⋆3.3 半无界问题:对称延拓法

Home Page

Title Page

Go Back

Full Screen

Close

Quit

⋆3.3 半无界问题:对称延拓法

本节的基本思路：利用对称延拓法，把半无界问题转化成整个空间上的初值问题，再利用初值问题的求解公式进行求解，最后定出半无界问题的解。这里仅以半直线为例，讨论热传导方程和波动方程

⋆3.3 半无界问题:对称延拓法

本节的基本思路：利用对称延拓法，把半无界问题转化成整个空间上的初值问题，再利用初值问题的求解公式进行求解，最后定出半无界问题的解。这里仅以半直线为例，讨论热传导方程和波动方程

⋆3.3.1 热传导方程的半无界问题

⋆3.3 半无界问题:对称延拓法

本节的基本思路：利用对称延拓法，把半无界问题转化成整个空间上的初值问题，再利用初值问题的求解公式进行求解，最后定出半无界问题的解。这里仅以半直线为例，讨论热传导方程和波动方程

⋆3.3.1 热传导方程的半无界问题

求解定义在半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \geq 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

为了施行对称延拓，我们先证明下面的引理：

引理3.3.1如果ϕ是奇函数(偶函数或周期函数),则初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in R^1 \end{cases}$$

的解$u(x,t)$也是x的奇函数(偶函数或周期函数)

引理3.3.1如果ϕ是奇函数(偶函数或周期函数),则初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in R^1 \end{cases}$$

的解$u(x,t)$也是x的奇函数(偶函数或周期函数)

证明：仅以奇函数为例，

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_R \phi(y) \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}) dy$$

于是

$$u(-x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_R \phi(y) \exp(-\frac{(x+y)^2}{4a^2 t}) dy$$

$$\overset{y=-\eta}{=} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_R \phi(-\eta) \exp(-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2 t}) d\eta \quad (\phi \text{ 是奇函数})$$

$$= -\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_R \phi(\eta) \exp(-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2 t}) d\eta = -u(x,t)$$

求解定义在半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \geq 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{3.3.1}$$

求解定义在半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \geq 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{3.3.1}$$

为了使u满足$u(0,t) = 0$,只要$u(x,t)$是x的奇函数即可。我们做奇延拓(要求$\phi(0) = 0$),把$\phi(x)$奇延拓成$\Phi(x)$，考虑初值问题

$$\begin{cases} U_t - a^2 U_{xx} = 0, & x \in R, t > 0 \\ U(x,0) = \Phi(x), & x \in R \end{cases}$$

求解定义在半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \geq 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{3.3.1}$$

为了使u满足$u(0,t) = 0$,只要$u(x,t)$是x的奇函数即可。我们做奇延拓(要求$\phi(0) = 0$),把$\phi(x)$奇延拓成$\Phi(x)$，考虑初值问题

$$\begin{cases} U_t - a^2 U_{xx} = 0, & x \in R, t > 0 \\ U(x,0) = \Phi(x), & x \in R \end{cases}$$

当$x \geq 0$时，$u(x,t) = U(x,t)$就是(3.3.1)的解。对于$U(x,t)$

$$U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_R \Phi(y) \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}) dy$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} \Phi(y) \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}) dy + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} \Phi(y) \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}) dy$$

$$\stackrel{def}{=} A + B$$

$$A = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} \Phi(y) \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}) dy$$

$$\overset{y=-\eta}{=} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\infty}^{0} \Phi(-\eta) \exp(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2 t}) d(-\eta)$$

$$A = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} \Phi(y) \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}) dy$$

$$\overset{y=-\eta}{=} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\infty}^{0} \Phi(-\eta) \exp(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2 t}) d(-\eta)$$

(利用$\Phi(-y) = -\Phi(y)$,交换积分上下限)

$$= -\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} \phi(\eta) \exp(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2 t}) d\eta$$

$$A=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{0}\Phi(y)\exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t})dy$$

$$\overset{y=-\eta}{=}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\infty}^{0}\Phi(-\eta)\exp(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2t})d(-\eta)$$

(利用$\Phi(-y)=-\Phi(y)$,交换积分上下限)

$$=-\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}\phi(\eta)\exp(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2t})d\eta$$

$$B=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}\phi(y)\exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t})dy$$

