理想气体的内能

- $\frac{m}{M}$ mol 理想气体的内能 $E=\frac{m}{M}\frac{i}{2}RT$
- 理想气体内能变化 $\Delta E=\frac{m}{M}\frac{i}{2}R\Delta T$

麦克斯韦速率分布率

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2\mathrm{d}v=\frac{4}{\sqrt{\pi}v_p}\frac{v^2}{v_p^{\ 2}}e^{-\frac{v^2}{v_p^{\ 2}}}dv$$

$$v_{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{2RT}{M}}\qquad \overline{v}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\qquad \sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

例4一容器内盛有密度为 ρ 的单原子理想气体, 其压强为 p ，此气体分子的方均根速率为________ ，单位体积内气体的内能是________。

$$\sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow p = \frac{\rho}{M}RT \Rightarrow \sqrt{\frac{RT}{M}} = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

$$\therefore \sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$$

$$E = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT = \frac{3}{2}pV \qquad E/V = \frac{3}{2}p$$

例5、写出下列各式的物理意义

（1） $Nf_{(v)}dv$ v---v+dv范围内的分子数

（2） $f_{(v)}dv$ v---v+dv范围内的分子数占总分子数的比率

（3） $\int_0^\infty vf_{(v)}dv$ 平均速率

（4） $\int_{v_p}^\infty Nf_{(v)}dv=\int_{v_p}^\infty dN$ $v_p-\infty$的分子数

（5） $\int_{v_p}^\infty f_{(v)}dv$ $v>v_p$时的分子数占总分子数的比率

（6） $$nf_{(v)}dv=\frac{N}{V}\frac{dN}{N}=\frac{dN}{V}$$ v---v+dv的分子数密度

（7） $$\int_{v_1}^{v_2}\frac{1}{2}mv^2Nf_{(v)}dv$$ v_1----v_2间的总的动能

(8) $$\frac{\int_{v_1}^{v_2}\frac{1}{2}mv^2Nf_{(v)}dv}{\int_{v_1}^{v_2}Nf_{(v)}dv}$$ v_1----v_2间的平均动能

【例6】写出速率$v>v_0$的分子的平均速率表达式

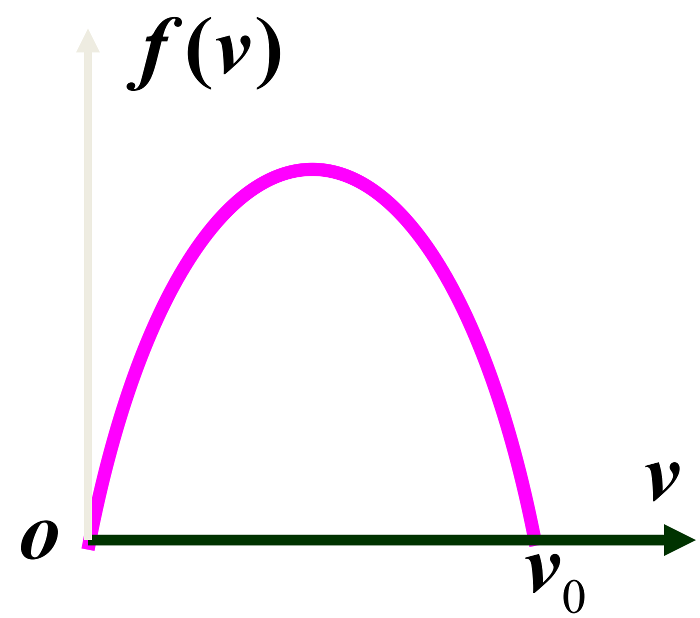
$$\bar{v}=\frac{\int_{v_0}^{\infty} v\,dN}{N'}=\frac{\int_{v_0}^{\infty} vf(v)N\,dv}{\int_{v_0}^{\infty} Nf(v)\,dv}=\frac{\int_{v_0}^{\infty} vf(v)\,dv}{\int_{v_0}^{\infty} f(v)\,dv}$$

