第十章 机械振动

10.1 谐振动

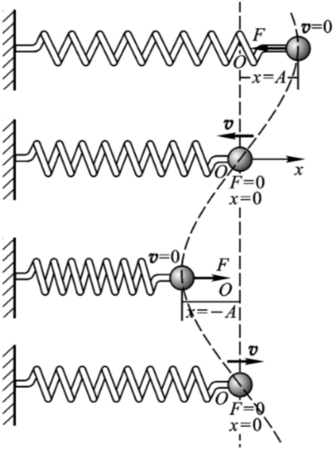
一、谐振动的特征及其表达式

简谐振动： 物体运动时，离开平衡位置的位移(或角位移)按余弦(或正弦)规律随时间变化.

受力特点：**线性回复力**

$$F = -kx$$

这是简谐振动动力学特征



10.1 谐振动

由$F = ma = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$及$F = -kx$有

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$令\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

简谐振动的特征方程

其解为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad 简谐振动表达式$$

10.1 谐振动

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

简谐振动的速度和加速度:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) = v_m\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) = a_m\cos(\omega t + \varphi_0 \pm \pi)$$

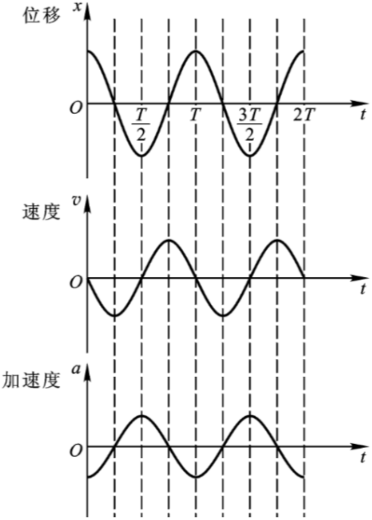
$v_m = \omega A$ 称为速度幅值;

$a_m = \omega^2 A$ 称为加速度幅值.

10.1 谐振动

简谐振动的运动学特征方程

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$$



10.1 谐振动

由初始条件(x_0, v_0)求解振幅和初相位:

设 $t = 0$时，振动位移: $x = x_0$; 振动速度: $v = v_0$

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad x_0 = A\cos\varphi_0 \\ v &= -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad v_0 = -\omega A\sin\varphi_0 \end{aligned}$$

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2(\sin^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0) = A^2$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \qquad \tan\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

10.1 谐振动

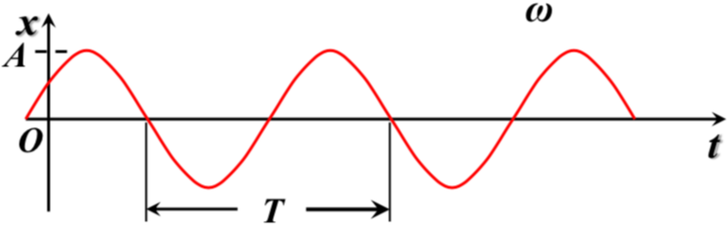
二、描述谐振动的特征量

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

1. 振幅A: 即最大位移，$x = \pm A$
2. 周期T: 完成一次完全振动所经历的时间.

   频率ν: 单位时间内完成完全振动的次数. $\nu = 1/T$

   角频率(圆频率)ω: $T = 2\pi/\omega$, $\omega = 2\pi\nu$



10.1 谐振动

3. 相位: $(\omega t+\varphi_0)$ — 描述振动状态

初相位: φ_0

相位差: $\Delta\varphi=(\omega_2 t+\varphi_{20})-(\omega_1 t+\varphi_{10})$

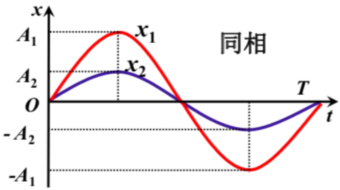
对两同频率的谐振动 $\Delta\varphi=\varphi_{20}-\varphi_{10}$ 初相差

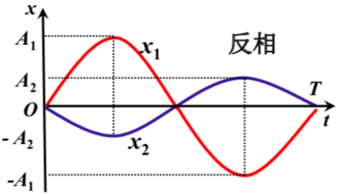
当$\Delta\varphi=\pm 2k\pi$, $(k=0,1,2,\ldots)$, 两振动步调相同, 称同相.