于是当$x\geq 0,t>0$时，问题(3.3.1)的解

$$A = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} \Phi(y) \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}) dy$$

$$\overset{y=-\eta}{=} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\infty}^{0} \Phi(-\eta) \exp(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2 t}) d(-\eta)$$

(利用$\Phi(-y) = -\Phi(y)$,交换积分上下限)

$$= -\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} \phi(\eta) \exp(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2 t}) d\eta$$

$$B = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} \phi(y) \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}) dy$$

于是当$x \geq 0, t > 0$时，问题(3.3.1)的解

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} \phi(y) [\exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}) - \exp(-\frac{(x+y)^2}{4a^2 t})] dy$$

同理对于半直线上的非齐次热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \leq 0 \\ u(0,t) = 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

其中ϕ, f满足$\phi(0) = 0, f(0,t) = 0.$

同理对于半直线上的非齐次热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \leq 0 \\ u(0,t) = 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

其中ϕ, f满足$\phi(0) = 0, f(0,t) = 0$.用奇延拓方法,考虑初值问题

$$\begin{cases} U_t - a^2 U_{xx} = F(x,t), & x \in R, t > 0 \\ U(x,0) = \Phi(x), & x \in R \end{cases}$$

同理对于半直线上的非齐次热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \leq 0 \\ u(0,t) = 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

其中ϕ, f满足$\phi(0) = 0, f(0,t) = 0$.用奇延拓方法,考虑初值问题

$$\begin{cases} U_t - a^2 U_{xx} = F(x,t), & x \in R, t > 0 \\ U(x,0) = \Phi(x), & x \in R \end{cases}$$

可以求出它的解

$$\begin{aligned} U(x,t) = & \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{R^1} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}) \Phi(y) dy \\ & + \int_0^t \int_{R^1} \frac{F(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}) dy d\tau. \end{aligned}$$

同理对于半直线上的非齐次热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} = f(x,t), & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \leq 0 \\ u(0,t) = 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

其中ϕ, f满足$\phi(0) = 0, f(0,t) = 0$.用奇延拓方法,考虑初值问题

$$\begin{cases} U_t - a^2U_{xx} = F(x,t), & x \in R, t > 0 \\ U(x,0) = \Phi(x), & x \in R \end{cases}$$

可以求出它的解

$$\begin{aligned} U(x,t) = \; & \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{R^1} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right)\Phi(y)dy \\ & + \int_0^t \int_{R^1} \frac{F(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)dyd\tau. \end{aligned}$$

当$x \geq 0$时，$u(x,t) = U(x,t)$就是定解问题的解。对于$U(x,t)$的右边第一项类似齐次方程的处理，下面处理第二项

$$\int_0^t \int_{R^1} \frac{F(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}) dy d\tau$$

$$= \int_0^t \int_{-\infty}^0 \frac{F(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}) dy d\tau$$

$$+ \int_0^t \int_0^{\infty} \frac{F(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}) dy d\tau \overset{def}{=} A + B$$

$$\int_0^t \int_{R^1} \frac{F(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}) dy d\tau$$

$$= \int_0^t \int_{-\infty}^0 \frac{F(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}) dy d\tau$$

$$+ \int_0^t \int_0^{\infty} \frac{F(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}) dy d\tau \overset{def}{=} A + B$$

$$A \overset{y=-\eta}{=} \int_0^t \int_{\infty}^0 \frac{F(-\eta,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}) d(-\eta) d\tau$$

$$= -\int_0^t \int_0^{\infty} \frac{f(\eta,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}) d\eta d\tau$$

$$\int_0^t \int_{R^1} \frac{F(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)})dyd\tau$$

$$= \int_0^t \int_{-\infty}^0 \frac{F(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)})dyd\tau$$

$$+ \int_0^t \int_0^{\infty} \frac{F(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)})dyd\tau \overset{def}{=} A+B$$

$$A \overset{y=-\eta}{=\!=} \int_0^t \int_{\infty}^0 \frac{F(-\eta,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)})d(-\eta)d\tau$$

$$= -\int_0^t \int_0^{\infty} \frac{f(\eta,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)})d\eta d\tau$$

$$B = \int_0^t \int_0^{\infty} \frac{f(\eta,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp(-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)})d\eta d\tau$$

