第三章 泊松过程

3.1 泊松过程的定义和例子

3.2 泊松过程的基本性质

3.3 非齐次泊松过程

3.4 复合泊松过程

- 累计随机事件发生次数的最基本的独立增量过程；
- 由法国著名数学家泊松证明；
- 1943年帕尔姆在电话业务问题的研究中运用了泊松过程，辛钦于50年代在服务系统的研究中进一步发展；
- 是具有连续时间参数和离散状态空间的一类随机过程；
- 在金融和保险领域中广泛应用，如证券价格波动。

3.1、泊松过程的定义和例子

一．计数过程

定义 1: 称随机过程$\{N(t), t \geq 0\}$为计数过程, 若$N(t)$表示到时刻t为止已发生的事件 A 的总数，且$N(t)$满足下列条件:

（1）$N(t) \geq 0$;

（2）$N(t)$取正整数值;

（3）若$s < t$时，$N(t) - N(s)$等于区间$(s,t]$中发生的事件 A 的次数.

（累计随机事件发生次数的过程）

特别：（1）若 $t_1 < t_2 \le t_3 < t_4 \in T$， $N(t_2) - N(t_1)$，与 $N(t_4) - N(t_3)$ 相互独立，则此时 $\{N(t), t \ge 0\}$ 是独立增量过程。

（2）若在 $(t, t + \Delta t](\Delta t > 0)$ 内 $N(t + \Delta t) - N(t)$ 仅与 Δt 有关，则 $\{N(t), t \ge 0\}$ 是平稳增量过程。

二．泊松过程的第一种定义

定义 2： 称计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$为具有参数$\lambda>0$的泊松过程，若它满足下列条件：

（1）$N(0)=0$；

（2）$N(t)$是独立增量过程；

（3）在任一长度为t的区间中，事件A发生的次数服从参数λt的泊松分布，即对任意的$t\geq 0$，有

$$P\{N(s+t)-N(s)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},n=0,1,2,\cdots$$

注意：

1) 泊松过程是**平稳独立增量**过程，$\mathbf{E}[N(t)] = \lambda t$， λ 为单位时间内事件 **A** 发生的次数，称为此过程的强度;

2) 条件（3）的验证较困难.

问题：

泊松过程是**平稳**过程吗？

三．泊松过程的第二种定义

定义 3: 称计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$为具有参数$\lambda>0$的泊松过程，若它满足下列条件：

（1） $N(0)=0$；

（2） $N(t)$是独立、平稳增量过程；

（3） $N(t)$满足下列两式：

$$P\{N(t+h)-N(t)=1\}=\lambda h+o(h)$$

$$P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\}=o(h)$$

零初值性,独立增量性,齐次性,普通性

直观含义

- 在有限时间间隔内发生的次数是有限的。
- 在非常短的时间间隔内次数为1的概率近似为λh，超过1次的概率是h的高阶无穷小。

例1. 考虑某一电话交换台在某段时间内接到的呼唤。令 $N(t)$ 表示电话交换台在 $(0, t]$ 内收到的呼唤次数，则 $\{N(t), t \ge 0\}$ 是一个泊松过程。

例2、 考虑来到某火车站售票窗口购买车票的旅客。若记 $N(t)$ 为在 $(0, t]$ 内到达售票窗口的旅客数则 $\{N(t), t \ge 0\}$ 是一个泊松过程。

[提示]根据实际意义，满足第二种定义。

例3、 考虑机器在 $(t, t+h]$ 内发生故障这一事件。若机器发生故障，立即修理后继续工作，则在 $(t, t+h]$ 内机器发生故障而停止工作的事件数构成一个随机过程，它可以用泊松过程进行描述。

四．两种定义是等价的。

1）定义 2⇒定义 3（只需验证（2）和（3））

证明：$$P\{N(s+t)-N(s)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},n=0,1,2,\cdots$$

$\{N(t),t\geq 0\}$ 是平稳增量过程．（定义 3（2））

$$P\{N(t+h)-N(t)=1\}=\lambda he^{-\lambda h}=\lambda h\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda h)^k}{k!}$$

$$=\lambda h(1-\lambda h+o(h))=\lambda h+o(h)$$

$$P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\}=\sum_{k=2}^{\infty}e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^k}{k!}=o(h)$$

（定义 3（3））

2）定义 3⇒定义 2（只需验证（3））

分析： 因为 $N(t)$ 是独立、平稳增量过程，只需证明

$$P\{N(t)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},\ n=0,1,2,\cdots$$

