

用 Lyapunov 指数分析物理双摆的混沌特征

张伯俊¹, 王 谦¹, 黄东卫²

(1. 天津职业技术师范大学 汽车与交通学院, 天津 300222; 2. 天津工业大学 理学院, 天津 300387)

摘 要: 将一种新型振动机构抽象为双摆的数学力学模型, 分别运用矩阵 QR 分解法、小球演化法以及奇异值分解法, 结合计算机代数系统 Mathematica, 计算了模型的 Lyapunov 指数。结果表明 3 种方法的计算结果基本一致, 从而说明了物理双摆的混沌特征, 并为双摆在工程设计中的应用提供了有价值的参考。

关键词: 物理双摆; Lyapunov 指数; 矩阵 QR 分解; 小球演化法; 奇异值分解法; 混沌特征

中图分类号: N941.3

文献标志码: A

文章编号: 1671-024X(2014)02-0085-04

Analyzing on chaotic properties of double-body pendulum by Lyapunov exponents

ZHANG Bo-jun¹, WANG Qian¹, HUANG Dong-wei²

(1. School of Automotive and Traffic, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin 300222, China; 2. School of Science, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300387, China)

Abstract: A new type of vibration generator was abstracted to the mathematical model of double-body pendulum. Three methods such as QR-decomposition, small-sphere-evolvment and singular-value-decomposition were used respectively in calculating the Lyapunov exponents of the model with Mathematica. The results showed that the results of three method were basically uniform and the chaotic properties of the double-body pendulum was indicated. All the results would be useful for engineering design.

Key words: double-body pendulum; Lyapunov exponents; QR-decomposition; small-sphere-evolvment; singular-value-decomposition; chaotic properties

混沌是一种发生在确定性系统中貌似随机的、复杂的不规则运动, 具有对初始条件极为敏感和长期行为不可预测的特性。混沌理论沟通了确定论和随机论两大对立科学体系, 在确定论和随机论的描述之间架起了由此及彼的桥梁。混沌振动是工程领域研究热点之一。利用混沌宽频特性激起工料的全频域共振, 减少工料内部的咬合摩擦与滑动摩擦等优良性能^[1-2], 可取得最佳压实密度, 对于振动机械设计具有重要意义。一种物理双摆振动发生机构存在着混沌特征。运用绘制 Poincare 截面、计算分形维数和计算 Lyapunov 特征指数等方法^[1]可研究混沌现象。在计算动力系统的 Lyapunov 特征指数时, 有矩阵 QR 分解法、小球演化法以及奇异值分解法等等^[3]。本文将一种新型振动机构抽象为双摆的数学力学模型, 分别运用上述 3 种方法并结合 Mathematica 计算了该模型的 Lyapunov 指数, 以期对物理双摆的混沌特征进行说明。

1 Lyapunov 指数的定义及其计算方法

Lyapunov 特征指数反映的是在经过长时间演化后, 从指定的几个方向观察系统轨道的分离程度。对于维数大于 1 的系统, 沿着不同方向的 Lyapunov 指数的集合称为 Lyapunov 特征指数谱, 每一个 Lyapunov 指数刻画系统的两条相互靠近的轨道沿某一特定方向按指数相互分离或靠拢的程度。

1.1 离散系统 Lyapunov 指数的定义

考虑如下 m 维离散动力系统:

$$X_{n+1} = F(X_n) \quad (1)$$

设 $\{X_n\}$ 是该系统的一条轨道, ΔX_n 为偏离该轨道的一微小量, 则 ΔX_n 的演化满足^[3]

$$\Delta X_{n+1} = \left(\frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X=X_n} \right) \Delta X_n = J_n \Delta X_n \quad (2)$$

式中 J_n 为 $F(X)$ 在 X_n 处的 Jacobian 矩阵。于是, 可以

收稿日期: 2013-12-31

基金项目: 天津应用基础研究资助项目(013604611)

通信作者: 张伯俊 (1956—), 男, 博士, 教授。E-mail: zhangbojun808@126.com

得出

$\Delta X_{n+1} = J_n \Delta X_n = J_n J_{n-1} \cdots J_1 \Delta X_1$; 并记 $J^{(n)} = J_n J_{n-1} \cdots J_1$ 则 $\Delta X_{n+1} = J^{(n)} \Delta X_1$;

定义 1 对于 m 维离散动系统(1) $J^{(n)}$ 定义如上, 设

$$T(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(J^{(n)})^T J^{(n)}]^{-\frac{1}{2n}} \quad (3)$$

显然 $T(X)$ 是一个正定矩阵, 设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m > 0$ 为 $T(X)$ 的 m 个特征值, 则系统 (1) 的第 k 个 Lyapunov 指数为:

$$\sigma_k = \ln \lambda_k (k = 1, 2, \cdots, m) \quad (4)$$

1.2 连续系统 Lyapunov 指数的定义

考虑如下 m 维连续动力系统:

$$\dot{X} = F(X) \quad (5)$$

式中:

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^T \in R^m$$

$$F(X) = (f_1(X), f_2(X), \cdots, f_m(X))^T$$

设系统(5)以 x_0 为初始条件形得一轨道为 $x(x_0, t)$ 若其初始条件的微小变化为 $\delta x(x_0, 0)$, 则在 t 时刻轨道产生的偏差为 $\delta x(x_0, t)$, 则

$$\delta x(x_0, t) = x(t, x_0 + \delta x(x_0, 0)) - x(t, x_0) \quad (6)$$

$$\text{定义 } \sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta x(x_0, t)\|}{\|\delta x(x_0, 0)\|} \quad (7)$$

则 σ 称为系统(5)的 Lyapunov 指数, 它表示相邻轨道发散(或收敛)率的测度^[4].

1.3 利用小球演化法计算 Lyapunov 指数

对于 m 维连续系统(5) 在 $t = 0$ 时以 x_0 为中心, $\|\delta x(x_0, 0)\|$ 为半径作 m 维球面, 由于各方向收缩或扩张程度的不同, 随着时间的演化, 在时刻 t 小球面将变形为 m 维椭球面, 设此椭球面第 k 个坐标轴方向的半长轴为 $\|\delta x_k(x_0, t)\|$, 则系统 (5) 的第 k 个 Lyapunov 指数为

$$\sigma_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta x_k(x_0, t)\|}{\|\delta x_k(x_0, 0)\|} \quad (k = 1, 2, \cdots, m) \quad (8)$$

1.4 利用矩阵的 QR 分解法计算 Lyapunov 指数

在此利用定义 1.1 计算 Lyapunov 指数, 从 J_1 开始, 设 $J_1 = Q_1 R_1$, 其中 Q_1 为正交矩阵, R_1 为上三角矩阵, 进而有 $J_2 J_1 = J_2 Q_1 R_1 = Q_2 R_2 R_1^{[5]}$, 所以得到结果 $J^{(n)} = Q_n R_n R_{n-1} \cdots R_1$; 设 R_j 的特征值为 $\lambda_j^{(k)}$ ($k = 1, 2, \cdots, m$), 则系统(1)的第 k 个 Lyapunov 指数为:

$$\sigma_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln |\lambda_j^{(k)}|, \quad (k = 1, 2, \cdots, m) \quad (9)$$

1.5 利用奇异值分解法计算 Lyapunov 指数

根据定义 1.2, 将 $\|\delta x(x_0, 0)\|$ 取为 d (d 为常数), 以 x_0 为球心, 欧几里德范数为 d 的正交矢量集 $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 为初始球的 m 个半轴方向, 由非线性微分方程(5)分别计算出点 $x_0, x_0 + e_1, x_0 + e_2, \cdots, x_0 + e_m$, 经过时间 T 演化后的轨迹, 设其终点分别为 $x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0m}$, 令

$$\begin{cases} \delta x_1^{[1]} = x_{01} - x_{00} \\ \delta x_2^{[1]} = x_{02} - x_{00} \\ \vdots \\ \delta x_m^{[1]} = x_{0m} - x_{00} \end{cases} \quad (10)$$

则得到新的矢量集 $\{\delta x_1^{[1]}, \delta x_2^{[1]}, \cdots, \delta x_m^{[1]}\}$.

由于各矢量在演化过程中都向最大 Lyapunov 指数方向靠拢, 所以需要通过 Schmidt 正交化不断对新得到矢量集进行置换, 即

$$\begin{aligned} v_1^{[1]} &= \delta x_1^{[1]}, u_1^{[1]} = \frac{v_1^{[1]}}{\|v_1^{[1]}\|} \\ v_2^{[1]} &= \delta x_2^{[1]} - (\delta x_2^{[1]} \mu_1^{[1]}) u_1^{[1]}, u_2^{[1]} = \frac{v_2^{[1]}}{\|v_2^{[1]}\|}, \cdots \\ v_m^{[1]} &= \delta x_m^{[1]} - (\delta x_m^{[1]} \mu_1^{[1]}) u_1^{[1]} - (\delta x_m^{[1]} \mu_2^{[1]}) u_2^{[1]} - \cdots - \\ &\quad (\delta x_m^{[1]} \mu_{m-1}^{[1]}) u_{m-1}^{[1]}, u_m^{[1]} = \frac{v_m^{[1]}}{\|v_m^{[1]}\|} \end{aligned}$$

