§2直角坐标系中平面的方程

点到平面的距离

1.直角坐标系中平面方程的系数的几何意义

在直角坐标系$[O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$下,求过点$M_0(\vec{r}_0)$，平行于向量$\vec{v}_1,\vec{v}_2$（不共线）的平面, 即$\overrightarrow{MM_0},\vec{v}_1,\vec{v}_2$共面,

$\vec{v}_1\times\vec{v}_2\cdot\overrightarrow{MM_0}=0$ 这 意 味 着 $\overrightarrow{MM_0}\perp\vec{v}_1\times\vec{v}_2$.

$\Rightarrow \boldsymbol{Ax+By+Cz+D=0}$ 记为平面π .

$\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2$称为平面的法向量, 故由一个法向量及一个点可以确定一个平面。它的系数即为法向量$\{\boldsymbol{A,B,C}\}$,

$\boldsymbol{D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)}$.

2.点到平面的距离

已知平面 π ：$Ax+By+Cz+D=0$ 及平面外一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，过 P_1 作垂直于平面 π 的垂线，垂足为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，则 P_1 到平面 π 的距离为 $d=\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|$.

平面 π 的法方向 $\vec{n}$ =（**A**，**B**，**C**），$\overrightarrow{P_0P_1} \parallel \vec{n}$

$$\therefore \overrightarrow{P_0P_1} = \delta \vec{n}^0$$

$$\therefore \delta = \overrightarrow{P_0P_1} \cdot \vec{n}^0 = \frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$ P_1 到平面 π 的离差.

$$d = |\delta| = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$ P_1 到平面 π 的距离.

例1 求两平面

$z = x + 2y + 1$, $3x + 6y - 3z = 4$ 间的距离.

3.三元一次不等式的几何意义

若 P_1 在法方向 $\vec{n}$ 所指的方向（同向），则 $Ax+By+Cz+D>0$，否则 P_1 在法方向 $\vec{n}$ 的反向。

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 在平面 π 的同侧

$\Leftrightarrow$ $F_1=Ax_1+By_1+Cz_1+D$ 与 $F_2=Ax_2+By_2+Cz_2+D$ 同号。

4.两个平面的夹角

两个平面的夹角是指两个平面交成两个相邻的两面角中任一个. 易知其中一个等于两个平面的法向量的夹角.

直角坐标系中，平面 π_i, $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$　　$i=1$，2.

则 π_1 与 π_2 的一个夹角 ϑ 满足：

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

平面 π_1，π_2 垂直 $\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

例：在平面束 $\lambda(x+5y+z)+\mu(x-z+4)=0$ 中

找一个平面，使其与平面 φ：**x-4y-8z+12=0** 组成 $\frac{\pi}{4}$

角的平面方程.