本 讲 内 容

§5.5 阿贝尔群与循环群（下）

§5.7 陪集与拉格朗日定理

期末模拟试卷

期末模拟试卷解答

4. 群的元素的阶

设<G, $*$ >是一个群,a是群G中任一个元素.如果有正整数r存在使得$a^r=e$成立,对任何小于r的正整数m , $a^m=e$皆不能成立,则称a是一个有限阶元素,并称该元素的阶为r.

注:

(1)有限群的每个元素均是有限阶元素;

(2)有限循环群的每个元素的阶必为群的阶的因子.

(1)的部分证明:

对任一个群中元素a，必存在 $i<j$，使得 $a^i=a^j$.即有 $a^{j-i}=e$. 于是有限群中每个元素必有有限的阶.

(2)的证明:

设元素a的阶为r,即r是使得$a^r=e$成立的最小正整数.如果r不能整除n,则必有整数q和$s(1\le s\le r-1)$存在，使得

$$n=q\cdot r+s,\ a^n=e\Rightarrow a^{q\cdot r+s}=e\Rightarrow (a^r)^q*a^s=e\Rightarrow a^s=e,$$

然而$1\le s\le r-1$, 这与数r的最小性矛盾.

证毕——

例：给定集合$G=\{a,b,c,d\}$, 在集合G上定义二元运算 * 如下表所示, 证明<G, * >是一个循环群.

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	b	a
d	d	c	a	b

证明:

(1)封闭性.

(2)结合律.

(3)显然a是幺元.

(4)显然b,c,d 的逆元分别是b,d,c.

由上述四条可知<G, * >是一个群.

(5)显然c和d是生成元.由此可知是<G, * >循环群.

$(\because c^1=c, c^2=b, c^3=d, c^4=a.)$

证毕——

例：求证：循环群的任何子群必定是循环群.

证明：设$<G, *>$是生成元为a的循环群，

$<H, *>$为$<G, *>$的子群，

显然，H中的元素均为a的幂次，

设a^m是满足m是最小正整数幂次的那个H中的元素.

下证$\forall a^k \in H$，必有$m|k$.

设 $k = mq + r, 0 \le r < m.$

由$a^r = a^{k-mq} = a^k * (a^m)^{-q} = a^k * [(a^m)^q]^{-1} \in H$知,

$r = 0$.（否则与m是最小正整数矛盾）

即$m|k$.进而a^m即为$< H, * >$的生成元.

证毕——

§5.7 陪集与拉格朗日定理

一、左陪集

1.定义1：设<G, $*$ >是个群，

$$A,B\in\mathcal{P}(G)\text{且}A\neq\varnothing,B\neq\varnothing,$$

记：

$$AB=\{a*b\,|\,a\in A,b\in B\}$$

和 $A^{-1}=\{a^{-1}\,|\,a\in A\}$

分别称为A,B的积和A的逆.

2.定义2：设<H, * >是群 <G, * >的一个子群，a∈G，

称集合：

$$aH \triangleq \{a * x \mid x \in H\}$$ 为H关于a的左陪集.

3.例： $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, < G, * >, \forall < x_1, y_1 >, < x_2, y_2 > \in G,$

定义 $< x_1, y_1 > * < x_2, y_2 > = < x_1 + x_2, y_1 + y_2 >$.

求证： （1）G关于 * 运算是个群.

证明：e = <0,0>,

<x, y>的逆元<-x, -y>.

由于封闭性、可结合性显然，故<G, * >是个群.

证毕——

（2）若 $H=\{<x,y>\mid y=2x, x\in\mathbb{R}\}$.

问：$<H, *>$ 是不是 $<G, *>$ 的子群？

解答：是！

证明：$\forall <x_1,y_1>,<x_2,y_2>\in H$,

$$<x_1,y_1> * <x_2,y_2>^{-1} = <x_1-x_2, y_1-y_2>\in H,$$

证毕——

取 $<x_0,y_0>\in G$,

则左陪集 $<x_0,y_0>H=\{<x_0,y_0> * <x,y>\mid <x,y>\in H\}$

$$=\{<x_0+x, y_0+y>\mid <x,y>\in H\}.$$

表示经过平面上点 $<x_0, y_0>$，斜率也为2的一条直线。

二、拉格朗日定理

1.定理：<H，＊>是群<G，＊>的子群，则：

a). $R=\{<a,b> \mid a\in G, b\in G, a^{-1}*b\in H\}$是个等价关系，

且等价类 $\{x \mid x\in G, <x,a>\in R\}=[a]_R=aH$.

b). 若$|G|=n, |H|=m$, 必成立: $m|n$.

