第 二 章　守 恒 定 律

牛顿运动三定律

动能定理

动量定理　　三定理

角动量定理

能量守恒定律

动量守恒定律　　三守恒定律

角动量守恒定律

$\vec{F} = m\vec{a}$ ——力与运动状态变化间的瞬时关系

力的累积作用 $\left\{ \begin{array}{l} \text{空间累积} \\ \text{时间累积} \end{array} \right.$

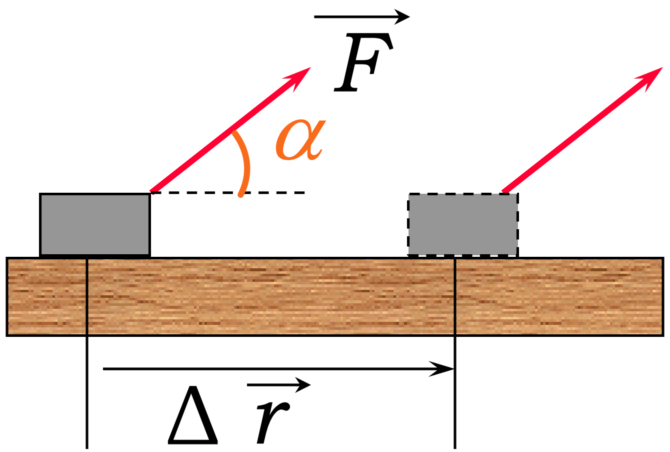
§2-1 功 动能定理

一、功

1. 恒力的功

$$A = F\Delta r\cos\alpha$$

$$= \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

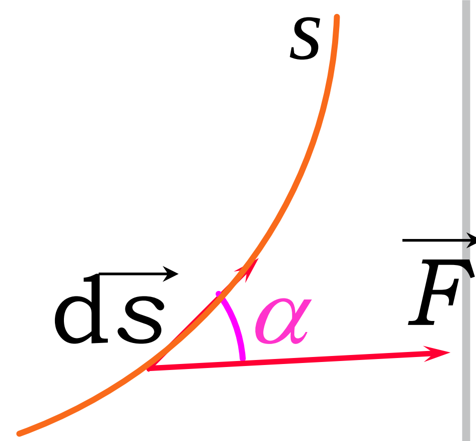


2. 变力的功

元位移： $d\vec{r} \equiv d\vec{s}$

元功： $dA = F\,dr\cos\alpha$

$$= \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot d\vec{s}$$



总功： $A = \int dA = \int \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int F\cos\alpha\, ds$

说明：（1）.功是标量，有正负之分。

α<π/2，dA > 0，外力对物体作功；

α>π/2，dA < 0，物体反抗外力作功。

(2). 合力的功

$$A_{AB}=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_N\right)\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_A^B \vec{F}_1\cdot d\vec{r}+\int_A^B \vec{F}_2\cdot d\vec{r}+\ldots+\int_A^B \vec{F}_N\cdot d\vec{r}$$

$$=A_{1AB}+A_{2AB}+\ldots+A_{NAB}$$

合力做的总功等于每个分力沿同一路径做功的代数和

(3). 功率 P

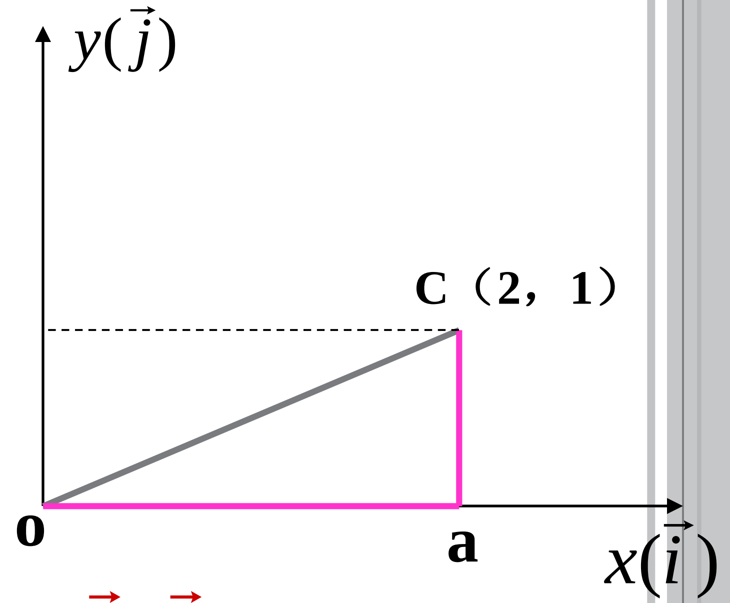
1. 平均功率 $\overline{P}=\dfrac{\Delta A}{\Delta t}$

2. 瞬时功率 $P=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta A}{\Delta t}=\dfrac{dA}{dt}=\vec{F}\cdot\dfrac{d\vec{s}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}$

（4）.功的大小一般与路径有关，
只有一些特殊力的功例外。

[例] 作用在质点的力$\vec{F}=(2y\vec{i}+4x^2\vec{j})$（$N$），质点从原点运动到坐标为$x=2(m)$，$y=1(m)$的点（如图所示），计算力$\vec{F}$分别沿下列路径所作的功：

(1).沿路径oac； (2).沿路径oc。



解： (1).$A=A_{oa}+A_{ac}=16(J)$

$$A_{oa}=\int\vec{F}\cdot dx\vec{i}=\int(2y\vec{i}+4x^2\vec{j})\cdot dx\vec{i}$$

$\because y=0$ $$=\int_0^2 2ydx=0$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=1\times1\times\cos0^0=1$$

$$A_{ac}=\int\vec{F}\cdot dy\vec{j}=\int(2y\vec{i}+4x^2\vec{j})\cdot dy\vec{j}$$

$\because x=2$ $$=\int_0^1 4x^2dy=16\int_0^1 dy=16(J)$$

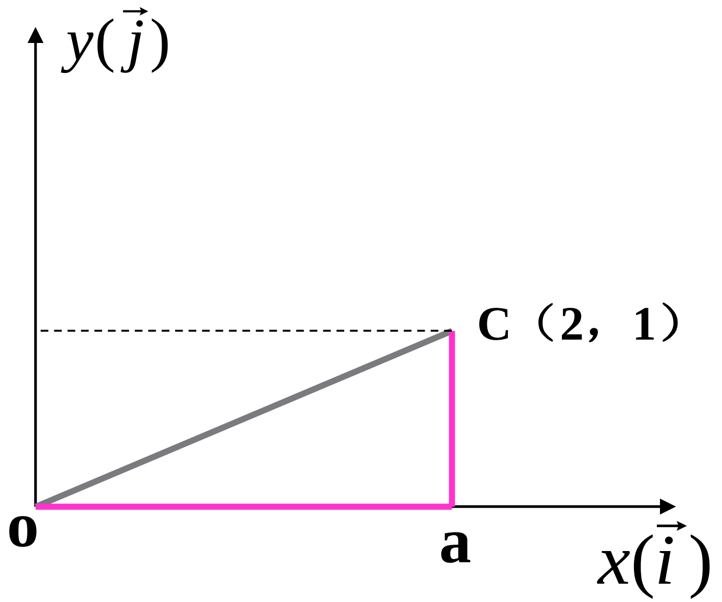
$$\vec{i}\cdot\vec{j}=1\times1\times\cos90^0=0$$

$$(2).A_{oc} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (2y\vec{i} + 4x^2\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j})$$

$$= \int 2y dx + \int 4x^2 dy$$

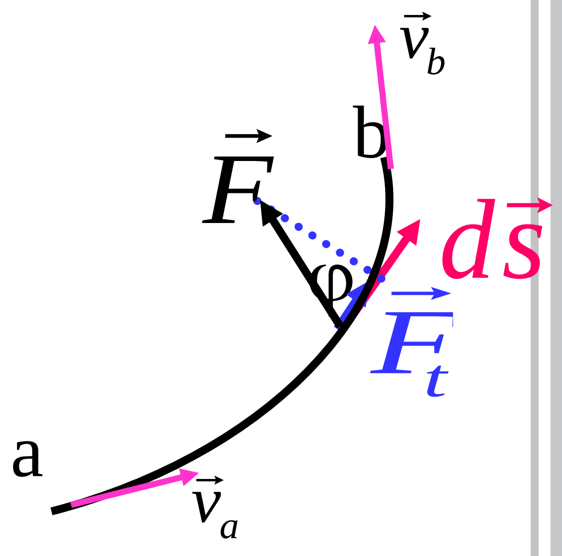
$\because \frac{x}{y} = 2$

$$= \int_0^2 2\left(\frac{x}{2}\right) dx + \int_0^1 4(2y)^2 dy = 7.3(J)$$



力对质点做功,其效果是什么?

二、动能定理



$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F\cos\varphi ds = F_t ds$$

$$= ma_t ds = m\frac{dv}{dt}ds = mvdv$$

$$\int_0^A dA = \int_{v_a}^{v_b} mvdv \Rightarrow A = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = E_{Kb} - E_{Ka}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

E_k是状态量,称为质点的平动动能。

合力对物体所做的功等于物体动能的增量

讨论 $A_{12}=\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{s}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$

1. 动能定理给出了力的空间积累效应，即功可以改变质点的动能。

2. 其优点是当作用力在位移过程中不清楚时，就可通过始、末状态动能的增量来求得该力的功。

3. 在所有惯性系中，动能定理形式保持不变。

$$A_{12}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

但是，动能定理的量值相对不同惯性系值不相同，即（V_2和V_1）的值不相同。

[例]质点m=0.5Kg,运动方程x=5t,y=0.5t² (SI)，求从t=2s到t=4s这段时间内外力所作的功.

解法1: 用功的定义式

$$A=\int \vec{f}\cdot d\vec{r}$$

$$\vec{f}=m\vec{a}=0.5\vec{j}$$

$$\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=1\vec{j}$$

$$\vec{r}=5t\vec{i}+0.5t^2\vec{j}$$

$$\Downarrow$$

$$d\vec{r}=5dt\vec{i}+tdt\vec{j}$$

$$\Rightarrow A=\int_2^4 0.5t\,dt$$

$$=0.25t^2\Big|_2^4=3J$$

解法2: 用动能定理

$$A=\Delta E_k=\frac{1}{2}m(v_4^2-v_2^2)$$

$$=\frac{1}{2}\times 0.5\times(41-29)$$

$$=3J$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$$

$$v_x=\frac{dx}{dt}=5$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=t$$

$$v_2=\sqrt{29}$$

$$v_4=\sqrt{41}$$

§ 1-5 非惯性系中的力学定律

物体质量为m，受外力为$\vec{F}$,相对惯性系的加速度为$\vec{a}$

相对非惯性系的加速度为$\vec{a}'$

非惯性系相对惯性系的加速度为$\vec{a}''$

则：$\vec{F} = m\vec{a} = m（\vec{a}' + \vec{a}''）$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F} - m\vec{a}'' = m\vec{a}' \\ \vec{F}' = -m\vec{a}'' \quad \text{——惯性力} \end{array}\right\} \vec{F} + \vec{F}' = m\vec{a}'$$

讨论：惯性力是一个假想的力 (惯性力只有受力物体而无施力物体),是运动学思想与动力学思想等效性的体现。

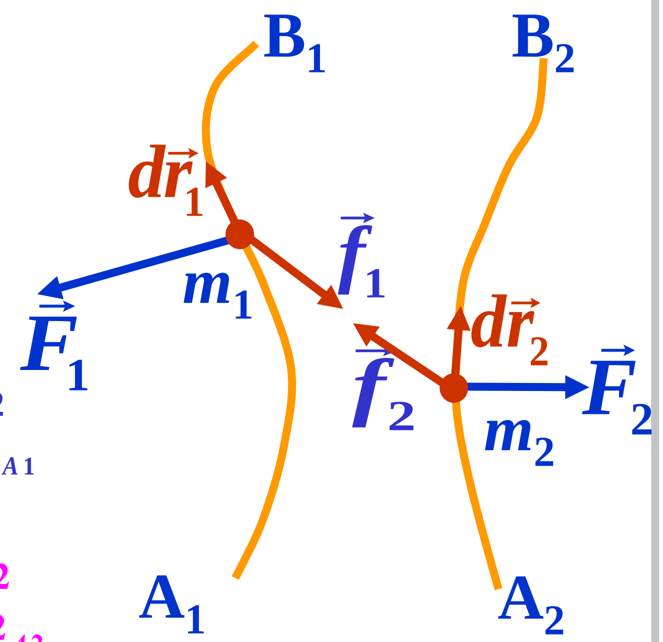
$$A = \int dA = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int F \cos\alpha ds$$ ——力对空间的累积

$$= \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2 = E_{Kb} - E_{Ka}$$ ——动能定理

三. 质点系的动能定理

两个质点的系统

$$\begin{cases} \vec{f}_1, \vec{f}_2 \text{ ----为内力.} \\ \vec{F}_1, \vec{F}_2 \text{ ----为外力.} \end{cases}$$



分别应用质点动能定理:

m1 $\int_{A_1}^{B_1} \left(\vec{F}_1 + \vec{f}_1\right) \cdot d\vec{r}_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{1_{B1}}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1_{A1}}^2$

m2 $\int_{A_2}^{B_2} \left(\vec{F}_2 + \vec{f}_2\right) \cdot d\vec{r}_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2_{B2}}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2_{A2}}^2$

$$\int_{A_1}^{B_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_{A_2}^{B_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \int_{A_1}^{B_1} \vec{f}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_{A_2}^{B_2} \vec{f}_2 \cdot d\vec{r}_2$$

$$= \left(\frac{1}{2} m_1 v_{1_{B1}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2_{B2}}^2\right) - \left(\frac{1}{2} m_1 v_{1_{A1}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2_{A2}}^2\right)$$

$$\int_{A_1}^{B_1}\vec{F}_1\cdot d\vec{r}_1+\int_{A_2}^{B_2}\vec{F}_2\cdot d\vec{r}_2+\int_{A_1}^{B_1}\vec{f}_1\cdot d\vec{r}_1+\int_{A_2}^{B_2}\vec{f}_2\cdot d\vec{r}_2$$

$$=\left(\frac{1}{2}m_1v_{1_{B1}}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2_{B2}}^2\right)-\left(\frac{1}{2}m_1v_{1_{A1}}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2_{A2}}^2\right)$$