接着以 x_{00} 为新球心、范数为 d 的正交矢量集 $\{du_1^{[1]}, du_2^{[1]}, \cdots, du_m^{[1]}\}$ 为新球继续上述演化, 设演化到第 N 步时得到矢量集 $\{v_1^{[N]}, v_2^{[N]}, \cdots, v_m^{[N]}\}$, 并且 N 足够大, 则可以得到连续系统(5) Lyapunov 指数的过似计算公式:

$$\lambda_k = -\frac{\ln d}{T} + \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \ln \|v_k^{[j]}\| \quad (k = 1, 2, \cdots, m) \quad (11)$$

2 物理双摆的 Lyapunov 指数计算

2.1 物理双摆的数学模型

多摩擦片式混沌振动发生机构的主、从动片均为偏心盘, 在轴向压力作用下, 主、从动片相互接触, 当接触表面之间有相对滑动趋势或相对滑动时, 彼此间

产生干摩擦力矩. 其简化力学模型为双物理摆, 如图 1 所示. 设物体 I、II 的质量分别为 m_1 和 m_2 , 质心在 C 和 B 点, 物体 I 相对于 O 轴和物体 II 相对于质心 B 的转动惯量分别为 J_O 与 J_B .

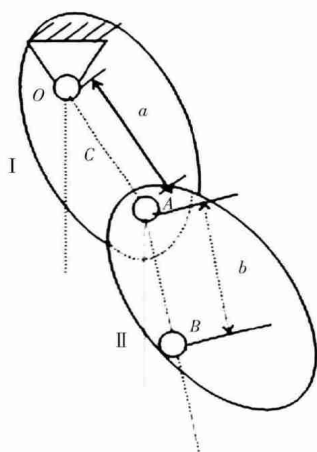


图1 双物理摆

Fig1 Double-body pendulum

根据力学模型及动力学方程, 可以得到系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{\Phi(t, x_1, x_2)}{m_2 abc \cos x_1 + J_b + m_2 b^2} \end{cases} \quad (12)$$

式中:

$$\begin{aligned} \Phi(t, x_1, x_2) = & \{ m_2 ab \sin x_1 [(x_2 + w)^2 + w^2] + \\ & m_2 g r f_v - (m_1 + m_2) ag \sin wt - \\ & m_2 bg \sin(x_1 + wt) \}; \\ a = & 0.01; b = 0.0218; r = 0.04; m_1 = 2.16; \\ m_2 = & 3.2; f_v = 0.1772; w = \frac{n\pi}{30}; \phi_1 = wt; \\ J_b = & 0.0034798. \end{aligned}$$

2.2 计算 Lyapunov 指数

本文分别采用 QR 分解法、小球演化法和奇异值分解法计算系统的 Lyapunov 指数^[6]. 随着 b 值变化, 所得系统的最大 Lyapunov 指数变化如图 2 所示.

由图 2 可以看出, 无论运用矩阵 QR 分解法、小球演化法或是奇异值分解法计算模型的 Lyapunov 指数得到的结果基本是一致的. 最大 Lyapunov 指数在以参数 b 为分岔参数的变化过程中, 从各个角度说明了该物理双摆呈现出混沌运动特征, 避免了单一算法的误差与缺陷. 观察参数 b 值的变化, 会看到混沌现象的出现. 不同参数 b 条件下的系统相图如图 3 所示, 该相图的永不重复性也表明该物理双摆具有混沌特征.

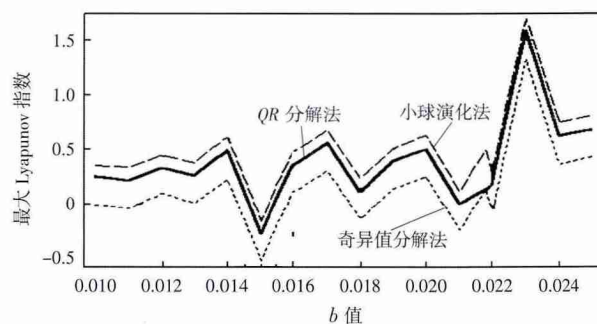
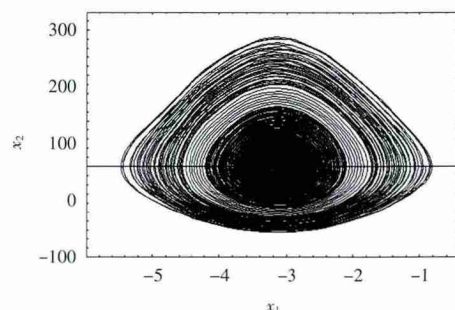
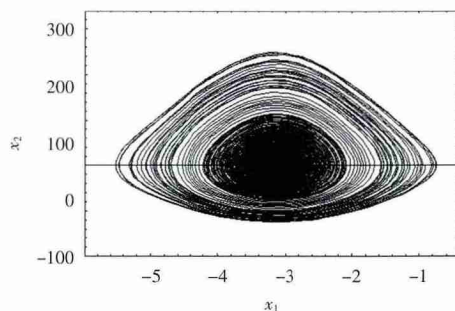


图2 3种方法计算物理双摆的 Lyapunov 指数的结果比较

Fig.2 Comparison of Lyapunov exponents results calculated with three ways

(a) $b=0.218$ (b) $b=0.23$ 图3 不同参数 b 条件下的系统相图Fig.3 Phase diagram of system with different parameter b

为了将系统转化为自治系统, 本文采用增维法, 即令 $x_3 = t$, 系统(12)化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{\Phi(x_3, x_1, x_2)}{m_2 abc \cos x_1 + J_b + m_2 b^2} \\ \dot{x}_3 = 1 \end{cases} \quad (13)$$

在计算连续系统的 Lyapunov 指数时, 若使用矩阵 QR 分解法或奇异值分解法^[7-8], 则需要将系统离散化 (此处的离散化指的是系统中对变量的离散化) 后计算出 Jacobian 矩阵 J_n . 在小球演化法时, 需要计算每经过时间 T 后 $(m+1)$ 个状态变量的演化值, 并进行一遍 Schmidt 正交化运算, 计算量相当大.

3 结束语

将多摩擦片式混沌振动机构抽象为物理双摆的数学力学模型,并采用 QR 分解法、小球演化法和奇异值分解法计算系统的 Lyapunov 指数,结果表明,3 种算法得到的结果基本一致,从而说明了物理双摆具有混沌特征,并为双摆在工程设计中的应用提供了有价值的参考。

参考文献:

- [1] 龙云佳.混沌振动压路机的压实效果[J].工程机械与维修, 2006 (1):153.
- [2] 刘树勇,杨爱波,杨庆超,等.机械式混沌同步系统动力学特性研究[J].华中科技大学学报:自然科学版, 2012, 40

(8):108-111.

- [3] 张晓丹,李志萍,张丽丽.一类基于奇异值分解的 Lyapunov 指数计算方法[J].北京科技大学学报, 2005, 27(3):371-374.
- [4] 王洪礼,张琪昌.非线性动力学理论及应用[M].天津:天津科学技术出版社, 2002:50-76.
- [5] 闻邦椿,李以农,韩清凯.非线性振动理论中的解析方法及工程应用[M].沈阳:东北大学出版社, 2001:116-128.
- [6] 张伯俊,石传龙,程卿.新型混沌振动发生机构开发与研究[J].天津职业技术师范学院学报, 2000, 10(4):7-10.
- [7] 刘小河.非线性系统分析与控制引论[M].北京:清华大学出版社, 2008:156-170.
- [8] HUANG Dongwei, WANG Hongli. Hopf bifurcation of the stochastic model on HAB nonlinear stochastic dynamics[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2006, 27:1072-1079.

(上接第 84 页)

参考文献:

- [1] DEIMLING K. Zems of accretive operator[J]. Manuscripta Math, 1974, 13:283-288.
- [2] BROWDER F E, PETRYSHN W V. Construction of fixed points of nonlinear mapping in hibert spaces[J]. J Math Anal Appl, 1967, 20:197-200.
- [3] BRUCH R E. A strong convergent iterative solution for a maximal monotone operator in hiben spaces[J]. J Math Anal Appl, 1974, 48:114-126.
- [4] REICH S. Constructing zeros of accretive operator[J]. Applic Anal, 1979, 9:159-163.
- [5] XU H K. Strong convergence of an iterative method for nonexpansive and accretive operators [J]. J Math Anal Appl, 2006, 314:631-643.
- [6] XU H K. Iterative algorithms for nonlinear operators[J]. J London Math Soc, 2002, 66:240-256.
- [7] BRUCK R E, PASSTY G B. Almost convergence of the innite product of resolvents in Banach spaces [J]. Nonlinear Anal, 1979(3):279-282.
- [8] BRUCK R E, REICH S. Nonexpansive projections and resolvents in Banach spaces[J]. Houston J Math, 1977(3):459-470.
- [9] XU H K. An iterative approach to quadratic optimization [J]. J Optim Theory Appl, 2003, 116:659-678.
- [10] REICH S. Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1980, 75:287-292.
- [11] SOMYOT Plubtieng, RATTANAPORN Wangkeeree. Strong convergence of mann iterations for a countable family of nonexpansive mappings[J]. Nonlinear Anal, 2009, 70:3110-3118.
- [12] CHO Yeol Je, KANG Shin Min, QIN Xiaolong. Approximation of common xed points of an innite family of nonexpansive mappings in Banach spaces [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 56:2058-2064.