常微分方程习题 2.1

1. $\frac{dy}{dx}=2xy$,并求满足初始条件：x=0,y=1 的特解.

解：对原式进行变量分离得

$\frac{1}{y}dy=2xdx$, 两边同时积分得： $\ln|y|=x^2+c$, 即 $y=ce^{x^2}$ 把 $x=0, y=1$ 代入得

$c=1$, 故它的特解为 $y=e^{x^2}$。

2. $y^2dx+(x+1)dy=0$, 并求满足初始条件：x=0,y=1 的特解.

解：对原式进行变量分离得：

$-\frac{1}{x+1}dx=\frac{1}{y^2}dy$, 当 $y\neq 0$ 时，两边同时积分得; $\ln|x+1|=\frac{1}{y}+c$, 即 $y=\frac{1}{c+\ln|x+1|}$

当 $y=0$ 时显然也是原方程的解。当 $x=0, y=1$ 时，代入式子得 $c=1$, 故特解是

$y=\frac{1}{1+\ln|1+x|}$。

3 $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{xy+x^3y}$

解：原式可化为：

$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{y}\bullet\frac{1}{x+x^3}$ 显然 $\frac{1+y^2}{y}\neq 0$, 故分离变量得 $\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{1}{x+x^3}dx$

两边积分得 $\frac{1}{2}\ln|1+y^2|=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+\ln|c|(c\neq 0)$, 即 $(1+y^2)(1+x^2)=cx^2$

故原方程的解为 $(1+y^2)(1+x^2)=cx^2$

4: $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$

解：由 $y=0$ 或 $x=0$ 是方程的解，当 $xy\neq 0$ 时，变量分离 $\frac{1+x}{x}dx=\frac{1-y}{y}dy=0$

两边积分 $\ln|x|+x+\ln|y|-y=c$, 即 $\ln|xy|+x-y=c$,

故原方程的解为 $\ln|xy|=x-y=c; y=0; x=0.$

$5:(y+x)dy+(y-x)dx=0$

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}$，令 $\frac{y}{x}=u, y=ux, \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

则 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{u+1}{u+1}$，变量分离，得：$-\frac{u+1}{u^2+1}du=\frac{1}{x}dx$

两边积分得：$arctgu+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=-\ln|x|+c$。

6：$x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2-y^2}$

解：令 $\frac{y}{x}=u, y=ux, \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，则原方程化为：

$\frac{du}{dx}=\frac{\sqrt{x^2(1-u^2)}}{x}$，分离变量得：$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=\operatorname{sgn}x\bullet\frac{1}{x}dx$

两边积分得：$\arcsin u=\operatorname{sgn}x\bullet\ln|x|+\bar{c}$

代回原来变量，得 $\arcsin\frac{y}{x}=\operatorname{sgn}x\bullet\ln|x|+\bar{c}$

另外，$y^2=x^2$ 也是方程的解。

7：$tgydx-ctgxdy=0$

解：变量分离，得：$ctgydy=tgxdx$

两边积分得：$\ln|\sin y|=-\ln|\cos x|+c.$

$8:\frac{dy}{dx}=-\frac{e^{y^2+3x}}{y}$

解：变量分离，得 $\frac{y}{e^{y^2}}dy=-\frac{1}{3}e^{3x}+c$

$9:x(\ln x-\ln y)dy-ydx=0$

解：方程可变为：$-\ln\frac{y}{x}\bullet dy-\frac{y}{x}dx=0$

令 $u=\frac{y}{x}$，则有：$\frac{1}{x}dx=-\frac{\ln u}{1+\ln u}d\ln u$

代回原变量得：$cy=1+\ln\frac{y}{x}$。

10：$\frac{dy}{dx}=e^{x-y}$

解：变量分离 $e^y dy=e^x dx$

两边积分 $e^y=e^x+c$

$\frac{dy}{dx}=e^{x-y}$

解：变量分离，$e^{y}dy=e^{x}dx$

两边积分得：$e^{y}=e^{x}+c$

11. $\frac{dy}{dx}=(x+y)^{2}$

解：令$x+y=t$，则$\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}+1$

原方程可变为：$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t^{2}}+1$

变量分离得：$\frac{1}{t^{2}+1}dt=dx$，两边积分$arctgt=x+c$

代回变量得：$arctg(x+y)=x+c$

12． $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x+y)^{2}}$

解

令$x+y=t$，则$\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}-1$，原方程可变为$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t^{2}}+1$

变量分离$\frac{t^{2}}{t^{2}+1}dt=dx$，两边积分$t-arctgt=x+c$，代回变量

$x+y-arctg(x+y)=x+c$

13. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y-1}{x-2y+1}$

解：方程组$2x-y-1=0, x-2y+1=0$;的解为$x=-\frac{1}{3}, y=\frac{1}{3}$

令$x=X-\frac{1}{3}, y=Y+\frac{1}{3}$，则有$\frac{dY}{dX}=\frac{2X-Y}{X-2Y}$'

令$\frac{Y}{X}=U$，则方程可化为：$X\frac{dU}{dX}=\frac{2-2U+2U^{2}}{1-2U}$

变量分离

14, $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+5}{x-y-2}$

解：令$x-y=5=t$,则$\frac{dy}{dx}=1-\frac{dt}{dx}$,

原方程化为:$1-\frac{dt}{dx}=\frac{t}{t-7}$,变量分离$(t-7)dt-7dx$

两边积分$\frac{1}{2}t^2-7t=-7x+c$

代回变量$\frac{1}{2}(x-y+5)^2-7(x-y+5)=-7x+c$.

15． $\frac{dy}{dx}=(x+1)^2+(4y+1)^2+8xy+1$

解：方程化为$\frac{dy}{dx}=x^2+2x+1+16y^2+8y+1+8xy+1=(x+4y+1)^2+2$

令$1+x+4y=u$，则关于x求导得$1+4\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$，所以$\frac{1}{4}\frac{du}{dx}=u^2+\frac{9}{4}$，

分离变量$\frac{1}{4u^2+9}du=dx$，两边积分得$arctg(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}y)=6x+c$，是原方程的解。

16． $\frac{dy}{dx}=\frac{y^6-2x^2}{2xy^5+x^2y^2}$

解： $\frac{dy}{dx}=\frac{(y^3)^2-2x^2}{y^2(2xy^3+x^2)}=\frac{dy^3}{dx}=\frac{3[(y^3)^2-2x^2]}{2xy^3+x^2}$，，令$y^3=u$，则原方程化为

$\frac{du}{dx}=\frac{3u^2-6x^2}{2xu+x^2}=\frac{\frac{3u^2}{x^2}-6}{2\frac{u}{x}+1}$，这是齐次方程，令

$\frac{u}{x}=z$，则$\frac{du}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$，所以$\frac{3z^2-6}{2z+1}=z+x\frac{dz}{dx}$，，$x\frac{dz}{dx}=\frac{z^2-z-6}{2z+1}$,...........(1)

当$z^2-z-6=0$，得$z=3$或$z=-2$是（1）方程的解。即$y^3=3x$或$y^3=-2x$是方程的解。

当$z^2-z-6\neq 0$时，变量分离$\frac{2z+1}{z^2-z-d}dz=\frac{1}{x}dx$，两边积分的（$z-3)^7(z+2)^3=x^5c$,

即（$y^3-3x)^7(y^3+2x)^3=x^5c$，又因为$y^3=3x$或$y^3=-2x$包含在通解中当$c=0$时。故原方程的解为$(y^3-3x)^7(y^3+2x)^3=x^{15}c$

17. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x^3+3xy+x}{3x^2y+2y^3-y}$

解：原方程化为$\frac{dy}{dx}=\frac{x(2x^2+3y^2+1)}{y(3x^2+2y^2-1)}$;;;;;$\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{2x^2+3y^2+1}{3x^2+2y^2-1}$

令$y^2=u$,;;;;;$x^2=v$;;;;;;;则$\frac{du}{dv}=\frac{2v+3u+1}{3v+2u-1}$.......(1)

方程组$\begin{cases}2v+3u+1=0\\3v+2u-1=0\end{cases}$的解为（$1,-1$）；令$Z=v-1$，，$Y=u+1$,

则有$\begin{cases}2z+3y=0\\3z+2y=0\end{cases}$，，，，从而方程（1）化为$\frac{dy}{dz}=\frac{2+3\frac{y}{z}}{3+2\frac{y}{z}}$

令

$t=\frac{y}{z}$，，则有$\frac{dy}{dz}=t+z\frac{dt}{dz}$，，所以$t+z\frac{dt}{dz}=\frac{2+3t}{3+2t}$，，$z\frac{dt}{dz}=\frac{2-2t^2}{3+2t}$,...........(2)

当

$2-2t^2=0$时，，即$t=\pm1$，是方程(2)的解。得$y^2=x^2-2$或$y^2=-x^2$是原方程的解

当

$2-2t^2\neq 0$时，，分离变量得$\frac{3+2t}{2-2t^2}dt=\frac{1}{z}dz$两边积分的$y^2+x^2=(y^2-x^2+2)^5c$

另外

$y^2=x^2-2$，或$y^2=-x^2$，包含在其通解中，故原方程的解为$y^2+x^2=(y^2-x^2+2)^5c$

18.证明方程$\frac{x}{y}=\frac{dy}{dx}=f(xy)$经变换$xy=u$可化为变量分离方程，并由此求解下列方程

⑴.$y(1+x^2y^2)dx=xdy$

(2).$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{2+x^2y^2}{2-x^2y^2}$

证明：因为$\mathrm{xy=u}$,关于x求导导得$\mathrm{y+x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}}$,所以$\mathrm{x\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-y}$

得:$\mathrm{\frac{1}{y}\frac{du}{dx}-1=f(u),\frac{du}{dx=y(f(u)+1)}=\frac{u}{x}(f(u)+1)=\frac{1}{x}(uf(u)+u)}$

故此方程为此方程为变程。

解(1):当$\mathrm{x=0}$或$\mathrm{y=0}$是原方程的解，当 $\mathrm{xy\neq 0s}$时，方程化为$\mathrm{\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=1+x^2y^2}$

令$\mathrm{xy=u}$,则方程化为$\mathrm{\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}(2u+u^3)}$,变量分离得:$\mathrm{\frac{du}{2u+u^3}=\frac{1}{x}dx}$

两边同时积分得:$\mathrm{\frac{u^2}{u^2+2}=cx^4}$,即$\mathrm{\frac{y^2}{x^2y^2+2}=cx^2}$,$\mathrm{y=0}$也包含在此通解中。

故原方程的解为原$\mathrm{\frac{y^2}{x^2y^2+2}=cx^2,x=0.}$

解(2)令$\mathrm{xy=u}$，则原方程化为$\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}=\frac{1}{x}(u\frac{2+u^2}{2-u^2}+u)=\frac{1}{x}\frac{4u}{2-u^2}$

分离变量得$\frac{2-u^2}{4u}du=\frac{1}{x}dx$，两边积分得$\ln\left|\frac{y}{x}\right|=\frac{x^2y^2}{4}+c$，这也就是方程的解。

19. 已知 $\mathrm{f(x)}\int_0^x f(x)dt=1,x\neq 0,$试求函数$f(x)$的一般表达式.

解：设 f(x)=y, 则原方程化为$\int_0^x f(x)dt=\frac{1}{y}$ 两边求导得$y=-\frac{1}{y^2}y'$

$-y^3=\frac{dy}{dx}$;;;;;;;;;;$dx=-\frac{1}{y^3dy}$;;;;;;;;;;;;两边积分得$x+\bar{c}=\frac{1}{2}\frac{1}{y^2}$;;;;;所以$y=\pm\frac{1}{\sqrt{2x+c}}$

把$y=\pm\frac{1}{\sqrt{2x+c}}$代入$\int_0^x f(x)dt=\frac{1}{y}$

$\pm\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2t+c}}dt=\pm\sqrt{2x+c};;;;;;;;;;\pm(\sqrt{2x+c}-\sqrt{c})=\pm\sqrt{2x+c}$得$c=0$,所以$y=\pm\frac{1}{\sqrt{2x}}$

20.求具有性质　x(t+s)=$\frac{x(t)+x(s)}{1-x(t)x(s)}$的函数 x(t),已知 x’(0)存在。

解:令 t=s=0　　x(0)=$\frac{x(0)+x(0)}{1-x(0)}=\frac{2x(0)}{1-x(0)x(0)}$ 若 x(0)$\neq$0 得 x^2=-1 矛盾。

所以 x(0)=0. x’(t)=$\lim\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\lim\frac{x(\Delta t)(1+x^2(t))}{\Delta t[1-x(t)x(\Delta t)}=x'(0)(1+x^2(t))$

$\frac{dx(t)}{dt}=x'(0)(1+x^2(t))$　　　$\frac{dx(t)}{1+x^2(t)}=x'(0)dt$　　两边积分得 arctg x(t)=x’(0)t+c　所以 x(t)=tg[x’(0)t+c] 当 t=0 时　x(0)=0　故 c=0 所以 x(t)=tg[x’(0)t]

02411　黄罕鳞（41）　　甘代祥（42）

习题 2.2

求下列方程的解

1. $\dfrac{dy}{dx}=y+\sin x$

解： y=e $^{\int dx}$（$\int \sin x$ e $^{-\int dx}$ $dx+c$）

=e ^{x} [$-\dfrac{1}{2}$e $^{-x}$（$\sin x+\cos x$）+ c]

=c e $^{x}-\dfrac{1}{2}$ （$\sin x+\cos x$）是原方程的解。

2. $\dfrac{dx}{dt}$+ 3x=e ^{2t}

解：原方程可化为：$\dfrac{dx}{dt}$=−3x+ e ^{2t}

所以：x=e$^{\int -3dt}$ （$\int$ e ^{2t} e $^{-\int -3dt}$ $dt+c$）

=e $^{-3t}$ （$\dfrac{1}{5}$e ^{5t} + c)

=c e $^{-3t}$ + $\dfrac{1}{5}$e ^{2t} 是原方程的解。

3. $\dfrac{ds}{dt}$=−s $\cos t$ + $\dfrac{1}{2}\sin 2t$

解：s=e$^{\int -\cos t dt}$（$\int \dfrac{1}{2}\sin 2t$ e$^{\int 3dt}$ $dt+c$ ）

=e $^{-\sin t}$（$\int \sin t \cos t e^{\sin t} dt+c$）

= e $^{-\sin t}$（$\sin t e^{\sin t}-e^{\sin t}+c$ ）

$=ce^{-\sin t}+\sin t-1$ 是原方程的解。

4. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{x}{n}y=e^{x}x^{n}$ ， n 为常数.

解：原方程可化为：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{n}y+e^{x}x^{n}$

$$y=e^{\int \frac{n}{x}dx}(\int e^{x}x^{n}e^{-\int \frac{n}{x}dx}dx+c)$$

$=x^{n}(e^{x}+c)$ 是原方程的解.

5. $\frac{dy}{dx}+\frac{1-2x}{x^2}y-1=0$

解：原方程可化为：$\frac{dy}{dx}=-\frac{1-2x}{x^2}y+1$

$$y=e^{\int\frac{2x-1}{x^2}dx}（e^{\int\frac{1-2x}{x^2}dx}dx+c）$$

$$=e^{(\ln x^2+\frac{1}{2})}(\int e^{-\ln x^2-\frac{1}{x}}dx+c)$$

$$=x^2(1+ce^{\frac{1}{x}})$$ 是原方程的解.

6. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^4+x^3}{xy^2}$

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{x^4+x^3}{xy^2}$

$$=\frac{x^3}{y^2}+\frac{y}{x}$$

令 $\frac{y}{x}=u$ 则 $y=ux$ $\frac{dy}{dx}=\text{u}+x\frac{du}{dx}$

因此：$u+x\frac{du}{dx}=\frac{x}{u^2}$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{u^2}$$

$$u^2du=dx$$

$$\frac{1}{3}u^3=x+c$$

$$u^3-3x=x+c \qquad (*)$$

将 $\frac{y}{x}=u$ 带入 （*）中 得：$y^3-3x^4=cx^3$ 是原方程的解.

$7.\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x+1}+(x+1)^3$

$P(x)=\frac{2}{x+1},Q(x)=(x+1)^3$

$e^{\int P(x)dx}=e^{\int\frac{2}{x+1}dx}=(x+1)^2$

方程的通解为：

$$
\begin{aligned}
y&=e^{\int P(x)dx}(\int e^{-\int P(x)dx}Q(x)dx+c)\\
&=(x+1)^2(\int\frac{1}{(x+1)^2}*(x+1)^3dx+c)\\
&=(x+1)^2(\int(x+1)dx+c)\\
&=(x+1)^2(\frac{(x+1)^2}{2}+c)
\end{aligned}
$$

即：$2y=c(x+1)^2+(x+1)^4$为方程的通解。

$8.\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^3}$

解：$\frac{dx}{dy}=\frac{x+y^3}{y}=\frac{1}{y}x+y^2$

则$P(y)=\frac{1}{y},Q(y)=y^2$

$$e^{\int P(y)dy}=e^{\int\frac{1}{y}dy}=y$$

方程的通解为：

$$
\begin{aligned}
x&=e^{\int P(y)dy}(\int e^{-\int P(y)dy}Q(y)dy+c)\\
&=y(\int\frac{1}{y}*y^2dy+c)\\
&=\frac{y^3}{2}+cy
\end{aligned}
$$

即 $x=\frac{y^3}{2}+cy$是方程的通解 ，且y=0也是方程的解。

9. $\frac{dy}{dx}=\frac{ay}{x}+\frac{x+1}{x}$, a为常数

解：$P(x)=\frac{a}{x}, Q(x)=\frac{x+1}{x}$

$e^{\int P(x)dx}=e^{\int \frac{a}{x}dx}=x^a$

方程的通解为： $y=e^{\int P(x)dx}(e^{-\int P(x)dx}Q(x)dx+c)$

$=x^a(\int \frac{1}{x^a}\frac{x+1}{x}dx+c)$

当 $a=0$时，方程的通解为

y=x+ln/x/+c

当 $a=1$时，方程的通解为

y=cx+xln/x/-1

当 $a\neq 0,1$时，方程的通解为

$y=cx^a+\frac{x}{1-a}-\frac{1}{a}$

10. $x\frac{dy}{dx}+y=x^3$

解: $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x}y+x^3$

$P(x)=-\frac{1}{x}, Q(x)=x^3$

$e^{\int P(x)dx}=e^{-\int \frac{1}{x}dx}=\frac{1}{x}$

方程的通解为：

$y=e^{\int P(x)dx}(\int e^{-\int P(x)dx}Q(x)dx+c)$

$=\frac{1}{x}(\int x*x^3dx+c)$

$=\frac{x^3}{4}+\frac{c}{x}$

方程的通解为： $y=\frac{x^3}{4}+\frac{c}{x}$

$11.\dfrac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$

解：$\dfrac{\mathrm{dy}}{dx}=-xy+x^3y^3$

两边除以y^3

$\dfrac{\mathrm{dy}}{y^3dx}=-xy^{-2}+x^3$

$\dfrac{\mathrm{dy}^{-2}}{dx}=-2(-xy^{-2}+x^3)$

令$y^{-2}=z$

$\dfrac{dz}{dx}=-2(-xz+x^3)$

$P(x)=2x,Q(x)=-2x^3$

$e^{\int p(x)}dx=e^{\int 2xdx}=e^{x^2}$

方程的通解为：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{z}= & e^{\int p(x)}dx(\int e^{-\int p(x)}dxQ(x)dx+c) \\
=&\mathrm{e}^{x^2}(\int e^{-x^2}(-2x^3)dx+c) \\
=&\mathrm{x}^2+ce^{x^2}+1
\end{aligned}
$$

故方程的通解为：$y^2(\mathrm{x}^2+ce^{x^2}+1)=1,$且$y=0$也是方程的解。

$12.(y\ln x-2)ydx=xdy\frac{c}{4}x^2+\frac{\ln x}{2}+\frac{1}{4}$

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{\ln x}{x}y^2-\frac{2y}{x}$

两边除以y^2

$$\frac{dy}{y^2dx}=\frac{\ln x}{x}-\frac{2y^{-1}}{x}$$

$$\frac{dy^{-1}}{dx}=\frac{\ln x}{x}-\frac{2y^{-1}}{x}$$

令$y^{-1}=z$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2}{x}z-\frac{\ln x}{x}$$

$$P(x)=\frac{2}{x},Q(x)=-\frac{\ln x}{x}$$

方程的通解为：

$$z=e^{\int P(x)dx}(\int e^{-\int P(x)dx}Q(x)dx+c)$$

$$z=e^{\int\frac{2}{x}dx}(\int e^{-\int\frac{2}{x}dx}(-\frac{\ln x}{x})dx+c)=x^2(\int\frac{1}{x^2}(-\frac{\ln x}{x})dx+c)$$

$$=\frac{c}{4}x^2+\frac{\ln x}{2}+\frac{1}{4}$$

方程的通解为：$y(\frac{c}{4}x^2+\frac{\ln x}{2}+\frac{1}{4})=1$，且y=0也是解。

13

$$2xydy=(2y^2-x)dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y^2-x}{2xy}=\frac{y}{x}-\frac{1}{2y}$$

这是 n=−1 时的伯努利方程。

两边同除以$\frac{1}{y}$，

$$y\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x}-\frac{1}{2}$$

令 $y^2=z$ $\qquad \frac{dz}{dx}=2y\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2y^2}{x}-1=\frac{2z}{x}-1$$

P(x)=$\frac{2}{x}$　　Q(x)=−1

由一阶线性方程的求解公式

$$z=e^{\int\frac{2}{x}dx}(\int -e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx+c)$$

$$=x+x^2c$$

$$y^2=x+x^2c$$

14　$\frac{dy}{dx}=\frac{e^y+3x}{x^2}$

两边同乘以e^y　　$e^y\frac{dy}{dx}=\frac{(e^y)^2+3xe^y}{x^2}$

令$e^y=z$　　$\frac{dz}{dx}=e^y\frac{dy}{dx}$

$\frac{dz}{dx}=\frac{z^2+3xz}{x^2}=\frac{3z}{x}+\frac{z^2}{x^2}$　这是 n=2 时的伯努利方程。

两边同除以z^2　　$\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=\frac{3}{xz}+\frac{1}{x^2}$　　令$\frac{1}{z}=T$

$\frac{dT}{dx}=-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$　　$\frac{dT}{dx}=\frac{-3T}{x}+\frac{1}{x^2}$

P（x）=$\frac{-3}{x}$　　Q(x)=$\frac{-1}{x^2}$

由一阶线性方程的求解公式

$$T=e^{\int\frac{-3}{x}dx}(\int\frac{-1}{x^2}e^{\int\frac{3}{x}dx}dx+c)$$

$$=x^{-3}(-\frac{1}{2}x^2+c)$$

$$=-\frac{1}{2}x^{-1}+cx^{-3}$$

$$z(-\frac{1}{2}x^{-1}+cx^{-3})=1$$

$$e^y(-\frac{1}{2}x^{-1}+cx^{-3})=1$$

$$-\frac{1}{2}x^2e^y+ce^y=x^3$$

$$\frac{1}{2}x^2+x^3e^{-y}=c$$

15 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy+x^3y^3}$

$$\frac{dx}{dy}=yx+y^3x^3$$

这是 n=3 时的伯努利方程。

两边同除以 x^3 $\frac{1}{x^3}\frac{dx}{dy}=\frac{y}{x^2}+y^3$

令 $x^{-2}=z$ $\frac{dz}{dy}=-2x^{-3}\frac{dx}{dy}$

$\frac{dz}{dy}=-\frac{2y}{x^2}-2y^3=-2yz-2y^3$ P(y)=−2y Q(y)=$-2y^3$

由一阶线性方程的求解公式

$$z=e^{\int -2ydy}(\int -2y^3e^{-\int -2ydy}dy+c)$$

$$=e^{-y^2}(-\int 2y^3e^{y^2}dy+c)$$

$$=-y^2+1+ce^{-y^2}$$

$$x^2(-y^2+1+ce^{-y^2})=1$$

$$x^2e^{y^2}(-y^2+1+ce^{-y^2})=e^{y^2}$$

$$e^{y^2}(1-x^2+x^2y^2)=cx^2$$

16 y=$e^x+\int_0^x y(t)dt$

$$\frac{dy}{dx}=e^x+y(x)$$

$$\frac{dy}{dx}=y+e^x$$

P(x)=1 Q(x)=e^x 由一阶线性方程的求解公式

$y=e^{\int 1dx}(\int e^x e^{-\int 1dx}dx+c)$

$=e^x(\int e^x e^{-x}dx+c)$

$=e^x(x+c)$

$e^x(x+c)=e^x+\int_0^x e^x(x+c)dx$

c=1

y=$e^x(x+c)$

17 设函数 φ(t) 于 $-\infty<t<+\infty$ 上连续， $\varphi'(0)$ 存在且满足关系式

$\varphi(t+s)=\varphi(t)\varphi(s)$

试求此函数。

令 t=s=0　得 $\varphi(0+0)=\varphi(0)\varphi(0)$　即 $\varphi(0)=\varphi(0)^2$　故 $\varphi(0)=0$ 或 $\varphi(0)=1$

（1）　当 $\varphi(0)=0$ 时　　$\varphi(t)=\varphi(t+0)=\varphi(t)\varphi(0)$　即 $\varphi(t)=0$

$\forall t\in(-\infty,+\infty)$

（2）　当 $\varphi(0)=1$ 时　　$\varphi'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\varphi(t)\varphi(\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\varphi(t)(\varphi(\Delta t)-1)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\varphi(\Delta t+0)-\varphi(0)}{\Delta t}\varphi(t)$

$=\varphi'(0)\varphi(t)$

于是 $\dfrac{d\varphi}{dt}=\varphi'(0)\varphi(t)$　变量分离得 $\dfrac{d\varphi}{\varphi}=\varphi'(0)dt$　积分　$\varphi=ce^{\varphi'(0)t}$

由于 $\varphi(0)=1$，即 t=0 时 $\varphi=1$　　$1=ce^0\Rightarrow$ c=1

故 $\varphi(t)=e^{\varphi'(0)t}$

20.试证：

（1）一阶非齐线性方程（2 .28）的任两解之差必为相应的齐线性方程（2.3）

之解；

(2) 若 $y=y(x)$ 是 (2.3) 的非零解, 而 $y=\tilde{y}(x)$ 是 (2.28) 的解, 则方程 (2.28) 的通解可表为 $y=cy(x)+\tilde{y}(x)$，其中 c 为任意常数.

（3）方程（2.3）任一解的常数倍或任两解之和（或差）仍是方程（2.3）的解.

证明：$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$　　（2.28）

$\frac{dy}{dx}=P(x)y$　　（2.3）

（1）　设 y_1，y_2 是（2.28）的任意两个解

则　$\frac{dy_1}{dx}=P(x)y_1+Q(x)$　　（1）

$\frac{dy_2}{dx}=P(x)y_2+Q(x)$　　（2）

（1）－（2）得

$$\frac{d\left(y_1-y_2\right)}{dx}=P(x)(y_1-y_2)$$

即 $y=y_1-y_2$ 是满足方程（2.3）

所以，命题成立。

（2）　由题意得：

$\frac{dy(x)}{dx}=P(x)y$　　（3）

$\frac{d\tilde{y}(x)}{dx}=P(x)\tilde{y}(x)+Q(x)$　　（4）

1）先证 $y=cy+\tilde{y}$ 是（2.28）的一个解。

于是　$c\times(3)+(4)$　得

$$\frac{cdy}{dx}+\frac{d\tilde{y}}{dx}=cP(x)y+P(x)\tilde{y}+Q(x)$$

$$\frac{d(cy+\tilde{y})}{dx}=P(x)(cy+\tilde{y})+Q(x)$$

故 $y=cy+\tilde{y}$ 是（2.28）的一个解。

2）现证方程（4）的任一解都可写成 $cy+\tilde{y}$ 的形式

设 y_1 是(2.28)的一个解

则 $$\frac{dy_1}{dx}=P(x)y_1+Q(x) \qquad (4')$$

于是 （4’）－（4）得

$$\frac{d(y_1-\tilde{y})}{dx}=P(x)(y_1-\tilde{y})$$

从而 $y_1-\tilde{y}=ce^{\int P(x)dx}=cy$

即 $y_1=\tilde{y}+cy$

所以，命题成立。

（3） 设 y_3， y_4 是（2.3）的任意两个解

则 $$\frac{dy_3}{dx}=P(x)y_3 \qquad (5)$$

$$\frac{dy_4}{dx}=P(x)y_4 \qquad (6)$$

于是（5）$\times c$ 得 $\frac{cdy_3}{dx}=cP(x)y_3$

即 $\frac{d(cy_3)}{dx}=P(x)(cy_3)$ 其中 c 为任意常数

也就是 $y=cy_3$ 满足方程（2.3）

（5）$\pm$（6）得

$$\frac{dy_3}{dx}\pm\frac{dy_4}{dx}=P(x)y_3\pm P(x)y_4$$

即 $\frac{d(y_3\pm y_4)}{dx}=P(x)(y_3\pm y_4)$

也就是 $y=y_3\pm y_4$ 满足方程（2.3）

所以命题成立。

21.试建立分别具有下列性质的曲线所满足的微分方程并求解。

(5) 曲线上任一点的切线的纵截距等于切点横坐标的平方；

(6) 曲线上任一点的切线的纵截距是切点横坐标和纵坐标的等差中项；

解：设 $p(x,y)$ 为曲线上的任一点，则过 p 点曲线的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x)$$

从而此切线与两坐标轴的交点坐标为 $(x-\frac{y}{y'},0),(0,y-xy')$

即 横截距为 $x-\frac{y}{y'}$,

纵截距为 $y-xy'$。

由题意得：

(5) $y-xy'=x^2$

方程变形为

$$x\frac{dy}{dx}=y-x^2$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}y-x$$

于是 $y=e^{\int\frac{1}{x}dx}(\int(-x)e^{\int(-\frac{1}{x})dx}dx+c)$

$$=e^{\ln|x|}(\int(-x)e^{-\ln|x|}dx+c)$$

$$=|x|(\int(-x)|x|^{-1}dx+c)$$

$$=x(\int(-x\bullet\frac{1}{x})dx+c)$$

$$=x(-x+c)$$

$$=-x^2+cx$$

所以，方程的通解为 $y=-x^2+cx$。

(6) $y-xy'=\frac{x+y}{2}$

方程变形为

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2}-\frac{x}{2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x}y-\frac{1}{2}$$

于是 $y=e^{\int\frac{1}{2x}dx}(\int(-\frac{1}{2})e^{\int(-\frac{1}{2x})dx}dx+c)$

$$=e^{\frac{1}{2}\ln|x|}(\int(-\frac{1}{2})e^{-\frac{1}{2}\ln|x|}dx+c)$$

$$=|x|^{\frac{1}{2}}(\int(-\frac{1}{2})|x|^{-\frac{1}{2}}dx+c)$$

$$=x^{\frac{1}{2}}(\int(-\frac{1}{2}\bullet x^{-\frac{1}{2}})dx+c)$$

$$=x^{\frac{1}{2}}(-x^{\frac{1}{2}}+c)$$

$$=-x+cx^{\frac{1}{2}}$$

所以，方程的通解为 $y=-x+cx^{\frac{1}{2}}$。

22. 求解下列方程。

（1） $(x^2-1)y'-xy+=0$

解： $y'=\frac{xy-1}{x^2-1}y-\frac{1}{x^2-1}$

$$y=e^{\int\frac{x}{x^2-1}dx}(\int-\frac{1}{x^2-1}e^{\int-\frac{x}{x^2-1}dx}+c)$$

$$=/x^2-1/^{\frac{1}{2}}[\int-\frac{1}{x^2-1}\frac{1}{/x^2-1/^{\frac{1}{2}}}dx+c]$$

$$=/x^2-1/^{\frac{1}{2}}[\int-\frac{dx}{/x^2-1/^{\frac{3}{2}}}+c]$$

$$=c\sqrt{/1-x^2/}+x$$

（2） $y^{'}\sin x\cos x-y-\sin^3 x=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sin x\cos x}+\frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$P(x)=\frac{1}{\sin x\cos x} \qquad Q(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

由一阶线性方程的求解公式

$$y=e^{\int\frac{1}{\sin x\cos x}dx}\left(\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}e^{-\int\frac{1}{\sin x\cos x}dx}dx+c\right)$$

$$=\frac{\sin x}{\cos x}\left(\int\sin x dx+c\right)$$

$$=\frac{\sin x}{\cos x}(-\cos x+c)$$

$$=tgxc-\sin x$$

习题 2.3

1、验证下列方程是恰当方程，并求出方程的解。

1. $(x^2+y)dx+(x-2y)dy=0$

解： $\frac{\partial M}{\partial y}=1$， $\frac{\partial N}{\partial x}=1$.

则 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

所以此方程是恰当方程。

凑微分， $x^2dx-2ydy+(ydx+xdy)=0$

得 ： $\frac{1}{3}x^3+xy-y^2=C$

2. $(y-3x^2)dx-(4y-x)dy=0$

解： $\frac{\partial M}{\partial y}=1$， $\frac{\partial N}{\partial x}=1$.

则 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

所以此方程为恰当方程。

凑微分， $ydx+xdy-3x^2dx-4ydy=0$

得 $x^3-xy+2y^2=C$

3. $[\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x}]dx+[\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}]dy=0$

解： $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{2y(x-y)^2-2y^2(x-y)(-1)}{(x-y)^4}=\frac{2xy}{(x-y)^3}$

$\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{2x(x-y)^2-2x^2(x-y)}{(x-y)^4}=\frac{2xy}{(x-y)^3}$

则 $\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial y}$.

因此此方程是恰当方程。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2} \qquad (2)$$

对（1）做 x 的积分，则 $u=\int\frac{y^2}{(x-y)^2}dx-\int\frac{1}{x}dx+\varphi(y)$

$$=-\frac{y^2}{x-y}-\ln x+\varphi(y) \qquad (3)$$

对（3）做 y 的积分，则 $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{-(-1)y^2+(x-y)2y}{(x-y)^2}+\frac{d\varphi(y)}{dy}$

$$=\frac{-2xy+y^2}{(x-y)^2}+\frac{d\varphi(y)}{dy}$$

$$=\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}$$

则 $\frac{d\varphi(y)}{dy}=\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{y^2-2xy}{(x-y)^2}=\frac{1}{y}-\frac{x^2-2xy+y^2}{(x-y)^2}=\frac{1}{y}-1$

$$\varphi(y)=\int(\frac{1}{y}-1)dy=\ln y-y$$

$$u=-\frac{y^2}{x-y}-\ln x+\ln y-y=\ln\frac{y}{x}-\frac{y^2+xy-y^2}{x-y}=\ln\frac{y}{x}-\frac{xy}{x-y}$$

故此方程的通解为 $\ln\frac{y}{x}+\frac{xy}{x-y}=C$

4、 $2(3xy^2+2x^3)dx+3(2x^2y+y^2)dy=0$

解： $\frac{\partial M}{\partial y}=12xy$， $\frac{\partial N}{\partial x}=12xy$.

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

则此方程为恰当方程。

凑微分，$6xy^2dx+4x^3dx+6x^2ydy+3y^2dy=0$

$3d(x^2y^2)+d(x^4)+d(x^3)=0$

得 ：$x^4+3x^2y^2+y^3=C$

5.$(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1)dx+(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2})dy=0$

解： M=$\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1$ N=$\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}$

$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y}-\frac{x}{y^3}\cos\frac{x}{y}-\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^3}\sin\frac{y}{x}$

$\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y}-\frac{x}{y^3}\cos\frac{x}{y}-\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^3}\sin\frac{y}{x}$

所以，$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，故原方程为恰当方程

因为$\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}dx-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx+dx+\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}dy-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}dy+\frac{1}{y^2}dy=0$

$d(-\cos\frac{x}{y})+d(\sin\frac{y}{x})+dx+d(-\frac{1}{y})=0$

所以，$d(\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y})=0$

故所求的解为 $\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y}=C$

求下列方程的解:

6．$2x(ye^{x^2}-1)dx+e^{x^2}dy=0$

解：$\frac{\partial M}{\partial y}=2xe^{x^2}$ ， $\frac{\partial N}{\partial x}=2xe^{x^2}$

所以，$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，故原方程为恰当方程

又 $2xye^{x^2}dx-2xdx+e^{x^2}dy=0$

所以，d(ye^{x^2}-x^2)=0

故所求的解为 ye^{x^2}-x^2=C

7.(e^x+3y^2)dx+2xydy=0

解：e^{x}dx+3y^{2}dx+2xydy=0

e^{x}x^{2}dx+3x^{2}y^{2}dx+2x^{3}ydy=0

所以，d e^x(x^2-2x+2)+d(x^{3}y^2)=0

即 d [e^x(x^2-2x+2)+ x^{3}y^2]=0

故方程的解为 e^x(x^2-2x+2)+ x^{3}y^2=C

8. 2xydx+(x^2+1)dy=0

解：2xydx+ x^{2}dy+dy=0

d(x^{2}y)+dy=0

即 d(x^{2}y+y)=0

故方程的解为 x^{2}y+y=C

9、 $ydx - xdy = \left(x^2 + y^2\right)dx$

解：两边同除以 $x^2 + y^2$ 得 $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = dx$

即，$d\left(arctg\frac{x}{y}\right) = dx$

故方程的通解为 $\arg tg\left(\frac{x}{y}\right) = x + c$

10、 $ydx - \left(x + y^3\right)dy = 0$

解：方程可化为：$\frac{ydx - xdy}{y^2} = ydy$

即，$d\left(\frac{x}{y}\right) = ydy$

故方程的通解为：$\frac{x}{y}=\frac{1}{2}y^2+c$ 即：$2x=y(y^2+c)$

同时，y=0 也是方程的解。

11、$(y-1-xy)dx+xdy=0$

解：方程可化为：$ydx+xdy=(1+xy)dx$

$d(xy)=(1+xy)dx$ 即：$\frac{d(xy)}{1+xy}=dx$

故方程的通解为：$\ln|1+xy|=x+c$

12、$(y-x^2)dx-xdy=0$

解：方程可化为：$\frac{ydx-xdy}{x^2}=dx$

$-d\left(\frac{y}{x}\right)=dx$

故方程的通解为 ：$\frac{y}{x}=c-x$ 即：$y=x(c-x)$

13、$(x+2y)dx+xdy=0$

解：这里$M=x+2y, N=x$ ，$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$

$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{1}{x}$ 方程有积分因子$\mu=e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$

两边乘以μ得：方程$x(x+2y)dx+x^2dy=0$是恰当方程

故方程的通解为：$\int(x^2+2xy)dx+\int\left[x^2-\frac{\partial}{\partial y}\int(x^2+2xy)dx\right]dy=c$

$\frac{x^3}{3}+x^3y=c$

即：$x^3+3x^2y=c$

14、$[x\cos(x+y)+\sin(x+y)]dx+x\cos(x+y)dy=0$

解：这里 $M=x\cos(x+y)+\sin(x+y), N=x\cos(x+y)$

因为 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=\cos(x+y)-x\sin(x+y)$

故方程的通解为：

$$\int[x\cos(x+y)+\sin(x+y)]dx+\int\left[x\cos(x+y)-\frac{\partial}{\partial y}\int[x\cos(x+y)+\sin(x+y)]dx\right]dy=c$$

即：$x\sin(x+y)=c$

15、$(y\cos x+x\sin x)dx+(y\sin x+x\cos x)dy=o$

解：这里 $M=y\cos x-x\sin x, N=y\sin x+x\cos x$ $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$

$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=1$ 方程有积分因子：$\mu=e^{\int dy}=e^{y}$ 两边乘以 μ 得：

方程 $e^{y}(y\cos x-x\sin x)dx+e^{y}(y\sin x+x\cos x)dy=0$ 为恰当方程

故通解为 ：$\int e^{y}(y\cos x-x\sin x)dx+\int\left(N-\frac{\partial}{\partial y}\int e^{y}(y\cos x-x\sin x)dx\right)dy=c$

即：$e^{y}\sin x(y-1)+e^{y}\cos x=c$

16、$x(4ydx+2xdy)+y^{3}(3ydx+5xdy)=0$

解：两边同乘以 $x^{2}y$ 得：

$(4x^{3}y^{2}dx+2x^{4}ydy)+(3x^{2}y^{5}dx+5x^{3}ydy)=0$

$d(x^{4}y^{2})+d(x^{3}y^{5})=0$

故方程的通解为：$x^{4}y^{2}+x^{3}y^{5}=c$

17、**试导出方程 $M(X,Y)dx+N(X,Y)dy=0$ 具有形为 $\mu(xy)$ 和 $\mu(x+y)$ 的积分因子的充要条件。**

解：若方程具有 $\mu(x+y)$ 为积分因子，

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$ （$\mu(x+y)$是连续可导）

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=N\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu(-\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial x})$$

(1) 令 $z=x+y$

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{d\mu}{dz}，\quad \frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{d\mu}{dz}\ .$$

$$M\frac{d\mu}{dz}-N\frac{d\mu}{dz}=\mu(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})，$$

$$(M-N)\frac{d\mu}{dz}=\mu(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})\ ，$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M-N}\ ，\qquad dz=\varphi(x+y)dz$$

方程有积分因子$\mu(x+y)$的充要条件是：$\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M-N}$是$x+y$的函数，

此时，积分因子为$\mu(x+y)=e^{\int\varphi(z)dz}$.

(2) 令$z=x\cdot y$

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{d\mu}{dz}\ ，\quad \frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\frac{d\mu}{dz}$$

$$Mx\frac{d\mu}{dz}-Ny\frac{d\mu}{dz}=\mu(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})$$

$$(Mx-Ny)\frac{d\mu}{dz}=\mu(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}$$

此时的积分因子为 $\mu(xy)=e^{\int\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}dz}$

18. **设 $f(x,y)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 连续, 试证方程 $dy-f(x,y)dx=0$ 为线性方程的充要条件是它有仅依赖于 x 的积分因子.**

证: 必要性　若该方程为线性方程, 则有 $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$,

此方程有积分因子 $\mu(x)=e^{-\int P(x)dx}$, $\mu(x)$ 只与 x 有关 .

充分性　若该方程有只与 x 有关的积分因子 $\mu(x)$.

则 $\mu(x)dy-\mu(x)f(x,y)dx=0$ 为恰当方程 ,

从而 $\frac{\partial(-\mu(x)f(x,y))}{\partial y}=\frac{d\mu(x)}{dx}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$,

$$f=-\int\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}dy+Q(x)=-\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}y+Q(x)=P(x)y+Q(x) \ .$$

其中 $P(x)=-\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$. 于是方程可化为 $dy-(P(x)y+Q(x))dx=0$

即方程为一阶线性方程.

20. 设函数 f(u), g(u) 连续、可微且 f(u) $\neq$ g(u),\, 试证方程 yf(xy)dx+xg(xy)dy=0

有积分因子 u=(xy[f(xy)-g(xy)])$^{-1}$

证：在方程 yf(xy)dx+xg(xy)dy=0 两边同乘以 u 得：

uyf(xy)dx+uxg(xy)dy=0

则 $\frac{\partial uyf}{\partial y}$ =uf+uy $\frac{\partial f}{\partial y}$ +yf $\frac{\partial u}{\partial y}$ $=\frac{f}{xy(f-g)}+\frac{y\frac{\partial f}{\partial y}}{xy(f-g)}$ -yf $\frac{x(f-g)+xy\frac{\partial f}{\partial y}+xy\frac{\partial g}{\partial y}}{x^2y^2(f-g)^2}$

$$=\frac{yf\frac{\partial g}{\partial y}-gy\frac{\partial f}{\partial y}}{xy(f-g)^2}=\frac{f\frac{\partial g}{\partial xy}\frac{\partial xy}{\partial y}-g\frac{\partial f}{\partial xy}\frac{\partial xy}{\partial y}}{x(f-g)^2}$$

$$=\frac{f\frac{\partial g}{\partial xy}-g\frac{\partial f}{\partial xy}}{(f-g)^2}$$

而 $\frac{\partial uxg}{\partial x}$ =ug+ux $\frac{\partial g}{\partial x}$ +xg $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{g}{xy(f-g)}+\frac{x\frac{\partial g}{\partial x}}{xy(f-g)}$ - xg $\frac{y(f-g)+xy\frac{\partial f}{\partial x}-xy\frac{\partial g}{\partial x}}{x^2y^2(f-g)^2}$

$$=\frac{xf\frac{\partial g}{\partial xy}\frac{\partial xy}{\partial x}-xg\frac{\partial f}{\partial xy}\frac{\partial xy}{\partial x}}{xy(f-g)^2}=\frac{f\frac{\partial g}{\partial xy}-g\frac{\partial f}{\partial xy}}{(f-g)^2}$$

故 $\frac{\partial uyf}{\partial y}=\frac{\partial uxg}{\partial x}$，所以 u 是方程得一个积分因子

21．假设方程（2.43）中得函数 M（x,y）N(x,y)满足关系 $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=$ Nf(x)-Mg(y),其中 f(x),g(y)分别为 x 和 y 得连续函数，试证方程（2.43）有积分因子 u=exp($\int f(x)dx+\int g(y)dy$)

证明：M(x,y)dx+N(x,y)dy=0

即证 $\frac{\partial(uM)}{\partial y}=\frac{\partial(uN)}{\partial x}\Leftrightarrow$ u $\frac{\partial M}{\partial y}$ +M $\frac{\partial u}{\partial y}$ =u $\frac{\partial N}{\partial x}$ +N $\frac{\partial u}{\partial x}\Leftrightarrow$

u($\frac{\partial M}{\partial y}$ - $\frac{\partial N}{\partial x}$)=N $\frac{\partial u}{\partial x}$ - M $\frac{\partial u}{\partial y}\Leftrightarrow$ u($\frac{\partial M}{\partial y}$ - $\frac{\partial N}{\partial x}$)=Ne $^{\int f(x)dx+\int g(y)dy}$ f(x)

-M e $^{\int f(x)dx+\int g(y)dy}$ g(y) $\Leftrightarrow$ u($\frac{\partial M}{\partial y}$ - $\frac{\partial N}{\partial x}$)=e $^{\int f(x)dx+\int g(y)dy}$ (Nf(x)-Mg(y))

由已知条件上式恒成立，故原命题得证。

22、求出伯努利方程的积分因子.

解：已知伯努利方程为： $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n, y\neq o;$

两边同乘以 y^{-n}，令 $z=y^{-n}$，

$\frac{dz}{dx}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x),$ 线性方程有积分因子：

$\mu=e^{-\int(1-n)P(x)dx}=e^{(n-1)\int P(x)dx}$，故原方程的积分因子为：

$\mu = e^{-\int(1-n)P(x)dx} = e^{(n-1)\int P(x)dx}$，证毕！

23、设$\mu(x,y)$是方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$的积分因子，从而求得可微函数$U(x,y)$，

使得$dU=\mu(Mdx+Ndy)$. 试证 $\tilde{\mu}(x,y)$也是方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$的积分因子的充要条件是$\tilde{\mu}(x,y)=\mu\varphi(U)$, 其中$\varphi(t)$是$t$的可微函数。

证明：若$\tilde{\mu}=\mu\varphi(u)$，则

$$\frac{\partial(\tilde{\mu}M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu\varphi(u)M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\varphi(u)+\mu M\varphi'(u)\frac{\partial\mu}{\partial y}$$
$$=\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\varphi(u)+\mu M\varphi'(u)\mu N$$

又
$$\frac{\partial(\tilde{\mu}N)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu\varphi(u)N)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\varphi(u)+\mu N\varphi'(u)\mu M$$
$$=\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\varphi(u)+\mu N\varphi'(u)\mu M=\frac{\partial(\tilde{\mu}M)}{\partial y}$$

即$\tilde{\mu}$为$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$的一个积分因子。

24、设$\mu_1(x,y),\mu_2(x,y)$是方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$的两个积分因子，且$\mu_1/\mu_2\neq$常数，求证$\mu_1/\mu_2=c$（任意常数）是方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$的通解。

证明：因为μ_1,μ_2是方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$的积分因子

所以$\mu_i Mdx+\mu_i Ndy=o \quad (i=1,2)$ 为恰当方程

即 $N\frac{\partial\mu_i}{\partial x}-M\frac{\partial\mu_i}{\partial y}=\mu_i\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$，$i=1,2$

下面只需证$\frac{\mu_1}{\mu_2}$的全微分沿方程恒为零

事实上：

$$d\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)=\frac{\mu_2\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial x}dx+\frac{\partial\mu_1}{\partial y}dy\right)-\mu_1\left(\frac{\partial\mu_2}{\partial x}dx+\frac{\partial\mu_2}{\partial y}dy\right)}{\mu_2{}^2}$$

$$=\frac{\mu_2\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial x}dx-\frac{M}{N}\frac{\partial\mu_2}{\partial y}dx\right)-\mu_1\left(\frac{\partial\mu_2}{\partial x}dx-\frac{M}{N}\frac{\partial\mu_2}{\partial y}dx\right)}{\mu_2{}^2}$$

$$=\frac{dx}{N\mu_2{}^2}\left[\left(N\frac{\partial\mu_1}{\partial x}-M\frac{\partial\mu_1}{\partial y}\right)\mu_2-\left(N\frac{\partial\mu_2}{\partial x}-M\frac{\partial\mu_2}{\partial y}\right)\mu_1\right]$$

$$=\frac{dx}{N\mu_2{}^2}\left[\mu_1\mu_2\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)-\mu_1\mu_2\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\right]=0$$

即当$\frac{\mu_1}{\mu_2}\neq c$时，$\frac{\mu_1}{\mu_2}=c$是方程的解。证毕！

习题 2.4

求解下列方程

1、 $xy'^3 = 1 + y'$

解：令 $\dfrac{dy}{dx} = y' = p = \dfrac{1}{t}$，则 $x = \left(1 + \dfrac{1}{t}\right)t^3 = t^3 + t^2$，

从而 $y = \int pdx + c = \int \dfrac{1}{t} d\left(t^3 + t^2\right) + c = \int (3t + 2)dt + c = \dfrac{3}{2}t^2 + 2t + c$，

于是求得方程参数形式得通解为 $\begin{cases} x = t^3 + t^2 \\ y = \dfrac{3}{2}t^2 + 2t + c \end{cases}$.

2、 $y'^3 - x^3(1 - y') = 0$

解：令 $\dfrac{dy}{dx} = y' = p = tx$，则 $(tx)^3 - x^3(1 - tx) = 0$，即 $x = \dfrac{t^3 - 1}{t} = t^2 - \dfrac{1}{t}$，

从而 $y = \int pdx + c = \int t\left(t^2 - \dfrac{1}{t}\right) d\left(t^2 - \dfrac{1}{t}\right) + c$

$= \int \left(t^3 - 1\right)\left(2t + \dfrac{1}{t^2}\right)dt + c$

$= \int \left(2t^4 - t - \dfrac{1}{t^2}\right)dt + c$

$= \dfrac{2}{5}t^5 - \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{t} + c$，

于是求得方程参数形式得通解为 $\begin{cases} x = t^2 - \dfrac{1}{t} \\ y = \dfrac{2}{5}t^5 - \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{t} + c \end{cases}$.

3、 $y = y'^2 e^{y'}$

解：令 $\dfrac{dy}{dx} = y' = p$，则 $y = p^2 e^p$，

从而 $x = \int \dfrac{1}{p} d\left(p^2 e^p\right) + c$

$$=\int \frac{1}{p}\left(2pe^{p}+p^{2}e^{p}\right)dp+c$$

$$=\int \left(2e^{p}+pe^{p}\right)dp+c$$

$$=(1+p)e^{p}+c\text{，}$$

于是求得方程参数形式的通解为 $\begin{cases} x=(1+p)e^{p}+c \\ y=y^{2}e^{p} \end{cases}$，

另外，y=0 也是方程的解.

4、 $y\left(1+y'^{2}\right)=2a$， a 为常数

解：令 $\frac{dy}{dx}=y'=tg\varphi$， 则 $y=\frac{2a}{1+tg^{2}\varphi}=\frac{2a}{\sec^{2}\varphi}=2a\cos^{2}\varphi$，

从而 $x=\int \frac{1}{p}dy+c=\int \frac{1}{tg\varphi}d\left(2a\cos^{2}\varphi\right)+c$

$$=-4a\int \cos^{2}\varphi d\varphi+c=-4a\int \frac{1+\cos 2\varphi}{2}+c$$

$$=-a(2\varphi+\sin 2\varphi)+c\text{，}$$

于是求得方程参数形式的通解为 $\begin{cases} x=-a(2\varphi+\sin 2\varphi)+c \\ y=2a\cos^{2}\varphi \end{cases}$.

5、 $x^{2}+y'^{2}=1$

解：令 $\frac{dy}{dx}=y'=p=\cos t$， 则 $x=\sqrt{1-\cos^{2}t}=\sin t$，

从而 $y=\int \cos t d(\sin t)+c$

$$=\int \cos^{2}tdt+c=\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt+c$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+c\text{，}$$

于是求得方程参数形式的通解为 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+c \end{cases}$.

6、 $y^{2}(y'-1)=(2-y')^{2}$

解：令 $2-y'=yt$，则 $1-y'=yt-1$，得 $y=t+\frac{1}{t}$，

所以 $dx=\frac{dy}{y'}=\frac{dy}{2-yt}=\frac{d\left(t+\frac{1}{t}\right)}{2-t\left(t+\frac{1}{t}\right)}=\frac{\left(1-t^{-2}\right)dt}{1-t^2}=\frac{t^2-1}{t^2\left(1-t^2\right)}dt=-\frac{1}{t^2}dt$，

从而 $x=\int\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt+c=\frac{1}{t}+c$，

于是求得方程参数形式的通解为 $\begin{cases} x=\frac{1}{t}+c \\ y=t+\frac{1}{t} \end{cases}$，

因此方程的通解为 $y=\frac{1}{x-c}+x-c$.

习题 2.5

2． $ydx-xdy=x^2ydy$

解：两边同除以 x^2，得：

$$\frac{ydx-xdy}{x^2}=ydy$$

$$d\frac{y}{x}=-\frac{1}{2}y^2+c$$

即 $\frac{y}{x}+\frac{1}{2}y^2=c$

4． $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x-\sqrt{xy}}$

解：两边同除以 x，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}}{1-\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

令 $\frac{y}{x}=u$

则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

即 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-\sqrt{u}}$

得到 $\frac{1}{u}=\left(c-\frac{1}{2}\ln|y|\right)^2$，

即 $x=y\left(c-\frac{1}{2}\ln|y|\right)^2$

另外 $y=0$ 也是方程的解。

6． $(xy+1)ydx-xdy=0$

解： $ydx-xdy+xydx=0$

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}=-xdx$$

得到 $d\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{1}{2}x^2+c$

即 $\frac{x}{y}+\frac{1}{2}x^{2}=c$

另外 $y=0$ 也是方程的解。

8. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{y^{2}}{x^{3}}$

解：令 $\frac{y}{x}=u$

则：$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=u+\frac{1}{x}u^{2}$

即 $x\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}u^{2}$

得到 $\frac{du}{u^{2}}=\frac{dx}{x^{2}}$

故 $\frac{-1}{u}=\frac{-1}{x}+c$

即 $\frac{1}{y}=\frac{c}{x}+\frac{1}{x^{2}}$

另外 $y=0$ 也是方程的解。

10． $x\frac{dy}{dx}=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}$

解：令 $\frac{dy}{dx}=p$

即 $x=\frac{1+p^{2}}{p}$

而 $\frac{dy}{dx}=p$ 故两边积分得到

$y=\frac{1}{2}p^{2}-\ln\left|p\right|+c$

因此原方程的解为 $x=\frac{1+p^{2}}{p}$， $y=\frac{1}{2}p^{2}-\ln\left|p\right|+c$ 。

12. $e^{-y}\left(\frac{dy}{dx}+1\right)=xe^{x}$

解： $\frac{dy}{dx}+1=xe^{x+y}$

令　$x+y=u$

则 $1+\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1=xe^{u}-1$

即 $\frac{du}{e^{u}}=xdx$

$-e^{-u}=\frac{1}{2}x^{2}+c$

故方程的解为

$e^{x+y}+\frac{1}{2}x^{2}=c$

14. $\frac{dy}{dx}=x+y+1$

解：　令 $x+y+1=u$

则 $1+\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$

那么 $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1=u$

$\frac{du}{u+1}=dx$

求得：　$\ln(u+1)=x+c$

故方程的解为 $\ln(x+y+1)=x+c$

或可写　为 $x+y+1=ce^{x}$

16. $(x+1)\frac{dy}{dx}+1=2e^{-y}$

解：令 $e^{-y}=u$　则 $y=-\ln u$

$-(x+1)\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=2u-1$

$\frac{1}{u(2u-1)}du=-\frac{1}{x+1}dx$

$\frac{2u-1}{u}=\frac{1}{x+1}+c$

即方程的解为 $e^{y}(x+y)=2x+c$

18. $4x^{2}y^{2}dx+2(x^{3}y-1)dy=0$

解：　将方程变形后得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x^2y^2}{2x^3y-1}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2x^3y-1}{4x^2y^2}=\frac{x}{2y}-\frac{1}{4x^2y^2}$$

同除以 x^2 得： $x^2\frac{dx}{dy}=\frac{x^3}{2y}-\frac{1}{4y^2}$

令 $z=x^3$　　则 $\frac{dz}{dy}=\frac{3z}{2y}-\frac{3}{4y^2}$

$$z=\frac{3}{2}y^2+cy^{\frac{3}{2}}$$

即原方程的解为 $x^3=\frac{3}{2}y^2+cy^{\frac{3}{2}}$

19.X$(\frac{dy}{dx})^2-2y(\frac{dy}{dx})+4x=0$

解：方程可化为 2y$(\frac{dy}{dx})=x(\frac{dy}{dx})^2+4x, y=\frac{x(\frac{dy}{dx})^2+4x}{2(\frac{dy}{dx})}$

令

$\frac{dy}{dx}=p$,则$y=\frac{xp^2-4x}{2p}=\frac{x}{2}p+\frac{2x}{p}$,两边对$x$求导得$p=\frac{p}{2}+\frac{x}{2}\frac{dp}{dx}+\frac{2}{p}-\frac{2x}{p^2}\frac{dp}{dx}$

$(\frac{p}{2}-\frac{2}{p})=(\frac{x}{2}-\frac{2x}{p^2})\frac{dp}{dx},(\frac{p}{2}-\frac{2}{p})dx+(\frac{x}{2}-\frac{2x}{p^2})dp=0,(p^3-4p)dx+(-xp^2+4x)dp=0$

$p(p^2-4)dx-x(p^2-4)dp=0\therefore p^2=4$或$pdx-xdp=0$,当$p^2=4$时$y=\pm2x$,当$pdx-xdp=0$时,

$p=\frac{x}{c},y=\frac{x\cdot\frac{x^2}{c^2}+4x}{\frac{2x}{c}}=\frac{\frac{x^2}{c^2}+4}{\frac{2}{c}}$,$2yc=c^2x^2+4$.

20.$y^2\left[1-(\frac{dy}{dx})^2\right]=1$

解:令 $\frac{dy}{dx}=p=\sin\partial$,则$y^2\left[1-(\sin\partial)^2\right]=1$, $y=\frac{1}{\cos\partial},dx=\frac{dy}{p}=\frac{dy}{\sin\partial}=\frac{1}{\sin\partial}\frac{\sin\partial}{\cos^2\partial}d\partial=\frac{d\partial}{\cos^2\partial}$

$x=\int\frac{d\partial}{\cos^2\partial}+c=\int\sec^2\partial d\partial+c=tg\partial+c$所以方程的解为 $y^2=(x+c)^2+1$,另外由$p=0$得$y=\pm1$也

21.$(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$

解:令 $\frac{x}{y}=z$则$x=yz,\frac{dx}{dy}=z+y\frac{dz}{dy}$方程为$(1+e^z)dx=(z-1)e^zdy$,

$\frac{dx}{dy}=\frac{(z-1)e^z}{1+e^z}=\frac{ze^z+z-z-e^z}{1+e^z}=z-\frac{z+e^z}{1+e^z}=z+y\frac{dz}{dy},\frac{1+e^z}{z+e^z}dz=-\frac{dy}{y}$

$\ln\left|z+e^z\right|=-\ln|y|,y(z+e^z)=c,y(\frac{x}{y}+e^{\frac{x}{y}})=c$所以方程的解为 $x+ye^{\frac{x}{y}}=c$

22.$\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$

解:$2xydx+(y^2-3x^2)dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=2x,\frac{\partial N}{\partial x}=-6x,\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-2xy}=\frac{8x}{-2xy}=-\frac{4}{y}$所以方程有积分因子 $e^{\int-\frac{4}{y}dy}=y^{-4}$

$2xy^{-3}dx+(y^{-2}-\frac{3x^2}{y^4})dy=0,d\frac{x^2}{y^3}-d\frac{1}{y}=0$所以方程的解为 $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=c$即$x^2-y^2=cy^3$

23.$ydx-(1+x+y^2)dy=0$

解:$ydx-xdy=(1+y^2)dy$,两边同除以 y^2得$\frac{ydx-xdy}{y^2}=\frac{1+y^2}{y^2}dy,d\frac{x}{y}=\frac{1+y^2}{y^2}dy$

所以方程的解为 $\frac{x}{y}=-\frac{1}{y}+y+c$即($x+1)=y(y+c)$,另外$y=0$也是解。

24.$\left[y-x(x^2+y^2)\right]-xdy=0$

解:方程可化为 $\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=xdx,darctg\frac{x}{y}=xdx$所以方程的解为 $arctg\frac{x}{y}=\frac{x^2}{2}+c$.

25.$\frac{dy}{dx}+e^{\frac{dy}{dx}}-x=0$

解:令 $\frac{dy}{dx}=p=t,x=t+e^t$由$dy=pdx$得$y=\int t(1+e^t)dt+c=\frac{t^2}{2}+e^tt-e^t+c$

25. $\frac{dy}{dx}+e^{\frac{dy}{dx}}-x=0$

解：令 $\frac{dy}{dx}=p=t$则$x=t+e^{t}$由$dy=pdx$得$y=\int t(1+e^{t})dt+c=\frac{t^{2}}{2}+e^{t}t-e^{t}+c$

所以方程的解为：$x=t+e^{t}$，$y=\int t(1+e^{t})dt+c=\frac{t^{2}}{2}+e^{t}t-e^{t}+c$

26. $(2xy+x^{2}y+\frac{y^{3}}{3})dx+(x^{2}+y^{2})dy=0$

解:$\frac{\partial M}{\partial y}=2x+x^{2}+y^{2},\frac{\partial N}{\partial x}=2x,\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{x^{2}+y^{2}}=1$所以方程有积分因子$e^{x}$方程两边同乘$e^{x}$得

$d3e^{x}x^{2}y+de^{x}y^{3}=0$所以方程的解为:$3e^{x}x^{2}y+e^{x}y^{3}=c$

27. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3y+4}{4x+6y+5}$

解： 令$u=2x+3y$，$\frac{du}{dx}=2+3\frac{dy}{dx}=2+3\frac{u+4}{2u+5}$，则

$$\frac{du}{dx}=\frac{7u+22}{2u+5},$$

$$\frac{2u+5}{7u+22}du=dx,$$

$$1-\frac{9}{14}\frac{1}{u+\frac{22}{7}}=\frac{7}{2}dx,$$

两边积分得 $$9\ln\left|2x+3y+\frac{22}{7}\right|=14(3y-\frac{3}{2}x)+c$$

即为方程的通解。

另外，$7u+22=0$，即$2x+3y+\frac{22}{7}=0$也是方程的解。

28. $x\frac{dy}{dx}-y=2x^{2}y(y^{2}-x^{2})$

解： 两边同除以x，方程可化为：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+2xy(y^{2}-x^{2})$$

令$\frac{y}{x}=u$，则

$$x\frac{du}{dx}+u=u+2ux^{2}(u^{2}x^{2}-x^{2})$$

即 $$\frac{du}{dx}=2x^3(u^3-u)\text{，}$$

$$\frac{du}{u^3-u}=2x^3dx$$

$$(\frac{1}{2(u+1)}+\frac{1}{2(u-1)}-\frac{1}{u})du=2x^3dx$$

两边积分得 $$1-\frac{1}{u^2}ce^{x^4}$$

即 $$x^2-y^2=cy^2e^{x^4}$$

为方程的解。

29. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=e^{xy}$

解： 令 $e^{xy}=u$，则 $y=\frac{\ln u}{x}$，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x}{u}\frac{du}{dx}-\ln u}{x^2}\text{，}$$

那么 $$\frac{1}{ux}\frac{du}{dx}-\frac{\ln u}{x^2}+\frac{\ln u}{x^2}=u$$

即 $$\frac{du}{u^2}=xdx$$

两边积分得 $$\frac{1}{2}x^2+e^{-xy}=c$$

即为方程的解。

30. $\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3-2xy^3+2x}{3x^2y^2-6y^5+3y^2}$

解： 方程可化为 $(4x^3-2xy^3+2x)dx-(3x^2y^2-6y^5+3y^2)dy=0$

$$d(x^4+x^2)-(y^3dx^2+x^2dy^3)+d(y^6-y^3)=0$$

两边积分得 $$x^4+x^2+y^6-y^3-x^2y^3=c$$

即 $$x^4+x^6+c=(x^2+1)(y^3-1)$$

为方程的解。

31. $y^2(xdx+ydy)+x(ydx-xdy)=0$

解： 方程可化为 $$y^2xdx+y^3dy+xydx-x^2dy=0$$

两边同除以 y^2，得 $$xdx+ydx+\frac{x(ydx-xdy)}{y^2}=0$$

即 $$\frac{1}{2}d(x^2+y^2)+x\frac{dx}{dy}=0$$

令 $x=\rho\cos\theta$， $y=\rho\sin\theta$，则

$$\rho d\rho+\rho\cos\theta dctg\theta=0$$

即 $$\rho d\rho-\frac{d\sin\theta}{\sin^2\theta}=0$$

两边积分得 $$\rho=-\frac{1}{\sin\theta}+c$$

将 $\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\rho}{y}$ 代入得， $$\rho=-\frac{\rho}{y}+c$$

即 $$\rho^2(y+1)^2=c^2y^2$$

故 $$(x^2+y^2)(y^2+1)^2=c^2y^2$$

32. $\frac{dy}{dx}+\frac{1+xy^3}{1+x^3y}=0$

解： 方程可化为 $$\frac{dy}{dx}=\frac{-1-xy^3}{1+x^3y}$$

两边同加上1，得 $$\frac{d(x+y)}{dx}=\frac{xy(x^2-y^2)}{1+x^3y} \qquad (*)$$

再由 $d(xy)=xdy+ydx$，可知

$$\frac{d(xy)}{dx}=x\frac{dy}{dx}+y=\frac{(x-y)(x^2y^2-1)}{1+x^3y} \qquad (**)$$

将（*）/（**）得 $$\frac{d(x+y)}{d(xy)}=\frac{xy(x+y)}{x^2y^2-1}$$

即 $$\frac{du}{dv}=\frac{uv}{v^2-1}$$

整理得 $$\frac{du}{u}=\frac{v}{v^2-1}dv$$

两边积分得 $$\sqrt{v^2-1}=cu$$

即 $$c(x+y)=\sqrt{x^2y^2-1}$$

另外， $x+y=0$ 也是方程的解。

33. 求一曲线，使其切线在纵轴上之截距等于切点的横坐标。

解： 设 $p(x,y)$ 为所求曲线上的任一点，则在 p 点的切线 l 在 y 轴上的截距为：

$$y-x\frac{dy}{dx}$$

由题意得
$$y-x\frac{dy}{dx}=x$$

即
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}y-1$$

也即
$$-ydx+xdy=-dx$$

两边同除以 x^2，得
$$\frac{-ydx+xdy}{x^2}=-\frac{dx}{x}$$

即
$$d(\frac{y}{x})=-d\ln|x|$$

即
$$y=cx+x\ln|x|$$

为方程的解。

34. 摩托艇以 5 米/秒的速度在静水运动，全速时停止了发动机，过了 20 秒钟后，艇的速度减至 $v_1=3$ 米/秒。确定发动机停止 2 分钟后艇的速度。假定水的阻力与艇的运动速度成正比例。

解：$F=ma=m\frac{dv}{dt}$，又 $F=k_1v$，由此

$$m\frac{dv}{dt}=k_1v$$

即
$$\frac{dv}{dt}=kv$$

其中 $k=\frac{k_1}{m}$，解之得

$$\ln|v|=kt+c$$

又 $t=0$ 时，$v=5$；$t=2$ 时，$v=3$。

故得
$$k=\frac{1}{20}\ln\frac{3}{5}，\quad c=\ln 5$$

从而方程可化为
$$v=5(\frac{3}{5})^{\frac{t}{20}}$$

当 $t=2\times60=120$ 时，有
$$v(20)=5\times(\frac{3}{5})^{\frac{120}{20}}=0.23328\text{米/秒}$$

即为所求的确定发动机停止 2 分钟后艇的速度。

35. 一质量为 m 的质点作直线运动，从速度等于零的时刻起，有一个和时间成正比（比例系数为 k_1）的力作用在它上面，此质点又受到介质的阻力，这阻力和速

度成正比（比例系数为 k_2）。试求此质点的速度与时间的关系。

解：由物理知识得：$a=\dfrac{F_{合}}{m}$(其中a为质点的加速度，$F_{合}$为质点受到的合外力)

根据题意：$F_{合}=k_1t-k_2v$

故：$m\dfrac{dv}{dt}=k_1t-k_2v(k_2>0)$

即：$\dfrac{dv}{dt}=(\dfrac{-k_2}{m})v+\dfrac{k_1}{m}t$　　　(*)

(*)式为一阶非齐线性方程，根据其求解公式有

$$V=e^{\int-\frac{k_2}{m}dt}(\int\frac{k_1}{m}t\cdot e^{\int\frac{k_2}{m}dt}dt+c)$$

$$=e^{-\frac{k_2}{m}t}(\frac{k_1}{k_2}t\cdot e^{\frac{k_2}{m}t}-\frac{mk_1}{k_2^2}e^{\frac{k_2}{m}t}+c)$$

又当 t=0 时，V=0，故 c=$\dfrac{mk_1}{k_2^2}$

因此，此质点的速度与时间的关系为：$V=\dfrac{mk_1}{k_2^2}e^{-\frac{k_2}{m}t}+\dfrac{k_1}{k_2}(t-\dfrac{m}{k_2})$

36. 解下列的黎卡提方程

（1） $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$

解：原方程可转化为：$y'=-e^xy^2+2e^{2x}y+e^x-e^{3x}$，　　(*)

观察得到它的一个特解为：$y=e^x$，设它的任意一个解为$y=e^x+z$，

代入（*）式得到：$\dfrac{d(e^x+z)}{dx}=-e^x(e^x+z)^2+2e^{2x}(e^x+z)+e^x-e^{3x}$　　(**)

由（**）-（*）得：$\dfrac{dz}{dx}=-e^xz^2$

变量分离得：$\dfrac{dz}{z^2}=-e^xdx$

两边同时积分：$-\dfrac{1}{z}=-e^x+c$

即：$z=\dfrac{1}{e^x+c}$

故原方程的解为　$y=e^x+\dfrac{1}{c+e^x}$

（2） $y'+y^2-2y\sin x=\cos x-\sin^2 x$

解：原方程可化为： $y'=-y^2+2y\sin x+\cos x-\sin^2 x$

由观察得，它的一个特解为 $\bar{y}=\sin x$，设它的任意一个解为 $y=\sin x+z$，故

$$\frac{dz}{dx}=(-2\sin x+2\sin x)z-z^2=-z^2$$

变量分离再两边同时积分得： $\frac{1}{z}=x+c$ 即 $z=\frac{1}{x+c}$

故原方程的解为 $y=\sin x+\frac{1}{x+c}$

（3） $x^2y'=x^2y^2+xy+1$

解：原方程可化为： $y'=y^2+\frac{1}{x}y+\frac{1}{x^2}$

由观察得到，它的一个特解为 $\bar{y}=-\frac{1}{x}$，设它的任一个解为 $y=-\frac{1}{x}+z$，故

$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{x}z+z^2$，该式是一个 $n=2$ 的伯努利方程

两边同除以 z^2 得到： $\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{z}+1$

即： $\frac{d\frac{1}{z}}{dx}=\frac{1}{x}\frac{1}{z}-1$，令 $\frac{1}{z}=u$，

则： $\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}u-1$，根据一阶非齐线性方程的求解公式得：

$$u=e^{\int\frac{1}{x}dx}(\int -e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+c)=x(c-en|x|)$$

故： $z=\frac{1}{x(c-en|x|)}$

因此：原方程的解为： $xy=\frac{1}{c-en|x|}-1$

（4） $4x^2(y'-y^2)=1$

解：原方程可化为： $y'=y^2+\frac{1}{4x^2}$

由观察得到，它的一个特解为 $\bar{y}=-\frac{1}{2x}$，设它的任一个解为 $y=-\frac{1}{2x}+z$，于是

$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{x}z+z^2$，这是 $n=2$ 的伯努利方程

两边同除以z^2得到：$\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{z}+1$

即：$\frac{d\frac{1}{z}}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{z}-1$

则：$\frac{1}{z}=e^{\int\frac{1}{x}dx}(\int -e^{\int-\frac{1}{x}dx}+c)=x(c-en|x|)$

即：$z=\frac{1}{x(c-en|x|)}$

故：原方程的解为：$2xy=\frac{2}{c-en|x|}-1$

（5）$x^2(y'+y^2)=2$

解：原方程可化为：$y'=-y^2+\frac{2}{x^2}$

由观察得，它的一个特解为$\bar{y}=-\frac{1}{x}$，故设它的任一个解为$y=-\frac{1}{x}+z$，于是

$\frac{dz}{dx}=\frac{2}{x}z-z^2$，这是$n=2$的伯努利方程

两边同除以z^2得到：$\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{z}-1$

即：$\frac{d\frac{1}{z}}{dx}=-\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{z}+1$

则：$\frac{1}{z}=e^{\int-\frac{2}{x}dx}(\int e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+c)=\frac{1}{x^2}(\frac{x^3}{3}+c)$

故：原方程的解为：$y=\frac{3x^2}{x^3+c}-\frac{1}{x}$，即$xy=\frac{2x^3-c}{c+x^3}$.

（6）$x^2y'+(xy-2)^2=0$

解：原方程可化为：$y'=-y^2+\frac{4}{x}y-\frac{4}{x^2}$

由观察得到它的一个特解为$\bar{y}=\frac{1}{x}$，设它的任一个解为$y=\frac{1}{x}+z$，于是

$\frac{dz}{dx}=\frac{2}{x}z-z^2$，这是$n=2$的伯努利方程

两边同除以z^2得到：$\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{z}-1$

即：$\dfrac{d\frac{1}{z}}{dx}=-\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{1}{z}+1$

则：$\dfrac{1}{z}=e^{\int-\frac{2}{x}dx}(\int e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+c)=\dfrac{1}{x^2}(\dfrac{x^3}{3}+c)$

从而：$\dfrac{1}{z}=e^{\int-\frac{2}{x}dx}(\int e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+c)=\dfrac{1}{x^2}(\dfrac{x^3}{3}+c)$

故原方程的解为：$y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{3x^2}{x^3+c}=\dfrac{4x^3+c}{x(x^3+c)}$

即：$xy=\dfrac{4x^3+c}{x(x^3+c)}$

（7）$y'=(x-1)y^2+(1-2x)y+x$

解：由观察得到它的一个特解为$\overline{y}=1$，故设它的任一个解为$y=1+z$，于是

$\dfrac{dz}{dx}=-z+(x-1)z^2$，这是 n=2 的佰努利方程，

两边同除以z^2得：$\dfrac{1}{z^2}\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{1}{z}+(x-1)$

即：$\dfrac{d\frac{1}{z}}{dx}=\dfrac{1}{z}+(1-x)$

从而：$\dfrac{1}{z}=e^{\int dx}(\int(1-x)e^{\int-dx}dx+c)$

$$=e^x(xe^{-x}+c)=x+ce^x$$

故原方程的解为：$y=1+z=1+\dfrac{1}{x+ce^x}$

习题 3.1

1　求方程$\frac{dy}{dx}$=x+y^{2}通过点(0,0)的第三次近似解；

解：　取$\varphi_0(x)=0$

$$\varphi_1(x)=y_0+\int_0^x(x+y_0{}^2)dx=\int_0^x xdx=\frac{1}{2}x^2$$

$$\varphi_2(x)=y_0+\int_0^x[x+\varphi_1{}^2(x)]dx=\int_0^x[x+(\frac{1}{2}x^2)^2]dx=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{20}x^5$$

$$\varphi_3(x)=y_0+\int_0^x[x+(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{20}x^5)^2]dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{160}x^8+\frac{1}{4400}x^{11}$$

2　求方程$\frac{dy}{dx}$=x−y^{2}通过点(1,0)的第三次近似解；

解：　令$\varphi_0(x)=0$

则　$$\varphi_1(x)=y_0+\int_0^x(x-y_0{}^2)dx=\int_0^x xdx=\frac{1}{2}x^2$$

$$\varphi_2(x)=y_0+\int_0^x[x-\varphi_1{}^2(x)]dx=\int_0^x[x-(\frac{1}{2}x^2)^2]dx=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{20}x^5$$

$$\varphi_3(x)=y_0+\int_0^x[x-(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{20}x^5)^2]dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{160}x^8-\frac{1}{4400}x^{11}$$

3 题　求初值问题：

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=x^2\\ y(-1)=0\end{cases}\qquad \text{R：}\ |x+1|\le 1,\ |y|\le 1$$

的解的存在区间，并求解第二次近似解，给出在解的存在空间的误差估计；

解：　因为　M=max{$|x^2-y^2|$}=4　则 h=min(a, $\frac{b}{M}$)=$\frac{1}{4}$

则解的存在区间为$|x-x_0|$=$|x-(-1)|$=$|x+1|\le\frac{1}{4}$

令　$\Psi_0(X)$=0　；

$$\Psi_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}(x^2-0)\,dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}\ ;$$

$$\Psi_2(x) \qquad = y_0 + \int_{-1}^{x}[x^2 - (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3})^2]\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{x}{9} - \frac{x^4}{18} - \frac{x^7}{63} + \frac{11}{42}$$

又 $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le 2 = L$

则：误差估计为：$\left|\Psi_2(x) - \Psi(x)\right| \le \frac{M * L^2}{(2+1)^2}h^3 = \frac{11}{24}$

4 题　讨论方程：$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$在怎样的区域中满足解的存在唯一性定理的条件，

并求通过点（0，0）的一切解；

解：因为$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2}y^{\frac{-2}{3}}$ 在 $y \ne 0$ 上存在且连续；

而$\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$在$|y| \ge \sigma \succ 0$上连续

由 $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$有：$|y| = (x+c)^{\frac{3}{2}}$

又 因为 $y(0)=0$　　所以：$|y| = x^{\frac{3}{2}}$

另外 y=0 也是方程的解；

故　方程的解为：$|y| = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} & x \ge 0 \\ 0 & x \prec 0 \end{cases}$

或　y=0；

6 题 证明格朗瓦耳不等式：

设 K 为非负整数，f(t)和 g(t)为区间$\alpha \le t \le \beta$上的连续非负函数，

且满足不等式：

$$f(t) \le k+\int_{\alpha}^{t} f(s)g(s)ds, \ \alpha \le t \le \beta$$

则有：$f(t) \le k\exp(\int_{\alpha}^{t} g(s)ds), \ \alpha \le t \le \beta$

证明：令 $R（t）=\int_{\alpha}^{t} f(s)g(s)ds$，则 $R'(T)=f(t)g(t)$

$$R'(T)-R(t)g(t)= f(t)g(t)- R(t)g(t)$$

$$\le kg(t) \ R'(T)- R(t)g(t) \le kg(t);$$

两边同乘以 $\exp(-\int_{\alpha}^{t} g(s)ds)$ 　则有：

$$R'(T) \ \exp(-\int_{\alpha}^{t} g(s)ds)-R(t)g(t) \ \exp(-\int_{\alpha}^{t} g(s)ds)$$

$$\le \ kg(t) \ \exp(-\int_{\alpha}^{t} g(s)ds)$$

两边从 α 到 t 积分：

$$R(t) \ \exp(-\int_{\alpha}^{t} g(s)ds) \le -\int_{\alpha}^{t} kg(s)ds \exp(-\int_{\alpha}^{t} g(r)dr)ds$$

即 $R(t) \ \le \int_{\alpha}^{t} kg(s)ds \ \exp(-\int_{s}^{t} g(r)dr)ds$

又 $f(t) \ \le 1 \le k+R(t) \ \le k+k\int_{\alpha}^{t} g(s)\exp(-\int_{s}^{t} g(r)dr)ds$

$$\le k(1-1+ \ \exp(-\int_{s}^{t} g(r)dr)=k \ \exp(\int_{t}^{s} g(r)dr)$$

即 $f(t) \ \le k\int_{\alpha}^{t} g(r)dr$；

7 题　假设函数 $f(x,y)$ 于（x_0, y_0）的领域内是 y 的 不增函数，试证方程 $\frac{dy}{dx}= f(x,y)$ 满足条件 $y(x_0)= y_0$ 的解于 $x \ge x_0$ 一侧最多只有一个解；

证明：假设满足条件 $y(x_0)= y_0$ 的解于 $x \ge x_0$ 一侧有两个 $\psi(x), \varphi(x)$

则满足：

$$\varphi(x)= y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))\,dx$$

$$\psi(x)= y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\psi(x))\,dx$$

不妨假设$\varphi(x)\succ\psi(x)$，则$\varphi(x)-\psi(x)\geq 0$

而$\varphi(x)-\psi(x)=\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))\,dx-\int_{x_0}^{x} f(x,\psi(x))\,dx$

$=\int_{x_0}^{x}[f(x,\varphi(x))-f(x,\psi(x))\,dx$

又因为 $f(x,y)$在（x_0,y_0）的领域内是 y 的 增函数，则：

$f(x, \varphi(x))-f(x, \psi(x))\leq 0$

则$\varphi(x)-\psi(x)=\int_{x_0}^{x}[f(x,\varphi(x))-f(x,\psi(x))\,dx\leq 0$

则$\varphi(x)-\psi(x)\leq 0$

所以 $\varphi(x)-\psi(x)=0$， 即 $\varphi(x)=\psi(x)$

则原命题方程满足条件 $y(x_0)= y_0$的解于 $x\geq x_0$一侧最多只有一个解；

习题 3.4

(一)、解下列方程，并求奇解（如果存在的话）：

1、 $y=2x\frac{dy}{dx}+x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4$

解：令 $\frac{dy}{dx}=p$，则 $y=2xp+x^2p^4$，

两边对 x 求导，得 $p=2p+2x\frac{dp}{dx}+2xp^4+4x^2p^3\frac{dp}{dx}$

$$\left(1+2xp^3\right)\left(2x\frac{dp}{dx}+p\right)=0$$

从 $1+2xp^3=0$ 得 $p\neq 0$ 时， $x=-\frac{1}{2p^3},y=-\frac{3}{4p^2}$；

从 $2x\frac{dp}{dx}+p=0$ 得 $x=\frac{c}{p^2},y=\frac{2c}{p}+c^2$，

$p\neq 0$ 为参数， $c\neq 0$ 为任意常数.

经检验得 $\begin{cases}x=\frac{c}{p^2}\\ y=\frac{2c}{p}+c^2\end{cases}$ ，（ $p\neq 0$ ）是方程奇解.

2、 $x=y-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

解：令 $\frac{dy}{dx}=p$，则 $y=x+p^2$，

两边对 x 求导，得 $p=1+2p\frac{dp}{dx}$

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p-1}{2p},$$

解之得 $x=2p+\ln(p-1)^2+c$，

所以 $y=2p+p^2+\ln(p-1)^2+c$，

且 y=x+1 也是方程的解，但不是奇解.

3、 $y=x\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}}$

解：这是克莱洛方程，因此它的通解为 $y=cx+\sqrt{1+c^{2}}$，

从$\begin{cases} y=cx+\sqrt{1+c^{2}} \\ x-\dfrac{c}{\sqrt{1+c^{2}}}=0 \end{cases}$ 中消去 c,

得到奇解 $y=\sqrt{1-x^{2}}$.

4、 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}+x\frac{dy}{dx}-y=0$

解：这是克莱洛方程，因此它的通解为 $y=cx+c^{2}$，

从$\begin{cases} y=cx+c^{2} \\ x+2c=0 \end{cases}$ 中消去 c,

得到奇解 $y^{2}+4y=0$.

5、 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}+2x\frac{dy}{dx}-y=0$

解：令 $\frac{dy}{dx}=p$， 则 $y=2xp+p^{2}$，

两边对 x 求导，得 $p=2p+2x\frac{dp}{dx}+2p\frac{dp}{dx}$

$$\frac{dx}{dp}=-\frac{2}{p}x-2,$$

解之得 $x=-\frac{2}{3}p+cp^{-2}$，

所以 $y=-\frac{1}{3}p^{2}+cp^{-1}$，

可知此方程没有奇解.

6、 $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^{3}-y\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}-1=0$

解： 原方程可化为 $y=x\frac{dy}{dx}-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}}$，

这是克莱罗方程，因此其通解为 $y = cx - \frac{1}{c^2}$，

从 $\begin{cases} y = cx - \frac{1}{c^2} \\ x + 2c^{-3} = 0 \end{cases}$ 中消去 c，得奇解 $27x^2 + 4y^3 = 0$.

7、 $y = x\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

解：令 $\frac{dy}{dx} = p$， 则 $y = x(1+p) = p^2$，

两边对 x 求导，得 $x = ce^{-p} - 2p + 2$，

所以 $y = c(p+1)e^{-p} - p^2 + 2$，

可知此方程没有奇解.

8、 $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x-a)^2 = 0$

解：$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(x-a)^2}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x-a}{\sqrt{x}}$$

$$dy = \pm\left(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$y = \pm\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2ax^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$9(y+c)^2 = 4x(x-3a)^2$$

可知此方程没有奇解.

9、 $y = 2x + \frac{dy}{dx} - \frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$

解：令 $\frac{dy}{dx} = p$， 则 $y = 2x + p - \frac{1}{3}p^3$，

两边对 x 求导，得 $p = 2 + \frac{dp}{dx} - p^2\frac{dp}{dx}$

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p-2}{1-p^2}$$

解之得 $x=-\frac{(p+2)^2}{2}-3\ln|p-2|+c$，

所以 $y=-\frac{1}{3}p^3-p^2-3p-4-6\ln|p-2|+c$，

且 $y=2x-\frac{2}{3}$也是方程的解，但不是方程的奇解.

10、$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x+1)\frac{dy}{dx}-y=0$

解：$y=x\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

这是克莱罗方程，因此方程的通解为$y=cx+c+c^2$，

从$\begin{cases}y=cx+c+c^2\\x+1+2c\end{cases}$中消去 c,

得方程的奇解$(x+1)^2+4y=0$.

（二）求下列曲线族的包络.

1、$y=cx+c^2$

解:对 c 求导，得 x+2c=0, $c=-\frac{x}{2}$,

代入原方程得，$y=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{4}=-\frac{x^2}{4}$，

经检验得，$y=-\frac{x^2}{4}$是原方程的包络.

2、$c^2y+cx^2-1=0$

解：对 c 求导，得 $2yc+x^2=0,c=-\frac{x^2}{2y}$，

代入原方程得 $\frac{x^4}{4y^2}y-\frac{x^4}{2y}-1=0$，即$x^4+4y=0$，

经检验得$x^4+4y=0$是原方程的包络.

3、$(x-c)^2+(y-c)^2=4$

解：对 c 求导，得 –2(x-c)-2(y-c)=0, $c=\frac{x+y}{2}$,

代入原方程得$(x-y)^2=8$.

经检验,得 $(x-y)^2=8$是原方程的包络.

4、$(x-c)^2+y^2=4c$

解：对 c 求导，得 -2(x-c)=4, c=x+2,

代入原方程得$4+y^2=4(x+2)$ ，$y^2=4(x+1)$,

经检验，得$y^2=4(x+1)$是原方程的包络.

(三) 求一曲线,使它上面的每一点的切线截割坐标轴使两截距之和等于常数 c.

解：设所求曲线方程为 y=y(x),以 X、Y 表坐标系，则曲线上任一点（x,y(x)）的切线方程为$(Y-y(x))=y'(x)(X-x)$，

它与 X 轴、Y 轴的截距分别为$X=x-\frac{y}{y'}$，$Y=y-xy'$，

按条件有 $x-\frac{y}{y'}+y-xy'=a$，化简得$y=xy'-\frac{ay'}{1-y'}$，

这是克莱洛方程，它的通解为一族直线$y=cx-\frac{ac}{1-c}$，

它的包络是$\begin{cases} y=cx-\dfrac{ac}{1-c} \\ 0=x-\dfrac{a}{1-c}-\dfrac{ac}{(1-c)^2} \end{cases}$，

消去 c 后得我们所求的曲线$4ax=(x-y+a)^2$.

(四) 试证：就克莱洛方程来说，p-判别曲线和方程通解的 c-判别曲线同样是方程通解的包络，从而为方程的奇解.

证：克莱洛方程 y=xp+f(p)的 p-判别曲线就是用 p-消去法，

从$\begin{cases} y = cx + f(c) \\ 0 = x + f'(c) \end{cases}$ 中消去 p 后而得的曲线；

c-判别曲线就是用 c-消去法，从通解及它对求导的所得的方程

$\begin{cases} y = cx + f(c) \\ 0 = x + f'(c) \end{cases}$中消去 c 而得的曲线，

显然它们的结果是一致的，是一单因式，

因此 p-判别曲线是通解的包络，也是方程的通解.

习题 4.1

1. 设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是区间 $a\le t\le b$ 上的连续函数，证明：如果在区间 $a\le t\le b$ 上有 $\frac{x(t)}{y(t)}\ne$ 常数或 $\frac{y(t)}{x(t)}$ 常数，则 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在区间 $a\le t\le b$ 上线形无关。

证明：假设在 $x(t)$，$y(t)$ 在区间 $a\le t\le b$ 上线形相关

则存在不全为零的常数 α，β，使得 $\alpha x(t)+\beta y(t)=0$

那么不妨设 $x(t)$ 不为零，则有 $\frac{y(t)}{x(t)}=-\frac{\alpha}{\beta}$

显然 $-\frac{\alpha}{\beta}$ 为常数，与题矛盾，即假设不成立 $x(t)$，$y(t)$ 在区间 $a\le t\le b$ 上线形无关

2. 证明非齐线形方程的叠加原理：设 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 分别是非齐线形方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f_1(t) \qquad (1)$$

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f_2(t) \qquad (2)$$

的解，则 $x_1(t)+x_2(t)$ 是方程 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f_1(t)+f_2(t)$ 的解。

证明：由题可知 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 分别是方程（1），（2）的解

则：$$\frac{d^n x_1(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x_1(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x_1(t)=f_1(t) \qquad (3)$$

$$\frac{d^n x_2(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x_2(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x_2(t)=f_2(t) \qquad (4)$$

那么由（3）+（4）得：

$$\frac{d^n\left(x_1(t)+x_2(t)\right)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}\left(x_1(t)+x_2(t)\right)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)\left(x_1(t)+x_2(t)\right)=f_1(t)+f_2(t)$$

即 $x_1(t)+x_2(t)$ 是方程是 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f_1(t)+f_2(t)$ 的解。

3. 试验证$\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$的基本解组为e^t,e^{-t}，并求方程$\frac{d^2x}{dt^2}-x=\cos t$的通解。

证明：由题将e^t代入方程$\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$得：e^t-e^t=0,即e^t是该方程的解，

同理求得e^{-t}也是该方程的解

又显然e^t,e^{-t}线形无关，故e^t,e^{-t}是$\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$的基本解组。

由题可设所求通解为：$x(t)=c_1(t)e^t+c_2(t)e^{-t}$，则有：

$$\begin{cases}c_1'(t)e^t+c_2'(t)e^{-t}=0\\c_1'(t)e^t-c_2'(t)e^{-t}=\cos t\end{cases}$$

解之得：$c_1(t)=-\frac{1}{4}e^{-t}(\cos t-\sin t)+c_1;c_2(t)=-\frac{1}{4}e^t(\cos t+\sin t)+c_2$

故所求通解为：$x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t$

4. 试验证$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{t}{1-t}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{1-t}x=0$有基本解组 t，$e^t$，并求方程

$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{t}{1-t}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{1-t}x=$t-1 的通解。

解：由题将 t 代入方程$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{t}{1-t}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{1-t}x=$0 得：

$\frac{d^2t}{dt^2}+\frac{t}{1-t}\frac{dt}{dt}-\frac{1}{1-t}t=\frac{t}{1-t}+\frac{t}{1-t}=0$，即 t 为该方程的解

同理e^t也是该方程的解，又显然 t，e^t线形无关，

故 t，e^t是方程$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{t}{1-t}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{1-t}x=0$的基本解组

由题可设所求通解为$x(t)=c_1(t)t+c_2(t)e^t$，则有：

$$\begin{cases}c_1'(t)t+c_2'(t)e^t=0\\c_1'(t)+c_2'(t)e^t=t-1\end{cases}$$

解之得：$c_1(t)=-t+c_1, c_2(t)=-(te^{-t}+e^{-t})+c_2$

故所求通解为 $x(t)=c_1t+c_2e^t-(t+1)^2$

5. 以知方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}-x=0$ 的基本解组为 e^t, e^{-t}，求此方程适合初始条件 $x(0)=1, x'(0)=0$ 及 $x(0)=0, x'(0)=1$ 的基本解组（称为标准基本解组，即有 $w(0)=1$）并求出方程的适合初始条件 $x(0)=x_0, x'(0)=x_0{}'$ 的解。

解：e^t, e^{-t} 时间方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}-x=0$ 的基本解组，故存在常数 c_1, c_2 使得：$x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}$

于是：$x'(t)=c_1e^t-c_2e^{-t}$

令 t=0,则有方程适合初始条件 $x(0)=1, x'(0)=0$，于是有：

$\begin{cases} c_1e^0+c_2e^0=1 \\ c_1e^0-c_2e^0=0 \end{cases}$ 解得：$c_1=\dfrac{1}{2}, c_2=\dfrac{1}{2}$　　故 $x(t)=\dfrac{1}{2}e^t+\dfrac{1}{2}e^{-t}$

又该方程适合初始条件 $x(0)=0, x'(0)=1$，于是：

$\begin{cases} c_1e^0+c_2e^0=0 \\ c_1e^0-c_2e^0=1 \end{cases}$ 解得：$c_1=\dfrac{1}{2}, c_2=-\dfrac{1}{2}$　　故 $x(t)=\dfrac{1}{2}e^t-\dfrac{1}{2}e^{-t}$

显然 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 线形无关，所以此方程适合初始条件的基本解组为：

$x(t)=\dfrac{1}{2}e^t+\dfrac{1}{2}e^{-t}$，　　$x(t)=\dfrac{1}{2}e^t-\dfrac{1}{2}e^{-t}$

而此方程同时满足初始条件 $x(0)=x_0, x'(0)=x_0{}'$，于是：

$\begin{cases} c_1e^0+c_2e^0=x_0 \\ c_1e^0-c_2e^0=x_0 \end{cases}$，解得：$c_1=\dfrac{x_0+x_0{}'}{2}, c_2=\dfrac{x_0-x_0{}'}{2}$

故 $x(t)=\dfrac{x_0+x_0{}'}{2}e^t+\dfrac{x_0-x_0{}'}{2}e^{-t}$ 满足要求的解。

6. 设 $x_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是齐线形方程（4.2）的任意 n 个解。它们所构成的伏朗斯行列式记为 $w(t)$，试证明 $w(t)$ 满足一阶线形方程 $w'+a_1(t)w=0$，因而有：

$$w(t)=w(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds}\quad t\in(a,b)$$

解：$\because w'(t)=\begin{vmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \\ x_1' & \cdots & x_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1' & \cdots & x_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1' & \cdots & x_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-2)} & \cdots & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}$

又 $x_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$满足$\dfrac{d^n x_i}{dt^n}+a_1(t)\dfrac{d^{n-1}x_i}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x_i=0$

即$\dfrac{d^n x_i}{dt^n}=-\left(a_1(t)\dfrac{d^{n-1}x_i}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x\right)$

$w'(t)$中第k行都乘以$a_k(t)$，加到最后一行(k为$1,2,\cdots$，$n-1$)

则：$w'(t)=\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1' & \cdots & x_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-2)} & \cdots & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}(-a_1(t))=-a_1(t)w(t)$

即 $w'+a_1(t)w=0$　　　则有：$\dfrac{w'(t)}{w(t)}=-a_1(t)dt$

两边从t_0到t积分：$\ln|w(t)|\Big|_{t_0}^{t}=-a_1(s)ds$，则

$\ln|w(t)|-n|w(t_0)|=-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds$

即：$$w(t)=w(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds}\quad t\in(a,b)$$

7. 假设 $x_1(t)\neq 0$ 是二阶齐线形方程 $x''+a_1(t)x'+a_2(t)x=0$（*）的解，这里 $a_1(t)$和$a_2(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，试证：（1） $x_2(t)$ 是方程的解的充要条件为：$w'[x_1,x_2]+a_1w[x_1,x_2]=0$；（2）方程的通解可以表示为：

$$x = x_1\left[c_1\int\frac{1}{x_1^{\ 2}}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds\right)dt + c_2\right]$$ ，其中 c_1, c_2 为常数, $t_0, t\in[a,b]$

证：（1） $w'[x_1,x_2]+a_1w[x_1,x_2]=0$

$$\Leftrightarrow x_1x_2'' - x_1''x_2' + a_1x_1x_2' - a_1x_1'x_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1x_2'' + a_1x_1'x_2 + a_1x_1x_2 + a_1x_1x_2' - a_1x_1'x_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1\left(x_2'' + a_1x_2' + a_1x_2\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x_2'' + a_1x_2' + a_1x_2 = 0, (x_1 \neq 0)$$

即x_2为(*)的解。

（2）因为 x_1, x_2 为方程的解，则由刘维尔公式

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = w(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds}$$,即：

$$x_1x_2' - x_1'x_2 = w(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds}$$

两边都乘以 $\frac{1}{x_1^{\ 2}}$ 则有： $$\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{dt} = \frac{w(t_0)}{x_1^{\ 2}}e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds}$$ ，于是：

$$\frac{x_2}{x_1} = c_1\int\frac{1}{x_1^{\ 2}}e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds}dt + c_2$$

即：$$x_2 = \left(c_1\int\frac{1}{x_1^{\ 2}}e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds}dt + c_2\right)x_1$$

$$取 c_1=1, c_2=0, 得：x_2 = x_1\int \frac{1}{{x_1}^2} e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds} dt,$$

$$又：w(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds} \neq 0$$

从而方程的通解可表示为：$x = x_1\left[c_1\int \frac{1}{{x_1}^2}\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds\right)dt + c_2\right]$，其中 c_1, c_2 为常数，$t_0, t \in [a,b]$。

8. 试证 n 阶非齐线形微分方程（4.1）存在且最多存在 n+1 个线形无关解。

证：设 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 为（4.1）对应的齐线形方程的一个基本解组，$\bar{x}(t)$ 是（4.1）的一个解，则：$x_1(t)+\bar{x}(t), x_2(t)+\bar{x}(t), \cdots, x_n(t)+\bar{x}(t), \bar{x}(t),$ （1），均为（4.1）的解。同时（1）是线形无关的。

事实上：假设存在常数 $c_1, c_2, \cdots, c_{n+1}$，使得：

$$c_1\left(x_1(t)+\bar{x}(t)\right) + c_2\left(x_2(t)+\bar{x}(t)\right) + \cdots + c_n\left(x_n(t)+\bar{x}(t)\right) + c_{n+1}\left(\bar{x}(t)\right) = 0$$

$$即: \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t) + \bar{x}(t)\sum_{i=1}^{n+1} c_i = 0$$

$$我们说: \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 0$$

$$否则，若 \sum_{i=1}^{n+1} c_i \neq 0，则有: \bar{x}(t) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\sum_{i=1}^{n+1} c_i} x_i(t)$$

（*）的左端为非齐线形方程的解，而右端为齐线形方程的解，矛盾！

$$从而有 \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t) = 0$$

又 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 为（4.1）对应的齐线形方程的一个基本解组，

故有：$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, 进而有: $c_{n+1} = 0$

即（1）是线形无关的。

习题 4.2

1. 解下列方程

（1） $x^{(4)}-5x''+4x=0$

解：特征方程$\lambda^4-5\lambda^2+4=0$有根$\lambda_1=2$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=1$，$\lambda_4=-1$

故通解为 x=$c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}+c_3e^{t}+c_4e^{-t}$

(2) $x'''-3ax''+3a^2x'-a^3x=0$

解：特征方程$\lambda^3-3a\lambda^2+3a^2\lambda-a^3=0$

有三重根$\lambda=a$

故通解为 x=$c_1e^{at}+c_2te^{at}+c_3t^2e^{at}$

（3） $x^{(5)}-4x'''=0$

解：特征方程$\lambda^5-4\lambda^3=0$

有三重根$\lambda=0$， $\lambda_4=2$， $\lambda_5=-2$

故通解为$x=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}+c_3t^2+c_4t+c_5$

（4） $x''+2x'+10x=0$

解：特征方程$\lambda^2+2\lambda+10=0$有复数根$\lambda_1=-1+3i$,$\lambda_2=-1-3i$

故通解为$x=c_1e^{-t}\cos 3t+c_2e^{-t}\sin 3t$

(5) $x''+x'+x=0$

解：特征方程$\lambda^2+\lambda+1=0$有复数根$\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\lambda_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$,

故通解为$x=c_1e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$

(6) $s''-a^2s=t+1$

解：特征方程$\lambda^2 - a^2 = 0$有根 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = -a$

当$a \neq 0$时，齐线性方程的通解为 s=$c_1 e^{at} + c_2 e^{-at}$

$\tilde{s} = A + Bt$代入原方程解得$A = B = -\frac{1}{a^2}$

故通解为 s=$c_1 e^{at} + c_2 e^{-at} - \frac{1}{a^2}(t-1)$

当 a=0 时,$\tilde{s} = t^2(\gamma_1 t + \gamma_2)$代入原方程解得$\gamma_1 = \frac{1}{6}, \gamma_2 = \frac{1}{2}$

故通解为 s=$c_1 + c_2 t - \frac{1}{6}t^2(t+3)$

(7) $x''' - 4x'' + 5x' - 2x = 2t + 3$

解：特征方程$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$有根$\lambda_1 = 2$,两重根$\lambda = 1$

齐线性方程的通解为 x=$c_1 e^{2t} + c_2 e^t + c_3 t e^t$

又因为$\lambda = 0$ 不是特征根，故可以取特解行如$\tilde{x} = A + Bt$代入原方程解得 A=-4，B=-1

故通解为 x=$c_1 e^{2t} + c_2 e^t + c_3 t e^t$-4-t

(8) $x^{(4)} - 2x'' + x = t^2 - 3$

解：特征方程$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0$有2重根$\lambda = 1$,2重根$\lambda = -1$

故齐线性方程的通解为 x=$c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t}$

取特解行如$\tilde{x} = At^2 + Bt + c$代入原方程解得 A=1，B=0,C=1

故通解为 x=$c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t} + t^2 + 1$

(9) $x''' - x = \cos t$

解：特征方程$\lambda^3 - 1 = 0$有复数根$\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \lambda_3 = 1$

故齐线性方程的通解为$x = c_1 e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 e^t$

取特解行如$\tilde{x} = A\cos t + B\sin t$代入原方程解得 A=$\frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$

故通解为$x=c_1e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^t-\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$

(10) $x''+x'-2x=8\sin 2t$

解：特征方程$\lambda^2+\lambda-2=0$有根$\lambda_1=$-2,$\lambda_2=1$

故齐线性方程的通解为 x=$c_1e^t+c_2e^{-2t}$

因为+-2i 不是特征根

取特解行如$\tilde{x}=A\cos 2t+B\sin 2t$代入原方程解得 A=$-\frac{2}{5},B=-\frac{6}{5}$

故通解为 x=$c_1e^t+c_2e^{-2t}-\frac{2}{5}\cos 2t-\frac{6}{5}\sin 2t$

（11） $x'''-x=e^t$

解：特征方程$\lambda^3-1=0$有复数根$\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\lambda_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\lambda_3=1$

故 齐 线 性 方 程 的 通 解 为 $x=c_1e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^t$

$\lambda=1$ 是特征方程的根，故$\tilde{x}=Ate^t$代入原方程解得 A=$\frac{1}{3}$

故通解为$x=c_1e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^t+\frac{1}{3}te^t$

（12） $s''+2as'+a^2s=e^t$

解：特征方程$\lambda^2+2a\lambda+a^2=0$有 2 重根$\lambda=$-a

当 a=-1 时，齐线性方程的通解为 s=$c_1e^t+c_2te^t$,

$\lambda=1$ 是特征方程的 2 重根，故$\tilde{x}=At^2e^t$代入原方程解得 A=$\frac{1}{2}$

通解为 s=$c_1e^t+c_2te^t+\frac{1}{2}t^2$,

当 a$\neq$-1 时，齐线性方程的通解为 s=$c_1e^{-at}+c_2te^{-at}$,

$\lambda=1$ 不是特征方程的根，故$\tilde{x}=Ae^t$代入原方程解得 A=$\frac{1}{(a+1)^2}$

故通解为 s=$c_1e^{-at}+c_2te^{-at}+\frac{1}{(a+1)^2}e^t$

（13） $x''+6x'+5x=e^{2t}$

解：特征方程$\lambda^2+6\lambda+5=0$有根λ_1=-1,λ_2=-5

故齐线性方程的通解为 x=$c_1e^{-t}+c_2e^{-5t}$

λ=2 不是特征方程的根，故$\tilde{x}=Ae^{2t}$代入原方程解得 A=$\frac{1}{21}$

故通解为 x=$c_1e^{-t}+c_2e^{-5t}+\frac{1}{21}e^{2t}$

（14） $x''-2x'+3x=e^{-t}\cos t$

解：特征方程$\lambda^2-2\lambda+3=0$有根λ_1=-1+$\sqrt{2}$ i,λ_2=-1-$\sqrt{2}$ i

故齐线性方程的通解为$x=c_1e^t\cos\sqrt{2}t+c_2e^t\sin\sqrt{2}t$

$-1\pm i$ 不是特征方程的根，取特解行如$\tilde{x}=(A\cos t+B\sin t)e^{-t}$代入原方程解得 A=$\frac{5}{41},B=-\frac{4}{41}$

故通解为$x=c_1e^t\cos\sqrt{2}t+c_2e^t\sin\sqrt{2}t+(\frac{5}{41}\cos t-\frac{4}{41}\sin t)e^{-t}$

(15) $x''+x=\sin t-\cos 2t$

解：特征方程$\lambda^2+1=0$有根λ_1=i,λ_2=- i

故齐线性方程的通解为$x=c_1\cos t+c_2\sin t$

$x''+x=\sin t$,λ_1=i,是方程的解 $\tilde{x}=t(A\cos t+B\sin t)$代入原方程解得

A=$-\frac{1}{2}$ B=0 故$\tilde{x}=-\frac{1}{2}t\cos t$

$x''+x=-\cos 2t$ $\tilde{x}=A\cos 2t+B\sin 2t$代入原方程解得

A=$\frac{1}{3}$ B=0 故$\tilde{x}=\frac{1}{3}\cos 2t$

故通解为$x=c_1\cos t+c_2\sin t-\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{3}\cos 2t$

习题 5.1

1.给定方程组

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

a)试验证 u(t)= $\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$,v(t)= $\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$ 分别是方程组（*）的满足初始条件 u(0)= $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, v(0)= $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的解.

b)试验证 w(t)＝c_1 u(t)+c_2 v(t)是方程组(*)的满足初始条件 w(0)= $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ 的解，其中 c_1, c_2 是任意常数.

解：a) $$u(0)=\begin{bmatrix} \cos 0 \\ -\sin 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u'(t)=\begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}u(t)$$

又 $$v(0)=\begin{bmatrix} \sin o \\ \cos 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v'(t)=\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}v(t)$$

因此 u(t),v(t)分别是给定初值问题的解.

b) $$w(0)=c_1 u(0)+c_2 u(0)= c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$w'(t)= c_1 u'(t)+ c_2 v'(t)$$

$$= c_1\begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -c_1\sin t + c_2\cos t \\ -c_1\cos t - c_2\sin t \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1\cos t + c_2\sin t \\ -c_1\sin t + c_2\cos t \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} w(t)$$

因此 w(t)是给定方程初值问题的解.

2. 将下面的初值问题化为与之等价的一阶方程组的初值问题：

a) $x'' + 2x' + 7tx = e^{-t}$, $x(1)=7$, $x'(1)=-2$

b) $x^{(4)} + x = te^t$, $x(0)=1$, $x'(0)=-1$, $x''(0)=2$, $x'''(0)=0$

c) $\begin{cases} x'' + 5y' - 7x + 6y = e^t \\ y'' - 2y + 13y' - 15x = \cos t \end{cases}$

$x(0)=1$, $x'(0)=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

解：a）令 $x_1 = x$, $x_2 = x'$，得

$$\begin{cases} x_1' = x' = x_2 \\ x_2' = x'' = -7tx_1 - 2x_2 + e^{-t} \end{cases}$$

即 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7t & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$

又 $x_1 = x(1) = 7$　$x_2(1) = x'(1) = -2$

于是把原初值问题化成了与之等价的一阶方程的初值问题：

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix},\qquad x(1) = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

其中 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

b) 令 $x_1 = x$　$x_2 = x'$　$x_3 = x''$　$x_4 = x'''$ 则得：

$$\begin{cases} x_1' = x' = x_2 \\ x_2' = x'' = x_3 \\ x_3' = x''' = x_4 \\ x_4' = -x + te^t = -x_1 + te^t \end{cases}$$

且 $x_1(0)$=x(0)=1, $x_2=x'(0)$=-1, $x_3(0)$= $x''(0)$=2,

$x_4(0)$= $x'''(0)$=0

于是把原初值问题化成了与之等价的一阶方程的初值问题：

$$x'=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\te^t\end{bmatrix}\qquad x(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix},\ \text{其中}\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}.$$

c) 令 w_1＝x， w_2＝x'，w_3＝y，w_4＝y'，则原初值问题可化为：

$$\begin{cases}w_1'=x'=w_2\\ w_2'=x''=-5w_4+7w_1-6w_3+e^t\\ w_3'=y'=w_4\\ w_4'=y''=2w_3-13w_4+15w_1+\cos t\end{cases}\qquad \text{且}\begin{cases}w_1(0)=x(0)=1\\ w_2(0)=x'(0)=0\\ w_3(0)=y(0)=0\\ w_4(0)=y'(0)=1\end{cases}$$

即 $$w'=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\7&0&-6&-5\\0&0&0&1\\15&0&2&-13\end{bmatrix}w+\begin{bmatrix}0\\e^t\\0\\\cos t\end{bmatrix}$$

$$w(0)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\qquad \text{其中}\ w=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\\w_4\end{bmatrix}$$

3. 试用逐步逼近法求方程组

$$x'=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}x\qquad x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

满足初始条件

$$x(0)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

的第三次近似解.

解：$\psi_0(t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$$\psi_1(t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}ds=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\1\end{bmatrix}$$

$$\psi_2(t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\1\end{bmatrix}ds=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t\\-\frac{t^2}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\1-\frac{t^2}{2}\end{bmatrix}$$

$$\psi_3(t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\1-\frac{s^2}{2}\end{bmatrix}ds=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t-\frac{t^3}{6}\\1-\frac{t^2}{2}\end{bmatrix}$$

习题 5.2

02412—02　02412—03

1.试验证$\Phi(t)=\begin{bmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{bmatrix}$

是方程组 $x'=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{bmatrix}$x,x=$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ，在任何不包含原点的区间 a$\le t \le b$上的基解矩阵。

解：令$\Phi(t)$的第一列为φ_1(t)=$\begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$,这时φ_1'(t)=$\begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}$ φ_1(t)故φ_1(t)是一个解。同样如果以φ_2(t)表示$\Phi(t)$第二列，我们有φ_2(t)=$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}$ φ_2(t)这样φ_2(t)也是一个解。因此$\Phi(t)$是解矩阵。又因为 det$\Phi(t)$=-t^2 故$\Phi(t)$是基解矩阵。

2.考虑方程组 x'=A(t)x　　　(5.15)其中 A(t)是区间 a$\le t \le b$上的连续 n$\times$n 矩阵，它的元素为 a_{ij}(t),i ,j=1,2,…,n

a) 如果 x_1(t),x_2(t),…,x_n(t)是(5.15)的任意 n 个解，那么它们的伏朗斯基行列式 W[x_1(t),x_2(t),…,x_n(t)]$\equiv$W(t)满足下面的一阶线性微分方程 W'=[a_{11}(t)+a_{22}(t)+…+a_{nn}(t)]W

b) 解上面的一阶线性微分方程，证明下面公式：W(t)=W(t_0)$e^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+a_{22}(s)+\ldots a_{nn}(s)]ds}$　t_0,t$\in$[a,b]

解：$w'(t)=\begin{vmatrix} x_{11}' & x_{12}' & \ldots & x_{1n}' \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21}' & x_{22}' & \ldots & x_{2n}' \\ . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ x_{n1}' & x_{n2}' & \ldots & x_{nn}' \end{vmatrix}$

=

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}+..a_{1n}x_{n1} & a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}+...+a_{1n}x_{n2} & ... & a_{11}x_{1n}+a_{12}x_{2n}+...+a_{1n}x_{nn} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & ... & x_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\ldots+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & ... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1}x_{11}+...+a_{nn}x_{n1} & a_{n1}x_{21}+..+a_{nn}x_{n2} & ... & a_{n1}x_{nn}+...+a_{nn}x_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_{11} & a_{11}x_{12} & ... & a_{11}x1n \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & ... & x_{nn} \end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & ... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{nn}x_{n1} & a_{nn}x_{n2} & ... & a_{nn}x_{nn} \end{vmatrix}$$ 整理后原式变为

$$(a_{11}+\ldots+a_{nn})\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & ... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & ... & x_{nn} \end{vmatrix}=(a_{11}+\ldots+a_{nn})\,w(t)$$

$=(a_{11}(t)+\ldots+a_{nn}(t))\,w(t)$

b)由于 $w'(t)=[a_{11}(t)+\ldots+a_{nn}(t)]\,w(t)$,即 $\frac{dw(t)}{w(t)}=[a_{11}(t)+\ldots+a_{nn}(t)]dt$

两边从 t_0 到 t 积分 $\ln|w(t)|-\ln|w(t_0)|=\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+...+a_{nn}(s)]ds$ 即

$w(t)=w(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+...+a_{nn}(s)]ds}$, $t\in[a,b]$

3.设 A(t)为区间 $a\le t\le b$ 上的连续 $n\times n$ 实矩阵，$\Phi(t)$为方程 $x'=A(t)x$ 的基解矩阵，而 $x=\varphi(t)$为其一解，试证：

a) 对于方程 $y'=-A^T(t)y$ 的任一解 $y=\Psi(t)$必有 $\Psi^T(t)\ \varphi(t)$=常数；

b) $\Psi(t)$为方程 $y'=-A^T(t)y$ 的基解矩阵的充要条件是存在非奇异的常数矩阵 C，使 $\Psi^T(t)\ \varphi(t)=C$.

解 a) $[\Psi^T(t)\ \varphi(t)]'=\Psi^{T'}\varphi(t)+\Psi^T\varphi'(t)=\Psi'^T\varphi(t)+\Psi^T(t)A(t)\varphi$

又因为 $\Psi'=-A^T(t)\ \Psi(t)$，所以 $\Psi'^T=-\Psi^T(t)\,A(t)$

$[\Psi^T(t)\ \varphi(t)]'=-\Psi^T(t)\ \varphi(t)A(t)+\Psi^T(t)\,A(t)\ \varphi(t)=0$,

所以对于方程 $y'=-A^T(t)y$ 的任一解 $y=\Psi(t)$必有 $\Psi^T(t)\ \varphi(t)$=常数

b) "$\Leftarrow$"假设为方程 $y'=-A^T(t)y$ 的基解矩阵，则

$[\ \Psi^T(t)\ \ \varphi(t)]' = [\Psi^T(t)]'\ \ \Phi(t)+\Psi^T(t)\ \ \Phi'(t)=[-\ A^T(t)\ \ \Psi(t)]\Phi(t)+\Psi^T(t)\,A^T(t)\,)\Phi(t)+\ \Psi^T(t)[\,A(t)\ \ \varphi(t)]=-\ \Psi^T(t)\,A^T(t)\ \ \Phi(t)+\Psi^T(t)\,A^T(t)\ \Phi(t)=0$,故 $\Psi^T(t)\ \ \varphi(t)=C$

"$\Rightarrow$"若存在非奇异常数矩阵 C，detc$\neq$0,使 $\Psi^T(t)\ \ \varphi(t)=C$，

则$[\ \Psi^T(t)\ \ \varphi(t)]' = \Psi^{T'}\varphi(t)+\ \Psi^T\varphi'(t)=0$，故 $\Psi^{T'}(t)\varphi(t)=-\ \Psi^T(t)\ \varphi(t)A(t)\ \ \Psi^{T'}(t)=-\ \Psi^T(t)\ \ A(t)$ 所以 $\Psi^{'T}(t)=-\ \Psi^T(t)\ \ A(t)$, $\Psi'(t)=-\Psi^T(t)\,A^T(t)$即 $\Psi(t)$为方程 $y'=-A^T(t)y$ 的基解矩阵

4.设 $\Phi(t)$为方程 $x'=Ax$（A 为 $n\times n$ 常数矩阵）的标准基解矩阵（即 Φ（0）=E），证明:

$\Phi(t)\,\Phi^{-1}(t_0)=\Phi(t-t_0)$其中 t_0 为某一值.

证明:（1）$\Phi(t),\Phi(t-t_0)$是基解矩阵。

（2）由于 $\Phi(t)$为方程 $x'=Ax$ 的解矩阵，所以 $\Phi(t)\,\Phi^{-1}(t_0)$也是 $x'=Ax$ 的解矩阵，而当 $t=t_0$时，$\Phi(t_0)\Phi^{-1}(t_0)=E$, $\Phi(t-t_0)=\Phi$（0）=E. 故由解的存在唯一性定理，得 $\Phi(t)\,\Phi^{-1}(t_0)=\Phi(t-t_0)$

5.设 A(t),f(t)分别为在区间 $a\leq t\leq b$ 上连续的 $n\times n$ 矩阵和 n 维列向量，证明方程组 $x'=A(t)x+f(t)$存在且最多存在 n+1 个线性无关解。

证明：设 $x_1,x_2,\ldots x_n$ 是 $x'=A(t)x$ 的 n 个线性无关解，$\bar{x}$ 是 $x'=A(t)x+f(t)$的一个解，则 $x_1+\bar{x}$, $x_2+\bar{x}$,…, $x_n+\bar{x},\bar{x}$ 都是非齐线性方程的解，下面来证明它们线性无关，假设存在不全为零的常数 C_i,(I=1,2,…,n)使得 $\sum_{i=1}^{n}c_i(x_i+\bar{x})+c_{n-1}\ \bar{x}=0$,从而 $x_1+\bar{x}$，$x_2+\bar{x}$,…,

$x_n+\bar{x}, \bar{x}$ 在 $a \le t \le b$ 上线性相关，此与已知矛盾，因此 $x_1+\bar{x}, x_2+\bar{x}, \ldots,$ $x_n+\bar{x}, \bar{x}$ 线性无关，所以方程组 $x'=A(t)x+f(t)$ 存在且最多存在 n+1 个线性无关解。

6、试证非齐线性微分方程组的叠加原理：

$$x' = A(t)x + f_1(t)$$

$$x' = A(t)x + f_2(t)$$

的解，则 $x_1(t)+x_2(t)$ 是方程组

$$x' = A(t)x + f_1(t) + f_2(t)$$

的解。

证明：$x' = A(t)x + f_1(t)$　（1）　$x' = A(t)x + f_2(t)$　（2）

分别将 $x_1(t), x_2(t)$ 代入（1）和（2）

则 $x_1' = A(t)x_1 + f_1(t)$　　$x_2' = A(t)x + f_2(t)$

则 $x_1' + x_2' = A(t)[x_1(t)+x_2(t)] + f_1(t) + f_2(t)$

$[x_1(t)+x_2(t)]' = A(t)[x_1(t)+x_2(t)] + f_1(t) + f_2(t)$

令 $x = x_1(t) + x_2(t)$

即证　$x' = A(t)x + f_1(t) + f_2(t)$

7．考虑方程组 $x' = Ax + f(t)$，其中

$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$　　$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$　　$f(t)=\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$

a)试验证　$\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$ 是 $x' = Ax$ 的基解矩阵；

b)试求 $x' = Ax + f(t)$ 的满足初始条件 $\varphi(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 的解 $\varphi(t)$。

证明：a)首先验证它是基解矩阵

以 $\varphi_1(t)$ 表示 $\phi(t)$ 的第一列　　$\varphi_1(t)=\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$

则 $\varphi_1{}^{'}(t)=\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\varphi_1(t)$

故 $\varphi_1(t)$ 是方程的解

如果以 $\varphi_2(t)$ 表示 $\phi(t)$ 的第二列　$\varphi_2(t)=\begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

我们有 $\varphi_2{}^{'}(t)=\begin{pmatrix} e^{2t}+2te^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\varphi_2(t)$

故 $\varphi_2(t)$ 也是方程的解

从而 $\phi(t)$ 是方程的解矩阵

又 $\det\phi(t)=\begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{vmatrix}=e^{4t}\neq 0$

故 $\phi(t)$ 是 $x^{'}=Ax$ 的基解矩阵；

b)由常数变易公式可知，方程满足初始条件 $\varphi(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 的解

$\varphi(t)=\phi(t)\phi^{-1}(0)\eta+\phi(t)\int_0^t\phi^{-1}f(s)ds$

而 $\phi^{-1}(t)=\dfrac{\begin{pmatrix} e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}}{e^{4t}}=\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}e^{-2t}$

$$\therefore\varphi(t)=\begin{pmatrix} (1-t)e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\int_0^t\begin{pmatrix} e^{-2s} & -se^{-2s} \\ 0 & e^{-2s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin s \\ \cos s \end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix} \frac{1}{25}(-15t+27)e^{2t}-\frac{1}{25}\cos t-\frac{1}{25}\sin t \\ -\frac{3}{5}e^{2t}-\frac{2}{5}\cos t+\frac{1}{5}\sin t \end{pmatrix}$$

8、试求 $x^{'}=Ax+f(t)$，其中

$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$　　　$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$　　　$f(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$

满足初始条件

$\varphi(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

的解$\phi(t)$。

解：由第 7 题可知$x^{'}=Ax$的基解矩阵　　$\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^{2t} & te^{2t}\\0 & e^{2t}\end{bmatrix}$

则$\phi^{-1}(s)=\dfrac{\begin{pmatrix}e^{2s} & -se^{2s}\\0 & e^{2s}\end{pmatrix}}{e^{4s}}=\begin{pmatrix}1 & -s\\0 & 1\end{pmatrix}e^{-2s}$

若方程满足初始条件$\varphi(0)=0$

则有$\varphi(t)=\varphi(t)\int_0^t\phi^{-1}(s)f(s)ds=\begin{pmatrix}e^{2t} & te^{2t}\\0 & e^{2t}\end{pmatrix}\int_0^t\begin{pmatrix}1 & -s\\0 & 1\end{pmatrix}e^{-2s}\begin{pmatrix}0\\e^{2s}\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}t^2e^{2t}\\te^{2t}\end{pmatrix}$

若$\varphi(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

则有

$$\varphi(t)=\phi(t)\phi^{-1}(0)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\phi(t)\int_0^t\phi^{-1}(s)f(s)ds=\begin{pmatrix}e^{2t} & te^{2t}\\0 & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}t^2e^{2t}\\te^{2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-t+\frac{1}{2}t^2)e^{2t}\\(t-1)e^{2t}\end{pmatrix}$$

9、试求下列方程的通解：

a) $x^{''}+x=\sec t,-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$

解：易知对应的齐线性方程$x^{''}+x=0$的基本解组为

$x_1(t)=\cos t,x_2(t)=\sin t$

这时$W[x_1(t),x_2(t0]=\begin{vmatrix}\cos t & \sin t\\-\sin t & \cos t\end{vmatrix}=1$

由公式得

$$\varphi(t)=\int_0^t\frac{\sin t\cos s-\cos t\sin s}{1}\sec sds=\int_0^t(\sin t-\cos t\tan s)ds=t\sin t+\cos t\ln\cos t$$

$\therefore$ 通解为$x=c_1\cos t+c_2\sin t+t\sin t+\cos t\ln t$

b) $x''' - 8x = e^{2t}$

解：易知对应的齐线性方程 $x''' - 8x = 0$ 的基本解组为 $x_1(t) = e^{2t}$.

$x_2(t) = e^{-t}\cos\sqrt{3}t, x_3(t) = e^{-t}\sin\sqrt{3}t$

$\because \lambda = 2$ 是方程的特征根

故方程有形如 $x = Ate^{2t}$ 的根

代入得 $A = \dfrac{1}{12}$

故方程有通解 $x = (c_1\cos\sqrt{3}t + c_2\sin\sqrt{3}t)e^{-t} + c_3e^{2t} + \dfrac{1}{12}te^{2t}$

c) $x'' - 6x' + 9x = e^t$

解：易知对应的齐线性方程 $x'' - 6x' + 9x = 0$ 对应的特征方程为

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0, \lambda_{1,2} = 3$ 故方程的一个基本解组为 $x_1(t) = e^{3t}, x_2(t) = te^{3t}$

$$W[x_1(t), x_2(t)] = \begin{vmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & e^{3t} + 3te^{3t} \end{vmatrix} = e^{6t}$$

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{te^{3t}e^{3s} - e^{3t}\cdot se^{3s}}{e^{6s}} \cdot e^s ds = \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}te^{3t} - \frac{1}{4}e^{3t}$$

因为 te^{3t}, e^{3t} 是对应的齐线性方程的解

故 $\varphi_1(t) = \dfrac{1}{4}e^t$ 也是原方程的一个解

故方程的通解为 $x = c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + \dfrac{1}{4}e^t$

10、给定方程 $x'' + 8x' + 7x = f(t)$ 其中 f(t)在 $0 \le t < +\infty$ 上连续，试利用常数变易公式，证明：

a)如果 f(t)在 $0 \le t < +\infty$ 上有界，则上面方程的每一个解在 $0 \le t < +\infty$ 上有界；

b)如果当 $t \to \infty$ 时，$f(t) \to 0$，则上面方程的每一个解 $\varphi(t) \to \infty$（当

$t \to \infty$ 时）。

证明：a)$\because f(t) \quad 0 \le t < +\infty$ 上有界

$\therefore$ 存在 M>0,使得$|f(t)| \le M, \forall t \in [0,+\infty)$

又$\because x = e^{-t}, x = e^{-7t}$是齐线性方程组的基本解组

$\therefore$非齐线性方程组的解

$$\therefore \varphi(t) = \int_0^t \frac{e^{-7t}e^{-s} - e^{-t}e^{-7s}}{\begin{vmatrix} e^{-s} & e^{-7s} \\ -e^{-s} & -7e^{-7s} \end{vmatrix}} f(s)ds = \int_0^t \frac{e^{-7s}e^{-s} - e^{-t}e^{-7s}}{-6e^{-8s}} f(s)ds$$

$$\therefore |\varphi(t)| \le \frac{M}{6}\int_0^t \left|e^{-7t}e^{7s} - e^{-t}e^{s}\right| ds \le \frac{M}{6}\left(\frac{8}{7} - \frac{1}{7}e^{-7t} - e^{-t}\right) \le \frac{4}{21}M$$

又对于非齐线性方程组的满足初始条件的解 x(t)，都存在固定的常数c_1, c_2

使得$x(t) = c_1 e^{-7t} + c_2 e^{-t} + \varphi(t)$

从而$|x(t)| \le \left|c_1 e^{-7t}\right| + \left|c_2 e^{-t}\right| + |\varphi(t)| \le |c_1| + |c_2| + \frac{4}{21}M$

故上面方程的每一个解在$0 \le t < +\infty$上有界

b) $\because t \to \infty$ 时， $f(t) \to 0$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N$ 当 t>N 时$|f(t)| < \varepsilon$

由 a)的结论

$$|x(t)| \le \left|c_1 e^{-7t}\right| + \left|c_2 e^{-t}\right| + |\varphi(t)| \le |c_1| + |c_2| + \frac{4}{21}M \le \frac{4}{21}, (t \to \infty)$$

故$t \to \infty$时，原命题成立

11、给定方程组 $x' = A(t)x$ （5.15）

这里 A(t)是区间$a \le x \le b$上的连续$n \times n$矩阵，设$\phi(t)$是（5.15）的一个基解矩阵，n 维向量函数 F(t,x)在$a \le x \le b$， $\|x\| < \infty$上连续， $t_0 \in [a,b]$试

证明初值问题：$\begin{cases} x' = A(t)x + F(t,x) \\ \varphi(t_0) = \eta \end{cases}$ （*）

的唯一解$\varphi(t)$是积分方程组

$$x(t)=\phi(t)\phi^{-1}(t_0)\eta+\int_{t_0}^{t}\phi(t)\phi^{-1}(s0F(s,x(s))ds \qquad (**)$$

的连续解。反之,(**)的连续解也是初值问题(8)的解。

证明:若$\varphi(t)$是(*)的唯一解

则由非齐线性方程组的求解公式

$$\varphi(t)=\phi(t)\phi^{-1}(t_0)\eta+\phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)F(s,\varphi(s))ds$$

即(*)的解满足(**)

反之,若$\varphi(t)$是(**)的解,则有

$$\varphi(t)=\phi(t)\phi^{-1}(t_0)\eta+\phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)F(s,\varphi(s))ds$$

两边对 t 求导:

$$\varphi^{'}(t)=\phi^{'}(t)\phi^{-1}(t_0)\eta+\phi^{'}(t)\int_{0}^{t}\phi^{-1}(s)F(s,\varphi(s))ds+\phi(t)\phi^{-1}(t)F(t,\varphi(t))$$
$$=\phi^{'}(t)[\phi^{-1}(t_0)\eta+\int_{0}^{t}\phi^{-1}(s)F(s,\varphi(s))ds]+F(t,\varphi(t))$$
$$=A(t)\phi(t)[\phi^{-1}(t_0)\eta+\int_{0}^{t}\phi^{-1}(s)F(s,\varphi(s))ds]+F(t,\varphi(t))$$
$$=A(t)\varphi(t)+F(t,\varphi(t))$$

即(**)的解是(*)的解

习题 5.3

1、 假设 **A** 是 n×n 矩阵，试证：

a) 对任意常数 c_1、 c_2 都有

$$\exp(c_1\mathbf{A}+c_2\mathbf{A})=\exp c_1\mathbf{A}\cdot\exp c_2\mathbf{A}$$

b) 对任意整数 k,都有

$$(\exp\mathbf{A})^k=\exp k\mathbf{A}$$

(当 k 是负整数时，规定$(\exp\mathbf{A})^k=[(\exp\mathbf{A})^{-1}]^{-k}$)

证明：a) ∵（$c_1\mathbf{A}$）•（$c_2\mathbf{A}$）＝（$c_2\mathbf{A}$）•（$c_1\mathbf{A}$）

∴ $\exp(c_1\mathbf{A}+c_2\mathbf{A})=\exp c_1\mathbf{A}\cdot\exp c_2\mathbf{A}$

b) k>0 时，$(\exp\mathbf{A})^k=\exp\mathbf{A}\cdot\exp\mathbf{A}\cdots\cdots\exp\mathbf{A}$

$=\exp(\mathbf{A}+\mathbf{A}+\cdots\cdots+\mathbf{A})$

$=\exp k\mathbf{A}$

k<0 时，-k>0

$(\exp\mathbf{A})^k=[(\exp\mathbf{A})^{-1}]^{-k}=[\exp(-\mathbf{A})]^{-k}=\exp(-\mathbf{A})\cdot\exp(-\mathbf{A})\cdots\cdots\exp(-\mathbf{A})$

$=\exp[(-A)(-k)]$

$=\exp k\mathbf{A}$

故∀k，都有$(\exp\mathbf{A})^k=\exp k\mathbf{A}$

2、 试证：如果$\varphi(t)$是$x'=\mathbf{A}x$满足初始条件$\varphi(t_0)=\eta$的解，那么

$$\varphi(t)=[\exp\mathbf{A}(t-t_0)]\eta$$

证明：由定理 8 可知$\varphi(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\,\eta+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)f(s)ds$

又因为$\Phi(t)=\exp\mathbf{A}t$，$\Phi^{-1}(t_0)=(\exp\mathbf{A}t_0)^{-1}=\exp(-\mathbf{A}t_0)$， $f(s)=0$,

又因为矩阵 （$\mathbf{A}t$）•（$-\mathbf{A}t_0$）=（$-\mathbf{A}t_0$）•（$\mathbf{A}t$）

所以 $\varphi(t)=[\exp\mathbf{A}(t-t_0)]\eta$

3、 试计算下面矩阵的特征值及对应的特征向量

a）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$　　b）$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

c）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　d）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}$

解：a）det（λE－A）= $\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -4 & \lambda-3 \end{vmatrix}$ =(λ－5)(λ+1)=0

∴ λ_1=5,　λ_2=－1

对应于 λ_1=5 的特征向量 u=$\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$,　$(\alpha \neq 0)$

对应于 λ_2=－1 的特征向量 v=$\begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$, $(\beta \neq 0)$

b)　det（λE－A）=(λ+1)(λ+2)(λ－2)＝0

∴ λ_1＝－1，λ_2＝2，λ_3＝－2

对应于 λ_1＝－1 的特征向量 u_1＝$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，　（ $\alpha \neq 0$ ）

对应于 λ_2＝2 的特征向量 u_2＝$\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，　（ $\beta \neq 0$ ）

对应于 λ_3＝－2 的特征向量 u_3＝$\gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，　（ $\gamma \neq 0$ ）

c）det（λE－A）= $\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$ ＝(λ+1)^2(λ－3)＝0

∴ λ_1＝－1（二重），λ_2＝3

对应于λ_1＝－1（二重）的特征向量u＝$\alpha\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$，　（ $\alpha\neq 0$ ）

对应于λ_2＝3的特征向量v＝$\beta\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$，　（ $\beta\neq 0$ ）

d)　det（λE－A）= $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\0 & \lambda & -1\\6 & 11 & \lambda+6\end{vmatrix}$=($\lambda$+3)($\lambda$+1)($\lambda$+2)=0

∴λ_1＝－1，λ_2＝－2，λ_3＝－3

对应于λ_1＝－1的特征向量u_1＝$\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，　（ $\alpha\neq 0$ ）

对应于λ_2＝－2的特征向量u_2＝$\beta\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$，　（ $\beta\neq 0$ ）

对应于λ_3＝－3的特征向量u_3＝$\gamma\begin{pmatrix}1\\-3\\9\end{pmatrix}$，　（ $\gamma\neq 0$ ）

4、试求方程组x'=**A**x的一个基解矩阵，并计算exp**A**t，其中**A**为：

a）$\begin{pmatrix}-2 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}$　　b）$\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 3\end{pmatrix}$

c）$\begin{pmatrix}2 & -3 & 3\\4 & -5 & 3\\4 & -4 & 2\end{pmatrix}$　　d）$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\8 & 1 & -1\\5 & 1 & -1\end{pmatrix}$

解：a）det（λE－A）=0得$\lambda_1=\sqrt{3}$，$\lambda_2=-\sqrt{3}$

对应于λ_1的特征向量为u＝$\begin{pmatrix}1\\2+\sqrt{3}\end{pmatrix}\alpha$，　（ $\alpha\neq 0$ ）

对应于λ_2的特征向量为 v＝$\begin{pmatrix} 1 \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}\beta$，　（ $\beta \neq 0$ ）

∴u＝$\begin{pmatrix} 1 \\ 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$，v＝$\begin{pmatrix} 1 \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$是对应于$\lambda_1$，$\lambda_2$的两个线性无关的特征向量

Φ（t）=$\begin{pmatrix} e^{\sqrt{3}t} & e^{-\sqrt{3}t} \\ (2+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}t} & (2-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t} \end{pmatrix}$是一个基解矩阵

Exp**A**t=$\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -(2-\sqrt{3})e^{\sqrt{3}t}+(2+\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t} & e^{\sqrt{3}t}-e^{-\sqrt{3}t} \\ -e^{\sqrt{3}t}+e^{-\sqrt{3}t} & (2+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}t}-(2-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t} \end{pmatrix}$

b)　由 det（λE－A）=0 得λ_1＝5，λ_2＝－1

解得 u＝$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，v＝$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$是对应于$\lambda_1$，$\lambda_2$的两个线性无关的特征向量

则基解矩阵为Φ（t）＝$\begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$

Φ（0）＝$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$　　　Φ^{-1}(0)＝$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

则 exp**A**t＝Φ（t）Φ^{-1}(0)＝$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{5t}+2e^{-t} & e^{5t}-e^{-t} \\ 2e^{5t}-2e^{-t} & 2e^{5t}+e^{-t} \end{pmatrix}$

c）　由 det（λE－A）=0 得λ_1＝2，λ_2＝－2，λ_3＝－1

解得基解矩阵Φ（t）＝$\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-2t} & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-2t} & 0 \end{pmatrix}$

$$\Phi^{-1}(0)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

则 exp**A**t＝Φ（t）Φ^{-1}(0)＝$\begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t}+e^{-t} & e^{2t}-e^{-t} \\ e^{2t}-e^{-2t} & -e^{2t}+e^{-2t}+e^{-t} & e^{2t}-e^{-t} \\ e^{2t}-e^{-2t} & -e^{2t}+e^{-2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$

d）由 det（λE－A）=0 得 $\lambda_1=-3$，$\lambda_2=2+\sqrt{7}$，$\lambda_3=2-\sqrt{7}$

解得基解矩阵Φ（t）＝$\begin{pmatrix} -3e^{-3t} & e^{(2+\sqrt{7})t} & e^{(2-\sqrt{7})t} \\ 7e^{-3t} & \dfrac{4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \dfrac{-4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} \\ 4e^{-3t} & \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \dfrac{1-\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} \end{pmatrix}$

则 exp**At**＝Φ（t） $\Phi^{-1}(0)$＝

$$\frac{1}{4\sqrt{7}}\begin{pmatrix} \dfrac{-8\sqrt{7}}{3}e^{-3t}+\dfrac{-2+4\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t}+\dfrac{2+4\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \dfrac{56\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\dfrac{122-28\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}+\dfrac{-122-28\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \dfrac{32\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\dfrac{26+2\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}+\dfrac{-26+2\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{pmatrix}$$

5、试求方程组 x'=**A**x 的基解矩阵，并求满足初始条件$\varphi(0)=\eta$的解$\varphi(t)$

$a)A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \eta=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$b)A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \eta=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$

$c)A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \eta=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

解：a）由第 4 题（b）知，基解矩阵为$\begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$

$$\eta=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

所以$\alpha=2, \quad \beta=1$

$$\varphi(t)=\begin{pmatrix} 2e^{5t}+e^{-t} \\ 4e^{5t}-e^{-t} \end{pmatrix}$$

b）由第 4 题（d）知，基解矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix} -3e^{-3t} & e^{(2+\sqrt{7})t} & e^{(2-\sqrt{7})t} \\ 7e^{-3t} & \frac{4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \frac{-4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} \\ 4e^{-3t} & \frac{1+\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \frac{1-\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} \end{pmatrix}$$

所以

$$\varphi(t)=\frac{1}{4\sqrt{7}}\begin{pmatrix} \frac{52\sqrt{7}}{3}e^{-3t}+\frac{4-26\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{-4-26\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{-364\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\frac{-748+146\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{748+146\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{-208\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\frac{-178-22\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{178-22\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{pmatrix}$$

c)　由 3（c）可知，矩阵 A 的特征值为 λ_1＝3，λ_2＝－1（二重）

λ_1 对应的特征向量为 $u_1=\begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$，$u_2=\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ -\frac{4\beta+2\gamma}{3} \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ -\frac{4\beta+2\gamma}{3} \end{pmatrix}$$

解得$\begin{cases} \alpha=\frac{1}{4} \\ \beta=\frac{1}{2} \\ \gamma=-\frac{1}{4} \end{cases}$　　$\therefore v_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　　$v_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\varphi(t)=e^{3t}Ev_1+e^{-t}[E+t(A+E)]v_2$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{1}{4}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

6、 求方程组 x' =**A**x＋f（t）的解 $\varphi(t)$：

$$a) \qquad \varphi(0)=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}, f(t)=\begin{pmatrix}e^t\\1\end{pmatrix}$$

$$b) \qquad \varphi(0)=0, A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{pmatrix}, f(t)=\begin{pmatrix}0\\0\\e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$c) \qquad \varphi(0)=\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}4&-3\\2&-1\end{pmatrix}, f(t)=\begin{pmatrix}\sin t\\-2\cos t\end{pmatrix}$$

解：a）令 x' =**A**x 的基解矩阵为Φ（t）

$p(\lambda)=\det(\lambda E-A)=(\lambda-5)(\lambda+1)=0$

所以λ_1=5，λ_2=−1

解得Φ（t）＝$\begin{pmatrix}e^{5t}&e^{-t}\\2e^{5t}&-e^{-t}\end{pmatrix}$， 则$\Phi^{-1}$（t）＝$\dfrac{1}{-3e^{4t}}\begin{pmatrix}-e^{-t}&-e^{-t}\\-2e^{5t}&e^{5t}\end{pmatrix}$

$\Phi^{-1}(0)=-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-1\\-2&1\end{pmatrix}$

求得 $\varphi(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{20}e^{5t}-e^{-t}-\dfrac{1}{4}e^{t}-\dfrac{2}{5}\\\dfrac{3}{10}e^{5t}+e^{-t}-\dfrac{1}{2}e^{t}+\dfrac{1}{5}\end{pmatrix}$

b）由 det（λE－A）=0 得 λ_1＝－1，λ_2＝－2，λ_3＝－3

设 λ_1 对应的特征向量为 v_1，则

（λ_1E－A）v_1=0，得 v_1＝$\begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha\\-\alpha\end{pmatrix}$ $\qquad \alpha\neq 0$

取 v_1＝$\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$，同理可得 v_2 ＝$\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\1\\-2\end{pmatrix}$，$v_3$＝$\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{3}\\1\\-3\end{pmatrix}$

则Φ（t）＝$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

从而解得 $\varphi(t)=\begin{pmatrix} e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-3t}-\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t} \\ -2e^{-2t}+\frac{3}{4}e^{-3t}+\frac{5}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}te^{-t} \\ 4e^{-2t}-\frac{9}{4}e^{-3t}-\frac{7}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t} \end{pmatrix}$

c）令 x'=**A**x 的基解矩阵为Φ（t）

由 det（λE－A）=0 得 λ_1＝1，λ_2＝2

解得对应的基解矩阵为Φ（t）＝$\begin{pmatrix} e^{t} & \frac{3}{2}e^{2t} \\ e^{t} & e^{2t} \end{pmatrix}$

∴Φ^{-1}（t）＝$-2\begin{pmatrix} e^{-t} & -\frac{3}{2}e^{-t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$　从而Φ^{-1}(0)＝$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\varphi(t)=\phi(t)\phi^{-1}(0)\varphi(0)+\phi(t)\int_0^t\phi^{-1}(s)f(s)ds$$

∴

$$=\begin{pmatrix} \cos t-2\sin t+e^{t}(-4-2\eta_1+3\eta_2)+3e^{2t}(1+\eta_1-\eta_2) \\ 2\cos t-2\sin t+e^{t}(-4-2\eta_1+3\eta_2)+2e^{2t}(1+\eta_1-\eta_2) \end{pmatrix}$$

7、 假设 m 不是矩阵 **A** 的特征值。试证非齐线性方程组

$$x'=Ax+ce^{mt}$$

有一解形如

$$\varphi(t)=pe^{mt}$$

其中 **c**，**p** 是常数向量。

证：要证 $\varphi(t)=pe^{mt}$ 是否为解，就是能否确定常数向量 p

$$pme^{mt}=Ape^{mt}+ce^{mt}$$

则 p（mE－A）＝c

由于 m 不是 A 的特征值

故$|mE-A|=0$

mE－A 存在逆矩阵

那么 p＝c（mE－A）$^{-1}$　　这样方程就有形如$\varphi(t)=pe^{mt}$的解

8、 给定方程组

$$\begin{cases} x_1''-3x_1'+2x_1+x_2'-x_2=0 \\ x_1'-2x_1+x_2'+x_2=0 \end{cases}$$

a） 试证上面方程组等价于方程组 **u'=Au**,其中

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \\ x_2 \end{bmatrix}，\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

b） 试求 a）中的方程组的基解矩阵

c） 试求原方程组满足初始条件

$x_1(0)=0$,　$x_1'(0)=1$,　$x_2(0)=0$

的解。

证：a）令$u_1=x_1, u_2=x_1', u_3=x_2$　　则方程组①化为

$$\begin{cases} u_1'=x_1'=u_2 \\ u_2'=x_1''=3u_2-2u_1-u_3'+u_3 \\ u_3'=x_2'=-u_2+2u_1-u_3 \end{cases}$$

即 $u'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}u$　　　u'=Au　 ①

反之，设 $x_1=u_1, x_1'=u_2, x_2=u_3$　 则方程组②化为

$$\begin{cases} x_1''=-4x_1+4x_1'+2x_2 \\ x_2'=2x_1-x_1'-x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1''=2x_1'-2x_1-x_2'+x_2 \\ x_2'=2x_1-x_1'-x_2 \end{cases}$$

b）由 det（λE－A）=0 得λ_1＝0，λ_2＝1，λ_3＝2

$$由\begin{cases} -u_2=0 \\ 4u_1-4u_2-2u_3=0 \\ -2u_1+u_2+u_3=0 \end{cases}　得 u_1=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}　\quad \alpha\neq 0$$

同理可求得 u_2 和 u_3

取$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

则$\phi(t)=\begin{pmatrix}1 & e^t & e^{2t}\\0 & e^t & 2e^{2t}\\2 & \frac{1}{2}e^t & 0\end{pmatrix}$是一个基解矩阵

c）令$u_1=x_1,u_2=x_1',u_3=x_2$，则①化为等价的方程组①且初始条件变为

$u_1(0)=0,u_2(0)=1,u_3(0)=0.$而②满足此初始条件的解为：

$$e^{At}\eta=e^{At}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-2e^t+\frac{3}{2}e^{2t}\\-2e^t+3e^{2t}\\1-e^t\end{pmatrix} \qquad ③$$

于是根据等价性，①满足初始条件的解为③式

9、试用拉普拉斯变换法解第5题和第6题。
证明：略。

10、　　求下列初值问题的解：

$a)\begin{cases}x_1'+x_2'=0\\x_1'-x_2'=1\end{cases} \qquad \varphi_1(0)=1,\varphi_2(0)=0$

$b)\begin{cases}x_1''+3x_1'+2x_1+x_2'+x_2=0\\x_1'+2x_1+x_2'-x_2=0\end{cases}$

$\varphi_1(0)=1,\varphi_1'(0)=-1,\varphi_2(0)=0$

$c)\begin{cases}x_1''-m^2x_2=0\\x_2''+m^2x_1=0\end{cases}$

$x_1(0)=\eta_1,x_1'(0)=\eta_2,x_2(0)=\eta_3,x_2'(0)=\eta_4$

解：a)根据方程解得$x_1'=\frac{1}{2}$，　$x_2'=-\frac{1}{2}$

$\therefore x_1=\frac{1}{2}t+c_1$，$x_2=-\frac{1}{2}t+c_2$

$\because \varphi_1(0)=1$

$\therefore \frac{1}{2}\times 0+c_1=1 \quad \therefore c_1=1 \quad \therefore x_1=\frac{1}{2}\mathrm{t}+1$

$\because \varphi_2(0)=0$

$\therefore -\frac{1}{2}\times 0+c_2=0 \quad \therefore c_2=0 \quad \therefore x_2=-\frac{1}{2}\mathrm{t}$

综上：$x_1=\frac{1}{2}\mathrm{t}+1$

$x_2=-\frac{1}{2}\mathrm{t}$

b）对方程两边取拉普拉斯变换，得

$$\begin{cases} s^2X_1(s) - s+1 + 3(sX_1(s)-1) + 2X_1(s) + sX_2(s) + X_2(s) = 0 \\ sX_1(s) -1+2X_1(s) + sX_2(s) - X_2(s) = 0 \end{cases}$$

解得

$$X_1(s)=\frac{s^2-3}{(s+1)(s+2)(s-2)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{s-2}$$

$$X_2(s)=\frac{-s-2}{(s+1)(s+2)(s-2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s-2}$$

$$\therefore \begin{aligned} \varphi_1(t)&=\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{12}e^{2t} \\ \varphi_2(t)&=\frac{1}{3}(e^{-t}-e^{2t}) \end{aligned}$$

c）对方程两边取拉普拉斯变换，得

$$\begin{cases} s^2X_1(s) - s\eta_1 - \eta_2 - m^2X_2(s) = 0 \\ s^2X_2(s) - s\eta_3 - \eta_4 + m^2X_2(s) = 0 \end{cases}$$

$$\text{即}\begin{cases} s^2X_1(s) - m^2X_2(s) = s\eta_1 + \eta_2 \\ m^2X_1(s) + s^2X_2(s) = s\eta_3 + \eta_4 \end{cases}$$

$$\text{解得}X_1(s)=\frac{\eta_1 \mathrm{s}^3+\eta_2 s^2+m^2 s\eta_3+\eta_4 m^2}{s^4+m^4}$$

$$X_2(s)=\frac{\eta_3\mathrm{s}^3+\eta_4 s^2-m^2\eta_1\mathrm{s}-m^2\eta_2}{s^4+m^4}$$

$$\varphi_1(t)=[(\frac{1}{2}\eta_1-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2-\frac{1}{2}\eta_3+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t]\cdot e^{-\frac{m}{2}t}$$
$$+[(\frac{1}{2}\eta_1+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t]\cdot e^{\frac{m}{2}t}$$
$$\varphi_2(t)=[(-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+(\frac{1}{2}\eta_1-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t]\cdot e^{-\frac{m}{2}t}$$
$$+[(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+(-\frac{1}{2}\eta_1-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t]\cdot e^{\frac{m}{2}t}$$

11、 假设 y＝$\varphi(x)$ 是二阶常系数线性微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''+ay'+by=0 \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$$

的解，试证 $y=\int_0^x \varphi(x-t)f(t)dt$ 是方程

$$y''+ay'+by=f(x)$$

的解，这里 f（x）为已知连续函数。

证明：y＝$\int_0^x \varphi(x-t)f(t)dt$

$$\because y'=\varphi(0)f(x)+\int_0^x \varphi'(x-t)f(t)dt=\int_0^x \varphi'(x-t)f(t)dt$$

$$y''=\int_0^x \varphi^n(x-t)f(t)dt+\varphi'(0)f(x)=\int_0^x \varphi^n(x-t)f(t)dt+f(x)$$

$\therefore$

$$y''+ay'+by=\int_0^x \varphi''(x-t)f(t)dt+f(x)+a\int_0^x \varphi'(x-t)f(t)dt+b\int_0^x \varphi(x-t)f(t)dt$$
$$=\int_0^x[\varphi''(x-t)+a\varphi'(x-t)+b\varphi'(x-t)+b\varphi(x-t)]f(t)dt+f(x)$$
$$=f(x)$$

02412－04 丁晶晶
02412－05 徐雪輝

习题 6.3

1. 试求出下列方程的所有奇点,并讨论相应的驻定解的稳定性态

(1) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(1-x-y) \\ \dfrac{dy}{dt} = 1/4y(2-3x-y) \end{cases}$$

解: 由 $\begin{cases} x(1-x-y)=0 \\ 1/4y(2-3x-y)=0 \end{cases}$ 得奇点(0,0),(0,2),(1,0),(1/2,1/2)

对于奇点(0,0), A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ 由 $|\lambda E - A|$=0 得 λ_1=1>0, λ_2=1/2>0

所以不稳定

对于奇点(0,2),令 X=x,Y=y-2, 则 A=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ 得 λ_1=-1, λ_2=-1/2

所以渐进稳定

同理可知,对于奇点(1,0),驻定解渐进稳定

对于奇点(1/2,1/2),驻定解渐进不稳定

(2) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 9x-6y+4xy-5x^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x-6y-5xy+4y^2 \end{cases}$$

解: 由 $\begin{cases} 9x-6y+4xy-5x^2=0 \\ 6x-6y-5xy+4y^2=0 \end{cases}$ 得奇点(0,0),(1,2),(2,1)

对于奇点(0,0)可知不稳定

对于奇点(1,2)可知不稳定

对于奇点(2,1)可知渐进稳定

(3) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x+\mu(y-x^2), \mu>0 \end{cases}$$

解:由 $\begin{cases} y=0 \\ -x+\mu(y-x^2)=0, \mu>0 \end{cases}$ 得奇点(0,0),(-1/ μ ,0)

对于奇点(0,0) 驻定解不稳定

对于奇点(-1/ μ ,0) 得驻定解不稳定

(4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x \\ \dfrac{dy}{dt} = y - x^2 - (x-y)(y^2 - 2xy + 2/3x^3) \end{cases}$

解: 由 $\begin{cases} y - x = 0 \\ y - x^2 - (x-y)(y^2 - 2xy + 2/3x^3) = 0 \end{cases}$ 得奇点(0,0),(1,1)

对于奇点(0,0)得驻定解不稳定

对于奇点(1,1)得驻定渐进稳定

2. 研究下列纺车零解的稳定性

(1) $\dfrac{d^3x}{dt^3} + 5\dfrac{d^2x}{dt^2} + 6\dfrac{dx}{dt} + x = 0$

解: a_0 =1>0, a_1=5>0, a_2 =6>0

$\Delta_2 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$ >0 a_3 =1>0 所以零解渐进稳定

(2) $\dfrac{dx}{dt} = \mu x - y, \dfrac{dy}{dt} = \mu y - z, \dfrac{dz}{dt} = \mu z - x$($\mu$为常数)

解:A=$\begin{pmatrix} \mu & -1 & 0 \\ 0 & \mu & -1 \\ -1 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ 由$|\lambda E - A|$=0 得 $\lambda^3 - 3\mu\lambda^2 + 3\mu^2\lambda - \mu^3 + 1 = 0$

得 $\lambda_1 = \mu - 1$, $\lambda_2 = \mu + \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

i) μ +1/2<0 即 μ <-1/2,渐进稳定

ii) μ +1/2>0 即 μ >-1/2 不稳定

iii) μ +1/2=0 即 μ =-1/2 稳定