第十三章
对策论和策略行为

- 对策论（博弈论，**game theory**）**:**研究决策主体的行为发生直接相互作用时候的决策以及这种决策的均衡问题。

- 即：当一个主体（如一个人或一个企业）的选择受到其他人、其他企业选择的影响，而且反过来影响到其他人、其他企业选择时的决策问题和均衡问题。

对策论(博弈论)最早源于上世纪40年代，主要由 Van Neumann和Morgenstein奠基于1944年合著的一本书“对策论与经济行为”。

从50年代到60年代，对策论发展了很多重要的新概念，如 Nash创立了Nash均衡概念，并证明了n个有限策略Nash均衡的存在性定理。

60~70年代，由Harsanyi和Selton等人分别发展了动态对策与不完全信息对策论等现代对策论，并为对策论在经济理论中的应用开拓了发展的前景。

1994年，Nash－Harsangi－Selton 三人同时获得诺贝尔经济学奖。

第一节 博弈论的基本概念

- 合作博弈和非合作博弈
  - 合作博弈：决策者之间能达成一个具有约束力的协议。
  - 非合作博弈：决策者之间不能达成一个具有约束力的协议。

- 基本概念
  - 参与人：决策主体，可能是人，也可能是团体
  - 行动：参与人在博弈的某个时点的决策变量，　可离散，可连续

    如：霍特林模型
  - 战略：在给定信息集下，参与人选择行动的规则

    如：人不犯我，我不犯人。人若犯我，我必犯人
  - 信息：主要是关于其他参与人的特征和行动的知识
  - 支付函数：是所有参与人战略或行动的函数

- 博弈的划分
  - 按照参与人行动的先后顺序：

静态博弈：参与人同时选择行动，或虽非同时但后行动者不知道前行动者采取了什么具体行动。

动态博弈：参与人行动有先后顺序，且后行动者能够观察到先行动者所选择的行动。

  - 按照参与人有关其他参与人（对手）的特征、策略空间及支付函数的知识：

完全信息：每一个参与人对所有其他参与人（对手）的特征、战略空间及支付函数有准确的知识。

不完全信息：否则

- 得到
  - 完全信息静态博弈：纳什均衡
  - 完全信息动态博弈：子博弈完美纳什均衡
    （剔除了不可置信的威胁）
  - 不完全信息静态博弈：贝叶斯纳什均衡
  - 不完全信息动态博弈：完美贝叶斯纳什均衡

- 博弈描述的方法
  - 标准式（正则式、策略式）：更适合静态博弈
  - 展开式（扩展式）：更适合动态博弈

两种表达方式在理论上完全等价。

第二节 完全信息静态博弈

一、定义：

二、策略式（标准式）描述包含：

- 参与人 $N=\{1,2,\cdots,n\}$
- 策略 $S_i \quad i=1,2,\cdots,n$
- 支付函数（收益函数）$u_i(s_1,s_2,\cdots,s_n) \quad i=1,2,\cdots,n$

$$G=\{S_1,S_2,\cdots,S_n;u_1,u_2,\cdots,u_n\}$$

例、古诺模型

- 假设： 两个企业；生产相同的产品；
  以产量作为决策变量；
  地位相等，同时决策。

设需求为 $P = a - bQ$，

两企业的边际成本分别 为c_1和 c_2。

两企业的产量分别为 q_1 和q_2。

企业甲的利润为 $\pi_1 = P(Q)\cdot q_1 - c_1 q_1$

企业乙的利润为 $\pi_2 = P(Q)\cdot q_2 - c_2 q_2$

例、贝特朗模型(伯川德模型)

- 假设： 两个企业；生产相同的产品；
  以价格作为决策变量；

两企业的边际成本均为 c。

两企业的价格分别为 p_1 和 p_2。

第i个企业面临的需求为

$$D_i(p_i, p_j) = \begin{cases} D(p_i) & p_i < p_j \\ \frac{1}{2} D(p_i) & p_i = p_j \\ 0 & p_i > p_j \end{cases}$$

例、代表消费者模型

- 假设： 两企业1、2；生产不同产品1、2；以价格作为决策变量；同时决策

两企业的边际成本均为 c。
两产品的价格分别为 p_1 和 p_2。
对两种产品的需求分别 为：

$$D_1(p_1, p_2) = a - bp_1 + dp_2;$$

$$D_2(p_1, p_2) = a - bp_2 + dp_1;$$

- 有限博弈：参与人的个数有限，每个参与人的战略有限
- 两人有限博弈的策略式表述可以用矩阵表示
- 例：

		囚犯乙：坦白	囚犯乙：不坦白
囚犯甲	坦白	(-8，-8)	(0,-10)
囚犯甲	不坦白	(-10,0)	(-1,-1)

