华东理工大学 2012 – 2013 学年第二学期

《数学分析(中)》课程期末考试试卷 A 2013. 7. 3

开课学院：理学院　　专业：数、信计　　考试形式：闭卷　　所需时间：120分钟

考生姓名：________　　学号：________　　班级：________　　任课教师：姚媛媛

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总 分
得分										
评卷人										

(本试卷共九个大题)

一、判别下列级数的敛散性（共16分, 每小题8分）

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$　　2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$

二、求下列幂级数的收敛半径和收敛域（共18分, 每小题9分）

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)(x-1)^n$　　2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}(a > b > 0)$

三、设函数$f(x)$ 在$[0,a]$ 上Riemann 可积，且$f(x) = f(a-x)$，证明：$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\mathrm{d}x$。（10分）

四、设$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，证明：$A = 0$。（10分）

五、讨论函数序列$S_n(x) = \sin\dfrac{x}{n}$ 在以下指定区间上是否一致收敛：$(i)(-\infty,\infty)$，$(ii)[-A,A](A>0)$。（10分）

六、求$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ 的和函数及收敛域，并说明理由。（10分）

七、求$f(x) = \ln x$ 在$x_0 = 3$ 处的幂级数展开式并给出其收敛域。（10分）

八、设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，$\{x_n\}$ 单调递减，利用Cauchy 收敛原理证明：$\lim_{n\to\infty} nx_n = 0$。（10分）

九、举出一个收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，使得$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 发散。（6分）

华东理工大学 2012 – 2013 学年第二学期

《数学分析(中)》课程期末考试试卷　B　2013. 7. 3

开课学院：理学院　　专业：数、信计　　考试形式：闭卷　　所需时间：120分钟

考生姓名：＿＿＿＿＿　　学号：＿＿＿＿＿　　班级：＿＿＿＿＿　　任课教师：姚嫒嫒

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总　分
得分										
评卷人										

(本试卷共九个大题)

一、判别下列级数的敛散性（共16分, 每小题8分）

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$　　　　2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

二、求下列幂级数的收敛半径和收敛域（共18分, 每小题9分）

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}$　　　　2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\left(\frac{x-2}{3}\right)^n$

三、设函数$f(x)$ 在$[-a,a]$ 上Riemann 可积，且$f(x)$ 是奇函数，证明：$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$。（10分）

四、根据p 的取值情况，讨论广义积分$\int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1}\right)\mathrm{d}x$ 的敛散性。（10分）

五、讨论函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx^2}$ 在以下指定区间上是否一致收敛：$(i)[0,+\infty)$, $(ii)[\delta,+\infty)(\delta > 0)$。（10分）

六、求$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$的和函数及收敛域，并说明理由。（10分）

七、求$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$在$x_0=2$处的幂级数展开式并给出其收敛域。（10分）

八、判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a}{n(1+a^n)}$的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛），其中$a>0$。（10分）

九、证明不等式：$e^x+e^{-x}\le 2e^{\frac{x^2}{2}},x\in(-\infty,+\infty)$。（6分）

华东理工大学 2012 - 2013 学年第二学期

《数学分析(中)》课程期末考试标准答案 A 2013. 7. 3

一、判别下列级数的敛散性（共16分, 每小题8分）

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$　　　　2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n}$

解：1. 由于通项$1/1\sqrt[n]{n}\to 1$，故通项不趋于0（4分），由级数收敛的必要条件知，原级数发散（4分）。

2. 由于$\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n^2e^{-n}} = 1/e < 1$（4分），故由Cauchy 判别法，知原级数收敛（4分）。

二、求下列幂级数的收敛半径和收敛域（共18分, 每小题9分）

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(x-1)^n$　　　　2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}(a>b>0)$

解：1. 记$a_n = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$，则$\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$（柯西-阿达玛公式2分，上极限放缩2分），故收敛半径为$R = 1$（1分）。

当$x = 2$ 时，原级数= $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$，通项不趋于0，级数发散。当$x = 0$ 时，原级数= $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$，通项不趋于0，级数发散（3分）。

