

大学物理学习指导

阴其俊 钱水兔 编著
汪 溶 陆 慧



华东理工大学出版社

内 容 简 介

本书是根据国家教育部物理课程指导委员会制定的《工科大学物理课程基本要求》的精神而编写的学习指导和自测练习用书。全书分为 17 章,每章均由“基本要求与复习框图”、“阅读指导与问题讨论”、“解题方法与典型例题”以及“自测练习与能力训练”四部分组成,力求做到既复习基本概念,又讲解分析方法;既突出基本内容,又开阔学习视野。本书可供工科院校非物理专业的本科学生使用,也可作为大学物理教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学习指导/ 阴其俊等编著 .—上海:华东理工大学出版社,2005 .2
ISBN 7-5628-1624-7

. 大 阴 物理学-高等学校-自学参考资料 . 04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 129345 号

大学物理学习指导
阴其俊 钱水兔 编著
汪 溶 陆 慧

出版	华东理工大学出版社	开本	787 × 960 1/ 16
社址	上海市梅陇路 130 号	印张	24 .5
邮政	邮编 200237 电话(021)64250306	字数	463 千字
网址	www .hdlgpress .com .cn	版次	2005 年 2 月第 1 版
发行	新华书店上海发行所	印次	2005 年 2 月第 1 次
印刷	上海展强印刷有限公司	印数	1-5050 册

ISBN 7-5628-1624-7/ O · 122

定价:29 .00 元

前言

大学物理是理工科大学中一门重要的基础理论课程,对培养和提高学生的科学素质、科学思维方法以及科学研究能力具有重要的作用。但对刚进大学的一年级学生来说,在学习这门课时,常常会遇到这样或那样的困难。为了更好地贯彻少而精、学到手的原则,让学生能用较少的时间,掌握较多的物理知识,我们根据大学物理的基本要求,编写了《大学物理学习指导》一书。

本书分为 17 章,每章均由“基本要求与复习框图”、“阅读指导与问题讨论”、“解题方法与典型例题”以及“自测练习与能力训练”四部分组成,力求做到既复习基本概念,又讲解分析方法;既突出基本内容,又开阔学习视野。“基本要求与复习框图”部分使读者了解每章的重点内容,引导读者总结基本概念和规律并找出各规律之间的联系。“阅读指导与问题讨论”部分针对教材内容中的重点和难点以及学生学习中易常犯的 error 和容易混淆的理论、概念以及运用条件进行了深入分析,并为正确理解和运用物理定理作了细致而有说服力的阐述。“解题方法与典型例题”部分侧重在帮助读者理清解题思路,掌握物理方法和数学方法在解题过程中的灵活运用,并通过一些典型例题的求解,增强读者解题技巧的延展性。“自测练习与能力训练”部分既可供读者在学完各章后作自我检验和复习巩固,又适当编选部分解题技巧性高,内容交叉度大的综合训练题,使读者对学过的概念有更深层次的理解,提高分析问题和解决问题的能力。

参加本书编写的有汪溶(第 1、2、3 章),陆慧(第 4、5、16、17 章),钱水兔(第 6、7、13、14、15 章),阴其俊(第 8、9、10、11、12 章)。全书由阴其俊统稿审定。

编者在此要感谢戴坚舟、许丽敏、包曼玲、黄天祥、李燮里等,他们为本书编写提出了许多中肯意见及提供部分资料,使本书增色不少。同时感谢房毅、周晓岚,他们为本书的编写也作了大量的工作。

由于编者水平有限,不妥之处在所难免,衷心希望读者批评指正,以便在修订时予以充实、提高和完善。

编者
2005 年 1 月

目 录

1 质点的运动规律

1.1	基本要求与复习框图	1
1.2	阅读指导与问题讨论	3
1.3	解题方法与典型例题	8
1.4	自测练习与能力训练.....	16

2 守恒定律

2.1	基本要求与复习框图.....	23
2.2	阅读指导与问题讨论.....	25
2.3	解题方法与典型例题.....	31
2.4	自测练习与能力训练.....	37

3 刚体的转动

3.1	基本要求与复习框图.....	46
3.2	阅读指导与问题讨论.....	47
3.3	解题方法与典型例题.....	53
3.4	自测练习与能力训练.....	57

4 振动

4.1	基本要求与复习框图.....	65
4.2	阅读指导与问题讨论.....	67
4.3	解题方法与典型例题.....	74

4.4	自测练习与能力训练.....	82
-----	----------------	----

5 机械波

5.1	基本要求与复习框图.....	91
5.2	阅读指导与问题讨论.....	93
5.3	解题方法与典型例题.....	98
5.4	自测练习与能力训练	105

6 气体动理论

6.1	基本要求与复习框图	117
6.2	阅读指导与问题讨论	119
6.3	解题方法与典型例题	124
6.4	自测练习与能力训练	129

7 热力学基础

7.1	基本要求与复习框图	136
7.2	阅读指导与问题讨论	137
7.3	解题方法与典型例题	143
7.4	自测练习与能力训练	150

8 静电场

8.1	基本要求与复习框图	159
8.2	阅读指导与问题讨论	160
8.3	解题方法与典型例题	165
8.4	自测练习与能力训练	173

9 静电场中的导体和介质

9.1	基本要求与复习框图	181
9.2	阅读指导与问题讨论	182

9.3	解题方法与典型例题	188
9.4	自测练习与能力训练	195

10 稳恒电流的磁场

10.1	基本要求与复习框图	207
10.2	阅读指导与问题讨论	208
10.3	解题方法与典型例题	214

11 磁场中的磁介质

11.1	基本要求与复习框图	225
11.2	阅读指导与问题讨论	226
11.3	解题方法与典型例题	229
11.4	自测练习与能力训练	231

12 电磁感应和电磁场

12.1	基本要求与复习框图	241
12.2	阅读指导与问题讨论	243
12.3	解题方法与典型例题	249
12.4	自测练习与能力训练	259

13 光的干涉

13.1	基本要求与复习框图	271
13.2	阅读指导与问题讨论	272
13.3	解题方法与典型例题	278
13.4	自测练习与能力训练	284

14 光的衍射

14.1	基本要求与复习框图	293
14.2	阅读指导与问题讨论	294

14 3	解题方法与典型例题	299
14 4	自测练习与能力训练	303

15 光的偏振

15 1	基本要求与复习框图	312
15 2	阅读指导与问题讨论	313
15 3	解题方法与典型例题	316
15 4	自测练习与能力训练	320

16 狭义相对论

16 1	基本要求与复习框图	328
16 2	阅读指导与问题讨论	329
16 3	解题方法与典型例题	339
16 4	自测练习与能力训练	346

17 量子物理

17 1	基本要求与复习框图	354
17 2	阅读指导与问题讨论	356
17 3	解题方法与典型例题	362
17 4	自测练习与能力训练	368

习题答案	375
------------	-----

质点的运动规律

1.1 基本要求与复习框图

1. 基本要求

(1) 确切理解描述质点运动及运动变化的基本物理量;明确这些物理量的矢量性、相对性及速度、加速度的瞬时性;熟练掌握在直角坐标系和自然坐标系下的速度、加速度的表达形式.

(2) 熟练掌握质点运动学的两类问题,即用微分方法由已知的运动方程求速度、加速度;用积分方法由已知的速度、加速度求质点的运动方程.

(3) 理解伽利略速度变换式,并能用它求解简单的相对运动问题.

(4) 准确理解牛顿运动三定律的内容及实质,明确牛顿运动定律的适用范围和条件.

(5) 熟练掌握用隔离体法分析物体的受力和解题的基本方法,了解惯性力的物理意义及在非惯性系中运用牛顿定律处理一般动力学问题的方法.

本章从质点运动学和牛顿运动定律两个方面阐述了质点的运动规律.图 1-1(a)、(b)分别是本章节主要内容的复习框图.

2. 复习框图

在质点运动学中,我们着重解决了质点运动的描述问题.我们从一般的运动出发引入描写运动和运动变化的四个物理量,即位置矢量、位移、速度和加速度,进一步可知将这四个物理量联系在一起的是运动方程.要学好运动学,必须抓住基本概念和运动规律这两条线索,做到基本概念清楚、物理过程明了、规律应用熟练;并注意位置矢量、位移、速度和加速度的矢量性、瞬时性和相对性;注意矢量的运算法则.

质点的运动规律复习框图

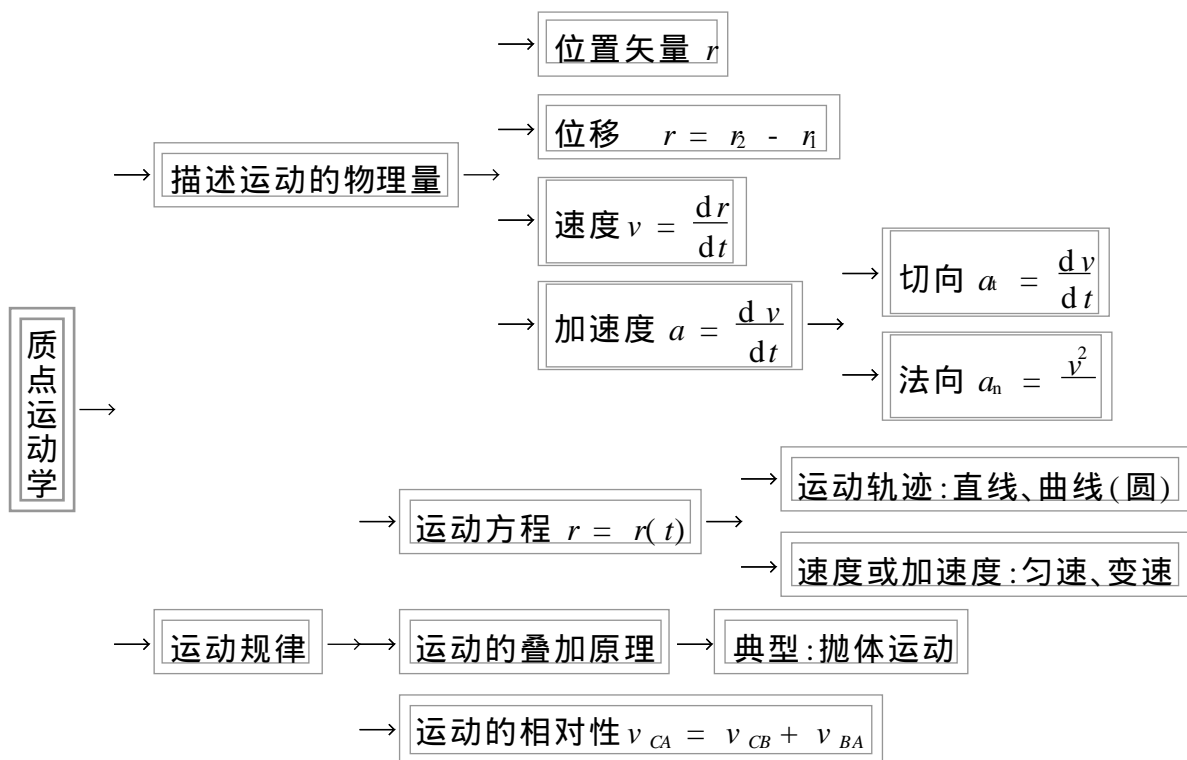


图 1-1 (a)

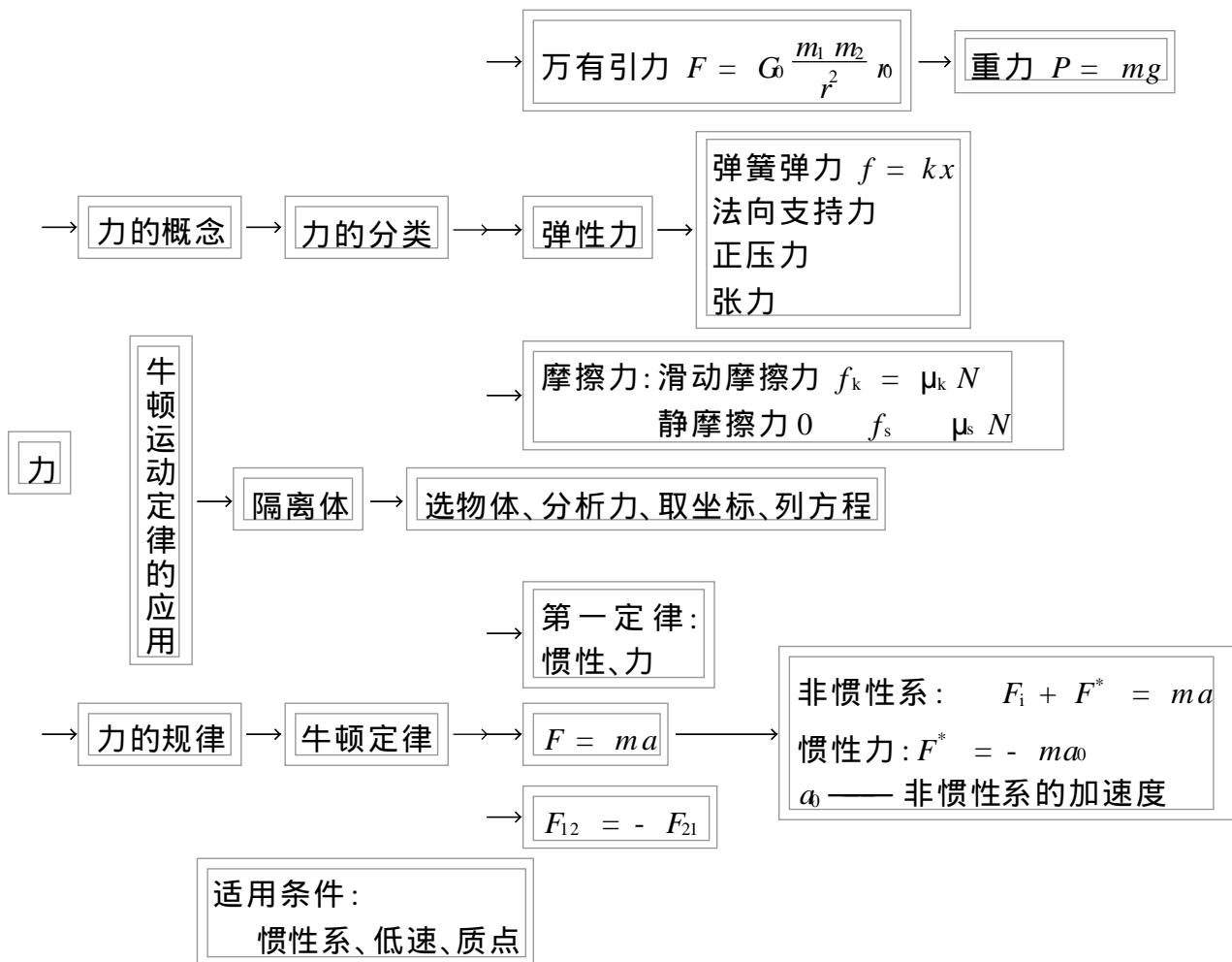


图 1-1 (b)

牛顿运动定律的任务就是讨论物体间的相互作用以及这种相互作用所引起的物体运动状态变化的规律. 由于牛顿三大定律都涉及到力的概念, 因此学好牛顿运动定律的关键是抓住力的分析和力的规律这两条线索, 同时必须掌握用隔离体法来对研究对象进行受力分析的基本方法.

1.2 阅读指导与问题讨论

1. 描述运动物理量的矢量性

质点的运动变化常常伴随着大小和方向的变化, 因此描述质点运动规律的物理量——位置矢量、位移、速度和加速度都是矢量, 它们的运算遵循矢量的运算法则. 在学习时, 应熟知图 1-2 所表示的各矢量的意义, 加深对描述运动物理量的矢量性的理解. 图中 r 、 r' 为质点的位置矢量, $\overline{AB} = dr$ 为质点的位移, $AB = ds$ 为质点的路程.

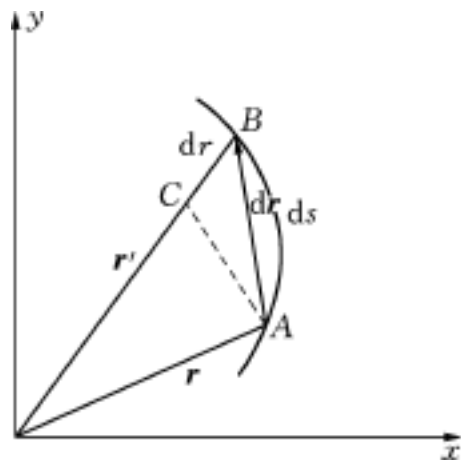


图 1-2

[问题 1-1] 已知质点的运动方程为 $r = x(t)i + y(t)j$, 有人说其速度和加速度的大小分别为

$$v = \frac{dr}{dt}, \quad a = \frac{d^2r}{dt^2}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 你说对吗?

[解答] 初学的同学往往认为 r 是位置矢量的大小, 因此 $\frac{dr}{dt}$ 一定是瞬时速度 v 的大小. 产生这个问题的原因在于没弄清 dr 和 $|dr|$ 的区别. 从图 1-2 中可以看出质点作曲线运动时, 位置矢量的大小和方向都在变化, 位移 dr 反映了这种变化, 它的大小 $|dr| = \overline{AB}$, 而 $dr = |r| - |r| = \overline{CB}$, 它仅仅反映了位置矢量大小的变化. 所以, $\frac{dr}{dt}$ 只表示位置矢量大小随时间的变化率, 不能表示瞬时速度的大小. 若要计算瞬时速度的大小, 可按照矢量的运算法则

$$v = |v| = \left| \frac{dr}{dt} \right| = \left| \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}$$

不能写成

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{x^2 + y^2})$$

同理, 加速度的大小

$$a = |a| = \left| \frac{dv}{dt} \right| = \left| \frac{d^2x}{dt^2}i + \frac{d^2y}{dt^2}j \right| = \frac{d^2r}{dt^2}$$

[问题 1-2] 已知质点的运动方程 $y = -t^2 + 2$, 则质点作何种运动?

[解答] 要判别质点的运动情况, 可从速度、加速度和运动轨迹着手. 有同学认为, 该质点的速度和加速度分别为 $y = -2t$ 和 $y = -2$, 均为负值, 因此质点作减速运动, 这是对负号的误解. 在矢量性的物

理量中,正负号反映了物理量的方向,即与你选定的正方向的关系,而要判定质点的加速运动主要根据

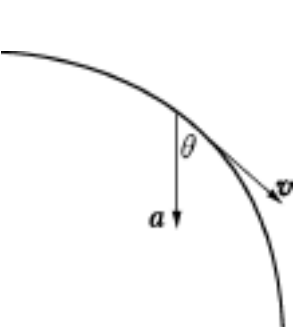


图 1-3

速度和加速度方向间的夹角 的情况,如图 1-3 所示.若 $0 < \frac{\theta}{2}$, 则为加速运动;若 $\frac{\theta}{2} < \theta$, 则为减速运动.由此可见,我们所讨论的质点的速度和加速度同方向,且加速度为常量,因此作匀加速直线运动.

另外在曲线运动中,我们也可以依据速度和加速度方向的关系,求出质点切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n 及曲率半径 等物理量.例如图 1-4 所示的斜抛运动,质点的加速度为常矢量 g ,它又可分解为 a_n 和 a_t ,在 P 点处, $a_t = g \cos \theta$, $a_n = g \sin \theta$, 它们分别反映了速度的大小和方向随时间的变化率.若知初速 v_0 、与

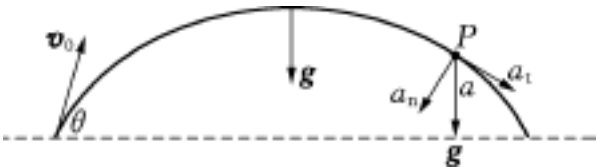


图 1-4

水平方向的夹角 ,由于水平方向作匀速运动,所以 $v_0 \cos \theta = v \sin \theta$, 曲率半径为 $R = \frac{(v_0 \cos \theta)^2}{g \sin^3 \theta}$.

由于矢量可以分解和合成,因此对质点运动也可以进行分解和合成,任何复杂的运动可看成简单运动的合成或者称为叠加,而且这种合成可以是多种形式的合成.例如斜抛运动,通常我们把它看成水平方向的匀速直线运动和竖直方向的匀减速运动的叠加.如果我们再观察一下斜抛运动的运动方程式

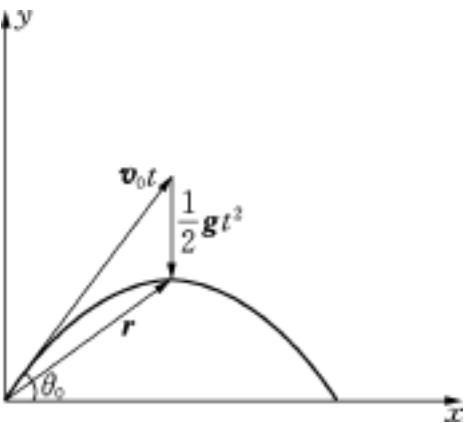


图 1-5

$$r = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

从上式中可知斜抛运动还可以看作沿初速方向的匀速直线运动和自由落体运动的叠加(图 1-5).

矢量的这一特性,为我们研究实际问题提供了许多便利,在今后的解题中,可酌情应用.

2. 运动的相对性

物体运动的描述在不同的参照系是不一样的,因此在对物体的运动进行研究前,必须明确

你选择的参照系.图 1-6 是质点在两个作相对运动的坐标系 A 和 B 中位置关系的示意图,其关系式为

$$r_{PA} = r_{PB} + r_{BA}$$

进一步可知在不同参照系中的速度变换式为

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}$$

式中 v_{PA} 是质点在 A 参照系中的速度, v_{PB} 是质点在 B 参照系中的速度, v_{BA} 是 B 系相对于 A

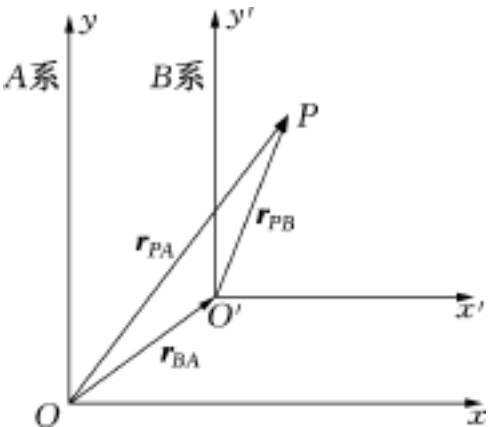


图 1-6

系的速度,称为牵连速度.此速度变换式称为伽利略速度变换式.

讨论质点在不同参照系中的运动状态时,我们首先要弄清有关物理量在各个参照系中的确切表示(包括数值和方向),再利用速度变换式进行求解.在解题过程中,必须注意矢量的运算,同时注意力学规律的相对性原则,即质点的运动规律在不同的参照系中具有相同的表达式.

[问题 1-3] 假定某日刮北风,风速为 u ,一运动员在风中跑步,他对地面的速率为 v $\left[v = \frac{u}{2} \right]$,试问当他向什么方向跑时,会感到风从他的正右方吹来?

[解答] 这是一个典型的相对运动问题,两个参照系分别为人和地面.因此只要弄清在各个参照系的速度矢量,再利用速度变换式,即可得到结果.

由已知条件可知: $v_{风地} = u$, 方向由北向南, $v_{人地} = v = \frac{u}{2}$, 方向待求, $v_{风人} = v$, 方向正右吹来,需满足 $v_{风人} = v$.按相对运动的速度合成公式有 $v_{风人} = v_{风地} + v_{地人} = v_{风地} - v_{人地}$,因此可采用几何作图的方法先确定人的跑步方向.

自原点 O 从北向南作风速矢量 u ,再以 O 为圆心, $\frac{u}{2}$ 为半径作一圆,人跑步的速度矢量 v 的端点一定在此圆上,因 $v_{风人} = v$,人又感到风从正右方吹来,故从 u 矢量的末端向圆的左半部作切线(向右半圆方向跑步,不可能感到风从正右方吹来),从 O 作指向切点的连线即为 v 的方向(图 1-7).从图 1-7 中可以得到 u 与 v 的夹角

$$= \cos^{-1} \frac{v}{u} = \cos^{-1} \frac{1}{2} = 60^\circ$$

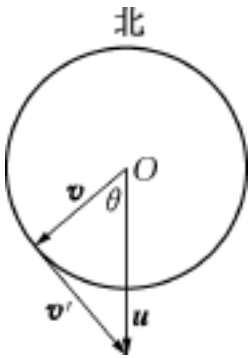


图 1-7

所以,人跑步的方向应为南偏西 60° .

3. 弹性力和摩擦力的问题

在受力分析时,比较复杂的是弹性力和摩擦力.

弹性力来源于相互接触的物体之间产生的弹性形变,其大小和物体所受的其他力及运动状态有关.物体间的正压力和支持力是一对作用力和反作用力,它们的方向总是垂直于物体接触点的切面,比较容易判断,而它们的大小则往往需要通过牛顿定律求出.

摩擦力是指相互作用的物体接触面之间有相对滑动或相对滑动趋势而产生的一种阻碍相对滑动的力,可分为滑动摩擦力和静摩擦力,其方向总是和相对滑动或相对滑动趋势的方向相反.滑动摩擦力的大小比较容易处理,其值为

$$f_k = \mu_k N$$

其中 μ_k 为滑动摩擦因数(也称摩擦系数), N 为正压力.而静摩擦力的大小则随具体情况而变,其变化范围为

$$0 \leq f_s \leq f_{s\max} = \mu_s N$$

式中 μ_s 是静摩擦因数, 它大于 μ_k .

[问题 1-4] 如图 1-8 所示, 在倾角为 θ 的固定的光滑斜面上, 放一质量为 m 的物体 其中(b)图中 m 被竖直的固定木板挡住, 问在(a)、(b)两种情况下, 物体对斜面的正压力是否一样?



图 1-8

[解答] 有的同学会以为是一样的, 都等于重力的一个分量 $mg \cos \theta$. 其实, 这种结论对图 1-8(b)来说是错误的. 关键在于他没有考虑到由于木板的阻挡, 物体对斜面的正压力发生了变化. 那么如何求解哪? 我们可以将物体作为研究对象, 将其他物体对它的作用以力的形式表示, 这就是隔离体法, 图 1-9 就是物体的受力图.

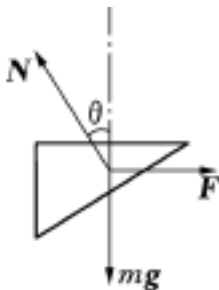


图 1-9

因为物体处于平衡状态, 所以重力 mg 、斜面的支持力 N (物体给斜面的正压力的反作用力) 和木板的支持力 F 的合力为零, 即

$$mg + N + F = 0$$

将力在水平方向和竖直方向分解可得

$$mg - N \cos \theta = 0$$

$$F - N \sin \theta = 0$$

所以

$$N = \frac{mg}{\cos \theta}$$

由此可见, 弹性力的计算应注意其实际的运动状况和其他力的作用情况.

[问题 1-5] 质量为 m 的物体 A 与车壁之间的静摩擦因数为 μ_s , 当小车以加速度 a 向右运动时, A 能贴在壁上不滑下来, 如图 1-10 所示, 则物体与小车之间的静摩擦力为多大? 小车的加速度至少为多大?

[解答] 有些同学可能会不假思索地回答, 物体受到小车给它的作用力 $N = ma$, 所以静摩擦力为

$$f = \mu_s N = \mu_s ma$$

这个回答显然是错误的. 因为静摩擦力是随质点的受力情况而变化的力, 对它的讨论应通过物体受力的实际情况而确定, 只有最大静摩擦力才能写成

$$f = \mu_s N$$

其中 N 为物体间的正压力. 在本题中, 物体沿小车壁方向外力有重力, 现在物体不掉下来, 说明有静摩擦

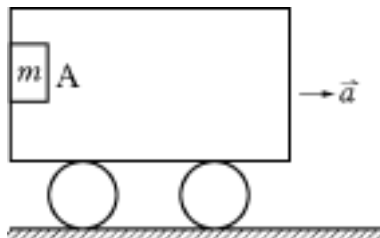


图 1-10

力的作用,其大小为 $f = \mu_s N$.同时注意到只有最大的静摩擦力比重力大时,物体才不会掉下来,即

$$f = \mu_s N \geq mg$$

所以

$$\mu_s N = \mu_s ma \geq mg$$

$$a \geq \frac{g}{\mu_s}$$

4. 牛顿定律适用范围

牛顿运动定律是经典力学的基本定律,但它仅适用于宏观、低速的并能看成质点的物体,并且只有在惯性系中成立.在用牛顿定律解题时,一定要判断是否在适用范围内,否则将得到错误的结论.

[问题 1-6] 有一质量可忽略的定滑轮,两侧各用轻绳悬挂质量分别为 m_1 和 m_2 的重物(图 1-11),已知 $m_1 > m_2$, 求重物的加速度.有人这样求:根据牛顿第二定律,物体所受合外力为 $m_1 g + m_2 g$.因此有

$$m_1 g + m_2 g = (m_1 + m_2) a$$

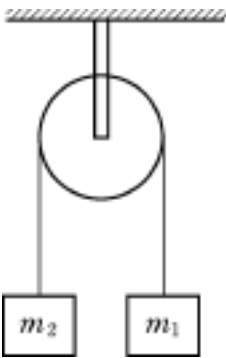


图 1-11

你能说出它错在什么地方?正确的解法应如何?

[解答] 因为 $m_1 > m_2$, m_1 将作向下的加速运动, m_2 则向上运动,因此 m_1 、 m_2 系统不是质点,不能简单地用牛顿运动定律计算.正确的解法应采用隔离体法将 m_1 、 m_2 分开讨论.选地面为惯性参照系并作如图 1-12 所示的受力图.由于可忽略滑轮和绳子的质量,所以细绳作用在两物体上的张力相等,即 $F_{T_1} = F_{T_2} = T$, 根据牛顿第二定律有

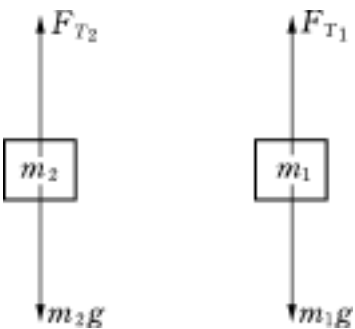


图 1-12

$$m_1 g - T = m_1 a \tag{1}$$

$$T - m_2 g = m_2 a \tag{2}$$

联立式(1)、(2)可得

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

5. 非惯性系和惯性力

非惯性系虽然超出了牛顿定律的适用范围,但只要引入惯性力的概念,在分析物体受力时,把惯性力也计入其中,那么在非惯性系中,就可运用牛顿定律,即

$$F_i + F^* = ma$$

式中 F_i 为物体所受的外力的矢量和, F^* 为惯性力,它等于 $F^* = -ma_0$, a_0 是非惯性系相对于惯性系的加速度.需要注意的是 a 是物体在该非惯性系中

的加速度 .

[问题 1-7] 站在升降机内的观察者看到一种奇怪的平衡现象,即质量不同的两物体跨过一无摩擦的定滑轮,能处于平衡状态,如图 1-13 所示.由此他断定升降机作加速运动,试问其加速度的大小、方向如何确定?

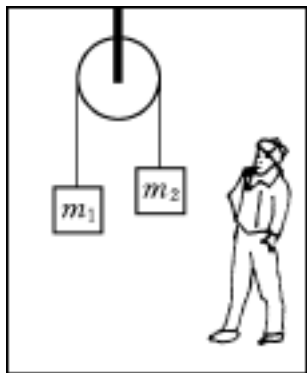


图 1-13

[解答] 在惯性系中,欲使两质量不同的物体悬挂于定滑轮的两边且处于平衡状态是不可能的(见问题 1-6).现两物体处于平衡状态,说明物体还受惯性力的作用,升降机一定有加速度,是一个非惯性系.假设升降机的加速度为 a ,方向向上,则物体所受的惯性力一定向下.故两物体的力平衡方程为

$$m_1 g - T + m_1 a = 0 \quad (1)$$

$$m_2 g - T + m_2 a = 0 \quad (2)$$

联立方程得 $T = 0 \quad a = -g$

负号表示加速度 a 的方向与假设的方向相反,故说明此系统达到平衡时,升降机的加速度方向向下,大小为 g .

本题所分析的情况实际上就是我们常讲的物体处于失重状态,这时两物体所受的惯性力正好和重力抵消,绳子的张力为零.

1.3 解题方法与典型例题

质点运动学中研究的问题主要有两类:

- (1) 已知质点的运动方程,利用求导的方法求得任意时刻的速度、加速度;
- (2) 已知加速度或速度,并知道初始状态,利用积分方法求得质点的运动方程或轨迹.

这两类问题是微积分的直接应用,只要物理概念清晰、数学运算熟练,一般问题都可解决.

[例 1-1] 质点在 xOy 平面内运动,其运动方程为 $r = 2ti + (19 - 2t^2)j$.求:

- (1) 质点的轨迹方程;
- (2) 在 $t_1 = 1\text{ s}$ 到 $t_2 = 2\text{ s}$ 时间内的平均速度;
- (3) $t_1 = 1\text{ s}$ 时的速度及切向和法向加速度.

[分析] 根据运动方程可直接写出其分量式 $x = x(t)$ 和 $y = y(t)$,从中消去参数 t ,即得质点的轨迹方程.平均速度是反映质点在一段时间内位置的变化率,即 $\bar{v} = \frac{r}{t}$,它与时间间隔 t 的大小有关,当

$t \rightarrow 0$ 时,平均速度的极限即瞬时速度 $v = \frac{dr}{dt}$,切向和法向加速度是加速度在自然坐标下的分矢量,切向加速度反映质点速度大小的变化,即 $a_t = \frac{dv}{dt}$ (其中 \hat{t} 为切向的单位矢量),法向加速度反映质点速度方向的变化,即 $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ (其中 \hat{n} 为法向的单位矢量). a_n 与 a_t 相互垂直,它们的矢量和等于总加速度,即

$a = a_n + a_t$, 故 a_n 也可由 a 及 a_t 得到.

[解] (1) 由质点的运动方程可得时间的参数方程

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 19 - 2t^2 \end{cases}$$

消去 t 后即得质点的轨迹方程

$$y = 19 - \frac{1}{2}x^2$$

(2) $t_1 = 1\text{ s}$ 和 $t_2 = 2\text{ s}$ 的位矢为

$$\begin{cases} r(1) = 2i + 17j \\ r(2) = 4i + 11j \end{cases}$$

$t_1 = 1\text{ s}$ 到 $t_2 = 2\text{ s}$ 内的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{r}{t} = \frac{r(2) - r(1)}{t_2 - t_1} = 4i + 11j - (2i + 17j) = 2i - 6j$$

(3) 质点任一时刻的速度为

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j = 2i - 4tj$$

$t_1 = 1\text{ s}$ 时的速度为

$$v(1) = 2i - 4j$$

质点任一时刻的加速度为

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}i + \frac{d^2y}{dt^2}j = -4j$$

又质点任一时刻的速率为

$$v = \left| \frac{dr}{dt} \right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 + (4t)^2}$$

所以切向加速度为

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{4 + (4t)^2})$$

即 $t_1 = 1\text{ s}$ 时的切向加速度为

$$a_t(1) = 3.58\text{ m/s}^2$$

法向加速度为

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2(1)} = 1.79\text{ (m/s}^2\text{)}$$

[例 1-2] 质点运动轨迹是半径为 R 的圆, 在 $t = 0$ 时的自然坐标值为 s_0 , 速度为 v_0 , 若保持加速度方向与速度方向之间的夹角 α 不变 $\left[\alpha < \frac{\pi}{2} \right]$ (图 1-14), 求当 $s - s_0 = 2R$ 时质点运动速度的大小.

[分析] 求解本题的关键在于寻找速度 v 与路程 s 的关系. 由于加速度与速度方向间的夹角不变, 所以 $\tan \alpha = \frac{a_n}{a_t}$ 为常量, 而 $a_t = \frac{dv}{dt}$, 对于圆周运

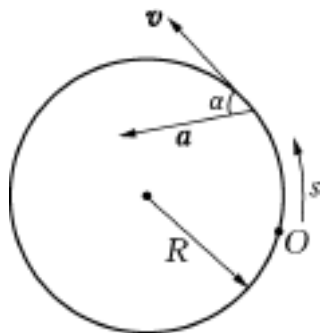


图 1-14

动 $a_n = \frac{v^2}{R}$, 由此可得速度 v 与时间 t 的微分关系, 通过积分变量替换 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$, 即可得到 v 与 s 的微分关系.

[解] 根据题意 $\frac{a_n}{a_t} = \tan \theta = \text{常量}$

从而
$$a_t = \frac{a_n}{\tan \theta} = \frac{v^2}{R \tan \theta}$$

即
$$\frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{R \tan \theta}$$

又
$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$$

故
$$v \frac{dv}{ds} = \frac{v^2}{R \tan \theta}$$

即
$$\frac{R \tan \theta}{v} dv = ds$$

$$\int_{v_0}^v \frac{R \tan \theta}{v} dv = \int_{s_0}^s ds$$

得
$$R \tan \theta \ln \frac{v}{v_0} = 2 R$$

所以
$$v = v_0 e^{\frac{2}{\tan \theta}}$$

[例 1-3] 在离船的高度为 h 的岸边, 绞车以恒定的速率 v_0 收拖缆绳, 使船在水面上向岸边靠近, 如图 1-15 所示. 求当船头与岸的水平距离为 x 时船的速度.

[分析] 因为船被限制在水面上, 同时收绳的速率是恒定的, 船的运动被称为有约束的运动. 解决这类问题的关键是要找出质点的运动规律与约束量的关系. 其次求速度的问题, 采用求出质点的运动方程再求导是比较常用的方法, 其他还可以通过矢量分析等, 在此介绍两种方法.

[解法 1] 建立如图 1-15 所示的坐标系 xOy , 船的位矢 r 可写为

$$r = xi + hj$$

根据速度的定义式
$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} i$$

而 $x = \sqrt{l^2 - h^2}$, 其中 $l = l_0 - v_0 t$ (l_0 为 $t = 0$ 时, 绳子的长度), 则船的速度大小为

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (\sqrt{l^2 - h^2}) = \frac{l}{\sqrt{l^2 - h^2}} \frac{dl}{dt}$$

而 $\frac{dl}{dt} = -v_0$, 即绳长的变化率等于绳子收缩速度的负值. 同时在上式中以 x 表示, 则

$$v = - \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{x} v_0$$

写成矢量式
$$v = - \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{x} v_0 i$$

[解法 2] 以滑轮为坐标系原点 O , 如图 1-16 所示. 在 t 到 $t + \Delta t$ 时间内, 船的位移 $\Delta r = r(t + \Delta t) -$

$r(t)$, 位移包含位矢的大小和方向的变化 因此,过 B 点作 $BC \parallel OA$,

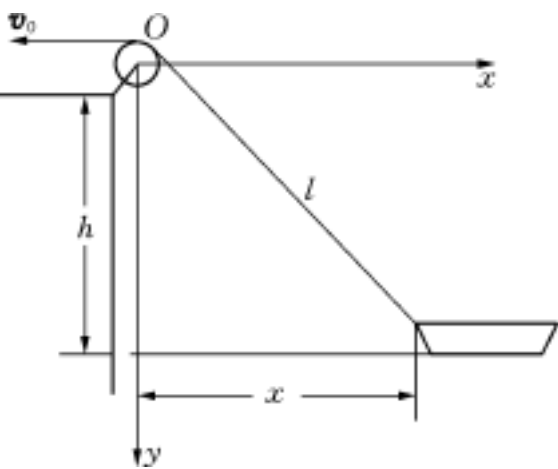


图 1-15

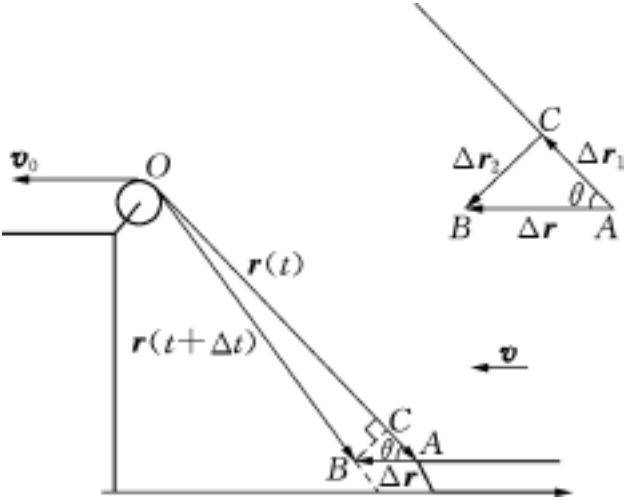


图 1-16

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$$

两边除以 t , 则有

$$\frac{\vec{r}}{t} = \frac{\vec{r}_1}{t} + \frac{\vec{r}_2}{t} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

当 $t \rightarrow 0$ 时可以看出: $|\vec{v}_1| = v_0$, $v_2 = v_1$, $\frac{dr}{dt} = v$. 因此速度大小

$$v \cos \theta = v_0$$

即
$$v = \frac{v_0}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{x} v_0$$

方向水平向左 .

[例 1-4] 列车以 20 m/s 的速度匀速直线前进,乘客以 60° 仰角向空中掷出小球,站在地面上的观察者看到小球沿竖直方向升起.试分析小球上升的高度是多少?

[分析] 这是一道典型的相对运动的题目.求解这类题目的关键在于(1)分清参照系;(2)运用伽利略的速度变换式.同时记住在确定的参照系中,前面所学的运动规律都适用.

[解] 以 S 代表列车参照系, S' 代表地面参照系.设在 S 系中掷出小球的初速度为 v_0 ,在 S' 系中初速度为 v_0' (图 1-17). 根据乘客观察的结论

$$\left| \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \right| = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \tag{1}$$

按速度变换式

$$v_{\text{球地}x} = v_{\text{球车}x} + v_{\text{车地}x} \tag{2}$$

即

$$v_{0y} = v_{0y} \tag{3}$$

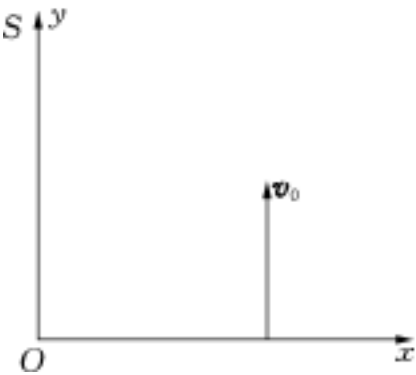
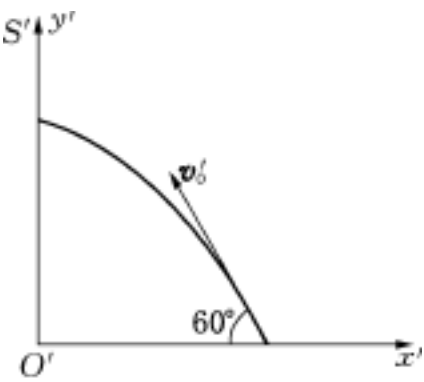


图 1-17

而 $v_{0x} = 0$, 联立式(1)、式(2)、式(3)得

$$v_{0y} = v_y = \sqrt{3} / v_{0x} = \sqrt{3} u = 20\sqrt{3} (\text{m/s})$$

所以小球在地面参照系中上升的高度

$$y_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{20^2 \times 3}{2 \times 9.8} = 61.2 (\text{m})$$

牛顿运动定律的问题通常可分成两大类:

(1) 已知力求质点的运动规律;

(2) 已知运动规律求力.

在运用牛顿定律解题时,一般采用隔离体法对物体进行受力分析.其基本步骤如下:

(1) 明确已知条件和所求物理量,确定研究对象;

(2) 把研究对象从周围物体中隔离出来,进行受力分析,并画出示力图;

(3) 选定坐标系,将力学量标量化,即将研究对象所受的力及其加速度都分解到坐标轴的方向,列出牛顿第二定律的分量式.

这里要注意的是力和加速度的方向的确定,若与坐标轴正方向一致时为正,反之为负.若方向一时无法判定,可先假定一个方向,然后根据计算结果来确定.若结果是正的,则与所假设的方向一致,反之亦然.

(4) 对运动方程求解,求解时先用字母符号得出结果,而后再代入已知数据进行运算,并可采用量纲、极限情况讨论等手段,对结论进行检验.

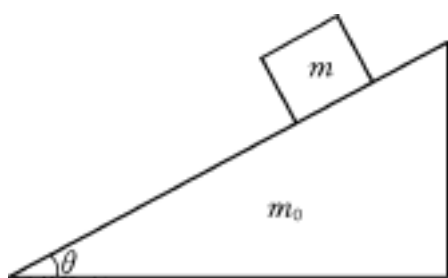


图 1-18

[例 1-5] 如图 1-18 所示,质量为 m 的物体可以在斜块上无摩擦地滑动.质量为 m_0 的斜块放置在光滑的水平面上,斜块与水平面的夹角为 θ .求释放后两物体的加速度及它们之间的相互作用力.

[分析] 物体与斜块的受力分析如图 1-19 所示, N 和 N 是物体与斜块之间的一对相互作用力,由牛顿第三定律可知,它们的大小是相同的,即 $N = N$.从斜块的受力图又可看出,当物体从斜块上下滑时,斜块必须沿水平面后退,物体相对地面经历的路径如图 1-20 所示,加速度的方向不与斜面平行.我们采用两种不同的参照系求解此题.

[解法一] 设物体相对斜面的加速度为 a_0 ,斜面相对地面的加速度为 a ,物体相对地面的加速度为 a .根据相对运动的加速度合成公式,有

$$a = a_0 + a$$

按照图 1-19 所取的坐标,根据牛顿第二定律列出物体和斜面的运动方程

$$N \sin \theta = m a_x \quad (1)$$

$$m g - N \cos \theta = m a_y \quad (2)$$

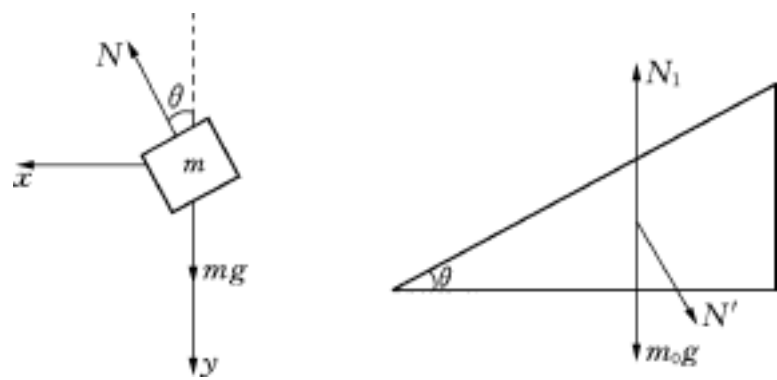


图 1-19

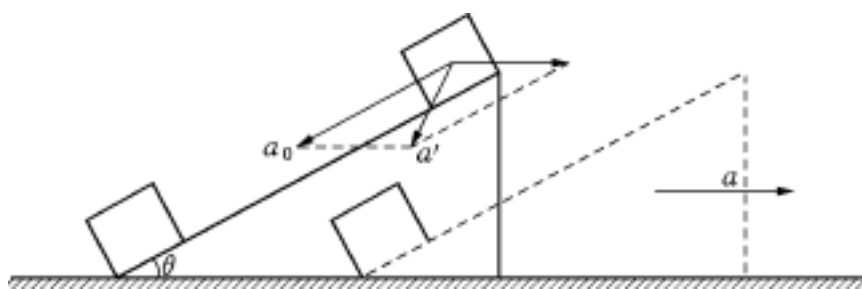


图 1-20

$$N \sin \theta = m_0 a \tag{3}$$

利用图 1-20 中所示的 a 与 a_x 和 a_0 的关系可得

$$a_x = a_0 \cos \theta \tag{4}$$

$$a_y = a_0 \sin \theta \tag{5}$$

联立式(1)~(5),解得五个未知量

$$a = \frac{m g \sin \theta \cos \theta}{m_0 + m \sin^2 \theta}; \quad a_0 = \frac{(m_0 + m) g \sin \theta}{m_0 + m \sin^2 \theta};$$

$$a_x = \frac{m_0 g \sin \theta \cos \theta}{m_0 + m \sin^2 \theta}; \quad a_y = \frac{(m_0 + m) g \sin^2 \theta}{m_0 + m \sin^2 \theta};$$

$$N = \frac{m m_0 g \cos \theta}{m_0 + m \sin^2 \theta}$$

应该注意:(1) 牛顿第二定律仅对惯性系适用,所以在列出物体的运动方程时,必须用物体相对地面的加速度 a ,不能把物体的运动方程写为

$$N \sin \theta = m a_{0x}, \quad m g - N \cos \theta = m a_{0y}$$

(2) 当斜面相对地面作加速运动时,物体对斜面的正压力 $N \neq m g \cos \theta$.

[解法二] 以斜面为参照系 .

因为斜面相对地面作加速运动,所以它是非惯性系.物体 m 在非惯性系中运动,除了受到重力和斜面对它的支持力作用外,还受到惯性力的作用.而斜面在惯性系(地面上)中运动,仍以地面为参照系来研

究 这时物体 m 和斜面 m_0 的受力情况如图 1-21 所示 .

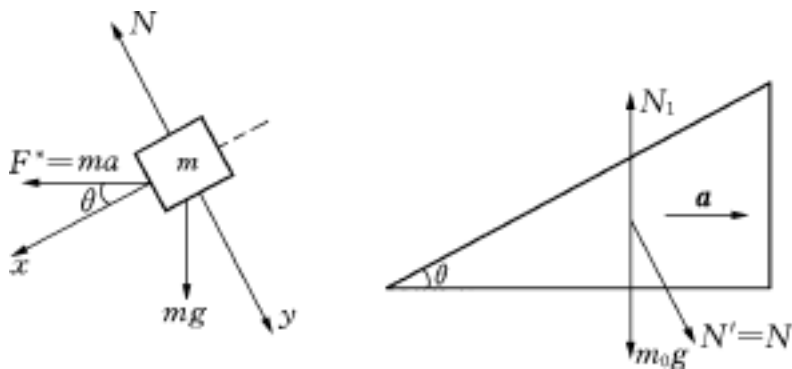


图 1-21

按图中所取的坐标系, 它们的运动方程为

$$m a \cos \theta + m g \sin \theta = m a_0 \tag{6}$$

$$m g \cos \theta - m a \sin \theta - N = 0 \tag{7}$$

$$N \sin \theta = m_0 a \tag{8}$$

联立式(6)、式(7)、式(8), 解得

$$N = \frac{m m_0 g \cos \theta}{m_0 + m \sin^2 \theta} \quad a_0 = \frac{(m_0 + m) g \sin \theta}{m_0 + m \sin^2 \theta}$$

$$a = \frac{m g \sin \theta \cos \theta}{m_0 + m \sin^2 \theta}$$

再把 a_0 和 a 代入式(4)和式(5), 得

$$a_x = \frac{m_0 g \sin \theta \cos \theta}{m_0 + m \sin^2 \theta} \quad a_y = \frac{(m_0 + m) g \sin^2 \theta}{m_0 + m \sin^2 \theta}$$

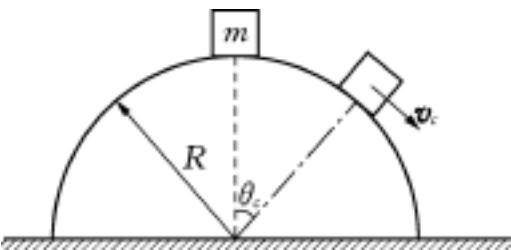


图 1-22

这样得到的结果与解法一完全相同 .

[例 1-6] 在半径 R 的光滑球面顶点处, 一质量为 m 的小物体由静止开始下滑 (如图 1-22), 半球面固定不动 . 问当 θ 角为多大时, 物体开始脱离半球面? 此时物体的速率 v_c 为多大?

[分析] 小物体在球面上运动仅受重力和球面的支持力, 利用牛顿定

律的切向方向分量式积分, 可求得物体运动的速率 $v = v(\theta)$; 由法向分量式可求支持力 $N = N(\theta)$, 从而得到支持力 N 与 θ 角关系 其次物体脱离半球面的条件是 $N = 0$, 由此可求 θ_c 和 v_c .

[解] 图 1-23 为小物体的受力图, 列出小物体的牛顿运动定律的切向和法向的分量式

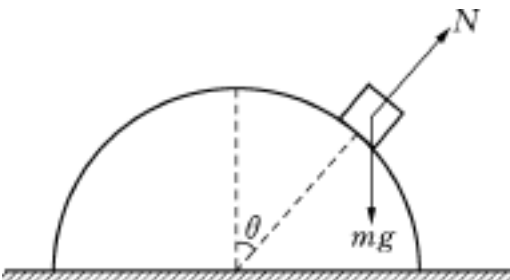


图 1-23

切向: $mg \sin \theta = m \frac{dv}{dt}$ (1)

法向: $mg \cos \theta - N = m \frac{v^2}{R}$ (2)

作积分变量替换 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{v}{R}$, 则式(1)可化为

$$mg \sin \theta = m \frac{dv}{d\theta} \frac{v}{R}$$

所以 $v dv = gR \sin \theta d\theta$

由初始条件: $\theta = 0, v = 0$ 积分上式

$$\int_0^v v dv = \int_0^\theta gR \sin \theta d\theta$$

$$v = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)} \quad (3)$$

将式(3)代入式(2)可得

$$N = mg \cos \theta - m \frac{2gR(1 - \cos \theta)}{R} = mg(3\cos \theta - 2)$$

由上式可看出,在物体下落过程中,随着 θ 的不断增大, N 值不断减少,当 $N = 0$ 时,物体脱离球面,即

$$mg(3\cos \theta_c - 2) = 0$$

$$\cos \theta_c = \frac{2}{3}$$

$$\theta_c = 48^\circ 12'$$

此时,由式(3)得物体脱离球面的速率

$$v_c = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta_c)} = \sqrt{\frac{2gR}{3}}$$

[例 1-7] 可以看作非弹性的金属小环组成的匀质链条,堆放在光滑的水平桌面上(其堆放体的体积可忽略不计),它的一端从光滑的小孔中由静止自由下落,没有进入小孔的链条在桌面上保持静止(图 1-24),试求下落的端点的运动方程。

[分析] 在链条下落过程中,其下落部分的质量是变化的,即 $m = \lambda y$, 式中 λ 是链条的线密度, y 是链条下落的长度。这是一个变质量的问题,在此类问题中牛顿定律需采用 $F = \frac{d}{dt}(\lambda y v)$ 的形式。

[解] 链条下落时仅受重力 $\lambda y g$ 的作用,且只有下落部分有加速度,所以根据牛顿定律

$$\lambda y g = \frac{d}{dt}(\lambda y v)$$

即 $\lambda y g = \lambda y \frac{dv}{dt} + \lambda v \frac{dy}{dt}$

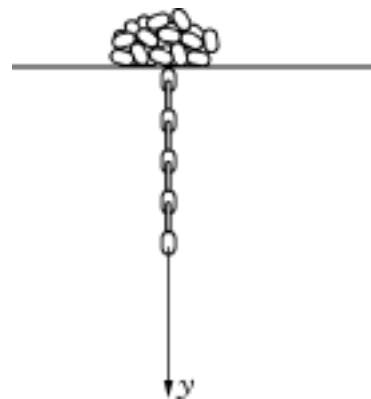


图 1-24

作变量代换

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy}$$

所以

$$yg = yv \frac{dv}{dy} + v^2$$

上式两边同乘以 $2y$ 化简得

$$2y^2 g dy = 2y^2 v dv + 2y v^2 dy$$

即

$$2y^2 g dy = d(y^2 v^2)$$

由题意 $y = 0$ 时, $v = 0$ 积分上式

$$\int_0^y 2y^2 g dy = \int_{0,0}^{y,v} d(y^2 v^2)$$

得

$$\frac{2}{3} y^3 g = y^2 v^2$$

即

$$v = \sqrt{\frac{2}{3} gy}$$

又

$$v = \frac{dy}{dt}, \text{ 因此}$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3} gy}$$

由题意 $t = 0$ 时, $y = 0$ 积分上式

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{3} gy}} = \int_0^t dt$$

则链条下落端点的运动学方程为

$$y = \frac{1}{6} gt^2$$

1.4 自测练习与能力训练

1.4.1 选择题

1. 一质点在平面上运动, 已知质点位置矢量的表达式为 $r = at^2 i + bt^2 j$ (其中 a, b 为常量), 则该质点作[] .

(A) 匀速直线运动

(B) 变速直线运动

(C) 抛物线运动

(D) 一般曲线运动

2. 对于沿曲线运动的物体, 以下几种说法中哪一种是正确的[] .

(A) 切向加速度必不为零

(B) 法向加速度必不为零(拐点处除外)

(C) 若物体作匀速率运动,其加速度必为零

(D) 若物体的加速度 a 为恒矢量,它一定作匀变速率运动

3. 质点作直线运动,速度 $v = 3t^2 - 12$ (SI), 则质点在时间 1 s ~ 3 s 内运动的路程为[] .

(A) 0 (B) 2 m (C) 6 m (D) 12 m

4. 两物体以相同的初速 v_0 作斜抛运动,物体 1 的抛角为 60° ,物体 2 的抛角为 45° ,这两抛物线最高点的曲率半径之比 $r_1 : r_2$ 应为[] .

(A) $1 : 2$ (B) $1 : \sqrt{2}$ (C) $2 : 1$ (D) $\sqrt{2} : 1$

5. 某人骑自行车以速率 v 向西行驶,风以相同的速率从北偏东 30° 方向吹来,人感到风吹来的方向是[] .

(A) 北偏东 30° (B) 北偏西 30° (C) 西偏南 30° (D) 南偏东 30°

6. 如图 1-25 所示,质量为 m 的小球,放在光滑的木板和光滑的墙壁之间,并保持平衡.设木板和墙壁之间的夹角为 α ,当 α 增大时,小球对木板的压力将[] .

(A) 增大 (B) 减少 (C) 不变

(D) 先是增加,后又减少,压力增减的分界角 $\alpha = 45^\circ$

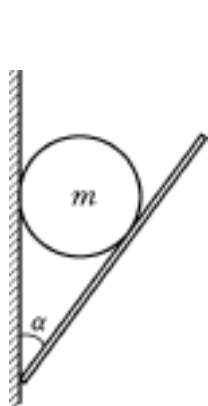


图 1-25

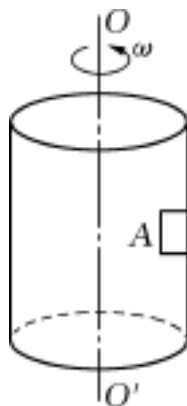


图 1-26

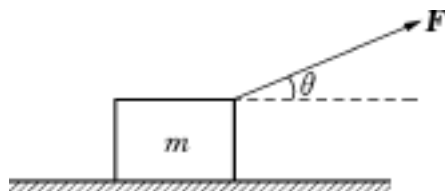


图 1-27

7. 如图 1-26 所示,竖立的圆筒形转笼,半径为 R ,绕中心轴 OO' 转动,物块 A 紧靠在圆筒的内壁上,物块与圆筒间的摩擦因数为 μ ,要使物块 A 不下落,圆筒转动的角速度 ω 至少应为[] .

(A) $\sqrt{\frac{\mu g}{R}}$ (B) $\sqrt{\mu g}$ (C) $\sqrt{\frac{g}{\mu R}}$ (D) $\sqrt{\frac{g}{R}}$

8. 平地上放一质量为 m 的物体,已知物体与地面之间的滑动摩擦因数为 μ ,在 F 力的作用下,物体向右运动,如图 1-27 所示.欲使物体具有最大的加速度,则力与水平方向夹角 θ 应符合[] 等式 .

(A) $\cos \theta = \mu$ (B) $\sin \theta = \mu$ (C) $\tan \theta = \mu$ (D) $\cot \theta = \mu$

转动,当光束与岸边成 60° 角时,光束沿岸边移动的速度 $v =$ _____.

5. 当一列车以 10 m/s 的速度向东行驶时,若相对于地面竖直下落的雨滴在列车上形成的雨迹偏离竖直方向 30° ,则雨滴相对于地面的速率是_____;相对于列车的速率是_____.

6. 质量 $m = 40 \text{ kg}$ 的箱子放在卡车的车箱底板上(见图 1-31),已知箱子与底板之间的静摩擦因数为 $\mu_s = 0.40$,滑动摩擦因数为 $\mu_k = 0.25$,试分别写出在下列情况下,作用在箱子上的摩擦力的大小和方向.

(1) 卡车以 $a = 2 \text{ m/s}^2$ 的加速度行驶, $f =$ _____,方向_____;

(2) 卡车以 $a = -5 \text{ m/s}^2$ 的加速度急刹车, $f =$ _____,方向_____.

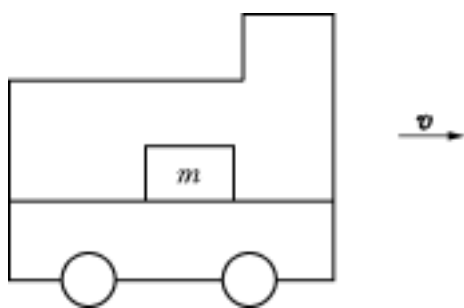


图 1-31

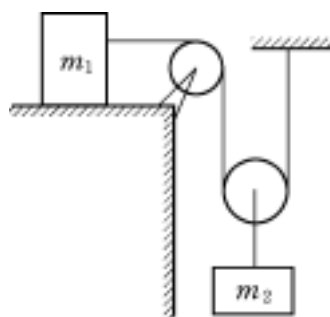


图 1-32

7. 图 1-32 中所示的装置中,略去一切摩擦力以及滑轮和绳的质量,且绳不可伸长,则质量为 m 的物体的加速度 $a_1 =$ _____.

8. 质量相等的两物体 A 和 B,分别固定在弹簧的两端,竖直放在光滑水平面 C 上,如图 1-33 所示,弹簧的质量与物体 A、B 的质量相比,可以忽略不计.若把支持面 C 迅速移走,则在移开的一瞬间,A 的加速度大小 $a_A =$ _____, B 的加速度的大小 $a_B =$ _____.

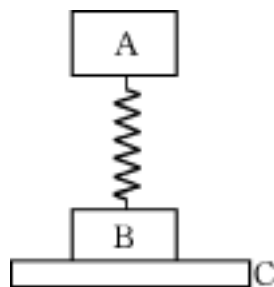


图 1-33

9. 一细绳长为 l ,一端固定,另一端悬挂一质量为 m 的重物,重物在竖直平面内左右摆动,其最大偏角为 _____,则物体在最大偏角时的切向加速度为_____,物体回到偏角为零的位置时绳子的张力为_____.

10. 一质量为 M 的质点沿 x 轴正向运动,假设该质点通过坐标为 x 时的速度大小为 kx (k 为正常量),则此时作用于该质点上的力 $F =$ _____,该质点从 $x = x_0$ 点出发运动到 $x = x_1$ 处所经历的时间 $t =$ _____.

1 4 3 计算题

1. 一质点在 xOy 平面上运动,已知 $t = 0$ 时, $x_0 = 5 \text{ m}$, $v_x = 3 \text{ m/s}$, $y = \frac{1}{3}t^3 + 3t - 4$ (以 m 为单位). (1) 写出该质点运动方程的矢量表示式; (2) 质点的

运动轨迹;(3)求质点在 $t = 1\text{ s}$ 和 $t = 2\text{ s}$ 时的位置矢量和这 1 s 内的位移;(4)求 $t = 4\text{ s}$ 时的速度和加速度.

2. 一质点从静止出发,沿半径 $R = 3\text{ m}$ 的圆周运动.切向加速度 $a_t = 3\text{ m/s}^2$,当总加速度与半径成 45° 角时,所经过的时间为多少?在上述时间内质点经过的路程为多少?

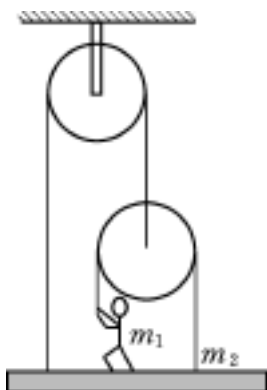


图 1-34

3. 一质量为 60 kg 的人,站在质量为 30 kg 的底板上,用绳和滑轮连接如图 1-34.设滑轮、绳的质量及轴的摩擦可以忽略不计,绳子不可伸长.欲使人和底板能以 1 m/s^2 的加速度上升,人对绳子的拉力多大?人对底板的压力多大?(取 $g = 10\text{ m/s}^2$)

4. 质量为 m 的子弹以速度 v_0 水平射入沙土中,设子弹所受阻力与速度反向,大小与速度成正比,比例系数为 k ,忽略子弹的重力,求:

- (1) 子弹射入沙土后,速度随时间变化的函数式;
- (2) 子弹进入沙土的最大深度.

5. 质量为 m 的小环穿在通过坐标原点并绕竖直 Oy 轴以匀角速度 ω 转动、形状为 $y = f(x)$ 的钢丝上,如果要使小环在钢丝上任何位置都能相对钢丝不动,求钢丝的形状及平衡时钢丝对小环的作用力.

6. 如图 1-35 所示,有一条长为 L 、质量为 M 的均匀分布的链条成直线状放在光滑的水平桌面上.链子的一端有极小的一段被推出桌子的边缘,在重力作用下从静止开始下落,试求:(1)链条刚离开桌面时的速度;(2)若链条与桌面有摩擦并设摩擦因数为 μ ,问链条必需下垂多长才能开始下滑?

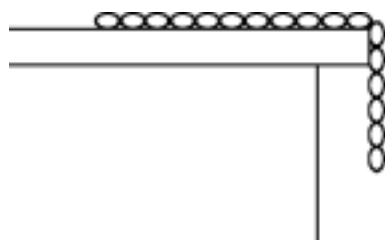


图 1-35

习题选解

[选择题 4]当质点作曲线运动时,其曲率半径可表示为 $\rho = \frac{v^2}{a_n}$;当物体作斜抛运动时,总加速度为 g ;当抛射体达到最高点时, $a_n = g$, $v = v_0 \cos \theta$,所以

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{(v_0 \cos 60^\circ)^2}{(v_0 \cos 45^\circ)^2} = \frac{1}{2}$$

[选择题 8]物体受 F 力、重力、摩擦力和地面支持力的作用,图 1-36 为受力图,根据牛顿运动定律可得 x 方向 $F \cos \theta - f_k = ma$

$$y \text{ 方向 } F \sin \theta + N - mg = 0$$

$$f_k = \mu N$$

$$\text{所以 } a = \frac{1}{m} (F \cos \theta - \mu mg + \mu F \sin \theta)$$

$$\text{通过对加速度求极值, 即令 } \frac{da}{d\theta} = 0$$

$$\text{可得 } \tan \theta = \mu$$

注意: 用一阶及二阶导数求极值是高等数学教给我们的方法, 在大学物理的学习中尽可能使用, 以便进一步体会数学在实际问题中的应用.

[选择题 10] 由受力分析(图 1-37)可知, 物块满足的牛顿定律的方程为

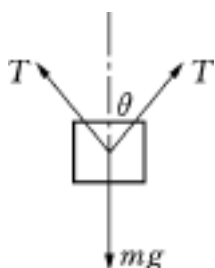


图 1-37

$$2T \cos \theta - mg = ma$$

因为 T 不变, 随物体上升而变大, 所以加速度减小, 速度仍增加. 本题也可模仿例 3 岸上拉船用几何关系推断, 你尝试过了吗?

[填空题 4] 光束在岸边的位移为 x , 找出 x 和 l 的关系(图 1-38)

$$x = l \tan \theta$$

所以

$$v = \frac{dx}{dt} = (l \tan \theta) = l \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = l \sec^2 \theta \omega$$

$$\text{当 } \theta = 30^\circ \text{ 时, } v = \frac{200}{9} \text{ (m/s)}$$

[填空题 7] 本题是典型的牛顿定律应用题, 方法——隔离体法, 图 1-39 就是受力图, 由此可列方程

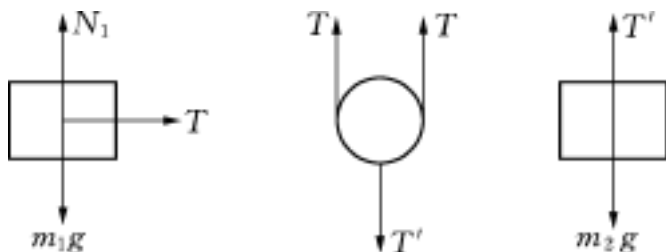


图 1-39

$$m_1: T = m_1 a$$

$$N_1 = m_1 g$$

$$m_2: m_2 g - T = m_2 a$$

$$T = 2T'$$

$$a_1 = 2a$$

联立方程可得

$$a = \frac{2m_2 g}{m_2 + 4m_1}$$

[计算题 5] 把小环作为研究对象, 受力分析如图 1-40.

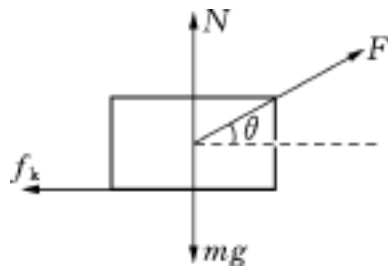


图 1-36

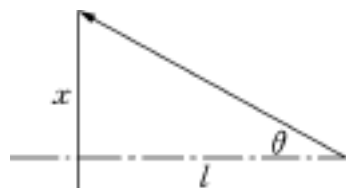


图 1-38

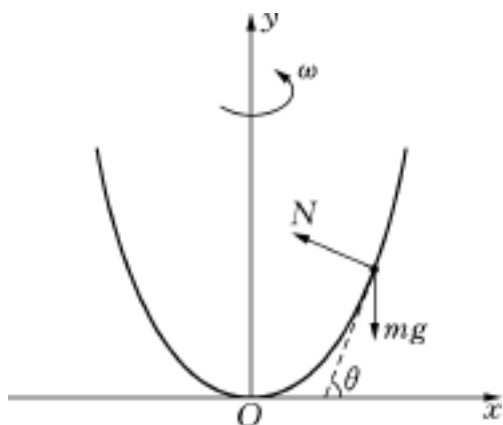


图 1-40

$$x: -N\sin\theta = -m\omega^2 x$$

$$y: N\cos\theta - mg = 0$$

$$\text{两式相除得 } \tan\theta = \frac{x\omega^2}{g}$$

$$\text{又 } \tan\theta = \frac{dy}{dx}$$

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = \frac{x\omega^2}{g}$$

$$\int_0^y dy = \int_0^x \frac{x\omega^2}{g} dx$$

得

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2$$

$$N = \frac{mg}{\cos\theta} = mg \sqrt{1 + \tan^2\theta} = mg \sqrt{1 + \frac{\omega^4}{g^2} x^2}$$

[计算题 6] 设链条的线密度为 λ , 在 t 时刻下垂 x 长, 链条加速度的大小为 a

$$(1) \quad xg - T = \lambda x a$$

$$T = (\lambda(L - x)a)$$

$$\text{所以 } a = \frac{dv}{dt} = \frac{x}{L} g$$

$$\text{又 } \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = \frac{x}{L} g$$

$$\int_0^v v dv = \int_0^L \frac{x}{L} g dx$$

$$v = \sqrt{gL}$$

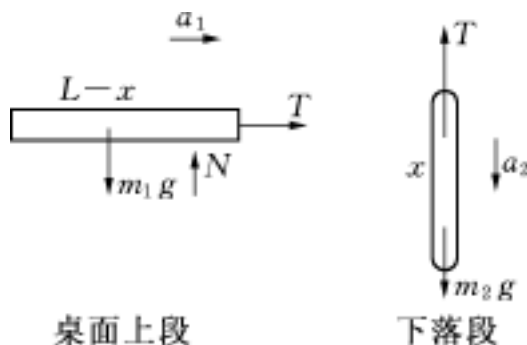


图 1-41

(2) 设当下垂长度为 d 时链条开始下滑,

$$\text{下落段: } xg - T = \lambda x a \quad (1)$$

$$\text{桌面段: } T - \mu(\lambda(L - x)g) = (\lambda(L - x)a) \quad (2)$$

$$\text{联立式(1)、(2)得 } a = \frac{g}{L} [(1 + \mu)x - \mu L]$$

要下落必须 $a \geq 0$, 所以 $(1 + \mu)x - \mu L \geq 0$, 即

$$d \geq \frac{\mu L}{1 + \mu}$$

守恒定律

2.1 基本要求与复习框图

1. 基本要求

(1) 准确理解功的概念,能计算变力的功 理解保守力做功的特点及势能的概念,会计算常见力的势能函数 .

(2) 掌握动能定理、功能原理和机械能守恒定律,掌握运用守恒定律分析问题的思想和方法 .

(3) 确切理解动量、冲量和角动量的概念,掌握动量定理和动量守恒定律、角动量定理和角动量守恒定律,并能熟练应用;了解碰撞的特点 .

(4) 了解质心的概念和质心运动定律 .

牛顿运动定律阐明了力的瞬时作用规律,即在外力的作用下,物体的运动状态将要发生变化 .至于如何变化,改变的量为多少,则取决于力作用在物体上的累积,包括时间和空间 .原则上讲经典力学的问题都可以通过牛顿运动定律来研究解决 .然而当问题比较复杂,尤其是有些相互作用不是十分清楚时,利用本章的基本原理和守恒定律,往往会使问题迎刃而解,这就是学习本章内容的主要目的之一 .

力对空间的累积作用用功来描述,力对时间的累积可用冲量或冲量矩来描述,由牛顿第二定律可分别导出质点的动能定理和动量定理以及角动量定理 .进一步分析可知,有些力做功与所经历的路径无关,由此引入保守力及势能的概念 .在将质点的动能定理向质点系推广中,可将质点系的内力划分成保守力和非保守力,这样就可得到质点系的功能原理,即外力和非保守内力所做的功等于系统机械能的改变 .在一定的条件下,质点系的机械能会守恒 .同样在外力或外力

矩为零的情况下,动量或角动量也将守恒。

机械能守恒、动量守恒和角动量守恒是力学中的三大守恒定律。虽然它们都是以牛顿定律为依据而得出的推论,却更深刻地反映了运动的内在规律性,而且在牛顿定律不适用的领域,例如微观粒子及高能物理等领域,它们仍然成立。图 2-1 为本章由学习线索连成的复习框图。

2. 复习框图

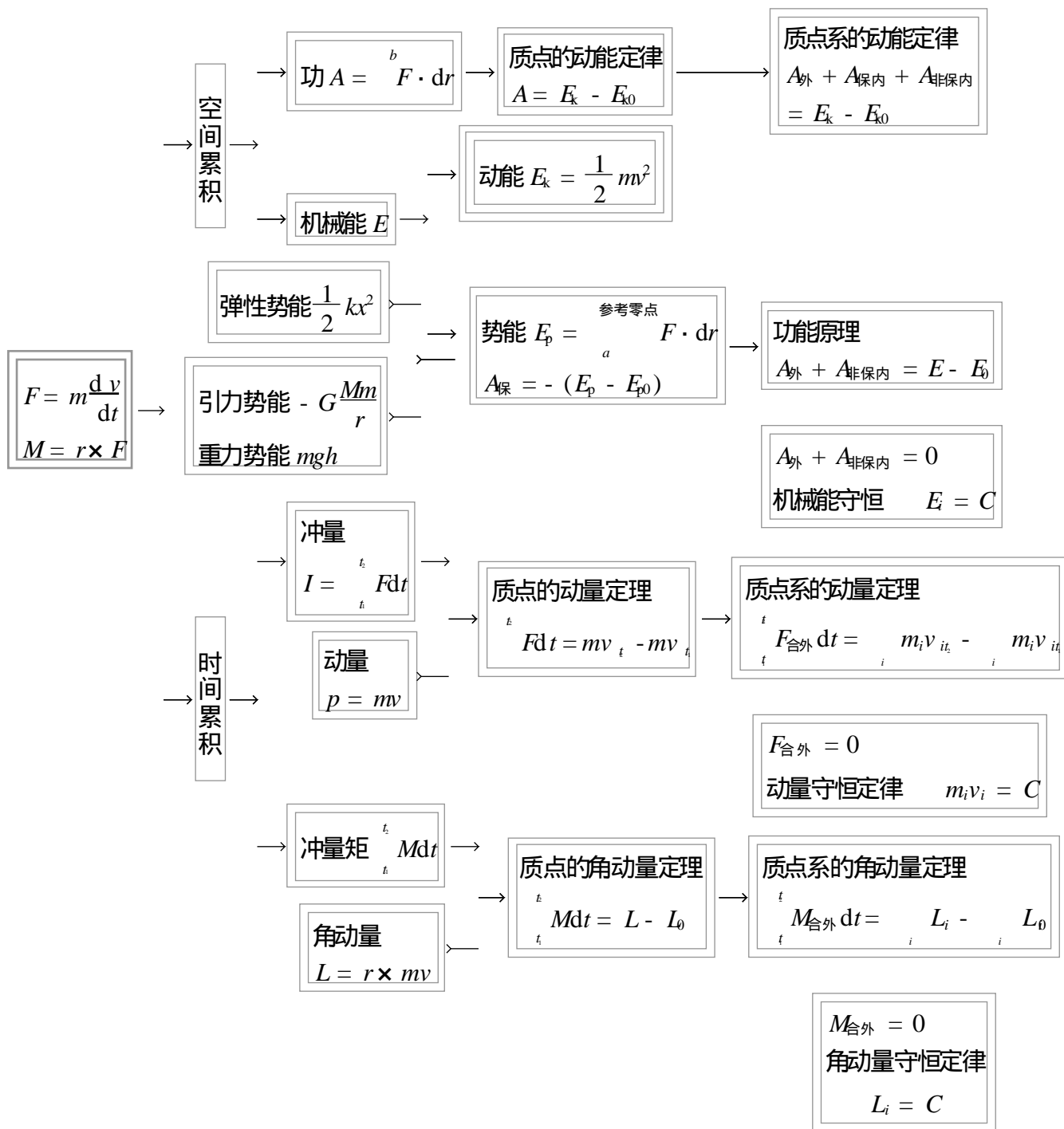


图 2-1

2.2 阅读指导与问题讨论

1. 保守力和势能

按力做功的特点,力有保守力和非保守力之区别.凡是做功只与物体的始末位置有关,而与路径无关的就是保守力.反映保守力做功特点的数学表达式为

$$\oint_l F \cdot dr = 0$$

其物理意义是:保守力沿任意闭合路径一周所做的功为零.

保守力的功与势能的关系是

$$A = - \Delta E_p = - (E_p - E_{p0})$$

即系统内保守力所做的功等于系统势能增量的负值,式中 E_{p0} 为始态势能, E_p 为末态势能.

势能的计算可在空间设一参考点为零势能,再根据上式计算,即

$$E_{pa} = \int_a^{\text{参考零点}} F \cdot dr$$

需要指出的是

(1) 势能是坐标的函数,亦即状态函数.

(2) 势能具有相对性,其值和势能零点的选择有关.但势能的差值是绝对的,它是保守力作功的量度.由此可计算保守力所做的功.

例如万有引力是常见的保守力,取无穷远处为引力势能的零点时,势能为

$E_p = - G \frac{Mm}{r}$.若取地球表面为势能的零点,则

$$\begin{aligned} E_{pa} &= \int_r^R - G \frac{mM}{r^2} dr \cdot (-dr) \\ &= \int_r^R - G \frac{mM}{r^2} dr = GMm \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right] \end{aligned}$$

显然参考零点不同,势能函数的表达式也不同.若质点从地面上升到距地球表面 $2R$ 处,则地球引力对其所做的功可用两种势能的表达式来计算

$$A_{ab} = E_{p0} - E_p = - G \frac{Mm}{R} - \left[- G \frac{Mm}{3R} \right] = - G \frac{2Mm}{3R}$$

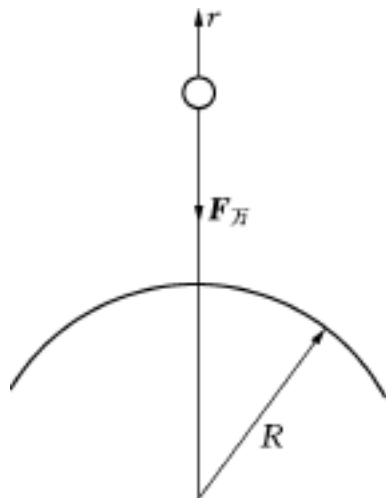


图 2-2

或

$$\begin{aligned} A_{ab} &= E_{p0} - E_p = GMm \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R} \right] - GMm \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{3R} \right] \\ &= -G \frac{2Mm}{3R} \end{aligned}$$

由此可见势能的差值是相同的。

(3) 势能属于系统.重力势能属于地球和物体所组成的系统,通常为叙述上的简便,才说成物体的重力势能。

[问题 2-1] 有人认为“作用力的功与反作用力的功总是大小相等,符号相反”,这一结论是否正确?

[解答] 作用力和反作用力是大小相等、方向相反的一对力,但它们作用在不同的物体上,在相同的时间内,它们的位移不一定相同,因此它们所做的功也不一定相同。

若作用力和反作用力处于系统中,称为内力.如何简便地判断一对内力的功?可以证明:一对内力的功为 $dA_{ij} = f_{ij} \cdot dr_{ij}$, 式中 dA_{ij} 为一对内力的功, f_{ij} 为内力, dr_{ij} 为内力所作用物体的相对位移.例如物块从光滑的三角形滑块上下滑,如图 2-3 所示.在整个运动过程中,物块给滑块的正压力和滑块给物块的支持力是一对作用力和反作用力,它们分别做功,但其功之和却为零.因为正压力始终和它们的相对位移垂直,即

$dA_{NN} = N \cdot dr_{mM} = 0$.

进一步观察可以发现我们所求的万有引力的功,其实也是一对作用力和反作用力的功,即假定地球不动,位移就是它们的相对位移.在此我们就可以深刻理解“势能是物体系共有的”含义。

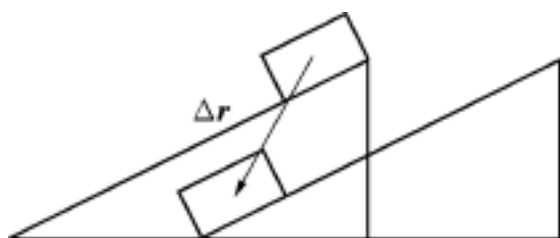


图 2-3

2. 系统的选择

在求解题目时,同学常常会为究竟采用何种公式而感到困惑.其实公式的采用与你选择的系统有关,不同的研究系统,不一样的受力情况,必定会遵循不同的运动规律.若在解题时,选择一个合适的系统,就会产生事半功倍的效果。

[问题 2-2] 一根弹簧原长 L_0 ,倔强系数为 k ,下端悬挂一质量为 m 的物体,物体从弹簧原长静止开始运动,根据不同的研究系统,求弹簧的最大伸长量。

规定研究对象:(1)物块,(2)物块、弹簧,(3)物块、弹簧、地球

[解答] (1) 物体受重力、弹力作用,它们均为外力,可用动能定理计算.在弹簧原长处建立坐标,如图 2-4 所示.设最大伸长位置为重力势能的零点,弹簧原长为弹性势能的零点,同时注意到最大伸长量时,物体的速度为零.所以物体满足方程式为

$$A_{\text{重}} + A_{\text{弹}} = 0 - 0$$

其中 $A_{\text{重}} = mgx_m$, $A_{\text{弹}} = 0 - \frac{1}{2} kx_m^2$

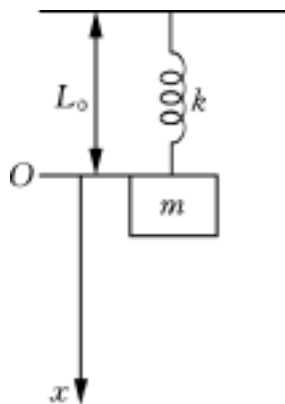


图 2-4

(2) 物体受重力及外界对弹簧的拉力作用,拉力没有位移,不做功.内力为弹力(保守力),所以可根据功能原理列出方程式

$$A_{\text{重}} = E - E_0 = \left[0 + \frac{1}{2} kx_m^2 \right] - 0$$

(3) 物体仅受外界对弹簧的拉力作用,拉力没有位移,不做功.内力为重力和弹力,均为保守力,所以系统机械能守恒

$$0 + mgx_m + 0 = 0 + 0 + \frac{1}{2} kx_m^2$$

从上面的例子可以看出,解题前一定要明确你选择了哪个系统,该系统的内外力是什么,最后再根据其力的性质,列出符合条件的方程式.

本题也可用牛顿定律求解,但需积分一次,将加速度化为速度,同学可自己练习一下.

3. 动量定理和动量守恒

(1) 动量定理是一个矢量式,在实际应用时要注意矢量性,即方向性.在解题时可充分利用矢量的合成和分解.

(2) 动量守恒的条件是 $F_{\text{合外}} = 0$,然而,像碰撞、打击、爆炸等一类问题,其相互作用的内力往往比一般外力(如摩擦力、重力等)要大得多,这时外力可以忽略不计,所以也可认为动量守恒.

(3) 动量定理和动量守恒仅在惯性参照系中成立.

[问题 2-3] 某物体作匀速圆周运动,有人认为,物体运动一周,向心力的冲量

$$F t = m^2 R \frac{2}{\omega} = 2 m R$$

式中, m 为物体的质量, ω 为角速度, R 为圆周的半径.此说法是否正确?为什么?

[解答] 此说法不正确.错误的原因在于他把向心力看作恒力 $F = m^2 R$, 忘记了向心力的方向在不断地改变,忽略了其矢量性.若按图 2-5 建立坐标,向心力的表达式为

$$F = -m^2 R \cos \omega t i - m^2 R \sin \omega t j$$

因此,物体运动一周向心力的冲量为

$$I = \int_0^{2\pi/\omega} F dt = \int_0^{2\pi/\omega} (-m^2 R \cos \omega t i - m^2 R \sin \omega t j) dt = 0$$

冲量的大小和方向是由这段时间内所有微分冲量 $F dt$ 的矢量和所决定的.

有人认为既然 $I = 0$, 那么作匀速圆周运动的质点应动量守恒.这一结论也是错误的,因为质点在任意时刻的动量大小不变,但方向在随时改变.所以切记动量守恒的条件是任意时刻系统的合外力等于零,而不是冲量为零.

[问题 2-4] 在图 2-6 装置中,当释放物体 m 时,物体 m 与物体 M 之间将发生一次冲击,在这过程

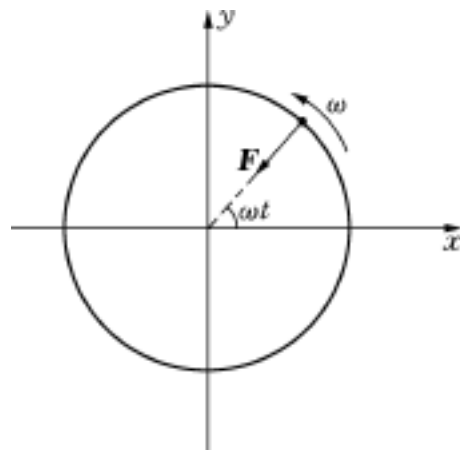


图 2-5

中, m 和 M 组成的系统动量是否守恒? (设滑轮的质量不计, 摩擦不计)

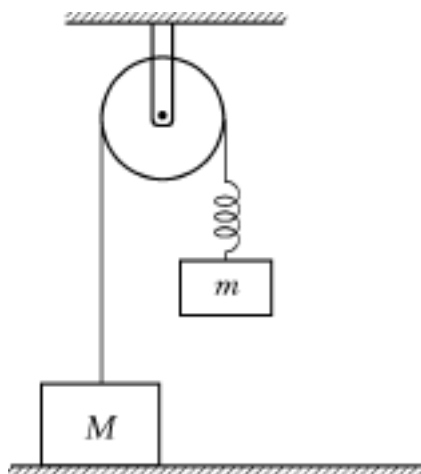


图 2-6

[解答] 当 m 下落到绳子被拉紧的瞬间, M 被带动一起运动, 这类似于碰撞过程, 因作用时间极短, 可略去重力的作用, 所以系统动量守恒.

[问题 2-5] 一小车在光滑的水平直线轨道上行驶, 列车质量为 m_1 , 速度为 v , 如在车上将一质量为 m_2 的物体以相对于车为 u 的速率抛出, 抛出的方向与车速方向相同, 问车速变化了多少? 有人用下列方法求解, 他取地面为参照系, 以物体和列车为研究系统, 设物体抛出时, 小车的速度变为 v , 用动量守恒定律得

$$(m_1 + m_2)v = m_1 v + m_2(u + v) \quad (1)$$

解出

$$v = \frac{m_1 v - m_2 u}{m_1}$$

故得小车速度变化

$$\Delta v = v - v = -\frac{m_2}{m_1} u$$

即小车的速度减少了 $\frac{m_2}{m_1} u$ 请指出这种解法错在哪里?

[解答] 以上解法的错误在于把物体抛出瞬时相对地面的动量写为 $m_2(u + v)$. 因为物体脱离车瞬时, 车速已变为 v , 所以这时物体相对地面的动量应为 $m_2(u + v)$, 而不是 $m_2(u + v)$ (参见图 2-7).

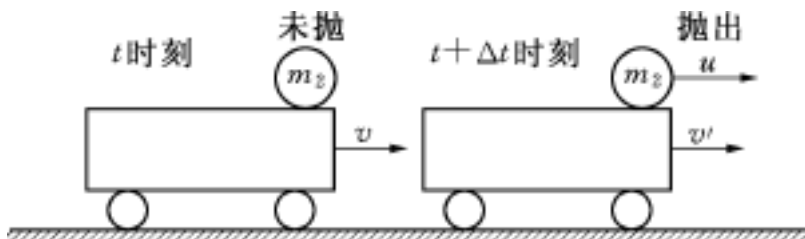


图 2-7

应用动量守恒定律时, 应注意动量守恒表示式的一边是体系在 t 时刻的动量而另一边应该是体系在 $t + \Delta t$ 时刻的动量. 但上面的动量守恒式(1)的右边第一项 $m_1 v$ 是车在 $t + \Delta t$ 时刻的动量, 而第二项 $m_2(u + v)$ 却不是物体在 $t + \Delta t$ 时刻的动量.

按以上的分析, 动量守恒式(1)应写为

$$(m_1 + m_2)v = m_1 v + m_2(u + v) \quad (2)$$

解得

$$v = \frac{(m_1 + m_2)v - m_2 u}{m_1 + m_2}$$

小车速度变化

$$\Delta v = v - v = -\frac{m_2 u}{m_1 + m_2}$$

负号表示物体抛出后车子的速度减小了.

4. 碰撞

碰撞是指当两个质点或两个物体相互接近时,在较短的时间内通过相互作用后,它们的运动状态发生了显著变化的现象.在宏观世界里,碰撞意味着两个物体的直接接触.这种碰撞的特点是,相碰物体的接触时间很短,接触时的相互作用比较强烈.因此,在接触的过程中可以忽略外力的作用,可以认为两物体系统的总动量守恒.

牛顿总结了各种碰撞实验的结果,引进了恢复系数 e , 它定义为

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$

其中 v_{10} 、 v_{20} 为两物体碰撞前的速度, v_1 、 v_2 为两物体碰撞后的速度.恢复系数表征了碰撞中能量耗散的程度,若碰撞过程中两物体的动能守恒,则碰撞前后的相对速度相同,即 $v_2 - v_1 = v_{10} - v_{20}$, 它们的恢复系数为 1,称为完全弹性碰撞.与此相反的极端情况是,碰撞后两物体不再分离,即 $v_2 - v_1 = 0$, 它们的相对动能在碰撞过程中全部耗散掉了,它们的恢复系数也就为 0,称为完全非弹性碰撞.一般的碰撞为非完全弹性碰撞,它们的恢复系数 $0 < e < 1$.

现代物理学所研究的碰撞问题大多是微观粒子之间的碰撞,这时粒子间的相互作用是非接触作用.例如,分子或原子相互接近时,由于双方很强的相互斥力,迫使它们在接触前就偏离了原来的运动方向而分开,这通常称为散射.在微观物理学中,粒子之间的相互作用十分复杂,而且往往不能直接观测,人们主要是通过各种类型的散射实验来研究粒子之间的相互作用,以及它们的内部结构.

[问题 2-6] 在液氢泡沫室中,入射质子自左方进入,并与室内的静止质子相互作用,则碰撞后两个质子将如何离开?

[解答] 这里所涉及的是不对心的完全弹性碰撞问题,碰撞过程应满足动量守恒和能量守恒.假设两个质子的质量都为 m ,碰撞前, v_{10} 一定, $v_{20} = 0$; 碰撞后,两个质子的速度分别为 v_1 和 v_2 ,根据动量守恒定律

$$mv_{10} = mv_1 + mv_2$$

根据能量守恒定律

$$\frac{1}{2}mv_{10}^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

可以得到速度矢量之间的关系式

$$v_{10} = v_1 + v_2 \quad (1)$$

$$v_{10}^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad (2)$$

将式(1)的两边平方,可得

$$v_{10}^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 \cdot v_2 \quad (3)$$

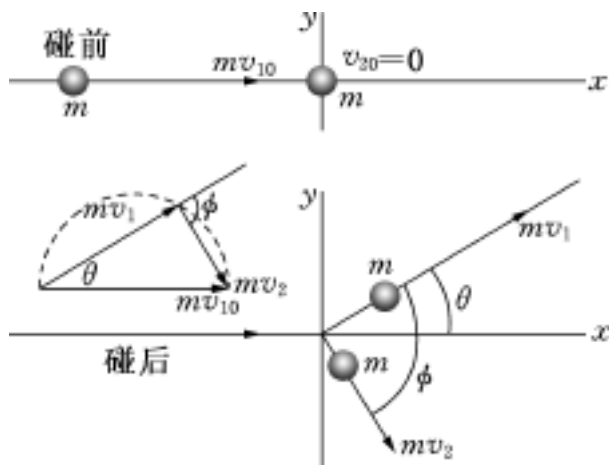


图 2-8

比较式(2)、式(3)可以得到

$$v_1 \cdot v_2 = 0$$

即两粒子相互垂直地离开.本问题也告诉我们,在具体讨论碰撞问题时,不必急于写成分量形式,有时直接应用动量和能量守恒的矢量表达式更为简便.其次从式(1)、式(2)中直接可以看出, v_{10} 、 v_1 和 v_2 三个矢量组成一个直角三角形,如图 2-8 所示, v_1 和 v_2 为两直角边,也表明两粒子相互垂直地离开,因此通过矢量图来分析问题也是常用的便捷的方法.

5.角动量定理和角动量守恒

质点的角动量定律可以写成

$$\int_{t_1}^{t_2} M dt = L_2 - L_1$$

式中 $\int_{t_1}^{t_2} M dt$ 是作用在物体上的冲量矩, L 是角动量,其表式的物理意义是,作用于物体上的冲量矩等于角动量的增量.若作用于物体的合外力矩 $M = 0$,则角动量守恒,即 $L = \text{常矢量}$.若对质点系而言,可以证明:一对内力矩的矢量和为零.所以质点系的角动量守恒的条件为 $M_{\text{合外}} = 0$.在应用角动量定律时要注意力矩 M 和角动量 L 必须对同一个参考点而言.

有人认为有关角动量定律仅在物体作曲线运动时产生,其实并非如此.当物体作直线运动时,也可利用角动量定律来研究问题.例如:两个质量为 m 的小孩分别抓住绳子的一端,一个向上爬,一个不动,摩擦忽略不计.问谁先到达滑轮上?我们以两小孩、绳子和滑轮为系统,选择滑轮的支点 O 为固定点,整个系统仅有外力矩——重力矩,且大小相等,方向相反.根据角动量定律

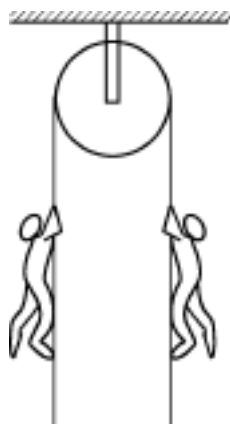


图 2-9

$$\int_0^t M dt = L - L_0 = 0$$

又小孩由静止开始往上爬, $L_0 = 0$,

所以 $m v_1 R - m v_2 R = 0$

因此 $v_1 = v_2$, 两小孩同时到达滑轮.

[问题 2-7] 一质量 m 的质点作如图 2-10 所示的圆锥摆运动,若质点的速率为 v ,圆的半径为 R ,锥角为 θ ,则对圆心 O 和悬点 A ,质点的角动量是否守恒?

[解答] 质点在整个运动中只受到重力和绳子张力的作用,在图示 2-10 状态对 O 点而言,重力矩

$M_{\text{重}} = R \times mg$

即 $M_{\text{重}} = Rmg \sin \frac{\pi}{2} = Rmg$ 方向向外

张力矩 $M_{\text{张}} = R \times T$

即 $M_{\text{张}} = RT \sin \left[\frac{\pi}{2} + \right] = RT \cos$ 方向向内

又 $mg = T \cos$

所以 $M_{\text{张}} = RT \cos = Rmg = M_{\text{重}}$

即关于 O 点角动量守恒,其值为 $L = R \times mv$, 方向向上.

同理,对悬点 A 而言重力矩 $M_{\text{重}} = l \times mg$

即 $M_{\text{重}} = lmg \sin$ 方向向外

张力矩 $M_{\text{张}} = l \times T$

即 $M_{\text{张}} = lT \sin = 0$

由于 $M_{\text{重}} \neq M_{\text{张}}$, 所以角动量不守恒,其值为 $L = l \times mv$, 大小为 $L = mv \frac{R}{\sin}$, 方向如图 2-10 所示 大家可以看到质点在作圆锥摆运动时,对 A 点的角动量的方向随时在变.

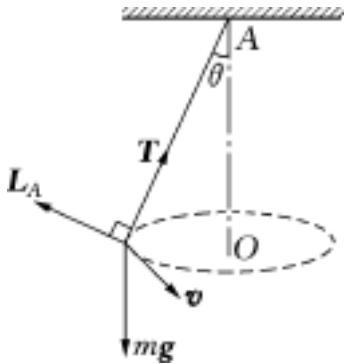


图 2-10

2.3 解题方法与典型例题

守恒定律解题主要针对一个比较复杂的综合过程,而且往往要求的未知量较多,需要同时采用多个守恒定律.研究这类比较复杂的综合问题的基本方法和步骤主要有:

- (1) 分析综合问题中包含哪几个物理过程;
- (2) 根据各过程的特点,选取合适的研究对象并进行受力分析,应用适当的守恒定律列出运动方程;
- (3) 找出各过程的联系,联立方程求出未知量.

[例 2-1] 传送机通过滑道将长为 L 质量为 m 的柔软匀质物体以初速 v_0 向右送上水平台,物体前端在台面上滑动 s 距离后停下来,如图 2-11 所示.已知滑道上的摩擦可不计,物体与台面间的摩擦因数为 μ ,且 $s > L$, 试计算物体的初速度 v_0 .

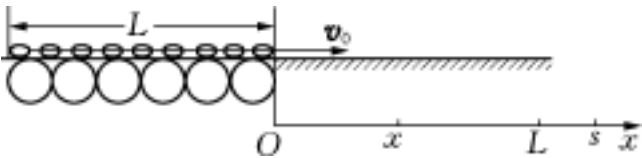


图 2-11

[分析] 这是一个涉及到变力做功的问题,由于物体在整个运动中重力、台面支持力不做功,物体对台面的压力可以认为与滑上台面的质量成正比,由此可计算摩擦力及其所做的功,再根据动能定理即可求解.

[解] 设物体在完全滑上台面前后摩擦力的函数关系为

$$f = \begin{cases} \mu \frac{m}{L} g x & 0 \leq x \leq L \\ \mu mg & L \leq x \leq s \end{cases}$$

其中 x 为物体前端的坐标.

物体滑动 s 距离, 摩擦力做功为

$$A = \int F \cdot dx = - \int f dx = - \left[\int_0^L \mu \frac{m}{L} g x dx + \int_L^s \mu mg dx \right] = - \mu mg \left[s - \frac{L}{2} \right]$$

根据动能定律可得

$$- \mu mg \left[s - \frac{L}{2} \right] = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

解得物体的初速度

$$v_0 = \sqrt{2\mu g(s - L)}$$

[例 2-2] 一质量为 m 的小球在高为 h 的平台上以速度 v_0 水平抛出. 小球落地时与光滑地面发生碰撞, 碰后又弹回到原来的高度, 如图 2-12 所示. 设碰撞时间为 t , 求地面受到的平均冲力.

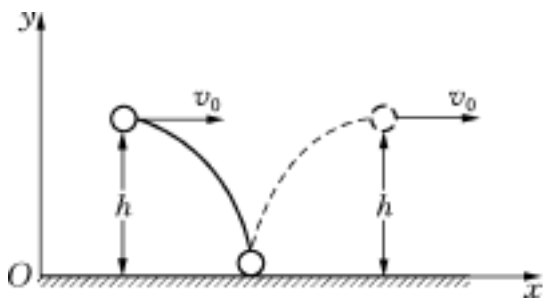


图 2-12

[分析] 这是典型的撞击问题. 求解这类题目的关键在于弄清撞击时, 有哪些力的作用, 并注意质点运动方向的矢量分析, 而后, 用冲量定理即可. 由于在撞击中, 作用力一般是变力, 我们也常常用平均作用力来描述, 即 $\int_0^t F dt = \bar{F} t$.

[解] 取小球和地面碰撞的过程为我们研究的物理过程. 以小球为研究对象.

小球在碰撞时, 受重力 mg 和地面给它的平均冲力 N 的作用. 设小球碰撞前的速度为 v , 碰撞后的速度为 v' 并如图 2-12 选取坐标系.

由动量定理可知:

$$I_x = mv'_x - mv_x, \quad I_y = mv'_y - mv_y$$

因小球作平抛运动, 根据已知条件

$$I_x = 0, \quad I_y = (N - mg) t$$

$$v_y = \sqrt{2gh}, \quad v'_y = -\sqrt{2gh}$$

把这些关系代入动量定理的表示式

$$(N - mg) t = m \sqrt{2gh} - (-m \sqrt{2gh})$$

解上式得地面对小球的平均冲力

$$N = \frac{2m \sqrt{2gh}}{t} + mg$$

N 为正值,说明平均冲力 N 的方向与 y 轴一致,即竖直向上.

由牛顿第三定律可知,小球给地面的平均冲力

$$N = N = \frac{2m\sqrt{2gh}}{t} + mg$$

N 的方向与 N 相反,为竖直向下方向.

从上式还可以看出,当碰撞时间 t 很短时,地面受到的冲力很大 重力的影响可忽略.

[例 2-3] 一质量为 M 倾角为 θ 的斜面,放在光滑水平面上,物体 m 从高为 h 处由静止开始无摩擦地下滑,如图 2-13 求物体 m 从 h 处滑到底端这一过程中,对斜面做的功及斜面后退的距离.

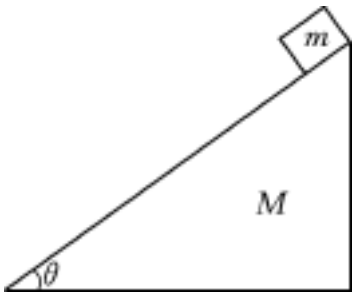


图 2-13

[分析] 在整个运动过程中,物块受到重力和斜面的支持力,斜面受到重力、地面的支持力和物块给斜面的正压力,其中斜面的给物块支持力和物块给斜面的正压力是一对作用力和反作用力,其功之和为零.(见问题 2-1)而其他力均沿着竖直方向,且系统力的矢量和不等于零,但地面的支持力不做功.由此可知, m 、 M 组成的系统,水平方向动量守恒,其次运动过程仅有重力做功,系统机械能守恒.

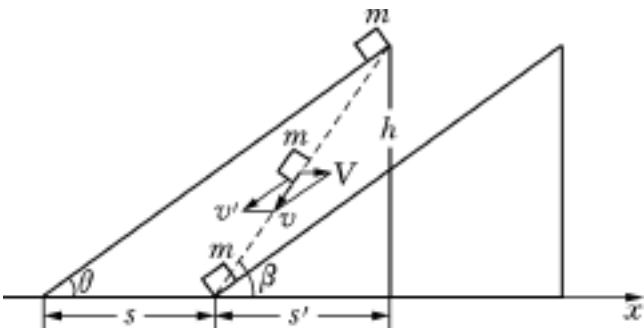


图 2-14

[解] 设 v 为 m 的速度, V 为 M 的速度,二者的速度关系如图 2-14 所示,选地面为重力势能零点,

水平方向动量守恒

$$mv_x - MV = 0 \tag{1}$$

系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = mgh \tag{2}$$

根据伽利略的速度变换式 $v_{m地} = v_{mM} + V_{M地}$

$$v_x = v_{mM}\cos\theta - V \tag{3}$$

$$v_y = v_{mM}\sin\theta \tag{4}$$

根据动能定律,物体对斜面做的功

$$A = \frac{1}{2}MV^2 \tag{5}$$

联立式(1)、(2)、(3)、(4)和式(5)可得

$$A = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{Mm^2gh\cos^2\theta}{(M+m)(M+m\sin^2\theta)}$$

由式(1)、(3)知

$$m(v_{mM}\cos\theta - V) - MV = 0$$

即

$$V = \frac{mv_{mM}\cos\theta}{m+M}$$

$$\text{斜面后退的距离 } s = \int_0^t V dt = \frac{m \cos \theta}{m + M} \int_0^t v_{mM} dt = \frac{m \cos \theta}{(m + M) \sin \theta} h = \frac{m \cot \theta}{m + M} h$$

这里需要注意两点:

(1) 动量守恒仅对惯性系成立, 不能将式(1)写成 $mv \cos \theta - MV = 0$, 因为 $v_{m\text{地}}$ 的水平夹角不是 θ .

(2) 求距离不能将式(1)两边同乘时间得到, 必须积分, 因为在 m 下滑的过程中 $v_{m\text{地}}$ 、 V 均为变速率. 同时我们应该注意到在任一时刻式(1)都是成立的, 这就是动量守恒的物理意义.

[例 2-4] 如图 2-15 所示, 一轻质弹簧, 其弹性系数为 k , 竖直地固定在地面上. 在弹簧上连接一水平的钢板, 质量为 m_0 . 质量为 m ($m \ll m_0$) 的小球从钢板正上方 h 处自由落下, 与钢板发生完全弹性碰撞. 求由碰撞使弹簧得到的最大压缩量.

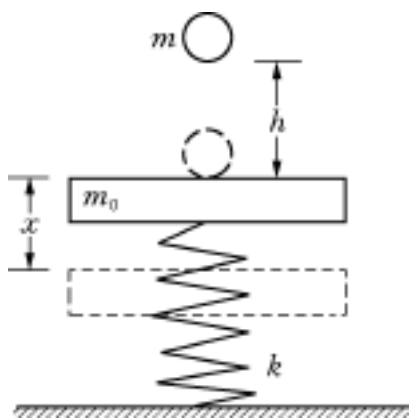


图 2-15

[分析] 碰撞是力学中常常遇到的问题, 正确分析出碰撞及前后各物理过程, 寻找各过程的相互联系是解题的关键所在.

[解] 小球落下后与钢板碰撞, 并使弹簧压缩这一问题可分为三个过程来讨论.

第一过程: 从小球落下到它与平板相碰的前一瞬时. 我们取小球和地球组成的系统为研究对象. 因为小球自由落下, 所以系统不受外力作用, 重力是保守内力. 因此, 这阶段系统的机械能守恒. 所以有

$$mgh = \frac{1}{2} mv_0^2 \quad (1)$$

式中, v_0 为小球和钢板碰撞前一瞬时的速度. 由式(1)可得

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

第二过程: 小球和钢板发生完全弹性碰撞. 取小球和钢板组成的系统为研究对象. 这过程从小球以速度 v_0 和静止的钢板相碰开始到各自取得一定的速度为止. 这段时间是极短的. 在碰撞瞬间相互作用的内力远大于外力(小球的重力). 故系统动量守恒, 即

$$mv_0 = mv + m_0 v \quad (2)$$

又因碰撞是完全弹性的, 故系统的动能守恒. 所以有

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (3)$$

式中, v 和 v 分别为碰撞后小球和钢板的速度. 联立式(1)、式(2)和式(3)解得

$$v = -\frac{m_0 - m}{m_0 + m} \sqrt{2gh} \quad (\text{方向向上})$$

$$v = \frac{2m}{m_0 + m} \sqrt{2gh} \quad (\text{方向向下}) \quad (4)$$

第三过程: 从碰撞后钢板得到速度 v 开始向下运动直到弹簧取得最大压缩量为止. 这时取弹簧、钢板、地球为系统. 因无外力和非保守内力对系统做功, 故系统机械能守恒. 若取钢板在最低位置时的重力势能为零, 取弹簧自由状态时弹性势能为零, 则得

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{1}{2} k x_0^2 + m_0 g x = \frac{1}{2} k (x + x_0)^2 \quad (5)$$

式中, x 为由碰撞使弹簧得到的最大压缩量; x_0 为钢板的质量所引起的弹簧的压缩量, 且 $x_0 = \frac{m_0 g}{k}$.

把式(4)和 $x_0 = \frac{mg}{k}$ 代入式(5), 得到

$$x = \frac{2m}{m_0 + m} \sqrt{\frac{2mgh}{k}}$$

这就是题目所要求的, 由于小球和钢板发生碰撞使弹簧得到的最大压缩量.

[例 2-5] 发射一宇宙飞船去考察一质量为 M 、半径为 R 的行星, 当飞船静止于空间并与行星中心 O 相距为 $r_0 = 4R$ 时, 以速度 v_0 发射一质量为 m (m 远小于飞船质量) 的仪器, 要使这仪器恰好掠着行星的表面着陆, 求速度 v_0 与飞船和行星中心 O 点联线的夹角 θ 是多少? 着陆滑行初速度 v 是多少?

[分析] 在不计其他星体对仪器作用的情况下, 仪器和行星的作用力仅为万有引力, 因此仪器对行星中心 O 点的角动量守恒; 同时万有引力又是保守力, 仪器和行星组成的系统机械能守恒.

[解] 根据角动量守恒定理 $L = r \times mv = \text{常矢量}$

$$mv_0 r_0 \sin \theta = mvR \quad (1)$$

其中 $r_0 = 4R$. 根据机械能守恒定律

$$\frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{GMm}{R} \quad (2)$$

联立式(1)、式(2)得

$$\sin \theta = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{3GM}{2Rv_0^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$v = v_0 \left[1 + \frac{3GM}{2Rv_0^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

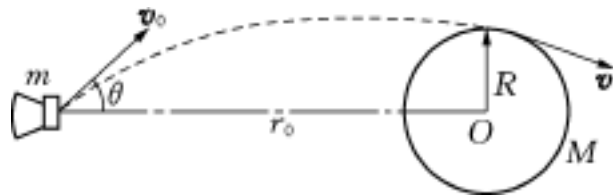


图 2-16

[例 2-6] 在光滑的水平桌面上 A 点处放有质量为 m_0 的木块, 木块与弹簧相连, 弹簧的另一端固定在 O 点, 其倔强系数为 k , 开始时弹簧处于自由长度 l_0 , 如图 2-17 所示. 设有一质量为 m 的子弹以速度 v_0 沿垂直于 OA 方向射入木块, 并嵌在其中. 当木块运动到 B 点时, 弹簧长度为 l , 试求木块在 B 点时的速度大小和方向.

[分析] 本题是一道典型的守恒定律综合应用的题目, 分析整个运动, 可发现经历了两个过程: 第一过程是子弹射入木块, 是一次完全非弹性碰撞, 所以动量守恒; 第二过程是子弹嵌在木块中, 与木块一起从 A 点运动到 B 点, 若取子弹与木块为系统, 系统所受的外力为弹簧拉力, 由于拉力是指向转动中心 O

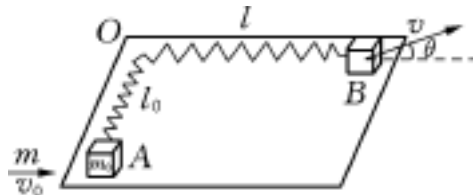


图 2-17

的, 力矩为零, 整个运动过程对 O 的角动量守恒, 而且在这个过程中, 若取子弹、木块和弹簧为系统, 系统无外力和非保守力做功, 所以机械能守恒. 利用这三个守恒定律, 我们就能解出木块在 B 点的速度.

[解] 子弹射入木块过程, 动量守恒

$$mv_0 = (m + m_0)v_1 \quad (1)$$

子弹与木块从 A 向 B 运动的过程,角动量守恒

$$(m + m_0)v_1 l_0 = (m + m_0)vl \sin \quad (2)$$

在上述运动过程中,子弹、木块和弹簧系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}(m + m_0)v_1^2 = \frac{1}{2}(m + m_0)v^2 + \frac{1}{2}k(l - l_0) \quad (3)$$

联立式(1)、式(2)、式(3)可以解得

$$v_1 = \frac{m}{m + m_0}v_0$$

$$v = \sqrt{\frac{m^2 v_0^2}{(m + m_0)^2} - \frac{k(l - l_0)^2}{m + m_0}}$$

$$= \arcsin \frac{l_0 m v_0}{l \sqrt{m^2 v_0^2 - k(l - l_0)^2 (m + m_0)}}$$

[例 2-7] 倔强系数为 k 的水平轻弹簧,一端固定,另一端与水平桌面上的质量为 m 的小球相连接,推动小球将弹簧压缩一段距离后放开,假定小球所受的滑动摩擦力大小为 F 且恒定不变,滑动摩擦因数与静摩擦因数可视为相等,试求 L 必须满足什么条件才能使小球在放开后就开始运动,而且一旦停止下来就一直保持静止状态.

[分析] 本题中小球在竖直方向受力平衡,水平方向仅受到弹力和摩擦力的作用.求解本题的关键是逐一分析已知条件和题目要求,找出各物理量之间的相互关系.

[解] 取弹簧的自然长度为坐标原点 O ,建立如图

2-18 所示的坐标轴 Ox ,在 $t = 0$ 时,静止于 $x = -L$ 处的小球开始运动的条件是

$$kL > F \quad (1)$$

若小球运动到 x 处静止,则由功能原理可得

$$-F(L + x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kL^2 \quad (2)$$

即摩擦力所做的功等于机械能的改变,这里初末态小球静止,仅有弹性势能的改变,充分体现了过程量和状态量的关系.要使小球继续保持静止的条件为

$$k|x| \leq F \quad (3)$$

即静摩擦力不能小于弹力.由式(1)、式(2)可得 $x = L - \frac{2F}{k}$

再代入式(3)得 $\frac{F}{k} \leq L \leq \frac{3F}{k}$

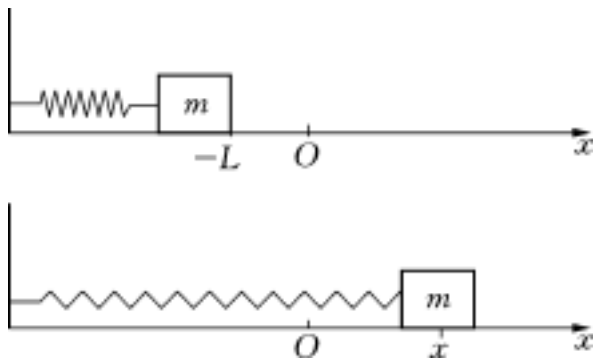


图 2-18

又根据式(1) $L < \frac{F}{k}$

所以 L 的取值范围为 $\frac{F}{k} < L < \frac{3F}{k}$

2.4 自测练习与能力训练

2.4.1 选择题

1. 质点受力为 $F = F_0 e^{-kx}$, 若质点在 $x = 0$ 处的速度为零, 此质点所能达到的最大动能为[] .

- (A) $\frac{F_0}{k}$ (B) $\frac{F_0}{e^k}$ (C) $F_0 k$ (D) $F_0 k e^k$

2. 在下列四个实例中, 你认为哪一个实例中的物体和地球构成的系统机械能不守恒? [] .

- (A) 物体作圆锥摆运动
(B) 抛出的铁饼作斜抛运动(不计空气阻力)
(C) 物体在拉力作用下沿光滑斜面匀速上升
(D) 物体在光滑斜面上自由下滑

3. 速度为 v 的子弹, 打穿一块木板后速度变为零, 设木板对子弹的阻力是恒定的, 那么当子弹射入木板的深度等于其厚度的一半时, 子弹的速度是[] .

- (A) $\frac{v}{2}$ (B) $\frac{v}{4}$ (C) $\frac{v}{3}$ (D) $\frac{v}{\sqrt{2}}$

4. 一力学系统由两个质点组成, 它们之间只有引力作用. 若两质点所受外力的矢量和为零, 则此系统[] .

- (A) 动量守恒, 但机械能和角动量是否守恒不能断定
(B) 动量、机械能守恒, 但角动量是否守恒不能断定
(C) 动量和角动量守恒, 但机械能是否守恒不能断定
(D) 动量、机械能以及对一轴的角动量守恒

5. 一船浮于静水中, 船长 L , 质量为 m , 一个质量也为 m 的人从船尾走到船头, 不计水和空气的阻力, 则在此过程中船将[] .

- (A) 不动 (B) 后退 L (C) 后退 $\frac{L}{2}$ (D) 后退 $\frac{L}{3}$

6. 在半径为 R 的半球形容器中有一质量为 m 的质点从 P 点由静止下滑, 如图 2-19 所示. 质点在最低点 Q 时, 测得它对容器的压力为 F , 那么质点从 P

到 Q 的过程中, 摩擦力所做的功为 [] .

(A) $\frac{1}{2}(mg - F)R$

(B) $\frac{1}{2}(F - mg)R$

(C) $\frac{1}{2}(F - 3mg)R$

(D) $\frac{1}{2}(2mg - F)R$

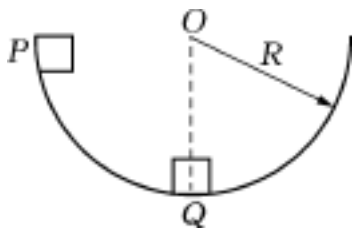


图 2-19

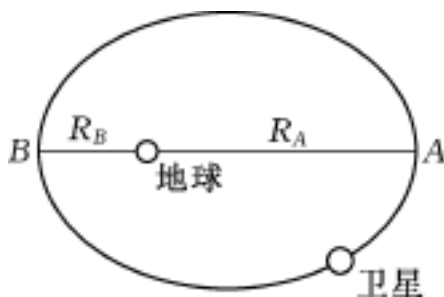


图 2-20

7. 人造地球卫星绕地球作椭圆轨道运动, 卫星轨道近地点和远地点分别为 A、B 用 L 和 E_k 分别表示卫星对地心的角动量及其动能的瞬时值, 则有 [] .

(A) $L_A > L_B, E_{kA} > E_{kB}$

(B) $L_A = L_B, E_{kA} > E_{kB}$

(C) $L_A = L_B, E_{kA} < E_{kB}$

(D) $L_A < L_B, E_{kA} < E_{kB}$

8. 如图 2-21 所示, 砂子从 $h = 0.8 \text{ m}$ 高处下落到以 3 m/s 的速率水平向右运动的传送带上. 取重力加速度 $g = 10 \text{ m/s}^2$. 传送带给予砂子的作用力的方向 [] .

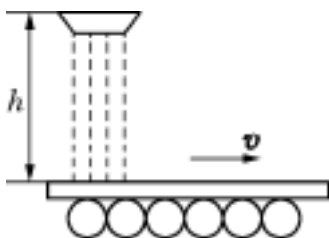


图 2-21

(A) 与水平夹角 53° 向下

(B) 与水平夹角 53° 向上

(C) 与水平夹角 37° 向上

(D) 与水平夹角 37° 向下

9. 质量分别为 m_1 、 m_2 的两球作对心碰撞. 设球 1 原来静止, 两球作对心碰撞后, 球 2 变为静止, 则恢复系数为 [] .

(A) $\frac{m_2}{m_1}$

(B) $\frac{m_1}{m_2}$

(C) $\frac{m_1}{m_1 + m_2}$

(D) $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$

10. 今有一倔强系数为 k 的轻弹簧, 竖直放置, 下端悬一质量为 m 的小球, 如图 2-22 所示, 开始时使弹簧为原长而小球恰好与地接触, 今将弹簧上端缓慢地提起, 直到小球刚能脱离地面为止, 在此过程中外力做功为 [] .

(A) $\frac{m^2 g^2}{4k}$

(B) $\frac{m^2 g^2}{3k}$

(C) $\frac{m^2 g^2}{2k}$

(D) $\frac{2m^2 g^2}{k}$

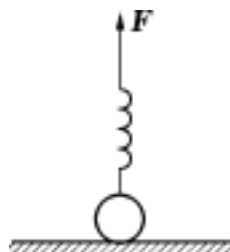


图 2-22

2 4 2 填充题

1 . 如图 2-23 所示, 质量为 m 的小球系于绳的一端, 绳的另一端固定在 O 点, 绳长为 l . 今将小球拉到水平位置 A 处, 然后放手, 小球经圆弧运动到位置 B 时的速度为_____, 加速度为_____ . 如绳子承受的最大张力为 $2.5mg$, 小球落到 _____ 的位置时, 绳子被拉断 .

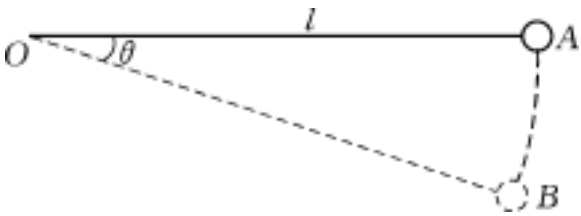


图 2-23

2 . 以铁锤将一铁钉打入木板, 设木板对铁钉的阻力与铁钉进入之深度成正比 . 在铁锤击第一次时, 能将铁钉击入深度 d , 则第二次时能击入的深度为_____ . (假定铁锤二次打击铁钉时的速度相同)

3 . 如图 2-24 所示, 一质量为 m 的小球沿光滑轨道由静止开始下滑 . 要使小球沿半径为 R 的球形轨道运动一周而不脱离轨道, 小球最低应从 H 为_____高处滑下 . 如小球由 $H = 2R$ 处滑下, 则它能沿环形轨道上升到离地面的高度 $h =$ _____处 .

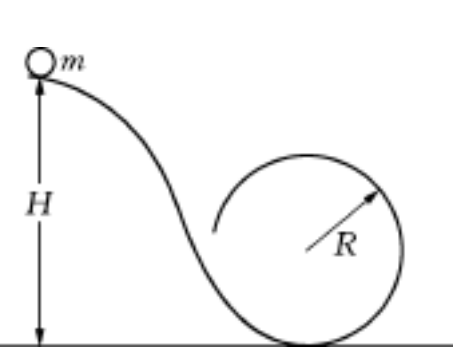


图 2-24

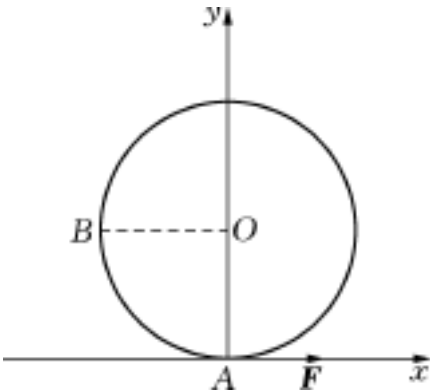


图 2-25

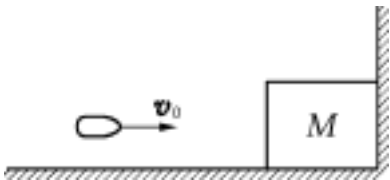


图 2-26

4 . 如图 2-25 所示, 一质点在几个力作用下沿半径 $R = 20\text{ m}$ 的圆作圆周运动, 其中有一恒力 $F = 0.6i(\text{N})$, 在质点从 A 开始逆时针方向经 $\frac{3}{4}$ 圆周到达 B

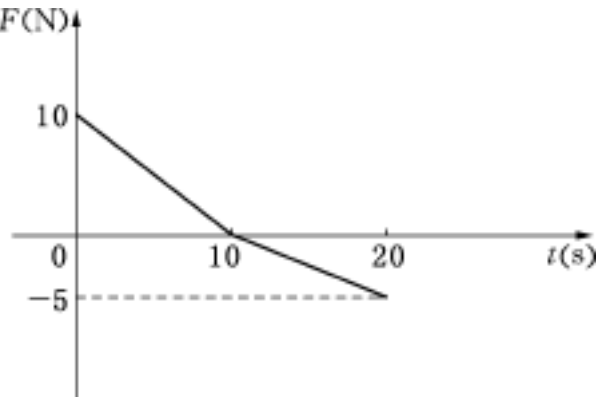


图 2-27

的过程中, 力 F 所做的功为_____ .

5 . 如图 2-26 所示, 质量为 m 的子弹以水平速度 v_0 射入静止的木块并陷入木块内, 设子弹入射过程中木块不反弹, 则墙壁对木块的冲量 I _____ .

6 . 一质量为 5 kg 的物体沿 x 轴运动, 其所受的作用力随时间变化的关系如图 2-27 所示 . 设物体从静止开始运

动,则 20 s 末时物体的速度为 $v =$ _____, 在 0 ~ 20 s 内质点所做的功 $A =$ _____.

7. 一个原来静止在光滑水平面上的物体,突然分裂成三块,以相同的速率沿三个方向在水平面上运动,各方向之间的夹角如图 2-28 所示,则三块物体的质量比 $m_1 \quad m_2 \quad m_3 =$ _____.

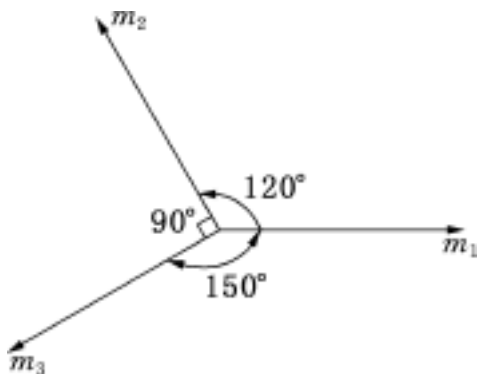


图 2-28

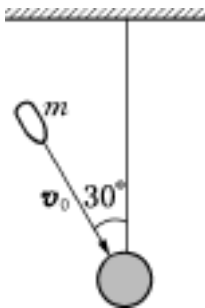


图 2-29

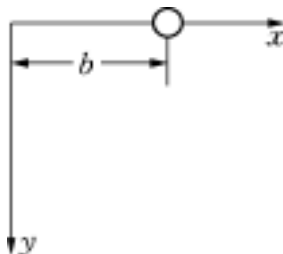


图 2-30

8. 质量为 20 g 的子弹,以 400 m/s 的速率沿图 2-29 所示方向射入原来静止的质量为 980 g 的摆球,摆线长度不可伸缩.子弹射入后与摆球一起运动的速率为_____.

9. 如图 2-30 所示, x 轴沿水平方向, y 轴向下,在 $t = 0$ 时刻将质量为 m 的质点由 a 处静止释放,让它自由下落,则在任意时刻 t ,质点所受的对原点 O 的力矩 $M =$ _____; 在任意时刻 t ,质点对原点的角动量 $L =$ _____.

10. 两木块的质量分别为 m_1 、 m_2 ,由一倔强系数为 k 的轻弹簧连接,并静止于光滑水平面上,现将两木块压紧弹簧,其压缩量为 x_0 ,然后由静止释放,当弹簧伸长到原长时,质量 m_1 木块的速度 $v_1 =$ _____, 质量 m_2 木块的速度 $v_2 =$ _____.

2 4 3 计算题

1. 一人从 10 m 深的井中提水,起始桶中装有 10 kg 的水,由于水桶漏水,每升高 1 m 要漏去 0.20 kg 的水,水桶被匀速地从井中提到井口,求人所做的功.

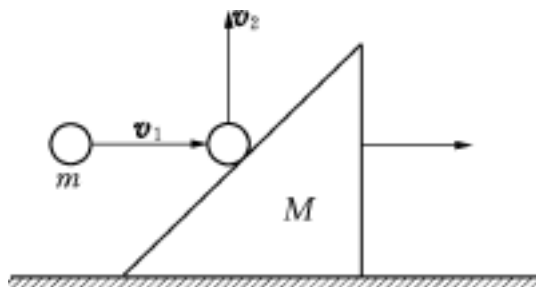


图 2-31

2. 质量 M 的滑块正沿着光滑水平地面向右滑动,一质量为 m 的小球水平向右飞行,以速度 v_1 (相对于地面)与滑块斜面相碰.碰后速度为 v_2 (相对于地面),如图 2-31 所示.若碰撞时间为 t ,试计算此过程中滑块

对地面的平均作用力和滑块速度的增量。

3. 在一辆小车上固定装有光滑弧形轨道, 轨道下端水平, 小车质量为 m , 静止放在光滑水平面上。今有一质量也为 m , 速度为 v 的铁球, 沿轨道下端水平射入并沿弧形轨道上升某一高度, 如图 2-32 所示, 然后下降离开小车。

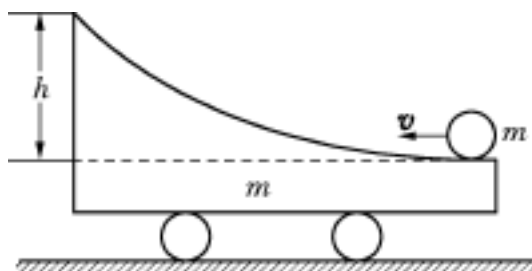


图 2-32

(1) 求球离开小车时相对地面的速度为多少?

(2) 球沿弧面上升的最大高度 h 是多少?

4. 地球可看作是半径 $R = 6400 \text{ km}$ 的球

体, 一颗人造地球卫星在地面上空 $h = 800 \text{ km}$ 的圆形轨道上, 以 7.5 km/s 的速度绕地球运动。在卫星的外侧发生一次爆炸, 其冲量不影响卫星当时的绕切向速度, 但给予卫星一个指向地心的径向速度 $v_n = 0.2 \text{ km/s}$ 。求这次爆炸后使卫星轨道的最低点和最高点位于地面上空多少公里?

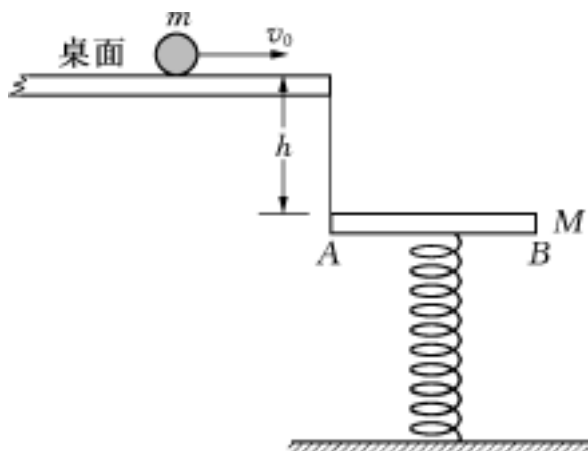


图 2-33

5. 如图 2-33, 将一块长为 L 、质量为 M 的平板 AB 放在倔强系数为 k 的弹簧上, 现有一质量为 m 的小球放在一光滑的桌面上, 桌面与平板 AB 的垂直高度为 h , 现给小球以水平初速 v_0 , 不计所有摩擦力和弹簧质量, 已知 $M > m$, 小球与平板的碰撞为弹性碰撞, 求:

(1) 弹簧的最大压缩量是多少?

