Chapter3 运输规划(Transportation Problem)

本章主要内容:

- 运输规划问题的数学模型
- 表上作业法
- 运输问题的应用

运输规划问题的数学模型

例3.1 某公司从两个产地A_1、A_2将物品运往三个销地B_1, B_2, B_3，各产地的产量、各销地的销量和各产地运往各销地每件物品的运费如下表所示，问：应如何调运可使总运输费用最小?

	B1	B2	B3	产量
A1	6	4	6	200
A2	6	5	5	300
销量	150	150	200	

运输规划问题的数学模型

解：产销平衡问题：总产量 = 总销量 = 500

设 x_{ij} 为从产地A_i运往销地B_j的运输量，得到下列运输量表：

	B1	B2	B3	产量
A1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	200
A2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	300
销量	150	150	200	

$$\text{Min}\quad C = 6x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 6x_{21} + 5x_{22} + 5x_{23}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\ & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} = 300 \\
& x_{11} + x_{21} = 150 \\
& x_{12} + x_{22} = 150 \\
& x_{13} + x_{23} = 200 \\
& x_{ij} \geq 0 \ (\, i = 1、2；\ j = 1、2、3)
\end{aligned}$$

运输规划问题的数学模型

运输问题的一般形式：产销平衡

A_1、 A_2、…、 A_m 表示某物资的m个产地； B_1、B_2、…、B_n 表示某物质的n个销地；a_i 表示产地A_i的产量； b_j 表示销地B_j 的销量； c_{ij} 表示把物资从产地A_i运往销地B_j的单位运价。设 x_{ij} 为从产地A_i运往销地B_j的运输量，得到下列一般运输量问题的模型：

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & i = 1,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & j = 1,\cdots,n \\ x_{ij} \geq 0, & i = 1,\cdots,m; j = 1,\cdots,n \end{cases}$$

运输规划问题的数学模型

已知资料如下：

c_{ij}为A_{ij}到B_{ij}的单位运价

销地 / 产地	B_1	B_2	…	B_n	产量
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=i}^{n} b_j$

产销平衡

运输规划问题的数学模型

当产销平衡时，其模型如下：

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum x_{ij} = a_i \\ \sum x_{ij} = b_j \qquad (\sum a_i = \sum b_j) \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

运输规划问题的数学模型

当产大于销时，其模型如下：

$$\min Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum x_{ij}\le a_i \\ \sum x_{ij}=b_j \qquad (\sum a_i>\sum b_j) \\ x_{ij}\ge 0\end{cases}$$

运输规划问题的数学模型

当产小于销时，其模型如下：

$$\min Z = \sum\sum c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum x_{ij} = a_i \\ \sum x_{ij} \le b_j \quad (\sum a_i < \sum b_j) \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

并假设： $a_{ij} \ge 0, b_j \ge 0, c_{ij} \ge 0$

运输规划问题的数学模型

特征:

1、平衡运输问题必有可行解，也必有最优解;

2、运输问题的基本可行解中应包括 $m+n-1$ 个基变量。

运输规划问题的数学模型

运输问题约束条件的系数矩阵

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{array} \\
A= & \left(\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n
\end{array}
\end{array}
$$

