《微分几何》课程电子课件

教师：杨勤民

Tel: (021)64253147

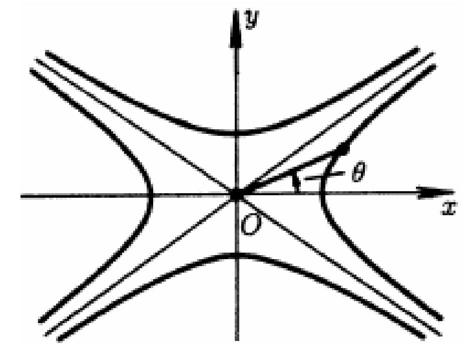
Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程QQ群号：1045698545

四、曲面的渐近方向和共轭方向

1. 渐近方向

当点P是曲面的双曲点时，它的Dupin指标线是一对共轭双曲线，这对双曲线有一对渐近线，把沿着这些渐近线的切方向称为**曲面在P点的渐近方向**.

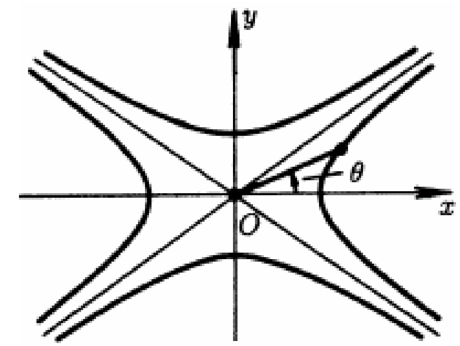


回忆:

直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时的斜渐近线的充要条件是 $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ 且 $b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx]$.

由Dupin指标线方程 $L_p x^2 + 2M_p xy + N_p y^2 = \pm 1$ 得

$$L_p + 2M_p \frac{y}{x} + N_p \frac{y^2}{x^2} = \frac{\pm 1}{x^2}$$



令 $x \to \infty$ 得 $L_p + 2M_p k + N_p k^2 = 0,$

将渐近线的斜率 $k = (\mathrm{d}v:\mathrm{d}u)$ 代入得到

渐近方向(d*u*:dv)的方程

$$L_P \mathrm{d}u^2 + 2M_P \mathrm{d}u\mathrm{d}v + N_P \mathrm{d}v^2 = 0$$

或写为: $\mathrm{II}_P = 0$, 或写为: $k_n\big|_P = 0.$

即渐近方向就是法曲率为零的切方向.

2. 渐近曲线

每一点的曲线切方向都是曲面渐近方向的曲面曲线.

渐近曲线的微分方程

$$L(u,v)\mathrm{d}u^2+2M(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N(u,v)\mathrm{d}v^2=0$$

P61 命题1

如果曲面上有直线, 则它一定是曲面的渐近曲线.

证 直线的曲率$k=0$.

曲面在直线上每点沿该直线方向的法曲率$k_n=k\cos\theta=0$.

即$L(u,v)\mathrm{d}u^2+2M(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N(u,v)\mathrm{d}v^2=0$.

因此曲面上的直线一定是该曲面的渐近曲线.

P61 命题2 曲面在渐近曲线上一点处的切平面一定是渐近曲线的密切平面.

证 沿渐近曲线有 $k_n = 0$,

即 $k\cos\theta = 0$, 因此有 $k = 0$ 或 $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(1)当 $k = 0$ 时, 该渐近曲线为曲面上的一条直线,

该直线在曲面过直线上的点的切平面上,

而直线所在的任何平面均可作为其密切平面,

因此这个切平面为渐近曲线的密切平面.

(2)当 $k \neq 0$ 时, $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{\beta} \perp \vec{n}$

$\vec{\alpha}$ 为切向量 $\Rightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{n}$

$\Rightarrow \vec{\gamma} \mathbin{//} \vec{n}$

$\vec{n}$ 为切平面的法向量, $\vec{\gamma}$ 为密切平面的法向量

$\Rightarrow$ 重合

3. 渐近网

如果曲面上的点都是双曲点,则每个点处都有两个不相切的渐近方向,在曲面上会有两族渐近曲线,称这两族曲线为**曲面上的渐近网**.

此时渐近曲线的微分方程就是**渐近网的微分方程**.

$$L(u,v)\mathrm{d}u^2+2M(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N(u,v)\mathrm{d}v^2=0.$$

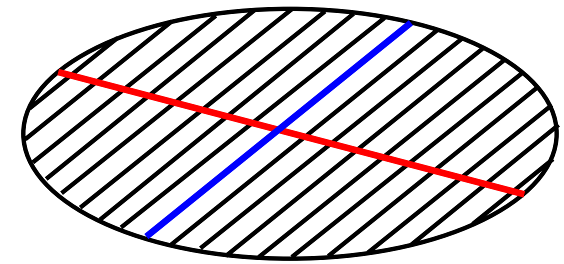
P61 命题3

曲纹坐标网为渐近网的充要条件是$L\equiv N\equiv 0$.

(注:曲纹坐标网的微分方程为$\mathrm{d}u\mathrm{d}v=0$)

4. 共轭方向

直径　一族平行弦的中点的轨迹.



直径AB的共轭直径

平行于AB的弦的中点的轨迹.

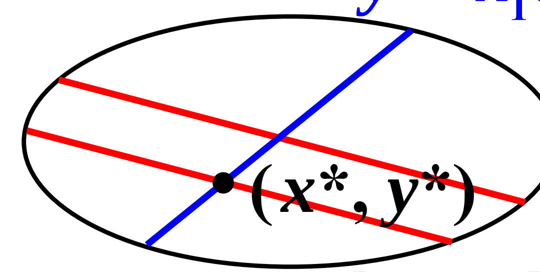
设曲面上点P处的某两个切方向所在的某直线段是P点处Dupin指标线的共轭直径, 则称这两个切方向互相共轭, 并称这两个方向为曲面的一对共轭方向.

共轭方向的等价定义

曲面上点P处的两个切方向$(\mathrm{d})=\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$和$(\delta)=\delta u:\delta v$为曲面的共轭方向当且仅当

$$L_P\mathrm{d}u\delta u+M_P(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+N_P\mathrm{d}v\delta v=0.$$

证 设$L_Px^2+2M_Pxy+N_Py^2=\pm1$的两共轭直径所在直线为$y=k_1x$和$y=k_2x$.



令$L_Px^2+2M_Px(k_2x+b)+N_P(k_2x+b)^2=\pm1$,

即$(L_P+2M_Pk_2+N_Pk_2^2)x^2+2b(M_P+N_Pk_2)x+N_Pb^2\mp1=0.$

则
$$x^*=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b(M_p+N_pk_2)}{L_p+2M_pk_2+N_pk_2^2},$$

由$y^*=k_1x^*$和$y^*=k_2x^*+b$得$k_1x^*=k_2x^*+b$，即

$$-\frac{b_1k_1(M_P+N_Pk_2)}{L_P+2M_Pk_2+N_Pk_2^2}=-\frac{b_1k_2(M_P+N_Pk_2)}{L_P+2M_Pk_2+N_Pk_2^2}+b$$

化简得$L_P+M_P(k_1+k_2)+N_Pk_1k_2=0.$

将$k_1=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}, k_2=\dfrac{\delta v}{\delta u}$代入得

$$L_P\mathrm{d}u\delta u+M_P(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+N_P\mathrm{d}v\delta v=0.$$

其他等价定义

共轭 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{d}\vec{n}\cdot\delta\vec{r}=0$ $\Leftrightarrow$ $\delta\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0$

证 $-\mathrm{d}\vec{n}\cdot\delta\vec{r}=-(\vec{n}_u\mathrm{d}u+\vec{n}_v\mathrm{d}v)\cdot(\vec{r}_u\delta u+\vec{r}_v\delta v)=\cdots$

渐近方向为自共轭方向.

5. 共轭网

如果曲面上的两族曲线使得过曲面上的每一点,

此两族曲线的两条曲线的切方向都是共轭方向,

则称这两族曲线为**曲面的共轭网**.

共轭网的微分方程(已知一族曲线, 求它的共轭曲线族)

$$L(u,v)\mathrm{d}u\delta u + M(u,v)(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + N(u,v)\mathrm{d}v\delta v = 0.$$

P62 命题4

曲纹坐标网为共轭网的充要条件是 $M(u,v)\equiv 0.$

(注 : 曲纹坐标网中的两族曲线为 $\mathrm{d}u = 0$ 和 $\delta v = 0$)

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.15 证明在曲面 $z = f(x) + g(y)$ 上, 曲线族 $x =$ 常数和曲线族 $y =$ 常数构成共轭网.

2.16 求曲面 $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ 上的渐近曲线.