(2) 如果要使小球与 AB 板有一次而且只有一碰撞, 则 v_0 应在什么范围内。

6. 有一质量为 M 、半径为 R 的半圆形的光滑槽, 放在光滑桌面上, 一个质量为 m 的小物体, 可以在槽内滑动。开始时半圆槽静止, 小物体静止于 A 处, 如图 2-34 所示, 试求

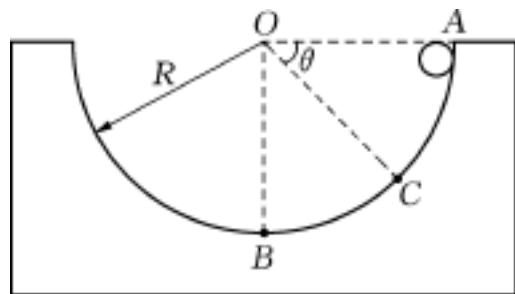


图 2-34

(1) 当小物体滑到 C 点处时, 小物体 m 相对槽的速度 v , 槽相对地的速度 V ;

(2) 当小物体滑到最低点 B 时, 槽移动的距离。

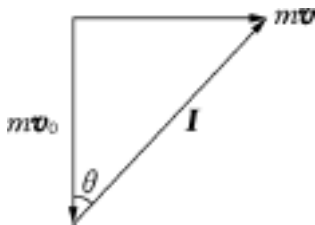
习题选解

[选择题 8] 砂子落下到传送带时的速度为

$$v = \sqrt{2gh} = 4(\text{m/s})$$

根据冲量定理 $I = \int_0^t F dt = mv - mv_0$

作矢量图



$$\text{所以 } \theta = \arctan \frac{mv}{mv_0} = \arctan \frac{4}{3} = 53^\circ$$

[选择题 10] 以小球、弹簧作为一个系统,重力、桌面支持力不做功,根据功能原理

$$A_{\text{外}} = \frac{1}{2} kx^2 - 0$$

又根据弹簧缓慢拉起的条件,即 $mg = kx$

$$\text{所以 } A_{\text{外}} = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{m^2 g^2}{2k}$$

[填充题 2] 根据题意摩擦力的大小 $f = kx$

$$\text{由动能定律 } A_f = \int_0^x -kx dx = 0 - \frac{1}{2} mv_0^2$$

由于两次打击的速度一样,所以

$$A_f = \int_0^d -kx dx = \int_d^{d+d} -kx dx$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} kd^2 = \frac{1}{2} k(d+d)^2 - \frac{1}{2} kd^2$$

$$\text{所以 } d = (\sqrt{2} - 1)d$$

[填充题 4] 物体在整个运动过程中仅受重力和轨道支持力作用,物体要通过圆周轨道的条件是轨道给物体的支持力必须大于零,即 $N > 0$, 根据运动中不同点的受力分析图 2-35, 列出法向的牛顿运动定律

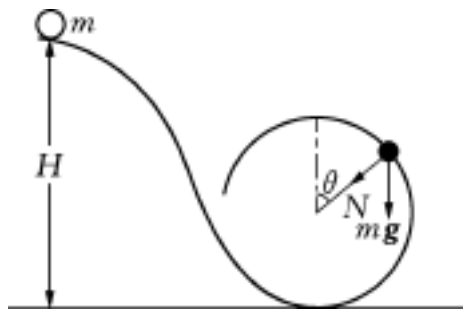


图 2-35

$$N + mg \cos \theta = m \frac{v^2}{R}$$

其中 θ 为与竖直方向的夹角,由上式可知,只有运动到上半圆时,才有可能 $N = 0$, 因此物体的速度必须满足

$$N = m \frac{v^2}{R} - mg \cos \theta = 0 \quad (1)$$

其中通过圆环顶端时所需要的速度最大,即

$$m \frac{v^2}{R} - mg = 0 \quad (2)$$

其次由于整个运动过程轨道支持力不做功,所以机械能守恒,即

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + mg2R \quad (3)$$

联立式(2)、式(3)可得

$$H = \frac{5}{2}R$$

当物体从 $2R$ 下滑,不可能通过整个圆环轨道,脱落点的 $N = 0$,

$$\text{即 } m \frac{v^2}{R} - mg \cos \theta = 0 \quad (4)$$

设脱离处的高度为 h ,则机械能守恒

$$mg2R = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg(R + R \cos \theta) \quad (5)$$

联立式(4)、式(5)可得

$$h = \frac{11}{6}R$$

[填充题 6]由图 2-27 可得

$$I = I_{s_0 \sim 10} - I_{s_{10} \sim 20} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 - \frac{1}{2} \times 5 \times (20 - 10) = mv$$

所以 $v = 5(\text{m/s})$

$$A = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 5 \times 25 = 62.5(\text{J})$$

[填充题 9]由于任意时刻的力为 mg ,任意时刻的速度为 gt ,

$$\text{所以 } M = r \times mg = rmgsin \theta = mgbk$$

$$L = r \times mgt = rmgt sin \theta = mgtbk$$

[计算题 4]爆炸前后对地心的角动量始终守恒

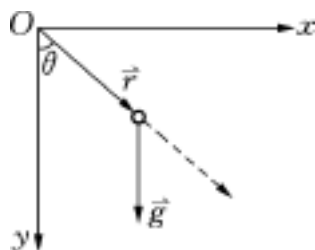


图 2-36

$$mv_t r = mv r \quad (r = h + R) \quad (1)$$

爆炸后,卫星地球组成的系统机械能守恒

$$\frac{1}{2} m(\dot{v}_t^2 + \dot{v}_n^2) - G \frac{Mm}{r} = \frac{1}{2} m\dot{v}^2 - G \frac{Mm}{\boxed{r}} \quad (2)$$

由牛顿运动定律

$$G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{\dot{v}_t^2}{r} \quad (3)$$

联立式(1)、式(2)、式(3)得 $(\dot{v}_t^2 - \dot{v}_n^2)r^2 - 2\dot{v}_t r r + \dot{v}_n^2 r^2 = 0$

解得

$$r_1 = \frac{\dot{v}_t r}{\dot{v}_t - \dot{v}_n} = 7397(\text{km})$$

$$r_2 = \frac{\dot{v}_t r}{\dot{v}_t + \dot{v}_n} = 7013(\text{km})$$

所以

$$h = r_1 - R = 997(\text{km})$$

$$h = r_2 - R = 613(\text{km})$$

[计算题 5](1) 小球在与平板碰撞前作平抛运动,到达平板前水平方向的速度 $v = v_0$, 竖直方向的速度 $v = \sqrt{2gh}$, 碰撞后的速度水平方向仍为 $v = v_0$, 而竖直方向为 v . 由于小球和板作弹性碰撞, 所以小球和板组成的系统, 竖直方向动量守恒, 同时系统的动能守恒

$$mv = MV + mv \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m(\dot{v}^2 + \dot{v}^2) = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} m(\dot{v}^2 + \dot{v}^2) \quad (2)$$

碰撞后, 平板、弹簧、地球组成的系统机械能守恒, 弹簧压缩量最大时, 平板的动能为零. 以弹簧原长为弹性势能的零点, 板运动到的最低点为重力势能的零点, 则

$$\frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} kx_0^2 + Mg(x_m - x_0) = \frac{1}{2} kx_m^2 \quad (3)$$

而

$$kx_0 = Mg \quad (4)$$

联立式(1)、(2)、(3)、(4)可得

$$x_m = \frac{Mg}{k} + \frac{2m}{m+M} \sqrt{\frac{2Mgh}{k}}$$

(2) 小球从桌面到和平板相碰撞, 平抛运动所需的时间为

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

小球与木板要碰撞必须满足 $v_0 t_1 < L$, 小球与平板碰撞后作斜抛运动, 其再次落到平板所需时间 t_2 应满足关系式

$$0 = v_y t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$$

即

$$t_2 = \frac{2v_y}{g} = \frac{2(M-m)}{M+m} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

要使小球与平板仅碰撞一次, 则必须满足

$$v_0 t_1 + v_0 t_2 = v_0 (t_1 + t_2) > L$$

将 t_1 、 t_2 代入求得

$$v_0 > \sqrt{\frac{g}{2h}} \frac{M+m}{(3M-m)} L$$

因此小球仅碰撞一次的初速范围

$$\sqrt{\frac{g}{2h}} \frac{M+m}{(3M-m)} L < v_0 < \sqrt{\frac{g}{2h}} L$$

刚体的转动

3.1 基本要求与复习框图

1. 基本要求

- (1) 理解描写刚体定轴转动的物理量, 并掌握角量与线量的关系.
- (2) 确切理解和掌握力矩、转动惯量的概念及计算方法, 掌握刚体绕定轴转动的转动定律.
- (3) 理解刚体转动动能概念. 掌握力矩的功、刚体的重力势能、刚体的动能定理和机械能守恒定律.
- (4) 确切理解角动量概念, 并能对含有定轴转动刚体在内的系统应用角动量定理及角动量守恒定律.
- (5) 了解进动现象和基本描述.

本章主要是研究刚体绕定轴转动的规律. 与前面讨论质点的运动规律的步骤类似, 我们先确定刚体的定轴转动如何描述, 即刚体运动学. 尔后讨论力矩的瞬时作用规律, 得到转动定律. 接着从力矩对空间的累积作用, 得到刚体定轴转动的动能定理, 并进一步推导出功能原理和机械能守恒定律. 再讨论力矩对时间的累积作用, 得到角动量定理和角动量守恒定律. 图3-1为本章的复习框图.

2 . 复习框图

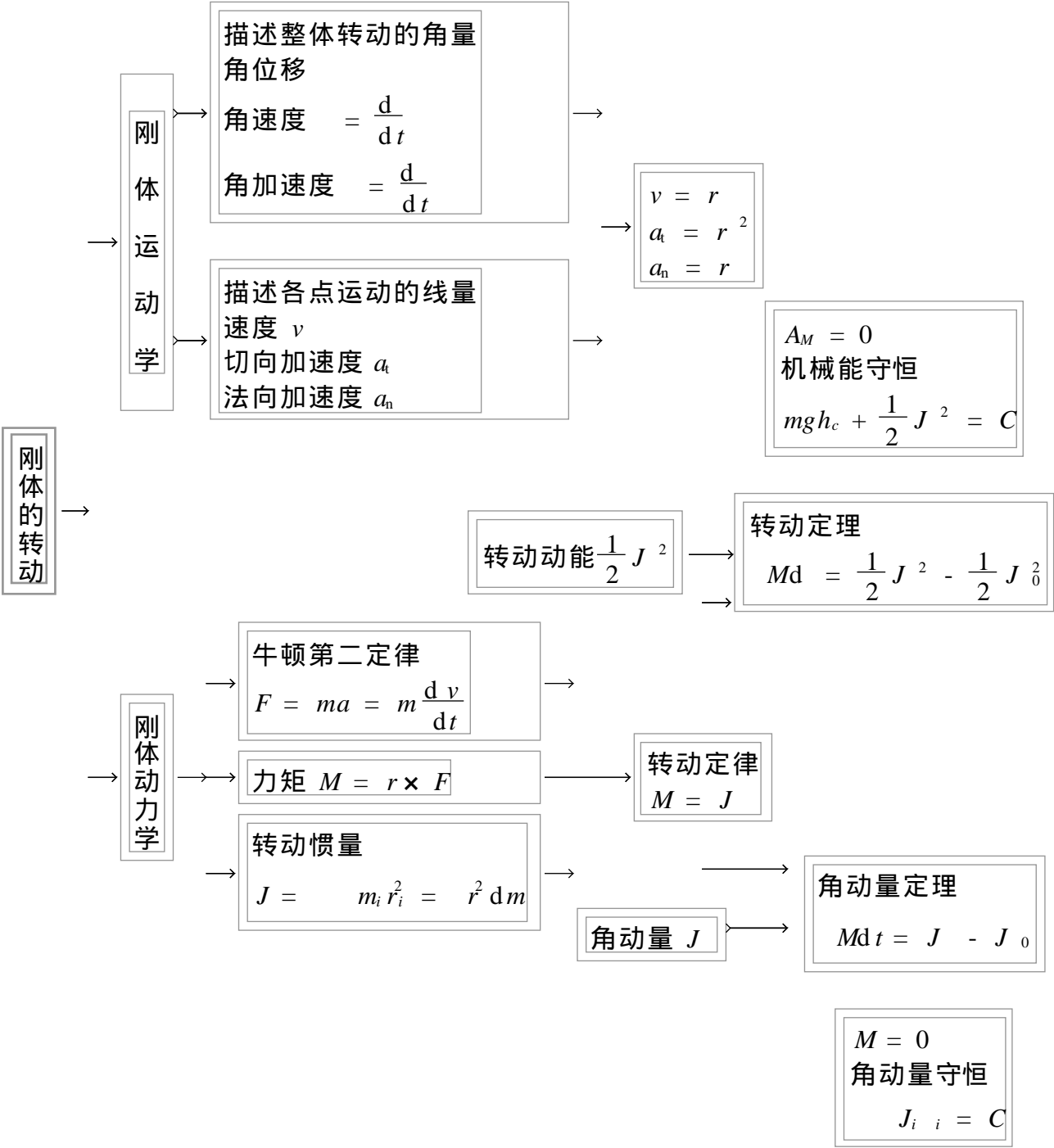


图 3 -1

3 .2 阅读指导与问题讨论

1 . 刚体定轴转动的角量和线量

刚体的运动形式有平动和转动 . 平动时刚体上各点的运动情况完全相同 , 因此可用刚体上任一点 (一般用质心) 的运动来代表整个刚体的运动 , 所以刚体的

平动规律就与质点的运动规律完全相同.而转动又可分为定轴转动和非定轴转动,这里,我们仅讨论定轴转动.

刚体定轴转动的主要特点就是刚体中所有的点都绕转轴作圆周运动,因此我们可以用描述圆周运动的角坐标、角位移、角速度和角加速度等物理量来描述刚体的定轴转动.由于刚体上每一点的角位移、角速度和角加速度都是相同的,因此可以在刚体上任选一点来表征刚体定轴转动的整体规律.同时我们也必须注意到刚体上每一点的速度、加速度并不相同,但刚体上的每一点都作圆周运动,所以,我们常用速度、切向加速度和法向加速度来描述刚体上一点的运动规律.角量和线量的关系罗列如下:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{d\theta}{dt} t \\ \omega &= \frac{d\omega}{dt} t = \frac{d^2\theta}{dt^2} t^2 \\ v &= r\omega \\ a_t &= r\alpha \\ a_n &= r\omega^2\end{aligned}$$

对于这些运动物理量的研究方法与第一章中质点的运动学相似.例如刚体作匀变速定轴转动,角加速度 $\alpha = C$, 则有:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta &= \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 &= 2(\theta - \theta_0)\end{aligned}$$

2. 转动惯量

转动惯量是表征刚体转动惯性大小的物理量,它的定义为

$$J = \sum m_i r_i^2$$

式中 m_i 为刚体中任一点的质量, r_i 为该质点距转轴的距离.在刚体质量连续分布的情况下,可以写为

$$J = \int_V r^2 dm$$

积分遍及整个刚体,其中 $dm = \rho dV$, ρ 为刚体的密度, dV 为体积元.

对计算转动惯量有一个常用的公式是平行轴定理

$$J = J_c + m d^2$$

式中 J_c 是刚体相对于通过质心的轴线的转动惯量, J 是刚体对于上述轴线平行的另一轴线的转动惯量, m 是刚体的质量, d 是两平行轴之间的距离. 例如均匀的薄圆盘, 如图 3-2 所示, 绕通过点 A 且与 P 盘面垂直的轴线的转动惯量是

$$J_A = \frac{1}{2} m R^2 + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2$$

其中 $\frac{1}{2} m R^2$ 是匀质圆盘在圆心(质心)的转动惯量.

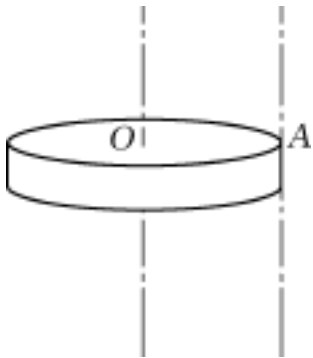


图 3-2

[问题 3-1] 有两个半径相同, 质量相同的细环 A、B, A 环的质量均匀分布, B 环的质量不均匀分布, 则它们对通过环心并与环面垂直的轴的转动惯量是否一样?

[解答] 一样的. 虽然转动惯量 J 的大小与刚体的质量和质量的分布有关, 但在本问题中, 圆环到轴的距离相同, 即

$$J = \int R^2 dm = R^2 \int dm = m R^2$$

因此无论质量分布均匀与否, 转动惯量都一样.

若是两个圆盘, 结果会怎样?

3. 转动定律

在刚体的定轴转动中, 转动定律是最基本的定律, 因为物体的转动需要力矩的作用. 刚体转动定律的数学表达式为

$$M = J$$

式中 M 是刚体受到的对某转轴的合外力矩, J 是该刚体对同一转轴的转动惯量, α 是角加速度. 转动定律表明了力矩的瞬时作用规律. 与牛顿第二定律 $F = ma$ 相比较, 力矩 M 对应于 F , 转动惯量 J 对应于质量 m , 角加速度 α 对应于加速度 a .

力矩的数学表达式为

$$M = r \times F$$

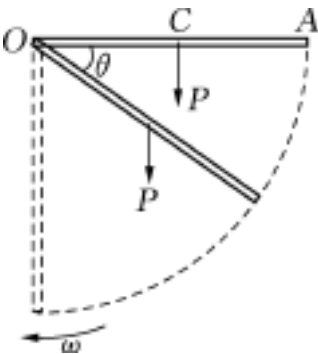


图 3-3

它符合右手螺旋法则. 在刚体的定轴转动中, 由于转轴的方向不变, 力矩可用代数量来处理, 仅有正、负之分, 若选定逆时针方向为转动正方向, 则逆时针转动的力矩为正, 顺时针转动的力矩为负; 反之亦然.

[问题 3-2] 如图 3-3 所示, 一根匀质细杆 OA 可绕端点 O 的水平轴自由转动, 其长为 l , 质量为 m , 开始时静止并处于水平位置, 为求放手后 OA 摆到铅直位置时的角速度, 有这样解法:

放手后,杆受重力矩 $mg \frac{l}{2}$ 作用,细杆 OA 绕端点 O 的水平轴转动的转动惯量 $J = \frac{1}{3} ml^2$, 因此根据转动定律 $M = J \alpha$, 有

$$mg \frac{l}{2} = \frac{1}{3} ml^2 \alpha$$

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{g}{l}$$

又根据 $\omega^2 - \omega_0^2 = 2 \alpha \theta$, $\omega_0 = 0$, $\theta = \frac{l}{2}$, 有

$$\omega^2 = 2 \frac{3}{2} \frac{g}{l} \frac{l}{2}$$

解得

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

上述解法对不对呢?

[解答] 不对. 因为忘了转动定律的瞬时性, 刚放手时, 重力矩 $M = mg \frac{l}{2}$, 角加速度为 $\alpha = \frac{3}{2} \frac{g}{l}$, 但随着杆的转动, 重力矩越来越小, 角加速度也随之减小. 当杆摆到铅直位置时, $M = 0$, $\alpha = 0$. 这也就是说, 细杆从水平位置转到铅直位置的过程中, 其角加速度是随时间而变的, 它不是一个常量. 而 $\omega^2 - \omega_0^2 = 2 \alpha \theta$ 是匀变速转动的公式, 仅适用于 $\alpha = \text{常量}$ 的转动, 现在杆的摆动是变加速转动, α 不是常量, 不满足公式成立的条件. 需注意, 随使用公式而不注意公式的成立条件, 是学习物理学的一大忌.

正确的解法是, 设杆转到任意位置时, 杆与水平方向的夹角为 θ , 重力矩为

$$M = mg \frac{l}{2} \cos \theta$$

根据转动定律, 有

$$M = \frac{mgl}{2} \cos \theta = \frac{1}{3} ml^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{1}{3} ml^2 \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

题中没有给出有关时间的条件, 却给出了细杆在水平位置时处于静止状态 (即 $\omega_0 = 0$) 这一条件. 所以, 可把上式中的 dt 代换成 $d\theta$. 因此, 有

$$\frac{mgl}{2} \cos \theta = \frac{1}{3} ml^2 \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{3} ml^2 \frac{d\omega}{d\theta} \omega$$

整理后, 为

$$\omega d\omega = \frac{3}{2} \frac{g}{l} \cos \theta d\theta$$

两边积分, 有

$$\int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{3}{2} \frac{g}{l} \cos \theta d\theta$$

得

$$\frac{1}{2} \omega^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l}$$

即

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

[问题 3-3] 如图 3-4 所示,已知两轮 A、B 的半径分别为 R_1 和 R_2 ,质量分别为 m_1 和 m_2 ,用皮带将两轮相连接.若在轮 A 上作用一恒力矩 M ,设轮与皮带之间无滑动,是否可以用下列两式求出两轮的角加速度?

$$M = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \alpha_1 + \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \alpha_2 \tag{1}$$

$$R_1 \alpha_1 = R_2 \alpha_2 \tag{2}$$

式(1)是对两轮采用转动定律,式(2)表明由于轮与皮带之间无滑动,两轮的切向加速度相同.

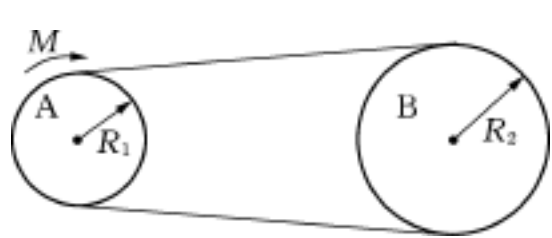


图 3-4(a)

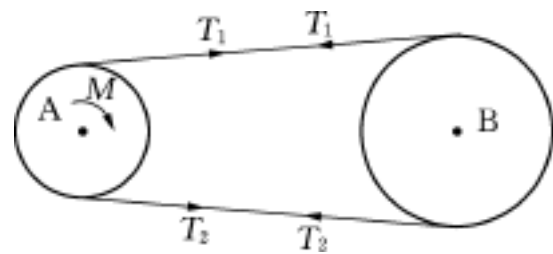


图 3-4(b)

[解答] 这是错误的计算方法.原因在于式(1)的转动定律应用条件错误.因为两轮的转轴不同,不能将它们放在同一公式研究之,必须将两轮分开,一一考虑求解.所以方程(1)应改为设皮带拉力为 T_1 、 T_2 ,见图 3-4(b).

A 轮: $M + T_1 R_1 - T_2 R_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \alpha_1 \tag{3}$

B 轮: $T_2 R_2 - T_1 R_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \alpha_2 \tag{4}$

联立式(2)、式(3)、式(4),可以得到

$$\alpha_1 = \frac{2M}{(m_1 + m_2) R_1^2}$$
$$\alpha_2 = \frac{2M}{(m_1 + m_2) R_1 R_2}$$

在刚体的定轴转动解题时,我们必须注意:力矩、转动惯量和角动量等物理量都是相对于同一定轴而言,所以求解问题时要明确转轴.

4 .质点与刚体的类比

由于刚体是一个特殊的质点系,有关刚体定轴转动的定律、定理都可以在质点系的前提下,对所有组成刚体的质元求和(或积分)而得到.描述刚体的物理量和基本规律在形式上和质点有较大的相似性,我们可以通过表 3-1 进行类比,以便较快地掌握刚体定轴转动的规律.

表 3-1

质 点	刚 体
力 F , 质量 m 牛顿第二定律 $F = ma$	力矩 M , 转动惯量 J 转动定律 $M = J$
动量 mv , 冲量 $I = Fdt$ 动量定理 $I = Fdt = mv - mv_0$	角动量 J , 冲量矩 Mdt 角动量定理 $L = Mdt = J - J_0$
动量守恒定律 $m_i v_i = \text{常矢量}$	角动量守恒定律 $J_i = \text{恒量}$
平动动能 $\frac{1}{2}mv^2$	转动动能 $\frac{1}{2}J^2$
重力势能 mgh	重力势能 mgh_c
力的功 $A = F \cdot ds$	力矩的功 $A = Md$
动能定理 $A = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$	动能定理 $A = \frac{1}{2}J^2 - \frac{1}{2}J_0^2$

在刚体和质点组成的系统中,研究问题时仍需对系统进行受力分析或力矩分析,只有在弄清物理过程的情况下,才可应用合适的公式.

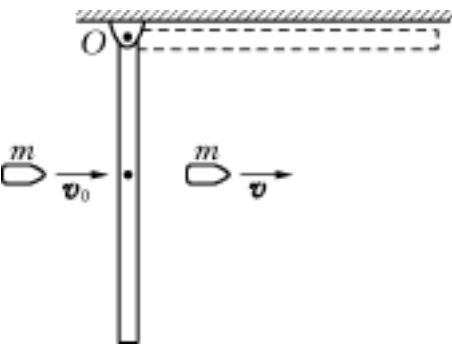


图 3-5

[问题 3-4] 一长为 l 质量为 m_0 的均质细杆,可绕通过其一端的水平轴在竖直平面中转动.初始时,细杆竖直悬挂,现有一质量为 m 的子弹以某一水平速度 v_0 射入杆的中点.已知子弹穿出杆后的速度为 v ,杆受子弹打击后恰好上升到水平位置,如图 3-5 所示.求子弹的初速度 v_0 .

有人这样做:
由机械能守恒定律

$$m_0 g \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} m_0 l^2 \right]^2$$

求出杆受打击后的角速度 $= \sqrt{\frac{3g}{l}}$

由动量守恒定律

$$mv_0 = mv + m_0 v_c$$

根据棒质心速度 $v_c = \frac{l}{2}$,求得

$$v_c = v + \frac{m_0}{2m} \sqrt{3gl}$$

请指出这样做法是否正确?为什么?

[解答] 这种解法是错误的,其错误在于把子弹与杆的碰撞过程看作动量守恒的.实际上杆与子弹组成的系统动量并不守恒.因为碰撞过程中,在 O 处的轴承对杆的冲力是外力,系统受外力作用,所以动

量不会守恒,但因冲力通过转轴,故它对转轴的力矩为零,所以体系的角动量是守恒的.因此正确的解法应该用机械能守恒定律和角动量守恒定律列出方程

$$m_0 g \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} m_0 l^2 \right] \omega^2$$

和
$$mv_0 \frac{l}{2} = mv \frac{l}{2} + \left[\frac{1}{3} m_0 l^2 \right] \omega$$

求得 v_0 .

3.3 解题方法与典型例题

[例 3-1] 在大圆板内挖去一个直径为大圆板半径的圆孔,如图 3-6 所示.如果剩余部分质量为 m ,求它对经过圆心 O 点且与圆板平面垂直的轴的转动惯量.

[分析] 转动惯量的计算方法主要有两种:(1)从定义出发,通过积分或求和计算;(2)利用转动惯量的叠加性和平行轴定理计算.从原则上讲,本题可以用转动惯量的定义计算,但由于物体形状的不规则性,会在计算上有些困难.如果我们注意到转动惯量的可相加性和平行轴定律,将物体看作两个圆盘的叠加,那么计算就方便多了.

[解] 先求一质量为 m 、半径为 R 的圆板经过圆心且与圆板平面垂直的轴的转动惯量.可在圆板上取一圆环,其转动惯量为

$$dJ = r^2 dm = r^2 \cdot 2\pi r dr$$

其中 σ 为板的质量密度,则整个圆板的转动惯量为

$$J = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{1}{2} m R^2$$

设挖了孔的圆板的转动惯量为 J_0 ,半径为 R 的圆板的转动惯量为 J_1 ,半径为 $\frac{R}{2}$ 的圆板的转动惯量为 J_2 ,则 $J_0 = J_1 - J_2$,这种方法称为补偿法,在物理学的研究中常被采用.根据上面所求圆板的转动惯量可知

$$J_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2$$

其中
$$m_1 = \frac{m}{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} R^2 = \frac{4}{3} m$$

$$J_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{R}{2}\right)^2 + m_2 \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} m_2 R^2$$

式中
$$m_2 = \frac{m}{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m$$
, 同时采用了平行轴定理.

所以
$$J_0 = J_1 - J_2 = \frac{1}{2} m_1 R^2 - \left[\frac{1}{2} m_2 \left(\frac{R}{2}\right)^2 + m_2 R^2 \right] = \frac{13}{24} m R^2$$

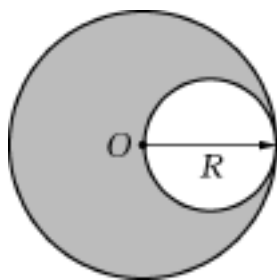


图 3-6

[例 3-2] 如图 3-7 所示,一轻绳绕于半径为 R 的圆盘边缘,在绳端施以 $F = mg$ 的拉力,圆盘可绕水平固定光滑轴转动,圆盘质量为 M ,圆盘从静止开始转动,(1)试求圆盘的角加速度及转动的角度和时间的关系;(2)如以质量 m 的物体挂在绳端,再计算圆盘的角加速度及转动的角度和时间的关系。

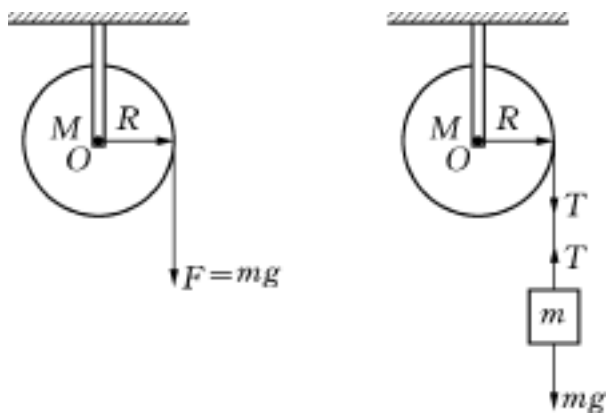


图 3-7

[分析] 本题是刚体的定轴转动和质点的平动组合,求解这类问题的关键仍是受力分析,同时注意对系统中平动物体用牛顿定律,定轴转动物体用转动定律,并由线量和角量关系,找出平动和转动的联系。

[解] (1) 圆盘所受的合外力矩为

$$M = FR$$

对圆盘用转动定律,有

$$FR = J = \left[\frac{1}{2} MR^2 \right]$$

因而角加速度为

$$= \frac{2FR}{MR^2} = \frac{2mg}{MR} \quad (1)$$

由于 ω 为常量,且 $t = 0$ 时, $\omega = 0$, 所以

$$\omega = \alpha t = \frac{2mg}{MR} t \quad (2)$$

而 $\theta = \int \omega dt$, 且 $t = 0$ 时, $\theta = 0$, 积分(2)式,有

$$\int_0^\theta d\theta = \int_0^t \frac{2mg}{MR} t dt$$

可得转动角度和时间的关系为

$$\theta = \frac{mg}{MR} t^2 \quad (3)$$

(2) 设 T 为绳子的张力,对圆盘,由转动定律得

$$TR = \left[\frac{1}{2} MR^2 \right] \quad (4)$$

对物体 m , 由牛顿定律得

$$mg - T = ma \quad (5)$$

而

$$a = R\alpha \quad (6)$$

联立式(4)、(5)、(6),可解得此时圆盘的角加速度为

$$\alpha = \frac{mgR}{\frac{1}{2} MR^2 + mR^2} = \frac{2mg}{MR + 2mR} \quad (7)$$

由 $\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}$, 且 $t = 0$ 时, $\theta = 0$, $\omega = 0$. 通过对式(7)积分, 即可得转动角度与时间的关系为

$$\theta = \frac{mg}{MR + 2mR} t^2 \tag{8}$$

[例 3-3] 一均质细杆, 长为 l , 质量为 M , 可绕通过一端的水平轴 O 转动, 如图 3-8. 一质量为 m 的子弹以速度 v_0 射入细杆, 子弹射入点离 O 点的距离为 $\frac{3}{4}l$, 试求:

- (1) 杆刚开始运动时的角速度及可摆到的最大角度;
- (2) 轴上的横向力为零时, 子弹射入的位置(即打击中心位置).

[分析] 子弹射入细杆过程中, 子弹、细杆系统角动量守恒; 细杆摆动时, 机械能守恒, 由两守恒定律可求 ω 及 θ_{\max} . 子弹射入细杆, 细杆轴受力, 轴受横向力的冲量应等于子弹、细杆系统动量的改变, 横向力 $N_{\text{横}} = 0$ 时, 即可求出打击中心位置.

[解] (1) 子弹射入细杆过程极其短暂, 此过程中杆的位置还来不及变化, 故子弹和细杆这个系统的重力对定轴 O 无力矩, 轴力当然也无力矩, 故这个系统在子弹射入过程中对定轴 O 的角动量守恒

$$\frac{3}{4}l m v_0 = \left[\frac{1}{3} M l^2 + m \left(\frac{3}{4}l \right)^2 \right] \omega \tag{1}$$

射入后在子弹与杆共同摆动的过程中, 系统机械能守恒, 取子弹射入处为势能零点

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} M l^2 + m \left(\frac{3}{4}l \right)^2 \right] \omega^2 + M g \frac{l}{4} \\ &= m g \frac{3}{4} l (1 - \cos \theta) + M g \left[\frac{l}{4} + \frac{l}{2} (1 - \cos \theta) \right] \end{aligned} \tag{2}$$

联立式(1)、(2)可解得杆的角速度及可摆到的最大角度分别为

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{36 m v_0}{(16 M + 27 m) l} \\ \theta_{\max} &= \arccos \left[1 - \frac{54 m^2 v_0^2}{(2 M + 3 m)(16 M + 27 m) g l} \right] \end{aligned}$$

(2) 将子弹和细杆视为一个系统, 则系统受的外力为 Mg , mg , $N_{\text{横}}$, $N_{\text{竖}}$, 如图 3-8, 设子弹打在距轴 x 处, 根据动量定理

$$\begin{aligned} N_{\text{横}} dt &= m v + M v_c - m v_0 \\ &= m x \omega + M \frac{l}{2} \omega - m v_0 \end{aligned} \tag{3}$$

这里 v_c 是细杆的质心速度, 因有 $N_{\text{横}}$ 的存在, 整个碰撞过程动量不守恒. 但仍可用动量定理, 不过需要按照质心运动定律, 将细杆的总动量表示为 $M v_c$.

系统对 O 轴角动量守恒, 有

$$x m v_0 = x m v + J \omega$$

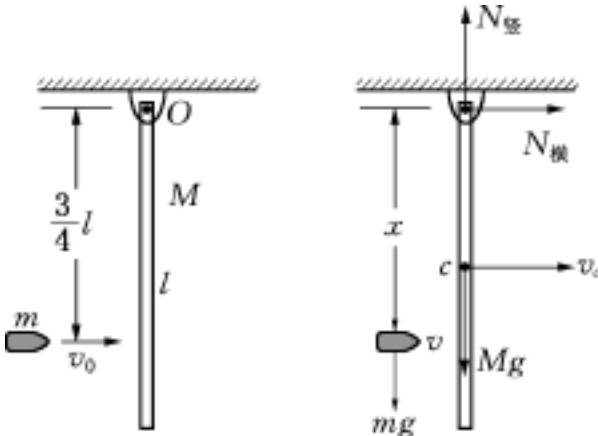


图 3-8

$$= x^2 m + \frac{1}{3} M l^2 = \left[x^2 m + \frac{1}{3} M l^2 \right]$$

因而

$$= \frac{x m v_0}{m x^2 + \frac{1}{3} M l^2}$$

又当 $N_{\text{横}} = 0$ 时, $\left[m x + \frac{1}{2} M l \right] \frac{x m v_0}{m x^2 + \frac{1}{3} M l^2} - m v_0 = 0$

解得 $x = \frac{2}{3} l$

[例 3-4] 质量为 M 半径为 R 的转台可绕通过中心与盘垂直的轴无摩擦地转动. 质量为 $m = \frac{M}{3}$ 的人, 站在转台边缘, 如图 3-9 所示, 开始时转台与人都静止不动. 若人沿台的边缘奔跑一周, 问相对于地面, 人和转台各转过多少角度?

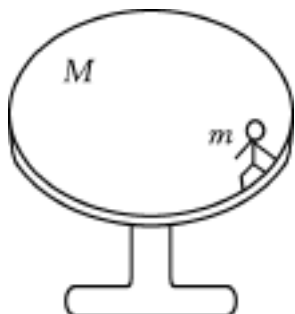


图 3-9

[分析] 由于转台被固定绕轴转动, 所以只有与轴平行的力矩才会使其的运动状态发生变化. 在转台和人组成的系统, 无此外力矩, 因此整个运动过程角动量守恒.

[解] 根据角动量守恒定律

$$J_{\text{人}} \omega_{\text{人地}} + J_{\text{台}} \omega_{\text{台地}} = 0 \tag{1}$$

由于

$$\omega_{\text{人地}} = \omega_{\text{人台}} + \omega_{\text{台地}}$$

所以

$$J_{\text{人}} (\omega_{\text{人台}} + \omega_{\text{台地}}) + J_{\text{台}} \omega_{\text{台地}} = 0 \tag{2}$$

得

$$\omega_{\text{台地}} = - \frac{J_{\text{人}} \omega_{\text{人台}}}{J_{\text{人}} + J_{\text{台}}}$$

虽然 $\omega_{\text{台地}}$ 、 $\omega_{\text{人台}}$ 不一定是恒量, 但两者之间始终满足关系式(2), 所以转台和人转过的角度为

$$\theta_{\text{台地}} = \int_0^t \omega_{\text{台地}} dt = - \int_0^t \frac{J_{\text{人}} \omega_{\text{人台}}}{J_{\text{人}} + J_{\text{台}}} dt = - \frac{J_{\text{人}}}{J_{\text{人}} + J_{\text{台}}} \int_0^t \omega_{\text{人台}} dt = - \frac{4}{5} \theta_{\text{人台}}$$

$$\theta_{\text{人地}} = \theta_{\text{人台}} + \theta_{\text{台地}} = \theta_{\text{人台}} - \frac{4}{5} \theta_{\text{人台}} = \frac{1}{5} \theta_{\text{人台}}$$

[例 3-5] 如图 3-10 所示, 空心圆环可绕竖直轴 AC 自由转动, 转动惯量为 J_0 , 环的半径为 R , 初始角速度为 ω_0 , 质量为 m 的小球静止于环内 A 点. 由于微小干扰, 小球向下滑到 B 点时, 环的角速度与小球相对于环的速度各为多大? (设环内壁光滑)

[分析] 这是一个刚体和质点的系统, 它的研究方法仍和质点系类似, 从力矩或力着手, 分析一下有哪些量是守恒的. 在本题中, 我们发现由于圆环固定绕轴转动, 对应该转轴的合力矩为零, 所以整个运动过程, 角动量守恒和机械能守恒.

[解] 小球、圆环对 AC 轴角动量守恒

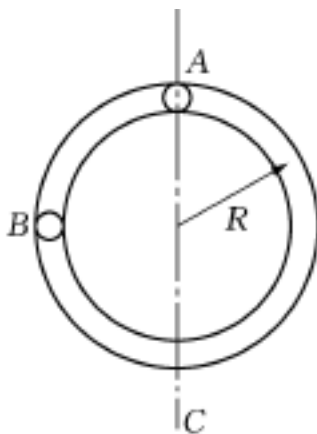


图 3-10

$$J_{00} = (J_0 + mR^2)_B$$

$$\omega_B = \frac{J_{00}}{J_0 + mR^2} \quad (1)$$

小球、圆环和地球系统机械能守恒(取环中心水平面为零势能)

$$\frac{1}{2} J_{00} \omega_0^2 + mgR = \frac{1}{2} J_{00} \omega_B^2 + \frac{1}{2} m v_{m地}^2 \quad (2)$$

由于 $v_{m地} = v_{m环} + v_{环地}$

$$|v_{m地}|^2 = v_{m环}^2 + v_{环地}^2 = v_{m环}^2 + (R \omega_B)^2 \quad (3)$$

代入式(2)
$$\frac{1}{2} J_{00} \omega_0^2 + mgR = \frac{1}{2} J_{00} \omega_B^2 + \frac{1}{2} m(v_{m环}^2 + R^2 \omega_B^2)$$

得
$$v_{m环} = \sqrt{2gR + \frac{J_{00} \omega_0^2 R^2}{J_0 + mR^2}}$$

3.4 自测练习与能力训练

3.4.1 选择题

1. 有两个力作用在一个有固定转轴的刚体上[] .

- (1) 这两个力都平行于轴作用时, 它们对轴的合力矩一定是零
 - (2) 这两个力都垂直于轴作用时, 它们对轴的合力矩可能是零
 - (3) 当这两个力的合力为零时, 它们对轴的合力矩也一定是零
 - (4) 当这两个力对轴的合力矩为零时, 它们的合力也一定是零
- 在上述说法中,

- (A) 只有(1)是正确的
- (B) (1)、(2)正确, (3)、(4)错误
- (C) (1)、(2)、(3)正确, 只有(4)错误
- (D) (1)、(2)、(3)、(4)都正确

2. 一刚体以每分钟 60 转绕 z 轴作匀速转动(沿 z 轴正方向). 设某时刻刚体上一点 P 的位置矢量为 $r = 3i + 4j + 5k$, 其单位为“ 10^{-2} m”, 若以“ 10^{-2} m · s⁻¹”为速度单位, 则该时刻 P 点的速度为 [] .

- (A) $v = 94.2i + 125.6j + 157.0k$ (B) $v = -25.1i + 18.8j$
- (C) $v = -25.1i - 18.8j$ (D) $v = 31.4k$

3. 一飞轮从静止开始作匀加速转动, 飞轮边上一点的法向加速度 a_n 和切向加速度 a_t 值的变化为[] .

(A) a_n 不变, a_t 为零(B) a_n 不变, a_t 不变(C) a_n 增大, a_t 为零(D) a_n 增大, a_t 不变

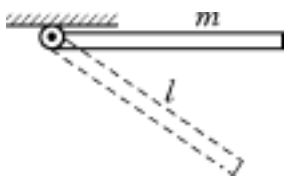
4. 两个匀质圆盘 A 和 B 的密度分别为 ρ_A 和 ρ_B , 若 $\rho_A > \rho_B$, 但两圆盘的质量与厚度相同, 两圆盘对通过盘心垂直于盘面轴的转动惯量各为 J_A 和 J_B , 则 [] .

(A) $J_A > J_B$ (B) $J_A < J_B$ (C) $J_A = J_B$ (D) J_A 、 J_B 哪个大, 不能确定

5. 将细绳绕在一个具有水平光滑轴的飞轮边缘上, 如果在绳端挂一质量为 m 的重物, 飞轮的角加速度为 α , 如果以拉力 $2mg$ 代替重物拉绳时, 飞轮的角加速度将 [] .

(A) 小于 α (B) 大于 α , 小于 2α (C) 大于 2α (D) 等于 2α

6. 如图 3-11 所示, 一均匀细杆, 质量为 m , 长度为 l , 一端固定, 由水平位置自由下落, 则在水平位置时其质心 C 的加速度为 [] .

(A) g

(B) 0

(C) $\frac{3}{4}g$ (D) $\frac{g}{2}$

图 3-11

7. 一花样滑冰者, 开始自转时, 其动能为 $E_0 = \frac{1}{2} J_0 \omega_0^2$,

然后她将手臂收回, 转动惯量减少至原来的 $\frac{1}{3}$, 此时她的角速度变为 ω , 动能变为 E , 则有关系 [] .

(A) $\omega = 3\omega_0$, $E = E_0$ (B) $\omega = \frac{\omega_0}{3}$, $E = 3E_0$ (C) $\omega = \sqrt{3}\omega_0$, $E = E_0$ (D) $\omega = 3\omega_0$, $E = 3E_0$

8. 两飞轮 A 和 B 用皮带连在一起, 飞轮转动时, 轮与皮带之间无滑动. 已知 $r_B = 2r_A$, $m_B = 4m_A$, 飞轮 A、B 均可看作匀质圆盘, 则下列几种说法哪个是正确的? (J 、 ω 、 E_k 、 L 分别表示飞轮的转动惯量、角速度、角加速度、转动动能、角动量) [] .

(A) $J_A : J_B = 1 : 16$, $\omega_A : \omega_B = 1 : 1$ (B) $\omega_A : \omega_B = 2 : 1$, $\alpha_A : \alpha_B = 1 : 2$ (C) $E_{kA} : E_{kB} = 1 : 4$, $L_A : L_B = 1 : 8$ (D) $L_A : L_B = 1 : 16$, $\alpha_A : \alpha_B = 1 : 1$

9. 一根长 l 、质量 m 的均匀细直棒在地上竖立着, 如果让其以下端与地的接触处为轴自由倒下, 当上端到达地面时, 上端的速率为 [] .

- (A) $\sqrt{6gl}$ (B) $\sqrt{3gl}$ (C) $\sqrt{2gl}$ (D) $\sqrt{\frac{3g}{2l}}$

10. 一根质量为 m 、长为 l 的棒能绕通过 O 点的水平轴自由转动. 一质量为 m 、速度为 v_0 的子弹从与水平方向成 θ 角处飞来(图 3-12), 击中棒的中点且留在棒内, 则棒的中点 C 的速度为[].

- (A) $\frac{v_0}{2}$ (B) $\frac{3}{7} v_0 \cos \theta$
(C) $\frac{3}{7} v_0 \sin \theta$ (D) $\frac{3}{4} v_0 \cos \theta$

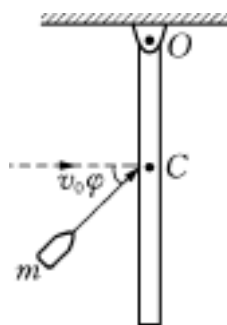


图 3-12

3 4 2 填充题

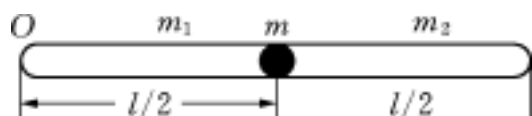


图 3-13

1. 在质量为 m 、长为 $\frac{l}{2}$ 的细棒与质量为 m_2 、长为 $\frac{l}{2}$ 的细棒中间, 嵌有一质量为 m 的小球(图 3-13), 则该系统对棒的端点 O 的转动

惯量 $J =$ _____.

2. 以 $20 \text{ N} \cdot \text{m}$ 的恒力矩作用在有固定轴的转轮上, 在 10 s 内该轮的转速由零增大到 100 r/min . 此时移去该力矩, 转轮因摩擦力矩的作用经 100 s 而停止. 则此转轮对其固定轴的转动惯量_____.

3. 质量为 m_0 、半径为 R 的匀质圆盘可绕垂直于盘的光滑轴 O 在铅直平面内转动, 盘点 A 固定着质量为 m 的质点, 先使 OA 处于水平位置, 然后释放, 盘由静止开始转动. 当 OA 转过来 30° 时(图 3-14), 质点 m 的法向加速度 a_n _____, 切向加速度 a_t _____.

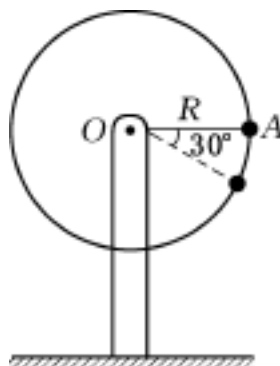


图 3-14

4. 一转动惯量为 J 的圆盘绕一固定轴转动, 起初角速度为 ω_0 . 设它所受阻矩与转动角速度的平方成正比, 比例系数为 k (k 为正的常数), 当 $\omega = \frac{1}{3} \omega_0$ 时圆盘的角加速度

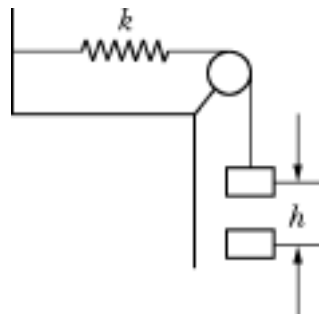


图 3-15

$=$ _____ . 从开始制动到 $\omega = \frac{1}{3} \omega_0$ 所经过的时间 t $=$ _____ .

5. 如图 3-15 所示, 若弹簧的弹性系数为 k 、定滑轮的转动惯量为 J 、半径为 R 、物体的质量为 m . 开始时系统静止而弹簧无伸长. 当物体下落距离 $h =$ _____ 时,

滑轮的角速度最大.当物体下落距离 $h =$ _____ 时,滑轮的角速度为零.

6. 一飞轮以角速度 ω_0 绕轴旋转,飞轮对轴的转动惯量为 J_1 ,另一静止飞轮突然被齿合到同一个轴上,该飞轮对轴的转动惯量为前者的两倍,齿合后这个系统的角速度 $=$ _____.

7. 两个质量都为 100 kg 的人,站在一质量为 200 kg 、半径为 3 m 的水平转台的直径两端.初始时,转台每 5 s 转一圈.当这两人以相同的快慢走到转台的中心时,转台的角速度 $=$ _____ $\left\{ \begin{array}{l} \text{已知转台的转动惯量 } J = \frac{1}{2}MR^2, \\ \text{计算时忽略转台在转轴处的摩擦} \end{array} \right.$

8. 一质量为 M 、长为 l 的匀质细杆,在一光滑的水平面上以速度 v 运动,与一固定在桌面上的钉子相碰撞,碰后细杆绕 O 点转动(图 3-16),则碰后细杆绕 O 轴的角速度 $=$ _____.

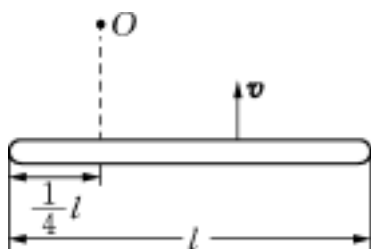


图 3-16

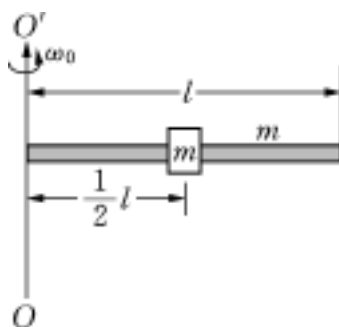


图 3-17

9. 在一水平放置的质量为 m 、长度为 l 的均匀细杆上,套着一质量也为 m 的套管 B(可看作质点),套管用细线拉住,它到竖直的光滑固定轴 OO 的距离为 $\frac{1}{2}l$,杆和套管所组成的系统以角速度 ω_0 绕 OO 轴转动,如图 3-17 所示.若在转动过程中细线被拉断,套管将沿着杆滑动.在套管滑动过程中,该系统转动的角速度与套管离轴的距离 x 的函数关系为_____.(已知杆本身对 OO 轴的转动惯量为 $\frac{1}{3}ml^2$)

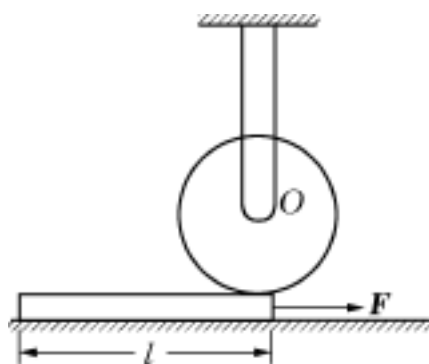


图 3-18

10. 质量为 m 、半径为 R 的圆柱形的轮子,可绕固定轴 O 自由转动,光滑台面上有一质量为 m 、长度为 l 的薄板与轮边缘保持良好的接触,不产生相对滑动.若用恒力 F 作用在板上,板从静止开始通过轮子,如图 3-18 所示.则板刚与轮子脱离接触时的速度 $v =$ _____,板通过轮子的时间 $t =$ _____.

3 4 3 计算题

1 . 一轴承光滑的定滑轮, 质量为 $M = 2.00\text{ kg}$, 半径为 $R = 0.100\text{ m}$, 一根不能伸长的轻绳, 一端固定在定滑轮上, 另一端系有一质量为 $m = 5.00\text{ kg}$ 的物体, 如图 3-19 所示. 已知定滑轮的转动惯量为 $J = \frac{1}{2}MR^2$, 其初角速度 $\omega_0 = 10.0\text{ rad/s}$, 方向垂直纸面向里. 求:

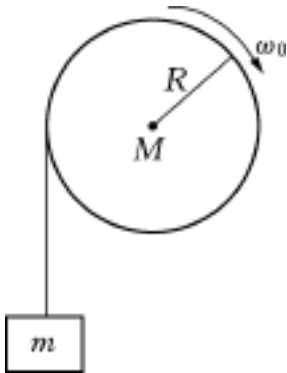


图 3-19

- (1) 定滑轮的角加速度;
- (2) 定滑轮的角速度变化到 $\omega = 0$ 时, 物体上升的高度;
- (3) 当物体回到原来位置时, 定滑轮的角速度.

2 . 均质细棒长 l 质量为 m , 可绕通过 O 点水平轴在竖直平面内转动, 如图 3-20 所示. 在棒的 A 端作用一水平恒力 F , 棒在 F 力的作用下, 由静止转过角度 $\theta = 30^\circ$, 求:

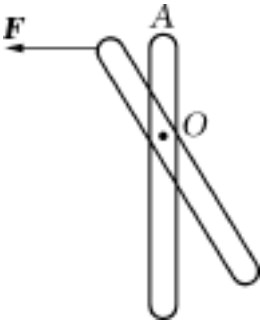


图 3-20

- (1) F 力所做的功;
- (2) 若此时撤去 F 力, 则细棒回到平衡位置时的角速度.

3 . 长为 l 质量为 m_0 的细棒可绕垂直于一端的水平轴自由转动, 棒原来处于平衡状态. 现有一质量为 m 的小球沿光滑水平面飞来, 正好与棒的下端相碰撞 (设碰撞为完全弹性碰撞), 使棒向上摆到 60° 处. 求:

- (1) 小球的初速度;
- (2) 棒在这一碰撞中所受到的冲量为多少?

4 . 一质量均匀分布的圆盘, 质量为 M , 半径为 R , 放在一粗糙水平面上, 圆盘可绕通过其中心 O 的竖直固定光滑轴转动. 开始时, 圆盘静止, 一质量为 m 的子弹以水平速度 v_0 垂直于圆盘半径打入圆盘边缘并嵌在盘边上, 求

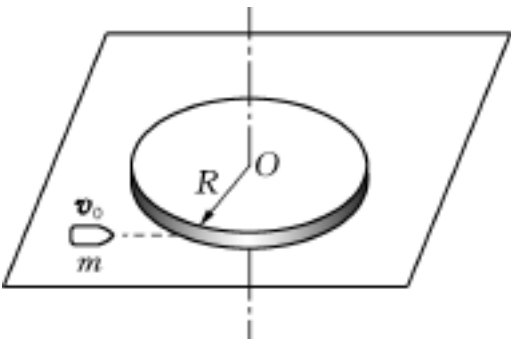


图 3-21

- (1) 子弹击中圆盘后, 盘所获得的角速度;
- (2) 经过多少时间后, 圆盘停止转动.

〔圆盘绕通过 O 的竖直轴的转动惯量为 $\frac{1}{2}MR^2$, 忽略子弹重力造成的摩擦阻力矩; 圆盘和桌面的摩擦因数为 μ 〕

5 . 两个质量分别为 m 与 M 的小球, 位于一固定的、半径为 R 的水平光滑圆形沟槽内. 一轻弹簧被压缩在两球间 (未与球联接), 用线将两球缚紧, 并使之静

止,如图 3-22 所示.

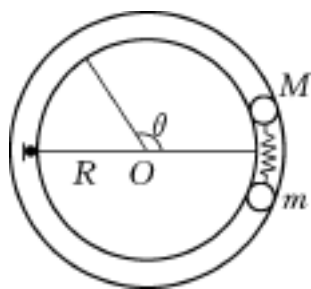


图 3-22

(1) 今把线烧断,两球被弹开后沿相反方向在沟槽内运动,问此后 M 转过多大角度就要与 m 相碰.

(2) 设原来储存在被压缩的弹簧中的势能为 U_0 ,问线断后两球经过多长时间发生碰撞?

6. 质量很小、长度为 l 的均匀细杆,可绕过其中心 O 并与纸面垂直的轴在竖直平面内转动.当细杆静止于水平位置时,有一只小虫以速率 v_0 垂直落在距点 O 为 $l/4$

处,并背离点 O 向细杆的端点 A 爬行(图 3-23),设小虫与细杆的质量均为 m .问:欲使细杆以恒定的角速度转动,小虫应以多大速率向细杆端点爬行?

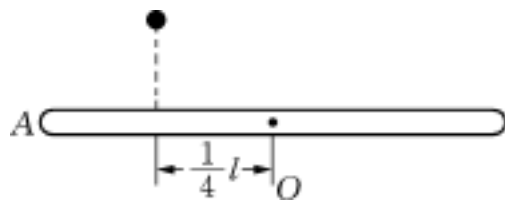


图 3-23

习题选解

[选择题 9] 棒与地球组成的系统机械能守恒,即

$$\frac{1}{2} mgl = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} ml^2 \omega^2 \quad (1)$$

$$v = \omega l \quad (2)$$

联立式(1)、(2)得

$$v = \sqrt{3gl}$$

[选择题 10] 子弹射入过程角动量守恒,而角动量的表示式为 $L = r \times mv$, 所以

$$\frac{1}{2} mv_0 l \sin\left[\frac{\pi}{2} + \theta\right] = \left[\frac{1}{3} ml^2 + m \left[\frac{l}{2} \right]^2 \right] \omega \quad (1)$$

$$v = \frac{1}{2} l \omega \quad (2)$$

联立式(1)、(2)得 $v = \frac{3}{7} v_0 \cos \theta$

[填充题 3] 取圆盘和质点 A 组成的系统为研究对象,系统受 m 的重力矩的作用,即

$$mgR \cos 30^\circ = J \alpha = \left[\frac{1}{2} m_0 R^2 + mR^2 \right] \alpha$$

$$a_t = R = \frac{\sqrt{3}mg}{2m + m_0}$$

若取圆盘、质点 A 和地球为系统,则机械能守恒

$$mgR\sin 30^\circ = \frac{1}{2}J^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}m_0R^2 + mR^2\right]^2$$

$$a_n = \omega^2 R = \frac{2mg}{2m + m_0}$$

[填充题 8]碰撞前后角动量守恒

$$Mv\frac{l}{4} = J = \left[\frac{1}{12}ml^2 + M\left(\frac{l}{4}\right)^2\right]$$

式中 $Mv\frac{l}{4}$ 为质心对 O 点的角动量, J 采用了平行轴定理,由此可得

$$= \frac{12v}{7l}$$

[填充题 10]轮和木板的受力情况如图 3-34

所示.

对圆柱形轮子应用转动定律

$$f_r R = \frac{1}{2}mR^2 \quad (1)$$

对木板则应用牛顿定律 $F - f_r = m_0 a \quad (2)$

其中 $f_t = -f_r$, 由于两者之间无相对滑动,两物体的切向加速度相同,即

$$a = R \quad (3)$$

联立式(1)、式(2)、式(3)可以得到

$$a = \frac{2F}{2m_0 + m}$$

可见薄板作匀加速运动,当它脱离轮时,它的速度为

$$v^2 = 2al$$

可得
$$v = \sqrt{\frac{4Fl}{m + 2m_0}}$$

又
$$l = \frac{1}{2}at^2$$

可解得板通过轮子的时间

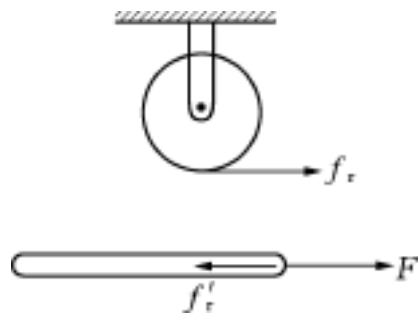


图 3-34

$$t = \sqrt{\frac{(m + 2m_0)l}{F}}$$

[计算题 3] 整个物理过程由小球与棒的完全弹性碰撞和棒的上升两部分构成. 第一过程满足角动量守恒和动能守恒, 第二过程棒的动能转化为重力势能, 符合下列三式:

$$mv_0 l = mvl + \frac{1}{3} m_0 l^2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} m_0 l^2 \right]^2 \quad (2)$$

$$m_0 g \frac{l}{2} (1 - \cos 60^\circ) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} m_0 l^2 \right]^2 \quad (3)$$

联立式(1)、式(2)、式(3)可得

$$v_0 = \frac{m_0 + 3m}{12m} \sqrt{6gl}$$

又棒受到小球给它的冲量为

$$\int_0^t M dt = J = \int_0^t F l dt = Il$$

所以
$$I = \frac{m_0}{3} \sqrt{\frac{3}{2} gl}$$

[计算题 6] 小虫与细杆的碰撞视为完全非弹性碰撞, 碰撞前后系统角动量守恒

$$\begin{aligned} m v_0 \frac{l}{4} &= \left[\frac{1}{12} m l^2 + m \left(\frac{l}{4} \right)^2 \right] \omega \\ &= \frac{12 v_0}{7 l} \end{aligned}$$

由角动量定理

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d(J\omega)}{dt} = \frac{dJ}{dt} \omega$$

即
$$mg r \cos \theta = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{12} m l^2 + m r^2 \right] \omega = 2mr \frac{dr}{dt} \omega$$

考虑到 $\theta = \omega t$

所以
$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{g}{2} \cos \theta t = \frac{7lg}{24 v_0} \cos \left[\frac{12 v_0}{7 l} t \right]$$

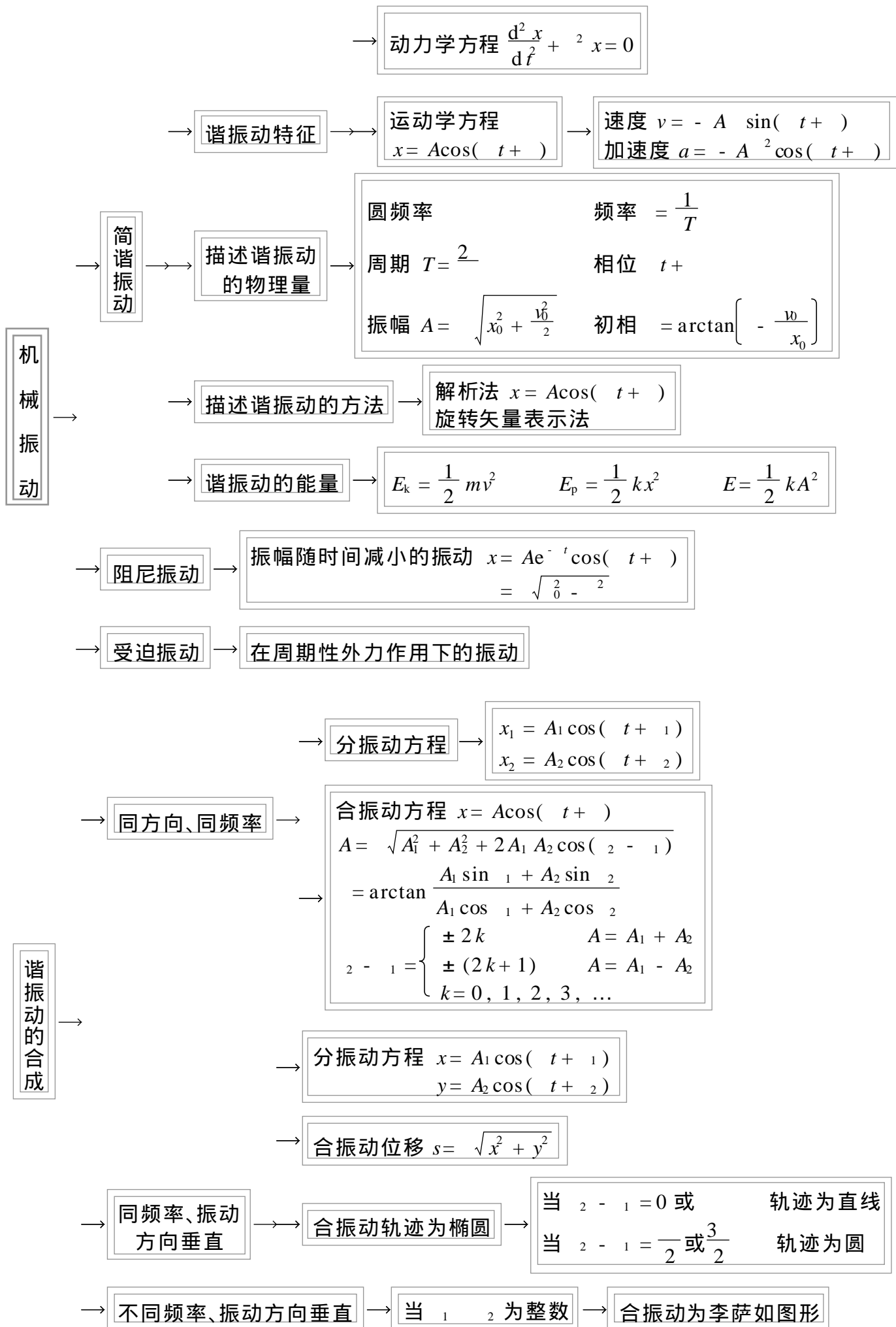
4.1 基本要求与复习框图

1. 基本要求

- (1) 掌握简谐振动的特征和规律——谐振动动力学方程和运动学方程；
- (2) 掌握描述简谐振动的物理量；
- (3) 掌握研究简谐振动的两种方法——解析法和旋转矢量表示法；
- (4) 掌握简谐振动的能量特征；
- (5) 掌握同方向同频率谐振动的合成；
- (6) 了解相互垂直谐振动的合成，了解阻尼振动和受迫振动的特点。

2. 复习框图

在弹性力或准弹性力作用下发生的简谐振动是一种最简单、最基本的振动。任何复杂的振动都可以看作是不同谐振动的合成。在这一章的学习中，应抓住谐振动的特征和基本规律以及谐振动的合成这两个重点，并掌握研究谐振动的两种方法——解析法和旋转矢量表示法。本章主要内容和各部分间的联系如以下复习框图所示。



4.2 阅读指导与问题讨论

本章主要从三个角度对简谐振动展开讨论:

- (1) 动力学角度, 分析谐振动系统的受力特征, 建立动力学方程;
- (2) 运动学角度, 求解动力学微分方程, 并由初始条件得到简谐振动的运动学方程, 即振动表达式, 讨论描述简谐运动的物理量、相互关系及变化规律;
- (3) 能量角度.

本章采用三种不同的描述方法: 数学解析法; 旋转矢量表示法; $x-t$ 图线表示法. 最后讨论谐振动的合成问题.

1. 关于谐振动特征和定义的讨论

谐振动系统可以用三个不同的特征来定义:

- (1) 在线性回复力或线性回复力矩作用下的运动;
- (2) 动力学方程满足 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ 的运动;
- (3) 运动学方程满足 $x = A \cos(\omega t + \phi_0)$ 的运动, 其中 ω 由系统自身的动力学性质所决定, 与外界无关.

[问题 4-1] 从运动学看什么是简谐振动? 从动力学看什么是简谐振动? 一个物体受到一个使它返回平衡位置的力, 它是否一定作简谐振动?

[解答] 从运动学角度看, 物体在平衡位置附近作往复运动, 运动变量(位移、角位移等)随时间的变化规律可以用一个正(余)弦函数来表示, 则该物体的运动就是简谐振动.

从动力学角度看, 如果物体受到的合外力(或合外力矩)与位移(或角位移)的大小成正比, 而且方向相反, 则该物体就作简谐振动.

由简谐振动的定义可以看出, 物体所受的合外力不仅需要与位移方向相反, 而且大小应与位移大小成正比, 所以一个物体受到一个使它返回平衡位置的力, 不一定作简谐振动.

[问题 4-2] 一物体作简谐振动, 其振动频率越高, 则运动速度越大, 这种说法是否正确?

[解答] 这种说法不正确. 因为振动频率是表示物体的振动快慢程度, 即单位时间内振动次数的多少. 运动速度是表示单位时间内物体位置改变的快慢程度. 对简谐振动的物体, 其速度为

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \phi_0)$$

可以看出, 速度与相位有关, 大小在 $0 \sim A\omega$ 间反复变化. 即使从速度的幅值 $A\omega$ 来看, 它不仅与频率 ($\omega = 2\pi\nu$) 有关, 还与振幅 A 有关. 如果振幅 A 一定, 则频率越高, 运动速度的幅值也就越大. 而一个振动频率很高, 振幅却很小的振动物体, 其运动速度的幅值完全可能小于一个振动频率很低, 振幅很大的振动物体的速度幅值.

2. 关于简谐振动周期、频率、振幅和初相等物理量的理解和讨论

对一个确定的谐振动系统, 其谐振动周期或频率是由系统自身力学性质决

定的,与振动的初始条件无关;如果沿振动方向施加一恒力,则这一恒力只改变振动的平衡位置,并不影响振动周期和频率.

而振动的初相和振幅则由初始条件决定,对同一个谐振动系统,若振子的初始位置、初始速度不同,其振动表达式也将各不相同.

[问题 4-3] 如果把单摆和弹簧振子带到月球上去,它们的振动周期和振动频率是否变化?

[解答] 单摆在月球上振动的周期会变长,振动频率变小.因为单摆的振动周期和振动频率都与重力加速度 g 有关.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{1}{f} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

而月球上的重力加速度 g 约为地球上的重力加速度的六分之一.

弹簧振子在月球上振动周期和振动频率都不变.因为振动周期和振动频率分别为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{f} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

它们都不涉及地球或月球的因素,只与弹簧振子本身的因素有关.对于竖直放置的弹簧振子,重力 mg 的变化只会改变它的平衡位置,对其振动周期和频率却没有影响.

[问题 4-4] 试分析:

(1) 图 4-1(a)、(b)所示情况下,弹簧弹性系数 k 及振子圆频率各为多少?

(2) 若将一长度为 l ,弹性系数为 k 的轻弹簧分割成 l_1 和 l_2 两部分,且 $l_1 = nl_2$,则每一部分相应的弹性系数 k_1 和 k_2 各是多少?

[解答] (1) 图 4-1(a)所示为弹簧 k_1 和 k_2 并联的情况.

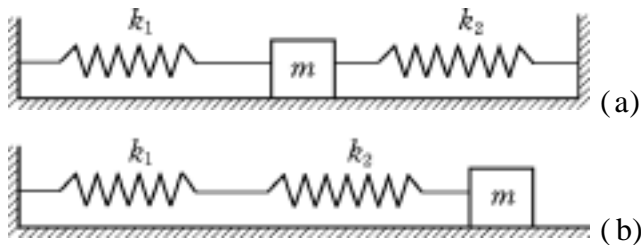


图 4-1

现设振子 m 偏离平衡位置的位移为 x (以水平向右为 x 轴正向),则 m 所受合外力为

$$F = -k_1 x - k_2 x = -kx$$

因此两弹簧并联后的等效弹性系数为

$$k = k_1 + k_2$$

$$\text{振动系统圆频率为} \quad \omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

图 4-1(b)所示为弹簧 k_1 和 k_2 串联的情况.

现设 k_1 和 k_2 的伸长量为 x_1 和 x_2 ,则总伸长量为

$$x = x_1 + x_2$$

不考虑弹簧自身质量,则 k_1 、 k_2 所受拉力与整个弹簧 k 所受拉力相等,所以有

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$$

因此两弹簧串联后的等效弹性系数为

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

振动系统圆频率为
$$= \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

(2) 根据胡克定律, 弹簧上的应力与应变成正比, 即

$$\frac{F}{S} = \bar{Y} \frac{x}{l}$$

式中 F 为弹簧受到的弹性力, S 为弹簧截面积, l 为弹簧长度, x 为弹簧伸长量, \bar{Y} 为杨氏模量.

故
$$F = \frac{\bar{Y} S}{l} x = kx$$

即弹性系数 $k = \frac{\bar{Y} S}{l}$ 与弹簧长度 l 成反比.

现根据题意有 $k = \frac{\bar{Y} S}{l}$, $k_1 = \frac{\bar{Y} S}{l_1}$, $k_2 = \frac{\bar{Y} S}{l_2}$

又有 $l_1 = nl_2$, $l = l_1 + l_2 = (n+1)l_2$

联立以上各式可以得到:

$$k_1 = \frac{n+1}{n} k, \quad k_2 = (n+1) k$$

[问题 4-5] 一端固定的弹簧振子, 当它在光滑水平面上作谐振动时, 振动周期 $T = 2\sqrt{\frac{m}{k}}$

问: (1) 若使它在竖直悬挂情况下谐振动, 其振动周期是否会改变?

(2) 把竖直悬挂的弹簧振子浸没在水中, 使其在水中振动(物体始终浸没于水中), 振动周期又如何变化?

[解答] (1) 竖直悬挂的弹簧振子是在重力和弹簧弹力共同作用下振动的, 如取平衡位置为坐标原点, 竖直向下为 x 轴的正方向, 如图 4-2 所示.

设某时刻振子离平衡位置的位移为 x , 根据牛顿定律, 振子的动力学方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - k(x + x_0)$$

因振子在平衡位置时,

$$mg = kx_0$$

代入动力学方程得

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

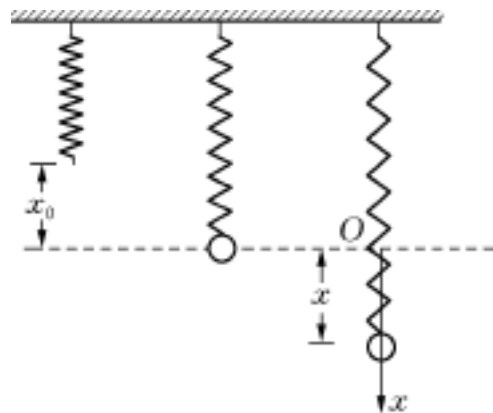


图 4-2

该方程与水平弹簧振子的动力学方程相同, 所以竖直弹簧振子的周期同样为

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(2) 对在水中振动的竖直弹簧振子, 是在重力、弹力和浮力的共同作用下振动 如图 4-3 取坐标, 得振子的动力学方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - k(x + x_0) - F_{\text{浮}}$$

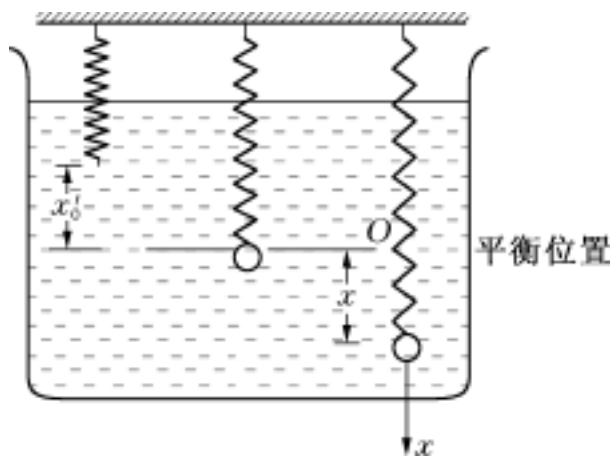


图 4-3

因振子在平衡位置时,弹簧伸长为 x_0 , 所以有

$$mg = kx_0 + F_{\text{浮}}$$

代入动力学方程得

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

该方程仍与水平弹簧振子的动力学方程相同, 所以竖直弹簧振子在水中振动的周期也同样为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

从上面的讨论可知, 竖直弹簧振子比水平弹簧振子多受一个重力, 而浸在水中的竖直弹簧振子又多受了一个浮力, 这里的重力和浮力都是恒力, 弹簧振子的振动周期不变. 读者还可以自己思考以下情形, 竖直弹簧振子悬挂在匀加速运动的升降机中; 弹簧振子放在与水平线成 θ 角的光滑斜面上; 它们的振动周期又如何? 如果竖直弹簧振子振动时, 物体没有全部浸没在水中, 则物体振动时浮力是变力, 这时弹簧振子的周期将不再是 $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ 了.

[问题 4-6] 如图 4-4 所示, 在光滑水平面上有一个一端固定的弹簧振子. 第一次把它从平衡位置向右拉长一段距离 l 后释放; 第二次把它从平衡位置向左压缩一段距离 l 后释放; 第三次把它从平衡位置向右拉长一段距离 $2l$ 后释放. 问弹簧振子这三次振动的振幅、初相和周期是否相同?

[解答] 弹簧振子在上述三次振动中受力情况相同, 都是在弹簧的线性回复力作用下作谐振动, 其动力学方程均为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

并可归结为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

其中 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, 周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ 所以三次振动的周期相同.

弹簧振子在三次振动中初始条件不同, 因此振动初相和振幅将各不相同. 第一次振动的初始条件为 $x_0 = l, v_0 = 0$; 第二次为 $x_0 = -l, v_0 = 0$; 第三次为 $x_0 = 2l, v_0 = 0$. 因为振幅

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

所以, 第一次、第二次振动的振幅相同, 均为 l . 第三次振动振幅为 $2l$. 又因为初相

$$\phi = \arctan\left[-\frac{v_0}{\omega x_0}\right]$$

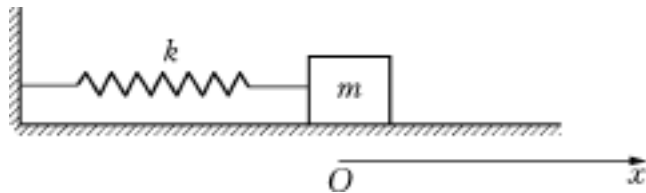


图 4-4

而三次振动的初速度 v_0 均为 0, 所以, 为 0 或 第一和第三次振动 $x_0 = A \cos \phi > 0$, 故 $\phi_1 = \phi_3 = 0$ 第二次振动 $x_0 < 0$, 故 $\phi_2 = \pi$.

* 应当注意, 从根本上说振动系统振幅 A 的大小是由初始位移 x_0 和初速度 v_0 所决定. 但 A 并不是只能由式 $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$ 来确定. 如果已知某时刻 t 谐振动的位移 x 和速度 v , 按机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

等式两边同除以 $\frac{1}{2}k$, 并令 $\omega^2 = \frac{k}{m}$, 得

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}$$

所以

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}$$

这样, 振幅 A 也可由 t 时刻的位移 x 和速度 v 确定.

3. 关于旋转矢量表示法的理解和应用

旋转矢量表示法是直观、形象地描述谐振动的一种有效工具. 如图 4-5 所示. 矢量 A : 其大小等于谐振动振幅, 以谐振动圆频率 ω 为角速度绕坐标原点 O 作逆时针匀速转动; 在 $t = 0$ 时刻, A 与 x 轴夹角为谐振动初相 ϕ , 则任一 t 时刻, A 与 x 轴夹角 $\omega t + \phi$ 表示 t 时刻的振动相位, 而 A 的端点在 x 轴上的投影即为该时刻的振动位移.

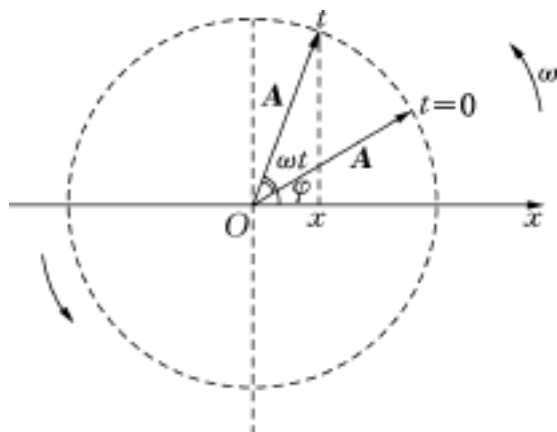


图 4-5

用旋转矢量表示法可以很直观地表示出振动的相位和初相. 在确定初相、比较两振动的相位差、时间差以及求振动合成等问题时, 这种方法非常简便, 具有其优越性.

需要注意的是, 旋转矢量 A 本身并不作简谐运动, 而是矢量 A 的端点在 x 轴上的投影点在作简谐运动. 旋转矢量是对各种简谐振动的图示模拟, 是描述简谐振动而采用的一种手段或工具.

[问题 4-7] 谐振子 t 时刻在位置 $x = -\frac{A}{2}$ 处, 并正在向 x 轴正方向运动, 试确定振子此刻的相位是多少? 若周期 $T = 2$ s, 则振子到达最大位移处的最短时间是多少?

[解答] 这一问题用旋转矢量表示法解决非常简便.

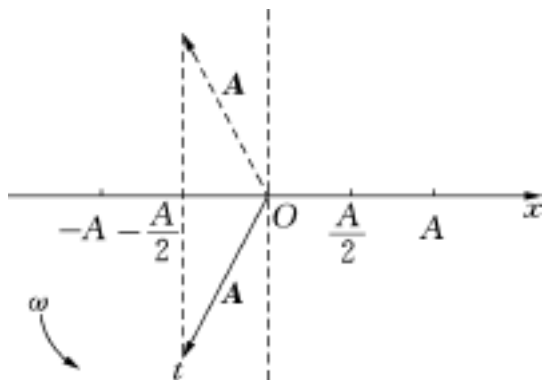


图 4-6

如图 4-6 所示, t 时刻矢量 A 的端点在 x 轴上的投影为 $-\frac{A}{2}$, 则 A 可能处于图示的两个位置处, 即此刻相位是 $\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3}$. 又因为振子正在向 x 轴正方向运动, 而旋转矢量 A 总是向逆时针方向转动, 所以, 此刻矢量 A 只可能处在图 4-6 中实线所示位置处, 即此刻振子的相位是 $\frac{4\pi}{3}$.

从图 4-6 可以看出, 振子到达最大位移 $x = A$ 时, 对应矢量 A 转过角度

$$= 2\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

该角度对应振子在 $x = -\frac{A}{2}$ 与 $x = A$ 时刻的最小相位差, 由

$$= \omega t = \frac{2\pi}{T} t$$

可得振子到最大位移处所需时间 $t = \frac{2}{3} s$

[问题 4-8] 有两个质点作简谐振动, 振幅均为 A , 振子 1 周期 $T_1 = 2 s$, $t = 0$ 时刻沿 x 轴正向运动至平衡位置; 振子 2 周期 $T_2 = 1 s$, $t = 0$ 时刻沿 x 轴反向运动至平衡位置. 问: (1) $t = 0$ 时刻振子 1、2 的相位差是多少? (2) 经过 $\frac{1}{3} s$ 后振子 1、2 的相位差又是多少?

[解答] (1) 由题意, 可画出振子 1、2 在 $t = 0$ 时刻的旋转矢量图, 如图 4-7 所示. 由图得出, $t = 0$ 时刻, 振子 1、2 的相位

$$\varphi_{10} = \frac{3\pi}{2}, \quad \varphi_{20} = \frac{\pi}{2}$$

相位差 $\Delta\varphi_0 = \varphi_{10} - \varphi_{20} =$

(2) 经 $\frac{1}{3} s$ 后, 从旋转矢量图上看, 矢量 A_1 转过角

度为 $\Delta\varphi_1$, 并且有

$$\Delta\varphi_1 = \omega_1 t = \frac{2\pi}{T_1} \cdot t = \frac{\pi}{3}$$

$\frac{1}{3} s$ 时刻, 振子 1 的相位 $\varphi_1 = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$

A_2 矢量转过角度为

$$\Delta\varphi_2 = \omega_2 t = \frac{2\pi}{T_2} \cdot t = \frac{2\pi}{3}$$

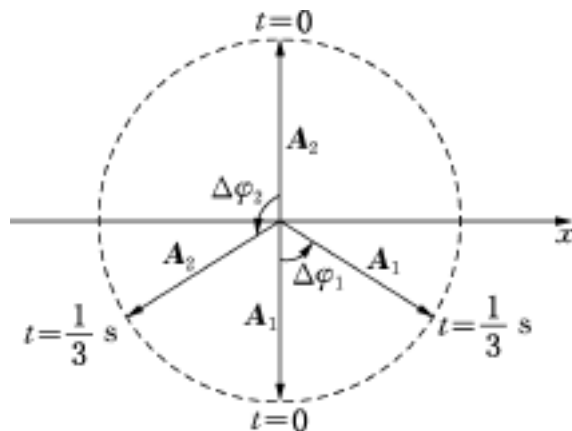


图 4-7

$\frac{1}{3}$ s 时刻, 振子 2 的相位 $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$

并且, 由旋转矢量图可以直接得出, $t = \frac{1}{3}$ s 时刻, 矢量 A_1 和 A_2 间的夹角, 即振子 1、2 的相位差 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3}$

[问题 4-9] 有两个同方向、同频率的谐振动, 它们的振动方程为

$$x_1 = 5\cos t \text{ 和 } x_2 = 5\cos\left[t + \frac{\pi}{2}\right]$$

如有另一个同方向、同频率的谐振动 x_3 , 使得 x_1 、 x_2 和 x_3 三个谐振动的合振动为 0, 求这个谐振动的振动方程。

[解答] 从旋转矢量图很容易看出, 要使 x_1 、 x_2 和 x_3 三个谐振动的合振动为 0, x_3 的振幅矢量必须与 x_1 、 x_2 的合振动的振幅矢量大小相等、方向相反, 如图 4-8 所示。

由图 4-8 可知, 谐振动 x_3 的振幅必须为

$$A_3 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

初相为

$$\varphi_3 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi = \frac{5\pi}{4}$$

所以谐振动 x_3 的振动方程为

$$x_3 = 5\sqrt{2}\cos\left[t + \frac{5\pi}{4}\right] \text{ cm}$$

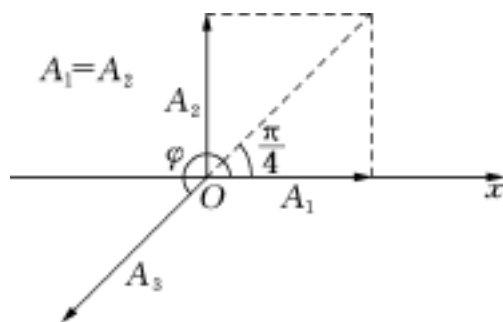


图 4-8

4. 关于谐振动系统势能问题的理解和讨论

以弹簧振子为例, 振动系统的机械能为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

对竖直悬挂的弹簧振子, 通常将坐标原点和势能零点均取在振动系统的平衡位置处, 这时能量表示式中的 $\frac{1}{2}kx^2$ 不能仅仅理解为弹性势能, 而应理解为弹性势能和重力势能的总和, $\frac{1}{2}kx^2$ 又称有效弹性势能, 这时谐振动的能量表示式中不再出现重力势能项。

[问题 4-10] 试说明竖直悬挂弹簧振子的势能表示式为 $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ 。

[解答] 如图 4-9 所示, 一竖直悬挂的弹簧振子, A 点表示弹簧未伸长的位置, O 点表示系统的平衡位置, B 点表示任一时刻振动物体的位置。如以弹簧未伸长的位置 A 为弹性势能的零点, 则振子在 B 点时, 系统的弹性势能应为 $\frac{1}{2}k(x + x_0)^2$ 。如把弹性势能的零点移到 O 点, 则根据定义, B 点的弹性势能为

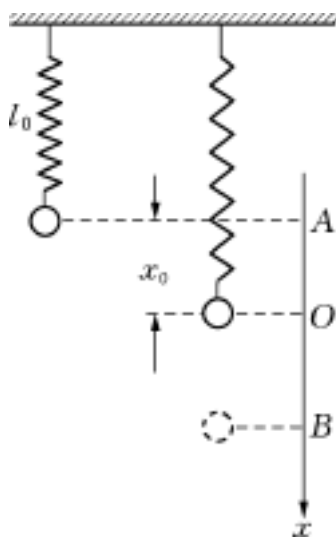


图 4-9

$$E_{pB} = \int_x^0 -k(x+x_0)dx$$

$$= \frac{1}{2}k(x+x_0)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

另外,以 O 点为重力势能的零点时, B 点的重力势能为

$$E_p^{\text{重}} = -mgx$$

因此,以 O 点为势能的零点时,振子在 B 点的总势能为

$$E_{pB} = \frac{1}{2}k(x+x_0)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 - mgx$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 + kxx_0 - \frac{1}{2}kx_0^2 - mgx$$

又因 $mg = kx_0$, 故得

$$E_{pB} = \frac{1}{2}kx^2$$

B 点的总能量

$$E_B = E_{pB} + E_{kB} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

4.3 解题方法与典型例题

1. 判断或证明谐振动,并求谐振动频率

对这类问题的解题步骤一般为:

(1) 对振动系统进行受力分析;

(2) 找出物体的平衡位置,并取该位置为坐标原点.沿物体振动的路径建立直线坐标系;

(3) 写出物体所受合外力的表示式,若其满足 $F = -kx$ 或 $F = -k$ 的形式,则物体一定作谐振动.由牛顿定律建立动力学方程,并整理为 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ 形式,由此求出圆频率.

此外,也可以运用机械能守恒定律求解此类问题.

[例 4-1] 一轻弹簧,弹性系数为 k ,一端固定,另一端系一轻绳,轻绳跨过滑轮,挂一质量 m 的物体.滑轮转动惯量 J ,半径 R ,如图 4-10 所示.现将 m 从平衡位置向下拉一微小距离后放手,试证物体作谐振动,并求振动周期.设绳与滑轮间无摩擦,且不计轴的摩擦及空气阻力.

[解] 本题若不考虑滑轮的转动,则振动系统就是一竖直弹簧振子,周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.考虑了滑轮

的转动后,滑轮两边绳子的拉力不相等,须列出振动系统动力学方程进行判断.

方法一:由转动定律和牛顿定律相结合,建立动力学方程.如图 4-10,以悬挂重物后的平衡位置为坐标原点 O ,此时弹簧伸长 x_0 ,有

$$mg = kx_0 \quad (1)$$

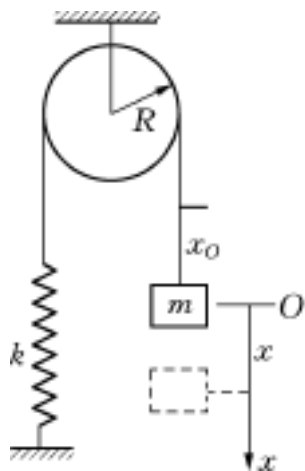


图 4-10

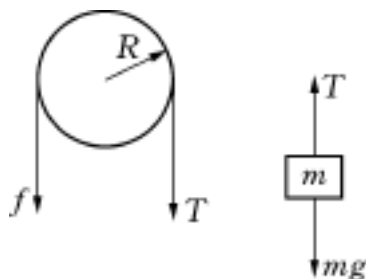


图 4-11

当物体向下运动到 x 处时,根据图 4-11 受力分析,

$$mg - T = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (2)$$

$$TR - fR = J \quad (3)$$

$$f = k(x_0 + x) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{R} \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (5)$$

联立式(1)~(5)可得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m + \frac{J}{R^2}} x = 0$$

这是一个谐振动方程,所以物体作谐振动,圆频率为

$$= \sqrt{\frac{k}{m + \frac{J}{R^2}}}$$

周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{J}{R^2}}{k}}$$

方法二:本题也可以利用系统机械能守恒来求谐振动方程.物体运动至 x 位置时,系统机械能为

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{常数}$$

注意,根据[问题4-3]的讨论,这里以平衡位置为坐标原点及势能零点,故 $\frac{1}{2}kx^2$ 项中包含了重力势能

因 $= \frac{v}{R}$, 所以有

$$\frac{1}{2} \left[m + \frac{J}{R^2} \right] v^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \text{常数}$$

将上式两边对时间求导得

$$\left[m + \frac{J}{R^2} \right] v \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = 0$$

由 $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{dx}{dt} = v$, 上式又可简化为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m + \frac{J}{R^2}} x = 0$$

此式与方法一所得谐振动方程相同,说明物体作谐振动,周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{J}{R^2}}{k}}$$

从上面讨论可以看出,如滑轮不转动,其转动动能为0,则周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

2. 求解谐振动方程(振动表达式)

这类问题通常有两种类型:一是已知某谐振动系统,根据题意及初始条件建立振动方程;二是已知振动曲线 $x-t$ 图,从 $x-t$ 图上求出 ϕ 、 A 、 ω ,建立振动方程.

[例4-2] 如图4-12所示,质量为 m_0 的小圆盘悬挂在弹性系数为 k 的轻弹簧下端,一套在弹簧上质量为 m 的小圆环在离盘高 h 处自由下落,并与盘发生完全非弹性碰撞,然后与盘一起作简谐振动.试求:

- (1) 振动表达式;
- (2) 圆盘由初始位置到达最低点所需要的时间.

[解] (1) 以圆盘和圆环为弹簧振子,谐振动系统的圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + m_0}}$$

现以平衡位置为坐标原点,向下建立 x 轴,如图4-12

所示.根据题意, $t = 0$ 时初始位移

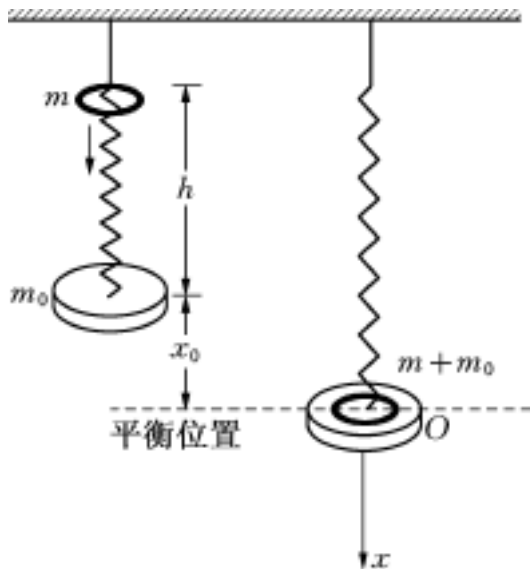


图4-12

$$x_0 = - \frac{mg}{k}$$

初速度可由动量守恒定律求得 因碰撞是完全非弹性的,所以圆盘与圆环碰撞后的共同速度,即振动系统初速度 v_0 满足

$$m \sqrt{2gh} = (m + m_0) v_0$$

解得
$$v_0 = \frac{m \sqrt{2gh}}{m + m_0}$$

方向向下,沿 x 轴正向 由上述初始条件可求得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{2}} = \sqrt{\left[- \frac{mg}{k}\right]^2 + \frac{m^2 2gh}{(m_0 + m)k}}$$
$$\tan \varphi = - \frac{v_0}{x_0} = - \frac{\frac{m \sqrt{2gh}}{m + m_0}}{\left[- \frac{mg}{k}\right]} = \sqrt{\frac{2kh}{(m + m_0)g}} > 0$$

可取 $\arctan \sqrt{\frac{2kh}{(m + m_0)g}}$ 或 $\arctan \sqrt{\frac{2kh}{(m + m_0)g}} +$

初相 的确定,用旋转矢量图示法则非常简洁 如图 4-13 所示,因 $x_0 < 0$, v_0 沿 x 轴正向,所以 $t = 0$ 时,旋转矢量 A 应在实线所示位置处,所以,初相为

$$= \arctan \sqrt{\frac{2kh}{(m + m_0)g}} +$$

振动表达式为

$$x = \sqrt{\left[\frac{mg}{k}\right]^2 + \frac{m^2 2gh}{(m + m_0)k}} \cos \left[\sqrt{\frac{k}{m + m_0}} t + \arctan \sqrt{\frac{2kh}{(m + m_0)g}} + \right]$$

(2) 圆盘到达最低点时, $x = A$, 从旋转矢量图 4-13 可见,矢量 A 转过角度 即圆盘在 $t = 0$ 时与最低点对应相位差

$$= 2\pi - \arctan \sqrt{\frac{2kh}{(m + m_0)g}} = \pi t$$

由上式可解得圆盘到达最低点所需时间为

$$t = \frac{\sqrt{m + m_0} \left[\pi - \arctan \sqrt{\frac{2kh}{(m + m_0)g}} \right]}{\sqrt{k}}$$

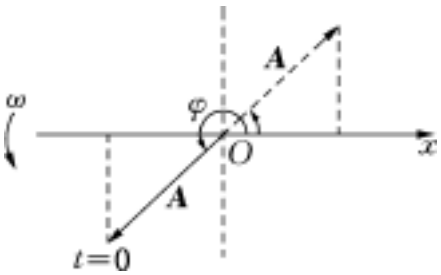


图 4-13

* 本题若向上建立 x 轴,则初始条件改变,振动表达式也随之改变,但是圆盘从初始位置到达最低点的时间不变 .

(1) 仍以平衡位置为坐标原点,则 $t = 0$, $x_0 = \frac{mg}{k}$, 初速度 v_0 仍由动量守恒定律求得,表示式同上,方向向下,沿 x 轴负向 .

由此可求得振幅 A , 其表示式同上. 初相 满足

$$\tan \varphi = -\frac{v_0}{x_0} = -\frac{\left[-\frac{m\sqrt{2gh}}{m+m_0} \right]}{\frac{mg}{k}}$$

同样可取图 4-13 所示的两个值. 由 $x_0 > 0$, v_0 沿 x 轴负向, 所以 $t = 0$ 时, 旋转矢量 A 应在图 4-13 中虚线所示位置处. 即

$$= \arctan \sqrt{\frac{2kh}{(m+m_0)g}}$$

所以振动表达式为

$$x = \sqrt{\left[\frac{mg}{k} \right]^2 + \frac{m^2 2gh}{(m+m_0)k}} \cos \left[\sqrt{\frac{k}{m+m_0}} t + \arctan \sqrt{\frac{2kh}{(m+m_0)g}} \right]$$

(2) 圆盘到最低点时, $x = -A$, 这时矢量 A 转过角度(如图 4-13 所示)为

$$= -\varphi = -\arctan \sqrt{\frac{2kh}{(m+m_0)g}}$$

所以解得 t 同上.

[例 4-3] 已知一谐振动 $x-t$ 曲线如图 4-14 所示, 求其谐振动方程.

[解] 谐振动表达式为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

本题要从 $x-t$ 曲线图上确定 A 、 ω 以及 φ .

方法一: 解析法.

由 $x-t$ 图得

$$A = 2(\text{cm}),$$

$$t = 0 \text{ 时, } x_0 = A \cos \varphi = -\frac{A}{2}, \cos \varphi = -\frac{1}{2}, \varphi = \frac{2}{3} \text{ 或 } \frac{4}{3};$$

此时谐振子向 x 负方向运动, $v_0 = -A \sin \varphi < 0$, $\sin \varphi > 0$, 所以

$$\varphi = \frac{2}{3}$$

$$t = 1 \text{ s 时, } x_1 = A \cos \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3} \right) = 0, \quad \frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{3}{2};$$

而 $v_1 = -A \sin \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3} \right) > 0$, $\sin \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3} \right) < 0$, 所以得

$$\frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{3}{2}, \quad \varphi = \frac{5}{6}$$

振动表达式为

$$x = A \cos \left[\frac{5}{6} t + \frac{2}{3} \right] (\text{cm})$$

方法二: 旋转矢量图示法.

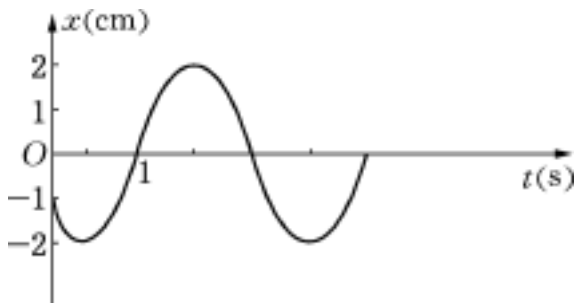


图 4-14

由 $x-t$ 图, $t = 0$ 时旋转矢量 A 的端点在 x 轴上的投影为 $-\frac{A}{2}$, 矢量 A 可能处于图 4-15 所示的两个位置处 又因为此时谐振子正向 x 轴负方向运动, 所以 A 只可能在图 4-15 实线所示位置上, 即

$$= \frac{2}{3}$$

同理, $t = 1\text{ s}$ 时旋转矢量 A 在 x 轴上的投影为 0, 且谐振子正向 x 轴正方向运动, 如图 4-15 所示, 可得

$$+ = \frac{3}{2}, \quad = \frac{5}{6}$$

由此同样得到谐振动表达式为

$$x = A\cos\left[\frac{5}{6}t + \frac{2}{3}\right] (\text{cm})$$

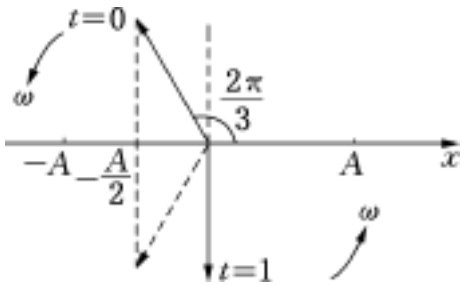


图 4-15

3 . 谐振动的合成问题

这里主要讨论两个同方向、同频率谐振动的合成 . 一般有两种方法: (1) 解析法; (2) 矢量图解法 . 很多情况下, 用矢量图解法比较方便 .

[例 4-4] 已知两谐振动的 $v-t$ 曲线, 如图 4-16 所示 . 它们是同方向同频率的谐振动 求:

- (1) 这两个谐振动的振动方程;
- (2) 求它们的合振动方程 .

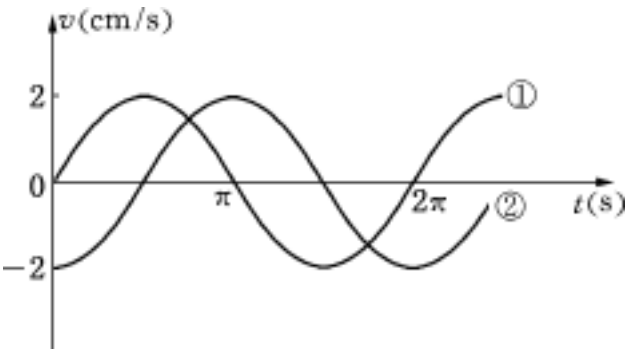


图 4-16

[解] (1) 要注意本题给出的是 $v-t$ 曲线 由图 4-16 可知, 谐振动 在 $t = 0$ 时, $v_0 = - A \sin \varphi_1 = 0$, φ_1 为 π 或 0; 又 t 增加时 $v > 0$, 即振子向 x 轴正方向运动, 由旋转矢量图 4-17 可以确定

$$\varphi_1 = \pi, \quad x_{10} = - A$$

谐振动 在 $t = 0$ 时, $v_0 = - A \sin \varphi_2 = - v_m$, 所以

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad x_{20} = 0,$$

从旋转矢量图上看, 此时振子正从平衡位置向 x 轴负方向运动 .

又因 $v-t$ 曲线的周期和 $x-t$ 曲线相同, 所以两谐振动的周期均为 $T = 2\text{ (s)}$, 圆频率 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1(\text{rad/s})$.

由图 4-16 还可以得出两振动的振幅

$$A_1 = A_2 = A = \frac{v_m}{\omega} = 2(\text{cm})$$

根据以上讨论可以写出谐振动 和 的振动表达式为

$$x_1 = 2\cos(t + \quad)(\text{cm})$$

$$x_2 = 2\cos\left[t + \frac{\quad}{2}\right](\text{cm})$$

(2) 两谐振动的合振动方程,可用旋转矢量表示法,利用矢量合成很容易求出合振动振幅 A 和初相
如图 4-17 所示,因 $|A_1| = |A_2|$, 所以合振幅和初相分别为

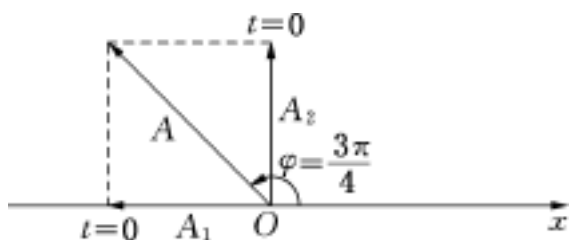


图 4-17

$$A = \sqrt{2}A_1 = 2\sqrt{2}(\text{cm})$$

$$= \frac{3}{4}$$

合振动方程为

$$x = A\cos(t + \quad) = 2\sqrt{2}\cos\left[t + \frac{3}{4}\right](\text{cm})$$

4. 谐振动能量及综合问题

[例 4-5] 如图 4-18 所示,一弹簧振子水平放置,弹性系数为 k , 振子质量为 m , 若从弹簧原长处开始对振子施加一恒力 F , 经一段距离 l 后撤去外力, 问振子将作何种运动, 并求振动系统总能量和振动表达式.

[解] 外力撤去后, 振子将作 $= \sqrt{\frac{k}{m}}$ 的简谐振动, 振子能量来自外力 F 做功, 因 F 为恒力, 所以振动系统的总能量为

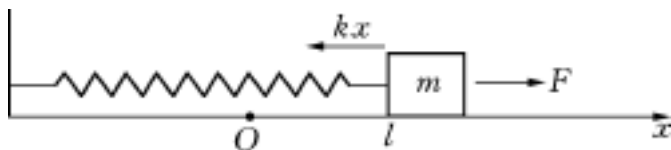


图 4-18

$$E = Fl$$

根据

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = Fl$$

可得振幅 $A = \sqrt{2Fl/k}$. 假设从 l 处开始计时, 则 $x_0 = l$. 要注意, 此时振子的能量包括初始势能和初始动能两部分, 即

$$\frac{1}{2}kA^2 = Fl = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kl^2$$

这时振子的速度沿 x 轴正向, 由

$$x_0 = A\cos \quad = l \text{ 和 } v_0 = -A \sin \quad > 0$$

得 $\quad = -\arccos \sqrt{\frac{kl}{2F}}$

由此可写出振动表达式

$$x = A\cos(t + \quad) = \sqrt{\frac{2Fl}{k}}\cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}t - \arccos \sqrt{\frac{kl}{2F}}\right]$$

[例 4-6] 如图 4-19 所示, 两根完全相同的弹簧, 与质量为 m_1 的质点连接, 放在光滑水平面上, 弹簧

另一端各自固定在墙上,两墙间距离等于弹簧原长的两倍.令 m_1 沿水平面作简谐振动.当 m_1 运动至两墙的中点时,一质量为 m_2 的物体轻轻落下并粘在 m_1 上.求 m_2 粘上前后两种情况下振动系统的圆频率之比及振幅之比.

[解] 弹簧振子的圆频率是由弹簧的弹性系数及振子质量所决定的.图 4-19 所示情况相当于两弹簧并联(见[问题 4-4]讨论),其等效弹性系数为 $2k$,所以粘上 m_2 前系统的圆频率为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m_1}}$$

粘上 m_2 后,振子质量为 $m_1 + m_2$,故系统圆频率为

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m_1 + m_2}}$$

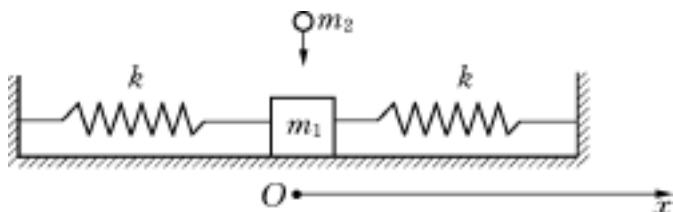


图 4-19

所以两种情况下振动系统的圆频率之比为

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}}$$

求振幅之比,可以从以下几个不同的思路求解:

首先,以两墙中点即振动系统平衡位置 O 为坐标原点,建立 x 轴,如图 4-19 所示.以 m_2 粘上的瞬间为计时起点,则在 m_2 粘上前后,振子位移为 $x_{10} = x_{20} = 0$; 又 m_2 粘上前后系统水平方向上动量守恒,即

$$m_1 v_{10} = (m_2 + m_1) v_{20}, \quad v_{20} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{10}$$

v_{10} 为 m_2 粘上前,振子在 O 点的速度, v_{20} 为 m_2 粘上后,在 O 点的共同速度.代入振幅表示式,可得

$$A_1 = \sqrt{x_{10}^2 + \frac{v_{10}^2}{\omega_1^2}} = \sqrt{\frac{m_1}{2k}} v_{10}$$

$$A_2 = \sqrt{x_{20}^2 + \frac{v_{20}^2}{\omega_2^2}} = \frac{m_1 v_{10}}{\sqrt{2k(m_1 + m_2)}}$$

所以两种情况下振动系统的振幅之比为

$$\frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}}$$

第二,可直接根据 $v_m = A\omega$, 在平衡位置 O 处, $v_{10} = v_{1m} = A_1\omega_1$, $v_{20} = v_{2m} = A_2\omega_2$, v_{10} 与 v_{20} 仍然由动量守恒求得,结论同上,所以得到 $A_1 = v_{10}/\omega_1$, $A_2 = v_{20}/\omega_2$, 由此同样可得到 $A_1/A_2 = v_{10}/v_{20} \cdot \omega_2/\omega_1$, 结论同上.

第三,还可根据系统机械能求解.在平衡位置 O 点, m_2 粘上前后,振动系统的机械能分别为

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 = \frac{1}{2} (2k) A_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \omega_1^2 A_1^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{20}^2 = \frac{1}{2} (2k) A_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \omega_2^2 A_2^2$$

所以有

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{m_1 v_{10}^2}{(m_1 + m_2) v_{20}^2} = \frac{m_1^2 A_1^2}{(m_1 + m_2)^2 A_2^2}$$

由上式可得到

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{v_{10}}{v_{20}} = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}}$$

4.4 自测练习与能力训练

4.4.1 选择题

1. 某质点按余弦规律振动, 它的 $x-t$ 图如图 4-20 所示, 那么该质点的振动初相位是 [] .

- (A) 零 (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $-\frac{\pi}{2}$ (D)

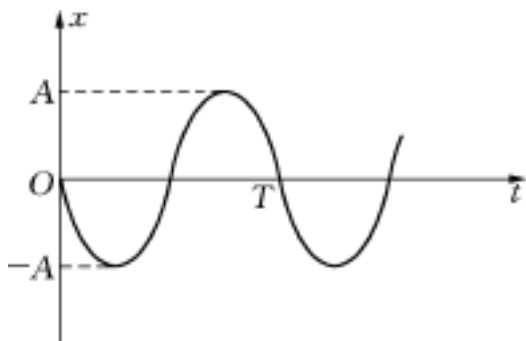


图 4-20

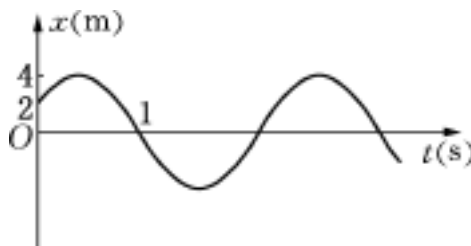


图 4-21

2. 一简谐振动曲线如图 4-21 所示, 则振动周期为 [] .

- (A) 2.62 s (B) 0.42 s
(C) 2.40 s (D) 0.382 s

3. 弹簧振子(弹性系数为 k , 质量为 m) 放在倾角为 α 的光滑斜面上, 弹簧的一端固定, 如图 4-22 所示. 则该弹簧振子的频率为 [] .

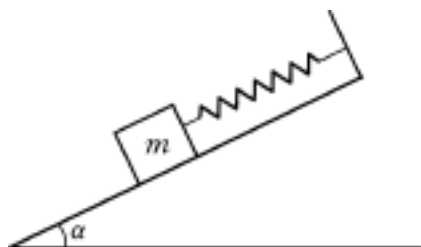


图 4-22

- (A) $= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m \sin \alpha}}$ (B) $= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}$
(C) $= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k \sin \alpha}{m}}$ (D) $= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \alpha$

4. 一弹性系数为 k 的弹簧, 悬挂着一质量为 m 的物体, 若将此弹簧剪成相等的两半, 并将同一物体悬于其中的半截上, 则弹簧切断前振动的频率 f 与切

断后的振动频率 ν_B 之比为 [] .

- (A) 1 : 1 (B) 1 : 4 (C) 1 : $\sqrt{2}$ (D) 1 : 2

5 . 一质点在 x 轴上作简谐振动, 振幅 $A = 4 \text{ cm}$, 周期 $T = 2 \text{ s}$, 将平衡位置取作坐标原点, 若 $t = 0$ 时刻质点第一次通过 $x = -2 \text{ cm}$ 处, 且向 x 轴负方向运动, 则质点第二次通过 $x = -2 \text{ cm}$ 处的时刻为 [] .

- (A) 1 s (B) 2 s (C) $\frac{4}{3} \text{ s}$ (D) $\frac{2}{3} \text{ s}$

6 . 一升降机里有一个单摆, 在升降机静止时作简谐振动. 当升降机加速上升时, 单摆的振动频率应 [] .

- (A) 变大 (B) 变小
(C) 不变 (D) 单摆不作简谐振动

7 . 设质点作简谐振动的振幅为 A , 在下列所给的数值中, 找出简谐振动过程中动能为最大值的一半的位置是 x 等于 [] .

- (A) $\frac{A}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2} A$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2} A$ (D) A

8 . 弹性系数为 100 N/m 的轻弹簧和质量为 10 g 的小球组成弹簧振子, 第一次将小球拉离平衡位置 4 cm , 由静止释放任其摆动; 第二次将小球拉离平衡位置 2 cm 并给以 2 m/s 的初速度任其摆动. 两次振动的能量之比为 [] .

- (A) 1 : 1 (B) 4 : 1 (C) 2 : 1 (D) $2\sqrt{2} : 3$

9 . 一弹簧振子原处于水平静止状态, 如图 4-23 所示. 一质量为 m 的子弹以水平速度 v 射入振子中并随之一起运动, 此后弹簧的最大势能为 [] .

(A) $\frac{1}{2} m v^2$

(B) $\frac{m^2 v^2}{2(M + m)}$

(C) $\frac{1}{2} (M + m) \frac{mv}{M}$

(D) 条件不足无法判断

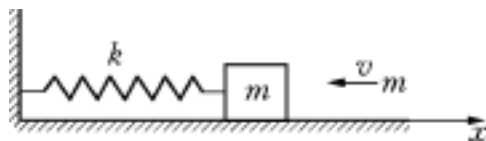


图 4-23

10 . 两个同方向、同频率、等振幅的简谐振动合成后振幅仍为 A , 则这两个分振动的相位差为 [] .

- (A) 60° (B) 90° (C) 120° (D) 180°

4.4.2 填空题

1 . 从图 4-24 给出的谐振动 $x-t$ 曲线, 写出谐振动表达式 .

图 的谐振动表达式为 _____ ;

图 的谐振动表达式为_____ .

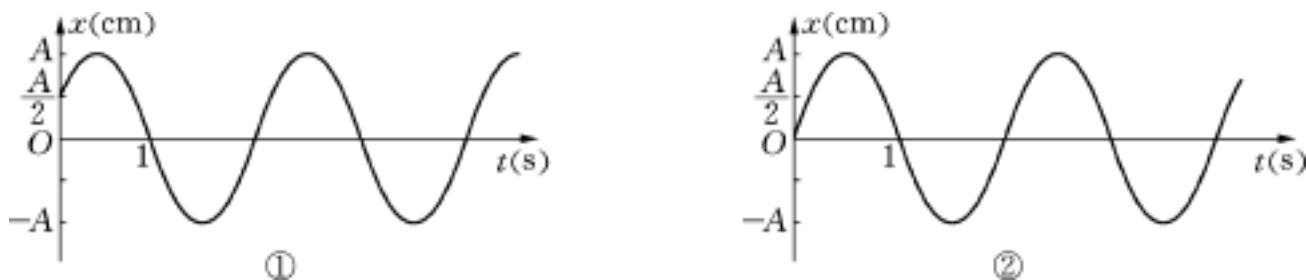


图 4-24

2 . 弹性系数分别为 k_1 和 k_2 的两弹簧,用图 4-25 所示的方式连接时,系统谐振动的频率为_____ ;用图 4-25 所示的方式连接时,系统谐振动的频率为_____ .

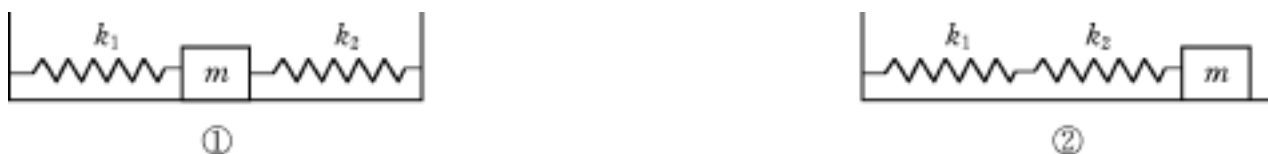


图 4-25

3 . 弹性系数为 k 的轻弹簧,系一质量为 m 的物体,物体作简谐振动.如 $t = 0$ 时,物体的速度为最大值 v_m ,且向负方向运动,则物体的振动表达式是_____ .

4 . 一物体作简谐振动,周期为 T ,则

物体由平衡位置运动到最大位移的时间为_____ ;

物体由平衡位置运动到最大位移的一半处的时间为_____ ;

物体由最大位移的一半处运动到最大位移的时间为_____ .

5 . 一单摆的角振幅 $\theta_0 = 0.1$,周期 $T = 0.5$ s, 则

最大的摆动角速度 $\frac{d\theta}{dt} =$ _____ ;

当角位移是角振幅的一半时的角速度 $\frac{d\theta}{dt}$ 的大小_____ .

6 . 上面放有物体的平台,以每秒 5 周的频率沿竖直方向作简谐振动.当平台振幅超过_____ m 时,物体将脱离平台.(取 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$)

7 . 一放在光滑水平面上的弹簧振子,如图 4-26 所示.如果小球经平衡位置向右运动时的动能为 E_{k0} , 振动周期 $T = 0.5$ s, 则再经过 $\frac{1}{3}$ s 时小球的动能 E_k 与 E_{k0} 之比为_____ .

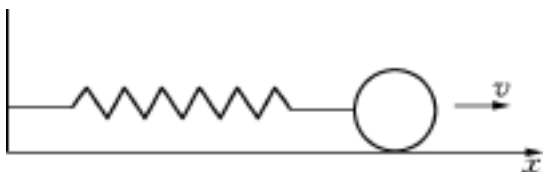


图 4-26

8. 一谐振子的质量 $m = 20 \text{ g}$, 周期 $T = 0.6 \text{ s}$, 振子经平衡位置时速度为 12 cm/s , 则再经 0.2 s 后振子的动能 $E_k =$ _____ .

9. 有两个简谐振动的振动曲线如图 4-27 所示, 从图 4-27 可知, 振动 A 的相位比振动 B 的相位 _____, $\varphi_A - \varphi_B =$ _____ .

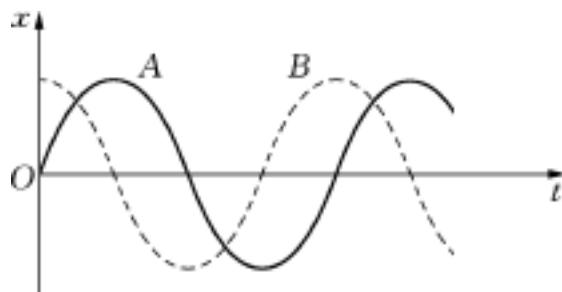


图 4-27

10. 两个同方向简谐振动的振动方程分别为 $x_1 = \sqrt{3} \cos\left(3t + \frac{3}{4}\right) \text{ cm}$ 和 $x_2 = \cos\left(3t + \frac{1}{4}\right) \text{ cm}$, 则它们的合振动方程是 _____ .

4.4.3 计算题

1. 一简谐振动的 $x-t$ 振动曲线如图 4-28 所示, 已知振幅 A , 周期 T , 且 $t = 0$ 时 $x = \frac{A}{2}$, 求:

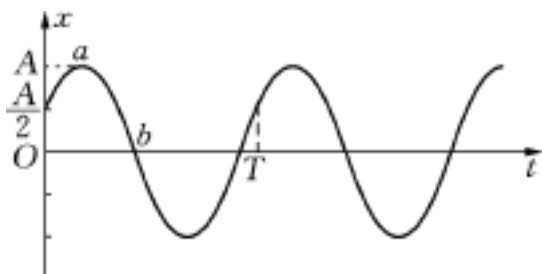


图 4-28

振动表达式;

a 、 b 两点的相位;

从 $t = 0$ 到 a 、 b 两态所用的时间是多少?

2. 两质点沿同一直线作频率和振幅均相同的简谐振动, 当它们每次沿相反方向互相通过时, 它们的位移均为它们振幅的一半, 求这两个质点振动的相位差.

3. 一弹性系数 $k = 312 \text{ N/m}$ 的轻弹簧, 一端固定, 另一端连接一质量 $M = 0.3 \text{ kg}$ 的物体, 放在光滑的水平面上, M 上面放一质量 $m = 0.2 \text{ kg}$ 的物体, 两物体间的静摩擦因数 $\mu = 0.5$, 如图 4-29 所示. 求两物体间无相对滑动时, 系统振动的最大能量.

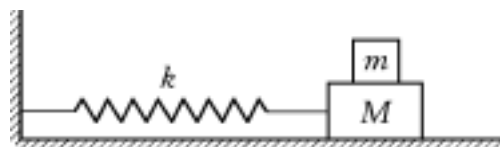


图 4-29

4. 已知两振动方向相同的谐振动 $x_1 = 4\cos(2t + \varphi_1) \text{ cm}$ 和 $x_2 = 3\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}$

求它们的合振动方程;

若另有一同方向的简谐振动 $x_3 = 2\cos(2t + \varphi_3) \text{ cm}$, 问当 φ_3 为何值时,

$x_1 + x_3$ 的振幅为最大值 当 ω 为何值时, $x_1 + x_3$ 的振幅为最小值 ?

* 5 . 一装有弹簧的框架静止地放在光滑的水平面上, 框架的质量为 m , 弹簧的弹性系数为 k . 现有一质量为 m_0 的小球以水平速度射入框架与弹簧连接, 并开始压缩弹簧, 如图 4-30 所示 . 设小球与框架均光滑, 试求:

证明小球在框架内作谐振动, 并写出振动方程;

弹簧的最大压缩量;

从弹簧与小球接触到弹簧达最大压缩量的时间 .

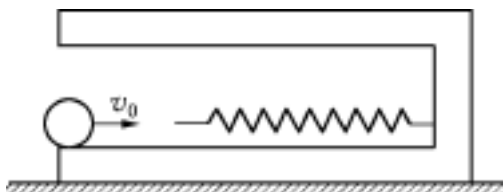


图 4-30

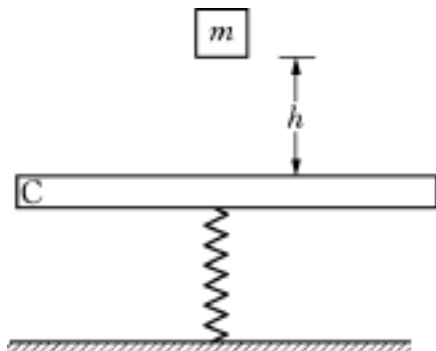


图 4-31

* 6 . 如图 4-31 所示, 弹性系数为 k 的竖直轻弹簧下端固定不动, 上端与物块 C 相连接, 另一物块 B 在 C 上方高 h 处自由落下与 C 发生完全非弹性碰撞 . 设两物块质量均为 m . 试问: 要使两物块碰后能一起谐振动而不分离, 则高度 h 的最大值为多少 ?

习题选解

[选择题 4] 一根弹性系数为 k 的弹簧, 若剪成两半, 因这两部分的形状、材料性质完全一样, 所以它们的弹性系数是相同的, 均为 k .

在弹簧未剪断时, 整个弹簧可视为两个半截弹簧的串联 . 在这弹簧下端挂一质量为 m 的重物后, 由于忽略弹簧的重量, 可认为两个半截弹簧所受的拉力和整个弹簧所受的拉力是相同的 . 设两半截弹簧的伸长量为 x , 整个弹簧的伸长量为 x , 则有

$$k x = k x$$

$$x = 2 x$$

解得

$$k = 2 k$$

因弹簧振子的频率由弹簧的弹性系数和振子的质量决定,所以剪断前,弹簧振子的频率

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

剪断后,半截弹簧下挂一质量为 m 的振子时,振动频率

$$f_B = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

由此得出

$$\frac{f_B}{f} = 1 + \sqrt{2}$$

因此本题结论(C)是正确的.

[填充题 5] 单摆作角振动时,振动方程可用角位移随时间的余弦函数

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi)$$

来表示,式中 θ_m 为角振幅, ω 为振动的圆频率, ϕ 为振动的初相.振动的角速度

$$\frac{d\theta}{dt} = -\theta_m \omega \sin(\omega t + \phi)$$

所以振动时最大角速度

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{\max} = \theta_m \omega = 0.05 \cdot \frac{2\pi}{T} = 3.94 \text{ rad/s}$$

当角位移 $\theta = \frac{\theta_m}{2}$ 时, $\cos(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}$, 则 $\sin(\omega t + \phi) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以振动角速度的大小

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \theta_m \omega \sin(\omega t + \phi) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \theta_m \omega = 3.41 \text{ rad/s}$$

[计算题 4] 根据题意, x_1 和 x_2 是两个振动方向相同、频率也相同的简谐振动,其合振动也是简谐振动,设其合振动方程为 $x = A \cos(\omega t + \phi)$, 则

$$A = 2$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)} = \sqrt{16 + 9 + 2 \times 4 \times 3 \cos\left[-\frac{\pi}{2}\right]} = 5 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}\tan \varphi &= \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \\ &= \frac{4 \sin \frac{\pi}{2} + 3 \sin \frac{\pi}{2}}{4 \cos \frac{\pi}{2} + 3 \cos \frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

由图 4-32 给出的旋转矢量合成图可知,合振动初相 应在第二象限,所以

$$\varphi = \frac{4}{5}$$

故合振动方程为

$$x = 5 \cos \left(2\pi t + \frac{4}{5} \right) \text{cm}$$

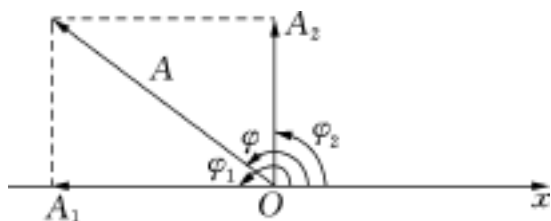


图 4-32

当 $\varphi_3 - \varphi_1 = \pm 2k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)

时,即 x_1 与 x_3 相位相同时,合振动的振幅最大,因 $\varphi_1 = 0$,故 $\varphi_3 = \pm 2k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) .

当 $\varphi_3 - \varphi_1 = \pm (2k + 1)\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时,即 x_1 与 x_3 相位相反时,合振动的振幅最小,因 $\varphi_1 = 0$,故 $\varphi_3 = \pm (2k + 1)\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) .

[计算题 5] 小球进入框架与弹簧钩接后开始压缩弹簧,弹簧被压缩后,框架开始加速,加速度为

$$a = \frac{kx}{m_0}$$

式中 x 为弹簧的压缩量 .

可见小球是在非惯性系内振动,回复力为惯性力 F^* 和弹性力 F ,如图 4-33 所示 .惯性力

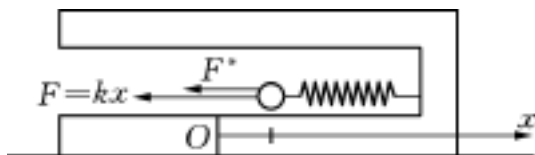
的大小 $F^* = ma = m \frac{kx}{m_0}$.由此得出小球振动的动力学方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - m \frac{kx}{m_0}$$

化简后得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{m_0 + m}{m_0 m} x = 0$$

所以小球作谐振动 .圆频率和周期分别为



坐标轴固定在框架上
原点在弹簧原长处

图 4-33

$$= \sqrt{\frac{m_0 + m}{m_0 m}} k, \quad T = 2 \sqrt{\frac{m_0 m}{(m_0 + m) k}}$$

又因 $t = 0$ 时, $x_0 = 0$, $v_0 > 0$, 所以得振幅

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{2}} = \left| \frac{v_0}{2} \right| = v_0 \sqrt{\frac{m m_0}{k(m_0 + m)}}$$

初相 $= -\frac{\pi}{2}$. 小球的振动方程

$$x = v_0 \sqrt{\frac{m m_0}{k(m_0 + m)}} \cos \left[\sqrt{\frac{(m_0 + m) k}{m_0 m}} t - \frac{\pi}{2} \right]$$

弹簧的最大压缩量 $x_m = A = v_0 \sqrt{\frac{m m_0}{k(m_0 + m)}}$

从弹簧与小球接触到弹簧达最大压缩量的时间

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m_0 m}{k(m_0 + m)}}$$

[计算题 6] 设物块 B 和 C 碰撞后能一起振动, 则它们振动的圆频率

$$= \sqrt{\frac{k}{2m}}.$$

它们振动的平衡位置在物块 C 碰撞前位置 (B 和 C 开始碰撞的位置) 的下方距离为 $\frac{mg}{k}$ 处. 以平衡位置为坐标原点, B 和 C 开始振动的初位置 $x_0 = \frac{mg}{k}$.

因 B 和 C 的碰撞是完全非弹性的, 所以它们开始振动的初速 $v_0 = \frac{m \sqrt{2gh}}{m + m}$
 $= \frac{1}{2} \sqrt{2gh}$. 由此可确定 B 和 C 一起振动的振幅

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{2}} = \sqrt{\left[\frac{mg}{k} \right]^2 + \frac{mgh}{k}}$$

因此 B、C 一起振动的最大加速度

$$a_m = A \omega^2 = \frac{k}{2m} \sqrt{\left[\frac{mg}{k} \right]^2 + \frac{mgh}{k}}$$

物块 B 的加速度由物块 B 的重力和物块 C 对 B 的支持力共同决定. 如图 4-34 所示.

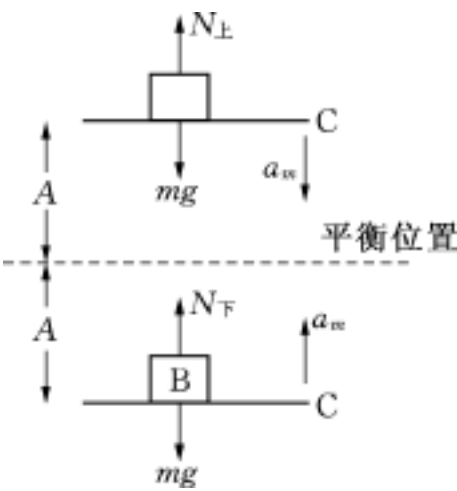


图 4-34

在平衡位置上方 $mg - N_{\perp} = ma_m$

$$N_{\perp} = mg - ma_m$$

在平衡位置下方 $N_{\perp} - mg = ma_m$

$$N_{\perp} = mg + ma_m$$

可见当 $mg < ma_m$ 时, $N_{\perp} < 0$, 物块 B 就要脱离物块 C, 不能保持一起振动. 所以物块 B 不脱离 C 的条件为

$$N_{\perp} = mg - ma_m \geq 0, \text{ 即 } a_m \leq g$$

把 a_m 的表示式代入上式得

$$\frac{k}{2m} \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{mgh}{k}} \leq g$$

解得

$$h \leq \frac{3mg}{k}$$

所以

$$h_{\max} = \frac{3mg}{k}$$

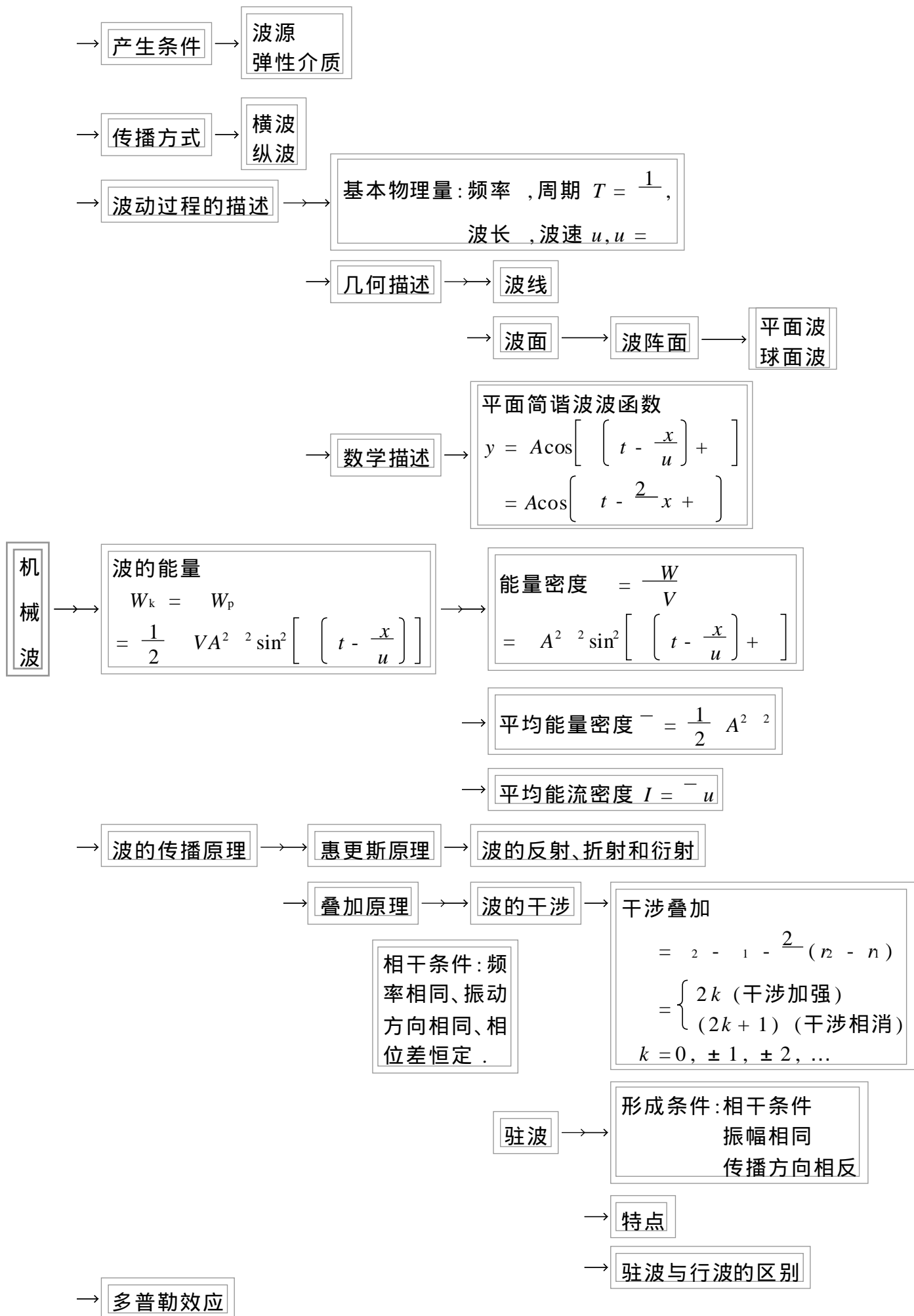
5.1 基本要求与复习框图

1. 基本要求

- (1) 明确机械波产生的条件和传播的方式;
- (2) 正确理解描述波函数的几个基本物理量(波长、频率、周期和波速)的物理意义,并掌握它们的联系;
- (3) 掌握平面简谐波波函数的物理意义,能根据已知条件熟练地建立波函数;
- (4) 明确波的能量特点,理解波的能量密度和能流密度的物理意义;
- (5) 掌握波的叠加原理,由此讨论波的相干条件、计算相干区域内各质点振动的强度,并讨论驻波及其形成的条件;
- (6) 了解波的多普勒效应,能计算波源或观察者沿二者连线运动时的多普勒效应.

2. 复习框图

本章着重讨论平面简谐波在无限大各向同性的均匀介质中的传播,其重点内容一是波函数的物理意义和建立方法;二是几列波在同一种介质中传播时,所遵循的叠加原理,尤其是相干波的迭加——波的干涉.本章主要内容以及研究问题的思路可用如下复习框图表示.



5.2 阅读指导与问题讨论

1. 关于机械波的周期、频率、波长、传播速度的讨论

介质中各质点振动的周期和频率称为波的周期和频率,它们等于振源的周期和频率,因此,波的周期和频率由振源的状况决定,与介质的性质无关.在时间上,每经过一个周期,介质中各质点的振动状态重复一次.可见,周期 T 体现了波动过程在时间上的周期性.

振源的振动在一个周期内传播的距离称为波长.沿着波传播的方向,相隔一个波长的两点,它们的振动状态相同,即振动相位差为 2π .在空间上,每经过一个波长,介质中各质点的振动状态重复一次.可见,波长 λ 体现了波动过程在空间的周期性.

振动状态(或振动相位)在介质中传播的速度称为波速(或相速).机械波的传播速度 u 完全取决于介质的性质(弹性性质和惯性性质).

u 与 λ 、 T (或 f) 的关系:

$$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

上式将表征波的空间周期性的 λ 和表征时间周期性的 T 联系在一起,它不仅适用于机械波,也适用于其他性质的波.

[问题 5-1] 机械波从一种介质进入另一种介质时,波长、波的周期和频率、波速这些量,哪个要改变,哪个不改变?

[解答] 波动的周期与波源的振动周期相同,与介质无关,波的频率是周期的倒数,也与介质无关,因此,这两者都不会改变.波速与传播介质的性质有关,故两种介质中波速不同.波长由 $\lambda = uT = \frac{u}{f}$ 决定,因此波长要改变.

[问题 5-2] 波速和振动速度的区别是什么?

[解答] 波速是振动状态或振动相位在介质中的传播速度.它仅仅取决于传播介质的性质: $u = \sqrt{\frac{H}{\rho}}$, 其中 H 是介质弹性模量, ρ 是介质密度.通常波速可由式 $u = \frac{\lambda}{T}$ 求得.注意,波速不是介质质元的运动速度.

