Brilliant Problems in Mathematical Analysis

数学分析好题集锦

欢迎大家微信扫描二维码关注我的微信公众号
向老师讲数学

译者：中国科学技术大学向禹
微博：向禹 1994
微信公众号：向老师讲数学
Email：xy123@mail.ustc.edu.cn

Version: 1.00

好题集锦

这一部分题目我忽略一些理论性的东西,特别是和一致收敛和次序交换有关的问题,很多比较显然我不加声明,有些则比较麻烦,我也不做证明,而注重的各种计算技巧和方法. 这些题目都是我从各个数学论坛搜集来的,其中声明原创的题目,其解答都是由我本人给出的. 未声明原创的题目则是由网友以及我的一些朋友给出的解答,感谢各位. 如果有错误的地方,烦请大家指出,邮箱我标在了页眉部分.

例 0.1: 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n^3\left(\tan\int_0^{\pi}\sqrt[n]{\sin x}\mathrm{d}x+\sin\int_0^{\pi}\sqrt[n]{\sin x}\mathrm{d}x\right).$$

✎ **解:**[原创] 当 $x\to 0$ 时, $\tan x-\sin x\sim\frac{x^3}{2}$,

于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^3\left(\tan\int_0^{\pi}\sqrt[n]{\sin x}\mathrm{d}x+\sin\int_0^{\pi}\sqrt[n]{\sin x}\mathrm{d}x\right)\\
=&\lim_{n\to\infty} n^3\left(\tan\int_0^{\pi}(\sqrt[n]{\sin x}-1)\mathrm{d}x-\sin\int_0^{\pi}(\sqrt[n]{\sin x}-1)\mathrm{d}x\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n\int_0^{\pi}(\sqrt[n]{\sin x}-1)\mathrm{d}x\right)^3}{2}\\
=&\frac{\left(\int_0^{\pi}\ln\sin x\mathrm{d}x\right)^3}{2}\\
=&-\frac{(\pi\ln 2)^3}{2}
\end{aligned}$$

其中

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{\pi}\left(\sqrt[n]{\sin x}-1\right)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sqrt[n]{\sin x}-1}{1/n}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x=-\pi\ln 2$$

是一个比较常见的积分,其中极限与积分次序的交换我没有声明,其实可以直接用 Gamma 函数表示出那个积分再求极限,留给读者. □

例 0.2: 计算积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{1}{x^4-x^2+1}\ln^2\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x.$$

✎ **解:** 作变换 $x\to\frac{1}{x}$ 可得

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\ln^2\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x.$$

于是

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\ln^2\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}\ln^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)\mathrm{d}x\xlongequal{t=x-\frac{1}{x}}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln^2(t^2+1)}{t^2+1}\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln^2\cos^2 u\mathrm{d}u=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln^2\sin u\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi^3}{6} + 2\pi\ln^2 2.$$

其中最后一步利用 $\ln\sin x$ 的 Fourier 级数 $\ln\sin x = -\ln 2 - \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2kx}{k}$(这个公式大家除了用 Fourier 级数的方法推出, 还可以利用复数法推出), 然后根据 Fourier 级数的逐项积分性质和三角函数的正交性质得

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2 \sin x \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\ln 2 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{k}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\ln^2 2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos^2 2kx}{k^2}\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln^2 2 + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2kx}{2k^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}\ln^2 2 + \frac{\pi}{4}\zeta(2) = \frac{\pi}{2}\ln^2 2 + \frac{\pi^3}{24}
\end{aligned}$$

□

例 0.3: 计算积分

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{((2n)!!)^2}\right)\mathrm{d}x$$

✎ **解:** 因为

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!!}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x^2$$

所以原积分

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{(2^2)^n(n!)^2}\mathrm{d}x^2 = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n(n!)^2}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1)}{2^n(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

□

例 0.4: 计算积分

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}{x}\mathrm{d}x$$

✎ **解:** 考虑积分

$$I(t) = \int_0^1 \frac{\ln\left(tx+\sqrt{1-x^2}\right)}{x}\mathrm{d}x$$

那么

$$\begin{aligned}
I(0) &= \int_0^1 \frac{\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x + \int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{6}\right) = -\frac{\pi^2}{24}
\end{aligned}$$

而

$$I'(t)=\int_0^1\frac{1}{tx+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\theta=\int_0^\infty\frac{\cos\theta}{t\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+t^2}+\frac{t\ln t}{1+t^2}$$

上式对 t 积分得

$$I(t)=\frac{\pi}{2}\arctan t+\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\ln t-\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\ln(1+x^2)}{x}\mathrm{d}x+C$$

其中

$$C=I(0)=-\frac{\pi^2}{24},I=I(1)=\frac{\pi^2}{8}+0-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{24}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{16}$$

□

例 0.5: 计算不定积分

$$\int\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$$

✎ **解:**

$$\begin{aligned}&\int\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x}+1}\mathrm{d}x\\
=&\int\frac{2u^2}{(1+u)(1+u^4)}\mathrm{d}u\quad\left(u=\sqrt{\tan x}\right)\\
=&\int\left(\frac{1}{1+u}+\frac{-u^3+u^2+u-1}{1+u^4}\right)\mathrm{d}x\\
=&\ln(1+u)-\frac{1}{4}\ln(1+u^4)+\int\frac{\mathrm{d}\left(u+\frac{1}{u}\right)}{\left(u+\frac{1}{u}\right)^2-1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(u^2)}{1+(u^2)^2}\\
=&\ln(1+u)-\frac{1}{4}\ln(1+u^4)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u^2-u+1}{u^2+u+1}\right)+\frac{1}{2}\arctan u^2+C\\
=&\ln(1+\sqrt{\tan x})-\frac{1}{4}\ln(1+\tan^2 x)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\tan x-\sqrt{\tan x}+1}{\tan x+\sqrt{\tan x}+1}\right)+\frac{1}{2}+C\end{aligned}$$

□

例 0.6: 计算不定积分

$$\int\left(\frac{\arctan x}{x-\arctan x}\right)^2\mathrm{d}x.$$

✎ **解:**

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{\arctan x}{x-\arctan x}\right)^2\mathrm{d}x&=\int\frac{t^2}{(\tan t-t)^2}\sec^2 t\mathrm{d}t\\
&=\int\frac{t^2}{(\sin t-t\cos t)^2}\mathrm{d}t\\
&=\int\left(-\frac{t}{\sin t}\right)\left(-\frac{t\sin t}{(\sin t-t\cos t)^2}\right)\mathrm{d}t\\
&=-\frac{t}{\sin t}\frac{1}{\sin t-t\cos t}+\int\frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t}\\
&=-\frac{(1+\tan^2 t)t}{\tan t(\tan t-t)^2}-\frac{1}{\tan t}+C\\
&=-\frac{(1+x^2)\arctan t}{x(x-\arctan x)}-\frac{1}{x}+C\end{aligned}$$

$$=-\frac{1+x\arctan x}{x-\arctan x}+C$$

□

例 0.7: 计算积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}\cosh(a\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$$

✎ **解:**

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}\cosh(a\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\\
&=2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos\mathrm{h}\,(at)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\left(\mathrm{e}^{at}+\mathrm{e}^{-at}\right)\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-t^2+at}+\mathrm{e}^{-t^2-at}\right)\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2}\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}-\left(t+\frac{a}{2}\right)^2}\mathrm{d}t\\
&=\mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}}\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2}\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(t+\frac{a}{2}\right)^2}\mathrm{d}t\right)\\
&=\mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}}\left(\int_{-\frac{a}{2}}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{a}{2}}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\\
&=\mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}}\left(\int_{-\infty}^{\frac{a}{2}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{a}{2}}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\\
&=\mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}}
\end{aligned}$$

□

例 0.8: 设 $a>b>0$, 计算积分

$$\int_0^{\pi}\ln(a+b\cos x)\mathrm{d}x.$$

✎ **解:** 记 $I(b)=\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(a+b\cos x)\mathrm{d}x$, 那么

$$\begin{aligned}
I'(b)&=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{a+b\cos x}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{b}-\frac{a}{b}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}\\
&=\frac{\pi}{b}-\frac{2a}{b}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(a+b)+(a-b)t^2}\quad(t=\tan(x/2))\\
&=\frac{\pi}{b}-\frac{2a}{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}u\right)\Bigg|_0^{\infty}\\
&=\frac{\pi}{b}-\frac{2a}{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\\
&=\frac{\pi}{b}-\frac{\pi a}{b\sqrt{a^2-b^2}}
\end{aligned}$$

□

例 0.9: 计算积分

$$I=\int_0^1\frac{\sqrt[n]{x^m(1-x)^{n-m}}}{(1+x)^3}\mathrm{d}x.$$

✎ **解:**

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{\sqrt[n]{x^m(1-x)^{n-m}}}{(1+x)^3}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x}{1+x}\right)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{n-m}{n}}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} \\
&= 2^{-\frac{n+m}{n}}\int_0^1 t^{\frac{m}{n}}(1-t)^{\frac{n-m}{n}}\mathrm{d}t \quad \left(t=\frac{x}{1+x}\right) \\
&= \frac{2^{-\frac{n+m}{n}}}{\Gamma(3)}\Gamma\left(\frac{m+n}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2n-m}{n}\right) \\
&= 2^{-\frac{n+m}{n}}\cdot\frac{m}{n}\frac{n-m}{n}\cdot\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right) \\
&= 2^{-\frac{n+m}{n}}\cdot\frac{m(n-m)}{n^2}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)}
\end{aligned}$$

□

例 0.10:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3}\ln n\right).$$

✎ **解:** 首先有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3k+1} &= 1+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1/3}-\frac{1}{k}\right)\right) \\
&= 1+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1/3}-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)+\frac{1}{3}\ln n
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3}\ln n &= 1+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1/3}-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \\
&= 1+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^1 x^{k+1/3-1}\mathrm{d}x-\int_0^1 x^{k-1}\mathrm{d}x\right)+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right) \\
&= 1+\frac{1}{3}\left(\int_0^1\frac{x^{1/3}-1}{1-x}\mathrm{d}x\right)+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right) \\
&= 1+\int_0^1\frac{x^{1/3}-1}{1-x}\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right) \\
&= 1-\int_0^1\frac{x^2}{x^2+x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right) \\
&= \frac{\pi\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)
\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3}\ln n\right)=\frac{1}{3}\gamma+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{2}\ln 3.$ □

例 0.11: 把方程 $\tan x=x$ 的正根按从小到大顺序排成数列 x_n, 求极限

$$\lim_{n\to\infty}x_n^2\sin(x_{n+1}-x_n)$$

✎ **解:**[原创] 首先容易得到 $x_n \in \left((n-1)\pi, (n-1)\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$, 于是 $x_n - (n-1)\pi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 故

$$x_n = \tan x_n = \tan(x_n - (n-1)\pi)$$

所以 $\arctan x_n = x_n - (n-1)\pi$, 且 $x_n - (n-1)\pi \to \dfrac{\pi}{2}, n \to \infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n^2 \sin(x_{n+1} - x_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n^2 \sin(\arctan x_{n+1} - \arctan x_n + \pi) \\
&= -\lim_{n\to\infty} n^2\pi^2 \sin\left[\arctan\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{1 + x_n x_{n+1}}\right)\right] \\
&= -\lim_{n\to\infty} n^2\pi^2 \frac{x_{n+1} - x_n}{1 + x_n x_{n+1}} = -\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) \\
&= -\lim_{n\to\infty} [x_{n+1} - n\pi - (x_n - (n-1)\pi)] - \pi \\
&= -\pi.
\end{aligned}$$

□

例 0.12: 数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_1 = 2, a_2 = 8, a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} (n = 2, 3, \cdots)$, 求和 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccot}(a_n^2)$.

✎ **解:** 利用递推式可得

$$\begin{aligned}
a_n(4a_{n-1}) &= a_{n-1}a_n \\
\Rightarrow a_n(a_n + a_{n-2}) &= a_{n-1}(a_{n+1} + a_{n-1}) \\
\Rightarrow a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} &= a_{n-1}^2 - a_n a_{n-2}
\end{aligned}$$

根据上述递推关系可得, 对 $\forall n \geqslant 2$,

$$a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = a_{n-1}^2 - a_n a_{n-2} = \cdots = a_2^2 - a_1 a_3 = 4.$$

根据反余切公式 $\operatorname{arccot} a - \operatorname{arccot} b = \operatorname{arccot}\left(\dfrac{1+ab}{b-a}\right)$ 可得

$$\begin{aligned}
\operatorname{arccot}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - \operatorname{arccot}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) &= \operatorname{arccot}\left(\frac{1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}}{\frac{a_n}{a_{n-1}} - \frac{a_{n+1}}{a_n}}\right) \\
&= \operatorname{arccot}\left[\frac{a_n(a_{n-1} + a_{n+1})}{a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1}}\right] \\
&= \operatorname{arccot}\left[\frac{a_n(4a_n)}{4}\right] \\
&= \operatorname{arccot} a_n^2.
\end{aligned}$$

由特征根方法可得 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right]$, 于是

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccot}(a_n^2) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arccot}(a_n^2) \\
&= \operatorname{arccot} a_1^2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \left[\operatorname{arccot}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) - \operatorname{arccot}\left(\frac{a_k}{a_{k-1}}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{arccot} a_1^2 + \lim_{n\to\infty}\left[\operatorname{acrcot}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - \operatorname{acrcot}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\operatorname{arccot}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \operatorname{arccot}(2+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}
$$

□

例 0.13: 计算积分

$$
\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^4}{1-x^4}\arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x.
$$

✎ **解:**[原创]

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^4}{1-x^4}\arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 t}{1-\tan^2 t}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\mathrm{d}t\\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 t}{1-\tan^2 t}\mathrm{d}t\\
&= -\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t + \pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{1-\tan^2 t}\mathrm{d}t\\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 2t}{2\cos 2t}\mathrm{d}t\\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right).
\end{aligned}
$$

□

例 0.14: 求和

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\left(1+\sqrt[2^n]{2}\right)}.
$$

✎ **解:** 首先注意到

$$
\frac{1}{2^n\left(\sqrt[2^n]{2}-1\right)} - \frac{1}{2^n\left(\sqrt[2^n]{2}+1\right)} = \frac{1}{2^{n-1}\left(\sqrt[2^{n-1}]{2}-1\right)}.
$$

于是得到

$$
\frac{1}{2^n\left(\sqrt[2^n]{2}+1\right)} = \left[\frac{1}{2^n\left(\sqrt[2^n]{2}-1\right)}-1\right] - \left[\frac{1}{2^{n-1}\left(\sqrt[2^{n-1}]{2}-1\right)}-1\right]
$$

且当 $n=1$ 时,

$$
\frac{1}{2^{n-1}\left(\sqrt[2^{n-1}]{2}-1\right)} - 1 = 0.
$$

因此可求得部分和

$$
\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2^n\left(1+\sqrt[2^n]{2}\right)} = \frac{1}{2^m\left(\sqrt[2^m]{2}-1\right)} - 1.
$$

令 $m\to\infty$ 可得

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\left(1+\sqrt[2^n]{2}\right)} = \frac{1}{\ln 2} - 1.
$$

□

例 0.15: 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数, 且 $\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x=0$. 求证:

$$\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{27}{4}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^4.$$

☞ **证明:** 令

$$I_n=\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x$$

由 Cauchy 不等式得

$$I_2 \geqslant I_1^2$$

再由 Cauchy 不等式得

$$\left(\int_0^1\left(r+f^2(x)\right)f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1\left(r+f^2(x)\right)^2\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$$

展开得到

$$r^2I_1^2 \leqslant r^2I_2+2rI_2^2+I_2I_4$$

也即

$$(I_1^2-I_2)r^2-2I_2^2r-I_2I_4 \leqslant 0$$

于是上式左边的最大值也小于等于 0, 最大值在 $r=\dfrac{I_2^2}{I_1^2-I_2}$ 取到, 即满足

$$\frac{I_4^4}{I_1^2-I_2}-\frac{2I_2^4}{I_1^2-I_2}-I_2I_4 \leqslant 0$$

即

$$I_4 \geqslant \frac{I_2^3}{I_2-I_1^2}$$

所以只要证明

$$\frac{I_2^3}{I_2-I_1^2} \geqslant \frac{27}{4}I_1^4$$

注意到

$$(I_2-I_1^2)I_1^4=\frac{1}{2}(2I_2-2I_1^2)I_1^2\cdot I_1^2 \leqslant \frac{4}{27}I_2^3$$

即

$$\frac{I_2^3}{I_2-I_1^2} \geqslant \frac{27}{4}I_1^4$$

故有

$$\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{27}{4}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^4.$$

□

例 0.16: 设函数 $f\in C(a,b)$ 不恒为零, 满足 $0\leqslant f(x)\leqslant M$, 试证明:

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2+\frac{M^2(b-a)^4}{12}$$

☞ **证明:** 令

$$A=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2=\iint\limits_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$B=\left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2=\iint\limits_D f(x)f(y)\sin x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$C=\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2=\iint\limits_D f(x)f(y)\cos x\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里区域 $D=\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b\}$.

