定轴转动动能定理 $A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}Md\theta=\frac{1}{2}J\omega_2^{\ 2}-\frac{1}{2}J\omega_0^2$

既有质点平动又有刚体定轴转动的系统：

$A_{所有力矩}+A_{所有力}=E_{k2}-E_{k1}$——系统的动能定理

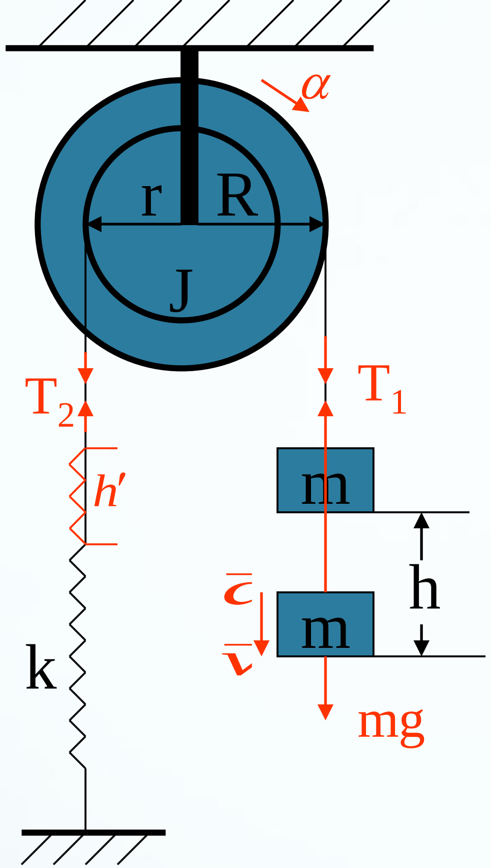
其中：$E_k=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2$

$A_{外力矩}+A_{外力}+A_{非保内力矩}+A_{非保内力}=E_2-E_1$

其中：$E=E_k+E_p$ ——系统的功能原理

若：$A_{外力矩}+A_{外力}+A_{非保内力矩}+A_{非保内力}=0$

则：$E_2=E_1$ ——系统机械能守恒



已知：J、k、m、r、R

开始时m静止，弹簧处于自然长度

求：释放m后，m下落h时*a*=?,*v*=?

解:$\{m\}$: $mg - T_1 = ma$ (1)

$\{J\}$: $T_1 R - T_2 r = J\alpha$ （2）

$$T_2 = kh' = k\frac{r}{R}h \qquad (3)$$

$$a = R\alpha \qquad (4)$$

(1)–(4) ⟹ ***a***

$\{m$、J、地面、弹簧$\}$: $E_1 = E_2$

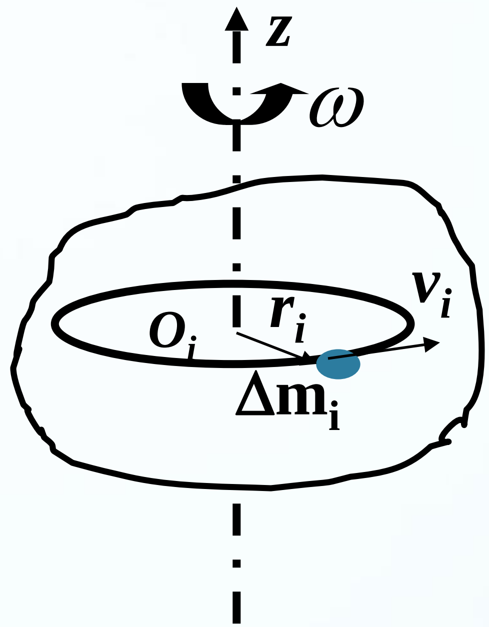
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}kh'^2$$

$$h' = \frac{r}{R}h, \qquad v = R\omega$$

⟹ ***v***

§3-4 刚体的角动量和角动量守恒定律

一、刚体定轴转动的角动量



单个质点 Δm_i :

$$L_i \begin{cases} L_i = \Delta m_i v_i r_i = \Delta m_i r_i^2 \omega \\ \text{方向：沿Z轴正向} \end{cases}$$

