Real Analysis

Hansong Huang

ECUST

At East China Normal University

2017.05

概念题，举例题

计算题: Levi 引理，Lebesgue控制收敛定理，Fubini定理

证明题：由****定理，得到....

可数集*

知道可数集的具体例子：有理数集，代数数集*

知道外测度

知道Lebesgue测度的构造，有个直观的印象，集合B满足Caratheodory条件p69

可测函数的定义* 理解函数可测的几种等价表达

Lebesgue可测集的几种等价描述
Lebesgue可测函数的定义
实直线上Lebesgue可测集的等价定义*

σ-代数*p48
什么是（一般）测度* p48,
知道测度的一些具体例子*,
理解开集的结构1.5.1 p24.

积分三大定理*：p.87 Levi引理（即书上的Levi定理*、Fatou定理*、控制收敛定理*

几种收敛性的定义2.4.1，p/52几乎一致收敛，依测度收敛

Egorov定理*、Riesz定理*，

Luzin定理2.4.4的压缩版本应用。

有界变差函数定义*
绝对连续函数定义*
会证明一个函数是绝对连续函数.*
会证明一个函数不是有界变差函数.*

大局观和细节。

大局观：总体内容，框架，要在脑中形成。

复习要**细致**！！

细致到什么程度

细致到什么程度
什么是可数集合？一些例子.
怎么证明一个集合是可数集？
例如,思考：$\mathbb{N}$的所有有限子集全体是否可数？*
如何证明你的结论？
所有无限子集全体呢？**

关于证明的写法:

例子1. 证明：可数集A的有限子集全体可数.

证明：无妨设A是无限集,

写$A = \{a_1, a_2, \cdots\}$.

对$n \geq 1$, 记$A_n = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, P_n为A_n的所有子集全体. 则P_n为有限集.

所以$\cup_{n\geq 1} P_n$可数.

对A的任一有限子集B,

B可写成$B = \{a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_m}\}$,
记$N = \max\{k_j : 1 \leq j \leq m\}$.那么$B \in P_N$.

由此可见A的有限子集全体为$\cup_{n\geq 1} P_n$，所以是可数集.

更多习题。操练。

给定σ-代数$\mathcal{A}$，$\mathcal{A}$-可测函数就是我们所说的可测函数.

定义：？？

什么是σ-代数?σ-代数的一些例子。
什么是σ-代数上的一个测度?
如何记住这个定义? 测度的例子。

$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$. 给出$\mathbb{R}$上的一个$\sigma$-代数$\mathcal{A}$,使得$f$不是$\mathcal{A}$可测的。

给出$\mathbb{R}$上的一个σ-代数$\mathcal{B}$,使得f 是$\mathcal{B}$可测的。

思考：如果给定$X = \mathbb{Z}$, X 上的$\mathcal{A}$-可测函数只有常数函数，那么$\mathcal{A} =???$

可测函数有哪几个等价性质？你会相互推吗？

Lebsesgue可测集的定义与直观印象. (需要自己下功夫)

$\mathcal{L}$, Lebsesgue可测集的全体，是一个特殊的σ-代数。全集是$\mathbb{R}$,

$\mathcal{L}$由$\mathbb{R}$的一些子集组成。

零集，零测集的简称.

开区间的长度就是开区间的Lebesgue测度:$m(a,b)=b-a$,

非空开集的长度：即使没有定义Lebesgue测度，也可以这样定义开集O的长度,即开集可以写成可数个不相交的区间之并，而其长度定义为这些开区间长度之和. (可以是有限或者$+\infty$)

Lebesgue零测集（Lebesgue零集）：对于任意$\varepsilon>0$,存在开集O包含E,且$mO<\varepsilon$，那么E 称为Lebesgue零测集.

性质*：对于任意$\varepsilon > 0$,存在开集O包含E,且$mO < \varepsilon$，那么我们（临时）称E具有性质*.

$\mathbb{R}$上Lebesgue可测集的等价描述：

E为Lebesgue可测集当且仅当下列条件之一成立：

•$E = A - N_1$,其中A为G_δ型集，N_1具有性质*.

•$E = A - N_1$,其中A为Borel集/Baire集，N_1具有性质*.

- $E = B \cup N_2$,其中B为F_σ型集，N_2具有性质*.
- 对于任意$\varepsilon > 0$，存在闭集F和开集G使得$F \subseteq E \subseteq G$, $m(G - F) < \varepsilon$.

(注意$G - F$是开集，所以这里$m(G - F)$就是开集的长度)

如何理解Lebesgue可测集的测度?

在开集上，它就是长度;一般的集合E,就取包含E的开集的长度，但是要取下确界.

记$\mathcal{L}$为$\mathbb{R}$上Lebesgue可测集全体，

$E \in \mathcal{L}$,那么$E = \inf\{mO : O \supseteq E, O$ 是开集$\}$.

想想这里O为什么不能换成闭集? （eg. $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$）

单点集的Lebesgue测度是多少？ 可数集呢？ 标准Cantor集？

Borel集很多，所有Borel集全体成为Borel代数$\mathcal{B}$，按照定义，它是包含所有开集的最小σ代数.

所以$\mathcal{B}$包含了所有F_σ型集和G_δ型集. $\mathcal{L}$比$\mathcal{B}$“大”. 但是从测度的角度讲，你可以把Lebesgue可测集想象成Borel集去处理. “它们差一个零集”

一个可测集可以用开集或闭集合去逼近

一个可测集可以用开集或闭集合去逼近，进一步在某些时候可以用有限个开区间去逼近，这样在测度意义上，可以将Lebesgue可测集用较为简单的集合去代替.

类似，有了Luzin定理，可以近似用连续函数去代替Lebesgue可测函数.

注意：不要以为可测集只有Lebesgue可测函数，不要以为测度只有Lebesgue测度！

一个σ代数$\mathcal{A}$就决定了一类可测集，只要$\mathcal{A}$里面的元素（这些元素是一些集合，想想清楚）够多，就可以产生很多测度.

练习：举例. ??

积分的定义

1.积分的定义分哪几步？

2. 积分存在和可积的区别？（好好看书）

在答疑中提问之前，先问问自己，有没有好好看书，书上直接讲到的。

3. 严格按照书上的记号，考试中不可用其他科目中用的

如果用了，需要说明。而且不得用表示其他意义的符号。避免产生歧义。

4. 考试中有任何问题举手示意。问不问是你的事情。可不可以回答看规定。遇到理解有歧义，不要擅自揣测。

可测函数的积分
$\int_X f d\mu$. $A \subseteq X$为可测集，那么

$$\int_A f d\mu$$

的意义是？

如果$\mu A = 0$,

$$\int_A f d\mu = ?$$

如果$\mu A = 0$, f是X上的不可测函数,

$$\int_A f d\mu$$

是否有意义？如果有意义，如何求值？

$$\int_A f d\mu = \int_A f|_A d\mu$$

$f|_A$在A上是否可测？
考你可测函数的定义！

PPT笔记中写的例子也要算算，练练。对你加深理解有帮助。

有一些定理比较基本，但是没有名字，也要会用。

比如说：$f = g$ a.e., 在什么条件下$\int_X f$ 和$\int_X g$ 同时存在或同时不存在. 存在时二者相等.

再比如$h \geq 0$, $\int h = 0$. 那么$h = 0$, a.e.

参照ppt 复习.

一、用Levi引理求

$$\lim_n \int_0^n (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x} dx.$$

定义

$$I_n = \int_0^n (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x} dx$$

$$I_n = \int_0^\infty \chi_{[0,n]}(x)(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x} dx$$

令$f_n(x) = \chi_{[0,n]}(x)(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}$,

对$x \in [0,1]$,由于$\{(1+\frac{x}{n})^n\}$关于n单调递增,

所以$\{f_n(x)\}$ 关于n单调递增. 且$f_n \geq 0$,

由Levi引理,

$$\lim_n I_n = \int_0^\infty e^x e^{-2x} dx = ???.$$

二、定义

$$I_n = \int_0^n (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x} dx$$

$$I_n = \int_0^\infty \chi_{[0,n]}(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x} dx$$

令$f_n(x) = \chi_{[0,n]}(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}$,

对$x \in [0,1]$,由于$\{(1+\frac{x}{n})^n\}$关于n单调递增,

所以$|f_n(x)| \leq e^x e^{-2x} = e^{-x} \in L^1(0,\infty)$.

由Lebesgue控制收敛定理,

$$\lim_n I_n = \int_0^\infty e^x e^{-2x} dx = ???.$$

三Lebesgue控制收敛定理如何用？？？

1. 定义$f_n =???$

2 估计,找到g,不依赖于n $|f_n(x)| \leq g(x)$,
且$g \in L^1$. ($\int g < \infty$.)

3. 由Lebesgue控制收敛定理，极限等于.....

一般在估计时，要用到类似$|\sin x| \leq 1$.
$|\cos x| \leq 1$.

$\frac{1}{(2+3x)^n} \leq \frac{1}{2^n+n*2^{n-1}*3x}, x \geq 0$.等估计.

四、Fubini定理。

1. 验证条件.

2. 由Fubini定理，....（计算，交换积分求出来）.

会写有界变差函数*的定义,

设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, 如果存在常数$M>0$,对于任意划分:

$$a=x_0<x_1<\cdots x_n=b,$$

$\sum_i |f(x_i)-f(x_{i-1})|\le M<\infty$, 那么称$f$为$[a,b]$上的有界变差函数.

知道绝对连续函数*的定义

理解Newton-Leibniz公式

会证明一个函数是有界变差函数/绝对连续函数

会证明一个函数不是有界变差函数/绝对连续函数

例子2：证明：$F(x) = \sin\frac{1}{x}, 0 < x \leq 1.$ $F(0) = 0$ 证明1）对$0 < \delta < 1$，F是$[\delta, 1]$上的绝对连续函数.

因为F' 在$[\delta,1]$上连续，所以对任意$x\in[\delta,1]$,

$$F(1)-F(x)=\int_x^1 F'(t)dt=\int_x^1 -\frac{\cos\frac{1}{t}}{t^2}dt.$$

$$F(x)=F(1)+\int_x^1 \frac{\cos\frac{1}{t}}{t^2}dt,\ x\in[\delta,1],$$ 所以F是$[\delta,1]$上的绝对连续函数.

例子2：$F(x) = \sin\dfrac{1}{x}, 0 < x \le 1$. $F(0) = 0$ 证明F不是$[0,1]$上的绝对连续函数.

计算知$F'(t)=\dfrac{\cos\dfrac{1}{t}}{t^2}, t\in(0,1]$.

$\int_0^1|F'(t)|dt=\int_0^1\dfrac{|\cos\dfrac{1}{t}|}{t^2}dt=\int_1^\infty|\cos t|dt=\infty$. 所以$F'$在$[0,1]$上不可积，所以$F$不是有界变差函数.

只写$\int_0^1|F'(t)|dt=\infty$不写计算过程是要扣分的(考试中).

例子. 证明函数$f(x)=x^3$在[0,1]上绝对连续。

1. 求f'，证明f'有界. 即存在常数L使得$|f'(x)|\leq L, x\in[0,1]$.

2. 由于对$0\leq x<y\leq 1$, 存在$\xi(x<\xi<y)$满足

$$|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)(x-y)|.$$

利用定义做.

例子. 证明函数$f(x) = x^3$在[0,1]上绝对连续。

i) 求f'，证明$\int_{[0,1]}|f'(x)|dx<\infty$.
ii) 想办法证明Newton-Leibniz公式成立，即

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)dx.$$

iii)$f\in AC[0,1]$.

思考题：(用什么定理做)

B1) 设$f \in L^1(\mathbb{R})$, $y \in \mathbb{R}$, m为Lebesgue 测度，证明：$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)| dm(x) \to 0 (y \to 0)$.

B2) 设$f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dm(y)$, $\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-it}dx$, 证明：(1) $f * g$几乎处处存在. (2) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

Thank you!