一. 填充题

1.空间直角坐标系下，某平面上有一过原点的垂线,其垂足为(3 ,-1 ,2),则该平面方程为 $\underline{\quad 3x-y+2z-14=0 \qquad\qquad\qquad}$.

2. 空间直角坐标系下，直线 $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z+8}{-5}$ 和 $\frac{x+6}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{3}$ 的夹角为 $\underline{\frac{\pi}{2}\qquad}$.

3. 已知 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=3$，则 $(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{c},\vec{b}+\vec{c})=$ $\underline{\qquad -6 \qquad}$.

4. 在空间直角坐标系下，过准线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x^2+2y^2+z^2=2 \end{cases}$ 且与 z 轴平行的柱面方程 $\underline{\qquad x^2+y^2=1 \quad}$.

5. 在空间仿射坐标系下，向量 $\underline{\quad (-2,1,3) \quad}$ 与直线 $\begin{cases} 4x-y+3z-1=0 \\ x+5y-z+2=0 \end{cases}$ 平行.

6. 在平面直角坐标系下，方程 $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+11=0$ 表示的是（填入曲线名称）____椭圆___，其对称中心为__ (1,1) _，两条主直径分别为 $\underline{\quad x+y-2=0 \quad}$，$\underline{\quad x-y=0 \quad}$.

二. 设 A,B,C 是不在一直线上的三点，则点 M 在 A,B,C 决定的平面上的充分必要条件是：存在实数 λ,μ,ν 使得 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}$，且 $\lambda+\mu+\nu=1$ 其中 O 是任意取定的一点.

证明：$\Rightarrow$ $\because$ A,B,C 是不在一直线上的三点，点 M 在 A,B,C 决定的平面上 $\therefore$ $\exists$ 实数 m,n 使得 $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$

即 $\overrightarrow{OM}=[1-(m+n)]\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}$

取 $\lambda=1-(m+n)$、 $\mu=m$ 、 $\nu=n$ 。$\therefore$ $\lambda+\mu+\nu=1$.

$\Leftarrow$ 令 $\lambda=1-(\mu+\nu)$，

$\overrightarrow{OM}=[1-(\mu+\nu)]\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}+\omega\overrightarrow{OD}$，

$\overrightarrow{AM}=\mu\overrightarrow{AB}+\nu\overrightarrow{AC}$， $\therefore$ 点 M 在 A,B,C 决定的平面上。

三. 在空间直角坐标系下，已知直线

l_1： $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$ 和 l_2： $\dfrac{x+5}{-4}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z-5}{-5}$

求(1)过l_1且与l_2平行的平面方程.

(2)l_1和l_2的最短距离.

解：直线l_1为$\begin{cases} x+2y-4=0 \\ 2y-z-9=0 \end{cases}$，过$l_1$的平面方程.为

$\lambda(x+2y-4)+\mu(2y-z-9)=0$

因为直线l_1与l_2平行，所以

$-4\lambda+3(2\lambda+2\mu)+5\mu=0$

$\lambda:\mu=-11:2$

得到平面$11x+18y+2z-26=0$。

$\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\{2,-1,-2\}\times\{-4,3,-5\}=\{11,18,2\}$

$\therefore d=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right|}{\left|\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right|}$。

$=\dfrac{19}{449}\sqrt{449}$。

四． 在直角坐标系下，有两条异面直线

$l_1:\begin{cases} y-3x=0 \\ z-1=0 \end{cases}$ $l_2:\begin{cases} y+3x=0 \\ z+1=0 \end{cases}$

过每条直线作一平面使彼此垂直，求交线所产生的曲面，并指出曲面名称.

解：过l_1,l_2的平面分别为$y-3x+\lambda(z-1)=0$，$y+3x+\mu(z+1)=0$，利用平面彼此垂直得到$-9+1+\lambda\mu=0$，从三个方程$y-3x+\lambda(z-1)=0$，$y+3x+\mu(z+1)=0$，$-9+1+\lambda\mu=0$，消去λ,μ得到$9x^2-y^2+8z^2=8$，单叶双曲面。

五．将直线$\dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{y-\beta}{0}=\dfrac{z}{1}$绕$z$轴旋转，求这旋转面的方程，并就$\alpha,\beta$可能的值讨论这是什么曲面？

解：先求旋转面的方程式：

任取母线上一点$M_1(x_1,y_1,z_1)$，过M_1的纬圆为：

$$\begin{cases} z = z_1 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 & (2) \end{cases}$$

又 $\dfrac{x_1}{\alpha} = \dfrac{y_1 - \beta}{0} = \dfrac{z_1}{1}$ （3）

从（1）——（3）消去 x_1, y_1, z_1，得到：

$$x^2 + y^2 - \alpha^2 z^2 - \beta^2 = 0$$

此即为所求旋转面的方程。

当 $\alpha = 0, \beta \neq 0$ 时，旋转面为圆柱面（以 z 轴为轴）；

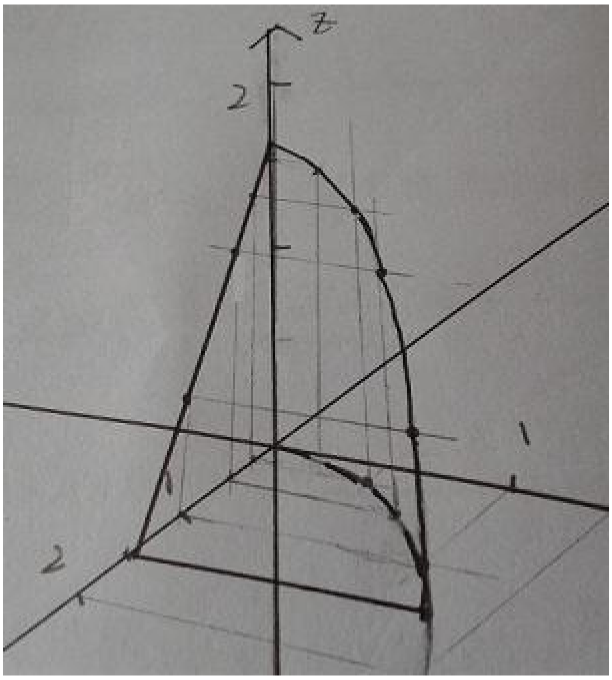
当 $\alpha \neq 0, \beta = 0$ 时，旋转面为圆锥面（以 z 轴为轴，顶点在原点）；

当 $\alpha = \beta = 0$ 时，旋转面变为 z 轴；

当 $\alpha\beta \neq 0$ 时，旋转面为单叶旋转双曲面。

六． 在直角坐标系下，用不等式组表达曲面 $y = \sqrt{x}$，$y = 0, z = 0$ 和平面 $x + z = \dfrac{\pi}{2}$ 所围成的空间区域，并且画图。

$$\begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{x} \\ 0 \le z \le \dfrac{\pi}{2} - x \end{cases}$$



七．在直角坐标系下，求点$M(7,-6,3)$关于平面$3x-2y+z=8$的对称点M'

解：设对称点M'的坐标为(x,y,z)，则有M与M'中点的坐标为$(\frac{x+7}{2},\frac{y-6}{2},\frac{z+3}{2})$落在平面$3x-2y+z=8$且$M\ M'$与该平面垂直, 于是有

$$\begin{cases} 3\dfrac{x+7}{2}-2\dfrac{y-6}{2}+\dfrac{z+3}{2}=8 \\ \dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y+6}{-2}=\dfrac{z-3}{1} \end{cases};$$

得到$(x,y,z)=(-5,2,-1)$.