



1.1.3 Taylor级数法

设初值问题(1)的解 $u(x)$ 具有 $p + 1$ 阶连续导数, 利用Taylor公式有

$$u(x_{m+1}) = \sum_{j=0}^p \frac{h^j}{j!} u^{(j)}(x_m) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} u^{(p+1)}(\xi_m), \xi_m \in (x_m, x_{m+1}),$$

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 1 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit

1.1.3 Taylor级数法

设初值问题(1)的解 $u(x)$ 具有 $p+1$ 阶连续导数, 利用Taylor公式有

$$u(x_{m+1}) = \sum_{j=0}^p \frac{h^j}{j!} u^{(j)}(x_m) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} u^{(p+1)}(\xi_m), \xi_m \in (x_m, x_{m+1}),$$

记

$$\phi(x, u(x), h) = \sum_{j=1}^p \frac{h^{j-1}}{j!} \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} f(x, u(x)),$$

则

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + h\phi(x_m, u(x_m), h) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} u^{(p+1)}(\xi_m)$$

1.1.3 Taylor级数法

设初值问题(1)的解 $u(x)$ 具有 $p+1$ 阶连续导数, 利用Taylor公式有

$$u(x_{m+1}) = \sum_{j=0}^p \frac{h^j}{j!} u^{(j)}(x_m) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} u^{(p+1)}(\xi_m), \xi_m \in (x_m, x_{m+1}),$$

记

$$\phi(x, u(x), h) = \sum_{j=1}^p \frac{h^{j-1}}{j!} \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} f(x, u(x)),$$

则

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + h\phi(x_m, u(x_m), h) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} u^{(p+1)}(\xi_m)$$

舍去最后一项, 得到计算公式

$$u_{m+1} = u_m + h\phi(x_m, u_m, h), m = 0, 1, \dots, \quad (17)$$

- 局部截断误差为 $O(h^{p+1})$



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 2 of 17

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

- 局部截断误差为 $O(h^{p+1})$
- 公式(17)称为 p 阶Taylor级数法。



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 2 of 17

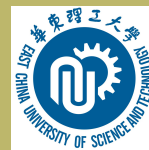
[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

- 局部截断误差为 $O(h^{p+1})$
- 公式(17)称为 p 阶Taylor级数法。
- 当 $p = 1$ 时，是Euler法。



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 2 of 17

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 局部截断误差为 $O(h^{p+1})$
- 公式(17)称为 p 阶Taylor级数法。
- 当 $p = 1$ 时，是Euler法。
- 由于

$$\frac{d}{dx}f(x, u(x)) = f_x + f f_u.$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x, u(x)) = f_{xx} + 2f f_{xu} + f^2 f_{uu} + f_u(f_x + f f_u)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 2 of 17](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 局部截断误差为 $O(h^{p+1})$
- 公式(17)称为 p 阶Taylor级数法。
- 当 $p = 1$ 时，是Euler法。
- 由于

$$\frac{d}{dx}f(x, u(x)) = f_x + f f_u.$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x, u(x)) = f_{xx} + 2f f_{xu} + f^2 f_{uu} + f_u(f_x + f f_u)$$

- 二阶Taylor级数法

$$u_{m+1} = u_m + h f_m + \frac{h^2}{2}(f_x + f f_u)_m$$

其中 $f_m = f(x_m, u_m)$, $(\)_m$ 指括号内的函数在 (x_m, u_m) 取值。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 2 of 17](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 三阶Taylor级数法

$$u_{m+1} = u_m + hf_m + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_u)_m + \frac{h^3}{6}[f_{xx} + 2ff_{xu} + f^2f_{uu} + f_u(f_x + ff_u)]_m$$

其中 $f_m = f(x_m, u_m)$, $()_m$ 指括号内的函数在 (x_m, u_m) 取值

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 3 of 17

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 三阶Taylor级数法

$$u_{m+1} = u_m + hf_m + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_u)_m + \frac{h^3}{6}[f_{xx} + 2ff_{xu} + f^2f_{uu} + f_u(f_x + ff_u)]_m$$

其中 $f_m = f(x_m, u_m)$, $()_m$ 指括号内的函数在 (x_m, u_m) 取值

- 理论上只要函数 $u(x)$ 足够光滑，用Taylor级数法可以构造出任意阶的方法。

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 3 of 17

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



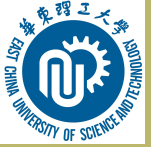
- 三阶Taylor级数法

$$u_{m+1} = u_m + hf_m + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_u)_m + \frac{h^3}{6}[f_{xx} + 2ff_{xu} + f^2f_{uu} + f_u(f_x + ff_u)]_m$$

其中 $f_m = f(x_m, u_m)$, $()_m$ 指括号内的函数在 (x_m, u_m) 取值

- 理论上只要函数 $u(x)$ 足够光滑，用Taylor级数法可以构造出任意阶的方法。
- Taylor级数法中导数的计算比较复杂，它很少直接用来求初值问题的解。

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 3 of 17](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 三阶Taylor级数法

$$u_{m+1} = u_m + hf_m + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_u)_m + \frac{h^3}{6}[f_{xx} + 2ff_{xu} + f^2f_{uu} + f_u(f_x + ff_u)]_m$$

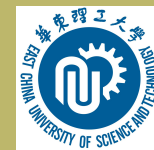
其中 $f_m = f(x_m, u_m)$, $()_m$ 指括号内的函数在 (x_m, u_m) 取值

- 理论上只要函数 $u(x)$ 足够光滑，用Taylor级数法可以构造出任意阶的方法。
- Taylor级数法中导数的计算比较复杂，它很少直接用来求初值问题的解。
- Taylor级数法是显式的单步法，可以用它计算线性多步法。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 3 of 17](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

