平动和转动

刚体（理想化模型）：

形状和大小不可忽略；

运动中形状、大小不变。

彼此间距离保持不变的“质点系”

基本研究方法：

质点运动规律
+
微积分 $\rightarrow$ 刚体基本运动规律

（大量质点运动的总效应）

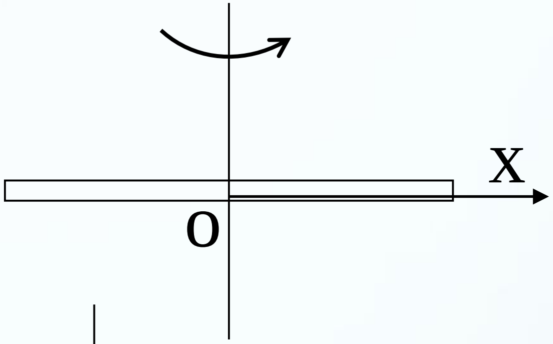
刚体的定轴转动： 各点都有相同的$\Delta\theta$、ω、α

转动定理 $M = J\alpha$

$$J = \int_m r^2 dm$$ 转动惯性大小的量度

1.均匀细棒m,l

(1).绕过中心与棒⊥轴的转动惯量



$$J_O = \frac{1}{12} ml^2$$

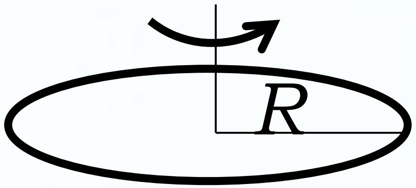
(2).绕过棒端与棒⊥轴的转动惯量

$$J_A = \frac{1}{3} ml^2$$

平行轴定理: $J_{O'} = J_O + md^2$

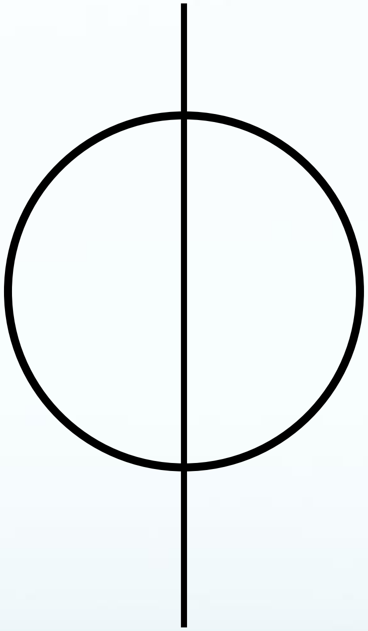
2.均匀圆环m,R

(1)绕过中心与环面⊥轴的转动惯量



$$J = mR^2$$

(2)绕沿直径轴的转动惯量

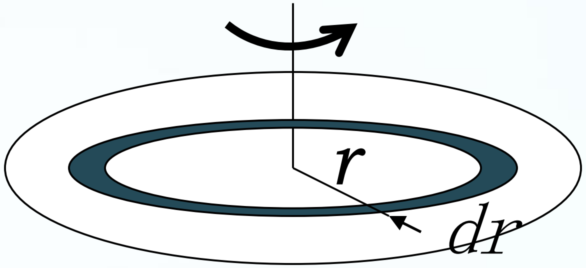


$$J = \frac{1}{2} mR^2$$

3.均匀盘m,R绕过中心与环面⊥轴转动惯量

$$dJ = r^2 dm = r^2 \sigma ds = r^2 \sigma 2\pi r dr$$

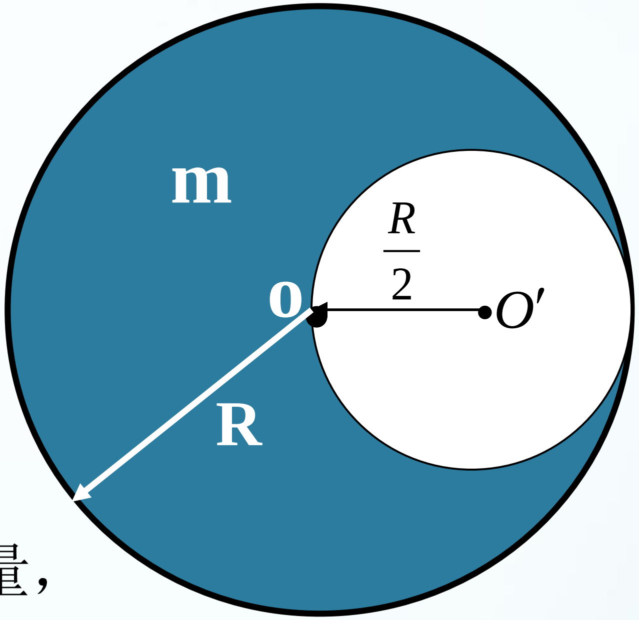
$$J = \int_0^R 2\pi\sigma r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\sigma r^4 \Big|_0^R = \frac{1}{2} mR^2$$



$dm=\sigma 2\pi r dr$

J的大小与 $\left\{ \begin{array}{l} \text{物体的质量} \\ \text{质量的分布} \\ \text{转轴的位置} \end{array} \right.$ 有关

一大圆板内挖去一个直径为大圆板半径的圆孔，如果剩余质量为m，求它对经过O点且与板平面垂直的轴的转动惯量。



解：由同轴转动惯量的可加性

即：$J_O = J_{1O} - J_{2O}$

其中：

J_O:挖了孔的圆板绕O轴的转动惯量，

J_{1O}:不挖孔的圆板（质量为m_1)对O轴的转动惯量，

J_{2O}:半径为$\frac{R}{2}$的匀质圆板（质量为m_2)对O轴的转动惯量，

$$J_{1O} = \frac{1}{2}m_1R^2 = \frac{1}{2}(\frac{4}{3}m)R^2 = \frac{2}{3}mR^2$$

$$(m_1 = \sigma \cdot \pi R^2 = \frac{m}{\pi R^2 - \pi(\frac{R}{2})^2} \cdot \pi R^2 = \frac{4}{3}m)$$

$$\underbrace{J_{2O} = \frac{1}{2}m_2\left(\frac{R}{2}\right)^2}_{J_{2O'}} + m_2\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}m_2R^2$$

$$m_2 = \frac{1}{4}m_1 = \frac{1}{3}m$$

$$m_1 = \frac{4}{3}m$$

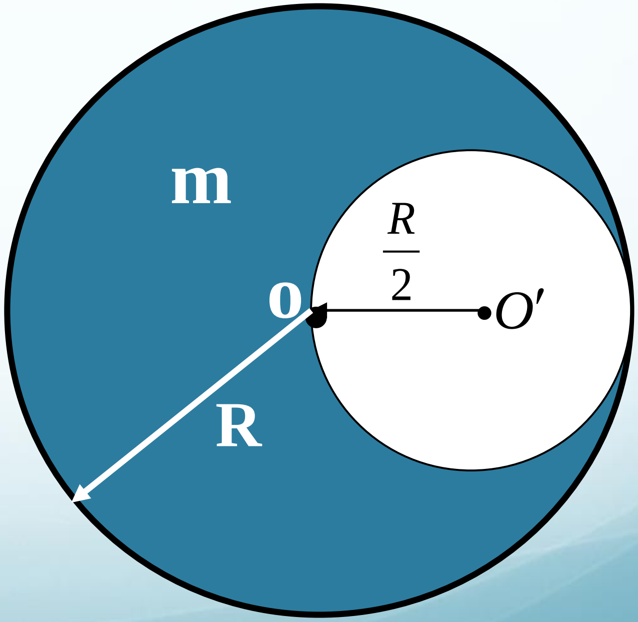
$$J_{2O} = \frac{3}{24}m\ R^2$$

$$J_O = J_{1O} - J_{2O}$$

$$J_{2O} = \frac{3}{24}m\ R^2$$

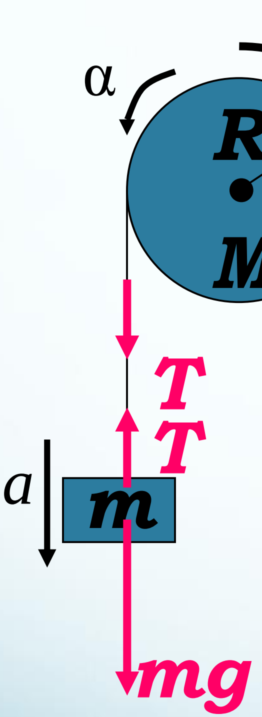
$$J_{1O} = \frac{2}{3}mR^2$$

$$J_O = \frac{13}{24}mR^2$$



[例题]已知：$M=2Kg, m=5Kg, R=0.1m, \omega_0=10rad/s$,

(1)求α、T,　　(2)$\omega=0$时,m上升h。



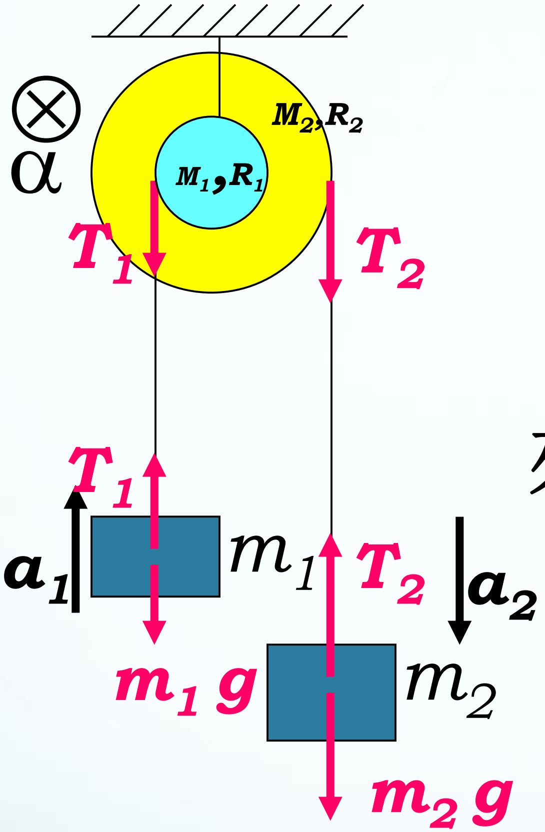
分析：轮与m为联结体,轮为定轴转动、m为平动,但二者用绳联系起来。m的速度大小与轮边缘线速度大小相等。

解:(1)　M,m受力如图所示

$$\left.\begin{aligned}&\text{对M：}\ TR=(\frac{1}{2}MR^2)\alpha\\&\text{对m：}\ mg-T=ma\\&\text{运动学关系：}\ a=\alpha\cdot R\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&\alpha=81.7(rad/s^2)\\&T=9.15(N)\end{aligned}$$

(2)

$$\left.\begin{aligned}&h=R\theta\\&\theta=\omega_0 t-\frac{1}{2}\alpha t^2\\&\omega_0-\alpha t=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow h=6.12\times10^{-2}m$$



已知:$m_1 = m_2$, M_1,R_1, M_2,R_2

求：α、 T_1 、 T_2

解： 受力及运动状态分析如图所示

列方程 $\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a_1 & (1) \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2 & (2) \end{cases}$

$$T_2 R_2 - T_1 R_1 = \left(\frac{1}{2} M_1 R_1^2 + \frac{1}{2} M_2 R_2^2\right)\alpha \quad (3)$$

$$\begin{cases} a_1 = \alpha R_1 & (4) \\ a_2 = \alpha R_2 & (5) \end{cases}$$

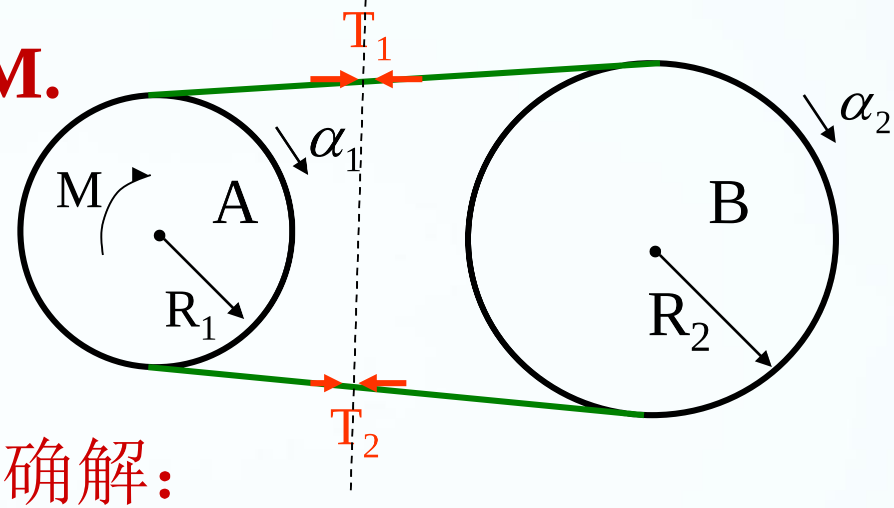
由（1）（2）（3）（4）（5）解得：α、T_1、T_2

已知：A轮：R_1, m_1，受恒力矩M.

B轮：R_2, m_2

轮与皮带间无滑动。

求：两轮的角加速度。



解:$\{A、B\}$

$$\left.\begin{aligned} M &= J_1\alpha_1 + J_2\alpha_2 \\ R_1\alpha_1 &= R_2\alpha_2 \\ J_1 &= \frac{1}{2}m_1R_1^2 \\ J_2 &= \frac{1}{2}m_2R_2^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix} \times$$

关键点：

内力矩之和不为零

正确解：

$$\{A\}: \quad M + T_1R_1 - T_2R_1 = J_1\alpha_1 \qquad (1)$$

$$\{B\}: \quad T_2R_2 - T_1R_2 = J_2\alpha_2 \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} R_1\alpha_1 &= R_2\alpha_2 && (3) \\ J_1 &= \frac{1}{2}m_1R_1^2 && (4) \\ J_2 &= \frac{1}{2}m_2R_2^2 && (5) \\ & && (1) \\ & && (2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix}$$

结论：转动定律：

a).系统中各物体均绕同一转轴转动

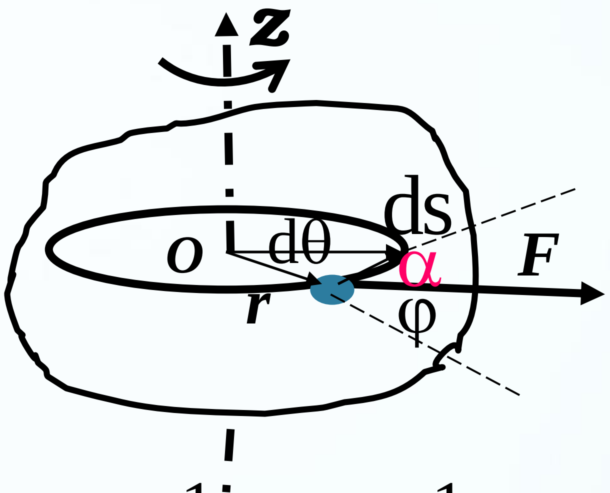
$$M_{外}=J\alpha$$

b).系统中各物体均绕不同转轴转动

$$M_{外}+M_{内}=J\alpha$$

§3-3 刚体转动中的功能关系

一、定轴转动中动能定理



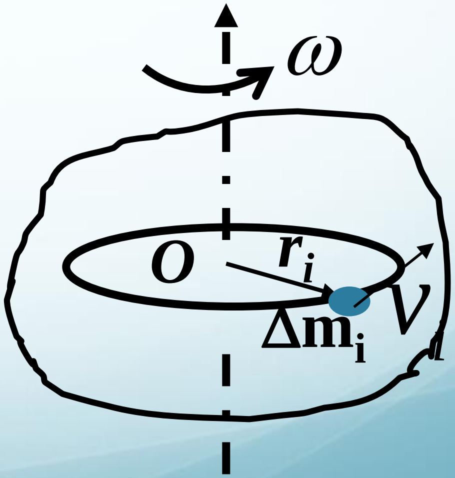
$$dA = F ds \cos\alpha = F r d\theta \cos(90^0 - \varphi)$$

$$= F r \sin\varphi d\theta = M d\theta$$

$$\theta_1 \to \theta_2 : A = \int dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} J\alpha d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} J \frac{d\omega}{dt} d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega d\omega = \frac{1}{2} J{\omega_2}^2 - \frac{1}{2} J\omega_1^2$$

质元Δm_i的动能：



$$E_{ki} = \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2$$

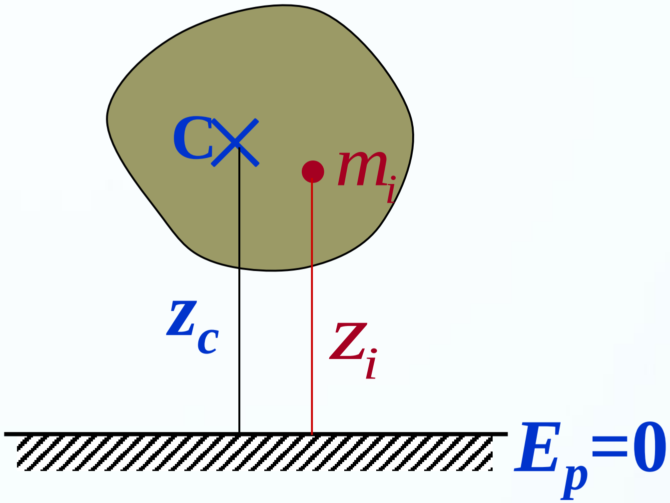
刚体的转动动能：

$$E_k = \sum_i E_{ki} = \frac{1}{2}\sum_i (\Delta m_i r_i^2)\omega^2 = \frac{1}{2} J\omega^2$$

$$A=\frac{1}{2}J\omega_2^{\ 2}-\frac{1}{2}J\omega_1^2$$ ——合外力矩对定轴转动刚体所作的功等于刚体转动动能的增量

刚体的重力势能：

$$E_P=\sum_i m_i g z_i=\frac{\sum_i m_i z_i}{m}(mg)=mgz_c$$



二、 定轴转动的功能原理

质点系功能原理对刚体仍成立：

$$A_{外}+A_{非保守内力}=(E_{k2}+E_{p2})-(E_{k1}+E_{p1})$$

※ $A_{保守力矩}=A_{保守力}=E_{P1}-E_{P2}$

若体系是一个包含刚体、质点、弹簧等复杂系统时

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \qquad E_P = E_{PG} + E_{PK}$$

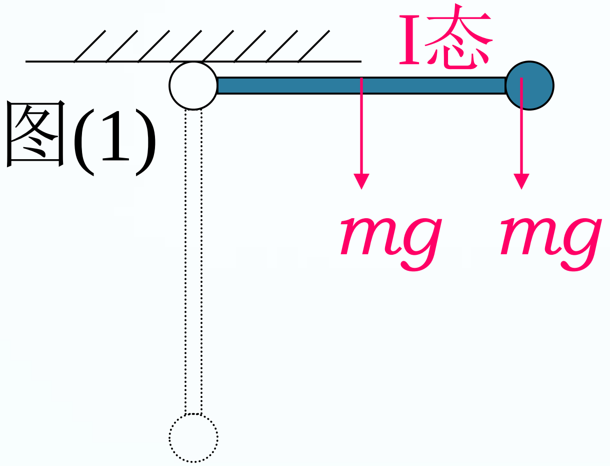
三、机械能守恒定律

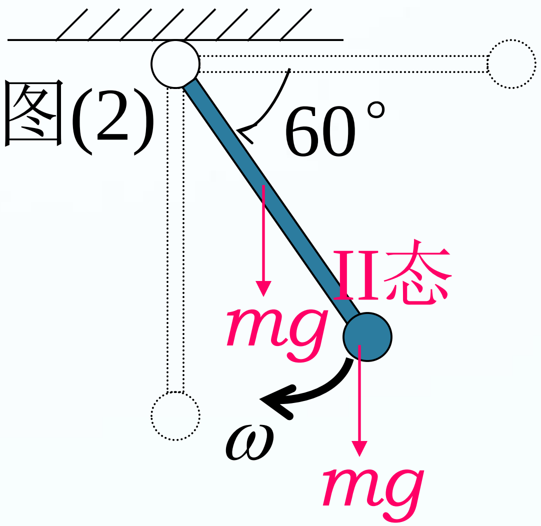
包括刚体在内的体系，若只有保守内力（力矩）作功

即： $A_{外力(矩)} + A_{非保内力(矩)} = 0$

则系统机械能守恒 $E_k + E_p = Const.$

[例题]已知匀质棒m,l,半径忽略的小球m组成图示系统，求图(1)α;图(2)棒中心a_t a_n ω





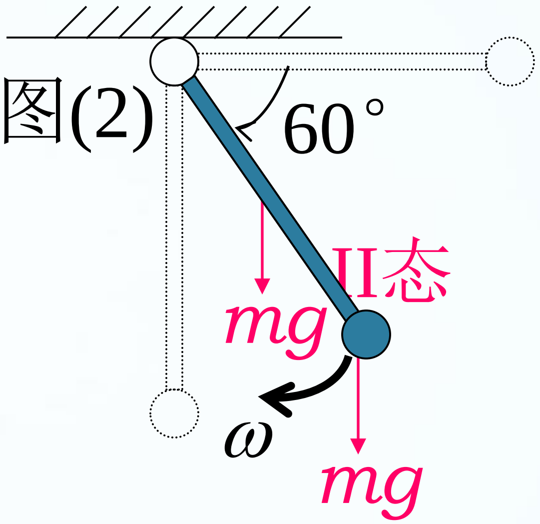
解(1)

$$\left.\begin{aligned} M &= mg\frac{l}{2} + mgl = \frac{3}{2}mgl \\ J &= \frac{1}{3}ml^2 + ml^2 = \frac{4}{3}ml^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = M/J = \frac{9g}{8l}$$

(2) I态→II态,E守恒

$$E_1 = E_2 \Rightarrow mgl\sin 60^0 + mg\frac{l}{2}\sin 60^0 = \frac{1}{2}(\frac{4}{3}ml^2)\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{9\sqrt{3}g}{8l}}$$

$$a_n = \omega^2 (\frac{l}{2}) = \frac{9\sqrt{3}g}{16}$$



$$a_t = \alpha \frac{l}{2} = \frac{9g}{32}$$

$$\alpha = \frac{M}{J} = \frac{mg\frac{l}{2}\sin 30^0 + mgl\sin 30^0}{\frac{4}{3}ml^2} = \frac{9g}{16l}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{9\sqrt{3}g}{8l}}$$

$$J = \frac{4}{3}ml^2$$

一般情况：

求：α用$M=J\alpha$

ω用动能定理或E守恒定律

a_t、a_n、v用线量和角量关系式