2016年青年教师课堂教学竞赛

姚媛媛

华东理工大学理学院

第三讲：自然对数的底e

第三讲: 自然对数的底e

- 问题

第三讲: 自然对数的底e

- **问题**

假设你在银行存了1元钱, 不巧赶上通货膨胀, 银行存款利率达到逆天的100%! 问银行付息方式与年底余额的关系如何?

第三讲: 自然对数的底e

- **问题**

假设你在银行存了1元钱, 不巧赶上通货膨胀, 银行存款利率达到逆天的100%! 问银行付息方式与年底余额的关系如何?

表: 银行付息方式与年底余额

第三讲: 自然对数的底e

- **问题**

假设你在银行存了1元钱, 不巧赶上通货膨胀, 银行存款利率达到逆天的100%! 问银行付息方式与年底余额的关系如何?

表: 银行付息方式与年底余额

银行付息方式	年底余额计算公式	年底余额值
一年	$1+1$	2

第三讲: 自然对数的底e

- **问题**

假设你在银行存了1元钱, 不巧赶上通货膨胀, 银行存款利率达到逆天的100%! 问银行付息方式与年底余额的关系如何?

表: 银行付息方式与年底余额

银行付息方式	年底余额计算公式	年底余额值
一年	$1+1$	2
半年	$(1+\frac{1}{2})^2$	2.25

第三讲：自然对数的底e

- **问题**

假设你在银行存了1元钱，不巧赶上通货膨胀，银行存款利率达到逆天的100%！问银行付息方式与年底余额的关系如何？

表：银行付息方式与年底余额

银行付息方式	年底余额计算公式	年底余额值
一年	$1+1$	2
半年	$(1+\frac{1}{2})^2$	2.25
三月	$(1+\frac{1}{4})^4$	≈ 2.4414

第三讲：自然对数的底e

- **问题**

假设你在银行存了1元钱，不巧赶上通货膨胀，银行存款利率达到逆天的100%！问银行付息方式与年底余额的关系如何？

表：银行付息方式与年底余额

银行付息方式	年底余额计算公式	年底余额值
一年	$1+1$	2
半年	$(1+\frac{1}{2})^2$	2.25
三月	$(1+\frac{1}{4})^4$	≈ 2.4414
天	$(1+\frac{1}{365})^{365}$	≈ 2.714567

第三讲：自然对数的底e

- **问题**

假设你在银行存了1元钱，不巧赶上通货膨胀，银行存款利率达到逆天的100%！问银行付息方式与年底余额的关系如何？

表： 银行付息方式与年底余额

银行付息方式	年底余额计算公式	年底余额值
一年	$1+1$	2
半年	$(1+\frac{1}{2})^2$	2.25
三月	$(1+\frac{1}{4})^4$	≈ 2.4414
天	$(1+\frac{1}{365})^{365}$	≈ 2.714567
秒	$(1+\frac{1}{365\times 24\times 3600})^{365\times 24\times 3600}$	≈ 2.71828178

第三讲: 自然对数的底e

- **问题**

假设你在银行存了1元钱, 不巧赶上通货膨胀, 银行存款利率达到逆天的100%! 问银行付息方式与年底余额的关系如何?

表: 银行付息方式与年底余额

银行付息方式	年底余额计算公式	年底余额值
一年	$1+1$	2
半年	$(1+\frac{1}{2})^2$	2.25
三月	$(1+\frac{1}{4})^4$	≈ 2.4414
天	$(1+\frac{1}{365})^{365}$	≈ 2.714567
秒	$(1+\frac{1}{365\times24\times3600})^{365\times24\times3600}$	≈ 2.71828178

☞年底余额的极限值就是e!

e 与数列$(1+\frac{1}{n})^n$

定理 数列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单调递增有上界. (**重要数学目标**)

e 与数列$(1+\frac{1}{n})^n$

定理 数列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单调递增有上界. (**重要数学目标**)

☞ Euler 最早将上述极限定义为e.

e 与数列$(1+\frac{1}{n})^n$

定理 数列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单调递增有上界. (**重要数学目标**)

☞ Euler 最早将上述极限定义为e.

