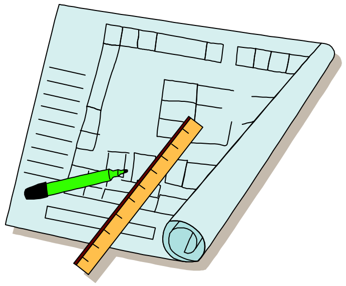
动态规划（2）



建立动态规划模型的步骤

1.划分阶段

划分阶段是运用动态规划求解多阶段决策问题的第一步，在确定多阶段特性后，按时间或空间先后顺序，将过程划分为若干相互联系的阶段。对于静态问题要人为地赋予“时间”概念，以便划分阶段。

2.正确选择状态变量

选择状态变量既要能确切描述过程演变又要满足无后效性，而且各阶段状态变量的取值能够确定。

3.确定决策变量及允许决策集合

通常选择所求解问题的关键变量作为决策变量，同时要给出决策变量的取值范围，即确定允许决策集合。

4.确定状态转移方程

根据k阶段状态变量和决策变量，写出$k+1$阶段状态变量，状态转移方程应当具有递推关系。

5.确定阶段指标函数和最优指标函数，建立动态规划基本方程

阶段指标函数是指第k阶段的收益，最优指标函数是指从第k阶段状态出发到第n阶段末所获得收益的最优值，最后写出动态规划基本方程。

3 动态规划的基本思想与基本原理

学习目标：

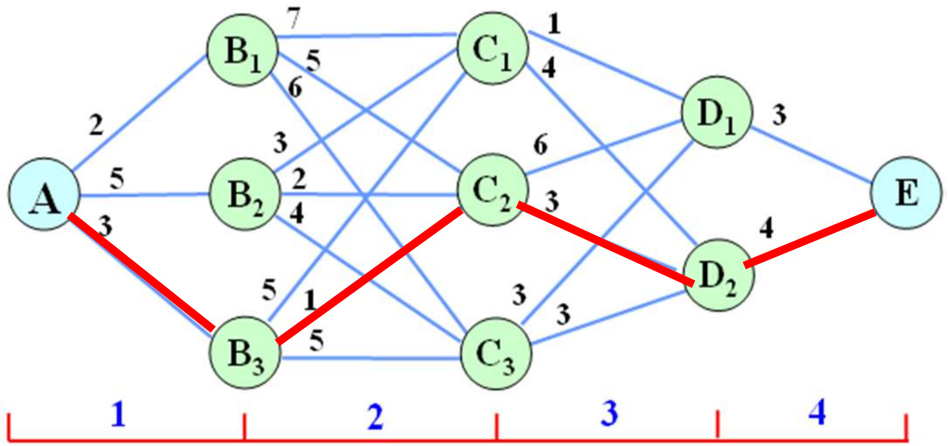
1 掌握最优化原理的内容

2 掌握逆序解法

多阶段决策过程的最优化一般有三种思路求解

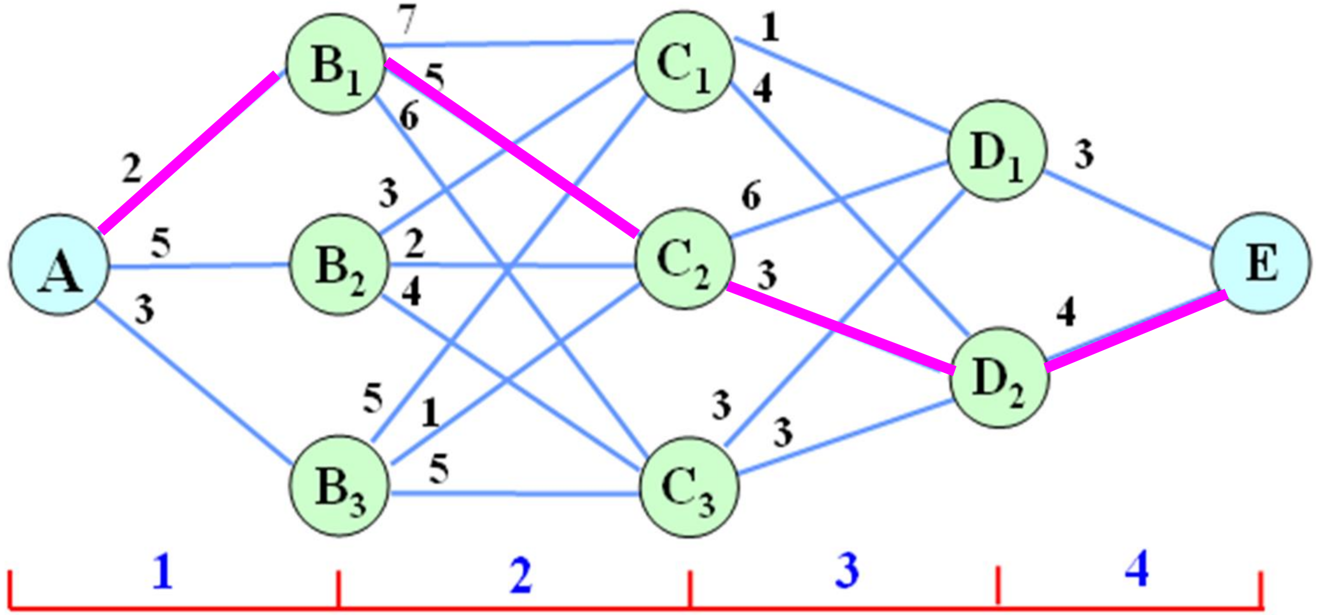
1.全枚举法或穷举法：它的基本思想是列举出所有可能发生的方案和结果，再对它们一一进行比较，求出最优方案。

可以计算：从A到E的路程可分为4个阶段。第一段走法有3种，第二段走法有3种，第三段走法有2种，第四段走法仅1种，共有3×3×2×1＝18条可能的路线，分别算出各条路线的距离，最后进行比较，可知最优路线是$A \to B_3 \to C_2 \to D_2 \to E$，最短距离是11。



用穷举法求最优路线的计算工作量将会十分庞大，而且其中包含着许多重复计算。

2.局部最优路径法：某人从k点出发，并不顾及全线是否最短，只是选择当前最短途径，"逢近便走"，错误地以为局部最优会致整体最优，在这种想法指导下，所取决策必是$A \to B_1 \to C_2 \to D_2 \to E$，全程长度是14；显然，这种方法的结果常是错误的。



□小结：

◎全枚举法虽可找出最优方案，但不是个好算法，

◎局部最优法则完全是个错误方法，

◎只有动态规划方法属较科学有效的算法

3. 贝尔曼最优化原理（动态规划方法）

□作为一个全过程的最优策略具有这样的性质：对于最优策略过程中的任意状态而言，无论其过去的状态和决策如何，余下的诸决策必构成一个最优子策略。（**一个最优策略的子策略总是最优的**）

□作该原理的具体解释是，若某一全过程最优策略为：

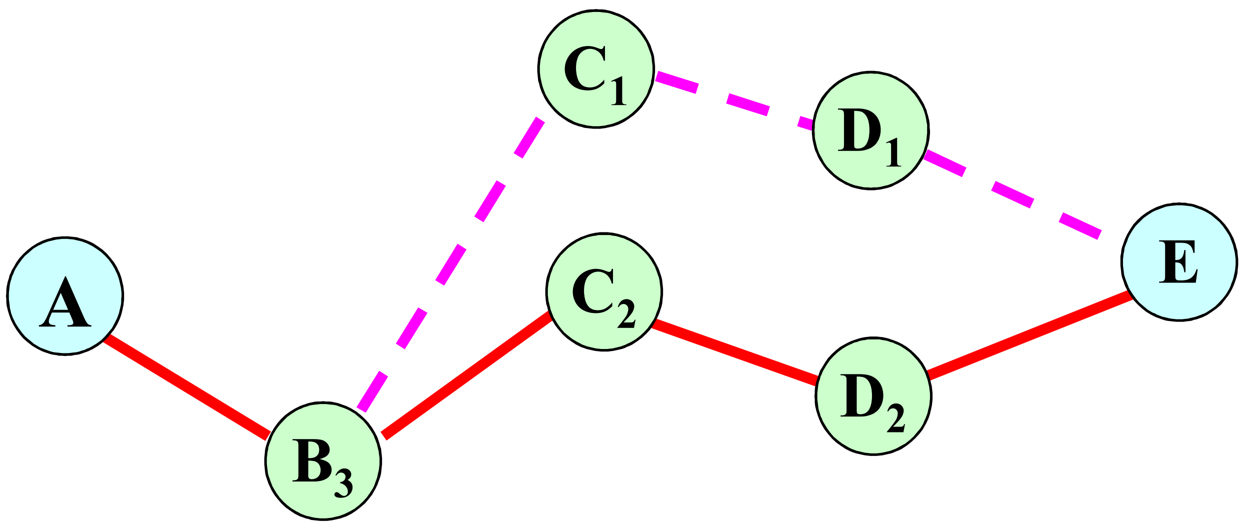
$$p_{1n}^*(x_1)=\{u_1^*(x_1), \cdots, u_k^*(x_k), u_{k+1}^*(x_{k+1}), \cdots, u_n^*(x_n)\}$$

则对上述策略中所隐含的任一状态（x_k）而言，第k子过程上对应于 x_k 的最优策略必然包含在上述全过程最优策略p_{1n}^*中，即为

$$p_{kn}^*(x_k)=\{u_k^*(x_k), u_{k+1}^*(x_{k+1}), \cdots, u_n^*(x_n)\}$$

□最优性原理在最短路线中的应用

在最短路线中，若找到了$A \to B_3 \to C_2 \to D_2 \to E$是由A到E的最短路线，则$B_3 \to C_2 \to D_2 \to E$必是由$B_3$出发到E点的所有可能选择的不同路线中的最短路线。（**一个最优策略的子策略总是最优的**）



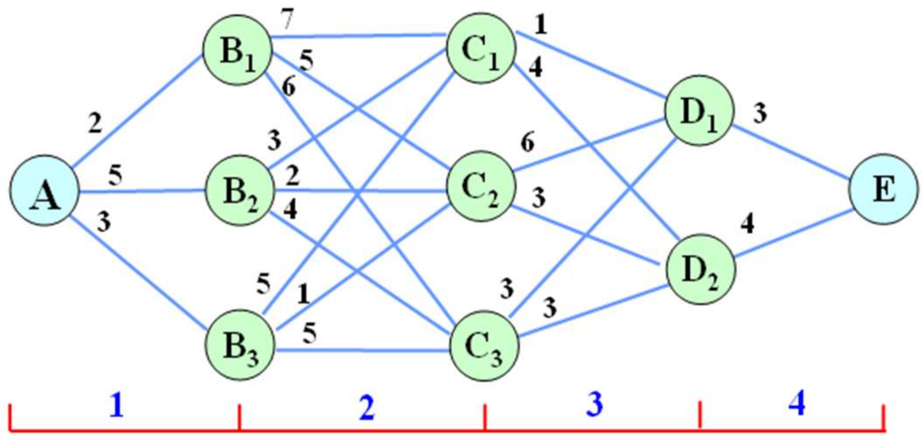
4.函数基本方程

基于这个原理，提出了一种逆序递推法；该法的关键在于给出一种递推关系。一般把这种递推关系称为**动态规划的函数基本方程**。

对于求最小的加法的基本方程为（如例1）：

$$\begin{cases} f_k(x_k) = \min\limits_{u_k \in D_k} \{ v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1}) \} \\ f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

边界条件



□用函数基本方程逆推求解是常用的方法：

首先要有效地建立动态规划模型，

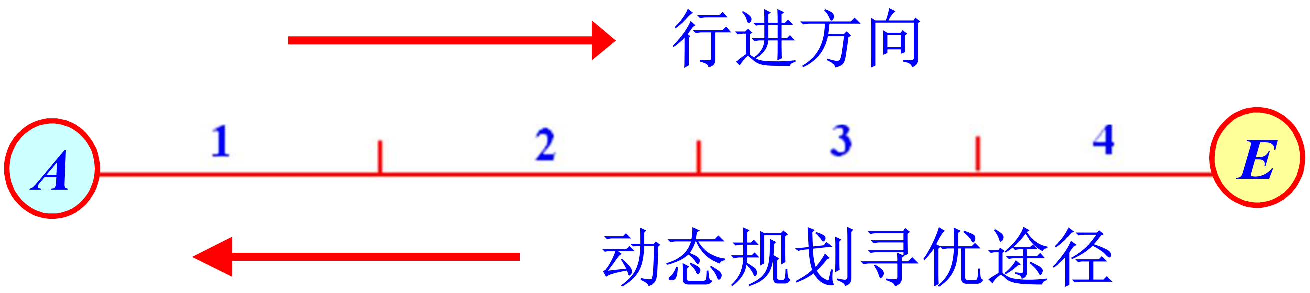
然后再递推求解，

最后得出结论。

□正确地建立一个动态规划模型，是解决问题的关键。

5.标号法（只适用于一类最优路线问题的特殊解法）

标号法是借助网络图通过分段标号来求出最优路线的一种简便、直观的方法。通常标号法采取“逆序求解”的方法来寻找问题的最优解，即从最后阶段开始，逐次向阶段数小的方向推算，最终求得全局最优解。



□标号法的一般步骤：

（1）给最后一段标号，该段各状态（即各始点）到终点的距离用数字分别标在各点上方的方格内，并用粗箭线连接各点和终点。

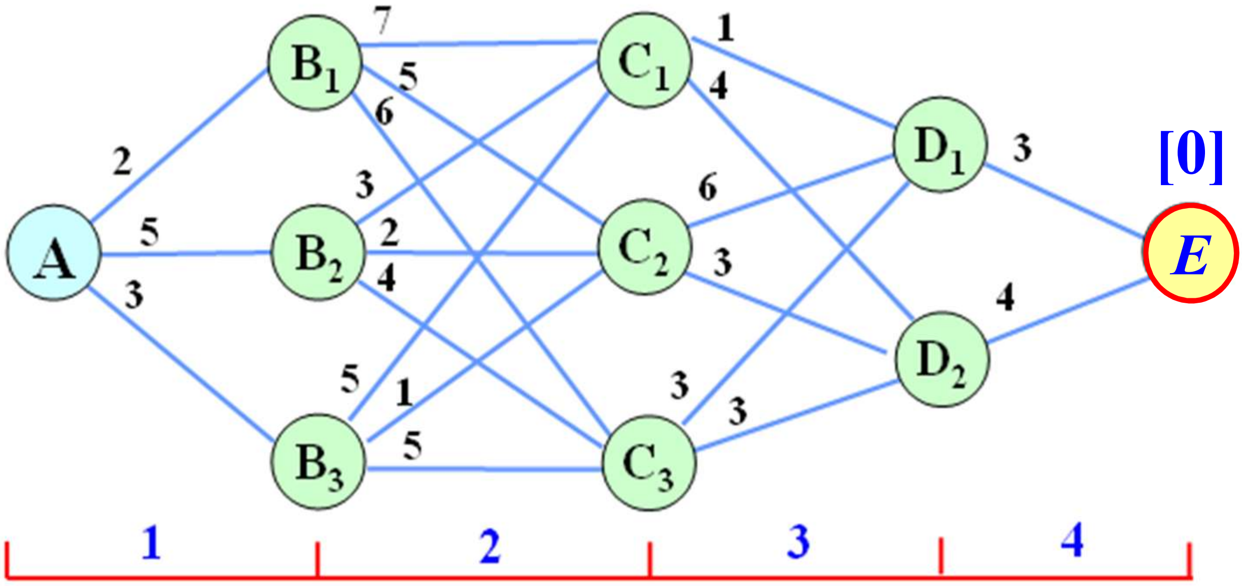
（2）向前递推，给前一阶段的各个状态标号。每个状态上方方格内的数字表示该状态到终点的最短距离。将刚标号的点沿着最短距离用粗箭线连接起来，表示出各刚标号的点到终点的最短路线。

（3）逐次向前递推，直到将第一阶段的状态（即起点）标号，起点方格内的数字就是起点到终点的最短距离，从起点开始连接终点的粗箭线就是最短路线。

第（1）步 k=5

- $f_5(x_5) = f_5(E) = 0$
  这是**边界条件**

$f_k(x_k)$ 表示从第 k 阶段状态 x_k 到 E 点的的最短距离



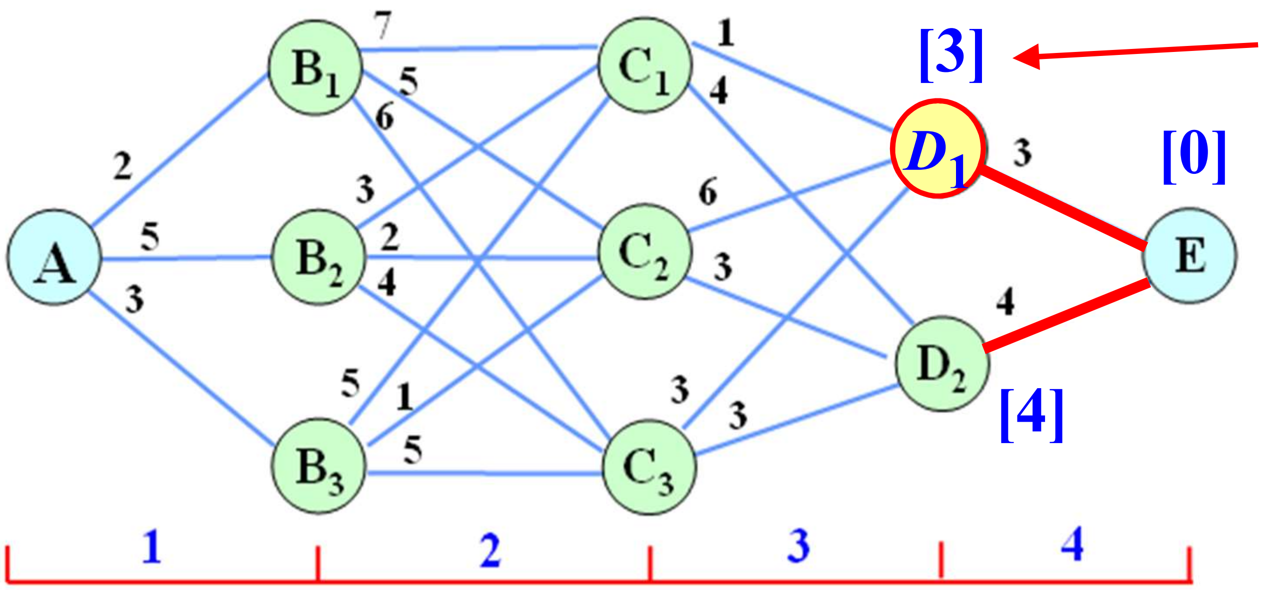
第（2）步 k=4

$$f_k(x_k) = \min_{u_k \in D_k}\{ v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1}) \}$$

□状态变量 x_4 可取两种状态 D_1、D_2。

◎由D_1到终点E只有一条路线，路长为3，即 $f_4(D_1) = 3$。

◎同理，$f_4(D_2) = 4$ 。



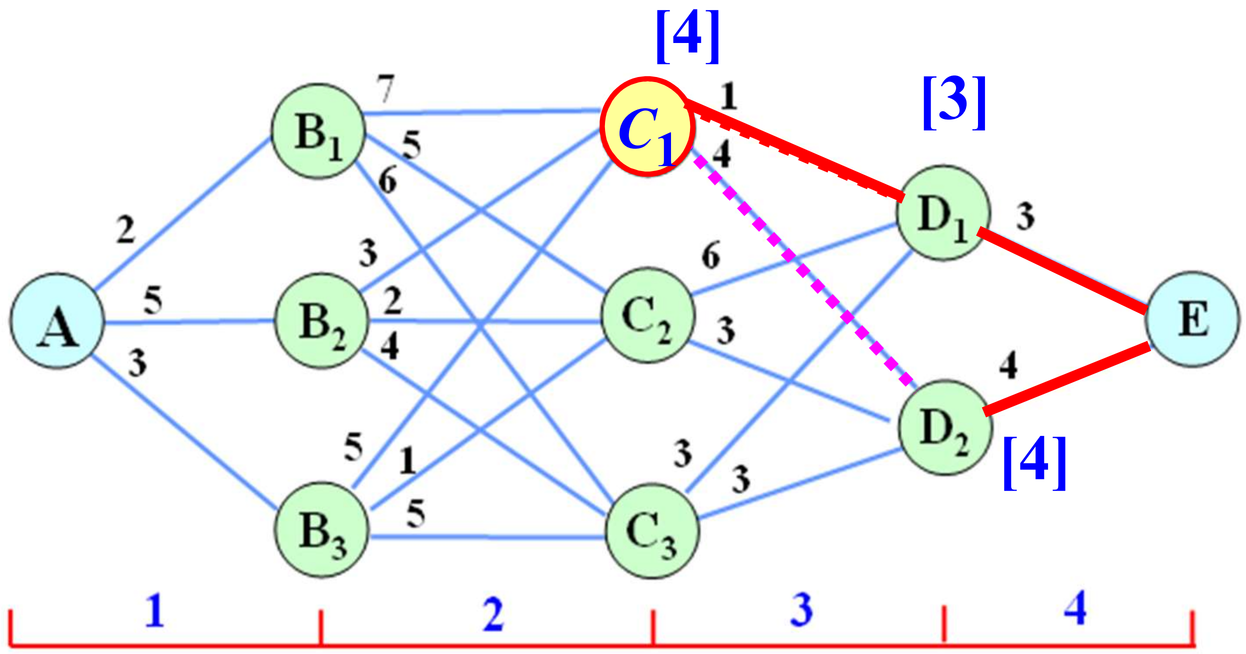
□表示由D1点至E点的最短路长为3。

第（3）步 k=3

$$f_k(x_k) = \min_{u_k \in D_k}\{ v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1}) \}$$

□状态变量 x_3 可取三个值：C_1、C_2、C_3。

①由C_1到终点E有2条路线，分别为经过D_1、D_2到达E点（由D_1、D_2到达E点的最短路长在第一步已计算得出），需加以比较，取其中最短的。



□**路线1**

$v_3(C_1, D_1)+ f_4(D_1)$
$= 1+3=4$

□**路线2**

$v_3(C_1, D_2)+ f_4(D_2)$
$= 4+4=8$

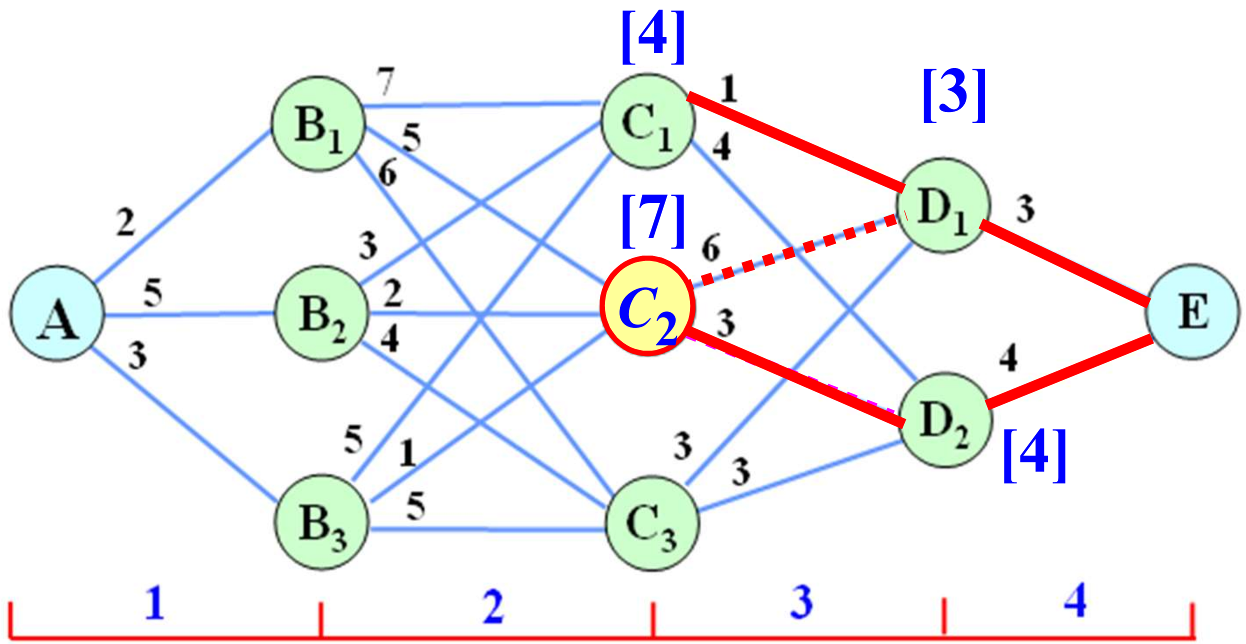
□则由C_1到终点E的最短距离

$$f_3(C_1) = \min\{v_3(C_1, D_1)+ f_4(D_1), \\ v_3(C1, D_2)+ f_4(D_2)\} = 4$$

第（3）步 k=3

$$f_k(x_k) = \min_{u_k \in D_k}\{ v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1}) \}$$

②由C_2到终点E有2条路线，分别为经过D_1、D_2到达E点（由D_1、D_2到达E点的最短路长在第一步已计算得出），需加以比较，取其中最短的。



- 路线1
  $v_3(C_2, D_1)+ f_4(D_1)$
  $= 6+3=9$
- 路线2
  $v_3(C_2, D_2)+ f_4(D_2)$
  $= 3+4=7$

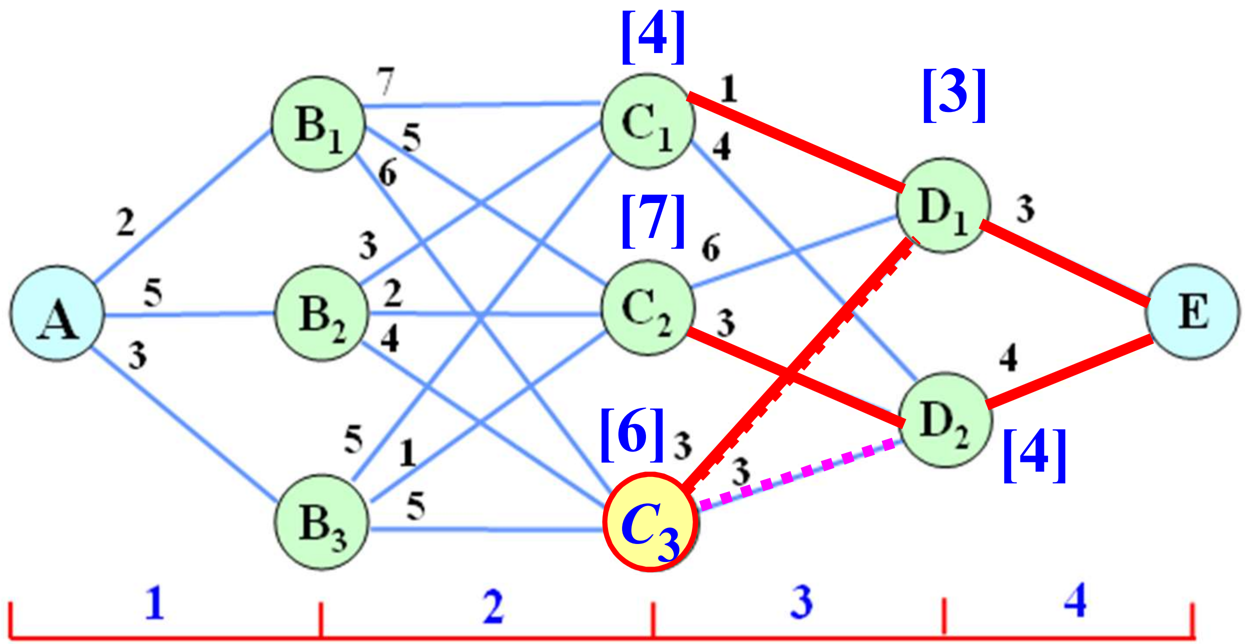
- 则由C_2到终点E的最短距离

$$f_3(C_2) = \min\{v_3(C_2, D_1)+ f_4(D_1), \; v_3(C2, D_2)+ f_4(D_2)\} = 7$$

第（3）步 k=3

$$f_k(x_k) = \min_{u_k \in D_k}\{ v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1}) \}$$

③由C_3到终点E有2条路线，分别为经过D_1、D_2到达E点（由D_1、D_2到达E点的最短路长在第一步已计算得出），需加以比较，取其中最短的。



- 路线1

  $v_3(C_3, D_1)+ f_4(D_1)$

  $= 3+3=6$

- 路线2

  $v_3(C_3, D_2)+ f_4(D_2)$

  $= 3+4=7$

- 则由C_3到终点E的最短距离

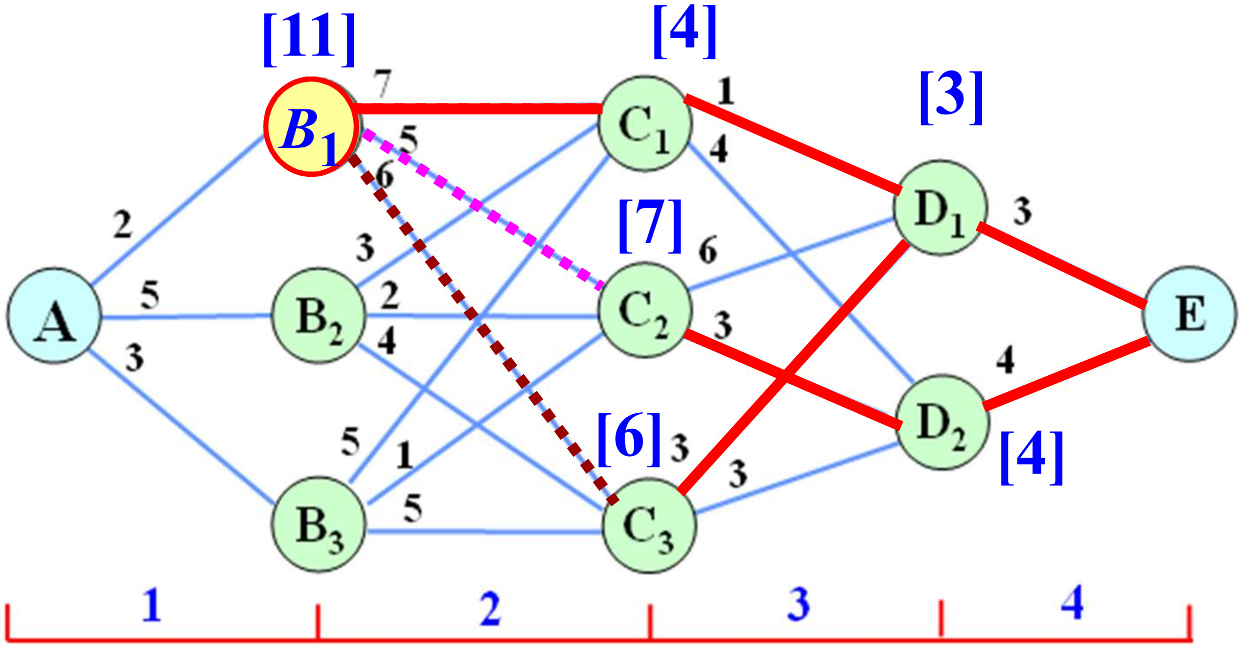
$$f_3(C_3) = \min\{v_3(C_3, D_1)+ f_4(D_1),\ v_3(C_3, D_2)+ f_4(D_2)\} = 6$$

第（4）步 k=2

$$f_k(x_k)=\min_{u_k\in D_k}\{v_k(x_k,u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})\}$$

□状态变量 x_2 可取三个值：B_1、B_2、B_3。

①由B_1到终点E，可分别经过C_1、C_2、C_3到达E点（由C_1、C_2、C_3到E点的最短距离在第二步已计算出），需加以比较，取其中最短的。



□**路线1**

$v_2(B_1,C_1)+f_3(C_1)$
$=7+4=11$

□**路线2**

$v_2(B_1,C_2)+f_3(C_2)$
$=5+7=12$

□**路线3**

$v_2(B_1,C_3)+f_3(C_3)$
$=6+6=12$

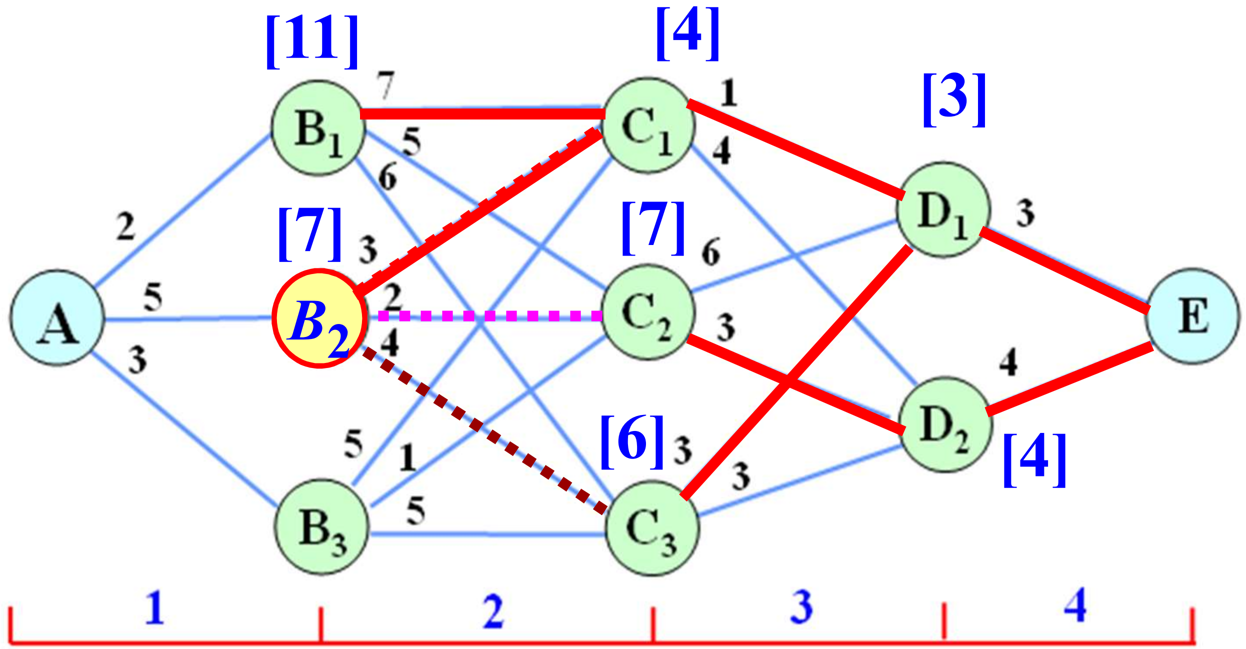
□则由B_1到终点E的最短距离

$$f_2(B_1)=\min\{v_2(B_1,C_1)+f_3(C_1),\ v_2(B_1,C_2)+f_3(C_2),\ v_2(B_1,C_3)+f_3(C_3)\}=11$$

第（4）步 k=2

$$f_k(x_k)=\min_{u_k\in D_k}\{v_k(x_k,u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})\}$$

②由B_2到终点E，可分别经过C_1、C_2、C_3到达E点（由C_1、C_2、C_3到E点的最短距离在第二步已计算出），需加以比较，取其中最短的。



□路线1

$v_2(B_2,C_1)+f_3(C_1)$
$=3+4=7$

□路线2

$v_2(B_2,C_2)+f_3(C_2)$
$=2+7=9$

□路线3

$v_2(B_2,C_3)+f_3(C_3)$
$=4+6=10$

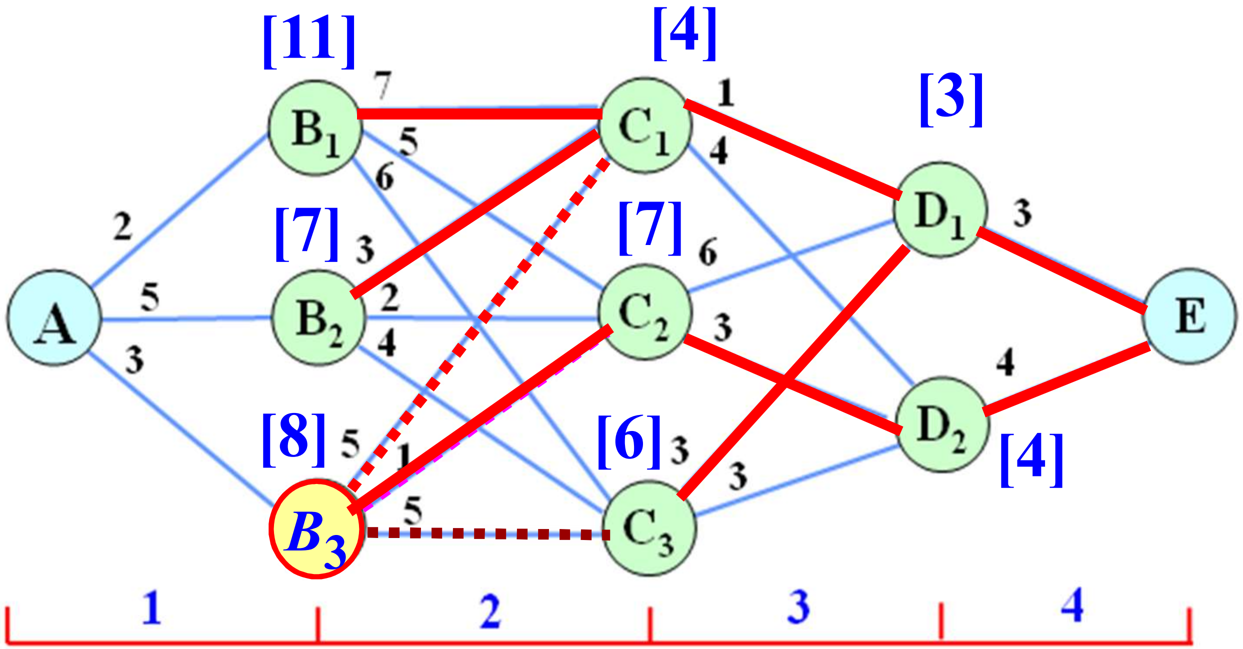
□则由B_2到终点E的最短距离

$$f_2(B_2)=\min\{v_2(B_2,C_1)+f_3(C_1),\ v_2(B_2,C_2)+f_3(C_2),\ v_2(B_2,C_3)+f_3(C_3)\}=7$$

第（4）步 k=2

$$f_k(x_k) = \min_{u_k \in D_k}\{ v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1}) \}$$

③由B_3到终点E，可分别经过C_1、C_2、C_3到达E点（由C_1、C_2、C_3到E点的最短距离在第二步已计算出），需加以比较，取其中最短的。



□路线1

$v_2(B_3, C_1)+f_3(C_1)$
$= 5+4=9$

□路线2

$v_2(B_3, C_2)+f_3(C_2)$
$= 1+7=8$

□路线3

$v_2(B_3, C_3)+f_3(C_3)$
$= 5+6=11$

□则由B_3到终点E的最短距离

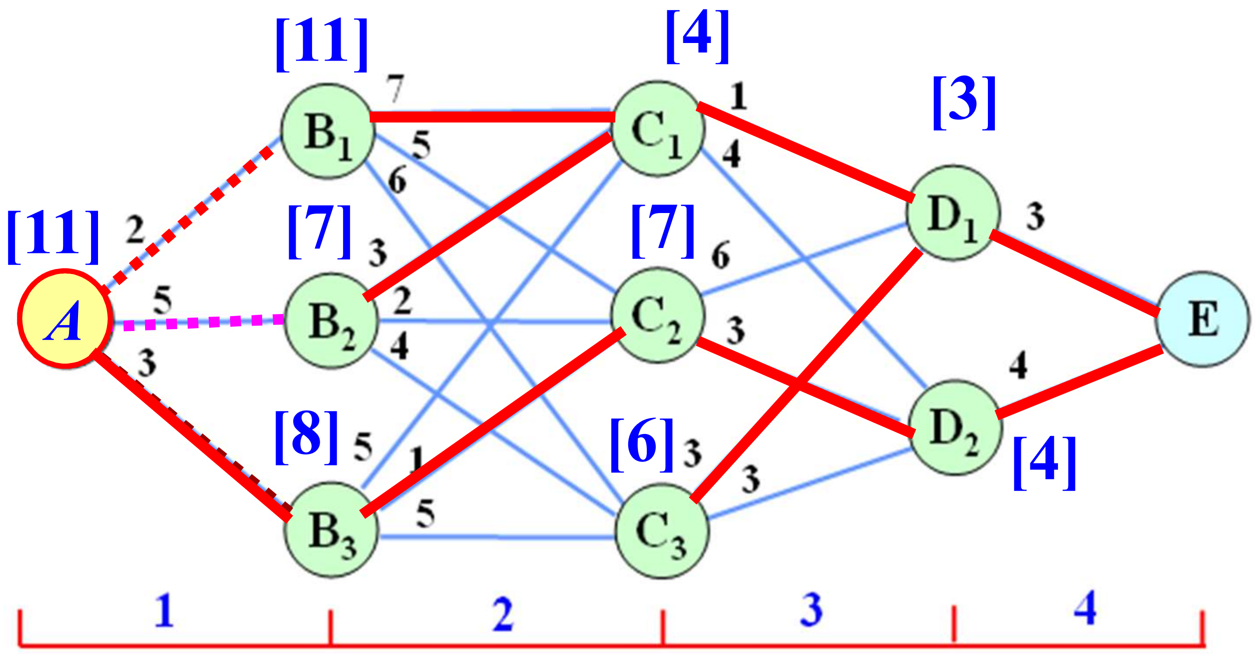
$$f_2(B_3) = \min\{v_2(B_3, C_1)+f_3(C_1),\ v_2(B_3, C_2)+f_3(C_2),\ v_2(B_3, C_3)+f_3(C_3)\} = 8$$

第（5）步 k=1

$$f_k(x_k) = \min_{u_k \in D_k}\{ v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1}) \}$$

□状态变量 x_1 只取一个值：A。

由A到终点E，可分别经过B_1、B_2、B_3到达E点（由B_1、B_2、B_3到E点的最短距离在第三步已计算出），需加以比较，取其中最短的。



□经过B1点

$v_1(A, B_1)+ f_2(B_1)$
$= 2+11=13$

□经过B2点

$v_1(A, B_2)+ f_2(B_2)$
$= 5+7=12$

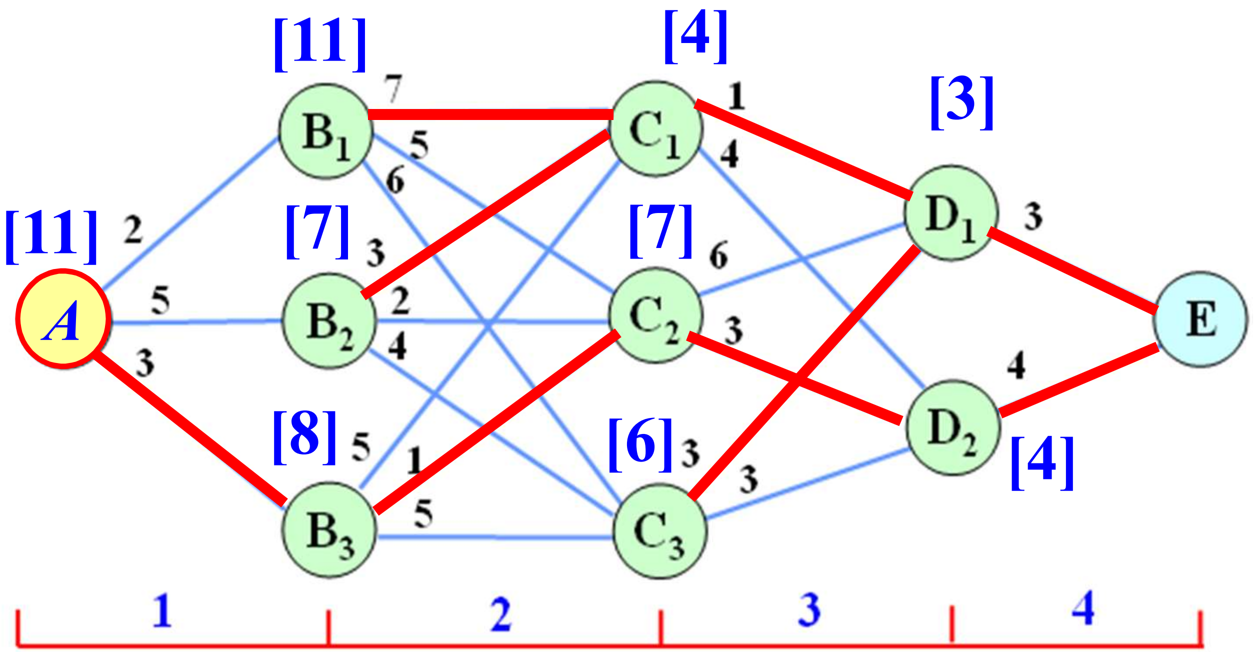
□经过B3点

$v_1(A, B_3)+ f_2(B_3)$
$= 3+8=11$

□则由A到终点E的最短距离

$$f_1(A) = \min\{v_1(A, B_1)+ f_2(B_1),\ v_1(A, B_2)+ f_2(B_2),\ v_1(A, B_3)+ f_2(B_3)\} = 11$$

□从下图反推可得到最优路线。



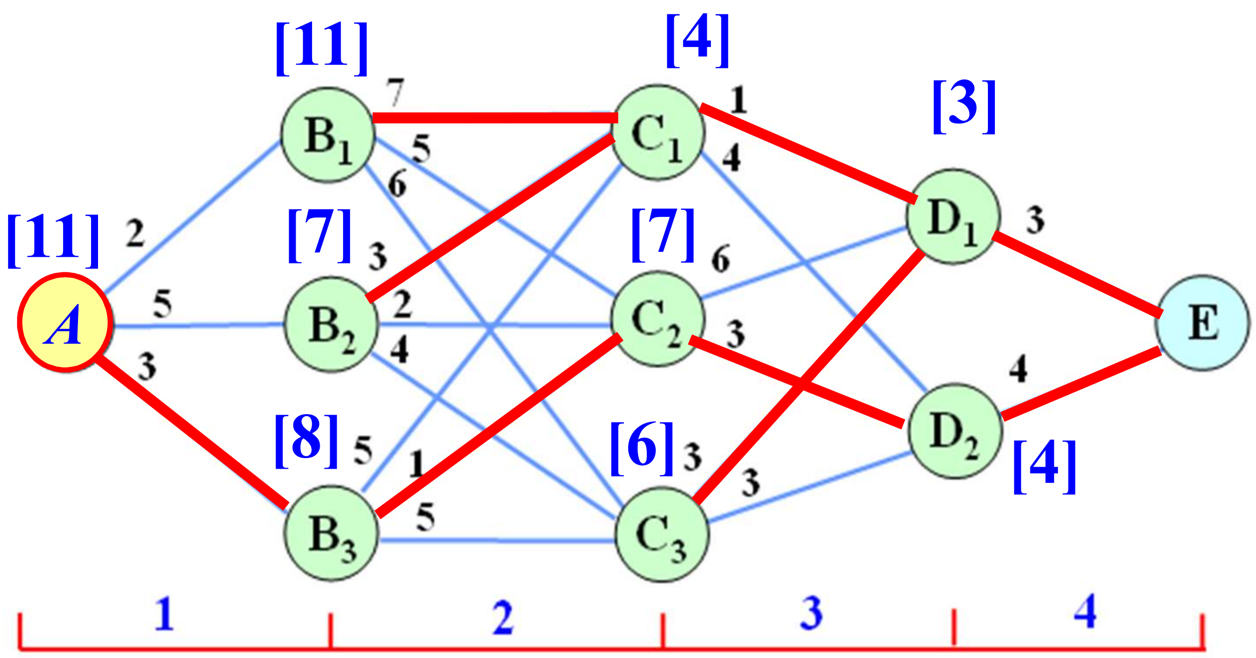
□因此，由*A*到终点*E*的**最优解**为：

A→B3→C2→D2→E

□由点*A*到终点*E*的**最优值**为**11**。

□小结：在求解的各阶段，都利用了第k阶和第k+1段的如下关系：

$$\begin{cases} f_k(x_k) = min\{ v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1}) \} & (1) \\ f_5(x_5 = E) = 0 & (2) \end{cases}$$



□上述递推关系称为动态规划的基本方程。

□其中（2）式称为边界条件。

动态规划方法的优点

1.减少计算量

动态规划方法减少了计算量，而且随着阶段数的增加，计算量将大大减少。

2.丰富了计算结果

在动态规划的解法中，得到的不仅仅是由**A**点出发到**E**点的最短路线及相应距离，而且得到了从所有中间点出发到**E**点的最短路线及相应距离。这对于许多实际问题来说是很有用的，有利于帮助分析所得的结果。

动态规划方法的基本思想

1. 将多阶段决策过程划分阶段，恰当地选择状态变量、决策变量，定义最优指标函数，从而把问题化成一簇同类型的子问题，然后逐个求解。

2. 求解时从边界条件开始，逆过程方向行进，逐段递推寻优，在每一个子问题求解时，都要使用它前面已求出的子问题的最优结果，最后一个子问题的最优解，就是整个问题的最优解。

4 逆序解法和顺序解法

学习目标：

1 了解顺序解法

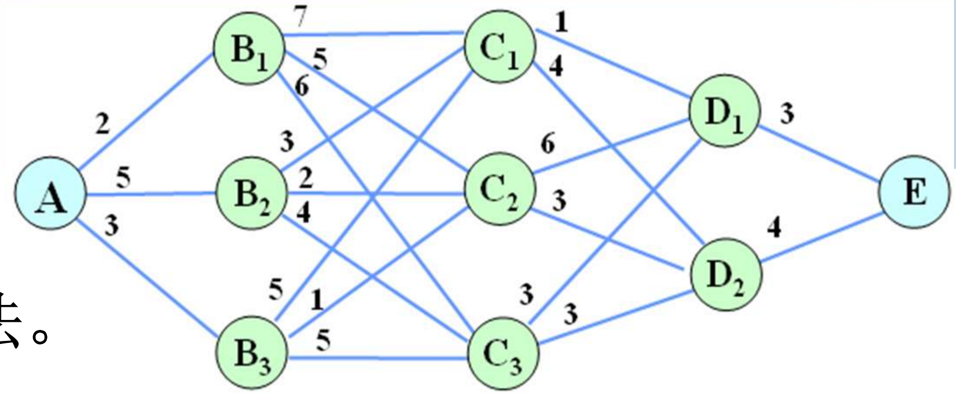
□动态规划的求解有**两种基本方法**

◎逆序解法（后向动态规划方法）

如例1所使用的方法，寻优的方向与多阶段决策过程的实际行进方向相反，从最后一段开始计算逐段前推，求得全过程的最优策略。

◎顺序解法（前向动态规划方法）

与逆序解法相反，顺序解法的寻优的方向与过程的行进方向相同，计算时从第一段开始逐段向后递推，计算后一段要用到前一段的求优结果，最后一段计算的结果就是全过程的最优结果。



□我们再次用例1来说明顺序解法。

□由于此问题的始点A与终点E都是固定的，计算由A点到E点的最短路线与由E点到A点的最短路线没有什么不同。

□若设

$f_k(x_{k+1})$ 表示从起点A到第k阶段末状态点x_{k+1}的最短距离

就可以由前向后逐步求出起点A到各阶段末状态点的最短距离，最后求出起点A到E点的最短距离及路线。

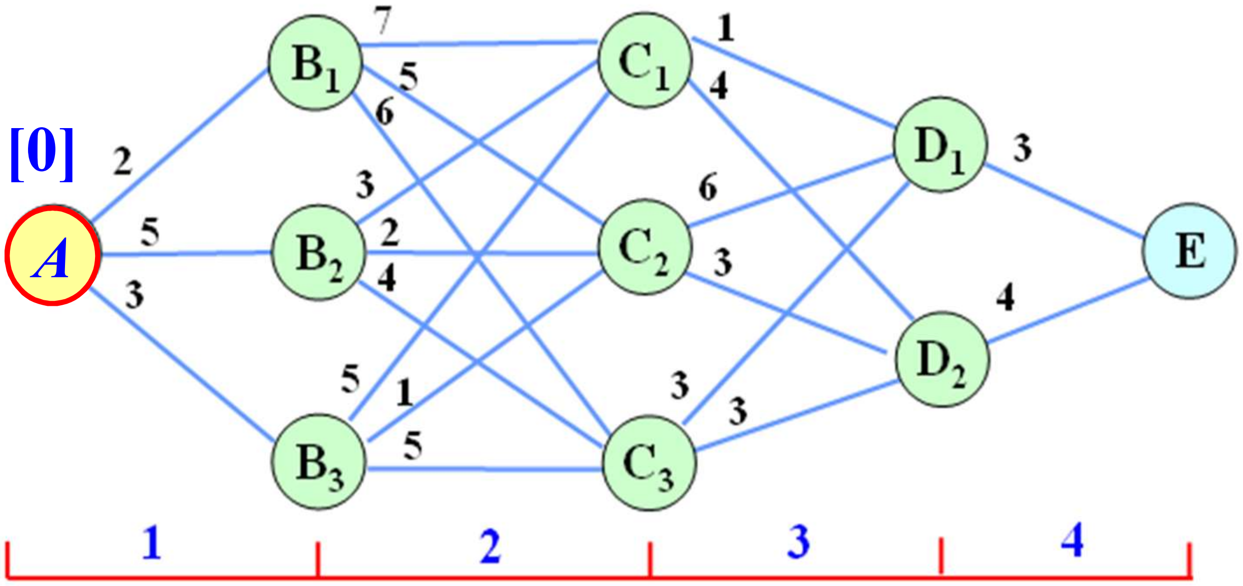
动态规划的目标：最优指标 $f_4(E)$

第一步 k=0

- $f_0(x_1)=f_0(A)=0$

  这是**边界条件**

$f_k(x_{k+1})$ 表示从起点 A 到第 k 阶段末状态点 x_{k+1} 的最短距离



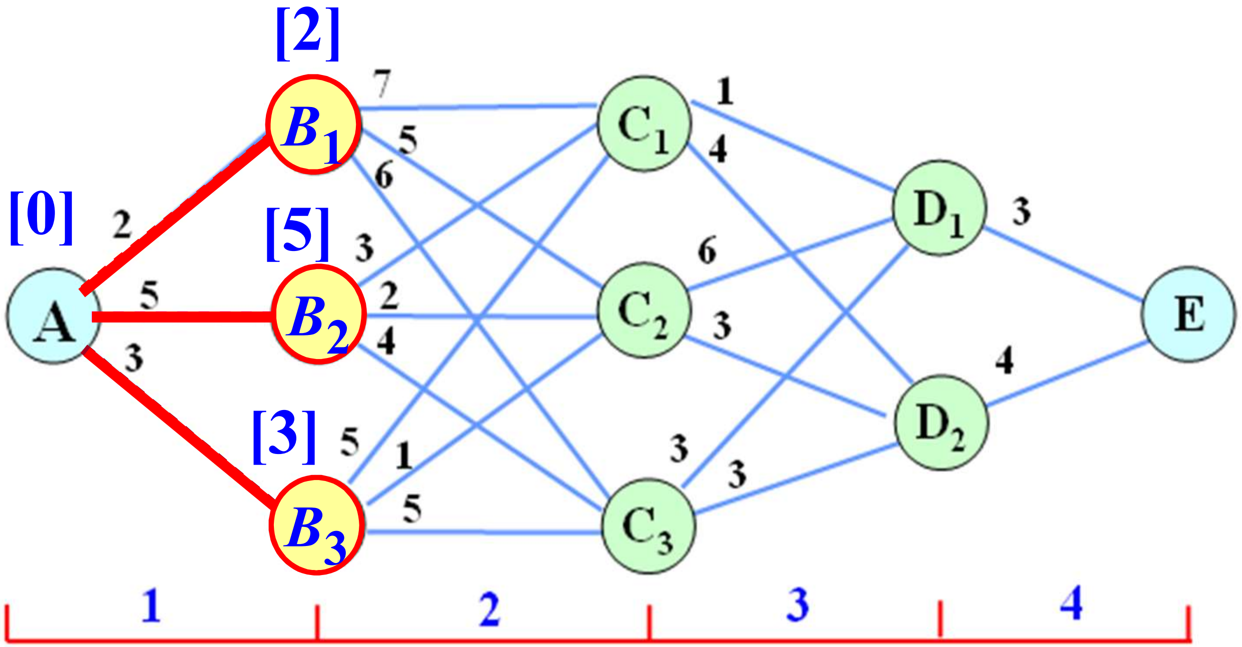
第二步 k=1

□按 $f_1(x_2)$ 的定义有

$$f_1(B_1)=v(B_1,A)+f_0(A)=2$$

$$f_1(B_2)=v(B_2,A)+f_0(A)=5$$

$$f_1(B_3)=v(B_3,A)+f_0(A)=3$$

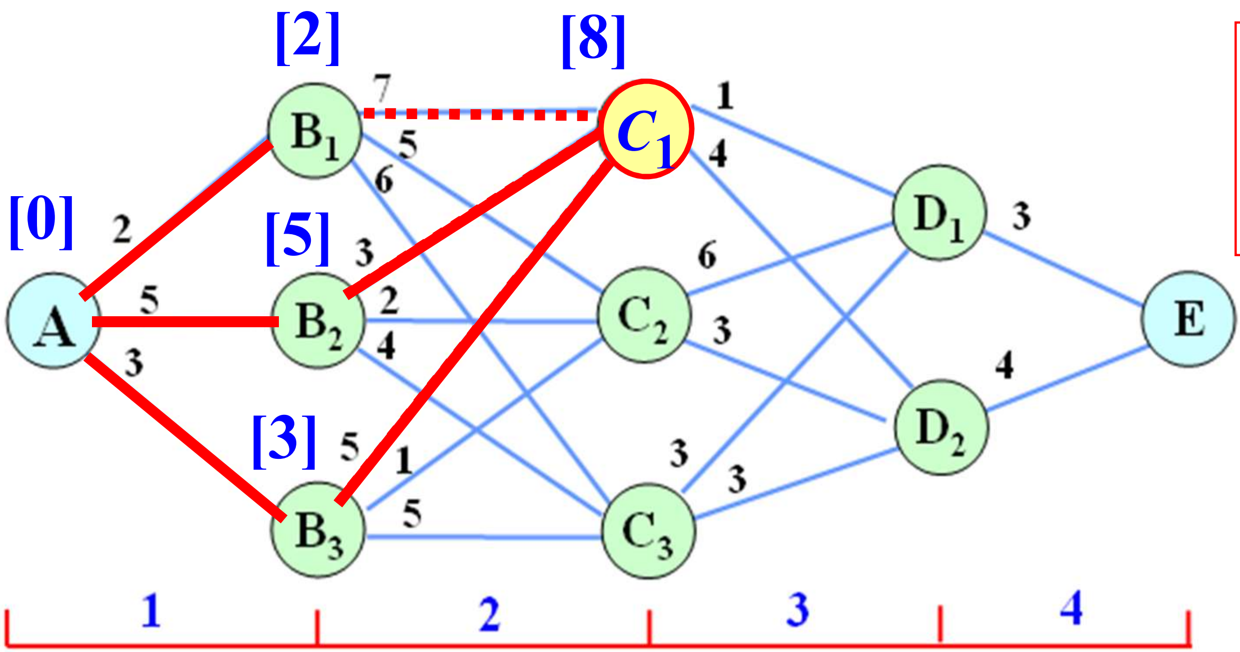


第三步 k=2

□ 按 $f_2(x_3)$ 的定义有

①

$$f_2(C_1) = min \begin{cases} v(C_1, B_1) + f_1(B_1) = 7+2 = 9 \\ v(C_1, B_2) + f_1(B_2) = 3+5 = 8 \\ v(C_1, B_3) + f_1(B_3) = 5+3 = 8 \end{cases}$$



□ 状态转移方程：

$x_k = T_k(x_{k+1}, u_k)$

□ $u_2(C_1) = B_2$

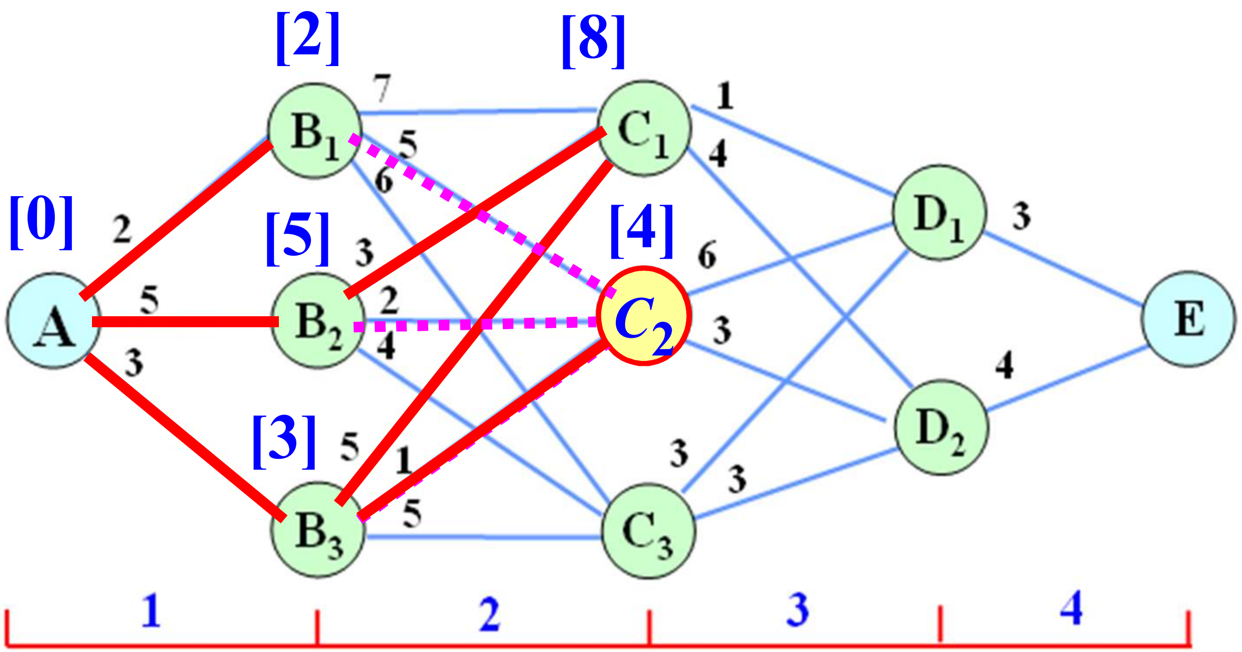
或 B_3

第三步 k=2

□按 $f_2(x_3)$ 的定义有

②

$$f_2(C_2)=min\begin{cases} v(C_2,B_1)+f_1(B_1)=5+2=7 \\ v(C_2,B_2)+f_1(B_2)=2+5=7 \\ v(C_2,B_3)+f_1(B_3)=1+3=4 \end{cases}$$



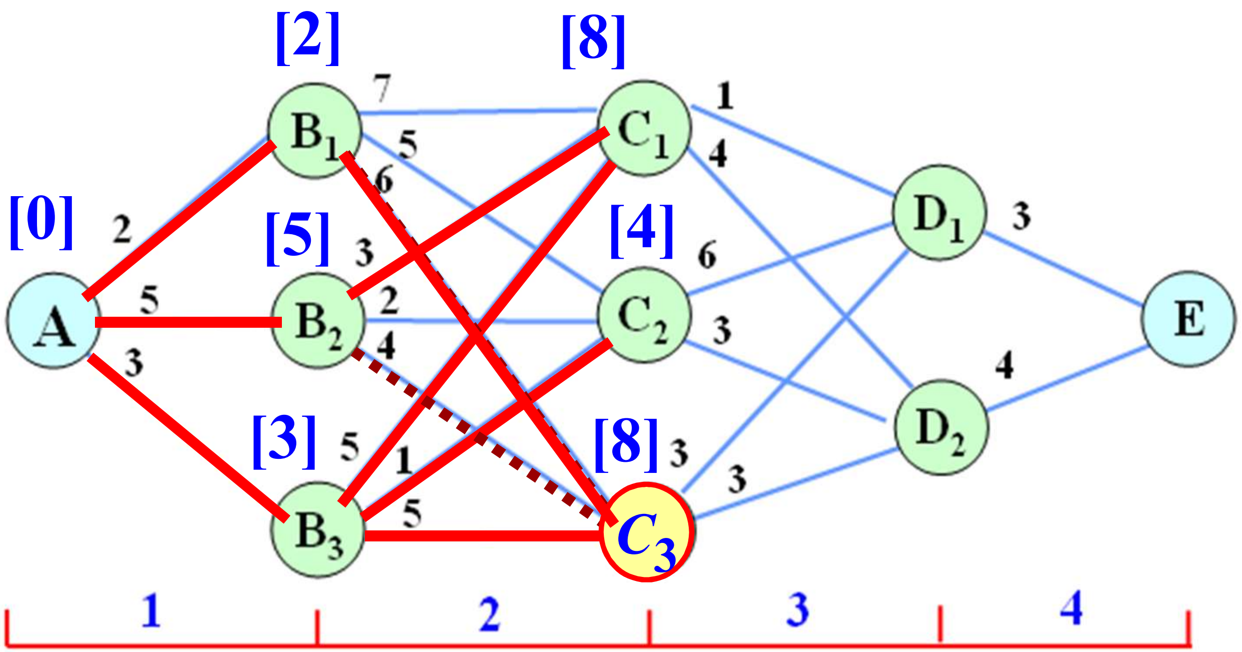
□$u_2(C_2)=B_3$

第三步 k=2

□按 $f_2(x_3)$ 的定义有

③

$$f_2(C_3) = min \begin{cases} v(C_3, B_1) + f_1(B_1) = 6+2 = 8 \\ v(C_3, B_2) + f_1(B_2) = 4+5 = 9 \\ v(C_3, B_3) + f_1(B_3) = 5+3 = 8 \end{cases}$$



□$u_2(C_3) = B_1$

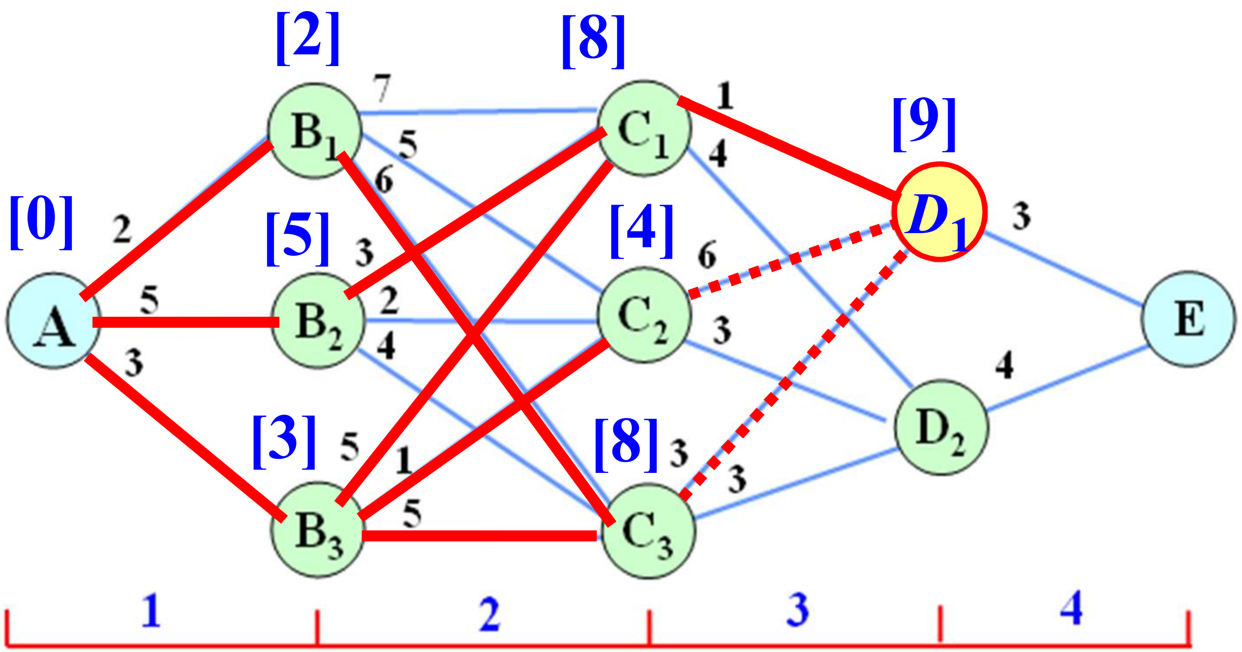
或B_3

第四步 k=3

□按 $f_3(x_4)$ 的定义有

①

$$f_3(D_1) = min\begin{cases} v(D_1, C_1) + f_2(C_1) = 1+8 = 9 \\ v(D_1, C_2) + f_2(C_2) = 6+4 = 10 \\ v(D_1, C_3) + f_2(C_3) = 3+8 = 11 \end{cases}$$



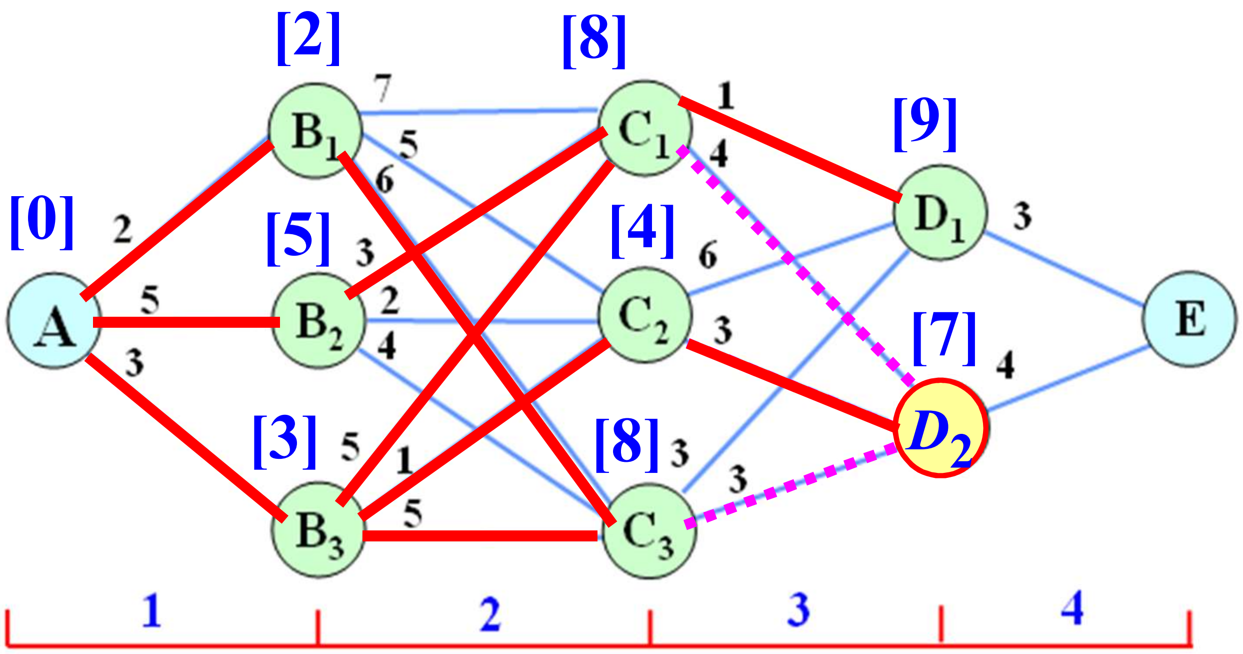
□$u_3(D_1) = C_1$

第四步 $k=3$

□按 $f_3(x_4)$ 的定义有

②

$$f_3(D_2)=min\begin{cases} v(D_2, C_1)+f_2(C_1)=4+8=12 \\ v(D_2, C_2)+f_2(C_2)=3+4=7 \\ v(D_2, C_3)+f_2(C_3)=3+8=11 \end{cases}$$

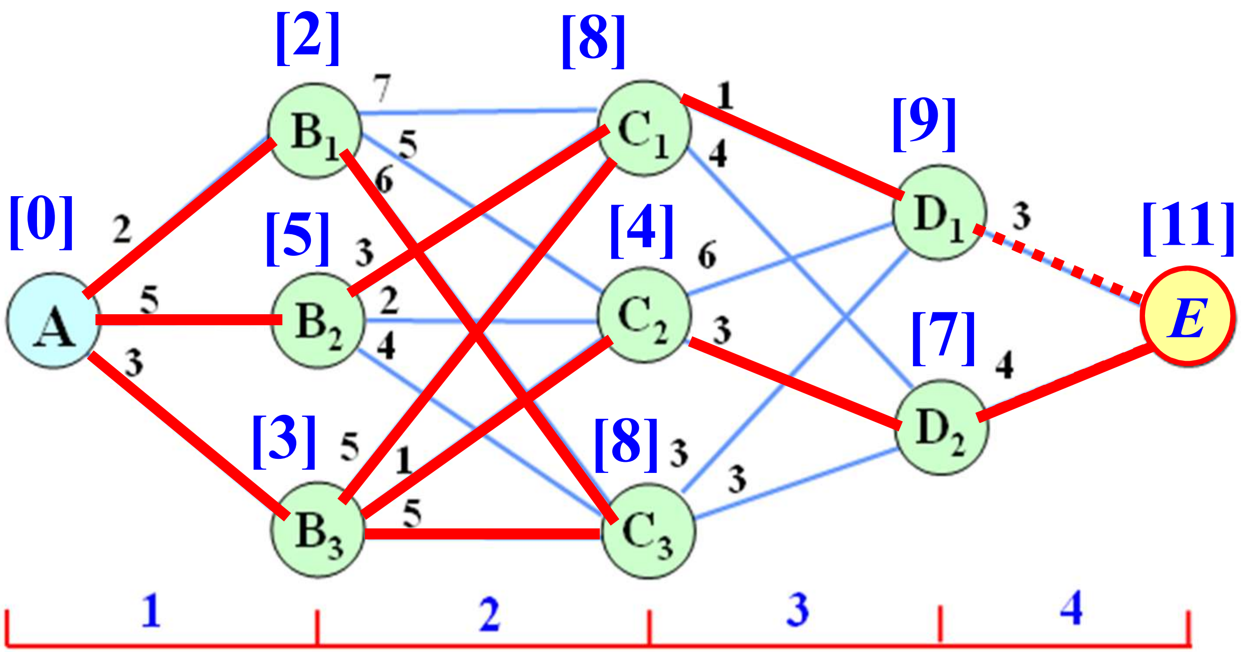


□$u_3(D_2)=C_2$

第五步 k=4

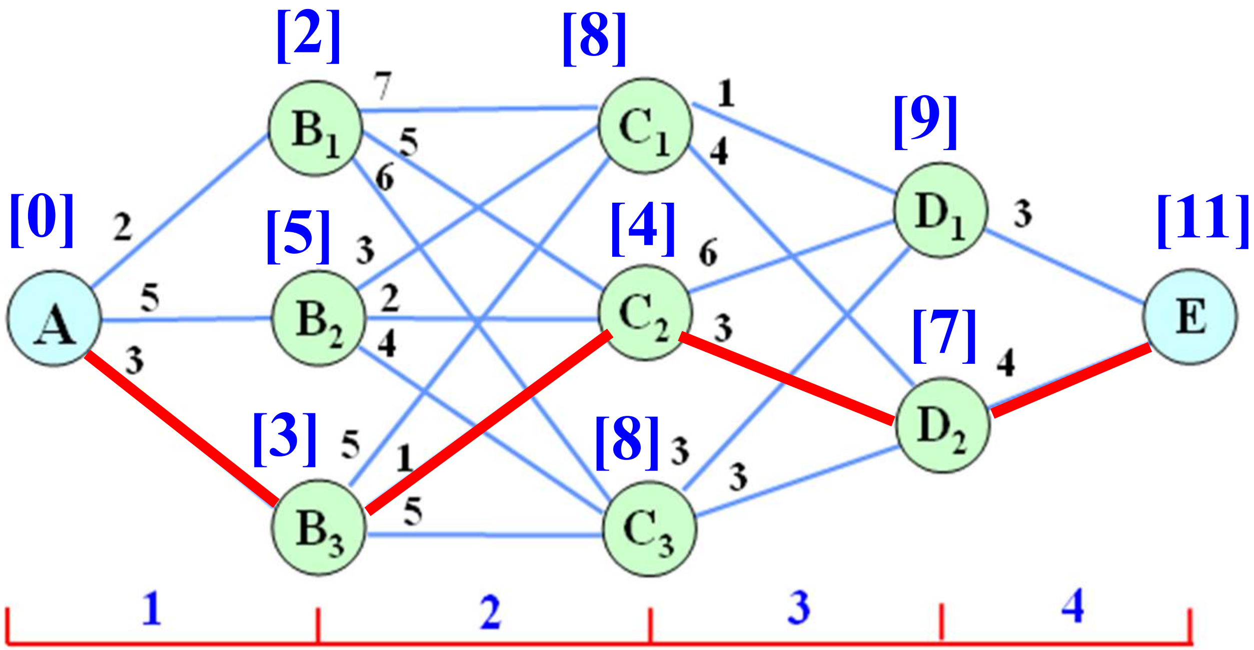
□按 $f_4(x_5)$ 的定义有

$$f_4(E)=\min\begin{cases} v(E,D_1)+f_3(D_1)=3+9=12 \\ v(E,D_2)+f_3(D_2)=4+7=11 \end{cases}$$



□$u_4(E)=D_2$

□即可得到最优路线。



□因此，由*A*到终点*E*的**最优解**为：

A→B3→C2→D2→E

□由点*A*到终点*E*的**最优值**为**11**。

顺序法与逆序法比较

1、逆序法

f表示从第k阶段到第n阶段最优函数值

$$\begin{cases} f_k(x_k) = \min\{ v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1}) \} \\ f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

2、顺序法

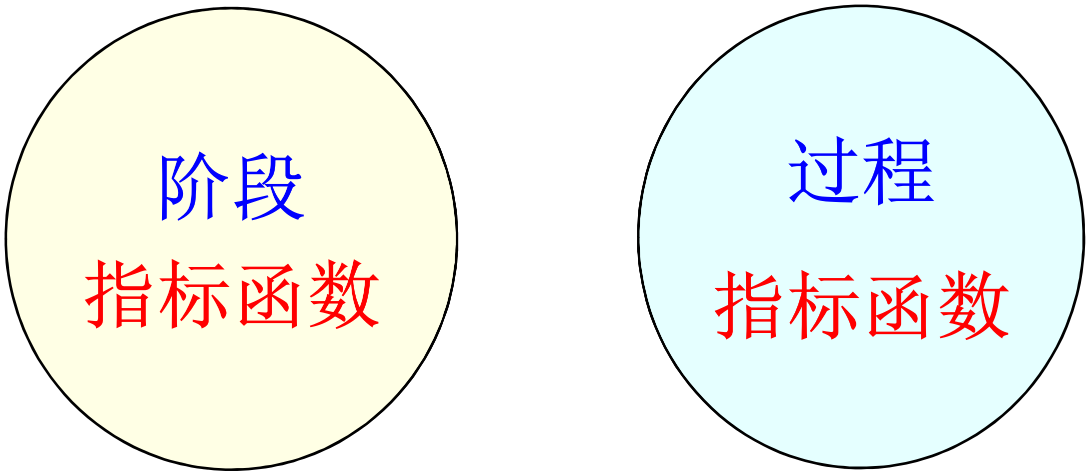
f表示从第0阶段到第k阶段最优函数值

$$\begin{cases} f_k(x_k) = \min\{ v_k(x_k, u_k) + f_{k-1}(x_{k-1}) \} \\ f_0(x_0) = 0 \end{cases}$$

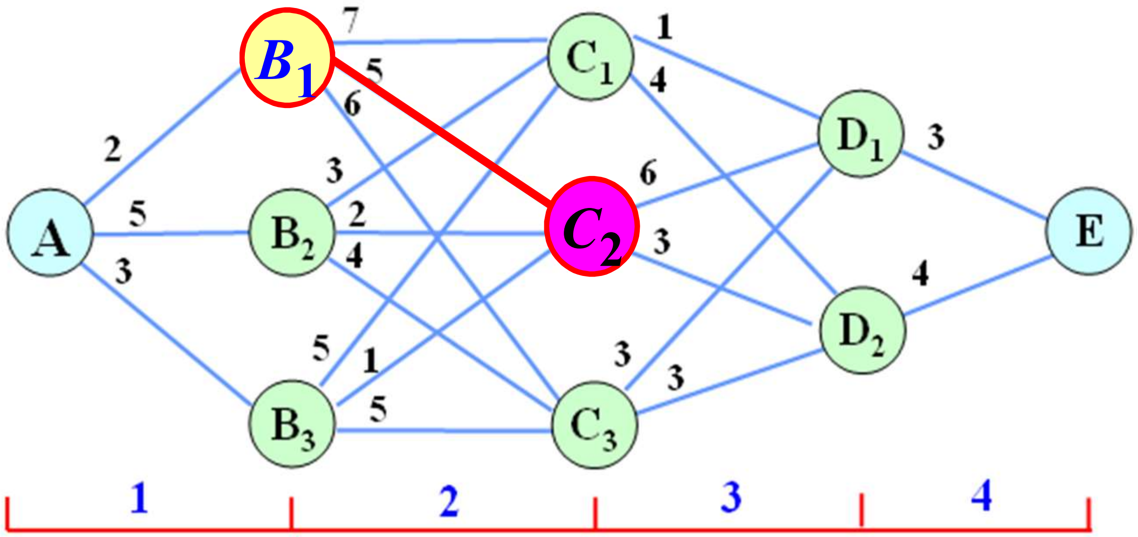
指标函数的进一步讨论

□用来衡量策略或子策略或决策的效果的某种**数量指标**，就称为**指标函数**。

□它是定义在全过程或各子过程或各阶段上的确定数量函数。对不同问题，指标函数可以是诸如费用、成本、产值、利润、产量、耗量、距离、时间、效用，等等。



①**阶段指标函数**：是指第 k 阶段从状态 x_k 出发，采取决策 u_k 时产生的效益，用 $v_k(x_k, u_k)$ 表示。



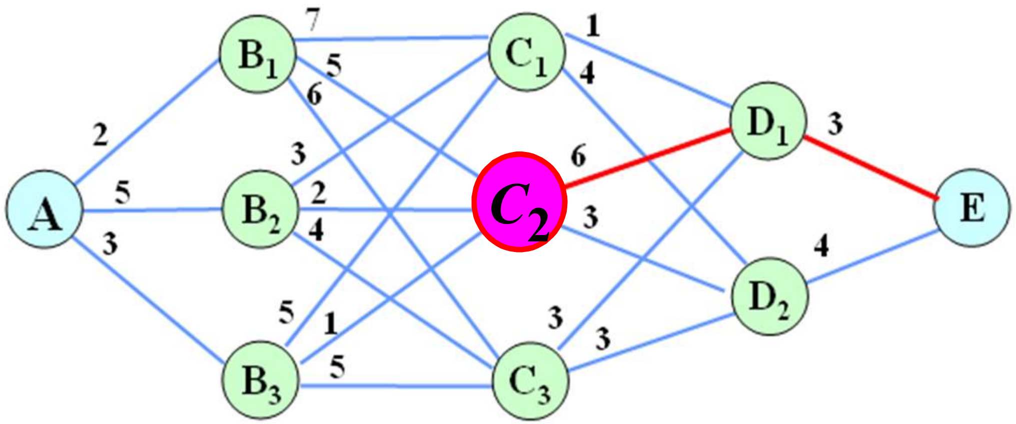
□例1中，指标函数是距离。

□如 $v_2(B_1, C_2)$ 表示由B_1 出发，采用决策到C_2 点的两点间距离，即

$$v_2(B_1, C_2) = 5。$$

②**过程指标函数**：是指从第 k 阶段的某状态 x_k 出发，采取子策略 p_{kn} 时所得到的效益，记作

$$V_{kn}(x_k, u_k, x_{k+1}, u_{k+1}, \dots, x_n)$$



□例1中，如$V_{34}(C_2, u_3(C2)=D_1, D_1, u_4(D_1)=E, E) = 6+3 = 9$

□过程指标函数V_{kn}通常是描述所实现的全过程或k后部子过程效果优劣的数量指标，它是由各阶段的阶段指标函数$v_k(x_k,u_k)$累积形成的。

（1）**可分性：**适于用动态规划求解的问题的过程指标函数（即目标函数），必须具有关于阶段指标的可分离形式，即对于后部子过程的指标函数可以表示为：

$$V_{kn}(x_k, u_k, x_{k+1}, u_{k+1}, \cdots, x_n) = v_k(x_k, u_k) \oplus v_{k+1}(x_{k+1}, u_{k+1}) \oplus \cdots \oplus v_n(x_n, u_n)$$

式中，⊕表示某种运算，可以是加、减、乘、除、开方等。

□多阶段决策问题中，常见的目标函数形式之一是取各阶段效应之和的形式，即：

$$V_{kn}=\sum_{i=k}^{n} v_i\,(x_i, u_i) \qquad \textbf{(8.3a)}$$

□有些问题，如系统可靠性问题，其目标函数是取各阶段效应的连乘积形式，如：

$$V_{kn}=\prod_{i=k}^{n} v_i\,(x_i, u_i) \qquad \textbf{(8.3b)}$$

总之，具体问题的目标函数表达形式需要视具体问题而定。

（2）**可递推：**过程指标函数V_{kn}要满足递推关系，即

$$V_{kn}(x_k, u_k, x_{k+1}, u_{k+1}, \cdots, x_n)$$

$$= v_k(x_k,u_k) \oplus v_{k+1}(x_{k+1}, u_{k+1}) \oplus \cdots \oplus v_n(x_n,u_n)$$

$$= v_k(x_k,u_k) \oplus V_{(k+1)n}(x_{k+1}, u_{k+1}, \cdots, x_n)$$

$$=\Phi_k[x_k, u_k, V_{(k+1)n}(x_{k+1}, u_{k+1}, \cdots, x_n)]$$

可递推

动态规划应用举例

例3　资源分配问题:某公司有五套先进设备,需分配给下属的甲,乙,丙三个工厂,各工厂得此设备后每年为公司上缴的利润如下表,问如何分配可使公司获得最大利润?

	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

解一顺序法:将问题按三个工厂分为三个阶段,即k=1,2,3.

用s_k表示分配给第 0个工厂至第 k个工厂的设备台数 ，

用x_k表示分配给第k个工厂的设备台数,

状态转移律$s_{k+1}=s_k-x_k$为分配给第$k+1$个工厂至第n个工厂的设备台数.

$p_k(x_k)$表示x_k台设给备分配给第k个工厂所得的盈利值.

$f_k(s_k)$表示s_k台设备分配到第0个工厂至第k个工厂所得的最大盈利值.

根据最优化原理得出动态规划基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{x_k \in D_k(s_k), k=1,2,3} \{p_k(x_k) + f_{k-1}(s_k - x_k)\} \\ f_0(s_0) \quad = \quad 0 \end{cases}$$

用s_k表示分配给第 0个工厂至第 k个工厂的设备台数，

用x_k表示分配给第k个工厂的设备台数,

$f_k(s_k)$表示s_k台设备分配到第0个工厂至第k个工厂所得的最大盈利值.

解二逆序法:将问题按三个工厂分为三个阶段,即k=1,2,3.

用s_k表示分配给第 k个工厂至第 n个工厂的设备台数，

用x_k表示分配给第k个工厂的设备台数,

状态转移律$s_{k+1}=s_k-x_k$为分配给第$k+1$个工厂至第n个工厂的设备台数.

$p_k(x_k)$表示x_k台设给备分配给第k个工厂所得的盈利值.

$f_k(s_k)$表示s_k台设备分配到第k个工厂至第n个工厂所得的最大盈利值.

根据最优化原理得出动态规划基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{x_k \in D_k(s_k), k=1,2,3} \left\{ p_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1}) \right\} \\ f_4(s_4) \quad = \quad 0 \end{cases}$$

动态规划的求解方法通常是采取逆序解法,即从第三阶段向前推导.

$k=3$时, $f_3(s_3)=\max\limits_{s_3=0,1,2,3,4,5}\{p_3(x_3)\}$, 其中$s_3$台设备全部分给丙工厂, 决策变量$x_3=0,1,2,3,4,5.$

表1

s_3 \ x_3	$p_3(x_3)$						$f_3(s_3)$	x_3^*
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	0
1		4					4	1
2			6				6	2
3				11			11	3
4					12		12	4
5						12	12	5

$k=2$时，$s_2=0,1,2,3,4,5$台设备分配给乙和丙两个工厂，乙厂的决策为$x_2=0,1,2,3,4,5$.

表2

s_2 \ x_2	$p_2(x_2)+f_3(s_2-x_2)$						$f_2(s_2)$	x_2^*
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	0
1	0+4	5+0					5	1
2	0+6	5+4	10+0				10	2
3	0+11	5+6	10+4	11+0			14	2
4	0+12	5+11	10+6	11+4	11+0		16	1,2
5	0+12	5+12	10+11	11+6	11+4	11+0	21	2

$k=1$时,只有$s_1=5$,即把5台设备分配给甲,乙,丙三个工厂.

表3

$s_1 \backslash x_1$	$p_1(x_1)+f_2(s_1-x_1)$						$f_1(s_1)$	x_1^*
	0	1	2	3	4	5		
5	0+21	3+16	7+14	9+10	12+5	13+0	21	0,2

最优方案一:甲厂0台,乙厂2台,丙厂3台;
最优方案二:甲厂2台,乙厂2台,丙厂1台.
最大盈利值为21万元.

第四节 连续确定型动态规划模型的求解

例3 (p208例5)

本章例2中若$s_0=100$台,$a=\dfrac{2}{3}\times 100\%$,$b=\dfrac{9}{10}\times 100\%$,$g(x)=10x$(万元),$h(x)=7x$(万元),试确定三年内如何分配每年用于$A,B$两项工作的机器数,使三年的总收益最大.

解:阶段变量是以年作为化分单位,k=1,2,3.

状态变量 s_k为k 年初可用于工作的完好机器数.决策变量 x_k为第k年用于完成A项任务的机器数,则 $s_k - x_k$为用于完成B项任务的机器数.状态转移方程是

$$s_{k+1} = ax_k + b(s_k - x_k) = \frac{2}{3}x_k + \frac{9}{10}(s_k - x_k)$$

动态规划 基本方程及边界条件为

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \le x_k \le s_k} \{10x_k + 7(s_k - x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_4(s_4) = 0 \qquad k = 1, 2, 3 \end{cases}$$

当k=3时,

$$f_3(s_3)=\max_{0\le x_3\le s_3}\{10x_3+7(s_3-x_3)\}=\max_{0\le x_3\le s_3}\{3x_3+7s_3\}$$

$$=10s_3. \qquad 其中x_3^*=s_3.$$

注意:$3x_3+7s_3$是一个线性单增函数,x_3是变量且取值范围是$0\le x_3\le s_3$,因此,$3x_3+7s_3$的最大值在区间的右端点取得,即$x_3^*=s_3$.

当k=2时,

$$f_2(s_2) = \max_{0 \le x_2 \le s_2} \{10x_2 + 7(s_2 - x_2) + f_3(s_3)\}$$

$$= \max_{0 \le x_2 \le s_2} \{10x_2 + 7(s_2 - x_2) + 10s_3\}$$

$$= \max_{0 \le x_2 \le s_2} \left\{10x_2 + 7(s_2 - x_2) + 10(\frac{2}{3}x_2 + \frac{9}{10}(s_2 - x_2))\right\}$$

$$= \max_{0 \le x_2 \le s_2} \left\{\frac{2}{3}x_2 + 16s_2\right\} = \frac{50}{3}s_2(x_2^* = s_2).$$

当k=1时,

$$f_1(s_1)=\max_{0\le x_1\le 100}\{10x_1+7(s_1-x_1)+f_2(s_2)\}$$

$$=\max_{0\le x_1\le 100}\left\{10x_1+7(100-x_1)+\frac{50}{3}(\frac{2}{3}x_1+\frac{9}{10}(100-x_1))\right\}$$

$$=\max_{0\le x_1\le 100}\{2200-0.9x_1\}=2200(x_1^*=0).$$

当$x_1^*=0$时，$s_2=\frac{2}{3}x_1^*+\frac{9}{10}(100-x_1^*)=90$，所以$x_2^*=90$，

同理，$s_3=\frac{2}{3}x_2^*+\frac{9}{10}(s_2-x_2^*)=\frac{2}{3}\times 90=60$，所以$x_3^*=60$.

三年总收益为2200万元.

例4 某投资者有40万元的固定资本,他可以在三种不同的投资机会中投资(股票,银行,土地)投资额为x,y,z.假定他做过预测,知道每项投资可获得的效益分别为 $g(x)=x, h(y)=y^2, k(z)=z.$

问如何分配投资额,才能获得最大效益.

解:依题意,列出数学模型

$$\max S = x_1 + x_2^2 + x_3 \qquad x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

设 $u_k = x_k, k = 1,2,3$ 为决策变量,阶段变量为**k,k=1,2,3.**

S_k 为状态变量,即投放到第**k**个项目上的资金数.状态转移律为 $S_{k+1} = S_k - x_k$ 效益函数为 $g_k(x_k)$

.动态规划基本方程为

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \le x_k \le s_k} \{g_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_4(s_4) = 0 \end{cases}, k = 1,2,3$$

K=3, $f_3(s_3)=\max\limits_{0\le x_3\le s_3} x_3$

这是单增的线性函数,它在区间右端点取得最大值,显然

$x_3^*=s_3$ 时,上式有最大值 $f_3(s_3)=s_3$

K=2, $f_2(s_2)=\max\limits_{0\le x_2\le s_2}\{x_2^2+s_3\}=\max\limits_{0\le x_2\le s_2}\{x_2^2+s_2-x_2\}$

设 $h=x_2^2+s_2-x_2$,求其极大值,

$$\frac{dh}{dx_2}=2x_2-1=0, x_2=\frac{1}{2}, \frac{d^2h}{dx_2^2}=2>0, x_2=\frac{1}{2}$$

为极小值点,则

$f_2(s_2)$在$[0,s_2]$的端点取得最大值 , $x_2=0$时,

$f_2(0)=s_2, x_2=s_2$时, $f_2(s_2)=s_2^2$.

令$s_2=s_2^2, s_2=1$.当$s_2>1$时, $f_2(0)<f_2(s_2), x_2^*=s_2$,

当$s_2<1$时, $f_2(0)>f_2(s_2), x_2^*=0$.

当k=1时,若

$$f_2(s_2)=s_2,\text{则}f_1(s_1)=\max_{0\le x_1\le s_1}\{x_1+f_2(s_2)\}=\max_{0\le x_1\le s_1}\{x_1+s_2\}$$

$$=\max_{0\le x_1\le s_1}\{x_1+s_1-x_1\}=\max_{0\le x_1\le s_1}\{s_1\}$$

为一常数,不存在极值,舍去.若

$$f_2(s_2)=s_2^2\text{时},f_1(40)=\max_{0\le x_1\le 40}\{x_1+f_2(s_2)\}=\max_{0\le x_1\le 40}\{x_1+(s_1-x_1)^2\}$$

设 $Q=x_1+(s_1-x_1)^2,\dfrac{dQ}{dx_1}=1-2(s_1-x_1),$

令 $\dfrac{dQ}{dx_1}=0,x_1=s_1-\dfrac{1}{2},\dfrac{d^2Q}{dx_1^2}=2>0,$

$x_1=s_1-\dfrac{1}{2}$为极小值点比较区间$[0,40]$的两个端点,

$x_1=0,f_1(40)=1600,$

$$x_1 = 40, f_1(40) = 40.$$

所以$x_1^* = 0$,综上,$x_1^* = 0, x_2^* = s_2 = s_1 - x_1^* = s_1 = 40$

$x_3^* = s_3 = s_2 - x_2^* = s_1 - x_1^* - x_2^* = 40 - 0 - 40 = 0,$

为最优决策,最大效益 **1600.**

背包问题

背包问题的提法:一个徒步旅行者,有**n**种物品供他选择后装入背包中,这**n**种物品的编号为1, 2, , …, n. **已知第**j**种物品的重量为** a_j **公斤**, **这一物品对他的使用价值为** c_j, **又知该旅行者所能承受的总重量不超过**a**公斤**, **问该旅行者如何选择这**n**种物品的件数**, **使得对他来说**, **使用价值最大**.

建模:

设旅行者选择第j种物品的件数为$x_j, j=1,2,\cdots,n$

其整数规划模型为:

$$\max S=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le a \\ x_j \ge 0, \text{为整数}, j=1,n \end{cases}$$

动态规划解法:

令$f_k(y)$表示总重量不超过y时,背包中只装前k种物品的最大使用价值.k为阶段数,y为状态变量,即背包内可装进物品的总重量为y公斤的那种状态.

设装入第k种物品的件数为x_k件,显然

$0 \le a_k x_k \le y, x_k$为整数

于是装前$k-1$种物品的重量不超过$y-a_k x_k$,在处于$y-a_k x_k$的状态下,只装前$k-1$种物品的最大使用价值为

$f_{k-1}(y-a_k x_k)$

使用的总价值为$c_k x_k + f_{k-1}(y - a_k x_k)$,动态规划基本方程为

$$f_k(y) = \max\{c_k x_k + f_{k-1}(y - a_k x_k)\}$$

$$0 \le x_k \le \frac{y}{a_k}, x_k \in I$$

$$2 \le k \le n$$

当$k = 1$时, $f_1(y) = c_1\left[\frac{y}{a_1}\right]$,其中$\left[\frac{y}{a_1}\right]$为不超过$\frac{y}{a_1}$的整数.

也就是x_1的取值.

例5 设有背包问题

物品	1	2	3
重量	3	2	5
价值	8	5	12

背包的最大限制重量a=5,问三种物品各装几件使总价值最大?

解:建模:设三种物品各装x_1, x_2, x_3件.

$$\max(8x_1 + 5x_2 + 12x_3)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 5 \\ x_j \geq 0, x_j \in I, j = 1,2,3 \end{cases}$$

$k = 3,$

$$f_3(5) = \max\{12x_3 + f_2(5 - 5x_3)\}$$

$$0 \le x_3 \le \frac{5}{a_3}, x_3 \in I$$

$$= \max\{12x_3 + f_2(5 - 5x_3)\}$$

$$0 \le x_3 \le \frac{5}{5}, x_3 \in I$$

$$= \max\{12x_3 + f_2(5 - 5x_3\}$$

$$x_3 = 0{,}1$$

$$= \max\{0 + f_2(5), 12 + f_2(0)\}$$

$k=2$, 分别求 $f_2(5), f_2(0)$,

$$f_2(5) = \max_{0 \le x_2 \le \frac{5}{a_2}, x_2 \in I} \{5x_2 + f_1(5-2x_2)\}$$

$$= \max_{0 \le x_2 \le \frac{5}{2}, x_2 \in I} \{5x_2 + f_1(5-2x_2)\}$$

$$= \max_{x_2 = 0,1,2} \{5x_2 + f_1(5-2x_2)\}$$

$$= \max\{0 + f_1(5), 5 + f_1(3), 10 + f_1(1)\}$$

$$f_2(0) = \max\{5x_2 + f_1(0 - 2x_2)\}$$

$$0 \le x_2 \le \frac{0}{a_2}, x_2 \in I$$

$$= \max\{5x_2 + f_1(0 - 2x_2)\}$$

$$x_2 = 0$$

$$= \max\{0 + f_1(0)\} = f_1(0)$$

$k=1$, 分别计算$f_1(5), f_1(3), f_1(1), f_1(0)$.

由公式$f_1(y)=c_1\left[\dfrac{y}{a_1}\right]$,

$$f_1(5)=c_1\left[\frac{5}{a_1}\right]=8\times\left[\frac{5}{3}\right]=8\times1=8$$

$$f_1(3)=c_1\left[\frac{3}{a_1}\right]=8\times\left[\frac{3}{3}\right]=8\times1=8$$

$$f_1(1)=8\times\left[\frac{1}{3}\right]=8\times0=0,\ f_1(0)=0$$

因此$f_2(5)=\max\{0+f_1(5), 5+f_1(3), 10+f_1(1)\}$

$$=\max\{0+8, 5+8, 10+0\}=13$$

于是$x_1=1, x_2=1$

$f_2(0) = f_1(0) = 0$,因此$x_1 = 0, x_2 = 0$.最后,

$$f_3(5) = \max\{0 + f_2(5), 12 + f_2(0)\}$$
$$= \max\{0 + 13, 12 + 0\}$$
$$= 13,$$ 此时$x_3 = 0$.

最优解为$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$,即第一件,第二件物品各装一件,不装第三件物品.

最优值为13.

例6 用动态规划求解非线性规划

$$\max z = 12x_1 + 3x_1^2 - 2x_1^3 + 12x_2 - x_2^3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解:把确定 x_1, x_2的值看作两个阶段的决策**,**即**k=1,2.**状态变量为**k**阶段初约束条件右边项的剩余值**,**分别用 R_1, R_2表示**,**于是

$$R_1 = 3, R_2 = 3 - x_1, R_3 = R_2 - x_2.$$

动态规划的递推方程为

$$f_1(R_1) = \max_{0 \le x_1 \le R_1} \left\{12x_1 + 3x_1^2 - 2x_1^3 + f_2(R_2)\right\}$$

$$f_2(R_2) = \max_{0 \le x_2 \le R_2} \left\{12x_2 - x_2^3 + f_3(R_3)\right\}$$

$$f_3(R_3) = 0$$

当k=2时， $f_2(R_2) = \max_{0 \le x_2 \le R_2} \left\{12x_2 - x_2^3\right\}$

令 $\dfrac{d\{\bullet\}}{dx_2} = 12 - 3x_2^2 = 0$，有 $x_2 = \begin{cases} 2, \text{当} R_2 \ge 2, \text{即} x_1 \le 1 \\ R_2, \text{当} R_2 = 2, \text{即} 1 \le x_1 \le 3 \end{cases}$

因$\dfrac{d^2\{\bullet\}}{dx_2^2}=-6x_2<0$,故$x_2$取取上述值时,$f_2(R_2)$达到最大.

$$\max f_2(R_2)=\begin{cases}24-8=16\\12R_2-R_2^3\end{cases}$$

当$x_2=2$时,$f_1(R_1)'=\max\limits_{0\le x_1\le 1}\left\{12x_1+3x_1^2-2x_1^3+16\right\}*$

当$x_2=R_2$时,$f_1(R_1)''=\max\limits_{1\le x_1\le 3}\left\{12x_1+3x_1^2-2x_1^3+12R_2-R_2^3\right\}**$

当$k=1$时,将$R_2=3-x_1$,代入上式有

$$f_1(R_1)=\max\begin{cases}12x_1+3x_1^2-2x_1^3+16 & 0\le x_1\le 1\\-x_1^3-6x_1^2+27x_1+9 & 1\le x_1\le 3\end{cases}$$

由*式得$x_1=1, f_1(R_1)'=29$.由**式求极值有

$$\frac{d\left\{-x_1^3-6x_1^2+27x_1+9\right\}}{dx_1}=-3(x_1^2+4x_1-9)=0$$

$x_1=-2+\sqrt{13}$,又在驻点处二阶导数为

$$\frac{d^2\left\{-x_1^3-6x_1^2+27x_1+9\right\}}{dx_1^2}=-3(2x_1+4)<0$$

故当$x_1=-2+\sqrt{13}$时,$f_1(R_1)''=32.745$,所以

$f_1(R_1)=\max\left\{29,32.745\right\}=32.745$,此时$x_1^*=1.606$,

$x_2^*=1.394$.

例**7** 某工业部门根据国家计划的安排，拟将某种高效率的设备五台，分配给所属的甲、乙、丙三个工厂，各工厂若获得这种设备之后，可以为国家提供的盈利如表所示。

设备台数 \ 盈利/万元 \ 工厂	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

例8 某工厂要对一种产品制订今后四个时期的生产计划，据估计在今后四个时期内，市场对于该产品的需求量如表所示。

时期(k)	1	2	3	4
需求量(d_k)	2	3	2	4

假定该厂生产每批产品的固定成本为**3**千元，若不生产就为**0**；每单位产品成本为**1**千元；每个时期生产能力所允许的最大生产批量为不超过**6**个单位；每个时期末未售出的产品，每单位需付存储费**0.5**千元。还假定在第一个时期的初始库存量为**0**，第四个时期之末的库存量也为**0**。试问该厂应如何安排各个时期的生产与库存，才能在满足市场需要的条件下，使总成本最小。