令 $P_n(t)=P\{N(t)=n\}=P\{N(t)-N(0)=n\}$，

先求 $P_0(t)$， $P_1(t)$，再用归纳法得 $P_n(t)$。

证明：$P_0(t+h)=P\{N(t+h)=0\}$

$$=P\{N(t)-N(0)=0,N(t+h)-N(t)=0\}$$

$$=P\{N(t)-N(0)=0\}P\{N(t+h)-N(t)=0\}$$

$$=P_0(t)(1-\lambda h+o(h)) \quad (\because P\{N(t+h)-N(t)\geq 1\}=\lambda h+o(h))$$

$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-P_0(t)[\lambda+\frac{o(h)}{h}]$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-P_0(t)\lambda=P_0'(t)$$

$$P_0(t)=C_0e^{-\lambda t}$$

$$\because P_0(0)=1, C_0=1 \quad \therefore P_0(t)=e^{-\lambda t}$$

$\forall n\geq 1$ 有

$$P_n(t+h)=P\{N(t+h)=n\}$$

$$=P\{N(t+h)-N(t)=0,N(t)=n\}+P\{N(t+h)-N(t)=1,N(t)=n-1\}$$

$$+\sum_{i=2}^{n}P\{N(t+h)-N(t)=i,N(t)=n-i\}$$

$$=P_n(t)(1-\lambda h+o(h))+P_{n-1}(t)(\lambda h+o(h))+o(h)$$

$$=P_n(t)(1-\lambda h)+P_{n-1}(t)\lambda h+o(h)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}=\quad -P_n(t)\lambda+P_{n-1}(t)\lambda=P_n'(t)$$

$$n=1,\quad P_1'(t)+P_1(t)\lambda=P_0(t)\lambda=\lambda e^{-\lambda t},\qquad P_1(t)=e^{-\lambda t}(\lambda t+C_1)$$

$$\because P_1(0)=P\{N(0)=1\}=0,\qquad \therefore C_1=0\Rightarrow\ P_1(t)=\lambda te^{-\lambda t}$$

一阶非齐次线性微分方程的通解

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right),$$

$$-P_n(t)\lambda+P_{n-1}(t)\lambda=P_n'(t)$$

假设 $P_{n-1}(t)=e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$,

$$n>1,\quad P_n'(t)+P_n(t)\lambda=e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$P_n(t)=e^{-\lambda t}[\int e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\cdot e^{\lambda t}dt+C_n]=e^{-\lambda t}[\int\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}dt+C_n]=\frac{\lambda^n t^n}{n!}+C_n e^{-\lambda t}$$

$\because P_n(0)=P\{N(0)=n\}=0,\qquad \therefore C_n=0,\qquad P_n(t)=e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$

$$\therefore P\{X(t+s)-X(s)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},n=0,1,2,\cdots$$

即定义2中(3)成立.

3.2、泊松过程的基本性质

一．数字特征

$\{N(t),t\geq 0\}$ 为具有参数 $\lambda>0$ 泊松过程，则

1）$E[N(t)-N(s)]=D[N(t)-N(s)]=\lambda(t-s)$（若 $s<t$ ）

2）$m_N(t)=\sigma_N^2(t)=\lambda t$

3）$R_N(s,t)=\lambda s(\lambda t+1)$（若 $s<t$ ）

4）$B_N(s,t)=\lambda s$ （若 $s<t$ ），一般 $B_N(s,t)=\lambda\min(s,t)$

5）特征函数 $\varphi_N(u)=E[e^{iuN(t)}]=\exp\{\lambda t(e^{iu}-1)\}$

Poisson过程不是平稳过程！

证明：1） $E[N(t)-N(s)]=\lambda(t-s)$

若 $s<t$， $D[N(t)-N(s)]=E[N(t)-N(s)]^2-[E[N(t)-N(s)]]^2$

$$=E[N(t)]^2+E[N(s)]^2-2E\{[N(t)-N(s)]N(s)\}-2E[N(s)]^2-[\lambda(t-s)]^2$$

$$=E[N(t)]^2-E[N(s)]^2-2E[N(t)-N(s)]E[N(s)]-[\lambda(t-s)]^2$$

$$=\lambda t+[\lambda t]^2-\lambda s-[\lambda s]^2-2\lambda(t-s)\lambda s-[\lambda(t-s)]^2=\lambda(t-s)$$

2） $m_N(t)=\sigma_N^2(t)=\lambda t$，

说明： 由 $m_N(t)=\lambda t$， $\lambda=\dfrac{m_N(t)}{t}$ 表示单位时间内接受服务的平均顾客数，故称 λ 为此过程的速率或强度。

