

最短路与设备更新

主讲人： 窦本年

最短路问题是图论应用的基本问题，很多实际问题，如线路的布设、运输安排、运输网络最小费用流等问题,都可通过建立最短路问题模型来求解.

定义 1) 若 H 是赋权图 G 的一个子图, 则称 H 的各边的权和 $w(H) = \sum_{e \in E(H)} w(e)$ 为 H 的**权**. 类似地, 若

若 $P(u,v)$ 是赋权图 G 中从 u 到 v 的路, 称 $w(P) = \sum_{e \in E(P)} w(e)$

称为路 P 的**权**.

2) 在赋权图 G 中, 从顶点 u 到顶点 v 的具有最小权的**路** $P^*(u,v)$, 称为 u 到 v 的**最短路**.

3) 把赋权图 G 中一条路的权称为它的**长**, 把 (u,v) 路的最小权称为 u 和 v 之间的**距离**, 并记作 $d(u,v)$.

事实：最短路是一条路，且最短路的任一节也是最短路。

假设： G 为赋权有向图或无向图， G 边上的权均非负。若 $(u, v) \notin E(G)$ ，则规定 $w(u, v) = +\infty$ 。

Dijkstra算法: 求 G 中从顶点 u_0 到其余顶点的最短路.

1) 置 $l(u_0) = 0$, 对 $v \neq u_0$, $l(v) = \infty$, $S_0 = \{u_0\}$ 且 $i = 0$.

2) 对每个 $v \in \overline{S_i}$, 用 $\min\{l(v), l(u_i) + w(u_i, v)\}$

代替 $l(v)$, 计算 $\min_{v \in \overline{S_i}} \{l(v)\}$, 并把达到这个最小值的一个顶点记为 u_{i+1} , 置 $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$.

3) 若 $i = |E(G)| - 1$, 则停止; 若 $i < |E(G)| - 1$, 则用 $i+1$ 代替 i , 并转2).

备注: 算法停止后的每个 $l(v)$ 是从从顶点 u_0 到 v 的最短路的权.

定义 根据顶点 v 的标号 $l(v)$ 的取值途径, 使 u_0 到 v 的最短路中与 v 相邻的前一个顶点 w , 称为 v 的**先驱点**, 记为 $z(v)$, 即 $z(v)=w$.

将求最短路权与最短路径结合起来*Dijkstra*算法

*Dijkstra*算法：求**G**中从顶点 u_0 到其余顶点的最短路

设**G**为赋权有向图或无向图，**G**边上的权均非负。

对每个顶点，定义两个标记 $(l(v), z(v))$ ，其中：

$l(v)$ ：表从顶点 u_0 到 v 的一条路的权。

$z(v)$ ： v 的先驱点，用以确定最短路的路线。

算法的过程就是在每一步改进这两个标记，使最终 $l(v)$ 为从顶点 u_0 到 v 的最短路的权。

算法步骤:

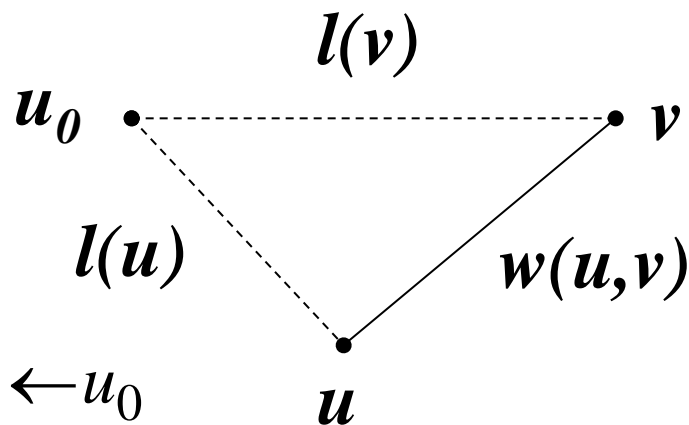
1) 赋初值: 令 $S = \{u_0\}$,
 $l(u_0) = 0$, $\forall v \in \bar{S} = V \setminus S$,

令 $l(v) = W(u_0, v)$, $z(v) = u_0$, $u \leftarrow u_0$

2) 更新 $l(v)$ 、 $z(v)$: $\forall v \in \bar{S} = V \setminus S$, 若 $l(v) >$
 $l(u) + W(u, v)$ 则令 $l(v) = l(u) + W(u, v)$, $z(v) = u$

3) 设 v^* 是使 $l(v)$ 取最小值的 \bar{S} 中的顶点, 则令
 $S = S \cup \{v^*\}$, $u \leftarrow v^*$

4) 若 $\bar{S} \neq \emptyset$, 转 2), 否则, 停止.



算法停止后, 每个 $l(v)$ 就是 u_0 到 v 的最短路的权, 从 v 的先驱点标记 $z(v)$ 追溯到 u_0 , 就得到 u_0 到 v 的最短路的路线.

设备更新问题：企业使用一台设备，每年年初，企业领导就要确定是购置新的，还是继续使用旧的.若购置新设备，就要支付一定的购置费用；若继续使用，则需支付一定的维修费用.现要制定一个五年之内的设备更新计划，使得五年内总的支付费用最少.

已知该种设备在每年年初的价格为：

第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
11	11	12	12	13

使用不同时间设备所需维修费为：

使用年限	0—1	1—2	2—3	3—4	4—5
维修费	5	6	8	11	18

构造加权有向图 $G(V,E)$.

(1) 顶点集 $V=\{V_1,V_2,V_3,V_4,V_5,V_6\}$,
 V_i 表第 i 年初购置新设备的决策, V_6 表
第五年底.

(2) 边集 $E=\{(V_i,V_j), i=1,2,3,4,5; i<j\leq 6\}$,
边 (V_i,V_j) 表第 i 年初购进一台设备一直使用
到第 j 年初的决策, 其权 $w(V_i,V_j)$ 表示这一
决策从第 i 年初到第 j 年初的总费用, 如
 $w(V_1,V_4)=11+5+6+8=30$.

(3) 问题转化为求 V_1 到 V_6 的最短路问题, 求得两条最短路为
 $V_1-V_4-V_6$, $V_1-V_3-V_6$, 权为 53.

