第八章　灰色预测模型

一、基本概念

1、系统
- 白色系统：一个系统的内部特征完全已知
- 灰色系统：一个系统的内部特征一部分已知，一部分未知
- 黑色系统：一个系统的内部特征完全未知

2、灰色预测：

进行关联度分析，鉴别系统因素之间发展趋势的相似或相异程度。

通过对原始数据的生成处理来寻求系统变动的规律

生成数据序列有较强的规律性，可以用它建立相应的微分方程模型，

从而预测事物未来的发展趋势和未来状况。

3、灰色预测的类型：

(1) 灰色时间序列预测：用等时距测到的反映预测对象特征的一系列数量构造灰色预测模型，预测未来某一时刻的特征量，或达到某一特征量的时间。

(2) 灾变预测：通过灰色预测模型预测异常值出现的时刻。

(3) 波形预测：也称拓扑预测

通过灰色预测模型来预测事物未来变动的轨迹。

(3) 系统预测：对系统行为特征指标建立一组相互关联的灰色预测理论模型，在预测系统整体变化的同时，预测系统各个环节的变化。

二、生成数

随机变量在灰色系统里被称为灰色量

$$X^0=\{X^0(1),X^0(2),\cdots,X^0(n)\}$$

1、累加生成数$(Accumulated\quad Generating\quad Operation)$

$$X'=\{X'(1),X'(2),\cdots,X'(n)\}$$

其中：$X'(1)=X^0(1)$

$$X'(2)=X^0(1)+X^0(2)$$

$$\vdots$$

$$X'(k)=X'(k-1)+X^0(k)=\sum_{i=1}^{k}X^0(i)$$

2、累减生成数 $IAGO\ (Inverse\quad Accumulated\quad \cdots)$

$$X'=\{X'(1),X'(2),\cdots,X'(n)\}$$

其中：$X'(k)=X^0(k)-X^0(k-1)\qquad k=2,\cdots,n$

$$X'(1)=X^0(1)$$

三、关联度：

参考点列 $X^0=\left\{X^0(1),X^0(2),\cdots,X^0(n)\right\}$

被比较点列 $X^i=\left\{X^i(1),X^i(2),\cdots,X^i(n)\right\}$ $\quad i=1,2,\cdots,k$

(1)关联系数

$$n_l(j)=\frac{\min\limits_i\min\limits_k\left|X^0(k)-X^i(k)\right|+P\max\limits_i\max\limits_k\left|X^0(k)-X^i(k)\right|}{\left|X^0(j)-X^l(j)\right|+P\max\limits_i\max\limits_k\left|X^0(k)-X^i(k)\right|}$$

其中：P为分辨率 $0<P<1$ 一般$P=0.5$

注：对单位不一，初值不同的序列，在计算关联系数前应首先进行初值化，即：将该序列所有数据分别除以第一个数据。

(2)关联度 $r_l=\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}n_l(j)$ $\quad 0\le r_l\le 1$

例：　　参考序列为 $Y_0=\{8，8.8，16，18，24，32\}$

被比较点列 $Y_1=\{10，11.66，18.34，20，23.4，30\}$

$Y_2=\{5，5.625，5.375，6.875，8.125，8.75\}$

求关联度。

解：初值化，得 $X_0=\{1，1.1，2，2.25，3，4\}$

$X_1=\{1，1.166，1.834，2，2.34，3\}$

$X_2=\{1，1.125，1.075，1.375，1.625，1.75\}$

k	1	2	3	4	5	6
$\Delta_1 = \lvert X_0(k) - X_1(k) \rvert$	0	0.066	0.166	0.25	0.66	1
$\Delta_2 = \lvert X_0(k) - X_2(k) \rvert$	0	0.025	0.925	0.875	1.375	2.25
n_1	1	0.9445	0.8714	0.8108	0.6303	0.5294
n_2	1	0.978	0.5487	0.5625	0.45	0.333

