⋆3.2 Fourier变换的应用

⋆3.2.1 一维热传导方程的初值问题

⋆3.2 Fourier变换的应用

⋆3.2.1 一维热传导方程的初值问题

(1) 齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

⋆3.2 Fourier变换的应用

⋆3.2.1 一维热传导方程的初值问题

(1) 齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

有解

$$u(x,t) = \int_{R^1} G(x-\xi,t)\phi(\xi)d\xi,$$

⋆3.2 Fourier变换的应用

⋆3.2.1 一维热传导方程的初值问题

(1) 齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

有解

$$u(x,t) = \int_{R^1} G(x-\xi,t)\phi(\xi)d\xi,$$

分析：无界区域的初值问题，选择Fourier积分变换

解：方程和初始条件关于x施行Fourier变换，记$\hat{u}(\lambda,t) = \mathscr{F}[u], \hat{\phi}(\lambda) = \mathscr{F}[\phi]$，利用微分性质，原定解问题可化为

⋆3.2 Fourier变换的应用

⋆3.2.1 一维热传导方程的初值问题

(1) 齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \qquad (3.2.1)$$

有解

$$u(x,t) = \int_{R^1} G(x-\xi,t)\phi(\xi)d\xi,$$

分析：无界区域的初值问题，选择Fourier积分变换

解：方程和初始条件关于x施行Fourier变换，记$\hat{u}(\lambda,t) = \mathscr{F}[u], \hat{\phi}(\lambda) = \mathscr{F}[\phi]$，利用微分性质，原定解问题可化为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{u}(\lambda,t) = (i\lambda)^2 a^2 \hat{u} = -(a\lambda)^2 \hat{u}, & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda,0) = \hat{\phi}(\lambda) \end{cases}$$

$\star$3.2 Fourier变换的应用

$\star$3.2.1 一维热传导方程的初值问题

(1) 齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

有解

$$u(x,t) = \int_{R^1} G(x-\xi,t)\phi(\xi)d\xi,$$

分析：无界区域的初值问题，选择Fourier积分变换

解：方程和初始条件关于x施行Fourier变换，记$\hat{u}(\lambda,t) = \mathscr{F}[u], \hat{\phi}(\lambda) = \mathscr{F}[\phi]$，利用微分性质，原定解问题可化为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{u}(\lambda,t) = (i\lambda)^2 a^2 \hat{u} = -(a\lambda)^2 \hat{u}, & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda,0) = \hat{\phi}(\lambda) \end{cases}$$

把λ看成参数(上面就是一阶齐次常微分方程的初值问题)，解初值问题

$$\hat{u}(\lambda,t) = \hat{\phi}(\lambda)e^{-(a\lambda)^2 t}$$

⋆3.2 Fourier变换的应用

⋆3.2.1 一维热传导方程的初值问题

(1) 齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

有解

$$u(x,t) = \int_{R^1} G(x-\xi,t)\phi(\xi)d\xi,$$

分析：无界区域的初值问题，选择Fourier积分变换

解：方程和初始条件关于x施行Fourier变换，记$\hat{u}(\lambda,t) = \mathscr{F}[u], \hat{\phi}(\lambda) = \mathscr{F}[\phi]$，利用微分性质，原定解问题可化为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{u}(\lambda,t) = (i\lambda)^2 a^2 \hat{u} = -(a\lambda)^2 \hat{u}, & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda,0) = \hat{\phi}(\lambda) \end{cases}$$

把λ看成参数(上面就是一阶齐次常微分方程的初值问题)，解初值问题

$$\hat{u}(\lambda,t) = \hat{\phi}(\lambda)e^{-(a\lambda)^2 t}$$

作Fourier逆变换，利用卷积定理(性质10中的第三个关系式)可得

$$u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)e^{-(a\lambda)^2 t}] = \phi(x) * \mathscr{F}^{-1}[e^{-(a\lambda)^2 t}]$$

作Fourier逆变换，利用卷积定理(性质10中的第三个关系式)可得

$$u(x,t)=\mathscr{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)e^{-(a\lambda)^2t}]=\phi(x)*\mathscr{F}^{-1}[e^{-(a\lambda)^2t}]$$

$$=\phi(x)*\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}exp(-\frac{x^2}{4a^2t})\quad \text{(利用(3.1.3)的结论)}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_R \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t})\phi(y)dy,\quad \text{(利用卷积的定义)} \tag{3.2.2}$$

