第九章　静电场中的导体和电介质

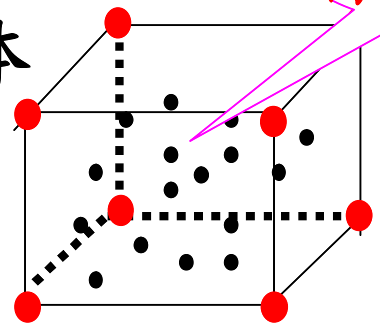
雷 击 草 地

静电屏蔽

雷　电

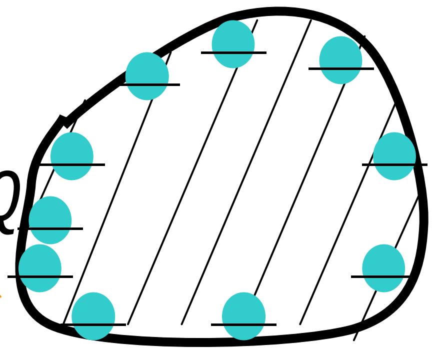
一、静电场中的导体

导电性物质的分类：导体 、 半导体、
绝缘体、 超导体



金属导电模型

构成导体框架，形状、大小的是那些基本不动的带正电荷的原子实，而自由电子充满整个导体属公有化。导体呈电中性。



当有外电场或给导体充电，在场与导体的相互作用的过程中，自由电子的重新分布起决定性作用。

二、导体达到静电平衡的条件和性质

1.静电感应与静电平衡

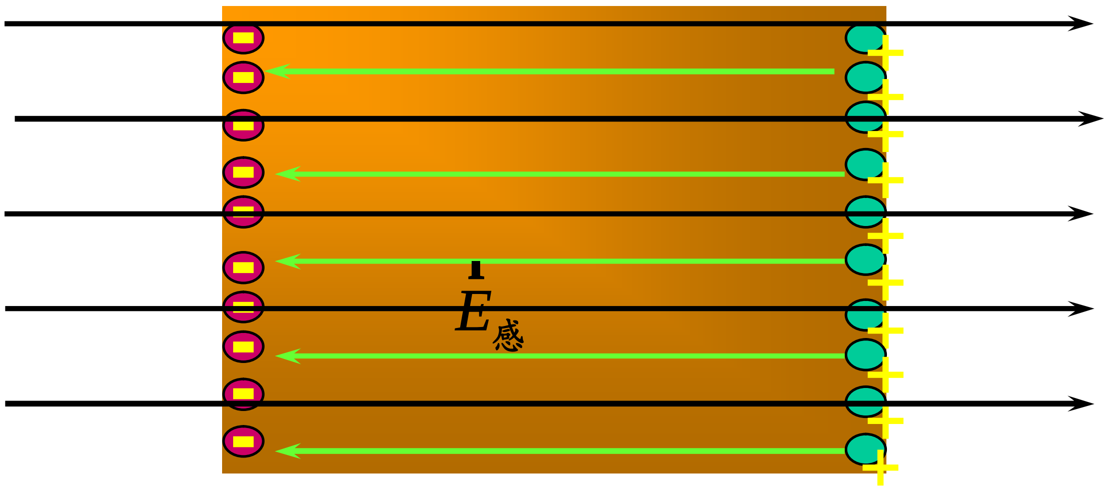
静电感应——在静电场力作用下，导体中电荷重新分布的现象。

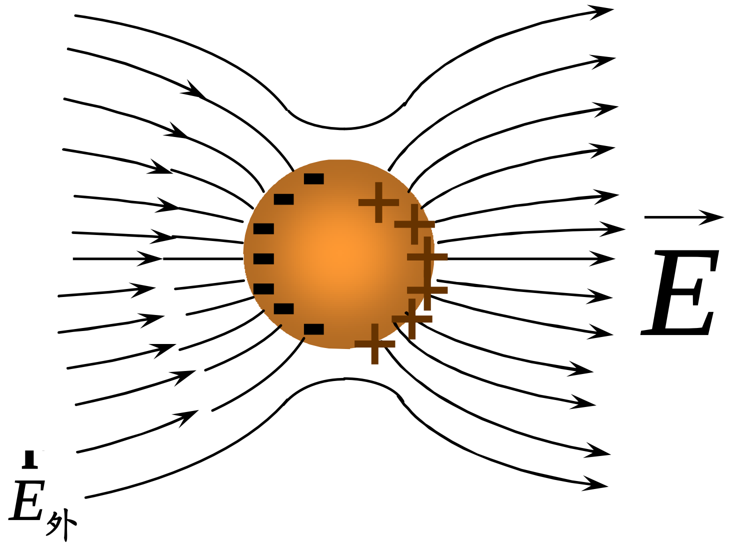
静电平衡——导体中电荷的宏观定向运动终止，电荷分布不随时间改变。

2.静电平衡条件:

用场强来描写:

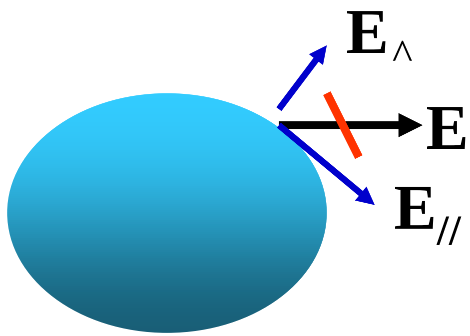
1）导体内部场强处处为零;





$$\vec{E}_{内}=\vec{E}_{外}+\vec{E}_{感}=0$$

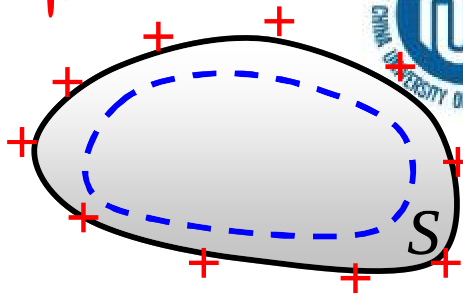
2）表面场强垂直于导体表面。



3.静电平衡时带电导体上的电荷分布

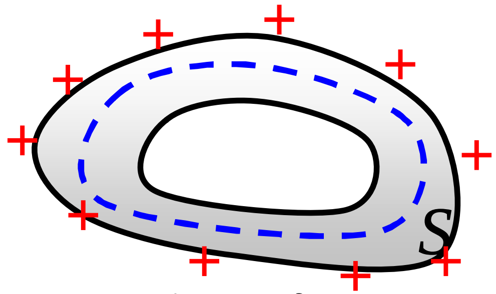
1）实心导体

由 $\oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$ $\because \vec{E}_{内}=0 \quad \therefore \sum q_i = 0$



结论 导体内部无电荷

2） 导体空腔内无电荷

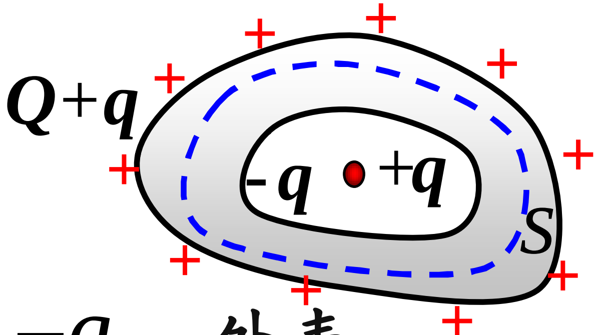


导体空腔

结论 电荷分布在外表面上

3)导体空腔内有电荷

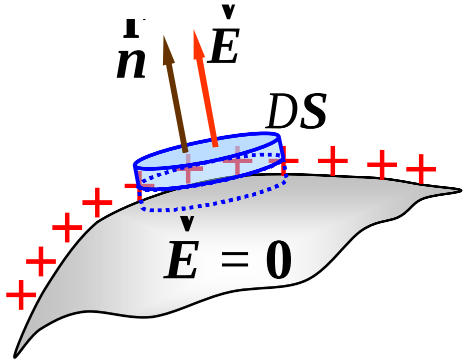
$\because \vec{E}_{内}=0, \ \sum q_i = 0 \Rightarrow q_{内} = -q$



结论:当空腔内有 +q 时,内表面感应 −q ，外表面感应+q ,内表面感应电荷的分布q的位置决定；外表面感应电荷由曲率半径决定。

4. 表面各处σ与该处表面附近E的关系

$$\iint\limits_{上底} E\cos\theta\, dS + \iint\limits_{下底} E\cos\theta\, dS + \iint\limits_{侧面} E\cos\theta\, dS$$

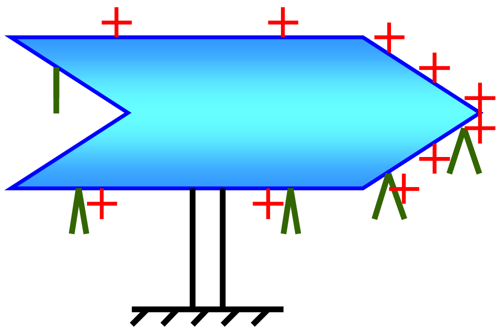


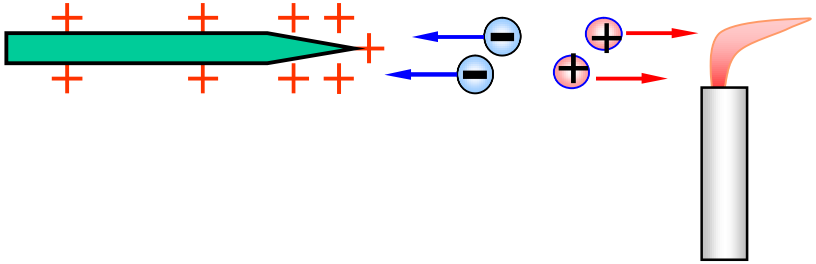
$$= E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \propto \sigma$$

5. σ 与导体表面曲率有关

曲率大(曲率半径小)处 → σ大(E大)

曲率小(曲率半径大)处 → σ小(E小)

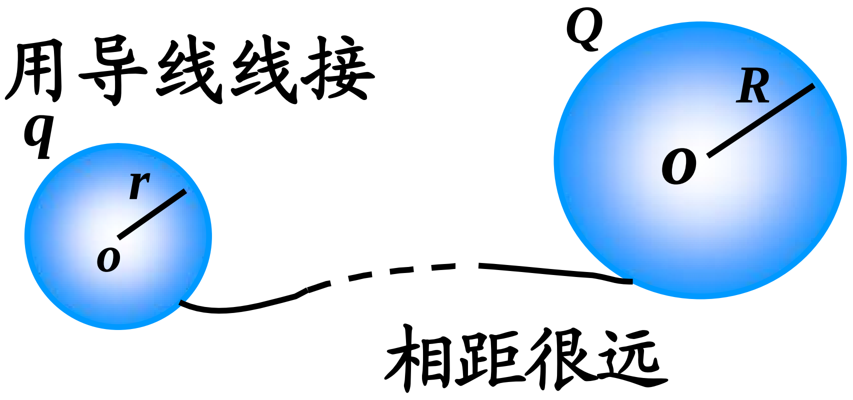




“电风” 吹焰

例1.孤立导体处于静电平衡时，各处的面电荷密度与各处表面的曲率半径成反比.

