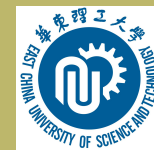


第三章 椭圆型方程的差分法

Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, (1) \\ u = \phi(x, y), & (x, y) \in \Gamma (2) \end{cases}$$



Home Page

Title Page



Page 1 of 15

Go Back

Full Screen

Close

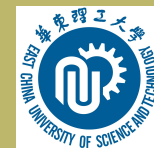
Quit

第三章 椭圆型方程的差分法

Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, (1) \\ u = \phi(x, y), & (x, y) \in \Gamma (2) \end{cases}$$

- Γ 为二维有界区域 Ω 的边界。



Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 1 of 15

Go Back

Full Screen

Close

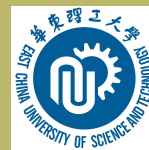
Quit

第三章 椭圆型方程的差分法

Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, (1) \\ u = \phi(x, y), & (x, y) \in \Gamma (2) \end{cases}$$

- Γ 为二维有界区域 Ω 的边界。
- $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为二维Laplace算子。



Home Page

Title Page



Page 1 of 15

Go Back

Full Screen

Close

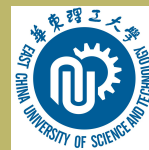
Quit

第三章 椭圆型方程的差分法

Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, (1) \\ u = \phi(x, y), & (x, y) \in \Gamma (2) \end{cases}$$

- Γ 为二维有界区域 Ω 的边界。
- $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为二维Laplace算子。
- Poisson方程是最简单最典型的椭圆型方程。



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

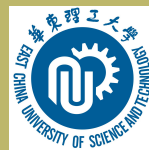
Page 1 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



第三章 椭圆型方程的差分法

Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, (1) \\ u = \phi(x, y), & (x, y) \in \Gamma (2) \end{cases}$$

- Γ 为二维有界区域 Ω 的边界。
- $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为二维Laplace算子。
- Poisson方程是最简单最典型的椭圆型方程。
- 若 $f = 0$ ，则方程(1)称为Laplace方程或调和方程

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 15

Go Back

Full Screen

Close

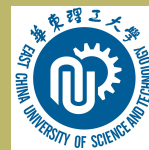
Quit

第三章 椭圆型方程的差分法

Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, (1) \\ u = \phi(x, y), & (x, y) \in \Gamma (2) \end{cases}$$

- Γ 为二维有界区域 Ω 的边界。
- $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为二维Laplace算子。
- Poisson方程是最简单最典型的椭圆型方程。
- 若 $f = 0$ ，则方程(1)称为Laplace方程或调和方程
- 边值问题(1)(2)的解析解通常求不出。



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 15

Go Back

Full Screen

Close

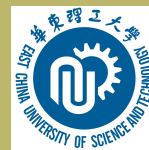
Quit

第三章 椭圆型方程的差分法

Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, (1) \\ u = \phi(x, y), & (x, y) \in \Gamma (2) \end{cases}$$

- Γ 为二维有界区域 Ω 的边界。
- $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为二维Laplace算子。
- Poisson方程是最简单最典型的椭圆型方程。
- 若 $f = 0$ ，则方程(1)称为Laplace方程或调和方程
- 边值问题(1)(2)的解析解通常求不出。
- 一般只能用数值方法求其数值解，



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 15

Go Back

Full Screen

Close

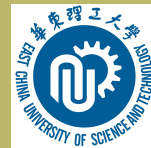
Quit

第三章 椭圆型方程的差分法

Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, (1) \\ u = \phi(x, y), & (x, y) \in \Gamma (2) \end{cases}$$

- Γ 为二维有界区域 Ω 的边界。
- $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为二维Laplace算子。
- Poisson方程是最简单最典型的椭圆型方程。
- 若 $f = 0$ ，则方程(1)称为Laplace方程或调和方程
- 边值问题(1)(2)的解析解通常求不出。
- 一般只能用数值方法求其数值解，
- 数值方法主要有:差分法，有限元法，边界元法。



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

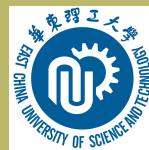
Page 1 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



第三章 椭圆型方程的差分法

Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, (1) \\ u = \phi(x, y), & (x, y) \in \Gamma (2) \end{cases}$$

- Γ 为二维有界区域 Ω 的边界。
- $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为二维Laplace算子。
- Poisson方程是最简单最典型的椭圆型方程。
- 若 $f = 0$ ，则方程(1)称为Laplace方程或调和方程
- 边值问题(1)(2)的解析解通常求不出。
- 一般只能用数值方法求其数值解，
- 数值方法主要有:差分法，有限元法，边界元法。
- 本章介绍差分法主要包括：五点差分格式，九点差分格式，三角形网格以及差分解的惟一性、收敛性

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

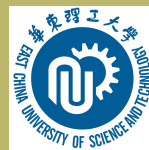
Page 1 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



第三章 椭圆型方程的差分法

Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, (1) \\ u = \phi(x, y), & (x, y) \in \Gamma (2) \end{cases}$$

- Γ 为二维有界区域 Ω 的边界。
- $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为二维Laplace算子。
- Poisson方程是最简单最典型的椭圆型方程。
- 若 $f = 0$ ，则方程(1)称为Laplace方程或调和方程
- 边值问题(1)(2)的解析解通常求不出。
- 一般只能用数值方法求其数值解，
- 数值方法主要有:差分法，有限元法，边界元法。
- 本章介绍差分法主要包括：五点差分格式，九点差分格式，三角形网格以及差分解的惟一性、收敛性

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 15

Go Back

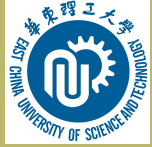
Full Screen

Close

Quit

★3.1 矩形网格

★3.1.1 五点差分格式



Home Page

Title Page

◀▶

◀▶

Page 2 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



★3.1 矩形网格

★3.1.1 五点差分格式

剖分:

- 在平面上取一个固定点 (x_0, y_0) ,过该点分别以步长 h 和 τ 作垂直于 x 轴和 y 轴的两族平行线(称为网格线).

$$x = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, N_1$$

$$y = y_0 + j\tau, j = 0, 1, \dots, N_2$$

使得区域 $\Omega \subset \{(x, y) | x_0 \leq x \leq x_0 + N_1h, y_0 \leq y \leq N_2\tau\}$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

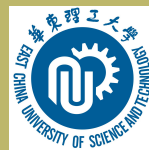
Page 2 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



★3.1 矩形网格

★3.1.1 五点差分格式

剖分:

- 在平面上取一个固定点 (x_0, y_0) ,过该点分别以步长 h 和 τ 作垂直于 x 轴和 y 轴的两族平行线(称为网格线).

$$x = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, N_1$$

$$y = y_0 + j\tau, j = 0, 1, \dots, N_2$$

使得区域 $\Omega \subset \{(x, y) | x_0 \leq x \leq x_0 + N_1h, y_0 \leq y \leq N_2\tau\}$

- 网格点:记 $x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, N_1, y_j = y_0 + j\tau, j = 0, 1, \dots, N_2$,称网格线的交点 (x_i, y_j) 为网格点

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

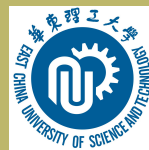
Page 2 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



★3.1 矩形网格

★3.1.1 五点差分格式

剖分:

- 在平面上取一个固定点 (x_0, y_0) ,过该点分别以步长 h 和 τ 作垂直于 x 轴和 y 轴的两族平行线(称为网格线).

$$x = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, N_1$$

$$y = y_0 + j\tau, j = 0, 1, \dots, N_2$$

使得区域 $\Omega \subset \{(x, y) | x_0 \leq x \leq x_0 + N_1h, y_0 \leq y \leq N_2\tau\}$

- 网格点:记 $x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, N_1, y_j = y_0 + j\tau, j = 0, 1, \dots, N_2$,称网格线的交点 (x_i, y_j) 为网格点
- 内部节点: 位于 Ω 内部的网格点称为内部节点, 简称内点。它的全体记为 $\Omega_h, \Omega_h = \{(x_i, y_j), (x_i, y_j) \in \Omega\}$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

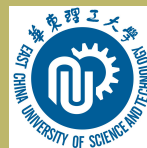
Page 2 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



★3.1 矩形网格

★3.1.1 五点差分格式

剖分:

- 在平面上取一个固定点 (x_0, y_0) ,过该点分别以步长 h 和 τ 作垂直于 x 轴和 y 轴的两族平行线(称为网格线).

$$x = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, N_1$$

$$y = y_0 + j\tau, j = 0, 1, \dots, N_2$$

使得区域 $\Omega \subset \{(x, y) | x_0 \leq x \leq x_0 + N_1h, y_0 \leq y \leq N_2\tau\}$

- 网格点:记 $x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, N_1, y_j = y_0 + j\tau, j = 0, 1, \dots, N_2$,称网格线的交点 (x_i, y_j) 为网格点
- 内部节点: 位于 Ω 内部的网格点称为内部节点, 简称内点。它的全体记为 $\Omega_h, \Omega_h = \{(x_i, y_j), (x_i, y_j) \in \Omega\}$
- 网格线与区域边界 Γ 的交点称为边界节点, 简称边界点, 他们的全体记为 Γ_h , 并记

$$\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h.$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

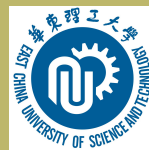
Page 2 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



★3.1 矩形网格

★3.1.1 五点差分格式

剖分:

- 在平面上取一个固定点 (x_0, y_0) ,过该点分别以步长 h 和 τ 作垂直于 x 轴和 y 轴的两族平行线(称为网格线).

$$x = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, N_1$$

$$y = y_0 + j\tau, j = 0, 1, \dots, N_2$$

使得区域 $\Omega \subset \{(x, y) | x_0 \leq x \leq x_0 + N_1h, y_0 \leq y \leq N_2\tau\}$

- 网格点:记 $x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, N_1, y_j = y_0 + j\tau, j = 0, 1, \dots, N_2$,称网格线的交点 (x_i, y_j) 为网格点
- 内部节点: 位于 Ω 内部的网格点称为内部节点, 简称内点。它的全体记为 $\Omega_h, \Omega_h = \{(x_i, y_j), (x_i, y_j) \in \Omega\}$
- 网格线与区域边界 Γ 的交点称为边界节点, 简称边界点, 他们的全体记为 Γ_h , 并记

$$\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h.$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 15

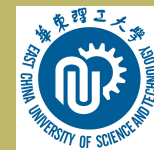
Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 为了以后讨论的方便，将内点分为两类：



Home Page

Title Page



Page 3 of 15

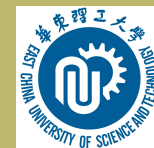
Go Back

Full Screen

Close

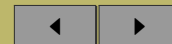
Quit

- 为了以后讨论的方便，将内点分为两类：
- 正则内点：若某内点的网格线上四个相邻的网格点都是内点；正则内点的全体记为 Ω_{h1} ，



Home Page

Title Page



Page 3 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 为了以后讨论的方便，将内点分为两类：
- 正则内点：若某内点的网格线上四个相邻的网格点都是内点；正则内点的全体记为 Ω_{h1} ，
- 否则称它们为非正则内点，即非正则内点的网格线上四个相邻的网格至少有一个不是内点,非正则内点的全体记为 Ω_{h2} .

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 3 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 为了以后讨论的方便，将内点分为两类：
- 正则内点：若某内点的网格线上四个相邻的网格点都是内点；正则内点的全体记为 Ω_{h1} ，
- 否则称它们为非正则内点，即非正则内点的网格线上四个相邻的网格至少有一个不是内点,非正则内点的全体记为 Ω_{h2} .
- $\Omega_{h1} \cup \Omega_{h2} = \Omega_h$.

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 3 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 为了以后讨论的方便，将内点分为两类：
- 正则内点：若某内点的网格线上四个相邻的网格点都是内点；正则内点的全体记为 Ω_{h1} ,
- 否则称它们为非正则内点，即非正则内点的网格线上四个相邻的网格至少有一个不是内点,非正则内点的全体记为 Ω_{h2} .
- $\Omega_{h1} \cup \Omega_{h2} = \Omega_h$.
- 记 $h_0 = \sqrt{h^2 + \tau^2}$.

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 3 of 15

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 为了以后讨论的方便，将内点分为两类：
- 正则内点：若某内点的网格线上四个相邻的网格点都是内点；正则内点的全体记为 Ω_{h1} ，
- 否则称它们为非正则内点，即非正则内点的网格线上四个相邻的网格至少有一个不是内点，非正则内点的全体记为 Ω_{h2} .
- $\Omega_{h1} \cup \Omega_{h2} = \Omega_h$.
- 记 $h_0 = \sqrt{h^2 + \tau^2}$.
- 为简单起见，把点 (x_i, y_j) 记为 (i, j) .

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 3 of 15](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 为了以后讨论的方便，将内点分为两类：
- 正则内点：若某内点的网格线上四个相邻的网格点都是内点；正则内点的全体记为 Ω_{h1} ，
- 否则称它们为非正则内点，即非正则内点的网格线上四个相邻的网格至少有一个不是内点，非正则内点的全体记为 Ω_{h2} 。
- $\Omega_{h1} \cup \Omega_{h2} = \Omega_h$ 。
- 记 $h_0 = \sqrt{h^2 + \tau^2}$ 。
- 为简单起见，把点 (x_i, y_j) 记为 (i, j) 。
- 设 (i, j) 是正则内点，应用Taylor公式，得

$$\frac{1}{h^2}[u(i+1, j) - 2u(i, j) + u(i-1, j)] = \frac{\partial^2 u(i, j)}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(\xi_i, j)}{\partial x^4}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{h^2}[u(i, j+1) - 2u(i, j) + u(i, j-1)] = \frac{\partial^2 u(i, j)}{\partial y^2} + \frac{\tau^2}{12} \frac{\partial^4 u(i, \eta_j)}{\partial y^4}, \quad (4)$$

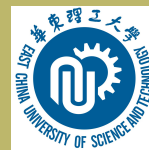
[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 3 of 15](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

• 于是

$$\begin{aligned}\Delta u(i, j) = & \frac{1}{h^2}[u(i+1, j) - 2u(i, j) + u(i-1, j)] \\ & + \frac{1}{\tau^2}[u(i, j+1) - 2u(i, j) + u(i, j-1)] + R_{ij},\end{aligned}\quad (5)$$

其中

$$R_{ij} = -\frac{1}{12}\left(h^2 \frac{\partial^4 u(\xi_i, j)}{\partial x^4} + \tau^2 \frac{\partial^4 u(i, \eta_j)}{\partial y^4}\right), \xi \in (x_{i-1}, x_{i+1}), \eta_j \in (y_{j-1}, y_{j+1}). \quad (6)$$



Home Page

Title Page



Page 4 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



• 于是

$$\begin{aligned}\Delta u(i, j) &= \frac{1}{h^2}[u(i+1, j) - 2u(i, j) + u(i-1, j)] \\ &\quad + \frac{1}{\tau^2}[u(i, j+1) - 2u(i, j) + u(i, j-1)] + R_{ij},\end{aligned}\quad (5)$$

其中

$$R_{ij} = -\frac{1}{12}\left(h^2 \frac{\partial^4 u(\xi_i, j)}{\partial x^4} + \tau^2 \frac{\partial^4 u(i, \eta_j)}{\partial y^4}\right), \xi \in (x_{i-1}, x_{i+1}), \eta_j \in (y_{j-1}, y_{j+1}). \quad (6)$$

• 将式(5)代入微分方程(1),得

$$\begin{aligned}-\frac{1}{h^2}[u(i+1, j) - 2u(i, j) + u(i-1, j)] - \frac{1}{\tau^2}[u(i, j+1) - 2u(i, j) + u(i, j-1)] \\ = f(i, j) + R_{ij},\end{aligned}\quad (7)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



• 于是

$$\begin{aligned}\Delta u(i, j) &= \frac{1}{h^2}[u(i+1, j) - 2u(i, j) + u(i-1, j)] \\ &\quad + \frac{1}{\tau^2}[u(i, j+1) - 2u(i, j) + u(i, j-1)] + R_{ij},\end{aligned}\quad (5)$$

其中

$$R_{ij} = -\frac{1}{12}\left(h^2 \frac{\partial^4 u(\xi_i, j)}{\partial x^4} + \tau^2 \frac{\partial^4 u(i, \eta_j)}{\partial y^4}\right), \xi \in (x_{i-1}, x_{i+1}), \eta_j \in (y_{j-1}, y_{j+1}). \quad (6)$$

• 将式(5)代入微分方程(1),得

$$\begin{aligned}-\frac{1}{h^2}[u(i+1, j) - 2u(i, j) + u(i-1, j)] - \frac{1}{\tau^2}[u(i, j+1) - 2u(i, j) + u(i, j-1)] \\ = f(i, j) + R_{ij},\end{aligned}\quad (7)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 略去余项，我们得到微分方程(1)在节点 (i, j) 的一个差分方程

$$-\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) - \frac{1}{\tau^2}(u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}) = f_{ij}, \quad (8)$$

其中 u_{ij} 是 $u(i, j)$ 的一个近似值， $f_{ij} = f(i, j)$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 5 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 略去余项，我们得到微分方程(1)在节点 (i, j) 的一个差分方程

$$-\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) - \frac{1}{\tau^2}(u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}) = f_{ij}, \quad (8)$$

其中 u_{ij} 是 $u(i, j)$ 的一个近似值， $f_{ij} = f(i, j)$

- 由于在建立差分方程(8)时用到节点 (i, j) 及其相邻的四个节点，所以称式(8)为五点差分格式，

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 5 of 15](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 略去余项，我们得到微分方程(1)在节点 (i, j) 的一个差分方程

$$-\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) - \frac{1}{\tau^2}(u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}) = f_{ij}, \quad (8)$$

其中 u_{ij} 是 $u(i, j)$ 的一个近似值， $f_{ij} = f(i, j)$

- 由于在建立差分方程(8)时用到节点 (i, j) 及其相邻的四个节点，所以称式(8)为五点差分格式，
- R_{ij} 又称为五点差分格式的截断误差.在每一个正则内点都可以建立一个像式(8)的差分方程

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 5 of 15](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 略去余项，我们得到微分方程(1)在节点 (i, j) 的一个差分方程

$$-\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) - \frac{1}{\tau^2}(u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}) = f_{ij}, \quad (8)$$

其中 u_{ij} 是 $u(i, j)$ 的一个近似值， $f_{ij} = f(i, j)$

- 由于在建立差分方程(8)时用到节点 (i, j) 及其相邻的四个节点，所以称式(8)为五点差分格式，
- R_{ij} 又称为五点差分格式的截断误差.在每一个正则内点都可以建立一个像式(8)的差分方程
- 差分方程(8)相当于在 (i, j) 分别用沿 x, y 方向的二阶中心差商代替二阶导数 u_{xx}, u_{yy} 的结果。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 5 of 15](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 略去余项，我们得到微分方程(1)在节点 (i, j) 的一个差分方程

$$-\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) - \frac{1}{\tau^2}(u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}) = f_{ij}, \quad (8)$$

其中 u_{ij} 是 $u(i, j)$ 的一个近似值， $f_{ij} = f(i, j)$

- 由于在建立差分方程(8)时用到节点 (i, j) 及其相邻的四个节点，所以称式(8)为五点差分格式，
- R_{ij} 又称为五点差分格式的截断误差.在每一个正则内点都可以建立一个像式(8)的差分方程
- 差分方程(8)相当于在 (i, j) 分别用沿 x, y 方向的二阶中心差商代替二阶导数 u_{xx}, u_{yy} 的结果。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 5 of 15](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 若 $\tau = h$,即用正方形网格, 差分方程为

$$\frac{1}{h^2}(4u_{ij} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}) = f_{ij} \quad (9)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 6 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 若 $\tau = h$,即用正方形网格, 差分方程为

$$\frac{1}{h^2}(4u_{ij} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}) = f_{ij} \quad (9)$$

- 若 $\tau = h, f = 0$ 即调和方程的差分方程为

$$u_{ij} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1})$$

即差分解在 (i, j) 的值等于其周围四点值的平均。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 6 of 15](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 若 $\tau = h$,即用正方形网格, 差分方程为

$$\frac{1}{h^2}(4u_{ij} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}) = f_{ij} \quad (9)$$

- 若 $\tau = h, f = 0$ 即调和方程的差分方程为

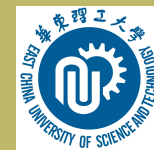
$$u_{ij} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1})$$

即差分解在 (i, j) 的值等于其周围四点值的平均。

- 对于 (i, j) 是边界点, 很容易处理 $u_{i,j} = \phi(i, j)$,

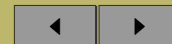
[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 6 of 15](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

下面介绍三种处理非正则内点的方法：



Home Page

Title Page



Page 7 of 15

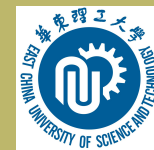
Go Back

Full Screen

Close

Quit

下面介绍三种处理非正则内点的方法：
(1)简单转移法：



Home Page

Title Page



Page 7 of 15

Go Back

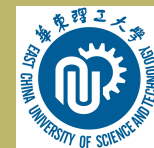
Full Screen

Close

Quit

下面介绍三种处理非正则内点的方法：

(1)简单转移法：若边界点 E 最靠近非正则内点 (i, j) ,取 $u_{ij} = \phi(E)$,其截断误差为 $O(h_0)$,这种处理方法十分简单。



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 7 of 15

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

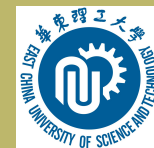
[Close](#)

[Quit](#)

下面介绍三种处理非正则内点的方法：

(1)简单转移法：若边界点 E 最靠近非正则内点 (i, j) ,取 $u_{ij} = \phi(E)$,其截断误差为 $O(h_0)$,这种处理方法十分简单。

(2)不等距格式：



Home Page

Title Page



Page 7 of 15

Go Back

Full Screen

Close

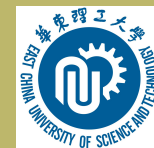
Quit

下面介绍三种处理非正则内点的方法：

(1)简单转移法：若边界点 E 最靠近非正则内点 (i, j) ,取 $u_{ij} = \phi(E)$,其截断误差为 $O(h_0)$,这种处理方法十分简单。

(2)不等距格式：

- 设 P 是非正则内点，与它相邻的四个节点记为 Q, R, S, T ,其中任何一点都可以是边界点，记 $h_1 = |PQ|, h_2 = |PR|, \tau_1 = |PS|, \tau_2 = |PT|$,



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

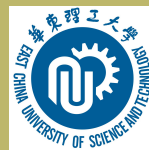
Page 7 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



下面介绍三种处理非正则内点的方法：

(1)简单转移法：若边界点 E 最靠近非正则内点 (i, j) ,取 $u_{ij} = \phi(E)$,其截断误差为 $O(h_0)$,这种处理方法十分简单。

