练习二十九

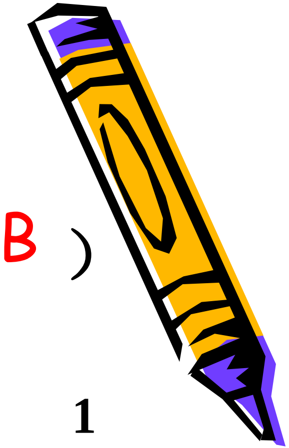
一、选择题

(1) 设$u=f(xy,\dfrac{yz}{x})$,且$f\in C^2$,则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=(D)$.

分析:$\dfrac{\partial u}{\partial y}=xf_1+\dfrac{z}{x}f_2,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=yf_{12}+\dfrac{1}{x}f_2+\dfrac{yz}{x^2}f_{22}$

或$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{y}{x}f_2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=\frac{1}{x}f_2+yf_{21}+\frac{yz}{x^2}f_{22}$$



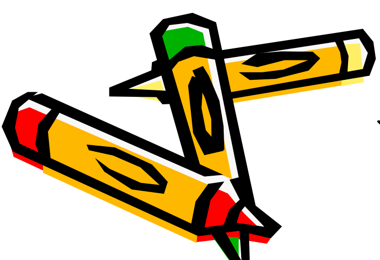
（2）设 $u=\ln r$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ，则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=$ （ B ）

（A）0；（B）$\frac{1}{r^2}$ ；（C）$\frac{5}{r^2}$ ；（D）$-\frac{1}{r^2}$.

分析：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{r}\cdot\frac{x}{r}=\frac{x}{r^2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{r^2}+x(-2)\cdot\frac{1}{r^3}\cdot\frac{x}{r}=\frac{1}{r^2}-\frac{2x^2}{r^4}$$

同理：$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{r^2}-\frac{2y^2}{r^4}$ $\quad\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}-\frac{2z^2}{r^4}$



于是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{3}{r^2}-\frac{2r^2}{r^4}=\frac{1}{r^2}$

（3）若函数 $f(x,y)=2x^2+ax+xy^2+2y$ 在点 $P_0=(1,-1)$ 处取得极值，则常数 $a=$ （ A ）

（A）-5；（B）0；（C）不存在；（D）任意实数.

分析：$f_x(x,y)=4x+a+y^2,\ f_y(x,y)=2xy+2$

由极值存在的必要条件：$f_x(1,-1)=4+a+1=0$

$f_y(1,-1)=-2+2=0$

$\Rightarrow a=-5$

（4）命题“若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极大值，则函数 $F(y)=f(x_0,y)$ 在点 $y=y_0$ 处也取得极大值”是

（ ***B*** ）

（A）伪命题；　　　　（B）真命题．

(5)函数 $f(x,y)=4x-3y$ 在约束条件 $x^4+6y^4=22$ 下有极大值（ D ），极小值 （ A ）.

（A）－11；　（B）－5；　（C）5；　（D）11；　（E）不存在.

分析：令$L=4x-3y+\lambda(x^4+6y^4-22)$

$$\left.\begin{aligned}L_x&=4+4\lambda x^3=0\\L_y&=-3+24\lambda y^3=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=-2y \text{ 代入第三式，解得}$$

$$L_\lambda=x^4+6y^4-22=0 \qquad y=\pm1$$

得驻点：$(-2,1),(2,-1)$

$f(-2,1)=-11,\ f(2,-1)=11$

所以，极大值为11，极小值为-11。

二. 设 $u = f(xyz, 2y+3z, x^2+y^2)$ 且 $f \in C^2$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz\, f_1 + 2x\, f_2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = yz\left(xyf_{11} + 3\, f_{12}\right) + y\, f_1 + 2x\left(xyf_{31} + 3\, f_{32}\right)$$

$$= xy^2 z f_{11} + 3\, yzf_{12} + y\, f_1 + 2x^2 yf_{31} + 6\, xf_{32}$$

三．设φ,ψ有二阶连续导数，证明：函数

$$z(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(u)\mathrm{d}u$$

满足关系式（偏微分方程） $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

证明：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}[\varphi'(x+at)+\varphi'(x-at)]+\dfrac{1}{2a}[\psi(x+at)+\psi(x-at)]$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{2}[\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at)+\frac{1}{a}\psi'(x+at)-\frac{1}{a}\psi'(x-at)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{1}{2}[a\varphi'(x+at)-a\varphi'(x-at)]+\frac{1}{2a}[a\psi(x+at)+a\psi(x-at)]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{a^2}{2}[\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at)]+\frac{1}{a}[a\psi'(x+at)-a\psi'(x-at)]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\{\frac{1}{2}[\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at)]+\frac{1}{2a}[\psi'(x+at)-\psi'(x-at)]\}$$

