华东理工大学 2013 - 2014 学年第二学期

《高等数学(下)学分》期末考试试卷 (A) 2014.7

注意：试卷共三大张，十大题

一、解下列各题（每题 5 分，共 10 分）

1、求微分方程 $y''+6y'+9y=0$ 的通解。

解：特征方程 $\lambda^2+6\lambda+9=0$，$\lambda=-3$ 3 分

则通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}$。 2 分

2、求微分方程 $(y-x^3)dx-2xdy=0$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{5}$ 的特解。

解：方程化为 $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x}=-\frac{x^2}{2}$ 为一阶线性方程， 2 分

则 $y=x^{\frac{1}{2}}(C-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}})$， 2 分

再由 $y(1)=-\frac{1}{5}$，$C=0$

因此所求特解为 $y=-\frac{1}{5}x^3$。 1 分

二、解下列各题（每题 6 分，共 12 分）

1、计算函数 $u=2xy-3z^2$ 在点 $M(0,-1,1)$ 处沿方向 $\vec{l}=\{2,-1,-2\}$ 的方向导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M$。

解：$\nabla u=\{2y,2x,-6z\}\Big|_M=\{-2,0,-6\}$， 2 分

则 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\nabla u\cdot\frac{\vec{l}}{|\vec{l}\,|}$ 3 分

$=\frac{8}{3}$ 1 分

2、求过点 $M(1,0,3)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 以及 $y-3z=2$ 均平行的直线方程。

解：$\vec{l}=\{1,0,2\}\times\{0,1,-3\}=\{-2,3,1\}$， 3 分

因此所求直线方程 $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-3}{1}$ 3 分

三、（每题 6 分，共 12 分）（1）（8，9 学分）计算二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1+x^2y^2}{x^2+y^2}$

解：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1+x^2y^2}{x^2+y^2}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} + \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\frac{(x^2+y^2)}{2}}{x^2+y^2} + \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2} + \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$　　　　3 分

$0 \le \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \le \dfrac{[\frac{1}{2}(x^2+y^2)]^2}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2}{4}$，

山夹逼定理知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+x^2+y^2}-e^{x^2y^2}}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}$。　3 分

（11 学分）计算积分 $\oint\limits_{L} \dfrac{xdy-ydx}{2x^2+y^2}$，其中 L 为曲线 $x^2+y^2=1$，方向为逆时针方向。

解：首先当 $(x,y)\ne(0,0)$ 时，有 $P_y = Q_x$，取椭圆 C: $2x^2+y^2=r^2$,方向为逆时针方向，并使得椭圆 C 完全在 L 内，又设平面区域 D 为曲线 $x^2+y^2=1$ 内去掉 $2x^2+y^2=r^2$ 的部分。

因此山 Green 公式，$\oint\limits_{L+C^-} \dfrac{xdy-ydx}{2x^2+y^2} = 0$，　　　　3 分

因此 $\oint\limits_{L} \dfrac{xdy-ydx}{2x^2+y^2} + \oint\limits_{C^-} \dfrac{xdy-ydx}{2x^2+y^2} = 0$

$\oint\limits_{L} \dfrac{xdy-ydx}{2x^2+y^2} - \oint\limits_{C} \dfrac{xdy-ydx}{2x^2+y^2} = 0$，

所以 $\oint\limits_{L} \dfrac{xdy-ydx}{2x^2+y^2} = \oint\limits_{L} \dfrac{xdy-ydx}{2x^2+y^2} = \oint\limits_{L} \dfrac{xdy-ydx}{r^2} = \dfrac{1}{r^2} \iint\limits_{2x^2+y^2\le r^2} 2dxdy = \dfrac{2\pi \frac{r}{\sqrt{2}} r}{r^2} = \sqrt{2}\pi$。3 分

（2）设 $u = f(xy, yz, zx)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 u_{xy}。

解：$u_x = yf_1 + zf_3$，　　　　3 分

$u_{xy}=f_1+y[xf_{11}+zf_{12}]+z[xf_{31}+zf_{32}]=f_1+yxf_{11}+yzf_{12}+zxf_{31}+z^2f_{32}$ 3 分

四、（每题 6 分，共 12 分）1、求椭球面$x^2+2y^2+3z^2=21$切平面π的方程，使π过已知直线$L:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{-1}$。

解：设椭球面上所求点为(x_0,y_0,z_0)，并记$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$，则切平面的法向量为$\{x_0,2y_0,3z_0\}$，故切平面为$x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+3z_0(z-z_0)=0$，即

$x_0x+2y_0y+3z_0z=21$， 2 分

又$L:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{-1}$在且平面内，因此

$\{x_0,2y_0,3z_0\}.\{2,1,-1\}=0$，即$2x_0+2y_0-3z_0=0$ 2 分

以及$6x_0+6y_0+\dfrac{3}{2}z_0=21$。

注意到(x_0,y_0,z_0)在$x^2+2y^2+3z^2=21$上，即${x_0}^2+2{y_0}^2+3{z_0}^2=21$，

解之得，$\begin{cases}x_0=3\\y_0=0\\z_0=2\end{cases}$ 和$\begin{cases}x_0=1\\y_0=2\\z_0=2\end{cases}$， 1 分

