第四章 马尔可夫链

4.1马尔可夫链的概念及转移概率

4.2 马尔可夫链的状态分类

4.3 状态空间的分解

4.4 $p_{ij}^{(n)}$ 的渐近性质与平稳分布

马尔科夫链：介绍

- 马尔可夫链，因安德烈·马尔可夫（A.A.Markov，1856－1922）得名，是数学领域中具有马尔可夫性质的离散时间随机过程。

- 马尔可夫在1906年首先做出了这类过程。而将此一般化到可数无限状态空间是由柯尔莫果洛夫在1936年给出的。

- 安德烈·马尔可夫，俄罗斯人，物理-数学博士，圣彼得堡科学院院士，彼得堡数学学派的代表人物，以数论和概率论方面的工作著称，他的主要著作有《概率演算》等。1878年，荣获金质奖章，1905年被授予功勋教授称号。

马尔可夫链通常用来:

建模排队理论和统计学中的建模；

作为信号模型用于熵编码技术，如算法编码；

生物学中的应用，如人口过程的建模。

马尔可夫过程概念

过程(或系统)在时刻t0所处的状态为已知的条件下，过程在时刻t>t0所处状态的条件分布与过程在时刻t0之前所处的状态无关。

通俗地说，就是在已经知道过程“现在”的条件下，其“将来”不依赖于“过去”。

- 例如 生物基因遗传从这一代到下一代的转移仅依赖当代而与以往各代无关；
- 某公司的经营状况具有无后效性；
- 明天的天气仅和今天有关，而和昨天无关；
- 股票的交易行情也具有无后效性.

与平稳过程的本质差别：

平稳过程具有**平稳性：**它的统计特性不随时间的推移而改变,它的变化情况与过去的情况有不可忽视的联系.

马尔可夫性(无后效性)

设随机过程$\{X(t),t\in T\}$，对参数集T中任意n个数值$t_1<t_2<\cdots<t_n,n\geq 3,t_i\in T$

$$P\{X(t_n)\leq i_n \mid X(t_1)=i_1\cdots X(t_{n-1})=i_{n-1}\}$$

$$=P\{X(t_n)\leq i_n \mid X(t_{n-1})=i_{n-1}\}$$

则称过程$\{X(t),t\in T\}$具有马尔可夫性或无后效性，并称此过程为马尔可夫过程.

根据当前过程的概率分布而计算未来时刻的概率分布

由条件分布函数定义, (1)式等价于

$$F(x_n;t_n \mid x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_{n-1}) = F(x_n;t_n \mid x_{n-1};t_{n-1})$$

若条件密度存在, (1)式等价于

$$f(x_n;t_n \mid x_1,\cdots,x_{n-1};t_1,\cdots,t_{n-1}) = f(x_n;t_n \mid x_{n-1};t_{n-1})$$

二、满足马氏性的过程

例、 独立过程$\{X(t), t\in T\}$是马氏过程。

证 1）对于$t_1< t_2< \ldots <t_n\in T$, 因$X(t_1)\ldots X(t_n)$相互独立,

$$P\{X(t_n)<x_n | X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2, \ldots, X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

$$=\frac{P\{X(t_n)<x_n, X(t_1)=x_1, \cdots, X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}{P\{X(t_1)=x_1, \cdots, X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}$$

$$=\frac{P\{X(t_n)<x_n\}P\{X(t_1)=x\}\cdots P\{X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}{P\{X(t_1)=x\}\cdots P\{X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}$$

$$=P\{X(t_n)<x_n\}=P\{X(t_n)<x_n|\,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

例、 **独立增量过程** $\{Y(t),t\in T\}$, $T=[a,b]$, $a>-\infty$,**且初始分布**$P\{Y(a)=0\}=1$,**则** $\{Y(t),t\in T\}$**是马氏过程.**

证： 对于任意的 $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, 需证

$$P\{Y(t_n) < y_n \mid Y(t_1) = y_1, Y(t_2) = y_2, \cdots Y(t_{n-1}) = y_{n-1}\}$$

$$= P\{Y(t_n) < y_n \mid Y(t_{n-1}) = y_{n-1}\}$$

因增量 $Y(t) - Y(t_n)$, $Y(t_n) - Y(t_{n-1})$， …, $Y(t_2) - Y(t_1)$, $Y(t_1) - Y(a) = Y(t_1)$, 相互独立，

$$P\{Y(t_n) < y_n \mid Y(t_1) = y_1, Y(t_2) = y_2, \cdots Y(t_{n-1}) = y_{n-1}\}$$

$$= P\{Y(t_n) - Y(t_{n-1}) < y_n - y_{n-1} \mid Y(t_1) - Y(a) = y_1,$$

$$Y(t_2) - Y(t_1) = y_2 - y_1, \cdots Y(t_{n-1}) - Y(t_{n-2}) = y_{n-1} - y_{n-2}\}$$

$$= P\{Y(t_n) - Y(t_{n-1}) < y_n - y_{n-1}\}$$

$$= P\{Y(t_n) - Y(t_{n-1}) < y_n - y_{n-1} \mid Y(t_{n-1}) = y_{n-1}\}$$

$$= P\{Y(t_n) < y_n \mid Y(t_{n-1}) = y_{n-1}\}$$

因 $Y(t_n) - Y(t_{n-1})$

与 $Y(t_{n-1}) = Y(t_{n-1}) - Y(a)$

相互独立,

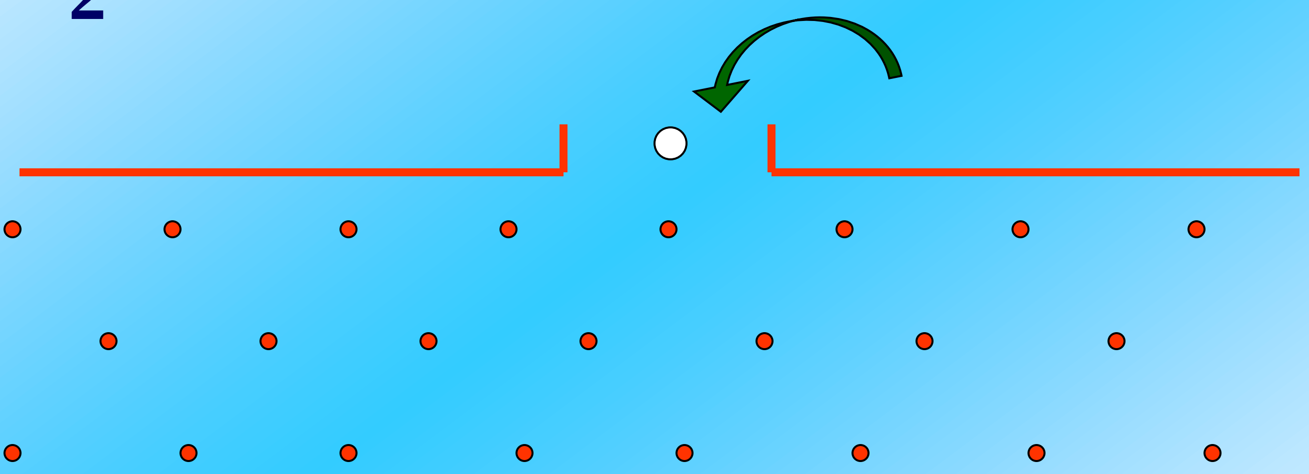
EX.1 因泊松过程是平稳独立增量过程，且$N(0)=0$，故泊松过程是马尔科夫过程；

EX.2 维纳过程也是独立平稳增量过程，且$W(0)=0$，故维纳过程是马尔科夫过程.

EX.3 设随机过程$\{X(n), n\geq 1\}$, $X(n)$是第n次投掷一颗骰子出现的点数，则是独立过程，从而是马氏过程.

EX.4 随机游动(高尔顿钉板试验)

将一个小球投入无限大高尔顿钉板内,小球各以 $\frac{1}{2}$ 的概率向左或向右移动一格.



$$X(k)=\begin{cases}1, & \text{在第}k\text{层向右位移一格;}\\ -1, & \text{在第}k\text{层向左位移一格.}\end{cases}$$

$X(k)$	-1	1
$P\{X(k)=i$	无法显示该图片。	$1/2$

$\{X(k),\ k\in N^{+}\}$ 是一个独立随机过程,令

无法显示该图片。

随机游动n 步所处的状态

$\{Y(n), n\in N^{+}\}$是一个平稳独立增量过程.

$\{Y(n),\ n\in N^{+}\}$是马氏过程。

Markov过程

- 时间**离散**状态**离散**的 马尔科夫链
- 时间**离散**状态**连续**的马尔科夫序列
- 时间**连续**状态**离散**的（ 连续时间的 ）
- 时间**连续**状态**连续**的马尔科夫过程

4.1 马尔可夫链的概念及转移概率

一．马尔可夫链的定义

若对任意的$n \in T$和任意的$i_0, i_1, \cdots, i_n, i_{n+1} \in I$，有

$$P\{X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n\}$$
$$= P\{X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n\}$$

则称$\{X_n, n \in T\}$为马尔可夫链，简称马氏链.

说明：马尔可夫链的统计特性完全由条件概率决定，即

$$P\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n\}$$

$$= P\{X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}\} \cdot P\{X_{n-1} = i_{n-1} \mid X_{n-2} = i_{n-2}\}$$

$$\cdots P\{X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0\} \cdot P\{X_0 = i_0\}$$

二、转移概率

定义1 设$\{X_n, n\geq 0\}$是马尔可夫链，记

$$p_{ij}(n)=P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\}$$

称 p_{ij} 为马尔可夫链 $\{X_n, n\geq 0\}$ 在时刻 n 时的一步转移概率.

注 当 i，n 固定时，一步转移概率 $p_{ij}(n)$ 实质上就是在 $X_n=i$ 的条件下，随机变量 X_{n+1} 的条件分布律，所以条件分布律满足：

$$p_{ij}(n)\geq 0, \quad \forall i, \ j\in S, \quad n>0;$$

$$\sum_{j\in S} p_{ij}(n)=1, \quad \forall i\in S, \quad n>0.$$

定义2 设$\{X_n, n\geq 0\}$是马尔可夫链，若其一步转移概率p_{ij}与时间n无关，即

$$p_{ij}=P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\}=P\{X_1=j\mid X_0=i\}$$

则称$\{X_n, n\geq 0\}$为齐次马尔可夫链，称p_{ij}为从状态i转移到状态j的一步转移概率.

