第十一章　效用决策

例：有两个投资方案

方案A：有45%的把握获利50万元，有55%的可能亏损20万元（扣除了投资费用）

方案B：有100%的把握盈利10万元

若：（1）根据期望收益决定：

$$EA = 0.45 \times 50 - 0.55 \times 20 = 11.5\text{万元}$$

$$EB = 10\text{万元}$$

（2）保险起见，选B:

若A的概率换为50%为盈利50万元,50%亏损20万元

则可能选A

由于决策者价值观念不同，偏好不同或经济地位不同，

因而对待风险的态度也不同

即：决策的后果对决策者产生的效用不同。

一、概念

1、效用：决策者对决策后果的一种感受、反应或倾向，是决策者的价值观和偏好在决策活动中的综合反映。

在实际中，通常不是把期望损益值的大小作为判定选优的唯一标准，而是要把它与人的独特兴趣、心理偏好及价值观念等主观因素融合起来，化归为对各种行动的效用测量，再根据各行动效用的大小，选择最佳方案。

2、效用函数

记　展望　$P_1=\left(p_1,C_1;p_2,C_2;\cdots;p_n,C_n\right)$　第一种策略的后果

$P_2=\left(p_1,C_1;p_2,C_2;\cdots;p_n,C_n\right)$　第二种策略的后果

$\vdots$

$P_{\mathrm{m}}=\left(p_1,C_1;p_2,C_2;\cdots;p_n,C_n\right)$　第m种策略的后果

记展望集 $F=\{P_1,P_2,\cdots,P_m\}$

F中的元素有优先关系： $P_i \succ P_j$ 优于

$P_i \geq P_j$ 优于或无差异于

$P_i \sim P_j$ 无差异

定义效用函数$u:u$是定义在集合F上的实值函数

(1) $\forall P_i,P_j \in F$

$$u(P_i)\geq u(P_j) \Leftrightarrow P_i \geq P_j$$

(2) $\forall P_i,P_j \in F,\ 0\leq \lambda \leq 1$

$$u(\lambda P_i+(1-\lambda)P_j)=\lambda u(P_i)+(1-\lambda)u(P_j)$$

另： $u(P)=\sum P_i u(C_i)$

二、N－M心理试验法

1944年　　*Neumann* 和 *Morgenstern*

核心：　不断重复试验，向决策者提问，征得平衡点

平衡点：假定决策者面临两种方案，一是他将肯定获得一笔货币收益，二是他将冒险获得另一笔期望收益，当他认为两种效用等同时，就求解平衡点。

例：方案A：　以50%得300元；　以50%得0元

　　方案B：　稳拿50元

解：　$u(300)=1 \quad u(0)=0$

次数	方案A	方案B	选择	
1	$(0.5,300;0.5,0)$	稳拿50	B	$u(50)>0.5\times u(300)+0.5\times u(0)$
2	$(0.7,300;0.3,0)$	稳拿50	B	$u(50)>0.7\times u(300)+0.3\times u(0)$
3	$(0.8,300;0.2,0)$	稳拿50	随便	$u(50)=0.8\times u(300)+0.2\times u(0)=0.8$
4	$(0.5,50;0.5,300)$	稳拿100	B	$u(100)>0.5\times u(50)+0.5\times u(300)$
5	$(0.4,50;0.6,300)$	稳拿100	B	$u(100)>0.4\times u(50)+0.6\times u(300)$
6	$(0.3,50;0.7,300)$	稳拿100	随便	$u(100)=0.3\times u(50)+0.7\times u(300)=0.94$
7	$(0.5,0;0.5,50)$	稳拿20	B	$u(20)>0.5\times u(0)+0.5\times u(50)$
8	$(0.3,0;0.7,50)$	稳拿20	随便	$u(20)=0.3\times u(0)+0.7\times u(50)=0.56$

