

★3.1.3 九点差分格式



Home Page

Title Page



Page 1 of 9

Go Back

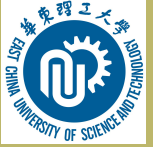
Full Screen

Close

Quit

★3.1.3 九点差分格式

- 为简单起见，仅考虑正方形网格，即 $\tau = h$.



Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 1 of 9

Go Back

Full Screen

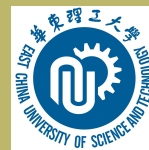
Close

Quit

★3.1.3 九点差分格式

- 为简单起见，仅考虑正方形网格，即 $\tau = h$.
- 由Taylor展开，得

$$\begin{aligned}\square u(i, j) &= \frac{1}{2h^2} [u(i+1, j+1) + u(i+1, j-1) + u(i-1, j+1) + u(i-1, j-1) \\ &\quad - 4u(i, j)] = \Delta u(i, j) + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{(i, j)} \\ &\quad + \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right)_{(i, j)} + O(h^6), \quad (22)\end{aligned}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 1 of 9](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

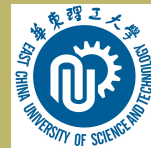
★3.1.3 九点差分格式

- 为简单起见, 仅考虑正方形网格, 即 $\tau = h$.
- 由Taylor展开, 得

$$\begin{aligned}\square u(i, j) &= \frac{1}{2h^2} [u(i+1, j+1) + u(i+1, j-1) + u(i-1, j+1) + u(i-1, j-1) \\ &\quad - 4u(i, j)] = \Delta u(i, j) + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{(i, j)} \\ &\quad + \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right)_{(i, j)} + O(h^6), \quad (22)\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}\diamond u(i, j) &= \frac{1}{h^2} [u(i+1, j) + u(i-1, j) + u(i, j+1) + u(i, j-1) - 4u(i, j)] \\ &= \Delta u(i, j) + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{(i, j)} + \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right)_{(i, j)} + O(h^6). \quad (23)\end{aligned}$$



Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 1 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit

★3.1.3 九点差分格式

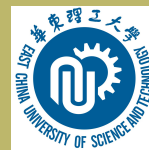
- 为简单起见, 仅考虑正方形网格, 即 $\tau = h$.
- 由Taylor展开, 得

$$\begin{aligned}\square u(i, j) &= \frac{1}{2h^2} [u(i+1, j+1) + u(i+1, j-1) + u(i-1, j+1) + u(i-1, j-1) \\ &\quad - 4u(i, j)] = \Delta u(i, j) + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{(i, j)} \\ &\quad + \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right)_{(i, j)} + O(h^6), \quad (22)\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}\diamond u(i, j) &= \frac{1}{h^2} [u(i+1, j) + u(i-1, j) + u(i, j+1) + u(i, j-1) - 4u(i, j)] \\ &= \Delta u(i, j) + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{(i, j)} + \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right)_{(i, j)} + O(h^6). \quad (23)\end{aligned}$$

- 算子 \square \diamond 分别表示式中所涉及的节点除 (i, j) 之外分别以 (i, j) 为中点的正方形和菱形的顶点。



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit

★3.1.3 九点差分格式

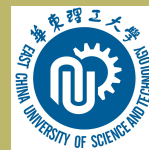
- 为简单起见, 仅考虑正方形网格, 即 $\tau = h$.
- 由Taylor展开, 得

$$\begin{aligned}\square u(i, j) &= \frac{1}{2h^2} [u(i+1, j+1) + u(i+1, j-1) + u(i-1, j+1) + u(i-1, j-1) \\ &\quad - 4u(i, j)] = \Delta u(i, j) + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{(i, j)} \\ &\quad + \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right)_{(i, j)} + O(h^6), \quad (22)\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}\diamond u(i, j) &= \frac{1}{h^2} [u(i+1, j) + u(i-1, j) + u(i, j+1) + u(i, j-1) - 4u(i, j)] \\ &= \Delta u(i, j) + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{(i, j)} + \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right)_{(i, j)} + O(h^6). \quad (23)\end{aligned}$$