振动速度是介质质元的运动速度.它是质元相对自身平衡位置的振动位移对时间的变化率.由 $v = \frac{dy}{dt} = -A \sin\left[2\pi\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi_0\right]$, 可以求得波线上 x 位置处质元在 t 时刻的运动速度.

2. 关于波线上任一质点相位的确定

根据讨论 1, 相隔一个波长的两点振动相位相差 2π , 则相距 x 的两质点振

动相位差, 满足 $\frac{x}{\lambda} = \frac{2}{3}$ ($x < \lambda$)

[问题 5-3] 若 t 时刻的波形图如图 5-1 所示, 则 t 时刻离原点为 $\frac{\lambda}{3}$ 处的质点 P 的振动相位为多少?

[解答] 要求 P 点的振动相位, 可先求出 O 点的振动相位, 再根据 P 点离 O 点的距离算出 P 点的振动相位.

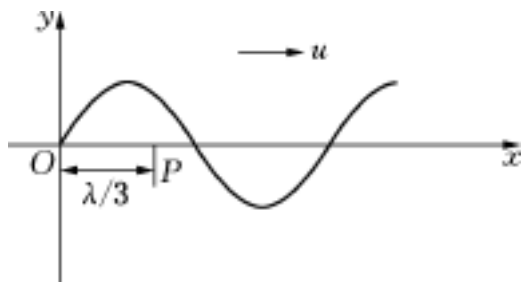


图 5-1

t 时刻, $x = 0$ 处质点位移 $y_0(t) = 0$, 速度 $v_0(t) < 0$, 所以 O 点振动相位 $\phi_0(t) = \frac{\pi}{2}$. 由于本题中波沿 x 轴正向传播, P 点相位落后于 O 点, 由

$$\frac{\phi_P}{\phi_0} = \frac{2}{3}$$

可得 $\phi_P = \phi_0 - \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, 因此, t 时刻质点 P 的振动相位为

$$\phi_P = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$$

3. 关于波函数的形式与坐标原点选择的关系

若波沿 Ox 轴正方向传播, 且已知在 x_0 处质点的谐振动方程为

$$y_0(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

则该简谐波的波函数为

$$y(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x - x_0}{u} \right) + \phi_0 \right]$$

它表示任意 x 处质点离开其平衡位置的振动位移 y 随时间 t 的变化关系.

式中 $\frac{x - x_0}{u}$ 是波从 x_0 处传到 x 处所需的时间, 也就是 x 处质点的振动比 x_0 处

质点振动滞后的时间. 而 $\left[\frac{x - x_0}{u} \right] = \frac{2\pi}{\lambda} (x - x_0)$ 则表示 x 处质点落后的相位,

即 x 处质点与 x_0 处质点的相位差.

若 $x_0 = 0$, 则 $y = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right]$, 或 $y = A \cos \left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \phi_0 \right]$.

[问题 5-4] 有一平面简谐波在空间传播. 已知在波线上某点 B 的振动方程为 $y = A \cos(\omega t + \phi_0)$, 就图 5-2 给出的三种坐标取法, 分别列出波函数. 并用这三个方程来描述与 B 相距为 b 的 P 点的振动规律.

[解答] (1) 首先对图 5-2(a)、(b)、(c) 三种坐标的取法写出波函数.

(a): 波线上坐标为 x 的任一点的振动比 B 点的振动落后时间 $\frac{x}{u}$. 所以波函数为

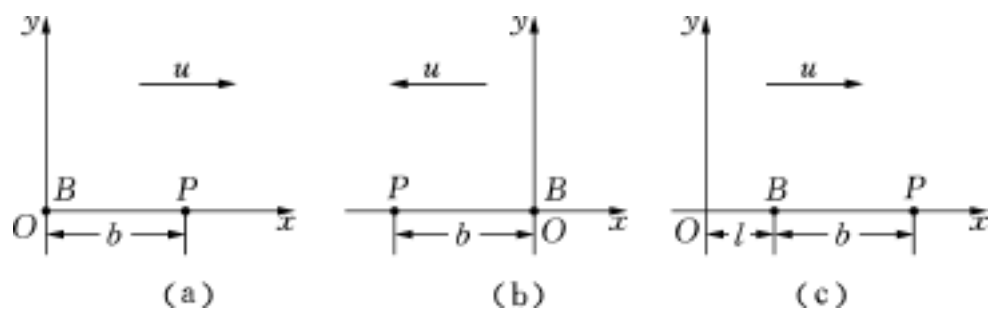


图 5-2

$$y_1 = A\cos\left[\left[t - \frac{x}{u} \right] + \right] \tag{1}$$

(b):波线上坐标为 x 的任一点的振动比 B 点的振动超前时间 $\frac{x}{u}$ (因为波沿负 x 方向传播) .所以波函数应写为

$$y_2 = A\cos\left[\left[t + \frac{x}{u} \right] + \right] \tag{2}$$

(c):波线上坐标为 x 的任一点的振动比 B 点的振动落后时间 $\frac{x-l}{u}$ 所以波函数应写为

$$y_3 = A\cos\left[\left[t - \frac{x-l}{u} \right] + \right] \tag{3}$$

(2) 写出 P 点的振动方程 .

如把 $x = b$ 代入波函数表示式(1),把 $x = - b$ 代入波函数表示式(2),把 $x = l + b$ 代入波函数表示式(3),得到对这三种坐标的取法, P 点的振动方程均为

$$y_P = A\cos\left[\left[t - \frac{b}{u} \right] + \right]$$

因为对这三种情况, P 点均在 B 点后距离为 b 处 .

4 .关于机械波能量问题的理解

(1) 波的能量

波动过程也是能量传播的过程,若波沿 Ox 轴正向传播,则波线上 $m = V$ 体积元的能量为

动能: $W_k = \frac{1}{2} (V)^2 A^2 \sin^2 \left[t - \frac{x}{u} \right]$

势能: $W_p = \frac{1}{2} (V)^2 A^2 \sin^2 \left[t - \frac{x}{u} \right]$

机械能: $W = W_k + W_p = (V)^2 A^2 \sin^2 \left[t - \frac{x}{u} \right]$

体积元的动能、势能随时间作同相位变化,机械能不守恒,在 0 和最大值之间周

期性变化 .

$$\text{能量密度: } w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \rho A^2 \sin^2 \left[2\pi \left(t - \frac{x}{u} \right) \right]$$

这是单位体积介质的波动能量,它也是 t 的周期性函数 .

$$\text{平均能量密度: } \overline{w} = \frac{1}{2} \rho A^2$$

这是能量密度在一个周期时间内的平均值 .

(2) 能流

能流 P ——单位时间垂直通过面积 S 的能量(通过面积 S 的功率)

平均能流 \overline{P} ——能流在一个周期时间内的平均值

平均能流密度(波强度) I ——单位时间垂直通过单位面积的平均能流

$$I = \frac{P}{S} = \overline{wu} = \frac{1}{2} \rho A^2 u$$

[问题 5-5] 从能量观点看,一个谐振子系统与波传播介质中的体积元有何不同?

[解答] 孤立的谐振子势能最大时动能为 0,势能为 0 时动能最大,势能与动能相互转换,总的机械能守恒,这表明谐振子系统储存着一定的能量 .

波传播介质中的体积元则不同,势能最大时动能亦最大,势能为 0 时动能亦为 0,总机械能不守恒,它在零到最大值之间周期性地变化,不断地将来自波源的能量沿波的传播方向传出去 .可见弹性介质本身并不储存能量,它只起到传播能量的作用 .

以弹簧振子为例,势能 $E_p = \frac{1}{2} ky^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(2\pi(t + \frac{x}{u}))$ 与绝对位移的平方成正比,动能 $E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m^2 A^2 \sin^2(2\pi(t + \frac{x}{u}))$.在平衡位置时,振动位移 $y = 0$, 势能为 0,动能最大;而在最大位移处, $y = \pm A$, 势能最大,动能为 0 .总机械能 $E = E_k + E_p = \frac{1}{2} kA^2$ 守恒 .

平面简谐波在弹性介质中传播时,质元的势能与动能同相位变化,事实上,质元由形变产生的弹性势能与相对位移 $\left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]$ 有关,分析任意时刻 $y-x$ 波形图可知,质元在最大位移处,动能为 0,而 $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, 故势能也为 0;而在平衡位置处,动能最大,此时 $\frac{\partial y}{\partial x}$ 也最大,故势能最大 .

5 . 关于驻波的理解与讨论

(1) 驻波的特征与形成的条件

当两列相干波同时满足振幅相等、传播方向相反时,就叠加形成驻波 .波函数(或驻波方程)为:

$$y = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos 2\pi \nu t$$

它表示两列波叠加区域内, x 处质点的谐振动方程, 其振幅 $A(x) = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x$ 是质点位置 x 的函数. 并且, 这一波函数不满足 $y(t + \Delta t, x + \Delta x) = y(x, t)$, 因此, 它不是行波, 没有能量和相位的传播, 或者说波不传播, 这就是驻波中“驻”字的含义.

(2) 相位问题

形成驻波时, 当质点的位置 x 满足 $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 0$ 时, 这些质点不振动, 称为驻波的波节; 当 x 满足 $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = \pm 1$ 时, 这些质点谐振动的振幅最大, 称为波腹; 其他位置处质点振动的振幅在 $0 \sim 2A$ 之间各不相等. 两个相邻波节点之间的质点称为一段. 由上述驻波方程可知, 同一段质点(或相邻波节点之间的质点)的振动相位相同, 即振动步调一致, 当然振幅各不相同; 相邻两段质点的振动方向相反, 即相位差为 π . 实际上, 驻波就是分段振动的现象.

[问题 5-6] 一驻波方程为 $y = A \cos 2\pi x \cos 100\pi t$, 则位于 $x_1 = \frac{1}{8}\text{m}$ 与 $x_2 = \frac{3}{8}\text{m}$ 处质元的振动相位差是多少?

[解答] 回答这一问题只要确定 x_1 与 x_2 两点是否位于同一波段上, 或是否在相邻两个波节点之间. 由驻波方程可得, 任意位置 x 处质元简谐振动的振幅为 $A(x) = A \cos 2\pi x$. 则当 x 满足

$$2\pi x = \pm (2k+1) \frac{\pi}{2}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

即 $x = \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}, \dots, \pm \frac{2k+1}{4}$ 的位置为波节点, 因 $\frac{1}{8}\text{m}$ 与 $\frac{3}{8}\text{m}$ 分别在波节 $x = \frac{1}{4}\text{m}$ 的两侧, 因此, x_1 与 x_2 处质元的振动相位差为 π .

(3) 半波损失问题

当波由波疏介质射向波密介质时, 反射点处质点的振动总是为零, 反射点是入射波与反射波形成驻波的波节点, 又称“固定端”. 这是因为反射波在反射点处引起的质点的振动相位与入射波在反射点处引起的振动相位相差 π , 该处质点的合振动为零. 由于同一波线上相位相差 π 的两个点, 空间距离是半个波长, 反射波与入射波相比在入射点处相位相差 π , 就相当于反射波在空间多(或者少)传播了半个波长的距离, 因此称为“半波损失”.

如果波是由波密介质射向波疏介质, 则反射波与入射波相比没有“半波损失”. 即在反射点处, 反射波与入射波的振动相位相同, 反射点处合振动振幅最大, 是驻波的波腹, 又称“自由端”.

需要指出的是,无论波是由波疏介质传向波密介质,还是由波密介质传向波疏介质,折射波相对于入射波没有“半波损失”.即在折射点处,折射波与入射波的相位相同.另外,“半波损失”既可以发生在机械波中,也可以发生在电磁波中.

[问题 5-7] 一平面余弦横波,在波密介质界面上发生反射.在某一时刻入射波的波形如图 5-3 所示,试画出此时反射波的波形图.

[解答] 我们讨论的情况是入射波全部被反射的情况,所以反射波与入射波振幅相同.又因反射波与入射波频率相同,且在同一种介质中传播,故它们的波长也相同.但因入射波是从波疏介质射向波密介质的,因此在反射处(A 点)反射波的振动与入射波的振动反相位.下面我们根据这些结论来确定反射波的波形.下面分两步进行讨论.

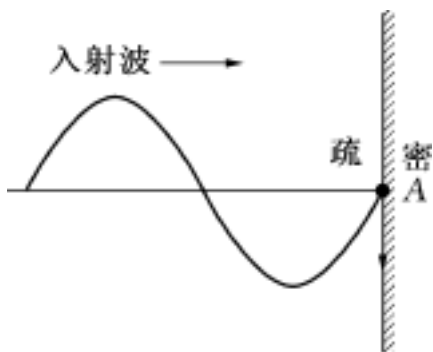


图 5-3

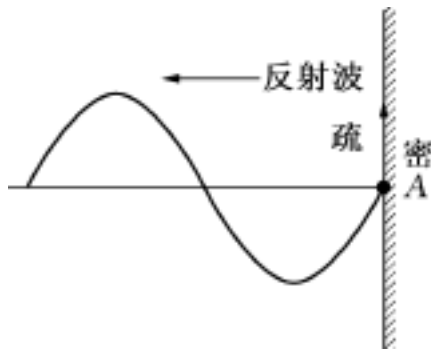


图 5-4

(1) 确定反射波在 A 点的振动位移 $y_{A反}$ 的大小和方向.

由入射波的波形图(图 5-3)可知,在 A 点入射波振动的位移 $y_{A入} = 0$, 方向向下.因在 A 点反射波的振动与入射波的振动反相位,所以反射波在 A 点的振动位移 $y_{A反} = 0$, 方向向上.

(2) 确定反射波的波形.

因反射波的传播方向是向左的,要使反射波满足在 A 点振动位移 $y_{A反} = 0$, 且方向向上,反射波的波形必为图 5-4 所示.可见这时波形与入射波相同,但各点的振动方向都与入射波相应点的振动方向相反.

5.3 解题方法与典型例题

1. 已知波函数,求解描述波动过程各物理量以及波线上任一点的振动方程及振动速度、加速度等

解决这类问题的方法主要是:比较法,即与标准形式的波函数相比较,而得出各物理量;还有物理意义法,即从描述波的物理量的物理意义来确定,也可以两种方法互相补充.通常前一种方法比较简洁.

[例 5-1] 已知平面简谐波的波函数为 $y = A \cos(Bt - Cx)$, 式中, A 、 B 、 C 为正常量.求波的振幅、波速、频率、周期、波长及沿波传播方向离原点为 l 处的质点的振动方程.

[解] 首先把题目中给出的波函数化为标准形式

$$y = A\cos(Bt - Cx) = A\cos\left[B\left(t - \frac{x}{\frac{B}{C}}\right)\right]$$

再与标准形式的波函数

$$y = A\cos\left[t - \frac{x}{u}\right]$$

相比较,立即得出:振幅为 A ;

频率 $\qquad\qquad\qquad = \frac{1}{T} = \frac{B}{2\pi}$

周期 $\qquad\qquad\qquad T = \frac{1}{\text{频率}} = \frac{2\pi}{B}$

波速 $\qquad\qquad\qquad u = \frac{B}{C}$

波长 $\qquad\qquad\qquad = \frac{u}{\text{频率}} = \frac{2\pi}{C}$

再把波函数中的 x 用 l 代入,得到离原点为 l 处质点的振动方程为

$$y = A\cos B\left[t - \frac{l}{u}\right]$$

2 . 建立波函数

要建立波函数,先要确定波线上某一点的振动方程和波速. 这一点的振动方程和波速往往不是直接给出,而是要根据题目中给出的已知条件去确定. 而确定某点的振动方程,通常有以下两种类型:

已知某点 $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \text{ 点} \\ \text{或 } x = x_1 \text{ 点} \end{array} \right\}$ 的振动曲线

确立该点振动方程

已知某时刻 $\left\{ \begin{array}{l} t = 0 \text{ 时刻} \\ \text{或 } t = t_1 \text{ 时刻} \end{array} \right\}$ 的波形图

确定某一质点(通常取 $x = 0$ 点)的振动方程

建立波函数

[例 5-2] 已知一平面简谐波沿 x 轴正向传播 波长 $\lambda = 4 \text{ m}$, 周期 $T = 4 \text{ s}$, 在 $x = 0$ 处质点的振动曲线如图 5-5 所示. 试求:(1)波函数;(2) $t = 1 \text{ s}$ 时刻的波形图 .

[解] (1) 要建立波函数,必须先确定波线上一点的振动方程. 本题已知原点 $x = 0$ 的振动曲线,所以先建立原点的振动方程 .

由题意得: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$

由图 5-5 振动曲线可知: $A = 1 \text{ m}$, 且 $t = 0$ 时, $y_0 = 0.5 \text{ m} = \frac{A}{2}$,

$v_0 < 0$, 故初相 $\phi = \frac{\pi}{3}$. 所以, $x = 0$ 处质点的振动方程为

$$y = \cos\left[\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right] (\text{m})$$

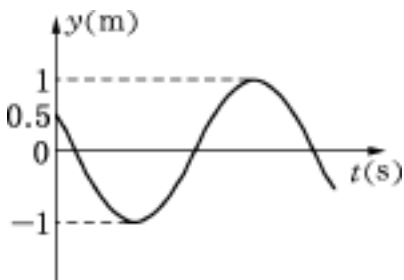


图 5-5

因波沿 x 轴正向传播,故 x 处质点的振动相位比 $x = 0$ 处质点的振动相位落后 $\frac{2\pi}{\lambda}x = \frac{\pi}{2}x$, 所以 x 处质

点的振动方程,亦即波函数为

$$y = \cos\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right] \text{ (m)}$$

或由波速 $u = \frac{\lambda}{T} = 1 \text{ m/s}$ 及原点振动方程,写出波函数为

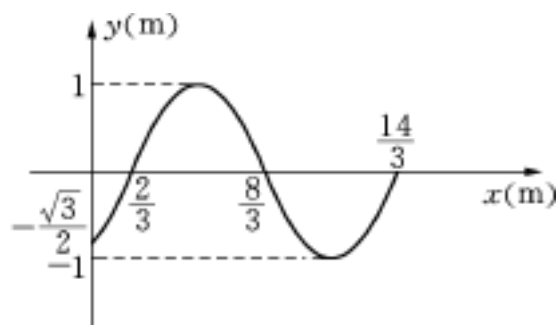


图 5-6

$$y = \cos\left[\left(t - \frac{x}{u}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \cos\left[\frac{1}{2}(t - x) + \frac{\pi}{3}\right] \text{ (m)}$$

(2) 将 $t = 1 \text{ s}$ 代入上述波函数,可得该时刻的波形方程

$$\begin{aligned} y &= \cos\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right] \\ &= \cos\left[\frac{1}{2}x - \frac{5\pi}{6}\right] \text{ (m)} \end{aligned}$$

由此可画出 $t = 1 \text{ s}$ 时的波形曲线,如图 5-6 所示.

[例 5-3] 已知一平面简谐波沿 Ox 轴负方向传播, $t = \frac{T}{4}$ 时刻的波形图如图 5-7 所示. 若波速 u , 振幅 A 和波长 λ 为已知,求: (1) 波函数; (2) $x = \frac{3}{8}\lambda$ 处质点的振动方程; (3) $x = \frac{1}{8}\lambda$ 处质点在 $t = 0$ 时的振动速度.

[解] (1) 由图 5-7 所示波形图,可以确定原点 $x = 0$ 处质点的振动方程. A 已知,而 $\omega = 2\pi/T$. 至于 $x = 0$ 处质点在 $t = 0$ 时初相 ϕ_0 可用以下两种方法确定.

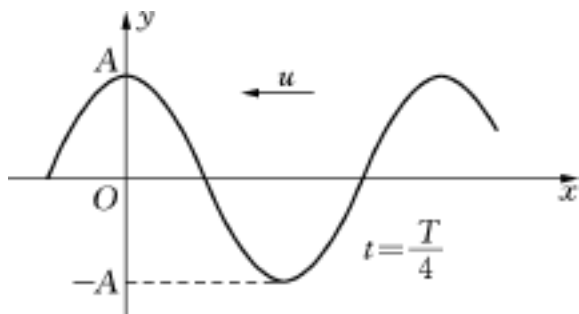


图 5-7

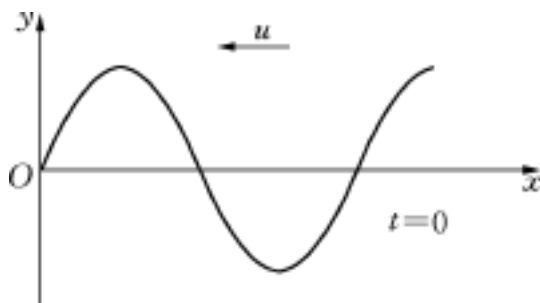


图 5-8

方法一: 将图 5-7 所示波形图沿波传播的反方向,即沿 Ox 轴正向移动 $\frac{\lambda}{4}$,从而得到 $t = 0$ 时刻的波形曲线,如图 5-8 所示. 从图可以看出, $t = 0$ 时, $y_0 = 0$, 且 $v_0 > 0$, 故初相 $\phi_0 = -\frac{\pi}{2}$.

方法二: 由图 5-7 可知, $t = \frac{T}{4}$ 时刻, $x = 0$ 处质点的位移 $y_{\frac{T}{4}} = A$, 相位 $\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$, 再根据 $\phi(t) = \phi_0 + \omega(t - 0) = \frac{2\pi}{T}t + \phi_0$ 可得

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} + \phi_0 = 0$$

所以 $t = 0$ 时刻的相位 $\phi(0) = -\frac{\pi}{2}$.

由上述讨论,可得 $x = 0$ 处质点的振动方程为

$$y = A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} u t - \frac{\pi}{2} \right]$$

波函数为

$$\begin{aligned} y &= A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} u \left(t + \frac{x}{u} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \\ &= A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (u t + x) - \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned}$$

(2) 将 $x = \frac{3}{8}$ 代入波函数,即得该处质点的振动方程:

$$\begin{aligned} y &= A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(u t + \frac{3}{8} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \\ &= A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} u t + \frac{\pi}{4} \right] \end{aligned}$$

(3) 将 $x = \frac{1}{8}$ 代入波函数,得到该处质点的振动方程为

$$y = A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} u t - \frac{\pi}{4} \right]$$

再对时间 t 求导,可得 $x = \frac{1}{8}$ 处质点的振动速度:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = -\frac{2\pi}{\lambda} u A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} u t - \frac{\pi}{4} \right]$$

将 $t = 0$ 代入上式,可得此刻的振动速度为

$$v = \sqrt{2} \frac{\pi}{\lambda} A u$$

本题也可以用以下方法求得:

对波函数求时间 t 的一次偏导,得到波线上各质点的振动速度:

$$v(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{2\pi}{\lambda} u A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (u t + x) - \frac{\pi}{2} \right]$$

将 $x = \frac{1}{8}$ 和 $t = 0$ 代入上式,即得所求的振动速度:

$$v = \sqrt{2} \frac{\pi}{\lambda} A u$$

3 . 波的干涉问题

(1) 在两列波相干区域内某点的合振动是加强还是减弱,可用干涉加强或

减弱的条件

$$= r_2 - r_1 - \frac{\lambda}{2}(n_2 - n_1) = \begin{cases} 2k & \text{加强} \\ (2k+1)\lambda/2 & \text{减弱} \end{cases}$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

来确定。

(2) 确定相干区域内某点的振动方程, 必须先分别确定两列相干波传到该点时的振动方程, 再根据振动合成的知识求这一点合振动的方程。

[例 5-4] 如图 5-9 所示, 原点 O 是波源, 振动方向垂直于纸面, 波长 λ 。 AB 为波的反射面, 反射时无半波损失, O 点位于 A 点的正上方, $AO = h$ 。 Ox 轴平行于 AB 求 Ox 轴上干涉加强点的坐标。(限于 $x \geq 0$)。

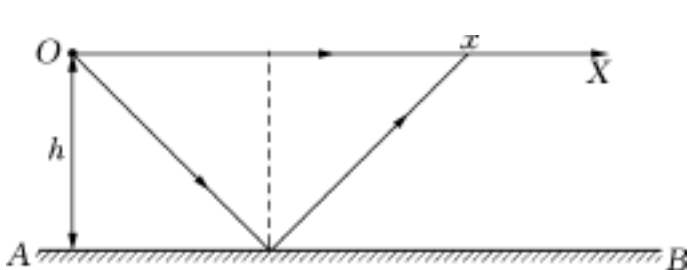


图 5-9

$x \geq 0$)。

[解] 根据题意, Ox 轴上各点的振动应是点波源 O 发出的沿 Ox 轴传播的波, 与经 AB 面反射后到达 Ox 轴的波相干叠加而成。

由于这两列波来自同一波源 O , 它们的初相位相同。因此到达 x 点(如图 5-9 所示)的相位差

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$
$$= \frac{2\pi}{\lambda} \left[2 \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2} - x \right]$$

若 x 点干涉加强, 则满足

$$\Delta\phi = 2k\pi, (k = 0, 1, 2, \dots)$$

联立以上两式可得 Ox 轴上干涉加强点的坐标位置为

$$x = \frac{4h^2 - k^2 \lambda^2}{2k}$$

又因 $x \geq 0$, 故 $k \leq \frac{2h}{\lambda}$

[例 5-5] 已知两相干波源 S_1 和 S_2 , 频率 $\nu = 2.5 \text{ Hz}$, 波速均为 $u = 10 \text{ m/s}$, 振幅均为 5 cm 。波源 S_1 和 S_2 的初相分别为 $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \pi$ 。波源位置如图 5-10 所示。求两列波传到 P 点时的振动方程。

[解] (1) 先确定两波源的振动方程。

由已知条件可知, 两振动的圆频率 $\omega = 2\pi\nu = 5\pi$ 。振幅 $A = 5 \text{ cm}$, 初相分别为 $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \pi$ 。所以波源 S_1 和 S_2 的振动方程分别为

$$y_{10} = 5 \cos 5\pi t \text{ (cm)}$$
$$y_{20} = 5 \cos(5\pi t + \pi) \text{ (cm)}$$

(2) 确定两列波的波函数。

根据波源的振动方程、图 5-10 中所示的波源、 P 点的位置及

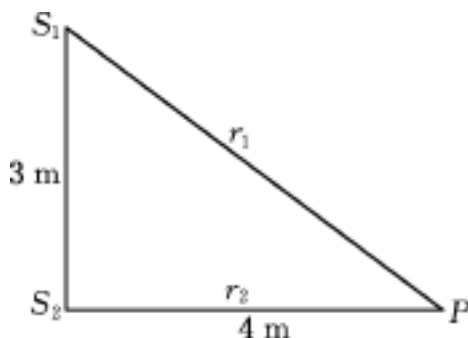


图 5-10

波速 $u = 10 \text{ m/s}$, 可写出两列波的波函数

$$y_1 = 5\cos\left[5\left(t - \frac{r_1}{10}\right)\right] \text{ (cm)}$$
$$y_2 = 5\cos\left[5\left(t - \frac{r_2}{10}\right) + \right] \text{ (cm)}$$

因 $r_1 = 5 \text{ m}$, $r_2 = 4 \text{ m}$, 所以两列波传到 P 点时的振动方程分别为

$$y_{1P} = 5\cos\left[5\left(t - \frac{5}{10}\right)\right] = 5\cos\left(5t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ (cm)}$$
$$y_{2P} = 5\cos\left[5\left(t - \frac{4}{10}\right) + \right] = 5\cos(5t - \pi) \text{ (cm)}$$

(3) P 点的合振动方程 .

$$y_P = y_{1P} + y_{2P} = A\cos(5t + \pi) \text{ (cm)}$$

由矢量图法(如图 5-11 所示)可确定在 P 点的合振动的振幅和初相

$$A = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$
$$= \frac{5}{4}$$

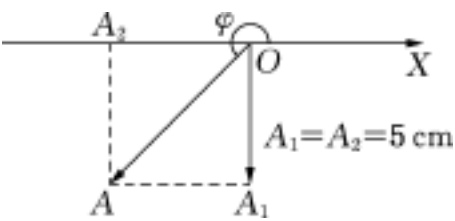


图 5-11

所以 P 点的振动方程为

$$y_P = 5\sqrt{2}\cos\left(5t + \frac{5}{4}\right) \text{ cm}$$

4 . 驻波问题

这类问题的求解,通常按照以下思路:

根据题意

→建立入射波波函数

→确立入射波在反射点处引起的振动方程

→确立反射波在反射点处的振动方程

→建立反射波波函数

注意有无半波损失

由叠加原理求驻波方程

[例 5-6] 沿 x 轴传播的平面简谐波方程为

$$y = 10^{-3}\cos\left[200\left(t - \frac{x}{200}\right)\right]$$

(x 单位以 m 计, t 单位以 s 计)波在离原点为 2.25 m 处的 A 点发生反射,如图 5-12 所示.若反射处为波节(设反射后振幅不变),求反射波的波函数 .

[解] 本题已知入射平面简谐波的波函数,因反射波波速的大小与入射波相同,所以不必再求波速,只要先确定波线上某点反射波的振动方程 .

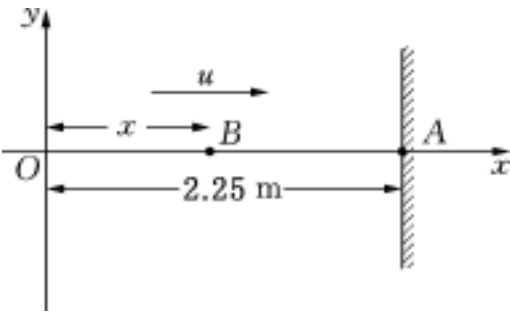


图 5-12

由入射波的波函数可得,入射波在 A 点的振动方程为

$$\begin{aligned} y_A &= 10^{-3} \cos \left[200 \left(t - \frac{x}{200} \right) \right] \Big|_{x=2.25} \\ &= 10^{-3} \cos(200t - 2.25) \end{aligned}$$

又因反射点为波节,所以该点的反射波与入射波有 π 相位差.因此,反射波在 A 点的振动方程为

$$\begin{aligned} y_A &= 10^{-3} \cos(200t - 2.25 - \pi) \\ &= 10^{-3} \cos(200t - 3.25) \end{aligned}$$

由反射波在 A 点的振动方程可确定反射波的波函数.因反射波的波速 u 也等于 200 m/s ,但方向与 x 轴相反.所以反射波在波线上任一点 B 的振动要比 A 点的振动落后时间 $\frac{|AB|}{u}$,所以反射波的波函数为

$$\begin{aligned} y &= 10^{-3} \cos \left[200 \left(t - \frac{|AB|}{200} \right) - 3.25 \right] \\ &= 10^{-3} \cos \left[200 \left(t - \frac{2.25 - x}{200} \right) - 3.25 \right] \\ &= 10^{-3} \cos \left[200 \left(t + \frac{x}{200} \right) - 5.5 \right] \\ &= 10^{-3} \cos \left[200 \left(t + \frac{x}{200} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned}$$

* 本题还可以通过以下方法求得反射波的波函数.

因反射波沿 x 轴负向传播,故可以根据入射波的波函数,假设反射波的波函数为

$$y = 10^{-3} \cos \left[200 \left(t + \frac{x}{200} \right) + \right]$$

式中 ϕ_0 为 $x = 0$ 处质点的初相.

由于反射波在 $x = 0$ 处的振动是由入射波沿 x 轴传播 2.25 m ,并经过波密介质反射(存在半波损失)后再返回至 $x = 0$ 处引起的.因此,反射波在 $x = 0$ 处振动的相位比入射波在 $x = 0$ 处的振动相位落后

$$t + \frac{2.25 \times 2}{200} + \frac{\pi}{2}.$$

由入射波波函数可知,入射波在 $x = 0$ 点的振动初相 $\phi_0 = 0$,所以可得

$$\begin{aligned} &= 0 - \left[200 \cdot \frac{2.25 \times 2}{200} + \frac{\pi}{2} \right] \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

反射波波函数为

$$y = 10^{-3} \cos \left[200 \left(t + \frac{x}{200} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

显然,第二种方法比之第一种更加直观和简捷.

5.4 自测练习与能力训练

5.4.1 选择题

1. 简谐波在介质中传播的速度大小取决于[] .

- (A) 波源的频率 (B) 介质的性质
(C) 波源的频率和介质的性质 (D) 波源的能量

2. 一横波沿 x 轴负方向传播, t 时刻的波形图如图 5-13 所示. 则在该时刻 [] .

- (A) 质点 A 沿 y 轴负方向运动 (B) 质点 B 沿 x 轴负方向运动
(C) 质点 C 沿 y 轴负方向运动 (D) 质点 D 沿 y 轴正方向运动

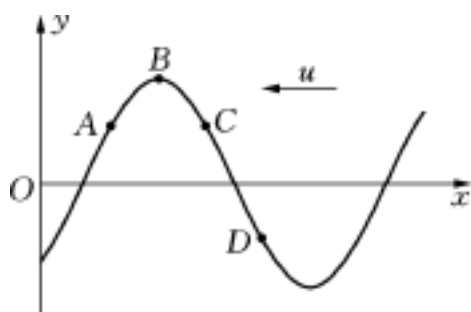


图 5-13

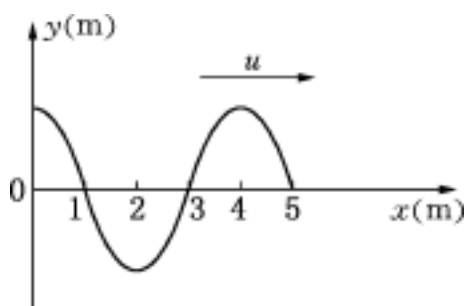


图 5-14

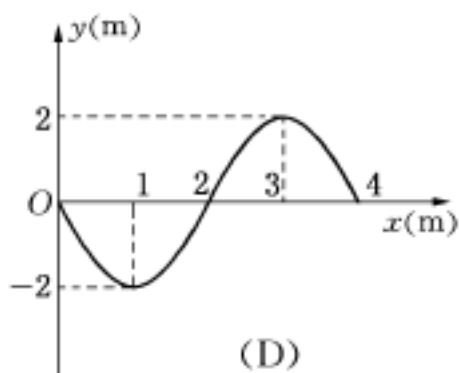
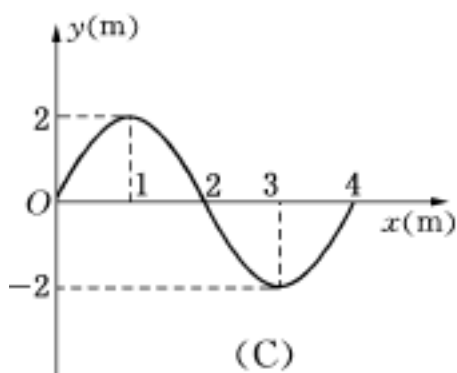
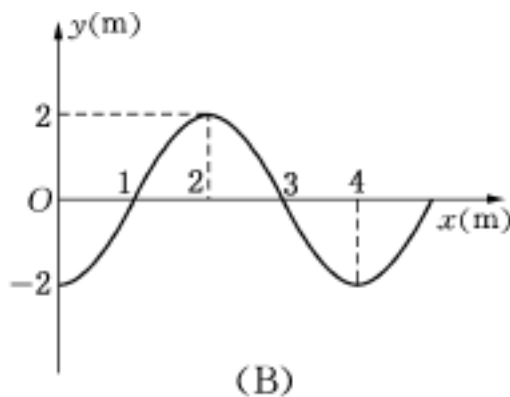
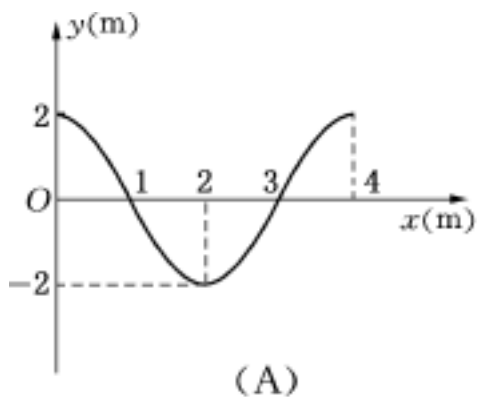
3. 一平面余弦波沿 x 轴正方向传播, 它在 $t = 0$ 时刻的波形如图 5-14 所示. 这时位于 $x = 1$ m 处的质点的振动初相为[] .

- (A) 零 (B) (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $-\frac{\pi}{2}$

4. 波速为 4 m/s 的平面简谐波沿 x 轴的负方向传播. 如果这列波使位于原点的质元作 $y = 3\cos \frac{\pi}{2} t$ (cm) 的振动, 那么位于 $x = 4$ m 处质元的振动方程应为 [] .

- (A) $y = 3\cos \frac{\pi}{2} t$ (cm) (B) $y = -3\cos \frac{\pi}{2} t$ (cm)
(C) $y = 3\sin \frac{\pi}{2} t$ (cm) (D) $y = -3\sin \frac{\pi}{2} t$ (cm)

5. 一平面简谐波波函数为 $y = 2\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(t + \frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\right]$ (SI 制), 则 $t = 1.5$ s 时刻的波形图为[] .



6. 一机械波在弹性介质中传播,某介质元的位移达负方向最大时,它的能量为[] .

(A) $E_k = 0$, E_p 最大

(B) $E_k = 0$, $E_p = 0$

(C) $E_k = 0$, $E_p = 0$

(D) E_k 最大, $E_p = 0$

7. 两相干平面简谐波沿不同方向传播,如图 5-15 所示,波速均为 $u = 0.40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,其中一个波在 A 点引起的振动方程为 $y_1 = A_1 \cos\left[2\pi t - \frac{\pi}{2}\right]$,另一个波在 B 点引起的振动方程为 $y_2 = A_2 \cos\left[2\pi t + \frac{\pi}{2}\right]$,它们在 P 点相遇, $\overline{AP} = 0.80 \text{ m}$, $\overline{BP} = 1.00 \text{ m}$,则两波在 P 点的相位差为[] .

(A) 0

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C)

(D) $\frac{3\pi}{2}$

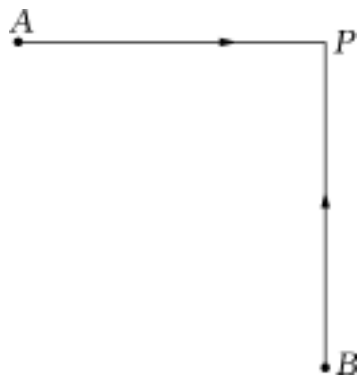


图 5-15

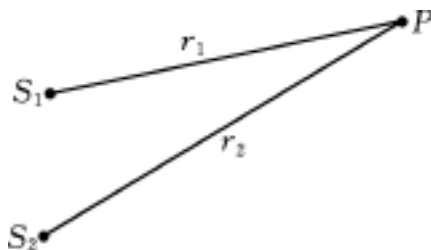


图 5-16

8. 如图 5-16 所示, S_1 和 S_2 为两平面波波源, 它们的振动方程分别为 $y_1 = 0.3\cos\left[2\pi t + \frac{\pi}{2}\right]$ cm 和 $y_2 = 0.4\cos(2\pi t + \pi)$ cm. 它们发出的波在 P 点相遇而叠加. 图中 $r_1 = 40$ cm, $r_2 = 45$ cm. 如果两波的波速均为 $u = 20$ m/s, 那么两波在 P 点叠加后合振动的初相是[].

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 零 (D) $\frac{3\pi}{2}$

9. 在驻波实验中, 当某一时刻弦线上各点的位移都为零时, 弦线上任一段中波的能量为[].

- (A) 零
(B) 除波节外, 其余各点的动能均最大
(C) 各点的势能均为最大
(D) 除波节外, 其余各点的势能均为最大

10. 汽车驶过车站时, 车站上的观测者测得汽车喇叭声的频率由 1 200 Hz 变到 1 000 Hz. 设空气中声速为 330 m/s, 则汽车的速度为[].

- (A) 90 m/s (B) 66 m/s (C) 55 m/s (D) 30 m/s

5.4.2 填充题

1. 若平面简谐波在 t 时刻的波形如图 5-17 所示. 则 t 时刻离原点为 $\frac{\lambda}{3}$ 处 P 点振动的相位为 _____.

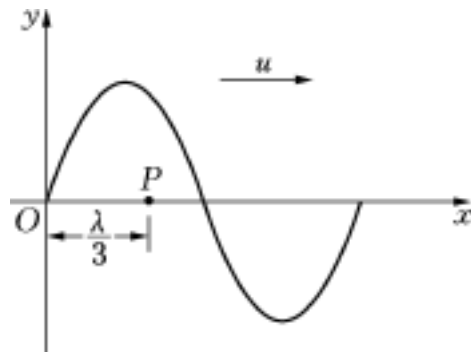


图 5-17

2. 已知平面简谐波的方程为 $y = A\cos(Bt - Cx)$, 式中 A 、 B 、 C 均为正常数. 则此平面波的波速为 _____, 波长为 _____. 在任何时刻沿波传播方向上相距为 D 的两点的相位差为 _____.

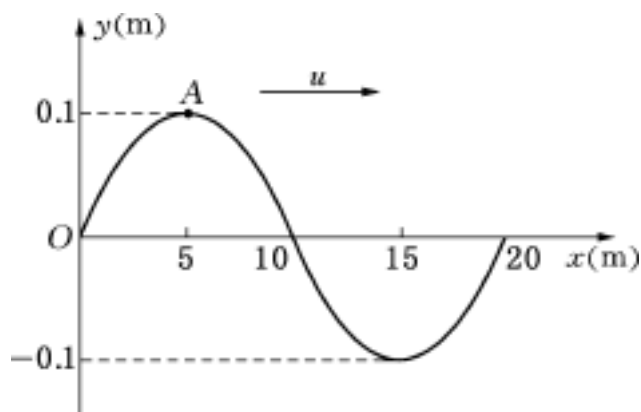


图 5-18

3. 图 5-18 为一传播速度 $u = 10$ m/s 的平面简谐波在 $t = 0$ 时的波形图, 则在 $t = 1.5$ s 时 A 处质点的振动速度的大小为 _____, A 处质点的振动方向是 _____. A 处质点振动加速度的大小为 _____.

4. 图 5-19 中实线表示 $t = 0$ 时的波形图, 虚线表示 $t = 0.1$ s 时的波形图, 由

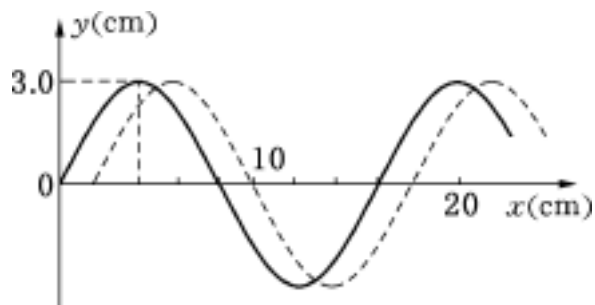


图 5-19

图可知该波的圆频率 $\omega = \underline{\hspace{2cm}} \text{ s}^{-1}$, 周期 $T = \underline{\hspace{2cm}} \text{ s}$, 波速 $u = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 波函数 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 有一平面简谐波在空间传播, 波速为 u , 已知在传播方向上某一点 S 的振动规律为 $y = A \cos(\omega t + \phi)$, 则图 5-20(a) 的波函数为 $\underline{\hspace{2cm}}$. 图 5-20(b) 的波函数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

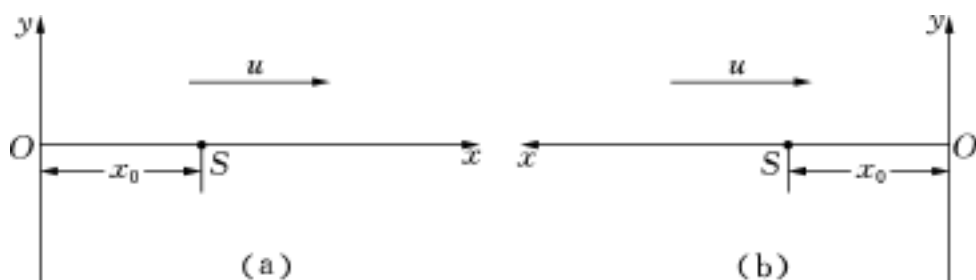


图 5-20

6. 如图 5-21 所示, 一平面简谐波 $y = 2 \cos 600 \left[t - \frac{x}{330} \right]$ (SI 制) 传到 A 、 B 两小孔上, A 、 B 相距 1 m, $AC \perp AB$. 若从 A 、 B 传出的子波到达 C 点, 两波叠加刚好发生第一次减弱, 则 $AC = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}$.

7. 一细线作驻波式振动, 其方程为 $y = 0.5 \cos \frac{\pi}{3} x \cos 40 \pi t$, 式中 x 、 y 的单位为 cm, t 的单位为 s, 则两列分波的振幅 $A = \underline{\hspace{2cm}}$, 传播速度 $u = \underline{\hspace{2cm}}$, 驻波相邻两波节之间的距离 $d = \underline{\hspace{2cm}}$.

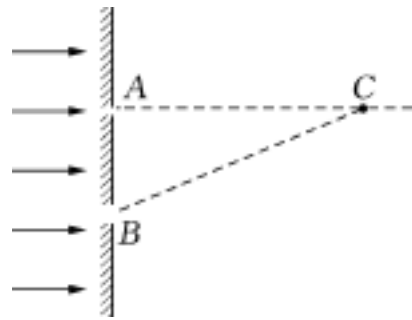


图 5-21

8. 如入射波的波函数是 $y_1 = A \cos 2 \left[\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right]$, 在 $x = 0$ 处发生反射后形成驻波. 设反射点为自由端, 反射后波的强度不变. 则反射波的波函数为 $y_2 = \underline{\hspace{2cm}}$, 在 $x = \frac{\lambda}{3}$ 处质点的合振动振幅 = $\underline{\hspace{2cm}}$.

9. 蝙蝠利用超声脉冲导航可以在洞穴中飞来飞去. 超声脉冲持续时间约 1 ms, 每秒重复发射数次. 若蝙蝠发射的超声频率为 39 kHz, 在朝着表面平坦的墙壁飞扑的期间, 蝙蝠的运动速率为空气中声速的 $1/40$, 则蝙蝠听到的从墙壁反射回来的脉冲波的频率是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

10 . 一波源 S 产生平面简谐波的波长 $\lambda = 10\text{ cm}$, 并且以速度 $u = 200\text{ cm/s}$ 沿着 x 轴正方向传播 . 在 x 轴上有相距为 8 cm 的 M 和 N 两点, 如图 5-22 所示 . 现波源 S 以速率 $v = 20\text{ cm/s}$ 沿着 x 轴自左向着 M 点匀速前进, 这时在 M 点的观察者测得波源的频率为 _____, 而此时 M 和 N 两点的振动相位差为 _____ .

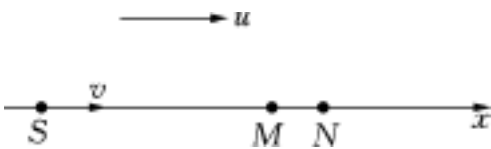


图 5-22

5 4 3 计算题

1 . 一平面简谐波以 $u = 0.8\text{ m/s}$ 的速度沿 x 轴负方向传播 . 已知距坐标原点 $x_0 = 0.4\text{ m}$ 处质点的振动曲线如图 5-23 所示 . (1) 求波函数; (2) 画出 $t = 0$ 时刻的波形图 .

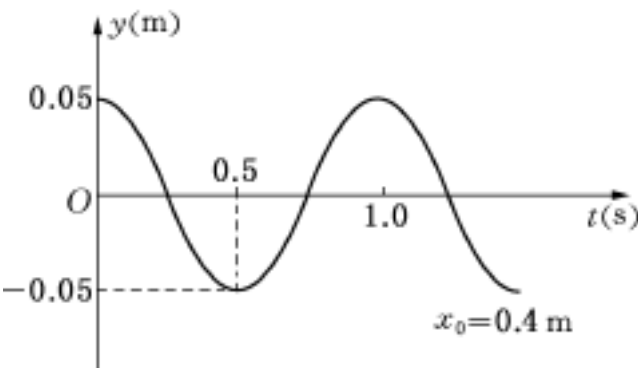


图 5-23

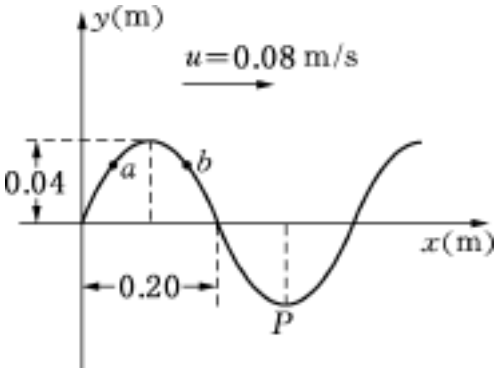


图 5-24

2 . 图 5-24 为某平面简谐波在 $t = 0$ 时刻的波形图 . 求: (1) 波长、周期、频率; (2) a 、 b 两点的运动方向; (3) 波函数; (4) P 点的振动方程; (5) $t = 1.25\text{ s}$ 时刻的波形图 .

* 3 . 如图 5-25 所示 . 两列相干平面简谐波沿 x 轴传播 . 波源 S_1 与 S_2 相距 $d = 30\text{ m}$. S_1 为坐标原点 . 波源 S_1 和 S_2 所发出的波的强度分别为 I_1 和 I_2 . 已知 $x_1 = 9\text{ m}$ 和 $x_2 = 12\text{ m}$ 处的两点是相邻的两个因干涉而使振动的振幅最小的点 . 设 S_2 的初相超前 . 求:

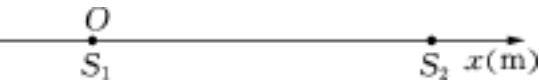


图 5-25

- (1) 两波的波长;
- (2) 两波源的最小相位差;
- (3) $x = 6\text{ m}$, 16.5 m , 20 m 处质点的振动强度;
- (4) $x < 0$ 和 $x > 30\text{ m}$ 的质点的振动强度 .

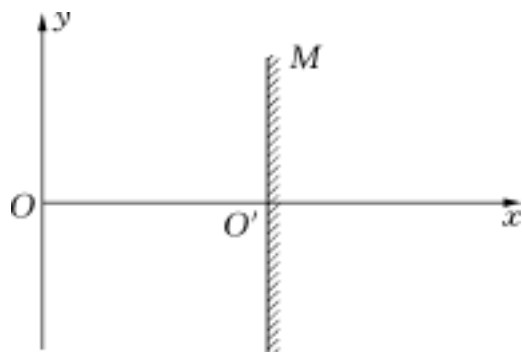


图 5-26

4. 如图 5-26 所示, 一平面简谐波沿 x 轴正方向传播, 波速 $u = 40 \text{ m/s}$. 已知坐标原点 O 的振动方程为 $y = A \cos\left[10t + \frac{\pi}{2}\right]$ (SI 制), M 是垂直于 x 轴的波密介质反射面, $OO' = 14 \text{ m}$. 求:

(1) 入射波和反射波的波函数;

(2) 驻波方程;

(3) 驻波波腹和波节的位置.

* 5. 两振幅相同的相干波源 S_1 和 S_2 位置如图 5-27 所示. S_2 的振动比 S_1 超前 $\frac{\pi}{2}$. 波源 S_1 的振动方程为 $y_{10} = A \cos \frac{2\pi}{T} t$, 求:

(1) S_1 和 S_2 之间的合成波方程;

(2) S_1 左侧的合成波方程;

(3) S_2 右侧的合成波方程.

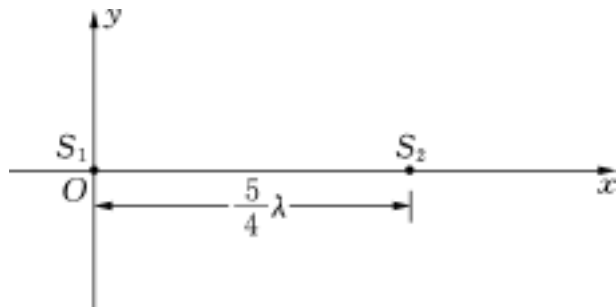


图 5-27

* 6. 一固定波源在海水中发射频率为 ν_0 的超声波, 射在一艘迎面而来的潜水艇上被反射回来. 相对波源静止的观察者测得反射波和发射波的频率相差为

设潜水艇运动的速度远小于海水中的声速 u . 试求潜水艇运动速度.

习题选解

[选择题 7] 由 A 传到 P 和由 B 传到 P 的两列波在 P 点的相位差

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_P &= \varphi_B - \varphi_A - \frac{2\pi}{\lambda}(\overline{BP} - \overline{AP}) \\ &= \frac{\pi}{2} - \left[-\frac{\pi}{2}\right] - \frac{2\pi}{\lambda}(1.00 - 0.80) \\ &= -\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 0.2 \end{aligned}$$

$$\text{由题意得: } \lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{u}{\nu/2} = \frac{0.40}{2/2} = 0.40 \text{ m}$$

所以得 $\Delta\varphi_P = 0$,

本题结论(A)正确.

[选择题 8] 由波源 S_1 的振动方程, 可得它传到 P 点时的振动方程为

$$y_{1P} = 0.3 \cos \left[2 \left(t - \frac{n}{u} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \text{ cm}$$

代入 $u = 20 \text{ cm/s}$, $n = 40 \text{ cm}$ 得

$$y_{1P} = 0.3 \cos \left[2 \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \text{ cm}$$

同理,由波源 S_2 的振动方程,得到它传到 P 点时的振动方程为

$$y_{2P} = 0.4 \cos \left[2 \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \text{ cm}$$

P 点的合振动方程为

$$\begin{aligned} y &= y_{1P} + y_{2P} \\ &= 0.7 \cos \left[2 \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \text{ cm} \end{aligned}$$

所以 P 点合振动的初相为 $\frac{\pi}{2}$, 本题结论(A)是正确的.

[填充题 6] A 、 B 两点发出的子波有相同的相位,它们在 P 点的相位差是由它们在空间传播距离的不同引起的.

$$= \frac{2\pi}{\lambda} (\overline{BC} - \overline{AC})$$

从波函数可知 $u = 330 \text{ m/s}$, $\frac{1}{T} = \frac{600}{2} = 300 \text{ Hz}$, 故 $\lambda = \frac{u}{f} = 1.1 \text{ m}$.

根据题意 $\Delta\phi = \pi$, 故

$$\frac{2\pi}{1.1} (\overline{BC} - \overline{AC}) = \pi$$

另外由 $\overline{AB} = 1 \text{ m}$, $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$.

所以得 $\overline{AC} = 0.78 \text{ m}$.

[填充题 9] 本题中蝙蝠既是波源也是观察者.若设声波在介质中的传播速度为 u , 则有 $u_s = u_b = u \cdot \frac{1}{40}$, $f = 39 \text{ kHz}$, 于是得

$$f' = \frac{u + u_b}{u - u_s} \cdot f = 41 \text{ kHz}.$$

[填充题 10] 波源 S 产生的平面简谐波频率为

$$f = \frac{u}{\lambda} = \frac{200}{10} = 20 (\text{Hz})$$

当 S 以 $v = 20 \text{ cm/s}$ 沿 x 轴向 M 点运动(见图 5-22)时, M 点的观察者测得此波源的频率为

$$= \frac{u}{u - v} \cdot \quad = \frac{200 \times 20}{200 - 20} = 22 \text{ 2(Hz)}$$

波源发出的平面简谐波的波长为

$$= \quad - vT = \quad - \frac{v}{\quad} = 9 \text{ cm}$$

所以 M 和 N 两点振动的相位差

$$= \frac{2}{\square} x = \frac{2}{9} \times 8 = \frac{16}{9}$$

[计算题 3](1) 设 S_1, S_2 的初相位为 φ_1, φ_2 . S_1, S_2 在 $x_1 = 9 \text{ m}$ 处引起质点振动的相位差应等于

$$\left[\varphi_2 - \frac{2\pi(d - x_1)}{\lambda} \right] - \left[\varphi_1 - \frac{2\pi x_1}{\lambda} \right] = (2k + 1)\pi$$

即 $\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi(d - 2x_1)}{\lambda} = (2k + 1)\pi$

由于 S_1, S_2 在 $x_2 = 12 \text{ m}$ 处引起质点振动是 $x_1 = 9 \text{ m}$ 处的相邻的干涉极小点, 应该有

$$\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi(d - 2x_2)}{\lambda} = (2k + 3)\pi$$

联立方程, 得 $\frac{4\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} = 2\pi$

故 $\lambda = 2(x_2 - x_1) = 2 \times (12 - 9) = 6 \text{ m}$

$$\begin{aligned} (2) \quad \varphi_2 - \varphi_1 &= \frac{2\pi(d - 2x_1)}{\lambda} + (2k + 1)\pi \\ &= (2k + 1)\pi + \frac{2\pi(30 - 2 \times 9)}{6} \\ &= (2k + 5)\pi \end{aligned}$$

当 $k = -2$ 时, $\varphi_2 - \varphi_1$ 最小

所以 $\varphi_2 - \varphi_1 =$

(3) 两波在任意点 x 处 ($0 < x < 30 \text{ m}$) 的相位差:

$$= \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}[(d - x) - x] = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(d - 2x)$$

$$= -\frac{2}{6}(30 - 2x) = \frac{2}{3}x - 9$$

在 $x = 6 \text{ m}$ 处: $\Delta\phi = -5$, 所以, 这一点是干涉减弱点: $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$

$x = 16.5 \text{ m}$ 处: $\Delta\phi = 2$, 所以, 这一点是干涉加强点: $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$

$x = 20 \text{ m}$ 处: $\Delta\phi = \frac{13}{3}$ $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \frac{13\pi}{3} = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2}$

(4) 当 $x < 0$ 时:

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}[(d + |x|) - |x|] = \phi_2 - \phi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}d$$

$$= -\frac{2\pi}{6} \times 30 = -\pi$$

因此, $x < 0$ 的点, 全是干涉极小点: $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$

当 $x > 30 \text{ m}$ 时: $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}[(x - d) - x] = \phi_2 - \phi_1 + \frac{2\pi}{\lambda}d = \pi$

因此, $x > 30 \text{ m}$ 的点, 也全是干涉极小点: $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$.

[计算题 5](1) 如图 5-28 所示 波源

S_1 和 S_2 之间, 两列振幅相同的相干波沿同一直线向相反方向传播, 合成波是驻波.

波源 S_1 的振动方程为

$$y_{10} = A \cos \frac{2\pi}{T}t$$

并沿 x 方向传播, 传到 S_1 和 S_2 之间的 x

处时, 相位落后 $\frac{2\pi}{\lambda}x$, 所以波函数为

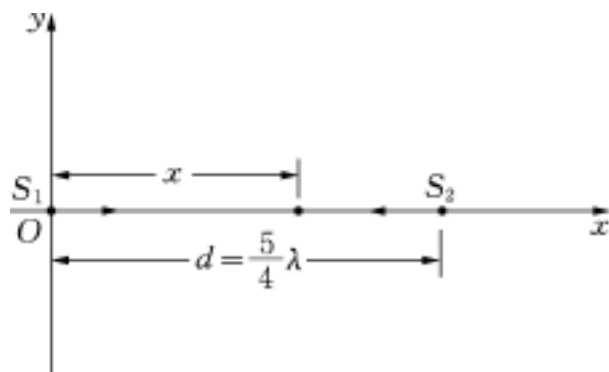


图 5-28

$$y_1 = A \cos \left[\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x \right] = A \cos 2 \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right]$$

因波源 S_2 的振动比 S_1 超前 $\frac{\pi}{2}$, 所以 S_2 的振动方程为

$$y_{20} = A \cos \left[\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2} \right]$$

并沿负 x 方向传播, 传到 x 处时相位落后 $\frac{2\pi}{\lambda}(d - x)$, 所以波函数为

$$y_2 = A \cos \left[\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda}(d - x) \right]$$

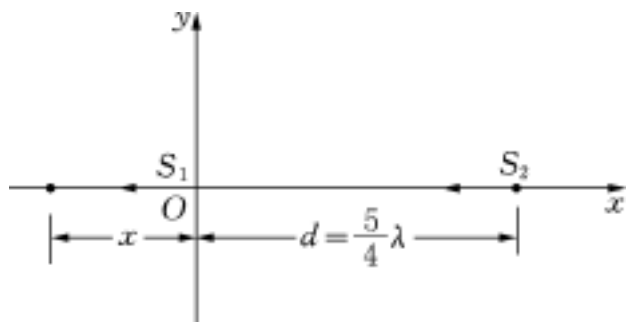


图 5-29

因为 $d = \frac{5}{4}\lambda$, $\frac{2}{\lambda}d = \frac{5}{2}$, 波函数化简为

$$y_2 = A \cos 2 \left[\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right]$$

S_1 和 S_2 之间合成波的方程为

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 \\ &= A \cos 2 \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right] + A \cos 2 \left[\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right] \\ &= 2A \cos \frac{2}{\lambda}x \cos \frac{2}{T}t \end{aligned}$$

是驻波方程.

(2) 在 S_1 左侧, 两列波均向负 x 方向传播.

波源 S_1 振动方程为 $y_{10} = A \cos \frac{2}{T}t$, 并向负 x 方向传播, 传到 x 处波函数为

$$\begin{aligned} y_1 &= A \cos \left[\frac{2}{T}t + \frac{2}{\lambda}x \right] \\ &= A \cos 2 \left[\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right] \end{aligned}$$

波源 S_2 振动方程为

$$y_{20} = A \cos \left[\frac{2}{T}t + \frac{2}{\lambda}d \right]$$

也向负 x 方向传播, 所以波函数为

$$y_2 = A \cos \left[\frac{2}{T}t + \frac{2}{\lambda}d + \frac{2}{\lambda}(x - d) \right]$$

考虑到 $\frac{2}{\lambda}d = \frac{5}{2}$, 方程简化为

$$y_2 = A \cos 2 \left[\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right]$$

所以在 S_1 左侧合成波方程为

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos \left[\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right]$$

合成波为沿负 x 方向传播的行波, 它的振幅为 $2A$.

(3) 在 S_2 右侧, 两列波均向 x 方向传播(如图 5-30).

波源 S_1 振动方程为

$$y_{10} = A\cos \frac{2}{T}t$$

传到 S_2 右侧时,波函数为

$$y_1 = A\cos 2 \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right]$$

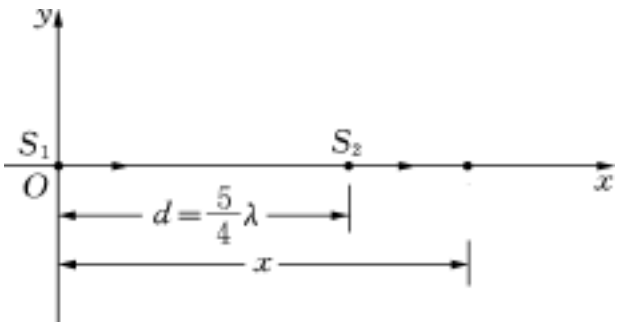


图 5-30

波源 S_2 振动方程为

$$y_{20} = A\cos \left[\frac{2}{T}t + \frac{\pi}{2} \right]$$

传到 S_2 右侧时,波函数为

$$y_2 = A\cos \left[\frac{2}{T}t + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda}(x - d) \right]$$

因 $\frac{2\pi}{\lambda}d = \frac{5\pi}{2}$, 方程简化为

$$\begin{aligned} y_2 &= A\cos \left[2 \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right] + 3\pi \right] \\ &= -A\cos 2 \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right] \end{aligned}$$

所以合成波方程为

$$y = y_1 + y_2 = 0$$

这说明在波源 S_2 右侧各点,两列波的振动均抵消 所以在 S_2 右侧各点均处在静止状态 .

[计算题 6]设潜水艇接收到波源发射波频率为 ν , 因为潜水艇迎着波源运动, 所以

$$\nu' = \left[1 + \frac{v}{u} \right] \nu$$

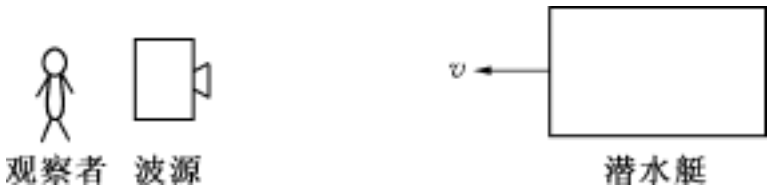


图 5-31

又因反射波与入射波的频率是相同的,所以被潜水艇反射回的波频率

$$= \left[1 + \frac{v}{u} \right]_0$$

因此,我们可把潜水艇视为一个发射频率为 ν_0 并以 v 迎着观察者而来的波源(参看图 5-31) 所以观察者测得潜水艇反射波的频率

$$= \frac{u}{u - v} = \frac{u \left[1 + \frac{v}{u} \right]_0}{u \left[1 - \frac{v}{u} \right]} = \frac{\left[1 + \frac{v}{u} \right]^2}{1 - \frac{v^2}{u^2}}_0$$

因 $v \ll u$, 可忽略 $\frac{v}{u}$ 的二次项, 则得

$$= \left[1 + \frac{2v}{u} \right]_0$$

由已知条件, 反射波和波源发射波的频率差为 $\Delta \nu$ 故有

$$= \nu_0 \left[1 + \frac{2v}{u} \right]_0 - \nu_0 = \frac{2\nu_0 v}{u}$$

解得潜水艇的速度

$$v = \frac{u}{2} \frac{\Delta \nu}{\nu_0}$$

气体动理论

6.1 基本要求与复习框图

1. 基本要求

- (1) 了解气体分子热运动的图像及特点 .理解统计方法的一般概念 .
- (2) 掌握理想气体状态方程 .理解理想气体的微观模型和统计假设 .
- (3) 掌握理想气体的压强公式和平均平动动能与温度的关系 .理解压强公式的推导思路 .理解压强和温度的统计意义和这两个宏观量的微观本质 .
- (4) 搞清能量均分定理和内能的概念 .掌握理想气体内能的特点并能熟练地进行计算 .
- (5) 理解麦克斯韦速率分布律及速率分布函数和速率分布曲线的物理意义 ,并能运用分布函数求与速度有关的物理量的平均值 .
- (6) 了解玻耳兹曼能量分布律的意义及重力场中粒子按高度分布的公式 .
- (7) 搞清平均碰撞频率和平均自由程的概念 ,并能作相应的计算 .

2. 复习框图

本章从物质的微观结构出发,以大量气体分子为研究对象,讨论气体分子的热运动现象和规律.教材先介绍了分子热运动图像和统计规律性及理想气体、平衡态的概念,然后建立理想气体微观模型,运用统计平均的方法,找出宏观量(压强和温度)与微观量的关系,从而揭示了宏观量的微观本质.接着讨论平衡态下气体分子所遵循的统计规律.从能量均分定理得出分子平均动能和理想气体内能公式;讨论麦克斯韦速率分布律的物理意义并得到三个统计速率(最概然速率、平均速率和方均根速率)公式;从玻耳兹曼能量分布律得出等温气压公式;对

分子碰撞频率的讨论,得到平均碰撞次数和平均自由程公式.最后从理想气体状态方程的修正,得到范德瓦耳斯方程.对非平衡态,简单介绍了三种输运过程.本章的主要内容和线索及研究问题的思想方法可用图 6-1 所示的方框图表示.

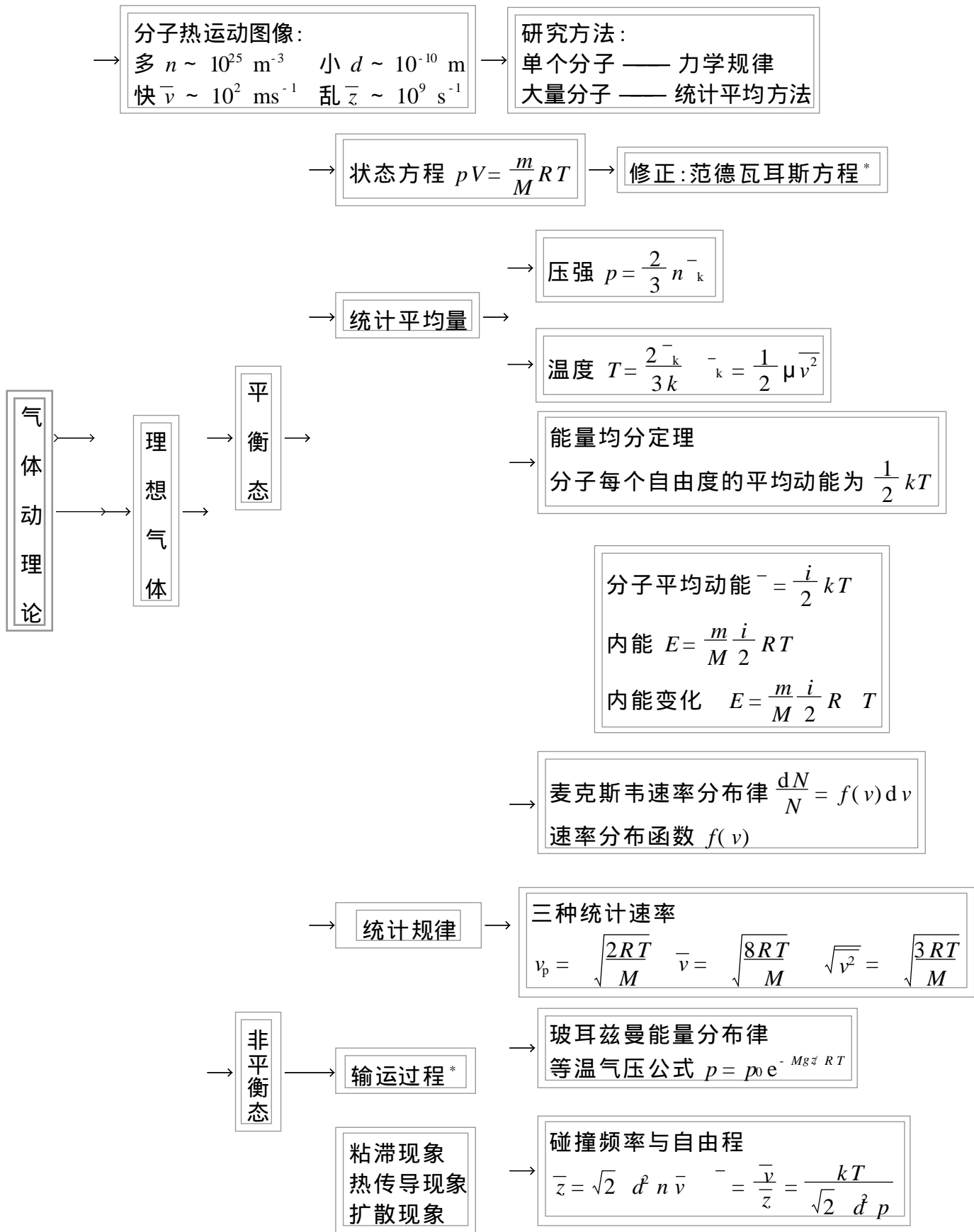


图 6-1

6.2 阅读指导与问题讨论

6.2.1 气体动理论的基本论点及研究方法

气体动理论研究的是一种比机械运动更复杂的运动形式——分子热运动,物质的热现象规律就是组成物质的大量分子热运动的表现.

1. 气体动理论的基本论点

(1) 分子论点:宏观物体是由大量分子构成的,分子之间有一定的间隙.

(2) 分子运动论点:所有分子都不停地作无规则的热运动.

(3) 分子力论点:分子之间有相互作用力.

(4) 统计论点:物体内部大量分子运动的综合作用决定物质的宏观性质.如个别分子对器壁的碰撞是断续的冲击式的作用,但大量分子先后碰撞器壁产生的综合作用使容器器壁受到稳定的压强.

2. 气体动理论的研究方法

大量分子作热运动时,每个分子的运动都遵循力学规律,但对大量分子组成的整体来说,它遵循的规律并不是每个分子所遵循的力学规律的简单叠加,而是遵循着一种新的规律——统计规律.气体动理论的研究方法就是从上述基本论点出发,运用力学规律和统计平均的方法找出大量分子的整体所表现出的统计规律,从而解释气体的宏观现象和规律并揭示其微观本质.

6.2.2 两个重要概念——压强和温度

1. 理想气体的压强公式

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_k$$

压强公式的推导过程充分显示了气体动理论研究方法的特点.导出压强公式的依据:体系处于平衡态;理想气体的微观模型;两个统计假设;对单个分子应用力学规律,对大量分子的整体行为则用统计平均的方法.

对宏观量压强的理解应注意以下两点:

(1) 气体压强是大量分子不停地作无规则热运动时与器壁碰撞的平均效果,即压强是对大量分子、对时间、对空间的统计平均值,对个别分子或少数分子来说,压强是没有意义的.

(2) 压强公式反映了宏观量 p 与统计平均值 $\bar{\epsilon}_k \left[\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right]$ 之间的联系.它无

法直接用实验证明,但从压强公式可以圆满地解释或推证理想气体遵守的一些规律.这说明在推导压强公式时,所作的统计假设和理想气体的微观模型是正确的.

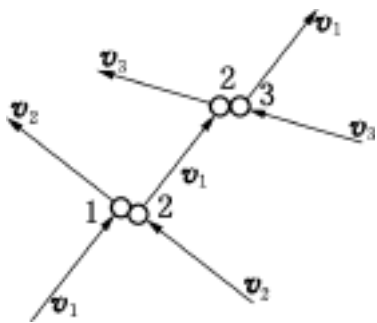


图 6-2

[问题 6-1] 推导理想气体的压强公式时,为什么可以不考虑分子间的相互碰撞?

[解答] 因为在推导理想气体的压强公式时,已经假定了气体由同种分子组成,而且分子间碰撞是完全弹性的.因此两个质量相同的分子作完全弹性碰撞时,碰撞后的速度只是发生交换.如图 6-2 中分子 1 以速度 v_1 前进,分子 2 与它相碰后速度变为 v_1 ,并接替分子 1 以速度 v_1 前进.同样分子 3 再与分子 2 相碰,又接替它以速度 v_1 前进,所以可认为容器中总有一个分子以速度 v_1 作匀速直线运动.同样也总有分子以速度 v_2 或 v_3 作匀速直线运动,直到它们与器壁发生完全弹性碰撞后才

弹回,分子间好像未发生过碰撞一样.由此可见,分子间的碰撞对理想气体的压强公式的推导无影响,所以可以不考虑气体分子间的碰撞.

2. 温度公式

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2} \mu \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$$

该式揭示了宏观量温度的微观本质,温度标志物体内部分子热运动的剧烈程度,是气体分子平均平动动能的量度,亦是大量分子热运动的统计平均结果,对个别分子,温度的概念是毫无意义的.

6.2.3 三个统计规律

1. 能量均分定理

在温度为 T 的平衡态下,物质分子的每一个自由度都具有相同的平均动能,其大小都等于 $\frac{1}{2} kT$.

这里应注意:(1) 该定理适用的条件是平衡态,对非平衡态,能量不按自由度均分.

(2) 分子每个自由度具有的平均动能 $\frac{1}{2} kT$ 是对大量分子统计平均的结果,对个别分子每个自由度所具有的动能可偏离平均值很大.

该定理是根据经典统计力学的基本原理推导出来的.根据能量均分定理可以计算出分子的平均动能(包括平动、转动和振动动能)为

$$\bar{\epsilon} = \frac{i}{2} kT$$

i 为分子的自由度(即为分子的平动、转动和振动自由度的总和).

由能量均分定理还可算出 1 mol 理想气体的内能为

$$E = N_A \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} RT$$

对于质量为 m 、摩尔质量为 M 的理想气体的内能为

$$E = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT$$

[问题 6-2] 如果把盛有理想气体的密封绝热容器放在汽车上,而汽车作匀速直线运动,则此时气体的温度与汽车静止时是否一样?如果汽车突然刹车,容器内气体的温度会发生什么变化?试讨论下列两种情况下气体的温度变化情况.

(1) 容器中放的是氦气;

(2) 容器中放的是氢气.

[解答] 从微观角度看,温度是分子热运动平均平动动能的量度,与定向运动无关.容器随汽车作定向匀速运动时,容器内的分子热运动并无变化,和容器静止时比较,气体温度不会升高.

当容器随汽车突然停止时,气体分子作定向运动的动能通过气体分子与器壁以及分子之间的碰撞而转化为气体的内能,使气体的内能增加,因而气体的温度将升高.

设容器中气体的质量为 m 若容器中放的是氦气,因氦气是单原子分子理想气体,分子自由度为 3,所以有

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{m}{M_{\text{He}}} \frac{3}{2} R T_{\text{He}} \quad T_{\text{He}} = \frac{M_{\text{He}} v^2}{3R}$$

若容器中放的是氢气,因氢气是双原子分子理想气体,分子自由度为 5,所以有

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{m}{M_{\text{H}}} \frac{5}{2} R T_{\text{H}} \quad T_{\text{H}} = \frac{M_{\text{H}} v^2}{5R}$$

因为 $M_{\text{He}} > M_{\text{H}}$,必有 $T_{\text{He}} > T_{\text{H}}$.所以当容器突然停下时氦气的温度比氢气升高得多.

2. 麦克斯韦速率分布律

理想气体处于平衡态时,尽管每个分子的速率可处于零到无穷大之间的一切可能值,但对大量分子而言,其速率分布仍遵循一定的统计规律.麦克斯韦速率分布律就是反映一定质量的理想气体在热动平衡态下,分布在各个速率区间内的分子数占气体分子总数的百分比的规律.

理解麦克斯韦速率分布律应注意:

(1) 它的适用条件是大量气体分子作无规则热运动的平衡态.

(2) 它是一个统计分布规律,我们不能讲某个分子速率的精确值,而只能讲在某个速率区间中找到分子的概率.

(3) 分布函数 $f(v) = \frac{dN}{Nd v}$ 是分布律的核心,它称为麦克斯韦速率分布函数.它的物理意义是在速率 v 附近单位速率区间内的分子数占总分子数的百分

比.由 $f(v)$ 的意义可知,(如图 6-3)速率分布曲线下的窄条面积 $f(v)dv$ 表示速率在 $v \sim v+dv$ 区间内的分子数占总分子数的百分比;曲线下有限速率区间的面积 $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$ 表示速率处于 $v_1 \sim v_2$ 区间内的分子数占总分子数的百分比;曲线下的总面积 $\int_0^\infty f(v)dv = 1$,表示分子在整个速率区间($0 \sim \infty$)的概率总和应等于 1,这称为速率分布函数的归一化条件.

(4) 分布曲线中极大值对应的速率叫做最概然速率 v_p ,其物理意义不能简单地理解为分子具有最概然速率的概率最大.因为分布曲线下与横坐标轴之间的面积表示速率在某一区间的概率,而 v_p 对应的是一条直线,从统计规律来看,具有某一确定速率的分子数为零,则 $\frac{N}{N} = 0$,因此不指出速率范围而讨论分子出现的概率是无意义的. v_p 的物理意义应理解为:如果将整个速率范围分成许多个相等的小区间,则 v_p 所在的速率区间内分子出现的概率最大.

(5) 分布曲线随气体温度 T 和随气体种类(μ 或 M) 不同而改变.如图 6-4(a)是同一种分子不同温度的两条分布曲线,图 6-4(b)是同一温度不同分子的两条分布曲线.

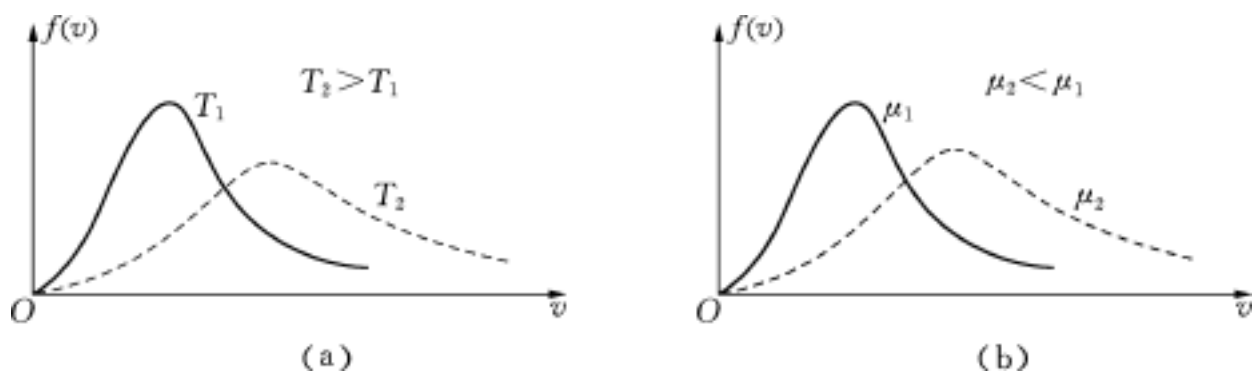


图 6-4

(6) 应用麦克斯韦速率分布函数可以求出三种常用的分子速率:

$$\text{最概然速率} \quad v_p = \sqrt{\frac{2kT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

$$\text{平均速率} \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\mu}} = \sqrt{\frac{8RT}{M}} \quad 1.60 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

$$\text{方均根速率} \quad \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad 1.73 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

[问题 6-3] 若气体分子速率分布曲线如图 6-5 所示.图中 A 和 B 面积相等,则图中 v_0 的意义是什么?

[解答] 由 $f(v) \sim v$ 曲线可知,图 6-5 中, A 部分的面积

$$S_A = \int_0^{v_0} f(v) dv$$

B 部分的面积

$$S_B = \int_{v_0}^{\infty} f(v) dv$$

S_A 的意义为速率比 v_0 小的分子数占总分子数的百分比, 而 S_B 的意义为速率比 v_0 大的分子数占总分子数的百分比. 由已知条件 $S_A = S_B$, 可得出图中 v_0 的意义表示体系在该平衡状态下, 气体分子速率比 v_0 大的分子数与比 v_0 小的分子数相等, 各占总分子数的一半.

[问题 6-4] $\int_{v_1}^{v_2} v f(v) dv$ 表示在 $v_1 \sim v_2$ 区间内分子的平均速率, 这种说法是否正确?

[解答] 这种说法不正确.

根据平均速率计算公式, 在 $v_1 \sim v_2$ 区间内分子的平均速率为

$$\bar{v}_{12} = \frac{\int_{v_1}^{v_2} v dN}{N_{12}}$$

式中 N_{12} 表示在 $v_1 \sim v_2$ 区间内的分子总数. 分子速率处于 $v_1 \sim v_2$ 区间内的概率为

$$\frac{N_{12}}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv$$

故

$$N_{12} = \int_{v_1}^{v_2} N f(v) dv$$

由 $\frac{dN}{N} = f(v) dv$, 得 $dN = N f(v) dv$, 一起代入平均速率计算公式, 故

$$\bar{v}_{12} = \frac{\int_{v_1}^{v_2} v N f(v) dv}{\int_{v_1}^{v_2} N f(v) dv} = \frac{\int_{v_1}^{v_2} v f(v) dv}{\int_{v_1}^{v_2} f(v) dv}$$

在 $0 \sim \infty$ 范围内分子的平均速率为

$$\bar{v} = \frac{\int_0^{\infty} v dN}{N} = \frac{\int_0^{\infty} v N f(v) dv}{N} = \int_0^{\infty} v f(v) dv$$

显然, $N_{12} < N$, 所以从 $\bar{v} = \int_{v_1}^{v_2} v f(v) dv$ 公式想当然地推出 $\int_{v_1}^{v_2} v f(v) dv$ 表示 $v_1 \sim v_2$ 区间内分子的平均速率, 这是错误的.

3. 分子碰撞的统计规律

平均碰撞次数 \bar{z} : 每个分子在单位时间内与其他分子碰撞的平均次数.

$$\bar{z} = \sqrt{2} \, n \bar{v} \lambda$$

平均自由程 $\bar{\lambda}$: 分子在连续两次碰撞之间所通过的自由路程的平均值.

$$\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{2} \lambda^2 n}$$

对理想气体, 由 $p = nkT$, 上式成为

$$\bar{z} = \frac{kT}{\sqrt{2} \lambda^2 p}$$

[问题 6-5] 恒压下, 加热理想气体, 则气体分子的平均自由程和平均碰撞次数将如何随温度的变化而变化? 怎样理解?

[解答] 对理想气体, 由 $p = nkT$, 则分子的平均自由程

$$\bar{z} = \frac{kT}{\sqrt{2} \lambda^2 p} = \frac{T}{p}$$

$$\bar{z} = \sqrt{2} \lambda^2 n \bar{v} = \sqrt{2} \lambda^2 \frac{p}{kT} \sqrt{\frac{8kT}{\mu}} = \frac{p}{\sqrt{T}}$$

若 p 不变, 则

$$\bar{z} \propto T$$

即恒压下, 加热理想气体, 分子的平均自由程随温度升高而增大, 平均碰撞次数随温度升高而减小.

因为 $p = nkT$, 在恒压下, 温度升高一方面使分子的数密度减小 $\left[n \propto \frac{1}{T} \right]$, 另一方面由于分子的平均速率增大 ($\bar{v} \propto \sqrt{T}$), 又使分子的平均碰撞次数增加, 但分子数密度减小的速度要比平均速率增大的速度快, 所以最终导致平均碰撞次数减小. 由于分子数密度 n 减小, 气体变得稀薄, 因而平均自由程增大.

6.3 解题方法与典型例题

1. 本章习题涉及的常数多, 且单位比较复杂, 在进行数值计算时要注意统一单位, 一般可采用国际单位制. 同时要知道一些微观量的数量级, 这不仅可以帮助我们估算演算结果的正确性, 还能使我们更好地了解分子热运动的图像.

2. 本章的重点是两个重要概念和三个统计规律, 要在理解其物理意义的基础上, 根据题目给出的已知条件和问题所求, 选用适当的公式进行求解. 要求通过气体动理论的学习, 能对统计平均的概念和统计方法有一定的理解.

3. 本章的难点是麦克斯韦速率分布律. 必须搞清分布函数 $f(v) = \frac{dv}{Ndv}$ 的物理意义, 这是讨论有关速率分布问题的基础. 应用速率分布函数可求如下问题.

(1) 求某一速率范围内分子出现的概率.

分子速率处于 $v \sim v + dv$ 区间内的概率为

$$\frac{dN}{N} = f(v) dv$$

分子速率处于 $v_1 \sim v_2$ 区间内的概率为

$$\frac{N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv$$

(2) 求某一速率范围内的分子数 .

速率处于 $v \sim v + dv$ 区间内的分子数为

$$dN = N f(v) dv$$

速率处于 $v_1 \sim v_2$ 区间内的分子数为

$$N = \int_{v_1}^{v_2} N f(v) dv$$

(3) 求与速率有关的物理量 $M(v)$ 的平均值 .

$M(v)$ 在 $v_1 \sim v_2$ 区间内的平均值为

$$\overline{M(v)} = \frac{\int_{v_1}^{v_2} M(v) f(v) dv}{\int_{v_1}^{v_2} f(v) dv}$$

$M(v)$ 在整个速率区间内的平均值为

$$\overline{M(v)} = \int_0^\infty M(v) f(v) dv$$

[例 6-1] 一容器内贮有标准状态下的氮气 求: (1) 1 mm^3 中有多少个氮分子? (2) 氮分子的质量; (3) 氮气的质量密度; (4) 分子间的平均距离; (5) 分子的平均速率; (6) 平均碰撞次数; (7) 平均自由程 (设氮分子的有效直径 $d = 3.28 \times 10^{-10} \text{ m}$) .

[解] (1) 由 $p = nkT$, 得

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1.013 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 273} = 2.69 \times 10^{25} (\text{m}^{-3}) = 2.69 \times 10^{16} (\text{mm}^{-3})$$

(2) 氮分子的质量为

$$\mu = \frac{M}{N_A} = \frac{28 \times 10^{-3}}{6.022 \times 10^{23}} = 4.65 \times 10^{-26} (\text{kg})$$

(3) 氮的质量密度为

$$= n\mu = 2.69 \times 10^{25} \times 4.65 \times 10^{-26} = 1.25 (\text{kg/m}^3)$$

(4) 平均每个分子占据的体积为 $\frac{1}{n}$, 将此体积看成立方体, 则分子间的平均距离为

$$l = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2.69 \times 10^{16}}} = 3.34 \times 10^{-6} (\text{mm})$$

可见,分子间的平均距离约为分子直径的10倍.

(5) 分子的平均速率

$$\bar{v} = 1.60 \sqrt{\frac{RT}{M}} = 1.60 \sqrt{\frac{8.31 \times 273}{28 \times 10^{-3}}} = 455 (\text{m/s})$$

(6) 分子的平均碰撞次数

$$\bar{z} = \sqrt{2} d^2 n \bar{v} = \sqrt{2} \times 3.14 \times (3.28 \times 10^{-10})^2 \times 2.69 \times 10^{25} \times 455 = 5.85 \times 10^9 (\text{s}^{-1})$$

(7) 分子的平均自由程

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} d^2 n} = \frac{1}{\sqrt{2} \times 3.14 \times (3.28 \times 10^{-10})^2 \times 2.69 \times 10^{25}} = 7.8 \times 10^{-8} (\text{m})$$

本题的计算给出了一些量的数量值,使读者对气体分子热运动图像有一个较为具体的了解和认识.

[例 6-2] 在体积为 $2 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ 的容器中,有 5.4×10^{23} 个刚性双原子分子,其内能为 $6.75 \times 10^2 \text{ J}$.

求: (1) 气体的压强; (2) 分子的平均平动动能及气体温度.

[解] (1) 由理想气体状态方程和内能公式

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

$$E = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT$$

可解得

$$p = \frac{2E}{iV} = \frac{2 \times 6.75 \times 10^2}{5 \times 2 \times 10^{-3}} = 1.35 \times 10^5 (\text{Pa})$$

(2) 气体温度可用两种不同的方法求解.

解法一: 由理想气体状态方程

$$p = nkT$$

可得

$$T = \frac{p}{nk} = \frac{pV}{Nk} = \frac{1.35 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3}}{5.4 \times 10^{23} \times 1.38 \times 10^{-23}} = 362 (\text{K})$$

解法二: 由内能公式

$$E = N \frac{i}{2} kT$$

可得

$$T = \frac{2E}{Nik} = \frac{2 \times 6.75 \times 10^2}{5.4 \times 10^{23} \times 5 \times 1.38 \times 10^{-23}} = 362 \text{ K}$$

分子的平均平动动能为

$$\epsilon_k = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 362 = 7.5 \times 10^{-21} \text{ J}$$

[例 6-3] 求在一定温度下,分子速率处在 $\frac{1}{2}v_p$ 和 v_p 附近确定的速度区间 v 内的分子数之比.

[解] 设处在 $v_p \sim v_p + v$ 区间内的分子数为 N_1 , 处在 $\frac{1}{2}v_p \sim \frac{1}{2}v_p + v$ 区间内的分子数为 N_2 把麦克斯韦速率分布函数写为下面的形式

$$\begin{aligned} f(v) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\mu}{2kT} \right]^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mu}{2kT} v^2} \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_p^2} e^{-\frac{v^2}{v_p^2}} \frac{1}{v_p} \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} N_1 &= N f(v_p) v \\ &= N \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \frac{v}{v_p} \end{aligned}$$

$$N_2 = N f\left(\frac{1}{2}v_p\right) v = N \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}} \frac{v}{v_p}$$

所以

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{N \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}} \frac{v}{v_p}}{N \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \frac{v}{v_p}} = \frac{1}{4} e^{\frac{3}{4}} = 52.9\%$$

从上面的计算可以看出, N_1 和 N_2 都与温度有关(因为它们与 v_p 有关), 但 $\frac{N_2}{N_1}$ 的比值与温度无关.

[例 6-4] 导体中自由电子的运动可以看做类似气体分子的运动(故称电子气). 设导体中共有 N 个自由电子, 电子的最大速率为 v_F (称为费米速率). 电子在速率 $v \sim v + dv$ 之间的概率为

$$\frac{dN}{N} = \begin{cases} \frac{4}{N} A v^2 dv & v \leq v_F \\ 0 & v > v_F \end{cases}$$

式中 A 为常数.

(1) 画出速率分布函数曲线;

(2) 求常数 A ;

(3) 证明电子气中电子的平均动能 $\bar{\epsilon} = \frac{3}{5} \epsilon_F$, 其中 $\epsilon_F = \frac{1}{2} m v_F^2$, 叫做费米能.

[解] 速率分布律中的常数通常由分布函数的归一化条件确定. 本题求解宜先求分布函数, 然后由归一化条件定常数 A , 再由分布函数求速率方均值, 进而便可求出电子的平均动能.

(1) 根据题给函数关系, 电子气的分布函数为

$$f(v) = \frac{dN}{N dv} = \frac{4}{N} A v^2$$

画出分布函数曲线如图 6-6 所示.

(2) 由分布函数的归一化条件

$$\int_0^{v_F} f(v) dv = \int_0^{v_F} \frac{4A}{N} v^2 dv = \frac{4A}{N} \frac{v_F^3}{3} = 1$$

解得

$$A = \frac{3N}{4 v_F^3}$$

(3) 由平均值公式求出 $\overline{v^2}$ 并利用(2)的结果, 则

$$\overline{v^2} = \int_0^{v_F} v^2 f(v) dv = \int_0^{v_F} v^2 \frac{3v^2}{v_F^3} dv = \frac{3}{5} v_F^2$$

故电子的平均动能

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{1}{2} m \left[\frac{3}{5} v_F^2 \right] = \frac{3}{5} \left[\frac{1}{2} m v_F^2 \right] = \frac{3}{5} \epsilon_F$$

[例 6-5] 在半径为 R 的球形容器里贮有分子有效直径为 d 的气体, 试求该容器中最多可容纳多少个分子, 才能使气体分子之间不致相碰?

[解] 为使气体分子之间不相碰, 则必须使分子的平均自由程不小于容器的直径, 即必须满足

$$\lambda \geq 2R$$

由分子的平均自由程 $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} d n}$, 可得

$$n = \frac{1}{\sqrt{2} d \lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} d (2R)}$$

上式表明, 为使分子之间不相碰, 容器中可容许的最大分子数密度为

$$n_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{2} d R}$$

因此, 在容积 $V = \frac{4}{3} R^3$ 的容器中, 最多可容纳的分子数 N 为

$$N = n_{\max} V = \frac{1}{2\sqrt{2} d R} \cdot \frac{4}{3} R^3 = \frac{2}{3\sqrt{2}} \frac{R^2}{d} = 0.47 \frac{R^2}{d}$$

6.4 自测练习与能力训练

6.4.1 选择题

1. 两瓶不同类的理想气体, 设分子平均平动动能相等, 但其分子数密度不相等, 则[]。

(A) 压强相等, 温度相等

(B) 温度相等, 压强不相等

(C) 压强相等, 温度不相等 (D) 方均根速率相等

2. 在一封闭容器内, 理想气体分子的平均速率提高为原来的 2 倍, 则 [] .

- (A) 温度和压强都提高为原来的 2 倍
 (B) 温度为原来的 2 倍, 压强为原来的 4 倍
 (C) 温度为原来的 4 倍, 压强为原来的 2 倍
 (D) 温度和压强都为原来的 4 倍

3. 三个容器 A、B、C 中装有同种理想气体, 其分子数密度之比为 $n_A : n_B : n_C = 4 : 2 : 1$, 方均根速率之比为 $\sqrt{v_A^2} : \sqrt{v_B^2} : \sqrt{v_C^2} = 1 : 2 : 4$, 则其压强之比 $p_A : p_B : p_C$ 为 [] .

- (A) $1 : 2 : 4$ (B) $4 : 2 : 1$
 (C) $1 : 1 : 1$ (D) $4 : 1 : \frac{1}{4}$

4. 封闭容器内贮有 1 mol 氦气(视为理想气体), 其温度为 T , 若容器以速度 v 作匀速直线运动, 则该气体的内能为 [] .

- (A) $\frac{3}{2} kT$ (B) $\frac{3}{2} kT + \frac{1}{2} Mv^2$
 (C) $\frac{3}{2} RT$ (D) $\frac{3}{2} RT + \frac{1}{2} Mv^2$

5. 在一定的温度下, 理想气体分子速率分布函数如图 6-7 所示. 那么, 当气体的温度降低时, 应有 [] .

- (A) v_p 变小, 而 $f(v_p)$ 不变
 (B) v_p 和 $f(v_p)$ 都变小
 (C) v_p 变小, 而 $f(v_p)$ 变大
 (D) v_p 不变, 而 $f(v_p)$ 变大

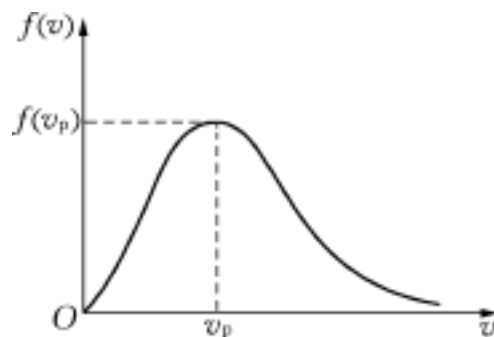


图 6-7

6. 某系统由两种理想气体 A 和 B 组成, 其分子数分别为 N_A 和 N_B , 若在某一温度下, A 和 B 气体各自的速率分布函数分别为 $f_A(v)$ 和 $f_B(v)$, 则在同一温度下, 由 A、B 气体组成的系统的速率分布函数为 [] .

- (A) $N_A f_A(v) + N_B f_B(v)$ (B) $\frac{1}{2} [N_A f_A(v) + N_B f_B(v)]$
 (C) $\frac{N_A f_A(v) + N_B f_B(v)}{N_A + N_B}$ (D) $\frac{N_A f_A(v) + N_B f_B(v)}{2(N_A + N_B)}$

7. 若 $f(v)$ 为气体分子速率分布函数, N 为分子总数, m 为分子质量, 则

$\int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{2} m v^2 N f(v) dv$ 的物理意义是 [] .

(A) 速率为 v_2 的各分子的总平动动能与速率为 v_1 的各分子的总平动动能之差

(B) 速率为 v_2 的各分子的总平动动能与速率为 v_1 的各分子的总平动动能之和

(C) 速率处于速率区间 $v_1 \sim v_2$ 之内的分子的平均平动动能

(D) 速率处于速率区间 $v_1 \sim v_2$ 之内的分子的平动动能之和

8. 玻耳兹曼分布律表明:在某一温度的平衡态, [] .

(1) 分布在某一区间(坐标区间和速度区间)的分子数,与该区间粒子的能量成正比

(2) 在同样大小的各区间(坐标区间和速度区间)中,能量较大的分子数较少;能量较小的分子数较多

(3) 在大小相等的各区间(坐标区间和速度区间)中比较,分子总是处于低能态的概率大些

(4) 分布在某一坐标区间内、具有各种速度的分子总数只与坐标区间的间隔成正比,与粒子能量无关

以上四种说法中,

(A) 只有(1)、(2)是正确的

(B) 只有(2)、(3)是正确的

(C) 只有(1)、(2)、(3)是正确的

(D) 全部是正确的

9. 在下面四种情况中,一定能使理想气体分子平均碰撞次数增大的是 [] .

(A) 增大压强,提高温度

(B) 增大压强,降低温度

(C) 降低压强,提高温度

(D) 降低压强,保持温度不变

10. 在一容积不变的容器中贮有一定量的理想气体,温度为 T_0 时,气体分子的平均速率为 \bar{v}_0 , 平均碰撞次数为 \bar{z}_0 , 平均自由程为 $\bar{\lambda}_0$. 当气体温度升高到 $4 T_0$ 时,其分子的平均速率 \bar{v} 、平均碰撞次数 \bar{z} 和平均自由程 $\bar{\lambda}$ 分别为 [] .

(A) $\bar{v} = 4\bar{v}_0$, $\bar{z} = 4\bar{z}_0$, $\bar{\lambda} = 4\bar{\lambda}_0$

(B) $\bar{v} = 2\bar{v}_0$, $\bar{z} = 2\bar{z}_0$, $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0$

(C) $\bar{v} = 2\bar{v}_0$, $\bar{z} = 2\bar{z}_0$, $\bar{\lambda} = 4\bar{\lambda}_0$

(D) $\bar{v} = 4\bar{v}_0$, $\bar{z} = 2\bar{z}_0$, $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0$

6 4 2 填充题

1. 已知一容器内储有质量为 m , 摩尔质量为 M , 压强为 p , 温度为 T 的双原子理想气体, 以及气体普适常量 R 和阿伏伽德罗常数 N_A . 试用上述参量来表示: 分子数密度 $n =$ _____; 气体的密度 $=$ _____; 气体分子的平均平动动能 $\bar{\epsilon}_k =$ _____; 气体的内能 $E =$ _____ .

2. 根据能量均分定理, 当温度为 T 时, 可得出以下计算公式:

- (1) 一个分子平均动能_____;
- (2) 1 mol 理想气体内能_____;
- (3) 1 mol 氧气的平动动能_____, 转动动能_____.

3. 两个容器中分别贮有氢气和氧气, 已知氢气的压强是氧气压强的 $\frac{1}{2}$, 氢气的容积是氧气容积的 2 倍, 则氢气的内能是氧气内能的_____倍.

4. 一容器内盛有密度为 _____ 的单原子理想气体, 其压强为 p , 此气体分子的方均根速率为_____, 单位体积内气体的内能是_____.

5. 质量相等的氧气和氢气分别盛在两个容积相等的容器内. 在温度相同的情况下, 氧和氢的压强之比为_____, 氧和氢的内能之比为_____, 氧分子和氢分子的平均速率之比为_____.

6. 图 6-8 所示的曲线分别是氢和氧在相同温度下的麦克斯韦速率分布曲线. 从图 6-8 可知氢气分子的最概然速率为_____, 氧气分子的最概然速率为_____, 氧气分子的方均根速率为_____.

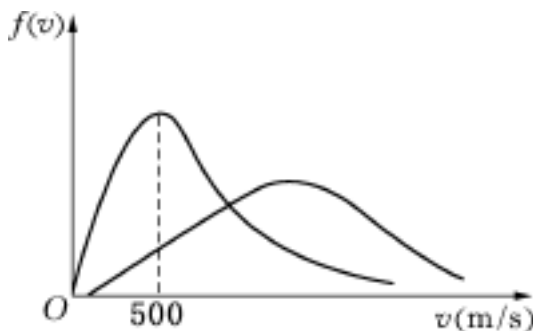


图 6-8

7. 用总分子数 N , 气体分子速率 v 和速率分布函数 $f(v)$ 表示下列各量:

- (1) 速率大于 v_p 的分子数_____;
- (2) 速率大于 v_0 的那些分子的平均速率_____;
- (3) 分子速率大于 v_0 的概率_____.

8. 已知大气压强随高度 h 的变化规律为

$$p = p_0 e^{-Mgh/RT}$$

设大气的温度为 5°C , 同时测得海平面的气压和山顶的气压分别为 $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ 和 $7.87 \times 10^4 \text{ Pa}$, 则山顶的海拔高度为_____. (空气的摩尔质量为 $29 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$)

9. 分子的有效直径的数量级是_____. 常温下, 气体分子的平均速率数量级是_____, 在标准状态下气体分子的碰撞频率的数量级是_____.

10. 一定量的某种理想气体, 先经过等体过程使其热力学温度升高为原来的 4 倍, 再经过等温过程使其体积膨胀为原来的 2 倍, 则分子的平均碰撞次数变为原来的_____倍, 平均自由程变为原来的_____倍.

6.4.3 计算题

1. 一个封闭的圆筒, 内部被导热的、不漏气的可移动活塞隔为两部分. 最初活塞处于筒中央, 则圆筒两侧的长度 $l_1 = l_2$. 当两侧各充以 T_1 、 p_1 和 T_2 、 p_2 的相同气体后, 问平衡时活塞将在什么位置上 [即 $\frac{l_1}{l_2}$ 是多少]? 已知 $p_1 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$, $T_1 = 680 \text{ K}$, $p_2 = 2.026 \times 10^5 \text{ Pa}$, $T_2 = 280 \text{ K}$.

2. 试由能量均分定理和理想气体的压强公式, 推出理想气体的状态方程.

3. 若对一容器中的气体进行压缩, 并同时对它加热, 当气体温度从 27°C 上升到 177°C 时, 其体积减少了一半, 求:

(1) 气体压强的变化;

(2) 分子的平均动能和方均根速率的变化.

4. 设由 N 个气体分子组成的热力学系统, 其速率分布函数为

$$f(v) = \begin{cases} -A(v - v_0)v & 0 < v < v_0 \\ 0 & v > v_0 \end{cases}$$

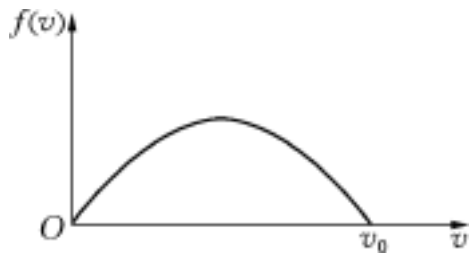


图 6-9

速率分布函数如图 6-9 所示. 试求:

(1) 分布函数中的常数 A ;

(2) 最概然速率;

(3) 速率在 $0 \sim 0.3v_0$ 之间的分子数 N ;

(4) 分子平均速率 \bar{v} ;

(5) 分子的方均根速率 $\sqrt{\bar{v}^2}$.

5. 根据麦克斯韦速率分布律, 试求速率倒数的平均值 $\left[\frac{1}{v} \right]$. 它是否等于 $\frac{1}{\bar{v}}$?

6. 拉萨海拔约为 3600 m , 气温为 273 K , 忽略气温随高度的变化, 当海平面上的气压为 $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 时, 试求:

(1) 拉萨的大气压强;

(2) 若某人在海平面上每分钟呼吸 10 次, 他在拉萨应呼吸多少次才能吸入同样质量的空气? (已知空气的摩尔质量为 $M = 29 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$)

习题选解

[选择题 6] 因速率分布函数的意义是系统中处在速率 v 附近单位速率区间的分子数占总分子数的百分比. 由分布函数的意义可知, $N_A f_A(v) + N_B f_B(v)$ 表示在气体 A 和 B 组成的系统中处在速率 v 附近单位速率区间的分子数, 而

$N_A + N_B$ 表示系统中的分子总数, 所以系统的分布函数

$$f(v) = \frac{N_A f_A(v) + N_B f_B(v)}{N_A + N_B}$$

因此本题结论(C)是正确的.

[选择题 10] 分子的平均速率 \bar{v} 、平均碰撞次数 \bar{z} 和平均自由程 $\bar{\lambda}$ 的表示式分别为

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{M}}, \quad \bar{z} = \sqrt{2} \, d^2 n \bar{v}, \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \, d^2 n}$$

即 $\bar{v} \propto \sqrt{T}$. 当容积不变时, 单位体积内的分子数 n 不变, 则 $\bar{z} \propto \sqrt{T}$, 而 $\bar{\lambda}$ 不变. 所以气体温度升高到原来温度的 4 倍时, 分子的平均速率是原来的 2 倍, 平均碰撞次数为原来的 2 倍, 而平均自由程不变. 因此本题的正确结论选(B).

[填充题 4] 由理想气体的状态方程可知容器中气体的压强

$$p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V}$$

又因容器中的气体密度 $\rho = \frac{m}{V}$, 由此找出了气体密度和压强的关系

$$p = \frac{RT}{M}$$

又可把上式改写为

$$\frac{RT}{M} = p$$

把上式代入气体分子的方均根速率的表示式得

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{3p}$$

理想气体内能的表示式为

$$E = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT$$

用理想气体的状态方程 $pV = \frac{m}{M} RT$ 代入上式得

$$E = \frac{i}{2} pV$$

所以容器中单位体积内理想气体的内能

$$\frac{E}{V} = \frac{i}{2} p$$

考虑到容器内是单原子理想气体,单位体积的内能应为 $\frac{3}{2} p$.

[填充题 7]提示:讨论这类问题(写出表达式或说明表达式的物理意义)时,首先必须明确分布函数 $f(v) = \frac{dN}{Ndv}$ 的物理意义,在理解的基础上,根据题目给出的速率区间求解.注意这是一个对大量分子的统计规律.具体可参阅本章解题方法中的第 3 点.

[计算题 2]理想气体的压强公式为

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_k \quad (1)$$

由能量均分定理可知,分子每个自由度的平均动能为 $\frac{1}{2} kT$, 而分子平动自由度为 3. 故分子的平均平动动能为

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2} kT \quad (2)$$

联立式(1)和式(2)得

$$p = nkT \quad (3)$$

式中, n 为单位体积的分子数,可写为

$$n = \frac{N_A m}{VM},$$

其中 N_A 为阿伏伽德罗常数; m 为气体的质量; V 为气体的体积; M 为分子的摩尔质量.

把 n 的表示式代入式(3)得

$$p = \frac{m}{M} \frac{N_A}{V} kT$$

又因 $N_A k = R$, 所以

$$p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V}$$

这就得出理想气体的状态方程.

以前讲理想气体时,状态方程是从实验定律推出的.在此我们用理想气体的

压强公式和能量均分定理来推导 这种推导是根据气体动理论的观点,从微观角度出发的 .

[计算题 5] 根据用麦克斯韦速率分布律求平均值的公式

$$\left[\frac{1}{v} \right] = \int_0^{\infty} \frac{1}{v} f(v) dv \quad (1)$$

把麦克斯韦分布函数

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\mu}{2kT} \right]^{3/2} v^2 e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}}$$

代入式(1)得

$$\left[\frac{1}{v} \right] = \int_0^{\infty} \frac{1}{v} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\mu}{2kT} \right]^{3/2} v^2 e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} dv \quad (2)$$

令 $x = \left[\frac{\mu}{2kT} \right]^{1/2} v$, 把积分式化简为

$$\left[\frac{1}{v} \right] = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\mu}{2kT} \right]^{1/2} \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

积分后得

$$\left[\frac{1}{v} \right] = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\mu}{2kT} \right]^{1/2} \frac{1}{2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\mu}{8kT} \right]^{1/2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v}$$

可见,分子速率倒数的平均值不等于速率平均值的倒数 .

热力学基础

7.1 基本要求与复习框图

1. 基本要求

- (1) 掌握内能、功和热量等概念;理解准静态过程的特点.
- (2) 掌握热力学第一定律,能熟练地分析、计算理想气体在各等值过程及绝热过程中功、热量和内能的改变量.
- (3) 理解循环过程的特点,掌握热机效率的计算方法.理解卡诺循环的特点,掌握卡诺热机效率的计算方法.
- (4) 了解热力学第二定律.

2. 复习框图

热力学是热现象的宏观理论,它是根据实验事实,从能量守恒和转化的观点出发,找出热力学过程所遵循的规律,即热力学第一定律.在正确理解内能、功和热量的基础上,着重讨论热力学第一定律对理想气体的四个典型过程(等体过程、等压过程、等温过程和绝热过程)的应用,这是本章的重点.学习时,应把 p - V 图的定性分析和定量计算相互结合起来,对主要公式,应在理解推导过程的基础上达到牢固掌握、熟练应用之目的.

通过对循环过程的讨论引入热机效率的概念,总结出热力学第二定律.热力学第一定律讨论的是热功转换的数量关系即能量转化时的量守恒问题,而热力学第二定律则讨论了热功转换的条件,即能量转化的方向性问题.本章的主要内容可用图 7-1 的方框图表示.

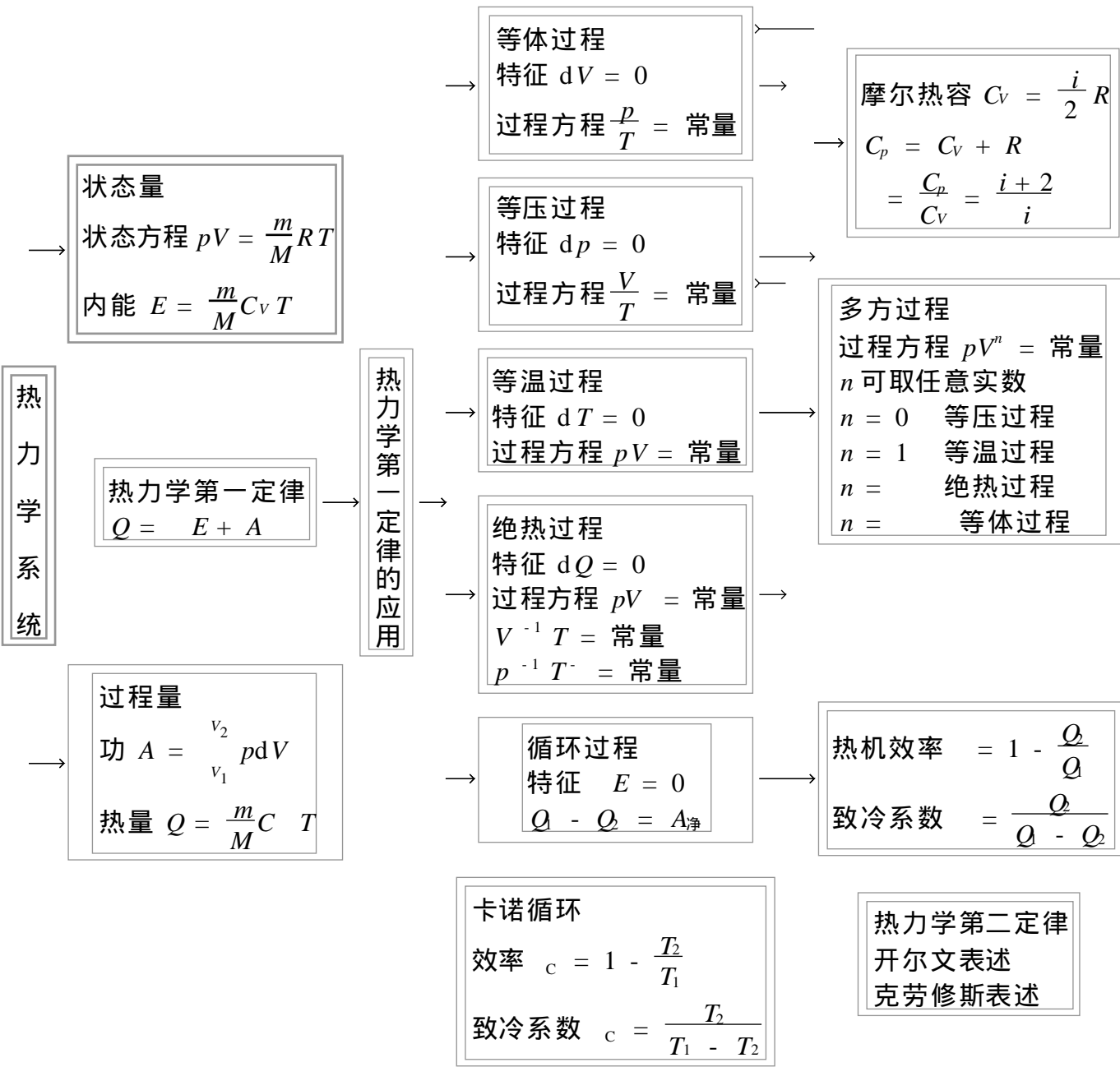


图 7-1

7.2 阅读指导与问题讨论

1. 内能、功和热量

(1) 系统的内能包含系统内所有分子热运动的动能及分子之间相互作用势能的总和。内能是系统状态的函数。对于一定质量的某种气体,内能一般是 T 、 V 或 p 的函数;对于理想气体,内能仅是温度 T 的单值函数。内能的变化只取决于始、末状态的温度,而与系统经历的过程无关。所以,内能变化的公式为

$$E = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R T = \frac{m}{M} C_v T$$

尽管式中出现定体摩尔热容 C_V , 但此式并非仅限于等体过程.

(2) 做功和传递热量都可以改变系统的内能, 但它们的本质不同. 做功是通过宏观位移来实现的, 它是有规则的机械运动能量转化为无规则的分子热运动能量; 而传递热量是通过分子之间的相互碰撞来实现系统内外分子无规则热运动能量之间的转换的.

过程中功的计算式为

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

注意: 上式仅适用于准静态过程. 由于功在数值上等于 $p-V$ 图上过程曲线下的面积, 所以, 有时用所围面积来计算功比较方便, 尤其是过程曲线为直线时常用此法.

当气体温度发生变化时, 它所吸收的热量为

$$Q = \frac{m}{M} C T$$

式中 C 为摩尔热容. 等体、等压、等温、绝热四种过程摩尔热容分别为 $\frac{i}{2} R$ 、 $\frac{i+2}{2} R$ 、 $\frac{i+2}{2} R$ 、 0 . 传递热量也可用热力学第一定律 $Q = \Delta E + A$ 求得.

(3) 必须注意: 内能是状态量, 而功和热量是过程量. 因此当系统处于某一平衡态时, 可以说“系统具有一定的内能”, 而不能说“系统具有多少热量”或“具有多少功”. 这是因为只有当系统的状态发生变化时, 系统才会做功或与外界有热量的交换, 而且状态变化的过程不同, 做功和传递的热量也不同.

2. 热力学第一定律

热力学第一定律是包括热现象在内的能量守恒和转换定律. 当系统状态发生变化时, 系统所吸收的热量, 一部分使系统的内能增加, 一部分供系统对外做功. 其数学表达式为

$$Q = \Delta E + A$$

热力学第一定律对任何过程都适用, 只要初、末两态为平衡态. 使用时应注意式中各量的符号约定: $Q > 0$ 表示系统吸收热量, $Q < 0$ 表示系统放出热量;

$\Delta E > 0$ 表示系统内能增加, $\Delta E < 0$ 表示系统内能减少; $A > 0$ 表示系统对外界做功, $A < 0$ 表示外界对系统做功. 并且各量的单位必须统一, 在 SI 制中, Q 、 ΔE 和 A 的单位都是焦耳(J).

当热力学第一定律写为

Q = E + \int_{V_1}^{V_2} p dV

形式时, 仅对准静态过程适用 因为只有准静态过程才能用 A = \int_{V_1}^{V_2} p dV 计算功 .

3 .热力学第一定律的应用

热力学第一定律应用于理想气体的几个典型过程时, 要求掌握各过程中内能增量、功和传递热量的计算(表 7 -1) .这些量的推导依据是各过程的特征、理想气体状态方程和热力学第一定律 .

表 7 -1

过程	等体	等压	等温	绝热	多方
特征	V = 常量	p = 常量	T = 常量	Q = 0	p、V、T 都变
初末态参 量间关系	V ₂ = V ₁ $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}$	p ₂ = p ₁ $\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1}$	T ₂ = T ₁ p ₂ V ₂ = p ₁ V ₁	$\frac{p_2}{p_1} = \left[\frac{V_1}{V_2} \right]^{\gamma}$ $\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{V_1}{V_2} \right]^{\gamma-1}$ $\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{p_2}{p_1} \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$	$\frac{p_2}{p_1} = \left[\frac{V_1}{V_2} \right]^n$ $\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{V_1}{V_2} \right]^{n-1}$ $\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{p_2}{p_1} \right]^{\frac{n-1}{n}}$
内能增量 E	$\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1)$	$\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1)$	0	$\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1)$	$\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1)$
对外做功 A	0	p(V ₂ - V ₁) 或 $\frac{m}{M} R (T_2 - T_1)$	$\frac{m}{M} R T \ln \frac{V_2}{V_1}$	$\frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}$	$\frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{n - 1}$
吸收热量 Q	$\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1)$	$\frac{m}{M} C_p (T_2 - T_1)$	$\frac{m}{M} R T \ln \frac{V_2}{V_1}$	0	$\frac{m}{M} C (T_2 - T_1)$
摩尔热容 C	C _V = $\frac{i}{2} R$	C _p = C _V + R	C _T =	C _Q = 0	C = $\frac{n}{n - 1} C_V$

其中, 绝热过程是指系统与外界无热量交换的过程, 它可分为准静态绝热过程和非静态绝热过程 过程方程 pV^γ = 常量仅适用于理想气体的准静态绝热过程, 这是因为方程的推导过程中用了准静态的条件 (dA = p dV) .对于真空自由膨胀这样的非静态绝热过程, 此式不适用, 但热力学第一定律 Q = E + A 的形式仍然满足 .

4 .循环过程

系统经历一系列状态变化过程后又回到原来的状态的整个过程叫做循环过程, 简称循环 .循环过程在 p - V 图上是一封闭曲线, 循环过程的特点是:

(1) $E = 0$, 且闭合曲线包围的面积等于净功的大小;

(2) 整个循环过程必有吸热和放热.

系统在循环过程中从外界吸取的热量总和为 Q_1 , 向外界放出热量的总和为 Q_2 , 则系统净吸热等于它对外所做的净功, 即 $Q_1 - Q_2 = A$.

在 p - V 图上沿顺时针方向进行的过程叫正循环, 其净功 $A > 0$, 热机利用正循环过程将吸收的热量不断地转换为功. 热机的效率为

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

在 p - V 图上沿逆时针方向进行的过程叫负循环, 其净功 $A < 0$, 致冷机利用逆循环过程由外界对系统做功, 不断地从低温热源吸热, 并向高温热源放热. 致冷机的致冷系数为

$$\epsilon_c = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

上述两个公式适用于任何循环. 式中 Q_1 和 Q_2 表示整个循环过程中系统吸收热量的总和和放出热量的总和. 在计算时, Q_2 必须取正值.

在 p - V 图上由两条等温线和两条绝热线组成的理想循环叫卡诺循环. 卡诺热机的效率为

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

卡诺致冷机的致冷系数为

$$\epsilon_c = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

[问题 7-1] 如何判别过程的吸热和放热

有人说:“温度升高的过程总是吸热的”, 这种说法对吗? 为什么? 试判断图 7-2 中, p - T 图上的过程 1-2、2-3 和 3-1 是吸热的还是放热的.

[解答] 这种说法不对. 因为温度升高只能说明体系的内能增加, 要判别系统经某过程是吸热

还是放热, 必须同时判别功 A 和内能的增量 E 的正负. A 的正负由 V 决定, E 的正负由 T 决定. 再由热力学第一定律 $Q = E + A$, 确定 Q 的正负.

下面用这种方法来判断图 7-2 中各过程的吸热、放热情况. 对于过程 1-2, 因温度升高, 所以内能的增量 $E_{12} > 0$. 又因从状态 (1) 到状态 (2) 时, p 减少而 T 增加, 根据状态方程

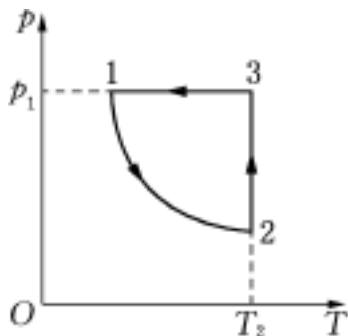


图 7-2

$$\frac{pV}{T} = \text{常数}$$

可知这过程中 V 一定增加,所以在过程 1 2 中,系统做功 A_{12} 也为正. 根据热力学第一定律,此过程是吸热的. 同样可判断过程 2 3 和过程 3 1 是放热的.

[问题 7-2] 如何判别初、末态在绝热线上的过程是吸热还是放热

如图 7-3 所示,过程 $a \rightarrow b$ 是绝热过程,则过程 acb 和 adb 是吸热还是放热?

[解答] 把过程 acb 和过程 ba 构成一循环过程,该循环过程 $acba$ 是正循环过程,一定是吸热. 又因 ba 是绝热过程,故过程 acb 一定是吸热过程. 再把过程 adb 和过程 ba 构成循环过程,该循环过程 $adb a$ 是逆循环过程,一定是放热的. 又因 ba 是绝热过程,故过程 adb 一定是放热的.

这问题也可用 $Q = E + A$ 来判断其吸热还是放热. 但用这些过程与绝热过程构成正循环或逆循环来判别其吸热或放热比较方便.

[问题 7-3] V - T 图与 p - V 图的转换问题

在 V - T 图中,一定质量的理想气体的循环过程,如图 7-4 所示,试问这循环过程是正循环过程还是逆循环过程?

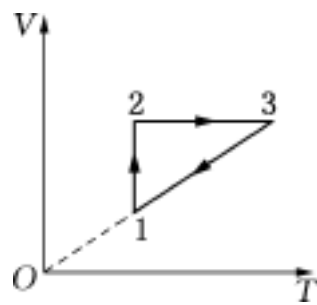


图 7-4

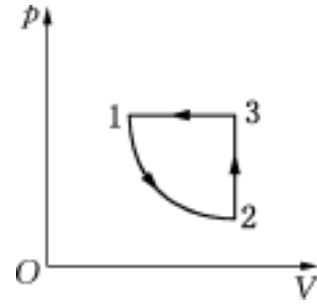


图 7-5

[解答] 要判别一个循环过程是正循环或逆循环,必须先把这循环过程转换到 p - V 图上,看其是顺时针还是逆时针. 如在 p - V 图上,循环过程是顺时针,则一定是正循环. 由图 7-4 可知,1 2 是等温膨胀过程;2 3 是等体升温过程;3 1 是等压压缩过程. 于是可画出这个循环过程的 p - V 图,如图 7-5 所示. 从 p - V 图上可看出此循环过程是逆时针,所以是逆循环过程.

[问题 7-4] 如何在 p - V 图上比较循环效率的大小

(1) 如图 7-6 所示的理想气体的两个循环过程, $a \rightarrow b$ 为等温过程, $b \rightarrow c$ 和 $a \rightarrow d$ 均为绝热过程, $c \rightarrow d$ 为等压过程, $b \rightarrow e$ 为等体过程,试判别循环过程 $abcda$ 和 $abeda$ 哪个效率高?

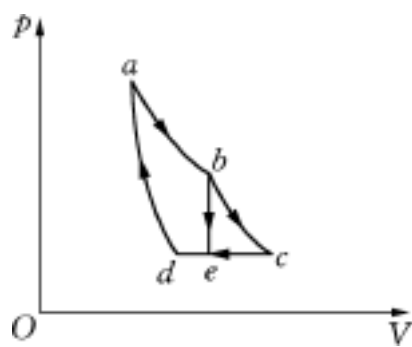


图 7-6

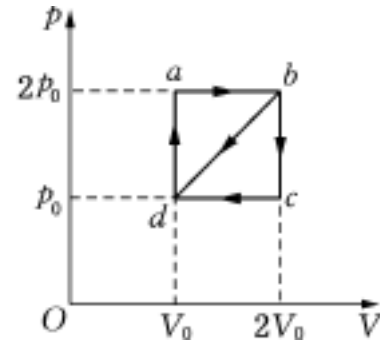


图 7-7

[解答] 循环过程的效率

$$= \frac{A}{Q_1}$$

式中 A 为循环过程的净功, 其大小等于 p - V 图中循环曲线包围的面积; Q 为循环过程中吸收的热量. 对循环过程 $abcda$ 和 $abeda$ 都只有等温过程 a — b 吸热. 因此两个循环过程中吸收的热量 Q_1 相等. 但循环过程 $abcda$ 对外所做的净功比循环过程 $abeda$ 大, 因为在 p - V 图上循环过程 $abcda$ 的曲线包围的面积大, 所以循环过程 $abcda$ 的效率比循环过程 $abeda$ 高.

(2) 图 7-7 中所示的理想气体的两个循环过程 $abda$ 和 $dbca$. 其中 a — b 、 c — d 为等压过程, b — c 、 d — a 是等体过程, d — b 是直线过程. 试判断哪个循环过程效率高?

[解答] 由图 7-7 可知, 循环过程 $abda$ 和 $dbcd$ 对外的净功相同, 因为在 p - V 图上, 两循环曲线包围的面积相等. 但两个循环过程中吸收的热量不同, 循环过程 $dbcd$ 吸热 $Q_1 = Q_{db}$, 但循环过程 $abda$ 吸热 $Q_1 = Q_{da} + Q_{db}$. 在过程 d — b 和过程 d — a — b 中, 内能变化虽相同, 但体系对外做功不同, $A_{dab} > A_{db}$, 所以有 $Q_1 > Q_2$. 由循环效率公式 $\eta = \frac{A}{Q_1}$ 可知, 循环 $dbcd$ 效率高.

[问题 7-5] 具有斜直线(斜率为负)的循环过程的效率

如有 1 mol 单原子理想气体, 经图 7-8 所示的循环过程, 则循环的效率为

$$= \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{Q_{ab} + Q_{bc} - |Q_{ca}|}{Q_{ab} + Q_{bc}}$$

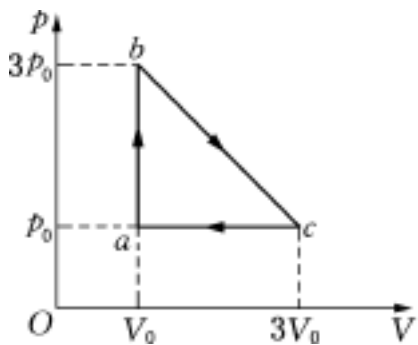


图 7-8

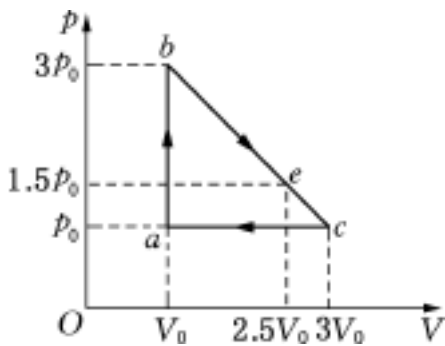


图 7-9

试问这样计算循环的效率是否正确? 为什么? (式中, Q_{ab} 、 Q_{bc} 分别表示 a — b 和 b — c 过程中吸收的热量; Q_{ca} 表示 c — a 过程中放出的热量)

[解答] 这样计算效率是错误的. 因为 b — c 过程是吸热过程, 但在该过程中所经历的每一个微小过程并非都是吸热, 所以必须把 b — c 过程中吸热的部分和放热的部分分开来. 在例 7-3 中已求出在 bc 直线的上 e 点(坐标为 $p_e = 1.5p_0$, $V_e = 2.5V_0$) 是该过程中吸热部分和放热部分的分界点. 在 b — c 过程中 b — e 是吸热过程, 而 e — c 是放热过程, 如图 7-9 所示. 因此, 该循环过程的效率应为

$$= \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{Q_{ab} + Q_{be} - |Q_{ec}| - |Q_{ca}|}{Q_{ab} + Q_{be}}$$

根据各过程的特点算出 Q_{ab} 、 Q_{be} 、 Q_{ec} 、 Q_{ca} , 就可求得循环的效率. 具体计算请读者自己完成.

5. 热力学第二定律

热力学第一定律说明在任何过程中能量必须守恒. 热力学第二定律进一步说明并非所有能量守恒的过程均能实现. 它指出自然界过程进行的方向和条件, 是对第一定律的补充.

热力学第二定律有两种表述:

(1) 开尔文表述: 不可能从单一热源吸收热量, 使之完全变为有用的功而不产生其他影响. 即效率为 100% 的热机是不可能制成的.

(2) 克劳修斯表述: 不可能使热量自动地从低温物体传向高温物体.

初看起来, 这两种表述并无联系, 其实两者是完全等价的, 仅是一个定律的不同叙述方法而已. 热力学第二定律的实质在于它指出了与热现象有关的一切自发的宏观过程都是不可逆的.

7.3 解题方法与典型例题

本章习题主要计算内能、功、热量、状态参量及热机效率等. 解题的一般方法是: 搞清题意, 确定研究对象, 抓住过程特征, 借助 $p-V$ 图, 选用适当的公式求解. 特别注意内能是状态量, 功和热量是过程量.

1. 内能增量与过程无关, 对任何热力学过程, 都可用下式计算

$$E = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R (T_2 - T_1)$$

准静态功的计算方法有两种, 一是

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

或 $p-V$ 图上过程曲线下的面积. 二是由热力学第一定律 $Q = E + A$ 计算.

热量的计算与过程有关:

$$\text{等体过程} \quad Q = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1)$$

$$\text{等压过程} \quad Q = \frac{m}{M} C_p (T_2 - T_1)$$

$$\text{其他过程} \quad Q = E + A$$

2. 求状态参量 p 、 V 、 T 时, 首先考虑理想气体状态方程 $pV = \frac{m}{M} RT$ 和过

程方程 .

3. 求循环效率 对于给定的循环, 先搞清哪个过程吸热, 哪个过程放热, 所有吸热过程的热量总和为 Q_1 , 所有放热过程的热量总和为 Q_2 .

当功已知或易求时, 用公式

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \quad (A \text{ 为净功})$$

当热量已知或易求时, 用公式

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

注意: $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ 仅适用于卡诺循环, 如果不是卡诺循环, 只能用上面两式来求效率 .

[例 7-1] 2 mol 单原子理想气体系统, 起始状态 a 的温度是 27 °C, 体积为 20 L. 此系统先作等压膨胀至状态 b (体积为原体积的两倍), 然后再作绝热膨胀至状态 c (温度等于起始温度), 求系统自状态 a 经状态 b 到状态 c 的过程中:

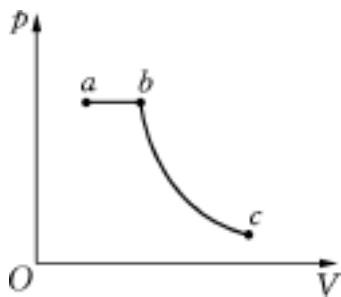


图 7-10

- (1) 共吸收多少热量?
- (2) 系统对外做了多少功?
- (3) 内能的变化为多少?
- (4) c 状态的体积等于多少?

[解] (1) 按题意在 p - V 图上画出 a b c 过程, 如图 7-10 所示. 由于过程 b c 是绝热的, 所以过程 a b c 中吸收的热量和等压过程 a b 中吸收的热量相同, 即

$$\begin{aligned} Q &= Q_{ab} = \frac{m}{M} C_p (T_b - T_a) = \frac{m}{M} C_p \left[\frac{T_b}{T_a} - 1 \right] T_a \\ &= \frac{m}{M} \frac{5}{2} R \left[\frac{V_b}{V_a} - 1 \right] T_a \\ &= 2 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times (2 - 1) \times 300 \\ &= 1.25 \times 10^4 \text{ J} \end{aligned}$$

(2) 在过程 a b c 中, 系统对外所做的功有两种计算方法 .

