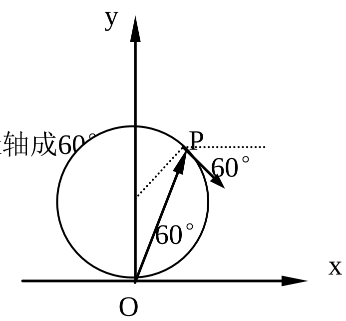
第一章 质点的运动规律 习题参考解答

1、电子受到磁力后，在半径为R的圆形轨道上，以速率v从O点开始作顺时针方向的匀速率圆周运动，当它经过$\overline{OP}=\left|\overrightarrow{OP}\right|=2R\cos 30^0=\sqrt{3}R$圆周时，求：

（1）电子的位移；
（2）电子经过的路程等于多少；
（3）在这段时间内的平均速度；
（4）在该点的瞬时速度



解：（1）位移大小$\overline{OP}=\left|\overrightarrow{OP}\right|=2R\cos 30^0=\sqrt{3}R$ 方向与x轴成60°

（2） 路程 $S=\frac{2}{3}\times 2\pi R=\frac{4}{3}\pi R$

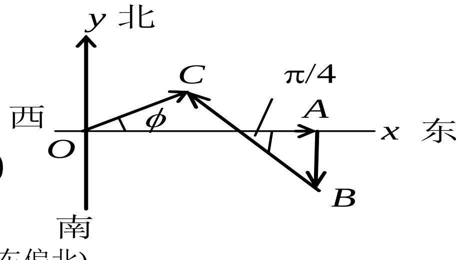
（3）∵ $\Delta t=\frac{2}{3}\times\frac{2\pi R}{v}=\frac{4\pi R}{3v}$

平均速度的大小 ∴ $\bar{v}=\frac{\left|\overline{OP}\right|}{\Delta t}=\frac{\sqrt{3}R}{\frac{4\pi R}{3v}}=\frac{3\sqrt{3}v}{4\pi}$ 方向与 x 轴成 60°

（4）速度的大小为 v，方向与 x 轴成-60^0。

2、一人自原点出发，25 s 内向东走 30 m，又 10 s 内向南走 10 m，再用 15 s 向正西北走 18 m．求在这 50 s 内，

(1) 平均速度的大小和方向;
(2) 平均速率的大小．



答：解：(1) 位移 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$$=30\vec{i}+(-10\vec{j})+18(-\cos 45°\vec{i})+\sin 45°\vec{j})$$
$$=17.27\vec{i}+2.73\vec{j}$$

位移大小为： $|\overline{OC}|$=17.48 m，方向ϕ=8.98° (东偏北)

平均速度大小为$\left|\vec{\bar{v}}\right|=\left|\Delta\vec{r}/\Delta t\right|=\left|\overrightarrow{OC}/\Delta t\right|=$ 0.35 m/s 方向东偏北 8.98°

(2) (路程) $\Delta S=(30+10+18)$m=58m, 平均速率为：$\bar{v}=\Delta S/\Delta t=1.16$ m/s

3、已知质点的位矢随时间的函数形式为$\vec{r}=R\left(\cos\omega t\,\vec{i}+\sin\omega t\,\vec{j}\right)$，式中 R，ω为常量求：

（1）质点的轨迹；

（2）速度和加速度，并证明其加速度总指向一点。

解:（1）质点位置的坐标为：$x=R\cos\omega t$　　$y=R\sin\omega t$

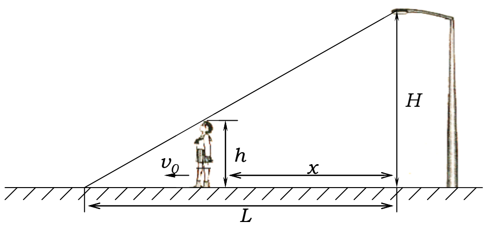
质点的运动轨迹：$x^2+y^2=R^2$

（2）质点的速度：$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=-R\omega\sin\omega t\vec{i}+R\omega\cos\omega t\vec{j}$

质点的加速度：$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=-R\omega^2\cos\omega t\vec{i}-R\omega^2\sin\omega t\vec{j}=-\omega^2\vec{r}$

由上式可知加速度总是指向圆心。

4、路灯距地面高度为 H，行人身高为h，若人以匀速度v_0背离路灯行走，问人头影的移动速度为多大？



解：设 t 时间人的位置坐标为x，人影的坐标为L

由几何关系 $\dfrac{L-x}{h}=\dfrac{L}{H}$得：

$$L=\frac{H}{H-h}x$$

$$\therefore\quad v=\frac{dL}{dt}=\frac{H}{H-h}\frac{dx}{dt}=\frac{H}{H-h}v_0$$

5、一质点以初速度v_0作直线运动，所受阻力与其速度的三次方成正比，即$a=-kv^3$，试求质点速度和位置随时间的变化规律以及速度随位置的变化规律。

解：由题意有：$a=-kv^3=\dfrac{dv}{dt}$

则：$\dfrac{dv}{v^3}=-kdt$；积分得到：$\Rightarrow v=v_0(\dfrac{1}{1+2kv_0^2t})^{\frac{1}{2}}$

$\dfrac{dx}{dt}=v_0(\dfrac{1}{1+2kv_0^2t})^{\frac{1}{2}}$；积分得到：$\Rightarrow x=\dfrac{1}{kv_0}(\sqrt{1+2kv_0^2t}-1)$

可通过简单推倒得到$\Rightarrow v=\dfrac{v_0}{1+kv_0x}$

或使用变量转换：$\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dv}{dx}v=-kv^3$；积分得到：$\Rightarrow v=\dfrac{v_0}{1+kv_0x}$

6、某质点的运动方程为$\vec{r}=2bt\,\vec{i}+bt^2\vec{j}$（b为常数），求：

（1）轨道方程；

（2）质点的速度和加速度的矢量表示式；

（3）质点的切向加速度和法向加速度的大小。

解：（1）由$x=2bt$　$y=bt^2$得轨迹方程　$y=\dfrac{x^2}{4b}$

（2）质点的速度$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left[2bt\vec{i}+bt^2\vec{j}\right]=2b\vec{i}+2bt\vec{j}$

质点的加速度$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left[2b\vec{i}+2bt\vec{j}\right]=2b\vec{j}$

（3）点的速率：$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(2b)^2+(2bt)^2}$

质点的切向加速度$a_t=\dfrac{d}{dt}\left[\sqrt{(2b)^2+(2bt)^2}\right]=\dfrac{2bt}{\sqrt{1+t^2}}$

质点的法向加速度$a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=\sqrt{(2b)^2+(\dfrac{2bt}{\sqrt{1+t^2}})^2}=\dfrac{2b}{\sqrt{1+t^2}}$

7、质点沿半径为0.1m的圆周运动，其角位移用下式表示 $\theta=2+4t^3$ 式中 θ 为弧度(rad)，t 的单位为s，求：

（1）t=2s时，质点所在位置的切向加速度和法向加速度的大小；

（2）当 θ 为何值时，其加速度和半径成45^0角。

解：（1）由题意得到圆周运动的角位移、角速度、角加速度：

$$\theta=2+4t^3 \quad \omega=\frac{d\theta}{dt}=12t^2 \quad \alpha=\frac{d\omega}{dt}=24t$$

则圆周运动质点的法向加速度大小为：$\therefore \quad a_n=R\omega^2=R(12t^2)^2\big|_{t=2}=230.4\,m/s^2$

质点圆周运动的切向加速度大小为：$a_t=R\alpha=24Rt\big|_{t=2}=4.8\,m/s^2$

（2）当 $\vec{a}$ 与半径成 45^0 角时，$\vec{a}$ 与 a_n 也成 45^0。所以 $|\vec{a}_n|=|\vec{a}_t|$

即 $\quad 144Rt^4=24Rt$

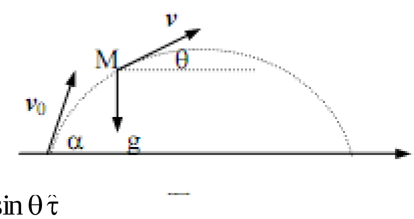
$$\theta=2+4t^3\Big|_{t=\sqrt[3]{\frac{1}{6}}}=2+4\times\frac{1}{6}=2\frac{2}{3}\,rad$$

8、手球运动员以初速度v_0与水平方向成α的角度抛出一球，当球运动到M点处，它的速度与水平方向成θ角，若忽略空气阻力，求：

（1）球在M点处速度的大小；

（2）球在M点处的切向加速度和法向加速度的大小 ；

（3）抛物线在该点处的曲率半径。



解：（1）质点水平速度分量为 $v_0\cos\alpha=v\cos\theta$

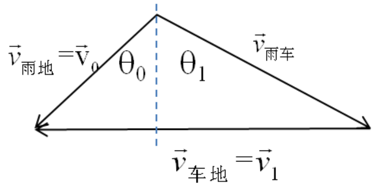
有球在M点处速度的大小：$\Rightarrow v=\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}v_0$

（2）球在 M 点处的切向加速度的大小 $\vec{a}_t=-g\sin\theta\,\hat{\tau}$

球在 M 点处法向加速度的大小 $\vec{a}_n=g\cos\theta\,\hat{n}$

（3）由 $a_n=\frac{v^2}{\rho}$；得到抛物线在该点处的曲率半径 $\Rightarrow\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g\cos^3\theta}$

9、火车静止时，车窗上雨痕向前倾斜 θ_0角，火车以某一速度匀速前进时，火车车窗上雨痕向后倾斜 θ_1角。火车加快以另一速度匀速前进时，车窗上雨痕向后倾斜 θ_2角，求火车加快前后的速度之比。



解：由相对运动 $\vec{V}_{车地}=\vec{V}_{车雨}+\vec{V}_{雨地}=\vec{V}_{雨地}+(-\vec{V}_{雨车})$

由矢量合成图得：

相对地面静止时：$0=V_0\cos\theta_0-V_{雨车1}\cos\theta_1$

相对地面速率为V_1时：$V_1=V_0\sin\theta_0+V_{雨车1}\sin\theta_1=V_0\sin\theta_0+V_0\cos\theta_0\mathrm{tg}\theta_1$

相对地面速率为 V_2时：$V_2=V_0\sin\theta_0+V_0\cos\theta_0\mathrm{tg}\theta_2$

所以 $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{V_0\sin\theta_0+V_0\cos\theta_0\mathrm{tg}\theta_1}{V_0\sin\theta_0+V_0\cos\theta_0\mathrm{tg}\theta_2}$

10、一升降机以加速度1.22m/s^2 上升，当上升速度为2.44m/s 时，有一螺帽自升降机的顶板上落下，升降机顶板与升降机的底面相距2.74m ，问：

（1）螺帽相对于升降机作什么运动？其加速度为多少？螺帽相对于地面作什么运动?其加速度为多少？

（2）螺帽从升降机顶板落到升降机底面需多少时间？

（3）螺帽相对于升降机外固定柱子下降多少距离？

解：（1）螺帽相对升降机作向下的匀加速直线运动

$$\vec{a}_{m升}=\vec{a}_{m地}+\vec{a}_{地升}=\vec{a}_{m地}-\vec{a}_{升地} \qquad a_{m升}=-g-a=-11.02\,\mathrm{m/s^2}$$

螺帽对地作竖直上抛运动 $\vec{a}_{m地}=\vec{g}$

（2）取升降机为参照系，参照系内坐标系选竖直向下为正

$$h=\frac{1}{2}(g+a)t^2$$

螺帽从升降机顶板落到升降机底面需多少时间 $t=\sqrt{\dfrac{2h}{g+a}}=\sqrt{\dfrac{2\times2.74}{9.8+1.22}}=0.71\mathrm{s}$

（3）螺帽相对于升降机外固定柱子下降多少距离

$$s_{螺地}=v_0t-\frac{1}{2}gt^2=2.44\times0.71-\frac{1}{2}\times9.8\times(0.71)^2=-0.74\mathrm{m}$$

11、一男孩乘坐一铁路平板车，在平直铁路上匀加速行驶，其加速度为 a，他向车前进的斜上方抛出一球，设抛球过程对车的加速度 a 的影响可忽略，如果他不必移动在车中的位置就能接住球，则抛出的方向与竖直方向的夹角θ应为多大？

解：设抛出时刻车的速度为$\vec{\upsilon}_0$，球相对于车的速度为$\vec{\upsilon}_0'$，与竖直方向成θ角．抛射过程中，在地面参照系中，车的位移水平分量:

$$\Delta x_1 = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad ①$$

球的位移水平分量: $\Delta x_2 = \left(\upsilon_0 + \upsilon_0' \sin\theta\right)t \qquad ②$

球的位移竖直分量: $\Delta y_2 = \left(\upsilon_0' \cos\theta\right)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad ③$

小孩接住球的条件 $\Delta x_1 = \Delta x_2$, $\Delta y_2 = 0$

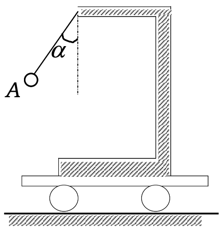
即　　䘊 $\frac{1}{2}at_2 = \left(\upsilon_0' \sin\theta\right)t$ ， $\frac{1}{2}gt_2 = \left(\upsilon_0' \cos\theta\right)t$

两式相比得 $a/g = \mathrm{tg}\theta$ ，∴ $\theta = \mathrm{tg}^{-1}\left(a/g\right)$

12、如图所示，质量为 m 的摆球 A 悬挂在车架上．求在下述各种情况下，摆线与竖直方向的夹角α和线中的张力 T.

(1)小车沿水平方向作匀速运动；

(2)小车沿水平方向作加速度为 a 的运动.



解：(1) 由题意小车沿水平方向作匀速运动得: $\alpha = 0$

$$T = mg$$

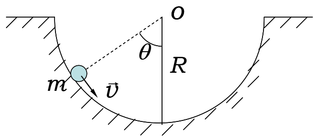
(2) 小车沿水平方向作加速度为 a 的运动,由牛顿定律得:

$$T\sin\alpha = ma, \qquad T\cos\alpha = mg$$

$$\mathrm{tg}\alpha = a/g \quad [\text{或}\ \alpha = \mathrm{tg}^{-1}(a/g)]$$

$$T = m\sqrt{a^2 + g^2}$$

13、如图所示，质量为 m 的钢球 A 沿着中心在 O、半径为 R 的光滑半圆形槽下滑．当 A 滑到图示的位置时，其速率为 υ ，钢球中心与 O 的连线 OA 和竖直方向成θ角，求这时钢球对槽的压力和钢球的切向加速度．



解：球 A 受法向支持力 $\vec{N}$ 和重力 $m\vec{g}$，根据牛顿第二定律

法向合力： $N - mg\cos\theta = m\upsilon^2 / R$ ①

切向合力：戕 $mg\sin\theta = ma_t$ ②

当 A 滑到图示的位置时，由①式可得: $N = m(g\cos\theta + \upsilon^2 / R)$

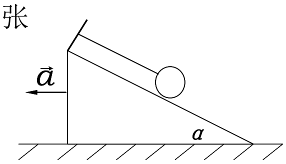
根据牛顿第三定律，球对槽压力大小同上，方向沿半径向外．

当 A 滑到图示的位置时，由②式得： $a_t = g\sin\theta$

14、将质量为10Kg的小球挂在倾角 $\alpha = 30^0$ 的光滑斜面上（如图所示）。

（1）当斜面以加速度 $a = \frac{1}{3}g$ 沿图示的方向运动时，求绳中的张力及小球对斜面的正压力；

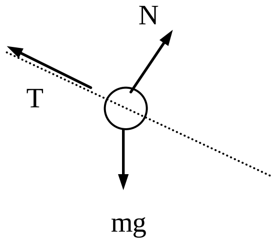
（2）当斜面的加速度至少为多大时，小球对斜面的正压力为零？



解：（1）当斜面以加速度 $a = \frac{1}{3}g$ 沿图示的方向运动时（小球未离开斜面）：

水平方向合力： $T\cos\alpha - N\sin\alpha = ma$

竖直方向合力： $T\sin\alpha + N\cos\alpha = mg$



解得当 $a = \frac{1}{3}g$ 时，N=68.4（N） T=77.3（N）

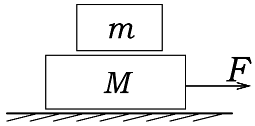
(2) 若N=0，则有

水平方向合力： $T\cos\alpha = ma'$

竖直方向合力： $T\sin\alpha = mg$

$a' = gctg\alpha = \sqrt{3}g = 17(m/s)$

15、桌上有一质量为M的板，板上放一质量为m的物体，如图所示。设物体与板，板与桌面之间的动摩擦系数为μ$_k$，静摩擦系数为μ$_s$，（1）今以水平力F拉板，使两者一起以加速度a运动，试计算板与桌面间的相互作用力；（2）要将板从物体下面抽出，至少需用多大的力？

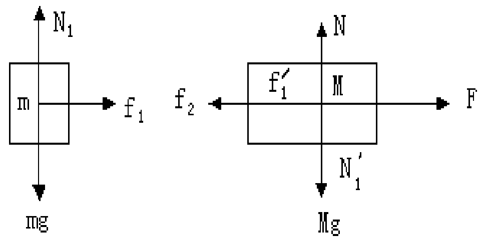


解：(1) 设板和桌面间的相互作用力N和f_2

物体 m 与板竖直方向合力为：$\because\ N_1 = mg$ $\therefore\ N = N_1 + Mg = (m+M)g$

板和桌面间的滑动摩擦力f_2为：$f_2 = \mu_k N = \mu_k (M+m)g$

（2）设抽出板所需的力为F，且抽出时 $a_M > a_m$



物体 m 水平方向合力：$f_1 = ma_m$

板水平方向合力为：M:　$F - f_1 - f_2 = Ma_M$

即　$f_1 < \dfrac{m(F - f_2)}{m+M}$

$$\therefore\quad F \geq \frac{f_1(m+M) + mf_2}{m} = f_1 + f_2 + \frac{M}{m} f_1$$

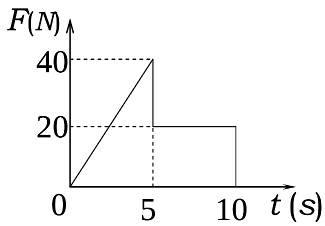
$\because\quad f_1 \leq \mu_s mg$

代入 f_1 得到 F $\therefore\quad F \geq (\mu_k + \mu_s)(M+m)g$

16、有一质量为m=5kg的物体，在0到10s内受到如图所示的变力F作用，由静止开始作直线运动。假定物体的初始位置为坐标的原点，求：

（1）第5秒末和第10秒末的速度；

（2）0到5秒内和5到10秒内物体所通过的路程。



解：（1）由F-t图可知：$F = \begin{cases} 8t & 0 \leq t \leq 5 \\ 20 & 5 \leq t \leq 10 \end{cases}$

根据牛顿定律可得 a 与时间关系为

$$a = \frac{F}{m} = \begin{cases} \frac{8}{5}t & 0 \leq t \leq 5 \\ 4 & 5 \leq t \leq 10 \end{cases} \quad （a = \frac{dv}{dt}$$

直线运动：$\therefore\quad v_5 = \int_0^5 a dt = \int_0^5 \frac{8}{5} t dt = 20 m/s$；$v_{10} = v_5 + \int_5^{10} a dt = 20 + \int_5^{10} 4 dt = 40 m/s$

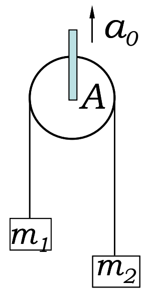
（2）速度随时间变化关系

$$v = \begin{cases} \int_0^t \frac{8}{5} t dt = \frac{4}{5} t^2 & 0 \leq t \leq 5 \\ \int_5^t 4 dt = 4t & 5 \leq t \leq 10 \end{cases} \quad （v = \frac{dx}{dt}）$$

$$x_5 = \int v dt = \int_0^5 \frac{4}{5} t^2 dt = \frac{4}{15} t^3 \Big|_0^5 = 33.3m$$

$$x_{10} - x_5 = \int_5^{10} v dt = \int_5^{10} 4t dt = 150m$$

17、如图所示，有一轻滑轮A，两边分别挂着质量为m_1和m_2的两物体，当滑轮A在外力作用下以加速度a_0上升时，求两物体m_1和m_2的加速度a_1和a_2（设 $m_2>m_1$ ）。



解：m_1对地加速度为 $\vec{a}_1=\vec{a}_{1A}+\vec{a}_{A地}$ $\qquad a_1=a'+a_0$

m_2对地加速度为$\vec{a}_2=\vec{a}_{2A}+\vec{a}_{A地}$ $\qquad a_2=a'-a_0$

$m_1 \qquad T-m_1g=m_1a_1=m_1(a'+a_0) \qquad (1)$

$m_2 \qquad m_2g-T=m_2a_2=m_2(a'-a_0) \qquad (2)$

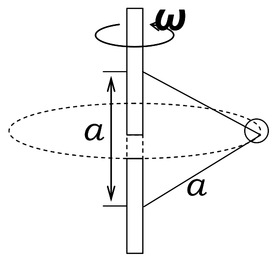
由（1）+（2）得

相对滑轮的加速度为： $a'=\dfrac{(m_2-m_1)g-(m_1-m_2)a_0}{m_1+m_2}$

物体 m_1相对地面的加速度： $\therefore a_1=a'+a_0=\dfrac{2m_2}{m_2+m_1}a_0-\dfrac{(m_1-m_2)g}{m_2+m_1}$

物体m_2相对地面的加速度： $a_2=a'-a_0=\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}a_0+\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$

18、用两根长为a的绳子连住一质量为m的小球，两绳的另一端分别固定在相距为a的棒的两点上，今使小球在水平面内作匀速圆周运动，如图所示。当转速为ω时，下面一根绳子刚刚伸直，求转速为2ω时，上下绳子的拉力各为多大？