- 算子 \square \diamond 分别表示式中所涉及的节点除 (i, j) 之外分别以 (i, j) 为中点的正方形和菱形的顶点。



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 9

Go Back

Full Screen

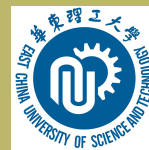
Close

Quit

- 从(22)和(23)式分别得到逼近Poisson方程(1)的差分方程分别为:

$$-\square u_{ij} = f_{ij}, \quad (24)$$

$$-\diamond u_{ij} = f_{ij}, \quad (25)$$



Home Page

Title Page



Page 2 of 9

Go Back

Full Screen

Close

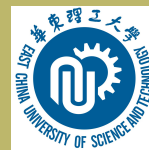
Quit

- 从(22)和(23)式分别得到逼近Poisson方程(1)的差分方程分别为:

$$-\square u_{ij} = f_{ij}, \quad (24)$$

$$-\diamond u_{ij} = f_{ij}, \quad (25)$$

- 截断误差都为 $O(h^2)$



Home Page

Title Page



Page 2 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit

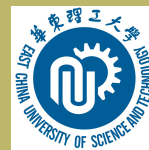
- 从(22)和(23)式分别得到逼近Poisson方程(1)的差分方程分别为:

$$-\square u_{ij} = f_{ij}, \quad (24)$$

$$-\diamond u_{ij} = f_{ij}, \quad (25)$$

- 截断误差都为 $O(h^2)$
- 若记

$$\boxplus u_{ij} = \frac{2}{3}\diamond u_{ij} + \frac{1}{3}\square u_{ij}, \quad (26)$$


[Home Page](#)
[Title Page](#)

[Page 2 of 9](#)
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

- 从(22)和(23)式分别得到逼近Poisson方程(1)的差分方程分别为:

$$-\square u_{ij} = f_{ij}, \quad (24)$$

$$-\diamond u_{ij} = f_{ij}, \quad (25)$$

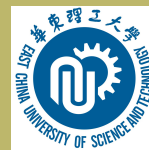
- 截断误差都为 $O(h^2)$
- 若记

$$\boxplus u_{ij} = \frac{2}{3}\diamond u_{ij} + \frac{1}{3}\square u_{ij}, \quad (26)$$

则

$$\boxplus u_{ij} = \Delta u(i, j) + \frac{h^2}{12} \Delta^2 u(i, j) + \frac{h^4}{360} (\Delta^3 u + 2 \frac{\partial^4 (\Delta u)}{\partial x^2 \partial y^2})_{(i, j)} + O(h^6). \quad (27)$$

略去上式右端 $O(h^6)$



Home Page

Title Page



Page 2 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 从(22)和(23)式分别得到逼近Poisson方程(1)的差分方程分别为:

$$-\square u_{ij} = f_{ij}, \quad (24)$$

$$-\diamond u_{ij} = f_{ij}, \quad (25)$$

- 截断误差都为 $O(h^2)$
- 若记

$$\boxplus u_{ij} = \frac{2}{3}\diamond u_{ij} + \frac{1}{3}\square u_{ij}, \quad (26)$$

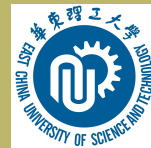
则

$$\boxplus u_{ij} = \Delta u(i, j) + \frac{h^2}{12} \Delta^2 u(i, j) + \frac{h^4}{360} (\Delta^3 u + 2 \frac{\partial^4 (\Delta u)}{\partial x^2 \partial y^2})_{(i, j)} + O(h^6). \quad (27)$$

略去上式右端 $O(h^6)$

- 则得微分方程(1)在节点 (i, j) 的又一个差分方程

$$-\boxplus u_{ij} = f_{ij} + \frac{h^2}{12} (\Delta f)_{ij} + \frac{h^4}{360} (\Delta^2 f + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2})_{ij}. \quad (28)$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 从(22)和(23)式分别得到逼近Poisson方程(1)的差分方程分别为:

$$-\square u_{ij} = f_{ij}, \quad (24)$$

$$-\diamond u_{ij} = f_{ij}, \quad (25)$$

- 截断误差都为 $O(h^2)$
- 若记

$$\boxplus u_{ij} = \frac{2}{3}\diamond u_{ij} + \frac{1}{3}\square u_{ij}, \quad (26)$$

