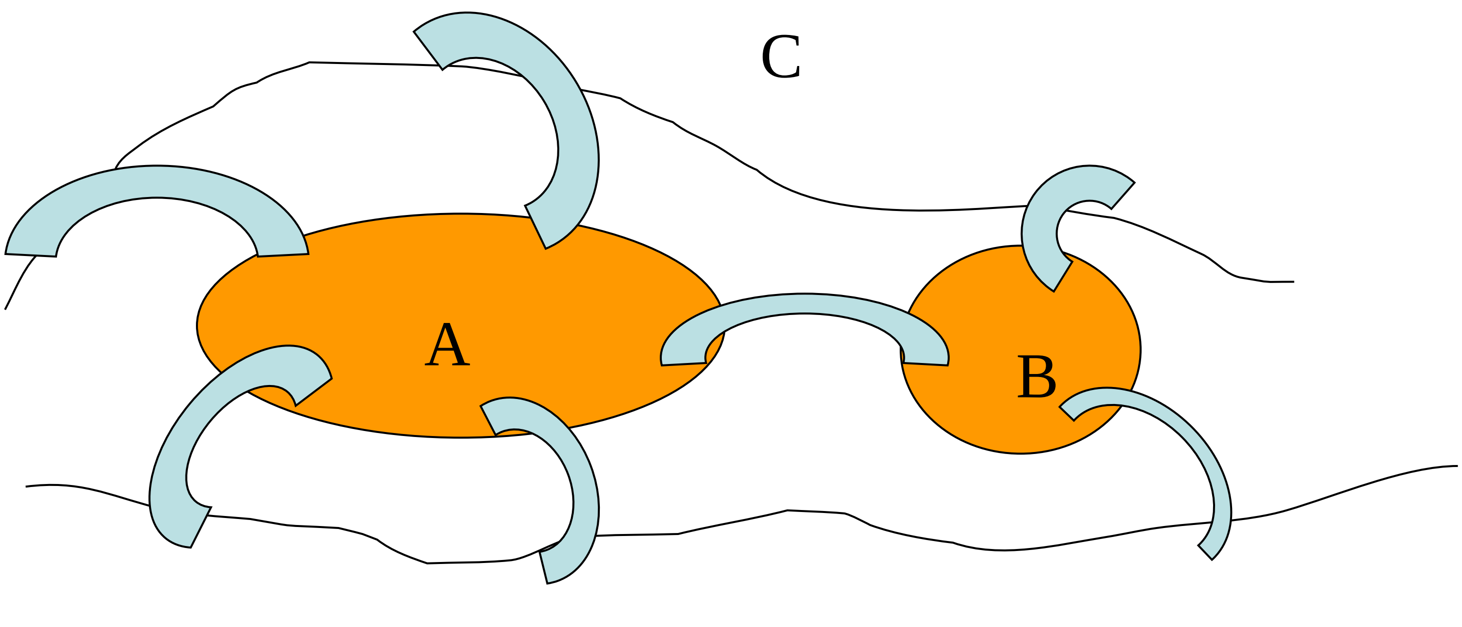
图论简介

主讲人： 窦本年

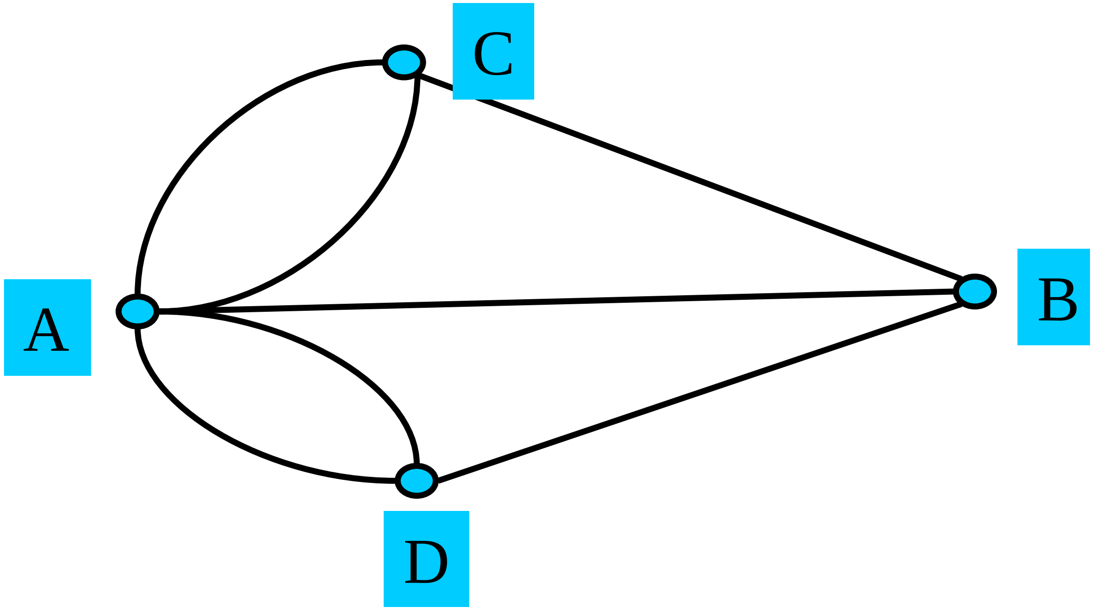
哥尼斯堡七桥问题

能否从任一陆地出发通过每座桥恰好一次而回到出发点？



哥尼斯堡七桥示意图

七桥问题模拟图



欧拉指出：如果每块陆地所连接的桥都是偶数座，则从任一陆地出发，必能通过每座桥恰好一次而回到出发地。

假设平面上的 n 个点，把其中的一些点对用曲线或直线连接起来，不考虑点的位置与连线曲直长短，形成的一个关系结构称为一个图。记 $G=\left(V(G),E(G)\right)$, $V=V(G)$ 是顶点集， $E=E(G)$ 是边集。

如果各条边都加上方向，则称为有向图，否则称为无向图。如果有的边有方向，有的边无方向，则称为混合图。

端点重合为一点的边称为环，若一对顶点有至少两条边相连，这样的边称为重边。

无重边且无环的图称为简单图。

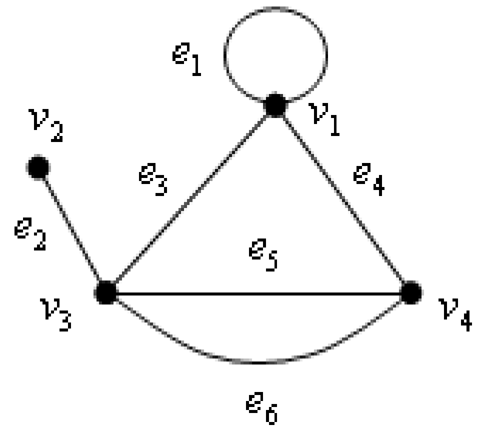
例 图一中的 $G=(V(G),E(G))$,

$V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,

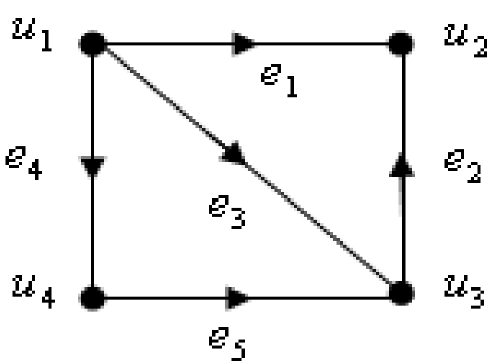
$E(G)=\{e_1,e_2,\ e_3,e_4,e_5,e_6\}$,

$e_1=v_1v_1$, $e_2=v_2v_3$, $e_3=v_1v_3$,

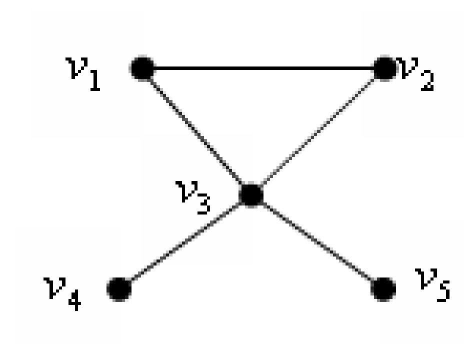
$e_4=v_1v_4$, $e_5=v_3v_4$, $e_6=v_3v_4$.



图一



图二



图三

例 图二是一个有向图，图三是一个简单无向图.

如果图的二顶点间有边相连，则称这两顶点相邻，每一对顶点都相邻的图称为完全图，否则称为非完全图，完全图记为 $K_{|V|}$。

设 $v \in V(G)$，是边 $e \in E(G)$ 的端点，则称 v 与 e 相关联，与顶点 v 关联的边数之和称为该顶点的度数（或次数），记为 $d(v)$。

在有向图中，从顶点 v 引出的边的数目称为出度，记作 $d^{+}(v)$；从顶点 v 引入的边的数目称为入度，记作 $d^{-}(v)$。

次数为奇数的顶点称为奇点，否则称为偶点。

几个基本定理：

1、对图$G=(V，E)$，有$\sum_{v\in V} d(v)=2|E|.$

2、度为奇数的顶点有偶数个。

3、设$G=(V，E)$是有向图，

则$$\sum_{v\in V} d^{+}(v)=\sum_{v\in V} d^{-}(v)=|E|.$$

若将图G的每一条边e都对应一个实数$F(e)$，则称$F(e)$为该边的权，并称图G为赋权图，记为$G=(V, E, F)$.