3）若 $s<t$，

$$R_N(s,t)=EN(s)N(t)=EN(s)(N(t)-N(s)+N(s))$$

$=E(N(s)-N(0))E(N(t)-N(s))+E(N(s))^2$ （由独立平稳过程）

$$=\lambda s\cdot\lambda(t-s)+\lambda s+(\lambda s)^2=\lambda s(\lambda t+1)，$$

一般， $R_N(s,t)=\lambda^2 st+\lambda\min(s,t)$

4）若 $s<t$， $B_N(s,t)=R_N(s,t)-EN(s)EN(t)=\lambda s$，

一般 $B_N(s,t)=\lambda\min(s,t)$

5） $\varphi_N(u)=E[e^{iuN(t)}]=\sum_{k=0}^{n}e^{iuk}\frac{(\lambda u)^k}{k!}e^{-\lambda u}$

$$=e^{-\lambda u}\sum_{k=0}^{n}\frac{(e^{iu}\lambda u)^k}{k!}=e^{-\lambda u}e^{\lambda ue^{iu}}$$

$$=\exp\{\lambda u(e^{iu}-1)\}$$

二．点间间隔T_n与等待时间W_n的分布

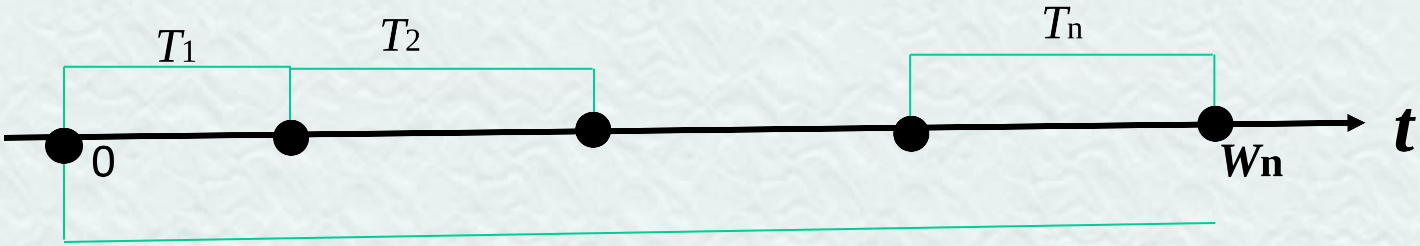
用具有参数$\lambda>0$的泊松过程$\{N(t),t\geq 0\}$来描述服务系统

$N(t)$：在$[0,t]$内进入系统的顾客数;

W_n：　第n位进入系统(到达)的时刻;

T_n：　第$n-1$位顾客与第n位顾客进入系统的时间间隔,

则$W_n=\sum_{i=1}^{n}T_i$，表示等待第n位顾客到达的等待时间。



如果 T_i 表示第i位顾客接受服务的时间,则W_n也可以表示第n位顾客在系统的排队等待时间.

问题：顾客进入系统的时间间隔、顾客排队的等待时间的分布如何?

定理 3.2.1：时间间隔 $T_n \overset{i.i.d}{\sim} E(\lambda)$

分析：由于泊松过程是独立平稳增量过程，故时间间隔 $T_1, T_2, \cdots, T_n, \cdots$ 相互独立。

再证明 $T_n \sim E(\lambda)$。先求 T_1，T_2 的分布函数，最后求 T_n 的分布函数。

证明： a. 先求 T_1 的分布函数.

当 $t<0$ 时， $F_{T_1}(t)=0$ ；

当 $t>0$ 时，

$$F_{T_1}(t)=P\{T_1\le t\}=1-P\{T_1>t\}$$

$$=1-P\{N(t)=0\}=1-e^{-\lambda t}$$

即 $T_1\sim E(\lambda)$ 。

b.再求 T_2 的分布函数。

当 $t<0$ 时， $F_{T_2}(t)=0$；

当 $t>0$ 时，

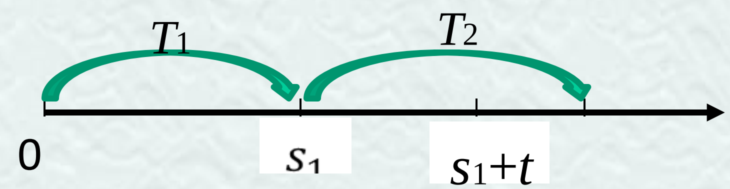
$$F_{T_2}(t)=P\{T_2\le t\}=1-P\{T_2>t\}$$

$$=1-P\{T_2>t\mid T_1=s_1\}$$ （T_1,T_2 相互独立）

$$=1-P\{N(t+s_1)-N(s_1)=0\}$$ 平稳性

$$=1-P\{N(t)-N(0)=0\}=1-P\{N(t)=0\}=1-e^{-\lambda t}$$

即 $T_2\sim E(\lambda)$。



平稳性,落入[s,s+t]的随机点数与 t有关,与 s无关

c. 最后求T_n的分布函数

当$t<0$时，$F_{T_n}(t)=0$；

当$t>0$时，$F_{T_n}(t)=P\{T_n\le t\}=1-P\{T_n>t\}$（独立性）

$$=1-P\{T_n>t\mid T_1=s_1,\cdots,T_{n-1}=s_{n-1}\}$$

$$=1-P\{N(t+s_1+\cdots+s_{n-1})-N(s_1+\cdots++s_{n-1})=0\}$$

$$=1-P\{N(t)=0\}=1-e^{-\lambda t}$$

即$T_n\sim E(\lambda)$。 所以$T_n\overset{i.i.d}{\sim}E(\lambda)$，$n=1,2,3,\cdots$

意义：泊松过程在任何时刻都是从头开始。

即：从任何时刻起过程独立于先前已发生的一切（由独立增量），且有与原过程完全一样的分布（由平稳增量）。

定理3.2.1 的逆定理也是成立的，即：如果计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$的到达时间间隔 $T_n, n=1,2,\dots$ 相互独立同服从参数为λ的指数分布的随机变量，则$\{N(t), t\geq 0\}$ 为强度是λ的泊松过程.

顾客到达强度是λ的泊松流 ═ 顾客到达是时间间隔相互独立且同服从参数为λ的指数分布的随机变量

定理 3.2.2：等待时间 $W_n \sim \Gamma(n,\lambda)$（爱尔兰分布）

分析：用独立和的特征函数性质，再用特征函数与分布函数的一一对应即得。

证明：已知 $T_j \overset{i.i.d}{\sim} E(\lambda)=\Gamma(1,\lambda)$，其特征函数为 $\varphi_j(t)=(1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$，

则 $W_n=\sum_{j=1}^{n} T_j$ 特征函数为 $\varphi(t)=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-n}$，即 $W_n=\sum_{j=1}^{n} T_j \sim \Gamma(n,\lambda)$

其密度函数为
$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

$\Gamma(\alpha,\beta)$ – 分布, 当 $\alpha=1$ 时, 为指数分布, α 为整数时为爱尔兰分布

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha)}(\beta x)^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$\phi_X(t)=\left(1-\frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}$$

定理 3.2.2：等待时间 $W_n \sim \Gamma(n,\lambda)$（爱尔兰分布）

分析：用独立和的特征函数性质，再用特征函数与分布函数的一一对应即得。

证明：已知 $T_j \overset{i.i.d}{\sim} E(\lambda)=\Gamma(1,\lambda)$，其特征函数为 $\varphi_j(t)=(1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$，

则 $W_n=\sum_{j=1}^{n}T_j$ 特征函数为 $\varphi(t)=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-n}$，即 $W_n=\sum_{j=1}^{n}T_j \sim \Gamma(n,\lambda)$

其密度函数为 $$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

$\Gamma(\alpha,\beta)$ – 分布, 当 $\alpha=1$ 时,为指数分布, α 为整数时为爱尔兰分布

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha)}(\beta x)^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$\phi_X(t)=\left(1-\frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}$$

例：某个中子计数器对到达的粒子每隔一个记录一次，设粒子按照每分钟4个的Poisson过程到达，令T为相继被记录的粒子之间的时间间隔（分钟）。

求（1）T的概率密度；

（2）$P(T \geq 1)$.

解 (1)设 $T_1, T_2, \cdots\cdots, T_n, \cdots$ 为被记录的粒子之间的时间间隔，则它们相互独立同分布，所以只需求出T_1的分布，即知T的分布。

$\{T_1 > t\} \Leftrightarrow$ {在时间[0,t）内最多到达一个粒子}, 所以

$$P\{T_1 > t\} = P\{N(t) \le 1\} = P\{N(t) = 0\} + P\{N(t) = 1\}$$
$$= e^{-4t} + 4te^{-4t} = (1+4t)\, e^{-4t}.$$

$$F_T(t) = P(T_1 \le t) = \begin{cases} 1-(1+4t)e^{-4t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$p_T(t) = F'_T(t) = \begin{cases} 16te^{-4t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

（2）$P\{T \ge 1\} = 1 - F_T(1) = 5e^{-4}$

设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为强度 λ 的泊松过程.