分析：a). ①自反；

②对称；

③传递.

证明略.

2.推论：

推论1：任何质数阶群除了有子群<{e}，$*$ >和其自身之外，再无其他子群.

推论2：在有限群中，任一个元素a的阶m必整除群的阶n.

证：取$B=\{a,a^2,\cdots,a^{m-1},a^m=e\}$.

下证<B，$*$ >是个群.（利用子群的第一充分条件）

推论3：有限群<G，$*$ >的阶数n为质数，则<G，$*$ >必是循环群.

期末模拟试卷

一、判断题（对的打“√”，错的打“×”）（共 25 分，每小题 2.5 分）

1、集合 $P(\phi)$ 的幂集是 $\{\phi, \{\phi\}\}$。 （ ）

2、$(A-B)-C=A-(B\cup C)$。 （ ）

3、A 是一个集合，且 $|A|=m$，则 A 上有 2^{m^2-m} 个不同的反自反关系。（ ）

4、如果复合函数 $f\circ g$ 是入射的，则 g 是满射的。 （ ）

5、全序关系的逆关系仍然是全序关系。 （ ）

6、Hamilton 图必然没有割点。 （ ）

7、对任何一个平面图 G 来说，欧拉公式 2＝v － e ＋ r 都成立。 （ ）

8、如果简单无向图 G 的色数为 6，那么 G 中必然含有 6 个点的完全图作为其子图出现。（　　）

9、一个连通无向图 G 中的结点 v 是割点，当且仅当存在两个结点 u 和 w，使得结点 u 和 w 的每一条路都通过点 v。（　　）

10、群中只有幺元 e 才满足“逆元就是其自身”这一性质。（　　）

二、单项选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1、二元关系 R_1、R_2 是集合 A 上的两个不同的相容关系，下列选项中依然是相容关系的是（　　）。

（A）$R_1 - R_2$；（B）$R_1 \oplus R_2$；

（C）$R_1 \cup R_2$；（D）$R_1 \circ R_2$。

2、二元关系 R 的传递闭包 $t(R)$ 可以由（　　）来定义。

（A）$t(R)$ 是包含 R 的最小传递关系；（B）$t(R)$ 是包含 R 的二元关系；

（C）$t(R)$ 是包含 R 的传递关系；（D）$t(R)$ 是任何包含 R 的关系。

3、集合 A 上的二元关系 R_1、R_2，下列选项中唯一正确的是（　　）。

（A）如果 R_1、R_2 都是对称的，那么 $R_1 \circ R_2$ 也是对称的；

（B）如果 R_1、R_2 都是反对称的，那么 $R_1 \circ R_2$ 也是反对称的；

（C）如果 R_1、R_2 都是传递的，那么 $R_1 \circ R_2$ 也是传递的；

（D）如果 R_1、R_2 都是自反的，那么 $R_1 \circ R_2$ 也是自反的。

4、下列关于树的描述，唯一不正确的是（　　）。

（A）所谓树，就是指任何一条边都是割边的连通图；

（B）任何一个前缀码未必都能对应一棵二叉树；

（C）设 T 为带权 $w_1 \le w_2 \le \cdots \le w_m$ 的一棵最优树，则带权 w_1、w_2 的两片树叶在 T 中一定是兄弟；

（D）所谓树，就是指满足“无圈，但增加一条新边之后即能得到一个且仅有一个圈。”这一特征的图。

5、设 $L(x)$： x 是人； $E(x)$： x 是食物； $F(x,y)$： x 对 y 过敏。则命题“不是所有人对所有食物都不过敏。”可符号化为（　　）。

（A） $(\exists x)(L(x) \to F(x,y))$

（B） $(\exists x)(\exists y)(L(x) \to E(y) \wedge F(x,y))$

（C） $(\exists x)(\exists y)(L(x) \wedge E(y) \to F(x,y))$

（D） $(\exists x)(\exists y)(L(x) \wedge E(y) \wedge F(x,y))$

三、求证下列命题的蕴含关系（共 12 分，每小题 6 分）

1、$P \wedge Q \Rightarrow P \rightarrow Q$；

2、$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \Rightarrow (P \vee R) \rightarrow Q$

四、令集合 $A = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0, i$ 是虚数单位$\}$，$\mathbb{R}$ 是实数集合，在 A 上定义关系 R：

$$< x + yi, u + vi > \in R \Leftrightarrow xu > 0$$

试证明：R 为等价关系。**（10 分）**

五、(共 12 分，每小题 3 分)设有偏序集$<A,\leq>$如下图所示，又设 A 的子集 $B=\{b,4\}$。

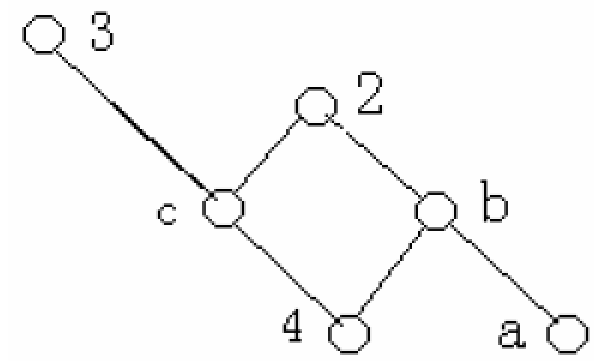
试求：

1、B 的最大元、最小元；

2、B 的极大元、极小元；

3、B 的上界、下界；

4、B 的上确界、下确界。



六、（8 分）请画出一棵带权为 1，1，2，3，4，4，5，6，8，11 的最优 3 叉树。

七、实数集合 R 上定义二元运算“$\otimes$”为 $a\otimes b=a\cdot b-2\cdot a-2\cdot b+6$，其中，等号右端的运算即实数间的加、减以及乘法运算。**（共 12 分，每小题 4 分）**

1、验证 $\otimes$ 运算满足交换律和结合律；

2、求证 $<R,\otimes>$ 的单位元 $e=3$，零元 $\theta=2$；

3、对不是零元的元素 a，求其逆元 b。

八、**（6 分）**证明题

连通图 G 中有两棵生成树 T_1、T_2，边 $e\in T_1$，$e\notin T_2$，求证：存在边 $f\in T_2$，$f\notin T_1$，使 T_2+e-f 也是 G 的生成树。

期末模拟试卷解答

一、判断题（对的打“√”，错的打“×”）（共 25 分，每小题 2.5 分）

1、集合 $P(\phi)$ 的幂集是 $\{\phi,\{\phi\}\}$。（ √ ）

2、$(A-B)-C=A-(B\cup C)$。（ √ ）

3、A 是一个集合，且 $|A|=m$，则 A 上有 2^{m^2-m} 个不同的反自反关系。（ √ ）

4、如果复合函数 $f\circ g$ 是入射的，则 g 是满射的。（ × ）

5、全序关系的逆关系仍然是全序关系。（ √ ）

6、Hamilton 图必然没有割点。（ √ ）

7、对任何一个平面图 G 来说，欧拉公式 2 = v － e ＋ r 都成立。（ × ）

8、如果简单无向图 G 的色数为 6，那么 G 中必然含有 6 个点的完全图作为其子图出现。
（ × ）

9、一个连通无向图 G 中的结点 v 是割点，当且仅当存在两个结点 u 和 w，使得结点 u 和 w 的每一条路都通过点 v。（ √ ）

10、群中只有么元 e 才满足"逆元就是其自身"这一性质。（ × ）

二、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1、二元关系 R_1、R_2 是集合 A 上的两个不同的相容关系，下列选项中依然是相容关系的是（ C ）。

（A）$R_1 - R_2$；（B）$R_1 \oplus R_2$；

（C）$R_1 \cup R_2$；（D）$R_1 \circ R_2$。

2、二元关系 R 的传递闭包 $t(R)$ 可以由（　A　）来定义。

（A）$t(R)$ 是包含 R 的最小传递关系；　（B）$t(R)$ 是包含 R 的二元关系；

（C）$t(R)$ 是包含 R 的传递关系；　（D）$t(R)$ 是任何包含 R 的关系。

3、集合 A 上的二元关系 R_1、R_2，下列选项中唯一正确的是（　D　）。

（A）如果 R_1、R_2 都是对称的，那么 $R_1 \circ R_2$ 也是对称的；

（B）如果 R_1、R_2 都是反对称的，那么 $R_1 \circ R_2$ 也是反对称的；

（C）如果 R_1、R_2 都是传递的，那么 $R_1 \circ R_2$ 也是传递的；

（D）如果 R_1、R_2 都是自反的，那么 $R_1 \circ R_2$ 也是自反的。

4、下列关于树的描述，唯一不正确的是（　B　）。

（A）所谓树，就是指任何一条边都是割边的连通图；

（B）任何一个前缀码未必都能对应一棵二叉树；

（C）设 T 为带权 $w_1 \le w_2 \le \cdots \le w_m$ 的一棵最优树，则带权 w_1、w_2 的两片树叶在 T 中一定是兄弟；

（D）所谓树，就是指满足“无圈，但增加一条新边之后即能得到一个且仅有一个圈。”这一特征的图。

5、设 $L(x)$： x 是人； $E(x)$： x 是食物； $F(x,y)$： x 对 y 过敏。则命题“不是所有人对所有食物都不过敏。”可符号化为（ D　）。

