华东理工大学 2018－2019 学年第二学期

《高等数学（下）11 学分》课程期末考试试卷（A）参考答案

一.（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）：

1、计算 $\int_L \sqrt{x+y}ds$，其中 L 为直线段 $y=\pi x,(0\le x\le 1)$.

解：$\int_L \sqrt{x+y}ds=\int_0^1\sqrt{x+\pi x}\cdot\sqrt{1+\pi^2}dx=\sqrt{1+\pi}\sqrt{1+\pi^2}\int_0^1\sqrt{x}dx$　　3 分

$$=\sqrt{1+\pi}\sqrt{1+\pi^2}\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{1+\pi}\sqrt{1+\pi^2}}{3}.$$　　2 分

2、计算三重积分 $\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}V$，其中 Ω 由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$

与平面 $z=1$ 围成.

解：$\iiint_\Omega z\,dv=\iint_D dxdy\int_{x^2+y^2}^1 zdz=\frac{1}{2}\iint_D[1-(x^2+y^2)^2]dxdy$　　3 分

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(\rho-\rho^5)d\rho=\frac{\pi}{3}$$　　2 分

二.（本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分）：

1、求经过点 $A=(2,-1,2)$，$B=(3,2,1)$ 两点，且与平面 $x-2y+z=1$ 垂直的平面方程.

解法一：设所求平面法向量 $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}=\{1,3,-1\}$，且 $\vec{n}\perp\vec{n}_1=\{1,-2,1\}$

则取 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\vec{n}_1=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&3&-1\\1&-2&1\end{vmatrix}=\{1,-2,-5\}$　　4 分

平面方程 $x-2-2(y+1)-5(z-2)=0$，即 $x-2y-5z+6=0$　　2 分

2、求过点 $P_0=(-1,0,-4)$，且与直线 $L_0:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ 垂直相交的直线 L 的方程.

解法一：设直线 L_0 与 L 交点为 $P=(3t+1,-t-2,t-1)$，

则所求直线的方向向量 $\vec{l}=\overrightarrow{P_0P}=\{3t+2,-t-2,t+3\}$，　　2 分

两直线垂直，则 $\vec{l}\perp\vec{l}_0=\{3,-1,1\}$，即 $\vec{l}\cdot\vec{l}_0=9t+6+t+2+t+3=0$

解得 $t=-1$　进而方向向量 $\vec{l}=\{-1,-1,2\}$　　2 分

故所求直线方程为 $L_0:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+4}{2}$　　2 分

3、求微分方程 $y'=\dfrac{2x\ln x+x-y}{x}$ 的通解.

解:方程变形为 $y'+\dfrac{y}{x}=2\ln x+1$，其通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[C+\int(2\ln x+1)\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right] \qquad 3\text{ 分}$$

$$=\frac{1}{x}\left[C+\int(2\ln x+1)x\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{x}\left[C+x^2\ln x\right] \qquad 3\text{ 分}$$

三、(**本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分**)

1、设函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}\sin\pi x+(y-1)\arctan\sqrt{\dfrac{y}{x}}$，求 $f_x(1,1)$，$f_y(1,1)$.

解:（法一）$f(x,1)=\mathrm{e}^x\sin\pi x$，

则 $f_x(x,1)=\mathrm{e}^x\sin\pi x+\pi\mathrm{e}^x\cos\pi x$， 故 $f_x(1,1)=-\pi\mathrm{e}$ 3 分

$f(1,y)=(y-1)\arctan\sqrt{y}$，

则 $f_y(1,y)=\arctan\sqrt{y}+(y-1)\dfrac{1}{1+y}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$，故 $f_y(1,1)=\dfrac{\pi}{4}$ 3 分

(法二) $$f_x=y\mathrm{e}^{xy}\sin\pi x+\pi\mathrm{e}^{xy}\cos\pi x+(y-1)\frac{1}{1+\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right),$$

故 $f_x(1,1)=-\pi\mathrm{e}$ 3 分

$$f_y=x\mathrm{e}^{xy}\sin\pi x+\arctan\sqrt{\frac{y}{x}}+(y-1)\frac{1}{1+\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\frac{1}{x}$$

故 $f_y(1,1)=\dfrac{\pi}{4}$ 3 分

(法三) $f_x(1,1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x,1)-f(1,1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\mathrm{e}^x\sin\pi x}{x-1}=-\pi\mathrm{e}$ 3 分

$f_y(1,1)=\lim\limits_{y\to1}\dfrac{f(1,y)-f(1,1)}{y-1}=\lim\limits_{y\to1}\dfrac{(y-1)\arctan\sqrt{y}}{y-1}=\dfrac{\pi}{4}$ 3 分

2、求 $A=\sqrt{1-(1.004)^2+(1.994)^2}$ 的近似值.

解：取 $z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2+y^2}, x_0=1, y_0=2, \Delta x=0.004, \Delta y=-0.006.$ 2 分

计算得 $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=-\frac{1}{2}$，$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=1$ 2 分

于是 $A=f(1.004,1.994)\approx f(1,2)-\frac{1}{2}\bullet(0.004)+1\bullet(-0.006)=1.992$ 2 分

3、计算 $\iint\limits_S xyz\,dS$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在第一卦限的部分.

解：$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，

$$z_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad z_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$ 2 分

$$\therefore \iint\limits_s xyzdS=\iint\limits_{Dxy} xy\sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$ 2 分

$$=R\iint\limits_{Dxy} xydxdy=R\int_0^R dy\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} xydx=\frac{1}{8}R^5.$$ 2 分

四、(本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分)

1、计算 $\iint\limits_D x^2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为 $x^2-y^2=1$，$y=0$，$y=1$所围的有界区域.

解: (法一) $\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1+y^2}}x^2y\mathrm{d}x$ 3 分

$$=2\int_0^1 y\frac{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\mathrm{d}y=\frac{2}{15}\left[(1+y^2)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{15}(4\sqrt{2}-1)$$ 3 分

(法二) $\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\left(\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1x^2y\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x^2-1}}^1x^2y\mathrm{d}y\right)$ 3 分

$$=2\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}x^2(2-x^2)\mathrm{d}x\right)=2\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_1^{\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{15}(4\sqrt{2}-1)$$ 3 分

2、计算线积分 $\int\limits_L \cos(x+y^2)dx+[2y\cos(x+y^2)-\frac{1}{\sqrt{1+y^4}}]dy$，其中 L 为摆线

$x=\frac{t-\sin t}{8}, y=\frac{1-\cos t}{8}$ 上由点 $O(0,0)$ 到 $A(\frac{\pi}{4},0)$ 的有向弧.

解:在全平面内，由于 $\frac{\partial P}{\partial y}=-\sin(x+y^2)\cdot 2y=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故原积分与路径无关。 3 分

取线段 OA 代替，则原积分 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x dx=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3 分

3、计算积分 $\iint\limits_{\Sigma} zdxdy$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分的下侧.

解：记 D 为单位圆的第一象限部分，则

$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy=-\iint\limits_{D}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$ 3 分

$=-\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi}{6}$ 3 分

五．选择题（本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）：

1、已知 $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4, |\vec{c}|=5$, 且 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, 则 $|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|$ 的值为（　　）

(A) 36.　　(B) 47.　　(C) 45.　　(D) 27.

答案: (A)

2、方程 $y''-6y'+9y=x^2\mathrm{e}^{3x}$ 的特解形式为（　　）

(A) $Ax^2\mathrm{e}^{3x}$.　　(B) $x^2(Ax^2+Bx+C)\mathrm{e}^{3x}$.

(C) $x(Ax^2+Bx+C)\mathrm{e}^{3x}$.　　(D) $Ax^4\mathrm{e}^{3x}$.

答案：(B)

3、设 $f(x,y)$ 在 $D: x^2+y^2\le r^2$ 上连续, 则 $\lim\limits_{r\to 0^+}\frac{1}{r^2}\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=$, 则（　　）

(A) 0.　　(B) $f(0,0)$.　　(C) $\pi f(0,0)$.　　(D) π.

答案：(C)

4、函数 $u=x^2y+2y+z^2$ 在点 $P=(1,1,1)$ 处沿给定方向 $\{2,1,-1\}$ 的方向导数为（　　）

(A) $\frac{\sqrt{6}}{5}$.　　(B) $\frac{6}{\sqrt{5}}$.　　(C) $\frac{1}{5\sqrt{6}}$.　　(D) $\frac{5}{\sqrt{6}}$.

答案：(D)

六、**(本题共 6 分)**将 $y=x(0\le x<2\pi)$ 展开以 2π 为周期的傅里叶级数.

解： $a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}xdx=2\pi,$　　　2 分

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nxdx=0,\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nxdx=-\dfrac{2}{n},$　　　2 分

所以，$x=\pi-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{2}{n}\sin nx)\quad(0<x<2\pi)$　　　2 分

七、**(本题 8 分)** 求二元函数 $f(x,y)=y^3+4y^2+9y-4xy-6x+x^2$ 的极值.

解: 由 $\begin{cases} f_x=-4y-6+2x=0 \\ f_y=3y^2+8y+9-4x=0 \end{cases}$ 解得驻点 $(1,-1)$ 和 $(5,1)$　　　3 分

$f_{xx}=2$，$f_{xy}=-4$，$f_{yy}=6y+8$　　$H(x,y)=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6y+8 \end{vmatrix}=12y$　　　3 分

(1) 驻点 $(1,-1)$ 处，$H(1,-1)=-12<0$，则 $(1,-1)$ 不是极值点.

(2) 驻点 $(5,1)$ 处，$H(5,1)=12>0$，则 $(5,1)$ 是极值点，又 $f_{xx}(5,1)=2>0$，

因此 $f(5,1)=-11$ 是函数的极小值.　　　2 分

八、**(本题 6 分)**　设 $f(u)$ 是连续函数，D 如图示，即

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|\le 2,\ |y|\le 2,\ x^2+(y-2)^2\ge 1\right\}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D y\left[1+xf(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}\sigma$.

解: 记 $D_1=\left\{(x,y)\middle|x^2+(y-2)^2\le 1,y\le 2\right\}$，区域 $D\cup D_1$ 关于 x 轴对称,

则 $\iint\limits_{D\cup D_1} y\left[1+xf(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}\sigma=0$,　　　2 分

D_1 关于 y 轴对称，$\iint\limits_{D_1} xyf(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=0$,

从而 $\iint\limits_D y\left[1+xf(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}\sigma=0-\iint\limits_{D_1} y\mathrm{d}\sigma$　　　2 分

$=-\int_{-\pi}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^1(2+\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho=\dfrac{2}{3}-\pi$.　　　2 分