所以定解问题的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \phi(y)[\exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}) - \exp(-\frac{(x+y)^2}{4a^2 t})]dy$$

$$+ \int_0^t \int_0^{\infty} \frac{f(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}[\exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}) - \exp(-\frac{(x+y)^2}{4a^2(t-\tau)})]dyd\tau$$

对于对称延拓法

- 根据已知条件选择合适的延拓方法，例如若$u(0,t)=0$，可选择奇函数的延拓，将半无界区延拓到无界区域;如果$u_x(0,t)=0$, 则可选择偶函数的对称延拓,将半无界区延拓到无界区域
- 利用Fourier变换构造出延拓后的无界区域定解问题解的表达形式
- 将无界区域解的表达形式进行分析化简，化简成半无界区域上的表达形式。
- 例如半无界热传导方程的初值问题中，首先利用奇延拓将半无界的定界问题化为无界区域上的定界问题，接着利用Fourier变换求出无界区域上的解$U(x,t)$，其中$U(x,t)$是由Φ表示出来,然后将$U(x,t)$的表达形式进行化简，主要是利用函数的奇偶性将空间变量由无界化简为半无界，再由半无界的初始函数表示出来就可以了
- 根据上面的解题思路，下面看看半无界区域上的弦振动方程的初值问题

⋆3.3.2 半无界弦的振动问题

考察半无界弦的振动问题，即求解半直线上一维波动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x > 0, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & x \geq 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{3.3.2}$$

⋆3.3.2 半无界弦的振动问题

考察半无界弦的振动问题，即求解半直线上一维波动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x > 0, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & x \geq 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{3.3.2}$$

首先考察初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in R^1, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & x \in R^1 \end{cases} \tag{3.3.3}$$

⋆3.3.2 半无界弦的振动问题

考察半无界弦的振动问题，即求解半直线上一维波动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x > 0, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & x \geq 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{3.3.2}$$

首先考察初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in R^1, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & x \in R^1 \end{cases} \tag{3.3.3}$$

引理3.3.2若自由项$f(x,t)$,以及初值函数$\phi(x)$和$\psi(x)$都是x的奇函数(偶函数或周期函数),则由(3.2.19)式给出的问题(3.3.3)的解$u(x,t)$也是x的奇函数(偶函数或周期函数).

⋆3.3.2 半无界弦的振动问题

考察半无界弦的振动问题，即求解半直线上一维波动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x > 0, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & x \geq 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{3.3.2}$$

首先考察初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in R^1, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & x \in R^1 \end{cases} \tag{3.3.3}$$

引理3.3.2若自由项$f(x,t)$,以及初值函数$\phi(x)$和$\psi(x)$都是x的奇函数(偶函数或周期函数),则由(3.2.19)式给出的问题(3.3.3)的解$u(x,t)$也是x的奇函数(偶函数或周期函数).

证明：以奇函数为例，已知

$$f(x,t) = -f(-x,t), \phi(x) = -\phi(-x), \psi(x) = -\psi(-x)$$

于是

$$u(-x,t)=\frac{1}{2}[\phi(-x+at)+\phi(-x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{-x-at}^{-x+at}\psi(y)dy$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{-x-a(t-s)}^{-x+a(t-s)}f(y,s)dyds$$

$$u(-x,t)=\frac{1}{2}[\phi(-x+at)+\phi(-x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{-x-at}^{-x+at}\psi(y)dy$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{-x-a(t-s)}^{-x+a(t-s)}f(y,s)dyds$$

其中

$$\phi(-x+at)=\phi(-(x-at))=-\phi(x-at),$$
$$\phi(-a-xt)=\phi(-(x+at))=-\phi(x+at)$$

$$\frac{1}{2a}\int_{-x-at}^{-x+at}\psi(y)dy\overset{y=-\eta}{=}\frac{1}{2a}\int_{x+at}^{x-at}\psi(-\eta)d(-\eta)=-\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\eta)d\eta$$

$$u(-x,t)=\frac{1}{2}[\phi(-x+at)+\phi(-x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{-x-at}^{-x+at}\psi(y)dy$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{-x-a(t-s)}^{-x+a(t-s)}f(y,s)dyds$$