作Fourier逆变换，利用卷积定理(性质10中的第三个关系式)可得

$$u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)e^{-(a\lambda)^2 t}] = \phi(x) * \mathscr{F}^{-1}[e^{-(a\lambda)^2 t}]$$

$$= \phi(x) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} exp(-\frac{x^2}{4a^2 t})$$ **(利用(3.1.3)的结论)**

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_R \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t})\phi(y)dy, \quad (3.2.2)$$ **(利用卷积的定义)**

若记

$$G(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{4a^2 t}).$$

则有

$$u(x,t) = \int_R G(x-y,t)\phi(y)dy$$

函数$G(x,t)$称为**热核**,或问题(3.2.1)的**解核**,也称为一维热传导方程初值问题的**基本解**.

作Fourier逆变换，利用卷积定理(性质10中的第三个关系式)可得

$$u(x,t)=\mathscr{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)e^{-(a\lambda)^2t}]=\phi(x)*\mathscr{F}^{-1}[e^{-(a\lambda)^2t}]$$

$$=\phi(x)*\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}exp(-\frac{x^2}{4a^2t})\quad \text{(利用(3.1.3)的结论)}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_R \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t})\phi(y)dy,\quad \text{(利用卷积的定义)} \tag{3.2.2}$$

若记

$$G(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{4a^2t}).$$

则有

$$u(x,t)=\int_R G(x-y,t)\phi(y)dy$$

函数$G(x,t)$称为**热核**,或问题(3.2.1)的**解核**,也称为一维热传导方程初值问题的**基本解**.

定理3.2.1 如果初值函数ϕ连续且有界，则由(3.2.2)式给出的$u(x,t)$是问题(3.2.1)的古典解，并且当$t>0$时，$u(x,t)$关于x,t无穷次连续可微。

(2)非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in R^1, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

(2)非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in R^1, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

解法一：先分解定解问题，再利用Fourier变换和齐次化原理进行求解

定解问题(3.2.3)分解成

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ v(x,0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = f(x,t), & x \in R^1, t > 0 \\ w(x,0) = 0, & x \in R^1. \end{cases} \tag{3.2.5}$$

(2)非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in R^1, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

解法一：先分解定解问题，再利用Fourier变换和齐次化原理进行求解

定解问题(3.2.3)分解成

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ v(x,0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = f(x,t), & x \in R^1, t > 0 \\ w(x,0) = 0, & x \in R^1. \end{cases} \tag{3.2.5}$$

利用Fourier变换可得(3.2.4)的解为

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_R \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) \phi(y) dy$$

(2)非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in R^1, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

解法一：先分解定解问题，再利用Fourier变换和齐次化原理进行求解

定解问题(3.2.3)分解成

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ v(x,0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = f(x,t), & x \in R^1, t > 0 \\ w(x,0) = 0, & x \in R^1. \end{cases} \tag{3.2.5}$$

利用Fourier变换可得(3.2.4)的解为

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_R \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right)\phi(y)dy$$

利用Fourier变换和齐次化原理(3.2.5)的解为

$$\int_0^t \int_{R^1} \frac{f(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)dyd\tau$$

再利用叠加原理可得初值问题(3.2.3)的解

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \; & \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{R^1} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right)\phi(y)dy \\
& + \int_0^t \int_{R^1} \frac{f(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)dyd\tau.
\end{aligned} \tag{3.2.6}
$$

再利用叠加原理可得初值问题(3.2.3)的解

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \; & \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{R^1} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right)\phi(y)dy \\
& + \int_0^t \int_{R^1} \frac{f(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)dyd\tau.
\end{aligned} \tag{3.2.6}
$$

解法二：先实行Fourier变换，转换为常微分方程，再进行求解。对定解问题（3.2.3）关于x实行Fourier变换

$$
\begin{cases}
\frac{d}{dt}\hat{u}(\lambda,t) + (a\lambda)^2\hat{u} = \hat{f}(\lambda,t), \;\; t > 0 \\
\hat{u}(\lambda,0) = \hat{\phi}(\lambda)
\end{cases}
$$