例7　设想有N个气体分子，其速率分布函数为

$$f(v)=\begin{cases}Av(v_0-v) & 0\le v\le v_0\\ 0 & v>v_0\end{cases}$$

试求: (1)常数A；(2)最可几速率，平均速率和方均根；(3)速率介于0~$v_0/3$之间的分子数；(4)速率介于0~$v_0/3$之间的气体分子的平均速率。

解：(1)气体分子的分布曲线如图



由归一化条件 $\int_0^{\infty} f(v)dv=1$

$$\int_0^{v_0} Av(v_0-v)dv=\frac{A}{6}v_0^{\,3}=1$$

$$A=\frac{6}{v_0^{\,3}}$$

$$f(v)=\begin{cases} Av(v_0-v) & 0\le v\le v_0 \\ 0 & v>v_0 \end{cases}$$

(2)最可几速率由 $\left.\dfrac{df(v)}{dv}\right|_{v_p}=0$ 决定，即

$$\left.\frac{df(v)}{dv}\right|_{v_p}=A(v_0-2v)\big|_{v_p}=0 \longrightarrow v_p=\frac{v_0}{2}$$

平均速率 $$\bar{v}=\int_0^{\infty}vf(v)dv=\int_0^{v_0}\frac{6}{v_0^{\ 3}}v^2(v_0-v)dv=\frac{v_0}{2}$$

方均速率 $$\overline{v^2}=\int_0^{\infty}v^2f(v)dv=\int_0^{v_0}\frac{6}{v_0^{\ 3}}v^3(v_0-v)dv=\frac{3}{10}v_0^{\ 2}$$

方均根速率为 $$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3}{10}}v_0$$

(3)速率介于0~v_0/3之间的分子数

$$\Delta N=\int dN=\int_0^{\frac{v_0}{3}}Nf(v)dv=\int_0^{\frac{v_0}{3}}N\frac{6}{{v_0}^3}v(v_0-v)dv=\frac{7N}{27}$$

(4)速率介于0~v_0/3之间的气体分子平均速率为

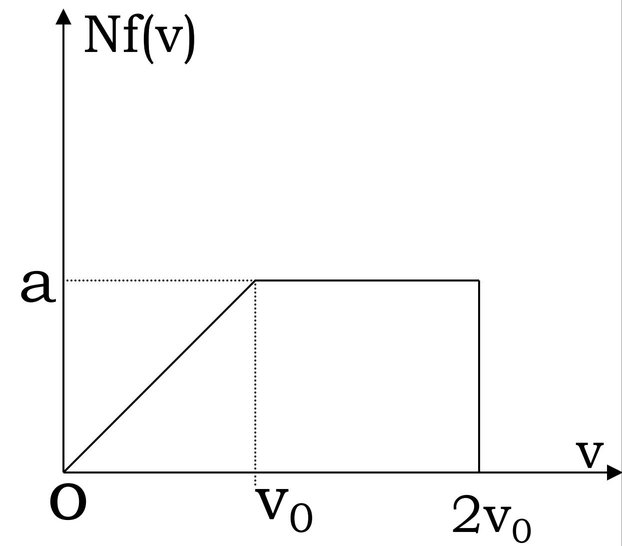
$$\bar{v}_{0\sim v_0/3}=\frac{\int_0^{\frac{v_0}{3}}vdN}{\int_0^{\frac{v_0}{3}}dN}=\frac{\int_0^{\frac{v_0}{3}}N\frac{6}{{v_0}^3}v^2(v_0-v)dv}{7N/27}=\frac{3v_0}{14}$$

[例8] 有N个假象的气体分子，其速率分布如图所示。

试求：（1）纵坐标的物理意义，并由N和v_0求a;

（2）速率在$1.5v_0 \sim 2.0v_0$之间的分子数；

（3）分子的平均速率。



解： (1) $Nf(v) = N\dfrac{dN}{Ndv} = \dfrac{dN}{dv}$

某一速率附近单位速率区间内的分子数

$$Nf(v) = \frac{a}{v_0}v, \quad Nf(v) = a, \quad Nf(v) = 0$$

$$(0 < v < v_0), \quad (v_0 \le v \le 2v_0), \quad (v > 2v_0)$$

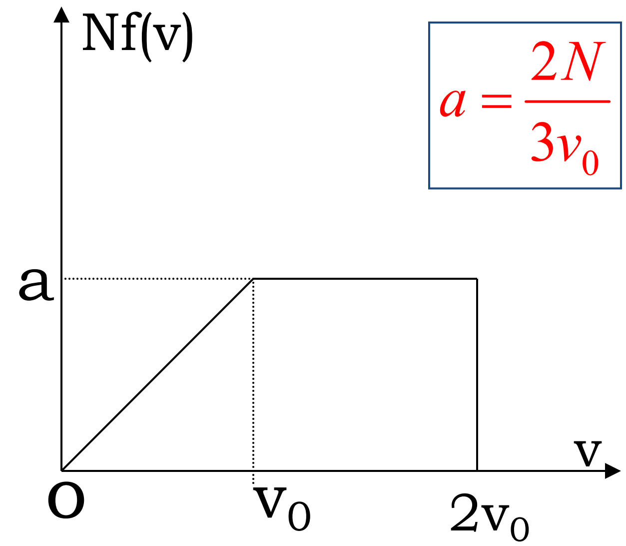
$$\int_0^\infty f(v)dv = \int_0^{v_0}\frac{a}{Nv_0}vdv + \int_{v_0}^{2v_0}\frac{a}{N}dv = 1$$

得：$a = \dfrac{2N}{3v_0}$

$$Nf(v)=\frac{a}{v_0}v,\quad Nf(v)=a,\quad Nf(v)=0$$

$$(0<v<v_0),\quad (v_0\le v\le 2v_0),\quad (v>2v_0)$$

$$\boxed{a=\frac{2N}{3v_0}}$$



⑵ 速率在$1.5v_0\sim 2.0v_0$之间的分子数；

$$\Delta N=\int_{1.5v_0}^{2.0v_0}dN=\int_{1.5v_0}^{2.0v_0}Nf(v)dv$$

$$=\int_{1.5v_0}^{2.0v_0}adv=\frac{a}{2}v_0\ =\frac{N}{3}$$

⑶ 分子的平均速率。

$$\bar{v}=\int_0^{\infty}\frac{vdN}{N}=\int_0^{\infty}vf(v)dv=\int_0^{v_0}\frac{a}{v_0N}v^2dv+\int_{v_0}^{2v_0}\frac{a}{N}Vdv$$

$$=\frac{11a}{6N}v_0^2\qquad =\frac{11}{9}v_0$$

6.6 玻尔兹曼分布率

$$p = p_0 \, exp\left\{-\frac{Mgh}{RT}\right\},$$

$$N_i = C\mathrm{e}^{-\epsilon_i/kT} \quad i = 1, 2, 3, \cdots$$

4. 在二氧化碳激光器中，作为产生激光的介质 CO_2 分子的两个能级之能量分别为 $\varepsilon_1=0.172eV$，$\varepsilon_2=0.291eV$，在温度为 400℃时，两能级的分子数之比 $N_2:N_1$ 为（玻耳兹曼常量 $=1.38\times10^{-23}J/K$，$1eV=1.60\times10^{-19}J$）（　　）

