信息论基础

李　莹
liying2009@ecust.edu.cn

第四章：信道及信道容量

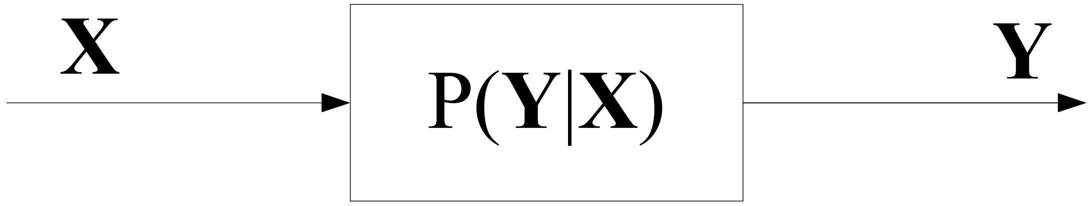
一、信道分类

二、离散单符号信道及其信道容量

三、离散多符号信道及其信道容量

四、组合信道及其信道容量

1. 离散多符号信道

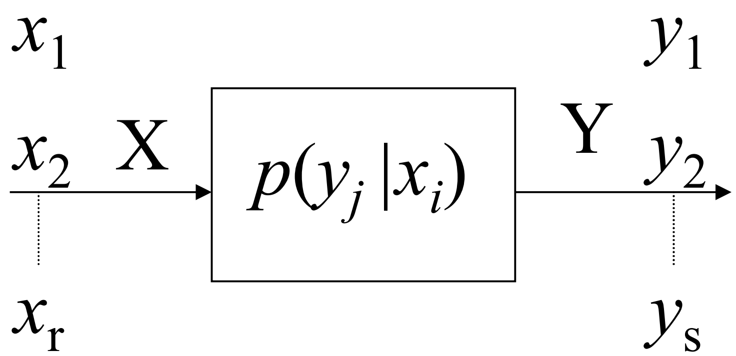


信道

定义4.6 若在任意时刻信道的输出只与此时刻信道的输入有关，而与其他时刻的输入和输出无关，则称之为离散无记忆信道，简称为DMC (discrete memoryless channel)。

输入、输出随机序列的长度为N的离散无记忆平稳信道通常称为离散无记忆信道的N次扩展信道。

单符号离散信道的数学模型



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \vdots & & & \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rs} \end{bmatrix} \qquad \left[X, P(Y \mid X), Y\right]$$

$$\mathbf{X} = X_1 X_2 \cdots X_N \qquad\qquad \mathbf{Y} = Y_1 Y_2 \cdots Y_N$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= x_1 x_1 \cdots x_1 \\
\mathbf{x}_2 &= x_1 x_1 \cdots x_2 \\
&\vdots \\
\mathbf{x}_i &= x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_N} \\
&\vdots \\
\mathbf{x}_{r^N} &= x_r x_r \cdots x_r
\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{X}} \boxed{p(\mathbf{y}_j | \mathbf{x}_i)} \xrightarrow{\mathbf{Y}}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_1 &= y_1 y_1 \cdots y_1 \\
\mathbf{y}_2 &= y_1 y_1 \cdots y_2 \\
&\vdots \\
\mathbf{y}_j &= y_{j_1} y_{j_2} \cdots y_{j_N} \\
&\vdots \\
\mathbf{y}_{s^N} &= y_s y_s \cdots y_s
\end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \cdots, r^N, \; j = 1, 2, \cdots, s^N$$

$$x_{i_k} \in (x_1, x_2, \cdots, x_r), \qquad y_{j_k} \in (y_1, y_2, \cdots, y_s)$$

$$\boxed{\left[\mathbf{X}, P(\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}), \mathbf{Y}\right]}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s^N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s^N} \\ \vdots & & & \\ p_{r^N 1} & p_{r^N 2} & \cdots & p_{r^N s^N} \end{bmatrix}$$