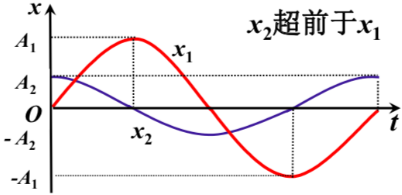
当$\Delta\varphi=\pm(2k+1)\pi$, $(k=0,1,2,\ldots)$, 两振动步调相反, 称反相.

若$0<\varphi_{20}-\varphi_{10}<\pi$, 则$x_2$比$x_1$较早达到正最大, 称$x_2$比$x_1$超前 (或$x_1$比$x_2$落后).

10.1 谐振动


x
A1
A2
O
- A2
-A1
x1
x2
同相
T
t


x
A1
A2
O
- A2
-A1
x1
x2
反相
T
t

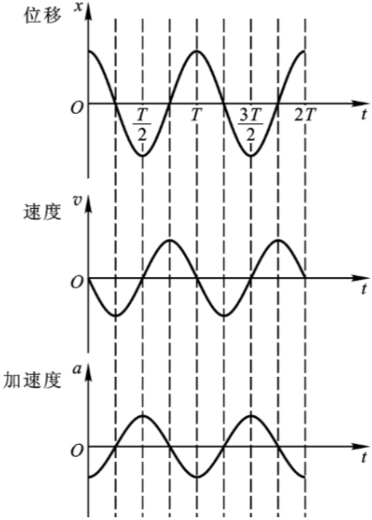

x
A1
A2
O
- A2
-A1
x1
x2
x2超前于x1
t

10.1 谐振动

$$v = v_m \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$
$$a = a_m \cos(\omega t + \varphi_0 \pm \pi)$$

速度相位比位移相位超前$\pi/2$.

加速度与位移反相位

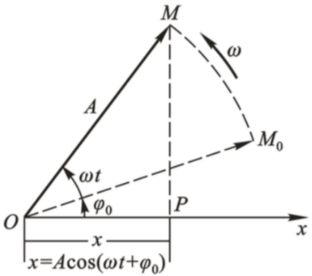


10.1 谐振动

三、谐振动的旋转矢量图示法

旋转矢量$\vec{A}$绕原点逆时针方向旋转

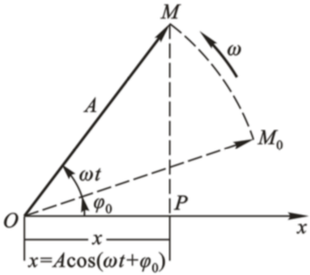
- 旋转矢量$\vec{A}$的模即为简谐振动的振幅.
- 旋转矢量$\vec{A}$的角速度ω即为振动的角频率.
- 旋转矢量$\vec{A}$与x轴的夹角$(\omega t+\varphi_0)$，为简谐振动的相位.
- $t=0$时，$\vec{A}$与x轴的夹角φ_0即为简谐振动的初相位.



10.1 谐振动

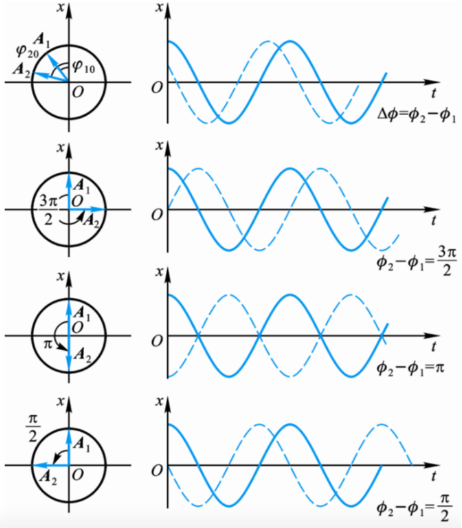
旋转矢量$\vec{A}$的端点在x轴上的投影点P的位移:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$



投影点P的运动为简谐振动.