内力功的和不一定为零（∵各质点位移不一定相同）。

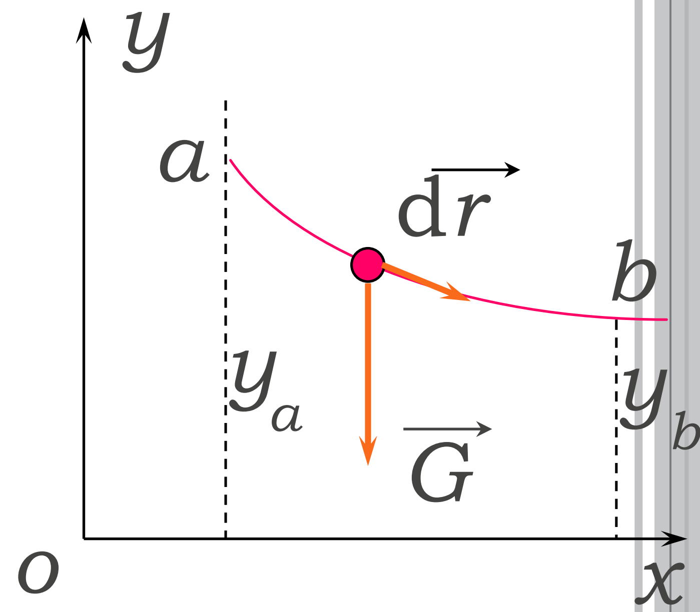
$$A_{外}+A_{内}=E_{kB}-E_{kA}$$

外力总功 + 内力总功 ＝ 系统总动能的增量

§2-2 保守力 势能

一、保守力的功

1. 重力的功



$$dA = \vec{G}\cdot d\vec{r}$$

$$= (-mg\vec{j})\cdot(dx\vec{i} + dy\vec{j})$$

$$= -mg\,dy$$

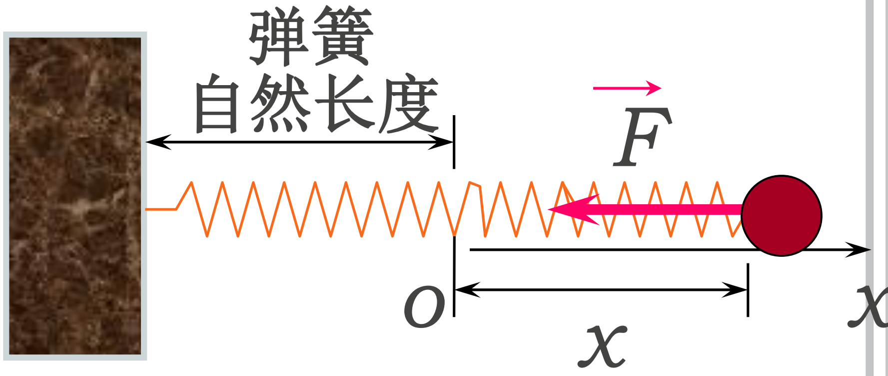
$$A = -mg\int_{y_a}^{y_b} dy = -(mgy_b - mgy_a)$$

若物体从a出发经任意路径回到a点，则有:

$$A = \oint G\cdot dr = 0$$

在重力场中，物体沿任意闭合路径一周，重力所作的功为零。

2. 弹性力的功

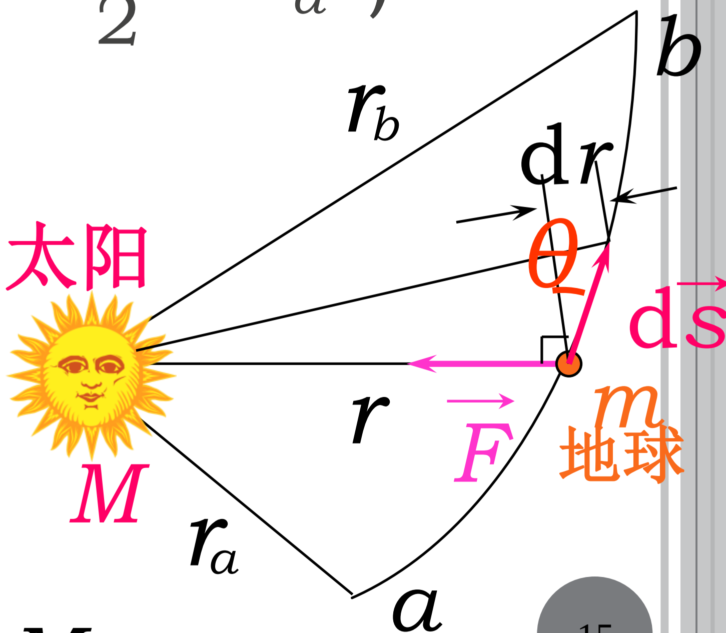


$$F = -kx$$

$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}x = -kx\,\mathrm{d}x$$

$$A = \int_{x_a}^{x_b} -kx\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{1}{2}kx_b^2 - \frac{1}{2}kx_a^2\right)$$

3. 万有引力的功



$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$$

$$= F\,\mathrm{d}s\cos(90^\circ + \theta)$$

$$= -G\frac{Mm}{r^2}\sin\theta\,\mathrm{d}s = -G\frac{Mm}{r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$A_{引力} = -GMm\int_{r_a}^{r_b}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -\left[\left(-\frac{GMm}{r_b}\right)-\left(-\frac{GMm}{r_a}\right)\right]$$

$$A_{重力} = -mg（h_b - h_a）\qquad A_{弹力} = -\left(\frac{1}{2}kx_b^2 - \frac{1}{2}kx_a^2\right)$$

保守力的定义：

如果 有一力 F，它对物体所作的功决定于作功的起点和终点而与作功的路径无关，称此力为保守力或有势力。

或：若有一个力能满足条件 $\oint \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$

则称此力为保守力。

常见的保守力：

重力、弹性力、万有引力、静电场力、分子间作用力

二、势能

重力的功 $A_{AB} = mgh_A - mgh_B$

弹力的功 $A_{AB} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$

万有引力的功 $A_{AB} = (-\frac{Gm_1m_2}{r_A}) - (-\frac{Gm_1m_2}{r_B})$

特点：保守力的功可以写成两项之差，第一项只与初位置有关，第二项只与末位置有关。

因此，可定义一个只与位置有关的函数 E_P，该函数被称为系统的势能函数 。

保守力所作的功等于势能增量的负值

$$A_{AB} = E_{PA} - E_{PB} = -\Delta E_P$$ (势能差)

$$A_{AB} = E_{PA} - E_{PB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} = E_{PA}$$

要想求出某点势能值，则应规定一势能零点

如：若规定**B**点的势能为零,即：$E_{pB} = 0$

质点在空间某点的势能值等于把其从该点沿任意路径移到势能为零的参考点保守力所做的功。

说明：**1**） 势能零点不同,势能表达式也不同，各点势能值也就不同，但不影响任意两点的势能差。

2） 势能的“所有者”应是系统共有,它不属于某一个质点。它实质上是一种相互作用能。

只有存在保守内力的系统才能引入相应的势能。

3）势能是标量、是状态量。

三、几种保守力的势能

重力势能：$E_p = mgh$ 零点在 $h = 0$ 处。

弹性势能：$E_p = \frac{1}{2}kx^2$ 零点在 x=0自然伸长处。

万有引力势能：$E_p = -\frac{GmM}{r}$ 零点选在 $r \to \infty$ 处。

四.功是能量变化的量度：

$$A_{外} = E_{k2} - E_{k1}$$

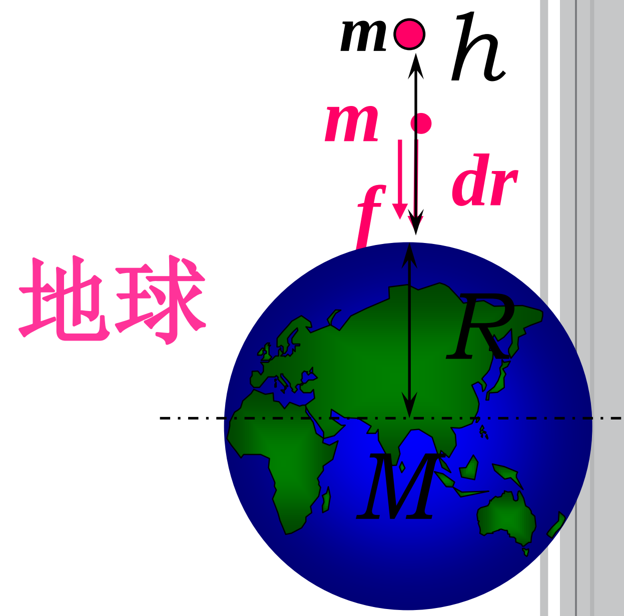
$$A_{保} = E_{P1} - E_{P2}$$

［例］ 地球M, R, 质点m 距地面高h, 取地球表面为0势能，求质点、地球在此相对位置的引力势能。

解:

$$E_p = A = \int_{h+R}^{R} -G\frac{Mm}{r^2}dr$$

$$= G\frac{Mm}{R} - G\frac{Mm}{R+h} = GMm\frac{h}{R(R+h)}$$



若 $h << R$

$\therefore R（R+h）\approx R^2$

则：$E_P = GMm\dfrac{h}{R^2}$

又：$mg = \dfrac{MGm}{R^2}$

$\Rightarrow E_p = mgh$

可见重力势能是万有引力势能在地球表面附近的一个特例

§2-3 机械能守恒定律

一、功能原理

由质点系的动能定理 $A_{外} + A_{内} = E_{kB} - E_{kA}$

将内力分为两部分 $A_{外} + A_{内保} + A_{内非} = E_{kB} - E_{kA}$

$$A_{内保} = E_{pA} - E_{pB}$$

系统的机械能

$$A_{外} + A_{内非} = (E_{kB} + E_{pB}) - (E_{kA} + E_{pA})$$

功能原理 $A_{外} + A_{内非} = E_{B} - E_{A} = \Delta E$

外力和非保守内力做的功等于系统机械能的增量

二、机械能守恒定律

由 功 能 原 理 $$A_{外} + A_{内非} = E_B - E_A$$

当 $$A_{外} + A_{内非} = 0$$

机械能守恒 $$E_B = E_A$$

只有保守内力做功时系统机械能守恒

三、能量守恒定律

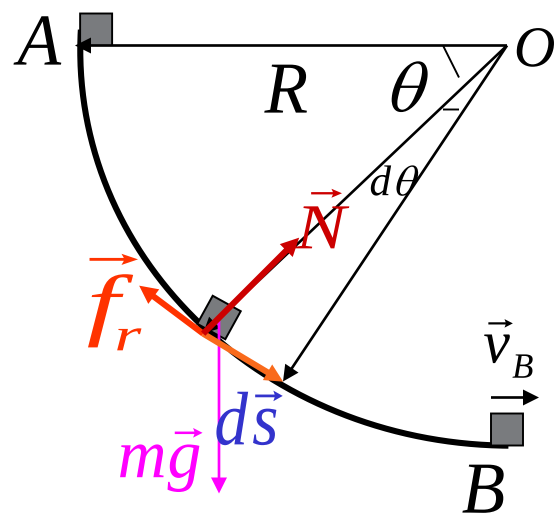
一个不受外力作用的系统称为孤立系统 $(A_{外} = 0)$

1. 若系统内非保守内力为零，或它不做功，则系统机械能守恒。

2. 若非保守内力作功不为零, 机械能则不守恒,但各种形式能量(包括热能,化学能,光能…)的总和仍守恒。

这就是能量守恒定律,这是自然界最普遍的定律之一.

【例 】一质量为m的物体,由静止开始沿着四分之一的圆周,从A滑到B,在B处速度的大小为v_B,圆半径为R. 求:物体从A到B,摩擦力所做之功.