证明：设相距很远的导体球，用导线线接



则电势相等

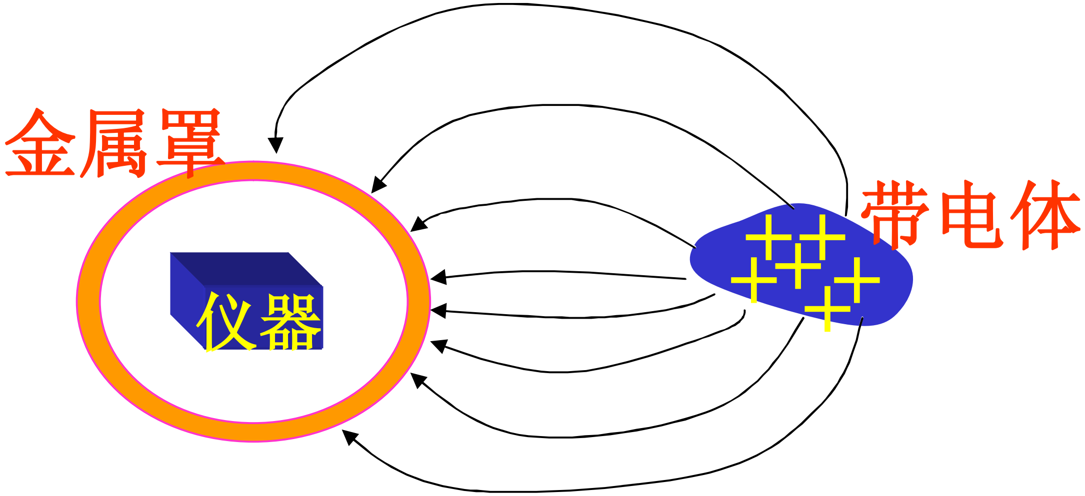
$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

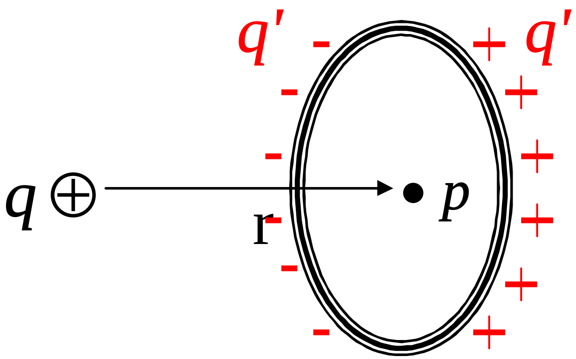
$$\frac{\sigma_{大}4\pi\varepsilon_0 R^2}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\sigma_{小}4\pi\varepsilon_0 r^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\Rightarrow\frac{\sigma_{大}}{\sigma_{小}}=\frac{r}{R}$$

6、静电屏蔽(*electrostatic shielding*)

1） 空腔导体内物体不受外电场的影响，

空腔导体屏蔽外电场



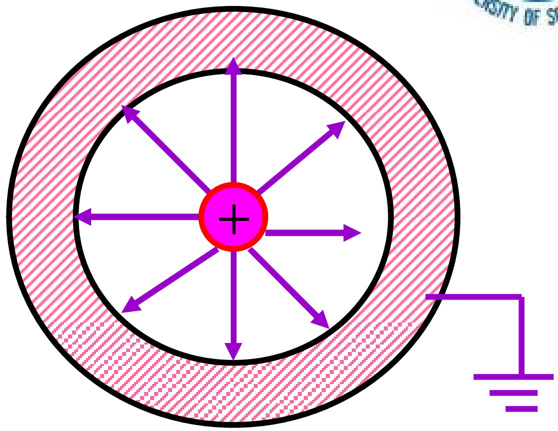


$$\vec{E}_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}_{内} = \vec{E}_q^{内} + \vec{E}_{q'}^{内} = 0$$

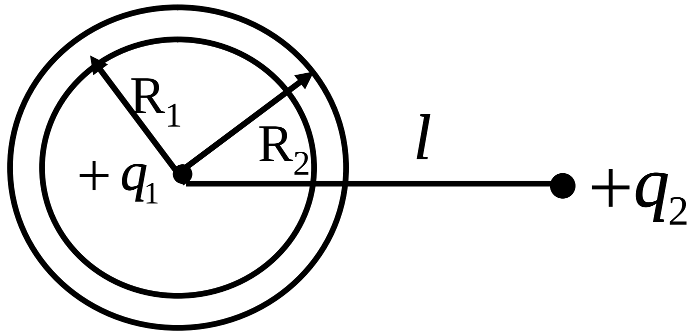
$$(即：\vec{E}_q^{内} = -\vec{E}_{q'}^{内})$$

2）接地的空腔导体内的带电体，不影响外界电场

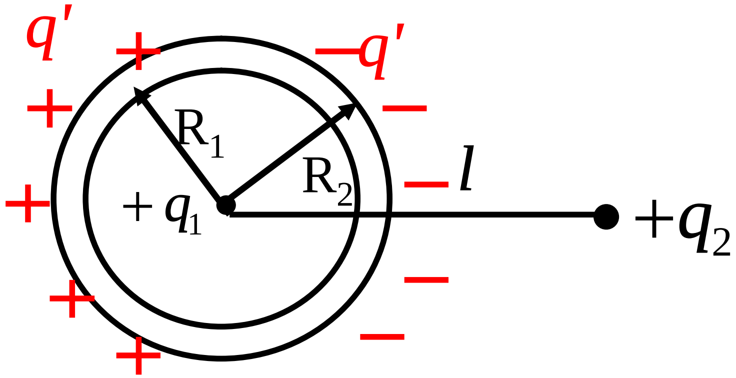


例2:

在不带电的内外半径为R_1和R_2的球形半导体腔体内，球心处放电荷q_1，球外放电荷q_2，则$\mathbf{q_1}$所受的电场力 $\vec{F}_{q_1}$？导体空腔上的感应电荷对$\mathbf{q_1}$的作用力 $\vec{F}_{感q_1}$ ？



例2:



解: (1) $\vec{F}_{q_1} = \vec{F}_{q_2 q_1} + \vec{F}_{感 q_1} = q_1(\vec{E}_{q_2} + \vec{E}_{感}) = 0$

(2). $F_{q_2 q_1} = -F_{感 q_1}$

$$F_{q_2 q_1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$ 指向左;

$$F_{感 q_1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$ 指向右

二、有导体存在时静电场的分析与计算

静电场的基本规律
电荷守恒
导体静电平衡条件

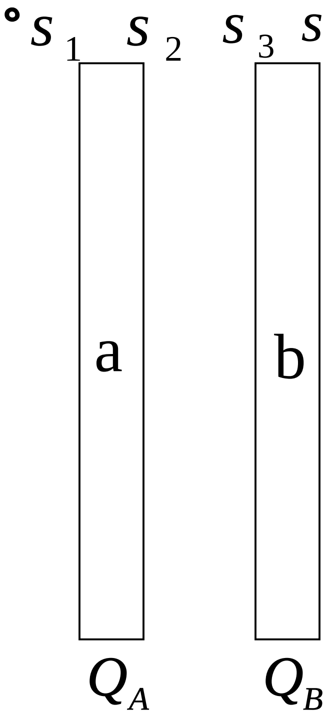
$\left.\begin{array}{l}\text{静电场的基本规律}\\ \text{电荷守恒}\\ \text{导体静电平衡条件}\end{array}\right\}$ 分析与计算电荷和电场的分布

例3

如图所示，二平行等大导体板A、B面积均为S，板间距为d，S >> d,二板分别带电量Q_A、Q_B，板外无带电体。

求：每板表面电荷密度。

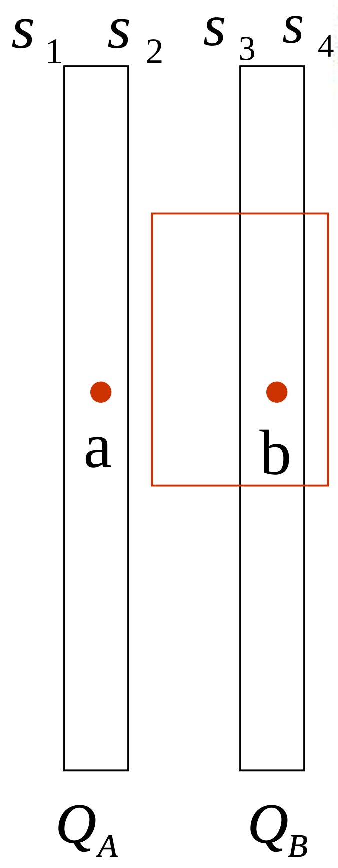
解：由对称性可知，二 板四个面上电荷都是均匀分布，分别设 为s_1、s_2、s_3、s_4。



在二板内任取两点a、b，由静电平衡条件及场强叠加原理可得:

$$E_a = \frac{s_1}{2e_0} - \frac{s_2}{2e_0} - \frac{s_3}{2e_0} - \frac{s_4}{2e_0} = 0$$

$$E_b = \frac{s_1}{2e_0} + \frac{s_2}{2e_0} + \frac{s_3}{2e_0} - \frac{s_4}{2e_0} = 0$$



$$\left.\begin{aligned} \therefore s_1 - s_2 - s_3 - s_4 &= 0 \\ s_1 + s_2 + s_3 - s_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} s_1 &= s_4 \qquad (1) \\ s_2 &= -s_3 \qquad (2) \end{aligned}$$

另解：运用高斯定理

$$\left.\begin{aligned} \Phi_e &= \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \Phi_e &= s_2 + s_3 \end{aligned}\right\} s_2 = -s_3$$

又： $$s_1 + s_2 = \frac{Q_A}{S} \qquad (3)$$

$$s_3 + s_4 = \frac{Q_B}{S} \qquad (4)$$

（1）
（2）
（3）
（4）

$$s_1 = s_4 = \frac{Q_A + Q_B}{2S} \quad （5）$$

$$s_2 = |s_3| = \frac{Q_A - Q_B}{2S} \quad （6）$$

讨论:

1) 若$Q_A = -Q_B$，则 $s_1 = s_4 = 0$; $\quad s_2 = |s_3| = \dfrac{Q_A}{S}$

2) 若$Q_A = Q_B$，则 $s_1 = s_4 = \dfrac{Q_A}{S}$; $\quad s_2 = |s_3| = 0$

3）四个面上都有电荷分布，

其量值由（5）（6）式确定 。

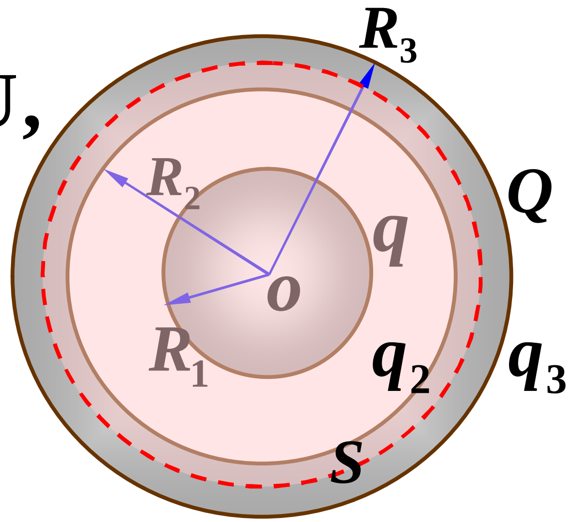
例4.已知导体球,半径R_1,带电q,一导体球壳与球同心,
内外半径分别为R_2和R_3,带电Q,