1.1.4 Runge-Kutta 法

- Taylor级数法可以构造高阶单步法，但是增量函数 $\phi(x, u, h)$ 是用 f 的各阶导数表示，通常不易计算



Home Page

Title Page



Page 4 of 17

Go Back

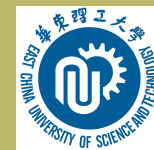
Full Screen

Close

Quit

1.1.4 Runge-Kutta 法

- Taylor级数法可以构造高阶单步法，但是增量函数 $\phi(x, u, h)$ 是用 f 的各阶导数表示，通常不易计算
- 函数的一阶导数可以用该点附近若干点的函数值近似表示，所以Taylor级数法中的增量函数 ϕ 改为 f 在一些点上函数值的组合，然后利用Taylor展开确定待定的系数，使方法达到一定的阶，这就是Runge-Kutta 法的基本思想



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 4 of 17

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

1.1.4 Runge-Kutta 法

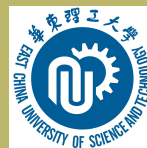
- Taylor级数法可以构造高阶单步法，但是增量函数 $\phi(x, u, h)$ 是用 f 的各阶导数表示，通常不易计算
- 函数的一阶导数可以用该点附近若干点的函数值近似表示，所以Taylor级数法中的增量函数 ϕ 改为 f 在一些点上函数值的组合，然后利用Taylor展开确定待定的系数，使方法达到一定的阶，这就是Runge-Kutta 法的基本思想
- N 级Runge-Kutta 法的一般公式为

$$u_{m+1} = u_m + h \sum_{i=1}^N c_i K_i, \quad (18)$$

其中

$$K_1 = f(x_m, u_m), K_i = f(x_m + a_i h, u_m + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j), i = 2, \dots, N,$$

c_i, a_i, b_{ij} 为待定常数，



1.1.4 Runge-Kutta 法

- Taylor级数法可以构造高阶单步法，但是增量函数 $\phi(x, u, h)$ 是用 f 的各阶导数表示，通常不易计算
- 函数的一阶导数可以用该点附近若干点的函数值近似表示，所以Taylor级数法中的增量函数 ϕ 改为 f 在一些点上函数值的组合，然后利用Taylor展开确定待定的系数，使方法达到一定的阶，这就是Runge-Kutta 法的基本思想
- N 级Runge-Kutta 法的一般公式为

$$u_{m+1} = u_m + h \sum_{i=1}^N c_i K_i, \quad (18)$$

其中

$$K_1 = f(x_m, u_m), K_i = f(x_m + a_i h, u_m + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j), i = 2, \dots, N,$$

c_i, a_i, b_{ij} 为待定常数，

- 将 K_i 在 (x_m, u_m) 处作Taylor展开，并使局部截断误差的阶尽量的高，从而就确定处这些待定常数应满足的方程。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 17

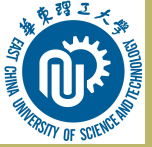
Go Back

Full Screen

Close

Quit

- $N = 1$, 可定出 $c_1 = 1$, 此时式(18)就是Euler公式



Home Page

Title Page



Page 5 of 17

Go Back

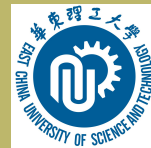
Full Screen

Close

Quit

- $N = 1$, 可定出 $c_1 = 1$, 此时式(18)就是Euler公式
- $N = 2$, 将 K_2 在 (x_m, u_m) 处展开, 则

$$\begin{aligned}
 K_2 &= f(x_m + a_2 h, u_m + h b_{21} K_1) \\
 &= [f + h(a_2 f_x + b_{21} K_1 f_u) + \frac{h^2}{2}(a_2^2 f_{xx} + 2a_2 b_{21} K_1 f_{xu} + b_{21}^2 K_1^2 f_{uu})]_m + O(h^3) \\
 &= [f + h(a_2 f_x + b_{21} f f_u) + \frac{h^2}{2}(a_2^2 f_{xx} + 2a_2 b_{21} f f_{xu} + b_{21}^2 f^2 f_{uu})]_m + O(h^3)
 \end{aligned}$$

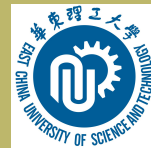

[Home Page](#)
[Title Page](#)
[<<](#)
[>>](#)
[<](#)
[>](#)
[Page 5 of 17](#)
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

- $N = 1$, 可定出 $c_1 = 1$, 此时式(18)就是Euler公式
- $N = 2$, 将 K_2 在 (x_m, u_m) 处展开, 则

$$\begin{aligned}
 K_2 &= f(x_m + a_2 h, u_m + h b_{21} K_1) \\
 &= [f + h(a_2 f_x + b_{21} K_1 f_u) + \frac{h^2}{2}(a_2^2 f_{xx} + 2a_2 b_{21} K_1 f_{xu} + b_{21}^2 K_1^2 f_{uu})]_m + O(h^3) \\
 &= [f + h(a_2 f_x + b_{21} f f_u) + \frac{h^2}{2}(a_2^2 f_{xx} + 2a_2 b_{21} f f_{xu} + b_{21}^2 f^2 f_{uu})]_m + O(h^3)
 \end{aligned}$$

- 把上式代入式(18)的右端,

$$\begin{aligned}
 u_m + h(c_1 K_1 + c_2 K_2) &= u_m + h(c_1 + c_2) f_m \\
 &+ h^2 c_2 (a_2 f_x + b_{21} f f_u)_m + \frac{h^3}{2} c_2 (a_2^2 f_{xx} + 2a_2 b_{21} f f_{xu} + b_{21}^2 f^2 f_{uu})_m + O(h^4),
 \end{aligned} \tag{20}$$


[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀](#)
[▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Page 5 of 17

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

- $N = 1$, 可定出 $c_1 = 1$, 此时式(18)就是Euler公式
- $N = 2$, 将 K_2 在 (x_m, u_m) 处展开, 则

$$\begin{aligned}
 K_2 &= f(x_m + a_2 h, u_m + h b_{21} K_1) \\
 &= [f + h(a_2 f_x + b_{21} K_1 f_u) + \frac{h^2}{2}(a_2^2 f_{xx} + 2a_2 b_{21} K_1 f_{xu} + b_{21}^2 K_1^2 f_{uu})]_m + O(h^3) \\
 &= [f + h(a_2 f_x + b_{21} f f_u) + \frac{h^2}{2}(a_2^2 f_{xx} + 2a_2 b_{21} f f_{xu} + b_{21}^2 f^2 f_{uu})]_m + O(h^3)
 \end{aligned}$$

