# 《微分几何》课程电子课件

教师：刘培海

Tel: 13816926110

Email: pliu@ecust.edu.cn

网址：http://www.escience.cn/people/phliu/wfjh.html

Key：geometry

## 1. 关于曲线$\vec{r}(t)$的一些公式和量

三个基本向量 $\vec{\alpha}(t), \vec{\beta}(t), \vec{\gamma}(t)$

切线、主法线、副法线

密切平面、从切平面、法平面

弧长公式、自然参数表示

曲率$k = \dfrac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}$、挠率$\tau = \dfrac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|^2}$

## 2. 关于曲线$\vec{r}(s)$的一些公式和量(其中$s$为弧长参数)

$$s=\int_a^t |\vec{r}(t)|\,\mathrm{d}t \qquad s\text{为弧长参数} \Leftrightarrow |\dot{\vec{r}}(s)|=1$$

$$\vec{\alpha}(s)=\dot{\vec{r}}(s),\quad \vec{\beta}(s)=\frac{\ddot{\vec{r}}(s)}{|\ddot{\vec{r}}(s)|},\quad \vec{\gamma}(s)=\vec{\alpha}(s)\times\vec{\beta}(s)$$

$$k(s)=|\ddot{\vec{r}}(s)|,\quad \tau(s)=-\dot{\vec{\gamma}}(s)\vec{\beta}(s)=\vec{\gamma}(s)\dot{\vec{\beta}}(s)$$

$$\text{Frenet公式:}\ \begin{cases}\dot{\vec{\alpha}}(s)=k(s)\vec{\beta}(s)\\ \dot{\vec{\beta}}(s)=-k(s)\vec{\alpha}(s)+\tau(s)\vec{\gamma}(s)\\ \dot{\vec{\gamma}}(s)=-\tau(s)\vec{\beta}(s)\end{cases}$$

## 3. 一般螺线

定义:切线和固定方向成固定角

三个等价定义:

主法线与某固定方向垂直

副法线与某固定方向成固定角

曲率与挠率之比为常数

## 4. 曲面的切平面、法向量和法线

切平面：$(\vec{P}-\vec{r}(u,v),\vec{r}_u(u,v),\vec{r}_v(u,v))=0$

法向：$\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)$

单位法向量：$\vec{n}(u,v)=\dfrac{\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)}{\left|\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)\right|}$

法线：$(\vec{P}-\vec{r}(u,v))\times(\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v))=0$

## 5. 曲面$\vec{r}(u,v)$的第一、二、三类基本量和基本形式

$$E=\vec{r}_u^{\,2}、F=\vec{r}_u\vec{r}_v、G=\vec{r}_v^{\,2}、\mathrm{d}s^2=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2$$

$$L=\vec{r}_{uu}\vec{n}=\frac{(\vec{r}_{uu},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=-\vec{r}_u\vec{n}_u$$

$$M=\vec{r}_{uv}\vec{n}=\frac{(\vec{r}_{uv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=-\vec{r}_u\vec{n}_v=-\vec{r}_v\vec{n}_u$$

$$N=\vec{r}_{vv}\vec{n}=\frac{(\vec{r}_{vv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=-\vec{r}_v\vec{n}_v$$

$$\mathrm{II}=L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2=-\mathrm{d}\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$e、f、g、\mathrm{III}、\mathrm{III}-2H\,\mathrm{II}+K\,\mathrm{I}=0$$

## 6. 由$E$、$F$、$G$引出的计算

曲面曲线的弧长

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t$$

曲面上两方向的交角

$$\arccos\frac{E\mathrm{d}u\delta u+F(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}}$$

曲面区域的面积$\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$

等距变换$(\mathrm{I}_1=\mathrm{I}_2)$和保角变换$(\mathrm{I}_1=\lambda\mathrm{I}_2)$

## 7. 由$E$、$F$、$G$、$L$、$M$、$N$引出的计算

法曲率$k_n = \dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$

Dupin指标线 $Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = \pm 1$

椭圆点($LN - M^2 > 0$)、双曲点($< 0$)、抛物点

渐近方向、渐近曲线 $\mathrm{II} = 0$

共轭方向、共轭曲线网

$$L\mathrm{d}u\delta u + M(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + N\mathrm{d}v\delta v = 0$$

## 7. 由$E$、$F$、$G$、$L$、$M$、$N$引出的计算(续)

主方向判别定理: (d)是主方向 $\Leftrightarrow \mathrm{d}\vec{n} = \lambda \mathrm{d}\vec{r}$;

