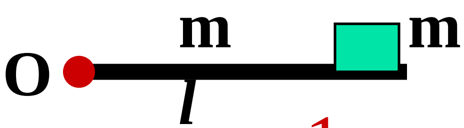
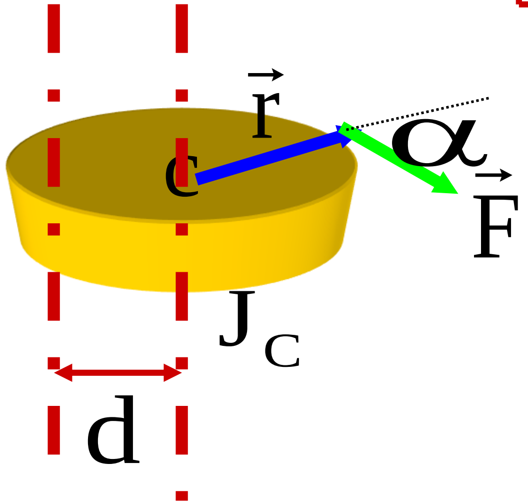
刚体的定轴转动

刚体
- 运动描述
  - 角量
  - 线量
    - $v = \omega r$
    - $a_n = \omega^2 r$
    - $a_t = \alpha r$
- 运动规律——转动定律 $M = J\alpha$

转动惯量
- $J = \int r^2 dm$
- 叠加原理（补偿法）
- 平行轴定律 $J = J_C + md^2$



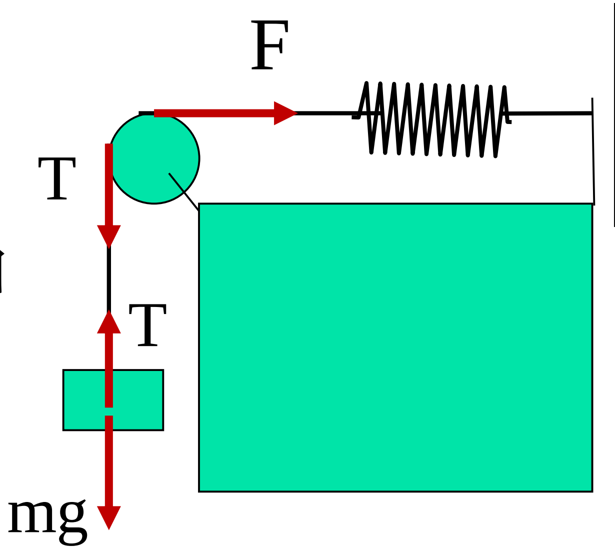
$J = \frac{1}{3} m l^2 + m l^2$



分析方法：固定轴的力矩

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ $\quad M = rF\sin\alpha$

例1、弹簧、定滑轮和物体如图连接。K，定滑轮J、R，物体的质量为m。设绳不可伸长且绳与滑轮间无相对滑动。初始时物体静止而弹簧无伸长。问：当物体下落距离为x时，它的速度为多少？它的加速度为多少？



解：

$$mg - T = ma$$

$$TR - FR = J\alpha$$

$$F = kx$$

$$a = \alpha R$$

$$mg - kx = \left(\frac{J}{R^2} + m\right)a = \left(\frac{J}{R^2} + m\right)\frac{dv}{dt}$$

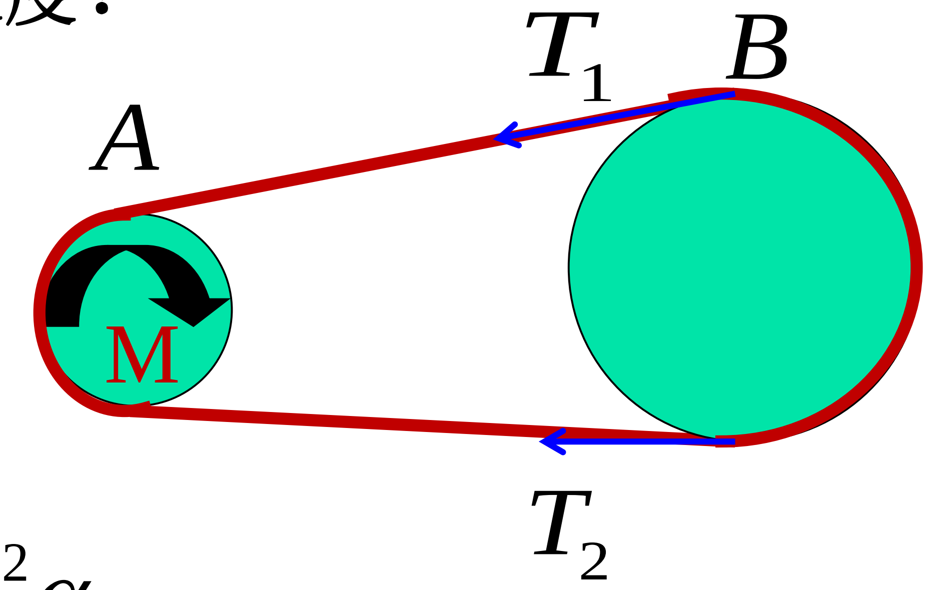
$$= \left(\frac{J}{R^2} + m\right)\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \left(\frac{J}{R^2} + m\right)\frac{dv}{dx}v$$

