《微分几何》课程电子课件

教师：杨勤民

Tel: (021)64253147

Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程QQ群号：1045698545

§2.2 曲面的第一基本形式

一、曲面上的曲线的弧长

二、曲面上两方向的交角

三、正交曲线族和正交轨线

四、曲面域的面积

五、等距对应

六、保角对应

一、曲面上的曲线的弧长

曲面 S: $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$,　S上的曲线Γ: $\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))$,

$$\mathrm{d}s=\left|\vec{r}'(t)\right|\mathrm{d}t=\sqrt{\left(\vec{r}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\vec{r}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+2\vec{r}_u\vec{r}_v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\vec{r}_v^{\,2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{记为}}{=}\sqrt{E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

其中 $E(u,v)=\vec{r}_u^{\,2}(u,v)$,　$F(u,v)=\vec{r}_u(u,v)\cdot\vec{r}_v(u,v)$,

$G(u,v)=\vec{r}_v^{\,2}(u,v)$

设 t_0, t_1 为 Γ 上的两点, 则这两点间的弧长为:

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}s^2 = \left[E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\mathrm{d}t^2$$

$$= E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2$$

(约定微分算子d的优先级高于幂次, 例如 $\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}s)^2, \cdots$)

称 $\mathrm{I} = \mathrm{d}s^2 = E(u,v)\mathrm{d}u^2 + 2F(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G(u,v)\mathrm{d}v^2$

为曲面 S 的第一基本形式. (即弧长微元的平方)

称系数 $E(u,v)$, $F(u,v)$, $G(u,v)$ 为曲面 S 的第一类基本量.

例1 求双曲抛物面$\vec{r}(u,v)=(a(u+v),b(u-v),2uv)$的第一基本形式.

解 $\vec{r}_u(u,v)=(a,b,2v),\quad \vec{r}_v(u,v)=(a,-b,2u).$

$$E(u,v)=\vec{r}_u^{\,2}(u,v)=a^2+b^2+4v^2,$$

$$F(u,v)=\vec{r}_u(u,v)\cdot\vec{r}_v(u,v)=a^2-b^2+4uv,$$

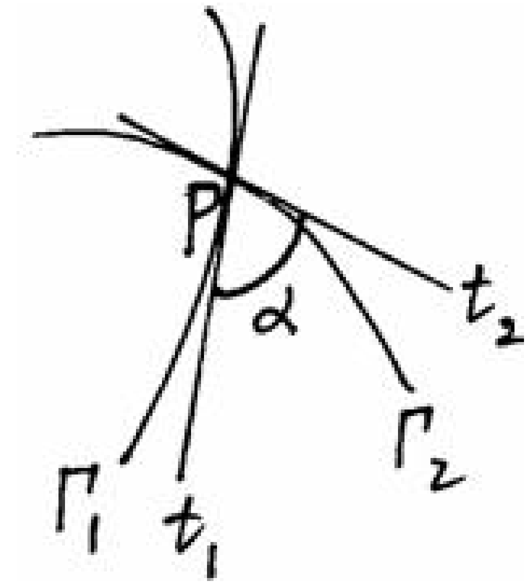
$$G(u,v)=\vec{r}_v^{\,2}(u,v)=a^2+b^2+4u^2.$$

$$\mathrm{I}(u,v)=E(u,v)\mathrm{d}u^2+2F(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G(u,v)\mathrm{d}v^2$$

$$=(a^2+b^2+4v^2)\mathrm{d}u^2+2(a^2-b^2+4uv)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$+(a^2+b^2+4u^2)\mathrm{d}v^2$$

二、曲面上两方向的交角



曲面 S: $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$,

$$\mathrm{d}\vec{r}(u,v)=\vec{r}_u(u,v)\mathrm{d}u+\vec{r}_v(u,v)\mathrm{d}v,$$

设曲面上有两个切方向 $(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$ 和 $(\delta u:\delta v)$,

(注：此处δ也是微分算子，换一个符号是为了区别于d)

$$\mathrm{d}\vec{r}=\vec{r}_u\mathrm{d}u+\vec{r}_v\mathrm{d}v,\quad \delta\vec{r}=\vec{r}_u\,\delta u+\vec{r}_v\,\delta v,$$

设交角为α，则 $\mathrm{d}\vec{r}\cdot\delta\vec{r}=\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cdot\left|\delta\vec{r}\right|\cdot\cos\alpha$,

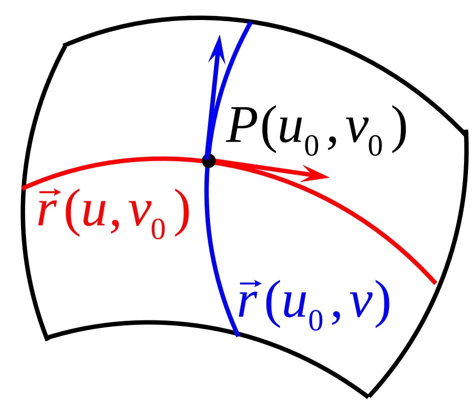
$$\alpha=\arccos\frac{E\mathrm{d}u\delta u+F(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}}$$

$$\alpha = \arccos \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}$$

定理 两个切方向 $(du:dv)$ 和 $(\delta u:\delta v)$ 垂直的充要条件是 $Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v = 0.$

命题 曲纹坐标网为正交网的充要条件是 $F(u,v) \equiv 0.$

任意一条u-曲线和任意一条v-曲线都正交



曲纹坐标网:

u-曲线族切方向 $(du:dv) = (1:0)$

v-曲线族切方向 $(\delta u:\delta v) = (0:1)$

例2 设曲面的第一基本形式为 $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$，

求它上面两条曲线 $u+v=0$ 和 $u-v=0$ 的交角.

解 由 $u+v=0,\ u-v=0$ 联立解得交点 $(u_0, v_0) = (0,0)$.

由 ds^2 的表达式知 $E(u,v)=1,\ F(u,v)=0,\ G(u,v)=u^2+a^2$，

特别是 $E(0,0)=1,\ F(0,0)=0,\ G(0,0)=a^2$.

$u+v=0 \Rightarrow du+dv=0 \Rightarrow (du:dv)=\pm(1:-1)$;

$u-v=0 \Rightarrow \delta u-\delta v=0 \Rightarrow (\delta u:\delta v)=\pm(1:1)$.

$$\arccos\left.\frac{E du\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + G dv\delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}\right|_{(0,0)}$$

$$= \arccos\frac{1-a^2}{1+a^2} \text{ 或 } \pi - \arccos\frac{1-a^2}{1+a^2}.$$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.3 求正螺面$\vec{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, bv)$的第一基本形式, 并证明坐标曲线互相垂直.

2.4 在曲面上一点, 含$\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$的二次方程

$$P\mathrm{d}u^2+2Q\mathrm{d}u\mathrm{d}v+R\mathrm{d}v^2=0$$

确定两个切方向$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$和$(\delta u:\delta v)$. 证明这两个方向互相垂直的充要条件是

$$ER-2FQ+GP=0.$$