§5.2 滞后变量模型

一、滞后变量模型

二、分布滞后模型的参数估计

三、自回归模型的参数估计

四、格兰杰因果关系检验

一、滞后变量模型

在经济运行过程中，广泛存在时间滞后效应。某些经济变量不仅受到同期各种因素的影响，而且也受到过去某些时期的各种因素甚至自身的过去值的影响。

通常把这种过去时期的，具有滞后作用的变量叫做滞后变量（Lagged Variable），含有滞后变量的模型称为**滞后变量模型**。

滞后变量模型考虑了时间因素的作用，使静态分析的问题有可能成为动态分析。**含有滞后解释变量的模型，又称动态模型（Dynamical Model）**。

1、滞后效应与产生滞后效应的原因

因变量受到自身或另一解释变量的前几期值影响的现象称为滞后效应。

表示前几期值的变量称为滞后变量。

如：消费函数

通常认为，本期的消费除了受本期的收入影响之外，还受前1期，或前2期收入的影响：

$$C_t=\beta_0+\beta_1 Y_t+\beta_2 Y_{t-1}+\beta_3 Y_{t-2}+\mu_t$$

Y_{t-1}，Y_{t-2}为滞后变量。

- **产生滞后效应的原因**

1、心理因素：人们的心理定势，行为方式滞后于经济形势的变化，如中彩票的人不可能很快改变其生活方式。

2、技术原因：如当年的产出在某种程度上依赖于过去若干期内投资形成的固定资产。

3、制度原因：如定期存款到期才能提取，造成了它对社会购买力的影响具有滞后性。

2、滞后变量模型

以滞后变量作为解释变量，就得到**滞后变量模型**。它的一般形式为：

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \cdots + \beta_q Y_{t-q} + \alpha_0 X_t + \alpha_1 X_{t-1} + \cdots + \alpha_s X_{t-s} + \mu_t$$

q，s：滞后时间间隔

自回归分布滞后模型（autoregressive distributed lag model, ADL）：既含有Y对自身滞后变量的回归，还包括着X分布在不同时期的滞后变量

有限自回归分布滞后模型：滞后期长度有限

无限自回归分布滞后模型：滞后期无限，

（1）分布滞后模型（distributed-lag model）

分布滞后模型：模型中没有滞后被解释变量，仅有解释变量X的当期值及其若干期的滞后值：

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=0}^{s} \beta_i X_{t-i} + \mu_t$$

β_0：**短期**(short-run)或**即期乘数**(impact multiplier)，表示本期X变化一单位对Y平均值的影响程度。

β_i（i=1, 2..., s）：**动态乘数**或**延迟系数**，表示各滞后期X的变动对Y平均值影响的大小。

$\sum_{i=0}^{s} \beta_i$ 称为**长期（long-run）**或**均衡乘数（total distributed-lag multiplier）**，表示X变动一个单位，由于滞后效应而形成的对Y平均值总影响的大小。

如果各期的X值保持不变，则X与Y间的长期或均衡关系即为

$$E(Y) = \alpha + \left(\sum_{i=0}^{s} \beta_i\right) X$$

2、自回归模型（autoregressive model）

自回归模型：模型中的解释变量仅包含X的当期值与被解释变量Y的一个或多个滞后值

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \sum_{i=1}^{q} \beta_i Y_{t-i} + \mu_t$$

而

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 Y_{t-1} + \mu_t$$

称为**一阶自回归模型（first-order autoregressive model）**。

二、分布滞后模型的参数估计

1、分布滞后模型估计的困难

无限期的分布滞后模型，由于样本观测值的有限性，使得无法直接对其进行估计。

有限期的分布滞后模型，OLS会遇到如下问题：

1、没有先验准则确定滞后期长度；

2、如果滞后期较长，将缺乏足够的自由度进行估计和检验；

3、同名变量滞后值之间可能存在高度线性相关，即模型存在高度的多重共线性。

2、分布滞后模型的修正估计方法

人们提出了一系列的修正估计方法，但并不很完善。

各种方法的基本思想大致相同：都是**通过对各滞后变量加权，组成线性合成变量而有目的地减少滞后变量的数目，以缓解多重共线性，保证自由度。**

(1)经验加权法

根据实际问题的特点、实际经验给各滞后变量指定权数，滞后变量按权数线性组合，构成新的变量。权数据的类型有：

•递减型：

即认为**权数是递减的**，X的近期值对Y的影响较远期值大。

如消费函数中，收入的近期值对消费的影响作用显然大于远期值的影响。

例如：**滞后期为 3**的一组权数可取值如下：

1/2， 1/4， 1/6， 1/8

则新的线性组合变量为：

$$W_{1t}=\frac{1}{2}X_t+\frac{1}{4}X_{t-1}+\frac{1}{6}X_{t-2}+\frac{1}{8}X_{t-3}$$

- 矩型：

即认为权数是相等的，X的逐期滞后值对值Y的影响相同。

如滞后期为3，指定相等权数为1/4，则新的线性组合变量为：

$$W_{2t} = \frac{1}{4}X_t + \frac{1}{4}X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} + \frac{1}{4}X_{t-3}$$

- 倒V型

权数先递增后递减呈倒“V”型。

例如：在一个较长建设周期的投资中，历年投资X为产出Y的影响，往往在周期期中投资对本期产出贡献最大。

如滞后期为4，权数可取为

1/6， 1/4， 1/2， 1/3， 1/5

则新变量为

$$W_{3t}=\frac{1}{6}X_t+\frac{1}{4}X_{t-1}+\frac{1}{2}X_{t-2}+\frac{1}{3}X_{t-3}+\frac{1}{5}X_{t-4}$$

例5.2.1 对一个分布滞后模型：

$$Y_t = \alpha_0 + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \beta_3 X_{t-3} + \mu_t$$

给定递减权数：1/2， 1/4， 1/6， 1/8

令 $$W_{1t} = \frac{1}{2} X_t + \frac{1}{4} X_{t-1} + \frac{1}{6} X_{t-2} + \frac{1}{8} X_{t-3}$$

原模型变为：$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 W_{1t} + \mu_t$

该模型可用OLS法估计。假如参数估计结果为

$\hat{\alpha}_0$ =0.5 $\hat{\alpha}_1$ =0.8

则原模型的估计结果为：

$$\hat{Y}_t = 0.5 + \frac{0.8}{2} X_t + \frac{0.8}{4} X_{t-1} + \frac{0.8}{6} X_{t-2} + \frac{0.8}{8} X_{t-3} = 0.5 + 0.4 X_t + 0.2 X_{t-1} + 0.133 X_{t-2} + 0.1 X_{t-3}$$

经验权数法的优点是：简单易行

缺点是：设置权数的随意性较大

通常的做法是：

多选几组权数，分别估计出几个模型，然后根据常用的统计检验（R方检验，F检验，t检验，D-W检验），从中选择最佳估计式。

（2）阿尔蒙（A lmon）多项式法

主要思想：针对有限滞后期模型，通过阿尔蒙变换，定义新变量，以减少解释变量个数，然后用OLS法估计参数。

主要步骤为：

第一步，阿尔蒙变换

对于分布滞后模型

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=0}^{s} \beta_i X_{t-i} + \mu_t$$

假定其回归系数β_i可用一个关于滞后期i的适当阶数的多项式来表示，即：

$$\beta_i = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k i^k \qquad i=0,1,\ldots,s$$

其中，m<s。阿尔蒙变换要求先验地确定适当阶数m，例如取m=2，得

$$\beta_i = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i^2 \qquad (*)$$

将(*)代入分布滞后模型 $Y_t = \alpha + \sum_{i=0}^{s} \beta_i X_{t-i} + \mu_t$ 得

$$Y_t = \alpha + \alpha_0 \sum_{i=0}^{s} X_{t-i} + \alpha_1 \sum_{i=0}^{s} iX_{t-i} + \alpha_2 \sum_{i=0}^{s} i^2 X_{t-i} + \mu_t$$

$$= \alpha + \alpha_0 \mathrm{W}_{t0} + \alpha_1 \mathrm{W}_{t1} + \alpha_2 \mathrm{W}_{t2} + \mu_t$$

第二步，模型的OLS估计

对变换后的模型进行OLS估计，得

$$\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$$

再计算出:

$$\hat{\beta}_i = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 i + \hat{\alpha}_2 i^2$$

求出滞后分布模型参数的估计值:

$$\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_s$$

由于$m<s$，可以认为原模型存在的自由度不足和多重共线性问题已得到改善。

需注意的是，在实际估计中，阿尔蒙多项式的阶数m一般取2或3，不超过4，否则达不到减少变量个数的目的。

例5.2.2 表5.2.1给出了中国电力基本建设投资X与发电量Y的相关资料，拟建立一多项式分布滞后模型来考察两者的关系。

表5.2.1 中国电力工业基本建设投资与发电量

年度	基本建设投资X（亿元）	发电量（亿千瓦时）	年度	基本建设投资X（亿元）	发电量（亿千瓦时）
1975	30.65	1958	1986	161.6	4495
1976	39.98	2031	1987	210.88	4973
1977	34.72	2234	1988	249.73	5452
1978	50.91	2566	1989	267.85	5848
1979	50.99	2820	1990	334.55	6212
1980	48.14	3006	1991	377.75	6775
1981	40.14	3093	1992	489.69	7539
1982	46.23	3277	1993	675.13	8395
1983	57.46	3514	1994	1033.42	9218
1984	76.99	3770	1995	1124.15	10070
1985	107.86	4107			

由于无法预见知电力行业基本建设投资对发电量影响的时滞期，需取不同的滞后期试算。

经过试算发现，在2阶阿尔蒙多项式变换下，滞后期数取到第6期，估计结果的经济意义比较合理。2阶阿尔蒙多项式估计结果如下：

$$\hat{Y}_t = 3319.5 + 3.061W_{0t} + 0.101W_{1t} - 0.271W_{2t}$$

（13.62）（1.86）（0.15）（-0.67）

$\overline{R^2}=0.9405$　　F=74.81　　DW=0.42

求得的分布滞后模型参数估计值为

$\hat{\beta}_0=0.323$，$\hat{\beta}_1=1.777$，$\hat{\beta}_2=2.690$，$\hat{\beta}_3=3.061$，$\hat{\beta}_4=2.891$，$\hat{\beta}_5=2.180$，$\hat{\beta}_6=0.927$

最后得到分布滞后模型估计式为：

$$\hat{Y}_t = 3319.5 + 0.323X_t + 1.777X_{t-1} + 2.690X_{t-2} + 3.061X_{t-3}$$

（13.62） (0.19) (2.14) (1.88) (1.86)

$$+2.891X_{t-4} + 2.180X_{t-5} + 0.927X_{t-6}$$

(1.96) (1.10) (0.24)

为了比较，下面给出直接对滞后6期的模型进行OLS估计的结果：

$$\hat{Y}_t = 3361.9 + 8.424X_t - 11.43X_{t-1} + 15.14X_{t-2} + 4.71X_{t-3}$$

（12.43） (1.80) (-1.89) (1.21) (0.36)

$$-14.70X_{t-4} + 26.94X_{t-5} - 25.42X_{t-6}$$

(-0.93) (1.09) (-1.12)

$\overline{R}^2$=0.9770 F=42.54 DW=1.03

（3）科伊克（Koyck）方法

科伊克方法是将无限分布滞后模型转换为自回归模型，然后进行估计。

对于无限分布滞后模型：

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i X_{t-i} + \mu_t$$

科伊克变换假设β_i随滞后期i按几何级数衰减：

$$\beta_i = \beta_0 \lambda^i$$

其中，$0<\lambda<1$，称为分布滞后衰减率，$1-\lambda$称为调整速率（Speed of adjustment）。

科伊克变换的具体做法:

将科伊克假定$\beta_i=\beta_0\lambda^i$代入无限分布滞后模型，得

$$Y_t = \alpha + \beta_0 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i X_{t-i} + \mu_t \qquad (*)$$

滞后一期并乘以λ ，得

$$\lambda Y_{t-1} = \lambda\alpha + \beta_0 \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i X_{t-i} + \lambda\mu_{t-1} \qquad (**)$$

将（*）减去（**）得科伊克变换模型:

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = (1-\lambda)\alpha + \beta_0 X_t + \mu_t - \lambda\mu_{t-1}$$

整理得科伊克模型的一般形式:

$$Y_t = a + bX_t + cY_{t-1} + v_t$$

其中: $a = (1-\lambda)\alpha$， $b = \beta_0$， $c = \lambda$， $v_t = \mu_t - \lambda\mu_{t-1}$

科伊克模型的特点：

（1）以一个滞后因变量Y_{t-1}代替了大量的滞后解释变量X_{t-i}，最大限度地节省了自由度，解决了滞后期长度s难以确定的问题；

（2）由于滞后一期的因变量Y_{t-1}与X_t的线性相关程度可以肯定小于X的各期滞后值之间的相关程度，从而缓解了多重共线性。

但科伊克变换也同时产生了两个新问题：

（1）模型存在随机项v_t的一阶自相关性；

（2）滞后被解释变量Y_{t-1}与随机项v_t不独立。

这些新问题需要进一步解决。

三、自回归模型的参数估计

1、自回归模型的构造

- 一个无限期分布滞后模型可以通过科伊克变换转化为自回归模型。
- 事实上，许多滞后变量模型都可以转化为自回归模型，自回归模型是经济生活中更常见的模型。

2、自回归模型的参数估计

对于自回归模型

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \sum_{i=1}^{q} \beta_i Y_{t-i} + \mu_t$$

估计时的主要问题：滞后被解释变量的存在可能导致它与随机扰动项相关，以及随机扰动项出现序列相关性。

考伊克模型：

$$Y_t = (1-\lambda)\alpha + \beta_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + v_t$$

$$v_t = \mu_t - \lambda \mu_{t-1}$$

显然存在： $\mathrm{cov}(Y_{t-1}, v_t) \neq 0$ $\mathrm{cov}(v_t, v_{t-1}) \neq 0$

因此，对自回归模型的估计主要需视滞后被解释变量与随机扰动项的不同关系进行估计。

以一阶自回归模型为例说明:

（1）工具变量法

对于一阶自回归模型

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 Y_{t-1} + \mu_t$$

若Y_{t-1}与μ_t同期相关，则OLS估计是有偏的，并且不是一致估计。

因此，对上述模型，通常采用工具变量法，即寻找一个新的经济变量Z_t，作为Y_{t-1}的工具变量。

参数估计量具有一致性。

在实际估计中，一般用**X**的若干滞后的线性组合作为$\mathbf{Y}_{t-1}$的工具变量：

$$\hat{Y}_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \cdots + \alpha_s X_{t-s}$$

由于原模型已假设随机扰动项μ_t与解释变量X及其滞后项不存在相关性，因此上述工具变量与μ_t不再线性相关。

一个更简单的情形是直接用X_{t-1}作为Y_{t-1}的工具变量。

（2）普通最小二乘法

若滞后被解释变量Y_{t-1}与随机扰动项μ_t同期无关，可直接使用OLS法进行估计，得到一致估计量。

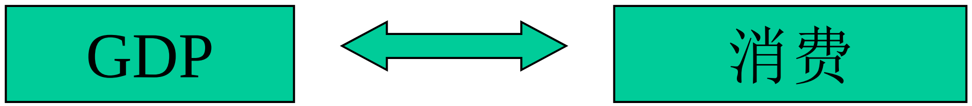
注意：

上述工具变量法只解决了解释变量与μ_t相关对参数估计所造成的影响，但没有解决μ_t的自相关问题。

事实上，对于自回归模型，μ_t项的自相关问题始终存在，对于此问题，至今没有完全有效的解决方法。唯一可做的，就是尽可能地建立“正确”的模型，以使序列相关性的程度减轻。

四、格兰杰因果关系检验

- 自回归分布滞后模型旨在揭示：某变量的变化受其自身及其他变量过去行为的影响。
- 然而，许多经济变量有着相互的影响关系



问题：当两个变量在时间上有先导——滞后关系时，能否从统计上考察这种关系是单向的还是双向的？

即:主要是一个变量过去的行为在影响另一个变量的当前行为呢？还是双方的过去行为在相互影响着对方的当前行为？

格兰杰因果关系检验（Granger test of causality）

对两变量Y与X，格兰杰因果关系检验要求估计：

$$Y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m} \beta_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_{t-i} \qquad (*)$$

$$X_t = \delta_0 + \sum_{i=1}^{m} \delta_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i Y_{t-i} \qquad (**)$$

可能存在有四种检验结果：

（1）**X对Y有单向影响**，表现为（*）式X各滞后项前的参数整体不为零，而（**）式Y各滞后项前的参数整体为零；

（2）**Y对X有单向影响**，表现为（**）式Y各滞后项前的参数整体不为零，而（*）式X各滞后项前的参数整体为零；

（3）**Y与X间存在双向影响**，表现为Y与X各滞后项前的参数整体不为零；

（4）**Y与X间不存在影响**，表现为Y与X各滞后项前的参数整体为零。

格兰杰检验是通过受约束的F检验完成的。如：

针对 $$\boldsymbol{Y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m} \beta_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_{t-i}}$$

