数学建模与系统仿真

课程负责人:许春根 教授

主讲老师：许春根、范金华、窦本年、谢建春

捕鱼业的持续收获

主讲人：范金华

Tel: 84315877(O)

Email:jinhuafan@hotmail.com

捕鱼业的持续收获

背景

- 再生资源（渔业、林业等）与非再生资源（矿业等）.
- 再生资源应适度开发——在持续稳产前提下实现最大产量或最佳效益.

问题

- 在捕捞量稳定的条件下，如何控制捕捞使产量最大或效益最佳?

产量最大问题

$x(t)$ ~ 渔场鱼量

假设

- 无捕捞时鱼的自然增长服从 Logistic规律.

$$\dot{x}(t)=f(x)=rx(1-\frac{x}{N})$$

r~固有增长率, N~最大鱼量

- 单位时间捕捞量与渔场鱼量成正比.

$h(x)=Ex$, E~捕捞强度

建模

记 $F(x)=f(x)-h(x)$

捕捞情况下渔场鱼量满足

$$\dot{x}(t)=F(x)=rx(1-\frac{x}{N})-Ex$$

- 不需要求解$x(t)$, 只需知道$x(t)$稳定的条件.

补充：一阶微分方程的平衡点及其稳定性

$\dot{x} = F(x) \quad (1)$ 一阶非线性自治(右端不含*t*)方程

***F*(*x*)=0的根x_0 ~微分方程的平衡点**

$$\dot{x}\Big|_{x=x_0} = 0 \Rightarrow x \equiv x_0$$

设*x*(*t*)是方程的解，若从x_0某邻域的任一初值出发，都有

$\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x_0$，称$x_0$是方程(1)的稳定平衡点.

不求*x*(*t*), 判断x_0稳定性的方法——直接法

补充：一阶微分方程的平衡点及其稳定性

不求$x(t)$, 判断平衡点x_0稳定性的方法——直接法

一阶非线性自治方程 $\dot{x} = F(x) \quad (1)$

(1)的近似线性方程 $\dot{x} = F'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$

(2)的一般解为 $x(t) = ce^{at} + x_0$, 其中c由初始条件决定，$a = F'(x_0)$

$F'(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$稳定(对(2),(1))

$F'(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$不稳定(对(2),(1))

产量最大问题 $\dot{x}(t) = F(x) = rx(1-\frac{x}{N}) - Ex$

$F(x)=0$ ⟹ 平衡点 $x_0 = N(1-\frac{E}{r}),\ \ x_1 = 0$

稳定性判断 $F'(x_0) = E - r,\quad F'(x_1) = r - E$

$E < r \Rightarrow F'(x_0) < 0, F'(x_1) > 0$ ⇨ x_0稳定, x_1不稳定

$E > r \Rightarrow F'(x_0) > 0, F'(x_1) < 0$ ⇨ x_0不稳定, x_1稳定

E~捕捞强度 **r ~固有增长率**

x_0稳定, 可得到稳定产量 **x_1稳定, 渔场干枯**

产量最大问题

在捕捞量稳定的条件下，控制捕捞强度使产量最大.

图解法

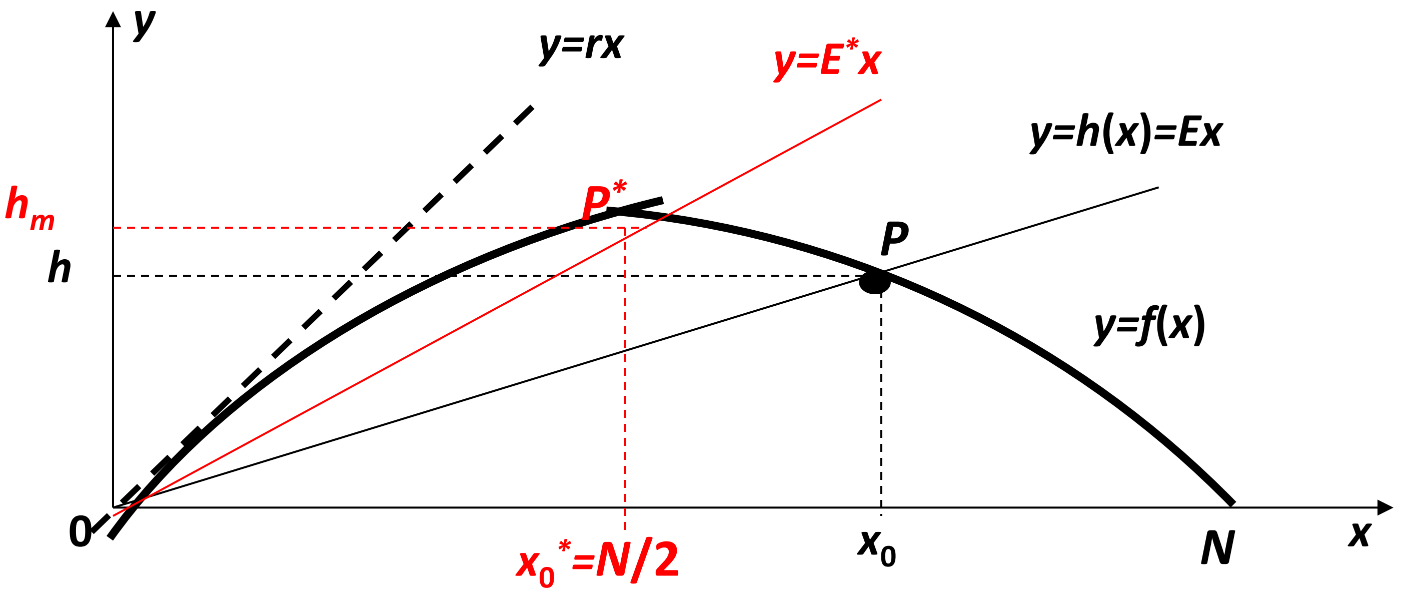
$$F(x) = f(x) - h(x)$$

$$f(x) = rx(1 - \frac{x}{N})$$

$$h(x) = Ex$$

$F(x) = 0 \Rightarrow$ f 与 h 交点 P

$E < r \Rightarrow x_0$稳定



P的横坐标 x_0~平衡点

P的纵坐标 h~产量

产量最大 $P^*(x_0^* = N/2, h_m = rN/4)$ $E^* = h_m / x_0^* = r/2$

控制渔场鱼量为最大鱼量的一半

最大效益问题 在捕捞量稳定的条件下，控制捕捞强度使效益最大.

假设

- 鱼销售价格p
- 单位捕捞强度费用c

收入 $T = ph(x) = pEx$ 支出 $S = cE$

单位时间利润 $R = T - S = pEx - cE$

稳定平衡点 $x_0 = N(1 - E/r)$

$$R(E) = T(E) - S(E) = pNE(1-\frac{E}{r}) - cE$$

求E使$R(E)$最大 ⇨ $E_R = \frac{r}{2}(1-\frac{c}{pN})$ $< E^* = \frac{r}{2}$

渔场鱼量 $x_R = N(1-\frac{E_R}{r}) = \frac{N}{2} + \frac{c}{2p}$, $h_R = \frac{rN}{4}(1-\frac{c^2}{p^2N^2})$