故收敛域为$(0,2)$（1分）。

2. 由于$\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{a^n+b^n}} = \frac{1}{a}$（柯西-阿达玛公式2分，上极限理由2分），故收敛半径为$R = a$（1分）。

当$x = a$ 时，原级数的通项= $\dfrac{a^n}{a^n+b^n} = \dfrac{1}{1+(b/a)^n}$ 趋于1 不趋于0，级数发散；同理$x = -a$ 原级数发散。（3分）

故收敛域为$(-a,a)$（1分）。

三、设函数$f(x)$ 在$[0,a]$ 上Riemann 可积，且$f(x) = f(a-x)$，证明：$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\mathrm{d}x$。（10分）

证明：$\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{a/2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a/2}^a f(x)\mathrm{d}x$（4分），在左边第一式中令$t = a-x$，则$\int_0^{a/2} f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^{a/2} f(a-t)\mathrm{d}t$（2分）。由于对$\forall x\in[0,a], f(x) = f(a-x)$，故$\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{a/2} f(x)\mathrm{d}x = 0$（4分）。

四、设$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，证明：$A = 0$。（10分）

证明：（反证法）若$A \neq 0$，不妨假设$A > 0$（$A < 0$ 时同理可证）。（2分）

由于$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A > A/2$，故存在$X_0 > a$，使得当$x > X_0$ 时，有$f(x) > A/2$。（3分）

$\forall B > X_0, \int_a^B f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{X_0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{X_0}^B f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^{X_0} f(x)\mathrm{d}x + (A/2)\cdot(B - X_0)$。（3分）

两边同时令$B \to +\infty$，得$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = +\infty$ 与$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，矛盾（2分）。

五、讨论函数序列$S_n(x) = \sin\dfrac{x}{n}$ 在以下指定区间上是否一致收敛：$(i)(-\infty,\infty)$，$(ii)[-A, A](A > 0)$。（10分）

解：(i) $\forall x \in (-\infty, +\infty), S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 0$（2分）。

取$x_n = n \in \mathbb{R}$，故$\sin(x_n) - 0 = \sin(x_n/n) = \sin 1 \not\to 0$。由对角线判别法，$\{S_n(x)\}$ 上非一致收敛（3分）。

(ii) 当$n > (2A)/\pi$ 时（2分），$\lim\limits_{n\to\infty} \sup_{x\in[-A,A]} |S_n(x) - 0| = \lim\limits_{n\to\infty} \sup_{x\in[-A,A]} |\sin(x/n)| = \sin(A/n) = 0$。故$\{S_n(x)\}$ 在$[-A, A]$ 上一致收敛（3分）。

六、求$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ 的和函数及收敛域，并说明理由。（10分）

解：由柯西-阿达玛公式，原级数的收敛半径$R = 1/\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n} = 1$（2分）。而$x = \pm 1$ 时，原级数通项不趋于0，故原级数收敛域为$(-1, 1)$（2分）。

由于幂级数在收敛域内逐项可导（2分），故$\forall x \in (-1, 1)$，

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}。$$

（4分）。

七、求$f(x) = \ln x$ 在$x_0 = 3$ 处的幂级数展开式并给出其收敛域。（10分）

解：令$t = x - 3$（2分），则$\ln x = \ln(3 + t) = \ln 3 + \ln(1 + \dfrac{t}{3})$（2分）。

由于$\forall x \in (-1, 1], \ln(1 + x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$（2分），故$\ln x = \ln 3 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\dfrac{t}{3}\right)^n = \ln 3 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n}(x-3)^n$（3分），收敛范围$(0, 6]$（1分）。

八、设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，$\{x_n\}$ 单调递减，利用Cauchy 收敛原理证明：$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 0$。（10分）

证明：因为$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，故$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall m > n > N$, 有$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| < \epsilon$。又$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 为正项级数，故$0 < x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m < \epsilon$（4分）。

又$\{x_n\}$单调递减，故$0 \le (m-n)x_m \le x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_m < \epsilon$。取$m=2n$，得$0 \le nx_{2n} < \epsilon$。故$0 \le 2nx_{2n} < 2\epsilon$，从而$\lim\limits_{n\to\infty} 2nx_{2n}=0$。（3分）

又$0 \le (2n+1)x_{2n+1} \le (2n+1)x_{2n} = \frac{2n+1}{2n}\cdot 2nx_{2n}$，则夹逼原则知$\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)x_{2n+1} = 0$（2分）。

综上知，$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 0$（1分）。

九、举出一个收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，使得$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$发散。（6分）

解：令$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 1-1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\underbrace{-\frac{1}{k\sqrt[3]{k}}-\frac{1}{k\sqrt[3]{k}}-\cdots-\frac{1}{k\sqrt[3]{k}}}_{k项}+\cdots$（4分）

因为$\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\underbrace{-\frac{1}{k\sqrt[3]{k}}-\frac{1}{k\sqrt[3]{k}}-\cdots-\frac{1}{k\sqrt[3]{k}}}_{k项}=0(k=1,2,\cdots)$，故$S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=0$，此级数收敛。（1分）

但是$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3 = 1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3\cdot 2}-\frac{1}{2^3\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{k}\underbrace{-\frac{1}{k^3\cdot k}-\cdots-\frac{1}{k^3\cdot k}}_{k项}+\cdots$发散，这是由于其部分和的子序列$S_{n_k}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}-1-\frac{1}{2^3}-\cdots-\frac{1}{k^3}\to+\infty$（其中$n_k=2+3+\cdots+(k+1), k\ge 2$）（1分）。

华东理工大学 2012 - 2013 学年第二学期

《数学分析(中)》课程期末考试标准答案 B 2013. 7

一、判别下列级数的敛散性（共16分, 每小题8分）

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ 　　　　2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

解：1. 当n 充分大时，$(\ln n)/n$ 单调递减趋于0，故原级数是Leibniz 级数（4分）。由Leibniz 级数必收敛，可知原级数收敛（4分）。

2. 令$f(x)=1/(x\ln x)$ 当$x>1$ 时单调递减趋于0（2分）。由Cauchy 积分判别法，原级数与广义积分$\int_2^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性一致（4分）。由于$\int_2^{+\infty}1/(x\ln x)\mathrm{d}x=\ln\ln x|_2^{+\infty}$ 发散知，原级数发散（2分）。

二、求下列幂级数的收敛半径和收敛域（共18分, 每小题9分）

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}$ 　　　　2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\left(\frac{x-2}{3}\right)^n$

解：1. 设$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，$\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\left|\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$（4分），故级数收敛半径为$\sqrt{2}$（1分）。

当$x=\pm\sqrt{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ 为Leibniz 级数，故收敛（3分）。故级数的收敛域为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$（1分）。

2. 设原级数为$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}}\cdot\frac{n!\cdot 2^n}{3^n}=0$（5分），故收敛半径为$+\infty$（2分），故收敛域为$(-\infty,+\infty)$（2分）。

三、设函数$f(x)$ 在$[-a,a]$ 上Riemann 可积，且$f(x)$ 是奇函数，证明：$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$。（10分）

证明：$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x$（4分），在左边第一式中令$t=-x$，则$\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x=-\int_{a}^{0}f(-t)\mathrm{d}t$（2分）。由于$f(x)$ 是奇函数，故对$\forall x\in[-a,a], f(-x)=-f(x)$（2分），故$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x$（2分）。

四、根据p 的取值情况，讨论广义积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1}\right)\mathrm{d}x$ 的敛散性。（10分）

解：对被积函数通分，$\displaystyle\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1}=\frac{(1-p)x^2+x-p^2}{(x^2+p)(x+1)}$。（4分）

当$p=1$时，由于$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\dfrac{x-1}{(x^2+p)(x+1)}=1$及Cauchy 判别法，知原广义积分收敛。（3分）

当$p\neq 1$时，由于$\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\dfrac{(1-p)x^2+x-p^2}{(x^2+p)(x+1)}=1-p\neq 0$及Cauchy 判别法，知原广义积分发散。（3分）

五、讨论函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} xe^{-nx^2}$在以下指定区间上是否一致收敛：$(i)[0,+\infty),(ii)[\delta,+\infty)(\delta>0)$。（10 分）

解：(i) $\epsilon_0=e^{-2}>0$，$\forall N>0,\exists n>N,m=2n,\exists x_0=1/\sqrt{n}$（2分），有
$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{2m} u_n(x_0)\right|=x_0\left(e^{-(n+1)x_0^2}+e^{-(n+2)x_0^2}+\cdots+e^{-mx_0^2}\right)>nx_0e^{-mx_0^2}=\sqrt{n}e^{-2}\geq\epsilon_0$，故由非一致收敛的Cauchy 准则，知原函数项级数在$[0,+\infty)$上非一致收敛（3分）。

(ii) 设$u_n(x)=xe^{-nx^2}$，有$u_n'(x)=(1-2nx^2)e^{-nx^2}$。由于$x\in[\delta,+\infty)$，故$u_n'(x)\leq(1-2n\delta^2)e^{-nx^2}$（2分）。

则$n>1/(2\delta^2)$时，有$u_n'(x)<0$，故$u_n(x)$单调递减。从而$\forall x\in[\delta,+\infty),0\leq u_n(x)<\delta e^{-n\delta^2}$（1分）。

由Cauchy 判别法，知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\delta e^{-n\delta^2}$收敛。故由Weierstrass 判别法知原级数在$[\delta,+\infty)$上一致收敛（2分）。

六、求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$的和函数及收敛域，并说明理由。（10分）

解：由柯西-阿达玛公式，原级数的收敛半径$R=1/\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n+1}=1$（2分）。而$x=\pm1$时，原级数通项不趋于0，故原级数收敛域为$(-1,1)$（2分）。

由于幂级数在包含收敛域中的任意一个闭区间上都逐项可积（2分），故$\forall x\in(-1,1)$，

$$\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(n+1)t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x}\text{。（2分）}$$

上式两边关于x求导，得$\forall x\in(-1,1),\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n=\dfrac{2x-x^2}{(1-x)^2}$（2分）。

七、求$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$在$x_0=2$处的幂级数展开式并给出其收敛域。（10分）

解：令$t=x-2$，此时$f(x)=1/(x-1)=1/(1+t)$（2分）。已知$\forall x\in(-1,1),1/(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，故$1/(1+t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^n$（4分）。

从而$f(x)=1/(x-1)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n$（2分），收敛域为$(1,3)$（2分）。

八、判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{a}{n(1+a^n)}$的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛），其中$a>0$。（10分）

解：当$a>1$时，考虑$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a}{n(1+a^n)}$，由于$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{a}{n(1+a^n)}}=1/a$，原级数绝对收敛（2分）。

当$a=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n}$时条件收敛（2分）。

当$0<a<1$时，由于$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$收敛；$\left\{\frac{a}{1+a^n}\right\}$单调有界，由Abel判别法，原级数收敛（3分）。又$\left|(-1)^{n+1}\dfrac{a}{n(1+a^n)}\right|\sim\dfrac{a}{n}$，故$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\dfrac{a}{n(1+a^n)}\right|$发散（2分）。

综上：$a>1$时原级数绝对收敛；$0<a\le 1$时原级数条件收敛（1分）。

九、证明不等式：$e^x+e^{-x}\le 2e^{\frac{x^2}{2}}, x\in(-\infty,+\infty)$。（6分）

证明：因为$\forall x\in(-\infty,=\infty), e^x+e^{-x}=2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$（2分），$2e^{\frac{x^2}{2}}=2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!!}$（2分），而$(2n)!\ge(2n)!!$，故$e^x+e^{-x}\le 2e^{\frac{x^2}{2}}$（2分）。