整个刚体：

$$L = \sum L_i \begin{cases} L = \sum \Delta m_i v_i r_i = (\sum \Delta m_i r_i^2)\omega = J\omega \\ \text{方向：沿轴} \end{cases}$$

$= J\omega$

即刚体绕定轴转动角动量为绕该轴的转动惯量与角速度之乘积。

二、刚体定轴转动的角动量定理

质点：$\vec{M}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}=\dfrac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v})$　　刚体：$\vec{M}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}=\dfrac{d}{dt}(J\vec{\omega})$

※**定轴转动：**　$M=\dfrac{dL}{dt}=\dfrac{d}{dt}(J\omega)=J\dfrac{d\omega}{dt}+\omega\dfrac{dJ}{dt}$

1）若质点系为刚体（J为常数）

则：$M=J\dfrac{d\omega}{dt}=J\alpha\cdots\cdots$转动定律

2）若质点系不是刚体（J变化）

则：$M=J\alpha$　不成立　但$M=\dfrac{d}{dt}(J\omega)$　成立

刚体定轴转动的角动量定理(积分式)

$$M = \frac{d}{dt}(J\omega)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} Mdt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} d(J\omega) = J\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega = J\omega_2 - J\omega_1$$

其中：$\int_{t_1}^{t_2} Mdt \cdots\cdots$冲量矩

作用于刚体上冲量矩等于刚体角动量的增量

三、角动量守恒

由角动量定理可知，当$M=0$，则：$J\omega=J_0\omega_0$

即若系统的合外力矩为零，则系统的角动量守恒。

讨论：1. J、ω均不变，　$J\omega$=常数

2. J、ω都改变，　但$J\omega$不变

花样滑冰运动员通过改变身体姿态
即改变转动惯量来改变转速

优酷
CBC
アコム
CITIZEN

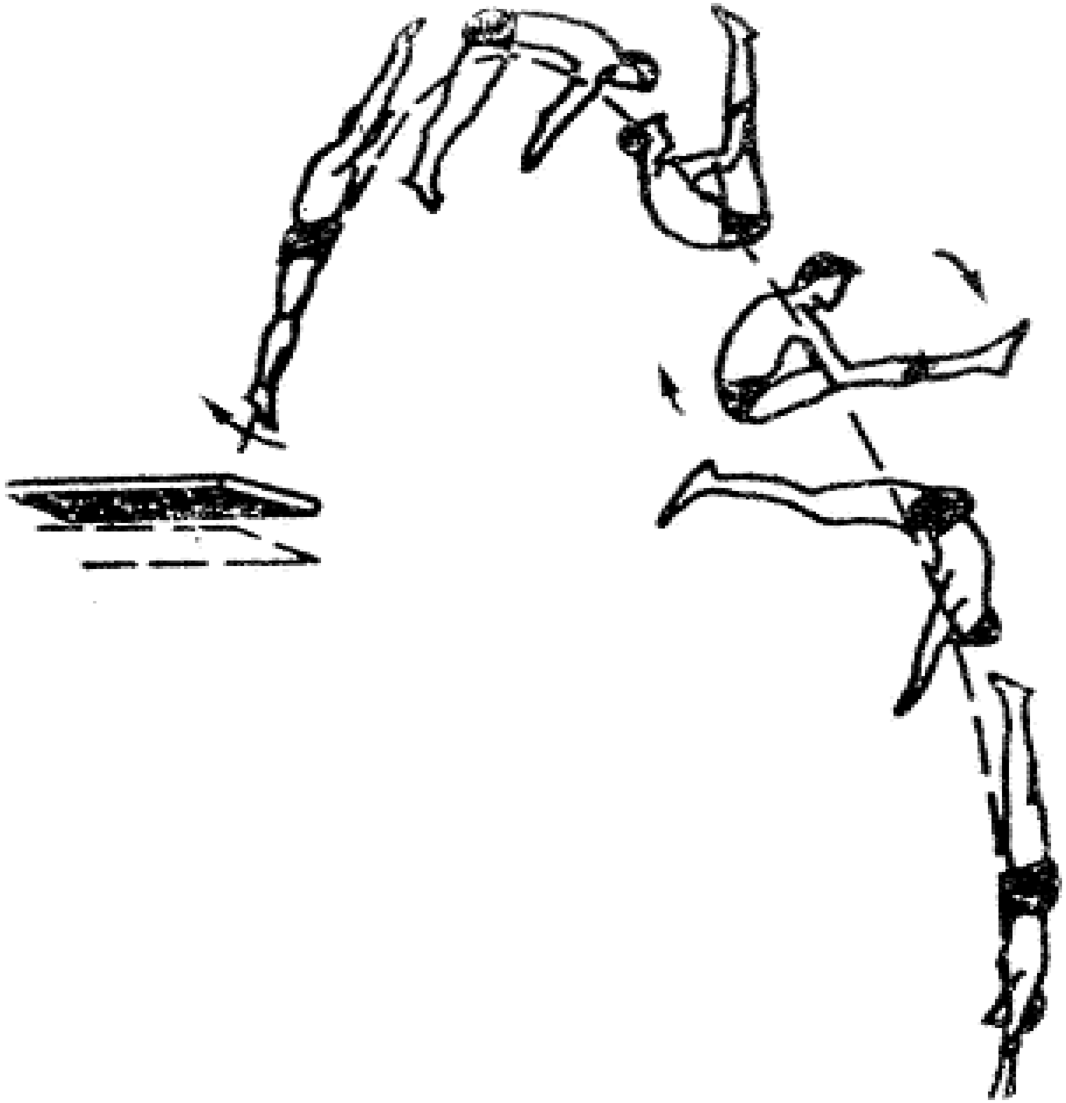
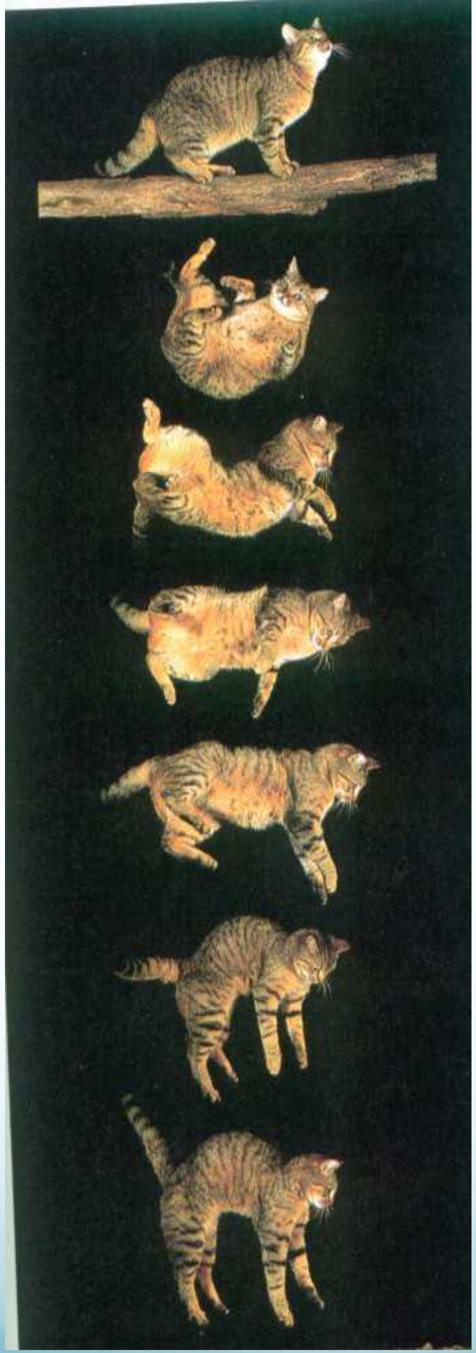


