高等数学（下）考试重点总结

第十章　空间解析几何与向量代数

1、　二次曲面

1）　椭圆锥面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$

2）　椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$　　旋转椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

3）　单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$　　双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

4）　椭圆抛物面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$　　双曲抛物面（马鞍面）：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$

5）　椭圆柱面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　　双曲柱面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

6）　抛物柱面：$x^2=ay$

（二）平面及其方程

1、　点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

法向量：$\vec{n}=(A,B,C)$，过点(x_0,y_0,z_0)

2、　一般式方程：$Ax+By+Cz+D=0$

截距式方程：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

3、　两平面的夹角：$\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$\Pi_1\perp\Pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$　；　$\Pi_1 // \Pi_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

4、　点$P_0(x_0,y_0,z_0)$到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

（三） 空间直线及其方程

1、 一般式方程：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

2、 对称式（点向式）方程：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

方向向量：$\vec{s}=(m,n,p)$，过点 (x_0,y_0,z_0)

3、 两直线的夹角：$\vec{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$，$\vec{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$，

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

$L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \quad m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$ ；$L_1 // L_2 \Leftrightarrow \quad \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$

4、 直线与平面的夹角：直线与它在平面上的投影的夹角，

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$L//\Pi \Leftrightarrow \quad Am+Bn+Cp=0$ ；$L\perp\Pi \Leftrightarrow \quad \dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$

第十一章 多元函数微分学

1、 连续：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

2、 偏导数：

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\ ;\ f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

3、 方向导数：

$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$ 其中 α,β 为 l 的方向角。

4、 梯度：$z=f(x,y)$，则 $grad f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j}$。

5、 全微分：设 $z=f(x,y)$，则 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$

（一） 性质

1、 函数可微，偏导连续，偏导存在，函数连续等概念之间的关系：

2、 微分法

1） 复合函数求导：链式法则

若 $z=f(u,v),u=u(x,y),v=v(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

（二） 应用

1） 求函数 $z=f(x,y)$ 的极值 解方程组 $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$ 求出所有驻点，对于每一个驻点 (x_0,y_0)，令

$A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$，

① 若 $AC-B^2>0$，$A>0$，函数有极小值， 若 $AC-B^2>0$，$A<0$，函数有极大值；

② 若 $AC-B^2<0$，函数没有极值；

③ 若 $AC-B^2=0$，不定。

2、 几何应用

1） 曲线的切线与法平面

曲线 $\Gamma:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$，则 Γ 上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$（对应参数为 t_0）处的

切线方程为：$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$

法平面方程为：$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

2） 曲面的切平面与法线

曲面 $\Sigma:F(x,y,z)=0$，则 Σ 上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为：

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为：$\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

第十二章　多元函数的积分及其应用

（一） 二重积分 ：几何意义：曲顶柱体的体积

1、 定义：$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$

2、 计算：

1） 直角坐标

$$D=\left\{(x,y)\left|\begin{matrix}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{matrix}\right.\right\},\quad \iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$D=\left\{(x,y)\left|\begin{matrix}\phi_1(y)\le x\le\phi_2(y)\\ c\le y\le d\end{matrix}\right.\right\},\quad \iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

2） 极坐标

$$D=\left\{(\rho,\theta)\left|\begin{matrix}\rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta)\\ \alpha\le\theta\le\beta\end{matrix}\right.\right\},\quad \iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho$$

（二） 三重积分

1、 定义：$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k$

2、 计算：

1） 直角坐标

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$ ------------“先一后二”

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\int_a^b \mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$ ------------“先二后一”

2） 柱面坐标

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=z\end{cases},\quad \iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\iiint_\Omega f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

3） 球面坐标

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\iiint_\Omega f(r\sin\phi\cos\theta,r\sin\phi\sin\theta,r\cos\phi)r^2\sin\phi\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$$

（三） 应用

曲面$S:z=f(x,y),(x,y)\in D$的面积：

$$A=\iint_D\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

第十三章　向量函数的积分

（一） 对弧长的曲线积分

1、　定义：$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$

2、　计算：

设$f(x,y)$在曲线弧L上有定义且连续，L的参数方程为$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t),\end{cases}\quad(\alpha\le t\le\beta)$，其中$\varphi(t),\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有一阶连续导数，且$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\phi(t),\psi(t)]\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t\quad,\quad(\alpha<\beta)$$

（二） 对坐标的曲线积分

1、　定义：设 L 为 xoy 面内从 A 到 B 的一条有向光滑弧，函数$P(x,y)$，$Q(x,y)$在 L 上有界，定义

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k\ ,\ \int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\ .$$

向量形式：$\int_L \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

2、　计算：

设$P(x,y),Q(x,y)$在有向光滑弧L上有定义且连续，L的参数方程为

$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t),\end{cases}\quad(t:\alpha\to\beta)$，其中$\varphi(t),\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有一阶连续导数，且$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\{P[\phi(t),\psi(t)]\phi'(t)+Q[\phi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

3、　两类曲线积分之间的关系：

设平面有向曲线弧为 L：$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，$L$上点$(x,y)$处的切向量的方向角为：$\alpha,\beta$，

$$\cos\alpha=\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}},\ \cos\beta=\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}},$$

则 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\mathrm{d}s$.

（三） 格林公式

1、 格林公式：设区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成，函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 上具有连续一阶偏导数，

则有 $\iint\limits_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint\limits_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

2、G 为一个单连通区域，函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 G 上具有连续一阶偏导数，

则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \Leftrightarrow$ 曲线积分 $\int\limits_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关

（四） 对面积的曲面积分

1、 定义：

设 Σ 为光滑曲面，函数 $f(x,y,z)$ 是定义在 Σ 上的一个有界函数，

定义 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

2、 计算：———“一单二投三代入”

$\Sigma: z = z(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x{}^2(x,y)+z_y{}^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

（五） 对坐标的曲面积分

1、 定义：

设 Σ 为有向光滑曲面，函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 是定义在 Σ 上的有界函数，定义

$\iint_\Sigma R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$ 同理，

$\iint_\Sigma P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$ ；$\iint_\Sigma Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$

2、 性质：

1）$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$，则

$$\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_{\Sigma_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

计算：——“一投二代三定号”

$\Sigma: z=z(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$，$z=z(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数，$R(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则

$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 为上侧取“ + ”，Σ 为下侧取“ - ”.

3、 两类曲面积分之间的关系：

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

其中 α,β,γ 为有向曲面 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向角。

（六） 高斯公式

1、 高斯公式：设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，Σ 的方向取外侧，函数 P,Q,R 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则有

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

或 $\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$

2、 通量与散度

通量：向量场 $\vec{A}=(P,Q,R)$ 通过曲面 Σ 指定侧的通量为：$\Phi=\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

散度：$div\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$

（七） 斯托克斯公式

1、 斯托克斯公式：设光滑曲面 Σ 的边界 Γ 是分段光滑曲线，Σ 的侧与 Γ 的正向符合右手法则，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在包含 Σ 在内的一个空间域内具有连续一阶偏导数，则有

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

为便于记忆，斯托克斯公式还可写作：

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

2、 环流量与旋度

环流量：向量场 $\vec{A}=(P,Q,R)$ 沿着有向闭曲线 Γ 的环流量为 $\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$

旋度：$rot\,\vec{A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$

第十四章　傅里叶级数

1）　定义：

正交系：$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \Lambda, \sin nx, \cos nx \Lambda$ 函数系中任何不同的两个函数的乘积在区间$[-\pi, \pi]$上积分为零。

傅里叶级数：$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

系数：$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\Lambda) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,\Lambda) \end{cases}$

2）　收敛定理：(展开定理)

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，并满足狄利克雷（ Dirichlet ）条件：

1）在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点；

2）在一个周期内只有有限个极值点，

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=\begin{cases} f(x), & x\text{为连续点} \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{为间断点} \end{cases}$$

3）　傅里叶展开：

①求出系数：$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\Lambda) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,\Lambda) \end{cases}$；

②写出傅里叶级数 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$；

③根据收敛定理判定收敛性。