中X滞后项前的参数整体为零的假设(X不是Y的格兰杰原因)

分别做包含与不包含X滞后项的回归，记前者与后者的残差平方和分别为RSS_U、RSS_R；再计算F统计量：

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_U)/m}{RSS_U/(n-k)}$$

k为无约束回归模型的待估参数的个数（包含可能存在的常数项）。

如果：$F>F_{\alpha}(m,n-k)$ ，则拒绝原假设，认为X是Y的格兰杰原因。

注意：

格兰杰因果关系检验对于滞后期长度的选择有时很敏感。不同的滞后期可能会得到完全不同的检验结果。

因此，一般而言，常进行不同滞后期长度的检验，以检验模型中随机误差项不存在序列相关的滞后期长度来选取滞后期。

例5.2.4 检验1978~2000年间中国每年的GDP与居民消费CONS的因果关系。

表 5.2.3 中国 GDP 与消费支出（亿元）

年份	人均居民消费 CONSP	人均GDP GDPP	年份	人均居民消费 CONSP	人均GDP GDPP
1978	1759.1	3605.6	1990	9113.2	18319.5
1979	2005.4	4074.0	1991	10315.9	21280.4
1980	2317.1	4551.3	1992	12459.8	25863.7
1981	2604.1	4901.4	1993	15682.4	34500.7
1982	2867.9	5489.2	1994	20809.8	46690.7
1983	3182.5	6076.3	1995	26944.5	58510.5
1984	3674.5	7164.4	1996	32152.3	68330.4
1985	4589	8792.1	1997	34854.6	74894.2
1986	5175	10132.8	1998	36921.1	79003.3
1987	5961.2	11784.7	1999	39334.4	82673.1
1988	7633.1	14704.0	2000	42911.9	89112.5
1989	8523.5	16466.0			

取两阶滞后，

$$CONS_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{2} \beta_i CONS_{t-i} + \sum_{i=1}^{2} \alpha_i GDP_{t-i}$$

得到：**F=4.29749**

$$GDP_t = \delta_0 + \sum_{i=1}^{2} \delta_i GDP_{t-i} + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i CONS_{t-i}$$

得到：**F=1.82325**

判断：α=5%，临界值$F_{0.05}(2,18)=3.55$

拒绝"GDP不是CONS的格兰杰原因"的假设，不拒绝"CONS不是GDP的格兰杰原因"的假设。

因此，从2阶滞后的情况看，GDP的增长是居民消费增长的原因，而不是相反。

但在2阶滞后时，检验的模型存在1阶自相关性。

表 5.2.4　　格兰杰因果关系检验

滞后长度	格兰杰因果性	F 值	P 值	LM 值	AIC 值	结论
2	$GDP \xrightarrow{\times} CONS$	4.297	0.032	0.009	16.08	拒绝
	$CONS \xrightarrow{\times} GDP$	1.823	0.194	0.008	17.86	不拒绝
3	$GDP \xrightarrow{\times} CONS$	10.219	0.001	0.010	15.14	拒绝
	$CONS \xrightarrow{\times} GDP$	4.096	0.691	0.191	17.14	不拒绝
4	$GDP \xrightarrow{\times} CONS$	19.643	10E-04	0.110	14.70	拒绝
	$CONS \xrightarrow{\times} GDP$	5.247	0.015	0.027	16.42	拒绝
5	$GDP \xrightarrow{\times} CONS$	10.321	0.004	0.464	14.72	拒绝
	$CONS \xrightarrow{\times} GDP$	5.085	0.028	0.874	16.30	拒绝
6	$GDP \xrightarrow{\times} CONS$	4.705	0.078	0.022	14.99	不拒绝
	$CONS \xrightarrow{\times} GDP$	7.773	0.034	1.000	16.05	拒绝

回顾：拉格朗日乘数（Lagrange multiplier）检验

拉格朗日乘数检验适合于：高阶序列相关以及模型中存在滞后被解释变量的情形。

对于模型

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \mu_i$$

如果怀疑随机扰动项存在**p阶序列相关**：

$$\mu_t = \rho_1 \mu_{t-1} + \rho_2 \mu_{t-2} \cdots + \rho_p \mu_{t-p} + \varepsilon_t$$