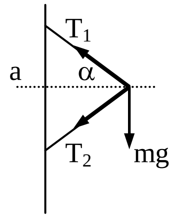


解 由几何条件知$\alpha=30^0$,且当角速度为ω时，

此时，$T_2=0$，水平与竖直方向的合力为：

$$T_1\cos\alpha=m\omega^2(a\cos\alpha)$$
$$T_1\sin\alpha=mg$$

$$\omega^2=\frac{g}{a\sin\alpha}$$



当 $T_2\neq 0$；水平与竖直方向的合力为：

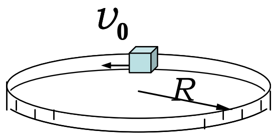
$$T_1'\cos\alpha+T_2'\cos\alpha=m(2\omega)^2a\cos\alpha \qquad (1)$$
$$T_1'\sin\alpha=T_2'\sin\alpha+mg \qquad (2)$$

$$\therefore \quad T_1'=5mg$$
$$T_2'=T_1'-2mg=3mg$$

19、在光滑水平桌面上平放一固定的圆环，其半径为R，物体与环内侧的摩擦系数为μ，当 $t_0=0$，物体的速率为v_0，求：

（1）t时刻物体的速率；

（2）在时间t内物体经过的路程。



解：（1）　法向合力为：$F_n = m\dfrac{v^2}{R}$

切向合力为：$F_t = m\dfrac{dv}{dt} = -\mu F_n = -\mu\dfrac{mv^2}{R}$

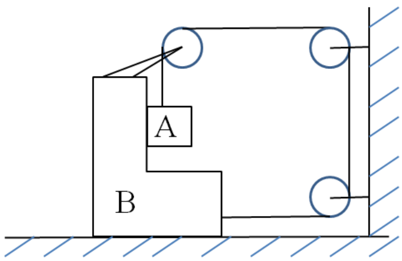
有：∴　$\dfrac{dv}{dt} = -\mu\dfrac{v^2}{R}$

积分 $\int_{v_0}^{v}\dfrac{dv}{v^2} = \int_0^t -\dfrac{\mu}{R}dt$　；得到：$v = \dfrac{v_0 R}{R+\mu v_0 t} = \dfrac{v_0}{1+\dfrac{\mu v_0 t}{R}}$

（2）　速率：$v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{v_0}{1+\dfrac{\mu v_0 t}{R}}$

积分 $\int_0^s ds = \int_0^t \dfrac{v_0}{1+\dfrac{\mu v_0 t}{R}}dt$　；得到：　$s = \dfrac{R}{\mu}\ln(1+\dfrac{\mu v_0 t}{R})$

20、图示为一力学装置，滑块B的质量为m_B，悬块A的质量为m_A，两者用无伸长的细绳相连，所有接触面皆为光滑。试求：滑块B和滑块A的加速度各为多少？

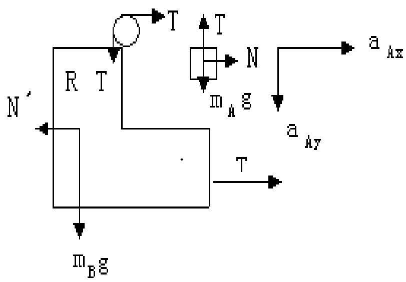


解：对悬块 A 水平合力：$N = m_A a_{Ax}$　　(1)

对悬块 A 竖直合力：$m_A g - T = m_A a_{Ay}$　(2)

对滑块 B 水平合力为：$B: 2T - N' = m_B a_{Bx}$　　(3)

牵连关系：$a_{Ay} = 2a_{Bx} = 2a_{Ax}$　　(4)



由（1）—（4）联解得

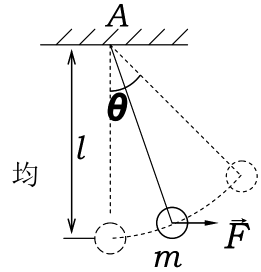
$$\vec{a}_A = \frac{2m_A g}{5m_A + m_B}\vec{i} + \frac{4m_A g}{5m_A + m_B}\vec{j}$$

$$\vec{a}_B = \frac{2m_A g}{5m_A + m_B}\vec{i}$$

第二章 守恒定律 习题参考解答

1、质量为m的小球系于绳的一端，绳长为l，上端A 固定，（如图示）。今有水平变力$\vec{F}$作用在该小球上时，使小球极其缓慢地移动，即在所有位置上均处于近似力平衡状态，直到绳子与竖直方向成θ角，

（1）试用变力作功方法计算$\vec{F}$力的功；（2）重力作功多大？



解：根据力的平衡可得：

$$\begin{cases} F = T\sin\theta \\ mg = T\cos\theta \end{cases}$$

处于近似力平衡状态的水平变力：$\therefore \quad F = mg\tan\theta$

（1）该变力作功 $A_F = \int \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int F ds\cos\theta = \int mg\tan\theta \cdot l\, d\theta\cos\theta$

$$= mg\, l\int_0^\theta \sin\theta d\theta = mg\, l(1-\cos\theta)$$

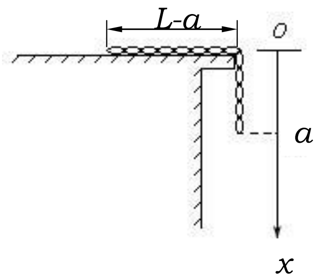
（2）重力作功 $A_P = \int m\vec{g}\cdot d\vec{s} = \int mgds\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) = mg\, l\int_0^\theta(-\sin\theta)d\theta = -mgl\,(1-\cos\theta)$

2、一根均匀链条的质量为m，总长为 l ，一部分放在光滑的桌面上，另一部分从桌面边缘下垂，下垂的长度为a，开始时链条静止，求链条刚好全部离开桌面时的速率。

解：根据机械能守恒，设桌面为重力势能的零点

$$-\frac{m}{l}ag\frac{a}{2} = --mg\frac{l}{2}+\frac{1}{2}mv^2$$

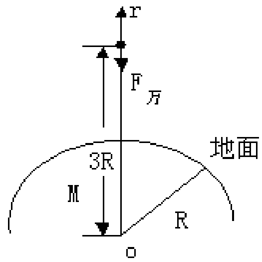
$$v = \sqrt{\frac{g}{l}\left(l^2-a^2\right)}$$



3、地球质量M、半径R，一质量m的质点处于距地心 r=3R处，求质点地球系统在此相对位置时的引力势能，

（1）取无穷远处为零势能参考位置；

（2）取地球表面为零势能参考位置。



解：（1）取 $E_p(\infty)=0$ 则

质点地球系统在此相对位置时的引力势能：

$$E_p=\int_{3R}^{\infty}\vec{F}_{保}\cdot d\vec{s}=\int_{3R}^{\infty}-G\frac{Mm}{r^2}dr=GMm\frac{1}{r}\Big|_{3R}^{\infty}=-\frac{GMm}{3R}$$

(2) 取 $E_p(R)=0$ 则：

质点地球系统在此相对位置时的引力势能：

$$E_p=\int_{3R}^{R}\vec{F}_{保}\cdot d\vec{s}=\int_{3R}^{R}-G\frac{Mm}{r^2}dr=GMm\frac{1}{r}\Big|_{3R}^{R}=\frac{2GMm}{3R}$$

4、在地球表面上垂直向上以第二宇宙速度 $v_2=\sqrt{2gR}$ 发射一物体，R为地球半径，g为重力加速度，试求此物体到达与地心相距为nR时所需的时间。

解：设物体运动到距地心x时其速度v，此过程中机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv^2-G\frac{mM}{x}=\frac{1}{2}mv_2^2-G\frac{mM}{R}$$

$$\because\ v_2=\sqrt{2gR}=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}mv_2^2-G\frac{mM}{R}=0$$

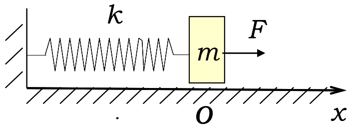
$$\frac{1}{2}mv^2-G\frac{mM}{x}=0\Rightarrow v=\sqrt{2GM}x^{\frac{1}{2}}=\frac{dx}{dt}$$

$$\int_0^t dt=\int_R^{nR}\sqrt{2GM}x^{\frac{1}{2}}dx\Rightarrow t=\frac{2}{3}\frac{R}{v_2}(n^{\frac{3}{2}}-1)$$

5、弹簧的弹性系数为k，一端固定，另一端与质量为m的物体相连，物体与桌面的摩擦系数为μ，若以不变的力F拉物体由平衡位置O自静止开始运动，求：

（1）物体到达最远处离平衡位置的距离。

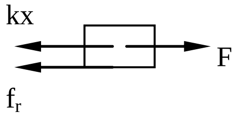
（2）物体在什么位置速度最大？最大速度为多少？



解：（1）物体、弹簧为系统，根据功能原理。

不变的力 F 拉物体得：$(F-\mu mg)x_{max}=\frac{1}{2}kx^2$

$$x_{max}=\frac{2(F-\mu mg)}{k}$$



（2）速度最大处为水平合力瞬时为 0 处（即力的平衡位置）

此时弹簧伸长为 x_0：

$$F-\mu mg-kx_0=0$$

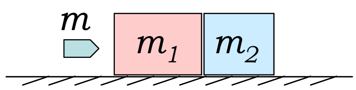
$$x_0=\frac{F-\mu mg}{k}$$

由功能原理得：$(F-\mu mg)x_0=\frac{1}{2}kx_0^2+\frac{1}{2}mv^2-0$

$$\therefore \quad v=\frac{F-\mu mg}{\sqrt{km}}$$

6、A、B两木块，质量分别为m_A、m_B，并排放在光滑的水平面上。今有一子弹水平地穿过木块A、B，所用时间分别为Δt_1和Δt_2，若木块对子弹的阻力为恒力F，求子弹穿过后两木块的速度？

解：未击穿 A 时，m_A、m_B一起运动，根据动量定理



$$F\Delta t_1=(m_A+m_B)v_A-0$$

$$v_A=\frac{F\Delta t_1}{m_A+m_B}$$

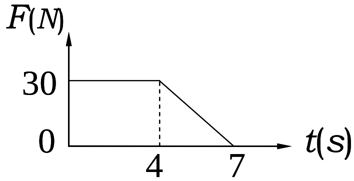
子弹击穿 A 进入 B 后，A 保持原速，B 受力变速，则：

$$F\Delta t_2=m_Bv_B-m_Bv_A$$

$$v_B=\frac{F\Delta t_2}{m_B}+\frac{F\Delta t_1}{m_A+m_B}$$

7、一质量m=10kg 的木箱，在水平拉力F的作用下由静止开始运动，若拉力F随时间变化关系如图所示，已知木箱与地面间的摩擦系数μ=0.2 试从动量原理求t=4s，t=7s，t=6s时的木箱的速度各为多大？

解：由图可知水平力的函数关系：



$$F=\begin{cases}30 & 0\le t\le 4\\ 70-10t & 4\le t\le 7\end{cases}$$

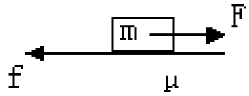
4秒内得到的冲量： $I=\int_0^4(F-\mu mg)dt=mv_4-0$

$\therefore\quad v_4=4m/s$

7秒内得到的冲量： $I=I_F+I_f=30\times4+\frac{1}{2}\times30\times(7-4)-0.2\times10\times10\times7=mv_7-0$

$\therefore\quad v_7=2.5m/s$

4 秒到 6 秒得到的冲量： $I=\int_4^6[70-10t-0.2\times10\times10]dt=$

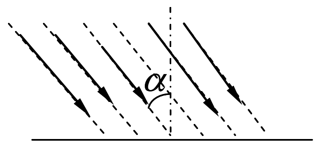


$\therefore\quad v_6=4m/s$

8、雨天，大量雨滴以速率 v 落在表面积为 S 的屋顶上，已知雨滴下落方向与屋顶平面的法线成α角，雨滴在单位体积内的雨滴数为 n，每一雨滴的质量为 m。设雨滴落到屋顶后速率变为零，求雨滴对屋顶产生的平均正压力。

解：设 M 为Δt时间内落到屋顶的总质量

根据动量定理屋顶对其的冲量为动量的变化；



$$\bar{f}_n\Delta t=0-Mv\cos\alpha=-(nv\Delta t\cos\alpha S)mv\cos\alpha$$
$$=-nv^2m\cos^2\alpha S\Delta t$$

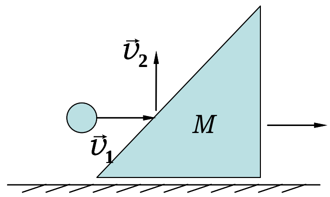
$\therefore\quad \bar{f}_n=-nmv^2\cos^2\alpha S$

屋顶受到的压力大小与$\bar{f}_n$相同，方向相反

$\therefore$ 平均压力 $P=\frac{\bar{f}'_n}{s}=nmv^2\cos^2\alpha$

9、如图所示，质量为 M 的滑块正沿着光滑水平地面向右滑动．一质量为 m 的小球水平向右飞行，以速度 $\vec{v}_1$（对地）与滑块斜面相碰，碰后竖直向上弹起，速率为 v_2（对地）．若碰撞时间为 Δt，试计算此过程中滑块对地的平均作用力和滑块速度增量的大小．

解：(1) 碰撞中小球 m 给 M 的竖直方向冲力在数值上应等于 M 对小球的竖直冲力．根据动量定理得 $\overline{f} = \dfrac{m\upsilon_2}{\Delta t}$



对 M，由牛顿第二定律，在竖直方向上

$$\overline{N} - Mg - \overline{f} = 0, \qquad \overline{N} = Mg + \overline{f}$$

又由牛顿第三定律，M 给地面的平均作用力也为

$$\overline{F} = \overline{f} + Mg = \frac{m\upsilon_2}{\Delta t} + Mg$$ 方向竖直向下．

(2) 解法 1　M 受小球的水平方向冲力为 $\overline{f}' = \dfrac{m\upsilon_1}{\Delta t}$，方向与 m 原运动方向一致

对 M 用动量定理　$\overline{f}' = M\dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t}, \Rightarrow \Delta \mathrm{v} = m\mathrm{v}_1 / M$

解法 2：小球和木块碰撞过程中，在水平方向动量守恒，设木块碰撞前的速度为 v_0，有方程

$$M(v_0 + \Delta v) = Mv_0 + mv_1,$$

利用上式的 $\overline{f}'$，即可得　$\Delta\upsilon = m\upsilon_1 / M$

10、A、B两条船，质量都为m，静止在平静的湖面上，A船上有一质量为m/2的人，以水平速度u相对A船从A船跳到B船上。如果忽略水对船的阻力，求人跳到B船后，A船和B船的速度。

解：设 $\mathrm{v_A}$ 为 A 船对地的速度，$\mathrm{v_B}$ 为 B 船对地速度，在人跳出 A 船的过程中，水平方向无外力作用——人、A 船系统动量守恒定理，即

A 船：$0 = \mathrm{mv_A} + \dfrac{\mathrm{m}}{2}(\mathrm{u} + \mathrm{v_A})$

得　$\mathrm{v_A} = -\dfrac{1}{3}\mathrm{u}$　方向与人跳出速度方向相反

同理人跳入 B 船过程，人、B 船系统水平方向动量守恒

B 船：$\dfrac{\mathrm{m}}{2}\mathrm{v}_{人地} = \dfrac{\mathrm{m}}{2}(\mathrm{u} - \dfrac{\mathrm{u}}{3}) = (\dfrac{\mathrm{m}}{2} + \mathrm{m})\mathrm{v_B}$

得　$\mathrm{v_B} = \dfrac{2\mathrm{u}}{9}$　方向与人跳入速度方向相同

11、水平桌面上铺一张纸纸上放一个均匀球，球的质量为0.5kg,将纸向右拉时会有 $f=0.1N$ 摩擦力作用在球上。求该球的球心加速度 a_c 以及在从静止开始的2.0秒内，球心相对桌面移动的距离。

解：匀质球球心为质心

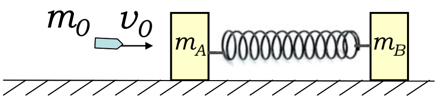
水平方向的合力： $f=ma_c \Rightarrow a_c=\dfrac{f}{m}=0.2m/s^2$

匀加速运动： $s=\dfrac{1}{2}a_c t^2=0.4m$

12、滑块A和B的质量分别为m_A、m_B，用弹性系数为k的弹簧相连，并置于光滑的水平面上，最初弹簧处于自由长度。质量为m_0 的子弹以速度v_0沿水平方向射入滑块A内，试求弹簧的最大 压缩量。

解：（1）子弹击中木块 A 到他们取得共同速度 v_1 为止。此时弹簧还未被压缩（冲力），子弹、A 系统动量守恒，即

$$m_0 v_0=(m_0+m_A)v_1 \qquad (1)$$



（2）子弹与木块 A 取得同速度 v_1 到弹簧达到最大压缩为止，这时 A、B 具有共同速度 v_2，子弹、弹簧、A 和 B 系统动量守恒和机械能守恒：

$$(m_A+m_0)v_1=(m_A+m_B+m_0)v_2 \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2}(m_A+m_0)v_1^2=\frac{1}{2}(m_A+m_B+m_0)v_2^2+\frac{1}{2}kx^2 \qquad (3)$$

由（1)、（2)、（3）解得

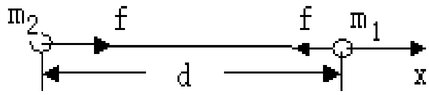
$$x=\sqrt{\frac{m_B m_0^2 v_0^2}{k(m_A+m_0)(m_A+m_B+m_0)}}$$

13、有两个质量分别为m_1、m_2的行星，开始相距为无限远处，可看作静止，由于万有引力作用，它们彼此接近，当它们接近相距为d时，它们接近的相对速度为多大？

解：m_1、m_2为系统，仅有内力为保守力，所以系统动量守恒，机械能守恒

$$m_2v_2-m_1v_1=0 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2-G\frac{m_1m_2}{d}=0 \qquad (2)$$



由（1）、（2）解得

$$v_1=m_2\sqrt{\frac{2G}{(m_1+m_2)d}}$$

$$v_2=m_1\sqrt{\frac{2G}{(m_1+m_2)d}}$$

两粒子的相对速度 v_r （$\vec{v}_{21}=\vec{v}_{2地}+\vec{v}_{地1}=\vec{v}_{2地}-\vec{v}_{1地}$）

$$\therefore \quad v_r=v_2-(-v_1)=v_2+v_1=\sqrt{\frac{2G(m_1+m_2)}{d}}$$

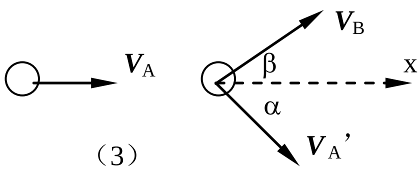
14、质量为$7.2\times10^{-23}Kg$、速率为$6\times10^7 m/s$的粒子A与另一个质量为其一半而静止的粒子B发生二维完全弹性碰撞，碰撞后粒子A的速率为$5\times10^7 m/s$，求：

（1）粒子B的速率及相对粒子A 原来速度方向的偏角；

（2）粒子A的偏转角。

解：动量的水平分量守恒：$mV_A=\frac{m}{2}V_B\cos\beta+mV'_A\cos\alpha$ （1）

动量的竖直分量守恒：$0=\frac{m}{2}V_B\sin\beta-mV'_A\sin\alpha$（2）



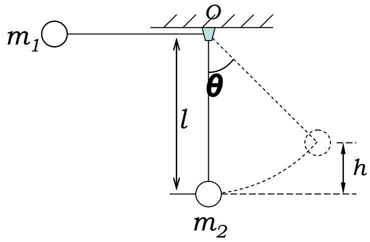
弹性碰撞能量守恒：$\frac{1}{2}mV_A^2=\frac{1}{2}(\frac{m}{2})V_B^2+\frac{1}{2}mV'^2_A$ （3）

由（1）、（2）、（3）式得

$$V_B=4.69\times10^7(m/s) \qquad \alpha=22^0 20' \qquad \beta=54^0 6'$$

15、已知两根长为 l 的绳子，一端固定于 o 点，质量分别 m_1 和 m_2 的小球系于它们的另一端。如把 m_1 拉至水平位置放下，使 m_1、m_2 发生对心碰撞（完全弹性碰撞），设 $m_1=3m_2$。求碰后 m_2 沿圆周上升的高度。

解： m_1 小球下落机械能守恒：

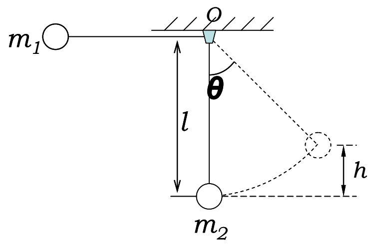


$$m_1 gl = \frac{1}{2}m_1 v_{10}^2; v_{10} = \sqrt{2gl}$$

对心碰撞水平方向动量守恒 $m_1 v_{10} = m_1 v_1 + m_2 v_2$

对心碰撞能量量守恒

$$\frac{1}{2}m_1 v_{10}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$



解得：$v_1 = \frac{1}{2}v_{10}, v_2 = \frac{3}{2}v_{10}$，$m_2$ 将跃过 O 点！

M_2 小球上升机械能守恒：

$$m_2 gl(1+\cos\theta) + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_2 v_{20}^2$$

M_2 小球法向力：$T + m_2 g\cos\theta = m_2\dfrac{v_2^2}{l}$

m_2 跃过 O 点重力法向分力与拉力组成法向合力：

$$T = 0; m_2 g\cos q = m_2\frac{v_2^2}{l}; \cos q = \frac{5}{6}\text{；得到：} h = \frac{11}{6}l$$

16、一质量为 m 的质点沿空间曲线运动，该曲线在直角坐标下的位置矢量为

$$\vec{r} = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j} \quad （a,b,\omega\text{均为常数}）$$

求：相对于坐标原点，质点所受力矩及质点的角动量。

解：m 质点的速度：

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a\omega\sin\omega t\,\vec{i} + b\omega\cos\omega t\,\vec{j}$$

m 质点的加速度：

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -a\omega^2\cos\omega t\,\vec{i} - b\omega^2\sin\omega t\,\vec{j} = -\omega^2\vec{r}$$

相对于坐标原点，质点所受力矩：

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times m\vec{a} \quad \therefore\ \vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = 0$$

相对于坐标原点，质点的角动量：

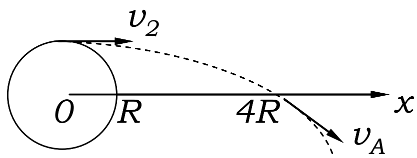
$$\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{\upsilon} = mab\omega\cos^2\omega t\,\vec{k} - mab\omega\sin^2\omega t(-\vec{k})$$

$$= mab\omega\vec{k}$$

17、火箭以第二宇宙速度 $v_2=\sqrt{2Rg}$ 沿地面表面切向飞出，在飞离地球过程中，火箭发动机停止工作，不计空气阻力，则火箭在距地心 4R 的 A 处速度的大小和方向？

解：火箭在万有引力的作用下运动，对地心的角动量守恒

$$mv_2R=m4Rv\sin\theta \qquad （1）$$



火箭、地球系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_2^2-G\frac{mM}{R}=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{mM}{4R} \qquad （2）$$

$$mg=G\frac{mM}{R^2} \qquad （3）$$

由（1）、（2）、（3）联立解得

$$v=\sqrt{\frac{gR}{2}} \qquad \theta=30^0$$

18、质量为m_1=0.2kg的框子，用一弹簧悬挂起来，弹簧伸长0.1m，今有质量为m_2=0.2kg的油灰由距离框底0.3m高处的位置自由落到框上（如图）。求：油灰冲撞框子而使框向下移动的最大距离？

解：（1）m_2 自由落体（2）m_1、m_2 完全非弹性碰撞（3）m_1、m_2、弹簧、地球系统机械能守恒（设 $E_{P弹}(原长)=0$，$E_{P重}(D)=0$）

$$m_1g=kx_1\rightarrow k=m_1g/x_1=20\,N/m$$

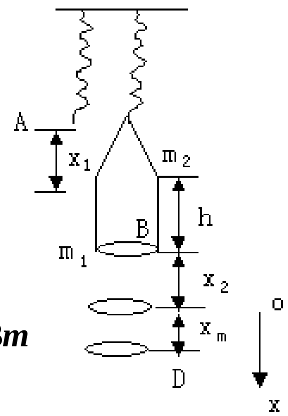
$$v=\sqrt{2gh} \qquad (1)$$

$$m_2v=(m_1+m_2)V \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2+(m_1+m_2)g(x_2+x_m)+\frac{1}{2}kx_1^2=\frac{1}{2}k(x_1+x_2+x_m)^2 \qquad (3)$$

又 $x_1=m_1g/k$ (4)

$$x_1+x_2=(m_1+m_2)g/k \qquad (5)$$



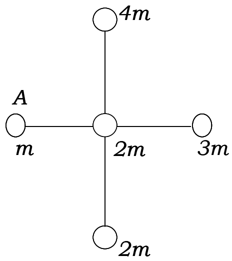
由（1）——（5）联立解得

$$x_m=\sqrt{\frac{m_2^2g^2}{k^2}+\frac{2m_2^2gh}{k(m_1+m_2)}}=0.2m$$

$$\therefore x=x_2+x_m=\frac{m_2g}{k}+x_m=\frac{0.2\times10}{20}+0.2=0.3m$$

第三章 刚体的转动　习题参考解答

1、五个质点的质量和分布情况如图所示，五个质点是用长为 l 的四根细杆（质量可忽略）连接着，求这整个系统绕通过A而垂直于质点系所在平面的轴的转动惯量。



解：$J_A = \sum m_i r_i^2$

$$= 2ml^2 + 3m(2l)^2 + 4m(\sqrt{2}l)^2 + 2m(\sqrt{2}l)^2$$

$$= 26ml^2$$

2、一飞轮直径为0.3m，质量为5Kg，边缘绕有绳子，现用恒力拉绳子的一端，使其由静止均匀的加速，经0.5s转速达10r/s。假定飞轮可看作实心圆柱体，求：

（1）飞轮的角加速度及在这段时间内转过的圈数；

（2）拉力和拉力所做的功；

（3）从拉动后 t=10s 时，飞轮的角速度及轮边缘上一点的速度和加速度。

解：（1）　$\omega = \alpha t$　　$\alpha = \dfrac{\omega}{t} = \dfrac{2\pi \times 10}{0.5} = 1.26 \times 10^2 (s^{-2})$

$\theta = \dfrac{1}{2}\alpha t^2$　　$N = \dfrac{\theta}{2\pi} = 2.5$ (转)

（2）$FR = J\alpha$　　$F = \dfrac{J\alpha}{R} = 47.3$（N）

$A = M\theta = J\alpha\theta = 111(J)$

（3）$\omega = \alpha t = 1.26 \times 10^3\ (rad/s)$

$v = R\omega = 1.89 \times 10^2\ (m/s)$

$a_n = R\omega^2 = 2.38 \times 10^5\ (m/s^2)$

$a_t = R\alpha = 18.9 (m/s^2)$

3、一固定在机轴上的皮带轮，半径R=0.5m，由电机带动皮带轮转动，皮带轮对轴的转动惯量J=40kg·m^2，皮带轮的紧边拉力T_1=1600N，松边拉力T_2=700N，轮轴中的摩擦阻力矩为M_1=50N·m，问当机轴空载（即不带动其他的转动部件）时，起动后需要多少时间，皮带轮才能达到转速n=600r/min？

解：.由转动定律 $\sum M = J\alpha$

$$\alpha = \frac{\sum M}{J} = \frac{T_1R - T_2R - M_f}{J} = \frac{(1600-700)\times 0.5 - 50}{40} = 10\,\mathrm{rad/s^2}$$

根据匀加速转动 $\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (\omega_0 = 0)$

$$\therefore \quad t = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{n \cdot 2\pi}{\alpha} = \frac{10\times 2\times 3.14}{10} = 6.28\ (\mathrm{s})$$

4、一匀质圆盘，半径为R，质量为m，放在粗糙的水平桌面上，绕过其中心的竖直轴转动。如果圆盘与桌面的摩擦系数为μ，求：

（1）圆盘所受摩擦力矩的大小；

（2）若盘开始角速度为ω_0，经多长时间圆盘会停下？

解：（1）取半径为 r，宽为 dr 的小圆环元，其质量为$dm = \frac{m}{\pi R^2}2\pi r dr$

它所受的摩擦力矩为

$$dM_f = r\mu g dm = \frac{2\mu mg}{R^2} r^2 dr$$

整个圆盘所受的摩擦力矩为

$$M_f = \int dM_f = \int_0^R \frac{2\mu mg}{R^2} r^2 dr = \frac{2}{3}\mu m g R$$

（2）根据转动定律

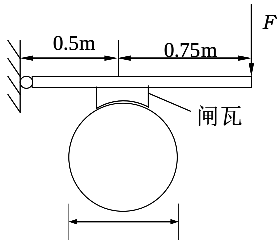
$$-M_f = J\alpha = J\frac{d\omega}{dt}$$

$$-\frac{2}{3}\mu mgR = \frac{1}{2}mR^2\frac{d\omega}{dt}$$

$$\int_0^t dt = \int_{\omega_0}^0 -\frac{3}{4}\frac{R}{\mu g}d\omega$$

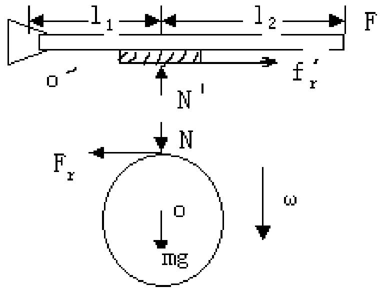
$$\therefore \quad t = \frac{3}{4}\frac{R}{\mu g}\omega_0$$

5、如图所示，飞轮的质量为60kg，直径为0.5m，飞轮的质量全部分布在轮外周上，转速为1000r/min，假定闸瓦与飞轮之间的摩擦系数μ=0.4，现要求在5秒内使其制动，求制动力F。



解：飞轮质量分布在圆周上的转动惯量为 $J=mR^2$ (1)

匀减速转动 $\omega=\omega_0+\alpha t$ $\alpha=\dfrac{0-\omega_0}{t}$ (2)



杆对 o_1' 力矩之和为零（杆静止）

$F(l_1+l_2)-Nl_1=0$ (3)

飞轮对 O 的力矩： $-F_r\cdot R=J\alpha$ (4)

$F_r=\mu N$ (5)

由（1)、（2)、（3)、（4)、（5）得

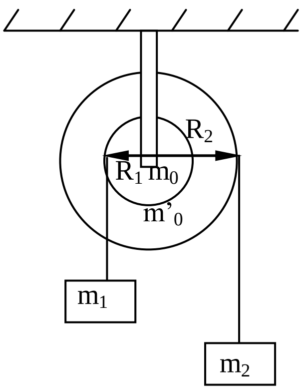
$$F=\frac{l_1}{l_1+{}_2}\times\frac{J\alpha}{\mu R}=\frac{l_1}{l_1+{}_2}\frac{mR^2\frac{\omega_0}{t}}{\mu R}=\frac{l_1}{l_1+{}_2}\cdot\frac{mR\omega_0}{\mu t}=314(N)$$

6、如图所示，两个鼓轮的半径分别为R_1和R_2，质量分别为m_0和m_0'，两者都可视为均匀圆柱体，而且同轴固结在一起，鼓轮可以绕一水平固定轴自由转动。今在两鼓轮上各绕以细绳，绳端分别挂上质量是m_1和m_2的两个物体。（设R_1=0.1m，R_2=0.2m，m_0=4kg，m_0'=10kg，$m_1=m_2$=2kg，）求：

（1）当m_2下落时，鼓轮的角加速度？

（2）两侧绳的张力？

解：(1）设 a_1、a_2 和α分别是 m_1、m_2 和圆柱体的加速度和角加速度



$T_1-m_1g=m_1a_1$ (1)

$m_2g-T_2=m_2a_2$ (2)

$T_2R_2-T_1R_1=J\alpha$ (3)

$a_1=R_1\alpha$ (4)

$a_2=R_2\alpha$ (5)

$J=\dfrac{1}{2}m_0R_1^2+\dfrac{1}{2}m_0'R_2^2$ (6)

由上式解得： $\alpha=\dfrac{R_2m_2-R_1m_1}{J+m_2R_2^2+m_1R_1^2}g$

$$=\frac{(0.2\times2-0.1\times2)\times9.8}{\frac{1}{2}\times10\times0.20^2+\frac{1}{2}\times4\times0.10^2 2\times0.20^2+2\times0.10^2}=6.13\,{\rm rad}/{\rm s}^2$$

（2） $T_1=m_1R_1\alpha+m_1g=2\times0.10\times0.13+2\times9.8=20.8N$

$T_2=m_2g-m_2R_2\alpha=2\times9.8-2\times0.20\times6.13=17.1N$

7、一飞轮的转动惯量为 J，开始制动时的角速度为ω_0，设阻力矩与角速度的平方成正比，比例系数为 k，求使角速度减少为起始时的三分之一时所经过的时间？

解：由题意和转动定律得

$$-k\omega^2 = J\frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{d\omega}{\omega^2} = -\frac{k}{J}dt$$

$$\int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{3}} \frac{d\omega}{\omega^2} = \int_0^t -\frac{k}{J}dt$$

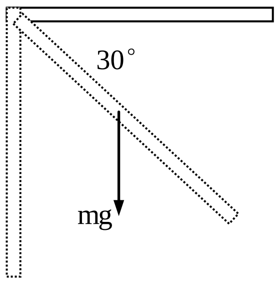
得 $t = 2J/\omega_0 k$

8、如图所示，已知质量为m，长为 l 的均匀细棒，可绕通过点0，垂直于棒的水平轴转动，若将棒由水平位置静止释放，求：

（1）开始释放时棒的角加速度？

（2）棒从水平位置转到垂直位置时棒的角速度 ？

（3）棒从水平位置转到 $\theta=30^0$，棒的角速度与棒中心点的切向和法向加速度？



解：（1）由转动定律 $mg\cdot\frac{l}{2} = (\frac{1}{3}ml^2)\alpha$

$$\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{l}$$

（2）由动能定理 $A = \int Md\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mg\frac{l}{2}\cos\theta d\theta = \frac{1}{2}mgl = \frac{1}{2}J\omega^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{2A}{J}} = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

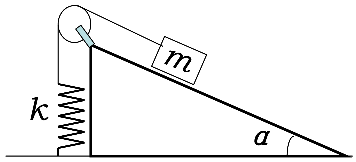
（3）棒、地球系统机械能守恒

$$mg\frac{l}{2}\sin 30^0 = \frac{1}{2}J\omega'^2 \qquad \omega' = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

$$a_n = R\omega'^2 = \frac{l}{2}\frac{3g}{2l} = \frac{3}{4}g$$

$$mg\frac{l}{2}\cos 30^0 = \frac{1}{3}ml^2\alpha \qquad \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{4l}g$$

$$\therefore a_t = R\alpha = \frac{l}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4l}g = \frac{3\sqrt{3}}{8}g$$



9、如图所示，物体质量为m，放在光滑的斜面上，斜面与水平面的倾角为α，弹簧弹性系数为k，滑轮的转动惯量为 J，半径为R。先把物体托住，使弹簧维持原长，然后由静止释放，求：物体沿斜面滑下距离 l 时的速度？

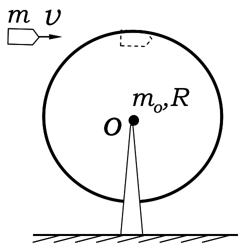
解：物体、弹簧、滑轮和地球系统机械能守恒

$$mgl\sin\alpha=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2+\frac{1}{2}kl^2 \qquad (1)$$

$$v=R\omega \qquad (2)$$

由（1）（2）得

$$v=\sqrt{\frac{2mgl\sin\alpha-kl^2}{m+\frac{J}{R^2}}}$$



10、一颗子弹质量为m，速度为v，击中能绕通过中心的水平轴转动的轮子（看作圆盘）边缘，并留在盘内，轮子质量为m_0，半径为R，求：击中后轮的角速度，角动量和转动动能？

解：子弹、轮子对转轴角动量守恒 $mvR=(\frac{1}{2}m_0R^2+mR^2)\omega$

得 $$\omega=\frac{mvR}{\frac{1}{2}m_0R^2+mR^2}=\frac{2mv}{(m_0+2m)R}$$

角动量 $$L=(\frac{1}{2}m_0R^2+mR^2)\frac{2mv}{(m_0+2m)R}=mvR$$

转动动能 $$E_K=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}m_0R^2+mR^2)\left[\frac{mvR}{\frac{1}{2}m_0R^2+mR^2}\right]^2=\frac{m^2v^2}{m_0+2m}$$

11、一质量为20Kg的小孩，站在一半径为3m、转动惯量为450Kgm^{2}的静止水平转台的边缘上，此转台可绕通过转台中心的竖直轴转动，转台与轴间的摩擦不计。如果此小孩相对转台以 1m/s的速率沿转台边缘行走，问转台的角速度为多大？

解：设此时转台的角速度为ω_0，人相对地面的角速度为ω

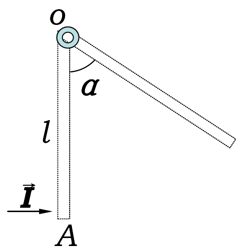
则有 $\omega=\omega_0+\dfrac{v}{R}$

由角动量守恒得 $J_0\omega_0+J_1(\omega_0+\dfrac{v}{R})=0$

$$J_1=mR^2$$

$$\omega_0=-\frac{mR^2}{J_0+mR^2}\times\frac{v}{R}=-9.52\times10^{-2}(1/s)$$

12、一质量为m，长为 l 的均匀直棒，能绕通过点O的水平轴在竖直平面内自由转动，此棒原来静止。现于A端作用与棒垂直的冲量I，使此棒获得角速度，然后从竖直位置摆到最大角度α，求此冲量的量值？



解：设直棒受冲击后得角速度为ω，由角动量原理

$$\int_0^t Fl\,dt=l\int_0^t F\,dt=Il=J\omega$$

棒上摆过程中棒、地球系统机械能守恒

$$mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha)=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega^2$$

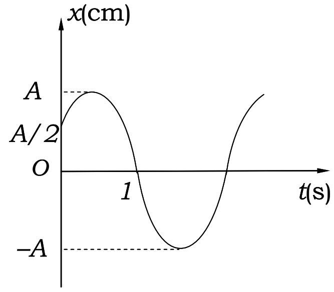
得 $I=\dfrac{m}{3}\sqrt{3gl(1-\cos\alpha)}$

第四章 振 动

1、 如图为一谐振动的振动曲线，

（1） 写出振动表达式；

（2）求 $t=1s$ 和 $t=0.5s$ 时刻的位相差 $\Delta\varphi$



解：（1）由振动曲线可知

$$t=0 \quad \varphi_0=-\frac{\pi}{3} \qquad t=1 \quad \varphi_1=\frac{\pi}{2}$$

$$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_0=\frac{5}{6}\pi$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta i}=\frac{5}{6}\pi$$

$$x=Acos(\frac{5}{6}\pi t-\frac{\pi}{3})$$

（2） $\dfrac{\Delta\varphi'}{2\pi}=\dfrac{\varphi_1-\varphi_{0.5}}{2\pi}=\dfrac{t_1-t_{0.5}}{T} \qquad \Delta\varphi'=\dfrac{5}{12}\pi$

2、质量为 10×10^{-3} kg的小球与轻弹簧组成的系统，按 $x=0.1\cos(8\pi t+\dfrac{2\pi}{3})$ 规律作谐振动，式中 t 以秒计，x 以米计，求：

（1）振动的周期 T，振幅 A 和初位相 Φ；

（2）t=1s 时刻的位相、速度；

（3）最大的回复力；

解：(1)与简谐振动标准运动方程 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 比较得

$$\omega=8\pi/s \qquad \Phi=\frac{2}{3}\pi \qquad A=0.1m \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=0.25s$$

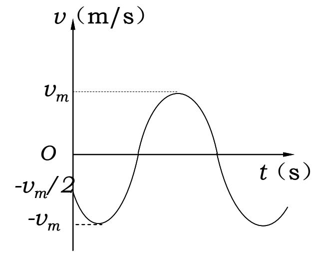
（2）当 $t=1$时 位相：$\omega t+\varphi=8\pi\times1+\dfrac{2}{3}\pi=8\dfrac{2}{3}\pi$

速度：$v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)=-0.1\times8\pi\sin(8\pi t+\dfrac{2}{3}\pi)$

$$v_1=-0.8\pi\,sin(8\pi+\frac{2}{3}\pi)=-2.2m/s$$

（3） $F_{max}=ma_{max}=10\times10^{-3}\times A\omega^2=10\times10^{-3}\times0.1\times(8\pi)^2=0.63N$

3、一质点按余弦规律作简谐振动，其速度—时间关系曲线如图所示,周期 T=2s，试求振动表达式。



解： $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

$$A = \frac{V_m}{\omega} = \frac{V_m}{\pi}$$

根据 $-\frac{V_m}{2} = -V_m \sin\varphi$ 且 $V < 0$

得 $\varphi = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $x = \frac{V_m}{\pi}\cos(\pi t + \frac{\pi}{6})\ (m)$

4、一弹簧振子沿 X 轴作谐振动，已知振动物体最大位移 x_m=0.4m，最大恢复力 F_m=0.8N，最大速度 V_m=0.8πm/s，已知 t=0, x_0=0.2m, V_0<0 ，求：

（1）振动能量；

（1）振动表达式。

解：（1）$\because F_{max} = kA$

$$\therefore k = \frac{F_{max}}{A}$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}F_{max}A = \frac{1}{2}\times 0.8\times 0.4 = 0.16J$$

（2）$\because t = 0$ $\quad x_0 = \frac{A}{2}$ $\quad v_0 < 0$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$$

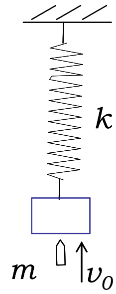
又 $v_m = \omega A$ 所以 $\omega = \frac{v_m}{A} = 2\pi$

则 $x = 0.4\cos(2\pi t + \frac{\pi}{3})\ (m)$

5、一弹簧振子，由弹性系数为 k 的弹簧和质量为 M 的物块组成，将弹簧一端与顶板连接，如图所示。开始时物块静止，一质量为 m、速度为 v_0 的子弹由下而上射入物块，并停留在物块中，试求：

（1）振子振动的振幅和周期；

（2）物块由初位置运动到最高点所需的时间；



解：（1）子弹打入木块动量守恒 $mv_0=(m+M)V$

初时位置 $mg=kx_0$ $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{V^2}{\omega^2}}=\sqrt{(\frac{mg}{k})^2+\left(\frac{mv_0}{M+m}\right)^2\Big/\frac{k}{M+m}}$$

$$=\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{kv_0^2}{(m+M)g^2}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}$$

（2）$\mathrm{tg}\varphi=-\dfrac{v}{x_0\omega}=-\dfrac{\dfrac{mv_0}{M+m}}{\dfrac{mg}{k}\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}}=-\dfrac{v_0}{g}\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$ （取向上为正，平衡位置 $x_0=\dfrac{mg}{k}$）

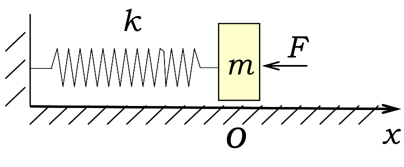
最高点 $x=A\cos(\omega t+\varphi)=0$

$$\therefore\quad \frac{0-\varphi}{\Delta t}=\frac{2\pi}{T}=\omega$$

$$\Delta t=\sqrt{\frac{M+m}{k}}\mathrm{tg}^{-1}(\frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{k}{M+m}})$$

6、如图所示，有一水平弹簧，倔强系数 k=24N/m，重物质量 m=6kg，重物静止在平衡位置上。设以一水平恒力 F=10N 向左作用于物体（不计摩擦），使由平衡位置向左运动了 0.05m，此时撤去力 F，当重物运动到左方最远位置时开始计时，求物体的运动方程。

解：根据动能定理



$$Fx=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2$$

$$\therefore A=\sqrt{\frac{2Fx}{k}}=0.204$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=2$$

$$\varphi=\pi$$

$$\therefore x=0.204\cos(2t+\pi)(m)$$

7、、如图所示，物体的质量为 m，放在光滑的斜面上，斜面与水平面的倾角为α，弹簧的弹性系数为 k，滑轮的转动惯量为 J，半径为 R。先把物体托住，使弹簧维持原长，然后由静止释放，试证明物体作谐振动，并求振动周期。