若马尔科夫链$\{X_n, n\geq 0\}$的状态空间是有限集，则称$\{X_n, n\geq 0\}$为有限状态的马尔科夫链；

若马尔科夫链$\{X_n, n\geq 0\}$的状态空间是可列集，则称$\{X_n, n\geq 0\}$为可列状态的马尔科夫链.

定义3 设 $\{X_n, \ n \geq 0\}$ 是齐次马尔可夫链，其一步转移概率为 $p_{ij}\,(i, j \in S)$，记

矩阵的每一行都是一条件分布律

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0j} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

则称矩阵 P 为齐次马尔科夫链的一步转移概率矩阵.

记 $\pi = (\pi_0, \ \pi_1, \cdots), \ (\pi_i = P\{X_0 = i\}, \ i \in S)$. 称 π 为齐次马尔可夫链的初始分布.

齐次马尔科夫链的有限维分布族完全由其一步转移概率矩阵 P 和初始分布 π 确定.

随机矩阵

（1） $p_{ij} \geq 0, i, j \in I$ ；

（2） $\sum_{j \in I} p_{ij} = 1, i \in I$ （即 P 的每行元素的和为 1）

随机矩阵：满足（1）和（2）的矩阵.

例如：一步转移概率矩阵 P 是随机矩阵。

例 1. 设质点在线段[1，4]上随机游动，且只能停留在 1，2，3，4 点上。当质点转移到 2，3 点时，它以$\frac{1}{3}$的概率向左或向右移动一格，或停留在原处。当质点移动到点 1 时，它以概率 1 停留在原处。当质点移动到点 4 时，它以概率 1 移动到点 3。若以X_n表示质点在时刻n所处的位置，则$\{X_n, n \in T\}$是一个齐次马尔可夫链，其转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

点 1：吸收壁，点 4：反射壁。

一步转移概率矩阵

P67　4.1，4.2

例、设$\{X_n, n \geq 0\}$是马氏链，其状态空间为I，

若$0 \leq s \leq r < n$ ， 则在$X_r = i_r$的条件下， 有

$$P\{X_n = i_n, X_s = i_s \mid X_r = i_r\}$$

$$= P\{X_n = i_n \mid X_r = i_r\} \cdot P\{X_s = i_s \mid X_r = i_r\}$$

表明 若已知现在， 则过去与未来是独立的。

定义 4.4 （n 步转移概率和 n 步转移概率矩阵）

（1）称 $p_{ij}^{(n)}=P\{X_{m+n}=j\mid X_m=i\}$，$(i,j\in I,m\geq 0,n\geq 1)$ 为马尔可夫链 $\{X_n,n\in T\}$ 的 n 步转移概率；

（2）称 $P^{(n)}=(p_{ij}^{(n)})$ 为马尔可夫链 $\{X_n,n\in T\}$ 的 n 步转移概率矩阵，其中 $p_{ij}^{(n)}\geq 0$，$\sum\limits_{j\in I}p_{ij}^{(n)}=1$，即 $P^{(n)}$ 是随机矩阵。

注意： $P^{(1)}=P$， $p_{ij}^{(0)}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$

例、 甲、乙两个人进行比赛，设每局比赛中甲胜的概率为 p,乙胜的概率为q,平局的概率为$r(p+q+r=1)$,设每局比赛后,胜者记为"+1"分,负者记为"−1"分,平局不记分.当两人中有一个人得到两分时比赛结束.以$\{X_n, n\geq 1\}$表示比赛至第n局甲获得的分数，则$\{X_n, n\geq 1\}$为一齐次Markov链。

(1) 写出状态空间；

(2) 求2步转移概率矩阵；

(3) 问在甲获得1分的情况下，再赛两局可以结束比赛的概率？

解：状态1————甲获得“负2分”　；

状态2 ———— “负1分”

状态3 ———— “0分”　；

状态4 ———— “正1分”　；

状态5 ———— “正2分；

则状态空间为{1，2，3，4，5}

一步转移概率矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & r & p & 0 & 0 \\ 0 & q & r & p & 0 \\ 0 & 0 & q & r & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（2）二步转移概率矩阵

$$P^{(2)}=P^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q+pr & r^2+pq & 2pr & p^2 & 0 \\ q^2 & 2qr & r^2+2pq & 2pr & p^2 \\ 0 & q^2 & 2qr & r^2+pq & p+rq \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)在 $P^{(2)}$ 中 $p_{45}(2)$ 是在甲得 1 分的情况下经二步转移至 2 分从而结束比赛的概率；

$p_{41}(2)$是在甲得 1 分的情况下经二步转移至—2 分(即乙得 2 分)从而结束比赛的概率

所以题中所求概率为

$$p_{45}(2)+p_{41}(2)=(p+rp)+0=p(1+r)$$

C-K方程

定理 设 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 是马尔可夫链，其状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots\}$，则对任意的 $m,n\geq 0, i, j\in S$，有

$$\boldsymbol{p_{ij}^{(m+n)}=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}p_{kj}^{(n)}}$$

称此式为切普曼—柯尔莫洛夫方程，简称C-K方程．

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

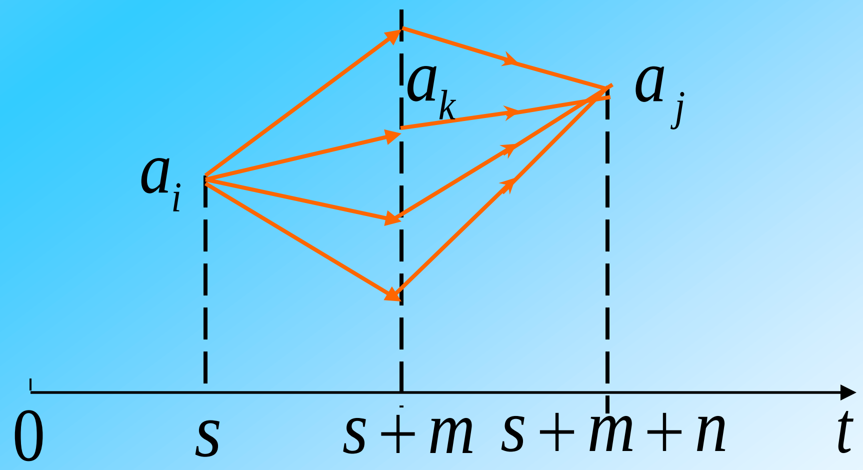
直观意义

从状态 i 出发经过 $m+n$ 步到达状态 j，可分成两步走：

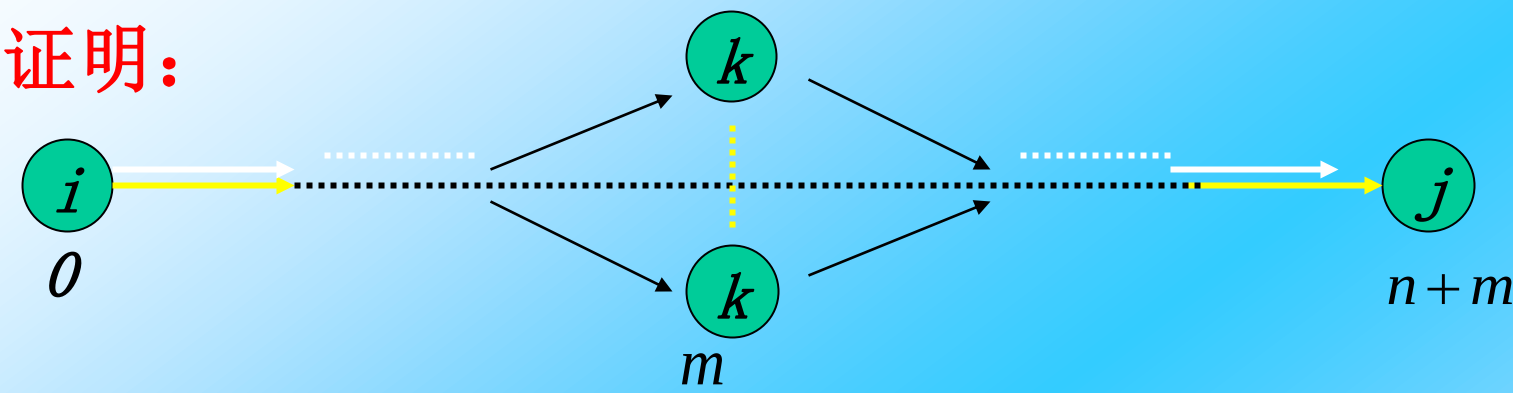
① 先从状态 i 出发经过 m 步到达状态 k；

② 然后再先从状态 k 出发经过 n 步到达状态 j；

由马氏性知，后一阶段的状态转移与前一阶段的状态转移独立，故两个阶段的转移概率可相乘.



证明：



$$p_{ij}^{(m+n)} = P\{X_{m+n} = j \mid X_0 = i\}$$

$$= \sum_{k \in S} P\{X_{m+n} = j,\ X_m = k \mid X_0 = i\}$$

$$= \sum_{k \in S} P\{X_m = k \mid X_0 = i\} \cdot P\{X_{m+n} = j \mid X_m = k,\ X_0 = i\}$$

$$= \sum_{k \in S} P\{X_m = k \mid X_0 = i\} \cdot P\{X_{m+n} = j \mid X_m = k\}$$

$$= \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} \cdot p_{kj}^{(n)}$$

记齐次马尔科夫链的 m步转移概率矩阵为：

$$\boldsymbol{P}^{(m)} = (p_{ij}^{(m)})_{ij \in S}$$

则齐次马尔科夫链的切普曼一柯尔莫洛夫方程可用如下矩阵形式表示：

$$\boldsymbol{P}^{(2)} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^2,\quad \boldsymbol{P}^{(3)} = \boldsymbol{P}^{(2)} \cdot \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^3$$

$$\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{P}^{(m)} = \boldsymbol{P}^{(m-1)} \cdot \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^m,\quad \boldsymbol{P}^{(m+n)} = \boldsymbol{P}^{(m)} \cdot \boldsymbol{P}^{(n)}$$

定理 4.1（转移概率的性质）

设$\{X_n, n\in T\}$为马尔可夫链，则对任意的$n\geq 0$，$0\leq l<n$和$i,j\in I$，n步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$ 具有下列性质：

1） $p_{ij}^{(n)}=\sum_{k\in I}p_{ik}^{(l)}p_{kj}^{(n-l)}$ 切普曼—柯尔莫哥洛夫方程

（C—K 方程）

2） $p_{ij}^{(n)}=\sum_{k_1\in I}\cdots\sum_{k_{n-1}\in I}p_{ik_1}p_{k_1k_2}\cdots p_{k_{n-1}j}$