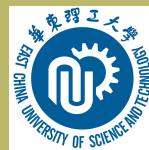
(2)不等距格式：

- 设 P 是非正则内点，与它相邻的四个节点记为 Q, R, S, T ,其中任何一点都可以是边界点，记 $h_1 = |PQ|, h_2 = |PR|, \tau_1 = |PS|, \tau_2 = |PT|$,
- 由Taylor展开，得

$$u(Q) = u(P) - h_1 \frac{\partial u(P)}{\partial x} + \frac{h_1^2}{2} \frac{\partial^2 u(P)}{\partial x^2} - \frac{h_1^3}{6} \frac{\partial^3 u(P)}{\partial x^3} + \dots$$

$$u(R) = u(P) + h_2 \frac{\partial u(P)}{\partial x} + \frac{h_2^2}{2} \frac{\partial^2 u(P)}{\partial x^2} + \frac{h_2^3}{6} \frac{\partial^3 u(P)}{\partial x^3} + \dots$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 7 of 15](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



下面介绍三种处理非正则内点的方法：

(1)简单转移法：若边界点 E 最靠近非正则内点 (i, j) ,取 $u_{ij} = \phi(E)$,其截断误差为 $O(h_0)$,这种处理方法十分简单。

(2)不等距格式：

- 设 P 是非正则内点，与它相邻的四个节点记为 Q, R, S, T ,其中任何一点都可以是边界点，记 $h_1 = |PQ|, h_2 = |PR|, \tau_1 = |PS|, \tau_2 = |PT|$,
- 由Taylor展开，得

$$u(Q) = u(P) - h_1 \frac{\partial u(P)}{\partial x} + \frac{h_1^2}{2} \frac{\partial^2 u(P)}{\partial x^2} - \frac{h_1^3}{6} \frac{\partial^3 u(P)}{\partial x^3} + \dots$$

$$u(R) = u(P) + h_2 \frac{\partial u(P)}{\partial x} + \frac{h_2^2}{2} \frac{\partial^2 u(P)}{\partial x^2} + \frac{h_2^3}{6} \frac{\partial^3 u(P)}{\partial x^3} + \dots$$

- 从上面两式中消去 $\frac{\partial u(P)}{\partial x}$ 项，得

$$\frac{1}{h_1 + h_2} [h_1 u(R) + h_2 u(Q)] = u(P) + \frac{h_1 h_2}{2} \left[\frac{\partial^2 u(P)}{\partial x^2} - \frac{h_1 - h_2}{3} \frac{\partial^3 u(P)}{\partial x^3} + \dots \right]. \quad (10)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 15

Go Back

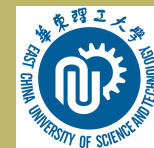
Full Screen

Close

Quit

• 同理，得

$$\frac{1}{\tau_1 + \tau_2} [\tau_1 u(T) + \tau_2 u(S)] = u(P) + \frac{\tau_1 \tau_2}{2} \left[\frac{\partial^2 u(P)}{\partial y^2} - \frac{\tau_1 - \tau_2}{3} \frac{\partial^3 u(P)}{\partial y^3} + \dots \right]. \quad (11)$$



Home Page

Title Page



Page 8 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



• 同理，得

$$\frac{1}{\tau_1 + \tau_2} [\tau_1 u(T) + \tau_2 u(S)] = u(P) + \frac{\tau_1 \tau_2}{2} \left[\frac{\partial^2 u(P)}{\partial y^2} - \frac{\tau_1 - \tau_2}{3} \frac{\partial^3 u(P)}{\partial y^3} + \dots \right]. \quad (11)$$

• 注意到微分方程(1),从式(10)和(11),得

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{h_1 + h_2} \left(\frac{u(R) - u(P)}{h_2} - \frac{u(P) - u(Q)}{h_1} \right) - \frac{2}{\tau_1 + \tau_2} \left(\frac{u(T) - u(P)}{\tau_2} - \frac{u(P) - u(S)}{\tau_1} \right) \\ & = f(P) + \frac{h_1 - h_2}{3} \frac{\partial^3 u(P)}{\partial x^3} + \frac{\tau_1 - \tau_2}{3} \frac{\partial^3 u(P)}{\partial y^3} + \dots \end{aligned}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 8 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



• 同理，得

$$\frac{1}{\tau_1 + \tau_2} [\tau_1 u(T) + \tau_2 u(S)] = u(P) + \frac{\tau_1 \tau_2}{2} \left[\frac{\partial^2 u(P)}{\partial y^2} - \frac{\tau_1 - \tau_2}{3} \frac{\partial^3 u(P)}{\partial y^3} + \dots \right]. \quad (11)$$

• 注意到微分方程(1),从式(10)和(11),得

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{h_1 + h_2} \left(\frac{u(R) - u(P)}{h_2} - \frac{u(P) - u(Q)}{h_1} \right) - \frac{2}{\tau_1 + \tau_2} \left(\frac{u(T) - u(P)}{\tau_2} - \frac{u(P) - u(S)}{\tau_1} \right) \\ & = f(P) + \frac{h_1 - h_2}{3} \frac{\partial^3 u(P)}{\partial x^3} + \frac{\tau_1 - \tau_2}{3} \frac{\partial^3 u(P)}{\partial y^3} + \dots \end{aligned}$$

• 略去上式的余项，得到在 P 点的差分方程

$$-\frac{2}{h_1 + h_2} \left(\frac{u_R - u_P}{h_2} - \frac{u_P - u_Q}{h_1} \right) - \frac{2}{\tau_1 + \tau_2} \left(\frac{u_T - u_P}{\tau_2} - \frac{u_P - u_S}{\tau_1} \right) = f(P) \quad (12)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 8 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 截断误差为 $O(h_0)$



Home Page

Title Page



Page 9 of 15

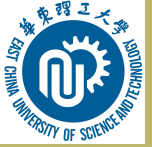
Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 截断误差为 $O(h_0)$
- 同差分方程(8)相比，差分方程(12)的截断误差低了一阶。