再利用叠加原理可得初值问题(3.2.3)的解

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \ & \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{R^1}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right)\phi(y)dy \\
& + \int_0^t\int_{R^1}\frac{f(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)dyd\tau.
\end{aligned}
\tag{3.2.6}
$$

解法二：先实行Fourier变换，转换为常微分方程，再进行求解。对定解问题（3.2.3）关于x实行Fourier变换

$$
\begin{cases}
\frac{d}{dt}\hat{u}(\lambda,t) + (a\lambda)^2\hat{u} = \hat{f}(\lambda,t), \ \ t>0 \\
\hat{u}(\lambda,0) = \hat{\phi}(\lambda)
\end{cases}
$$

把λ看成参数(上面就是一阶非齐次常微分方程的初值问题)，解初值问题（利用3月17号中的结论）

$$
\hat{u}(\lambda,t) = \hat{\phi}(\lambda)e^{-(a\lambda)^2t} + \int_0^t \hat{f}(\lambda,\tau)e^{-(a\lambda)^2(t-\tau)}d\tau
$$

再利用叠加原理可得初值问题(3.2.3)的解

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{R^1}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right)\phi(y)dy + \int_0^t\int_{R^1}\frac{f(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)dyd\tau. \tag{3.2.6}$$

解法二：先实行Fourier变换，转换为常微分方程，再进行求解。对定解问题（3.2.3）关于x实行Fourier变换

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{u}(\lambda,t) + (a\lambda)^2\hat{u} = \hat{f}(\lambda,t), \quad t>0 \\ \hat{u}(\lambda,0) = \hat{\phi}(\lambda) \end{cases}$$

把λ看成参数(上面就是一阶非齐次常微分方程的初值问题)，解初值问题（利用3月17号中的结论）

$$\hat{u}(\lambda,t) = \hat{\phi}(\lambda)e^{-(a\lambda)^2t} + \int_0^t \hat{f}(\lambda,\tau)e^{-(a\lambda)^2(t-\tau)}d\tau$$

实行Fourier逆变换，右边第一项的结果就是（3.2.2),下面处理右边第二项

交换积分和逆F-变换的顺序

$$\mathscr{F}^{-1}[\int_0^t \hat{f}(\lambda,\tau)e^{-(a\lambda)^2(t-\tau)}d\tau] = \int_0^t \mathscr{F}^{-1}[\hat{f}(\lambda,\tau)e^{-(a\lambda)^2(t-\tau)}]d\tau$$

$$= \int_0^t [f(x,\tau) * \mathscr{F}^{-1}(e^{-(a\lambda)^2(t-\tau)})]d\tau \text{(性质10中的第三个关系式)}$$

$$= \int_0^t [f(x,\tau) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}]d\tau \text{(利用（3.1.3）的结论)}$$

$$= \int_0^t \int_{R^1} \frac{f(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)})dyd\tau \text{(卷积的定义)}$$

将右边两项相加即为(3.2.6)

定理3.2.1 如果初值函数ϕ连续且有界，f在$R \times R_+$上连续有界，则由(3.2.6)式给出的$u(x,t)$是问题(3.2.3)的古典解。

例3.2.1求初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ c & x \geq 0 \end{cases} & c\text{是常数} \end{cases}$$

例3.2.1求初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ c & x \geq 0 \end{cases} & c\text{是常数} \end{cases}$$

解：直接利用公式(3.2.2)可得

$$u(x,t) = \frac{c}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) dy$$

例3.2.1求初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ c & x \geq 0 \end{cases} & c\text{是常数} \end{cases}$$

解：直接利用公式(3.2.2)可得

$$u(x,t) = \frac{c}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})dy$$

令$\frac{y-x}{2\sqrt{t}} = \eta$,则有

$$u(x,t) = \frac{c}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} 2\sqrt{t}e^{-\eta^2}d\eta = \frac{c}{\sqrt{\pi}}(\int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{0} e^{-\eta^2}d\eta + \int_0^{\infty} e^{-\eta^2}d\eta)$$

例3.2.1求初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ c & x \geq 0 \end{cases} & c\text{是常数} \end{cases}$$

解：直接利用公式(3.2.2)可得

$$u(x,t) = \frac{c}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})dy$$

令$\frac{y-x}{2\sqrt{t}} = \eta$,则有

$$u(x,t) = \frac{c}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} 2\sqrt{t}e^{-\eta^2}d\eta = \frac{c}{\sqrt{\pi}}(\int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{0} e^{-\eta^2}d\eta + \int_0^{\infty} e^{-\eta^2}d\eta)$$

$$= \frac{c}{\sqrt{\pi}}(\int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{0} e^{-\eta^2}d\eta + \frac{\sqrt{\pi}}{2}) = \frac{c}{\sqrt{\pi}}(\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\eta^2}d\eta + \frac{\sqrt{\pi}}{2})$$

例3.2.1求初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ c & x \geq 0 \end{cases} & c\text{是常数} \end{cases}$$

解：直接利用公式(3.2.2)可得

$$u(x,t) = \frac{c}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})dy$$

令$\frac{y-x}{2\sqrt{t}} = \eta$,则有

$$u(x,t) = \frac{c}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} 2\sqrt{t}e^{-\eta^2}d\eta = \frac{c}{\sqrt{\pi}}(\int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{0} e^{-\eta^2}d\eta + \int_0^{\infty} e^{-\eta^2}d\eta)$$

$$= \frac{c}{\sqrt{\pi}}(\int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{0} e^{-\eta^2}d\eta + \frac{\sqrt{\pi}}{2}) = \frac{c}{\sqrt{\pi}}(\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\eta^2}d\eta + \frac{\sqrt{\pi}}{2})$$

已知误差函数$erf(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-\eta^2}d\eta$,故

$$u(x,t) = \frac{c}{2}[1 + erf(\frac{x}{2\sqrt{t}})]$$

（此例题，积分中变量代换的技巧要掌握）

例3.2.2求初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - tu = 0, & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in R \end{cases}$$

例3.2.2求初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - tu = 0, & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in R \end{cases}$$

解：对方程和初始条件关于x施行Fourier变换，有

$$\begin{cases} \hat{u}_t = -\lambda^2 \hat{u} + t\hat{u}, & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\phi}(\lambda) \end{cases}$$

例3.2.2求初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - tu = 0, & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in R \end{cases}$$

解：对方程和初始条件关于x施行Fourier变换，有

$$\begin{cases} \hat{u}_t = -\lambda^2 \hat{u} + t\hat{u}, & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\phi}(\lambda) \end{cases}$$

解出

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\phi}(\lambda) e^{-\lambda^2 t + t^2/2}$$

例3.2.2求初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - tu = 0, & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in R \end{cases}$$

解：对方程和初始条件关于x施行Fourier变换，有

$$\begin{cases} \hat{u}_t = -\lambda^2 \hat{u} + t\hat{u}, & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\phi}(\lambda) \end{cases}$$

解出

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\phi}(\lambda) e^{-\lambda^2 t + t^2/2}$$

两边施行Fourier逆变换，根据卷积定理可得

$$u(x,t) = e^{t^2/2} \mathscr{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)] * \mathscr{F}^{-1}[e^{-\lambda^2 t}] = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{t^2/2} \int_R \exp(-\frac{(y-x)^2}{4t}) \phi(y) dy$$

（此例题，在积分的过程中，将与积分变量无关的函数提到积分外，然后再化简，在以后的习题中要用到此技巧）

利用Fourier变换求解无界区域上的初始问题

- 首先观察定解问题中自变量的范围，选择合适的变量进行Fourier变换。（例如问题(3.2.1),x是无界区域，t是半无界区域，所以选择关于x作Fourier变换）
- 将方程和初始条件实行Fourier变换，原偏微分定界问题就转换为常微分方程的初值问题（把λ看成参数，此过程主要利用Fourier的微分性质）
- 利用第二章预备知识中介绍的常微分方程的求解方法，求出其解
- 最后作Fourier逆变换
- 最后一步中，以往很多同学感觉有点复杂，这一步主要会利用性质10中的第三个关系式，热传导方程会用到（3.1.3）的表达式。
- 在Fourier逆变换求原函数时，如果不能判断出原函数的表达形式，建议先利用定义将Fourier逆变换写出来，再将积分进行化简。