求:(1)$\vec{E}$和U的分布,

(2) 球和球壳的电势U_1和U_2及电势差DU,

(3) 球壳接地,U_1和U_2及DU,

(4) 用导线相连,U_1和U_2及DU,



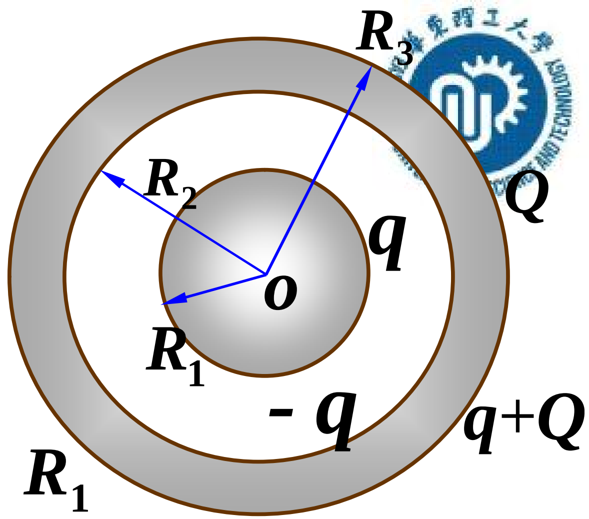
设球壳内表面q_2,外表面q_3

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q+q_2}{e_0}$$

$$Q \quad q+q_2=o, \quad \backslash \quad q_2=-q$$

由电荷守恒 $Q=q_2+q_3=-q+q_3$

$$\backslash \quad q_3=Q+q$$



(1)

$$E=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2\\[2ex] \dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R_3\end{cases}$$

$$U=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} & r < R_1\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} & R_1 < r < R_2\\[2ex] \cancel{\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}-\cancel{\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}+\dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} & R_2 < r < R_3\\[2ex] \dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r > R_3\end{cases}$$

(2) $U_{球}=$ $U_{壳}=$

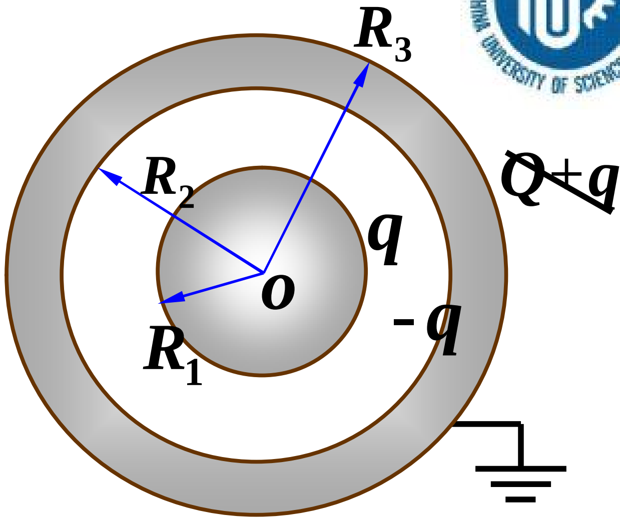
$$\Delta U=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

(3) 球壳接地 设球壳外表面q_3

$$U_2 = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = O \qquad \therefore \quad q_3 = o$$

$$U_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$\Delta U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

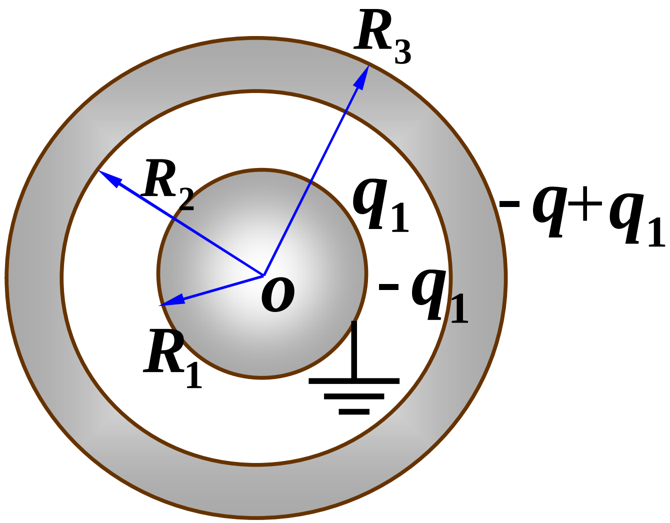


撤去球壳地线，内球接地

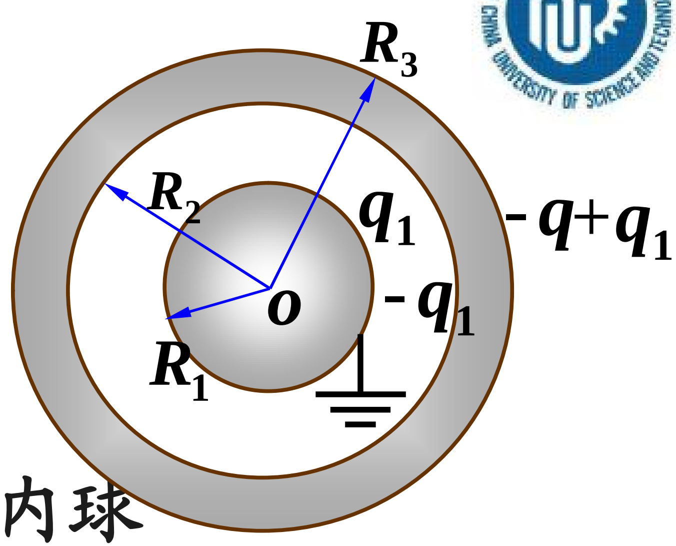
设内球带电q_1

则球壳内表面带电 $-q_1$

外表面带电$q_1 - q$



$$U_1 = \frac{q_1}{4pe_0 R_1} - \frac{q_1}{4pe_0 R_2} + \frac{q_1 - q}{4pe_0 R_3} = O$$

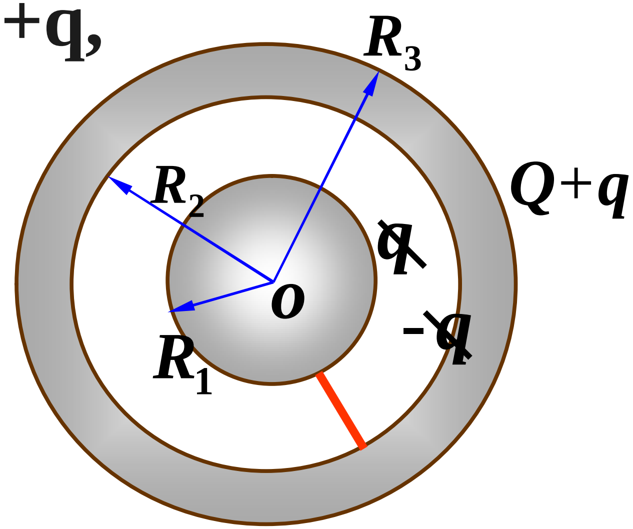


$$q_1 = \frac{R_1 R_2}{R_2 R_3 - R_1 R_3 + R_1 R_2} q$$

(4) 接着第(2)小题,内外球相连，设内球电荷为q，内外感应电荷分别为-q和+q,由内外的电势相等可知

$$U_1 = U_2 = \frac{q+Q}{4pe_0 R_3}$$

$$DU = O$$



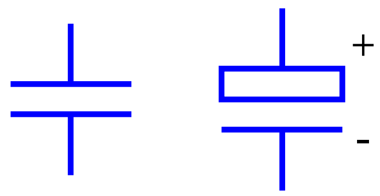
两球间$\check{E} = O$,球壳外$\check{E}$的分布不变。

接地 ® 电势为零

导线相连 ® 电势相同

9-2　电容和电容器

一、　孤立导体的电容



$U \propto q$

$C = \dfrac{q}{U}$　与q、U无关,取决于导体的形状、大 小等

单位：　1法拉 = 1库仑 × 伏特$^{-1}$

将地球看作孤立导体

$U = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$, $C = \dfrac{q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 R = 7.1 \times 10^{-4}$法拉

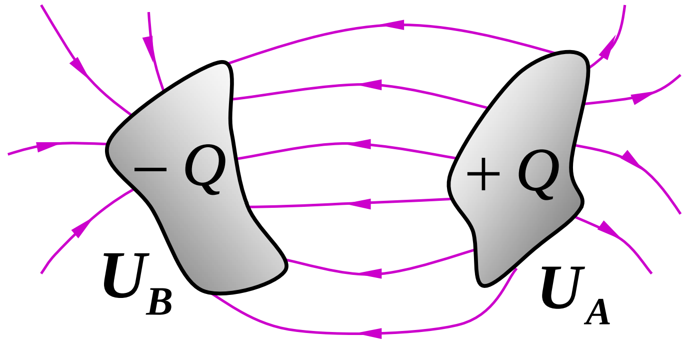
若$C = 1$法拉, $R = 9 \times 10^{9}$米

1法拉 = 10^{6}微法拉 = 10^{12}皮法拉

(F)　　　(μF)　　　(PF)

二、电容器的电容

$$C = \frac{q}{U_A - U_B}$$

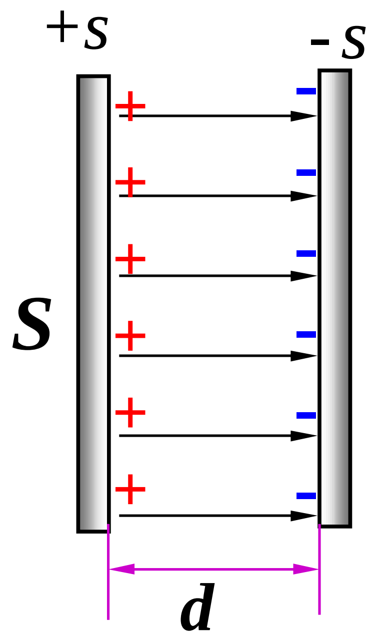


电容器电容的计算

假定极板带电 (1) 求$\vec{E}$ (2) 求ΔU (3) $C = \frac{q}{\Delta U}$

1. 平行板电容器

$d <<$ 板面线度或 $d^2 << S$



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

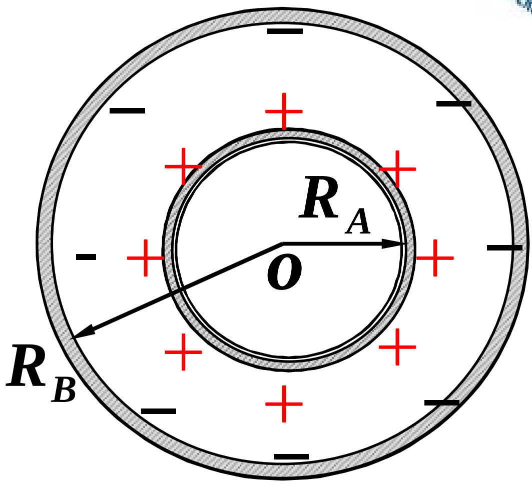
$$\Delta U = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{q}{S}\frac{d}{\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{q}{\Delta U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$ 与几何形状有关,与是否带电无关。

2. 球形电容器

设内外球带电分别为 $+q, -q$,

两球间 $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$



$$U_A - U_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_A}^{R_B} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

$$C = \frac{q}{U_A - U_B} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_A R_B}{R_B - R_A}$$

特别是当 $R_2 \to \infty$ $\quad C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$

3. 圆柱形电容器

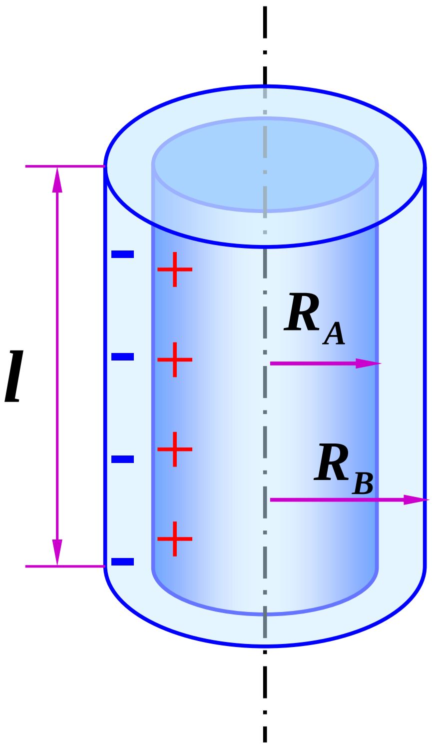
设内外筒分别带电为 $+q,-q$，则 $\lambda=\dfrac{q}{l}$

两柱面间 $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

$$U_A-U_B=\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{R_A}^{R_B}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_B}{R_A}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

$$C=\frac{q}{U_A-U_B}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{R_B}{R_A}}$$



$l \gg R_B-R_A$

电容器的性能指标：电容值和耐压值。

四、 电介质对电容器电容的影响

$$C = e_r C_0 \qquad (e_r > 1)$$

e_0 真空中的介电常数

e_r 相对介电常数(电容率),纯数,真空中$e_r=1$

e 电介质的介电常数

一些电介质的相对介电常数

电介质	e_r	电介质	e_r	电介质	e_r
真空	1	变压器油	3	氧化钽	11.6
空气	1.000585	云母	3～6	二氧化钛	100
纯水	80	普通陶瓷	5.7～6.8	电木	7.6
玻璃	5~10	聚乙烯	2.3	石蜡	2.2
纸	3.5	聚苯乙烯	2.6	钛酸钡	$10^2 \sim 10^4$

四、电介质对电容器电容的影响

$$C = e_r C_0 \qquad (e_r > 1)$$

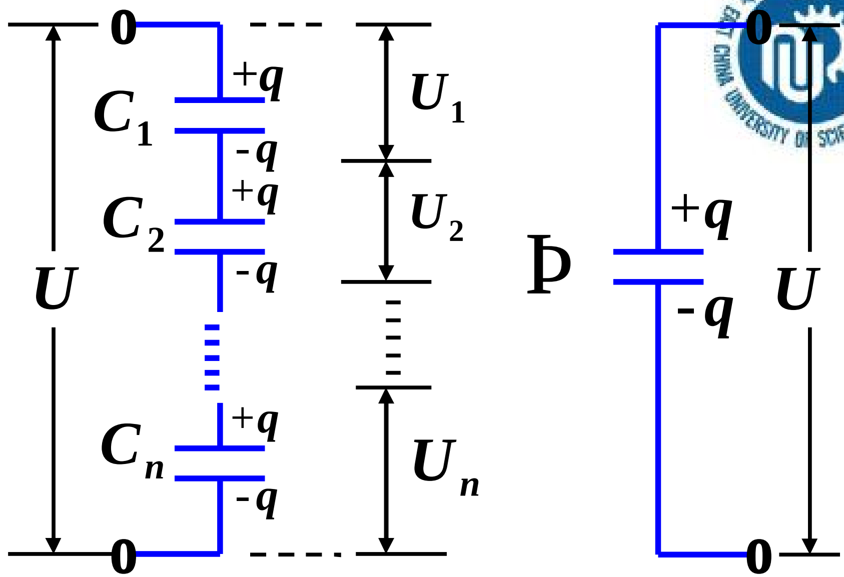
$e = e_0 e_r$ 表征电质介本身特性的物理量

平行板电容器： $$C = e_r C_0 = \frac{e_0 e_r S}{d} = \frac{e S}{d}$$

球形电容器： $$C = \frac{4 p e_0 e_r R_A R_B}{R_B - R_A} = \frac{4 p e R_A R_B}{R_B - R_A}$$

圆柱形电容器： $$C = \frac{2 p e_0 e_r l}{\ln \frac{R_B}{R_A}} = \frac{2 p e l}{\ln \frac{R_B}{R_A}}$$

5、电容器的串联和并联



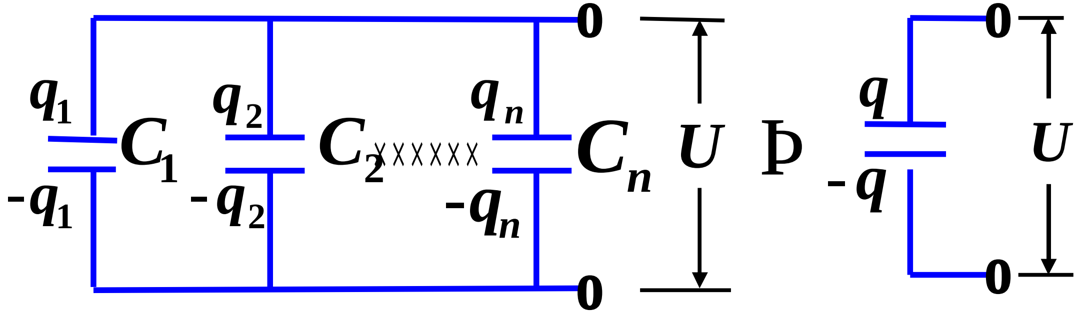
1. 电容器的串联

$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

$$U = \frac{q}{C}\ ,\ U_1 = \frac{q}{C_1}\ ,\ U_2 = \frac{q}{C_2} \cdots$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

2. 电容器的并联



$$q_1 = C_1U,\ q_2 = C_2\ ,\ \cdots q_n = C_nU$$

$$q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n = (C_1 + C_2 + \cdots + C_n)U$$

$$q = CU,\ \therefore C = C_1 + C_2 + \cdots C_n$$

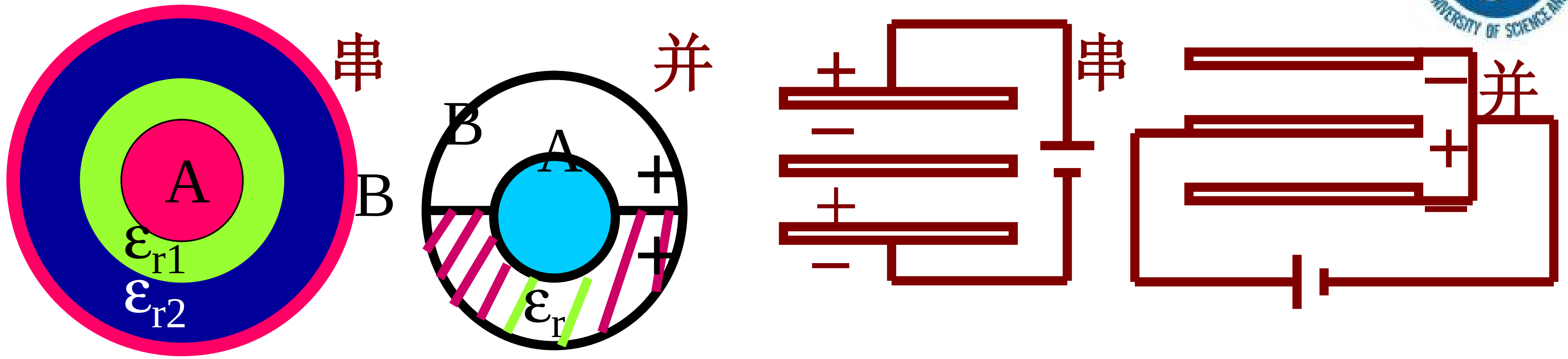
串 $U = U_1 + U_2$ $q = q_1 = q_2$ $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

并联 $U = U_1 = U_2$ $q = q_1 + q_2$ $C = C_1 + C_2$

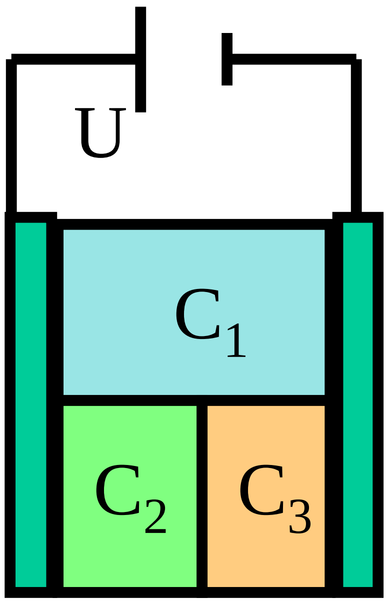
断开电源 ® q不变

连接电源 ® U不变

[思考]判断下列电容器组的联接方式



[思考]



解:

$$C=C_1\text{并}(C_2\text{串}C_3)$$

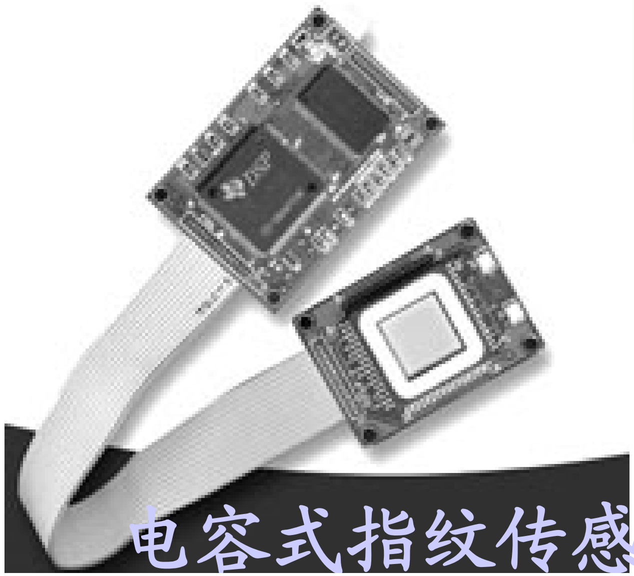
$$C=C_1+\frac{C_2C_3}{C_2+C_3}$$

各种电容式传感器

大膜片电容传声器

电容式变送器

差压传感器



电容式指纹传感器

油量测量

圆柱型电容传感器的电容为

$$C_x = C_1 + C_2 = \frac{2pe_1(H - h_2)}{\ln(r_2 / r_1)} + \frac{2pe_2 h_2}{\ln(r_2 / r_1)}$$

$$= \frac{2pe_1 H}{\ln(r_2 / r_1)} + \frac{2p(e_2 - e_1)}{\ln(r_2 / r_1)} = C_{x0} + \Delta C$$

