§2 二次曲面的化简

在右手平面直角坐标系下

二次曲线的一般方程:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

$$\varphi(x,y) = (x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

方程的二次项部分

$$F(x,y)=(x,y,1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=(\alpha^t,1)\begin{pmatrix} A & \delta \\ \delta^t & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}=(\alpha^t,1)P\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \delta=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad \alpha=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & \delta \\ \delta^T & a_0 \end{pmatrix}$$

1.作转轴消去交叉项

设 II$\left[O\ ,\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'}\right]$是由 I 经过转轴得到的，转角为$\vartheta$，

I 到 II 的点的坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T\alpha'$$

$$F(x,y) = (\alpha,1)\begin{pmatrix} A & \delta \\ \delta^t & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = (\alpha'^t,1)\begin{pmatrix} T^tAT & T^t\delta \\ \delta^tT & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha' \\ 1 \end{pmatrix}$$

方程的二次项部分 $\varphi'(x',y')$ 的矩阵为 $T^t AT$

$$T^t AT=\begin{pmatrix} a_{11}\cos^2\vartheta+2a_{12}\cos\vartheta\sin\vartheta+a_{22}\sin^2\vartheta & (a_{22}-a_{11})\sin\vartheta\cos\vartheta+a_{12}\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta \\ (a_{22}-a_{11})\sin\vartheta\cos\vartheta+a_{12}(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta) & a_{11}\sin^2\vartheta-2a_{12}\sin\vartheta\cos\vartheta+a_{22}\cos^2\vartheta \end{pmatrix}$$

令

$$(a_{22}-a_{11})\sin\vartheta\cos\vartheta+a_{12}(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta)=0$$

即 $\cot 2\vartheta=\dfrac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$

新方程为 $a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+2a'_1x'+2a'_2y'+a'_0=0$

$$a'_{11} = a_{11} + a_{12} \tan\vartheta$$

$$a'_{22} = a_{22} - a_{12} \tan\vartheta$$

$$a'_1 = a_1 \cos\vartheta + a_2 \sin\vartheta$$

$$a'_2 = -a_1 \sin\vartheta + a_2 \cos\vartheta$$

$$a'_0 = a_0$$

例：作转轴消去下述二次方程的交叉项

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 10x + 10y + 5 = 0$$

2.作移轴进一步化简方程

情形 1、a'_{11} 和 a'_{22} 同号　（椭圆型曲线）。

$$a'_{11}x^{*2}+a'_{22}y^{*2}+c_1^*=0$$

其中 $\begin{cases} x^*=x'+\dfrac{a'_1}{a'_{11}} \\ y^*=y'+\dfrac{a'_2}{a'_{22}} \end{cases}$，$c_1^*=a'_0-\dfrac{a_1'^2}{a'_{11}}-\dfrac{a_2'^2}{a'_{22}}$。

若c_1^*与a_{11}'异号：$\Rightarrow \dfrac{x^{*2}}{a_1^2}+\dfrac{y^{*2}}{b_1^2}=1$ 椭圆的标准方程

其中$a_1^2=-\dfrac{c_1^*}{a_{11}'}, b_1^2=-\dfrac{c_1^*}{a_{22}'}$。

若c_1^*与a_{11}'同号：$\Rightarrow \dfrac{x^{*2}}{a_2^2}+\dfrac{y^{*2}}{b_2^2}=-1$ 无轨迹（虚椭圆）

其中$a_2^2=\dfrac{c_1^*}{a_{11}'}, b_2^2=\dfrac{c_1^*}{a_{22}'}$。

若c_1^***=0，**则$\dfrac{x^{*2}}{a_3^2}+\dfrac{y^{*2}}{b_3^2}=0$ 0^*点

$$a_3^2=\frac{1}{\left|a_{11}'\right|}, b_3^2=\frac{1}{\left|a_{22}'\right|}$$

情形 2、a_{11}' 和 a_{22}' 异号 （双曲型曲线）。

$$a_{11}' x^{*2} + a_{22}' y^{*2} + c_1^* = 0$$

其中 $\begin{cases} x^* = x' + \dfrac{a_1'}{a_{11}'} \\ y^* = y' + \dfrac{a_2'}{a_{22}'} \end{cases}$，$c_1^* = a_0' - \dfrac{a_1'^2}{a_{11}'} - \dfrac{a_2'^2}{a_{22}'}$。

若 $c_1^* \neq 0$，则得 $\dfrac{x^{*2}}{a_4^2} - \dfrac{y^{*2}}{b_4^2} = 1$， 当 c_1^* 与 a_{11}' 异号

或 $-\dfrac{x^{*2}}{a_5^2} + \dfrac{y^{*2}}{b_5^2} = 1$ 当 c_1^* 与 a_{11}' 同号

其中 $a_4^2 = -\dfrac{c_1^*}{a_{11}'}, b_4^2 = \dfrac{c_1^*}{a_{22}'}, \; a_5^2 = \dfrac{c_1^*}{a_{11}'}, b_5^2 = -\dfrac{c_1^*}{a_{22}'},$

若 c_1^* =**0**，则方程可化为

$\dfrac{x^{*2}}{a_3^2} - \dfrac{y^{*2}}{b_3^2} = 0$ 一对相交直线

情形 3、a'_{11} 与 a'_{22} 有一个为零（不可能全为零）。

抛物型曲线

方程为：

$$a'_{22}y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a'_0 = 0 \qquad (a'_{11} = 0)$$

配方得 $a'_{22}(y' + \dfrac{a'_2}{a'_{22}})^2 + 2a'_1 x' + a'_0 - \dfrac{a'^2_2}{a'_{22}} = 0$

若 $a_1' \neq 0$，作移轴 $\begin{cases} x^* = x' + \dfrac{a_{22}' a_0' - a_2'^2}{2a_1' a_{22}'} \\ y^* = y' + \dfrac{a_2'}{a_{22}'} \end{cases}$

则为 $a_{22}' y^{*2} + 2a_1' x^* = 0$　　　抛物线方程

若 $a_1' = 0$，则 $a_{22}' y^{*2} + c_2^* = 0$

其中 $\begin{cases} x^* = x' \\ y^* = y' + \dfrac{a_2'}{a_{22}'} \end{cases}$　得 $a_{22}' y^{*2} + c_2^* = 0$

若 a'_{22} 与 c_2^* 异号：

$$y^{*2} = \frac{-c_2^*}{a'_{22}}$$

一对平行直线

若 a'_{22} 与 c_2^* 异号：　　方程无轨迹

一对虚平行直线

若 c_2^* **=0**，则

$$y^{*2} = 0$$

一对重合直线

- 二次曲线
  - 椭圆型
    - 椭圆
    - 虚椭圆
    - 一个点
  - 双曲型
    - 双曲线
    - 一对相交直线
  - 抛物型
    - 抛物线
    - 一对平行直线
    - 一对虚平行直线
    - 一对重合直线

例 **1**：求 $4x^2-4xy+y^2-10x+10y+5=0$ 的标准方程。

例 **2**：将 $5x^2+4xy+2y^2-24x-12y+18=0$ 化为标准型。