主曲率、平均曲率$H$、Gauss曲率$K$

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)},\quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

Euler公式: $k_n = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$

# 8. 直纹面和可展曲面

直纹面：　$\vec{r}(u,v)=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$，其中$|\vec{b}(u)|=1$

直纹面的腰曲线：　$\vec{r}(u)=\vec{a}(u)-\dfrac{\vec{a}'(u)\vec{b}'(u)}{[\vec{b}'(u)]^2}\vec{b}(u)$

可展曲面：　直纹面$+(\vec{a}'(u),\ \vec{b}(u),\ \vec{b}'(u))=0$

曲面为可展曲面$\Leftrightarrow$　Gauss曲率恒为零

可以展开为平面

为柱面、锥面、或切线曲面

单参数曲面族$F(x,y,z,\alpha)=0$的包络：

$$F(x,y,z,\alpha)=0$$

$$F_\alpha(x,y,z,\alpha)=0$$

## 9. 测地曲率

$$k_g = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{\varepsilon} = k\vec{\beta} \cdot \vec{\varepsilon}$$

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2.$$

Liouville(刘维尔)公式:

$$k_g = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u}\sin\theta$$

## 10. 测地线

曲面上测地曲率为零的曲线

**P149命题3.**

曲面上非直线的曲线是测地线的充要条件是除了曲率为零的点外，曲线的主法线重合于曲面的法线.

**P155定理**

若给出曲面上充分小邻域内的两点$P$和$Q$，则过$P,Q$两点在小邻域内的测地线段是连接$P,Q$两点的曲面上的曲线中弧长最短的曲线.

**P239命题3.** 测地线是它的切线沿它自身平行的曲线,即测地线是自平行曲线.

## 11. Gauss-Bonnet(高斯-波涅)公式

$$\iint\limits_{G} K\mathrm{d}\sigma + \oint\limits_{\partial G} k_g \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{l}(\pi - \alpha_i) = 2\pi$$

$\int_M K\mathrm{d}A = 4\pi$, 其中$M$为闭曲面.

## 12. 曲面上向量的平行移动

Levi-Civita意义下的平行移动的概念

P237命题1. 沿曲面上一条曲线平行移动时,保持向量的内积不变.

P238推论. 沿曲面上一条曲线平行移动时,保持向量的长度不变,也保持两方向的夹角不变.

# 13. 外乘的计算

**P186-P187外乘的定义**

**P187命题1**

**P188命题2**

**P191命题3(Cartan引理)**

## 14. 外微分的计算

**P193-P194外微分的定义**

**P195定理(Stokes公式)**

**P197命题4(Poincaré(庞加莱)引理)**

**P198命题5**

## 15. 活动标架与活动标架法

空间合同变换群的定义

活动标架的定义

活动标架的无穷小位移与相对分量P219

活动标架的结构方程P223

活动标架的基本定理P225

空间曲线、空间曲面活动标架的建立

## 16. 用相对分量表示曲面的一些量和性质

$$\vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{E}}r_1,\vec{e}_2=\frac{1}{\sqrt{G}}r_2,\vec{e}_3=\vec{n}$$

$\mathrm{d}\vec{r}=\omega^1\vec{e}_1+\omega^2\vec{e}_2$,其中$\omega^1=\sqrt{E}\mathrm{d}u^1,\omega^2=\sqrt{G}\mathrm{d}u^2$.

第一基本形式 $\mathrm{I}=\mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2$.

面积元素 $\mathrm{d}A=\omega^1\wedge\omega^2$.

$$\omega_1^2=\left(\frac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2}\right)\omega^1+\left(\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1\wedge\omega^2}\right)\omega^2 \quad \text{(P224)}$$

第二基本形式 $\mathrm{II} = -\,\mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{e}_3 = \omega^1\cdot\omega_1^3 + \omega^2\cdot\omega_2^3$.

$$\mathrm{II} = a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\cdot\omega^2 + c(\omega^2)^2,$$

其中 $a = \dfrac{L}{E},\ \ b = \dfrac{M}{\sqrt{EG}},\ \ c = \dfrac{N}{G}$.

平均曲率 $H = \dfrac{k_1 + k_2}{2} = \dfrac{a + c}{2}$.

Gauss曲率 $K = k_1 k_2 = ac - b^2 = \dfrac{-\,\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}$

测地曲率 $k_g = k\vec{\beta}\cdot\vec{\varepsilon} = \dfrac{\mathrm{d}\theta + \omega_1^2}{\mathrm{d}s}$.