图 3－19　运动员跳水时转动惯量和角速度变化的情况



猫的下落（A）

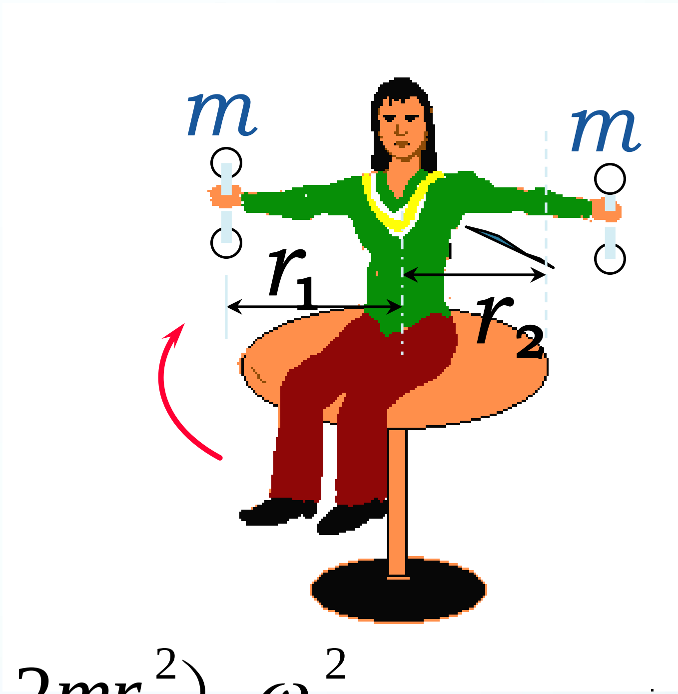
猫的下落（B）

克服直升飞机机身反转的措施：

装置尾浆推动大气产生克服机身反转的力矩

装置反向转动的双旋翼产生反向角动量而相互抵消

[例] 人和转盘的转动惯量为 J_0, 哑铃的质量为 m, 初始转速为 ω_1。求：双臂收缩由 r_1 变为 r_2 时的角速度及机械能增量。



解：由角动量守恒

$$(J_0 + 2mr_1^2)\ \omega_1 = (J_0 + 2mr_2^2)\ \omega_2$$

解得：$$\omega_2 = \frac{(J_0 + 2mr_1^2)}{(J_0 + 2mr_2^2)}\omega_1$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}(J_0 + 2mr_2^2)\ \omega_2^2 - \frac{1}{2}(J_0 + 2mr_1^2)\ \omega_1^2$$

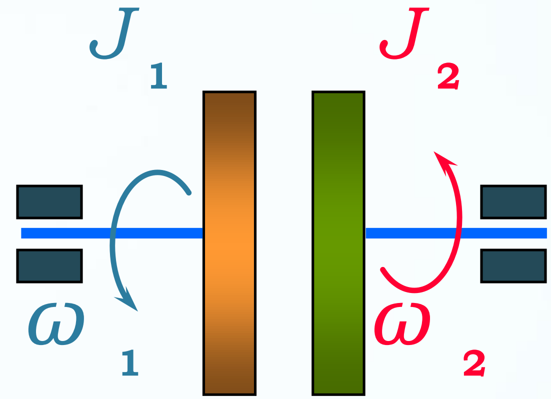
$$= \frac{1}{2}(J_0 + 2mr_1^2)\ \omega_1^2\left[\frac{J_0 + 2mr_1^2}{J_0 + 2mr_2^2} - 1\right] > 0$$

