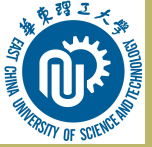


## ★2.5 分离变量法-Laplace 方程的定解问题



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 1 of 22

[Go Back](#)

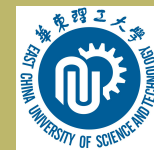
[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

## ★2.5 分离变量法-Laplace 方程的定解问题

### 矩阵上Laplace方程的定解问题



Home Page

Title Page



Page 1 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit



## ★2.5 分离变量法-Laplace 方程的定解问题

### 矩阵上Laplace方程的定解问题

考虑由下述定解问题描述的矩形平板( $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ )上的温度分布的平衡状态:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, 0 < y < b, \\ u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b \\ u(x, 0) = f(x), u(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

其中 $f(x)$ 是已知的连续函数, 且满足相容性条件 $f(0) = f(a) = 0$ .

分析: 有界区域上的齐次方程, 齐次边界条件的定解问题, 可以选用分离变量法求解

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 1 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

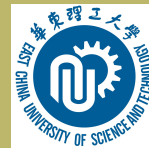
解:

- 变量分离, 令  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ , 代入方程得

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

比值为常数记为  $-\lambda$ , 即

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \end{cases}$$



Home Page

Title Page



Page 2 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit

解:

- 变量分离, 令  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ , 代入方程得

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

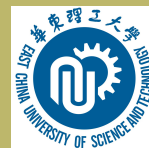
比值为常数记为  $-\lambda$ , 即

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \end{cases}$$

- 利用边界条件(选齐次的边界条件), 得到特征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < a \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

由例2.3.1  $\Rightarrow$  特征值为:



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit

解:

- 变量分离, 令  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ , 代入方程得

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

比值为常数记为  $-\lambda$ , 即

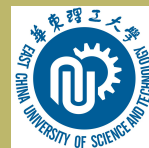
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \end{cases}$$

- 利用边界条件(选齐次的边界条件), 得到特征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < a \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

由例2.3.1  $\Rightarrow$  特征值为:  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = \beta_n^2 > 0, n = 1, 2, \dots$

对应的特征函数为:  $X_n(x) = \sin \beta_n x, n = 1, 2, \dots$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 22

Go Back

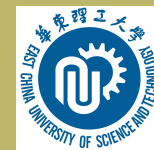
Full Screen

Close

Quit

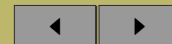
- 将 $\lambda_n$ 的表达形式代入 $Y$ 的方程。可得通解为

$$Y_n(y) = C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}, n = 1, 2, \dots$$



Home Page

Title Page



Page 3 of 22

Go Back

Full Screen

Close

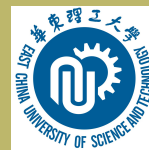
Quit

- 将 $\lambda_n$ 的表达形式代入 $Y$ 的方程。可得通解为

$$Y_n(y) = C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}, n = 1, 2, \dots$$

得到一系列特解

$$u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = (C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}) \sin \beta_n x, n = 1, 2, \dots$$



Home Page

Title Page



Page 3 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- 将 $\lambda_n$ 的表达形式代入 $Y$ 的方程。可得通解为

$$Y_n(y) = C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}, n = 1, 2, \dots$$

得到一系列特解

$$u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = (C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}) \sin \beta_n x, n = 1, 2, \dots$$

- 将特解叠加(特解满足线性齐次方程, 齐次边界条件)

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}) \sin \beta_n x$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 3 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 将 $\lambda_n$ 的表达形式代入 $Y$ 的方程。可得通解为

$$Y_n(y) = C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}, n = 1, 2, \dots$$

得到一系列特解

$$u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = (C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}) \sin \beta_n x, n = 1, 2, \dots$$

- 将特解叠加(特解满足线性齐次方程, 齐次边界条件)

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}) \sin \beta_n x$$

- 利用Fourier级数确定系数 $C_n$ 和 $D_n$ , 由边界条件知

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + D_n) \sin \beta_n x \\ u(x, b) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{\beta_n b} + D_n e^{-\beta_n b}) \sin \beta_n x \end{cases}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 3 of 22

Go Back

Full Screen

Close

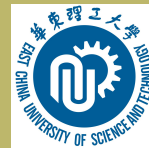
Quit

利用特征函数的正交性，所以可得

$$\begin{cases} C_n + D_n = f_n, \\ C_n e^{\beta_n b} + D_n e^{-\beta_n b} = 0 \end{cases}$$