用$u(0)$，$u(20), u(50), u(100), u(300)$可得效用曲线。

三、效用曲线的类型及应用

1、效用曲线的类型

(1)保守型效用曲线：上凸曲线

对损失反应敏感，对效益反应迟钝，

对风险采取回避的原则。

例： $u(20)=0.56>u(0.2\times 100+0.8\times 0)=0.2\times 0.94=0.188$

$$u(100)=0.94>u(\frac{1}{3}\times 300+\frac{2}{3}\times 0)=\frac{1}{3}\times 1=0.333$$

特点：可以确定得到的收益，其效用总是大于有风险取得的同等期望收益的效用。

(2)风险中立者的效用曲线：直线

决策者以期望收益值的大小作为选择标准

例： $A: 0.5 \ \ 200; \ \ 0.5 \ \ 0 \qquad B:$稳拿100

$$E(A) = 100 = E(B)$$

$$u(A) = u(B)$$

(3)冒险型效用曲线：下凸曲线

对收益敏感，对风险反应迟钝，敢于冒险

上例： $u(A) > u(B)$

特点：可以确定得到的收益，其效用总是小于有风险得到的等量期望收益的效用。

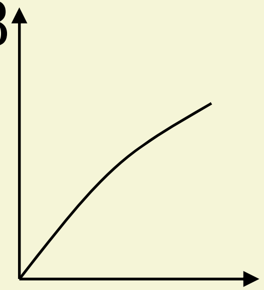
2、应用

市场 损益值 方案	畅 0.3	等 0.5	滞 0.2
A	12	6	−10
B	8	3	−2
C	4	4	4

解： $u(12)=1 \quad u(-10)=0$，计算效用曲线

得到 $u(-2)=0.66 \quad u(3)=0.85 \quad u(4)=0.88$

$u(6)=0.94 \quad u(8)=0.97$



则方案A的期望效用值为:

$u(12)\times 0.3+u(6)\times 0.5+u(-10)\times 0.2=0.77$

B方案：$u(8)\times 0.3+u(3)\times 0.5+u(-2)\times 0.2=0.85$

C方案: $u(4)\times 0.3+u(4)\times 0.5+u(4)\times 0.2=0.88$

$\therefore$ C方案

四、贝努利效用函数拟合

人们对其钱财真实价值的考虑，与他们钱财拥有量之间具有对数关系：

(1) 效用随货币额的增加而增大，即u是增函数，$u' > 0$

(2) 边际效用递减，当在某一定货币值上每获得一个单位的货币增量时，效用也有一个增量，随着货币额的增加，效用取得的增量是在逐渐减小的，也就是$u'' < 0$

$u(x) = a + b \cdot \ln(x + c)$　　找三个点，可确定a, b, c

保守型效用曲线

例：某大型化工企业为了解决生产中的技术难题正在研制甲、乙两种新型材料，成功的概率为0.8，失败的概率为0.2。甲若成功，可获利1000万元，若不成功，亏损800万元；乙若成功，可获利700万元，失败则无收益。试决策。

解：$u(1000)=1 \quad u(-800)=0$

进行一次$N\text{-}M$心理试验，得$u(-300)=0.5$，

则：$\begin{cases} u(1000)=a+b\cdot\ln(1000+c)=1 \\ u(-800)=a+b\cdot\ln(-800+c)=0 \\ u(-300)=a+b\cdot\ln(-300+c)=0.5 \end{cases} \quad \begin{cases} c=1112.5 \\ b=0.5233 \\ a=-3.0061 \end{cases}$

$$\therefore u(x) = -3.0061 + 0.5233 \cdot \ln(x + 1112.5)$$

$$u(700) = -3.0061 + 0.5233 \cdot \ln(700 + 1112.5) = 0.9200$$

$$u(0) = -3.0061 + 0.5233 \cdot \ln 1112.5 = 0.6645$$

求得A，B方案的期望效用：

$$u(A) = 0.8 \times 1 + 0.2 \times 0 = 0.8$$

$$u(B) = 0.8 \times 0.9200 + 0.2 \times 0.6645 = 0.8689$$

$$\therefore B$$

五、综合的效用函数拟合法：

综合反应三种类型决策人的效用观点

1、L - A效用函数

$$u(x) = a(x + c)^b$$

得到 $(x_+, 1)$ $(x_-, 0)$ $(\overline{x}, 0.5)$代入方程

$$\begin{cases} a(x_+ + c)^b = 1 \\ a(\overline{x} + c)^b = 0.5 \\ a(x_- + c)^b = 0 \end{cases}$$

解得： $c = -x_-$

$$b = \frac{\ln 2}{\ln(x_+ - x_-) - \ln(\overline{x} - x_-)}$$

$$a = \frac{1}{(x_+ - x_-)^b}$$

分析:(1) $u'(x) = ab(x+c)^{b-1}$

$\because a > 0 \quad b > 0 \quad x + c = x - x_{\_} > 0$

$\therefore u'(x) > 0 \quad u$是增函数

(2) $u''(x) = ab(b-1)(x+c)^{b-2}$则

若 $b > 1 \quad u''(x) > 0$,边际效用递增，$u(x)$下凸

冒险型

若 $b = 1 \quad u''(x) = 0$,边际效用恒等

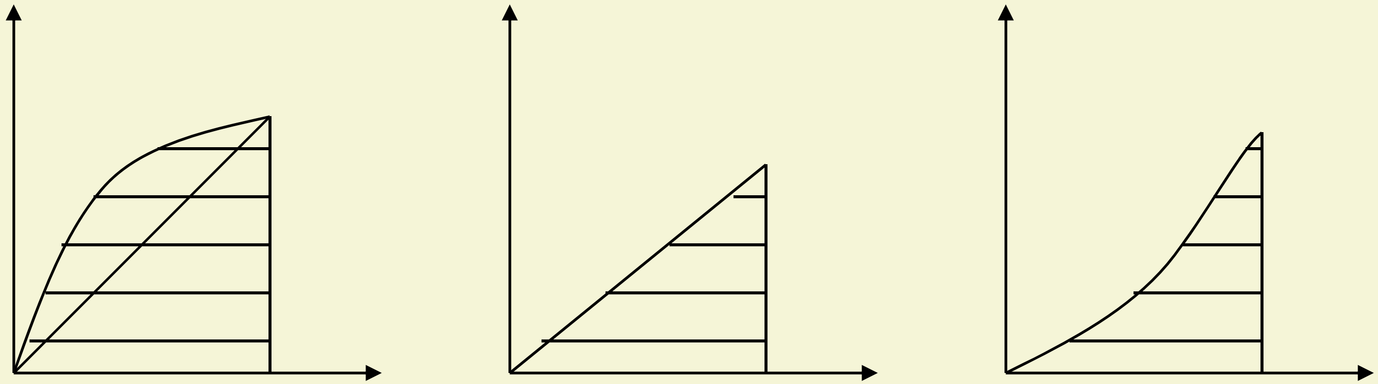
中间型

若$0 < b < 1 \quad u''(x) < 0$,边际效用递减，$u(x)$上凸

保守型

2、*L*－*A*冒险系数

描述每一类决策者的冒险程度，用效用曲线偏离期望效用直线的程度来衡量。



$$RLA=\frac{\text{效用直线下三角形面积}-\text{某效用曲线下的曲边三角形面积}}{\text{效用直线下三角形面积}}$$

$$\because S_{\Delta}=\frac{1}{2}(x_{+}-x_{-})$$

$$S_{\text{曲边三角形}}=a\int_{x_{-}}^{x_{+}}(x+c)^{b}dx=\frac{a}{b+1}\left[(x_{+}+c)^{b+1}-(x_{-}+c)^{b+1}\right]$$

$$=\frac{x_{+}-x_{-}}{b+1}$$

$$\therefore RLA=1-\frac{2}{b+1}$$

RLA分为三种类型：

(1)若$0<b<1$,则$RLA<0$　保守型

(2)若$b=1$,　则$RLA=0$　中间型

(3)若$b>1$,　则$RLA>0$　冒险型

六、效用函数表的编制及其应用

不需解方程和求拟合效用函数。

希望建立一个效用函数表，只要知道货币收益额，就能从表中直接查出其对应的效用值。

1、效用函数表的构造方法

(1)将已知的货币收益值归一化：

$$y = \frac{x - x_-}{x_+ - x_-}$$

(2)经过一次N—M心理试验，确定$\overline{x}$，满足：

$$u(\overline{x}) = 0.5$$

$\overline{x}$称为折中收益额，将其归一化，得

$$y_\xi = \frac{\overline{x} - x_-}{x_+ - x_-}$$

(3)规定精度要求为n，即把效用区间[0,1]等分为2^n份，
同时把已归一化的收益区间[0,1]也分为2^n个区段，

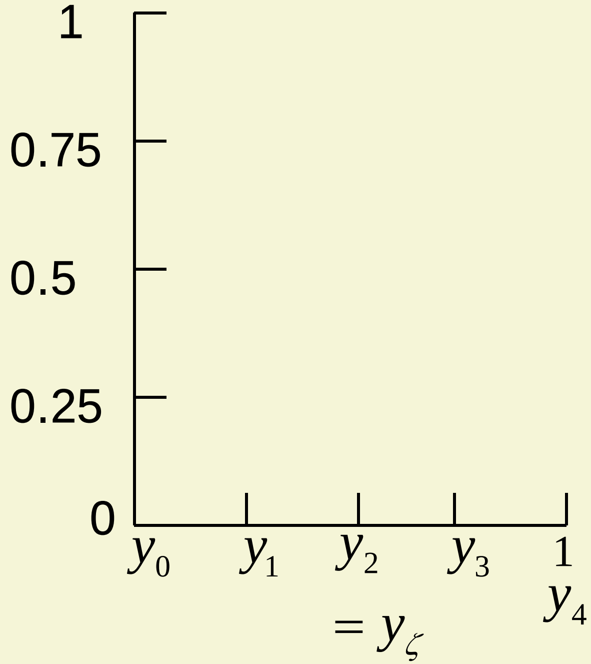
假令分点为$y_1, y_2, \cdots, y_{2^n-1}$，使得$u(y_i)=\dfrac{i}{2^n}$

例：若假设$n=2$，即把效用区间[0,1]分为4等分，其效用值分别为：

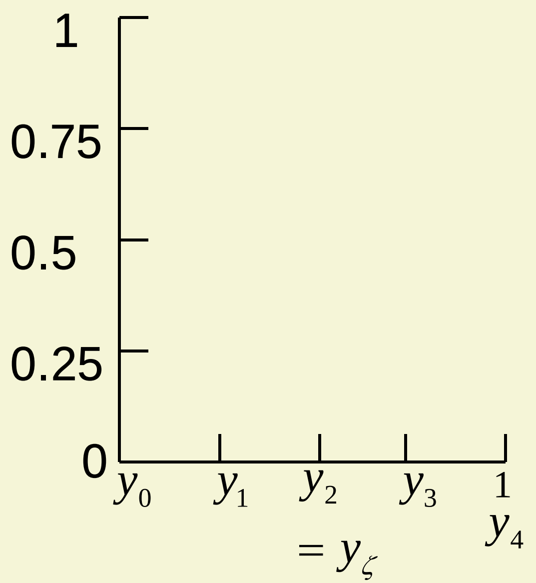
0,0.25,0.5,0.75,1

其对应的横坐标值依次记为：

$$y_0=0,\quad y_1,\quad y_2=y_\xi,\quad y_3,\quad y_4=1$$



为求y_1，y_3 按比例关系：



$$\begin{cases} \dfrac{y_1 - y_0}{y_2 - y_0} = \dfrac{y_2 - y_0}{y_4 - y_0} \\ \dfrac{y_3 - y_2}{y_4 - y_2} = \dfrac{y_2 - y_0}{y_4 - y_0} \end{cases}$$

得到：$y_1 = y_0 + (y_2 - y_0)^2 = y_\xi^2$

$$y_3 = y_2 + (1 - y_2)\cdot y_2 = y_\xi + y_\xi - y_\xi^2 = 2y_\xi - y_\xi^2$$

构造了效用函数表如下：

$u(x)$ \ x \ y_ξ	$\cdots$	$\cdots$	y_ξ
0.25			$\vdots$
0.5			$\vdots$
0.75			$\vdots$
$\vdots$			$\vdots$

常用效用函数表取$n = 6$

例：某企业欲投产一种新产品，有三种方案可供选择，它们在畅销、一般、滞销三种市场状态下的收益如下：

$$\begin{pmatrix} 9.5 & 6.2 & 2.0 \\ 20.0 & 7.5 & -5.0 \\ 14.0 & 6.0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

另外，企业的决策者认为,若某风险方案盈利20万元和亏损5万元的机会各占一半，等价于稳获利4.5万元的无风险方案，试用效用函数决策。（市场畅销、一般、滞销的概率分别为0.3、0.4、0.3）

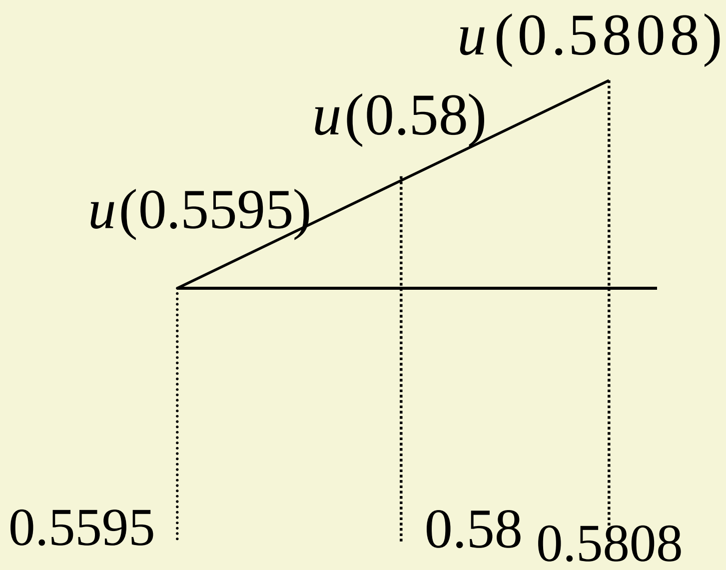
解：$y_0 = 0 \quad y_1 = 1$

$$y_\xi = \frac{4.5+5}{20+5} = 0.38$$

$$y = \frac{9.5+5}{20+5} = 0.58$$

效用函数表：

$u(y)$ \ y \ y_ξ	$\cdots$	$\cdots$	0.38
0.015625			$\vdots$
$\vdots$			$\vdots$
0.718750			0.559450
0.734375			0.580787
$\vdots$			$\vdots$



用线性内插公式：

$$\frac{u(0.58)-u(0.5595)}{u(0.5808)-u(0.5595)}=\frac{0.58-0.5595}{0.5808-0.5595}$$

同理，可得其它的效用函数值：

$$u=\begin{pmatrix} 0.7338 & 0.6094 & 0.4306 \\ 1 & 0.6715 & 0 \\ 0.8750 & 0.6010 & 0.2070 \end{pmatrix}$$

各方案的期望效用值为：

$$u\cdot\begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 0.3 \end{pmatrix}=$$