$$\int_0^v \left(\frac{J}{R^2} + m \right) v\,dv = \int_0^x (mg - kx)\,dx$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2mgx - kx^2}{\frac{J}{R^2} + m}}$$

$$(2) \quad \mathrm{a} = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{mg} - \mathrm{kx}}{\mathrm{m} + \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{R}^2}}$$

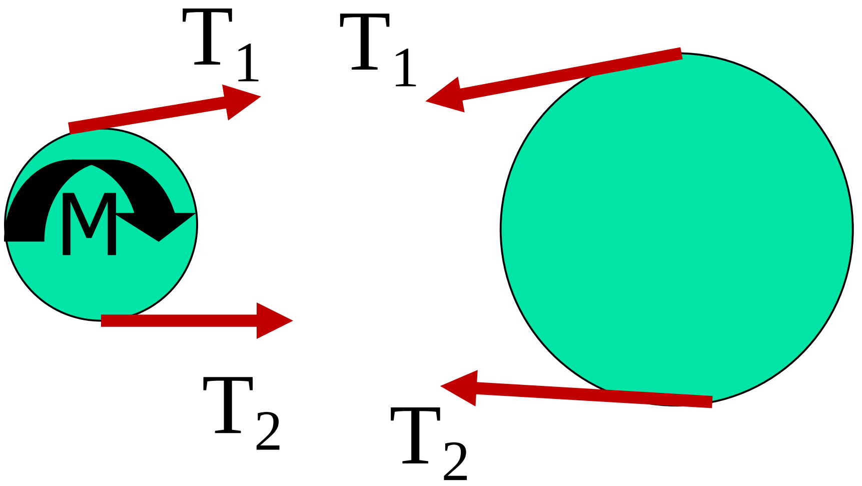
例2、如图所示，已知两轮A、B的半径分别为R_1和R_2，质量分别为m_1和m_2，用皮带将两轮相连接。若在轮A上作用一恒力矩M，设轮与皮带之间无滑动，是否可以用下列两式求出两轮的角加速度？



$$\alpha_1 R_1 = \alpha_2 R_2$$

$$M = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \alpha_1 + \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \alpha_2$$

$$M + T_1 R_1 - T_2 R_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \alpha_1$$



$$T_2 R_2 - T_1 R_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \alpha_2$$