问题 如何计算e?

e 与数列$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

定理 数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调递增有上界. (**重要数学目标**)

☞ Euler 最早将上述极限定义为e.

问题 如何计算e?

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

e 与数列$(1+\frac{1}{n})^n$

定理 数列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单调递增有上界. (**重要数学目标**)

☞ Euler 最早将上述极限定义为e.

问题 如何计算e?

$$
\begin{aligned}
e &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
e^x &= (e^x)'
\end{aligned}
$$

e 与数列$(1+\frac{1}{n})^n$

定理 数列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单调递增有上界. (**重要数学目标**)

☞ Euler 最早将上述极限定义为e.

问题 如何计算e?

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ e^x &= (e^x)' \\ e &\approx 2.718\,281\,828\,459\cdots \end{aligned}$$

e 与数列$(1+\frac{1}{n})^n$

定理 数列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单调递增有上界. (**重要数学目标**)

☞ Euler 最早将上述极限定义为e.

问题 如何计算e?

$$
\begin{aligned}
e &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
e^x &= (e^x)' \\
e &\approx 2.718\,281\,828\,459\cdots
\end{aligned}
$$

评注: 这是数学史上第一次用极限定义数. 研究这种数并不容易. 例如一个尚未解决的问题是

e 与数列$(1+\frac{1}{n})^n$

定理 数列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单调递增有上界. (**重要数学目标**)

☞ Euler 最早将上述极限定义为e.

问题 如何计算e?

$$
\begin{aligned}
e &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
e^x &= (e^x)' \\
e &\approx 2.718\,281\,828\,459\cdots
\end{aligned}
$$

评注: 这是数学史上第一次用极限定义数. 研究这种数并不容易. 例如一个尚未解决的问题是 $e+\pi$ 是无理数吗?

e 的来源 (航海、天文学—加减代替乘除)

e 的来源 (航海、天文学—加减代替乘除)

☞ 苏格兰约翰·纳皮尔(1550-1617)发明了对数logarithm.

e 的来源 (航海、天文学—加减代替乘除)

☞ 苏格兰约翰·纳皮尔(1550-1617)发明了对数logarithm.

表1 底数10 的对数表$b = \log_{10} N$

真数N	10	12.589	15.849	19.953	10^{10}	1.259×10^{10}	1.585×10^{10}
对数b	1	1.1	1.2	1.3	10	10.1	10.2

e 的来源 (航海、天文学—加减代替乘除)

☞ 苏格兰约翰·纳皮尔(1550-1617)发明了对数logarithm.

表1 底数10 的对数表$b = \log_{10} N$

真数N	10	12.589	15.849	19.953	10^{10}	1.259×10^{10}	1.585×10^{10}
对数b	1	1.1	1.2	1.3	10	10.1	10.2

表2 底数$a = 1 + r, r = 0.001$ **的对数表**$b = \log_a N$

真数N	1.001	1.002	1.003	1.004	1.005	3.32	22015.5	24330.7
对数b	10	20	30	40	50	12000	100000	101000

e 的来源 (航海、天文学—加减代替乘除)

☞ 苏格兰约翰·纳皮尔(1550-1617)发明了对数logarithm.

表1 底数10 的对数表$b = \log_{10} N$

真数N	10	12.589	15.849	19.953	10^{10}	1.259×10^{10}	1.585×10^{10}
对数b	1	1.1	1.2	1.3	10	10.1	10.2

表2 底数$a = 1 + r, r = 0.001$ 的对数表$b = \log_a N$

真数N	1.001	1.002	1.003	1.004	1.005	3.32	22015.5	24330.7
对数b	10	20	30	40	50	12000	100000	101000

表3 底数$a = (1 + r)^{\frac{1}{r}}, r = 0.0001$ 的对数表$b = \log_a N$

真数N	1.001	1.002	1.003	1.004	1.005	3.32	22015.5	24330.7
对数b	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	1.2	10	10.1

e 的来源 (航海、天文学—加减代替乘除)

☞ 苏格兰约翰·纳皮尔(1550-1617)发明了对数logarithm.

