第四章　二次曲线方程的化简及其性质

§1 坐标变换

研究坐标变换公式及其应用

1.平面的点的仿射坐标变换公式

旧坐标系 I $\left[O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right]$　　新坐标系 II $\left[O',\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'}\right]$

O' 在 I 中的坐标 (x_0, y_0).

$\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}$ 用 I 中的基向量 $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ 表示

$$\overrightarrow{e_1'} = a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{21}\overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{e_2'} = a_{12}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2}$$

基向量变换公式

$$\begin{cases} x = x_0 + a_{11}x' + a_{12}y' \\ y = y_0 + a_{21}x' + a_{22}y' \end{cases}$$

I到II的点的仿射坐标变换公式

定理 1: 如果平面上点的仿射坐标变换公式中的系数行列式不等于零，即 $d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ ，则

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{d}(a_{22}x - a_{12}y - a_{22}x_0 + a_{12}y_0) \\ y' = \dfrac{1}{d}(-a_{21}x + a_{11}y + a_{21}x_0 - a_{11}y_0) \end{cases}$$

II到I的点的仿射坐标变换公式

2.平面的向量的仿射坐标变换公式

设向量 $\vec{m}$ 在 **I** 中的坐标为 (u,v)，在 **II** 中的坐标为 (u',v')。

$$\begin{cases} u = a_{11}u' + a_{12}v' \\ v = a_{21}u' + a_{22}v' \end{cases}$$

I到II的向量的仿射坐标变换公式

$$\begin{cases} u' = \dfrac{1}{d}(a_{22}u - a_{12}v) \\ v' = \dfrac{1}{d}(-a_{21}u + a_{11}v) \end{cases}$$

II到I的向量的仿射坐标变换公式

3.空间的点的仿射坐标变换公式

旧坐标系 I $\left[O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right]$，新坐标系 II $\left[O',\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'},\overrightarrow{e_3'}\right]$

O' 在 I 中的坐标 (x_0,y_0,z_0).

$$\begin{cases}\overrightarrow{e_1'}=a_{11}\overrightarrow{e_1}+a_{21}\overrightarrow{e_2}+a_{31}\overrightarrow{e_3}\\ \overrightarrow{e_2'}=a_{12}\overrightarrow{e_1}+a_{22}\overrightarrow{e_2}+a_{32}\overrightarrow{e_3}\\ \overrightarrow{e_3'}=a_{13}\overrightarrow{e_1}+a_{23}\overrightarrow{e_2}+a_{33}\overrightarrow{e_3}\end{cases}$$

基向量变换公式

M 点在旧坐标系 **I** 的坐标为（**x**，**y**，**z**），新坐标系 **II** 的坐标为 (x', y', z')，

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + x_0 \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + y_0 \\ z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + z_0 \end{cases}$$

I到II的点的仿射坐标变换公式

若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$

$$\begin{cases} x' = b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z - b_{11}x_0 - b_{12}y_0 - b_{13}z_0 \\ y' = b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z - b_{21}x_0 - b_{22}y_0 - b_{23}z_0 \\ z' = b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z - b_{31}x_0 - b_{32}y_0 - b_{33}z_0 \end{cases}$$

II到I的点的仿射坐标变换公式

这里 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{3\times3}, B=(b_{ij})_{3\times3}$ 且 $B=A^{-1}$。

4.空间的向量的仿射坐标变换公式

设向量 $\vec{m}$ 在旧坐标系 I 下的坐标为（u，v，w）

在新坐标系 II 下的坐标为 (u', v', w')

$$\begin{cases} u = a_{11}u' + a_{12}v' + a_{13}w' \\ v = a_{21}u' + a_{22}v' + a_{23}w' \\ w = a_{31}u' + a_{32}v' + a_{33}w' \end{cases}$$

I到II的向量的仿射坐标变换公式

$$\begin{cases} u' = b_{11}u + b_{12}v + b_{13}w \\ v' = b_{21}u + b_{22}v + b_{23}w \\ w' = b_{31}u + b_{32}v + b_{33}w \end{cases}$$

II到I的向量的仿射坐标变换公式

例 1: 设仿射坐标系$\left[O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right]$到$\left[O^{\prime},\overrightarrow{e_1^{\prime}},\overrightarrow{e_2^{\prime}},\overrightarrow{e_3^{\prime}}\right]$的基

向量变换公式为$\begin{cases}\overrightarrow{e_1^{\prime}}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3}\\ \overrightarrow{e_2^{\prime}}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}\\ \overrightarrow{e_3^{\prime}}=\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}\end{cases}$