$$\alpha_1 R_1 = \alpha_2 R_2$$

$$T_1 R_1 - T_2 R_1 = \left(T_1 - T_2\right) R_1$$

$$T_2 R_2 - T_1 R_2 = \left(T_2 - T_1\right) R_2$$

三、刚体的平衡　$\vec{F} = 0$　$\vec{M} = 0$

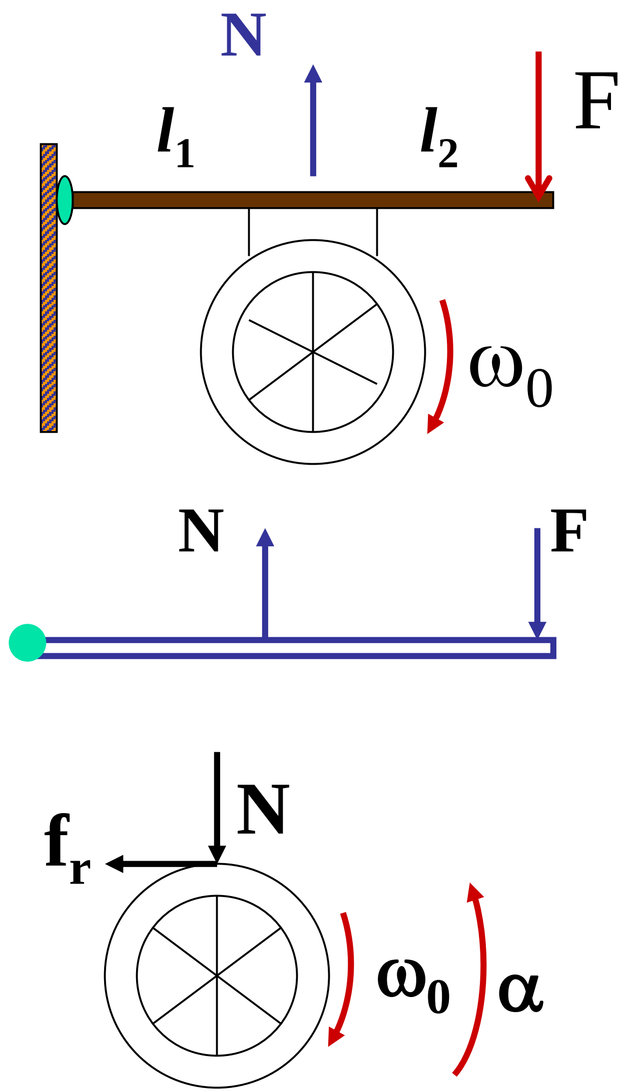
例3（书　P128　3-8）

$$F(l_1 + l_2) - Nl_1 = 0$$

$$-f_r \frac{d}{2} = J\alpha$$

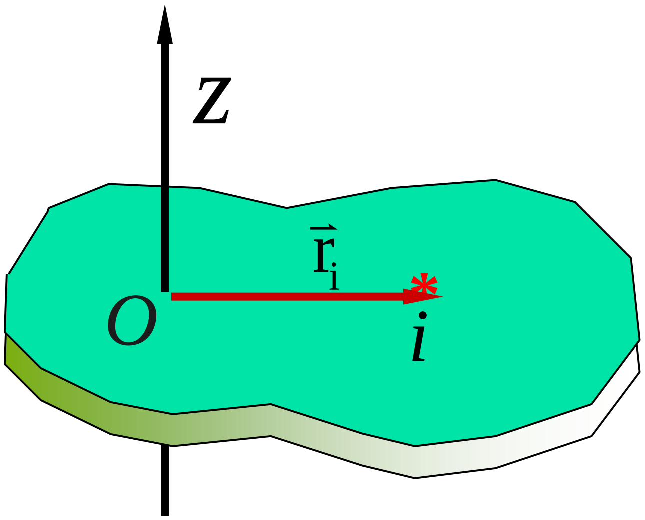
$$f_r = \mu N$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0$$



四、刚体中的功能关系

1、刚体的转动动能



对第i个质点：$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

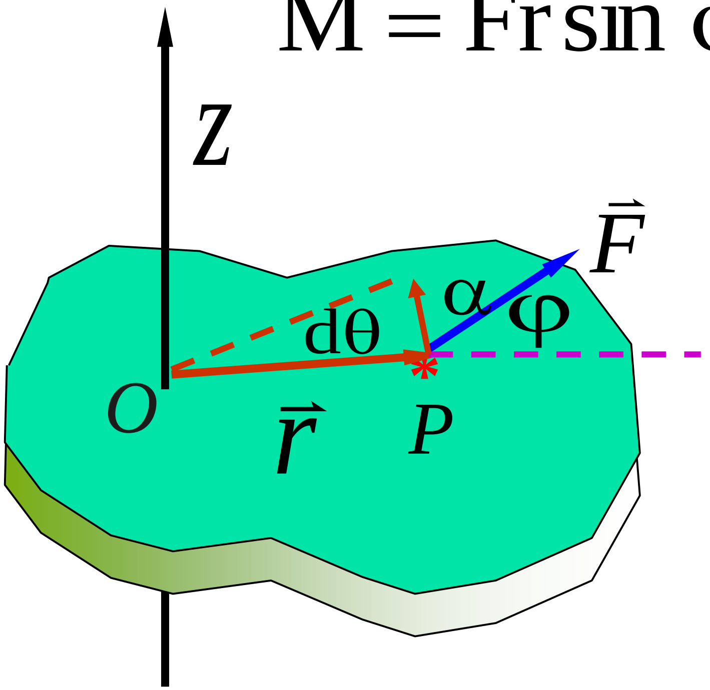
对整个刚体：

$$E_k = \sum E_{ki} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2$$

$$= \frac{1}{2} \omega \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

2、力矩的功

$$M = Fr\sin\varphi$$



$$\begin{aligned} dA &= \vec{F}\cdot d\vec{r} \\ &= F\cos\alpha\,|d\vec{r}| \\ &= F\cos\alpha\, ds \\ &= F\cos\alpha\; r d\theta \\ &= F\sin\varphi\, r d\theta \\ &= M\,d\theta \end{aligned} \quad \Rightarrow A = \int M d\theta$$

若刚体受到几个外力矩的作用

$$A = \sum A_i = \sum \int M_i d\theta_i$$

$$= \int (\sum_i M_i) d\theta = \int M_{合外} d\theta$$

3、刚体的重力势能

对于第i个质点： $E_{pi} = m_i g z_i$

对于整个刚体：

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

$$E_P = \sum E_{pi} = \sum m_i g z_i$$

$$= g \sum m_i z_i = mgz_c$$

$$z_c = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$

$$M = J\alpha = J\frac{d\omega}{dt} = J\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = J\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

$$dA = M d\theta = J\omega d\omega$$

4、刚体的动能定律、功能原理及机械能守恒

动能定理：

$$A=\int M d\theta=\int_{\omega_0}^{\omega} J\omega d\omega=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$$

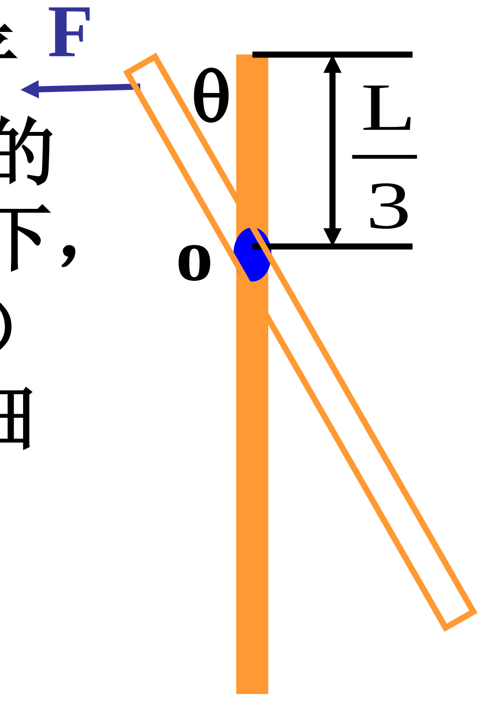
功能原理：

$$A=\frac{1}{2}J\omega^2+mgz_c-\left(\frac{1}{2}J\omega_0^2+mgz_{c0}\right)$$

机械能守恒：

- 刚体 $A_{外}=0\ (A_{内}=0)$
- 刚体＋质点 $A_{外}+A_{非保守内力}=0$

例1、 均质细棒L、m，可绕通过o点水平轴在竖直平面内转动，如图所示。在棒的A端作用一水平恒力F，棒在F力的作用下，由静止转过角度θ（ θ =30°），求：（1）F力所作的功；2）若此时撤去F力，则细棒回到平衡位置时的角速度。



解：1） $M = F\cos\theta \dfrac{L}{3}$

$$A = \int M d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} F\frac{L}{3}\cos\theta d\theta = \frac{1}{6}FL$$

2）根据功能原理 （从竖直位置回到竖直位置）

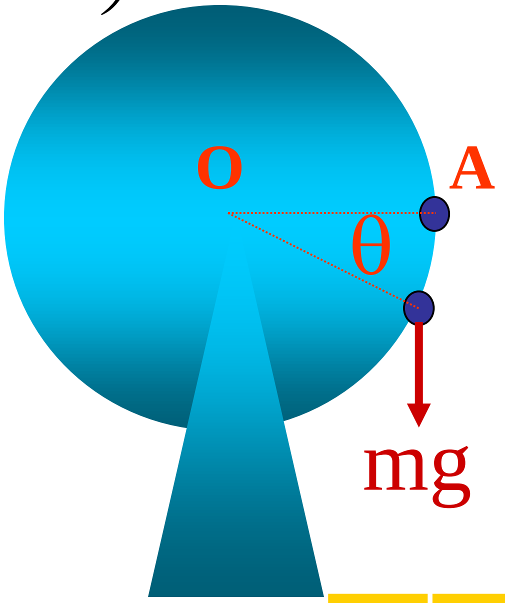
$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{6}FL = \frac{1}{2}J\omega^2 - 0 \\ J &= \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}mL^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3F}{mL}}$$

例2、m_0、R的匀质园盘可绕垂直于盘的光滑轴O在铅直平面内转动，盘点A固定着m的质点，先使OA处于水平位置，然后释放，盘由静止开始转动。当OA转过来30°时，质点的a_n、a_t为多少？