利用公式(3.2.6)求解，需要计算复杂的积分，如果函数$f(x)$和$\phi(x)$关于x都是实解析函数，我们可以给出一种求解初值问题(3.2.3)的简单方法

利用公式(3.2.6)求解，需要计算复杂的积分，如果函数$f(x)$和$\phi(x)$关于x都是实解析函数，我们可以给出一种求解初值问题(3.2.3)的简单方法

定理3.2.3 假设$f(x,t),\phi(x)$关于x都是实解析函数，则问题(3.2.3)的解可以写成

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a^2t)^n}{n!}\phi^{(2n)}(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\frac{[a^2(t-s)]^n}{n!}f_x^{(2n)}(x,s)ds, \tag{3.2.7}$$

其中$\phi^{(2n)}(x)$和$f_x^{(2n)}(x,\tau)$分别是$\phi(x)$和$f(x,\tau)$关于x的$2n$阶导数.

利用公式(3.2.6)求解，需要计算复杂的积分，如果函数$f(x)$和$\phi(x)$关于x都是实解析函数，我们可以给出一种求解初值问题(3.2.3)的简单方法

定理3.2.3 假设$f(x,t),\phi(x)$关于x都是实解析函数，则问题(3.2.3)的解可以写成

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a^2t)^n}{n!}\phi^{(2n)}(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\frac{[a^2(t-s)]^n}{n!}f_x^{(2n)}(x,s)ds, \tag{3.2.7}$$

其中$\phi^{(2n)}(x)$和$f_x^{(2n)}(x,\tau)$分别是$\phi(x)$和$f(x,\tau)$关于x的$2n$阶导数.
证明：令

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a^2t)^n}{n!}\phi^{(2n)}(x)=\phi(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a^2t)^n}{n!}\phi^{(2n)}(x)$$

$$B=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\frac{[a^2(t-s)]^n}{n!}f_x^{(2n)}(x,s)ds$$

$$=\int_0^t f(x,s)ds+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\frac{[a^2(t-s)]^n}{n!}f_x^{(2n)}(x,s)ds$$

利用公式(3.2.6)求解，需要计算复杂的积分，如果函数$f(x)$和$\phi(x)$关于x都是实解析函数，我们可以给出一种求解初值问题(3.2.3)的简单方法

定理3.2.3 假设$f(x,t),\phi(x)$关于x都是实解析函数，则问题(3.2.3)的解可以写成

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a^2t)^n}{n!}\phi^{(2n)}(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\frac{[a^2(t-s)]^n}{n!}f_x^{(2n)}(x,s)ds, \tag{3.2.7}$$

其中$\phi^{(2n)}(x)$和$f_x^{(2n)}(x,\tau)$分别是$\phi(x)$和$f(x,\tau)$关于x的$2n$阶导数.

证明：令

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a^2t)^n}{n!}\phi^{(2n)}(x)=\phi(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a^2t)^n}{n!}\phi^{(2n)}(x)$$

$$B=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\frac{[a^2(t-s)]^n}{n!}f_x^{(2n)}(x,s)ds$$

$$=\int_0^t f(x,s)ds+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\frac{[a^2(t-s)]^n}{n!}f_x^{(2n)}(x,s)ds$$

则

$$u(x,0)=\phi(x)$$

直接计算可得

$$A_t = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a^2 t)^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(2n)}(x) = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n+2)}(x)$$

直接计算可得

$$A_t = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a^2t)^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(2n)}(x) = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2t)^n}{n!} \phi^{(2n+2)}(x)$$

$$A_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2t)^n}{n!} \phi^{(2n+2)}(x)$$

直接计算可得

$$A_t = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a^2 t)^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(2n)}(x) = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n+2)}(x)$$

$$A_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n+2)}(x)$$

$$B_t = f(x,t) + a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{[a^2(t-s)]^n}{n!} f_x^{(2n+2)}(x,s) ds$$

