第十七章　量子物理

§17-1　热辐射

*热辐射现象：任何物体、在任何温度下都会发射各种波长的电磁波

*平衡热辐射：

物体发射的辐射能 =同一时间内 吸收的辐射能

此时温度恒定 —— 热辐射达到平衡

一、基尔霍夫定律：

1） 单色辐射本领：$e_\lambda = \dfrac{dE_\lambda}{d\lambda} = e(\lambda, T)$

dE_λ：单位时间，物体表面单位面积上发射的在 $\lambda \sim \lambda + d\lambda$ 波长范围的辐射能

$e(\lambda, T)$：单位时间、单位表面积上所辐射出的，单位波长间隔中的能量。

2）总辐射本领：$E(T) = \int_0^\infty e_\lambda(T, \lambda) d\lambda$

物体单位时间、单位表面积上所辐射出的各种波长电磁波的能量总和。

3）吸收本领：$a(T, \lambda) = \dfrac{\text{吸收能量}}{\text{入射能量}}$

4）绝对黑体（黑体）

对于任意温度或波长，绝对黑体的吸收本领恒等于1 } $a(T,\lambda) \equiv 1 \rightarrow$ 理想模型

空腔黑体：不透明材料带小孔空腔（黑体模型）

5）基尔霍夫定律：

$$\frac{e_1(\lambda,T)}{a_1(\lambda,T)} = \frac{e_2(\lambda,T)}{a_2(\lambda,T)} = \cdots\cdots = \frac{e_0(\lambda,T)}{a_0(\lambda,T)} = e_0(\lambda,T)$$

说明：1）好的吸收体，一定也是好的辐射体

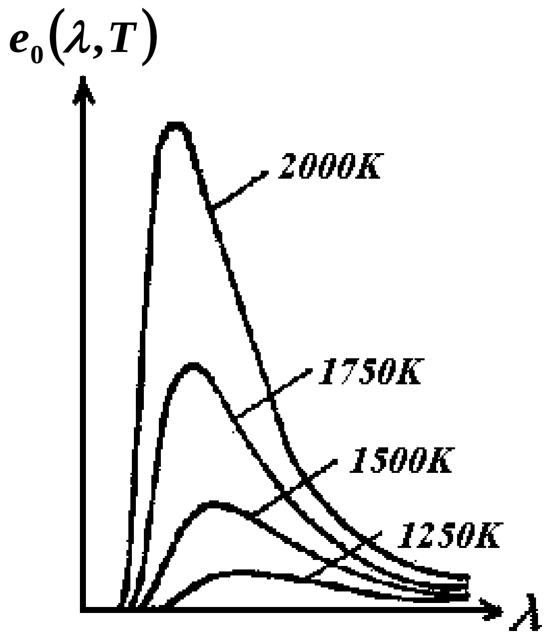
2）由黑体辐射本领可以得到一般物体的辐射本领

二、黑体辐射 实验规律

1. 斯特藩定律: $E(T) = \sigma T^4 = \int_0^{\infty} e_0(\lambda, T) d\lambda$

$E(T)$～黑体在温度T时的总辐射本领，对应 $e \sim \lambda$ 曲线下的面积

2. 维恩位移定律: $T\lambda_m = b$



例:

太阳辐射光谱: $\lambda_m \sim 510nm \rightarrow T \sim 5700K$

地球表面: $\lambda_m \sim 10\mu m \rightarrow T 300K$

例1：1）黑体总辐射本领增加为原来的16倍时，其辐射波长λ_m为原来的几倍？

解：$E_0=\sigma T^4$，$E_0'=\sigma T'^4$ $\rightarrow \dfrac{E_0}{E_0'}=(\dfrac{T}{T'})^4=\dfrac{1}{16}\rightarrow T'=2T$

$$T\lambda_m=T'\lambda_m'\rightarrow \lambda_m'=\frac{1}{2}\lambda_m$$

2）从太阳向地球表面的辐射能为 $8.36J/60s\cdot 10^{-4}m^2$
太阳到地球距离 $R=1.5\times 10^8 km$
太阳半径 $r=6.9\times 10^5 km$，太阳看成黑体。

求：太阳的表面温度

解：太阳在地球表面的辐射本领：$E_1=8.36J/60s\cdot 10^{-4}m^2$
（单位时间、单位面积）

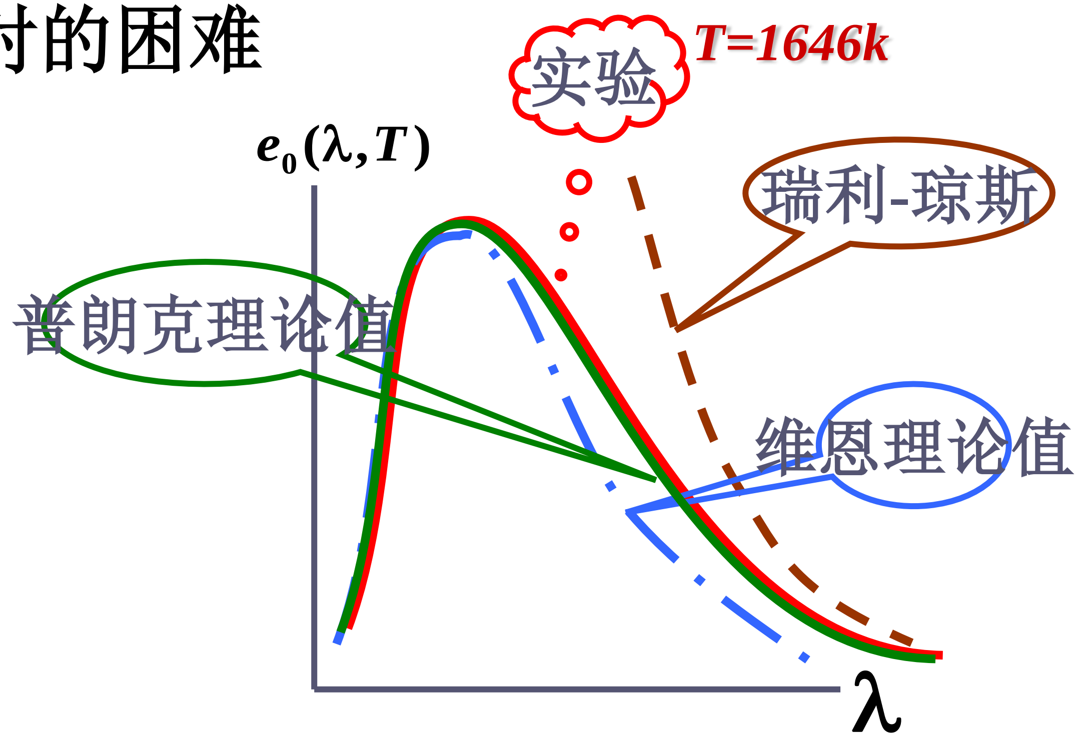
$$\left.\begin{array}{l}\text{半径为}R\text{球面上总能量：}E_R=E_1\cdot 4\pi R^2\\ \text{太阳表面(半径}r\text{)总能量：}E_S=E_o\cdot 4\pi r^2\end{array}\right\}\begin{array}{l}E_R=E_S\\ \rightarrow E_0=6.6\times 10^7 J/s\cdot m^2\end{array}$$

太阳表面辐射本领

$$E_0=\sigma T^4\rightarrow T=5841K$$

三、普朗克量子假设

1. 经典理论解释黑体辐射的困难



维恩公式:

$$e_0(\lambda,T)=\frac{C_1}{\lambda^5}e^{-C_2/\lambda T}$$

短波区符合较好

瑞利–琼斯公式:

$$e_0(\lambda,T)=\frac{2\pi C}{\lambda^4}KT$$

长波区符合较好，短波区：$e_0(\lambda,T)\to\infty$

2. 普朗克公式

$$e_0(\lambda,T)=2\pi hc^2\lambda^{-5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}}-1}$$

c: 光速

k: 玻尔兹曼常数

h:普朗克常数

$$h=6.63\times10^{-34}J\cdot S$$

普朗克量子假设：(P314～315)

黑体由许多带电的线性谐振子组成，可与周围电磁场交换能量

谐振子的能量不能连续变化，只能取一些分裂的值，它们是某一最小能量 $h\nu$ 的整数倍，即 $h\nu$, $2h\nu$, $3h\nu$, …, $nh\nu$

n: 量子数

$h\nu$: 能量子/量子 (*quantum of energy / quantum*)

$nh\nu$: 能级

对于一定频率ν 的电磁辐射，物体只能以 $h\nu$ 为单位发射或吸收它。换言之，物体发射或吸收电磁辐射只能以“量子”方式进行，每个量子的能量为$h\nu$ 。——能量量子化

h:普朗克常数

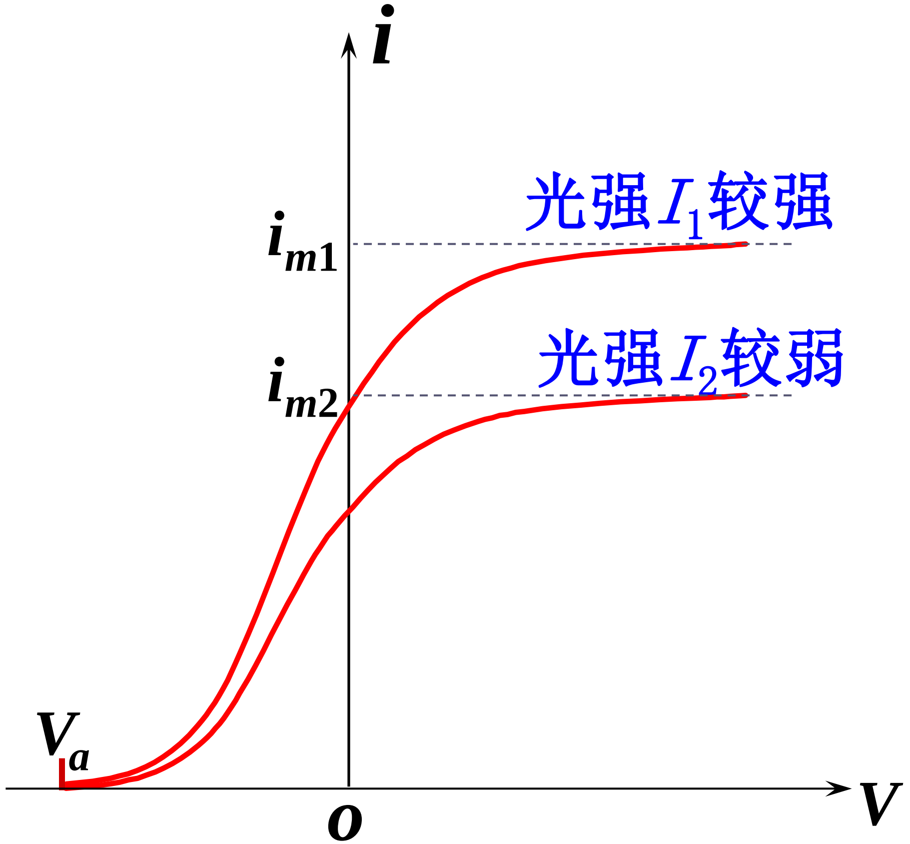
$$h = 6.63\times10^{-34}\,J\cdot S$$

§17-2 光电效应

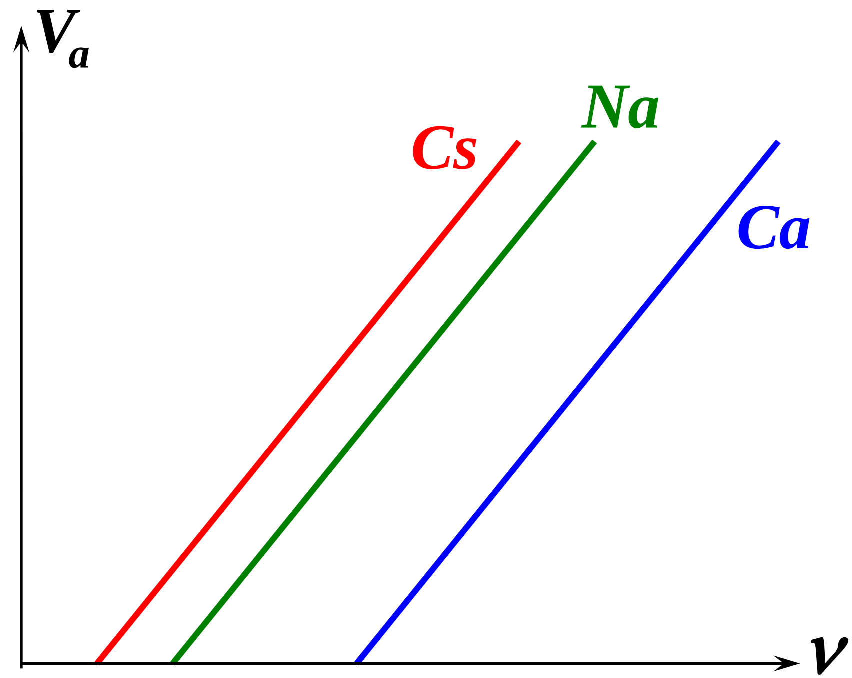
光电效应：

一定条件下，光照射金属表面时，金属中的自由电子吸收光能而逸出金属表面。

——金属及化合物在电磁辐射下发射电子的现象



光电效应 i~V曲线



截止电压V_a和光频率 ν 的关系

$V_a = k\nu \rightarrow$ 不同金属，k不同

一、光电效应实验规律

1）入射光频率 ν 确定：饱和电流 $i_m \propto$ 光强$I, I\uparrow, i_m = ne\uparrow$

2）截止电压 V_a： 当$V = -V_a, i = 0$（无光电流）

逸出光电子最大动能：$\frac{1}{2}mU_m^2 = eV_a \propto \nu$，与入射光强无关

3）截止频率 ν_0（红限）：$\nu = \nu_0 \rightarrow \frac{1}{2}mU_m^2 = 0$， $\nu < \nu_0$：无光电子逸出

4）光电效应瞬时性：$\nu > \nu_0$：有光电效应，$\Delta t < 10^{-9}s$

二、经典理论解释的困难

爱因斯坦光子论

a) 光在空间传播时也具有粒子性

一束光就是一股以速度 c 运动的粒子流（光子流）

b) 每个光量子能量： $\varepsilon = h\nu$

光强： $I = Nh\nu$ 　N: 单位时间垂直通过单位面积的光子数

$$h\nu = \frac{1}{2} m U_m^2 + A$$

爱因斯坦光电效应方程

光子$h\nu$ → 金属表面 → 电子$h\nu$ $\begin{cases} \frac{1}{2} m U_m^2 \text{：逸出电子最大初动能} \\ A\text{：逸出功 (work gunction)} \end{cases}$

$A = eU_0 \rightarrow U_0 = \frac{A}{e}$： 逸出势

光的波粒二象性

光 $\begin{cases} \text{具有一定频率或波长}\lambda\text{的电磁波} \rightarrow \text{波动性：}\lambda\nu = c \\ \text{具有一定能量和动量}P\text{的光子流} \rightarrow \text{粒子性：} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{光子质量：} m = \dfrac{E}{c^2} = \dfrac{h\nu}{c^2}，\ m_0 = 0 \\ \text{光子能量：} E = h\nu = mc^2 \\ \text{光子动量：} P = mc = \dfrac{h\nu}{c} = \dfrac{h}{\lambda} \end{array}\right\} \text{光的波粒二象性}$$

例1：以$\lambda = 410nm$单色光照射某光电池，产生电子的最大动能$E_k = 1.0eV$，求能使该光电池产生电子的最大波长？

解：最大波长= 最小频率 $\nu_0 = \dfrac{c}{\lambda_0}$

（截止波长）　（红限频率）

$$hv = A + E_k \rightarrow A = hv - E_k = \frac{hc}{\lambda} - E_k$$

$$hv_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = A$$

$$\therefore \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda} - E_k \rightarrow \lambda_0$$

例2：分别以频率为 ν_1,ν_2，光强 I 相等的两束单色光照射某一光电管。若 $\nu_1 > \nu_2$（均大于红限频率），则产生光电子的最大初动能 $\underline{E_1 > E_2}$ ；为阻止光电子到达阳极，所加截止电压 $\underline{|V_{a1}| > |V_{a2}|}$ ；所产生的饱和光电流 $\underline{i_{m1} < i_{m2}}$ 。

$$E_k = h\nu - A = eV_a$$

$i_m \propto I$ $\leftarrow$ 频率ν一定时：$i_m \propto N$

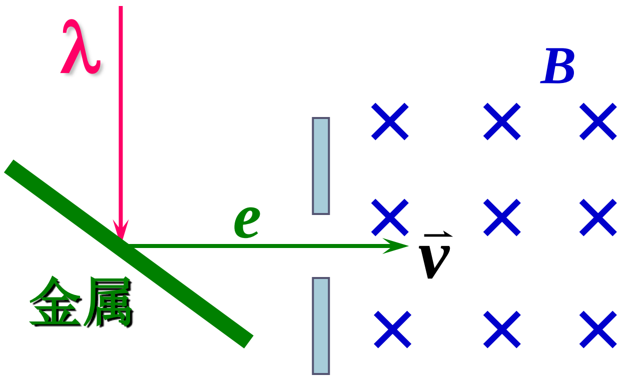
饱和电流$i_m = ne \propto$ 逸出光电子数$n \rightarrow i_m \propto$ 入射光子数N

光强：$I_1 = N_1 h\nu_1 = I_2 = N_2 h\nu_2 \begin{cases} \nu_1 > \nu_2 \rightarrow N_1 < N_2 \\ i_m \propto N \rightarrow \therefore i_{m1} < i_{m2} \end{cases}$

例3：入射光λ，照射某金属，打出光电子（e、m），进入磁场B，电子作半径R的圆周运动。

求：1）该金属截止波长λ_0

2）遏止电压V_a



解：1）电子出射速度v

$$\frac{mv^2}{R}=eBv\rightarrow v=\frac{eBR}{m}$$

电子动能：$E_K=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{e^2B^2R^2}{2m}$

$\therefore$金属逸出功：$A=h\nu-E_K=\dfrac{hc}{\lambda}-\dfrac{e^2B^2R^2}{2m}$

金属逸出势：$U_o=\dfrac{A}{e}$

截止波长：$\lambda_0=\dfrac{c}{\nu_0}=\dfrac{hc}{A}$

2）遏止电压：$eV_a=E_K\rightarrow V_a=\dfrac{eB^2R^2}{2m}$

§17-3 康普顿效应

入射x射线（电磁波）$\lambda_0 \rightarrow$ 散射物质 $\rightarrow$ 接收探测散射x射线

康普顿散射 $\lambda > \lambda_0$　　$\lambda = \lambda_0$

康普顿效应：x射线光子与散射物质中电子弹性碰撞

散射光子能量 $h\nu <$ 入射光子能量 $h\nu_0$：$\nu < \nu_0 \rightarrow \lambda > \lambda_0$

康普顿散射公式： $$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\alpha) = \frac{2h}{m_0 c}\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\begin{cases} \text{能量守恒：} h\nu_0 + m_0c^2 = mc^2 + h\nu \\ \text{动量守恒：} \vec{P}_0 = \vec{P} + m\vec{V} \begin{cases} \dfrac{h\nu_0}{c} = \dfrac{h\nu}{c}\cos\alpha + mV\cos\theta & \text{水平方向} \\ 0 = \dfrac{h\nu}{c}\sin\alpha - mV\sin\theta & \text{垂直方向} \end{cases} \end{cases}$$

例1：波长 λ_0=0.0708nm的x射线在石蜡上受到康普顿散射，在 $\frac{\pi}{2}$ 和 π 方向上所散射的x射线的波长以及反冲电子所获得的能量各是多少?

解：在$\frac{\pi}{2}$方向上：$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\frac{\pi}{2}) = 0.0024nm$

$$\lambda = 0.0708 + 0.0024 = 0.0732nm$$

反冲电子能量为入射光子与散射光子能量的差值：

$$\Delta\varepsilon = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} = 9.2 \times 10^{-7} J$$

在π方向上：$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\pi) = 0.0048nm$

$$\lambda = 0.0708 + 0.0048 = 0.0756nm$$

$$\Delta\varepsilon = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0 \lambda} = 1.78 \times 10^{-16} J$$

例2：入射$x-ray$光子能量$0.60MeV$，若在康普顿散射中光子波长变化了20%，求反冲电子的动能E_k

解：$h\nu_o + m_o c^2 = h\nu + mc^2$

反冲电子动能：$E_k = mc^2 - m_o c^2 = h\nu_o - h\nu$

$$\varepsilon_o = h\nu_o = \frac{hc}{\lambda_o} = 0.60MeV$$

$$\lambda = \lambda_o + \Delta\lambda = 1.20\lambda_o \rightarrow \varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{\varepsilon_o}{1.2}$$

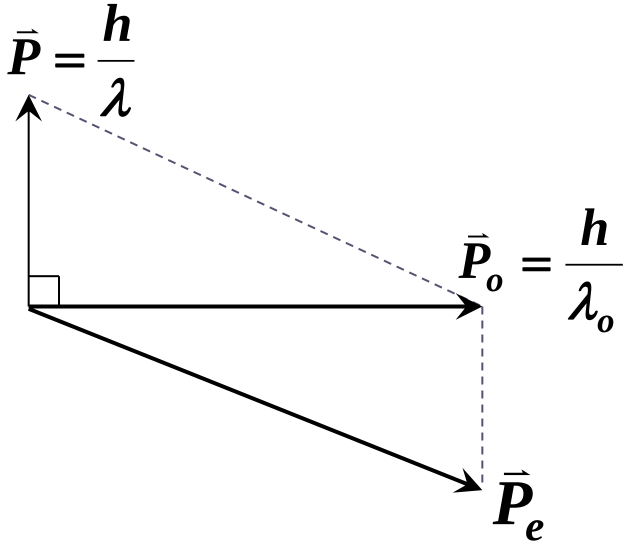
$$\therefore E_k = (1 - \frac{1}{1.2})\varepsilon_o = 0.10MeV$$

例3：康普顿散射中，入射光波长0.005nm，试求：

1）90 °散射光子的波长

2）反冲电子得动量

解：1） $\lambda = \lambda_0 + \frac{2h}{m_o C}\sin^2\frac{\alpha}{2} = 0.05 + \frac{2h}{m_o C}\sin^2 45^o = 0.0074nm$



2）动量守恒

$$\vec{P}_o = \vec{P} + \vec{P}_e$$

$$P_e = \sqrt{P_o^2 + P^2}$$

$$= h\sqrt{\frac{1}{\lambda_o^2} + \frac{1}{\lambda^2}} = 1.59 \times 10^{-22} kg \cdot m / s$$

§ 17-4 玻尔氢原子理论

氢原子光谱的实验规律

$$\lambda = B\frac{n^2}{n^2-4} \qquad n = 3, 4, 5, \ldots$$ （可见光区）

波数：$\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{4}{B}\left(\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$ 巴尔末公式 (*Balmer formula*)

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) = T(m) - T(n)$$

$m=1, 2, 3, \ldots \quad n=m+1, m+2, \ldots$

$R = 1.097\times10^7\, m^{-1}$: 里得堡常数

$T(n) = \dfrac{R}{n^2}$ 光谱项

不同$m \rightarrow$不同谱系：$m = 1$,莱曼系（紫外）

$m=2$, 巴尔末系(可见)

$m = 3$,帕邢系（红外）

同一m，不同$n \rightarrow$不同λ的谱线

玻尔氢原子理论：

轨道角动量量子化：$L_n = mur_n = n\dfrac{h}{2\pi}$

轨道半径量子化：$r_n = n^2 a_0$

能量量子化：$E_n = -\dfrac{13.6}{n^2}eV$

量子跃迁：$h\nu = E_n - E_m$

（氢原子光谱规律）

$$
\begin{aligned}
&n = 1, E_1 = -13.6eV \\
&n = 2, E_2 = -3.4eV \\
&n = 3, E_3 = -1.51eV \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

例1：要使处于基态的氢原子受激后辐射可见光，

至少提供多少能量？

解： $m=2 \quad \rightarrow \Delta E_{\min}=h\nu=E_3-E_2$

$\therefore$ 至少激发到 $n=3$ 的量子态

$$\Delta E=E_3-E_1$$
$$=-1.51-(-1.36)=12.09eV$$

例2：基态 H 原子被12.09 eV 的光子激发时，其电子的轨道半径增加为基态 的几倍？

解：$\Delta E=h\nu \; =12.09eV=h\cdot\dfrac{c}{\lambda}=hcR\cdot\left(\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{n^2}\right)$

$$n^2=9 \rightarrow r_n=n^2a_0=9a_0$$

例3：H 原子从基态激发到n=4能级时，求：

1）H 原子吸收的能量?