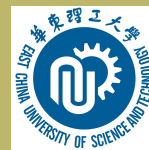
- 把上式代入式(18)的右端,

$$\begin{aligned}
 u_m + h(c_1 K_1 + c_2 K_2) &= u_m + h(c_1 + c_2) f_m \\
 &+ h^2 c_2 (a_2 f_x + b_{21} f f_u)_m + \frac{h^3}{2} c_2 (a_2^2 f_{xx} + 2a_2 b_{21} f f_{xu} + b_{21}^2 f^2 f_{uu})_m + O(h^4),
 \end{aligned} \tag{20}$$

- 另一方面

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + h u'(x_m) + \frac{h^2}{2} u''(x_m) + \frac{h^3}{6} u'''(x_m) + O(h^4), \tag{21}$$

$$u' = f, u'' = f_x + f f_u, u''' = f_{xx} + 2f f_{xu} + f^2 f_{uu} + (f_x + f f_u) f_u$$


[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀](#)
[▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Page 5 of 17](#)
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)



- 根据局部截断误差的定义，为了使误差的阶尽可能高，比较(20)和(21)式中 h 同次幂项的系数，得可以定出

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ b_{21} = a_2, \\ c_2 a_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

该方程组有无穷多组解，它的任何一组解都对应一个二级Runge-Kutta法，局部截断误差为 $O(h^3)$ ，从而是二阶方法，又称为二阶Runge-Kutta法

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 6 of 17](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 根据局部截断误差的定义，为了使误差的阶尽可能高，比较(20)和(21)式中 h 同次幂项的系数，得可以定出

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ b_{21} = a_2, \\ c_2 a_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

该方程组有无穷多组解，它的任何一组解都对应一个二级Runge-Kutta法，局部截断误差为 $O(h^3)$ ，从而是二阶方法，又称为二阶Runge-Kutta法

- 若取 $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}, b_{21} = a_2 = 1$ ，则

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{2}(K_1 + K_2), \quad (22)$$

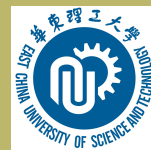
$$K_1 = f(x_m, u_m), K_2 = f(x_m + h, u_m + hK_1)$$

是改进的Euler法。

- 若取 $c_1 = 0, c_2 = 1, b_{21} = a_2 = \frac{1}{2}$, 则

$$u_{m+1} = u_m + hK_2, K_1 = f(x_m, u_m), K_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, u_m + \frac{h}{2}K_1)$$

称为修正的Euler法



Home Page

Title Page



Page 7 of 17

Go Back

Full Screen

Close

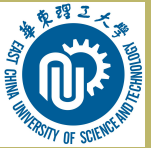
Quit

- 若取 $c_1 = 0, c_2 = 1, b_{21} = a_2 = \frac{1}{2}$, 则

$$u_{m+1} = u_m + hK_2, K_1 = f(x_m, u_m), K_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, u_m + \frac{h}{2}K_1)$$

称为修正的Euler法

- 比较(20),(21)式, 由于(20)中不含 $h^3(f_x + ff_u)f_u$, 因此二级Runge-Kutta法最多是二阶的
- 要想得到更高阶的方法, 即取较大的 N , 计算更加复杂, 三阶Heun方法、三阶Kutta方法、四阶Runge-Kutta方法



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 7 of 17

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

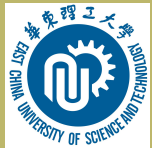
[Quit](#)

- 若取 $c_1 = 0, c_2 = 1, b_{21} = a_2 = \frac{1}{2}$, 则

$$u_{m+1} = u_m + hK_2, K_1 = f(x_m, u_m), K_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, u_m + \frac{h}{2}K_1)$$

称为修正的Euler法

- 比较(20),(21)式, 由于(20)中不含 $h^3(f_x + ff_u)f_u$, 因此二级Runge-Kutta法最多是二阶的
- 要想得到更高阶的方法, 即取较大的 N , 计算更加复杂, 三阶Heun方法、三阶Kutta方法、四阶Runge-Kutta方法
- Runge-Kutta法是通过函数的Taylor展开构造的, 因此高阶高阶Runge-Kutta法要求方程的解具有高阶导数, 若解的光滑性较差, 不可能得到高精度的数值解



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[«](#) [»](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 7 of 17

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

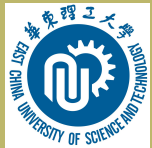
- 若取 $c_1 = 0, c_2 = 1, b_{21} = a_2 = \frac{1}{2}$, 则

$$u_{m+1} = u_m + hK_2, K_1 = f(x_m, u_m), K_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, u_m + \frac{h}{2}K_1)$$

称为修正的Euler法

- 比较(20),(21)式, 由于(20)中不含 $h^3(f_x + ff_u)f_u$, 因此二级Runge-Kutta法最多是二阶的
- 要想得到更高阶的方法, 即取较大的 N , 计算更加复杂, 三阶Heun方法、三阶Kutta方法、四阶Runge-Kutta方法
- Runge-Kutta法是通过函数的Taylor展开构造的, 因此高阶高阶Runge-Kutta法要求方程的解具有高阶导数, 若解的光滑性较差, 不可能得到高精度的数值解
- 记 $p^*(N)$ 是 N 级Runge-Kutta法所能达到的最高的阶数, 已经有人得到下面的结果

$$p^*(N) = \begin{cases} N, & \text{当 } N = 1, 2, 3, 4 \text{ 时} \\ N - 1, & \text{当 } N = 5, 6, 7 \text{ 时} \\ N - 2, & \text{当 } N = 8, 9 \text{ 时} \end{cases}$$



Home Page

Title Page

« »

◀ ▶

Page 7 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 若取 $c_1 = 0, c_2 = 1, b_{21} = a_2 = \frac{1}{2}$, 则

