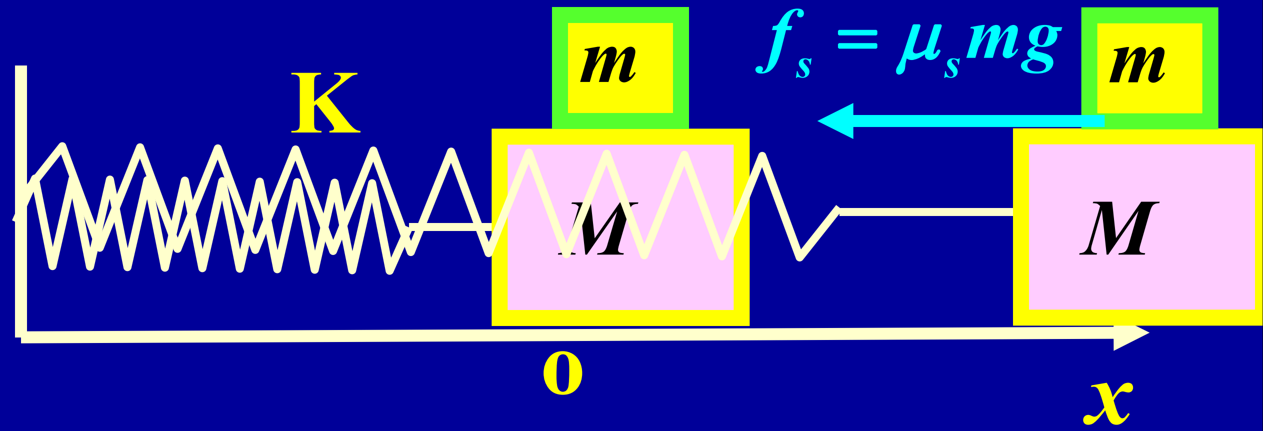
例题 8 （学习指导）

一弹性系数 k=312N/m 的轻弹簧，一端固定另一端连接一质量为 M=0.3kg 的物体，放在光滑的水平面上，M上面放一质量为 m=0.2kg 的物体，两物体间的静摩擦系数 μ=0.5，求两物体间无相对滑动时系统振动的最大能量。



$$f_{max} = f_s$$

$$= \mu_s mg = ma_{max}$$



$$a_{max} = \mu_s g = A\omega^2$$

$$A = \frac{a_{max}}{\omega^2} = \frac{\mu_s g}{\omega^2} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$$

$$E_{max} = \frac{1}{2}kA^2 = 9.62\times10^{-3} J$$