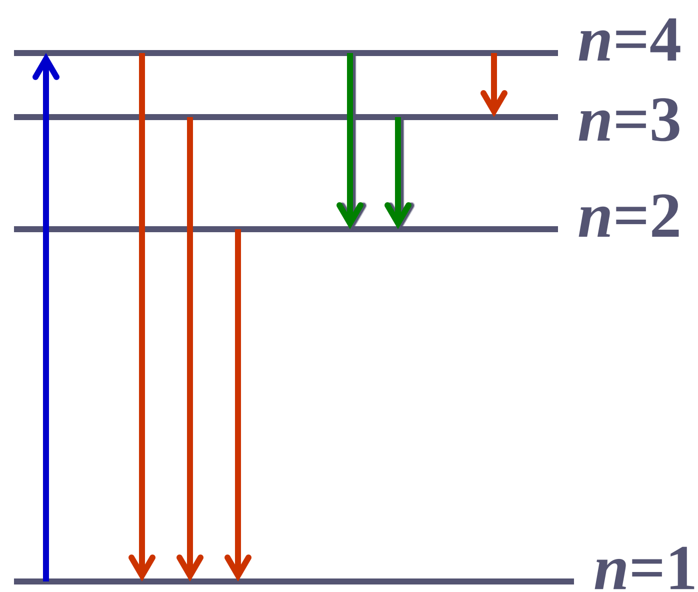
2）一群在n=4激发态的H原子，回到基态可发出几条谱线？有几条是可见光？波长最短是多少？ （习题11）

解：1） $\Delta E = h\nu = hcR = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2}\right) = 12.6eV$

2）n=4: $4 \rightarrow 3$　　$3 \rightarrow 2$　　$2 \rightarrow 1$

$4 \rightarrow 2$　　$3 \rightarrow 1$

$4 \rightarrow 1$



共发出6条谱线

可见光2条：$\begin{cases} 4 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 2 \end{cases}$（巴尔末系）

$$\nu_{max} = \frac{E_4 - E_1}{h} \rightarrow \lambda_{\min} = \frac{c}{\nu_{\max}} = 97.5nm$$

§17-5 粒子的波动性——德布罗意假设

一、德布罗意波——物质波

德布罗意假设：质量m、速度u 的实物粒子也具有波动性

$$\left.\begin{array}{l}\text{E, P粒子性描述}\\ \nu,\lambda\text{波动性描述}\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} E = h\nu \\ P = \dfrac{h}{\lambda} \end{array} \longrightarrow \text{德布罗意关系式}$$

(de Brogle relation)

德布罗意波长：$\lambda = \dfrac{h}{P} = \dfrac{h}{mu}$ ～微观粒子的波粒二象性

$$u \sim c: \lambda = \frac{h}{m_0 u}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$u << c: \lambda = \frac{h}{m_0 u}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 u^2 \rightarrow u = \sqrt{\frac{2E_k}{m_0}}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_k}}$$

*具有动能 E_k 的粒子的德布罗意波长

*电子加速电压V：$E_k = eV \rightarrow \lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2m_0 eV}}$

讨论：

例：若α粒子（电量2e）在均匀磁场中沿半径R作圆周运动，则α粒子的德布罗意波长________

$$m\frac{v^2}{R} = qBv \rightarrow v = \frac{qBR}{m} = \frac{2eBR}{m} \qquad \therefore \lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{2eBR}$$

（2）某金属产生光电效应的红限ν_0，用$\nu(\nu>\nu_0)$的单色光照射，逸出光电子（质量m）的德布罗意波长?

解：
$$\left.\begin{aligned} h\nu &= A+E_k \\ h\nu_0 &= A \end{aligned}\right\} E_k = h(\nu-\nu_0) \rightarrow \therefore \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \sqrt{\frac{h}{(\nu-\nu_0)}}$$

（3）第一玻尔轨道半径a，H原子中电子在第n轨道运动时，德布罗意波长?

解：
$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{mu}$$

$$L_n = mur_n = mun^2a_0 = n\frac{h}{2\pi} \quad \rightarrow mu = \frac{h}{2\pi na}$$

$$\therefore \lambda = \frac{h}{mu} = 2\pi na$$

二、物质波的实验验证

§17-6 不确定关系

电子单缝衍射实验：

动量$\vec{P}_0$的电子$\rightarrow$狭缝a： $\Delta x = a$

通过缝前：$P_{0x} = 0$

通过缝后$0 < P_x < P\sin\theta_1$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta P_x = P\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 = \dfrac{\lambda}{a} = \dfrac{\lambda}{\Delta x} \\ \lambda = \dfrac{h}{P} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta x \cdot \Delta P_x = h \\ \downarrow \\ \Delta x \cdot \Delta P_x \geq h \end{array}$$

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \frac{h}{4\pi}$$

$$\Delta y \cdot \Delta P_y \geq \frac{h}{4\pi}$$

$$\Delta z \cdot \Delta P_z \geq \frac{h}{4\pi}$$

海森堡测不准关系

不确定性原理

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

*自由粒子：$E = \dfrac{P^2}{2m} \rightarrow \Delta E = \dfrac{P}{m}\Delta P$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta E = \dfrac{P}{m}\Delta P \\ \Delta t = \dfrac{\Delta x}{U} \end{array}\right\} \Delta E \cdot \Delta t = \Delta P \cdot \Delta x \geq \frac{h}{4\pi}$$

*德布罗意波~物质波：$E = h\nu$　$P = \dfrac{h}{\lambda}$

$$E_k = \frac{1}{2}m_0u^2 \rightarrow u = \sqrt{\frac{2E_k}{m_0}}$$

*德布罗意波长：$\lambda = \dfrac{h}{P} = \dfrac{h}{mu}$ $\rightarrow$ $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2m_0E_k}}$

*海森堡测不准关系：$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \dfrac{h}{4\pi}$

例：$\lambda = 500nm$的光沿x传播，若$\Delta\lambda = 10^{-4}nm$，则光子$x$坐标的最小不确定量$\Delta x$

$$P_x = \frac{h}{\lambda} \rightarrow \Delta P_x = \frac{h}{\lambda^2}\Delta\lambda$$

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \frac{h}{4\pi}$$

$$\rightarrow \Delta x \geq \frac{\lambda^2}{4\pi \cdot \Delta\lambda} = 20.0cm$$

§17-7 薛定谔方程

波函数 ——描述微观粒子运动状态的物理量(态函数)

自由粒子波函数：$\Psi = \Psi_0 e^{-i2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda})} = \Psi_0 e^{-i\frac{2\pi}{h}(Et - Px)} = \Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - Px)}$

能量E、动量P
沿x方向传播

$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$：狄拉克常数

$$W \propto \Psi \cdot \Psi^* = |\Psi|^2 \rightarrow dW = |\Psi|^2 dV$$

$|\Psi|^2 = \dfrac{dW}{dV}$ ⟶ t时刻，某一点x 附近单位体积内粒子出现的几率

波函数满足的条件：

1）归一化条件→ $\iiint |\Psi|^2 dV = 1$

2）$\Psi(x,t)$单值、有限、连续→标准化条件

薛定谔方程

1. 自由粒子（一维） $E = E_k = \dfrac{P^2}{2m}$

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-Px)} = \Psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}Px} e^{-\frac{i}{\hbar}Et} = \Psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

——沿x轴运动的一维自由粒子波函数

$\Psi(x) = \Psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}Px}$ ——振幅函数

$W = |\Psi(x,t)|^2 = |\Psi(x)|^2 \cdot \left|e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\right|^2 = |\Psi(x)|^2$ 几率与t无关，稳定态

——定态波函数$\Psi(x)$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2\Psi(x)}{dx^2}=-\dfrac{P^2}{\hbar^2}\Psi(x)\\ P^2=2mE\end{array}\right\}\quad \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\Psi(x)=0$$

一维定态薛定谔方程

(*stationary Schrödinger equation*)

（一维自由粒子振幅方程）

2． 势场U中的微观粒子

$$E=\frac{P^2}{2m}+U\rightarrow P^2=2m(E-U)\rightarrow \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}+\frac{2m(E-U)}{\hbar^2}\Psi(x)=0$$

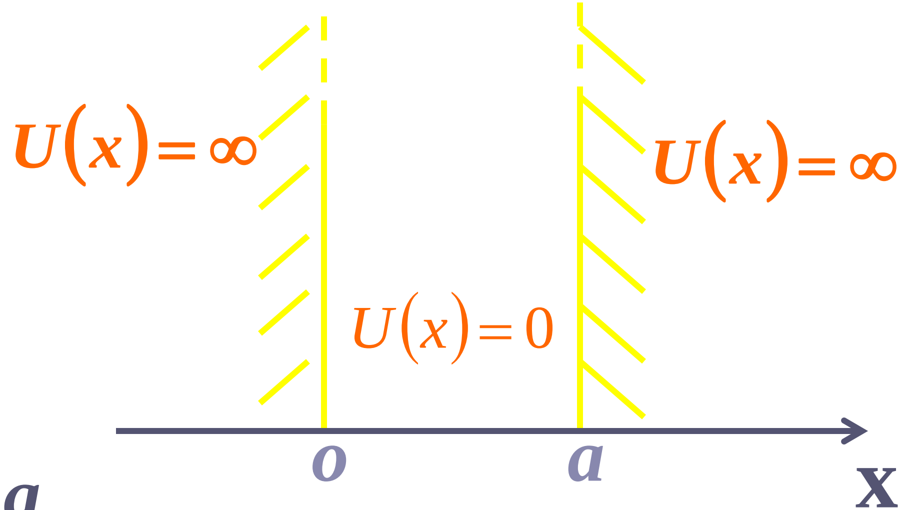
三维空间： $$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\Psi(x,y,z)=0$$