表1 底数10 的对数表$b = \log_{10} N$

真数N	10	12.589	15.849	19.953	10^{10}	1.259×10^{10}	1.585×10^{10}
对数b	1	1.1	1.2	1.3	10	10.1	10.2

表2 底数$a = 1 + r, r = 0.001$ **的对数表**$b = \log_a N$

真数N	1.001	1.002	1.003	1.004	1.005	3.32	22015.5	24330.7
对数b	10	20	30	40	50	12000	100000	101000

表3 底数$a = (1 + r)^{\frac{1}{r}}, r = 0.0001$ **的对数表**$b = \log_a N$

真数N	1.001	1.002	1.003	1.004	1.005	3.32	22015.5	24330.7
对数b	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	1.2	10	10.1

e 的应用

e 的应用

应用位置	应用事例
微积分	$(a^x)' = a^x \ln a$, $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$.

e 的应用

应用位置	应用事例
微积分	$(a^x)' = a^x \ln a$, $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$.
概率统计	1% 抽奖概率, 抽100 次, 一次没中的概率接近1/e.

e 的应用

应用位置	应用事例
微积分	$(a^x)' = a^x \ln a$, $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$.
概率统计	1% 抽奖概率, 抽100 次, 一次没中的概率接近1/e.
数论	充分大的自然数a, 比它小的质数约有$a/\ln a$ 个.

e 的应用

应用位置	应用事例
微积分	$(a^x)' = a^x \ln a$, $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$.
概率统计	1% 抽奖概率, 抽100 次, 一次没中的概率接近1/e.
数论	充分大的自然数a, 比它小的质数约有$a/\ln a$ 个.
数学模型	连续复利模型, 人口增长模型, 传染病模型等.

e 的应用

应用位置	应用事例
微积分	$(a^x)' = a^x \ln a$, $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$.
概率统计	1% 抽奖概率, 抽100 次, 一次没中的概率接近1/e.
数论	充分大的自然数a, 比它小的质数约有$a/\ln a$ 个.
数学模型	连续复利模型, 人口增长模型, 传染病模型等.
Google	招聘广告密码之一为e 中第一个十位数质数.

e 的应用

应用位置	应用事例
微积分	$(a^x)' = a^x \ln a$, $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$.
概率统计	1% 抽奖概率, 抽100 次, 一次没中的概率接近1/e.
数论	充分大的自然数a, 比它小的质数约有$a/\ln a$ 个.
数学模型	连续复利模型, 人口增长模型, 传染病模型等.
Google	招聘广告密码之一为e 中第一个十位数质数.

e 与大自然

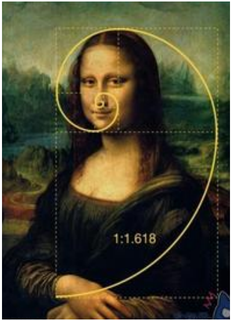
把指数函数e^x 换成极坐标就是对数螺线$\rho = e^\theta$. 它在自然界中广泛存在, 大如星系、台风; 小如花朵、海螺; 甚至蒙娜丽莎的微笑中都隐藏着对数螺线的身影.

e 与大自然

把指数函数e^x 换成极坐标就是对数螺线$\rho = e^\theta$. 它在自然界中广泛存在, 大如星系、台风; 小如花朵、海螺; 甚至蒙娜丽莎的微笑中都隐藏着对数螺线的身影.

e 与大自然

把指数函数e^x 换成极坐标就是对数螺线$\rho = e^{\theta}$. 它在自然界中广泛存在, 大如星系、台风; 小如花朵、海螺; 甚至蒙娜丽莎的微笑中都隐藏着对数螺线的身影.



参考文献

陈仁政. 不可思议的e.

科学出版社, 北京, 2005.

张英锋. 知乎问答: e 的自然之美

http://zhuanlan.zhihu.com/#/zhangyingfeng/19830084

Leonhard Euler. *An essay on continued fractions.* Translated from the Latin by B. F. Wyman and M. F. Wyman

Math. Systems Theory 18 (1985), 295-328.

果壳网、维基百科、微课与慕课、Latex中文论坛、麻省理工学院公开课

Thank you!