其中

$$\phi(-x+at)=\phi(-(x-at))=-\phi(x-at),$$
$$\phi(-a-xt)=\phi(-(x+at))=-\phi(x+at)$$

$$\frac{1}{2a}\int_{-x-at}^{-x+at}\psi(y)dy\overset{y=-\eta}{=}\frac{1}{2a}\int_{x+at}^{x-at}\psi(-\eta)d(-\eta)=-\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\eta)d\eta$$

类似地

$$\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{-x-a(t-s)}^{-x+a(t-s)}f(y,s)dyds\overset{y=-\eta}{=}-\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}f(\eta,s)d\eta ds$$

$$u(-x,t)=\frac{1}{2}[\phi(-x+at)+\phi(-x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{-x-at}^{-x+at}\psi(y)dy$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{-x-a(t-s)}^{-x+a(t-s)}f(y,s)dyds$$

其中

$$\phi(-x+at)=\phi(-(x-at))=-\phi(x-at),$$
$$\phi(-a-xt)=\phi(-(x+at))=-\phi(x+at)$$

$$\frac{1}{2a}\int_{-x-at}^{-x+at}\psi(y)dy\overset{y=-\eta}{=}\frac{1}{2a}\int_{x+at}^{x-at}\psi(-\eta)d(-\eta)=-\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\eta)d\eta$$

类似地

$$\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{-x-a(t-s)}^{-x+a(t-s)}f(y,s)dyds\overset{y=-\eta}{=}-\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}f(\eta,s)d\eta ds$$

所以

$$u(-x,t)=-u(x,t)$$

用对称延拓法求解问题(3.3.2)，要使$u(0,t)=0$,只需$u(x,t)$是x的奇函数。对f,ϕ,ψ作奇延拓：

$$F(x,t)=\begin{cases} f(x,t), & x\geq 0, t\geq 0 \\ -f(-x,t), & x<0, t\geq 0 \end{cases} \quad \Phi(x)=\begin{cases} \phi(x), & x\geq 0 \\ -\phi(-x), & x<0 \end{cases}$$

用对称延拓法求解问题(3.3.2)，要使$u(0,t)=0$,只需$u(x,t)$是x的奇函数。对f,ϕ,ψ作奇延拓：

$$F(x,t)=\begin{cases} f(x,t), & x\geq 0, t\geq 0 \\ -f(-x,t), & x<0, t\geq 0 \end{cases} \quad \Phi(x)=\begin{cases} \phi(x), & x\geq 0 \\ -\phi(-x), & x<0 \end{cases}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases} \psi(x), & x\geq 0 \\ -\psi(-x), & x<0 \end{cases}$$

用对称延拓法求解问题(3.3.2)，要使$u(0,t)=0$,只需$u(x,t)$是x的奇函数。对f,ϕ,ψ作奇延拓：

$$F(x,t)=\begin{cases} f(x,t), & x\ge 0, t\ge 0 \\ -f(-x,t), & x<0, t\ge 0 \end{cases} \quad \Phi(x)=\begin{cases} \phi(x), & x\ge 0 \\ -\phi(-x), & x<0 \end{cases}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases} \psi(x), & x\ge 0 \\ -\psi(-x), & x<0 \end{cases}$$

与$F(x,t),\Phi(x),\Psi(x)$对应的初值问题的解为

$$U(x,t)=\frac{1}{2}[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}F(y,s)dyds.$$

$U(x,t)|_{x\ge 0}=u(x,t)$就是(3.3.2)的解.下面确定它的表达形式

用对称延拓法求解问题(3.3.2)，要使$u(0,t)=0$,只需$u(x,t)$是x的奇函数。对f,ϕ,ψ作奇延拓：

$$F(x,t)=\begin{cases} f(x,t), & x\ge 0, t\ge 0 \\ -f(-x,t), & x<0, t\ge 0 \end{cases} \quad \Phi(x)=\begin{cases} \phi(x), & x\ge 0 \\ -\phi(-x), & x<0 \end{cases}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases} \psi(x), & x\ge 0 \\ -\psi(-x), & x<0 \end{cases}$$

