《微分几何》课程电子课件

教师：杨勤民

Tel: (021)64253147

Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程QQ群号：1045698545

微分几何的研究内容： 微分流形的几何性质

光滑曲线、曲面的一般化

微分几何的主要工具： 流形上的微积分

微分几何的重要性：

广义相对论的基础、力学、工程技术

不学好几何，很难在数学相关领域走得太远

——— 高斯

古典微分几何的奠基人：Euler, Monge, Gauss

1736年，瑞士数学家Euler引入了平面曲线的内蕴坐标，即以曲线弧长作为参数来表示曲线上的点的坐标，开始了曲线的内蕴几何学；

1807年，法国数学家Monge(蒙日)出版了《分析在几何学上的应用》，把微积分应用到曲线和曲面的研究之中；

1827年，德国数学家Gauss发表了《关于曲面的一般研究》，奠定了现代形式曲面论的基础，建立了曲面的内蕴几何学.

近代微分几何的创始人：**Riemann**

1854年，**Riemann**创立的黎曼几何学，成为近代微分几何的主要内容，并在广义相对论中起了重要作用。

近代微分几何的杰出贡献者：**Cartan**，陈省身

Cartan(嘉当)于**20**世纪二三十年代开创并发展了外微分形式与活动标架法，建立起李群与微分几何之间的联系；

陈省身开创并发展了整体微分几何、纤维丛微分几何、陈省身示性类等领域，被誉为微分几何之父，获得**Wolf**(沃尔夫)奖.

微分几何的局部理论与整体理论

局部微分几何研究三维欧氏空间中曲线和曲面在一点附近的性质，其中的一个主要问题是寻求几何不变量，并确定这些不变量能在多大程度上刻划曲线和曲面；

整体微分几何以局部性质为基础来研究图形的整体性质.

本课程的主要内容

三维欧氏空间中曲线和曲面的局部理论

§0 向量的运算(复习)

一、向量(矢量)的线性运算

二、向量的点积(内积)

三、向量的叉积(外积、向量积)

（Lagrange恒等式、双重叉积公式）

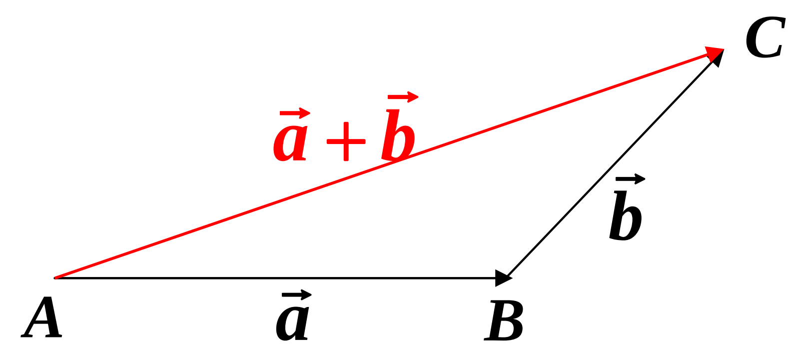
四、向量的混合积

五、向量垂直，平行，共面的条件

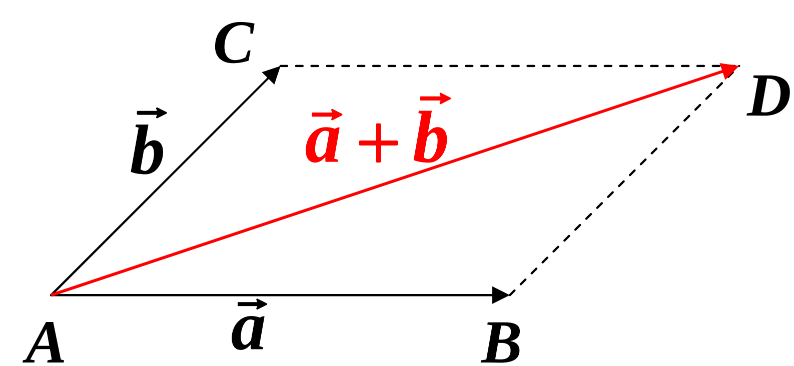
向量： 既有大小，又有方向的量.