（A） $(\exists x)(L(x) \to F(x,y))$

（B） $(\exists x)(\exists y)(L(x) \to E(y) \wedge F(x,y))$

（C） $(\exists x)(\exists y)(L(x) \wedge E(y) \to F(x,y))$

（D） $(\exists x)(\exists y)(L(x) \wedge E(y) \wedge F(x,y))$

三、求证下列命题的蕴含关系（共 12 分，每小题 6 分）

1、$P \wedge Q \Rightarrow P \rightarrow Q$；

证明：（1） $P \wedge Q$　　（已知）

（2） P　　（1）

（3） Q　　（1）

（4） $P \rightarrow Q$　　（2）、（3）

2、$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \Rightarrow (P \vee R) \rightarrow Q$

证明：（1） $P \vee R$　　（已知）

（2） $\neg P \rightarrow R$　　（1）

（3） $R \rightarrow Q$　　（已知）

（4） $\neg P \rightarrow Q$　　（2）、（3）

（5） $P \rightarrow Q$　　（已知）

（6） Q　　（4）、（5）

四、令集合 $A=\{x+yi \mid x,y\in\mathbb{R}\wedge x\neq 0, i$ 是虚数单位$\}$，$\mathbb{R}$ 是实数集合，在 A 上定义关系 R：

$$<x+yi, u+vi>\in R \Leftrightarrow xu>0$$

试证明： R 为等价关系。(**10 分**)

证明：(1) 先证自反性，对任意的 $x+yi\in A$，由于 $xx=x^2>0$，所以按照定义，必有

$$<x+yi, x+yi>\in R;$$

(2) 再证对称性，对任意的 $<x+yi, u+vi>\in R$，即有 $xu>0$，亦即 $ux>0$，进而

$$<u+vi, x+yi>\in R;$$

(3) 最后证传递性，对任意的 $<x+yi, u+vi>\in R$，$<u+vi, m+ni>\in R$，按照定义，由于 $xu>0$，同时 $um>0$，故必有 $xm>0$，进而 $<x+yi, m+ni>\in R$；

综合上述 3 条，知 R 为等价关系。

五、（共 12 分，每小题 3 分）设有偏序集 $< A, \leq >$ 如下图所示，又设 A 的子集 $B = \{b, 4\}$。试求：

1、B 的最大元、最小元；

解：最大元：b；　　最小元：4。

2、B 的极大元、极小元；

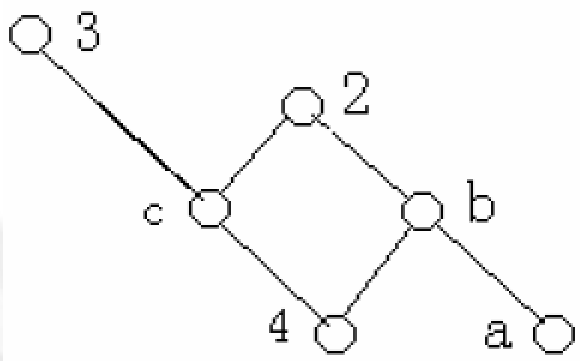
解：极大元：b；　　极小元：4。

3、B 的上界、下界；

解：上界：b、2；　　下界：4。

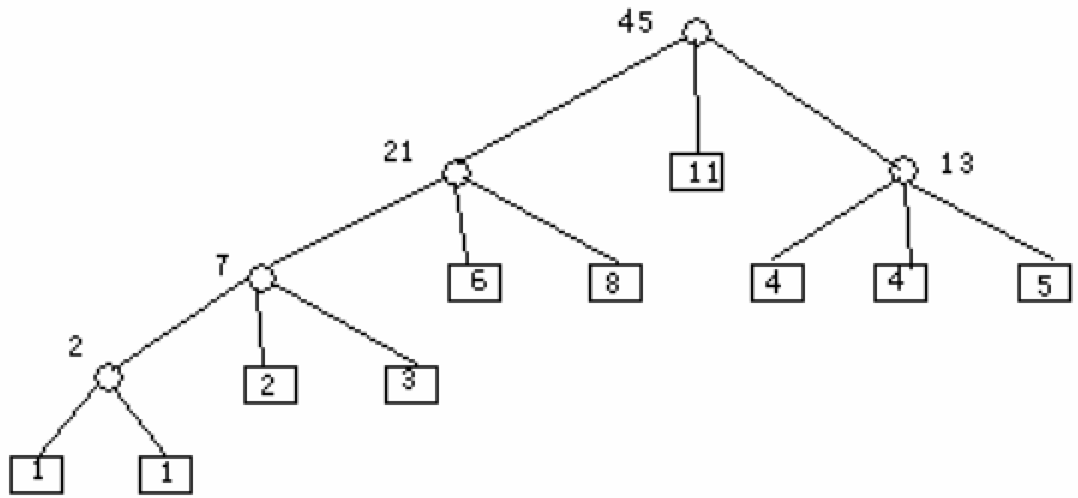
4、B 的上确界、下确界。

解：上确界：b；　　下确界：4。



六、（8 分）请画出一棵带权为 1，1，2，3，4，4，5，6，8，11 的最优 3 叉树。

解：由 $\frac{n-1}{m-1}=\frac{10-1}{3-1}=\frac{9}{2}$，即余数 $s=1$，结合 3 叉树的构造算法，应将 $s+1$ 个最小的权作为兄弟放在最长通路上。进而最终得到下图所示的最优 3 叉树：



七、（共 12 分，每小题 4 分）实数集合 R 上定义二元运算“$\otimes$”为 $a\otimes b=a\cdot b-2\cdot a-2\cdot b+6$，其中，等号右端的运算即实数间的加、减以及乘法运算。

1、验证 $\otimes$ 运算满足交换律和结合律；

解：（1）先验算交换律，显然，对任意的 $a,b\in R$，

$$a\otimes b=a\cdot b-2\cdot a-2\cdot b+6=b\cdot a-2\cdot b-2\cdot a+6=b\otimes a,$$

（2）再验证结合律，$(a\otimes b)\otimes c=(a\cdot b-2\cdot a-2\cdot b+6)\otimes c$

$$=(a\cdot b-2\cdot a-2\cdot b+6)\cdot c-2\cdot(a\cdot b-2\cdot a-2\cdot b+6)-2\cdot c+6$$

$$=a\cdot(b\cdot c-2\cdot b-2\cdot c+6)-2\cdot a-2(b\cdot c-2\cdot b-2\cdot c+6)+6$$

$$=a\otimes(b\otimes c),$$

2、求证$<R,\otimes>$的单位元$e=3$，零元$\theta=2$；

解：对任意的$a\in R$，由于$a\otimes 3=a\cdot 3-2\cdot a-2\cdot 3+6=a$

以及$3\otimes a=3\cdot a-2\cdot 3-2\cdot a+6=a$

即知$<R,\otimes>$的单位元$e=3$；

对任意的$a\in R$，由于$a\otimes 2=a\cdot 2-2\cdot a-2\cdot 2+6=2$

以及$2\otimes a=2\cdot a-2\cdot 2-2\cdot a+6=2$

即知$<R,\otimes>$的零元$\theta=2$。

3、对不是零元的元素a，求其逆元b。

解：对任意的$a\in R$，且$a\neq 2$，由

$$a\otimes b=a\cdot b-2\cdot a-2\cdot b+6=3=e$$

即可解得a的逆元$b=\dfrac{2a-3}{a-2}$。

八、（6分）证明题

连通图G中有两棵生成树T_1、T_2，边$e \in T_1$，$e \notin T_2$，求证： 存在边$f \in T_2$，$f \notin T_1$，使T_2+e-f也是G的生成树。

证明：依题意，根据树的等价定义，显然T_2+e含有唯一一个圈C，我们说，圈C中必然含有至少一条边f，它满足$f \in T_2$，且$f \notin T_1$，（否则，圈C中的除了e之外的每一条边都属于树T_1，那么加上边e，则T_1中含有圈C，而这显然与T_1是生成树矛盾。）进而，在T_2+e中删除边f之后，树T_2中原本通过边f连通的结点现在通过圈C的另一半依旧连通，由于T_2+e-f的边数与T_2的边数相同，所以，T_2+e-f也是G的一棵生成树。