华东理工大学 2014－2015 学年第二学期

《高等数学(下)》期中考试试卷评分标准(11 学分)2015.4

一．填空题(每个空格 4 分，共 44 分)：

1. 方程 $xy'+y=\cos x$ 的通解为________________________。

   解答： $y=\dfrac{1}{x}(\sin x+C)$

2. 方程 $xy''+4y'=0$ 满足初始条件 $y(1)=0$， $y'(1)=3$ 的特解为______________。

   解答： $y=1-x^{-3}$

3. 以 $y=x^2$ 和 $y=\cos 2x$ 为特解的最低阶的常系数线性齐次微分方程是

   ____________________。

   解答： $y^{(5)}+4y^{(3)}=0$

4. 点 $P(1,2,4)$ 关于平面 $x+2y-z=7$ 的对称点是______________________。

   解答： $(3,6,2)$。

5. 设可微函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\int_0^{2x} f(\frac{t}{2})\mathrm{d}t+2$，则 $f(x)=$___________________。

   解答： $2e^{2x}$

6. 直线 $\dfrac{x-1}{2}=y+2=2-z$ 和 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{-5}$ 的距离是____________________。

   解答： $\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$

7. 平面 $x+z-6=0$ 和 $x+2y+2z+2=0$ 的夹角为_______________________。

   解答：$\dfrac{\pi}{4}$

8. 已知向量 $\vec{l}=\{2,-1,2\}$ 在单位向量 $\vec{r}$ 上的投影为 $\sqrt{2}$，则向量 $\vec{r}+2\vec{l}$ 在 $\vec{l}$ 上的投影为

   ____________________。

   解答： $6+\sqrt{2}/3$

9. 给定可微函数 $f(x,y)$，设 $z=f(xy,2z)$，已知 $f_2\neq\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_________________。

解答：$\dfrac{xf_1}{1-2f_2}$ 。

10. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^3)^{\frac{1}{x^2+y^2}}=$__________________。

解答： 1

11. 设 $u=z\,x^y$ ，则 $\mathrm{d}u=$____________________________________。

解答： $\mathrm{d}u=zyx^{y-1}\mathrm{d}x+zx^y\ln x\mathrm{d}y+x^y\mathrm{d}z$

二．选择题(每小题 4 分，共 24 分)：

1. 已知 $y=f(x)$ 是方程 $y''+y'\sin x-(1+x^2)y=0$ 的一个特解。若 $f(x_0)<0$，$f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ （ C ）

(A) 在 x_0 的某邻域内单调增加； (B) 在 x_0 的某邻域内单调减少;

(C) 在 x_0 处取到极大值; (D) 在 x_0 处取到极小值。

2. 方程 $y''-4y'+4y=e^{2x}(x+\cos 2x)$ 的一个特解的形式为 （ B ）

(A) $y_p=x^2e^{2x}(ax+b+c\cos 2x+d\sin 2x)$ ；

(B) $y_p=e^{2x}(ax^3+bx^2+c\cos 2x+d\sin 2x)$ ；

(C) $y_p=e^{2x}(ax^3+bx+cx\cos 2x+dx\sin 2x)$；

(D) $y_p=e^{2x}(ax+b+cx\cos 2x+dx\sin 2x)$。

3. 给定可微函数 $f(x,y)$，令 $z=f(x^2,x^3)$。已知 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=7x^3+2x$，$f_1(x^2,x^3)=2x^2+1$，则 $f_2(x^2,x^3)$ 等于 （ A ）

(A) x； (B) x^2； (C) x^3； (D) x^4。

4. 直线 $2-2x=y=z-8$ 和平面 $2x+2y-z+6=0$ 的几何关系为 （ D ）

(A)垂直相交； （B）斜交； （C）平行； (D)包含。

5. 给定曲面 $\lambda x^2+(\lambda+1)y^2+z^2=1$，若曲面为单叶双曲面，则参数 λ 满足（ B ）

(A) $\lambda<-1$； （B）$-1<\lambda<0$； （C）$\lambda>0$； (D) $\lambda=-1$。

6. 函数 $u=\dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $P(1,1,1)$ 处方向导数的最大值为 （ B ）

(A) $\frac{1}{9}$； （B）$\frac{1}{3}$； （C）1； (D) 3。

三．（本题 8 分）已知 $f(x,y)=\sqrt{|x|^3}y+\sqrt{x^4+(y-1)^2}$ ，求 $f_x'(0,1), f_y'(0,1)$。

解：$f_x'(0,1)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=1}}\dfrac{f(x,1)-f(0,1)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=1}}\dfrac{\sqrt{|x|^3}+x^2-0}{x}=0$， 4 分

$f_y'(0,1)=\lim\limits_{\substack{y\to 1\\ x=0}}\dfrac{f(0,y)-f(0,1)}{y-1}$ 2 分

$=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{\sqrt{(y-1)^2}}{y-1}$ 不存在。 2 分

四．（本题 8 分）给定可微函数 f，令 $z=f(x^2,2f(x,y)+y^2)$，求 z_x,z_y。

解：$z_x=2xf_1(x^2,2f(x,y)+y^2)+2f_1(x,y)f_2(x^2,2f(x,y)+y^2)$， 4 分

$z_y=f_2(x^2,2f(x,y)+y^2)(2f_2(x,y)+2y)$。 4 分

五．（本题 8 分）已知平面过点 $P(2,1,4)$ 且平行于 y 轴，并于直线 $x=y-1=\frac{z-1}{0}$ 的交角为 $\frac{\pi}{4}$。求该平面方程。

解：因为平面平行于 y 轴，所以可设平面方程为 $Ax+Cz+D=0$。 2 分

所以平面的法向量为 $\vec{n}=\{A,0,C\}$。直线的方向向量为 $\vec{l}=\{1,1,0\}$。

则有 $\sin\frac{\pi}{4}=|\cos(\widehat{\vec{n},\vec{l}})|=\left|\dfrac{\{A,0,C\}\cdot\{1,1,0\}}{\sqrt{A^2+C^2}\cdot\sqrt{2}}\right|$，

即 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\left|\dfrac{A}{\sqrt{2}\sqrt{A^2+C^2}}\right|$，解得 $C=0$. 2 分

则平面方程为 $Ax+D=0$。又因为平面过点 $P(2,1,4)$，所以有

$2A+D=0$，则有 $D=-2A$。 2 分

所以所求平面方程为 $x-2=0$。 2 分

六．（本题 8 分）设一个区域中某种生物种群的数量为 $x=x(t)$（t 为时间，单位为天）。已知该区域中此生物可以生存的数量最多为 N，而该生物种群数量在时刻 t 的增长率为 $0.01x(t)(1-\frac{x(t)}{N})$。已知 0 时刻时该生物数量为 $\frac{N}{4}$。试建立微分方程来求解 $x(t)$，并判断至少需要多少天该生物的数量才能比初始时刻增加一倍。(已知 $\ln 3\approx 1.099$)

解：考察 $[t,t+\Delta t]$ 时间段内生物数量的变化，则有

$$x(t+\Delta t)-x(t)=0.01(1-\frac{x}{N})x\Delta t$$

所以有 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0.01(1-\frac{x}{N})x$ 。 2 分

即 $\frac{\mathrm{Nd}x}{(N-x)x}=0.01\mathrm{d}t$ 。

解得： $\frac{x}{N-x}=Ce^{0.01t}$ 。 2 分

因为 $x(0)=\frac{N}{4}$，所以 $C=\frac{1}{3}$. 2 分

所以 $x=\frac{N}{1+3e^{-0.01t}}$ 。

令 $\frac{N}{1+3e^{-0.01t}}=\frac{N}{2}$，解得 $t=100\ln 3\approx 110$ 。 2 分

所以 110 天后生物种群的数量增加一倍。

.