§1 偏导数与全微分

一、偏导数

定义1：设$D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为开集，$z = f(x, y)$ 是D 上的二元函数，$(x_0, y_0) \in D$ 为一定点。

若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称f 在(x_0, y_0) 关于x 可求偏导，并称此极限为f 在(x_0, y_0) 关于x 的偏导数。

记$\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, 或$f_x(x_0, y_0)$, 或$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$。

§1 偏导数与全微分

一、偏导数

定义1：设$D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为开集，$z = f(x, y)$ 是D 上的二元函数，$(x_0, y_0) \in D$ 为一定点。

若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称f 在(x_0, y_0) 关于x 可求偏导，并称此极限为f 在(x_0, y_0) 关于x 的偏导数。记$\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, 或$f_x(x_0, y_0)$, 或$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$。

若f 在D 中每一点都关于x 可求偏导，则$f_x(x, y) : D \to \mathbb{R}$ 构成二元函数，称f 关于x 的偏导函数，记$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, 或$f_x(x, y)$, 或$\dfrac{\partial f}{\partial x}$。

§1 偏导数与全微分

一、偏导数

定义1：设$D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为开集，$z = f(x, y)$ 是D 上的二元函数，$(x_0, y_0) \in D$ 为一定点。

若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称f 在(x_0, y_0) 关于x 可求偏导，并称此极限为f 在(x_0, y_0) 关于x 的偏导数。记$\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, 或$f_x(x_0, y_0)$, 或$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$。

若f 在D 中每一点都关于x 可求偏导，则$f_x(x, y) : D \to \mathbb{R}$ 构成二元函数，称f 关于x 的偏导函数，记$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, 或$f_x(x, y)$, 或$\dfrac{\partial f}{\partial x}$。

若f 在(x_0, y_0) 关于x, y 均可偏导，则称f 在(x_0, y_0) 可偏导。

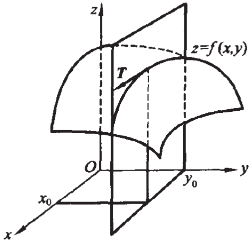
偏导数几何意义：考虑函数$z = f(x, y), (x, y) \in D$，图像为曲面。平面$y = y_0$ 与曲面的交线ℓ 方程ℓ : $\begin{cases} x = x \\ y = y_0 \\ z = f(x, y_0) \end{cases}$

偏导数几何意义：考虑函数$z = f(x,y),(x,y) \in D$，图像为曲面。平面$y = y_0$ 与曲面的交线ℓ 方程ℓ : $\begin{cases} x = x \\ y = y_0 \\ z = f(x,y_0) \end{cases}$

由一元函数导数的几何意义知：$f_x(x_0,y_0)$ 是平面$y = y_0$ 上的曲线ℓ 在点(x_0,y_0) 处的切线关于x 轴的斜率。

偏导数几何意义：考虑函数$z=f(x,y),(x,y)\in D$，图像为曲面。平面$y=y_0$与曲面的交线ℓ方程ℓ : $\begin{cases} x=x \\ y=y_0 \\ z=f(x,y_0) \end{cases}$

由一元函数导数的几何意义知：$f_x(x_0,y_0)$是平面$y=y_0$上的曲线ℓ在点(x_0,y_0)处的切线关于x轴的斜率。



上述思想可推广至n 元函数：

上述思想可推广至n 元函数：

设$\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 为开集$D \subseteq \mathbb{R}^n$ 中一定点。

上述思想可推广至n 元函数：

设$\mathbf{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 为开集$D\subseteq\mathbb{R}^n$ 中一定点。

定义n 元函数$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$ 在点$\mathbf{x}_0$ 处关于x_i 的偏导数为（若极限存在）$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)=$

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1^0,\cdots,x_{i-1}^0,x_i^0+\Delta x_i,x_{i+1}^0,\cdots,x_n^0)-f(x_1^0,\cdots,x_n^0)}{\Delta x_i}.$$

上述思想可推广至n 元函数：

设$\mathbf{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 为开集$D\subseteq\mathbb{R}^n$ 中一定点。

定义n 元函数$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$ 在点$\mathbf{x}_0$ 处关于x_i 的偏导数为（若极限存在）$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)=$

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1^0,\cdots,x_{i-1}^0,x_i^0+\Delta x_i,x_{i+1}^0,\cdots,x_n^0)-f(x_1^0,\cdots,x_n^0)}{\Delta x_i}.$$

如果函数f 在开集（或区域）D 上每一点关于每一个x_i 都可偏导（$i=1,2,\cdots,n$），则称f 在D 上可偏导。

上述思想可推广至n 元函数：

设$\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 为开集$D \subseteq \mathbb{R}^n$ 中一定点。

定义n 元函数$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$ 在点$\mathbf{x}_0$ 处关于x_i 的偏导数为（若极限存在）$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) =$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0, \cdots, x_n^0) - f(x_1^0, \cdots, x_n^0)}{\Delta x_i}.$$

如果函数f 在开集（或区域）D 上每一点关于每一个x_i 都可偏导（$i = 1, 2, \cdots, n$），则称f 在D 上可偏导。

例1：求函数$u = \ln(x + y^2 + z^3)$ 的偏导数。

例1：求函数$u=\ln(x+y^2+z^3)$的偏导数。

例2：求$f(x,y)=\begin{cases} y\ln(x^2+y^2) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在点$(0,0)$的偏导数。

例1：求函数$u=\ln(x+y^2+z^3)$ 的偏导数。

例2：求$f(x,y)=\begin{cases} y\ln(x^2+y^2) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在点$(0,0)$的偏导数。

二、偏导数与连续性的关系

例1：求函数$u=\ln(x+y^2+z^3)$ 的偏导数。

例2：求$f(x,y)=\begin{cases} y\ln(x^2+y^2) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在点$(0,0)$的偏导数。

二、偏导数与连续性的关系

一元函数，可导$\Longrightarrow$ 连续；多元函数，偏导存在$\not\Longrightarrow$ 连续。

例1：求函数$u=\ln(x+y^2+z^3)$的偏导数。

例2：求$f(x,y)=\begin{cases} y\ln(x^2+y^2) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在点$(0,0)$的偏导数。

二、偏导数与连续性的关系

一元函数，可导$\Longrightarrow$连续；多元函数，偏导存在$\not\Longrightarrow$连续。

例3：$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

尽管偏导存在$\not\Longrightarrow$ 连续，但如下命题可保证多元函数连续。

命题2：设$f(x,y)$ 的两偏导$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 和$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在(x_0,y_0) 点的某个领域内存在且有界，则f 在(x_0,y_0) 点连续。

尽管偏导存在$\not\Longrightarrow$连续，但如下命题可保证多元函数连续。

命题2：设$f(x,y)$的两偏导$\dfrac{\partial f}{\partial x}$和$\dfrac{\partial f}{\partial y}$在$(x_0,y_0)$点的某个领域内存在且有界，则$f$在$(x_0,y_0)$点连续。

三、全微分

一元微分：若$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$，则称$f$在$x_0$处可微，$A\Delta x$称为$f(x)$在$x_0$处的微分，记为$\mathrm{d}y$。

$$\mathrm{d}y=A\Delta x\ (\text{记}\Delta x=\mathrm{d}x)=\ A\mathrm{d}x\ (\text{注意}\Delta y\neq\mathrm{d}y)$$

记$z=f(x,y)$全增量$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$。

定义3：设$D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为开集，$(x_0, y_0) \in D$ 为一定点。若对$z = f(x, y), (x, y) \in D$，存在只与点$(x_0, y_0)$ 有关而与$\Delta x, \Delta y$ 无关的常数A, B，s.t.

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

则称函数f 在点(x_0, y_0) 处可微。称线性主要部分$A\Delta x + B\Delta y$ 为f 为点(x_0, y_0) 处的全微分，记为$\mathrm{d}z(x_0, y_0)$ 或$\mathrm{d}f(x_0, y_0)$。

定义3：设$D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为开集，$(x_0, y_0) \in D$ 为一定点。若对$z = f(x, y), (x, y) \in D$，存在只与点$(x_0, y_0)$ 有关而与$\Delta x, \Delta y$ 无关的常数A, B，s.t.

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

则称函数f 在点(x_0, y_0) 处可微。称线性主要部分$A\Delta x + B\Delta y$ 为f 为点(x_0, y_0) 处的全微分，记为$\mathrm{d}z(x_0, y_0)$ 或$\mathrm{d}f(x_0, y_0)$。

记$\Delta x = \mathrm{d}x, \Delta y = \mathrm{d}y$，则$\mathrm{d}z(x_0, y_0) = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y$。

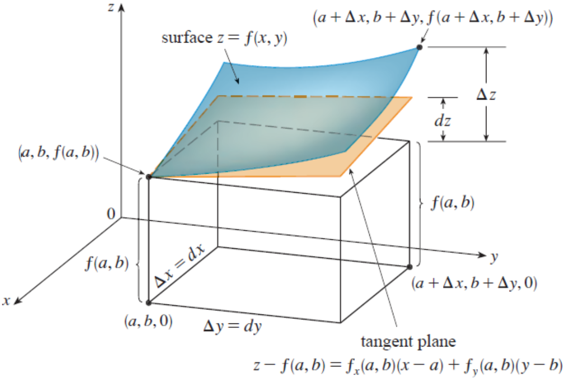
一元微分几何意义（以直代曲）：若$f(x)$在x_0处可微，则在(x_0, y_0)附近，曲线可用它在(x_0, y_0)处的切线近似代替。

一元微分几何意义（以直代曲）：若$f(x)$在x_0处可微，则在(x_0, y_0)附近，曲线可用它在(x_0, y_0)处的切线近似代替。

多元函数全微分几何意义：设$z = f(x, y)$是$\mathbb{R}^3$中曲面。若f在点(x_0, y_0, z_0)处可微，则该点附近曲面可用该点处的切平面近似代替。

一元微分几何意义（以直代曲）：若$f(x)$ 在x_0 处可微，则在(x_0, y_0) 附近，曲线可用它在(x_0, y_0) 处的切线近似代替。

多元函数全微分几何意义：设$z = f(x, y)$ 是$\mathbb{R}^3$ 中曲面。若f 在点(x_0, y_0, z_0) 处可微，则该点附近曲面可用该点处的切平面近似代替。



可微函数的性质

（1）可微$\Longrightarrow$ 偏导存在。

可微函数的性质

（1）可微$\Longrightarrow$ 偏导存在。

若f 在开集（区域）D 上每一点均可微，则称f 在D 上可微，且成立

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$$

可微函数的性质

（1）可微$\Longrightarrow$ 偏导存在。

若f 在开集（区域）D 上每一点均可微，则称f 在D 上可微，且成立

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\mathrm{d}y$$

一元函数中，可微 $\Longleftrightarrow$ 可导；多元函数中，可微$\Longrightarrow$ 可偏导，可偏导$\not\Longrightarrow$ 可微。

