第十五次作业

一. 选择题：

1. 设随机变量ξ的概率分布律为

ξ	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.4

则$\eta=\xi^2-1$的分布函数$F(y)$为（ B ）。

A、$F(y)=\begin{cases}0, & y<-1,\\ 0.1, & -1\le y<0,\\ 0.6, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$　　B、$F(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ 0.1, & 1\le y<0,\\ 0.6, & 0\le y<3,\\ 1, & y\ge 3\end{cases}$

C、$F(y)=\begin{cases}0, & y<-1,\\ 0.1, & -1\le y<0,\\ 0.6, & 0\le y<3,\\ 1, & y\ge 3\end{cases}$　　D、$F(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ 0.1, & 1\le y<0,\\ 0.6, & 0\le y<4,\\ 1, & y\ge 4\end{cases}$

2. 设随机变量ξ密度函数为$p(x)$，则$\eta=3\xi-1$的密度函数$p_\eta(y)$为（ A ）。

A、$\frac{1}{3}p(\frac{y+1}{3})$　　B、$3p(\frac{y+1}{3})$　　C、$\frac{1}{3}p(3(y+1))$　　D、$3p(\frac{y-1}{3})$

3. 设随机变量ξ密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},$$

则$\eta=\xi^2$的密度函数$p_\eta(y)$为（ D ）。

A、$p_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}y, & 0\le y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$　　B、$p_\eta(y)=\begin{cases}2y, & 0\le y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

C、$p_\eta(y)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{y}}, & 0\le y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$　　D、$p_\eta(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

4. 设随机变量ξ和η相互独立，且$\xi\sim P(\lambda)$，$\eta\sim P(\lambda)$，则下列（ B ）不成立。

A. $P\{\xi+\eta=1\}=2\lambda e^{-2\lambda}$　　　　B. $P\{\xi+\eta=0\}=e^{-\lambda}$

C. $E(\xi+\eta)=2\lambda$　　　　D. $D(\xi+\eta)=2\lambda$

二. 填空题：

1. 已知随机变量$\xi\sim U(-2,4)$,设$\eta=\dfrac{\xi}{2}+1$，则η的概率密度为$p_\eta(y)=$

$\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 0\le y\le 3, \\ 0, & 其他. \end{cases}$。

2. 已知随机变量$\xi\sim N(0,1)$,$\eta=2\xi-5$，则η的概率密度为$p_\eta(y)=$

$\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-5)^2}{8}}$。

3. 已知随机变量$\xi\sim N(0,1)$,$\eta=e^{\xi}$，则η的概率密度为$p_\eta(y)=$ $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}y}\mathrm{e}^{-\frac{\ln^2 y}{2}}$。

4. 设随机变量ξ和η相互独立，且$\xi\sim B(2,0.4)$，$\eta\sim B(3,0.4)$，　则$\xi+\eta$服从参数为 $(5,0.4)$ 的二项分布。

三. 计算题

1. 已知随机变量$\xi\sim U[0,2]$，求$\eta=\xi^2$的概率密度。

解: $F_\eta(y)=P\{\xi^2\le y\}=\begin{cases}P\{-\sqrt{y}\le\xi\le\sqrt{y}\} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}=\begin{cases}F_\xi(\sqrt{y})-F_\xi(-\sqrt{y}) & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$

故 $p_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left(p_\xi(\sqrt{y})-p_\xi(-\sqrt{y})\right) & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{y}} & 0\le y\le 4\\ 0 & 其他\end{cases}$

2. 设随机变量 X 的概率分布为：

X	1	2	3	…	n	…
P	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	…

求$Y=\sin(\dfrac{\pi}{2}X)$的概率分布。

解：由于 $\sin(\frac{x\pi}{2})=\begin{cases}-1 & x=4k-1\\ 0 & x=2k\\ 1 & x=4k-3\end{cases}$　$k=1,2,\cdots$

故随机变量 Y 的可能取值为：-1，0，1。

随机变量 Y 的 $P\{Y=-1\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=4k-1\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4k-1}}=\frac{1}{8}\times\frac{1}{\frac{1}{2^4}-1}=\frac{2}{15}$；

$P\{Y=0\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=2k\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{\frac{1}{2^2}-1}=\frac{1}{3}$；

$P\{Y=1\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=4k-3\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4k-3}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{1}{2^4}-1}=\frac{8}{15}$，

于是随机变量 Y 的分布律为：

Y	-1	0	1
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$

3. 已知随机变量 $\xi\sim N(0,1)$，求 $\eta=|\xi|$ 的概率密度。

解: 先求分布函数 $F_\eta(y)$。当 $y<0$ 时，$F_\eta(y)=P\{\xi^2\le y\}=0$；当 $y\ge 0$ 时，

$F_\eta(y)=P\{\xi^2\le y\}=\Phi(\sqrt{y})-\Phi(-\sqrt{y})=2\Phi(\sqrt{y})-1$

故 $p_\eta(y)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{y}} & 0\le y\le 4\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

4．设 $\xi\sim U(0,1)$，求 $\eta=\xi^{\ln\xi}$ 的分布。

解：对应于 $\eta=\xi^{\ln\xi}$，$y=x^{\ln x}=e^{(\ln x)^2}=f(x)$，由于

$$f'(x)=e^{(\ln x)^2}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}$$ 。

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$x=f^{-1}(y)=e^{-\sqrt{\ln y}}$

$$\varphi_\eta(y)=\varphi_\xi(x)|_{x=f^{-1}(y)}|(f^{-1}(y))'|=\begin{cases}\dfrac{1}{2y\sqrt{\ln y}}e^{-\sqrt{\ln y}} & , \quad y\in(1,+\infty)\\ 0 & ,. \quad 其它y\end{cases}$$

其中当 $y\in(-\infty,1]$ 时，$\varphi_\eta(y)$=0 是由 $x\in(0,1)$ 时 $y\in(1,+\infty)$ 而导出的。

5. 已知随机变量 $\xi \sim U(-2,4)$，求 $\eta=\xi^2$ 的分布函数。

解:

$$F_\eta(y)=P\{\xi^2\le y\}=\begin{cases}0 & y<0,\\ P\{-\sqrt{y}\le\xi\le\sqrt{y}\}, & 0\le y<4\\ P\{-2\le\xi\le\sqrt{y}\}, & 4\le y<16\\ 1 & y\ge 16\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & y<0,\\ \dfrac{1}{3}\sqrt{y}, & 0\le y<4\\ \dfrac{1}{6}(\sqrt{y}+2), & 4\le y<16\\ 1 & y\ge 16\end{cases}$$

6. 已知随机变量 ξ、η 的概率分布分别为

ξ	-1	0	1
$P\{\xi=x_i\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

η	0	1
$P\{\eta=y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

而且 $P\{\xi\eta=0\}=1$。

(1)求 ξ、η 的联合概率分布；(2)问 ξ、η 是否独立？

(3)求 $\zeta=\max(\xi,\eta)$ 的概率分布。

解: 由于 $P(\xi\eta=0)=1$,可以得到 $P(\xi=-1,\eta=1)=P(\xi=1,\eta=1)=0$,从而

$P(\xi=0,\eta=1)=P(\eta=1)=\frac{1}{2}$, $P(\xi=-1,\eta=0)=P(\xi=-1)=\frac{1}{4}$,

$P(\xi=1,\eta=0)=P(\xi=1)=\frac{1}{4}$, $P(\xi=0,\eta=0)=P(\xi=0)-P(\xi=0,\eta=1)=0$,

汇总到联合分布列,即

$\xi \backslash \eta$	0	1

-1	$\frac{1}{4}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0

(2)由于 $P(\xi=i,\eta=j)\neq P(\xi=i)\cdot P(\eta=j)$,故 ξ,η 不独立.

(3)

$$P(\zeta=0)=P(\xi=-1,\eta=0)+P(\xi=0,\eta=0)=\frac{1}{4},$$

$$P(\zeta=1)=P(\xi=-1,\eta=1)+P(\xi=0,\eta=1)+P(\xi=1,\eta=0)+P(\xi=1,\eta=1)=\frac{3}{4}$$

第十六次作业

一．选择题：

1．设随机变量 ξ 和 η 相互独立，且 $\xi\sim N(-2,4)$ $\eta\sim N(2,8)$ ，则 $\xi+2\eta$ 的密度函数 $p(z)$ 为（ C）。

A、$\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-4)^2}{72}}$　　B、$\frac{1}{2\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{z^2}{24}}$　　C、$\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{72}}$　　D、$\frac{1}{2\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{(z-4)^2}{24}}$

2．设随机变量(ξ,η)的联合密度函数为 $p(x,y)$ ，则 $\xi+\eta$ 的分布函数 $F(z)$ =（ D）。

A、$F(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{y}p(z-x,y)dx$　　B、$F(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}p(z-x,y)dy$

C、$F(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}p(z-x,y)dy$　　D、$F(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x}p(x,y)dy$

3．设随机变量 ξ 和 η 相互独立，其密度函数分别为 $p_1(x)$ 与 $p_2(y)$，则 $\frac{\eta}{\xi}$ 的密度函数 $p(z)$ 为（ A）。

A、$p(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p_1(x)p_2(zx)dx$　　B、$p(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_1(x)p_2(z-x)dx$

C、$p(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p_1(zx)p_2(x)dx$　　D、$p(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_1(z-x)p_2(x)dx$

4．设随机变量 ξ 和 η 相互独立，其分布函数分别为 $F_\xi(x)$ 与 $F_\eta(y)$，则

$\zeta=\max(\xi,\eta)$ 的分布函数 $F_\zeta(z)$ 等于　　　　　　　　　　　　　　　　（ B ）

A. $\max\{F_\xi(z),F_\eta(z)\}$　　　　　　B. $F_\xi(z)F_\eta(z)$

C. $\frac{1}{2}[F_\xi(z)+F_\eta(z)]$　　　　　　D. $F_\xi(z)+F_\eta(z)-F_\xi(z)F_\eta(z)$

二．填空题：

1. 设随机变量 ξ 和 η 相互独立，且 $\xi\sim N(-2,4)$ $\eta\sim N(-2,12)$，则 $\xi-\eta$ 的密度函数 $p(z)=\underline{\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{32}}}$。

2. 设随机变量 ξ 和 η 独立同分布，均服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，则 $\max(\xi,\eta)$ 的密度函数 $p(z)=\underline{\begin{cases}2z, & 0<z<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}}$。

3. 设随机变量 ξ 和 η 相互独立，且 $\xi\sim E(1)$，$\eta\sim E(2)$，则 $P\{\min(\xi,\eta)\le 1\}=\underline{1-e^{-3}}$

三．计算题

1. 设随机变量 ξ、η 相互独立，其密度函数分别为

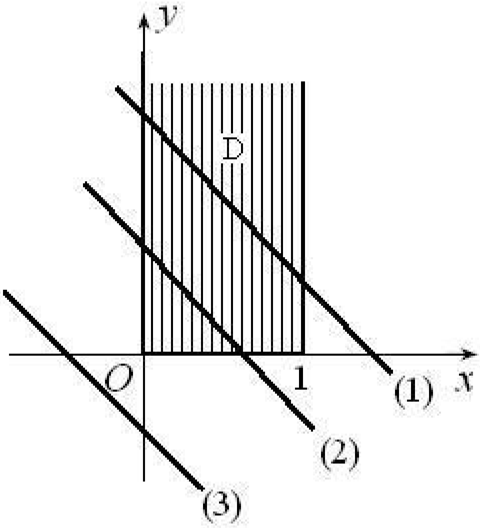
$$p_\xi(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases},\quad p_\eta(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

求 $\xi+\eta$ 的概率密度函数。

解：　由 ξ,η 相互独立得联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

密度函数中非零部分对应的 (x,y) 落在区域 D 中,利用卷积公式,



当$z \geq 1$时, $p_\zeta(z)=\int_0^1 e^{-(z-x)}dx=(e-1)e^{-z}$,

当$0<z<1$时, $p_\zeta(z)=\int_0^z e^{-(z-x)}dx=1-e^{-z}$,

当$z \leq 0$时, $p_\zeta(z)=0$,

故 $p_\zeta(z)=\begin{cases}(e-1)e^{-z}, & z \geq 1, \\ 1-e^{-z}, & 0<z<1, \\ 0, & z \leq 0.\end{cases}$

2. 设随机变量(ξ,η)的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求$\xi+\eta$的概率密度函数。

解: 利用卷积公式, 当$z \leq 0$或$z \geq 2$时, $p_\zeta(z)=0$,

当$0<z<1$时, $p_\zeta(z)=\int_0^z (2-z)dx=2z-z^2$,

当$1 \leq z<2$时, $p_\zeta(z)=\int_{z-1}^1 (2-z)dx=(2-z)^2$,

故 $p_\zeta(z)=\begin{cases}2z-z^2, & 0<z<1, \\ (2-z)^2, & 1 \leq z<2, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

3. 设ξ,η是两个相互独立的随机变量，且均服从均匀分布$U(0,1)$的随机变量，

求$\xi-\eta$的概率密度函数。

解: 由ξ,η相互独立得联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

先求分布函数　当$z\le -1$时, $F_\zeta(z)=0$，

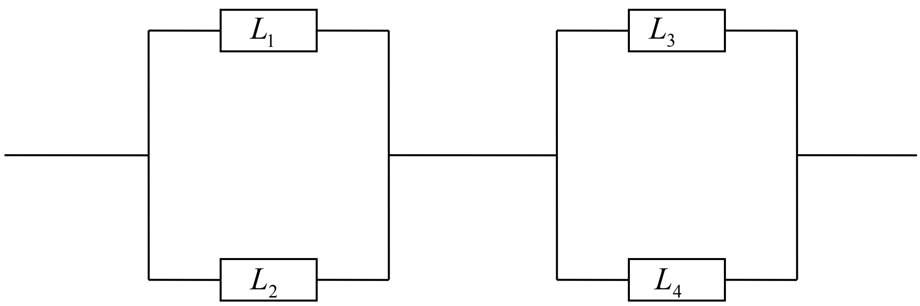
当$-1<z<0$时, $F_\zeta(z)=\int_0^{z+1}dx\int_{x-z}^{1}1dy=\frac{1}{2}(z+1)^2$,

当$0\le z<1$时, $F_\zeta(z)=1-\int_z^1 dx\int_0^{1-z}1dy=1-\frac{1}{2}(1-z)^2$,

当$z\ge 1$时, $F_\zeta(z)=1$，

故$\xi-\eta$的概率密度函数为 $p_\zeta(z)=\begin{cases}z+1, & -1<z<0,\\ z-1, & 0\le z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

4. 电子仪器由 4 个相互独立的部件$L_i\,(i=1,2,3,4)$组成，连接方式如图所示。设各个部件的使用寿命ξ_i服从指数分布$E(1)$，求仪器使用寿命ζ的概率密度。



解:　设各并联组的使用寿命为$\eta_j\,(j=1,2)$，则

$$\zeta=\min\{\eta_1,\eta_2\},\quad \eta_1=\max\{\xi_1,\xi_2\},\quad \eta_2=\max\{\xi_3,\xi_4\}$$

由ξ_i独立同分布知η_1,η_2也独立同分布。现

$$F_\xi(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

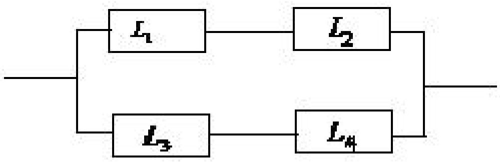
所以　$$F_\eta(y)=F_\xi^2(y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-y})^2 & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

从而

$$F_\zeta(z)=1-\left[1-F_\eta(z)\right]^2=\begin{cases}1-\left[1-(1-\mathrm{e}^{-z})^2\right]^2 & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2z}(2-\mathrm{e}^{-z})^2 & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

$$\therefore p_\zeta(z)==\begin{cases}4\,\mathrm{e}^{-2z}(1-\mathrm{e}^{-z})(2-\mathrm{e}^{-z}) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}。$$

5．将上题中的电子部件$L_i\,(i=1,2,3,4)$组成，按下列方式联接，求仪器使用寿命ζ的概率密度。



解:　设各串联组的使用寿命为$\eta_j\,(j=1,2)$，则

$$\zeta=\max\{\eta_1,\eta_2\},\quad \eta_1=\min\{\xi_1,\xi_2\},\quad \eta_2=\min\{\xi_3,\xi_4\}$$

由ξ_i独立同分布知η_1,η_2也独立同分布。现

$$F_\xi(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

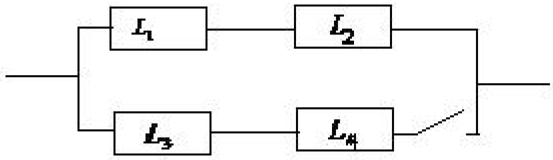
所以　$$F_{\eta_i}(y)=1-(1-F_\xi(y))^2=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

从而

$$F_\zeta(z)=\left[F_\eta(z)\right]^2=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-2z})^2 & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

$$\therefore p_\zeta(z)==\begin{cases}4\,\mathrm{e}^{-2z}(1-\mathrm{e}^{-2z}) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}。$$

6．将上题中的串联部分加上一个开关，先用上面部分，如果坏了，合上开关再用下面部分，求仪器使用寿命ζ的概率密度。



解:　设各串联组的使用寿命为$\eta_j\,(j=1,2)$，则

$$\zeta=\eta_1+\eta_2,\quad \eta_1=\min\{\xi_1,\xi_2\},\quad \eta_2=\min\{\xi_3,\xi_4\}$$

由ξ_i独立同分布知η_1,η_2也独立同分布。现

$$F_\xi(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

所以　$$F_{\eta_i}(y)=1-(1-F_\xi(y))^2=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

从而η_i的概率密度为

$$\therefore p_{\eta_i}(y)==\begin{cases}2\,\mathrm{e}^{-2y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}。$$

由(η_1,η_2)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}4e^{-2(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$\zeta=\eta_1+\eta_2$利用卷积公式,

当$z\le 0$时, $p_\zeta(z)=0$,

当$z>0$时, $p_\zeta(z)=\int_0^z 4e^{-2z}dx=4ze^{-2z}$。