解：以物体受力平衡点为坐标原点，如图建立坐标

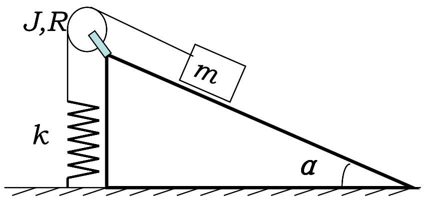
$$mg\sin\alpha - T_1 = ma \qquad (1)$$

$$(T_1 - T_2)R = J\alpha \qquad (2)$$

$$T_2 = k(x + x_0) \qquad (3)$$

$$mg\sin\alpha = kx_0 \qquad (4)$$

$$a = R\alpha \qquad (5)$$



由（1）（2）（3）（4）（5）解得

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{\frac{J}{R^2} + m}x = 0$$ 此为谐振动方程

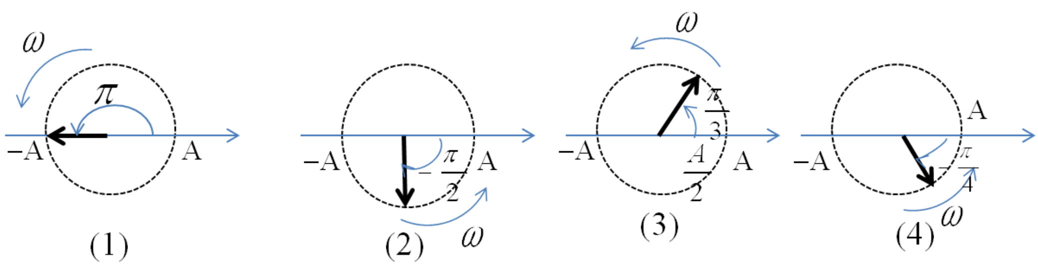
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{J}{R^2} + m}{k}}$$

8、一个沿 x 轴作谐振动的弹簧振子，振幅为 A，周期为 T，其振动方程用余弦函数表示。如果在 $t = 0$ 时，质点的状态分别是：

（1）在负方向的端点；（2）过平衡位置向 x 正方向运动；

（3）位移为 $\frac{A}{2}$，且向负方向运动；（4）位移为 $\frac{A}{\sqrt{2}}$，且向正方向运动，

试在旋转矢量图上表示质点的初相，并写出相应的谐振动方程。



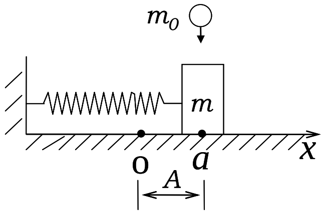
（1）$x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \pi)$ （2）$x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2})$

（3）$x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{3})$ （4）$x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{4})$

9、如图所示，一质量为 m 的弹簧振子，在光滑水平面上作谐振动，O 为平衡位置，振动的振幅为 A。当 m 运动到最大位移点 a 时，突然一质量为 m_0 的物体竖直落下并粘在 m 上，与 m 一起振动，求：（1）该系统的圆频率和振幅；（2）若 m 运动到 O 点时，m_0 落下并与 m 粘在一起振动，则系统振动的圆频率和振幅。

解：（1） m 到最大位移 a 点时速度为 v=0，m_0 竖直落下，所以 $m+m_0$ 的速度为零

$$\therefore A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=A_0 \qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m+m_0}}$$



（2）圆频率 $\omega'=\sqrt{\frac{k}{m+m_0}}$ 不变

m_0 未落下前，m 运动到 O 时速度为 $v_0=A_0\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}A_0$

当 m_0 落在 m 上时系统速度变为 v'，根据系统动量守恒

$$mv_0=(m+m_0)v'$$

$$\therefore \quad A'=\frac{v'}{\omega}=\frac{\frac{m}{m+m_0}\sqrt{\frac{k}{m}}A_0}{\sqrt{\frac{k}{m+m_0}}}=\sqrt{\frac{m}{m+m_0}}A_0$$

10、在一块平板下装有弹簧，平板上放一质量为1Kg的重物。现使平板沿竖直方向作上下简谐振动，周期为0.5s，振幅为 $2\times10^{-2}\,m$，求：

（1）平板到最低点时，重物对平板的作用力；

（2）若频率不变，则平板以多大振幅振动时，重物会跳离平板？

（3）若振幅不变，则平板以多大频率振动时，重物会跳离平板？

解：（1）当重物在最低点时 $F_N-mg=ma_{max}=mA\omega^2$

$$F_N=mg+mA\omega^2=mg+mA\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=12.96(N)$$

重物对木板的作用力与 F_N 大小相等，方向相反。

（2）当重物在最高点时 $mg-F'_N=mA'\omega^2$

当 ω 不变，$F_N=0$ $\qquad A'=\frac{g}{\omega^2}=6.2\times10^{-2}(m)$

（3）当振幅不变时 $F_N=0$ $\qquad v'=\frac{\omega'}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}}=3.52(Hz)$

11、有两个同方向的谐振动，它们的方程为

$$x_1=0.05\cos\left(10t+\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$x_2=0.06\cos\left(10t+\frac{1}{4}\pi\right)$$

式中 x 以 m 计，t 以 s 计，求：

（1）它们合成振动的振幅和初位相；

（2）若另有一振动 $x_3=0.07\cos(10t+\phi)$，则 φ 为何值时，x_1+x_3 的振幅为最大？φ 为何值时，x_2+x_3 的振幅为最小？

解：（1）

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$=\sqrt{(0.05)^2+(0.06)^2+2\times0.05\times0.06\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)}$$

$$=0.078m$$

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{A_1\sin\phi_1+A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1+A_2\cos\phi_2}=11$$

$$\varphi=84^0 48'$$

（2）$\varphi_3-\frac{3}{4}\pi=0$　　$\varphi_3=\frac{3}{4}\pi$

$\varphi'_3-\frac{1}{4}\pi=\pi$　　$\varphi'_3=\frac{5}{4}\pi$

12、两个同频率同方向的谐振动的合振幅为20cm, 合振动与第一谐振动的位相差为 $\phi-\phi_1=\frac{\pi}{6}$，若第一个谐振动的振幅为10 $\sqrt{3}$ cm，求：

（1）第二个振动的振幅 A_2；

（2）第一、第二两个谐振动的位相差。

解：（1）$A_2=\sqrt{A_1^2+A^2-2AA_1\cos\frac{\pi}{6}}=10cm$

（2）$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi\Rightarrow\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$

第五章　波 动

1、一频率为 500HZ 的平面波，波速为 350m/s，求：

（1）在波传播方向上位相差为π/3 的两点相距多远？

（2）介质中任意一点在时间间隔 10^{-3}s 内两位移间的位相差是多少？

解：（1）　$\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$\Delta x=\frac{\Delta\varphi}{2\pi}\lambda=\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}\frac{u}{\nu}=\frac{1}{6}\frac{350}{500}=0.12\text{m}$$

（2）$\Delta x=0$

$$\Delta\varphi=\omega\Delta t=2\pi\nu\Delta t=2\pi\times500\times10^{-3}=\pi$$

2、一横波沿细绳传播时的波动方程为 y=0.20cosπ(2.5t-x)(SI),求：

（1）波的振幅、速度、频率和波长；

（2） x=L 处质点振动的初位相以及与该处质点速度大小相同但方向相反的其它各质点位置。

解：（1）$y=0.20\cos(2.5\pi t-\pi x)=0.20\cos[2.5\pi(t-\dfrac{x}{2.5})]$

$\therefore\quad A=0.20(\text{m})\qquad u=2.5\text{m/s}\qquad \omega=2.5\pi=2\pi\nu$

$$\nu=\frac{2.5}{2}=1.25\,(1/\text{s})$$

$$\lambda=\frac{u}{\nu}=\frac{2.5}{1.25}=2\ (\text{m})$$

（2）$y=0.20\cos(2.5\pi t-\pi L)$

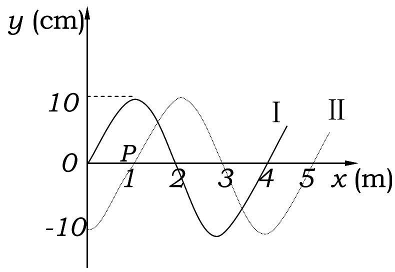
$\therefore\ \varphi=-\pi L$

根据旋转矢量图可知，只有反相的各点才能速度相等而方向相反

$\therefore\Delta\varphi=(2.5\pi t-\pi L)-(2.5\pi t-\pi x)=(2k+1)\pi$

$x=L+(2k+1)\qquad (k=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots)$

3、如图所示，已知 t=0 的波形曲线Ⅰ,波沿 X 轴正向传播，经过 0.5s 后波形变为曲线Ⅱ。试根据图中绘出的条件求



（1）波的表达式；

（2）P 点振动表达式。

解：（1）由图可知 $A=10cm \quad \lambda=4m \quad T=2s$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi \qquad \varphi=\frac{\pi}{2}$$

O 点振动方程 $\quad y_0=A\cos(\omega t+\varphi)=0.1\cos(\pi t+\frac{\pi}{2})$

波动方程 $\quad y=A\cos(\omega t+\varphi-\frac{2\pi}{\lambda}x)=0.1\cos(\pi t+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x)\ (cm)$

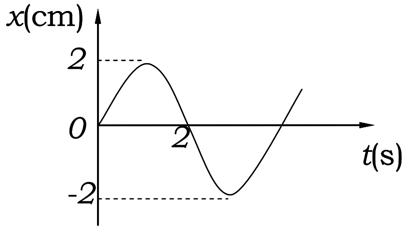
（2）P 点振动方程以 $x=1m$ 代入波动方程得

$$y_P=0.1\cos(\pi t+\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{4})=0.1\cos\pi t \quad (cm)$$

4、一平面简谐波在媒质中以波速 u=5m/s 沿 x 轴正方向传播，原点 O 处质元的振动曲线如图所示。

（1）求 x=25m 处质元的振动方程及 t=1s 时刻此处质元振动的速度和加速度。

（2）画出 t=3s 时刻的波形曲线。



解：（1）根据振动曲线可知 $T=4s \qquad \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}$

$$\varphi=-\frac{\pi}{2} \qquad \lambda=uT=4\times5=20\ (m)$$

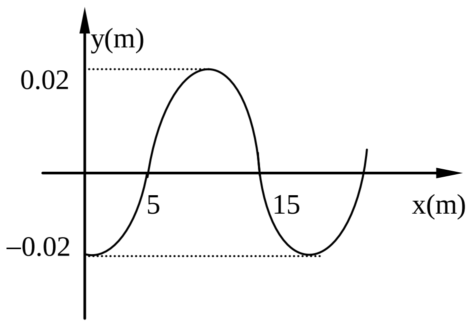
波动方程 $\quad y=2\times10^{-2}\cos[\frac{\pi}{2}(t-\frac{x}{5})-\frac{\pi}{2}]$

$x=25m$ 处的振动方程 $\quad y=2\times10^{-2}\cos[\frac{\pi}{2}(t-\frac{25}{5})-\frac{\pi}{2}]=2\times10^{-2}\cos[\frac{\pi}{2}t-\pi]$

$$v=y'=-2\times10^{-2}\times\frac{\pi}{2}\sin[\frac{\pi}{2}t-\pi] \qquad v(1)=\pi\times10^{-2}\ m/s$$

$$a=y''|_{t=1}=-2\times10^{-2}(\frac{\pi}{2})^2\cos[\frac{\pi}{2}t-\pi]=0$$

（2）根据波动方程



$$y=2\times10^{-2}\cos[\frac{\pi}{2}(3-\frac{x}{5})-\frac{\pi}{2}]=2\times10^{-2}\cos[\frac{\pi}{10}x-\pi]$$

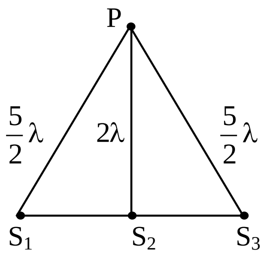
$$y=0\Rightarrow\frac{\pi}{10}x-\pi=(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$x=10\,(k+\frac{3}{2}) \qquad k=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots$$

5、如图所示，三个同频率、振动方向相同（垂直于纸面）的平面简谐波在传播过程中相遇于 P 点。若三个简谐波各自单独在 S_1、S_2、S_3 的振动表达式分别为

$y_1 = A\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$、$y_2 = A\cos(\omega t)$ 和 $y_3 = A\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})$。

而 $\overline{S_2P}=2\lambda$，$\overline{S_1P}=\overline{S_3P}=\frac{5}{2}\lambda$（$\lambda$ 为波长）求 P 点的合振动的表达式。



解：由波的特性可知

$$y_1^p = A\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})$$

$$y_2^p = A\cos\omega t$$

$$y_3^p = A\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$$

$$y^p = y_1^p + y_2^p + y_3^p = A\cos\omega t$$

6、一正弦式空气波，沿直径为 0.14m 的圆柱形管道传播。波的平均强度为 $9\times10^{-3}W/m^2$，频率为 300Hz，波速为 300m/s。问波中的平均能量密度和最大能量密度各是多少？每两个相邻同相面间波段中包含多少能量？

解：$\bar{I}=\bar{\omega}u$

$$\bar{\omega}=\frac{\bar{I}}{u}=\frac{9\times10^{-3}}{300}=3\times10^{-5}\ J/m^3$$

$$\omega_{max}=2\omega=6\times10^{-5}\ J/m^3$$

$$E=\bar{\omega}\Delta v=\bar{\omega}(\lambda s)=3\times10^{-5}\times1\times\pi(0.7)^2=4.62\times10^{-7}\,J$$

7、一弹性波在介质中传播速度 u=10^3m/s，振幅 A=1.0×10^{-4}m，频率ν=10^3Hz，若该介质的密度为 800kg/m^3。求：

（1）该波的平均能流密度；

（2）一分钟内垂直通过一面积为 S=4×$10^{-4}$$m^2$ 的总能量。

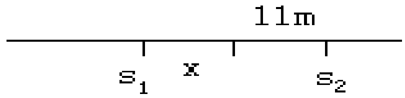
解：（1） $I=\overline{\omega}u=\dfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2u=\dfrac{1}{2}800\times(1.0\times10^{-4})^2(2\pi10\times10^2)^2\times10^3$

$$=1.578\times10^5\ \mathrm{W/m^2}$$

$$(2)\ w=\bar{p}\cdot t=\overline{\omega}ust=1.578\times10^5\times4\times10^{-4}\times60=3.74\times10^3\ \mathrm{J}$$

8、相干波源 s_1、s_2，相距 11m，s_1的位相比 s_2超前π/2，这两个相干波源在 s_1、s_2连线和延长线上传播时可看成两等幅的平面余弦波，它们的频率都等于 100Hz，波速都等于 400m/s，试求在 s_1和 s_2的连线及延长线上，因干涉而静止不动的各点的位置。

解：$\lambda=\dfrac{u}{\nu}=4\,(\mathrm{m})$



在 s_1s_2之间

$$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2-\frac{2\pi}{\lambda}[x-(11-x)]$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}(2x-11)=(2k+1)\pi\qquad(k=0,\pm1\pm2\pm3\cdots\cdots)$$

$$\therefore\quad x=5-2k$$

又 $0\le x\le11$ 所以 $\dfrac{5}{2}\ge k\ge-3$

取 $k=-3、-2、-1、0、1、2$ $\quad x=11,9,7,5,3,1$

在 s_1 外侧 $\quad\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2-\dfrac{2\pi}{\lambda}[x-(11+x)]=6\pi$ 无静止点

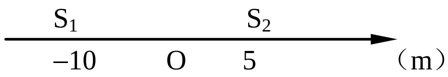
在 s_2 外侧 $\quad\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2-\dfrac{2\pi}{\lambda}(x+11-x)=5\pi$ 各点均为静止点

∴干涉静止的点为 $x=1,3,5,7,9,11$ 及 s_2 外侧各点

9、有两相干波源 s_1 和 s_2 在 x 轴上的位置是 x_1=-10m，x_2=5m 两波源振动周期都是 0.5s，波长均为 10m。振幅均为 1.0×10^{-2}m。当 t=0 时，s_1 振动的位移为 0 并向正方向运动，s_2 振动位相比 s_1 落后 π/2，求 x=10m 处介质中 P 点的振动方程。

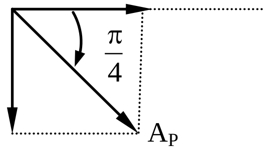
解：由初始条件知 $\varphi_1=-\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\varphi_2-\varphi_1=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\varphi_2=-\pi$

$$y_{1P}=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{20}{\frac{\lambda}{T}}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=A\cos[4\pi t-\frac{\pi}{2}]$$



$$y_{2p}=A\cos[4\pi(t-\frac{5}{20})-\pi]=A\cos(4\pi t)$$

$$A_p=\sqrt{2}A \qquad \varphi=-\frac{\pi}{4}$$



$$\therefore y_p=\sqrt{2}\times1.0\times10^{-2}\cos[4\pi t-\frac{\pi}{4}]$$

10、两波在一很长的弦线上传播，其表达式为

$$y_1=6.0\cos\frac{\pi}{2}(0.02x-8.0t)\text{cm} \qquad y_2=6.0\cos\frac{\pi}{2}(0.02x+8.0t)\text{cm}$$

求：（1）各波频率、波长、波速；（2）节点的位置；（3）振幅最大的位置。

解：（1）由波动方程 $y_1=60\cos\frac{\pi}{2}(0.02x-8.0t)=6.0\cos(4\pi t-0.01\pi x)$

$$y_2=6.0\cos(4\pi t+0.01\pi x)$$

与标准型 $y=A\cos(\omega t+\varphi-\frac{2\pi}{\lambda}x)$ 比较

$$\omega=4\pi \qquad v=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{4\pi}{2\pi}=2\text{Hz} \qquad \lambda=200\text{cm} \qquad u=\lambda v=200\times2=400\text{cm/s}$$

（2）合成波形成驻波，波动方程 $y=(2A_0\cos\frac{2\pi}{\lambda}x)\cos\frac{2\pi}{T}t$

波节（A=0）：$A=2A_0\cos\frac{2\pi}{\lambda}x=0$

即 $\frac{2\pi}{200}x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $x=50(2k+1)\text{cm}$ $\qquad$ $k=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots$

（3）振幅最大：$\left|\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|=1$

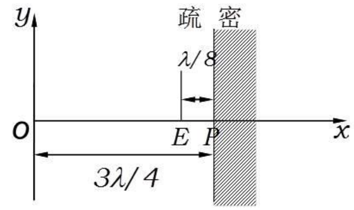
即 $\frac{2\pi}{200}x=k\pi$

$$x=100k \qquad (k=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots)$$

11、一列波长为λ的平面简谐波沿 x 轴的正方向传播，已知 x=λ/2 处质点的振动方程为 y =Acosωt。

（1）求该平面简谐波的方程；

（2）若在 x=3λ/4 的 P 点处放一如图所示的反射面，求



反射波的方程和 E 点（PE=λ/8）的合振动方程。

解：（1） $y_{入} = A\cos\left[\omega\left(t - \dfrac{x - \frac{\lambda}{2}}{u}\right)\right] = A\cos[\omega t - \dfrac{2\pi}{\lambda}x + \pi]$ $\quad(\dfrac{\omega}{u} = \dfrac{2\pi}{\lambda})$

（2） $y_{入p} = A\cos(\omega t - \dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot\dfrac{3}{4}\lambda + \pi) = A\cos(\omega t - \dfrac{\pi}{2})$

$y_{反p} = A\cos(\omega t - \dfrac{\pi}{2} + \pi) = A\cos(\omega t + \dfrac{\pi}{2})$

$y_{反} = A\cos[\omega(t - \dfrac{\frac{3}{4}\lambda - x}{u}) + \dfrac{\pi}{2}] = A\cos(\omega t + \dfrac{2\pi}{\lambda}x \pm \pi)$ （±均可）

$y_{全} = y_{入} + y_{反} = 2A\cos\omega t\cos[\dfrac{2\pi}{\lambda}(\dfrac{3}{4}\lambda - \dfrac{1}{8}\lambda)] = \sqrt{2}A\cos\omega t$

12、一弦上的驻波表达式为 $y = 0.02\cos 16x\cos 750t$ （SI）。试求：

（1）组成此波的各分行波的波幅及波速为多少？

（2）节点间距为多大/

（3） $t = 2\times10^{-3}s$ 时位于 x=0.05m 处质点的速度为多大？

解：（1）与驻波一般表达式 $y = 2A\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}x\cos\dfrac{2\pi}{T}t$ 比较可得

$A = 0.01 \quad \lambda = \dfrac{\pi}{8} \quad T = \dfrac{\pi}{375} \quad u = \dfrac{\lambda}{T} = 47m/s$

（2）相邻节点间距离 $\Delta x = \dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{\pi}{16} = 0.2\ (m)$

（3） $v = \dfrac{dy}{dt} = -15\cos 16x\sin 750t$

当 $t = 2\times10^{-3}s \quad x = 0.05m$ 时 $v = -10.4(m/s)$

13、汽车驶过车站时，车站上的观测者测得声音频率由 1200Hz 变到 1000Hz，设空气中声速为 330m/s，求汽车速度。

解：设波源相对介质的运动速度为V_s，观察测得声源的频率为v_s，声速为u

由多普勒效应：$v_s = \dfrac{u}{u - V_s} v$ (1)

$$v_s' = \frac{u}{u-(-V_s)} v \qquad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \qquad \frac{v}{v'} = \frac{u+V_s}{u-V_s} = \frac{1200}{1000} = \frac{6}{5}$$

$$V_s = \frac{u}{11} = \frac{330}{11} = 30\,\mathrm{m/s}$$

14、两列火车分别以 72km/h 和 54km/h 的速度相向而行，第一列火车发出一个 600Hz 的汽笛声，若声速为 340m/s，求在第二列火车上的乘客听见该声音的频率在相遇前是多少？在相遇后是多少？

解：设u为声速，V_B为第二列火车上的观察者速度，V_s为火车波源速度

接近时 $$v = \frac{u+V_B}{u+(-V_s)} v = \frac{340 + 54000/3600}{340 - 72000/3600} = 665.6\,\mathrm{Hz}$$

相遇后 $$v = \frac{u+(-V_B)}{u+V_s} v = \frac{340 + (-54000/3600)}{340 + 72000/3600} = 547.1\,\mathrm{Hz}$$

第六章 气体动理论

1. 水银气压计中混进了一个气泡，因此它的读数比实际气体小些，当精确的气压计的水银柱为 0.768m 时，它的水银柱只有 0.748m 高，此时管中水银面到管顶距离为 0.08m，试问此气压计的水银柱为 0.734m 高时，实际的气压是多少？（把空气当作理想气体，并设温度不变）。

解：设第一次测得的空气泡的压强和体积

$$P_1 = \Delta h d_{汞} = (0.768 - 0.748) d_{汞} = 0.02 d_{汞} \qquad V_1 = 0.08s$$ （s 为截面积）

第二次测得空气泡的压强和体积

$$V_2 = (0.748 - 0.734 + 0.08)s = 0.094s$$

$$P_2 = \frac{P_1 V_1}{V_2} = \frac{0.02 d_{汞} \times 0.08s}{0.094s} = 0.017 d_{汞}$$

实际压强 $P'_2 = 0.734 d_{汞} + 0.017 d_{汞} = 0.751 \times 1.33 \times 10^5 = 0.999 \times 10^5 (Pa)$

2、可用下面方法测定气体的摩尔质量。先在容积为 V 的容器内装入被测量的气体，测出其压强为 P_1，温度为 T，并称出容器连同气体的质量为 m_1。然后放掉一部分气体，这时压强降到 P_2，再称出容器连同气体的质量为 m_2，假定温度保持不变，试求该气体的摩尔质量。

解：设容器的质量为 m

开始时 $$\frac{m_1 - m}{M} R = \frac{P_1 V}{T} \qquad (1)$$

放气后 $$\frac{m_2 - m}{M} R = \frac{P_2 V}{T} \qquad (2)$$

解得 $$M = \frac{RT}{V} \cdot \frac{m_1 - m_2}{P_1 - P_2}$$

3、某容器内分子数密度为 $10^{26}m^{-3}$，每个分子的质量为 $3\times10^{-27}kg$，设其中 1/6 分子数以速率 v=200ms^{-1}垂直地向容器的一壁运动，而其余 5/6 分子或者离开此壁，或者平行此壁方向运动，且分子与容器壁的碰撞为完全弹性。问：

（1）每个分子作用于器壁 的冲量为多少？

（2）每秒碰在器壁单位面积上的分子数 n_0 为多少？

（3）作用在器壁上的压强为多少？

解：(1) $I=\Delta P=2\mu v=2\times3\times10^{-27}\times200=1.2\times10^{-24}$（kg m/s）

(2) $n_0=\dfrac{1}{6}vn=200\times10^{26}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}\times10^{28}$ 个$/m^2\cdot s$

(3) $P=n_0\cdot\Delta P=\dfrac{1}{3}\times10^{28}\times1.2\times10^{-24}=4\times10^3\,Pa$

4、有一容积为 $10cm^3$ 的电子管，当温度为 300k 的时候，用真空泵把管内空气抽成压强为 5×10^{-6}mmHg 的高真空，问此时管内有多少个空气分子？此空气分子的平均平动动能的总和是多少？平均转动动能的总和是多少？平动动能的总和是多少？

（1mmHg=133.3Pa 空气分子可认为是刚性双原子分子）

解：由理想气体状态方程 $PV=\nu RT$ 知空气的摩尔数 $\nu=\dfrac{PV}{RT}$

1） $N=\nu N_A=\dfrac{PV}{RT}N_A=\dfrac{PV}{kT}=\dfrac{5\times10^{-6}\times133.32\times10\times10^{-6}}{1.38\times10^{-23}\times300}=1.61\times10^{12}$个

2） $\bar{\varepsilon}_{k平总}=N\dfrac{3}{2}kT=1.61\times10^{12}\times\dfrac{3}{2}\times1.38\times10^{-23}\times300=1.00\times10^{-8}\,J$

3） $\bar{\varepsilon}_{k转总}=NkT=1.61\times10^{12}\times1.38\times10^{-23}\times300=6.67\times10^{-9}\,J$

4） $\bar{\varepsilon}_{k总}=\bar{\varepsilon}_{k平总}+\bar{\varepsilon}_{k转总}=1.67\times10^{-8}\,J$

5、一能量为 10^{12}eV 的宇宙射线粒子，射入一氖管中，氖管中含有氖气 0.1mol。如果宇宙射线粒子的能量全部被氖气分子所吸收而变为热运动能量，问氖气温度升高多少度？

解：等容吸热 $\Delta E=\dfrac{m}{M}\dfrac{i}{2}R\Delta T$

所以 $$\boldsymbol{\Delta T=\frac{2\Delta E}{\frac{m}{M}R\,i}=\frac{2\times10^{12}\times1.6\times10^{-19}}{0.1\times8.31\times3}=1.28\times10^{-7}\,K}$$

6、质量为 50.0g、温度为 18^0c 的氮气装在容积为 10.0 升的密闭绝热容器内，容器以 v=200m/s 的速率作匀速直线运动，若容器突然停止运动，其定向运动的动能全部转化为分子热运动的动能，那么，平衡后氮气的温度和压强将各增大多少？

解：气体直线运动的动能转化为气体的内能 $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\Delta T$

$$\therefore \quad \Delta T = \frac{mv^2}{iR} = \frac{28\times10^{-3}\times200^2}{5\times8.31} = 27.0K$$

$$\Delta P = \frac{m}{M}\frac{R}{V}\Delta T = \frac{50\times10^{-3}\times8.31\times27}{28\times10^{-3}\times10\times10^{-3}} = 4\times10^4 Pa$$

7、将 1kg 氦气和 m 氢气混合，平衡后混合气体的内能是 2.45×10^6J。氦分子平均动能是 6×10^{-21}J。求氢气质量 m 。

解：由题意可知 $\frac{3}{2}kT = 6\times10^{-21}J$

$$\frac{m_{He}}{M_{He}}N_A\frac{3}{2}kT + \frac{m_{H_2}}{M_{H_2}}N_A\cdot\frac{5}{2}kT = 2.45\times10^6$$

其中 $M_{He} = 4\times10^{-3}kg \quad M_{H_2} = 2\times10^{-3}kg \quad N_A = 6.02\times10^{23}$个

$$\therefore \quad m_{H_2} = \frac{\frac{2.45\times10^6\times4\times10^{-3}}{6.02\times4\times10^{-21}\times10^{23}} - 1.5}{5} = 0.51kg$$

8、今有 N 个粒子，其速率分布函数为

$$f(v)=\frac{dN}{Ndv}=C \quad (v_0>v>0,\ C为常数)$$

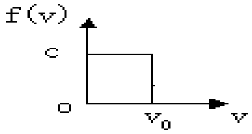
$$f(v)=0 \quad (v>v_0)$$

（1）画出该速度分布曲线；

（2）由 v_0 求常数 C；

（3）求粒子的平均速率。

解：（1）



（2）由归一化条件 $\int_0^{\infty} f(v)dv=1$ 得　　$\int_0^{v0} Cdv+\int_{v0}^{\infty} 0\cdot dv=1\Rightarrow v_0=\frac{1}{C}$

$\therefore \quad C=\frac{1}{v_0}$

（3）$\bar{v}=\int_0^{v0} vf(v)dv=\int_0^{v0} Cvdv=\frac{v_0}{2}$

9、设容器体积为 V_0 内盛有质量为 m_1 和 m_2 的两不同的单原子气体，此混合气体处于平衡状态时内能相等均为 E，求这两种分子平均速率 $\bar{v}_1$ 和 $\bar{v}_2$ 的比值以及混合气体的压力。

解：$\because E=\frac{m}{M}\frac{3}{2}RT \quad \Rightarrow \bar{v}=1.60\sqrt{\frac{RT}{M}}=1.6\sqrt{\frac{2E}{3m}}$

$$\frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_2}=\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

又　$PV=\frac{m}{M}RT=\frac{2}{3}E$

$$\therefore P=P_1+P_2=2\times\frac{2E}{3V}=\frac{4E}{3V}$$

10、求上升到什么高度处，大气压强减到地面的 75%。设空气的温度为 0℃，空气的摩尔质量为 0.0289kg/mol。

解：根据玻耳兹曼分布的气压公式

$$P = P_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} = P_0 e^{-\frac{M_{mol}gz}{RT}}$$

$$z = -\frac{RT}{M_{mol}g}\ln\frac{p}{p_0}$$

$$= -\frac{8.31\times 273}{0.0289\times 9.8}\ln 0.75$$

$$= 2300\ (m)$$

11、设容器内盛有质量为 m，摩尔质量为 M 的多原子气体,分子直径为 d，气体的内能为 E，压力为 p，求

（1）分子平均碰撞频率；

（2）分子最概然速率；

（3）分子的平均平动动能。

解：（1）$\because \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ $\qquad P = nkT$ $\qquad E = \frac{m}{M}\frac{6}{2}RT$

$$\therefore \bar{z} = \sqrt{2}\pi d^2\bar{v}n = \frac{4d^2N_0P}{M}\sqrt{\frac{3\pi m}{E}}$$

（2）$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2E}{3m}}$

（3）$\bar{\varepsilon}_k = \frac{3}{2}kT = \frac{ME}{2N_A m}$ （其中 N_A 为阿伏伽德罗常数）

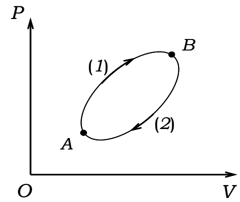
12、一真空管的真空度为 1.33×10^{-3}Pa，试求在 27^0C 时单位体积的分子数及分子平均自由程。设分子的有效直径 d=3.0×10^{-10}m。

解：$n = \frac{P}{kT} = \frac{1.33\times 10^{-3}}{1.38\times 10^{-23}\times 300} = 3.22\times 10^{17}$ 个/m^3

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = 7.84m$$

第七章 热力学基础

1、一定量气体吸热 800J，对外作功 500J，由状态 A 沿路径（1）变化到状态 B，问气体的内能改变了多少？如气体沿路径（2）从状态 B 回到状态 A 时，外界对气体作功 300J，问气体放出热量多少？

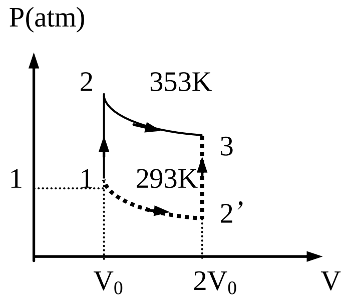


解：（1） $\Delta E = Q_1 - A_1 = 800 - 500 = 300J$

（2） $Q_2 = -\Delta E - A_2 = -300 - 300 = -600J$

2、1mol 氢气，在压强为 1 大气压，温度为 20^0C 时，体积为 V_0，今使其先保持体积不变，加热使其温度升高到 80^0C，然后令其作等温膨胀，体积变为原体积的 2 倍，试计算此过程中气体吸收的热量、对外作功和内能的增量。

解：由题意知　$T_1=273+20=293K$，$T_2=273+80=353K$



$$\Delta E = E_2 - E_1 = C_v(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}\times 8.31\times 60 = 1246J$$

$$A = A_{23} = RT_2 \ln\frac{2V_0}{V_0} = 8.31\times 353\times \ln 2 = 2033J$$

$$Q = \Delta E + A = 1246 + 2033 = 3279J$$

$$A = A_{12} = RT_1 \ln\frac{2V_0}{V_0} = 8.31\times 293\ln 2 = 1687J$$

$$\Delta E = E_3 - E_{2'} = \frac{5}{2}\times 8.31\times 60 = 1246J$$

$$Q = A + \Delta E = 1687 + 1246 = 2933J$$

3、容器内贮有刚性多原子分子理想气体，经准静态绝热膨胀过程后，压强减为初压强的一半，求始末状态气体内能之比。

解：由绝热方程 $T_1^{-\gamma}P_1^{\gamma-1} = T_2^{-\gamma}P_2^{\gamma-1}$ 可得

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

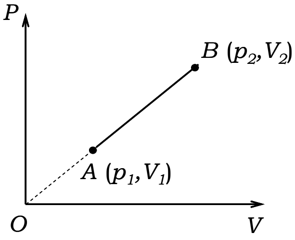
所以 $$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\nu\frac{i}{2}RT_1}{\nu\frac{i}{2}RT_2} = \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{\frac{4}{3}-1}{\frac{4}{3}}} = 1.19$$

4、如图所示，1mol 的氦气由状态 A（p_1,V_1）沿 p-V 图中直线变化到状态 B（p_2,V_2），设 AB 延长线通过原点，求：

（1）多方指数；

（2）气体的热容量；

（3）该过程内能的变化，吸收的热量和对外作的功。



解：（1）$\Delta E=\frac{m}{M}C_v\Delta T=\frac{3}{2}R(T_2-T_1)=\frac{3}{2}(P_2V_2-P_1V_1)$

$$A=\frac{1}{2}(P_1+P_2)(V_2-V_1)$$

$$\frac{P_1}{V_1}=\frac{P_2}{V_2}(k=\frac{P}{V})$$

$$\therefore A=\frac{1}{2}(P_2V_2-P_1V_1)$$

$$Q=\Delta E+A=\frac{3}{2}(P_2V_2-P_1V_1)+\frac{1}{2}(P_2V_2-P_1V_1)=2(P_2V_2-P_1V_1)$$

（2）$dQ=dE+dA=C_VdT+PdV$

由理想气体方程得 $PdV+VdP=RdT$， 又 P=kV， dP=kdV

$\therefore PdV+VdP=PdV+kVdV=2PdV=RdT$

即 $PdV=\frac{R}{2}dT$， $dQ=C_VdT+PdV=\frac{3}{2}RdT+\frac{1}{2}RdT=2RdT$

热容量 $C=\frac{dQ}{dT}=2R$

（3）过程方程 $P=kV$ 即 $PV^{-1}=k$

多方指数 n=−1

5、为测定气体的比热容比$\gamma=\frac{C_P}{C_v}$，有时可用下面方法：将开始的温度、体积和压力分别为 T_0,V_0和 P_0的一定量气体，在一定时间内通以电流的铂丝加热，而且每次加热供应气体的热量相同。第一次维持 V_0不变，此时气体达到温度 T_1和压力 P_1。第二次维持压力 P_0不变，而温度变到 T_2，体积变到 V_1，试证明：$\gamma=\frac{(P_1-P_0)V_0}{(V_1-V_0)P_0}$

证： $Q_V=\frac{m}{M}C_V(T_1-T_0)$

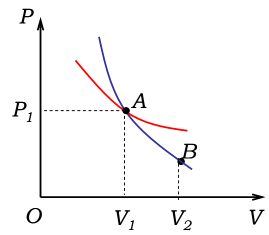
$Q_p=\frac{m}{M}C_p(T_2-T_0)$ 根据题意 $Q_V=Q_p$及$PV=\frac{m}{M}RT$

$$\therefore\quad \gamma=\frac{C_p}{C_V}=\frac{T_1-T_0}{T_2-T_0}=\frac{\frac{MP_1V_1}{mR}-\frac{MP_0V_0}{mR}}{\frac{MP_2V_2}{mR}-\frac{MP_0V_0}{mR}}=\frac{(P_1-P_0)V_0}{(V_1-V_0)P_0}$$

6、某理想气体在 P-V 图上等温线与绝热线相交于 A 点（如图所示）。已知 A 点的压强 $P_1=2\times10^5$Pa，体积 $V_1=0.5\times10^{-3}m^3$，而且 A 点处等温线的斜率与绝热线斜率之比为 0.714，现使气体从 A 点绝热膨胀至 B 点，其体积 $V_2=1\times10^{-3}m^3$。求：

（1）B 点处的压强；

（2）在此过程中气体对外作的功。



解：（1）等温线的斜率 $\left.\dfrac{dP}{dV}\right|_{T=C}=-\dfrac{P}{V}$

绝热线的斜率 $\left.\dfrac{dP}{dV}\right|_{Q=C}=-\gamma\dfrac{P}{V}$

根据题意知 $\dfrac{\left.\dfrac{dP}{dV}\right|_{T=C}}{\left.\dfrac{dP}{dV}\right|_{Q=C}}=\dfrac{1}{\gamma}=0.714$ $\quad\therefore\gamma=\dfrac{1}{0.714}=1.4$

由绝热方程可得 $P_1V_1^{\gamma}=P_2V_2^{\gamma}$

$$P_2=(\frac{V_1}{V_2})^{\gamma}P_1=(\frac{0.5\times10^{-3}}{1\times10^{-3}})^{1.4}\times2\times10^5=7.58\times10^4\text{Pa}$$

（2） $$A=\frac{P_1V_1-P_2V_2}{\gamma-1}=\frac{2\times10^5\times0.5\times10^{-3}-7.58\times10^4\times1\times10^{-3}}{1.4-1}=60.5\text{J}$$

7、试证明：1mol 刚性分子理想气体，作等压膨胀时，若对外作功为 A，则气体分子平均动能的增量为 $\dfrac{A}{N_A(\gamma-1)}$，式中 γ 为比热容比，N_A 为阿伏伽德罗常数。

证明：设膨胀前后的体积为 V_1、V_2，温度为 T_1、T_2，压强 P

根据等压膨胀作功可得

$$A=P(V_2-V_1)=R(T_2-T_1)$$

气体分子的比热容比

$$\gamma=\frac{C_P}{C_V}=\frac{\frac{i+2}{2}}{\frac{i}{2}}=\frac{i+2}{i}$$

$$\therefore\qquad i=\frac{2}{\gamma-1}$$

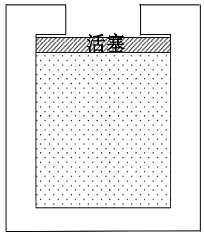
气体分子的平均动能的增量

$$\Delta\bar{\varepsilon}_K=\frac{i}{2}k(T_2-T_1)=\frac{i}{2}k\frac{A}{R}=\frac{\frac{2}{\gamma-1}}{2}\frac{1}{N_A}A=\frac{A}{N_A(\gamma-1)}$$

8、如图，体积为 30 升的园柱形容器内，有一能上下自由滑动的活塞（活塞的质量和厚度可忽略），容器内盛有 1 摩尔，温度为 127^{0}C 的单原子分子理想气体。若容器外大气压强为 1 标准大气压，气温为 27^{0}C。求当容器内气体与周围达到平衡时需向外放热多少？

解：设开始时气体体积 $V_1 = 30\times10^{-3}m^3$， $T_1 = 127+273 = 400K$

$$P_1 = \frac{RT_1}{V_1} = 1.108\times10^5 Pa > P_0$$



所以气体降温过程分两个阶段：等容降温，直至气体的压强 P_2=P_0，此时温度为 T_2 放热 Q_1；第二阶段等压降温，直至温度 T_3=T_0=300K，放热 Q_2

由 $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{P_2}{P_1}T_1 = 365.7K$

$$Q_1 = C_V(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) = -428J$$

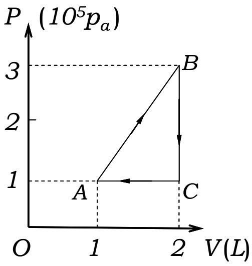
$$Q_2 = C_p(T_3 - T_2) = \frac{5}{2}R(T_3 - T_2) = -1365J$$

总计放热： $Q = |Q_1 + Q_2| = 1.79\times10^3 J$

9、一定质量的单原子理想气体，从初始状态 a 出发，经过图中的循环过程又回到状 a ，其中过程 ab 是直线，试求：

（1）在整个循环过程中，系统对外界所作的净功；

（2）循环的效率。



解：（1） $A = \frac{1}{2}\overline{bc}\cdot\overline{ac}$

$$= \frac{1}{2}\times2\times10^5\times1\times10^{-3}$$

$$= 100J$$

（2） $Q_{吸} = Q_{ab} = \Delta E + A$

$$= \frac{m}{M}C_V(T_b - T_a) + \frac{1}{2}(P_b + P_a)(V_b - V_a)$$

$$= \frac{3}{2}(P_bV_b - P_aV_a) + \frac{1}{2}(P_b + P_a)(V_b - V_a) = 9.5\times10^2 J$$

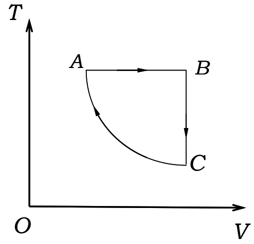
$$\eta = \frac{A}{Q_{吸}} = \frac{100}{950} = 10.5\%$$

10、一定质量理想气体（摩尔热容比为 γ）的某循环过程的 T-V 图如下，其中 CA 为绝热过程，状态 $A(T_1,V_1)$和状态 B（T_2,V_2）为已知，试问：

（1）各个过程是吸热还是放热？

（2）状态 C 的 V、T 值各是多少？

（3）该循环的效率为多少？



解：（1）把 T-V 改画为 P-V 图，如右图所示

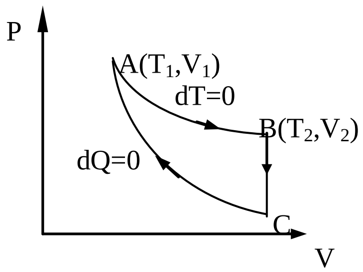
AB 等温膨胀—吸热

BC 等容降温—放热

CA 绝热过程不吸放热

（2）$V_c = V_2$

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \Rightarrow T_C = (\frac{V_1}{V_2})^{\gamma-1} \cdot T_1$$



（3）

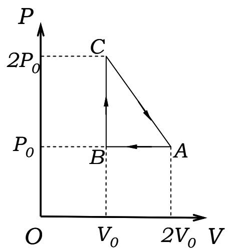
$$\eta = 1 - \frac{|Q_{放}|}{Q_{吸}} = 1 - \frac{\frac{m}{M}C_V(T_1 - T_c)}{\frac{m}{M}RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}}$$

$$= 1 - \frac{C_V T_1[1 - (\frac{V_1}{V_2})^{\gamma-1}]}{RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{1}{\gamma - 1} \cdot \frac{1 - (\frac{V_1}{V_2})^{\gamma-1}}{\ln\frac{V_2}{V_1}}$$

11、1*mol* 氮气（理想气体）经历的循环过程及相关参量如图示，图中 *AB*，*BC*，*CA* 均为直线。

(1) 描述 CA 过程温度如何变化；

(2) 求循环效率 η。



解：（1）AC 的直线方程为：$P = 3P_0 - \frac{P_0}{V_0}V$

由 $PV = RT$ 共同得：$T = \frac{1}{R}(3P_0 V - \frac{P_0}{V_0}V^2)$

令 $\frac{dT}{dV} = 0$,得温度变化的转折点 $V = \frac{3}{2}V_0$.

$V \in [V_0, \frac{3}{2}V_0]$:T 逐渐升高；$V \in [\frac{3}{2}V_0, 2V_0]$:T 逐渐降低。

（2）从 C 到 A 的无限小过程的热量：$dQ = PdV + C_v dT = (3P_0 - \frac{P_0}{V_0}V)dV + \frac{5}{2}RdT$

应用 $PV = RT$：$\mathrm{dQ} = \mathrm{Pdv} + \mathrm{C_v dT} = 0,$

得到吸放热的转折点 D 的参量为：$\mathrm{V_D} = 7\mathrm{V_0}/4; \mathrm{P_D} = 5\mathrm{P_0}/4;$

总吸热为：$Q = Q_{BC} + Q_{CD}$

$$\mathrm{Q_{BC}} = \mathrm{C_V}(\mathrm{T_C} - \mathrm{T_B}) = \frac{5}{2}\mathrm{P_0 V_0};$$

$$Q_{CD} = C_V(T_D - T_C) + A_{CD} = \frac{27}{16}P_0 V_0;$$

效率为：

$$\eta = \frac{A_{净}}{Q_{吸}} = \frac{1}{2}P_0 V_0 \Big/ \frac{67}{16}P_0 V_0 = \frac{8}{67} = 11.94\%$$

12、1mol 理想气体在 T_1=400K 的高温热源与 T_2=300K 的低温热源间作卡诺循环(可逆的)。在 400K 的等温线上起始体积为 V_1=0.001m^3，终止体积为 V_2=0.005m^3。试求此气体在每一循环中

（1）从高温热源吸收的热量 Q_1；

（2）气体所作的净功 A；

（3）气体传给低温热源的热量 Q_2。

解：（1）气体在高温热源等温膨胀吸热，故

$$\mathrm{Q} = \mathrm{RT_1}\ln\frac{\mathrm{V_2}}{\mathrm{V_1}} = 8.31 \times 400 \ln\frac{0.005}{0.001} = 5.35 \times 10^3\,\mathrm{J}$$

（2）根据卡诺循环的效率公式可得

$$\eta = 1 - \frac{\mathrm{T_2}}{\mathrm{T_1}} = \frac{\mathrm{A_{净}}}{\mathrm{Q_{吸}}}$$

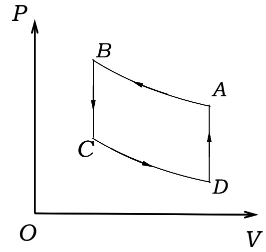
$$\therefore \mathrm{A_{净}} = (1 - \frac{\mathrm{T_2}}{\mathrm{T_1}})\mathrm{Q_{吸}} = (1 - \frac{300}{400}) \times 5.35 \times 10^3 = 1.34 \times 10^3\,\mathrm{J}$$

（3）由能量守恒 $\mathrm{Q_{吸}} = \mathrm{A_{净}} + \mathrm{Q_{放}}$ 可得

$$\mathrm{Q_{放}} = \mathrm{Q_{吸}} - \mathrm{A_{净}} = 5.35 \times 10^3 - 1.34 \times 10^3 = 4.01 \times 10^3\,\mathrm{J}$$

或者 $\eta = 1 - \frac{|\mathrm{Q_{放}}|}{\mathrm{Q_{吸}}} = 1 - \frac{\mathrm{T_1}}{\mathrm{T_2}} \Rightarrow |\mathrm{Q_{放}}| = \frac{\mathrm{T_1}}{\mathrm{T_2}}\mathrm{Q_{吸}} = \frac{300}{400} \times 5.35 \times 10^5 = 4.01 \times 10^3\,\mathrm{J}$

13、在逆向斯特林循环中，υ摩尔的理想气体经以下过程完成一次循环：从体积为 V_A、温度为 T_1 的较高温状态 A 等温压缩到体积为 V_B 的 B 状态，然后等容降温到 C 态，接着在较低温度 T_2 下等温膨胀到 D 态，再经过等容增温回到 A 态。试求：



（1）一个循环中外界对系统所做的功 A；

（2）系统从 T_2 环境吸收的热量 Q_2；

（3）致冷系数 ω (致冷系数定义$\omega \equiv Q_2/A$)。

解：

(1) $$A_{AB} = \upsilon RT_1 \ln\frac{V_B}{V_A},\ A_{CD} = \upsilon RT_2 \ln\frac{V_D}{V_C} = \upsilon RT_2 \ln\frac{V_A}{V_B}$$

$$A_{BC} = A_{DA} = 0$$

$$A_{\text{net}} = A_{AB} + A_{BC} + A_{CD} + A_{DA} = \upsilon R(T_2 - T_1)\ln\frac{V_A}{V_B}$$

$$A = -A_{\text{net}} = \upsilon R(T_1 - T_2)\ln\frac{V_A}{V_B}$$

(2) 热一律应用于 CD 过程

$$Q_{CD} = A_{CD} = \upsilon RT_2 \ln\frac{V_A}{V_B}$$

(3)致冷系数

$$\omega \equiv \frac{Q_{CD}}{A} = \frac{\upsilon RT_2 \ln\frac{V_A}{V_B}}{\upsilon R(T_1 - T_2)\ln\frac{V_A}{V_B}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

14、一台家用冰箱放在室温为 300K 的房间内，做一盘 13℃的冰块需从冷冻室取走 2.09×10^5 J 的热量。设冰箱为理想卡诺制冷机。

（1）求做一盘冰块所需要的功；

（2）若此冰箱能以$2.09\times10^2\ \mathrm{J/s}$的速率取出热量，求冰箱的电功率。

解：（1）卡诺循环制冷系数

$$\omega = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{260}{300-260} = 6.5$$

$$\omega = \frac{Q_2}{A}$$

$$A = \frac{Q_2}{\omega} = \frac{2.09\times10^5}{6.5} = 3.22\times10^4\ \mathrm{J}$$

（2）电功率 $$P = \frac{dA}{dt} = \frac{q}{\omega} = \frac{2.09\times10^2}{6.5} = 32.2\mathrm{W}$$

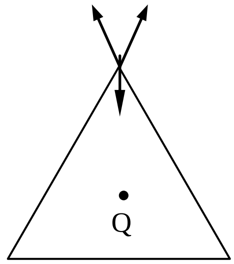
.

第八章 静电场 习题参考解答

1、三个电量为–q 的点电荷各放在边长为 r 的等边三角形的三个顶点上。电荷 Q (Q>0) 放在三角形的重心上，为使每个负电荷受力为零，Q 之值应为多大？

解：利用矢量合成可得

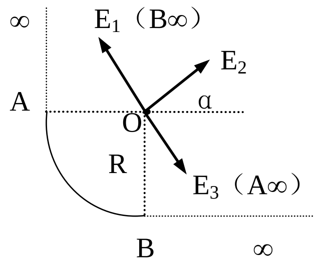
$$\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(\frac{\sqrt{3}}{3}r)^2}=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos 30^\circ\times 2$$



所以 $Q=\frac{\sqrt{3}}{3}q$

2、线电荷密度为λ的无限长均匀带电线，分别弯成如图 (*a*) 和 (*b*) 所示的两种形状，若圆半径为 R，试求(*a*)、(*b*) 图中 *O* 点的场强。

解：图（*a*）由两根半无限长带电直线和一段圆弧组成，方向如图所示。根据矢量合成

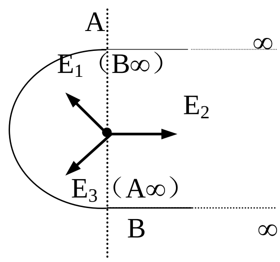


（*a*）

$$\vec{E}_O=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3=\vec{E}_2$$

$$E_O=E_2=\frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$tg\alpha=\frac{E_y}{E_x}=1$$ α= 45° 即与水平成 45°



（*b*）

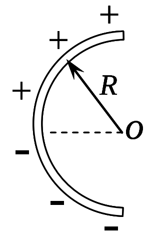
图（*b*）由两根半无限长带电直线和一段半圆弧组成，方向如图所示。根据矢量合成

$$E_{Ox}=E_2-2E_1\cos 45^0=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}-2\times\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}=0$$

$$E_{Oy}=E_1\sin 45^0-E_3\sin 45^0=0$$

$$E_O=0$$

3、有一细玻璃棒被弯成半径为 R 的半圆形，其上半部均匀分布有电荷+Q，下半部均匀分布有电荷–Q，如图所示．求半圆中心 O 处的场强。



解：由于对称性，dE_+、dE_-在 x 方向上的分量抵消 $E_x = 0$

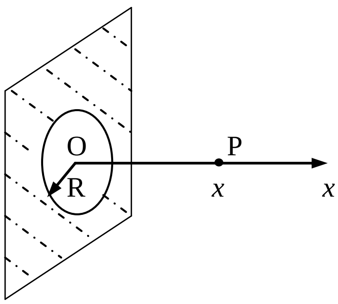
$$dq = \lambda dl = \lambda R d\theta \qquad （\lambda = \frac{2Q}{\pi R}）$$

$$dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Rd\theta}{R^2} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$dE_y = dE\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta d\theta$$

$$E_y = 2\int dE\cos\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\theta}{R}\cos\theta = \frac{Q}{\varepsilon_0\pi^2R^2}$$ 方向沿–y 方向

4、一无限大的均匀带电平板，电荷密度为σ，在平板上挖去一个半径为 R 的圆孔，求通过圆孔中心并垂直于板的轴上一点 P 的场强。



解：取圆环元半径为ρ，$dq = \sigma 2\pi\rho d\rho$

则圆环元在轴线上产生 dE 公式

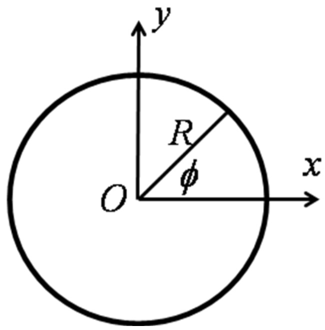
$$dE_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xdq}{(\rho^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_p = \int_R^{\infty} dE_p = \int_R^{\infty}\frac{2\pi\sigma x\rho d\rho}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

方向沿 x 轴方向

5、半径为 R 的带电细圆环，其电荷线密度为 $\lambda=\lambda_0\sin\phi$，式中 λ_0 为一常数，ϕ 为半径 R 与 x 轴所成的夹角，如图所示。求环心 O 处的电场强度。



解：
$$dE=\frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0R^2}=\frac{\lambda_0\sin\phi d\phi}{4\pi\varepsilon_0R}$$

$$dE_x=-dE\cos\phi \quad dE_y=-dE\sin\phi$$

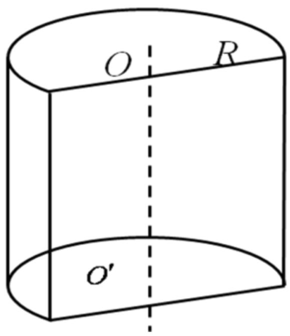
$$E_x=-\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0R}\int_0^{2\pi}\sin\phi\cos\phi d\phi=0$$

$$E_y=-\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0R}\int_0^{2\pi}\cos^2\phi d\phi=-\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0R}$$

$$E=E_y=-\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0R}$$

方向：沿 y 轴负方向。

6、“无限长”均匀带电的半圆柱面，半径为 R，设半圆柱面沿轴线 OO' 单位长度上的电荷为 λ，求轴线上一点的电场强度。



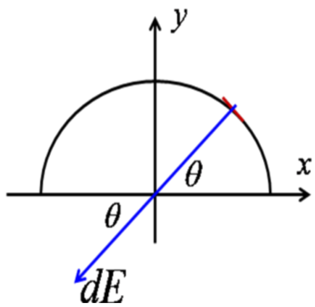
解：
$$d\lambda=\frac{\lambda}{\pi R}dl=\frac{\lambda}{\pi}d\theta$$

$$dE=\frac{d\lambda}{2\pi\varepsilon_0R}=\frac{\lambda}{2\pi^2\varepsilon_0R}d\theta$$

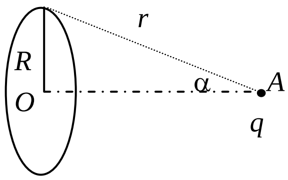
$$dE_x=-dE\cos\theta \quad dE_y=-dE\sin\theta$$

$$E_x=0 \qquad E_y=\int_0^{\pi}dE_y=-\frac{\lambda}{\pi^2\varepsilon_0R}$$

$$E=E_y=-\frac{\lambda}{\pi^2\varepsilon_0R}$$



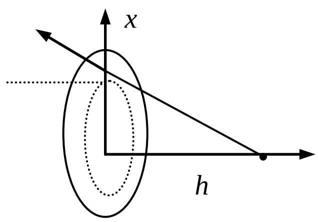
方向：沿 y 轴负方向。



7、如图所示，在点电荷 q 的电场中，取半径为 R 的平面，q 在该平面的轴线上的 A 点处．求通过此圆平面的电通量。

解法一：以 A 为中心，r 为半径作一球面，则通过圆平面的电通量与通过以圆平面为底的球冠电通量相等。

设球面积　$S_0 = 4\pi r^2$，　通量　$\Phi_0 = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$



球冠面积　$S = 2\pi r(r - r\cos\alpha)$　通量　Φ

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{S}{S_0} = \frac{2\pi r^2(1-\cos\alpha)}{4\pi r^2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\therefore\quad \Phi = \Phi_0\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{(1-\cos\alpha)}{2}$$

解法二：

φ

$$\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int E\cos\varphi ds = \int_0^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+h^2)}\cos\varphi 2\pi x\,dx$$

$$= \int_0^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(x^2+h^2)}\frac{h}{(x^2+h^2)^{1/2}}2\pi x\,dx$$

$$= \frac{q}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{h}{(R^2+h^2)^{1/2}}\right] = \frac{q}{2\varepsilon_0}(1-\cos\alpha)$$

8、无限长的两个共轴直圆筒，半径分别是 R_1 和 R_2，两圆筒面都均匀带电，沿轴线方向单位长度所带的电量分别是 λ_1 和 λ_2。

（1）求离轴线为 **r** 处的电场强度 E。

（2）当 $\lambda_2 = -\lambda_1$ 时，各处的电场强度 E 如何?

解:（1）作高为 h 的同轴圆柱形高斯面，由高斯定理 $\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = E2\pi rh = \dfrac{\sum q}{\varepsilon_0}$

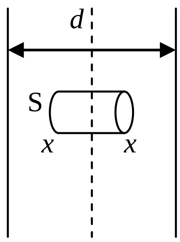
$$r < R_1 \qquad \sum q_1 = 0 \qquad E_1 = 0$$

$$R_1 < r < R_2 \qquad \sum q_2 = \lambda_1 h \qquad E_2 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$r > R_2 \qquad \sum q_3 = (\lambda_1 + \lambda_2)h \qquad E_3 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

（2）E_1 和 E_2 不变，$E_3 = 0$

9、一厚度为 d 的无限大平板，均匀带电，体电荷密度为 ρ，求平板体内、外场强的分布，并以其对称面为坐标原点作出 $E-x$ 的分布曲线。



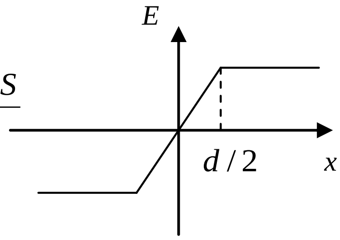
解：在平板内外取图示高斯面，由高斯定理 $\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{\sum q}{\varepsilon_0}$

$$-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \qquad \oint \vec{E}_1\cdot d\vec{S} = 2E_1 S = \frac{\rho 2xS}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$$

$$x > \frac{d}{2} \quad \text{or} \quad x < -\frac{d}{2} \qquad \oint \vec{E}_2\cdot d\vec{S} = 2E_2 S = \frac{\rho d\, S}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

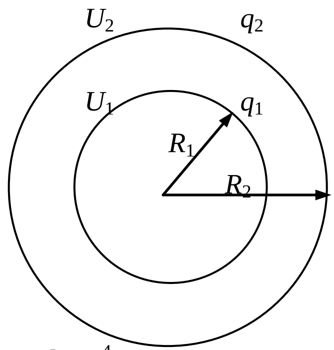


10、半径为 R 的非金属球带有正电荷，电荷体密度随径向距离的变化满足 $\rho=br$，其中 b 为常数，r 为离球心的距离，求球内、外场强的分布。

解：由于 ρ 与 r 成线性关系，电场分布仍有球对称性，故可由高斯定理求解。

作同心球面为高斯面

$r<R$　　$$\int \vec{E}_{内}\cdot d\vec{S}=E_{内}4\pi r^2=\frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$



又因　　$$\sum q=\int_0^r br4\pi r^2dr=\int_0^r 4b\pi r^3dr=b\pi r^4$$

$$E_{内}=\frac{b\pi r^4}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{br^2}{4\varepsilon_0}$$

r > R　　$$\sum q=\int \rho dV=\int_0^R 4br\pi r^2dr=\int_0^R b4\pi r^3dr=b\pi R^4$$

$$\int \vec{E}_{外}\cdot d\vec{S}=E_{外}4\pi r^2=\frac{b\pi R^4}{\varepsilon_0}$$

$$E_{外}=\frac{bR^4}{4\varepsilon_0 r^2}$$

11、两个同心的均匀带电球面，半径分别为 R_1=5.0cm，R_2 =20.0cm，已知内球面的电势为 U_1=60V，外球面的电势 U_2= –30V．求：

(1) 内、外球面上所带电量；

(2) 在两个球面之间何处的电势为零。

解：（1）$$\Delta U_{R_1R_2}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=60-(-30)=90V$$

$$q_1=6.67\times10^{-10}C$$

又　　$$U_{R_1}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=60V$$　　$$q_2=-1.33\times10^{-9}C$$

（2）令 r 处　U（r）=0

即　　$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=0$$　　所以　　r=0.10m=10.0cm

12、电荷 Q 均匀地分布在半径为 R 的球体内，试证明离球心 r (r<R) 处的电动势为

$$U=\frac{Q\left(3R^2-r^2\right)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

解：先由高斯定理分别求出球内、球外 E

$$E=\begin{cases}\dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & r<R\\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R\end{cases}$$

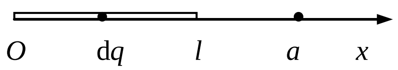
$$U=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{R}\vec{E}_1\cdot d\vec{l}+\int_R^{\infty}\vec{E}_2\cdot d\vec{l}=\frac{Q\left(3R^2-r^2\right)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

13、一均匀带电细杆，长为ℓ =15.0cm，电荷线密度 $\lambda=2.0\times10^{-7}\,\mathrm{C/m}$ 求:

(1) 细杆延长线上与杆的一端相距 a=5.0cm 处的电势。

(2) 细杆中垂线上与细杆相距 b=5.0cm 处的电势。

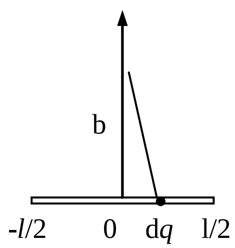
解：（1）$dU=\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0(l+a-x)}=\dfrac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(l+a-x)}$



$$U=\int_0^l\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(l+a-x)}=2.5\times10^3V$$

（2）$dU=\dfrac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+b^2}}$

$$U=\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+b^2}}=4.3\times10^3V$$



14、半径为 R 的无限长圆柱体中，电荷按体密度ρ均匀分布，分别以 (1) 轴线处为零电势位置；(2) 圆柱体表面为零电势位置。求圆柱体内、外的电势。

解：场强分布

$$r < R \qquad \oint \vec{E}d\vec{s} = E\cdot 2\pi r l = \frac{\rho \pi r^2 l}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

$$r > R \qquad E\cdot 2\pi r l = \frac{\rho \pi R^2 l}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{R^2\rho}{2\varepsilon_0 r}$$

（1） $r < R \qquad U = \int_r^0 \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}dr = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0}r^2$

$$r > R \qquad U = \int_r^R \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_R^0 \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}(2\ln\frac{r}{R}+1)$$

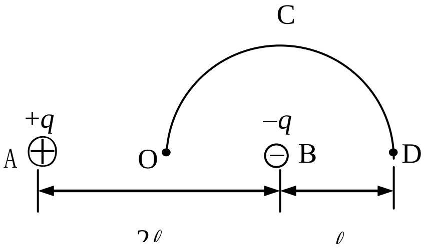
（2） $r < R \qquad U = \int_r^R E\,dr = \frac{\rho}{4\varepsilon_0}(R^2 - r^2)$

$$r > R \qquad U = \int_r^R E\,dr = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R}$$

15、如图所示，$\overline{AB}=2\ell$，弧 OCD 是以 B 为中心，ℓ为半径的半圆。A 点有点电荷+q，B 点有点电荷−q。

(1) 把单位正电荷从 O 点沿弧 OCD 移到 D 点，电场力作了多少功?

(2) 若把单位负电荷从 D 点沿 AB 的延长线移到无穷远处，电场力作功又为多少?

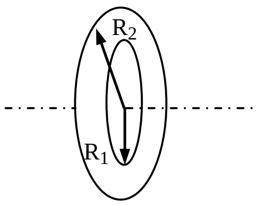


解：（1） $U_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 l} = 0 \qquad U_D = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 3l} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} = -\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$

$$A_1 = q(U_0 - U_D) = U_0 - U_D = \frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

(2) $A_2 = -(U_0 - U_\infty) = \dfrac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$

16、在静电透镜实验装置中，有一均匀带电的圆环，内半径为 R_1，外半径为 R_2，其电荷面密度为 σ (负电)，现有一电子沿着轴线从无限远射向带负电的圆环，欲使电子能穿过圆环，它的初始动能至少要多大?



解：设电子在无穷远处初动能为 E_k ,0 点电子动能 ≥ 0

$$A = e(U_0 - U_\infty) = \Delta E_K = E_K$$

$$U_0 = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int_{R_1}^{R_2} -\sigma \frac{2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R_2 - R_1)$$

$$E_K = -eU_0 = \frac{\sigma e}{2\varepsilon_0}(R_2 - R_1)$$

17、一电偶极子原来与均匀电场平行，将它转到与电场反平行时，外力作功为 A，则当此电偶极子与场强成 45°角时，此电偶极子所受的力矩为多少?

解：$\because A = \int M d\theta = \int_0^\pi PE\sin\theta d\theta = 2PE$

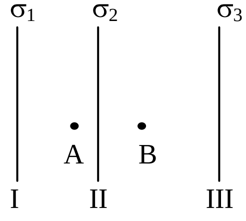
$$M = PE\sin 45° = \frac{A}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}A}{4}$$

($A = P_e E - (-P_e E) = 2P_e E$)

18、如图所示，三块互相平行的均匀带电大平面，电荷密度为 σ_1=1.2×10^{-4}C/m^2， σ_2=0.2×10^{-4}C/m^2，σ_3=1.1×10^{-4}C/m^2，A 点与平面 II 相距为 5.0cm，B 点与平面 II 相距 7.0cm，求:

(1) A、B 两点的电势差;

(2) 把电量 q_0= −1.0×10^{-8}C 的点电荷从 A 点移到 B 点，外力克服电场力作功多少?



解：（1）$E_A = E_1 - E_2 - E_3 = \dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \dfrac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = \dfrac{-10^{-3}}{2\varepsilon_0}$

$$E_B = E_1 + E_2 - E_3 = \frac{3\times10^{-3}}{2\varepsilon_0}$$

$$U_A - U_B = E_A d_1 + E_B d_2 = \frac{-10^{-3}}{2\varepsilon_0}\times5\times10^{-2} + \frac{3\times10^{-3}}{2\varepsilon_0}\times7\times10^{-2}$$

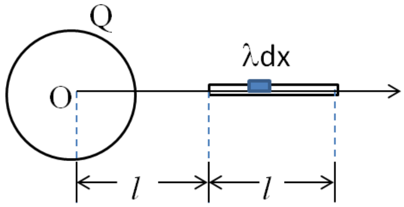
$$= \frac{16\times10^{-7}}{2\varepsilon_0} = \frac{16\times10^{-7}}{2\times8.85\times10^{-12}} = 9.1\times10^4 V$$

（2）$A_{外} + A_{静} = 0$

$$A_{外} = -A_{静} = \Delta W = q_0(U_B - U_A)$$

$$= 1.0\times10^{-2}\times9.1\times10^4 = 9.1\times10^{-4} J$$

19、半径为 R 的均匀带电球面，带电量为 Q，沿半径方向上有一均匀带电细线，线电荷密度为λ，长度为 *l*，细线近端离球心的距离为 *l*，如图所示。设球和细线上的电荷分布固定，求细线在电场中的电势能。



解：$dW = \lambda dx \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}$

$$W = \int_l^{2l} \lambda dx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln 2$$

20、有一半径为 R，电荷密度为 σ 的均匀带电的圆盘，求:

(1) 圆盘轴线上任意一点的电势；

(2) 利用场强和电势梯度的关系求该点场强。

解：取 $dq = 2\pi r dr$

$$U = \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{x^2 + R^2} - x)$$

$$E=-\frac{dU}{dx}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+R^2}}-1)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}})$$

第九章 静电场中的导体和电介质 习题参考解答

1、一导体球半径为 R_1，其外同心地罩以内、外半径分别为 R_2 和 R_3 的厚导体壳，此系统带电后内球电势为 U，外球所带电量为 Q，求此系统各处的电势和电场分布?

解：设内球带电量为 $q_{内}$,依据题意可知电场分布 $$E=\begin{cases}0 & r<R_1\\ \dfrac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1<r<R_2\\ 0 & R_2<r<R_3\\ \dfrac{q_{内}+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R_3\end{cases}$$

$$U=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr+\int_{R_3}^{\infty}\frac{q_{内}+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{q_{内}+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$q_{内}=\frac{U4\pi\varepsilon_0 R_1R_2R_3-R_1R_2Q}{R_2R_3-R_1R_3+R_1R_2}$$

$$\therefore\quad U=\begin{cases}U & r<R_1\\ \dfrac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{-q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\dfrac{q_{内}+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} & R_1<r<R_2\\ \dfrac{q_{内}+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} & R_2<r<R_3\\ \dfrac{q_{内}+Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r>R_3\end{cases}$$

注上式采用带电球壳的电势叠加，也可用 $u=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 获得

2、半径为 R_1 和 R_2 ($R_1<R_2$)的相互绝缘的两同心导体球壳，现使内球壳带上+q 电量时求: (1) 外球的电荷与电势；(2) 若把外球接地后再重新绝缘，外球的电势与电荷；

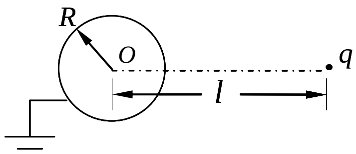
(3) 然后把内球壳再接地，这时内球的电荷为多少？这时外球的电势又为多少?

解：(1) $q_{外}=0\quad U_{外}=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{R_2}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

(2) $q_{外}=-q\quad U=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}=0\quad(\because \vec{E}_{外}=0)$

(3) $U_{内}=\dfrac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=0\Rightarrow q_{内}=\dfrac{R_1}{R_2}q$

$$U_{外}=\frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=\frac{\frac{R_1}{R_2}q-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2{}^2}=\frac{q(R_1-R_2)}{4\pi\varepsilon_0 R_2{}^2}$$



3、如图所示，一个接地导体球半径为 R，有一个电量为 q 的点电荷，点电荷距球心的距离为l，求导体球表面的感应电荷 Q。

解：设接地导体上的感应电荷为 Q，分布在导体球的表面， 因

导体球接地，球上各点电势均为零，即球心 O 点处电势 U_0 为零。U_0 由点电荷 q 和球面上感应电荷共同产生

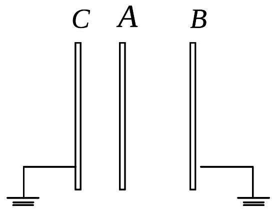
$$U_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} = 0$$

$$Q = -\frac{R}{l} q$$

4、A、B、C 是三块平行金属板，面积均为 200cm^2，A、B 相距 4.0mm，A、C 相距 2.0mm，B、C 两板均接地，现使 A 板带正电 3.0×10^{-7}C 不计边缘效应，求:

(1) B 板和 C 板上的感应电荷；

(2) A 板的电势。



解：（1）设 B 板感应电荷为-q_1，C 板的感应电荷为-q_2

$$q_1 + q_2 = q \qquad (1)$$

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{q_1}{\varepsilon_0 s}$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{q_2}{\varepsilon_0 s}$$

得 $\frac{E_1}{E_2} = \frac{q_1}{q_2} \qquad (2)$

根据题意 $U_A - U_B = U_A - U_C$

$$E_1 d_1 = E_2 d_2$$

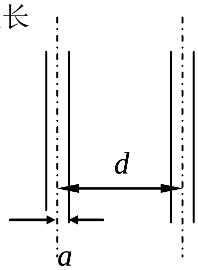
得 $\frac{E_1}{E_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{2} \qquad (3)$

由（1)、（2)、（3）式可得 $q_1 = 1.0\times10^{-7}\,C$， $q_2 = 2.0\times10^{-7}\,C$ 。

（2） $U_A = E_1 d_1 = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S} d_1$

$$= \frac{1.0\times10^{-7}\times4.0\times10^{-3}}{8.85\times10^{-12}\times0.02} = 2.3\times10^3 V$$

5、半径均为 a 的两根平行长直导线，相距为 d (d>>a)，求单位长度上的电容。



解：设两导线间任意 P 点，距导线中心为 r，则 P 点 E 为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-r)}$$

两导线间的电势差 U_A-U_B

$$U_A-U_B=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int Edr=\int_a^{d-a}\left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-r)}\right]dr$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a}-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{d-a}$$

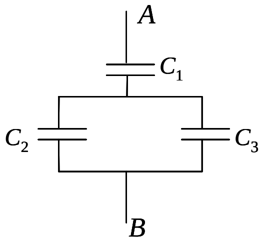
$$=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a}$$

$$C=\frac{q/l}{U_A-U_B}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d-a}{a}}$$

6、如图，连接三个电容器，$C_1=50\mu F, C_2=30\mu F, C_3=20\mu F,$

（1）求该连接的总电容；

（2）当在 AB 两端加 100V 的电压后，各电容器上的电压和电量各是多少？



解:（1）设总电容为 C, 则 $\dfrac{1}{C}=\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2+C_3}$

$$C=\frac{C_1(C_2+C_3)}{C_1+C_2+C_3}=25\mu F$$

（2）设 AB 两端的电压为 U

$$Q_1=CU=25\times10^{-6}\times100=2.5\times10^{-3}C$$

$$U_1=\frac{Q_1}{C_1}=\frac{2.5\times10^{-3}}{50\times10^{-6}}=50V \qquad U_2=U_3=U-U_1=100-50=50V$$

$$Q_2=C_2U_2=30\times10^{-6}\times50=1.5\times10^{-3}C \qquad Q_3=C_3U_3=20\times10^{-6}\times50=1.0\times10^{-3}C$$

7、一空气平行板电容器，极板面积 $S=0.2m^2$，间距 d=1.0cm，充电使其两板电势差 $U_0=3\times10^3V$，然后断开电源再在两极板间充满介质，最后两板间电压降至 1×10^3V，试计算: (1) 原空气电容器电容 C_0； (2) 每一极板上所带电量 Q；

(3) 两板间原电场强度 E_0； (4) 放入介质后的电容和两板间场强 E；

(5) 介质极化后每一面上的极化电荷 Q'； (6) 介质的相对介电常数ε_r？

解: (1) $$C_0=\frac{\varepsilon_0 s}{d}=\frac{8.85\times10^{-12}\times0.2}{1.0\times10^{-2}}=1.77\times10^{-10}F$$

(2) $$Q_0=C_0U_0=1.77\times10^{-10}\times3\times10^3=5.31\times10^{-7}C$$

(3) $$E_0=\frac{U_0}{d}=\frac{3\times10^3}{1.0\times10^{-2}}=3\times10^5\ V/m$$

(4) $$C=\frac{Q}{U}=\frac{5.31\times10^{-7}}{1\times10^3}=5.31\times10^{-10}F$$

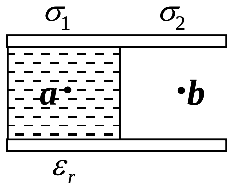
$$E=\frac{U}{d}=\frac{1000}{1\times10^{-2}}=10^5\ V/m$$

(5) $$Q'=\sigma' s=(E_0-E_1)\varepsilon_0 s$$

$$=(3\times10^5-10^5)\times8.85\times10^{-12}\times0.2=3.54\times10^{-7}C$$

(6) $$\varepsilon_r=\frac{C}{C_0}=\frac{5.31\times10^{-10}}{1.77\times10^{-10}}=3$$

8、平行板电容器极板面积为 S，两板间距离为 d，当极板上充以等量异号电荷 Q 后断开电源，然后在电容器的左半面插入相对介电常数为 $\varepsilon_r=3$ 的陶瓷介质板(忽略边缘效应)，求： (1) 极板上的自由电荷面密度分布σ_1、σ_2； (2) 两极板之间 a、b 两点电场强度 E、电位移矢量 D 和极化强度 P； (3) 陶瓷板插入前、后两极板电势差变化多少?



解：（1）左右两边电势差相等 $E_1 d = E_2 d$ $\qquad \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0\varepsilon_r} d = \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r} d \to \dfrac{\sigma_1}{3\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$ (1)

且 $\qquad \sigma_1 \dfrac{S}{2} + \sigma_2 \dfrac{S}{2} = Q \qquad$ (2)

由（1）、（2）解得 $\qquad \sigma_1 = \dfrac{3Q}{2S}, \qquad \sigma_2 = \dfrac{Q}{2S}$

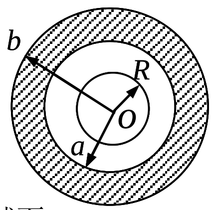
（2）此组合可看作两电容器的并联，电势差相等，距离相等

$$\therefore E_a = E_b = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \qquad D_a = \sigma_1 = \frac{3Q}{2S}, \qquad D_b = \sigma_2 = \frac{Q}{2S}$$

$$P_a = x_e \varepsilon_0 E_a = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E_a = \frac{Q}{S} \qquad P_a = 0\ (\text{真空}\varepsilon_r = 1)$$

(3) $\qquad \Delta U = U - U' = \dfrac{Qd}{\varepsilon_0 S} - \dfrac{Qd}{2\varepsilon_0 S} = \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S} d$

9、半径为 R 的导体球，带有电荷 Q，球外有一均匀电介质的同心球壳，球壳内、外半径分别为 a 和 b，相对介电常数为 ε_r，如图所示，试求： (1) 介质内、外的电位移矢量 D 和电场强度 E ； (2) 介质内的电极化强度 **P** 和介质两表面上的极化电荷面密度σ’； (3) 画出电场线和电位移线，加以比较?



解：（1）由题可知场的分布是球对称，应用高斯定理为半径 r 的同心球面

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q \qquad D = \frac{q}{4\pi r} \qquad E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$r < R \qquad D_1 = 0 \qquad E_1 = 0$

$R < r < a \qquad D_2 = \dfrac{Q}{4\pi r^2}, E_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

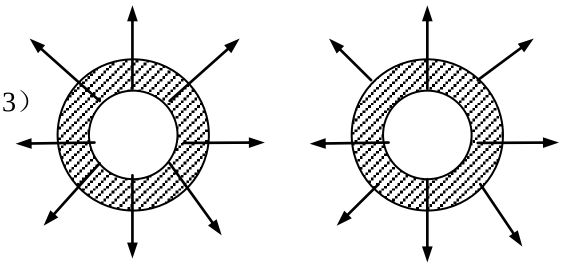
$a < r < b \qquad D_3 = \dfrac{Q}{4\pi r^2}, E_3 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$

$r > b \qquad D_4 = \dfrac{Q}{4\pi r^2}, E_4 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad$ (E, D方向均为径向)

（2）介质内的极化强度 $\quad P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_3 = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} = (1 - \dfrac{1}{\varepsilon_r})\dfrac{Q}{4\pi r^2}$

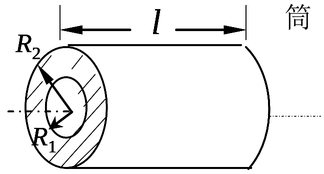
$$\sigma_a' = P_a \cos\pi = -(1 - \frac{1}{\varepsilon_r})\frac{Q}{4\pi a^2}; \quad \sigma_b' = P_b \cos 0^0 = (1 - \frac{1}{\varepsilon_r})\frac{Q}{4\pi b^2}$$

（3）



电位移线　　　　　电场线

10、圆柱形的电容器由半径为R_1的导线和与它同轴的导体圆筒构成， 圆筒的半径为R_2，长为l，其间充满相对介电常数为ε_r 的溶液。设沿轴线单位长度导线上的电荷为 λ，单位长度圆筒上的电荷为–λ。 略去边缘效应，试求:



(1) 介质中电位移矢量 D、电场强度 **E** 和极化强度 **P** ；

(2) 两极的电势差；(3) 介质表面的极化电荷?

解：(1)　应用有介质时高斯定理　$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = D2\pi r l = \lambda l$

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r} \qquad E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} \qquad P = \varepsilon_0 x_e E = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$$

方向：　R_1 指向 R_2

(2)　$$U_1 - U_2 = \int \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{R_2}^{R_1} E\cdot dr = \int_{R_2}^{R_1}\frac{\lambda dr}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} = \frac{\lambda}{2\lambda\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

(3)　$$\sigma_1' = P\cos\pi = -(\varepsilon_r - 1)\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r R_1}, \qquad \sigma_2' = P\cos 0^0 = (\varepsilon_r - 1)\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r R_2}$$

11、一单芯同轴电缆，中心为一半径 R_1=0.5cm 的金属导线，它外围包一层 ε_r=5 的固体介质，最外面是金属包皮。当在此电缆上加上电压后，介质内紧靠内表面处的场强 E_1 为紧靠外表面处的场强 E_2 的 2.5 倍。若介质的击穿场强 E_m=40kV/cm，求此电缆能受的最大电压是多少？

解：设内外圆筒单位长度带电量±λ，则介质中的场强　$E_1 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$

介质内外表面的场强　$E_1 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1}$　　$E_2 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_2}$

根据题意　$E_1 = 2.5E_2$ 可解得　$R_2 = 2.5R_1 = 2.5\times 0.5 = 1.25\text{cm}$

又 E_1 的场强最大，故电压升高后，该处先击穿。令 $E_1 = E_M$，则有

$$\lambda = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 E_M$$

电缆能承受的最大电压

$$U_M=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}dr=R_1E_M\ln\frac{R_2}{R_1}=18.3\text{kV}$$

12、一空气平板电容器的电容 C=1.0 pF，充电到电量为 Q=1.0×10^{-6}C 后将电源切断

(1) 求两极板间的电位差和电场能量；

(2) 将两极板拉到原距离的两倍，试计算拉开前后电场能量的变化；

解：(1) $U=\dfrac{Q}{C}=\dfrac{1.0\times10^{-6}}{1.0\times10^{-12}}=1.0\times10^{6}\,\text{V}$

$$W_e=\frac{Q^2}{2C}=\frac{\left(1.0\times10^{-6}\right)^2}{2\times1.0\times10^{-12}}=0.5\text{J}$$

(2) $C'=\dfrac{\varepsilon_0 S}{2d}=\dfrac{1}{2}C$

$$W'_e=\frac{Q^2}{2C'}=2W_e$$

$$\Delta W_e=W'_e-W_e=W_e=0.5\text{J}$$

13、电量为 Q_0，半径为 R_0 导体球，置于相对介电常数为 ε_r 的介质球壳中，如果介质的内半径为 R_0，外半径为 R，求:

(1) 介质中的电场能量密度；

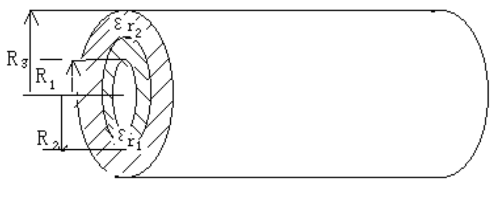
(2) 贮存在介质球壳内的电场能量。

解：(1)能量密度 $\omega=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2$

由于场分布为球对称，应用高斯定理得

$$D=\frac{Q_0}{4\pi r^2}\qquad E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{Q_0}{4\pi r^2\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$\omega=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\left[\frac{Q_0}{4\pi r^2\varepsilon_0\varepsilon_r}\right]^2=\frac{Q_0{}^2}{32\pi^2 r^4\varepsilon_0\varepsilon_r}$$



（2）$W=\int\omega_e dV=\int_{R_0}^{R}\dfrac{Q_0{}^2}{32\pi^2 r^4\varepsilon_0\varepsilon_r}4\pi r^2 dr=\dfrac{Q_0{}^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\dfrac{1}{R_0}-\dfrac{1}{R}\right)$

14、两层相对介电常数分别为 ε_{r1} 和 ε_{r2} 的介质，充满圆柱形电容器两极板之间 (如图)，电容器内、外两极圆筒在单位长度上的带电量分别为 λ 和 $-\lambda$。求:

(1) 单位长度上的电容；

（2）此电容器系统单位长度上的电场的能量。

解:（1）设介质 1 中电场强度为 E_1,介质 2 中的电场强度为 E_2，由于在两介质中电场分布为轴对称，由高斯定理得

$$D=\frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$\therefore\quad E_1=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}r},\qquad E_2=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}r}$$

$$U_1-U_2=\int_{R1}^{R2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}r}dr+\int_{R2}^{R3}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}r}dr$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}}\ln\frac{R_3}{R_2}$$

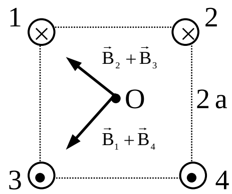
$$C=\frac{Q}{U_1-U_3}=\frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}}\ln\frac{R_3}{R_2}}$$

$$C_0=\frac{C}{l}=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_2}\ln\frac{R_2}{R_1}+\varepsilon_{r_1}\ln\frac{R_3}{R_2}}$$

（2）
$$W_0=\frac{Q^2}{2C_0}=\frac{\lambda^2(\varepsilon_{r_2}\ln\frac{R_2}{R_1}+\varepsilon_{r_1}\ln\frac{R_3}{R_2})}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}}$$

第十章 稳恒电流的磁场 习题参考解答

1、四条相互平行的无限长直载流导线，电流强度均为I，如图放置，若正方形每边长为2a，求正方形中心O点的磁感应强度的大小和方向。



解：$\vec{B}_0=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3+\vec{B}_4$

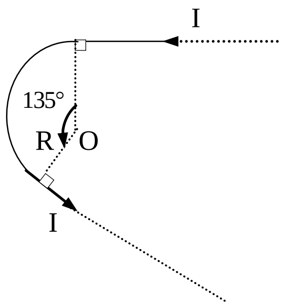
无限长载流直导线产生的磁感应强度 $B=\dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I}{r}$

由图中的矢量分析可得

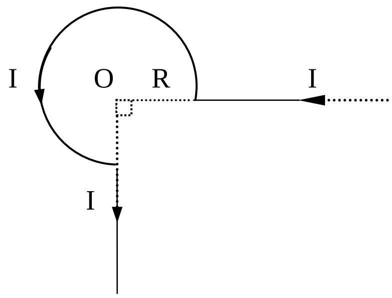
$$B_2+B_4=2\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\sqrt{2}a}=\frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{2}a}$$

$$B_0=2\frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{2}a}\cdot\cos 45^0=\frac{\mu_0}{\pi}\frac{I}{a}$$ 方向水平向左

2、把一根无限长直导线弯成图 (a)、(b) 所示形状，通以电流I，分别求出O点的磁感应强度**B**的大小和方向。



（a）



（b）

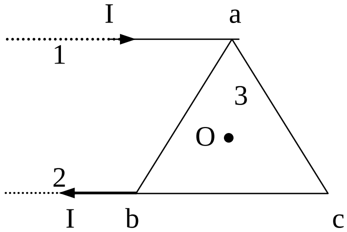
解：（a）（b）均可看成由两个半无限长载流直导线1、3和圆弧2组成，且磁感应强度在O点的方向相同

（a）$B_0=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}+\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}+\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}\cdot\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{\mu_0 I}{16\pi R}(8+3\pi)$ 方向垂直纸面向外。

（b）由于O点在电流1、3的延长线上，所以$\vec{B}_1=\vec{B}_3=0$

$$B_0=B_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\cdot\frac{3\pi}{2}=\frac{3\mu_0 I}{8R}$$ 方向垂直纸面向外。

3、真空中有一边长为ℓ的正三角形导体框架，另有互相平行并与三角形的 bc 边平行的长直导线 1 和 2 分别在 a 点和 b 点与三角形导体框架相连 (如图) 。已知直导线中的电流为 I，求正三角形中心点 O 处的磁感应强度 **B**。



解：三角形高为 $h = l\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}l$

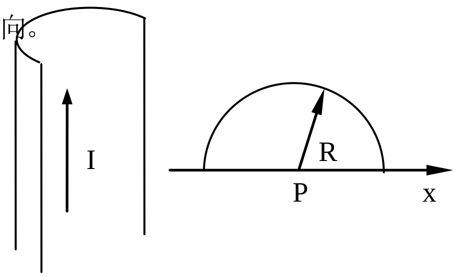
$$\vec{B}_3 = 0$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{2}{3}h} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}l} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi l}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{1}{3}h}(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 60^\circ) = \frac{\mu_0 I}{4\pi l}(2\sqrt{3}-3)$$

$$B_0 = B_1 + B_2 = \frac{3\mu_0 I}{4\pi l}(\sqrt{3}-1)$$

4、在半径为 R=1.0cm 的“无限长”半圆柱形金属片中，自下而上通以电流 I=5.0A，如图所示。试求圆柱轴线任一点 P 处磁感应强度 **B** 的大小和方向。

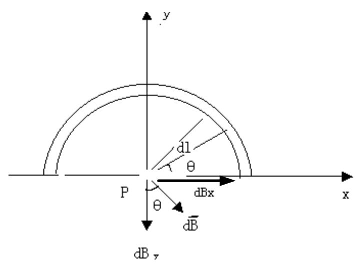


解：该金属薄片可看作由无数无限长直导线元叠加而成，对应于 dl 窄条的无限长直导线的电流为

$$dI = \frac{I}{\pi R}dl = \frac{I}{\pi R}Rd\theta = \frac{I}{\pi}d\theta$$

它在 P 点产生的磁感应强度 dB

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{R} = \frac{\mu_0}{2\pi R}\frac{I}{\pi}d\theta = \frac{\mu_0}{2\pi^2}\frac{I}{R}d\theta \quad 方向如图$$



$$dB_x = dB\sin\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\sin\theta d\theta$$

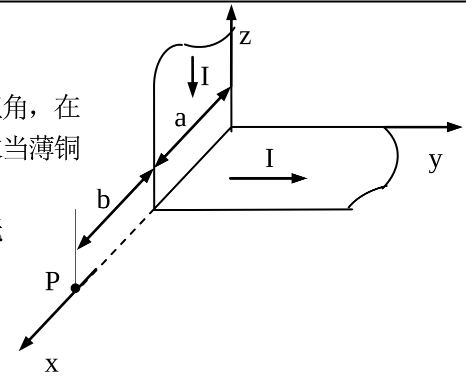
$$dB_y = -dB\cos\theta = -\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\cos\theta d\theta$$

$$B_x = \int dB_x = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

$$B_y = \int dB_y = \int_0^\pi -\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\cos\theta d\theta = 0$$

$$\therefore \quad B_P = B_x = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times5.0}{\pi^2\times1.0\times10^{-2}} = 6.37\times10^{-5}(T)$$

方向为x轴正方向。



5、如图所示，长直薄铜片的宽度 a ，弯成一直角，在角延长线上离铜片一条边距离 b 处有一 P 点。求当薄铜片均匀流过电流 I 时，P 处的磁感应强度。

解：两块半无限长通电薄铜片 1、2，可看成由无数半无限长直导线元叠加而成，导线元电流

$$dI = \frac{I}{a}dx$$

$$dB_1 = \frac{\mu_0 dI}{4\pi(a+b-x)} = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi a(a+b-x)}$$

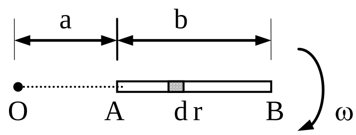
$$B_1 = \int_0^a \frac{\mu_0 I dx}{4\pi a(a+b-x)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\ln\frac{a+b}{a} \qquad \text{方向} -y$$

同理 $B_2 = B_1$ 方向 $-z$

$$B_p = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{2}B_1 = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi a}\ln\frac{a+b}{a}$$

方向yz平面内与y方向成225^0角。

或 $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}\ln\dfrac{a+b}{a}(-\hat{j}-\hat{k})$



6、如图所示，均匀带电刚性细杆 AB，电荷线密度为λ，绕通过 O 点垂直于纸平面的轴以ω角速度匀速转动，(O 点在细杆 AB 延长线上)，求 O 点的磁感应强度。

解：方法一：运动电荷的叠加，根据公式 $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 q\,\vec{v}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi r^2}$

$$dB_0 = \frac{\mu_0 dq\, v}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 \lambda dr\, r\omega}{4\pi r^2}$$

$$B_0 = \int_a^{a+b}\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi r}dr = \frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

方法二：等效载流圆环在圆心的叠加，等效电流 $dI = \dfrac{\omega}{2\pi}\lambda dr$

$$dB_0 = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi r}dr$$

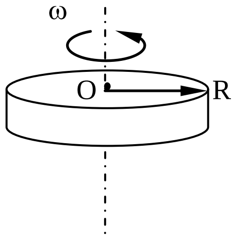
$$B_0 = \int_a^{a+b}\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi r}dr = \frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

7、一塑料圆盘，半径为R，可通过中心垂直于盘面的轴转动，设角速度为ω ，

(1) 当有电量为+q 的电荷均匀分布于圆盘表面时，求圆盘中心O点的磁感应强度**B**;

(2) 此时圆盘的磁距;

(3) 若圆盘表面一半带电+q/2，另一半带电-q/2，求此时O点的磁感应强度**B**。



解:（1）盘的电荷密度为 $\sigma=\dfrac{q}{\pi R^2}$ ，取半径为r、宽度为dr的圆环元，带电量为$dq=\sigma 2\pi r dr$ ，等效电流为

$$dI=\frac{\omega}{2\pi}dq=\sigma\omega\, r\, dr$$

在圆心处产生的磁感应强度为

$$dB=\frac{\mu_0 dI}{2r}=\frac{\mu_0}{2r}\sigma\omega\, r dr=\frac{1}{2}\mu_0\omega\sigma dr$$

$$B_0=\int dB=\int_0^R\frac{1}{2}\mu_0\omega\sigma dr=\frac{1}{2}\mu_0\omega\sigma R=\frac{\mu_0\omega q}{2\pi R}$$ 方向垂直圆盘向上

（2）上述细环的磁矩 $dP_m=SdI=\pi r^2 dI=\dfrac{\omega q}{R^2}r^3 dr$

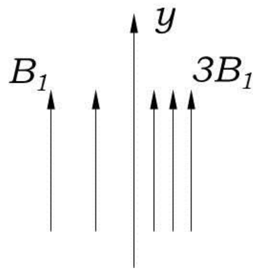
则圆盘的总磁矩 $P_m=\int dP_m=\int_0^R\dfrac{\omega q}{R^2}r^3 dr=\dfrac{1}{4}q\omega R^2$

（3）由于盘一半带正电，一半带负电，当圆盘旋转时，相当于两个方向相反的电流，所以在盘心处合磁场为零。

8、一无限大均匀载流平面置于外场中，左侧磁感应强度量值为B_1，右侧磁感应强度量值为$3B_1$，方向如图所示。试求:

(1) 载流平面上的面电流密度$\vec{i}$;

(2) 外场的磁感应强度B。



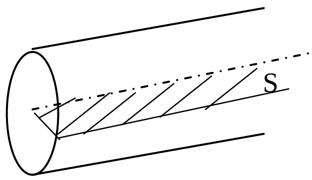
解:

$$B_1=B_0-\frac{1}{2}\mu_0 i$$

$$3B_1=B_0+\frac{i}{2}\mu_0$$

$$2B_1=\mu_0 i\Rightarrow i=\frac{2B_1}{\mu_0}$$

$$B_1=B_0-\frac{1}{2}\mu_0 i=B_0-B_1\Rightarrow B_0=2B_1$$



9、一根很长的铜线均匀通以电流 I = 10A，在导线内部作一平面，如图所示。求通过平面 S 单位长度上的磁通量。

解： 由安培环路定律可求得圆柱内任意一点的 B

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

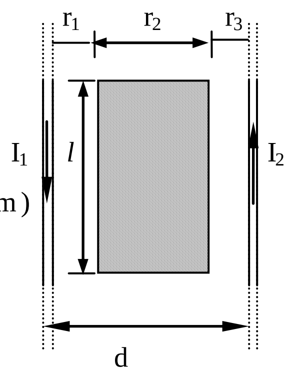
$$B 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2}\cdot \pi r^2$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\,r}{R^2}$$

在距圆柱轴线为 r 与 r+dr 处取一面积元 dS，通量为

$$d\Phi = \vec{B}\cdot d\vec{S} = B\,dS$$

$$\Phi = \int BdS = \int_0^R \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Ir}{R^2}dr = \frac{\mu_0 I}{4\pi} = 10^{-6}(Wb)$$



10、两平行长直导线相距 d = 40cm，每根导线载有电流 $I_1 = I_2$=20A，如图所示。求:

(1) 两导线所在平面内任意一点的磁感应强度 **B** ；

(2) 通过图中斜线所示面积的磁通量（$r_1 = r_3$=10cm ，l=25cm）

解（1）两导线产生的磁场在 P 点的方向相同, 设 P 点离 I_1 为 x

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-x)}$$

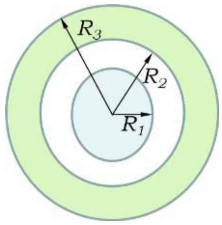
（2）取面积元 $dS = l dx$

$$d\Phi = \vec{B}\cdot d\vec{S} = BdS = [\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-x)}]\,l dx$$

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{r_1}^{r_1+r_2}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}l dx + \int_{r_1}^{r_1+r_2}\frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-x)}l dx = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi}\ln\frac{r_1+r_2}{r_1} + \frac{\mu_0 I_2 l}{2\pi}\ln\frac{d-r_1}{d-r_1-r_2}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 l}{\pi}\ln\frac{d-r_1}{r_1} = 2.2\times 10^{-6}\text{韦伯}$$

11、一根很长的同轴电缆，由一导体圆柱 (半径为 R_1) 和同一轴的导体圆管 (内、外半径分别为 R_2 和 R_3) 构成，使用时使电流 I 从导体圆柱流出，从导体圆管流回。设电流都是均匀地分布在导体的横截面上，求磁感应强度的分布。



解：由于电流分布具有轴对称性，可用安培环路定律求解

$r < R_1$ $\quad B \cdot 2\pi r = \mu_0 \dfrac{I\pi r^2}{\pi R_1^2} = \dfrac{\mu_0 I r^2}{R_1^{\ 2}}$ $\quad \therefore B_1 = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$

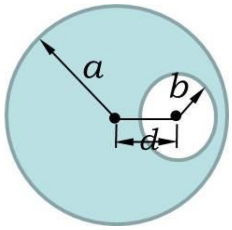
$R_1 < r < R_2$ $\quad B 2\pi r = \mu_0 I$ $\quad B_2 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$R_2 < r < R_3$ $\quad B \cdot 2\pi r = \mu_0 (I - \dfrac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} I)$ $\quad B_3 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}(\dfrac{R_3{}^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2})$

$r > R_3$ $\quad \oint_{(4)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I = \mu_0 (I - I) = 0$ $\quad B_4 = 0$

12、如图所示，在半径为 a 的圆柱形长直导线中挖有一半径为 b 的圆柱形空管（a.>2b）,空管轴线与柱体轴线平行，相距为 d ，当电流仍均匀分布在横截面上且电流为 I 时，求空管内磁感应强度 B 的分布。

解：空管的存在使电流分布失去对称性，采用“填补法”将空管部分等效为同时存在电流密度为 j 和-j 的电流，其中 $j = \dfrac{I}{\pi(a^2 - b^2)}$ 这样，空间任一点的磁场 B 可以看成由半径为 a、电流密度为 j 的长圆柱形导体产生的磁场 B_1 和半径为 b、电流密度为 -j 的长圆柱形导体产生的磁场 B_2 的矢量和，



设 P 点到大圆柱和小圆柱轴线的距离分别为 R 和 r，由安培环路定理得

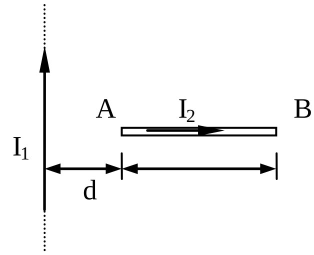
$$B_1 = \frac{\mu_0}{2} Rj \qquad B_2 = \frac{\mu_0}{2} rj$$

其中 $\vec{B}_1$ 与 $\vec{R}$ 垂直，$\vec{B}_2$ 与 $\vec{r}$ 垂直，由余弦定理得

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2 - 2B_1 B_2 \cos\alpha = \frac{\mu_0^2 R^2 j^2}{4} + \frac{\mu_0^2 r^2 j^2}{4} - \frac{2\mu_0^2 j^2 Rr}{4} \cdot \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr}$$

由此得空管内 P 点的磁感应强度为 $B = \dfrac{\mu_0 dj}{2} = \dfrac{\mu_0 d}{2} \cdot \dfrac{I}{\pi(a^2 - b^2)}$

方向与两轴线连线相垂直。



13、无限长直导线通过电流 I_1，在其旁边放一导线 AB，长为 l，与 I_1 共面并相互垂直，通以电流 I_2，试求:

(1) AB 导线受到的力的大小与方向;

(2) 当棒 A 端固定，则导线 AB 对 A 点的磁力距等于多少?

解:（1）在 I_2 上取 I_2dx，其受力方向垂直 AB 向上

$$dF = I_2 dx B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}dx,$$

$$F = \int dF = \int_d^{d+l}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{d+l}{d}$$

（2）I_2dx 受到的磁力矩为

$$dM = (x-d)\,dF = (x-d)\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}dx$$

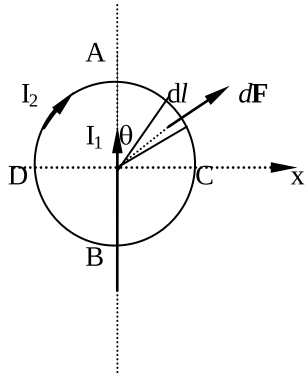
$$M = \int dM = \int_d^{l+d}(x-d)\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}(1-d\ln\frac{d+l}{d})$$

14、有一无限长载流直导线，通以电流 I_1。另有一半径为 R 的圆形电流 I_2，其直径 AB 与电流 I_1 重合，在相交处绝缘，求:

(1) 半圆 ACB 受力大小和方向

(2) 整个圆形电流 I_2 所受合力大小和方向

(3) 线圈所受磁力矩。



解:（1）在半圆上取一圆弧 dl，受力为

$$dF = I_2 dl B_1 \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}I_2 dl$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R\sin\theta}\cdot Rd\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\sin\theta}d\theta$$

$$dF_x = dF\sin\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\sin\theta}d\theta\sin\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\theta}d\theta$$

$dF_y = dF\cos\theta$　　由于对称性分析 $\int dF_y = 0$

所以 $F_{ACB} = \int dF_x = \int_0^{\pi}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}d\theta = \frac{1}{2}\mu_0 I_1 I_2$　　方向沿x轴的正方向。

（2）同理可求 BDA 半圆受力

$$F_{BDA} = \frac{1}{2}\mu_0 I_1 I_2$$　方向沿x正方向。

$$F = F_{ACB} + F_{BDA} = 2F_x = \mu_0 I_1 I_2$$

(3) $dM_m = x\,dF_y$　　由对称性分析可知　M=0

15 设电视显像管射出的电子束沿水平方向由南向北运动，电子能量为 12 000eV，地球磁场的垂直分量向下，大小为 $B=5.5\times10^{-5}Wb/m^2$，问:

(1) 电子束将偏向什么方向?

(2) 电子的加速度为多少?

(3) 电子束在显象管内在南北方向上通过 20cm 时将偏转多远?

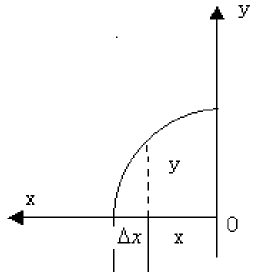


图11-12

解：(1) 由洛仑兹力的方向判断电子束向东偏转

（2）由电子的动能可求其速度

$$V=\sqrt{\frac{2E}{m}}=\sqrt{\frac{2\times12000\times1.6\times10^{-19}}{9.11\times10^{-31}}}=6.48\times10^{7}\ m/s$$

电子在磁场中受洛仑兹力的作用而作圆周运动，向心加速度为

$$a_n=\frac{F}{m}=\frac{BeV}{m}=\frac{5.5\times10^{-5}\times1.6\times10^{-19}\times6.48\times10^{7}}{9.11\times10^{-31}}=6.2\times10^{14}\ m/s^2$$

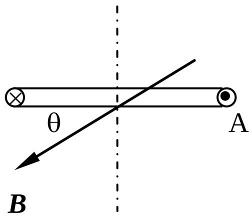
（3）电子运动的轨迹为圆，半径为 R

$$\boldsymbol{R=\frac{mV}{eB}=\frac{9.11\times10^{-31}\times6.48\times10^{7}}{1.6\times10^{-19}\times5.5\times10^{-5}}=6.4(m)}$$

由图可知当电子在南北方向前进 y 时，它将偏转Δx

$$\Delta x=R-\sqrt{R^2-y^2}=6.4-\sqrt{(6.4)^2-(0.2)^2}=2.98mm$$

16、水平桌面上放置一个绕有 N 匝的圆线圈，其半径为 R，质量为 m，通有电流 I，由上往下看，电流为顺时针方向。若已知该处地磁场的磁感应强度为 B，其方向为向北且偏向下，与水平方向成一倾角θ （如图所示)。问当电流 I 超过多大时，线圈可从桌面上翘起？翘起的是哪一侧?



解：通电线圈受到的磁力矩

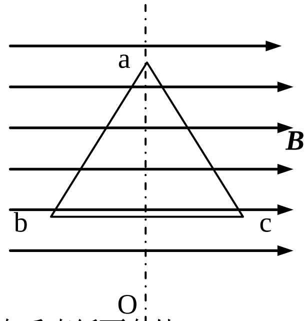
$$M=P_mB\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=NI\pi R^2\cos\theta B$$

此力矩使线圈绕 A 点转动

线圈对 A 点的重力矩 $M'=mgR$

线圈能翘起，应满足 $M\ge M'$

所以 $I_{min}=\dfrac{mg}{BN\pi R\cos\theta}$



17、边长为 ℓ=0.1m 的正三角形线圈放在磁感应强度 B=1T 的均匀磁场中，如图所示。使线圈通以电流 I=10A，求:

(1) 每边所受的力　　(2) 磁力矩大小

(3) 从所在位置转到线圈平面与磁场垂直时磁力所作的功。

解:（1）根据安培力公式 $d\vec{F}=Id\vec{l}\times\vec{B}$

$$ac: F_{ac}=IlB\sin 60^0=10\times0.1\times1\times0.866=0.866(N)$$ 方向垂直纸面向外

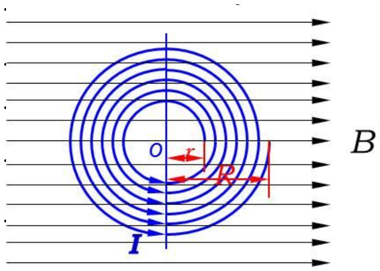
$$ba: F_{ba}=IlB\sin 60^0=0.866(N)$$ 方向垂直纸面向里

$$cb: F_{cb}=IlB\sin\pi=0$$

(2) $\vec{M}=\vec{P}\times\vec{B}$　　$M=ISB\sin(\vec{n},\vec{B})=10\times\frac{1}{2}\times0.1\times0.1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin 90^0=4.33\times10^{-2}$(牛·米)

（3）$A=I\Delta\Phi=I(\Phi-\Phi_0)=I(BS\cos0^0-BS\cos\frac{\pi}{2})=IB\frac{1}{2}l\cdot l\sin60^0$

$$=10\times1\times\frac{1}{2}\times0.1\times0.1\times0.866=4.33\times10^{-2}(J)$$



18、总匝数为 N 的均匀密绕平面螺旋线圈，半径由 r 绕至 R，通有电流 I，放在磁感应强度为 B 的均匀磁场中，磁场方向与线圈平面平行，如图所示。试求:

（1）平面线圈的磁矩;

（2）线圈在该位置所受到的磁力矩;

（3）线圈在磁力矩作用下转到平衡位置过程中，磁力矩所做的功。

解:（1）在距中心距离 ρ 处，取宽度为 $d\rho$ 的细圆环线圈的匝数　$dN=\frac{N}{R-r}d\rho$

其磁矩为　$dP_m=IdN\pi\rho^2=\frac{N}{R-r}I\pi\rho^2d\rho$

整个线圈的磁矩　$P_m=\int dP_m=\int_r^R\frac{N}{R-r}I\pi\rho^2d\rho=\frac{1}{3}NI\pi(R^2+Rr+r^2)$

（2）磁力矩　$M=P_mB\sin90^0=\frac{1}{3}NI\pi B(R^2+Rr+r^2)$

（3）任何位置的磁力矩　$M=P_mB\sin\varphi$

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}Md\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}P_mB\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)d\theta=\frac{1}{3}\pi NIB\left(R^2+Rr+r^2\right)$$