

中国科学院数学与系统科学研究院
2015 年直博生摸底考试试题 (NK 版)

2609480070@qq.com

2015 年 4 月 16 日

1. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$;

2. 已知 $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, h \neq R$, 求 $\iint_S \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}}$;

3. 已知 $f(x)$ 非线性, 求证

$$\sup_{x \in R} |f'(x)|^2 \leq 4 \sup_{x \in R} |f(x)| \sup_{x \in R} |f''(x)|.$$

4. (1) 设 A 是 n 阶方阵. 证明: A 是幂零的等价于 A 的特征多项式 $f(\lambda) = \lambda^n$;

(2) 求行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-2} & \lambda_2^{r-2} & \cdots & \lambda_r^{r-2} \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{vmatrix}$ 的值;

(3) 设 A 是 n 阶方阵. 证明: A 是幂零的等价于 $\text{tr}(A^p) = 0, 0 \leq p \leq n$;

(4) 定义 $[A, B] = AB - BA$. 证明: 若 $[[A, B], A] = 0$, 则 $[A, B]$ 是幂零的;

(5) 证明: $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$.