第四章　有界线性算子

习题 4

1. 设 $\sup_{n\geq 1}|a_n|<\infty$, 在 l^1 上定义算子 $T: y=Tx$, 其中 $x=\{\xi_k\}, y=\{\eta_k\}, \eta_k=\alpha_k\xi_k (k=1,2,\cdots)$. 证明 T 是 l^1 上的有界线性算子并且 $\|T\|=\sup_{n\geq 1}|a_n|$.
2. 设 G 是赋范空间 X 的子空间, $x_0\in X$, 证明 $x_0\in\overline{G}$ 当且仅当对于 X 上任一满足 $f(x)=0$ $(x\in G)$ 的有界线性泛函 f 必有 $f(x_0)=0$.
3. 设 X 为线性赋范空间, f 是 X 上的线性泛函. 证明
   (1) f 连续的充要条件是 f 的零空间 $\mathscr{N}(f)=\{x|f(x)=0\}$ 是 X 中闭子空间;
   (2) 当 $f\neq 0$ 时, f 不连续的充要条件是 $\mathscr{N}(f)$ 在 X 中稠密.
4. 设 T 是 $C[a,b]$ 上有界线性算子，记
$$Tt^n=f_n(t),\ n=0,1,2,\cdots,$$
   证明 T 完全由函数列 $\{f_n(t)\}$ 唯一确定.
5. 设 X,Y,Z 都是 Banach 空间, 若 $T_1\in\mathscr{B}(X,Z), T_2\in\mathscr{B}(Y,Z)$, 且对 $\forall x\in X$, 算子方程 $T_1x=T_2y$ 有唯一解 $y=Tx$, 证明 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$.
6. 设 X,Y 为 Banach 空间, $T\in\mathscr{B}(X,Y)$, 若 T 是满射和单射, 证明存在正常数 a,b, 使得对 $\forall x\in X$, 有
$$a\|x\|\leq\|Tx\|\leq b\|x\|.$$
7. 设 M_n 表示 $n\times n$ 的实矩阵空间, 对于 $A=(a_{ij})\in M_n$, 定义 $n(A)=\sum\limits_{i,j}|a_{ij}|$.
   (1) 证明 $\|Ax\|_1\leqslant n(A)\|x\|_1$, 这里 $x\in\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ 具有范数 $\|x\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$;
   (2) 设 $A,B\in M$. 证明 $n(AB)\leqslant n(A)n(B)$.
8. 设 $\alpha(\cdot)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数. 令
$$(Tx)(t)=\alpha(t)x(t)\ \ (x\in C[a,b]),$$
   则 T 是由 $C[a,b]$ 到其自身的有界线性算子的充要条件是 $\alpha(\cdot)$ 在 $[a,b]$ 上连续.
9. 对于每个 $\alpha\in L^\infty[a,b]$, 定义线性算子 $T: L^p[a,b]\to L^p[a,b]$,
$$(Tx)(t)=\alpha(t)x(t),\quad\forall x\in L^p[a,b].$$
   求 T 的范数.
10. 考虑算子 $T: C^1[-1,1]\to C[-1,1]$:
$$(Tx)(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},\ \forall x\in C^1[-1,1].$$

这里 $C^1[-1,1]$ 是在 $[-1,1]$ 中一阶导数连续的全体函数.

(1) 若 $C^1[-1,1]$ 中的范数是

$$\|x\|_1=\max\{\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|,\quad \max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)|\}.$$

问 T 是否有界;

(2) 若 $C^1[-1,1]$ 中的范数是

$$\|x\|_2=\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|,$$

问 T 是否有界.

11. 对 $f\in L[a,b]$, 定义

$$(Tf)(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

证明

(1) 若 T 为 $L[a,b]\to C[a,b]$ 的算子, 则 $\|T\|=1$;

(2) 若 T 为 $L[a,b]\to L[a,b]$ 的算子, 则 $\|T\|=b-a$.

12. 在 $C[0,1]$ 上定义线性泛函

$$f(x)=\int_0^{\frac{1}{2}}x(t)\,\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明

(1) f 是连续的;

(2) $\|f\|=1$;

(3) 不存在 $x\in C[0,1]$, $\|x\|\leqslant 1$, $f(x)=1$.

13. 设 $x(t)\in C[a,b], f(x)=x(a)-x(b)$, 证明 f 是 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函, 并求 $\|f\|$.

14. 求泛函 $f(x)=\int_0^1\sqrt{t}x(t^2)\mathrm{d}t$ 在以下两种情形下的范数 $\|f\|$.

(1) $x(t)\in C[0,1]$;

(2) $x(t)\in L^2[0,1]$.

15. 设 $\phi(t)\in C[0,1]$, 在 $C[0,1]$ 上定义泛函

$$\Phi(f)=\int_0^1\phi(t)f(t)\mathrm{d}t,\ \forall f\in C[0,1],$$

求 $\|\Phi\|$.

16. 对任何 $f\in L[a,b]$, 作 $(Tf)(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 把 T 视为 $L[a,b]\to C[a,b]$ 的算子时, 试证明 $\|T\|=1$.

17. 对于每个 $\alpha\in C[a,b]$, 定义线性算子 $T: L^1[a,b]\to L^1[a,b]$, $(Tx)(t)=\alpha(t)x(t)$, 证明 $\|T\|=\|\alpha\|$, 其中 $\|\alpha\|$ 表示 α 在 $C[a,b]$ 中的范数.

18. 设无穷矩阵 $A=(a_{jk})$ 满足

$$M=\sup_j\sum_{k=1}^{\infty}|a_{jk}|<\infty.$$

对于 $\forall x=\{x_1,x_2,\cdots\}, y=\{y_1,y_2,\cdots\}\in l^\infty$, 定义线性算子 $T: l^\infty\to l^\infty$, $x\to y$, 其中 $y_j=\sum_{k=1}^\infty a_{jk}x_k, j=1,2,\cdots$, 证明 $\|T\|=M$.

19. 考虑 $C[0,1]$ 上的算子序列 $\{T_n\}$, 其中 $(T_nx)(t)=x(t^{1+\frac{1}{n}})$, 则 $\{T_n\}$ 强收敛于某一有界线性算子, 但不按范数收敛于该算子.

20. 设 T_n 是 $L^p(\mathbb{R})(1\le p<\infty)$ 到自身的算子.

$$(T_nf)(x)=\begin{cases} f(x), & |x|\le n,\\ 0, & |x|>n.\end{cases}$$

其中 $f\in L^p(\mathbb{R})$. 证明 T_n 强收敛于恒等算子 I , 但不一致收敛到 I.

