三　调和方程

3.1 调和方程及其基本解

稳定温度场方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z) \qquad （3.1）$$

Poisson(泊松)方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad （3.2）$$

称为 **Laplace**（拉普拉斯）方程，简记 $\Delta u=0$

上页　下页　返回

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

三维Laplace算子

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

二维Laplace算子

Laplace方程又称调和方程。

满足调和方程的连续函数称为调和函数。

基本解

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是三维空间中的一个固定点，

$$u^*(x,y,z)=\frac{1}{4\pi r}$$

这里 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$

除 M_0 外， u^* 处处满足 $\Delta u=0$， u^* 称为基本解。

在二维空间， $M_0(x_0,y_0)$ 为一个固定点，

$$u^*(x,y)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$$

这里 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，除 M_0 外， u^* 处处满足 $\Delta u=0$，也称为基本解。

上页 下页 返回

3.2 基本积分公式和平均值公式

格林公式的推导

设函数 $u(x,y,z)$ 和 $v(x,y,z)$ 在 $\Omega+\Gamma$ 上具有一阶连续偏导数，在 Ω 内具有连续的所以二阶偏导数

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

$$=\iint_{\Gamma}\left[P\cos(\vec{n},x)+Q\cos(\vec{n},y)+R\cos(\vec{n},z)\right]ds$$

上页 下页 返回

令 $P=u\dfrac{\partial v}{\partial x}, Q=u\dfrac{\partial v}{\partial y}, R=u\dfrac{\partial v}{\partial z}$

则有

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v)dV+\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)dV=\iint_{\Gamma}u\frac{\partial v}{\partial n}dS$$

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v)dV=\iint_{\Gamma}u\frac{\partial v}{\partial s}dS-\iiint_{\Omega}gradu\cdot gradvdV$$

第一Green公式

将 u,v 交换位置得:

$$\iiint_{\Omega}(v\Delta u)dV = \iint_{\Gamma} v\frac{\partial u}{\partial s}dS - \iiint_{\Omega} gradu\cdot gradvdV$$

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)dV = \iint_{\Gamma}(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial s})dS \ .$$

第二Green公式

以 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为中心，以充分小的正数 ε 为半径的球面 Γ_ε，在内 Ω 挖去 Γ_ε 所包围的球域 K_ε，得到区域 $\Omega - K_\varepsilon$，在 $\Omega - K_\varepsilon$ 中直到边界上 $v = \dfrac{1}{4\pi r}$ 是任意次连续可微的。代入第二格林公式:

$$\iiint\limits_{\Omega-K_\varepsilon}\left(u\Delta\left(\frac{1}{4\pi r}\right)-\frac{1}{4\pi r}\Delta u\right)dV = \iint\limits_{\Gamma+\Gamma_\varepsilon}\left[\left(u\frac{\partial\left(\frac{1}{4\pi r}\right)}{\partial n}-\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right]dS$$

因为在$\Omega-K_\varepsilon$内$\Delta u=0,\Delta\left(\frac{1}{4\pi r}\right)=0$，而在球面$\Gamma_\varepsilon$上

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{4\pi r}\right)}{\partial n}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{4\pi r}\right)}{\partial r}=\frac{1}{4\pi r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}$$

$$\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon}u\frac{\partial\left(\frac{1}{4\pi r}\right)}{\partial n}dS=\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon}udS=\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\cdot 4\pi\varepsilon^2\overline{u}=\overline{u}$$

同理可得：

$$\iint_{\Gamma_\varepsilon}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\frac{\partial u}{\partial n}dS=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}dS=\varepsilon\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial n}}\right)$$

这里 $\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial n}}\right)$ 是 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在 Γ_ε 上的平均值。

$$\iint_{\Gamma_\varepsilon}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)-\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS+\bar{u}-\varepsilon\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial n}}\right)=0$$

令 $\varepsilon\to 0$，由于 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\bar{u}=u(M_0),\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial n}}\right)=0$

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\int\int_{1>}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]dS$$

这里$r_{M_0M}=r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$

$$U(M_0)=-\int_P\left(u\frac{\partial u^*}{\partial n}-u^*\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$ 基本积分表达式

三维 $u^*(x,y,z)=\dfrac{1}{4\pi r}$,

二维 $u^*(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r}$, $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

在第二格林公式中用 $v \equiv 1$ 代入，得 $\iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$

牛曼内问题 $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = f \end{cases}$ 有解的必要条件 $\iint_{\Gamma} f dS = 0$

平均值公式

设函数 $u(M)$ 在某区域 Ω 内都是调和的，M_0 是 Ω 内任一点，K_a 表示以 M_0 为中心，以 a 为半径且完全落在区域 Ω 内部的球面，则

因为在 K_a 上 $\frac{1}{r}=\frac{1}{a}, \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{a^2}$ 以及

$$\iint_{K_a}\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial u}{\partial n}dS=\frac{1}{4\pi a}\iint_{K_a}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0$$

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint_{K_a}udS$$

平均值公式

二维调和函数的平均值公式

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_{\Gamma_R}uds$$

3.3 极值原理及其应用

定理 5(极值原理)：设 $u(x,y)$ 在闭区域 $\overline{\Omega}$ 上连续，并且在 Ω 内是调和函数，如果 $u(x,y)$ 不恒等于常数，则它不能在 Ω 内取到最大值和最小值。

定理 6：若 **Poisson** 方程第一边值问题 $\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\Gamma} = \varphi \end{cases}$

有解，则解唯一，并且解连续依赖于边界条件。

定理 7：若 **Poisson** 方程第二边值问题：$\begin{cases} \Delta u = f \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{1^{>}} = \varphi \end{cases}$

解除一个常数外也是唯一的。

3.4 园域上的Poisson公式

二维调和方程的第一边值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (x,y)\in\Omega_R \\ u\big|_{\Gamma_R} = f(\vartheta) \end{cases}$$

这里 Ω_R 为半径 R 的圆域， $\vartheta=\arctan\dfrac{y}{x}$。

利用极坐标变换： $\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta \end{cases}$

上页 下页 返回

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = 0, \quad \rho < R \\ u(\rho_0, \vartheta) = f(\vartheta) \end{cases}$$

用分离变量法求解，令 $u(\rho,\vartheta) = R(\rho)\Theta(\vartheta)$

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$ 待定常数

得：$\Theta'' + \lambda\Theta = 0$

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0$$

$\because (\rho,\vartheta)$ 为极坐标，因此 $u(\rho,\vartheta)=u(\rho,\vartheta+2\pi)$，可得： $\Theta(\vartheta+2\pi)=\Theta(\vartheta)$；且 $|u(0,\vartheta)|<\infty$， 可得： $|R(0)|<+\infty$。

解方程： $\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(\vartheta+2\pi)=\Theta(\vartheta) \end{cases}$

当 $\lambda<0$ 时， Θ 无非零解

当 $\lambda=0$ 时， $\Theta=c_0$

当 $\lambda>0$ 时， $\Theta=c\cos\sqrt{\lambda}\vartheta+d\sin\sqrt{\lambda}\vartheta$

$\because \Theta(\vartheta)$ 以 2π 为周期，故 $\sqrt{\lambda}=n \quad n=1,2,\cdots$

上页 下页 返回

$$\Theta_n(\vartheta) = c_n \cos n\vartheta + d_n \sin n\vartheta \quad n = 1,2,\cdots$$

对于欧拉方程： $\rho^2 R'' + \rho R' - n^2 R = 0 \quad n = 0,1,2,\cdots$，

求解得：

$$R_0 = a_0 + b_0 \ln \rho$$

$$R_n = a_n \rho^n + b_n \rho^{-n} \quad n = 1,2,\cdots$$

由于 $|R(0)| < +\infty$，故 $b_n = 0 \quad n = 0,1,2,\cdots$

利用叠加原理

$$u(\rho,\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta)$$

上页 下页 返回

$$f(\vartheta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\rho_0^n(a_n\cos n\vartheta+b_n\sin n\vartheta)$$

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\vartheta)d\vartheta \\ a_n=\dfrac{1}{\rho_0^n\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\cos n\vartheta d\vartheta \\ b_n=\dfrac{1}{\rho_0^n\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\sin n\vartheta d\vartheta \end{cases}$$

$$u(\rho,\vartheta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n \cos n(\vartheta-t)\right]dt$$

利用恒等式:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}k^n \cos n(\vartheta-t)=\frac{1}{2}\frac{1-k^2}{1-2k\cos(\vartheta-t)+k^2}$$

$$(|k|<1)$$

$$u(\rho,\vartheta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\frac{\rho_0^2-\rho^2}{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos(\vartheta-t)}dt$$

上页 下页 返回

例 1：在扇形区域内求下列定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u\big|_{\vartheta=0} = u\big|_{\vartheta=\alpha} = 0 \\ u\big|_{\rho=a} = f(\vartheta) \end{cases}$$

解：作极坐标变换：$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$

方程化为：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\vartheta^2} = 0$

用分离变量法求解，令 $u(\rho,\vartheta) = R(\rho)\Theta(\vartheta)$

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$ 待定常数

上页 下页 返回

得： $\Theta'' + \lambda\Theta = 0$

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0$$

$u\big|_{\vartheta=0} = 0$，可得： $\Theta(0) = 0$

$u\big|_{\vartheta=\alpha} = 0$，可得： $\Theta(\alpha) = 0$。

解方程： $\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(\alpha) = 0 \end{cases}$

当 $\lambda < 0$ 时， Θ 无非零解

当 $\lambda = 0$ 时， Θ 无非零解

当 $\lambda > 0$ 时， $\Theta = c\cos\sqrt{\lambda}\vartheta + d\sin\sqrt{\lambda}\vartheta$

上页 下页 返回

$$\Rightarrow c=0, d\sin\sqrt{\lambda}\alpha=0,$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda}\alpha = n\pi \quad n=1,2,\cdots \Rightarrow \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2$$

$$\Theta_n(\vartheta)=\sin\frac{n\pi}{\alpha}\vartheta \quad n=1,2,\cdots$$

对于欧拉方程：$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda_n R = 0$，求解得：

$$R(\rho)=a_n\rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}+b_n\rho^{-\frac{n\pi}{\alpha}} \quad n=1,2,\cdots$$

由于$|R(0)|<+\infty$，故$b_n=0 \quad n=1,2,\cdots$

利用叠加原理

$$u(\rho,\vartheta)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi}{\alpha}\vartheta$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi}{\alpha}\vartheta=f(\vartheta)$$

$$A_n=\frac{1}{a^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\times\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}f(\vartheta)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\vartheta d\vartheta$$

$$\therefore u(\rho,\vartheta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}f(\vartheta)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\vartheta d\vartheta\right]\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi}{\alpha}\vartheta$$