向量加法的定义

三角形法则

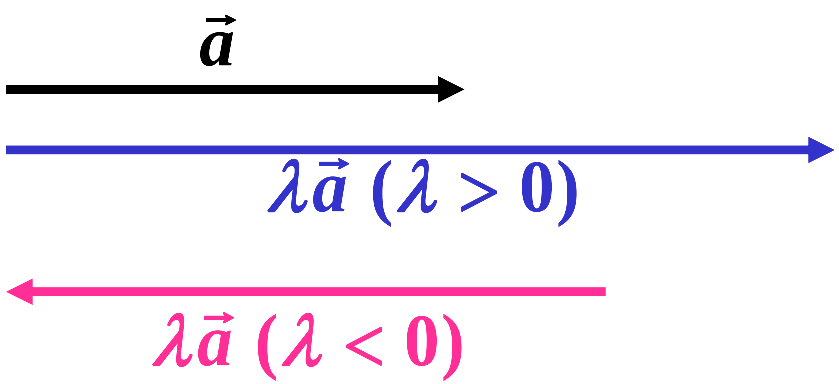


平行四边形法则



向量的数乘运算

数与向量的乘法：实数λ与向量$\vec{a}$的乘积$\lambda\vec{a}$是一个向量，它的长度是$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$; $\lambda\vec{a}$的方向：当$\lambda > 0$时与$\vec{a}$相同，当$\lambda < 0$时与$\vec{a}$相反. 约定 $0\vec{a} = \vec{0}$.



数与向量的乘法简称向量的数乘运算.

若$\vec{a} \neq \vec{0}$, 则$\vec{b} \,/\!/\, \vec{a}$平行$\Leftrightarrow$存在实数λ使得$\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

向量线性运算的运算规律:

(1) 交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(2) 结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

(3) $\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

(4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

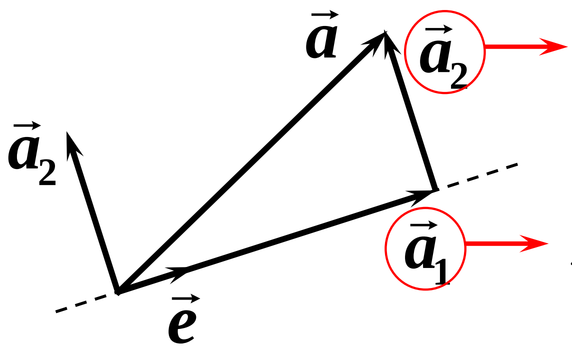
(5) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

(6) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

(7) $(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$

(8) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

向量的分解、射影和分量



称为$\vec{a}$在方向$\vec{e}$上的外射影

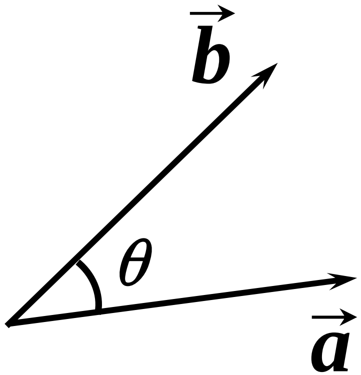
称为$\vec{a}$在方向$\vec{e}$上的内射影

给定单位向量$\vec{e}$，则任一向量$\vec{a}$可分解为$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2$，

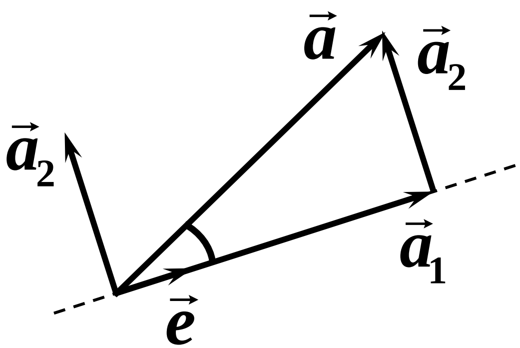
其中$\vec{a}_1 /\!/ \vec{e}$, $\vec{a}_2 \perp \vec{e}$.

若$\vec{a}_1$是$\vec{a}$在方向$\vec{e}$上的内射影，则存在唯一实数λ使得

$\vec{a}_1=\lambda\vec{e}$，称该实数λ为$\vec{a}$在$\vec{e}$上的分量，记作$\Pi_{\vec{e}}\vec{a}$.

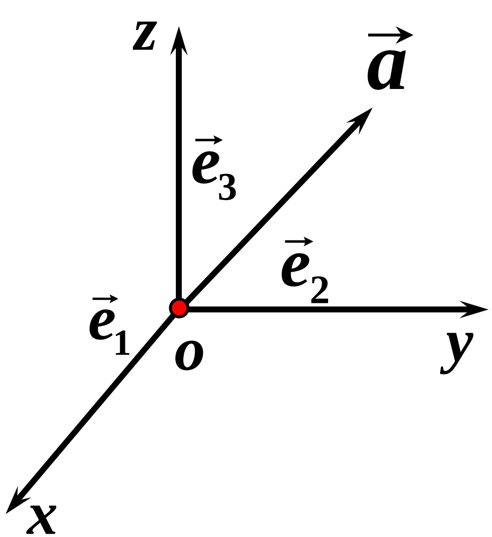


若$0\le\theta\le\pi$，则称 θ为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，记为$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.



$$\vec{a}_1 = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{e}})\,\vec{e}$$ ($\vec{a}$在$\vec{e}$上的投影向量)

$$\Pi_{\vec{e}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{e}})$$ ($\vec{a}$在$\vec{e}$上的投影)



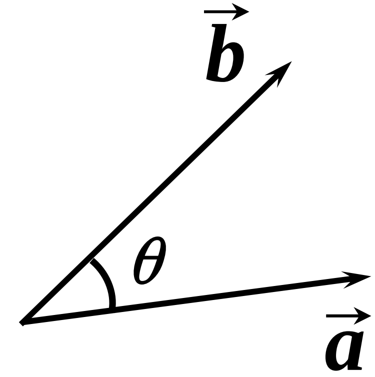
$\vec{a}$在直角坐标系$[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$下的坐标为

$$\left(\Pi_{\vec{e}_1}\vec{a},\Pi_{\vec{e}_2}\vec{a},\Pi_{\vec{e}_3}\vec{a}\right)$$

向量内积的定义和性质

两向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的内积(点积)

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$$



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\Pi_{\vec{b}^\circ}\vec{a})\left|\vec{b}\right|$$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\quad\Leftrightarrow\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

对于任意的向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$和实数λ,有

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}$

(3) $(\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{b}$

(4) 若$\vec{a}\neq\vec{0}$, 则$\vec{a}\cdot\vec{a}>0$

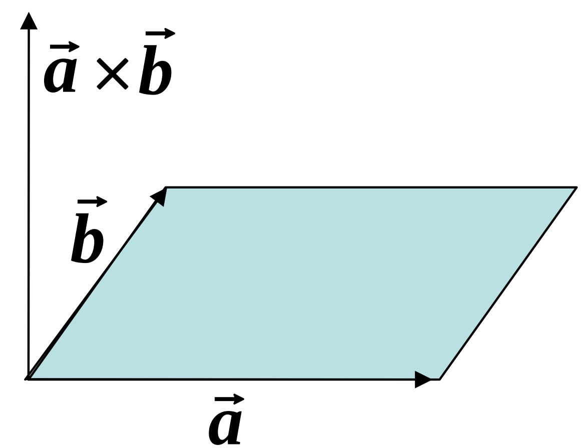
向量的外积与混合积

向量$\vec{a}$和向量$\vec{b}$的外积定义为一个向量$\vec{a}\times\vec{b}$：

其大小为$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

(即以$\vec{a},\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积)

其方向垂直于$\vec{a}$和$\vec{b}$，且遵从右手法则.



向量的外积又称向量积或叉积.

$$\vec{a}\,//\,\vec{b} \iff \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$$

$$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$$

外积的运算法则:

(1)反交换律 $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

(2)与数乘的结合律

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$$

(3)左分配律 $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

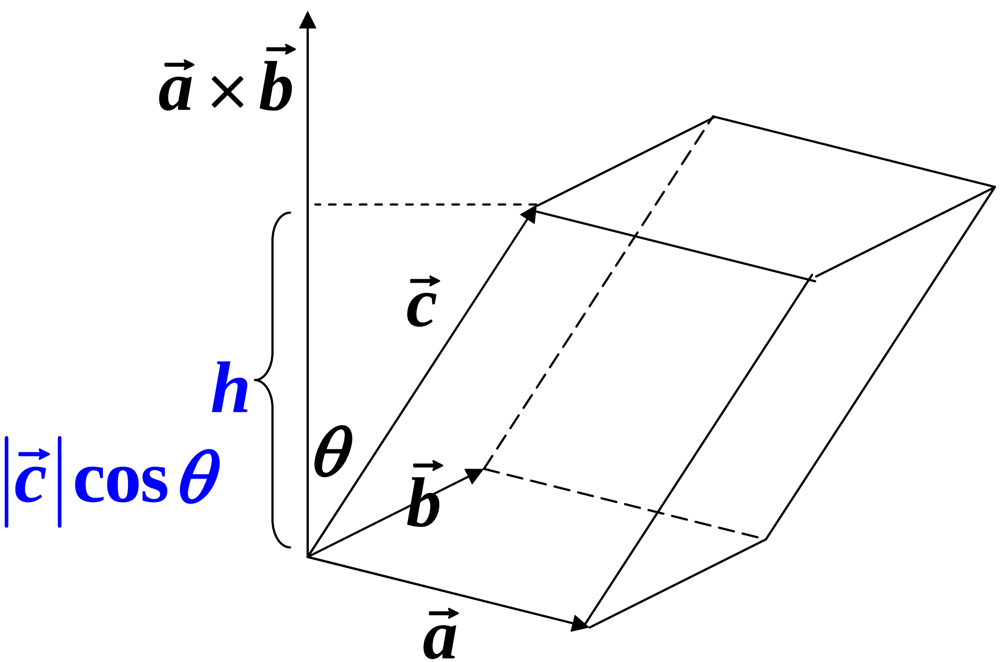
(4)右分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

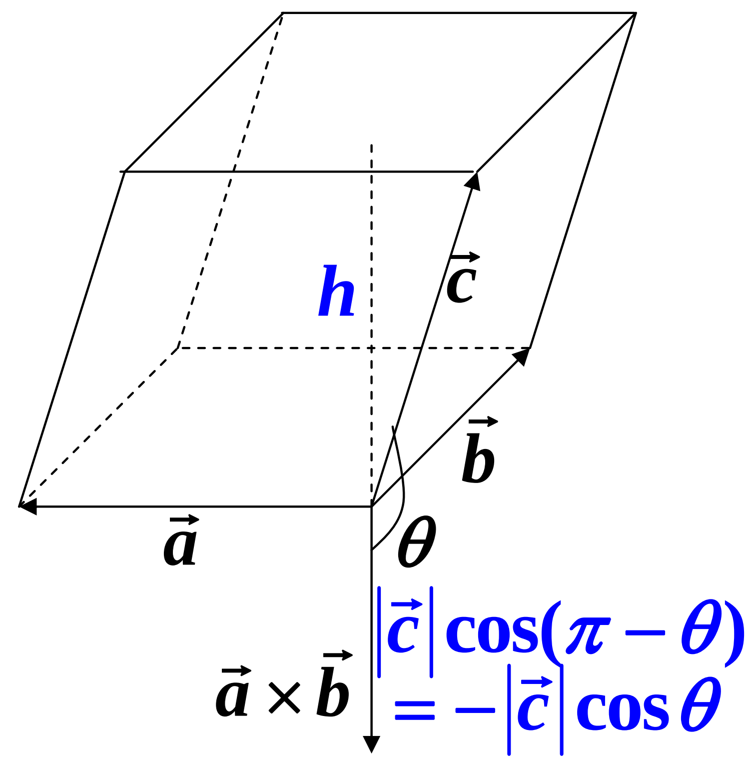
注:

外积不满足结合律,即$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\neq\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

称$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$为向量$\vec{a},\vec{b}$和$\vec{c}$的**混合积**,记为$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\theta$$





几何意义: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{cases}V, 当\vec{a},\vec{b},\vec{c}成右手系\\ -V, 当\vec{a},\vec{b},\vec{c}成左手系\end{cases}$

轮换不变性：$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})$

反交换律：$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=\cdots$

空间三向量共面的条件

① $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面 $\Leftrightarrow$ $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$

② 空间四点A, B, C, D共面 $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=0$

③ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面$\Leftrightarrow$存在不全为零的实数 k_1,k_2,k_3使得$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=\vec{0}$.

双重叉积公式

对任意向量$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 有

双重叉积公式

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c},$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}.$$

雅克比(Jacobi)等式

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{0},$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} + (\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} + (\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b} = \vec{0}.$$

拉格朗日(Lagrane)恒等式

对任意向量$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, 有

拉格朗日恒等式

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix},$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2.$$