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

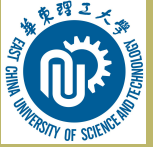
Page 9 of 15

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 截断误差为 $O(h_0)$
- 同差分方程(8)相比，差分方程(12)的截断误差低了一阶。
- 破坏了差分方程组系数矩阵的对称性，为保持对称性把差分方程(12)改为

$$-\frac{1}{h}\left(\frac{u_R - u_P}{h_2} - \frac{u_P - u_Q}{h_1}\right) - \frac{1}{\tau}\left(\frac{u_T - u_P}{\tau_2} - \frac{u_P - u_S}{\tau_1}\right) = f(P) \quad (13)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 9 of 15](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 截断误差为 $O(h_0)$
- 同差分方程(8)相比, 差分方程(12)的截断误差低了一阶。
- 破坏了差分方程组系数矩阵的对称性, 为保持对称性把差分方程(12)改为

$$-\frac{1}{h}\left(\frac{u_R - u_P}{h_2} - \frac{u_P - u_Q}{h_1}\right) - \frac{1}{\tau}\left(\frac{u_T - u_P}{\tau_2} - \frac{u_P - u_S}{\tau_1}\right) = f(P) \quad (13)$$

(3)线性插值:

- 若 Q, R 中至少有一个是边界点, 从式(10)得到在点 P 的差分方程

$$u_P - \frac{1}{h_1 + h_2}(h_1 u_R + h_2 u_Q) = 0, \quad (14)$$

其截断误差为 $O(h^2)$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 截断误差为 $O(h_0)$
- 同差分方程(8)相比, 差分方程(12)的截断误差低了一阶。
- 破坏了差分方程组系数矩阵的对称性, 为保持对称性把差分方程(12)改为

$$-\frac{1}{h}\left(\frac{u_R - u_P}{h_2} - \frac{u_P - u_Q}{h_1}\right) - \frac{1}{\tau}\left(\frac{u_T - u_P}{\tau_2} - \frac{u_P - u_S}{\tau_1}\right) = f(P) \quad (13)$$

(3)线性插值:

- 若 Q, R 中至少有一个是边界点, 从式(10)得到在点 P 的差分方程

$$u_P - \frac{1}{h_1 + h_2}(h_1 u_R + h_2 u_Q) = 0, \quad (14)$$

其截断误差为 $O(h^2)$

- 上式相当于对函数 u 在 Q 和 R 两点之间采用线性插值所得到的结果

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 9 of 15](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 截断误差为 $O(h_0)$
- 同差分方程(8)相比, 差分方程(12)的截断误差低了一阶。
- 破坏了差分方程组系数矩阵的对称性, 为保持对称性把差分方程(12)改为

$$-\frac{1}{h}\left(\frac{u_R - u_P}{h_2} - \frac{u_P - u_Q}{h_1}\right) - \frac{1}{\tau}\left(\frac{u_T - u_P}{\tau_2} - \frac{u_P - u_S}{\tau_1}\right) = f(P) \quad (13)$$

(3)线性插值:

- 若 Q, R 中至少有一个是边界点, 从式(10)得到在点 P 的差分方程

$$u_P - \frac{1}{h_1 + h_2}(h_1 u_R + h_2 u_Q) = 0, \quad (14)$$

其截断误差为 $O(h^2)$

- 上式相当于对函数 u 在 Q 和 R 两点之间采用线性插值所得到的结果

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 9 of 15](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 若 S, T 至少有一个是边界点，则从式(11)得到在点 P 的又一个差分方程

$$u_P - \frac{\tau_1 u_T + \tau_2 u_S}{\tau_1 + \tau_2} = 0 \quad (15),$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 10 of 15](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 若 S, T 至少有一个是边界点，则从式(11)得到在点 P 的又一个差分方程

$$u_P - \frac{\tau_1 u_T + \tau_2 u_S}{\tau_1 + \tau_2} = 0 \quad (15),$$

其截断误差为 $O(\tau^2)$ 上式相当于对函数 u 在 S 和 T 两点之间采用线性插值的结果.

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 10 of 15](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 若 S, T 至少有一个是边界点，则从式(11)得到在点 P 的又一个差分方程

$$u_P - \frac{\tau_1 u_T + \tau_2 u_S}{\tau_1 + \tau_2} = 0 \quad (15),$$

其截断误差为 $O(\tau^2)$ 上式相当于对函数 u 在 S 和 T 两点之间采用线性插值的结果.

- 方程(14)和(15)也可以分别写成等价的形式

$$-\frac{1}{h} \left(\frac{u_R - u_P}{h_2} - \frac{u_P - u_Q}{h_1} \right) = 0, \quad -\frac{1}{\tau} \left(\frac{u_T - u_P}{\tau_2} - \frac{u_P - u_S}{\tau_1} \right) = 0,$$

此时方程组的系数矩阵是对称的。

- 若 S, T 至少有一个是边界点, 则从式(11)得到在点 P 的又一个差分方程

$$u_P - \frac{\tau_1 u_T + \tau_2 u_S}{\tau_1 + \tau_2} = 0 \quad (15),$$

其截断误差为 $O(\tau^2)$ 上式相当于对函数 u 在 S 和 T 两点之间采用线性插值的结果.

- 方程(14)和(15)也可以分别写成等价的形式

$$-\frac{1}{h} \left(\frac{u_R - u_P}{h_2} - \frac{u_P - u_Q}{h_1} \right) = 0, \quad -\frac{1}{\tau} \left(\frac{u_T - u_P}{\tau_2} - \frac{u_P - u_S}{\tau_1} \right) = 0,$$

此时方程组的系数矩阵是对称的。

- 对于每一个非正则内点都可以建立一个方程, 将它们同正则内点的差分方程(8)联立起来就产生一个线性方程组, 方程组的阶数等于内部节点的数目, 通过解方程组便得到边值问题(1),(2)的解 u 在节点 (i, j) 的近似值 u_{ij} .

★3.1.2第三类边界条件的处理



Home Page

Title Page



Page 11 of 15

Go Back

Full Screen

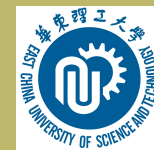
Close

Quit

★3.1.2第三类边界条件的处理

- 第一类边界条件(又称Dirichlet(狄利克雷)边界条件)

$$u|_{\Gamma} = \phi(x, y)$$



Home Page

Title Page



Page 11 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit

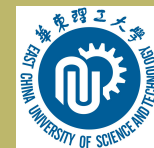
★3.1.2第三类边界条件的处理

- 第一类边界条件(又称Dirichlet(狄利克雷)边界条件)

$$u|_{\Gamma} = \phi(x, y)$$

- 第二类边界条件(又称Neumann(诺伊曼)边界条件)

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = \phi(x, y).$$



Home Page

Title Page



Page 11 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit

★3.1.2第三类边界条件的处理

- 第一类边界条件(又称Dirichlet(狄利克雷)边界条件)

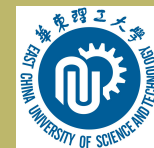
$$u|_{\Gamma} = \phi(x, y)$$

- 第二类边界条件(又称Neumann(诺伊曼)边界条件)

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = \phi(x, y).$$

- 第三类边界条件(又称Robin(罗宾)边界条件)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x, y)u\right)|_{\Gamma} = \phi(x, y), \quad (18)$$



Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 11 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit

★3.1.2第三类边界条件的处理

- 第一类边界条件(又称Dirichlet(狄利克雷)边界条件)

$$u|_{\Gamma} = \phi(x, y)$$

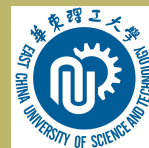
- 第二类边界条件(又称Neumann(诺伊曼)边界条件)

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = \phi(x, y).$$

- 第三类边界条件(又称Robin(罗宾)边界条件)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x, y)u\right)|_{\Gamma} = \phi(x, y), \quad (18)$$

- 其中 n 是区域 Ω 的边界 Γ 的外法线方向, $\sigma \geq 0$, 但至少在 Γ 的一部分上 $\sigma > 0$.在这样的假设条件下, 边值问题(1),(18)有惟一解。



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit

★3.1.2第三类边界条件的处理

- 第一类边界条件(又称Dirichlet(狄利克雷)边界条件)

$$u|_{\Gamma} = \phi(x, y)$$

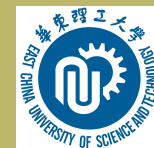
- 第二类边界条件(又称Neumann(诺伊曼)边界条件)

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = \phi(x, y).$$

- 第三类边界条件(又称Robin(罗宾)边界条件)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x, y)u\right)|_{\Gamma} = \phi(x, y), \quad (18)$$

- 其中 n 是区域 Ω 的边界 Γ 的外法线方向, $\sigma \geq 0$, 但至少在 Γ 的一部分上 $\sigma > 0$.在这样的假设条件下, 边值问题(1),(18)有惟一解。
- 当 $\sigma = 0$, 式(18)便成第二类边界条件。



Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 11 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit

★3.1.2第三类边界条件的处理

- 第一类边界条件(又称Dirichlet(狄利克雷)边界条件)

$$u|_{\Gamma} = \phi(x, y)$$

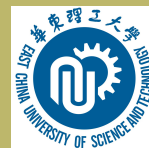
- 第二类边界条件(又称Neumann(诺伊曼)边界条件)

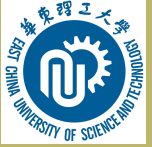
$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = \phi(x, y).$$

- 第三类边界条件(又称Robin(罗宾)边界条件)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x, y)u\right)|_{\Gamma} = \phi(x, y), \quad (18)$$

- 其中 n 是区域 Ω 的边界 Γ 的外法线方向, $\sigma \geq 0$, 但至少在 Γ 的一部分上 $\sigma > 0$.在这样的假设条件下, 边值问题(1),(18)有惟一解。
- 当 $\sigma = 0$, 式(18)便成第二类边界条件。
- 下面仅讨论如何处理第三类边界条件。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 11 of 15](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 如果 P 是边界点, 因为

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} \approx \frac{u(P) - u(T)}{|PT|}$$

$$u(T) \approx \frac{1}{h}[|TR|u(S) + |TS|u(R)]$$

于是

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} \approx \frac{1}{|PT|} \left\{ u(P) - \frac{1}{h}[|TR|u(S) + |TS|u(R)] \right\}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 12 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 如果 P 是边界点, 因为

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} \approx \frac{u(P) - u(T)}{|PT|}$$

$$u(T) \approx \frac{1}{h}[|TR|u(S) + |TS|u(R)]$$

于是

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} \approx \frac{1}{|PT|} \left\{ u(P) - \frac{1}{h}[|TR|u(S) + |TS|u(R)] \right\}$$

- 把它代入式(18),得

$$\frac{1}{|PT|} \left\{ u(P) - \frac{1}{h}[|TR|u(S) + |TS|u(R)] \right\} + \sigma(P)u(P) \approx \phi(P),$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 12 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 如果 P 是边界点, 因为

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} \approx \frac{u(P) - u(T)}{|PT|}$$

$$u(T) \approx \frac{1}{h}[|TR|u(S) + |TS|u(R)]$$

于是

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} \approx \frac{1}{|PT|} \left\{ u(P) - \frac{1}{h}[|TR|u(S) + |TS|u(R)] \right\}$$

- 把它代入式(18),得

$$\frac{1}{|PT|} \left\{ u(P) - \frac{1}{h}[|TR|u(S) + |TS|u(R)] \right\} + \sigma(P)u(P) \approx \phi(P),$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 12 of 15

Go Back

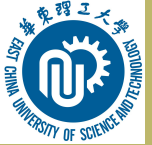
Full Screen

Close

Quit

- 可得在点 P 的差分方程

$$\frac{1}{|PT|} \left[u_P - \frac{1}{h} (|TR|u_S + |TS|u_R) \right] + \sigma(P)u_P = \phi(P), \quad (19)$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 13 of 15

Go Back

Full Screen

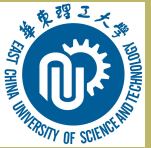
Close

Quit

- 可得在点 P 的差分方程

$$\frac{1}{|PT|} \left[u_P - \frac{1}{h} (|TR|u_S + |TS|u_R) \right] + \sigma(P)u_P = \phi(P), \quad (19)$$

- 其截断误差为 $O(h_0)$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 13 of 15

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

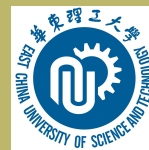
[Close](#)

[Quit](#)

- 可得在点 P 的差分方程

$$\frac{1}{|PT|} \left[u_P - \frac{1}{h} (|TR|u_S + |TS|u_R) \right] + \sigma(P)u_P = \phi(P), \quad (19)$$

- 其截断误差为 $O(h_0)$
- 如果对每一个边界点都作这样处理，最后线性方程组未知数的数目等于 $\bar{\Omega}$ 中节点的数目。



Home Page

Title Page



Page 13 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 可得在点 P 的差分方程

$$\frac{1}{|PT|} \left[u_P - \frac{1}{h} (|TR|u_S + |TS|u_R) \right] + \sigma(P)u_P = \phi(P), \quad (19)$$

- 其截断误差为 $O(h_0)$
- 如果对每一个边界点都作这样处理，最后线性方程组未知数的数目等于 $\bar{\Omega}$ 中节点的数目。
- 为了减少未知数的数目， A, B 是边界点， P 是非正则内点，我们不在点 A, B 建立方程，而在点 P 建立方程。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 13 of 15](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 可得在点 P 的差分方程

$$\frac{1}{|PT|} \left[u_P - \frac{1}{h} (|TR|u_S + |TS|u_R) \right] + \sigma(P)u_P = \phi(P), \quad (19)$$

- 其截断误差为 $O(h_0)$
- 如果对每一个边界点都作这样处理，最后线性方程组未知数的数目等于 $\bar{\Omega}$ 中节点的数目。
- 为了减少未知数的数目， A, B 是边界点， P 是非正则内点，我们不在点 A, B 建立方程，而在点 P 建立方程。
- 在 Γ 上取一点 P_1 ，使得 $\overrightarrow{PP_1}$ 是 Γ 在点 P_1 的外法方向，则

$$\frac{\partial u(P_1)}{\partial n} \approx \frac{\partial u(P)}{\partial n}, u(P_1) \approx u(P)$$

从(18)式，得

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} + \sigma(P_1)u(P) \approx \phi(P_1).$$

- 用前面处理方向导数的方法，得到在点 P 的一个差分方程

$$\frac{1}{|PT|} \left[u_P - \frac{1}{h} (|TR|u_s + |TS|u_R) \right] + \sigma(P_1)u_P = \phi(P_1). \quad (20)$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 14 of 15

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 用前面处理方向导数的方法，得到在点 P 的一个差分方程

$$\frac{1}{|PT|} \left[u_P - \frac{1}{h} (|TR|u_s + |TS|u_R) \right] + \sigma(P_1)u_P = \phi(P_1). \quad (20)$$

- 由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(P)}{\partial n} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y) \right) \Big|_P \\ &\approx \frac{u(P) - u(Q)}{h} \frac{|TR|}{|PT|} + \frac{u(P) - u(R)}{\tau} \frac{|PR|}{|PT|}, \end{aligned}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 14 of 15](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 用前面处理方向导数的方法，得到在点 P 的一个差分方程

$$\frac{1}{|PT|} \left[u_P - \frac{1}{h} (|TR|u_s + |TS|u_R) \right] + \sigma(P_1)u_P = \phi(P_1). \quad (20)$$

- 由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(P)}{\partial n} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y) \right) \Big|_P \\ &\approx \frac{u(P) - u(Q)}{h} \frac{|TR|}{|PT|} + \frac{u(P) - u(R)}{\tau} \frac{|PR|}{|PT|}, \end{aligned}$$

从而又得一个在点 P 的差分方程

$$\frac{|TR|}{|PT|} \frac{u_P - u_Q}{h} + \frac{|PR|}{|PT|} \frac{u_P - u_R}{\tau} + \sigma(P_1)u_P = \phi(P_1) \quad (21)$$

- 用前面处理方向导数的方法，得到在点 P 的一个差分方程

$$\frac{1}{|PT|} \left[u_P - \frac{1}{h} (|TR|u_s + |TS|u_R) \right] + \sigma(P_1)u_P = \phi(P_1). \quad (20)$$

- 由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(P)}{\partial n} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y) \right) \Big|_P \\ &\approx \frac{u(P) - u(Q)}{h} \frac{|TR|}{|PT|} + \frac{u(P) - u(R)}{\tau} \frac{|PR|}{|PT|}, \end{aligned}$$

从而又得一个在点 P 的差分方程

$$\frac{|TR|}{|PT|} \frac{u_P - u_Q}{h} + \frac{|PR|}{|PT|} \frac{u_P - u_R}{\tau} + \sigma(P_1)u_P = \phi(P_1) \quad (21)$$

- 差分方程(20)和(21)的截断误差都是 $O(h_0)$.



作业：1、用五点差分格式解下列椭圆型方程边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 2, & 0 < x, y < 1 \\ u(0, y) = 0, & u(1, y) = 1 + y \\ u(x, 0) = x^2, & u(x, 1) = x^2 + x \end{cases}$$

取 $h = \tau = \frac{1}{3}$

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 15 of 15

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)