区 间 估 计

如果我们能给出一个区间$[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$，并且能够保证未知参数以某个给定的较大的概率（例如95% 、99%）落在这个区间中，这显然要比点估计好得多，我们不仅可以知道未知参数近似值的大小，还可以知道估计的精确程度如何。这样的估计，就叫做区间估计。

比如: 预测明天中午12点上海地区气温在22~ 31度概率不低于90%,就是关于气温的区间估计,它显然比单纯的预测明天中午12点是多少度(点估计)要好

区间估计的思想由J.Neyman与E.pearson在1934年提出

E.皮尔逊（Egon Pearson，1895-1980），英国人，是卡尔皮尔逊（Karl Pearson）的儿子。

J.内曼（Jerzy Neyman，1894-1981），波兰犹太人。1912年，考入基辅的哈尔科夫数学系，学习期间，因发表一篇关于勒贝格积分的论文而获得金质奖章。1916年，大学毕业，留校担任教师。1925年，内曼向波兰政府申请到一笔基金，到英国伦敦大学当进修教师。在伦敦大学，内曼结识了E.皮尔逊，两人成为好朋友，联名发表了一系列重要的数理统计论文。区间估计的思想和方法，就是在1934年两人联名发表的一篇论文中首先提出的。

许宝騄（1910-1970），1933年毕业于清华大学，1936年考取公费留学生，到英国伦敦大学留学，他的研究生导师就是J.内曼。 J.内曼评价许宝騄是他教过的所有学生中“最优秀的一个学生”。1938年，许宝騄获得伦敦大学办法的博士学位，毕业后，又入剑桥大学继续深造，1940年，获得剑桥大学办法的第二个博士学位。许宝騄回国后，在西南联合大学任教，在西南联大，他开设了中国历史上第一个数理统计课程，他的教学深受学生欢迎，被誉为西南联大数学三杰（华罗庚，陈省身，许宝騄）之一。

定义 设θ是总体分布中的未知参数，如果对于一个事先给定的概率$1-\alpha$（例如$1-\alpha=0.90$,$1-\alpha=0.95$或$1-\alpha=0.99$),能够找到样本统计量$\underline{\theta}$和θ，使得$P\{\underline{\theta}\le\theta\le\overline{\theta}\}=1-\alpha$，则称$[\underline{\theta},\overline{\theta}]$为未知参数的置信区间，称概率$1-\alpha$为置信水平，称$\underline{\theta}$为置信下限，称$\overline{\theta}$为置信上限。

评价区间估计有两个指标：

精度：置信区间的长度越小越好

信度(可靠性)：置信度越大越好

此为两个矛盾的指标，一般我们是在给定的置信度下，找精度最高的置信区间

说明：

- 直观含义：置信区间包含待估计参数的概率*不小于*给定的值

- 当置信区间收缩为一个点时，就退化为了点估计

- 例释：“灯泡寿命的期望 的置信水平为95%的置信区间为［ $\overline{x}$ −100 ， $\overline{x}$+100］”

μ -------- 为待估计的参数，是个数；

$\overline{x}$ -------- 为样本函数，是随机变量，样本不同则 $\overline{x}$ 的值也就可能不同了，即置信区间也随之改变了

-------- 如果抽取很多次的样本，就会得到对应不同的置信区间，其中有些包含参数 μ，有些不包含 μ． 包含 μ 的区间占比约为95%

单正态总体方差已知,总体期望的区间估计

问题设总体$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，已知其中$\sigma=\sigma_0$,$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是ξ 的样本，要求μ 的置信水平为$1-\alpha$ 的置信区间。

分析: 根据样本可求样本的均值,而样本均值的标准化:

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0}\sqrt{n}\sim N(0,1)$$

注意　上述U不再是统计量(因含有未知参数 μ),但它具有三个特点:

(1) 它是样本的函数;

(2) 含且仅含待估的未知参数 μ;