当燃油增大，h_2增大，△C也增大；燃油减少，h_2减少，△C也减小。通过测量电容的大小就能知道油量的多少。

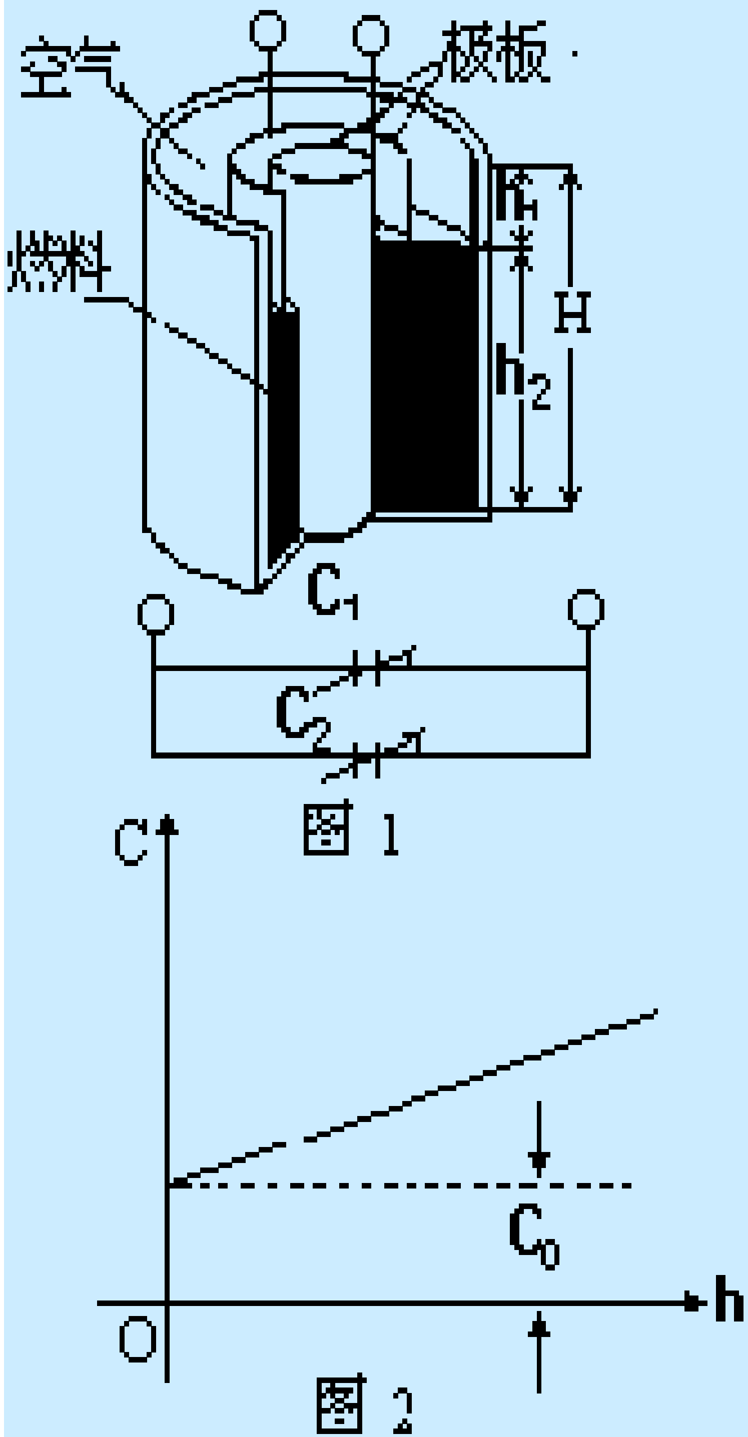


图 1

图 2

电容式键盘

利用变极距型电容传感器实现信息转换

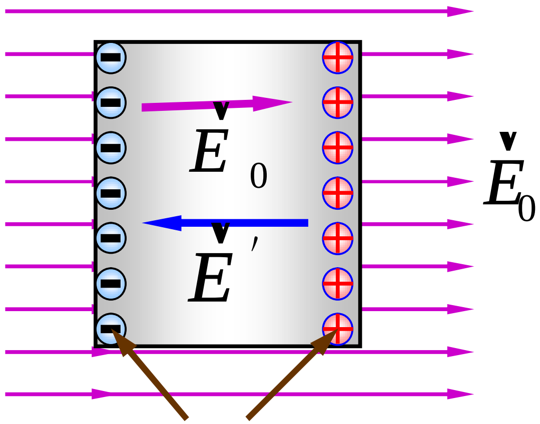
常规的键盘有机械按键和电容按键两种。

电容式键盘是基于电容式开关的键盘，原理是通过按键改变电极间的距离产生电容量的变化，暂时形成震荡脉冲允许通过的条件。这种开关是无触点非接触式的，磨损率极小。

9-3 静电场中的电介质

一、电介质及其极化

导 体



感应电荷

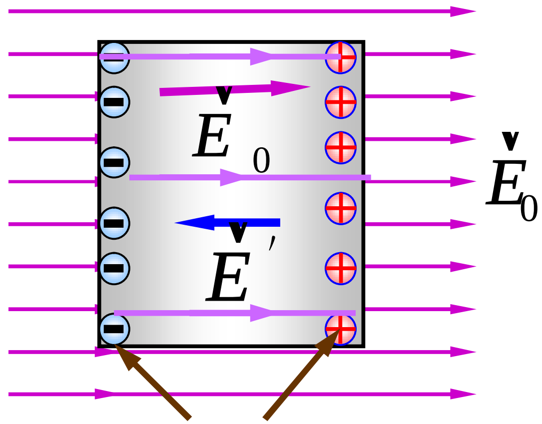
$$E' = E_0$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0$$

电荷宏观移动

重新分布

电介质(绝缘体)



极化电荷(束缚电荷)

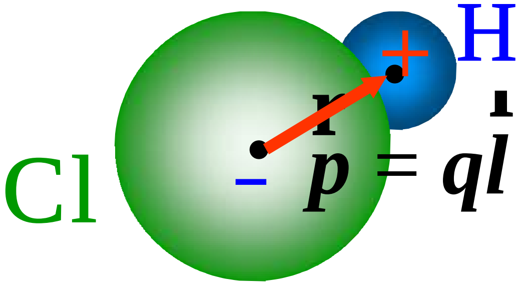
$$E' < E_0$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \neq 0$$

无电荷宏观移动

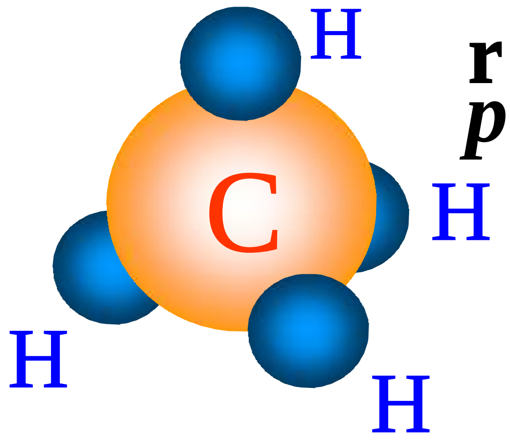
电荷相互束缚,仅微小移动

两类电介质：有极分子—正负电荷“中心”不重合
无极分子—正负电荷“中心”重合



$\vec{p} = q\vec{l} \neq 0$

HCl

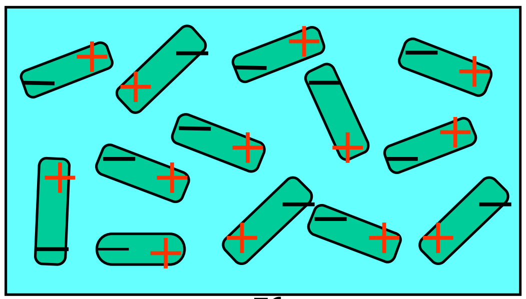


$\vec{p} = q\vec{l} = 0$

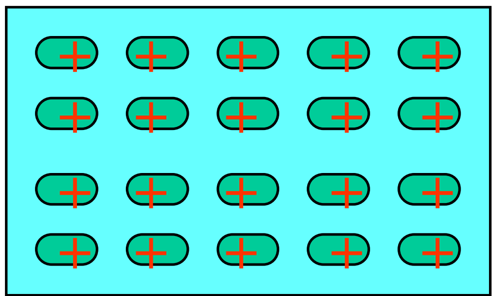
CH_4

	有极分子	无极分子
无外场，一个分子	$\vec{p}_e \neq 0$	$\vec{p}_e = 0$

取ΔV



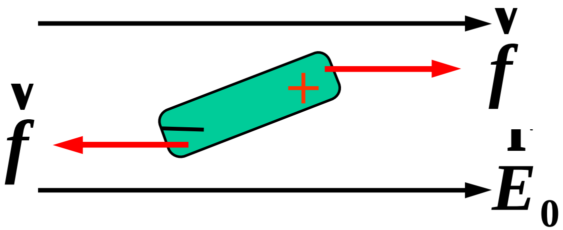
$\sum \vec{p}_e = 0$

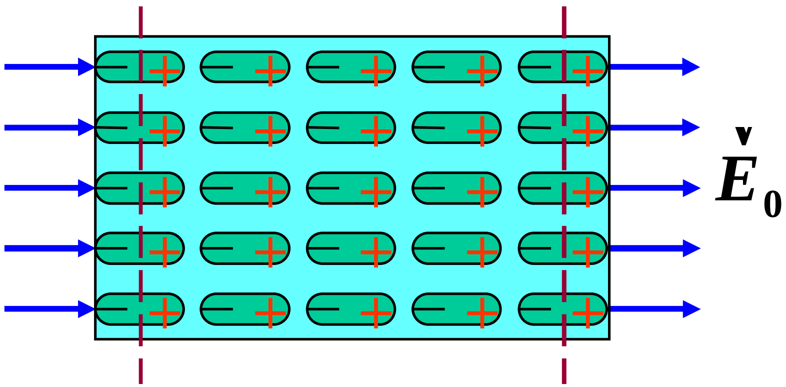


$\sum \vec{p}_e = 0$

加外场$\vec{E}_0$，取ΔV

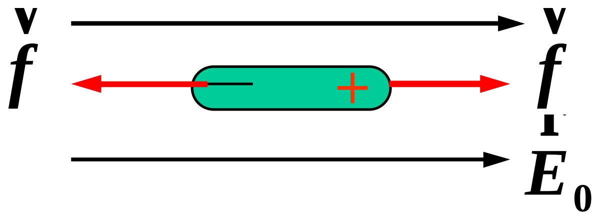
有极分子

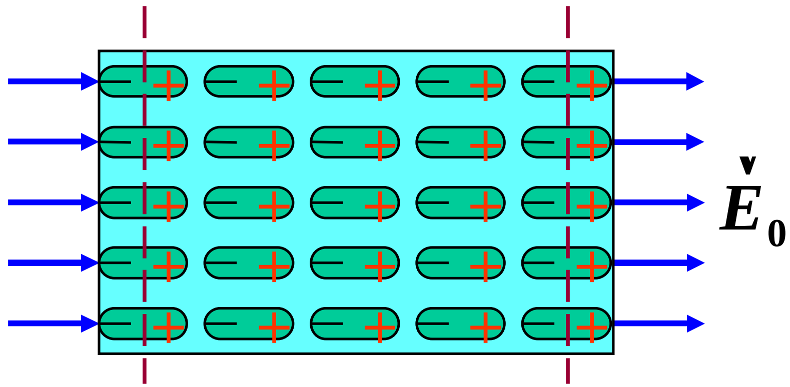




$\sum \vec{p}_e \neq 0$,取向极化

无极分子





$\sum \vec{p}_e \neq 0$,位移极化

结果：在介质左右的两个端面有极化电荷,束缚电荷

二、电极化强度矢量与极化电荷的关系

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_e}{\Delta V} \qquad \ominus \rightarrow \oplus$$

