数学建模与系统仿真

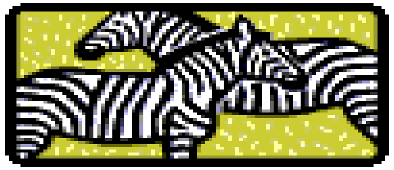
课程负责人:许春根 教授
主讲老师：许春根、范金华、窦本年、谢建春

种群相互竞争

主讲人：范金华

Tel: 84315877(O)
Email:jinhuafan@hotmail.com

种群的相互竞争



- 一个自然环境中有两个种群生存，它们之间的关系：相互竞争；相互依存；弱肉强食.
- 当两个种群为争夺同一食物来源和生存空间相互竞争时，常见的结局是，竞争力弱的灭绝，竞争力强的达到环境容许的最大容量.
- 经过自然界的长期演变，今天看到的只是结局.
- 建立数学模型描述两个种群相互竞争的过程，分析产生这种结局的条件.

模型假设

- 有甲乙两个种群，它们独自生存时数量变化均服从Logistic规律;

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 (1 - \frac{x_1}{N_1}) \qquad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 (1 - \frac{x_2}{N_2})$$

- 两种群在一起生存时，乙对甲增长的阻滞作用与乙的数量成正比；甲对乙有同样的作用.

模型

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \qquad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

对于消耗甲的资源而言，乙(相对于N_2)是甲(相对于N_1) 的 σ_1 倍.

$\sigma_1 > 1$ ⇨ 对甲增长的阻滞作用，乙大于甲.

⇨ 乙的竞争力强

补充：二阶非线性自治方程平衡点稳定性

二阶非线性自治方程 $\begin{cases}\dot{x}_1(t)=f(x_1,x_2)\\ \dot{x}_2(t)=g(x_1,x_2)\end{cases}$ 的平衡点及其稳定性

平衡点$P_0(x_1^0, x_2^0)$ ~ 代数方程 $\begin{cases}f(x_1,x_2)=0\\ g(x_1,x_2)=0\end{cases}$ 的根.

若从P_0某邻域的任一初值出发，都有 $\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t)=x_1^0$, $\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t)=x_2^0$, 称$P_0$是微分方程的稳定平衡点.

判断P_0 (x_1^0, x_2^0) 稳定性的方法——直接法

$$\dot{x}_1(t) = f(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2(t) = g(x_1, x_2) \qquad (1)$$

(1)的近似线性方程

$$\dot{x}_1(t) = f_{x_1}(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0) + f_{x_2}(x_1^0, x_2^0)(x_2 - x_2^0)$$
$$\dot{x}_2(t) = g_{x_1}(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0) + g_{x_2}(x_1^0, x_2^0)(x_2 - x_2^0) \qquad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{P_0}$$

$$\begin{cases} \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \\ p = -(f_{x_1} + g_{x_2})\big|_{P_0} \\ q = \det A \end{cases}$$

$p > 0$ 且 $q > 0$

平衡点 P_0稳定(对(2),(1))

$p < 0$ 或 $q < 0$

平衡点 P_0不稳定(对(2),(1))

平衡点

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1\left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) \equiv r_1 x_1\left(1 - \dfrac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \dfrac{x_2}{N_2}\right) = 0 \\ g(x_1, x_2) \equiv r_2 x_2\left(1 - \sigma_2 \dfrac{x_1}{N_1} - \dfrac{x_2}{N_2}\right) = 0 \end{cases}$$

平衡点：$P_1(N_1, 0)$, $P_2(0, N_2)$,

$$P_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right), P_4(0,0)$$

仅当$\sigma_1, \sigma_2 < 1$或$\sigma_1, \sigma_2 > 1$时，P_3才有意义.

平衡点稳定性分析

$$\begin{cases} f(x_1,x_2) \equiv r_1 x_1\left(1-\dfrac{x_1}{N_1}-\sigma_1\dfrac{x_2}{N_2}\right) \\ g(x_1,x_2) \equiv r_2 x_2\left(1-\sigma_2\dfrac{x_1}{N_1}-\dfrac{x_2}{N_2}\right) \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_1\left(1-\dfrac{2x_1}{N_1}-\dfrac{\sigma_1 x_2}{N_2}\right) & -\dfrac{r_1\sigma_1 x_1}{N_2} \\ -\dfrac{r_2\sigma_2 x_2}{N_1} & r_2\left(1-\dfrac{\sigma_2 x_1}{N_1}-\dfrac{2x_2}{N_2}\right) \end{bmatrix}$$

$$p=-(f_{x_1}+g_{x_2})\Big|_{P_i},\quad q=\det A\Big|_{P_i},\quad i=1,2,3,4$$

平衡点 P_i 稳定条件： $p>0$ 且 $q>0$

种群竞争模型的平衡点及稳定性

平衡点	p	q	稳定条件
$P_1(N_1,0)$	$r_1-r_2(1-\sigma_2)$	$-r_1r_2(1-\sigma_2)$	$\sigma_2>1$, $\sigma_1<1$
$P_2(0,N_2)$	$-r_1(1-\sigma_1)+r_2$	$-r_1r_2(1-\sigma_1)$	$\sigma_1>1$, $\sigma_2<1$
$P_3\left(\dfrac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\dfrac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$	$\dfrac{r_1(1-\sigma_1)+r_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\dfrac{r_1r_2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\sigma_1<1$, $\sigma_2<1$
$P_4(0,0)$	$-(r_1+r_2)$	r_1r_2	不稳定

P_1, P_2 是一个种群存活而另一灭绝的平衡点

P_3 是两种群共存的平衡点

P_1稳定的条件 $\sigma_1<1$?

结果解释

- P_1稳定的条件：$\sigma_1<1,\ \sigma_2>1$

对于消耗甲的资源而言，乙(相对于N_2)是甲(相对于N_1)的σ_1倍.

$\sigma_1<1$ ⇨ 对甲增长的阻滞作用，乙小于甲$\Rightarrow$乙的竞争力弱.

$\sigma_2>1 \Rightarrow$甲的竞争力强

甲达到最大容量，乙灭绝

- P_2稳定的条件：$\sigma_1>1,\ \sigma_2<1$
- P_3稳定的条件：$\sigma_1<1,\ \sigma_2<1$

通常$\sigma_1 \approx 1/\sigma_2$，$P_3$稳定条件不满足.