其中

$$f_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(z) \sin \beta_n z dz$$



Home Page

Title Page



Page 4 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit



利用特征函数的正交性，所以可得

$$\begin{cases} C_n + D_n = f_n, \\ C_n e^{\beta_n b} + D_n e^{-\beta_n b} = 0 \end{cases}$$

其中

$$f_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(z) \sin \beta_n z dz$$

解得

$$C_n = -\frac{e^{-\beta_n b}}{e^{\beta_n b} - e^{-\beta_n b}} f_n, D_n = \frac{e^{\beta_n b}}{e^{\beta_n b} - e^{-\beta_n b}} f_n$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 4 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

利用特征函数的正交性，所以可得

$$\begin{cases} C_n + D_n = f_n, \\ C_n e^{\beta_n b} + D_n e^{-\beta_n b} = 0 \end{cases}$$

其中

$$f_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(z) \sin \beta_n z dz$$

解得

$$C_n = -\frac{e^{-\beta_n b}}{e^{\beta_n b} - e^{-\beta_n b}} f_n, D_n = \frac{e^{\beta_n b}}{e^{\beta_n b} - e^{-\beta_n b}} f_n$$

定解问题的解为

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\operatorname{sh} \beta_n (b - y)}{\operatorname{sh} \beta_n b} \int_0^a f(z) \sin \beta_n z dz \right] \sin \beta_n x$$



## 分离变量法的一般步骤

- 判断方程和边界条件是否是齐次的，如果是，可利用分离变量法求解
- 先做变量分离(即写成独立变量函数相乘的形式)
- 代入齐次方程和齐次边界条件可得特征值问题,从而特判断出特征值和特征函数
- 得到特解（特解满足齐次方程和齐次边界条件），将特解进行叠加
- 叠加的系数可由初值条件确定。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[«](#) [»](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 5 of 22

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 熟练掌握特征展开法和分离变量法
- 在有界区域定解问题中，当边界条件是齐次的时候，可以利用特征展开法求解
- 在有界区域定解问题中，当方程和边界条件都是齐次的时候，既可以利用分离变量法也可以利用特征展开法求解
- 无论特征展开法还是分离变量法都要求边界条件是齐次
- 当边界条件是非齐次的时候，如何求解呢，其基本思想就是想办法将非齐次的边界条件转化为齐次边界条件，如何进行转化呢，这就是2.6节的主要内容

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 6 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



回家作业：

利用分离变量方法求解

$$2.14、(2) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, 0 < y < b \\ u(0, y) = 0, u_x(a, y) = ay, & 0 \leq y \leq b \\ u(x, 0) = 0, u(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

$$2.17、(2) \begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 2, t > 0 \\ u(0, t) = u(2, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{2} \sin \pi x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit



## ★2.6非齐次边界条件的处理



Home Page

Title Page



Page 8 of 22

Go Back

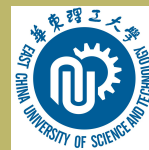
Full Screen

Close

Quit

## ★2.6非齐次边界条件的处理

对带有非齐次边界条件的定解问题，我们寻求适当的变换，使之归结为齐次边界条件的情形。



[Home Page](#)

[Title Page](#)



*Page 8 of 22*

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



## ★2.6非齐次边界条件的处理

对带有非齐次边界条件的定解问题，我们寻求适当的变换，使之归结为齐次边界条件的情形。

设有定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = u_1(t), u(l, t) = u_2(t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.6.1)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



## ★2.6非齐次边界条件的处理

对带有非齐次边界条件的定解问题，我们寻求适当的变换，使之归结为齐次边界条件的情形。

设有定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = u_1(t), u(l, t) = u_2(t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.6.1)$$

### ● 作变换

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

使得函数 $v(x, t)$ 满足齐次边界条件

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



## ★2.6非齐次边界条件的处理

对带有非齐次边界条件的定解问题，我们寻求适当的变换，使之归结为齐次边界条件的情形。

设有定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = u_1(t), u(l, t) = u_2(t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.6.1)$$

### ● 作变换

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

使得函数 $v(x, t)$ 满足齐次边界条件

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = a^2 w_{xx} - w_{tt} + f(x, t), & 0 < x < l, t > 0, \\ v(0, t) = u_1(t) - w(0, t), u(l, t) = u_2(t) - w(l, t), & t \geq 0, \\ v(x, 0) = \phi(x) - w(x, 0), v_t(x, 0) = \psi(x) - w_t(x, 0), & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