故所求切平面方程为$x+2z=7$和$x+4y+6z=21$。 1 分

2、计算$u=3x+4y$在$x^2+4y^2=1$下的最大最小值。

解：构造拉格朗日函数$L=3x+4y+\lambda(x^2+4y^2-1)$ 3 分

则由$L_x=3+2x\lambda=0$，$L_y=4+8y\lambda=0$，$L_\lambda=x^2+4y^2-1=0$，可得驻点

$(-\dfrac{3}{\sqrt{13}},-\dfrac{1}{\sqrt{13}})$与$(\dfrac{3}{\sqrt{13}},\dfrac{1}{\sqrt{13}})$， 2 分

代入u可知，当$x=-\dfrac{3}{\sqrt{13}},y=-\dfrac{1}{\sqrt{13}}$时$u=3x+4y$取到最小值$-\sqrt{13}$；当

$x=\dfrac{3}{\sqrt{13}},y=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$时$u=3x+4y$取到最大值$\sqrt{13}$。 1 分

五、（每题 6 分，共 12 分）

1、计算积分 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{y}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx$

解：交换积分次序得原式 $= \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{x^2}^{x} e^{\frac{y}{x}} dy$ 3 分

$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} x(e - e^x) dx$ 2 分

$= \frac{3e}{8} - \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}$ 1 分

2、计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dxdy$，其中 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1, x + y \ge 1\}$。

解：利用极坐标变换，$\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} \frac{\rho(\cos\theta + \sin\theta)\rho d\rho}{\rho^2}$ 4 分

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta + \cos\theta - 1) d\theta = 2 - \frac{\pi}{2}$。 2 分

六、（每题 6 分，共 12 分）（8,9 学分）1、计算曲面 $z = 2x^2 + y^2$ 与 $z = 2 - y^2$ 所围立体的体积。

解：首先容易计算出交线的投影为 $x^2 + y^2 = 1$，因此所求体积为

$V = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 1} (2 - y^2 - 2x^2 - y^2) dxdy$ 4 分

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2 - 2\rho^2) \rho d\rho = \pi$。 2 分

（11 学分）计算积分 $\iint\limits_{\Sigma} xydydz + yzdzdx + (1+zx)dxdy$，其中 Σ 为 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的上侧。

解：取 $\Sigma': z = 0 (x^2 + y^2 \le 1)$ 方向取下侧，则山 Gauss 公式，

$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma'} = \iiint\limits_{\Omega} (x + y + z) dV$ 2 分

$$=\iiint_{\Omega} zdV=\int_0^1 zdz\iint_{x^2+y^2\le 1-z^2} dxdy$$

$$=\int_0^1 \pi(1-z^2)zdz=\frac{\pi}{4}\text{。}$$ 2 分

而 $\iint_{\Sigma'} xydydz+yzdzdx+(1+zx)dxdy=-\pi$，故

$$\iint_{\Sigma} xydydz+yzdzdx+zxdxdy=\frac{\pi}{4}-(-\pi)=\frac{5\pi}{4}\text{。}$$ 2 分

2、设方程组 $\begin{cases}\sin z+xy=0\\ e^y-x^2+3z=0\end{cases}$ 确定函数 $z=z(x), y=y(x)$，求 $\frac{dz}{dx}$。

解：对方程组关于 x 求导，得到 $\cos z\frac{dz}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0$　　2 分

以及 $e^y\frac{dy}{dx}-2x+3\frac{dz}{dx}=0$，　　2 分

解此方程组得，$\frac{dz}{dx}=\frac{2x^2+ye^y}{3x-e^y\cos z}$。　　2 分

七、（本题 8 分）

(8 学分) 等腰三角形薄板，垂直地沉入水中，其底边与水面相齐，已知薄板的底边为 $2b$（米），高为 h（米），计算薄板一侧所受的水压力。

解：取底边中点为原点,垂直向下为x轴正向,$\forall[x,x+dx]\subset[0,h]$,对应的

$$dF=P\mathrm{d}A=(\rho gx)\left[2b\left(1-\frac{x}{h}\right)\mathrm{d}x\right]\quad,$$ 5 分

$$F=2\rho gb\int_0^h x\left(1-\frac{x}{h}\right)\mathrm{d}x\ =\frac{1}{3}\rho gbh^2$$ 3 分

(9 学分)求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域与和函数。

解：首先容易求得收敛域为 $(-1,1)$，　　2 分

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$，

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})'-\frac{1}{1-x}$$ 3 分

$$=2(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1})'-\frac{1}{1-x}$$

$$=2(\frac{x}{1-x})-\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2}$$ 3 分

（11 学分）计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V$，其中 Ω：$\sqrt{3(x^2+y^2)}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}$ 。