10.1 谐振动



两简谐振动同频率同振幅初相位不同

10.1 谐振动

例10.1-1 一物体沿x轴作简谐振动，振幅$A=0.12\mathrm{m}$，周期$T=2\mathrm{s}$. 当$t=0$时，物体的位移$x=0.06\mathrm{m}$，且向x轴正向运动. 求: (1)简谐振动表达式; (2)$t=T/4$时物体的位置、速度和加速度;(3)物体从$x=-0.06\mathrm{m}$处向x轴负方向运动，第一次回到平衡位置所需时间.

解: (1) 设简谐振动表达式为$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi\mathrm{s}^{-1}$$

由初始条件:

$$0.06=0.12\cos\varphi_0\rightarrow\varphi_0=\pm\frac{\pi}{3}$$

$$v_0=-\omega A\sin\varphi>0\rightarrow\sin\varphi_0<0$$

$$\varphi_0=-\frac{\pi}{3}$$

10.1 谐振动

简谐振动表达式:

$$x = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3}) \quad (\text{m})$$

(2) $$x\Big|_{t=0.5} = 0.12\cos(0.5\pi - \frac{\pi}{3}) = 0.10(\text{m})$$

$$v\Big|_{t=0.5} = -0.12\pi\sin(\pi t - \frac{\pi}{3})\Big|_{t=0.5} = -0.18(\text{m/s})$$

$$a\Big|_{t=0.5} = -0.12\pi^2\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})\Big|_{t=0.5} = -1.03(\text{m/s}^2)$$

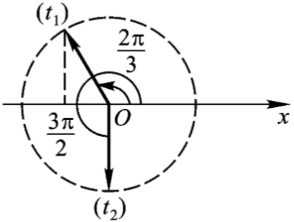
10.1 谐振动

$$x = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$$

(3) 从$x = -0.06$m处向Ox轴负方向运动

第一次回到平衡位置，

振幅矢量转过$\frac{5}{6}\pi$



$$\Delta\varphi = (\omega t_2 + \varphi_0) - (\omega t_1 + \varphi_0) = \omega(t_2 - t_1) = \frac{5}{6}\pi$$

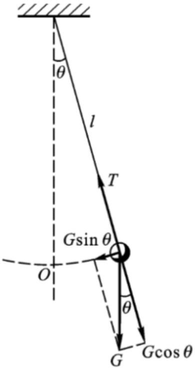
$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{5\pi/6}{\pi} = 0.83 \text{ s}$$

10.1 谐振动

四、几种常见的谐振动

1. 单摆

重物所受合外力矩：



$$M = -mgl\sin\theta$$
$$\sin\theta \approx \theta$$
$$M = -mgl\theta$$

由转动定律 $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \dfrac{M}{J} = -\dfrac{mgl\theta}{ml^2} = -\dfrac{g}{l}\theta$

令 $\omega^2 = \dfrac{g}{l} \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

10.1 谐振动

振动表达式为 $\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi_0)$

角振幅θ_m和初相φ_0由初始条件求得。

当θ不是很小时:

单摆周期T与角振幅的关系为:

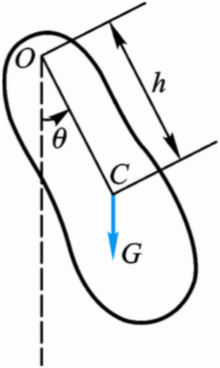
$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{2^2} \sin^2 \frac{\theta_m}{2} + \frac{1}{2^2} \frac{3^2}{4^2} \sin^4 \frac{\theta_m}{2} + \cdots \right)$$

T_0为θ_m很小时单摆的周期.