解：根据转动定律

$$mgR\cos\theta = J\alpha = \left(\frac{1}{2}m_0R^2 + mR^2\right)\alpha$$

$$a_t = \alpha R = \frac{\sqrt{3}mg}{(m_0 + 2m)}$$

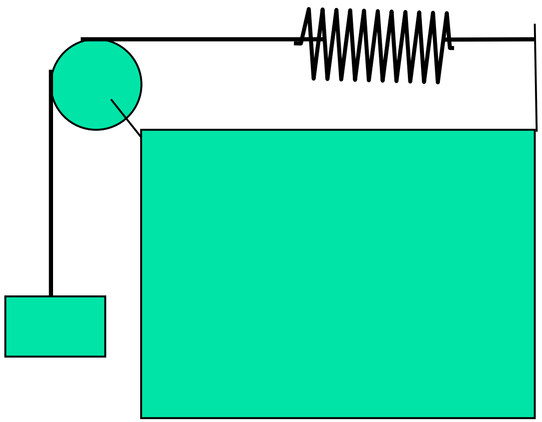


地球 盘的系统：E=C

$$mgR\sin\theta = \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$a_n = \omega^2 R = \frac{2mg}{m_0 + 2m}$$

练习：弹簧、定滑轮和物体如图连接。K，定滑轮J、R，物体的质量为m。设绳不可伸长且绳与滑轮间无相对滑动。初始时物体静止而弹簧无伸长。问：当物体下落距离为x时，它的速度为多少？它的加速度为多少？

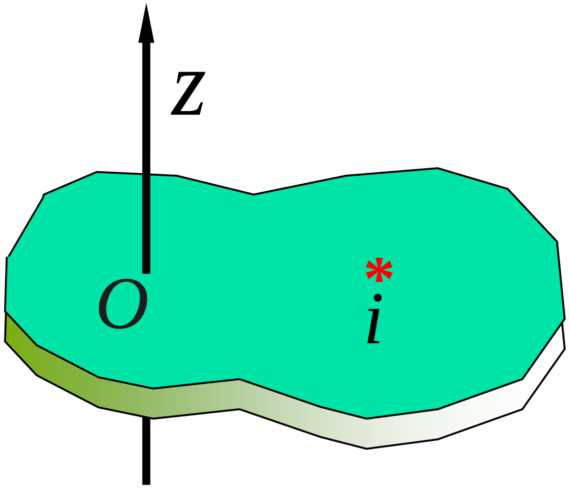


解2： $$mgx=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2+\frac{1}{2}kx^2$$

$$v=\omega R$$

$$\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2mgx-kx^2}{\frac{J}{R^2}+m}}$$

五、刚体的角动量和角动量守恒定律



1、刚体的角动量

质点： $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

刚体中的质点： $L_i = r_i m_i v_i$

刚体的角动量： $L = \sum m_i v_i r_i = \sum m_i (r_i \omega) r_i$

$$= \sum m_i r_i^2 \omega = J\omega$$

2、冲量矩 Mdt

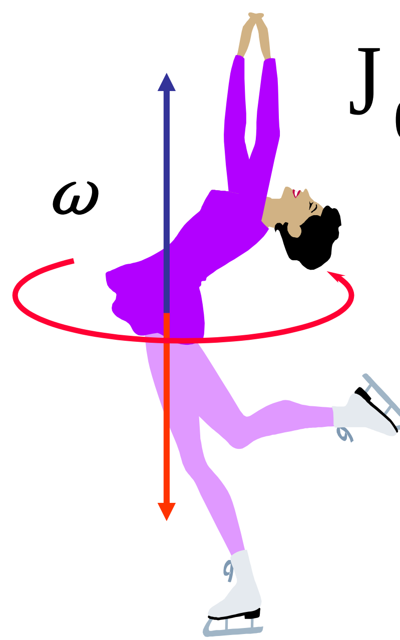
$$M = J\alpha = J\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow Mdt = Jd\omega = dL$$

2、冲量矩 $M\,dt = dL$

角动量定律：$\int M\,dt = \int dL = J\omega - J\omega_0$

角动量守恒：$M_{合外力矩} = 0$ $\Rightarrow \sum J_i \omega_i = C$

（固定的同一转轴）



$J_0\omega_0 = J\omega$

例1、若人沿着半径为 r的圆周，顺时针匀速行走，相对圆盘的速率为 v，则圆盘的角速度为多少？

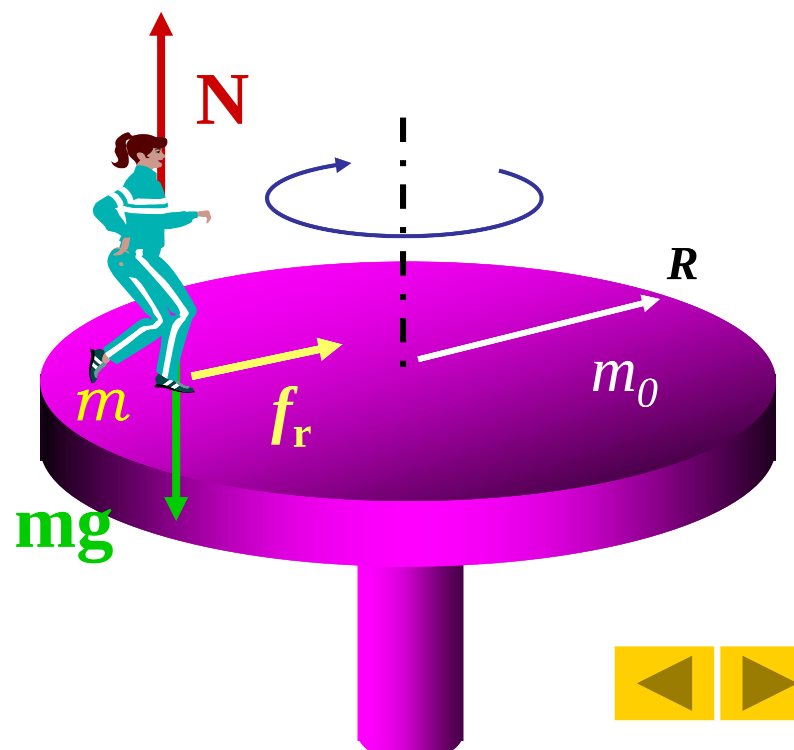
人与盘的系统对转轴 **M=0 → L=C**

$$0 = J\omega + m\,r\,v_{人地}$$

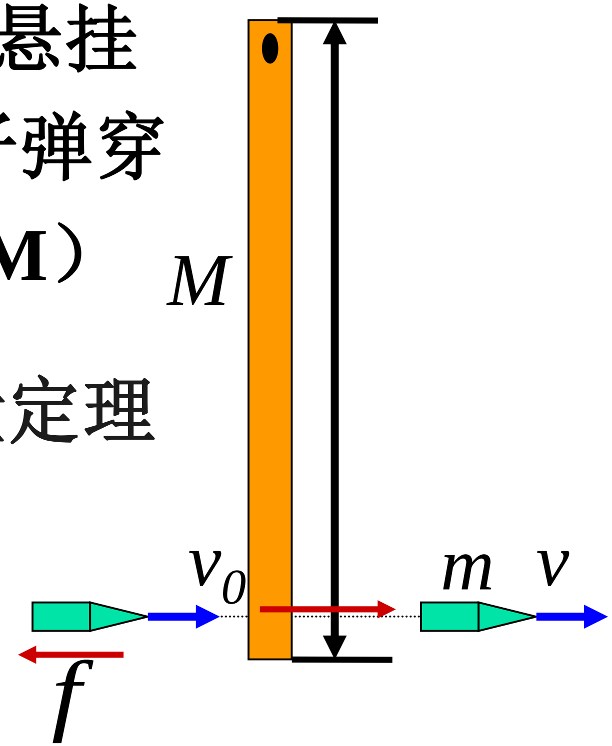
$$\vec{v}_{人地} = \vec{v}_{人盘} + \vec{v}_{盘地}$$

$$v_{人地} = -v + \omega r$$

$$\omega = \frac{mvr}{mr^2 + \frac{1}{2}m_0R^2}$$



例2、子弹m以水平速度v_0射入一静止悬挂的长棒下端，穿出后速度损失3/4，求子弹穿出后棒的角速度ω（已知棒长l、质量M）



解1：棒对子弹的阻力 f，对子弹由动量定理

$$\int f\mathrm{d}t = m(v - v_0) = -\frac{3}{4}mv_0$$

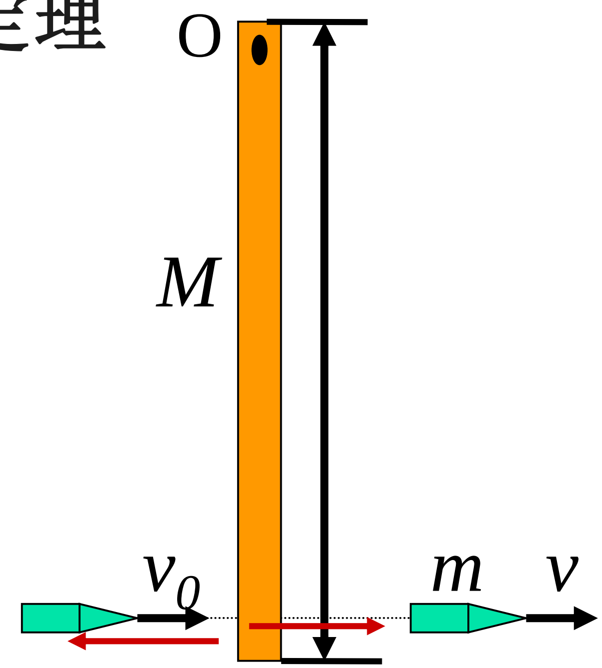
子弹对棒的反作用力冲量矩 $$\int f' l\,\mathrm{d}t = l\int f'\mathrm{d}t = J\omega$$

