华东理工大学

概率论与数理统计

作业簿（第十册）

学　院 ____________专　业 ____________班　级 ____________
学　号 ____________姓　名 ____________任课教师____________

第 19 次作业

一. 选择题

1. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是正态总体 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, $\overline{\boldsymbol{X}}$ 和 S_{n-1}^2 分别为样本均值和样本方差,则有　（　　）

(A) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$　　(B) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_{n-1}} \sim t(n-1)$

(C) $n\left(\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$　　(D) $\dfrac{X_1^2}{X_2^2} \sim F(1,1)$

2．设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 ξ 的样本,总体的各阶矩存在, 则错误的是（　　）

(A) 样本均值 $\overline{\boldsymbol{X}}$ 是总体期望的无偏估计

(B) X_i $(\mathrm{i}=1,2,\ldots,n)$ 均是总体期望的无偏估计

（C） 样本方差 S_{n-1}^2 是总体方差的无偏估计

（D） S_n^2 是总体方差的无偏估计，这里 $S_n^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

3. 设 $\xi \sim N(\mu,1)$, (X_1, X_2)为ξ 的样本。参数 μ 的无偏估计:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{X_1+X_2}{2}, \hat{\mu}_2 = \frac{X_1+2X_2}{3}, \hat{\mu}_3 = \frac{X_1+3X_2}{4}, \hat{\mu}_4 = \frac{X_1+4X_2}{5},$$

中最有效的是　（　　）

(A) $\hat{\mu}_1$　　(B) $\hat{\mu}_2$　　(C) $\hat{\mu}_3$　　(D) $\hat{\mu}_4$

二. 填空题:

1. 矩法估计的理论依据是 ________; 极大似然估计的依据是 ________.

2．点估计的三个主要评价标准是指 _________; _________; ___________.

3. 设$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$为总体 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 则:

参数 μ 的矩法估计是 ____； σ^2 的矩法估计是 ______；

参数 μ 的极大似然估计是 ____； σ^2 的极大似然估计是 ____________

三．计算题：

1．设总体 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{N}$, $k=0,1,2,\cdots,N-1$，其中 N 未知，$X_1,\cdots,X_n$ 为来自该总体的样本，试分别求 N 的矩估计 $\hat{N}_M$ 和极大似然估计 $\hat{N}_L$

2．设总体 X 服从几何分布：$P(X=x)=p(1-p)^{x-1}$，$x=1,2,\cdots$， 其中 p 未知。设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 X 的样本，试求 p 的矩法估计和极大似然估计。

3．设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$， 其中 $\theta>-1$ 是未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体的样本，分别用矩估计法和极大似然法求 θ 的估计量。

4．设总体 X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 θ $(0<\theta<\dfrac{1}{2})$ 是未知参数。现有一样本：3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3。

求 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}_M$ 和极大似然估计值 $\hat{\theta}_L$。

5. 设 $(X_1,...,X_n)$ 是取自总体 ξ 的一个简单随机样本 ξ 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, & x\geq\theta \\ 0, & x<\theta\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，

1) 试求 θ 的矩估计；
2) 试求 θ 的极大似然估计;

第 20 次作业

一．选择题：

1．设($X_1, X_2, ..., X_n$)为总体 ξ 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则　　(　　)

A. $\overline{X} = E\xi$　　　　B. $E\overline{X} = E\xi$

C. $D\overline{X} = D\xi$　　　　D. $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{X} = E\xi$

2. 设总体 X 的数学期望为 μ，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是取自总体的样本，则下列命题中正确的是　　(　　)

A. X_1 是 μ 的无偏估计量；　　B. X_1 是 μ 的极大似然估计量；

C. X_1 是 μ 的一致(相合)估计量；　　D. X_1 不是 μ 估计量。

3．设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (μ 已知)的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则总体方差 σ^2 的下列估计量中，为无偏估计量的是　　(　　)

A. $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$；　　B. $\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_i - \overline{X})^2$；

C. $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$；　　D. $\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$

二.填空题

1．在一批垫圈中随机抽取 10 个，测得它们的厚度(单位: mm)如下:

1.23，1.24，1.26，1.29，1.20，1.32，1.23，1.23，1.29，1.28

用矩估计法得到这批垫圈的数学期望 μ 的估计值 $\hat{\mu}$ =____________，

标准差 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$ =____________。

2．将合适的数字填入空格，其中：（1）总体矩，（2）样本矩，（3）中心极限定理，（4）大数定律。

矩估计的做法是用________代替________，其依据是____________ 。

3．已知总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中未知参数 μ 和 σ 的极大似然估计分别为 $\overline{X}$ 和 S_n，则概率 $P\{X < 2\}$ 的极大似然估计为______________。

三．计算及证明题：

1．设总体$\xi \sim N(\mu,1)$，(X_1, X_2, X_3)是ξ的样本，且:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3;\quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3;\quad \hat{\mu}_3 = \frac{2}{5}X_1 + \frac{2}{5}X_2 + \frac{1}{5}X_3$$

证明$\hat{\mu}_1$，$\hat{\mu}_2$，$\hat{\mu}_3$都是μ的无偏估计, 并说明这三个估计中，哪一个估计最有效？

2．设从均值为μ，方差为$\sigma^2 > 0$的总体中，分别抽取容量为n_1和n_2的两个独立样本，$\overline{X}_1$和$\overline{X}_2$分布是这两个样本的均值。

试证：对于任意常数a, b $(a+b=1)$，$Y = a\overline{X}_1 + b\overline{X}_2$是$\mu$的无偏估计，

并确定常数a, b，使得DY达到最小。

3．设随机变量X服从区间$(\theta, \theta+1)$上的均匀分布，其中θ为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自于X的一个样本，$\overline{X}$是样本均值，$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$.
证明: $\hat{\theta}_1 = \overline{X} - \frac{1}{2}$和$\hat{\theta}_2 = X_{(1)} - \frac{1}{n+1}$都是$\theta$无偏估计量($n > 1$).

4.设总体X服从参数为$\frac{1}{\theta}$的指数分布，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是总体X的一个样本，

（1）证明 $\overline{X}$和$n\min\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$都是$\theta$的无偏估计；

（2）问$\overline{X}$，$n\min\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$中哪个更有效？

5. 试讨论参数的矩法估计和极大似然估计是否一定存在,如果存在又是否唯一？