第六章 不定积分

6.1.不定积分的基本概念及运算法则

6.2. 不定积分的计算

6.3. 有理函数的不定积分

§1 不定积分的基本概念及运算法则

一、不定积分的定义

在实际问题中，往往需要解决和微分运算正好相反的问题。如已知速率函数，要求位移函数；或已知一条平面曲线在任一点处的切线斜率，要求这条曲线等。这就是不定积分。

定义:若在某一区间上，$F'(x) = f(x)$，则称在这个区间上，函数$F(x)$ 是$f(x)$ 的一个原函数。

显然，若$F(x)$ 是$f(x)$ 的一个原函数，则$\forall c \in \mathbb{R}$, $F(x) + c$ 为$f(x)$ 的原函数。事实上，$f(x)$ 的所有原函数构成的集合为$\{F(x) + c | c \in \mathbb{R}\}$，这便是前面学过的不定积分基本定理。

不定积分基本定理：若在区间I 上处处有$f'(x) = g'(x)$，则存在常数C，满足$f(x) = g(x) + C$。

因此，只要求出$f(x)$ 的任意一个原函数$F(x)$，就可以用$F(x) + C$ 代替$f(x)$ 的全部原函数。

注：关于原函数有三个基本问题

（1）存在性（下一章解决）；

（2）唯一性（不定积分基本定理，在相差一常数意义下唯一）；

（3）如何求（接下来关心的问题）。

定义: 函数$f(x)$ 的原函数全体称为这个函数的不定积分，记作$\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$\mathrm{d}x$ 中的x 称为积分变量。

注1：不定积分与原函数这两个概念是整体与个体的关系，原函数的全体称不定积分。微分运算d 与不定积分运算$\int$ 构成逆运算。$\mathrm{d}(\int f(x)\mathrm{d}x) = f(x)\mathrm{d}x$。

注2：初等函数$f(x)$的原函数$\int f(x)\,\mathrm{d}x$未必为初等函数。e.g. $\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$, $\int \sin x^2\mathrm{d}x$, $\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$。

若$\int f(x)\,\mathrm{d}x$也为初等函数，则称$\int f(x)\,\mathrm{d}x$可积，反之，则称为不可积。不定积分的计算就是求原函数为初等函数的不定积分。

下列等式是否正确，说明理由

$$(1)\mathrm{d}(\int f(x)\mathrm{d}x) = f(x);\quad (2)\mathrm{d}(\int f(x)\mathrm{d}x) = f(x)\mathrm{d}x;$$

$$(3)\int \mathrm{d}f(x) = f(x);\qquad (4)\mathrm{d}\int \mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}f(x)。$$

例1：求$\int \sin x\mathrm{d}x$。

例2：求$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x$。

利用导数和微分的关系可以得到最基本的不定积分表，见P_{244} 左、右两栏。

二、不定积分的基本性质

定理:若函数$f(x)$ 和$g(x)$ 的原函数均存在，则对任意常数$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$，函数$k_1 f(x) + k_2 g(x)$ 的原函数也存在，且

$$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1 \int f(x)\mathrm{d}x + k_2 \int g(x)\mathrm{d}x.$$

注：不考虑$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 是因为$[F(x)G(x)]' \neq f(x)g(x)$（设$F(x), G(x)$ 分别是$f(x), g(x)$ 的原函数）。

例3：求$\int \tan^2 x\mathrm{d}x$。

例4：求$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$。

例5：求$\int \dfrac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

例6：求$\int \dfrac{(x+\sqrt{x})(x-2\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$。

作业： 课本P_{246} 1 奇数题。

§2 不定积分的计算

一、第一类换元法（凑微分法）

例1：求$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a}$。

例2：求$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$。

定理：若u 为自变量时，有$\displaystyle\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$，则当$u$ 是x 的可微函数时，有

$$\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = \int f(u(x))\mathrm{d}(u(x)) = F(u(x)) + C$$

例3：求$\int \tan x\mathrm{d}x$。

例4：求$\int \sec x\mathrm{d}x$。

例5：求$\int \cos^4 x\mathrm{d}x$。

例6：求$\int \cos^5 x\mathrm{d}x$。

作业： 课本P_{259} 1(2)(3)(8)(11)(12)(14)(18 – 20)。

补充题：求下列不定积分。

(1) $\int \sqrt{\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}\mathrm{d}x$； (2) $\int \dfrac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x$。

二、第二类换元法（拆分法）

例7：求$\int x(2x-1)^{100}\mathrm{d}x$.