设 $G=(V,E)$和 $G'=(V',E')$是两个图.

若 $V'\subseteq V, E'\subseteq E$,称$G'$是$G$ 的一个子图,记$G'\subseteq G$.

若 $V'=V, E'\subseteq E$ 则称 G'是G的生成子图.

设$G=(V, E)$是一个图，$v_0, v_1, \dots, v_k \in V$，且“$1\leqslant i\leqslant k$，$v_{i-1}v_i \in E$，则称$v_0 v_1 \dots v_k$是$G$的一条通路(或道路）.

如果通路中没有相同的顶点，则称此通路为路径，简称路. 一条路（道路）所含边的个数称为路（道路）的长度.

始点和终点相同的路称为圈或回路.

顶点u与v称为连通的，如果存在u到v通路，任二顶点都连通的图称为连通图，否则，称为非连通图。

连通而无圈的图称为树，常用 T 表示树.

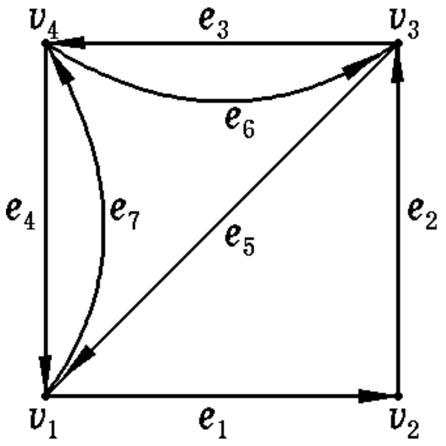
树中最长路的边数称为树的高，度数为1的顶点称为树叶。其余的顶点称为分枝点。树的边称为树枝。

设G是有向图，如果G的底图是树，则称G是有向树，也简称树。

图的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ （n为结点数）

$$a_{ij}=\begin{cases}1, v_i v_j \in E\\ 0, v_i v_j \notin E\end{cases}$$

例：写出右图的邻接矩阵：



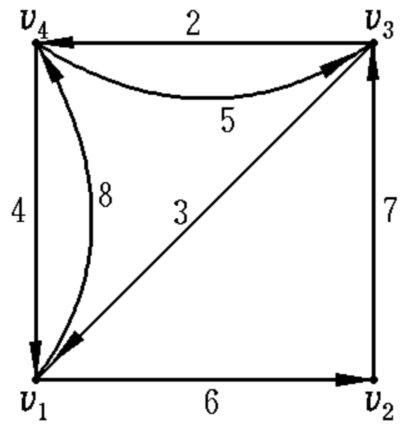
解：

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

图的权矩阵$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ （n为结点数）

$$a_{ij} = \begin{cases} F(v_i v_j), & v_i v_j \in E \\ 0, & i = j \\ \infty, & v_i v_j \notin E \end{cases}$$

例：写出右图的权矩阵：



解：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & \infty & 8 \\ \infty & 0 & 7 & \infty \\ 3 & \infty & 0 & 2 \\ 4 & \infty & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

图的关联矩阵$A=(a_{ij})_{n\times m}$ （n为结点数m为边数）

有向图：

$$a_{ij}=\begin{cases}1,\text{若}v_i\text{是}e_j\text{的始点}\\-1,\text{若}v_i\text{是}e_j\text{的终点}\\0,\text{若}v_i\text{与}e_j\text{不关联}\end{cases}$$

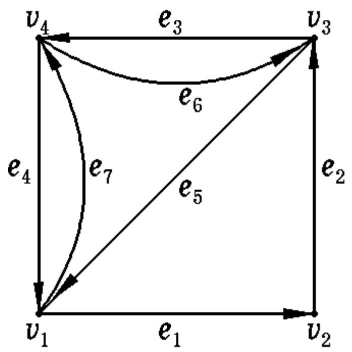
无向图：

$$a_{ij}=\begin{cases}1,\text{若}v_i\text{与}e_j\text{关联}\\0,\text{若}v_i\text{与}e_j\text{不关联}\end{cases}$$

例：分别写出右边两图的关联矩阵

解：分别为：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$



$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$