

2.2 动量定理 动量守恒定律

一、质点的动量定理

由牛顿运动定律:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

冲量: $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$ 表示力对时间的累积量。

2.2 动量定理 动量守恒定律

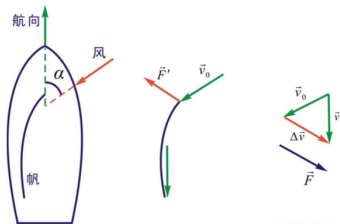
$$\vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

动量定理: 质点在运动过程中, 所受合外力的冲量等于质点动量的增量。

讨论:

- (1) 冲量 \vec{I} 的方向和大小是由所有微分冲量 $\vec{F}dt$ 的合矢量来决定。动量定理反映了力在时间上的累积作用对质点产生的效果。

逆风行舟的分析:



2.2 动量定理 动量守恒定律

(2) 动量定理是矢量方程，可以写成分量形式

$$I_x = \int_{t_0}^t F_x dt = mv_x - mv_{0x}$$

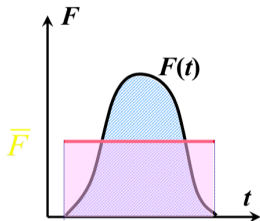
$$I_y = \int_{t_0}^t F_y dt = mv_y - mv_{0y}$$

$$I_z = \int_{t_0}^t F_z dt = mv_z - mv_{0z}$$

2.2 动量定理 动量守恒定律

(3) 在 冲击、碰撞问题中估算平均冲力

$$\begin{aligned}\overline{\vec{F}} &= \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \vec{F} dt \\ &= \frac{\vec{p} - \vec{p}_0}{t - t_0}\end{aligned}$$



(4) 当物体质量改变时，使用动量定理处理很方便。

(5) 动量定理是牛顿第二定律的积分形式，只适用于惯性系。

2.2 动量定理 动量守恒定律

例2.2-1 质量 $m = 0.3\text{t}$ 的重锤，从高度 $h = 1.5\text{m}$ 处自由落到受锻压的工件上，工件发生形变。如果作用的时间(1) $\tau = 0.1\text{s}$, (2) $\tau = 0.01\text{s}$, 试求锤对工件的平均冲击力。

解：以重锤为研究对象，分析受力，作受力图。

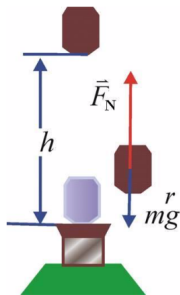
解法一：研究锤对工件的作用过程，在竖直方向利用动量定理，取竖直向上为正。

$$(\bar{F}_N - mg)\tau = 0 - (-mv_0) = m\sqrt{2gh}$$

$$\bar{F}_N = mg + m\sqrt{2gh}/\tau$$

$$(1)\tau = 0.1\text{ s}, \bar{F}_N = 1.92 \times 10^5\text{ N}$$

$$(2)\tau = 0.01\text{ s}, \bar{F}_N = 1.9 \times 10^6\text{ N}$$



$$\bar{F}_N \gg mg$$

2.2 动量定理 动量守恒定律

解法二：研究锤从自由下落到静止的整个过程，其动量变化为零。

重力作用时间为 $\tau + \sqrt{2h/g}$ ，支持力的作用时间为 τ

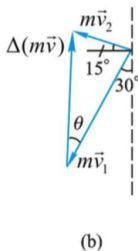
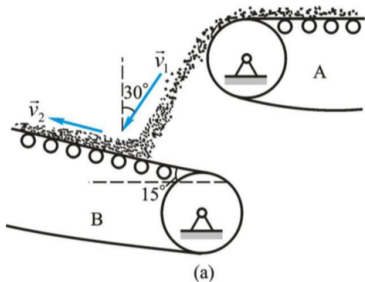
由动量定理：

$$\overline{F}_N \tau - mg(\tau + \sqrt{2h/g}) = 0$$

$$\overline{F}_N = mg + m\sqrt{2gh}/\tau$$

2.2 动量定理 动量守恒定律

例2.2-2 矿砂从传送带A落到另一传送带B，其速度 $v_1 = 4 \text{ m/s}$ ，方向与竖直方向成 30° 角，而传送带B与水平成 15° 角，其速度 $v_2 = 2 \text{ m/s}$ 。如传送带的运送量恒定，设为 $k = 20 \text{ kg/s}$ ，求落到传送带B上的矿砂在落上时所受到的力。