讨论泊松过程与均匀分布的关系

三．到达时间的条件分布

定理 3.2.3: 假设在$[0, t]$内事件已发生了一次, 则此事件的到达时间W_1服从$[0, t]$上的均匀分布，即 $X(t)=1$ 时，W_1 的条件分布为$U[0, t]$。

证明： 当$0 \leq s < t$时，

$$P\{W_1 \leq s \mid X(t)=1\} = \frac{P\{W_1 \leq s, X(t)=1\}}{P\{X(t)=1\}} = \frac{P\{X(s)=1, X(t)-X(s)=0\}}{P\{X(t)=1\}}$$

$$= \frac{P\{X(s)=1\}P\{X(t-s)=0\}}{P\{X(t)=1\}} = \frac{\lambda s e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$$

（均匀分布的分布函数）

说明：

由于泊松过程具有独立平稳增量性，从而在已知$(0,t]$上有一个事件发生的情况下，该事件发生时刻S_1在$[0,t]$上是等可能的。

问题：

- 该性质能否推广到的$N(t)=n, n\geq 1$情形？
- 该性质是否是泊松过程特有的？

例 4. 设$\{X(t),t\geq 0\}$为具有参数$\lambda>0$泊松过程，若$0<s<t$，对于$0<k<n$时，求$P\{X(s)=k\mid X(t)=n\}$。[即$X(t)=n$时，则在$[0,s](s<t)$内事件发生次数$X(s)$服从二项分布$B(n,\frac{s}{t})$。

解：$$P\{X(s)=k\mid X(t)=n\}=\frac{P\{X(s)=k,X(t)=n\}}{P\{X(t)=n\}}$$

$$=\frac{P\{X(s)-X(0)=k,X(t)-X(s)=n-k\}}{P\{X(t)=n\}}$$

$$=\frac{P\{X(s)=k\}P\{X(t-s)=n-k\}}{P\{X(t)=n\}}=\frac{e^{-\lambda s}\cdot\frac{(\lambda s)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda(t-s)}\cdot\frac{[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$=C_n^k\frac{s^k(t-s)^{n-k}}{t^n}=C_n^k\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}$$ 。 二项分布$B(n,\frac{s}{t})$。

定理 3.2.4： $(W_1,W_2,\cdots,W_n)$的联合分布与n个$[0,t]$上均匀分布的独立随机变量的顺序统计量有相同的分布。

说明：n个$[0,t]$上均匀分布的独立随机变量$(U_1,U_2,\cdots U_n)$的顺序统计量$(U_{(1)},U_{(2)},\cdots U_{(n)})$的联合概率密度函数为

$$f_{(n)}(u_1,\cdots u_n)=\begin{cases}\dfrac{n!}{t^n}, & 0\le u_1<u_2<\cdots<u_n<t\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

证明：当 $X(t)=n$ 时，令 $0<u_1<\cdots<u_n<u_{n+1}=t$，取充分小的 $h_i>0$，使 $u_i<W_i\le u_i+h_i$，$u_i+h_i<u_{i+1}$，$i=1,\cdots,n$，则

$X(u_i+h_i)-X(u_i)=1$，$X(u_{i+1})-X(u_i+h_i)=0$，$i=1,\cdots,n$，$X(u_1)=0$，故有

$P\{u_i<W_i\le u_i+h_i, i=1,2,\cdots,n \mid X(t)=n\}$（因泊松过程是平稳独立增量过程）

$$=\frac{\prod_{i=1}^{n}P\{X(h_i)=1\}\cdot\prod_{i=1}^{n}P\{X(u_{i+1}-u_i-h_i)=0\}\cdot P\{X(u_1)=0\}}{P\{X(t)=n\}}$$

$$=\frac{\lambda^n\cdot\prod_{i=1}^{n}h_i\cdot e^{-\lambda\sum_{i=1}^{\infty}h_i}\cdot e^{-\lambda[\sum_{i=1}^{n}(u_{i+1}-u_i-h_i)+u_1]}}{\frac{\lambda^n t^n}{n!}e^{-\lambda t}}=\frac{n!}{t^n}\prod_{i=1}^{\infty}h_i$$

$$\frac{P\{u_i<W_i\le u_i+h_i, i=1,2,\cdots,n \mid X(t)=n\}}{h_1h_2\cdots h_n}=\frac{n!}{t^n}$$，令 $h_i\to 0$，$i=1,\cdots,n$，则得

$X(t)=n$ 时 $(W_1,W_2,\cdots,W_n)$ 的联合概率密度

$$f(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\begin{cases} n!/t^n, & 0<u_1<u_2<\cdots<u_n<t \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

例 6. 设$\{X_1(t), t \ge 0\}$和$\{X_2(t), t \ge 0\}$是两个相互独立的泊松过程，它们在单位时间内平均出现的事件数分别为λ_1和λ_2。记$W_k^{(i)}(i=1,2)$为过程$\{X_i(t), t \ge 0\}$的第k次事件到达时间，求$P\{W_k^{(1)} < W_1^{(2)}\}$（即在第二个过程的第一次事件发生前，第一个过程已经发生k次的概率）.

解：$$P\{W_k^{(1)} < W_1^{(2)}\} = \iint\limits_{x<y} f_{W_k^{(1)}}(x) f_{W_1^{(2)}}(y)dxdy$$

$$= \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy = \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda_2 x} dx$$

$$= \frac{\lambda_1^{\ k}}{(k-1)!(\lambda_1+\lambda_2)^k} \int_0^{+\infty} [(\lambda_1+\lambda_2)x]^{k-1} \cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} d(\lambda_1+\lambda_2)x$$

$$= \frac{\lambda_1^{\ k}}{\Gamma(k)(\lambda_1+\lambda_2)^k} \Gamma(k) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k$$

$$(\because \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} dx)$$

齐次Poisson过程，其强度λ为一常数，意味着在不同的时刻，事件发生的速率都是一个恒定值。

而实际中，事件发生的速率可能会因时而变。

比如，公交车站到达的乘客流，早晚高峰期的速率明显比其他时段要大；研究某地发生地震的次数，夏秋季的速率也会比冬春季的高。

因此，为了描述这些现象，将齐次Poisson过程推广到非齐次Poisson过程。

3.3 非齐次泊松过程

一．定义： 称计数过程$\{X(t),t\geq 0\}$为具有跳跃强度函数$\lambda(t)$的非齐次泊松过程，若它满足下列条件：

（1） $X(0)=0$；

（2） $X(t)$是独立增量过程；

（3） $X(t)$满足下列两式：

$$P\{X(t+h)-X(t)=1\}=\lambda(t)h+o(h)$$

$$P\{X(t+h)-X(t)\geq 2\}=o(h)$$

二．性质：

计数过程$\{X(t),t\geq 0\}$为具有跳跃强度函数$\lambda(t)$的非齐次泊松过程，则其均值函数：$m_X(t)=\int_0^t \lambda(s)ds$.

三．非齐次泊松过程的分布律

定理 3.3.1：设$\{X(t),t\geq 0\}$为具有均值函数$m_X(t)=\int_0^t \lambda(s)ds$的非齐次泊松过程，则有

$$P\{X(t+s)-X(t)=n\}=\frac{[m_X(t+s)-m_X(t)]^n}{n!}e^{-[m_X(t+s)-m_X(t)]},(n\geq$$

或 $$P\{X(t)=n\}=\frac{[m_X(t)]^n}{n!}e^{-m_X(t)},(n\geq 0)$$

结论：$E[X(t)]=D[X(t)]=m_X(t)$

例 7. 设$\{X(t), t \geq 0\}$为具有跳跃强度$\lambda(t)=\frac{1}{2}(1+\cos\omega t)$的非齐次泊松过程（$\omega \neq 0$）。求$E[X(t)]$和$D[X(t)]$.

解：$E[X(t)]=m_X(t)=\int_0^t \lambda(s)ds=\int_0^t \frac{1}{2}(1+\cos(\omega s))ds=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{\omega}\sin(\omega t))$

$$D[X(t)]=m_X(t)=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{\omega}\sin(\omega t))$$

例 8. 设某路公共汽车从早晨 5 时到晚上 9 时有车发出。乘客流量如下：5 时按平均乘客为 200 人/时计算；5 时至 8 时乘客平均到达率按线性增加；8 时到达率为 1400 人/时；8 时到 18 时保持平均到达率不变， 18 时到 21 时从到达率 1400 人/时按线性下降，到 21 时为 200 人/时。假定乘客数在不相重叠时间间隔内是相互独立的。求 12 时至 14 时有 2000 人来站乘车的概率，并求这两小时内来站乘车人数的数学期望.

解：5 时到 21 时对应 t 从 0 到 16，则强度为

$$\lambda(t)=\begin{cases} 200+400t, & 0\le t\le 3 \\ 1400, & 3<t\le 13 \\ 1400-400(t-13), & 13<t\le 16 \end{cases}$$，则

12 时至 14 时这两小时内来站乘车人数的数学期望：

$$m_X(9)-m_X(7)=\int_7^9 \lambda(s)ds=2800,$$

12 时至 14 时有 2000 人来站乘车的概率：

$$P\{X(9)-X(7)=2000\}=e^{-2800}\cdot\frac{(2800)^{2000}}{2000!}$$

- 此前考虑的Poisson过程都没有涉及事件发生所带来的影响，只考虑了事件发生的次数。
- 因此，为了研究这些事件带来的累积效果，引入复合Poisson过程。
- 例如：通过市内立交桥的公交车数N_t是一个Poisson过程，每辆车所载乘客数ξ_n是一个随机变量，若要考虑通过立交桥的总人数Y_t，则有$Y_t=\sum_{n=1}^{N_t}\xi_n$。

3.4 复合泊松过程

一． 定 义： 设 $\{N(t),t\geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，$\{Y_k,k=1,2,\cdots\}$ 是一列独立同分布随机变量，且与 $\{N(t),t\geq 0\}$ 独立，令 $X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k,t\geq 0$，

则称 $\{X(t),t\geq 0\}$ 为复合泊松过程．

例 9. 设 $N(t)$ 是在时间段 $(0,t]$ 内来到某商店的顾客人数，$\{N(t),t\geq 0\}$ 是泊松过程.

若 Y_k 是第 k 个顾客在商店所花的钱数，则 $\{Y_k,k=1,2,\cdots\}$ 是独立同分布的随机变量序列，且与 $\{N(t),t\geq 0\}$ 相互独立。

记 $X(t)$ 为该商店在 $(0,t]$ 内的营业额，则 $X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k,t\geq 0$ 是一个复合泊松过程.

二. 性质：设 $X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k,\ t\geq 0$ 是复合泊松过程，则

1）$\{X(t),t\geq 0\}$ 是独立增量过程；

2）$X(t)$ 的特征函数 $\varphi_X(u)=\exp\{\lambda t[\varphi_Y(u)-1]\}$，

其中 $\varphi_Y(u)$ 是随机变量 Y_1 的特征函数；λ 是事件的到达率。

3）若 $EY_1^2<+\infty$，则 $E[X(t)]=\lambda tE[Y_1],\ D[X(t)]=\lambda tE[Y_1^2]$

证明：1）令 $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_m$，则

$$X(t_k) - X(t_{k-1}) = \sum_{l=1}^{N(t_k)} Y_l - \sum_{l=1}^{N(t_{k-1})} Y_l = \sum_{l=N(t_{k-1})+1}^{N(t_k)} Y_l \text{，} \quad k = 1,2,\cdots,m$$

因为 $\{Y_k, k = 1,2,\cdots\}$ 是独立同分布的随机变量序列，

故 $X(t_k) - X(t_{k-1})$，$k = 1,2,\cdots,m$ 相互独立，

即 $\{X(t), t \ge 0\}$ 是独立增量过程。

2） $\varphi_X(u) = E\exp\{iuX(t)]\}$

$$= E[E\exp\{iuX(t)\} \mid N(t)]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}[E\exp\{iu\sum_{k=1}^{n}Y_k)\} \mid N(t)=n]\cdot P\{N(t)=n\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}[\prod_{k=1}^{n}E\exp\{iuY_k\}\cdot P\{N(t)=n\}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\{[\varphi_{Y_1}(u)]^n \cdot P\{N(t)=n\}\}$$

$$= e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda t\varphi_{Y_1}(u)]^n}{n!} = e^{-\lambda t}e^{\lambda t\varphi_{Y_1}(u)} = e^{\lambda t[\varphi_Y(u)-1]}$$

$$EX = \sum_{y} E(X \mid Y=y)P\{Y=y\}$$

3） $E[X(t)]=E\{E[X(t)\mid N(t)]\}$

由 $E[X(t)\mid N(t)=n]=E[\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k\mid N(t)=n]$

$$=E[\sum_{k=1}^{n}Y_k]=nEY_1,$$

得 $E[X(t)\mid N(t)]=N(t)EY_1$

故 $E[X(t)]=E\{E[X(t)\mid N(t)]\}$

$$=E[N(t)]\cdot EY_1=\lambda tEY_1$$

$$D[X(t)\mid N(t)=n]=D[\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k\mid N(t)=n]=D[\sum_{k=1}^{n}Y_k]=nDY_1,$$

即 $D[X(t)\mid N(t)]=N(t)DY_1$

$$E[X^2(t)\mid N(t)]=D[X(t)\mid N(t)]+[E[X(t)\mid N(t)]]^2$$

$$=N(t)DY_1+[N(t)EY_1]^2$$

$$D[X(t)]=EX^2(t)-[EX(t)]^2=E\{E[X^2(t)\mid N(t)]\}-[E[E(X(t)\mid N(t))]]^2$$

$$=E\{N(t)DY_1+[N(t)EY_1]^2\}-[E(N(t)EY_1)]^2$$

$$=E\{N(t)DY_1\}+E[N^2(t)]\cdot[EY_1]^2-[EN(t)]^2[EY_1]^2$$

$$=E\{N(t)DY_1\}+[EY_1]^2DN(t)=\lambda tDY_1+\lambda t[EY_1]^2$$

$$=\lambda tE(Y_1)^2$$

例 10. 仪器受到振动而引起损伤。若震动是按照强度为λ的泊松过程发生，第k次震动引起的损伤为D_k，D_1，$D_2,\cdots$是独立同分布随机变量序列，且和$\{N(t),t\geq 0\}$独立，其中$N(t)$表示$[0,t]$时间段内仪器受到震动次数，又假设仪器受到震动的初始损伤随时间按指数减小，即如果震动的初始为D，则震动之后经过时间t后减小为$De^{-\alpha t}(\alpha>0)$。假设损伤是可以叠加的，即在时刻t的损伤可表示为

$$D(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-\tau_k)}$$，其中τ_k为仪器受到第k次震动的时刻，求$E[D(t)]$