方法一:

等压过程 a b 的功

$$A_{ab} = \frac{m}{M} R (T_b - T_a)$$

绝热过程 b c 的功

$$A_{bc} = - \frac{m}{M} C_V (T_c - T_b)$$

因 $T_c = T_a$, $C_V = \frac{3}{2}R$, 所以

$$A_{bc} = \frac{m}{M} \frac{3}{2} R (T_b - T_a)$$

过程 $a \rightarrow b \rightarrow c$ 中系统对外做的功

$$\begin{aligned} A &= A_{ab} + A_{bc} = \frac{m}{M} \frac{5}{2} R (T_b - T_a) \\ &= \frac{m}{M} \frac{5}{2} R \left[\frac{V_b}{V_a} - 1 \right] T_a = 1.25 \times 10^4 \text{ J} \end{aligned}$$

方法二:

因 $T_c = T_a$, 所以过程 $a \rightarrow b \rightarrow c$ 中内能不变, 即 $E = 0$, 由热力学第一定律可知, 这过程

$$A = Q = 1.25 \times 10^4 \text{ J}$$

对这个问题, 显然用方法二解比较方便.

(3) 因为过程 $a \rightarrow b \rightarrow c$ 中, $T_a = T_c$, 所以此过程中内能变化

$$E = 0$$

注意: 这里不用先计算 E_{ab} 和 E_{bc} 再相加.

(4) 状态 c 的体积可用绝热方程计算.

由
$$T_b V_b^{-1} = T_c V_c^{-1}, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3}$$

得
$$\begin{aligned} V_c &= \left[\frac{T_b}{T_c} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} V_b = \left[\frac{T_b}{T_a} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} V_b \\ &= \left[\frac{V_b}{V_a} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} V_b \\ &= (2)^{\frac{3}{2}} \times 40 = 113.3 \text{ L} \end{aligned}$$

[例 7-2] 一圆柱形气缸, 其截面积为 S , 内有一活塞用弹性系数为 k 的弹簧与气缸的左壁相连, 如图 7-11 所示. 设气缸和活塞均光滑, 气缸的左侧通大气 (大气压为 p_0), 右部盛有 1 mol 的氧气. 初始时活塞处于平衡态, 此时弹簧维持原长, 活塞离右壁的距离为 h_0 . 今将氧气缓慢加热, 使活塞向左移到 $2h_0$ 处. 试求在这过程中氧气吸收的热量.

[解] 本题的特点是不知道经历什么过程, 但总可以由功的定义 $A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$ 求功, 再用温度的变化求出 E , 最后用热力学第一定律 $Q = E + A$, 求出过程中吸收的热量.

根据已知条件可知, 体系初态的压强为 p_0 、体积 $V_0 = h_0 S$.

末态压强 $p_1 = p_0 + \frac{kh_0}{S}$ 、体积 $V_1 = 2h_0 S$.

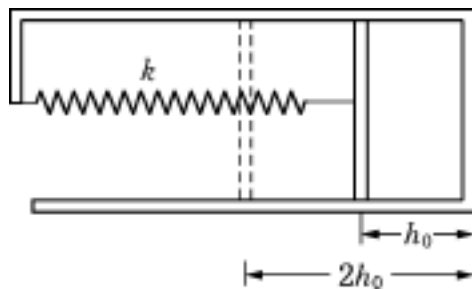


图 7-11

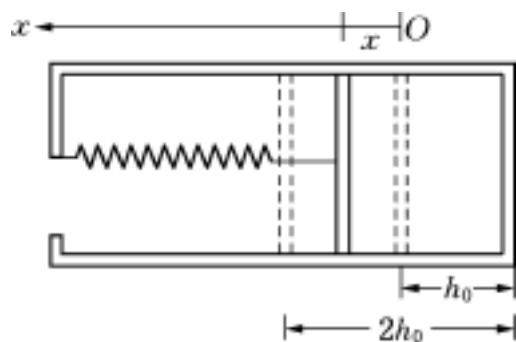


图 7-12

若取活塞的初位置为坐标原点, x 轴水平向左, 如图 7-12 所示 当氧气膨胀把活塞推到 x 处时, 气缸中氧气的压强为

$$p = p_0 + \frac{kx}{S}$$

由功的定义, 可求得氧气从初态膨胀到末态时所做的功

$$A = \int_{V_0}^{V_1} p dV = \int_0^{h_0} \left[p_0 + \frac{kx}{S} \right] S dx = p_0 h_0 S + \frac{1}{2} k h_0^2$$

因氧气是双原子理想气体, 所以内能的增量

$$\begin{aligned} E &= C_V(T_1 - T_0) = \frac{5}{2} R(T_1 - T_0) = \frac{5}{2} (p_1 V_1 - p_0 V_0) \\ &= \frac{5}{2} \left[\left(p_0 + \frac{k h_0}{S} \right) 2 h_0 S - p_0 h_0 S \right] \\ &= \frac{5}{2} p_0 h_0 S + 5 k h_0^2 \end{aligned}$$

由热力学第一定律, 氧气在该过程中吸收的热量为

$$Q = E + A = \frac{7}{2} p_0 h_0 S + \frac{11}{2} k h_0^2$$

[例 7-3] 1 mol 单原子理想气体, 经历一准静态过程 $b \rightarrow c$, 在 p - V 图中, bc 为一直线, 如图 7-13 所示. 试问:

- (1) 在 $b \rightarrow c$ 过程中, 温度最高状态的位置.
- (2) 由温度最高状态到状态 c 的过程中, 气体是吸热还是放热?
- (3) 在 $b \rightarrow c$ 过程是吸热还是放热?
- (4) 在 $b \rightarrow c$ 过程中, 所经历的每个微小过程是否都是吸热(或放热)?

[解] (1) 要求出 $b \rightarrow c$ 过程中温度最高的状态, 必须先求出直线 bc 上任一点所对应的 T 随 V 变化的函数关系. 由图 7-13 可知, 直线过程 bc 的方程为

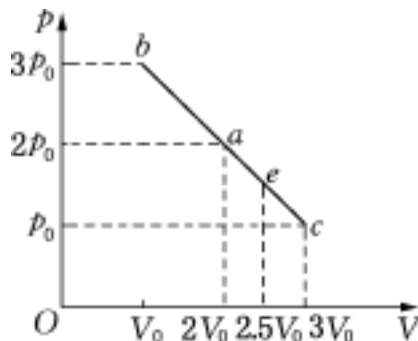


图 7-13

$$p = -\frac{p_0}{V_0} V + 4p_0 \quad (1)$$

由状态方程 $pV = RT$, 得

$$T = \frac{pV}{R} \quad (2)$$

把式(1)代入式(2) 得

$$T = \frac{1}{R} \left[4p_0 V - \frac{p_0 V^2}{V_0} \right] \quad (3)$$

令 $\frac{dT}{dV} = 0$, 得 $V = 2V_0$ 时, T 最大. 把 $V = 2V_0$ 代入式(3)得

$$T_{\max} = \frac{4p_0 V_0}{R}$$

设 bc 直线上温度最高点为 a , 则 a 点在 p - V 图上对应的坐标为 $V = 2V_0$, $p = \frac{RT_{\max}}{V} = 2p_0$.

(2) 讨论过程 $a \rightarrow c$ 是吸热还是放热, 必须先计算 $a \rightarrow c$ 过程中的 E 和 A

$$\begin{aligned} E &= C_V \Delta T = \frac{3}{2} R (T_c - T_a) \\ &= \frac{3}{2} R \left[\frac{3p_0 V_0}{R} - \frac{4p_0 V_0}{R} \right] \\ &= -\frac{3}{2} p_0 V_0 \end{aligned}$$

功可通过 p - V 图上直线 ac 下的梯形面积来计算

$$A = \frac{1}{2} (2p_0 + p_0) (3V_0 - 2V_0) = \frac{3}{2} p_0 V_0$$

所以 $a \rightarrow c$ 过程中吸收的热量

$$Q = E + A = 0$$

即在 $a \rightarrow c$ 过程中, 系统没有吸热或放热.

注意: 这里不能说 $a \rightarrow c$ 过程绝热. 只有当在某个过程中, 每个微小过程都不吸热或放热, 即 $dQ = 0$ 时, 才能说该过程绝热.

(3) 很容易看出, 过程 $b \rightarrow c$ 是吸热的, 因为在过程 $b \rightarrow c$ 中, $A > 0$, 而 $E = 0$.

(4) 过程 $b \rightarrow c$ 是吸热, 但是这并不说明该过程中每个微小过程都是吸热的. 下面讨论过程 $b \rightarrow c$ 过程中每一个微小过程中 dQ 的正负.

根据热力学第一定律

$$dQ = dE + dA$$

由方程式(1)得

$$dA = p dV = \left[4p_0 - \frac{p_0}{V_0} V \right] dV$$

由方程式(3)得

$$\begin{aligned} dE &= C_V dT = \frac{3}{2} R \frac{1}{R} \left[4p_0 - \frac{2p_0}{V_0} V \right] dV \\ &= 3p_0 \left[2 - \frac{V}{V_0} \right] dV \end{aligned}$$

所以

$$dQ = dE + dA = 2p_0 \left[5 - \frac{2V}{V_0} \right] dV$$

从上式可知, 对微小的膨胀过程 ($dV > 0$), 当 $V = \frac{5}{2} V_0$ 时, $dQ = 0$; 当 $V < \frac{5}{2} V_0$ 时, $dQ > 0$; 当 $V > \frac{5}{2} V_0$ 时, $dQ < 0$. 由此得出结论: $b \rightarrow c$ 过程中, 在 $V_0 < V < \frac{5}{2} V_0$ 的范围内, 沿 V 增加方向变化的微小过程总是吸热的; 在 $\frac{5}{2} V_0 < V < 3V_0$ 的范围内, 沿 V 增加方向变化的微小的过程总是放热的.

如设直线 bc 上 $V = \frac{5}{2}V_0$ 的状态为 e 点. 读者可以自己计算一下, 过程 $a \rightarrow e$ 是吸热的, 过程 $e \rightarrow c$ 是放热的, 并且过程 $a \rightarrow e$ 吸收的热量正好等于过程 $e \rightarrow c$ 放出的热量, 所以过程 $a \rightarrow c$ 不吸热也不放热.

[例 7-4] 如图 7-14(a)所示, 1 mol 氧气作 $abca$ 循环. 求: (1) 循环过程中系统吸收的热量; (2) 所做的功; (3) 循环的效率; (4) 若在此循环过程中的最高与最低温度之间作卡诺循环, 如图 7-14(b) 中长虚线所示. 求循环的效率.

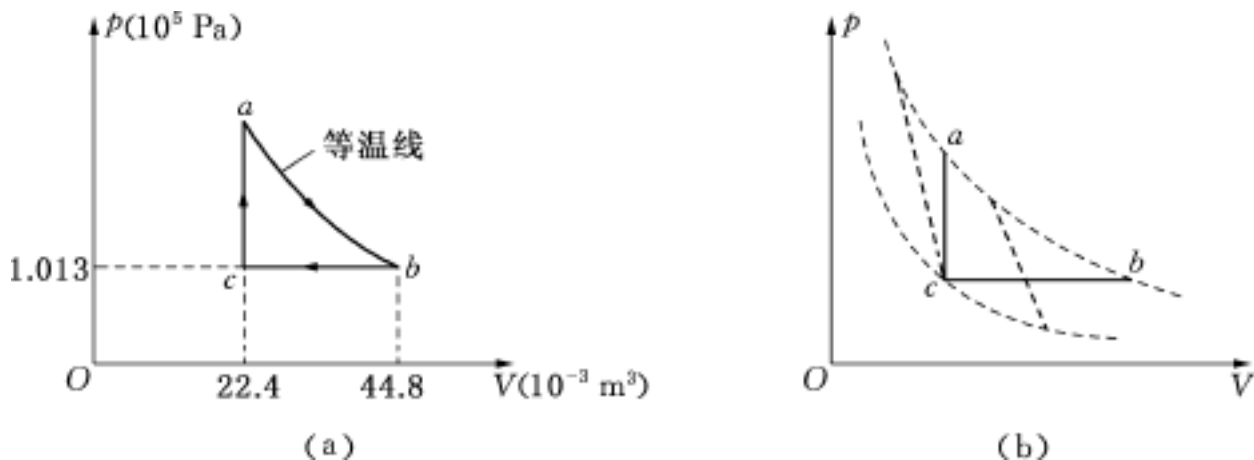


图 7-14

[解] 由图 7-14(a)可知, c 点的压强 $p_c = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$, 体积 $V_c = 22.4 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, 而由题意知工作物质为 1 mol, 所以 c 点必处于标准状态, 即 $T_c = 273 \text{ K}$.

根据等压过程方程 $\frac{V_b}{T_b} = \frac{V_c}{T_c}$, 得

$$T_b = \frac{V_b}{V_c} T_c = \frac{44.8}{22.4} \times 273 = 546 (\text{K})$$

据题意 $T_a = T_b$, 所以 $T_a = 546 \text{ K}$

(1) 各过程吸收的热量为

$$Q_{ab} = \frac{m}{M} R T_a \ln \frac{V_b}{V_a} = 1 \times 8.31 \times 546 \times \ln \frac{44.8}{22.4} = 3144 (\text{J})$$

$$\begin{aligned} Q_{bc} &= \frac{m}{M} C_p (T_c - T_b) = \frac{m}{M} \frac{7}{2} R (T_c - T_b) \\ &= 1 \times \frac{7}{2} \times 8.31 \times (273 - 546) = -7940 (\text{J}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{ca} &= \frac{m}{M} C_v (T_a - T_c) = \frac{m}{M} \frac{5}{2} R (T_a - T_c) \\ &= 1 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times (546 - 273) = 5672 (\text{J}) \end{aligned}$$

所以 $abca$ 循环过程中吸收的总热量为

$$Q = Q_{ab} + Q_{ca} = 3\,144 + 5\,672 = 8\,816(\text{J})$$

放出的热量为

$$Q_2 = |Q_{bc}| = 7\,940(\text{J})$$

循环过程中净吸收热量为

$$Q - Q_2 = 8\,816 - 7\,940 = 876(\text{J})$$

(2) 整个循环过程中系统所做的功可由 p - V 图上曲线包围的面积求, 即

$$\begin{aligned} A &= \frac{m}{M} R T_a \ln \frac{V_b}{V_a} - p_b (V_b - V_c) \\ &= 3\,145 - 1\,013 \times 10^5 \times (44.8 - 22.4) \times 10^{-3} = 876(\text{J}) \end{aligned}$$

也可由热力学第一定律求, 由于循环过程 $E = 0$, 所以

$$A = Q - Q_2 = 876(\text{J})$$

可见, 方法二较为简单.

(3) 循环效率

$$= \frac{A}{Q_1} = \frac{876}{8\,816} = 9.9\%$$

(4) 从图 7-14(a) 中可看出, 循环过程中的最高温度为 $T_a = T_b = 546\text{ K}$, 最低温度为 $T_c = 273\text{ K}$. 在 T_a 和 T_c 之间作卡诺循环, 如图 7-14(b) 中的长虚线所示, 则循环的效率为

$$\eta_c = 1 - \frac{T_c}{T_a} = 1 - \frac{273}{546} = 50\%$$

由此可见, 在同样的高温热源与低温热源之间, 卡诺循环的效率要比其他循环的效率 high 得多.

[例 7-5] 一可逆卡诺热机当高温热源温度为 127°C , 冷却器温度为 27°C 时, 每次循环系统对外做净功为 $8\,000\text{ J}$. 今维持低温热源温度不变, 提高高温热源的温度, 使其每次循环对外做的净功为 $10\,000\text{ J}$. 若两个卡诺循环工作在相同的两条绝热线之间, 试求:

- (1) 第二个循环热机的效率;
- (2) 第二个循环高温热源的温度.

[解] 对第一个卡诺循环, 有

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

所以

$$\begin{aligned} Q_2 &= Q_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)^{-1} \\ Q_2 &= Q_1 \frac{T_2}{T_1} = A \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)^{-1} \cdot \frac{T_2}{T_1} \\ &= A \frac{T_2}{T_1 - T_2} = 8\,000 \times \frac{300}{400 - 300} = 2.4 \times 10^4(\text{J}) \end{aligned}$$

对第二个卡诺循环, 吸收热量

$$Q_1 = A + Q_2 = A + Q_2$$

所以

$$= \frac{A}{Q_1} = \frac{A}{A + Q_2} = \frac{1 \times 10^4}{1 \times 10^4 + 2.4 \times 10^4} = 29.4\%$$

(2) 第二个卡诺循环有

$$= 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

所以

$$T_1 = \frac{T_2}{1 - 0.294} = \frac{300}{1 - 0.294} = 425(\text{K}) = 152(^\circ\text{C})$$

7.4 自测练习与能力训练

7.4.1 选择题

1. 下列各表述中正确的说法是[] .

- (A) 同一物体温度高时比温度低时含的热量多
- (B) 两瓶摩尔数和温度都相同的理想气体, 它们的内能相等
- (C) $E = \frac{m}{M} C_v T$ 仅适用于等体过程
- (D) 一个系统从初态 a 分别经历两个不同的过程 和 到达末态 b , 则在这两个过程中系统内能变化一定相同

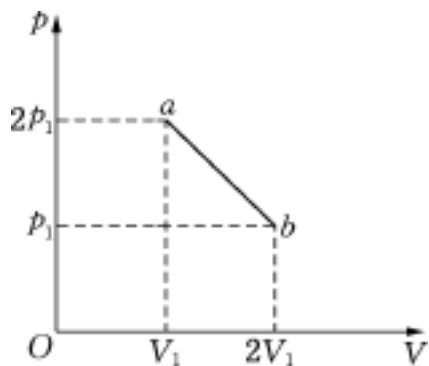


图 7-15

2. 如图 7-15 所示, 在 p - V 图中 1 mol 理想气体从状态 a 沿直线到状态 b , 则此过程中系统的功和内能的变化是[] .

- (A) $A > 0$, $E > 0$ (B) $A < 0$, $E < 0$
- (C) $A > 0$, $E = 0$ (D) $A < 0$, $E > 0$

3. 对一定质量的理想气体, 在下列过程中可能实现的是[] .

- (A) 气体做正功, 同时放热
- (B) 气体等压膨胀, 同时保持内能不变
- (C) 气体吸热, 但不做功
- (D) 气体绝热压缩, 同时保持内能不变

4. 双原子理想气体作等压膨胀. 若气体膨胀过程中从热源吸收热量为 700 J, 则该气体对外做功为[] .

- (A) 350 J (B) 300 J (C) 250 J (D) 200 J

5. 1 mol 氧气经历如图 7-16 所示的两个过程由状态 a 变化到状态 b . 若氧气经历绝热过程 R_1 对外做功 75 J, 而经历过程 R_2 时对外做功 100 J, 那么经历过程 R_2 中氧气从外界吸收的热量为 [] .

- (A) 25 J (B) - 25 J (C) 175 J (D) - 175 J

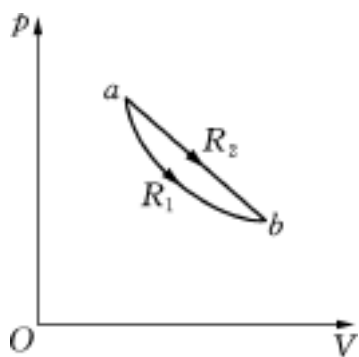


图 7-16

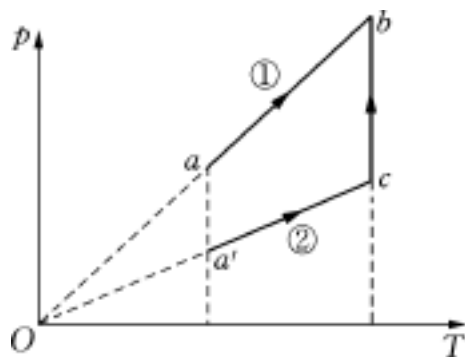


图 7-17

6. 一定量的理想气体分别由初态 a 经过程 ab 和由初态 a 经过程 acb 到达相同的终态 b , 如图 7-17 中 $p-T$ 图所示, 则两个过程中气体从外界吸收的热量 Q_1 和 Q_2 的关系为 [] .

- (A) $Q_1 < 0, Q_2 > Q_1$ (B) $Q_1 > 0, Q_2 > Q_1$
(C) $Q_1 < 0, Q_2 < Q_1$ (D) $Q_1 > 0, Q_2 < Q_1$

7. 一定量的理想气体, 分别经历如图 7-18(a) 所示的 abc 过程 (图中虚线 ac 为等温线) 和图 7-18(b) 所示的 def 过程 (图中虚线 df 为绝热线). 判断这两种过程是 [] .

- (A) abc 过程吸热, def 过程放热 (B) abc 过程放热, def 过程吸热
(C) abc 过程和 def 过程均吸热 (D) abc 过程和 def 过程均放热

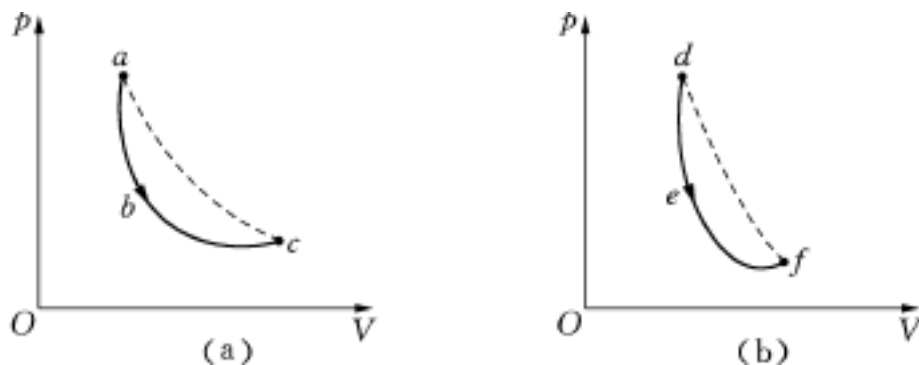


图 7-18

8. 对图 7-19 中所示的循环过程 $abcd$, 正确的结论是 [] .

- (A) 这个循环是一个正循环
- (B) 通过这循环过程系统对外做正功
- (C) 这个循环过程中 $a \rightarrow b$ 是吸热过程
- (D) 这个循环过程中 $b \rightarrow c$ 是等压过程

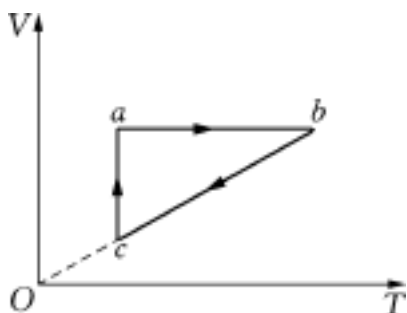


图 7-19

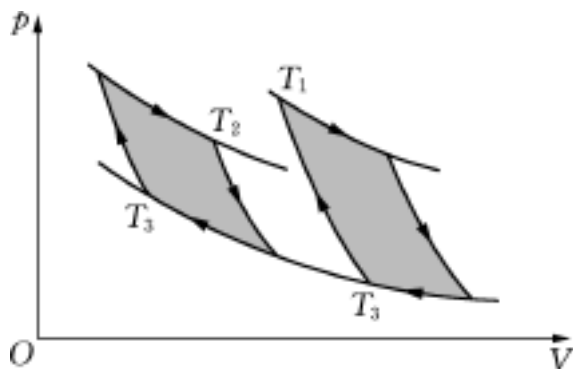


图 7-20

9. 两个卡诺热机的循环曲线如图 7-20 所示, 一个工作在温度为 T_1 与 T_3 的两个热源之间, 另一个工作在温度为 T_2 和 T_3 的两个热源之间, 已知这两个循环曲线所包围的面积相等, 由此可知[] .

- (A) 两个热机的效率一定相等
- (B) 两个热机从高温热源吸收的热量一定相等
- (C) 两个热机从低温热源所放出的热量一定相等
- (D) 两个热机吸收的热量与放出的热量(绝对值)的差值一定相等

10. 下面正确的表述是[] .

- (A) 功可以全部转化为热, 但热不能全部转化功
- (B) 热量能从高温物体传到低温物体, 但不能从低温物体传到高温物体
- (C) 开尔文表述指出热功转换的可逆性
- (D) 克劳修斯表述指出了热传导的不可逆性

7.4.2 填充题

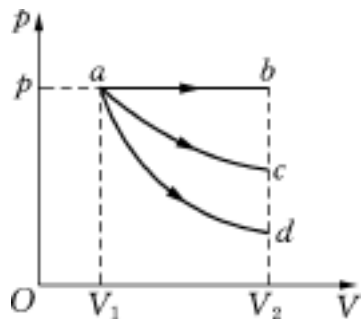


图 7-21

1. 将热量 Q 传给一定质量的理想气体 .

- (1) 若体积不变, 热量转化为_____;
- (2) 若温度不变, 热量转化为_____;
- (3) 若压强不变, 热量转化为_____.

2. 如图 7-21 所示, 一定质量的理想气体由 V_1 膨胀到 V_2 分别经过 $a \rightarrow b$ 等压过程, $a \rightarrow c$ 等温过程, $a \rightarrow d$ 绝热过程. 三个过程中, 吸热最多的是_____过程, 内

能变化最少的是_____过程,对外做功最多的是_____过程 .

3 . 一气缸内储有 10 mol 的单原子理想气体,在压缩过程中外力做功 209 J, 气体温度升高了 1 K,则气体内能增量 $E =$ _____, 气体吸收热量 $Q =$ _____,此过程摩尔热容 $C =$ _____ .

4 . 压力、体积、温度都是相同的氧气和氦气经等压膨胀过程,若体积变化相同,吸收热量之比为_____;若吸收热量相同,对外做功之比为_____ .

5 . 一定质量的某种理想气体,从同一初态出发(1)经绝热压缩,使气体的压强为原来的两倍,(2)经绝热压缩使气体的体积为原来的一半 .情况_____,外界对气体做的功多 .(填(1)或(2))

6 . 1 mol 理想气体 $\left[\text{设 } \gamma = \frac{C_p}{C_v} \text{ 为已知} \right]$ 的循环过程如图 7-22 中 $T-V$ 图所示,其中 ca 为绝热过程, a 点的状态参量 $(T_1、V_1)$ 和 b 点的状态参量 $(T_1、V_2)$ 为已知,试求 c 点的状态参量:

$V_c =$ _____; $T_c =$ _____;

$p_c =$ _____ .

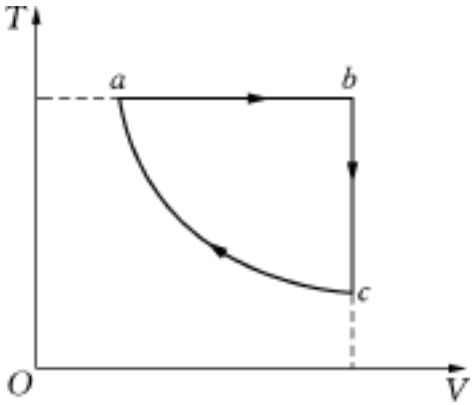


图 7-22

7 . 绝热的容器被一隔板分为两半 .设两边温度相同,左边充满理想气体,其压强为 p_0 ,右边是真空 .当把隔板抽出时,左边的气体对真空作自由膨胀,达到平衡后,气体的温度变化 T _____ 0(填 $>$, $=$ 或 $<$) .气体的压强 $p =$ _____ .

8 . 已知 $p-T$ 图上的循环过程如图 7-23 所示,图中各过程的吸热、放热情况为:
(1) 过程 ab 是_____;(2) 过程 bc 是_____;(3) 过程 ca 是_____ .

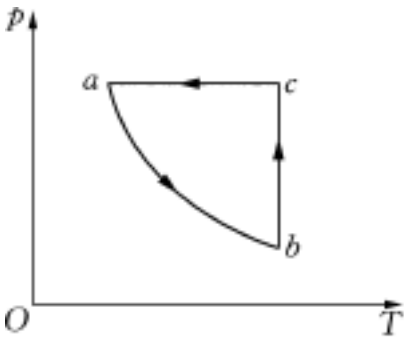


图 7-23

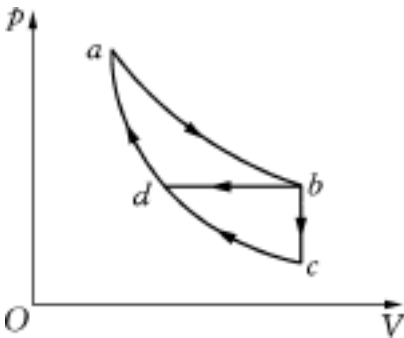


图 7-24

9 . 如图 7-24 中, ab 是等温过程, bc 是等体过程、 cda 是绝热过程, bd 是等压过程 .设循环 $abcda$ 的效率为 η_1 , 循环 $abda$ 的效率为 η_2 , 则 η_1 _____ η_2 (填 $>$, $=$ 或 $<$) .

10. 有一卡诺热机, 用 29 kg 空气为工作物质, 工作在 27°C 的高温热源与 -73°C 的低温热源之间, 此热机的效率 $=$ _____. 若在等温膨胀的过程中气缸体积增大 2.718 倍, 则此热机每一循环所作的功为 _____. (空气的摩尔质量为 $29 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$)

7 4 3 计算题

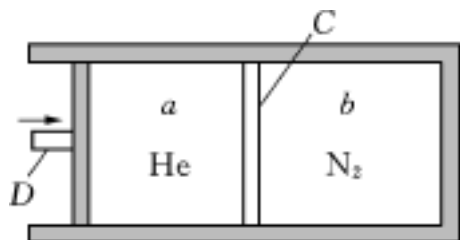


图 7-25

1. 如图 7-25 所示, 一个四周用绝热材料制成的气缸, 中间有一固定的用导热材料制成的导热板 C 把气缸分成 a 、 b 两部分, D 是一绝热的活塞. a 中盛有 1 mol 氦气, b 中盛有 1 mol 氮气 (均视为刚性分子的理想气体). 今外界缓慢地移动活塞 D , 压缩 a 部分的气体, 对气体做功为 A , 试求:

(1) 在此过程中 b 部分气体内能的变化;

(2) a 部分的摩尔热容.

2. 在室温 27°C 下, 一定量理想气体氧的体积为 $2.3 \times 10^{-3}\text{ m}^3$, 压强为 $1.0 \times 10^5\text{ Pa}$, 经过一多方过程后, 体积变为 $4.1 \times 10^{-3}\text{ m}^3$, 压强为 $0.5 \times 10^5\text{ Pa}$, 试求:

(1) 多方指数;

(2) 氧气膨胀时对外界做的功;

(3) 氧气吸收的热量;

(4) 氧气的内能变化.

3. 有双原子理想气体为工作物质的热机循环, 如图 7-26 所示. 图中 $a \rightarrow b$ 为等体过程, $b \rightarrow c$ 为绝热过程, $c \rightarrow a$ 为等压过程. 状态量 p_1 、 p_2 、 V_1 、 V_2 为已知, 求此循环的效率.

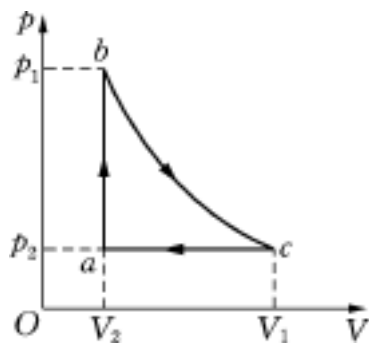


图 7-26

4. 一卡诺热机在温度为 27°C 及 127°C 两个热源

之间运转. (1) 若在正循环中, 该机从高温热源吸收 $5.0 \times 10^3\text{ J}$ 热量, 则将向低温热源放出多少热量? 对外做功多少? (2) 若使该机反向运转 (致冷机), 当从低温热源吸收 $5.0 \times 10^3\text{ J}$ 热量, 则将向高温热源放出多少热量? 外界对系统做功多少?

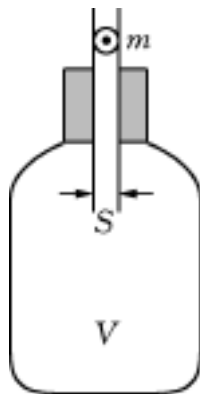


图 7-27

5. 如图 7-27 所示, 瓶内盛有气体, 一横截面为 S 的玻璃管通过瓶塞插入瓶内, 玻璃管内放有一质量为 m 的光滑金属小球 (视为一个活塞). 设小球在平衡位置时, 气体的体积为 V , 压强为 $p = p_0 + \frac{mg}{S}$ (p_0 为大气压强), 现将小球稍向下移, 然后放手, 则

小球将以周期 T 在平衡位置附近作简谐振动.假定小球上下振动过程中,瓶内气体进行的过程可看作准静态绝热过程,试证明:

(1) 使小球进行简谐振动的准弹性力为 $F = -\frac{pS^2}{V}y$; [式中 $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, y 为位移]

(2) 小球作简谐振动的周期 $T = 2\sqrt{\frac{mV}{pS^2}}$;

(3) 由此说明如何利用这个现象测 γ .

6. 如图 7-28 所示的循环过程, $a-b$ 、 $c-d$ 、 $e-f$ 为等温过程, 其温度分别为 $3T_0$ 、 T_0 、 $2T_0$ (T_0 为已知). $b-c$ 、 $d-e$ 、 $f-a$ 为绝热过程. 设 $c-d$ 过程下用阴影表示的面积为 A_1 (J), $abcdefa$ 循环过程包围的面积为 A_2 (J). 试求该循环的效率.

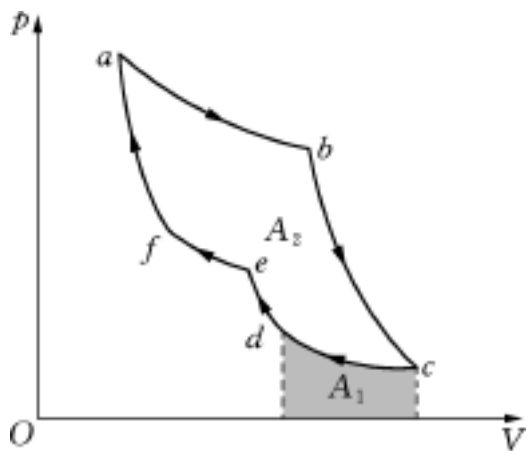


图 7-28

习题选解

[选择题 7] 对图 7-18(a), 由于过程的初态 a 和终态 c 在同一等温线上, 即 $T = 0$, 则 $E = 0$. 又 abc 过程体积增加 ($V > 0$), 则系统对外做正功 ($A > 0$). 由热力学第一定律 $Q = E + A > 0$, 所以过程 abc 是吸热的.

对图 7-18(b), 有两种方法判断吸热或放热.

第一种方法: 由于过程的初态 d 和终态 f 在同一绝热线上, 即温度降低 ($T_f < T_d$), 则 $E < 0$. 又 $d-f$ 绝热膨胀对外做正功 ($A = -E$), $d-e-f$ 亦对外做正功 ($A > 0$), 它们都等于过程曲线下的面积, 由图可知, $A < |E|$. 根据热力学第一定律 $Q = E + A < 0$, 所以过程 def 是放热的.

第二种方法: 将 $defd$ 构成一个循环过程, 由于是负循环, 一定是放热的. 又因 $f-d$ 是绝热过程, 所以 def 是放热过程.

根据以上讨论, 本题结论(A)是正确的.

[填空题 5]

(1) 设初态的压强为 p_1 , 体积为 V_1 . 经绝热压缩, 使压强增为原来的两倍时, 由绝热方程

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

可求得这时气体的体积

$$V_2 = \left[\frac{p_1}{p_2} \right]^{\frac{1}{\gamma}} V_1 = \left[\frac{1}{2} \right]^{\frac{1}{\gamma}} V_1 > \frac{V_1}{2}$$

在此过程中,外界对气体所做的功

$$A_1 = \int_{V_2}^{V_1} p dV$$

(2) 如果经绝热压缩使气体体积减小为原来的一半,外界对气体所做的功

$$A_2 = \int_{\frac{V_1}{2}}^{V_1} p dV$$

因为
$$V_2 > \frac{V_1}{2}$$

所以
$$A_2 > A_1$$

在本题中系统从同一初态出发,而且经历的过程也相同,所以气体体积压缩的范围越大,外界所做的功也越大.

[填充题 7] 把隔板抽出后,气体向真空作自由膨胀,所以系统对外不做功,即 $A = 0$. 又因过程绝热,系统向外界吸取的热量 $Q = 0$, 根据热力学第一定律

$$Q = E + A$$

则 E 必为零 因此气体向真空作自由膨胀,达到平衡后温度保持不变,即 $T = T_0$.

根据状态方程 $\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{pV}{T}$, 又因 $T = T_0$, $V = 2V_0$, 可求得达到平衡后,气体的压强为

$$p = \frac{p_0}{2}$$

注意本题中气体向真空作自由膨胀的过程,是非静态绝热过程. 对非静态绝热过程,不能用过程方程 $pV = p_0 V_0$ 来求 p , 因为它们仅适用于理想气体的准静态绝热过程.

[计算题 5]

(1) 以小球的平衡位置为坐标原点,如图 7-29 建立坐标系.

当小球偏离平衡位置向下有一微小位移 y 时,小球所受合力为

$$F = (mg + p_0 S) - S \left[p_0 + \frac{mg}{S} + p \right] = -S p$$

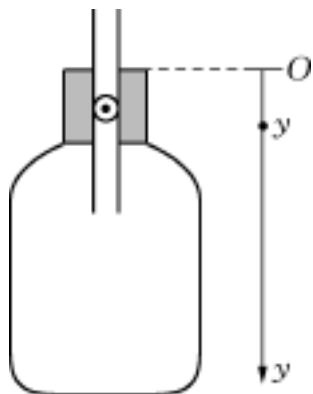


图 7-29

p 是气体压强的增量 .

由于瓶内气体的膨胀和压缩过程可以看作准静态绝热过程,故有

$$pV = \text{恒量}$$

两边求导

$$V \frac{dp}{p} + p \frac{dV}{V} = 0$$

$$p = - \frac{p}{V} \frac{dV}{dy} = - \frac{p}{V} S y$$

所以

$$F = - \frac{p S^2}{V} y$$

此力与位移 y 的大小成正比,负号表示方向相反 .

(2) 由牛顿定律

$$F = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

有

$$- \frac{p S^2}{V} y = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

即

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{p S^2}{mV} y = 0$$

令 $\omega^2 = \frac{p S^2}{mV}$, 则振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mV}{p S^2}}$$

(3) 由上式,得

$$\omega = \frac{1}{S} \sqrt{\frac{mV}{p T^2}}$$

可见,若 m 、 V 、 S 、 p 已知,只要测定小球的振动周期即可得到 ω 值 .1929 年 Ruchhardt 用这种方法测出了空气和二氧化碳的 γ 值 .

[计算题 6] $abcdefa$ 循环过程中,只有 $a \rightarrow b$ 过程是吸热的,所以循环过程总吸热 $Q_1 = Q_{ab}$ 净功 $A = A_2$ 是已知的 .只要求出 Q_{ab} ,循环效率是很容易求得的 .但因 V_a 和 V_b 不是已知的,不能直接求出 Q_{ab} .为此,我们延长绝热线 $d \rightarrow e$,使它与等温线 $a \rightarrow b$ 相交于 g ,这样把循环 $abcdefa$ 分为两个卡诺循环 $gbcd eg$ 和 $agefa$,如图 7-30 所示 .

卡诺循环 $gbcd eg$ 中, $c \rightarrow d$ 过程放热, $|Q_{cd}| = A_1$. $g \rightarrow b$ 过程吸热,根据卡

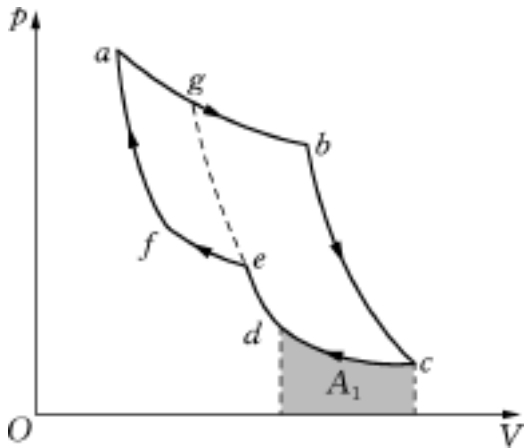


图 7-30

诺循环的特点

$$\frac{Q_{gb}}{|Q_{cd}|} = \frac{3T_0}{T_0} = 3$$

所以有 $Q_{gb} = 3|Q_{cd}| = 3A_1$. 该循环的净功
 $= Q_{gb} - |Q_{cd}| = 2A_1$.

卡诺循环 $agefa$, $e-f$ 过程放热, $a-g$ 过程吸热

$$\frac{Q_{ag}}{|Q_{ef}|} = \frac{3T_0}{2T_0} = \frac{3}{2}, |Q_{ef}| = \frac{2}{3}Q_{ag}$$

该循环的净功

$$A = Q_{ag} - |Q_{ef}| = A_2 - 2A_1 \text{ (循环包围的面积)}$$

把 $|Q_{ef}| = \frac{2}{3}Q_{ag}$ 代入上式得

$$Q_{ag} = 3(A_2 - 2A_1)$$

$$\begin{aligned} \text{循环 } abcdefa \text{ 总吸热 } Q_1 &= Q_{ab} = Q_{ag} + Q_{gb} \\ &= 3(A_2 - 2A_1) + 3A_1 \\ &= 3(A_2 - A_1) \end{aligned}$$

所以得该循环的效率

$$= \frac{A_2}{Q} = \frac{A_2}{3(A_2 - A_1)}$$

8.1 基本要求与复习框图

1. 基本要求

- (1) 掌握描述静电场的两个物理量——电场强度和电势的概念,理解电场强度 E 是矢量点函数,而电势 U 则是标量点函数.
- (2) 掌握电势与电场强度的积分关系,了解电场强度与电势的微分关系.
- (3) 掌握反映电场性质的两个基本定理——高斯定理和环流定理的重要意义及其应用.
- (4) 掌握从已知电荷分布计算电场强度和电势的几种主要方法.

2. 复习框图

真空中的静电场这一章是以库仑定律和静电力的叠加为研究问题的理论基础,从电荷受力的特性引入电场强度的概念,从静电场力做功的特性引入电势的概念.通过电荷在电场中受力和静电场力对电荷做功这两条线索对静电场进行研究,并由库仑定律和场的叠加原理导出反映电场性质的基本规律的高斯定理和环流定理.最后阐明场强和电势之间的关系.本章的主要内容可用图 8-1 的线框图表示.

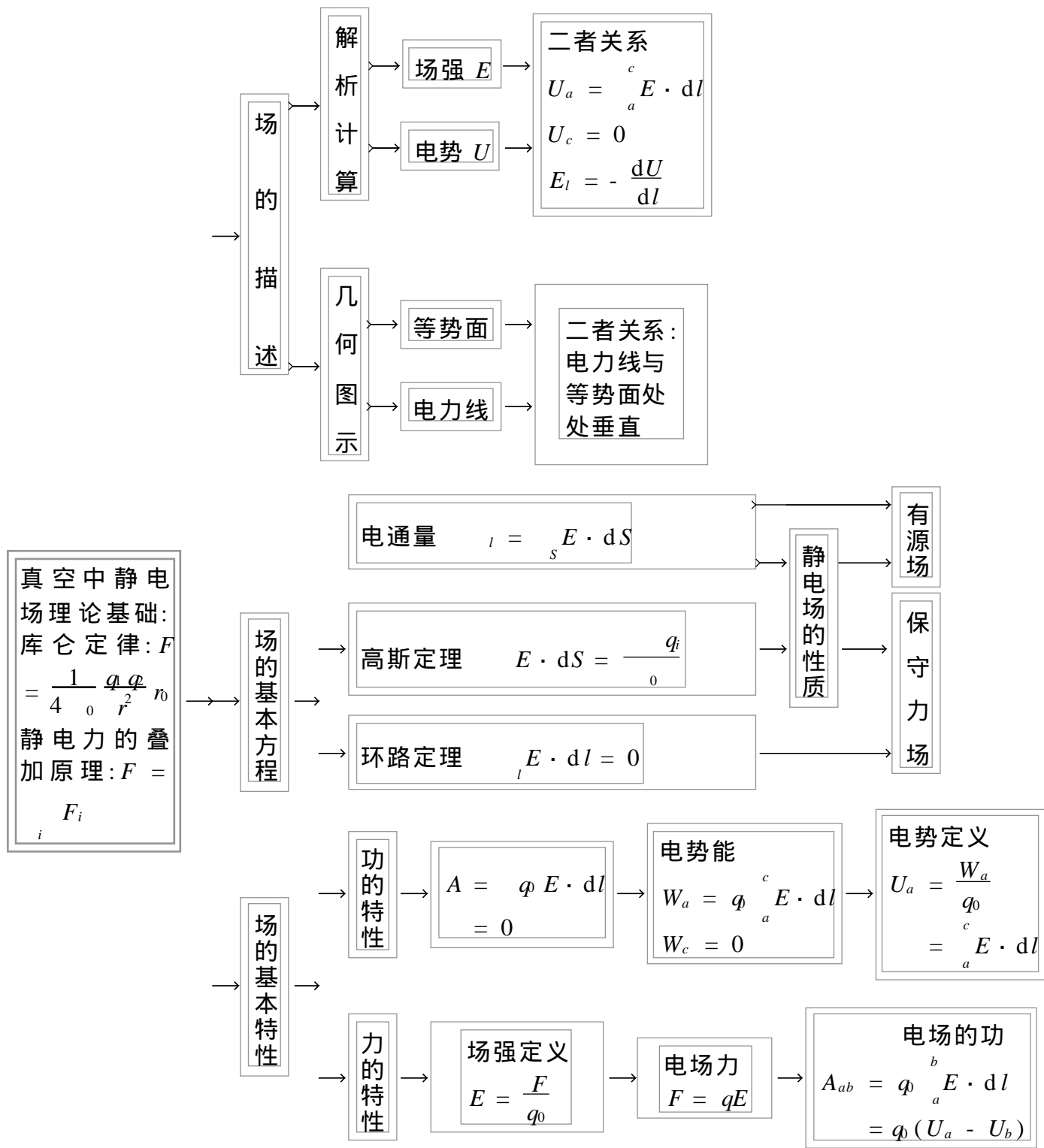


图 8 -1

8.2 阅读指导与问题讨论

1. 研究矢量场的基本方法

场是物质存在的一种形式,描述电磁场的许多物理量都是矢量函数,电磁场是矢量场.

对于矢量场的研究,人们总结出一套行之有效的独特方法.考察一个矢量场的通量和环流,是研究矢量场的重要方法.所谓通量,是在矢量场中通过给定曲面的场线总条数.例如电场中的电通量 $\Phi_e = \int_S E \cdot dS$, 后面还要讲到磁通量 Φ_m .

所谓环流,是场矢量沿任意闭合回路的线积分,例如电场环流为 $\oint_l E \cdot dl$, 当然也有磁场环流.按照对闭合曲面的通量是否等于零,可将矢量场分为有源场和无源场;按照环流是否等于零,可将矢量场分为保守场和涡旋场(或称耗散场).通量和环流是矢量场的特征量.与通量和环流相关的高斯定理及环路定理是全面反映矢量场性质的重要定理.对于静电场来说,高斯定理
$$\left[\int_S E \cdot dS = \frac{q}{\epsilon_0} \right]$$
 表明静电场的电通量一般不为零,静电场是有源场,正电

荷为源头,负电荷为尾间.静电场的环流 ($\oint_l E \cdot dl = 0$) 等于零,表明静电场是保守场,所以在静电场中才有电势和电势能的概念.静电场的这两基本定理,是研究各种具体静电场问题的理论基础,静电场的各种性质都可以从这两个定理推导出来.

2. “点电荷”与“无限大”电荷

静电学中常用“无限大”、“无限长”和“点”的概念,但必须明白,它们与数学上的概念是不同的.在物理上只存在有限的带电体.至于何时可把实际的带电体看作“无限大”,何时可把它看作“点”电荷,要视问题而定.例如,求一有限长带电导线一侧的场强,只有当所求场强的点靠近直线中部,而且距直线的距离与直线长度相比很小时,才能把该直线看作“无限长”;当所求场强的点靠近直线中部,但距离直线很远时,带电直线可看作“点”电荷.又如,计算两块靠得很近的带电平行板中部的场强时,可将它们看作“无限大”带电平面.

[问题 8-1] 一均匀带电薄圆盘,面电荷密度 $\sigma = 2.00 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$. 半径 $R = 20.0 \times 10^{-2} \text{ m}$, 在中心轴线上放置一均匀带电直线,如图 8-2 所示,电荷线密度 $\lambda = 1.00 \times 10^{-7} \text{ C/m}$, 线长 $l = 2.00 \times 10^{-3} \text{ m}$, 且靠近圆盘的一端与圆盘的距离 $d = 2.00 \times 10^{-3} \text{ m}$. 假设圆盘与直线上的电荷分布并不因彼此影响而发生变化,试求圆盘对直线的作用力.

[解答] 按题设数据,考虑到 $R \gg d + l$. 这时圆盘可以看作无限大均匀带电平面,它在直线所在处的场强都由 $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ 确定,直线所带电量 $q = \lambda l$, 所以

$$F = qE = \frac{\lambda l \sigma}{2\epsilon_0}$$

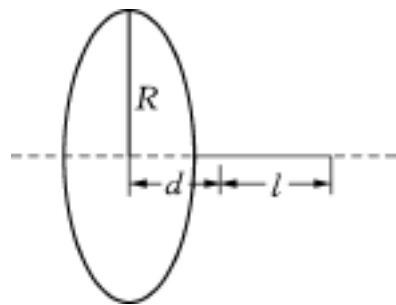


图 8-2

代入已知数值得

$$F = \frac{2.00 \times 10^{-5} \times 1.00 \times 10^{-7} \times 2.00 \times 10^{-3}}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 2.26 \times 10^{-4} \text{ N}$$

讨论:上述解法中将圆盘视为“无限大”均匀带电平面是否合理?为此我们可以直接应用均匀带电圆盘轴线上一点的场强公式 $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right]$, 求出直线上各电荷元所受力的矢量和.

直线上距离圆盘为 x 处, 长为 dx 的一电荷元所受圆盘的静电力为

$$dF = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right] dx$$

由于各电荷元受力方向一致, 都沿轴线方向, 所以,

$$\begin{aligned} F &= \int_d^{d+l} dF = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_d^{d+l} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right] dx \\ &= \frac{\sigma l}{2\epsilon_0} \left[1 - \left(\frac{\sqrt{R^2 + (d+l)^2}}{\sqrt{R^2 + d^2}} \right) \right] \end{aligned}$$

代入已知数值可得 F 的精确值, 比较前一方法所得结果与精确值相差甚微(相对误差不足万分之一). 可见, 在一定条件下, 把均匀带电圆盘视为“无限大”对结果并无多大影响, 这种近似完全合理且可大大简化运算.

3. 正确理解和应用高斯定理

高斯定理是静电场的基本定理, 其形式为 $\oint_S E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$. 学习时应注意以下几点.

(1) 上式左面为通过场中任意闭合曲面 S 的电通量, 右面的 $\sum_i q_i$ 为该 S 面所包围电荷的代数和. 它表明穿过高斯面的电通量只与高斯面内所包围电荷的代数和有关, 而与高斯面外电荷无关, 也与高斯面内电荷如何分布无关.

(2) 积分号内的 E 是 S 面内和面外的所有电荷在 dS 处的合场强, 而不能理解为只是 S 面内的电荷 $\sum_i q_i$ 所产生.

(3) 当电荷分布具有特殊对称性, 从而电场分布(包括大小和方向)具有相应的对称性时, 可用高斯定理求解电场分布. 具体说来, 有以下三类典型情况:

a. 球对称性. 如点电荷、均匀带电球面或球体、均匀带电同心球面系统.

b. 某些轴对称. 如无限长均匀带电直线、无限长均匀带电圆柱体或圆柱面、无限长均匀带电同轴圆柱面系统等.

c. 面对称性. 如无限大均匀带电平面或平板、无限大均匀带电平行平面系统等.

应该指出的是当电场分布不具备高度对称性时, 就难以用高斯定理求解电场分布, 但并不是说, 这种情况下高斯定理不正确, 而是此时 E 不能作为常数从

积分号里提出来,使得计算相当困难,这时应该用点电荷的场强公式和场强叠加原理这一基本方法来解电场分布.

(4) 对称性分析是“高斯定理应用”中的基本要求,也是这一节中的难点,现以均匀带电球壳的电场为例,阐明分析方法.如图 8-3 所示,作封闭面为一与均匀带电球壳同心的球面,由于带电球壳上的电荷分布是球对称的,所以封闭球面上的每一点,相对球壳来说都处于等到的地位,即球壳在球面上各处的场强大小应相同.另一方面,在球面上任取一点 P (如图 8-3 所示),可作一通过该点与球壳相截的中心平面,把球壳对称地分为两半.由于电荷分布的对称性,在这两个半球壳上,总可以找到相对中心平面互相对称的两电荷元(如图 8-3 中 dq_1 和 dq_2),它们在 P 点的场强大小相等,场强方向相对 OP 线应是对称的.因此,这两个对称电荷元在 P 点的合场强应沿 OP 方向.如果把球壳上所有对称的电荷元都考虑进去,则 P 点的总场强方向也应沿 OP 线,即沿球面的半径方向.从以上讨论可知,封闭球面上各点的场强大小相等,方向沿各点处的半径方向.这就是说,均匀带电球壳的电场分布是球对称的.

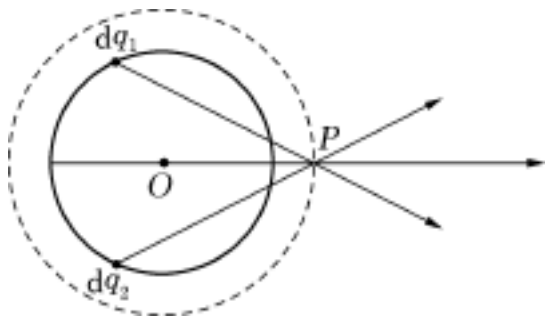


图 8-3

[问题 8-2] 如果高斯面上场强 E 处处不为零,则能否肯定高斯面内一定有电荷?

[解答] 不能肯定.因为当高斯面 S 上各点的场强 E 都不为零时,通过高斯面 S 的电通量可以为零,即



图 8-4

$$\oint_S E \cdot dS = 0$$

只要高斯面上穿入和穿出的电力线数相等,上式就可得到保证,所以高斯面内可以无电荷.

如图 8-4 所示,电荷 q 在高斯面 S 外,这时高斯面 S 上各处 E 均不为零,但高斯面内无电荷.

[问题 8-3] 如果高斯面内有净电荷,能否肯定高斯面上各点的场强都不为零?

[解答] 不能肯定.高斯面 S 内有净电荷只能说明 $\oint_S E \cdot dS \neq 0$,但不能保证高斯面上各点的 E 均不为零.因为高斯面外也可以有电荷,而高斯面上各点的 E 应由面内、外的电荷共同决定.如图 8-5 所示,一个均匀带电的球面和高斯面 S 相交.这时高斯面 S 内有净电荷,但高斯面 S 处于均匀带电球面内的部分上各点的场强却均为零.这说明高斯面 S 内有净电荷,但高斯面上各点的场强并非都不为零.

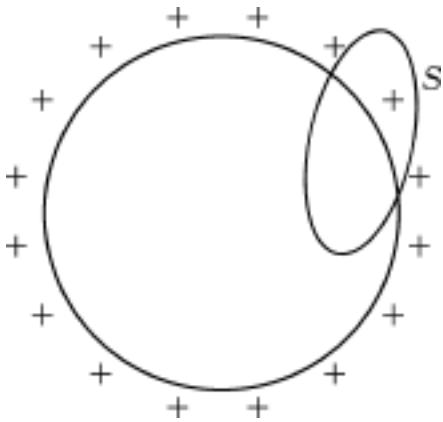


图 8-5

4. 正确选择电势零点

由于电势具有相对性,因而导致电势零点选择问题.电势零点的选择,原则上是任意的,但实际选取时,又不完全是任意的.电势零点选择不当,在理论研究上可能导致荒谬的结果,在实际应用中,具体操作则可能感到很不方便.那么如何选取适合的电势零点呢?一般的选择原则是:必须使场中各点的电势具有确定值,且尽可能使电势表达式简单.具体说来是:

(1) 对于有限带电体,其电荷分布在有限空间,理论上常选无限远点为电势零点.这样不仅计算简便,且电势表达式也最简单.

(2) 对于无限带电体(如无限长带电线,无限长带电圆柱面,无限长带电同轴电缆,无限大带电平面等),其电荷分布在相应的无限空间,这时,电势零点就不能选在无限远处,只能选有限远处的适当位置作为它的电势零点.

(3) 根据电势的定义,利用不定积分计算某一带电体(无论是有限带电体,还是无限带电体)的电势分布时,其结果是

$$U = \int E \cdot dl + C$$

式中 C 是积分常数.要确定 U , 就须选择电势零点.常令 $U = 0$, $C = 0$, 解方程

$\int E \cdot dl = 0$, 就可以确定电势零点,且可以使 U 的表达式最简单.

[问题 8-4] 求电势线密度为 λ 的无限长均匀带电直线的电势分布.一同学先根据电场分布的轴对称,应用高斯定理求出电场强度的分布为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

接着他选取无限远处为电势零点,且按电势定义式得

$$U = \int_r^\infty E \cdot dl = \int_r^\infty \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r \Big|_r^\infty$$

这结果显然是错误的,它使空间任一点的电势失去了意义.试指出这种运算错在哪里?应该怎样做.

[解答] 上述解法的错误是不了解把带电体看作无限大和选无限远处的电势为零这是两个在理论上不能并存的条件.正如本节 2 中讨论所述,物理上的无限大带电体只是相对的,与数学意义上的无限大有明显的区别.当我们把无限远处作为电势零点而确定电场的电势分布时,用的是从电场中某点到无限远处的线积分 $U_a = \int_a^\infty E \cdot dl$, 而这个积分路径却是实实在在数学上的无限长.这时再把带电体看作无限大,在理论上就不合乎逻辑.

如果把电势零点选在距带电直线 r_1 ($r_1 > 0$) 处,则

$$U = \int_r^{r_1} E \cdot dl = \int_r^{r_1} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r}$$

这样电场中不同的 r 处都有确定的电势值 .

另外,我们还可以运用不定积分法计算有

$$U = \int_0^r E \cdot dl = \int_0^r \frac{1}{2\epsilon_0 r} dr = \frac{1}{2\epsilon_0} \ln r + C$$

令 $U = 0$, $C = 0$, 则 $\frac{1}{2\epsilon_0} \ln r = 0$, 即 $r = 1$. 这表明把电势零点选在距带电直线 1 个单位长度处, 电势表达式最简单, 为

$$U = - \int_1^r \frac{1}{2\epsilon_0 r} dr = - \frac{1}{2\epsilon_0} \ln r$$

8.3 解题方法与典型例题

学习真空中静电场这一章, 经常遇到的问题就是求电场强度 E 和电势 U .

1. 求电场强度的三种方法

(1) 叠加法 叠加法求任意带电体的场强的基本思想是把带电体看作电荷元的集合(电荷元可以是线元、面元和体元) . 根据电场强度叠加原理, 电场中某场点的场强为各电荷元在该点产生的场强的矢量和 这种方法的具体步骤是:

将带电体分成无数的电荷元 dq , 每个电荷元可视为点电荷, 它在空间场点产生的场强

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

根据场强叠加原理, 写出场点的总场强,

$$E = \int dE$$

上式是矢量积分 . 计算时要根据所研究的问题, 选取适当的坐标系, 把矢量 dE 分解在各个坐标轴上 . 如取直角坐标系, 则 dE 分解为 dE_x , dE_y , dE_z . 然后计算总场强在各坐标轴上的分量 $E_x = \int dE_x$, $E_y = \int dE_y$, $E_z = \int dE_z$.

根据积分式中各变量之间的关系, 找出统一变量, 并按积分变量的变化范围, 确定积分的上、下限后进行积分运算 .

由矢量合成求 E 的大小和方向 .

$$E \text{ 的大小 } E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$$

E 的方向可用 E 与坐标轴的夹角表示, 也可将 E 表示为矢量形式, 即

$$E = E_x i + E_y j + E_z k$$

在某些情况下,可把电荷连续分布的带电体看作为由许多具有微小宽度的带电直线(或圆环)或者具有微小厚度的圆盘(或球壳)所组成.如无限大均匀带电平面可看作为无限多圆环所组成,均匀带电的直圆柱体可看作为无限多的圆盘所组成.这时可以分别取带电圆环和圆盘为电荷元,求出无限大带电平面周围的场强与带电圆柱体轴线上一点的场强.这样取电荷元的好处是可以把二重或三重积分化为单重积分来做,使运算简化.

(2) 高斯定理法.用高斯定理求场强其关键是要根据电场的对称性,选择适当的高斯面使场强 E 能提出积分号.用高斯定理求场强的具体步骤是:

分析给定问题中电场的对称性,判断能否用高斯定理求场强.

选择适当的高斯面,使场强 E 能提到积分号外.如电场具有球对称性时,高斯面取与带电球同心的球面.电场具有轴对称性时,高斯面取同轴的柱面.电场具有平面对称时,高斯面取轴垂直于平面并与平面对称的柱面.

分别计算通过高斯面的电通量和高斯面包围的净电量,根据高斯定理列出方程,求出电场强度的大小 E .并由场强的对称性,确定场强的方向.

(3) 电势梯度法.电势梯度法是根据电场强度与电势的微分关系式 $E = -\text{grad } U$ 求场强.其具体步骤是:

求出场点的电势分布函数 $U(x, y, z)$.

对电势函数求偏导.例如在直角坐标中

$$E_x = -\frac{U}{x}, E_y = -\frac{U}{y}, E_z = -\frac{U}{z}$$

写出场强的矢量形式

$$E = -\left[\frac{U}{x}i + \frac{U}{y}j + \frac{U}{z}k \right]$$

比较三种求电场强度的方法可以看出,第一种方法普遍适用,原则上可以求解所有已知电荷分布求电场强度的问题,但直接计算 E 矢量比较复杂.第二种方法优点是简便,但只有电场具有足够对称性时才能用它求出电场强度,因此有局限性.第三种方法,由于电势是标量,比矢量计算简单,且无局限性.

2. 求电势的两种方法

(1) 定义积分法

利用电势定义来求电场中电势分布的主要步骤是:

根据带电体的电荷分布来确定电势零点.

求出电场中电场强度分布 .

由电场强度分布来选取积分路径,因此取积分路径时,总是设法选取使积分计算比较简单的路径,如果在整个积分路径上,各段 E 的函数形式不同,则积分必须分段进行,然后再相加 .

利用 $U_a = \int_a^c E \cdot dl$ (c 为电势零点) 来求解 .

(2) 叠加法

对于电荷连续分布的带电体,其电场中任意场点 P 的电势,由点电荷的电势和电势叠加原理可得

$$U_P = \int dU_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

(你能说出上式的电势零点是选在何处吗?) 其中 dq 是带电体上电荷元的电荷, r 为电荷元 dq 到场点 P 的距离,积分遍及带电体上所有电荷元.用叠加法求电势的步骤和用叠加法求场强相同,只是 $U = \int dU$ 是标量积分,不用取分量式 .

比较两种求电势的方法可以看出,对已知电场强度的分布或可用高斯定理求出电场强度分布的问题,用第一种方法较为方便 .

[例 8-1] 两个电量都是 $+q$ 的点电荷固定在真空中,相距 $2l$. 在它们连线的中垂线上放另一电量为 q 的点电荷, q 到 A 、 B 连线中点的距离为 r . 求 q 所受的静电力并讨论 q 在 A 、 B 连线的中垂线上哪一点处受力最大. 若 q 在 A 、 B 连线的中垂线上某一位置上从静止释放,它将如何运动? 分别就 q 与 q 同号和异号两种情况进行讨论 .

[解] 根据库仑定律, q 所受 A 、 B 两点电荷的作用力分别为 F_A 和 F_B , 其大小分别为

$$F_A = \frac{qq}{4\pi\epsilon_0(l^2 + r^2)}$$

$$F_B = \frac{qq}{4\pi\epsilon_0(l^2 + r^2)}$$

F_A 、 F_B 的方向如图 8-6 所示. 根据叠加原理, q 所受静电力为 F_A 和 F_B 的矢量和 F , 其大小为

$$F = 2F_A \cos\theta = \frac{2qq}{4\pi\epsilon_0(l^2 + r^2)} \cdot \frac{r}{(l^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{qq r}{2\pi\epsilon_0(l^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$F \text{ 的方向 } \begin{cases} \text{沿中垂线向上} (q, q \text{ 同号}) \\ \text{沿中垂线向下} (q, q \text{ 异号}) \end{cases}$$

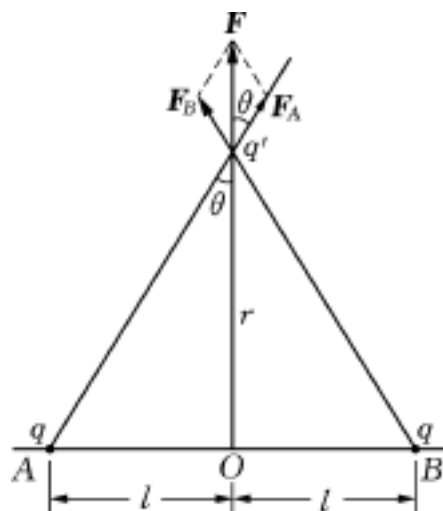


图 8-6

从上面的结果可知, F 的大小与 r 有关, 因此 F 的最大值应满足 F 对 r 的一阶导数为零的条件, 即

$$\frac{dF}{dr} = \frac{qq}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(l^2 + r^2) - 3r^2}{(l^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

解得

$$r = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} l$$

所以,当 $r = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} l$ 时, q 所受的力最大,为

$$F_m = \frac{qq}{3\sqrt{3} \epsilon_0 l^2}$$

若 q 与 q 同号, q 在 A 、 B 连线的中垂线上某点从静止释放后,便沿着中垂线作远离 O 点的变加速运动,直到无穷远;若 q 和 q 异号时, q 从静止释放后,因所受合力指向 O 点,因此 q 便以 O 为中心沿中垂线作周期性的振动.

[例 8-2] 设电荷 q 均匀分布在半径为 R 的圆弧上,圆心所张的圆心角为 α ,试求圆心处的场强.

[解] 选圆心 O 为坐标原点,建立如图 8-7 所示的直角坐标系,则圆弧电荷的分布对 x 轴是对称的.

在圆弧上取一线元 $dl = R d\theta$, dl 所带电荷为 $dq = \lambda dl = \frac{q}{R} dl$,是圆弧的电荷线密度.

电荷元 dq 在圆心 O 处产生的场强大小为

$$\begin{aligned} dE &= \frac{dq}{4\epsilon_0 R^2} = \frac{dl}{4\epsilon_0 R^2} \\ &= \frac{R d\theta}{4\epsilon_0 R^2} = \frac{d\theta}{4\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

方向如图 8-7 所示.

圆弧上各处的电荷元 dq 在圆心处的场强大小相等,方向不同.根据场强叠加原理,圆心 O 处的总场强 $E_0 = \int dE$.因 dE 是矢量,在计算总场强时,应先分别求 dE 沿坐标轴的分量,即

$$dE_x = dE \cos \theta$$

$$dE_y = dE \sin \theta$$

则总场强 E 沿 x 轴和 y 轴的分量分别为

$$\begin{aligned} E_x &= \int dE_x = \int dE \cos \theta \\ &= \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{d\theta}{4\epsilon_0 R} = \frac{q}{2\epsilon_0 R^2} \sin \frac{\alpha}{2} \\ E_y &= \int dE_y = \int dE \sin \theta \\ &= \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{d\theta}{4\epsilon_0 R} = 0 \end{aligned}$$

($E_y = 0$ 的结果亦可由电荷对 x 轴分布的对称性直接得出) 所以,圆心 O 处的场强 E 可用它沿 x 轴的分量 E_x 表示,即

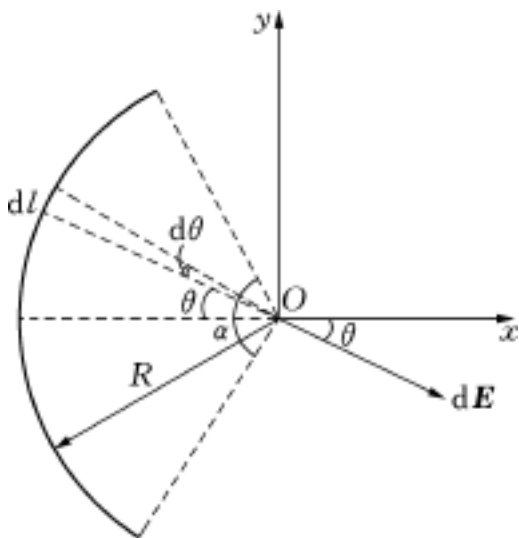


图 8-7

$$E_0 = E_x = \frac{q}{2 \pi \epsilon_0 R^2} \sin \frac{\pi}{2}$$

若 $q > 0$, 则 $E_0 > 0$. E_0 的方向沿 x 轴正向. 即

$$E_0 = \frac{q}{2 \pi \epsilon_0 R^2} \sin \frac{\pi}{2} i$$

[例 8-3] 半径为 R 长为 l 的均匀带电圆柱体、电荷体密度为 ρ , 求圆柱体轴线上 O 点的场强. 设 O 点离圆柱体近端的距离为 b , 如图 8-8 所示.

[解] 用积分法求解此题时, 如取点电荷为积分元, 则要用三重积分. 但是我们取圆盘为积分元, 用圆盘在轴线上一点产生的场强公式, 只要计算单重积分就可以求得圆柱体轴线上一点的场强.

如图 8-8 取坐标, 距 O 点的距离为 y 处, 一厚度为 dy 的圆盘在 O 点产生的场强的大小.

$$dE = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left[1 - \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}} \right]$$

方向与 y 轴相反, 式中 σ 是厚度为 dy 的圆盘上的电荷面密度. 和圆柱体的电荷体密度 ρ 的关系为

$$\sigma = \frac{R^2 dy}{R^2} = \rho dy$$

所以有

$$dE = \frac{\rho dy}{2 \epsilon_0} \left[1 - \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}} \right]$$

又因改变积分元(圆盘)的位置, dE 的方向并不改变, 所以圆柱体在 O 点产生的场强的大小

$$\begin{aligned} E &= \int_b^{b+l} dE = \int_b^{b+l} \frac{\rho dy}{2 \epsilon_0} \left[1 - \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}} \right] \\ &= \frac{\rho}{2 \epsilon_0} \left[y - \frac{1}{2} \sqrt{R^2 + y^2} \right] \Big|_b^{b+l} \\ &= \frac{\rho}{2 \epsilon_0} \left[l - \sqrt{R^2 + (l+b)^2} + \sqrt{R^2 + b^2} \right] \end{aligned}$$

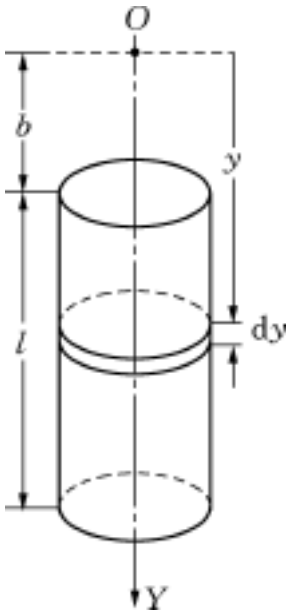


图 8-8

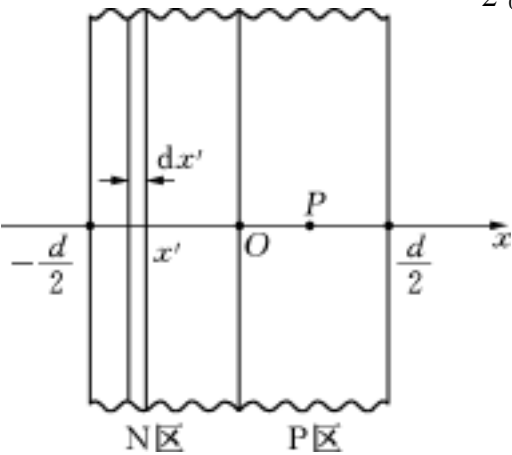


图 8-9

[例 8-4] 半导体 PN 结附近堆积着正、负电荷, 在 N 区内有正电荷, P 区内有负电荷, 两区电荷的代数和为零. 如果把 PN 结看成是一对带正、负电荷的无限大平板, 它们相互接触, 在如图 8-9 所示的坐标系中其电荷分布为

$$\text{PN 结外} \quad |x| > \frac{d}{2}, \quad \rho(x) = 0$$

$$\text{PN 结内} \quad |x| < \frac{d}{2}, \quad \rho(x) = -Eax$$

式中 e 为电子电量值, a 为常量.

求: 空间电场强度的分布 .

[解] 根据场源电荷的分布可知, 在 PN 结外, 即 $|x| > \frac{d}{2}$ 的区域, $E = 0$, 在 PN 结内, 即 $|x| < \frac{d}{2}$ 的区域, 电场强度只有 x 分量, 即 $E = E_x i$, 下面用两种方法求解 .

解法一: 将带电层分成无数薄层, 每一层可视为无限大均匀带电平面, 如图 8-9 所示, 在 x 处取一厚度为 dx 的薄层, 其电荷面密度 $= (x) dx = -e a x dx$. 由均匀无限大带电平面电场强度公式, 该薄层在 P 点(坐标为 x)的场强

$$dE = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon_0} = -\frac{e a x dx}{2\epsilon_0} & x < x \\ -\frac{1}{2\epsilon_0} = \frac{e a x dx}{2\epsilon_0} & x > x \end{cases}$$

由场强叠加原理得

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dE_x i = \int_{-\frac{d}{2}}^x -\frac{e a x dx}{2\epsilon_0} i + \int_x^{\frac{d}{2}} \frac{e a x dx}{2\epsilon_0} i \\ &= \frac{e a}{8\epsilon_0} (d^2 - 4x^2) i \end{aligned}$$

解法二: 如图 8-10 所示作一高斯面 S , 其侧面与带电平板(PN 结)垂直, 左、右两底面与带电平板平行, 面积为 S , 右底面在带电平板外, 左底面的位置在坐标 x 处, 则通过闭合面 S 的电通量为

$$= -E_x S$$

闭合面 S 内的净电荷

$$\begin{aligned} q_{\text{内}} &= \int_0^{\frac{d}{2}} (x) S dx = \int_0^{\frac{d}{2}} -e a S x dx \\ &= -\frac{e a S}{2} \left[\frac{d^2}{4} - x^2 \right] \end{aligned}$$

由高斯定理得

$$E_x = \frac{e a}{8\epsilon_0} (d^2 - 4x^2)$$

所以

$$E = \frac{e a}{8\epsilon_0} (d^2 - 4x^2) i$$

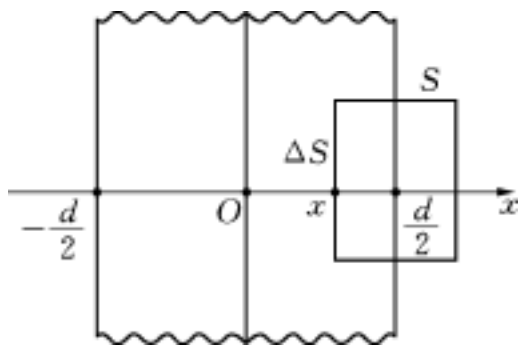


图 8-10

[例 8-5] 试证明在静电场中, 凡是电力线是平行直线的地方, 电场强度的大小必定处处相等 .

[证明] 先证明同一根电力线上各点场强的大小相等 以某一根电力线为轴, 作一圆柱形高斯面, 两端面分别通过该电力线上的任意两点 a, b 如图 8-11(a)所示. 设两端面的面积 S 很小, 因而 S 上各点场强可以看作是相等的, 分别以 E_a 和 E_b 表示. 由于高斯面内没有电荷, 根据高斯定理有

$$-E_a S + E_b S = 0$$

由此得: $E_a = E_b$, 即同一根电力线上场强大小处处相等 .

再证明在垂直于电力线方向上任意两点场强大小相等 .

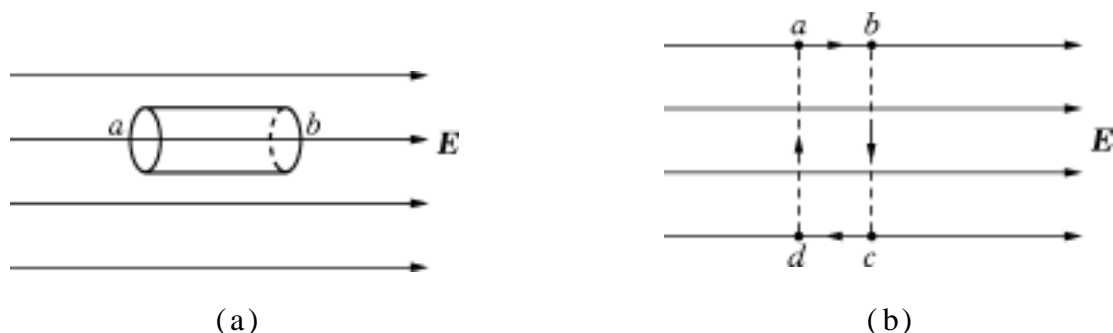


图 8-11

取如图 8-11(b) 所示的矩形回路, 其中 ad , bc 均与电力线垂直, 设 ab 间各点的场强为 E_1 , cd 间各点的场强为 E_2 , 根据环路定律有

$$\overline{E_1 db} - \overline{E_2 cd} = 0$$

由此得: $E_1 = E_2$. 即在垂直于电力线方向上, 任意两点的场强大小相等.

综上所述可知凡电力线是平行直线的地方, 场强大小必定处处相等, 即它表示一个均匀场.

由此题可以看出, 高斯定理的意义不只是在某些情况下求场强分布; 环路定理的意义也不只是可以据此引入电势和电势能的概念. 这两个定理的意义在于确定静电场的性质.

[例 8-6] 在半径为 R_1 、电荷体密度为 ρ 的均匀带电球体内部, 挖去一个半径为 R_2 的球形空腔, 空腔中心 O_2 与球心 O_1 之间的距离为 a . 求空腔内任一点 P 处的电场强度.

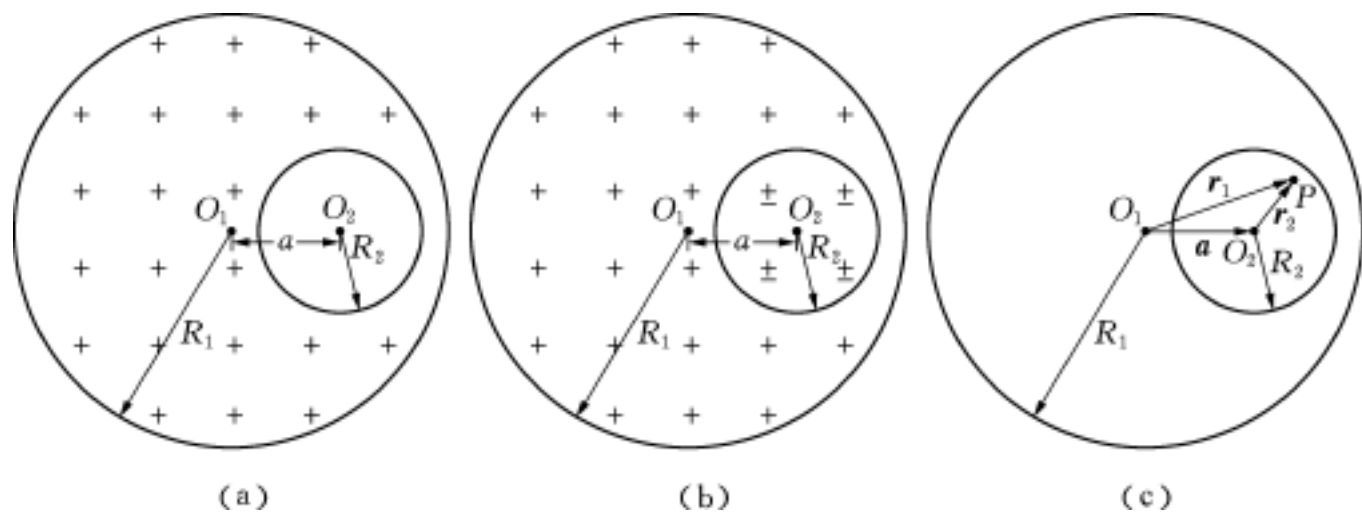


图 8-12

[解] 尽管球体带有连续分布的电荷, 但由于球内有不带电荷的空腔, 因此将球体上连续分布的电荷分为许多电荷元, 再用矢量积分来求解是困难的. 又因挖了空腔的带电球体, 电场的球对称性被破坏, 所以也不能直接用高斯定理求场强. 对这一类的问题, 我们可以灵活地应用电场的叠加原理, 设想用一种“补偿法”来求解. 此法是假设在空腔中填入体密度为 ρ 的均匀分布电荷, 同时假设在空腔中还存在体密度为 $-\rho$ 的均匀分布电荷. 这样并未改变球体的电荷分布, 如图 8-12(a)、(b) 所示. 于是, 空腔内任一点 P 的场强 E 就是半径为 R_1 、电荷体密度为 ρ 的球与半径为 R_2 、电荷体密度为 $-\rho$ 的球各自在该点产生场强 E_1 、 E_2 的叠加, 即 $E = E_1 + E_2$.

如图 8-12(c)所示,设 O_1 到 P 点的矢径为 r_1 , O_2 到 P 点的矢径为 r_2 . 假设以 O_1 、 O_2 为圆心,以 r_1 、 r_2 为半径作两个球面 S_1 和 S_2 (高斯面),按照高斯定理可分别求出 P 点的场强 E_1 、 E_2 ,即

$$\oint_{S_1} E_1 \cdot dS = E_1 (4\pi r_1^2) = \frac{4\pi}{3} \rho r_1^3$$

$$\oint_{S_2} E_2 \cdot dS = E_2 (4\pi r_2^2) = -\frac{4\pi}{3} \rho r_2^3$$

因此

$$E_1 = \frac{\rho r_1}{3\epsilon_0}, E_2 = -\frac{\rho r_2}{3\epsilon_0}$$

考虑到场强 E_1 、 E_2 的方向与径向 r_1 和 r_2 的关系,故可写成矢量式 $E_1 = \frac{\rho r_1}{3\epsilon_0}$, $E_2 = -\frac{\rho r_2}{3\epsilon_0}$

按场强叠加原理,求得 P 点的场强

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (r_1 - r_2) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} a$$

上式表明,空腔内任一点的场强与 O_1 到 O_2 的矢量 a 的方向平行,场强大小与 P 点在空腔内的位置无关,均为 $\frac{\rho a}{3\epsilon_0}$,所以空腔内的电场为均匀电场.

“补偿法”是一种简便的“等效方法”.补偿法不仅在求解静电场问题时可以应用,而且在力学中求刚体的质心以及求解稳恒磁场的有关问题时均有所运用.望读者能掌握这一行之有效的方法.

[例 8-7] 电荷 Q 均匀分布在半径为 R 的球体内,如图 8-13 所示,试证明离球心 r_p 处 ($r_p < R$) 的电势 $U = \frac{Q(3R^2 - r_p^2)}{8\epsilon_0 R^3}$ (取无限远处电势为零).

[证明]

证法一:电势定义积分法:

由于电荷分布具有球对称分布,所以由高斯定理可得

$$E_{\text{内}} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (r < R)$$

$$E_{\text{外}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R)$$

式中

$$Q = \frac{4\pi}{3} \rho R^3$$

由电势的定义 $U = \int_r^\infty E \cdot dl$, 并取径向(电场强度的方向)为积分路径,有

$$U = \int_{r_p}^R E_{\text{内}} \cdot dr + \int_R^\infty E_{\text{外}} \cdot dr = \int_{r_p}^R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

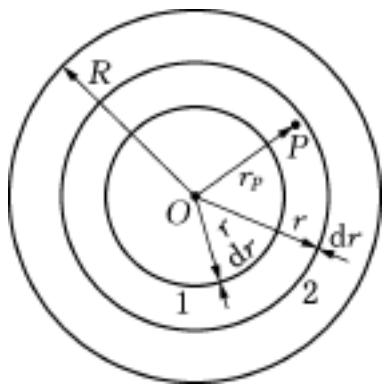


图 8-13

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3_0} \frac{(R^2 - r_p^2)}{2} + \frac{Q}{4_0 R} = \frac{Q}{8_0 R^3} (R^2 - r_p^2) + \frac{Q}{4_0 R} \\
 &= \frac{Q(3R^2 - r_p^2)}{8_0 R^3}
 \end{aligned}$$

证法二:电势叠加法:

把球分成无数个同心球壳,选无限远为电势零点.

在 $r < r_p$ 区域,半径为 r 厚为 dr 的球壳(如图 8-13 中 1 球壳)在 P 点产生的电势为

$$dU_1 = \frac{dq}{4_0 r_p} = \frac{4_0 r^2 dr}{4_0 r_p} = \frac{r^2 dr}{_0 r_p}$$

所以, $r < r_p$ 区域的电荷在 P 点产生的电势为

$$U_1 = \int_0^{r_p} dU_1 = \int_0^{r_p} \frac{r^2 dr}{_0 r_p} = \frac{r_p^2}{3_0}$$

在 $r > r_p$ 区域,半径为 r 厚为 dr 的球壳(如图 8-13 中 2 球壳)在 P 点产生的电势为

$$dU_2 = \frac{dq}{4_0 r} = \frac{4_0 r^2 dr}{4_0 r} = \frac{r dr}{_0}$$

所以, $r > r_p$ 区域的电荷在 P 点产生的电势为

$$U_2 = \int_{r_p}^R \frac{r dr}{_0} = \frac{(R^2 - r_p^2)}{2_0}$$

由电势叠加原理得

$$\begin{aligned}
 U &= U_1 + U_2 = \frac{r_p^2}{3_0} + \frac{(R^2 - r_p^2)}{2_0} = \frac{(3R^2 - r_p^2)}{6_0} \\
 &= \frac{Q}{\frac{4}{3} R^3} \cdot \frac{1}{_0} \frac{(3R^2 - r_p^2)}{6} = \frac{Q(3R^2 - r_p^2)}{8_0 R^3}
 \end{aligned}$$

8.4 自测练习与能力训练

8.4.1 选择题

1. 在国际单位制中,电场强度的量纲为[].

(A) $M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$

(B) $MLI^{-1} T^{-3}$

(C) $ML^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$

(D) $MLI^{-1} T^{-1}$

2. 在真空中有 A 、 B 两平行板相距为 d (很小),板面积为 S (很大),其带电量分别为 $+q$ 和 $-q$,则两板间的相互作用力应为[].

(A) $\frac{q^2}{4_0 d^2}$

(B) $\frac{q^2}{_0 S}$

(C) $\frac{q^2}{2_0 S}$

(D) $\frac{q^2}{4_0 S}$

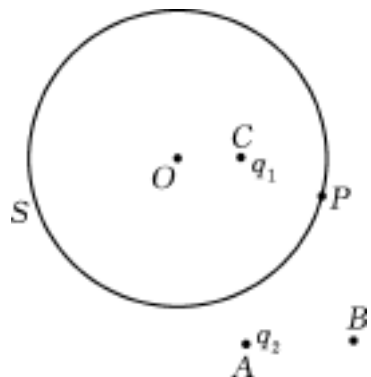


图 8-14

3. 如图 8-14 所示, 在 C 点放置电荷 q_1 , 在 A 点放置电荷 q_2 , S 是包围 q_1 的封闭曲面, P 点是曲面上任意一点, 现将 q_2 从 A 点移到 B 点, 则 [] .

- (A) 通过 S 面的电通量改变, 但 P 点的电场强度不变
- (B) 通过 S 面的电通量和 P 点的电场强度都改变
- (C) 通过 S 面的电通量和 P 点的电场强度都不变
- (D) 通过 S 面的电通量不变, 但 P 点的电场强度改变

4. 下列说法中, 正确的是 [] .

- (A) 初速度为零的点电荷置于静电场中, 将一定沿一条电场线运动
- (B) 带负电的点电荷, 在电场中从 a 点移到 b 点, 若电场力做正功, 则 a 、 b 两点的电势关系为 $U_a > U_b$
- (C) 在点电荷的电场中, 离场源电荷越远的点, 其电势就越低
- (D) 在点电荷的电场中, 离场源电荷越远的点, 电场强度的量值就越小

5. 半径为 R_1 、 R_2 的同心球面上, 分别均匀带电 q_1 和 q_2 , 其中 R_2 为外球面半径, q_2 为外球面所带电荷量, 设两球面的电势差为 U , 则 [] .

- (A) U 随 q_1 的增加而增加
- (B) U 随 q_2 的增加而增加
- (C) U 不随 q_1 的增减而改变
- (D) U 不随 q_2 的增减而改变

6. 如图 8-15 所示, 正三角形 ABC 的三个顶点上分别有 $-q$, $+q$, $+q$ 三个点电荷, G 为三角形的重心, N 为 BC 边的中点, 那么, 正确的说法是 [] .

- (A) G 点的场强值小于 N 点的场强值
- (B) G 点的场强方向由 G 指向 N
- (C) G 点的电势低于 N 点的电势
- (D) 由 G 到 N 的电势变化是逐渐降低

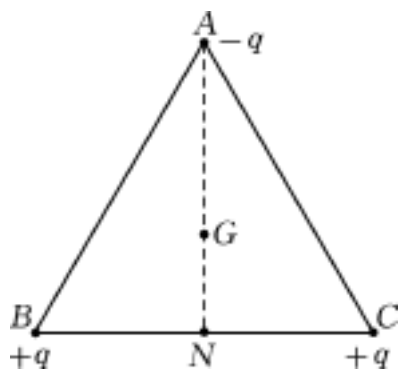


图 8-15

7. 图 8-16 所示为一具有球对称分布的静电场的

的 $E-r$ 关系曲线, 指出

该静电场是由下列哪种带电体产生的? [] .

- (A) 半径为 R 的均匀带电球面
- (B) 半径为 R 的均匀带电球体
- (C) 半径为 R , 电荷体密度 $= Ar$ (A 为常量) 的非均匀带电球体
- (D) 半径为 R , 电荷体密度 $= \frac{A}{r}$ (A 为常量) 的非均匀带电球体

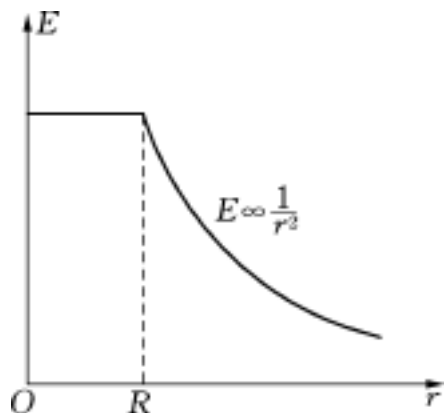


图 8-16

8. 如图 8-17 所示, 在一点电荷 $+q_1$ 外加上一个带电量为 q_2 、半径为 R 的同心球面(球面上电荷面密度均匀) 则在距点电荷 q_1 为 r ($r < R$) 的 P 点的场强和电势的变化为[] .

- (A) 场强增加, 电势增加 (B) 场强增加, 电势不变
(C) 场强不变, 电势增加 (D) 场强不变, 电势也不变

9. 在均匀静电场中, 下面哪种说法是正确的? [] .

- (A) 各点电势相等
(B) 各点电势梯度相等
(C) 电势梯度沿场强方向增加
(D) 电势梯度沿场强方向减少

10. 一带电金属球面, 半径为 R , 带电为 $+Q$, 在距球心为 $2R$ 处有一自由电偶极子 P , 其方向如图 8-18 所示, 该电偶极子将作哪种运动? [] .

- (A) 转向, 电偶极矩的方向趋向于该点场强方向
(B) 以半径为 $2R$ 的圆周运动
(C) 沿该点场强方向平动
(D) 先转向, 使电偶极矩转向该点场强方向, 然后再向球心处移动

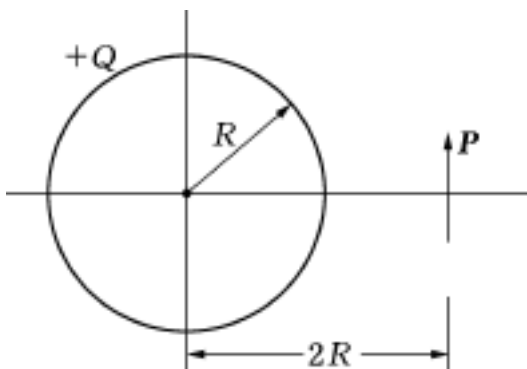


图 8-18

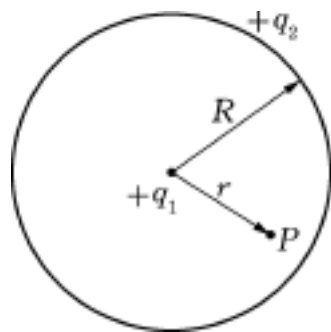


图 8-17

8.4.2 填空题

1. 如图 8-19 所示, 在均匀场 E_0 中, 有一点电荷 q , 将试验电荷 q 从 A 点沿以 q 为圆心、 a 为半径的半圆弧移到 B ($\overline{AB} \perp E_0$), 电场力做功为_____, 将试验电荷 q 从 A 沿 $AA'BB'$ 路径移到 B , 电场力做功为_____.

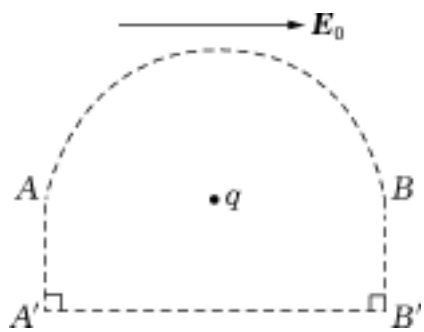


图 8-19

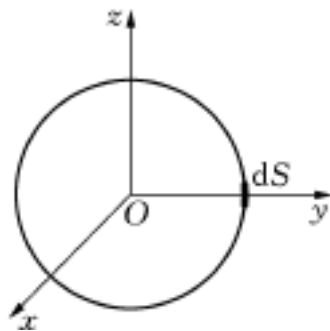


图 8-20

2. 在真空中, 有一半径为 R 、电荷面密度为 _____ 的均匀带电球面, 若面上挖去

一小块带电面积 dS (dS 很小) 如图 8-20 所示, 则球心处的场强 $E =$ _____, 方向 _____, 电势 = _____.

3. 两个同心球面, 半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_2 > R_1$), 带电量分别为 q_1 和 q_2 , 则在小球面内离球心为 r_1 处一点的电势为 _____, 在两球面之间离球心为 r_2 处一点的电势为 _____, 在大球面外离球心为 r_3 处一点的电势为 _____.

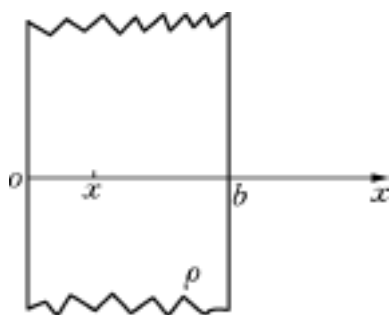


图 8-21

4. 图 8-21 中一厚度为 b 的无限大均匀带电平板, 其电荷体密度 (为正电荷), 则在板内离原点为 x 处的场强 $E =$ _____, 在板外任一点的场强为 _____, 场强为零的地方在 _____ 处.

5. 地球表面上方大气中电场方向向下, 设在地面上方 h_1 高处场强为 E_1 , 在 h_2 高处场强为 E_2 ($h_1, h_2 \ll R_{\text{地}}$), 由高斯定理可推知大气中的平均电荷密度为 _____ 实验监测测得: $h_1 = 100 \text{ m}$ 高处 $E_1 = 150 \text{ V/m}$, $h_2 = 300 \text{ m}$ 高处 $E_2 = 100 \text{ V/m}$, 则在 h_1 和 h_2 之间的大气中的平均电荷密度 = _____.

6. 点电荷 q_1, q_2, q_3 和 q_4 在真空中的分布如图 8-22 所示. 图中 S 为闭合面, 则通过该闭合面的电通量 $\oint_S E \cdot dS =$ _____, 式中 E 是点电荷 _____ 在闭合面上任一点产生的场强的矢量和.



图 8-22

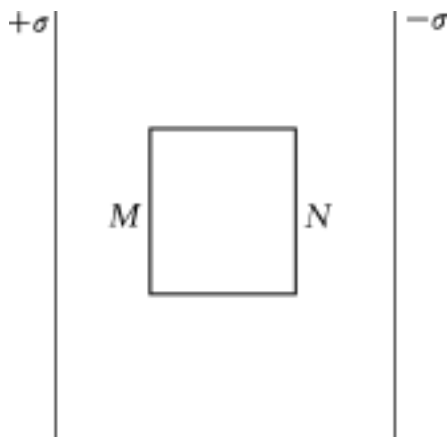


图 8-23

7. 两块“无限大”均匀带电平行平板, 电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$, 两板间是真空, 在两板间取一立方体的高斯面, 设其每一侧面的面积是 S , 立方体的两个面 M, N 与平板平行, 如图 8-23 所示, 则通过 M 面的电通量 $\Phi_1 =$ _____, 通过 N 面的电通量 $\Phi_2 =$ _____.

8. 如图 8-24 所示, 在半径为 r 的球壳上均匀带有电量 Q , 将一个点电荷

q ($q \neq Q$) 从球内 a 点经球壳上一个孔移到球外 b 点, 在此过程中电场力做功

$A =$ _____ .

9. 说明下列各式的物理意义:

(1) $E \cdot dl$ _____;

(2) $\int_a^b E \cdot dl$ _____;

(3) $\oint_L E \cdot dl = 0$ _____;

(4) $E \cdot dS$ _____ .

10. 已知某电场的电势函数 $U = 6x - 6x^2y - 7y^2$ (SI). 由场强与电势梯度的关系式可得点 $(2, 3, 0)$ 处的电场强度 $E =$ _____ i + _____ j + _____ k (SI) .

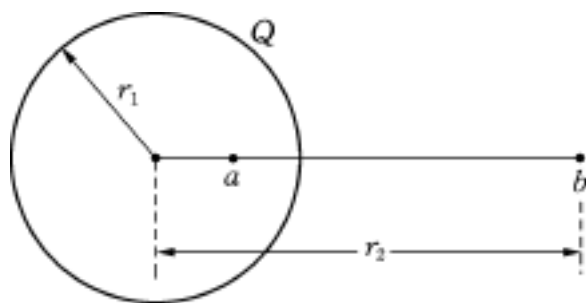


图 8-24

8 4 3 计算题

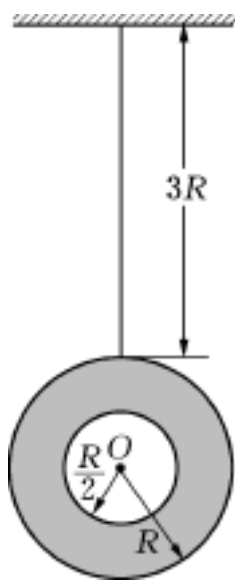


图 8-25

1. 如图 8-25 所示环形薄片由细绳吊着, 环的外半径为 R , 内半径为 $\frac{R}{2}$, 并有电量 Q 均匀分布在环面上, 细绳长 $3R$, 也有电量 Q 均匀分布在绳上, 试求圆环中心 O 处的电场强度 (圆环中心在绳延长线上) .

2. 长为 l 的两根相同的细棒, 均匀带电, 线电荷密度为 λ , 沿同一直线放置, 两棒的近端相距也是 l , 求两棒间的静电相互作用力 .

3. 真空中一均匀带电细直杆, 长度为 $2a$, 总电量为 $+Q$, 沿 Ox 轴固定放置, 如图 8-26 所示, 一运动粒子质量为 m , 带电量为 $+q$, 在经过轴上 C 点时, 速度为 v , 试求: (1) 粒子在经过 C 点时, 它与带电杆之

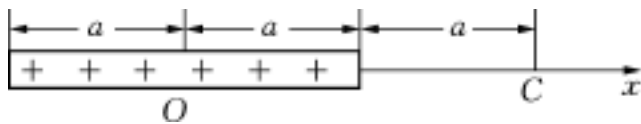


图 8-26

间相互作用电势能 (设无穷远处为电势零点). (2) 粒子在电场力作用下运动到无穷远处的速度 v (设 v 远小于光速) .

4. 一均匀带电球体, 带有电量 $+Q$, 试求下列两种情况中将点电荷 $+q$ 和 $-q$ 从无穷远处移到该电场中电场力所做的功. (1) 先将 $+q$ 移到电场中距球心 r 处 (图 8-27), 然后把 $-q$ 移到 $r+l$ 处, 且 $l \ll r$. (2) 把 $+q$ 和 $-q$ 组成的电偶极子整体移到电场中同样位置 .

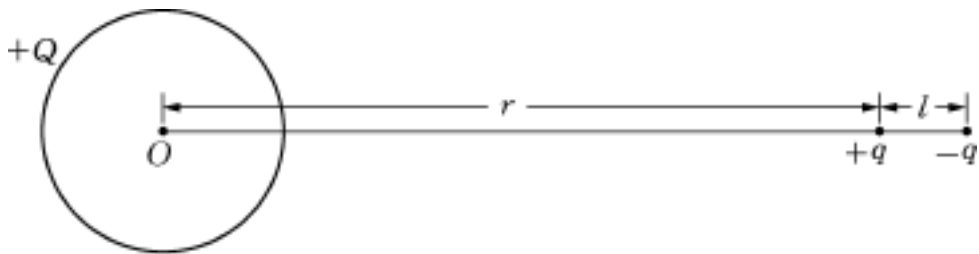


图 8-27

5. 真空中一无限长带电圆柱体, 电荷体密度为 ρ . (1) 试求圆柱体内任一点处的电场强度. (2) 若圆柱体内离轴线距离 a 处有一圆柱形空腔(无电荷区), 如图 8-28 所示, 试求腔内任一点处的电场强度.

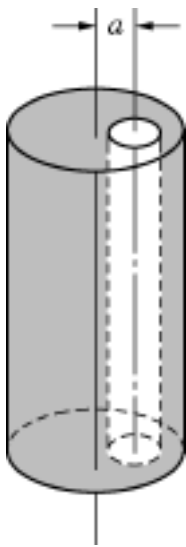


图 8-28

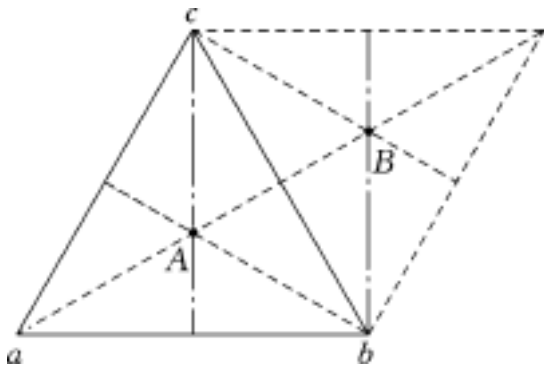


图 8-29

6. 如图 8-29 所示, 三根等长的带电绝缘细棒首尾相接构成正三角形, 每根棒上均匀分布等量同号电荷. 测得图中 A 点和 B 点的电势分别为 U_A 和 U_B (A 、 B 均为相应正三角形的重心). 若将 ab 棒取走, 试求此时 A 点和 B 点的电势.

习题选解

[选择题 7] 提示: 依题意, 场强分布具有球面对称性, 过球内任一点 P 作一球形高斯面, 应用 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} q_i$, 有

$$\epsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho.$$

依图 8-16 所示, 选择 r 的取值.

[填充题 5] 解: 如图 8-30 所示, 在地球表面上方过 h_1 和 h_2 高度作一柱形高斯面, 高斯面底面积为 S .

由高斯定理可知

$$\begin{aligned} E \cdot dS &= E_1 S + (-E_2 S) = \frac{q}{\epsilon_0} \\ &= \frac{U}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\text{得} \quad \epsilon_0 = \frac{(E_1 - E_2)}{h_2 - h_1}$$

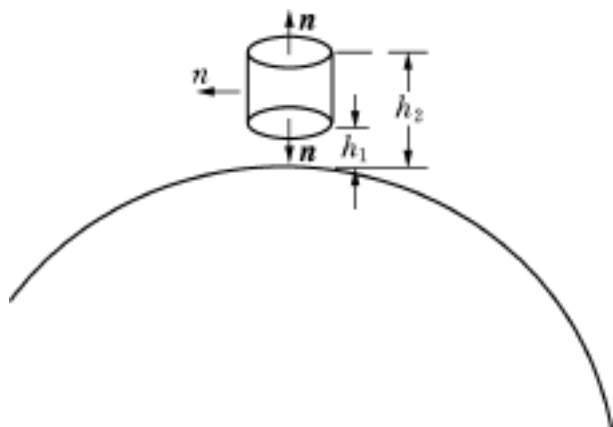


图 8-30

将已知量代入可得:

$$= \frac{8.85 \times 10^{-12} \times (150 - 100)}{200} = 2.21 \times 10^{-12} \text{ C/m}^2$$

[计算题 4](1) 把 $+q$ 从无穷远移到距球心 r 处过程中, 只受到 $+Q$ 电场力的作用, 故电场力做的功

$$A_1 = q(U_\infty - U_r) = -qU_r = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$$

再把 $-q$ 从无穷远移到距球心 $r+l$ 处过程中, 电荷 $-q$ 不仅受到 $+Q$ 电场力的作用, 还受到 $+q$ 电场力的作用, 故电场力做的功

$$A_2 = -q(U_\infty - U_{r+l}) = qU_{r+l} = q \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (r+l)} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} \right]$$

所以, 整个移动过程中电场力做的功

$$A = A_1 + A_2 = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 (r+l)} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l} = -\frac{qQl}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l}$$

(2) 把 $+q$ 和 $-q$ 组成的电偶极子整体从无穷远移到同样位置的过程中, 仅受 $+Q$ 电场力作用, 故电场力做的功

$$\begin{aligned} A &= q(U_\infty - U_r) + (-q)(U_\infty - U_{r+l}) = -qU_r + qU_{r+l} \\ &= -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 (r+l)} = -\frac{qQl}{4\pi\epsilon_0 r(r+l)} = -\frac{qQl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

[计算题 5](1) 略。(2) 应用补偿法, 圆柱形空腔内任一点处的场强可以认为是由无限长均匀带正电(电荷密度为 $+$)的圆柱体在该点产生的场强 E_+ 和无限长均匀带负电(电荷密度为 $-$)的空腔圆柱体在该点产生的场强 E_- 的叠加。

设圆柱体轴线 O 点到场点 P 的位矢为 r , 空腔轴线 O 到场点 P 的位矢为

r , 如图 8-31 所示. 根据高斯定理可得 $E_+ = \frac{1}{2\epsilon_0} r$, $E_- = -\frac{1}{2\epsilon_0} r$

则空腔内任一点的场强

$$E = E_+ + E_- = \frac{1}{2\epsilon_0} (r - r')$$

由图可知 $r - r' = a$

所以, $E = \frac{1}{2\epsilon_0} a$

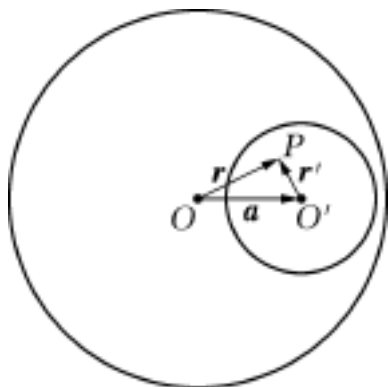


图 8-31

圆柱形空腔内各点的场强相同, 均为 $E = \frac{1}{2\epsilon_0} a$, 为均

匀电场, 方向由 O 指向 O' .

[计算题 6] 分析: 本题可用对称法来求解. 由对称性分析可知, 三棒各自对 A 点电势的贡献应相同, bc 棒对 A 点和 B 点电势的贡献也相同. 同样 ac 棒和 ab 棒各自在 B 点产生电势一致. 根据上述的对称性分析, 加上三棒共存时已知的 U_A 和 U_B , 即可求出除去 ab 棒后, A 点和 B 点的电势.

解: 由对称性, 三棒各自对 A 点电势的贡献相同, 均为 U_x , 则 $U_A = 3U_x$. 由图 8-28 可看到, bc 棒对 B 点电势的贡献也应是 U_x . 而 ab 棒和 ac 棒对 B 点电势的贡献相同, 用 U_y 表示, 则由电势的叠加原理可得: $U_B = U_x + 2U_y$

联立上两式解出: $U_x = \frac{1}{3} U_A$

$$U_y = \frac{1}{2} U_B - \frac{1}{6} U_A$$

因此, ab 棒除去后, A 点和 B 点的电势分别为

$$U_A = 2U_x = \frac{2}{3} U_A$$

$$U_B = U_x + U_y = \frac{1}{2} U_B + \frac{1}{6} U_A$$

静电场中的导体和介质

9.1 基本要求与复习框图

1. 基本要求

- (1) 掌握导体的静电平衡条件及静电平衡下导体的特性;
- (2) 了解电介质电极化机理及电介质对电场的影响;
- (3) 掌握有导体存在的电场中场强和电势的计算方法;
- (4) 掌握运用介质中的高斯定理求场强的方法;
- (5) 理解电容的定义并掌握简单电容器的电容计算方法;
- (6) 理解电场能量密度的概念, 掌握计算一些对称情况下的电场能量的方法.

2. 复习框图

在静电场中放入导体或电介质后, 就会在电场中添入一些新的电荷, 这就是感应电荷和极化电荷. 这些电荷也会产生电场, 从而改变了原来电场的分布. 因为这一章主要研究电场与导体及电介质相互作用, 最后达到平衡的情况, 所以前面真空中静电场这一章讲过的静电场的基本定理和规律仍然适用. 本章的主要内容可用图 9-1 的线框图表示.

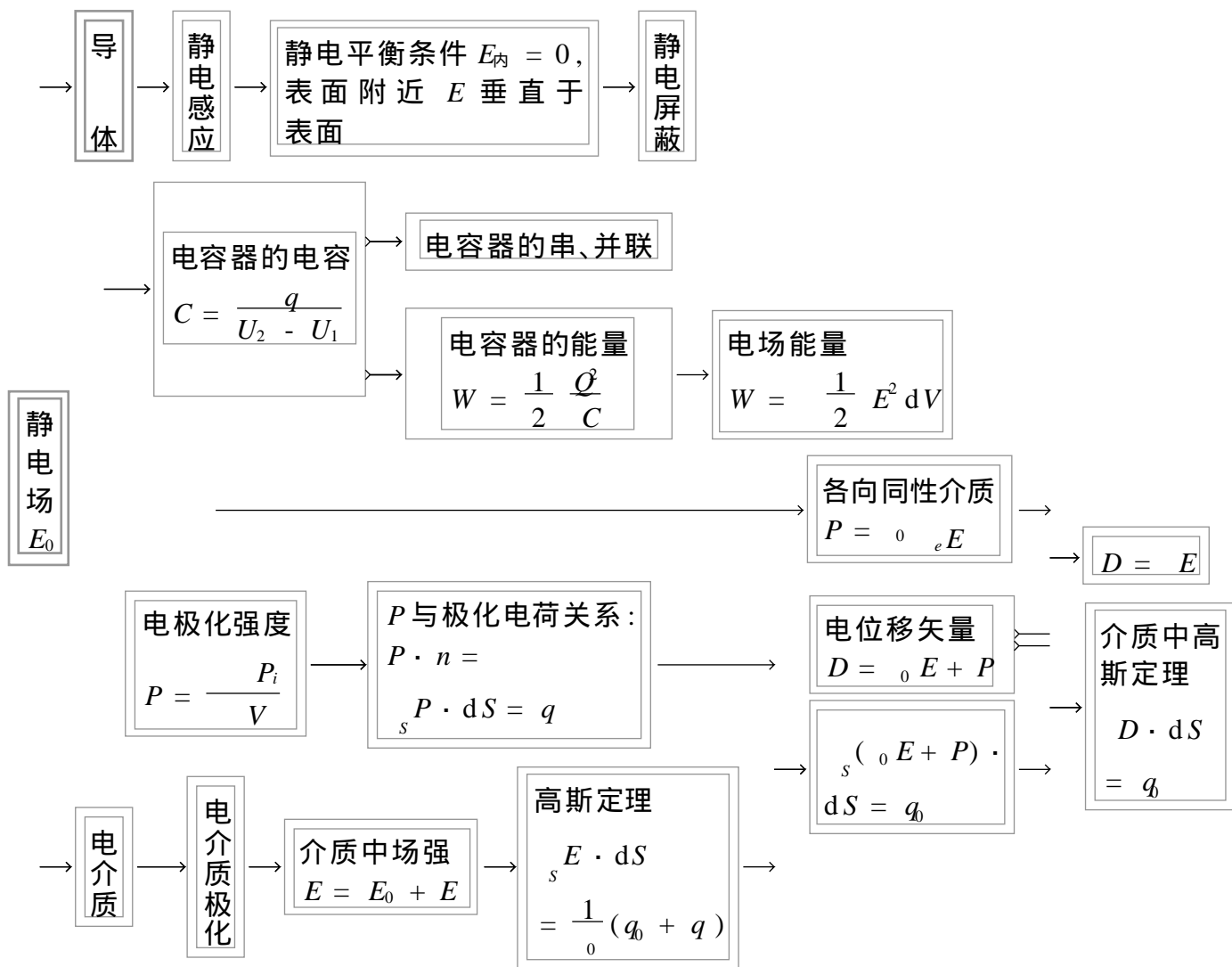


图 9-1

9.2 阅读指导与问题讨论

1. 正确理解导体的静电平衡条件

导体的静电平衡条件 ($E_{内} = 0$, $E_{表}$ 表面) 是处理有导体时静电场问题的出发点. 在理解导体的静电平衡条件时应注意以下两点.

(1) 静电平衡时导体内部场强为零是导体和静电场相互作用的结果, 是场源自由电荷和感应电荷在导体内部的场强叠加的结果, 即导体内部的合场强 $E_{内} = E_0 + E = 0$.

(2) 电荷分布对电场分布起着调节作用, 静电平衡时 $E_{内} = 0$ 是电荷的适当分布来保证的. 场源自由电荷的电场使导体上出现了感应电荷, 感应电荷所产生的附加电场使空间的电场分布发生了变化, 而电场分布的变化反过来又引起电荷分布的变化. 电场和电荷相互作用, 相互影响, 最后达到两者平衡分布, 即电荷

分布总要调节到使导体内部的场强处处为零为止。

2. 正确理解静电平衡条件下导体的特性

由导体静电平衡条件及高斯定理可得出静电平衡下导体的三个特性：

- (1) 导体内部的电势处处等于导体表面的电势，即整个导体是个等势体，导体表面是个等势面。
- (2) 导体内部没有净电荷，净电荷只分布在导体的表面上。
- (3) 导体表面各处的电荷面密度与当地表面附近的场强大小成正比。即

$$E_{表} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

应该指出的是，上式中的 $E_{表}$ 是导体表面附近某场点 P 的场强，是 P 点邻近导体表面电荷的面密度，但这并不意味着公式中的 $E_{表}$ 仅由 P 点邻近处的导体表面电荷所产生，实际上公式中的 $E_{表}$ 是总场强，是电场空间内所有电荷（包括导体上的电荷和导体外的其他电荷）产生的合场强，是所有电荷总贡献的结果。

3. 导体空腔的静电特性

导体空腔除了具有一般导体所具有的静电特性以外，它还具有某些特殊性质，这些性质在理论研究和技术应用上都具有很重要的意义，现将导体空腔的静电特性列表如下：

	电荷分布	场强分布	电势分布
腔内无带电体	空腔内表面处处无电荷，电荷只能分布在导体外表面	腔内无电场	腔内空间是个等势区，其电势与导体壳的电势相同
腔内有带电体	空腔内表面所带电荷与腔内带电体的电荷等量异号，其分布与腔内带电体的位置及空腔内表面的形状有关	腔内有电场； 腔内电荷与空腔内表面所带电荷在腔外产生的合场强为零； 腔外电荷与空腔外表面所带电荷在腔内产生的合场强为零	腔内是非等势区； 腔内任意两点的电势差仅由腔内电荷及空腔内表面电荷决定，不受腔外电荷影响

[问题 9-1] 有同学认为：对于导体表面附近某点 P 的场强来说，由于场点紧靠导体表面，所以可以把 P 点所对的这块表面 S 看作无限大带电平面，而无限大均匀带电平面的场强为 $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ，与公式 $E_{表} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ 相差一倍，这岂不矛盾。

[解答] 其实公式 $E_{表} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ 与无限大均匀带电平面的场强 $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ 并不矛盾。关键是 $E_{表}$ 是总场

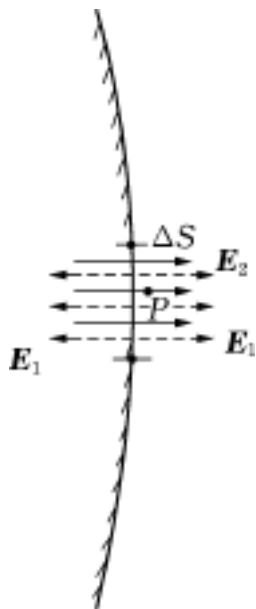


图 9-2

强,是两部分场强的叠加:一部分是 P 点所在部分导体表面 S 所带电荷在 P 点处所产生的场强 E_1 (图 9-2 中虚线所示),其值为 $E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. 另一部分是除 S 外导体上其余所有电荷连同导体外的电荷在 P 点所产生的场强 E_2 (图 9-2 中实线所示) 由于 S 为一小面元,故 E_2 在 P 点附近可以看作均匀场,又根据导体的静电平衡条件,在导体内部, $E_1 + E_2 = 0$ (E_1 与 E_2 反向),由此可知 $E_2 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. 在导体外部 $E_{\text{表}} = E_1 + E_2$, 由于 E_1 与 E_2 同向,所以 $E_{\text{表}} = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. 由此可见,导体表面附近的场强 $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ 与无限大均匀带电平面的场强 $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$,二者并无矛盾.

[问题 9-2] 有人说:如图 9-3 所示,在带电体 A 附近的导体 B 右端接地后,电荷 $+q$ 将沿接地导线跑到地下,而其余各处电荷分布不变 这种说法对吗?

[解答] 不对. 导体 B 未接地前,由于静电感应设其带电 $\pm q$,且 $+Q, \pm q$ 的分布状态必须保证导体 B 内的场强 $E = 0$, 若将导体 B 接地,其上应带负电荷 $-q$,且 $+Q, -q$ 的分布也要保证 B 内的场强为零. 若只是 $+q$ 入地, $-q$ 分布不变,就不可能保证 B 内场强为零.

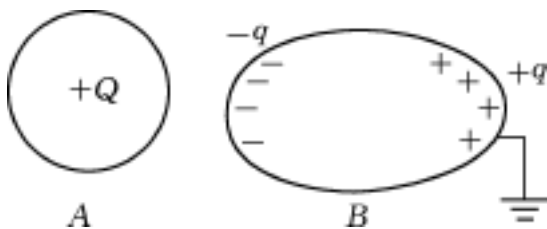


图 9-3

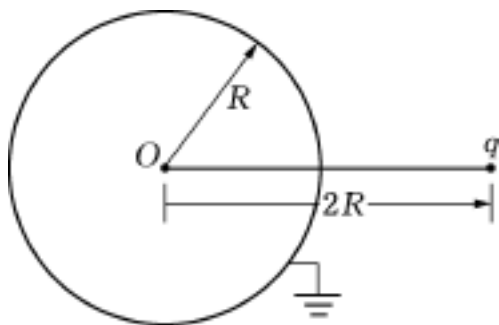


图 9-4

[问题 9-3] 在一接地的导体球附近,有一个电量为 q 的电荷,已知球的半径为 R ,点电荷与球心的距离为 $2R$,如图 9-4 所示. 试问:(1)如何确定导体球表面的感应电荷?(2)如何确定感应电荷在球心处产生的场强?

[解答] (1) 设接地导体球表面的感应电荷 q . 由于静电平衡时,导体是等势体,故导体球的电势等于其球心处的电势. 我们选取导体球上的特殊点——球心 O ,很容易根据电势的叠加原理,写出该点的电势表示式

$$U_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (2R)}$$

这为确定感应电荷 q 提供了捷径. 又因导体接地,故其电势为零. 即

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (2R)} = 0$$

所以得此时导体表面的感应电荷为

$$q = -\frac{q}{2}$$

(2) 由于导体球表面的感应电荷分布是不均匀的,且其分布规律不易找出 所以要用求场强的三种方法来确定感应电荷 q 在球心处产生的电场强度是困难的.但根据场的叠加原理,球心处的场强应是电感电荷 q 和点电荷共同产生的,即

$$E_0 = E_{\text{感}} + E_q$$

式中 $E_{\text{感}}$ 和 E_q 分别表示感应电荷 q 和点电荷 q 在球心 O 处产生的场强.

由静电平衡的条件可知,导体内各处场强均为零,所以很容易得到

$$E_{\text{感}} = - E_q$$

而

$$E_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(2R)^2}$$

所以

$$E_{\text{感}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(2R)^2} = \frac{q}{16\pi\epsilon_0 R^2}$$

方向和点电荷在球心 O 处产生的场强相反,即从 O 指向 q .

4. 电位移矢量及其与电场强度的关系

外电场 E_0 与电介质相互作用,引起电介质的极化,出现极化电荷,极化电荷在空间激发附加电场 E ,因此空间任一点总电场强度 $E = E_0 + E$.要求得 E ,就必须知道自由电荷和极化电荷的分布.极化电荷的分布取决于极化强度 P ($= P\cos\theta$) 和电介质的形状, P 又取决于总电场强度 E ,而 E 又受 E 的影响, E 又与极化电荷的分布有关.这些量形成循环的依赖关系,致使求 E 变得很繁琐,有时甚至无法求解.为了克服这一困难,引入描写电场的辅助矢量电位移 D ,从而使 E 的计算大大简化.

电位移的定义式

$$D = \epsilon_0 E + P \quad (1)$$

是电位移 D 、电场强度 E 和极化强度 P 三个矢量的一般关系,是普遍成立的,对于各向同性电介质(沿电介质各个方向的电学性质都相同)和各向异性电介质都适合.

真空中, $P = 0$, 有

$$D = \epsilon_0 E \quad (2)$$

式(2)表明,真空中的电位移等于真空中电场强度的 ϵ_0 倍.

对于各向同性电介质, $P = \epsilon_0 E$, 将此关系式代入式(1)可得

$$D = \epsilon_0 E + \epsilon_0 E = (1 + \epsilon_0) \epsilon_0 E = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon E \quad (3)$$

式(3)表明,在各向同性电介质中某一点的 D 与该点的 E 成正比,且方向相同.

即 D 与 E 是点对点的关系。

这样对于某些对称性电场,我们就可先由电介质中的高斯定理 $\oint_S D \cdot dS = q$ 求解电介质中 D 的分布,再由式(3)求出电介质中 E 的分布。

当相对介电常数为 ϵ_r 的各向同性均匀电介质充满整个电场时,根据电介质中的高斯定理和式(3)有

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{\epsilon_r} q \right] = \frac{1}{\epsilon_r} \left[\frac{1}{\epsilon_0} q \right] = \frac{1}{\epsilon_r} \left[\oint_S E_0 \cdot dS \right]$$

可见,充满整个电场的各向同性均匀电介质对电场的影响,相当于使电介质中的电场强度减弱为真空时电场强度的 $\frac{1}{\epsilon_r}$ 分之一。即

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r} \quad (4)$$

将式(4)代入式(3)得

$$D = \epsilon_0 E \quad (5)$$

式(5)表明,当各向同性均匀电介质充满整个空间时,电位移 D 等于真空中电场强度 E_0 的 ϵ_0 倍。式(4)和式(5)是常见的两个公式,并可证明这两个公式在各向同性均匀电介质虽未充满整个电场所在空间,但电介质的分界面是等势面的条件下也成立。

上面讨论了电位移 D 与电场强度 E 的四个关系,即式(1)、式(2)、式(3)及式(5),在应用时要特别注意它们各自成立的条件。

最后还需指出的是,式(3)表明,在一般情况下,电位移 D 不仅与自由电荷有关,而且也与极化电荷有关,因为电场强度 E 是由自由电荷和极化电荷共同激发的。而只有在式(5)成立的条件下,电位移 D 才只与自由电荷有关。

[问题 9-4] 一平行电容器接在电源上,当两板间未插入介质时,两板间的场强为 E_0 ,如不断电源,在两极板间平行地插入厚为 $\frac{1}{3}d$ 的介质板(介质的相对介电常数 $\epsilon_r = 2$),如图 9-5 所示。试问介质中 A 点的场强 E_A 是否能用

$$E_A = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{E_0}{2}$$

来求得?

[解答] 不能用。因为只有当插入介质,电容器极板上的电量不变时, $E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$ 才成立。而本题是接通电源插入介质的。所以插入介质前后电容器两极板间的电压不变,而极板上的电量是改变的。插入介质后两极板间真空

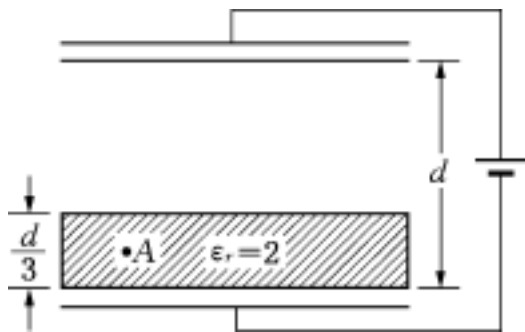


图 9-5

中的场强已不是 E_0 了 .

设插入介质后,两极板间真空中的场强为 E_0 ,则介质中的场强为 $\frac{E_0}{r}$,由于插入介质前后两极板间电压不变,则有

$$E_0 \cdot \frac{2}{3}d + \frac{E_0}{2} \cdot \frac{d}{3} = E_0 d$$

解得
$$E_0 = \frac{6}{5} E_0$$

因此
$$E_A = \frac{E_0}{r} = \frac{E_0}{2} = \frac{3}{5} E_0$$

[问题 9-5] 将平行板电容器充电后再断开电源,然后插入一块介质,如图 9-6 所示 .试比较:

- (1) 插入介质前后电容器两极板间的电压 U_0 和 U 的大小 .
- (2) 插入介质前后电容器内 A 点的场强 E_A 和 E_A 的大小 .
- (3) 插入介质后真空中 A 点和介质中 B 点的电位移矢量 D_A 和 D_B 的大小 .

[解答] (1) 因为是断开电源插入介质,所以插入介质前后电容器极板上的电量不变,但插入介质后电容器的电容值增加了 .设插入介质前后两板间的电容值分别为 C_0 和 C ,则

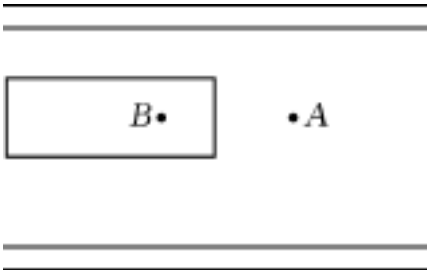


图 9-6

$$U = \frac{q}{C}, U_0 = \frac{q}{C_0}$$

因 $C > C_0$,故 $U < U_0$.

(2) 因插入介质后,电容器极板上总电量不变,但由于介质插在电容器的左边,这使电容器左边的电容值增加了,所以极板上左侧的电荷面密度 σ_B 比右侧的电荷面密度 σ_A 大 这样必导致 $\sigma_A < \sigma_B$ (σ_B 为未插介质时,极板上的电荷面密度) .由此可知, $E_A < E_B$.

(3) 因为平板电容器内各点的电位移矢量等于极板上的自由电荷面密度,由于插入介质后 $\sigma_B > \sigma_A$, 所以有 $D_B > D_A$.

[问题 9-6] 由平行板电容器的电容公式 $\left[C = \frac{S}{d} \right]$ 可知,板间距离越小,电容越大 .当 $d \rightarrow 0$ 时, $C \rightarrow \infty$.在实际生产中,为何不能用无限减小板间距离的办法来制造容量很大的电容器 ?

[解答] 对于电容器来说,其耐压值(额定电压 U_m)是确定的,即工作时极板间场强 $\left[\text{额定工作场强 } E_m = \frac{U_m}{d} \right]$ 也是确定的;电容器极板间电介质也是确定的,故其击穿电压 $\left[\text{击穿场强 } E_g = \frac{U_g}{d} \right]$ 也是确定的,为使电容器安全工作(不被击穿,不产生电弧,就必须保证 $E_m < E_g$ $= \frac{U_g}{d}$.由上述可知当 $d \rightarrow 0$ 时, $E_m \rightarrow \infty$.而任何电介质的击穿电压(击穿场强)都为有限值 这样就会造成电容器被击穿,所以不可能用 $d \rightarrow 0$ 的方法来制造容量很大的电容器 .

9.3 解题方法与典型例题

1. 电场中有导体存在时场强 E 和电势 U 的计算

解决有导体存在时的静电场问题,首先要确定电荷分布,其基本出发点就是导体的静电平衡条件、静电场的基本规律和电荷守恒定律.知道了电荷分布,场强分布和电势分布就可以按前所述方法进行处理.

2. 求电容器的电容

求电容的步骤一般分三步:

(1) 确定电容器两极板间场强分布;

(2) 由 $U_A - U_B = \int_A^B E \cdot dl$ 求两极板间的电势差;

(3) 由电容器电容的定义式 $C = \frac{q}{U_A - U_B}$ 求电容器的电容值.

对多个电容器的组合,可把它们看为几个电容器的并联或串联,并画出其等效电路.根据电容器串、并联的特点进行计算.

3. 电场中有电介质存在时场强 E 和电势 U 的计算

(1) 求场强

运用公式 $E = E_0 + E$.这种方法求场强的缺点是 E 不容易求得,因为它与极化电荷的分布有关,而求极化电荷的分布是比较困难的.

用介质中的高斯定理 $D \cdot dS = q_0$, 先求 D ,再用 $E = \frac{D}{\epsilon}$ 求出 E .用这种方法求场强不用考虑极化电荷,计算很方便,但只有当电场分布具有球、轴、面对称时,才能应用.

(2) 求电势

有介质存在时,由于计算极化电荷是不方便的,所以求电势时一般不用叠加法,常用电势的定义 $U_P = \int_P E \cdot dl$ 来计算.

4. 电场能量的计算

(1) 均匀电场 $W = \frac{1}{2} E^2 V = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} V$

$$(2) \text{ 非均匀电场 } W = \int_V \frac{1}{2} E^2 dV = \int_V \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} dV$$

$$(3) \text{ 电容器的能量 } W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU$$

[例 9-1] 如图 9-6 所示, 金属球 A 内有两个球形空腔, 两空腔球心相距为 a 。此金属球整体上不带电。在两空腔中心分别放一点电荷 q_1 及 q_2 , 此时金属球上的电荷如何分布? 若再在 q_1, q_2 连线的延长线上放一点电荷 q_3 , q_3 到 q_2 的距离为 b 达到静电平衡后, A 上的电荷分布是否改变? 并求以下各力的大小和方向:

- (1) q_1 给 q_2 的力;
- (2) q_1 给 q_3 的力;
- (3) q_1 受到的合力;
- (4) A 给 q_1 的力。

[解] 当 q_3 不存在时, 导体的两个球形空腔的内表面所带电荷分别为 $-q_1$ 和 $-q_2$, A 的外表面所带电荷为 $(q_1 + q_2)$, 这三部分电荷都呈均匀分布。当放入 q_3 且达到静电平衡后, 从静电屏蔽效应可知, $-q_1$ 和 $-q_2$ 仍呈均匀分布, 但 A 的外表面电荷分布则不再均匀。

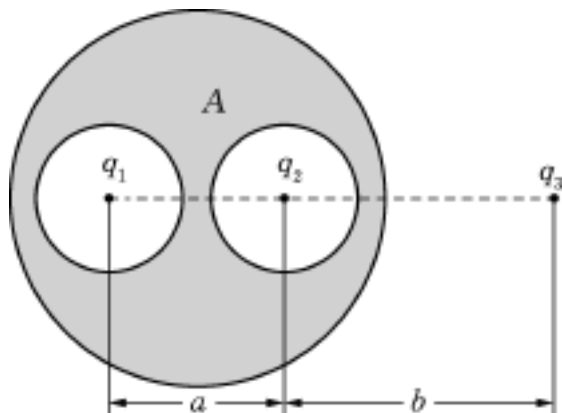


图 9-6

- (1) q_1 在 q_2 所在处产生电场, 其场强为

$$E_{12} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

则 q_1 给 q_2 的作用力为

$$F_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 a^2}, \text{ 方向向右;}$$

- (2) 同理可知, q_1 给 q_3 的作用力

$$F_{13} = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 (a+b)^2}, \text{ 方向向右;}$$

(3) q_1 所受的合力为五部分电荷 [$-q_1$, q_2 , $-q_2$, q_3 , A 球的外表面电荷 $(q_1 + q_2)$] 对它的作用力的矢量和。根据导体空腔的静电特性可知: q_2 和 $-q_2$ 在 q_1 处的合场强为零, q_3 和 $(q_1 + q_2)$ 在 q_1 处的合场强也为零, 又 $-q_1$ 在 q_1 处的场强还是零。所以这五部分电荷在 q_1 处的总场强为零, 故 q_1 所受到的合力为零。

(4) A 球上所带电荷有三部分, 即 $-q_1$, $-q_2$ 以及 A 的外表面电荷 $(q_1 + q_2)$ 。由上述分析可知, $-q_1$ 给 q_1 的作用力为零。 $-q_2$ 与 q_2 在 q_1 处的电场相消, 所以 $-q_2$ 给 q_1 的作用力应与 q_2 给 q_1 的作用力相等反向, 因此 $-q_2$ 给 q_1 的作用力为

$$F_{21} = F_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 a^2}, \text{ 方向向右;}$$

同样可知, $(q_1 + q_2)$ 给 q_1 的作用力应与 q_3 给 q_1 的作用力相等反向, 故 $(q_1 + q_2)$ 给 q_1 的作用力为

$$F_{31} = F_{13} = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 (a+b)^2}, \text{ 方向向右;}$$

由此可知, A 球上所带电荷给 q_1 的作用力为

$$F_{A1} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_2}{a^2} + \frac{q_3}{(a+b)^2} \right], \text{方向向右}.$$

读者可自行再分析 A 所受的合力.

[例 9-2] 已知导体球, 半径为 R_1 , 带电量为 q . 一导体球壳与球同心, 内外半径分别为 R_2 和 R_3 , 带电量为 Q 求

- (1) 场强的分布;
- (2) 球和球壳的电势 U_1 和 U_2 以及它们的电势差;
- (3) 若将内球接地后内球带的电量.

[解] (1) 要求场强的分布, 先得确定电荷的分布. 因球表面带电量为 q , 由高斯定理可知, 球壳内表面的感应电荷为 $-q$; 又因球壳本身带电量为 Q , 根据电荷守恒定律, 球壳外表面带电量为 $q+Q$, 如图 9-7 所示. 下面用两种方法求此带电系统的场强分布.

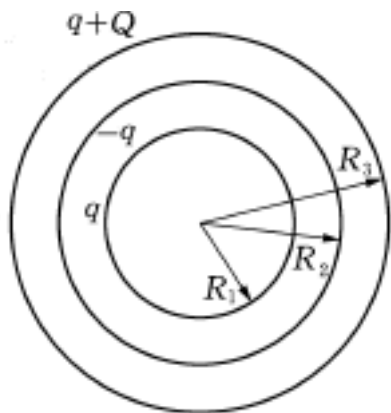


图 9-7

方法一: 用高斯定理求解

取同心球面为高斯面;

当 $r < R_1$ 时, 因为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

所以 $E \cdot 4\pi r^2 = 0$, 即 $E = 0$

当 $R_1 < r < R_2$ 时, 因为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

所以 $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$, 得 $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

当 $R_2 < r < R_3$ 时

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q - q}{\epsilon_0}$$

所以 $E \cdot 4\pi r^2 = 0$, 得 $E = 0$

当 $r > R_3$ 时

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q + Q}{\epsilon_0}$$

所以 $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q + Q}{\epsilon_0}$, 得 $E = \frac{q + Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

方法二: 利用场的叠加原理求解

空间任一点的场强都可以看作三个带电量分别为 q 、 $-q$ 和 $q+Q$ 的均匀带电球面在该点产生的场强的矢量和. 设这三个均匀带电球面产生的场强大小分别为 E_1 、 E_2 和 E_3 .

其中

$$E_1 = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} & r > R_1 \end{cases}$$
$$E_2 = \begin{cases} 0 & r < R_2 \\ - \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} & r > R_2 \end{cases}$$
$$E_3 = \begin{cases} 0 & r < R_3 \\ \frac{q+Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} & r > R_3 \end{cases}$$

根据场的叠加原理,空间任一点的总场强

$$E = E_1 + E_2 + E_3$$

故得总场强大小分布为

$$E = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & R_2 < r < R_3 \\ \frac{q+Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} & r > R_3 \end{cases}$$

(2) 求球体和球壳的电势及它们的电势差

方法一:用电势定义式计算

设球的电势为 U_1 ,则

$$U_1 = \int_R E \cdot dl = \int_R \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} dr + \int_R 0 \cdot dr + \int_R \frac{q+Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} dr$$
$$= \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] + \frac{q+Q}{4 \pi \epsilon_0 R_3}$$

设球壳的电势为 U_2 ,则

$$U_2 = \int_R E \cdot dl = \int_R \frac{q+Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} dr = \frac{q+Q}{4 \pi \epsilon_0 R_3}$$

球与球壳的电势差:

$$U = U_1 - U_2 = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

方法二:用电势叠加原理计算

空间任一点的电势都可以看为这三个均匀带电球面在该点产生的电势的代数和 利用均匀带电球面产生电势的公式

$$U = \begin{cases} \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 R} & r < R \\ \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r} & r > R \end{cases}$$

可得到

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] + \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$U_2 = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$U = U_1 - U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

(3) 设内球接地后带电 q , 则球壳内表面带电 $-q$, 外表面带电 $Q+q$. 三个带电球面在内球产生的电势的代数和应为零. 即

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 0$$

可得

$$q = \frac{QR_1 R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_1 R_3}$$

上述结果说明导体接地时, 其电荷未必是零. 导体接地时唯一可以确定的条件是它的电势为零.

[例 9-3] 一电容器两极板都是边长为 a 的正方形金属板. 但两板非严格平行, 其夹角为 θ . 证明当

$\frac{d}{a}$ (d 为两板间最小距离) 时, 略去边缘效应, 它的电容应是

$$C = \frac{\epsilon_0 a^2}{d} \left[1 - \frac{a}{2d} \right]$$

证明: 由于这电容器的两极板不严格平行, 所以不能直接应用平行板电容器电容公式. 但我们可将电容器看成由无限多个极板为细狭条的元电容器并联而成, 而每个元电容器可认为是平行板电容器如图 9-8 所示. 该元电容器极板面积为 $dS = a dx$, 板间距离为 $d = d + x \sin \theta$, 其元电容器的电容

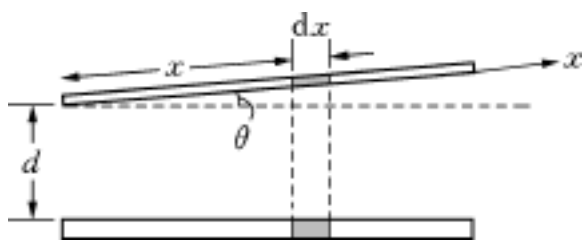


图 9-8

$$dC = \frac{\epsilon_0 a dx}{d + x \sin \theta} = \frac{\epsilon_0 a dx}{d + x}$$

则总电容

$$C = \int dC = \int_0^a \frac{\epsilon_0 a dx}{d + x} = \epsilon_0 a \ln \left[1 + \frac{d}{a} \right]$$

因 $\frac{d}{a} \ll 1$, 将对数按泰勒级数展开, 得

$$\ln \left[1 + \frac{a}{d} \right] = \frac{a}{d} - \frac{1}{2} \left[\frac{a}{d} \right]^2 + \dots$$

取前两项得

$$\begin{aligned} C &= \epsilon_0 a \left[\frac{a}{d} - \frac{1}{2} \left[\frac{a}{d} \right]^2 \right] \\ &= \epsilon_0 \frac{a^2}{d} \left[1 - \frac{a}{2d} \right] \end{aligned}$$

[例 9-4] 有两个半径分别为 R_1 和 R_2 的同心金属球壳,内球壳带电量为 Q ,紧靠其外面包一层半径为 R 、相对介电常数为 ϵ_r 的介质.外球壳接地,如图 9-9 所示.

- 求: (1) 两球壳间的场强分布;
(2) 两球壳的电势差;
(3) 两球壳构成的电容器的电容值;
(4) 两球壳间的电场能量;
(5) 介质内、外表面的极化电荷的面密度.

[解] (1) 两球壳间的场强分布:

因为电荷分布是球对称的,而介质表面又是与带电球同心的球面,因而不会破坏电场分布的球对称性,所以可用介质中的高斯定理求场强的分布.

设介质内,即 $R_1 < r < R$ 范围内,电位移矢量为 D_1 ,电场强度为 E_1 ,由介质中高斯定理

$$\oint_S D_1 \cdot dS = Q$$

即

$$D_1 \cdot 4\pi r^2 = Q$$

得

$$D_1 = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{D_1}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2}$$

设介质外,即 $R < r < R_2$ 范围内,电位移矢量为 D_2 ,电场强度为 E_2 ,由介质中的高斯定理

$$\oint_{S_2} D_2 \cdot dS = Q$$

即

$$D_2 \cdot 4\pi r^2 = Q$$

得

$$D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

因此,在两金属球壳之间,场强的分布为

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} & R_1 < r < R \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} & R < r < R_2 \end{cases}$$

(2) 两球壳的电势差:

$$U_1 - U_2 = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dl = \int_{R_1}^R E_1 \cdot dl + \int_R^{R_2} E_2 \cdot dl$$

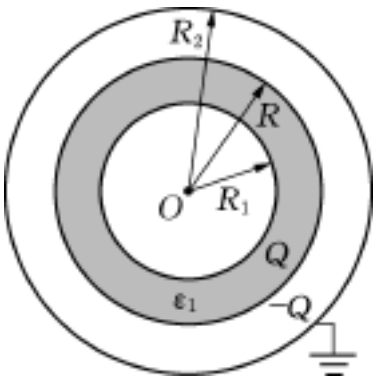


图 9-9

$$\begin{aligned}
 &= \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_R^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \right]
 \end{aligned}$$

(3) 两球壳构成的电容值:

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{Q}{U_1 - U_2} = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right] + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \right]} \\
 &= \frac{4\pi\epsilon_0 R R_1 R_2}{R_2(R - R_1) + R_1(R_2 - R)}
 \end{aligned}$$

(4) 两球壳间的电场能量:

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{V_1} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_1^2 dV + \int_{V_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_2^2 dV \\
 &= \int_{R_1}^R \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right]^2 \cdot 4\pi r^2 dr + \int_R^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right]^2 \cdot 4\pi r^2 dr \\
 &= \int_R^{\infty} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_R^{R_2} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr \\
 &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right] + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \right]
 \end{aligned}$$

也可以用电容器能量公式计算

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right] + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \right]$$

(5) 介质内、外表面的极化电荷面密度:

$$= P \cdot n$$

其中

$$\begin{aligned}
 P &= \epsilon_0 E_1 = \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \\
 &= \frac{Q}{4\pi r^2} \left[1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right]
 \end{aligned}$$

所以

$$= P \cdot n = \frac{Q}{4\pi r^2} \left[1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right] r^0 \cdot n$$

因介质内表面处, r^0 与 n 反向, 且 $r = R_1$

因此有

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\text{内}} &= \frac{Q}{4\pi R_1^2} \left[1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right] \cos \theta \Big|_{r=R_1} \\
 &= - \frac{Q}{4\pi R_1^2} \left[1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right]
 \end{aligned}$$

而介质外表面处 r^0 与 n 同方向, 且 $r = R$

因此有

$$\begin{aligned} E_{\text{外}} &= \frac{Q}{4\pi r^2} \left[1 - \frac{1}{r} \right] \cos 0^\circ \Big|_{r=R} \\ &= \frac{Q}{4\pi R^2} \left[1 - \frac{1}{R} \right] \end{aligned}$$

9.4 自测练习与能力训练

9.4.1 选择题

1. 如图 9-10 所示,点电荷 $+Q$ 位于金属球壳的中心,球壳的内、外半径分别为 R_1 、 R_2 ,所带净电荷为零.设无限远处为电势的零点,下面的说法中正确的是[].
- (A) 如果移去球壳, B 点电势增加
 - (B) 如果移去球壳, B 点的电场强度增加
 - (C) 如果移去球壳, A 点电势增加
 - (D) 如果移去球壳, A 点的电场强度增加

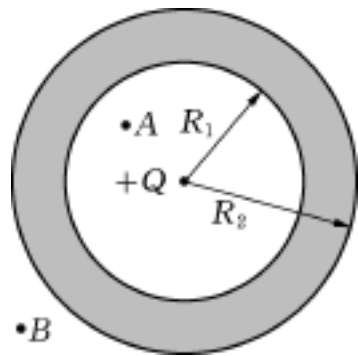


图 9-10

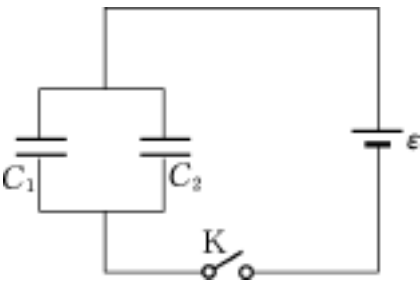


图 9-11

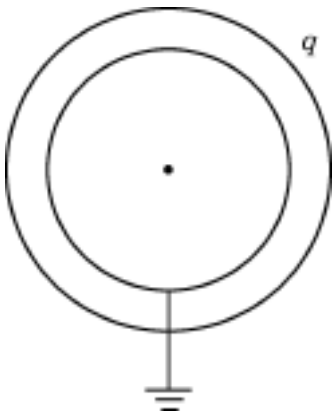


图 9-12

2. 两个一样的真空电容器 C_1 和 C_2 如图 9-11 连接.电源 对电容器充电后,即断开电键 K ,然后在 C_1 两极板间充满电介质,则 C_1 两极板上所带电量和两极板间的电场强度的变化为[].
- (A) 电量变小,场强变大
 - (B) 电量变大,场强变小
 - (C) 电量变大,场强变大
 - (D) 电量变小,场强变小
3. 如图 9-12 所示,两同心金属球壳,它们离地球很远.如果外球壳上带正电 q ,当内球壳用细导线穿过外球壳上的绝缘小孔与地连接,则内球壳[].
- (A) 不带电荷
 - (B) 带正电荷
 - (C) 带负电荷
 - (D) 球壳外表面带负电荷,内表面带等量正电荷

4. 真空中有两块面积相同的金属平板, 甲板带电 $+q_1$, 乙板带电 $+q_2$ 现使两板相距很近, 并平行放置, 若把乙板接地, 则两板间的电场强度的大小应为[] .

(A) $\frac{q_1}{2\epsilon_0 S}$

(B) $\frac{q_1 - q_2}{2\epsilon_0 S}$

(C) $\frac{q_1}{\epsilon_0 S}$

(D) $\frac{q_1 + q_2}{2\epsilon_0 S}$

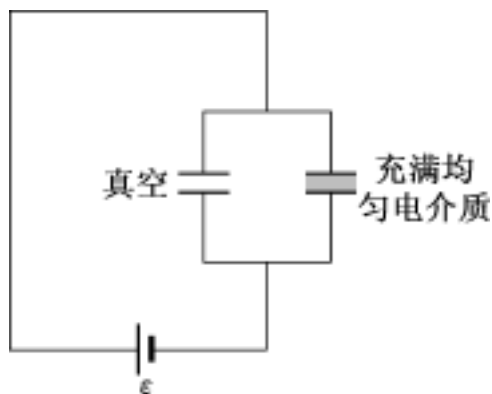


图 9-13

5. 如图 9-13 所示, 两平行板电容器的面积 S , 距离 d 均相等, 则两者相同的量是[] .

(A) 场强 E

(B) 电位移 D

(C) 电场能量 W_e

(D) 电量 Q

6. 在半径为 R 、带电量为 q 的金属球壳内充有相对介电常数为 ϵ_1 的介质, 在球壳外充满相对介电常数为 ϵ_2 的介质, 则球壳内的一点 A

(离球心为 r) 处的电势为[] .

(A) $\frac{q}{4\epsilon_0\epsilon_2 R}$

(B) $\frac{q}{4\epsilon_0\epsilon_1 R}$

(C) $\frac{q}{4\epsilon_0\epsilon_2 r}$

(D) $\frac{q}{4\epsilon_0\epsilon_2} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right]$

7. 一空腔导体, 在腔内有电荷 $+q_1$, 腔外有电荷 $+q_2$, 如图 9-14 所示. 关于“静电屏蔽”正确的说法是[] .

(A) 导体不接地时, 腔外电荷对腔内的场强有影响

(B) 导体不接地时, 腔内电荷对腔外的场强有影响

(C) 导体接地时, 腔外电荷对腔内的场强有影响

(D) 导体接地时, 腔内电荷对腔外的场强有影响

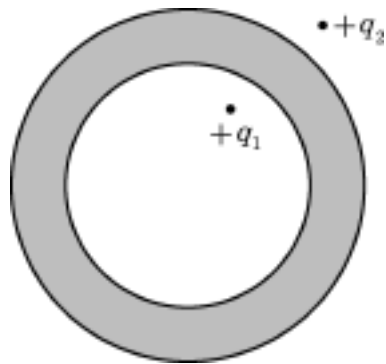


图 9-14

8. 关于静电场中的电位移线, 下列说法中, 正确的是[] .

(A) 起自正电荷、止于负电荷, 不形成闭合线, 不中断

(B) 任何两条电位移线互相平行

(C) 起自正自由电荷, 止于负自由电荷, 任何两条电位移线在无自由电荷的空间不相交

(D) 电位移线只出现在有电介质的空间

9. 在平板电容器中充满各向同性的均匀介质,当电容器充电后,介质中 D 、 E 、 P 三矢量的方向将是 [] .

- (A) D 与 E 方向一致,与 P 方向相反
- (B) D 与 E 方向相反,与 P 方向一致
- (C) D 、 E 、 P 三者方向相同
- (D) E 与 P 方向一致,与 D 方向相反

10. 如图 9-15 所示,三个无限长、半径分别为 a 、 b 和 c 的同轴导体圆柱面. A 和 C 接地, B 带电量为 Q ,若忽略边缘效应,则 B 的内表面的电荷 Q 和外表面的电荷 Q 之比值,即 $\frac{Q_{\text{内}}}{Q_{\text{外}}}$ 为 [] .

- (A) 0
- (B) 1
- (C) $\ln \frac{b}{a} / \ln \frac{c}{b}$
- (D) $\ln \frac{c}{b} / \ln \frac{b}{a}$

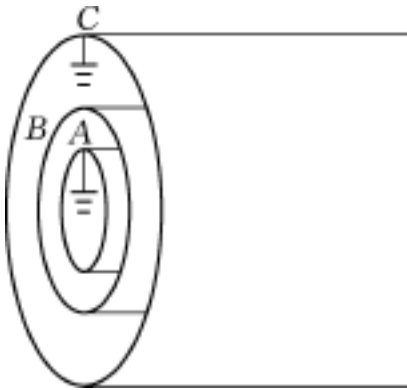


图 9-15

9 4 2 填充题

1. 如图 9-16 所示,将面密度为 $+\sigma$ 的均匀带电的无限大平面 B 移近不带电的无限大平行导体板 A.当 A 板达到静电平衡后,在靠近 A 板右侧一点的 P 点场强大小为_____ .

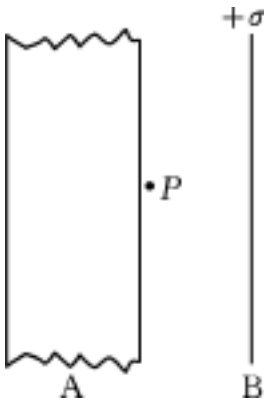


图 9-16

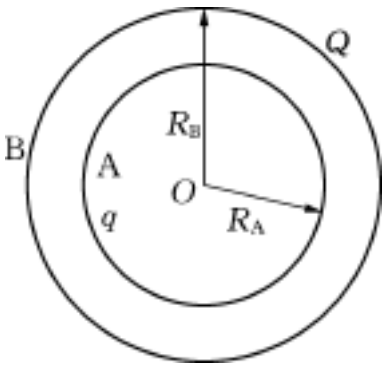


图 9-17

2. 如图 9-17 所示,导体球 A 与导体球壳 B 同心放置,半径分别为 R_A 、 R_B , 分别带电量 q 、 Q ,则内球 A 的电势为_____ ;若把内球接地,则内球带电量 q_A =_____ .

3. 在不带电的内外半径分别为 R_1 和 R_2 的球形导体空腔内,球心处放正电

荷 q_1 ,球外放正电荷 q_2 ,如图 9-18 所示 则 q_1 所受的电场力的大小为_____,
导体空腔上感应电荷对 q_1 的作用力大小为_____,方向_____ .

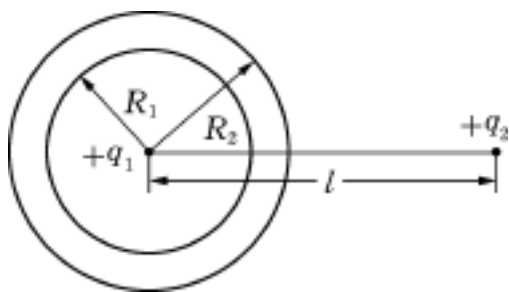


图 9-18

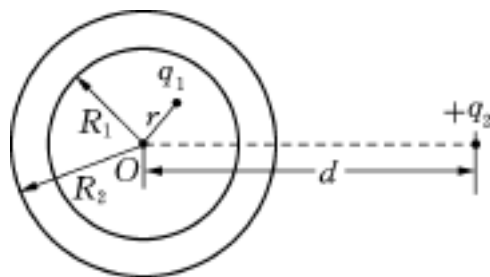


图 9-19

4 . 内、外半径分别为 R_1 和 R_2 的中性导体球壳,在球壳内离球心为 r 处有一点电荷 q_1 ,壳外离球心 O 为 d 处又有一点电荷 q_2 ,如图 9-19 所示 .则在球心 O 处的电势 $U_0 =$ _____ .

5 . 如图 9-20 所示,平行板电容器中充有各向同性的均匀电介质板,图中画出两组带有箭头的线,分别用来表示电场线和电位移线,则其中图 (a) 为_____线,图(b)为_____线 .

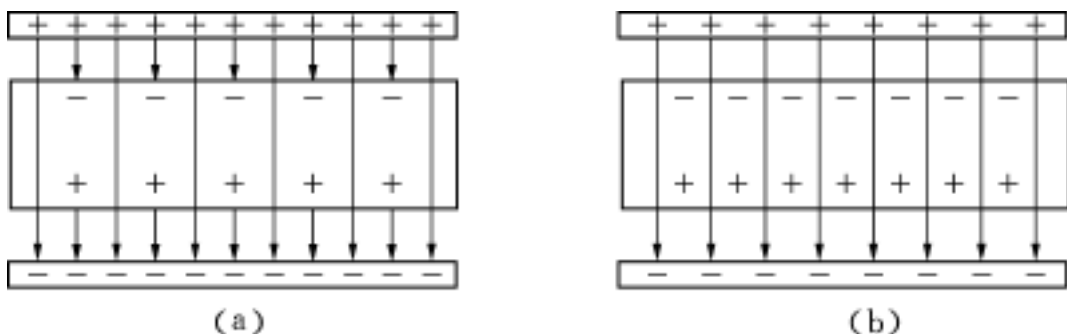


图 9-20

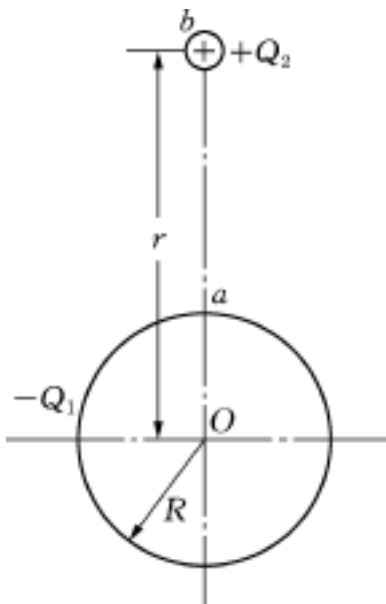


图 9-21

6 . 设有一固定不动、半径为 R 的导体薄球壳,带电量为 $-Q$,在球壳的正上方距球心 O 的距离为 r 的 b 点 ($r = 3R$) 放置一点电荷 $+Q$,如图 9-21 所示,则导体球心处的电势 $U_0 =$ _____;导体球壳面上最高点 a 的电势 $U_a =$ _____ .

7 . 电介质在电容器中的作用是_____和_____ .

8 . 在两极板相距为 d 电容为 C_0 的平板电容器中插入一块厚 $\frac{d}{2}$ 的大平板 .

(1) 若大平板是金属导体,则电容器电容为_____ .

(2) 若大平板是相对介电常数为 ϵ_r 的介质,则电容器电容为_____.

9. 平板电容器两板间的空间(体积为 V)被相对介电常数为 ϵ_r 的绝缘体充填,极板上电荷的面密度为 σ ,则将绝缘体从电容器中取出的过程中外力所做的功 $A =$ _____.

10. 在平行板电容器中放入两种相对介电常数分别为 ϵ_{r1} 和 ϵ_{r2} ($\epsilon_{r2} = 2\epsilon_{r1}$) 的介质.若介质如图 9-22(a)放置,则两种介质中的电场能量密度之比 $w_1 : w_2 =$ _____;若介质如图 9-22(b)放置,则两种介质中电场能量之比 $W_1 : W_2 =$ _____.

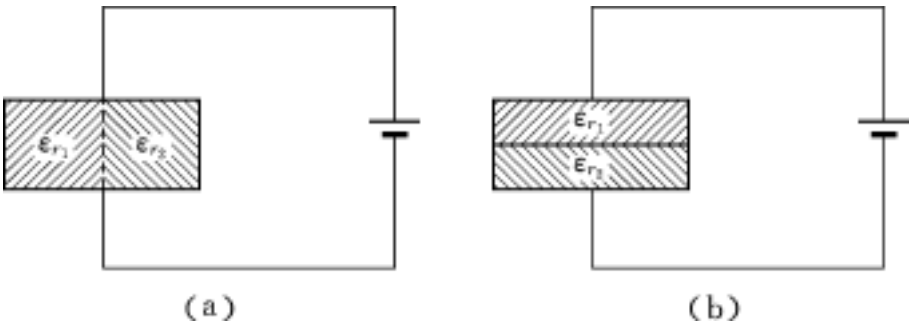


图 9-22

9 4 3 计算题

1. 如图 9-23 所示,在半径为 R 的中性导体球的直径的延长线上放一长为 L 的均匀带电棒,电量为 q .带电棒的一端到球心的距离为 a .试求:
(1) 导体球的电势;
(2) 当导体球接地时,球表面的感应电荷.

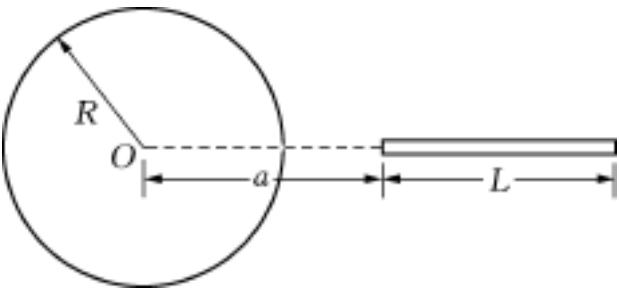


图 9-23

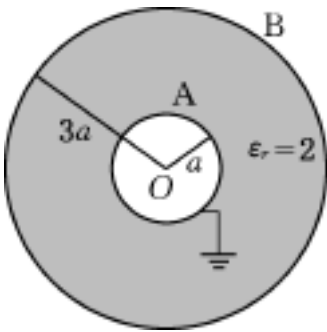


图 9-24

2. 如图 9-24 所示,导体球 A 半径为 a ,导体球壳 B 与导体球 A 同心,半径为 $3a$,带电量为 q .A、B 之间充满相对介电常数 $\epsilon_r = 2$ 的电介质,若把导体球 A 接地,试求:
(1) 导体球 A 上的电量;

- (2) 导体球壳 B 的电势;
- (3) A、B 间的等效电容;
- (4) 带电系统的电场能量.

3. 两个完全相同的电容器, 串联后接在电源上, 电源电压为 U , 如图 9-25 所示. 若在电容器 2 中插入相对介电常数为 ϵ_r 的电介质板, 介质板厚度与电容器两极板的间距相等. 试问在插入介质板后, 电容器 2 极板上的电量、极板间的场强、电势差、电位移矢量和贮存电场能量有什么变化?

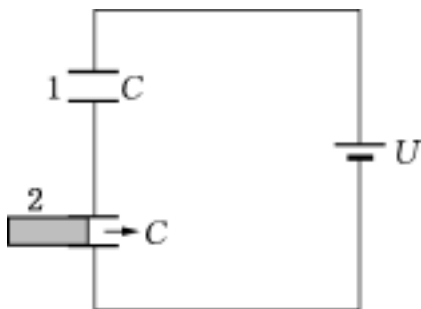


图 9-25

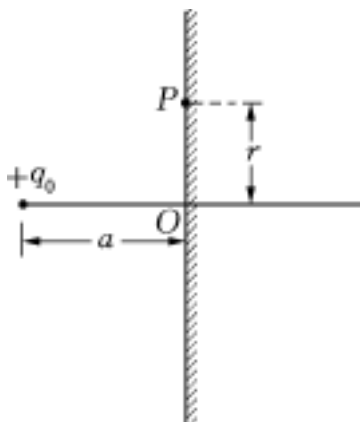


图 9-26

4. 两个半径分别为 a 和 b 的同心金属球壳 ($a < b$) 组成一球形电容器. 两球壳间充以空气, 其击穿场强为 E_0 , 求此电容器能贮存的最大的静电能.

5. 设一导体占有 $x \geq 0$ 的半无限大空间, 在导体左侧, 距离导体表面为 a 处有一点电荷 $+q_0$ (图 9-26).

试求: (1) 距原点 O 为 r 的 P 点处的感应电荷面密度, 导体表面上的感应电荷总电量;

- (2) 导体的电势.

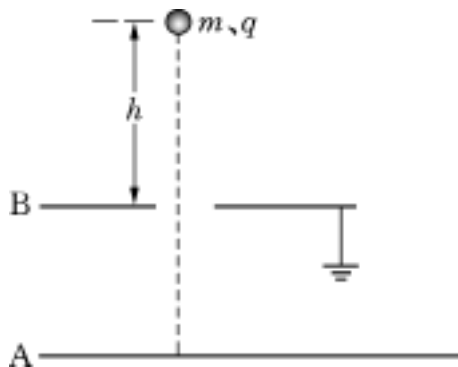


图 9-27

6. 如图 9-27 所示, A 和 B 是两块相同的水平平行金属板, 相距为 d , 构成电容为 C 的平行板电容器. B 板接地, B 板中有一个小孔, 开始时 A 和 B 均不带电. 在 B 板小孔上方 h 处, 不断有带电小液珠从静止开始自由下落 (空气阻力可忽略), 每个液珠的电量为 q , 质量为 m , 液珠经小孔到达 A 板后被吸收, 液珠的下落保持一定的间隙, 即在前一液珠被 A 板吸收并达到静电平衡后, 后一液珠才继续下落. 试问有多少个液珠能落到 A 板上?

习题选解

[选择题 10]提示:三个导体圆柱面构成两个圆形电容器,电容量分别为:

$$C_{BA} = \frac{Q}{U_B - U_A} = 2\pi\epsilon_0 L \ln \frac{b}{a}$$

$$C_{BC} = \frac{Q}{U_B - U_C} = 2\pi\epsilon_0 L \ln \frac{c}{b}$$

且因 A 与 C 均接地,故 $U_B - U_A = U_B - U_C$, 可得 Q 与 Q 之比值.

[填充题 6]提示:(1) 由电势叠加原理可知

$$U_0 = U_+ + U_- = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \left[\frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R} \right] = \frac{Q}{12\pi\epsilon_0 R}$$

(2) 带电球壳处在由 Q 所产生的外电场中,静电平衡时,球壳是等势体,即 $U_a = U_0$

[计算题 2](1) 设导体球 A 上的电量为 q_1 , 在 $a < r < 3a$ 的区域内,作与导体球 A 同心的球面 S_1 为高斯面.用介质中高斯定理

$$\oint_{S_1} D \cdot dS = q_1$$

因电场分布有球对称性

$$\oint_{S_1} D \cdot dS = D \cdot 4\pi r^2$$

所以有

$$D \cdot 4\pi r^2 = q_1, \quad D = \frac{q_1}{4\pi r^2}$$

$$E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{q_1}{8\pi\epsilon_0 r^2}$$

在 $r > 3a$ 区域内,作与球壳 B 同心的球面 S_2 为高斯面,用介质中高斯定理

$$\oint_{S_2} D \cdot dS = q_1 + q_2$$

由电场的球对称性

$$\oint_{S_2} D \cdot dS = D \cdot 4\pi r^2$$

则得

$$4\pi r^2 D = q_1 + q_2 \quad D = \frac{q_1 + q_2}{4\pi r^2}$$

$$E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{q_1 + q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

由电势定义求出导体球 A 的电势

$$\begin{aligned} U_A &= \int_a^{3a} \frac{q_1}{8\pi \epsilon_0 r^2} dr + \int_{3a}^{\infty} \frac{q_1 + q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{q_1}{8\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{3a} \right] + \frac{q_1 + q_2}{12\pi \epsilon_0 a} \end{aligned}$$

因 A 球接地 $U_A = 0$, 即

$$\frac{q_1}{8\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{3a} \right] + \frac{q_1 + q_2}{12\pi \epsilon_0 a} = 0$$

解得

$$q_1 = -\frac{q_2}{2}$$

由此得出球 A 和球壳 B 上的电量分布, 如图 9-28(1) 所示.

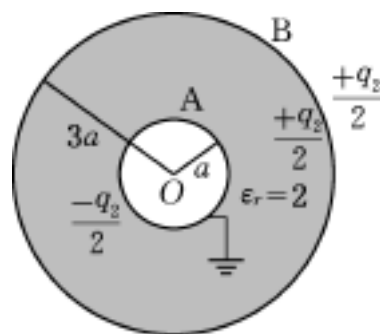


图 9-28(1)

(2) 球壳 B 的电势

由电荷分布可得场强 E 在空间的分布

$$E = \begin{cases} -\frac{q_2}{16\pi \epsilon_0 r^2} & a < r < 3a \\ \frac{q_2}{8\pi \epsilon_0 r^2} & r > 3a \end{cases}$$

因此,

$$U_B = \int_{3a}^{\infty} \frac{q_2}{8\pi \epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_2}{24\pi \epsilon_0 a}$$

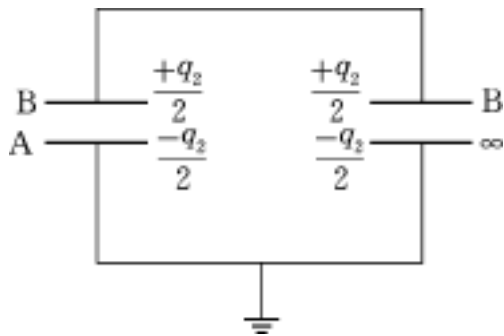


图 9-28(2)

(3) 球 A 和同心球壳 B 的体系包括两个电容: 一个是球 A 和球壳 B 内表面构成的球形电容, 另一个是球壳 B 的外表与无穷远处组成的电容, 相当于一个孤立导体球电容. 因为 A 球接地, 所以 A 球与无穷远处等势. 这两个电容可视为并联, 如图 9-28(2) 所示. 因此 A、B 间等效电容

$$C = C_{AB} + C_B$$

$$C_{AB} = \frac{4 \pi \epsilon_0 r 3a \cdot a}{3a - a} = 6 \pi \epsilon_0 r a = 12 \pi \epsilon_0 a, \quad C_B = 4 \pi \epsilon_0 3a = 12 \pi \epsilon_0 a$$

得到

$$C = C_{AB} + C_B = 24 \pi \epsilon_0 a$$

更简单的方法,可用电容的定义直接求图 9-28(2)中的总电容.

$$C = \frac{q}{U_{BA}} = \frac{q}{U_B} = 24 \pi \epsilon_0 a$$

因为 A 球电势 $U_A = 0$, 所以 B 球壳和 A 球的电势差就等于 B 球壳的电势 U_B . 两并联电容极板上的总电量为 q .

(4) 求带电系的能量有两种方法.

方法一:用电容器能量公式求

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{q^2}{48 \pi \epsilon_0 a}$$

或

$$W = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} q U_B = \frac{q^2}{48 \pi \epsilon_0 a}$$

方法二:用场能密度积分求

$$\begin{aligned} W &= \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV \\ &= \int_a^{3a} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\frac{q_2}{16 \pi r^2} \right]^2 4 \pi r^2 dr + \int_{3a}^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\frac{q_2}{8 \pi r^2} \right]^2 4 \pi r^2 dr \\ &= \frac{q^2}{96 \pi \epsilon_0 a} + \frac{q^2}{96 \pi \epsilon_0 a} = \frac{q^2}{48 \pi \epsilon_0 a} \end{aligned}$$

对这问题用电容器能量公式求能量方便得多.

[计算题 5](1):在静电平衡时,导体表面分布有与 q_0 异号的感应电荷,设其面密度为 $\sigma(r)$,与 q_0 同号的感应电荷分布在右侧很远处,可不考虑.

先考察导体内部极靠近表面(即表面右侧)距 O 点 r 处的 P 点(图 9-29).设导体表面感应电荷在 P 点产生的场强为 E ,则 E 与点电荷 q_0 在此点电场强度 E_0 的矢量和(合场强)应等于零,用直角分量表示为:

$$\frac{q_0}{4 \pi \epsilon_0 R^2} \cos \theta + E_x = 0$$

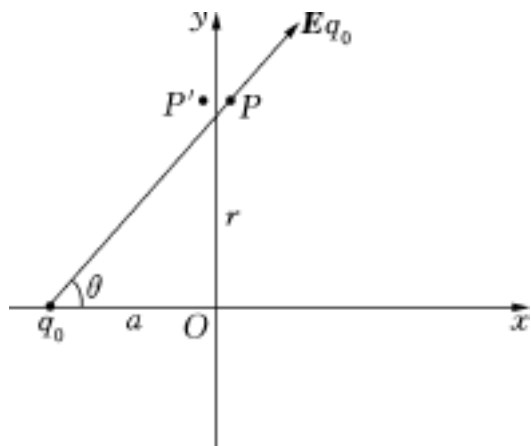


图 9-29

$$\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin \theta + E_y = 0$$

由此求出 $E_x = -\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta$

$$E_y = -\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin \theta$$

再考察位于导体外极靠近 P 点的对称点 P' . 因 P 与 P' 对表面对称, 导体表面感应电荷电场 E 的 y 分量接近相等, 而 x 分量则应大小相等方向相反, 所以感应电荷在 P 点产生的场强

$$E_x = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta, \quad E_y = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin \theta$$

而点电荷 q_0 与感应电荷的合场强应为 $-\frac{(r)}{0}$ (这里视 0 为正电荷、在 P 点电场方向沿 x 轴负向), 故得

$$\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta + E_x = -\frac{(r)}{0}$$

即

$$\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta + \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta = -\frac{(r)}{0}$$

从而求得:

$$(r) = -\frac{q_0}{2\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta = -\frac{q_0 a}{2(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

可见, 感应电荷呈以 O 为中心的对称分布.

在导体表面取 r 到 $r + dr$ 的细圆环, 则环面上的感应电荷元

$$dq = (r) dS = (r) \cdot 2\pi r dr = -\frac{q_0 a}{2(a^2 + r^2)^{3/2}} \cdot 2\pi r dr,$$

导体表面上的总感应电荷量

$$q = \int dq = -\int_0^\infty \frac{q_0 a r dr}{(a^2 + r^2)^{3/2}} = \left. -\frac{q_0 a}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right|_0^\infty = -q_0$$

(2) 由于沿导体内任一点到无限远的场强的线积分总为零, 所以无限远处的电势为零, 导体的电势也应等于零.

[计算题 6]分析:物理学是一门逻辑性很强的学科,其解题常用的思维方法就是综合法和分析法.分析法就是把整体分解为部分,把复杂问题分解为简单要素分别加以研究的一种思维方法.而综合法则将对象的各个部分、各个方面和各种因素联结为一个整体考虑的一种思维方法.它们在解题的过程中相辅相成,可根据实际情况灵活应用.本题就是一个较为综合的题目,可逐一分析解之.

根据题意,第一个液珠只受重力作用,自由下落到 A 板后,给 A 板电量 q ,达到静电平衡后, q 在 A 板上表面均匀分布,同时接地的 B 板下表面产生感应电荷 $-q$,亦均匀分布.此时,A、B 间产生匀强电场,第二个液珠同时受重力和电场阻力的作用.随着液珠的不断下落,A、B 板上的电量不断增加,液珠所受的阻力也越来越大,最终,当液珠所受的阻力使它到达 A 板的速度为零时,此液珠就是被 A 板吸收的最后一个液珠.此后的液珠将无法到达 A 板.

解:液珠从静止下落到达 B 板小孔的速度为

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

当有 N 个液珠落到 A 板被吸收并达到静电平衡后,电容器被充电到

$$Q = Nq$$

两板间的电势差为

$$U = \frac{Q}{C}$$

A、B 间的场强为

$$E = \frac{U}{d}$$

由此可得

$$E = \frac{Nq}{Cd}$$

则第 $N+1$ 个液珠所受的电场阻力为

$$F_q = qE = \frac{Nq^2}{Cd}$$

当 $F_q > mg$ 时,液珠作减速运动,其加速度为

$$a = \frac{F_q}{m} - g = \frac{Nq^2}{mCd} - g$$

若此加速度刚好使第 $N+1$ 个液珠成为最后一个被吸收的液珠,则要求液珠达到 A 板的速度为零,即

$$2ad = v_0^2$$

由此可知

$$\left[\frac{Nq^2}{mCd} - g \right] d = gh$$

解出

$$N = \frac{mgC(d+h)}{q^2}$$

当 $mgC(d+h)/q^2$ 为正整数时,能够落到 A 板的带电液珠的数目为

$$N = \left[\frac{mgC(d+h)}{q^2} + 1 \right]$$

当 $mgC(d+h)/q^2$ 不为正整数时,能够落到 A 板的带电液珠的数目为大于下值的第一个正整数.

$$\left[\frac{mgC(d+h)}{q^2} + 1 \right]$$

稳恒电流的磁场

10.1 基本要求与复习框图

1. 基本要求

- (1) 理解电流强度和电流密度的概念,了解电流连续性方程的意义.
- (2) 理解电源电动势的概念,明确在电源内部静电场和非静电场力各起的作用.
- (3) 掌握磁感应强度 B 的概念.理解毕-萨定律,会用其求解简单形状载流导体的磁感应强度的分布.
- (4) 掌握反映稳恒磁场特性的两个基本定理,即高斯定理和安培环路定理,并能运用安培环路定理求解具有对称性问题的磁场.
- (5) 掌握洛仑兹公式和安培定律,并能运用它们计算运动电荷和载流导线在磁场中所受的力以及载流线圈在磁场中所受的磁力矩.
- (6) 掌握载流导线(或线圈)在磁场中运动时,磁力做功的计算方法.

2. 复习框图

本章的主要内容分两部分:一是电流激发磁场;二是磁场对电流的作用.学习本章时可与静电场这一章进行对比,找出它们的异同点,这样便于记忆.本章的主要内容可用图 10-1 的线框图表示.

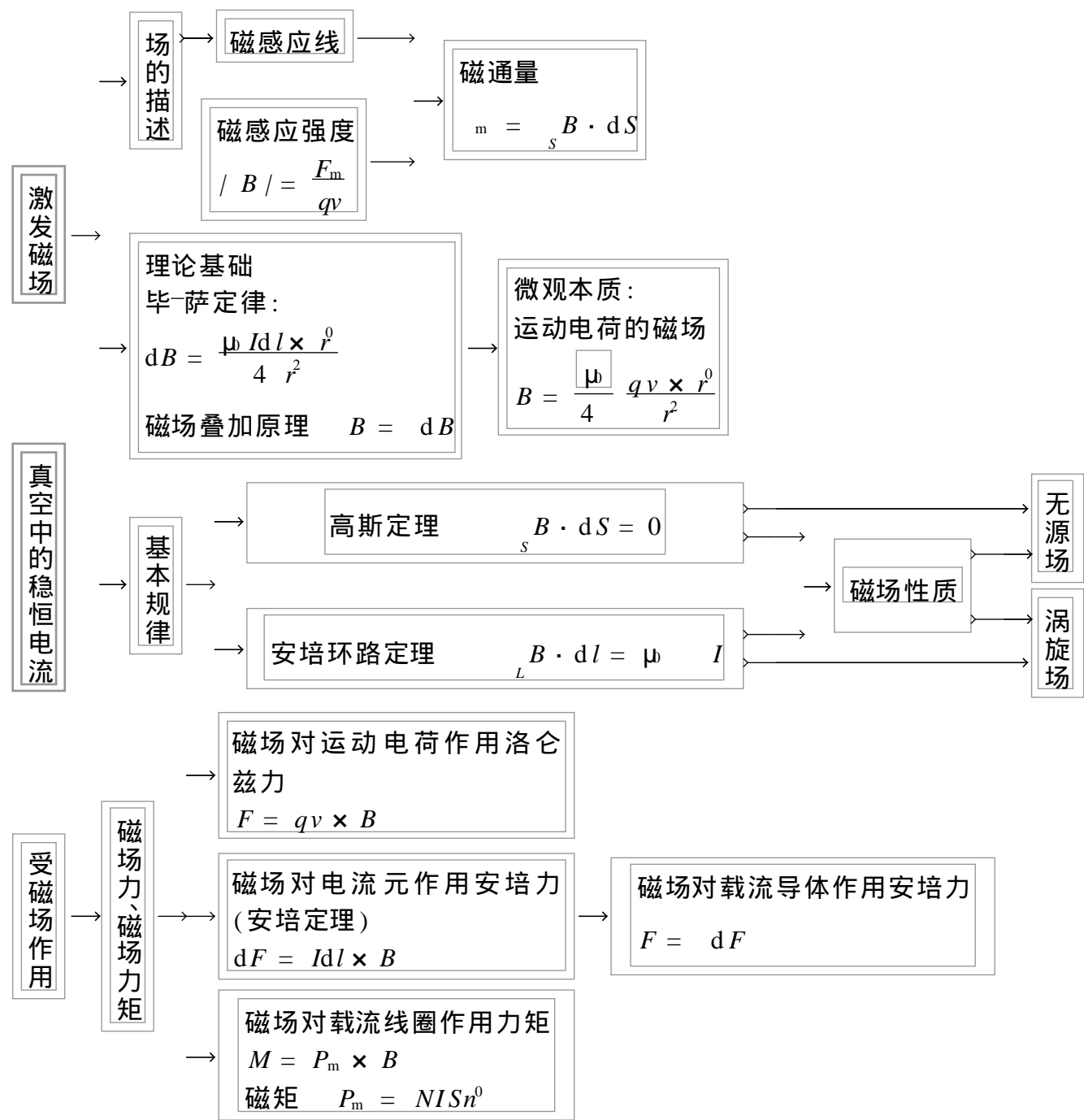


图 10-1

10.2 阅读指导与问题讨论

1. 真空中稳恒磁场与静电场的对比

	静 电 场	稳 恒 磁 场
基本场量	E, U	B
基元场	$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^0$ $dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$	$dB = \frac{\mu_0 Idl \times r^0}{4\pi r^2}$

(续表)

	静 电 场	稳 恒 磁 场
高斯定理	$\oint_S E \cdot dS = \frac{q}{\epsilon_0}$ <p>有源场, 电力线始于正电荷,止于负电荷</p>	$\oint_S B \cdot dS = 0$ <p>无源场 磁感应线是无头无尾的闭合曲线</p>
环路定理	$\oint_L E \cdot dl = 0$ <p>保守场(有势场)</p>	$\oint_L B \cdot dl = \mu_0 I$ <p>涡旋场(非势场)</p>
场 力	<p>电场力: $dF = dq \cdot E$ 电偶极子在均匀电场中受力矩 $M = P_e \times E$</p>	<p>洛仑兹力 $F = qv \times B$ 安培力 $dF = Idl \times B$ 平面载流线圈在均匀磁场中受力矩 $M = P_m \times B$</p>

2 . 正确理解电源电动势的概念

凡能产生非静电力的装置都称为电源 . 电源电动势表示电源中非静电力做功本领的大小 . 它的一种定义是

$$= \int_{-}^{+} E \cdot dl$$

(电源内)

另一种定义是

$$= \int_L E \cdot dl$$

后一种定义更具有普遍性, 因为某些电源的非静电性场强 E_k 可以存在于整个回路中(如在电磁感应现象中) . 但当电源外部非静电性场强度 E_k 等于零时,

$$= \int_L E_k \cdot dl = \int_{-}^{+} E_k \cdot dl + \int_{+}^{-} E_k \cdot dl = \int_{-}^{+} E_k \cdot dl$$

(电源内) (电源外) (电源内)

后者包含前者 .

在理解电动势的概念时, 应注意以下几点:

(1) 非静电力的作用 . 要在闭合电路中形成恒定电流, 仅有静电力的作用是不可能的, 还须要有非静电力的作用 . 在电源未接外电路的情况下, 电源开始工作, 电源依靠非静电力把正电荷从电源负极移到电源正极, 使两极分别积累正、负电荷 . 同时在电源内形成相应的电场强度为 E 的静电场, 其方向与非静电性场强 E_k 相反, 如图 10 -2 所示 . 静电场 E 阻止电荷的搬运, 这时非静电力克服静

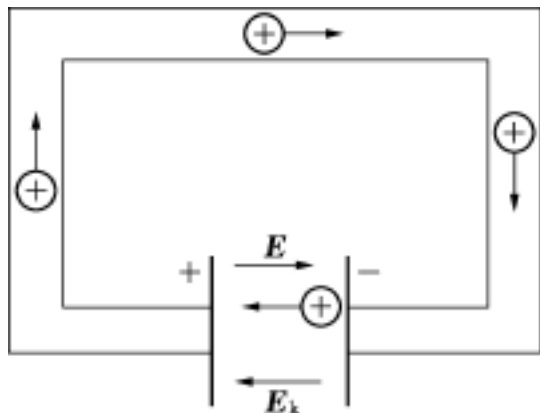


图 10-2

电力做功,继续搬运电荷.随着电源两极电荷积累的增加, E 逐渐增大,最后静电力与非静电力达到平衡,从而在电源两极形成一恒定的电势差.在接通外电路时,电源两极的正、负电荷在导线内激发恒定电场,导线内的自由电子在恒定电场力的作用下定向运动,形成电流.虽然内外电路中都有电流,但起因是不同的.在电源内部,非静电力起主要作用,正电荷从低电势移到高电势;在外电路,

正电荷只受恒定电场力的作用,从高电势移到低电势.

(2) 内外电路的能量转化.在外电路中,恒定电场力推动正电荷做功,从而使电场的能量减少,转变为电阻上消耗的焦耳热.在内电路中,电源的非静电力做功(电场力做负功),电场能量增加,电场能量的增加是由其他形式的能量(如化学能、机械能、热能、光能等)转化来的.由于对闭合电路的整体,电场力的功为零(即 $\oint_L E \cdot dl = 0$),电场能量不变,所以外电路上电场能量的减少量与内电路上电场能量的增加是相等的.因此相当于通过电源内的非静电力做功把其他形式的能量转变为电阻上消耗的热能,而电场能在整个能量转化过程中起着不可缺少的媒介作用.从这个意义上说,电源是把其他形式的能量转化为电能的一种装置.

(3) 电源类型不同,由其他形式能量转变为电能的方式也不同,但都可以归结为非静电性场强 E_k 的作用,从而得出电动势的一般定义.

(4) 电动势是标量,但有正负,规定从负极到正极为电动势的正方向.

3. 毕-萨定律与库仑定律的比较

毕-萨定律在稳恒磁场中的地位与库仑定律在静电场中的地位相当.由库仑定律导出的电荷元 dq 激发的电场的规律为 $dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, 由毕-萨定律给出的电

流元 Idl 激发的磁场的规律为 $dB = \frac{\mu_0 Idl \times r}{4\pi r^3}$.

它们的相似之处是:

- (1) 都是元场源激发场的表示;
- (2) 都满足 r 的平方反比律;

(3) 都是研究场性质,计算场量的理论基础.以它们为基础,再加上 E 叠加原理和 B 叠加原理,不仅可以分别导出描述静电场和稳恒磁场性质的两个基本

定理(即静电场的高斯定理和环路定理,以及磁场的高斯定理和安培环路定理),并且原则上可以求出任意形状带电体和电流周围的场分布.

它们不同之处是:

(1) 库仑定律是直接由实验总结出来的,而由于不存在孤立的一段电流元,所以毕-萨定律是通过对一些典型的闭合载流回路的实验中分析、归纳而间接得出的.

(2) dE 的方向沿径矢 r 的方向,而 dB 的方向既不在电流元 Idl 的方向上,也不在径矢 r 的方向上,而是垂直于 Idl 与 r 所组成的平面,并由右手螺旋法则确定.

(3) dE 的大小与 dq 成正比,而 dB 的大小不仅与 Idl 的大小成正比,而且还与 Idl 和 r 之间夹角的正弦成正比.

4. 正确理解稳恒磁场的两个基本定理

稳恒磁场的高斯定理和安培环路定理是反映稳恒磁场性质的两个基本定理.

高斯定理 $\oint_S B \cdot dS = 0$ 说明磁场是无源场.应该注意的是这里所说的无源场是指磁感应线是没有起点和终点的无头无尾的闭合曲线,亦即磁场没有源头和尾闾,它是自然界无单磁极存在的这一客观事实的反映.并不是说磁场本身没有来源,磁性起源于电流这是众所周知的,正是稳恒电流激发了稳恒磁场.

安培环路定理 $\oint_L B \cdot dl = \mu_0 I$ 说明磁场是涡旋场(非势场),在磁场中不能引入势能的概念.在理解安培环路定理的内容和意义时应注意以下几点.

(1) 注意区分 B 的环流 $\oint_L B \cdot dl$ 与 B 本身.

环流 $\oint_L B \cdot dl$ 只与闭合回路 L 包围的电流(大小、方向)有关,与闭合回路外的电流无关,也与闭合回路内电流的分布无关.

B 是指回路上各点的总场强,回路所包围的电流对 B 有贡献,回路不包围的电流对 B 也有贡献.

(2) 注意 I 是指闭合回路 L 包围的电流的代数和, $I = 0$, 并不一定表示没有电流穿过回路.另外, $I = 0$ 只能说明 B 的环流为零,不能说明闭合回路上 B 处处为零.

(3) 注意安培环路定理的适用范围.

安培环路定理只适用于稳恒电流的情况,而稳恒电流一定是闭合的(无限长载流直导线可以认为在无限远处闭合),对于一段有限长不闭合电流(非稳恒电

流), 安培环路定理不成立.

[问题 10-1] 一个静止的点电荷能在它的周围空间任一点激起电场; 一个线电流元是否也能在它的周围空间任一点激起磁场?

[解答] 不一定, 电流元激起的磁场由毕-萨定律给出

$$dB = \frac{\mu_0 Idl \times r^0}{4 r^2}$$

其中 r 为电流元到空间任一场点的有向线段, 当 Idl 与 r 的夹角为 0 或 π 时, $|dB| = \frac{\mu_0 Idl \sin \theta}{4 r^2} = 0$, 所以

在电流元 Idl 的延长线上各点, 电流元不能激起磁场, 而在电流元周围空间的其他位置上, 是能够激发磁场的.

[问题 10-2] 设有一均匀带电的细棒 AC , 带电量为 q , 长为 L . 以速度 v 沿垂直于棒方向运动. 试问如何求细棒 AC 延长线上离 C 端距离为 L 的一点 P 处的磁感应强度 B 的大小和方向.

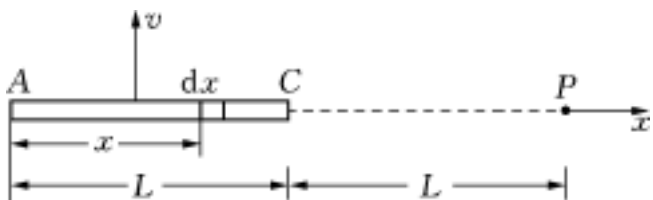


图 10-3

[解答] 这是一个求运动带电体产生的磁感应强度的问题. 我们可以把带电细棒看为许多点电荷元的叠加. 如图 10-3 所示建立坐标, 每个电荷元

$dq = \frac{q}{L} dx$, 其在 P 点产生的磁感应强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0 dq \cdot v \sin 90^\circ}{4 (2L - x)^2} = \frac{\mu_0 v q dx}{4 L (2L - x)^2}$$

方向均垂直于纸面向里. 由场的叠加原理, 带电细棒在 P 点产生的磁感应强度为

$$B = \int dB = \int_0^L \frac{\mu_0 q v dx}{4 L (2L - x)^2} = \frac{\mu_0 q v}{4 L} \left. \frac{1}{2L - x} \right|_0^L = \frac{\mu_0 q v}{8 L^2}$$

[问题 10-3] 将一均匀分布着面电流的无限大载流平面放入均匀磁场中, 放入后平面两侧的磁感应强度分别为 B_1 和 B_2 , 如图 10-4 所示, 试问如何求该载流平面的电流密度 i 和载流平面所处的外加均匀磁场的磁感应强度 B_0 .

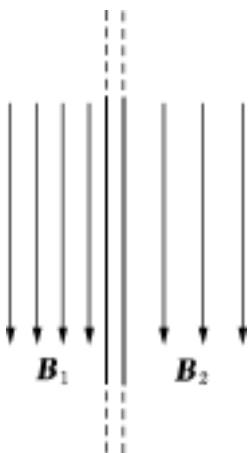


图 10-4

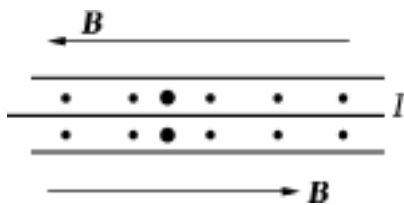


图 10-5

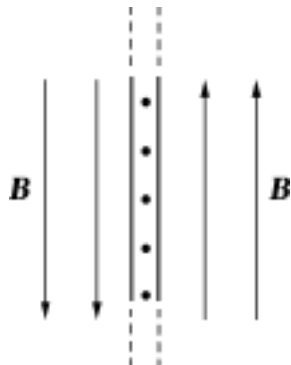


图 10-6

[解答] 一无限大的载流平面可视为无数无限长的载流直导线的叠加. 由对称性分析可知, 其磁感应线是与载流平面平行、与电流方向垂直的直线, 而且平面两侧的磁感应强度方向相反. 如图 10-5 所示. (具体分析参见例 10-2)

因图 10-4 所示的是载流平面的磁场和外加的均匀磁场的合场强的分布. 由此图可以看出, 载流平面的左侧磁感应强度大. 所以外加的均匀磁场的方向一定与 B_1 方向一致, 而载流平面产生的磁场在左侧应与 B_1 方向一致, 在右侧与 B_1 方向相反. 由此又可以判断, 载流平面中的电流方向是垂直于纸面向外的, 如图 10-6 所示.

设通过载流平面上单位长度的面电流为 i , 由安培环路定理可求得无限大均匀载流平面周围的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 i}{2}$$

再由场的叠加原理可知

$$B_1 = B_0 + \frac{\mu_0 i}{2}, \quad B_2 = B_0 - \frac{\mu_0 i}{2}$$

$$\text{解得: } B_0 = \frac{B_1 + B_2}{2}, \quad i = \frac{B_2 - B_1}{\mu_0}$$

[问题 10-4] 如图 10-7 所示, 两电流元 $I_1 dl_1$ 和 $I_2 dl_2$ 距离为 r , 并互相垂直, 这两电流元之间的相互作用力是否大小相等, 方向相反? 如果不是, 那么是否违反牛顿第三定律?

[解答] 由毕-萨定律得 $I_1 dl_1$ 在 $I_2 dl_2$ 处产生的磁感应强度的大小为 $dB = \frac{\mu_0 I_1 dl_1}{4 r^2}$, 方向垂直向里, 如图 10-7 所示, 由安培定律, $I_2 dl_2$ 所受作用力大小为

$$dF_{12} = I_2 dl_2 B_{12}$$

方向如图 10-7 所示.

同理, 可得 $I_2 dl_2$ 在 $I_1 dl_1$ 处产生的磁感应强度的大小为 $B_{21} = 0$. 故 $I_1 dl_1$ 所受作用力的大小为

$$dF_{21} = 0$$

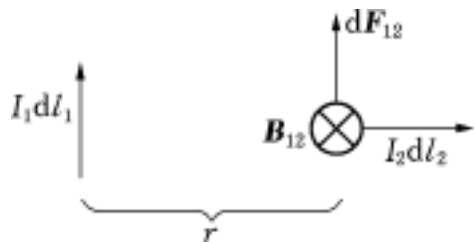


图 10-7

由此可见, 这两个电流元之间的相互作用力不遵守牛顿第三定律. 实际上, 电流元 $I_2 dl_2$ 所受作用力 dF_{12} 是其所在处磁场所给予的, 即施力者是磁场. 因此 dF_{12} 的反作用力应是 $I_2 dl_2$ 给磁场的力 dF_{12} , dF_{12} 和 dF_{12} 才是一对作用力和反作用力. 而 dF_{12} 和 dF_{21} 不是一对作用力和反作用力, 两者不等, 并不违反牛顿第三定律.

[问题 10-5] 金属导体内的电流是自由电子的定向漂移运动形成的, 每个定向运动的电子在磁场中受一洛伦兹力, 而整个导体则受到安培力. 导体所受安培力是各定向运动自由电子所受洛伦兹力的宏观表现. 那么, 为何洛伦兹力永不做功而安培力却可以做功? 这做功的能量从何而来?

[解答] 如图 10-8 所示, 设有一段载流导线置于磁感应强度为 B 的磁场中, 在安培力的作用下以速度 v 向上运动. 此时电子除以原来的定向漂移速度 u 向左运动外, 还跟随导体以速度 v 向上运动, 电子的合速度为 V , 方向如图 10-8 所示. 相应于 u 的洛伦兹力 $F_u = -eu \times B$, 方向向上, 相应于 v 的洛伦兹力 $F_v = -ev \times B$, 方向向右, 合力 $F = F_u + F_v$, 方向如图 10-8 所示. 因 F_u 与 v 同向, 故 F_u 做正功, 这功最

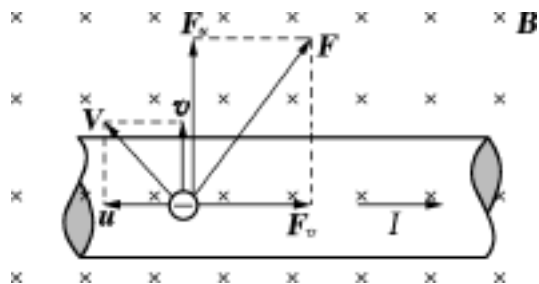


图 10-8

终即表现为安培力对载流导线做的功,其功率 $P_u = F_u \cdot v = -e(u \times B) \cdot v = evB$. 而 F_v 与 u 反向,故力 F_v 做负功,其功率为 $P_v = F_v \cdot u = -e(v \times B) \cdot u = -evB$. P_u 与 P_v 等值反号,所以总功率为零,即载流导体运动过程中洛伦兹力的合力做功为零. 由上述分析可知,安培力其实仅是洛伦兹力的一部分,这就是总的洛伦兹力永不做功而安培力可以做功的道理.

力 F_v 做负功,结果将使电子漂移速度 u 变小,从而使电流变小. 要维持电子速度 u 不变,必须另外对电子加一大小为 F_v 、方向与 u 相同的力. 这个力则要由形成恒定电流的外加电源来提供. 如果导线在运动过程中始终接在电源上,并保持电流恒定,则维持恒定电流的电源将反抗力 F_v 做功. 可见在载流导线运动过程中,安培力做功的能量实际是由电源提供的.

10.3 解题方法与典型例题

1. 已知电流分布求磁感应强度的方法

(1) 用毕-萨定律求磁感应强度的分布

解题思路:

先将载流导线分割成电流元,任一电流元在空间某点产生的磁感应强度用 dB 表示,根据场的叠加原理求得整个导线产生的磁感应强度 $B = \int dB$.

解题步骤:

用毕-萨定律写出导线上任一电流元在空间某点产生的磁感应强度

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times r^0}{r^2}, \text{ 并判别其方向.}$$

根据磁场的叠加原理,得整个导线在该点产生的磁感应强度为

$$B = \int dB$$

如果各个电流元在该点的 dB 的方向都相同,则上述矢量积分可写成标量积分 $B = \int dB$.

如果各个电流元在该点的 dB 方向不同,则需选取适当的坐标系,并在该坐标系下写出 dB 的分量式.

如果积分号内的变量不止一个,应利用各变量之间的关系,统一为一个变量,然后确定积分上、下限.

求出该点磁感应强度的分量, 再按矢量运算规则求出 B 的大小, 并确定 B 的方向.

应用毕-萨定律求出几种简单载流导线的磁感应强度(如图 10-9 所示)是很方便的.

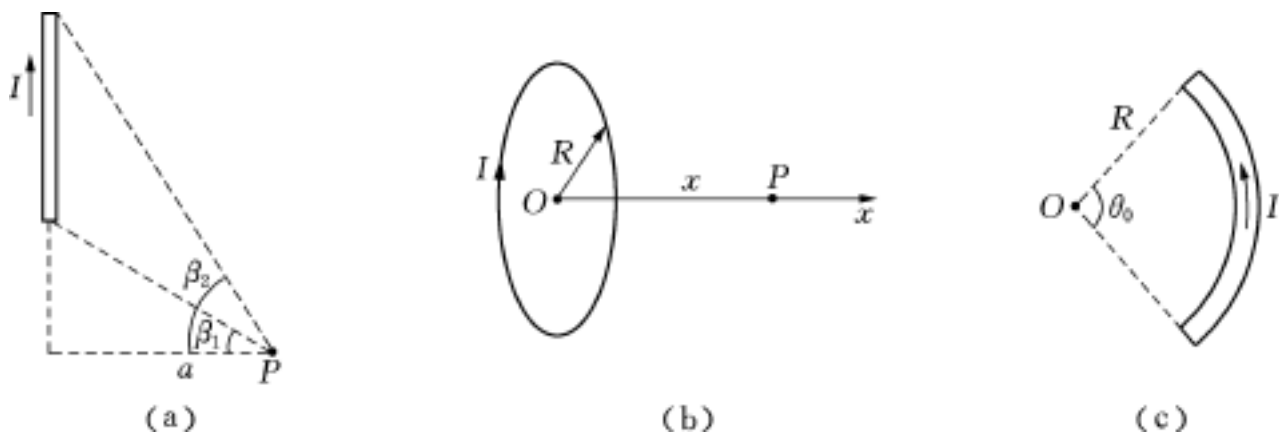


图 10-9

a. 一段直线电流的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{4a} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1) \quad (10-1)$$

* 无限长直线电流的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a} \quad (10-2)$$

方向垂直纸面向里.

b. 圆形电流的磁场

轴线上一点 P

$$B_P = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (10-3)$$

圆心处 ($x = 0$)

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (10-4)$$

方向沿轴线向左.

c. 一段圆弧在圆心处产生的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{4R} \theta_0 \quad (10-5)$$

方向垂直纸面向外 .

上面的计算结果可作为公式使用 . 对某些形状较复杂的载流导线或导体, 可看为这些简单电流的组合 .

例如, 将通有电流 I 的导线弯成图 10-10 所示的形状, 求 O 点处的磁感应强度 B . 求此题时, 可以将这闭合回路看为由四段有限长载流导线和一个 $\frac{3}{4}$ 圆电流组成 . 利用公式(10-1)与(10-5)和场强叠加原理很容易算出 O 点的磁感应强度 .

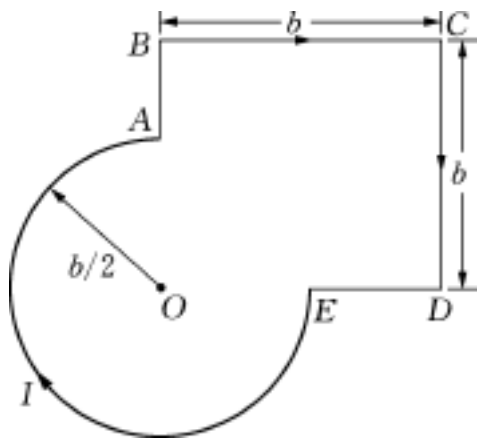


图 10-10

又如, 圆柱形的长直螺线管可以看为许多圆电流的组合, 取圆环为积分元, 用公式(10-3), 通过积分可求得该螺线管轴线上一点的磁感应强度 . 对宽度一定的无限长的载流金属片, 可看为许多无限长的载流直导线的组合, 取无限长的直导线为积分元, 利用公式(10-2), 通过积分可求得该金属片中垂面上一点的磁感应强度 . 做这类题目时, 不能直接用毕-萨定律

写出 $dB = \frac{\mu_0}{4} \frac{Idl \times r^0}{r^2}$, 而要根据所取的积分元

的形状, 利用典型电流磁场的计算公式(10-1) ~ 式(10-5)写出 dB . 其他步骤与直接用毕-萨定律解题相同 .

[例 10-1] 如图 10-11 所示, 内外半径分别为 R_1 、 R_2 , 面密度为 σ 的均匀带电塑料平面圆环绕轴线以匀速度 ω 旋转时, 求(1)圆环中心的磁感应强度; (2)圆环的磁矩 .

[解] (1) 当带电平面圆环旋转时, 其上电荷作圆周运动形成电流, 在空间激发磁场 .

平面圆环上的电流可看成是半径连续变化的圆形电流的叠加 . 取半径为 r 宽为 dr 的细圆环, (如图 10-11 所示)其所带电量 $dq = \sigma \cdot 2\pi r dr$, 这转动的带电细环相当于一个圆电流, 其电流

$$dI = n dq = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \sigma \cdot 2\pi r dr = \sigma \omega r dr$$

它在环心 O 处产生的磁感应强度为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0}{2} \sigma \omega dr$$

因半径不同的细圆环电流在 O 处产生的磁感应强度方向相同, 则 O 处总磁感应强度为

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{2} \sigma \omega \int_{R_1}^{R_2} dr = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega (R_2 - R_1)$$

方向垂直于圆环平面 .

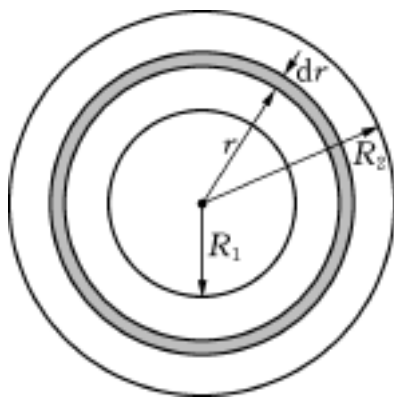


图 10-11

(2) 细圆环的磁矩 $dP_m = SdI = r^2 \cdot r dr$

整个圆环的磁矩

$$\begin{aligned} P_m &= \int dP_m = \int_R^R r^3 dr \\ &= \frac{1}{4} (R_2^4 - R_1^4) \end{aligned}$$

方向垂直于圆环平面, 与 B 相同.

(2) 用安培环路定理求磁感应强度的分布

安培环路定理对任意形状的闭合(可以在无限远处闭合)稳恒电流的磁场取任意形状的积分回路都成立. 但用安培环路定理求磁场时, 却有限制, 即要求电流及其产生的磁场的分布具有一定的对称性, 否则选不出合适的积分回路, 也就求不出结果来. 具体说来, 能直接用安培环路定理求磁场分布的载流体系主要有以下几类:

无限长载流直导线、直圆柱、直圆筒及同轴圆柱面系统;

无限长载流直螺线管;

细螺绕环;

无限大载流平面.

运用安培环路定理求 B 的一般步骤如下:

首先分析磁场分布的对称性, 从而判定能否用安培环路定理求 B .

根据磁场分布的对称性, 选择适当的闭合回路使磁感应强度 B 能从积分号 $B \cdot dl$ 中提出, 为此所选的闭合回路必须满足下列条件:

a. 闭合回路必须通过待求 B 的那一点; 且回路的几何形状应尽量简单, 以便计算.

b. 闭合回路的各段上, B 或者与之垂直, 或者平行, 或者成一定的角度, 总之是使积分 $\int_L B \cdot dl$ 为可积的.

选好积分回路的取向, 并根据这个取向来确定回路内电流的正、负值.

[例 10-2] 有一厚度为 $2d$ 的无限大的载流平板, 电流密度为 j , 沿 z 方向, 如图 10-12 所示. 求磁感应强度 B 的分布.

[解]

(1) 对称性分析:

图 10-13 为垂直于电流方向, 平板的截面图. 把载流平板看成无限长的直线电流的组合. 空间任一点 P 处的磁场为这些无限长直线电流产生的磁场的叠加. 与 P 点对称的任一对无限长直线电流在 P 点产生的磁场总是沿 y 轴的,

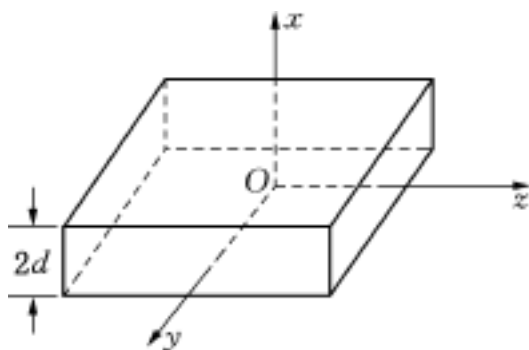


图 10-12

沿 x 方向分量恰好抵消 如图 10-13 所示, 因此这平板电流产生的磁场有如下的对称性 .

- a. B 的方向与 y 轴平行, 在 $x > 0$ 处 B 方向与 y 轴一致, 在 $x < 0$ 处 B 方向与 y 轴相反 .
- b. 离 yOz 平面距离相同的各点 B 相同 .

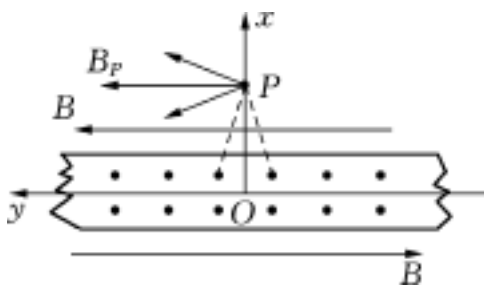


图 10-13

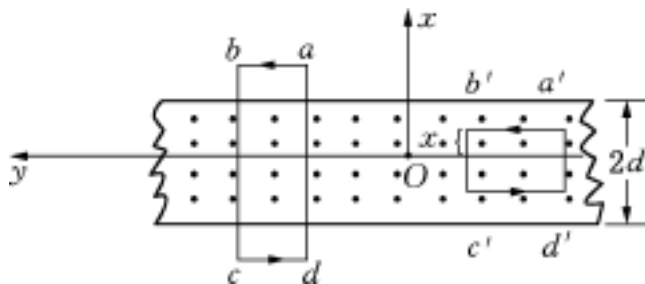


图 10-14

(2) 积分回路的选择:

根据上面分析的对称性, 可选取与 yOz 平面对称的矩形回路, 矩形回路的两边与 y 轴平行, 两边与 y 轴垂直 .

求板外一点的磁感应强度, 取矩形回路 $abcd$, 取向为逆时针, 如图 10-14 所示 其中 \overline{ab} 和 \overline{cd} 边与 yOz 平面等距离, 则有

$$\oint_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \overline{Bab} + \overline{Bcd}$$

(3) 按照回路取向, 确定回路 $abcd$ 内包围的电流为正值, 量值为 $2d \cdot \overline{abj}$.

因此由安培环路定理可写成

$$\overline{Bab} + \overline{Bcd} = \mu_0 2d \overline{abj}$$

因为 $\overline{ab} = \overline{cd}$, 就可得

$$B = \mu_0 jd$$

求板内一点的磁感应强度, 取矩形回路 $abcd$, 其中 \overline{ab} 和 \overline{cd} 与 yOz 平面等距, 距离为 x . 同上述分析可应用安培环路定理得: $B = \mu_0 jx$

可见无限大载流平板外是均匀磁场, 板内是非均匀磁场 .

[例 10-3] 一无限长的载流直圆柱体, 半径为 R_2 , 在其内部挖一个半径为 R_1 的圆柱形的空腔, 通电流为 I , 方向垂直于纸面向外 空腔的轴与圆柱体的轴平行, 间距为 d , 如图 10-15 所示 求圆柱体轴上一点 O 处的磁感应强度的大小 .

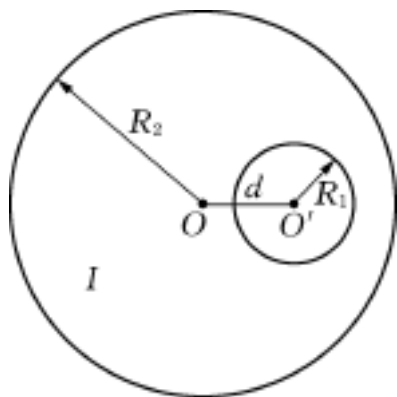


图 10-15

[解] 这是一个计算不规则载流导体内某点的磁感应强度的问题 由于电流分布的圆柱对称性被破坏, 所以不能直接用安培环路定律来求 B 如把这无限长的带有空腔的载流直圆柱体看为许多无限长的直线电流的叠加, 用 $B = \int dB$ 来求, 积分又很复杂不易积出 但由场的叠加原理可知, 这带空腔的无限长载流直圆柱体内, 任一对无限长的直线电流 A 和 A' (A 和 A' 连线通过轴 O , 且 $AO = A'O$) 在 O 点产生的磁感应强度均一一抵消, 只剩下位置与圆柱空腔相对称而半径也

为 R_1 的载流小圆柱体在 O 点产生的磁感应强度不能被抵消,如图 10-16 所示.

因此,这问题可归结为求这未被抵消的载流小圆柱体在 O 点产生的磁感应强度.设通过这小圆柱体的电流强度为 I ,则 $I =$

$\frac{I R_1^2}{(R_2^2 - R_1^2)}$.因 O 点在小圆柱外,由安培环路定理,可求得它在 O 点产生的磁感应强度

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2 d} = \frac{\mu_0 I R_1^2}{2 (R_2^2 - R_1^2) d}$$

当然,此题也可用“补偿法”求解,读者可练习一下.

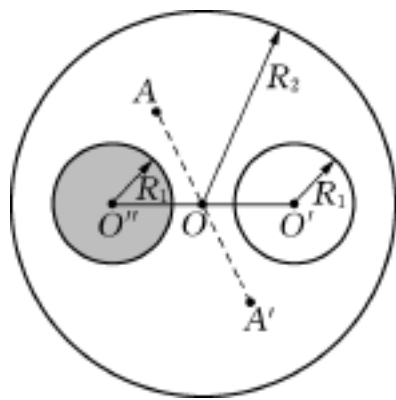


图 10-16

2. 磁场对运动电荷和电流的作用

运动电荷或电流不仅激发磁场,而且处于磁场中的运动电荷或电流也要受到磁场力的作用.

(1) 磁场对运动电荷的作用力——洛伦兹力

运动电荷在磁场中所受的磁场力为

$$F = qv \times B$$

其中 q 为运动电荷的电荷量,其值可正可负,当 q 为正电荷时, F 的方向与 $v \times B$ 的方向相同;当 q 为负电荷时, F 的方向与 $v \times B$ 的方向相反.但 F 的方向始终与电荷运动方向垂直,故它只能改变运动电荷速度的方向,而不能改变运动电荷速度的大小.

利用洛伦兹力 $F = qv \times B$ 求运动电荷在磁场中受力的几个典型模型:

$v \perp B$, 则运动电荷受力最大 $F_m = qvB$, 运动轨迹为圆,圆半径是 $R = \frac{mv}{qB}$.

$v \parallel B$, 则运动电荷不受力,即 $F = 0$, 该电荷在磁场中作匀速直线运动.

v 与 B 斜交成 θ 角,则运动电荷受力大小与 $\sin \theta$ 有关, $F = qvB \sin \theta$, 其运动轨迹是一螺旋线,螺旋线的半径和螺距分别为:

$$R = \frac{mv \sin \theta}{qB}$$

$$h = v \cos \theta \frac{2\pi m}{qB}$$

[例 10-4] 电子在磁感应强度大小为 $2.0 \times 10^{-3} \text{ T}$ 的匀强磁场中,沿半径为 2.0 cm 的螺旋线运动,螺距为 5.0 cm ,求电子的运动速率.

[解] 由于电子作螺旋线运动,可知电子的速度方向与磁场方向成一定夹角.由电子速度相对磁场的垂直分量与螺旋线半径的关系: $R = \frac{mv_{\perp}}{eB}$, 螺距与电子速度相对磁场平行分量的关系 $h = \frac{2\pi mv_{\parallel}}{eB}$, 得

$$v = \frac{eBR}{m} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 2.0 \times 10^{-3} \times 0.02}{9.1 \times 10^{-31}}$$

$$= 7.0 \times 10^6 \text{ (m/s)}$$

$$v = \frac{eBh}{2m} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 2.0 \times 10^{-3} \times 0.05}{2 \times 3.14 \times 9.1 \times 10^{-31}}$$

$$= 2.8 \times 10^6 \text{ (m/s)}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(7.0 \times 10^6)^2 + (2.8 \times 10^6)^2}$$

$$= 7.5 \times 10^6 \text{ (m/s)}$$

(2) 磁场对电流的作用——安培力

磁场对载流导线的作用:

先用安培定律计算导线上任一电流元所受的作用力 .

$$dF = Idl \times B$$

再用力的叠加原理 $F = \int dF$ 求得整个导线所受之力 .

注意:如果导线上各电流元所受的力 dF 的方向不同时,应选取适当的坐标系把矢量积分 $F = \int dF$ 式化为分量式

$$F_x = \int dF_x, F_y = \int dF_y, F_z = \int dF_z$$

进行计算 .

[例 10-5] 任意形状的一段导线 ab ,如图 10-17 所示.导线中通有电流 I ,放在与匀强磁场 B 垂直的平面内.试求该导线所受的磁力 .

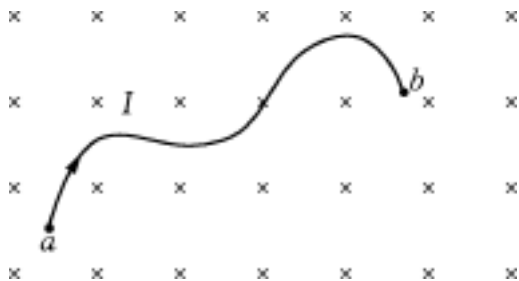


图 10-17

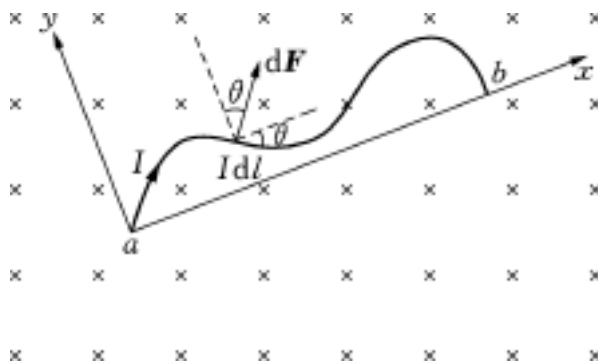


图 10-18

[解] 如图 10-18 取坐标.先用安培定律计算导线上任一电流元受力为

$$dF = Idl \times B$$

其大小 $dF = IdlB$, 方向如图 10-18 所示.它的 x 和 y 分量为

$$dF_x = dF \sin \theta = IB dl \sin \theta = IB dy$$

$$dF_y = dF \cos \theta = IB dl \cos \theta = IB dx$$

则导线在 x 方向和 y 方向分别受力为

$$F_x = \int_0^0 dF_x = \int_0^0 IB dy = 0$$

$$F_y = \int_0^{\overline{ab}} dF_y = \int_0^{\overline{ab}} IB dx = IB \overline{ab}$$

即整个导线受磁力

$$F = F_y = IB \overline{ab}$$

由此可见,任意形状导线 ab 在均匀磁场中所受的力等于 a 和 b 间载有同样电流的直导线所受的力.

磁场对载流线圈的作用——磁力矩:

求力矩 M 方法有两种.

a. 先求出各电流元受力 dF , 由力矩的定义得电流元所受力矩, $dM = r \times dF$, 再用积分求得整个线圈所受的力矩

$$M = \int dM$$

b. 利用公式 $M = P_m \times B$, 求力矩.

注意: 只有在均匀磁场中的平面载流线圈, 才能用此公式求线圈所受的力矩.

[例 10-6] 无限长直电流 I_1 的垂直平面内有一载流为 I_2 的线圈, 如图 10-19(a) 所示, 线圈两边为直线, 沿径向; 另外两边为圆弧, 半径分别为 R_1 和 R_2 , 圆心角为 2θ . 求:

(1) 线圈各边受 I_1 的磁场的作用力及整个线圈所受的合力.

(2) 线圈受 I_1 磁场的力矩.

[解] (1) 无限长直电流 I_1 在周围空间激发的磁场 $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2r}$, 方向与 I_1 右旋, 且沿圆弧切向, 所以 ab ,

cd 上各电流元都与该处 B_1 平行或反平行, 根据安培定律

$dF = Idl \times B$ 得 ab 、 cd 两段载流导线受 I_1 磁场的作用力为零.

\overline{bc} 受力: 在距 I_1 为 r 处取 dr 小段, 其受 I_1 的磁力的大小为

$$dF = I_2 B_1 dr = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2r} dr$$

方向垂直纸面向外, 因 \overline{bc} 上所有电流元受 I_1 的磁力方向都相同, 所以

$$F_b \begin{cases} \text{大小: } F_b = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2} \ln \frac{R_2}{R_1} \\ \text{方向: 垂直纸面向外} \end{cases}$$

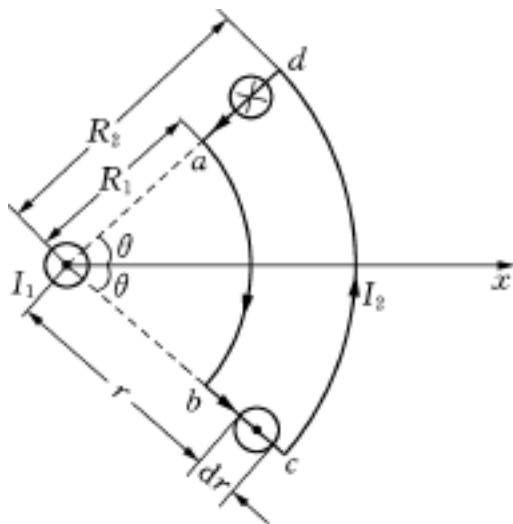


图 10-19(a)

同理可得

$$F_{da} \begin{cases} \text{大小: } F_{da} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2} \ln \frac{R_2}{R_1} \\ \text{方向: 垂直纸面向里} \end{cases}$$

因此整个载流线圈所受合力为零.

(2) 方法一:如图 10-19(a)所示,取对称轴 Ox ,由(1)中分析可知在 \overline{bc} , \overline{da} 上对应取 dr 小段,它们受 I_1 磁场对 Ox 轴形成力偶.

$$dM \begin{cases} \text{大小: } dM = 2r \sin \alpha dF = \frac{\mu_0}{2} I_1 I_2 \sin \alpha dr \\ \text{方向: 沿 } Ox \text{ 负方向} \end{cases}$$

因两边上各对力偶同方向,故

$$M \begin{cases} \text{大小: } M = \int dM = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2} \sin \alpha \int_{R_1}^{R_2} dr = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2} (R_2 - R_1) \sin \alpha \\ \text{方向: 沿 } Ox \text{ 负方向} \end{cases}$$

方法二:将扇形分成许多小扇形面元 dS ,如图 10-19(b)所示.

设沿小扇形边缘流动的电流都为 I_2 ,且都为逆时针方向.这样从整体上看,空间电流分布不变.

dS 面元的磁矩 $dP_m = I_2 dS n^0 = I_2 r dr n^0$, n^0 为载流线圈 dS 的法向单位矢量(垂直纸面向外).

dS 面元处磁场可视为均匀,因而受磁力矩

$$dM = dP_m \times B = I_2 r dr \frac{\mu_0 I_1}{2r} (-r^0)$$

由于各小扇形所受磁力矩的方向不尽相同,所以需将 dM 向 x 轴和 y 轴分解.得

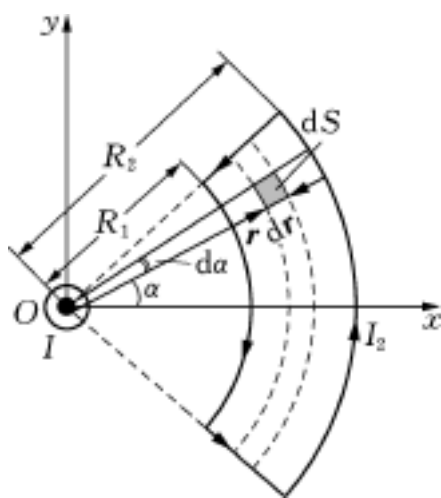


图 10-19(b)

$$dM_x = -\frac{\mu_0}{2} I_1 I_2 dr \cos \alpha$$

$$dM_y = -\frac{\mu_0}{2} I_1 I_2 dr \sin \alpha$$

$$\text{则: } M_x = -\frac{\mu_0}{2} I_1 I_2 \int_{R_1}^{R_2} dr \int_0^\alpha \cos \alpha d\alpha = -\frac{\mu_0}{2} I_1 I_2 (R_2 - R_1) \sin \alpha$$

$$M_y = -\frac{\mu_0}{2} I_1 I_2 \int_{R_1}^{R_2} dr \int_0^\alpha \sin \alpha d\alpha = 0$$

$$\text{故 } M = M_x i = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2} (R_2 - R_1) \sin \alpha i$$

磁力的功:

求磁力或磁力矩的功亦有两种方法.

a. 运用功的定义式求解. 即

$$A = \int F \cdot dS, A = \int M \cdot d$$

b. 运用公式 $A = \int_1^2 Id$ (当电流恒定时 $A = I \int_1^2 d$) 求解.

[例 10-7] 总匝数为 N 的均匀密绕平面螺旋线圈, 半径由 R_1 绕至 R_2 , 通有电流 I , 放在磁感应强度为 B 的均匀磁场中, 磁场方向与线圈平面平行, 如图 10-20 所示 试求:

- (1) 平面线圈的磁矩;
- (2) 线圈在该位置所受的磁力矩;
- (3) 线圈在磁力矩作用下转到平衡位置过程中, 磁力矩所做的功.

[解] (1) 由于螺旋线圈绕得很紧密, 可以将它看成由许多半径连续变化的同心圆线圈组成. 在距中心 r 处取宽度为 dr 的细圆环线圈, 其中含匝数

$$dN = \frac{N}{R_2 - R_1} dr$$

细圆环线圈的磁矩 $dP_m = IdN \cdot r^2 = \frac{N}{R_2 - R_1} I r^2 dr$,

方向垂直纸面向外 整个平面螺旋线圈的磁矩

$$P_m = \int dP_m = \frac{N}{R_2 - R_1} I \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr = \frac{1}{3} NI(R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2)$$

- (2) 线圈在该位置受到磁力矩

$$M = P_m B \sin 90^\circ = \frac{1}{3} NIB(R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2)$$

方向垂直 B 沿纸面向上.

(3) 方法一: 当线圈旋转到其平面法向(即磁矩方向)与 B 的夹角为 θ 的位置时, 受到的磁力矩 $M(\theta) = P_m B \sin \theta = \frac{1}{3} NIB(R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2) \sin \theta$, 线圈从 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 转到平衡位置 ($\theta = 0$) 的过程中, 磁力矩所做的功

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 M(-d\theta) = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{3} NIB(R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2) \sin \theta (-d\theta) \\ &= \frac{1}{3} NIB(R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2) \end{aligned}$$

方法二: 当线圈平面与磁场平行时, 通过线圈平面的磁通量

$$\Phi_1 = 0$$

当线圈转至线圈平面与磁场垂直(平衡位置)时, 通过(1)中所述的细圆环线圈的磁通量

$$d\Phi_2 = \frac{NB}{R_2 - R_1} r^2 dr$$

通过整个线圈平面的磁通量

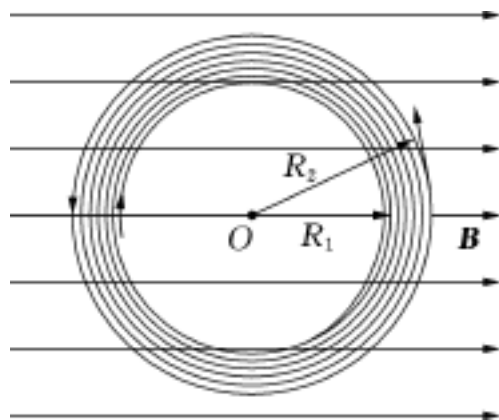


图 10-20

$$\Phi_2 = \int_{R_1}^{R_2} d\Phi_2 = \frac{NB}{R_2 - R_1} \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr = \frac{1}{3} NB(R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2)$$

由于电流 I 恒定,所以在线圈转动过程中磁力矩做功

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1) = \frac{1}{3} NIB(R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2)$$

磁场中的磁介质

11 .1 基本要求与复习框图

1 .基本要求

- (1) 了解物质磁性的起源;了解磁介质的分类及其磁化机理 .
- (2) 掌握介质中的安培环路定律及其应用 .

2 .复习框图

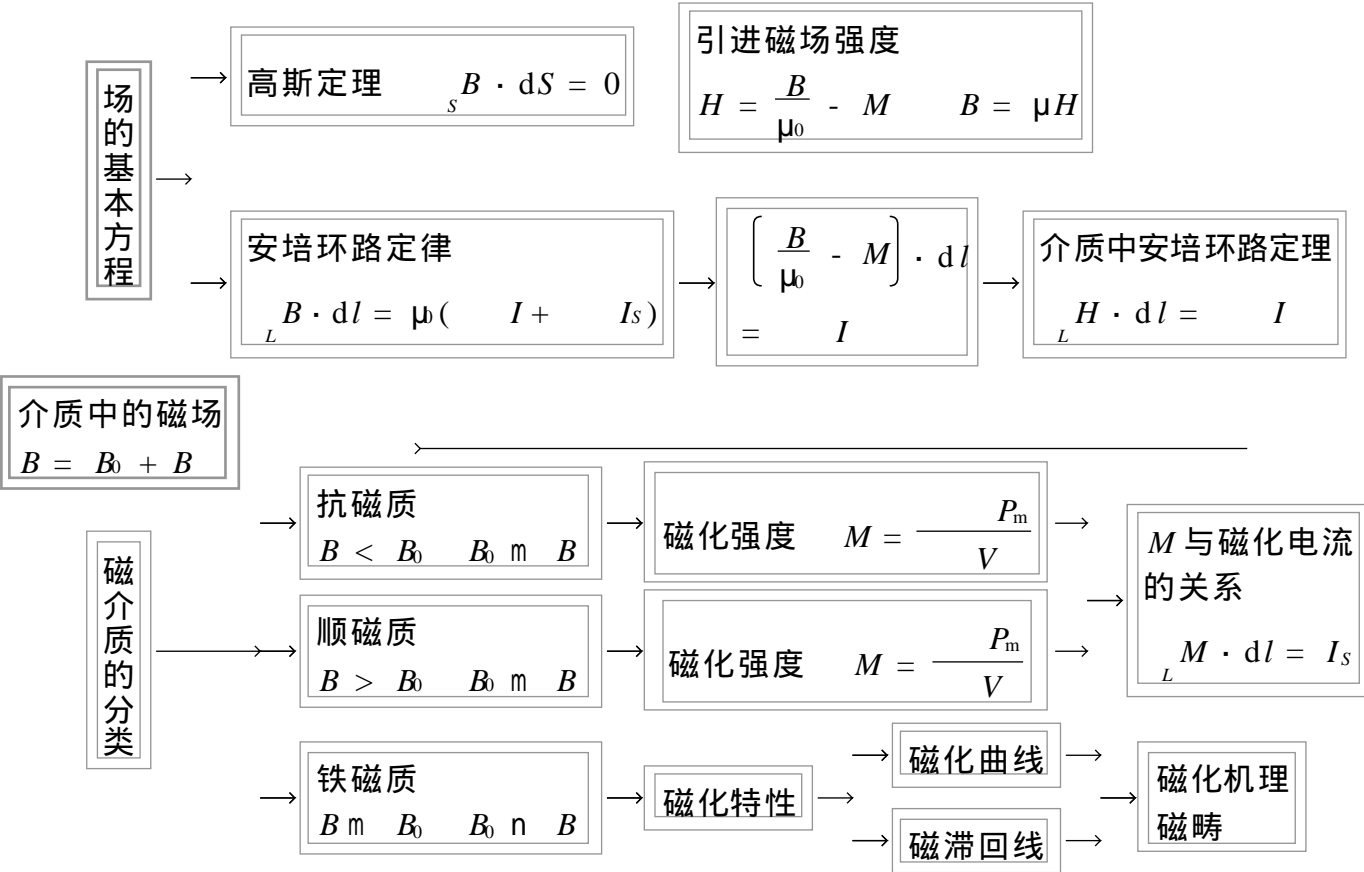


图 11 -1

能影响磁场的物质称为磁介质.把磁介质放进磁场后被磁化,相当于在磁场中增加了一些磁化电流.因此空间任一点的磁场应是外磁场 B_0 和磁化电流产生的附加磁场 B 的矢量和,即 $B = B_0 + B$.由于 B 的不同,磁介质可分为三类,即顺磁质、抗磁质和铁磁质.真空中磁场满足的两个基本方程:高斯定理和安培环路定理对合磁场 B 依然成立.为了避免求磁化电流的分布,引入磁场强度 H ,导出了有介质存在时的安培环路定理,应用它可求出有特殊对称性的磁场的磁感应强度.介质中的安培环路定理的应用是这章的重点.本章的主要内容可用图 11-1 的方框图表示.

11.2 阅读指导与问题讨论

1. 磁介质对磁场的影响

电介质放在静电场中能被极化,极化了的电介质要产生附加电场,从而电介质中的电场强度为 $E = E_0 + E$.由于极化电荷所产生的 E 与自由电荷的 E_0 方向相反,故有电介质存在时,介质中电场强度要减小.同样磁介质放在磁场中会被磁化,产生附加磁场,从而磁介质中的磁感应强度为 $B = B_0 + B$.式中 B_0 为外磁场的磁感应强度, B 为磁介质因磁化而产生的附加磁感应强度.由于 B 随磁介质的性质不同差异很大,因此磁介质放在磁场中对磁场的影响要复杂很多.

(1) 如果 $B \parallel B_0$,但 B 与 B_0 同向,因此有 $B > B_0$,则称这种磁介质为顺磁质.

(2) 如果 $B \parallel B_0$,但 B 与 B_0 反向,因此有 $B < B_0$,则称这种磁介质为抗磁质.

(3) 如果 $B \parallel B_0$,且 B 与 B_0 同向,因此有 $B \gg B_0$,则称这种磁介质为铁磁质.

对顺磁质和抗磁质磁性的差异是两种磁介质的分子结构的不同所致.顺磁质分子的分子磁矩 $P_m \neq 0$,而抗磁质分子的分子磁矩 $P_m = 0$,但是在外磁场 B_0 中,无论是顺磁质还是抗磁质都要产生附加磁矩 P_m . P_m 的方向是确定的,总是与外磁场 B_0 的方向相反.

对顺磁质来说, $P_m \neq 0$,且 $P_m \parallel B_0$,所以 P_m 可忽略.在外磁场作用下,所有分子磁矩 P_m 都力图转到外磁场方向,这样附加磁感应强度 B 的方向就与 B_0 相同,从而使磁介质中磁感应强度 B 有所增强,并为 $B = B_0 + B$.对抗磁质来说, $P_m = 0$,所以 P_m 不能忽略,因为 P_m 的方向总是与 B_0 相反,这样附加磁场要削弱外磁场,故有 $B = B_0 - B$.

2. 磁场强度及其与磁感应强度的关系

外磁场 B 与磁介质相互作用, 引起磁介质的磁化, 产生磁化电流, 而磁化电流在空间产生附加磁场 B , 因此要求出磁介质存在时各点的 B , 就必须知道传导电流和磁化电流的分布. 而磁化电流 I_s 的分布依赖于磁化强度 M 和磁介质的形状, 磁化强度又依赖于总磁感应强度 B , 这就形成了计算上的循环, 给求解 B 造成困难. 解决困难的方法引入一个新的辅助量——磁场强度 H (这与静电场中引入电位移 D 相似).

磁场强度的定义式

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M \quad (1)$$

式(1)是 H , B , M 三个矢量的一般关系, 是普遍成立的, 即对弱磁质 (顺磁质和抗磁质的统称) 和铁磁质都成立.

真空中, $M = 0$, 有

$$H = \frac{B}{\mu_0} \quad (2)$$

式(2)表明, 真空中的磁场强度等于真空中磁感应强度的 $\frac{1}{\mu_0}$ 倍.

对各向同性非铁磁质, M 与 H 成正比, 即 $M = \chi_m H$, 将此关系式代入式(1)可得

$$H = \frac{B}{\mu_0 (1 + \chi_m)} = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} = \frac{B}{\mu} \quad (3)$$

式(3)表明, 对各向同性非铁磁质, 空间某点的 H 与该点的 B 成正比, 且方向相同, 即 H 与 B 是点对点对应的关系.

这样对于某些对称性磁场, 我们可先由磁介质中的安培环路定理 ($\oint H \cdot dl = I$) 求解磁介质中 H 的分布, 再由式(3)求出磁介质中 B 的分布.

当相对磁导率为 μ_r 的各向同性均匀磁介质充满整个磁场时, 根据磁介质中的安培环路定理和式(3)有

$$B \cdot dl = \mu_r \mu_0 H \cdot dl = \mu_r \mu_0 \left(\frac{B_0}{\mu_0} \right) \cdot dl = \mu_r (B_0 \cdot dl)$$

可见, 充满整个磁场的各向同性均匀磁介质对磁场的影响, 相当于使磁介质中的磁感强度变为传导电流单独产生的磁感强度的 μ_r 倍.

即
$$B = \mu_r B_0 \quad (4)$$

将式(4)代入式(3)得

$$H = \frac{B_0}{\mu} \quad (5)$$

式(5)表明,当各向同性均匀磁介质充满整个磁场时,磁场强度 H 等于传导电流单独产生的磁感强度的 μ_0 分之一。

上面讨论了磁场强度 H 与磁感强度 B 的四个关系,即式(1)、式(2)、式(3)和式(5),在应用时要特别注意它们各自成立的条件。

最后还需指出的是,式(3)表明,在一般情况下,磁场强度 H 不仅与传导电流有关,而且也与磁化电流有关,因为磁感强度 B 是传导电流和磁化电流共同决定的。而只有在式(5)成立的条件下,磁场强度 H 才只与传导电流有关。

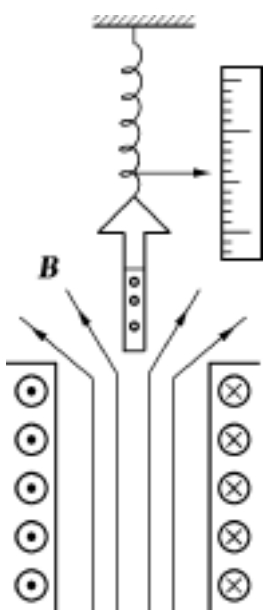


图 11-2

[问题 11-1] 为了判断某种磁介质材料是顺磁质还是抗磁质,可将此材料样品装入试管中,用弹簧吊起来挂在一竖直螺旋管的上端开口处的不均匀磁场中(如图 11-2 所示) 为何当螺线管中通电后,可根据弹簧的伸长或缩短来判断此材料是顺磁质还是抗磁质。

[解答] 因为螺线管通电后,相当于一磁体,管上方为 N 极。磁介质材料在此磁场中会被磁化产生附加磁场,因此样品也相当一磁体。如果样品是顺磁质,则其磁化后的附加场方向与外磁场方向相同,即样品上方相当于 N 极,下方相当于 S 极。由于通电螺线管磁场的均匀性对样品作用总效果为吸力大于斥力,故使弹簧伸长。如果样品是抗磁质,与刚才的分析相反,斥力大于吸力,弹簧收缩。

[问题 11-2] 一个空心的直螺线管通有电流,管内一点 a 磁感应强度为 B_a , 磁场强度为 H_a , 管外一点 b 的磁感应强度为 B_b , 磁场强度为 H_b , 如图 11-3 所示。现将软铁芯插入管中,并保持电流不变,试分析 a 、 b 两点的磁感应强度和磁场强度的变化?

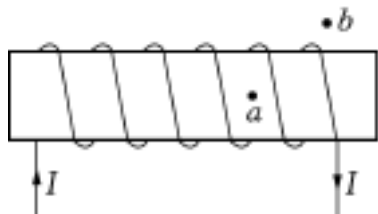


图 11-3

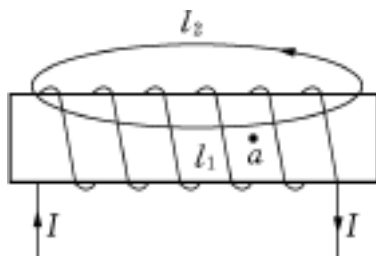


图 11-4

[解答] 直螺线管中插入铁芯后,空间各点的磁场应由传导电流和磁化电流共同产生。由于铁芯中的磁化电流的流向和导线中传导电流相同,所以 a 、 b 两点的磁感应强度 B_a 和 B_b 都变大了。

又因 b 点在真空中,所以 $H_b = \frac{B_b}{\mu_0}$, 插入铁芯后 B_b 变大,则 H_b 当然也变大。但是 a 点在介质中,故

$H_a = \frac{B_a}{\mu}$, 插入铁芯后, B_a 变大,但 μ 也增大, H_a 是否增大还不能确定。

为了确定 H_a 的变化,我们可以沿某一磁感应线取一闭合回路 L , 如图 11-4 所示。回路中 l_1 是在直螺

线管内,而 l_2 在直螺线管外.

按介质中安培环路定理

$$\oint_L H \cdot dl = \oint_l H \cdot dl + \oint_l H \cdot dl = nI$$

式中 n 为穿过回路 L 的线圈匝数. 因为螺线管中的电流 I 不变,故 $\oint_L H \cdot dl = \text{常数}$. 又因螺线管外各点的 H 值与 b 点一样都增大了,所以 $\oint_l H \cdot dl$ 也增大了. 由此可断定 $\oint_l H \cdot dl$ 一定变小了. 所以铁芯中 a 点的磁场强度 H_a 也变小了.

11.3 解题方法与典型例题

在这一节中,我们要解决的主要问题是求解具有高度对称性的磁介质中磁感应强度 B 、磁化强度 M 、磁化面电流密度 j_s 或磁化面电流 I_s .

求磁感应强度的方法主要是用介质中的安培环路定理. 应用介质中的安培环路定理求 B 的步骤与应用真空中的安培环路定理相同. 只是直接用介质中的安培环路定理求出的物理量是磁场强度 H ,需再用公式 $B = \mu H$ 可得 B . 在求出 H 和 B 后很容易由公式 $M = \frac{B}{\mu_0} - H$ 求出磁化强度 M . 磁化面电流密度的大小可用 $j_s = M$ 求出.

[例 11-1] 一无限长的圆柱形导体,半径为 R_1 ,其中均匀地通过电流 I ,导体外包一层内半径为 R_1 、外半径为 R_2 的顺磁质,其磁导率为 μ ,如图 11-5 所示,试求:

(1) 磁场强度 H 与磁感应强度 B 的分布,并画出 $H-r$ 与 $B-r$ 图;

(2) 介质内、外表面的磁化面电流密度 j_s .

[解] (1) 磁感应强度的分布

由对称性分析可知,无限长圆柱形通电导体产生的磁场,其磁感应线为许多圆心在圆柱体轴线上的同心圆,而且圆平面与此轴垂直,圆上各点的磁感应强度大小相同. 又因介质是与圆柱形导体共轴的圆柱壳层,所以不破坏磁场原有的对称性. 根据各向同性均匀介质中磁场强度与磁感应强度的关系 $H = \frac{B}{\mu}$,可知 H 和 B 有相同的对称性. 因此可以用介质中的安培环路定理来求解. 由

$$\oint_L H \cdot dl = I$$

当 $r < R_1$ 时

$$H \cdot 2\pi r = \frac{I}{R_1} \cdot r^2$$

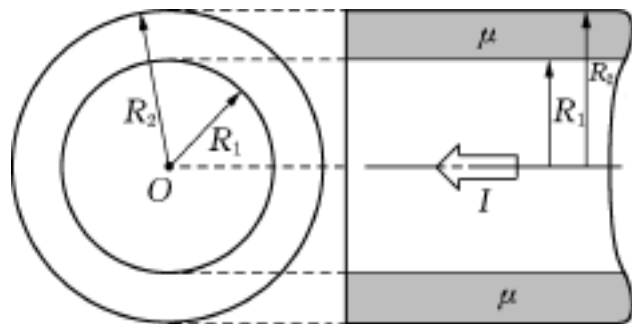


图 11-5

可解得

$$H = \frac{Ir}{2R_1^2}, B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 Ir}{2R_1^2}$$

当 $R_1 < r < R_2$ 时

$$H \cdot 2\pi r = I$$

可解得

$$H = \frac{I}{2r}, B = \mu H = \frac{\mu I}{2r}$$

当 $r > R_2$ 时

$$H \cdot 2\pi r = I$$

可解得

$$H = \frac{I}{2r}, B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

H - r , B - r 曲线如图 11-6(a)、(b)所示

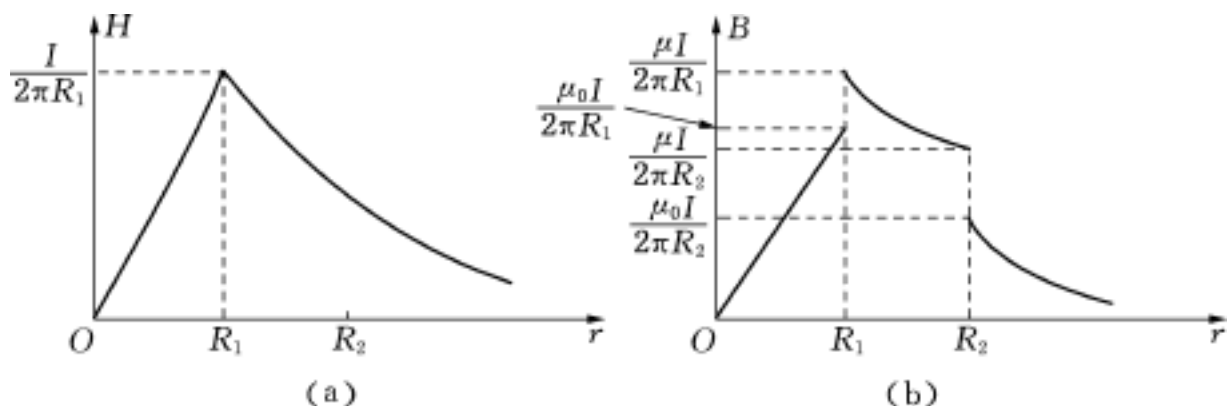


图 11-6

值得注意的是,在 $r = R_1$ 和 $r = R_2$ 的界面两侧, H 连续而 B 不连续,原因是在该界面上存在着磁化面电流.

(2) 介质表面的磁化面电流密度

内表面

$$j_s = M \Big|_{r=R_1} = \frac{B}{\mu_0} - H \Big|_{r=R_1} = \left[\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right] H \Big|_{r=R_1} = \left[\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right] \frac{I}{2R_1}$$

外表面

$$\begin{aligned} j_s &= M \Big|_{r=R_2} = \frac{B}{\mu_0} - H \Big|_{r=R_2} \\ &= \left[\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right] H \Big|_{r=R_2} = \left[\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right] \frac{I}{2R_2} \end{aligned}$$

磁化面电流密度方向由介质中分子磁矩的取向决定. 顺磁质中分子磁矩与外磁场 B_0 同方向, 如图 11-7 所示. 所以介质表面未被抵消的磁化电流的方向为: 在介质外表面向右, 与传导电流方向相反; 在介质内表面

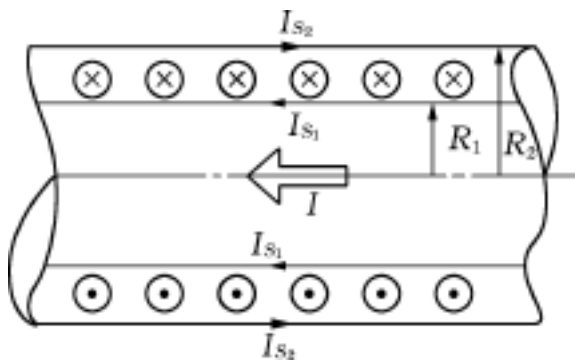


图 11-7

11.4 自测练习与能力训练

11.4.1 选择题

1. 如图 11-8 所示, 两根长直载流导线垂直纸面放置, 电流 $I_1 = 1\text{ A}$, 方向垂直纸面向外; 电流 $I_2 = 2\text{ A}$, 方向垂直纸面向内, 则 P 点的磁感应强度 B 的方向与 x 轴的夹角为[].

- (A) 30° (B) 60° (C) 120° (D) 210°

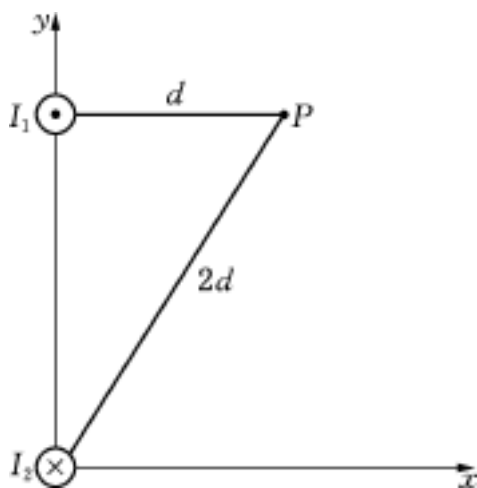


图 11-8

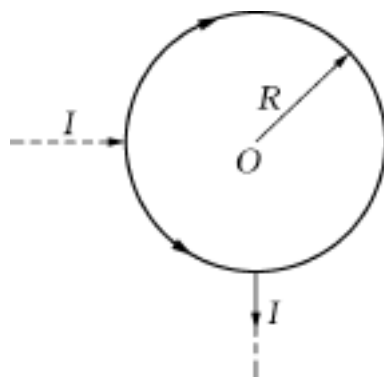


图 11-9

2. 载流回路如图 11-9 所示, 圆电流中心 O 处的磁感应强度 B 应为[].

- (A) 零 (B) $\frac{\mu I}{2R}$ (C) $\frac{\mu I}{4R}$ (D) $\frac{\mu I}{R}$

3. 如图 11-10 所示, 在无限长载流直导线附近作一球形闭合曲面 S . 当 S 面向长直导线靠近时, 穿过 S 面的磁通量 和面上各点的磁感应强度 B 的变化将是[].

- (A) 增大, B 也增大
(B) 不变, B 也不变
(C) 增大, B 不变
(D) 不变, B 增大

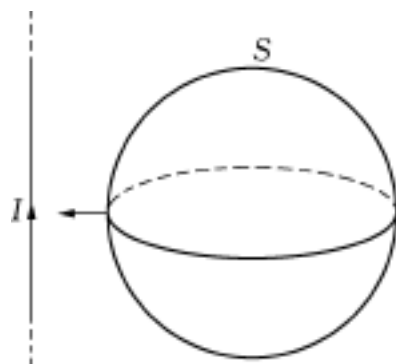


图 11-10

4. 运动电荷产生的磁场, 可由公式 $B = \frac{\mu q v \times r}{4 r^3}$ 计算. 有一点电荷在真空中作匀速直线运动, 它在给定点 P 处产生的磁感应强度 B 的大小、方向的变化

情况为[] .

- (A) 大小和方向都变化 (B) 大小不变, 方向变化
(C) 方向不变, 大小变化 (D) 大小、方向都不变

5. 载流为 I 磁矩为 P_m 的线圈, 置于磁感应强度为 B 的均匀磁场中. 若 P_m 与 B 方向相同, 则通过线圈的磁通量 与线圈所受的磁力矩 M 的大小为[] .

- (A) $\Phi = IBP_m, M = 0$ (B) $\Phi = \frac{BP_m}{I}, M = 0$
(C) $\Phi = IBP_m, M = BP_m$ (D) $\Phi = \frac{BP_m}{I}, M = BP_m$

6. 如图 11-11 所示, 长度相等的三条长直导线共面平行放置, 分别载流 1 A、2 A、3 A, 由于磁力相互作用, 它们受力为 F_1 、 F_2 、 F_3 . 这三个力的大小比 $F_1 : F_2 : F_3$ 应为[] .

- (A) 5 : 4 : 6 (B) 5 : 8 : 6 (C) 7 : 6 : 13 (D) 7 : 8 : 15



图 11-11

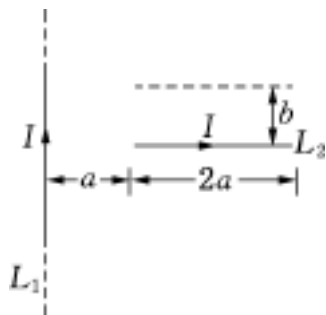


图 11-12

7. 如图 11-12 所示, 同一平面内有无限长直导线 L_1 和长为 $2a$ 直导线 L_2 , 它们相互垂直且都载有电流 I , 若导线 L_2 平行移动了距离 b , 则磁力克服外力做的功为[] .

- (A) $\frac{\mu_0 I^2 b}{3}$ (B) $\frac{\mu_0 I^2 b}{2}$ (C) $\frac{\mu_0 I^2 b}{2} \ln 3$ (D) $\frac{\mu_0 I^2 b}{2} \ln 2$

8. 如图 11-13 所示, 三边质量均为 m 、边长均为 a 的正方形线框处在均匀磁场 B 中, 线框可绕 $O_1 O_2$ 轴转动. 将线框通以电流 I , 若线框处于水平位置时恰好平衡, 则磁感应强度 B 应是[] .

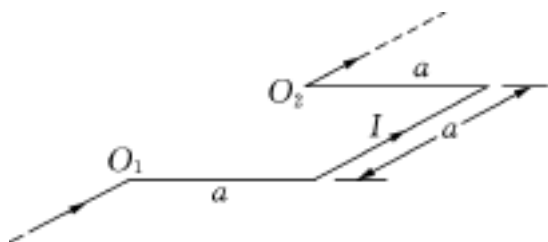


图 11-13

- (A) $\frac{3mg}{aI}$, 方向水平向左
(B) $\frac{3mg}{aI}$, 方向水平向右
(C) $\frac{2mg}{aI}$, 方向水平向左

(D) $\frac{2mg}{aI}$, 方向水平向右

9. 一无限长直圆筒, 半径为 R , 表面带有一层均匀电荷, 面密度为 σ , 在外力矩的作用下, 这圆筒从 $t = 0$ 时刻开始以匀角加速度 α 绕轴转动, 在 t 时刻圆筒内离轴为 r 处的磁感应强度 B 的大小为 [] .

- (A) 0 (B) $\mu_0 R t$ (C) $\mu_0 \frac{R}{r} t$ (D) $\mu_0 \frac{r}{R} t$

10. 用一根很细的线把一根未经磁化的针在其中心悬挂起来 (如图 11-14 所示), 当加上与针成锐角 θ 的磁场后, 则 [] .

- (A) 顺磁质针的转向使 θ 角增大; 抗磁质针的转向使 θ 角减小
(B) 顺磁质针的转向使 θ 角减小; 抗磁质针的转向使 θ 角增大
(C) 顺磁质针、抗磁质针均转动, 但不能判断 θ 角的增减
(D) 顺磁质针、抗磁质针均不转动

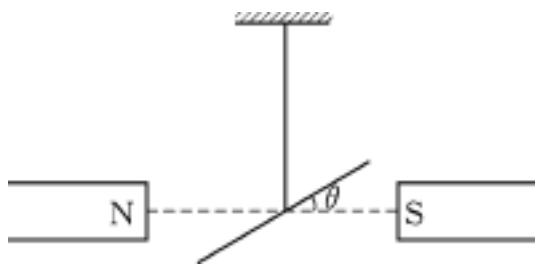


图 11-14

11.4.2 填充题

1. 北京正负电子对撞机的储存环是周长为 240 m 的近似圆环的轨道. 环中电子速率可接近光速, 当环中的电子电流为 8 mA 时, 在整个环中有 _____ 个电子在运行.

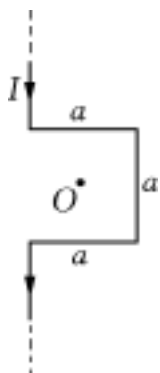


图 11-15

2. 将一无限长的直导线折成一个边长为 a 的开口正方形, 如图 11-15 所示. 并使导线通电流 I , 则正方形中心 O 点处的磁感应强度 $B =$ _____, 方向 _____.

3. 有一磁矩为 P_m 的载流线圈, 置于磁感应强度为 B 的均匀磁场中, P_m 与 B 的夹角为 θ , 则

- (1) 当 $\theta =$ _____ 时, 线圈处于稳定平衡状态;
(2) 当 $\theta =$ _____ 时, 线圈所受的力矩最大;
(3) 当线圈由 $\theta = 0^\circ$ 转到 $\theta = 180^\circ$ 时,

外力矩做的功为 _____.

4. 两根导线沿半径方向引到电阻均匀的铜环上, AB 和 CD 中的电流强度均为 I , 方向如图 11-16, 则 O 点磁感应强度 $B =$ _____. 沿图 11-16 中闭合路径 L 的线积分 $\oint_L B \cdot dl =$ _____.

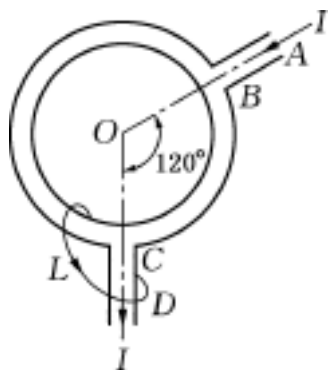


图 11-16

5. 如图 11-17 所示, 用均匀细金属丝构成一半径为

R 的圆环, 电流通过直导线 1 从 a 点流入圆环, 再由 b 点通过直导线 2 流出圆环. 设导线 1、导线 2 与圆环共面, 则环心 O 点的磁感应强度 B 的大小为 _____, 方向为 _____.

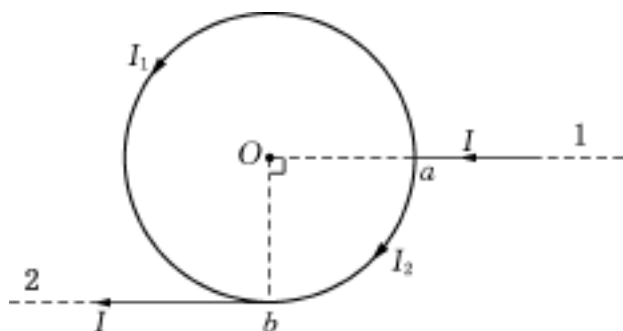


图 11-17

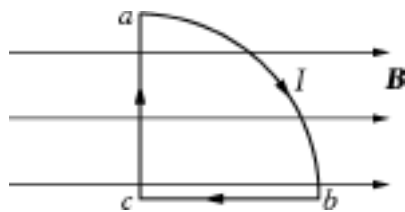


图 11-18

6. 一载有电流的 $\frac{1}{4}$ 圆周回路 $abcd$ (电流 I , 圆弧部分的半径为 R), 置于磁感应强度为 B 的均匀磁场中, 如图 11-18 所示, 则外磁场 B 作用于回路各段的安培力 F 、回路所受的合力 F 、回路的磁矩 P_m 及回路所受的磁力矩 M_m 分别为

$$\begin{aligned} F_{ab} &= \text{_____, 方向 _____;} \\ F_{ac} &= \text{_____, 方向 _____;} \\ F_{bc} &= \text{_____, } F = \text{_____;} \\ P_m &= \text{_____, 方向 _____;} \\ M_m &= \text{_____, 方向 _____}. \end{aligned}$$

7. 一平面试验线圈的磁矩大小 P_m 为 $1 \times 10^{-8} \text{ A} \cdot \text{m}^2$, 把它放入待测磁场中的 A 处, 试验线圈非常之小, 以致可以认为它所占据的空间内场是均匀的, 当此线圈的 P_m 与 z 轴平行时, 所受力矩大小为 $M = 5 \times 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{m}$, 方向沿 x 轴负向, 当此线圈的 P_m 与 y 轴平行时, 所受力矩为零, 则空间 A 点处的磁感应强度 B 的大小为 _____, 方向为 _____.

8. 两个电子在真空中运动并相遇, 相隔距离为 r 时, 两电子速率相同, 运动方向如图 11-19 所示, 则此时任一电子所受的洛伦兹力与库仑力的比值 $\frac{f_m}{f_e} =$ _____, 若 $v = 6 \times 10^3 \text{ m/s}$, 此比值的具体数值为 _____.

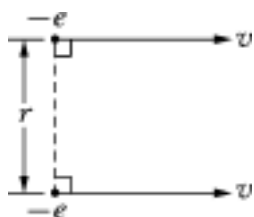


图 11-19

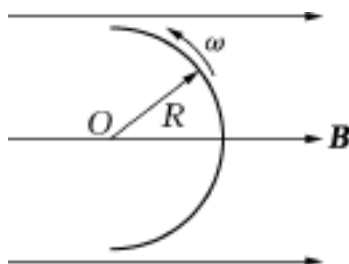


图 11-20

9. 如图 11-20 所示,在磁感应强度为 B 的均匀磁场中,放一半径为 R 的均匀带电半圆环,其电荷线密度为 λ .半圆环所在的平面与 B 平行.当半圆环以角速度 ω 绕通过环心并垂直于环面的轴转动时,它所受的磁力矩的大小为 _____,方向 _____.

10. 无限长直螺线管由表面绝缘的细导线密绕而成,单位长度的匝数为 n ,内部充满磁导率为 μ 的均匀磁介质(顺磁质).当导线中载有电流 I 时,磁介质中的磁感应强度 $B =$ _____,方向为 _____,磁化强度 $M =$ _____,方向为 _____.

11.4.3 计算题

1. 两个半径为 R 的线圈,平行放置,相距为 l ,如图 11-21 所示,并通以相等的同向电流.试求:(1)两线圈中心 O_1 和 O_2 处的磁感应强度;(2)距离 O_1O_2 的中点 O 为 x 处 P 点的磁感应强度;(3)证明当 $l = R$ 时, O 点附近的磁感应强度最为均匀.

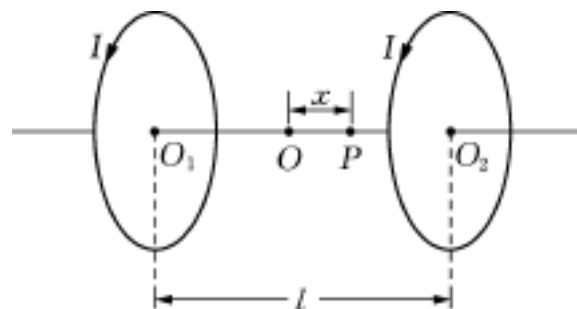


图 11-21

2. 一均匀带电长直圆柱体,电荷体密度为 ρ ,半径为 R ,绕其轴线匀速转动,角速度为 ω .试求圆柱体内距轴线 r 处的磁感应强度.

3. 一无限大均匀载流平面置于外磁场中,左侧的磁感应强度为 B_1 ,右侧的磁感应强度为 $B_2 = 3B_1$,方向如图 11-22 所示.试求:(1)载流平面上的面电流密度;(2)外磁场的磁感应强度 B .

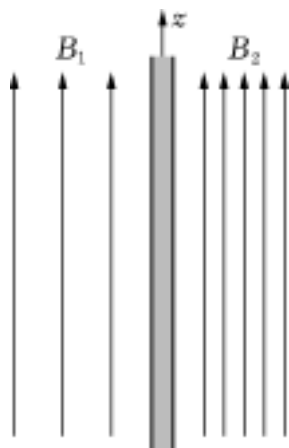


图 11-22

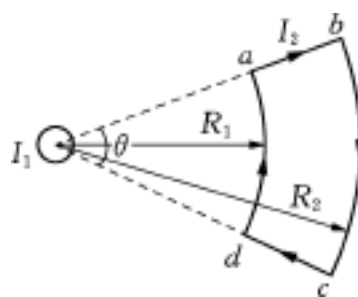


图 11-23

4. 在垂直于长直电流 I_1 的平面内放置扇形载流线圈 $abcd$,电流为 I_2 ,半径为 R_1 和 R_2 ,张角为 θ ,如图 11-23 所示.试求:(1)线圈各边所受的力;(2)线圈所受的力矩.

5. 内外半径分别为 R_1 和 R_2 的圆环, 均匀带电 Q , 处在磁感应强度为 B 的均匀磁场中, 并以角速度 ω 绕过环心 O 垂直于环平面的转轴匀速转动, B 与转轴之间夹角为 θ , 如图 11-24 所示. 求圆环受到的磁力矩.

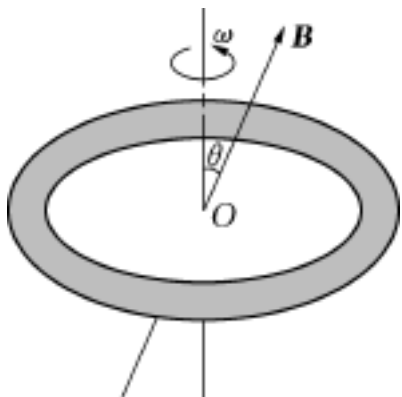


图 11-24

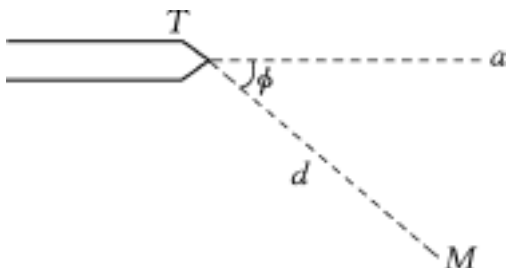


图 11-25

6. 如图 11-25 所示, 经 $U = 1\,000\text{ V}$ 电压加速的电子(加速前电子静止)从电子枪 T 射出, 其初速沿直线 Ta 的方向. 若要求电子能击中 $\phi = 60^\circ$ 方向, 与枪口相距为 5.0 cm 的靶 M . 试求在以下两种情况下, 所需的匀强磁场 B 的大小.

- (1) 磁场 B 垂直于直线 Ta 与靶 M 所确定的平面.
- (2) 磁场 B 平行于枪口 T 向靶 M 所引的直线 TM .

习题选解

[选择题 9] 提示: (1) $B = \mu i$ (i 为圆筒转动时形成的电流密度).

$$(2) i = \frac{Q}{2\pi R} \cdot \frac{\omega}{2\pi}$$

[填充题 1] 电流强度的微观表示形式为 $I = qn v S$.

取 $v = c$, 则 $I = qncS$ (其中 S 为对撞机的截面积).

在储存环中运动的电子总数为 N , 即

$$N = nS \times 2\pi R = \frac{I}{qc} \cdot 2\pi R$$

将已知数值代入得:

$$N = \frac{2 \times 3.14 \times 240 \times 8 \times 10^{-3}}{1.6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^8} = 2.512 \times 10^{11} \text{ 个}$$

[填充题 2] 图 11-26 中的电流, 可视为一无限长直线电流和一正方形电流的叠加(正方形的一边与无限长直导线重合), 如图 11-26 所示. 因为正方形一边

的电流恰好与无限长直导线中重合部分的电流抵消。

$$B_0 = 4 \times \left[\frac{\mu I}{4 \frac{a}{2}} 2 \sin 45^\circ \right] = \frac{2\sqrt{2}\mu I}{a}$$

方向垂直纸面向里。

无限长直线电流在 O 处产生的磁感应强度的大小

$$B_{20} = \frac{\mu I}{2 \frac{a}{2}} = \frac{\mu I}{a}$$

方向垂直纸面向外。

由磁场的叠加原理, O 点的磁感应强度

$$B_0 = B_{10} + B_{20}$$

考虑到 B_{20} 的方向与 B_{10} 的方向相反, O 点磁感应强度的大小应为

$$B_0 = B_{10} - B_{20} = \frac{\mu I}{a} (2\sqrt{2} - 1)$$

方向垂直纸面向里。

填充题 8. 将电子 1 作为场源, 将电子 2 作为场中受力的带电粒子。

$$f = qE + qv \times B$$

$$\text{其中 } E = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 r^2}, B = \frac{\mu}{4\pi} \frac{-ev}{r^2}$$

E 、 B 方向如图 11-27(1) 所示。

电子 2 受到的静电力和洛伦兹力分别为

$$f_e = -eE, f_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$f_m = -ev \times B, f_m = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^2 v^2}{r^2}$$

静电力和洛伦兹力的方向如图 11-27(2) 所示。

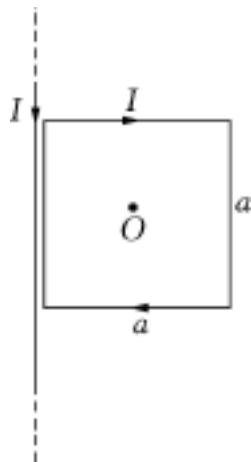


图 11-26

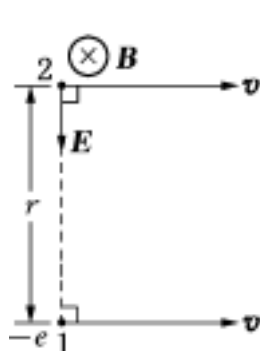


图 11-27(1)

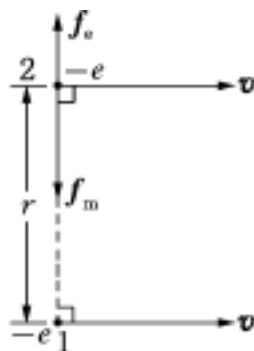


图 11-27(2)

所以 $f_m/f_e = \mu_0 \mu v^2 = 4 \times 10^{-10}$

[计算题 2] 体内均匀带电的长直圆柱体以角速度 ω 旋转时, 等效为一个多层的同轴密绕螺线管.

在管外, $r > R$ 处, $B = 0$

在管内距轴线 r 处, 作如图 11-28 所示的积分回路, 由安培环路定理得

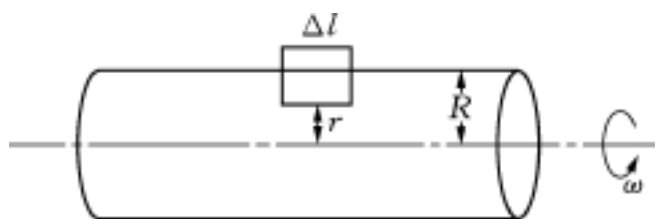


图 11-28

$$B \cdot dl = B l = \mu_0 I$$

而 $I = (R^2 - r^2) l \frac{\omega}{2}$

代入得 $B = \frac{1}{2} \mu_0 (R^2 - r^2)$

将 $r = 0$ 代入, 得中心轴线为 $B = \frac{1}{2} \mu_0 R^2$

[计算题 5] 取半径为 r 、宽 dr 的细圆环, 带电量

$$dq = \frac{Q}{(R_2^2 - R_1^2)} \cdot 2\pi r dr$$

等效电流: $dI = \frac{1}{2} dq = \frac{Q}{(R_2^2 - R_1^2)} r dr$

此细环的磁矩: $dP_m = dI \cdot r^2 = \frac{Q r^3}{(R_2^2 - R_1^2)} dr$

整个圆环的磁矩: $P_m = \int dP_m = \frac{Q}{(R_2^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{Q}{4} (R_2^2 + R_1^2)$

方向与转轴平行, 符合右手定则, 可写成矢量式:

$$P_m = \frac{Q}{4} (R_1^2 + R_2^2)$$

当线圈放在磁场中, 由于磁感应强度 B 均匀, 所以圆环受到的磁力矩

$$M = P_m \times B$$

其大小 $M = P_m B \sin \theta = \frac{1}{4} Q B (R_1^2 + R_2^2) \sin \theta$

方向由 $P_m \times B$ 决定.

[计算题 6] 分析: 本题的关键是通过对题意分析, 弄清电子的运动规律, 并通过适当的几何关系求解. 由于电子带负电, 对第一种情况, 若磁场的方向垂直

纸面向里,则与电子枪射出电子的速度相垂直,电子受洛仑兹力的作用而作匀速圆周运动(图 11-29).圆的半径 R 的大小与 B 有关.因此,只要调节 B 的大小使圆经过 M 即可击中靶子.这可通过图示的几何关系求得.对于第二种情况,则由于电子的速度方向与 B 有一夹角,所以电子作等距螺旋线运动(图 11-30).显然,适当调整 B 的大小同样可以击中靶子,但需要数学表述求解.

解:设电子从枪口 T 射出的速度为 v ,则

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU$$

式中 m 和 e 为电子的质量和电量(绝对值).

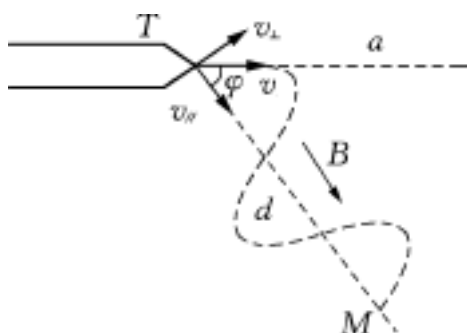


图 11-30

即

$$R = \frac{mv}{eB}$$

因此,击中靶所需 B 的大小应为

$$B = \frac{mv}{eR} = \frac{2 \sin \frac{\phi}{2}}{d} \sqrt{\frac{2mU}{e}}$$

将数据代入可得 $B = 3.7 \times 10^{-3} \text{ T}$

(2) 当 $B \perp TM$ 时,电子作等距螺旋线运动.电子以 $v_{\parallel} = v \cos \phi$ 沿 TN 作匀速直线运动,到达 M 所需时间为

$$t = \frac{d}{v \cos \phi}$$

而电子以 $v_{\perp} = v \sin \phi$ 在垂直 B 的平面内作匀速圆周运动的周期为

$$T = \frac{2\pi m}{eB}$$

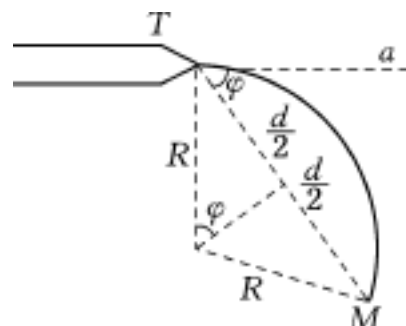


图 11-29

(1) 如图 11-30,为了击中靶 M ,电子圆轨道的半径 R 与 d 及 ϕ 应满足下述关系

$$R \sin \frac{\phi}{2} = \frac{d}{2}$$

在洛仑兹力的作用下电子圆轨道半径 R 与磁场 B 的关系为

$$evB = \frac{mv^2}{R}$$

为了能够击中靶 M , 要求

$$t = nT, \quad n = 1, 2, \dots$$

由以上三式可得

$$B = \frac{2n \, m v \cos \theta}{ed}, \quad n = 1, 2, \dots$$

把有关数据代入可得 $B = n \times 6.7 \times 10^{-3} \text{ T}, \quad n = 1, 2, \dots$

电磁感应和电磁场

12.1 基本要求与复习框图

1. 基本要求

- (1) 掌握法拉第电磁感应定律和楞次定律,并能熟练地应用;
- (2) 理解动生电动势和感生电动势的成因,掌握感应电动势的计算方法;
- (3) 了解涡旋电场的性质与涡电流;
- (4) 理解自感、互感的概念,并能对简单问题进行计算;
- (5) 理解磁场能量的概念,掌握磁能密度公式;
- (6) 理解麦克斯韦电磁场理论的两个基本假设;
- (7) 理解位移电流的概念,明确位移电流的实质是变化的电场;
- (8) 掌握麦克斯韦方程组的积分形式;
- (9) 了解电磁波的产生和基本特性。

2. 复习框图

本章在法拉第电磁感应定律的基础上,进一步分析了感应电动势产生的原因,提出了动生电动势和感生电动势的概念,阐明了麦克斯韦的“感生电场”的假设,更进一步揭示了电与磁之间的联系。最后介绍了激发感应电动势的两种方式——自感和互感,并从自感线圈的储能出发讨论了磁场的能量和磁能密度。

麦克斯韦总结了电磁现象的实验规律,提出了“感生电场”和“位移电流”两个基本假设,从而对静电场和稳恒电流磁场的方程进行了补充和推广,导出了电磁场所满足的基本方程——麦克斯韦方程组,建立了电磁场的理论并预言了电磁波的存在。这一章的主要内容可用图 12-1 和图 12-2 的线框图表示。

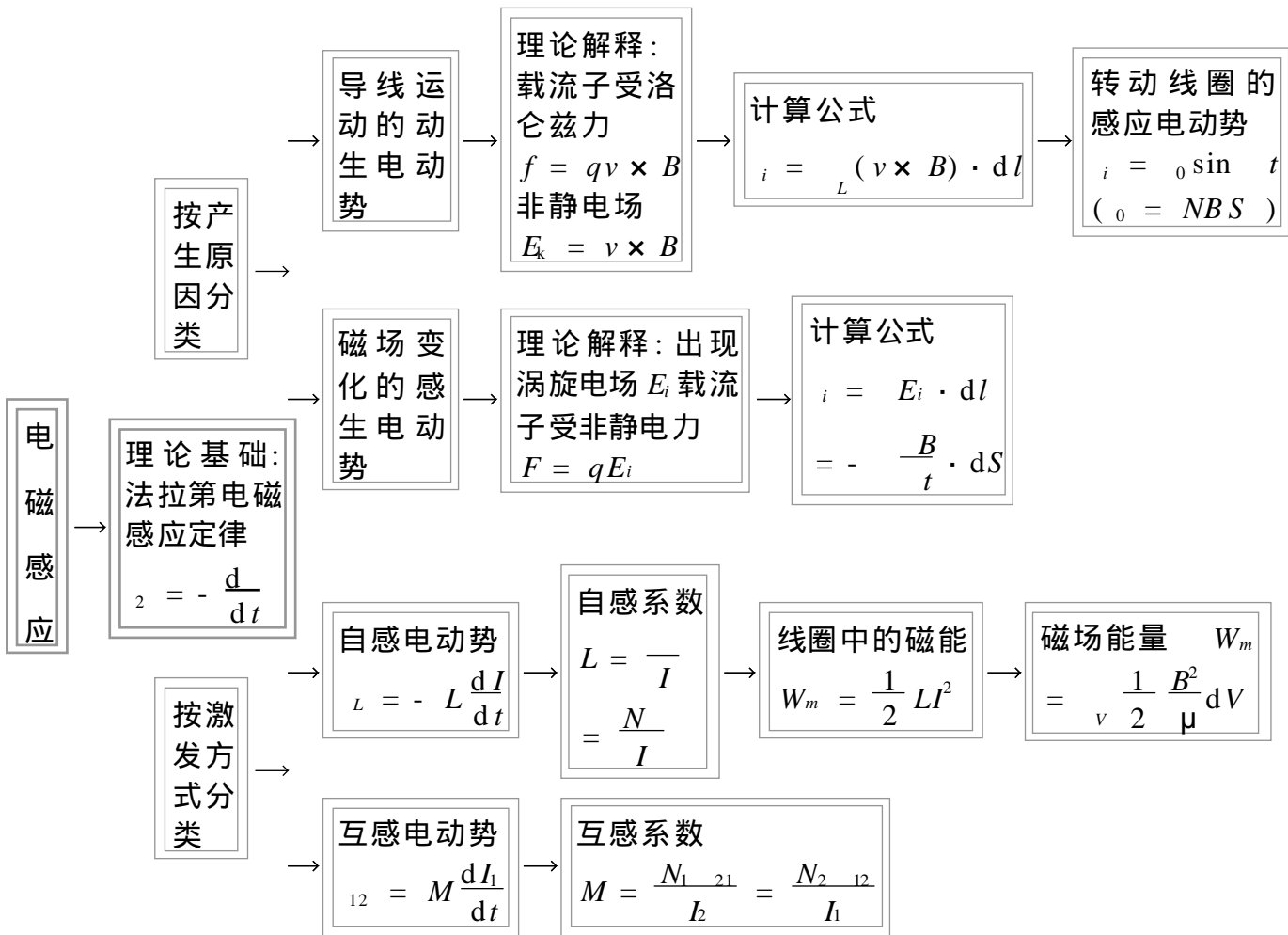


图 12-1

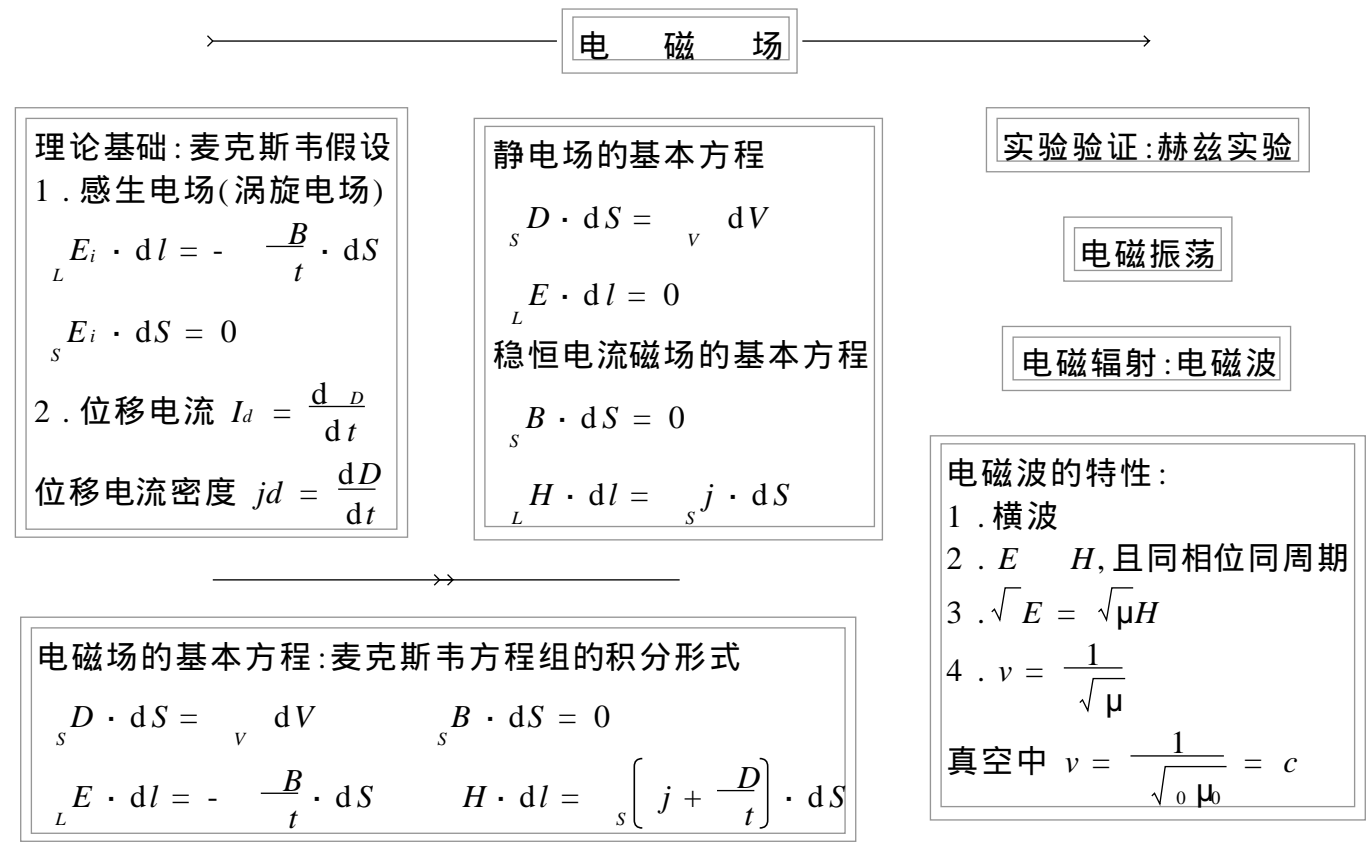


图 12-2

12.2 阅读指导与问题讨论

1. 正确理解电磁感应定律

当穿过回路的磁通量发生变化时,就会在回路中激起感应电动势.感应电动势的大小等于通过该回路的磁通量的变化率,这就是法拉第电磁感应定律,其数学表达式为

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}$$

理解该定律时应明确以下几点:

(1) 所有引起磁通量 $\Phi = B \cos \theta \cdot S$ 变化的方式(如 B , θ , S 的变化)都是等效的,按引起磁通量变化的原因的不同将感应电动势分为动生电动势与感生电动势,两种电动势的比较参见阅读指导 2.

(2) 感应电动势 $\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}$ 的瞬时性.不同的时刻 t , 对应于不同的电动势 $\varepsilon(t)$.它与平均感应电动势 $\bar{\varepsilon} = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ 是不相等的,不仅大小不等,而且方向也可不相同.

(3) $\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}$ 仅对闭合回路而言.如果回路不闭合,磁通量失去确切含义.因此,计算出来的感应电动势 ε 是指闭合回路中各部分电动势的总和.当 $\varepsilon = 0$ 时,仅指闭合回路的电动势的总和为零,并不表示回路中的各部分都不存在电动势.如闭合导线在均匀磁场中平动就是个例子.

(4) 公式 $\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}$ 中的负号表示感应电动势的方向,它表明 ε 总是与磁通量的变化率 $\frac{d\Phi}{dt}$ 的正负符号相反.通常用上式算出 ε 的大小,然后由楞次定律判断 ε 的方向.

2. 动生电动势与感生电动势的比较

感应电动势可以分为动生电动势和感生电动势两类,它们间的比较列表如下:

	动 生 电 动 势	感 生 电 动 势
特 点	导体与磁力线产生相对切割运动	通过回路的磁场 (B) 发生变化
原 因	由于 S 或 变化而引起通过回路的变化	由于磁场 B 变化引起通过回路的变化
理论解释	由于洛仑兹力对运动电荷作用的结果 . (非静电力 —— 洛仑兹力 : $F = qv \times B$)	由于变化的磁场在它周围激发涡旋电场的缘故 (非静电力 —— 感生电场力 $F = qE_i$)
存在场所	运动的导体	变化磁场周围的自由空间
计算方法	按定义作积分求解 $= \int_L (v \times B) \cdot dl$ 用电磁感应定律求解 $= - \frac{d}{dt}$	按定义作积分求解 $= \int_L E_i \cdot dl$ 用电磁感应定律求解 $= - \frac{d}{dt}$
应用实例	发电机	电子感应加速器、感应加热技术

3 . 感生电场与静电场的比较

	感 生 电 场	静 电 场
成 因	由变化的磁场激发	由静止的电荷激发
性 质	相同	两种电场对放入其中的电荷均有作用力
	相异	<div>电场线是闭合的 $\int_S E_i \cdot dS = 0$ 无源场 $\int_L E_i \cdot dl = - \frac{dB}{dt} \cdot dS$ 涡旋场 可以在导体内产生感生电动势和电流</div> <div>电场线起始于正电荷 , 终止于负电荷 $\int_S E \cdot dS = \frac{q}{\epsilon_0}$ 有源场 $\int_L E \cdot dl = 0$ 保守场 不能在导体内产生持续的电流</div>

4 . 感生电场与变化磁场之间的关系

感生电场的环路定理 $\int_L E_i dl = - \int_S \frac{dB}{dt} \cdot dS$ 给出了变化的磁场 $\frac{dB}{dt}$ 和感生电场 E_i 之间的一般定量关系 . 在具有一定对称性的条件下 , 可以由此式求出 E 的值 . 而 E_i 与 $\frac{dB}{dt}$ 方向之间的关系可由下面的分析归纳出来 .

为了简单起见 , 我们只讨论 B 的方向不随时间变化 (只有大小变化) 的情况 .

当 B 时 $\frac{dB}{dt} > 0$, 即 $\frac{dB}{dt}$ 与 B 同向 , 如果取回路 L 的绕行方向如同图

12-3(a)中虚线所示,则 $-\frac{B}{t} \cdot dS > 0$, 这时由环路定理可知 $\oint_L E \cdot dl < 0$, 这说明 E_i 线的方向与回路绕行方向(dl 方向)相反(见图 12-3(a)). 如果取回路 L 的绕行方向如图 12-3(b)中虚线所示,则 $-\frac{B}{t} \cdot dS < 0$, 而 $\oint_L E_i \cdot dl > 0$, 即 E_i 线与环路的绕向相同(见图 12-3(b)).

当 B 减小时 $-\frac{B}{t} < 0$, 即 $-\frac{B}{t}$ 与 B 反向, 如果取回路 L 的绕行方向如图 12-3(c)中虚线所示,则 $-\frac{B}{t} \cdot dS < 0$, 而 $\oint_L E_i \cdot dl > 0$, 即 E_i 线与环路的绕向相同(图 12-3(c)); 如果取回路 L 的绕行方向如图 12-3(d)中虚线所示,则 $-\frac{B}{t} \cdot dS > 0$, 而 $\oint_L E \cdot dl < 0$, 即 E_i 线与环路的绕向相反(图 12-3(d)).

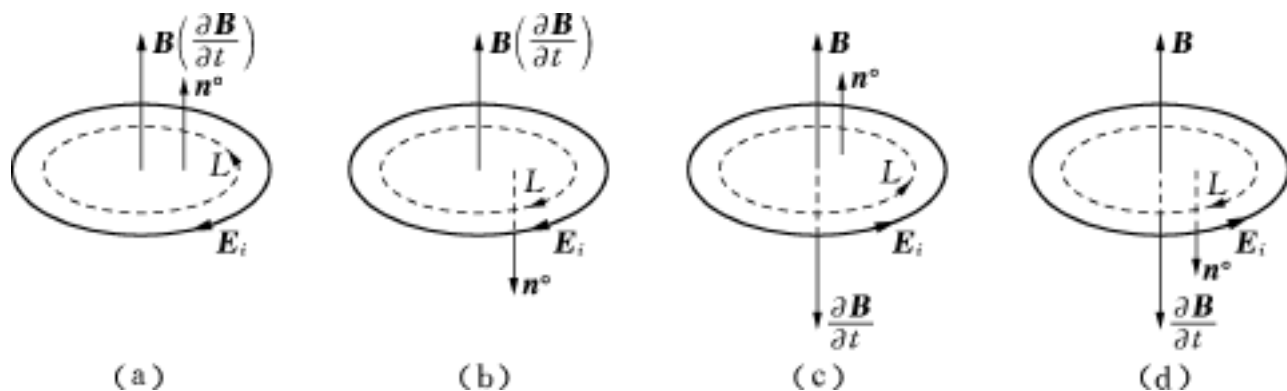


图 12-3

由上述分析可知, E_i 线与 B 互相套合, 在方向上, E_i 与 $-\frac{B}{t}$ 成左旋系统.

5. $L = \frac{\Phi}{I}$ 和 $L = \frac{d\Phi}{dI}$ 两个自感系数的适用范围

定义式 $L = \frac{\Phi}{I}$ 只适用于回路的几何形状不变, 以及回路附近没有铁磁质的情况. 因为当回路的形状变化以及回路附近有铁磁质时, Φ 与 I 不满足简单的线性关系. 该式既可用于求稳定电流电路的自感值, 也可用于求可变电流电路的自感值.

定义式 $L = \frac{d\Phi}{dI}$ 中的 L 值, 是指在 dI 时间内, 电流从 I 变到 $I + dI$ 的(即与

电流 I 相应的)自感值. 这是一种动态定义, 所以回路是不是密绕, 也不论回路周围有没有铁磁质存在, 这个关系式均适用, 同时它也提供了自感值的一种测量方法. 该式只能用于求非稳恒电流电路的自感值.

6 . 传导电流与位移电流的比较

	传导电流	位移电流
相同	都以相同的规律激发磁场	
相	由在电场作用下自由电荷的定向运动所引起	由变化的电场引起,与电荷的宏观移动无直接关系
	只存在于导体内	存在于有电场变化的空间(包括导体、真空、电介质等)
异	通过电阻时产生热效应,且遵守焦耳-楞次定律	一般不引起热效应,即使变化的电场引起束缚电荷的微观移动,也有热效应,但不遵守焦耳-楞次定律

7 . 关于麦克斯韦方程组

麦克斯韦在继承了前人已得到的电磁规律的基础上,从理论上进行概括、总结和推广,终于在 19 世纪中期建立了电磁场方程组,为完整的电磁理论奠定了基础 .

(1) 麦克斯韦电磁理论的基础——两个假设

感生电场的假设:除静止电荷产生无旋电场外,变化的磁场会产生涡旋电场 .

位移电流假设:传导电流会激发磁场,变化的电场——位移电流也会激发涡旋磁场 .

(2) 麦克斯韦电磁理论的中心内容

变化的磁场可以在它周围激发涡旋电场,变化的电场也可以在它周围激发涡旋磁场,二者相互激发,相互依存,不可分割,在空间形成统一的电磁场,传播的电磁场就是电磁波 .

(3) 麦克斯韦方程组的地位和作用

麦克斯韦方程组是宏观电磁场的普遍规律,它对于变化场和静态场均能适用.当场量 $E; B$ (或 D, H)只是位置的函数而不随时间变化时, $\frac{B}{t} = 0, \frac{D}{t} = 0$, 麦氏方程组就自动回到了静态场方程的形式.麦克斯韦方程组又是电磁规律的最高总结,它概括了库仑定律、高斯定理,毕-萨定律,安培环路定理,法拉第电磁感应定律等所包含的全部内容,可以用来解决宏观电磁场的所有问题,麦克斯韦方程组在电磁学中的地位与牛顿定律在经典力学中的地位相当 .

[问题 12-1] 将一条形磁铁插入电介质环中,环内会不会产生感应电动势?会不会产生感应电流?

电介质会发生什么现象？

[解答] 由于介质环中磁通量改变,按法拉第电磁感应定律,环内有感应电动势存在,但由于电介质内无自由电荷,故其感应电荷近乎为零.有感应电动势就一定有相应的非静力,无论是动生电动势的 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, 还是感生电动势的 \mathbf{E}_i 就其对电荷的作用来说与电荷激发的电场 \mathbf{E} 完全相同,因此电介质内会产生极化现象.

[问题 12-2] 均匀磁场被限制在半径为 R 的无限长圆柱内,磁场随时间作线性变化,现有两个闭合曲线 L_1 (为一圆形)与 L_2 (为一扇形),如图 12-4 所示.试问: L_1 和 L_2 上每一点的 $\frac{dB}{dt}$ 是否为零? 涡旋电场 \mathbf{E}_i 是否为零? $\int_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}$ 与 $\int_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}$ 是否为零?

[解答] L_1 处在磁场区域内,因而 L_1 上各点的 $\frac{dB}{dt}$ 不为零. L_2 处于磁场区域外,因而 L_2 上各点 $\frac{dB}{dt}$ 等于零.

变化的磁场激发涡旋电场,虽然本题中磁场被限制在半径为 R 的圆柱形区域内,但此磁场随时间变化而产生的涡旋电场 \mathbf{E}_i 却不局限于磁场的区域内,因而 L_1 和 L_2 上各点的涡旋电场 \mathbf{E}_i 均不为零.

由 $\int_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 可知,穿过以 L_1 闭合线为边界的曲面的磁通量不为零,因而 $\int_{L_1} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} \neq 0$. 而 L_2 闭合曲线在磁场之外,穿过以 L_2 为闭合曲线为边界的曲面的磁通量为零,所以 $\int_{L_2} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = 0$.

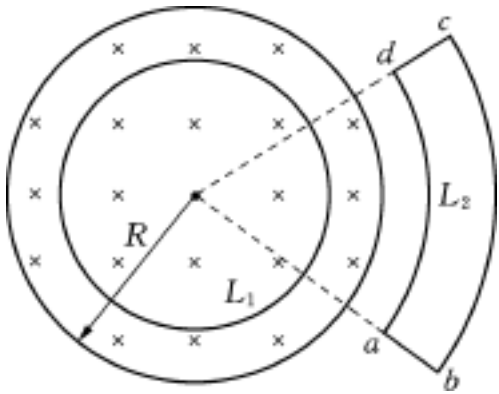


图 12-4

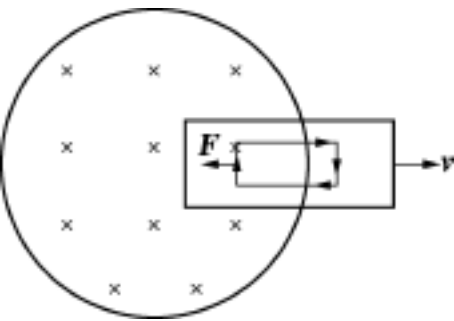


图 12-5

[问题 12-3] 把一铜片放在磁场中,如果要把这铜片从磁场中拉出或者把它进一步推入,就会受到一阻力,试解释这阻力的来源.

[解答] 如图 12-5 所示,当铜片以 v 速度拉出磁场时,处于磁场中的那部分铜片将切割磁力线,产生电动势 \mathcal{E}_k ,它构成了电源部分.而在磁场外的那部分铜片,则与电源构成回路,从而在铜片内产生涡电流.处在磁场内那部分铜片中的涡电流要受磁场力的作用,正是这个力构成了阻碍铜片运动的阻力.同理,将铜片推入时也要受到一个阻力.

[问题 12-4] 三个圆线圈相距不能太远,如何放置才能使它们两两之间的互感系数为零?

[解答] 如果使三个圆线圈圆心相重合,并且线圈所在的平面相互垂直,如图 12-6 所示,这样当每个线圈通电时,其磁感应强度都不能穿过另一个线圈,故它们两两之间的互感系数均为零.

[问题 12-5] 图 12-7 中,金属杆 AB 可以在竖直放置的金属架上无摩擦地向下滑动,匀强磁场的方向垂直纸面向外,其磁感应强度为 B . 设 AB 长为 l ,电阻为 R ,金属架的电阻可忽略.试问 AB 杆在图 12-7(a)和 (b)所示的两种金属架上由静止开始下滑时,运动情况有何不同? 能量

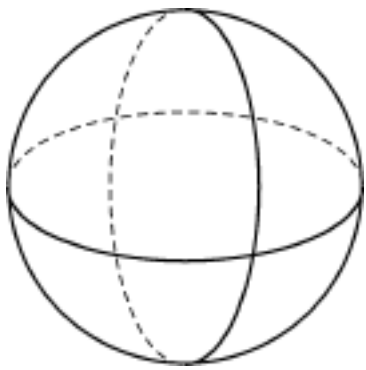
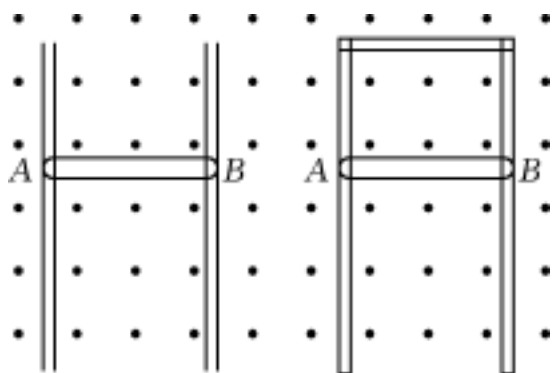


图 12-6

转换情况有何不同？



(a)

(b)

图 12-7

[解答] 图 12-7(a)中,因 AB 杆与金属架不构成回路,所以 AB 杆在磁场中作切割磁场线运动,有电动势而无感应电流,因此运动中只受重力作用,作自由下落运动,下落过程中重力势能转化为动能。

在图 12-7(b)中,因 AB 杆与金属架构成回路,所以 AB 杆下落时回路中有感应电流(方向由 B 指向 A), AB 杆除受重力作用外,还受向上的电磁阻力的作用。电磁阻力的大小

$$F_m = IBl$$

因 $I = \frac{Bvl}{R} = \frac{B^2 l^2 v}{R}$, 故得

$$F_m = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

由牛顿定律可得出,描述 AB 杆运动的动力学方程

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{B^2 l^2 v}{R} \quad (1)$$

解微分方程式(1)可得, AB 杆的速度随时间变化关系

$$v = \frac{mgR}{B^2 l^2} (1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t}) \quad (2)$$

由关系式(2)可以看出 AB 杆刚下落时,速度随时间而增加,经过足够长的时间,杆的速度达到恒定值。

$$v_m = \frac{mgR}{B^2 l^2}$$

此时 AB 杆的重力和电磁阻力大小恰好相等。

如对方程式(1)两边同乘 $vd t$, 则得

$$\begin{aligned} mv dv &= mgvd t - \frac{B^2 l^2 v^2}{R} dt \\ &= mgdy - I^2 R dt \end{aligned} \quad (3)$$

上面用了 $dy = vdt$ 和 $I = \frac{Bly}{R}$ 。其中 dy 为 AB 杆在 dt 时间内落下的位移。

对方程式(3)两边积分

$$\int_0^v mv dv = \int_0^h mgdy - \int_0^t I^2 R dt$$

式中, h 是 AB 杆在 t 时间内落下的高度。积分后得

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgh - Q$$

式中 $Q = \int_0^t I^2 R dt$, 表示 t 时间内在回路中消耗的焦耳热。可将上式改写为

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + Q$$

由此式可以看出, AB 杆下落过程中, 杆的重力势能一部分转变为杆的动能, 另一部分转变为电能, 而电能以焦耳热的形式消耗在电路中.

[问题 12-6] 一个做匀速运动的点电荷, 能在空间产生哪些场?

[解答] 考察空间某点所产生的场, 与观察者所处的运动状态有很大的关系. 若我们在相对于点电荷静止的坐标系内观察时, 则只有静电场; 而当我们相对于点电荷作匀速运动的坐标系观察时, 则不仅有电场, 而且有磁场, 这时空间一点的电场和磁场都是变化的.

[问题 12-7] (1) 真空中静电场的高斯定理 $D \cdot dS = q$ 和用于真空中电磁场时的高斯定理

$D \cdot dS = q$ 在形式上是相同的, 但理解上述两式时有何区别?

(2) 对于真空中稳恒电流的磁场 $B \cdot dS = 0$, 对于一般的电磁场也有 $B \cdot dS = 0$ 的式子, 在这两种情况下, 对 B 矢量的理解上有哪些区别?

[解答] (1) 理解上有以下区别:

静电场中 $D \cdot dS = q$, 其中 D 仅指由静止电荷产生的有源场, D 线是不闭合的, 被自由电荷所中断.

电磁场中 $D \cdot dS = q$, 其中 D 包括两种电场 即电荷产生的有源场 (D 线不闭合) 及磁场变化激发的涡旋电场, 由于涡旋电场的 D 线闭合, 对封闭曲面的通量贡献为零, 故二式具有相同的表达式.

(2) 理解上有以下区别:

真空中稳恒电流的磁场 $B \cdot dS = 0$, 其中 B 仅指传导电流激发的磁场.

电磁场中 $B \cdot dS = 0$, 其中 B 包括传导电流与位移电流激发的磁场. 但因两种激发方式所产生的磁场都是涡旋场, 磁力线闭合, 对通过封闭曲面的磁通量皆无贡献, 所以其通量表示式具有相同的形式.

12.3 解题方法与典型例题

1. 计算动生电动势的两种方法

(1) 由动生电动势的定义 $\mathcal{E} = \int_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ 计算

这种方法对闭合回路和不闭合回路都适用. 解题的一般步骤如下:

规定积分的正方向, 把导线分成无限多的线元 $d\mathbf{l}$, $d\mathbf{l}$ 的方向与积分路径的正方向一致;

把线元 $d\mathbf{l}$ 所在处的磁感应强度 \mathbf{B} 及 $d\mathbf{l}$ 的运动速度 \mathbf{v} 代入公式 $\mathcal{E} =$

$\int_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$, 统一变量, 确定积分限, 然后进行积分运算.

确定电动势的方向 若计算结果 $\mathcal{E} > 0$, 则动生电动势的方向与积分路径一致; 若 $\mathcal{E} < 0$, 则动生电动势的方向与积分路径相反. 另外根据电动势的定义, 动生电动势的方向应与 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 即非静电性场强 $\mathbf{E}_k = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的方向一致.

(2) 由法拉第电磁感应定律 $\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$ 计算

这种方法常用于磁通量便于计算的闭合回路. 对于不闭合回路, 不存在磁通量, 则可设法添补辅助导线构成闭合回路, 要求辅助线不动(不产生附加动生电动势)或辅助线上的附加电动势容易求出, 从闭合回路的动生电动势中减去辅助线上的附加动生电动势, 就得到不闭合回路上的动生电动势. 解题的一般步骤如下:

根据题意写出 B 的表达式, 标出 B 的方向;

求出穿过闭合回路的磁通量 $\Phi(t)$; 其中描述位置的量是时间的函数;

求微商 $\frac{d\Phi}{dt}$, 得出动生电动势的大小;

由楞次定律确定动生电动势的方向.

[例 12-1] 有一根导线 ab , 弯成半径为 R 的半圆形, 如果它在均匀磁场 B 中, 以直径 ab 为轴作匀角速转动, 设角速度为 ω , 如图 12-8(a) 所示. 求当半圆形导线所在平面和磁场 B 平行时, a 、 b 两端的动生电动势.

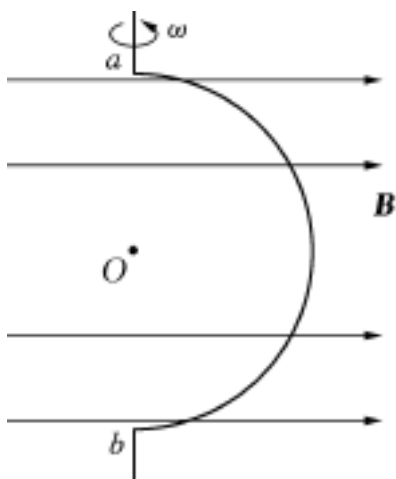


图 12-8(a)

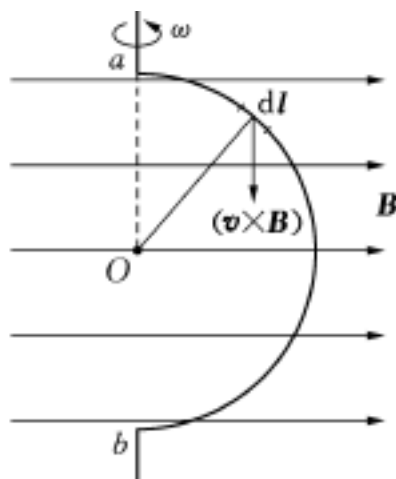


图 12-8(b)

[解法一] 由动生电动势的定义式求解.

积分路径为半圆弧 ab , 取沿圆弧从 a 到 b 的为积分路径的正方向.

在导线上取一段线元 dl , 当导线在图中位置时, 线元的速度垂直纸面向里, 所以 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = vB$, $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的方向如图 12-8(b) 所示. 故有

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_{ab} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{ab} Bv dl \cos(90^\circ - \theta) \\ &= \int_{ab} Bv \sin \theta dl = \int_0^\pi B R^2 \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} B \omega R^2 \end{aligned}$$

从上面的计算结果 > 0 , 说明沿着积分路径电势升高, 所以动生电动势的方向从 a 到 b (即 a 负 b 正)。

[解法二] 由电磁感应定律求解。

由于 ab 不闭合, 故添补连接 a 、 b 的直导线, 构成一个半圆形的回路。当回路平面与磁场成 θ 角时, 通过回路的磁通量为

$$\Phi = \frac{1}{2} R^2 B \sin \theta$$

所以线圈转动时, 闭合回路中的动生电动势为

$$\mathcal{E} = \left| - \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{1}{2} R^2 B \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} R^2 B \omega \cos \theta$$

在图中位置 $\theta = 0$, 所以

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} R^2 B \omega$$

由于添上的直导线 ab 是不动的, 在它两端无动生电动势, 所以闭合回路的动生电动势应等于半圆弧两端的动生电动势 \mathcal{E}_{ab} 。因此有

$$\mathcal{E}_{ab} = \mathcal{E} = \frac{1}{2} R^2 B \omega$$

所得结果与解法一相同。

[例 12-2] 长直导线与直角三角形线圈 ABC 共面放置, 几何位形如图 12-9(a) 所示。若直导线中通有电流 I , 线圈以速度 v 向右平动。求当线圈与直导线相距为 d 时线圈中的动生电动势。

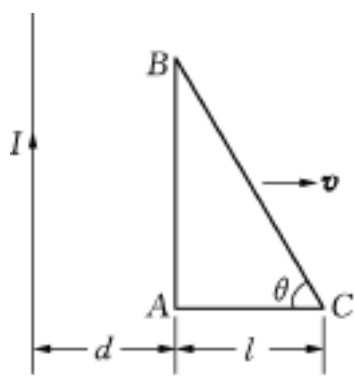


图 12-9(a)

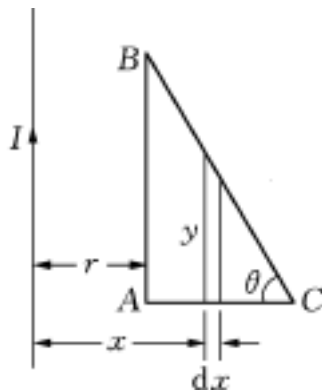


图 12-9(b)

[解法一] 由电磁感应定律求解。

当线圈距直导线为 r 时, 通过三角形线圈中 x 到 $x + dx$ 面元内 (图 12-9(b)) 的磁通量 $d\Phi = B \cdot dS =$

$$B dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} y dx$$

而

$$y = (r + l - x) \tan \theta$$

代入得

$$d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} (r + l - x) \tan \theta dx$$

通过整个线圈的磁通量

$$\Phi = \int_r^{r+l} d\Phi = \int_r^{r+l} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} (r + l - x) \tan \theta dx$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2} \tan \left[(r+l) \ln \frac{r+l}{r} - l \right]$$

线圈中的动生电动势

$$= - \frac{d}{dt} = - \frac{\mu_0 I}{2} \tan \left[\ln \frac{r+l}{r} \frac{dr}{dt} + (r+l) \left[\frac{1}{r+l} \right] \frac{dr}{dt} - (r+l) \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \right]$$

由于 $\frac{dr}{dt} = v$, 所以

$$= - \frac{\mu_0 I v}{2} \tan \left[\ln \frac{r+l}{r} + 1 - \frac{r+l}{r} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I v}{2} \tan \left[\frac{l}{r} - \ln \frac{r+l}{r} \right]$$

当 $r = d$ 时, $= \frac{\mu_0 I v}{2} \tan \left[\frac{l}{d} - \ln \frac{d+l}{d} \right]$

由楞次定律确定线圈中动生电动势的方向为顺时针方向。

[解法二] 由动生电动势的定义式求解。

当线圈运动时, 三角形直角边 AB 切割磁力线, 产生动生电动势

$$\varepsilon_{AB} = B \cdot \overline{AB} \cdot v = \frac{\mu_0 I}{2 d} \tan \cdot v$$

方向由 $A \rightarrow B$ 。

三角形斜边 BC 切割磁力线, 产生动生电动势。在 BC 上任取一线元 dl , 如图 12-9(c) 所示。线元运动时产生的动生电动势

$$d\varepsilon_{BC} = (v \times B) \cdot dl = v B \sin 90^\circ dl \cos(90^\circ + \theta)$$

$$= - v \frac{\mu_0 I}{2 x} \sin \theta dl$$

而 $dl \cos \theta = dx$, 于是 $d\varepsilon_{BC} = - v \frac{\mu_0 I}{2 x} \tan \theta dx$

$$\varepsilon_{BC} = \int_d^{d+l} d\varepsilon_{BC} = \int_d^{d+l} - v \frac{\mu_0 I}{2 x} \tan \theta dx = - \frac{\mu_0 I v}{2} \tan \theta \ln \frac{d+l}{d}$$

方向由 $C \rightarrow B$ 。

由于线圈直角边 CA 上任一处 $(v \times B)$ 的方向均垂直于线元 dl , 所以 $\varepsilon_{CA} = 0$, 所以整个线圈中的动生电动势

$$= \varepsilon_{AB} + \varepsilon_{BC} + \varepsilon_{CA} = \frac{\mu_0 I v}{2} \tan \theta \left[\frac{l}{d} - \ln \frac{d+l}{d} \right]$$

方向为 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ 。

2. 计算感生电动势的两种方法

(1) 由感生电动势的定义 $\varepsilon = \oint_L E_i \cdot dl$ 计算

这种方法虽然对闭合回路和非闭合回路都适用, 但需预先知道 L 上感应电场

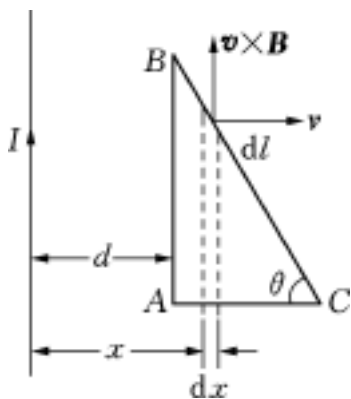


图 12-9(c)

E_i 的分布,因此只有在某种特殊对称性的情况下(如无限长圆柱空间的均匀磁场随时间变化的情形)才能应用,而对一般情况,因空间的感生电场很难计算,故不能用这方法计算感生电动势.解题的一般步骤如下:

规定积分回路的正方向,在 L 上取线元 dl , dl 的方向与积分路径的正方向一致.

根据磁场分布的对称性,分析 E_i 分布的对称性.

把线元 dl 所在处的磁感应强度 E_i 代入公式 $\varepsilon = \oint_L E_i \cdot dl$, 统一变量,确定积分限,然后进行积分运算.

确定电动势的方向.若计算结果 $\varepsilon > 0$, 则感生电动势的方向与积分路径一致;若 $\varepsilon < 0$, 则感生电动势的方向与积分路径相反.另外,根据电动势的定义,感生电动势的方向应与非静电性场 E_i 的方向一致.

(2) 由法拉第电磁感应定律 $\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}$ 计算

方法与步骤与由法拉第电磁感应定律求动生电动势相同.

[例 12-3] 在半径为 R 的长直螺线管中,均匀磁场随时间匀变速增大 $\left[\frac{dB}{dt} > 0 \right]$, 直导线 $ab = bc = R$, 如图 12-10 所示,求导线 ac 上的感应电动势.

[解法一] 由感应电动势的定义式求解:

由于导线 ab 所在区域与 bc 所在区域的 E_i 表达式是不同的,所以要分段进行积分,故有

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \int_a^c E_i \cdot dl = \int_a^b E_i \cdot dl + \int_b^c E_i \cdot dl \\ &= \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bc} \end{aligned}$$

对 ab 段,如图 12-10(a)所示,可知 E_i 的方向为逆时针,取线元 dl , dl 与 E_i 间夹角为 θ , dl 所在处的 $E_i = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$, r 为管轴到线元 dl 的距离, h 为管轴到 ab 的距离, $h = R \cos 30^\circ$,

$$\begin{aligned} \text{可得 } \varepsilon_{ab} &= \int_a^b E_i \cdot dl = \int_a^b E_i \cos \theta \, dl = \int_a^b \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \cos \theta \, dl \\ &= \frac{1}{2} \frac{dB}{dt} \int_a^b r \cos \theta \, dl = \frac{1}{2} \frac{dB}{dt} \int_a^b h \, dl \\ &= \frac{h}{2} \frac{dB}{dt} \int_a^b dl = \frac{1}{2} R \cos 30^\circ \frac{dB}{dt} R \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$

对 bc 段,如图 12-10(b)所示,

$$\varepsilon_{bc} = \int_b^c E_i \cdot dl = \int_b^c E_i \cos \theta \, dl$$

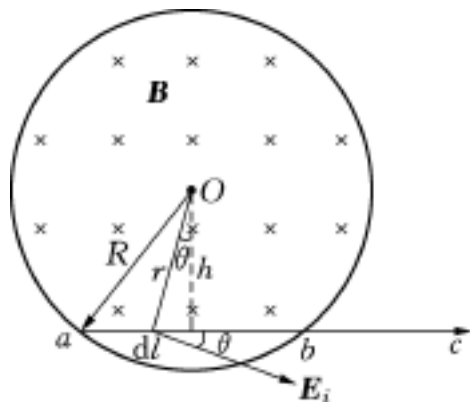


图 12-10(a)

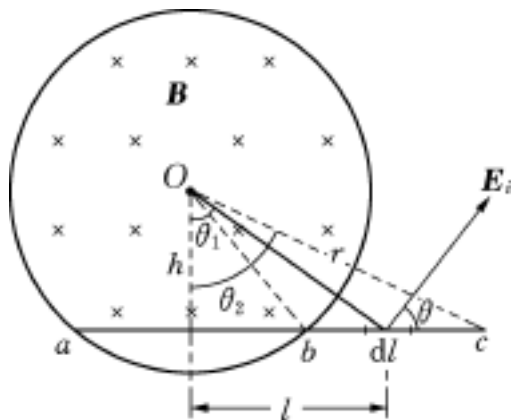


图 12-10(b)

其中 $E_i = \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$, 故有

$$E_{bc} = \frac{R^2}{2r} \cos \theta \, dl,$$

将式中的变量 r, l 统一用变量 l 表示, 其中

$$l = h \tan \theta$$

所以

$$dl = h \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}.$$

再将 $\cos \theta = \frac{h}{r}$, 即 $\frac{1}{r} = \frac{\cos \theta}{h}$ 代入积分式, 得

$$\begin{aligned} E_{bc} &= \int_a^c \frac{R^2}{2} \frac{dB}{dt} \frac{\cos \theta}{r} dl \\ &= \int_a^c \frac{R^2}{2} \frac{dB}{dt} \frac{\cos^2 \theta}{h} h \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{R^2}{12} \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$

其中 $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$. 最后得

$$E_{ac} = E_{ab} + E_{bc} = \frac{\sqrt{3}R^2}{4} \frac{dB}{dt} + \frac{R^2}{12} \frac{dB}{dt} = \frac{R^2}{4} \frac{dB}{dt} \left[\sqrt{3} + \frac{1}{3} \right]$$

E_{ac} 的方向为 $a \rightarrow b$.

[解法二] 由法拉第电磁感应定律求解:

如图 12-10(c) 所示, 添辅助线 Oa 和 Oc 与 ab 组成一闭合三角形回路 $OabcO$, 则由法拉第电磁感应定律可知, 回路 $OabcO$ 的感生电动势的大小为

$$\mathcal{E}_i = \left| - \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{dB}{dt} \cdot dS = \frac{dB}{dt} S$$

其中 S 为回路 $OabcO$ 中有磁通量变化的区域面积, 即 $S_1 + S_2$.

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 = \frac{1}{2} R^2 \cos 30^\circ + \frac{1}{2} R^2 \frac{1}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 + \frac{1}{12} R^2 \end{aligned}$$

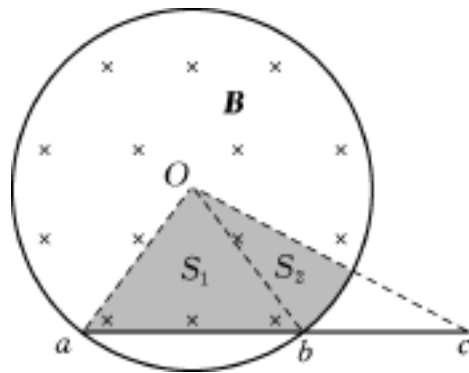


图 12-10(c)

$$\text{所以 } \mathcal{E}_i = \frac{dB}{dt} \left[\frac{\sqrt{3}}{4} R^2 + \frac{1}{12} R^2 \right] = \frac{R^2}{4} \frac{dB}{dt} \left[\sqrt{3} + \frac{1}{3} \right]$$

由于回路 $OabcO$ 的两边 Oa 和 Oc 均沿圆周的径向, 故其上的感应电动势均为零, 所以该回路的感应电动势就等于直导线 ac 上的感应电动势, 即

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{ac} = \frac{R^2}{4} \frac{dB}{dt} \left[\sqrt{3} + \frac{1}{3} \right]$$

计算结果与解法一中得到的结论完全相同, 显然解法二更为简便.

[例 12-4] 如图 12-11 所示, 均匀磁场 B 与导线回路法线间的夹角为 θ , 若此均匀磁场 B 随时间线

性增加,即 $B = Kt$ ($K > 0$). 长为 l 的金属杆 ab 以恒定的速率 v 向右滑动,求回路中任意时刻感应电动势的大小和方向(设 $t = 0$ 时, $x = 0$).

[解] 由于磁场 B 随时间在变化,同时杆 ab 又运动,所以在回路中,既有感生电动势,又有动生电动势,如果我们分别计算感生电动势和动生电动势,将是较麻烦的,而用法拉第电磁感应定律求解,就可不必区分感生与动生,在所求结果中,感生电动势与动生电动势都包括在内了.下面就运用法拉第电磁感应定律来求解.

首先求任一时刻回路所包围的磁通量

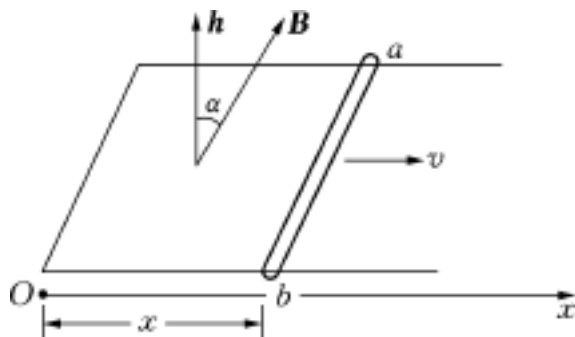


图 12-11

$$\begin{aligned} &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B \cos \alpha \, dS \\ &= B \cos \alpha \, S = B \cos \alpha \, xl \end{aligned}$$

式中 B 与 x 都是时间 t 的函数,根据法拉第电磁感应定律,有

$$i = \left| - \frac{d}{dt} \right| = l \cos \alpha \frac{dB}{dt} \cdot x + Bl \cos \alpha \frac{dx}{dt}$$

很显然,上式中第一项为感生电动势,第二项为动生电动势,将 $B = Kt$ 和 $x = vt$ 代入上式,得回路中感应电动势的大小为

$$\begin{aligned} i &= Klvt \cos \alpha + Klvt \cos \alpha \\ &= 2 Klvt \cos \alpha \end{aligned}$$

i 的方向可由楞次定律判定为由 $a \rightarrow b$,即为顺时针方向.

3. 自感与互感的计算

自感与互感的计算一般是比较复杂的,通常用实验的方法测定.只有在某些

简单、理想的条件下,才可以应用 $L = \frac{\Phi_L}{I}$; $M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$;

$\frac{d\Phi_{12}}{dt} = \frac{d\Phi_{21}}{dt}$, 方便地求出线圈的自感或互感,其计算步骤一般如下:

(1) 设线圈中通有电流强度 I , 计算该电流在空间所激发的磁感应强度 B 的大小.

(2) 求出穿过线圈回路的磁通链数.

(3) 代入上述 L 和 M 的公式,求出自感或互感系数.

[例 12-5] 一螺绕环截面为矩形,内、外半径分别为 R_1 和 R_2 ,总匝数为 N ,管内充满相对磁导率为 μ_r 的均匀顺磁质. 求出螺绕环的自感系数.

[解] 设线圈中通电流 I ,由介质中的安培环路定理及公式 $B = \frac{\mu H}{\mu_0}$, 可得螺绕环内部的磁感应强度为

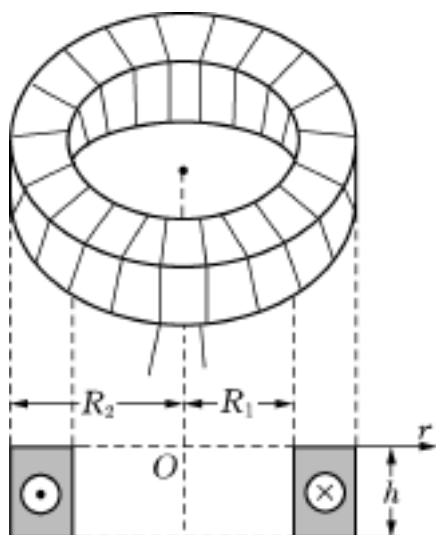


图 12-12

$$B \begin{cases} \text{大小: } B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2r} \\ \text{方向: 如图 12-12 所示} \end{cases}$$

若选线圈截面的法向与 B 相同, 则通过每匝的磁通量为

$$\begin{aligned} &= \int_S B \cdot dS = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 \mu_r I}{2r} h dr \\ &= \frac{\mu_0 \mu_r I h}{2} \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

通过整个螺绕环的磁通链为

$$\Phi = N \int_S B \cdot dS = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r I h}{2} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

于是

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r h}{2} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

[例 12-6] 如图 12-13 所示, 截面积为 S 单位长度上匝数为 n 的螺绕环上套一边长为 l 的正方形线圈, 其中通以交变电流 $I = I_0 \sin t$. 螺绕环两端为开路, 求其两端的互感电动势的大小.

[解] 设方线圈为线圈(1)、螺绕环为线圈(2). 由于方线圈通有变化的电流, 则会在螺绕环中产生互感电动势, 其大小为

$$\mathcal{E}_{12} = \left| M_{12} \frac{dI_1}{dt} \right|$$

但是因方线圈中的电流在空间产生的磁感应强度的分布不易确定, 因此很难求得方线圈对螺绕环的互感系数. 对这样的问题, 我们可利用互感系数 $M_{12} = M_{21} = M$, 先求出螺绕环对方线圈的互感系数

$$M_{21} = \frac{N_1 \Phi_{21}}{I_2}$$

为此, 设螺绕环中通电流 I_2 , 则螺绕环在方线圈中引起的磁通量

$$\Phi_{21} = \mu_0 n I_2 S$$

因方线圈仅一匝, 即 $N_1 = 1$, 所以

$$M_{21} = \mu_0 n S$$

这样很容易求得, 螺绕环两端的互感电动势

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{12} &= \left| M_{12} \frac{dI_1}{dt} \right| = \left| \mu_0 n S \frac{dI}{dt} \right| \\ &= \mu_0 n I_0 S \cos t \end{aligned}$$

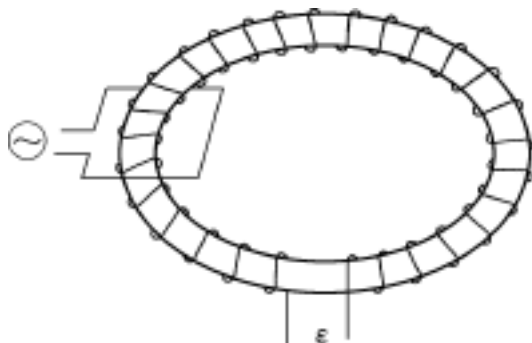


图 12-13

4. 磁场能量的计算

磁场能量同电场能量一样定域在场中, 单位体积内的磁场能量, 即磁场能量

体密度为

$$w_m = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

该式是适用于任何磁场的普通表达式。

对于非均匀磁场,可以把磁场空间分成无数多个小体积元,在每一体积元 dV 内,可视磁场分布均匀,于是体积为 V 的空间内的总磁场能量可以通过积分求得,即

$$W_m = \int_V w_m dV$$

该式是计算磁场能量的基本表达式。

另外载流线圈中的磁场能量可由公式 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ 计算,其中 L 为线圈的自感系数, I 为自感线圈中的电流。

[例 12-7] 当[例 12-5]中的螺绕环中通以电流 I 时,求这螺绕环的总磁场能量。

[解法一] 由[例 12-5]知螺绕环内部的磁感应强度为

$$B = \frac{N\mu_0\mu_r I}{2\pi r}$$

于是

$$\begin{aligned} W_m &= \int_V \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \frac{N^2 \mu_r^2 I^2}{4\pi^2 r^2 \mu} \cdot 2\pi r \cdot h \cdot dr \\ &= \frac{N^2 \mu_0 \mu_r h I^2}{4} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r h I^2}{4} \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

[解法二] 由[例 12-5]知螺绕环的自感系数为

$$L = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r h}{2} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

于是

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r h I^2}{4} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

两种解法的结果完全相同。

5. 位移电流的计算

由于位移电流系电场变化所引起的,且通过某一面 S 的位移电流强度 I_d 等于穿过该面的电位移通量的时间变化率,而某点位移电流密度 j_d 就等于该点电位移矢量的时间变化率,即

$$\begin{aligned} I_d &= \frac{dQ}{dt} \\ j_d &= \frac{dD}{dt} \end{aligned}$$

因此计算位移电流,需先确定场强随时间的变化关系。

[例 12-8] 空气电容器接在电源两端,电压为 U ,如图 12-14 所示,回路电阻忽略不计.今将电容器的两极板以速率 v 匀速拉开,当两极板间距为 x 时,求电容器内位移电流密度.

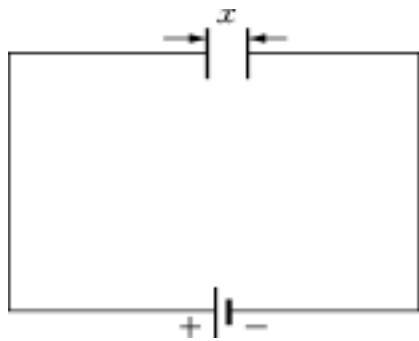


图 12-14

[解] 因为电容器两极间的电压恒定,所以当两板间距拉开时,板间的场强将降低.由于电容器两极间场强变化,因此引起位移电流.

$$\text{电容器两极间的场强 } E = \frac{U}{x}$$

$$\text{电位移矢量的大小 } D = \epsilon_0 E = \frac{\epsilon_0 U}{x}$$

当两极板拉开时,板间的位移电流密度的大小为

$$j_d = \frac{dD}{dt} = \frac{dD}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{\epsilon_0 U}{x^2} \frac{dx}{dt} = \frac{\epsilon_0 U v}{x^2},$$

而位移电流密度为 $j_d = \frac{dD}{dt}$.

当两极板拉开时,两极间的场强在减少,电位移矢量也在减少,即 $\frac{dD}{dt}$ 的方向与 D 的方向相反,所以 j_d 的方向也与 D 反向.在两极板间 D 是从左向右的,所以位移电流密度 j_d 的方向应从右向左.

[例 12-9] 真空中,半径 $R = 0.10\text{m}$ 的两块圆板构成一平板电容器,如图 12-15 所示.在电容器充电时,两极板间电场的变化率 $\frac{dE}{dt} = 1.0 \times 10^{13} \text{ V} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

求(1) 两极板间的位移电流强度;

(2) 对电容器充电电流的电流强度.

[解] (1) 求位移电流:

由位移电流的定义知

$$I_d = \frac{dQ}{dt}$$

因为平板电容器内的电场为均匀场,所以

$$Q = D \cdot S = D \cdot \pi R^2 = \epsilon_0 E \pi R^2$$

由此得

$$\begin{aligned} I_d &= \epsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt} \\ &= 8.85 \times 10^{-12} \times 3.14 \times (0.10)^2 \times 1.0 \times 10^{13} \\ &= 2.8(\text{A}) \end{aligned}$$

由于充电时极板间场强在增大,位移电流流向与电场的方向一致,如图 12-15 所示.

(2) 求充电电流的电流强度:

充电电流的电流强度应等于电容器极板上电量的变化,即

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi R^2 D) = \pi R^2 \frac{dD}{dt}$$

式中, $\pi R^2 D$ 为极板上的电荷面密度.而平行板电容极板上的电荷面密度的大小等于电容器内的电位移矢量 D 所以有

$$I = \pi R^2 \frac{dD}{dt} = \pi R^2 \epsilon_0 \frac{dE}{dt} = 2.8(\text{A})$$

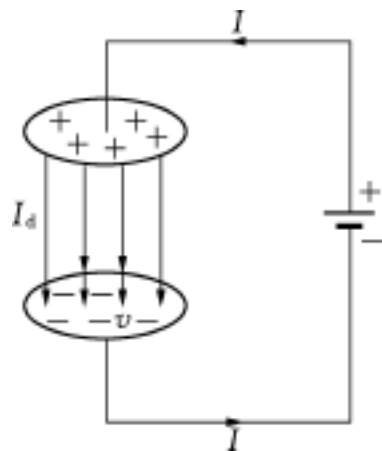


图 12-15

由上面的计算可以看出,电容器充电时,在充电回路中,导线内有传导电流 I (充电电流),两极板间有变化的电场激发的位移电流 I_d . 传导电流 I 和位移电流 I_d 大小相同,流向也一致. 它们构成连续的闭合电流(全电流).

6 . 感生磁场的计算

变化的电场激发位移电流,位移电流与传导电流一样在空间产生磁场. 对圆柱形空间的均匀电场随时间变化时激发的感生磁场可用全电流安培环路定理

$\oint_L H \cdot dl = I + I_d$ 计算 .

[例 12-10] 求[例 12-9]中电容器两极板间离两圆形极板圆心连线距离为 r 的一点处的磁感应强度的大小 .

[解] 从例 12-9 的讨论已经知道,平行板电容器的充电回路中,导线内有传导电流 I ,电容器的极板间有位移电流 I_d ,而且 $I_d = I$, 两者构成了闭合电流. 因为在圆形极板间的位移电流的电流线是与极板垂直的平行线,且以极板圆心连线为中心地对称分布. 所以它所激发的磁场磁力线是一系列圆心在极板圆心连线上的同心圆,如图 12-16 所示,故可以用安培环路定理来求磁感应强度 B .

取半径为 r 的同心圆为积分回路,则有

$\oint_L H \cdot dl = I_d$

又因回路内包围的是两极板间位移电流中的部分

故有: $H \cdot 2 \pi r = \frac{I_d r^2}{R^2}$

解得 $H = \frac{I_d r}{2 \pi R^2}$

由 B 和 H 的关系式,得

$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I_d r}{2 \pi R^2}$

将例 12-9 中已求出 $I_d = \epsilon_0 R^2 \frac{dE}{dt}$ 代入 B 的表示式中得

$B = \frac{1}{2} \mu_0 \epsilon_0 r \frac{dE}{dt}$

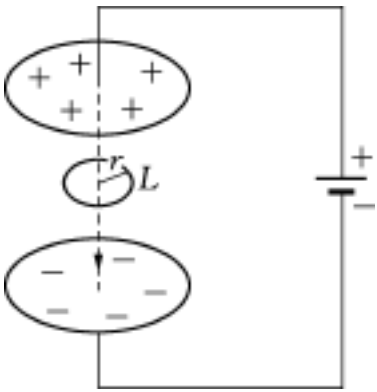


图 12-16

12 .4 自测练习与能力训练

12 .4 .1 选择题

1 . 有两根金属棒 OA 和 CD , OA 能绕固定点 O 转动,它转动过程中和 CD

接触点 M 以匀速率 v 向左移动 (O 点与 CD 的距离为 h) .把这装置放在均匀磁场中,磁感应强度 B 的方向如图 12-17 所示,则在棒 OA 转动的过程中, O 、 C 两点的电势差[] .

- (A) 不断增加 (B) 保持不变 (C) 不断减少 (D) 先增加,后减少

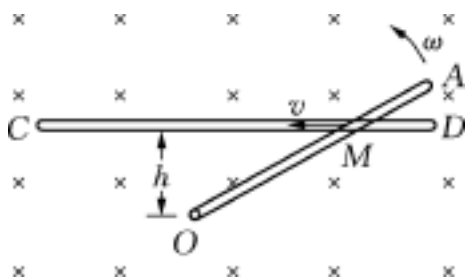


图 12-17

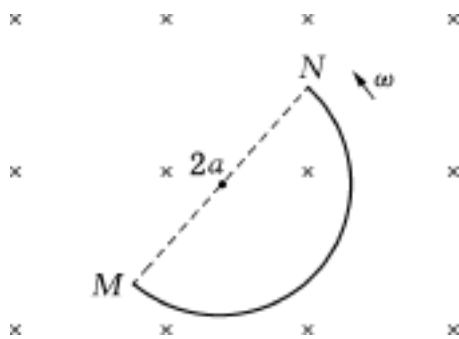


图 12-18

2 . 一细导线弯成直径为 $2a$ 的半圆形,均匀磁场的磁感应强度 B 垂直于导线所在平面,方向向里 .当导线绕垂直于半圆面且通过 M 点的轴以匀角速度逆时针转动时,导线两端的电动势 $_{MN}$ 为[] .

- (A) $2 a^2 B$ (B) $\frac{1}{2} a^2 B$ (C) $a^2 B$ (D) $\frac{1}{4} a^2 B$

3 . 一长为 l 的螺线管,原来用细导线单层密绕而成,如换用直径比原来大一倍的导线单层密绕,则螺线管自感系数为[] .

- (A) 增加到原来的两倍 (B) 减少到原来的二分之一
(C) 减少到原来的四分之一 (D) 增加到原来的四倍

4 . 一根导体细棒,由于弹簧的弹力作用,在匀强磁场中作无阻尼的简谐振动 .在振动过程中,由于切割磁力线产生动生电动势 .若以导体棒通过平衡位置时刻作为动生电动势的起始时刻,能较正确地表示动生电动势随时间变化图形是[] .

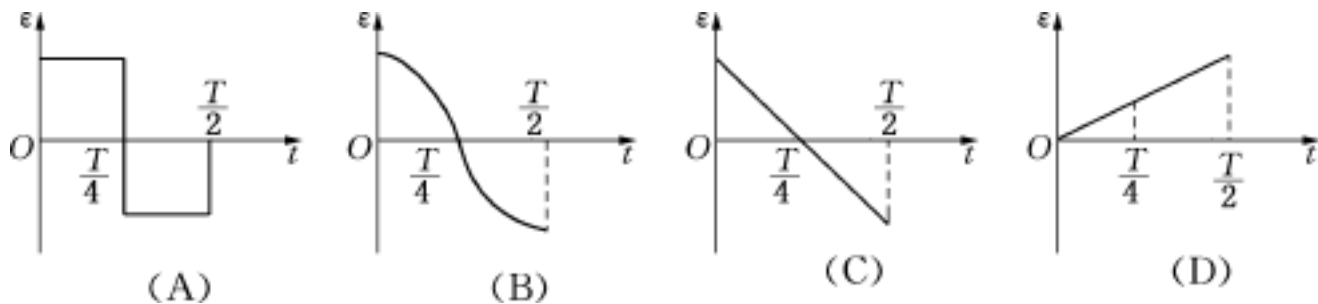


图 12-19

5 . 如图 12-20 所示, M 为一闭合金属轻环,当右侧线圈通以如下所说哪种情

况的电流时,将在环内产生图示方向感应电流,同时环向线圈方向移动.[] .

(A) 电流由 b 点流入, a 点流出,并逐渐减少

(B) 电流由 b 点流入, a 点流出,并逐渐增大

(C) 电流由 a 点流入, b 点流出,并逐渐减少

(D) 电流由 a 点流入, b 点流出,并逐渐增大

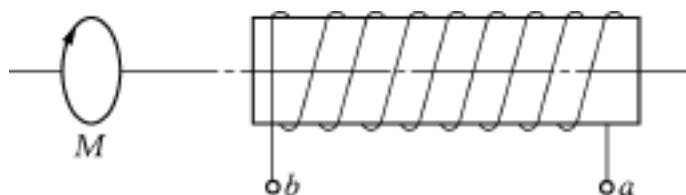


图 12-20

6. 如图 12-21 所示,一螺线管铅直放置,通有直流电流,螺线管正上方有一导体圆环,沿螺线管轴线铅直下落,下落过程中圆环面恒保持水平,则圆环经图中 A 、 B 、 C 三点时加速度大小为[] .

(A) $a_A < a_B < a_C$

(B) $a_A < a_C < a_B$

(C) $a_C < a_A < a_B$

(D) $a_B < a_A < a_C$

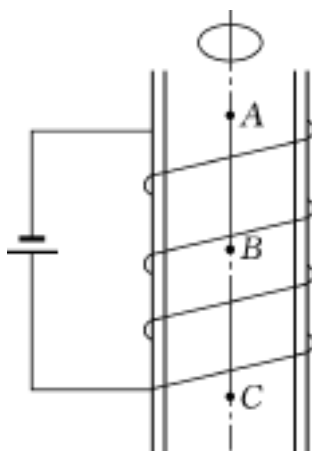


图 12-21

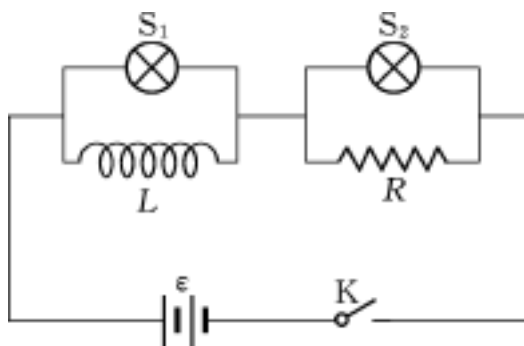


图 12-22

7. 如图 12-22 所示电路, S_1 和 S_2 是两个电阻相同的小灯泡, L 是一个自感线圈,自感系数很大,线圈电阻也等于 R ,当开关 K 接通时[] .

(A) S_1 先比 S_2 亮,逐渐达到一样亮

(B) S_1 先比 S_2 暗,逐渐达到一样亮

(C) S_1 和 S_2 始终同样亮,亮度不变

(D) S_1 和 S_2 始终同样亮,亮度逐渐增加到正常

8. 真空中一均匀磁场的能量密度 w_m 与一均匀电场的能量密度 w_e 相等,已知 $B = 0.5 \text{ T}$, 则电场强度 E 为[] .

(A) $1.5 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

(B) $1.5 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

(C) $3.0 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

(D) $3.0 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

9. 如图 12-23 所示,法线平行于 x 轴的两个界面之间有一与 x 轴倾斜的磁

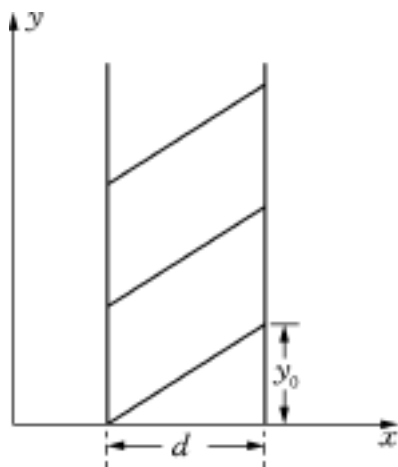


图 12-23

场,它在 x 轴方向的分量为 B_0 ,其倾斜程度可用 y_0 描述,两平面之间的距离为 d ,相对磁导率为 μ_r .则磁场能量密度为[] .

- (A) $\frac{B_0^2}{2}$
- (B) $\frac{1}{2\mu_r\mu_0}\left[d + \frac{\sqrt{d^2 + y_0^2}}{d}\right]B_0^2$
- (C) $\frac{1}{2\mu_r\mu_0}\left[1 + \frac{y_0^2}{d^2}\right]B_0^2$
- (D) $\frac{1}{2\mu_r\mu_0}\left[\frac{d + y_0}{d}\right]$

10. 下列说法正确的是[] .

- (A) 自感是对线圈而言的,对一个无线圈的导线回路是不存在自感的
- (B) 位移电流只在平行板电容器中存在
- (C) 位移电流的本质也是电荷的定向运动,当然也能激发磁场
- (D) 以上说法均不正确

12.4.2 填空题

1. 如图 12-24 所示,有一等腰直角三角形导线回路 ABC ,放在均匀磁场中,磁感应强度为 B .回路以匀角速度 ω 绕通过 C 且与三角形平面垂直的轴转动.则 AB 两端的动生电动势 $\varepsilon_{AB} =$ _____; A 、 B 两端中正端是_____ .

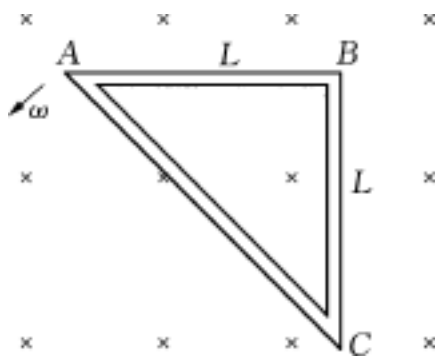


图 12-24

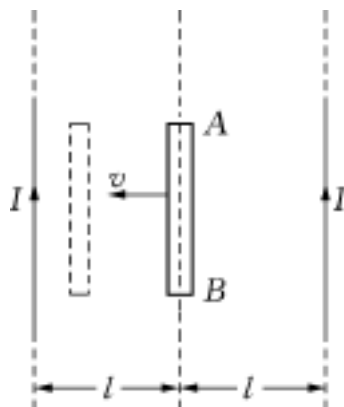


图 12-25

2. 两无限长直导线通相同的电流 I ,且方向相同,平行地放在水平面上,相距为 $2l$.如果使长为 l 的直导线 AB 以匀速率 v 从图 12-25 中的位置向左移动 t 秒时(导线 AB 仍在两电流之间), AB 两端的动生电动势的大小为_____, A 、 B 两端,电势高的一端是_____ .

3. 一无限长直导线和一半径为 a 的导体圆环放在同一平面内, 直导线通过圆环中心, 接触处相互绝缘, 如图 12-26(a) 所示. 则直导线与圆环之间的互感系数 $M =$ _____. 若在直导线中通以电流 I , 并使圆环以速度 v 垂直于直导线移动 (见图 12-26(b)). 当环心离直线距离 d _____ 时, 环内电动势是逆时针方向的; 当环心离直线距离 d _____ 时, 环内电动势是沿顺时针方向的.

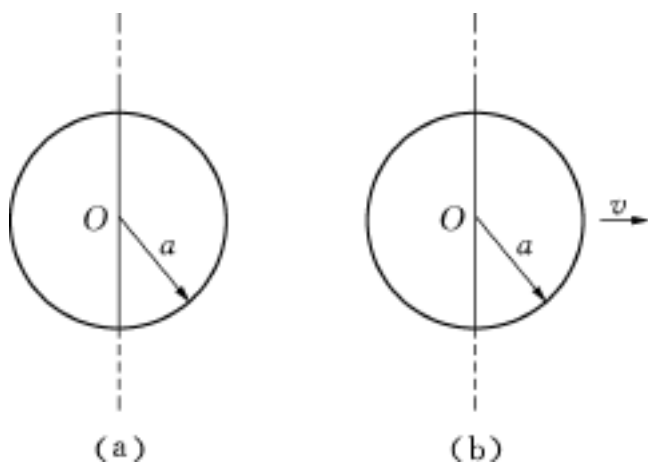


图 12-26

4. 产生动生电动势的非静电力是_____, 其相应的非静电性电场强度 $E_k =$ _____; 产生感生电场的非静电力是_____, 激发感生电场的场源是_____.

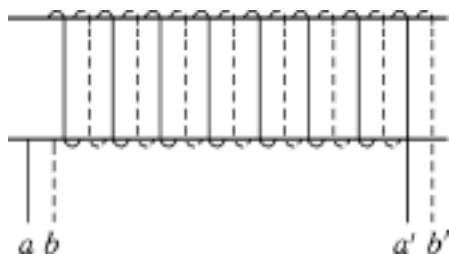


图 12-27

5. 在一个中空的圆柱面上紧密地绕有两个完全相同的线圈 aa 和 bb , 如图 12-27 所示. 已知每个线圈的自感系数都等于 0.05 H .

若 a 、 b 两端相连, a 、 b 接入电路, 则整个线圈的自感 $L =$ _____;

若 ab 两端相连, a 、 b 接入电路, 则整个线圈的自感 $L =$ _____;

若 a 、 b 两端相连, a 、 b 相连, 再以此两端接入电路, 则整个线圈的自感 $L =$ _____.

6. 实验室中一般可获得的强磁场约为 2.0 T , 强电场约为 $1 \times 10^6\text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. 则相应的磁场能量密度 $w_m =$ _____, 电场能量密度 $w_e =$ _____. 哪种场更有利于储存能量? 是_____.

7. 有两个自感线圈, 线圈 1 自感系数为 L_1 、电阻为 R_1 . 线圈 2 自感系数为 L_2 、电阻为 R_2 , 且 $L_2 = 2L_1$, $R_2 = 2R_1$. 若把两线圈串联后接在电源上, 两自感线圈中贮存的磁能 W_1 、 $W_2 =$ _____. 如把两线圈并联后接在同一电源上, 两自感线圈上贮存的磁能之比 W_1 、 $W_2 =$ _____.

8. 如图 12-28 所示, 回路中的 ab 是一段可移动的导线, 整个回路处在一均匀磁场中, 磁场方向垂直于纸面向里. 磁感应强度大小为 B , 电阻为 R , 导线 ab 长为 l , 导线电阻不计. 当 ab 以速率 v 向右匀速运动

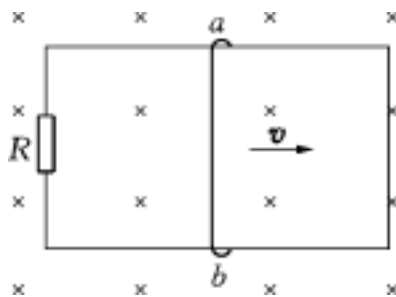


图 12-28

时,作用在 ab 上的外力为_____,外力做的功率_____,感应电流消耗在电阻上的功率为_____.

9. 一长为 l 总匝数为 N 的细长密绕的螺线管内,通有变化电流 $I = I_0 e^{-t}$ (I_0 、 t 都为大于零的常数). 则螺线管内距螺管的轴线为 r 处一点的磁感应强度的大小 $B =$ _____. 电场强度的大小 $E =$ _____.

10. 一平行板空气电容器的两极板都是半径为 R 的圆形导体薄板,在充电时,板间电场的变化率为 $\frac{dE}{dt}$. 若略去边缘效应,则两板间的位移电流为_____.

12.4.3 计算题

1. 在水平金属轨道上,放一根质量为 m 、长为 l 的金属杆 ab . ab 与轨道垂直并能沿轨道无摩擦地滑动,轨道的一端连接电阻 R . 有一磁感应强度为 B 的均匀磁场垂直通过轨道平面,如图 12-29 所示. 若忽略金属杆和轨道的电阻及回路的自感,当杆以初速 v_0 向右滑动时,试求:

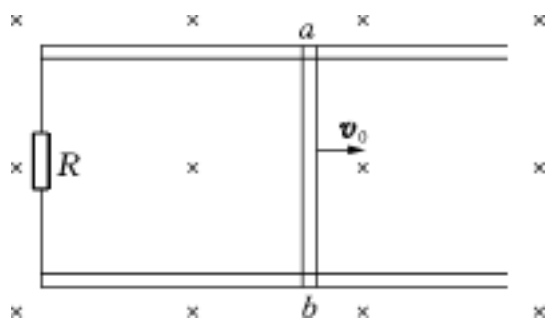


图 12-29

- (1) 金属杆能滑过的最大的距离;
- (2) 这过程中电阻 R 所发出的焦耳热;
- (3) 试用能量守恒与转换定律分析所得的结果.

2. 利用高频感应加热清除电子管阳极上残存的气体(图 12-30), 设感应炉线圈长 $l = 20\text{ cm}$, 匝数 $N = 300$, 线圈中高频电流为 $I = I_0 \sin 2\pi ft$, 其中 $I_0 = 25\text{ A}$, 频率 $f = 10^5\text{ Hz}$, 被加热的电子管阳极是半径 $r = 4\text{ mm}$ 而管壁极薄的圆筒, 高度 $h \ll l$, 其电阻 $R = 5 \times 10^{-3}\text{ }\Omega$. 试求: (1) 阳极中的感应电流最大值;

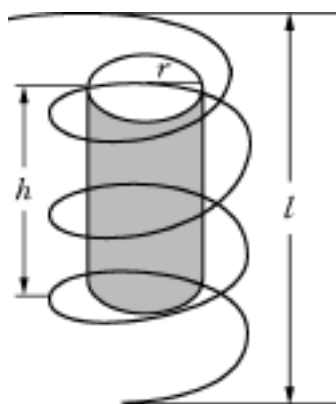


图 12-30

- (2) 阳极内每秒产生的热量;
- (3) 当频率 f 增加一倍时, 热量增至几倍?

3. 把宽度为 b 的无限长金属平面弯成如图 12-31 所示的形状, 它可

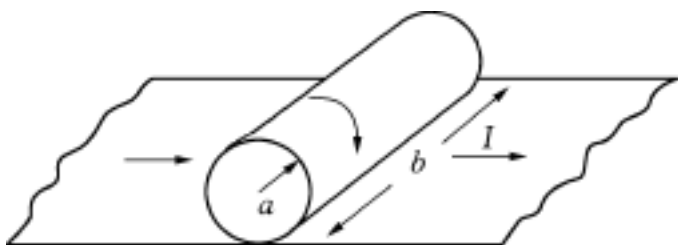


图 12-31

看作半径为 a 的无限长圆柱面和无限大平面的串联电路. 若在此电路中通电流 I , 其方向如图 12-31 所示. 试求:

- (1) 圆柱面电路的自感系数和两电路的互感系数;

- (2) 所通的电流 $I = Kt$ ($K > 0$) 时圆柱面电路中的感应电动势;
- (3) 圆柱面内的磁场能量 .

4 . 一个半径为 b 的大圆环, 通以恒定的电流 I , 并固定在空间 . 一个小圆环半径为 a ($a < b$), 电阻为 R , 自感可忽略 . 初始时, 小圆环与大圆环同心共面, 并以匀角速度 ω 绕一条直径转动, 如图 12 -32 所示 . 试求:

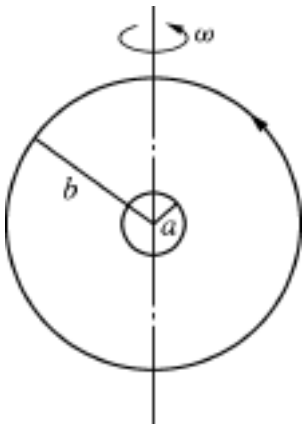


图 12 -32

- (1) 小圆环中的感应电流与时间 t 的函数关系;
- (2) 大圆环中的感应电动势 .

5 . 两相互平行的无限大平面电流, 单位宽度上的电流按 $i = Kt$ ($K > 0$) 的规律变化 . 如图 12 -33 所示 . 试求感生电场的分布 .

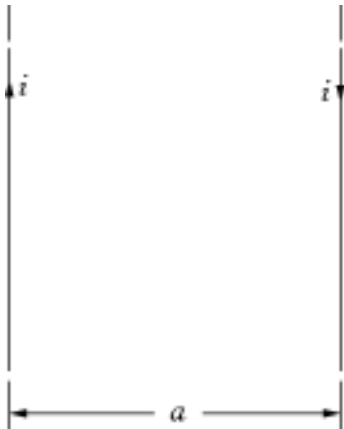


图 12 -33

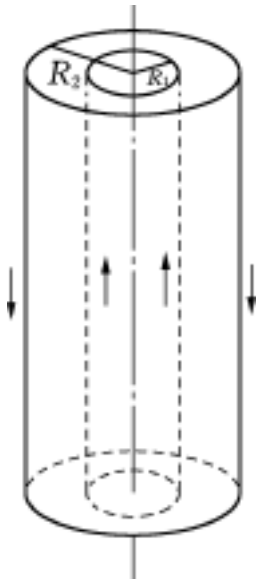


图 12 -34

6 . 一同轴电缆由中心导体圆柱 (注意: 不是圆筒) 和外层导体圆筒组成, 两者半径分别为 R_1 和 R_2 , 导体圆柱的磁导率为 μ_1 , 筒与圆柱之间充以磁导率为 μ_2 的电介质 . 电流 I 可由中心圆柱流出, 由圆筒流回 (图 12 -34) . 试求单位长度电缆的自感系数 .

习题选解

- [选择题 1] 提示: (1) 添辅助线 OC , 与 OM 、 MC 构成一闭合回路 .
- (2) 当 OA 转动时, 闭合回路中产生感应电动势

$$\epsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \left| \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \right| = \left| \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} h \times B \right] \right| = \frac{1}{2} B h v$$

其中 $l = \overline{CM}$.

(3) CD 为金属棒, 故 C 点与 M 点同电势 .

[选择题 6] 提示: 分析圆环在 A 、 B 、 C 三点的受力, 并根据 $f = ma$ 列出方程:

$$mg - f_{A(\text{磁力})} = ma_A$$

$$mg = ma_B$$

$$mg - f_{C(\text{磁力})} = ma_C$$

$$\text{圆环速度 } v_C > v_A, \text{ 故 } \left[\frac{dM}{dt} \right]_C > \left[\frac{dM}{dt} \right]_A$$

则有 磁力 $f_C > f_A$

[选择题 7] 提示: 根据 $\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}$ 可知, 当电路刚接通时, 自感电动势反抗电流增加, 依题意, 流经 S_1 的电流比流过 S_2 的电流大 .

[选择题 9] 提示: (1) 磁场能量密度为 $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$

(2) 依题意, $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$, 而 $B_x = B_0$, $B_y = B_0 \cot \theta$.

[填充题 1] 方法一: 用动生电动势的定义式求 \mathcal{E}_{AB} .

在 AB 导线上取一段微元 dl , 规定 $A \rightarrow B$ 为积分路径的正方向. 由动生电动势的定义式, A 、 B 两端的动生电动势

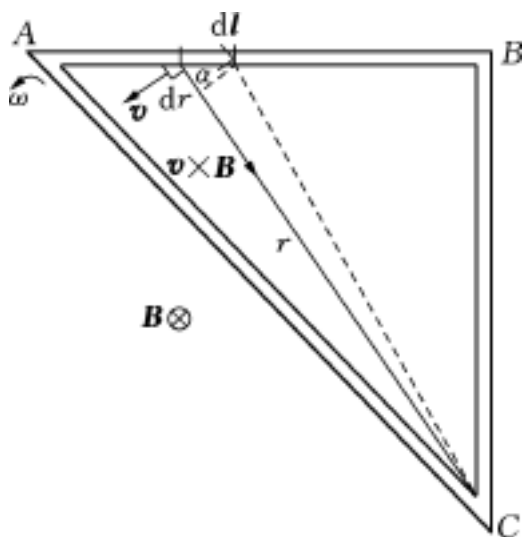


图 12-35

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{AB} &= \int_A^B (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_A^B |\mathbf{v} \times \mathbf{B}| dl \cos \alpha \end{aligned}$$

式中 α 为矢量 $d\mathbf{l}$ 和 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的夹角. 因导线 AB 上任一小段微元均绕 C 点转动, 所以微元 dl 的速度 \mathbf{v} 的方向与 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的方向如图 12-35 所示. 由该图还可看出 $|\mathbf{v} \times \mathbf{B}| = Bv$, $v = \omega r$, $dl \cos \alpha = -dr$ (负号表示沿 $A \rightarrow B$ 方向, 微元 dl 到 C 的连线 r 的大小在减小), 把这些关系代入 \mathcal{E}_{AB} 的定义式得

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{AB} &= \int_{\sqrt{2}L}^L B \omega r dr = -\frac{1}{2} B \omega r^2 \Big|_{\sqrt{2}L}^L \\ &= \frac{1}{2} B \omega L^2 \end{aligned}$$

因规定积分路径从 $A \rightarrow B$, 求得 $\mathcal{E}_{AB} > 0$, 说明 A 、 B 两端动生电动势方向从 $A \rightarrow B$, 即 A 负 B 正, 所以 B 点的电势高.

方法二: 通过闭合回路 $ABCA$ 中的电动势求 \mathcal{E}_{AB} .

因为在三角形线圈 $ABCA$ 绕 C 点转动时, 回路 $ABCA$ 中的磁通量不变, 因此回路 $ABCA$ 中的动生电动势为零. 所以有

$$\mathcal{E}_{ABCA} = \mathcal{E}_{AB} + \mathcal{E}_{BC} + \mathcal{E}_{CA} = 0$$

由此可得

$$\mathcal{E}_{AB} + \mathcal{E}_{BC} = -\mathcal{E}_{CA} = \mathcal{E}_{AC}$$

移项后得

$$\mathcal{E}_{AB} = \mathcal{E}_{AC} - \mathcal{E}_{BC}$$

因导线 AC 和 BC 均绕其一端的 C 点转, 所以得

$$\mathcal{E}_{AC} = \frac{1}{2} B (\sqrt{2} L)^2, \quad \mathcal{E}_{BC} = \frac{1}{2} B L^2$$

把 \mathcal{E}_{AC} 和 \mathcal{E}_{BC} 代入 \mathcal{E}_{AB} 的表示式, 得出

$$\mathcal{E}_{AB} = \frac{1}{2} B (\sqrt{2} L)^2 - \frac{1}{2} B L^2 = \frac{1}{2} B L^2$$

两种做法的结果相同, 但方法二比较方便.

[计算题 4](1) 略.

(2) 根据法拉第定律, 大圆环中的感应电动势

$$\mathcal{E}_{12} = - \frac{d \Phi_{12}}{dt}$$

但是直接求 Φ_{12} 是困难的. 因为小圆环中的电流在大圆环内各点产生的磁感应强度不容易求出. 为此, 我们利用互感系数 $M_{12} = M_{21}$ 的特性来求 \mathcal{E}_{12} .

因大圆环只有一匝, 由互感系数的定义可知

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$$

又因 $M_{12} = M_{21}$, $I_1 = i$, 所以得

$$\Phi_{12} = M_{21} i$$

由第(1)小题求得的 Φ_{21} , 就可得到

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I} = \frac{\Phi_{21}}{I} = \frac{\mu_0 a^2}{2b} \cos \theta$$

这样很容易求得大圆环中的感应电动势

$$\begin{aligned}
 \dot{M}_{12} &= - \frac{dM_{12}}{dt} = - \frac{d}{dt}(M_{21} i) \\
 &= - \left[M_{21} \frac{di}{dt} + i \frac{dM_{21}}{dt} \right]
 \end{aligned}$$

注意: M_{21} 是随时间变化的, 不能用 $\dot{M}_{12} = - M_{21} \frac{di}{dt}$.

由上面已求得的 M_{21} 和 i , 就可求出

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mu I^2}{2bR} a^2 \cos t, \quad \frac{dM_{21}}{dt} = - \frac{\mu a^2}{2b} \sin t$$

把已求得的 M_{21} 、 i 、 $\frac{di}{dt}$ 、 $\frac{dM_{21}}{dt}$ 代入 \dot{M}_{12} 的表示式, 经化简后得

$$\dot{M}_{12} = - \frac{\mu^2 a^4}{4b^2 R} I \cos 2t$$

[计算题 5] 两无限大平面电流间的磁感强度

$B = \mu i = \mu Kt$, 方向垂直纸面向里(图 12-36) .

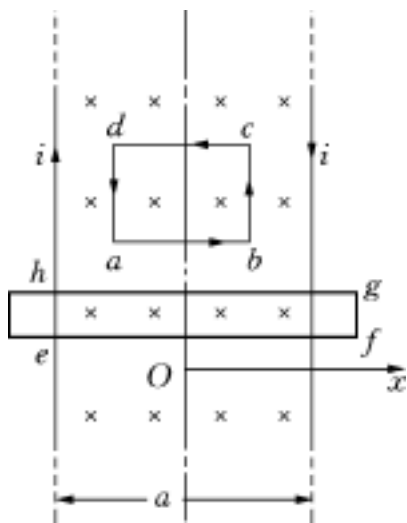


图 12-36

由于 $i = Kt > 0$ 所以 $\frac{dB}{dt} = \mu K > 0$

方向亦垂直纸面向里 .

由对称性及感生电场与磁场变化方向间的关系可知: $x > 0$ 区域, E 的方向向上;

$x < 0$ 区域, E 的方向向下 .

在两平面电流间作回路 $abcd$, bc 边和 da 边距中心线为 x , 两边上的感生电场设为 E , 方向如图 12-36 所示 . 则:

$$E \cdot dl = E_l \overline{bc} + E_l \overline{da} = 2 E_l l$$

$$= \left| - \frac{B}{t} \cdot dS \right| = - \frac{dB}{dt} \cdot 2xl$$

所以 $E_l = x \frac{dB}{dt} = \mu Kx$

即在两电流平面间 E 随 x 的增大而增大, 在 $x = 0$ 处, $E_l = 0$.

同理, 在两平行电流外距中心线 x 处作回路 $efgh$, 设 \overline{fg} 和 \overline{he} 上感生电场为 E_2 , 则

$$E \cdot dl = 2 E_2 l = \frac{dB}{dt} al$$

所以
$$E_2 = \frac{a}{2} \frac{dB}{dt} = \frac{1}{2} \mu K a$$

即在两电流平面外任一点的感生电场为常量。

感生电场的分布如图 12-37 所示。

[计算题 6] 根据安培环路定理可求出电缆的磁场分布：

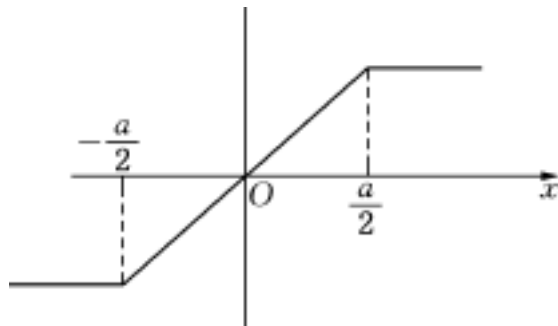


图 12-37

圆柱内的磁感强度 $B_1 = \frac{\mu I}{2 R_1^2} r$;

圆柱与圆筒之间的磁感强度 $B_2 = \frac{\mu I}{2 r}$;

圆柱外 $B_3 = 0$ 。

方法一：用磁能 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ 的关系计算自感系数。

长为 l 的一段电缆的总磁能

$$\begin{aligned} W_m &= \int_0^{R_1} \frac{B_1^2}{2\mu} 2\pi r l dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{B_2^2}{2\mu} 2\pi r l dr \\ &= \int_0^{R_1} \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\mu I}{2 R_1^2} r \right]^2 2\pi r l dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\mu I}{2 r} \right]^2 2\pi r l dr \\ &= \int_0^{R_1} \frac{\mu I^2}{4 R_1^4} l r^2 dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I^2}{4 r} l dr \\ &= \frac{\mu I^2}{16} l + \frac{\mu I^2}{4} l \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

单位长度电缆的自感系数 $L = \frac{2W_m}{lI^2} = \frac{\mu}{8} + \frac{\mu}{2} \ln \frac{R_2}{R_1}$

方法二：用公式 $L = \frac{\Phi}{I}$ 来求解自感系数。

用此法求解的关键是如何计算圆柱内的磁通量。由于中心导体圆柱内的电流均匀分布在整個横截面內，所以磁通量不仅存在于导体圆柱和圆筒之间（ Φ_2 ），而且也存在于导体圆柱內（ Φ_1 ）。即 $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$

其中， $\Phi_2 = \int_{R_1}^{R_2} B_2 l dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I}{2 r} l dr = \frac{\mu I}{2} l \ln \frac{R_2}{R_1}$

而

$$\Phi_1 = \int_{R_1}^{R_2} B_1 l dr = \int_0^{R_1} \frac{\mu I}{2 R_1^2} r l dr = \frac{\mu I l}{4}$$

所以

$$L = \frac{\Phi_1}{I} = \frac{\mu}{4} + \frac{\mu_b}{2} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

两种方法得出不同的结果,原因何在?

分析:因为自感系数的定义为: $L = \frac{\Phi}{I}$, Φ 为磁通链数,只有当线圈只有一匝时, $L = \frac{\Phi}{I}$. 由于中心导体圆柱内的电流均匀分布在整個横截面内,通过圆柱内距中心线距离为 r 处面元的磁通是由半径为 r 的一部分电流产生的,这电流是 $\frac{I}{R_1^2} \cdot r^2$ 匝,即 $\frac{r^2}{R_1^2}$ 匝,不到一匝.

所以,此时长为 l 的圆柱内的磁通链数

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= N d = \int_0^{R_1} \frac{r^2}{R_1^2} \frac{\mu I}{2 R_1^2} r l dr \\ &= \frac{\mu I l}{2 R_1^4} \int_0^{R_1} r^3 dr = \frac{\mu I l}{8} \end{aligned}$$

故有

$$L = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{I} = \frac{\mu}{8} + \frac{\mu_b}{2} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

13.1 基本要求与复习框图

1. 基本要求

- (1) 了解光的相干条件, 理解获得相干光的方法.
- (2) 掌握光程、光程差的概念, 掌握光程差与相位差的关系和计算方法, 搞清楚在什么情况下的反射光有半波损失.
- (3) 掌握杨氏双缝干涉实验的基本装置及干涉条纹位置的计算.
- (4) 掌握等厚干涉实验的基本装置、干涉条纹位置的计算及应用; 理解等倾干涉条纹产生的原理.
- (5) 了解迈克耳孙干涉仪的原理和应用.

2. 复习框图

光的干涉是光的波动性的基本特征之一, 也是波动光学的基础. 本章从光源发光特点说明为什么一般的光不能产生干涉现象, 引出了获得相干光的两种方法, 即分波阵面法和分振幅法, 然后着重讨论这两类干涉的典型例子, 即杨氏双缝干涉和薄膜干涉. 研究光的干涉, 关键是找出两束相干光的光程差, 从而得出干涉条纹的位置、形状、间距及条纹移动等. 因此掌握光程的物理意义和光程差的计算是本章的重点, 在计算光程差时必须注意在界面反射时是否存在半波损失的问题, 从而准确地计算光程差. 本章主要内容和各部分之间的关系可用图 13-1 所示的方框图表示.

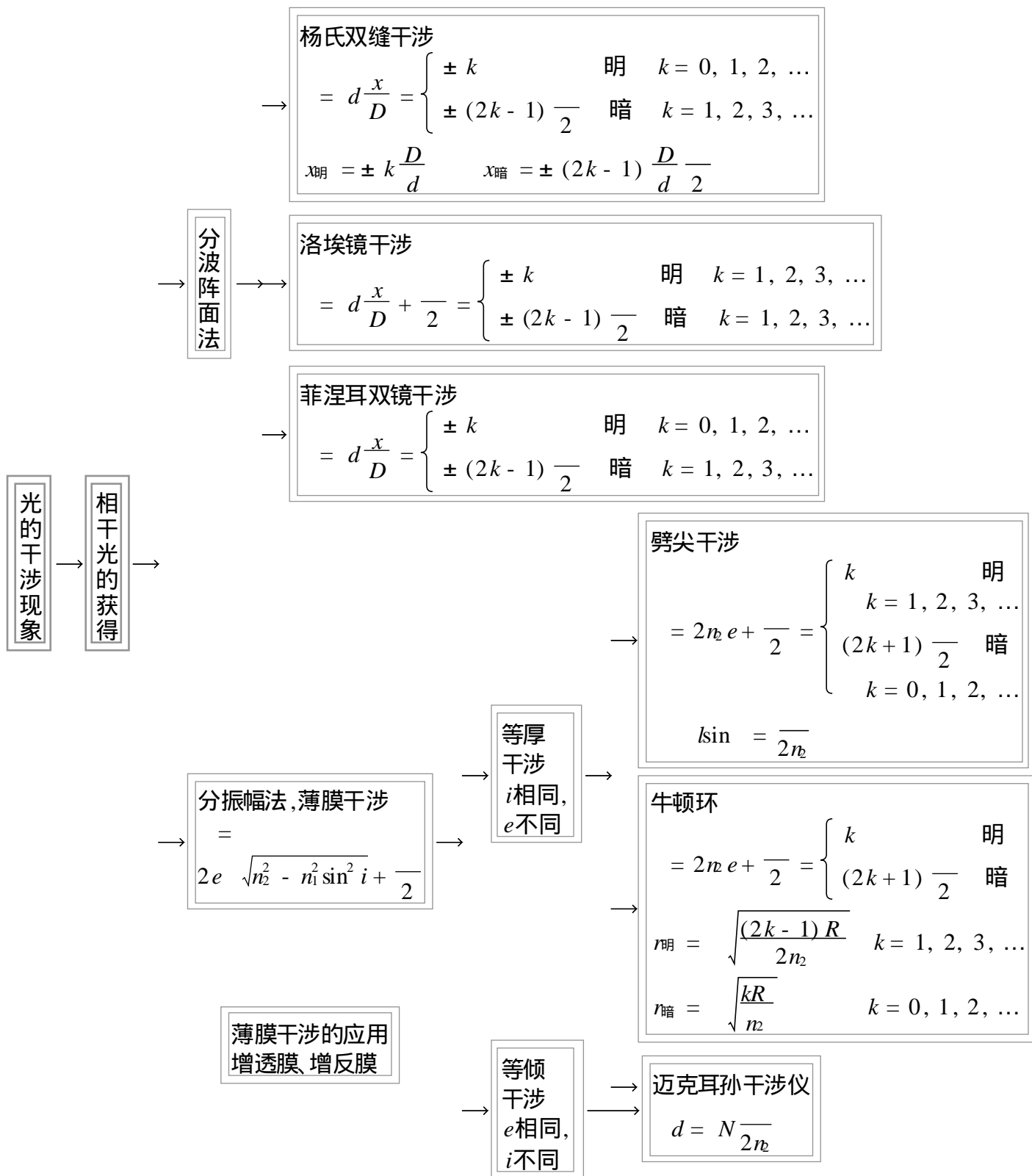


图 13-1

13.2 阅读指导与问题讨论

1. 相干光的条件及获得相干光的方法

由波动理论可知,要产生干涉,两束光必满足振动方向相同、频率相同和相

位差恒定三个条件.由于原子在一次发光过程中只能发出一段有限长的波列,并且不同原子发出的或者同一原子先后不同时刻发出的两波列,其频率、振动方向以及相位一般都是各不相同的.因此,两个独立光源、或同一光源上不同部分发出的光不是相干光,因而不能产生干涉现象.

要获得相干光,必须把光源上同一点发出的一束光分为两束,也就是说把一束光中的每一个波列分成两个波列,使它们在空间经过不同的路程后再相遇,以满足相干条件而产生干涉.获得相干光的方法有分波阵面法和分振幅法,杨氏双缝、菲涅耳双镜和洛埃镜都是用分波阵面法获得相干光,而薄膜干涉(劈尖、牛顿环等)则由分振幅法获得相干光.

2. 光程和光程差

引入光程和光程差的概念是为了更方便地讨论光在不同介质中传播的问题.光程是光在介质中通过的几何路程 r 与介质折射率 n 的乘积 nr ,即将光在介质中的传播折算成在真空中的传播.显然,光程和光所通过的几何路程是不同的两个概念,一般来说,光程大于光所通过的几何路程,只有当介质的折射率 $n=1$ (真空或空气)时,光程才等于几何路程.

两束相干光的光程之差叫光程差.光程差和相位差的关系是

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r$$

在讨论两束相干光通过不同介质后,在空间某点相遇而产生的干涉,与两束光的光程差有关,而不是几何路程.因此,光程差的计算至关重要.

在实验中,经常使用透镜,由透镜的等光程性,所以使用薄透镜并不引起附加的光程差.

[问题 13-1] 真空中波长为 λ_0 的两束光线分别在空气中和玻璃中传播,在相同的时间 t 内,问它们传播的路程及光程是否相等?

[解答] 设光在空气中的传播速度为 v_a , 波长为 λ_0 , 在玻璃中的传播速度为 v_b , 波长为 λ_b .

$$\text{由 } v = \lambda \nu$$

则在空气中传播的路程

$$l_a = v_a t = \lambda_0 \nu t$$

在玻璃中传播的路程

$$l_b = v_b t = \lambda_b \nu t$$

因为 $v_a > v_b$ 或 $\lambda_0 > \lambda_b$, 所以 $l_a > l_b$.

由光程 $L = nl = n \lambda \nu t$ 及 $n = \frac{c}{v}$, n 为介质的折射率.

在空气中的光程

$$L_a = n_0 l_a = \int_0^t (n_0 - 1) dt$$

在玻璃中的光程

$$L_b = n l_b = \int_0^t n dt$$

所以

$$L_a = L_b$$

3. 由半波损失引起的附加光程差

当光从折射率较小的介质射向折射率较大的介质,并在分界面上反射时,反射光的相位突变 π ,相当于附加或损失了半个波长的光程,叫做半波损失.注意,(1)只有反射光才可能有半波损失,折射光不产生半波损失.(2)为统一起见,凡有半波损失的光波,都加上 $\frac{\lambda}{2}$ 的光程.(3)在计算光程差时,若两束光中有一束光有半波损失,则光程差中应加上附加光程差 $\frac{\lambda}{2}$;若两束光都有或者都没有半波损失,则附加光程差不必考虑.

[问题 13-2] 如图 13-2 所示, a 与 b 为两束相干光,分别由薄膜上、下表面反射.讨论在哪些情况下应考虑半波损失,在哪些情况下不要考虑半波损失?

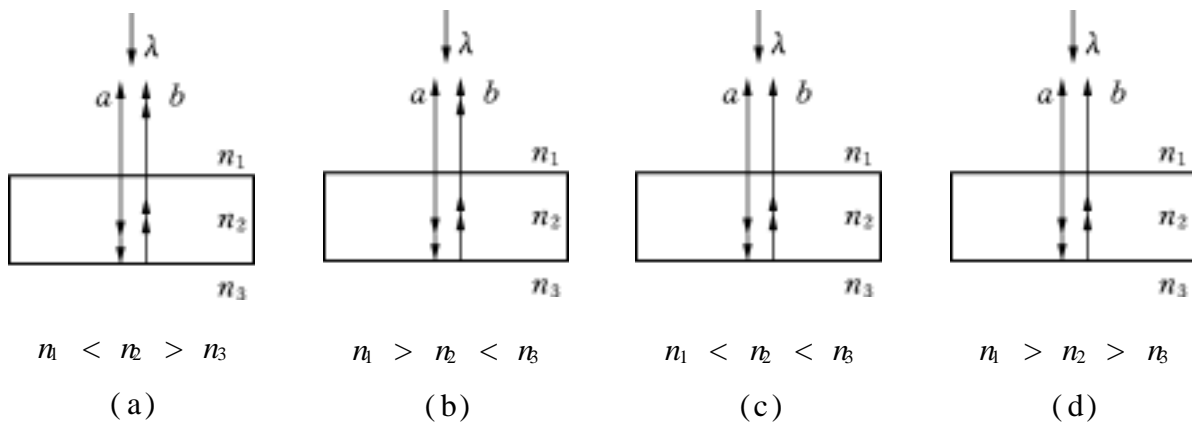


图 13-2

[解答] a 与 b 都是反射光线,当它们垂直入射时,从光疏介质射向光密介质,并在分界面反射回光疏介质时才有半波损失.

(1) 图(a)中由于 $n_2 > n_1$, 光线 a 有半波损失; $n_2 > n_3$, 光线 b 没有半波损失.所以当光线 a 与 b 相干时要考虑半波损失,有附加光程差 $\frac{\lambda}{2}$.

(2) 图(b)中由于 $n_1 > n_2$, 光线 a 没有半波损失; $n_2 < n_3$, 光线 b 有半波损失.所以当光线 a 与 b 相干时要考虑半波损失,有附加光程差 $\frac{\lambda}{2}$.

(3) 图(c)中由于 $n_1 < n_2$, 光线 a 有半波损失; $n_2 < n_3$, 光线 b 也有半波损失.所以当光线 a 与 b 相干时,附加光程差为 $\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \lambda$, 根据波动的周期性,附加光程差可不必考虑.

(4) 图(d)中由于 $n_1 > n_2$, 光线 a 没有半波损失; $n_2 > n_3$, 光线 b 也没有半波损失. 所以当光线 a 与 b 相干时, 没有附加光程差.

4. 双缝干涉和薄膜干涉

(1) 双缝干涉. 双缝干涉明暗条纹的中心分别对应干涉极大和干涉极小的条件, 即

$$= d \frac{x}{D} = \begin{cases} \pm k & \text{明 } k = 0, 1, 2, \dots \\ \pm (2k - 1) \frac{1}{2} & \text{暗 } k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

明纹位置: $x = \pm k \frac{D}{d} \quad k = 0, 1, 2, \dots$

暗纹位置: $x = \pm (2k - 1) \frac{D}{2d} \quad k = 1, 2, 3, \dots$

洛埃镜、菲涅耳双镜的干涉情况与此相似.

(2) 薄膜干涉. 薄膜干涉有等厚干涉(入射角 i 不变, 薄膜厚度 e 变)和等倾干涉(薄膜厚度 e 不变, 入射角 i 变)两种. 它们都适用薄膜干涉的基本公式

$$= 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{1}{2} = \begin{cases} k & \text{明 } k = 1, 2, 3, \dots \\ (2k + 1) \frac{1}{2} & \text{暗 } k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

公式中的 $\frac{1}{2}$ 加与不加, 应根据两束相干光在各界面反射时是否有半波损失来确定.

无论哪种干涉, 都要搞清楚是哪两束光相干, 在什么地方发生干涉. 对等厚干涉, 教材中主要讨论光垂直入射 ($i = 0$) 的情况. 在劈尖中观察到的干涉条纹是在劈尖上、下表面反射的两束反射光产生的干涉现象, 劈尖膜的折射率为 n . 对空气劈或牛顿环等, 两层玻璃之间的劈尖膜是空气 ($n = 1$), 干涉条纹形成在劈尖膜表面. 对等倾干涉, 扩展光源照射平行平面薄膜, 条纹形成在无穷远处, 可用凸透镜汇聚到焦平面上观察. 由于薄膜的厚度远小于玻璃的厚度, 所以玻璃片上、下表面反射的两束反射光, 其光程差远大于光的波列长度, 因而不会产生干涉现象.

(3) 关于 k 的取值问题. k 是条纹的级次, 它的取值范围因问题的不同而有所不同, 读者无需硬记, 只要抓住 k 的取值原则: k 从最小取起; k 的值必须使讨论的问题有物理意义. 如薄膜干涉公式中明纹取 $k = 1, 2, 3, \dots$, 若取 $k = 0$, 则得出 $e < 0$, 即薄膜厚度为负值, 显然无实际意义. 同时要注意, 干涉条纹第几级与第几条并不完全等同, 两者之间可差 1, 只有当 k 从 1 取起时两者才一致.

5. 干涉条纹的特点及条纹变化规律

(1) 双缝干涉条纹是以中央明纹为对称中心的一系列等间距、等亮度的平行于缝的直线条纹, 相邻明(暗)条纹的间距为

$$x = \frac{D}{d}$$

(2) 等厚干涉条纹的形状决定于薄膜上等厚点的轨迹. 因为在等厚干涉中, 光程差主要取决于薄膜的厚度 e , e 相等处光程差相同, 因而干涉结果也相同. 因此同一条纹(同一 k 值)上各点对应的膜厚 e 相等, 即条纹与薄膜的等厚线轨迹重合. 对于平面劈尖, 其等厚点的轨迹为平行于棱的直线, 所以平面劈尖的干涉条纹为一系列的平行直线, 其相邻两条纹的间距相等, 即

$$l = \frac{\lambda}{2n \sin \theta}$$

对于球面透镜与平板玻璃所构成的牛顿环, 其等厚点的轨迹为圆, 所以其干涉条纹是以接触点为中心的一系列同心圆, 其间距不等, 内疏外密, 其明环与暗环的半径分别为

$$\text{明环} \quad r = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{暗环} \quad r = \sqrt{kR\lambda} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

可知, 半径越大, 级次越高.

(3) 等倾干涉条纹主要取决于入射光的入射角 i (或倾角). 因为在等倾干涉中, 当膜厚 e 和 n_1 、 n_2 确定, 倾角相同的那些光线光程差相同, 因而干涉结果也相同. 由面光源上一点向薄膜发出的倾角相等的光线构成一个圆锥面, 经薄膜反射后在透镜的焦平面上形成一个圆. 所以等倾干涉条纹是一系列同心圆, 内疏外密, 条纹级次越高, 半径越小.

(4) 干涉发生在静态之中, 其条纹的分布不会改变, 如条纹的形状、位置、疏密, 或某一范围内条纹的数目等. 当光程差发生变化或实验条件改变, 如波长改变、双缝间距 d 改变、劈尖角 或薄膜厚度 e 改变时, 干涉条纹会相应地发生变化, 主要表现为条纹的移动、条纹疏密变化、某一范围内条纹数目变化等. 讨论这一类问题时, 首先要抓住引起条纹移动的原因, 其次是根据干涉条纹的特点加以分析解决.

[问题 13-3] 在杨氏双缝实验中, 当作如下调节时, 屏幕上的干涉条纹将作如何变化?

(1) 使两缝距离加大(其他条件不变);

- (2) 如图 13-3 所示,把双缝中的一条缝盖住,在两缝的垂直平分线上,放置一块平面反射镜;
 (3) 把双缝实验放到水中进行;
 (4) 在 S_1 光路中放上厚为 l 折射率为 n 的很薄的透明云母片,如图 13-4 所示.

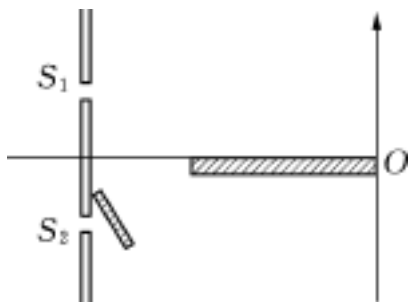


图 13-3

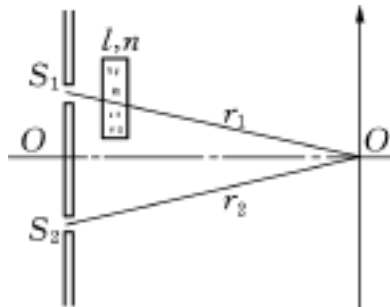


图 13-4

[解答] (1) 双缝干涉在屏上得到干涉条纹,是以中央明纹为中心对称分布,各级明纹位置 $x = k \frac{D}{d}$, 各级明纹宽度 $\Delta x = \frac{D}{d}$. 在其他条件不变时,当 d 变大,则 x 和 Δx 变小,所以条纹变细,变密;当 d 大到一定程度,各级干涉条纹并在一起无法分辨,看到一片明亮区域,由此可得到重要结论:要产生双缝干涉,除满足相干条件外,两缝间距离不能太大,一般在 1 mm 左右.

(2) 这时杨氏双缝实验变为洛埃镜实验,即为直接射到屏上的光线和经平面镜反射后射到屏上的光线产生干涉. 因为反射光有 π 的相位突变,所以有 $\frac{1}{2}$ 附加光程差,因此光程差为

$$\Delta = d \frac{x}{D} + \frac{1}{2} \lambda$$

干涉条纹的形状不变,但明暗条纹的位置正好与双缝干涉相反,原中央明纹处变为暗纹,而且干涉区域减少,中央明纹以下的各级干涉条纹消失.

(3) 双缝干涉实验在水中进行时,则光程差为

$$\Delta = n(r_2 - r_1) = nd \frac{x}{D} = \begin{cases} \pm k \lambda & \text{明 } k = 0, 1, 2, \dots \\ \pm (2k - 1) \frac{\lambda}{2} & \text{暗 } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

所得条纹位置和宽度分别为:

$$x = \pm k \frac{D}{d} \frac{\lambda}{n} \quad \Delta x = \frac{D}{d} \frac{\lambda}{n}$$

因为折射率 $n > 1$, 所以 Δx 变小,干涉条纹将变密.

(4) 当 S_1 光路中放入云母片时,条纹将发生移动. 由图 13-4 可确定,在云母片存在时中央明条纹所在处的光程差为

$$\Delta = r_2 - (r_1 - l + nl) = 0$$

即

$$r_2 - r_1 = (n - 1)l$$

因为介质折射率 $n > 1$, 所以 $r_2 > r_1$, 则中央明纹将向上移. 当 S_1 光路中放有云母片时,各级条纹将上移,条纹的密度与形状不变. 同理当 S_2 光路中有云母片时,可证明条纹将下移.

由此可知,不论双缝干涉装置如何变化,干涉仍决定于两相干光的光程差,这是干涉的关键.

[问题 13-4] 两块平玻璃板构成的劈尖干涉装置作如下变化,干涉条纹将发生怎样变化?

- (1) 上面的玻璃略向上平移,如图 13-5(a)所示;
- (2) 上面的玻璃绕左侧边略微转动,劈尖的角度变大,如图 13-5(b)所示;
- (3) 下面的玻璃换成上表面有凹坑的玻璃.



图 13-5

[解答] (1) 劈尖是等厚干涉,在膜的厚度相同的地方形成一条干涉条纹,膜的厚度发生变化,条纹则跟随移动.

由 $2e_k + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$, 对于第 k 级明纹,相应膜的厚度有确定的值 e_k 跟踪这一级条纹,当劈尖上面的玻璃向上平移时,膜厚为 e_k 的位置向棱边方向移动,所以第 k 级条纹也跟随到该位置.由于 θ 角不变,所以条纹间距不变,即整个条纹向棱的方向平移.

(2) 相邻条纹之间膜的厚度差为 $e = \frac{\lambda}{2}$, 而条纹的间距

$$l = \frac{e}{\sin \theta} = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$$

因此 θ 角增大,条纹间距变小,即向棱的方向变密.

可见,条纹的级次由膜厚决定,条纹的疏密由劈尖角决定.

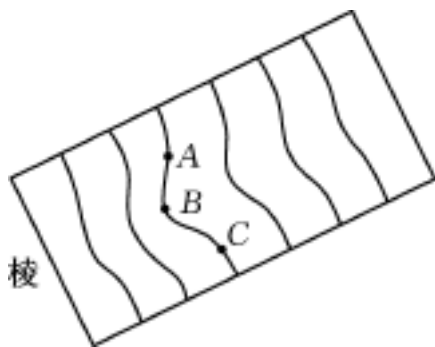


图 13-6

(3) 劈尖下面的玻璃表面有凹坑时,干涉条纹向棱的方向弯曲,如图 13-6 所示.因为等厚干涉条纹是膜的等厚线,图中同一条纹上的 A、B、C 三点下面的空气膜厚度相等. B 点离棱近,若玻璃无缺陷, B 点处的膜厚应比 A、C 点处小,现今这三点处的膜厚相等,说明 B 点处的缺陷是下凹.如果条纹朝棱的反方向弯曲,表明

玻璃缺陷是上凸.这种方法可用来检查被加工玻璃的平整度.

13.3 解题方法与典型例题

光的干涉习题主要有干涉条纹的静态分布和干涉条纹的变动问题.解题时一般可按下列步骤进行分析求解:

- (1) 确定相干光和相干区域,这是分析干涉问题的前提.

(2) 计算两束相干光在干涉点的光程差,这是解决干涉问题的关键 光程差

$$= (\text{两列相干光到达相遇点时的光程之差}) + \frac{\lambda}{2}$$

式中 $\frac{\lambda}{2}$ 是由半波损失引起的附加光程差.

(3) 分析干涉条纹的特点及引起条纹变动的原因.

[例 13-1] 在杨氏双缝干涉实验中,设两缝间的距离 $d = 0.2 \text{ mm}$, 屏与缝之间距离 $D = 100 \text{ cm}$, 试求:

- (1) 以波长为 589 nm 的单色光照射, 第 10 级明纹离开中央明纹的距离;
- (2) 第 10 级干涉明纹的宽度;
- (3) 以白色光照射时, 屏幕上出现彩色干涉条纹, 求第 2 级光谱的宽度;
- (4) 用白色光照射时, 求干涉光谱第 2 级与第 3 级谱线重叠部分宽度和重叠部分各波长范围.

[解] 由图 13-7 所示, 双缝干涉两相干光的光程差

$$= d \sin \theta \approx d \frac{x}{D}$$

(1) 明纹的光程差满足

$$d \frac{x}{D} = \pm k \lambda$$

则任一级明纹离开中央明纹距离

$$x = \pm k \frac{D \lambda}{d}$$

因求第 10 级明纹离开中央明纹的距离, 故取 $k = 10$, 所以

$$\begin{aligned} x_{10} &= \pm k_{10} \frac{D \lambda}{d} = \pm \frac{10}{0.2 \times 10^{-3}} \times 589 \times 10^{-9} \\ &= 2.945 \times 10^{-2} \text{ m} \end{aligned}$$

(2) 第 10 级明纹的宽度, 则为第 9 级暗纹和第 10 级暗纹之间的距离, 由暗纹公式可知

$$d \frac{x}{D} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

任一级暗纹离开中央明纹的距离

$$x_{\text{暗}} = (2k+1) \frac{D \lambda}{2d}$$

$$\begin{aligned} x_{10} &= x_{10\text{暗}} - x_{9\text{暗}} = (2k_{10}+1) \frac{D \lambda}{2d} - (2k_9+1) \frac{D \lambda}{2d} \\ &= \frac{D \lambda}{d} = \frac{1}{0.2 \times 10^{-3}} \times 589 \times 10^{-9} = 2.945 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

(3) 因为白色光是由许多波长不同的单色光组成的复色光. 由上可知, 当波长不同时, 干涉条纹离开中央明纹的距离各不相同, x 与波长成正比. 因此, 白色光通过双缝干涉后, 形成彩色的光谱, 又称干涉光谱. 又因 $x \sim \lambda$, 则 $x_{\text{紫}} < x_{\text{红}}$, 所以在同一级干涉光谱中, 紫色光比红色光靠近中央明纹, 离开中央明纹的排列次序为紫、蓝、青、绿、黄、橙、红. 第 2 级谱线宽度取 $k = 2$

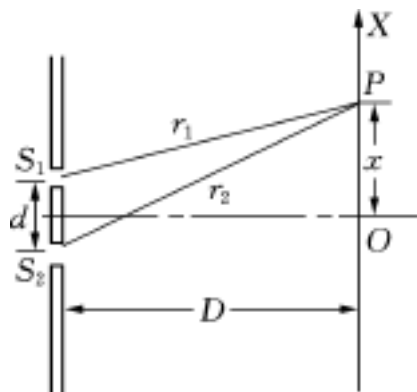


图 13-7

$$x_{\text{紫}} = \pm k_2 \frac{D}{d} \lambda_{\text{紫}}$$

$$x_{\text{红}} = \pm k_2 \frac{D}{d} \lambda_{\text{红}}$$

所以第 2 级光谱线宽度

$$x = x_{\text{红}} - x_{\text{紫}} = \pm k_2 \frac{D}{d} (\lambda_{\text{红}} - \lambda_{\text{紫}})$$

$$= 2 \frac{1}{0.2 \times 10^{-3}} (760 - 400) \times 10^{-9}$$

$$= 3.6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

(4) 第 3 与第 2 级光谱重叠部分, 必须满足对应同一位置处光程差相等, 即, 有第 3 级 $\lambda_{\text{紫}}$ 与第 2 级某个 $\lambda_{\text{红}}$, 光程差相等, 如图 13-8 所示.

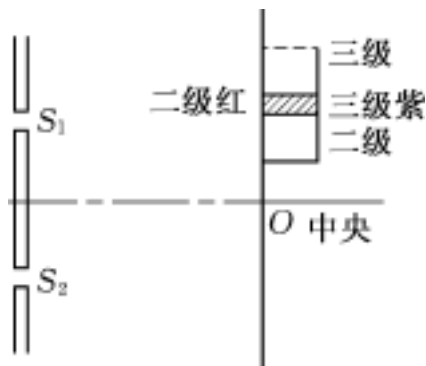


图 13-8

得

$$k_3 \lambda_{\text{紫}} = k_2 \lambda_{\text{红}}$$

$$\lambda_{\text{紫}} = \frac{k_2}{k_3} \lambda_{\text{红}} = \frac{2}{3} \times 760 \times 10^{-9} \\ = 506.7 \times 10^{-9} \text{ (m)}$$

即第 3 级紫色光正好与第 2 级的波长为 $506.7 \times 10^{-9} \text{ m}$ 的光谱线重合.

同理, 第 2 级 $\lambda_{\text{红}}$ 与第 3 级某个波长 $\lambda_{\text{紫}}$ 光程差相同

$$k_2 \lambda_{\text{红}} = k_3 \lambda_{\text{紫}}$$

$$\lambda_{\text{红}} = \frac{k_3}{k_2} \lambda_{\text{紫}} = \frac{3}{2} \times 506.7 \times 10^{-9} = 760.05 \times 10^{-9} \text{ (m)}$$

即, 第 2 级红色光正好与第 3 级波长为 $506.7 \times 10^{-9} \text{ m}$ 光谱线重合. 于是重叠部分谱线

第 2 级 $(600 \sim 760) \times 10^{-9} \text{ m}$

第 3 级 $(400 \sim 506.7) \times 10^{-9} \text{ m}$

重叠区域的宽度

$$x = k \frac{D}{d} \lambda = k \frac{D}{d} (\lambda_2 - \lambda_1)$$

以第 3 级计算, k 取 3

$$x = 3 \frac{1}{0.2 \times 10^{-3}} (506.7 - 400) \times 10^{-9} = 1.6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

通过本题需要搞清楚:

(1) 双缝干涉的明、暗条纹的条件;

(2) 以单色光进行双缝干涉实验时, 各级明纹宽度相等 $\left[x = \frac{D}{d} \lambda \right]$ 与 k 值无关. 当 d, D 一定时, 任一级明纹离开中央明纹的位置与波长 λ 成正比. 所以同一级中, 紫光离开中央明纹最近, 而红光离开中央明纹最远.

[例 13-2] 用单色光源 S 照射双缝, 在屏上形成干涉条纹, 零级明纹位于 O 点, 如图 13-9 所示. 若将缝光源 S 移至 S' 位置, 零级明纹将发生移动. 欲使零级明纹移回 O 点, 必须在哪个缝处覆盖一薄云母片才

有可能?若用波长 589 nm 的单色光,欲使移动了 4 个明纹间距的零级明纹回到 O 点,云母片的厚度应为多少?云母片的折射率为 1.58.

[解] 将缝光源 S 移至 S' 位置时,则 S' S₁ O 的光程比 S S₂ O 的光程小,而零级明纹应满足光程差为零,所以零级明纹下移.为使零级明纹回到 O 点,应增加上缝光线的光程,因此必须在 S₁ 处覆盖一云母片.若移动了 4 个明纹间距,每移动一条,光程差改变一个波长,故移动过程光程差改变了 4λ.设云母片厚度为 l,则

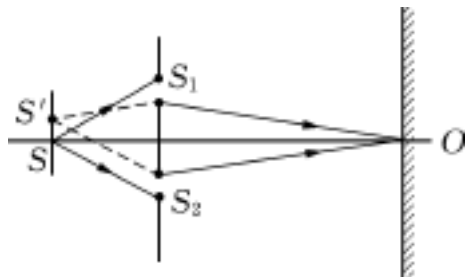


图 13-9

$$= (n - 1)l = 4\lambda$$

$$l = \frac{4\lambda}{n - 1} = \frac{4 \times 589 \times 10^{-9}}{1.58 - 1} = 4.06 \times 10^{-6} \text{ m} = 4.06 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

[例 13-3] 用入射光 λ = 500 nm 的光照射在厚度均匀的透明塑料薄膜上,若在反射角为 60° 的位置上看到明纹,此干涉明纹为第 10 级明纹.已知塑料薄膜的折射率 n₂ = 1.33.



图 13-10

- (1) 试问这是等厚干涉还是等倾干涉,由哪两条光线产生干涉?
- (2) 求此薄膜的厚度 e.
- (3) 对应此厚度能看到的是最高级次?

[解] (1) 因为厚度均匀,而对应不同入射角 i,得到不同干涉条纹,同一倾角有同一条干涉条纹,所以是等倾干涉.

当光线照射到薄膜上时,在膜的上表面有反射光线 1,在膜的下表面有反射光线 2,如图 13-10 所示,此两条光线为相干光而产生干涉,形成等倾干涉条纹,即为明暗相间的同心圆.

(2) 此两束光线的光程差

$$= 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$$

因为其中 1 光线在反射时有半波损失,而 2 光线无半波损失,所以有附加光程差 $\frac{\lambda}{2}$, n₂ 为膜的折射率, n₁ 为空气的折射率;取 n₁ = 1

$$\text{对明纹} \quad = 2e \sqrt{n_2^2 - \sin^2 60^\circ} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

因为当 i = 60° 时,看到第 10 级明纹,所以取 k = 10

$$2e \sqrt{(1.33)^2 - \sin^2 60^\circ} + \frac{\lambda}{2} = 10\lambda$$

$$e = \frac{10\lambda - \frac{\lambda}{2}}{2 \sqrt{1.33^2 - \sin^2 60^\circ}} = \frac{10 \times 500 - \frac{500}{2}}{2 \sqrt{1.33^2 - \sin^2 60^\circ}} = 2.35 \times 10^{-6} \text{ (m)}$$

(3) 能看到明纹的最高级次 k = k_{max}

$$= 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{1}{2} = k_{\max}$$

由上式可知在等倾干涉中 i 减小 k 增大, 当 $i = 0$ 时, k 为最大值, 所以

$$2en_2 + \frac{1}{2} = k_{\max}$$

$$k_{\max} = \frac{2en_2}{1} + \frac{1}{2} = \frac{2 \times 2.35 \times 10^{-6}}{500 \times 10^{-9}} + \frac{1}{2} = 13$$

能看到级次为第 13 级明纹.

[例 13-4] 一油轮漏出的油(折射率 $n_2 = 1.20$) 污染了某海域, 在海水 ($n_3 = 1.30$) 表面形成了一层薄薄的油膜.

(1) 如果太阳正位于海域上空, 一直升机驾驶员从机上向下观察, 他所正对的油膜厚度为 460 nm, 则他将观察到油膜呈什么颜色?

(2) 如果一潜水员潜入该区域水下, 又将观察到油膜呈什么颜色?

[解] 太阳垂直照射在海面上, 驾驶员和潜水员所看到的分别是反射光的干涉结果和透射光的干涉结果.

(1) 由于油膜的折射率 n_2 大于空气的折射率 n_1 但小于海水的折射率 n_3 , 所以在油膜上、下表面反射的两束光都有半波损失, 两反射光之间的光程差为

$$= 2n_2 e$$

由反射光干涉加强的条件

$$2n_2 e = k \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

得

$$= \frac{2n_2 e}{k}$$

$$k = 1, \quad \lambda_1 = 2n_2 e = 1104 \text{ nm}$$

$$k = 2, \quad \lambda_2 = n_2 e = 552 \text{ nm}$$

$$k = 3, \quad \lambda_3 = \frac{2}{3}n_2 e = 368 \text{ nm}$$

其中, 波长为 $\lambda_2 = 552 \text{ nm}$ 的绿光在可见光范围, 所以, 驾驶员将看到油膜呈绿色.

(2) 本题中透射光的光程差为

$$= 2n_2 e + \frac{1}{2}$$

由透射光干涉加强的条件

$$2n_2 e + \frac{1}{2} = k \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

得

$$= \frac{4n_2 e}{2k - 1}$$

$$k = 1, \quad \lambda_1 = 4n_2 e = 2208 \text{ nm}$$

$$k = 2, \quad \lambda_2 = \frac{4}{3} n_2 e = 736 \text{ nm}$$

$$k = 3, \quad \lambda_3 = \frac{4}{5} n_2 e = 441.6 \text{ nm}$$

$$k = 4, \quad \lambda_4 = \frac{4}{7} n_2 e = 315.4 \text{ nm}$$

其中波长为 $\lambda_2 = 736 \text{ nm}$ 的红光和 $\lambda_3 = 441.6 \text{ nm}$ 的紫光在可见光范围内 所以,潜水员看到的油膜呈紫红色 .

[例 13-5] 一柱面平凹透镜 A,曲率半径为 R ,放在平玻璃片 B 上,如图 13-11 所示 现用波长为 λ 的单色平行光自上方垂直往下照射,观察 A 和 B 间空气薄膜上、下表面反射光的干涉条纹,设空气薄膜的最大厚度 $e_m = 2 \text{ }\mu\text{m}$.

- (1) 这是等厚干涉还是等倾干涉?试分析干涉条纹的特点(形状、级次高低、疏密);
- (2) 共能看到多少条明纹,作图表示;
- (3) 求明纹距中心线的距离 r_k ;
- (4) 若将玻璃片 B 向下平移,条纹如何移动?若玻璃片移动了 $\frac{1}{4} \lambda$,问这时还能看到几条明纹?

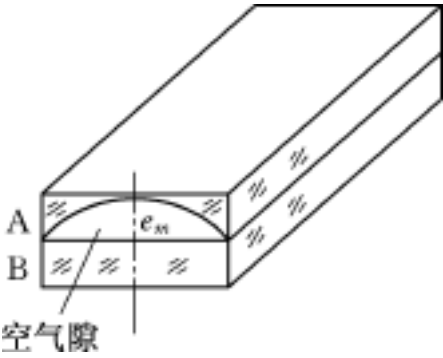


图 13-11

[解] (1) 柱面平凹透镜与平玻璃之间的空气薄膜厚度在改变,对不同厚度 e 形成不同级次的干涉条纹,所以是等厚干涉 .由于空气薄膜等厚点的轨迹平行于柱面平凹透镜的轴线,所以干涉条纹是一系列平行于柱的明暗相间的直条纹 .由反射光干涉条件

$$= 2e + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda & \text{明} \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ (2k + 1) \frac{\lambda}{2} & \text{暗} \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

可见,薄膜厚度 e 愈大,级次 k 愈高 .中心线空气薄膜最厚处 $e_m = 2 \text{ }\mu\text{m}$,级次最高,可求得是 $k = 4$ 的暗纹,两侧条纹级次递减,空气薄膜边缘处 $e = 0$,级次最低,为 $k = 0$ 的暗纹 .由于该空气薄膜厚度非线性改变,相当于平面劈尖的劈尖角 由中心至边缘逐渐变大,因此干涉条纹呈现中间疏、两边密的分布 .

(2) 由于中心线处 $e_m = 2 \text{ }\mu\text{m}$,则由

$$2e_m + \frac{\lambda}{2} = k_m \lambda$$

可得 $k_m = 4.5$,取整数 $k = 4$,即最高级次的明纹为第 4 级 .由于条纹分布的对称性,故可看到 8 条明纹,由(1)可知,中心线和两边缘为暗纹,所以出现 9 条暗纹 .明纹分布如图 13-12(a)所示 .

(3) 设从中心线到一侧第 k 级明纹的距离为 r_k ,此处空气薄膜厚度为 e ,如图 13-12(b)所示 .由几何关系

$$r_k^2 = R^2 - [R - (e_m - e)]^2$$

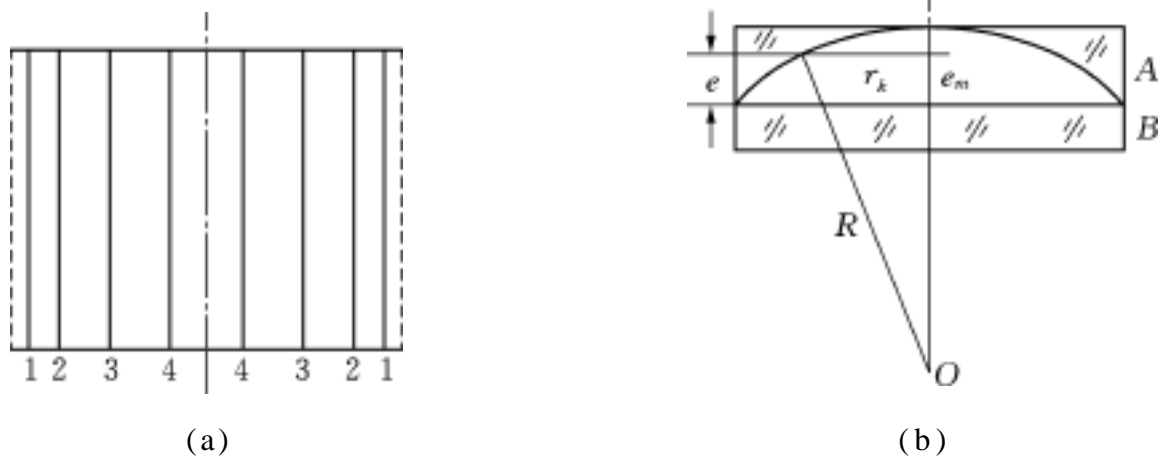


图 13-12

因为 $e_m \ll R$, $e \ll R$, 可略去 $(e_m - e)^2$ 项, 则

$$r_k^2 = 2R(e_m - e)$$

解得

$$e = e_m - \frac{r_k^2}{2R}$$

代入明纹条件 $2e + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$, 得

$$r_k = \sqrt{2Re_m - \left[k - \frac{1}{2}\right]\lambda} \quad R = \sqrt{\left[\frac{9}{2} - k\right]\lambda} \quad R$$

(4) 在 B 下移过程中, 随着空气薄膜厚度增大, 原条纹所在位置对应的薄膜厚度随之外移, 干涉条纹向两侧移动. 当 B 下移 $\frac{\lambda}{4}$ 时, 各处空气薄膜厚度都增加了 $\frac{\lambda}{4}$, 光程差则增加了 $\frac{\lambda}{2}$, 原来中心线第 4 级暗纹处现为第 5 级明纹, 边缘两个第 0 级暗纹处则为第 1 级明纹, 所以视场中一共有 9 条明纹, 8 条暗纹.

13.4 自测练习与能力训练

13.4.1 选择题

1. 在双缝干涉实验中, 为使屏上的干涉条纹间距变大, 可以采取的办法是 [].

(A) 使屏靠近双缝

(B) 使两缝间距变小

(C) 将每条缝宽调细

(D) 用较短波长的单色光源

2. 两束相干光束光强分别为 I_1 和 I_2 , 则其叠加以后的光强为 [].

(A) $I = I_1 + I_2$

(B) $I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2}$

(C) $I = \sqrt{I_1 I_2}$

(D) $I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_2 - \phi_1)$

3. 两个直径相差甚微的圆柱夹在两块平板玻璃之间构成空气劈尖, 如图 13-13 所示. 单色光垂直照射, 可看到等厚干涉条纹. 如果将两圆柱之间的距离 L 拉大, 则 L 范围内的干涉条纹[] .

- (A) 数目增加, 间距不变
(B) 数目增加, 间距变小
(C) 数目不变, 间距变大
(D) 数目减少, 间距变大

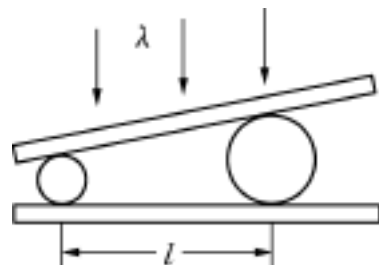


图 13-13

4. 严格地讲, 空气折射率大于 1, 因此牛顿环实验中若将玻璃夹层中的空气逐渐地抽去而成为真空时, 牛顿环将[] .

- (A) 向外扩张 (B) 向中心收缩 (C) 不变 (D) 消失

5. 含有两种波长 λ_1 和 λ_2 的光垂直入射到曲率半径为 R 的牛顿环装置上, 如果 λ_1 的第 m 级暗环与 λ_2 的第 $(m+1)$ 级暗环相重合, 则 λ_1 的第 m 级暗环的半径为[] .

(A) $\sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{\lambda_1 + \lambda_2}}$ (B) $\sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}$ (C) $\sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{\lambda_1 - \lambda_2}}$ (D) $\sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}}$

6. 一折射率为 n_2 、厚度为 e 的平面平行膜被一折射率为 n_1 的介质包围. 有一单色平行光垂直于薄膜的上表面入射, 从薄膜上、下表面反射的两束光发生干涉. 若已知 $n_2 > n_1$, 且入射光在 n_1 介质中的波长为 λ_1 , 则两反射光的光程差为[] .

(A) $2n_2 e$ (B) $2n_2 e + \frac{\lambda_1}{2n_1}$ (C) $2n_2 e + \frac{n_1 \lambda_1}{2}$ (D) $2n_2 e + \frac{n_2 \lambda_1}{2}$

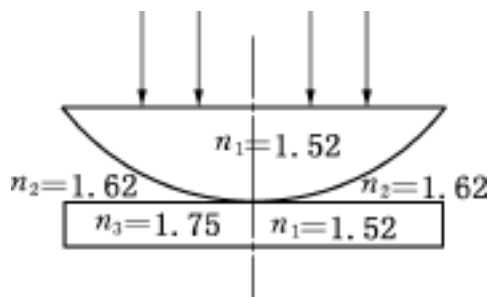


图 13-14

7. 透明材料构成的光学装置, 各部分折射率如图 13-14 所示. 单色光垂直入射, 观察透射光的干涉条纹, 中心接触处的圆斑为[] .

- (A) 左明右暗 (B) 右明左暗
(C) 全明 (D) 全暗

8. 用白光垂直照射在折射率为 1.4 的薄膜上, 如果紫光 ($\lambda = 400 \text{ nm}$) 在反射光中消失, 则此薄膜的最小厚度和紫光在薄膜中的波长分别为[] .

- (A) 200 nm, 400 nm (B) 200 nm, 285.7 nm
(C) 142.9 nm, 400 nm (D) 142.9 nm, 285.7 nm

9. 在玻璃板上涂了厚为 10λ 的透明介质薄膜, 该介质的折射率为 1.5 . 如以波长为 λ 的单色光垂直射向薄膜, 发现反射光干涉相消, 则玻璃板的折射率 [].

(A) 一定小于 1.5

(B) 一定大于 1.5

(C) 一定等于 1.5

(D) 大于 1.5 , 小于 1.5 都可以

10. 在迈克耳孙干涉仪的一支光路中, 放入一片折射率为 n 的透明薄膜后, 测出两束光的光程差的改变量为一个波长 λ , 则薄膜的厚度是 [].

(A) $\frac{\lambda}{2}$

(B) $\frac{\lambda}{2n}$

(C) $\frac{\lambda}{n}$

(D) $\frac{\lambda}{2n - 2}$

13.4.2 填充题

1. 波长为 λ 的单色光照在双缝上, 在屏上产生明暗相间的干涉条纹. 从两缝 S_1 和 S_2 到屏上第二级明纹中心点 P 的两条光线 S_2P 和 S_1P 的光程差 = _____, 相位差 = _____.

2. 真空中波长 $\lambda = 400\text{ nm}$ 的紫光在折射率 $n = 1.5$ 的介质中从 A 点传播到 B 点, 光振动的相位改变了 5π , 该光从 A 到 B 所经过的光程为 _____.

3. 杨氏双缝干涉实验中, 已知屏幕上的 P 点处为第 3 级明纹, 如图 13-15 所示. 若将整个装置浸入某种透明液体中, P 点处为第 4 级明纹, 则此液体的折射率 $n =$ _____.

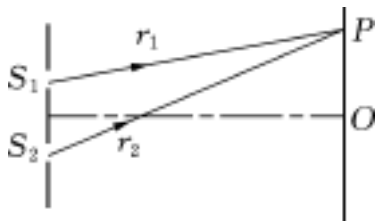


图 13-15



图 13-16

4. 在双缝实验装置中, 双缝间距 $d = 1\text{ mm}$, 入射光波长 $\lambda = 400\text{ nm}$. 若用折射率 $n = 1.5$ 的劈形透明介质膜挡住缝 S_1 , 这时劈尖正好在两缝的正中间, 如图 13-16 所示. 在 S_1 被挡住后, 发现中央明纹移到原第 5 级明纹处, 则劈的倾角 = _____.

5. 用两块平玻璃片形成一个空气劈, 若用波长分别为 600 nm 和 500 nm 的两种单色光垂直入射, 观察反射光形成的干涉条纹, 从两玻璃接触的棱边处数起, 两种光的第 5 个明纹所对应的空气膜厚度之差为 _____ nm.

6. 两玻璃平板长 L , 一端夹住一金属细丝, 在两玻璃板间形成很薄的空气

劈 现以波长为 500 nm 的光垂直射向空气劈,在玻璃板上方观察反射光的干涉.当对金属丝加热后,发现在玻璃板上离劈尖距离为 $\frac{L}{2}$ 处的一明纹由明变暗又变明共两次,则金属丝的直径伸长量 $d =$ _____.

7. 有一空气劈,由两玻璃片夹叠而成.用波长为 _____ 的单色光垂直照射其上,若发现某一条纹由明变暗,则需将上面一片玻璃片向上平移距离_____.若平移过程中,劈尖内始终充满水 $\left[n = \frac{4}{3} \right]$, 则上面一片玻璃又需向上平移距离_____.

8. 如图 13-17 所示,一油滴 ($n_2 = 1.20$) 沿平面玻璃 ($n_3 = 1.50$) 展开成圆形油膜时,其中心最大厚度为 $1\ 200\text{ nm}$,在波长为 600 nm 的单色光垂直照射下,从反射光中观察油膜所形成的干涉条纹.此干涉属于_____干涉;能观察到_____条明纹;中心处的明暗情况为_____ (填明、暗或不明不暗).

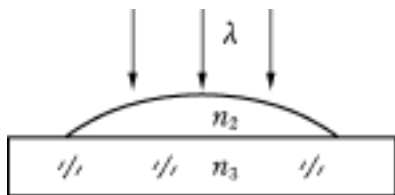


图 13-17

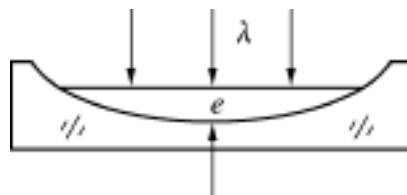


图 13-18

9. 如图 13-18 所示,在一半径很大的凹球面玻璃 ($n_{\text{玻}} = 1.50$) 上有一层很薄的油 ($n_{\text{油}} = 1.20$).今用波长为 600 nm 的单色光垂直照射,在整个油层表面上观察干涉条纹,中央为亮斑,周围还有 12 个亮环,则凹球面中央处的油层厚度 $e =$ _____,级次最高的干涉条纹在_____处.

10. 迈克耳孙干涉仪可用来测定单色光的波长.当 M_2 移动距离 $d = 0.33\text{ mm}$ 时,测得某单色光的条纹移过 $N = 1\ 000$ 条,则所用光的波长为_____nm.若再把折射率为 1.40 的透明薄膜放在 M_2 镜前,条纹又移动了 1 000 条,则此薄膜的厚度为_____mm.

13.4.3 计算题

1. 如图 13-19 所示,在双缝干涉实验装置中,紧靠狭缝 S_1 处放一半径 $r = 2$ 、折射率为 n 的半圆柱镜片,则零级明纹将向什么方向移动? 求第 k 级明纹位置的表达式.

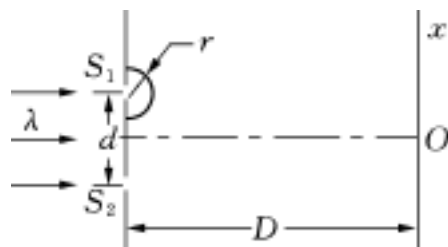


图 13-19

2. 用波长为 500 nm 的单色光垂直照射到由

两块光学平玻璃构成的空气劈尖上.在观察反射光的干涉现象中,距劈尖棱边 $L = 1.56\text{ cm}$ 的 A 处是从棱边算起的第 4 条暗纹中心.

- (1) 求此空气劈尖的劈尖角 ;
- (2) 改用 600 nm 的单色光垂直照射到此劈尖上仍观察反射光的干涉条纹, A 处是明纹还是暗纹 ?
- (3) 在第(2)问的情形,从棱边到 A 处的范围内共有几条明纹 ? 几条暗纹 ?

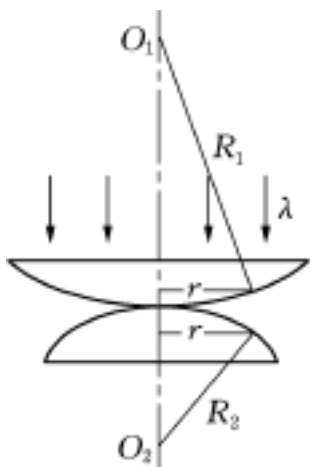


图 13-20

3. 两个平凸透镜按图 13-20 所示的方式放置,上面一个是标准件,曲率半径 $R_1 = 20\text{ m}$, 另一个是待测样品.在牛顿环实验中,入射的单色光是波长 $\lambda = 632.8\text{ nm}$ 的氦氖激光,测得第 25 级暗环的半径为 1 cm ,求待测样品的曲率半径 $R_2 = ?$

4. 单色平行光垂直照射到均匀覆盖着薄油膜的玻璃板上,设光源波长在可见光范围内可以连续变化,波长变化期间只观察到 500 nm 和 700 nm 这两个波长的光相继在反射光中消失.已知油膜的折射率为 1.33 , 玻璃的折射率为 1.50 ,求油膜的厚度.

5. 如图 13-21 所示,把一平玻璃放在凹透镜上,用波长为 λ 的单色光垂直照射在平玻璃和凹透镜间的空气膜上,观察反射光的干涉.用两种方法测量空气膜的最大厚度.

- (1) 当 $\lambda = 400\text{ nm}$ 时,测得干涉图样共有 8 个暗环,中心为亮斑.
- (2) 观察凹透镜中心处,并连续改变入射光波长,发现当 $\lambda = 500\text{ nm}$ 时,中心为暗斑.波长变到 $\lambda = 600\text{ nm}$ 时,中心再次变暗斑.(波长在 500 nm 到 600 nm 之间时,中心没有出现暗斑)

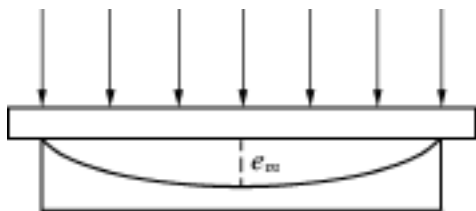


图 13-21

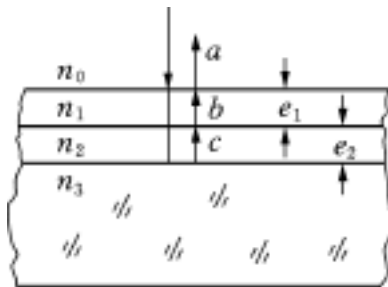


图 13-22

6. 如图 13-22 所示,空气(折射率为 n_0)中有一镀有双层增透膜的玻璃,第一、第二层膜和玻璃的折射率分别为 n_1 、 n_2 和 n_3 ,且知 $n_0 < n_1 < n_2 > n_3$.今以真空中波长为 λ 的单色平行光垂直入射到增透膜上,设三束反射光(只考虑一次反射) a 、 b 、 c 在空气中的振幅相等,欲使这三束光相干叠加后的总强度为零,求

第一层膜的最小厚度 e 和第二层膜的最小厚度 e .

习题选解

[选择题 3] 当 L 变大, 则劈夹角 变小. 由 $l = \frac{\lambda}{2\sin\theta}$ 可知, 随着 减小, 条纹间距 l 将变大; 由于相邻两条纹对应的薄膜厚度差为 $\frac{\lambda}{2}$, 则两圆柱之间的直径差

$d = N \frac{\lambda}{2}$, 式中 N 为两圆柱之间的条纹间隔数目, 当条纹数目较多时, N 可近似看作条纹数目. 由于 d 不变, 所以 L 范围内的干涉条纹数目 N 不变. 由以上分析可知, 本题结论 (C) 是正确的.

[选择题 6] 设该单色光在真空中的波长为 λ , 则在 n_1 介质中的波长 $\lambda_1 = \frac{\lambda}{n_1}$, 即 $\lambda = n_1 \lambda_1$. 根据题意, n_2 介质被 n_1 介质包围, 且 $n_1 < n_2$ 可知, 只有在 n_2 介质上表面反射的光有半波损失, 故应附加半个波长的光程, 这样两束反射光的光程差为

$$\Delta = 2n_2 e + \frac{\lambda}{2} = 2n_2 e + \frac{n_1 \lambda_1}{2}$$

所以该题结论 (C) 是正确的.

[填空题 4] 缝 S_1 被透明膜挡住后, 光程差发生了变化, 所以条纹就要移动. 设缝 S_1 处透明膜的厚度为 l , 则光程差的变化和条纹移动数目的关系为

$$\Delta = (n - 1)l = 5 \quad (1)$$

由图 13-16, 缝 S_1 到两缝正中间的距离为 $\frac{d}{2}$, 则有

$$l = \frac{d}{2} \tan\theta \quad (2)$$

将式 (2) 代入式 (1), 可得

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{10}{(n - 1)d} = \frac{10 \times 400 \times 10^{-9}}{(1.5 - 1) \times 10^{-3}} = 8 \times 10^{-3} \\ \theta &= 27^\circ \end{aligned}$$

[填空题 8] 由于油滴成圆形, 且油膜厚度 e 在改变, 对不同厚度 e 形成不同的干涉条纹, 所以为等厚干涉.

根据题意, $i = 0$, 且 $n_1 < n_2 < n_3$, 所以油膜上、下表面反射光的光程差为

$$= 2ne = k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$k = \frac{2ne}{\lambda} = \frac{2 \times 1.20 \times 1200 \times 10^{-9}}{600 \times 10^{-9}} = 4.8$$

故离中心最近的明纹是第 4 级明纹, 由于油膜边缘处 ($e=0$) 为第零级明纹, 所以能观察到 5 条明纹. 条纹形状为同心圆环.

对油膜中心运用暗纹公式

$$2ne = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

$$k = \frac{2ne - \frac{\lambda}{2}}{\lambda} = \frac{2 \times 1.20 \times 1200 \times 10^{-9} - 300 \times 10^{-9}}{600 \times 10^{-9}} = 4.3$$

可见, 油膜中心既不满足明纹条件, 也不满足暗纹条件, 因此, 油膜中心的亮度介于明和暗之间, 应填不明不暗.

[计算题 5] 方法一: 用明暗条纹公式求解.

(1) 因有半波损失, 干涉图样中的 8 个暗环一定是 0~7 级暗环. 又因明环是从第 1 级开始的, 所以中心亮斑一定是第 8 级, 如图 13-23 所示.

设空气膜的最大厚度为 e_m , 则

$$2e_m + \frac{\lambda}{2} = 8\lambda$$

解得 $e_m = \frac{15}{4} \lambda = 1500 \text{ nm}$

(2) 由已知条件当 $\lambda = 500 \text{ nm}$ 时中心为暗斑, 可得

$$2e_m + \frac{\lambda}{2} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}, \text{ 即 } 2e_m = k\lambda \quad (1)$$

由波长改变到 $\lambda = 600 \text{ nm}$ 中心再次变暗, 则得

$$2e_m + \frac{\lambda}{2} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}, \text{ 即 } 2e_m = k\lambda \quad (2)$$

又因从 $\lambda = 500 \text{ nm}$ 变到 $\lambda = 600 \text{ nm}$ 是相邻两次变暗, 所以 k 与 k 只能差一级, 因 $\lambda > \lambda$, 所以只能取

$$k = k - 1 \quad (3)$$

联立式(1)~(3), 解得

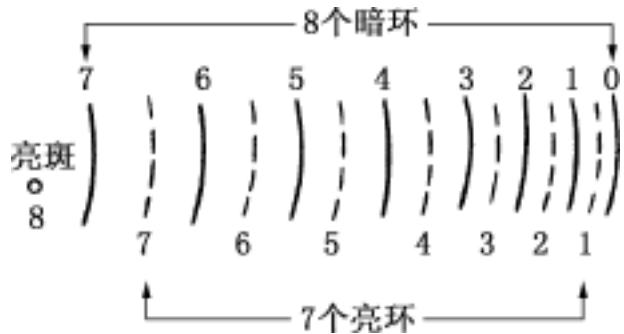


图 13-23

$$k = 6, e_m = \frac{k}{2} = \frac{6 \times 500}{2} = 1500 \text{ nm}$$

方法二:用相邻两明(或暗)纹对应的空气膜厚度差为 $\frac{\lambda}{2}$ 求解.

(1) 由图 13-23,从接触处的 0 级暗环到空气膜最厚处的 8 级亮斑之间共有 7 个半条纹间隔,所以

$$e_m = 7 \times \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{15}{4} \lambda = 1500 \text{ nm}$$

(2) 因为接触处为暗环, $\lambda = 500 \text{ nm}$ 时,中心处又是暗斑,所以 e_m 一定是 $\frac{\lambda}{2}$ 的整数倍,应有

$$e_m = k \frac{\lambda}{2} \quad (4)$$

又因 $\lambda = 600 \text{ nm}$ 时中心也是暗斑,又有

$$e_m = k' \frac{\lambda'}{2} \quad (5)$$

再考虑到从 $\lambda = 500 \text{ nm}$ 变到 $\lambda' = 600 \text{ nm}$ 是相邻两次变暗,还有

$$k' = k - 1 \quad (6)$$

联立式(4)——(6),同样解得

$$k = 6, e_m = \frac{k}{2} \lambda = \frac{6 \times 500}{2} = 1500 \text{ nm}$$

[计算题 6] a 、 b 、 c 三束光的振幅矢量图如图 13-24 所示.

由于 $n_1 < n_2 < n_3 > n_4$, 所以光束 a 和 b 有半波损失, 光束 c 无半波损失. 所以光束 a 和 b 之间的光程差为

$$\Delta_1 = 2n_2 e$$

它们之间的相位差

$$\Delta\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} 2n_2 e$$

光束 b 和 c 之间的光程差为

$$\Delta_2 = 2n_2 e - \frac{\lambda}{2}$$

它们之间的相位差

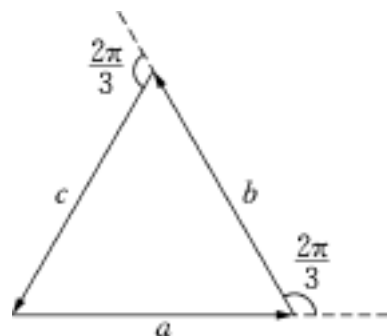


图 13-24

$$e_2 = \frac{2}{3} e_1 = \frac{2}{3} \left(2n_2 e_1 - \frac{\lambda}{2} \right)$$

两层膜厚 e_1 和 e_2 最小的条件为

$$e_1 = \frac{4}{3} n_2 e_2 = \frac{2}{3} \lambda$$

$$e_2 = \frac{4}{3} n_2 e_2 - \frac{\lambda}{2} = \frac{2}{3} \lambda$$

由以上两式可解出

$$e_1 = \frac{5}{6} n_2 \lambda, \quad e_2 = \frac{5}{12} n_2 \lambda$$

光的衍射

14.1 基本要求与复习框图

1. 基本要求

- (1) 了解惠更斯-菲涅耳原理以及它对光的衍射现象的定性解释。
- (2) 掌握单缝的夫琅禾费衍射图样的特点,运用半波带法分析单缝衍射规律,以确定衍射图样中明暗条纹的位置。
- (3) 理解光栅衍射图像的特点及其形成原因,掌握光栅方程明纹的规律和光栅光谱的应用。
- (4) 了解衍射对光学仪器分辨本领的影响。

2. 复习框图

光的衍射现象进一步证实了光的波动性。研究衍射现象的理论基础是惠更斯-菲涅耳原理,其核心是子波相干叠加,以此为出发点,着重讨论单缝夫琅禾费衍射的特点和单缝衍射的处理问题方法——半波带法,从而得到单缝衍射明暗条纹的条件是取决于缝边缘处两条光线的光程差 $\Delta r = a \sin \theta$ 。在单缝衍射的基础上进一步研究了光栅衍射图像的特点及其成因,得出了具有实际意义的光栅衍射公式。本章主要内容和各部分之间的关系可用图 14-1 所示的方框图表示。

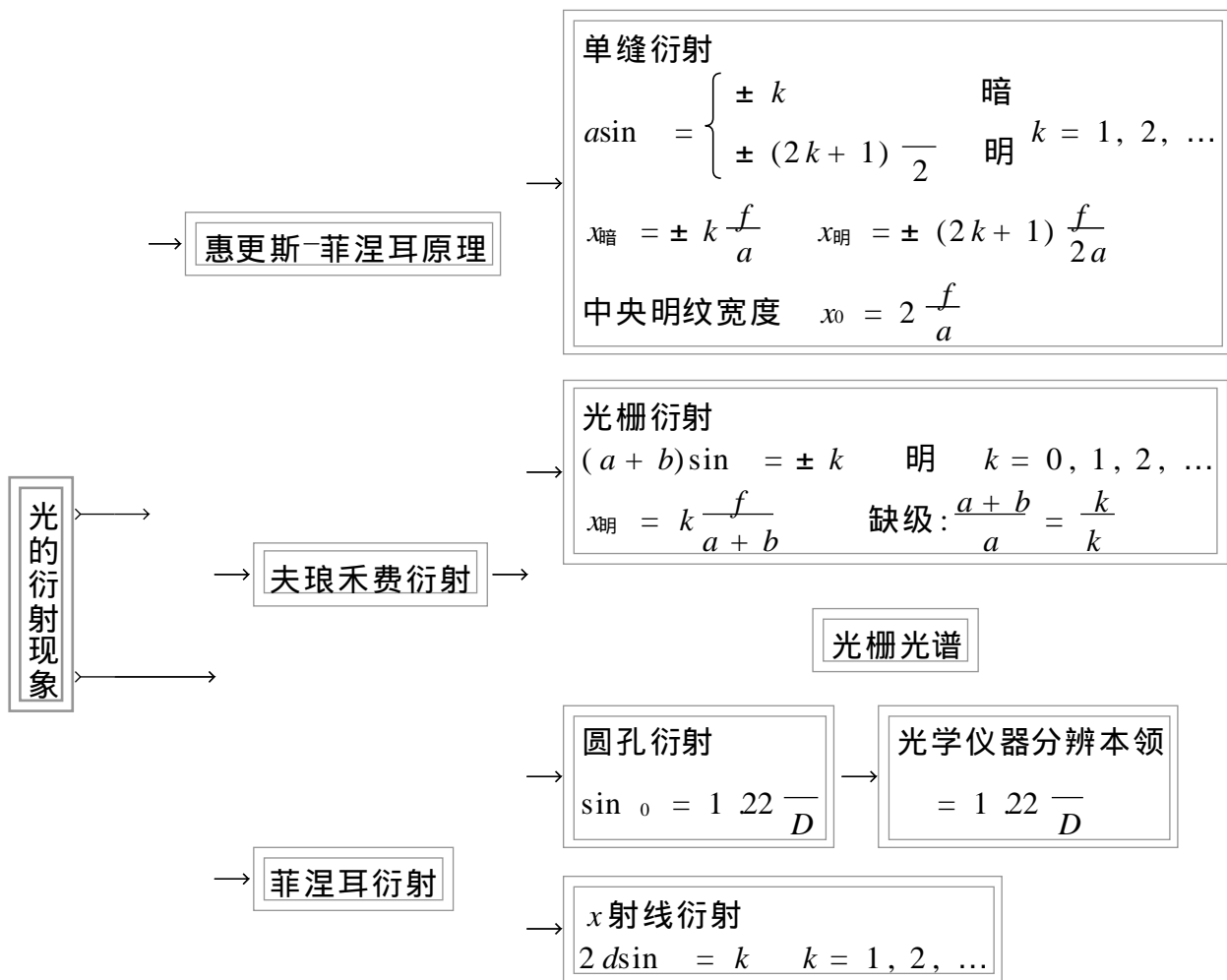


图 14-1

14.2 阅读指导与问题讨论

1. 干涉和衍射的区别和联系

干涉和衍射都是波动的基本特征,从本质上讲都是波的相干叠加,但又有所区别.干涉是两束光或有限束光的相干叠加,而衍射是无数个子波的相干叠加.

干涉和衍射的图样都是明暗相间的条纹,但干涉中各级明纹的光强是一样的,条纹呈等间距分布;而衍射条纹光强分布相对集中,中央明纹中的光强占总光强的 80% 以上,且它的宽度是其他各级条纹宽度的两倍.

将双缝干涉和双缝衍射作比较,一般双缝干涉中同时存在着衍射,因而干涉条纹要受到衍射的调制.若双缝实验中缝宽 a 很小,则单缝衍射中央明纹衍展很宽,几乎占满可观测的区域,而且强度分布平坦,这种情况下衍射对干涉条纹的影响很小,得到的是等光强的干涉条纹,如图 14-2(a)所示,称为双缝干涉.若双缝实验中缝宽 a 较大,就必须考虑衍射对干涉条纹的调制,形成不等光强的条纹,如图 14-2(b)所示,称为双缝衍射.

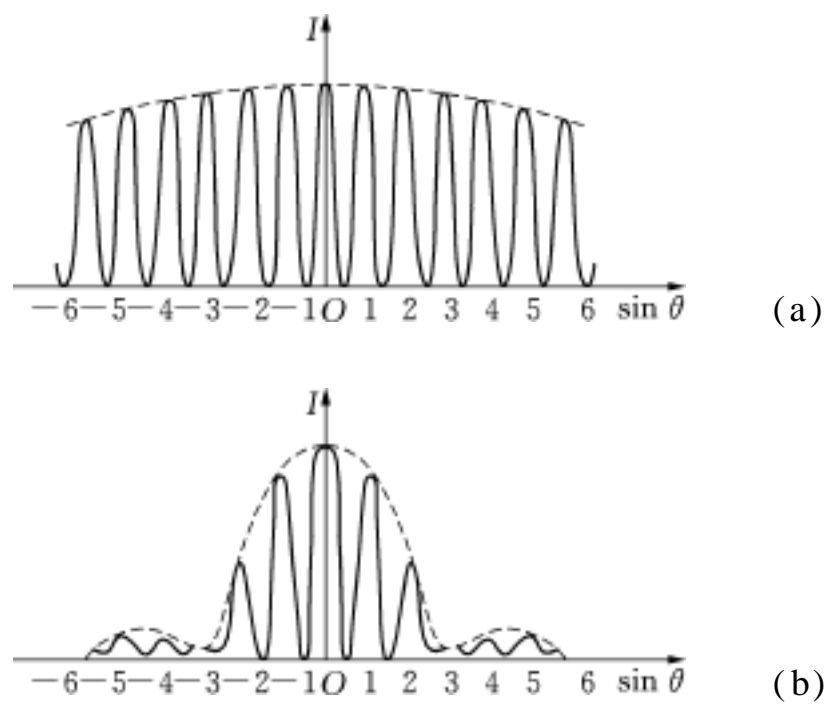


图 14-2

[问题 14-1] 双缝干涉的明纹条件 $d\sin\theta = k\lambda$ 和单缝衍射的暗纹条件 $a\sin\theta = k\lambda$ 形式相同,却一明一暗,如何解释?

[解答] 双缝干涉是两束光的相干叠加,而单缝衍射是无穷多子波的相干叠加,从物理角度看,中心问题都是考虑相位差,但处理问题的方法不同,当双缝干涉的两束光在相遇点的光程差为 $k\lambda$ 时,两束光的相位相同或相位差为 $2k\pi$,干涉结果为明纹;单缝衍射采用菲涅耳半波带法,当缝边缘处两束衍射光线的光程差为 $k\lambda$ 时,单缝处波面恰好分为偶数个半波带,且相邻两波带上对应点发出的衍射光的光程差恰好都是 $\frac{\lambda}{2}$,即相位相反或相位差为 π ,干涉结果相消.这样所有偶数个半波带的作用都成对地相互抵消,所以衍射结果为暗纹.

[问题 14-2] 试说明单缝衍射装置中发生下列变化时,中央明纹的位置和宽度有何变化?

- (1) 单缝变窄;
- (2) 入射光波长变长;
- (3) 单缝平行屏幕向上或向下平移;
- (4) 试说明单缝衍射各级明纹强度为什么随 k 值增加而减小.

[解答] (1) 根据单缝衍射暗纹公式

$$a\sin\theta = k\lambda$$

中央明纹宽度介于左右第 1 级暗纹之间

$$-\lambda < a\sin\theta < \lambda$$

所以当 a 变小, $\sin\theta$ 必增大,单缝变窄时中央明纹必定变宽,而中心位置不变.

(2) 同理入射光波长变长时,中央明纹位置不变,而条纹宽度变大.

(3) 当单缝上下平移时,根据几何光学的成像规律,平行于透镜主光轴的衍射光 ($\theta = 0$) 仍会聚于透镜的焦点上,形成中央明纹,如图 14-3 所示.平行于透镜副光轴的衍射光(衍射角为 θ)仍然会聚于副光轴

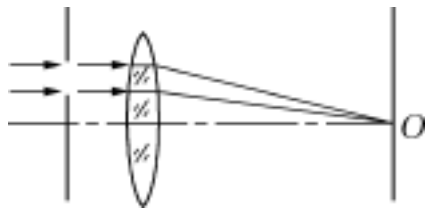


图 14-3

与焦平面的交点上,形成了其他级次的衍射条纹,所以当单缝平行于屏幕向上或向下移动时,不但中央明纹的位置和宽度不变,而且整个单缝衍射的全部条纹分布都不变化.

(4) 因为由单缝衍射的明纹公式

$$a \sin \theta = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

当 $k=1$ 时,第 1 级明纹对应的边缘光线的光程差为 $\frac{3\lambda}{2}$,由半波带法,单缝处波面可分成三个半波带,其中相邻两个半波带的子波发出的光,其相位差为 π ,所以相互抵消,而留下一个半波带产生了一级明纹,其亮度由 $\frac{S_0}{3}$ (S_0 为单缝的面积)面积上的子波发出的相干光决定.

当 $k=2$,第 2 级明纹对应的边缘光线的光程差 $= \frac{5\lambda}{2}$,则单缝处波面可分成 5 个半波带,由 1 和 2, 3 和 4 的半波带上对应点发出的相干光均相消,留下一个半波带,产生第 2 级明纹,其亮度由 $\frac{S_0}{5}$ 面积上的子波发出的相干光决定.

同理 $k=3$ 时,边缘光线的光程差 $= \frac{7\lambda}{2}$,单缝处波面被分成 7 个半波带,由 $\frac{S_0}{7}$ 面积上的子波发出相干光产生第 3 级明纹的亮度.由此可知,单缝各级明纹的亮度随 k 值的增加而减小.

2. 单缝衍射与光栅衍射的区别

单缝衍射是同一狭缝处的无数个连续分布的子波源发出的光波产生叠加的结果.光栅是由一系列等间距、等宽度的平行狭缝组成,当入射光投射到光栅上时,光栅上各狭缝都有单缝衍射,且各缝在屏上产生的衍射图样完全重合[见问题 14-2(3)],同时各狭缝所发出的光均为相干光,当它们在屏上会聚时,还要发生干涉,其干涉图样也呈现在透镜的焦平面上.因此光栅衍射条纹是各缝的单缝衍射与缝与缝之间干涉的综合结果,它必然是既带有单缝衍射图样的某些特征,又带有多缝干涉图样的某些特征.

单缝衍射条纹的光强分布是连续且平缓的,其明纹的亮度仅来自一个未被抵消的半波带的能量.而光栅衍射明纹的亮度却来源于很多个未被抵消的半波带的能量,而且由于多缝干涉,其能量分布更集中,所以光栅衍射的明纹要比单缝衍射的明纹亮得多.另外,由于多缝干涉出现暗纹的条件为 $N(a+b) \sin \theta = m\lambda$ ($m \neq kN$),得出两主极大之间有 $N-1$ 个极小及 $N-2$ 个次极大,这样就把主极大之间的距离分得很开,又由于次极大的强度很弱(约为主极大的 4% 左右),因此两主极大之间实际上是一片暗区.因为干涉和衍射是改变光波总能量的分布而不改变光波总能量的大小,既然在较宽的暗区内基本上不分布光波能量,那么大量的光波能量集中在明纹上,所以形成黑暗背景中的一系列分得很开的细

窄亮线 .

[问题 14-3] 图 14-4 分别表示单色光通过三种不同的光学器件在屏上呈现出的干涉或衍射图样, 试指出各自对应的光学器件, 并分析条纹的特点 .

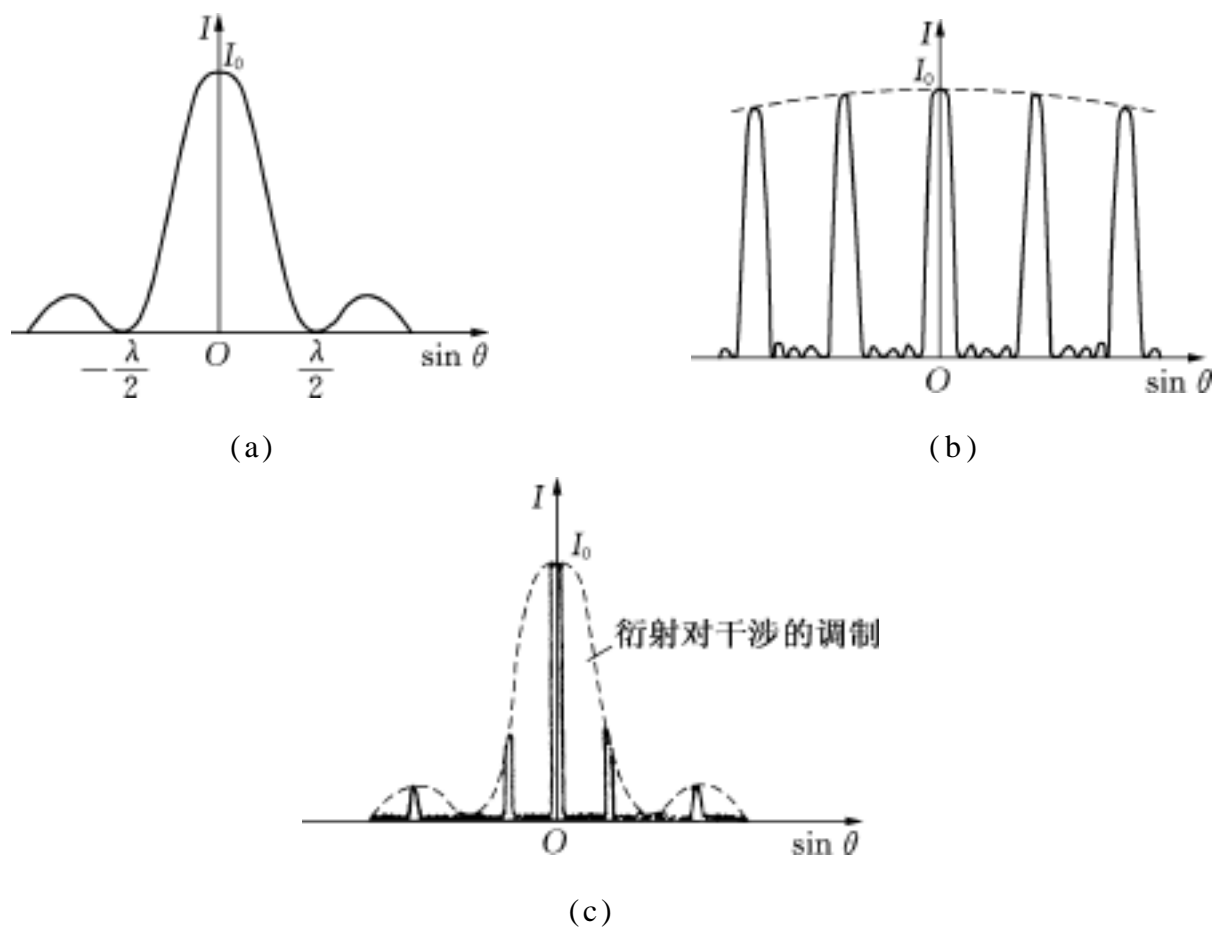


图 14-4

[解答] 图 14-4(a)是单缝衍射的光强分布曲线 条纹特点是,以中央明纹为对称中心的一系列平行于缝的直线条纹,中央明纹的角宽度为 $\theta_0 = \frac{2}{a}$, 约为其他各级明纹宽度的 2 倍,而且中央明纹特别亮 . 随着衍射角 θ 的增大,条纹级次 k 随之增大,单缝上相应的波面被分成的半波带数目越多,相邻半波带抵消后剩余的一个半波带面积就越小,所以光强随 k 增大而减弱 .

图 14-4(b)是多缝干涉的光强分布曲线 由于每个狭缝宽度 a 很小,则衍射中央明纹很宽,所以衍射对干涉的影响很小 又由于两个主极大之间有 $N - 1$ 个极小及 $N - 2$ 个次极大,所以从图中可看出是 5 个缝的干涉 .

图 14-4(c)是光栅衍射的光强分布曲线 条纹特点是,明纹又窄又亮,相邻两明纹(干涉主极大)之间有一暗区,同时干涉主极大强度受单缝衍射光强分布曲线的调制明显,从图中还可看出偶数级干涉主极大缺级 .

3 . 缺级与重叠

光栅衍射主极大的位置由光栅方程 $(a + b)\sin \theta = k \lambda$ 确定,单缝衍射的暗纹位置由 $a\sin \theta = k \lambda$ 确定,当这两个位置重合时,相应于这些 k 级的主极大不再出现,这就是缺级现象,其原因是光栅衍射受单缝衍射的调制(参阅本章阅读指导

中 1 和图 14-3(c)) . 哪些主极大缺级, 取决于光栅的缝宽 a 和光栅常数 $a+b$, 当 $\frac{a+b}{a} = M$ 时, 则 $k = M, 2M, 3M, \dots$ 等缺级 .

光栅方程中的衍射角 θ 同时受到波长 λ 及谱线级次 k 的制约, 当波长为 λ_1 的 k_1 级谱线与另一波长为 λ_2 的 k_2 级谱线同时出现在屏上的同一位置, 这种现象称为重叠, 光谱级次越高, 其重叠情况就越复杂 . 两谱线重叠时必须满足的条件是 $k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2$.

[问题 14-4] (1) 当入射光波长 λ 改变, 光栅衍射条纹如何变化? (2) 当光栅常数 d ($d = a+b$) 和缝宽 a 改变, 光栅衍射图样如何变化? (3) 当白光 (400 ~ 760 nm) 入射时, 试描述光栅衍射图样, 能观察到几级不重叠的完整光谱?

[解答] (1) 由光栅方程 $d \sin \theta = k \lambda$ 可知, 衍射条纹 (即主极大) 的角位置 $\sin \theta = k \frac{\lambda}{d}$ 随波长 λ 增大而增大, 条纹向 θ 值大的方向移动; 同时, 条纹角间距 $\frac{\lambda}{d}$ 变大, 条纹变疏 .

(2) 光强衍射图样的光强分布曲线是单缝衍射轮廓线调制下的多光束干涉光强曲线, 影响单缝衍射轮廓线宽度的是光栅的通光缝宽 a , 而确定各级干涉主极大位置的是光栅常数 d . 所以当 a 不变、 d 减小时, 单缝衍射轮廓线不变, 干涉主极大间距变大, 造成单缝轮廓线中央明纹内的干涉主极大数减少; a 不变、 d 增大时, 干涉主极大间距变小, 单缝轮廓线中央明纹内的干涉主极大数增加 .

d 不变、 a 减小时, 干涉主极大间距不变, 单缝衍射轮廓线变宽变平坦, 其中央明纹内包含的干涉主极大数增多; d 不变、 a 增大时, 单缝衍射轮廓线变窄变高, 其中央明纹内包含的干涉主极大数减少 .

(3) 根据光栅方程 $\sin \theta = k \frac{\lambda}{d}$, 白光 (400 ~ 760 nm) 入射时, 各种波长的零级条纹重叠在一起, 在 $\theta = 0$ 的方向上形成中央白色明纹 . 其他级上不同波长的条纹位置错开形成彩带 (称光谱), 各级谱线靠近中央明纹一侧为短波长的紫光, 远离中央明纹一侧为长波长的红光 . 级次越高, 彩带越宽, 不同级的谱线会发生重叠 .

可以计算, 对于白光 ($\lambda_V = 400 \text{ nm}$, $\lambda_R = 760 \text{ nm}$)

因为 $\sin \theta_{1R} = \frac{\lambda_R}{d} < \sin \theta_{2V} = 2 \frac{\lambda_V}{d}$

所以第 1 级谱线无重叠 .

因为 $\sin \theta_{2R} = 2 \frac{\lambda_R}{d} > \sin \theta_{3V} = 3 \frac{\lambda_V}{d}$

所以第 2 级谱线与第 3 级谱线发生重叠, 因此只能观察到 1 级不发生重叠的完整光谱 .

[问题 14-5] 由三个相同的狭缝组成衍射器件, 当光垂直入射时, 把第 1、第 3 两条缝遮住, 单色光通过第 2 条缝, 在屏幕上得到衍射图样的光强分布如图 14-5 中虚线所示, 讨论:

(1) 现把第 2、第 3 条缝遮住, 光线只垂直通过第 1 条缝, 试问中央明纹位置是否改变?

(2) 如果衍射图样光强分布如图 14-5 中实线所示, 试问由图可判断, 哪几条缝是打开的?

(3) 由衍射图样中, 可得到透光部分与不透光部分宽度之比为多大?



图 14-5

[解答] (1) 当把第 2、第 3 条缝遮住而只开第 1 条缝时,衍射图样所形成的中央明纹位置不变,其他各级明纹的位置也不变.因为平行光经透镜会聚后成像在焦点上.

(2) 由实线衍射图样可知,第 1、2、3 条缝全打开,因为相邻两个主极大之间有两个极小.

(3) 由图中可知,第 2、第 4 级缺主极大级

所以

$$\frac{a+b}{a} = \frac{k}{k} = 2$$

即

$$a + b = 2a$$

由此得到

$$a : b = 1 : 1$$

14.3 解题方法与典型例题

1. 单缝衍射明暗条纹的条件为

$$a \sin \theta = \pm k \lambda \quad \text{暗} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$a \sin \theta = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad \text{明} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

(1) 注意与干涉明暗条件的区别.

(2) 上述两式中 k 都从 1 开始,不能取零.

(3) 条纹的级次和狭缝处波面所分的半波带数的对应关系.第 k 级暗纹对应的单缝处波面分为 $2k$ 个半波带,第 k 级明纹对应的单缝处波面分为 $(2k + 1)$ 个半波带.

2. 光栅衍射明纹的公式为

$$(a + b) \sin \theta = \pm k \lambda \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

此光栅方程适用于单色平行光的垂直入射,如果是斜入射,方程应修改为

$$(a + b)(\sin \theta \pm \sin \theta_0) = \pm k \lambda \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

其中 θ 为入射光与光栅法线的夹角,当入射光线与衍射光线在光栅法线同侧时,取“+”号,异侧时取“-”号.

3. 缺级条件

$$k = \frac{a+b}{a} k' \quad k' = 1, 2, \dots$$

式中, k 为光栅衍射的主极大级次, k' 为单缝衍射的暗纹级次.

在求屏上实际呈现的干涉主极大数时,应剔除缺级的级次,同时考虑衍射角为 $\pm 90^\circ$ 处的主极大实际不存在.

[例 14-1] 已知一单缝宽度 $a = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}$, 透镜焦距 $f = 0.5 \text{ m}$, 用 $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$ 和 $\lambda_2 = 760 \text{ nm}$ 的两平行单色光照在单缝上. 求这两种单色光的第 1 级明纹中心之间的距离. 若用每厘米 10 000 条刻痕的光栅来替代这一单缝, 则这两单色光的第 1 级明纹之间的距离又为多少?

[解] 由单缝衍射明纹公式

$$a \sin \theta = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

取 $k = 1$, 可得

$$a \sin \theta_1 = \frac{3}{2} \lambda_1 \quad a \sin \theta_2 = \frac{3}{2} \lambda_2$$

由于 θ_1 、 θ_2 很小, 则有

$$\sin \theta_1 \approx \tan \theta_1 = \frac{x_1}{f} \quad \sin \theta_2 \approx \tan \theta_2 = \frac{x_2}{f}$$

所以

$$x_1 = f \sin \theta_1 = f \cdot \frac{3}{2a} \lambda_1$$

$$x_2 = f \sin \theta_2 = f \cdot \frac{3}{2a} \lambda_2$$

设两个第 1 级明纹中心的距离为 x

$$\begin{aligned} x &= x_2 - x_1 = f \cdot \frac{3}{2a} (\lambda_2 - \lambda_1) \\ &= 0.5 \times \frac{3}{2 \times 10^{-4}} \times (760 - 400) \times 10^{-9} \\ &= 2.7 \times 10^{-3} \text{ m} = 2.7 \text{ mm} \end{aligned}$$

由光栅明纹公式

$$(a + b) \sin \theta = \pm k \lambda \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

取 $k = 1$, 可得第 1 级明纹的衍射角为

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{a+b}$$

由题意

$$a+b = \frac{1.0 \times 10^{-2}}{10000} = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}$$

把 $(a+b)$ 与各 λ 的值分别代入明纹公式可知 θ 不是很小, 即

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda_1}{a+b} = \frac{400 \times 10^{-9}}{1.0 \times 10^{-6}} = 0.40 \quad \theta_1 = 23.58^\circ$$

$$\sin \theta_2 = \frac{\lambda_2}{a+b} = \frac{760 \times 10^{-9}}{1.0 \times 10^{-6}} = 0.76 \quad \theta_2 = 49.46^\circ$$

此时

$$\sin \theta_1 \quad \tan \theta_1 = \frac{x_1}{f} \quad \sin \theta_2 \quad \tan \theta_2 = \frac{x_2}{f}$$

所以

$$x_1 = f \tan \theta_1 = f \tan 23.58^\circ$$

$$x_2 = f \tan \theta_2 = f \tan 49.46^\circ$$

故改用光栅时, 两个第 1 级明纹之间的距离为

$$\begin{aligned} x &= x_2 - x_1 = 0.5 \tan 49.46^\circ - 0.5 \tan 23.58^\circ \\ &= 0.58 - 0.22 = 0.36 \text{ m} \end{aligned}$$

可见光栅衍射中两明纹之间距离比单缝衍射的大得多, $(a+b)$ 愈小, 两者差异愈大.

[例 14-2] 用波长 $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$ 和 $\lambda_2 = 700 \text{ nm}$ 的混合光垂直照射单缝, 在衍射图样中, λ_1 的第 k_1 级明纹中心位置恰与 λ_2 的第 k_2 级暗纹中心位置重合, 求 k_1 和 k_2 ; 试问 λ_1 的暗纹中心位置能否与 λ_2 的暗纹中心位置重合?

[解] 当 λ_1 的明纹与 λ_2 的暗纹位置重合时, 衍射角方向上应有

$$a \sin \theta = (2k_1 + 1) \frac{\lambda_1}{2}$$

$$a \sin \theta = k_2 \lambda_2$$

即

$$(2k_1 + 1) \frac{\lambda_1}{2} = k_2 \lambda_2$$

可得

$$\frac{2k_1 + 1}{2k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{7}{4}$$

$k_1 = 3, k_2 = 2$ 时, 上式成立 当 $k_1 = 10, k_2 = 6, \dots$ 等值时, 上式虽也成立, 但高级次的明纹光强已很弱.

若 λ_1 的第 k_1 级暗纹与 λ_2 的第 k_2 级暗纹位置重合, 应用

$$a \sin \theta = k_1 \lambda_1$$

$$a \sin \theta = k_2 \lambda_2$$

可得

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{7}{4}$$

即 λ_1 的第 7 级暗纹与 λ_2 的第 4 级暗纹可重合.

[例 14-3] 波长 $\lambda = 490 \text{ nm}$ 的单色平行光垂直投射到平面光栅上, 已知光栅常数 $a + b = 3.0 \times 10^{-4} \text{ cm}$, 缝宽 $a = 1.0 \times 10^{-4} \text{ cm}$. 试求:

- (1) 单缝衍射中央明纹范围内有几个光栅衍射主极大;
- (2) 屏上总共可看到多少条谱线;
- (3) 若将垂直入射改变为入射角 $\theta = 30^\circ$ 的斜入射, 则光栅衍射光谱的最高级次和可看到的光谱线总数.

[解] (1) 单缝衍射的中央明纹范围就是 $k = \pm 1$ 的两条暗纹之间的区域. 单缝衍射的暗纹公式为

$$a \sin \theta = k \lambda$$

光栅衍射的明纹公式为

$$(a + b) \sin \theta = k \lambda$$

则在单缝衍射第 1 级 ($k = 1$) 极小处, 光栅衍射主极大的级次

$$k = \frac{a + b}{a} = \frac{3.0 \times 10^{-4}}{1.0 \times 10^{-4}} = 3$$

即光栅衍射第 ± 3 级主极大缺级, 所以在单缝衍射中央明纹宽度内, 光栅衍射主极大的级次是 $0, \pm 1, \pm 2$, 共有 5 个主极大.

(2) 由光栅方程

$$(a + b) \sin \theta = k \lambda$$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\sin \theta = 1$, k 为最大值, 即

$$k_{\max} = \frac{a + b}{\lambda} = \frac{3.0 \times 10^{-4}}{490 \times 10^{-9}} = 6.12$$

考虑到第 ± 3 、 ± 6 级主极大缺级, 所以屏上实际可看到的级次为 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5$, 共 9 条谱线.

(3) 当平行光以 $\theta = 30^\circ$ 斜入射时, 光栅方程为

$$(a + b)(\sin \theta \pm \sin \theta_0) = k \lambda$$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\sin \theta = 1$ 时可得最高级次.

$$\text{一侧} \quad k = \frac{(a + b)(\sin \theta + \sin \theta_0)}{\lambda} = \frac{3.0 \times 10^{-4} \times \left[\frac{1}{2} + 1 \right]}{490 \times 10^{-9}} = 9.18$$

$$\text{另一侧} \quad k = \frac{(a + b)(\sin \theta - \sin \theta_0)}{\lambda} = \frac{3.0 \times 10^{-4} \times \left[\frac{1}{2} - 1 \right]}{490 \times 10^{-9}} = -3.06$$

可见, 两侧主极大的最高级次不再对称, 考虑到缺级情况, 屏上实际看到的谱线级次为 $k = -2, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8$, 共 9 条, 与垂直入射时一样多, 但谱线发生了平移.

[例 14-4] 一台光谱仪备有同样大小的三块 (1 200 条/mm, 600 条/mm, 90 条/mm) 光栅, 如果用它测定 700~1 000 nm 波段的红外线波长, 应选用哪块光栅? 为什么?

[解] 先分别求出三块光栅的光栅常数

$$\text{第一块 } 1\,200 \text{ 条/mm } (a+b)_1 = \frac{1}{1\,200} = 8.3 \times 10^{-4} \text{ mm}$$

$$\text{第二块 } 600 \text{ 条/mm } (a+b)_2 = \frac{1}{600} = 1.7 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$\text{第三块 } 90 \text{ 条/mm } (a+b)_3 = \frac{1}{90} = 1.1 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

用光栅公式 $(a+b)\sin \theta = k\lambda$, 可得第 1 级衍射条纹对应的衍射角

$$\theta = \arcsin \frac{\lambda}{a+b}$$

$$\text{对第 1 块光栅 } a+b = 8.3 \times 10^{-4} \text{ mm}$$

$$\text{波长 } \lambda_1 = 700 \text{ nm 的谱线 } \theta_1 = \arcsin \frac{700 \times 10^{-6}}{8.3 \times 10^{-4}} = 57^\circ$$

$$\text{波长 } \lambda_2 = 1\,000 \text{ nm 的谱线 } \theta_2 = \arcsin \frac{1\,000 \times 10^{-6}}{8.3 \times 10^{-4}} = 90^\circ$$

不能完整地看到这种波长光的第 1 级谱线.

$$\text{对于第二块的光栅 } a+b = 1.7 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$\text{波长 } \lambda_1 = 700 \text{ nm 的谱线 } \theta_1 = \arcsin \frac{700 \times 10^{-6}}{1.7 \times 10^{-3}} = 24^\circ$$

$$\text{波长 } \lambda_2 = 1\,000 \text{ nm 的谱线 } \theta_2 = \arcsin \frac{1\,000 \times 10^{-6}}{1.7 \times 10^{-3}} = 36^\circ$$

$$\text{对第三块光栅 } a+b = 1.1 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

$$\text{波长 } \lambda_1 = 700 \text{ nm 的谱线 } \theta_1 = \arcsin \frac{700 \times 10^{-6}}{1.1 \times 10^{-2}} = 3.7^\circ$$

$$\text{波长 } \lambda_2 = 1\,000 \text{ nm 的谱线 } \theta_2 = \arcsin \frac{1\,000 \times 10^{-6}}{1.1 \times 10^{-2}} = 5.2^\circ$$

从上述结果可看出,用第一块光栅不能拍摄波长为 700~1 000 nm 的完整光谱.用第三块光栅把波长从 700~1 000 nm 范围谱线挤在衍射角为 $3.7^\circ \sim 5.2^\circ$ 的范围内,这样不易区分不同波长的谱线.选择第二块光栅,既能拍摄到波长在 700~1 000 nm 范围内的全部谱线,而且各谱线能区分开来.所以选第二块光栅对测量最有利.

通过本题计算可知,用光栅测定谱线的波长时,并不是光栅常数越小越好,要按实际所测波长范围选择适当的光栅进行测量.

14.4 自测练习与能力训练

14.4.1 选择题

1. 根据惠更斯-菲涅耳原理,若已知光在某时刻的波阵面为 S ,则 S 的前方某点 P 的光强决定于波阵面 S 上所有面积元发出的子波各自传到 P 点的[].

- (A) 振动振幅之和 (B) 光强之和
(C) 振动振幅和的平方 (D) 振动的相干叠加

2. 波长为 λ 的单色平行光, 垂直照射到缝宽为 a 的单缝上, 若衍射角 $\theta = 30^\circ$ 时, 对应的衍射图样为第 1 级极小, 则缝宽 a 为 [] .

- (A) $\frac{\lambda}{2}$ (B) λ (C) 2λ (D) 3λ

3. 在单缝夫琅禾费衍射实验中, 波长为 λ 的平行光垂直入射宽度 $a = 5\lambda$ 的单缝上, 对应于衍射角 30° 的方向, 单缝处波面可分成的半波带数目为 [] .

- (A) 3 个 (B) 4 个 (C) 5 个 (D) 8 个

4. 在单缝夫琅禾费衍射实验中, 将单缝沿垂直于光的入射方向稍微移动, 则 [] .

- (A) 衍射条纹移动, 条纹宽度不变 (B) 衍射条纹移动, 条纹宽度变化
(C) 衍射条纹不动, 条纹宽度不变 (D) 衍射条纹不动, 条纹宽度变化

5. 现有一固定宽度的单缝, 为了得到较高级次的衍射条纹, 应采取 [] .

- (A) 垂直入射, 增大波长 (B) 垂直入射, 减小波长
(C) 斜入射, 增大波长 (D) 斜入射, 减小波长

6. 用光栅观察衍射条纹, 如果光栅平面与屏幕平行, 入射到光栅的单色平行光先与光栅平面垂直, 然后变化到与光栅平面不垂直, 则 [] .

- (A) 在屏幕上观察到衍射条纹变密
(B) 在屏幕上观察到衍射条纹变疏
(C) 在屏幕上观察到衍射条纹间距不变
(D) 在屏幕上观察不到衍射条纹

7. 用波长 $400 \sim 800 \text{ nm}$ 的白光照射光栅, 在它的衍射光谱中第 2 级和第 3 级发生重叠, 第 3 级光谱被重叠部分的光谱范围是 [] .

- (A) $533.3 \sim 800 \text{ nm}$ (B) $400 \sim 533.3 \text{ nm}$
(C) $600 \sim 800 \text{ nm}$ (D) $533.3 \sim 600 \text{ nm}$

8. 已知光栅常数 $a + b = 6.0 \times 10^{-4} \text{ cm}$, 透光缝 $a = 1.5 \times 10^{-4} \text{ cm}$, 以波长为 600 nm 的单色光垂直照射到光栅上, 其明纹的特点是 [] .

- (A) 不缺级, 最大级次是 10 (B) 缺 $2k$ 级, 最大级次是 9
(C) 缺 $3k$ 级, 最大级次是 10 (D) 缺 $4k$ 级, 最大级次是 9

9. 一衍射光栅的狭缝宽度为 a , 缝间不透光部分宽度为 b , 用波长为 600 nm 的光垂直照射时, 在某一衍射角 θ 处出现第 2 级主极大. 若换用 400 nm 的光垂直照射, 在上述衍射角 θ 处出现第一次缺级, 则 b 为 a 的 [] .

- (A) 1 倍 (B) 2 倍 (C) 3 倍 (D) 4 倍

10. 关于光学仪器的分辨率, 下列说法中正确的是[] .

- (A) 与仪器的孔径成正比, 而与光的波长成反比
- (B) 与仪器的孔径成反比, 而与光的波长成正比
- (C) 与仪器的孔径和光的波长都成正比
- (D) 与仪器的孔径和光的波长都成反比

14.4.2 填充题

1. 单缝衍射装置如图 14-6 所示, AC 为衍射光波面, P 点处为第二级暗纹, BC 的长度为波长的_____倍, 这时单缝处的波面可分为_____个半波带. 若 P 点处为第三级明纹, 则 BC 的长度为波长的_____倍.

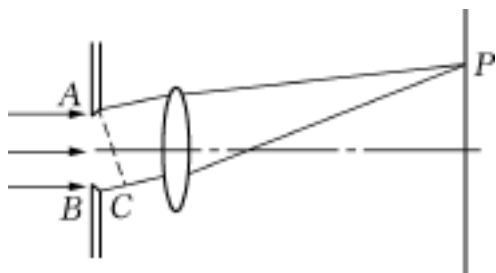


图 14-6

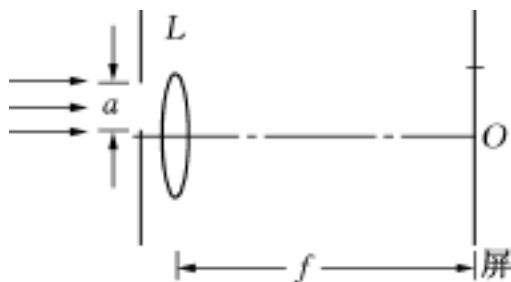


图 14-7

2. 单缝衍射装置如图 14-7 所示, 已知缝宽 $a = 0.3 \text{ mm}$, 透镜到屏的距离恰为透镜的焦距 $f = 1.0 \text{ m}$, 垂直入射的单色平行光的波长 $\lambda = 600 \text{ nm}$. 则屏上最靠近 O 点的上、下两明纹的位置 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, 中央明纹的宽度为_____.

3. 平行单色光垂直入射在缝宽 $a = 0.15 \text{ mm}$ 的单缝上, 缝后有焦距 $f = 40 \text{ cm}$ 的凸透镜, 在其焦平面上放置观察屏幕, 现测得屏幕上中央明纹两侧的第 3 级暗纹之间的距离为 8 mm , 则入射光的波长 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 在单缝夫琅禾费衍射实验中, 设第 1 级暗纹的衍射角很小, 若钠黄光 $\lambda_1 = 589 \text{ nm}$ 的中央明纹宽度为 4.0 mm , 则 $\lambda_2 = 442 \text{ nm}$ 的蓝紫色光的中央明纹宽度为_____.

5. 当入射的单色光波长一定时, 若光栅上每单位长度的狭缝愈多, 则光栅常数就愈_____, 相邻明纹间距愈_____, 明纹亮度愈_____.

6. 充气放电管发出的光束垂直射入某一光栅, 第 3 级光谱中波长为_____的谱线将与波长为 $\lambda_1 = 670 \text{ nm}$ 的第 2 级光谱线重叠.

7. 用某一光栅观察某单色光的光谱, 当光垂直入射时, 第 2 级谱线的衍射角 $\theta = 30^\circ$, 所以用这种光栅观察此单色光的光谱最多只能看到第_____级. 如果改变入射光的入射角 θ , 当 $\theta = 30^\circ$ 时, 那么观察此单色光的光谱, 最多可

看到第_____级 .

8 . 波长为 600 nm 的单色光垂直入射到光栅上 , 在衍射角为 30 ° 处第一次缺级 , 在衍射角 - 30 ° 到 30 ° 的范围内共有 9 个明纹 , 则此光栅的光栅常数 $a + b =$ _____ , 第 1 级明纹的衍射角 $=$ _____ .

9 . 如图 14-8 所示 , 1、2、3、4 为四条等宽等间距的狭缝 , 缝宽为 a , 相邻缝间距为 $2a$, 其中缝 1 总是打开的 , 缝 2、3、4 可打开可关闭 . 设波长为 λ 的单色平行光垂直入射到狭缝上 , 现画出了三种夫琅禾费衍射的相对光强的分布曲线 , 试分别填出它们各对应的是哪几条缝打开时的衍射 , 并指出图中 A、B 处对应的 $\sin \theta$ 的值 .

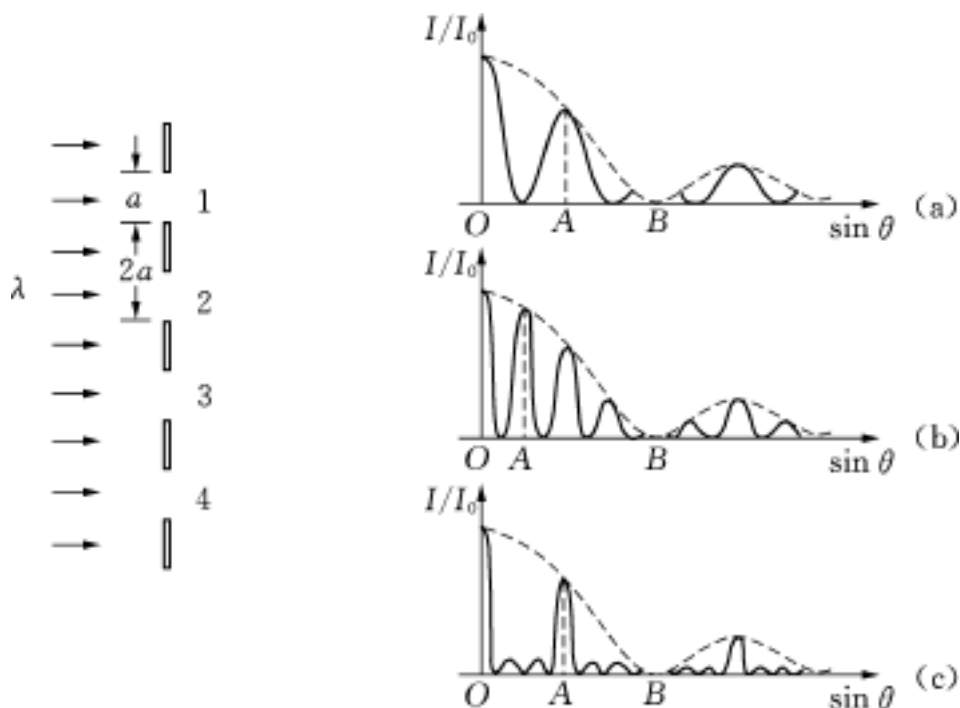


图 14-8

图(a)对应于缝_____的衍射 , A 处 $\sin =$ _____ , B 处 $\sin =$ _____ .
图(b)对应于缝_____的衍射 , A 处 $\sin =$ _____ , B 处 $\sin =$ _____ .
图(c)对应于缝_____的衍射 , A 处 $\sin =$ _____ , B 处 $\sin =$ _____ .

10 . 已知天空中两颗星相对于一望远镜的角距离为 4.84×10^{-6} rad , 它们发出的光波波长按 550 nm 计算 , 要分辨出这两颗星 , 望远镜的口径至少要_____ .

14.4.3 计算题

1 . 单缝衍射实验中 , 波长为 λ 的单色平行光垂直照射到宽为 a 的单缝上 , 在缝后放一焦距为 1 m 的凸透镜 , 透镜的焦平面上放一屏幕 , 试问 :

- (1) 屏幕上最多可呈现第几级明纹 ?
- (2) 若缝宽度为 100 μ m 或 0.1 mm , 其结果又如何 ?

2. 在夫琅禾费单缝衍射中, 已知缝宽 $a = 0.05 \text{ mm}$, 透镜焦距 $f = 0.8 \text{ m}$. 现以白光垂直入射, 在光屏上形成彩色衍射条纹, 试问在屏上离中央明纹中心距离 $x = 1.6 \text{ cm}$ 处的 P 点, 哪些波长的光完全相消?

3. 用一束具有两种波长的平行光垂直入射到光栅上, $\lambda_1 = 600 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 400 \text{ nm}$. 观测到在距中央明纹 3 cm 处, λ_1 的第 k 级主极大和 λ_2 的第 $k+1$ 级主极大相重合. 已知会聚透镜的焦距 $f = 50 \text{ cm}$, 求:

(1) $k = ?$

(2) 光栅常数 $a + b = ?$

4. 用波长为 760 nm 的单色平行光垂直照射在光栅上, 测得第 5 级明纹的衍射角为 30° , 若用该单色平行光垂直照射在缝宽与上述光栅的透光缝相等的单缝上, 测得第 2 级明纹的衍射角亦为 30° . 然后, 用另一单色光垂直照射在上述光栅上, 若测得第 11 级明纹的衍射角为 45° , 试求:

(1) 光栅常数 $a + b$ 及每一透光缝的宽度 a ;

(2) 另一单色光的波长 ;

(3) 用另一单色光垂直照射该光栅时, 屏上出现明纹的总数 .

5. 利用单缝衍射的原理可以测量位移以及与位移联系的物理量, 如热膨胀、形变等, 把需要测量位移的对象和一标准直边相连, 同另一固定的标准直边形成一单缝, 这个单缝宽度变化能反映位移的大小, 如果中央明纹两侧的正、负第 k 级暗(明)纹之间距的变化为 Δx_k , 证明:

$$\Delta x_k = - \frac{2k}{a^2} f \Delta a$$

式中 f 为透镜的焦距, Δa 为单缝宽度的变化 ($\Delta a \ll a$). 若取 $f = 50 \text{ cm}$, $\lambda = 632.8 \text{ nm}$, $a = 0.2 \text{ mm}$, 观察正负第 3 级明纹, 其结果如何?

6. 如图 14-9 所示, 超声波在液体中形成驻波时产生周期性的疏密分布, 可等效地将其看作一个平面光栅. (1) 试用超声波的频率 ν , 超声波在液体中的传播速度 v 来表示光栅常数 $a + b$;

(2) 当入射光的波长为 λ , 在焦距为 f 的透镜 L_2 焦平面处的屏上, 测得相邻两级衍射条纹间的距离为 x , 试证明: 超声波在液体中的传播速度为

$$v = \frac{2\lambda f}{x}$$

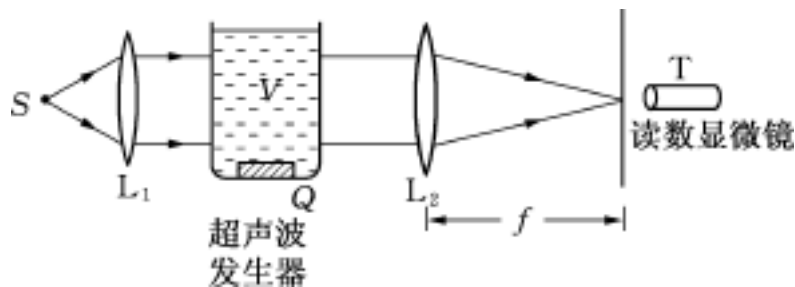


图 14-9

习题选解

[选择题 5] 由单缝衍射的暗纹条件 $a \sin \theta = k \lambda$ 可知, 能看到暗纹的最大级次为 $k = \frac{a}{\lambda}$, 当 a 不变时, 减少波长可看到较高级次的条纹. 斜入射时, 由光程差为零的子波构成的中央明纹位置上移到 O 处, 如图 14-10 所示, 条纹结构不变, 整体发生平移, 因此在其下方可见到更高级次的衍射条纹. 由上可知, 本题结论(D)是正确的.

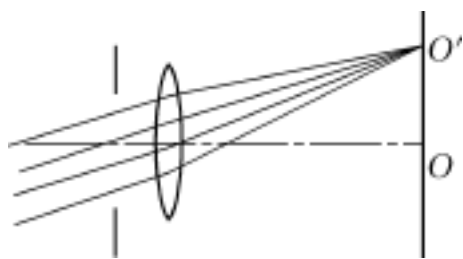


图 14-10

[选择题 7] 先找出第 2 级光栅光谱的衍射角范围. 对于 $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$ 的第 2 级谱线, 有关系式

$$(a + b) \sin \theta_1 = 2 \lambda_1 = 800 \text{ nm}$$

对于 $\lambda_2 = 800 \text{ nm}$ 的第 2 级谱线, 有关系式

$$(a + b) \sin \theta_2 = 2 \lambda_2 = 1600 \text{ nm}$$

按题意在衍射角 θ_1 到 θ_2 的范围内与第 3 级光谱重叠, 则在衍射角 θ_1 到 θ_2 范围内, 对应于 θ_1 角的第 3 级光谱的波长 λ_3 由

$$(a + b) \sin \theta_1 = 3 \lambda_3$$

确定, 则 $\lambda_3 = \frac{(a + b) \sin \theta_1}{3} = \frac{800}{3} = 266.7 \text{ nm}$

对应于 θ_2 角的第 3 级光谱的波长 λ_4 由

$$(a + b) \sin \theta_2 = 3 \lambda_4$$

确定, 则 $\lambda_4 = \frac{(a + b) \sin \theta_2}{3} = \frac{1600}{3} = 533.3 \text{ nm}$

因此, 在衍射角 θ_1 到 θ_2 的范围内第 3 级光谱的波长为 266.7 nm 到 533.3 nm . 本题中白光最小波长为 400 nm , 所以在白光中重叠部分的光谱范围为 $400 \text{ nm} \sim 533.3 \text{ nm}$, 正确答案选(B).

[填充题 8] 因为衍射角 $\theta = 30^\circ$ 处为第一次缺级, 由此可得 $\theta = 30^\circ$ 处是单缝衍射的第 1 级暗纹的位置, 即

$$a \sin 30^\circ =$$

每条缝的宽度

$$\begin{aligned} a &= 2 \lambda = 2 \times 600 \\ &= 1200 \text{ nm} \end{aligned}$$

在 $\theta = -30^\circ$ 到 $\theta = 30^\circ$ 的范围内的 9 个条纹均在单缝衍射中央明纹的包络线内, 它们的级次分别为 $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, 所以第 1 次缺级为第 5 级, 应有

$$a + b = 5a = 6000 \text{ nm}$$

设第一明纹的衍射角为 θ , 由光栅方程

$$(a + b)\sin\theta =$$

所以

$$\sin\theta = \frac{1}{10}$$

解得衍射角

$$\theta = \arcsin^{-1}\left[\frac{1}{10}\right] = 5.7^\circ$$

[填充题 9] 由于两相邻主极大之间有 $N - 1$ 个极小和 $N - 2$ 个次极大, 而从图 14-8 中可看出, 图(a)和图(b)中相邻两主极大之间仅有 1 个极小, 而无次极大, 故 $N = 2$, 所以都是双缝衍射. 图(c)中, 相邻两主极大之间有 3 个极小和 2 个次极大, 故 $N = 4$, 所以是四缝衍射.

在图(a)中, 第一次缺级发生在第 2 级, 故满足

$$\frac{a + b}{a} = 2$$

即

$$a + b = 2a \text{ 或 } b = a$$

由于缝 1 总是打开的, 故图(a)对应于 1、2 两缝的衍射.

在图(b)中, 第一次缺级发生在第 4 级, 故满足

$$\frac{a + b}{a} = 4$$

即

$$a + b = 4a \text{ 或 } b = 3a$$

所以图(b)对应于 1、3 两缝的衍射.

在图(c)中, 第一次缺级发生在第 2 级, 故满足

$$\frac{a + b}{a} = 2$$

即

$$a + b = 2a \text{ 或 } b = a$$

由于图(c)中所示为四缝衍射, 所以是 1, 2, 3, 4 缝同时打开时所对应的衍射.

在图(a)、(b)、(c)中, B 处均为单缝衍射的第 1 级暗纹, 且缝宽相同, 由

$$a \sin \theta = k \quad (k = 1)$$

可得三个图中 B 处 $\sin \theta = \frac{1}{a}$. 图中 A 处均为第 1 级主极大位置, 由

$$(a + b) \sin \theta =$$

可算出相应的 $\sin \theta$ 值.

图(a)中 A 处 $\sin \theta = \frac{1}{a + b} = \frac{1}{2a}$

图(b)中 A 处 $\sin \theta = \frac{1}{a + b} = \frac{1}{4a}$

图(c)中 A 处 $\sin \theta = \frac{1}{a + b} = \frac{1}{2a}$

[计算题 5]证: 单缝衍射暗纹条件为

$$a \sin \theta = k$$

由于 θ 很小, $\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{f}$, 则第 k 级暗纹到中央明纹中心的距离

$$x = f \tan \theta = f \frac{k}{a}$$

中央明纹两侧的正负第 k 级暗纹之间的距离

$$x_k = 2x = \frac{2fk}{a}$$

当缝宽变化 da 时, 屏幕上两条第 k 级暗纹之间的距离变化为

$$dx_k = - \frac{2fk}{a^2} da$$

问题得证.

同理, 由明纹条件可得

$$dx_k = - \frac{(2k+1)f}{a^2} da$$

将 $k = 3$, $f = 50 \text{ cm}$, $\lambda = 632.8 \text{ nm}$, $a = 0.2 \text{ mm}$ 代入上式, 得

$$dx_k = - 55.4 da$$

[计算题 6]证: (1) 把超声波形成的驻波看作平面光栅时, 相邻波腹 (或波节) 间的距离即为光栅常数. 设超声波在液体中的波长为 λ_s , 则有 $\lambda_s = \frac{v}{\nu}$, 所以

光栅常数为

$$a + b = \frac{s}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

(2) 由光栅衍射主极大条件

$$(a + b) \sin \theta = k \lambda$$

假定 θ 很小, 则 $\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{f}$, 可得第 k 级主极大在屏幕上的位置

$$x_k = f \sin \theta_k = \frac{k \lambda f}{a + b}$$

第 $(k + 1)$ 级主极大在屏幕上的位置

$$x_{k+1} = f \sin \theta_{k+1} = \frac{(k + 1) \lambda f}{a + b}$$

相邻两级主极大之间的距离

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda f}{a + b}$$

将光栅常数代入, 得

$$\Delta x = \frac{2 \lambda f}{\lambda}$$

所以

$$\Delta x = \frac{2 f}{\lambda}$$

15 .1 基本要求与复习框图

1 .基本要求

- (1) 理解自然光、完全偏振光、部分偏振光的概念 .
- (2) 理解通过反射、折射和晶体的双折射产生偏振光的原理和方法 ,理解如何检验偏振光 .
- (3) 掌握马吕斯定律和布儒斯特定律 ,并能作相应的计算 .
- (4) 了解晶体的双折射 ,了解 o 光和 e 光的性质和区别 .

2 .复习框图

光的干涉和衍射证实了光的波动性,而光的偏振现象进一步证明了光是横波 本章的中心内容是偏振光的产生和检验,应用光的反射、折射和晶体的双折

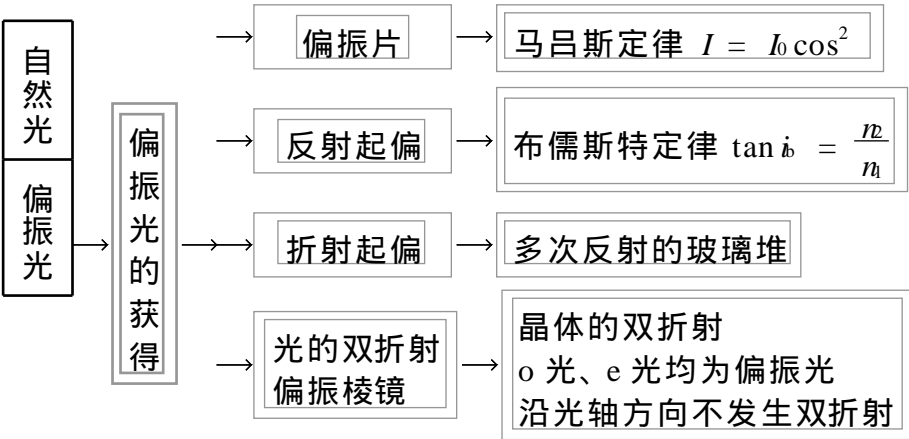


图 15 -1

射现象产生偏振光的原理和方法 教材从什么是自然光和偏振光说起,引出了起偏和检偏的概念,然后介绍了几种获得偏振光的方法,要求掌握偏振光通过检偏器(偏振片)后强度变化的规律,即马吕斯定律;利用反射产生偏振光的条件,即布儒斯特定律;在晶体双折射中得到 o 光和 e 光均为偏振光,对晶体中光轴的概念与 o、e 光的关系作进一步的理解 本章主要内容和各部分之间的关系,用图 15-1 所示的方框图表示.

15.2 阅读指导与问题讨论

1. 自然光与偏振光

光波是横波,光矢量的振动方向总是和光的传播方向垂直.在该平面内,光矢量的振幅沿各个方向都相同,对光的传播方向形成轴对称分布的称为自然光.若光矢量只限定在某一固定方向振动,则称为线偏振光.光矢量的振动方向与光的传播方向构成的平面称为振动面,由于线偏振光的光矢量保持在固定的振动面内,所以线偏振光又称为平面偏振光,简称为偏振光.介于自然光和偏振光之间的称为部分偏振光,在这种光中含有自然光和偏振光两种成分.一般,部分偏振光可看成是自然光和线偏振光的混合.

2. 起偏和检偏

一般光源发出的光都是自然光,通过某种装置使自然光成为偏振光,叫做起偏,该装置叫做起偏器.起偏器也可用来检查入射的光是否为偏振光,叫做检偏,因此起偏器也可作为检偏器.

偏振片、尼科耳棱镜等都可作为起偏器或检偏器.

[问题 15-1] 如何用实验方法区别自然光、线偏振光和部分偏振光?

[解答] 让待区分的光垂直通过一偏振片,以入射光线为轴转动偏振片,观察透射光的强度.有消光现象者为线偏振光;光强不变者为自然光;光强变化,但无消光现象者为部分偏振光.

3. 寻常光和非常光、光轴

一束光进入各向异性的晶体后分解为两束光的现象叫做双折射.其中的一束遵守折射定律,称为寻常光或 o 光;另一束不遵守折射定律,称为非常光或 e 光.寻常光在晶体内各方向上传播速度相同,而非常光的传播速度随传播方向的不同而变化.

在双折射晶体存在一个特殊的方向,光沿这一方向传播时,不发生双折射,

寻常光和非常光在此方向上传播速度相同 这个特殊的方向称为晶体的光轴 .应注意,光轴并不是指某一条直线,如果一条直线沿光轴方向,那么所有与此直线平行的直线都是光轴 .

4 . 获得偏振光的方法

(1) 利用晶体的选择性吸收 .某些晶体具有二向色性(吸收某个方向的光振动,只让垂直这个方向的光振动通过),据该性质制成的偏振器件,称偏振片 .它只允许某一个方向的光振动通过,这个方向叫做“ 偏振化方向 ”.

(2) 利用介质的反射和折射 .一束自然光射到两种各向同性介质的分界面上,如入射角 i_b 满足 $\tan i_b = \frac{n_2}{n_1}$ 时,反射光变为完全偏振光,其振动方向与入射面垂直 折射光为部分偏振光 .如自然光连续几次通过许多平行的玻璃片,则折射光也成为完全偏振光,其振动方向在入射面内 .

(3) 利用晶体的双折射 .当光线射入各向异性的晶体时,会产生两束折射光,即寻常光和非常光,这两束光都是完全偏振光 .如想办法把这两束光去掉其中的一束光或使两束光分得很开,就可得到完全偏振光 .如尼科耳棱镜是把 o 光吸收掉,而让 e 光通过棱镜;渥拉斯顿棱镜则使 o 光和 e 光分开 .

[问题 15-2] 若要使线偏振光的光振动方向改变 90° ,最少需要几个偏振片? 这些偏振片怎样放置才能使透射光的强度最大?

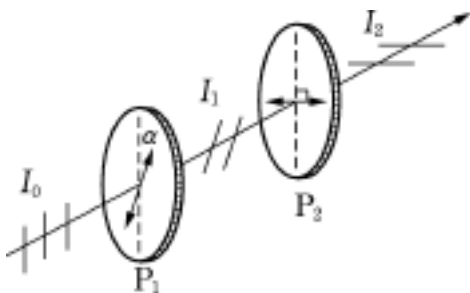


图 15-2

[解答] 设线偏振光光振动沿竖直方向,强度为 I_0 ,令其经过两个偏振片 P_1 、 P_2 后,振动方向转过 90° ,则第二个偏振片 P_2 的偏振化方向必须为水平方向 .由图 15-2 所示,第一个偏振片 P_1 的偏振化方向与入射偏振光光振动方向成 α 角,那么与第二个成 $(90^\circ - \alpha)$ 角 则有

$$I_1 = I_0 \cos^2 \alpha$$

$$I_2 = I_0 \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 (90^\circ - \alpha) = \frac{I_0}{4} \sin^2 (2\alpha)$$

当 $\alpha = 45^\circ$ 时, $I_2 = \frac{I_0}{4}$, 即透射光强最大 .所以要使线偏振光的光振动方向改变 90° ,至少要两个偏振片,这两个偏振片的偏振化方向夹 45° 角,其中之一的偏振化方向与原线偏振光的光振动方向夹 45° 角,这时透射光强最大 .

[问题 15-3] 如图 15-3 所示,一束线偏振光沿 aO 从空气射到玻璃 ($n_2 > n_1$), i_b 为空气到玻璃的布儒斯特角, i_1 为折射角,试讨论下列问题:

- (1) 入射光的振动方向平行于入射面,有没有反射光?
- (2) 如该光束沿 bO 入射(即从玻璃射向空气)有没有反射光?
- (3) 如光仍沿 aO 入射,但振动方向与入射面垂直,有没有折射光?

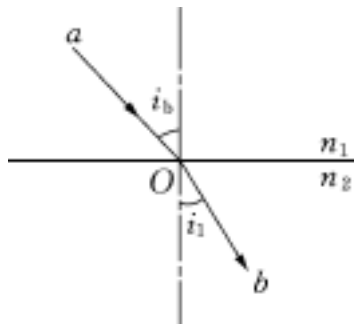


图 15-3

[解] (1) 无反射光 因为当入射角 $i = i_b$ 时, 偏振光的振动方向平行于入射面, 反射率为零。
(2) 也没有反射光 因为

$$\tan i_t = \cot i_b = \frac{1}{\tan i_b} = \frac{1}{\frac{n_2}{n_1}} = \frac{n_1}{n_2}$$

所以光束沿 bo 入射到玻璃与空气的交界面时, 入射角 i_t 也是布儒斯特角 所以振动方向平行于入射面的偏振光不能反射。

(3) 如入射光振动方向与入射面垂直, 光以 i_b 入射时, 折射光线还是有的 因为布儒斯特定律只说明入射角为 i_b 时, 平行入射面的光振动反射率为零, 但垂直入射面的光振动的反射率并非 100%。

[问题 15-4] 一束自然光入射在方解石晶体的表面上, 入射光线与光轴成一定角度。

- (1) 问将有几条光线从方解石透射出来？
- (2) 如果把方解石切割成等厚的 A、B 两块, 并平行地移开很短一段距离, 如图 15-4(b) 所示, 此时光线通过这两块方解石后有多少条光线射出来？
- (3) 如果把 B 块绕光线转过一个角度, 此时将有几条光线从 B 块射出来？为什么？

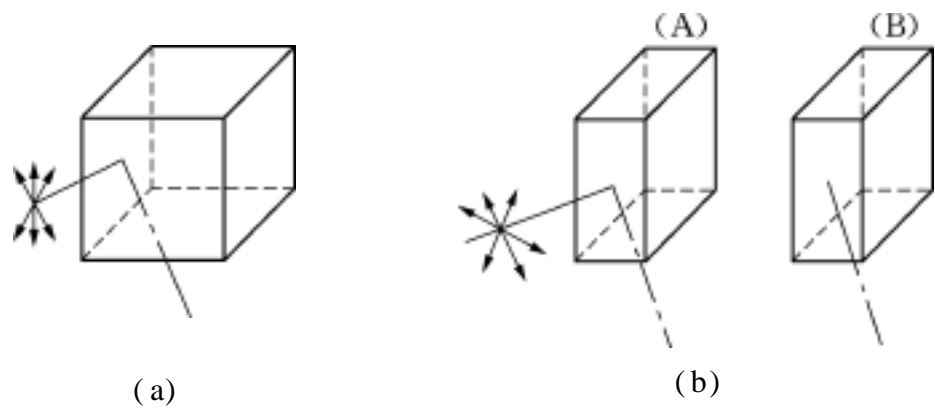


图 15-4

[解答] (1) 一束自然光通过方解石晶体(与光轴成一定角度), 将分成两束(o 光和 e 光), 所以射出光线有两条如图 15-5(a) 所示。

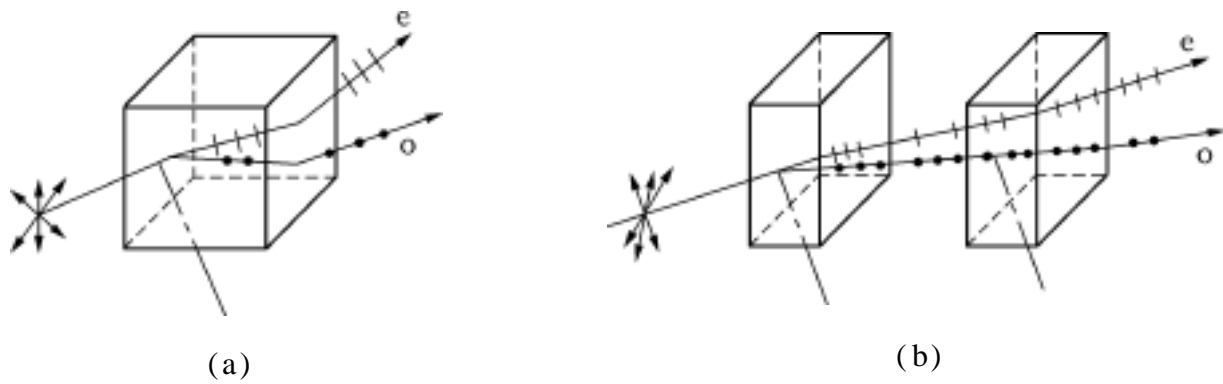


图 15-5

(2) 若将方解石切割成厚度相等的 A 和 B 块, 并平行地移开一点, 则 A、B 中光轴方向彼此平行未改变方向, 此时通过 A 后的 o 光和 e 光将入射到晶体 B, 因为 A 和 B 光轴平行, 原来在 A 晶体内的

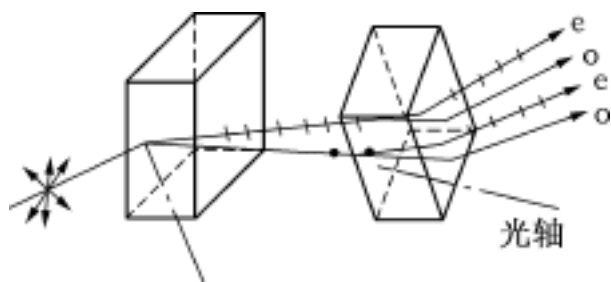


图 15-6

o 光和 e 光, 进入 B 后仍为 o 光和 e 光, 不再发生双折射, 所以由 B 射出的光线仍为两条, 如图 15-5(b) 所示.

(3) 当 B 绕光线方向转过一角度, 则 A 和 B 光轴方向有一个夹角, 离开 A 后 o 光和 e 光进入 B 都将产生双折射, 每条光均分解为两条(o 光和 e 光), 所以从 B 射出有四条光线, 如图 15-6 所示.

15.3 解题方法与典型例题

1. 在运用马吕斯定律时应注意的几点

(1) 公式 $I = I_0 \cos^2$ 中的 I_0 是入射偏振片前的偏振光的光强, 是入射偏振光的光振动方向与检偏器偏振化方向的夹角.

(2) 自然光通过偏振片后的光强为原来光强的 $\frac{1}{2}$, 所以自然光通过偏振化方向互成 θ 角的两个偏振片后的光强为 $I = \frac{I_0}{2} \cos^2 \theta$.

(3) 当一个光学系统有多个偏振片时, 应细心地逐级计算.

2. 在运用布儒斯特定律时应注意的两点

(1) 公式 $\tan i_b = \frac{n_2}{n_1}$ 中的 n_1 是入射光所在介质的折射率, n_2 是折射光所在介质的折射率.

(2) 当满足 $\tan i_b = \frac{n_2}{n_1}$ 时, 反射光为完全偏振光, 这时反射光线必与折射光线垂直, 即 $i_b + r = 90^\circ$.

3. 在运用晶体的双折射规律时应注意的几点

(1) 光线射到晶体内产生的 o 光和 e 光均为线偏振光, o 光的振动方向垂直于 o 光的主平面(光轴与折射线组成的平面), e 光的振动方向在 e 光的主平面内.

o 光和 e 光的区分是相对确定的双折射晶体而言的, 当光线出了晶体就不再有 o 光和 e 光之分, 它们只是振动方向不同的偏振光.

(2) 光沿晶体光轴入射时, 不发生双折射现象, 而垂直于光轴时, 尽管折射光不分为两束, 但 o 光和 e 光传播的速率差最大或折射率差最大, 所以仍有双折

射现象 .

(3) 偏振光入射到晶体,也可以产生双折射现象(见例 15-4) .

[例 15-1] 如图 15-7 所示,偏振片 A、B 的偏振化方向的夹角 $= 30^\circ$, 偏振片 C 与 A 的偏振化方向的夹角 $= 60^\circ$. 设强度为 I_0 的自然光垂直入射于偏振片 A 求:

- (1) 最后射出的光强 I_3 ;
- (2) B、C 位置互换,但 I_0 不变的情况下,最后射出的光强 I_3 .

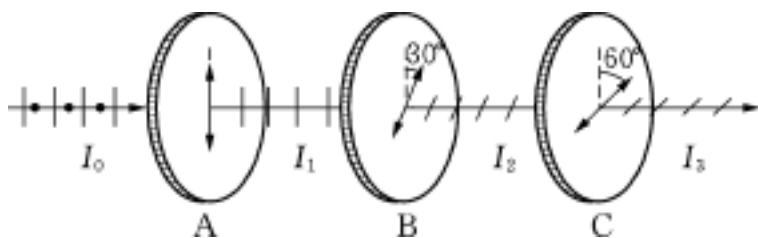


图 15-7

[解] (1) 设通过偏振片 A、B、C 的光强分别为 I_1 、 I_2 和 I_3 .由于自然光各个方向光振动的振幅相等,则通过偏振片 A 后与 A 偏振化方向垂直的光振动分量被吸收,所以通过偏振片 A 后的光强

$$I_1 = \frac{I_0}{2}$$

其振动方向与偏振片 A 的偏振化方向一致 此偏振光再通过偏振片 B 后,光强 I_2 应遵守马吕斯定律

$$I_2 = I_1 \cos^2 30^\circ = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 30^\circ = \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3}{8} I_0$$

I_2 再通过偏振片 C 后光强 I_3 , 由马吕斯定律

$$I_3 = I_2 \cos^2 (60^\circ - 30^\circ) = \frac{3}{8} I_0 \cos^2 30^\circ = \frac{3}{8} I_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{9}{32} I_0$$

其振动方向与偏振片 C 的偏振化方向一致 .

(2) B、C 位置互换后,先对 A、C 应用马吕斯定律,得

$$I_2 = I_1 \cos^2 60^\circ = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 60^\circ = \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} I_0$$

再对 C、B 应用马吕斯定律即得最后射出的光强

$$I_3 = I_2 \cos^2 (60^\circ - 30^\circ) = \frac{1}{8} I_0 \cos^2 30^\circ = \frac{1}{8} I_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3}{32} I_0$$

[例 15-2] 有一束线偏振光和自然光混合的光通过理想的偏振片,当偏振片转动时,发现最大的透射光强度是最小透射光强度的 5 倍 求此入射光中线偏振光和自然光强度的百分比 .

[解] 入射光为自然光和偏振光的混合光,设自然光的强度为 I_1 ,偏振光的强度为 I_2 这两种成分的光通过偏振片后的光强

$$I = \frac{I_1}{2} + I_2 \cos^2$$

因为当 $= 0$ 时,透射光强最大,

$$I_{\max} = \frac{I_1}{2} + I_2$$

当 $= \frac{1}{2}$ 时,透射光强最小,

$$I_{\min} = \frac{I_1}{2}$$

已知

$$I_{\max} = 5 I_{\min}$$

即

$$\frac{I_1}{2} + I_2 = 5 \frac{I_1}{2}$$

所以

$$I_2 = 2 I_1$$

入射光中自然光的百分比为:

$$\frac{I_1}{I_1 + I_2} = \frac{I_1}{3 I_1} = \frac{1}{3} = 33.3\%$$

入射光中偏振光的百分比为:

$$\frac{I_2}{I_1 + I_2} = \frac{I_2}{\frac{1}{2} I_2 + I_2} = \frac{2}{3} = 66.7\%$$

[例 15-3] 如图 15-8 所示,在一水平放置的平底玻璃盘 ($n_3 = 1.50$) 内盛满水 ($n_2 = 1.33$),一束自然光从空气 ($n_1 = 1.00$) 射向水面后,从水面和水底反射的光束分别用 1 和 2 表示.

- (1) 欲使 2 为完全偏振光,求自然光在水面的入射角 i_1 ,并指明 2 的光振动方向;
- (2) 证明 1 不是完全偏振光.

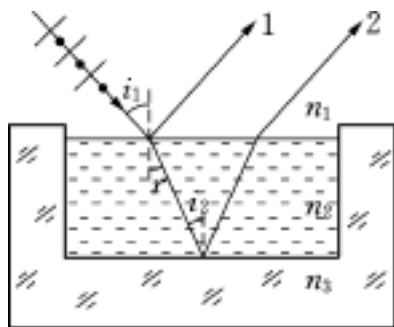


图 15-8

解 (1) 欲使 2 为完全偏振光,则光束在水底的入射角 i_2 应为布儒斯特角,即

$$i_2 = \arctan \frac{n_3}{n_2} = \arctan \frac{1.50}{1.33} = \arctan 1.128 = 48.44^\circ$$

注意到 $r = i_2$, 由折射定律 $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin r$ 可得

$$i_1 = \arcsin \left[\frac{n_2}{n_1} \sin i_2 \right] = \arcsin(1.33 \times 0.748) = \arcsin 0.995 = 84.38^\circ$$

光束 2 的光振动方向垂直入射面(纸面).

- (2) 欲使 1 为完全偏振光,则此时的入射角 i_1 应为布儒斯特角,即

$$i_1 = \arctan \frac{n_2}{n_1} = \arctan \frac{1.33}{1.00} = 53.06^\circ$$

但(1)中计算给出 $i_1 = 84.38^\circ \neq i_1$. 故 1 不是完全偏振光.

[例 15-4] 一振幅为 A 的偏振光,其强度为 I ,垂直照射在石英晶体上,石英晶体的光轴方向与晶面平

行,而偏振光的振动方向与石英晶体的光轴方向夹角为 ,如图 15-9 所示,石英晶体的厚度为 d ,试问:

- (1) 偏振光通过石英晶体是否会产生双折射?若产生 o 光和 e 光,其强度之比为多少?
- (2) 当 o 光和 e 光通过石英晶体后它们的光程差为多少?

[解] (1) 偏振光振动方向与晶体光轴成一定角度时,偏振光通过晶体同样发生双折射,产生 o 光和 e 光.因为本题中入射光垂直于光轴和晶面入射,所以,o 光和 e 光在晶体内传播方向相同.

偏振光在晶体中产生 o 光,其振动方向垂直于光轴,其振幅

$$A_o = A \sin$$

e 光振动方向平行于光轴,其振幅 $A_e = A \cos$,

所以

$$\frac{I_o}{I_e} = \frac{A_o^2}{A_e^2} = \frac{A^2 \sin^2}{A^2 \cos^2} = \tan^2$$

- (2) 在晶体内虽然 o 光和 e 光传播方向相同,但它们传播速度不同 $v_o > v_e$, 必引起光程差

$$= n_e d - n_o d = d(n_e - n_o)$$

[例 15-5] 如图 15-10 所示,有玻璃直角棱镜和方解石晶体直角棱镜组成了长方体棱镜.如棱镜(a)中玻璃的折射率为 $n = n_o$ (n_o 为方解石中 o 光的折射率).棱镜(b)中玻璃折射率 $n = n_e$ (n_e 为方解石中 e 光的折射率).如自然光垂直投射此棱镜上,试画出光通过棱镜时的光路,并标明光的振动方向.

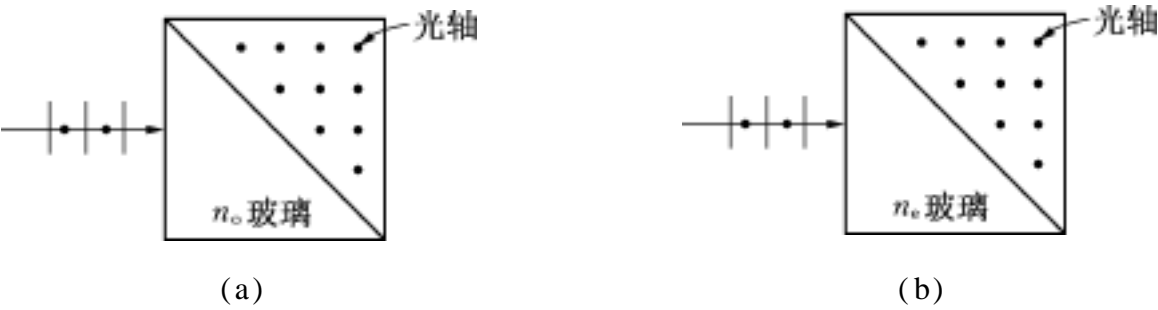


图 15-10

[解] (1) 当自然光垂直投射到图 15-10(a)的棱镜时,因玻璃为非晶体,所以光不发生双折射,且仍沿原来方向传播;当光进入方解石晶体(负晶体 $n_o > n_e$) 时,垂直于入射面的振动变为 e 光,所以它从玻璃进入晶体相当于从光密介质进入光疏介质 ($n_{玻} = n_o, n_o > n_e$), 折射角应大于入射角.而平行于入射面的振动变为 o 光,它从玻璃进入晶体时折射率不变 (由题意 $n_{玻} = n_o$), 所以光线还是沿原来方向传播,其光路如图 15-11(a)所示

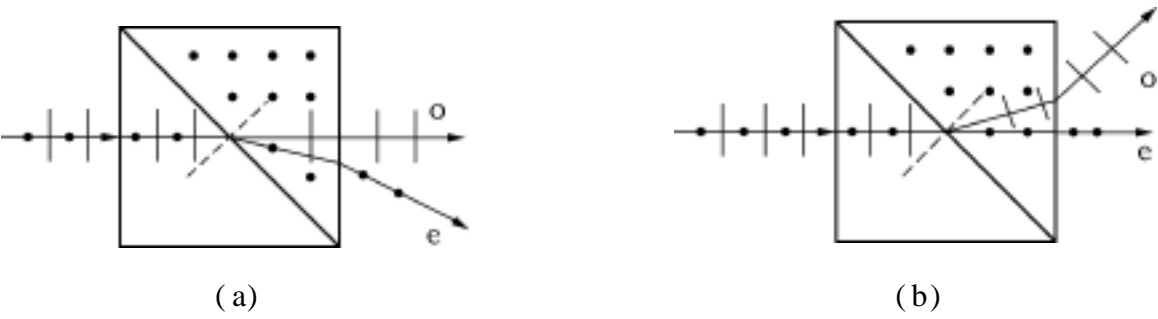


图 15-11

(2) 当自然光垂直投射到图 15-10(b) 的棱镜时, 在玻璃中光仍沿原来方向传播. 当光进入晶体时, 垂直入射面振动的光变为 e 光, 因为 $n_{\text{玻}} = n_e$, 所以这一光从玻璃射到晶体时, 折射率不变, 仍沿原来方向传播. 而平行于入射面振动的光进入晶体后变为 o 光, 此光相当于从光疏介质到光密介质 (方解石 $n_o > n_e$, $n_e = n_{\text{玻}}$), 所以折射角应小于入射角, 其光路如图 15-11(b) 所示.

15.4 自测练习与能力训练

15.4.1 选择题

1. 两偏振片的偏振化方向的夹角由 60° 转到 45° 时, 若入射光的强度不变, 则透射光的强度 I_{45} 、 I_{60} 等于 [].

- (A) $2:1$ (B) $3:1$ (C) $1:2$ (D) $1:3$

2. 一束自然光和线偏振光的混合光垂直射入到偏振片上. 若以偏振片的入射光为轴转一周, 发现透射光的最大值为最小值的 2 倍, 则入射光中自然光和线偏振光的强度比等于 [].

- (A) $1:1$ (B) $1:2$ (C) $1:3$ (D) $2:1$

3. 如图 15-12 所示, 一束自然光强度为 I_0 , 通过 A、B、C 三偏振片后, 透射光的强度 $I = \frac{1}{8} I_0$. 若已知 A、C 两偏振片的偏振化方向间的夹角为 $\frac{\pi}{2}$, 则 A、B 两偏振片的偏振化方向之间的夹角为 [].

- (A) 90° (B) 45° (C) 60° (D) 30°

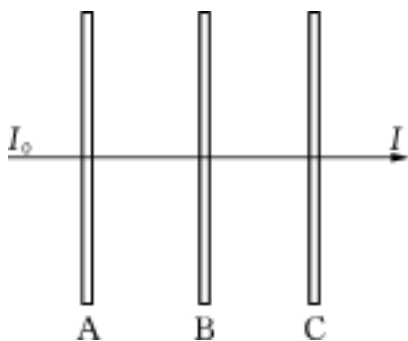


图 15-12

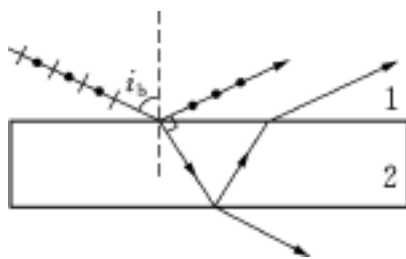


图 15-13

4. 一束自然光自空气射向一块平板玻璃 (如图 15-13 所示), 设入射角等于布儒斯特角 i_b , 则在界面 2 的反射光 [].

- (A) 是自然光
(B) 是完全偏振光且光矢量的振动方向垂直于入射面
(C) 是完全偏振光且光矢量的振动方向平行于入射面

(D) 是部分偏振光

5. 第一种介质的折射率为 $\sqrt{3}$, 第二种介质折射率为 1, 自然光从第一种介质射向第二种介质的交界面时, 反射光为完全偏振光, 则光的折射角为 [] .

(A) 30° (B) 60° (C) 45° (D) 其他

6. 已知光从玻璃射向空气的临界角为 i , 则光从玻璃射向空气时的起偏角 i_b 满足 [] .

(A) $\tan i_b = \tan i$ (B) $\tan i_b = \sin i$

(C) $\tan i_b = \cos i$ (D) $\tan i_b = \cot i$

7. 一束平面偏振光垂直射入方解石晶体, 这偏振光的振动方向与主平面成 30° 角, 则通过晶体后 e 光和 o 光的光强之比为 [] .

(A) $3 : 1$ (B) $\sqrt{3} : 1$ (C) $1 : 3$ (D) $1 : \sqrt{3}$

8. 如图 15-14 所示, 用方解石 ($n_o = 1.66$, $n_e = 1.49$) 切割成一个直角三角形棱镜, 光轴垂直于直角棱镜的截面. 自然光垂直射向该棱镜, 图中画出透过棱镜的折射光 a 和 b , 对此方解石而言, 下列说法正确的是 [] .

(A) a 为 o 光, 振动方向平行于入射面. b 为 e 光, 振动方向垂直于入射面

(B) a 为 o 光, 振动方向垂直于入射面. b 为 e 光, 振动方向平行于入射面

(C) a 为 e 光, 振动方向平行于入射面. b 为 o 光, 振动方向垂直于入射面

(D) a 为 e 光, 振动方向垂直于入射面. b 为 o 光, 振动方向平行于入射面

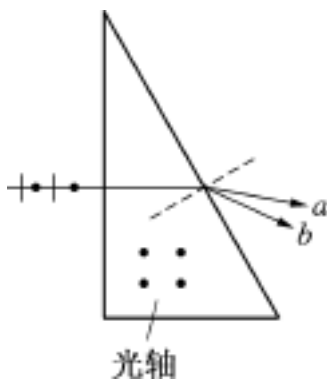


图 15-14

15.4.2 填充题

1. 两个偏振片偏振化方向成 30° 时, 观察一束单色自然光, 成 60° 角时再观察另一束单色自然光, 若两次测得透射光强度相等, 则两束单色自然光的强度之比 $I_1 : I_2 =$ _____ .

2. 将两片偏振片 P_1 、 P_2 叠放在一起, P_1 、 P_2 的偏振化方向之间的夹角为 60° , 一束强度为 I_0 的线偏振光垂直射到偏振片上, 该光束的光矢量振动方向与 P_1 、 P_2 的偏振化方向均成 30° 角, 则通过偏振片 P_1 的光强 $I_1 =$ _____, 通过偏振片 P_2 的光强 $I_2 =$ _____ .

3. 自然光从介质 1 射向介质 2 时, 在两介质的分界面上发生反射, 如起偏角 $i_b < 45^\circ$, 则光疏介质是第 _____ 种介质. 如光从介质 1 射向介质 2 时起偏

角 $i_b = 37^\circ$, 则光从介质 2 射向介质 1 时起偏角 $i_b =$ _____ .

4 . 自然光入射到空气和玻璃的分界面上, 当入射角为 60° 时, 反射光为完全偏振光, 则玻璃的折射率为_____ . 光进入玻璃时, 折射角为_____ .

5 . 自然光入射到具有双折射的透明晶体表面上, 有两条折射光, 它们都是偏振光, 其一为_____光线, 简称 o 光, 另一为_____光线, 简称 e 光 这两种光的任一光线与_____组成的平面称为该光线的主平面, 其中_____光的振动方向与主平面垂直 .

6 . 自然光垂直入射晶片, 晶片 (a)、(b)、(c) 中的光轴方向如图 15 -15 所示, 晶片_____中能发生双折射, 晶片_____中折射光不分开 .

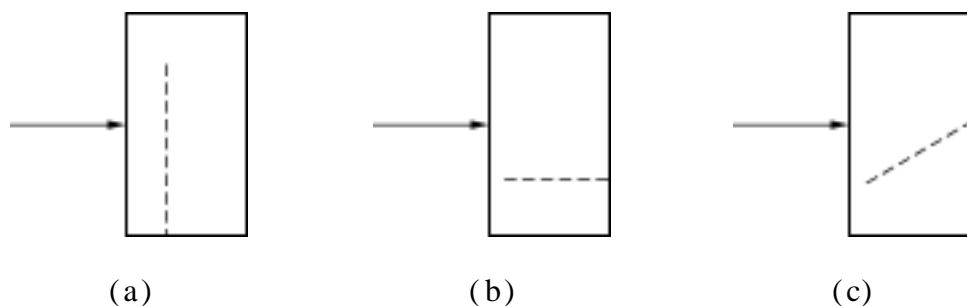


图 15 -15

7 . 沿同一直线放置的两尼科耳棱镜主平面之间的夹角由 30° 转到 45° . 当入射光是自然光时, 转动前后透射光的强度之比为_____ . 当入射光是线偏振光时, 转动前后透射光的强度之比为_____ .

8 . 如图 15 -16 所示, S 、 S_1 、 S_2 为狭缝, P_1 、 P_2 、 P 、 P 为偏振片 (P 和 P 可以撤去), 其中 P_1 和 P_2 的偏振化方向互相垂直, P 和 P 的偏振化方向互相平行, 且与 P_1 、 P_2 的偏振化方向皆成 45° 角 . 在下列四种情况下, 屏上有无干涉条纹 .

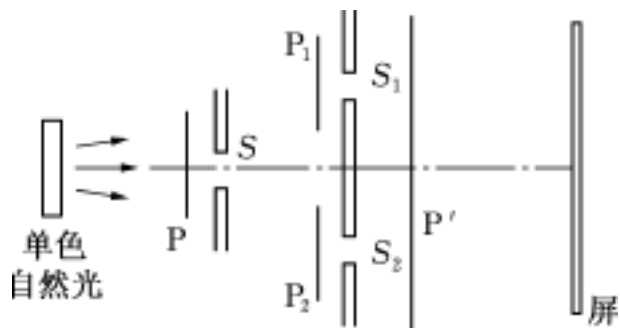


图 15 -16

- (1) 撤掉 P 、 P , 保留 P_1 、 P_2 , 屏上 _____ 干涉条纹;
- (2) 撤掉 P , 保留 P 、 P_1 、 P_2 , 屏上 _____ 干涉条纹;
- (3) 撤掉 P , 保留 P_1 、 P_2 、 P , 屏上 _____ 干涉条纹;
- (4) P_1 、 P_2 、 P 、 P 同时存在, 屏上 _____ 干涉条纹 .

15.4.3 计算题

1. 两偏振片 A 和 B 如图 15-17 放置, 两者的偏振化方向成 45° 角. 设入射光是线偏振光, 它的振动方向与偏振片 A 的偏振化方向相同. 试求同一入射光分别从左边入射和右边入射时, 出射光的强度之比.

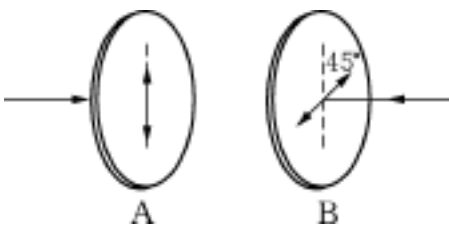


图 15-17

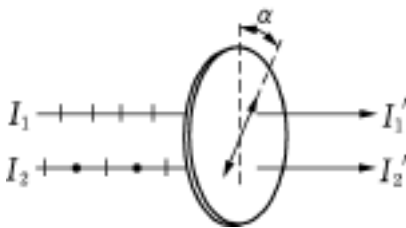


图 15-18

2. 设强度为 I_1 的线偏振光和强度为 I_2 的自然光同时垂直入射于一偏振片, 如图 15-18 所示. 欲使其透射光强 $I_1 = I_2$, 则偏振片的偏振化方向应与入射偏振光的振动方向成多大夹角? 对 I_2 的大小有何限制?

3. 一平板玻璃浸没于水中, 今用单色自然光从玻璃的上表面以某一入射角入射, 发现从玻璃下表面反射的光是完全偏振光. 求自然光在玻璃上表面的入射角. 这时玻璃上表面的反射光是否也是完全偏振光? ($n_{\text{玻}} = 1.50$, $n_{\text{水}} = 1.33$)

4. 一方解石切割成的直角棱镜如图 15-19 所示, 光轴垂直于直角棱镜的截面. 自然光以 $i = 48^\circ$ 入射时, 折射光中 e 光恰与直角边 AB 平行.

- (1) 试求 e 光的折射率 n_e ;
- (2) 大致画出 o 光的传播方向和光矢量的振动方向.

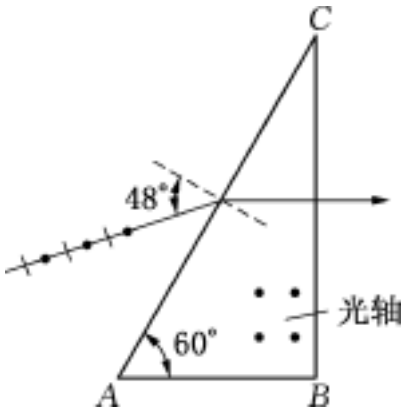


图 15-19

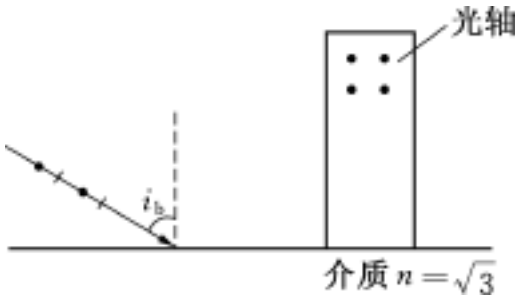


图 15-20

5. 一束自然光以起偏角 i_b 射向一折射率 $n = \sqrt{3}$ 的介质的表面, 其反射光射向一方解石晶体, 这晶体的表面与介质表面垂直, 如图 15-20 所示. 试求:

(1) 在图上画出反射光并表示其振动方向;

(2) 画出晶体内折射光的方向并求出折射角, 在图上表示其振动方向, 说明这光是 e 光还是 o 光.

6. 偏振分束器可把入射的自然光分成两束传播方向互相垂直的偏振光, 其结构如图 15-21 所示. 两个等边直角玻璃棱镜斜面对斜面合在一起, 两斜面间夹一层多层膜. 多层膜是由高折射率材料(硫化锌 $n_{\text{H}} = 2.38$) 和低折射率材料(冰晶石 $n_{\text{L}} = 1.25$) 交替排列而成. 如用铷离子激光 ($\lambda = 514.5 \text{ nm}$) 以 45° 角入射到多层膜上.

(1) 为使反射光为线偏振光, 玻璃棱镜的折射率 n 应取多少;

(2) 画出反射光和折射光的振动方向;

(3) 为使透射光的偏振度最大, 高折射率层和低折射率层的厚度的最小值是多少.

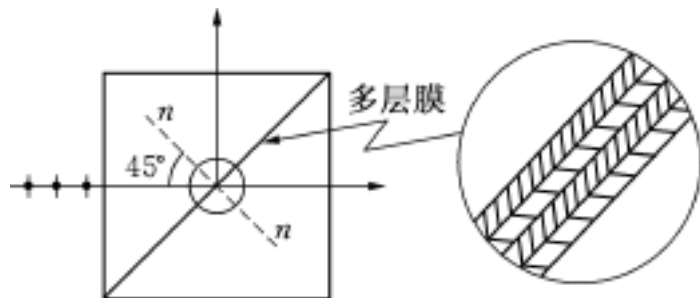


图 15-21

习题选解

[选择题 6] 临界角是指入射光在两介质界面上发生全反射现象, 折射角等于 90° 时的入射角. 起偏振角是指入射光在两介质界面上反射, 反射光为完全偏振光时的入射角.

设玻璃的折射率为 n , 空气的折射率为 n_0 , 由临界角定义式

$$\sin i = \frac{n_0}{n}$$

再根据布儒斯特定律

$$\tan i_b = \frac{n_0}{n}$$

得出

$$\tan i_b = \sin i$$

所以本题正确结论是(B).

[选择题 8] 自然光垂直射入方解石棱镜, 且垂直光轴传播, 由于 o 光和 e 光

传播速率不同,所以仍有双折射现象,它们透过棱镜的两束折射光 a 和 b 的折射角不同,如图 15-14 所示.对 o 光有

$$n_o \sin i = n_{\text{空}} \sin r_o$$

对 e 光有

$$n_e \sin i = n_{\text{空}} \sin r_e$$

比较以上两式,对方解石 $n_o > n_e$, 所以 $r_o > r_e$, 即折射角小的光束 a 是 e 光, 折射角大的光束 b 是 o 光.

两束光在方解石棱镜中传播时的主平面是通过光束并与入射面(纸面)垂直的平面.因光束 a 是 e 光,所以光矢量的振动方向在主平面内,即与入射面垂直;光束 b 是 o 光,所以光矢量的振动方向与主平面垂直,即在入射面内.故本题正确结论是(D).

[填充题 7]从起偏和检偏的作用看,可把尼科耳棱镜当作偏振片来处理.

设入射光强为 I_0 .

(1) 转动前:

$$I_1 = \frac{I_0}{2}$$

$$I_2 = I_1 \cos^2 30^\circ = \frac{I_0}{2} \cos^2 30^\circ$$

转动后:

$$I_1 = \frac{I_0}{2}$$

$$I_2 = I_1 \cos^2 45^\circ = \frac{I_0}{2} \cos^2 45^\circ$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\cos^2 30^\circ}{\cos^2 45^\circ} = \frac{3}{2}$$

(2) 设入射光的振动方向与第一个尼科耳棱镜的主平面夹角为 .

转动前:

$$I_1 = I_0 \cos^2$$

$$I_2 = I_1 \cos^2 30^\circ = I_0 \cos^2 \cos^2 30^\circ$$

转动后:

$$I_1 = I_0 \cos^2$$

$$I_2 = I_1 \cos^2 45^\circ = I_0 \cos^2 \cos^2 45^\circ$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\cos^2 30^\circ}{\cos^2 45^\circ} = \frac{3}{2}$$

[填充题 8](1) 由于 S 出来的自然光经 P_1 、 P_2 分解成相互垂直振动、且无

固定相位关系的两束光,故不能形成干涉条纹,屏上呈现的是一片均匀亮区.

(2) 由于 S 出来的偏振光经 P_1 、 P_2 出射的两束偏振光仍相互垂直,所以屏上仍无干涉条纹,呈现均匀亮区,强度为情况(1)的二分之一.

(3) 自然光经 P_1 、 P_2 分解为振动方向垂直、无固定相位关系的两束光,它们经 P 后虽引到同一振动方向,但仍无固定相位关系,故不能产生干涉条纹,屏上呈均匀亮区,强度与情况(2)相同.

(4) 自然光经 P 后成为线偏振光,经 P_1 、 P_2 后虽偏振方向改变了,但两束光仍有固定的相位关系.而这两束振动方向相互垂直的光再经过 P 后,被引到同一振动方向,故满足相干条件,能产生干涉条纹.强度是撤掉所有偏振片时屏上明纹强度的八分之一.

[计算题 5](1) 因自然光以起偏角入射,由布儒斯特定律

$$\tan i_b = \frac{n}{1} = \sqrt{3}$$

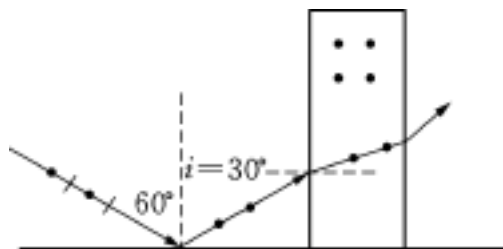


图 15-22

可得入射角 $i_b = 60^\circ$. 反射光 E 矢量振动方向垂直入射面,如图 15-22 所示.

(2) 反射光射向方解石时的入射角

$$i = 90^\circ - i_b = 30^\circ$$

进入晶体后,折射光的 E 矢量振动方向仍与入射面垂直,但因 E 矢量的振动方向与折射光在晶体内的主平面平行,所以折射光是 e 光. e 光的折射率 $n_e = 1.486$. 由折射定律

$$\frac{\sin i}{\sin r_e} = \frac{n_e}{1}$$

所以

$$\sin r_e = \frac{\sin i}{n_e} = \frac{\sin 30^\circ}{n_e} = \frac{1}{2n_e}$$

$$r_e = \arcsin \left[\frac{1}{2n_e} \right] = 19.7^\circ$$

[计算题 6]如图 15-23 所示,沿光的传播方向,设玻璃的折射率为 n ,薄膜的折射率按 $n_H \quad n_L \quad n_H \quad n_L \dots\dots$ 的顺序排列.当光线由玻璃入射至第一层高折射率膜界面时,由于入射角 $i = 45^\circ$,而两层介质的折射率之比 $\frac{n_H}{n} > 1$,即 45° 并不是此界面的起偏振角,所以反射光是部分偏振光.

光线在第一、二层介质分界面反射时,为获得完全偏振光,必须满足 $\tan i_b = \frac{n_L}{n_H}$, 即

$$i_b = \arctan \frac{n_L}{n_H} = \arctan \frac{1.25}{2.38} = 27.7^\circ$$

由于不同介质的分界面都是平行的,所以 i_b 就是从玻璃到第一层高折射率介质的折射角,即 $i_b = r_H$. 根据折射定律

$$n \sin i = n_H \sin r_H$$

可得
$$n = \frac{n_H \sin r_H}{\sin i} = \frac{n_H \sin i_b}{\sin i} = \frac{2.38 \times \sin 27.7^\circ}{\sin 45^\circ} = 1.56$$

(2) 第一层介质进入第二层介质的折射角为 r_L , 则 $i_b + r_L = 90^\circ$, 即由第二层到第三层介质的入射角为 r_L ($r_L = i_b$), i_b 亦是该界面的起偏振角, 故反射光为完全偏振光. 同理其他界面上的反射光也为完全偏振光, 振动方向垂直入射面. 经过多次反射折射, 最后透射光也接近于完全偏振光, 振动方向在入射面内, 如图 15-23 所示.

(3) 设折射率为 n_H 和 n_L 的两种介质的厚度分别为 e_H 和 a , 为使透射光的偏振度最大, 即透射光中平行入射面振动分量最大, 则垂直振动分量反射时应满足极大条件. 对高折射率膜两界面的反射光有

$$2e_H \sqrt{n_H^2 - n_L^2 \sin^2 i_b} + \frac{\lambda}{2} = k \quad k=1, 2, 3, \dots$$

对低折射率膜两界面的反射光有

$$2a \sqrt{n_L^2 - n_H^2 \sin^2 i_b} + \frac{\lambda}{2} = k \quad k=1, 2, 3, \dots$$

由折射定律

$$n \sin i = n_H \sin r_H = n_H \sin i_b = n_L \sin i_b$$

上面两式亦可写成

$$2e_H \sqrt{n_H^2 - n^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = k$$

和
$$2a \sqrt{n_L^2 - n^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = k$$

令 $k=1$, 可解得高折射率层和低折射率层的最小厚度分别为

$$e_H = \frac{\lambda}{4 \sqrt{n_H^2 - n^2 \sin^2 i}} = \frac{514.5}{4 \sqrt{2.38^2 - 1.56^2 \times \sin^2 45^\circ}} = 61 \text{ (nm)}$$

$$a = \frac{\lambda}{4 \sqrt{n_L^2 - n^2 \sin^2 i}} = \frac{514.5}{4 \sqrt{1.25^2 - 1.56^2 \times \sin^2 45^\circ}} = 219 \text{ (nm)}$$

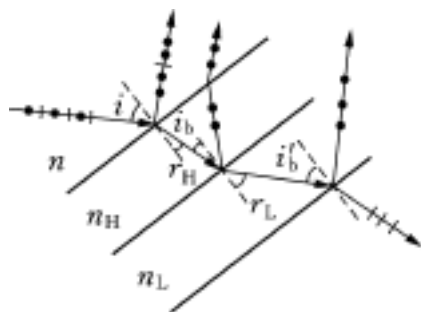


图 15-23

狭义相对论

16.1 基本要求与复习框图

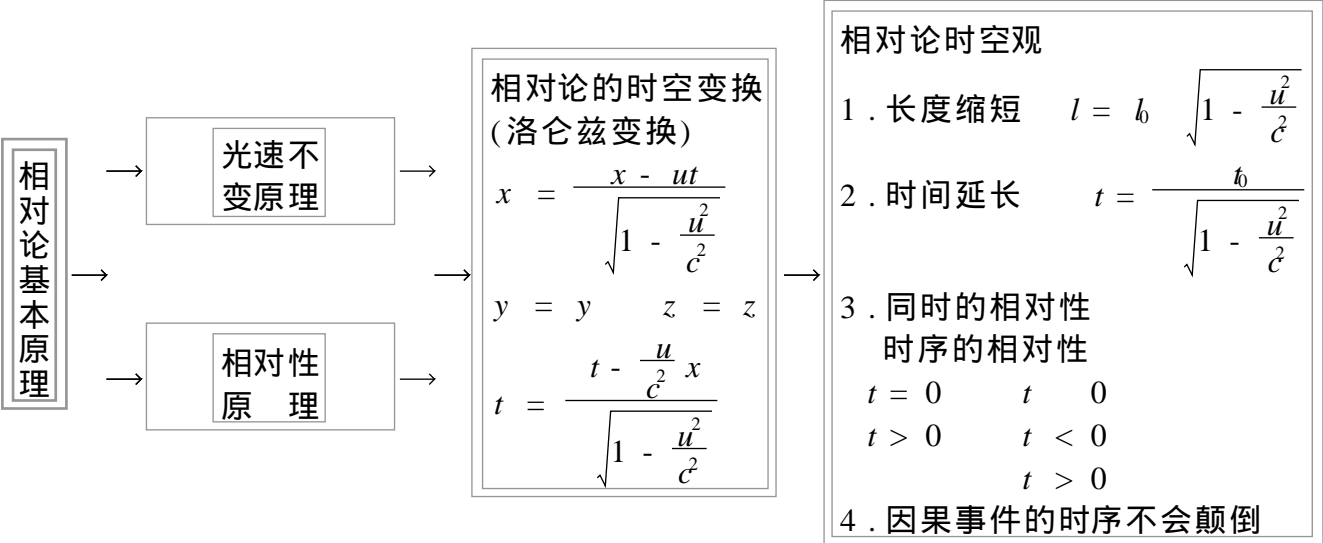
1. 基本要求

- (1) 理解爱因斯坦狭义相对论的两个基本假设 .
- (2) 掌握洛伦兹变换 .理解狭义相对论中同时性的相对性, 以及长度缩短和时间延长的概念 .
- (3) 了解相对论的时空观和牛顿力学时空观的本质区别 .
- (4) 了解相对论的速度变换法则并进行定量计算 .
- (5) 掌握相对论动力学的基本方程 .
- (6) 掌握相对论中质量、动量和能量的概念及其与速度的关系, 掌握质能关系及动量能量关系 .

2. 复习框图

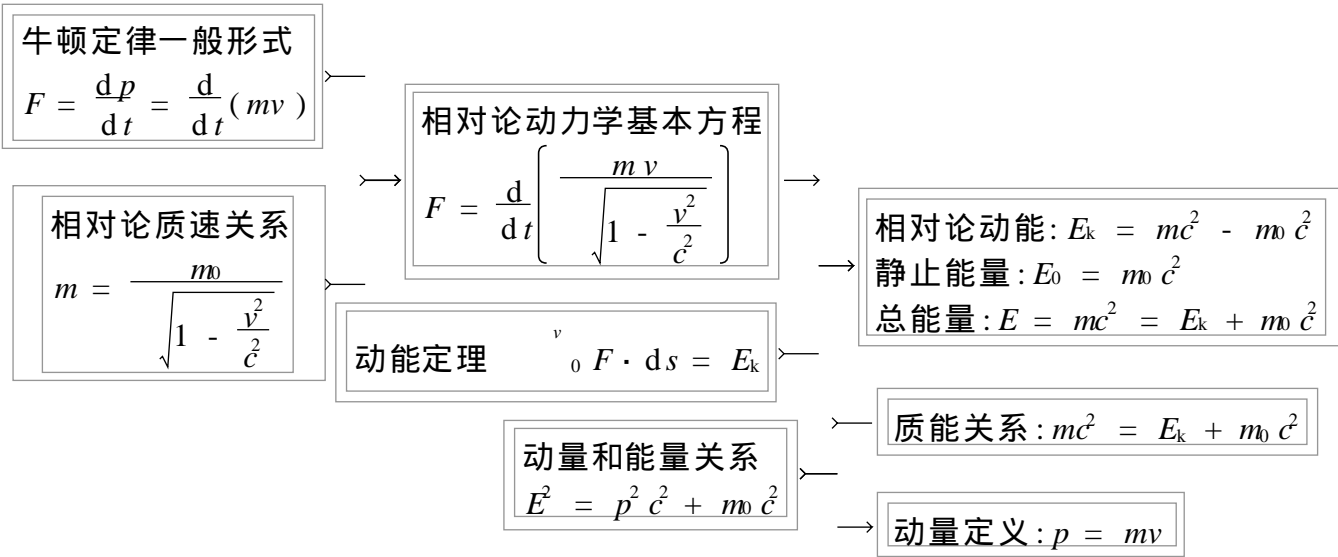
相对论运动学部分的学习应抓住这样一条线索, 即为解决伽利略变换和电磁理论的矛盾, 爱因斯坦突破了经典力学的时空观, 提出了狭义相对论的两条基本原理, 找到了满足这两条原理的新的时空变换——洛伦兹变换, 从而得出相对论时空观和相对论的速度变换公式 .

对相对论动力学部分的学习应抓住相对论动力学方程、质速关系、质能关系和动量与能量的关系四个部分进行 .本章研究问题的思路及各部分的联系如下复习框图所示 .



相对论速度变换

$$v_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}$$
$$v_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}$$
$$v_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}$$



16.2 阅读指导与问题讨论

1. 关于相对论基本原理的理解和讨论

[问题 16-1] 伽利略相对性原理与狭义相对论的相对性原理有何相同之处? 有何不同之处?

[解答] 二者相同之处在于都认为,对于力学规律一切惯性系都是等价的. 即无法用力学实验证明一个惯性系是静止的还是作匀速直线运动. 不同之处在于伽利略相对性原理仅限于力学规律,而狭义相对论的相对性原理则指出,对于所有的物理规律(不仅仅力学),一切惯性系都是等价的.