其中：
$$n_1(1) = \frac{0.5\times 2.25}{0.5\times 2.25} = 1$$

$$n_1(2) = \frac{0.5\times 2.25}{0.066 + 0.5\times 2.25} = 0.9445$$

$$r_1 = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} n_1(k) = 0.7988$$

$$r_2 = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} n_2(k) = 0.6449$$

$\therefore X_1$和X_0的关联程度大于X_2和X_0的关联程度。

四、GM（1,1）模型

1、*Grey Modeling*　1阶　1个变量的微分方程

原始数据　$X^0=\left\{X^0(1),\cdots,X^0(n)\right\}$

AGO　$X'=\left\{X'(1),\cdots,X'(n)\right\}$

则 X' 满足微分方程

$$\frac{dX'}{dt}+aX'=U$$

a为发展灰数，U为控制灰数

记　$\alpha=\begin{pmatrix} a \\ U \end{pmatrix}$

上式推导：用差分代替导数，得到关于a，U的线性方程组

$$\underset{X^{0}(k+1)}{\underline{\underline{X'(k+1)-X'(k)}}}+a\cdot\frac{1}{2}\left[X'(k+1)+X'(k)\right]=U$$

展开上式有：

$$\begin{cases} X^{0}(2)+\frac{1}{2}a\left[X'(2)+X'(1)\right]=U & k=1 \\ X^{0}(3)+\frac{1}{2}a\left[X'(3)+X'(2)\right]=U & k=2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ X^{0}(n)+\frac{1}{2}a\left[X'(n)+X'(n-1)\right]=U & k=n-1 \end{cases}$$

写成矩阵形式得：　$Y_n=B\cdot\alpha$

可用最小二乘法解得 $\hat{\alpha}=(B^T B)^{-1}B^T Y_n$

其中：$B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}[X'(1)+X'(2)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[X'(2)+X'(3)] & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}[X'(n-1)+X'(n)] & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Y_n=\begin{pmatrix} X^0(2) \\ X^0(3) \\ \vdots \\ X^0(n) \end{pmatrix}$

预测方程： $\hat{X}'(i+1)=\left[X^0(1)-\frac{U}{a}\right]e^{-ai}+\frac{U}{a}$

注意：原始数据应等间距，且是最新的。

2、模型检验

（1）残差检验：

绝对残差： $\Delta^0(i)=\left|X^0(i)-\hat{X}^0(i)\right|$

相对残差： $\phi_i=\dfrac{\Delta^0(i)}{X^0(i)}\times 100\%$

（2）关联度检验：计算$\left\{X^0(i)\right\}$和$\left\{\hat{X}^0(i)\right\}$的关联度。

当$P=0.5$时，关联度大于0.6，则说明预测模型比较可靠。

（3）后验差检验：$\bar{X}^0=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X^0(i)$ $\qquad S_1=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left[X^0(i)-\bar{X}^0\right]^2}{n-1}$

$$\bar{\Delta}^0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta^0(i) \qquad S_2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\Delta^0(i)-\bar{\Delta}^0\right]^2}{n-1}$$

方差比：$C = \dfrac{S_2}{S_1}$

小误差概率：$P = \left\{ \left| \Delta^0(i) - \bar{\Delta}^0 \right| < 0.6745 \cdot S_1 \right\}$

考虑：

P	C	
>0.95	<0.35	模型好
>0.8	<0.5	合格
>0.7	<0.65	勉强合格
≤ 0.7	≥ 0.65	不合格

例：某县棉花产量如下，试预测第8期棉花产量

序号	1	2	3	4	5	6
产量	2.67	3.13	3.25	3.36	3.56	3.72

解：

X^0	2.67	3.13	3.25	3.36	3.56	3.72
X'	2.67	5.80	9.05	12.41	15.97	19.69

$$B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(2.67+5.80) & 1 \\ -\frac{1}{2}(5.80+9.05) & 1 \\ -\frac{1}{2}(9.05+12.41) & 1 \\ -\frac{1}{2}(12.41+15.97) & 1 \\ -\frac{1}{2}(15.97+19.69) & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4.235 & 1 \\ -7.425 & 1 \\ -10.73 & 1 \\ -14.19 & 1 \\ -17.83 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_n=\begin{pmatrix} X^0(2) \\ X^0(3) \\ \vdots \\ \vdots \\ X^0(6) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3.13 \\ 3.25 \\ 3.36 \\ 3.56 \\ 3.72 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\alpha}=(B'B)^{-1}B'Y_n=\begin{pmatrix}-0.043879\\2.925663\end{pmatrix}$$

