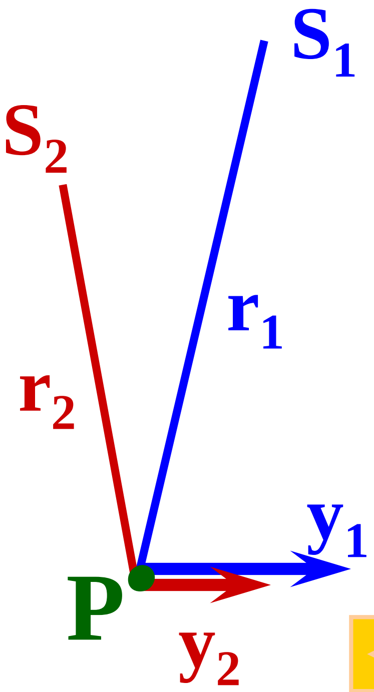
两个基本的原理：

（1）波的独立传播原理（电磁波例子）

——若有几列波同时在介质中传播，则它们各自将以原有的振幅、频率和波长独立传播。

（2）波的叠加原理（交响乐例子）

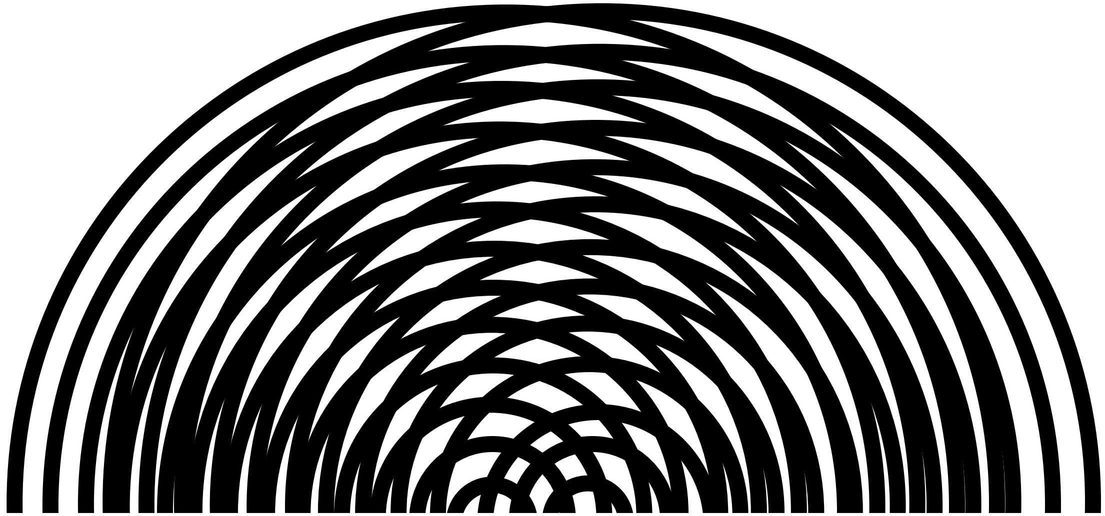
——在几列波相遇处，质元的位移等于各列波单独传播时在该处引起的位移的矢量和。



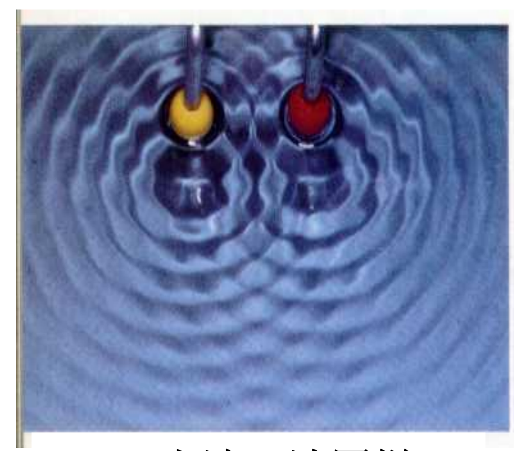
简谐波的叠加 =简谐振动叠加

$$I \propto A^2(t) \begin{cases} \text{强度} \\ \text{相干} \end{cases}$$

波的干涉之模拟演示



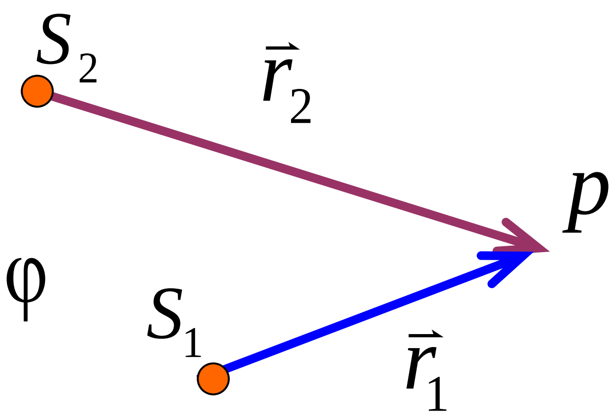
波的干涉——在媒质中某些位置的点振幅始终最大，另一些位置振幅始终最小，而其它位置，振动的强弱介乎二者之间，保持不变，形成稳定的叠加图样。



水波干涉图样

相干波源：同频率、同振动方向、相位差恒定

$$\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$



合成波的强度：

$$I \propto A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$$

干涉相长（加强）的条件：

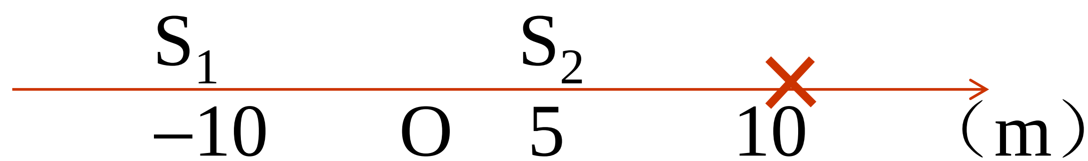
$$\Delta\varphi = \pm 2k\pi, \qquad k = 0,1,2,3,\ldots \qquad A = A_1 + A_2$$

干涉相消（减弱）的条件：

