定轴转动动能定理

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta=\frac{1}{2}J\omega_2{}^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$$

既有质点平动又有刚体定轴转动的系统：

$$A_{所有力矩}+A_{所有力}=E_{k2}-E_{k1}$$ ——系统的动能定理

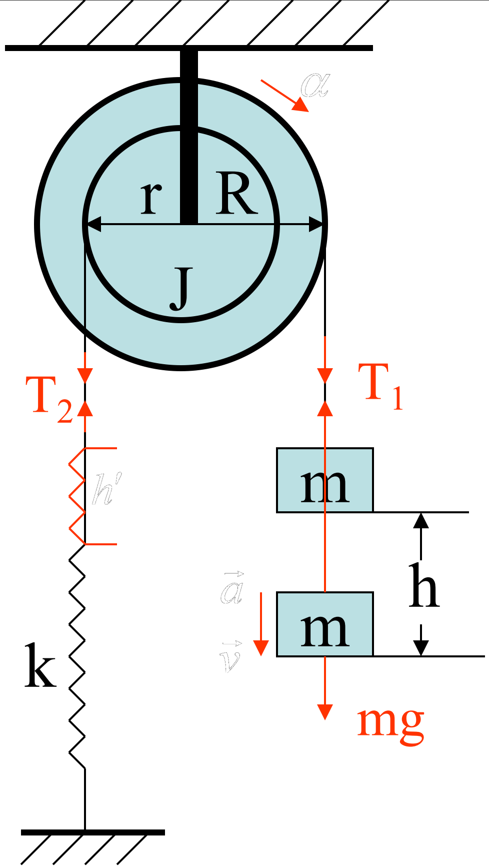
其中：$E_k=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2$

$$A_{外力矩}+A_{外力}+A_{非保内力矩}+A_{非保内力}=E_2-E_1$$

其中：$E=E_k+E_p$ ——系统的功能原理

若：$A_{外力矩}+A_{外力}+A_{非保内力矩}+A_{非保内力}=0$

则：$E_2=E_1$ ——系统机械能守恒



例2：J、K、m、r、R

开始时m静止，弹簧处于自然长度

求：释放m后，m下落h时a=?, v=?

解: $\{m\}$:　$mg - T_1 = ma$　(1)

$\{J\}$:　$T_1R - T_2r = J\alpha$　(2)

$T_2 = kh' = k\dfrac{r}{R}h$　(3)

$a = R\alpha$　(4)

(1)–(4) ⟹ a

$\{m、J、地面、弹簧\}$:　$E_1 = E_2$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}kh'^2$$

$$h' = \frac{r}{R}h, \qquad v = R\omega$$

⟹ V

3.4 刚体的角动量定理和角动量守恒定律

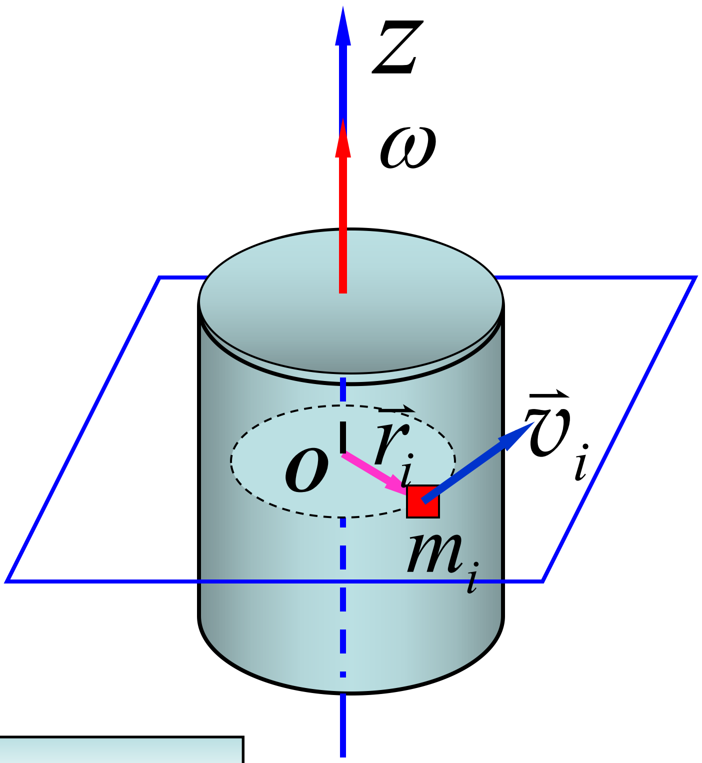
力的时间累积效应 ⇨ 冲量、动量、动量定理.

力矩的时间累积效应 ⇨ 冲量矩、角动量、角动量定理.

一. 刚体定轴转动的角动量

$$L = \sum_i m_i r_i v_i = (\sum_i m_i r_i^2)\omega$$

$$\boxed{L = J\omega}$$



二. 刚体定轴转动的角动量定理

$$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t = J\omega_2 - J\omega_1}$$

非刚体定轴转动的角动量定理 $\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t = J_2\omega_2 - J_1\omega_1$

刚体定轴转动的角动量定理 $\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M \mathrm{d}t = J\omega_2 - J\omega_1}$

三. 刚体定轴转动的角动量守恒定律

若 $M = 0$，则 $\boxed{L = J\omega = 常量}$

讨论

- 守 恒条件 $M = 0$

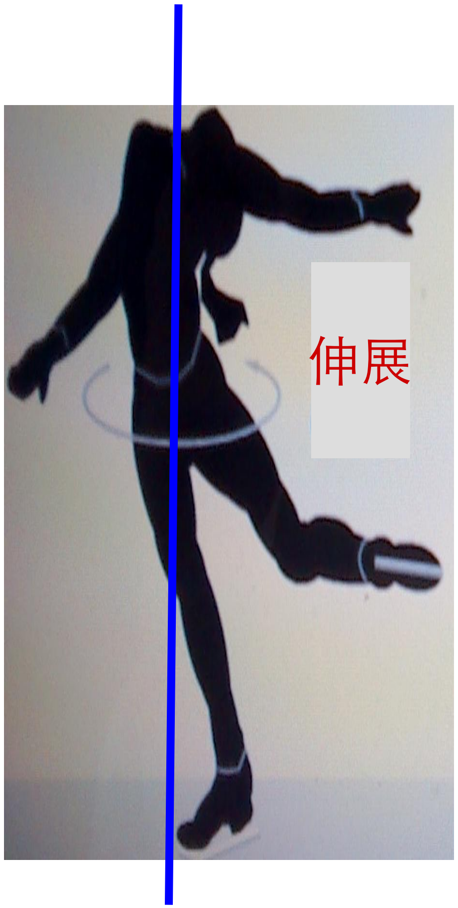
若 J 不变，ω 不变；若 J 变，ω 也变，但 $L = J\omega$ 不变.

- 内力矩不改变系统的角动量.
- 在冲击等问题中 $\because M^{\mathrm{in}} >> M^{\mathrm{ex}} \therefore L \approx$ 常量
- 角动量守恒定律是自然界的一个基本定律.

四. 角动量守恒的应用

2013年花样滑冰世锦赛-李子君

$M = 0$ $J\omega =$ 常量

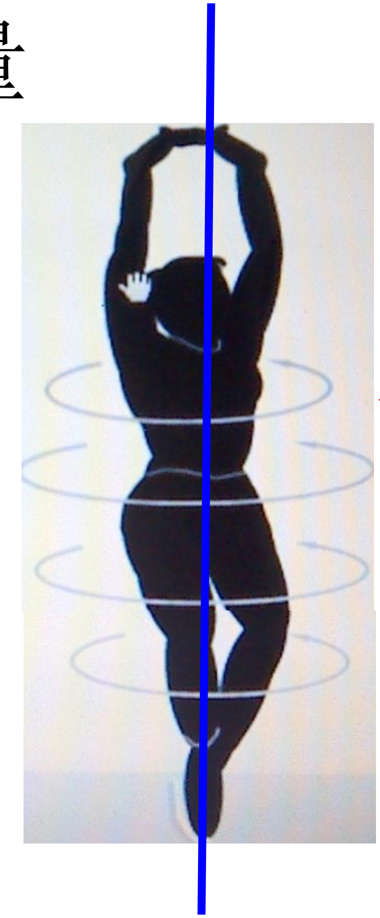


支持力

J大

重力

J小



合拢

ω小

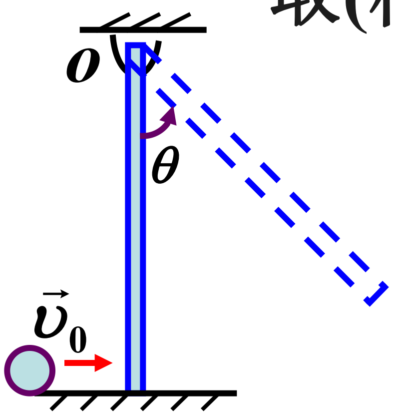
ω大


优酷
CBC
アコム
CITIZEN

例1 细杆(M, l)可绕水平轴 o 转动，开始静止，小球(m)沿光滑水平面飞来，与杆作完全弹性碰撞，使杆上升到$\theta = 60^o$。

求(1) 小球的初速度υ_0?

取(杆＋球)

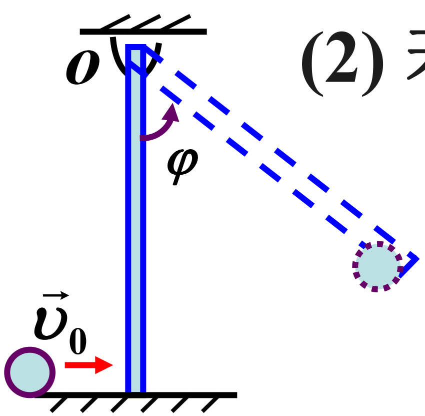


(1) $$m\upsilon_0 l = m\upsilon l + J\omega$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = Mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

解得 $$\upsilon_0 = \frac{M+3m}{2m}\sqrt{\frac{gl}{6}}$$



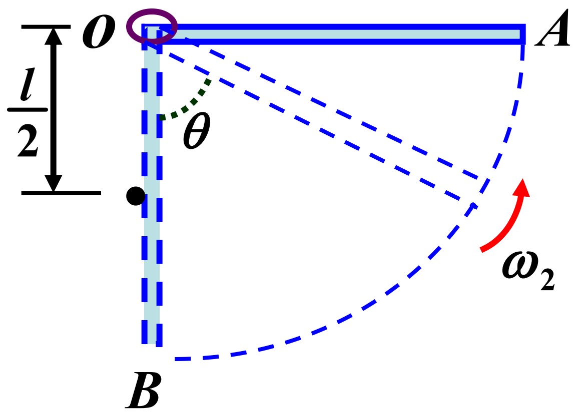
(2) 若完全非弹性碰撞，系统的最大偏向角?

$$m\upsilon_0 l = J\omega \qquad J = \frac{1}{3}Ml^2 + ml^2$$

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = Mg\frac{l}{2}(1-\cos\varphi) + mgl(1-\cos\varphi)$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{3m^2\upsilon_0^2}{(M+3m)(M+2m)gl}$$

例2 细杆(m, l) 可绕 o 轴转动, 在o 处正下方$l/2$的A点有一铁钉, 若杆由水平自由下落, 至A点与钉相碰后沿反方向弹回至$\theta=60^o$ 时, 角速度ω_2, 求碰撞时杆对钉的冲量。



设杆碰撞前后分别为ω_0和ω_1

$$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}J\omega_0^2$$

$$\int Mdt=J\omega_1-(-J\omega_0)$$

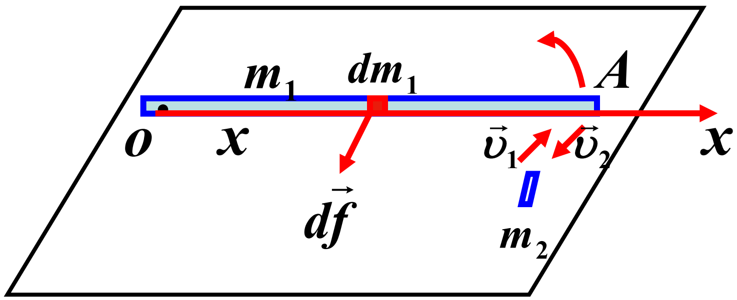
$$\int f\frac{l}{2}dt=J\omega_1+J\omega_0$$

$$\frac{1}{2}J\omega_1^2=mg\frac{l}{2}(1-cos\theta)+\frac{1}{2}J\omega_2^2$$

$$I=\int fdt=\frac{2}{3}ml(\sqrt{\frac{3g}{2l}+\omega_2^2}+\sqrt{\frac{3g}{l}})$$

碰撞过程中机械能损失 $\Delta E=\frac{1}{2}J\omega_1^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$

例3 细杆(m_1, l) 静止平放在有摩擦(μ) 的水平面上, 可绕竖直轴 o 转动。有一滑块(m_2)与杆A端相碰, 碰撞前后速度分别为$\vec{\upsilon}_1$和$\vec{\upsilon}_2$, 求杆从开始转动到停止所需的时间?



$$m_2\upsilon_1 l = J\omega_0 - m_2\upsilon_2 l$$

$$\omega_0 \to 0 \qquad t = ?$$

$$df = \mu dm_1 g = \mu\lambda dx \cdot g$$

$$dM = -xdf = -\mu\lambda gxdx$$

$$M = \int dM = -\int_0^l \mu\lambda gxdx = -\frac{\mu m_1 gl}{2}$$

$$M = J\alpha \qquad -\frac{\mu m_1 gl}{2} = \frac{1}{3}m_1 l^2\alpha$$

$$\underset{0}{\underset{\parallel}{\omega}} = \omega_0 + \alpha t$$

解得 $t = \dfrac{2m_2(\upsilon_1 + \upsilon_2)}{\mu m_1 g}$