1.8、判断方程的类型

(1)$y^2u_{xx}+x^3u_{yy}=0$

(3)$u_{xx}+(x^2+y)u_{yy}=0$

解：(1)$\Delta=-y^2x^3$

$\Delta>0$,即$y^2x^3<0\Rightarrow y\neq 0$ 且$x<0$, 双曲型

$\Delta=0$,即$y^2x^3=0\Rightarrow y=0$或$x=0$, 抛物型

$\Delta<0$,即$y^2x^3>0\Rightarrow y\neq 0$ 且$x>0$, 椭圆型

(3)$\Delta=-(x^2+y)$

$\Delta>0$,即$(x^2+y)<0$, 双曲型

$\Delta=0$,即$(x^2+y)=0$, 抛物型

$\Delta<0$,即$(x^2+y)>0$, 椭圆型

1.9、化简下列方程为标准形式

(1)$u_{xx}+2u_{xy}+3u_{yy}+u_x+u_y=0$

(3)$u_{xx}-4u_{xy}+4u_{yy}=\sin y$

解:(1)$\Delta=1^2-1\cdot 3=-2<0$所以方程属于椭圆型

特征方程

$$(dy)^2-2dxdy+3(dx)^2=0$$

$$\Rightarrow y-x\pm\sqrt{2}i=c_{\pm}$$

令$\xi=y-x,\eta=\sqrt{2}x$,则原方程可化为

$$u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}+\frac{\sqrt{2}}{2}u_{\eta}=0$$

(3)$u_{xx}-4u_{xy}+4u_{yy}=\sin y$
解:$\Delta=(-2)^2-1\cdot 4=0$所以方程是抛物型
特征方程

$$(dy)^2+4dx\cdot dy+4(dx)^2=0$$

积分曲线为$y+2x=c$, 令

$$\xi=y+2x,\eta=y$$

则原方程可化为

$$u_{\eta\eta}=\frac{1}{4}\sin\eta$$

1.10、(1)$u_{xx}+3u_{xy}+2u_{yy}=0$

解：特征方程为

$$(dy)^2-3dxdy+2(dx)^2=0$$

令

$$\xi=y-2x,\eta=y-x$$

原方程可化为

$$u_{\xi\eta}=0$$

所以

$$u=f(y-2x)+g(y-x)$$

其中$f(y-2x),g(y-x)$关于$y-2x,y-x$的任意的二次连续可微的函数

第一章作业注意的地方：

- 掌握$\Delta > 0, = 0, < 0$时,对应的自变量非奇异变换的选取，我们作业题中
  - 1.9(1)是$\Delta < 0$时，根据特征方程复形式的积分曲线的实部和虚部的函数分别给出ξ, η的变换。
  - 1.9(3)是$\Delta = 0$时，根据特征方程的一簇积分曲线，给出ξ的变换，另一个变换一般会取$\eta = y$,或者$\eta = x$，(可以利用Jacobi行列式验证两个函数是否无关）
  - 1.10(1)是当$\Delta > 0$时，根据特征方程的两簇不同的积分曲线，给出ξ, η的变换
- 方程化简时，一般利用复合函数的求导进行化简就行，不建议记带星的系数和原系数之间的关系，因为很容易记错误。
- 偏微分方程在利用积分求通解时，要加上其他自变量的任意函数，不用加常数了，常数会包含在其他自变量任意函数中
- 后面几章介绍的是三类标准型方程不同定界条件的求解方法，所以第一章中我们先介绍判断方程的类型与化简