$$\because\ f = -f' \quad J = \frac{1}{3}Ml^2$$

$$\therefore\ \omega = \frac{9mv_0}{4Ml}$$

解1: 棒对子弹的阻力f, 对子弹由动量定理

$$\int f\mathrm{d}t = \mathrm{m}(\mathrm{v}-\mathrm{v}_0) = -\frac{3}{4}\mathrm{m}\mathrm{v}_0$$



子弹对棒的反作用力冲量矩

$$\int f' l\,\mathrm{d}t = l\int f'\mathrm{d}t = J\omega$$

$$\because\ f = -f' \quad J = \frac{1}{3}Ml^2 \Rightarrow \omega = \frac{9\mathrm{m}\mathrm{v}_0}{4Ml}$$

解2: 子弹、棒为系统，对O点 **M=0** 系统的角动量守恒

$$\mathrm{m}\mathrm{v}_0 l = \left(1-\frac{3}{4}\right)\mathrm{m}\mathrm{v}_0 l + \frac{1}{3}Ml^2\omega$$

问题：系统的动量守恒?

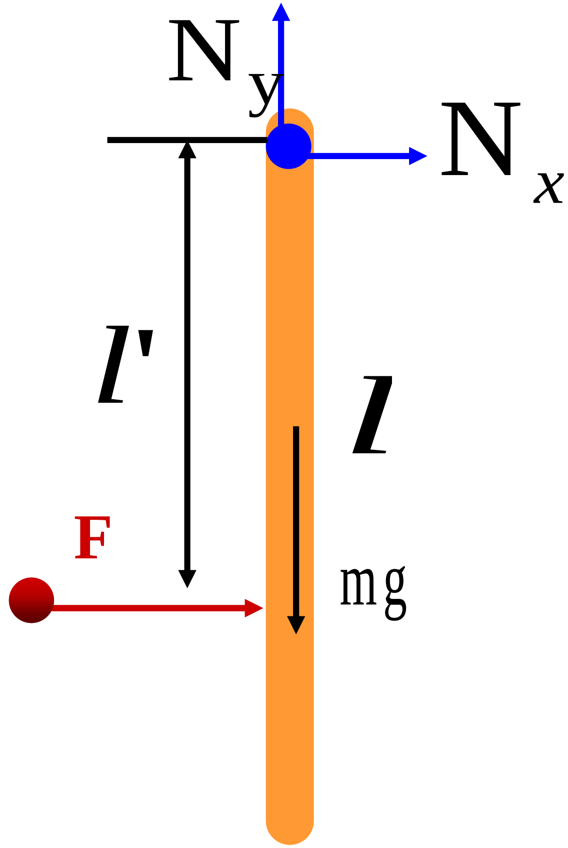
质心运动定律

$$F + N_x = ma_{Cx} = m\alpha\frac{l}{2}$$

$$Fl' = J\alpha = \frac{1}{3}ml^2\alpha$$

$$N_x = \left(\frac{3l'}{2l} - 1\right)F \neq 0$$

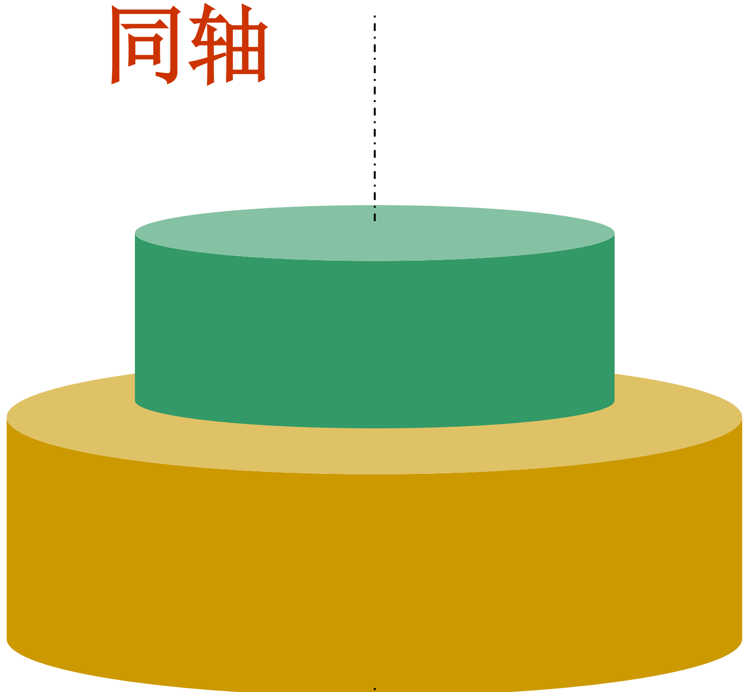
$$l' = \frac{2}{3}l \Rightarrow N_x = 0$$