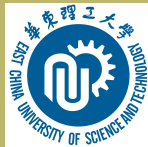
$$u_{m+1} = u_m + hK_2, K_1 = f(x_m, u_m), K_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, u_m + \frac{h}{2}K_1)$$

称为修正的Euler法

- 比较(20),(21)式, 由于(20)中不含 $h^3(f_x + ff_u)f_u$, 因此二级Runge-Kutta法最多是二阶的
- 要想得到更高阶的方法, 即取较大的 N , 计算更加复杂, 三阶Heun方法、三阶Kutta方法、四阶Runge-Kutta方法
- Runge-Kutta法是通过函数的Taylor展开构造的, 因此高阶高阶Runge-Kutta法要求方程的解具有高阶导数, 若解的光滑性较差, 不可能得到高精度的数值解
- 记 $p^*(N)$ 是 N 级Runge-Kutta法所能达到的最高的阶数, 已经有人得到下面的结果

$$p^*(N) = \begin{cases} N, & \text{当 } N = 1, 2, 3, 4 \text{ 时} \\ N - 1, & \text{当 } N = 5, 6, 7 \text{ 时} \\ N - 2, & \text{当 } N = 8, 9 \text{ 时} \end{cases}$$

- 当 $N \geq 5$ 时, $p^*(N) < N$, 从而四阶Runge-Kutta法是最受欢迎的方法



Home Page

Title Page

« »

◀ ▶

Page 7 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit



1.1.5 单步法的收敛性与稳定性

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 8 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit



1.1.5 单步法的收敛性与稳定性

- 计算值 u_m 只是准确值 $u(x_m)$ 的一个近似，差 $u(x_m) - u_m$ 是不是随着步长 h 的减小而减小，这就是收敛问题。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 8 of 17

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



1.1.5 单步法的收敛性与稳定性

- 计算值 u_m 只是准确值 $u(x_m)$ 的一个近似，差 $u(x_m) - u_m$ 是不是随着步长 h 的减小而减小，这就是收敛问题。
- 定义1.3 如果一个单步法满足：对 $(x_0, b]$ 中任意一个固定的点 a 成立

$$\lim_{h \rightarrow 0, x_0 + mh = a} u_m = u(a),$$

则称该方法是收敛的。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 8 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit

1.1.5 单步法的收敛性与稳定性

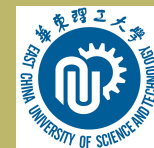
- 计算值 u_m 只是准确值 $u(x_m)$ 的一个近似, 差 $u(x_m) - u_m$ 是不是随着步长 h 的减小而减小, 这就是收敛问题。
- 定义1.3 如果一个单步法满足: 对 $(x_0, b]$ 中任意一个固定的点 a 成立

$$\lim_{h \rightarrow 0, x_0 + mh = a} u_m = u(a),$$

则称该方法是收敛的。

- 由于 $x_0 + mh = a$, 当 $h \rightarrow 0$ 时, $m \rightarrow \infty$, 也即当步长 h 减小时, 从 x_0 计算到点 a 的步数增大, 关于收敛性有如下定理

- 定理1.6 若单步法(7)是 p 阶方法($p > 0$), 且增量函数 $\phi(x, u, h)$ 关于 u 满足Lipschitz条件, 则该方法收敛



Home Page

Title Page



Page 9 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit



• 定理1.6 若单步法(7)是 p 阶方法($p > 0$), 且增量函数 $\phi(x, u, h)$ 关于 u 满足Lipschitz条件, 则该方法收敛

- 证: 因为方法是 p 阶的, 从而局部截断误差 $R_m = O(h^{p+1})$, 于是存在正的常数 c , 使得

$$|R_m| \leq ch^{p+1}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit



• 定理1.6 若单步法(7)是 p 阶方法($p > 0$), 且增量函数 $\phi(x, u, h)$ 关于 u 满足Lipschitz条件, 则该方法收敛

– 证: 因为方法是 p 阶的, 从而局部截断误差 $R_m = O(h^{p+1})$, 于是存在正的常数 c , 使得

$$|R_m| \leq ch^{p+1}$$

– 设 a 是 $(x_0, b]$ 中任意一个固定的点, $x_0 + mh = a$, 由定理1.2可知整体截断误差满足

$$|u(a) - u_m| \leq \frac{e^{L(a-x_0)} - 1}{L} ch^p \leq \frac{e^{L(b-x_0)} - 1}{L} ch^p$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 9 of 17](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 定理1.6 若单步法(7)是 p 阶方法($p > 0$), 且增量函数 $\phi(x, u, h)$ 关于 u 满足Lipschitz条件, 则该方法收敛

– 证: 因为方法是 p 阶的, 从而局部截断误差 $R_m = O(h^{p+1})$, 于是存在正的常数 c , 使得

$$|R_m| \leq ch^{p+1}$$

– 设 a 是 $(x_0, b]$ 中任意一个固定的点, $x_0 + mh = a$, 由定理1.2可知整体截断误差满足

$$|u(a) - u_m| \leq \frac{e^{L(a-x_0)} - 1}{L} ch^p \leq \frac{e^{L(b-x_0)} - 1}{L} ch^p$$

– 其中 L 是 ϕ 关于 u 的Lipschitz常数, 于是

$$\lim_{h \rightarrow 0, x_0 + mh = a} u_m = u(a)$$

即方法收敛

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit



对 N 级Runge-Kutta法(18),增量函数为

$$\phi(x, u, h) = \sum_{i=1}^N c_i K_i$$

其中

$$K_1 = f(x, u), K_i = f(x + a_i h, u + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j), i = 2, \dots, N$$

Home Page

Title Page



Page 10 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit

对 N 级Runge-Kutta法(18),增量函数为

$$\phi(x, u, h) = \sum_{i=1}^N c_i K_i$$

其中

$$K_1 = f(x, u), K_i = f(x + a_i h, u + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j), i = 2, \dots, N$$

- 当函数 $f(x, u)$ 关于 u 满足Lipschitz条件, 用数学归纳法可以证明所有的 K_i 关于 u 都满足Lipschitz条件, 从而 $\phi(x, u, h)$ 关于 u 也满足Lipschitz条件