三、求解（3个原则）

- 第一原则：占优策略均衡

占优策略（Dominant Strategy，又称超优策略)：

不管其它参与者如何选择，对于某个参与者而言都是最优选择的策略。

如果所有的参与者都在占优策略上实现纳什均衡，该均衡就是占优策略均衡（又称占优均衡或超优均衡）。

		囚犯乙	
		坦白	不坦白
囚犯甲	坦白	(-8，-8)	(0,-10)
	不坦白	(-10,0)	(-1,-1)

定义：s_i *称为参与人i的（严格）占优策略，如果对应所有的s_{-i}, s_i *是i的（严格）最优选择，即：

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}) \quad \forall s_i' \neq s_i^* \quad \forall s_{-i}$$

其中：$s_{-i} =（s_1，\ s_2,\cdots，\ s_{i-1}，\ s_{i+1},\cdots，\ s_n）$是$i$之外所有参与人的战略组合。

定义：在博弈的战略式表述中，如果对于所有的i, s_i *是i的占优策略，那么策略组合$s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*)$称为占优策略均衡。

- 第二原则：重复剔除严格劣策略

	L	R
U	(1,2)	(0,3)
~~M~~	~~(4,1)~~	~~(-1,2)~~
~~D~~	~~(-2,3)~~	~~(-2,1)~~

定义：s_i'严格劣于s_i''，如果对于所有s_{-i}，$u_i(s_i', s_{-i}) < u_i(s_i'', s_{-i})$。

重复剔除的占优均衡：如果重复剔除严格劣策略后剩下唯一的战略组合，则称该博弈是重复剔除占优可解的。

	L	M	R
U	(4,3)	(5,1)	(6,2)
M	(2,1)	(8,4)	(3,6)
D	(3,0)	(9,6)	(2,8)

删除顺序对均衡的影响

	L	M	R
U	(2,12)	(1,10)	(1,12)
M	(0,12)	(0,10)	(0,11)
D	(0,12)	(0,10)	(0,13)

	L	M	R
U	(2,12)	(1,10)	(1,12)
M	(0,12)	(0,10)	(0,11)
D	(0,12)	(0,10)	(0,13)

如果每次剔除的是严格劣策略，则均衡结果与剔除的顺序无关。

如果每次剔除的是弱劣策略，则均衡结果可能与剔除的顺序有关。

- 第三原则：纳什均衡(分为纯策略和混合策略纳什均)

纯策略：参与人在每个给定的信息情况下只选择一种特定的行动。

混合策略：参与人在每个给定的信息情况下以某种概率分布随机地选择不同的行动。

i. 纯策略纳什均衡

	L	M	R
U	(0,4)	(4,0)	(5,3)
M	(4,0)	(0,4)	(5,3)
D	(3,5)	(3,5)	(6,6)

- 纳什均衡(Nash Equilibrium)：只要其它参与者不变换策略选择，任何单个参与者不愿意单方面变换策略（——变换策略并没有更大效用满足）。

  纳什均衡一旦达成，任何参与主体都不愿意再改变策略。

定义：有n个参与人的策略式表述博弈$G=\{S_1,\cdots,S_n;u_1,\cdots,u_n\}$，策略组合$s^*=\{s_1^*,\cdots,s_n^*\}$是一个纳什均衡，如果对于每个$i$，$s_i^*$是给定其他参与人选择$s_{-i}^*=\{s_1^*,\cdots,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\cdots,s_n^*\}$的情况下第$i$个参与人的最优策略，即：

$$u_i(s_i^*,s_{-i}^*)\geq u_i(s_i,s_{-i}^*)\qquad \forall s_i\in S_i,\quad \forall i$$

- 纯策略纳什均衡可由划线法求解。

■ 例1：

I \ II	抗拒	坦白
抗拒	−1 , −1	−8 , 0
坦白	0 , −8	−5 , −5

用划线法来求Nash均衡策略如下：

II： 对付I的抗拒策略，他会选择坦白策略，在 0下划线；

对付I的坦白策略，他会选择坦白策略，在−5下划线；

I： 对付II的抗拒策略，他会选择坦白策略，在 0下划线；

对付II的坦白策略，他会选择坦白策略，在−5下划线；

- 例2：

I \ II	II_1	II_2	II_3
I_1	1 , 0	1 , 3	0 , 1
I_2	0 , 4	0 , 2	2 , 0

- 例3：

妻 \ 夫	时装	足球
时装	2 , 1	0 , 0
足球	0 , 0	1 , 3

ii. 混合策略纳什均衡

I \ II	C	D
A	2，<u>3</u>	<u>5</u>，2
B	<u>3</u>，1	1，<u>5</u>

如果这个对局重复进行很多次，双方都要防范对方，所遵循下列原则：

（1）一定不能让对方猜到可能出的策略，否则对方将有对策来使你受损，因此，对自己的策略都必须采取随机出现。

（2）在随机出现所选择的概率时，也不能让对方有机可乘，即让对方无法通过有针对性的选择他的概率来对付你。

局中人I: 设法选择A, B策略的概率为p_A, p_B，其中，$p_A, p_B \geq 0$, $p_A+p_B=1$ 。使局中人II:

