第五章　共轭空间和共轭算子

习题 5

1. 设 X 是 Banach 空间, G 是 X 的闭子空间, T 是由 G 到有界数列空间 m 的有界线性算子, 则 T 一定可以延拓为 X 到 m 的有界线性算子 $\tilde{T}$, 且满足 $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.
2. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 $(X, \|\cdot\|)$ 中线性无关元, $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \subset \mathbb{K}$, 这里 $\mathbb{K}$ 代表数域. 证明在 X 上存在线性泛函 f, 满足
   (1) $f(x_k) = \alpha_k,\ k = 1, \cdots, n$;
   (2) $\|f\| \leq M$
   的充要条件是: 对任意的数 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \mathbb{K}$, 有
   $$|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k| \leq\ M\|\sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k\|.$$
3. 设 X 是线性赋范空间, f 是 X 上的非零有界线性泛函, 则存在 $x_0 \in X$, 使得 $f(x_0) \neq 0$, $X = \mathscr{N} \oplus \{\alpha x_0\}$, 这里 α 是实（或复）数, $\mathscr{N}$ 是 f 的零空间.
4. 设 X 为线性赋范空间, $x, y \in X$, 若对 $\forall\ f \in X^*$, 有 $f(x) = f(y)$. 证明 $x = y$.
5. 证明当 $1 < p < +\infty$ 时, $(l^p)^* = l^q$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, 即 $f \in (l^p)^*$ 当且仅当存在 $a = \{a_i\} \in l^q$, 使得
   $$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i,\ \forall\ x = \{x_i\} \in l^p,$$
   且 $\|f\| = \|a\|$.
6. 类似于第 5 题, 证明 $(l^1)^* = l^\infty$, $(C_0)^* = l^1$, 其中 C_0 是 l^∞ 中收敛于零的数列全体组成的子空间.
7. 试求下列定义在 l^p 上的线性算子的共轭算子:
   (1) $T\{x_1, x_2, \cdots\} = \{0, x_1, x_2, \cdots\}$;
   (2) $T\{x_1, x_2, \cdots\} = \{\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \cdots\}$, 其中 $\{\alpha_k\}$ 是有界数列;
   (3) $T\{x_1, x_2, \cdots\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots\}$, 其中 n 是给定的;
   (4) $T\{x_1, x_2, \cdots\} = \{\alpha_n x_n, \alpha_{n+1} x_{n+1}, \cdots\}$, 其中 $\{\alpha_k\}$ 是有界数列, n 是给定的.
8. 试求下列在 $L^2(-\infty, \infty)$ 上定义的线性算子的共轭算子:
   (1) $(Tx)(t) = x(t+h)$(h 是给定的实数);
   (2) $(Tx)(t) = a(t)x(t+h)$ ($a(t)$ 是有界可测函数, h 是给定的实数);
   (3) $(Tx)(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$.
9. 设 L 是从 l^2 到 l^2 的线性算子, 即 $(y_1, y_2, \cdots) = L(x_1, x_2, \cdots)$, 其中
   $$y_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n^2}.$$

证明 L 是有界线性算子且 $\|L\| \leqslant (\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}$, 并求出 L^*.

10. 设 $T: l^2 \to l^2$,

$$T(x_1, x_2, \cdots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \cdots, \frac{x_n}{n}, \cdots).$$

求 T^*.

11. 设 X 为线性赋范空间, 证明：当 X 为无限维空间时, X^* 也是无限维空间.

12. 设 X 为线性赋范空间, 线性算子 $A: X \to X$, $\mathscr{D}(A) = X$, 线性算子 $B: X^* \to X^*$, $\mathscr{D}(B) = X^*$. 如果

$$(Bf)(x) = f(Ax),\ \forall\, x \in X,\ f \in X^*,$$

证明 A, B 都是有界线性算子.

13. 若 $T_n, T \in \mathcal{B}(X, Y)\,(n = 1, 2, \cdots)$, 证明当 $\|T_n - T\| \to 0$ 时, $\|T_n^* - T^*\| \to 0\ (n \to \infty)$.

14. 设 X, Y 是赋范线性空间, 证明若 Y 不是完备的且 $X \neq \{0\}$, 则 $\mathscr{B}(X, Y)$ 不完备.

15. 设 $f(t)$ 是 $[a, b]$ 上的可测函数, 如果对于任一 $g(t) \in L^q[a, b]\ (1 \leq q \leq +\infty)$, 有 $f(t)g(t) \in L(a, b)$, 则 $f(t) \in L^p[a, b]$ (当 $1 < q < +\infty$ 时, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; 当 $q = 1$ 时, $p = +\infty$; 当 $q = +\infty$ 时, $p = 1$).

16. 设 X 是 Hilbert 空间, 令 $f_k(x) = (x, y_k)$, $k = 1, 2$, $x, y_k \in X$, 在 X^* 中定义

$$(f_1, f_2) = \overline{(y_1, y_2)}.$$

证明 X^* 也是 Hilbert 空间.

17. 设 $\varphi(x, y)$ 是 Hilbert 空间 H 上的一个共轭双线性函数, 满足
(1) $\exists\, M > 0$, 使得 $|\varphi(x, y)| \leq M\|x\|\ \|y\|$;
(2) $\exists\, \delta > 0$, 使得 $|\varphi(x, y)| \geq \delta\|x\|^2$.
证明对 $\forall f \in H^*$, 存在唯一的元素 $y_f \in H$, 使得

$$\varphi(x, y_f) = f(x), \forall x \in H,$$

并且 y_f 依赖于 f.

18. 设 H 是 Hilbert 空间, 并设在 H 中 $x_n \to x_0, y_n \xrightarrow{w} y_0$, 证明 $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$.

19. 设 L 是 Hilbert 空间 H 到 H 上的有界线性算子, 证明 L 是等距的当且仅当 L^* 是等距的.

20. 设 $(H_1, (\cdot, \cdot)_1), (H_2, (\cdot, \cdot)_2)$ 是 Hilbert 空间, $L: H_1 \to H_2$ 是有界线性算子. 定义 $L^*: H_2 \to H_1$, $(y, Lx)_2 = (L^*y, x)_1$, $\forall x \in H_1, y \in H_2$. 证明
(1) L^* 是有界线性算子;
(2) $L = L^{**}$;
(3) $\|L\| = \|L^*\|$.

21. 设 L 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子. 证明下列关系式

$$\mathscr{N}(L^*) = \mathscr{N}(LL^*);\ \overline{\mathscr{R}(L)} = \overline{\mathscr{R}(LL^*)}.$$

22. 设 T 是 Hilbert 空间 H 中的自共轭算子且有有界逆算子, 证明 T^{-1} 也是自共轭算子.

23. 设 A 是复内积空间 H 上的有界线性算子, 如果对每个 $x \in H$, $(Ax, x) = 0$, 则 $A = 0$. 对于实空间, 此结果是否成立? 如果 A 是自共轭算子, 则不论 H 是实或复, 只要 $(Ax, x) = 0$ $(\forall\, x \in H)$, 则 $A = 0$.

24. 设 $T:\ L^2[0,1] \ \to\ L^2[0,1]$ 由 $(Tx)(t) = tx(t)$ 定义, 证明 T 是自共轭的.

25. 设 $T:\ l^2 \ \to\ l^2$ 由 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots) \ \to\ (0, 0, \xi_3, \xi_4, \cdots)$ 定义, 试问 T 有界吗? 是自共轭的吗?

26. 设 T 为有界线性算子, 且 $\|T\| \le 1$, 证明

$$\{x:\ Tx = x\} = \{x:\ T^*x = x\}.$$

27. 设 H 为复 Hilbert 空间, T 为 H 上的有界线性算子, 若对一切 $x \in H$, $\mathrm{Re}\ (Tx, x) = 0$, 则 $T = -T^*$.