对 N 级Runge-Kutta法(18),增量函数为

$$\phi(x, u, h) = \sum_{i=1}^N c_i K_i$$

其中

$$K_1 = f(x, u), K_i = f(x + a_i h, u + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j), i = 2, \dots, N$$

- 当函数 $f(x, u)$ 关于 u 满足Lipschitz条件, 用数学归纳法可以证明所有的 K_i 关于 u 都满足Lipschitz条件, 从而 $\phi(x, u, h)$ 关于 u 也满足Lipschitz条件
- 由定理1.6可知Runge-Kutta法收敛, Euler法和改进的Euler法收敛。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 17

Go Back

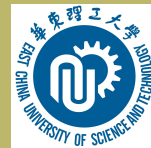
Full Screen

Close

Quit

单步法的稳定性：

初值一个很小的改变是否引起数值解也只有很小的改变，这就是方法的稳定性问题，更确切的说是数值解关于初值的连续依赖性问题。



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 11 of 17

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



单步法的稳定性:

初值一个很小的改变是否引起数值解也只有很小的改变, 这就是方法的稳定性问题, 更确切的说是数值解关于初值的连续依赖性问题。

- 定义1.4 若一个单步法满足: 存在正常数 c 和 h_0 使得用任意步长 $h \in (0, h_0]$ 以及任意两个初值 u_0 和 v_0 计算得到的两组数值 u_1, u_2, \dots, u_n 和 v_1, v_2, \dots, v_n 成立 $\max_{1 \leq m \leq n} |u_m - v_m| \leq c|u_0 - v_0|$ 则称该方法是稳定的, 其中 $n = \lceil \frac{b-x_0}{h} \rceil$.

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

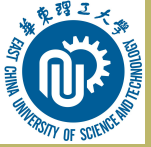
Page 11 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit



单步法的稳定性:

初值一个很小的改变是否引起数值解也只有很小的改变, 这就是方法的稳定性问题, 更确切的说是数值解关于初值的连续依赖性问题。

- 定义1.4 若一个单步法满足: 存在正常数 c 和 h_0 使得用任意步长 $h \in (0, h_0]$ 以及任意两个初值 u_0 和 v_0 计算得到的两组数值 u_1, u_2, \dots, u_n 和 v_1, v_2, \dots, v_n 成立 $\max_{1 \leq m \leq n} |u_m - v_m| \leq c|u_0 - v_0|$ 则称该方法稳定的, 其中 $n = \lceil \frac{b-x_0}{h} \rceil$.
- 定理1.7 若增量函数 $\phi(x, u, h)$ 是关于 u 满足Lipschitz条件, 则单步法(7)是稳定的。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit

单步法的稳定性:

初值一个很小的改变是否引起数值解也只有很小的改变, 这就是方法的稳定性问题, 更确切的说是数值解关于初值的连续依赖性问题。

- 定义1.4 若一个单步法满足: 存在正常数 c 和 h_0 使得用任意步长 $h \in (0, h_0]$ 以及任意两个初值 u_0 和 v_0 计算得到的两组数值 u_1, u_2, \dots, u_n 和 v_1, v_2, \dots, v_n 成立 $\max_{1 \leq m \leq n} |u_m - v_m| \leq c|u_0 - v_0|$

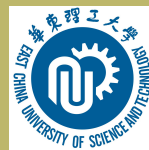
则称该方法是稳定的, 其中 $n = \lceil \frac{b-x_0}{h} \rceil$.

- 定理1.7 若增量函数 $\phi(x, u, h)$ 是关于 u 满足Lipschitz条件, 则单步法(7)是稳定的。

– 证明: 设 u_0, v_0 是两个不同的初值, 由(7)计算得到的数值分别记为 u_m, v_m , 则

$$u_m = u_{m-1} + h\phi(x_{m-1}, u_{m-1}, h)$$

$$v_m = v_{m-1} + h\phi(x_{m-1}, v_{m-1}, h)$$



单步法的稳定性:

初值一个很小的改变是否引起数值解也只有很小的改变, 这就是方法的稳定性问题, 更确切的说是数值解关于初值的连续依赖性问题。

- 定义1.4 若一个单步法满足: 存在正常数 c 和 h_0 使得用任意步长 $h \in (0, h_0]$ 以及任意两个初值 u_0 和 v_0 计算得到的两组数值 u_1, u_2, \dots, u_n 和 v_1, v_2, \dots, v_n 成立 $\max_{1 \leq m \leq n} |u_m - v_m| \leq c|u_0 - v_0|$

则称该方法是稳定的, 其中 $n = \lceil \frac{b-x_0}{h} \rceil$.

- 定理1.7 若增量函数 $\phi(x, u, h)$ 是关于 u 满足Lipschitz条件, 则单步法(7)是稳定的。

– 证明: 设 u_0, v_0 是两个不同的初值, 由(7)计算得到的数值分别记为 u_m, v_m , 则

$$u_m = u_{m-1} + h\phi(x_{m-1}, u_{m-1}, h)$$

$$v_m = v_{m-1} + h\phi(x_{m-1}, v_{m-1}, h)$$

– 记 $e_m = u_m - v_m$, 则

$$|e_m| \leq (1+hL)|e_{m-1}| \leq (1+hL)^m |e_0| \leq e^{mhL} |e_0| \leq e^{L(b-x_0)} |e_0|$$

由定义1.4可知方法是稳定的

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

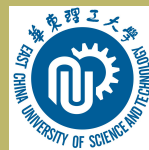
Page 11 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit



单步法的稳定性:

初值一个很小的改变是否引起数值解也只有很小的改变, 这就是方法的稳定性问题, 更确切的说是数值解关于初值的连续依赖性问题。

- 定义1.4 若一个单步法满足: 存在正常数 c 和 h_0 使得用任意步长 $h \in (0, h_0]$ 以及任意两个初值 u_0 和 v_0 计算得到的两组数值 u_1, u_2, \dots, u_n 和 v_1, v_2, \dots, v_n 成立 $\max_{1 \leq m \leq n} |u_m - v_m| \leq c|u_0 - v_0|$

则称该方法是稳定的, 其中 $n = \lceil \frac{b-x_0}{h} \rceil$.