$$=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

四. 设 $z=\int_0^{x^2y} f(t,\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$， $f\in C^1$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f(x^2y,e^{x^2y})\cdot 2xy$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf(x^2y,e^{x^2y})$$

$$+2xy[f_1(x^2y,e^{x^2y})\cdot x^2+f_2(x^2y,e^{x^2y})\cdot e^{x^2y}\cdot x^2]$$

$$=2xf(x^2y,e^{x^2y})$$

$$+2x^3yf_1(x^2y,e^{x^2y})+2x^3ye^{x^2y}f_2(x^2y,e^{x^2y})$$

五、设$z=z(x,y)$由方程$x=ze^{y+z}$所确定，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：令$F(x,y,z)=ze^{y+z}-x$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-1}{e^{y+z}+ze^{y+z}}=\frac{z}{x(1+z)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{ze^{y+z}}{e^{y+z}+ze^{y+z}}=-\frac{z}{1+z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial y}(1+z)-z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{x(1+z)^2}$$

$$=\frac{1+z-z}{x(1+z)^2}\cdot\frac{-z}{1+z}=-\frac{z}{x(1+z)^3}$$

六. 设 $f(x,y)=e^{ay}(x^2-2x+2y)$ 有一驻点为 $M_0=(1,1)$，

（1） 求常数 a 之值；

（2） 函数在该驻点处是否取得极值？

解: (1) $\because\ f_x(x,y)=e^{ay}(2x-2)$,

$$f_y(x,y)=e^{ay}(ax^2-2ax+2ay+2).$$

$$\therefore\ f_y(1,1)=e^a(a-2a+2a+2)=0. \quad \therefore a=-2$$

（2） $\because\ f_{xx}(1,1)=2e^{-2}$, $\quad f_{xy}(1,1)=-2e^{-2y}(2x-2)\big|_{(1,1)}=0$,

$$f_{yx}(1,1)=0, \quad f_{yy}(1,1)=-4e^{-2}.$$

$$\therefore H(1,1)=\begin{vmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & -4e^{-2} \end{vmatrix}=-8e^{-4}<0$$

所以该驻点不是极值点。

七. 求函数 $f(x,y)=y^3+4y^2+9y-4xy-6x+x^2$ 的极值

$$\begin{cases} f_x=-4y-6+2x=0 \\ f_y=3y^2+8y+9-4x=0 \end{cases}$$ 得驻点 $P_1(5,1)$, $P_2(1,-1)$

$$f_{xx}=2,\ f_{xy}=-4,\ f_{yy}=6y+8$$

$$H(5,1)=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 14 \end{vmatrix}=12>0 \text{且} f_{xx}=2>0$$

$\therefore$ $(5,1)$ 是极小值点，极小值为-11.

$$H(1,-1)=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=-12<0$$

$\therefore$ $(1,-1)$ 非极值点.

八.设$z=z(x,y)$是由方程$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$所确定的函数,求函数$z=z(x,y)$的极值点和极值.

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x-3y}{y+z}$, $\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-3x+10y-z}{y+z}$,

令$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,$ 再与原方程联立

解得 $x=\pm 9,\ y=\pm 3,\ z=\pm 3.$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(y+z)^2-(x-3y)^2}{(y+z)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(3x+11z)(y+z)-(-3x+10y-z)(-3x+11y)}{(y+z)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{-3(y+z)^2 - (x-3y)(-3x+11y)}{(y+z)^3}.$$

$$H = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}$$

在点(9,3)处,

$$H = \frac{1}{36} > 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{6} > 0, \quad z = 3 \text{ 是极小值}$$

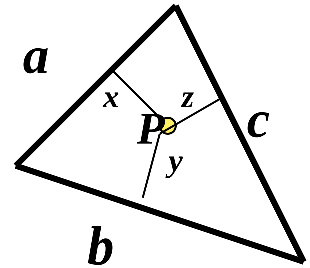
在点(−9,−3)处,

$$H = \frac{1}{36} > 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{6} < 0, \quad z = -3 \text{ 是极大值}$$

函数的极小值$z(9,3) = 3$, 极大值$z(-9,-3) = -3$.

九．设三角形三边之长分别为 a,b,c，其面积为 S，P 为该三角形内一点，x,y,z 是该点到三条边的距离，证明：$xyz \le \dfrac{8S^3}{27abc}$．

证明：三角形面积 $S=\dfrac{1}{2}(ax+by+cz)$ 即 $ax+by+cz=2S$



问题转化为：求 $\max f(x,y,z)=xyz$

$$st.\quad ax+by+cz=2S$$

令 $L=xyz-\lambda(ax+by+cz-2S)$

$$\begin{cases} L_x = yz-\lambda a=0 \\ L_y = xz-\lambda b=0 \\ L_z = xy-\lambda c=0 \\ L_\lambda = ax+by+cz-2S=0 \end{cases}$$

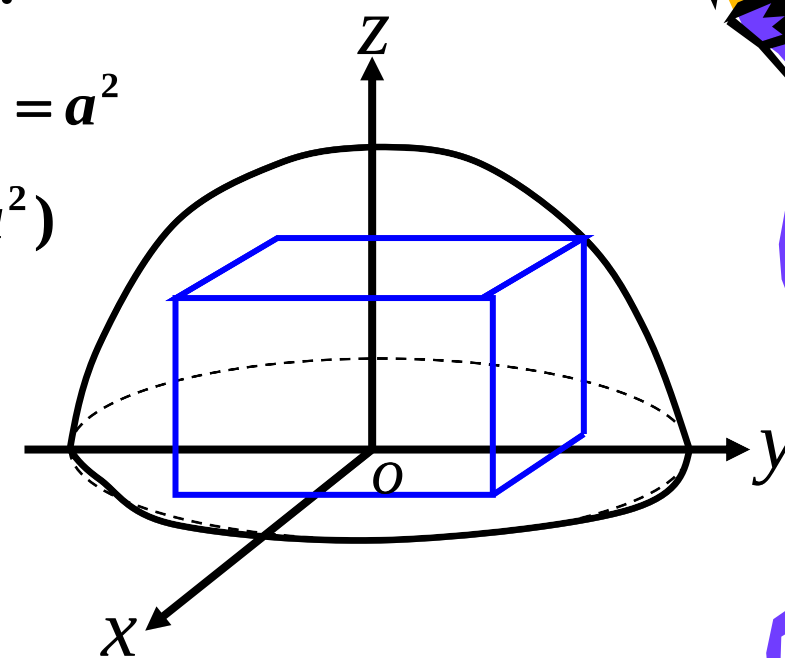
解得：$x=\dfrac{2S}{3a},\ y=\dfrac{2S}{3b},\ z=\dfrac{2S}{3c}$

所以 $xyz \le \dfrac{8s^3}{27abc}$

十. 在半径为a的半球体内接一个长方体，使其体积最大，求长、宽、高.

解：设长方体的长宽高分别为$2x,2y,z$.

则 $V=4xyz$ 并且 $x^2+y^2+z^2=a^2$



令 $L=4xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2)$

$$\begin{cases} L_x=4yz+2\lambda x=0 \\ L_y=4xz+2\lambda y=0 \\ L_z=4xy+2\lambda z=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2+z^2-a^2=0 \end{cases}$$

解得：$x^2=y^2=z^2=\dfrac{a^2}{3}$

所以 长方体的长、宽为$\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$,高为$\dfrac{a}{\sqrt{3}}$时体积最大。

十一．过$P=(1,2,3)$点的所有平面中，哪一个平面与三个坐标面在第一卦限内所围成的四面体体积最小？

【解】设平面方程为 $\prod: \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

$\because P\in\prod, \therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1$，即$bc+2ac+3ab-abc=0$

求$V=\dfrac{1}{6}abc$的最小值，即求$6V=abc$的最小值

$$L=abc+\lambda\left(bc+2ac+3ab-abc\right)$$

$$\begin{cases} L_a=bc+\lambda\left(2c+3b-bc\right)=0 \\ L_b=ac+\lambda\left(c+3a-ac\right)=0 \\ L_c=ab+\lambda\left(b+2a-ab\right)=0 \\ L_\lambda=bc+2ac+3ab-abc=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=6 \\ c=9 \\ \lambda=3 \end{cases} \quad \therefore \frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1$$

十二. 用铁皮做一个容积为 1m^3的有盖圆桶容器，为使其用料最省(即所需铁皮总面积最少)，应取多大的底半径与高?

对于无盖的情形又将如何?

解：设底半径和高分别为 r,h，则

（1）目标函数$minS = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

约束条件 $V = \pi r^2 h = 1$

$$L = 2\pi r^2 + 2\pi rh + \lambda\left(\pi r^2 h - 1\right)$$

$$\begin{cases} L_r = 0 \\ L_h = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \\ h = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2\pi}} \end{cases}$$

（2）目标函数$minS=\pi r^2+2\pi rh$

约束条件 $V=\pi r^2 h=1$

$$L=\pi r^2+2\pi rh+\lambda\left(\pi r^2 h-1\right)$$

$$\begin{cases} L_r=0 \\ L_h=0 \\ L_\lambda=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \\ h=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \end{cases}$$

十三．在曲面$\Sigma:\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$上作一个切平面，使它与三个坐标面所围成的四面体体积最大，求切平面方程．

解：设$M_0(x_0,y_0,z_0)$是曲面上任一点则 $\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=1$

曲面在M_0处切平面的法向量为 $\vec{n}=\{\frac{1}{2\sqrt{x_0}},\frac{1}{2\sqrt{y_0}},\frac{1}{2\sqrt{z_0}}\}$

于是，切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$$

即 $$\frac{1}{\sqrt{x_0}}x+\frac{1}{\sqrt{y_0}}y+\frac{1}{\sqrt{z_0}}z=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=1$$

切平面与三个坐标轴的截距为$\sqrt{x_0}, \sqrt{y_0}, \sqrt{z_0}$.

于是，四面体体积为 $V = \dfrac{1}{6}\sqrt{x_0 y_0 z_0}$

令 $u = x_0 y_0 z_0$

则问题转化为

$$\max u = x_0 y_0 z_0$$

$$st. \quad \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = 1$$

令 $L = x_0 y_0 z_0 + \lambda(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} - 1)$

$$
\begin{cases}
L_{x_0} = y_0 z_0 - \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x_0}} = 0 \\
L_{y_0} = x_0 z_0 - \dfrac{\lambda}{2\sqrt{y_0}} = 0 \\
L_{z_0} = x_0 y_0 - \dfrac{\lambda}{2\sqrt{z_0}} = 0 \\
L_\lambda = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = 1
\end{cases}
$$

解得：$x_0 = y_0 = z_0 = \dfrac{1}{9}$

所求切平面方程为：$x + y + z = \dfrac{1}{3}$

十四．利用求条件极值的拉格朗日乘数法，证明对任意正数a，b，c，总成立$abc^3 \le 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5$.

解：设$\frac{a+b+c}{5} = A(>0)$

则问题转化为 $\max f(a,b,c) = abc^3$

$$st. \quad a+b+c = 5A$$

$$令 L = abc^3 + \lambda(a+b+c-5A)$$

$$L_a = bc^3z + \lambda = 0 \qquad (1)$$

$$L_b = ac^3 + \lambda = 0 \qquad (2)$$

$$L_c = 3abc^2 + \lambda = 0 \qquad (3)$$

$$L_\lambda = a+b+c-5A = 0 \qquad (4)$$

由(1),(2),(3)解得：　$b=a, c=3a$

代入（4）得：　$a=b=A, c=3A$

由于$f(a,b,c)\geq 0$在平面$a+b+c=5A$位于第一卦限部分的边界上取值为0（$a=0$或$b=0$或$c=0$)

所以　$\max f(a,b,c)=f(A,A,3A)=27A^5$

即　$abc^3\leq 27A^5=27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5$

十五．求常数α，β，使方程 $6u_{xx}-5u_{xy}+u_{yy}=0$，在变量代换

$\xi=x+\alpha y,\ \eta=x+\beta y$ 下，可化为新方程 $u_{\xi\eta}=0$．

分析：

$$\begin{array}{ccc} & x & \xi \\ u & & \\ & y & \eta \end{array}$$

解：$\begin{cases}\xi=x+\alpha y\\ \eta=x+\beta y\end{cases}$ 分别对ξ，η求导得：

$$\begin{cases}x_\xi+\alpha y_\xi=1\\ x_\xi+\beta y_\xi=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x_\eta+\alpha y_\eta=0\\ x_\eta+\beta y_\eta=1\end{cases}$$

$$x_\xi=\frac{\beta}{\beta-\alpha},\quad y_\xi=\frac{-1}{\beta-\alpha},\quad x_\eta=\frac{-\alpha}{\beta-\alpha},\quad y_\eta=\frac{1}{\beta-\alpha},$$

于是 $u_\xi = u_x x_\xi + u_y y_\xi = \dfrac{1}{\beta-\alpha}(\beta u_x - u_y)$

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{\beta-\alpha}[\beta(u_{xx}x_\eta + u_{xy}y_\eta) - (u_{yx}x_\eta + u_{yy}y_\eta)]$$

$$= \frac{1}{(\beta-\alpha)^2}[-\alpha\beta u_{xx} + \beta u_{xy} + \alpha u_{xy} - u_{yy}]$$

$$= \frac{-1}{(\beta-\alpha)^2}[\alpha\beta u_{xx} - (\alpha+\beta)u_{xy} + u_{yy}] = 0$$

于是 $\begin{cases} \alpha\beta = 6 \\ \alpha+\beta = 5 \end{cases}$

解得: $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{cases}$

十六. 求有二阶连续导数的函数 $f(t)(t>0)$，

使 $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=1$.

解: 令 $t=\sqrt{x^2+y^2}$, 则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(t)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(t)\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(t)\cdot\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^{\,3}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(t)\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'(t)\cdot\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^{\,3}}.$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(t)+f'(t)\cdot\frac{1}{t}=1$$

令 $y=f'(t)$, 则 $f''(t)=y'$ ，上述方程可变换为

$$y'+\frac{1}{t}\cdot y=1$$

解得 $y=\frac{t}{2}+\frac{C_1}{t}$

所以 $f(t)=\frac{t^2}{4}+C_1\ln t+C_2$

十七. 设由方程 $z+\ln z=\int_y^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 确定函数 $z=z(x,y)$，

求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：方程$z+\ln z=\int_y^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 两边对 x 求导得

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-x^2}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{z+1}e^{-x^2}$$

方程$z+\ln z=\int_y^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 两边对 y 求导得

$$\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}=-e^{-y^2}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z}{z+1}e^{-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial y}(z+1)-z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z+1)^2}e^{-x^2}=-\frac{z}{(z+1)^3}e^{-x^2-y^2}$$

十八．设长方体的三个侧面在坐标面上，有一个顶点在平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad (a>0,b>0,c>0)$上，求其最大体积．

解：设在平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$上的顶点为$\left(x_0,y_0,z_0\right)$，则长方体

体积$V=x_0y_0z_0$（目标函数），且$\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}=1$（约束条件）

$$L=x_0y_0z_0+\lambda\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}-1\right)$$

$$\begin{cases} L_{x_0}=0 \\ L_{y_0}=0 \\ L_{z_0}=0 \\ L_{\lambda}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=\frac{a}{3} \\ y_0=\frac{b}{3} \\ z_0=\frac{c}{3} \end{cases} \Rightarrow V=\frac{abc}{27}$$

十九. 过椭圆 $3x^2+2xy+3y^2=1$ 上任一点作切线, 求各条切线与两坐标轴所围成的三角形面积的最小值 .

解：方程 $3x^2+2xy+3y^2=1$ 两边对 x 求导，得

$6x+2y+2x\dfrac{dy}{dx}+6y\dfrac{dy}{dx}=0$，所以 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3x+y}{x+3y}$

设切点为 (x_0,y_0)，则切线方程为 $y-y_0=-\dfrac{3x_0+y_0}{x_0+3y_0}(x-x_0)$，它在

x 轴，y 轴上的截距分别为 $\dfrac{1}{3x_0+y_0},\dfrac{1}{x_0+3y_0}$

求 $S=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{(3x_0+y_0)(x_0+3y_0)}\right|$ 的最小值，即求 $\left|3x_0{}^2+10x_0y_0+3y_0{}^2\right|^2$ 的最大值

目标函数 $\max\left(3x_0{}^2+10x_0y_0+3y_0{}^2\right)^2$

约束条件 $3x_0{}^2+2x_0y_0+3y_0{}^2=1$