6.4　　正交试验设计的基本思想

2014年6月25日

在方差分析中，对各个因子的每一种水平组合，都要进行实验，这称全面试验

前面，我们介绍了考虑一个因子的单因子方差分析和考虑两个因子的双因子方差分析。在实际问题中，与某个随机变量有关的因子数往往很多，而随着因子数的增加，方差分析所需要做的试验次数，将成倍地增多。

例如: A,B,C三个因子,每个因子三个水平的所有因子水平的组合:

$$(A_i, B_j, C_k),\ \ i=1,2,3,\ \ j=1,2,3,\quad k=1,2,3$$

这样的组合共有 3X3X3=27 种

不考虑交互作用,每个因子水平组合只做1次试验,也要做 27 次

考虑交互作用,每个因子水平组合做2次试验,就要做 27X2=54 次

考虑交互作用,每个因子水平组合做3次试验,就要做 27X3=81 次

能否减少试验的次数,而又得到近似于全面试验设计的效果呢?

正交试验设计的历史发展回顾

费希尔
（**Fisher,1890-1962**）

出版《试验设计》一书，首次比较系统地提出了试验设计的思想、理论和方法.

考克斯
（**Cox,1900-1978**）

美国历史上第一位取得数理统计硕士学位的女研究生，**1956**年被选为美国统计学会主席.

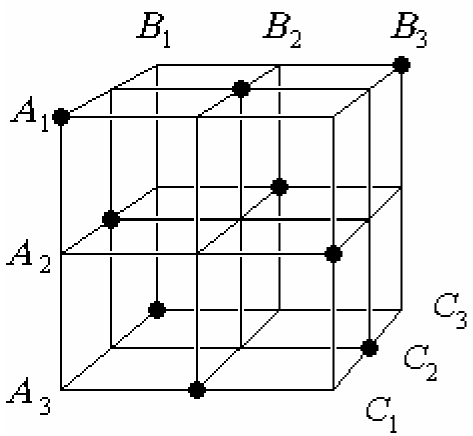
田口玄一
（**GenichiTaguchi,1924-**）

出版了“正交表”的书，简化了正交试验，提出“田口实验设计法”.

例如: A,B,C三个因子,每个因子三个水平的所有因子水平的组合:

$$(A_i, B_j, C_k),\ \ i=1,2,3,\ \ j=1,2,3,\ \ \ k=1,2,3$$

全面试验设计的全部27种水平组合，相当于下面图中立方体上的27个结点，按正交实验的思想选取的9种水平组合，相当于图中用圆点标出的9个结点。



我们从下图中可以看到，这些圆点的分布，有以下两个特点：

（1）在立方体中的每一个面上，圆点数相同，都是3个点；

（2）在立方体中的每一条线上，圆点数相同，都是1个点。

由于这 9个试验点分布得十分均匀，十分巧妙，所以，尽管试验次数不多，却能够很好地反映各因子各水平的情况，可以得到与全面试验设计几乎同样好的结果。

这个试验点是怎样选出来的呢？有一种被称为“正交表”的表格，各种正交试验设计方案，可以通过查正交表的方法来得到。

下面是一个记号为$L_9(3^4)$ 的正交表：

表头	A	B	C	
试验号 \ 列号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

表中的每一行，代表一种水平组合。这一行中，与表头上A 、B 、C 对应的数字表示在这个组合中，各因子所取的水平。例如，第 1 行代表(A_1, B_1, C_1)，第2行代表(A_1, B_2, C_2)，等等。表中9种组合，对应于正交试验设计中要做的9 次试验也就是上图中立方体上画出的9 个圆点。

这个表中出现的表示因子水平的数字，有两个特点：

（1）每一列中，各种数字出现的次数相等；

（2）任何两列中，各种数字的两两组合出现的次数相等。

凡是具备上述两个特点的因子水平数字表，就称为**正交表**

常用的正交表有：

$$L_4(2^3), L_8(2^7), L_{16}(2^{15}), \cdots,$$

$$L_9(3^4), L_{27}(3^{13}), \cdots,$$

$$L_{16}(4^5), \cdots$$

正交表记号$L_n(r^m)$ 的含义为：

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \text{正交表的列数}\ m & & \\
 & & \downarrow & & \\
\text{正交表的符号}\ L & \longrightarrow & L_n(r^m) & \longleftarrow & \text{因子的水平数}\ r \\
 & & \uparrow & & \\
 & & \text{正交表的行数}\ n & &
\end{array}
$$

n, m, r之间，有下列关系：$n = r^k$，$m = \dfrac{n-1}{r-1} = \dfrac{r^k-1}{r-1}$，$k = 2, 3, 4, \cdots$

6.5 不考虑相互作用的正交试验设计

（1）选正交表 $L_n(r^m)$

选择的原则是：r要等于因子的水平数;m要大于或等于因子的个数;n是试验次数，要尽可能小。

例如，问题中有4个因子，每个因子都是2个水平。

$r=2$	$L_4(2^3)$	$L_8(2^7)$	$L_{16}(2^{15})$	$L_{31}(2^{31})\ldots$
$m\geq 4$	$m=3$	$m=7$	$m=15$	$m=31$
n尽可能小	$n=4$	$n=8$	$n=16$	$n=32$ 选用$L_8(2^7)$

（2）设计表头

将各因子安排在正交表的各列上方，每个因子占1列，这称为表头。在不考虑交互作用的正交试验设计中，表头上的因子可以任意安放。表头上不放因子的列，称为空白列。

（3）按照设计做试验，取得试验观测值

正交表的每一行代表一种水平组合，对每一种水平组合做一次试验。

正交表有n行，所以，一共要做n次试验，共得到n个试验观测值：$X_1, X_2,\cdots, X_n$。

（4）在正交表的每一列中，求出与各水平对应的均值，以及这一列的平方和

设我们考虑的是第j 列。在这一列中，表示水平的数字1, 2, ..., r 每一个都重复出现n/r次。将这一列中的数字$1, 2,\cdots, r$ 对应的那试验观测值之和$W_{1j}, W_{2j},\cdots, W_{rj}$分别除以$n/r$，就得到与这一列中各水平对应的均值$\overline{X}_{1j}=\dfrac{W_{1j}}{n/r}, \overline{X}_{2j}=\dfrac{W_{2j}}{n/r},\cdots, \overline{X}_{rj}=\dfrac{W_{rj}}{n/r}$

从 $\overline{X}_{1j}, \overline{X}_{2j},\cdots, \overline{X}_{rj}$ 出发，求出这一列的平方和 $SS_j=\dfrac{n}{r}\sum_{i=1}^{r}(\overline{X}_{ij}-\overline{X})^2$，其中，

$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ 是总均值。

（5）列方差分析表，作显著性检验。

来源	平方和	自由度	均方	F 值	分位数
A	SS_A	$f_A = r-1$	$MS_A = SS_A / f_A$	$F_A = \dfrac{MS_A}{MS_e}$	$F_{1-\alpha}(f_A, f_e)$
B	SS_B	$f_B = r-1$	$MS_B = SS_B / f_B$	$F_B = \dfrac{MS_B}{MS_e}$	$F_{1-\alpha}(f_B, f_e)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
误差	SS_e	f_e	$MS_e = SS_e / f_e$		
总和	SS_T	$f_T = n-1$			

其中，$SS_T = \sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$是总平方和。$SS_A, SS_B, \cdots$分别是表头为$A, B, \cdots$各列的平方和。

$SS_e = SS_T - SS_A - SS_B - \cdots$是误差平方和。可以证明，$SS_T = \sum_{j=1}^{m} SS_j$ 即总平方和等于各列的平方和之和，

所以，SS_e也就是空白列的平方和之和。

$f_T = n - 1$是总自由度

$f_A = f_B = \cdots = r - 1$是各因子的自由度

$f_e = f_T - f_A - f_B - \cdots$是误差自由度

$MS_A = SS_A / f_A$，$MS_B = SS_B / f_B$，. . . 是各因子的均方，$MS_e = SS_e / f_e$是误差均方。

若A因子的作用不显著，则$F_A = \dfrac{MS_A}{MS_e} \sim F(f_A, f_e)$ ； 否则F_A 会偏大

若B因子的作用不显著，则$F_B = \dfrac{MS_B}{MS_e} \sim F(f_B, f_e)$ ； 否则F_B 会偏大

……

所以，像在方差分析中一样，只要给定显著水平 ，就可以用 分布检验因子 的作用是否显著

（6）寻找最优水平组合。

对每一个因子，在以它为表头的那一列中，比较各水平的均值的大小，可以确定哪一个水平最优。由于不考虑交互作用，所以，只要将各因子的最优水平组合起来，就是最优水平组合。