已知: m, v_B , R, $v_A=0$

求: A_{fr}

(1). 由功的定义解:

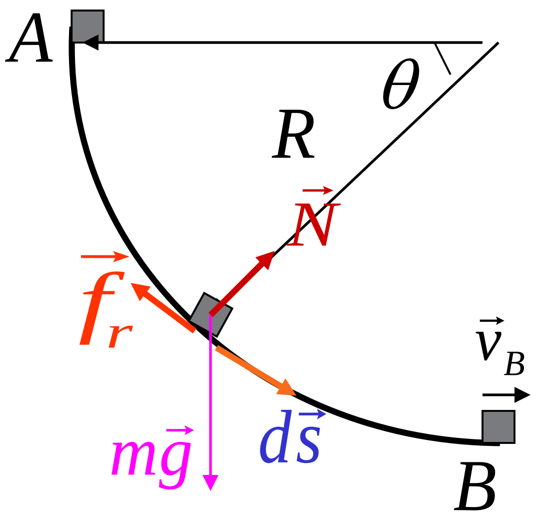
$$A_{f_r}=\int f_r\cdot\cos\varphi\cdot ds=\int -f_r R d\theta$$

切向: $mg\cos\theta-f_r=ma_t=m\dfrac{dv}{dt} \Rightarrow -f_r=m\dfrac{dv}{dt}-mg\cos\theta$

$$A_{f_r}=\int dA=\int_0^{v_B} mv dv-\int_0^{\frac{\pi}{2}} mgR\cos\theta\cdot d\theta$$

$$=\frac{1}{2}mv_B{}^2-mgR$$

(2). 应用动能定理解



以m为研究对象： $A_{外} = E_{k2} - E_{k1}$

外力
- mg
  - mgcosθ——做功
  - mgsinθ——不做功
- N——不做功
- f_r——做功

$$A = A_{mg\cos\theta} + A_{f_r} = \int mg\cos\theta \cdot ds + A_{f_r} = mgR + A_{f_r}$$

$$= \frac{1}{2}mv_B{}^2 - \frac{1}{2}mv_A{}^2 = \frac{1}{2}mv_B{}^2$$

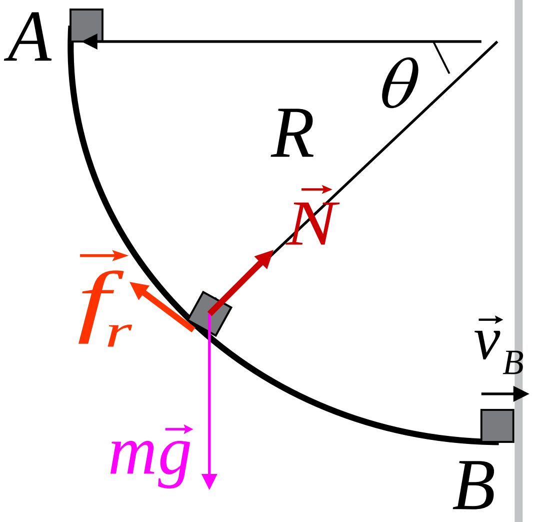
$$\therefore A_{f_r} = \frac{1}{2}mv_B{}^2 - mgR$$

(3). 应用功能原理解

以m和地球为研究系统:

$$A_{外}+A_{非保内}=E_2-E_1=(E_{k2}+E_{p2})-(E_{k1}+E_{p1})$$

受力分析
- 外力: 无
- 保守内力: **mg**
- 非保守内力
  - **N:** 不 做功
  - f_r: 做功



$$\therefore A_{f_r}=(\frac{1}{2}mv_B^{\ 2}+0)-(0+mgR)$$ **(以B点为重力势能零点)**

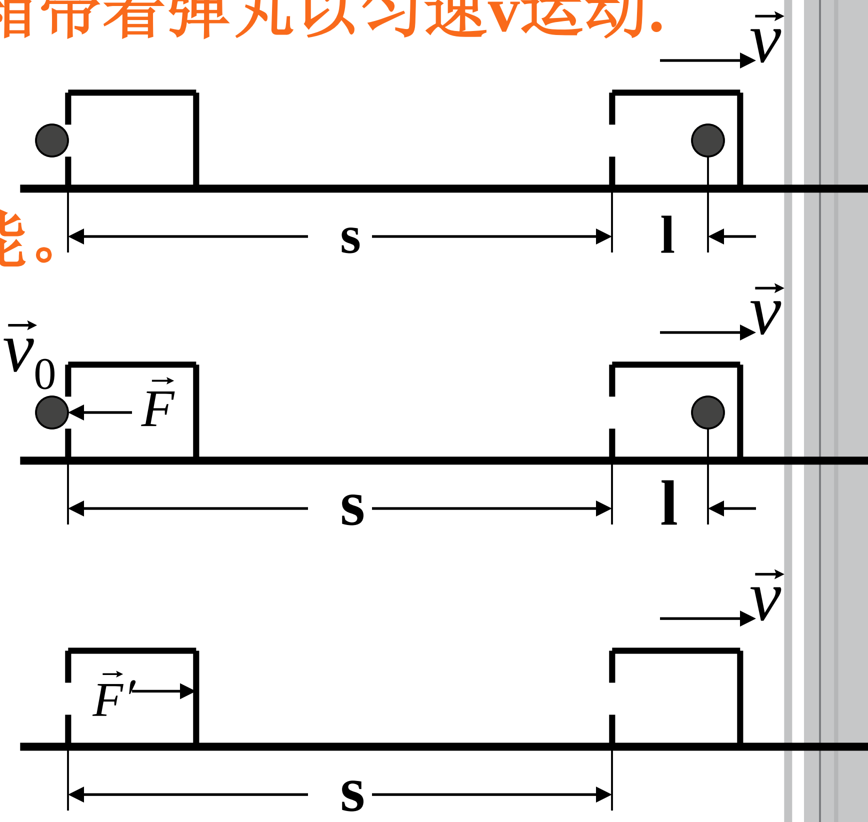
$$=\frac{1}{2}mv_B^{\ 2}-mgR$$

【例】在光滑的水平台面上放有质量为M的沙箱,一颗从左方飞来质量为m的弹丸从箱左侧洞口击入,在沙中前进l距离后停止.在这段时间中沙箱向右运动的距离为s,此后沙箱带着弹丸以匀速v运动.

求（1）沙箱对弹丸的平均阻力F;

（2）弹丸的初速v_0;

（3）沙箱一弹丸系统损失的机械能。



解：弹丸:

$$-F(s+l)=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^{\ 2}$$

沙箱:

$$F'\cdot s=\frac{1}{2}Mv^2-0$$

$$F'=-F$$

$$\Rightarrow F=\frac{1}{2}\frac{M}{s}v^2,\qquad v_0=\left[\frac{M}{ms}(s+l)+1\right]^{1/2}v$$

另解：$\{m、M\}$ $\because F_x=0$ $\therefore \Delta P_x=0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{即：}\quad mv_0=(m+M)v \Rightarrow v_0=\dfrac{m+M}{m}v \\[2ex] \text{运用功能关系得：}\ v_0=\left[\dfrac{M}{ms}(s+l)+1\right]^{\frac{1}{2}} v \end{array}\right\}\text{二者如何统一？}$$

（3）沙箱—弹丸系统损失的机械能。

解：

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2\right) - \frac{1}{2}mv_0^{\ 2}$$

$$v_0 = \left[\frac{M}{ms}(s+l)+1\right]^{1/2} v$$

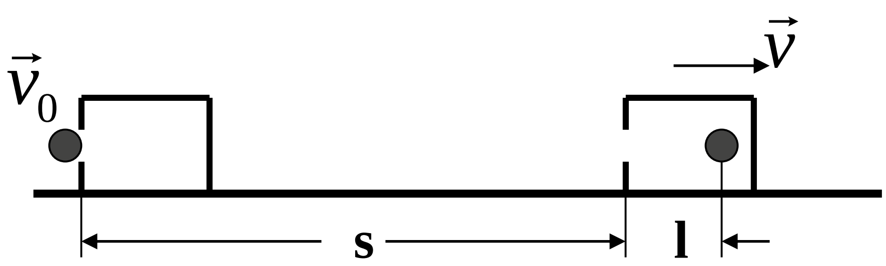
$$\Delta E = -\frac{1}{2}\frac{M}{s}lv^2$$

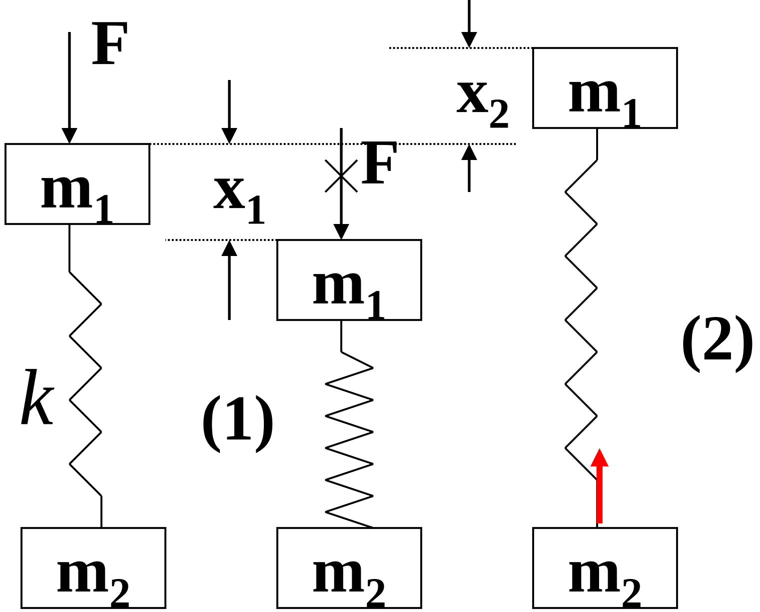
另：

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2\right) - \frac{1}{2}mv_0^{\ 2} = \frac{1}{2}Mv^2 + \left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^{\ 2}\right)$$

$$= F'\cdot s - F\,(s+l) = -F\cdot l$$

两质点间的“一对内力”所做功之和等于其中一个质点受的力沿着该质点相对于另一质点所移动的路径所做的功。



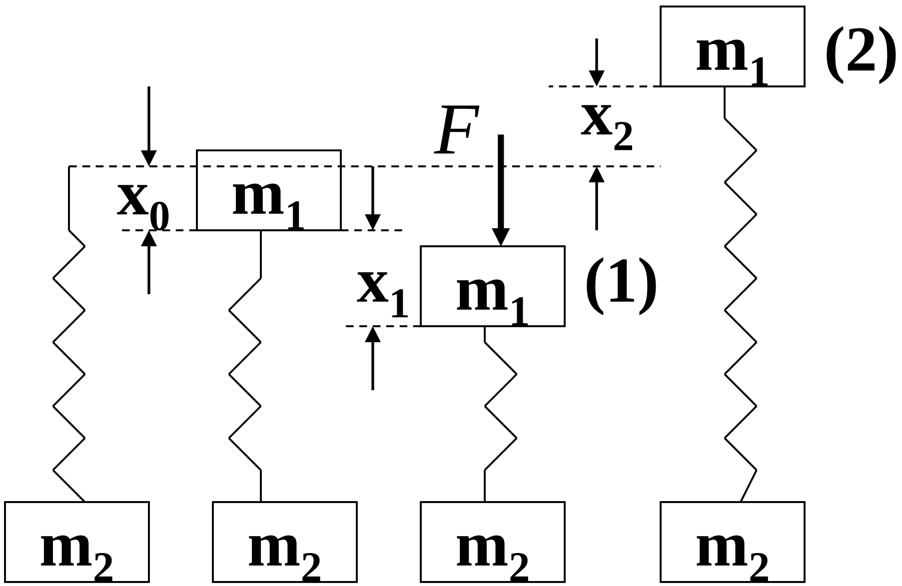


【例2-5】问：F力为多大,才能使力突然撤除时,上面板跳起,并能使下面的板刚好被提起？

解：以m_1、m_2、弹簧、地球为系统

$$E_1=E_2$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}kx_1^{\ 2}=\frac{1}{2}kx_2^{\ 2}+m_1g(x_1+x_2)\\&F=kx_1\\&kx_2=m_2g\end{aligned}\right\}\Rightarrow F$$



$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}k(x_0+x_1)^2=\frac{1}{2}kx_2{}^2+m_1g(x_1+x_2+x_0)\\
&m_1g=kx_0\\
&F+m_1g=k(x_1+x_0)\\
&kx_2=m_2g
\end{aligned}\right\} \quad F=(m_1+m_2)g$$

计算第二宇宙速度

第二宇宙速度v_2:使物体m脱离地球引力需的最小速度

$$E_0 = E \Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{m_e m}{R_e} = 0 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2Gm_e}{R_e}} = 11.2(Km/s)$$

逃逸速度（$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$）：

若：$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r_S}} = C$ — 光速，　r_S — —史瓦西半径或引力半径

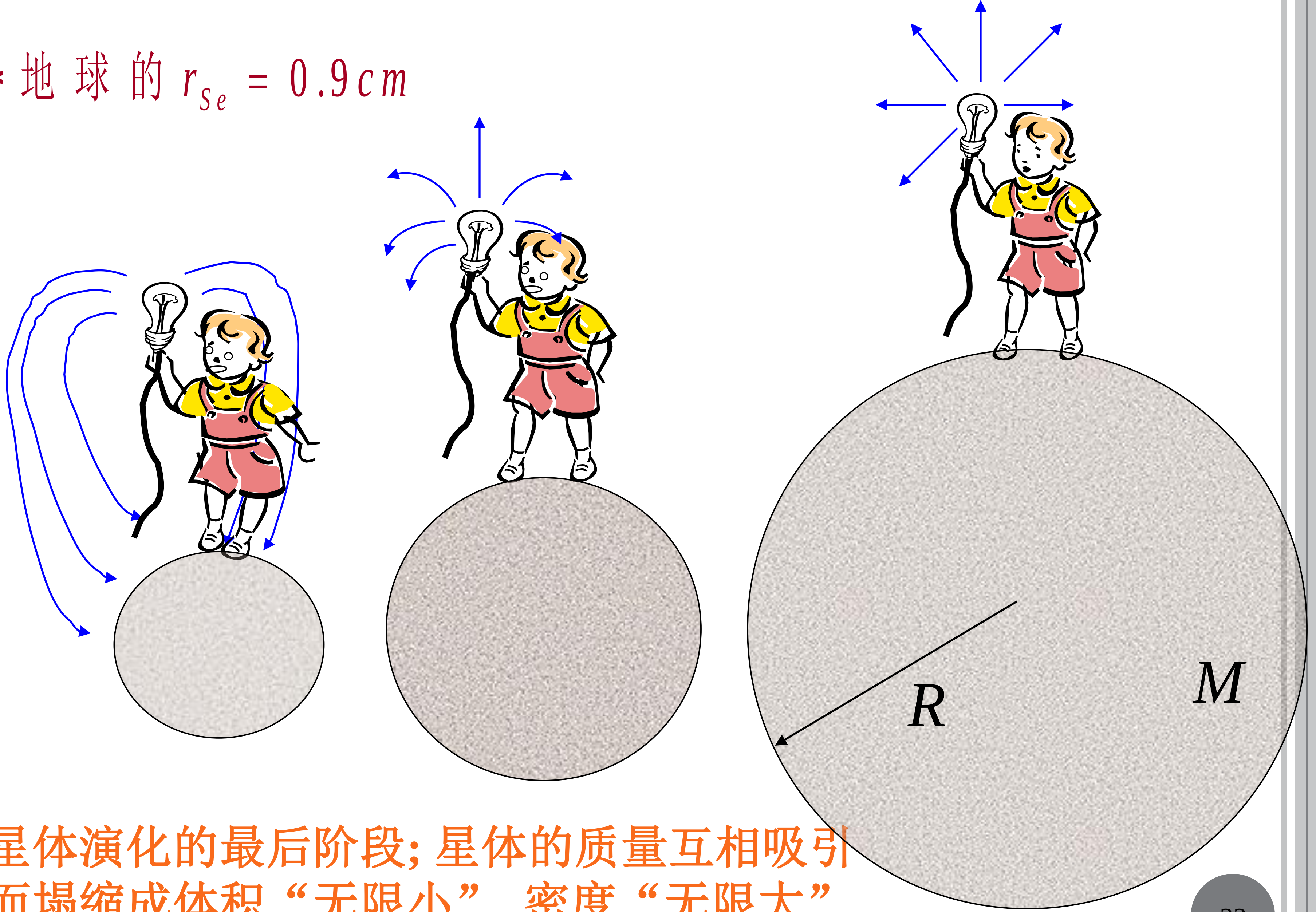
则该体系中任何物体（包括光子，即电磁波）都逃不出去

——外界不能看见它—— “黑”

任何物体一旦进入该体系的强引力区域，就永远不可能再逃出去—— “无底洞”

“黑洞”

* 地 球 的 $r_{Se} = 0.9cm$



星体演化的最后阶段; 星体的质量互相吸引而塌缩成体积“无限小”, 密度“无限大”的奇态—黑洞。黑洞引力特别强,

黑洞

黑洞不会发光，因此不能用天文望远镜看到，但黑洞所产生的巨大引力可以使时空扭曲变形。天文学家可借助观察黑洞周围物质被吸引时的情况，找出黑洞的位置。这是被欧洲航天局 XMM -牛顿X射线探测器探测到的位于 MCG-6-30-15 星系中的黑洞。

§2-4 冲量 动量定理

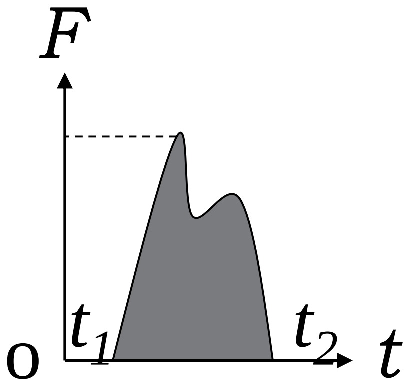
一、冲量

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}\Rightarrow \vec{F}dt=d\vec{P} \qquad t_1-t_2: \qquad \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot dt=\int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2}d\vec{P}$$

其中：

1. $\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot dt=\vec{I}$ （冲量）：描述力对时间的累积

冲量的几何意义：冲量I在数值上等于F~t图线与坐标轴所围的面积。



冲量的分量式：

$$I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x dt \qquad I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_y dt$$

2. $\vec{P}=m\vec{v}$（动量）：表征质点运动状态的量

二、质点动量定理：

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt = \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} d\vec{P} \longrightarrow \vec{I} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

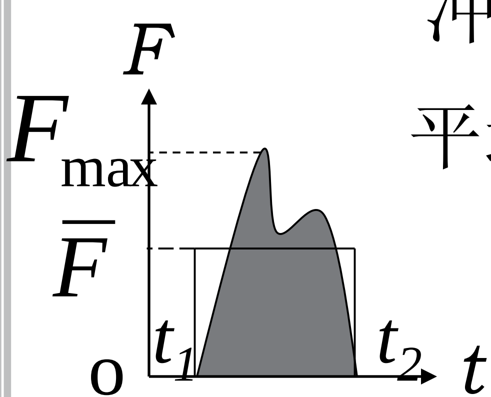
冲量是物体动量（运动状态）变化的量度。

1.动量定理的分量式：

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = mv_{2x} - mv_{1x} \qquad I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = mv_{2y} - mv_{1y}$$

2.用平均冲力表示的动量定理：

冲力：作用时间极短，变化极大。



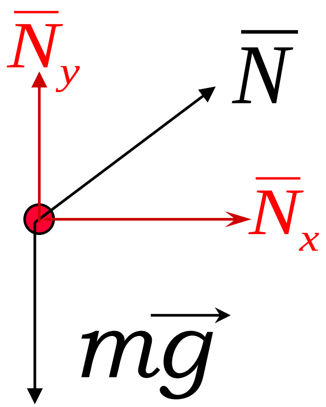
平均冲力:碰撞期间与变力具有相同冲量的恒力

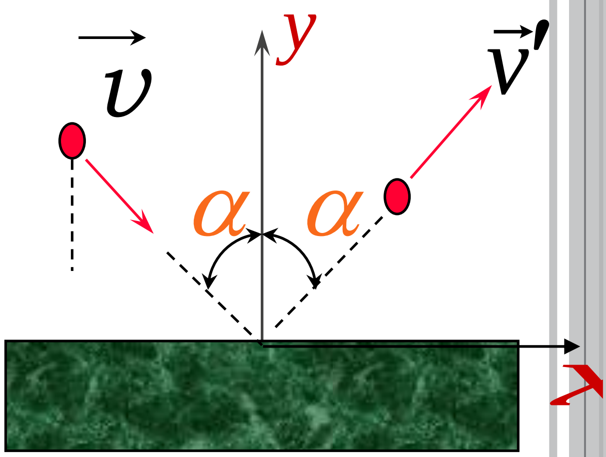
$$\vec{\overline{F}}(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \quad \begin{cases} \overline{F}_x (t_2 - t_1) = mv_{2x} - mv_{1x} \\ \overline{F}_y (t_2 - t_1) = mv_{2y} - mv_{1y} \end{cases}$$

[例] 一小球与地面碰撞 $m=2\times10^{-3}$kg，$\alpha=60^0$，$\upsilon=\upsilon'=5.0$ m.s^{-1}，碰撞时间 $t=0.05$s

求:平均冲力。

解:





$$(\vec{\bar{N}}+m\vec{g})\Delta t=m\vec{v}'-m\vec{v}$$

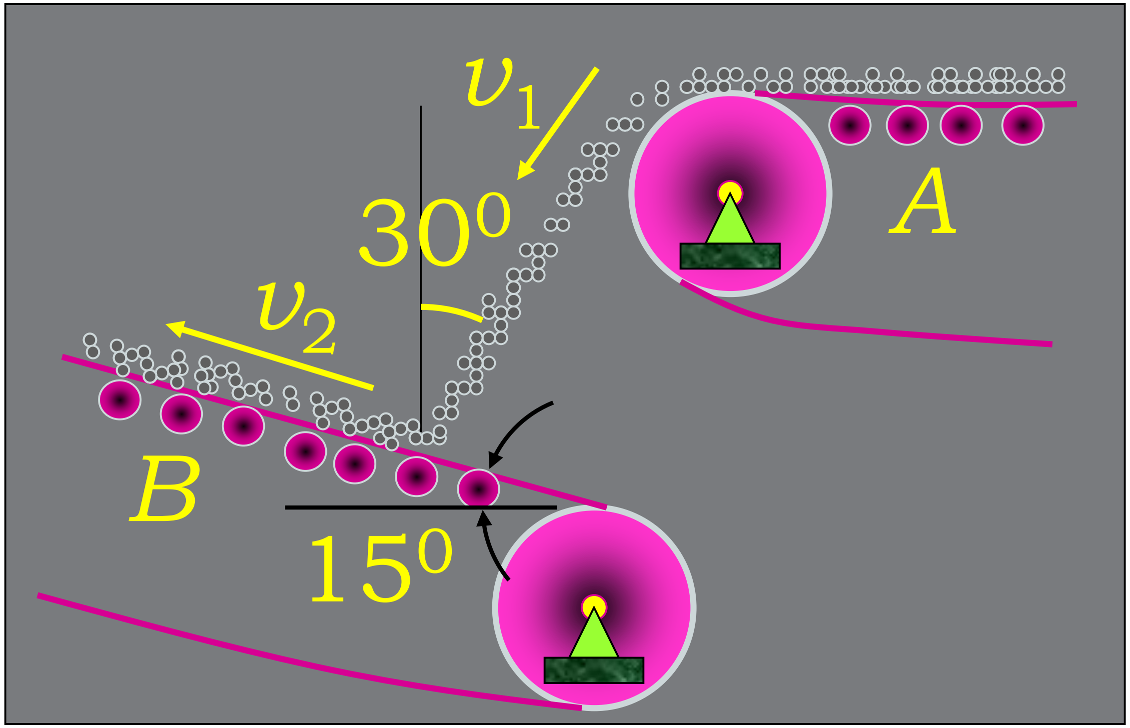
$$x:\quad \bar{N}_x\Delta t=mv'\sin\alpha-mv\sin\alpha$$

$$y:\quad (\bar{N}_y-mg)\Delta t=mv'\cos\alpha-(-mv\cos\alpha)$$

得：$\bar{N}_x=0,\qquad \bar{N}_y=\dfrac{2mv\cos\alpha}{\Delta t}+mg=0.22(N)$

[例] 矿砂从传送带A落入传送带B，其速度v_1=4m/s ,方向与竖直方向成 30^0 角，而传送带 B 与水平方向成15^0 角，其速度v_2=2m/s。传送带的运送量为k =20kg/s .

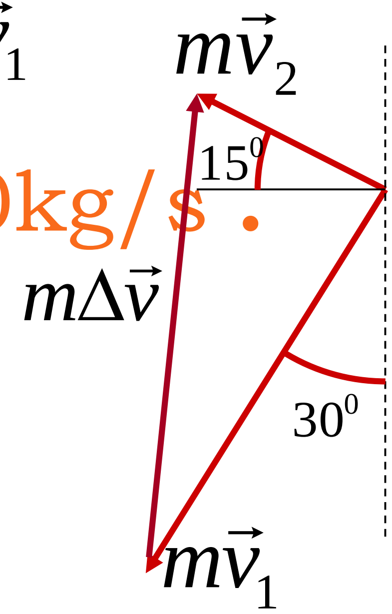
求：落到传送带B上的矿砂所受力的大小。



解：由动量原理：$\overline{\vec{F}}\Delta t = m\Delta\vec{v} \Rightarrow \overline{F}\Delta t = \left|m\Delta\vec{v}\right| \Rightarrow \overline{F} = 79.6(N)$

其中在 Δt 内落在传送带上的矿砂质量 $m=k\Delta t$

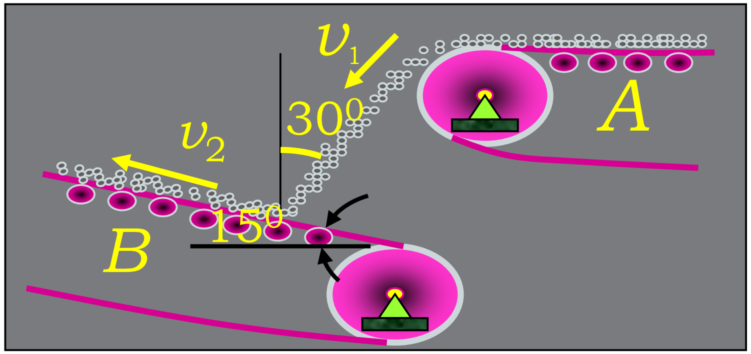
这些矿砂的动量增量为：$m\Delta\vec{v} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$



已知：$\upsilon_1 = 4\mathrm{m/s}$，$\upsilon_2 = 2\mathrm{m/s}$，$k = 20\mathrm{kg/s}$.

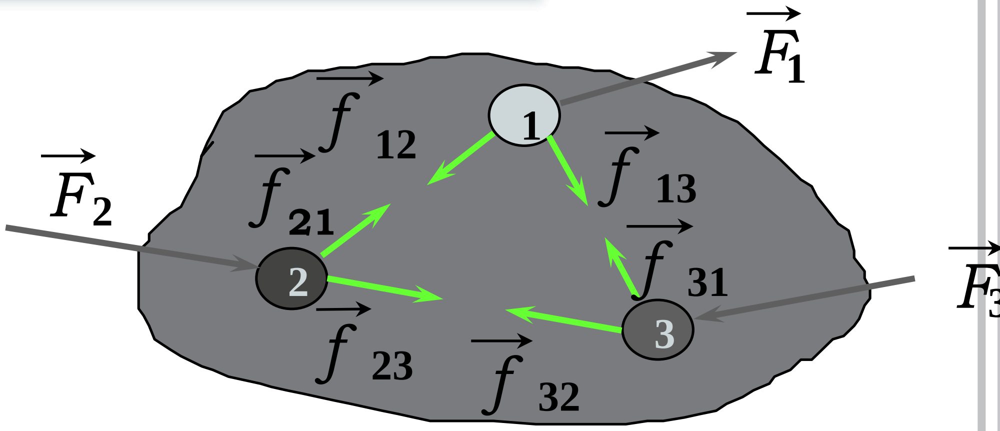
$$\left|m\Delta\vec{v}\right| = m\sqrt{4^2 + 2^2 - 2\times 4\times\cos 75^0}$$

$$= 3.98m = 3.98k\Delta t$$



§2-5 动量守恒定理

一、质点系动量定理



质点系中各质点受力：

内力：$\vec{f}_{12}, \vec{f}_{21}, \vec{f}_{13} \cdots\cdots$

外力：$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$

$$m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{10} = \int_{t_0}^{t}(\vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{F}_1)\cdot dt$$

$$m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{20} = \int_{t_0}^{t}(\vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{F}_2)\cdot dt$$

$$m_3\vec{v}_3 - m_3\vec{v}_{30} = \int_{t_0}^{t}(\vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_3)\cdot dt$$

$$\because \vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{i0} = \int_{t_0}^{t}(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i)dt$$

质点系动量定理

作用在系统上合外力的冲量等于系统的总动量的变化量。

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{i0} = \int_{t_0}^{t} (\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i) dt$$

二、动量守恒定理

若： $\sum \overrightarrow{F_i} = 0$ 即外力矢量和为零

则： $\sum m_i \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{c}$

系统的总动量等于一常矢量，总动量守恒。

若: $\sum F_{ix} = 0$ 则: $\sum m_i v_{ix} = c$

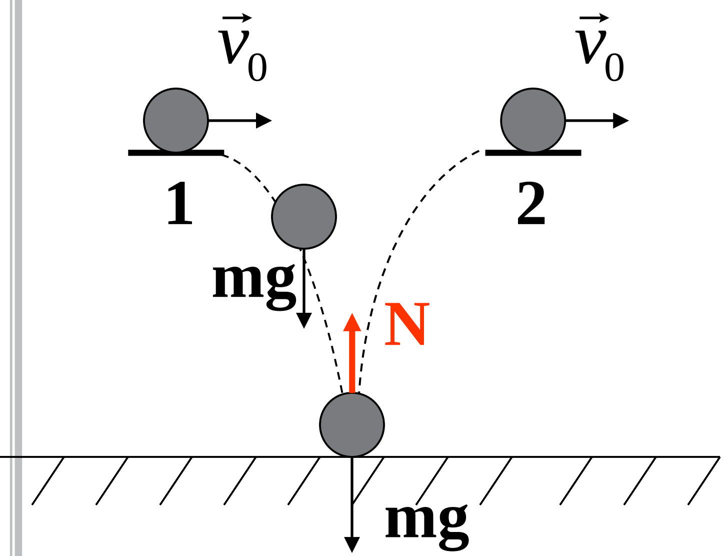
若: $\sum F_{iy} = 0$ 则: $\sum m_i v_{iy} = c$

若: $\sum F_{iz} = 0$ 则: $\sum m_i v_{iz} = c$

如果外力在某方向投影的代数和为零，则在该方向的分动量守恒。

讨论：

例：问：



1).1−2过程小球受$\vec{I}=?$

2).1−2过程中小球的动量守恒否？

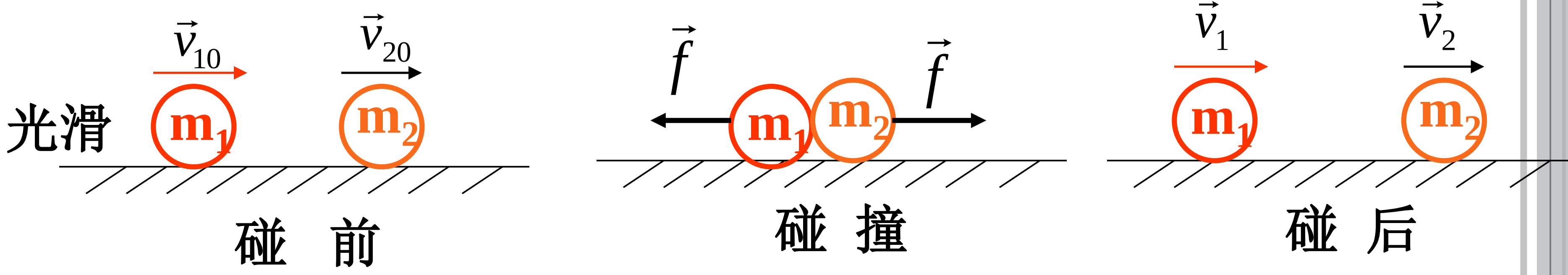
答:1).

$$\vec{I}=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=m\vec{v}_0-m\vec{v}_0=0$$

2).1−2过程中小球的总动量不守恒

但水平方向动量守恒.

1.动量守恒的条件是质点（或系统）所受的合外力为零，而不是合外力的冲量为零。



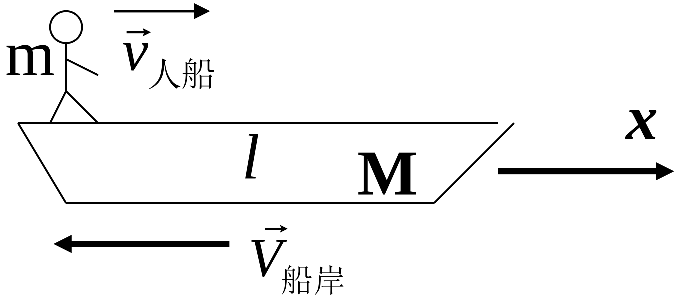
$$\because \sum F_{外}=0 \qquad \therefore \vec{P}_1=\vec{P}_2$$

即：$$\vec{m}_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20}=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$$

$$\vec{m}_1\vec{v}_1-m_1\vec{v}_{10}=m_2\vec{v}_{20}-m_2\vec{v}_2$$

2.内力的作用虽不能改变系统的总动量,但可改变系统内动量的分配。

例：



求：人从船尾走到船头时，船移动的距离。

解：$\{m, M\} \quad \because F_x = 0 \quad \therefore P_x$恒定

$$\text{即}: 0 = mv + M(-V) \Rightarrow V = \frac{m}{M} v$$

$$S_{船岸} = V \cdot \Delta t = \frac{m}{M} v \cdot \Delta t = \frac{m}{M} l$$

3.动量定理及动量守恒定律仅适用于惯性系,且定理、定律中各速度都必须对同一个惯性系。

正确解：$0 = mu_{人岸} + M(-V) = m(v - V) + M(-V) \Rightarrow V = \dfrac{m}{m+M} v$

$$S_{船岸} = V \cdot \Delta t = \frac{m}{m+M} v \cdot \Delta t = \frac{m}{m+M} l$$

例：一列车在光滑的平直轨道上行使，列车质量为m_1,车速为v_0,如果在车上将一质量为m_2的物体以相对车为u的速率抛出，抛出的方向与车速方向相同，则车速将变为多少？

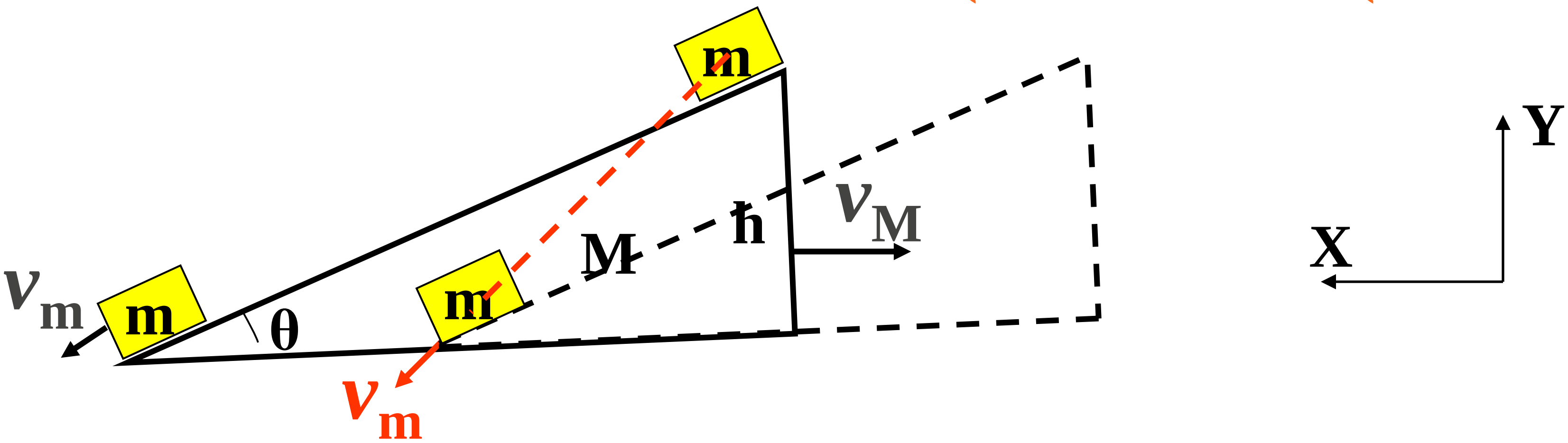
解：$\{m_1, m_2\}$ $\because F_x = 0$ $\therefore P_x$恒定

设：车速变为V

则：
$$(m_1 + m_2)v_0 = m_1 V + m_2(v_0 + u)$$ ×
$$(m_1 + m_2)v_0 = m_1 V + m_2(V + u)$$ ✓

4.定理、定律中各速度都必须对同一个时刻。

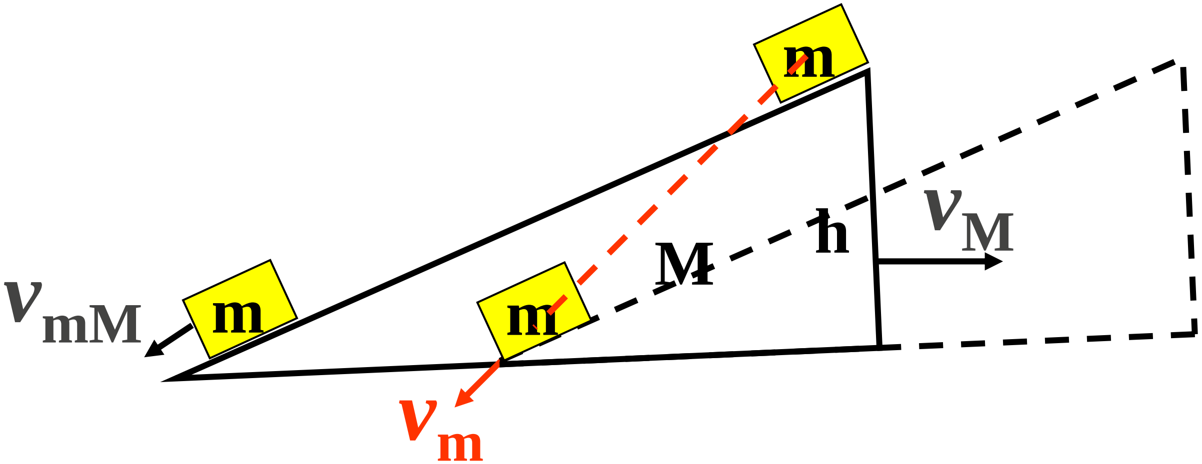
例：已知M，m，h，θ，一切接触面均光滑。求：m滑到M底部时，$v_{m(m地)}=?$ $v_{M(M地)}=?$

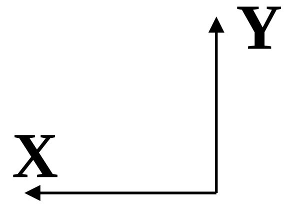


分析：$\{m, M\}: \vec{P}$不守恒，但P_x守恒。$\therefore 0 = mv_{mx} - Mv_M$

$\{m, M, 地\}: E$守恒。 $\therefore mgh = \frac{1}{2}mv_m^{\ 2} + \frac{1}{2}Mv_M^{\ 2}$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= mv_m\cos\theta - Mv_M \\ mgh &= \frac{1}{2}mv_m^{\ 2} + \frac{1}{2}Mv_M^{\ 2} \end{aligned}\right\} \begin{matrix} v_m \\ v_M \end{matrix}$$





$$\vec{v}_m = \vec{v}_{mM} + \vec{v}_M \quad \begin{cases} v_{mx} = v_{mM}\cos\theta - v_M \\ v_{my} = v_{mM}\sin\theta \end{cases} \quad v_m$$

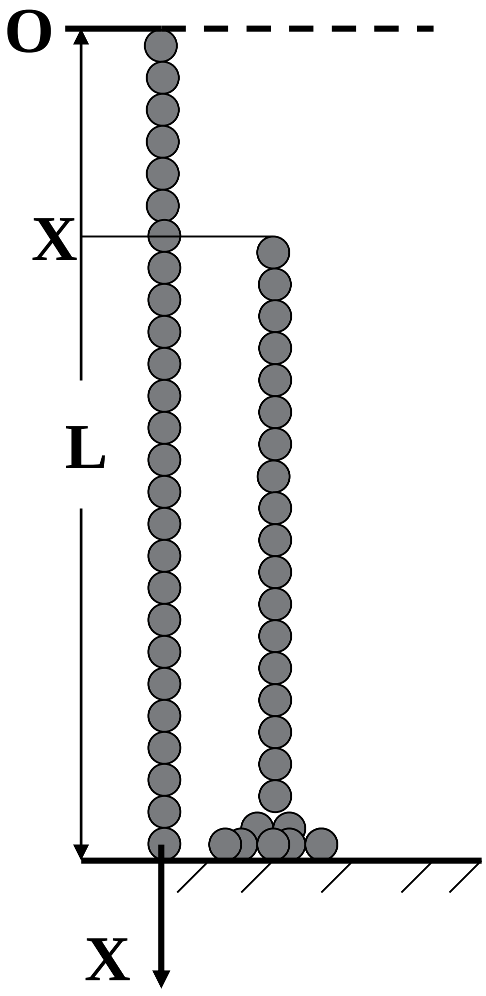
$$0 = m(v_{mM}\cos\theta - v_M) - Mv_M \qquad (1)$$

$$mgh = \frac{1}{2}m\left[\underbrace{(v_{mM}\cos\theta - v_M)^2}_{v_{mx}^2} + \underbrace{(v_{mM}\sin\theta)^2}_{v_{my}^2}\right] + \frac{1}{2}Mv_M^2 \qquad (2)$$

$$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\} \; v_{mM},\; v_M$$

$$\underbrace{v_{mx}^2 + v_{my}^2}_{v_m^2}$$

一质量均匀分布的柔软细绳铅直的悬挂着，绳的下端刚好触到水平桌面上，如果将绳的上端放开，绳将落在桌面上。试证明：在绳下落的过程中，任意时刻作用在桌面的压力等于已落到桌面上的绳重量的三倍。



证明：取如图所示的坐标。

t： 落在桌面上的绳长为**x**

随后的**dt**内有**dx**的绳落于桌面上

$$dx: \quad dm = \frac{M}{L}dx$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$dP = 0 - v\,dm$$

$$F = -\frac{M}{L}v^2$$

动量定理：**Fdt=dP**

F:桌面对绳的冲力

绳对桌面的冲力F’=-F

$$F'=\frac{M}{L}v^2$$

$$而v^2=2gx$$

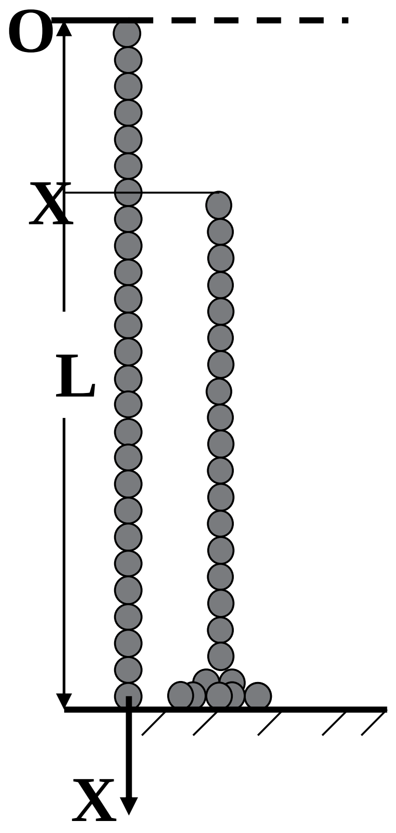
$$F'=\frac{2M}{L}gx$$

已落于桌面上绳的重量

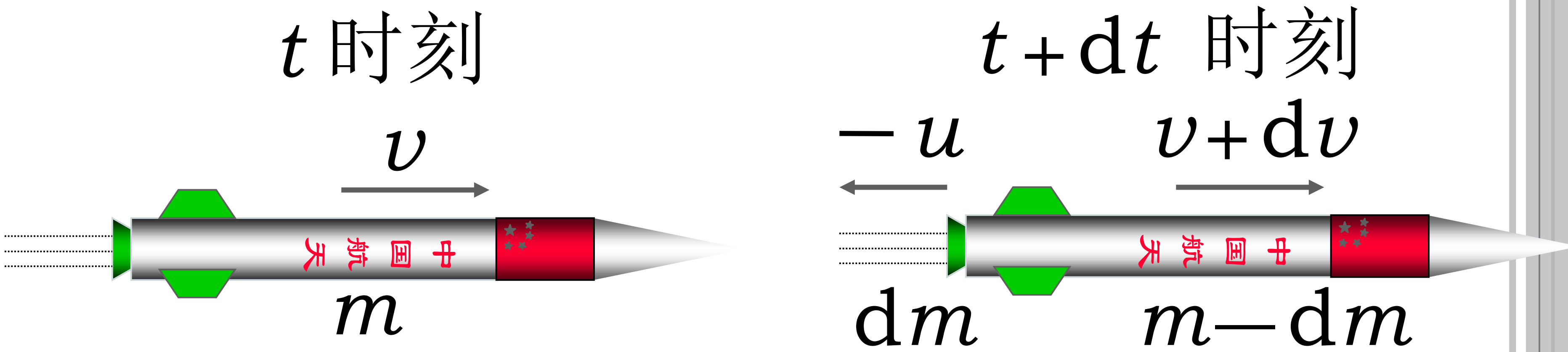
$$G=\frac{M}{L}xg$$

$$\Rightarrow F_{总}=F'+G=\frac{3Mgx}{L}=3G$$

证毕



[例] 火箭飞行。质量为m的火箭以速度v飞行，试求其速度与火箭本体质量之间的关系。



由动量守恒：

$$mv=(m-dm)(v+dv)+(dm)(v+dv-u)$$

2

$$\mathrm{d}v=-u\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

3

4

$$\int_{v_1}^{v_2}dv=\int_{m_1}^{m_2}-u\frac{dm}{m} \longrightarrow v_2-v_1=u\ln\frac{m_1}{m_2}$$

5

6

$$v_2 - v_1 = u \ln \frac{m_1}{m_2}$$

讨论：起飞时：$v_1=0$，$m_1=m_{燃}+m_{火}$

燃料烧净时：$v=v_2$， $m_2=m_{火}$

$$v_2 = u \ln \frac{m_1}{m_2} = u \ln\left(1 + \frac{m_{燃}}{m_{火}}\right)$$

$$A=\int dA=\int \vec{F}\cdot d\vec{s}=\int F\cos\alpha ds$$ ——力对空间的累积

$$=\frac{1}{2}mv_b^2-\frac{1}{2}mv_a^2=E_{Kb}-E_{Ka}$$ ——动能定理

$$A_{外}+A_{内}=E_{kB}-E_{kA}$$ —— 质点系的动能定理

功的大小一般与路径有关，而保守力的功仅取决于作功的起点和终点，与作功的路径无关。

$$A_{保守力}=E_{PA}-E_{PB}=-\Delta E_P$$

功是能量变化的量度

$$A_{AB}=\int_A^B \vec{f}_{保守力}\cdot d\vec{r} = E_{PA}-E_{PB}=E_{PA}$$

如：若规定B点的势能为零，

质点在空间某点的势能值等于把其从该点沿任意路径移到势能为零的参考点保守力所做的功。

势能零点不同，势能表达式也不同，各点势能值也就不同，但不影响任意两点的势能差。

三、几种保守力的势能

重力势能： $E_p=mgh$ 零点在 $h=0$ 处。

弹性势能： $E_p=\frac{1}{2}kx^2$ 零点在 $x=0$ 自然伸长处。

万有引力势能： $E_p=-\frac{GmM}{r}$ 零点选在 $r\to\infty$ 处。

功能原理 $A_{外} + A_{内非} = E_B - E_A = \Delta E$

外力和非保守内力做的功等于系统机械能的增量

当 $A_{外} + A_{内非} = 0$

机械能守恒 $E_B = E_A$

只有保守内力做功时系统机械能守恒

* 动量定理：$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{合} \cdot dt = \overline{\vec{F}} \cdot (t_2 - t_1) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$

分量式：

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = \overline{F}_x (t_2 - t_1) = mv_{2x} - mv_{1x}$$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = \overline{F}_y (t_2 - t_1) = mv_{2y} - mv_{1y}$$

条件：$\sum \overrightarrow{F_i} = 0$　结果：$\sum m_i \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{c}$

*动量定理及动量守恒定律：

1.仅适用于惯性系。

2.式中各速度都必须对同一个惯性系。

3.式中各速度都必须相对同一个时刻。

质心和质心运动定律（自学）

1.为什么提出质心的概念。

2.如何确定物体的质心。

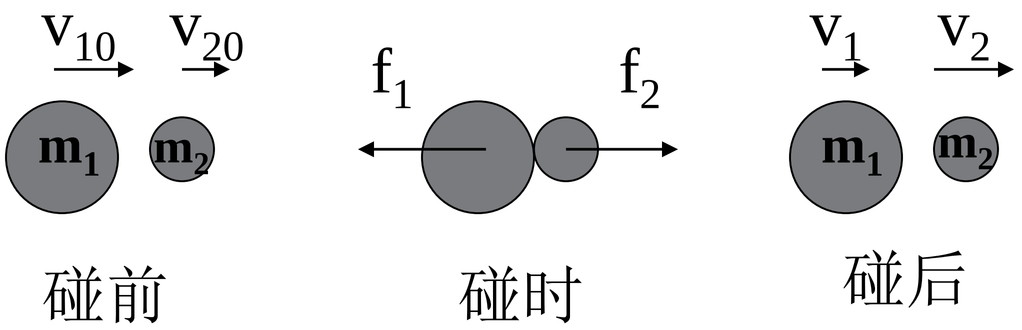
3.质心运动定律的表示形式和相关应用。

§2-6 碰　　撞

正碰—碰撞前后其速度均在同一条直线上

一、恢复系数：

$$e \stackrel{def}{=} \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$



二、三种不同类型碰撞的分析 （光滑面上的正碰）

(1).完全弹性碰撞

动量守恒：$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_{10} + m_2 v_{20}$ (1)

动 能 守 恒：$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2$ （2）

(1) (2) $\left.\begin{cases} v_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2v_{20}}{m_1 + m_2} \\ v_2 = \dfrac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1v_{10}}{m_1 + m_2} \end{cases}\right\} \Rightarrow e = \dfrac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} = 1$

讨论:

1. 若:$m_1=m_2$ 则:$v_1=v_{20}, v_2=v_{10}$ 速度互换

2.若:$v_{20} = 0$ 且 $\begin{cases} m_1 = m_2 \quad 则: v_1 = 0 \quad v_2 = v_{10} \\ m_1 >> m_2 \quad 则: v_1 = v_{10} \quad v_2 = 2v_{10} \\ m_1 << m_2 \quad 则: v_1 = -v_{10} \quad v_2 = 0 \end{cases}$

(2).完全非弹性碰撞（光滑面上的正碰）

$\left.\begin{matrix} v_1 = v_2 = v \\ m_1v_{10} + m_2v_{20} = (m_1 + m_2)v \end{matrix}\right\} v = \dfrac{m_1v_{10} + m_2v_{20}}{m_1 + m_2}$

$e = \dfrac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} = 0$

$$\left.\begin{aligned}\Delta E_k &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2-\left(\frac{1}{2}m_1v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2v_{20}^2\right)\\ v &= \frac{m_1v_{10}+m_2v_{20}}{m_1+m_2}\end{aligned}\right\}=\frac{m_1m_2(v_{10}-v_{20})^2}{2(m_1+m_2)}$$

(3).非完全弹性碰撞 (0 < e < 1)（光滑面上的正碰）

$$\left.\begin{aligned}&m_1v_1+m_2v_2=m_1v_{10}+m_2v_{20}\\ &e=\frac{v_2-v_1}{v_{10}-v_{20}}\Rightarrow v_2-v_1=e(v_{10}-v_{20})\end{aligned}\right\}\begin{aligned}v_1&=v_{10}-\frac{(1+e)m_2(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2}\\ v_2&=v_{20}+\frac{(1+e)m_1(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2}\end{aligned}$$

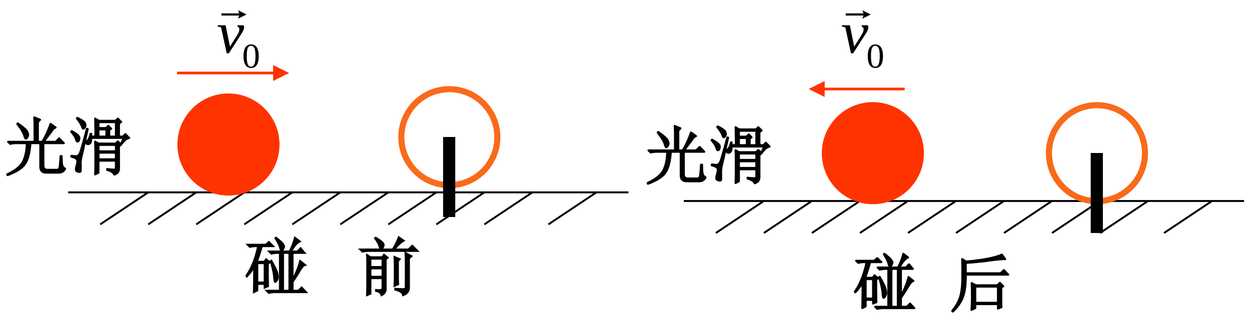
$$\Delta E=E_k-E_{k0}$$

$$=\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2\right)-\left(\frac{1}{2}m_1v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2v_{20}^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_{10}-v_{20})^2$$

XING P
星

讨论题：



问：两球作何种碰撞？动量守恒否？

$$分析:\because e=\frac{v_2-v_1}{v_{10}-v_{20}}=\frac{0-(-v_0)}{v_0-0}=1$$

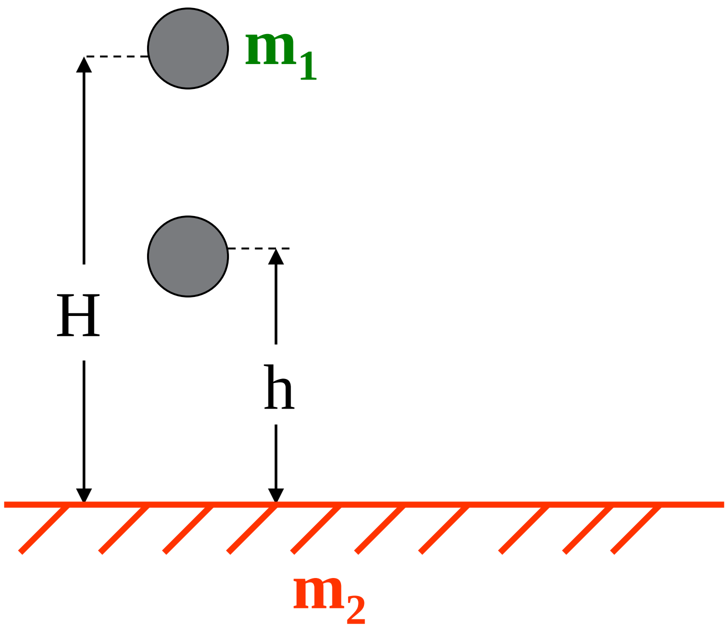
$\therefore$ 是完全弹性碰撞

$\because F_{外}\neq 0$ 　　且 $F_{内} \cancel{\gg} F_{外}$

$\therefore$ 动量不守恒

二种材料间e值的测定。

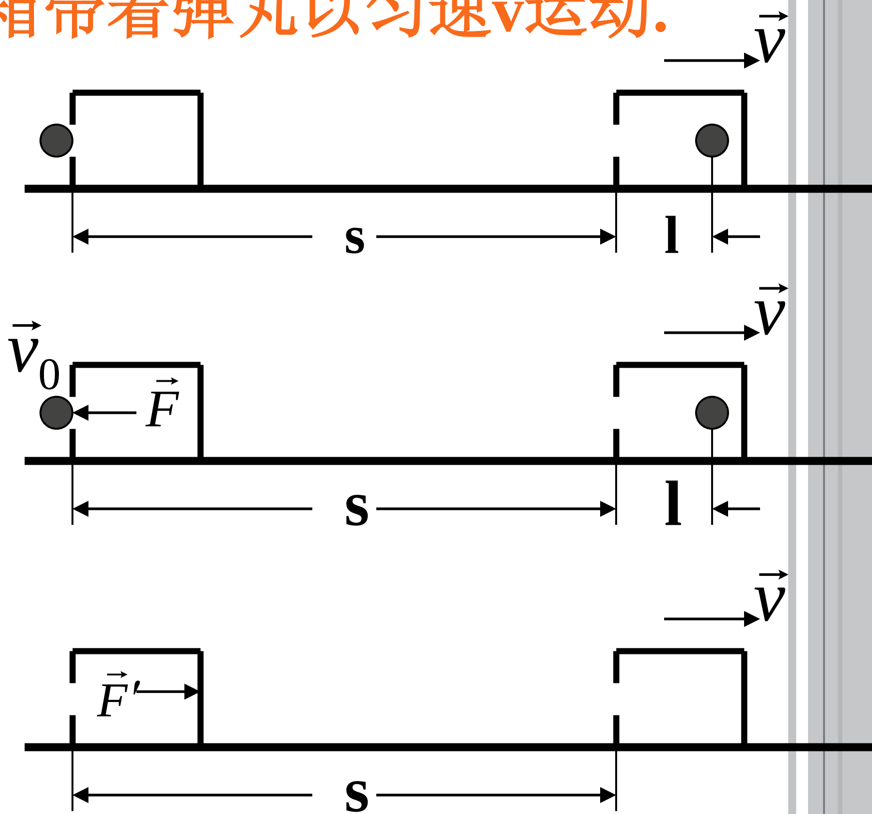
$$\left.\begin{aligned}
&v_1 = v_{10} - \frac{(1+e)m_2(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2} \\
&v_{20} = 0 \\
&\frac{m_1}{m_2} \to 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}
&v_1 \approx -ev_{10} \\
&v_{10} = \sqrt{2gH} \\
&v_1 = \sqrt{2gh}
\end{aligned}\right\} e = \frac{v_1}{v_{10}} = \sqrt{\frac{h}{H}}$$



$$v_1 = v_{10} - \frac{(1+e)m_2(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2}$$

$$v_2 = v_{20} + \frac{(1+e)m_1(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2}$$

【例】在光滑的水平台面上放有质量为M的沙箱,一颗从左方飞来质量为m的弹丸从箱左侧洞口击入,在沙中前进l距离后停止.在这段时间中沙箱向右运动的距离为s,此后沙箱带着弹丸以匀速v运动.求:弹丸的初速v_0



解法一：弹丸:

$$-F(s+l)=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0{}^2$$

沙箱：$F\cdot s=\frac{1}{2}Mv^2-0$

得：$v_0=\left[\frac{M}{ms}(s+l)+1\right]^{1/2}v$

解法二：$\{m、M\}$ $\because F_x=0$ $\therefore \Delta P_x=0$

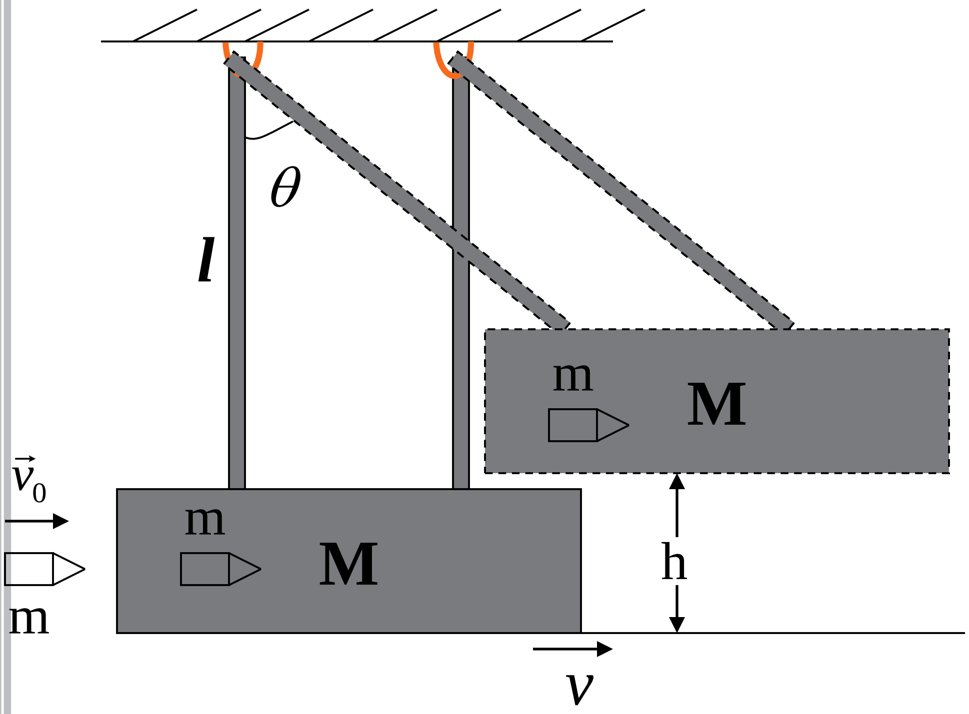
即： $mv_0=(m+M)v\Rightarrow v_0=\frac{m+M}{m}v$

$$\left.\begin{aligned} &\overline{F} = ma = Ma' \\ &a = \frac{v - v_0}{t} \\ &a' = \frac{v}{t} \\ &v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = l + s \\ &\frac{1}{2} a' t^2 = s \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{s}{l+s} = \frac{v}{v+v_0} \Longrightarrow l = \frac{v_0}{v} s$$

$$v_0 = \left[\frac{M}{ms}(s+l)+1\right]^{1/2} v = \left[\frac{M}{m}\left(\frac{v+v_0}{v}\right)+1\right]^{1/2} v \qquad v_0 = \frac{m+M}{m} v$$

$$v_0^2 = \left[\frac{M}{m}\frac{v+v_0}{v}+1\right] v^2 \Longrightarrow v_0^2 - v^2 = \frac{M}{m}(v+v_0)v \Longrightarrow v_0 - v = \frac{M}{m} v$$

冲击摆——一种测量子弹速度的装置



过程一：$\{m, M\}$:动量守恒

$$mv_0 = (m+M)v \quad (1)$$

过程二：$\{m, M, 地\}$ 机械能守恒

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = (m+M)gh \quad (2)$$

$$h = l(1-\cos\theta) \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}\right\} v_0 = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$$

硬气功表演的玄机分析

请勿模仿！

玄机分析

气功师胸肋能支持的平均压力约为500kg,肋骨下移2cm,将会断裂。

$\therefore$ 致命功：$A=500\times0.02=10$公斤·米

设：m=5kg,　h=2米，　M=100kg

则：$$E=\frac{1}{2}mv^2=mgh+\frac{1}{2}mv_0^2\approx 2mgh=20\text{公斤}\cdot\text{米}$$

m与M碰撞，M获得的动能——对气功师作的功：

$$A=E_K=\frac{1}{2}MV^2$$

若 $:e=0,$　即 $:mv=(m+M)V\Rightarrow V=\dfrac{m}{m+M}v$

$$\left.\begin{aligned} A &= E_K = \frac{1}{2}MV^2 \\ V &= \frac{m}{m+M}v \end{aligned}\right\} A = \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{m+M}v\right)^2 = \frac{Mm}{(m+M)^2}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$= \frac{Mm}{(m+M)^2}E < \frac{m}{M}E$$

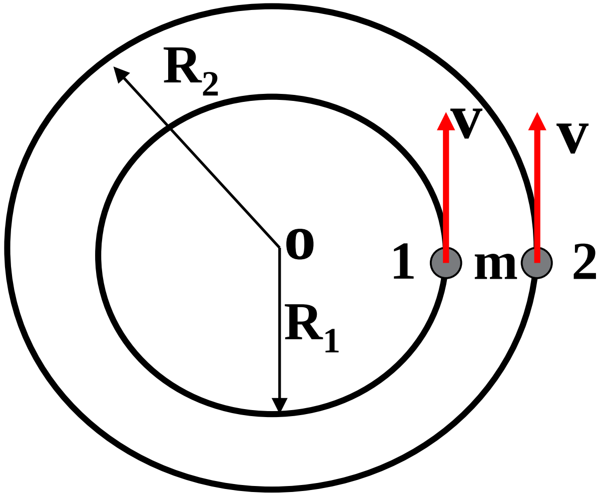
$$\left.\begin{aligned} & m=5\text{kg}, \\ & M=100\text{kg} \\ & E = 20\text{公斤}\cdot\text{米} \end{aligned}\right\} A = 1\text{公斤}\cdot\text{米}$$

致命功：$A=10$公斤·米

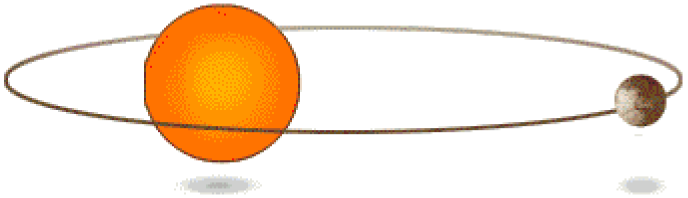
§2-7 质点角动量定理和角动量守恒定理

问题:

1、$P_1=P_2$, 如何区分二者?

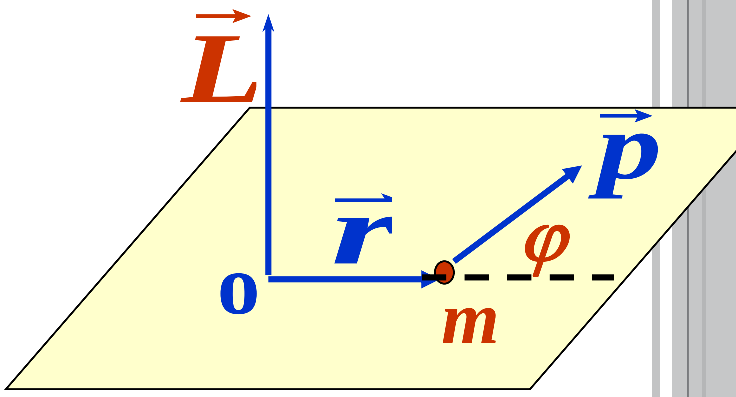


2、行星受到太阳的引力作用,但为何能保持在稳定的轨道上运行?



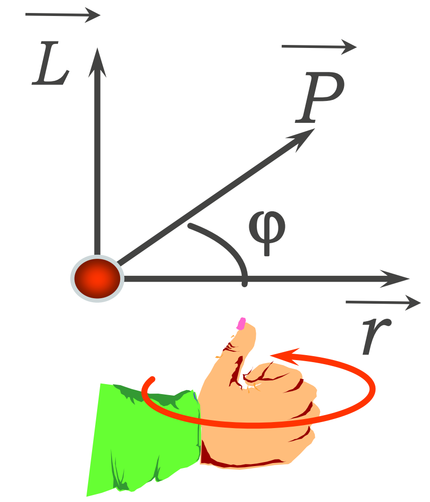
一、质点的角动量（动量矩）

定义： 惯性系中质点对固定点的位矢与动量的矢积



$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$$

角动量大小：$L=mvr\sin\varphi$



角动量方向：右手螺旋

注意：1. $\vec{r}\times\vec{p}$ 的顺序不能颠倒。

2. $\vec{L}$的方向垂直于 $\vec{r}$ 和 $\vec{p}$ 所决定的平面。

※质点作圆周运动：对圆心的角动量：$L=mvR$

角动量的性质 $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

1. 矢量性　2. 瞬时性　3. 相对性

角动量的单位为***K******g*****m^2/s**

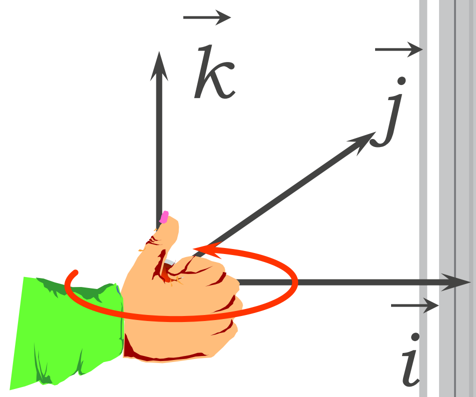
[例] $m=2Kg$的质点,位矢$\vec{r}=t\vec{i}+2t^2\vec{j}\,(m)$,试确定$t=2$时,质点对坐标原点的角动量。

解: $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$

$$\vec{r}=t\vec{i}+2t^2\vec{j}\Rightarrow\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{i}+4t\vec{j}\Rightarrow\vec{p}=m\vec{v}=2\vec{i}+8t\vec{j}$$

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=(t\vec{i}+2t^2\vec{j})\times(2\vec{i}+8t\vec{j})$$

$$=2t\vec{i}\times\vec{i}+8t^2\vec{i}\times\vec{j}+4t^2\vec{j}\times\vec{i}+16t^3\vec{j}\times\vec{j}$$



$$=8t^2\vec{k}-4t^2\vec{k}=4t^2\vec{k}$$

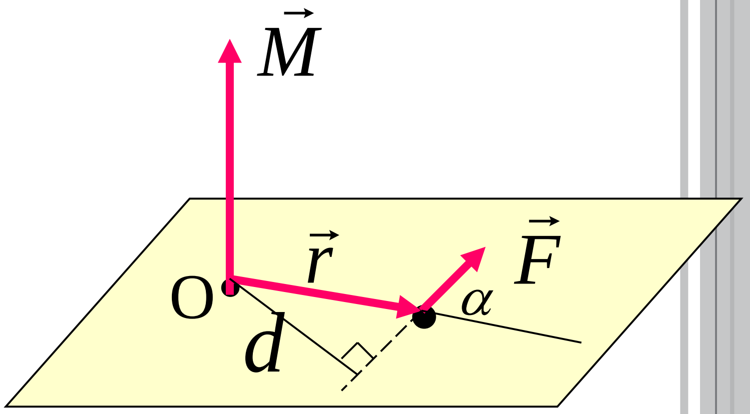
$$\Rightarrow\vec{L}\Big|_{t=2}=4\times2^2\vec{k}=16\vec{k}\,(Kgm^2/s)$$

$$\begin{cases}\vec{i}\times\vec{i}=0\\ \vec{j}\times\vec{j}=0\\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\end{cases}$$

二、质点的角动量定理

动量定理：$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ 力是动量改变的原因

什么是角动量改变的原因？



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

$$= \vec{r} \times \vec{F} + \underbrace{\vec{v} \times (m\vec{v})}_{= 0}$$

$$= \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$ --力矩 ——角动量改变的原因!!!

$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$ $\begin{cases} \text{大小}: rF\sin\alpha = Fd = M \\ \text{方向}:\text{由(右手)叉乘确定} \end{cases}$

（1）定理的微分式 $\vec{M}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$

质点角动量对时间的变化率等于其所受合外力矩

（2）定理的积分式

$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}\Rightarrow \int_0^t \vec{M}dt=\int_{\vec{L}_0}^{\vec{L}} d\vec{L}=\vec{L}-\vec{L}_0 \quad (\text{其中：} \vec{J}_{\text{冲量矩}} \overset{def}{=} \int_0^t \vec{M}dt)$$

质点角动量的变化等于其所受合外力的冲量矩

三、质点角动量守恒定律

由角动量定理 $\vec{M}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$

当 $\vec{M}=0 \longrightarrow \dfrac{d\vec{L}}{dt}=0 \longrightarrow \vec{L}=$ 常 矢 量

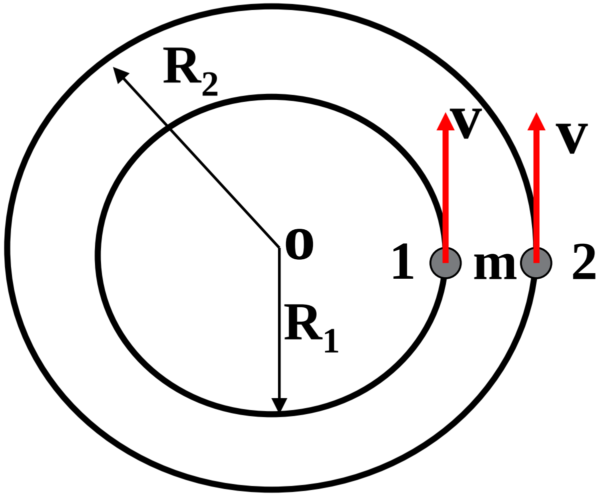
即： 如果对于某一固定点, 质点所受合外力矩为零, 则此质点对该固定点的角动量矢量保持不变。

$$M=rF\sin\alpha=0\begin{cases} F=0 & \text{质点所受的合外力为零} \\ r=0 & \text{外力作用点就在固定点} \\ \sin\alpha=0 & \text{外力平行或反平行于位矢} \end{cases}$$

说明：如果一个质点的合外力矩沿某一个方向的分量（比如Z轴）为零，那么质点沿这个方向的角动量分量守恒。

问题:

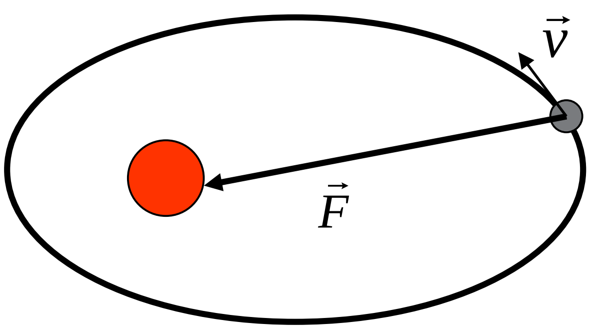
1、P_1=P_2, 如何区分二者?



可由角动量来区分二者。

$\because L_1 \neq L_2 \qquad (mvR_1 \neq mvR_2)$

2、行星受到太阳的引力作用,但为何能保持在稳定的轨道上运行?



行星受力方向与矢径在一条直线（有心力）。

$$\vec{M}_{行星对太阳} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

即行星绕太阳旋转时 $\vec{L}$ 守恒.

碰 撞 （光滑面上的正碰）

(1).完全弹性碰撞 (e = 1) 动能守恒

(2).完全非弹性碰撞 (e = 0) $v_1=v_2=v$

(3).非完全弹性碰撞 (0 < e < 1)

质点角动量定理和角动量守恒定理

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$$

角动量定理 $\vec{M}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$ $\vec{J}=\int_0^t \vec{M}dt=\int_{\vec{L}_0}^{\vec{L}} d\vec{L}=\vec{L}-\vec{L}_0$

角动量守恒定律 当 $\vec{M}=0$ $\vec{L}=$ 常 矢 量

即： 如果对于某一固定点, 质点所受合外力矩为零, 则此质点对该固定点的角动量矢量保持不变。

三个基本物理量：

机械能（$E_k + E_p$）、　动量（$m\vec{v}$）、　角动量（$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$）

三个定理：

$$A_{外}=\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \Delta E_k \qquad \vec{I} = \int \vec{F} \cdot dt = \Delta \vec{P} \qquad \int \vec{M} \cdot dt = \Delta \vec{L}$$

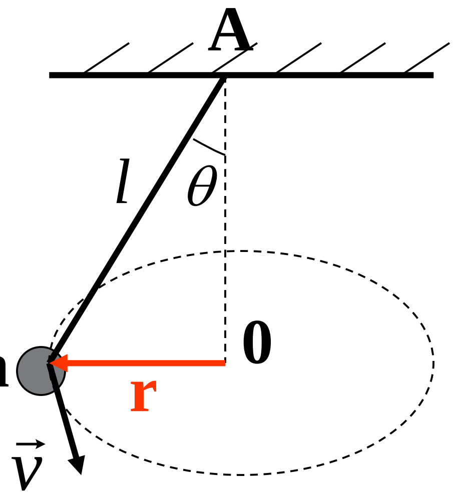
三条守恒定律的条件：

$A_{外}+A_{非保守}=0$……………机械能守恒

$\vec{F}_{外}=0$……………………动量守恒

$\vec{M}_{外}=0$…………………角动量守恒

例:

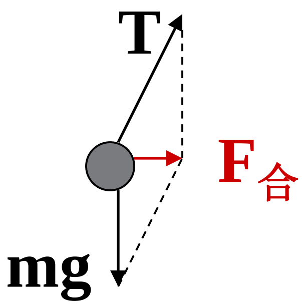


问：(1).$\vec{L}_0$守恒否？　(2).$\vec{L}_A$守恒否？

$$(1)\quad \vec{L}_0\begin{cases} L_0 = rmv = l\sin\theta mv & (\text{恒定}) \\ \text{方向:竖直向上} & (\text{不变}) \end{cases}$$

$\therefore \vec{L}_0$守恒

另解：$\because F_{合}$指向O点，$\therefore M_o = 0$



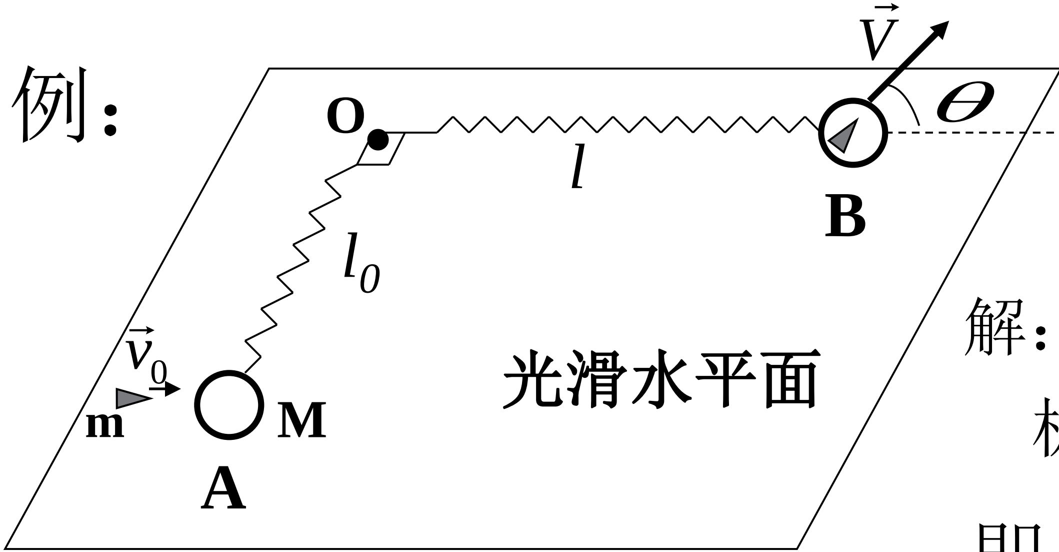
$$(2)\quad \vec{L}_A\begin{cases} L_A = mvl & (\text{恒定}) \\ \text{方向: 变} \end{cases}$$

另解：$\because M_A = F_{合} l\cos\theta \neq 0$

$\therefore \vec{L}_A$不守恒.

言及角动量必须指明是对那个定点而言,否则无意义.

例：



已知：$k, m, M, \vec{v}_0, l, l_0$

求：$\vec{V} = ?$

解：m, M作完全非弹性碰撞过程机械能不守恒但动量守恒。

即：$mv_0 = (m+M)V_1$ （1）

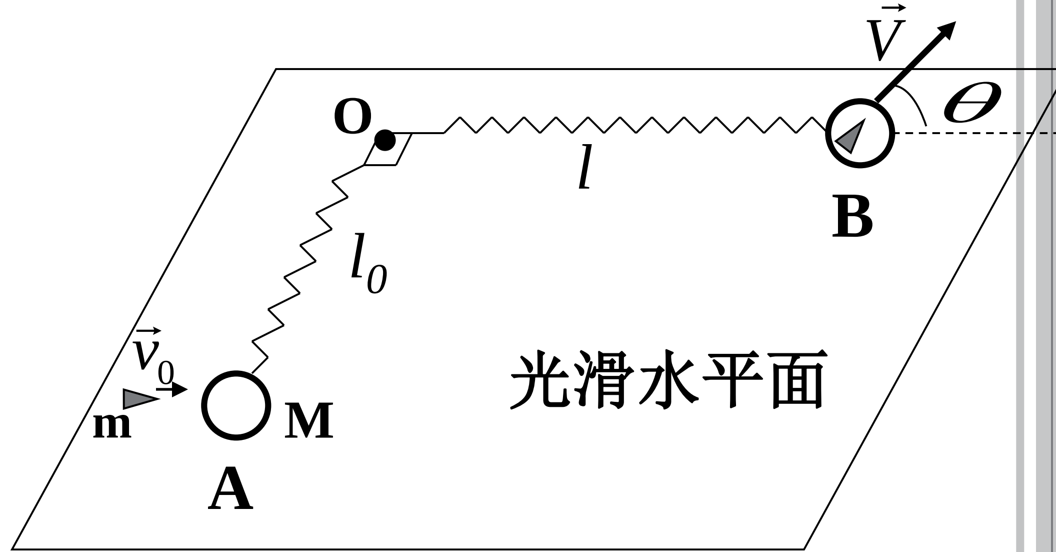
$A \rightarrow B$的过程：$\{m, M\} \because F_{外} = kx \neq 0 \quad \therefore$动量不守恒

但$\{m, M$，地球，弹簧$\}$：E守恒

即：$\frac{1}{2}(m+M)V_1^2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$ （2）

$$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\} V = \sqrt{\frac{m^2 v_0^2}{(m+M)^2} - \frac{k(l-l_0)^2}{m+M}}$$

$\vec{V}$的方向，即$\theta=$？



$A\rightarrow B$的过程

$\{m,M\}$：$\because F_{外}=kx\neq 0$

$\therefore$动量不守恒

但$F_{外}$始终通过o点，$\therefore \vec{M}_O=0$　即$\vec{L}_O$守恒

$$(m+M)V_1 l_0=(m+M)Vl\sin\theta$$

$$mv_0=(m+M)V_1$$

$$V=\sqrt{\frac{m^2v_0^2}{(m+M)^2}-\frac{k(l-l_0)^2}{m+M}}$$

$$\theta=\sin^{-1}\frac{l_0 m v_0}{l\sqrt{m^2v_0^2-k(l-l_0)^2(M+m)}}$$