3） $P^{(n)}=PP^{(n-1)}$

4） $P^{(n)}=P^n$

说明：n步转移概率完全由一步转移概率决定。

定义 4.5（初始概率和绝对概率的定义）

设$\{X_n, n\in T\}$为马尔可夫链，

$p_j = P\{X_0 = j\}\ (j\in I)$：$\{X_n, n\in T\}$的初始概率，

$\{p_j, j\in I\}$：$\{X_n, n\in T\}$的初始分布，简记为$\{p_j\}$；

$P^T(0) = (p_1, p_2, \cdots)$：初始概率向量；

$p_j(n) = P\{X_n = j\}\ (j\in I)$：$\{X_n, n\in T\}$的绝对概率；

$\{p_j(n), j\in I\}$：$\{X_n, n\in T\}$的绝对分布，简记为$\{p_j(n)\}$；

$P^T(n) = (p_1(n), p_2(n), \cdots)\ (n>0)$：为$n$时刻的绝对概率向量

定理 4.2（绝对概率的性质）

设 $\{X_n, n \in T\}$ 为马尔可夫链，则对任意的 $j \in I$ 和 $n \geq 1$，绝对概率 $p_j(n)$ 具有下列性质：

1） $p_j(n) = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}^{(n)}$

说明： **n 时刻的绝对概率完全由初始概率与 n 步转移概率决定**

证明：用初始状态来分割，用全概率公式即得。

2） $p_j(n)=\sum_{i\in I} p_i(n-1)p_{ij}$

说明： n 时刻的绝对概率完全由 $\underline{n-1}$ 时刻的绝对概率和一步转移概率决定。

证明：用 $n-1$ 时刻状态来分割，用全概率公式即得。

3） $P^T(n)=P^T(0)P^{(n)}$ [1）的矩阵形式]

4） $P^T(n)=P^T(n-1)P$ [2）的矩阵形式]

定理 4.3（马尔可夫链的有限维分布）

设$\{X_n, n\in T\}$为马尔可夫链，则对任意的$i_1,\cdots,i_n \in I$和$n\geq 1$，有

$$P\{X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}=\sum_{i\in I} p_i p_{ii_1}\cdots p_{i_{n-1}i_n}$$

说明：马尔可夫链的有限维分布完全由初始概率及一步转移概率决定。

证明：用初始状态来分割，用全概率公式、马氏性即得。

$$P\{X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n\} = P\left(\bigcup_{i\in I}\{X_o = i\ , X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n\}\right)$$

$$= \sum_{i\in I} P\left(\{X_o = i\ , X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n\}\right)$$

$$= \sum_{i\in I} P\{X_o = i\} P\{X_1 = i_1 \,|\, X_o = i\}$$

$$\times \cdots P\{X_n = i_n \,|\, X_0 = i, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}\}$$

$$= \sum_{i\in I} P\{X_o = i\} P\{X_1 = i_1 \,|\, X_o = i\}$$

$$\times \cdots P\{X_n = i_n \,|\, X_{n-1} = i_{n-1}\}$$

$$= \sum_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{p_i p_{ii_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}}$$

例、 设$\{X_n, n\geq 0\}$是具有三个状态0,1,2的齐次马氏链，一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

初始分布$p_i(0)=P\{X_0=i\}=\frac{1}{3}$ $\quad i=0,1,2$

试求：(1) $P\{X_0=0, X_2=1, X_4=1\}$

(2) $P\{X_2=1, X_4=1 \mid X_0=0\}$

解： 由$C-K$方程可得二步转移概率矩阵为：

$$P^{(2)}=P^2=\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{5}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(1) $P\{X_0=0, X_2=1, X_4=1\}=p_0^{(0)}P_{01}^{(2)}P_{11}^{(2)}=\frac{1}{3}\times\frac{5}{16}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{96}$

(2) $P\{X_2=1, X_4=1 \mid X_0=0\}=P_{01}^{(2)}P_{11}^{(2)}=\frac{5}{16}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$

例 2. 无限制随机游动

设质点在数轴上移动，每次移动一格，向右移动的概率为 p，向左移动的概率为 $q=1-p$，这种运动称为无限制随机游动。以 X_n 表示时刻 n 质点所处的位置，则 $\{X_n, n\in T\}$ 是一个齐次马尔可夫链，试写出它的一步和 k 步转移概率。

解： 一步转移概率矩阵 $P=\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & q & 0 & p & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$,

k 步转移概率： $p_{ij}^{(k)}=\begin{cases} C_k^x p^x q^y, & k\text{与}(j-i)\text{同奇偶} \\ 0, & k\text{与}(j-i)\text{一奇一偶} \end{cases}$,

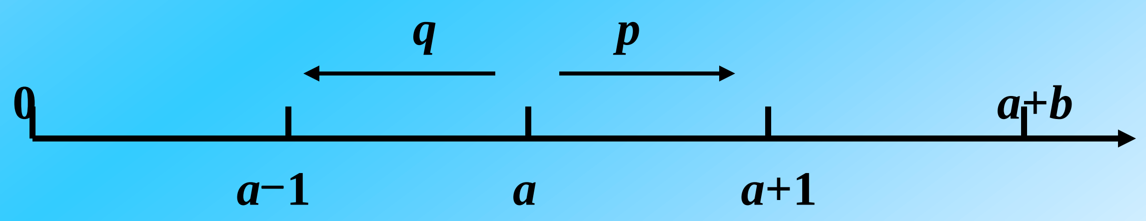
（设向右 x 格, 向左 y 格, 则 $x+y=k$, 且 $j=i+x-y$,

$x=\dfrac{k+(j-i)}{2}$, $\quad y=\dfrac{k-(j-i)}{2}$,而 x,y 是整数,所以 $k,j-i$ 同奇偶.）

例3　赌徒输光问题

甲有赌资a元，乙有赌资b元，赌一局输者给赢者1元，无和局。甲赢的概率为p，乙赢的概率为$q=1-p$，求甲输光的概率。

解：状态空间$I=\{0,1,2,\ldots,c\}$，$c=a+b$



设 u_i 表示甲从状态 I 出发转移到状态 0 的概率，求 u_a

显然 $u_0=1$，$u_c=0$ (u_0表示已知甲输光情形下甲输光的概率，u_c表示已知乙输光情形下甲输光的概率)

$$u_i = pu_{i+1} + qu_{i-1} \qquad (i=1,2,\ldots,c-1)$$

（甲在状态 i 下输光：甲赢一局后输光或甲输一局后输光）

$$(p+q)u_i = pu_{i+1} + qu_{i-1} \Rightarrow p(u_{i+1} - u_i) = q(u_i - u_{i-1})$$

$$u_{i+1} - u_i = \frac{q}{p}(u_i - u_{i-1}), \quad i = 1, 2, \cdots, c-1$$

$$(1)\ \frac{q}{p} = 1, \text{即} p = q = \frac{1}{2}$$

$$u_{i+1} - u_i = u_i - u_{i-1} = u_{i-1} - u_{i-2} = \cdots = u_1 - u_0 \triangleq \alpha$$

$$(u_{i+1}-u_i)+(u_i-u_{i-1})+\cdots+(u_1-u_0)=(i+1)\alpha$$

即$u_{i+1}-u_0=(i+1)\alpha$

$$u_{i+1}=u_0+(i+1)\alpha=1+(i+1)\alpha$$

$$u_c=1+c\alpha=0\Rightarrow\alpha=-\frac{1}{c}$$

$$u_i=1+i\alpha=1-\frac{i}{c}$$

$u_a=1-\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{a+b}$,同理可得$u_b=\dfrac{a}{a+b}$

(2) $\dfrac{q}{p} \neq 1$,即$p \neq q$,设$\dfrac{q}{p} = r$

$$u_{i+1} - u_i = r(u_i - u_{i-1})$$

$$u_c - u_k = \sum_{i=k}^{c-1} r(u_i - u_{i-1}) = \sum_{i=k}^{c-1} r^i(u_1 - u_0) = (u_1 - 1)\frac{r^k - r^c}{1-r}$$

令$k = 0$,则$u_c - u_0 = (u_1 - 1)\dfrac{r^0 - r^c}{1-r} \Rightarrow u_1 - 1 = -\dfrac{1-r}{1-r^c}$

$$u_k = -(u_1 - 1)\frac{r^k - r^c}{1-r} = \frac{r^k - r^c}{1-r^c}$$

$$u_a = -(u_1 - 1)\frac{r^a - r^c}{1-r} = \frac{r^a - r^c}{1-r^c}, \quad u_b = -(u_1 - 1)\frac{r^b - r^c}{1-r} = \frac{r^b - r^c}{1-r^c}$$

例 4. 天气预报问题

设昨日、今日都下雨，明日有雨的概率为 **0.7**；

昨日无雨，今日有雨，明日有雨的概率为 **0.5**；

昨日有雨，今日无雨，明日有雨的概率为 **0.4**；

昨日、今日均无雨，明日有雨的概率为 **0.2**。

若星期一、星期二均下雨，求星期四下雨的概率。

解：状态 **0**（**RR**）：昨日、今日都下雨；

状态 **1**（**NR**）：昨日无雨，今日有雨；

状态 **2**（**RN**）：昨日有雨，今日无雨；

状态 **3**（**NN**）：昨日、今日均无雨。

这是一个四状态的马尔可夫链。

已知

$P_{00}=P\{R_{今}R_{明}\mid R_{昨}R_{今}\}=P\{R_{明}\mid R_{昨}R_{今}\}=0.7$，

$P_{10}=P\{R_{今}R_{明}\mid N_{昨}R_{今}\}=P\{R_{明}\mid N_{昨}R_{今}\}=0.5$，

$P_{21}=P\{N_{今}R_{明}\mid R_{昨}N_{今}\}=P\{R_{明}\mid R_{昨}N_{今}\}=0.4$，

$P_{31}=P\{N_{今}R_{明}\mid N_{昨}N_{今}\}=P\{R_{明}\mid N_{昨}N_{今}\}=0.2$， 且

$P_{01}=P\{N_{今}R_{明}\mid R_{昨}R_{今}\}=0$（不可能事件）

$P_{02}=P\{R_{今}N_{明}\mid R_{昨}R_{今}\}=P\{N_{明}\mid R_{昨}R_{今}\}=1-P\{R_{明}\mid R_{昨}R_{今}\}=1-0.7=0.3$，

$P_{03}=P\{N_{今}N_{明}\mid R_{昨}R_{今}\}=0$（不可能事件）

⋮

因此，一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$P^2=PP=\begin{bmatrix} 0.49 & 0.12 & 0.21 & 0.18 \\ 0.35 & 0.20 & 0.15 & 0.30 \\ 0.20 & 0.12 & 0.20 & 0.48 \\ 0.10 & 0.16 & 0.10 & 0.64 \end{bmatrix}$$

星期四下雨意味着所处的状态为 0 或 1，则所求概率为

$$p=p_{00}^{(2)}+p_{01}^{(2)}=0.49+0.12=0.61$$

例5　公司A,B,C生产同样的产品.根据历史资料,A,B,C公司的市场 有率分别是50%, 30%, 20%.　由于C公司改善了销售与服务策略,使其销售额上升, 而A 公司则下降.通过市场调查发现顾客流动情况如下表:

公司	周期0的顾客数	周期1的供应公司		
		A	B	C
A	5000	3500	500	1000
B	3000	300	2400	300
C	2000	100	100	1800
周期2顾客数		3900	3000	3100

按照这个趋势发展,A公司的客户转移将严重到什么程度?三个公司的销售额的占有率将如何变化?

