《微分几何》课程电子课件

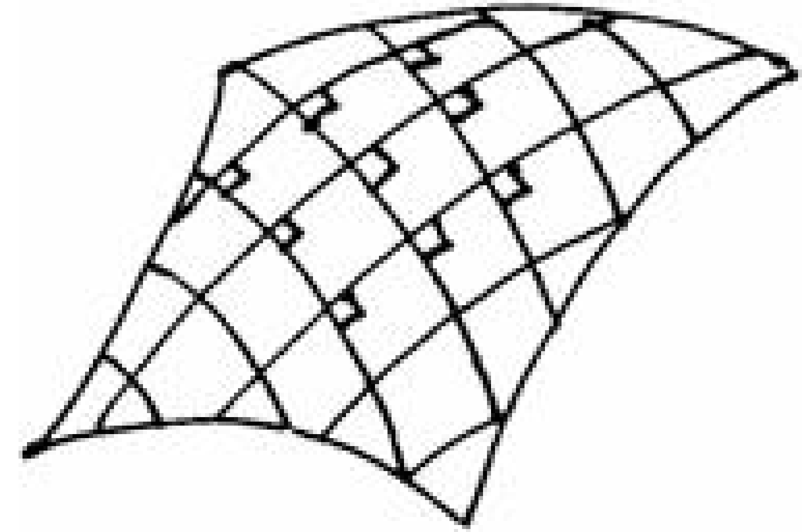
教师：杨勤民

Tel: (021)64253147

Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程QQ群号：1045698545

三、正交曲线族和正交轨线



命题　两曲线族 $A\mathrm{d}u + B\mathrm{d}v = 0$ 和 $C\delta u + D\delta v = 0$ 正交的充要条件是

$$EBD - F(AD + BC) + GAC \equiv 0.$$

证　由 $A\mathrm{d}u + B\mathrm{d}v = 0$ 得 $(\mathrm{d}u : \mathrm{d}v) = (-B : A)$

由 $C\delta u + D\delta v = 0$ 得 $(\delta u : \delta v) = (-D : C)$

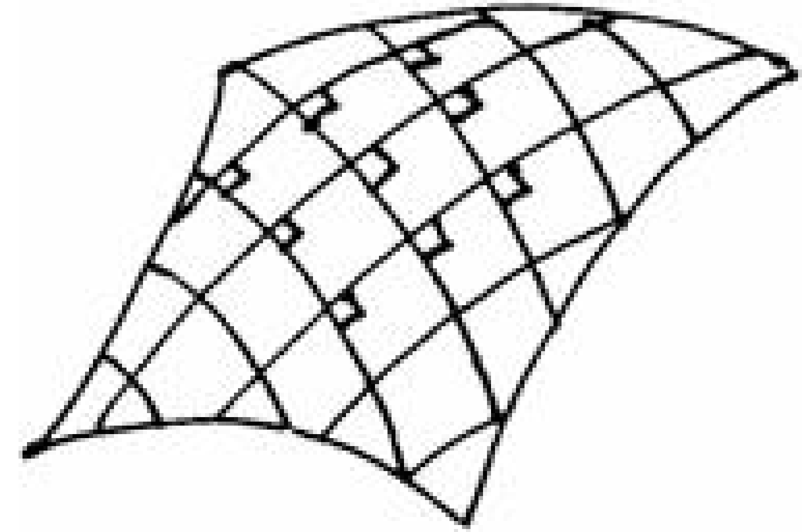
正交的充要条件是 $E\mathrm{d}u\delta u + F(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + G\mathrm{d}v\delta v \equiv 0.$

即 $E(-B)(-D) + F[(-B)C + A(-D)] + GAC \equiv 0.$

即 $EBD - F(AD + BC) + GAC \equiv 0.$

命题 曲线族 $A\mathrm{d}u+B\mathrm{d}v=0$ 的正交轨线族为

$$(BE-AF)\delta u+(BF-AG)\delta v=0.$$



证

设 $A\mathrm{d}u+B\mathrm{d}v=0$ 的正交轨线族为 $C\delta u+D\delta v=0$

则 $EBD-F(AD+BC)+GAC\equiv 0.$

即 $(AG-BF)C+(BE-AF)D\equiv 0.$

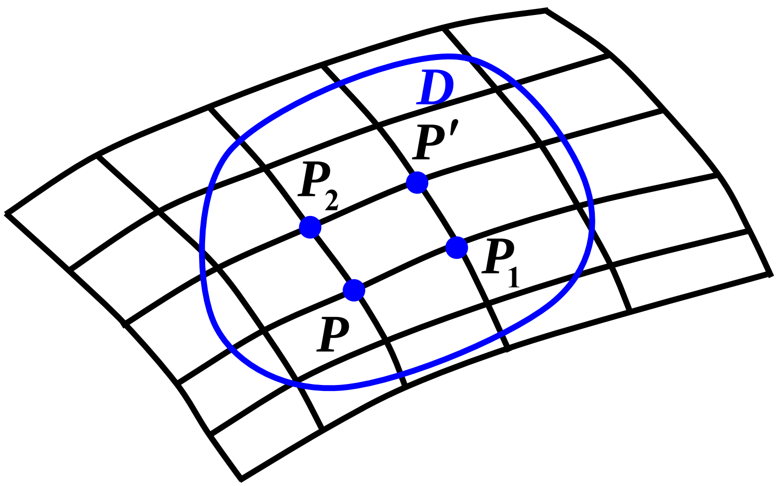
即 $(C:D)\equiv(BE-AF):(BF-AG)$

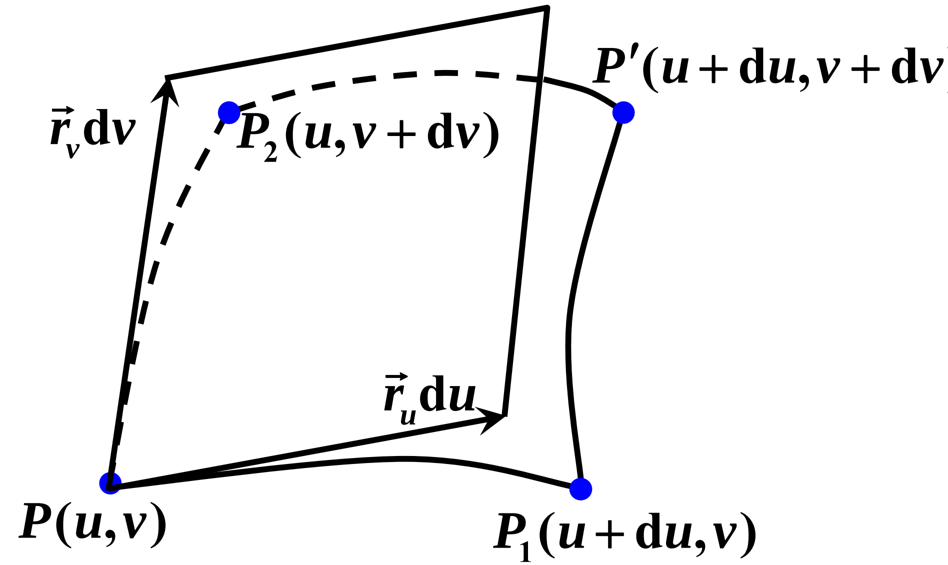
因此 $C\delta u+D\delta v=0$ 等价于

$$(BE-AF)\delta u+(BF-AG)\delta v=0.$$

四、曲面域的面积

设有曲面 S: $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, 曲面域 $D\subseteq S$, 求 D 的面积 σ_D.





$$P(u,v),\quad P_1(u+\mathrm{d}u,v),\quad P_2(u,v+\mathrm{d}v),\quad P'(u+\mathrm{d}u,v+\mathrm{d}v)$$

$$\left|\overset{\frown}{PP_1}\right|\approx\left|\overrightarrow{PP_1}\right|\approx\left|\vec{r}_u\mathrm{d}u\right|,\quad \left|\overset{\frown}{PP_2}\right|\approx\left|\overrightarrow{PP_2}\right|\approx\left|\vec{r}_v\mathrm{d}v\right|,$$

面积微元 $\mathrm{d}S=\left|(\vec{r}_u\mathrm{d}u)\times(\vec{r}_v\mathrm{d}v)\right|=\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$$\mathrm{d}S = \left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \sqrt{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)^2}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \sqrt{\vec{r}_u{}^2 \vec{r}_v{}^2 - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v \text{ (由Lagrange恒等式)}$$

$$= \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad \text{(此公式即为面积微元公式)}$$

$$\sigma_D = \iint_{D'} \mathrm{d}S = \iint_{D'} \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中D'为曲面域D的曲纹坐标域.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.5 改写曲面 $\vec{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, u+v)$ 的参数方程,使得它的曲纹坐标网成为正交网.

2.6 已知曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=\cos^2 u\,\mathrm{d}u^2+\sin^2 v\,\mathrm{d}v^2,$$

它上面的三条曲线

$$u+v=0,\quad u-v=0,\quad v=1$$

围成一个曲边三角形,求

(1)该曲边三角形所围曲面域的面积;

(2)该曲边三角形的三个内角;

(3)该曲边三角形的三条曲边的长度.