若 $\vec{P}$ = 常矢量， 均匀极化

$\vec{P}$ 与极化电荷面密度 σ' 关系

等效为一个电偶极子

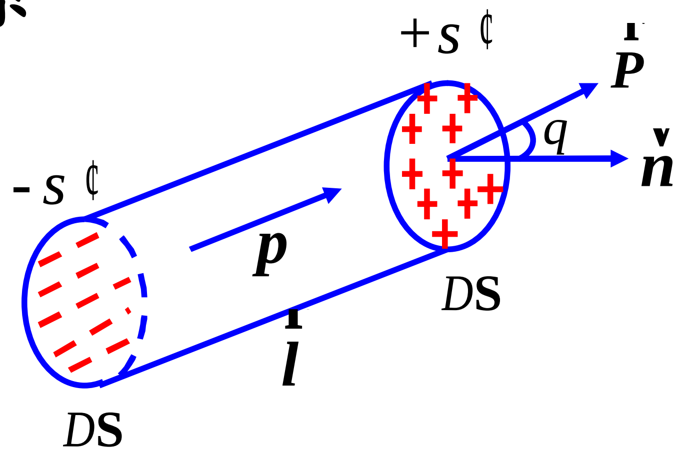
$$\vec{p}_e = q\vec{l} = \sigma' \Delta S \vec{l}$$

由定义

$$\sum \vec{p}_e = \vec{P} \Delta V = \vec{P} \Delta S l \cos\theta$$

$$\sigma' \Delta S \vec{l} = \vec{P} \Delta S l \cos\theta = P \Delta S \vec{l} \cos\theta$$

$$\therefore \quad \sigma' = P\cos\theta = \vec{P} \cdot \vec{n} = P_n$$



特例:

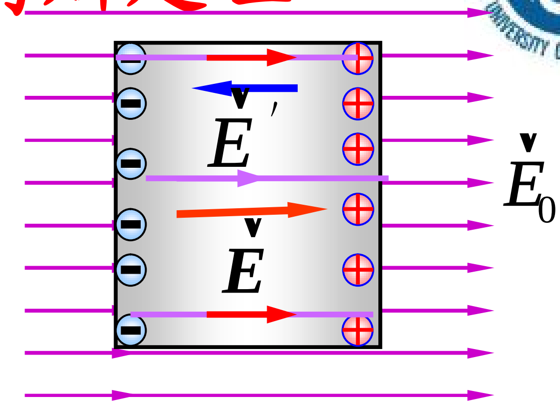
$\theta = \pi/2$	$\sigma' = 0$
$\theta = 0$	$\sigma' = P$
$\theta = \pi$	$\sigma' = -P$

三、电位移　有电介质时的高斯定理

$\vec{E}_0$ —自由电荷产生

$\vec{E}'$ — 极化电荷产生

$\vec{E}$ —总场强(电介质中场强)



1. $\vec{P}$ 与 $\vec{E}$ 的关系

$$\vec{P} \propto \vec{E} \qquad \vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

χ_e 称为电极化率（纯数）　　真空中 $\chi_e = 0$

2. 有电介质时的高斯定理

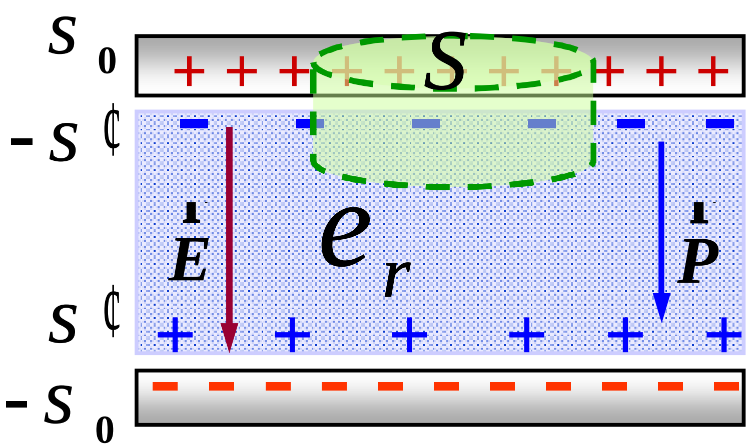
真空中 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$　　有介质 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = ?$

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum (q_0 + q') = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_0 S + \sigma' S)$$

$$\oiint \vec{P}\cdot d\vec{S} = \iint_{下底} P\cos\theta \, dS = PS = -\sigma' S$$

$$\sigma' = P\cos\pi$$



$$\oiint \varepsilon_0 \vec{E}\cdot d\vec{S} = \left(\sum q_0 - \oiint \vec{P}\cdot d\vec{S}\right)$$

$$\oiint (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})\cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

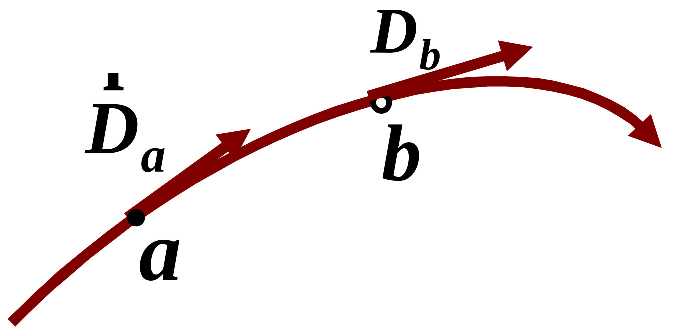
$$\oint\!\!\oint(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})\cdot d\vec{S}=\sum q_0$$

令 $\vec{D}=\vec{P}+\varepsilon_0\vec{E}$ 称为电位移矢量

则 $$\boxed{\oint\!\!\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_0}$$ 有介质时的高斯定理

与电场线一样,可引入电位移线

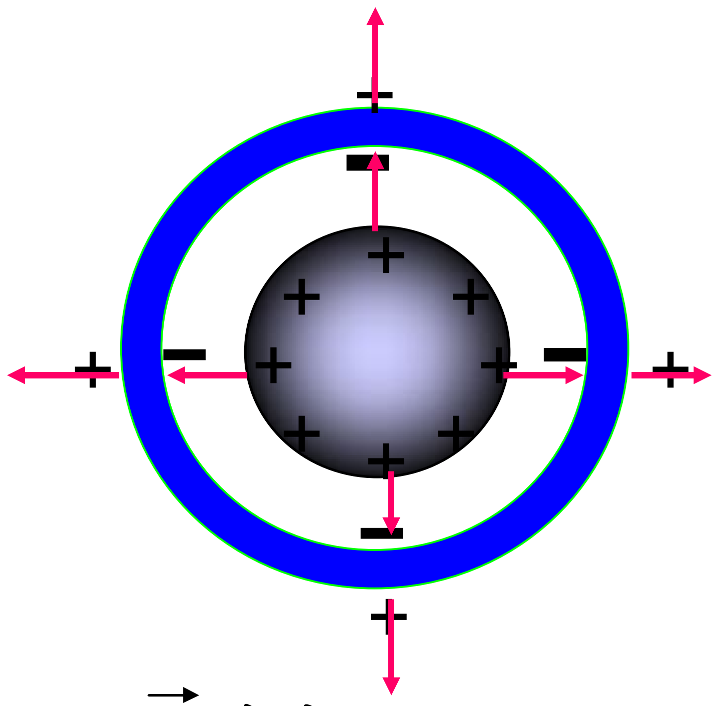
正自由电荷指向负自由 电荷



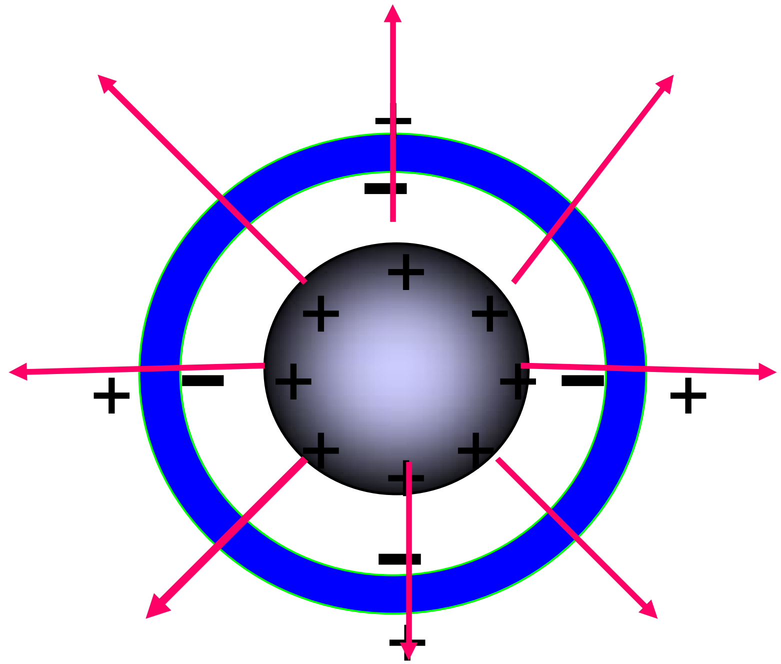
$$\vec{D}\begin{cases}\text{方向:切线}\\ \text{大小:}\dfrac{\text{电位移线条数}}{S_{\perp}}\end{cases}$$

注意:电位移通量只与封闭曲面包围的自由电荷有关,电位移矢量与自由电荷和极化电荷都有关。

3、$\vec{E}$ 线和 $\vec{D}$ 线的区别:



$\vec{E}$ 线起源于任何正电荷或¥处;终止于任何负电荷或¥处。



$\vec{D}$ 线起源于自由正电荷或¥处;终止于自由负电荷或¥处。

与束缚电荷无关

四 $\vec{D}$、$\vec{E}$、$\vec{P}$三个电矢量的关系

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

解题思路

$$\sigma' = p_n = p\cos\theta$$

$$\oint\!\!\!\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

$$\boxed{q_0 \Rightarrow D \Rightarrow E \Rightarrow P \Rightarrow \sigma'(q')}$$

高斯定理

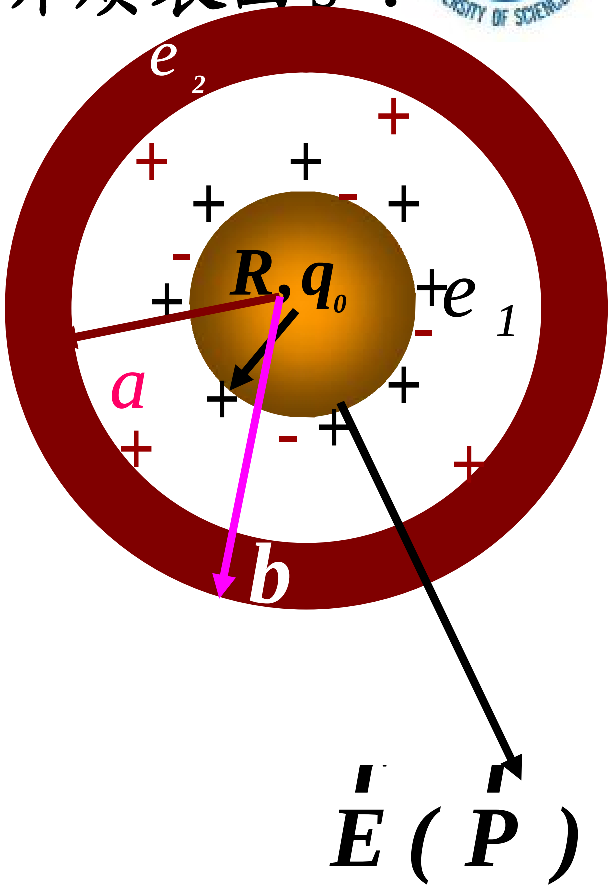
$$D = \varepsilon E$$

$$P = \chi_e \varepsilon_0 E$$

$$(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E$$

注意：法线方向的规定

[例5]金属球R,带q_0,置于同心介质球壳**ab**中,介电常数e_1 e_2已知.求(1)空间E、D(2)介质内P,介质表面s'?



解:

(1) $\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_{自}$ $\qquad E = \dfrac{D}{\varepsilon}$

$0<r<R: D_0=0, E_0=0$

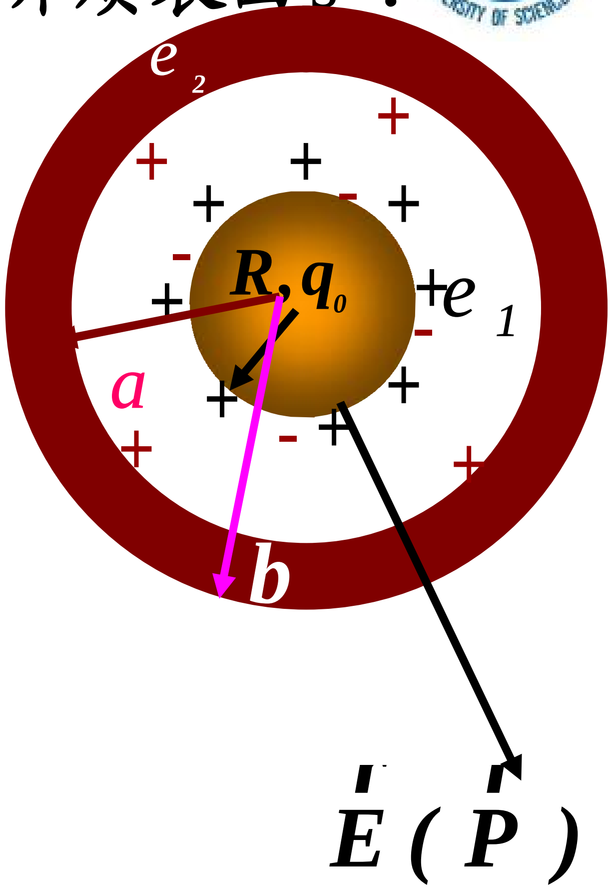
$\boldsymbol{R<r<a: D_1 = q_0/4p r^2, E_1 = q_0/4pe_1 r^2}$

$\boldsymbol{a<r<b: D_2 = q_0/4p r^2, E_2 = q_0/4pe_2 r^2}$

$\boldsymbol{b<r<¥: D_3 = q_0/4p r^2, E_3 = q_0/4pe_0 r^2}$

[例5]金属球R,带q_0 ,置于同心介质球壳ab中,介电常数e_1 e_2已知.求(1)空间E、D(2)介质内P,介质表面s′?

解:



(2) $$P_1=\varepsilon_0\chi_{e1}E_1=\varepsilon_0(\varepsilon_{r1}-1)q_0/4\pi\varepsilon_1 r^2$$
$$=(\varepsilon_1-\varepsilon_0)q_0/4\pi\varepsilon_1 r^2$$

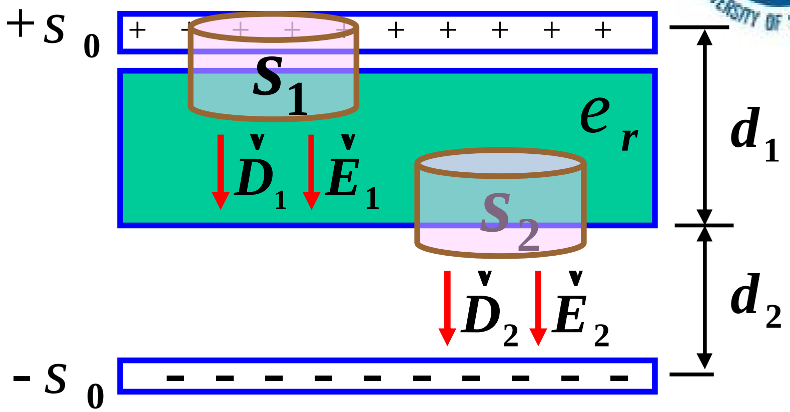
$$\therefore \sigma'_{1R}=P_{1R}\cos\pi=(\varepsilon_0-\varepsilon_1)q_0/4\pi\varepsilon_1 R^2$$

$$\therefore \sigma'_{1a}=P_{1a}\cos 0=(\varepsilon_1-\varepsilon_0)q_0/4\pi\varepsilon_1 a^2$$

$$P_2=(\varepsilon_2-\varepsilon_0)q_0/4\pi\varepsilon_2 r^2$$

$$\therefore \sigma'_{2a}=(\varepsilon_0-\varepsilon_2)q_0/4\pi\varepsilon_2 a^2 \qquad \therefore \sigma'_{2b}=(\varepsilon_2-\varepsilon_0)q_0/4\pi\varepsilon_2 b^2$$

例6 极板上 σ_0 保持不变，上半部充介质 (ε_r)，讨论上、下两部分的 $\vec{D}$ 和 $\vec{E}$



$$\oint\!\!\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = D_1 \cdot S_1 = \sigma_0 S_1$$

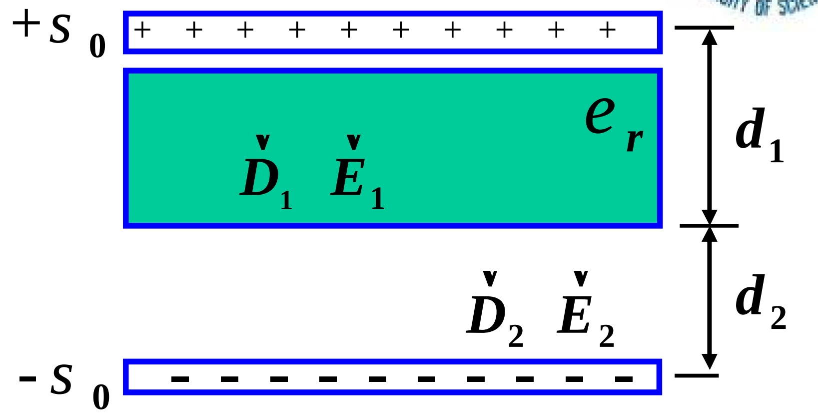
$$D_1 = \sigma_0$$

$$\oint\!\!\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = D_2S_2 - D_1S_2 = O \qquad \therefore D_2 = D_1 = \sigma_0$$

$$D_1 = \varepsilon_0\varepsilon_r E_1 \Rightarrow E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$D_2 = \varepsilon_0 E_2 \Rightarrow E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \qquad E_1 \neq E_2$$

$$\Delta U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_r} + d_2\right)$$



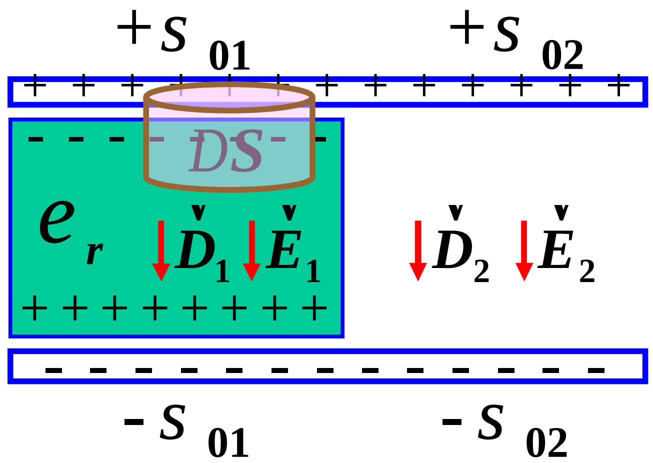
$$\text{解法2}\quad DU = \frac{Q}{C}, C = \frac{(e_0 e_r S / d_1)(e_0 S / d_2)}{e_0 e_r S / d_1 + e_0 S / d_2}$$

例7 两平行金属板间电势差 $U_0 = 300\text{V}$,保持板上电量不变,左半部充以介质 $(\varepsilon_r = 5)$,求板间电势差 $U = ?$

设极板面积 S,间距 d,

未充介质极板上 σ_0

板间 $E_0 = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$, $U_0 = E_0 d$



左边充介质后

$$D_1 \overset{?}{=} D_2,\quad E_1 \overset{?}{=} E_2,\quad E_2 \overset{?}{=} E_0,\quad \sigma_{01} \overset{?}{\gtrless} \sigma_{02}$$

由高斯定理 $\displaystyle\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = D_1\Delta S = \sigma_{01}\Delta S \Rightarrow D_1 = \sigma_{01}$

$$D_1 = \varepsilon_0\varepsilon_r E_1 \Rightarrow E_1 = \frac{\sigma_{01}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

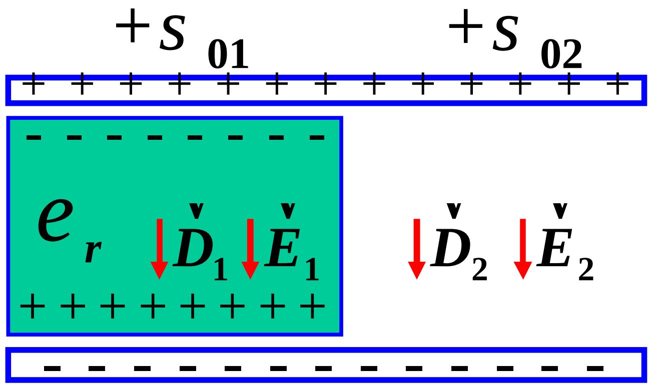
同理 $D_2 = \sigma_{02}$　$E_2 = \dfrac{\sigma_{02}}{\varepsilon_0}$

由 $E_1 d = E_2 d \Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow \sigma_{02} = \dfrac{\sigma_{01}}{\varepsilon_r}$

由电量不变 $\sigma_{01}\dfrac{S}{2}+\sigma_{02}\dfrac{S}{2}=\sigma_0 S \Rightarrow \sigma_{01}+\sigma_{02}=2\sigma_0$

$$\sigma_{01}=\frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\sigma_0>\sigma_0$$

$$\sigma_{02}=\frac{2}{1+\varepsilon_r}\sigma_0<\sigma_0$$



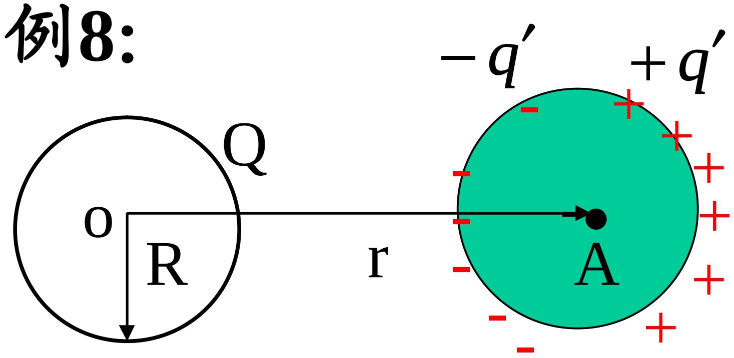
这时 $E_1=E_2=\dfrac{\sigma_{02}}{\varepsilon_0}=\dfrac{2\sigma_0}{\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)}=\dfrac{2}{1+\varepsilon_r}E_0$

$$U=E_2 d=\frac{2}{1+\varepsilon_r}E_0 d=\frac{2}{1+\varepsilon_r}U_0=100\text{V}$$