[问题 16-2] 根据相对论原理,实物粒子在介质中的运动速度是否有可能大于光在该介质中的传播速度?

[解答] 相对论给出的是真空中的光速 c 是一切物质运动的极限速率, 由于光在任何介质中的传播速度都小于 c , 因此从理论上讲实物粒子在介质中的运动速度有可能大于光在该介质中的传播速度.

2. 对洛伦兹变换的讨论及相对论时空观的理解

由洛伦兹时空坐标变换:

$$\begin{cases} x = \frac{x' - ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ t = \frac{t' - \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

可以得到两个事件发生的时间间隔和空间间隔的坐标变换对应为

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{\Delta x' - u \Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ \Delta t = \frac{\Delta t' - \frac{u}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ \Delta y = \Delta y' \\ \Delta z = \Delta z' \end{cases}$$

上式说明每个惯性系各自的时间量度和空间量度都与物体的相对运动有关, 而且时空紧密相连. 在解决具体问题以及理解时空相对性等概念时, 上述时空间隔的坐标变换是非常有用的.

[问题 16-3] 试分析:

(1) “同时性”的相对性是针对任意两个事件而言的吗?

(2) 根据狭义相对论原理, 在一个惯性系中同一时刻不同地点发生的两个事件, 在相对此惯性系运动的其他惯性系中测得这两个事件一定同时发生? 一定不同时发生?

[解答] (1) “同时性”的相对性必须是指针对沿运动方向上不同的空间坐标的两个事件而言.

由洛伦兹时空坐标变换式可见, 若 S 系中, 两事件 1 和 2 同时发生 ($t_1 = t_2$), 即 $\Delta t = 0$, 但只要两事件沿运动方向上的空间位置不同 ($x_1 \neq x_2$), 即 $\Delta x \neq 0$, 则在 S' 系中观察事件 1 和 2 的时间间隔

$$|t| = \frac{|t - \frac{u}{c^2}x|}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad 0$$

即两事件一定不同时发生。

但是若在 S 系中测得两事件是同时同地发生的, 即 $x = 0, t = 0$, 则 S 系中必有 $x = 0, t = 0$. 这意味着, 这种情况下, 在任何惯性系中测量, 这两个事件都是同时发生的。

(2) 要回答这一问题, 首先要弄清楚惯性系相对运动的方向与两事件空间间隔连线之间的关系。如果连线与运动方向垂直, 即表示在惯性系相对运动的方向(如沿 x 方向)上, 两事件的空间间隔也是零(如 $x = 0$), 则在另一惯性系中测得两事件也是同时发生。否则, 两事件一定不同时发生。

[问题 16-4] 如果 A, B 是 S 惯性系中互为因果关系的两个事件(A 是 B 的原因, 先于 B 发生) 问: 是否能找到一个惯性系, 在该系中测得 B 先于 A 发生, 出现时序颠倒的现象?

[解答] 不可能出现时序颠倒现象 理由及分析如下:

设 A, B 事件在 S 系的时空坐标分别为 $(t_A, x_A), (t_B, x_B)$, S 系相对 S 系以 u 的速度沿 x 轴正向运动, 则根据洛伦兹变换, 在 S 系中测得两事件发生的时间 t_A, t_B 有

$$t_A = \frac{t_A + \frac{u}{c^2}x_A}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

$$t_B = \frac{t_B + \frac{u}{c^2}x_B}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

则时间差为

$$t_B - t_A = \frac{(t_B - t_A) + \frac{u}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

可见

(1) 若 $x_B > x_A$, 则在 $t_B > t_A$ 时, 必有 $t_B > t_A$, 即只要在 S 系测 A 先于 B 发生, 在 S 系中测也是 A 先于 B 发生。

(2) 若 $x_B < x_A$, 则有可能 $t_B > t_A$, 而 $t_B < t_A$, 即在 S 系测 A 先于 B 发生, 有可能在 S 系测得 B 先于 A 发生。但是这种时序颠倒的情况只能发生在彼此无关的两事件之间。

如果 A 事件是 B 事件的原因, 则 x_A 处 A 事件的影响必以某种物质运动方式以速度

$$v_s = \frac{x_A - x_B}{t_B - t_A}$$

传递到 B 点, 将

$$v_s(t_B - t_A) = x_A - x_B$$

代入时间差式中, 有

$$\begin{aligned}
 t_B - t_A &= \frac{(t_B - t_A) - \frac{u}{c^2} v_s (t_B - t_A)}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} \\
 &= \frac{(t_B - t_A) \left[1 - \frac{uv_s}{c^2}\right]}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}
 \end{aligned}$$

根据狭义相对论的理论, $u < c$, $v_s < c$, 故

$$1 - \frac{uv_s}{c^2} > 0$$

恒成立 因此若 $t_B > t_A$, 必有 $t_B > t_A$.

由此可以得出结论, 互为因果关系的两事件, 在任何惯性系中都不会出现时序颠倒的情况 这也说明, 不会因为相对论效应, 而改变客观事件的因果规律, 相对论是反映客观规律的正确理论.

3. 应用“长度缩短”和“时间延长”公式需注意的问题

关于“长度缩短”公式:

设有一棒, 相对棒静止的观察者, 测得棒长为 l_0 , l_0 称固有长度. 相对棒以 u 沿着棒长方向运动的观测者, 测得棒长为 l , 则有

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$l < l_0$, 所以固有长度最长, 而运动的棒沿运动方向的长度缩短了.

关于“时间延长”公式:

在 S 参照系中, 某一点前后发生两事件, 即事件相对 S 系静止, $x = 0$, 其前后时间间隔 t_0 称为固有时间. 在与 S 系相对运动的 S' 系中测得两事件的时间间隔为

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$t > t_0$, 所以固有时间最短, 运动时间延长了.

上述“长度缩短”和“时间延长”公式实质上都是由洛伦兹变换在一定条件下变换而来, 或者说是时间间隔和空间间隔洛伦兹变换式的特例而已. 因此, 在应用时一定要注意它们的适用条件.

[问题 16-5] 教材中推导公式 $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ 时, 是利用洛伦兹变换

$$x_1 = \frac{x_1 - ut_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad x_2 = \frac{x_2 - ut_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

将两式相减,并考虑到 $t_1 = t_2$, 得到

$$l = x_2 - x_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

即

$$l = l \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

现有人也利用洛伦兹变换

$$x_1 = \frac{x_1 + ut_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad x_2 = \frac{x_2 + ut_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

令 $t_1 = t_2$, $l = x_2 - x_1$, $l = x_2 - x_1$, 则有

$$l = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

得出了与上面相反的结论,原因何在?

[解答] 首先,可以将测量棒两端读数看为两个事件.在教材中,由于棒是静止在 S 系中的,则在 S 系中的观测者测量棒长 $l = x$ 是固有长度,且不必要求同时测量棒两端点坐标,即事件 1 和 2 可以不同时.但是棒相对 S 系是运动的,所以在 S 系中的观测者测量棒长时,按规定必须同时读出棒两端点的坐标读数,即要求事件 1 和事件 2 必须同时, $t_1 = t_2$, 测得棒长 $l = x$.由于同时是相对的,在 S 系同时发生的两事件,且 $x \neq 0$, 则在 S 系中一定不同时,即 $t_1 \neq t_2$.所以后一推导中令 $t_1 = t_2$ 是错误的,当然其结论

$$l = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \text{ 也是错误的.}$$

现假设棒静止在 S 系中,在 S 系测得棒长 $l = x$ 为固有长度.而在相对棒运动的 S' 系中测量棒长 $l = x$, 且要求同时测量棒两端点坐标读数,即要求 $t_1 = t_2$, $t = 0$, 根据洛伦兹变换

$$x = \frac{x + ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad t = 0$$

可得

$$l = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

即 $l = l \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$, 相对棒运动的参照系中测得棒长缩短.所以获得的结论是一致的.

总之,测量运动的棒长时,必须同时读取棒两端点的坐标读数,则一定得到运动长度缩短的结论.

[问题 16-6] 静长为 l_0 的车厢,以速度 $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ 相对于地面行驶,一粒子以 $u = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ 的速度(相对车)沿车前进的方向从后壁射向前壁,有人用“长度缩短”公式求出地面上观察者测得粒子通过的距离

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{l_0}{2}$$

试问这种做法是否正确?

[解答] 以上做法是错误的. 他求出的 l 是地面上观察者所测得的车长, 而不是粒子通过的距离. 因为测粒子通过的距离, 必须在粒子从后壁发出时测一下粒子的位置, 当粒子到达前壁时再测一下粒子的位置. 而用长度缩短公式 $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ 计算 l 时, 需同时测量车的前壁和后壁的位置.

正确的做法, 必须用洛伦兹变换公式

$$x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1' + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$x_2' - x_1'$ 表示地面上观察者测得粒子通过的距离, $x_2 - x_1$ 表示车厢中的观察者测得粒子通过的距离. 按题意 $x_2' - x_1' = l_0$, 而 $t_2' - t_1' = \frac{l_0}{u}$, 因此有

$$x_2 - x_1 = \frac{l_0 + v \frac{l_0}{u}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

把 $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$, $u = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ 代入上式得

$$x_2 - x_1 = \frac{l_0 + l_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = 4l_0$$

[问题 16-7] 如何用时间延长公式 $t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ 解释运动的钟变慢?

[解答] 我们仍然先用两事件时间间隔的洛伦兹变换来说明“时间延长”公式.

假定 S 系中某一点前后发生两事件, 它们在同一空间位置上, 时空坐标为 x_1 、 t_1 , x_1 、 t_2 , 即 $x = 0$, 则 $t_2 - t_1$ 称为固有时间. 在相对运动的 S' 系中测得两事件的时空坐标为 x_1' 、 t_1' , x_2' 、 t_2' , 它们并不在同一点上, 或者说 S 系中观察事件 1 在 x_1 处发生, 而事件 2 在 x_2 处发生, 因此 t_1 、 t_2 应该是 S 系中分别位于 x_1 和 x_2 两处的钟测得, 由洛伦兹变换

$$t = \frac{t' + \frac{u}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \text{ 且 } x' = 0$$

可得

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

即相对事件运动的参照系中测得的时间延长。

由此,我们可以解释所谓运动的钟变慢。

假设有两只事前校准的完全相同的钟 A、B。A 钟放在宇宙飞船上, B 钟留在地面上。注意,可以设想地面上应该有许多完全相同的 B 钟沿飞船运动方向紧密排列。现设宇宙飞船在某日上午 8 时整出发,以 $u = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ 的速度相对地球飞行。宇航员经过 1 小时飞行后,看 A 钟指在 9 时整 ($t_0 = 1$ 小时为固有时间),而地面上的观察者此刻看到 A 钟已在 x_2 位置,地面上在 x_2 处的 B 钟此刻指在 10 时整 (因为 $t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}} = 2$ 小时,时间延长)。所以地面观察者认为 A 钟(即运动的钟)变慢了。

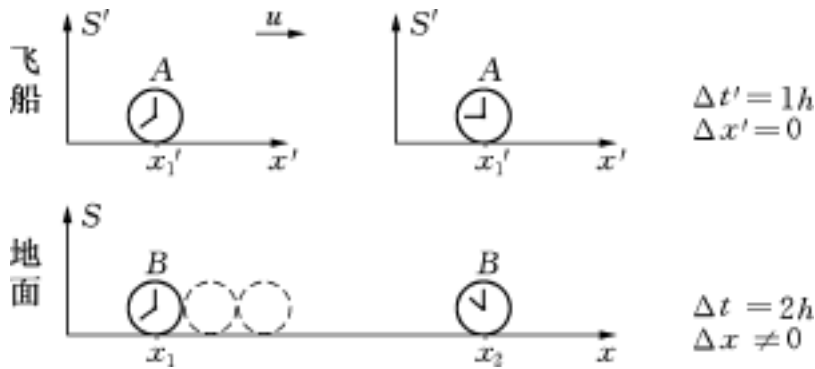


图 16-1

[问题 16-8] 静止长度为 l_0 的车厢,以速度 v 相对地面行驶。从车厢的后壁以速度 u_0 (相对车) 向前射出一粒子,如图 16-2 所示。有人用“时间延长”公式求得地面上观察者测得粒子从车后壁到前壁运动的时间。

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{l_0}{u_0}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

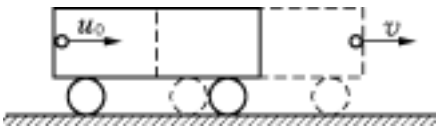


图 16-2

式中, t 为车厢中观察者测得粒子从后壁到前壁的运动时间。试问这种做法是否正确?

[解答] 这种做法不对,因为时间延长公式中, t 是 S 系中同一地点发生的两事件的时间间隔,而本题中的两事件,一为粒子从车厢后壁射出,二为粒子到达前壁。它们发生在 S 系中不同地点。

正确的做法,应该用反映时空联系的洛伦兹变换公式。

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1' + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1}$$

如设地面为 S 系,车厢为 S' 系。车厢中观察者测得粒子从后壁到前壁的时间 $t = t_2 - t_1 = \frac{l_0}{u_0}$, 粒子从后壁到前壁通过的距离 $x_2 - x_1 = l_0$ 。把这些关系代入式(1),得到地面上的观察者测得粒子从后壁到前壁

的时间

$$t_2 - t_1 = \frac{\frac{l_0}{u_0} + \frac{v}{c^2} l_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l_0 \left[1 + \frac{v}{c^2} u_0 \right]}{u_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

4. 关于相对论速度变换问题的讨论

[问题 16-9] 相对论中,在垂直于两惯性系的相对速度方向的长度与参照系无关 (即 $y = y$), 为什么在这个方向上的速度分量却又和参照系有关了 (即 $u_y \neq u_y$) ?

[解答] 因为相对论中,时间坐标和空间坐标是密切联系的.在不同的惯性系中,空间和时间的量度标准也不同.在沿 x 方向相对运动的两个惯性系 S 和 S' 中 (x 轴和 x' 轴重合), $dy = dy'$, 但 $dt \neq dt'$. 因此,在 S 系中速度的 y 分量 $u_y = \frac{dy}{dt}$ 和 S' 系中速度的 y 分量 $u_y' = \frac{dy}{dt'}$ 不相同.

[问题 16-10] 如 S' 系以速度 v 相对 S 系作匀速直线运动,两参照系的 x 轴和 x' 轴重合,在 S' 系中的原点 O' 处沿 y' 轴正方向发出一光信号.在 S 系中的观察者测得此光信号传播速度的大小是否还是 c ? 方向是否沿 y 轴?

[解答] 在 S' 系中沿 y' 方向发出的光信号的速度为

$$u_x = 0, u_y = c, u_z = 0$$

由相对论的速度变换公式可得此光信号在 S 系中传播的速度为

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u_x'} = v, u_y = \frac{u_y' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u_x'} = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, u_z = 0$$

其速度的大小为

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = c$$

由此可见, S 系中测得光信号速度的大小仍为 c , 但方向并不沿 y 方向, 而与 y 轴有夹角

$$= \operatorname{arccot} \frac{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v}$$

这说明光速不变原理是指光的速率不变, 也说明相对论的速度变换公式是与光速不变原理一致的.

5. 关于相对论动力学基本概念的讨论

[问题 16-11] 作用于物体上的外力, 是否会因为惯性系的不同而不同? 分别从经典力学与相对论力学的角度讨论.

[解答] 在惯性系中, 力的定义是被作用物体的动量随时间的变化率, 即

$$F = \frac{dp}{dt}$$

在经典力学中,动量 $p = mv$, 其中质量 m 是常量 故

$$F = \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} = ma$$

因为加速度 a 在所有惯性系中相等,所以力 $F = ma$ 是个不变量,即与惯性系的选择无关 .

在相对论力学中, m 是个随惯性系的不同而变化的量 故

$$F = \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}$$

式中 m, v 都是与惯性系选择有关的量,故力也因惯性系的不同而不同 .

[问题 16-12] 经典力学的动能定理与相对论力学的动能定理有何异同 ?

[解答] 相同之处在于,它们都认为动能是物体因为运动而具有的能量,而且都以 $A = E_{k2} - E_{k1}$ 的形式表明物体动能增量与外力对其做功等值 .

不同之处在于,经典力学中,质量 m 是常量 . $E_k = \frac{1}{2} mv^2$; 相对论力学中 $E_k = mc^2 - m_0 c^2$, 其中 m_0 是物体静止质量,而运动质量 m 是随其运动速度变化的量, $m_0 c^2 = E_0$ 称静止能量, $mc^2 = E$ 称相对论总能量,由此可见,相对论认为物体的动能是其总能量与静止能量之差 .

[问题 16-13] 试比较相对论力学与牛顿力学的区别 .

[解答] 如表 16-1 所示 .

表 16-1

	牛 顿 力 学	相 对 论 力 学
质量 (m)	恒 量	$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ 随速度变化
力 (F)	物体受力的作用只是改变速度	物体受力的作用,第一,要改变速度,第二,要改变质量
力与速度关系	某静止物体受力后速度增大,若此力为恒力,则物体速度可达无限大	某静止物体受力后速度增大,质量也增大 若此力为恒力,则加速度的方向不变,但数值越来越小 .当 $m \rightarrow \infty$ 时, $a \rightarrow 0$ 速度达到最大值 c
动力学 方 程	$F = m \frac{dv}{dt} = ma$	$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]$
动能定理	$A = F \cdot ds = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2$	$A = F \cdot ds = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$

6 . 关于相对论中质量、动量、能量的理解和讨论

[问题 16-14] 应该如何理解物体的静止能量？

[解答] 物体的静能量实际上就是它的总内能 . 其中包含 : 分子运动的动能 ; 分子间相互作用的势能 ; 使原子与原子结合在一起的化学能 ; 原子内使原子核和电子结合在一起的电磁能 ; 以及原子核内质子和中子的结合能 , 等等 .

[问题 16-15] 试讨论长度、时间、质量、动量、动能等物理量在经典力学与相对论力学中的区别 .

[解答] 如表 16-2 所示 .

表 16-2

物理量	经 典 力 学	相 对 论 力 学
长 度	绝对的 , 与参考系无关	相对的 , 长度大小与参考系有关
时 间	绝对的 , 与参考系无关	相对的 , 时间测量与参考系有关
质 量	绝对的 , 与运动速度无关	与速度有关 , $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
动 量	与速度成正比 , $p = m v$	与速度关系为 $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
动 能	与速度平方成正比 $E_k = \frac{1}{2} m v^2$	等于总能量与静能量之差 $E_k = E - E_0 = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right]$

[问题 16-16] 观察者乙以 $\frac{4}{5} c$ 的速度相对于静止的观察者甲运动 , 乙带一长为 l 质量为 m 的棒 (棒沿运动方向放置) . 问甲、乙两者 , 谁测得棒的总能量大 ? 谁测得棒的密度大 ?

[解答] 因为棒在乙手中 , 所以甲是相对棒运动的观察者 . 乙是相对棒静止的观察者 . 因此 , 题目中的 m 和 l 分别为棒的静止质量和静长 . 由质速关系可知 , 甲测得棒的质量

$$m_{\text{甲}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{5}{3} m$$

由长度缩短原理可知 , 甲测得棒长

$$l_{\text{甲}} = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{3}{5} l$$

由质能关系可知 , 物体总能量和质量成正比 , 因 $m_{\text{甲}}$ 大于 $m_{\text{乙}}$, 所以甲测得棒的总能量大 . 又因棒的密度 $= \frac{\text{质量}}{\text{长度}}$, $m_{\text{甲}}$ 大于 $m_{\text{乙}}$, 而 $l_{\text{甲}}$ 却小于 $l_{\text{乙}}$, 所以甲测得棒的密度大 .

16.3 解题方法与典型例题

1. 洛仑兹变换及“长度缩短”、“时间延长”公式的综合应用问题

[例 16-1] 两惯性系 S, S' 沿 x 轴相对运动, 当两坐标原点 O, O' 重合时记时开始. 若在 S 系中测得两事件的时空坐标分别为 $x_1 = 6 \times 10^4 \text{ m}, t_1 = 2 \times 10^{-4} \text{ s}; x_2 = 12 \times 10^4 \text{ m}, t_2 = 1 \times 10^{-4} \text{ s}$, 而在 S' 系中测得该两事件同时发生. 试问:

(1) S' 系相对 S 系的速度如何?

(2) S' 系中测得这两事件的空间间隔是多少?

[解] 设 S' 系相对 S 的速度为 u , 由洛仑兹变换, 在 S' 系中测得两事件的时间坐标分别为

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{u}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

$$t_2' = \frac{t_2 - \frac{u}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

由题意 $t_2' = t_1'$, 即

$$t_2 - \frac{u}{c^2} x_2 = t_1 - \frac{u}{c^2} x_1$$

解得

$$u = \frac{c^2(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{c}{2} = -1.5 \times 10^8 \text{ m/s}$$

式中负号表示 S' 系相对 S 系沿 x 轴负向运动.

(2) 设在 S' 系中测得两事件的空间坐标分别为 x_1', x_2' , 由洛仑兹变换

$$x_1' = \frac{x_1 - u t_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

$$x_2' = \frac{x_2 - u t_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

因为 $t_2' = t_1'$, 所以

$$\begin{aligned} x_2' - x_1' &= (x_2 - x_1) \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} \\ &= 5.2 \times 10^4 \text{ m} \end{aligned}$$

[例 16-2] 如图 16-3 所示, 一列长度为 L_0 的列车以 $u = 0.8c$ 的速度通过站台. 若列车首尾各置已校准

的钟 A 和 B , 若 A 钟与站台上 A 钟对齐时, 二者同时指零. 问: 当 B 钟与 A 钟对齐时, 二者各指示多少?

[解] 讨论这一问题可以用两种方法进行.

方法一: 站台上测得以 $0.8c$ 速度运动的列车的长度为

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 0.6L_0$$

因此, 当 B 钟与 A 钟对齐时, A 钟指示为

$$t = \frac{L}{u} = \frac{0.6L_0}{0.8c} = \frac{0.75L_0}{c}$$

而在列车上的观测者看来, 是 A 钟以速率 u 相对列车运动, 它从 A 钟到 B 钟经过距离为 L_0 , 所以, 当 B 钟与 A 钟对齐时, B 钟指示为

$$t = \frac{L_0}{u} = \frac{L_0}{0.8c} = \frac{1.25L_0}{c}$$

方法二: 首先, 仍用方法一的讨论得到 B 钟与 A 钟对齐时, A 钟指示为 $t = \frac{L}{u} = \frac{0.75L_0}{c}$.

这里将 A 钟、 B 钟与 A 钟对齐看作两个事件, 则在站台上看, 这是同一地点先后发生的两个事件, A 钟指示的时间 t 为固有时间. 根据时间延长效应, 在以速度 u 相对运动的列车中, 测得这两个事件的时间差 (即 B 钟与 A 钟对齐时, B 钟的指示) 为

$$t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{0.75L_0}{0.6c} = \frac{1.25L_0}{c}$$

[例 16-3] 一辆小车以高速 v 行驶, 在车上放一个等腰三角形的框架 ABC , 底角为 30° , 如图 16-4 所示, 地面上的观察者测得这角度为 45° . 求小车的速度.

[解] 设小车为 K 系, 地面为 K 系. 小车上的观察者测得等腰三角形框架的底边长为 x 、高为 y , 如图 16-5(b) 所示. 因为三角形相对观察者静止, 故 x 和 y 为静止长度. 由已知条件得

$$y = \frac{1}{2} x \tan 30^\circ \quad (1)$$

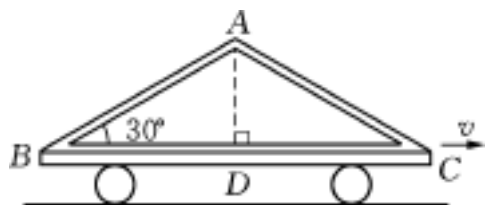
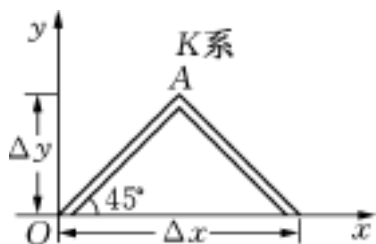
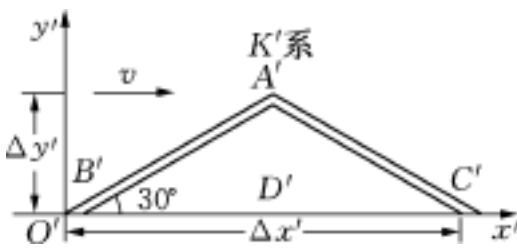


图 16-4



(a)



(b)

图 16-5

地面上的观察者测得等腰三角形的底边长为 x , 高为 y , 如图 16-5(a) 所示. 因为三角形相对观察

者运动,由“长度缩短”公式可知,沿运动方向物体的长度缩短,所以有

$$x = x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2)$$

而垂直于运动方向物体长度不变,则有

$$y = y \quad (3)$$

又因已知地面上观察者测得这三角形底角为 45° , 所以有

$$y = \frac{1}{2} x \tan 45^\circ \quad (4)$$

联立方程(1)、式(2)、式(3)和式(4),解得

$$\tan 30^\circ = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tan 45^\circ$$

即

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

所以得到小车的速度

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}} c$$

注意:在应用长度缩短公式时,必须牢记相对物体运动的观察者测得物体沿运动方向的长度比静长缩短了 $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ 倍,而垂直于运动方向的长度保持不变.

[例 16-4] 离地面 6 000 m 的高空大气层中,产生一 π 介子以速度 $v = 0.998c$ 飞向地球.假定 π 介子在自身参照系中的平均寿命为 2×10^{-6} s, 根据相对论理论,试问:(1)地球上的观测者判断 π 介子能否到达地球?(2)与 π 介子一起运动的参照系中的观测者的判断结果又如何?

[解] (1) π 介子在自身参照系中的平均寿命 $t_0 = 2 \times 10^{-6}$ s 为固有时间.地球上观测者,由于时间膨胀效应,测得 π 介子的寿命为

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 31.6 \times 10^{-6} \text{ s}$$

即在地球观测者看来, π 介子一生可飞行距离为

$$L = v t = 9460 \text{ m} > 6000 \text{ m}$$

所以判断结果, π 介子能到达地球.

(2) 在与 π 介子共同运动的参考系中, π 介子是静止的,地球以速率 $v = 0.998c$ 接近 π 介子.从地面到 π 介子产生处为 $H_0 = 6000 \text{ m}$ 是在地球参考系中测得的,由于空间收缩效应,在 π 介子参考系中,这段距离应为 $H = H_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 379 \text{ m}$, 在 π 介子自身参考系中测,在其一生中地球的行程为 $L_0 = v t_0 = 599 \text{ m} > 379 \text{ m}$.故判断结果, π 介子也能到达地球.

实际上, π 介子能到达地球,这是客观事实,不会因为参考系的不同而改变.

2. 洛伦兹速度变换公式的应用

在求解相对论效应下物体 A 相对物体 B 的速度等问题时,可以先确定两个相对运动的参照系 S 和 S' ,通常将一个参照系建在物体 A(或 B)上,于是上述问题便简化为 B(或 A)的速度从 S 系到 S' 系的洛伦兹速度变换问题了.

[例 16-5] 有两飞船 A 和 B, A 相对地面的速度为 v_A , B 相对地面的速度为 v_B ,两者方向相同,按相对论的观点计算飞船 B 对于飞船 A 的相对速度.

[解] 按伽利略变换 $v_{BA} = v_{B地} - v_{A地}$.但是伽利略速度变换在相对论中不适用 我们可用相对论的速度变换来求 v_{BA} 因为已知飞船 A、B 的速度 v_A 和 v_B 都是相对地球的,如取地球为 K 系,飞船 A 为 K' 系,如图 16-6 所示,这时 K' 系与 K 系的相对速度 $u = v_A$,飞船 B 相对 K 系的速度 $v_x = v_B$,飞船 B 相对飞船 A 的速度 $v_{BA} = v_x$.

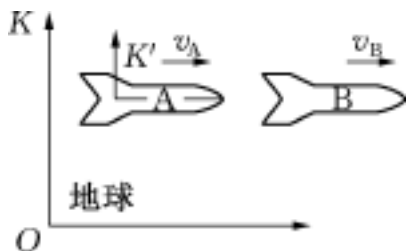


图 16-6

由相对论的速度变换公式

$$v_{BA} = v_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} = \frac{v_B - v_A}{1 - \frac{v_A v_B}{c^2}}$$

[例 16-6] 已知惯性系 S' 相对 S 系以 u 的匀速度沿 x 轴运动.若在 S' 系中测得光子沿 y' 轴以 c 的速度运动.试分别根据伽利略变换和洛伦兹变换讨论在 S 系中测得光子运动速度的大小与方向.

[解] 由题意知,在 S' 系中光子速度为

$$v_y = c, v_x = v_z = 0$$

根据伽利略变换,在 S 系中光子速度为

$$v_x = v_x' - u = -u$$

$$v_y = v_y' = c$$

$$v_z = v_z' = 0$$

所以得到光子速度大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{u^2 + c^2}$$

v 与 y 轴正向夹角 α ,如图 16-7 所示,则有

$$\tan \alpha = \frac{u}{c}$$

根据洛伦兹变换,在 S 系中光子速度为

$$v_x = \frac{v_x' - u}{1 - \frac{v_x' u}{c^2}} = -u$$

$$v_y = \frac{v_y' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x' u}{c^2}} = c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \sqrt{c^2 - u^2}$$

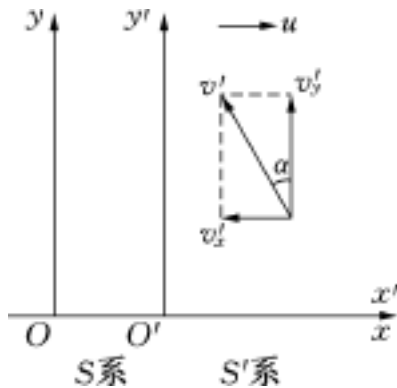


图 16-7

$$v_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} = 0$$

所以可得光子速度大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{u^2 + (c^2 - u^2) + 0} = c$$

而 v 与 y 轴正向夹角 θ 满足(见图 16-7)

$$\tan \theta = \frac{u}{c}$$

由上述讨论可见,洛仑兹变换体现了光速不变原理.而对偏向角 θ ,即光行差现象的解释,相对论与经典力学也是有区别的,但由于 θ 角很小,目前实验观察还无法分辨两者之区别,所以经典理论同样给出与观测结果相一致的结论.

3 . 相对论动力学综合问题

有关这部分内容的典型例题包括:相对论动力学方程的应用问题;相对论中质能关系式、动量能量关系式的应用计算;能量守恒定律、动量守恒定律在相对论中的综合应用等.

[例 16-7] 设有一静止质量为 m_0 、带电量为 q 的粒子其初速度为零,在均匀电场 E 中加速,求在 t 时刻粒子所获得的速度是多少?如不考虑相对论效应,粒子的速度又是多少?这两速度之间的关系如何?

[解] 由相对论动力学方程,得

$$F = \frac{d}{dt} \left[\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]$$

因为粒子初速度为零,而且在均匀电场中得到加速,所以力和速度方向一致,且 $F = qE$, 所以有

$$qE = \frac{d}{dt} \left[\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]$$

在方程两边乘 dt , 得

$$d \left[\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] = qE dt$$

两边取积分

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \int_0^t qE dt$$

因为 qE 为常量, 所以有

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = qEt$$

解得

$$v = \frac{\frac{qEt}{m_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{m_0 c}\right)^2}}$$

如不考虑相对论效应,由牛顿第二定律,得

$$Eq = m_0 a, \quad a = \frac{Eq}{m_0}$$

又因电场均匀,所以粒子作匀加速直线运动

$$v = at = \frac{Eq t}{m_0}$$

由此可见,考虑相对论效应求得的速度和未考虑相对论效应时求得的速度关系为

$$v_{\text{相}} = \frac{v_{\text{经}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_{\text{经}}}{c}\right)^2}}$$

[例 16-8] 在实验室测得电子的运动速度为 $0.6c$. 设有一观测者沿着电子运动的方向以相对实验室为 $0.8c$ 的速度运动. 求该观测者测得电子的动能和动量各是多少? (已知电子的静止质量 $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$)

[解] 设实验室为 S 系, 观测者为 S' 系. 电子为运动物体, 其运动方向沿 x 轴正向. 则根据题意有, S' 系相对 S 系的速度 $u = 0.8c$, 电子相对 S 系的速度 $v_x = 0.6c$. 根据洛伦兹速度变换公式, 在 S' 系中测得电子速度, 亦即观察者测得的电子速度为

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} = -0.385c$$

所以观察者测得电子质量为

$$m = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_x'}{c}\right)^2}}$$

电子动能

$$\begin{aligned} E_k &= mc^2 - m_e c^2 \\ &= m_e c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_x'}{c}\right)^2}} - 1 \right] = 6.85 \times 10^{-15} \text{ J} \end{aligned}$$

电子动量

$$p = mv_x' = \frac{m_e v_x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_x'}{c}\right)^2}} = -1.235 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

负号表示动量 p 与观察者运动方向相反.

[例 16-9] 两个相同的粒子, 静止质量为 m_0 . 粒子 A 静止, 粒子 B 以 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ 的速度向 A 碰撞, 设碰撞是

完全非弹性的,求碰撞后复合粒子的质量、动量及动能.

[解] 设粒子 B 的速度为 u , 复合粒子的质量为 m , 速度为 u . 因在碰前粒子 A 静止, 由动量守恒定律, 得

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} u = m u \quad (1)$$

由能量守恒定律

$$m_0 c^2 + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} c^2 = m c^2 \quad (2)$$

由式(2)得复合粒子的质量

$$\begin{aligned} m &= m_0 + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ &= m_0 \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right]^2}} \right] = 3m_0 \end{aligned}$$

由式(1)得复合粒子的动量

$$m u = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0 \frac{\sqrt{3}}{2} c}{\sqrt{1 - \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right]^2}} = \sqrt{3} m_0 c \quad (3)$$

要求得复合粒子的动能, 则先要求出它的静止质量 m_0 ; 要求得复合粒子的静止质量, 还得先求出它的速度 u . 按这种思路, 由式(3)先求得

$$u = \frac{\sqrt{3} m_0 c}{m} = \frac{\sqrt{3} m_0 c}{3 m_0} = \frac{\sqrt{3}}{3} c$$

由质速关系

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left[\frac{u}{c} \right]^2}}$$

得

$$m_0 = m \sqrt{1 - \left[\frac{u}{c} \right]^2} = 3 m_0 \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{6} m_0 = 2.45 m_0$$

所以得到复合粒子的动能

$$E_k = m c^2 - m_0 c^2 = 3 m_0 c^2 - 2.45 m_0 c^2 = 0.55 m_0 c^2$$

从上面的讨论还可以看出, 复合粒子的静止质量不等于 $2m_0$ (A、B 粒子的静止质量之和), 而比 $2m_0$ 大. 因此这是一个吸能的过程.

16.4 自测练习与能力训练

16.4.1 选择题

1. 宇宙飞船相对地面以速度 v 作匀速直线飞行, 某一时刻飞船头部的宇航员向飞船尾部发出一个光讯号, 经过 t (飞船上的钟) 时间后, 被尾部的接收器收到, 由此可知飞船的固有长度为 [] .

(A) $c \cdot t$

(B) $v \cdot t$

(C) $c \cdot t \cdot \sqrt{1 - \left[\frac{v}{c} \right]^2}$

(D) $\frac{c \cdot t}{\sqrt{1 - \left[\frac{v}{c} \right]^2}}$

2. 有两只对准的钟, 一只留在地面上, 另一只带到以速率 v 飞行着的飞船上, 则 [] .

(A) 飞船上的人看到自己的钟比地面上的钟慢

(B) 地面上的人看到自己的钟比飞船上的钟慢

(C) 飞船上的人觉得自己的钟比原来走慢了

(D) 地面上的人看到自己的钟比飞船上的钟快

3. 静止时边长为 1 m 的立方体, 当它沿与一边平行的方向以 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ 的速度相对观察者运动时, 观察者测得它的体积为 [] .

(A) 0.75 m^3

(B) 0.5 m^3

(C) 0.25 m^3

(D) 0.125 m^3

4. 远方的一颗星以 $0.8c$ 的速度离开我们, 接收到它辐射出来的闪光按 5 昼夜的周期变化, 则固定在此星上的参照系测得的闪光周期为 [] .

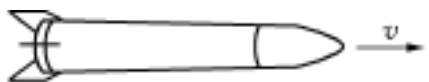
(A) 3 昼夜

(B) 4 昼夜

(C) 6.5 昼夜

(D) 8.3 昼夜

5. 如图 16-8 所示, 地面上的观察者认为同时发生的两个事件 A 和 B, 在火箭上的观察者看来应 [] .



(A) A 早于 B

(B) B 早于 A

(C) A、B 同时

(D) 条件不够, 不足以判别哪个事件发生在先

图 16-8

6. 一宇宙飞船以 $\frac{c}{2}$ 的速度相对于地面运动,

飞船中的人又以相对飞船为 $\frac{c}{2}$ 的速度向前发射一枚火箭, 则地面上的观察者测

得火箭速度为[] .

- (A) $\frac{c}{2}$ (B) c (C) $\frac{4}{5}c$ (D) $\frac{3}{5}c$

7. 设想从 S 系的坐标原点 O 沿 x 方向发射一光波, 在 S 系中测得光速 $u_x = c$, 则光对 S 系的速度 u_x 应为[] .

- (A) $\frac{2}{3}c$ (B) $\frac{4}{5}c$ (C) $\frac{1}{3}c$ (D) c

8. 粒子的动量为非相对论动量的两倍, 这时该粒子的速度为[] .

- (A) $\frac{1}{4}c$ (B) $\frac{1}{2}c$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ (D) $0.8c$

9. 把一个静止质量为 m_0 的粒子, 由静止加速到 $0.6c$ 需做的功是[] .

- (A) $0.25m_0c^2$ (B) $0.36m_0c^2$ (C) $1.25m_0c^2$ (D) $1.75m_0c^2$

10. 粒子在加速器中被加速到动能为其静止能量的 4 倍时, 其质量 m 与静止质量 m_0 的关系为[] .

- (A) $m = 4m_0$ (B) $m = 5m_0$ (C) $m = 6m_0$ (D) $m = 8m_0$

16.4.2 填充题

1. 爱因斯坦突破了经典力学的时空观, 提出了两个基本假设, 是_____原理和_____原理, 这两个基本原理是狭义相对论的出发点.

2. 从洛伦兹变换式可以看出, 在_____情况下, 洛伦兹变换就变成了伽利略变换. 可见伽利略变换是洛伦兹变换的一个特例. 从式中还可以看出, 当_____时, 洛伦兹变换失去意义. 所以相对论中指出了物体的速度不能超过真空中的光速.

3. 设想有一车厢以高速 c 运动. 在车厢正中间有一灯 S 发出一光信号, 从地面上的静止参照系测得光到达车厢两端 A 、 B 的先后次序是_____, 从随车厢一起运动的参照系测得光到达两端 A 、 B 的先后次序是_____, 由此可得出_____结论.

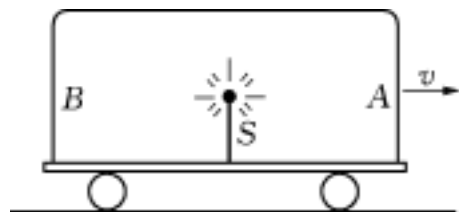


图 16-9

4. 宇宙飞船相对地球以 $0.8c$ 的速度匀速直线飞行, 一光脉冲从船尾传到船头. 若飞船上的观察者测得飞船长为 90 m , 地球上的观察者测得光脉冲从船尾出发到船头这两事件的空间间隔为_____, 时间间隔为_____.

5. $^+\pi$ 介子的静止质量是 $2.49 \times 10^{-28}\text{ kg}$, 固有寿命是 $2.6 \times 10^{-8}\text{ s}$. 速度为光速的 60% 的 $^+\pi$ 介子质量是_____, 寿命是_____.

6. 一长为 $L = 5 \text{ m}$ 的棒静止在 S 系中, 棒与 x 轴成 30° 角. S 系以 $v = \frac{c}{2}$ 相对 k 系运动, 则在 S 系的观察者测得此棒的长度约为_____, 与 x 轴的夹角约为_____.

7. 匀质细棒静止时的质量为 m_0 , 长度为 l . 当它沿棒长度方向作高速运动时, 测得它的长为 l , 那么该棒的运动速度 $v =$ _____, 该棒所具有的动能 $E_k =$ _____.

8. 观察者甲以 $0.8c$ 的速度相对于静止的观察者乙运动, 若甲携带一质量为 1 kg 的物体, 则甲测得此物体的总能量为_____; 乙测得此物体的总能量为_____.

9. 粒子的静能量为 E_0 , 当它高速运动时, 其总能量为 E . 已知 $E_0/E = 4/5$, 那么, 此粒子运动的速率 v 与真空中光速 c 之比 $v/c =$ _____; 其动能 E_k 与总能量 E 之比 $E_k/E =$ _____.

10. 两个静质量 m_0 相同的质点进行碰撞. 已知碰撞前一个质点具有能量 E_1 , 另一个质点静止; 碰撞后两个质点具有相同的能量 E , 并具有数值相同的偏向角. 则用 E 、 m_0 表示每个质点的相对论动量为_____, 偏角为_____.

16.4.3 计算题

1. 在地面上 A 处发射一炮弹后经 $4 \times 10^{-6} \text{ s}$ 在 B 处又发射一炮弹, A 、 B 相距 800 m . 问: 在什么样的参照系中将测得上述两个事件发生在同一地点? 试找出一个参照系, 在其中测得上述两个事件同时发生.

2. 一火箭相对地面以 $v = 0.6c$ 匀速向上飞离地球. 在火箭发射 10 s 钟后 (火箭上的钟计时), 其向地面发射一导弹, 导弹相对地面速度为 $0.3c$. 问从地球上的钟看, 火箭发射后多长时间, 导弹到达地面?

3. 两枚固有长度均为 20 m 的火箭 A 、 B , 各以相对地球 $v_A = \frac{2}{3}c$, $v_B = \frac{3}{5}c$ 的速率朝相反方向匀速飞行. 求: 分别用伽利略变换和洛伦兹变换计算两枚火箭的相对速度; 在 A 上测量 B 为多少?

4. 设快速运动的介子的能量约为 3000 MeV , 而这种介子在静止时的能量 $E_0 = 1000 \text{ MeV}$. 若这种介子的固有寿命是 $\tau_0 = 2 \times 10^{-6} \text{ s}$, 求它运动的距离. (真空中光速 $c = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$)

* 5. 固定在 S 系的 x 轴上的两只同步钟 A 、 B 相距 $3 \times 10^7 \text{ m}$, 固定在 S 系的 x 轴上的两只同步钟为 A' 、 B' . 如图 16-10 所示. S' 系以 $\frac{3}{5}c$ 的速度沿 x 轴正向运动. 在某一时刻, 在 S 系中观察 A 与 A' 钟、 B 与 B' 钟同时相遇, 且此时 A 与

A 钟同时指零,求

(1) 在 S 系中观察,此时刻 B 和 B 钟的示值各是多少?

(2) 在 S 系中观察, A 和 A 钟相遇时, B 和 B 钟的示值各是多少?

(3) 在 A 与 B 钟相遇时,在 S 系中观察到 A 和 B 钟的示值各是多少?

(4) 在 A 和 B 钟相遇时,在 S 系中观察到 A 和 B 钟的示值各是多少?

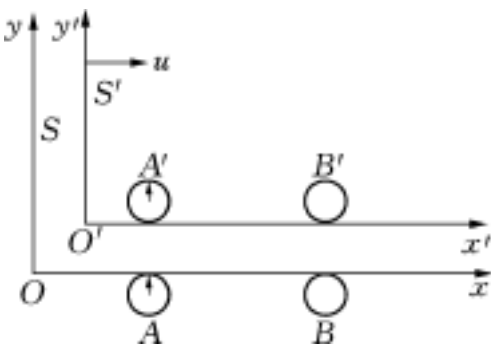


图 16-10

* 6 . 已知两质点 A、B 的静止质量均为 m_0 , 若质点 A 静止, 质点 B 以 $6m_0c$ 的动能向 A 运动, 碰撞后合成一个粒子, 若无能量释放 求: 合成粒子的静止质量 .

习题选解

[选择题 5] 取地面为 S 系, 火箭为 S' 系. x 和 x' 轴的正方向沿火箭速度方向. 根据洛伦兹变换, 火箭上观察者与地面上观察者测得 A、B 两事件的时间间隔的关系为

$$t_B - t_A = \frac{t_B' - t_A' - \frac{v}{c^2}(x_B' - x_A')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

因地面观察者测得 A、B 事件同时发生, 所以有

$$t_A = t_B$$

把 $t_A - t_B = 0$ 代入上式得

$$t_B - t_A = - \frac{\frac{v}{c^2}(x_B' - x_A')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

由图 16-8, 可看出 $x_B' > x_A'$, 因此

$$t_B - t_A < 0$$

即 $t_B < t_A$, 由此得出, 火箭观察者测得事件 B 先发生, 因此本题结论(B)是正确的 .

[填充题 4] 设地面为 S 系, 飞船为 S' 系, 光脉冲从船尾发出为事件 1, 光传到船头为事件 2. 因飞船上观察者相对飞船静止, 他测得事件 2 与事件 1 的空间

间隔就是飞船的静止长度 即

$$x_2 - x_1 = l_0$$

测得事件 2 与事件 1 的时间间隔

$$t_2 - t_1 = \frac{l_0}{c}$$

式中 c 为光速 .

根据洛仑兹变换,地面观察者测得事件 2 和事件 1 的空间间隔

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \frac{x_2 - x_1 + v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l_0 + 0.8c \times \frac{l_0}{c}}{0.6} \\ &= 270(\text{m}) \end{aligned}$$

时间间隔

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= \frac{t_2 - t_1 + \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{l_0}{c} + \frac{0.8c}{c^2} l_0}{0.6} \\ &= 9 \times 10^{-7} \text{ s} \end{aligned}$$

事件 2 和事件 1 的时间间隔还可以用

$$t_2 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{c} = \frac{270}{3 \times 10^8} = 9 \times 10^{-7} \text{ s}$$

来求,得到的结果是相同的.因为两事件的空间间隔除以两事件传递的速度,就是两事件经历的时间 这样做是最方便的.

[填充题 10]利用 $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$, 考虑到碰撞前后两个质点的能量守恒, 即 $E_1^2 + m_0^2 c^2 = 2E$, 联立两式, 计算可得碰撞后每个质点的动量为

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{(E_1 + m_0 c^2)^2}{4} - m_0^2 c^4} \\ &= \frac{1}{2c} \sqrt{E_1^2 + 2m_0 E_1 c^2 - 3m_0^2 c^4} \end{aligned}$$

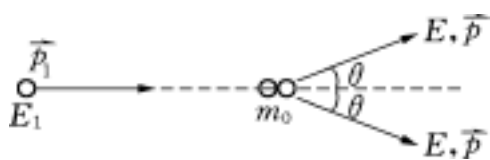


图 16-11

利用上述结果,以及 $p_1 = \frac{1}{c} \sqrt{E_1^2 - m_0^2 c^4}$, 由碰撞前后两个质点的动量守恒关系,如图 16-11 所示,可以得到

$$p_1 = 2 p \cos$$

即

$$\frac{1}{c} \sqrt{E_1^2 - m_0^2 c^4} = \frac{1}{c} \sqrt{E_1^2 + 2 m_0 E_1 c^2 - 3 m_0^2 c^4} \cos$$

所以得

$$\begin{aligned} \sin &= \sqrt{1 - \cos^2} \\ &= \sqrt{\frac{2 m_0 c^2 (E_1 - m_0 c^2)}{E_1^2 + 2 m_0 E_1 c^2 - 3 m_0^2 c^4}} \\ &= \sqrt{\frac{2 m_0 c^2}{E_1 + 3 m_0 c^2}} \end{aligned}$$

[计算题 5](1) 首先要明确, 一个钟在某一时刻的示值在任何参照系中看都是相同的, 故从 S 系中是可以看 B 的示值的.

在 S 系中观察, B 与 A 同步, 故 B 示值为零. 根据洛伦兹变换有

$$t = \frac{t - \frac{u}{c^2} x}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

因

$$t = 0$$

故有

$$t_A - t_B = \frac{-\frac{u}{c^2} x}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} = -0.075(\text{s})$$

B 钟的示值为 $t_B = -7.50 \times 10^{-2} \text{ s}$, 即认为 A 、 B 不同步.

(2) 在 S 系中观察, B 与 A 同步, 故 B 示值为零.

因

$$t = \frac{t - \frac{u}{c^2} x}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

其中

$$t = 0$$

故有

$$t = t_B - t_A = \frac{u}{c^2} x = 0.06(\text{s})$$

B 钟的示值为 $t_B = 6.00 \times 10^{-2} \text{ s}$, 即认为 A 、 B 不同步.

(3) 在 S 系中观察, A 移动距离 $x = 3 \times 10^7 \text{ m}$, B 钟走过的时间为

$$t_B = t_B - t_{B_0} = \frac{x}{u} = 0.167 \text{ s}$$

B 钟的示值为 $t_B = 0.167 \text{ s}$.

在 S 系中 A 移动的距离 $x = x \sqrt{1 - \left[\frac{u}{c}\right]^2}$, 则 A 钟走过的时间为

$$t_A = t_A - t_{A_0} = \frac{x}{u} = 0.133(\text{s})$$

即 A 钟的示值为 $t_A = 0.133 \text{ s}$.

(4) 在 S 系中观察, B 钟移动距离为 x , 此过程中 A 钟走过的时间为

$$\begin{aligned} t_A &= \frac{x}{u} \\ &= \frac{x \sqrt{1 - \left[\frac{u}{c}\right]^2}}{u} = 0.133(\text{s}) \end{aligned}$$

则 A 钟的示值为

$$t_A = 0.133(\text{s})$$

在 S 系中 B 钟与 A 钟同步, 故 B 钟的示值也是 0.133 s .

在 A 钟与 B 钟相遇的同时, A 、 B 两钟示值之差为 $t = t_A - t_B$, 可根据洛伦兹变换求出:

$$t = \frac{t - \frac{u}{c^2} x}{\sqrt{1 - \left[\frac{u}{c}\right]^2}}$$

因为

$$t = 0, \quad x = -3 \times 10^7 (\text{m})$$

所以

$$t = \frac{u}{c^2} x = -6 \times 10^{-2} (\text{s})$$

$$t_A = t_B - t = 0.167 - 0.06 = 0.107(\text{s})$$

[计算题 6] 二粒子的能量分别为

$$E_A = m_0 c^2$$

$$E_B = E_{0B} + E_{KB} = m_0 c^2 + 6 m_0 c^2 = 7 m_0 c^2$$

由能量守恒定律, 合成后粒子的总能量

$$E = E_A + E_B = 8 m_0 c^2$$

根据相对论质量与能量关系

$$E = Mc^2$$

所以

$$M = 8m_0$$

粒子的静止质量

$$M_0 = M \sqrt{1 - \left[\frac{v}{c}\right]^2} = 8m_0 \sqrt{1 - \left[\frac{v}{c}\right]^2}$$

现在的关键问题是求复合粒子的速度 $v = ?$

由动量守恒定律

$$p = p_B + p_A$$

由题意

$$p_A = 0$$

所以有

$$p = p_B = Mv, \quad v = \frac{p_B}{M}$$

根据相对论能量与动量关系

$$E_B^2 = p_B^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

即

$$49m_0^2 c^4 = p_B^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

$$p_B^2 = 48m_0^2 c^2$$

则

$$v^2 = \frac{p_B^2}{M^2} = \frac{48m_0^2 c^2}{64m_0^2} = \frac{3}{4} c^2$$

代入得

$$M_0 = 8m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 4m_0$$

17.1 基本要求与复习框图

1. 基本要求

(1) 了解热辐射现象,了解基尔霍夫定律及黑体辐射的两个实验定律 理解普朗克的量子假设及其重要意义.

(2) 掌握光电效应和康普顿效应的实验规律,以及爱因斯坦光子理论对这两个效应的解释,理解光的波粒二象性.

(3) 了解氢原子光谱实验规律以及玻尔氢原子理论,掌握氢原子的模型和发光图像.

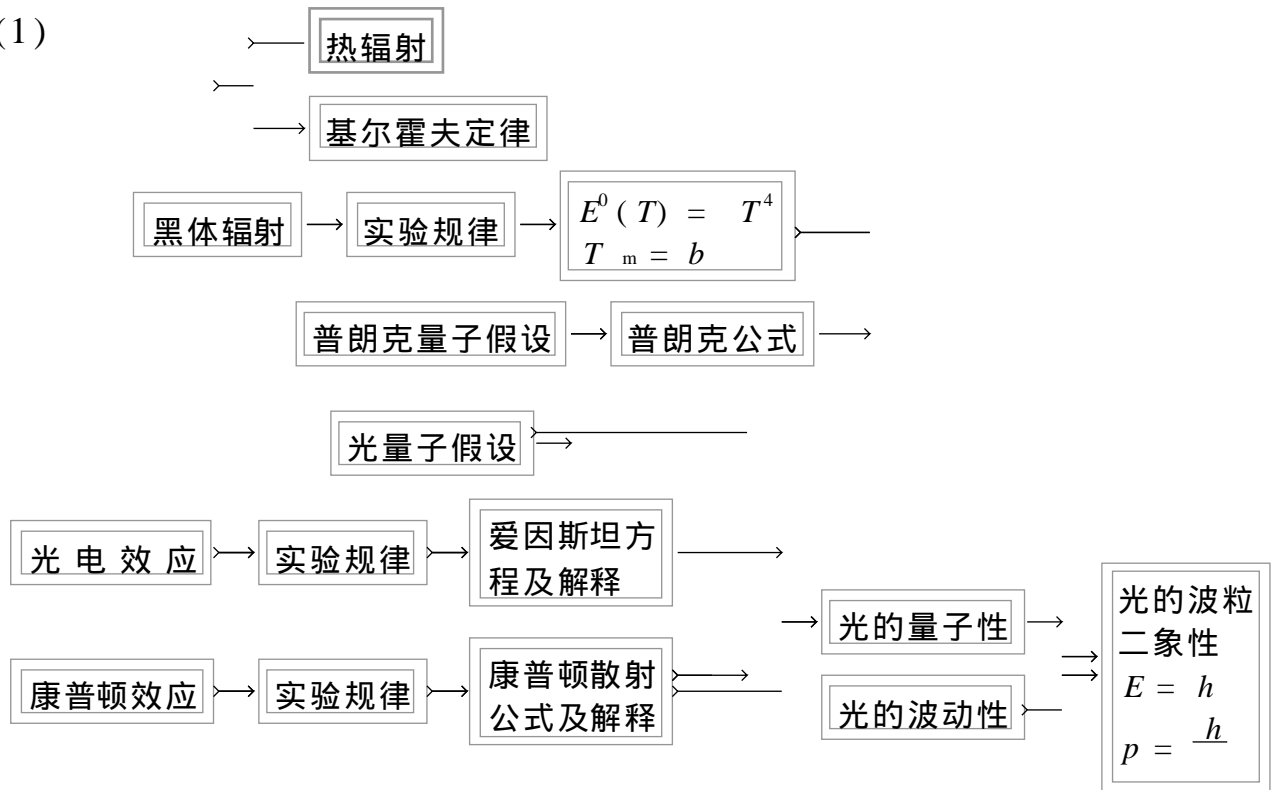
(4) 了解德布罗意的物质波假设;理解实物粒子的波粒二象性;能利用德布罗意关系式计算实物粒子的波长,理解描述物质波动性的物理量(波长、频率)和粒子性的物理量(动量、能量)间的关系.

(5) 理解测不准关系的物理意义;了解波函数及其统计假设,了解波函数的标准化条件,了解一维定态薛定谔方程.

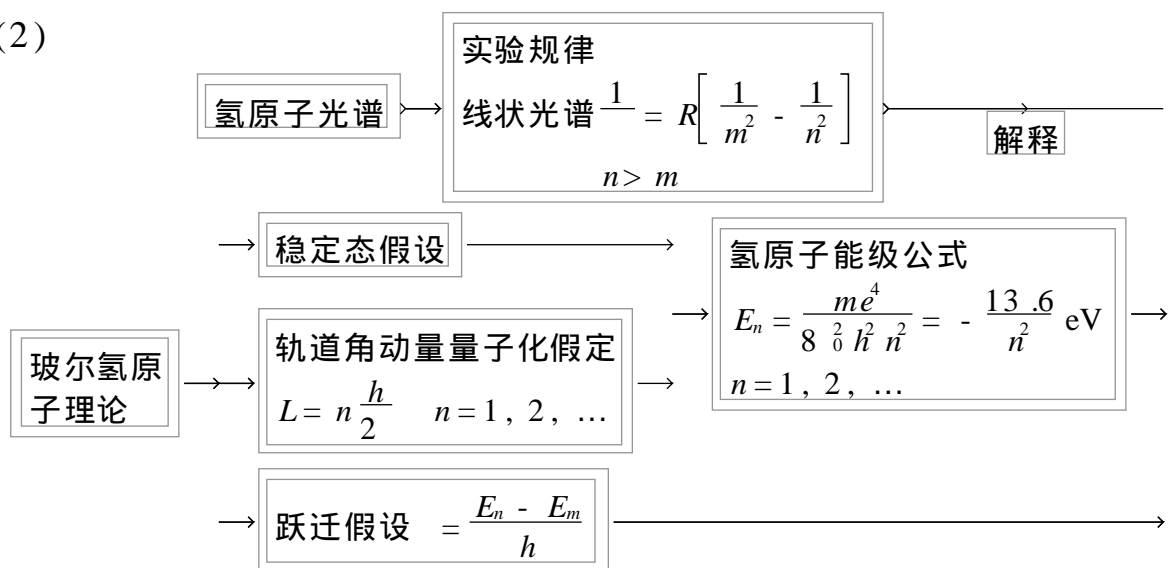
2. 复习框图

本章的学习过程中要掌握这样一条线索:知道实验事实;了解经典物理理论与实验事实的矛盾;为解决矛盾,如何在原有理论的基础上,逐步提出新的量子化假设、新的观点、新的理论;这些新的假设、新的观点和新的理论在实践中进一步接受检验和证实,并不断完善.本章主要包括三部分内容,各部分内容的主要联系和复习框图如下:

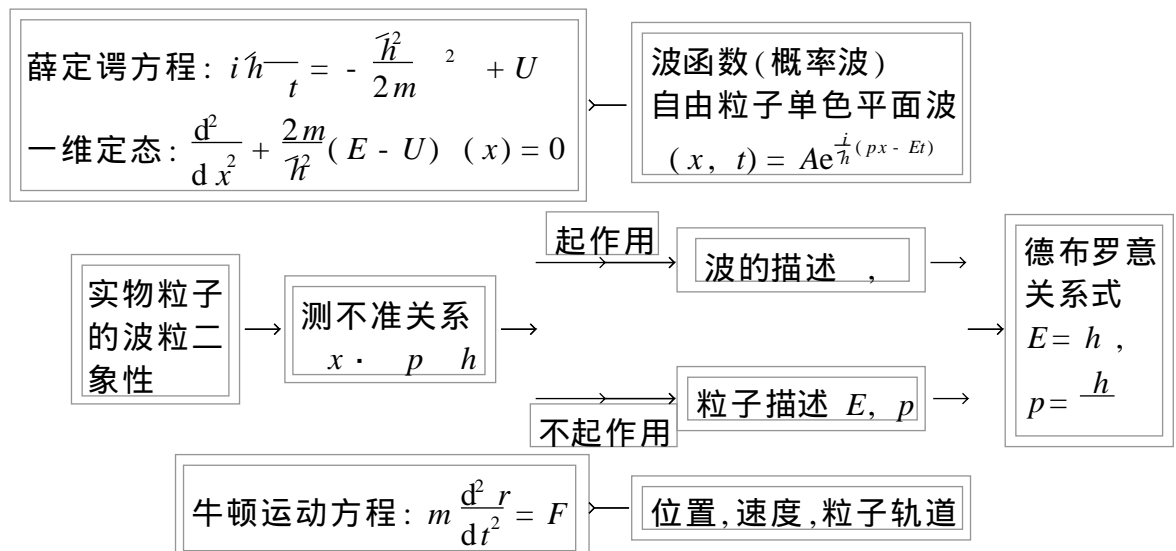
(1)



(2)



(3)



17.2 阅读指导与问题讨论

1. 关于基尔霍夫定律与黑体辐射概念的理解

基尔霍夫定律告诉我们,任何物体的单色辐射本领 $e(\lambda, T)$ 与吸收本领 $a(\lambda, T)$ 之比是一个关于 (λ, T) 的相同函数,与材料自身性质无关.绝对黑体是吸收本领恒等于 1 ($a_0(\lambda, T) = 1$) 的理想模型.假设其单色辐射本领 $e_0(\lambda, T)$, 则基尔霍夫定律可表示为:

$$\frac{e(\lambda, T)}{a(\lambda, T)} = \frac{e_0(\lambda, T)}{a_0(\lambda, T)} = e_0(\lambda, T)$$

基尔霍夫定律说明:物体对某种波长是好的吸收体,一定也是好的辐射体.黑体的吸收本领等于一,表明它不反射由外界辐射来的能量,但它自身要辐射能量,它的颜色是由它自身发射的辐射频率所决定.

[问题 17-1] 一块不透明的物体在太阳光下是蓝色,如果加高它的温度并放置于黑暗处,它将显出什么颜色?

[解答] 物体在太阳光下呈现蓝色说明它不吸收蓝色光,而把蓝色光反射出来.根据基尔霍夫定律,该物体不吸收蓝色光,则一定不辐射出蓝色光,所以当加高温度并放置于黑暗处时,它将辐射出除蓝光以外的其他颜色的光.

[问题 17-2] 绝对黑体是否在任何温度下都是黑色的?黑色的物体是否都是黑体?

[解答] 绝对黑体是指对投射于其上的所有外界辐射能量都不反射而全部吸收.但绝对黑体自身要向外界辐射能量,它的颜色是由它自身辐射的频率所决定的.如果黑体温度很低,则它辐射的能量很少,辐射的峰值波长会远大于可见光波长,呈现黑色;如果黑体的温度升高,辐射能量增大,升高到一定温度时,辐射的峰值波长处于可见光波段范围内,就会呈现各种颜色.所以绝对黑体并不总是黑色的,如炼钢炉炉门上的小孔可近似为黑体,在高温下该小孔看上去就十分明亮.

至于呈黑色的物体,由于它的单色吸收本领并不恒等于 1,或者说它的单色反射本领并不是恒为零,所以一般不能称为黑体.

[问题 17-3] 绝对黑体对任何波长的入射辐射能都全部吸收,那么在太阳光的照射下,绝对黑体的温度能否无限制地升高?

[解答] 在太阳光照射下,绝对黑体的温度不会无限制升高.由基尔霍夫定律可知:对某种波长的辐射吸收强烈的物体,对这种波长的辐射本领也大.因此,太阳光照射下的黑体一方面吸收辐射能使其温度升高,另一方面其自身向外辐射的能量也增大.当黑体的温度低于周围物体温度时,它吸收能量的速度大于辐射能量的速度,当温度升高到某一值时,辐射能量的速度等于吸收能量的速度,则温度不再升高,黑体与周围环境处于热平衡状态.

[问题 17-4] 有两个同样的物体,一个黑色,一个白色,且温度也相同,把它们放在高温的环境中,哪

一个温度升高快?若放到低温的环境中,哪一个温度降低得较快.

[解答] 把它们放在高温环境中,物体吸收辐射能的速度大于发射辐射能的速度.因为黑色物体比白色物体吸收系数大,所以温度升高快.如把它们放在低温环境中,这时物体吸收辐射能的速度小于发射辐射能的速度,黑色物体比白色物体辐射本领大,所以黑色物体温度降低快.

2. 关于光电效应和康普顿效应实验规律的讨论,以及对光量子理论解释的理解

光电效应实验规律:金属表面被光照射后有光电子从表面逸出,主要实验现象为:(1)每一种金属都存在一特定的截止频率 ν_0 .当入射光频率大于 ν_0 时,才会有光电子逸出,若照射光频率小于 ν_0 ,则无论光强多大,照射时间多长,都不会有光电子逸出;(2)当入射光频率大于截止频率 ν_0 时,逸出光电子的初动能只随入射光的频率 ν 的增加而线性增加,与入射光强度无关;实验中,通过加反向电压,使光电流为0,对应的电压值称遏止电压 U_a ,通常用遏止电压来反映逸出光电子的最大初动能,有 $E_k = \frac{1}{2} m v_m^2 = eU_a$;(3)入射光频率一定时($\nu > \nu_0$),每秒从金属中逸出的光电子数与光强成正比;(4)从光照开始到光电子逸出,滞后时间不超过 10^{-9} s,即光电效应具有瞬时性.

康普顿效应实验规律:波长 λ_0 的单色X射线在散射物质(石墨)上产生散射,实验现象主要为: 散射光中除了和入射光波长 λ_0 相同的射线外,还有波长 $\lambda > \lambda_0$ 的射线; $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ 的值随散射角 θ 增大而增大; 对任何散射物质,同一散射角 θ 对应的波长偏移量 $\Delta\lambda$ 都相同.

爱因斯坦光子理论:光是以光速 c 运动的粒子流,这些粒子称为光子.对频率为 ν 的光,每个光子的能量为 $h\nu$,而光强 $I = Nh\nu$ (N 为单位时间通过垂直于光子运动方向的单位面积的光子数).光与物质相互作用时,光子只能作为一个整体被发射和吸收.

光子理论解释光电效应的物理过程为:金属中的电子吸收一个能量为 $h\nu$ 的光子而从金属中逸出,这一过程满足能量守恒定律,即爱因斯坦方程:

$$\frac{1}{2} m v_m^2 = h\nu - A$$

式中 v_m 为光电子逸出金属表面时的最大速度, A 为金属逸出功,红限频率 $\nu_0 = \frac{A}{h}$,对应截止波长 $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$.

由光子理论解释康普顿效应的物理过程为:频率 ν_0 的单色X射线,其光子能量 $h\nu_0$,与散射物质中束缚较松的自由电子发生完全弹性碰撞,这一过程满足

动量守恒定律和能量守恒定律.碰撞后电子获得反冲动能,而散射光子能量减少,频率降低, $\lambda > \lambda_0$, 故波长增大, $\nu < \nu_0$.由此得出康普顿散射公式

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta)$$

式中 θ 为散射角.

[问题 17-5] 某种金属,在一束绿光照射下刚能产生光电效应,用紫光或红光照射时,能否产生光电效应?若用红光不能产生光电效应,那么用透镜把红光聚焦到金属上,并经历长时间照射,能否产生光电效应?

[解答] 根据题意可知,这种金属产生光电效应的红限频率为 $\nu_{\text{绿}}$,即 $\nu_{\text{绿}} = \frac{A}{h}$.红光频率 $\nu_{\text{红}} < \frac{A}{h}$,所以不能产生光电效应,而紫光频率 $\nu_{\text{紫}} > \frac{A}{h}$,所以能发生光电效应.

要产生光电效应,必须使入射光子的能量 $h\nu$ 大于金属表面逸出功 A .由于 $\nu_{\text{红}} < \frac{A}{h}$,因此,不论聚焦光强有多大,也不论光照时间多长,都不能产生光电效应.

[问题 17-6] 图 17-1 中直线 AB ,表示光电子的初动能 E_k 和入射光频率 ν 的关系.问:(1) A 点对应的频率 a 表示什么?(2)对于不同的金属,直线 AB 的斜率是否相同?(3)若直线 AB 在 E_k 轴上截距为 $-b$,则 b 表示什么?

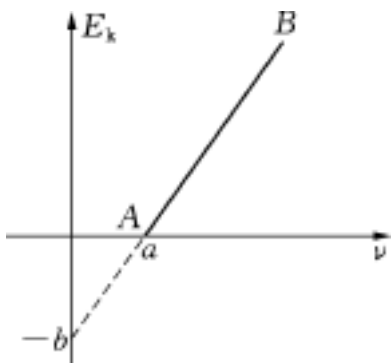


图 17-1

[解答] 由爱因斯坦光电效应方程

$$h\nu = E_k + A \quad \text{则} \quad E_k = h\nu - A \quad \text{可得}$$

(1) 对于 A 点, $E_k = 0$, 故 $h\nu = A$, A 点频率 $a = \frac{A}{h}$ 表示光电效应的红限频率.

(2) AB 直线的斜率 $k = h$, 是普朗克常数,与金属的种类无关.所以对不同的金属,直线 AB 的斜率是相同的,都为 h .

(3) 当 $\nu = 0$ 时, $E_k = -A$, 所以直线 AB 在 E_k 轴上截距的负值对应逸出功 A ,即 $b = A$.

[问题 17-7] 为什么康普顿效应中波长的改变量与散射物质的性质无关?

[解答] 因为康普顿散射可看作光子和散射物质中的自由电子的完全弹性碰撞.当一个光子和一个自由电子碰撞后,光子不仅改变了运动方向,而且还把一部分能量传给电子.这使散射后光子的能量变小,即频率减少或波长增加.在各种散射物质中,自由电子性质总是相同的,所以光子与自由电子碰撞后光子能量减少也相同,这使波长改变与散射物质的性质无关.

[问题 17-8] 为什么 X 射线通过散射物质时会发生康普顿效应,而可见光则没有?

[解答] 由于 X 射线光子(波长 $\lambda < 0.1 \text{ nm}$)的质量 $m = \frac{h\nu}{c^2}$ 与电子静止质量差别不大,而可见光光子的质量比电子静止质量小得多.因此,按弹性碰撞理论,可见光光子与自由电子碰撞后,光子能量不会转移给电子,即散射波长不会改变;而可见光光子与束缚电子发生碰撞,光子能量更不会转移给电子了.

也可由康普顿散射公式加以说明:

$$= \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta)$$

当式中 $\theta = \pi$ 时, 波长改变量最大, 这时

$$= \frac{2h}{m_0 c} = 4.86 \times 10^{-3} \text{ nm}$$

这个波长的改变量与可见光中最短的波长 $\lambda = 400 \text{ nm}$ 之比为 $\frac{1}{10^5}$, 这样小的波长改变量, 在实验中不能被观察到.

[问题 17-9] 光电效应与康普顿效应都包含电子与光子的相互作用过程, 为什么康普顿效应可视为光子和自由电子的完全弹性碰撞, 而光电效应则不能?

[解答] 实际上金属中的电子并不是完全自由的, 而是被束缚在金属表面内, 要离开金属表面需要克服金属表面原子的引力做功. 在光电效应中, 入射光为可见光, 光子的能量只有几个电子伏特, 与电子克服金属表面原子的引力场所需做的功相比, 数量级相同, 所以电子不能看作为自由的. 电子与光子的相互作用是非弹性碰撞, 能量守恒, 动量不守恒, 金属材料取走部分动量. 而在康普顿效应中, 入射 X 射线的波长很短, 其光子能量高达几十千电子伏特, 大大超过物质中原子对电子的束缚能量, 所以电子可看作自由的, 光子和电子的相互作用可以看为完全弹性碰撞, 满足动量守恒和能量守恒.

3. 关于波尔氢原子理论的理解和讨论

在玻尔三个基本假设(定态假设、量子化假设、跃迁假设)基础上导出的玻尔氢原子能级公式

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{m_e e^2}{8 \pi \epsilon_0 h^2} = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV} \quad n = 1, 2, \dots$$

及轨道半径

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2 n^2}{m_e e^2} = n^2 a$$

其中 $a = \frac{\epsilon_0 h^2}{m_e e^2}$ 为最小半径. 由能级公式及跃迁假设可得到氢原子光谱的波长公式为

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{m_e e^4}{8 \pi \epsilon_0 h^3 c} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right] \quad (n > m)$$

由此可成功地解释氢原子光谱的实验规律, 但该理论并不完善, 还没有完全跳出经典物理的框架, 其主要缺陷是将电子当作经典粒子处理, 应该说玻尔理论是由量子化条件加经典物理构成, 又称旧量子理论.

[问题 17-10] 为什么氢原子的能量是负值?

[解答] 因为电子绕核运动时, 所受到的核的引力 $F = \frac{1}{r^2}$, 如取无穷远处为势能的零点, 则势能总

是负的,并与 $\frac{1}{r}$ 成正比,又因电子以核的引力为向心力,所以动能的大小也与 $\frac{1}{r}$ 成正比,并为势能绝对值的一半,故氢原子总能量为负值.

[问题 17-11] 处于基态的氢原子的电离能是多少?电子在 $n = 2$ 能级上的电离能又是多少?

[解答] 把氢原子中处于基态的电子移到无限远处 ($n = \infty$) 所需的能量为氢原子的电离能.由氢原子能级公式 $E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}$ 可知,氢原子处于基态的能量 $E_1 = -13.6 \text{ eV}$,把电子移到无穷远时能量 $E = 0$,所以电离能为

$$E = E_{\infty} - E_1 = 0 - (-13.6 \text{ eV}) = 13.6 \text{ eV}$$

而氢原子在 $n = 2$ 能级时能量为 $E_2 = -\frac{13.6}{2^2} \text{ eV} = -3.4 \text{ eV}$,所以此时的电离能为

$$E = E_{\infty} - E_2 = 0 - (-3.4 \text{ eV}) = 3.4 \text{ eV}$$

[问题 17-12] 要使处于基态的氢原子受激后辐射可见光,则提供给氢原子的能量至少为多少?

[解答] 根据玻尔氢原子理论,氢原子辐射光谱的频率为 $\nu = \frac{E_n - E_m}{h} (m < n)$.不同 m 对应不同的谱线系: $m = 1$ 为莱曼系,落在紫外光波段; $m = 2$ 为巴尔末系,落在可见光波段;而 $m = 3$ 为帕邢系,在红外波段;.....因此,要使氢原子辐射可见光谱,应取 $m = 2$,而在巴尔末系中对应能级差最小的跃迁为 $n = 3, m = 2$.所以至少要把基态氢原子激发到 $n = 3$ 能级,才有可能辐射可见光谱,所需最小激发能为

$$E = E_3 - E_1 = -\frac{13.6}{3^2} \text{ eV} - (-13.6 \text{ eV}) = 12.09 \text{ eV}$$

[问题 17-13] 为什么说玻尔的轨道角动量量子化条件是普朗克关于谐振子能量量子化条件的推广?

[解答] 对谐振子振动的位移表示式为

$$x = A \cos \omega t$$

谐振子的速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \omega t$$

谐振子的动量

$$p = mv = -Am\omega \sin \omega t$$

谐振子振动一周期时,动量对位移的积分

$$\begin{aligned} p dx &= \int_0^T (-Am\omega \sin \omega t)(-A\omega \sin \omega t) dt \\ &= \int_0^T mA^2 \omega^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 T = E T \\ &\left[\frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \text{ 为谐振子能量} \right] \end{aligned}$$

根据普朗克的假定谐振子的能量

$$E = nh\nu$$

所以

$$pdx = nh$$

按照玻尔的原子理论,电子将沿着圆形轨道绕核运转,这种运动总可以分解为两个相互垂直的谐振动,因而与带电谐振子等效,所以对电子作圆周运动也有

$$pdl = nh$$

因电子作圆周运动

$$pdl = mvdL = 2\pi mv r = 2\pi L$$

即

$$2\pi L = nh$$

$$L = \frac{nh}{2\pi}$$

4. 关于物质波和薛定谔方程

[问题 17-14] 如何理解实物粒子的波动性? 实物粒子的德布罗意波与电磁波有何区别?

[解答] 德布罗意假设,任何实物粒子都具有波动性,都可以根据德布罗意关系式计算其波长和频率. 和实物粒子相联系的波称为物质波或德布罗意波,其波长称为德布罗意波长. 从统计观点来看,粒子在某处出现的概率与该处波的强度成正比,而强度又和波幅的平方成正比. 因此某处德布罗意波幅平方是与粒子在该处附近出现的概率成正比的,德布罗意波又称概率波. 这就是德布罗意波的统计解释,它把实物粒子的波动性与粒子性联系了起来. 概率波的数学表达式叫波函数,它是描述微观粒子运动状态的物理量,波函数模的平方即德布罗意波幅平方,等于粒子在某处单位体积内出现的概率.

德布罗意波与经典电磁波有本质的区别. 首先,经典电磁波表示电场强度矢量 E 和磁场强度矢量 H 的周期性变化在空间的传播过程. 而德布罗意波则是对实物粒子的统计描述,其波幅的平方只表示粒子出现的概率,它是概率波(或几率波).

其次,对电磁波 $E = E_0 \cos\left[2\pi\left(t - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$, 振幅 E_0 增加为 $2E_0$ 时,波的强度增加 4 倍,而德布罗意波,波函数可以任意地乘上一个常数,所得的结果仍然表示粒子的同一个运动状态. 因为对波函数来说,有意义的是其相对概率分布,所以从相对几率分布的角度来说, $\psi(x)$ 与 $c\psi(x)$ 是等价的.

[问题 17-15] 为什么在经典力学中考虑粒子的运动规律时,都不用考虑其波动性?

[解答] 按德布罗意关系式,可算出一颗质量为 10 g、速度为 $v = 500 \text{ m/s}$ 的子弹的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 1.32 \times 10^{-34} \text{ (m)}$$

由此可见,宏观粒子的德布罗意波长很小,而粒子活动的范围与波长相比较要大得多,所以不能显出波动性.

[问题 17-16] 粒子 a 、 b 的波函数分别如图 17-2 所示,若用位置和动量描述它们的运动状态,两者中哪一粒子位置不确定量较大? 哪一粒子的动量不确定量较大? 为什么?



图 17-2

[解答] 由图 17-2 可知, a 粒子的波列长度大,其位置的不

确定量较大 由测不准关系式

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$$

可知, a 粒子动量不确定量较小, 而 b 粒子的波列长度小, 则位置不确定量较小, 动量不确定量较大.

17.3 解题方法与典型例题

1. 利用黑体辐射实验定律计算物体表面温度

由斯特藩-玻耳兹曼定律: $E^0 = T^4$, 维恩位移定律: $\lambda_m T = b$, 可以估算一些星体的表面温度及总辐射本领.

[例 17-1] 在加热黑体过程中, 其最大单色辐射本领的波长由 $0.8 \mu\text{m}$ 变到 $0.4 \mu\text{m}$, 则其总辐射本领增加了几倍?

[解] 最大单色辐射本领的波长是指峰值波长 λ_m . 由于黑体加热过程中, 最大单色辐射本领的波长由 $0.8 \mu\text{m}$ 变到 $0.4 \mu\text{m}$, 相应的温度由 T_1 增加到 T_2 . 由维恩位移定律 $\lambda_m T = \text{常量}$, 可知

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}} = \frac{0.8}{0.4} = 2$$

根据斯特藩-玻耳兹曼定律总辐射本领 $E^0(T) = T^4$ 知

$$\frac{E_2^0}{E_1^0} = \left[\frac{T_2}{T_1} \right]^4 = 2^4 = 16$$

即总辐射本领 E^0 增大为原来的 16 倍.

[例 17-2] 从太阳射到地球表面的辐射能, 每平方厘米每分钟约为 8.36 J , 设太阳到地球的距离 $R = 1.5 \times 10^8 \text{ km}$, 太阳半径 $r = 6.9 \times 10^5 \text{ km}$, 若把太阳看成黑体, 试求太阳的表面温度.

[解] 设太阳的辐射本领为 E_1 , 而在地球表面上单位时间的单位面积上接受到的辐射能为 E_2 , 如能量传播时无损失, 则

$$E_1 4\pi r^2 = E_2 4\pi R^2$$

解得

$$E_1 = E_2 \frac{R^2}{r^2}$$

由斯特藩-玻耳兹曼定律得太阳表面的温度

$$\begin{aligned} T_1 &= \sqrt[4]{E_1} = \sqrt[4]{\left[\frac{R}{r} \right]^2 E_2} \\ &= \sqrt[4]{\left[\frac{1.500 \times 10^8}{6.9 \times 10^5} \right]^2 \frac{8.36 \times 10^4}{60 \times 5.71 \times 10^{-8}}} \\ &= 5841(\text{K}) \end{aligned}$$

2. 光电效应及康普顿效应的计算

(1) 光电效应的计算问题通常有两类: 一是根据爱因斯坦方程

$h = A + \frac{1}{2}mv^2$, 由已知条件求解金属产生光电效应的红限频率 ν_0 、截止电压 U_a 或逸出光电子最大动能等物理量; 二是根据光电效应实验曲线 $E_k - \nu$ 或 $i - \nu$ 曲线, 结合爱因斯坦方程, 判断上述各物理量之间的关系.

[例 17-3] 用波长为 350 nm 的光照射某种金属的表面, 我们选择一定的遏止电压来“截止”光电流. 当光的波长变化 50 nm 时, 为使光电流再次完全中止, 遏止电压必须增加 0.59 V, 若已知普朗克常数, 试求电子的电量.

[解] 由爱因斯坦公式

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + A$$

又因 $\frac{1}{2}mv^2 = eU_a$, (U_a 为遏止电压)

所以有 $h\nu = eU_a + A$ 或 $h\frac{c}{\lambda} = eU_a + A$

如照射光的波长变为 λ' , 则有

$$h\frac{c}{\lambda'} = eU_a' + A$$

联立上述两方程

$$\left. \begin{aligned} h\frac{c}{\lambda} &= eU_a + A \\ h\frac{c}{\lambda'} &= eU_a' + A \end{aligned} \right\}$$

得 $hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = e(U_a' - U_a)$

所以电子电量

$$\begin{aligned} e &= hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) \frac{1}{U_a' - U_a} = hc \frac{\lambda' - \lambda}{(\lambda\lambda')(U_a' - U_a)} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \times 5 \times 10^{-8}}{3.5 \times 10^{-7} \times 3 \times 10^{-7} \times 0.59} = 1.605 \times 10^{-19} \text{ (C)} \end{aligned}$$

[例 17-4] 以一定频率的单色光照射某金属, 测得其光电流的 $i \sim U$ 曲线如图 17-3 中实线所示. 然后在光强不变的条件下增大照射光的频率, 测得 $i \sim U$ 曲线如图 17-3 中虚线所示. 问 17-3 图满足题意的图是哪个?

[解] 由爱因斯坦光电效应方程

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + A$$

且 $eU_a = \frac{1}{2}mv^2$, U_a 为遏止电压. 因为金属的逸出功 A 不变, 所以增大照射光频率 ν , 逸出光电子的动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 将增加, 则遏止电压 U_a 增大. 由此分析可以判断图 17-3 中的 (c) 图是错误的.

图 17-3 中虚线对应的是光强不变频率增大的情况. 若照射光子数为 N , 则照射光强度 $I = Nh\nu$. 设 N_1 、

N_2 分别为实线、虚线所对应的照射光光子数,则根据题意: $N_1 h \nu_1 = N_2 h \nu_2$, 因 $\nu_1 < \nu_2$, 所以有 $N_1 > N_2$, 即虚线情况对应照射光光子数少, 则逸出光电子数少, 光电流强度 i 减小 由此得出图(d)满足题意.

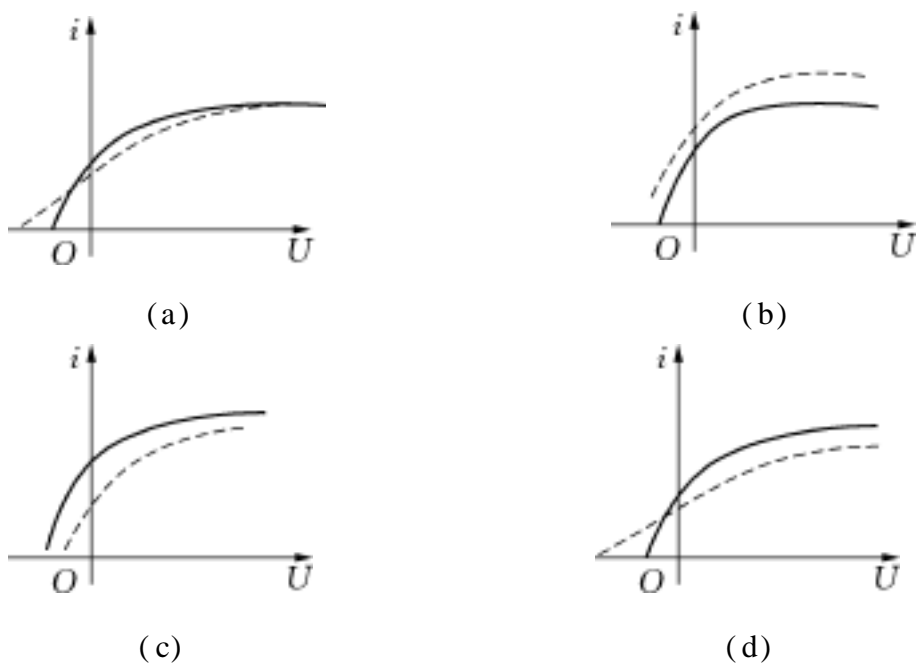


图 17-3

(2) 康普顿效应的计算通常也有两类问题: 一是根据康普顿散射公式 $\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta)$ 计算散射 X 射线波长或散射角; 二是运用能量守恒和动量守恒条件计算康普顿散射过程中反冲电子的动能、动量及运动方向.

[例 17-5] 设康普顿效应中入射 X 射线(伦琴射线)的波长 $\lambda_0 = 0.0700 \text{ nm}$, 散射的 X 射线的波长 $\lambda = 0.0720 \text{ nm}$, 且散射的 X 射线与入射的 X 射线垂直 求: (1)反冲电子的动能 E_k ; (2)反冲电子运动的方向与入射的 X 射线之间的夹角 φ .

[解] 设 p_0 , ν_0 和 p , ν 分别为入射与散射光子的动量和频率, mv 为反冲电子的动量(如图 17-4 所示) 由康普顿散射公式

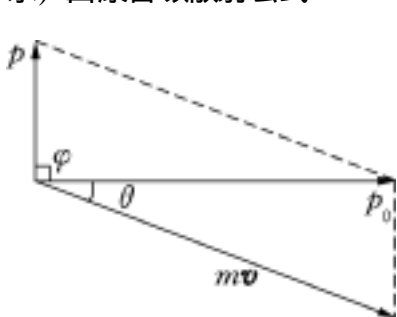


图 17-4

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

因为入射 X 射线与散射 X 射线垂直, 即 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 所以散射 X 射线的波长为

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{m_e c}$$

(1) 根据能量守恒定律

$$m_e c^2 + h \nu_0 = m_e c^2 + h \nu$$

且反冲电子的动能 $E_k = m c^2 - m_e c^2$

所以
$$E_k = h \nu_0 - h \nu = hc \left[\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= 6.626 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \times \left[\frac{0.0720 - 0.0700}{0.0720 \times 0.0700} \times 10^9 \right] \\
 &= 7.89 \times 10^{-17} \text{ J}
 \end{aligned}$$

(2) 根据动量守恒定律

$$p_0 = p + mv$$

由题图知

$$\tan \theta = \frac{p}{p_0} = \frac{h\nu}{h\nu_0} = \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{0.0700}{0.0720} = 0.972$$

所以 $\theta = 44.2^\circ$

[例 17-6] 在康普顿散射中,传递给电子的最大能量为 45 keV,求入射光子的波长.

[解] 传给电子的能量为入射光子和散射光子的能量差,即

$$E = h\nu - h\nu' = 45 \text{ keV}$$

又因这时电子得到的能量是最大能量,所以散射角为 $\theta = \pi$ 从

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

可看出 $\theta = \pi$ 时, $\Delta\lambda$ 最大,其值为

$$\frac{2h}{m_e c} = 4.86 \times 10^{-3} \text{ (nm)}$$

联立 $h\nu - h\nu' = E$ 和 $\Delta\lambda = \frac{2h}{m_e c}$, 得

$$hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) = E$$

解出

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{4hc}{E}} - 1 \right] \\
 &= 0.0243 \left[\sqrt{1 + \frac{4 \times 6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1.6 \times 10^{-16} \times 45 \times 4.86 \times 10^{-12}}} - 1 \right] \\
 &= 9.39 \times 10^{-3} \text{ (nm)}
 \end{aligned}$$

3. 关于氢原子光谱规律及玻尔氢原子理论的应用

[例 17-7] 设大量氢原子处于 $n = 4$ 的激发态,它们跃迁时发射出一簇光谱线. 这簇光谱线最多可能有几条,哪些是可见光谱线,其中最短波长是多少?

[解] 根据玻尔氢原子理论的频率条件

$$h\nu = E_n - E_m$$

当 $n = 4$, m 可取 1、2、3,可发射 3 条谱线;

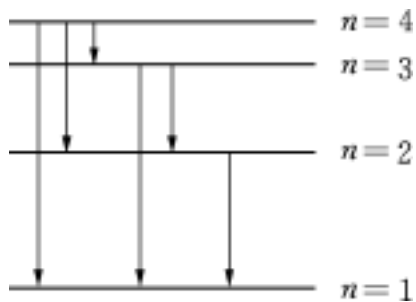


图 17-5

当 $n = 3$, m 可取 1、2, 可发射 2 条谱线;

当 $n = 2$, m 取 1, 发射 1 条谱线.

因此这簇光谱线中共有 6 条谱线, 如图 17-5 所示.

从 $n > 2$ 向 $m = 2$ 的跃迁发射的是可见光谱线 故上述 6 条谱线中, 从 $n = 3 \rightarrow 2$ 和 $n = 4 \rightarrow 2$ 的跃迁谱线为可见光谱线.

而从 $n = 4$ 能级向基态 ($n = 1$) 能级的跃迁发出的光谱线频率最大, 故波长最短. 由氢原子能级公式可得:

$$E_4 = -\frac{13.6}{4^2} \text{ eV} = -0.85 \text{ eV}, \quad E_1 = -13.6 \text{ eV}$$

则最短波长为

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} &= \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{E_4 - E_1} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{[-0.85 - (-13.6)] \times 1.6 \times 10^{-19}} = 0.975 \times 10^{-7} \text{ m} \end{aligned}$$

[例 17-8] 氢原子处于结合能为 0.85 eV 的一个定态中, 它由这个定态跃迁到另一个定态, 该态的激发能为 10.2 eV (即该态与基态之间的能量差), (1) 试求所发射光子的能量. (2) 试把这种跃迁表示在氢原子的能级图上, 并标明对应的量子数.

[解] (1) 初态的结合能 $E_{\text{结}} = E - E_{\text{初}}$, 所以有

$$E_{\text{初}} = -E_{\text{结}} = -0.85 \text{ eV}$$

末态的激发能 $E = E_{\text{末}} - E_1$ (E_1 为氢原子基态的能量), 所以有

$$E_{\text{末}} = E + E_1 = 10.2 - 13.6 = -3.4 \text{ eV}$$

发出光子的能量

$$E = E_{\text{末}} - E_{\text{初}} = -2.55 \text{ eV}$$

(2) 由氢原子的能量公式 $E_n = -\frac{13.6}{n^2}$, 可知

$$E_{\text{初}} = -0.85 \text{ eV} \quad \text{对应的量子数 } n = 4$$

$$E_{\text{末}} = -3.4 \text{ eV} \quad \text{对应的量子数 } n = 2$$

[例 17-9] 一个电子离开一个质子相当远, 如果这个电子以 2 eV 的动能向着质子运动, 并被质子所束缚, 形成一个基态氢原子, 求发出光的波长是多少?

[解] 电子原来是自由的, 具有动能 2 eV, 被质子束缚后形成基态氢原子, 电子能量变为 -13.6 eV, 其能量减少为

$$E = 2 - (-13.6) = 15.6 \text{ (eV)}$$

因此所发出的光子的波长

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{hc}{E} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{15.6 \times 1.6 \times 10^{-19}} \\ &= 7.97 \times 10^{-8} \text{ (m)} \end{aligned}$$

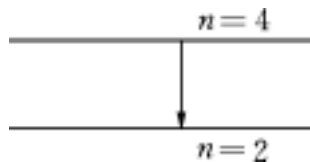


图 17-6

4. 关于物质波与薛定谔方程

这部分内容主要有以下三类问题：德布罗意波长的理解和计算；不确定关系的应用；波函数的统计解释及归一化条件的应用。

[例 17-10] 能量为 15 eV 的光子被氢原子中的基态电子吸收而形成一光电子，求该光电子远离原子核时的速度及德布罗意波长。

[解] 光子的能量一部分用于基态氢原子的电离(电离能为 13.6 eV)，余下部分则为光电子的动能，即 $E_k = (15 - 13.6)\text{eV} = 1.4\text{eV}$ 所以光电子的速度为

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.4 \times 1.6 \times 10^{-19}}{9.1 \times 10^{-31}}} = 7.02 \times 10^5 (\text{m/s})$$

其德布罗意波长为 $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{9.1 \times 10^{-31} \times 7.02 \times 10^5} = 1.04 \times 10^{-9} (\text{m})$

[例 17-11] 已知原子核的半径为 10^{-15}m ，试用不确定关系证明原子核不存在电子。

[解] 若电子可能存在于原子核中，则 x 至多取 10^{-15}m ，由不确定关系 $x \cdot p \geq \frac{h}{4}$ ，可得

$$x \cdot v \geq \frac{h}{4m} = 5.8 \times 10^{-5} (\text{m/s})$$

$$v \geq 5.8 \times 10^{10} (\text{m/s})$$

显然上述结果是不能存在的，所以电子不能存在于原子核中。

[例 17-12] 一粒子沿 x 轴方向运动，其波函数为

$$\psi(x) = \frac{A}{1 + ix}$$

(1) 将此波函数归一化；(2) 粒子在 $x = 1$ 处的概率密度是多少？(3) 粒子在何处出现的概率最大，概率密度是多少？

[解] (1) 根据题意，粒子沿 x 轴方向作一维运动，故其波函数归一化条件为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = 1$$

由已知波函数得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \cdot \psi^*(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{1 + x^2} dx \\ &= A^2 \cdot \arctan x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = A^2 \cdot \pi \end{aligned}$$

令上式等于 1，可得 $A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ，所以归一化波函数为

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{1 + ix}$$

(2) 粒子在 x 处单位体积内出现的概率, 即概率密度 w 为

$$w(x) = |\psi(x)|^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

所以在 $x = 1$ 处的概率密度为 $w(1) = \frac{1}{2}$

(3) 发现粒子概率最大的位置应是对上述概率密度函数求导等于零的 x 处

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0$$

对应 $x = 0$. 又因为

$$\left. \frac{d^2w}{dx^2} \right|_{x=0} = -\left. \frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3} \right|_{x=0} < 0$$

所以在 $x = 0$ 处找到粒子的概率最大, 且 $w_{\max} = \frac{1}{2}$.

17.4 自测练习与能力训练

17.4.1 选择题

1. 要使金属产生光电效应, 则应[].

- (A) 尽可能增大入射光强 (B) 尽可能延长照光时间
(C) 选用波长更短的入射光 (D) 选用频率更小的入射光

2. 用频率大于红限频率的单色光照射某光电管时, 若在光强不变的条件下增大单色光的频率, 则测出的光电流 $I \sim U$ 曲线的变化情况为[].

- (A) 遏止电压增加, 饱和电流也增加 (B) 遏止电压增加, 饱和电流不变
(C) 遏止电压增加, 饱和电流减少 (D) 遏止电压减少, 饱和电流也减少

3. 光电效应和康普顿效应都包含有电子和光子的相互作用过程. 对此, 有以下几种理解, 正确的是[].

(A) 两种效应中, 电子和光子组成的系统都服从动量守恒定律和能量守恒定律

(B) 两种效应都相当于电子和光子的弹性碰撞过程

(C) 两种效应都属于电子吸收光子的过程

(D) 光电效应是电子吸收光子的过程, 而康普顿效应则相当于光子和电子的弹性碰撞过程

4. 在康普顿效应实验中, 若散射光波长是入射光波长的 1.2 倍, 则散射光光子的能量 E 与反冲电子动能 E_k 之比 E/E_k 为[].

- (A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

5. 根据玻尔理论, 氢原子在 $n = 5$ 轨道上的角动量与在第一激发态的轨道角动量之比为[] .

- (A) $5/2$ (B) $5/3$ (C) $5/4$ (D) 5

6. 光子 A 的能量是光子 B 的两倍, 那么光子 A 的动量是光子 B 的[] 倍 .

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) 1 (D) 2

7. 一个电子的德布罗意波长与一个光子的波长相同, 则它们一定[] .

- (A) 动量相同 (B) 能量相同
(C) 动量和能量都相同 (D) 动量和能量都不相同

8. 一维势阱中运动的粒子, 在 $0 \sim a$ 范围内的一波函数曲线如图 17-7 所示 则发现粒子概率最大的位置是[] .

- (A) $\frac{a}{8}$ 、 $\frac{5}{8}a$
(B) $\frac{a}{8}$ 、 $\frac{3}{8}a$ 、 $\frac{5}{8}a$ 、 $\frac{7}{8}a$
(C) $\frac{a}{4}$ 、 $\frac{a}{2}$ 、 $\frac{3}{4}a$
(D) 0 、 $\frac{a}{4}$ 、 $\frac{a}{2}$ 、 a

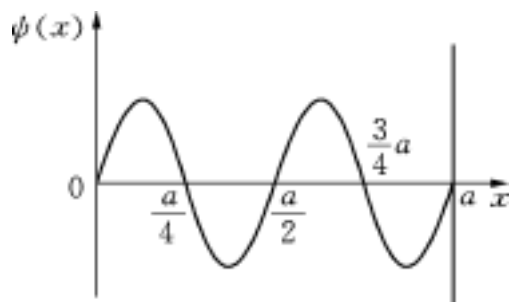


图 17-7

17.4.2 填充题

1. 在加热黑体的过程中, 其单色辐射本领最大值所对应的波长, 由 $\lambda_{m1} = 690 \text{ nm}$ 变化到 $\lambda_{m2} = 500 \text{ nm}$. 那么, 此黑体前后的温度比 $T_1/T_2 = \underline{\hspace{2cm}}$; 而后来单位时间内的总辐射能增加到原来的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 倍 .

2. 从某一金属表面逸出的光电子完全被 2 V 反向电压所遏止. 若这一金属光电效应的红限频率为 $6 \times 10^{14} \text{ Hz}$, 则这一金属的逸出功为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 入射光的频率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 入射 X 射线光子的能量为 0.6 MeV , 经康普顿散射后波长变化了 20% , 则反冲电子得到的能量为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 试估算处于基态的氢原子被能量为 12.09 eV 的光子激发时, 其电子的轨道半径增加 $\underline{\hspace{2cm}}$ 倍 .

5. 已知氢原子第一玻尔半径 a 和电子质量 m_e , 则氢原子中的电子在第 n 玻尔轨道上运动时的速度 $v_n = \underline{\hspace{2cm}}$, 其相应的德布罗意波长 $\lambda_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 若光子的波长和电子的德布罗意波长均为 λ , 则光子的动量和电子的动

量之比是_____,光子的质量和电子的质量之比是_____.(电子的静止质量用 m_e 表示)

7. 质量为 40 g 的子弹,以 1 000 m/s 的速度飞行,它的德布罗意波长为_____.当子弹穿过一小孔时,_____ (填“能”或“不能”)观察到衍射效应.

8. 质量为 m 的粒子处在宽度为 a 的一维无限深方势阱中,利用不确定关系估算该粒子可能具有的最小能量为_____.

17.4.3 计算题

1. 计算以下问题: 已知铂的逸出功为 8 eV,今用 300 nm 的紫外光照射,能否产生光电效应? 若用波长 400 nm 的紫外光照射某金属,产生的光电子的最大速度为 5×10^5 m/s,求光电效应的红限频率.

2. 动能为 20 eV 的电子,与处在基态的氢原子相碰,使氢原子激发.当氢原子回到基态时,辐射出波长为 121.6 nm 的光子,试求碰撞后电子的速度.

3. 一束带电量与电子电量相同的粒子,经 206 V 电压加速后,测得其德布罗意波长为 2.0×10^{-3} nm,试求粒子的质量.

4. 在粒子速度较小时,如果粒子位置的不确定量等于其德布罗意波长,试证明它的速度不确定量不会小于其速度.

* 5. 能量为 14.5 eV 的光子从氢原子第一玻尔轨道上把一个电子打到很远的地方,求这时电子的德布罗意波长变化了多少?

* 6. 粒子在一维矩形无限深势阱中运动,其波函数为

$$\psi_n(x) = c \sin \frac{n\pi x}{a} (0 < x < a)$$

试根据归一化条件确定系数 c ;若粒子在 $n = 1$ 状态,则发现粒子概率最大的位置是多少?

习题选解

[选择题 2]用频率大于红限频率的单色光照射光电管,则一定能产生光电效应,在光强不变的条件下,增大单色光的频率,光电流的 $I-U$ 曲线有什么变化呢?要回答这个问题,我们首先要知道光强由哪些因素决定.根据爱因斯坦的光子论

$$\text{光强} = Nh$$

式中 ν 为光的频率, h 为普朗克常数, N 为单位时间内垂直通过单位面积的光子

数. 所以 N 的大小反映了空间光子数的疏密程度. 当光的频率增加时, 要保持光强不变, 则 N 一定要减小.

当光频率增大时, 打出的光电子的最大初动能也增加, 这使光电流的遏止电

压 $U_a \left[U_a = \frac{\frac{1}{2} m v_m^2}{e} \right]$ 增加. 而 N 减少表示空间光子数变疏, 所以单位时间内打出的光电子数 n 减少, 这就引起饱和电流 I_H ($I_H = en$) 也减少. 所以本题结论 (3) 是正确的.

[填充题 3] 设入射 X 射线的波长为 λ_0 , 则入射 X 射线光子的能量

$$E_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = 0.6(\text{MeV})$$

散射 X 射线的波长

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda_0 + 0.2\lambda_0 = 1.2\lambda_0$$

反冲电子得到的动能

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{1.2\lambda_0} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{hc}{\lambda_0} = 0.1(\text{MeV}) \end{aligned}$$

[填充题 6] 因为光子和电子的德布罗意波长均为 λ , 所以有

$$p_{\text{光}} = p_{\text{电}} = \frac{h}{\lambda}$$

光子和电子的动量之比 $p_{\text{光}} : p_{\text{电}} = 1 : 1$

又根据 $p_{\text{光}} = m_{\text{光}}c$ 和 $p_{\text{电}} = m_{\text{电}}v$, 式中 $m_{\text{光}}$ 和 $m_{\text{电}}$ 分别为光子和电子的质量. 则

$$m_{\text{光}}c = m_{\text{电}}v = \frac{h}{\lambda}$$

由上式可以得到

$$\frac{m_{\text{光}}}{m_{\text{电}}} = \frac{v}{c}$$

$$m_{\text{电}}v = \frac{h}{\lambda}$$

把电子的质量与静止质量的关系 $m_{\text{电}} = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ 代入式 可得

$$\frac{m_e v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{h}{\lambda}$$

由此解得

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_e^2 c^2}{h^2}}}$$

利用式 得

$$\frac{m_{\text{光}}}{m_{\text{电}}} = \frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_e^2 c^2}{h^2}}}$$

[计算题 2]按题意,电子动能 $E_{k0} = 20 \text{ eV}$ 的一部分在与氢原子相碰时为氢原子提供了激发能 $E_n - E_m = hc\lambda'$, 而余下的动能使电子在碰撞后仍具有一定的速度 v , 因此有

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = E_{k0} - \frac{hc}{\lambda'}$$

所以,碰撞后电子的速度为

$$v = \sqrt{\frac{2}{m_e} \left[E_{k0} - \frac{hc}{\lambda'} \right]} = 1.85 \times 10^6 \text{ (m/s)}$$

[计算题 5]电子在氢原子第一轨道上的电离能为

$$E_1 = 13.6 \text{ (eV)}$$

氢原子第一轨道上的电子吸收入射光子的能量等于脱离原子时的动能

$$E_k = 14.5 - 13.6 = 0.9 \text{ (eV)}$$

这时电子的德布罗意波长

$$\begin{aligned} &= \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 0.9 \times 1.6 \times 10^{-19}}} \\ &= 1.29 \times 10^{-9} \text{ (m)} = 1.29 \text{ (nm)} \end{aligned}$$

由轨道角动量量子化假定,电子在第一轨道上运动时,角动量必须符合

$$m v_1 r_1 = \frac{h}{2}$$

所以电子的动量为

$$m v_1 = \frac{h}{2 r_1}$$

德布罗意波长

$$\lambda_1 = \frac{h}{m v_1} = 2 r_1$$

式中 r_1 为玻尔半径, 把 $r_1 = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$ 代入上式得

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 r_1 = 6.28 \times 5.29 \times 10^{-11} \\ &= 3.33 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.333(\text{nm}) \end{aligned}$$

电子德布罗意波长变化

$$\Delta \lambda = \lambda_1 = 0.333(\text{nm})$$

[计算题 6] 根据波函数归一化条件

$$\int_0^a |\psi_n(x)|^2 dx = 1$$

由已知波函数可得出

$$\begin{aligned} \int_0^a c^2 \sin^2 \frac{n x}{a} dx &= c^2 \int_0^a \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{2n x}{a} \right] dx \\ &= c^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{a}{4n} \sin \frac{2n x}{a} \right]_0^a \\ &= c^2 \left[\frac{a}{2} - \frac{a}{4n} \sin 2n \right] = \frac{a}{2} c^2 = 1 \end{aligned}$$

所以得 $c = \sqrt{\frac{2}{a}}$

归一化波函数为 $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n x}{a} \quad (0 < x < a)$

若粒子处在 $\psi_n(x)$ 状态, 在 x 处发现粒子的概率密度为

$$w(x) = \psi_n(x) \psi_n^*(x) = \frac{2}{a} \sin^2 \left[\frac{n x}{a} \right]$$

发现粒子概率最大的位置即是对上式 w 求极值等于零的 x 处

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= \frac{2}{a} 2 \sin \left[\frac{n x}{a} \right] \frac{n}{a} \cos \left[\frac{n x}{a} \right] \\ &= \frac{2n}{a^2} \sin \frac{2n x}{a} \end{aligned}$$

当 $n = 1$ 时, $\sin \frac{2x}{a} = 0$, $\frac{2x}{a} = k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$, 概率极值位置 $x =$

$\frac{ka}{2}$ 处, $(k = 0, 1, 2, \dots)$, 选择 k 值使 x 满足 $0 < x < a$, 则 $k = 1$, $x = \frac{a}{2}$ 为

极值处 .

又
$$\left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{x=\frac{a}{2}} = \frac{4}{a^3} \cos\left(\frac{2x}{a}\right) \bigg|_{x=\frac{a}{2}} = \frac{4}{a^3} \cos < 0$$

所以 $x = \frac{a}{2}$ 处概率有极大值 .

习题答案

1.4.1 选择题

1. (B) 2. (B) 3. (D) 4. (A) 5. (B) 6. (B) 7. (C) 8. (C) 9. (C) 10. (A)

1.4.2 填空题

1. $-50\sin 5t\mathbf{i} + 50\cos 5t\mathbf{j}$; 0; $x^2 + y^2 = 100$ 2. $2(\text{m/s})$; $\frac{2}{5}(\text{m/s}^2)$ 3. t_1 时刻的加速度; t_1 到 t_2 时间内的平均加速度; t_1 到 t_2 时间内质点的位移 4. 69.8 m/s 5. 17.3 m/s ; 20 m/s 6. 80 N ; 与车行的方向相同; 98 N ; 与车行方向相反 7. $\frac{2m_2g}{m_2 + 4m_1}$ 8. 0, $2g$ 9. $g\sin\alpha$, $3mg - 2mg\cos\alpha$ 10. mk^2x , $\frac{1}{k}\ln\frac{x_1}{x_0}$

1.4.3 计算题

1. (1) $\mathbf{r} = (3t + 5)\mathbf{i} + \left[\frac{1}{2}t^2 + 3t - 4\right]\mathbf{j}$ (2) $y = \frac{1}{18}(x^2 + 8x - 137)$ (3) $\mathbf{r}_1 = 8\mathbf{i} - 0.5\mathbf{j}$ $\mathbf{r}_2 = 11\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = 3\mathbf{i} + 4.5\mathbf{j}$ (4) 7.6 m/s 与 x 轴夹角 66.8° 1 m/s^2 沿 Oy 轴正方向 2. 1 s , 1.5 m 3. $T = \frac{1}{4}(m_1 + m_2)(g + a) = 247.5\text{ N}$ $N = m_1(g + a) - T = 412.5\text{ N}$ 4. $v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$ $x_m = \frac{m}{k}v_0$ 5. $y = \frac{2}{2g}x^2$ $N = mg\sqrt{1 + \frac{4}{g^2}x^2}$ 6. $v = \sqrt{gL}$ $d = \frac{\mu}{1 + \mu}L$

2.4.1 选择题

1. (A) 2. (C) 3. (D) 4. (A) 5. (C) 6. (C) 7. (B) 8. (B) 9. (A) 10. (C)

2.4.2 填充题

$$1. \sqrt{2gl\sin}, g\sqrt{1+3\sin^2}, \arcsin \frac{5}{6} \quad 2. (\sqrt{2}-1)d \quad 3. \frac{5}{2}R, \frac{5}{3}R \quad 4. -12J$$

$$5. -mv_0 \quad 6. 5\text{ m/s}, 62.5J \quad 7. 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 8. 4\text{ m/s} \quad 9. mgbk \quad mgbtk$$

$$10. v_1 = \sqrt{\frac{m_2 k}{m_1(m_1+m_2)}}, v_2 = \sqrt{\frac{m_1 k}{m_2(m_1+m_2)}}$$

2.4.3 计算题

$$1. 882J \quad 2. Mg + \frac{mv_2}{t}, v = \frac{m}{M}v_1 \quad 3. 0, h = \frac{v^2}{4g} \quad 4. 997\text{ km}, 613\text{ km}$$

$$5. \frac{Mg}{k} + \frac{2m}{m+M} \sqrt{\frac{2Mgh}{k}} \quad \sqrt{\frac{g}{2h}} \frac{M+m}{(3M-M)}L < v_0 \quad \sqrt{\frac{g}{2h}}L \quad 6. v =$$

$$\sqrt{\frac{(M+m)2gR\sin}{(M+m)-m\sin^2}}$$

$$V = \frac{m\sin}{M+m} \sqrt{\frac{(M+m)2gR\sin}{(M+m)-m\sin^2}} \quad s = \frac{m}{M+m}R$$

3.4.1 选择题

$$1. (B) \quad 2. (B) \quad 3. (D) \quad 4. (B) \quad 5. (C) \quad 6. (C) \quad 7. (D) \quad 8. (C) \quad 9. (B) \quad 10. (B)$$

3.4.2 填充题

$$1. \frac{1}{2}m_1 l^2 + \frac{7}{12}m_2 l^2 + \frac{1}{4}ml^2 \quad 2. 17.3\text{ kgm}^2 \quad 3. \frac{2mg}{2m+m_0}; \frac{\sqrt{3}mg}{2m+m_0} \quad 4. -\frac{kx_0^2}{9J}; \frac{2J}{k_0}$$

$$5. \frac{mg}{k}; \frac{2mg}{k} \quad 6. \frac{1}{3} \quad 7. 3.77\text{ rad/s} \quad 8. \frac{12v}{7l} \quad 9. \frac{7l^2_0}{4(l^2+3x^2)} \quad 10. \sqrt{\frac{4Fl}{m+2m_0}};$$

$$\sqrt{\frac{l(m+2m_0)}{F}}$$

3.4.3 计算题

$$1. 81.7\text{ rad/s}^2; 6.12 \times 10^{-2}\text{ m}, 10.0\text{ rad/s} \quad 2. \frac{1}{3}mgl; \sqrt{\frac{6g}{l}} \quad 3. v_0 = \frac{m_0+3m}{12m} \sqrt{6gl};$$

$$I = \frac{m_0}{3} \sqrt{\frac{3}{2}gl} \quad 4. = \left[\frac{1}{2}M+m \right] R; t = \frac{3mv_0}{2\mu Mg} \quad 5. \frac{2m}{M+m}; \left[\frac{2^2 mMR^2}{(m+M)U_0} \right]$$

$$6. \frac{dr}{dt} = \frac{g}{2} \cos \quad t = \frac{7lg}{24v_0} \cos \left[\frac{12v_0}{7l}t \right]$$

4.4.1 选择题

1.(B) 2.(C) 3.(B) 4.(C) 5.(D) 6.(A) 7.(B) 8.(C) 9.(B) 10.(C)

4.4.2 填空题

1. $A \cos\left[\frac{5}{6}t - \frac{\pi}{3}\right]$, $A \cos\left[t + \frac{3}{2}\right]$ 2. $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$, $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$
 3. $v_m \sqrt{\frac{m}{k}} \cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2}\right]$ 4. $\frac{T}{4}$, $\frac{T}{12}$, $\frac{T}{6}$ 5. 3.94 rad/s , 3.41 rad/s 6. $1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$
 7. 1.4 8. $3.6 \times 10^{-4} \text{ J}$ 9. 落后, $-\frac{\pi}{2}$ 10. $2 \cos\left[3t + \frac{7}{12}\right]$

4.4.3 计算题

1. (1) $x = A \cos\left[\frac{2}{T}t - \frac{\pi}{3}\right]$ (2) 0 , $\frac{\pi}{2}$ (3) $t_a = \frac{T}{6}$, $t_b = \frac{5}{12}T$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. $E_{\max} = 9.62 \times 10^{-3} \text{ J}$
 4. (1) $x = 5 \cos\left[2t + \frac{4}{5}\right] \text{ cm}$ (2) $x_3 = \pm 2k + \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), 振幅最大;
 $x_3 = \pm 2k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), 振幅最小.
 5. (1) $x = v_0 \sqrt{\frac{mm_0}{k(m + m_0)}} \cos\left[\sqrt{\frac{(m + m_0)k}{mm_0}}t - \frac{\pi}{2}\right]$ (2) $x_m = A = v_0 \sqrt{\frac{mm_0}{k(m + m_0)}}$
 (3) $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{mm_0}{k(m + m_0)}}$ 6. $h_{\max} = \frac{3mg}{k}$

5.4.1 选择题

1.(B) 2.(C) 3.(D) 4.(D) 5.(B) 6.(C) 7.(A) 8.(A) 9.(B) 10.(D)

5.4.2 填空题

1. $-\frac{\pi}{6}$ 2. $\frac{B}{C}$, $\frac{2}{C}$, CD 3. 0.314 m/s , 沿 y 轴正方向, 0 4. 2.5 s^{-1} , 0.8 s ,
 0.2 m/s , $y = 0.03 \cos\left[2.5\left(t - \frac{x}{0.2}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$ 5. $y = A \cos\left[\left(t - \frac{x - x_0}{u}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$, $y = A \cos\left[\left(t + \frac{x - x_0}{u}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$
 6. 0.78 m 7. 0.25 cm , 120 cm/s , 3 cm 8. $A \cos 2\left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right]$
 9. 41 kHz 10. 22.2 Hz , $\frac{16}{9}$

5.4.3 计算题

1. (1) $y = 0.05 \cos\left[2\left(t + \frac{x}{0.8}\right) - \frac{\pi}{2}\right]$ (2) 图略 2. (1) $\omega = 0.40 \text{ rad/s}$, $T = 5.00 \text{ s}$,
 $\nu = 0.20 \text{ Hz}$ (2) a 点沿 y 轴负方向运动, b 点沿 y 轴正方向运动 (3) $y = 0.04 \cos\left[0.4t - 5x + \frac{\pi}{2}\right] \text{ (m)}$ (4) $Y_P = 0.04 \cos(0.4t - \frac{\pi}{2}) \text{ (m)}$ (5) 图略

3. (1) $= 6 \text{ m}$; (2) $z_2 - z_1 =$ (3) $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$, $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$, $I = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2}$ (4) $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$, $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$ 4. (1) $y_{\lambda} = A \cos\left[10\pi t - \frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{2}\right]$, $y_{\bar{x}} = A \cos\left[10\pi t + \frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{2}\right]$ (2) $y = 2A \cos \frac{x}{4} \cos\left[10\pi t + \frac{\pi}{2}\right]$ (3) 波腹: $x = 4k(\text{m})$, $k = 0, 1, 2, 3$ 波节: $x = 4k + 2(\text{m})$, $k = 0, 1, 2, 3$ 5. (1) $y = 2A \cos \frac{2}{T}x \cos \frac{2}{T}t$ (2) $y = 2A \cos\left[\frac{t}{T} + \frac{x}{2}\right]$ (3) $y = 0$ 6. $\frac{u}{2_0}$

6.4.1 选择题

1. (B) 2. (D) 3. (A) 4. (C) 5. (C) 6. (C) 7. (D) 8. (B) 9. (B) 10. (B)

6.4.2 填空题

1. $\frac{pN_A}{RT}$, $\frac{pM}{RT}$, $\frac{3}{2} \frac{RT}{N_A}$, $\frac{m}{M} \frac{5}{2} RT$; 2. $\frac{i}{2} kT$, $\frac{i}{2} RT$, $\frac{3}{2} RT$, RT ; 3. $\frac{3}{5}$; 4. $\sqrt{\frac{3p}{2}}$, $\frac{3}{2} p$; 5. 1 8, 5 24, 1 2 $\sqrt{2}$; 6. 2 000 m/s, 500 m/s, 613 m/s; 7. $\int_0^\infty Nf(v)dv$, $\int_{v_0}^\infty v f(v)dv / \int_{v_0}^\infty f(v)dv$, $\int_{v_0}^\infty f(v)dv$; 8. 1 950 m; 9. 10^{-10} m , $10^2 \sim 10^3 \text{ m/s}$, 10^9 s^{-1} ; 10. 1, 2.

6.4.3 计算题

1. $\frac{7}{34}$ (活塞偏向左侧) 3. (1) $p_2 = 3p_1$; (2) $\bar{v}_2 = 1.5\bar{v}_1$, $\sqrt{\bar{v}_2^2} = 1.22\sqrt{\bar{v}_1^2}$ 4. (1) $\frac{6}{v_0^3}$; (2) $\frac{v_0}{2}$; (3) 0.216 N; (4) $\frac{v_0}{2}$; (5) 0.55 v_0 5. $\frac{4}{v} \frac{1}{v}$ 6. (1) $0.645 \times 10^5 \text{ Pa}$; (2) 15.7 次

7.4.1 选择题

1. (D) 2. (C) 3. (A)(C) 4. (D) 5. (A) 6. (B) 7. (A) 8. (C) 9. (D) 10. (D)

7.4.2 填空题

1. (1) 气体的内能; (2) 气体对外所做的功; (3) 气体的内能和对外所做功; 2. AB, AC, AB; 3. 124.7 J, -84.3 J, -84.3 J/mol·K; 4. 7 5, 5 7; 5. (2); 6. V_2 , $\left[\frac{V_1}{V_2}\right]^{-1} T$, $\left[\frac{RT_1}{V_2}\right] \left[\frac{V_1}{V_2}\right]^{-1}$; 7. $=$, $\frac{p_0}{2}$; 8. (1) 吸热; (2) 放热; (3) 放热; 9. $>$; 10. 33.3%, $8.31 \times 10^5 \text{ J}$.

7.4.3 计算题

1. $\frac{5}{8} A$; (2) $-\frac{5}{2} R$ 2. (1) 1.2; (2) 125 J; (3) 62.5 J; (4) -62.5 J

$$3.1 - \frac{7}{5} \frac{p_2(V_1 - V_2)}{V_2(p_1 - p_2)} \quad 4.(1) 3750 \text{ J}, 1250 \text{ J}; (2) 6667 \text{ J}, 1667 \text{ J} \quad 6. \frac{A_2}{3(A_2 - A_1)}$$

8.4.1 选择题

1.(B) 2.(C) 3.(D) 4.(D) 5.(A) 6.(C) 7.(D) 8.(C) 9.(B) 10.(D)

8.4.2 填空题

$$1. 2E_0 q a; 2E_0 q a. \quad 2. \frac{dS}{4 \int_0 R^2}; \text{沿 } y \text{ 轴}; - \int_0 R \left[1 - \frac{dS}{4 R^2} \right]. \quad 3. \frac{q}{4 \int_0 R_1} + \frac{q}{4 \int_0 R_2};$$

$$\frac{q}{4 \int_0 R_2} + \frac{q}{4 \int_0 R_2}; \frac{q + q}{4 \int_0 R_3}. \quad 4. - \frac{b - 2x}{2 \int_0} i; \frac{b}{2 \int_0}; x = \frac{b}{2}. \quad 5. \frac{\int_0 (E_1 - E_2)}{h_2 - h_1};$$

$$2.21 \times 10^{-12} \text{ C/m}^3. \quad 6. \frac{q + q}{\int_0}; q, q, q, q. \quad 7. - \int_0 S, - \int_0 S. \quad 8. \frac{Qq}{4 \int_0} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

9. $E \cdot dl$: 表示电场力对单位正电荷所做的元功. $\int_a^b E \cdot dl$: 表示静电场中, 单位正电荷从 a 点移到 b 点时, 电场力所做的功. $\oint_L E \cdot dl = 0$: 表示静电场中, 单位正电荷沿任意闭合回路一周, 电场力所做的功等于零. 表明静电场是保守力场. $E \cdot dS$: 表示通过面积元 dS 的电通量.

10. $E_x = 66; E_y = 66; E_z = 0$.

8.4.3 计算题

$$1. E_0 = \frac{Q}{16 \int_0 R^2} \text{ 方向: 竖直向下}. \quad 2. \text{右棒受电场力 } F_{\text{右}} = \frac{2}{4 \int_0} \ln \frac{4}{3}, \text{ 方向: 向右. 左棒}$$

$$\text{受电场力 } F_{\text{左}} = \frac{2}{4 \int_0} \ln \frac{4}{3}, \text{ 方向: 向左}. \quad 3. W_e = \frac{qQ}{8 \int_0 a} \ln 3; v = \left[\frac{qQ}{4 \int_0 am} \ln 3 + v^2 \right]^{1/2}.$$

$$4.(1) A = - \frac{qQl}{4 \int_0 r^2} + \frac{q^2}{4 \int_0 l}, \quad (2) A = - \frac{qQl}{4 \int_0 r^2}. \quad 5.(1) E = \frac{r}{2 \int_0} \text{ 方向: 垂直轴线呈辐射}$$

$$\text{状}, \quad (2) E = \frac{a}{2 \int_0} \text{ 方向: 由 } O \text{ 指向 } O. \quad 6. U_A = \frac{2}{3} U_A; U_B = \frac{1}{2} U_B + \frac{1}{6} U_A.$$

9.4.1 选择题

1.(C) 2.(B) 3.(C) 4.(C) 5.(A) 6.(A) 7.(B) 8.(C) 9.(C) 10.(D)

9.4.2 填空题

$$1. \frac{1}{2 \int_0} \quad 2. \frac{q}{4 \int_0 R_A} + \frac{Q}{4 \int_0 R_B}; - \frac{R_A}{R_B} Q. \quad 3. 0; \frac{q \cdot q}{4 \int_0 l^2}; \text{方向向右}. \quad 4. \frac{q}{4 \int_0 r} - \frac{q}{4 \int_0 R_1} +$$

$$\frac{q}{4 \int_0 R_2} + \frac{q}{4 \int_0 d} \quad 5. E, D. \quad 6. \frac{Q - 3Q}{12 \int_0 R}; \frac{Q - 3Q}{12 \int_0 R}. \quad 7. \text{增强抗压能力; 增大电容量}.$$

$$8. 2 \text{ C}_0; \frac{2 \int_r}{1 + \int_r} \text{ C}_0. \quad 9. \frac{2 \int V}{2 \int_0} \left[1 - \frac{1}{\int_r} \right]. \quad 10. 1 \quad 2; 2 \quad 1.$$

9.4.3 计算题

1. (1) $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{L+a}{a}$; (2) $-\frac{qR}{L} \ln \frac{L+a}{a}$. 2. (1) $-\frac{q}{2}$; (2) $\frac{q}{24\pi\epsilon_0 a}$; (3) $12\pi\epsilon_0 a$;
 (4) $\frac{q^2}{48\pi\epsilon_0 a}$. 3. $Q = \frac{r}{1+r} CU$ (增大); $U_2 = \frac{U}{1+r}$ (减小); $E_2 = \frac{U}{(1+r)d}$ (减小); $D_2 = \frac{r}{1+r} \frac{CU}{S}$ (增大). $W_2 = \frac{1}{2} C \left[\frac{U}{2} \right]^2 \frac{4\pi\epsilon_0}{(1+r)^2}$ (减小). 4. $W_{\max} = 2\pi\epsilon_0 a^3 E_0^2 \left[1 - \frac{a}{b} \right]$.
 5. (1) $(r) = -\frac{q_0 a}{2(a^2 + r^2)^{3/2}}$, $q = -q_0$. (2) 0. 6. $\left[\frac{mgC(d+h)}{q^2} + 1 \right]$

11.4.1 选择题

1. (A) 2. (A) 3. (D) 4. (C) 5. (B) 6. (D) 7. (C) 8. (C) 9. (B) 10. (B)

11.4.2 填空题

1. 2.512×10^{11} 2. $\frac{\mu_0 I}{a}(2\sqrt{2}-1)$ 3. 0, $\frac{1}{2}$, $2P_m B$ 4. 0, $-\frac{2}{3}\mu_0 I$ 5. $\frac{\mu_0 I}{4R}$ 6. F_{ab}
 $= IBR$ 垂直纸面向外 $F_a = IBR$ 垂直纸面向里 $F_b = 0$ $F = 0$ $P_m = \frac{1}{4} R^2 I$
 垂直纸面向里 $M_m = \frac{1}{4} R^2 IB$ 向下 7. 0.5 T, y 轴正向 8. $0\mu_0 v^2$, 4×10^{-10}
 9. $\frac{1}{2} R^3$, 垂直于 B 沿纸面向上 10. μnI , 向左, $\left[\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right] nI$, 向左

11.4.3 计算题

1. (1) $B_{O_1} = B_{O_2} = \frac{\mu_0 I}{2R} + \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + l^2)^{3/2}}$ (2) $B_{(x)} = \frac{\mu_0 IR^2}{2 \left[R^2 + \left(\frac{l}{2} + x \right)^2 \right]^{3/2}} + \frac{\mu_0 IR^2}{2 \left[R^2 + \left(\frac{l}{2} - x \right)^2 \right]^{3/2}}$
 2. $B = \frac{1}{2} \mu_0 (R^2 - r^2)$ 3. (1) $j = \frac{2B_1}{\mu_0}$ (2) $B_0 = 2B_1$ 方向
 沿 z 轴正向 4. (1) $F_{ad} = F_{bc} = 0$ $F_{ab} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2} \ln \frac{R_2}{R_1}$ 方向垂直纸面向外
 $F_{cd} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2} \ln \frac{R_2}{R_1}$ 方向垂直纸面向里 (2) $M = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2} (R_2 - R_1) \sin \frac{Q}{2}$ 5. $M = \frac{1}{4} Q B (R_1^2 + R_2^2) \sin Q$ 方向由 $P_m \times B$ 决定 6. (1) $3.7 \times 10^{-3} \text{ T}$ (2) $n \times 6.7 \times 10^{-3} \text{ T}$

12.4.1 选择题

1. (B) 2. (A) 3. (C) 4. (B) 5. (A) 6. (C) 7. (A) 8. (B) 9. (C) 10. (D)

12.4.2 填空题

1. $\frac{1}{2} B l^2$; B 2. $\frac{\mu_0 I l v}{2} \left[\frac{1}{l - vt} - \frac{1}{l + vt} \right]$; B 3. 0; $d < a$; $d > a$ 4. 洛伦兹力;
 $V \times B$; 感生电场力; 变化的磁场 5. 0; 0.2 H; 0.05 H 6. $w_m = 1.6 \times 10^6 \text{ J m}^3$;
 $w_e = 4.425 \text{ J m}^3$; 磁场 7. 1 2; 2 1 8. $\frac{B^2 l^2 v}{R}$; $\frac{B^2 l^2 v^2}{R}$; $\frac{B^2 l^2 v^2}{R}$ 9. $\mu \frac{N}{l} I_0 e^{-t}$;
 $\frac{r}{2} \mu \frac{N}{l} I_0 e^{-t}$ 10. 0 $R^2 \frac{dE}{dt}$

12.4.3 计算题

1. (1) $x_m = \frac{m R v_0}{B^2 l^2}$; (2) $Q = \frac{1}{2} m v_0^2$ 2. (1) $I_m = 300 \text{ A}$ (2) $Q = 225 \text{ J}$ (3) 4 倍.
 3. (1) $M = \frac{\mu_0 a^2}{2b}$; (2) $= -\frac{\mu_0 a^2}{2b} K$ (3) $w_m = \frac{\mu_0 I^2}{8b} a^2$ 4. (1) $i = \frac{\mu_0 I}{2bR} a^2 \sin t$
 (2) $i_2 = -\frac{\mu_0^2 a^4}{4b^2 R} I \cos 2t$ 5. 电流平面内 $E_1 = \mu_0 K x$ 电流平面外 $E_2 = \frac{1}{2} \mu_0 K a$
 6. $\frac{\mu}{8} + \frac{\mu}{2} \ln \frac{R_2}{R_1}$

13.4.1 选择题

1. (B) 2. (D) 3. (C) 4. (A) 5. (C) 6. (C) 7. (B) 8. (D) 9. (A) 10. (D)

13.4.2 填空题

1. 2, 4; 2. 1 000 nm; 3. $\frac{4}{3}$; 4. 27; 5. 225 nm; 6. 1 000 nm; 7. $\frac{1}{4}$,
 $\frac{3}{16}$; 8. 等厚, 5 条, 不明不暗; 9. $3 \times 10^{-6} \text{ m}$, 中心; 10. 660 nm, 0.825 mm

13.4.3 计算题

1. 向上, $\frac{D(k+2n-2)}{d}$ 2. (1) $4.8 \times 10^{-5} \text{ rad}$; (2) 明纹; (3) 3 条明纹, 3 条暗纹.
 3. 9.24 m 4. 658 nm 5. 1 500 nm 6. $\frac{5}{6n_1}, \frac{5}{12n_2}$

14.4.1 选择题

1. (D) 2. (C) 3. (C) 4. (C) 5. (D) 6. (C) 7. (B) 8. (D) 9. (B) 10. (A)

14.4.2 填空题

1. 2, 4, 3 5; 2. $\pm 3 \times 10^{-3} \text{ m}$, $4 \times 10^{-3} \text{ m}$; 3. 500 nm; 4. 3.0 mm; 5. 小, 大, 亮;

6 . 446 . 7 nm 7 . 4, 6; 8 . 6 000 nm, 5 . 7° 9 . 图(a) 1、2, $\frac{1}{2a}$, $\frac{1}{a}$; 图(b) 1、3, $\frac{1}{4a}$, $\frac{1}{a}$; 图(c) 1、2、3、4, $\frac{1}{2a}$, $\frac{1}{a}$; 10 . 13 . 9 cm

14 4 3 计算题

1 . (1) 9 (2) 99, O (中央明纹) 2 . 500 nm 3 . (1) 2; (2) 2×10^{-3} cm
4 . (1) 7 600 nm, 3 800 nm; (2) 488 . 5 nm; (3) 17

15 4 1 选择题

1 . (A) 2 . (D) 3 . (B) 4 . (B) 5 . (B) 6 . (B) 7 . (A) 8 . (D)

15 4 2 填空题

1 . 1 3; 2 . $\frac{3}{4} I_0$, $\frac{3}{16} I_0$; 3 . 2, 53°; 4 . $\sqrt{3}$, 30°; 5 . 寻常, 非常, 光轴, o ;
6 . (a)(c), (a)(b); 7 . $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$ 8 . 无, 无, 无, 有

15 4 3 计算题

1 . 2 1 2 . $\arccos \sqrt{\frac{I_0}{2I_1}}$, $I_0 < 2I_1$ 3 . 48 . 4°; 是 4 . (1) 1 486 5 . (2) e 光 6 . (1) 1 56;
(3) 61 nm, 219 nm

16 4 1 选择题

1 . (A) 2 . (D) 3 . (B) 4 . (A) 5 . (B) 6 . (C) 7 . (D) 8 . (C) 9 . (A) 10 . (B)

16 4 2 填空题

1 . 相对性; 光速不变 2 . $v < c$; $v > c$ 3 . 先到 B 后到 A ; 同时到达 A 、 B ; 同时性是相对的
4 . 270 m; 9×10^{-7} s 5 . $3 . 11 \times 10^{-28}$ kg; $3 . 25 \times 10^{-8}$ s 6 . 4 . 5 m; 33°
7 . $\sqrt{1 - \left(\frac{L}{l_0}\right)^2} c$; $m_0 c^2 \left[\frac{l_0}{l} - 1 \right]$ 8 . 9×10^{16} J; $1 . 5 \times 10^{17}$ J 9 . 3/5; 1/5
10 . $\frac{1}{2c} \sqrt{E_1^2 + 2m_0 E_1 c^2 - 3m_0^2 c^4}$; $\arcsin \sqrt{\frac{2m_0 c^2}{E_1 + 3m_0 c^2}}$

16 4 3 计算题

1 . (1) 2×10^8 m/s; (2) 找不到这样的参照系 2 . 37 . 5 s; 3 . (1) 0 . 9c; (2) 8 . 72 m
4 . $1 . 798 \times 10^4$ m 5 . (1) $B:0$, $B:-0 . 075$ s; (2) $B:0 . 06$ s, $B:0$; (3) $A:0 . 133$ s, $B:0 . 167$ s;
(4) $A:0 . 107$ s, $B:0 . 133$ s 6 . $M_0 = 4m_0$

17.4.1 选择题

1. (C) 2. (C) 3. (A) 4. (D) 5. (A) 6. (D) 7. (A) 8. (B)

17.4.2 填空题

1. 0.725, 3.63 2. 2.48 eV, 1.1×10^{15} Hz 3. 0.1 MeV 4. 9 倍 5. $\frac{h}{2mna_0}$,
 $2na_0$ 6. 1 1, 1 $\sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{h^2}}$ 7. 1.66×10^{-35} m, 不能 8. $\frac{h^2}{32ma^2}$

17.4.3 计算题

1. (1) 不能; (2) $5.78 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ 2. $1.85 \times 10^6 \text{ m/s}$ 3. $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 4. 略
 5. 0.957 nm 6. $c = \sqrt{\frac{2}{a}}$, $x = \frac{a}{2}$ 处