解: 顾客流动的转移概率

	顾 客 流	动 的 转	移 概 率
公司	A	B	C
A	3500/5000 =0. 7	500/5000 =0. 1	1000/5000 =0. 2
B	300/3000 =0. 1	2400/3000 =0. 8	300/3000 =0. 1
C	100/2000 =0. 05	100/2000 =0. 05	1800/2000 =0. 9

即一步转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{pmatrix}$$

初始概率向量 $\boldsymbol{P}_0=(0.5,0.3,0.2)$

所以

$$P^{(1)} = P^{(0)}P = (0.5, 0.3, 0.2)\begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$$= (0.39, 0.3, 0.31)$$

$$p_n = p_o P^n$$

$$\lim_{n\to\infty} p_n = (0.2, 0.25, 0.5)$$

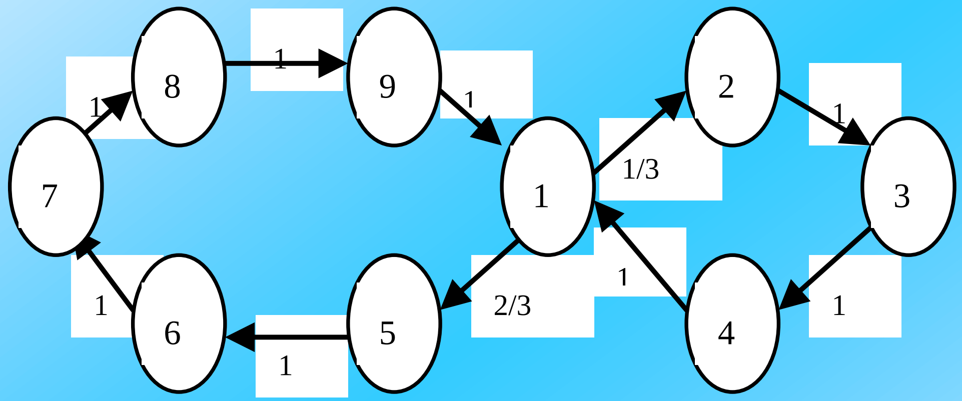
4.2 马尔可夫链的状态分类

分类的原因

- **瞬态分析** 某一固定时刻 n 时的概率特性 即求 n 步转移概率或绝对概率；
- **稳态分析** 当 $n \to \infty$ 时系统的概率特性，即当 $n \to \infty$ 时，$p_{ij}^{(n)}$ 的极限是否存在；若存在又与状态的关系如何，极限概率能否构成概率分布.

设$\{X_n, n\geq 0\}$为齐次马尔可夫链，$I=\{0,1,2,\cdots\}$，其转移概率为p_{ij}，$i,j\in I$，初始分布为$\{p_j, j\in I\}$.

例 4.6 状态空间为$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$



从状态 1 出发，再返回状态 1 的可能步数（时刻）$T=\{4,6,8,\cdots\}$

最大公约数 G.C.D (Greatest Common divisor) d=2

定义4.6 (周期性)

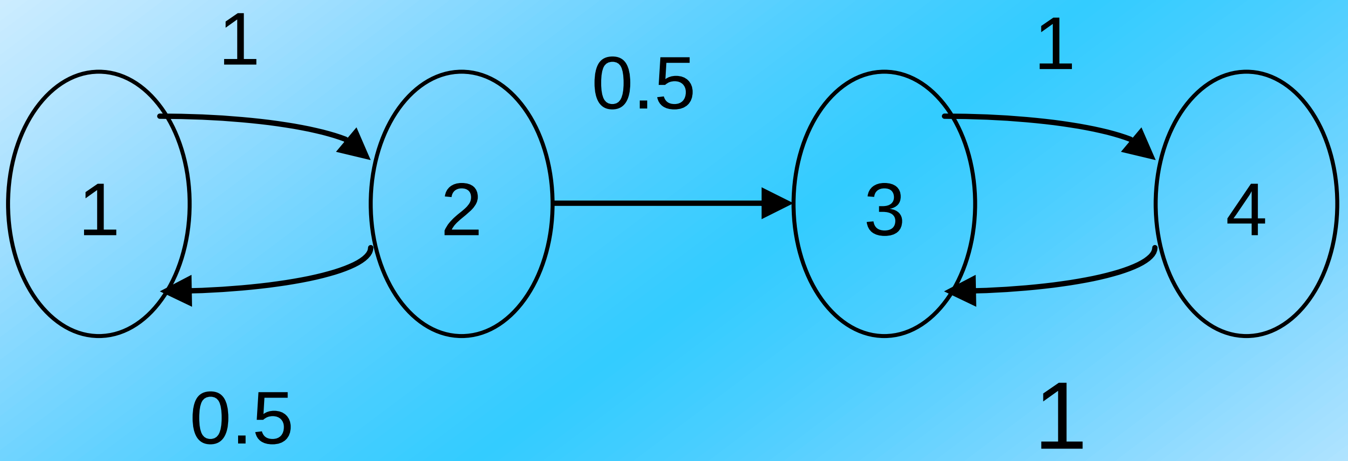
若集合$\{n, n \geq 1, P_{ii}^{(n)} > 0\}$非空，则称它的最大公约数$d = d(i)$为状态$i$的周期.若$d > 1$,称状态$i$是周期的；若$d = 1$，称状态$i$是非周期的。

规定： **当该集合是空集时，称i的周期为无穷大.**

注意：$d(i) = d$，但并不是所有 $p_{ii}^{(nd)} > 0$.

引理 4.1 如$d(i) = d$，则存在正整数M，对一切$n \geq M$，有 $p_{ii}^{(nd)} > 0$。

例 4.7 设 $I=\{1,2,3,4\}$，转移概率如图所示，



$d(2)=d(3)=2$，但状态 2（出去后不一定回来）和状态 3（出去后一定回来）有区别。

$f_{ij}^{(n)}=P\{X_{m+v}\neq j,1\leq v\leq n-1,X_{m+n}=j\mid X_m=i\}$：质点由 i 出发，经 n 步首次到达 j 的概率，称为**首中概率**。

$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}$：质点由 i 出发，经有限步终于到达 j 的概率。（$f_{ij},f_{ij}^{(n)}$ 统称**首达概率**）

定义 4.7　（常返）

若 $f_{ii}=1$，称状态 i 为常返的；若 $f_{ii}<1$，称状态 i 为非常返(瞬时状态，滑过状态).

注1： 设$A_n = \{X_n = j, X_k \neq j, k = 1, 2, \cdots, n-1 \mid X_0 = i\}$,

在n不同时A_n是不相交的，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$表示总有一个$n$使得过程经$n$步以后可以从$i$到达$j$，所以

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = f_{ij}$$

注2： f_{ij}：表示从i出发，有限步到达j的概率.当i为常返状态时，以概率1从i出发，在有限步内过程将重新返回i($f_{ii} = 1$)；当i为非常返状态时($f_{ii} < 1$)，以概率$1 - f_{ii}$过程永远不再回到i，即从i滑过去了。

若 i 为常返态，则$\{f_{ii}^{(n)}, n\geq 1\}$构成一概率分布

由 i 出发再回到 i 的平均返回时间（步数）：$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$

定义 4.8（常返态的分类）

状态 i 为常返态

（1）正常返的：$\mu_i < \infty$，

（2）零常返的：$\mu_i = \infty$

（3）遍历状态：非周期的正常返状态

若i是遍历状态,且$f_{ii}^{(1)}=1$,则称i是吸收状态.显然此时$\mu_i=1$.

以三个层次区分状态类型

- 状态
  - 非常返态
  - 常返态
    - 零常返态
    - 正常返态
      - 有周期
      - 非周期 → 遍历态

首返概率

平均返回时间

周期

定理 4.4（首中概率 $f_{ij}^{(n)}$ 与转移概率 $p_{ij}^{(n)}$ 的关系）

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}f_{ij}^{(k)}p_{jj}^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{n}f_{ij}^{(n-k)}p_{jj}^{(k)}$$ (用首次到达的步数来划分)

证明： $p_{ij}^{(n)}=P\left\{X_n=j\mid X_0=j\right\}$

$$=\sum_{k=1}^{n}P\left\{X_v\neq j,1\le v\le k-1,X_k=\mathrm{j},X_n=\mathrm{j}\mid X_0=i\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}P\left\{X_n=\mathrm{j}\mid X_0=i,X_v\neq j,1\le v\le k-1,X_k=\mathrm{j}\right\}$$

$$\bullet\sum_{k=1}^{n}P\left\{X_v\neq j,1\le v\le k-1,X_k=\mathrm{j}\mid X_0=i\right\}=\sum_{k=1}^{n}f_{ij}^{(k)}p_{jj}^{(n-k)}$$

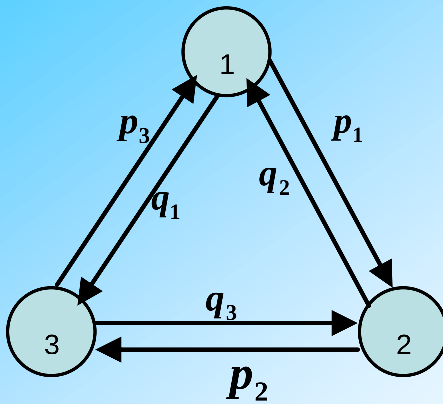
引理 4.2（周期的等价定义）

$$G.C.D\{n : n \ge 1, p_{ii}^{(n)} > 0\} = G.C.D\{n : n \ge 1, f_{ii}^{(n)} > 0\}$$

例 4.8 设马尔可夫链的状态空间 $I=\{1,2,3\}$，其转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & p_1 & q_1 \\ q_2 & 0 & p_2 \\ p_3 & q_3 & 0 \end{pmatrix},$$ 求从状态1出发经 n 步转移首次到达各状态的概率

解：先画状态转移图



$$f_{11}^{(n)}=\begin{cases} 0, & n=1 \\ p_1(p_2q_3)^{m-1}q_2+q_1(q_3p_2)^{m-1}p_3, & n=2m, m\ge 1 \\ p_1(p_2q_3)^{m-1}p_2p_3+q_1(q_3p_2)^{m-1}q_2q_3, & n=2m+1, m\ge 1 \end{cases},$$

$$f_{12}^{(n)}=\begin{cases} (q_1p_3)^{m-1}q_1q_3, & n=2m, m\ge 1 \\ (q_1p_3)^m p_1, & n=2m+1, m\ge 0 \end{cases},$$

$$f_{13}^{(n)}=\begin{cases} (p_1q_2)^{m-1}p_1p_2, & n=2m, m\ge 1 \\ (p_1q_2)^m q_1, & n=2m+1, m\ge 0 \end{cases}$$

数列的母函数与卷积

$\{a_n, n\geq 0\}$为实数列，母函数 $A(s)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$

$\{b_n, n\geq 0\}$为实数列，母函数 $B(s)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n$

则$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的卷积 $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

的母函数 $C(s)=A(s)B(s)$

4.2.2 常返性的（用 $p_{ij}^{(n)}$ ）判别及其性质

定理 4.5 状态 i 为**常返** $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.