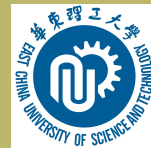
则

$$\boxplus u_{ij} = \Delta u(i, j) + \frac{h^2}{12} \Delta^2 u(i, j) + \frac{h^4}{360} (\Delta^3 u + 2 \frac{\partial^4 (\Delta u)}{\partial x^2 \partial y^2})_{(i, j)} + O(h^6). \quad (27)$$

略去上式右端 $O(h^6)$

- 则得微分方程(1)在节点 (i, j) 的又一个差分方程

$$-\boxplus u_{ij} = f_{ij} + \frac{h^2}{12} (\Delta f)_{ij} + \frac{h^4}{360} (\Delta^2 f + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2})_{ij}. \quad (28)$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 截断误差 $O(h^6)$.

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

[Page 3 of 9](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 截断误差 $O(h^6)$.
- 建立差分方程时共用到九个节点，故称为九点差分格式

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 3 of 9

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 截断误差 $O(h^6)$.
- 建立差分方程时共用到九个节点，故称为九点差分格式
- 当 f 为常数时，则化为简单形式— $\square u_{ij} = f_{ij}$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 3 of 9](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 截断误差 $O(h^6)$.
- 建立差分方程时共用到九个节点，故称为九点差分格式
- 当 f 为常数时，则化为简单形式— $\square u_{ij} = f_{ij}$
- 若 Ω 是不规则的，边界条件很难达到 $O(h^6)$.

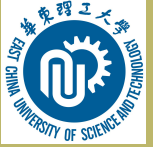
[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 3 of 9](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 截断误差 $O(h^6)$.
- 建立差分方程时共用到九个节点，故称为九点差分格式
- 当 f 为常数时，则化为简单形式— $\square u_{ij} = f_{ij}$
- 若 Ω 是不规则的，边界条件很难达到 $O(h^6)$.
- 九点格式特别适用于比较规则的区域，如矩形区域。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 3 of 9](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

★3.2 三角形网格



Home Page

Title Page



Page 4 of 9

Go Back

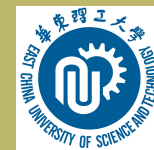
Full Screen

Close

Quit

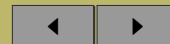
★3.2 三角形网格

- 为了提高解的精确度，通常要增加节点的数量，单节点数量增加时，计算量也随之增大。



Home Page

Title Page



Page 4 of 9

Go Back

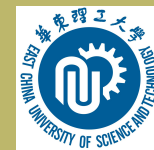
Full Screen

Close

Quit

★3.2 三角形网格

- 为了提高解的精确度，通常要增加节点的数量，单节点数量增加时，计算量也随之增大。
- 为了提高近似解的精度，又节省计算量，应该在函数变换较快的地方多取一些节点，变化较慢的地方少取一些节点。



Home Page

Title Page



Page 4 of 9

Go Back

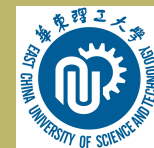
Full Screen

Close

Quit

★3.2 三角形网格

- 为了提高解的精确度，通常要增加节点的数量，单节点数量增加时，计算量也随之增大。
- 为了提高近似解的精度，又节省计算量，应该在函数变换较快的地方多取一些节点，变化较慢的地方少取一些节点。
- 矩形网格的优点：容易建立差分方程，缺点：节点的疏密过度不够灵活。



Home Page

Title Page



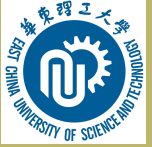
Page 4 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit



★3.2 三角形网格

- 为了提高解的精确度，通常要增加节点的数量，单节点数量增加时，计算量也随之增大。
- 为了提高近似解的精度，又节省计算量，应该在函数变换较快的地方多取一些节点，变化较慢的地方少取一些节点。
- 矩形网格的优点：容易建立差分方程，缺点：节点的疏密过度不够灵活。
- 三角形可以克服这个缺点。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

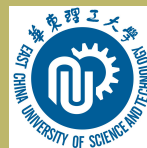
Page 4 of 9

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

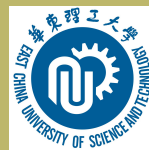


★3.2 三角形网格

- 为了提高解的精确度，通常要增加节点的数量，单节点数量增加时，计算量也随之增大。
- 为了提高近似解的精度，又节省计算量，应该在函数变换较快的地方多取一些节点，变化较慢的地方少取一些节点。
- 矩形网格的优点：容易建立差分方程，缺点：节点的疏密过度不够灵活。
- 三角形可以克服这个缺点。
- Green第二公式

$$\iint_D (u\Delta v - v\Delta u) dx dy = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds, \quad (30)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 4 of 9](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



★3.2 三角形网格

- 为了提高解的精确度，通常要增加节点的数量，单节点数量增加时，计算量也随之增大。
- 为了提高近似解的精度，又节省计算量，应该在函数变换较快的地方多取一些节点，变化较慢的地方少取一些节点。
- 矩形网格的优点：容易建立差分方程，缺点：节点的疏密过度不够灵活。
- 三角形可以克服这个缺点。
- Green第二公式

$$\iint_D (u\Delta v - v\Delta u) dx dy = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds, \quad (30)$$

- 令函数 $v = 1$,

$$\iint_D \Delta u dx dy = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds, \quad (31)$$

其中 ∂D 表示区域 D 的边界， n 是 ∂D 的外法线方向。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

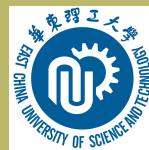
Page 4 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit



★3.2 三角形网格

- 为了提高解的精确度，通常要增加节点的数量，单节点数量增加时，计算量也随之增大。
- 为了提高近似解的精度，又节省计算量，应该在函数变换较快的地方多取一些节点，变化较慢的地方少取一些节点。
- 矩形网格的优点：容易建立差分方程，缺点：节点的疏密过度不够灵活。
- 三角形可以克服这个缺点。
- Green第二公式

$$\iint_D (u\Delta v - v\Delta u) dx dy = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds, \quad (30)$$

- 令函数 $v = 1$,

$$\iint_D \Delta u dx dy = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds, \quad (31)$$

其中 ∂D 表示区域 D 的边界， n 是 ∂D 的外法线方向。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

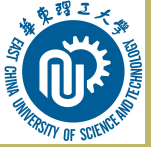
Page 4 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 以Poisson 方程第一边值问题(1),(2)为例，只要区域 D 完全包含在 $\bar{\Omega}$ 内，则式(31)化为

$$-\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_D f dx dy. \quad (32)$$

上式称为Poisson方程的积分守恒形式，利用它可以构造差分方程。

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 5 of 9](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 以Poisson 方程第一边值问题(1),(2)为例，只要区域 D 完全包含在 $\bar{\Omega}$ 内，则式(31)化为

$$-\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_D f dx dy. \quad (32)$$

上式称为Poisson方程的积分守恒形式，利用它可以构造差分方程。

对区域 $\bar{\Omega}$ 进行三角形剖分

- 剖分时三角形互不重叠

- 以Poisson 方程第一边值问题(1),(2)为例, 只要区域 D 完全包含在 $\bar{\Omega}$ 内, 则式(31)化为

$$-\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_D f dx dy. \quad (32)$$

上式称为Poisson方程的积分守恒形式, 利用它可以构造差分方程。

对区域 $\bar{\Omega}$ 进行三角形剖分

- 剖分时三角形互不重叠
- 任何一个三角形的顶点都不在其他三角形的边上, (顶点对顶点)