法曲率 $k_n = k\vec{\beta}\cdot\vec{e}_3 = \dfrac{\omega_1^3\cos\theta + \omega_2^3\sin\theta}{\mathrm{d}s}$.

$$\tau_g \triangleq -\vec{\varepsilon}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{e}_3}{\mathrm{d}s} = \tau + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}.$$

$\tau_g = \dfrac{\mathrm{III}}{\mathrm{I}}$，其中$\mathrm{III} = \omega^2\cdot\omega_3^1 - \omega^1\cdot\omega_3^2$

(Cartan称III为曲面的第三基本形式)

曲面上曲率线网的方程为 $\mathrm{III} = \omega^2\cdot\omega_3^1 - \omega^1\cdot\omega_3^2 = 0$.

## 重要概念与命题 第一章

1、向量函数$\vec{r}(t)$具有固定长度的充要条件是对于每一个$t$都有$\vec{r}(t)$与$\vec{r}'(t)$。

2、单位向量函数$\vec{r}(t)$关于$t$的旋转速度等于其微商的模。

3、向量函数$\vec{r}(t)$具有固定方向的充要条件是$\vec{r}(t)\times\vec{r}'(t)=0$。

4、向量函数$\vec{r}(t)$平行于固定平面的充要条件是$(\vec{r}(t),\vec{r}'(t),\vec{r}''(t))=0$。

5、 光滑曲线、$C^k$类曲线、正常点、正则曲线的概念。

6、曲率、挠率的定义与几何意义。

7、曲率恒等于0的曲线是直线，挠率恒等于0的曲线是平面曲线。反之亦然。

8、曲线穿过法平面和密切平面，但从不穿过从切平面。

9、一般螺线的定义与性质。

10、如果曲线的所有切线都经过一个定点，则此曲线为直线。

11、如果曲线的所有密切平面都经过一个定点，则此曲线是平面曲线。

12、曲率为常数的空间曲线的曲率中心的轨迹仍是曲率为常数的曲线。

13、$\vec{r}=\vec{r}(s)$为一般螺线的充要条件是$(\ddot{\vec{r}},\dddot{\vec{r}},\ddddot{\vec{r}})=0$。

14、球面曲线的法平面通过球心。

15、曲面上有直线，则它一定是渐近曲线。

# 重要概念与命题第二章

1、柱面、球面旋转曲面的定义与方程。

2、正常点、k阶正则曲面、正规坐标网的定义。

3、等距变换、保角变换的定义与性质。

4、梅尼埃定理($P$90)。

5、迪潘指标线的分类。

6、曲纹坐标网、正交轨线、渐近曲线、共轭网、曲率线网。

7、曲线曲率、主曲率、法曲率、测地曲率之间的关系。

8、渐近方向、共轭方向、主方向的定义与方程。

9、曲纹坐标网为渐近网的充要条件是L=N=0。

10、曲纹坐标网为曲率线线网的充要条件是F=M=0。

11、脐点、圆点、平点定义。

12、罗德里格斯定理(d)为主方向的充要条件是
$\mathrm{d}\vec{n}=-k_n\mathrm{d}\vec{r}$。

13、曲面上一点(非脐点)的主曲率是曲面在这点所有方向中的法曲率的最大值和最小值。

7、曲线曲率、主曲率、法曲率、测地曲率之间的关系。

8、渐近方向、共轭方向、主方向的定义与方程。

9、曲纹坐标网为渐近网的充要条件是L=N=0。

10、曲纹坐标网为曲率线线网的充要条件是F=M=0。

11、脐点、圆点、平点定义。

12、罗德里格斯定理(d)为主方向的充要条件是

$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{n}}=-\boldsymbol{k}_n\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}$。