## ★2.6非齐次边界条件的处理

对带有非齐次边界条件的定解问题，我们寻求适当的变换，使之归结为齐次边界条件的情形。

设有定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = u_1(t), u(l, t) = u_2(t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.6.1)$$

### ● 作变换

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

使得函数 $v(x, t)$ 满足齐次边界条件

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = a^2 w_{xx} - w_{tt} + f(x, t), & 0 < x < l, t > 0, \\ v(0, t) = u_1(t) - w(0, t), u(l, t) = u_2(t) - w(l, t), & t \geq 0, \\ v(x, 0) = \phi(x) - w(x, 0), v_t(x, 0) = \psi(x) - w_t(x, 0), & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 即要求  $w(0, t) = u_1(t)$ ,  $w(l, t) = u_2(t)$  (只要  $w(x, t)$  在边界上满足这个条件即可,  $w(x, t)$  的表达形式可能有很多, 这里介绍一种确定方法) 因为两点可以确定一条直线, 所以可以取  $w(x, t) = A(t)x + B(t)$ , 由此可解出

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 9 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 即要求  $w(0, t) = u_1(t)$ ,  $w(l, t) = u_2(t)$  (只要  $w(x, t)$  在边界上满足这个条件即可,  $w(x, t)$  的表达形式可能有很多, 这里介绍一种确定方法) 因为两点可以确定一条直线, 所以可以取  $w(x, t) = A(t)x + B(t)$ , 由此可解出

$$w(x, t) = \frac{1}{l}[u_2(t) - u_1(t)]x + u_1(t)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 9 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)





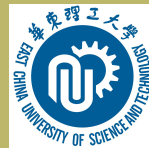
- 即要求  $w(0, t) = u_1(t)$ ,  $w(l, t) = u_2(t)$  (只要  $w(x, t)$  在边界上满足这个条件即可,  $w(x, t)$  的表达形式可能有很多, 这里介绍一种确定方法) 因为两点可以确定一条直线, 所以可以取  $w(x, t) = A(t)x + B(t)$ , 由此可解出

$$w(x, t) = \frac{1}{l}[u_2(t) - u_1(t)]x + u_1(t)$$

- 把  $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$  以及所求的  $w(x, t)$  代入(2.6.1)就可得到  $v$  所满足的齐次边界条件的定解问题, 利用前面介绍的特征展开或分离变量法求解  $v(x, t)$ , 最终得到问题(2.6.1)的解  $u$ .

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 9 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

类似地，可将其他类型的非齐次边界条件齐次化，如果边界条件是下述情况之一，则可分别取出相应的函数 $w(x, t)$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 10 of 22

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

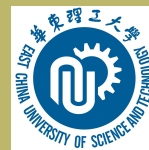
[Close](#)

[Quit](#)

类似地，可将其他类型的非齐次边界条件齐次化，如果边界条件是下述情况之一，则可分别取出相应的函数 $w(x, t)$

- (1)边界条件 $u(0, t) = u_1(t)$ ,  $u_x(l, t) = u_2(t)$ (已知所经过的一点以及另一点的斜率).可取

$$w(x, t) = u_2(t)x + u_1(t)$$



Home Page

Title Page



Page 10 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit

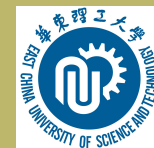
类似地，可将其他类型的非齐次边界条件齐次化，如果边界条件是下述情况之一，则可分别取出相应的函数 $w(x, t)$

- (1)边界条件 $u(0, t) = u_1(t), u_x(l, t) = u_2(t)$ (已知所经过的一点以及另一点的斜率).可取

$$w(x, t) = u_2(t)x + u_1(t)$$

- (2)边界条件 $u_x(0, t) = u_1(t), u(l, t) = u_2(t)$ , (已知所经过的一点以及另一点的斜率)可取

$$w(x, t) = u_1(t)(x - l) + u_2(t)$$



Home Page

Title Page



Page 10 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit

类似地，可将其他类型的非齐次边界条件齐次化，如果边界条件是下述情况之一，则可分别取出相应的函数 $w(x, t)$

- (1) 边界条件 $u(0, t) = u_1(t), u_x(l, t) = u_2(t)$ (已知所经过的一点以及另一点的斜率).可取

$$w(x, t) = u_2(t)x + u_1(t)$$

- (2) 边界条件 $u_x(0, t) = u_1(t), u(l, t) = u_2(t)$ , (已知所经过的一点以及另一点的斜率)可取

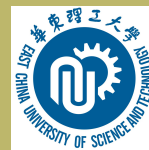
$$w(x, t) = u_1(t)(x - l) + u_2(t)$$

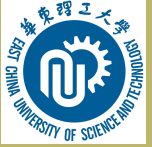
- (3) 边界条件 $u_x(0, t) = u_1(t), u_x(l, t) = u_2(t)$ , (已知所经过的两点的斜率)可取

$$w(x, t) = \frac{u_2(t) - u_1(t)}{2l}x^2 + u_1(t)x.$$

- (4) 边界条件 $u(0, t) = u_1(t), (u_x + \sigma u)(l, t) = u_2(t)$ ,可取

$$w(x, t) = \frac{u_2(t) - \sigma u_1(t)}{1 + \sigma l}x + u_1(t);$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 10 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- (5)边界条件为 $u_x(0, t) = u_1(t)$ ,  $(u_x + \sigma u)(l, t) = u_2(t)$ ,可取

$$w(x, t) = u_1(t)x + \frac{1}{\sigma}[u_2(t) - (1 + \sigma l)u_1(t)];$$

- (6)边界条件为 $(u_x - \sigma u)(0, t) = u_1(t)$ ,  $u(l, t) = u_2(t)$ ,可取

$$w(x, t) = \frac{u_1(t) + \sigma u_2(t)}{1 + \sigma l}x + \frac{u_2(t) - lu_1(t)}{1 + \sigma l};$$

- (7)边界条件为 $(u_x - \sigma u)(0, t) = u_1(t)$ ,  $u_x(l, t) = u_2(t)$ ,可取

$$w(x, t) = u_2(t)x + \frac{u_2(t) - u_1(t)}{\sigma};$$

- (8)边界条件为 $(u_x - \sigma_1 u)(0, t) = u_1(t)$ ,  $(u_x + \sigma_2 u)(l, t) = u_2(t)$ ,可取

$$w(x, t) = \frac{\sigma_1 u_2(t) + \sigma_2 u_1(t)}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2 l}x + \frac{u_2(t) - (1 + \sigma_2 l)u_1(t)}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2 l}$$

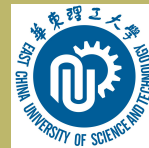
对于某些特殊问题(例如: 方程右端的非齐次项和边界条件都与 $t$ 无关),还可以寻求适当的变换, 把方程和边界条件同时齐次化。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 11 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

## 例：求解边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = B, t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

其中A、B都是常数



Home Page

Title Page



Page 12 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit

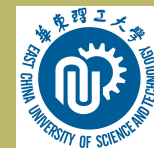
## 例：求解边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = B, t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

其中A、B都是常数

解：方程和边界条件中的非齐次项都与 $t$ 无关，令

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x)$$



Home Page

Title Page



Page 12 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit



## 例：求解边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = B, t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

其中A、B都是常数

解：方程和边界条件中的非齐次项都与 $t$ 无关，令

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x)$$

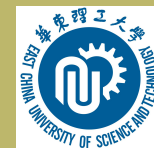
代入方程

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = a^2 w''(x) + A$$

为使 $v$ 的方程和边界条件都是齐次的，取 $w$ 是问题

$$\begin{cases} a^2 w''(x) + A = 0, & 0 \leq x \leq l \\ w(0) = 0, w(l) = B \end{cases}$$

的解，



Home Page

Title Page

Navigation buttons: double left arrow, double right arrow

Navigation buttons: single left arrow, single right arrow

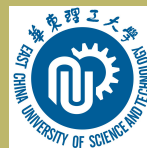
Page 12 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit



## 例：求解边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = B, t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

其中A、B都是常数

解：方程和边界条件中的非齐次项都与 $t$ 无关，令

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x)$$

代入方程

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = a^2 w''(x) + A$$

为使 $v$ 的方程和边界条件都是齐次的，取 $w$ 是问题

$$\begin{cases} a^2 w''(x) + A = 0, & 0 \leq x \leq l \\ w(0) = 0, w(l) = B \end{cases}$$

的解，由此解出(方程积分两次，有两个积分常数，利用边界条件确定积分常数)

$$w(x) = -\frac{A}{2a^2}x^2 + \left(\frac{Al}{2a^2} + \frac{B}{l}\right)x$$

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 12 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit



$v(x, t)$ 满足(齐次方程, 齐次边界条件的定解问题)

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 & 0 < x < l, t > 0 \\ v(0, t) = v(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ v(x, 0) = -w(x), v_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

Home Page

Title Page



Page 13 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit



$v(x, t)$ 满足(齐次方程, 齐次边界条件的定解问题)

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 & 0 < x < l, t > 0 \\ v(0, t) = v(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ v(x, 0) = -w(x), v_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

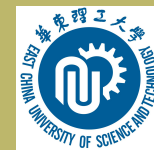
利用特征展开法或者分离变量法可求出 $v(x, t)$ , 最后得到原问题的解 $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 13 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

例：求解边值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -bu, & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0, t) = 0, u(l, t) = k, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \frac{k}{l^2}x^2, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

其中b、k都是常数



Home Page

Title Page



Page 14 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit



## 例：求解边值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -bu, & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0, t) = 0, u(l, t) = k, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \frac{k}{l^2}x^2, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

其中b、k都是常数

解：先把边界条件齐次化，令 $u(x, t) = k + v(x, t)$ , 则v满足(齐次边界条件的定解问题)

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = -bv - bk, & 0 < x < l, t > 0 \\ v_x(0, t) = 0, v(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ v(x, 0) = \frac{k}{l^2}x^2 - k, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 14 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



例：求解边值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -bu, & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0, t) = 0, u(l, t) = k, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \frac{k}{l^2}x^2, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

其中b、k都是常数

解：先把边界条件齐次化，令 $u(x, t) = k + v(x, t)$ , 则v满足(齐次边界条件的定解问题)

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = -bv - bk, & 0 < x < l, t > 0 \\ v_x(0, t) = 0, v(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ v(x, 0) = \frac{k}{l^2}x^2 - k, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

利用特征展开法求解此定解问题 $\Rightarrow$ 特征函数系为 $\{\cos \beta_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$ .

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

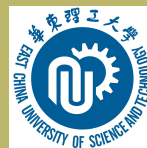
Page 14 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit



## 例：求解边值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -bu, & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0, t) = 0, u(l, t) = k, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \frac{k}{l^2}x^2, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

其中b、k都是常数

解：先把边界条件齐次化，令 $u(x, t) = k + v(x, t)$ , 则v满足(齐次边界条件的定解问题)

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = -bv - bk, & 0 < x < l, t > 0 \\ v_x(0, t) = 0, v(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ v(x, 0) = \frac{k}{l^2}x^2 - k, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

利用特征展开法求解此定解问题 $\Rightarrow$ 特征函数系为 $\{\cos \beta_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$ .

把 $v(x, t)$ ,  $-bk$ ,  $\frac{k}{l^2}x^2 - k$ 关于x按特征函数系 $\{\cos \beta_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 展开：

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \cos \beta_n x, -bk = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \beta_n x, \frac{k}{l^2}x^2 - k = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \beta_n x$$

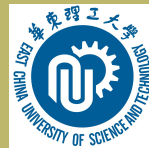
[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 14 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



其中

$$f_n = -\frac{2}{l} \int_0^l bk \cos \beta_n x dx = (-1)^n \frac{4bk}{(2n-1)\pi},$$

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left( \frac{k}{l^2} x^2 - k \right) \cos \beta_n x dx = (-1)^n \frac{32k}{(2n-1)^3 \pi^3}$$



Home Page

Title Page



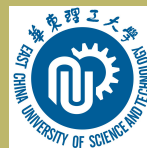
Page 15 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit



其中

$$f_n = -\frac{2}{l} \int_0^l bk \cos \beta_n x dx = (-1)^n \frac{4bk}{(2n-1)\pi},$$

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left(\frac{k}{l^2} x^2 - k\right) \cos \beta_n x dx = (-1)^n \frac{32k}{(2n-1)^3 \pi^3}$$

把这些展开式代入 $v(x, t)$ 的定解问题得

$$\sum_{n=1}^{\infty} [v'_n(t) + (b + \beta_n^2)v_n(t) - f_n] \cos \beta_n x = 0, t > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [v_n(0) - c_n] \cos \beta_n x = 0$$

利用特征函数的正交性可得(一阶非齐次常微分方程初值问题)

$$v'_n(t) + (b + \beta_n^2)v_n(t) = f_n, t > 0$$

$$v_n(0) = c_n, n = 1, 2, \dots$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 15 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



解得

$$v_n(t) = c_n e^{-(b+\beta_n^2)t} + \frac{f_n}{(b+\beta_n^2)}(1 - e^{-(b+\beta_n^2)t})$$

于是

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{32k}{(2n-1)^3 \pi^3} e^{-(b+\beta_n^2)t} + \frac{4bk}{(2n-1)\pi(b+\beta_n^2)} (1 - e^{-(b+\beta_n^2)t}) \right] \cos \beta_n x$$

原定解问题的解  $u(x, t) = k + v(x, t)$

Home Page

Title Page

11

◀ ▶

Page 16 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit



## 第二章主要介绍有界区域上定解问题的求解

- (1) 齐次边界条件的定解问题，特利用特征展开法求解
- (2) 齐次方程齐次边界条件的定解问题，既可选择特征展开法，又可选择分离变量法
- (3) 非齐次边界条件的定界问题，可选择变量代换，转换为齐次边界条件的定解问题，利用（1），（2）中的方法求解

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[«](#) [»](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 17 of 22

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

## ★2.7物理意义、驻波解与共振



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 18 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit



## ★2.7物理意义、驻波解与共振

Fourier级数方法有明显的物理意义，我们以两端固定的一位弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

为例以说明.

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 18 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



## ★2.7物理意义、驻波解与共振

Fourier级数方法有明显的物理意义，我们以两端固定的一位弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

为例以说明.

定解问题的级数解的每一项可以写成以下形式：

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \left( C_n \cos \frac{n\pi at}{l} + D_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &= A_n \cos(w_n t - \theta_n) \sin \frac{n\pi x}{l}, \end{aligned}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)[Page 18 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



## ★2.7物理意义、驻波解与共振

Fourier级数方法有明显的物理意义，我们以两端固定的一位弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

为例以说明.

定解问题的级数解的每一项可以写成以下形式：

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \left( C_n \cos \frac{n\pi at}{l} + D_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &= A_n \cos(w_n t - \theta_n) \sin \frac{n\pi x}{l}, \end{aligned}$$

其中  $A_n = \sqrt{C_n^2 + D_n^2}$ ,  $w_n = \frac{n\pi a}{l}$ ,  $\theta_n = \arctan \frac{D_n}{C_n}$ .  $u_n(x, t)$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 18 of 22

Go Back

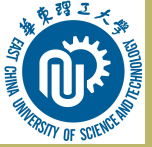
Full Screen

Close

Quit



- $u_n(x, t)$ 称为振动元素



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 19 of 22

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

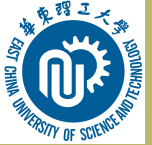
[Quit](#)



- $u_n(x, t)$ 称为振动元素
- 对于每一个固定点 $x$ ,  $u_n(x, t)$ 表示一个简谐振动,  $A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ 表示振幅,  $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$ 表示角频率,  $\theta_n = \arctan \frac{D_n}{C_n}$ 表示初相位,角频率和初始相位都与点 $x$ 无关,只是振幅随点的位置的改变而改变。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 19 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- $u_n(x, t)$ 称为振动元素
- 对于每一个固定点 $x$ ,  $u_n(x, t)$ 表示一个简谐振动,  $A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ 表示振幅,  $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$ 表示角频率,  $\theta_n = \arctan \frac{D_n}{C_n}$ 表示初相位,角频率和初始相位都与点 $x$ 无关,只是振幅随点的位置的改变而改变。
- 在点 $x = 0, \frac{1}{n}l, \frac{2}{n}l, \dots, \frac{n-1}{n}l, l$ 处, 振动元素 $u_n(x, t)$ 的振幅为零, 而在点 $x = \frac{1}{2n}l, \frac{3}{2n}l, \dots, \frac{2n-1}{2n}l$ 处, 振幅达到最大, 这种波称为驻波, 这些点称为节点;



- $u_n(x, t)$ 称为振动元素
- 对于每一个固定点 $x$ ,  $u_n(x, t)$ 表示一个简谐振动,  $A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ 表示振幅,  $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$ 表示角频率,  $\theta_n = \arctan \frac{D_n}{C_n}$ 表示初相位,角频率和初始相位都与点 $x$ 无关,只是振幅随点的位置的改变而改变。
- 在点 $x = 0, \frac{1}{n}l, \frac{2}{n}l, \dots, \frac{n-1}{n}l, l$ 处, 振动元素 $u_n(x, t)$ 的振幅为零, 而在点 $x = \frac{1}{2n}l, \frac{3}{2n}l, \dots, \frac{2n-1}{2n}l$ 处, 振幅达到最大, 这种波称为驻波, 这些点称为节点;
- 物理上也把特征展开法和分离变量法称为驻波法, 得到的解是一些列具有特定频率的驻波的叠加

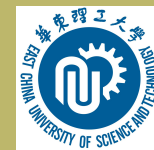
[Home Page](#)[Title Page](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

Page 19 of 22

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

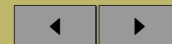
用Fourier级数方法得到的解的表达式还可以用来解释强迫振动中所产生的共振现象，例如初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x) \sin \omega t, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 20 of 22

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

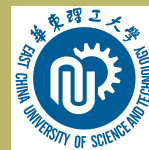
用Fourier级数方法得到的解的表达式还可以用来解释强迫振动中所产生的共振现象，例如初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x) \sin \omega t, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

• 当  $\omega \neq \omega_n (n = 1, 2, \dots)$  时

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l B_n}{n \pi a} \sin \frac{n \pi x}{l} \int_0^t \sin \omega \tau \sin \frac{n \pi a}{l} (t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\omega_n (\omega^2 - \omega_n^2)} (\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t) \sin \frac{n \pi x}{l} \end{aligned}$$

其中  $\omega_n = \frac{n \pi a}{l}$ ,  $B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n \pi x}{l} dx$ , 当  $f(x) \in C^1([0, l])$ , 且  $f(0) = f(l) = 0$  时，这个形式解是上述初边值问题的解



Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 20 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit

用Fourier级数方法得到的解的表达式还可以用来解释强迫振动中所产生的共振现象，例如初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x) \sin \omega t, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

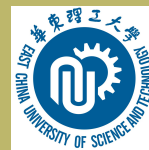
- 当  $\omega \neq \omega_n (n = 1, 2, \dots)$  时

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l B_n}{n \pi a} \sin \frac{n \pi x}{l} \int_0^t \sin \omega \tau \sin \frac{n \pi a}{l} (t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\omega_n (\omega^2 - \omega_n^2)} (\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t) \sin \frac{n \pi x}{l} \end{aligned}$$

其中  $\omega_n = \frac{n \pi a}{l}$ ,  $B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n \pi x}{l} dx$ , 当  $f(x) \in C^1([0, l])$ , 且  $f(0) = f(l) = 0$  时，这个形式解是上述初边值问题的解

- 当  $\omega$  趋于某一个特征频率（或称为固有频率） $\omega_k = \frac{k \pi a}{l}$  时，级数解中的第  $k$  项的系数有极限

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_k} \frac{B_k}{\omega_k (\omega^2 - \omega_k^2)} (\omega \sin \omega_k t - \omega_k \sin \omega t) = \frac{B_k}{2 \omega_k^2} \sin \omega_k t - \frac{B_k}{2 \omega_k} t \cos \omega_k t.$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 20 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

用Fourier级数方法得到的解的表达式还可以用来解释强迫振动中所产生的共振现象，例如初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x) \sin \omega t, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

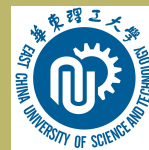
- 当  $\omega \neq \omega_n (n = 1, 2, \dots)$  时

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l B_n}{n \pi a} \sin \frac{n \pi x}{l} \int_0^t \sin \omega \tau \sin \frac{n \pi a}{l} (t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\omega_n (\omega^2 - \omega_n^2)} (\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t) \sin \frac{n \pi x}{l} \end{aligned}$$

其中  $\omega_n = \frac{n \pi a}{l}$ ,  $B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n \pi x}{l} dx$ , 当  $f(x) \in C^1([0, l])$ , 且  $f(0) = f(l) = 0$  时，这个形式解是上述初边值问题的解

- 当  $\omega$  趋于某一个特征频率（或称为固有频率） $\omega_k = \frac{k \pi a}{l}$  时，级数解中的第  $k$  项的系数有极限

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_k} \frac{B_k}{\omega_k (\omega^2 - \omega_k^2)} (\omega \sin \omega_k t - \omega_k \sin \omega t) = \frac{B_k}{2 \omega_k^2} \sin \omega_k t - \frac{B_k}{2 \omega_k} t \cos \omega_k t.$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 20 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 当  $\omega = \omega_k$  时, 级数解可以写成

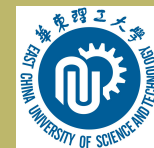
$$u(x, t) = \sum_{n \neq k}^{\infty} \frac{B_n}{\omega_n(\omega_k^2 - \omega_n^2)} (\omega_k \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega_k t) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ + \frac{B_k}{2\omega_k^2} \sin \omega_k t - \frac{B_k}{2\omega_k} t \cos \omega_k t$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 21 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 当 $\omega = \omega_k$ 时，级数解可以写成

$$u(x, t) = \sum_{n \neq k}^{\infty} \frac{B_n}{\omega_n(\omega_k^2 - \omega_n^2)} (\omega_k \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega_k t) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ + \frac{B_k}{2\omega_k^2} \sin \omega_k t - \frac{B_k}{2\omega_k} t \cos \omega_k t$$

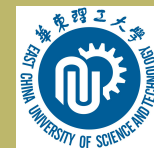
- 对于固有频率为 $\omega_k$ 的第 $k$ 个振动元素 $u_k(x, t)$ ，其振幅随着时间 $t$ 一起无限增大，这种现象称为共振

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 21 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 当  $\omega = \omega_k$  时，级数解可以写成

$$u(x, t) = \sum_{n \neq k}^{\infty} \frac{B_n}{\omega_n(\omega_k^2 - \omega_n^2)} (\omega_k \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega_k t) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ + \frac{B_k}{2\omega_k^2} \sin \omega_k t - \frac{B_k}{2\omega_k} t \cos \omega_k t$$

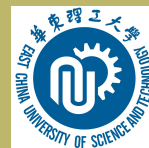
- 对于固有频率为  $\omega_k$  的第  $k$  个振动元素  $u_k(x, t)$ ，其振幅随着时间  $t$  一起无限增大，这种现象称为共振
- 在物理上，这表示一根两端固定的弦线，如果在一个周期外力的作用下做强迫振动，当这个周期的外力的频率和弦线的某一特征频率相等，那么弦线将产生共振，导致弦线在某一时刻断裂。

[Home Page](#)[Title Page](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)[Page 21 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 当 $\omega = \omega_k$ 时，级数解可以写成

$$u(x, t) = \sum_{n \neq k}^{\infty} \frac{B_n}{\omega_n(\omega_k^2 - \omega_n^2)} (\omega_k \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega_k t) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ + \frac{B_k}{2\omega_k^2} \sin \omega_k t - \frac{B_k}{2\omega_k} t \cos \omega_k t$$

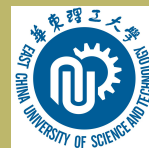
- 对于固有频率为 $\omega_k$ 的第 $k$ 个振动元素 $u_k(x, t)$ ，其振幅随着时间 $t$ 一起无限增大，这种现象称为共振
- 在物理上，这表示一根两端固定的弦线，如果在一个周期外力的作用下做强迫振动，当这个周期的外力的频率和弦线的某一特征频率相等，那么弦线将产生共振，导致弦线在某一时刻断裂。
- 要避免共振现象，必须首先知道这个问题的固有频率，即去求某一个特征值问题的解

[Home Page](#)[Title Page](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)[Page 21 of 22](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 当 $\omega = \omega_k$ 时，级数解可以写成

$$u(x, t) = \sum_{n \neq k}^{\infty} \frac{B_n}{\omega_n(\omega_k^2 - \omega_n^2)} (\omega_k \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega_k t) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ + \frac{B_k}{2\omega_k^2} \sin \omega_k t - \frac{B_k}{2\omega_k} t \cos \omega_k t$$

- 对于固有频率为 $\omega_k$ 的第 $k$ 个振动元素 $u_k(x, t)$ ，其振幅随着时间 $t$ 一起无限增大，这种现象称为共振
- 在物理上，这表示一根两端固定的弦线，如果在一个周期外力的作用下做强迫振动，当这个周期的外力的频率和弦线的某一特征频率相等，那么弦线将产生共振，导致弦线在某一时刻断裂。
- 要避免共振现象，必须首先知道这个问题的固有频率，即去求某一个特征值问题的解
- 但是有些问题中，例如在电磁振荡理论中，经常利用共振现象来调频，所以特征值问题无论是在建筑工程方面，还是无线电、电子工程等方面都有着重要的应用

[Home Page](#)[Title Page](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

Page 21 of 22

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



回家作业：

求解下列初边值问题

$$2.19、(2) \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A \cosh x, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = 0, u_x(l, t) = k, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

其中  $A, k$  为常数,  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 22 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit