2016 中科院高等代数试题与解答

习黎曼

1

计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}.$$

2

二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=5x_1^2+5x_2^2+\beta x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求 β

(2) 求正交变换, 将二次型化为标准型.

3

矩阵 A 的 n-1 阶子式不全为零，给出齐次方程组 Ax=0 一组解，并求方程所有的解

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

4

V_1, V_2 均为有限维线性空间, 且满足 $\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1\cap V_2)+1$.

证明: 必有 $V_1+V_2=V_1$, $V_1\cap V_2=V_2$ 或 $V_1+V_2=V_2$, $V_1\cap V_2=V_1$

5

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

证明：与 A 交换的矩阵均可表为 A 的多项式

6

n阶方阵A的每行每列恰有一个元素为1或-1,其余元素均为零.证明存在$k\in\mathbb{N}^*$使得

$$A^k=E.$$

7

定义 $M_n(C)$ 上的线性变换 $T(X):=AX-XA$. 证明 T 的特征值必有 $\lambda_i-\lambda_j$ 的形式

其中. λ_i,λ_j 是A的特征值

8

设A,B是两个n阶复方阵

如果$AB-BA=\mu B$,其中μ是一个非零复数

证明：

（1）A，B 必有公共的特征向量。

（2）A，B 同时可上三角化。

9

设多项式 $g(x)=p^k(x)g_1(x)(k\ge1)$，多项式 $p(x)$ 与 $g_1(x)$ 互素。证明：

对任意多项式 $f(x)$ 有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{r(x)}{p^k(x)}+\frac{f_1(x)}{p^{k-1}(x)g_1(x)}$$

其中，$r(x),f_1(x)$ 都是多项式，$r(x)=0$ 或 $\deg(r(x))<\deg(p(x))$。

参考解答

1.

将D的第一行乘以$-\dfrac{a_1+b_1}{a_i+b_1}$加第$i(i=2,\cdots,n)$行可得

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}=\frac{1}{a_1+b_1}\begin{vmatrix} c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

其中

$$c_{ij}=\frac{1}{a_i+b_j}-\frac{a_1+b_1}{(a_i+b_1)(a_1+b_j)}=\frac{(a_i-a_1)(b_j-b_1)}{(a_1+b_j)(a_i+b_j)(a_i+b_1)}.$$

从而

$$\begin{vmatrix} c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

的第i行有公因子$\dfrac{a_i-a_1}{a_i+b_1}$,第j列有公因子$\dfrac{b_j-b_1}{b_j-a_1}$,这样若记 $D=D_n(a_1,\cdots,a_n;b_1,\cdots,b_n)$,则有递推关系式

$$D=D_n(a_1,\cdots,a_n;b_1,\cdots,b_n)=\frac{1}{a_1+b_1}\prod_{i=2}^{n}\frac{(a_i-a_1)(b_i-b_1)}{(a_i+b_1)(b_i-a_1)}D_{n-1}(a_2,\cdots,a_n;b_2,\cdots,b_n)$$

从而可得

$$D=\frac{\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{1\le i,j\le n}(a_i+b_j)}.$$

2.

略

3.

设$M_j\left(j=1,2,\cdots,n\right)$是在矩阵$A$中化去第$j$列所得到的$n-1$阶子式.

(1) 构造一个行列式,

$$D(i)=\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix},$$

显然,$D(i)=0\quad(i=1,2,\cdots,n-1)$.

将$D(i)$按第一行展开得,

$$D(i)=a_{i1}M_1-a_{i2}M_2+\cdots+(-1)^{n-1}M_n\qquad(i=1,2,\cdots,n-1),$$

从而$\left(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n\right)$是方程组的一个解.

4.

证明： $\because \dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2)$

$\therefore\ 2\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)+1.\ \cdots①$

若 $\dim(V_1+V_2)>\dim V_1$ 且 $\dim(V_1+V_2)>\dim V_2$

则 $\dim(V_1+V_2)\geq\dim V_1+1.\quad \dim(V_1+V_2)\geq\dim V_2+1$

则 $2\dim(V_1+V_2)\geq\dim V_1+\dim V_2+2$ 与①式矛盾.

$\therefore$ 必有 $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1,\ \dim(V_1\cap V_2)=\dim V_2$

或 $\dim(V_1+V_2)=\dim V_2,\ \dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1$

$\therefore\ V_1+V_2=V_1,\ V_1\cap V_2=V_2$

或 $V_1+V_2=V_1,\ V_1\cap V_2=V_2$ 证完

至于 $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$ 这样的结论考试时要不要证.就不好说了.反正当时我证了.

5.

设$A=\lambda E+C$,其中

$$C=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}$$

则

$$AB=BA\Leftrightarrow BC=CB$$

设$B=(b_{ij})$,则由$BC=CB$可得

$$B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & b_{12}\\ & & & b_{11}\end{pmatrix}(b_{ii}=b_{jj},b_{ij}=b_{i+1,j+1},i<j)$$

从而可得.

所以 B 是 C 的多项式，而 C 是 A 的多项式，所以 B 是 A 的多项式

证完

6.

证明　因为满足条件的矩阵A至多有有限个,是$2^n n!$.而且任意满足条件的矩阵A,显然对任意的$i \in \mathbb{N}, A^i$也是满足条件的矩阵.所以存在$p > q \in \mathbb{N}$使得

$$A^p = A^q$$

所以$A^{p-q} = E.$

证完

7.

我的解答过于复杂，我求了 T 在一组基下的矩阵（详见许甫华，张贤科 高等代数解题方法 P230）之后计算特征值。

8.

(1)

设σ, τ在复数域上的线性空间 V的某一组基下的矩阵分别为A, B.

由$\mu \neq 0$知$tr(\tau^k) = 0$,于是τ为幂零变换,即存在正整数m使得$\tau^m = 0$.

考虑

$$ker\tau = \{\alpha | \tau(\alpha) = 0\},$$

易知$ker\tau \neq \{0\}$.$\forall \alpha \in ker\tau$,有

$$0 = \mu\tau(\alpha) = \sigma\tau(\alpha) - \tau\sigma(\alpha) = \tau(\sigma(\alpha))$$

即$\sigma(\alpha) \in ker\tau$,从而$ker\tau$也是$\sigma$的不变子空间.$\sigma|ker\tau$是复数域上的线性变换,至少有一个特征值$\lambda_0$,相应的特征向量$\beta \in ker\tau$,即

$$\sigma(\beta) = \sigma|ker\tau(\beta) = \lambda_0\beta, \tau(\beta) = 0\beta = 0.$$

从而β是σ, τ的公共特征向量.

(2)

由（1）知 A,B 必有公共特征向量 u ，将 u 扩充为一组基，则 A,B 在这组基下的矩阵为分块对角阵，之后用归纳法证明

9

证法 1

证明：首先我们证明这样一个事实．若 $(p(x), g_1(x))=1$．

则对 $\forall s(x)$ 满足 $\deg(s(x))<\deg(p(x))$．

$\exists r(x)$ 满足 $\deg(r(x))<\deg(p(x))$ 且有 $g_1(x)\cdot r(x)\equiv s(x) \pmod{p(x)}$．

事实上：$\because (p(x), g_1(x))=1$．$\therefore \exists$ $u(x), v(x)$ 使得 $u(x)\cdot p(x)+v(x)\cdot g_1(x)=1$

则 $s(x)\cdot v(x)\cdot g_1(x)=s(x)-s(x)\cdot u(x)\cdot p(x)\equiv s(x) \pmod{p(x)}$ 若 $\deg(s(x)\cdot v(x))<\deg(p(x))$

则取 $r(x)=s(x)\cdot v(x)$．

若 $\deg(s(x)\cdot v(x))>\deg p(x)$ 则有 $s(x)\cdot v(x)=h(x)p(x)+r_1(x)$．其中 $\deg r_1(x)<\deg p(x)$

$\therefore r_1(x)\cdot g_1(x)\equiv (h(x)\cdot p(x)-r_1(x))\cdot g_1(x) = s(x)\cdot v(x)\cdot g_1(x) = s(x)-s(x)\cdot u(x)\cdot p(x)\equiv s(x) \pmod{p(x)}$

取 $r(x)=r_1(x)$．引理得证．

回到原题 由已知条件有 $(p(x), g_1(x))=1$ 设 $f(x)\equiv q(x) \pmod{p(x)}$．

若 $q(x)=0$．则 $p(x)\mid f(x)$ 则取 $r(x)=0$．$f_1(x)=\frac{f(x)}{p(x)}$ 满足要求

若 $q(x)\neq 0$．取 $\deg(q(x))<\deg p(x)$．则由引理知．

存在 $r(x)$ 满足 $\deg(r(x))<\deg(p(x))$．满足 $g_1(x)\cdot r(x)\equiv q(x) \pmod{p(x)}$

$\therefore f(x)-g_1(x)\cdot r(x)\equiv q(x)-q(x)\equiv 0 \pmod{p(x)}$．

即 $p(x)\mid f(x)-g_1(x)\cdot r(x)$ 则令 $f_1(x)=\frac{f(x)-g_1(x)\cdot r(x)}{p(x)}$

有 $f(x)=g_1(x)\cdot r(x)+f_1(x)\cdot p(x)$

两边同除 $g(x)$．

我们有 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{r(x)}{p^k(x)}+\frac{f_1(x)}{p^{k-1}(x)\cdot g_1(x)}$ 证完．

证法 2

因为 $p(x)$ 与 $g_1(x)$ 互素，所以存在多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$ 使得

$$u(x)p(x)+v(x)g_1(x)=1.$$

因为 $f(x)/g(x)$ 不恒等于 0(不然取 $r(x)=0, f_1(x)=0$ 即得结论)，所以用它乘等式两边得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{u(x)f(x)}{p^{k-1}(x)g_1(x)}+\frac{v(x)f(x)}{p^k(x)}.$$

又由带余数除法，存在多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$ 使得 $v(x)f(x)=q(x)p(x)+r(x)$，其中 $r(x)=0$，或者 $\deg(r(x))<\deg(p(x))$，将此代入上式，并令 $f_1(x)=u(x)f(x)+q(x)g_1(x)$，即得题中所要的等式.

总体上说今年题目中规中矩，难度与 2012 年相当，比 2013,2014 都要容易些，总体来讲对于中科院的高代，只要稳扎稳打问题应该是不大的，证明严谨就好

今年考得问题都很经典第一题是柯西行列式，第三题见于大部分高代教材，中科院 06 年考过，第 5,7,8,9 题以前都考过，第六题是北大 12 年的考研题

最后向 2015 年的解答者 morrismodel 致敬

En Taro morrismodel

morrismodel Toridas