21. 设 X, Y 是赋范线性空间, $L_n\ (n=1,2,\cdots)$ 是从 X 到 Y 的连续线性算子, 假定 L 是从 X 至 Y 的映射, 并且对任意 $n=1,2,\cdots$, 存在 $M_n\geqslant 0$ 使得 $\|Lx-L_nx\|\leqslant M_n\|x\|$, $\forall x\in X$. 另外 $M_n\to 0\ (n\to\infty)$. 证明 L 是从 X 到 Y 的连续线性映射(题目说明若序列 $\{L_n\}$ 一致收敛, 则它的极限必是连续的、线性的).

22. (接第21题) 假若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|L_nx-Lx\|=0, \forall x\in X$, 也就是说 L_n 强收敛于 L, 则 L 是线性的.

23. 设 E 、E_1 、E_2 都是 Banach 空间, T_n、$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$, $S_n, S\in\mathscr{B}(E_1,E_2)$, 若 $\{T_n\}$、$\{S_n\}$ 分别强收敛于 T、S, 证明 $\{S_nT_n\}$ 强收敛于 ST.

24. 设 X, Y 是线性赋范空间, $T_n\in\mathscr{B}(X,Y)$, A 是使 $\sup_{n\ge1}\|T_nx\|<\infty$ 的点 x 的全体, 则要么 $A=X$, 要么 A 是 X 中的第一纲集.

25. 考虑序列空间 $c_0=\{x\big|x=(x_1,\cdots,x_n,0,\cdots),\ \forall x_i\in\mathbb{R},\ n\ge1\}$, 其中的每个元素 x 是至多有限多个不为 0 的数字构成的无穷序列, 并且 $\|x\|=\sup_{n\ge1}|x_n|$, $\forall x\in c_0$. 对于 c_0 上的算子序列 $T_m\ :\ c_0\to c_0$, $T_m(x)=(0,\cdots,0,mx_m,0,\cdots)$.
(1) 计算 $\|T_m\|$;
(2) 证明对于每个 $x\in c_0$, $\sup_{m\ge1}\|T_mx\|<\infty$;
(3) 证明 c_0 自身不是第二纲的.

26. 设 X 是完备的距离空间. $\mathfrak{F}$ 是 X 上的实连续函数族且具有性质：对于每一个 $x\in X$, 存在常数 $M_x>0$, 使得对于每一个 $F\in\mathfrak{F}$,

$$|F(x)|\le M_x.$$

证明存在开集 U 以及常数 $M>0$, 使得对于每一个 $x\in U$ 及所有 $F\in\mathfrak{F}$. 有

$$|F(x)|\le M.$$

27. 设 X 是 Banach 空间, X_0 是 X 的闭子空间. 定义映射 $\Phi: X\to X/X_0$ 为 $\Phi: x\to [x], \forall x\in X$, 其中 $[x]$ 表示含 x 的商类. 证明 Φ 是开映射.

28. 设 X 是 l^∞ 中只有有限多项不为零的序列构成的子空间. 定义 $T: X\to X$, $x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)$ $\to y=(y_1,\cdots,y_n,\cdots)$, 式中 $y_k=\frac{1}{k}x_k$, 证明

(1) $T \in \mathscr{B}(X)$, 并计算 $\|T\|$;

(2) T^{-1} 无界.

这是否与 Banach 逆算子定理矛盾?

29. 若 $\|\cdot\|$ 是 $C[a,b]$ 上的另一完备范数（原范数记为 $\|\cdot\|_\infty$）, 并且当 $\|x_n - x\| \to 0$ 时必有 $|x_n(t) - x(t)| \to 0,\ \forall t \in [a,b]$, 则 $\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_\infty$ 等价.

30. 设 $H = L^2[0,1],\ T = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

$$\mathscr{D}(T) = \{u \in H | u(0) = 0,\ u \text{ 在 } [0,1] \text{ 上绝对连续}\}.$$

证明 T 是闭算子.

31. 设 X, Y 是线性赋范空间, D 是 X 的线性子空间, $T: D \to Y$ 是线性映射. 证明

(1) 若 T 连续, D 是闭集, 则 T 是闭算子;

(2) 若 T 连续且是闭算子, 则 Y 完备蕴含 D 闭.

32. 设 X, Y 为线性赋范空间, $T: X \to Y$ 为线性算子, 若 T 为闭算子且逆算子 $T^{-1}: Y \to X$ 存在, 证明 T^{-1} 也是闭算子.

33. 设 X, Y 为线性赋范空间. 若 $T_1: X \to Y$ 是闭算子且 $T_2 \in \mathscr{B}(X, Y)$, 证明 $T_1 + T_2$ 是闭算子.

第四章习题简答

1. 证明 显然 T 是 l^1 的 l^1 的线性算子. 因为

$$\|Tx\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \xi_n| \le \sup_n |\alpha_n|.\|x\|,$$

所以 T 是有界线性算子且

$$\|T\| \le \sup_n |\alpha_n|.$$

另一方面, 取 $e_n = (\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n\text{位}},0,\cdots) \in l^1$, $\|e_n\| = 1$, 则

$$\|T\| \ge \|Te_n\| = |\alpha_n| \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

所以

$$\|T\| \ge \sup_n |\alpha_n|.$$

综上, $\|T\| = \sup_{n\ge 1} |a_n|$.

2. 证明 必要性. 由于 $x_0 \in \overline{G}$, 故存在 $\{x_n\} \subset G$ 使得 $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. 设 f 是 X 上任一满足 $f(x) = 0$ $(x \in G)$ 的有界线性泛函. 则由 f 的连续性知

$$f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

充分性. 假设 $x_0 \notin \overline{G}$. 定义泛函 f 如下:

$$f(\alpha x_0 + x) = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{C},\ x \in G.$$

显然 f 为 $X_1 = \{\alpha x_0 + x | \alpha \in \mathbb{C},\ x \in G\}$ 上的线性泛函. 由于 $x_0 \notin \overline{G}$, 故 $d(x_0, G) \neq 0$, 从而当 $\alpha \neq 0$ 时有

$$\|\alpha x_0 + x\| = |\alpha| \|x_0 + \frac{1}{|\alpha|} x\| \ge |\alpha| d(x_0, G).$$

所以

$$\|f(\alpha x_0 + x)\| = |\alpha| \le \frac{1}{d(x_0, G)} \|\alpha x_0 + x\|,$$

即 f 是有界的. 易见,

$$f(x) = f(0x_0 + x) = 0\ (\forall x \in G),\ f(x_0) = 1.$$

这与 $f(x_0) = 0$ 矛盾. 故 $x_0 \in \overline{G}$.

3. 证明 (1) 必要性显然.
充分性. 设 $\mathscr{N}(f)$ 闭, 我们证明对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得 $\|x\| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| < \varepsilon$.
不妨设 $f \neq 0$, 取 $x_0 \neq 0$ 使得 $f(x_0) = \varepsilon$. 考察集合

$$\mathscr{N}(f) + x_0 = \{x_0 + x :\ x \in \mathscr{N}(f)\}.$$

因为 $\mathscr{N}(f)$ 闭, 所以 $\mathscr{N}(f)+x_0$ 也闭, 且 $0\notin\mathscr{N}(f)+x_0$, 从而存在 $\delta>0$, 使得

$$S(0,\delta)\cap(\mathscr{N}(f)+x_0)=\emptyset,$$

于是可以证明当 $x\in S(0,\delta)$ 时, $|f(x)|<\varepsilon$.

事实上, 设不然, 即存在 $x\in S(0,\delta)$, 使 $|f(x)|\geq\varepsilon$. 令 $y=\frac{\varepsilon x}{f(x)}$, 则

$$\|y\|\leq\|x\|<\delta,\ 且\ f(y-x_0)=\varepsilon-f(x_0)=0,$$

故 $y\in S(0,\delta)\cap(\mathscr{N}(f)+x_0)$, 矛盾.

(2)充分性. 用反证法. 设 f 是连续的, 则由 $\mathscr{N}(f)$ 的稠密性可知, 对 $\forall x\in X$ 可在 $\mathscr{N}(f)$ 中取到一序列 $\{x_n\}$, 使得 $x_n\to x\ (n\to\infty)$. 于是 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$, 即 $f(x)=0$. 这与题设 $f\neq 0$ 相矛盾.

必要性. 设 f 不连续, 则由线性算子连续性定理知, f 必在 $x=0$ 处不连续. 从而存在 $\varepsilon_0>0$ 与一个点列 $\{x_n\}\in X$, 使得当 $x_n\to 0$ 时, $|f(x_n)|\geq\varepsilon_0$.

对 $\forall x\in X$, 显然 $x-\frac{f(x)}{f(x_n)}x_n\in N(f)$, 且当 $n\to\infty$ 时, $x-\frac{f(x)}{f(x_n)}x_n\to x$,故 $\mathscr{N}(f)$ 在 X 中稠密.

4. 证明 设 $\forall x(t)\in C[a,b]$, 由 Weierstrass 定理存在 $\{P_n(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i t^i\in P[a,b]\}$ 使得

$$\|P_n-x\|\to 0.$$

由于 T 是有界的, 从而连续的. 故

$$Tx(t)=T(\lim_{n\to\infty}P_n(t))=\lim_{n\to\infty}T(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i t^i)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n f_n(t).$$

由于对 $\forall x(t)\in C[a,b]$ 可由 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 唯一确定, 所以 T 完全由函数列 $\{f_n(t)\}$ 唯一确定.

5. 证明 设 $\forall x_1,x_2\in X$ 对于算子方程 $T_1x_1=T_2y_1,\ T_1x_2=T_2y_2$ 有唯一解

$$y_1=Tx_1,\ y_2=Tx_2,$$

故

$$T_1(x_1+x_2)=T_1x_1+T_1x_2=T_2y_1+T_2y_2=T_2(y_1+y_2).$$

因此有

$$T(x_1+x_2)=Tx_1+Tx_2,$$

同理可得

$$T(\alpha x_1)=\alpha T(x_1),\ \forall\alpha\in\mathbb{K}.$$

则 T 是线性算子. 下面证明 T 是有界的. 事实上, 设 $x_n\to x,\ Tx_n\to y$. 由于

$$T_1x_n=T_2(Tx_n)$$

且 $T_1,\ T_2$ 连续, 所以 $T_1x=T_2y$, 即 $y=Tx$. 则 T 是闭的, 再由闭图像定理得 T 是有界的, 即 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$.

6. 证明 由题设知, X,Y 是 Banach 空间. $T\in\mathscr{B}(X,Y)$ 且 T 是双射, 则由 Banach 逆算子定理, T^{-1} 是有界的. 因为

$$1=\|TT^{-1}\|\le\|T\|\|T^{-1}\|,$$

故 $\|T^{-1}\|>0,\|T\|>0$. 令 $a=1/\|T^{-1}\|,b=\|T\|$. 则可得

$$a\|x\|\le\|Tx\|\le b\|x\|.$$

7. 证明 (1) 对于 $A=(a_{ij})\in M_n,x=(x_j)\in\mathbb{R}^n$.

$$Ax=(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j,\sum_{j=1}^n a_{2j}x_j,\cdots).$$

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1=\sum_{i=1}^n\Big|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\Big|&\le\sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n|a_{ij}||x_j|\Big)\\&\le\sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\Big)\cdot\Big(\sum_{j=1}^n|x_j|\Big)\\&=n(A)\|x\|_1.\end{aligned}$$

(2) 设 $A=(a_{ij})\in M_n,B=(b_{ij})\in M_n$ 则

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

$$\begin{aligned}n(AB)=\sum_{i,j}\Big|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\Big|&\le\sum_{i,j}\Big(\sum_{k=1}^n|a_{ik}|\Big)\cdot\Big(\sum_{k=1}^n|b_{kj}|\Big)\\&=\Big\{\sum_i\sum_{k=1}^n|a_{ik}|\Big\}\cdot\Big\{\sum_j\sum_{k=1}^n|b_{kj}|\Big\}\\&=n(A)\cdot n(B)\end{aligned}$$

8. 证明 必要性. 若 T 是由 $C[a,b]$ 到其自身的线性算子. 取 $x\equiv1\in C[a,b]$, 则

$$(Tx)(t)=\alpha(t)\in C[a,b].$$

即 $\alpha(\cdot)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

充分性. 若 $\alpha(t)\in C[a,b]$, 易知 T 是线性的. 由于

$$\|Tx\|=\max_{t\in[a,b]}|\alpha(t)x(t)|\le\max_{t\in[a,b]}|\alpha(t)|\cdot\max_{t\in[a,b]}|x(t)|=\|\alpha(t)\|\cdot\|x(t)\|,$$

故 T 是有界的.

9. 解 因为

$$\|Tx\| = \left\{ \int_a^b |\alpha(t)x(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \|\alpha(t)\|_\infty \|x\|,$$

故 $\|T\| \leq \|\alpha(t)\|_\infty$. 另一方面, 设 $\alpha = ess \sup\limits_{t\in[a,b]} |\alpha(t)| = \|\alpha(t)\|_\infty$. 任给 $\varepsilon > 0$, 令

$$E = \{t \in [a,b] : |\alpha(t)| > \alpha - \varepsilon\}.$$

则 $mE > 0$, 取 $x(t) \in L^P[a,b]$ 如下

$$x(t) = \begin{cases} sgn\alpha(t)/(mE)^{\frac{1}{p}}, & t \in E \\ 0, & t \in [a,b] - E \end{cases}$$

则 $\|x\| = 1$, 且

$$\|T\| \geq \|Tx\| = \left\{ \int_E \frac{|\alpha(t)|^p}{mE} dt \right\}^{\frac{1}{p}} \geq \alpha - \varepsilon.$$

因为 $\varepsilon > 0$ 是任意的,故 $\|T\| \geq \alpha$. 从而

$$\|T\| = \|\alpha(t)\|_\infty = ess \sup_{t\in[a,b]} |\alpha(t)|.$$

10. 解 (1) 因为对 $\forall x \in C^1[-1,1]$ 有

$$\|Tx\| = \|x'\| = \max_{t\in[-1,1]} |x'(t)| \leq \|x\|_1,$$

所以 T 有界.

(2) T 是无界的. 事实上, 令 $x_n(t) = \sin nt$, 从而有

$$\|x_n\|_2 = \max_{-1\leq t\leq 1} |x_n(t)| = \max_{-1\leq t\leq 1} |\sin nt| = 1,$$

$$\|Tx_n\| = \max_{-1\leq t\leq 1} |n\cos nt| = n \to \infty \ (n \to \infty).$$

这表明 T 是无界的.

11. 证明 (1) $\forall f \in L[a,b]$, 已知 $(Tf)(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 连续, T 是 $L[a,b] \to C[a,b]$ 的线性算子. 任取 $f \in L[a,b]$, 使得 $\|f\| = \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t = 1$, 则

$$\|Tf\| = \max_{x\in[a,b]} |Tf(x)| = \max_{x\in[a,b]} |\int_a^x f(t)\mathrm{d}t| \leq \max_{x\in[a,b]} \int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t = 1,$$

即得 $\|T\| \leq 1$. 另一方面, 取 $f_0(t) = \frac{1}{b-a}$, 则 $f_0 \in L_{[a,b]}$, 且 $\|f_0\| = 1$, 故

$$\|T\| = \sup_{\|f\|=1} \|Tf\| \geq \|Tf_0\| = \max_{x\in[a,b]} \int_a^x \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t = 1,$$

故 $\|T\| \geq 1$. 综上即得 $\|T\| = 1$.

(2) $(Tf)(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 看作是

$$L[a,b] \to L[a,b]$$

的线性算子. 任取 $f \in L[a,b]$, 使得 $\|f\| = \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t = 1$, 则

$$\begin{aligned}\|Tf\| &= \int_a^b |\int_a^x f(t)\mathrm{d}t|\mathrm{d}x \le \int_a^b \int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &\le \int_a^b \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_a^b 1\mathrm{d}x = b-a,\end{aligned}$$

即得 $\|T\| \le b-a$.

另一方面, 对任意使 $a + \frac{1}{n} < b$ 的自然数 n, 令

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in [a, a+\frac{1}{n}], \\ 0, & x \in [a+\frac{1}{n}, b], \end{cases}$$

则 $\|f_n\| = 1$, 且

$$\|Tf_n\| = \int_a^b |\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t|\mathrm{d}x = \int_a^{a+\frac{1}{n}} n(x-a)\mathrm{d}x + \int_{a+\frac{1}{n}}^b 1\mathrm{d}x = b-a-\frac{1}{2n},$$

即得 $\|T\| \ge b-a$. 综上得到 $\|T\| = b-a$.

12. 证明 (1) 因为

$$\begin{aligned}|f(x)| &\le \int_0^{\frac{1}{2}} x(t)\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 |x(t)|\mathrm{d}t \le \int_0^1 \|x\|\mathrm{d}t = \|x\|,\end{aligned}$$

故 $\|f\| \le 1$, 于是 f 是连续的.

(2) 记 $\alpha_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$, $\beta_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, 令

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \alpha_n], \\ \frac{\beta_n + \alpha_n - 2t}{\beta_n - \alpha_n}, & t \in (\alpha_n, \beta_n), \\ -1, & t \in [\beta_n, 1], \end{cases}$$

则 $\|x_n\| = 1$, 且

$$\begin{aligned}\|f\| \ge |f(x_n)| &= \int_0^{\alpha_n} \mathrm{d}t + \int_{\alpha_n}^{\frac{1}{2}} 2n(1-2t)\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}}^{\beta_n} 2n(1-2t)\mathrm{d}t + \int_{\beta_n}^1 \mathrm{d}t \\ &= \alpha_n + \frac{1}{8n} + \frac{1}{8n} + (1-\beta_n) = 1 - \frac{1}{4n},\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$, 则得 $\|f\| \ge 1$. 结合 (1), 得到 $\|f\| = 1$.

(3) 反证法. 假设存在 $x_0 = x_0(t) \in C[0,1]$ 使得 $\|x_0\| = 1$, $f(x_0) = 1$, 则

$$1 = f(x_0) = \int_0^{\frac{1}{2}} x_0(t)\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}}^1 x_0(t)\mathrm{d}t.$$

注意到,

$$|\int_0^{\frac{1}{2}} x_0(t)\mathrm{d}t| \le \int_0^{\frac{1}{2}} |x_0(t)|\mathrm{d}t \le \int_0^{\frac{1}{2}} \|x_0\|\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

同理 $|\int_{\frac{1}{2}}^{1} x_0(t)\mathrm{d}t| \le \frac{1}{2}$. 综上得到

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x_0(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2},\ 且\ \int_{\frac{1}{2}}^{1} x_0(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}.$$

假设 $x_0(t)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 的某子区间 $[a,b]$ 上有 $x_0(t)<1$, 则必定 $\int_0^{\frac{1}{2}} x_0(t)\mathrm{d}t < \frac{1}{2}$ 矛盾. 因此在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上, $x_0(t)\equiv 1$. 同理在 $[\frac{1}{2},1]$ 上, 有 $x_0(t)\equiv -1$. 显然这与 $x_0\in C[0,1]$ 矛盾. 因此不存在 $x\in C[0,1]$, $\|x\|\leqslant 1$, $f(x)=1$.