- 以Poisson 方程第一边值问题(1),(2)为例, 只要区域 D 完全包含在 $\bar{\Omega}$ 内, 则式(31)化为

$$-\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_D f dx dy. \quad (32)$$

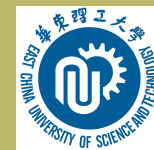
上式称为Poisson方程的积分守恒形式, 利用它可以构造差分方程。

对区域 $\bar{\Omega}$ 进行三角形剖分

- 剖分时三角形互不重叠
- 任何一个三角形的顶点都不在其他三角形的边上, (顶点对顶点)
- 在边界 Γ 附近用三角形的直边代替曲边。

在内点建立差分方程

- 记 P 是内点，假设与它相邻的点共有6个，依次记为 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$.



Home Page

Title Page



Page 6 of 9

Go Back

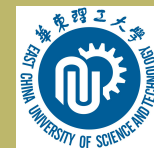
Full Screen

Close

Quit

在内点建立差分方程

- 记 P 是内点，假设与它相邻的点共有6个，依次记为 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$.
- 分别过边 PA_1, \dots, PA_6 的中点做该边的垂线，他们的交点分别记为 $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, B_i 是 $\triangle PA_i A_{i+1}$ 的外接圆的中心。



Home Page

Title Page



Page 6 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit

在内点建立差分方程

- 记 P 是内点，假设与它相邻的点共有6个，依次记为 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$.
- 分别过边 PA_1, \dots, PA_6 的中点做该边的垂线，他们的交点分别记为 $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, B_i 是 $\triangle PA_i A_{i+1}$ 的外接圆的中心。
- 把多边形 $B_1 B_2 \dots B_6$ 取作(32)中的积分区域 D .由于

$$\int_{B_{i-1}B_i} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{u(A_i) - u(P)}{|PA_i|} |B_{i-1}B_i|, i = 1, 2, \dots, 6$$

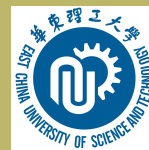
$$\iint_D f dx dy \approx a(P) f(P).$$

其中 $B_0 = B_6$, $a(P)$ 是多边形 $B_1 B_2 \dots B_6$ 的面积

$$a(P) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 |PA_i| |B_{i-1}B_i|,$$

把上面的式子代入式(32)便得到在点 P 的差分方程

$$\frac{1}{a(P)} \sum_{i=1}^6 \frac{|B_{i-1}B_i|}{|PA_i|} (u_p - u_{A_i}) = f(P). \quad (33)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 6 of 9](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

在内点建立差分方程

- 记 P 是内点，假设与它相邻的点共有6个，依次记为 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$.
- 分别过边 PA_1, \dots, PA_6 的中点做该边的垂线，他们的交点分别记为 $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, B_i 是 $\triangle PA_i A_{i+1}$ 的外接圆的中心。
- 把多边形 $B_1 B_2 \dots B_6$ 取作(32)中的积分区域 D .由于

$$\int_{\overline{B_{i-1}B_i}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{u(A_i) - u(P)}{|PA_i|} |B_{i-1}B_i|, i = 1, 2, \dots, 6$$

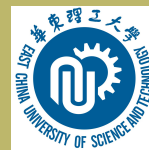
$$\iint_D f dx dy \approx a(P) f(P).$$

其中 $B_0 = B_6$, $a(P)$ 是多边形 $B_1 B_2 \dots B_6$ 的面积

$$a(P) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 |PA_i| |B_{i-1}B_i|,$$

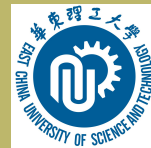
把上面的式子代入式(32)便得到在点 P 的差分方程

$$\frac{1}{a(P)} \sum_{i=1}^6 \frac{|B_{i-1}B_i|}{|PA_i|} (u_p - u_{A_i}) = f(P). \quad (33)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 6 of 9](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

在边界点建立差分方程

- 第一类边界： P 为边界点，则 $u_P = \phi(P)$.