（返回状态 i 的次数无穷多）

若状态 i 为**非常返**的，则 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \dfrac{1}{1-f_{ii}}$

（返回状态 i 的次数是有限的）

证： **规定** $p_{ii}^{(0)}=1,\ f_{ii}^{(0)}=0$ **，则由定理4.4**

$$p_{ii}^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}p_{ii}^{(k)}f_{ii}^{(n-k)},\ n\geq 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}s^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}p_{ii}^{(k)}f_{ii}^{(n-k)}\right)s^{n}$$

由$p_{ii}^{(0)}=1,\ f_{ii}^{(0)}=0$可知 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}s^{n}-1=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}p_{ii}^{(k)}f_{ii}^{(n-k)}\right)s^{n}$

设$\displaystyle P(s)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}s^{n},F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}f_{ii}^{(n)}s^{n}$

则$P(s)-1=P(s)F(s)$

对 $0\le s<1$

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} s^n < \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii} \le 1$$

$$P(s)=\frac{1}{1-F(s)}$$

$$\sum_{n=0}^{N} p_{ii}^{(n)} s^n \le P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n \le \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$$

$$s\to 1,\ \sum_{n=0}^{N} p_{ii}^{(n)} \le \lim_{s\to 1} P(s) \le \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$$

$$N\to \infty,\ \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \le \lim_{s\to 1} P(s) \le \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$$

$$\lim_{s\to 1} P(s)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$$

同理 $\lim_{s\to 1} F(s)=\sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}=f_{ii}$

$$\lim_{s\to 1} P(s)=\frac{1}{1-\lim_{s\to 1} F(s)},\quad \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=\frac{1}{1-f_{ii}}$$

常返意义解释:

令 $$Y(n)=\begin{cases}1, & X(n)=i;\\ 0, & X(n)\neq i.\end{cases}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}Y(n)$表示到达状态 i 的次数，有

$$E[Y\,|\,X(0)=i]=E[\sum_{n=1}^{\infty}Y(n)\,|\,X(0)=i]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}E[Y(n)\,|\,X(0)=i]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\{X(n)=i\,|\,X(0)=i\}=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}$$

若i是常返的，则$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$，

返回状态 i 的次数是无穷次；

定理 4.7 设i常返且周期d，则$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i}$；

若i零常返，$\mu_i = \infty$，则$\frac{d}{\mu_i} = 0$。

推论： 设i常返，则

（1）i零常返$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$；

（2）i遍历$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} > 0$.

推论： 设i常返，则

（1）i 零常返 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$；

（2）i 遍历 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \dfrac{1}{\mu_i} > 0$.

证： (1) $\Rightarrow$

i 零常返，$\mu_i=\infty$，由定理4.7知，$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = 0$

对d 的非整数倍数的n，$p_{ii}^{(n)} = 0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$

$\Leftarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$ 从而子序列 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i} = 0, \text{ 从而} \mu_i = \infty,$$

i 是零常返的

(2) $\Leftarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \dfrac{1}{\mu_i} > 0$，$\mu_i < \infty$, i为正常返

子序列

$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \dfrac{1}{\mu_i}$，而由定理4.7 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \dfrac{d}{\mu_i}$

所以 d=1，从而 i 为非周期的，i 是遍历的

$\Rightarrow$$i$是遍历的，$d$=1，$\mu_i<\infty$，

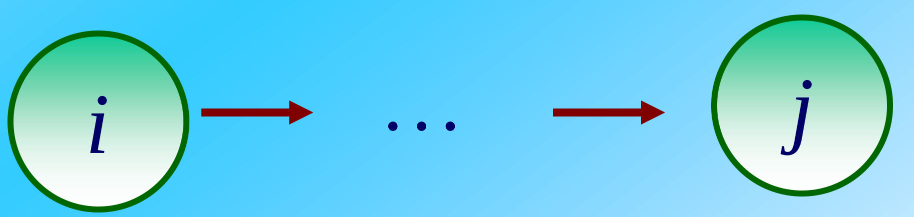
$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i} \text{即} \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} > 0$$

可达与互通

a. 可达： 若 $\exists n, \ni p_{ij}^{(n)} > 0$， 记 $i \to j$；

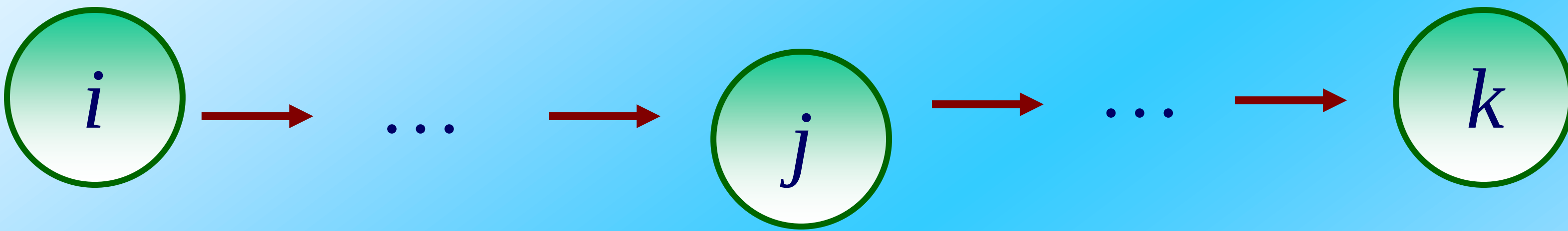
b. 互通： 若 $i \to j$ 且 $j \to i$， 记 $i \leftrightarrow j$.

注： 自 i 可达 j 表示从节点 i 出发，存在一条路径可到达节点 j.



定理 4.8 可达与互通都具有传递性，即

若$i \to j$，$j \to k$，则$i \to k$；若$i \leftrightarrow j$，$j \leftrightarrow k$，则$i \leftrightarrow k$.



证： $i \to j$, 则$\exists\, r \ge 1$, 使 $p_{ij}^{(r)} > 0$;

$j \to k$, 则$\exists\, n \ge 1$, 使 $p_{ij}^{(n)} > 0$;

由C - K方程

$$p_{ik}^{(r+n)} = \sum_{m \in E} p_{im}^{(r)} p_{mk}^{(n)} \ge p_{ij}^{(r)} p_{jk}^{(n)} > 0.$$

即有$i \to k$.

定理 4.9 互通状态均为同一类型

若 $i \leftrightarrow j$，则

（1）i, j 都是正常返，或者都是零常返，或者都是非常返的；

（2）$d(i)=d(j)$

定理、 $f_{ij} > 0 \Leftrightarrow i \to j$

推论、 $i \leftrightarrow j \Leftrightarrow f_{ij} > 0, f_{ji} > 0$

证明 :当 $i \to j$ 时，$\exists n > 0$，使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$，取

$$n' = \min\left\{n : p_{ij}^{(n)} > 0\right\},$$

则有

$$f_{ij}^{(n')} = P\left\{T_{ij} = n' \middle| X_0 = i\right\} = p_{ij}^{(n')} > 0$$

因此

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \geq f_{ij}^{(n')} > 0$$

反之，当 $f_{ij} > 0$ 时，$\exists n' > 0$，使得 $f_{ij}^{(n')} > 0$，从而 $p_{ij}^{(n')} > 0$，得 $i \to j$。

因此（3）成立，（4）是（3）的结果。

例、证明马氏链常返态的几个性质.

1） 若状态 i 是常返态，$i \to j$，则必有 $j \to i$，即 $j \leftrightarrow i$，从而 j 也是常返的；

2） 对于互通的常返态 i 和 j，必有 $f_{ij}=1, f_{ji}=1$；

3） i 是常返的，则 $C(i)=\{j, i \to j\}$，则 $C(i)$ 是不可约的的常返闭集.