解：$E[D(t)\,|\,N(t)=n]=E\left(\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-\tau_k)}\,\middle|\, N(t)=n\right)=E\left(\sum_{k=1}^{n} D_k e^{-\alpha(t-\tau_k)}\right)$

$$=\sum_{k=1}^{n}[ED_k\cdot Ee^{-\alpha(t-\tau_k)}] \qquad (D_k,\tau_k\text{相互独立})$$

$$=ED_1\sum_{k=1}^{n}Ee^{-\alpha(t-\tau_k)}=e^{-\alpha t}ED_1\cdot E\left(\sum_{k=1}^{n}e^{\alpha\tau_k}\right)$$

[因为$(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)$的联合分布与$n$个$[0,t]$上均匀分布的独立随机变量的顺序统计量有相同的分布。]

$$=e^{-\alpha t}ED_1\cdot E\left(\sum_{k=1}^{n}e^{\alpha U_{(k)}}\right)=e^{-\alpha t}ED_1\cdot E\left(\sum_{k=1}^{n}e^{\alpha U_k}\right)=e^{-\alpha t}ED_1\cdot nEe^{\alpha U_1}$$

$$=e^{-\alpha t}ED_1\cdot n\int_0^t e^{\alpha x}\frac{1}{t}dx=\frac{e^{-\alpha t}ED_1\cdot n}{\alpha t}(e^{\alpha t}-1)=\frac{ED_1\cdot n}{\alpha t}(1-e^{-\alpha t})$$

$\therefore E[D(t)\,|\,N(t)]=\dfrac{ED_1\cdot N(t)}{\alpha t}(1-e^{-\alpha t})$，则

$$E[D(t)]=E\{E[D(t)\,|\,N(t)]\}=\frac{ED_1\cdot EN(t)}{\alpha t}(1-e^{-\alpha t})=\frac{ED_1\cdot\lambda t}{\alpha t}(1-e^{-\alpha t})$$

$$=\frac{\lambda ED_1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})。$$

例 11. 假设乘客按参数为λ泊松过程来到火车站乘某次列车，若火车 t 时刻启程。求$[0,t]$内到达火车站乘坐该次列车的乘客等待时间总和的数学期望.

解：设τ_k表示第k个乘客到达时刻，其等待时间为$t-\tau_k$，则等待时间总和为$\sum_{k=1}^{N(t)}(t-\tau_k)$。

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-\tau_k)\right]=E\left[E\left(\sum_{k=1}^{N(t)}(t-\tau_k)\middle|N(t)\right)\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}E\left[\sum_{k=1}^{n}(t-\tau_k)\middle|N(t)=n\right]\cdot P(N(t)=n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(nt-\left[E\left(\sum_{k=1}^{n}\tau_k\right)\middle|N(t)=n\right])\cdot P(N(t)=n)=\sum_{n=0}^{\infty}(nt-E\left(\sum_{k=1}^{n}U_{(k)}\right))\cdot P(N(t)=n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(nt-E\left(\sum_{k=1}^{n}U_k\right))\cdot P(N(t)=n)=\sum_{n=0}^{\infty}(nt-\sum_{k=1}^{n}EU_k)\cdot P(N(t)=n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(nt-\sum_{k=1}^{n}\frac{t}{2})\cdot P(N(t)=n)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nt}{2}\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}=\frac{\lambda t^2}{2}e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{\lambda t^2}{2}$$

例 12. 假设乘客按参数为λ泊松过程来到公交汽车总站乘车。原计划每隔时间T开出一辆公交车，现在为缩短乘客候车时间，在两班之间增开一辆，问：安排在什么时候最好？（即求$t\in[0,T]$，使乘客平均候车时间最少。）

解：用以上例题结论：

乘客的平均候车时间为$h(t)=\dfrac{\lambda t^2}{2}+\dfrac{\lambda(T-t)^2}{2}$，

$h'(t)=\lambda t+\lambda(T-t)(-1)=0$， $t=\dfrac{T}{2}$，

即安排在原来两辆车的当中最好。