例 1 某化工厂为提高产品的收得率（单位：%），进行 3 因子 3 水平正交试验。所取的因子和水平分别为：

因子 A 是反应温度，A_1 是 80°C，A_2 是 85°C，A_3 是 90°C；

因子 B 是反应时间，B_1 是 90 分钟，B_2 是 120 分钟，B_3 是 150 分钟；

因子 C 是用碱量，C_1 是 5%，C_2 是 6%，C_3 是 7%。

要求进行不考虑交互作用的正交试验设计，检验因子 A, B, C 的作用是否显著（显著水平 $\alpha = 0.05$），并且找出最优水平组合。

解：

（1）选正交表。按照 $r = 3$，$m \geq 3$，n 尽可能小的原则，选用 $L_9(3^4)$。

（2）设计表头。将因子 A, B, C 依次安排在第 1, 2, 3 列。

（3）按照设计做试验，取得试验观测值。试验得到的观测值见下表。

（4）求各列与各水平对应的均值和各列的平方和。计算结果见下表。

表头	A	B	C		观测值（收得率） X_k
试验号 \ 列号	1	2	3	4	
1	1	1	1	1	31
2	1	2	2	2	54
3	1	3	3	3	38
4	2	1	2	3	53
5	2	2	3	1	49
6	2	3	1	2	42
7	3	1	3	2	57
8	3	2	1	3	62
9	3	3	2	1	64
$\overline{X}_{1j}$	41	47	45	48	$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k=50$
$\overline{X}_{2j}$	48	55	57	51	
$\overline{X}_{3j}$	61	48	48	51	
SS_j	618	114	234	18	$SS_T=\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2=\sum_{j=1}^{m}SS_j=984$

（5）列方差分析表，作显著性检验。

来源	平方和	自由度	均方	F 值	分位数
A	$SS_A = 618$	$r-1=2$	309	$F_A = 34.33$	$F_{0.95}(2, 2) = 19.0$
B	$SS_B = 114$	$r-1=2$	57	$F_B = 6.33$	$F_{0.95}(2, 2) = 19.0$
C	$SS_C = 234$	$r-1=2$	117	$F_C = 13.00$	$F_{0.95}(2, 2) = 19.0$
误差	$SS_e = 18$	8–2–2–2=2	9		
总和	$SS_T = 984$	$n-1=8$			

因为$F_A = 34.33 > 19.0 = F_{1-\alpha}(f_A, f_e)$，所以因子A作用显著

因为$F_B = 6.33 < 19.0 = F_{1-\alpha}(f_B, f_e)$，所以因子B作用不显著。

因为$F_C = 13.00 < 19.0 = F_{1-\alpha}(f_C, f_e)$，所以因子C作用也不显著。

(6) 寻找最优水平组合。

对于因子 A ，因为 A_1 的均值 $\overline{X}_{11}=41$ ，A_2 的均值 $\overline{X}_{21}=48$ ，A_3 的均值 $\overline{X}_{31}=61$ ，其中 $\overline{X}_{31}=61$ 最大，所以 A_3 是最优水平。

对于因子 B ，因为 B_1 的均值 $\overline{X}_{12}=47$ ，B_2 的均值 $\overline{X}_{22}=55$ ，B_3 的均值 $\overline{X}_{32}=48$ ，其中 $\overline{X}_{22}=55$ 最大，所以 B_2 是最优水平。

对于因子 C ，因为 C_1 的均值 $\overline{X}_{13}=45$ ，C_2 的均值 $\overline{X}_{23}=57$ ，C_3 的均值 $\overline{X}_{33}=48$ ，其中 $\overline{X}_{23}=57$ 最大，所以 C_2 是最优水平。

把 **3** 个因子的最优水平组合起来，就得到最优水平组合 (A_3, B_2, C_2) ，即反应温度为 **90°C**，反应时间为 **120** 分钟，用碱量为 **6%** 。

由于因子 B 很不显著，即反应时间的不同对于收得率没有显著的影响，为了节省反应时间，也可以考虑把反应时间改为 **90** 分钟，选用水平组合 (A_3, B_1, C_2) 。

因子 C 也不十分显著，即用碱量的不同对于收得率也没有太大的影响，如果希望节省用碱量，还可以考虑把用碱量改为 **5%**，选用水平组合 (A_3, B_1, C_1) 。

得到最优水平组合后，还可以对它以及在它的附近再做几次试验，看看它是否确实最优，是否还可以作改进，进一步得到更好的结果。

§ 6.6 考虑一级交互作用的正交试验设计

前面介绍了不考虑交互作用的正交试验设计，现在来看一下考虑交互作用的情形。

2 个因子之间的交互作用，如 $A\times B, A\times C, B\times C,\cdots$，称为**一级交互作用**，3 个因子之间的交互作用，如 $A\times B\times C, B\times C\times D,\cdots$，称为**二级交互作用**，…… ，一般地，$k$ 个因子之间的交互作用， 称为 $\mathbf{k-1}$ **级交互作用**。

考虑一级交互作用的正交试验设计和数据处理，可按下列步骤进行：

（1）选正交表 $L_n(r^m)$

选择的原则是：r要等于因子的水平数；m要大于或等于因子的个数加上r-1与一级交互作用个数的乘积；n是试验次数，要尽可能小。

例如，问题中有3个因子A, B, C, 每个因子都是3 个水平。要求考虑一级交互作用 $A\times B, A\times C, B\times C$。选正交表时，首先要选$r=3$ 的表。这样的正交表有 $L_9(3^4), L_{27}(3^{13}),\cdots$。因子的个数3加上 $r-1$与一级交互作用个数3 的乘积等于 $3+(3-1)\times 3=9$, 在$L_9(3^4)$中，m＝ 4，r−1小于9，所以不符合要求。在$L_{27}(3^{13})$ 中 $m=$ 13，大于9，符合要求。而且在符合要求的正交表中，$L_{27}(3^{13})$的试验次数 $n=27$为最小，所以，我们最后选定正交表$L_{27}(3^{13})$

（2）设计表头。

将各个因子、各个一级交互作用安排在正交表的各列上方，每个因子占1列，每个一级交互作用占 r-1列。因子和交互作用不能任意安放，需要查**交互作用表**。

例如，问题中有3个因子:A, B, C, 每个因子都是2 个水平。要求考虑一级交互作用$A\times B$, $A\times C$, $B\times C$。因子的个数3 加上r−1与一级交互作用个数3 的乘积等于 $3+(2-1)\times3=6$。在符合要求$r=2, m\geq6$ 的正交表中，$L_8(2^7)$ 的n = 8 为最小，所以，我们选正交表$L_8(2^7)$

安排表头，需要查交互作用表。书后附录中有一个“2水平正交表的交互作用表” 。

	表头	A	B	$A\times B$	C	$A\times C$	$B\times C$	
表头	列号	1	2	3	4	5	6	7
A	1	（1）	3	2	5	4	7	6
B	2		（2）	1	6	7	4	5
$A\times B$	3			（3）	7	6	5	4
C	4				（4）	1	2	3
$A\times C$	5					（5）	3	2
⋮	⋮						⋮	⋮

（3）按照设计做试验，取得试验观测值。

正交表的每一行代表一种水平组合，对每一种水平组合做一次试验。共得到n个试验观测值：$X_1, X_2, \cdots, X_n$

（4）在正交表的每一列中，求出与各水平对应的均值，以及这一列的平方和。

在每一列中，先计算出分别与数字 $1, 2, \cdots, r$ 对应的观测值之和 $W_{1j}, W_{2j}, \cdots, W_{rj}$

以及与各水平对应的均值 $\overline{X}_{1j}=\dfrac{W_{1j}}{n/r},\ \overline{X}_{2j}=\dfrac{W_{2j}}{n/r},\cdots,\overline{X}_{rj}=\dfrac{W_{rj}}{n/r}$ 。再计算出这一列

的平方和 $SS_j=\dfrac{n}{r}\sum_{i=1}^{r}(\overline{X}_{ij}-\overline{X})^2$ 。

（5）列方差分析表，作显著性检验。

来源	平方和	自由度	均方	F 值	分位数
A	SS_A	$f_A = r-1$	$MS_A = SS_A / f_A$	$F_A = \dfrac{MS_A}{MS_e}$	$F_{1-\alpha}(f_A, f_e)$
B	SS_B	$f_B = r-1$	$MS_B = SS_B / f_B$	$F_B = \dfrac{MS_B}{MS_e}$	$F_{1-\alpha}(f_B, f_e)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A \times B$	SS_{AB}	$f_{AB} = (r-1)^2$	$MS_{AB} = SS_{AB} / f_{AB}$	$F_{AB} = \dfrac{MS_{AB}}{MS_e}$	$F_{1-\alpha}(f_{AB}, f_e)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
误差	SS_e	f_e	$MS_e = SS_e / f_e$		
总和	SS_T	$f_T = n-1$			

其中，$SS_T = \sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$是总平方和。$SS_A, SS_B, \cdots$分别是表头为$A, B, \cdots$各列的平方和。

SS_{AB} 是表头$A \times B$的$r-1$列的平方和之和，$SS_{AC}, SS_{BC}, \cdots$ 也是类似这样的平方和之和。

$SS_e = SS_T - SS_A - SS_B - \cdots - SS_{AB} - \cdots$是误差平方和。可以证明，$SS_T = \sum_{j=1}^{m} SS_j$

即总平方和等于各列的平方和之和，所以，SS_e 也就是空白列的平方和之和。

$f_T = n-1$是总自由度，$f_A = f_B = \cdots = r-1$是各因子的自由度，

$f_{AB} = f_{AC} = \cdots = (r-1)^2$是各交互作用的自由度，$f_e = f_T - f_A - f_B - \cdots - f_{AB} - \cdots$

是误差自由度。

$MS_A = SS_A / f_A$，$MS_B = SS_B / f_B$,...,是各因子的均方，$MS_{AB} = SS_{AB} / f_{AB}$,...

是各交互作用的均方，$MS_e = SS_e / f_e$是误差均方。

可以证明，若因子A 作用不显著，则$F_A = \dfrac{MS_A}{MS_e} \sim F(f_A, f_e)$;若因子A的作用显著，则$F_A$ 的值会偏大，统计量F_A 的分布，相对于$F(f_A, f_e)$ 分布来说，峰值的位置会有一个向右的偏移。

. . .

所以，只要给定显著水平 α ，就可以用 F 分布检验因子 $A, B, \cdots$ 以及交互作用 $A\times B, A\times C, \cdots$ 是否显著。

（6）寻找最优水平组合。

对每个因子，比较各水平的均值的大小，可以确定哪一个水平最优。

对每个一级交互作用，比较各种双因子水平组合的均值的大小，可以确定哪一种双因子水平组合最优。

综合考虑以上两方面得到的结果，求出包括全部因子的最优水平组合。

例 1 为提高水稻的亩产量（单位：kg），进行 3 因子 2 水平正交试验。所取的因子和水平分别为：

因子 A 是水稻品种，A_1 是铁大，A_2 是双广；

因子 B 是插植距离，B_1 是 15 cm×12 cm，B_2 是 15 cm×15 cm；

因子 C 是化肥用量，C_1 是 10 kg / 亩，C_2 是 12.5 kg / 亩。

在进行正交试验设计时，考虑交互作用 $A\times B, A\times C, B\times C$。要求检验因子 A, B, C 以及交互作用 $A\times B, A\times C, B\times C$ 是否显著（显著水平 $\alpha=0.05$），并且找出最优水平组合。

解：（1）选正交表。 按照 $r=2$，$m\geq 6$，n 尽可能小的原则，选用 $L_8(2^7)$。

（2）设计表头。 如同前面已举例说明过的那样，可将因子 A, B, C 安排在第 1，2，4 列，交互作用 $A\times B, A\times C, B\times C$ 安排在第 3，5，6 列。

（3）按照设计做试验，取得试验观测值。试验得到的观测值见下表。

（4）求各列与各水平对应的均值和各列的平方和。计算结果见下表。

表头	A	B	$A\times B$	C	$A\times C$	$B\times C$		观测值（亩产量）X_k
试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	
1	1	1	1	1	1	1	1	805
2	1	1	1	2	2	2	2	750
3	1	2	2	1	1	2	2	885
4	1	2	2	2	2	1	1	850
5	2	1	2	1	2	1	2	965
6	2	1	2	2	1	2	1	870
7	2	2	1	1	2	2	1	811
8	2	2	1	2	1	1	2	730
$\overline{X}_{1j}$	822.5	847.5	774.0	866.5	822.5	837.5	834.0	$\overline{X}=833.25$
$\overline{X}_{2j}$	844.0	819.0	892.5	800.0	844.0	829.0	832.5	
SS_j	924.5	1624.5	28084.5	8844.5	924.5	144.5	4.5	$S_T=40551.5$

（5）列方差分析表，作显著性检验。

来源	平方和	自由度	均方	F 值	分位数
A	$SS_A=924.5$	$r-1=1$	924.5	$F_A=205.44$	$F_{0.95}(1,1)=161$
B	$SS_B=1624.5$	$r-1=1$	1624.5	$F_B=361.00$	$F_{0.95}(1,1)=161$
C	$SS_C=8844.5$	$r-1=1$	8844.5	$F_C=1965.44$	$F_{0.95}(1,1)=161$
$A\times B$	$SS_{AB}=28084.5$	$(r-1)^2=1$	28084.5	$F_{AB}=6241.0$	$F_{0.95}(1,1)=161$
$A\times C$	$SS_{AC}=924.5$	$(r-1)^2=1$	924.5	$F_{AC}=205.44$	$F_{0.95}(1,1)=161$
$B\times C$	$SS_{BC}=144.5$	$(r-1)^2=1$	144.5	$F_{BC}=32.11$	$F_{0.95}(1,1)=161$
误差	$SS_e=4.5$	7-1-1-1-1-1-1=1	4.5		
总和	$SS_T=40551.5$	$n-1=7$			

因为$F_A=205.44>161=F_{1-\alpha}(f_A, f_e)$，所以因子A作用显著

因为$F_B=361.00>161=F_{1-\alpha}(f_B, f_e)$，所以因子B作用显著

因为$F_C=1965.44>161=F_{1-\alpha}(f_C, f_e)$，所以因子C作用显著

因为$F_{AB}=6241.0>161=F_{1-\alpha}(f_{AB}, f_e)$，所以因子$A\times B$作用显著

因为$F_{AC}=205.44>161=F_{1-\alpha}(f_{AC}, f_e)$，所以因子$A\times C$作用显著

因为$F_{BC}=32.11<161=F_{1-\alpha}(f_{BC}, f_e)$，所以因子$B\times C$作用不显著

(6) 寻找最优水平组合。

对于因子 A ，因为 A_1 的均值 $\overline{X}_{11}=822.5$ ， A_2 的均值 $\overline{X}_{21}=844.0$ ，其中 $\overline{X}_{21}=844.0$ 最大，所以 A_2 是最优水平。

对于因子 B ，因为 B_1 的均值 $\overline{X}_{12}=847.5$ ， B_2 的均值 $\overline{X}_{22}=819.0$ ，其中 $\overline{X}_{12}=847.5$ 最大，所以 B_1 是最优水平。

对于因子 C ，因为 C_1 的均值 $\overline{X}_{14}=866.5$ ， C_2 的均值 $\overline{X}_{24}=800.0$ ，其中 $\overline{X}_{14}=866.5$ 最大，所以 C_1 是最优水平。

如果不考虑交互作用，把3 个因子的最优水平简单地组合起来，可以得到最优水平组合 (A_2,B_1,C_1)。下面考虑交互作用。

对于交互作用$A\times B$，各种双因子水平组合的均值为：

组合	均值	组合	均值
(A_1, B_1)	$\frac{X_1+X_2}{2}=\frac{805+750}{2}=777.5$	(A_1, B_2)	$\frac{X_3+X_4}{2}=\frac{885+850}{2}=867.5$
(A_2, B_1)	$\frac{X_5+X_6}{2}=\frac{965+870}{2}=917.5$	(A_2, B_2)	$\frac{X_7+X_8}{2}=\frac{811+730}{2}=770.5$

其中,917.5最大，所以(A_2, B_1)是$A\times B$ 的最优双因子水平组合。

对于交互作用$A\times C$ ，各种双因子水平组合的均值为：

组合	均值	组合	均值
(A_1, C_1)	$\frac{X_1+X_3}{2}=\frac{805+885}{2}=845$	(A_1, C_2)	$\frac{X_2+X_4}{2}=\frac{750+850}{2}=800$
(A_2, C_1)	$\frac{X_5+X_7}{2}=\frac{965+811}{2}=888$	(A_2, C_2)	$\frac{X_6+X_8}{2}=\frac{870+730}{2}=800$

其中,888最大，所以(A_2, C_1)是$A\times \mathrm{C}$ 的最优双因子水平组合。

对于交互作用$B\times C$ ，各种双因子水平组合的均值为：

组合	均值	组合	均值
(B_1, C_1)	$\frac{X_1+X_5}{2}=\frac{805+965}{2}=885$	(B_1, C_2)	$\frac{X_2+X_6}{2}=\frac{750+870}{2}=810$
(B_2, C_1)	$\frac{X_3+X_7}{2}=\frac{885+811}{2}=848$	(B_2, C_2)	$\frac{X_4+X_8}{2}=\frac{850+730}{2}=790$

其中,885最大，所以(B_1, C_1)是$B\times C$ 的最优双因子水平组合。

把上面得到的各个单因子的最优水平，各种双因子的最优水平组合，综合起来考虑，可以确定，3个因子的最优水平组合为 (A_2, B_1, C_1) ，即水稻品种应选用双广，插植距离应选用15 cm×12 cm，化肥用量应选用10 kg / 亩。

在本例中，各个单因子的最优水平，与由交互作用得出的各种双因子最优水平组合，没有任何矛盾。但是，在其它实例中，它们可能会发生矛盾。如果发生矛盾，就要比较各因子和各交互作用的显著性的大小，那些显著性特别大的因子和交互作用，应该优先考虑，那些显著性很小的因子和交互作用，可以少考虑一些，甚至可以完全不加考虑。

§ 6.7 正交试验设计中一些特殊问题的处理

6. 7. 1 如果要考虑二级或二级以上的交互作用，应该如何处理

在作表头设计时，单因子和各级交互作用在表头上所占的列数为：

单因子$A, B, C, \cdots$，每个占1列；一级交互作用$A\times B, A\times C, B\times C, \cdots$，每个占$r-1$列；二级交互作用$A\times B\times C, B\times C\times D, \cdots$，每个占$(r-1)^2 \cdots\cdots$;一般地，k级交互作用，每个占$(r-1)^k$列。

对于二级或二级以上的交互作用，仍可以通过查交互作用表安排它们在表头上的位置。

例 1 设问题中有 3 个因子：A, B, C，每个因子都是 2 个水平。要求考虑一级交互作用 $A\times B, A\times C, B\times C$，还要考虑二级交互作用 $A\times B\times C$。因子的个数 3 加上 $r-1$ 与一级交互作用个数 3 的乘积再加上 $(r-1)^2$ 与二级交互作用个数 1 的乘积等于 $3+(2-1)\times 3+(2-1)^2\times 1=7$。所以，正交表的列数 m 必须大于或等于 7。我们选正交表 $L_8(2^7)$。

2水平正交表的交互作用表为：

	表头	A	B	$A\times B$	C	$A\times C$	$B\times C$	$A\times B\times C$
表头	列号	1	2	3	4	5	6	7
A	1	（1）	3	2	5	4	7	6
B	2		（2）	1	6	7	4	5
$A\times B$	3			（3）	7	6	5	4
C	4				（4）	1	2	3
$A\times C$	5					（5）	3	2
$\vdots$	$\vdots$						$\vdots$	$\vdots$

首先，像过去一样，在表头上安排好单因子和一级交互作用。然后，通过查交互作用表，安排二级交互作用$A\times B\times C$ 。二级交互作用$A\times B\times C$ 可以作如下分解：

$$A\times B\times C=A\times(B\times C)=B\times(A\times C)=(A\times B)\times C$$

它可以看作是A与$B\times C$ 的交互作用，也可以看作是B 与$A\times C$ 交互作用，还可以看作是C与$A\times B$ 的交互作用，不管怎样分解，总是指示我们将$A\times B\times C$在同一个位置，即第7 列，决不会发生自相矛盾、互相冲突的情况。

如果问题中有三级、四级、…… 更多级的交互作用，也可以像这样分解，然后通过查交互作用表，确定它们在表头上的位置。

计算一个k级交互作用的平方和时，应该将表头上写有这个交互作用的$(r-1)^k$列的平方和全部加起来，得到的总和，就是它的平方和。在方差分析表中，每个k级交互作用的自由度为$(r-1)^{k+1}$

6.7.2　如果表头上没有空白列，应该如何处理

在作正交试验设计时，有时候，会出现这样的情况：因子和各级交互作用将表头全部放满了，表头上没有留下空白列，像上面的例1就是这样。

前面说过，误差平方和SS_e可以看作是空白列的平方和之和。当表头上没有空白列时，SS_e的值显然是0 。同时，可以证明，这时总自由度f_T 正好等于各因子各交互作用的自由度之和，所以，误差自由度$f_e = f_T - f_A - f_B - \cdots$也是0 。于是，误差均方$MS_e = SS_e / f_e = 0/0$，它的值无法确定。这样一来，$F_A = \dfrac{MS_A}{MS_e}$ ，$F_B = \dfrac{MS_B}{MS_e}$ ，$F_{AB} = \dfrac{MS_{AB}}{MS_e}$等等都无法求出，显著性检验也就无法进行了。

对于这种情况，可以采取以下几种处理办法：

（1）选用更大的正交表。

如果选用更大的正交表，表头上的列数肯定要比原来多，把原来所有的因子和交互作用都安排上去以后，表头上还会留下很多空白列，这样，无空白列的问题就解决了。

这种处理方法的缺点是，选用更大的正交表后，试验次数会大大增加，违背了正交试验设计最初的希望减少试验次数的想法。

（**2**）对正交表的每一行，做多次重复试验。

仍用原来的正交表，只是对正交表的每一行，作$t(t>1)$ 次重复试验。

设按正交表第 k 行的因子水平组合做试验，得到的试验观测值为

$$X_{k1}, X_{k2}, \cdots, X_{kt}$$

它们的均值为$\bar{X}_k=\frac{1}{t}\sum_{l=1}^{t}X_{kl}$。用$\bar{X}_1,\bar{X}_2,\cdots,\bar{X}_n$代替原来无重复试验时的观测值$X_1,X_2,\cdots,X_n$，像前面一样进行正交试验设计中的各种计算（只是在计算SS_j 时要多乘一个t).

由于这时总平方和$SS_T=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{t}(X_{kl}-\bar{X})^2>t\sum_{k=1}^{n}(\bar{X}_k-\bar{X})^2$，所以不再成立$SS_T=\sum_{j=1}^{m}SS_j$，而是有$SS_T>\sum_{j=1}^{m}SS_j$。这样，误差平方和$SS_e=SS_T-SS_A-SS_B-\cdots$就不会等于0了。同时，总自由度$f_T=nt-1>n-1$，大于各因子、各交互作用的自由度之和，所以，误差自由度$f_e=f_T-f_A-f_B\cdots$也不会等于0。这样一来，各种均方、F值都可以求出，显著性检验等都可以顺利进行了。

这种处理方法的缺点，也是会使试验次数成倍增加。

（3）列方差分析表时，不计算*F*值，根据均方的大小判断显著性的大小。

表头上无空白列时，误差均方MS_e的值无法确定，但是，各因子的均方$MS_A,MS_B,\cdots$和各交互作用的均方$MS_{AB},MS_{AC},\cdots$的值是可以求出来的。由于$F_A=\dfrac{MS_A}{MS_e}$，$F_B=\dfrac{MS_B}{MS_e}$，当$MS_A>MS_B$时，必定有$F_A>F_B$，因此可以根据均方的大小判断各因子和各交互作用显著性的相对大小。

这种处理方法的优点是，不需要增加试验次数。它的缺点是，只能判断显著性的相对大小，不能求出 F统计量的值，无法在给定的显著水平下，对各因子和各交互作用进行显著性检验。

（4）删除一些均方很小的因子或交互作用，有了空白列后，再作一次显著性检验

首先像前面一样计算，求出均方后，根据均方的大小，可以判断出各因子各交互作用显著性的相对大小。其中如果有一些因子或交互作用的均方很小，说明它们是很不显著的，因此，可以将这些因子或交互作用删除。删除后，表头上有了空白列，误差平方和SS_e 不再等于0，误差均方MS_e的值可以确定，F统计量的值可以求出，显著性检验也就可以顺利进行了。

6.7.3　如果各个因子的水平数不相等，应该如何处理？

前面介绍的正交试验设计中，各个因子的水平数都是相等的。但是，在很多实际问题中，因子的水平数不一定相等，下面就是一个例子。

例 2　为提高某种胶合板的质量，选择下列 3 个与制造工艺有关的因子进行正交试验：

A 是压力，有 4 个水平：A_1 是 8 kg，A_2 是 10 kg，A_1 是 11 kg，A_2 是 12 kg；

B 是温度，有 2 个水平：B_1 是 95°C，B_2 是 90°C；

C 是时间，有 2 个水平：C_1 是 9 分钟，C_2 是 12 分钟。

在这个例子中，各个因子的水平数不相等。对于这种水平数不等的情况，可以采取以下几种处理办法：

（1）人为地设置一些水平，使各个因子的水平数相等。

例如，在上面的例2中，我们可以给因子?增加两个水平:不妨设为 。，B_4不妨设为80°C。可以给因子C 也增加两个水平:C_3 不妨设为10 分钟，C_4不妨设为11分钟。

这样一来，各个因子的水平数就相等了，问题变成了一个3 因子4 水平的问题可以选用正交表$L_{16}(4^5)$，对它进行不考虑交互作用的正交试验设计。

（2）选用水平数不等的正交表。

前面介绍的正交表，都是水平数相等的正交表，其实，还有一种水平数不相等的正交表，称为**混合水平正交表**。

下面是一个混合水平正交表 $L_8(4\times 2^4)$ ：

表头	A	B	C		
列号 / 试验号	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	2	1	1	2	2
4	2	2	2	1	1
5	3	1	2	1	2
6	3	2	1	2	1
7	4	1	2	2	1
8	4	2	1	1	2

在这个表中，第1列的水平数是4 ，其余4列的水平数都是2 。这个表中出现的数字，仍满足正交表的两条要求，即：（1）每一列中，各种数字出现的次数相等；（2）任何两列中，各种数字的两两组合出现的次数相等。

对于上面的例2来说，我们可以将4 水平的因子A安排在这个表的第1 列，将2水平的因子B和因子C安排在这个表的第2 列和第3 列，然后就可以像普通的正交试验设计那样进行各种计算和推断了。在这个例子中，如果采用人为增加水平的办法，必须选用正交表$L_{16}(4^5)$，要试验16 次，而现在选用混合水平正交表$L_8(4\times 2^4)$，只要进行8次试验就可以了。

这样的混合水平正交表还有很多，如

$L_{12}(3\times 2^4)$ ，$L_{18}(2\times 3^7)$ ，$L_{24}(3\times 2^{16})$ ，$L_{16}(4\times 2^{12})$ ，$L_{16}(4^2\times 2^9)$ ，$L_{16}(4^3\times 2^6)$ ，$L_{16}(4^4\times 2^3)$ ，$L_{20}(5\times 2^8)$ ，$L_{12}(6\times 2^2)$ ，$L_{18}(6\times 3^6)$ ，$L_{24}(3\times 4\times 2^4)$ ，. . . 等等

这些正交表，可以在一些专门介绍正交试验设计的书中找到，这里就不多作介绍了。

对于上面的例 2 来说，我们可以将 4 水平的因子 A 安排在这个表的第 1 列，将 2 水平的因子 B 和因子 C 安排在这个表的第 2 列和第 3 列，然后就可以像普通的正交试验设计那样进行各种计算和推断了。在这个例子中，如果采用人为增加水平的办法，必须选用正交表 $L_{16}(4^5)$，要试验 16 次，而现在选用混合水平正交表 $L_8(4\times 2^4)$，只要进行 8 次试验就可以了。

这样的混合水平正交表还有很多，如

$L_{12}(3\times 2^4)$，$L_{18}(2\times 3^7)$，$L_{24}(3\times 2^{16})$，$L_{16}(4\times 2^{12})$，$L_{16}(4^2\times 2^9)$，$L_{16}(4^3\times 2^6)$，$L_{16}(4^4\times 2^3)$，

$L_{20}(5\times 2^8)$，$L_{12}(6\times 2^2)$，$L_{18}(6\times 3^6)$，$L_{24}(3\times 4\times 2^4)$，$L_{24}(6\times 4\times 2^3)$，… 等等。

这些正交表，可以在一些专门介绍正交试验设计的书中找到，这里就不多作介绍了。