大学物理下习题册二

1、一导体球半径为 R_1，其外同心地罩以内、外半径分别为 R_2 和 R_3 的厚导体壳，此系统带电后内球电势为 U，外球所带电量为 Q，求此系统各处的电势和电场分布。

解：设内球带电量为 $q_内$,依据题意可知电场分布 $E=\begin{cases}0 & r<R_1\\ \dfrac{q_内}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1<r<R_2\\ 0 & R_2<r<R_3\\ \dfrac{q_内+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R_3\end{cases}$

$$U=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q_内}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr+\int_{R_3}^{\infty}\frac{q_内+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q_内}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{q_内+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$q_内=\frac{U4\pi\varepsilon_0 R_1R_2R_3-R_1R_2Q}{R_2R_3-R_1R_3+R_1R_2}$$

$$\therefore\quad U=\begin{cases}U & r<R_1\\ \dfrac{q_内}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{-q_内}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\dfrac{q_内+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} & R_1<r<R_2\\ \dfrac{q_内+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} & R_2<r<R_3\\ \dfrac{q_内+Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r>R_3\end{cases}$$

注上式采用带电球壳的电势叠加，也可用 $u=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 获得

2、半径为 R_1 和 R_2 ($R_1<R_2$)的相互绝缘的两同心导体球壳，现使内球壳带上+q 电量时求: (1) 外球的电荷与电势；(2) 若把外球接地后再重新绝缘，外球的电势与电荷；

(3) 然后把内球壳再接地，这时内球的电荷为多少？这时外球的电势又为多少?

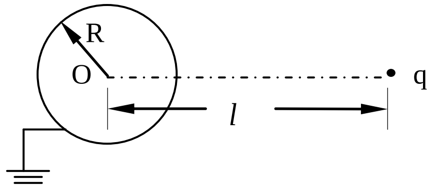
解：(1) $q_外=0\quad U_外=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{R_2}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

(2) $q_外=-q\quad U=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}=0\quad (\because \vec{E}_外=0)$

(3) $U_内=\dfrac{q_内}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=0\Rightarrow q_内=\dfrac{R_1}{R_2}q$

$$U_外=\frac{q_内}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=\frac{\frac{R_1}{R_2}q-q}{4\pi\varepsilon_0 {R_2}^2}=\frac{q(R_1-R_2)}{4\pi\varepsilon_0 {R_2}^2}$$

3、如图所示，一个接地导体球半径为 R，有一个电量为 q 的点电荷，点电荷距球心的距离为l，求导体球表面的感应电荷 Q。



解：设接地导体上的感应电荷为 Q，分布在导体球的表面， 因导体球接地，球上各点电势均为零，即球心 O 点处电势 U_0 为零。U_0 由点电荷 q 和球面上感应电荷共同产生

$$U_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} = 0$$

$$Q = -\frac{R}{l}q$$

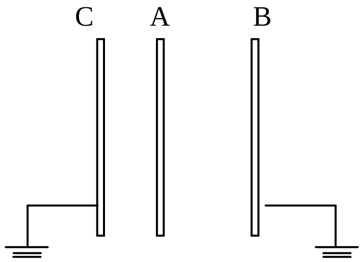
4、A、B、C 是三块平行金属板，面积均为 200cm^2，A、B 相距 4.0mm，A、C 相距 2.0mm，B、C 两板均接地，现使 A 板带正电 3.0×10^{-7}C 不计边缘效应，求:

(1) B 板和 C 板上的感应电荷；

(2) A 板的电势。

解：（1）设 B 板感应电荷为-q_1，C 板的感应电荷为-q_2

$$q_1 + q_2 = q \qquad (1)$$



$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{q_1}{\varepsilon_0 s}$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{q_2}{\varepsilon_0 s}$$

得 $$\frac{E_1}{E_2} = \frac{q_1}{q_2} \qquad (2)$$

根据题意 $$U_A - U_B = U_A - U_C$$

$$E_1 d_1 = E_2 d_2$$

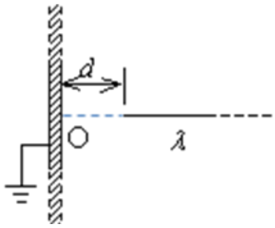
得 $$\frac{E_1}{E_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{2} \qquad (3)$$

由（1)、(2)、(3）式可得 $q_1 = 1.0\times10^{-7}\,C$， $q_2 = 2.0\times10^{-7}\,C$ 。

（2） $$U_A = E_1 d_1 = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S} d_1$$

$$= \frac{1.0\times10^{-7}\times4.0\times10^{-3}}{8.85\times10^{-12}\times0.2} = 2.3\times10^{3}\,V$$

5、一接地的无限大厚导体板的一侧有一半无限长的均匀带电直线垂直于导体板放置，带电直线的一端与板相距 d（如图），已知带电直线的线电荷密度为λ，求板面上垂足点 O 处的感应电荷面密度。



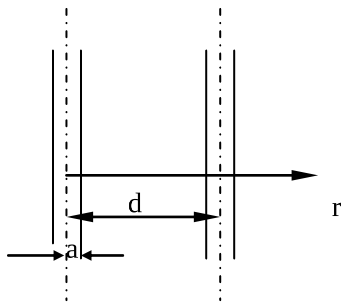
解：取坐标如图所示，O 为原点，x 轴沿带电直线，设点 O 处的感应电荷面密度为σ_0，导体板内与 O 相靠近的点O'（图中黑点处）的场强$E_0'=0$，

由场强叠加原理

$$E_0'=E_\lambda+E_{\sigma_0}=\int_d^\infty\frac{-\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0x^2}+\frac{-\sigma_0}{2\varepsilon_0}=\frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0d}+\frac{-\sigma_0}{2\varepsilon_0}=0$$

上式中假设λ、σ_0均为正，因此由感应电荷和带电直线对O'点产生的场强才均指向 x 轴负方向，解得 $\sigma_0=-\dfrac{\lambda}{2\pi d}$，式中负号表示$\sigma_0$和直线所带电荷异号。

6、半径均为 a 的两根平行长直导线，相距为 d (d>>a)，求单位长度上的电容。



解：设两导线间任意 P 点，距导线中心为 r，则 P 点 E 为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-r)}$$

两导线间的电势差 U_A-U_B

$$U_A-U_B=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int Edr=\int_a^{d-a}\left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-r)}\right]dr$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a}-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{d-a}$$

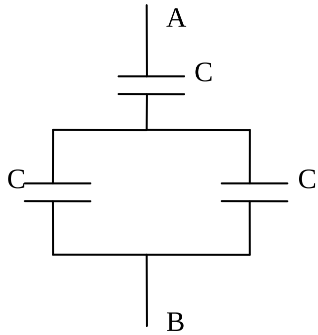
$$=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a}$$

$$C=\frac{q/l}{U_A-U_B}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{d-a}{a}}$$

7、如图，连接三个电容器，$C_1 = 50\mu F, C_2 = 30\mu F, C_3 = 20\mu F,$

（1）求该连接的总电容；

（2）当在 AB 两端加 100V 的电压后，各电容器上的电压和电量各是多少？



解：（1）设总电容为 C，则 $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3}$

$$C = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} = 25\mu F$$

（2）设 AB 两端的电压为 U

$$Q_1 = CU = 25\times10^{-6}\times100 = 2.5\times10^{-3}C$$

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{2.5\times10^{-3}}{50\times10^{-6}} = 50V \qquad U_2 = U_3 = U - U_1 = 100 - 50 = 50V$$

$$Q_2 = C_2U_2 = 30\times10^{-6}\times50 = 1.5\times10^{-3}C \qquad Q_3 = C_3U_3 = 20\times10^{-6}\times50 = 1.0\times10^{-3}C$$

8、一空气平行板电容器，极板面积 $S=0.2m^2$，间距 d=1.0cm，充电使其两板电势差 $U_0=3\times10^3V$，然后断开电源再在两极板间充满介质，最后两板间电压降至 1×10^3V，试计算: (1) 原空气电容器电容 C_0； (2) 每一极板上所带电量 Q；

(3) 两板间原电场强度 E_0； (4) 放入介质后的电容和两板间场强 E；

(5) 介质极化后每一面上的极化电荷 Q'； (6) 介质的相对介电常数ε_r；

解： (1) $$C_0 = \frac{\varepsilon_0 s}{d} = \frac{8.85\times10^{-12}\times0.2}{1.0\times10^{-2}} = 1.77\times10^{-10}F$$

(2) $$Q_0 = C_0U_0 = 1.77\times10^{-10}\times3\times10^3 = 5.31\times10^{-7}C$$

(3) $$E_0 = \frac{U_0}{d} = \frac{3\times10^3}{1.0\times10^{-2}} = 3\times10^5\ V/m$$

(4) $$C = \frac{Q}{U} = \frac{5.31\times10^{-7}}{1\times10^3} = 5.31\times10^{-10}F$$

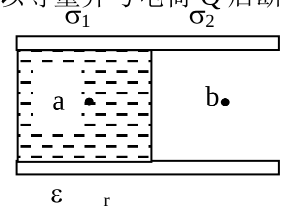
$$E = \frac{U}{d} = \frac{1000}{1\times10^{-2}} = 10^5\ V/m$$

(5) $$Q' = \sigma' s = (E_0 - E_1)\varepsilon_0 s$$

$$= (3\times10^5 - 10^5)\times8.85\times10^{-12}\times0.2 = 3.54\times10^{-7}C$$

(6) $$\varepsilon_r = \frac{C}{C_0} = \frac{5.31\times10^{-10}}{1.77\times10^{-10}} = 3$$

9、平行板电容器极板面积为 S，两板间距离为 d，当极板上充以等量异号电荷 Q 后断开电源，然后在电容器的左半面插入相对介电常数为 $\varepsilon_r=3$ 的陶瓷介质板(忽略边缘效应)，求： (1) 极板上的自由电荷面密度分布σ_1、σ_2； (2) 两极板之间 a、b 两点电场强度 E、电位移矢量 D 和极化强度 P； (3) 陶瓷板插入前、后两极板电势差变化多少?



解：（1）左右两边电势差相等 $E_1 d = E_2 d$ $\qquad \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}d = \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r}d \rightarrow \dfrac{\sigma_1}{3\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$ (1)

且 $\sigma_1 \dfrac{S}{2} + \sigma_2 \dfrac{S}{2} = Q$ (2)

由（1)、(2）解得 $\sigma_1 = \dfrac{3Q}{2S}, \qquad \sigma_2 = \dfrac{Q}{2S}$

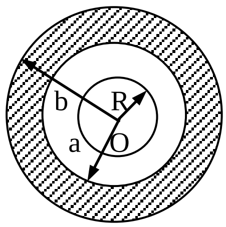
（2）此组合可看作两电容器的并联，电势差相等，距离相等

$$\therefore E_a = E_b = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \qquad D_a = \sigma_1 = \frac{3Q}{2S}, \qquad D_b = \sigma_2 = \frac{Q}{2S}$$

$$P_a = x_e\varepsilon_0 E_a = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E_a = \frac{Q}{S} \qquad P_a = 0 \ (\text{真空}\varepsilon_r = 1)$$

(3) $\Delta U = U - U' = \dfrac{Qd}{\varepsilon_0 S} - \dfrac{Qd}{2\varepsilon_0 S} = \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}d$

10、半径为 R 的导体球，带有电荷 Q，球外有一均匀电介质的同心球壳，球壳内、外半径分别为 a 和 b，相对介电常数为 ε_r，如图所示，试求： (1) 介质内、外的电位移矢量 D 和电场强度 E ； (2) 介质内的电极化强度 **P** 和介质两表面上的极化电荷面密度σ’； (3) 画出电场线和电位移线，加以比较。



解：（1）由题可知场的分布是球对称，应用高斯定理为半径 r 的同心球面

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q \qquad D = \frac{q}{4\pi r} \qquad E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$r < R \qquad D_1 = 0 \qquad E_1 = 0$$

$$R < r < a \qquad D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2}, E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

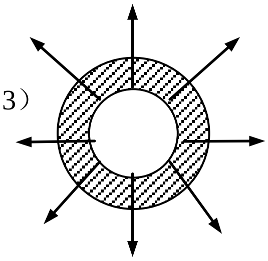
$$a < r < b \qquad D_3 = \frac{Q}{4\pi r^2}, E_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

$$r > b \qquad D_4 = \frac{Q}{4\pi r^2}, E_4 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (\ E, D\text{方向均为径向}\ )$$

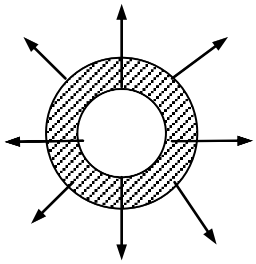
（2）介质内的极化强度 $P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_3 = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} = (1 - \dfrac{1}{\varepsilon_r})\dfrac{Q}{4\pi r^2}$

$$\sigma_a' = P_a\cos\pi = -(1 - \frac{1}{\varepsilon_r})\frac{Q}{4\pi a^2}; \quad \sigma_b' = P_b\cos 0^0 = (1 - \frac{1}{\varepsilon_r})\frac{Q}{4\pi b^2}$$

（3）



电位移线



电场线

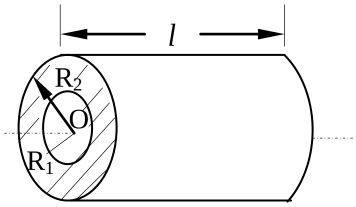


图 9-9

11、圆柱形的电容器由半径为 R_1 的导线和与它同轴的导体圆筒构成， 圆筒的半径为 R_2，长为 l，其间充满相对介电常数为ε_r的溶液。设沿轴线单位长度导线上的电荷为 λ，单位长度圆筒上的电荷为–λ。 略去边缘效应，试求:

(1) 介质中电位移矢量 D、电场强度 **E** 和极化强度 **P** ；

(2) 两极的电势差；(3) 介质表面的极化电荷。

解：(1) 应用有介质时高斯定理 $\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = D2\pi r l = \lambda l$

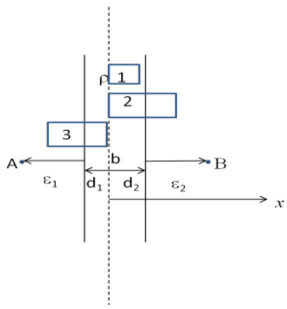
$$D = \frac{\lambda}{2\pi r} \qquad E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} \qquad P = \varepsilon_0 x_e E = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$$

方向： R_1 指向 R_2

(2) $$U_1 - U_2 = \int_{R2}^{R1} E\cdot dr = \int_{R2}^{R1}\frac{\lambda\cdot dr}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

(3) $$\sigma_1{}' = P\cos\pi = -(\varepsilon_r - 1)\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r R_1};\quad \sigma_2{}' = P\cos 0 = (\varepsilon_r - 1)\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r R_2}$$

12、厚度为 b 的无限大平板内分布有均匀电荷密度（ρ>0）的自由电荷，在板外两侧分别充有介电常数为 ε_1、ε_2 的电介质，如图所示。求（1）板内外的电场分布；（2）板外的 A 点与 B 点分别距左右两板壁为 l，求电势差 U_{AB}



解：板内存在一平面 E 为零，以此面为原点建立图示坐标，设 d_1、d_2，$d_1+d_2=b$，作高斯面 1、2、3，见图示

板内 $$\oint_1 \vec{D}\cdot d\vec{S} = D\cdot\Delta S = \rho\, x\Delta S \Rightarrow D = \rho\, x \qquad E = \frac{\rho\, x}{\varepsilon_0}$$

板外 $$\oint_2 \vec{D}_2\cdot d\vec{S} = D_2\cdot\Delta S = \rho\, d_2\Delta S \Rightarrow D_2 = \rho\, d_2 \qquad E = \frac{\rho\, d_2}{\varepsilon_2}$$

$$\oint_{3} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = D_1 \cdot \Delta S = \rho\, d_1 \Delta S \Rightarrow D_1 = \rho\, d_1 \qquad E = \frac{\rho\, d_1}{\varepsilon_2}$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{d_1}{\varepsilon_1} = \frac{d_2}{\varepsilon_2} \qquad （1） \qquad d_1 + d_2 = b \qquad （2）$$

由（1）（2）得 $d_1 = \dfrac{e_1 b}{e_1 + e_2}$，$d_2 = \dfrac{e_2 b}{e_1 + e_2}$

板外 $\vec{E} = \begin{cases} -\dfrac{r\, b}{e_2 + e_1}\vec{i} & x < -d_1 \\ \dfrac{r\, b}{e_2 + e_1}\vec{i} & x > d_2 \end{cases}$

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{-d_1}^{d_2} E dx = \int_{-d_1}^{d_2} \frac{\rho x}{\varepsilon_0} dx = \frac{\rho b^2}{2\varepsilon_0}\left[\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right]$$

$$\left(\int_A^{-d_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{d_2}^{B_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0\right)$$

13、一单芯同轴电缆，中心为一半径 R_1=0.5cm 的金属导线，它外围包一层 ε_r=5 的固体介质，最外面是金属包皮。当在此电缆上加上电压后，介质内紧靠内表面处的场强 E_1 为紧靠外表面处的场强 E_2 的 2.5 倍。若介质的击穿场强 E_m=40kV/cm，求此电缆能受的最大电压是多少？

解：设内外圆筒单位长度带电量±λ，则介质中的场强 $E_1 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$

介质内外表面的场强 $E_1 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1}$ $E_2 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_2}$

根据题意 $E_1 = 2.5E_2$ 可解得 $R_2 = 2.5R_1 = 2.5\times 0.5 = 1.25\text{cm}$

又 E_1 的场强最大，故电压升高后，该处先击穿。令 $E_1 = E_M$，则有

$$\lambda = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 E_M$$

电缆能承受的最大电压

$$U_M = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} dr = R_1 E_M \ln\frac{R_2}{R_1} = 18.3\text{kV}$$

11、半径均为 a 的两根平行长直导线，相距为 d (d>>a)，
求单位长度上的电容。

解：设两导线间任意 P 点，距导线中心为 r，则 P 点 E 为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-r)}$$

两导线间的电势差 U_A-U_B

$$U_A-U_B=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int Edr=\int_a^{d-a}\left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-r)}\right]dr$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a}-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{d-a}$$

$$=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a}$$

$$C=\frac{q/l}{U_A-U_B}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{d-a}{a}}$$

14、一空气平板电容器的电容 C=1.0 pF，充电到电量为 $Q=1.0\times10^{-6}C$ 后将电源切断

(1) 求两极板间的电位差和电场能量；

(2) 将两极板拉到原距离的两倍，试计算拉开前后电场能量的变化；

解：(1) $$U=\frac{Q}{C}=\frac{1.0\times10^{-6}}{1.0\times10^{-12}}=1.0\times10^{6}\,V$$

$$W_e=\frac{Q^2}{2C}=\frac{\left(1.0\times10^{-6}\right)^2}{2\times1.0\times10^{-12}}=0.5J$$

(2) $$C'=\frac{\varepsilon_0 S}{2d}=\frac{1}{2}C$$

$$W'_e=\frac{Q^2}{2C'}=2W_e$$

$$\Delta W_e=W'_e-W_e=W_e=0.5J$$

15、电量为 Q_0，半径为 R_0 导体球，置于相对介电常数为ε_r的介质球壳中，如果介质的内半径为 R_0，外半径为 R，求:

(1) 介质中的电场能量密度；

(2) 贮存在介质球壳内的电场能量。

解：(1)能量密度 $\omega=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2$

由于场分布为球对称，应用高斯定理得

$$D=\frac{Q_0}{4\pi r^2}\qquad E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{Q_0}{4\pi r^2\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

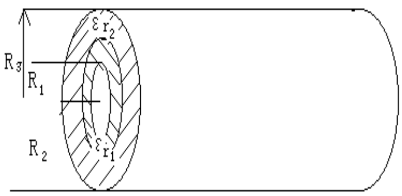
$$\omega=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\left[\frac{Q_0}{4\pi r^2\varepsilon_0\varepsilon_r}\right]^2=\frac{Q_0{}^2}{32\pi^2 r^4\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

（2） $$W=\int\omega_e dV=\int_{R_0}^{R}\frac{Q_0{}^2}{32\pi^2 r^4\varepsilon_0\varepsilon_r}4\pi r^2 dr=\frac{Q_0{}^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R}\right)$$

16、两层相对介电常数分别为ε_{r1}和ε_{r2}的介质，充满圆柱形电容器两极板之间 (如图)，电容器内、外两极圆筒在单位长度上的带电量分别为 λ 和–λ。求:

(1) 单位长度上的电容；

（2）此电容器系统单位长度上的电场的能量。



解:（1）设介质 1 中电场强度为 E_1,介质 2 中的电场强度为 E_2，由于在两介质中电场分布为轴对称，由高斯定理得

$$D=\frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$\therefore\ E_1=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}r},\qquad E_2=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}r}$$

$$U_1-U_2=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}r}dr+\int_{R_2}^{R_3}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}r}dr$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}}\ln\frac{R_3}{R_2}$$

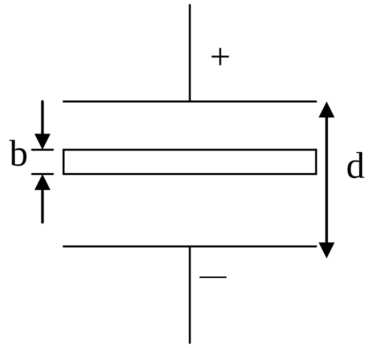
$$C=\frac{Q}{U_1-U_3}=\frac{\lambda l}{\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}\ln\dfrac{R_2}{R_1}+\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}}\ln\dfrac{R_3}{R_2}}$$

$$C_0=\frac{C}{l}=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_2}\ln\dfrac{R_2}{R_1}+\varepsilon_{r_1}\ln\dfrac{R_3}{R_2}}$$

（2） $$W_0=\frac{Q^2}{2C_0}=\frac{\lambda^2\left(\varepsilon_{r_2}\ln\dfrac{R_2}{R_1}+\varepsilon_{r_1}\ln\dfrac{R_3}{R_2}\right)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}}$$

拓展题：

1、一个平行板电容器，板面积为 S，板间距为 d，如图：



（1）充电后保持其电量 Q 不变，将一块厚为 b 的金属板平行于两极板插入，与金属板插入前相比，电容器储能增加多少？

（2）导体板进入时，外力（非电力）对它做功多少？是被吸入还是需要推入?

(3) 如果充电后保持电容器的电压 U 不变，则（1）（2）两问结果又如何？

解：（1）金属板插入前，电容器电容为$C_1=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

充电后，电容器能量为$W_1=\dfrac{Q^2}{2C_1}=\dfrac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$

金属板插入后，整个电容器可以看成两个电容器的串联组合，一个电容器两极板间距为 x，另一个电容器两极板间距为$d-(b+x)$，则整个电容器的电容为

$$C_2=\frac{C_{21}C_{22}}{C_{21}+C_{22}}=\frac{\dfrac{\varepsilon_0 S}{x}\bullet\dfrac{\varepsilon_0 S}{d-(b+x)}}{\dfrac{\varepsilon_0 S}{x}+\dfrac{\varepsilon_0 S}{d-(b+x)}}=\frac{\varepsilon_0 S}{d-b}$$

电量仍为 Q，则其能量为 $W_2 = \frac{Q^2}{2C_2} = \frac{Q^2(d-b)}{2\varepsilon_0 S}$

金属板插入前后，电容器能量增量为 $W_2 - W_1 = \frac{Q^2(d-b)}{2\varepsilon_0 S} - \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S} = -\frac{Q^2 b}{2\varepsilon_0 S}$

（2）外力做功等于电容器能量增量，即 $A = W_2 - W_1 = -\frac{Q^2 b}{2\varepsilon_0 S}$

因为 $A < 0$，所以金属板是被吸入的。

（3）$W_2 - W_1 = \ldots = \frac{\varepsilon_0 SbU^2}{2d(d-b)}$

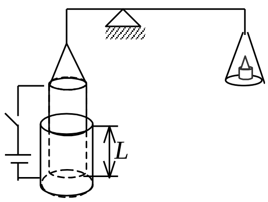
电容器电压不变，说明电容器与电源没有断开，此时，插金属板时，除了外力做功外，电源也会做功。设插入金属板前后，电容器电量分别为 Q_1 和 Q_2

$Q_1 = C_1 U \quad Q_2 = C_2 U$，插入金属板时，电源做功为 $A_1 = (Q_2 - Q_1)U = (C_2 - C_1)U^2$

设外力做功为 A_1 则 $A_1 + A_2 = W_2 - W_1$

由此可解得 $A_2 = -\frac{1}{2}(C_2 - C_1)U^2 = -\frac{\varepsilon_0 SbU^2}{2d(d-b)}$ 金属板仍然是被吸入的。

2、如图所示，一电容器由内、外半径分别为 a 和 b 的两个同轴圆筒组成，其轴线处于竖直方向．外筒固定，内筒悬挂在天平的一端．天平平衡时，内筒只有长度为 L 的一部分置于外筒中．当接上电源使两筒之间的电势差为 U 时，为了使天平保持平衡，右边称盘中需加多大质量的砝码？



解：未接电源时，电容为 $C = \frac{2pe_0 L}{\ln\left(b/a\right)}$

接电源后，由于异号电荷的相互吸引力，天平失去平衡，内筒将下移，设其位移为 dL，

电容的增量为 $dC = \frac{2pe_0 dL}{\ln\left(b/a\right)}$

在电压 U 不变下，电容器的能量增量为 $dW = \frac{1}{2}U^2 dC = \frac{pe_0 U^2}{\ln\left(b/a\right)} dL$

且 $$F = \frac{dW}{dL} = \frac{pe_0 U^2}{\ln\left(b/a\right)}$$

为使天平保持平衡，增加砝码的质量

$$F = mg \ ? \quad m \quad \frac{pe_0 U^2}{g \ln\left(b/a\right)}$$