28. 设 T 是可分 Hilbert 空间 $\mathscr{U}$ 上的有界线性算子, $\{e_n\}$ 为 $\mathscr{U}$ 中完备的标准正交系. 若对任何 m, n, 有 $(Te_n, e_m) = \overline{(Te_m, e_n)}$, 则 T 是自共轭算子.

29. 设 X 为 Banach 空间, $\{f_i\} \subset X^*$. 证明对任何 $x \in X$, $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)| < +\infty$ 的充要条件是对任何 $F \in X^{**}$, $\sum_{i=1}^{\infty} |F(f_i)| < +\infty$.

30. 设 $\{x_k\}$ 是 Banach 空间 X 中的点列. 证明如果对于每一个 $f \in X^*$, $\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| < \infty$, 则存在常数 M, 使得对于每一个 $f \in X^*$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| \le M\|f\|.$$

31. 设 X, Y 是 Banach 空间, T 是 X 到 Y 的线性算子; 又设 $\forall f \in Y^*$, $x \to f(Tx)$ 是 X 上的有界线性泛函. 证明 T 是连续的.

证明 设 $\{x_n\} \subset X$, $x_n \to x \in X$, $Tx_n \to y \in Y$. 因为对于 $\forall f \in X^*, f(Tx)$ 是 X上的线性有界泛函, 所以

$$f(Tx_n) \to f(Tx),\ f(Tx_n) \to f(y)\ (n \to \infty).$$

由极限唯一性我们有 $f(Tx) = f(y)$ $(\forall f \in Y^*)$. 再根据 Hahn-Banach 定理推得 $Tx = y$, 从而 T 是闭的. 故由闭图像定理知 T 连续.

32. 设 X 是 Banach 空间, $p(x)$ 是 X 上的泛函, 满足

(1) $p(x) \ge 0$;

(2) 当$\alpha \ge 0$时, $p(\alpha x) = \alpha p(x)$;

(3) $p(x+y) \le p(x)+p(y)$, 并且当 $x, x_n \in X, x_n \to x (n \to \infty)$ 时, $\underline{\lim}_{n\to\infty} p(x_n) \ge p(x)$.

证明存在常数 M, 使得 $p(x) \le M\|x\|$ $(x \in X)$.

33. 证明自反的 Banach 空间 X 是可分的充要条件是 X^* 是可分的.

34. 证明任何有限维赋范线性空间都是自反的.

35. 证明空间 $L^1[a,b]$ 及 l^1 不是自反的.

36. 设 $x_n = \{\xi_k^{(n)}\} \in l^p$ $(n = 1,2,3,\cdots)$, 则 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $\{\xi_k\} \in l^p$ 的充要条件是 $\sup_{n\geq 1}\|x_n\| < +\infty$, 且对每个 k, $\lim_{n\to\infty}\xi_k^{(n)} = \xi_k$.

37. 证明 l^1 中任何弱收敛的点列必是强收敛的.

38. 设 X 是赋范线性空间, M 为 X 的闭线性子空间. 证明：如果 $\{x_n\} \subset M$, 并且当 $n \to \infty$ 时 $x_0 = w - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 则 $x_0 \in M$.

39. 设 T_n 是 $L^p(\mathbb{R})$ $(1 < p < \infty)$ 到自身的平移算子:

$$(T_n f)(x) = f(x+n),\ \forall f \in L^p(\mathbb{R}), n = 1,2,\cdots.$$

证明 $T_n \xrightarrow{w} 0$, 但是 $\|T_n f\|_p = \|f\|_p, \forall f \in L^p(\mathbb{R})$.

40. 设 H 为 Hilbert 空间, $x_0, x_n \in H(n = 1,2,\cdots)$, 当 $n \to \infty$ 时, $x_n \xrightarrow{w} x_0$, 且 $\|x_n\| \to \|x_0\|$. 证明 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$.

41. 设 H 为 Hilbert 空间, $\{x_n\}$ 是 H 中的正交集, 则下列条件等价：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y)$ $(\forall y \in H)$ 收敛;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2$ 收敛.

第五章习题简答

1. 证明 设 $Tx = \{\zeta_n\} \in m,\ x \in G$. 令

$$f_n:\ f_n(x) = \zeta_n,\ x \in G,\ n = 1, 2, \cdots \cdots.$$

易证 f_n 是 G 上有界线性泛函且 $\|f_n\|_G \leq \|T\|$. 则由 Hahn–Banach 定理知, 对每个 n 存在 X 上的有界线性泛函 F_n 使得 对 $\forall x \in G$ 有 $F_n(x) = f_n(x)$ 且 $\|F_n\| = \|f_n\|_G$. 令

$$\widetilde{T}:\ X \to m,\ \widetilde{T}x = \{F_n(x)\},\ x \in X.$$

易知 $\widetilde{T}$ 是 X 上到 m 的线性算子. 因为对 $\forall x \in X$ 有

$$\|\widetilde{T}x\| \leq \sup_{n\geq 1}\|F_n\|\|x\| \leq \|T\|\|x\|,$$

故 $\widetilde{T}$ 是有界的且 $\|\widetilde{T}\| \leq \|T\|$. 另方面,

$$\|\widetilde{T}\| = \sup_{x\in X,\ \|x\|=1}\|\widetilde{T}x\| \leq \sup_{x\in G,\ \|x\|=1}\|Tx\| = \|T\|.$$

则 $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

2. 证明 必要性. 若满足所说的条件的 f 存在, 则对任意的数 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned}|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k| = |\sum_{k=1}^{n}\beta_k f(x_k)| = |f(\sum_{k=1}^{n}\beta_k x_k)| \\ \leqslant \| f \| \| \sum_{k=1}^{n}\beta_k x_k \| \leqslant M \| \sum_{k=1}^{n}\beta_k x_k \| .\end{aligned}$$

充分性. 设

$$E = span\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}.$$

定义 $f_0(x) = \sum_{k=1}^{n}\beta_k\alpha_k,\ \forall x = \sum_{k=1}^{n}\beta_k x_k \in E$, 特别有 $f_0(x_k) = \alpha_k$. 则有

$$| f_0(x) | = |\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k| \leqslant M \| x \| \Rightarrow \| f_0 \| \leqslant M,\quad \forall x \in E.$$

再根据 Hahn-Banach 定理, 在 X 上存在线性泛函 f, 使得对$\forall x \in E f(x) = f_0(x)$, 且

$$\| f \| = \| f_0 \| \leqslant M.$$

3. 证明 因为 f 是 X 上的非零有界线性泛函, 则存在 $x_0 \in X,\ x_0 \neq 0$, 使得 $f(x_0) \neq 0$. 令

$$M = \mathscr{N} + \{\alpha x_0\},$$

显然有

$$X \supseteq M,\ \text{且}\ \mathscr{N} \cap \{\alpha x_0\} = \emptyset.$$

下面证 $X \subseteq M$.

对 $\forall x \in X$, 令 $y = x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0$, 有 $f(y)=0$, 则 $y \in \mathscr{N}$. 故 $\forall x \in X$ 可表示为

$$x = y + \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0,$$

其中 $y \in \mathscr{N}$, $\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0 \in \{\alpha x_0\}$. 这表明了 $X \subseteq M$. 则 $X = \mathscr{N} \oplus \{\alpha x_0\}$.

4. 证明 令 $x_0 = x - y$, 则由条件知对 $\forall\ f \in X^*$, 有 $f(x_0) = f(x) - f(y)$. 故由推论 5.1.5 知 $x = y$.