10.1 谐振动

2. 复摆：一个可绕固定轴摆动的刚体称为复摆。

$$-mgh\sin\theta = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



θ很小时: $\sin\theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{J}\theta = 0$$

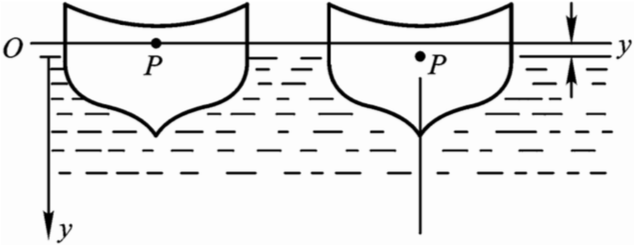
$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{J}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgh}}$$

10.1 谐振动

例10.1-2 一质量为m的平底船，其平均水平截面积为S，吃水深度为h，如不计水的阻力，求此船在竖直方向的振动周期.

解：船静止时浮力与重力平衡，



船在任一位置时，以水面为坐标原点，竖直向下的坐标轴为y轴，船的位移用y表示.

10.1 谐振动

船的位移为y时船所受合力为

$$\begin{aligned} F &= -(h+y)\rho Sg + mg = -y\rho Sg \\ F &= -\omega^2 y \end{aligned}$$

船在竖直方向做简谐振动，其角频率和周期为

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho Sg}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}}$$

$$m = \rho Sh, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

10.1 谐振动

五、谐振动的能量

以水平弹簧振子为例

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

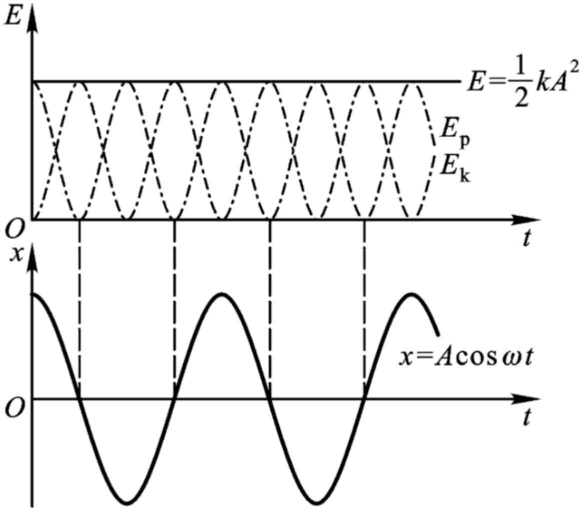
动能 $$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

势能 $$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

机械能 $$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

简谐振动系统机械能守恒

10.1 谐振动



10.1 谐振动

六、用能量法解谐振动问题

以水平弹簧振子为例

系统机械能守恒: $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$

对t求导: $mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = 0$

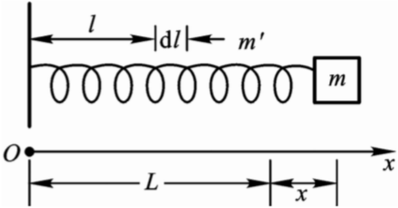
代入$v = \frac{dx}{dt}$ $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$

谐振动的运动方程: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \frac{k}{m} = \omega^2$

10.1 谐振动

例10.1-3 劲度系数为k，原长为L，质量为m'的均匀弹簧，一端固定，另一端系一质量为$m(> m')$的物体，在光滑水平面内做直线运动．求解其运动．

解：当物体处于位移x速度为v时，



弹簧元dl的质量为

$$dm' = m' \cdot \frac{dl}{L}$$

位移为$x\frac{l}{L}$ 速度为$v\frac{l}{L}$

10.1 谐振动

弹簧、物体的动能分别为

$$E_{k1}=\int_0^L \frac{1}{2}(\frac{m'}{l}dl)\left(\frac{l}{L}v\right)^2=\frac{1}{6}m'v^2 \quad E_{k2}=\frac{1}{2}mv^2$$

系统弹性势能为 $E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kx^2$

系统机械能守恒，有 $\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{6}m'v2+\frac{1}{2}kx^2=$ 常量

$$\frac{1}{2}(m+\frac{m'}{3})v^2+\frac{1}{2}kx^2=\text{常量}$$

10.1 谐振动

$$\frac{1}{2}(m+\frac{m'}{3})v^2+\frac{1}{2}kx^2=\text{常量}$$

对时间求导,$(m+\frac{m'}{3})\frac{dv}{dt}+kx=0$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m+\frac{m'}{3}}x=0 \quad \text{仍为简谐振动}$$

$$\omega^2=\frac{k}{m+\frac{m'}{3}} \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m+\frac{m'}{3}}{k}}$$

10.5 一维谐振动的合成

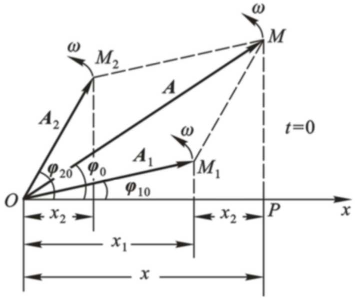
一、同一直线上两个同频率谐振动的合成

某一质点同时参与两个独立的、同方向、同频率的简谐振动，其振动位移分别为

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \phi_{10}) \qquad x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_{20})$$

合振动:(由振动的叠加原理)

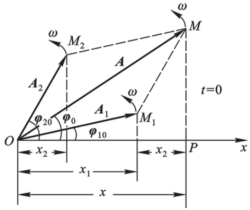
$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ \vec{A} &= \vec{A}_1 + \vec{A}_2 \\ x &= A\cos(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}$$



合振动仍为同方向同频率的简谐振动.

10.5 一维谐振动的合成

合振动：$x = A\cos(\omega t + \varphi)$



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{A_1\sin\varphi_{10} + A_2\sin\varphi_{20}}{A_1\cos\varphi_{10} + A_2\cos\varphi_{20}}$$

(1) 若 $\varphi_{20} - \varphi_{10} = 2k\pi \ (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

则 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$

(2) 若 $\varphi_{20} - \varphi_{10} = (2k+1)\pi \ \ (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

则 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2|$

10.5 一维谐振动的合成

例10.5-1 求N个同方向同频率的谐振动的合振动.

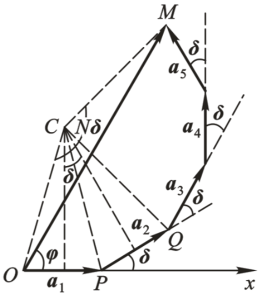
$$x_1 = a\cos\omega t,\ x_2 = a\cos(\omega t+\delta),\ \cdots,$$
$$x_N = a\cos[\omega t+(N-1)\delta]$$

解: $\angle OCM = N\delta$

$$A = OM = 2R\sin\frac{N}{2}\delta$$

在ΔOCP中, $a = 2R\sin\frac{\delta}{2}$

$$A = a\frac{\sin N\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$$



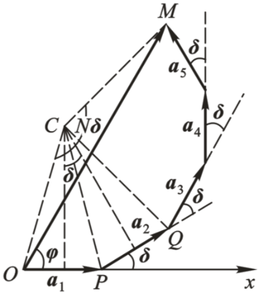
10.5 一维谐振动的合成

在ΔOCP中，

$$\angle COM = \frac{1}{2}(\pi - N\delta)$$

$$\angle COP = \frac{1}{2}(\pi - \delta)$$

$$\varphi = \angle COP - \angle COM = \frac{N-1}{2}\delta$$



合振动表达式

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = a\frac{\sin N\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\cos(\omega t + \frac{N-1}{2}\delta)$$

10.5 一维谐振动的合成

$$A = 2R\sin\frac{N}{2}\delta = a\frac{\sin N\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

讨论:

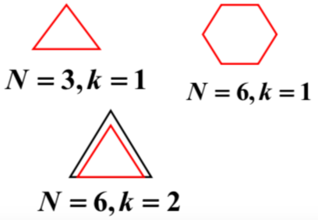
1. 若$\delta \to 0$ 则有 $A \to Na$

$$x = Na\cos\omega t$$

2. 若$N\dfrac{\delta}{2} \to k\pi$则有 $A \to 0$

$$x = 0$$

$$N\delta = 2k\pi$$



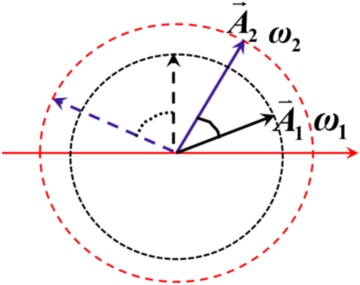
10.5 一维谐振动的合成

二、同一直线上两个不同频率谐振动的合成 拍

设同方向、角频率分别为ω_1和ω_2的两简谐振动$(\omega_2 > \omega_1)$，它们所对应的旋转矢量分别为$\vec{A}_1$和$\vec{A}_2$

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$



$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

10.5 一维谐振动的合成

设：$A_1 = A_2 = A, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$

$$x = 2A\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\cdot\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi_0)$$

振幅：$\left|2A\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right|$

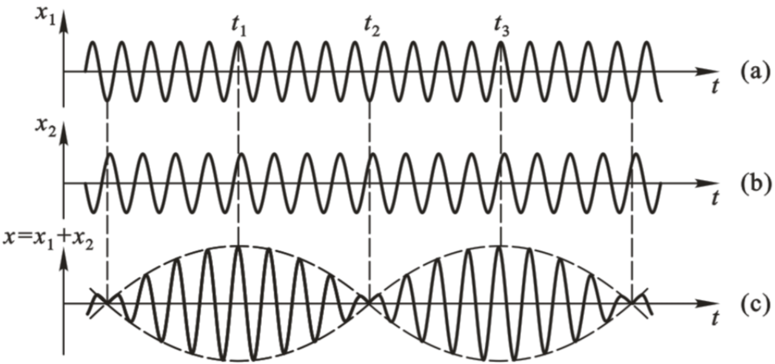
谐振因子：$\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi_0)$

当ω_2、ω_1满足关系：$|\omega_2-\omega_1| \ll \omega_1, \omega_2$

振幅随时间缓慢变化，谐振因子角频率$\frac{\omega_2+\omega_1}{2} \approx \omega_1$

合振幅时强时弱周期性缓慢变化的现象 拍现象

10.5 一维谐振动的合成



拍的周期:

$$\tau = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|}$$

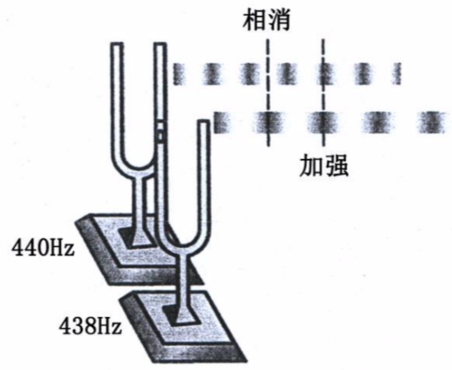
拍的频率:

$$\nu_b = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2\pi} = |\nu_2 - \nu_1|$$

10.5 一维谐振动的合成

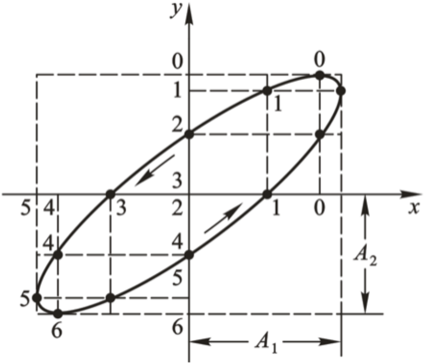
拍频为$\nu_2-\nu_1$也可由旋转矢量图示法说明：单位时间内A_2比A_1多转$\nu_2-\nu_1$圈，因此两者重合(即合 振动加强)$\nu_2-\nu_1$次。

音叉的拍音演示实验：



10.6 二维谐振动的合成

一、相互垂直同频率简谐振动的合成



$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

消去t，得

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10}) = \sin^2(\varphi_{20} - \varphi_{10})$$

两相互垂直同频率简谐振动的合成，其振动轨迹 为一椭圆。椭圆轨迹的形状取决于振幅和相位差 。

10.6 二维谐振动的合成

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10})=\sin^2(\varphi_{20}-\varphi_{10})$$