三维定态薛定谔方程： $$\nabla^2\Psi+\frac{2m(E-U)}{\hbar^2}\Psi=0$$

3. 一维无限深方势阱中的微观粒子（§17.8-P340~344)

$$U(x)=\begin{cases}0 \leftarrow 0<x<a\\ \infty \leftarrow x\le 0, x\ge a\end{cases}$$

质量m的粒子, 在0~ a内自由运动



势阱 (potential wall)

1). $$\begin{cases}\dfrac{d^2\Psi}{dx^2}+\dfrac{2mE}{\hbar^2}\Psi=0 & 0<x<a\\ \Psi(x)=0 & x\le 0, x\ge a\end{cases}$$

2). 令: $k^2=\dfrac{2mE}{\hbar^2}\rightarrow\dfrac{d^2\Psi}{dx^2}+k^2\Psi=0$

$$\Psi(x)=C\sin(kx+\delta)$$

3). 确定常数:

标准化条件: 连续性 $\begin{cases}\Psi(0)=0\\ \Psi(a)=0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\delta=0\\ ka=n\pi\rightarrow n=1,2,\ldots\end{cases}$

$$\therefore E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m}$$

$$\begin{cases} \Psi(x) = C\sin(\frac{a\pi}{n}) & 0 < x < a \\ \Psi(x) = 0 & x \le 0, x \ge a \end{cases}$$

（本征值）

归一化条件： $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = \int_0^a C^2 \sin^2 \frac{a\pi}{n} dx = 1$

$$C^2 \frac{a}{2} = 1 \rightarrow C = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\therefore \Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{n\pi}{a} x & （0 < x < a） \\ 0, & （x \le 0, x \ge a） \end{cases}$$

例1：已知粒子在一维矩形无限深势阱中运动，波函数

$$\Psi(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{3\pi x}{2a}\quad(-a\le x\le a)$$

求：粒子在 $x=\frac{5}{6}a$ 处出现的几率

解：*已归一化，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi(x)|^2dx=\int_{-a}^{a}\frac{1}{a}\cos^2\frac{3\pi x}{2a}dx=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\frac{1-\cos\frac{3\pi x}{a}}{2}dx=1$$

粒子在x处出现的几率：$|\Psi(x)|^2$

粒子在 $x=\frac{5}{6}a$ 处出现的几率：

$$\left|\Psi\left(\frac{5}{6}a\right)\right|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{3\pi}{2a}\cdot\frac{5a}{6}\right|^2=\frac{1}{2a}$$

量子物理基础

黑体辐射基本实验定律：
$$E(T)=\sigma T^4=\int_0^\infty e_0(\lambda,T)d\lambda$$
$$T\lambda_m=b$$

普朗克能量子假设：

光电效应实验规律：

爱因斯坦光电效应方程：

入射光强：$I=Nh\nu\rightarrow$ 饱和光电流 $i_m=ne\propto N$

遏止电压：$V_a=\dfrac{E_K}{e}\propto\nu$，与 I 无关

红限频率：$\nu_0=\dfrac{A}{h}$，

截止波长：$\lambda_0=\dfrac{c}{\nu_0}$

光子质量：$m=\dfrac{E}{c^2}=\dfrac{h\nu}{c^2}$，$m_0=0$

光子能量：$E=h\nu=mc^2$

光子动量：$P=mc=\dfrac{h\nu}{c}=\dfrac{h}{\lambda}$

康普顿散射现象：$\alpha\uparrow \rightarrow \lambda-\lambda_0\uparrow$

$$h\nu_o - h\nu = E_k$$

光子论解释：

能量守恒：$h\nu_0 + m_0c^2 = mc^2 + h\nu$

动量守恒：$\vec{P}_0 = \vec{P} + m\vec{V}$

氢原子光谱的实验规律：

玻尔氢原子理论：

轨道角动量量子化假设：$L = mvr = n\dfrac{h}{2\pi} \rightarrow v = \dfrac{nh}{2\pi m_e r}$

轨道半径量子化：$r_n = n^2 a_0$

能量量子化：$E_n = -\dfrac{13.6}{n^2}eV$

量子跃迁：$h\nu = E_n - E_m$

（氢原子光谱规律）

德布罗意波(物质波)：$P=\frac{h}{\lambda}$

德布罗意波长：$\lambda=\frac{h}{P}=\frac{h}{mu}\rightarrow\lambda=\frac{h}{\sqrt{2m_0E_k}}$

不确定关系：$\Delta x\cdot\Delta P_x\geq\frac{h}{4\pi}\rightarrow\Delta x\cdot\Delta u\geq\frac{h}{4\pi m}$

波函数的统计解释：$W\propto\Psi\cdot\Psi^*=|\Psi|^2\rightarrow dW=|\Psi|^2dV$

$|\Psi|^2=\frac{dW}{dV}\rightarrow$ t时刻，某一点x 附近单位体积内粒子出现的几率

1）归一化条件$\rightarrow\iiint|\Psi|^2dV=1$

2）$\Psi(x,t)$单值、有限、连续$\rightarrow$标准化条件

*将波函数在空间各点的振幅同时增大n倍，

粒子在空间的分布几率不变！