证明：

2) $\boldsymbol{i \to j, \exists n > 0, \ni p_{ij}^{(n)} > 0}$,

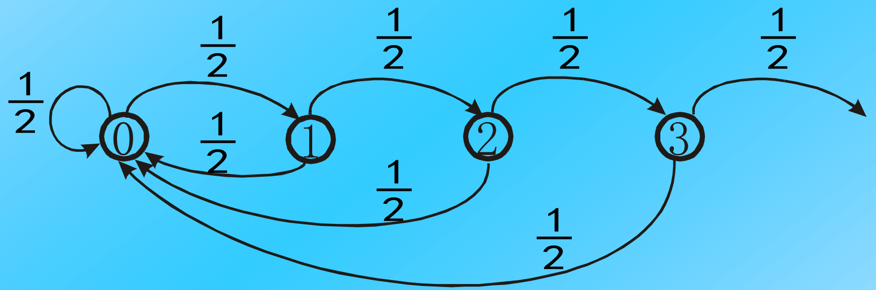
若 $f_{ij} < 1$，则表明由 j 出发不能以概率 1 返回 i ，

则导致由 i 出发不能概率 1 返回 i ，与 i 是常返矛盾，

$\therefore f_{ij}=1$, 同理 $f_{ji}=1$

例4.9 设马氏链$\{X_n\}$的状态空间为$I=\{0,1,2,\dots\}$，转移概率为

$$p_{00}=\frac{1}{2},\ p_{i,i+1}=\frac{1}{2},\ p_{i0}=\frac{1}{2},\ i\in I$$



考察状态0的类型

$$f_{00}^{(1)}=\frac{1}{2},\ f_{00}^{(2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},\ f_{00}^{(3)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$f_{00}^{(n)}=\frac{1}{2^n},\text{故}f_{00}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1,\ \text{0为常返状态}$$

$$\mu_0=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{00}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{1}{2^n}=2<\infty$$

可得出0为正常返的

由于 $p_{00}^{(1)}=\frac{1}{2}>0$, **所以0的周期为$d$=1**

0为非周期的，从而为遍历状态

对于其它状态 i, **由于** $i\leftrightarrow 0$, **所以也是遍历的**

例4.10 对无限制随机游动

$$p_{ii}^{(2n+1)}=0,\ p_{ii}^{(2n)}=C_{2n}^{n}(pq)^{n}$$

由斯特林近似公式 $n!\sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

可推出

$$p_{ii}^{(2n)}\sim\frac{(4pq)^n}{\sqrt{n\pi}}$$

$$4pq=4p(1-p)=1-(2p-1)^2$$

(1)当且仅当 $p=q=1/2$时，$4pq=1$

$$p_{ii}^{(2n)}\sim\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

又$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\pi}}=\infty$, 从而$\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(2n)}=\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\sum_{m=0}^{\infty}p_{ii}^{(2m+1)}+\sum_{m=1}^{\infty}p_{ii}^{(2m)}=\sum_{m=1}^{\infty}p_{ii}^{(2m)}=\infty$$

状态 i 是常返的

而$\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(2n)}=0$, $\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(2n+1)}=0$, 所以$\lim_{m\to\infty}p_{ii}^{(m)}=0$

状态 i 是零常返的

4.3 状态空间I的分解

定义4. 9 设E是状态空间, $C\subset E$, 若对$\forall i\in C$及$j\notin C$, 都有$p_{ij}=0$, 称C为一个闭集.

C中所有状态是互通的，称C是不可约的闭集. (或不可分的,最小的).

若马氏链的状态空间E是不可约的闭集, 称此马氏链是不可约马氏链.

引理4.4　C是闭集的充要条件是对任意的 $i\in C$ 和

$j\notin C$, 及 $n\geq 1$, 都有 $p_{ij}^{(n)}=0$.

证明：仅需证必要性，设C是闭集，

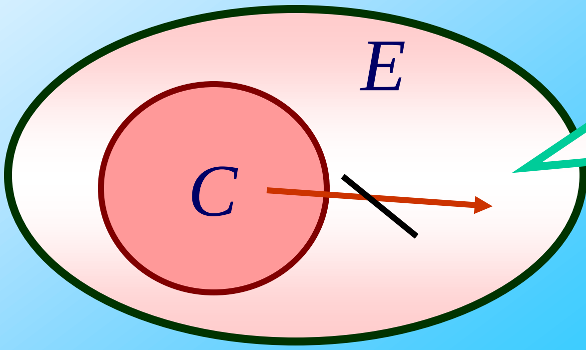
$n=1$ 时结论显然成立；

假设$n=k$ 时, 对任意　$i\in C, j\notin C$, 有 $p_{ij}^{(k)}=0$,

则　$$p_{ij}^{(k+1)}=\sum_{r\in C}p_{ir}^{(k)}p_{rj}+\sum_{r\notin C}p_{ir}^{(k)}p_{rj}$$

$$=\sum_{r\in C}p_{ir}^{(k)}\cdot 0+\sum_{r\notin C}0\cdot p_{rj}=0.$$

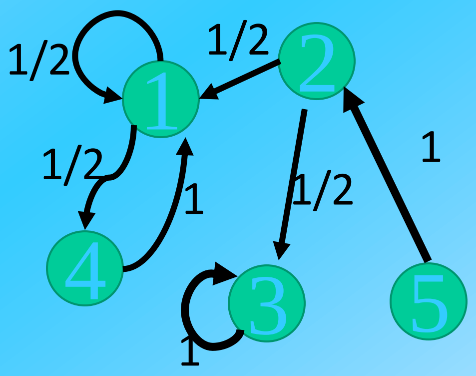
直观解释 自C 内部不能到达C的外部.



若状态的单元素集$\{i\}$是闭集,称 i 是吸收状态.

例 4.11 设马氏链$\{X_n\}$的状态空间$I=\{1,2,3,4,5\}$，转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$



证明：$\{X_n\}$不是不可约链。（提示：只要I不是不可约的）

注意到$p_{33}=1$，因此，状态 3 是吸收的，即$\{3\}$是闭集（是I的真子集），状态 3 不可与其他状态互通。故I不是不可约，从而马氏链$\{X_n\}$不是不可约链。

另外，$\{1,4\}$，$\{1,3,4\}$，$\{1,2,3,4\}$都是闭集；$\{3\}$和$\{1,4\}$是不可约闭集。

定理 马氏链所有常返态构成一闭集.

证明: 设i为常返态, 且 $i \to j$,

知$i \leftrightarrow j$,从而j也为常返态.

从常返态出发, 只能到达常返态. 故常返态集是闭集.

定理 4.10（状态空间分解定理）

任一马氏链的状态空间I可唯一地分解成有限个或可列个互不相交的子集$D,C_1,C_2,\cdots$之和，使得

（1）每一C_n是常返状态组成的不可约闭集；

（2）C_n中的状态同类（全是正常返，或全是零常返，周期相同），且 $f_{jk}=1,\ j,k\in C_n$；

（3）D由全体非常返状态组成。（即C_n中的状态不能到达D中的状态）

即 $I=D\cup C_1\cup C_2\cup\cdots$

注 1: D不一定是闭集；若I有限，D一定不是闭集。C_n称为基本常返闭集。

注 2: 对$\forall i, j \in C_n$，$f_{ij}=1$;

结论： 以闭集C_k为状态空间的原马氏链的子马氏链，其转移概率矩阵为$G=(p_{ij}), i, j \in C_k$是原马氏链转移矩阵的子矩阵。

命题 有限齐次马氏链的所有非常返态组成的集合 D 一定不是闭集.

即不管系统从什么状态出发，迟早要进入常返闭集.

证明： D 只能是有限集, 再根据定理 4.5, 状态从 D 出发, 只能有限次返回 D，于是必迟早进入常返闭集.

系 有限不可约的齐次马氏链的所有状态都为常返态.

定理　设 D 是非常返态集, $i\in D$, j 是常返态，则最终概率 f_{ij} 满足以下方程

$$f_{ij}=\sum_{k\in D}p_{ik}f_{kj}+\sum_{k\in H}p_{ik},\quad (i\in D)$$

其中 $H=C(j)$.

证明： $\because f_{kj}=\begin{cases}1, & k\in H;\\ 0, & k\notin H \text{ 且 } k\notin D.\end{cases}$

$$\therefore f_{ij}=P\{\text{经有限步到达}j\,|\,X(0)=i\}$$

$$=\sum_{k\in E}P\{\text{经有限步到达}j\,|\,X(0)=i,X(1)=k\}\cdot P\{X(1)=k\,|\,X(0)=i\}$$

$$=\sum_{k\in D}f_{kj}p_{ik}+\sum_{k\in H}f_{kj}p_{ik}+\sum_{\substack{k\notin H\\ k\notin D}}f_{kj}p_{ik}\quad=\sum_{k\in D}f_{kj}p_{ik}+\sum_{k\in H}p_{ik}$$

(2) 有限马氏链的性质

(a) 所有非常返状态组成的集合不可能是闭集；

(b)没有零常返状态;

(c)必有正常返状态;

(d)不可约有限马氏链只有正常返态;

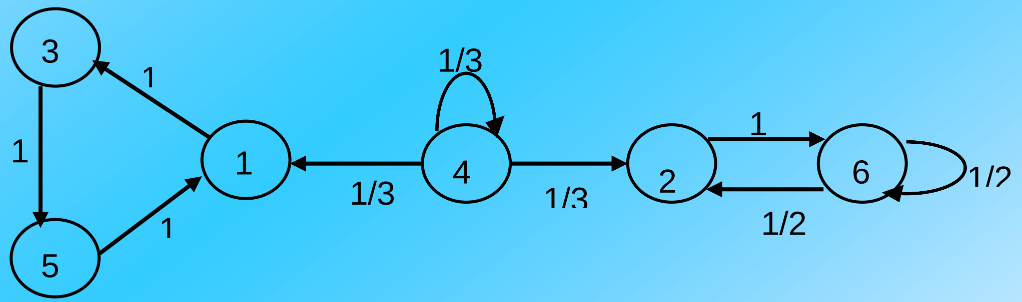
(e)状态空间可以分解为：$S = D \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$

其中：每个 $C_n, n = 1,2,\cdots,k$ 均是由正常返状态组成的有限不可约闭集，D是非常返态集。

例、设马氏链$\{X_n\}$的状态空间$I=\{1,2,3,4,5,6\}$，转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

试分解此链并指出各状态的常返性及周期性。



解： $C_1=\{1,3,5\}$， $C_2=\{2,6\}$为基本常返闭集， $D=\{4\}$

1）对状态 1， $f_{11}^{(3)}=1$， $f_{11}^{(n)}=0(n\neq 3)$， 则

$$f_{11}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)}=1\text{，}\quad \mu_1=\sum_{n=1}^{\infty} nf_{11}^{(n)}=3\text{，}\quad d_1=3\text{。}$$

即状态 1，3，5 都是周期为 3，正常返的。

2）对状态 6， $f_{66}^{(1)}=\dfrac{1}{2}$, $f_{66}^{(2)}=\dfrac{1}{2}$, $f_{66}^{(n)}=0\ (n\geq 3)$， 则

$$f_{66}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{66}^{(n)}=1\text{，}\quad \mu_6=\sum_{n=1}^{\infty} nf_{66}^{(n)}=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+0=\frac{3}{2}\text{，}\quad d_6=1\text{。}$$

即状态 2，6 都是遍历的。

3）对状态 4， $f_{44}^{(1)}=\dfrac{1}{3}$， $f_{44}^{(n)}=0(n\neq 1)$， 则 $f_{44}=\dfrac{1}{3}<1$， $d_4=1$