I \ II	C	D
A	2 , 3	5 , 2
B	3 , 1	1 , 5

若选择策略C，则他的期望得益为 $p_A \times 3 + p_B \times 1$,

若选择策略D，则他的期望得益为 $p_A \times 2 + p_B \times 5$,

让他无机可乘，就是使这两个期望得益相等，即

$$3p_A + p_B = 2p_A + 5p_B \qquad (10.1)$$

I \ II	C	D
A	2 , <u>3</u>	<u>5</u> , 2
B	<u>3</u> , 1	1 , <u>5</u>

同理，局中人II: 在选择策略C, D的概率为p_C, p_D时,

若I选择A的期望得益为 $2p_C+5p_D$;

若I选择B的期望得益为 $3p_C+p_D$,

因而令 $2p_C+5p_D=3p_C+p_D$ （10.2）

联立（10.1）和（10.2）解得 $\begin{cases} p_A=0.8,\ p_B=0.2 \\ p_C=0.8,\ p_B=0.2 \end{cases}$

此时，任何一方都无法通过改变自己的混合策略来改善自己的期望利益，因此这种混合策略组合是稳定的, 称之为**混合策略Nash均衡**。

例4 制式问题。

两厂商生产两种相关产品，若商品有二种制式。若选相同的制式，则零部件能相互匹配都有好处；若选不同的制式，双方都各自独立，没有任何好处。得益矩阵如右图。

I \ II	C	D
A	$\underline{1}$, $\underline{3}$	0 , 0
B	0 , 0	$\underline{2}$, $\underline{2}$

用划线法可知有两个纯策略Nash均衡。

混合策略Nash均衡：

I： $p_{\mathrm{I}}(A) = 0.4$, $p_{\mathrm{I}}(B) = 0.6$,

II： $p_{\mathrm{II}}(A) = 0.67$, $p_{\mathrm{II}}(B) = 0.33$。

双方的期望利益为 $\mathbf{u_{I} = 0.667}$

$$\mathbf{u_{II} = 1.2}$$

这说明即使采用混合策略，它的**Nash**混合对策值都不如纯对策的**Nash**均衡解。其原因在于在随机策略中，因为有一种策略是无效率的，因为在此策略上出现的概率也是无效率的。平均后，总效率将下降。

小偷 \ 守卫	睡觉	不睡
去偷	$\underline{V}$, $-D$	$-P$, $\underline{0}$
不偷	0 , $\underline{S}$	$\underline{0}$, 0

例5 小偷与守卫的问题。

小偷欲偷仓库物品。

若守卫偷懒睡觉, 小偷得逞可得益：**V (V > 0)**, 守卫要受罚：－**D (D > 0)** ;

若守卫没睡觉, 守卫能抓住小偷，小偷就得坐牢, 得负效应：－**P (P > 0)**）;

若守卫偷懒睡觉，而小偷没有来偷，则守卫获休闲正效应：**S (S > 0)**;

若守卫没睡觉, 小偷也没有来偷，双方相安无事。

小偷＼守卫	睡觉	不睡
去偷	V ,−D	−P , 0
不偷	0 ,S	0 , 0

设小偷要去偷的概率为P_t，则守卫的期望利益为：

$$\begin{cases} \text{睡：} & u_g = S(1-p_t) + (-D)\cdot p_t \\ \text{不睡：} & u_g = 0 \end{cases}，\text{解出 } p_t^* = \frac{S}{S+D}$$

同理, 令守卫取睡得概率为p_g, 则小偷的期望利润为

$$\begin{cases} \text{偷：} & u_t = p_g \cdot V + (1-p_g)(-P) \\ \text{不偷：} & u_t = 0 \end{cases}，\text{解出 } p_g^* = \frac{P}{P+V}$$

p_t^*和p_g^*为Nash混合策略所取的概率选择。

定义：有n个参与人博弈的策略式表述$G=\{S_1,\cdots,S_n;u_1,\cdots,u_n\}$中,假定参与人$i$有$K$个纯策略：$S_i=\{s_{i1},\cdots,s_{iK}\}$, 那么，概率分布$\sigma_i=(\sigma_{i1},\cdots,\sigma_{iK})$称为$i$的一个混合策略，这里$\sigma_{ik}=\sigma(s_{ik})$是$i$选择$s_{ik}$的概率，对于所有的$k=1,\cdots,K, 0\le\sigma_{ik}\le 1, \sum_1^K \sigma_{ik}=1$。

定义：有n个参与人博弈的策略式表述$G=\{S_1,\cdots,S_n;u_1,\cdots,u_n\}$,混合策略组合$\sigma^*=\{\sigma_1^*,\cdots,\sigma_n^*\}$是一个纳什均衡，如果对于每个$i$，下式成立：

$$v_i(\sigma_i^*,\sigma_{-i}^*)\ge v_i(\sigma_i,\sigma_{-i}^*) \qquad \forall\sigma_i\in\sum_i$$

以上四个均衡的关系：占优策略均衡$\subseteq$重复剔除占优均衡$\subseteq$纯策略纳什均衡$\subseteq$混合策略纳什均衡$\subseteq$相关均衡

命题：如果重复剔除严格劣策略，剔除掉了除了某个策略组合外的所有策略，剩下的策略是博弈唯一的纳什均衡。

命题：在一个博弈中，纳什均衡策略是不会被重复剔除严格劣策略所剔除的。

例6 冷漠的旁观者

	不管	管
不管	**0 , 0**	**10 , 7**
管	**7 ,10**	**7 , 7**

若只有两个人，则不管的概率为$\boldsymbol{r = 0.3}$。

		r^{N-1}	$1-r^{N-1}$
		不管	管
r	不管	0 , 0	10 , *
$1-r$	管	7 ,**	7 , ***

若有N个人，则不管的概率为$r^{N-1}=0.3, r=(0.3)^{\frac{1}{N-1}}$,

$\therefore N\to\infty$时，$r\to 1$。

例7、仲裁模型

企业价格W_f　　　x　　　W_u工会价格

假定仲裁人的心理价位x:

$$x < \frac{W_f + W_u}{2}$$ 则W_f被选中

$$x > \frac{W_f + W_u}{2}$$ 则W_u被选中

x是随机变量，其密度和分布函数分别为f(□),F(□)

期望工资水平：

$$E_W = W_f \cdot prob\left\{W_f\text{选中}\right\} + W_u \cdot prob\left\{W_u\text{选中}\right\}$$

$$= W_f \cdot prob\left\{x < \frac{W_f + W_u}{2}\right\} + W_u \cdot prob\left\{x > \frac{W_f + W_u}{2}\right\}$$

$$= W_f \cdot F\left(\frac{W_f + W_u}{2}\right) + W_u \cdot \left[1 - F\left(\frac{W_f + W_u}{2}\right)\right]$$

$$\max_{W_u} E_W \Rightarrow W_f \cdot f\left(\frac{W_f+W_u}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}+1-F\left(\frac{W_f+W_u}{2}\right)-W_u\cdot f\left(\frac{W_f+W_u}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow\frac{W_f-W_u}{2}f\left(\frac{W_f+W_u}{2}\right)=F\left(\frac{W_f+W_u}{2}\right)-1 \qquad (1)$$

$$\min_{W_f} E_W \Rightarrow F\left(\frac{W_f+W_u}{2}\right)+W_f\cdot f\left(\frac{W_f+W_u}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}-W_u\cdot f\left(\frac{W_f+W_u}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow\frac{W_f-W_u}{2}f\left(\frac{W_f+W_u}{2}\right)=-F\left(\frac{W_f+W_u}{2}\right) \qquad (2)$$

综合(1)(2)有

$$\begin{cases} W_u-W_f=\dfrac{1}{f\left(\dfrac{W_u+W_f}{2}\right)} \\ F\left(\dfrac{W_f+W_u}{2}\right)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

若f为正态分布，均值为m,方差为σ^2

$$\frac{W_f+W_u}{2}=m$$

$$W_u-W_f=\frac{1}{f\left(\frac{W_u+W_f}{2}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}}=\sqrt{2\pi}\sigma$$

$$\therefore\quad W_u=m+\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma$$

$$W_f=m-\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma$$

例8 二级价格拍卖

一个卖主拍卖一件物品； I个投标者，估价v_i;

投标者同时选择投标 $S_i \in [0,+\infty)$;

投标最高的投标者赢得物品，支付金额为第二投标金额；

其他投标者没有支出。

如果多个投标者投出最高价格，则商品在他们之间随机分配。

求投标者的优势策略。

解：优势策略为 $S_i = v_i$

四、纳什均衡的存在性：

定理：每一个有限博弈至少存在一个纳什均衡（纯策略的或混合策略的）。

定理：在n人策略式博弈中，如果每个参与人的纯策略空间s_i是欧氏空间上一个非空的、闭的、有界的凸集，支付函数$u_i(s)$是连续的且对s_i是拟凹的，那么，存在一个纯策略纳什均衡。

定理：在n人策略式博弈中，如果每个参与人的纯策略空间s_i是欧氏空间上一个非空的、闭的、有界的凸集，支付函数$u_i(s)$是连续的，那么，存在一个混合策略纳什均衡。