13. 证明 显然 f 是线性泛函, 由于

$$|f(x)| = |x(a)-x(b)| \le |x(a)|+|x(b)| \le 2\|x\|,$$

所以 f 是有界的且

$$\|f\| \le 2.$$

另一方面, 取 $x_0\in C[a,b]$, $x_0(a)=1$, $x_0(b)=-1$ 且 x_0 是单调递减函数, 则 $\|x_0\|=1$, 于是

$$\|f\| \ge |f(x_0)| = |x_0(a)-x_0(b)| = 2.$$

综上 $\|f\|=2$.

14. 解 (1) 设 $x(t)\in C[0,1]$. 直接计算即得

$$|f(x)| = |\int_0^1 \frac{x(\tau)}{2\sqrt[4]{\tau}}\mathrm{d}\tau| \le \|x\|\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt[4]{\tau}}\mathrm{d}\tau = \frac{2}{3}\|x\|,$$

即 $\|f\|\le\frac{2}{3}$. 另一方面, 取 $x_0(t)\equiv 1$, 则 $\|x_0\|=1$, 于是

$$\|f\| \ge |f(x_0)| = |\int_0^1 \frac{x_0(\tau)}{2\sqrt[4]{\tau}}\mathrm{d}\tau| = |\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt[4]{\tau}}\mathrm{d}\tau| = \frac{2}{3},$$

即 $\|f\|\ge\frac{2}{3}$. 综上, $\|f\|=\frac{2}{3}$.

(2) 直接计算即得

$$f(x) = \int_0^1 \frac{x(\tau)}{2\sqrt[4]{\tau}}\mathrm{d}\tau \le \frac{1}{2}(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\tau}})^{\frac{1}{2}}(\int_0^1 |x(\tau)|^2\mathrm{d}\tau)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\|x\|,$$

即 $\|f\|\le\frac{\sqrt{2}}{2}$. 另一方面, 取 $\dot{x}(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\tau}}$, 则 $\|\dot{x}\|=1$, 于是

$$\|f\| \ge |f(\dot{x})| = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

即 $\|f\|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$. 综上 $\|f\|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15. 解 对 $\forall f\in C[0,1]$ 有

$$|\Phi(f)| = \Big|\int_0^1 \phi(t)f(t)dt\Big| \le \max_{t\in[0,1]}|f(t)|\int_0^1|\phi(t)|dt = \|f\|\int_0^1|\phi(t)|dt,$$

故

$$\|\Phi\| \le \int_0^1 |\phi(t)|dt. \tag{4.0.1}$$

另一方面，对 $\forall\varepsilon>0$,根据 $\phi(t)$ 在[0,1]上的一致连续性, $\exists n\in N$, 将[0,1] n 等分,使得函数在每一等分区间上的振幅小于 ε. 我们把所有的等分区间分为两类: 在第一类区间上不含有函数 $\phi(t)$ 的零点, 这类区间记作 A; 在第二类区间上至少含有函数 $\phi(t)$ 的一个零点, 这类区间记作 B. 因为函数 $\phi(t)$ 在第二类区间 B 上必有零点, 所以在 B 类的每个区间上有 $|\phi(t)|<\varepsilon$. 定义 $\widetilde{f}(t)\in C[0,1]$,

$$\widetilde{f}(t)=\begin{cases} sgn\phi(t), & t\in A;\\ \text{线性函数}, & t\in B.\end{cases}$$

同时, 如果第二类区间 B 的端点是 0 或 1, 则令 $\widetilde{f}(0)=0$ 或 $\widetilde{f}(1)=0$. 由此有

$$\begin{aligned}\Phi(\widetilde{f}) &= \int_0^1 \phi(t)\widetilde{f}(t)dt=\sum_{\forall A}\int_A \phi(t)\widetilde{f}(t)dt+\sum_{\forall B}\int_B \phi(t)\widetilde{f}(t)dt\\ &\geq \sum_{\forall A}\int_A |\phi(t)|dt-\sum_{\forall B}\int_B |\phi(t)|dt=\int_0^1 |\phi(t)|dt-2\sum_{\forall B}\int_B |\phi(t)|dt\\ &> \int_0^1 |\phi(t)|dt-2\varepsilon.\end{aligned}$$

又因为 $\|\widetilde{f}\|\leq 1$, 所以 $\|\Phi\|\geq\Phi(\widetilde{f})$. 联合上面两式得到

$$\|\Phi\|\geq\Phi(\widetilde{f})>\int_0^1 |\phi(t)|dt-2\varepsilon.$$

再令 $\varepsilon\to 0$, 便得到

$$\|\Phi\|\geq\int_0^1 |\phi(t)|dt. \tag{4.0.2}$$

综合 (4.0.1), (4.0.2) 式得到

$$\|\Phi\|=\int_0^1 |\phi(t)|dt.$$

16. 证明 对 $\forall f\in L[a,b]$ 有

$$\|Tf\|=\max_{a\leq x\leq b}\left|\int_a^x f(t)dt\right|\leq\int_a^b |f(t)|dt=\|f\|,$$

故 $\|T\|\leq 1$. 另一方面, 若取 $f\equiv 1$, 则 $\|f\|=b-a$, $(Tf)(x)=x-a$. 于是

$$b-a=\|Tf\|\leq\|T\|\|f\|=\|T\|\cdot(b-a),$$

即 $\|T\|\geq 1$. 因此 $\|T\|=1$.

17. 证明 因为对 $\forall x\in L^1[a,b]$ 有

$$\|Tx\|\leq\int_a^b |\alpha(t)||x(t)|dt\leq\max_{t\in[a,b]}|\alpha(t)|\cdot\int_a^b |x(t)|dt=\|\alpha\|\cdot\|x\|,$$

故 $\|T\|\leq\|\alpha\|$. 另一方面, 闭区间上连续函数 $|\alpha(t)|$ 的极值是可达到的, 必有 t_0 使得

$$|\alpha(t_0)|=\max_{a\leq t\leq b}|\alpha(t)|,\ t_0\in[a,b].$$

因此, 对 $\forall\varepsilon>0$, 必有区间 $I: t_0\in I\subset[a,b]$, 当 $t\in I$ 时

$$|\alpha(t_0)|<|\alpha(t)|+\varepsilon. \tag{4.0.3}$$

记 δ 为 I 的长度, 在 $L[a,b]$ 中取 f_δ 如下:

$$f_\delta(t)=\begin{cases}0, & t\notin I;\\ \frac{1}{\delta}, & t\in I.\end{cases}$$

显然 $f_\delta(t)\geq 0$, 且 $\|f_\delta\|=1$. 根据 (4.0.3) 就有

$$\int_a^b(|\alpha(t_0)|-\varepsilon)f_\delta(t)dt\leq\int_a^b|\alpha(t)f_\delta(t)|dt,$$

即

$$\|T\|\geq\|Tf_\delta\|\geq|\alpha(t_0)|-\varepsilon=\max_{a\leq t\leq b}|\alpha(t)|-\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$, 得到 $\|T\|\geq\|\alpha\|$. 则 $\|T\|=\|\alpha\|$.

18. 证明 易知 T 是线性算子. 因为

$$\|y\|=\sup_j|y_j|=\sup_j|\sum_{k=1}^\infty a_{jk}x_k|\leq\left(\sup_j\sum_{k=1}^\infty|a_{jk}|\right)\cdot\|x\|,$$

所以

$$\|T\|\leq\sup_j\sum_{k=1}^\infty|a_{jk}|=M.$$

另一方面, 令

$$x^{(j)}=\{sgn\ a_{j1},sgn\ a_{j2},\ldots,sgn\ a_{jn},\ldots\},$$

则 $x^{(j)}\in l^\infty$, 且 $\|x^{(j)}\|\leq 1\quad(j=1,2,3,\ldots)$,而

$$Tx^{(j)}=\left\{\sum_{k=1}^\infty a_{1k}sgn\ a_{jk},\sum_{k=1}^\infty a_{2k}sgn\ a_{jk},\ldots\right\},$$

$$\|T\|\geq\|Tx^{(j)}\|\geq\left|\sum_{k=1}^\infty a_{jk}sgn\ a_{jk}\right|=\sum_{k=1}^\infty|a_{jk}|\quad(j=1,2,3,\ldots).$$

故 $\|T\|\geq\sup_j\sum_{k=1}^\infty|a_{jk}|=M$, 从而 $\|T\|=M$.

19. 证明 任取 $x(t)\in C[0,1]$, 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得 $t_1,t_2\in[0,1],|t_1-t_2|<\delta$ 时有

$$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon.$$

取 $0<\delta_0<\frac{\delta}{2}$, 则 $t\in[0,\delta_0]$ 时

$$|t^{1+\frac{1}{n}}-t|<2t<\delta\qquad(n=1,2,3,\ldots).$$

从而当 $t\in[0,\delta_0]$ 时,对所有自然数 n, 有

$$|T_nx(t)-x(t)|=|x(t^{1+\frac{1}{n}})-x(t)|<\varepsilon.$$

当 $t \geq \delta_0$ 时, $\exists N$, 使得 $n > N$ 时,有 $|t^{1+\frac{1}{n}} - t| < \delta$. 于是 $n > N$ 时,对一切 $t \in [0,1]$, 有

$$|x(t^{1+\frac{1}{n}}) - x(t)| < \varepsilon.$$

故 T_n 强收敛于恒同算子 I. 下面我们证明 $\|T_n - I\|$ 不收敛于零.取定 $t_0 \in (0,1)$, 对每个 n, 我们作 $C[0,1]$ 中函数 $x_n(t)$ 如下:

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_0^{1+\frac{1}{n}}]; \\ 1, & t \in [t_0, 1]; \\ \text{线性}, & t \in [t_0^{1+\frac{1}{n}}, t_0] \end{cases}$$

则 $\|x_n\| = 1$, 且

$$\|T_n - I\| \geq \|(T_n - I)x_n\| \geq \left| x_n(t_0^{1+\frac{1}{n}}) - x_n(t_0) \right| = 1.$$

故 $\{T_n\}$ 不按范数收敛于 I.

20. 证明 设区间 $[-n,n]$ 上的特征函数为 $\chi_{[-n,n]}(x)$ 则有

$$(T_n f)(x) = \chi_{[-n,n]}(x) f(x).$$

$$((I - T_n)f)(x) = (1 - \chi_{[-n,n]}(x)) f(x) = \chi_{|x|>n}(x) f(x).$$

$$\begin{aligned} \|T_n f - f\|^p &= \int_{-\infty}^{-n} |f(x)|^p dx + \int_n^{+\infty} |f(x)|^p dx \to 0 \quad (n \to \infty) \\ &\Rightarrow T_n \to I. \end{aligned}$$

所以 T_n 强收敛于恒等算子 I. 注意到

$$\begin{aligned} \int_n^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-n} &\Rightarrow \begin{cases} e^n \int_n^{+\infty} e^{-x} dx = 1 \\ e^n \int_{-\infty}^{-n} e^{-|x|} dx = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{e^n}{2} \int_{|x|>n} e^{-|x|} dx = 1. \end{aligned}$$

令 $f_n(x) = \chi_{|x|>n}(x) (\frac{e^{n-|x|}}{2})^{\frac{1}{p}}$, 则有

$$\|f_n\|_p = \left(\int_R |f_n(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{e^n}{2} \int_{|x|>n} e^{-|x|} dx \right)^{\frac{1}{p}} = 1.$$

于是 $\|I - T_n\| \geq \|f_n\|_p = 1$, 故 T_n 不一致收敛到 I.

21. 证明 对 $\forall x, y \in X$ 有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|L(\alpha x + \beta y) - (\alpha L x + \beta L y)\| \\ &= \|L(\alpha x + \beta y) - L_n(\alpha x + \beta y) + L_n(\alpha x + \beta y) - (\alpha L x + \beta L y)\| \\ &\leq \|L(\alpha x + \beta y) - L_n(\alpha x + \beta y)\| + \|L_n(\alpha x) - L(\alpha x)\| + \|L_n(\beta y) - L(\beta y)\| \\ &\leq M_n \|\alpha x + \beta y\| + M_n \|\alpha x\| + M_n \|\beta y\| \to 0 \ (n \to \infty). \end{aligned}$$

而 $M_n \to 0$, 从而 $L(\alpha x+\beta y)=\alpha Lx+\beta Ly$. 即 L 是线性映射. 又由于 $M_n \to 0\ (n\to\infty)$, 所以 $\exists \varepsilon_0>0$, 使得对 $n_0 \in N$ 有 $M_{n_0} \le \varepsilon_0$. 由

$$\|Lx\| - \|L_n x\| \le \|Lx - L_n x\|$$

及已知条件有

$$\|Lx\| \le \|L_{n_0}x\| + M_{n_0}\|x\| \le \|L_{n_0}\|\|x\| + \varepsilon_0\|x\|.$$

由于 L_{n_0} 有界, 所以 L 是连续线性映射.

22. 证明 对 $\forall x, y \in X,\ \alpha,\beta\in\mathbb{K}$ 有

$$\begin{aligned}
0 &\le \|L(\alpha x+\beta y) - (\alpha Lx + \beta Ly)\| \\
&= \|L(\alpha x+\beta y) - L_n(\alpha x+\beta y) + L_n(\alpha x+\beta y) - (\alpha Lx+\beta Ly)\| \\
&\le \|L(\alpha x+\beta y) - L_n(\alpha x+\beta y)\| + \|L_n(\alpha x) - L(\alpha x)\| + \|L_n(\beta y) - L(\beta y)\| \to 0\ (n\to\infty),
\end{aligned}$$

故 $L(\alpha x+\beta y)=\alpha Lx+\beta Ly$. 所以 L 是线性的.

23. 证明 由 E_1 完备及 $\{S_n\}$ 强收敛, 得出

$$\beta \triangleq \sup_n \|S_n\| < \infty.$$

对 $\forall x\in E$ 有

$$\begin{aligned}
\|S_nT_nx - STx\| &\le \|S_nT_nx - S_nTx\| + \|S_nTx - STx\| \\
&\le \beta\|T_nx - Tx\| + \|S_n(Tx) - S(Tx)\| \to 0\ (n\to\infty).
\end{aligned}$$

可见 $S_nT_nx \to STx$. 即 $\{S_nT_n\}$ 强收敛于 ST.

24. 证明 反证法. 设 A 是第二纲集.分解 $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, 其中 $A_k=\{x|\sup\limits_{n\ge1}\|T_nx\|\le k\}$. 则 A_k 为闭集. 因为 A 是第二纲的, 故必有某个 k 和 $x_0\in X, r>0$ 存在, 使得

$$\{x|\ \|x-x_0\|<r\} \subset \overline{A}_k = A_k.$$

则对 $\forall z\ne 0, z\in X$ 有

$$y = x_0 + \frac{r}{2}\frac{z}{\|z\|} \in A_k,$$

从而

$$\left\|T_n\left(\frac{r}{2}\frac{z}{\|z\|}\right)\right\| \le \|T_nx_0\| + \|T_ny\| \le 2k,$$

即 $\|T_nz\| \le \frac{4k}{r}\|z\|$, 可见 $A=X$. 于是知, 要么 $A=X$, 要么 A 为 X 中的第一纲集.

25. 证明 (1) 由于

$$\|T_mx\| = |mx_m| = m|x_m| \le m\|x\|,$$

故得到 $\|T_m\|\le m$. 另一方面, 取 $x=(\overbrace{0,\cdots,0,1}^{m},0,\cdots)$, 则 $\|x\|=1$ 且

$$\|T_m\| \ge \|T_mx\| = m.$$

综上得出 $\|T_m\| = m$.

(2) 因为对于 $\forall x = (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots) \in c_0$ 有

$$\|T_m x\| = m|x_m| = \begin{cases} 0, & m > n, \\ m|x_m| \le n\|x\|, & m \le n. \end{cases}$$

从而 $\sup\limits_{m\ge 1} \|T_m x\| < \infty$.

(3) 假若 c_0 是第二纲集, 结合一致有界原则及 (2) 的结论得

$$\sup_{m\ge 1}\{\|T_m\|\} < \infty.$$

但由 (1) 知

$$\sup_{m\ge 1}\{\|T_m\|\} = \sup_{m\ge 1}\{\ m\} = \infty,$$

矛盾. 故 c_0 不是第二纲集.

26. 证明 令

$$M_k = \{x \in X||F(x)| \le k,\ F \in \mathfrak{F}\} = \cap_{F\in\mathfrak{F}}\{x \in X|F(x) \le k\}.$$

因为 $F(x)$ 是 X 上的连续函数, 因此 $\{x \in X|F(x) \le k\}$ 是闭集. 由闭集的性质(定理1.3.3), M_k 是闭集,且由点点有界可知

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

因为 X 是完备的, 根据 Baire 纲定理 4.3.3 知道, X 是第二纲集. 因此必存在 k_0, M_{k_0} 不是疏集, 即存在某个开集 U 使得 M_{k_0} 在 U 中稠密. 于是由M_{k_0} 是闭集有

$$M_{k_0} = \overline{M}_{k_0} \supseteq U,$$

结合 M_{k_0} 的定义结论得证.

27. 证明 用开映射定理,只需证明 Φ 是满射.

$\forall [x] \in X/X_0$, 任取 $x \in [x]$, 则有 $x \in X$. 并且 $\Phi(x) = [x]$. 从而 $\Phi : X \to X/X_0$ 是满射.

28. 证明 (1) 显然 $Tx = y \in X$, 且 T 是线性的. 由于

$$\|Tx\| = \sup_k |\frac{1}{k}x_k| \le \sup_k |x_k| = \|x\|,$$

故 T 有界且

$$\|T\| \le 1.$$

反之取 $x = \{1, 0, \cdots, 0, \cdots\} \in X$, $\|x\| = 1$. $Tx = \{1, 0, \cdots, 0, \cdots\} \in X$, 而

$$\|T\| \ge \|Tx\| = 1.$$

从而得到 $\|T\| = 1$.

(2) 显然 T^{-1} 是存在的, 即

$$y = \{y_1, \cdots, y_n, \cdots\}\ (\text{只有有限个 } y_k \text{ 不等于零}),$$

$$T^{-1}y = x = \{x_1, \cdots, x_n, \cdots\},\ x_k = ky_k,\ (k = 1, 2, \cdots)$$

令 $e_n=\{0,\cdots,0,1,0,\cdots\}$, 显然 $e_n\in X$ 且 $\|e_n\|=1$, $(n=1,2,\cdots)$. 因为

$$T^{-1}e_n=x_n=\{0,\cdots,0,n,0,\cdots\},$$

所以 $\|T^{-1}e_n\|=\|x_n\|=n$, 则 T^{-1} 是无界算子. 这与Banach 逆算子定理并不矛盾, 因为 X 不完备. 事实上, 令

$$\{x_n\}\subset X,\ x_n=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},0,\cdots\},$$

$$x=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}\in l^\infty,$$

容易验证 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列, 在 l^∞ 中, $\|x_n-x\|\to 0$ $(n\to 0)$, 其中

$$x=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\},$$

但是 x 不属于X. 说明 X 不完备, 逆算子定理的条件不满足.

29. 证明 令 $X_1=(C[a,b],\|\cdot\|)$, $X_2=(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$. 它们都是 Banach 空间. 考虑恒等映射 $I:X_2\to X_1$. 则 I 是线性的. 设在 X_2 中 $x_n\to x$, 在 X_1 中 $I(x_n)\to y$. 即当 $n\to\infty$ 时有 $\|x_n-x\|_\infty\to 0$ 且 $\|I(x_n)-y\|\to 0$. 所以

$$\|x_n-y\|=\|I(x_n)-y\|\to 0.$$

由题设条件知对每个 t 有 $x_n(t)\to y(t)$. 由于

$$|x_n(t)-x(t)|\le\|x_n-x\|_\infty\to 0.$$

从而对每个 $t\in[a,b]$ 均有 $y(t)=x(t)$. 因此 $y=x=I(x)$. 即 I 是闭算子.
由闭图像定理知 I 是连续的.由逆算子定理知 I^{-1} 也是有界算子, 所以存在 $\alpha,\beta>0$, 使得对所有 x 有

$$\|Ix\|\le\alpha\|x\|_\infty.\ \ \|Ix\|_\infty\le\beta\|x\|.$$

于是 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_\infty$ 等价.

30. 证明 因为 $x\in AC[0,1]$, $x(t)$ 可以表示成

$$x(t)=\alpha+\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{4.0.4}$$

其中 α 是一个数, $u(t)\in H$. 假设

$$x_n\in\mathscr{D}(T),\ x_n\to x,\ Tx_n=y_n\to y,$$

由(4.0.4) 和$x_n(t)$ 几乎处处可微, 则

$$x_n(t)=x_n(0)+\int_0^t x_n'(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{4.0.5}$$

从而有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t ix_n'(\tau)\,\mathrm{d}\tau-\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| &\leqslant \int_0^t |ix_n'(\tau)-y(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\leqslant \int_0^1 |ix_n'(\tau)-y(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\\ &\leqslant (\int_0^1 \left|ix_n'(\tau)-y(\tau)\right|^2\,\mathrm{d}\tau)^{1/2}(\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}\tau)^{1/2}.\end{aligned}\tag{4.0.6}$$

因为 $Tx_n=ix_n'$ 在 H 中收敛到 y, 因此 (4.0.6) 说明 $\int_0^t ix_n'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ 一致收敛到 $\int_0^t y(\tau)$ $\mathrm{d}\tau$. 于是, 由

$$x_n(0)-x_m(0)=x_n(t)-x_m(t)-\int_0^t [x_n'(\tau)-x_m'(\tau)]\,\mathrm{d}\tau.$$

我们有

$$\begin{aligned}|x_n(0)-x_m(0)| &= \Big(\int_0^1 |x_n(0)-x_m(0)|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant \Big(\int_0^1 |(x_n(t)-x_m(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big\{\int_0^1 |\int_0^t [ix_n'(\tau)-ix_m'(\tau)]\,\mathrm{d}\tau|^2\,\mathrm{d}t\Big\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

注意到 $x_n(t)$ 是 H 中的 Cauchy 列以及 (4.0.6) 推出 $\{x_n(0)\}$ 是一个 Cauchy 数列, 收敛到 β. 于是由 (4.0.5) 和 (4.0.6) 知 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛到$z(t)$, 即

$$z(t)=\beta-i\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

且 $iz'(t)$ 几乎处处等于 $y(t)$, $y(t)\in L^2$ [0,1], 即$z\in\mathcal{D}(T)$, $Tz=y$. 再由一致收敛知

$$\int_0^1 \left|x_n(t)-z(t)\ \right|^2\,\mathrm{d}t\to 0\,,$$

即 $x_n(t)$ 按 H 中的范数收敛到 $z(t)$, 于是 $z(t)=x(t)$, 由定义知 T 是闭的线性算子.

31. 证明 (1) 设 T 连续, $\{x_n\}\subseteq D(T)$, $x_n\to x$, $Tx_n\to y$. 则由于 $D(T)$ 是闭的, 所以 $x\in D(T)$; 又因为 T 连续, 所以 $y=Tx$. 故 T 是闭算子.
(2) 设 T 连续且是闭算子, Y 是完备的. 那么根据 B.L.T. 定理, 能唯一地延拓到 $\overline{D(T)}$ 上成为连续线性算子 T_1, 满足 $T_1|_{D(T)}=T$, 且 $\|T_1\|=\|T\|$. 接下来结合 T 是闭算子, 证明 $D(T)$ 闭. 设 $\{x_n\}\subseteq D(T)$, $x_n\to x$, 要证明 $x\in D(T)$. 事实上, 我们有

$$Tx_n=T_1x_n\to T_1x,\quad n\to\infty.$$

因为 T 是闭的, 所以由

$$\{x_n\}\subseteq D(T),\ x_n\to x,\ Tx_n=T_1x_n\to T_1x,\quad n\to\infty$$

推出 $x\in D(T)$ 且 $Tx=T_1x$.

32. 证明 任取 $\{y_n\}\subset\mathcal{D}(T^{-1}),y_n\to y\in Y$, 及 $T^{-1}y_n\to x\in X$. 令 $y_n=Tx_n$, 则 $x_n=T^{-1}y_n$, 由此可得 $x_n\in\mathcal{D}(T),x_n\to x$ 且 $Tx_n\to y$ 因为 T 闭,所以 $x\in\mathcal{D}(T)$, 且 $y=Tx$,
即

$$y\in\mathcal{D}(T^{-1}),x=T^{-1}y.$$

故 T^{-1} 是闭算子.

33. 证明 任取点列 $\{x_n\} \subset X$, 满足 $x_n \to x, (T_1+T_2)x_n \to y, (n \to \infty)$. 由于 $T_2 \in \mathcal{B}(X,Y)$. 故存在 $M > 0$, 使得

$$\|T_2x_n - T_2x\|_Y \leq M\|x_n - x\|_X \to 0 \quad (n \to \infty),$$

即 $T_2x_n \to T_2x$. 从而有 $T_1x_n \to y - T_2x$. 由 T_1 是闭算子知, $y - T_2x = T_1x$. 即 $y = (T_1+T_2)x$. 从而 T_1+T_2 是闭算子.