作辅助回归：

$$\tilde{e}_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \tilde{e}_1 \mu_{t-1} + \cdots + \rho_p \tilde{e}_{t-p} + \varepsilon_t$$

回顾：拉格朗日乘数（Lagrange multiplier）检验

计算：

$$LM = (n-p)R^2 \sim \chi^2(p)$$

其中，n为样本容量，R^2为如下辅助回归的可决系数：

给定α，查临界值$\chi_\alpha^2(p)$，与LM值比较，做出判断，

实际检验中，可从1阶、2阶、…逐次向更高阶检验。

回顾：赤池信息准则和施瓦茨准则

为了比较所含解释变量个数不同的多元回归模型的拟合优度，常用的标准还有：

赤池信息准则（**Akaike information criterion, AIC**）

$$AIC = \ln\frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n} + \frac{2(k+1)}{n}$$

这一准则要求仅当所增加的解释变量能够减少AIC值时才在原模型中增加该解释变量。

分析：

随着滞后阶数的增加，拒绝“GDP是居民消费CONS的原因”的概率变大，而拒绝“居民消费CONS是GDP的原因”的概率变小。

如果同时考虑检验模型的序列相关性以及赤池信息准则，发现：**滞后4阶或5阶的检验模型不具有1阶自相关性，而且也拥有较小的AIC值**，这时判断结果是:**GDP与CONS**有双向的格兰杰因果关系，即相互影响。

例1　考察 $y_t=\alpha+\beta_0x_t+\beta_1x_{t-1}+\beta_2x_{t-2}+\beta_3x_{t-3}+\beta_4x_{t-4}+u_t$ 研究者利用 Almon 估计法，取 $r=3$ 根据样本数据求出近似多项式系数的估计量为

$$\hat{\alpha}=200 \quad \hat{\alpha}_0=100 \quad \hat{\alpha}_1=1.5 \quad \hat{\alpha}_2=1 \quad \hat{\alpha}_3=-3$$