$$\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi, \qquad k = 0,1,2,\cdots \qquad A = |A_1 - A_2|$$

其他位相差 $\quad |A_1 - A_2| < A < A_1 + A_2$

例1、（习题册 9）有两相干波源 s_1 和 s_2 在 x 轴上的位置是 $x_1= -10m$，$x_2=5m$ 两波源振动周期都是 0.5s，波长均为 10m。振幅均为 $1.0\times10^{-2}m$。当 t=0 时，s_1 振动的位移为 O 并向正方向运动，s_2 振动位相比 s_1 落后 $\pi/2$，求 x=10m 处介质中 P 点的振动方程。



$$\varphi_1=-\frac{\pi}{2}$$

$$y_{s1}=1.0\times10^{-2}\cos(4\pi t-\frac{\pi}{2})$$

$$\varphi_2-\varphi_1=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\varphi_2=-\pi$$

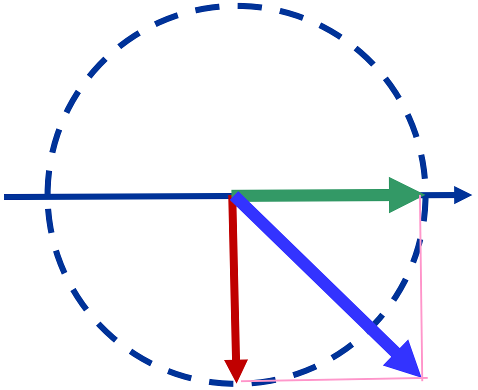
$$y_{s2}=1.0\times10^{-2}\cos(4\pi t-\pi)$$

$$u=\frac{\lambda}{T}=20m/s$$

$$y_{1P}=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{20}{20}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=A\cos[4\pi t-\frac{\pi}{2}]$$

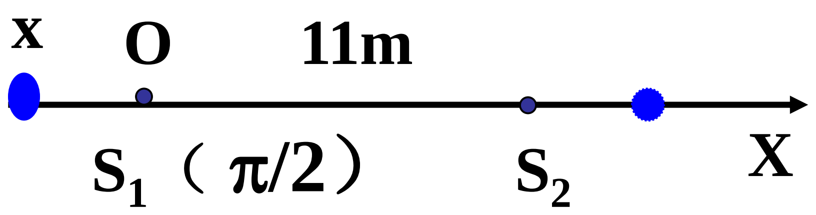
$$y_{2p}=A\cos[4\pi(t-\frac{5}{20})-\pi]=A\cos(4\pi t)$$

$$A_p=\sqrt{2}A \qquad \varphi=-\frac{\pi}{4}$$



$$\therefore y_p=\sqrt{2}\times 1.0\times 10^{-2}\cos[4\pi t-\frac{\pi}{4}]$$

例2、习题8 相干波源S_1和S_2相距11m。S_1的相位比S_2的超前$\pi/2$，这两个相干波在S_1、S_2连线和延长线上传播时可看成两等幅的平面余弦波，它们的频率都等于100Hz，波速都等于400m/s。试求在S_1、S_2的连线及延长线上因干涉而静止不动的各点的位置。



$$\Delta\varphi = (2k+1)\pi$$

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = 4$$

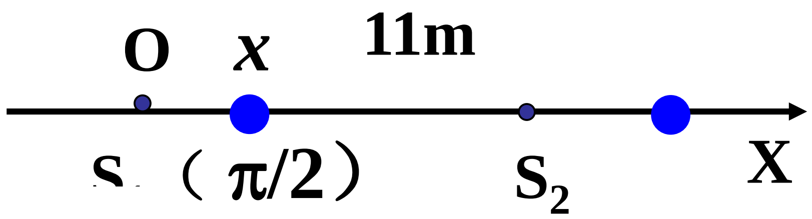
1）x 在S_1的左侧

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{4}(|x| - (|x| + 11)) = 6\pi \quad \text{加强}$$

2）x在S_2的右侧

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{4}(x - (|x| - 11)) = -5\pi$$ 静止

3) $0 < x < 11$



$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{4}(x - (11 - x))$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{11}{2}\pi - \pi x = (2k+1)\pi$$

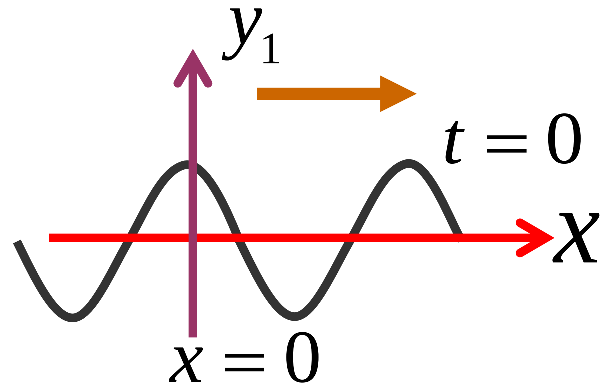
$$\Rightarrow x = -2k + 5 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$$

$$0 \le x = -2k + 5 \le 11 \Rightarrow -3 \le k \le 2$$

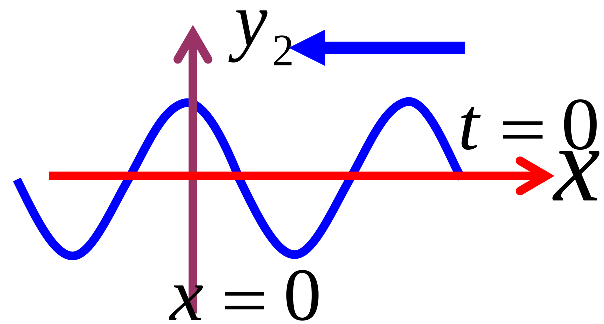
即x=1、3、5、7、9、11 及 x>11 的各点为干涉静止点

八、驻波 (standing wave)

1、驻波的定量分析（特例）



$$y_1 = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x)$$



$$y_2 = A\cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x)$$

合成波表达式:

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x) + A\cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x)$$

$$= 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x \cdot \cos\omega t$$

$$(\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2})$$

简谐振动的振幅

$$y = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x \cdot \cos\omega t$$

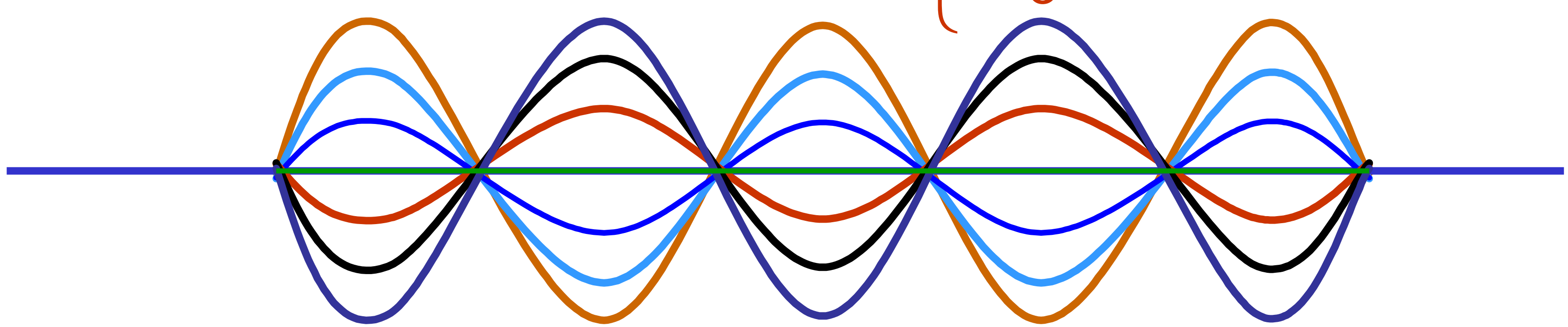
简谐振动

特点：

（1）它表示各点都在作简谐振动，各点振动的频率相同，就是原来波的频率。

（2）各点的振幅不同

$$A' = \begin{cases} A_{max} \\ 0 \end{cases}$$



- 驻波的振幅

波腹——振幅最大的点

波节——振幅为零的点

$$A' = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x \Rightarrow \left|\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right| = \begin{cases} 1 & \Rightarrow \dfrac{2\pi}{\lambda}x = k\pi \\ 0 & \Rightarrow \dfrac{2\pi}{\lambda}x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

波腹的位置 $x = k\dfrac{\lambda}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \ \ldots$

波节的位置 $x = (2k+1)\dfrac{\lambda}{4}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

应用

相邻波腹间或波节的距离

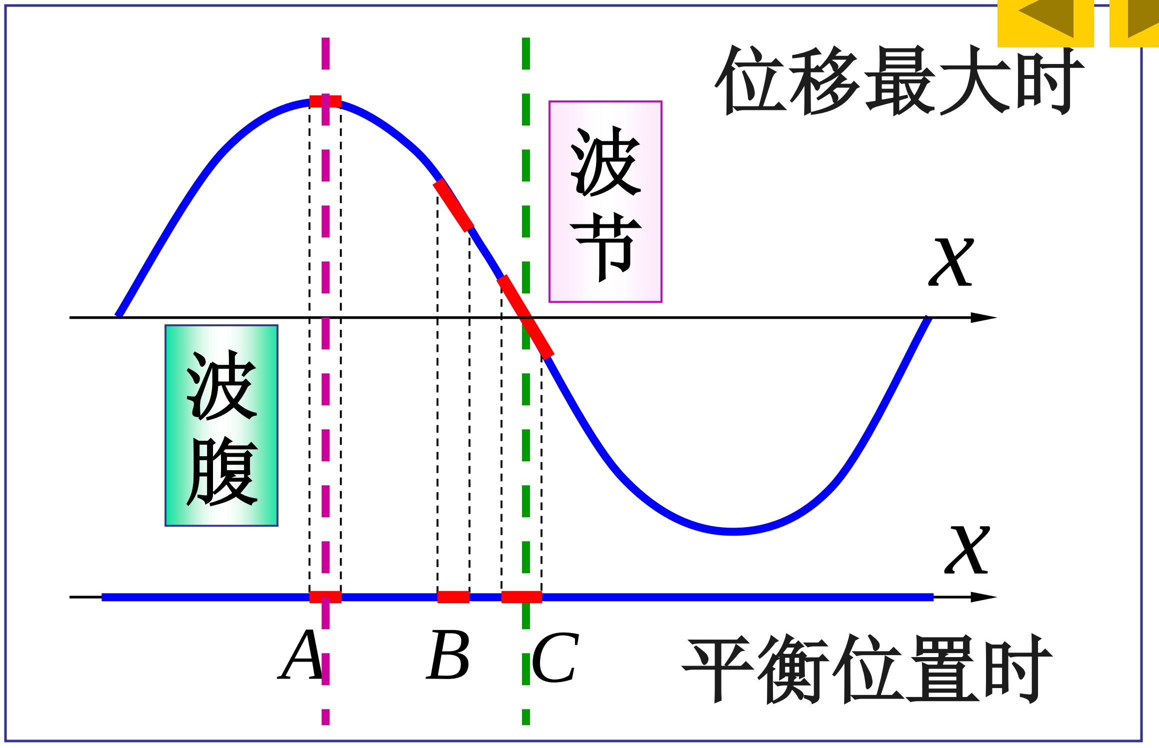
$$x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{2}$$

可用测量波腹或波节间的距离，来确定波长。

(3) 驻波的能量

$$dW_p \propto \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

$$dW_k \propto \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$



•能量不被传播

平均能流密度（波的强度）： $\vec{I} = \vec{u}\overline{w} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\vec{u}$

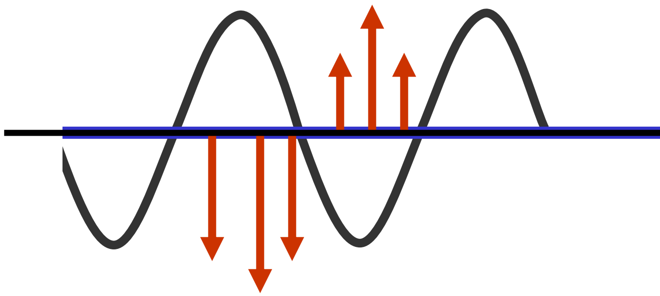
左行波与右行波能流密度之和为零

•能量在两波节间转换

各质点位移达到最大时，动能为零，势能不为零

在波节处相对形变最大，势能最大；

在波腹处相对形变最小，势能最小。



势能集中在波节

当各质点回到平衡位置时，全部势能为零；动能最大。

动能集中在波腹

驻波是媒质的一种特殊的运动状态，不是振动的传播，而是媒质中各质点都作稳定的振动——稳定态

2、半波损失（**half-wave loss**)

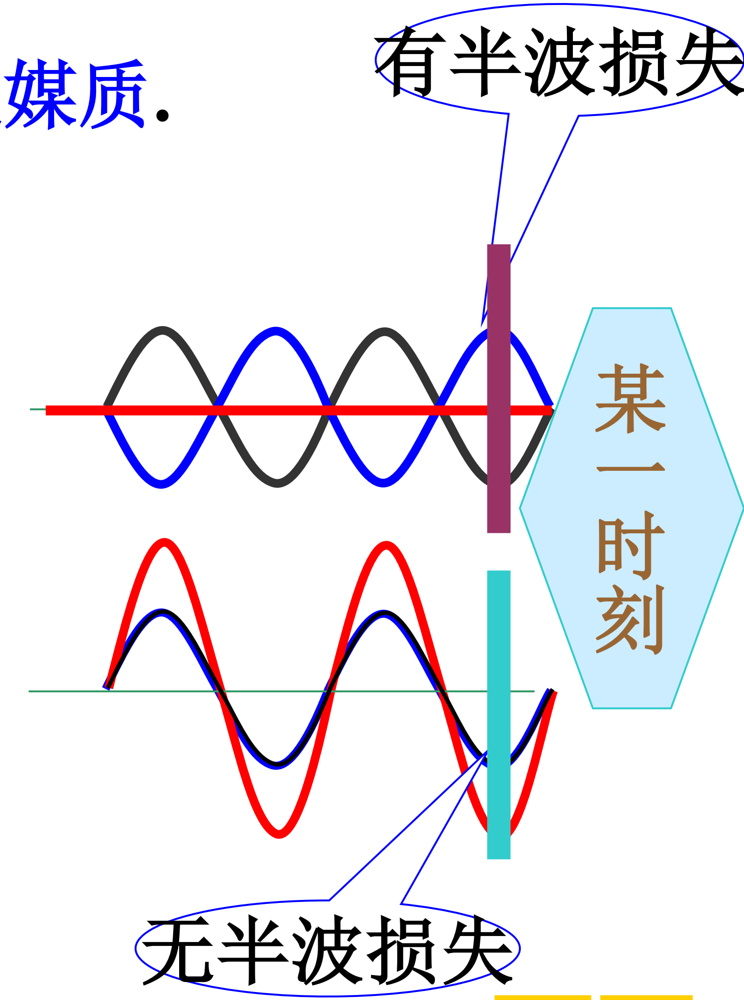
——入射波在反射时相位发生π突变的现象。

（1）界面的情况

波阻ρu——较大的媒质称为波密媒质；

——较小的媒质称为波疏媒质.

例如：$\rho_1 u_1 > \rho_2 u_2$



从波疏媒质到波密媒质界面上反射时，有半波损失，形成的驻波在界面处是波节。（从波密媒质到波疏媒质无半波损失）

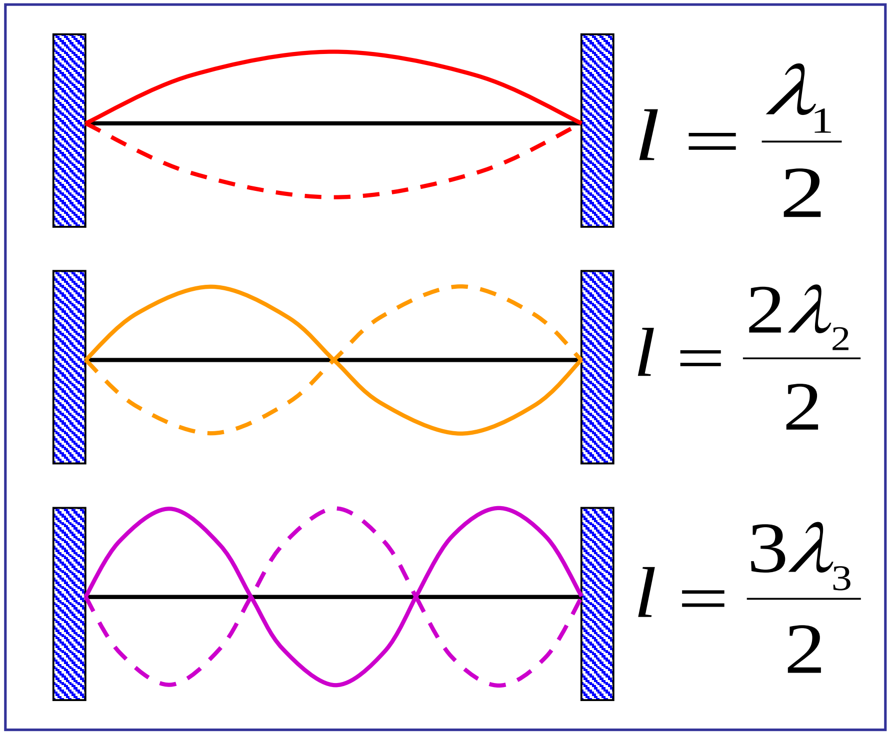
（2）绳（弦）的端点

固定端——反射有半波损失
自由端——反射无半波损失

两端固定绳*L* 上形成驻波满足条件:

$$l = n\frac{\lambda}{2}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{2l}{n} = uT = \frac{u}{\nu}$$



本征频率

$$\nu_n = n\frac{u}{2l}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

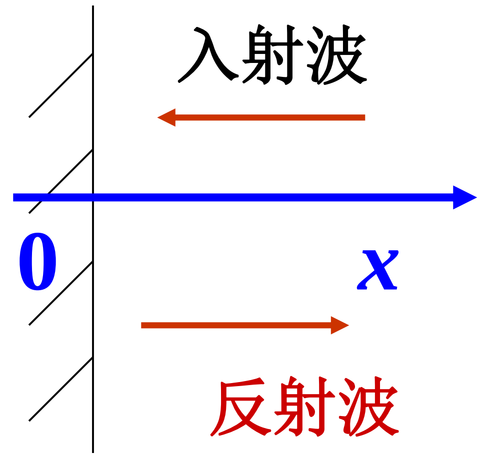
最低的频率称为基频，其它整倍数频率为谐频。

例1、设入射波的方程式为 $y_1 = A\cos 2\pi(\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{T})$ 在*x*=0处发生反射，反射点为一固定端。设反射时无能量损失，求：

1）反射波的方程式；

2）合成的驻波的方程式；

3）波腹和波节的位置。



解：(1) 入射波在*x*=0处的振动方程

$$y_1 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T})$$

反射波在 *x*=0 处的振动方程 $y = A\cos(2\pi\frac{t}{T}+\pi)$

反射波的波动方程 $y(x,t) = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\pi]$

(2)驻波的表达式

$$y = y_{入} + y_{反}$$

$$= A\cos[2\pi(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T})\ ] + A\cos[2\pi(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}) + \pi]$$

$$= 2A\cos[\underline{2\pi\frac{x}{\lambda}} + \frac{\pi}{2}]\cos[\underline{2\pi\frac{t}{T}} - \frac{\pi}{2}]$$

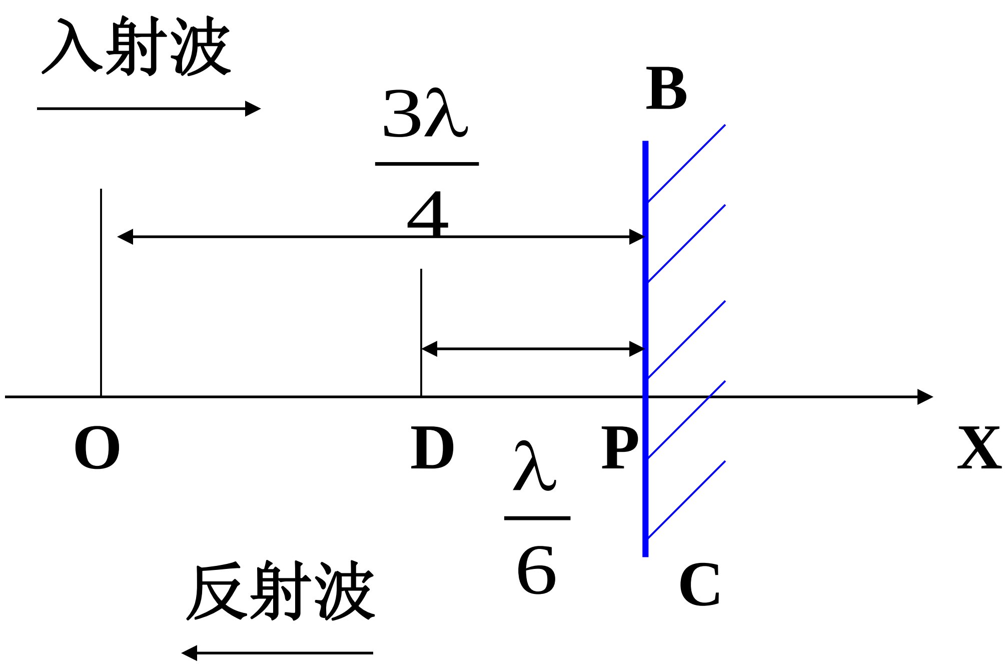
(3)波腹的位置

$$2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{2} = k\pi \Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda \quad k = 1,2,\cdots$$

波节的位置

$$2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow x = \frac{1}{2}k\lambda \ \ (\ k = 0,1,2,\cdots)$$

例2、如图所示，一平面简谐波沿x轴正方向传播，**BC**为波密媒质的反射面。波由**P**点反射，**OP=3λ/4**，**DP=λ/6**。在**t=0**时，**O**处质点的合振动是经过平衡位置向负方向运动。求**D**点处入射波与反射波的合振动方程。（设入射波和反射波的振幅皆为**A**，频率为**ν**）



解: 选O点为坐标的原点，设入射波的方程为

$$y_{入}(x,t)=A\cos[2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

$$y_{P}(x,t)=A\cos[2\pi(\nu t-\frac{\frac{3}{4}\lambda}{\lambda})+\varphi]$$

$$=A\cos[2\pi(\nu t-\frac{3}{4})+\varphi]$$

$$y_{P反}(x,t)=A\cos[2\pi(\nu t-\frac{3}{4})+\varphi+\pi]$$

$$y_{反}(x,t)=A\cos[2\pi\nu\left(t-\frac{\overline{OP}-x}{u}\right)-\frac{3}{2}\pi+\varphi+\pi]$$

$$=A\cos[2\pi(\nu t+\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

$$y = y_{入} + y_{反} = 2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda})\cos\left(2\pi\nu t + \varphi\right)$$

(x = 0) $y = 2A\cos\left(2\pi\nu t + \varphi\right)$

初始条件 $\left\{\begin{array}{l} t = 0 \quad y = 0 \\ v = \dfrac{dy}{dt} < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore y_D = 2A\cos\frac{2\pi\left(\frac{3}{4}\lambda - \frac{\lambda}{6}\right)}{\lambda}\cos[2\pi\nu t + \frac{\pi}{2}]$$

$$= \sqrt{3}A\sin\left(2\pi\nu t\right)$$