中国科学院大学

2017 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：数学分析

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. (15 分) 计算极限
$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{2+x}-2\sqrt{1+x}+\sqrt{x}).$$

2. (15 分) 已知 $a_{n+1}(a_n+1)=1, a_0=0$, 证明数列的极限存在, 并且求出极限值.

3. (15 分) $f(x)$ 三次连续可微, 令 $u(x,y,z)=f(xyz)$, 求 $\phi(t)=\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$ 的具体表达式, 其中 $t=xyz$.

4. (15 分) 求
$$\int \frac{dx}{1+x^4}.$$

5. (15 分) 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可微, 并且 $|f(x)|\le a, |f''(x)|\le b$, 证明 $f'(x)\le 2a+\dfrac{b}{2}$.

6. (15 分) 已知 $f(x)$ 有界且可微, 假设 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ 存在, 求证 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$.

7. (15 分) 求二重积分 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

8. (15 分) 已知 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(k+1)$, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 发散.

9. (15 分) 已知 n 为整数, a 为常数, $I_n(a)=\displaystyle\int \frac{dx}{1+nx^a}$.
   (1) 试讨论 a 对敛散性的影响;
   (2) 当 a 在使积分收敛的情况下, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(a)$.

10. (15 分)
    (1) 在 $[a,b]$ 上 $(0<a<b)$, 证明下面的不等式成立
    $$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}dx \ge e^{-a^2}-e^{-b^2}.$$
    (2) 求 $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ 的极值.