即状态 4 非常返，非周期。

注意： 以$C_1=\{1,3,5\}$或$C_2=\{2,6\}$为状态空间的子马氏链。

定理 4.11（周期链分解定理）

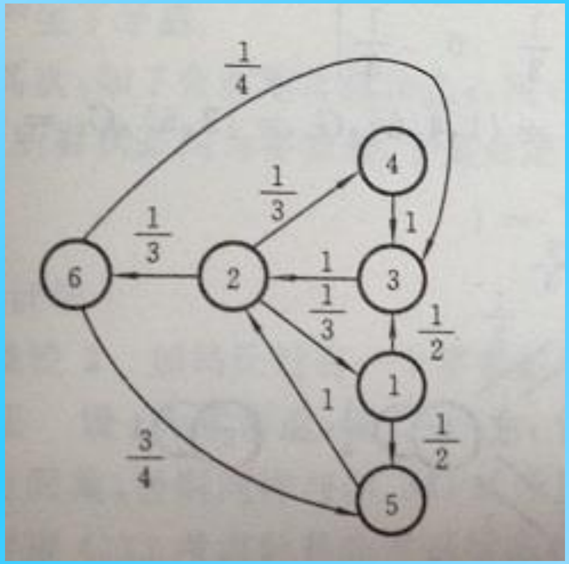
周期为 d 的不可约马氏链，其状态空间 C 可唯一分解为 d 个互不相交的子集之和，即 $C=\bigcup_{r=0}^{d-1}G_r$， $G_r\cap G_s=\varnothing, r\neq s$。其中，从 G_r 中任一状态出发经一步转移必进入 G_{r+1} 中（$G_0=G_d$）

说明：任取一状态 i（以此为出发点），定义 $G_r=\{j: p_{ij}^{(nd+r)}>0\}$， $r=0,1,\cdots,d-1$。

定理 4.12 此时，相应地有马氏链$\{X_{nd}, n\geq 0\}$（即参数集为$\{0,d,2d,\cdots\}$），其状态空间是C，其转移矩阵为$P^{(d)}=(p_{ij}^{(d)})$，但每一个G_r是不可约闭集，且G_r中的状态是非周期的。若马氏链$\{X_n\}$常返，则$\{X_{nd}\}$也常返。

例 4．14 设不可约马氏链$\{X_n\}$的状态空间$C=\{1,2,3,4,5,6\}$，转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$



（1）试求周期d并分解此链。

（2）考察$\{X_{nd}\}$

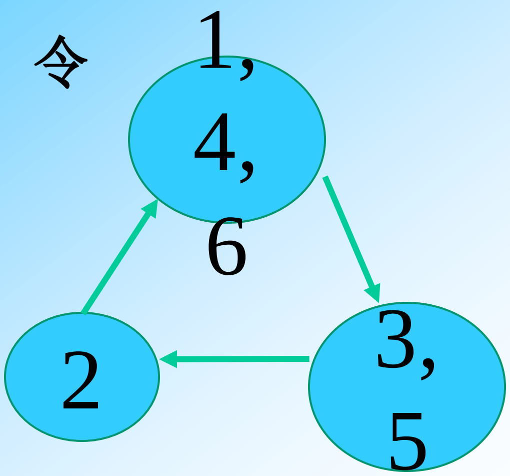
解：（1）画状态转移图，$d=3$，固定状态$i=1$，令

$$G_0=\{j:\text{对某}n\geq 0\text{有}p_{1j}^{(3n)}>0\}=\{1,4,6\},$$

$$G_1=\{j:\text{对某}n\geq 0\text{有}p_{1j}^{(3n+1)}>0\}=\{3,5\}$$

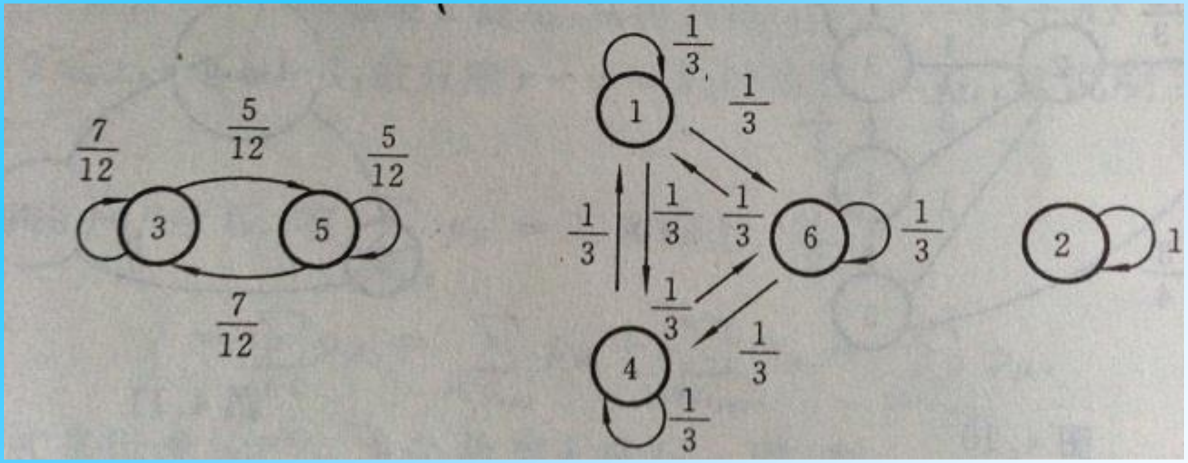
$$G_2=\{j:\text{对某}n\geq 0\text{有}p_{1j}^{(3n+2)}>0\}=\{2\}$$

则$C=G_0\cup G_1\cup G_2$。



（2）$\{X_{nd}\}$的转移矩阵为 $P^{(3)}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{12} & 0 & \frac{5}{12} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{12} & 0 & \frac{5}{12} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

画状态转移图，$G_0=\{1,4,6\}$，$G_1=\{3,5\}$，$G_3=\{2\}$都是不可约闭集，周期为 1(非周期)。



相关性质：

(1) C是闭集$\Leftrightarrow$ $\forall i \in C, \forall j \notin C$,有$P_{ij}^{(n)} = 0 \quad (n \geq 0)$

(2) C是闭集 $\Leftrightarrow$ $\sum_{j \in C} p_{ij} = 1, \forall i \in C$

(3) i为吸收态$\Leftrightarrow$ $p_{ii} = 1$

(4) 齐次马氏链不可约$\Leftrightarrow$ 任何两个状态均互通

(5) 所有常返态构成一个闭集

(6) 在不可约马氏链中,所有状态具有相同的状态类型.

极限理论与不变分布

对于一个系统来说，考虑它的长期性是很有必要的.在*Markov*链应用中,人们常常关心在什么条件下,*Markov*链是一个平稳序列，即研究

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \lim_{n\to\infty}(P_{ij}^{(n)})$$ 是否趋于稳定值P,

即转化为研究$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$是否存在，是否和起点 i 有关？

例 (0-1传输系统）

设*Markov*链的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1-p & p \\ q & 1-q\end{bmatrix},\quad 0<q<p<1$$

试讨论 $\lim\limits_{n\to\infty}P^{(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}P^{n}$是否趋于稳定值$P$？

解： $$\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \\ \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \end{bmatrix}$$

可见，此*Markov*链的*n*步转移概率有一个稳定的极限(长时间转移后，概率一定). 含义深刻，此处

$$\lim_{n\to\infty} p_{i0}^{(n)} = \frac{q}{p+q} = \pi_0, \quad \lim_{n\to\infty} p_{i1}^{(n)} = \frac{p}{p+q} = \pi_1.$$

即，对于固定的状态*j*，不管链在某一时刻的状态*i*出发，通过长时间转移到状态*j*的概率都趋近于π_j.

4.4　$p_{ij}^{(n)}$ 的渐近性质与平稳分布

常返$\leftrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$

一．已知常返状态 i 的渐近性质（起点=终点）

（1）若 i 零常返（$\mu_i = \infty$）$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$；

（2）若 i 正常返（$d_i > 1$）$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \dfrac{d}{\mu_i} > 0$；

（3）若 i 遍历（$d_i = 1$）$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \dfrac{1}{\mu_i} > 0$。

二．问题：（1）$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 的存在性；（2）$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 与起点状态 i 的关系。

定理5.10 若j为非常返状态或零常返态，则$\forall i\in S$，

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$$

结论：

(1) (推论5.4) 设不可约的、正常返的、周期为d的Markov链，其状态空间为S，则对任何状态$i\to j$，$\forall i,j\in S$，有

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(nd)}=\begin{cases}\dfrac{d}{\mu_j} & \text{若}i\text{与}j\text{同属于子集}S_r\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $S=\bigcup\limits_{r=0}^{d-1}S_r$ 为定理5.8所给出.

特别地，当$d=1$时，则 $\forall i,j\in S$，有

$$\lim P_{ij}^{(n)}=\frac{1}{\ }$$

定理4.13 若j为非常返状态或零常返态，则$\forall i \in I$,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$$

证明： 对$N < n$, 有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \le \sum_{k=0}^{N} f_{ij}^{(n-k)} p_{jj}^{(k)} + \sum_{k=N+1}^{n} f_{ij}^{(k)}$$

固定N，先令$n \to \infty$, $p_{jj}^{(k)} \to 0$

再令$N \to \infty$，因$\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} \le 1, \Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{k=N+1}^{n} f_{ij}^{(k)} = 0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$$

推论1 有限状态的马氏链，不可能全氏非常返状态，也不可能含有零常返状态，从而不可约的有限马氏链必为正常返.

- **证：** 1）设$I=\{0,1,\ldots,N\}$，如 I 全是非常返状态，则对
- 任意 $i,j\in I$，知 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$,

故 $1=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=0}^{N} p_{ij}^{(n)}=\sum\limits_{j=0}^{N}\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$, 矛盾。

2）如 I 含有零常返状态 i，则$C=\{j:i\to j\}$是有限不可约闭集，由定理知，C中均为零常返状态，知

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \forall j \in C$$

由引理知 $$1 = \sum_{j\in C} p_{ij}^{(n)},$$

所以 $$1 = \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in C} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j\in C}\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0,$$矛盾。

推论2 如马氏链含有一个零常返态，则必有无限多个零返态.

证： 设i为零常返状态，则$C=\{j:i\to j\}$是不可约闭集，C中均为零常返状态，故C不能是有限集。否则

$$1=\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in C}p_{ij}^{(n)}=\sum_{j\in C}\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0,\text{矛盾。}$$

(2) 有限马氏链的性质

(a) 所有非常返状态组成的集合不可能是闭集;

(b)没有零常返状态;

(c)必有正常返状态;

(d)不可约有限马氏链只有正常返态;

(e)状态空间可以分解为：$S = D \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$

其中：每个 C_n, $n = 1,2,\cdots,k$ 均是由正常返状态组成的有限不可约闭集，D 是非常返态集。

定理 4.14 若终点状态 j 是**正常返**，周期为 d ，则 $\forall i \in I$ 及 $0 \le r \le d-1$，有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = f_{ij}(r)\frac{d}{\mu_j}$$

$$f_{ij}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)}, \quad 0 \le r < d-1$$

推论：若不可约、正常返、周期为d的马氏链的状态空间为C，则$\forall i,j\in C$，有$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(nd)}=\begin{cases}\dfrac{d}{\mu_j}, & i,j\in G_s\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，其中$C=\bigcup\limits_{s=0}^{d-1}G_s$。

特别$d=1$（遍历），则$\forall i,j\in C$，有$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\dfrac{1}{\mu_j}$。

定理 4.15 $\forall i,j\in C$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}=\begin{cases}0, & j\text{非常返或零常返}\\ \dfrac{f_{ij}}{\mu_j}, & j\text{正常返}\end{cases}$。

（质点自 i 出发每单位时间内再回到 j 的平均次数，考虑 f_{ij}。）

说明： $\sum\limits_{k=1}^{n}p_{jj}^{(k)}$：自 j 出发，在 n 步之内回到 j 的平均次数；

$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}$：自 i 出发每单位时间内再回到 j 的平均次数

$\dfrac{1}{\mu_j}$： 自 j 出发每单位时间内再回到 j 的平均次数，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{jj}^{(k)}\approx\frac{1}{\mu_j}$$

推论： 若 $\{X_n\}$ 不可约、常返，则 $\forall i,j$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}=\dfrac{1}{\mu_j}$。

4.4.2 平稳分布

定义 4.11

若$\{X_n, n \geq 0\}$是齐次马氏链，状态空间为I，转移概率为p_{ij}，称概率分布$\{\pi_j, j \in I\}$为其平稳分布，若它满足：

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij} \\ \sum_j \pi_j = 1, \pi_j \geq 0 \end{cases}$$

（求平稳分布）

说明：若初始概率分布$\{p_j, j\in I\}$是平稳分布，则绝对概率分布$\{p_j(n), j\in I\}$同初始概率分布，即$p_j(n)=p_j$。

（归纳法证明）

实际上，有
$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i\in I} \pi_i p_{ij}^{(n)} \\ \sum_j \pi_j = 1, \pi_j \geq 0 \end{cases}$$

而且，如果马尔可夫链的初始分布

$$P\{X(0)=j\}=f_j$$

恰好是平稳分布，则对一切 n，$X(n)$ 的分布也是平稳分布，且正好就是 f_i。事实上，我们有

$$P\{X(n)=j\}=\sum_{i=0}^{\infty}P\{X(0)=i\}P\{X(n)=j\mid X(0)=i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}f_i p_{ij}^{(n)}=f_j$$

遍历的

定理 4.16 不可约非周期的马氏链是正常返$\Leftrightarrow$存在平稳分布，且此平稳分布就是极限分布$\{\frac{1}{\mu_j}, j \in I\}$。

（不可约的遍历链$\Leftrightarrow$存在平稳分布）

推论 1)：有限状态的不可约非周期马氏链必存在平稳分布。

推论 2)：若不可约马氏链的所有状态是非常返或零常返的，则不存在平稳分布。

推论 3)：若 $\{\pi_j, j\in I\}$ 是不可约非周期的马氏链的平稳分布，则

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = \frac{1}{\mu_j} = \pi_j$$

（求平均返回时间）

有限状态马氏链，如果存在n，使得 $p_{ij}^{(n)} > 0, \forall i, j$, **则此链是遍历的。**

例 4.16 设马氏链的转移矩阵为$P=\begin{pmatrix}0.7 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0.8 & 0.1\\ 0.05 & 0.05 & 0.9\end{pmatrix}$，求马氏链的平稳分布及各状态的平均返回时间。

解： 此链是有限状态的不可约非周期的马氏链，故必有平稳分布。

$$\begin{cases}\pi_1 = 0.7\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.05\pi_3\\ \pi_2 = 0.1\pi_1 + 0.8\pi_2 + 0.05\pi_3\\ \pi_3 = 0.2\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.9\pi_3\\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1\end{cases}$$，则

平稳分布为$\begin{cases}\pi_1 = 0.1765\\ \pi_2 = 0.2353\\ \pi_3 = 0.5882\end{cases}$，各状态的平均返回时间为$\begin{cases}\mu_1 = \dfrac{1}{\pi_1} = 5.67\\ \mu_2 = \dfrac{1}{\pi_2} = 4.25\\ \mu_3 = \dfrac{1}{\pi_3} = 1.70\end{cases}$

例 **(续)** 公司A,B,C生产同样的产品. 根据历史资料, A,B,C公司的市场 有率分别是50%, 30%, 20%.   由于C公司改善了销售与服务策略, 使其销售额上升,
而A 公司则下降. 求稳定状态下的市场占有率

已知一步转移概率矩阵
恰好是例1

$$P=\begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{pmatrix}$$

所以 $\begin{cases} \pi_1 = 0.1765 \\ \pi_2 = 0.2353 \\ \pi_3 = 0.5882 \end{cases}$ 即为最终市场占有率

例 4.17 生灭链

设马尔可夫链具有状态空间$I=\{0,1,2,\cdots\}$，其转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases} p_i, & j=i+1 \\ r_i, & i=j \\ q_i, & j=i-1 \end{cases},$$

其中$q_0=0$，$p_i>0(i\geq 0),q_i>0(i\geq 1),r_i=1-p_i-q_i\geq 0(i\geq 0)$称此马尔可夫链为生灭链，它是不可约的。记$a_0=1$，$a_j=\dfrac{p_0p_1\cdots p_{j-1}}{q_1q_2\cdots q_j},(j\geq 1)$。试证此马尔可夫链存在平稳分布的充要条件为$\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_j<\infty$。

证明：设平稳分布为$\{\pi_i, i=0,1,2,\cdots\}$，则

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 r_0 + \pi_1 q_1, \\ \pi_j = \pi_{j-1} p_{j-1} + \pi_j r_j + \pi_{j+1} q_{j+1} (j \ge 1) \end{cases}，且 \sum_{j\in I} \pi_j = 1$$

$$\begin{cases} \pi_1 q_1 - \pi_0 p_0 = 0 \\ \pi_{j+1} q_{j+1} - \pi_j p_j = \pi_j q_j - \pi_{j-1} p_{j-1}\ (j \ge 1) \end{cases},$$

$$\pi_j q_j - \pi_{j-1} p_{j-1} = 0, (j \ge 1)$$ (归纳)

$$\Rightarrow \boxed{\pi_j} = \frac{\pi_{j-1} p_{j-1}}{q_j} = \frac{\pi_{j-2} p_{j-2}}{q_{j-1}} \cdot \frac{p_{j-1}}{q_j} = \frac{\pi_{j-3} p_{j-3}}{q_{j-2}} \frac{p_{j-2}}{q_{j-1}} \cdot \frac{p_{j-1}}{q_j} = \cdots$$

$$= \frac{\pi_0 p_0 p_1 p_2 \cdots p_{j-1}}{q_1 q_2 \cdots q_{j-1} q_j} \boxed{= \pi_0 a_j}$$ (递推)

$$\Rightarrow \sum_{j\in I} \pi_j = \pi_0 \sum_{j\in I} a_j$$

故 $\boxed{\sum_{j\in I} \pi_j = 1 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} a_j < \infty}$，

此时，$\pi_0 = \dfrac{1}{\sum_{j\in I} a_j}$，$\quad \pi_j = \dfrac{a_j}{\sum_{j\in I} a_j} (j \ge 1)$

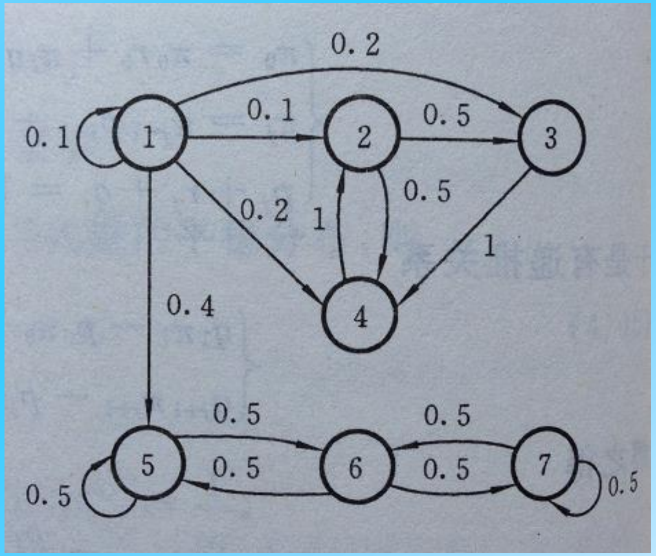
结论：对于马尔可夫链，平稳分布**不唯一**（无限多）的充要条件是**至少有两个**不同的正常返状态的不可约闭集。

找平稳分布的方法:

以不可约闭集C_k为状态空间的原马氏链的**子马氏链，**其转移概率矩阵为$G=(p_{ij}),i,j\in C_k$，求出其唯一的平稳分布，$I-C_k$中的状态对应的π值全部置为零，最后合成原马尔可夫链的一个平稳分布。

例 4.18 设状态空间为 $I=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 的马尔可夫链的转移矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$



求每一个不可约闭集的平稳分布。

解：状态空间分解为两个不可约常返闭集$C_1=\{2,3,4\}$和$C_2=\{5,6,7\}$及一个非常返集$N=\{1\}$。

在C_1上对应的状态转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解方程组$\begin{cases} \pi_2=\pi_4 \\ \pi_3=0.5\pi_2 \\ \pi_4=0.5\pi_2+\pi_3 \\ \pi_2+\pi_3+\pi_4=1 \end{cases}$ 得：$\pi_2=\dfrac{2}{5}$，$\pi_3=\dfrac{1}{5}$，$\pi_4=\dfrac{2}{5}$

C_1上，原马尔可夫链的一个平稳分布为$(0,\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5},0,0,0)$。

在 C_2 上对应的状态转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0.5 & 0.5 & 0\\ 0.5 & 0 & 0.5\\ 0 & 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$$

解方程组 $\begin{cases}\pi_5=0.5\pi_5+0.5\pi_6\\ \pi_6=0.5\pi_5+0.5\pi_7\\ \pi_7=0.5\pi_6+0.5\pi_7\\ \pi_5+\pi_6+\pi_7=1\end{cases}$ 得： $\pi_5=\dfrac{1}{3}$， $\pi_6=\dfrac{1}{3}$， $\pi_7=\dfrac{1}{3}$

C_2 上，原马尔可夫链的一个平稳分布为 $(0,0,0,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$。