1、 求向量的仿射变换公式;

2、 已知向量$\overrightarrow{v_1}$在$\left[O^{\prime},\overrightarrow{e_1^{\prime}},\overrightarrow{e_2^{\prime}},\overrightarrow{e_3^{\prime}}\right]$下的分量为（**1**，**-1**，**2**），

求$\overrightarrow{v_1}$在$\left[O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right]$下的分量;

3、 已知向量$\overrightarrow{v_2}$，$\overrightarrow{v_3}$在$\left[O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right]$下的分量依次为（**0**，**1**，**-1**），（**1**，**2**，**0**）。求$\overrightarrow{v_2}$，$\overrightarrow{v_3}$在$\left[O^{\prime},\overrightarrow{e_1^{\prime}},\overrightarrow{e_2^{\prime}},\overrightarrow{e_3^{\prime}}\right]$下的分量。

例 2：设仿射坐标系$\left[O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right]$到$\left[O',\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'},\overrightarrow{e_3'}\right]$的基

向量变换为$\begin{cases}\overrightarrow{e_1'}=-3\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}\\ \overrightarrow{e_2'}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}\\ \overrightarrow{e_3'}=\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_3}\end{cases}$

新原点O'在$\left[O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right]$下的坐标为（**1，-1，2**）

1、求点的仿射坐标变换公式；

2、求平面$\pi: 2x-3y+z-1=0$在新坐标系$\left[O',\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'},\overrightarrow{e_3'}\right]$下的方程；

3、求点 **P**（**-3，1，0**）在新坐标$\left[O',\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'},\overrightarrow{e_3'}\right]$下的坐标。

5.直角坐标变换公式

设 I $\left[O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right]$, II $\left[O',\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'}\right]$都是直角坐标系.

设 O' 的 I 坐标为 (x_0, y_0)， $\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'}$ 的 I 坐标分别为 $(a_{11}, a_{21}),(a_{12}, a_{22})$

I 到 II 的过渡矩阵是 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

定理 2：设 I 和 II 都是直角坐标系，则 I 到 II 的过渡矩阵 A 是正交矩阵，并且 II 到 I 的过渡矩阵为 A^T

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

I到II的点的直角坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

II到I的点的直角坐标变换公式

设向量$\vec{m}$在 I 中的坐标为(u,v)，在 II 中的坐标为(u',v')。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

I到II的向量的直角坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

II到I的向量的直角坐标变换公式

6.空间的直角坐标变换公式

旧坐标系 $\mathbf{I}\left[O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right]$，新坐标系 $\mathbf{II}\left[O',\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'},\overrightarrow{e_3'}\right]$

O' 在 $\mathbf{I}$ 中的坐标 (x_0,y_0,z_0).

$$\begin{cases}\overrightarrow{e_1'}=a_{11}\overrightarrow{e_1}+a_{21}\overrightarrow{e_2}+a_{31}\overrightarrow{e_3}\\ \overrightarrow{e_2'}=a_{12}\overrightarrow{e_1}+a_{22}\overrightarrow{e_2}+a_{32}\overrightarrow{e_3}\\ \overrightarrow{e_3'}=a_{13}\overrightarrow{e_1}+a_{23}\overrightarrow{e_2}+a_{33}\overrightarrow{e_3}\end{cases}$$

基向量变换公式

过渡矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

I到II的点的

直角坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^T\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}$$

II到I的点的

直角坐标变换公式

设向量$\overrightarrow{m}$在 I 中的坐标为(u,v,w)，在 II 中的坐标为(u',v',w')。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix}$$

I到II的向量的直角坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

II到I的向量的直角坐标变换公式

7.直角坐标变换中的过渡矩阵

设 $\mathrm{I}\left[O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right]$,$\mathrm{II}\left[O',\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'}\right]$都是右手直角坐标系

在坐标系 $\mathrm{I}\left[O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right]$下，

$$O'=(x_0,y_0) \qquad \overrightarrow{e_1'}=(a_{11},a_{21}) \qquad \overrightarrow{e_2'}=(a_{12},a_{22})\text{。}$$

设$\overrightarrow{e_1}$逆时针旋转ϑ便与$\overrightarrow{e_1'}$重合

$$a_{11}=\cos\vartheta=\cos(\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_1}) \qquad a_{21}=\sin\vartheta=\cos(\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2})$$

$$a_{12}=-\sin\vartheta=\cos(\overrightarrow{e_2'},\overrightarrow{e_1}) \qquad a_{22}=\cos\vartheta=\cos(\overrightarrow{e_2'},\overrightarrow{e_2})$$

定义：平面（或空间）的两个坐标系，如果它们都是右手系，或者它们都是左手系，则称它们是同定向的；如果一个是左手系，一个是右手系，则称它们是反定向的

命题：设 I 和 II 都是平面的直角坐标系，设 I 到 II 的过渡矩阵是 A，则 I 和 II 同定向的充分必要条件为 $|A|$=1；从而它们是反定向的充分必要条件为 $|A|$=-1。

今后所取的直角坐标系都是右手系

8.移轴公式和转轴公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

移轴公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

转轴公式

$$\left[O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right] \text{（移轴）} \rightarrow \left[O', \vec{e_1}, \vec{e_2}\right] \text{（转轴）} \rightarrow \left[O', \vec{e_1'}, \vec{e_2'}\right]$$

$$\left[O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right] \text{（转轴）} \rightarrow \left[O, \vec{e_1'}, \vec{e_2'}\right] \text{（移轴）} \rightarrow \left[O', \vec{e_1'}, \vec{e_2'}\right]$$

空间直角坐标系

定理：仿射坐标系 I$\left[O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right]$到 II$\left[O',\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'},\overrightarrow{e_3'}\right]$的过渡矩阵是非奇异的，并且 I 与 II 同定向的充分必要条件为$|A|>0$。

推论：平面上的两个仿射坐标系 I$\left[O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right]$和 II$\left[O',\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'}\right]$同定向的充分必要条件是 I 到 II 的过渡矩阵 A 的行列式$|A|>0$。

定理：设 I $\left[O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right]$和 II $\left[O',\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'},\overrightarrow{e_3'}\right]$都是直角坐标系，则 I 到 II 的过渡矩阵 A 是正交矩阵，从而 II 到 I 的过渡矩阵是 A^T。

例 1：设已给两个直角坐标系 **I** $\left[O,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right]$和 **II** $\left[O',\vec{e_1'},\vec{e_2'},\vec{e_3'}\right]$。在 **I** 下，已知

$$\vec{e_1'}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}),\vec{e_2'}=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0),\vec{e_3'}=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}})$$

求：**1**、向量的坐标变换公式；

2、已知向量$\vec{v_1}$在 **I** 下的分量为（**1**，**-1**，**1**），求它在 **II** 下的分量；

3、已知向量$\vec{v_2}$在 **II** 下的分量为（**-1**，**0**，**2**），求它在 **I** 下的分量。

例 2：在右手直角坐标系$\left[O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right]$下，已给三个平面

$$\begin{cases} \pi_1 : x - y + z + 1 = 0 \\ \pi_2 : x + 2y + z - 5 = 0 \\ \pi_3 : x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

先验证这三个平面互相垂直，再建立一个新的右手直角坐标系$\left[O',\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'},\overrightarrow{e_3'}\right]$，使$\pi_1,\pi_2,\pi_3$依次为坐标面$Oy'z',O'x'z',O'x'y'$，而且基向量$\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'}$在原坐标系下的第一个分量有正值，求$\left[O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right]$和新坐标系$\left[O',\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'},\overrightarrow{e_3'}\right]$之间的向量变换公式和点的坐标变换公式。

例 3：设直角坐标系 I $\left[O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right]$ 和 II $\left[O',\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'},\overrightarrow{e_3'}\right]$ 的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x'-\dfrac{1}{\sqrt{3}}y'-\dfrac{1}{\sqrt{3}}z'+1 \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'-\dfrac{1}{\sqrt{2}}z' \\ z=\dfrac{1}{\sqrt{6}}x'-\dfrac{2}{\sqrt{6}}y'+\dfrac{1}{\sqrt{6}}z'-1 \end{cases}$$

1、已知平面 π 在 I 下的方程为 $2x+3y+1=0$，求 π 在 II 下的方程；

2、设 P 点在 I 下的坐标为（1，-1，1），求 P 在 II 下的坐标。

9.代数曲面（线）及其次数

设图形 **S** 在 **I** 下的方程为 **F**（***x***，***y***，***z***）**=0**

在 **II** 下的方程为 $G(x', y', z') = 0$。

定理：若图形 **S** 在某个仿射坐标系的方程为 **F**（***x***，***y***，***z***）**=0** 的左端是 ***x***，***y***，***z*** 的 **n** 次多项式，则 **S** 在任意一个仿射坐标系下的方程 $G(x', y', z') = 0$ 的左端是 x', y', z' 的 **n** 次多项式。

若图形S的方程的左端是多项式，则称S是**代数曲面**，并称多项式的次数为这个**代数曲面的次数**