解法二：电容器并联 $C=\dfrac{C_0}{2}+\varepsilon_r\dfrac{C_0}{2}$

电量不变 $q=C_0U_0=CU \Rightarrow U=\dfrac{C_0}{C}U_0$

例8:



已知：$E_{A0}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

现以A为中心，放上一半径为R的介质球（ε_r），则下列各式中哪个是正确的。

$$(1)E_A=\frac{E_{A0}}{\varepsilon_r}$$

$$(2)\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$ （S为以O为中心，r为半径的球面）

$$(3)\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{S}=Q$$

(4)体球上自由电荷面密度$\sigma=\dfrac{Q}{4\pi R^2}$

$$\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{S}=D\cdot 4\pi r^2=Q\Rightarrow D=\frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E=\frac{D}{\varepsilon}$$

$$\left.\right\}E_A=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\Rightarrow E_A=\frac{E_{AO}}{\varepsilon_r}$$

例9：莱顿瓶是最早期的一种电容器,它是一内外贴有金属薄膜的圆柱形玻璃瓶.设玻璃瓶内直径为8cm,玻璃厚度为2mm,金属膜高度为40cm.已知玻璃ε_r=5,$E_{击穿}$=1.5×10^7V/m.计算[1]莱顿瓶C [2]它能储存电荷Q_{max}

解:[1] 由高斯定理求D

$$D\cdot 2\pi rL = Q \Rightarrow E = D/\varepsilon = \frac{Q}{2\pi\varepsilon rL}$$

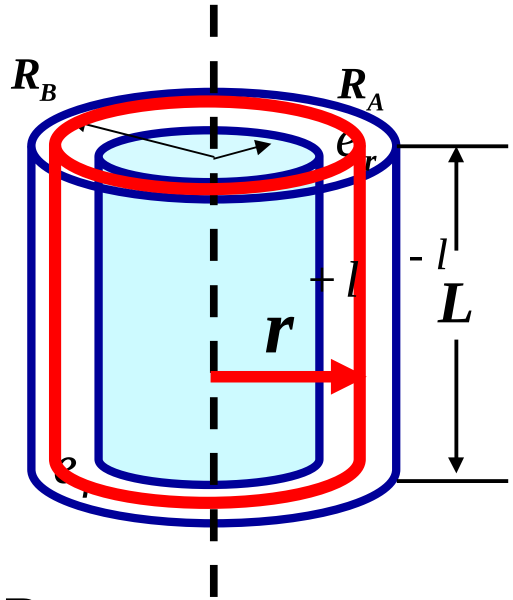
$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{R_A}^{R_B} (Q/2\pi r\varepsilon L)\cdot dr = Q/2\pi\varepsilon L/(\ln R_B/R_A)$$

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L/(\ln R_B/R_A) = 2.28\times10^{-9}\,F$$

[2] $\because E_{RA} > E_{RB}, R_A$易被穿出

临界状态为：$E_A = E_{击穿}$，此时带电量最大

$Q_A = 2\pi R_A \varepsilon L E_{击穿}$ $Q_{max} = Q_A = 6.67\times10^{-5}$ C



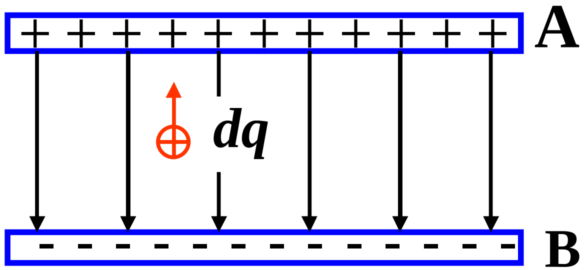
求所能承受的最大电压：$Q = Q_{max}$带入U_{AB}

9-4 静电场的能量

一、电容器的电能

t时刻,极板带电q, 电势差$U_A - U_B$

将dq从$B \rightarrow A$



$$dA = dq(U_A - U_B) = \frac{q}{C}dq$$

$$A = \int dA = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$\left(C = \frac{q}{U_A - U_B}\right)$$

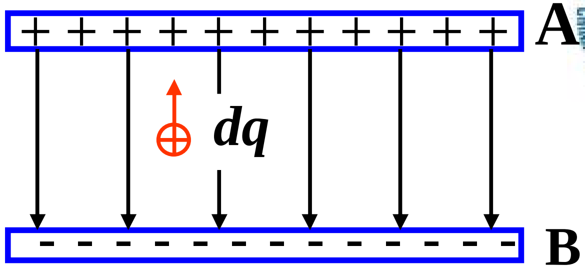
$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q\Delta U = \frac{1}{2}C(\Delta U)^2$$

Q不变, $C \uparrow \rightarrow W_e \downarrow$

ΔU不变, $C \uparrow \rightarrow W_e \uparrow$

二、静电场的能量

$$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}=\frac{\varepsilon S}{d},\quad \Delta U=E\cdot d$$



$$W_e=\frac{1}{2}C(\Delta U)^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}E^2d^2=\frac{1}{2}\varepsilon E^2Sd=\frac{1}{2}\varepsilon E^2V$$

能量密度

$$w_e=\frac{W_e}{V}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon}$$

电场能量

$$W_e=\iiint w_e dV$$

或 $$W_e=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}C(\Delta U)^2=\frac{1}{2}Q(\Delta U)$$

电场能量求解方法一：定义法

1. 先求出 $\vec{E}$ 或 $\vec{D}$

2. 写出 $w_e = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon}$

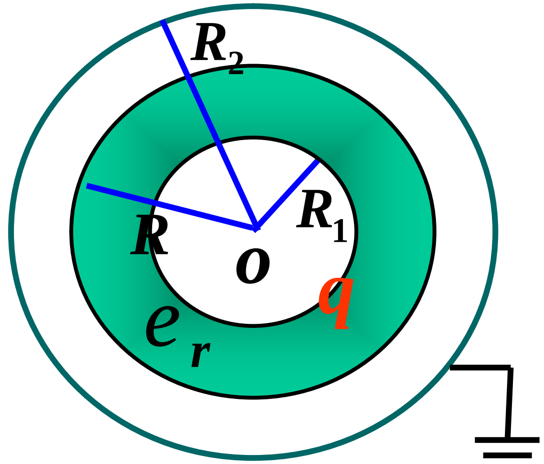
3. 由 $W_e = \iiint w_e dV$ 求出 $\begin{cases} \text{球} \quad dV = 4\pi r^2 dr \\ \text{圆柱} \quad dV = 2\pi r l dr \end{cases}$

电场能量求解方法二:

或由 $W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QU$ 求 W_e

例10半径分别为R_1和R_2同心导体球壳,内球带电q,紧靠其外面包一层外半径为R的电介质(ε),外壳接地,求两球壳间: 1. $\vec{E}$的分布 2. $\Delta U = ?$

3. $C = ?$ 4. $W_e = ?$



$R_1 < r < R$

$$(1)\ \oiint \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = D_1 \cdot 4\pi r^2 = q \Rightarrow D_1 = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_1 \qquad \Rightarrow E_1 = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}$$

$R < r < R_2$

$$\oiint \vec{D}_2 \cdot d\vec{S} = D_2 \cdot 4\pi r^2 = q \Rightarrow D_2 = \frac{q}{4\pi r^2} = D_1$$

$$\vec{D}_2 = \varepsilon_0 \vec{E}_2 \qquad \Rightarrow E_2 = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \neq E_1$$

$$E = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} & R_1 < r < R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R < r < R_2 \end{cases}$$

(2) $$\Delta U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R} \vec{E}_1\cdot d\vec{l} + \int_{R}^{R_2} \vec{E}_2\cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R}\right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_2}\right)$$

(3) $$C = \frac{q}{\Delta U} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R R_1 R_2}{R_2(R-R_1)+\varepsilon_r R_1(R_2-R)}$$

(4) $$w_{e1} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E_1^2\ ,\quad w_{e2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2$$

$$W_e = \int_{R_1}^{R} \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E_1^2 \cdot 4\pi r^2 dr + \int_{R}^{R_2} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2 \cdot 4\pi r^2 dr$$

也可用电容计算

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R}\right) + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_2}\right)$$

例11:

平行板电容器 $S = 1\mathrm{m}^2$,内放同样面积的玻璃板(厚$d = 5\mathrm{mm}$,$e_r = 5$), 充电到 $U = 12\mathrm{V}$后切断电源,求将玻璃板抽出来外力 所作的功。

抽出前后 $$C = \frac{e_0 e_r S}{d}, \quad C_0 = \frac{e_0 S}{d}$$

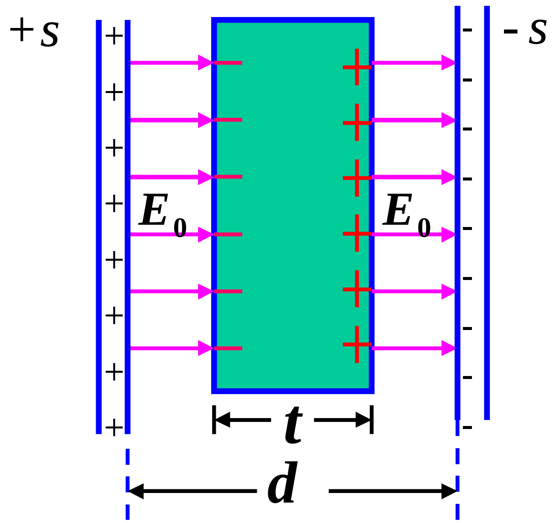
$$W = \frac{1}{2} C U^2, \quad W_0 = \frac{1}{2} C_0 U_0^2$$

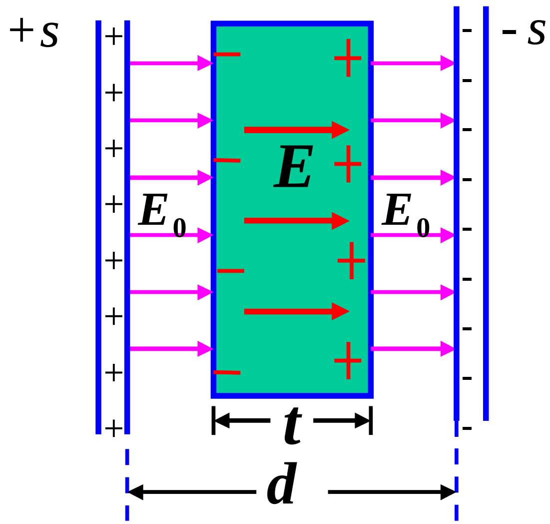
Q电量不变 $$\backslash\ CU = C_0 U_0 \quad U_0 = \frac{C}{C_0} U = e_r U$$

外力作功 $$A = W_0 - W = \frac{1}{2} e_0 e_r S \frac{U}{d} (e_r - 1)$$

$$= 2.55 ´ 10^{-6}\,\mathrm{J}$$

例12：充电后断开,比较插入导体和电介质的情况





插入导体

未插入 $DU_0 = E_0 d$

插入 $DU_1 = E_0(d - t)$

$DU_1 < DU_0$

插入电介质

$DU_0 = E_0 d$ $\boxed{C_{01} = C_{02}}$

$DU_2 = E_0(d - t) + Et$

$DU_2 < DU_0$

$\boxed{DU_1 < DU_2}$

$C\uparrow = \dfrac{q}{DU\downarrow}$, $\backslash$ $C_1 > C_2$