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 9

Go Back

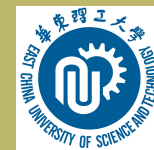
Full Screen

Close

Quit

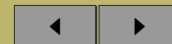
在边界点建立差分方程

- 第一类边界: P 为边界点, 则 $u_P = \phi(P)$.
- 第三类边界:



Home Page

Title Page



Page 7 of 9

Go Back

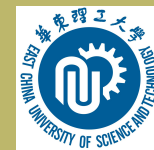
Full Screen

Close

Quit

在边界点建立差分方程

- 第一类边界： P 为边界点，则 $u_P = \phi(P)$.
- 第三类边界：
 - P 为边界点，与它相邻的节点为 A_1, A_2, A_3, A_4 , 其中 A_4, A_1 也是边界点。



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 7 of 9

[Go Back](#)

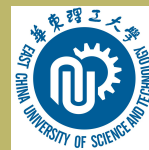
[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

在边界点建立差分方程

- 第一类边界： P 为边界点，则 $u_P = \phi(P)$.
- 第三类边界：
 - P 为边界点，与它相邻的节点为 A_1, A_2, A_3, A_4 , 其中 A_4, A_1 也是边界点。
 - 过边 PA_1, \dots, PA_4 的中点作该边的垂线，它们的交点记为 B_1, B_2, B_3 . 记 PA_1 的中点为 B_0, PA_4 的中点为 B_4 .



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit

在边界点建立差分方程

- 第一类边界: P 为边界点, 则 $u_P = \phi(P)$.
- 第三类边界:
 - P 为边界点, 与它相邻的节点为 A_1, A_2, A_3, A_4 , 其中 A_4, A_1 也是边界点。
 - 过边 PA_1, \dots, PA_4 的中点作该边的垂线, 它们的交点记为 B_1, B_2, B_3 . 记 PA_1 的中点为 B_0, PA_4 的中点为 B_4 .
 - 把多边形 $PB_0B_2B_2B_3B_4$ 取为式(32)中的积分区域 D .

$$\int_{\overline{B_{i-1}B_i}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{u(A_i) - u(P)}{|PA_i|} |B_{i-1}B_i|, i = 1, 2, 3, 4$$

$$\begin{aligned} \int_{\overline{PB_0}} \frac{\partial u}{\partial n} ds &\approx \int_{\overline{PB_0}} (\phi - \sigma u) ds \\ &\approx \frac{|PB_0|}{2} [\phi(P) - \sigma(P)u(P) + \phi(B_0) - \sigma(B_0)u(B_0)] \end{aligned}$$

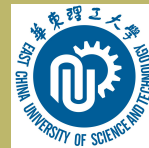
- 但是 B_0 不是节点, 取

$$u(B_0) \approx \frac{1}{2}(u(P) + u(A_1)),$$

• 于是

$$\int_{\overline{PB_0}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{|PA_1|}{4} \left[\phi(P) + \phi(B_0) - \left(\sigma(P) + \frac{\sigma(B_0)}{2} \right) u(P) - \frac{\sigma(B_0)}{2} u(A_1) \right]$$

其中 $\sigma(B_0)$ 和 $\phi(B_0)$ 既可以用离 B_0 最近的边界点的函数值代替，也可以用节点 P 和 A_1 的函数值的平均值代替。



Home Page

Title Page



Page 8 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 于是

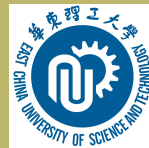
$$\int_{\overline{PB_0}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{|PA_1|}{4} \left[\phi(P) + \phi(B_0) - \left(\sigma(P) + \frac{\sigma(B_0)}{2} \right) u(P) - \frac{\sigma(B_0)}{2} u(A_1) \right]$$

其中 $\sigma(B_0)$ 和 $\phi(B_0)$ 既可以用离 B_0 最近的边界点的函数值代替，也可以用节点 P 和 A_1 的函数值的平均值代替。

- 类似地可得

$$\int_{\overline{PB_4}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{|PA_4|}{4} \left[\phi(P) + \phi(B_4) - \left(\sigma(P) + \frac{\sigma(B_4)}{2} \right) u(P) - \frac{\sigma(B_4)}{2} u(A_4) \right]$$

把上面的式子代入式(32)便得到在边界点 P 的差分方程

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 8 of 9](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 于是

$$\int_{\overline{PB_0}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{|PA_1|}{4} \left[\phi(P) + \phi(B_0) - \left(\sigma(P) + \frac{\sigma(B_0)}{2} \right) u(P) - \frac{\sigma(B_0)}{2} u(A_1) \right]$$

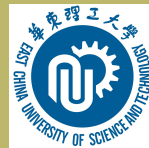
其中 $\sigma(B_0)$ 和 $\phi(B_0)$ 既可以用离 B_0 最近的边界点的函数值代替, 也可以用节点 P 和 A_1 的函数值的平均值代替。

- 类似地可得

$$\int_{\overline{PB_4}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{|PA_4|}{4} \left[\phi(P) + \phi(B_4) - \left(\sigma(P) + \frac{\sigma(B_4)}{2} \right) u(P) - \frac{\sigma(B_4)}{2} u(A_4) \right]$$

把上面的式子代入式(32)便得到在边界点 P 的差分方程

对于特殊的区域, 若采用特殊的三角形, 差分方程将取比较简单的形式:

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 9](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 于是

$$\int_{\overline{PB_0}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{|PA_1|}{4} \left[\phi(P) + \phi(B_0) - \left(\sigma(P) + \frac{\sigma(B_0)}{2} \right) u(P) - \frac{\sigma(B_0)}{2} u(A_1) \right]$$

其中 $\sigma(B_0)$ 和 $\phi(B_0)$ 既可以用离 B_0 最近的边界点的函数值代替，也可以用节点 P 和 A_1 的函数值的平均值代替。

- 类似地可得

$$\int_{\overline{PB_4}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{|PA_4|}{4} \left[\phi(P) + \phi(B_4) - \left(\sigma(P) + \frac{\sigma(B_4)}{2} \right) u(P) - \frac{\sigma(B_4)}{2} u(A_4) \right]$$

把上面的式子代入式(32)便得到在边界点 P 的差分方程

对于特殊的区域，若采用特殊的三角形，差分方程将取比较简单的形式：

- 当 P 点的周围是直角边长分别为 h 和 τ 的直角三角形，差分方程与五点差分格式相同。

- 于是

$$\int_{\overline{PB_0}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{|PA_1|}{4} [\phi(P) + \phi(B_0) - (\sigma(P) + \frac{\sigma(B_0)}{2})u(P) - \frac{\sigma(B_0)}{2}u(A_1)]$$

其中 $\sigma(B_0)$ 和 $\phi(B_0)$ 既可以用离 B_0 最近的边界点的函数值代替, 也可以用节点 P 和 A_1 的函数值的平均值代替。

- 类似地可得

$$\int_{\overline{PB_4}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{|PA_4|}{4} [\phi(P) + \phi(B_4) - (\sigma(P) + \frac{\sigma(B_4)}{2})u(P) - \frac{\sigma(B_4)}{2}u(A_4)]$$

把上面的式子代入式(32)便得到在边界点 P 的差分方程

对于特殊的区域, 若采用特殊的三角形, 差分方程将取比较简单的形式:

- 当 P 点的周围是直角边长分别为 h 和 τ 的直角三角形, 差分方程与五点差分格式相同。
- 当 P 点的周围是边长为 h 的等边三角形, 差分方程为

$$\frac{2}{3h^2}(6u_p - \sum_{i=1}^6 u_{A_i}) = f(P). \quad (34)$$



作业:

2、证明公式(34)

$$\frac{2}{3h^2}(6u_p - \sum_{i=1}^6 u_{A_i}) = f(P). \quad (34)$$

即当 P 的周围是边长为 h 的等边三角形时, 差分方程化为(34)

3、证明: 对矩形网格, 用积分守恒形式(32)导出的差分方程与五点格式(8)相同

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit