3.二次曲线的不变量和半不变量

定义：曲线方程系数的一个确定的函数，如果在任意一个直角坐标变换下它的函数值不变，那么就称这个函数是这条曲线的一个正交不变量。简称为不变量。

定理：在给定的直角坐标系中，设二次曲线的方程为

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

令 $I_1 = a_{11} + a_{22}, I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$

则 I_1, I_2, I_3 都是二次曲线的不变量

定理：在前面定理的条件下，令 $K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}$

则在转轴下，K_1 不变，并且对于 $I_2 = I_3 = 0$ 的二次曲线 K_1 在移轴下也不变，称 K_1 是二次曲线的半不变量。

4.利用不变量确定二次曲线的类型和形状

情形 1，2、椭圆型和双曲型曲线。

最 简 方 程 为

$$a'_{11}x^{*2} + a^{*}_{22}y^{*2} + c^{*}_{1} = 0$$

当a'_{11}与a'_{22}同（异）号时，为椭圆型（双曲型）

$$\begin{cases} a'_{11} + a'_{22} = I_1 \\ a'_{11}a'_{22} = I_2 \end{cases}$$ 不变量

$$\Rightarrow \lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$$ 特征方程

$$\Delta = I_1^2 - 4I_2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0, \lambda_1, \lambda_2$$ 有不同特征根

$$I_2 > 0 \quad \Leftrightarrow a_{11}' \text{与} a_{22}' \text{同号} \Leftrightarrow \text{曲线为椭圆型}$$

$$I_2 < 0 \quad \Leftrightarrow a_{11}' \text{与} a_{22}' \text{异号} \quad \Leftrightarrow \text{曲线为双曲型}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11}' & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}' & 0 \\ 0 & 0 & c_1^* \end{vmatrix} = a_{11}' a_{22}' c_1^* = I_2 c_1^*$$

最简方程为 $\lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2} + \frac{I_3}{I_2} = 0$

判别曲线所属的类的方法：

当 $I_2 > 0$ 时，若 I_3 与 I_1 异号　　椭圆

若 I_3 与 I_1 同号　　虚椭圆

若 I_3 =0　　点

当 $I_2 < 0$ 时，若 $I_3 \neq 0$　　双曲线

若 I_3 =0　　一对相交直线

情形 3、抛物型曲线。

最简方程为

$$a_{22}' y^{*2} + 2a_1' x^* = 0 \qquad (a_{22}' \neq 0)$$

$$I_1 = a_{22}', I_2 = 0 \qquad I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1' \\ 0 & a_{22}' & 0 \\ a_1' & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_{22}' a_1'^2 = -I_1 a_1'^2$$

若 $a_1' \neq 0$

得： $$I_1 y^{*2} \pm 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} x^* = 0 \qquad I_3 \neq 0$$

若 $a_1' = 0$ 方程为 $a_{22}' y^{*2} + c_2^* = 0$，

$$I_1 = a_{22}', I_2 = 0, I_3 = 0$$

$$K_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_1^* \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}' & 0 \\ 0 & c_1^* \end{vmatrix} = a_{22}' c_1^* = I_1 c_1^*,$$

即 $I_1 y^{*2} + \dfrac{K_1}{I_1} = 0$

当 I_3 **=0** 时， $K_1 < 0$ 一对平行直线

$K_1 > 0$ 一对虚平行直线

$K_1 = 0$ 一对重合直线

二次曲线

- 椭圆型 $I_2>0$
  - 椭圆 I_1与I_3异号
  - 虚椭圆 I_1与I_3同号
  - 一个点 $I_3=0$
- 双曲型 $I_2<0$
  - 双曲线 I_3不等于0
  - 一对相交直线 $I_3=0$
- 抛物型 $I_2=0$
  - 抛物线 I_3不等于0
  - 一对平行直线 $I_3=0$ $K_1<0$
  - 一对虚平行直线 $I_3=0$ $K_1>0$
  - 一对重合直线 $I_3=0$ $K_1=0$

例 1、判断下列二次曲线的类型，并确定其形状：

① $x^2+6xy+5y^2+10x-2y+10=0$

② $2x^2+2xy+y^2+2x-4=0$

③ $x^2+6xy+9y^2+20x+10=0$

例 2、按参数 λ 的值讨论下述曲线的类型

$$x^2-2\lambda xy+y^2+2x-2y+3=0$$