(A) 31.5　　(B) 7.2

(C) 0.13　　(D) 0.03

$$N_i = Ce^{-\varepsilon_i/kT} \quad i = 1, 2, 3, \cdots$$

C

例

已知大气压强随高度h的变化规律为$p = p_0 \, exp\left\{-\frac{Mgh}{RT}\right\}$,

设气温 $t = 5℃$ 同时测得海平面的气压和山顶的气压分为750mmHg和 590mmHg，求山顶的海拔 $h = ?$

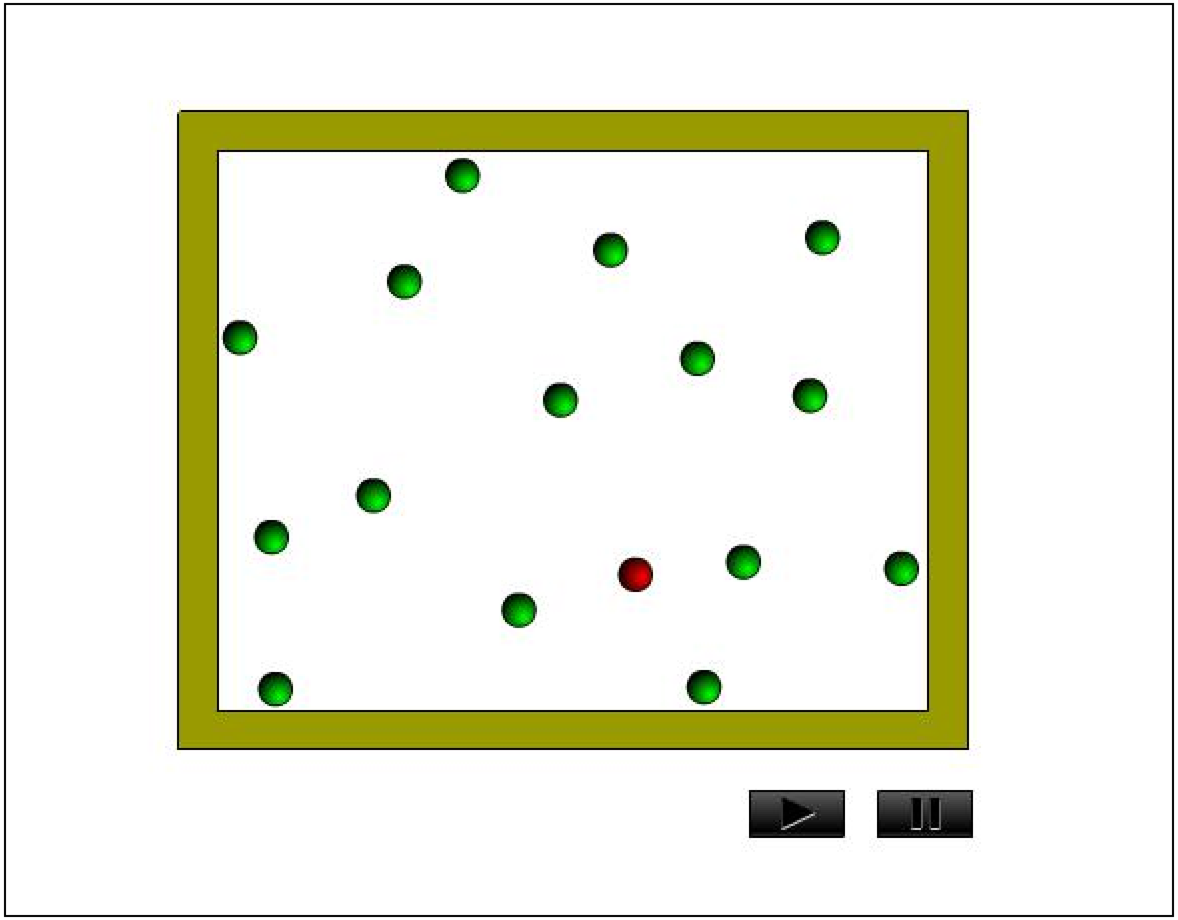
（p_0为$h = 0$ 时的压强, 空气的$M = 29\times10^{-3}$kg/mol)

等温气压公式 $$p = p_0 e^{-Mgh/RT}$$

$$ln\frac{p_0}{p} = \frac{Mgh}{RT} \qquad h = \frac{RT}{Mg} ln\frac{p_0}{p} = 1950 \text{ m}$$

6.7　分子的平均碰撞次数和平均自由程

自由程：　分子两次相邻碰撞之间自由通过的路程．



2

◆ 分子平均自由程：每两次连续碰撞之间，一个分子自由运动的平均路程．

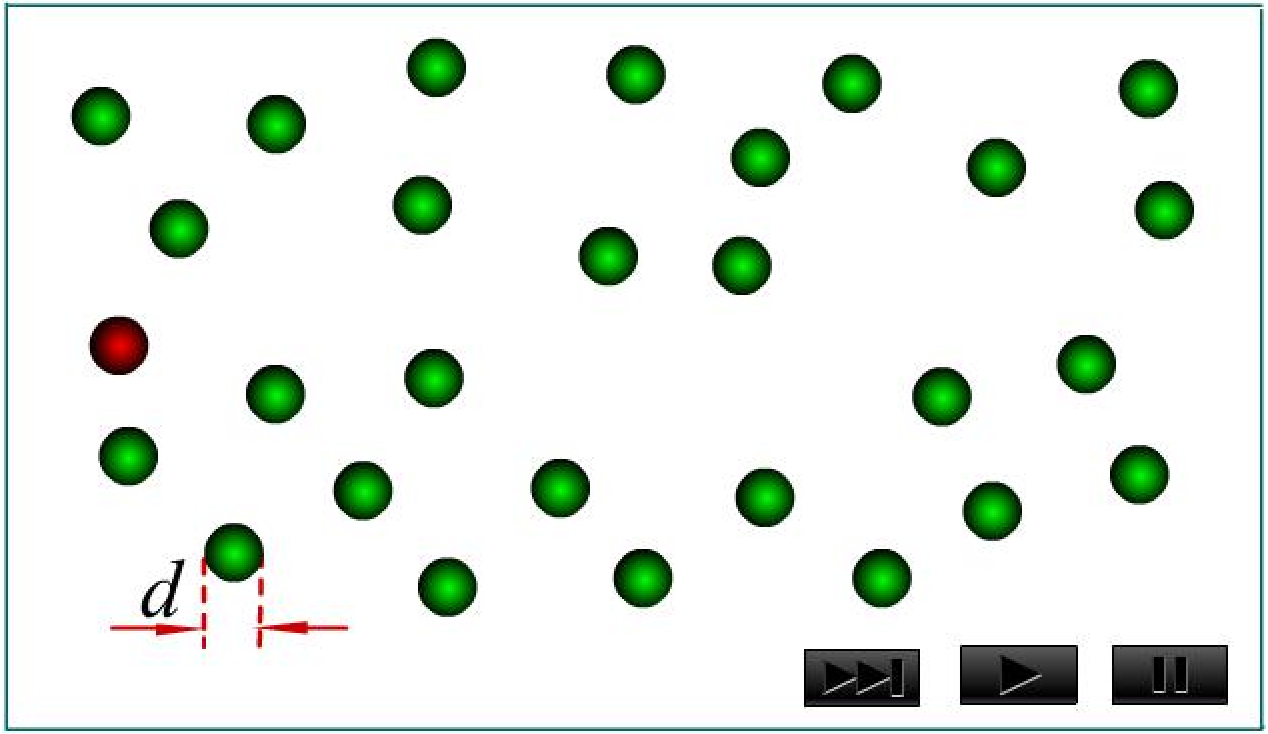
◆ 分子平均碰撞次数：单位时间内一个分子和其它分子碰撞的平均次数．

简化模型

1．分子为刚性小球，

2．分子有效直径为d（分子间距平均值），

3．其它分子皆静止，某一分子以平均速率$\overline{u}$相对其他分子运动．

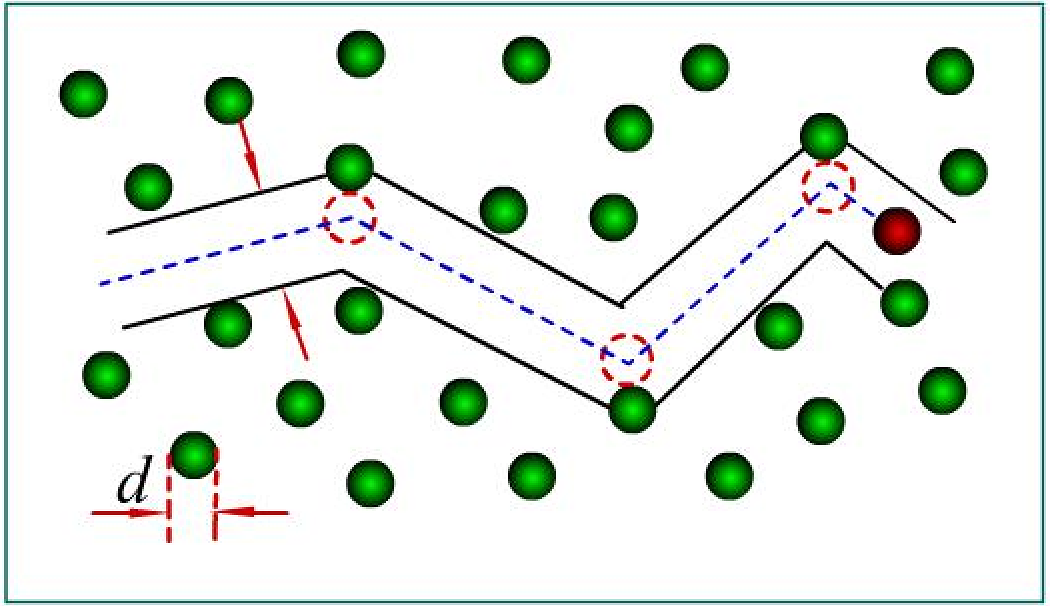


3 4

单位时间内平均碰撞次数 $\overline{Z} = \pi d^2 \overline{u} n$

考虑其他分子的运动 $\overline{u} = \sqrt{2}\,\overline{v}$

分子平均碰撞次数 $\overline{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 \overline{v} n$



- 分子平均碰撞次数

$$\boxed{\overline{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 \overline{v} n}$$

$$p = nkT$$

- 平均自由程

$$\overline{\lambda} = \frac{\overline{v}}{\overline{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$$

$$\boxed{\overline{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}}$$

T一定时 $\overline{\lambda} \propto \dfrac{1}{p}$

p一定时 $\overline{\lambda} \propto T$

例1

一定量的理想气体,在体积不变的条件下,当温度升高时,分子的平均碰撞次数$\overline{Z}$和平均自由程$\overline{\lambda}$的变化情况是:

(A) $\overline{Z}$ 增大, $\overline{\lambda}$不变 (B) $\overline{Z}$ 不变, $\overline{\lambda}$增大

(C) $\overline{Z}$ 和$\overline{\lambda}$都增大 (D) $\overline{Z}$ 和 $\overline{\lambda}$都不变

$$\overline{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 n\overline{\upsilon} = \sqrt{2}\pi d^2 \frac{N}{V}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{V}{\sqrt{2}\pi d^2 N}$$

答案：A

例2、设容器内盛有质量为m，摩尔质量为M的多原子气体,分子直径为d，气体的内能为E，压力为p，求

（1）分子平均碰撞频率；

（2）分子最概然速率；

（3）分子的平均平动动能。

解：（1）

$$\because \bar{v}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \qquad P=nkT \qquad E=\frac{m}{M}\frac{6}{2}RT$$

$$\therefore \bar{z}=\sqrt{2}\pi d^2\bar{v}n=\frac{4d^2N_AP}{M}\sqrt{\frac{3\pi m}{E}}$$

（2）

$$v_p=\sqrt{\frac{2RT}{M}}=\sqrt{\frac{2E}{3m}}$$

（3）

$$\bar{\varepsilon}_k=\frac{3}{2}kT=\frac{ME}{2N_Am}$$

（其中N_A为阿伏伽德罗常数）

例3、将1kg氦气和m 氢气混合，平衡后混合气体的内能是2.45×10^{6}J。氦分子平均动能是6×10^{-21}J。求氢气质量m

解：由题意可知

$$\frac{3}{2}kT = 6\times10^{-21} \qquad E=\frac{m}{M}\frac{i}{2}RT$$

$$\frac{m_{He}}{M_{He}}N_A\frac{3}{2}kT+\frac{m_{H_2}}{M_{H_2}}N_A\cdot\frac{5}{2}kT = 2.45\times10^{6}$$

其中

$$M_{He}=4\times10^{-3}\,kg \qquad M_{H_2}=2\times10^{-3}\,kg \qquad N_A=6.02\times10^{23}\text{个}$$

$$\therefore \quad m_{H_2}=\frac{\dfrac{2.45\times10^{6}\times4\times10^{-3}}{6.02\times4\times10^{-21}\times10^{23}}-1.5}{5}=0.51kg$$