请计算原模型的系数估计值。

例2　考虑图 17—10 中的滞后模式，你会用几次多项式去拟合这些滞后结构，为什

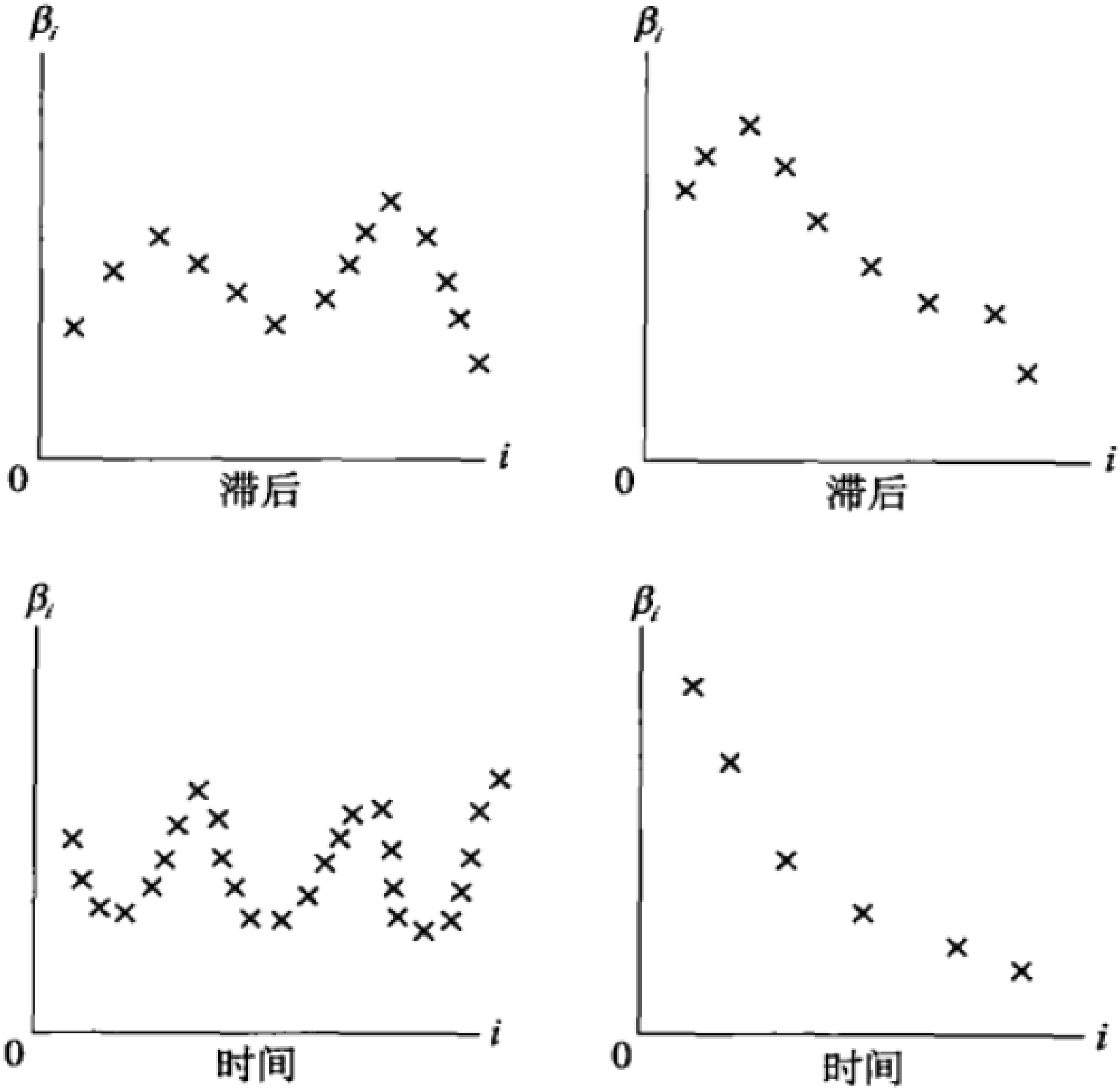


图 17—10　假想的滞后结构

例3　考虑方程（17.13.4）：

$$\beta_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \cdots + a_m i^m$$

为了从 $\hat{a}_i$ 的方差得到 $\hat{\beta}_i$ 的方差，我们利用如下公式：

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_i) = \operatorname{var}(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 i + \hat{a}_2 i^2 + \cdots + \hat{a}_m i^m)$$

$$= \sum_{j=0}^{m} i^{2j} \operatorname{var}(\hat{a}_j) + 2\sum_{j<p} i^{(j+p)} \operatorname{cov}(\hat{a}_j \hat{a}_p)$$

a. 利用上述公式求出如下 $\hat{\beta}_i$ 表达式的方差：

$$\hat{\beta}_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 i + \hat{a}_2 i^2$$

$$\hat{\beta}_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 i + \hat{a}_2 i^2 + \hat{a}_3 i^3$$

b. 如果 $\hat{a}_i$ 的方差相对于它们本身较大，$\hat{\beta}_i$ 的方差也将较大吗？为什么？

例4　考虑如下的分布滞后模型：

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \beta_3 X_{t-3} + \beta_4 X_{t-4} + u_t$$

假定 β_i 可适当地用二次多项式表达如下：

$$\beta_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2$$

如果你想施加约束 $\beta_0 = \beta_4 = 0$，你将怎样估计这些 β?

例 2．假设货币需求关系式为$M_t = \alpha + \beta Y_t^* + \gamma R_t$，式中，$M_t$为时间 t 的实际现金余额；$Y_t^*$为时间 t 的“期望”实际收入；$R_t$为时间 t 的利率。根据适应规则，$Y_t^* = \lambda Y_{t-1} + (1-\lambda) Y^*_{t-1} + \mu_t$，$0 < \lambda < 1$修改期望值。已知$Y_t$，$M_t$，$R_t$的数据，但$Y_t^*$的数据未知。

（1）建立一个可以用于推导α, β, γ和λ估计值的经济计量模型。

（2）假设$E(\mu_t) = 0, E(\mu_t^2) = \sigma^2, E(\mu_t \mu_{t-s}) = 0, s \neq 0; Y_{t-1}, R_t, M_{t-1}$和$R_{t-1}$与$\mu_t$都不相关。OLS 估计值是 1）无偏的；2）一致的吗？为什么？

（3）假设$\mu_t = \rho\mu_{t-1} + \varepsilon_t$，$\varepsilon_t$的性质类似（2）部分。那么，本例中 OLS 估计值是 1）无偏的；2）一致的吗？为什么？