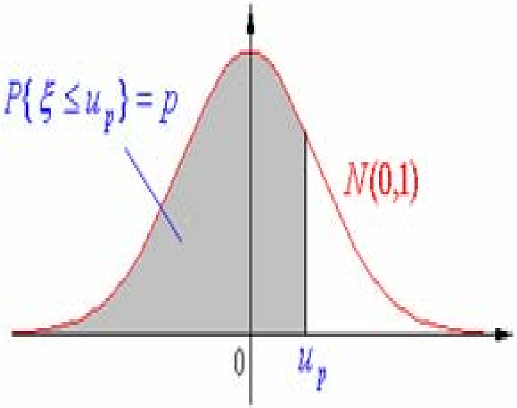
(3) 其所服从的分布与待估未知参数 μ 无关.

具有上述三个性质的样本的函数称为**枢轴量**.

枢轴量U服从标准正态分布,回顾标准正态分布的分位数含义

$\xi \sim N(0,1) \quad \Phi(u_p)=P\{\xi \le u_p\}=p$

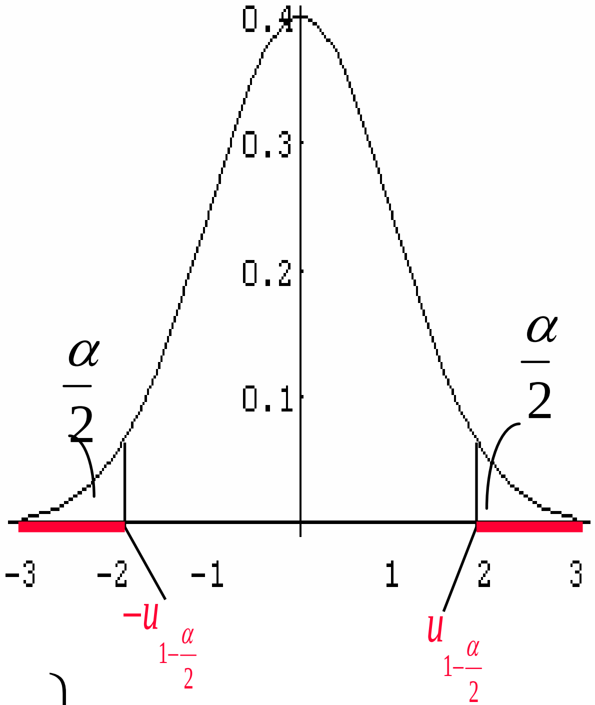
p	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
u_p	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090



如果让枢轴量U落入中间部分的概率为给定的置信水平1-α(即落入两侧的概率各为$\alpha/2$)，就可以导出参数μ的置信区间了

对于给定的置信水平$1-\alpha$，可查表得到相应的临界值$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$,满足

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0}\sqrt{n}\right| \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$$



$$\Rightarrow P\left\{\overline{X}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$$

令$\underline{\theta}=\bar{X}-u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{\theta}=\bar{X}+u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$，则有$P\{\underline{\theta}\le\mu\le\bar{\theta}\}=1-\alpha$ ，按照定义，$[\underline{\theta},\bar{\theta}]$就是$\mu$ 的置信水平为1-α 的置信区间。

上述借助枢轴量的分布来求解参数置信区间的方法称为区间估计的**枢轴量方法**

例 1　设某厂炼出铁水中的含碳量$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，已知其中$\sigma = 0.12$，现抽查 4 炉铁水，测得含碳量为 4.28,　4.40,　4.42,　4.36 。求平均含碳量μ的置信水平为 95% 的置信区间。

解　$n = 4$，$\bar{X} = 4.365, 1-\alpha = 0.95$，$\alpha = 0.05, 1-\alpha/2 = 0.975$，查$N(0,1)$分布的分位数表，可得$u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.9600$。

$$u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = 1.9600 \times \frac{0.12}{\sqrt{4}} = 0.1176$$

$$\underline{\theta} = \bar{X} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = 4.365 - 0.1176 = 4.2474$$

$$\bar{\theta} = \bar{X} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = 4.365 + 0.1176 = 4.4826$$

所以平均含碳量μ 的水平为95% 的置信区间为[4.2474, 4.4826] 。

单正态总体方差未知,总体期望的区间估计

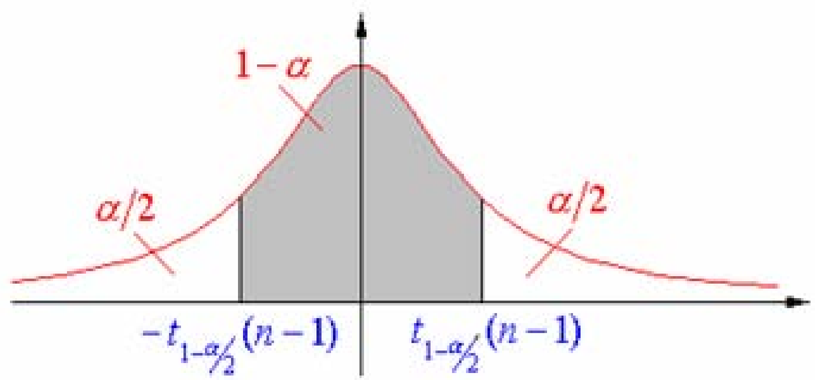
问题 设总体 $\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 $\sigma > 0$ 未知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是ξ的样本，要求μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间。

分析: 根据样本可求样本的均值,修正样本方差,从而枢轴量:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S^*}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

如果让枢轴量T落入中间部分的概率为给定的置信水平1-α(即落入两侧的概率各为$\alpha/2$)，就可以导出参数μ的置信区间了

对于给定的置信水平$1-\alpha$，可查表得到相应的临界值$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$,满足



$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S^*}\sqrt{n}\right| \le t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left\{\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha$$

即参数μ的置信 水平为 1-α的置信区间为:

$$[\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}, \qquad \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}]$$

例 2　从一批垫圈中随机地抽取 10 只，测得它们的厚度（单位：毫米）为

1.23,　1.24,　1.26,　1.27,　1.32,　1.30,　1.25,　1.24,　1.31,　1.28。

设厚度 $\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$ ，求 μ 的置信水平为 95% 的置信区间。

解 $n=10$，$\overline{X}=1.27$，$S^*=0.031623$。对 $1-\alpha=0.95$,$1-\alpha/2=0.975$，查 t 分布的分位数表，可得 $t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.975}(9)=2.2622$。

$$t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}=2.2622\times\frac{0.031623}{\sqrt{10}}=0.022622$$

$$\underline{\theta}=\overline{X}-t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}=1.27-0.022622=1.2474$$

$$\overline{\theta}=\overline{X}+t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}=1.27+0.022622=1.2926$$

所以 μ 的水平为95 ％的置信区间为[1.2474,1.2926] 。

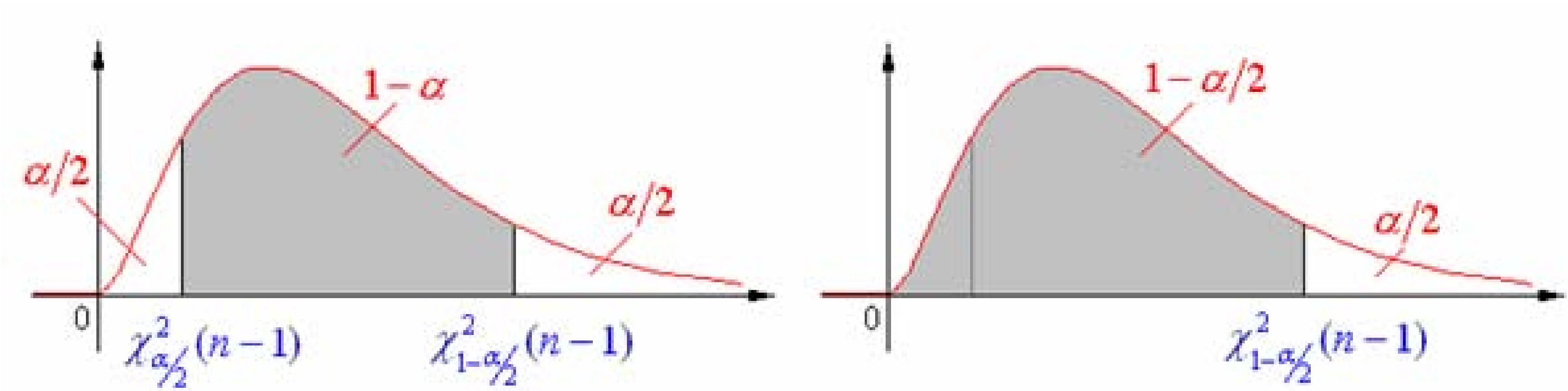
单正态总体期望未知, 总体方差的区间估计

问题 设总体 $\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 未知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 ξ 的样本，要求 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

分析: 根据样本可求修正样本方差,从而枢轴量:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

如果让枢轴量 χ^2 落入″中间部分″的概率为给定的置信水平 $1-\alpha$ (即落入两侧的概率各为 $\alpha/2$),就可以导出参数 σ^2 的置信区间了



取等尾置信区间，即采用χ^2的两个临界值$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$和$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$,使得

$$P\left\{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\le\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2}\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

即:
$$P\left\{\frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$$

令$\underline{\theta} = \dfrac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \overline{\theta} = \dfrac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$，则有$P\{\underline{\theta} \le \sigma^2 \le \overline{\theta}\} = 1-\alpha$，按照定义，$[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$就是$\sigma^2$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间。

同时，由$P\{\underline{\theta} \le \sigma^2 \le \overline{\theta}\} = 1-\alpha$可知$P\{\sqrt{\underline{\theta}} \le \sigma \le \sqrt{\overline{\theta}}\} = 1-\alpha$，所以，顺便还可推出，$\sigma$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$[\sqrt{\underline{\theta}}, \sqrt{\overline{\theta}}]$。

思考题：上述关于的正态总体方差的置信区间，是否是给定置信水平下精度最高的？

例 3 设垫圈的厚度 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$，对容量为 $n=10$ 的样本，已求得修正样本标准差 $S^*=0.031623$，求 σ^2 和 σ 的水平为 95% 的置信区间。

解 $n=10$，$S^*=0.031623$，$(n-1)\,S^{*2}=(10-1)\times 0.031623^2=0.009$

对 $1-\alpha=0.95$，$\alpha/2=0.025$，$1-\alpha/2=0.975$，查 χ^2 分布表，可得

$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(9)=2.700$，　　$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(9)=19.023$

$$\underline{\theta}=\frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}=\frac{0.009}{19.023}=0.0004731,\quad \overline{\theta}=\frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}=\frac{0.009}{2.700}=0.003333$$

所以，σ^2 的水平为95% 的置信区间为 $[\,0.0004731,\ 0.003333\,]$

又因为

$$\sqrt{\underline{\theta}}=\sqrt{0.0004731}=0.02175,\quad \sqrt{\overline{\theta}}=\sqrt{0.003333}=0.05773$$

所以，σ 的水平为95% 的置信区间为 $[\,0.02175,\ 0.05773\,]$

单正态总体期望已知,总体方差的区间估计

分析: 当总体期望 μ 已知时,当然也可以用单正态总体期望未知总体方差的区间估计公式来求总体方差的区间估计,但这样做不太好,因为已知 μ 的信息未被使用,估计的精度会受影响.可考虑如下枢轴量:

$$\chi^2 = \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)^2 + \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

如果让枢轴量χ^2落入"中间部分"的概率为给定的置信水平$1-\alpha$(即落入两侧的概率各为$\alpha/2$),就可以导出参数σ^2的置信区间了

$$P\left\{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \le \frac{n(\bar{X}-\mu_0)^2 + nS^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right\} = 1-\alpha$$

即: $$P\left\{\frac{n(\bar{X}-\mu_0)^2 + nS^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \le \sigma^2 \le \frac{n(\bar{X}-\mu_0)^2 + nS^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right\} = 1-\alpha$$

即σ^2的置信水平为 1-α 的置信区间为:

$$\left[\frac{n(\bar{X}-\mu_0)^2 + nS^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}, \quad \frac{n(\bar{X}-\mu_0)^2 + nS^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$$

双正态总体方差未知但相等，总体期望差的区间估计

问题 设总体 $\xi \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$\eta \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，其中 σ_1，σ_2 都未知，但已知 $\sigma_1 = \sigma_2$（$X_1, X_2, \cdots, X_m$），（$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$）分别是 ξ，η 的样本，两个样本相互独立，要求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

分析: 对双正态总体方差未知但相等的情况, 可考虑如下枢轴量T:

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$$

$$S_w = \sqrt{\frac{(m-1)S_x^{*2} + (n-1)S_y^{*2}}{m+n-2}}, S_x^{*2} \quad, S_y^{*2}$$ 是ξ，η的修正样本方差。

让枢轴量T 落入中间部分的概率为给定的置信水平1- α (即落入两侧的概率各为 $\alpha/2$)，就可以导出期望差的置信区间了

$$P\{|\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}|\le t_{1-\alpha/2}(m+n-2)\}=1-\alpha$$

$$P\{|(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)|\le t_{1-\alpha/2}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\}=1-\alpha$$

即有

$$P\left\{\overline{X}-\overline{Y}-t_{1-\alpha/2}S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\le\mu_1-\mu_2\le\overline{X}-\overline{Y}+t_{1-\alpha/2}S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right\}=1-\alpha$$

令$\underline{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}-t_{1-\alpha/2}S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$, $\overline{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}+t_{1-\alpha/2}S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$,

按照定义,$[\underline{\theta},\overline{\theta}]$就是$\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为$1-\alpha$ 的置信区间

例 4 对矿石中的含铁量，用方法 A 测量 5 次，测得样本均值 $\overline{X}=34.6$，修正样本标准差 $S_x^*=0.48$；用方法 B 测量 6 次，测得样本均值 $\overline{Y}=33.9$，修正样本标准差 $S_y^*=0.25$；设用这两种方法测得的含铁量分别为 $\xi\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $\eta\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，其中 $\sigma_1=\sigma_2$，求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间。

解 $m=5$，$\overline{X}=34.6$，$S_x^*=0.48$，$n=6$，$\overline{Y}=33.9$，$S_y^*=0.25$，

$$S_w=\sqrt{\frac{(m-1)S_x^{*2}+(n-1)S_y^{*2}}{m+n-2}}=\sqrt{\frac{(5-1)\times0.48^2+(6-1)\times0.25^2}{5+6-2}}=0.3703$$

对 $1-\alpha=0.95$，$1-\alpha/2=0.975$，自由度 $m+n-2=9$，查 t 分布的分位数表，可得 $t_{1-\alpha/2}(m+n-2)=t_{0.975}(9)=2.2622$。

$$t_{1-\alpha/2}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=2.2622\times 0.3703\times\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}=0.507$$

$$\underline{\theta}=\bar{X}-\bar{Y}-t_{1-\alpha/2}S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=34.6-33.9-0.507=0.193$$

$$\bar{\theta}=\bar{X}-\bar{Y}+t_{1-\alpha/2}S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=34.6-33.9+0.507=1.207$$

所以$\mu_1-\mu_2$的水平为95 % 的置信区间为$[0.193, 1.207]$

双正态总体均值未知, 方差之比的区间估计

问题　设总体 $\xi \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$\eta \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，其中 μ_1，μ_2 都未知，（$X_1,X_2,\cdots,X_m$），（$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$）分别是 ξ，η 的样本，两个样本相互独立，要求 σ_1^2/σ_2^2 的水平为$1-\alpha$的置信区间。

分析: 对双正态总体均值未知,求方差比的区间估计, 根据两个总体的样本可求他们的修正样本方差, 考虑如下枢轴量 F :

$$\frac{S_x^{*2}/\sigma_1^2}{S_y^{*2}/\sigma_2^2} \sim F(m-1,n-1)$$

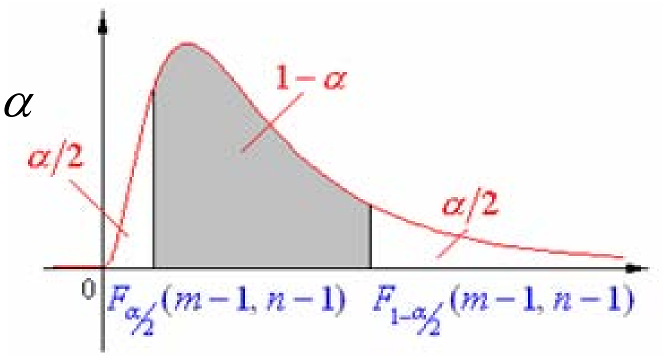
如果让枢轴量F落入"中间部分"的概率为给定的置信水平$1-\alpha$

(即落入两侧的概率各为$\alpha/2$),就可以导出σ_1^2/σ_2^2的置信区间了

$$P\{ F_{\alpha/2}(m-1,n-1) \le \frac{S_x^{*2}/\sigma_1^2}{S_y^{*2}/\sigma_2^2} \le F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1) \} = 1-\alpha$$

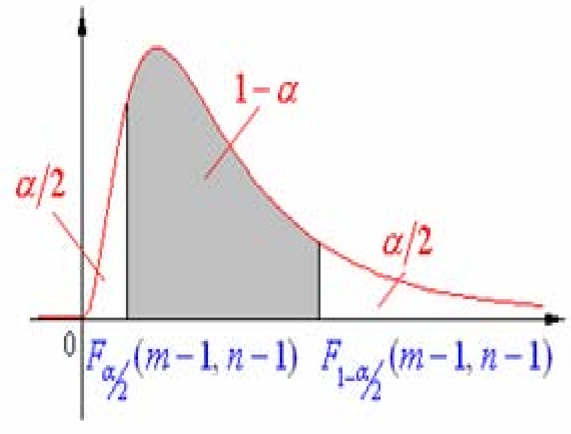
$$P\{ \frac{S_x^{*2}/S_y^{*2}}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)} \le \sigma_1^2/\sigma_2^2 \le \frac{S_x^{*2}/S_y^{*2}}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)} \} = 1-\alpha,$$

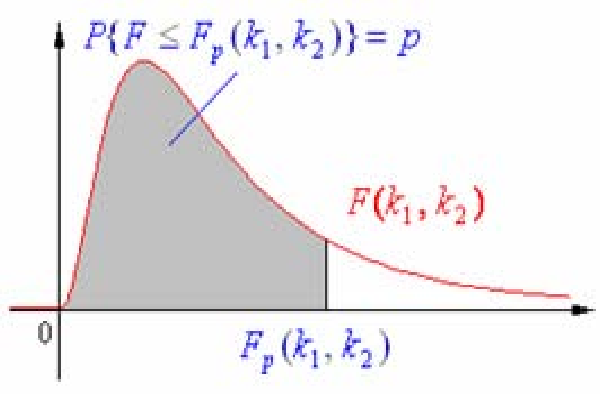
$$P\{ \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)} \le \frac{\sigma_1^2/\sigma_2^2}{S_x^{*2}/S_y^{*2}} \le \frac{1}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)} \} = 1-\alpha$$



σ_1^2/σ_2^2的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[\frac{S_x^{*2}/S_y^{*2}}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}, \frac{S_x^{*2}/S_y^{*2}}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)} \right]$$





注：关于F分布的分位数(如上右图所示)，当p很小时不能直接查表，可按下述已经证明过的转换公式化为可查表的分位数：

$$F_{\alpha/2}(m-1, n-1) = \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)}$$

例 5 对甲、乙两厂生产的电池作抽查，测得使用寿命（单位：小时）如下

甲厂电池寿命	550，540，600，510
乙厂电池寿命	635，580，595，660，640

设甲、乙两厂生产的电池，使用寿命分别为 $\xi \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $\eta \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，求:

(1) σ_1^2 / σ_2^2 的置信水平为 95% 的置信区间。

(2) σ_1 / σ_2 的置信水平为 95% 的置信区间。

解 $m = 4$， $S_x^{*2} = 1400$， $n = 5$， $S_y^{*2} = 1107.5$，$\dfrac{S_x^{*2}}{S_y^{*2}} = \dfrac{1400}{1107.5} = 1.264$

对$1 - \alpha = 0.95$,$\alpha/2 = 0.025$,$1 - \alpha/2 = 0.975$， 自由度 $(m-1, n-1) = (3, 4)$，
查F分布表，可得

$$F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1) = F_{0.975}(3, 4) = 9.98$$

$$\underline{\theta} = \frac{S_x^{*2} \big/ S_y^{*2}}{F_{1-\alpha/2}} = \frac{1.264}{9.98} = 0.1267,\ \ \overline{\theta} = \frac{S_x^{*2} \big/ S_y^{*2}}{F_{\alpha/2}} = \frac{1.264}{0.0662} = 19.09$$

$$F_{\alpha/2}(m-1, n-1) = \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)} = \frac{1}{F_{0.975}(4,3)} = \frac{1}{15.1} = 0.0662$$

$\sigma_1^2 \big/ \sigma_2^2$的水平为95%的置信区间为$[\ 0.1267, 19.09\ ]$

又因为

$$\sqrt{\underline{\theta}} = \sqrt{0.1267} = 0.356, \sqrt{\overline{\theta}} = \sqrt{19.09} = 4.369,$$

所以，σ_1 / σ_2的水平为95 % 的置信区间为$[\ 0.356, 4.369\ ]$ 。

区间估计总结

	待估参数	条件	置信区间 $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$	分布
单个总体	μ	已知$\sigma = \sigma_0$	$\underline{\theta}, \overline{\theta} = \overline{X} \mp u_{1-\alpha/2} \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$	$N(0,1)$
		σ 未知	$\underline{\theta}, \overline{\theta} = \overline{X} \mp t_{1-\alpha/2} \dfrac{S^*}{\sqrt{n}}$	$t(n-1)$
	σ^2	μ 未知	$\underline{\theta} = \dfrac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}}$ ，$\overline{\theta} = \dfrac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}}$	$\chi^2(n-1)$
两个总体	$\mu_1 - \mu_2$	σ_1，σ_2 未知 但有$\sigma_1 = \sigma_2$	$\underline{\theta}, \overline{\theta} = \overline{X} - \overline{Y} \mp t_{1-\alpha/2} S_w \sqrt{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}$	$t(m+n-2)$
	σ_1^2 / σ_2^2	μ_1，μ_2 未知	$\underline{\theta} = \dfrac{S_x^{*2} / S_y^{*2}}{F_{1-\alpha/2}}$ $\overline{\theta} = \dfrac{S_x^{*2} / S_y^{*2}}{F_{\alpha/2}}$	$F(m-1, n-1)$

思考题

以上讲到的参数的区间估计, 总体都是正态总体.

那么, 当总体不是正态总体时如何求总体期望的区间估计?

提示: 小样本时可借助切比雪夫不等式

大样本时可利用中心极限定理