解：设在某极短的时间 Δt 内落在传送带上矿砂的质量为 m ，即 $m = k\Delta t$ ，这些矿砂动量的增量为

$$\Delta(m\vec{v}) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

2.2 动量定理 动量守恒定律

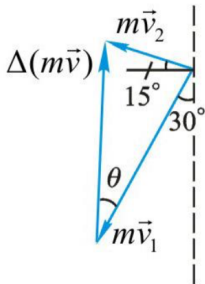
其大小为

$$\begin{aligned} |\Delta(m\vec{v})| &= m\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos 75^\circ} \\ &= 3.98m = 3.98k\Delta t \end{aligned}$$

设这些矿砂在时间 Δt 内所受的平均作用力为 \overline{F} ,由动量定理

$$\begin{aligned} \overline{F}\Delta t &= |\Delta(m\vec{v})| \\ \overline{F} &= \frac{|\Delta(m\vec{v})|}{\Delta t} = 79.6 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\text{方向: } \frac{|\Delta(m\vec{v})|}{\sin 75^\circ} = \frac{|m\vec{v}_2|}{\sin \theta}, \quad \theta = 29^\circ$$



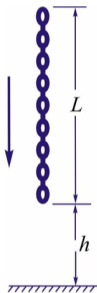
2.2 动量定理 动量守恒定律

例2.2-3 质量为 m 的均质链条，全长为 L ，手持其上端，使下端离地面的高度为 h 。然后放手让它自由下落到上。求链条落到地上的长度为 l 时，地面所受链条作用力的大小。

解：设 t 时刻长 x 的链条已落到地面 dt 时间内将有 $dm = (m/L)dx$ 的链条落到地面对 dm 应用动量定理，取向上为正：

$$Fdt = 0 - \left(-\frac{m}{L}dx \cdot v\right)$$

$$F = \frac{m}{L}v^2$$



地面受到的冲力： $F' = -F = -\frac{m}{L}v^2$ ，方向向下。

2.2 动量定理 动量守恒定律

自由下落速度: $v^2 = 2g(x + h)$

$$F' = -\frac{m}{L}2g(x + h)$$

考虑到已落地部分链条的重力

地面所受链条作用力大小为

$$(|F'| + \frac{m}{L}xg)\Big|_{x=l} = \frac{m}{L}(3l + 2h)g$$

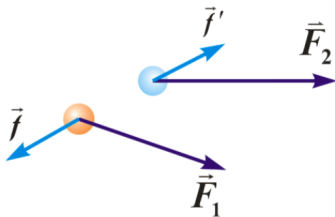
2.2 动量定理 动量守恒定律

二、质点系的动量定理

考虑两个质点的系统:

$$(\vec{F}_1 + \vec{f})dt = d\vec{p}_1$$

$$(\vec{F}_2 + \vec{f}')dt = d\vec{p}_2$$



两式相加

$$(\vec{F}_1 + \vec{f} + \vec{F}_2 + \vec{f}')dt = d\vec{p}_1 + d\vec{p}_2$$

\vec{f} , \vec{f}' 是一对作用力和反作用力

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)dt = d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

2.2 动量定理 动量守恒定律

扩展到有*i*个质点的系统

$$(\sum_i \vec{F}_i) dt = d(\sum_i \vec{p}_i)$$

对从 t_1 到 t_2 时间内积分

$$\sum_i \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i dt = \sum_i \vec{p}_{i2} - \vec{p}_{i1} = \sum_i m_i \vec{v}_{i2} - \sum_i m_i \vec{v}_{i1}$$

质点系**总动量的增量**，等于作用在质点上**所有外力**在同一时间内的**冲量的矢量和**。

2.2 动量定理 动量守恒定律

三、动量守恒定律

根据质心运动定律: $\sum \vec{F}_i = m\vec{a}_C$

$$\text{若 } \sum \vec{F}_i = 0 \quad \text{则 } \vec{a}_C = 0$$

$$\text{即 } \vec{v}_C = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m} = \text{常矢量}$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_C = \text{常矢量}$$

如果系统所受的外力之和为零,则系统的总动量保持不变,这个结论叫做**动量守恒定律**.

2.2 动量定理 动量守恒定律

讨论:

- (1) 动量守恒是指系统动量总和不变,但系统内各个质点的动量可以变化,通过内力进行传递和交换。
- (2) 当外力作用远小于内力作用时,可近似认为系统的总动量守恒。(如:碰撞、打击过程等)
- (3) 分量式

$$p_x = \sum m_i v_{ix} = \text{常量} \quad (\text{当 } \sum F_{ix} = 0 \text{ 时})$$

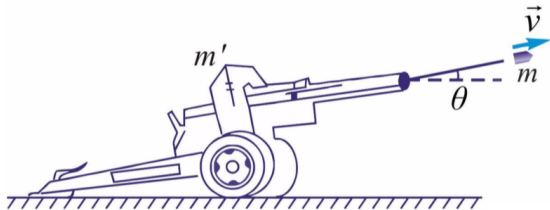
$$p_y = \sum m_i v_{iy} = \text{常量} \quad (\text{当 } \sum F_{iy} = 0 \text{ 时})$$

$$p_z = \sum m_i v_{iz} = \text{常量} \quad (\text{当 } \sum F_{iz} = 0 \text{ 时})$$

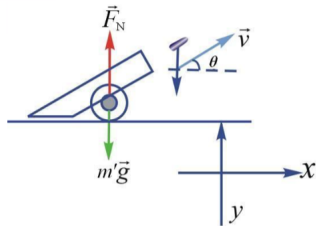
- (4) 定律不仅适合宏观物体,同样也适合微观领域。

2.2 动量定理 动量守恒定律

例2.2-4 如图所示,设炮车以仰角 θ 发射一炮弹,炮车和 炮弹的质量分别为 m' 和 m , 炮弹的出口速度为 v , 求 炮车的反冲速度 v' 。炮车与地面间的摩擦力不计。



解:选取炮车和炮弹组成系统内、外力分析。炮车与地面间的摩擦力不计,系统水平方向动量守恒。



2.2 动量定理 动量守恒定律

系统水平方向动量守恒:

$$-m'v' + m(v \cos \theta - v') = 0$$

得炮车的反冲速度为

$$v' = \frac{m}{m + m'} v \cos \theta$$

思考: 竖直方向动量守恒吗?

2.2 动量定理 动量守恒定律

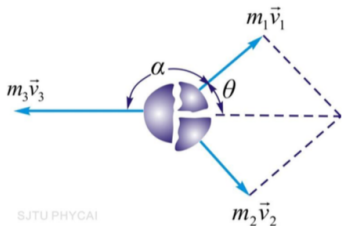
例2.2-5 一个静止物体炸成三块,其中两块质量相等,且以相同速度30m/s沿相互垂直的方向飞开,第三块的质量恰好等于这两块质量的总和。试求第三块的速度(大小和方向)。

解: 炸裂时爆炸力是物体内力,它远大于重力,故 在爆炸中,可认为动量守恒。

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 = 0$$

$$-m_3 \vec{v}_3 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$(m_3 v_3)^2 = (m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2$$



2.2 动量定理 动量守恒定律

$$(m_3 v_3)^2 = (m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2$$

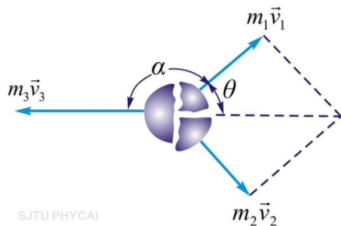
$$\because m_1 = m_2 = m, \quad m_3 = 2m$$

$$\therefore v_3 = \frac{1}{2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{30^2 + 30^2} = 21.2(\text{m/s})$$

$$\tan \theta = \frac{v_2}{v_1} = 1, \quad \theta = 45^\circ,$$

$$\alpha = 180^\circ - \theta = 135^\circ$$

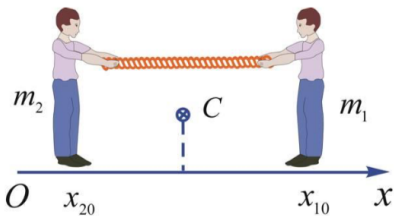
即 \vec{v}_1 和 \vec{v}_3 及 \vec{v}_2 都成 135° ,
且三者都在同一平面内.



2.2 动量定理 动量守恒定律

例2.2-6 质量为 m_1 和 m_2 的两个小孩，在光滑水平冰面上用绳彼此拉对方。开始时静止，相距为 l 。问他们将在何处相遇？

解：把两个小孩和绳看作一个系统，水平方向动量守恒。任取两个小孩连线上一点为原点，向右为 x 轴为正向。



设开始时小孩的坐标分别为 x_{10} 、 x_{20} ，在任意时刻的速度分别为 v_1 为 v_2 ，坐标为 x_1 和 x_2 。

由运动学关系：

$$x_1 = x_{10} + \int_0^t v_1 dt, \quad x_2 = x_{20} + \int_0^t v_2 dt$$

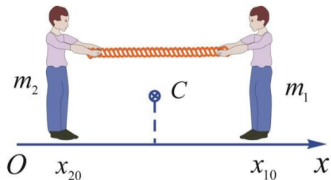
2.2 动量定理 动量守恒定律

$$x_1 = x_{10} + \int_0^t v_1 dt, \quad x_2 = x_{20} + \int_0^t v_2 dt \quad (1)$$

相遇时: $x_1 = x_2$

$$x_{10} + \int_0^t v_1 dt = x_{20} + \int_0^t v_2 dt$$

由动量守恒: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$



$$x_{10} - x_{20} = \int_0^t -\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)v_1 dt = -\frac{m_1 + m_2}{m_2} \int_0^t v_1 dt$$

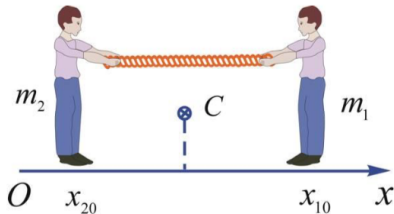
$$\int_0^t v_1 dt = \frac{m_2 x_{20} - m_2 x_{10}}{m_1 + m_2} \text{ 代入式(1)得}$$

2.2 动量定理 动量守恒定律

$$x_1 = x_{10} + \frac{m_2 x_{20} - m_2 x_{10}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 x_{20} + m_1 x_{10}}{m_1 + m_2}$$

相遇时有

$$x_1 = x_2 = x_C$$



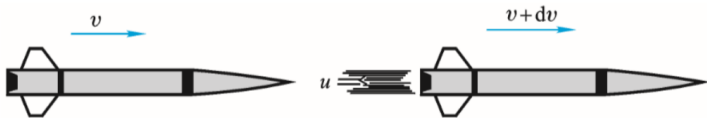
结果表明，两小孩在纯内力作用下，将在他们共同的质心相遇。上述结果也可直接由质心运动定律求出。

2.2 动量定理 动量守恒定律

*四、火箭飞行

(1) 火箭的速度

设 t 时刻, 火箭质量为 m , 速度为 v (向前), 在 dt 内, 喷出气体 $dm(< 0)$, 喷气相对火箭的速度(称喷气速度)为 u (向后), 使火箭的速度增加了 dv 。



若不计重力和其他外力, 由动量守恒定律可得

$$mv = (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v + dv - u)$$

略去二阶无穷小量: $dv = -u \frac{dm}{m}$

2.2 动量定理 动量守恒定律

$$dv = -u \frac{dm}{m}$$

设 u 是一常量,

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{m_1}^{m_2} -u \frac{dm}{m}, \quad v_2 - v_1 = u \ln \frac{m_1}{m_2}$$

设火箭开始飞行的速度为零, 质量为 m_0 , 燃料烧尽时, 火箭剩下的质量为 m , 此时火箭能达到的速度是

$$v = \int_{m_0}^m -u \frac{dm}{m} = u \ln \frac{m_0}{m}$$

2.2 动量定理 动量守恒定律

多级火箭:

$$v_1 = u_1 \ln N_1,$$

$$v_2 - v_1 = u_2 \ln N_2,$$

$$v_3 - v_2 = u_3 \ln N_3,$$

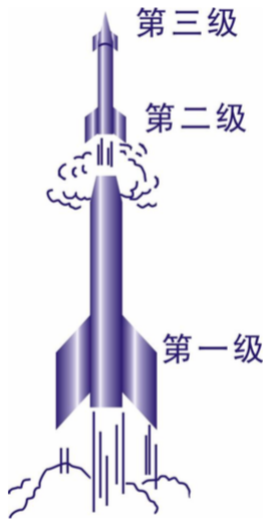
.....

最终速度:

$$v_n = \sum_{i=1}^n u_i \ln N_i$$

u_i — 第*i*级火箭喷气速率

N_i —第*i*级火箭质量比



2.2 动量定理 动量守恒定律

(2) 火箭的推力

取 t 时刻喷出的燃气 $-dm$ 为研究对象, 其速度 v , $t + dt$ 时刻速度为 $v + dv - u$

由动量定理

$$f_{\text{gas}} dt = (-dm)(v + dv - u) - (-dm)v$$

略去二阶无穷小量: $f_{\text{gas}} = u \frac{dm}{dt}$

$f_{\text{gas}} < 0$: 燃气受力向后

火箭的推力 $f_{\text{gas}} = -u \frac{dm}{dt}$, 向前