5. 证明 必要性. 对 $\forall f \in (l^p)^*$,令

$$e_k = (\overbrace{0,\cdots,0,1}^{k\text{个}},0,0,\cdots) \in l^p,$$

则对 $\forall x \in l^p$, 可以表示为

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k.$$

由 f 的连续性有

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(e_k)x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k x_k,$$

其中 $\eta_k = f(e_k)$. 下面证明 $\eta = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^q$. 事实上,对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 构造无穷维向量 $x^{(n)}$, 其坐标为

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} |\ \eta_k\ |^{q-1}\ e^{-i\theta_k}, & k \leqslant n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

其中 $\theta_k = arg(\eta_k)$. 因为对于每一个固定的 $n, x^{(n)}$ 的坐标只有有限项不为零，故有$x^{(n)} \in l^p$. 由于

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(e_k)x_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k\ |\ \eta_k\ |^{q-1}\ e^{-i\theta_k} = \sum_{k=1}^{n} |\ \eta_k\ |^q,$$

且

$$|f(x)| \leqslant \|\ f\ \| \|\ x^{(n)}\ \| = \|\ f\ \|\ (\sum_{k=1}^{n} |\ \eta_k\ |^{(q-1)p})^{\frac{1}{p}} = \|\ f\ \|\ (\sum_{k=1}^{n} |\ \eta_k\ |^q)^{\frac{1}{p}},$$

则

$$\sum_{k=1}^{n} |\ \eta_k\ |^q \leqslant \|\ f\ \|\ (\sum_{k=1}^{n} |\ \eta_k\ |^q)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow (\sum_{k=1}^{n} |\ \eta_k\ |^q)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|\ f\ \|, \tag{5.0.1}$$

从而 $\eta = \{\eta_k\} \in l^q$, 且 $\|\ \eta\ \|_q \leqslant \|\ f\ \|$.

充分性. 对于 $\forall \eta \in l^q$, 定义

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k x_k,\ \forall x = (x_k) \in l^p.$$

显然 $f(x)$ 是 l^p 上的一个线性泛函且根据 Hölder 不等式, 我们有

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k||x_k| \leq \|\eta\|_q\|x\|_p. \tag{5.0.2}$$

故 $f \in (l^p)^*$. 由 (5.0.1),(5.0.2) 知 $\| f \|=\| \eta \|_q$.

6. 证明 (1) 对 $\forall f \in (l^1)^*$, 令

$$e_k=(\overbrace{0,\cdots,0,1}^{k\text{个}},0,0,\cdots)\in l^1,$$

则对 $\forall x \in l^1$, 可以表示为

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k e_k.$$

由 f 的连续性可知

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f(e_k)x_k=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k x_k,$$

其中 $\eta_k=f(e_k)$. 因为

$$\mid \eta_k \mid=\mid f(e_k) \mid\leqslant\| f \|\| e_k \|=\| f \| \quad (k=1,2,\cdots),$$

所以 $\eta=\{\eta_k\}\in l^{\infty}$.
另一方面, 对于 $\forall \eta=\{\eta_k\}\in l^{\infty}$, 定义

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k x_k, \qquad (\forall x=(x_k)\in l^1).$$

显然 $f(x)$ 是 l^1 上的一个线性泛函且

$$\mid f(x) \mid\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mid \eta_k \mid\mid x_k \mid\leqslant\sup_{k\geqslant 1}\mid \eta_k \mid\sum_{k=1}^{\infty}\mid x_k \mid=\| \eta \|_{\infty}\| x \|_1 .$$

故 $f \in (l^1)^*$. 则 $(l^1)^*=l^{\infty}$.
(2) 对 $\forall f \in (C_0)^*$, 令

$$e_k=(\overbrace{0,\cdots,0,1}^{k\text{个}},0,0,\cdots)\in C_0,$$

则对 $\forall x \in C_0$ 可以表示为 $x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k e_k$. 由 f 的连续性有

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f(e_k)x_k=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k x_k,$$

其中 $\eta_k=f(e_k)$. 下面证明 $\eta=\{\eta_k\}\in l^1$. 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 构造无穷维向量 $x^{(n)}$, 其坐标为

$$x_k^{(n)}=\begin{cases} e^{-i\theta_k}, & k\leqslant n,\\ 0, & k>n,\end{cases}$$

其中$\theta_k = arg(\eta_k)$. 显然$x^{(n)} \in C_0$. 由于

$$f(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \eta_k e^{-i\theta_k} = \sum_{k=1}^{n} \mid \eta_k \mid e^{i\theta_k} e^{-i\theta_k} = \sum_{k=1}^{n} \mid \eta_k \mid,$$

且

$$|f(x^n)| \leqslant \| f \| \| x^{(n)} \|_\infty = \| f \| .$$

故有 $\sum_{k=1}^{n} \mid \eta_k \mid \leqslant \| f \|$, 即 $\eta = \{\eta_k\} \in l^1$.

另一方面,对于 $\forall \eta = (\eta_k) \in l^1$, 定义

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}, \ \forall x = (x_k) \in C_0.$$

显然 $f(x)$ 是 C_0 上的一个线性泛函且

$$\mid f(x) \mid \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mid \eta_k \mid \mid x_k \mid \leqslant \sup_{k \geqslant 1} \mid x_k \mid \sum_{k=1}^{\infty} \mid \eta_k \mid = \| \eta \|_{l^1} \| x \| .$$

故 $f \in (C_0)^*$.

7. 解 (1) 对$\forall x = \{x_1, x_2, \cdots\}$, $y = \{y_1, y_2, \cdots\} \in l^2$,

$$(x, T^* y) = (Tx, y) = x_1 \overline{y_2} + x_2 \overline{y_3} + \cdots .$$

所以$T^* y = T^*\{y_1, y_2, \cdots\} = \{y_2, y_3, \cdots\}$.

(2) 对$\forall x = \{x_1, x_2, \cdots\}$, $y = \{y_1, y_2, \cdots\} \in l^2$,

$$(x, T^* y) = (Tx, y) = \alpha_1 x_1 \overline{y_1} + \alpha_2 x_2 \overline{y_2} + \cdots .$$

所以$T^* y = T^*\{y_1, y_2, \cdots\} = \{\overline{\alpha_1} y_1, \overline{\alpha_2} y_2, \cdots\}$.

(3) 对$\forall x = \{x_1, x_2, \cdots\}$, $y = \{y_1, y_2, \cdots\} \in l^2$,

$$(x, T^* y) = (Tx, y) = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \cdots + x_n \overline{y_n}.$$

所以$T^* y = T^*\{y_1, y_2, \cdots\} = \{y_1, y_2, \cdots, y_n, 0, \cdots\}$.

(4) 对$\forall x = \{x_1, x_2, \cdots\}$, $y = \{y_1, y_2, \cdots\} \in l^2$,

$$(x, T^* y) = (Tx, y) = \alpha_n x_n \overline{y_1} + \alpha_{n+1} x_{n+1} \overline{y_2} + \cdots .$$

所以$T^*\{y_1, y_2, \cdots\} = \{0, \cdots, 0, \overline{\alpha_n} y_1, \overline{\alpha_{n+1}} y_2, \cdots\}$.

8. 解 (1) 因为对 $\forall x, y \in L^2(-\infty, \infty)$ 有

$$(Tx, y) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+h)\overline{y(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t-h)}dt = (x, T^* y),$$

故 $(T^* y)(t) = y(t-h)$.

(2) 因为对 $\forall x, y \in L^2(-\infty, \infty)$ 有

$$(Tx, y) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)x(t+h)\overline{y(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{\overline{a(t-h)}y(t-h)}dt = (x, T^* y),$$

故 $(T^*y)(t)=\overline{a(t-h)}y(t-h)$.

(3) 因为对 $\forall x,y\in L^2(-\infty,\infty)$ 有

$$(Tx,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]\overline{y(t)}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\overline{\frac{[y(t)+y(-t)]}{2}}dt=(x,T^*y),$$

故 $(T^*y)(t)=\frac{1}{2}[y(t)+y(-t)]$.

9. 证明 因为对 $\forall x=(x_n)\in l^2$ 有

$$\|Lx\|=\|y\|=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sum_{k=1}^{n}x_k|^2}{n^4})^{\frac{1}{2}}\le(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}{n^3})^{\frac{1}{2}}\le(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}\|x\|,$$

故 L 是有界线性算子且 $\|L\|\leqslant(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}$.