与$F(x,t),\Phi(x),\Psi(x)$对应的初值问题的解为

$$U(x,t)=\frac{1}{2}[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}F(y,s)dyds.$$

$U(x,t)|_{x\ge 0}=u(x,t)$就是(3.3.2)的解.下面确定它的表达形式
当$x\ge at$时，$x-at\ge 0, x+at\ge 0$，此时

$$\Phi(x\pm at)=\phi(x\pm at), \Psi(\xi)=\psi(\xi), F(y,s)=f(y,s)$$

用对称延拓法求解问题(3.3.2)，要使$u(0,t)=0$,只需$u(x,t)$是x的奇函数。对f,ϕ,ψ作奇延拓：

$$F(x,t)=\begin{cases} f(x,t), & x\geq 0, t\geq 0 \\ -f(-x,t), & x<0, t\geq 0 \end{cases} \quad \Phi(x)=\begin{cases} \phi(x), & x\geq 0 \\ -\phi(-x), & x<0 \end{cases}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases} \psi(x), & x\geq 0 \\ -\psi(-x), & x<0 \end{cases}$$

与$F(x,t),\Phi(x),\Psi(x)$对应的初值问题的解为

$$U(x,t)=\frac{1}{2}[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}F(y,s)dyds.$$

$U(x,t)|_{x\geq 0}=u(x,t)$就是(3.3.2)的解.下面确定它的表达形式
当$x\geq at$时，$x-at\geq 0, x+at\geq 0$，此时

$$\Phi(x\pm at)=\phi(x\pm at), \Psi(\xi)=\psi(\xi), F(y,s)=f(y,s)$$

所以

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}f(y,s)dyds.$$

当$0 \le x < at$时，$x - at < 0, x + at > 0$，所以

$$\Phi(x+at) = \phi(x+at), \Phi(x-at) = \Phi(-(at-x)) = -\phi(at-x)$$

$$\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi = \frac{1}{2a}[\int_{x-at}^{0}\Psi(\xi)d\xi + \int_{0}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi]$$

当$0 \le x < at$时，$x-at<0, x+at>0$，所以

$$\Phi(x+at)=\phi(x+at), \Phi(x-at)=\Phi(-(at-x))=-\phi(at-x)$$

$$\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi=\frac{1}{2a}[\int_{x-at}^{0}\Psi(\xi)d\xi+\int_{0}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi]$$

上式右端第一项是在小于零的区间，利用$\Psi(\xi)=-\psi(-\xi), \xi<0, \Psi(\xi)=\psi(\xi), \xi>0$,所以

$$=\frac{1}{2a}[\int_{x-at}^{0}(-\psi(-\xi))d\xi+\int_{0}^{x+at}\psi(\xi)d\xi] \text{ (右边第一项}\xi=-\eta)$$

$$=\frac{1}{2a}[\int_{at-x}^{0}(-\psi(\eta))(-d\eta)+\int_{0}^{x+at}\psi(\xi)d\xi]=\frac{1}{2a}[\int_{at-x}^{0}\psi(\xi)d\xi+\int_{0}^{x+at}\psi(\xi)d\xi]$$

当$0 \le x < at$时，$x-at<0, x+at>0$，所以

$$\Phi(x+at)=\phi(x+at), \Phi(x-at)=\Phi(-(at-x))=-\phi(at-x)$$

$$\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi=\frac{1}{2a}[\int_{x-at}^{0}\Psi(\xi)d\xi+\int_{0}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi]$$

上式右端第一项是在小于零的区间，利用$\Psi(\xi)=-\psi(-\xi), \xi<0, \Psi(\xi)=\psi(\xi), \xi>0$,所以

$$=\frac{1}{2a}[\int_{x-at}^{0}(-\psi(-\xi))d\xi+\int_{0}^{x+at}\psi(\xi)d\xi]\ (\text{右边第一项}\xi=-\eta)$$

$$=\frac{1}{2a}[\int_{at-x}^{0}(-\psi(\eta))(-d\eta)+\int_{0}^{x+at}\psi(\xi)d\xi]=\frac{1}{2a}[\int_{at-x}^{0}\psi(\xi)d\xi+\int_{0}^{x+at}\psi(\xi)d\xi]$$

上式中被积函数一样，合并积分区域，所以有

$$=\frac{1}{2a}[\int_{at-x}^{at+x}\psi(\xi)d\xi$$

当$0 \le x < at$时，$x - at < 0, x + at > 0$，所以

$$\Phi(x+at) = \phi(x+at), \Phi(x-at) = \Phi(-(at-x)) = -\phi(at-x)$$

$$\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)d\xi = \frac{1}{2a}[\int_{x-at}^{0} \Psi(\xi)d\xi + \int_{0}^{x+at} \Psi(\xi)d\xi]$$

上式右端第一项是在小于零的区间，利用$\Psi(\xi) = -\psi(-\xi), \xi < 0, \Psi(\xi) = \psi(\xi), \xi > 0$,所以

$$= \frac{1}{2a}[\int_{x-at}^{0} (-\psi(-\xi))d\xi + \int_{0}^{x+at} \psi(\xi)d\xi] \text{ (右边第一项}\xi = -\eta)$$

$$= \frac{1}{2a}[\int_{at-x}^{0} (-\psi(\eta))(-d\eta) + \int_{0}^{x+at} \psi(\xi)d\xi] = \frac{1}{2a}[\int_{at-x}^{0} \psi(\xi)d\xi + \int_{0}^{x+at} \psi(\xi)d\xi]$$

上式中被积函数一样，合并积分区域，所以有

$$= \frac{1}{2a}[\int_{at-x}^{at+x} \psi(\xi)d\xi$$

下面处理最后一项

$$\frac{1}{2a}\int_{0}^{t}\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} F(y,s)dyds$$

此项的积分中y的范围是从负的区域到正的区域，所以我们将y的积分区域分为两部分，一部分是从负的区域到零，另一部分是从0到正的区域，即

此项的积分中y的范围是从负的区域到正的区域，所以我们将y的积分区域分为两部分，一部分是从负的区域到零，另一部分是从0到正的区域，即

$$\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}F(y,s)dyds$$

$$=\frac{1}{2a}[\int_0^{t-\frac{x}{a}}(\int_{x-a(t-s)}^{0}(-f(-y,s))dy+\int_0^{x+a(t-s)}f(y,s)dy)ds$$

$$+\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}f(y,s)dyds]$$

右边第一项令$y=-\eta$,类似于ψ项的处理，可得

$$=\frac{1}{2a}[\int_0^{t-\frac{x}{a}}\int_{a(t-s)-x}^{a(t-s)+x}f(y,s)dyds+\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}f(y,s)dyds]$$

所以定解问题(3.2.2)的解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}[\phi(x+at)-\phi(at-x)]+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\psi(y)dy \\
&\quad +\frac{1}{2a}\left(\int_0^{t-\frac{x}{a}}\int_{a(t-s)-x}^{a(t-s)+x}f(y,s)dyds+\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}f(y,s)dyds\right)
\end{aligned}
$$

所以定解问题(3.2.2)的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}[\phi(x+at)-\phi(at-x)] + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\psi(y)dy \\ &+\frac{1}{2a}\left(\int_0^{t-\frac{x}{a}}\int_{a(t-s)-x}^{a(t-s)+x} f(y,s)dyds + \int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(y,s)dyds\right) \end{aligned}$$

定理3.3.1如果$\phi\in C^2([0,\infty)),\psi\in C^1([0,\infty)),f\in C^1([0,\infty)^2)$,并且满足相容性条件

$$\phi(0)=\psi(0)=0, a^2\phi''(0)+f(0,0)=0$$

那么半无界问题(3.3.2)的古典解(二次连续可微的解)$u(x,t)$存在，并且可以用上面的公式表示

回家作业

3.11、(1)$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x > 0 \\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$

这里的函数ϕ, f满足$\phi'(0) = 0, f_x(0,t) = 0$

回家作业

3.11、(1) $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x > 0 \\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$

这里的函数ϕ, f满足$\phi'(0) = 0, f_x(0,t) = 0$