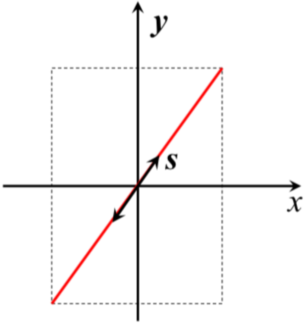
讨论几种特殊情形:

1. $\varphi_{20}-\varphi_{10}=0$ (或$2k\pi$)时

$$\left(\frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}\right)^2=0$$

$$y=\frac{A_2}{A_1}x \quad 斜率\ \frac{A_2}{A_1}>0$$

$$s=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{A_1^2+A_2^2}\cos(\omega t+\varphi_0)$$



质点轨迹直线

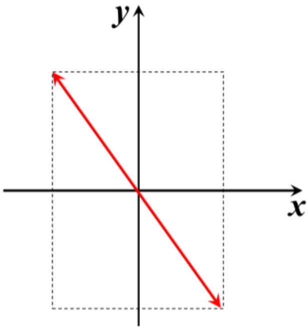
10.6 二维谐振动的合成

$\varphi_{20} - \varphi_{10} = \pi$ [或$(2k\pi + \pi)$]时

$$y = -\frac{A_2}{A_1}x \quad \text{斜率}: -\frac{A_2}{A_1} < 0$$

合振动的振幅:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$



质点轨迹直线

10.6 二维谐振动的合成

2. $\varphi_{20}-\varphi_{10}=\dfrac{\pi}{2}\left[或(2k\pi+\dfrac{\pi}{2})\right]$ 时

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

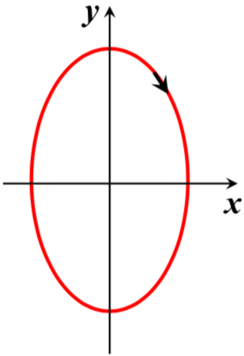
y方向振动超前于x方向$\pi/2$

质点振动轨迹为右旋正椭圆.

当$A_1=A_2$时，合成为右旋圆轨迹.

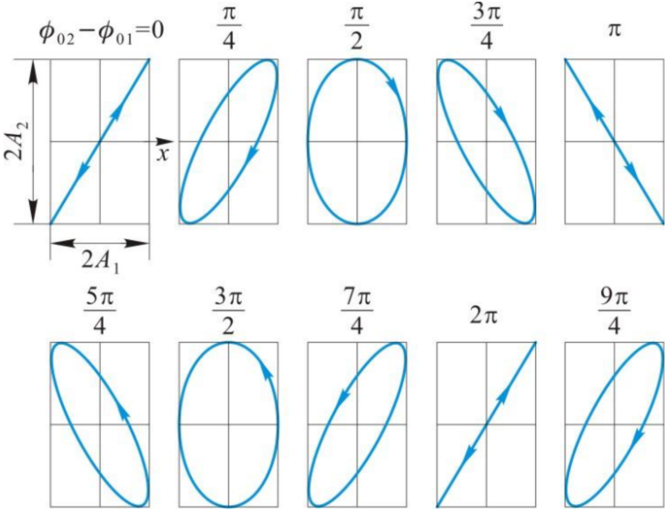
$\varphi_{20}-\varphi_{10}=\dfrac{\pi}{2}\left[或(2k\pi-\dfrac{\pi}{2})\right]$ 时

质点振动轨迹为左旋正椭圆.



10.6 二维谐振动的合成

两同频率垂直简谐振动在不同相位差时的合成



10.6 二维谐振动的合成

二、相互垂直不同频率简谐振动的合成

1. $\omega_1 \approx \omega_2$看成$\omega_1 = \omega_2$，但相位差缓慢变化.
   合运动轨迹将按不同相位差的合成图形依次缓慢变化.

2. 当两振动频率恰成整数比时，得封闭稳定轨迹，称为李萨如图.

10.6 二维谐振动的合成

李萨如图