解法一(先重后单) $I=\int_0^{\sqrt{3}}dz\iint\limits_{D_z}zdxdy+\int_{\sqrt{3}}^{2}dz\iint\limits_{D_z}zdxdy$ 4 分

$$=\int_0^{\sqrt{3}}z[\pi(\tfrac{2}{\sqrt{3}})^2]dz+\int_{\sqrt{3}}^{2}z[\pi(\sqrt{4-z^2})^2]dz$$

$$=\tfrac{\pi}{12}z^4\Big|_0^{\sqrt{3}}+\pi[2z^2-\tfrac{1}{4}z^4]\Big|_{\sqrt{3}}^{2}=\pi.$$ 4 分

解法二(柱面坐标系) $I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho d\rho\int_{\sqrt{3}\rho}^{\sqrt{4-\rho^2}}zdz=\pi$

解法三(球面坐标系) $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi d\varphi\int_0^2(r\cos\varphi)r^2dr=\pi$ 。

八、（本题 8 分）

（8 学分）利用定积分计算椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积，其中 $a,b,c>0$ 。

解：首先计算用 $z=z_0$ 去截椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 所得的面积 $S(z_0)$，容易看出图形为椭

圆：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{{z_0}^2}{c^2}$，因此，$S(z_0)=\pi ab(1-\frac{{z_0}^2}{c^2})$， 4 分

所以椭球体体积为 $V=\int_{-c}^{c}S(z)dz=\pi ab\int_{-c}^{c}(1-\frac{z^2}{c^2})dz$ 2 分

$$=\frac{4\pi abc}{3}。$$ 2 分

（9 学分）判别下列级数的敛散性：(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^n}{(n!)^2}$；(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$ 。

解：（1）用比值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}}{\frac{3^n n^n}{[n!]^2}}$$ 2 分

$=\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{3}{(n+1)}\dfrac{(n+1)^n}{n^n}]=0<1$，　　　　1 分

所以级数收敛。　　　　1 分

（2）$\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx\le\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}dx=\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{n})^{\frac{3}{2}}$，　　　　3 分

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{n})^{\frac{3}{2}}$收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$也收敛。　　1 分

（11 学分）计算曲面$\mathrm{z}=\sqrt{1-x^2-y^2}$的形心。

解：首先山对称性，$\bar{x}=\bar{y}=0$，　　　　2 分

$$\bar{z}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}zdS}{\iint\limits_{\Sigma}dS},$$　　　　2 分

而$dS=\dfrac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$　　　　2 分

上式$=\dfrac{1}{2\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le1}\sqrt{1-x^2-y^2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\dfrac{1}{2}$。

所以，所求形心为$(0,0,\dfrac{1}{2})$。　　　　2 分

九、（本题 8 分）以x为未知函数，y为自变量，变换方程$y''+(x+e^{2y})(y')^3=0$，并求共通解。

解：$y'=\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$，$y''=-\dfrac{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}}{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^3}$，　　　　2 分

原方程可化为$-\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+x+e^{2y}=0$，

即$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}-x=e^{2y}$，　　　　2 分

先求对应齐次方程的通解为$x=c_1e^y+c_2e^{-y}$，

再写出$\dfrac{d^2x}{dy^2}-x=e^{2y}$的一个特解形式为$x=Ce^{2y}$， 2 分

代入求得$C=\dfrac{1}{3}$

因此，方程通解为$x=c_1e^y+c_2e^{-y}+\dfrac{1}{3}e^{2y}$。 2 分

十、选择题

1、设函数$z=f(x,y)$在点$(0,0)$有定义，且$f_x(0,0)=3$，$f_y(0,0)=1$，则下列三个结论

(1) $dz\Big|_{(0,0)}=3dx+dy$,

(2) 函数$z=f(x,y)$在点$(0,0)$处沿$\{1,1\}$方向的方向导数为$2\sqrt{2}$,

(3) 曲线$\begin{cases} z=\mathrm{f(x,y)} \\ \mathrm{y}=0 \end{cases}$在点$(0,0,\mathrm{f}(0,0))$的切向量为$\{1,0,3\}$,

正确的个数由几个？ (   )

(A) 0 个； (B)1 个；(C) 2 个；(D) 3 个.

答 B

2、(8 学分) 下列广义积分收敛的是 (   )

(A) $\int_e^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}dx$； (B) $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}dx$；(C) $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^2}dx$；(D) $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$.

(9 学分) 设$u_n=(-1)^n\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$，则级数 (   )

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}{u_n}^2$都收敛； (B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}{u_n}^2$都发散；

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛而$\sum_{n=1}^{\infty}{u_n}^2$发散； (D) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散而$\sum_{n=1}^{\infty}{u_n}^2$收敛.

(11 学分) 设函数$f(x)=x^2$，$0\le x<1$，而$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，$-\infty<x<+\infty$，

其中$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$，$n=1,2,3,\cdots$，则$S(-\dfrac{1}{2})=$ (   )

(A) $\dfrac{1}{2}$； (B) $\dfrac{1}{4}$； (C) $-\dfrac{1}{4}$； (D) $-\dfrac{1}{2}$.

答: C