非保守内力作正功

[例] 若对接前两轮的角速度分别为ω_1、ω_2

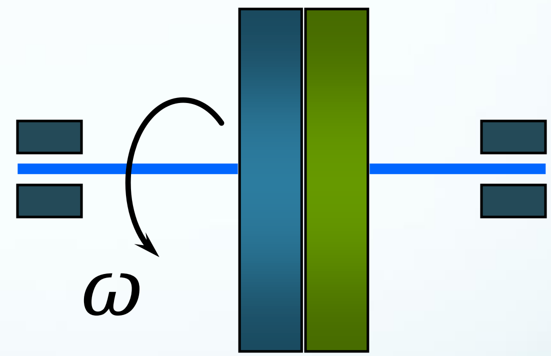
求：1.对接后共同的角速度ω

2.对接过程中的机械能损失



解：由角动量守恒得：

$$J_1\omega_1 - J_2\omega_2 = (J_1 + J_2)\omega$$



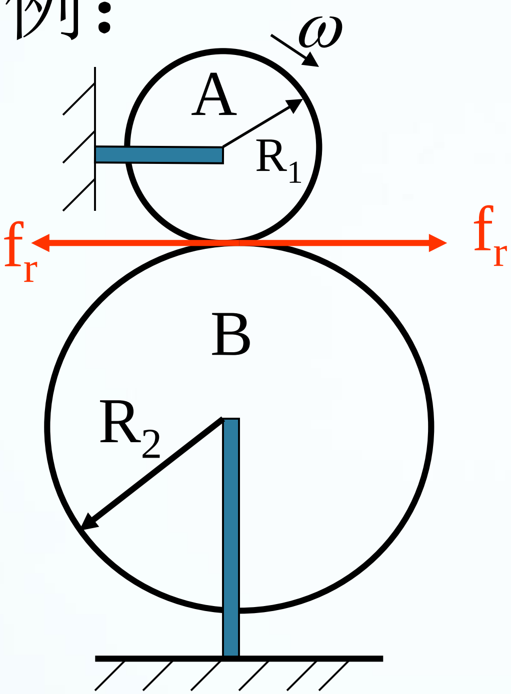
$$\omega = \frac{J_1\omega_1 - J_2\omega_2}{J_1 + J_2}$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\omega^2 - \left(\frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2\right)$$

$$= -\frac{J_1J_2(\omega_1 + \omega_2)^2}{(J_1 + J_2)} < 0$$

摩擦力矩作负功，有机械能损失。

例：



已知：A轮：m_1、R_1、ω_{A0}

B轮：m_2、R_2、$\omega_{B0}=0$

A、B间摩擦系数为μ

求：$\Delta t=?$时$v_B=v_A$

解:$\{A、B\}$ $\because M_{外}=0$ $\therefore$系统角动量守恒

即：$J_A\omega_{A0}=J_A\underline{\omega_A}+J_B\underline{\omega_B}$ (1)

A轮：$-f_rR_1\Delta t=J_A\omega_A-J_A\omega_{A0}$ (2)

$f_r=\mu m_1g$ (3) $\omega_AR_1=\omega_BR_2$ (4)

$J_A=\dfrac{1}{2}m_1R_1^2$ (5) $J_B=\dfrac{1}{2}m_2R_2^2$ (6)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\\(5)\\(6)\end{array}\right\}\Rightarrow \cancel{\Delta t}$$

解：*A*轮角动量定理

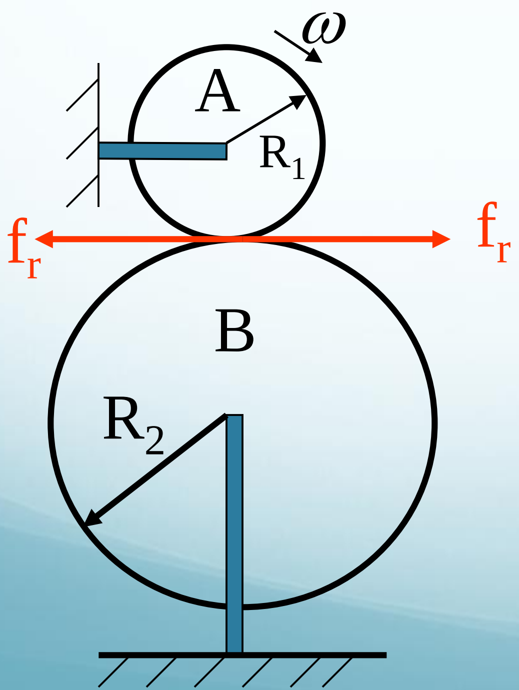
$$-f_r R_1 \Delta t = J_A \omega_A - J_A \omega_{A0} \qquad (1')$$