则预测方程为：

$$\hat{X}'(i+1)=\left[X^0(1)-\frac{U}{a}\right]e^{-ai}+\frac{U}{a}$$

$$=\left[2.67+\frac{2.925663}{0.043879}\right]e^{0.043879i}-\frac{2.925663}{0.043879}$$

$$=69.3457e^{0.04388i}-66.6757$$

模型检验：

$$\hat{X}'(1)=69.3457-66.6757=2.67$$

$$\hat{X}'(2)=69.3457e^{0.04388}-66.6757=5.78$$

$$\hat{X}'(3)=9.03$$

$$\vdots$$

(1)残差检验：

i	1	2	3	4	5	6
$\hat{X}'(i)$	2.67	5.78	9.03	12.43	15.97	19.68
$\hat{X}^0(i)$	2.67	3.11	3.25	3.40	3.54	3.71
$\Delta^0(i)$	0	0.02	0	0.04	0.02	0.01
$\Phi^0(i)$	0	0.064%	0	1.19%	0.56%	0.27%

(2)关联度检验：

$\eta(i)$	1	0.50	1	0.33	0.50	0.67

$$r=\frac{1}{6}\sum\eta(i)=0.67>0.6$$

(3)后验差检验：

$$\bar{X}^0 = \frac{1}{6}\left[2.67 + 3.13 + 3.25 + \cdots + 3.72\right] = 3.28$$

$$S_1 = 0.3671$$

$$\bar{\Delta} = 0.015$$

$$S_2 = 0.0152$$

$$C = \frac{S_2}{S_1} = 0.0414 < 0.35$$

$$\left\{\left|\Delta^{0}(i)-\bar{\Delta}^{0}\right|\right\}=\{0.015,\ \ 0.005,\ \ 0.015,\ \ 0.025,\ \ 0.005,\ \ 0.005\}$$

$$0.6745S_1=0.2476$$

则 $P=1>0.95$

$\therefore$ 模型有较好的预测精度。

预测： $\hat{X}^{0}(8)=\hat{X}'(8)-\hat{X}'(7)$

$$=69.3457e^{0.04388\times 7}-69.3457e^{0.04388\times 6}=4.05$$

习题：某省食盐产量如下表，试建立$GM(1,1)$预测模型，

对模型进行验证并预测1988年的食盐产量。

年份	1982	1983	1984	1985	1986	1987
产量	2.97	3.23	3.29	3.46	3.69	3.71

解：

i	1	2	3	4	5	6
X^0	2.97	3.23	3.29	3.46	3.59	3.71
X'	2.97	6.2	9.49	12.95	16.54	20.25

$$B=\begin{pmatrix} -4.585 & -7.845 & -11.22 & -14.745 & -18.395 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$Y_n=\begin{pmatrix} 3.23 & 3.29 & 3.46 & 3.59 & 3.71 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{U} \end{pmatrix}=\widehat{\alpha}=(B^T B)^{-1}B^T Y_n=\begin{pmatrix} -0.0365 & 3.0412 \end{pmatrix}^T$$

$$\therefore \hat{X}'(t+1)=86.2905e^{0.0365i}-83.3205$$

(1)残差检验:

i	1	2	3	4	5	6
$\hat{X}'(i)$	2.97	6.1778	9.5048	12.9555	16.5345	20.2466
$\hat{X}^0(i)$	2.97	3.2078	3.3270	3.4507	3.5790	3.7121
$\Delta^0(i)$	0	0.0222	0.037	0.0093	0.011	0.0021

(2)关联度检验:

$\eta(i)$	1	0.4545	0.3333	0.6655	0.6271	0.8981

$$r = 0.6631 > 0.6$$

(3)后检差检验:

$$\bar{X}^0 = 3.375 \quad S_1 = 0.07159 \quad \bar{\Delta} = 0.0136 \quad S_2 = 1.932\times 10^{-4}$$

$$C = \frac{S_2}{S_1} = 0.002699 < 0.35 \quad P = \left\{ \left| \Delta^0(i) - \bar{\Delta}^0 \right| < 0.0483 \right\} = 1$$

其中:

$$\left| \Delta^0(i) - \bar{\Delta}^0 \right| = \{0.0136,\ 0.0085,\ 0.0236,\ 0.0045,\ 0.0029,\ 0.0111\}$$

$$\therefore P = 1 > 0.95$$

$\therefore$模型非常可靠

从而得到: $\hat{X}'(7) = 24.0965 \qquad \hat{X}'(6) = 20.2478 \quad \hat{X}^0(7) = 3.85$

五、GM（1,1）残差模型

当原始数据序列X^{0}建立的$GM(1,1)$模型检验不合格或模型精度不理想时，可用$GM(1,1)$残差模型来修正。

实际	$X'(1)$	$X'(2)$	$\cdots$	$X'(n)$
预测	$\hat{X}'(1)$	$\hat{X}'(2)$	$\cdots$	$\hat{X}'(n)$
误差	$e^{0}(1)$	$e^{0}(2)$	$\cdots$	$e^{0}(n)$

其中：$e^{0}(i)=X'(i)-\hat{X}'(i)$

用$GM(1,1)$预测$e'(k+1)$有：

$$\hat{e}'(k+1)=\left[e^{0}(1)-\frac{U_e}{a_e}\right]e^{-a_e k}+\frac{U_e}{a_e}$$

而$\hat{e}'(k+1)$的导数为：

$$\frac{d\hat{e}'(k+1)}{dk}=(-a_e)\left[e^{0}(1)-\frac{U_e}{a_e}\right]e^{-a_e k}$$

$$=\hat{e}'(k+1)-\hat{e}'(k)=\hat{e}^{0}(k+1)$$

或者： $\hat{e}^0(k+1)=\hat{e}'(k+1)-\hat{e}'(k)$

$$=\left[e^0(1)-\frac{U_e}{a_e}\right]\left[e^{-a_e k}-e^{-a_e k+a_e}\right]$$

$$=\left[e^0(1)-\frac{U_e}{a_e}\right]e^{-a_e k}\left[1-e^{a_e}\right]$$

由 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$

$\therefore$ 上式 $=\left[e^0(1)-\frac{U_e}{a_e}\right]e^{-a_e k}(-a_e)$

则修正模型为：

$$\hat{X}'(k+1)=\left[X^{0}(1)-\frac{U}{a}\right]e^{-ak}+\frac{U}{a}$$

$$+\delta(k-i)(-a_e)\left[e^{0}(1)-\frac{U_e}{a_e}\right]e^{-a_e(k-i)}$$

其中 $\delta(k-i)=\begin{cases}1 & k>i\\ 0 & k\le i\end{cases}$

例：某地科技人员数量如下表，试预测1995年人才数量。

年份	1988	1989	1990	1991	1992	1993
人数	43.45	47.05	52.75	57.14	62.64	68.52

解：用$GM(1,1)$解得

$$\hat{X}'(i+1)=\left[X^{0}(1)-\frac{U}{a}\right]e^{-ai}+\frac{U}{a}=493.56e^{0.09i}-450.11$$

残差为：

i	1	2	3	4	5	6
$X'(i)$	43.45	90.5	143.25	200.39	263.03	331.55
$\hat{X}'(i)$	43.45	89.93	140.79	196.44	257.32	323.95
e	0	0.57	2.46	3.95	5.71	7.6

误差有增大的趋势，所以需要提高精度，用残差模型

$$e^0 = \{0.57 \quad 2.46 \quad 3.95 \quad 5.71 \quad 7.6\}$$

$$e^1 = \{0.57 \quad 3.03 \quad 6.98 \quad 12.69 \quad 20.29\}$$

$$B^1 = \begin{Bmatrix} -1.8 & -5.005 & -9.835 & -16.49 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$Y_n = \{2.46，\ 3.95，\ 5.71，\ 7.6\}$$

$$\alpha_e = \begin{pmatrix} -0.34 \\ 1.98 \end{pmatrix} \qquad \frac{U_e}{a_e} = -5.82$$

$$\hat{e}'(k+1)=\left[e^{0}(1)-\frac{U_e}{a_e}\right]e^{0.34k}-5.82=6.39e^{0.34k}-5.82$$

$$\hat{e}^{0}(k+1)=2.17e^{0.34k}$$

$$\therefore \hat{X}'(k+1)=493.56e^{0.09k}-450.11+\delta(k-1)\cdot 2.17e^{0.34(k-1)}$$

其中: $\delta(k-1)=\begin{cases}1 & k>1\\ 0 & k\le 1\end{cases}$

残差为:

i	1	2	3	4	5	6
$X^0(i)$	43.45	47.05	52.75	57.14	62.64	68.52
$X'(i)$	43.45	90.5	143.25	200.39	263.03	331.55
$\hat{X}'(i)$	43.45	89.93	143.84	200.72	263.34	332.40
$\Delta(i)$	0	0.57	0.59	0.33	0.31	0.85
$\Phi(i)$	0	0.6%	0.4%	0.2%	0.1%	0.26%

修正后精度明显提高，用来预测，

$$\hat{X}'(7) = 493.56e^{0.09\times 6} - 450.11 + 2.17e^{0.34\times 5} = 408.72$$

$$\hat{X}'(8) = 493.56e^{0.09\times 7} - 450.11 + 2.17e^{0.34\times 6} = 493.29$$

$$\therefore \quad \hat{X}^0(8) = 493.29 - 408.72 = 84.57$$

六、GM（1,N）模型

系统有N个变量，记为：$X^0=\left\{X_1^0, X_2^0, \cdots, X_N^0\right\}$

有m组观测数据：$\left\{X_1^0(1), X_2^0(1), \cdots, X_N^0(1)\right\}$

$$\left\{X_1^0(2), X_2^0(2), \cdots, X_N^0(2)\right\}$$

$$\vdots$$

$$\left\{X_1^0(m), X_2^0(m), \cdots, X_N^0(m)\right\}$$

展开得到N个时间序列：$X_1^0=\left\{X_1^0(1), X_1^0(2), \cdots, X_1^0(m)\right\}$

$$X_2^0=\left\{X_2^0(1), X_2^0(2), \cdots, X_2^0(m)\right\}$$

$$\vdots$$

$$X_N^0=\left\{X_N^0(1), X_N^0(2), \cdots, X_N^0(m)\right\}$$

对以上每一个序列都进行累加生成，得到:

$$X_i' = \left\{ X_i'(1), X_i'(2), \cdots, X_i'(m) \right\}$$

其中： $$X_i'(k) = \sum_{j=1}^{k} X_i^{\,0}(j)$$

对$X_1', X_2', \cdots, X_N'$建立微分方程，有：

$$\frac{dX_1'}{dt} + aX_1' = b_1 X_2' + b_2 X_3' + \cdots + b_{N-1} X_N'$$

若令 $$\alpha = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & \cdots & b_{N-1} \end{pmatrix}'$$

那么有$\hat{\alpha} = (B'B)^{-1} B'Y_n$

其中：

$$B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\left[X_1'(1)+X_1'(2)\right] & X_2'(2) & \cdots & X_N'(2) \\ -\frac{1}{2}\left[X_1'(2)+X_1'(3)\right] & X_2'(3) & \cdots & X_N'(3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{1}{2}\left[X_1'(m-1)+X_1'(m)\right] & X_2'(m) & \cdots & X_N'(m) \end{pmatrix}$$

$$Y_n=\begin{pmatrix} X_1^{0}(2) \\ X_1^{0}(3) \\ \vdots \\ X_1^{0}(m) \end{pmatrix}$$

预测模型为：

$$\hat{X}_1'(k+1)=\left[X_1^{0}(1)-\frac{1}{a}\sum_{i=2}^{m}b_{i-1}\cdot X_i'(k+1)\right]e^{-ak}+\frac{1}{a}\sum_{i=2}^{m}b_{i-1}\cdot X_i'(k+1)$$

例：某地种草养兔发展畜牧业，试预测1994年当种兔数为400只，种草面积为500亩时的售兔收入：

年度	1989	1990	1991	1992	1993
序号	1	2	3	4	5
售兔收入	4384	7625	10500	11316	17818
种兔数	83	131	180	195	306
种草面积	146	212	233	259	404