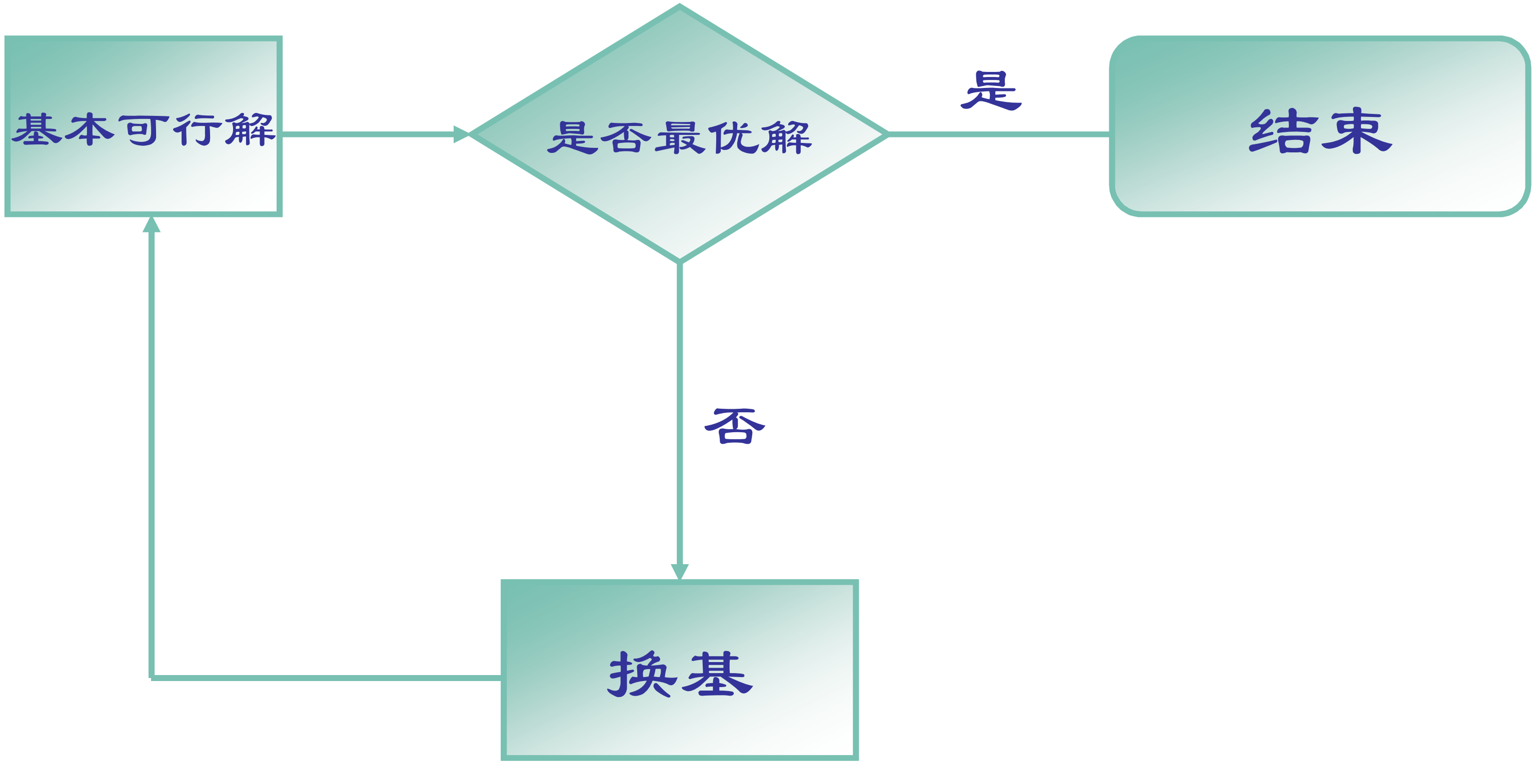
运输规划问题的数学模型

平衡表、运价表合二为一：

销 产	B_1	B_2	…	B_n	产量
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
销量	b_1	b_1	…	b_n	

运输规划问题的数学模型

运输问题的求解思路



运输规划问题的性质

性质 1. 运输问题的 $m+n$ 个约束只有 $m+n-1$ 个是独立的。

证明：因为 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$，

且任意 $m+n-1$ 个约束是独立的。

运输规划问题的性质

性质 2. 运输问题一定有可行解。

证明：记 $M=\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j$，令 $x_{ij}=\frac{1}{M}a_i b_j$，则 $x_{ij}\geq 0$

且 $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=\frac{1}{M}a_i\sum_{j=1}^{n} b_j=a_i, \quad i=1,2,\cdots,m$

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=\frac{1}{M}b_j\sum_{i=1}^{m} a_i=b_j, \quad j=1,2,\cdots,n.$

由于目标值有下界零，性质 2 表明运输问题一定有最优解，用单纯形算法求解运输问题可以在下面的运输表格上实现。

运输规划问题的性质

销地 / 产地	1	$\cdots$	j	$\cdots$	n	供应量
1	x_{11} c_{11}	$\cdots$	x_{1j} c_{1j}	$\cdots$	x_{1n} c_{1n}	a_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
i	x_{i1} c_{i1}	$\cdots$	x_{ij} c_{ij}	$\cdots$	x_{in} c_{in}	a_i
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
m	x_{m1} c_{m1}	$\cdots$	x_{mj} c_{mj}	$\cdots$	x_{mn} c_{mn}	a_m
需求量	b_1	$\cdots$	b_j	$\cdots$	b_n	

二、表上作业法

计算步骤：

(1) 找出初始调运方案。即在(m×n)产销平衡表上给出m+n-1个数字格。(最小元素法、西北角法或伏格尔法)

确定m+n-1个基变量

(2) 求检验数。（闭回路法或位势法）判别是否达到最优解。如已是最优解，则停止计算，否则转到下一步。

空格

(3) 对方案进行改善，找出新的调运方案。（表上闭回路法调整）

(4) 重复（2）、（3），直到求得最优调运方案。

表上作业法

表上作业法是一种求解运输问题的特殊方法，其实质是单纯形法。

步骤	描述	方法
第一步	求初始基行可行解（初始调运方案）	最小元素法、西北角法、伏格尔法
第二步	求检验数并判断是否得到最优解当非基变量的检验数σ_{ij}全都非负(求min)时得到最优解，若存在检验数$\sigma_{ij}<0$，说明还没有达到最优，转第三步。	闭回路法或位势法
第三步	调整运量，即换基，选一个变量出基，对原运量进行调整得到新的基可行解，转入第二步	

表上作业法

例3.2 某运输资料如下表所示:

单位运价 销地/产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11	3	10	7
A_2	1	9	2	8	4
A_3	7	4	10	5	9
销量	3	6	5	6	

问：应如何调运可使总运输费用最小?

1、求初始方案：最小元素法、西北角法、伏格尔法

表上作业法

方法1：最小元素法

基本思想是就近供应，即从运价最小的地方开始供应（调运），然后次小，直到最后供完为止。

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11	3 4	10 3	7
A_2	1 3	9	2 1	8	4
A_3	7	4 6	10	5 3	9
销量	3	6	5	6	

总的运输费 = (3×1)+(6×4) +(4×3) +(1×2)+(3×10)+(3×5)=86元

表上作业法--求初始基本可行解

原则：优先安排单位运费最小的发点与收点之间的运输业务。

例. 用最小元素法求初始基本可行解

i \ j	1	2	3	4	供应量	
1	10	6 15	20	11 0	15	0
2	12	7	9 15	20 10	25	10
3	6 5	14	16	18 0	5	0
需求量	5	15	15	10		
	0	0	0			

表上作业法

练习

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	6 1	7	5	3 13	14
A2	8 2	4 13	2 12	7	27
A3	5 19	9	10	6	19
销量	22	13	12	13	

表上作业法--求初始基本可行解

（2）西北角法（或左上角法）

原则：优先安排编号小的发点和收点之间的运输业务（运输表格上西北角）。

(i) 确定西北角变量 $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$；

(ii) 设 $a_1 = a_1 - x_{11}$，$b_1 = b_1 - x_{11}$，若 $a_1 = 0$，则划去表格第 1 行，否则划去第 1 列；

(iii) 对表格余下部分按以上 方法分配运量，直到需 运输的物资分配完为止。

此法是纯粹的人为的规定，没有理论依据和实际背景，但它易操作，特别适合在计算机上编程计算，因而受欢迎。方法如下：

表上作业法

例3.3 某运输资料如下表所示：

在满足约束条件下尽可能的给最左上角的变量最大值.

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	4 8	12 8	4	11	16
A2	2	10 6	3 4	9	10
A3	8	5	11 8	6 14	22
销量	8	14	12	14	48

所以，初始基可行解为：(8,8,4,8,14)目标函数值Z = 372

表上作业法

练习

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	6 14	7	5	3	14
A2	8 8	4 13	2 6	7	27
A3	5	9	10 6	6 13	19
销量	22	13	12	13	

表上作业法

最小元素法的缺点是：为了节省一处的费用，有时造成在其他处要多花几倍的运费。

一产地的产品假如不能按最小运费就近供应，就考虑次小运费，这就有一个差额。差额越大，说明不能按最小运费调运时，运费增加越多。

最小元素法：

8　10	3	10
2　5	1　15	20
15	15	

总运费是$z=10\times8+5\times2+15\times1=105$

另一种方法：

8	3　10	10
2　15	1　5	20
15	15	

总运费$z=10\times3+15\times2+5\times1=65$

表上作业法

方法3：Vogel法

1）从运价表中分别计算出各行和各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行。

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1			3	10		0
A_2		9	2	8	4	1
A_3		4	10	5	9	1
销量	3	6	5	6		
列差额	2	5	1	3		

3-3=0

5-4=1

2-1=1

3-1=2

8-5=3

3-2=1

9-4=5

表上作业法

2）再从差值最大的行或列中找出最小运价确定供需关系和供需数量。当产地或销地中有一方数量供应完毕或得到满足时，划去运价表中对应的行或列。

重复1)和2)，直到找出初始解为至。

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	3	11	3	10	7	0
A_2	1	9	2	8	4	1
A_3	7	6 4	10	5	9	1
销量	3	6	5	6		
列差额	2	5	1	3		

表上作业法

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	3	11	3	10	7	0
A_2	1	9	2	8	4	1
A_3	7	4 6	10	5 3	9	1
销量	3	6	5	6		
列差额	2		1	3		

表上作业法

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	3	11	3	10	7	0
A_2	3 1	9	2	8	4	1
A_3	7	6 4	10	3 5	9	
销量	3	6	5	6		
列差额	2		1	2		

表上作业法

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	3	11	5 3	2 10	7	7
A_2	3 1	9	2	1 8	4	6
A_3	7	6 4	10	3 5	9	
销量	3	6	5	6		
列差额			1	2		

表上作业法--求初始基本可行解

例. 用伏格尔法求初始基本可行解

	行差额	4	1	7	7		
列差额	i \ j	1	2	3	4	供应量	
4	1	10	6	20	11	15	
2	2	12	7	9	20	25	
8	3	6 5	14	16	18	5	0
	需求量	5	15	15	10		
		0					

表上作业法--求初始基本可行解

例. 用伏格尔法求初始基本可行解

列差额	i \ j	1	2	3	4	供应量	
	行差额		1	7	7		
5	1	10	6	20	11	15	
2	2	12	7	9 15	20	25	10
2	3	6 5	14	16	18	5	0
	需求量	5	15	15	10		
		0		0			

表上作业法--求初始基本可行解

例. 用伏格尔法求初始基本可行解

	行差额		1		7		
列差额	i \ j	1	2	3	4	供应量	
5	1	10	6	20	11	15	
13	2	12	7 10	9 15	20	25	10
4	3	6 5	14	16	18	5	0
	需求量	5	15	15	10		
		0		0			

表上作业法--求初始基本可行解

例. 用伏格尔法求初始基本可行解

	行差额		1		7		
列差额	i \ j	1	2	3	4	供应量	
5	1	10	6	20	11	15	
13	2	12	7 10	9 15	20	25	0
4	3	6 5	14	16	18	5	0
	需求量	5	15	15	10		
		0	5	0			

表上作业法--求初始基本可行解

例. 用伏格尔法求初始基本可行解

列差额	行差额		8		7		
	i \ j	1	2	3	4	供应量	
5	1	10	5 6	20	11	15	10
	2	12	10 7	15 9	20	25	0
4	3	5 6	14	16	18	5	0
	需求量	5	15	15	10		
		0	5	0			

表上作业法--求初始基本可行解

例. 用伏格尔法求初始基本可行解

列差额	行差额		8		7		
	i \ j	1	2	3	4	供应量	
5	1	10	5 6	20	10 11	15	10
	2	12	10 7	15 9	20	25	0
4	3	5 6	14	16	18	5	0
	需求量	5	15	15	10		
		0	0	0			

表上作业法--求初始基本可行解

例. 用伏格尔法求初始基本可行解

列差额	i \ j	1	2	3	4	供应量	
	行差额		8		7		
5	1	10	5 (6)	20	10 (11)	15	0
	2	12	10 (7)	15 (9)	20	25	0
4	3	5 (6)	14	16	0 (18)	5	0
	需求量	5	15	15	10		
		0	0	0	0		

表上作业法--求初始基本可行解

伏格尔法求得的初始基本可行解

i \ j	1	2	3	4	供应量
1	10	5 / 6	20	10 / 11	15
2	12	10 / 7	15 / 9	20	25
3	5 / 6	14	16	0 / 18	5
需求量	5	15	15	10	

表上作业法

2、 最优解的判别（检验数的求法）

求检验数的方法有两种:

- 闭回路法
- 对偶变量法（位势法）

（1）闭合回路法:

$\sigma_{ij} \geqslant 0$ （因为目标函数要求最小化）

表格中有调运量的地方为基变量，空格处为非基变量。基变量的检验数$\sigma_{ij}=0$，非基变量的检验数$\sigma_{ij}\geqslant 0$。

$\sigma_{ij}<0$ 表示运费减少，$\sigma_{ij}>0$ 表示运费增加。

表上作业法

闭回路：从空格出发顺时针(或逆时针)画水平(或垂直)直线，遇到填有运量的方格可转90°，然后继续前进，直到到达出发的空格所形成的闭合回路。

调运方案的任意空格存在唯一闭回路。

注：1. 每一空格有且仅有一条闭回路；
2. 如果某数字格有闭回路，则此解不是可行解。

分析：

$$z = z_0 + \sigma_{11}x_{11} + \sigma_{12}x_{12} + \sigma_{21}x_{21} \cdots + \sigma_{mn}x_{mn}$$

若令 $x_{11} = 1, x_{12} = \cdots = x_{mn} = 0$

则 $\sigma_{11} = z - z_0$ —运费的增量

表上作业法

以最小元素法的初始解为例。假设产地A_1供应1个单位的物品给销地B_1。则解的变化和目标函数的变化如何。

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	4 10	11 6	16
A_2	2 8	10	3 2	9	10
A_3	8	5 14	11	6 8	22
销量	8	14	12	14	48

表上作业法

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4 1	12	4 10	11 6	16
A_2	2 8	10	3 2	9	10
A_3	8	5 14	11	6 8	22
销量	8	14	12	14	48

要保证产销平衡，则

$$x_{11} \to x_{13} \to x_{23} \to x_{21} \text{称为闭回路}$$

$$z - z_0 = 4 - 4 + 3 - 2 = 1, \therefore \sigma_{11} = 1$$

表上作业法

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4 1	12 2	4 10	11 6	16
A_2	2 8	10	3 2	9	10
A_3	8	5 14	11	6 8	22
销量	8	14	12	14	48

$$\sigma_{12} = 12 - 11 + 6 - 5 = 2$$

表上作业法

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4 1	12 2	4 10	11 6	16
A_2	2 8	10 1	3 2	9	10
A_3	8	5 14	11	6 8	22
销量	8	14	12	14	48

$$\sigma_{22} = 10 - 3 + 4 - 11 + 6 - 5 = 1$$

表上作业法

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4 1	12 2	4 10	11 6	16
A_2	2 8	10 1	3 2	9	10
A_3	8 10	5 14	11	6 8	22
销量	8	14	12	14	48

$$\sigma_{31} = 8 - 2 + 3 - 4 + 11 - 6 = 10$$

表上作业法

产地＼销地	B_1		B_2		B_3		B_4		产量
A_1		4		12		4		11	16
	1		2		10		6		
A_2		2		10		3		9	10
	8		1		2				
A_3		8		5		11		6	22
	10		14		12		8		
销量	8		14		12		14		48

$$\sigma_{33} = 11 - 4 + 11 - 6 = 12$$

表上作业法

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4 1	12 2	4 10	11 6	16
A_2	2 8	10 1	3 2	9 -1	10
A_3	8 10	5 14	11 12	6 8	22
销量	8	14	12	14	48

$$\sigma_{24} = 9 - 3 + 4 - 11 = -1$$

检验数中有负数，说明原方案不是最优解。

表上作业法

练习

产地＼销地	B1		B2		B3		B4		产量
A1		6		7		5		3	14
	14		5		5		7		
A2		8		4		2		7	27
	8		13		6		9		
A3		5		9		10		6	19
	-11		-3		6		13		
销量	22		13		12		13		

表上作业法

（2）对偶变量法（位势法）

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{array}{l} u_i \\ \\ v_j \end{array} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1,\cdots,m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1,\cdots,n) \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1,\cdots,m; j = 1,\cdots,n)$$

m个

n个

设其对偶变量为： $Y = (u_1, u_2, ..., u_m, v_1, v_2, ..., v_n)$

表上作业法

标准型运输问题的对偶问题模型为:

$$\max \ w = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=i}^{n} b_j v_j$$

$$u_i + v_j \le c_{ij}$$

u_i, v_j无约束 （i=1,2, ⋯,m;j=1,2, ⋯,n)

则运输问题变量x_{ij}的检验数为:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= c_{ij} - z_{ij} = c_{ij} - YP_{ij} \\ &= c_{ij} - (u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n) P_{ij} \\ &= c_{ij} - (u_i + v_j)\end{aligned}$$

表上作业法

因为运输问题有一个约束是多余的，应删去，相应地，对偶问题中应删去一个变量，于是令该变量取值为 0，比如 $u_1 = 0$。

由于基变量的检验数为 0，得 $m+n-1$ 个方程：

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j = 0 \quad (x_{ij}\text{ 是基变量}),$$

由于 $u_1 = 0$，这 $m+n-1$ 个方程有 $m+n-1$ 个未知量，因而可解出 $u_i, v_j\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，

进而可计算出非基变量的检验数，最优性准则要求所有检验数大于等于 0 。

表上作业法

用位势法对初始方案进行最优性检验的方法：

1）在给定初始解的表上增加一行和一列，在列中填入u_i，在行中填入v_j。

2）令$u_1 = 0$，再按$c_{ij}-(u_i+v_j)=0$（基变量的c_{ij}求出其余的u_i与v_j。

3）由$\sigma_{ij}=C_{ij}$-（u_i+v_j），求出非基变量的检验数。

表上作业法

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	3	11	4 3	3 10	u_1
A_2	3 1	9	1 2	8	u_2
A_3	7	6 4	10	3 5	u_3
v_j	v_1	v_2	v_3	v_4	

注意：基变量的检验数$\sigma_{i\,j}=C_{i\,j}$ - （u_i+v_j）$=0$

表上作业法

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	3	11	4 3	3 10	0
A_2	3 1	9	1 2	8	-1
A_3	7	6 4	10	3 5	-5
v_j	2	9	3	10	

令$u_1=0$

$u_2+v_3=2$

$u_3+v_4=5$

$u_2+v_1=1$

$u_3+v_2=4$

$u_1+v_3=3$

$u_1+v_4=10$

$$u_1+v_3=3,\quad u_1+v_4=10,\quad u_2+v_1=1$$

$$u_2+v_3=2,\quad u_3+v_2=4,\quad u_3+v_4=5$$

$$u_1=0$$

表上作业法

$\sigma_{12}=c_{12}-(u_1+v_2)=11-(0+9)=2$

$\sigma_{11}=c_{11}-(u_1+v_1)=3-(0+2)=1$

$\sigma_{22}=c_{22}-(u_2+v_2)=9-(9-1)=1$

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	3 (1)	11 (2)	3 4	10 3	0
A_2	1 3	9 (1)	2 1	8 (-1)	-1
A_3	7 (10)	4 6	10 (12)	5	-5
v_j		9			

$\sigma_{31}=c_{31}-(u_3+v_1)=7-(2-5)=10$

$\sigma_{33}=c_{33}-(u_3+v_3)=10-(3-5)=12$

$\sigma_{24}=c_{24}-(u_2+v_4)=8-(10-1)=-1$

当存在非基变量的检验数σ_{ij} …

为最优方案，否则目标成本还 …

表上作业法---解的改进迭代

3、 解的改进

——闭合回路调整法（原理同单纯形法一样）

当在表中空格处出现负检验数时，表明未得最优解。若有两个或两个以上的负检验数时，一般选用其中最小的负检验数，以它对应的空格为调入格，即以它对应的非基变量为换入变量。做一闭合回路。

解的改进的具体步骤：

（1）确定换入基的变量：当存在非基变量的检验数$\sigma_{kl}<0$且$\sigma_{kl}=\min\{\sigma_{ij}\}$时，以$X_{kl}$为换入变量，找出它在运输表中的闭合回路。

接上例：$\min\limits_{i,j}(\sigma_{ij}<0)=\sigma_{pq}$ $X_{pq}=X_{24}$为换入变量

表上作业法

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	3 (1)	11 (2)	3 4 3	2 10 3	0
A_2	1 3	9 (1)	2 1 4	8 1 (-1)	-1
A_3	7 (10)	4 6	10 (12)	5 3	-5
v_j	2	9	3	10	

(2) 顶点编号：以空格(A_k,B_l)(或进基变量x_{ik}）为第一个奇数顶点，沿闭回路的顺（或逆）时针方向前进，对闭回路上的顶点依次编号。

表上作业法

换出变量X_{23}

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	3 （1）	11 （2）	③ 4 3	② 3 10	0
A_2	3 1	9 （1）	④ 1 2	8 （-1） ①	-1
A_3	7 （10）	6 4	10 （12）	3 5	-5
v_j	2	9	3	10	

（2）顶点编号：以空格(A_k,B_l)(或进基变量x_{ik}）为第一个奇数顶点，沿闭回路的顺（或逆）时针方向前进，对闭回路上的顶点依次编号。

表上作业法

(3) 确定换出基的变量：在该闭回路上，从所有偶数号格点的调运量中选出最小值 $\theta = \min x_{ij}$ 的顶点（格子），以该格子中的变量为换出变量。

$$\theta = \min\{x_{23,}x_{14}\} = \min\{1,3\} = 1$$

(4) 确定新的运输方案：以换出变量的运输量为调整量θ，将该闭回路上所有奇数号格的调运量加上调整量 θ，所有偶数号格的调运量减去 θ，其余的不变，这样就得到一个新的调运方案。该运输方案的总运费比原运输方案减少，改变量等于换出变量的检验数。

(5)然后，再对得到的新解进行最优性检验，加不是最优解，就重复以上步骤继续进行调整，一直到得出最优解为止。

表上作业法

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	3	11	4 (+1) 3	3 (−1) 10	0
A_2	3 1	9	1 (−1) 2	(+1) 8	-1
A_3	7	6 4	10	3 5	-5
v_j	2	9	3	10	

表上作业法

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	$\boxed{3}$	$\boxed{11}$	5 $\boxed{3}$	2 $\boxed{10}$	0
A_2	3 $\boxed{1}$	$\boxed{9}$	$\boxed{2}$	1 $\boxed{8}$	-2
A_3	$\boxed{7}$	6 $\boxed{4}$	$\boxed{10}$	3 $\boxed{5}$	-5
v_j	3	9	3	10	

重新求所有非基变量的检验数:

表上作业法

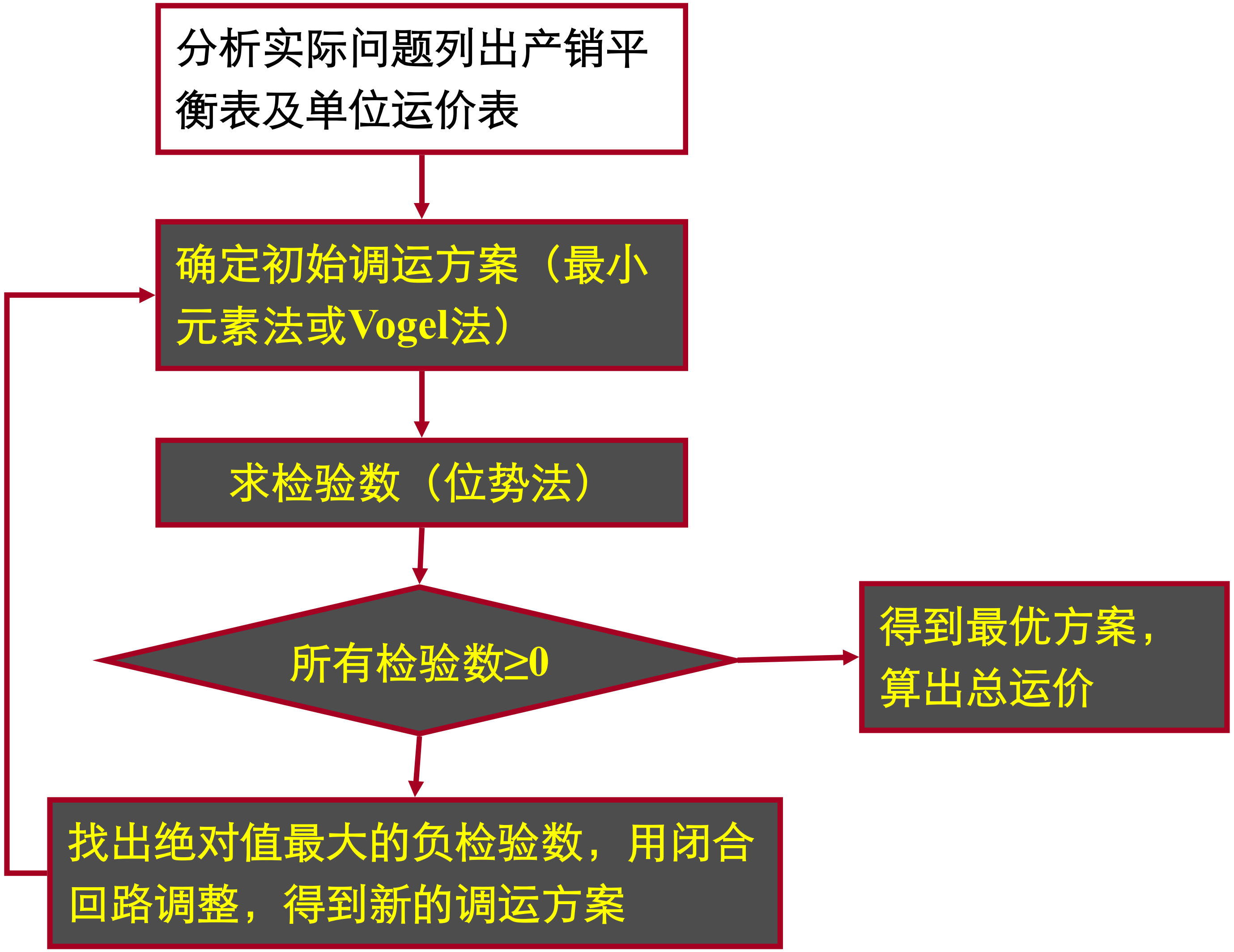
	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	(0) $\boxed{3}$	(2) $\boxed{11}$	5 $\boxed{3}$	2 $\boxed{10}$	0
A_2	3 $\boxed{1}$	(2) $\boxed{9}$	(1) $\boxed{2}$	1 $\boxed{8}$	-2
A_3	(9) $\boxed{7}$	6 $\boxed{4}$	(12) $\boxed{10}$	3 $\boxed{5}$	-5
v_j	3	9	3	10	

当所有非基变量的检验数均非负时，则当前调运方案即为最优方案，如表此时最小总运费：

$$Z = (1\times3)+(4\times6)+(3\times5)+(2\times10)+(1\times8)+(3\times5)=85\text{元}$$

表上作业法

表上作业法的计算步骤：



表上作业法

求解下面的运输问题—求初始解

i \ j	1	2	3	4	供应量	
1	10 5	6 10	20	11	15	0
2	12	7 5	9 15	20 5	25	0
3	6	14	16	18 5	5	
需求量	5	15	15	10		
	0	0	0	5		

表上作业法

$i \backslash j$	1	2	3	4	供应量	u_i
1	10 **5**	6 **10**	20 12	11 – 8	15	0
2	12 1	7 **5**	9 **15**	20 **5**	25	1
3	6 – 3	14 9	16 9	18 **5**	5	-1
需求量	5	15	15	10		
v_j	10	6	8	19		

$u_1 + v_1 = 10$,　$u_1 + v_2 = 6$,　$u_2 + v_2 = 7$

$u_2 + v_3 = 9$,　$u_2 + v_4 = 20$,　$u_3 + v_4 = 18$

$u_1 = 0$

表上作业法

x_{14} 的检验数为负，且最小 ，故以 x_{14} 为进基变量

i \ j	1	2	3	4
1	10 5	6 10	20 12	11 * −8
2	12 1	7 5	9 15	20 5
3	6 −3	14 9	16 9	18 5

$\theta = 5$，x_{24} 为出基变量

表上作业法

$i \backslash j$	1	2	3	4	供应量	u_i
1	$\boxed{10}$ 5	$\boxed{6}$ 5	$\boxed{20}$ $\boxed{12}$	$\boxed{11}$ 5	15	0
2	$\boxed{12}$ $\boxed{1}$	$\boxed{7}$ 10	$\boxed{9}$ 15	$\boxed{20}$ $\boxed{8}$	25	1
3	$\boxed{6}$ * $\boxed{-11}$	$\boxed{14}$ $\boxed{1}$	$\boxed{16}$ $\boxed{1}$	$\boxed{18}$ 5	5	7
需求量	5	15	15	10		
v_j	10	6	8	11		

以 x_{31} 为进基变量

$\theta = 5$，x_{11} 为出基变量

表上作业法

$i \backslash j$	1	2	3	4	供应量	u_i
1	10 11	6 5	20 12	11 10	15	0
2	12 12	7 10	9 15	20 8	25	1
3	6 5	14 1	16 1	18 0	5	7
需求量	5	15	15	10		
v_j	-1	6	8	11		

已为最优解。

表上作业法

表上作业法计算中的问题:

（1）若运输问题的某一基可行解有多个非基变量的检验数为负，在继续迭代时，取它们中任一变量为换入变量均可使目标函数值得到改善，但通常取$\sigma_{ij}<0$中最小者对应的变量为换入变量。

（2）无穷多最优解

产销平衡的运输问题必定存最优解。如果非基变量的$\sigma_{ij}=0$，则该问题有无穷多最优解。

如上例： σ_{11}的检验数是 0，经过调整，可得到另一个最优解。

表上作业法

如下例中σ_{11}检验数是 0，经过调整，可得到另一个最优解。

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	3 (+2) （0）	11 （2）	3 5	10 (-2) 2	0
A_2	1 (-2) 3	9 （2）	2 （1）	8 (+2) 1	-2
A_3	7 （9）	4 6	10 （12）	5 3	-5
v_j	3	9	3	10	

表上作业法

如下例中σ_{11}检验数是 0，经过调整，可得到另一个最优解。

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	2 **3**	(2) **11**	5 **3**	(0) **10**	0
A_2	1 **1**	(2) **9**	(1) **2**	3 **8**	-2
A_3	(9) **7**	6 **4**	(12) **10**	3 **5**	-5
v_j	3	9	3	10	

表上作业法

⑵ 退化解：

※ 表格中一般要有(m+n-1)个数字格。但有时在分配运量时则需要同时划去一行和一列，这时需要补一个0，以保证有(m+n-1)个数字格作为基变量。一般可在划去的行和列的任意空格处加一个0即可。

※ 利用进基变量的闭回路对解进行调整时，标有负号的最小运量（超过2个最小值）作为调整量θ，选择任意一个最小运量对应的基变量作为出基变量，并打上“×”以示作为非基变量。

表上作业法

例：用最小元素法求初始可行解

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	× 3	× 11	1 4	6 4	7
A_2	× 7	× 7	4 3	× 8	4
A_3	3 1	6 2	× 10	0 6	9
销量	3	6	5	6	20

在x_{12}、x_{22}、x_{33}、x_{34}中任选一个变量作为基变量，例如选x_{34}

运输问题的进一步讨论

一、产销不平衡的运输问题

当总产量与总销量不相等时,称为不平衡运输问题.这类运输问题在实际中常常碰到,它的求解方法是将不平衡问题化为平衡问题再按平衡问题求解。

- 当产大于销时，即： $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

数学模型为:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i & i = 1, 2, \cdots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & j = 1, 2, \cdots, n \\ x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, 2, \cdots m; j = 1, 2, \cdots, n & \end{cases}$$

运输问题的进一步讨论

由于总产量大于总销量，必有部分产地的产量不能全部运送完，必须就地库存，即每个产地设一个仓库，假设该仓库为一个虚拟销地B_{n+1}， b_{n+1}作为一个虚设销地B_{n+1}的销量(即库存量)。各产地A_i到B_{n+1}的运价为零，即$C_{i,n+1}=0$,（$i=1$，…，m）。则平衡问题的数学模型为:

$$\min Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n+1}x_{ij}=a_i & i=1,2,\cdots,m\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j & j=1,2,\cdots,n+1\\ x_{ij}\geq 0,i=1,2,\cdots m;\ j=1,2, & \end{cases}$$

具体求解时，只在运价表右端增加一列B_{n+1}，运价为零，销量为b_{n+1}即可

运输问题的进一步讨论

- 当销大于产时，即：$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

  数学模型为：

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & i = 1,2,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j & j = 1,2,\cdots,n \\ x_{ij} \ge 0, i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots, \end{cases}$$

由于总销量大于总产量，故一定有些需求地不完全满足，这时虚设一个产地Am+1，产量为：

$$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

运输问题的进一步讨论

销大于产化为平衡问题的数学模型为：

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & i = 1,2,\cdots,m+1 \\ \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j & j = 1,2,\cdots,n \\ x_{ij} \geq 0, i = 1,2,\cdots,m+1;\ j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

具体计算时，在运价表的下方增加一行A_{m+1}，运价为零。产量为a_{m+1}即可。

运输问题的进一步讨论

例3.4 求下列表中极小化运输问题的最优解。

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	9	2	3	60
A_2	--	4	7	8	40
A_3	3	6	4	2	30
A_4	4	8	10	11	50
b_j	20	60	35	45	180 / 160

因为有：

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 180 > \sum_{j=1}^{4} b_j = 160$$

运输问题的进一步讨论

所以是一个产大于销的运输问题。表中A_2不可达B_1，用一个很大的正数M表示运价C_{21}。虚设一个销量为b_5=180-160=20，C_{i5}=0，i=1,2,3,4，表的右边增添一列，得到新的运价表。

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	5	9	2	3	0	60
A_2	M	4	7	8	0	40
A_3	3	6	4	2	0	30
A_4	4	8	10	11	0	50
b_j	20	60	35	45	20	180

运输问题的进一步讨论

用前面的方法求运输方案:

下表为计算结果。可看出：产地A_4还有20个单位没有运出。

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	A_i
A_1			35	25		60
A_2		40				40
A_3		10		20		30
A_4	20	10			20	50
B_j	20	60	35	45	20	180

运输问题的进一步讨论

例3.5 某市有三个造纸厂A_1，A_2，A_3，其纸的产量分别为8，5和9个单位，有4个集中用户B_1，B_2，B_3，B_4，其需用量分别为4，3，5和6个单位。由各造纸厂到各用户的单位运价如表3—14所示，请确定总运费最少的调运方案。

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	12	3	4	8
A_2	11	2	5	9	5
A_3	6	7	1	5	9
销量	4	3	5	6	

运输问题的进一步讨论

解：由于总产量22大于总销量18，故本问题是个产销不平衡运输问题。增加一假想销地B_5，用表上作业法求解。

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5(贮存)	产量
A_1	3	12	3	4	0	8
A_2	11	2	5	9	0	5
A_3	6	7	1	5	0	9
销量	4	3	5	6	4	

运输问题的进一步讨论

产地＼销地	B_1		B_2		B_3		B_4		B_5(贮存)		产量
A_1		3		12		3		4		0	8
	4		18		6		3		4		
A_2		11		2		5		9		0	5
	0		3		0		2		-8		
A_3		6		7		1		5		0	9
	-2		9		5		4		-4		
销量	4		3		5		6		4		

运输问题的进一步讨论

二. 转运问题

产地生产的产品不一定直接运到销地，而是先运往几个产品集散地集中，再转运至各销地，这些产品集散地（转运点）可能是专门的转运站，也可能就是某几个产地或销地，这类运输问题称为**转运问题**。

以 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 表示产品的发点，

$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 表示产品的收点 。

转运点将既是发点，也是收点，而纯粹的产地只是发点，纯粹的销地只是收点。

运输问题的进一步讨论

设 a_i 是 A_i 要发送的产品数量， b_j 是 B_j 要接收的产品数量，则

A_i 是产地时， a_i = 本地产量 + 转运量 ，

否则， a_i = 转运量 ；

B_j 是销地时， b_i = 本地销量 + 转运量 ，

否则， b_j = 转运量 .

注：非转运点的转运量为零，各转运点的转运量是实际发生的转运量的一个上限，由各自的仓储设备、运输条件等决定。

运输问题的进一步讨论

由于转运量同时计算在a_i、b_j中，所以如果各产地的总产量等于各销地的总销量（即产销平衡），那么

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

否则可参照不平衡运输问题处理。

关于运价，可假设同一个转运点间的运价为零。

计算结果中发生在同一个转运点之间的转运实际上不发生，转运量上限减去它之后就是实际的转运量。

运输问题的进一步讨论

例. 产地 A_1, A_2 的产量皆为 15 吨，销地 B_1, B_2 的销量也皆为 15 吨，A_1, B_1 可作为转运点，转运量上限皆为 10 吨，另有转运点 T_1，转运量不能超过 20 吨。则运输表格为

发点＼收点	A_1	T_1	B_1	B_2	发量
A_1	0				25
A_2					15
T_1		0			20
B_1			0		10
收量	10	20	25	15	

运输问题的进一步讨论

三、多品种物资运输问题

发点 E_1 有某原材料一等品 200 单位、二等品 300 单位，E_2 有该原材料一等品 100 单位、三等品 150 单位。

收点 F_1 将该原材料供应三个消费部门：

部门 I 可将三种原材料互相代用，需求量为 150 单位；

部门 II 只用一等品，需求量为 50 单位；

部门 III 只用二或三等品，需求量为 50 单位。

收点 F_2 将该原材料供应两个消费部门：

部门 i 使用一或二等品，需求量为 200 单位；

部门 ii 只用一等品，需求量为 300 单位。

运输问题的进一步讨论

单位运价：

	F_1	F_2
E_1	5	7
E_2	8	6

将 E_1 拆为两个发点：A_1 输出一等品 200 单位，
A_2 输出二等品 300 单位。

将 E_2 也拆为两个发点：A_3 输出一等品 100 单位，
A_4 输出三等品 150 单位。

类似地，将 F_1 拆为三个收点 B_1、B_2、B_3，分别对应三个消费部门；将 F_2 拆为两个收点 B_4、B_5，对应两个消费部门。

运输问题的进一步讨论

该问题的产销是不平衡的，如：一等品总产量 300 单位，而需求量至少 50 + 300 = 350 单位；二、三等品总产量 450 单位，而需求量至多 150 + 50 + 200 = 400 单位。

因此引入虚发点 A_5 和虚收点 B_6， 它们与实际的发点、收点之间的运价很大（为 M），而它们之间的运价为零，这样，只有在实际的发点、收点之间的运输安排不了时才考虑与 A_5、B_6 间的运输。

由于事先不知道有多少运量安排不了，因此假设 A_5 的输出量和 B_6 的需求量足够大（该问题中 750 已足够）。

运输问题的进一步讨论

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	5	5	\	7	7	M	200 一等品
A_2	5	\	5	7	\	M	300 二等品
A_3	8	8	\	6	6	M	100 一等品
A_4	8	\	8	\	\	M	150 三等品
A_5	M	M	M	M	M	0	750
	150 无限制	50 一等品	50 二或三等品	200 一或二等品	300 一等品	750	