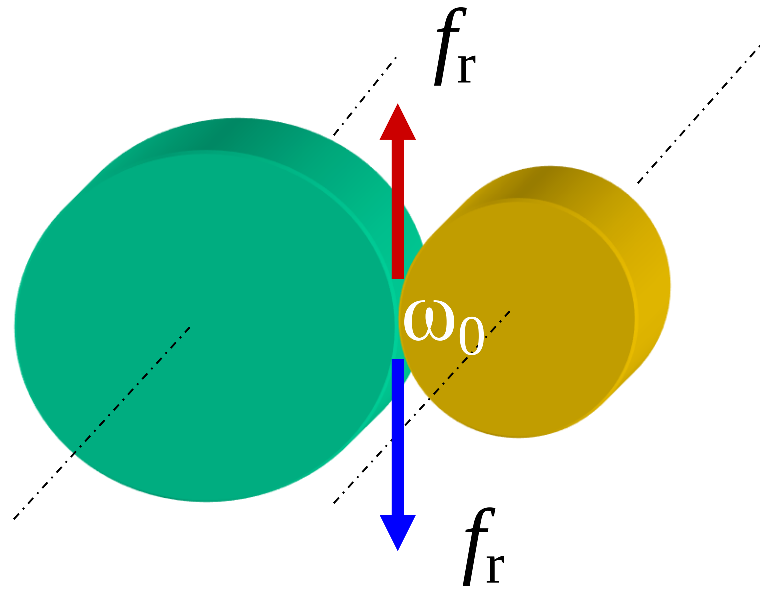
此F的作用点称为打击中心

六、转动圆盘的齿合问题：

同轴



异轴

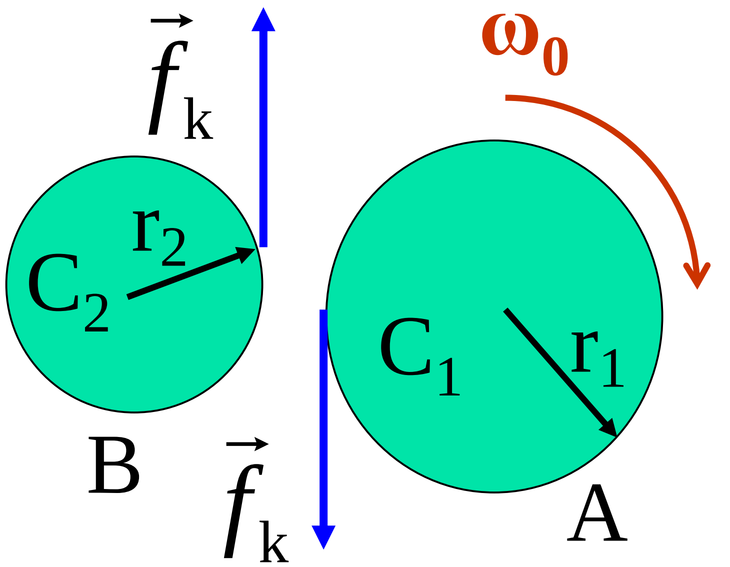


特点：摩擦力的效用　最后达到稳定状态

同轴　　M=0　角动量守恒　$J_1\omega_{10}+J_2\omega_{20}=(J_1+J_2)\,\omega$

异轴　　滑动摩擦力矩的作用，达到稳定态时$v_1=v_2$

例5、如图所示，半径为r_1和r_2的圆柱体A和B（转动惯量分别为J_1和J_2）可以无摩擦地绕自身的轴C_1和C_2转动。最初A的角速度为ω_0，B不转动。现移动B的轴，使B的边缘与A发生接触。由于A、B之间的摩擦力，B也被带着转动起来，最后达到一个稳定的状态（即两者的转动速度不变的状态）。试求此稳定状态下，两圆柱的角速度。



解：达到稳定状态$v_1 = v_2$

$$\omega_A r_1 = \omega_B r_2$$

$$-f_k r_1 \Delta t = J_1 \omega_A - J_1 \omega_0$$

$$f_k r_2 \Delta t = J_2 \omega_B - 0$$