解：

i	1	2	3	4	5
$X_1'(i)$	4384	12009	22509	33825	51643
$X_2'(i)$	83	214	394	589	895
$X_3'(i)$	146	358	591	850	1254

$$B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\left[X_1'(1)+X_1'(2)\right] & X_2'(2) & X_3'(2) \\ -\frac{1}{2}\left[X_1'(2)+X_1'(3)\right] & X_2'(3) & X_3'(3) \\ -\frac{1}{2}\left[X_1'(3)+X_1'(4)\right] & X_2'(4) & X_3'(4) \\ -\frac{1}{2}\left[X_1'(4)+X_1'(5)\right] & X_2'(5) & X_3'(5) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8196.5 & 214 & 358 \\ -17259 & 394 & 591 \\ -28167 & 589 & 850 \\ -42734 & 895 & 1254 \end{pmatrix}$$

$$Y_n = \begin{pmatrix} 7625 & 10500 & 11316 & 17818 \end{pmatrix}'$$

$$\therefore \widehat{\alpha} = (B^T B)^{-1} B^T Y_n = \begin{pmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.036 \\ 135.25 \\ -12.93 \end{pmatrix}$$

预测模型$GM(1,3)$为:

$$\hat{X}_1'(j+1) = \left[X_1{}^0(1) - \frac{b_1}{a} X_2'(j+1) - \frac{b_2}{a} X_3'(j+1) \right] e^{-2.036j}$$

$$+ \frac{b_1}{a} X_2'(j+1) + \frac{b_2}{a} X_3'(j+1)$$

$$= \left[4384 - 66.42096 X_2'(j+1) + 6.3536 X_3'(j+1) \right] e^{-2.036j}$$

$$+ 66.42096 X_2'(j+1) - 6.3536 X_3'(j+1)$$

模型检验：

i	1	2	3	4	5
$\hat{X}_1'(i)$	4384	10953.39	22107.75	33656.18	51465.71
$X_1^0(i)$	4384	7625	10500	11316	17818
$\hat{X}_1^0(i)$	4384	6569.39	11154.36	11548.43	17809.53
$\Delta(i)$	0	1055.61	654.36	232.43	8.47
$\eta(i)$	1	0. 33	0.446	0.694	0.984

$$r = 0.6908 > 0.6$$

$\therefore$ 可以用来预测

1984年： $X_2{}^0(6)=400$ $X_2'(6)=895+400=1295$

$X_3{}^0(6)=500$ $X_2'(6)=1254+500=1754$

代入$GM(1,3)$模型，有：

$$\hat{X}_1'(6)=\left[4384-66.42096X_2'6)+6.3536X_3'(6)\right]e^{-2.036\times 5}$$

$$+66.42096X_2'(6)-6.3536X_3'(6)=74870.28$$

$$\hat{X}^0(6)=\hat{X}_1'(6)-\hat{X}_1'(5)=74870.28-51465.71=23404\text{元}$$

七、灾变预测：

例：有17年降雨量的历史数据如下，当年平均降雨量$X^0(i)$超过1000mm就会形成水灾。试预测何时还会发生水灾。

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$X^0(t)$	985	813	1015	756	887	798	993	1258	897
t	10	11	12	13	14	15	16	17	
$X^0(t)$	1215	698	961	873	1587	793	862	1325	

解：由原始序列转换为灾变序列：

i	1	2	3	4	5	←第几次出现灾变
$t^0(i)$	3	8	10	14	17	←出现灾变的时间
$t'(i)$	3	11	21	35	52	AGO

由$t'(i)$构造$GM(1,1)$模型：

$$B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(3+11) & 1 \\ -\frac{1}{2}(11+21) & 1 \\ -\frac{1}{2}(21+35) & 1 \\ -\frac{1}{2}(35+52) & 1 \end{pmatrix} \quad Y_n=\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix} \quad \hat{\alpha}=\begin{pmatrix} -0.2536 \\ 6.258 \end{pmatrix}$$

预测模型为：

$$\hat{X}'(k+1)=27.6767e^{0.2536k}-24.6767$$

$$\therefore\ \hat{X}'(6)=73.67\approx 74 \qquad \hat{X}'(5)=51.64\approx 52$$

$$\hat{X}^{0}(6)=\hat{X}'(6)-\hat{X}'(5)=74-52=22$$

$\therefore$ 下一次水灾发生的时间为第22年。