则有

$$B+C=\iint\limits_D f(x)f(y)(\sin x\sin y+\cos x\cos y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x)f(y)\cos(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}A-(B+C)&=\iint\limits_D f(x)f(y)[1-\cos(x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\iint\limits_D f(x)f(y)\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\leqslant\frac{M^2}{2}\iint\limits_D (x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{M^2}{2}\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b(x-y)^2\mathrm{d}y\\&=\frac{M^2(b-a)^4}{12}\end{aligned}$$

□

例 0.17: 计算积分

$$\int_0^1\frac{\arctan\sqrt{x^2+2}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x$$

✎ **解:**

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{16}&=\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}\\&=\int_0^1\int_0^1\left[\frac{1}{(1+x^2)(2+x^2+y^2)}+\frac{1}{(1+y^2)(2+x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\int_0^1\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)(2+x^2+y^2)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=2\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\mathrm{d}x\\&=2\int_0^1\left[\frac{\pi}{2(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}-\frac{\arctan\sqrt{2+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi^2}{6}-2\int_0^1\frac{\arctan\sqrt{x^2+2}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x\\&\Rightarrow\int_0^1\frac{\arctan\sqrt{x^2+2}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x=\frac{5}{96}\pi^2\end{aligned}$$

□

例 0.18: 计算积分

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^4+(1+2\sqrt{2})x^2+1)(x^{100}-x^{98}+\cdots+1)}\mathrm{d}x$$

✎ **解:** 记

$$I=\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^4+(1+2\sqrt{2})x^2+1)(x^{100}-x^{98}+\cdots+1)}\mathrm{d}x$$

把 x 换成 $\dfrac{1}{x}$ 得

$$I=\int_0^{\infty} \frac{x^{102}}{(x^4+(1+2\sqrt{2})x^2+1)(x^{100}-x^{98}+\cdots+1)}\mathrm{d}x$$

注意到

$$x^{100}-x^{98}+\cdots+1=\frac{1+x^{102}}{1+x^2}$$

于是

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1+x^2}{x^4+(1+2\sqrt{2})x^2+1}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}+1+2\sqrt{2}}\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi}{2(1+\sqrt{2})}
\end{aligned}$$

□

例 0.19: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)^{2017}}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x^{2016}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x$$

✎ **解:** 由推广的积分第一中值定理, 对每个正整数 n, $\exists\theta_n\in(0,1)$ 使得

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} x^{2016}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x=((2n+\theta_n)\pi)^{2016}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x$$

由此得

$$\begin{aligned}
&\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} x^{2016}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x\\
=&\left((2n\pi)^{2016}+o(n^{2016})\right)\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x\\
=&\left((2n\pi)^{2016}+o(n^{2016})\right)\left(\frac{\cos 5x}{80}-\frac{\cos 3x}{48}-\frac{\cos x}{8}\right)\Bigg|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\\
=&\frac{4}{15}\left((2n\pi)^{2016}+o(n^{2016})\right)\quad n\to\infty
\end{aligned}$$

另外

$$(2n+1)^{2017}-(2n-1)^{2017}=4034(2n)^{2016}+o(n^{2016})\quad n\to\infty$$

于是由 Stolz 定理得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)^{2017}}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}x^{2016}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}x^{2016}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x}{(2n+1)^{2017}-(2n-1)^{2017}}\\
=&\frac{2}{30510}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n\pi)^{2016}+o(n^{2016})}{(2n)^{2016}+o(n^{2016})}\\
=&\frac{2\pi^{2016}}{30510}
\end{aligned}
$$

更一般的结果是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)^{p+1}}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}x^{p}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{2\pi^p}{15(p+1)}.$$

□

例 0.20: 求和

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots\right)^2$$

✎ **解:** 首先注意到

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots=\int_0^1(x^n-x^{n+1}+x^{n+2}-\cdots)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$$

于是可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots\right)^2&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1\frac{x^n}{x+1}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1\frac{y^n}{y+1}\mathrm{d}y\right)\\
&=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)(1-xy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\frac{1}{1+x}\left(\int_0^1\frac{1}{(1+y)(1-xy)}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\frac{1}{1+x}\left(\frac{\ln 2-\ln(1-x)}{1+x}\right)\mathrm{d}x\\
&=\left(\frac{(1-x)\ln(1-x)}{2(1+x)}+\frac{\ln(1+x)}{2}-\frac{\ln 2}{1+x}\right)\Bigg|_0^1\\
&=\ln 2
\end{aligned}
$$

□

例 0.21: 设 $f(x)$ 是连续实值函数, 且满足

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\cdots=\int_0^1 x^{n-1}f(x)\mathrm{d}x=1$$

证明:

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant n^2$$

✎ **解:** 考虑多项式

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

如果多项式 $P(x)$ 也满足上面的条件, 那么

$$\int_0^1 P^2(x)\mathrm{d}x=a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}$$

为了求出系数 a_i, 再次利用条件

$$\int_0^1 x^kP(x)\mathrm{d}x=1\quad k=0,1,\cdots,n-1$$

$$\Rightarrow\frac{a_0}{k+1}+\frac{a_1}{k+2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{k+n}=1\quad k=0,1,\cdots,n-1$$

设

$$H(x)=\frac{a_0}{x+1}+\frac{a_1}{x+2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x+n}$$

则显然有

$$H(0)=H(1)=\cdots=H(n-1)=0$$

于是

$$H(x)=\frac{Ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

对比系数可得 $A=-1$ 以及

$$a_k=(-1)^{n-k+1}\frac{(n+k)!}{(k!)^2(n-k+1)!}\quad k=0,1,\cdots,n-1$$

用数学归纳法可以证明

$$\sum_{k=0}^{n-1}a_k=n^2$$

所以, 多项式 $P(x)$ 满足上面的性质, 则

$$\int_0^1 P^2(x)\mathrm{d}x=a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}=n^2$$

取满足以上条件的多项式 $P(x)$, 由 Cauchy 不等式得

$$\int_0^1 P^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 P(x)f(x)\mathrm{d}x\right)^2=n^4$$

$$\Rightarrow\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant n^2.$$

□

例 0.22: 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sinh\left(2^n\right)}.$$

✎ **解:**

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sinh\left(2^n\right)}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mathrm{e}^{2^n}-\mathrm{e}^{-2^n}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mathrm{e}^{2^n}\left(1-\mathrm{e}^{-2\cdot 2^n}\right)}\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-2^n}\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-2\cdot 2^n\cdot k}\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(2k+1)\cdot 2^n}\\&=2\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-2m}=\frac{2}{\mathrm{e}^2-1}.\end{aligned}$$

□

例 0.23: 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的 n 阶连续可微函数, 满足 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right)=0$, 其中 i 是不超过 n 的偶数, 证明

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{(2n+1)\,4^n\,(n!)^2}\int_0^1\left(f^{(n)}(x)\right)^2\mathrm{d}x.$$

✎ **解:** 如果 $g\in C^n([0,1])$, 则对任意 $a\in(0,1)$, 由分部积分可得

$$\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i a^{i+1}g^{(i)}(a)}{(i+1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^a x^n g^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i f^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{i+1}(i+1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{\frac{1}{2}} x^n f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x$$

以及

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} f(1-x)\,\mathrm{d}x\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i f^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{i+1}(i+1)!}+\frac{1}{n!}\int_0^{\frac{1}{2}} x^n f^{(n)}(1-x)\,\mathrm{d}x$$

由于 $f^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right)=0$, 其中 i 是小于 n 的偶数, 于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n!}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^n f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}} x^n f^{(n)}(1-x)\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

最后由 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2&\leqslant\frac{2}{(n!)^2}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^n f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^n f^{(n)}(1-x)\,\mathrm{d}x\right)^2\right]\\&\leqslant\left[\int_0^{\frac{1}{2}} x^{2n}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}}\left(f^{(n)}(x)\right)^2\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}} x^{2n}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}}\left(f^{(n)}(1-x)\right)^2\mathrm{d}x\right]\\&\leqslant\frac{1}{(2n+1)\,4^n\,(n!)^2}\int_0^1\left(f^{(n)}(x)\right)^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

例 0.24: 设 f 是 $[0,1]$ 上二阶连续可导的实值函数, 满足 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, 证明

$$\int_0^1 \left(f''(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant 320 \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

☞ **证明:** 利用 Taylor 公式可得

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\int_{\frac{1}{2}}^{x} f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t$$

由于 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, 于是有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\int_{\frac{1}{2}}^{x} f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{\frac{1}{2}}\int_{t=x}^{\frac{1}{2}} f''(t)(t-x)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_{x=\frac{1}{2}}^{1}\int_{t=\frac{1}{2}}^{x} f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= \int_{t=0}^{\frac{1}{2}}\int_{x=0}^{t} f''(t)(t-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{t=\frac{1}{2}}^{1}\int_{x=t}^{1} f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \int_{t=0}^{\frac{1}{2}} f''(t)\left[-\frac{(t-x)^2}{2}\right]\Bigg|_{x=0}^{t}\mathrm{d}t + \int_{t=\frac{1}{2}}^{1} f''(t)\left[\frac{(x-t)^2}{2}\right]\Bigg|_{x=t}^{1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{t=0}^{\frac{1}{2}} f''(t)\,t^2\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{t=\frac{1}{2}}^{1} f''(t)(1-t)^2\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{t=0}^{1} f''(t)\,h(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

其中

$$h(t)=\begin{cases} t^2, & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ (1-t)^2, & t\in\left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$$

因此由 Cauchy 不等式得

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}\int_0^1 (h(t))^2\,\mathrm{d}t\int_0^1 \left(f''(t)\right)^2\mathrm{d}t = \frac{1}{320}\int_0^1 \left(f''(t)\right)^2\mathrm{d}t$$

□

例 0.25: 设 f 是 $[0,1]$ 上的连续非负函数, 证明

$$\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 4\left(\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 x f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

☞ **证明:** 这里我们证明一个更一般的结论: 设 f, g 是 $[0,1]$ 上的连续非负函数, a 和 b 是非负实数, 则

$$\int_0^1 f^{a+b}(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 g^{a+b}(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f^a(x)\,g^b(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f^b(x)\,g^a(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

设 A, B 是非负实数, 则

$$(A^a-B^a)(A^b-B^b)\geqslant 0$$

这就意味着

$$A^{a+b}+B^{a+b}\geqslant A^aB^b+A^bB^a$$

令 $A=f(x)g(y), B=f(y)g(x)$, 并在 $[0,1]\times[0,1]$ 上积分，我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left(\int_0^1[f(x)g(y)]^{a+b}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y+\int_0^1\left(\int_0^1[f(y)g(x)]^{a+b}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ \geqslant&\int_0^1\left(\int_0^1(f(x)g(y))^a(f(y)g(x))^b\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y+\int_0^1\left(\int_0^1(f(x)g(y))^b(f(y)g(x))^a\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

也就是

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^1 f^{a+b}(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g^{a+b}(y)\,\mathrm{d}y\right)+\left(\int_0^1 f^{a+b}(y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^1 g^{a+b}(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ \geqslant&\left(\int_0^1 f^a(x)g^b(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f^a(y)g^b(y)\,\mathrm{d}y\right)+\left(\int_0^1 f^a(y)g^b(y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^1 f^a(x)g^b(x)\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

得证, 那么在待证式中取 $g(x)=x, a=2, b=1$ 即可. □

例 0.26: 设 f 是 $[0,1]$ 上的非负函数, 证明

$$\frac{3}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{16}+\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x.$$

☞ **证明:** 首先注意到对 $t\geqslant 0$ 有

$$t^3-\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{6}=\frac{(4t+1)(2t-1)^2}{16}\geqslant 0$$

由于 f 是非负函数, 则

$$\int_0^1\left(f^3(x)-\frac{3}{4}f^2(x)+\frac{1}{16}\right)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

那么由 Cauchy 不等式得

$$\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{6}\geqslant\frac{3}{4}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{3}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

□

例 0.27: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_{((n+1)!)^{-1/(n+1)}}^{((n)!)^{-1/n}}\Gamma(nx)\,\mathrm{d}x$$

✎ **解:** 我们将证明如果 f 是 (a,b) 上的实值连续函数且 $\mathrm{e}\in(a,b)$, 则

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_{((n+1)!)^{-1/(n+1)}}^{((n)!)^{-1/n}}f(nx)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}f(\mathrm{e})$$

令 $b_n=n(n!)^{-1/n}, a_n=n((n+1)!)^{-1/(n+1)}$, 那么由积分平均值定理可得

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_{((n+1)!)^{-1/(n+1)}}^{((n)!)^{-1/n}}f(nx)\,\mathrm{d}x=n\int_{a_n}^{b_n}f(t)\,\mathrm{d}t=n(b_n-a_n)f(t_n)$$

对某个 $t_n \in (a_n, b_n)$ 成立. 再由 Stirling 公式得

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \ln\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

因此

$$b_n = n\mathrm{e}^{-\frac{\ln(n!)}{n}} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}\ln n}{2n} - \frac{\mathrm{e}\ln\sqrt{2\pi}}{n} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$$

$$b_n - a_n = b_n - \frac{nb_{n+1}}{n+1} = \frac{\mathrm{e}}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) = \mathrm{e}$$

也就意味着

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} t_n = \mathrm{e}$$

再由 f 在 e 处的连续性

$$\lim_{n\to\infty} n(b_n - a_n) f(t_n) = \mathrm{e}f(\mathrm{e})$$

而这里的话, Γ 函数是 $(0, +\infty)$ 上的实值连续函数, 因而极限是 $\mathrm{e}\Gamma(\mathrm{e})$. □

例 0.28: 计算二重积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos(x+y)}{2-\cos x-\cos y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

✎ **解:**[原创] 首先有

$$\frac{1-\cos(x+y)}{2-\cos x-\cos y} = \frac{1-\cos(x+y)}{2-2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

作二重积分换元 $x = u+v, y = u-v$, 则 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 2$, 于是积分域变为正方形 $(u,v): -\pi \leqslant u \pm v \leqslant \pi$, 由对称性

$$\begin{aligned}
I &= 4\iint\limits_{0\leqslant u+v\leqslant\pi} \frac{1-\cos 2u}{1-\cos u\cos v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= 4\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2u}{\cos u}\int_0^{\pi-u}\frac{\mathrm{d}v}{\sec u-\cos v}\right)\mathrm{d}u \\
&= 4\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2u}{\cos u}\frac{2}{\sqrt{\sec^2 u-1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{\sec u+1}{\sec u-1}}\tan\frac{v}{2}\right)\Bigg|_{v=0}^{\pi-u}\right)\mathrm{d}u \\
&= 16\int_0^{\pi}\sin u\arctan\left(\cot^2\left(\frac{u}{2}\right)\right)\mathrm{d}u \\
&= 64\int_0^{\infty}\frac{w}{(1+w^2)^2}\arctan(w^2)\mathrm{d}w \qquad \left(w = \cot\left(\frac{u}{2}\right)\right) \\
&= 32\int_0^{\infty}\frac{\arctan t}{(1+t)^2}\mathrm{d}t \\
&= 8\pi
\end{aligned}$$

□

例 0.29: 求和

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{2n+1}\left(\frac{(n-1)!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

解:[原创] 首先我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{2n+1}\left(\frac{(n-1)!}{(2n-1)!!}\right)^2&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\left(\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}y\mathrm{d}y\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\sin^{2n-1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