*B*轮角动量定理

$$f_r R_2 \Delta t = J_B \omega_B - 0 \qquad (2')$$

由于 $f_r R_1 \neq f_r R_2$

$\therefore J_A \omega_{A0} \neq J_A \omega_A + J_B \omega_B$——系统角动量不守恒



$$f_r = \mu m_1 g \qquad (3) \qquad \omega_A R_1 = \omega_B R_2 \qquad (4)$$

$$J_A = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \qquad (5) \qquad J_B = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \qquad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} (1') \\ (2') \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta t = \frac{m_2 R_1 \omega}{2\mu (m_1 + m_2) g}$$

3.系统角动量守恒的条件:

a).系统中各物体均绕同一转轴转动

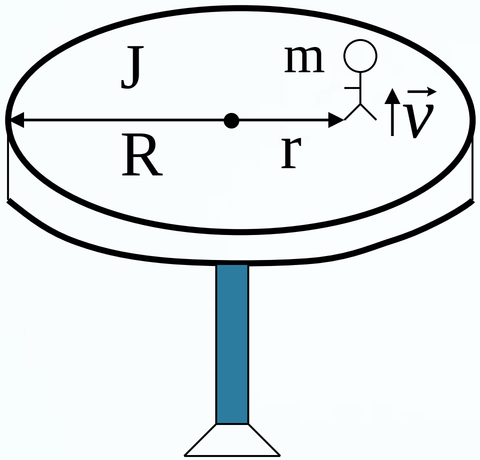
条件: $\sum M_{外力}=0$

b).系统中各物体均绕不同转轴转动

条件: $\sum M_{外力}=0$, 且$\sum M_{内力}=0$

例：

已知：$v_{人盘}$， 半径为r， 求：盘转动的ω



解：$\{m、M\}$ $\because M_{合外}=0$，

且m、M绕同一轴转动 $\therefore$ 系统L守恒

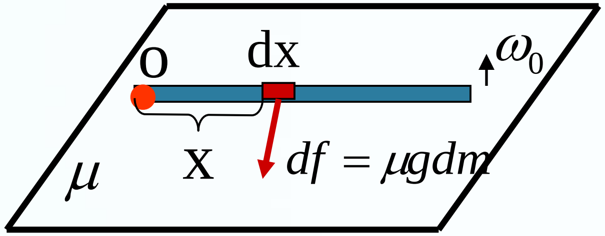
$$mv - J_M\omega = 0 \qquad \times$$

$$mvr - J_M\omega = 0 \qquad \times$$

4.角动量定理、角动量守恒定律中各角速度或速度均需相对同一惯性参照系。

$$mr\underbrace{(v - r\omega)}_{v_{人地}} - J_M\omega = 0$$

例：质量为m,长为l的棒在摩擦系数为μ的水平面上绕棒的一端以角速度ω_0旋转，求：何时棒将静止。



解一：应用转动定律解。

$$-M = J\alpha \qquad (1) \qquad\qquad J = \frac{1}{3}ml^2 \qquad (2)$$

$$M = \int dM = \int x df = \int x g\mu dm = \int_0^l x g\mu \frac{m}{l} dx = \frac{1}{2} mg\mu l \qquad (3)$$

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = -\frac{\omega_0}{t} \qquad (4)$$

由（1）、（2）、（3）、（4）得 $t = \dfrac{2\omega_0 l}{3g\mu}$

解二：应用转动动能定理解。

$$A = \int_0^\theta -M d\theta = -M\theta = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 \Rightarrow M\theta = \frac{1}{2}J\omega_0^2 \qquad (1')$$

$$M\theta = \frac{1}{2}J\omega_0^2 \qquad J = \frac{1}{3}ml^2$$

$$M = \frac{1}{2}mg\mu l$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \omega_0 t - \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{t}t^2 = \frac{1}{2}\omega_0 t$$

$$t = \frac{2\omega_0 l}{3g\mu}$$

解三：应用角动量定理解。

$$\int_0^t -M dt = -Mt = J\omega - J\omega_0 \Rightarrow Mt = J\omega_0$$

$$J = \frac{1}{3}ml^2$$

$$M = \frac{1}{2}mg\mu l$$

$$t = \frac{2\omega_0 l}{3g\mu}$$