- 定理1.7 若增量函数 $\phi(x, u, h)$ 是关于 u 满足Lipschitz条件, 则单步法(7)是稳定的。

– 证明: 设 u_0, v_0 是两个不同的初值, 由(7)计算得到的数值分别记为 u_m, v_m , 则

$$u_m = u_{m-1} + h\phi(x_{m-1}, u_{m-1}, h)$$

$$v_m = v_{m-1} + h\phi(x_{m-1}, v_{m-1}, h)$$

– 记 $e_m = u_m - v_m$, 则

$$|e_m| \leq (1+hL)|e_{m-1}| \leq (1+hL)^m |e_0| \leq e^{mhL} |e_0| \leq e^{L(b-x_0)} |e_0|$$

由定义1.4可知方法是稳定的

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 17

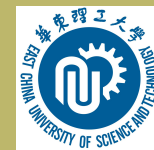
Go Back

Full Screen

Close

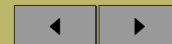
Quit

- Euler法、改进的Euler法和Runge-Kutta法都是稳定的



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 12 of 17

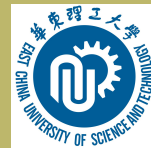
[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

- Euler法、改进的Euler法和Runge-Kutta法都是稳定的
- 在稳定性定义中没有考虑计算过程中的舍入误差。



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 12 of 17

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

- Euler法、改进的Euler法和Runge-Kutta法都是稳定的
- 在稳定性定义中没有考虑计算过程中的舍入误差。
- 如果每一步产生的舍入误差在以后的过程中不断传播放大，那么最后得到的结果可能很差。



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 12 of 17

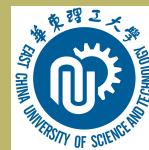
[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

- Euler法、改进的Euler法和Runge-Kutta法都是稳定的
- 在稳定性定义中没有考虑计算过程中的舍入误差。
- 如果每一步产生的舍入误差在以后的过程中不断传播放大，那么最后得到的结果可能很差。
- 我们希望任何一步产生的误差(包括初值的误差)在以后过程中逐渐减少，这种方法称为绝对稳定。



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 12 of 17

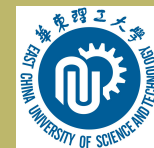
[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

- Euler法、改进的Euler法和Runge-Kutta法都是稳定的
- 在稳定性定义中没有考虑计算过程中的舍入误差。
- 如果每一步产生的舍入误差在以后的过程中不断传播放大，那么最后得到的结果可能很差。
- 我们希望任何一步产生的误差(包括初值的误差)在以后过程中逐渐减少，这种方法称为绝对稳定。
- 绝对稳定不仅与函数 f 有关，还与步长 h 有关



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 12 of 17

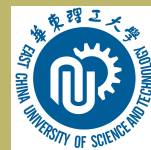
[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

- Euler法、改进的Euler法和Runge-Kutta法都是稳定的
- 在稳定性定义中没有考虑计算过程中的舍入误差。
- 如果每一步产生的舍入误差在以后的过程中不断传播放大，那么最后得到的结果可能很差。
- 我们希望任何一步产生的误差(包括初值的误差)在以后过程中逐渐减少，这种方法称为绝对稳定。
- 绝对稳定不仅与函数 f 有关，还与步长 h 有关
- 我们讨论方法的稳定性时仅考虑下面的模型问题



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 12 of 17

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- Euler法、改进的Euler法和Runge-Kutta法都是稳定的
- 在稳定性定义中没有考虑计算过程中的舍入误差。
- 如果每一步产生的舍入误差在以后的过程中不断传播放大，那么最后得到的结果可能很差。
- 我们希望任何一步产生的误差(包括初值的误差)在以后过程中逐渐减少，这种方法称为绝对稳定。
- 绝对稳定不仅与函数 f 有关，还与步长 h 有关
- 我们讨论方法的稳定性时仅考虑下面的模型问题

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \mu u, & x_0 < x \leq b \\ u(x_0) = u_0, \end{cases} \quad (29)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 12 of 17](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- Euler法、改进的Euler法和Runge-Kutta法都是稳定的
- 在稳定性定义中没有考虑计算过程中的舍入误差。
- 如果每一步产生的舍入误差在以后的过程中不断传播放大，那么最后得到的结果可能很差。
- 我们希望任何一步产生的误差(包括初值的误差)在以后过程中逐渐减少，这种方法称为绝对稳定。
- 绝对稳定不仅与函数 f 有关，还与步长 h 有关
- 我们讨论方法的稳定性时仅考虑下面的模型问题

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \mu u, & x_0 < x \leq b \\ u(x_0) = u_0, \end{cases} \quad (29)$$

- 定义1.5 对初值问题(29)记 $\bar{h} = \mu h$,若一个数值方法在某一步由计算产生的误差在以后各步中逐渐减少，则称该方法关于 \bar{h} 是绝对稳定的。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 12 of 17

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- Euler法、改进的Euler法和Runge-Kutta法都是稳定的
- 在稳定性定义中没有考虑计算过程中的舍入误差。
- 如果每一步产生的舍入误差在以后的过程中不断传播放大，那么最后得到的结果可能很差。
- 我们希望任何一步产生的误差(包括初值的误差)在以后过程中逐渐减少，这种方法称为绝对稳定。
- 绝对稳定不仅与函数 f 有关，还与步长 h 有关
- 我们讨论方法的稳定性时仅考虑下面的模型问题

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \mu u, & x_0 < x \leq b \\ u(x_0) = u_0, \end{cases} \quad (29)$$

- 定义1.5 对初值问题(29)记 $\bar{h} = \mu h$,若一个数值方法在某一步由计算产生的误差在以后各步中逐渐减少，则称该方法关于 \bar{h} 是绝对稳定的。
- 复平面上所有这样的 \bar{h} 组成的区域称为该方法的绝对稳定区域，

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 12 of 17

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- Euler法、改进的Euler法和Runge-Kutta法都是稳定的
- 在稳定性定义中没有考虑计算过程中的舍入误差。
- 如果每一步产生的舍入误差在以后的过程中不断传播放大，那么最后得到的结果可能很差。
- 我们希望任何一步产生的误差(包括初值的误差)在以后过程中逐渐减少，这种方法称为绝对稳定。
- 绝对稳定不仅与函数 f 有关，还与步长 h 有关
- 我们讨论方法的稳定性时仅考虑下面的模型问题

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \mu u, & x_0 < x \leq b \\ u(x_0) = u_0, \end{cases} \quad (29)$$

- 定义1.5 对初值问题(29)记 $\bar{h} = \mu h$,若一个数值方法在某一步由计算产生的误差在以后各步中逐渐减少，则称该方法关于 \bar{h} 是绝对稳定的。
- 复平面上所有这样的 \bar{h} 组成的区域称为该方法的绝对稳定区域，
- 下面只讨论 μ 是实数的情况，并称绝对稳定区域为绝对稳定区间。

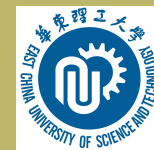
[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 12 of 17

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

考虑Euler法的绝对稳定区域，对于模型(29)，Euler法的计算公式是

$$u_{m+1} = u_m + h\mu u_m = (1 + \bar{h})u_m, \quad (31)$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 13 of 17

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



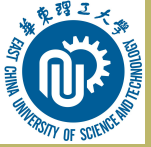
考虑Euler法的绝对稳定区域，对于模型(29)，Euler法的计算公式是

$$u_{m+1} = u_m + h\mu u_m = (1 + \bar{h})u_m, \quad (31)$$

从 u_{m-1} 出发，假设在第 m 步按公式(31)计算得到的值记为 \bar{u}_m (已考虑舍入误差),在此基础上下一步的值 \bar{u}_{m+1} (该步及以后不考虑舍入误差)满足

$$\bar{u}_{m+1} = (1 + \bar{h})\bar{u}_m, \quad (32)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 13 of 17](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



考虑Euler法的绝对稳定区域，对于模型(29)，Euler法的计算公式是

$$u_{m+1} = u_m + h\mu u_m = (1 + \bar{h})u_m, \quad (31)$$

从 u_{m-1} 出发，假设在第 m 步按公式(31)计算得到的值记为 \bar{u}_m (已考虑舍入误差),在此基础上下一步的值 \bar{u}_{m+1} (该步及以后不考虑舍入误差)满足

$$\bar{u}_{m+1} = (1 + \bar{h})\bar{u}_m, \quad (32)$$

记 $e_k = u_k - \bar{u}_k, k \geq m$. 两式相减得

$$e_{m+1} = (1 + \bar{h})e_m, \quad (33)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 13 of 17](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

考虑Euler法的绝对稳定区域, 对于模型(29), Euler法的计算公式是

$$u_{m+1} = u_m + h\mu u_m = (1 + \bar{h})u_m, \quad (31)$$

从 u_{m-1} 出发, 假设在第 m 步按公式(31)计算得到的值记为 \bar{u}_m (已考虑舍入误差), 在此基础上下一步的值 \bar{u}_{m+1} (该步及以后不考虑舍入误差)满足

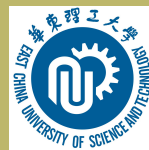
$$\bar{u}_{m+1} = (1 + \bar{h})\bar{u}_m, \quad (32)$$

记 $e_k = u_k - \bar{u}_k, k \geq m$. 两式相减得

$$e_{m+1} = (1 + \bar{h})e_m, \quad (33)$$

递推下去有

$$e_{m+n} = (1 + \bar{h})^n e_m, n = 1, 2, \dots.$$



考虑Euler法的绝对稳定区域，对于模型(29)，Euler法的计算公式是

$$u_{m+1} = u_m + h\mu u_m = (1 + \bar{h})u_m, \quad (31)$$

从 u_{m-1} 出发，假设在第 m 步按公式(31)计算得到的值记为 \bar{u}_m (已考虑舍入误差),在此基础上下一步的值 \bar{u}_{m+1} (该步及以后不考虑舍入误差)满足

$$\bar{u}_{m+1} = (1 + \bar{h})\bar{u}_m, \quad (32)$$

记 $e_k = u_k - \bar{u}_k, k \geq m$. 两式相减得

$$e_{m+1} = (1 + \bar{h})e_m, \quad (33)$$

递推下去有

$$e_{m+n} = (1 + \bar{h})^n e_m, n = 1, 2, \dots.$$

由此可见，当且仅当

$$|1 + \bar{h}| < 1$$

时，第 m 步由计算产生的误差 $|e_m|$ 在以后各步中逐渐减少，从而得到Euler法的绝对稳定区间 $(-2, 0)$.

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 13 of 17](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 比较式(33)和式(31),误差 e_m 所满足的等式与方法的计算公式相同, 这个结论对其他方法也适用

Home Page

Title Page



Page 14 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 比较式(33)和式(31),误差 e_m 所满足的等式与方法的计算公式相同, 这个结论对其他方法也适用
- 向后的Euler法

$$u_{m+1} = u_m + h\mu u_{m+1}$$

于是

$$u_{m+1} = \frac{1}{1 - \bar{h}} u_m, e_{m+1} = \frac{1}{1 - \bar{h}} e_m$$

当且仅当

$$|1 - \bar{h}| > 1$$

时, 向后Euler法是绝对稳定的。所以它的绝对稳定区间 $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

- 比较式(33)和式(31),误差 e_m 所满足的等式与方法的计算公式相同, 这个结论对其他方法也适用
- 向后的Euler法

$$u_{m+1} = u_m + h\mu u_{m+1}$$

于是

$$u_{m+1} = \frac{1}{1 - \bar{h}} u_m, e_{m+1} = \frac{1}{1 - \bar{h}} e_m$$

当且仅当

$$|1 - \bar{h}| > 1$$

时, 向后Euler法是绝对稳定的。所以它的绝对稳定区间 $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

- 类似地, 可得梯形法的绝对稳定区间 $(-\infty, 0)$

- 比较式(33)和式(31),误差 e_m 所满足的等式与方法的计算公式相同, 这个结论对其他方法也适用
- 向后的Euler法

$$u_{m+1} = u_m + h\mu u_{m+1}$$

于是

$$u_{m+1} = \frac{1}{1 - \bar{h}} u_m, e_{m+1} = \frac{1}{1 - \bar{h}} e_m$$

当且仅当

$$|1 - \bar{h}| > 1$$

时, 向后Euler法是绝对稳定的。所以它的绝对稳定区间 $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

- 类似地, 可得梯形法的绝对稳定区间 $(-\infty, 0)$

- 对于 p 阶Taylor级数法, 从式(16)和式(29)可知增量函数为

$$\phi(x, u, h) = \mu \sum_{j=1}^p \frac{\bar{h}^{j-1}}{j!} u$$

于是计算公式是

$$u_{m+1} = \left(\sum_{j=0}^p \frac{\bar{h}^j}{j!} \right) u_m$$

当且仅当

$$\left| \sum_{j=0}^p \frac{\bar{h}^j}{j!} \right| < 1$$

时, p 阶Taylor级数法是绝对稳定的

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 15 of 17](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 对于 p 阶Taylor级数法, 从式(16)和式(29)可知增量函数为

$$\phi(x, u, h) = \mu \sum_{j=1}^p \frac{\bar{h}^{j-1}}{j!} u$$

于是计算公式是

$$u_{m+1} = \left(\sum_{j=0}^p \frac{\bar{h}^j}{j!} \right) u_m$$

当且仅当

$$\left| \sum_{j=0}^p \frac{\bar{h}^j}{j!} \right| < 1$$

时, p 阶Taylor级数法是绝对稳定的

- 二阶Runge-Kutta法的绝对稳定区间 $(-2, 0)$, 三阶Runge-Kutta $(-2.513, 0)$, 四阶Runge-Kutta $(-2.785, 0)$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 15 of 17](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



•

方法	绝对稳定区间	方法	绝对稳定区间
Eulre方法	$(-2, 0)$	二阶Runge-Kutta法	$(-2, 0)$
三阶Runge-Kutta法	$(-2.513, 0)$	四阶Runge-Kutta法	$(-2.785, 0)$
向后的Euler法	$(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$	梯形法	$(-\infty, 0)$

- 若一个方法的绝对稳定区域比较大，则该方法的绝对稳定性较好。

Home Page

Title Page

◀▶

◀▶

Page 16 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit



-

方法	绝对稳定区间	方法	绝对稳定区间
Eulre方法	$(-2, 0)$	二阶Runge-Kutta法	$(-2, 0)$
三阶Runge-Kutta法	$(-2.513, 0)$	四阶Runge-Kutta法	$(-2.785, 0)$
向后的Euler法	$(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$	梯形法	$(-\infty, 0)$

- 若一个方法的绝对稳定区域比较大，则该方法的绝对稳定性较好。
- 隐式方法的绝对稳定性比显式方法好

Home Page

Title Page

◀▶

◀▶

Page 16 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit



-

方法	绝对稳定区间	方法	绝对稳定区间
Eulre方法	$(-2, 0)$	二阶Runge-Kutta法	$(-2, 0)$
三阶Runge-Kutta法	$(-2.513, 0)$	四阶Runge-Kutta法	$(-2.785, 0)$
向后的Euler法	$(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$	梯形法	$(-\infty, 0)$

- 若一个方法的绝对稳定区域比较大，则该方法的绝对稳定性较好。
- 隐式方法的绝对稳定性比显式方法好
- 对Runge-Kutta法，阶越高绝对稳定性越好

Home Page

Title Page

◀▶

◀▶

Page 16 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit



•

方法	绝对稳定区间	方法	绝对稳定区间
Eulre方法	$(-2, 0)$	二阶Runge-Kutta法	$(-2, 0)$
三阶Runge-Kutta法	$(-2.513, 0)$	四阶Runge-Kutta法	$(-2.785, 0)$
向后的Euler法	$(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$	梯形法	$(-\infty, 0)$

- 若一个方法的绝对稳定区域比较大，则该方法的绝对稳定性较好。
- 隐式方法的绝对稳定性比显式方法好
- 对Runge-Kutta法，阶越高绝对稳定性越好
- 绝对稳定区间都位于负实轴部分(向后Euler法除外)

Home Page

Title Page

◀▶

◀▶

Page 16 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit



方法	绝对稳定区间	方法	绝对稳定区间
Eulre方法	$(-2, 0)$	二阶Runge-Kutta法	$(-2, 0)$
三阶Runge-Kutta法	$(-2.513, 0)$	四阶Runge-Kutta法	$(-2.785, 0)$
向后的Euler法	$(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$	梯形法	$(-\infty, 0)$

- 若一个方法的绝对稳定区域比较大，则该方法的绝对稳定性较好。
- 隐式方法的绝对稳定性比显式方法好
- 对Runge-Kutta法，阶越高绝对稳定性越好
- 绝对稳定区间都位于负实轴部分(向后Euler法除外)
- 当 $\mu > 0$ 时，这些方法不是绝对稳定，这时模型问题(29)的解 $u = u_0 e^{\mu(x-x_0)}$ 随着 x 的增加而迅速增大，问题本身是不稳定的，但也不能认为这种问题就无法可解了。由于方法是收敛的，因此数值解也必然随着 x 的增加而快速增大，只要误差增长的速度低于解的增长速度，数值解的相对误差就不会大，因而结果仍旧可以用。

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)

Page 16 of 17

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



作业:

7、证明改进的Euler法的绝对稳定区间是 $(-2,0)$

9、用Taylor展开确定下面多步法中的系数，使其阶尽可能高，并求出局部截断误差的主项

$$(1) u_{m+1} = \alpha_1 u_m + \alpha_2 u_{m-1} + h\beta_0 f_{m+1}$$

11、求公式

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{4} \left[f(x_m, u_m) + 3f\left(x_m + \frac{2}{3}h, u_m + \frac{2}{3}hf(x_m, u_m)\right) \right]$$

的阶和局部截断误差

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 17 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit