1.3 一阶微分方程组和高阶微分方程

1.3.1 一阶方程组

一阶常微分方程组初值问题的一般形式为

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dx} = f_i(x, u_1, u_2, \cdots, u_n), & x_0 < x \le b, \\ u_i(x_0) = u_0, & i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

其中u_i是未知函数，u_{i0}是给定的初值。当$n = 1$时，它就是单个方程初值问题。前面关于单个方程建立的数值方法也适用于方程组。

1.3 一阶微分方程组和高阶微分方程

1.3.1 一阶方程组

一阶常微分方程组初值问题的一般形式为

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dx} = f_i(x, u_1, u_2, \cdots, u_n), & x_0 < x \le b, \\ u_i(x_0) = u_0, & i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

其中u_i是未知函数，u_{i0}是给定的初值。当$n = 1$时，它就是单个方程初值问题。前面关于单个方程建立的数值方法也适用于方程组。

以$n = 2$为例，两个方程的一阶方程组

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = f(x, u, v) \\ \frac{dv}{dx} = g(x, u, v) \\ u(x_0) = u_0, v(x_0) = v_0, \end{cases} \tag{84}$$

对应于它的四阶Runge-Kutta法是

$$\begin{cases} u_{m+1} = u_m + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), & m = 0, 1, \cdots \\ v_{m+1} = v_m + \frac{h}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4), & , \end{cases} \tag{85}$$

其中

$$K_1=f(x_m,u_m,v_m),L_1=g(x_m,u_m,v_m)$$

$$K_2=f(x_m+\frac{h}{2},u_m+\frac{h}{2}K_1,v_m+\frac{h}{2}L_1)$$

$$L_2=g(x_m+\frac{h}{2},u_m+\frac{h}{2}K_1,v_m+\frac{h}{2}L_1)$$

$$K_3=f(x_m+\frac{h}{2},u_m+\frac{h}{2}K_2,v_m+\frac{h}{2}L_2)$$

$$L_2=g(x_m+\frac{h}{2},u_m+\frac{h}{2}K_2,v_m+\frac{h}{2}L_2)$$

$$K_4=f(x_m+\frac{h}{2},u_m+hK_3,v_m+hL_3)$$

$$L_4=f(x_m+\frac{h}{2},u_m+hK_3,v_m+hL_3)$$

四阶Adams外插公式是

$$\begin{cases} u_{m+1}=u_m+\frac{h}{24}(55f_m-59f_{m-1}+37f_{m-2}-9f_{m-3}), & m=3,4,\cdots \\ v_{m+1}=v_m+\frac{h}{24}(55f_m-59f_{m-1}+37f_{m-2}-9f_{m-3}), \end{cases}$$

其中

$$f_i=f(x_i,u_i,v_i),g_i=g(x_i,u_i,v_i)$$

1.3.2 刚性方程组

考虑一阶方程组初值问题

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = 999.8u - 1999.8v + 1000, \\ \frac{dv}{dx} = 999.9u - 1999.9v + 1000, \\ u(0) = 4, v(0) = 3 \end{cases}$$

记

$$A = \begin{bmatrix} 999.8 & -1999.8 \\ 999.9 & -1999.9 \end{bmatrix}$$

- 矩阵A的特征值是$\mu_1 = -0.1, \mu_2 = -1000,$

- 矩阵A的特征值是$\mu_1=-0.1,\mu_2=-1000$,
- 初值问题的真解是$u=2e^{-0.1x}+e^{-1000x}+1, v=e^{-0.1x}+e^{-1000x}+1.$

- 矩阵A的特征值是$\mu_1 = -0.1, \mu_2 = -1000,$
- 初值问题的真解是$u = 2e^{-0.1x} + e^{-1000x} + 1, v = e^{-0.1x} + e^{-1000x} + 1.$
- 当$x \to +\infty$时，$e^{-0.1x} \to 0, e^{-1000x} \to 0.$

- 矩阵A的特征值是$\mu_1 = -0.1, \mu_2 = -1000,$
- 初值问题的真解是$u = 2e^{-0.1x}+e^{-1000x}+1, v = e^{-0.1x}+e^{-1000x}+1.$
- 当$x \to +\infty$时，$e^{-0.1x} \to 0, e^{-1000x} \to 0.$
- 解的表达式中的常数项称为稳态解，包含$e^{-0.1x}$与e^{-1000x}的项的和称为渐态解。

- 矩阵A的特征值是$\mu_1 = -0.1, \mu_2 = -1000,$
- 初值问题的真解是$u = 2e^{-0.1x}+e^{-1000x}+1, v = e^{-0.1x}+e^{-1000x}+1.$
- 当$x \to +\infty$时，$e^{-0.1x} \to 0, e^{-1000x} \to 0.$
- 解的表达式中的常数项称为稳态解，包含$e^{-0.1x}$与e^{-1000x}的项的和称为渐态解。
- 为了使数值求解过程计算到渐态解中变换最慢的分量可以忽略为止，数值求解区间的长度应由μ_1决定。

- 矩阵A的特征值是$\mu_1=-0.1,\mu_2=-1000,$
- 初值问题的真解是$u=2e^{-0.1x}+e^{-1000x}+1, v=e^{-0.1x}+e^{-1000x}+1.$
- 当$x\to+\infty$时，$e^{-0.1x}\to 0, e^{-1000x}\to 0.$
- 解的表达式中的常数项称为稳态解，包含$e^{-0.1x}$与e^{-1000x}的项的和称为渐态解。
- 为了使数值求解过程计算到渐态解中变换最慢的分量可以忽略为止，数值求解区间的长度应由μ_1决定。
- 由于$|\mu_2|\gg|\mu_1|$,根据$|\mu_1|$确定求解区间，由μ_2决定步长，必然使区间很长，步长很小，求解的步数大得惊人，不仅工作量大，而且计算过程中舍入误差的积累使结果很差。

考虑线性微分方程组

$$\frac{du}{dx} = Au + f(x), \tag{87}$$

其中A是n阶常数矩阵，u, f是n维向量函数，记A的特征值为$\mu_i(i = 1, 2, \cdots, n)$，相应的特征向量为$z_i$,则方程组(87)的通解是

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\mu_i x} z_i + \phi_i(x).$$

- 其中$\phi(x)$是方程组(87)的特解，常数$c_1, c_2, \cdots, c_n$可由初值条件确定，
- 如果$Re(\mu_i) < 0, (i = 1, 2, \cdots, n)$，则当$x \to +\infty$时，$\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\mu_i x} z_i \to 0$,称$\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\mu_i x} z_i \to 0$，是方程组(87)的渐态解，$\phi(x)$是稳态解。

考虑线性微分方程组

$$\frac{du}{dx} = Au + f(x), \tag{87}$$

其中A是n阶常数矩阵，u, f是n维向量函数，记A的特征值为$\mu_i(i = 1, 2, \cdots, n)$，相应的特征向量为$z_i$,则方程组(87)的通解是

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\mu_i x} z_i + \phi_i(x).$$

- 其中$\phi(x)$是方程组(87)的特解，常数$c_1, c_2, \cdots, c_n$可由初值条件确定，
- 如果$Re(\mu_i) < 0, (i = 1, 2, \cdots, n)$，则当$x \to +\infty$时，$\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\mu_i x} z_i \to 0$,称$\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\mu_i x} z_i \to 0$，是方程组(87)的渐态解，$\phi(x)$是稳态解。
- 用数值方法求方程组(87)的稳态解时需要计算到渐态解中变化最慢的分量可以忽略为止。

- 定义1.10 对于常系数线性微分方程组(87),若矩阵A的特征值$\mu_i(i=1,2,\cdots,n)$满足：
  (1)$Re(\mu_i)<0$,
  (2)$s=\frac{\max_i |Re(\mu_i)|}{\min_i |Re(\mu_i)|} \gg 1$
  则称方程组(87)是刚性(stiff)方程组，s称为刚性比

- 定义1.10 对于常系数线性微分方程组(87),若矩阵A的特征值$\mu_i(i=1,2,\cdots,n)$满足：
  (1)$Re(\mu_i)<0$,
  (2)$s=\frac{\max_i|Re(\mu_i)|}{\min_i|Re(\mu_i)|}\gg 1$
  则称方程组(87)是刚性(stiff)方程组，s称为刚性比

- 定义1.10　对于常系数线性微分方程组(87),若矩阵A的特征值$\mu_i(i=1,2,\cdots,n)$满足：
  (1)$Re(\mu_i)<0$,
  (2)$s=\frac{\max_i|Re(\mu_i)|}{\min_i|Re(\mu_i)|}\gg 1$
  则称方程组(87)是刚性(stiff)方程组，s称为刚性比
- 通常当刚性比s达到$O(10^p)(p\geq 1)$时，就认为微分方程组是刚性的。

- 定义1.10 对于常系数线性微分方程组(87),若矩阵A的特征值$\mu_i(i=1,2,\cdots,n)$满足：
  (1)$Re(\mu_i)<0$,
  (2)$s=\frac{\max_i|Re(\mu_i)|}{\min_i|Re(\mu_i)|}\gg 1$
  则称方程组(87)是刚性(stiff)方程组，s称为刚性比
- 通常当刚性比s达到$O(10^p)(p\geq 1)$时，就认为微分方程组是刚性的。

对于一般的微分方程组(83),其Jacobi矩阵

$$J(x)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}$$

记$\mu_i(x)$是矩阵$J(x)$的特征值。

- 定义1.11 对微分方程组(83),若对$x \in [x_0, b]$成立:
(1)$Re(\mu_i(x)) < 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$;
(2)$s = \frac{\max_i |Re(\mu_i)|}{\min_i |Re(\mu_i)|} \gg 1$
则称方程组(83)是刚性方程组，$s(x)$称为在x处的局部刚性比。

- 定义1.11 对微分方程组(83),若对$x \in [x_0, b]$成立:
  (1)$Re(\mu_i(x)) < 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$;
  (2)$s = \frac{\max_i |Re(\mu_i)|}{\min_i |Re(\mu_i)|} \gg 1$
  则称方程组(83)是刚性方程组，$s(x)$称为在x处的局部刚性比。
- 刚性方程组又称为病态方程组，在化学反应、自动控制、电力系统等方面常遇到这种问题

- 定义1.11 对微分方程组(83),若对$x \in [x_0, b]$成立:
  (1)$Re(\mu_i(x)) < 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$;
  (2)$s = \frac{\max_i |Re(\mu_i)|}{\min_i |Re(\mu_i)|} \gg 1$
  则称方程组(83)是刚性方程组，$s(x)$称为在x处的局部刚性比。
- 刚性方程组又称为病态方程组，在化学反应、自动控制、电力系统等方面常遇到这种问题
- 对刚性问题应当采用绝对稳定性比较好的数值方法求解，以至于步长可以取得大一些，最好是对步长不加限制。

- 定义1.11 对微分方程组(83),若对$x \in [x_0, b]$成立:
  (1)$Re(\mu_i(x)) < 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$;
  (2)$s = \frac{\max_i |Re(\mu_i)|}{\min_i |Re(\mu_i)|} \gg 1$
  则称方程组(83)是刚性方程组，$s(x)$称为在x处的局部刚性比。
- 刚性方程组又称为病态方程组，在化学反应、自动控制、电力系统等方面常遇到这种问题
- 对刚性问题应当采用绝对稳定性比较好的数值方法求解，以至于步长可以取得大一些，最好是对步长不加限制。
- 定义1.12 如果一个数值方法的绝对稳定区域包含复平面的整个左半平面$Re(\bar{h}) < 0$,则称该方法是$A-$稳定。

- 定义1.11 对微分方程组(83),若对$x \in [x_0, b]$成立:
  (1)$Re(\mu_i(x)) < 0(i = 1, 2, \cdots, n)$;
  (2)$s = \frac{\max_i |Re(\mu_i)|}{\min_i |Re(\mu_i)|} \gg 1$
  则称方程组(83)是刚性方程组，$s(x)$称为在x处的局部刚性比。
- 刚性方程组又称为病态方程组，在化学反应、自动控制、电力系统等方面常遇到这种问题
- 对刚性问题应当采用绝对稳定性比较好的数值方法求解，以至于步长可以取得大一些，最好是对步长不加限制。
- 定义1.12 如果一个数值方法的绝对稳定区域包含复平面的整个左半平面$Re(\bar{h}) < 0$,则称该方法是$A-$稳定。
- 对$A-$稳定的方法步长h不受稳定条件限制。向后的Euler法和梯形法都是$A-$稳定的。

- 定义1.11 对微分方程组(83),若对$x \in [x_0, b]$成立:
  (1)$Re(\mu_i(x)) < 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$;
  (2)$s = \frac{\max_i |Re(\mu_i)|}{\min_i |Re(\mu_i)|} \gg 1$
  则称方程组(83)是刚性方程组，$s(x)$称为在x处的局部刚性比。
- 刚性方程组又称为病态方程组，在化学反应、自动控制、电力系统等方面常遇到这种问题
- 对刚性问题应当采用绝对稳定性比较好的数值方法求解，以至于步长可以取得大一些，最好是对步长不加限制。
- 定义1.12 如果一个数值方法的绝对稳定区域包含复平面的整个左半平面$Re(\bar{h}) < 0$,则称该方法是$A-$稳定。
- 对$A-$稳定的方法步长h不受稳定条件限制。向后的Euler法和梯形法都是$A-$稳定的。
- 向后Euler法和梯形法是$A-$稳定，它们可以用来解刚性方程组。

1.3.3 高阶方程

对于高阶微分方程可以化为一阶微分方程组。对于n阶微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{d^n u}{dx^n} = f(x, u, u', \cdots, u^{(n-1)}), \\ u^{(i-1)}(x_0) = u_{i0}, i = 1, 2, \cdots, n, \end{cases} \tag{93}$$

令

$$u_1 = u, u_2 = u', \cdots, u_n = u^{(n-1)}.$$

则式(93)化为

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ \vdots \\ u_{n-1}' = u_n, \\ u_n' = f(x, u_1, u_2, \cdots, u_n), \\ u_i(x_0) = u_{i0}, i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

这是以$u_1, u_2, \cdots, u_n$为未知函数的一阶微分方程组初值问题，从而可以用前面介绍的数值方法求解，其中u_1就是n 阶微分方程初值问题(93)的解。