定理: 设$x=\phi(t)$ 是一个单调可微的函数，$\phi'(t)\neq 0$，且$f(\phi(t))\phi'(t)$ 具有原函数$F(t)$，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C=F(\phi^{-1}(x))+C.$$

凑微分：$\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x$(难求) $=\int f(u)\mathrm{d}u$(易求)

拆分法：$\int f(x)\mathrm{d}x$(难求) $=\int f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$(易求)

例8：求$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x(a>0)$。

注：拆分法主要用于含根式的积分，寻找$x=\phi(t)$，使被积函数去根号。

例9：计算$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}(a>0)$。

作业： 课本P_{260} $2(1-3),(6-7),(11-13),(15),(20)$。

三、分部积分法

设$u(x),v(x)$ 可微，则由两函数乘积的导数公式

$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$，得

$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$。两边不定积分，

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

$$\iff \int u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\mathrm{d}u(x)。$$

粗略地看，只是把求$u(x)v'(x)$的不定积分转化为求$u'(x)v(x)$的不定积分，两者形式差不多，但两者的难易程度可能不能同日而语。

当被积函数中出现幂函数、指数函数、三角函数这三类函数中两类或两类以上的函数乘积；或者出现对数函数、反三角函数，均可考虑用分部积分。

运用分部积分法特点：

1° 被积函数为不同类型函数乘积。

2° 寻找$u(x), v(x)$。原则：

(1)$v(x)$ 比较容易求出；

(2)$\int v(x)\mathrm{d}u(x)$ 比$\int u(x)\mathrm{d}v(x)$ 容易求出。

易选为$u(x)$ 的函数类型：反、对、幂（求导后变简单）；易选为$v(x)$ 的函数类型：三、指（易于求原函数）。

3° 反对幂三指

分部积分时，一般将排列次序在后面的函数优先与$\mathrm{d}x$结合成$\mathrm{d}v$。

例10：求$\int x\cos x\mathrm{d}x$。

例11：计算$I=\int x\tan x\sec^2 x\mathrm{d}x$。

熟练记牢 P_{256} 基本积分表。

四、计算积分的其它方法

1、第一类、第二类换元法，分部积分法多种方法混合使用。

例12：求$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$。

例13：求$\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x$。

2、循环法

例14：求$\int e^x\sin x\mathrm{d}x$。

注：适合用循环法的方法$\int P_n(\sin bx)e^{ax}\mathrm{d}x$,
$\int P_n(\cos bx)e^{ax}\mathrm{d}x$, $P_n(x)$ 表示关于x 的n 次多项式。

例15：求$\int\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$。

例16：求$\int(x+1)\sqrt{x^2-2x+5}\mathrm{d}x$。

作业： 课本P_{260} 3(1)(2)(11)(13)(16), 4, 5, 6.

3、配对积分法

例17：计算$I=\int\frac{\sin x}{2\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x$。

例18：求不定积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$。

注1：在个别点分母为零（甚至定义域上可数个点分母为零），积分值不受影响。

注2：本题在后面学到有理函数的不定积分后可用标准方法做，但计算量大得多。

4、拆分法

例19：求$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

注：拆一法适用于$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^m x \cos^n x}\mathrm{d}x$ 的情形，其中$m, n \in \mathbb{Z}^+$。

例20：求$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$。

5、递推法

例21：求$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$。

例22：设对自然数$n > 2$，定义$I_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x$。证明$I_n = \frac{2}{n-1}\sin(n-1)x + I_{n-2}$。

作业：课本P_{261} $7, 8(2)(6)(7)(8), 9, 10(1)(3).$

§3 有理函数的不定积分

一、有理函数的不定积分

设$P(x), Q(x)$ 是两多项式，形如$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 的函数称为有理函数。

考虑$\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$，总假定$\partial(P(x)) < \partial(Q(x))$。否则，用带余除法$\dfrac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \dfrac{r(x)}{Q(x)}, 0 \leq \partial(r(x)) < \partial(Q(x))$，则

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x = \int R(x)\mathrm{d}x + \int \frac{r(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x。$$

不妨设$Q(x)$ 为n 次实多项式，则由代数学基本定理，$Q(x)$ 在复数域上恰有n 个根，且虚根成对出现。

设$Q(x)$ 的全部实根为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i$，重数分别为$m_1, m_2, \cdots, m_i$；全部复根为$\beta_1 \pm i\gamma_1, \beta_2 + i\gamma_2, \cdots, \beta_j + i\gamma_j$，重数分别为$n_1, n_2, \cdots, n_j$。则$\sum_{k=1}^{i} m_k + 2\sum_{k=1}^{j} n_k = n$。

记$\xi_k = -\beta_k, \eta_k^2 = \beta_k^2 + \gamma_k^2$，则

$$Q(x) = \prod_{k=1}^{i}(x-\alpha_k)^{m_k} \cdot \prod_{k=1}^{j}(x^2 + 2\xi_k x + \eta_k^2)^{n_k} 。$$

求$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x$ 的关键：将$\frac{P(x)}{Q(x)}$ 分解成简单分式之和。

定理：设$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$为真分式，$Q(x)$有k重实根α，即$Q(x)=(x-\alpha)^k Q_1(x), Q_1(\alpha)\neq 0$。则存在实数$\lambda_1$与多项式$P_1(x)$，$P_1(x)$的次数低于$(x-\alpha)^{k-1}Q_1(x)$的次数，成立

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lambda_1}{(x-\alpha)^k}+\frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1}Q_1(x)}。$$

定理：设有理函数$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$为真分式，$Q(x)$有ℓ重共轭复根$\beta+i\gamma$，即$Q(x)=(x^2+2\xi x+\eta^2)^\ell Q^*(x), Q^*(\beta+i\gamma)\neq 0$。其中$\xi=-\beta,\eta^2=\beta^2+\gamma^2$。则存在实数$\mu, v$和多项式$P^*(x), P^*(x)$的次数低于$(x^2+2\xi x+\eta^2)^{\ell-1}Q^*(x)$的次数，成立

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\mu x+v}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^\ell}+\frac{P^*(x)}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^{\ell-1}Q^*(x)}。$$

总结1：若$Q(x)$ 中含因子$(x-\alpha)^m$，则分解出的因式中含项$\dfrac{\lambda_1}{x-\alpha}, \dfrac{\lambda_2}{(x-\alpha)^2}, \cdots, \dfrac{\lambda_m}{(x-\alpha)^m}$。

总结2：若$Q(x)$ 中含因子$(x^2+2\xi x+\eta^2)^n$，则分解出的因式中含项

$$\frac{\mu_1 x+v_1}{x^2+2\xi x+\eta^2}, \frac{\mu_2 x+v_2}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^2}, \cdots, \frac{\mu_n x+v_n}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n},$$

其中系数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m, \mu_1, v_1, \mu_2, v_2, \cdots, \mu_n, v_n$ 可用待定系数法求出。

以下我们关心

(1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^m} = \begin{cases} -\frac{1}{m-1}(x-\alpha)^{-m+1} + C, & m \neq -1 \\ \ln|x-\alpha| + C, & m = -1 \end{cases}$$

(2) $$\int \frac{\mu x + v}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n}\mathrm{d}x (\xi^2 < \eta^2)$$

$$\begin{aligned} = & \frac{\mu}{2}\int \frac{2x+2\xi}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n}\mathrm{d}x + (v-\mu\xi)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n} \\ = & \frac{\mu}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2\xi x+\eta^2)}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n} + (v-\mu\xi)\int \frac{\mathrm{d}(x+\xi)}{[(x+\xi)^2+(\eta^2-\xi^2)]^n} \end{aligned}$$

至此，有理函数不定积分理论完满结束。由上述结果可知，有理函数原函数一定是初等函数（有理函数的不定积分总是有理函数、对数函数和反正切函数的有限次四则运算或复合运算所构成的初等函数）。

综上：有理函数经带余除法分解成多项式+真分式，真分式又可分解成若干简单分式之和。

真分式分解方法：待定系数法。如何求待定系数？例如：确定系数A, B, C, D, E，s.t.

$$\frac{2(x+1)}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}。$$

例1：求$\int \frac{1}{1+x^3} \mathrm{d}x$。

作业： 课本P_{269} 1偶数题, 2。

二、其它类型的积分举例

1、三角函数有理式的积分

设$R(u,v)$ 表示两个变量u,v 的有理函数（即分子、分母都是关于u,v 的二元多项式）。由于凡三角函数的有理函数均可化成$\sin x$ 和$\cos x$ 的有理函数，故只需研究如何求$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$。

利用万能公式：令$t=\tan\dfrac{x}{2}$，则$x=2\arctan t$，$\mathrm{d}x=2/(1+t^2)\mathrm{d}t, \sin x=2t/(1+t^2), \cos x=(1-t^2)/(1+t^2)$。

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int\frac{2}{1+t^2}R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t。$$

例2：求$\int \frac{\cot x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$。

万能公式比较可靠，但计算量大。因此，在求三角函数有理式的不定积分时，不要滥用万能公式。

以下几种变换计算量往往比万能公式小。

(1)若$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则令$t=\cos x$。

(2)若$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则令$t=\sin x$。

(3)若$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，则令$t=\tan x$。

例3：计算$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos 2x}$.

作业： 课本P_{270} 6除(8)外全做。

2、可化成有理函数的无理函数的不定积分

一般来说，无理函数的不定积分并不总能积出，例如看似简单的$\int x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x$，其中$a,b\in\mathbb{R},m,n,p\in\mathbb{Q}$，仅在$p,\frac{m+1}{n},\frac{m+1}{n}+p$ 为整数这三种情况下才可积。

以下考虑几类特殊的无理函数的不定积分。

$$(1)R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})(n>1,n\in\mathbb{Z}^+,ad-bc\neq 0).$$

特点：1° 不能根式套根式；2° 根式内为同一线性分式。

例4：求$\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$。

例5：计算$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}(a<x<b)$。

注：不定积分解法答案表面上可能不同，但由于不定积分是一个函数加上任意常值函数来表示的，原函数只相差一个常数，但导函数必须相同。因此要养成用求导运算来检验不定积分计算结果是否正确的习惯。

(2)$R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b}\right)$, 其中$m, n \in \mathbb{Z}$, $R(u, v, w)$表示u, v, w的有理函数.

作业： 课本P_{270} 4除(2)外全做, 5, 7。

(3)$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$.

注：有些教材上的$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x(a \neq 0)$ 与$\int (Mx+N)\sqrt{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$ 均属于此类型。

欧拉变换：

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \begin{cases} t \pm \sqrt{a}x, & a > 0 \\ tx \pm \sqrt{c}, & c > 0 \\ t(x-\alpha), & \text{若 } ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta) \end{cases}$$