13、曲面上一点(非脐点)的主曲率是曲面在这点所有方向中的法曲率的最大值和最小值。

14、可展曲面的定义与性质。

15、高斯曲率是内蕴量。

16、曲面上 曲线(C)在P点的测地曲率的绝对值等于(C)在P点的切平面上的正投影曲线的曲率。

17、如果曲面上存在直线，则此直线一定是测地线。

18、曲面上非直线的曲线是测地线的充要条件是除了曲率为零的点以外，曲线的主法线与曲面的法线重合。

19、过曲面上一点和一切方向可以唯一确定一条测地线。

20、旋转面的经线是旋转面的测地线。

21、给出曲面上充分小邻域内两点P、Q，则

(1)过P、Q存在唯一一条测地线

(2)过P、Q两点在小邻域内的测地线段是连接P、Q两点的曲面上的曲线中弧长对端的曲线。

22、曲面上 的切向量沿曲线(C)平行移动时，这些向量的长度以及夹角保持不变。

23、曲线(C)为测地线的充要条件是它的切向量在列维-奇维塔平行移动的意义下沿(C)是相互平行的。

**20、平面上的测地线为直线，圆柱面上的测地线为圆柱螺线。**

# 作业题

**P12: 3, 5, 6**

**P28: 2, 8, 10, 11**

**P55: 2, 3, 4, 5, 6, 7(2), 9, 10, 12, 19, 20**

**P68: 4**

**2.1.1.** 证明：一个正则参数曲面是球面的一部分的充分必要条件是它的所有法线都经过一个固定点.

**P81：2，7，11**

2.2.1.已知曲面的第一基本形式为

$\mathrm{I} = \cos^2 u\,\mathrm{d}u^2 + \sin^2 v\,\mathrm{d}v^2$，它上面的三条曲线

$u+v=0, u-v=0$和$v=1$围成一个曲边三角形,求

(1)该曲边三角形所围曲面域的面积;

(2)该曲边三角形的三个内角;

(3)该曲边三角形的三条曲边的长度.

2.2.2.改写曲面$\vec{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, u+v)$的参数方程,使得它的曲纹坐标网成为正交网.

2.2.3.请设计一个球面与圆柱面之间的保角变换.

**P114: 3, 4, 5, 10, 13, 18, 24**

**2.3.1.** 求曲面 $\vec{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, \sin 2v)$ 的第一类基本形式和第二类基本形式.

**2.3.2.** 求 $C^3$ 类曲线 $\vec{r}(u)$ 的切线面 $\vec{R}(u,v)=\vec{r}(u)+v\vec{r}'(u)$ 上的曲线 $u+v=c$ ($c$ 为常数)的法曲率.

**2.3.3.** 求曲面 $\vec{r}(u,v)=(u,v,u^2+v^3)$ 上的抛物点、椭圆点和双曲点的集合.

**2.3.4.** 求曲面 $z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ 上的渐近曲线.

**2.3.5.** 求曲面$xyz=1$上的脐点.

**2.3.6.** 求双曲抛物面$xy=2z$的两个主曲率之比.

**2.3.7.** 求螺旋面$\vec{r}=(u\cos v, u\sin v, u+v)$的Gauss曲率$K$、平均曲率$H$和主曲率$k_1, k_2$.

**2.3.8.** 证明：如果曲面$S$上的渐近曲线网的夹角是常数,则曲面$S$的Gauss曲率$K$和平均曲率$H$的平方成比例.

**P131: 4**

**2.4.1.** 判断下列曲面是不是可展曲面,并给出理由.

(1) $\vec{r}(u,v)=(u+v,u-v,2uv)$;

(2) $xy=(z-1)^2$.

**2.4.2.** 求单参数曲面族 $x^2+(y-\alpha)^2+(z-2\alpha)^2=1$ 的包络.

**2.4.3.** 求双曲抛物面 $z=xy$ 沿着它与柱面 $x^2=y$ 的交线的切平面构成的单参数平面族的包络.

**P145: 7, 10**

**P170: 3, 4, 5, 10, 11, 12, 16, 17, 18**

P214: 1, 2, 3

3.1.1. 设$\varphi = yz\mathrm{d}x + \mathrm{d}z, \xi = \sin z\mathrm{d}x + \cos z\mathrm{d}y$,
$\eta = \mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$, 计算
(1) $\varphi \wedge \xi, \xi \wedge \eta, \eta \wedge \varphi$;  (2) $\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}\xi, \mathrm{d}\eta$.

3.1.2. 设$f$和$g$是两个光滑函数, d为外微分算子, 计算
(1) $\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f)$;  (2) $\mathrm{d}[(f - g)(\mathrm{d}f + \mathrm{d}g)]$;
(3) $\mathrm{d}[(f\mathrm{d}g) \wedge (g\mathrm{d}f)]$;  (4) $\mathrm{d}(g\mathrm{d}f) + \mathrm{d}(f\,\mathrm{d}g)$.

P242: 1, 2, 3, 4

# 答疑安排和考试安排

- 答疑时间：7月6日周三 09:15~11:15
- 答疑地点：A教二楼教师休息室

- 考试时间：7月6日周三 14:00~16:00
- 考试地点：A教104