利用对数函数的幂级数公式不难得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin^{2n-1}x\sin^{2n-1}y}{2n+1}=\frac{1}{\sin^2x\sin^2y}\left(\ln\frac{1+\sin x\sin y}{1-\sin x\sin y}-2\sin x\sin y\right)$$

考虑参变量积分

$$I\left(a\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2y}\left(\ln\frac{1+a\sin y}{1-a\sin y}-2a\sin y\right)\mathrm{d}y\quad |a|<1$$

则可得

$$\begin{aligned}&I(0)=0\\&I'\left(a\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin y}\left(\frac{1}{1+a\sin y}+\frac{1}{1-a\sin y}-2\right)\mathrm{d}y\\&\quad=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{1-a^2\sin^2y}\mathrm{d}y=2a^2\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1-a^2\left(1-t^2\right)}\quad(t=\cos y)\\&\quad=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\left(1-a^2\right)/a^2}=\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}I\left(\sin x\right)&=\int_0^{\sin x}\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\mathrm{d}a=2\int_0^x u\sin u\mathrm{d}u\quad(a=\sin u)\\&=2\left(\sin x-x\cos x\right)\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2x\sin^2y}\left(\ln\frac{1+\sin x\sin y}{1-\sin x\sin y}-2\sin x\sin y\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{I\left(\sin x\right)}{\sin^2x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2x}\mathrm{d}x\\&=-2\left(\sin x-x\cos\right)\cot x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\left(\sin x\right)=\pi-2\end{aligned}$$

□

例 0.30: 计算二重积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\cos\left(x-y\right)-\cos x}{y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

✎ **解:**[原创] 考虑参变量积分

$$I(t)=\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\int_0^{x}\frac{\cos(x-ty)-\cos x}{y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

则

$$\begin{aligned}
I(0)&=0\\
I'(t)&=\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\int_0^{x}\sin(x-ty)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{t}\cos(x-ty)\Big|_{y=0}^{y=x}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\infty}\frac{\cos(1-t)x-\cos x}{tx}\mathrm{d}x\\
&=-\frac{\ln(1-t)}{t}
\end{aligned}$$

上面最后一步我们利用了 Frullani 积分公式, 于是

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\int_0^{x}\frac{\cos(x-y)-\cos x}{y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&=-\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t=\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{k}\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

□

例 0.31: 设函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续可微函数, 证明不等式

$$\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant 12\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-2\int_0^{\frac12}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

☞ **证明:** 利用 Cauchy 不等式得

$$\int_0^{\frac12}[f'(x)]^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac12}x^2\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^{\frac12}xf'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=\left[\frac12 f\left(\frac12\right)-\int_0^{\frac12}f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac12}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\geqslant 24\left[\frac12 f\left(\frac12\right)-\int_0^{\frac12}f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$$

再利用 Cauchy 不等式得

$$\int_{\frac12}^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\int_{\frac12}^1(1-x)^2\,\mathrm{d}x\geqslant\left[-\frac12 f\left(\frac12\right)+\int_{\frac12}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$$

$$\Rightarrow\int_{\frac12}^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\geqslant 24\left[-\frac12 f\left(\frac12\right)+\int_{\frac12}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$$

两式相加, 利用不等式 $2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$ 得

$$\int_{10}^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\geqslant 24\left[\left(\frac12 f\left(\frac12\right)-\int_0^{\frac12}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(-\frac12 f\left(\frac12\right)+\int_{\frac12}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\right]$$

$$\geqslant 12\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

特别地，当 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 时，我们有

$$\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\geqslant 12\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

□

例 0.32: 设 $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+2}}{n(n+2)}$$

✎ **解:**[原创] 首先注意到

$$H_{n+2}=\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{k}=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}x^k\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1-x^{n+2}}{1-x}\mathrm{d}x$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+2}}{n(n+2)}&=\int_0^1\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-x^{n+2}}{n(n+2)}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{1}{1-x}\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-2\left(1-x^2\right)\ln(1-x)\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(\frac{x+3}{4}+\frac{1}{2}(1+x)\ln(1-x)\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{7}{4}\end{aligned}$$

□

例 0.33: 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan(\sinh n)\cdot\arctan\left(\frac{\sinh 1}{\cosh n}\right)$$

✎ **解:**[原创] 注意到

$$\begin{aligned}\arctan(\sinh n)&=\arctan\left(\frac{\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{-n}}{2}\right)=\arctan\left(\frac{\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{-n}}{1+\mathrm{e}^n\cdot\mathrm{e}^{-n}}\right)\\&=\arctan\left(\mathrm{e}^n\right)-\arctan\left(\mathrm{e}^{-n}\right)=2\arctan\left(\mathrm{e}^n\right)-\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{\sinh 1}{\cosh n}\right)&=\arctan\left(\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}}\right)=\arctan\left(\frac{\mathrm{e}^{n+1}-\mathrm{e}^{n-1}}{1+\mathrm{e}^{n+1}\cdot\mathrm{e}^{n-1}}\right)\\&=\arctan\left(\mathrm{e}^{n+1}\right)-\arctan\left(\mathrm{e}^{n-1}\right)\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan(\sinh n)\cdot\arctan\left(\frac{\sinh 1}{\cosh n}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[2\arctan\left(\mathrm{e}^{n}\right)-\frac{\pi}{2}\right]\left[\arctan\left(\mathrm{e}^{n+1}\right)-\arctan\left(\mathrm{e}^{n-1}\right)\right]\\
&=2\left[\lim_{n\to\infty}\arctan\left(\mathrm{e}^{n}\right)\arctan\left(\mathrm{e}^{n+1}\right)-\frac{\pi}{4}\arctan(\mathrm{e})\right]\\
&\quad-\frac{\pi}{2}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\left(\mathrm{e}^{n}\right)+\arctan\left(\mathrm{e}^{n+1}\right)\right)-\frac{\pi}{4}-\arctan(\mathrm{e})\right]\\
&=2\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{4}\arctan(\mathrm{e})\right)-\frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{4}\pi-\arctan(\mathrm{e})\right)=\frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}
$$

□

例 0.34: 设 r 是一个整数, 求和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\arctan\left(\frac{\sinh r}{\cosh n}\right)$$

✎ **解:** 首先有

$$
\begin{aligned}
\arctan\left(\frac{\sinh r}{\cosh n}\right)&=\arctan\left(\frac{\mathrm{e}^{r}-\mathrm{e}^{-r}}{\mathrm{e}^{n}+\mathrm{e}^{-n}}\right)=\arctan\left(\frac{\mathrm{e}^{-(n-r)}-\mathrm{e}^{-(n+r)}}{1+\mathrm{e}^{-2n}}\right)\\
&=\arctan\left(\mathrm{e}^{-(n-r)}\right)-\arctan\left(\mathrm{e}^{-(n+r)}\right)
\end{aligned}
$$

不失一般性, 不妨设 $r\geqslant 0$, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty}\arctan\left(\frac{\sinh r}{\cos \mathrm{h}n}\right)\\
&=2\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{\sinh r}{\cosh n}\right)+\arctan(\sinh r)\\
&=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\mathrm{e}^{-(n-r)}\right)-\arctan\left(\mathrm{e}^{-(n+r)}\right)\right)+\arctan\left(\mathrm{e}^{r}\right)-\arctan\left(\mathrm{e}^{-r}\right)\\
&=2\sum_{m\geqslant 1-r}\arctan\left(\mathrm{e}^{-m}\right)-2\sum_{m\geqslant 1+r}\arctan\left(\mathrm{e}^{-m}\right)+\arctan\left(\mathrm{e}^{r}\right)-\arctan\left(\mathrm{e}^{-r}\right)\\
&=2\sum_{1-r\leqslant m\leq r}\arctan\left(\mathrm{e}^{-m}\right)+\arctan\left(\mathrm{e}^{r}\right)-\arctan\left(\mathrm{e}^{-r}\right)\\
&=2\sum_{-r\leqslant m\leq r}\arctan\left(\mathrm{e}^{-m}\right)-\arctan\left(\mathrm{e}^{r}\right)-\arctan\left(\mathrm{e}^{-r}\right)\\
&=2\sum_{1\leqslant m\leqslant r}\left[\arctan\left(\mathrm{e}^{m}\right)+\arctan\left(\mathrm{e}^{-m}\right)\right]+2\arctan(1)-\arctan\left(\mathrm{e}^{r}\right)-\arctan\left(\mathrm{e}^{-r}\right)\\
&=2\sum_{1\leqslant m\leqslant r}\frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\pi r
\end{aligned}
$$

□

例 0.35: 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{2^{n+2}+2}+\sqrt{2^{n+1}+2}}\right)$$

✎ **解:** 记

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{2^{n+2}+2}+\sqrt{2^{n+1}+2}},\qquad b_n=\frac{\sqrt{2^{b}+1}-\sqrt{3}}{2^{\frac{n+1}{2}}}$$

不难得到

$$b_{n+1}\sqrt{1+b_n^2}-b_n\sqrt{1+b_{n+1}^2}=a_n$$

根据基本性质

$$\operatorname{arcsinh}\left(x\sqrt{1+y^2}-y\sqrt{1+x^2}\right)=\operatorname{arcsinh}(x)-\operatorname{arcsinh}(y)$$

我们得到

$$\sum_{n=1}^{N}\operatorname{arcsinh}(a_n)=\sum_{n=1}^{N}\left(\operatorname{arcsinh}(b_{n+1})-\operatorname{arcsinh}(b_n)\right)=\operatorname{arcsinh}(b_{N+1})-\operatorname{arcsinh}(b_1)$$

现在 $b_1=0, b_{N+1}\to\frac{1}{\sqrt{2}}$, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{2^{n+2}+2}+\sqrt{2^{n+1}+2}}\right)=\lim_{N\to\infty}\operatorname{arcsinh}(b_{N+1})=\operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}$$

□

例 0.36: 求和

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16^n}{(2n+1)^2n^2\binom{2n}{n}^2}$$

✎ **解:**[原创] 首先有

$$\begin{aligned}\frac{16^n}{(2n+1)^2n^2\binom{2n}{n}^2}&=\frac{16^n}{(2n+1)^2n^2}\left[\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right]^2\\&=\frac{16^n}{(2n+1)^2n^2}\left[\frac{n!}{(2n-1)!!\cdot 2^n}\right]^2\\&=\frac{2}{n(2n+1)}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\\&=\frac{2}{n(2n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}y\mathrm{d}y\end{aligned}$$

记

$$I(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{n(2n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}y\mathrm{d}y$$

则

$$\begin{aligned}I'(t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}y\mathrm{d}y\\&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin y}\ln\left(1-t^2\sin^2x\sin^2y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

于是

$$S=-2\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin y}\ln\left(1-t^2\sin^2x\sin^2y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

考虑

$$f(u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin y}\ln\left(1-u\sin^2y\right)\mathrm{d}y$$

则

$$f'(u)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{1-u\sin^2 y}\mathrm{d}y=-\frac{1}{\sqrt{u-u^2}}\arctan\sqrt{\frac{u}{1-u}}$$

于是

$$\begin{aligned}
S&=2\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{t^2\sin^2 x}\frac{\sin x}{\sqrt{u-u^2}}\arctan\sqrt{\frac{u}{1-u}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=2\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\arctan^2\left(\sqrt{\frac{u}{1-u}}\right)\Bigg|_{u=0}^{t^2\sin^2 x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=2\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\arctan^2\left(\frac{t\sin x}{\sqrt{1-t^2\sin^2 x}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{x}z^2\cos z\mathrm{d}z\mathrm{d}x\qquad\left(t=\frac{\sin z}{\sin x}\right)\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2x\cos x+x^2\sin x-2\sin x\right)\mathrm{d}x\\
&=4\pi-12
\end{aligned}$$

□

例 0.37: 计算积分

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\ln\left(\frac{\ln 2-\ln(1+2x)}{\ln 2-\ln(1-2x)}\right)}{3+4x^2}\mathrm{d}x$$

✎ **解:**[原创] 首先有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\ln\left(\frac{\ln 2-\ln(1+2x)}{\ln 2-\ln(1-2x)}\right)}{3+4x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{x\ln\left(\frac{\ln 2-\ln(1+x)}{\ln 2-\ln(1-x)}\right)}{3+x^2}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{x}{3+x^2}\ln\left(\frac{\ln\frac{1+x}{2}}{\ln\frac{1-x}{2}}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_{-1}^0\frac{x}{3+x^2}\ln\left(\frac{\ln\frac{1+x}{2}}{\ln\frac{1-x}{2}}\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{8}\int_{-1}^1\frac{x}{3+x^2}\ln\left(\frac{\ln\frac{1+x}{2}}{\ln\frac{1-x}{2}}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left[\int_{-1}^1\frac{x}{3+x^2}\ln\left(\left|\ln\frac{1+x}{2}\right|\right)\mathrm{d}x\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\int_0^1\frac{2t-1}{3+(2t-1)^2}\ln(-\ln t)\,\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{8}\int_0^1\frac{(2t-1)\ln(-\ln t)}{t^2-t+1}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{8}\int_0^1\ln(-\ln t)\,\mathrm{d}\left(\ln\left(t^2-t+1\right)\right)\qquad(x=2t-1)\\
&=-\frac{1}{8}\int_0^1\frac{\ln\left(t^2-t+1\right)}{t\ln t}\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int_0^{\infty}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{-2s}-\mathrm{e}^{-s}+1\right)}{s}\mathrm{d}s\qquad\left(t=\mathrm{e}^{-s}\right)\\
&=\frac{1}{8}\int_0^{\infty}\frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-3s}\right)-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-s}\right)}{s}\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

考虑参数积分 $I(a,b)=\int_0^{\infty}\frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-as}\right)-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-bs}\right)}{s}\mathrm{d}s$, 则 $I(b,b)=0$,

$$I'_a(a,b)=-\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-as}}{1+\mathrm{e}^{-as}}\mathrm{d}s=-\frac{1}{a}\ln 2$$

于是

$$I(a,b)=-\ln 2\int_b^a\frac{1}{u}\mathrm{d}u=-\ln 2\ln\frac{a}{b}$$

原积分 $I=\frac{1}{8}I(3,1)=-\frac{1}{8}\ln 2\ln 3.$ □

例 0.38: 设 $f(x):(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, 且是连续可导的函数, 满足

$$f(x)\leqslant x^2\ln x,\quad f'(x)>0, x\in(1,+\infty).$$

证明：积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x$ 发散.

证明:[原创] 如果 $f'(x)$ 有界, 结论显然成立, 不妨设 $f'(x)$ 无界, 这时 $f(x)$ 单调趋于 $+\infty$. 对 $\forall A>0$, 由 Cauchy 不等式得

$$\left(\int_{\mathrm{e}^{A/2}}^{\mathrm{e}^A}\frac{\mathrm{d}x}{f'(x)}\right)\left(\int_{\mathrm{e}^{A/2}}^{\mathrm{e}^A}\frac{f'(x)}{x^2\ln^2 x}\mathrm{d}x\right)\geqslant\left(\int_{\mathrm{e}^{A/2}}^{\mathrm{e}^A}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}\right)^2=\ln^2 2$$

由 $f(x)\leqslant x^2\ln x$ 得 $f(\mathrm{e}^x)\leqslant x\mathrm{e}^{2x}$, 因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{e}^{\frac{A}{2}}}^{\mathrm{e}^A}\frac{f'(x)}{x^2\ln^2 x}\mathrm{d}x&=\int_{\frac{A}{2}}^{A}\frac{f'(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^t}{t^2\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t=\int_{\frac{A}{2}}^{A}\frac{\mathrm{d}\left[f(\mathrm{e}^t)\right]}{t^2\mathrm{e}^{2t}}\\&=\left.\frac{f(\mathrm{e}^t)}{t^2\mathrm{e}^{2t}}\right|_{\frac{A}{2}}^{A}+\int_{\frac{A}{2}}^{A}\frac{2t^2\mathrm{e}^{-2t}+2t\mathrm{e}^{-2t}}{t^4}f(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{f(\mathrm{e}^A)}{A^2\mathrm{e}^{2A}}+\int_{\frac{A}{2}}^{A}\frac{2t^2\mathrm{e}^{-2t}+2t\mathrm{e}^{-2t}}{t^4}t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{1}{A}+2\left(\ln 2+\frac{1}{A}\right)=2\ln 2+\frac{3}{A}.\end{aligned}$$

取 A 充分大, 则 $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^{\frac{A}{2}}}^{\mathrm{e}^A}\frac{f'(x)}{x^2\ln^2 x}\mathrm{d}x\leqslant 2$, 因此

$$\int_{\mathrm{e}^{A/2}}^{\mathrm{e}^A}\frac{\mathrm{d}x}{f'(x)}\geqslant\frac{\ln^2 2}{2}$$

对任意充分大的 A 都成立, 于是积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x$ 发散. □

例 0.39: 计算积分

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$$

解:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\frac{\ln(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\ln(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\frac{\ln(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x\\&=-\ln(x)\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\Big|_0^1+\int_0^1\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}-\ln(x)\,\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\Big|_1^{\infty}+\int_1^{\infty}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}\\&=\int_0^1\ln\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-xy}}{y}\right)\Big|_{y=1}^{y=2}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_1^{\infty}\ln\left(1-\mathrm{e}^{-xy}\right)\Big|_{y=1}^{y=2}\frac{\mathrm{d}x}{x}\\&=\int_0^1\int_1^2\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{xy}-1}-\frac{1}{xy}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\int_1^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^{xy}-1}\\&=\int_1^2\frac{\mathrm{d}y}{y}\left[\ln\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-xy}}{x}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}+\ln\left(1-\mathrm{e}^{-xy}\right)\Big|_{x=1}^{x=\infty}\right]\\&=-\int_1^2\frac{\ln(y)}{y}\mathrm{d}y=-\frac{\ln^2 2}{2}\end{aligned}$$

□

例 0.40: 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x\right)^n-\frac{1}{2}\right]$$

✎ **解:** 首先有

$$\begin{aligned}
I_n&=\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{1+t}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=1-\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\mathrm{d}t\\
&=1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}k!}\int_0^1 \frac{\ln^k x}{1+x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

因此不难得到

$$I\left(n\right)=1-\frac{\ln 2}{n}+\frac{\pi^2}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

故

$$\begin{aligned}
I^n\left(n\right)&=\mathrm{e}^{n\ln\left[1-\frac{\ln 2}{n}+\frac{\pi^2}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}=\mathrm{e}^{n\left[-\frac{\ln 2}{n}+\frac{\pi^2}{12n^2}-\frac{\ln^2 2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}\\
&=\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\ln^2 2\right)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]
\end{aligned}$$

于是最后得到

$$\lim_{n\to\infty} n\left[I^n\left(n\right)-\frac{1}{2}\right]=\frac{\pi^2}{24}-\frac{1}{4}\ln^2 2$$

□

例 0.41: 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上周期为 T 的局部可积函数, 且 $\displaystyle\int_0^a \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 其中 $0<a<\pi$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^a \frac{f\left(nx\right)}{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

☞ **证明:** 由于 $f(x)$ 局部可积故有界, $\exists M>0$, 使得 $|f(x)|<M$, 而 $\displaystyle\int_0^a \frac{f(nx)}{x}=\int_0^{na}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\ (n\in\mathbb{N}_+)$. 由于 $\displaystyle\int_0^a \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 故 $\displaystyle\int_0^{na}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=\int_0^a \frac{f\left(nx\right)}{x}\mathrm{d}x$ 存在, 而

$$\left|\int_0^a \frac{f\left(nx\right)}{\sin x}\mathrm{d}x-\int_0^a \frac{f\left(nx\right)}{x}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^a f\left(nx\right)\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant M\int_0^a \frac{x-\sin x}{x\sin x}\mathrm{d}x$$

由于 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=0$, 故 $\displaystyle\int_0^a \frac{x-\sin x}{x\sin x}\mathrm{d}x$ 存在且为有限数, 从而

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^a \frac{f\left(nx\right)}{\sin x}\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^a \frac{f\left(nx\right)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{na}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(na\right)-\ln a}\int_0^{na}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\int_0^x \frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{T}\int_0^T f\left(x\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

□

例 0.42: 证明下列两个积分等式:

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_z^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sin^2 x}}\mathrm{d}z;$

(2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_z^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sin^2 x}}\mathrm{d}z.$

☞ **证明:**[原创] 我们只证明 (2) 式, (1) 式同理.(2) 式等价于

$$\frac{1}{2}\left(\int_z^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sin^2 x}}\mathrm{d}x=0$$

令 $f(z)=\dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_z^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sin^2 x}}\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned}
f'(z)&=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2}\int_z^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}\csc^2 x}\left(-z\csc^2 x\right)\mathrm{d}x\\
&=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2}\int_z^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}\left(\cot^2 x+1\right)}z\mathrm{d}\left(\cot x\right)\\
&=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2}\int_z^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2}\int_1^\infty \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}u^2}z\mathrm{d}u=0
\end{aligned}$$

因此 $f(z)=f(0)=0$. □

例 0.43: 设 n 是一个正整数, 证明

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin^n\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos^n\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x}=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为偶数}\\ 0, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

☞ **证明:**[原创] 先考虑复杂的 n 为偶数的情形, 这个时候只需要考虑 $x\to0^+$ 即可, 以正弦为例 (余弦同理)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sin^n\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to+\infty}x\int_x^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\mathrm{d}t$$

对 $\forall x>0,\exists k\in\mathbb{N}$, s.t.$(k-1)\pi\leqslant x<k\pi$, 则 $x\to+\infty$ 时 $k\to+\infty$, 于是

$$x\int_x^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\mathrm{d}t=x\int_x^{k\pi}\frac{\sin^n t}{t^2}\mathrm{d}t+x\int_{k\pi}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\mathrm{d}t$$

其中

$$\left|x\int_x^{k\pi}\frac{\sin^n t}{t^2}\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|x\int_x^{k\pi}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}t\right|=\left|\frac{k\pi-x}{x}\right|\leqslant\left|\frac{\pi}{x}\right|\to0,x\to+\infty$$

$$\begin{aligned}
\int_{k\pi}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\mathrm{d}t&=\sum_{i=k}^{+\infty}\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}\frac{\sin^n t}{t^2}\mathrm{d}t=\int_0^\pi\sin^n t\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{(t+i\pi)^2}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\sin^2 t\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

不难得到当 $k\to+\infty$ 时,

$$\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{(i+1)^2}\sim\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}\sim\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{i^2}\sim\frac{1}{k}$$

于是当 $x\to+\infty$ 时,

$$x\int_{k\pi}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{x}{\pi^2}\int_0^{\pi}\sin^n t\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}\mathrm{d}t\sim\frac{k\pi}{\pi^2}\cdot\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin^n t\mathrm{d}t=\frac{(n-1)!!}{n!!}$$

这就是 n 是偶数的极限, 而当 n 是奇数的时候, 正项级数 $\sum\limits_{i=k}^{\infty}\frac{1}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}$ 会变成交错级数 $\sum\limits_{i=k}^{\infty}\frac{(-1)^i}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}$, 这个交错级数的绝对值不会超过 $\frac{1}{\left(k+\frac{t}{\pi}\right)^2}<\frac{1}{k^2}$, 因此最后的极限是 0. □

例 0.44: 设 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个严格单增实数列满足 $a_n\leqslant n^2\ln n$ 对所有 $n\geqslant 1$ 都成立, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散.

☞ **证明:**[原创] 首先如果 $\{a_n\}$ 有界的话结论就显然了, 因此假设 $\{a_n\}$ 无界, 意味着 $\{a_n\}$ 单调递增趋于 $+\infty$. 对任意 $A>0$, 由 Cauchy 不等式 (这个不等式的证明以及积分, 代数, 期望形式我们在前期的公众号内容中都介绍过了) 得

$$\left(\sum_{n=\lfloor e^{A/2}\rfloor}^{\lceil e^{A}\rceil}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\right)\left(\sum_{n=\lfloor e^{A/2}\rfloor}^{\lceil e^{A}\rceil}\frac{a_{n+1}-a_n}{n^2\ln^2 n}\right)\geqslant\left(\sum_{n=\lfloor e^{A/2}\rfloor}^{\lceil e^{A}\rceil}\frac{1}{n\ln n}\right)^2\sim\left(\int_{e^{A/2}}^{e^{A}}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}\right)^2=\ln^2 2.$$

这里的求和式子中的上限和下限中的符号分别表示向上取整和向下取整. 另一反面, 利用 Abel 分部求和公式 (相当于就是分部积分公式的离散形式)

$$\begin{aligned}\sum_{n=M}^{N}\frac{a_{n+1}-a_n}{n^2\ln^2 n}&=\frac{a_{N+1}-a_M}{N^2\ln^2 N}+\sum_{n=M}^{N-1}(a_{n+1}-a_M)\left(\frac{1}{n^2\ln^2 n}-\frac{1}{(n+1)^2\ln^2(n+1)}\right)\\&=\frac{a_{N+1}-a_M}{N^2\ln^2 N}+\sum_{n=M}^{N-1}\frac{(a_{n+1}-a_M)[(n+1)^2\ln^2(n+1)-n^2\ln^2 n]}{n^2(n+1)^2\ln^2 n\ln^2(n+1)}\\&\leqslant\frac{a_{N+1}}{N^2\ln^2 N}+C\sum_{n=M}^{N-1}\frac{n\ln^2 n}{n^2(n+1)^2\ln^2 n\ln^2(n+1)}a_{n+1}\\&\leqslant\frac{(N+1)^2\ln(N+1)}{N^2\ln^2 N}+C\sum_{n=M}^{N-1}\frac{1}{n\ln(n+1)}\\&=\frac{2}{\ln N}+C\int_M^N\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\frac{2}{\ln\lceil e^{A}\rceil}+C\ln\frac{\lceil e^{A}\rceil}{\lfloor e^{A/2}\rfloor}<C\ln 2+1.\end{aligned}$$

这里 $M=\lfloor e^{A/2}\rfloor$, $N=\lceil e^{A}\rceil$, C 是某个无关的正常数, 因此我们有

$$\sum_{\lfloor e^{A/2}\rfloor}^{\lceil e^{A}\rceil}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\geqslant\frac{\ln^2 2}{C\ln 2+1}$$

对任意充分大的 A 都成立, 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散, 证毕. □

例 0.45: [北大 2011 数学分析考研题] 设 $a_n>0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明: 极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

存在.

证明:[原创] 首先由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 根据 Cauchy 收敛准则知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n > N$ 时, $\sum\limits_{k=n}^{n+p} < \varepsilon$ 对任意 $p \in \mathbb{N}$ 都成立.
利用 Cauchy 不等式得

$$\left(\sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{a_k}\right)\left(\sum_{k=N+1}^{n} a_k\right) \geqslant (n-N)^2$$

即 $\dfrac{(n-N)^2}{\sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{a_k}} \leqslant \sum\limits_{k=N+1}^{n} a_k < \varepsilon$. 于是对固定的 N, 取 n 充分大有

$$\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} = \frac{n^2}{(n-N)^2} \frac{(n-N)^2}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} < 2\varepsilon$$

这就说明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} = 0$. □

例 0.46: 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^+$, 证明

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \cdots + \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$

同时说明右边的常数 2 不可再改进. 进一步, 如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{a_1 + \cdots + a_n}$ 也收敛.

证明: 首先由 Cauchy 不等式得

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \cdots + \frac{k^2}{a_k}\right) \geqslant (1 + 2 + \cdots + k)^2 = \frac{k^2 (k+1)^2}{4}$$

于是可得

$$\frac{k}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k} \leqslant \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{a_i}$$

两边对 k 从 1 到 n 求和得

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{a_i} \sum_{k=i}^{n} \frac{4}{k(k+1)^2} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{a_i} \sum_{k=i}^{n} 2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{a_i}\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&< 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}
\end{aligned}$$

其中我们运用了不等式

$$\frac{1}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{2k+1}{2k(k+1)^2}$$

如果取 $a_k = k, k = 1, \cdots, n$, 原不等式即 $2\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} \leqslant 2\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, 注意到令 n 趋于无穷大时, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} = 1$, 因此右边的常数无法再改进了, 至于级数的敛散性问题就是显然了.

□

例 0.47:

(1) 证明拉马努金恒等式

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots}}}$$

(2) (原创) 设 a_n 是以公差为 $d\in\mathbb{N}$ 的正整数等差数列, 对固定的正整数 n, 求

$$\sqrt{d^2+a_{n-1}\sqrt{d^2+a_n\sqrt{d^2+a_{n+1}\sqrt{d^2+\cdots}}}}$$

☞ **证明:** 只做第二问, 这个问题是本人原创的拉马努金恒等式推广首先我们断言一个基本等式

$$(a_n+d)^2=d^2+(a_{n-1}+d)(a_{n+1}+d)$$

这个只要直接利用等差数列的定义进行验证即可, 简单的计算我就不写在这里了. 由于 d 是正整数, 而且就是数列 a_n 的公差, 因此事实上我们得到了

$$a_n^2=d^2+a_{n-1}a_{n+1}.$$

于是就可以得到

$$a_n=\sqrt{d^2+a_{n-1}a_{n+1}}=\sqrt{d^2+a_{n-1}\sqrt{d^2+a_na_{n+2}}}=\sqrt{d^2+a_{n-1}\sqrt{d^2+a_n\sqrt{d^2+a_{n+1}a_{n+3}}}}=\cdots.$$

这样也证明了拉马努金恒等式. □

例 0.48: 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处 n 阶可导, $n\geqslant 3$, 满足 $f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$ 且 $f^{(n)}(a)\neq 0$, 根据 Lagrange 中值定理可知存在 $\delta>0$, 对 $h\in(-\delta,\delta)$ 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h$$

证明:$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$.

☞ **证明:**[原创] 首先由条件 $f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h$ 两边减去 $f'(a)h$ 再同时除以 h^n 得

$$\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h^n}=\frac{f'(a+\theta h)h-f'(a)h}{h^n}=\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{(\theta h)^{n-1}}\theta^{n-1}$$

结合条件 $f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$ 且 $f^{(n)}(a)\neq 0$, 由 L'Hospital 法则得

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h^n}&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{nh^{n-1}}=\lim_{h\to 0}\frac{f''(a+h)}{n(n-1)h^{n-2}}\\&=\cdots=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+h)}{n!h}=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+h)-f^{(n-1)}(a)}{n!h}\\&=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\end{aligned}$$

其中最后一步是根据 n 阶导数的定义. 同理有

$$\begin{aligned}\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{(\theta h)^{n-1}} &= \lim_{t\to 0}\frac{f'(a+t)-f'(a)}{t^{n-1}} = \lim_{t\to 0}\frac{f''(a+t)}{(n-1)\,t^{n-2}} \\ &= \cdots = \lim_{t\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+t)}{(n-1)!t} = \lim_{t\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+t)-f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!t} \\ &= \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{h\to 0}\theta^{n-1} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h^n}}{\frac{f(a+\theta h)-f'(a)}{(\theta h)^{n-1}}} = \frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}}{\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}} = \frac{1}{n}$$

于是 $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$. □

例 0.49: 设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 以及 α 都是实数, $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是正实数, 设函数

$$\varphi(x) = x - \alpha - \sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{x-a_k}$$

证明

$$\int_{\mathbb{R}} f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

☞ **证明:** 令 $I_k = (a_k, a_{k=1})$, $k = 0, 1, \cdots, n$, 其中 $a_0 = -\infty$, $a_{n+1} = +\infty$, 则简单的计算可得在 $\mathbb{R}\backslash\{a_1, \cdots, a_n\}$ 内都有 $\varphi'(x) > 0$, 进一步有

$$\varphi(x) \to +\infty,\ \ x \to a_k^-,\ \ k = 1, \cdots, n+1$$

以及

$$\varphi(x) \to -\infty,\ \ x \to a_k^+,\ \ k = 0, \cdots, n$$

因此这意味着对每个 $k = 0, \cdots, n$, φ 是从 I_k 到 $\mathbb{R}$ 的双射. 设 $\psi_k : I_k \to \mathbb{R}$ 是 φ 限制在 I_k 上的反函数, 即 $\varphi\circ\psi_k = \mathrm{id}$. 则对每个 $y \in \mathbb{R}$, 方程 $\varphi(x) = y$ 刚好有 $n+1$ 个零点 $\psi_0(y), \cdots, \psi_n(y)$. 在方程 $\varphi(x) = y$ 两边同时乘以 $(x-a_1)\cdots(x-a_n)$ 得

$$(x-\alpha-y)(x-a_1)\cdots(x-a_n) + g(x) = 0.$$

其中 $g(x)$ 是次数不超过 $n-1$ 的多项式, 因此整个式子左边是一个 $n+1$ 次多项式, 而且它刚好等于 $(x-\psi_0(y))\cdots(x-\psi_n(y))$, 于是比较 x 的 n 次方的系数得

$$y + \alpha + a_1 + \cdots + a_n = \psi_0(y) + \cdots + \psi_n(y).$$

于是

$$\int_{\mathbb{R}} f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\int_{I_k} f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\int_{\mathbb{R}} f(y)\,\psi_k'(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

□

例 0.50: 给定 $0 \leqslant a \leqslant 2$, 设 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 是由 $a_1 = a$, $a_{n+1} = 2^n - \sqrt{2^n(2^n-a_n)}$ 所定义的数列, 求

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

✎ **解:** 令

$$\alpha = 4\arcsin\sqrt{\frac{a}{2}} = \begin{cases} \arccos\left(2a^2-4a+1\right), & a\in[0,1] \\ 2\pi-\arccos\left(2a^2-4a+1\right), & a\in[1,2] \end{cases}$$

然后利用二倍角公式 $2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=1+\cos\theta$, 不难得到

$$a_n = 2^{n-1}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

对 $N\in\mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} a_n^2 &= \sum_{n=1}^{N} 4^{n-1}\left(1+\cos^2\frac{\alpha}{2^n}-2\cos\frac{\alpha}{2^n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} 4^{n-1}\left(1+\frac{1+\cos\left(\alpha/2^{n-1}\right)}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} 4^{n}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} 4^{n-1}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} 4^{n-1}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} 4^{n}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(4^N\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^N}\right)-(1-\cos\alpha)\right)
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &= \frac{1}{2}\left(\lim_{N\to\infty} 4^N\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^N}\right)-(1-\cos\alpha)\right) \\
&= \frac{\alpha^2}{4}+a^2-2a = 4\arcsin^2\sqrt{\frac{a}{2}}+a^2-2a.
\end{aligned}$$

□

例 0.51: 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(a)=f'(b)$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$$

☞ **证明:** 不妨假定 $f'(a)=f'(b)=0$, 否则我们考虑函数 $f(x)-xf'(a)$ 即可. 令

$$g(x)=\begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a<x\leqslant b \\ 0, & x=a \end{cases}$$

则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b]$ 可导, 并且对 $x\in(a,b]$

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x-a)-[f(x)-f(a)]}{(x-a)^2}$$

如果 $g(b)=g(a)$, 由罗尔定理知存在 $\xi\in(a,b]$ 使得 $g'(\xi)=0$, 则结论已经得证.

现在假定 $g'(x) \neq 0$ 对任意 $x \in (a,b)$ 都成立，且 $g(b) > g(a)$. 那么由 Darboux 定理知 $g(x)$ 必然在 $(a,b]$ 上严格单增，但

$$g'(b) = -\frac{f(b) - f(a)}{(x-a)^2} = -\frac{g(b)}{x-a} < 0$$

因此由极限保号性存在 $c \in (b-\delta, b)$ 使得 $f(c) > f(b)$，矛盾. 同理 $g(b) < g(a)$ 也矛盾, 因此必然存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $g'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$$

同时这题的几何意义也很明显, 如果一条曲线 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且在两个端点处的切线平行，则必然存在曲线上的一条切线通过其中的一个端点. □

例 0.52: 求和

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} + \sqrt{k+1} \rfloor}}{k(k+1)}$$

✎ **解:**[原创] 首先我们给出一个数论结果: 对任意正整数 n, 有

$$\lfloor \sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+n+1} \rfloor = 2n+1$$
$$\lfloor \sqrt{n^2+n-1} + \sqrt{n^2+n} \rfloor = 2n$$

这两个式子只需要证明 $2n+1 \leqslant \sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+n+1} < 2n+2$ 和 $2n \leqslant \sqrt{n^2+n-1} + \sqrt{n^2+n} < 2n+1$ 即可, 平方两次就行了. 这就意味着当 k 在 n^2+n 到 $(n+1)^2-1$ 之间的时候 $\lfloor \sqrt{k} + \sqrt{k+1} \rfloor$ 为奇数; 而 k 在 n^2 到 n^2+n-1 之间的时候 $\lfloor \sqrt{k} + \sqrt{k+1} \rfloor$ 为偶数，因此

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} + \sqrt{k+1} \rfloor}}{k(k+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n^2}^{n^2+n-1} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n^2+n}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n^2}^{n^2+n-1} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n^2}^{n^2+n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+n} \right) - 1 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - 1 \\
&= \frac{\pi^2}{3} - 3
\end{aligned}$$

□

例 0.53:

(1) 设数列 $\{na_n\}$ 为正的单调递减数列, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: $\lim_{n\to\infty} na_n \ln n = 0$.

(2) 设数列 $\{na_n\}$ 为正的单调递减数列, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\ln n}$ 收敛，证明 $\lim_{n\to\infty} na_n \ln\ln n = 0$.

☞ **证明:**

(1) 因为设数列 $\{na_n\}$ 为正的单调递减数列, 利用单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = L$ 存在, 结合 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛可知必有 $L=0$, 于是

$$a_n = \int_n^{n+1} a_n \mathrm{d}x = \int_n^{n+1} \frac{1}{n} na_n \mathrm{d}x \geqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x} na_n \mathrm{d}x = na_n \int_n^{n+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \geqslant (n+p)\, a_{n+p} \left(\ln(n+1) - \ln n\right)$$

对任意正整数 n, p 都成立. 于是

$$(n+p)\, a_{n+p} \left(\ln(n+p) - \ln n\right) \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} a_k$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 对任意正整数 $n \geqslant N, p$ 都有 $\sum\limits_{k=n}^{n+p-1} a_k < \varepsilon$, 此时

$$(n+p)\, a_{N+p} \ln(n+p) \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} a_k + (n+p)\, a_{n+p} \ln n < \varepsilon + (n+p)\, a_{n+p} \ln n$$

固定 n, 令 $p \to \infty$ 得到

$$\limsup_{p\to\infty} (n+p) a_{n+p} \ln(n+p) \leqslant \varepsilon$$

由 ε 的任意性可知 $\limsup\limits_{p\to\infty} (n+p) a_{n+p} \ln(n+p) = 0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n \ln n = 0$.

(2) 同 (1) 由 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, 则

$$\frac{a_n}{\ln n} = \int_n^{n+1} \frac{a_n}{\ln n} \mathrm{d}x = \int_n^{n+1} \frac{1}{n \ln n} na_n \mathrm{d}x \geqslant na_n \int_n^{n+1} \frac{1}{x \ln x} \mathrm{d}x \geqslant (n+p)\, a_{n+p} \left(\ln\ln(n+1) - \ln\ln n\right)$$

于是

$$(n+p)\, a_{n+p} \left(\ln\ln(n+p) - \ln\ln n\right) \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{a_k}{\ln k}$$

对任意 $n, p \in \mathbb{N}$ 都成立, 剩下的就和 (1) 一样了.

□

例 0.54: 设 $S(u) = \int_0^u \sin\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) \mathrm{d}x$ 表示 Fresnel 正弦积分, 求和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{S^2\left(\sqrt{2n}\right)}{n^3}$.

✎ **解:**[原创] 令 $\frac{\pi}{2} x^2 = nt$, 则

$$S\left(\sqrt{2n}\right) = \int_0^{\sqrt{2n}} \sin\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin(nt)\, \mathrm{d}\left(\sqrt{t}\right) = \sqrt{\frac{2n^3}{\pi}} \int_0^{\pi} \sqrt{t} \cos(nt)\, \mathrm{d}t$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{S^2\left(\sqrt{2n}\right)}{n^3} = \frac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} \sqrt{t} \cos(nt)\, \mathrm{d}t\right)^2$. □

考虑函数 $f(t) = \sqrt{|t|}$, $-\pi \leqslant t < \pi$, 则 $f(t)$ 的余弦级数为

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{t} \mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cos(nt) \int_0^{\pi} \sqrt{x} \cos(nx)\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2\sqrt{\pi}}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cos(nt) \int_0^{\pi} \sqrt{x} \cos(nx)\, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

因此由 Parseval 定理得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{\pi}}{3}\right)^2+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\sqrt{t}\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,\mathrm{d}t=\pi$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\sqrt{t}\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)^2=\frac{\pi^3}{36}$, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^2\left(\sqrt{2n}\right)}{n^3}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\sqrt{t}\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)^2=\frac{\pi^2}{18}$$

例 0.55: 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 具有连续导数且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$$

证明

$$\int_0^1|f'(x)|^3\mathrm{d}x\geqslant\left(\frac{128}{3\pi}\right)^2$$

证明: 由 Hölder 不等式得

$$\int_0^1 x(1-x)f'(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^1(x(1-x))^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x^{\frac{2}{3}}\left(\int_0^1|f'(x)|^3\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}$$

因此

$$\int_0^1|f'(x)|^3\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{\left(\int_0^1 x(1-x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^3}{\left(\int_0^1(x(1-x))^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\right)^2}=\left(\frac{128}{3\pi}\right)^2$$

其中

$$\int_0^1 x(1-x)f'(x)\,\mathrm{d}x=[x(1-x)f(x)]\,|_0^1-\int_0^1(1-2x)f(x)\,\mathrm{d}x=1$$

$$\int_0^1(x(1-x))^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x=B\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)=\frac{\Gamma^2\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(5)}=\frac{3\pi}{128}$$

同样道理可得对 $p>1$ 有

$$\int_0^1|f'(x)|^p\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\frac{\Gamma\left(\frac{4p-2}{p-1}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)}\right)^{p-1}$$

□

例 0.56: 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{x}}$$

解: 首先有基本不等式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

这就意味着

$$(n-1)!\mathrm{e}^{n-1}\leqslant n^n\leqslant n!\mathrm{e}^n,\forall n\geqslant 1$$

因此

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{\mathrm{e}}}-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!\mathrm{e}^n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n-1)!\mathrm{e}^{n-1}}=x\mathrm{e}^{\frac{x}{\mathrm{e}}}$$

因此对 $x>0$ 有

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{\mathrm{e}}}-1\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant x^{\frac{1}{x}}\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$$

而

$$\lim_{x\to\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{\mathrm{e}}}-1\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$$

由夹逼准则, 原极限就是 $\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$. □

例 0.57: 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 求最大的常数 α, 使得

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}<+\infty$$

✎ **解:**[原创] 首先如果 $\alpha>\dfrac{1}{2}$, 取数列

$$x_n=\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}},y_n=\frac{1}{n\pi}$$

则

$$\frac{\left|x_n\sin\frac{1}{x_n}-y_n\sin\frac{1}{y_n}\right|}{|x_n-y_n|^{\alpha}}=\frac{\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}}{\left|\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{n\pi}\right|^{\alpha}}\geqslant\frac{\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}}{\left|\frac{\pi}{2n\pi\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}\right|^{\alpha}}\sim\left|\frac{2}{\pi}\right|^{\alpha}(n\pi)^{2\alpha-1}$$

此时显然有

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}=+\infty$$

下面我们证明 $\alpha=\dfrac{1}{2}$ 满足条件. 显然只需要考虑 $|x-y|<\delta(\delta$ 充分小) 即可, 否则原式一定有界. 不妨假定 $|x|\leqslant|y|$, 且 x,y 均不为零, 则

$$\begin{aligned}\frac{\left|x\sin\frac{1}{x}-y\sin\frac{1}{y}\right|}{|x-y|^{\alpha}}&=\frac{\left|x\sin\frac{1}{x}-y\sin\frac{1}{x}+y\sin\frac{1}{x}-y\sin\frac{1}{y}\right|}{|x-y|^{\alpha}}\\&\leqslant\frac{\left|x\sin\frac{1}{x}-y\sin\frac{1}{x}\right|}{|x-y|^{\alpha}}+\frac{\left|y\sin\frac{1}{x}-y\sin\frac{1}{y}\right|}{|x-y|^{\alpha}}\\&=|x-y|^{1-\alpha}\left|\sin\frac{1}{x}\right|+\frac{|y|}{|x-y|^{\alpha}}\left|\sin\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{y}\right|\\&\leqslant\delta^{1-\alpha}+\frac{\left|\frac{1}{t}\right|}{\left|\frac{1}{s}-\frac{1}{t}\right|^{\alpha}}|\sin t-\sin s|=\delta^{1-\alpha}+\frac{|\sin t-\sin s|}{|t-s|^{\alpha}}\left|\frac{s^{\alpha}}{t^{1-\alpha}}\right|\\&\leqslant\delta^{1-\alpha}+\frac{|\sin t-\sin s|}{|t-s|^{\alpha}}<+\infty\end{aligned}$$

这里 $t=\dfrac{1}{x},s=\dfrac{1}{y},|t|\geqslant|s|$, 因此这就说明最大的 α 为 $\dfrac{1}{2}$. □

例 0.58: 设 F_n 是第 n 个 Fibonacci 数, 求和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cosh(F_n)\cosh(F_{n+3})}$$

✎ **解:** 设 $u_n = 2\cosh(F_n)$, 则

$$\begin{aligned}
u_{n+1}u_{n+2} &= \left(\mathrm{e}^{F_{n+1}} + \mathrm{e}^{-F_{n+1}}\right)\left(\mathrm{e}^{F_{n+2}} + \mathrm{e}^{-F_{n+2}}\right) \\
&= \mathrm{e}^{F_{n+1}+F_{n+2}} + \mathrm{e}^{F_{n+2}-F_{n+1}} + \mathrm{e}^{-F_{n+2}+F_{n+1}} + \mathrm{e}^{-F_{n+2}-F_{n+1}} \\
&= \mathrm{e}^{F_{n+3}} + \mathrm{e}^{F_n} + \mathrm{e}^{-F_n} + \mathrm{e}^{-F_{n+3}} = u_n + u_{n+3}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{\cosh(F_n)\cosh(F_{n+3})} &= 4\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+3}} = 4\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n (u_n + u_{n+4})}{u_n u_{n+1} u_{n+2} u_{n+3}} = 4\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{(-1)^n}{u_{n+1}u_{n+2}u_{n+3}} - \frac{(-1)^{n-1}}{u_n u_{n+1} u_{n+2}}\right) \\
&= 4\left(\frac{(-1)^N}{u_{N+1}u_{N+2}u_{N+3}} - \frac{-1}{u_0 u_1 u_2}\right) \to \frac{4}{u_0 u_1 u_2} = \frac{1}{2\cosh^2(1)}
\end{aligned}$$

□

例 0.59: 设 $f \in C[0,1]$. 如果

$$\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n+3}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

证明:$f(x) = x^2, x \in [0,1]$

☞ **证明:** 首先由 $\dfrac{1}{n+3} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+2}\mathrm{d}x$ 可知

$$\int_0^1 x^n \left[f(x) - x^2\right]\mathrm{d}x \quad, n = 0, 1, 2, \cdots$$

令 $F(x) = f(x) - x^2, x \in [0,1]$, 则对任意多项式 $P(x)$, 均有

$$\int_0^1 P(x)F(x)\mathrm{d}x = 0$$

由 Weirstrass 逼近定理可知对任意 $\varepsilon > 0$, 存在多项式 $Q(x)$, 使得 $|F(x) - Q(x)| < \varepsilon, x \in [0,1]$, 于是

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x &= \left|\int_0^1 F(x)(F(x) - Q(x))\,\mathrm{d}x + \int_0^1 F(x)Q(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_0^1 F(x)(F(x) - Q(x))\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_0^1 |F(x)|\,|F(x) - Q(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \varepsilon \int_0^1 |F(x)|\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

这说明 $\displaystyle\int_0^1 F^2(x)\mathrm{d}x = 0$, 因此 $F(x) \equiv 0, x \in [0,1]$, 即 $f(x) = x, x \in [0,1]$. □

例 0.60: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

✎ **解:** 令 $I(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, 则

$$\begin{aligned} I(n)-I(n-1) &= \int_0^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x}{\sin x}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ &= \int_0^{\infty}\frac{2\sin x\cos(2nx)}{\sin x}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ &= 2\int_0^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \pi\mathrm{e}^{-2n} \end{aligned}$$

其中最后一步积分需要借助 Fourier 变换与反变换公式. 于是可得

$$\lim_{n\to\infty}I(n)=I(0)+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(I(k)-I(k-1)\right)=\frac{\pi}{2}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\pi\mathrm{e}^{-2k}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{\mathrm{e}^2-1}$$

□

例 0.61: [2011 中科院考研数学分析] 设 $\{a_k\}_{k\geqslant 0}$, $\{b_k\}_{k\geqslant 0}$, $\{\xi_k\}_{k\geqslant 0}$ 为非负数列, 而且对于任意 $k\geqslant 0$, 有

$$a_{k+1}^2\leqslant (a_k+b_k)^2-\xi_k^2$$

(1) 证明:$\sum\limits_{i=1}^{k}\xi_k^2\leqslant\left(a_1+\sum\limits_{i=0}^{k}b_i\right)^2$;

(2) 若数列 $\{b_k\}_{k\geqslant 0}$ 还满足 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_k^2<+\infty$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}\xi_i^2=0$.

☞ **证明:**[原创]

(1) 由 $a_{k+1}^2\leqslant(a_k+b_k)^2-\xi_k^2$ 以及所有数列非负可知

$$a_{k+1}\leqslant a_k+b_k\leqslant a_{k-1}+b_{k-1}+b_k\leqslant\cdots\leqslant a_1+b_1+\cdots+b_k$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k}\xi_i^2 &\leqslant \sum_{i=1}^{k}\left[(a_i+b_i)^2-a_{i+1}^2\right]=a_1^2-a_{k+1}^2+2\sum_{i=1}^{k}a_ib_i+\sum_{i=1}^{k}b_i^2 \\ &\leqslant a_1^2+2\sum_{i=1}^{k}(a_1+b_1+\cdots+b_{i-1})\,b_i+\sum_{i=1}^{k}b_i^2=\left(a_1+\sum_{i=1}^{k}b_i\right)^2 \end{aligned}$$

(2) 由 (1) 有

$$\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2\leqslant\sum_{i=1}^{k}\left(a_1+\sum_{i=1}^{k}b_i\right)^2=a_1^2+2a_1\sum_{i=1}^{k}b_i+\left(\sum_{i=1}^{k}b_i\right)^2$$

而 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k^2 < +\infty$, 即 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k^2 < M$. 一方面有

$$\sum_{i=1}^{k} b_i \leqslant \sqrt{k \sum_{i=1}^{k} b_i^2} < \sqrt{kM}$$

另一方面由 Cauchy 收敛准则知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\sum\limits_{i=N}^{N+p} b_i^2 < \varepsilon$ 对任意 $p \in \mathbb{N}$ 成立, 那么当 $k > N$ 时有

$$\left(\sum_{i=1}^{k} b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} b_i + \sum_{i=N}^{k} b_i\right)^2 \leqslant 2\left(\left(\sum_{i=1}^{N} b_i\right)^2 + \left(\sum_{i=N+1}^{k} b_i\right)^2\right) < 2NM + 2(k-N)\varepsilon^2$$

由以上不等式, 利用夹逼准则可知 $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} \xi_i^2 = 0$.

□

例 0.62: 证明数列 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} n! n^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ 单调递减并求其极限.

✎ **解:** 首先有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2+n+\frac{1}{2}}} = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{(n+1)^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{s_1+s_2}$$

其中

$$s_1 = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(n+1)^{2k}},\ s_2 = \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2(k-1)}\right)\frac{1}{n^{k-1}}$$

显然 s_1, s_2 分别是两个收敛的级数, 注意到 s_1 是负项级数, s_2 是递减的交错级数, 因此两个式子的和都不超过它们的首项, 于是

$$s_1 + s_2 < -\frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{12n^2} < n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

这就证明了数列 $\{a_n\}$ 的单减性, 利用 Stirling 公式可得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{e}}}$$

□

例 0.63: 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 对某个 $p > 0$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p = 1$, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p+1]{(p+1)\, n a_n} = 1$$

☞ **证明:** 设 $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n s_n = 1$ 意味着 $s_n \to \infty$ 而 $a_n \to 0$, 因此还有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n s_{n-1} = 1$, 于是

$$s_n^{p+1} - s_{n-1}^{p+1} = (s_{n-1} + a_n^p)^{p+1} - s_{n-1}^{p+1} = s_{n-1}^{p+1}\left[\left(1+\frac{a_n^p}{s_{n-1}}\right)^{p+1} - 1\right] \sim s_{n-1}^{p+1}\frac{(p+1)\, a_n^p}{s_{n-1}} = s_{n-1}^p (p+1)\, a_n^p$$

由 Stolz 定理知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n^{p+1}}{(p+1)\, n} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n^{p+1} - s_{n-1}^{p+1}}{p+1} = \lim_{n\to\infty} (a_n s_{n-1})^p = 1$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[p+1]{(p+1)\,n}a_n=1$$

□

例 0.64: 设 f,g 都是 $[0,1]$ 上的实值连续函数, 且满足条件 $\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$, 证明

$$\int_0^1 f^2\left(x\right)\mathrm{d}x\int_0^1 g^2\left(x\right)\mathrm{d}x\geqslant 4\left(\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\int_0^1 g\left(x\right)\mathrm{d}x\right)^2$$

以及

$$\int_0^1 f^2\left(x\right)\mathrm{d}x\left(\int_0^1 g\left(x\right)\mathrm{d}x\right)^2+\int_0^1 g^2\left(x\right)\mathrm{d}x\left(\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\right)^2\geqslant 4\left(\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\int_0^1 g\left(x\right)\mathrm{d}x\right)^2$$

☞ **证明:** 设

$$\int_0^1 f^2\left(x\right)\mathrm{d}x=A,\ \int_0^1 g^2\left(x\right)\mathrm{d}x=B,\ \int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=a,\ \int_0^1 g\left(x\right)\mathrm{d}x=b$$

下面我们证明

$$AB\geqslant AB^2+Ba^2\geqslant 4a^2b^2$$

首先由 Cauchy 不等式可知 $B\geqslant b^2$, 等号成立当且仅当 $g(x)$ 为常数, 这时 $\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$ 意味着 $a=0$, 原不等式显然成立, 因此我们假设 $B>b^2$. 利用 Cauchy 不等式可知对任意实数 t 有

$$\int_0^1\left(f\left(x\right)+tg\left(x\right)\right)^2\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1\left(f\left(x\right)+tg\left(x\right)\right)\mathrm{d}x\right)^2$$

再由 $\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$, 可知 $A+Bt^2\geqslant a^2+2abt+b^2t^2$, 即

$$A\geqslant\sup_{t\in\mathbb{R}}\{a^2+2abt-(B-b^2)t^2\}$$

由于 $B>b^2$, 右边的多项式在 $t=\dfrac{ab}{B-b^2}$ 取最大值, 于是

$$A\geqslant a^2+2ab\frac{ab}{B-b^2}-\left(B-b^2\right)\frac{a^2b^2}{\left(B-b^2\right)^2}=a^2+\frac{a^2b^2}{B-b^2}$$

这就证明了 $AB\geqslant Ab^2+Ba^2$. 最后再根据 Cauchy 不等式得

$$AB\geqslant Ab^2+Ba^2=\int_0^1\left(bf\left(x\right)+ag\left(x\right)\right)^2\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1\left(bf\left(x\right)+ag\left(x\right)\right)\mathrm{d}x\right)^2=\left(2ab\right)^2=4a^2b^2$$

□

例 0.65: 设 f 是 $[a,b]$ 上三阶可导的函数, 且 $f(a)=f(b)$, 证明

$$\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\left(b-a\right)^4}{192}M$$

其中 $M=\sum\limits_{x\in[a,\,b]}|f'''(x)|$.

证明: 记 $c=\dfrac{a+b}{2}$, 记 $P(x)$ 是在 $(a,f(a)),(b,f(b),(c,f(c))$ 处插值的二次多项式, 则利用 Lagrange 插值公式可得

$$P(x)=f(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

于是存在 $\theta(x)\in[a,b]$ 使得

$$f(x)=P(x)+\frac{f'''(\theta(x))}{6}(x-a)(x-b)(x-c) \tag{$*$}$$

且

$$\int_a^c P(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{24}\left(5f(a)+8f(c)-f(b)\right),\ \int_c^b P(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{24}\left(-f(a)+8f(c)+5f(b)\right)$$

而 $f(a)=f(b)$, 因此 $\int_a^c P(x)\mathrm{d}x=\int_c^b P(x)\mathrm{d}x=0$, 因此

$$\begin{aligned}\left|\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x-\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_a^c-\int_c^b\frac{f'''(\theta(x))}{6}(x-a)(x-b)(x-c)\right|\\&\leqslant\frac{M}{6}\int_a^b|(x-a)(x-b)(x-c)|\,\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^4}{192}M\end{aligned}$$

$(*)$ 的证明: 如果 $x=a,b,c$ 结论显然成立, 当 $x\neq a,b,c$ 时, 令

$$g(t)=f(t)-P(t)-[f(x)-P(x)]\frac{(t-a)(t-b)(t-c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

而 $g(a)=g(b)=g(c)=g(x)=0$, 因此存在 $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(a,b)$, 使得 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=g'(\xi_3)=0$, 因此存在 η_1,η_2 使得 $g''(\eta_1)=g''(\eta_2)=0$, 进而存在 $\theta(x)\in(a,b)$ 使得 $g'''(\theta(x))=0$, 得证. □

例 0.66: 设 f 是 $[-1,1]$ 上二阶连续可导的实值函数, $f(0)=0$, 证明

$$\int_{-1}^1\left(f''(x)\right)^2\mathrm{d}x\geqslant10\left(\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

证明: 设 $g(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x\in[-1,0]\\(x-1)^2 & x\in[0,1]\end{cases}$, 则

$$g(-1)=g(1)=g'(-1)=g'(1)=0,\ g(0)=1,\ g''(x)=2,x\in[-1,1]\backslash\{0\}$$

且

$$\int_{-1}^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^0(x+1)^4\mathrm{d}x+\int_0^1(x-1)^4\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$$

于是根据 $f(0)=0$ 可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x)f''(x)\,\mathrm{d}x&=\left[g(x)f'(x)\right]|_0^1-\int_0^1 g'(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\\&=-f'(0)-\left[g'(x)f(x)\right]|_0^1+\int_0^1 g''(x)f(x)\,\mathrm{d}x=-f'(0)+2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

同理得

$$\int_{-1}^{0} g(x)f''(x)\mathrm{d}x = f'(0) + 2\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

因此由 Cauchy 不等式得

$$\frac{2}{5}\int_{-1}^{1}\left(f''(x)\right)^2\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} g^2(x)\,\mathrm{d}x\int_{-1}^{1} f''(x)^2\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_{-1}^{1} g(x)\,f''(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(2\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

得证. □

例 0.67: 设 $x_1, \cdots, x_n$ 是非负实数, 证明

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right)^4 \leqslant 2\pi^2\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{x_ix_j}{i+j}\sum_{i,\,j}^{n}\frac{x_ix_j}{(i+j)^3}$$

☞ **证明:** 设 $f(x), xf(x) \in L^2([0,\,+\infty))$, 先证明如下不等式

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^4 \leqslant \pi^2\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} x^2f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

☞ **证明:** 设 $u = \displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x, v = \int_0^{+\infty} x^2f^2(x)\mathrm{d}x$, 则利用 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 &\leqslant \left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{v+ux^2}}\sqrt{v+ux^2}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\ &\leqslant \int_0^{+\infty}\frac{1}{v+ux^2}\mathrm{d}x\left(v\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x + u\int_0^{+\infty} x^2f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{uv}}(uv+uv) = \pi\sqrt{uv}\end{aligned}$$

这就证明了原式. □

现在令 $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\mathrm{e}^{-ix}$, 对任意正数 a, 有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a},\quad \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = \frac{2}{a^3}$$

因此

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} x_i\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-it}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}$$

$$\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i,\,j=1}^{n} x_ix_j\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(i+j)t}\mathrm{d}t = \sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{x_ix_j}{i+j}$$

$$\int_0^{+\infty} x^2f^2(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i,\,j=1}^{n} x_ix_j\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-(i+j)t}\mathrm{d}t = 2\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{x_ix_j}{(i+j)^3}$$

然后利用上述积分不等式得证. □

例 0.68: 设 $f(x,y)$ 在 $D = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$ 上连续, 证明不等式

$$\left(\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^4 \leqslant \frac{\pi^4}{16}\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\iint_D\left(x^2+y^2\right)^2 f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中假定以上每个积分都是收敛的.

☞ **证明:** 令 $\lambda>0, g(x,y)=\dfrac{(x^2+y^2)^2}{\lambda+(x^2+y^2)^2}$, 则

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_D [1-g(x,y)]\,f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D \frac{g(x,y)}{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\leqslant \left(\iint\limits_D [1-g(x,y)]^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\iint\limits_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\quad\left(\iint\limits_D \frac{g^2(x,y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^2 f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

计算可知

$$\iint\limits_D [1-g(x,y)]^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{16}\sqrt{\lambda}$$

现在取

$$\lambda=\frac{\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^2 f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{\pi}{2}\left(\iint\limits_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^2 f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{4}}$$

原不等式得证. □

例 0.69: 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\left(n^4+n^2+1\right)}=\frac{\mathrm{e}}{2}$$

☞ **证明:** 首先注意到当 $n\neq 0$ 时,

$$\frac{1}{n!\left(n^4+n^2+1\right)}=\frac{1}{\left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)n!}=\frac{1}{2n\cdot n!}\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\left(n^4+n^2+1\right)} &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\cdot n!}\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)\\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n^2+1}\left(\frac{1}{(n+1)!\,(n+1)}-\frac{1}{n!n}\right)\\ &= \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!n\,(n+1)}\\ &= \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\,(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)\,(n+1)!}\right)\\ &= \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)\right]\\ &= \frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{\mathrm{e}}{2}\end{aligned}$$

□

例 0.70: 计算积分

$$I=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}|\ln x-\ln y|\,\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解: 令 $I(a)=\int_0^a\int_0^a|\ln x-\ln y|\,\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则 $I=\lim\limits_{a\to\infty}I(a)$.

$$\begin{aligned}I(a)&=2\int_0^a\int_0^x|(\ln x-\ln y)\,\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=2\int_0^a\left(\mathrm{e}^{-x}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\ln x-\mathrm{e}^{-x}\int_0^x\mathrm{e}^{-y}\ln y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=2\int_0^a\mathrm{e}^{-x}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\ln x\mathrm{d}x-2\int_0^a\mathrm{e}^{-x}\int_0^x\mathrm{e}^{-y}\ln y\mathrm{d}y\mathrm{d}x\end{aligned}$$

第二个积分分部积分可得

$$I(a)=2\int_0^a\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x-4\int_0^a\mathrm{e}^{-2x}\ln x\mathrm{d}x+2\mathrm{e}^{-a}\int_0^a\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x$$

由于 $\lim\limits_{a\to\infty}\mathrm{e}^{-a}\int_0^a\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x=0$, 于是

$$I=2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x-4\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-2x}\ln x\mathrm{d}x=2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x-2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\ln\frac{t}{2}\mathrm{d}x=2\ln 2$$

□

例 0.71: 给定 $s_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 用 $s_{n+1}=\sin s_n$ 定义数列 $\{s_n\}$, 证明 $n^2s_n^2-3n+\frac{9}{5}\ln n$ 收敛.

证明: 显然 $\{s_n\}$ 是单调递减趋于 0 的, 首先有

$$s_{n+1}=s_n\left(1-\frac{s_n^2}{6}+\frac{s_n^4}{120}+O\left(s_n^6\right)\right)$$

令 $u_n=\frac{1}{s_n^2}$, 则

$$u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{1}{3u_n}+\frac{1}{15u_n^2}+O\left(u_n^{-3}\right)\right)\qquad(*)$$

由于 $u_n\to\infty$, 由 (*) 可知对充分大的 n 由 $u_{n+1}-u_n>\frac{1}{4}$, 于是 $u_n>\frac{n}{4}-A$ 对某个常数 A 成立. 因此 $u_n=\frac{n}{3}+O(\ln n)$, 于是 $\frac{1}{u_n}=\frac{3}{n}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$. 故

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{5n}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}<\infty,\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+o(1)$, 因此

$$u_n=\frac{n}{3}+\frac{\ln n}{5}+K+o(1)$$

对某个常数 K 成立, 则

$$n^2s_n^2=\frac{n^2}{u_n}=3n-\frac{9\ln n}{5}-9K+o(1)$$

因此 $n^2s_n^2-3n+\frac{9}{5}\ln n\to-9K$. □

例 0.72: 设 $b>a>0$, $f:[0,1]\to[-a,b]$ 连续, 且 $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=ab$, 证明

$$0\leqslant\frac{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{b-a}\right)^2$$

☞ **证明:**[原创] 左边部分比较简单, 利用 $(f(x)+a)(b-f(x))\geqslant 0$, 两边在 $[0,1]$ 上积分得

$$0\leqslant\int_0^1(f(x)+a)(b-f(x))\,\mathrm{d}x=ab-\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x+(b-a)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

要证明右边部分, 首先利用 Cauchy 不等式得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x}=\sqrt{ab}$$

下面只需要证明

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{(a+b)^2}{4(b-a)},\text{即 }(a+b)^4-16ab\,(b-a)^2\geqslant 0$$

令 $t=\dfrac{b}{a}>1$, 则 $(t+1)^4-16t\,(t-1)^2=\left(t^2-6t+1\right)^2\geqslant 0$, 证毕. □

例 0.73: 定义数列 $a_{m,\,n}$

$$\frac{1}{1-u-v+2uv}=\sum_{m,\,n=0}^{\infty}a_{m,\,n}u^m v^n$$

证明 $(-1)^j a_{2j,\,2j+2}=\dfrac{1}{j+1}\dbinom{2j}{j}$.

☞ **证明:** 首先有

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-u-v+2uv}&=\frac{1}{(1-u)(1-v)}\frac{1}{1+\frac{uv}{(1-u)(1-v)}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k u^k v^k}{(1-u)^{k+1}(1-v)^{k+2}}\\&=\sum_{i,\,j,\,k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{k+i}{k}\binom{k+j}{k}u^{k+i}v^{k+j}=\sum_{m,\,n}u^m v^n\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{n}{k}\end{aligned}$$

因此得到 $a_{m,\,n}=\sum\limits_{k\geqslant 0}(-1)^k\dbinom{m}{k}\dbinom{n}{k}$, 注意到这个卷积表示展开式 $(1+x)^m(1-x)^n$ 中 x^m 的系数. 现在 $m=2j,n=2j+2$, 母函数为 $(1-x^2)^{2j}(1-x)^2$, 因此 x^{2j} 的系数为

$$a_{2j,\,2j+2}=(-1)^j\binom{2j}{j}+(-1)^{j-2}\binom{2j}{j-1}=\frac{(-1)^j}{j+1}\binom{2j}{j}$$

□

例 0.74: 设 $\mathrm{Si}(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 表示正弦积分函数, 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Si}(n\pi)}{n^3}$$

✎ **解:**[原创] 首先利用分部积分得

$$\begin{aligned}\mathrm{Si}\left(n\pi\right)&=\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}\left(\ln x\right)=-n\int_0^{\pi}\cos nx\ln x\mathrm{d}x\\&=-n\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}\left(x\ln x-x\right)=n\left[\left(-1\right)^{n-1}\left(\pi\ln\pi-\pi\right)-n\int_0^{\pi}\sin nx\left(x\ln x-x\right)\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

于是我们可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Si}(n\pi)}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\left(\pi\ln\pi-\pi\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\left(x\ln x-x\right)\mathrm{d}x$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$, 把后一部分式子再分部积分得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\left(x\ln x-x\right)\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{3}{4}x^2\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2\ln x\right)\cos nx\mathrm{d}x\end{aligned}$$

现在考虑函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2\ln x, & x\in(0,\pi]\\ 0, & x=0\end{cases}$, 作偶对称以后再作 2π 周期延拓, 则 $f(x)$ 的 Fourier 余弦级数为

$$\widetilde{f}\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

其中 $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f\left(x\right)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2\ln x\right)\cos nx\mathrm{d}x$, 根据 Fourier 级数收敛定理可知

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n=f(0)=0$$

而 $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2\ln x\right)\mathrm{d}x=\frac{11}{18}\pi^2-\frac{1}{3}\pi^2\ln\pi$, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2\ln x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n=-\frac{\pi}{4}a_0=\frac{\pi^3}{12}\ln\pi-\frac{11}{72}\pi^3$$

于是最后得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Si}\left(n\pi\right)}{n^3}=\frac{\pi^2}{12}\left(\pi\ln\pi-\pi\right)-\left(\frac{\pi^3}{12}\ln\pi-\frac{11}{72}\pi^3\right)=\frac{5\pi^3}{72}$$

同样道理我们还能得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{\mathrm{Si}\left(n\pi\right)}{n^3}=-\frac{\pi^2}{6}\left(\pi\ln\pi-\pi\right)-\left(\frac{2\pi^3}{9}-\frac{\pi^3}{6}\ln\pi\right)=-\frac{\pi^3}{18}$$

只不过这时需要利用 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 和 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n a_n=f\left(\pi\right)$ 即可. □

例 0.75: 设 $\operatorname{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 表示正弦积分函数，求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{Si}(n\pi)}{n}\right)^2$$

✎ **解:** 同上, 先分部积分得

$$\operatorname{Si}(n\pi)=-n\int_0^{\pi}\cos nx\ln x\mathrm{d}x$$

于是得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{Si}(n\pi)}{n}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\cos nx\ln x\mathrm{d}x\right)^2$$

考虑函数 $f(x)=\ln x, x\in(0,\pi)$, 作偶函数延拓和 π 周期延拓得到的余弦级数为

$$\widetilde{f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

其中 $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\ln x\mathrm{d}x$, $a_0=2\ln\pi-2$, 由 Parseval 定理得

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln^2 x\mathrm{d}x=4-4\ln\pi+2\ln^2\pi$$

因此我们最后得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{Si}(n\pi)}{n}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\cos nx\ln x\mathrm{d}x\right)^2=\frac{\pi^2}{2}$$

□

✂ **注:** 利用上述方法我们还可以得到一些副产品

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\operatorname{Si}(n\pi)}{n}=\frac{\pi}{2},\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Si}(n\pi)}{n^5}=\frac{269}{43200}\pi^5,\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\operatorname{Si}(n\pi)}{n^5}=\frac{4}{675}\pi^5$$

例 0.76: 定义数列 $\{X_n\}$:$X_0=0, X_1=1, X_2=0, X_3=1$, 当 $n\geqslant 1$ 时,

$$X_{n+3}=\frac{(n^2+n+1)(n+1)}{n}X_{n+2}+\left(n^2+n+1\right)X_{n+1}-\frac{n+1}{n}X_n$$

证明对任意 $n\geqslant 0$, X_n 是完全平方数.

☞ **证明:** 定义数列 $\{c_n\}$:$c_0=0, c_1=1, c_{n+2}=nc_{n+1}+c_n, n\geqslant 0$, 则 $c_{n+3}=(n+1)c_{n+2}+c_{n+1}$, 且 $c_n=c_{n+2}-nc_{n+1}$, 平方得到

$$c_{n+3}^2=(n+1)^2c_{n+2}^2+c_{n+1}^2+2(n+1)c_{n+2}c_{n+1}$$

$$c_n^2=c_{n+2}^2+n^2c_{n+1}^2-2nc_{n+2}c_{n+1}$$

消去因子 $c_{n+2}c_{n+1}$ 得到

$$c_{n+3}^2=\frac{(n^2+n+1)(n+1)}{n}c_{n+2}^2+\left(n^2+n+1\right)c_{n+1}^2-\frac{n+1}{n}c_n^2$$

而 $c_2=0, c_3=1$, 因此 c_n^2 和 X_n 满足相同的递推关系和初值条件, 于是 $X_n=c_n^2$. □

例 0.77: 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 并且在 a 点 n 阶可导. 对任意 $x\in(a,b)$, 由积分中值定理, 存在 $c_x\in(a,x)$ 使得

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(c_x)(x-a)$$

如果 $f^{(k)}(a)=0, k=1,\cdots,n-1$, 但 $f^{(n)}(a)\neq 0$, 证明

$$\lim_{x\to a}\frac{c_x-a}{x-a}=\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$$

☞ **证明:** 这个题目解答见 48 题. □

例 0.78: 设 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, $xf(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调下降, 求证

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)\ln x=0$$

✎ **解:** 显然 $xf(x)\downarrow 0$, 否则原积分一定发散. 由于积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 根据 Cauchy 收敛准则, 对任意 $\varepsilon>0$, 当 A 充分大时,

$$\varepsilon>\int_{\sqrt{A}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{A}}^{A} xf(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{x}\geqslant Af(A)\int_{\sqrt{A}}^{A}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{1}{2}Af(A)\ln A$$

这就说明 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)\ln x=0$. □

例 0.79: 将方程 $u^2-\dfrac{u^3}{3}=k\left(0<k<\dfrac{4}{3}\right)$ 的两个正根记为 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$. 求

$$\lim_{k\to\frac{4}{3}}\frac{\int_\alpha^\beta\sqrt{u^2-\frac{u^3}{3}-k}\mathrm{d}u}{4-3k}$$

✎ **解:** 记原方程的三个根为 α,β,γ, 注意到方程 $u^2-\dfrac{u^3}{3}=\dfrac{4}{3}$ 的三个根分别为 $-1,2,2$, 因此当 $k\to\dfrac{4}{3}$ 时等价于 $\alpha,\beta\to 2,\gamma\to -1$. 利用三次方程 Vieta 定理得

$$\alpha+\beta+\gamma=3,\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=0,\alpha\beta\gamma=-3k$$

于是可得

$$\alpha+\beta=3-\gamma,\alpha\beta=\frac{-3k}{\gamma}=\gamma^2-3\gamma$$

故 $(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=(3-\gamma)^2-4\left(\gamma^2-3\gamma\right)=9+6\gamma-3\gamma^2=3(\gamma+1)(3-\gamma)$. 因此

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\frac{4}{3}}\frac{\int_\alpha^\beta\sqrt{u^2-\frac{u^3}{3}-k}\mathrm{d}u}{4-3k}&=\lim_{\gamma\to-1}\frac{\int_\alpha^\beta\sqrt{(u-\gamma)(u-\alpha)(\beta-u)}\mathrm{d}u}{4-3\gamma^2+\gamma^3}\\&=\lim_{\gamma\to-1}\frac{\int_\alpha^\beta\sqrt{3(u-\alpha)(\beta-u)}\mathrm{d}u}{4-3\gamma^2+\gamma^3}=\lim_{\gamma\to-1}\frac{\frac{\sqrt{3}\pi}{8}(\beta-\alpha)^2}{(\gamma+1)(\gamma-2)^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{8} \lim_{\gamma \to -1} \frac{3(\gamma+1)(3-\gamma)}{(\gamma+1)(\gamma-2)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

□

例 0.80: 设函数 $f:[1,+\infty) \to (\mathrm{e},+\infty)$ 是单调增函数, 且 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = +\infty$.

(1) 证明 $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln f(x)} = \infty$.

(2) 给出一个满足上述条件的函数 f, 但是积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln f(x)\ln(\ln f(x))}$ 收敛.

☞ **证明:**

(1) 反证法, 假定 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln f(x)} < +\infty$, 利用变量代换 $x=\mathrm{e}^t$ 可得 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\ln f(\mathrm{e}^t)} < +\infty$, 根据函数 f 的单调性可知 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln f(\mathrm{e}^x)} = 0$. 那么当 x 充分大时有 $\frac{x}{\ln f(\mathrm{e}^x)} < \frac{1}{2}$, 因此 $\frac{\mathrm{e}^x}{f(\mathrm{e}^x)} < \mathrm{e}^{-x}$, 从而

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{f(\mathrm{e}^t)}\mathrm{d}t < +\infty,$$

矛盾.

(2) 设 $a_n = \exp\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^n}\right), n=0,1,\cdots$, 当 $a_{n-1} \leqslant x < a_n$ 时, 令 $f(x)=a_n$, 则

$$\int_{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} = +\infty$$

而另一方面,

$$\int_{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln f(x)\ln(\ln f(x))} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_{n-1}}^{a_n} \frac{\mathrm{d}x}{x\mathrm{e}^{\mathrm{e}^n}\mathrm{e}^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^n} - \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{n-1}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^n}\mathrm{e}^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^n} < +\infty.$$

□

例 0.81: 设函数 f 是 $[0,+\infty)$ 上的非负连续函数, 且 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty$, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^n xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

☞ **证明:** 令 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $F(x)$ 单增, 分部积分得

$$\frac{1}{n}\int_0^n xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^n x\mathrm{d}F(x) = F(n) - \frac{1}{n}\int_0^n F(x)\,\mathrm{d}x.$$

注意到 $\lim_{n\to\infty} F(n) = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$, 齐次利用 F 的单调性可得

$$\frac{F(0)+\cdots+F(n-1)}{n} \leqslant \frac{1}{n}\int_0^n F(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{F(1)+\cdots+F(n)}{n}.$$

而根据 Stolz 定理可知, 上式左右两边均等于 $\lim_{n\to\infty} F(n)$, 因此原极限为零. □

例 0.82: 设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续且积分 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 一致有界. 即存在 $M>0$ 使得

$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M,\quad \forall x\in[a,+\infty)$$

证明 f 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

☞ **证明:** 由于 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 故存在 $\delta>0$, 如果 $|t-s|<\delta$, 则 $|f(s)-f(t)|<1$. 现在假定 f 无界, 则存在数列 $\{a_n\}$ 使得 $a_{n+1}>a_n+\delta$ 且 $|f(a_n)|\geqslant n$. 根据假设有

$$\left|\int_a^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \geqslant \left|\int_{a_n-\frac{\delta}{2}}^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t\right| - \left|\int_a^{a_n-\frac{\delta}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \geqslant \left|\int_{a_n-\frac{\delta}{2}}^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t\right| - M$$

进一步有 $|f(t)-f(a_n)|<1$ 对 $t\in\left[a_n-\dfrac{\delta}{2},a_n\right]$ 都成立. 因此

$$\left|\int_{a_n-\frac{\delta}{2}}^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \geqslant (|f(a_n)|-1)\frac{\delta}{2} \geqslant (n-1)\frac{\delta}{2},\quad \left|\int_a^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \geqslant (n-1)\frac{\delta}{2}-M$$

矛盾. □

例 0.83: 如果 $\int_a^{+\infty}(f(x))^2\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty}(f''(x))^2\,\mathrm{d}x$ 都收敛, 则 $\int_a^{+\infty}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x$ 也收敛.

☞ **证明:** 首先由分部积分得

$$\int_a^x f(t)\,f''(t)\,\mathrm{d}t = f(x)\,f'(x) - f(a)\,f'(a) - \int_a^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t$$

根据不等式 $(f(x))^2+(f''(x))^2\geqslant 2\left|f(x)\,f''(x)\right|$ 可知积分 $\int_a^x f(t)\,f''(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛. 如果当 $x\to+\infty$ 时积分 $\int_a^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t\to+\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,f'(x)=+\infty$, 而

$$f^2(x)-f^2(a)=\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\,f'(t)\,\mathrm{d}t$$

这样就得到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x)=+\infty$, 矛盾, 因此 $\int_a^{+\infty}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x$ 收敛. □

例 0.84: 设 f,g 都是 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数, 且 $m_1\leqslant f(x)\leqslant M_1, m_2\leqslant g(x)\leqslant M_2$, $x\in[a,b]$, 证明

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(M_1-m_1)(M_2-m_2)}{4}$$

☞ **证明:** 利用变量替换 $t=\dfrac{x-a}{b-a}$ 可知只需要考虑 $a=0,b=1$ 的情形即可. 令 $F=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x, G=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$, 以及

$$D(f,g)=\int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x - FG$$

由 Cauchy 不等式得

$$D(f,f)=\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant 0.$$

另一方面,

$$D(f,f)=(M_1-F)(F-m_1)-\int_0^1(M_1-f(x))(f(x)-m_1)\,\mathrm{d}x,$$

这就意味着 $D(f,f)\leqslant(M_1-F)(F-m_1)$. 显然 $D(f,g)=\int_0^1(f(x)-F)(g(x)-G)\,\mathrm{d}x$, 由 Cauchy 不等式得

$$[D(f,g)]^2\leqslant\int_0^1(f(x)-F)^2\,\mathrm{d}x\int_0^1(g(x)-G)^2\,\mathrm{d}x=D(f,f)\,D(g,g)\,.$$

因此

$$[D(f,g)]^2\leqslant(M_1-F)(F-m_1)(M_2-G)(G-m_2)\leqslant\frac{(M_1-m_1)^2}{4}\cdot\frac{(M_2-m_2)^2}{4}.$$

$\square$

例 0.85: 设

$$\mathcal{A}=\left\{f\in\mathcal{R}([0,1]):\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=3,\ \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=2\right\}.$$

求 $\min\limits_{f\in\mathcal{A}}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

✎ **解:** 如果 $f\in\mathcal{A}$, 则对任意实数 t 由 Cauchy 不等式得

$$(2+3t)^2=\left(\int_0^1 f(x)(x+t)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1(x+t)^2\,\mathrm{d}x.$$

因此 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{3(2+3t)^2}{3t^2+3t+1}$ 对任意实数 t 均成立, 注意到 $\max\limits_{t\in\mathbb{R}}\frac{3(2+3t)^2}{3t^2+3t+1}=12$, $t=0$ 时取等, 此时 $f(x)=6x$. $\square$

例 0.86: 设 f 在 $[0,1]$ 上非负递减, 证明对任意非负实数 a,b 有

$$\left(1-\left(\frac{a-b}{a+b+1}\right)^2\right)\int_0^1 x^{2a}f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 x^{2b}f(x)\,\mathrm{d}x\geq\left(\int_0^1 x^{a+b}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

☞ **证明:** 借用 Lebesgue-Stieltjes 积分, 首先分部积分得

$$\begin{aligned}\left((a+b+1)\int_0^1 x^{a+b}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2&=\left(f(1)-\int_0^1 x^{a+b+1}\mathrm{d}f(x)\right)^2\\&=f^2(1)-2f(1)\int_0^1 x^{a+b+1}\mathrm{d}f(x)+\left(\int_0^1 x^{a+b+1}\mathrm{d}f(x)\right)^2\\&\leqslant f^2(1)-2f(1)\int_0^1 x^{a+b+1}\mathrm{d}f(x)+\int_0^1 x^{2a+1}\mathrm{d}f(x)\int_0^1 x^{2b+1}\mathrm{d}f(x)\end{aligned}$$

由于 $\int_0^1 x^k\mathrm{d}f(x)=f(1)-k\int_0^1 x^{k-1}f(x)\,\mathrm{d}x$, 可得

$$\begin{aligned}&\left((a+b+1)\int_0^1 x^{a+b}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\\leqslant\ &(2a+1)\int_0^1 x^{2a}f(x)\,\mathrm{d}x\,(2b+1)\int_0^1 x^{2b}f(x)\,\mathrm{d}x\\&+f(1)\left(2(a+b+1)\int_0^1 x^{a+b}f(x)\,\mathrm{d}x-(2a+1)\int_0^1 x^{2a}f(x)\,\mathrm{d}x-(2b+1)\int_0^1 x^{2b}f(x)\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

要证明 $\int_0^1 f(x)\left(2(a+b+1)x^{a+b}-(2a+1)x^{2a}-(2b+1)x^{2b}\right)\mathrm{d}x\leqslant 0$, 分部积分得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\left(2(a+b+1)x^{a+b}-(2a+1)x^{2a}-(2b+1)x^{2b}\right)\mathrm{d}x&=-\int_0^1\left(2x^{a+b+1}-x^{2a+1}-x^{2b+1}\right)\mathrm{d}f(x)\\&=\int_0^1\left(x^a-x^b\right)^2 x\mathrm{d}f(x)\leqslant 0\end{aligned}$$

这里因为 f 是递减的. □

例 0.87: 设 $\{a_n\}$ 是严格正数列且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, 对所有 n 均有 $a_n>1$. 证明: 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n\log(a_n)}$ 也发散.

这题比较简单, 取 $a_n=n\log n$ 可知原结论不对, 应该打错了, 正确问题应当如下:

例 0.88: 设 $\{a_n\}$ 是严格正数列且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, 对所有 n 均有 $a_n>1$. 证明: 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log(a_n)}$ 也发散.

☞ **证明:** 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log(a_n)}$ 都是正项级数, 因此我们任意重排级数都不改变敛散性. 又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, 因此 $\liminf\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, 也就是说每个 a_n 后面都只有有限个数比 a_n 小, 因此我们重排数列 $\{a_n\}$, 使得 a_n 成为单调递增数列. 具体而言就是从 $\{a_n\}$ 的第一项 a_1 开始, 只要后面有比 a_1 小的数, 就把它们放到 a_1 前面去, 然后重复此工作即可. 不妨记重排后的单调数列仍为 $\{a_n\}$, 自然有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$. 首先有如下简单引理:

引理 0.1

设 $\{a_n\}$ 是递减的正数列, 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

✂ **引理证明:** 根据 Cauchy 收敛原理, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时,

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon \tag{1}$$

对任意正整数 p 成立. 现在令 $p=n$, 根据 $\{a_n\}$ 的单调递减性, 当 $n>N$ 时, 由 (1) 可得

$$2na_{2n}\leqslant 2(a_n+\cdots a_{2n})<2\varepsilon \tag{2}$$

又 $(2n+1)a_{2n+1}\leqslant 2na_{2n}+a_{2n+1}\to 0, n\to\infty$, 结合 (2) 式即得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

下面用反证法证明原级数发散. 设当 $n\leqslant x<n+1$ 时, $f(x)=a_n$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\sim\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n\log(a_n)}\sim\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\log f(x)}$$

等价符号是指二者同敛散. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log(a_n)}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\log f(x)}<\infty$, 变量代换 $x=\mathrm{e}^t$ 即 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\log f(\mathrm{e}^t)}<\infty$.

根据引理可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln f\left(\mathrm{e}^x\right)}=0$, 那么当 x 充分大时就有 $\dfrac{x}{\ln f\left(\mathrm{e}^x\right)}<\dfrac{1}{2}$, 因此有 $\dfrac{\mathrm{e}^x}{f\left(\mathrm{e}^x\right)}<\mathrm{e}^{-x}$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f\left(x\right)}=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^t}{f\left(\mathrm{e}^t\right)}\mathrm{d}t<\infty$$

矛盾, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\log(a_n)}$ 发散. □

例 0.89: 设 $\Phi(x)$ 是 $(0,\infty)$ 上正的严格增函数, $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 是三个非负数列满足

$$a_{n+1}\leqslant a_n-b_n\Phi\left(a_n\right)+c_na_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}c_n<\infty.$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

☞ **证明:**[向禹] 首先由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n<\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$, $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+c_n\right)<\infty$. 再由 $a_{n+1}\leqslant\left(1+c_n\right)a_n-b_n\Phi\left(a_n\right)$ 可得

$$\frac{a_{n+1}}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+c_k\right)}\leqslant\frac{a_n}{\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+c_k\right)}-\frac{b_n\Phi\left(a_n\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+c_k\right)}$$

这说明数列 $\left\{a_n/\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+c_k\right)\right\}$ 单调递减并且有下界 0, 因此数列 $\left\{a_n/\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+c_k\right)\right\}$ 收敛, 也就是数列 $\{a_n\}$ 收敛, 自然有界. 设 $a_n<K$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

如果 $a>0$, 那么存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, $a_n>\dfrac{a}{2}>0$ 都成立. 再根据 $a_{n+1}\leqslant\left(1+c_n\right)a_n-b_n\Phi\left(a_n\right)$ 可得 $b_n\leqslant\dfrac{\left(1+c_n\right)a_n-a_{n+1}}{\Phi\left(a_n\right)}$, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\infty$ 意味着 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(1+c_n\right)a_n-a_{n+1}}{\Phi\left(a_n\right)}=\infty$. 由 Cauchy 收敛原理知对任意实数 $M>0$ 以及正整数 $k>N$, 存在 $p\in\mathbb{N}$, 使得

$$\sum_{n=k}^{k+p}\frac{\left(1+c_n\right)a_n-a_{n+1}}{\Phi\left(a_n\right)}>M.$$

而此时 $\Phi(a_n)>\Phi\left(\dfrac{a}{2}\right)=A>0$, 因此

$$M<\sum_{n=k}^{k+p}\frac{\left(1+c_n\right)a_n-a_{n+1}}{\Phi\left(a_n\right)}<\frac{1}{A}\sum_{n=k}^{k+p}\left[\left(1+c_n\right)a_n-a_{n+1}\right]<\frac{1}{A}\left(a_k-a_{k+p}\right)+K\sum_{n=k}^{k+p}c_n$$

这与 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n<\infty$ 矛盾, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. □

例 0.90: 求数列

$$a_{n+1}=\int_0^1\min\left(x,b_n,c_n\right)\mathrm{d}x,\ b_{n+1}=\int_0^1\mathrm{mid}\left(x,a_n,c_n\right)\mathrm{d}x,\ c_{n+1}=\int_0^1\max\left(x,a_n,b_n\right)\mathrm{d}x$$

的极限.

✎ **解:** 显然 $\min(x,b_n,c_n)\leqslant x\leqslant\max(x,a_n,b_n)$, 所以如果 $\min(x,a_n,c_n)=x$, 我们有

$$\min\left(x,b_n,c_n\right)\leqslant\mathrm{mid}\left(x,a_n,c_n\right)\leqslant\left(x,a_n,b_n\right)\tag{*}$$

如果 $\operatorname{mid}(x, a_n, c_n)$, 则要么 $x \leqslant a_n$ 要么 $c_n \leqslant a_n$, 所以 $a_n \leqslant \max(x, a_n, c_n) = c_n$. 则 (*) 式恒成立, 积分可知 $a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant c_{n+1}, n = 1, 2, \cdots$.

现在有

$$a_{n+1} = \int_0^1 \min(x, b_n, c_n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

类似地可得 $c_{n+1} \geqslant \frac{1}{2}$, 于是

$$b_{n+2} = \int_0^1 \operatorname{mid}(x, a_{n+1}, c_{n+1})\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \max(x, a_{n+1})\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \min(x, c_{n+1})\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 x\mathrm{d}x = \frac{5}{8}$$

同理还有 $b_{n=2} \geqslant \frac{3}{8}$. 由于 $\frac{3}{8} \leqslant b_{n+2} \leqslant c_{n+2}, a_{n+2} = \int_0^1 \min(x, b_{n+2}, c_{n+2})\,\mathrm{d}x > 0$, 类似有 $c_{n+2} < 1$.

现在假定 n 充分大使得 $0 < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < 1$.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \int_0^{b_n} x\mathrm{d}x + \int_{b_n}^1 b_n\mathrm{d}x = \frac{2b_n - b_n^2}{2} \\
b_{n+1} &= \int_0^{a_n} a_n\mathrm{d}x + \int_{a_n}^{c_n} x\mathrm{d}x + \int_{c_n}^1 c_n\mathrm{d}x = \frac{a_n^2 - c_n^2 - 2c_n}{2} \\
c_{n+1} &= \int_0^{b_n} b_n\mathrm{d}x + \int_{b_n}^1 x\mathrm{d}x = \frac{b_n^2 + 1}{2}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
b_{n+2} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2b_n - b_n^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{b_n + 1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{b_n + 1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{(2b_n - 1)\left(-2b_n^2 + 2b_n + 1\right)}{8} = b_n - \frac{(2b_n - 1)^2 + 5(2b_n - 1)}{16}
\end{aligned}$$

由于 $0 < 2b_n^2 + 2b_n + 1, 0 < b_n < 1$, 这要么 $\frac{1}{2} \leqslant b_{n+2} \leqslant b_n$ 要么 $\frac{1}{2} > b_{n+2} > b_n$. 因此可得

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = \frac{1}{2}$$

同时

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2b_n - b_n^2}{2} = \frac{3}{8}, \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} c_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n^2 + 1}{2} = \frac{5}{8}$$

□

例 0.91: 证明：对任意 $\alpha, \beta, 0 < \alpha < \beta < \pi$,

$$\int_0^\alpha \sqrt{\frac{\cos\theta - \cos\beta}{\cos\theta - \cos\alpha}}\mathrm{d}\theta + \int_\beta^\pi \sqrt{\frac{\cos\beta - \cos\theta}{\cos\alpha - \cos\theta}}\mathrm{d}\theta = \pi$$

☞ **证明:** 令 $x = \cos\theta, a = \cos\alpha, b = \cos\beta, -1 < b < a < 1$, 待证式等价于

$$\int_{-1}^b \sqrt{\frac{b - x}{a - x}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} + \int_a^1 \sqrt{\frac{x - b}{x - a}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \pi$$

注意到如果 $b=a$ 的话上式显然成立, 下面证明上式左边是关于 b 的导数为零即可, 即

$$\int_{-1}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a-x)(b-x)(1-x^2)}}-\int_{a}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(x-b)(1-x^2)}}=0 \tag{*}$$

利用变换 $y=\dfrac{\lambda x+1}{x+\lambda}$, 取 λ 使得 $(a+b)\lambda^2+2(ab+1)\lambda+(a+b)=0, |\lambda|>1$. 由于此二次式的判别式为 $(1-a^2)(1-b^2)>0$, λ 为实数. 取 $k=\dfrac{\lambda a+1}{a+\lambda}=-\dfrac{\lambda b+1}{b+\lambda}$, 则 $0<k<1$ 且区间 $[-1,b]$, $[a,1]$ 分别包含在 $[-1,k]$, $[k,1]$ 内.(*) 式的第一个积分变成

$$\left(\frac{\lambda^2-1}{(\lambda+a)(\lambda+b)}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^{-k}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(y^2-k^2)(1-y^2)}}$$

第二个积分变换后形式也一样, 只是积分区间是 $[k,1]$, 二者的差为零, 这就说明左边与 b 无关, 等式得证. □

例 0.92: 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{n^3}.$$

✎ **解:** 考虑三重对数函数

$$\mathrm{Li}_3(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3},\quad |x|\leqslant 1.$$

则三重对数满足 Spence 公式

$$\begin{aligned}&\mathrm{Li}_3\left(\frac{x}{x-1}\right)+\mathrm{Li}_3(x)+\mathrm{Li}_3(1-x)-\mathrm{Li}_3(1)\\=&\frac{\pi^2}{6}\ln(1-x)+\frac{1}{6}\ln^2(1-x)(\ln(1-x)-3\ln x).\end{aligned}$$

注意到

$$\mathrm{Li}_3(x)=\frac{x}{2}\int_0^1\frac{\ln^2(1-u)}{1-x+xu}\mathrm{d}u.$$

把 Spence 公式中左边的四个式子都用上述积分代替.

令 $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, 我们注意到此时有 $(x-1)^2=x$ 以及 $\dfrac{x}{x-1}=x-1$, 再令 $v=1-x$, 由 Spence 公式得到

$$\mathrm{Li}_3(x)+\mathrm{Li}_3(v)+\mathrm{Li}_3(-v)=\mathrm{Li}_3(1)+\frac{\pi^2}{6}\ln v-\frac{5}{6}\ln^3 v.$$

由三重对数的定义, 我们得到

$$\mathrm{Li}_3(v)+\mathrm{Li}_3(-v)=\frac{2}{2^3}\mathrm{Li}_3\left(v^2\right)=\frac{1}{4}\mathrm{Li}_3(x).$$

注意到 $v=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\mathrm{Li}_3(1)=\zeta(3)$, 我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{n^3}=\frac{2}{15}\left\{6\zeta(3)+\pi^2\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2}-5\ln^3\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}.$$

□