直接计算可得

$$A_t = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a^2 t)^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(2n)}(x) = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n+2)}(x)$$

$$A_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n+2)}(x)$$

$$B_t = f(x,t) + a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{[a^2(t-s)]^n}{n!} f_x^{(2n+2)}(x,s) ds$$

$$B_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{[a^2(t-s)]^n}{n!} f_x^{(2n+2)}(x,s) ds$$

直接计算可得

$$A_t = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a^2 t)^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(2n)}(x) = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n+2)}(x)$$

$$A_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n+2)}(x)$$

$$B_t = f(x,t) + a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{[a^2(t-s)]^n}{n!} f_x^{(2n+2)}(x,s)ds$$

$$B_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{[a^2(t-s)]^n}{n!} f_x^{(2n+2)}(x,s)ds$$

于是

$$A_t = a^2 A_{xx}, B_t = a^2 B_{xx} + f(x,t), x \in R, t > 0$$

从而$u(x,t)$满足定解问题(3.2.3).

例3.2.3求解定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = Ax, & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = \sin\theta x, & x \in R \end{cases}$$

其中A,θ都是常数

例3.2.3求解定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = Ax, & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = \sin\theta x, & x \in R \end{cases}$$

其中A, θ都是常数

解：

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sin\theta x + Axt$$

例3.2.3求解定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = Ax, & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = \sin\theta x, & x \in R \end{cases}$$

其中A, θ都是常数

解：

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sin\theta x + Axt$$

其中

$$\frac{d^2}{dx^2}\sin\theta x = -\theta^2 \sin\theta x, \cdots, \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sin\theta x = (-\theta^2)^n \sin\theta x$$

例3.2.3求解定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = Ax, & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = \sin\theta x, & x \in R \end{cases}$$

其中A,θ都是常数

解：

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sin\theta x + Axt$$

其中

$$\frac{d^2}{dx^2}\sin\theta x = -\theta^2 \sin\theta x, \cdots, \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sin\theta x = (-\theta^2)^n \sin\theta x$$

于是

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} (-\theta^2)^n \sin\theta x = e^{-(a\theta)^2 t} \sin\theta x + Axt$$

⋆3.2.2高阶热传导方程的初值问题

⋆3.2.2高阶热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = 0, \quad \mathbf{x} \in R^n, t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \;\; \mathbf{x} \in R^n, \end{cases} \tag{3.2.6}$$

其中$\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n), \Delta u = (u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n})$. 有解

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{R^n} \phi(\xi) G(\mathbf{x} - \xi, t) d\xi.$$

$$G(\mathbf{x} - \xi, t) = (\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}})^n \exp(-\frac{|x - \xi|^2}{4a^2 t}).$$

函数$G(\mathbf{x}, t)$称为高维热传导方程的Green函数，也称为高维热传导方程初值问题的基本解.

利用齐次化原理，可以求出高维非齐次热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = f(\mathbf{x}, t), & x \in R^n, t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in R^n \end{cases} \tag{3.2.8}$$

的解

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{R^n} \phi(\xi) G(\mathbf{x} - \xi, t) d\xi + \int_0^t \int_{R^n} f(\xi, \tau) G(\mathbf{x} - \xi, t - \tau) d\xi d\tau$$

利用齐次化原理，可以求出高维非齐次热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f(\mathbf{x},t), & x \in R^n, t > 0, \\ u(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in R^n \end{cases} \tag{3.2.8}$$

的解

$$u(\mathbf{x},t) = \int_{R^n} \phi(\xi)G(\mathbf{x}-\xi,t)d\xi + \int_0^t \int_{R^n} f(\xi,\tau)G(\mathbf{x}-\xi,t-\tau)d\xi d\tau$$

如果$\phi(x), f(x,t)$关于x都是实解析函数，则(3.2.8)的解可以写成

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a^2t)^k}{k!}\Delta^k\phi(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t \Delta_x^k f(x,\tau)d\tau, \tag{3.2.9}$$

这里的Δ, Δ_x都是关于x求导，$\Delta^k\phi = \underbrace{\Delta(\Delta(\cdots(\Delta}_{k}\phi)))$.

回家作业:

3.6、(1)$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = 1 + x + x^2, & x \in R \end{cases}$

3.7、(1)$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} - b u_x - c u = f(x,t), & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in R \end{cases}$

其中a, b, c是常数