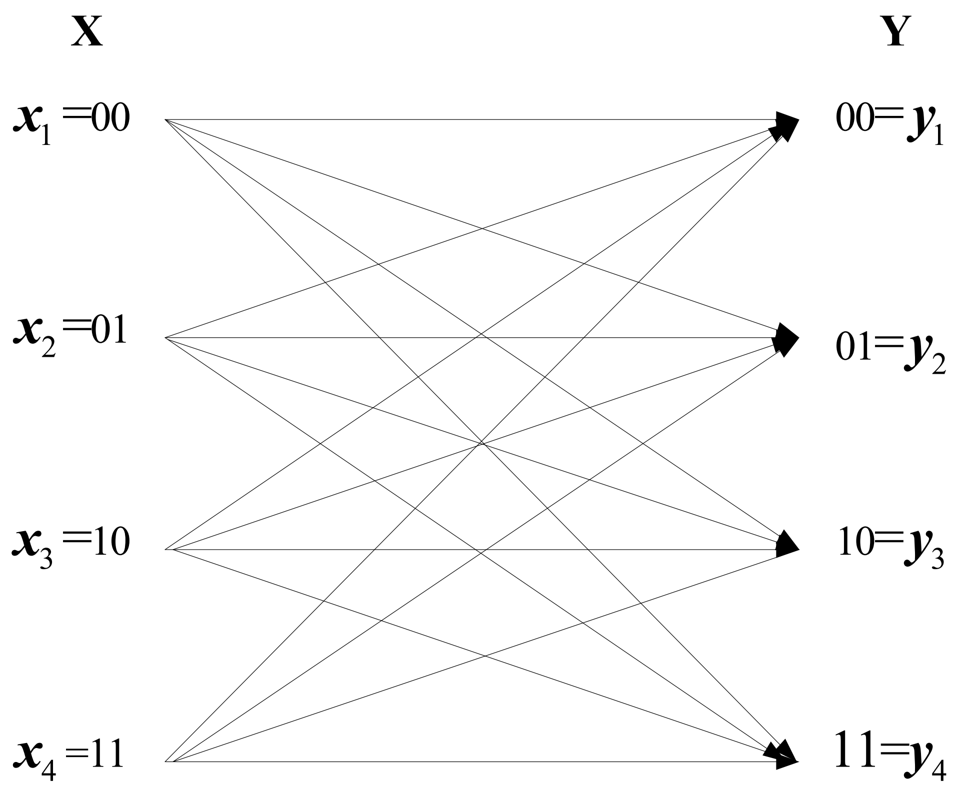
$$\sum_{j=1}^{s^N} p_{ij} = 1 \qquad p_{ij} \geq 0$$

$$\begin{aligned} P(\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}) &= P(Y_1 Y_2 \cdots Y_N \mid X_1 X_2 \cdots X_N) \\ &= P(Y_1 \mid X_1) P(Y_2 \mid X_2) \cdots P(Y_N \mid X_N) \\ &= \prod_{k=1}^{N} P(Y_k \mid X_k) \end{aligned}$$

例 4.8 二元对称信道的二次扩展信道。

解：二次扩展信道的输入、输出序列的每一个随机变量均取值于{0,1}，输入共有 $r^N=2^2=4$ 个取值，输出共有 $s^N=2^2=4$ 个取值。根据

$$P(\mathbf{Y}\mid\mathbf{X})=\prod_{k=1}^{N}P(Y_k\mid X_k)$$



可求出

$$p(\mathbf{y}_1 \mid \mathbf{x}_1) = p(00 \mid 00) = p(0 \mid 0)p(0 \mid 0) = \bar{p}^2$$
$$p(\mathbf{y}_2 \mid \mathbf{x}_1) = p(01 \mid 00) = p(0 \mid 0)p(1 \mid 0) = \bar{p}p$$
$$p(\mathbf{y}_3 \mid \mathbf{x}_1) = p(10 \mid 00) = p(1 \mid 0)p(0 \mid 0) = p\bar{p}$$
$$p(\mathbf{y}_4 \mid \mathbf{x}_1) = p(11 \mid 00) = p(1 \mid 0)p(1 \mid 0) = p^2$$

同理可求出其他的转移概率

p_{ij}， $i = 2,3,4,\ j = 1,2,3,4$

得到信道矩阵：

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \bar{p}^2 & \bar{p}p & p\bar{p} & p^2 \\ \bar{p}p & \bar{p}^2 & p^2 & p\bar{p} \\ p\bar{p} & p^2 & \bar{p}^2 & \bar{p}p \\ p^2 & p\bar{p} & \bar{p}p & \bar{p}^2 \end{bmatrix}$$

定理4.4 若信道的输入和输出分别是N长序列**X**和**Y**，且信道是无记忆的，则

$$I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) \le \sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k)$$

当信源也是无记忆时等号成立。

● 对于N次扩展信道，如果信道的输入序列中的每一个随机变量间是无记忆的，且均取值于同一信源符号集并且具有同一种概率分布（取自于同一概率空间），通过相同的信道传送到输出端，则输出序列中的每一个随机变量也取自同一符号集，并且具有相同的概率分布。

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{X}_1;\boldsymbol{Y}_1)=\boldsymbol{I}(\boldsymbol{X}_2;\boldsymbol{Y}_2)=\cdots=\boldsymbol{I}(\boldsymbol{X}_N;\boldsymbol{Y}_N)=\boldsymbol{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})$$

$$\Rightarrow \qquad I(\mathbf{X};\mathbf{Y})=\sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k)=NI(X;Y)$$

- 由定理4.4，输入、输出序列长为N的离散无记忆信道

$$I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) \le \sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k)$$

$$\Rightarrow C^N = \max_{P(\mathbf{X})} I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) = \max_{P(\mathbf{X})} \sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k) = \sum_{k=1}^{N} \max_{P(X_k)} I(X_k;Y_k) = \sum_{k=1}^{N} C_k$$

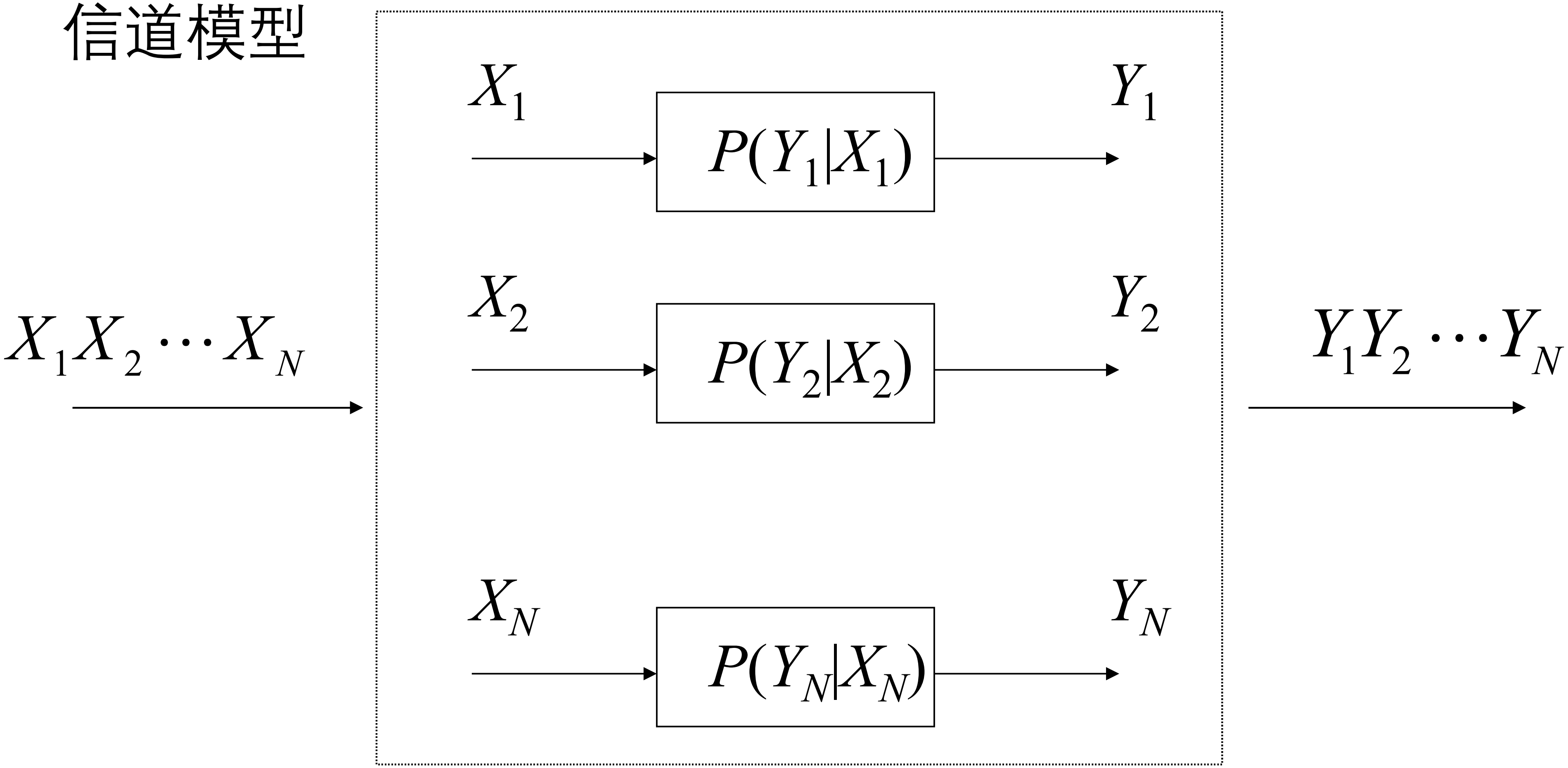
$$\because \quad C_k = C \qquad k = 1,2,\cdots,N$$

$$\therefore \quad C^N = NC$$

- 当信源无记忆，同时输入序列中的每一个随机变量的分布各自达到最佳输入分布时，N次扩展信道达到信道容量NC。

1. 独立并联信道

信道模型



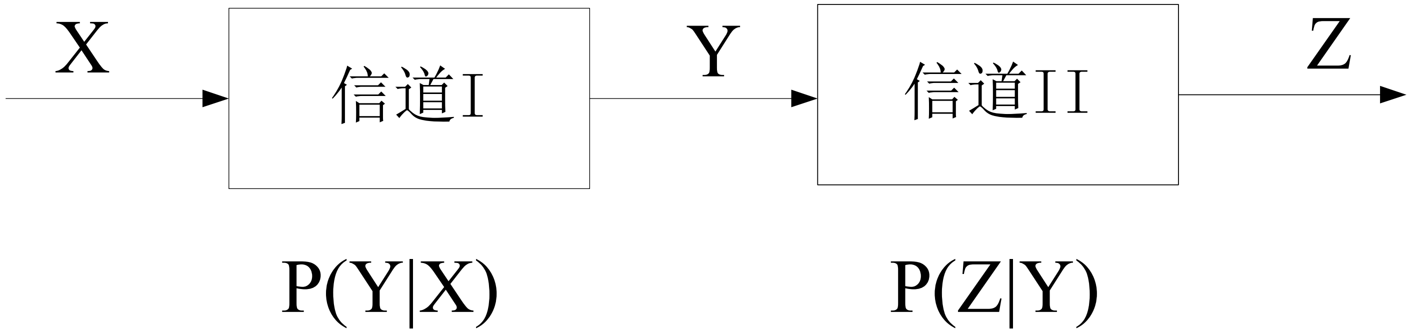
$$P(Y_1Y_2\cdots Y_N \mid X_1X_2\cdots X_N) = P(Y_1 \mid X_1)P(Y_2 \mid X_2)\cdots P(Y_N \mid X_N)$$

$$I(X_1X_2\cdots X_N;Y_1Y_2\cdots Y_N) \le \sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k)$$

$$C_{并} = \max_{P(X_1\cdots X_N)} I(X_1\cdots X_N;\ Y_1\cdots Y_N) = \sum_{k=1}^{N} C_k$$

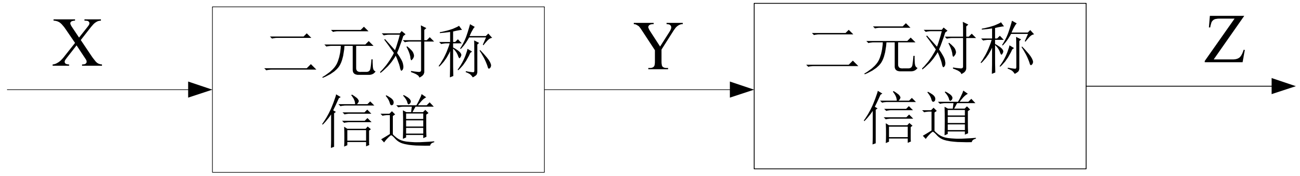
$C_{并} = \sum_{k=1}^{N} C_k$，　当信道的信道容量相同时 $C_{并} = NC$

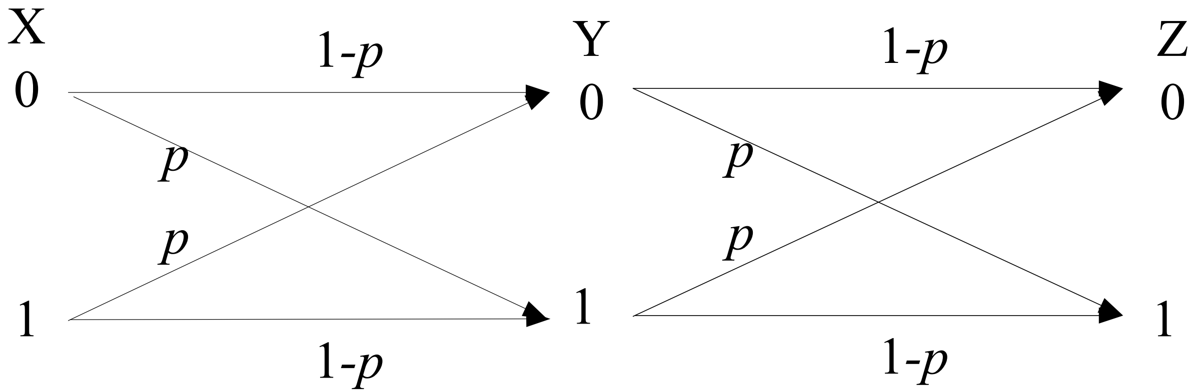
2. 级联信道



级联信道的总的信道矩阵等于这两个串联信道的信道矩阵的乘积。

例 4.9　设有两个离散二元对称信道，其级联信道如图所示，求级联信道的信道容量。





$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-p)^2 + p^2 & 2p(1-p) \\ 2p(1-p) & (1-p)^2 + p^2 \end{bmatrix}$$

$$C_{串} = 1 - H\left[\ 2p(1-p)\ \right]$$