由于对 $\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^2$, $\forall y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)\in l^2$, 有

$$(x,Ty)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^2}(\sum_{k=1}^{n}\overline{y}_k)=\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x_k}{k^2})\overline{y}_n=(T^*x,y),$$

故 $T^*x=(z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots)$, 其中 $z_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{x_k}{k^2}$.

10. 解 对 $\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^2$, $\forall y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)\in l^2$,

$$Ty=(y_1,\frac{y_2}{2},\cdots\frac{y_n}{n},\cdots)\in l^2,$$

因为

$$(x,Ty)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k(\overline{Ty})_k=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\frac{\overline{y_k}}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k}\overline{y_k}=(T^*x,y),$$

故 $(T^*x)_k=\frac{x_k}{k}$, 即 $T^*=T$.

11. 证明 设 $dimX^*<\infty$, 则$dimX^{**}=dimX^*<\infty$, $JX\subset X^{**}$, 故$dimJX<\infty$, 这与 $dimX^*=\infty$ 矛盾.因此 $dimX^*=\infty$.

12. 证明 对任意固定的 $x\in\{x|\|x\|\le 1\}$, 令

$$\widetilde{f_x}:\ X^*\longrightarrow\mathbb{K}$$
$$\widetilde{f_x}(f)=f(Ax),\quad \forall f\in X^*.$$

因而 $\widetilde{f_x}$ 是 X^* 上的有界线性泛函. 对于任意固定的 $f\in X^*$, 由 $Bf\in X^*$ 得

$$\sup_{\|x\|\le 1}|f(Ax)|=\sup_{\|x\|\le 1}|(Bf)(x)|=\|Bf\|, \tag{1}$$

则由一致有界原则可知

$$\sup_{\|f\|\le 1}\sup_{\|x\|\le 1}|f(Ax)|=\sup_{\|x\|\le 1}\sup_{\|f\|\le 1}|f(Ax)|<\infty.$$

结合 (1) 得

$$\sup_{\|f\|\le 1}\|Bf\|\le \sup_{\|f\|\le 1}\sup_{\|x\|\le 1}|f(Ax)|<\infty,$$

故 B 是有界线性算子.

另一方面, 若$Ax\neq 0$, 则由 Hahn–Banach 定理的推论知存在$f_0\in X^*$ 使得:

$$\|f_0\|=1,\ f_0(Ax)=\|Ax\|.$$

因此有

$$\|Ax\|=f_0(Ax)\le \sup_{\|f\|\le 1}|f(Ax)|.$$

所以

$$\sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\|\le \sup_{\|x\|\le 1}\sup_{\|f\|\le 1}|f(Ax)|<\infty,$$

从而 A 是有界线性算子.

13. 证明 因为 $\| T_n{}^*-T^*\|=\|(T_n-T)^*\|=\|T_n-T\|$, 所以当 $\|T_n-T\|\to 0$ 时,

$$\| T_n{}^*-T^*\|\to 0(n\to\infty).$$

14. 证明 反证法. 假设 $\mathscr{B}(X,Y)$ 完备. 设 $\{y_n\}\subset Y$ 任一 Cauchy 列. 取 $x_0\in X$, 使 $\|x_0\|=1$. 由命题 5.1.3 知存在 $f\in X^*$ 使得 $f(x_0)=\|x_0\|$. 定义算子列 $\{T_n\}\subset\mathscr{B}(X,Y)$ 如下

$$T_n(x)=f(x)y_n\ (x\in X),$$

因

$$\|T_m-T_n\|\le\|f\|\|y_m-y_n\|,$$

故 $\{T_n\}$ 是 $\mathscr{B}(X,Y)$ 中的 *Cauchy* 列, 由 $\mathscr{B}(X,Y)$ 完备性知存在 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$ 使得 $T_n\to T$. 则

$$\|y_n-Tx_0\|=\|T_nx_0-Tx_0\|\le\|T_n-T\|\to 0$$

可见 $y_n\to Tx_0$. 这表明 Y 完备,与已知矛盾. 从而 $\mathcal{B}(X,Y)$ 不完备.

15. 证明 设 $1<q<+\infty$, 令

$$f_n(t)=\begin{cases} f(t), & |f(t)|\le n\\ 0, & |f(t)|>n\end{cases}$$

则

$$f_n(t)\in L^p[a,b]\ \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

作 $L^q[a,b]$ 上的线性泛函如下

$$F_n(g)=\int_a^b g(t)f_n(t)dt\ (\forall g\in L^q[a,b]),$$

易知 $F_n\in(L^p[a,b])^*$, 且 $\|F_n\|=\|f_n\|_p$. 因为 $f(t)\in L[a,b]$, 故 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$. 又因为

$$|f_n(t)g(t)|\le|f(t)g(t)|\in L[a,b],$$

由勒贝格控制收敛定理立即知,对每个 $g \in L^q[a,b]$, 有

$$\lim_{n\to\infty} |F_n(g)| = \left| \int_a^b g(t)f(t)dt \right| < +\infty,$$

故据共鸣定理可得

$$\|f_n\|_p \leq M \ (M > 0\text{为常数}),$$
$$\left\{ \int_a^b |f(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq M,$$

即 $f(t) \in L^p[a,b]$.

当 $q = 1$ 时, $p = +\infty$, 则由 $\|F_n\| = \|f_n\|_\infty \leq M$, 立即可得 $\|f\|_\infty \leq M$, 故亦有 $f(t) \in L^p[a,b]$.

$q = +\infty$ 时,只需取 $g(t) = 1 \in L^\infty[a,b]$, 就有 $f(t) \in L[a,b]$.

16. 证明 易证 X^* 上定义的 $(\cdot,\cdot)$ 是内积. 下面证明 $(X^*, (.,.))$ 是 Hilbert 空间.

对于任意的 Cauchy 列 $\{f_n\} \subset X^*$, 存在 $\{y_n\} \subset X$, 使得

$$f_n(x) = (x, y_n).$$

因为

$$(f_n, f_m) = \overline{(y_n, y_m)}, \quad n, m = 1, 2, \cdots$$

所以 $\|y_n - y_m\| = \|f_n - f_m\|$. 又由 $\{f_n\}$ 是 Cauchy 列, 知 $\{y_n\}$ 为 X 中的 Cauchy 列. 由于 X 是 Hilbert 空间, 故存在 $y \in X$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. 令

$$f(x) = (x, y), \quad x \in X.$$

显然 $f \in X^*$, 且

$$\|f_n - f\| = \|y_n - y\| \to 0 \ (n \to +\infty).$$

则 $(X^*, (.,.))$ 是 Hilbert 空间.

17. 证明 由条件 (1), (2) 必存在唯一的有连续逆的连续线性算子 $A \in \mathfrak{B}(H)$, 使得

$$\varphi(x, y) = (x, Ay), \forall x, y \in H.$$

又根据Riesz表示定理,对$\forall f \in H^*$,$\exists$唯一的$z_f \in H$,使得

$$f(x) = (x, z_f) = (x, Ay_f) = \varphi(x, y_f).$$

再证所产生的y_f是唯一的.事实上,若另有表示

$$f(x) = \varphi(x, y_f^{'}), \forall x \in H,$$

则有

$$0 = \varphi(x, y_f) - \varphi(x, y_f^{'}) = \varphi(x, y_f - y_f^{'}), \forall x \in H.$$

取 $x = y_f - y_f^{'}$, 便有

$$0 = \varphi(y_f - y_f^{'}, y_f - y_f^{'}) \geqslant \delta \| \, y_f - y_f^{'} \, \|^2,$$

由此推出 $y_f^{'} = y_f$.

18. 证明 因为 $y_n \xrightarrow{w} y_0$, 所以 $\exists M>0$, 使得 $\| y_n \| \leqslant M$, 且 $|(x_0, y_n - y_0)| \to 0 \ (n\to\infty)$. 又因为

$$\begin{aligned}(x_n, y_n) - (x_0, y_0) &= (x_n, y_n) - (x_0, y_n) + (x_0, y_n) - (x_0, y_0) \\ &= (x_n - x_0, y_n) + (x_0, y_n - y_0),\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}|(x_n, y_n) - (x_0, y_0)| &\le |(x_n - x_0, y_n)| + |(x_0, y_n - y_0)| \\ &\le M\|x_n - x_0\| + |(x_0, y_n - y_0)| \to 0 \ (n\to\infty).\end{aligned}$$

所以$|(x_n, y_n) - (x_0 - y_0)| \to 0 \ (n\to\infty)$, 即 $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0) \ (n\to\infty)$.

19. 证明 设 L 是等距的, 即对 $\forall x \in H$ 有 $\|Lx\| = \|x\|$. 因为 L 是 Hilbert 空间 H 到 H 上的有界线性算子, 故对 $\forall y \in H$ 有

$$\|L^*y\|^2 = (L^*y, L^*y) = (LL^*y, y) \le \|LL^*y\|\|y\| = \|L^*y\|\|y\|,$$

即

$$\|L^*y\| \le \|y\|. \tag{5.0.3}$$

另一方面, 对于 y 存在 $x \in H$ 使得 $y = Lx$. 从而有

$$\|y\|^2 = \|Lx\|^2 = (Lx, Lx) = (x, L^*Lx) \le \|L^*Ly\|\|x\| = \|L^*y\|\|y\|,$$

即

$$\|y\| \le \|L^*y\|. \tag{5.0.4}$$

则由 (5.0.3)、(5.0.4)可得 $\|y\| = \|L^*y\|$. 即 L^* 是等距的.
同理可证明 若 L^* 是等距的, 则 L 也是等距的.

20. 证明 (1) 因为对于 $\forall x \in H_1, \forall y_1, y_2 \in H_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned}(L^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2), x)_1 &= (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, Lx)_2 = \alpha_1 (y_1, Lx)_2 + \alpha_2 (y_2, Lx)_2 \\ &= \alpha_1 (L^*y, x)_1 + \alpha_2 (L^*y_2, x)_1 = (\alpha_1 L^*y, x)_1 + (\alpha_2 L^*y_2, x)_1 \\ &= (\alpha_1 L^*y + \alpha_2 L^*y_2, x)_1,\end{aligned}$$

即 L^* 是线性算子且

$$\| L^*y \|_1^2 = (L^*y, L^*y)_1 = (y, LL^*y)_2 \leqslant \| LL^*y \|_2 \| y \|_2 \leqslant \| L \| \| L^*y \|_1 \| y \|_2,$$

即 $\| L^*y \| \leqslant \| L \| \| y \|$. 这说明 L^* 有界且 $\| L^* \| \leqslant \| L \|$.
(2) 因为对 $\forall x \in H_1, y \in H_2$ 有

$$(Lx, y) = (x, L^*y) = \overline{(L * y, x)} = \overline{(y, L^{**}x)} = (L^{**}x, y),$$

故 $L^{**}=L$.

(3) 由 (1) 证明可得 $\| L^* \| \leqslant \| L \|$. 同理可得 $\| L^{**} \| \leqslant \| L^* \|$. 再结合 $L^{**}=L$ 有

$$\| L \| = \| L^* \| .$$

21. 证明 (1) 对$\forall x \in \mathscr{N}(L^*)$, 则$L^*(x)=0$, 从而

$$LL^*(x)=0.$$

因此$x \in \mathscr{N}(LL^*)$. 另一方面, 对$\forall x \in \mathscr{N}(LL^*)$, 则$LL^*(x)=0$. 结合共轭算子定义可知

$$(L^*x, L^*x)=(x, LL^*x)=(x,0)=0.$$

因此$L^*x=0$, 从而$x \in \mathscr{N}(L^*)$. 综上可知$\mathscr{N}(L^*)=\mathscr{N}(LL^*)$.

(2)由定理 5.3.8 可得

$$\overline{\mathscr{R}(L)}=\mathscr{N}(L^*)^{\perp}=\mathscr{N}(LL^*)^{\perp}=\overline{\mathscr{R}(LL^*)}.$$

22. 证明 因为 T^- 存在且有界且 T 是自共轭的, 故对 $\forall x,y \in H$ 有

$$(T^{-1}y,x)=(T^{-1}y,TT^{-1}x)=(T^*T^{-1}y,T^{-1}x)=(TT^{-1}y,T^{-1}x)=(y,T^{-1}x).$$

因此 T^{-1} 也是自共轭算子.

23. 证明 对于复空间, 由条件 $(Ax,x)=0(\forall x \in H)$,并利用等式

$$\begin{aligned}(Ax,y)=\frac{1}{4}[&(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)\\ &+i(A(x+iy),x+iy)-i(A(x-iy),x-iy)],\end{aligned}$$

我们取 $y=Ax$, 就得 $Ax=0(\forall x \in H)$, 故 $A=0$.

对于实空间不一定成立,例如,在二维平面上的旋转变换 $A:(x,y)\to(x',y')$

$$\begin{cases}x'=y\\ y'=-x\end{cases}$$

记 $u=(x,y), Au=(x',y')$, 则

$$(Au,u)=xx'+y'y=yx-xy=0 \qquad (\forall u \in \mathbb{R}^2),$$

但显然 $A \neq 0$.

当 A 为自伴算子时, 对实空间 H, 我们利用等式

$$(Ax,y)=\frac{1}{4}[(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)]$$

得

$$(Ax,y)=0 \qquad (\forall x,y \in H),$$

从而有 $A=0$. 故当 A 为自伴算子时, 不论 H 是实的还是复的,均有 $A=0$.

24. 证明 显然 T 是线性的, 且对 $\forall x \in L^2[0,1]$ 有

$$\|Tx\| = \{\int_0^1 t^2|x(t)|^2\}^{\frac{1}{2}} \leq \{\int_0^1 |x(t)|^2\}^{\frac{1}{2}} = \|x\|.$$

故 T 是有界线性算子. 对 $\forall x, y \in L^2[0,1]$ 有

$$(Tx, y) = \int_0^1 tx(t)\overline{y(t)}dt = \int_0^1 x(t)\overline{ty(t)}dt = (x, Ty),$$

则由有界线性算子的共轭算子的定义可知

$$T = T^*.$$

即 T 是自共轭的.

25. 解 T 是有界的. 事实上, 对 $\forall x = \{\xi_n\} \in l^2$ 有

$$\|Tx\| = (\sum_{n=3}^{\infty}|\xi_n|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\|.$$

又因为对 $x = \{\xi_n\}$, $y = \{\eta_n\}$ 有

$$(Tx, y) = \sum_{n=3}^{\infty}\xi_n\overline{\eta}_n = 0\cdot\xi_1 + 0\cdot\xi_2 + \sum_{n=3}^{\infty}\xi_n\overline{\eta}_n = (x, T^*y),$$

故 $T^*: \ l^2 \ \to \ l^2$, $T^*y = T^*(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \cdots) = (0, 0, \eta_3, \eta_4, \cdots)$. 即 T 是自共轭的.

26. 证明 记 $M = \{x : Tx = x\}, N = \{x : T^*x = x\}$, 任取 $x \in N$, 则

$$0 \leqslant (Tx - x, Tx - x) = \| Tx \|^2 - \| x \|^2 \leq \|T\|^2\|x\|^2 - \|x\|^2.$$

由于 $\|T\| < 1$, 故 $Tx = x$, 即 $N \subset M$. 同理可证 $M \subset N$,因此 $M = N$.

27. 证明 令 $B = T + T^*$, 则 $B^* = T^* + T^{**} = B$, 从而 B 为自共轭算子. 对于任意 $x \in H$, 有

$$\begin{aligned}(Bx, x) &= (Tx, x) + (T^*x, x)\\ &= (Tx, x) + (x, Tx) = 2Re(Tx, x) = 0.\end{aligned}$$

由于

$$\|B\| = \sup\{|(Bx, x)|\,|x \in H, \|x\| = 1\} = 0,$$

故 $B = 0$. 因此 $T = -T^*$.

28. 证明 任取 $x, y \in \mathscr{U}$, 由于 e_n 是 $\mathscr{U}$ 中完备的标准正交系, 所以

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty}(y, e_k)e_k,$$

令 $x_n = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k, y_n = \sum_{k=1}^{n}(y, e_k)e_k$, 根据条件

$$(Te_n, e_m) = \overline{(Te_m, e_n)} = (e_n, Te_m),$$

可得

$$(Tx_n, y_n) = (x_n, Ty_n),$$

故 $(Tx, y) = (x, Ty)$ $(\forall x, y \in \mathscr{U})$, T 是自共轭算子.

29. 证明 充分性. 设对 $\forall F \in X^{**}, \sum_{i=1}^{\infty} \mid F(f_i) \mid < \infty$, 则对 $\forall x \in X$, , 定义

$$F_x(f) = f(x),\ \forall f \in X^*,$$

则 $F_x \in X^{**}$, 于是

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mid f_i(x) \mid = \sum_{i=1}^{\infty} \mid F_x(f_i) \mid < \infty.$$

必要性. 对 $\forall F \in X^{**}$, 假设对每个 i, $|F(f_i)| \neq 0$. 记 $\varepsilon_i = \frac{\overline{F(f_i)}}{|F(f_i)|}$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \mid F(f_i) \mid = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i F(f_i) = F(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i)\ \forall n \in N.$$

又对 $\forall x \in X$,有

$$\mid (\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i)(x) \mid \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mid f_i(x) \mid \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mid f_i(x) \mid < \infty,$$

则由一致有界原则知, 存在 $M > 0$, 使得

$$\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i \| \leqslant M,\ n = 1, 2, \cdots,$$

即 $\{\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i \|\}$ 是有界的. 于是得到

$$\sum_{i=1}^{n} \mid F(f_i) \mid = |F(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i)| \leqslant \| F \| \cdot M,$$

即 $\sum_{i=1}^{\infty} \mid F(f_i) \mid < \infty$.

30. 证明 设 $p(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \mid f(x_k) \mid$, 显然对 $\forall f, g \in X^*$, $\alpha \geq 0$, 有

$$p(f) \geq 0,\ p(\alpha f) = \alpha p(f),\ p(f+g) \leq p(f) + p(g).$$

下面证明, 由 $f_n \to f_0$ $(n \to \infty)$ 可推出 $\lim_{n\to\infty} p(f_n) = p(f_0)$. 事实上, 因为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mid (f_n - f_0)(x_k) \mid < \infty,$$

故对 $\forall \varepsilon > 0$ 存在 $N_1 > 0$, 使得

$$\sum_{k=N_1+1}^{\infty} \mid (f_n - f_0)(x_k) \mid < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又因为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mid f(x_k) \mid < \infty,\ \forall f \in X^*,$$

故 $f(x_k)\to 0(k\to\infty)$. 这表明$\{x_k\}$ 弱收敛, 由此可知 $\{x_k\}$ 是有界的. 于是存在 $M>0$, 使得

$$\| x_k \|\leqslant M,\ \forall k\in\mathbb{Z}^+.$$

再由 $f_n\to f_0$ $(n\to\infty)$ 可知对于 $\varepsilon>0$ 存在 $N>N_1$, 使得

$$\| f_n-f_0 \|<\frac{\varepsilon}{2MN_1},\ \forall n>N.$$

从而

$$\sum_{k=1}^{N_1}|(f_n-f_0)(x_k)|\leqslant\sum_{k=1}^{N_1}\| f_n-f_0 \|\| x_k \|<\frac{\varepsilon}{2},$$

进一步有

$$|p(f_n)-p(f_0)|=|\sum_{k=1}^{\infty}|f_n(x_k)|-\sum_{k=1}^{\infty}|f_0(x_k)||\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|(f_n-f_0)(x_k)|<\varepsilon.$$

这表明 $\lim_{n\to\infty}p(f_n)=p(f_0)$. 故由第 33 习题结论知存在常数 M, 使得

$$p(f)\leq M\|f\|\ (f\in X^*),$$

即

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(x_k)|\leq M\|f\|.$$

31. 证明 设 $\{x_n\}\subset X,\ x_n\to x\in X,\ Tx_n\to y\in Y$. 因为对于 $\forall f\in X^*, f(Tx)$ 是 X上的线性有界泛函, 所以

$$f(Tx_n)\to f(Tx),\ f(Tx_n)\to f(y)\ (n\to\infty).$$

由极限唯一性我们有 $f(Tx)=f(y)$ $(\forall f\in Y^*)$. 再根据 Hahn-Banach 定理推得 $Tx=y$, 从而 T 是闭的. 故由闭图像定理知 T 连续.

32. 证明 令 $M_k=\{x\in X:p(x)\leqslant k\}$, 由条件 (3) 可以证明 M_k 是闭集, 并且 $X=\bigcup_{k=1}^{\infty}M_k$. 因为 X 完备, 由 Baire 纲定理必存在某个 M_{k_0} 在某个闭球 $\overline{B}(x_0,r_0)$ 中稠密, 于是

$$M_{k_0}\supset\overline{B}(x_0,r_0).$$

任取 $x\in X, x\neq 0$, 则 $x_0+\frac{r_0x}{\|x\|}\in\overline{B}(x_0,r_0)\subset M_{k_0}$, 所以 $p(x_0+\frac{r_0x}{\|x\|})\leqslant k_0$, 从而有

$$p(\frac{r_0x}{\| x \|})=p(x_0+\frac{r_0x}{\| x \|}-x_0)\leqslant p(-x_0)+p(x_0+\frac{r_0x}{\| x \|})\leqslant k_0+p(-x_0).$$

故

$$p(x)\leqslant M\cdot\| x \|\ \ (\forall x\in X),$$

其中 $M=\frac{k_0+p(-x_0)}{r_0}$. 结论得证.

33. 证明 充分性. 设 $S=\{f_n: n\geqslant 1\}$ 为 X^* 的可数稠密子集. 由上确界的定义知, 存在$x_n\in X$ 使得

$$|f_n(x_n)|\geqslant \frac{1}{2}\|f_n\|,\qquad \|x_n\|\leqslant 1,\ n\geqslant 1. \tag{5.0.5}$$

令 $Y=\overline{span\{x_n\}}$, 显然 Y 是可分的. 下面证明 $Y=X$. 假设存在 $a\in X$ 但$a\notin Y$. 则由命题 5.1.6 知存在 $f\in X^*$ 使得

$$f(a)\neq 0,\qquad \|f\|=1,\qquad f(y)=0\ (\forall y\in Y).$$

由假设 S 在 X^* 中稠密, 从而存在 $f_n\in S$ 使得

$$\|f-f_n\|<\frac{1}{4}.$$

由于 $x_n\in Y$, 故 $f(x_n)=0$, 因此由 $\|x_n\|\leqslant 1$ 知

$$|x_n'(x_n)|=|(x_n'-x')(x_n)|\leqslant\|x_n'-x'\|\|x_n\|<\frac{1}{4}.$$

所以由 (5.0.5) 式有$\|x_n'\|<\frac{1}{2}$.由此可以推出

$$\|x'\|\leqslant\|x'-x_n'\|+\|x_n'\|<\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.$$

这与 $\|x'\|=1$ 矛盾. 因此有 $Y=X$. 故 X 为可分的.

必要性. 由于 X 是自反的, 则有 $X^{**}=X$, 由上面的证明, 必要性得证.

34. 证明 设 X 是 n 维线性赋范空间, $e_1,e_2,\cdots,e_n$为X_n一组基底, 则存在

$$f_1,f_2,\cdots,f_n\in X^*,$$

使

$$f_i(e_j)=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j.\end{cases}$$

易证 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性无关且

$$f_i(x)=\xi_i.$$

从而有 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 是 X^* 的一组基底, 故 X^* 是 n 维的, 故 X 是自反的.

35. 证明 根据第7题, 已知 $(l^1)^*=l^\infty$. 若 l^1 是自反的, 那么

$$l^1=(l^1)^{**}=(l^\infty)^*.$$

注意到 l^1 是可分的, 由第34题知 l^∞ 也是可分的, 但易证明 l^∞ 不可分, 即得矛盾. 则 l^1 不是自反的. 同理可证 $L^1[a,b]$ 不是自反的.

36. 证明 充分性. 设 $\sup_{n\geqslant 1}\|x_n\|=M$. 由于 $(l^p)^*=l^q$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, 故对 $\forall f\in(l^p)^*$ 存在 $y=\{\eta_k\}\in l^q$ 使得

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty},\ \forall x=\{\xi_k\}\in l^p.$$

则对 $\forall\varepsilon>0,\exists k_0\in\mathbb{Z}^+$ 使

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\mid\eta_k\mid^q<[\frac{\varepsilon}{2(M+\parallel x_0\parallel)}]^q,$$

且由条件 $\lim_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k$ 可知 $\exists N\in\mathbb{Z}^+$,使 $\forall n\geqslant N$ 有

$$\sum_{k=1}^{k_0}\mid\xi_k^{(n)}-\xi_k\mid\mid\eta_k\mid<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}\mid f(x_n)-f(x)\mid&=\sum_{k=1}^{\infty}\mid\xi_k^{(n)}-\xi_k\eta_k\mid\leqslant\sum_{k=1}^{k_0}\mid\xi_k^{(n)}-\xi_k\mid\mid\eta_k\mid+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\mid\xi_k^{(n)}\eta_k\mid+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\mid\xi_k\eta_k\mid\\&<\frac{\varepsilon}{2}+(M+\parallel x_0\parallel)(\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\mid\eta_k\mid^q)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x.

必要性. 若 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0, 则 $\{x_n\}$ 必为有界点列，即$\sup_{n\geqslant1}\parallel x_n\parallel<\infty$. 令

$$f_k(x)=\xi_k,\ k=1,2,\cdots.$$

显然 $f_k\in(l^p)^*$. 因为 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x=\{\xi_k\}$, 从而有 $f_k(x_n)\to f_k(x)(n\to\infty)$, 即对每个 k, $\lim_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k$.

37. 证明 设 $y_m,y_0\in l^1$,且$y_m\to^w y_0$，要证明 $\parallel y_m-y_0\parallel\to0$. 假如不然, 设存在子序列 y_{m_n}, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\parallel y_{m_n}-y_0\parallel=q>0.$$

令 $x_n=\frac{y_{m_n}-y_0}{\parallel y_{m_n}-y_0\parallel}$，便得到序列 $\{x_n\}\subset l^1$，满足下列条件:

$$\begin{cases}x_n\to^w 0 & (x_n\in l^1),\\ \parallel x_n\parallel=1 & (n=1,2,\cdots).\end{cases}$$

设

$$\begin{cases}x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_k^{(n)},\cdots) & (n=1,2,\cdots),\\ x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots).\end{cases}$$

引进一串有界线性泛函$\{f_k\}\subset(l^1)^*$ $(k=1,2,\cdots)$,它的定义是

$$f_k:x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)\to\xi_k.$$

因为 $x_n \to^w 0$ (在 l^1 中), 所以对 $\forall k, \lim_{n\infty} f_k(x_n)=0$, 即 $\xi_k^n \to 0$ $(n\to\infty)$, 也就是

$$\begin{aligned}
x_1 &= (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \cdots, \xi_k^{(1)}, \cdots)\\
x_2 &= (\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \cdots, \xi_k^{(2)}, \cdots)\\
x_3 &= (\xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}, \cdots, \xi_k^{(3)}, \cdots)\\
\vdots &= (\ \vdots,\ \ \vdots, \qquad\ \ \vdots,)\\
x_n &= (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots, \xi_k^{(n)}, \cdots)\\
\vdots &= (\ \vdots,\ \ \vdots, \qquad\ \ \vdots,)\\
&\quad\ \ \downarrow \quad\ \downarrow \qquad\ \ \downarrow\\
&\quad\ \ 0 \quad\ \ 0 \quad \cdots\ \ 0
\end{aligned}$$

现在设$n=n_1$,这时

$$\sum_{k=1}^{\infty} | \xi_k^{(n_1)} | = \| x_{n_1} \| = 1,$$

因而$\exists p_1>0$,使得

$$\sum_{k=1}^{p_1} | \xi_k^{(n_1)} | > \frac{2}{3}.$$

因为$\xi_k^{(n)} \to 0$ $(n\to\infty)$,所以$\lim_{n\to\infty \sum_{k=1}^{p_1}|\xi_k^{(n)}|}=0$,从而$\exists n_2>0$,使得

$$\sum_{k=1}^{p_1} | \xi_k^{(n_2)} | < \frac{1}{3}.$$

又由于$\sum_{k=1}^{\infty} | \xi_k^{(n_2)} | = \| x_{n_2} \| = 1$,

$$\sum_{k=p_1+1}^{\infty} | \xi_k^{(n_2)} | = \sum_{k=1}^{\infty} | \xi_k^{(n_2)} | - \sum_{k=1}^{p_1} | \xi_k^{(n_2)} | > \frac{2}{3},$$

故$\exists p_2>p_1$,使得

$$\sum_{k=p_1+1}^{p_2} | \xi_k^{(n_2)} | > \frac{2}{3}.$$

设已经选择整数

$$1=n_1<n_2<\cdots<n_i, 0=p_0<p_1<p_2<\cdots<p_i,$$

使得

$$\sum_{k=1}^{p_{j-1}} | \xi_k^{(n_j)} | < \frac{1}{3} \quad (j=1,2,\cdots,i), \tag{1}$$

$$\sum_{k=p_{j-1}+1}^{p_j} | \xi_k^{(n_j)} | > \frac{2}{3} \quad (j=1,2,\cdots,i). \tag{2}$$

这时,根据 $\xi_k^{(n)} \to 0\ (n\to\infty), \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{p_i} \mid \xi_k^{(n)} \mid = 0$, 从而 $\exists n_{i+1} > n_i$, 使得

$$\sum_{k=1}^{p_i} \mid \xi_k^{(n_{i+1})} \mid < \frac{1}{3}.$$

利用这个不等式及 $\sum_{k=1}^{\infty} \mid \xi_k^{(n_{i+1})} \mid = \| x_{n_{i+1}} \| = 1$, 我们有

$$\sum_{k=p_i+1}^{\infty} \mid \xi_k^{(n_{i+1})} \mid = \sum_{k=1}^{\infty} \mid \xi_k^{(n_{i+1})} \mid - \sum_{k=1}^{p_i} \mid \xi_k^{(n_{i+1})} \mid > \frac{2}{3},$$

故 $\exists p_{i+1} > p_i$, 使得

$$\sum_{k=p_i+1}^{p_{i+1}} \mid \xi_k^{(n_{i+1})} \mid > \frac{2}{3}.$$

上面的讨论表明,存在这样两个整数序列

$$1 = n_1 < n_2 < \cdots \quad 0 = p_0 < p_1 < p_2 < \cdots$$

使得对于每个 $j = 1, 2, \cdots$, 不等式 (1) 与 (2) 都成立. 现在我们考查 $\{x_n\}$. 对子序列:

$$x_{n_j} = (\xi_1^{(n_j)}, \xi_2^{(n_j)}, \cdots, \xi_{p_{j-1}}^{(n_j)}, \xi_{p_{j-1}+1}^{(n_j)} \cdots, \xi_{p_j}^{(n_j)}, \xi_{p_j+1}^{(n_j,\cdots)}),\ \ j = 1, 2, \cdots,$$

令

$$\eta_k = sgn \xi_k^{(n_j)}\ (p_{j-1} < k \leqslant p_j; j = 1, 2, \cdots),$$

则序列 $\{\eta_k\} \in l^\infty$. 在空间 l^1 中可以考查有界线性泛函

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k, \quad x = (\xi_1, \xi_1, \cdots, \xi_k, \cdots).$$

我们来估计 $f_0(x_{n_j})$ 的下界.由于 $\mid \eta_k \mid \leqslant 1$, 我们对

$$x_{n_j} = (\underline{\xi_1^{(n_j)}, \xi_2^{(n_j)}, \cdots, \xi_{p_{j-1}}^{(n_j)}}, \underline{\underline{\xi_{p_{j-1}+1}^{(n_j)} \cdots, \xi_{p_j}^{(n_j)}}}, \underline{\underline{\underline{\xi_{p_j+1}^{(n_j,\cdots)}}}})$$

考虑

$$\begin{aligned}
\mid f_0(x_{n_j}) \mid &= \Big| \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k^{(n_j)} \Big| = \Big| \sum_{k=1}^{p_{j-1}} \eta_k \xi_k + \sum_{k=p_{j-1}+1}^{p_j} \eta_k \xi_k + \sum_{k=p_j+1}^{\infty} \eta_k \xi_k \Big| \\
&\geqslant \Big| \sum_{k=p_{j-1}+1}^{p_j} \eta_k \xi_k^{(n_j)} \Big| - \sum_{k=1}^{p_{j-1}} \mid \eta_k \xi_k^{(n_j)} \mid - \sum_{k=p_j+1}^{\infty} \mid \eta_k \xi_k^{n_j} \mid \\
&\geqslant \sum_{k=p_{j-1}+1}^{p_j} \mid \xi_k^{(n_j)} \mid - \sum_{k=1}^{p_{j-1}} \mid \xi_k^{(n_j)} \mid - \sum_{k=p_j+1}^{\infty} \mid \xi_k^{(n_j)} \mid \\
&= 2 \sum_{k=p_{j-1}+1}^{p_j} \mid \xi_k^{(n_j)} \mid - \sum_{k=1}^{p_{j-1}} \mid \xi_k^{(n_j)} \mid - \sum_{k=p_{j-1}+1}^{p_j} \mid \xi_k^{(n_j)} \mid - \sum_{k=p_j+1}^{\infty} \mid \xi_k^{(n_j)} \mid \\
&= 2 \sum_{k=p_{j-1}+1}^{p_j} \mid \xi_k^{(n_j)} \mid - \| x_{n_j} \|.
\end{aligned}$$

又因为 $\| x_{n_j} \|= 1, \sum_{k=p_{j-1}+1}^{p_j} | \xi_k^{(n_j)} |> \frac{2}{3}$, 故有

$$| f_0(x_{n_j}) |> 2 \times (\frac{2}{3}) - 1 = \frac{1}{3} > 0,$$

这与当 $j \to \infty$ 时, $x_{n_j} \to^w 0$ (在l^1中) 矛盾. 定理证完.

38. 证明 假设$x_0 \notin M$. 令

$$d = \mathrm{dist}(x_0, M) > 0,$$

由Hahn–Banach 定理的推论可知, 存在$f \in X^*$, 使得

$$\|f\| = \frac{1}{d}, f(x_0) = 1, f(x) = 0, \forall x \in M.$$

由于$x_n \xrightarrow{w} x_0$, 故$f(x_n) \to f(x_0)(n \to \infty)$. 又由$\{x_n\} \subset M$ 可知$f(x_n) = 0$, 从而$f(x_0) = 0$. 这与$f(x_0) = 1$ 矛盾. 因此$x_0 \in M$.

39. 证明 首先,对 $\forall f \in L^p(\mathbb{R}), v(x) \in L^q(\mathbb{R})\varepsilon > 0$,存在$A > 0$,使得

$$\| f \|_p (\int_{-\infty}^{-A} | v(x) |^q dx)^{\frac{1}{q}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

这样,对$\forall n \in \mathbb{N}$,便有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} f(x+n)v(x)dx\\&\quad = \int_{-\infty}^{-A} f(x+n)v(x)dx + \int_{-A}^{\infty} f(x+n)v(x)dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&| \int_{-\infty}^{-A} f(x+n)v(x)dx |\\&\quad =| \int_{-\infty}^{-A+n} f(t)v(t-n)dt |\\&\quad \leqslant (\int_{-\infty}^{-A+n} | f(t) |^p dt)^{\frac{1}{p}} (\int_{-\infty}^{-A+n} | v(t-n) |^q dt)^{\frac{1}{q}}\\&\quad \leqslant \| f \|_p (\int_{-\infty}^{-A} | v(x) |^q dx)^{\frac{1}{q}} < \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

其次,对固定的 A, 有

$$\begin{aligned}&| \int_{-A}^{\infty} f(x+n)v(x)dx |\\&\quad \leqslant (\int_{-A}^{\infty} | f(x+n) |^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_{-A}^{\infty} | v(x) |^q dx)^{\frac{1}{q}}\\&\quad =\| v \|_q (\int_{-A+n}^{\infty} | f(t) |^p dt)^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad (n \to \infty),\end{aligned}$$

故$\exists N \in \mathbb{N}$,使得

$$| \int_{-A}^{\infty} f(x+n)v(x)dx |< \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n > N).$$

于是,对 $\forall n>N$, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} f(x+n)v(x)dx\\&\quad=\int_{-\infty}^{-A} f(x+n)v(x)dx+\int_{-A}^{\infty} f(x+n)v(x)\\&\quad<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

即证得 $T_n \to^w 0$. 最后, 对 $\forall f\in L^p(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\| T_n f \|_p &= (\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(x+n) \mid^p dx)^{\frac{1}{p}}\\&=^{t=x+n} (\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(t) \mid^p dt)^{\frac{1}{p}} = \| f \|_p .\end{aligned}$$

40. 证明 令 $f_0(x)=(x,x_0)$, $\forall x\in H$, 显然 $f_0\in H^*$, 并由 $x_n \xrightarrow{w} x_0$, 知 $(x_n,x_0)\to(x_0,x_0)$. 从而由 $\|x_n\|\to\|x_0\|$ 知

$$\begin{aligned}\|x_n-x_0\|^2&=(x_n-x_0,x_n-x_0)\\&=\|x_n\|^2-(x_0,x_n)-(x_n,x_0)+\|x_0\|^2\to 0,\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

故 $x_n\to x_0(n\to\infty)$.

41. 证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛于 $x\in H$. 则由内积的连续性, 对 $\forall y\in H$ 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,y)&=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}(x_n,y)=\lim_{k\to\infty}(\sum_{n=1}^{k}x_n,y)\\&=(\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}x_n,y)=(\sum_{n=1}^{\infty}x_n,y)=(x,y).\end{aligned}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,y)$ $(\forall y\in H)$ 收敛.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,y)$ $(\forall y\in H)$ 收敛, 则 $\{\sum_{i=1}^{n}x_i\}$ 弱收敛. 故存在 $M>0$, 使得

$$\|\sum_{i=1}^{n}x_i\|^2\le M,\ (\forall n\in\mathbb{N}).$$

由于 $\{x_n\}$ 是 H 中的正交列, 所以

$$\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2=\|\sum_{i=1}^{n}x_i\|^2\le M,\ (\forall n\in\mathbb{N}),$$

从而 $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2\le M<\infty$. 即, $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2$ 收敛.

(3) $\Rightarrow$ (1). 当 $m>n$ 时, 由 $\{x_n\}$ 是 H 中的正交列得

$$\|\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{m}x_i\|^2=\|\sum_{i=n+1}^{m}x_i\|^2=\sum_{i=n+1}^{m}\|x_i\|^2,$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2$ 收敛, 因此 $\{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\}$ 是 H 中基本列. 又由于 H 为 Hilbert 空间, 所以 $\{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\}$ 必在 H 中收敛.