空间解析几何

秦　衍

坐标法和向量法

用这些方法讨论了空间中的平面和直线，以及常见的曲面，用坐标变换法讨论二次曲线方程的化简（用到矩阵）.

丘维生. 解析几何. 北京：北京大学出版社.

王敬庚，傅若男. 空间解析几何. 北京：北京师范大学出版社，1999.

南开大学《空间解析几何引论》编写组. 空间解析几何引论. 北京：高等教育出版社，1978.

黄国宣. 空间解析几何. 上海：复旦大学出版社，2004.

李厚源. 空间解析几何. 山东：山东科学技术出版社，1983.

第一章　向量代数

建立一个坐标系

图形 ←——————————————→ 方程

点用有序实数组来表示

§1 向量及其线性运算

1.向量的定义

普通的数只有大小没有方向称为<u>数量</u>或<u>标量</u>，而既有大小又有方向的量称为<u>向量</u>或<u>矢量</u>.

向量表示为 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\ldots$或$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\ldots$

例如 $\overrightarrow{AB}$ 表示　（始点）**A**　**B**（终点），

$\overrightarrow{BC}$ 表示　（始点）**B**　**C**（终点）

向量 $\overrightarrow{AB}$　**A**、**B** 之间的距离 $\left|AB\right|$ 表示向量的<u>长度</u>。

长度为零的向量称为零向量（零矢量）. 它的方向不确定，可按需要取任意方向。

单位长度的向量称为单位向量。

已经给定两个向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}$，如果经过平移 **A** 与 A'，**B** 与 B' 重合，则称 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$。相等向量. 特点：长度相等，方向相同。而 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 没有标出它的起始端点,则它的起始端点可自由选取，称为自由向量。

长度相等,但方向相反的向量为反向量或负向量,记为-$\vec{a}$（相对于$\vec{a}$）

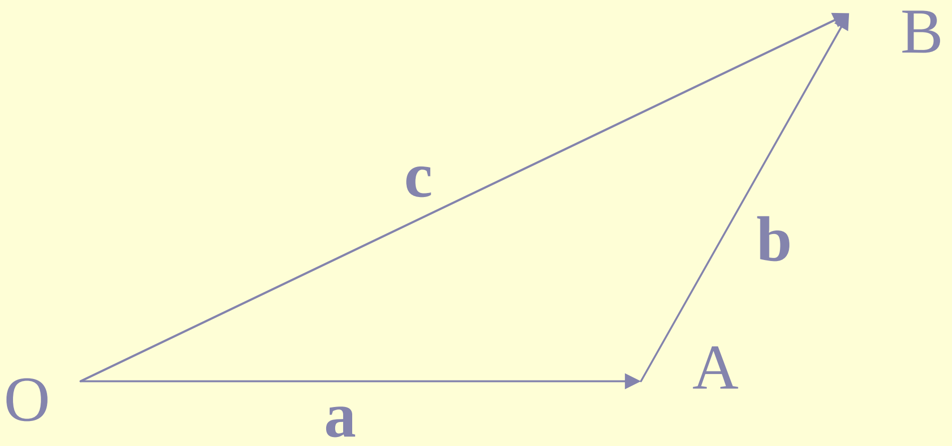
共线向量（平行向量）：平行于同一直线的向量（不论长度和方向正或反）

共面向量：平行于同一平面的向量

问题：四边等长的空间四边形在什么情况下它边上的向量才有相等的可能?

2. 向量的加法

定义：设已经给定向量$\vec{a},\vec{b}$，从空间任意一点 **O** 引$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，再从 **A** 引向量$\vec{b}$得$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{OB}=\vec{c}$就是$\vec{a},\vec{b}$之和，记作$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$。



运算规律:

①交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

②结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

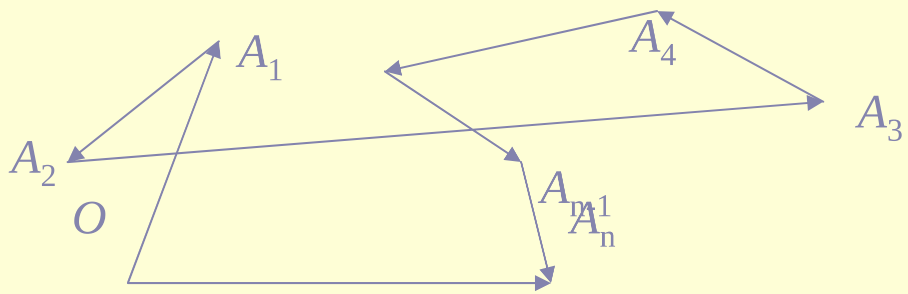
③对任意向量$\vec{a}$，有 $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ （零元）

④对任意向量$\vec{a}$，有 $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ （负元）

有限个向量$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots\vec{a}_n$相加可由向量的三角形求和法则推广

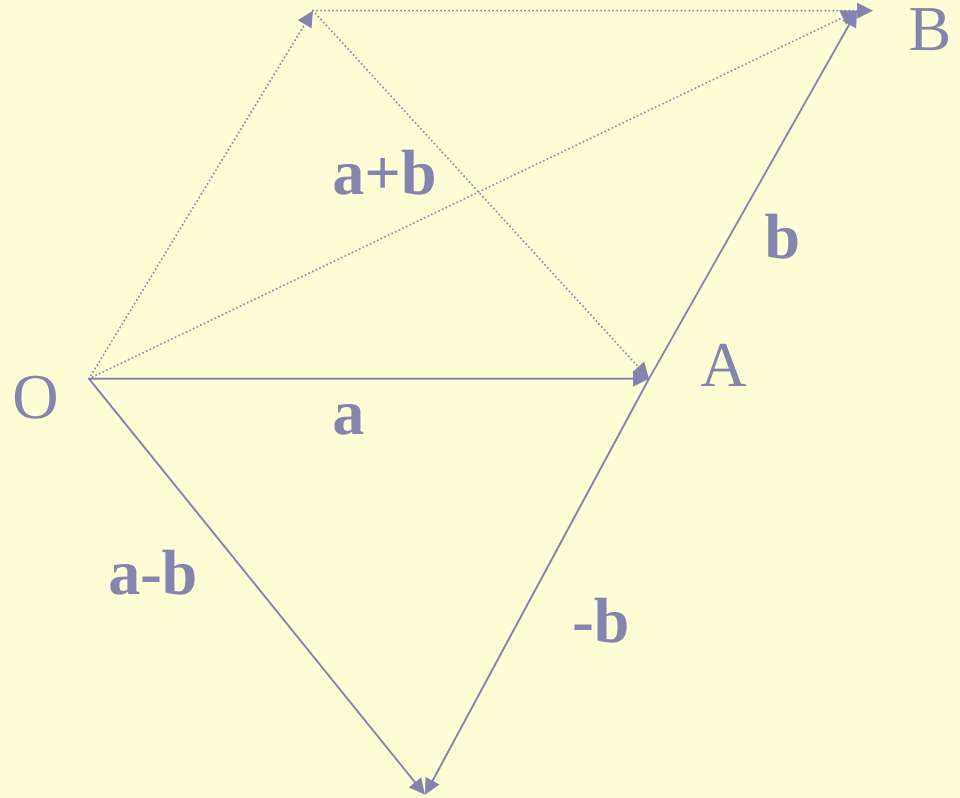
自任意点 O开始，依次引 $\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}_1,\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a}_2,\cdots,$ $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\vec{a}_n$,由此得一折线 $OA_1A_2\cdots A_n$,于是向量 $\overrightarrow{OA_n}$ $=\vec{a}$就是n个向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$的和，即

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}\ .$$



这种求和的方法叫做多边形法则

定义向量的减法：$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$



三角不等式$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$

问题：非零向量$\vec{a},\vec{b}$必须分别满足什么几何性质，下式才成立？

$(1)\ \left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$

$(2)\ \left|\vec{a}+\vec{b}\right|>\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$

$(3)\ \left|\vec{a}+\vec{b}\right|<\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$

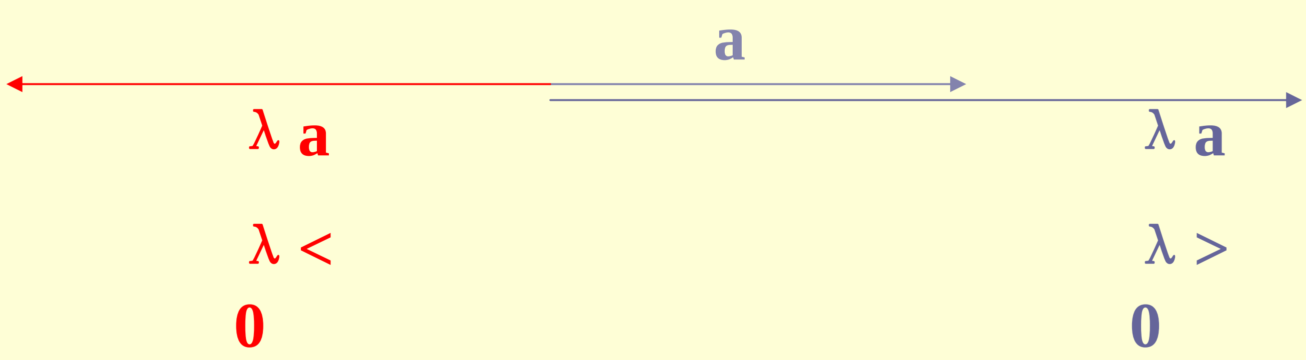
$(4)\ \left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$

$(5)\ \left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|$

$(6)\ \left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$

3. 向量的数量乘积

定义：若 $\vec{a}$ 为向量，λ 为数量，其积为 $\lambda\vec{a}$ 是一个向量，它的长度为 $|\lambda|*|\vec{a}|$，方向：当 $\lambda>0$ 时，与 $\vec{a}$ 的方向相同，当 $\lambda<0$ 时，与 $\vec{a}$ 的方向相反，当 $\lambda=0$ 时，为零向量。



运算规律:

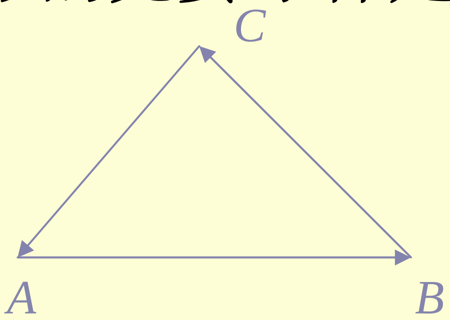
(1)结合律　m（n$\vec{a}$）=（mn）$\vec{a}$

(2)第一分配律　（m+n）$\vec{a}$=m$\vec{a}$+n$\vec{a}$

(3)第二分配律 m（$\vec{a}+\vec{b}$）=m$\vec{a}$+m$\vec{b}$；

(4)1*$\vec{a}=\vec{a}$；　（-1）*$\vec{a}=-\vec{a}$.

例1　设互不共线的三矢量$\vec{a}$, $\vec{b}$与$\vec{c}$，试证明顺次将它们的终点与始点相连而成一个三角形的充要条件是它们的和是零矢量.



例 2：证明三角形两边三等分处（距公共顶点为边长的$\frac{1}{3}$处），相连的线段等于第三边之长的$\frac{1}{3}$。

4. 向量的线性关系

设已经给定 **n** 个向量$\vec{a}_i$和 **n** 个数量k_i （i **=1，2，…，n**）向量 $k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+\cdots+k_n\vec{a}_n$ 称为 **n** 个向量$\vec{a}_i$ （i **=1，2，…，n**）的线性组合，称$k_i\,(i=1,2,\cdots n)$是这个组合的系数。

定理 **1**：若向量$\vec{a} \neq \vec{0}$，向量$\vec{b}$和向量$\vec{a}$共线的充分必要条件是$\vec{b}$可以写成$\vec{a}$的线性式或线性组合如下$\vec{b} = \lambda\vec{a}$，其中λ是$\vec{b},\vec{a}$所唯一确定的数

$\vec{a}$与$\vec{b}$共线$\Leftrightarrow$存在不全为零的实数λ, μ，使得$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = 0$

定理 2: 若向量$\vec{a},\vec{b}$不共线，则向量$\vec{c}$和向量$\vec{a}$、$\vec{b}$共面的充要条件是$\vec{c}$可以写成$\vec{a}$、$\vec{b}$的线性组合,即$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$　其中λ、μ为被$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$所确定的数量.

$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面$\Leftrightarrow$有不全为零的数k_1、k_2、k_3使得 $k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=0$

例 1：前例 2 证明了 $\vec{d}$ 、$\vec{e}$ 、 $\vec{f}$ 共面.

前例 1 证明了 $\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ $\therefore \overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线

例 2：已给向量（非零）$\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 、$\vec{c}$ 和数 λ 、μ 、

ν ，而 $\lambda\mu\nu\neq 0$,证明向量 $\lambda\vec{a}-\mu\vec{b}$ 、$\mu\vec{b}-\nu\vec{c}$ 、

$\nu\vec{c}-\lambda\vec{a}$ 共面.

例 3：试证：三点 A、B、C 共线$\Leftrightarrow$存在不全为

零的实数λ、μ、ν，使$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，

并且$\lambda+\mu+\nu=0$。其中 O 是任意取定的一点。

例 4 ：在ΔABC中，$\boldsymbol{E,F}$分别是$\boldsymbol{AC,AB}$上的点，并且

$CE=\frac{1}{3}CA$，$AF=\frac{1}{3}AB$，设 $\boldsymbol{BE}$ 与 $\boldsymbol{CF}$ 交于 $\boldsymbol{G}$，证明：

$GE=\frac{1}{7}BE$，$GF=\frac{4}{7}CF$。

定理3：若$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为空间三个不共面向量，则空间的任意一个向量$\vec{d}$都可以写成$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的线性组合

即 $\vec{d}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+v\vec{c}$

其中数量λ,μ,v被$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$唯一确定。

给 n（n≥）个向量$\vec{a}_1,\vec{a}_2...\vec{a}_n$，若有不全为零的 n 个数量$\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n$，使得$\lambda \vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+....+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0}$，则这 n 个向量$\vec{a}_i$ （i=1，2，···n）称为线性相关。否则称 n 个向量线性无关。

定理：**n**个向量线性相关其中至少有一个可写成其余诸向量的线性组合。