可微函数的性质

（1）可微$\Longrightarrow$ 偏导存在。

若f 在开集（区域）D 上每一点均可微，则称f 在D 上可微，且成立

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$$

一元函数中，可微 $\Longleftrightarrow$ 可导；多元函数中，可微$\Longrightarrow$ 可偏导，可偏导$\not\Longrightarrow$ 可微。

$$\text{e.g. } f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

（2）可微$\Longrightarrow$ 连续；连续$\not\Longrightarrow$ 可微。

例4：$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy^3}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

（2）可微$\Longrightarrow$ 连续；连续$\not\Longrightarrow$ 可微。

例4：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

（3）偏导连续$\Longrightarrow$ 可微。

定理4：设$z=f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 点某领域上偏导数均在点(x_0,y_0) 连续，则f 在(x_0,y_0) 可微。

（2）可微$\Longrightarrow$ 连续；连续$\not\Longrightarrow$ 可微。

例4：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

（3）偏导连续$\Longrightarrow$ 可微。

定理4：设$z=f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 点某领域上偏导数均在点(x_0,y_0) 连续，则f 在(x_0,y_0) 可微。

例5：求函数$z=e^{xy}$ 在点$(2,1)$ 处的全微分。

（2）可微$\Longrightarrow$ 连续；连续$\not\Longrightarrow$ 可微。

例4：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

（3）偏导连续$\Longrightarrow$ 可微。

定理4：设$z=f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 点某领域上偏导数均在点(x_0,y_0) 连续，则f 在(x_0,y_0) 可微。

例5：求函数$z=e^{xy}$ 在点$(2,1)$ 处的全微分。

注：同样可定义n 元函数$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全微分，有

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n.$$

作业：P_{151} 1(8)(12)(16), 4, 6(6), 13 – 14。

补充：设$f(x,y)$ 在$G=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ 上有定义，若$f(x,0)$ 在点$x=0$ 处连续，且$f_y(x,y)$ 在G 上有界。证明：$f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处连续。

作业： P_{151} 1(8)(12)(16), 4, 6(6), 13 – 14。

补充：设$f(x,y)$ 在$G=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ 上有定义，若$f(x,0)$ 在点$x=0$ 处连续，且$f_y(x,y)$ 在G 上有界。证明：$f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处连续。

四、高阶偏导数

设$z=f(x,y)$ 在区域$D\subseteq\mathbb{R}^2$ 上具有偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)$ 和$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$，则在$D$ 上$f_x(x,y)$ 和$f_y(x,y)$ 均为x,y 的二元函数。若这两个偏导函数的偏导数仍然存在，则称它们是$f(x,y)$ 的二阶偏导数。

按照对应自变量求导次序的不同，二阶偏导有下列四种：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(f_x(x,y)) = f_{xx}(x,y) \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(f_y(x,y)) = f_{yx}(x,y) \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(f_x(x,y)) = f_{xy}(x,y) \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(f_y(x,y)) = f_{yy}(x,y)
\end{aligned}
$$

按照对应自变量求导次序的不同，二阶偏导有下列四种：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(f_x(x,y)) = f_{xx}(x,y)\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(f_y(x,y)) = f_{yx}(x,y)\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(f_x(x,y)) = f_{xy}(x,y)\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(f_y(x,y)) = f_{yy}(x,y)
\end{aligned}
$$

类似可得三阶、四阶甚至更高阶偏导数。二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数。同样可定义n 元函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的高阶偏导数。

例6：设$z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

例6：设$z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

例7：设$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$，

求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0),\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(0,0)$。

例6：设$z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

例7：设$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$，

求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0),\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(0,0)$。

关于混合偏导数相等的条件有如下定理：

定理5：若$z=f(x,y)$的两个混合偏导数f_{xy}和f_{yx}在点(x_0,y_0)均连续，则$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$。

这一定理建立了多元函数的偏导数可交换次序的依据。

例8：设$z=(x^2+y^2)e^{x+y}$，计算$\dfrac{\partial^{p+q}z}{\partial x^p\partial y^q}(p,q\in\mathbb{Z}^+)$。

例8：设$z=(x^2+y^2)e^{x+y}$，计算$\dfrac{\partial^{p+q}z}{\partial x^p\partial y^q}(p,q\in\mathbb{Z}^+)$。

五、高阶微分

设$z=f(x,y)$ 在区域$D\subseteq\mathbb{R}^n$ 上有连续偏导，则可微，且

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

若z 的二阶偏导数连续，则$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 可微，从而$\mathrm{d}z$ 可微。称$\mathrm{d}z$ 的微分为z 的二阶微分，记为$\mathrm{d}^2z=\mathrm{d}(\mathrm{d}z)$。

例8：设$z=(x^2+y^2)e^{x+y}$，计算$\dfrac{\partial^{p+q}z}{\partial x^p\partial y^q}(p,q\in\mathbb{Z}^+)$。

五、高阶微分

设$z=f(x,y)$ 在区域$D\subseteq\mathbb{R}^n$ 上有连续偏导，则可微，且

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

若z 的二阶偏导数连续，则$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 可微，从而$\mathrm{d}z$ 可微。称$\mathrm{d}z$ 的微分为z 的二阶微分，记为$\mathrm{d}^2z=\mathrm{d}(\mathrm{d}z)$。

一般地，在z 的n 阶微分基础上可定义其$n+1$ 阶微分

$$\mathrm{d}^{n+1}z=\mathrm{d}(\mathrm{d}^nz),n=1,2,\cdots$$

二阶及二阶以上的微分统称为高阶微分。

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z &= \left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)z \\
\mathrm{d}^2z &= \mathrm{d}(\mathrm{d}z)=\mathrm{d}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \\
&= \mathrm{d}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}^2x+\mathrm{d}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathrm{d}y+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}^2y \\
&= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}z &= \left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)z \\
\mathrm{d}^2 z &= \mathrm{d}(\mathrm{d}z)=\mathrm{d}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \\
&= \mathrm{d}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}^2x+\mathrm{d}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathrm{d}y+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}^2y \\
&= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2
\end{aligned}
$$

约定 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2=\frac{\partial^2}{\partial y^2}$，则

$$
\mathrm{d}^2 z=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z.
$$

同理约定$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p=\frac{\partial^p}{\partial x^p}, \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^q=\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p\partial y^q}$,
$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^q=\frac{\partial^q}{\partial y^q}$，则用数学归纳法可知：

$$\mathrm{d}^n z=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^n z}{\partial x^k\partial y^{n-k}}\mathrm{d}x^k\mathrm{d}y^{n-k}.$$

同理约定$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p=\frac{\partial^p}{\partial x^p},\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^q=\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p\partial y^q}$,
$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^q=\frac{\partial^q}{\partial y^q}$，则用数学归纳法可知：

$$\mathrm{d}^n z=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^n z}{\partial x^k\partial y^{n-k}}\mathrm{d}x^k\mathrm{d}y^{n-k}.$$

其中$\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z$是将$\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}$视为通常量按照二项式定理展开得到的对$f$的一形式记号，实际上为一微分算子。

同理约定$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p=\frac{\partial^p}{\partial x^p}$, $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^q=\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p\partial y^q}$, $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^q=\frac{\partial^q}{\partial y^q}$，则用数学归纳法可知：

$$\mathrm{d}^n z=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^n z}{\partial x^k\partial y^{n-k}}\mathrm{d}x^k\mathrm{d}y^{n-k}.$$

其中$\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z$是将$\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}$视为通常量按照二项式定理展开得到的对$f$的一形式记号，实际上为一微分算子。

例9：设$u=xyz$，计算d^3u。

作业：课本P_{153} 16(3)(5)(6), 17(1)(4), 18, 19(2)。

六、向量值函数的导数和微分

设$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为n 元m 维向量值函数，其坐标函数为

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \quad\cdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}, (x_1, \cdots, x_m)^T \in D(T \text{ 表示转置})$$

六、向量值函数的导数和微分

设$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为n 元m 维向量值函数，其坐标函数为

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \quad \cdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}, (x_1, \cdots, x_m)^T \in D(T \text{ 表示转置})$$

定义4：设$\bar{\mathbf{x}}^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0) \in D$，若$f$ 的分量函数$f_i(x_1, \cdots, x_n), (i = 1, \cdots, m)$ 均在$\bar{\mathbf{x}}^0$ 可偏导，称f 在$\bar{\mathbf{x}}^0$ 可导。矩阵

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{\mathbf{x}}^0)\right)_{m\times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}^0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}^0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}^0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}^0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}^0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}^0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}^0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}^0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}^0) \end{pmatrix}$$

称为f 在$\bar{\mathbf{x}}^0$ 点的导数或Jacobi 矩阵，记为$f'(\bar{\mathbf{x}}^0)$（或$Df(\bar{\mathbf{x}}^0)$, $J_f(\bar{\mathbf{x}}^0)$）。

称为f 在$\bar{\mathbf{x}}^0$ 点的导数或Jacobi 矩阵，记为$f'(\bar{\mathbf{x}}^0)$（或$Df(\bar{\mathbf{x}}^0)$, $J_f(\bar{\mathbf{x}}^0)$）。

特别地：$m=1$ 即为多元函数。f 在$\bar{\mathbf{x}}^0$ 处的导数

$$f'(\bar{\mathbf{x}}^0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}^0),\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}^0),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}^0)\right)$$

称为f 在$\bar{\mathbf{x}}^0$ 点的导数或Jacobi 矩阵，记为$f'(\bar{\mathbf{x}}^0)$（或$Df(\bar{\mathbf{x}}^0)$, $J_f(\bar{\mathbf{x}}^0)$）。

特别地：$m=1$ 即为多元函数。f 在$\bar{\mathbf{x}}^0$ 处的导数

$$f'(\bar{\mathbf{x}}^0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}^0),\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}^0),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}^0)\right)$$

如果f 在D 上每一点都可导，就称f 在D 上可导。对应关系$\bar{\mathbf{x}}\in D\mapsto f'(\bar{\mathbf{x}})=D_f(\bar{\mathbf{x}})$ 称为f 在D 上的导数（为一一映射）记为$f'(\mathbf{x})$（或$D_f(\mathbf{x})$, $J_f(\mathbf{x})$）。

称为f 在$\bar{\mathbf{x}}^0$ 点的导数或Jacobi 矩阵，记为$f'(\bar{\mathbf{x}}^0)$（或$Df(\bar{\mathbf{x}}^0)$, $J_f(\bar{\mathbf{x}}^0)$）。

特别地：$m=1$ 即为多元函数。f 在$\bar{\mathbf{x}}^0$ 处的导数

$$f'(\bar{\mathbf{x}}^0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}^0),\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}^0),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}^0)\right)$$

如果f 在D 上每一点都可导，就称f 在D 上可导。对应关系$\bar{\mathbf{x}}\in D\mapsto f'(\bar{\mathbf{x}})=D_f(\bar{\mathbf{x}})$ 称为f 在D 上的导数（为一一映射）记为$f'(\mathbf{x})$（或$D_f(\mathbf{x}), J_f(\mathbf{x})$）。

例10：求向量值函数$f(x,y,z)=\begin{pmatrix} x^3+ze^y \\ y^3+z\ln x \end{pmatrix}$在$(1,1,1)$点的导数。

定义5：设$\bar{\mathbf{x}}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in D$，若存在只与$\bar{\mathbf{x}}^0$ 有关，而与$\Delta\bar{\mathbf{x}}$ 无关的$m\times n$ 矩阵A，s.t. 在$\bar{\mathbf{x}}^0$ 附近成立

$$\Delta\bar{\mathbf{y}}=f(\bar{\mathbf{x}}_0+\Delta\bar{\mathbf{x}})-f(\bar{\mathbf{x}}_0)=A\Delta\bar{\mathbf{x}}+o(\Delta\bar{\mathbf{x}})$$

（其中$\Delta\bar{\mathbf{x}}=(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n)^T,o(\Delta\bar{\mathbf{x}})$ 为列向量，其模是$\|\Delta\bar{\mathbf{x}}\|$ 的高阶无穷小量），则称向量值函数f 在$\bar{\mathbf{x}}^0$ 处可微。

定义5：设$\bar{\mathbf{x}}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in D$，若存在只与$\bar{\mathbf{x}}^0$ 有关，而与$\Delta\bar{\mathbf{x}}$ 无关的$m\times n$ 矩阵A，s.t. 在$\bar{\mathbf{x}}^0$ 附近成立

$$\Delta\bar{\mathbf{y}}=f(\bar{\mathbf{x}}_0+\Delta\bar{\mathbf{x}})-f(\bar{\mathbf{x}}_0)=A\Delta\bar{\mathbf{x}}+o(\Delta\bar{\mathbf{x}})$$

（其中$\Delta\bar{\mathbf{x}}=(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n)^T, o(\Delta\bar{\mathbf{x}})$ 为列向量，其模是$\|\Delta\bar{\mathbf{x}}\|$ 的高阶无穷小量），则称向量值函数f 在$\bar{\mathbf{x}}^0$ 处可微。

称$A\Delta\bar{\mathbf{x}}$ 为f 在$\bar{\mathbf{x}}^0$ 点的微分，记成$\mathrm{d}\bar{\mathbf{y}}$。

$$\mathrm{d}\bar{\mathbf{y}}=A\Delta\bar{\mathbf{x}}\ (\text{记 } \mathrm{d}\bar{\mathbf{x}}=\Delta\bar{\mathbf{x}})=A\mathrm{d}\bar{\mathbf{x}}$$

若向量值函数f 在D 上每一点可微，则称f 在D 上可微。

定理： 向量值函数f 在$\bar{\mathbf{x}}^0$ 可微 $\Longleftrightarrow$ 坐标分量函数$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 在$\bar{\mathbf{x}}^0$ 可微。且成立微分公式

$$\mathrm{d}\bar{\mathbf{y}} = f'(\bar{\mathbf{x}}^0)\mathrm{d}\bar{\mathbf{x}}.$$

定理：向量值函数f 在$\bar{\mathbf{x}}^0$ 可微 $\Longleftrightarrow$ 坐标分量函数$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 在$\bar{\mathbf{x}}^0$ 可微。且成立微分公式

$$\mathrm{d}\bar{\mathbf{y}} = f'(\bar{\mathbf{x}}^0)\mathrm{d}\bar{\mathbf{x}}.$$

引入Jacobi 矩阵后，上述公式与一元函数微分公式$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ 形式完全一致。也即将x, y, f 理解成向量后，即为向量值函数的微分公式。

综上：向量值函数f 连续、可导和可微即为它的每一个坐标分量函数$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 连续、可导和可微。

作业： 课本P_{154} 22。

§2 多元复合函数的求导法则

一、链式法则(Chain rule)

回顾：一元函数$y = f(u)$ 在$u_0 = g(x_0)$ 可导, $u = g(x)$ 在x_0 可导，则$y= f(g(x))$ 在x_0 处可导，且$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$。

§2 多元复合函数的求导法则

一、链式法则(Chain rule)

回顾：一元函数$y=f(u)$在$u_0=g(x_0)$可导, $u=g(x)$在x_0可导，则$y=f(g(x))$在x_0处可导，且$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$。

例 函数$y=\dfrac{3x}{2}$是函数$y=\dfrac{u}{2}$和$u=3x$的复合函数. 这些函数的导数之间有何关系?

§2 多元复合函数的求导法则

一、链式法则(Chain rule)

回顾：一元函数$y = f(u)$ 在$u_0 = g(x_0)$ 可导, $u = g(x)$ 在x_0 可导，则$y= f(g(x))$ 在x_0 处可导，且$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$。

例 函数$y = \frac{3x}{2}$ 是函数$y = \frac{u}{2}$ 和$u = 3x$ 的复合函数. 这些函数的导数之间有何关系?

§2 多元复合函数的求导法则

一、链式法则(Chain rule)

回顾：一元函数$y=f(u)$ 在$u_0=g(x_0)$ 可导, $u=g(x)$ 在x_0 可导，则$y=f(g(x))$ 在x_0 处可导，且$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$。

例 函数$y=\frac{3x}{2}$ 是函数$y=\frac{u}{2}$ 和$u=3x$ 的复合函数. 这些函数的导数之间有何关系?

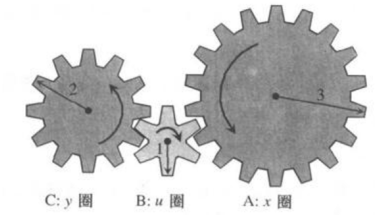
$$y=\frac{u}{2},u=3x$$
$$\Rightarrow y=\frac{3x}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\ \text{(链式法则)}$$

§2 多元复合函数的求导法则

一、链式法则(Chain rule)

回顾：一元函数$y=f(u)$ 在$u_0=g(x_0)$ 可导, $u=g(x)$ 在x_0 可导，则$y=f(g(x))$ 在x_0 处可导，且$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$。

例 函数$y=\dfrac{3x}{2}$ 是函数$y=\dfrac{u}{2}$ 和$u=3x$ 的复合函数. 这些函数的导数之间有何关系?



$$y=\frac{u}{2}, u=3x$$

$$\Rightarrow y=\frac{3x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$ (链式法则)

考虑$z = f(x,y), (x,y) \in D_f$ 与$g : D_g \to \mathbb{R}^2$, $g(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$。若$g(D_g) \subseteq D_f$，则可构造复合函数$f \circ g = f[x(u,v), y(u,v)], (u,v) \in D_g$。其偏导法则如下：

考虑$z=f(x,y),(x,y)\in D_f$ 与$g:D_g\to\mathbb{R}^2$, $g(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$。若$g(D_g)\subseteq D_f$，则可构造复合函数$f\circ g=f[x(u,v),y(u,v)]$, $(u,v)\in D_g$。其偏导法则如下：

定理一（链式规则）：设g 在$(u_0,v_0)\in D_g$ 可导，即$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ 在(u_0,v_0) 可偏导。记$x_0=x(u_0,v_0),y_0=y(u_0,v_0)$，若$f$ 在(x_0,y_0) 可微，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)&=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\\\frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)&=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0).\end{aligned}$$

考虑$z=f(x,y),(x,y)\in D_f$ 与$g:D_g\to\mathbb{R}^2$, $g(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$。若$g(D_g)\subseteq D_f$，则可构造复合函数$f\circ g=f[x(u,v),y(u,v)]$, $(u,v)\in D_g$。其偏导法则如下：

定理一（链式规则）：设g 在$(u_0,v_0)\in D_g$ 可导，即$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ 在(u_0,v_0) 可偏导。记$x_0=x(u_0,v_0),y_0=y(u_0,v_0)$，若$f$ 在(x_0,y_0) 可微，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)&=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\\ \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)&=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0).\end{aligned}$$

注：定理条件中，“f 可微”不可减弱为“f 可偏导”。

例1：$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{x^2+y^4}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 在$(0,0)$ 点可偏导，且$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$，但在$(0,0)$ 点不可微。

例1： $z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在$(0,0)$ 点可偏导，且$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，但在$(0,0)$ 点不可微。

令$x=t^2, y=t$，则$z=t$，故$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0)=1$。若用链式规则，则$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0)=\left[f_x(t^2,t)\cdot 2t+f_y(t^2,t)\right]\Big|_{t=0}=0$，矛盾。

例1：$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{x^2+y^4}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 在$(0,0)$ 点可偏导，且$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$，但在$(0,0)$ 点不可微。

令$x = t^2, y = t$，则$z = t$，故$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = 1$。若用链式规则，则$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = \left[f_x(t^2,t)\cdot 2t + f_y(t^2,t)\right]\Big|_{t=0} = 0$，矛盾。

定理2：设$f : D_f(\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^m$ 与$g : D_g(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^k$ 均为多元向量值函数，且分别在D_f 与D_g 上具有连续导数。若$g(D_g) \subseteq D_f$，且$\vec{\mathbf{u}} = g(\vec{\mathbf{x}})$，则$f \circ g$ 在D_g 上也具有连续导数，且成立等式

$$(f \circ g)'(\vec{\mathbf{x}}) = f'(\vec{\mathbf{u}}) \cdot g'(\vec{\mathbf{x}}) = f'(g(\vec{\mathbf{x}})) \cdot g'(\vec{\mathbf{x}})$$

其中$f'(\vec{\mathbf{u}}), g'(\vec{\mathbf{x}})$ 和$(f \circ g)'(\vec{\mathbf{x}})$ 是相应的导数，即Jacobi 矩阵。

特殊情况：（1）若$z=f(x,y),x=\phi(t),y=\psi(t)$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\phi^{'}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\psi^{'}(t);$$

特殊情况：（1）若$z=f(x,y), x=\phi(t), y=\psi(t)$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\phi'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\psi'(t);$$

（2）若$z=f(x,y,t), x=\phi(s,t), y=\psi(s,t)$，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial s}\\ \frac{\partial z}{\partial t}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\end{aligned}$$

例2：设$z = \arctan(xy), y = e^x$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$。

例2：设$z=\arctan(xy), y=e^x$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$。

例3：设$z=(2x+y)^{x+2y}$，计算$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

例2：设$z = \arctan(xy), y = e^x$，求$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$。

例3：设$z = (2x+y)^{x+2y}$，计算$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$。

例4：设$w = f(x^2+y^2+z^2, xyz), f$ 具有二阶连续偏导，计算$\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}$。

例2：设$z = \arctan(xy), y = e^x$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$。

例3：设$z = (2x+y)^{x+2y}$，计算$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$。

例4：设$w = f(x^2+y^2+z^2, xyz), f$ 具有二阶连续偏导，计算$\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}$。

例5：已知$u = u(x, y)$ 为可微函数，试求$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ 在极坐标下的表达式。

例2：设$z=\arctan(xy), y=e^x$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$。

例3：设$z=(2x+y)^{x+2y}$，计算$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$。

例4：设$w=f(x^2+y^2+z^2, xyz), f$ 具有二阶连续偏导，计算$\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}$。

例5：已知$u=u(x,y)$ 为可微函数，试求$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ 在极坐标下的表达式。

例6：设向量值函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 的坐标分量函数为$x=\cos u \sin v, \ y=\sin u\cos v$。

例2：设$z=\arctan(xy), y=e^x$，求$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$。

例3：设$z=(2x+y)^{x+2y}$，计算$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$。

例4：设$w=f(x^2+y^2+z^2, xyz), f$ 具有二阶连续偏导，计算$\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}$。

例5：已知$u=u(x,y)$ 为可微函数，试求$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ 在极坐标下的表达式。

例6：设向量值函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 的坐标分量函数为$x=\cos u \sin v$, $y=\sin u \cos v$。

作业： 课本P_{163} $1(2)(7-8)(10), 2-3, 7-8, 10-11$。

二、一阶全微分的形式不变性

设$z = f(x, y)$ 为二元函数，则x, y 为自变量时

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

二、一阶全微分的形式不变性

设$z = f(x, y)$ 为二元函数，则x, y 为自变量时

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

若x, y 为中间变量，如$x = x(u, v), y = y(u, v)$，则
$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v, \mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v$。

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z &= \frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v \\
&= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)\mathrm{d}u + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)\mathrm{d}v \\
&= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v\right) \\
&= \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

注：对于多元向量值函数，一阶全微分的形式不变性也成立，但高阶全微分不满足形式不变性。

注：对于多元向量值函数，一阶全微分的形式不变性也成立，但高阶全微分不满足形式不变性。

设$z=f(x,y)$为二元函数，若x,y为自变量，则

$$\mathrm{d}^2 z=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^2=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2.$$

注：对于多元向量值函数，一阶全微分的形式不变性也成立，但高阶全微分不满足形式不变性。

设$z=f(x,y)$为二元函数，若x,y为自变量，则

$$d^2z=\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^2=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

若x,y为中间变量，

$$\begin{aligned}
d^2z &= d(dz)=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)\\
&= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\frac{\partial z}{\partial x}d^2x+d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy+\frac{\partial z}{\partial y}d^2y\\
&= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dy\right)dx+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}dy\right)dy+\frac{\partial z}{\partial x}d^2x+\frac{\partial z}{\partial y}d^2y\\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial z}{\partial x}d^2x+\frac{\partial z}{\partial y}d^2y.
\end{aligned}$$

当x, y 为自变量时，$\mathrm{d}^2x=\mathrm{d}^2y=0$；但$x, y$ 为中间变量时，d^2x 与d^2y 一般不为0。e.g. $z=x+y, x=s^2+t, y=s-t^2$,

当x, y 为自变量时，$\mathrm{d}^2x = \mathrm{d}^2y = 0$；但$x, y$ 为中间变量时，d^2x 与d^2y 一般不为0。e.g. $z = x + y, x = s^2 + t, y = s - t^2$,

$\mathrm{d}(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}(2s\mathrm{d}s + \mathrm{d}t) = d(2s\mathrm{d}s) + \mathrm{d}^2t = 2\mathrm{d}s^2$。

当x, y 为自变量时，$\mathrm{d}^2 x = \mathrm{d}^2 y = 0$；但$x, y$ 为中间变量时，$\mathrm{d}^2 x$ 与$\mathrm{d}^2 y$ 一般不为0。e.g. $z = x + y, x = s^2 + t, y = s - t^2$,

$\mathrm{d}(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}(2s\mathrm{d}s + \mathrm{d}t) = d(2s\mathrm{d}s) + \mathrm{d}^2 t = 2\mathrm{d}s^2$。

例7：设$z = \sqrt[4]{\dfrac{x+y}{x-y}}$，求全微分$\mathrm{d}z$。

当x, y 为自变量时，$\mathrm{d}^2x = \mathrm{d}^2y = 0$；但$x, y$ 为中间变量时，d^2x 与d^2y 一般不为0。e.g. $z = x + y, x = s^2 + t, y = s - t^2$,

$\mathrm{d}(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}(2s\mathrm{d}s + \mathrm{d}t) = d(2s\mathrm{d}s) + \mathrm{d}^2t = 2\mathrm{d}s^2$。

例7：设$z = \sqrt[4]{\dfrac{x+y}{x-y}}$，求全微分$\mathrm{d}z$。

例8：设$z = \ln(x+y)$，求$\mathrm{d}^k z$。

作业： 课本P_{164} 13, 15(3), 16。

§3 中值定理和Taylor 公式

一元函数Taylor 公式是一元微分学的顶峰，中值定理则是它的特例。关于多元函数，也有中值定理和Taylor 公式，它们在函数的研究和近似计算中起着重要的作用。

§3 中值定理和Taylor 公式

一元函数Taylor 公式是一元微分学的顶峰，中值定理则是它的特例。关于多元函数，也有中值定理和Taylor 公式，它们在函数的研究和近似计算中起着重要的作用。

一、中值定理

定义1：设$D \subseteq \mathbb{R}^n$ 是区域，若联结D 中任意两点的线段都完全属于D，即对$\forall x_1, x_2 \in D, \forall \lambda \in [0, 1]$，恒有$x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \in D$，则称$D$ 为凸区域。

§3 中值定理和Taylor 公式

一元函数Taylor 公式是一元微分学的顶峰，中值定理则是它的特例。关于多元函数，也有中值定理和Taylor 公式，它们在函数的研究和近似计算中起着重要的作用。

一、中值定理

定义1：设$D \subseteq \mathbb{R}^n$ 是区域，若联结D 中任意两点的线段都完全属于D，即对$\forall x_1, x_2 \in D, \forall \lambda \in [0,1]$，恒有$x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \in D$，则称$D$ 为凸区域。

e.g. $\mathbb{R}^2$ 上的开圆盘$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}$ 即为凸区域。

二、Taylor 公式

一元函数Taylor 公式：由多项式逼近函数。

多元函数Taylor 公式：（利用函数的各阶偏导数的值）用多项式逼近函数。

二、Taylor 公式

一元函数Taylor 公式：由多项式逼近函数。

多元函数Taylor 公式：（利用函数的各阶偏导数的值）用多项式逼近函数。

定理2（中值定理）：设$f(x,y)$ 在凸区域$D\subseteq\mathbb{R}^2$ 上可微，则对D 内任意两点(x_0,y_0) 和$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，$\exists 0<\theta<1$, s.t.

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0) &= f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x \\ &+ f_y(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y. \end{aligned}$$

二、Taylor 公式

一元函数Taylor 公式：由多项式逼近函数。

多元函数Taylor 公式：（利用函数的各阶偏导数的值）用多项式逼近函数。

定理2（中值定理）：设$f(x,y)$ 在凸区域$D\subseteq\mathbb{R}^2$ 上可微，则对D 内任意两点(x_0,y_0) 和$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，$\exists 0<\theta<1$, s.t.

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0) &= f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x \\ &+ f_y(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y. \end{aligned}$$

推论3：若$f(x,y)$ 在区域$D\subseteq\mathbb{R}^2$ 上的偏导数恒为0，则它在D 上必是常值函数。

定理4（Taylor 公式）：设$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 的领域$O((x_0,y_0),r)$ 上具有$k+1$ 阶连续偏导数，则对该领域内每一点$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，均成立

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) +$$

$$\frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0) + R_k$$

定理4（Taylor 公式）：设$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 的领域$O((x_0, y_0), r)$ 上具有$k+1$ 阶连续偏导数，则对该领域内每一点$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，均成立

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0) + R_k$$

$$\text{其中} R_k = \frac{1}{(k+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$$

称为Lagrange 余项，其中$0<\theta<1$。

定理4（Taylor 公式）：设$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 的领域$O((x_0,y_0),r)$ 上具有$k+1$ 阶连续偏导数，则对该领域内每一点$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，均成立

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) +$$

$$\frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0) + R_k$$

$$\text{其中}R_k = \frac{1}{(k+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$$

称为Lagrange 余项，其中$0<\theta<1$。

注：$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(x_0,y_0) = \sum_{i=0}^{p} \frac{\partial^p f}{\partial x^{p-i}\partial y^i}(x_0,y_0)(\Delta x)^{p-i}$ $(\Delta y)^i$，其中$p\geq 1$。

特别地，当$k=0$ 时即得在$O((x_0,y_0),r)$ 上的中值定理。

特别地，当$k=0$ 时即得在$O((x_0,y_0),r)$ 上的中值定理。

推论5：设$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 的某领域上具有$k+1$ 阶连续偏导数，则在(x_0,y_0) 附近成立

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)+o((\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})^k)$$

特别地，当$k=0$ 时即得在$O((x_0,y_0),r)$ 上的中值定理。

推论5：设$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 的某领域上具有$k+1$ 阶连续偏导数，则在(x_0,y_0) 附近成立

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)+o((\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})^k)$$

例1：近似计算$(1.08)^{3.96}$。

作业： 课本P_{170} 1, 3, 4, 8。

§4 隐函数

一、概念

设$F(x, y)$ 定义在区域$D \subseteq \mathbb{R}^2$ 上。若存在函数$y = f(x)$ s.t. $F(x, f(x)) = 0$，则称$y = f(x)$ 是$F(x, y) = 0$ 确定的一个隐函数。

例如$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ 都是$x^2 + y^2 - 1 = 0$ 确定的隐函数。

§4 隐函数

一、概念

设$F(x,y)$ 定义在区域$D\subseteq\mathbb{R}^2$ 上。若存在函数$y=f(x)$ s.t. $F(x,f(x))=0$，则称$y=f(x)$ 是$F(x,y)=0$ 确定的一个隐函数。

例如$y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 都是$x^2+y^2-1=0$ 确定的隐函数。

很自然有如下问题：

（1）方程$F(x,y)=0$ 何时有隐函数存在？

（2）什么条件下，$F(x,y)=0$ 有唯一的隐函数？

（3）什么条件下，$F(x,y)=0$ 确定的隐函数具有连续、可微等分析性质？

二、单个方程情形

定理1（一元隐函数存在定理）：若$F(x,y)$ 满足条件

(1) $F(x_0,y_0)=0$；

(2) 在闭矩形$D=\left\{(x,y)\middle|\,|x-x_0|\le a,|y-y_0|\le b\right\}$上，$F(x,y)$ 连续且具有连续偏导数；

(3) $F_y(x_0,y_0)\neq 0$；

则(i) 在点(x_0,y_0) 附近可由$F(x,y)=0$ 唯一确定隐函数$y=f(x), x\in O(x_0,\rho)$，它满足$F(x,f(x))=0$ 以及$y_0=f(x_0)$；

(ii) $y=f(x)$ 在$O(x_0,\rho)$ 上连续；

(iii) $y=f(x)$ 在$O(x_0,\rho)$ 上导数连续，且$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$。

注1：定理结论是局部的，即在(x_0, y_0) 的某领域内由$F(x, y) = 0$ 唯一确定一个可微的满足$y_0 = f(x_0)$ 的隐函数$y = f(x)$，但定理并没告诉我们该领域多大。

注1：定理结论是局部的，即在(x_0, y_0) 的某领域内由$F(x, y) = 0$ 唯一确定一个可微的满足$y_0 = f(x_0)$ 的隐函数$y = f(x)$，但定理并没告诉我们该领域多大。

注2：若$F(x, y) = 0$ 决定$y = f(x)$，且$f(x)$ 可导，$F(x, y)$ 可微，则

$$\frac{\mathrm{d}F(x, f(x))}{\mathrm{d}x} = F_x + F_y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

注1：定理结论是局部的，即在(x_0,y_0) 的某领域内由$F(x, y)=0$ 唯一确定一个可微的满足$y_0=f(x_0)$ 的隐函数$y=f(x)$，但定理并没告诉我们该领域多大。

注2：若$F(x,y)=0$ 决定$y=f(x)$，且$f(x)$ 可导，$F(x,y)$ 可微，则

$$\frac{\mathrm{d}F(x,f(x))}{\mathrm{d}x}=F_x+F_y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

注3：从(i)(ii) 证明过程可看出，条件(3) $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ 只是保证存在x_0 的某领域，s.t. 在此领域内对任意固定$\bar{x}$, $F(\bar{x},y)$ 关于y 严格增加。

故若只要求(i)(ii) 成立，条件(3) 可改成“对$|x-x_0|\leq a$ 中任意固定x, $F(x,y)$ 关于y 严格单调”。

注4：上述定理只保证一定条件下，$F(x, y) = 0$ 在局部（未必是整体）确定函数关系$y = f(x)$，但并非意味着该关系能用显式表达出来。如Kepler 方程$y - x - \epsilon \sin y = 0 (0 < \epsilon < 1)$。

注4：上述定理只保证一定条件下，$F(x,y)=0$ 在局部（未必是整体）确定函数关系$y=f(x)$，但并非意味着该关系能用显式表达出来。如Kepler 方程$y-x-\epsilon\sin y=0(0<\epsilon<1)$。

注5：方程$F(x,y)=(x-y)^2=0$ 在$(0,0)$ 处有$F_y(0,0)=0$，在$x=0$ 附近存在唯一解$y=x$ 且连续可微。说明$F_y(x_0,y_0)\neq 0$ 是隐函数存在的充分而非必要条件。

注4：上述定理只保证一定条件下，$F(x, y) = 0$ 在局部（未必是整体）确定函数关系$y = f(x)$，但并非意味着该关系能用显式表达出来。如Kepler 方程$y - x - \epsilon \sin y = 0 (0 < \epsilon < 1)$。

注5：方程$F(x, y) = (x - y)^2 = 0$ 在$(0, 0)$ 处有$F_y(0, 0) = 0$，在$x = 0$ 附近存在唯一解$y = x$ 且连续可微。说明$F_y(x_0, y_0) \neq 0$ 是隐函数存在的充分而非必要条件。

注6：上述定理可推广到多元函数，证明方法类似(P_{174})。

注4：上述定理只保证一定条件下，$F(x,y)=0$ 在局部（未必是整体）确定函数关系$y=f(x)$，但并非意味着该关系能用显式表达出来。如Kepler 方程$y-x-\epsilon\sin y=0(0<\epsilon<1)$。

注5：方程$F(x,y)=(x-y)^2=0$ 在$(0,0)$ 处有$F_y(0,0)=0$，在$x=0$ 附近存在唯一解$y=x$ 且连续可微。说明$F_y(x_0,y_0)\neq 0$ 是隐函数存在的充分而非必要条件。

注6：上述定理可推广到多元函数，证明方法类似(P_{174})。

例1：设方程$x^2+y^2+z^2=4z$ 确定z 为x,y 的函数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

作业： 课本P_{186} 1(4)(5)(9)(10), 2, 3。

三、多个方程情形

已知线性方程组
$$\begin{cases} a_1u+b_1v+c_1x+d_1y=0=F(u,v,x,y) \\ a_2u+b_2v+c_2x+d_2y=0=G(u,v,x,y) \end{cases},$$
若$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$，可解出$\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$，此时$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0$，该条件在多元向量值隐函数定理中十分重要。

三、多个方程情形

已知线性方程组
$$\begin{cases} a_1u + b_1v + c_1x + d_1y = 0 = F(u,v,x,y) \\ a_2u + b_2v + c_2x + d_2y = 0 = G(u,v,x,y) \end{cases},$$
若 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$，可解出 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$，此时 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0$，该条件在多元向量值隐函数定理中十分重要。

定理2（多元向量值隐函数存在定理）：设函数$F(x,y,u,v)$和$G(x,y,u,v)$ 满足条件：

（1）$F(x_0,y_0,u_0,v_0) = 0; G(x_0,y_0,u_0,v_0) = 0$；

（2）在闭长方体$G = \{(x,y,u,v) \| x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |u - u_0| \leq c, |v - v_0| \leq d\}$ 上F, G 连续且具有连续偏导数；

（3）在(x_0,y_0,u_0,v_0) 点，行列式$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0$。

则（i）在点(x_0, y_0, u_0, v_0) 附近可由$\begin{cases} F(u, v, x, y) = 0 \\ G(u, v, x, y) = 0 \end{cases}$ 唯一确定向量值隐函数$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$ $(x, y) \in O((x_0, y_0), \rho)$，满足$\begin{cases} F(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0 \\ G(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0 \end{cases}$ 及$u_0 = f(x_0, y_0), v_0 = g(x_0, y_0)$；

则（i）在点(x_0,y_0,u_0,v_0)附近可由$\begin{cases} F(u,v,x,y)=0 \\ G(u,v,x,y)=0 \end{cases}$唯一确定向量值隐函数$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$ $(x,y)\in O((x_0,y_0),\rho)$，满足$\begin{cases} F(x,y,f(x,y),g(x,y))=0 \\ G(x,y,f(x,y),g(x,y))=0 \end{cases}$及$u_0=f(x_0,y_0)$, $v_0=g(x_0,y_0)$；

（ii）该向量值隐函数在$O((x_0,y_0),\rho)$上具有连续导函数，且$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}$。

注1：求已知函数组所确定的隐函数组的导数时，一般不用求导公式，因为这些公式不便记忆和使用。通常是对已知函数组（如$\left\{\begin{array}{l} F(u,v,x,y)=0 \\ G(u,v,x,y)=0 \end{array}\right.$）求导数，然后解所得方程组。

注1：求已知函数组所确定的隐函数组的导数时，一般不用求导公式，因为这些公式不便记忆和使用。通常是对已知函数组（如$\begin{cases} F(u,v,x,y)=0 \\ G(u,v,x,y)=0 \end{cases}$）求导数，然后解所得方程组。

注2：上述结果可推广到多个函数，证明方法类似(P_{181})。

注1：求已知函数组所确定的隐函数组的导数时，一般不用求导公式，因为这些公式不便记忆和使用。通常是对已知函数组（如$\begin{cases} F(u,v,x,y)=0 \\ G(u,v,x,y)=0 \end{cases}$）求导数，然后解所得方程组。

注2：上述结果可推广到多个函数，证明方法类似(P_{181})。

注3：上述定理可导出“逆映射定理”，即一元函数反函数定理在高维中的推广(P_{185})。

注1：求已知函数组所确定的隐函数组的导数时，一般不用求导公式，因为这些公式不便记忆和使用。通常是对已知函数组（如$\begin{cases} F(u,v,x,y)=0 \\ G(u,v,x,y)=0 \end{cases}$）求导数，然后解所得方程组。

注2：上述结果可推广到多个函数，证明方法类似(P_{181})。

注3：上述定理可导出“逆映射定理”，即一元函数反函数定理在高维中的推广(P_{185})。

例2：设函数方程组$\begin{cases} u+v+w+x+y=a \\ u^2+v^2+w^2+x^2+y^2=b^2 \\ u^3+v^3+w^3+x^3+y^3=c^3 \end{cases}$，确定$u,v,w$ 为x,y 的隐函数。求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial w}{\partial x}$。

例3：设$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$是由$\begin{cases} z = xf(x+y) \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases}$所确定的向量值隐函数，其中$f$和$F$分别具有连续的导数和偏导数，求$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$。

例3：设 $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ 是由 $\begin{cases} z = xf(x+y) \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 所确定的向量值隐函数，其中f 和F 分别具有连续的导数和偏导数，求$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$。

四、变量代换问题

在偏微分方程的求解过程中，经常需要对自变量或函数作变量代换，以求简化方程形式乃至求出方程的解。变量代换计算的关键是隐函数组或反函数组的求导。

例3：设$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$是由$\begin{cases} z = xf(x+y) \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases}$所确定的向量值隐函数，其中$f$和$F$分别具有连续的导数和偏导数，求$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$。

四、变量代换问题

在偏微分方程的求解过程中，经常需要对自变量或函数作变量代换，以求简化方程形式乃至求出方程的解。变量代换计算的关键是隐函数组或反函数组的求导。

1 仅变换自变量

例4：在方程$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u$中作极坐标代换$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$，试求方程在变换后的形式。

2 自变量与函数同时变换

例5：设函数$z=z(x,y)$具有二阶连续偏导数，并满足方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$。

2 自变量与函数同时变换

例5：设函数$z=z(x,y)$具有二阶连续偏导数，并满足方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$。

作业： 课本P_{187} $5(3)(5),6,8,10,12(2)$。

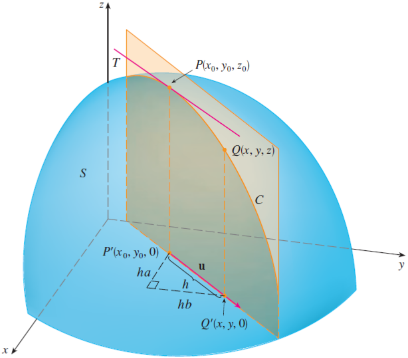
补充1：若由$F(x,y,z,u)=0,G(x,y,z,u)=0,H(x,y,z,u)=0$可解出$x=x(u),y=y(u),z=z(u)$，根据隐函数组存在定理应如何对函数$F,G,H$假设条件？

附加题：设$x=x(u,v),y=y(u,v)$将开区域$D\subseteq\mathbb{R}^2$变为开区域$G\subseteq\mathbb{R}^2$，且有连续偏导数。若对任意$(u,v)\in D,J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$，问是否存在由$G$到$D$的反函数组$u=u(x,y),v=v(x,y)$？

§5 偏导数在几何中的应用

一、方向导数与梯度

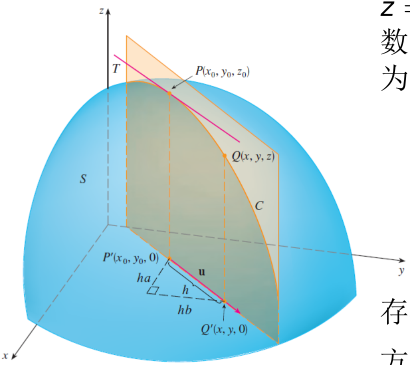
1 方向导数



§5 偏导数在几何中的应用

一、方向导数与梯度

1 方向导数



定义1： 设$D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为开集，$z = f(x, y)$ 是定义在D 上的二元函数，$(x_0, y_0) \in D$ 为一定点，$v = (a, b)$ 为一单位向量(方向)。若

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(P_0 + hv) - f(P_0)}{t}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

存在，称此极限为f 在点(x_0, y_0) 处的方向导数，记$\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$。

注1：x 轴与y 轴正向分别为$e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$，f 在点(x_0, y_0) 关于x （或y）可偏导 $\Longleftrightarrow$ $f(x,y)$ 沿方向e_1 和$-e_1$（或方向e_2 和$-e_2$）的方向导数存在且互为相反数。

注1：x 轴与y 轴正向分别为$e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$，f 在点(x_0, y_0) 关于x （或y）可偏导 $\Longleftrightarrow$ $f(x,y)$ 沿方向e_1 和$-e_1$（或方向e_2 和$-e_2$）的方向导数存在且互为相反数。

注2：同理可定义n 元函数的方向导数（见P_{139}）。

注1：x 轴与y 轴正向分别为$e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$，f 在点(x_0, y_0) 关于x （或y）可偏导 $\Longleftrightarrow$ $f(x,y)$ 沿方向e_1 和$-e_1$（或方向e_2 和$-e_2$）的方向导数存在且互为相反数。

注2：同理可定义n 元函数的方向导数（见P_{139}）。

例1：求二元函数$f(x,y) = |x^2 - y^2|^{\frac{1}{2}}$ 在原点的方向导数。

注1：x 轴与y 轴正向分别为$e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$，f 在点(x_0,y_0) 关于x（或y）可偏导 $\Longleftrightarrow$ $f(x,y)$ 沿方向e_1 和$-e_1$（或方向e_2 和$-e_2$）的方向导数存在且互为相反数。

注2：同理可定义n 元函数的方向导数（见P_{139}）。

例1：求二元函数$f(x,y)=|x^2-y^2|^{\frac{1}{2}}$ 在原点的方向导数。

定理2：设$D\subseteq\mathbb{R}^2$ 为开集，$(x_0,y_0)\in D$ 为一定点。若函数$z=f(x,y),(x,y)\in D$ 在(x_0,y_0) 可微，则对任一方向$v=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, f 在(x_0,y_0) 点沿方向v 的方向导数存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\sin\alpha.$$

例2：$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x^2, -\infty<x<\infty \\ 0, & \text{其余点}\end{cases}$ 在原点处不可微，但在原点处沿任意方向，方向导数存在。

例2：$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x^2, -\infty<x<\infty \\ 0, & \text{其余点}\end{cases}$ 在原点处不可微，但在原点处沿任意方向，方向导数存在。

注：上例说明，函数在一点可微是方向导数存在的充分非必要条件。

例2：$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x^2, -\infty<x<\infty \\ 0, & \text{其余点}\end{cases}$ 在原点处不可微，但在原点处沿任意方向，方向导数存在。

注：上例说明，函数在一点可微是方向导数存在的充分非必要条件。

2 梯度

定义3：设$D\subseteq\mathbb{R}^2$ 为开集，$(x_0,y_0)\in D$ 为一定点。若函数$z=f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 可偏导，则称向量$(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))$ 为f 在点(x_0,y_0) 的梯度，记为$grad\ f(x_0,y_0)$，即

$$grad\ f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)i+f_y(x_0,y_0)j.$$

例2：$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x^2, -\infty<x<\infty \\ 0, & \text{其余点}\end{cases}$ 在原点处不可微，但在原点处沿任意方向，方向导数存在。

注：上例说明，函数在一点可微是方向导数存在的充分非必要条件。

2 梯度

定义3：设$D\subseteq\mathbb{R}^2$ 为开集，$(x_0,y_0)\in D$ 为一定点。若函数$z=f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 可偏导，则称向量$(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))$ 为f 在点(x_0,y_0) 的梯度，记为$grad\ f(x_0,y_0)$，即

$$grad\ f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)i+f_y(x_0,y_0)j.$$

引入梯度意义：(1) 梯度方向是函数增长最快的方向；(2) 梯度的模就是函数沿这一方向的变化率。

注1：同理可定义一般n元函数的梯度。

注1：同理可定义一般n 元函数的梯度。

注2：梯度的基本运算性质与求导类似，见$P_{143}(1-4)$。

作业： 课本P_{152} 9, 11, 12。

补充题：设$f(x,y)$ 在$P_0(x_0,y_0)$ 可微，$\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_n$ 为n 个单位向量，相邻的两向量夹角为$\frac{2\pi}{n}$。证明：$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \ell_i}(x_0,y_0)=0$。

注1：同理可定义一般n 元函数的梯度。

注2：梯度的基本运算性质与求导类似，见$P_{143}(1-4)$。

作业： 课本P_{152} $9, 11, 12$。

补充题：设$f(x,y)$ 在$P_0(x_0,y_0)$ 可微，$\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_n$ 为n 个单位向量，相邻的两向量夹角为$\frac{2\pi}{n}$。证明：$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \ell_i}(x_0,y_0)=0$。

二、空间曲线的切线和法平面

一条空间曲线可看成一个质点在空间运动的轨迹。取定一直角坐标系，设质点在时刻t 位于点$P(x(t),y(t),z(t))$ 处，也即它在任一时刻的坐标可用$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ $a\le t\le b$ 表示。

随着t 的连续变动，相应点(x, y, z) 的轨迹即为空间中的一条曲线。这种表达式称为空间曲线的参数方程，可写成向量形式$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k, a \le t \le b$。

定义4：若$r'(t) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k$ 在$[a, b]$ 上连续，且$r'(t) \neq 0, t \in [a, b]$，则称$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k, a \le t \le b$ 所确定的空间曲线为光滑曲线。

随着t 的连续变动，相应点(x, y, z) 的轨迹即为空间中的一条曲线。这种表达式称为空间曲线的参数方程，可写成向量形式$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$,$a \leq t \leq b$。

定义4：若$r'(t) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k$ 在$[a, b]$ 上连续，且$r'(t) \neq 0, t \in [a, b]$，则称$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k, a \leq t \leq b$ 所确定的空间曲线为光滑曲线。

注1：若$r'(t) \neq 0$，则$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0$。不妨设$x'(t) \neq 0$，则由逆映射定理，在$t$ 的某领域内有反函数$t = t(x)$，此时$y = y(t(x)), z = z(t(x))$ 是显式。

随着t 的连续变动，相应点(x, y, z) 的轨迹即为空间中的一条曲线。这种表达式称为空间曲线的参数方程，可写成向量形式$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$,$a \le t \le b$。

定义4：若$r'(t) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k$ 在$[a, b]$ 上连续，且$r'(t) \ne 0, t \in [a, b]$，则称$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k, a \le t \le b$ 所确定的空间曲线为光滑曲线。

注1：若$r'(t) \ne 0$，则$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \ne 0$。不妨设$x'(t) \ne 0$，则由逆映射定理，在$t$ 的某领域内有反函数$t = t(x)$，此时$y = y(t(x)), z = z(t(x))$ 是显式。

注2：$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^3 \end{cases}$ 确定的曲线$y = x$ 为光滑曲线，但$t = 0$ 处不满足上述定义。

事实上，定义4是光滑曲线的充分条件。光滑曲线的充要条件为：若曲线C为光滑曲线，则存在$[a,b]$上连续可微函数$x(t)$, $y(t)$, 使得$\forall t\in[a,b], x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$且$C$是映射$t\mapsto(x(t),y(t))$的像。e.g. 对光滑曲线$y=x$，可令$x=t, y=t$。

事实上，定义4是光滑曲线的充分条件。光滑曲线的充要条件为：若曲线C 为光滑曲线，则存在$[a,b]$ 上连续可微函数$x(t)$, $y(t)$, 使得$\forall t\in[a,b], x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$ 且C 是映射$t\mapsto(x(t),y(t))$ 的像。e.g. 对光滑曲线$y=x$，可令$x=t, y=t$。

对于光滑曲线，可讨论切线，且切线位置随切点在曲线上位置变动而连续变动。

对光滑曲线$\Gamma:\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}, a\leq t\leq b$，讨论$\Gamma$ 上点$P_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ 处的切线。

记$x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0)$，取$\Gamma$ 上一点$P(x(t), y(t), z(t))$，则

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (x_0, y_0, z_0) + t\overrightarrow{P_0P_1} \\ &= (x_0, y_0, z_0) + t(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0), z(t) - z(t_0))\end{aligned}$$

故过P_0 和P_1 的割线方程为

$$\frac{x - x_0}{x(t) - x(t_0)} = \frac{y - y_0}{y(t) - y(t_0)} = \frac{z - z_0}{z(t) - z(t_0)}$$

记$x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0)$，取$\Gamma$ 上一点$P(x(t), y(t), z(t))$，则

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (x_0, y_0, z_0) + t\overrightarrow{P_0P_1} \\ &= (x_0, y_0, z_0) + t(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0), z(t) - z(t_0))\end{aligned}$$

故过P_0 和P_1 的割线方程为

$$\frac{x - x_0}{x(t) - x(t_0)} = \frac{y - y_0}{y(t) - y(t_0)} = \frac{z - z_0}{z(t) - z(t_0)}$$

上式两边同乘以$t - t_0$，并令$t \to t_0$ 可得Γ 在P_0 的切线方程：

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

定义5：向量$r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 称为曲线Γ 在P_0 点切线的一个方向向量，它也称为Γ 在P_0 点的切向量。过P_0 点且与切线垂直的平面称为曲线Γ 在P_0 点的法平面。

定义5：向量$r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 称为曲线Γ 在P_0 点切线的一个方向向量，它也称为Γ 在P_0 点的切向量。过P_0 点且与切线垂直的平面称为曲线Γ 在P_0 点的法平面。

显然，法平面的一个法向量就是Γ 在P_0 点的切向量，故Γ 在P_0 点的法平面方程为

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

定义5：向量$r'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$称为曲线$\Gamma$在$P_0$点切线的一个方向向量，它也称为$\Gamma$在$P_0$点的切向量。过$P_0$点且与切线垂直的平面称为曲线$\Gamma$在$P_0$点的法平面。

显然，法平面的一个法向量就是Γ在P_0点的切向量，故Γ在P_0点的法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

特殊情况一：$\Gamma:\begin{cases} x=x \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$ 在P_0点的切线和法平面方程分别为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)},$$

$$x-x_0+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0.$$

特殊情况二：方程$F(x,y,z)=0$ 在一定条件下代表一张曲面。空间曲线表示成空间两张曲面的交。

$\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，$P_0=(x_0,y_0,z_0)$ 为Γ 上一点，Jacobi

矩阵$J=\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$在$P_0$ 点满秩，即$\text{rank}J=2$。

特殊情况二：方程$F(x,y,z)=0$ 在一定条件下代表一张曲面。空间曲线表示成空间两张曲面的交。

$\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，$P_0=(x_0,y_0,z_0)$ 为Γ 上一点，Jacobi 矩阵$J=\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$在$P_0$ 点满秩，即rank$J=2$。

由空间解析几何知道，由一点及两线性无关（即非平行）的向量确定一张过该点的平面（称为这两个向量张成的平面）。平面上任一向量都可以表示为这两个向量的线性组合。

特殊情况二：方程$F(x,y,z)=0$ 在一定条件下代表一张曲面。空间曲线表示成空间两张曲面的交。

$\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，$P_0=(x_0,y_0,z_0)$ 为Γ 上一点，Jacobi 矩阵$J=\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$在$P_0$ 点满秩，即$\mathrm{rank}J=2$。

由空间解析几何知道，由一点及两线性无关（即非平行）的向量确定一张过该点的平面（称为这两个向量张成的平面）。平面上任一向量都可以表示为这两个向量的线性组合。

定理：曲线$\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 在P_0 点的法平面就是梯度向量$\mathrm{grad}\ F(P_0)$ 和$\mathrm{grad}\ G(P_0)$ 张成的过P_0 点的平面。

该法平面的法向量

$$\begin{aligned}\vec{n} &= (grad\ F(P_0)\times grad\ G(P_0))\big|_{P_0}\\ &= \begin{vmatrix} i & j & k\\ F_x & F_y & F_z\\ G_x & G_y & G_z\end{vmatrix}_{P_0} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0)i+\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(P_0)j+\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P_0)k\end{aligned}$$

该法平面的法向量

$$\begin{aligned}\vec{n} &= (grad\ F(P_0)\times grad\ G(P_0))\big|_{P_0} \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_{P_0} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0)i+\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(P_0)j+\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P_0)k\end{aligned}$$

故过P_0 点的法平面方程为

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(P_0)(y-y_0)+\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P_0)(z-z_0)=0.$$

该法平面的法向量

$$
\begin{aligned}
\vec{n} &= (grad\ F(P_0) \times grad\ G(P_0))\big|_{P_0} \\
&= \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{array} \right|_{P_0} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0)i + \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(P_0)j + \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P_0)k
\end{aligned}
$$

故过P_0 点的法平面方程为

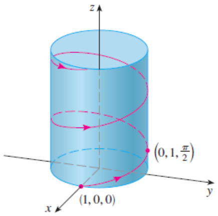
$$
\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0)(x-x_0) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(P_0)(y-y_0) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P_0)(z-z_0) = 0.
$$

过P_0 点的切线方程

$$
\frac{x-x_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0)} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(P_0)} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P_0)}.
$$

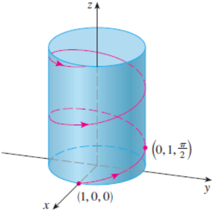
例3：一质点一方面按逆时针方向以等角速度w 绕z 轴旋转，另一方面又沿z 轴正向以匀速c 上升，已知时刻$t=0$ 时质点在点$P_0(1,0,0)$ 处，求

(1) 该质点的运动轨迹Γ；
(2) 该质点在时刻t 的速度；
(3) $w=1$ 时，曲线Γ 在$t=\dfrac{\pi}{2}$ 时对应的切线与法平面方程。



例3：一质点一方面按逆时针方向以等角速度w 绕z 轴旋转，另一方面又沿z 轴正向以匀速c 上升，已知时刻$t=0$ 时质点在点$P_0(1,0,0)$ 处，求

(1) 该质点的运动轨迹Γ；
(2) 该质点在时刻t 的速度；
(3) $w=1$ 时，曲线Γ 在$t=\dfrac{\pi}{2}$ 时对应的切线与法平面方程。



例4：求曲线$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2y=4 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点$(1,1,-2)$ 处的切线和法平面方程。

三、曲面的切平面与法线

曲面S 方程一般表示为$F(x,y,z)=0,(x,y,z)\in D$。设F 在D 上具有连续偏导数，且Jacobi 矩阵(F_x,F_y,F_z) 在曲面上恒为满秩，即$F_x^2+F_y^2+F_z^2\neq 0$。

三、曲面的切平面与法线

曲面S方程一般表示为$F(x,y,z)=0,(x,y,z)\in D$。设F在D上具有连续偏导数，且Jacobi矩阵(F_x,F_y,F_z)在曲面上恒为满秩，即$F_x^2+F_y^2+F_z^2\neq 0$。

设$P_0(x_0,y_0,z_0)$为S上一点。考察曲面S上过点P_0的任意一条光滑曲线$\Gamma:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$。

三、曲面的切平面与法线

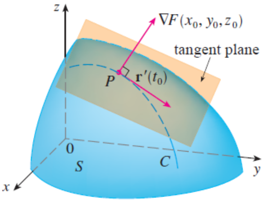
曲面S 方程一般表示为$F(x,y,z)=0,(x,y,z)\in D$。设F 在D 上具有连续偏导数，且Jacobi 矩阵(F_x,F_y,F_z) 在曲面上恒为满秩，即$F_x^2+F_y^2+F_z^2\neq 0$。

设$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为S 上一点。考察曲面S 上过点P_0 的任意一条光滑曲线$\Gamma:\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$。

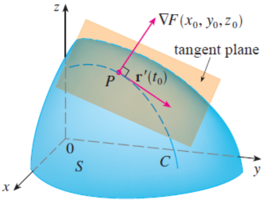
记$x_0=x(t_0),y_0=y(t_0),z_0=z(t_0)$，由于$\Gamma$ 在S 上，故$F(x(t),y(t),z(t))=0$。对t 在$t=t_0$ 求导，可得

$$F_x(P_0)x'(t_0)+F_y(P_0)y'(t_0)+F_z(P_0)z'(t_0)=0.$$

故曲面S 上过P_0 点的任意一条光滑曲线Γ 在P_0 点的切线(切向量为$(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$) 都与向量$n = (F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0))$ 垂直，故这些切线都在一平面Π 上。



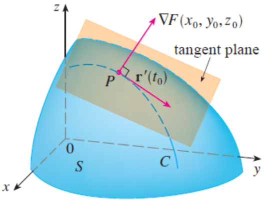
故曲面S 上过P_0 点的任意一条光滑曲线Γ 在P_0 点的切线(切向量为$(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$) 都与向量$n = (F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0))$ 垂直，故这些切线都在一平面Π 上。



平面Π 称为曲面S 为点P_0 的切平面，方程为

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

故曲面S 上过P_0 点的任意一条光滑曲线Γ 在P_0 点的切线(切向量为$(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$) 都与向量$n = (F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0))$ 垂直，故这些切线都在一平面Π 上。



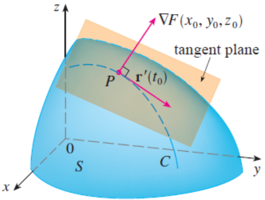
平面Π 称为曲面S 为点P_0 的切平面，方程为

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

过P_0 且与切平面垂直的直线称为S 在P_0 点的法线，方程为

$$\frac{x - x_0}{F_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(P_0)}$$

故曲面S上过P_0点的任意一条光滑曲线Γ在P_0点的切线(切向量为$(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$)都与向量$n=(F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0))$垂直，故这些切线都在一平面$\Pi$上。



平面Π称为曲面S为点P_0的切平面，方程为

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0.$$

过P_0且与切平面垂直的直线称为S在P_0点的法线，方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(P_0)}$$

定义6：如果一曲面具有连续变动的切平面，即切平面位置随切点在曲面上位置变动而连续变动，则称该曲面为光滑曲面。

若曲面S由方程$F(x,y,z)=0,(x,y,z)\in D$确定，则当F_x，F_y,F_z均在D上连续，且有$F_x^2+F_y^2+F_z^2\neq 0$，S是光滑曲面。

若曲面S 由方程$F(x,y,z)=0,(x,y,z)\in D$ 确定，则当F_x, F_y,F_z 均在D 上连续，且有$F_x^2+F_y^2+F_z^2\neq 0$，S 是光滑曲面。

特殊情况一：$S: z=f(x,y)$，则S 在$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 点$(z_0=f(x_0,y_0))$ 的切平面方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+(z-z_0)=0.$$

若曲面S 由方程$F(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in D$ 确定，则当F_x, F_y, F_z 均在D 上连续，且有$F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \neq 0$，$S$ 是光滑曲面。

特殊情况一：$S : z = f(x, y)$，则S 在$P_0(x_0, y_0, z_0)$ 点$(z_0 = f(x_0, y_0))$ 的切平面方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0.$$

若$z = f(x, y)$ 在点(x_0, y_0) 可微，则

$$f(x, y) = f(x_0, y_0)+f_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f_y(x_0, y_0)(y-y_0)+o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

13.5.偏导数在几何中的应用

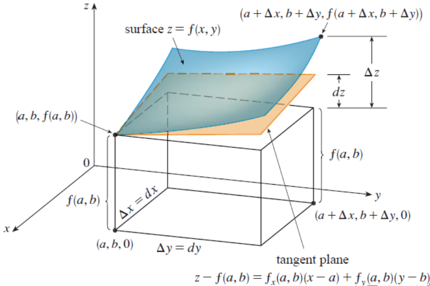
若曲面S 由方程$F(x,y,z)=0,(x,y,z)\in D$ 确定，则当F_x，F_y,F_z 均在D 上连续，且有$F_x^2+F_y^2+F_z^2\neq 0$，S 是光滑曲面。

特殊情况一：$S:z=f(x,y)$，则S 在$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 点$(z_0=f(x_0,y_0))$ 的切平面方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+(z-z_0)=0.$$

若$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 可微，则

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$



特殊情况二：$S: z = f(x, y)$：设$x = x(u, v), y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ 是区域$D \subseteq \mathbb{R}^2$ 中的三个连续函数，则映射$\Gamma : D \to \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 的像的集合通常称作曲面。

$$S: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D$$ 称为曲面的参数方程。

特殊情况二：$S: z = f(x, y)$：设$x = x(u, v), y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ 是区域$D \subseteq \mathbb{R}^2$ 中的三个连续函数，则映射$\Gamma: D \to \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 的像的集合通常称作曲面。

$$S: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D$$ 称为曲面的参数方程。

也可表示成$r(u, v) = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k$, $(x, y) \in D$。

假设Jacobi 矩阵$J = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$在$D$ 上恒为满秩。

假设Jacobi 矩阵$J = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$ 在D 上恒为满秩。

由 $\begin{cases} r_u(u_0, v_0) = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{r(u_0 + \Delta u, v_0) - r(u_0, v_0)}{\Delta u} \\ r_v(u_0, v_0) = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{r(u_0, v_0 + \Delta u) - r(u_0, v_0)}{\Delta u} \end{cases}$ 知

$r_u(u_0, v_0)$ 是参数曲线$r = r(u, v_0)$ 在点(u_0, v_0) 处的切线向量。
$r_v(u_0, v_0)$ 是参数曲线$r = r(u_0, v)$ 在点(u_0, v_0) 处的切线向量。

假设Jacobi 矩阵$J = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$在$D$ 上恒为满秩。

由$\begin{cases} r_u(u_0, v_0) = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{r(u_0 + \Delta u, v_0) - r(u_0, v_0)}{\Delta u} \\ r_v(u_0, v_0) = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{r(u_0, v_0 + \Delta u) - r(u_0, v_0)}{\Delta u} \end{cases}$ 知

$r_u(u_0, v_0)$ 是参数曲线$r = r(u, v_0)$ 在点(u_0, v_0) 处的切线向量。
$r_v(u_0, v_0)$ 是参数曲线$r = r(u_0, v)$ 在点(u_0, v_0) 处的切线向量。

由J 在D 上恒为满秩，知r_u 与r_v 不共线（即$r_u \times r_v \neq 0$），故

$$
\begin{aligned}
\vec{n} &= \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0) \\
&= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) \Bigg|_{(u_0, v_0)}
\end{aligned}
$$

故S 在P_0 点的切平面方程为

$$\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(y-y_0)+\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(z-z_0)=0.$$

故S 在P_0 点的切平面方程为

$$\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(y-y_0)+\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(z-z_0)=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}.$$

故S 在P_0 点的切平面方程为

$$\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(y-y_0)+\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(z-z_0)=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}.$$

例5：求曲面$e^z-z+xy=3$ 在点$(2,1,0)$ 处的切平面与法线方程。

例6：求曲面$\begin{cases} x = a\ ch\ u \cos v \\ y = b\ ch\ u \sin v \\ z = sh\ u \end{cases}$ 在$(u, v) = (0, \dfrac{\pi}{4})$ 所对应的点处的切平面方程。

例6：求曲面$\begin{cases} x = a\ ch\ u \cos v \\ y = b\ ch\ u \sin v \\ z = sh\ u \end{cases}$ 在$(u, v) = (0, \dfrac{\pi}{4})$ 所对应的点处的切平面方程。

定义7：两条曲线在交点处的夹角，是指这两条曲线在交点处的切向量之间的夹角；两张曲面在交线上一点的夹角，是指这两张曲面在该点的法向量之间的夹角。

例6：求曲面$\begin{cases} x = a\ ch\ u\cos v \\ y = b\ ch\ u\sin v \\ z = sh\ u \end{cases}$ 在$(u, v) = (0, \frac{\pi}{4})$ 所对应的点处的切平面方程。

定义7：两条曲线在交点处的夹角，是指这两条曲线在交点处的切向量之间的夹角；两张曲面在交线上一点的夹角，是指这两张曲面在该点的法向量之间的夹角。

例7：证明对任意常数ρ, ϕ，球面$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ 与锥面$x^2 + y^2 = \tan^2\phi \cdot z^2$ 是正交的。

作业：课本P_{201} $4(2)(3), 7, 9, 12, 14$。

§6 无条件极值

一、极值的必要条件

定义1：设$D \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开区域，$f(x)$ 为定义在D 上的函数，$\vec{\mathbf{x}}_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in D$。若存在$\vec{\mathbf{x}}_0$ 的领域$O(\vec{\mathbf{x}}_0, r)$，s.t.

$$\text{对 } \forall \vec{\mathbf{x}} \in O(\vec{\mathbf{x}}_0, r), f(\vec{\mathbf{x}}_0) \geq f(\vec{\mathbf{x}}) \text{ 或 } f(\vec{\mathbf{x}}_0) \leq f(\vec{\mathbf{x}})$$

则称$\vec{\mathbf{x}}_0$ 为f 的极大值点（或极小值点），极大值点与极小值点统称极值点。相应地，称$f(\vec{\mathbf{x}}_0)$ 为相应的极大值（或极小值），极大值与极小值统称极值。

§6 无条件极值

一、极值的必要条件

定义1：设$D \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开区域，$f(x)$ 为定义在D 上的函数，$\vec{\mathbf{x}}_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in D$。若存在$\vec{\mathbf{x}}_0$ 的领域$O(\vec{\mathbf{x}}_0, r)$，s.t.

$$\text{对 } \forall \vec{\mathbf{x}} \in O(\vec{\mathbf{x}}_0, r), f(\vec{\mathbf{x}}_0) \geq f(\vec{\mathbf{x}}) \text{ 或 } f(\vec{\mathbf{x}}_0) \leq f(\vec{\mathbf{x}})$$

则称$\vec{\mathbf{x}}_0$ 为f 的极大值点（或极小值点），极大值点与极小值点统称极值点。相应地，称$f(\vec{\mathbf{x}}_0)$ 为相应的极大值（或极小值），极大值与极小值统称极值。

与一元函数类似，极值是函数的局部性质。以下是一元函数的Fermat 定理在多元函数的推广。

定理2（必要条件）：设$\vec{\mathbf{x}}_0$ 为函数f 的极值点，且f 在$\vec{\mathbf{x}}_0$ 点可偏导，则

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{\mathbf{x}}_0)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{\mathbf{x}}_0)=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{\mathbf{x}}_0)=0.$$

定理2（必要条件）：设$\vec{\mathbf{x}}_0$为函数f的极值点，且f在$\vec{\mathbf{x}}_0$点可偏导，则

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{\mathbf{x}}_0)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{\mathbf{x}}_0)=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{\mathbf{x}}_0)=0.$$

定义3：使函数f的各个一阶偏导为0的点称为f的驻点。

定理2（必要条件）：设$\vec{\mathbf{x}}_0$ 为函数f 的极值点，且f 在$\vec{\mathbf{x}}_0$ 点可偏导，则

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{\mathbf{x}}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{\mathbf{x}}_0) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{\mathbf{x}}_0) = 0.$$

定义3：使函数f 的各个一阶偏导为0的点称为f 的驻点。

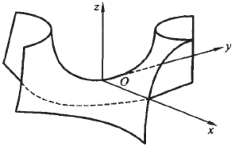
注1：驻点$\not\Longrightarrow$ 极值点。

定理2（必要条件）：设$\vec{\mathbf{x}}_0$ 为函数f 的极值点，且f 在$\vec{\mathbf{x}}_0$ 点可偏导，则

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{\mathbf{x}}_0)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{\mathbf{x}}_0)=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{\mathbf{x}}_0)=0.$$

定义3：使函数f 的各个一阶偏导为0的点称为f 的驻点。

注1：驻点$\not\Longrightarrow$ 极值点。例: 马鞍面$f(x,y)=xy$。

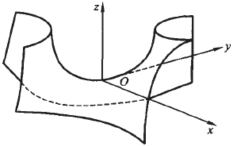


定理2（必要条件）：设$\vec{\mathbf{x}}_0$为函数f的极值点，且f在$\vec{\mathbf{x}}_0$点可偏导，则

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{\mathbf{x}}_0)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{\mathbf{x}}_0)=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{\mathbf{x}}_0)=0.$$

定义3：使函数f的各个一阶偏导为0的点称为f的驻点。

注1：驻点$\not\Longrightarrow$极值点。例: 马鞍面$f(x,y)=xy$。



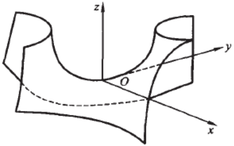
注2：极值点$\not\Longrightarrow$驻点。

定理2（必要条件）：设$\vec{\mathbf{x}}_0$ 为函数f 的极值点，且f 在$\vec{\mathbf{x}}_0$点可偏导，则

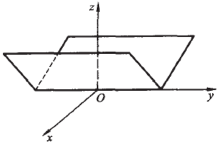
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{\mathbf{x}}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{\mathbf{x}}_0) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{\mathbf{x}}_0) = 0.$$

定义3：使函数f 的各个一阶偏导为0的点称为f 的驻点。

注1：驻点$\not\Longrightarrow$ 极值点。例: 马鞍面$f(x, y) = xy$。



注2：极值点$\not\Longrightarrow$ 驻点。偏导不存在的点也可能为极值点。例: 柱面方程$f(x, y) = |x|$。



二、极值的充分条件

定理4：设(x_0, y_0)为f的驻点，f在(x_0, y_0)附近具有二阶连续偏导。记$A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$，并记$H = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$，则

(1) 若$H > 0$：则$A > 0$时，$f(x_0, y_0)$为极小值；$A < 0$时，$f(x_0, y_0)$为极大值；$A = 0$不可能发生；

(2) 若$H < 0$：$f(x_0, y_0)$不是极值；

(3) 若$H = 0$：$f(x_0, y_0)$可能是极值，也可能不是极值。

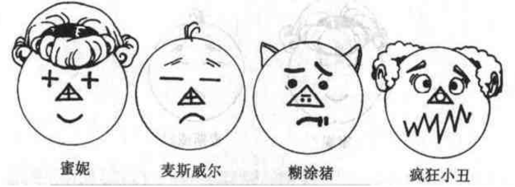
二、极值的充分条件

定理4：设(x_0, y_0)为f的驻点，f在(x_0, y_0)附近具有二阶连续偏导。记$A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$，并记$H = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$，则

(1) 若$H > 0$：则$A > 0$时，$f(x_0, y_0)$为极小值；$A < 0$时，$f(x_0, y_0)$为极大值；$A = 0$不可能发生；

(2) 若$H < 0$：$f(x_0, y_0)$不是极值；

(3) 若$H = 0$：$f(x_0, y_0)$可能是极值，也可能不是极值。



例1：求函数$f(x,y)=xy(a-x-y)(a\neq 0)$ 的极值。

例1：求函数$f(x,y)=xy(a-x-y)(a\neq 0)$ 的极值。

例2：讨论$f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4-y^5$ 的极值。

例1：求函数$f(x,y)=xy(a-x-y)(a\neq 0)$ 的极值。

例2：讨论$f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4-y^5$ 的极值。

例3：求$z=\frac{x^2}{2}+xy+\frac{y^2}{2}-2x-2y+5$ 的全部极值点与极值。

例1：求函数$f(x,y)=xy(a-x-y)(a\neq 0)$ 的极值。

例2：讨论$f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4-y^5$ 的极值。

例3：求$z=\dfrac{x^2}{2}+xy+\dfrac{y^2}{2}-2x-2y+5$ 的全部极值点与极值。

注：对二元函数，即使不是常值函数，驻点仍可能无穷多个，且可构成曲线。

对多元函数，有推广结果：

记$a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{\mathbf{x}}_0)$，记$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$

对多元函数，有推广结果：

记$a_{ij}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\vec{x}_0)$，记$A_k=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$

推论： 若$\det A_k>0(k=1,2,\cdots,n)$，则$A_n$ 正定，$f(\vec{x}_0)$ 为极小值；若$(-1)^k\det A_k>0(k=1,2,\cdots,n)$，则$A_n$ 负定，$f(\vec{x}_0)$ 为极大值。

作业： 课本P_{216} $1(2)(3)(6),3$。

三、函数的最值

最值问题是求函数在定义域内某个区域上的最大(小)值。最值点可能在内部、也可能在边界上。故求函数最值，需求出在区域内部的所有极值及在区域边界上的最值，再进行比较。

三、函数的最值

最值问题是求函数在定义域内某个区域上的最大(小)值。最值点可能在内部、也可能在边界上。故求函数最值，需求出在区域内部的所有极值及在区域边界上的最值，再进行比较。

例4：在以$O(0,0), A(1,0)$ 和$B(0,1)$ 为顶点所围成的三角形闭区域上找点，使得它们到三个顶点的距离平方和分别为最大和最小，并求出最大值和最小值。

三、函数的最值

最值问题是求函数在定义域内某个区域上的最大(小)值。最值点可能在内部、也可能在边界上。故求函数最值，需求出在区域内部的所有极值及在区域边界上的最值，再进行比较。

例4：在以$O(0,0), A(1,0)$ 和$B(0,1)$ 为顶点所围成的三角形闭区域上找点，使得它们到三个顶点的距离平方和分别为最大和最小，并求出最大值和最小值。

注：$(1/3, 1/3)$ 是该三角形的重心。可证明：三角形的重心到它三顶点的距离平方和最小。

三、函数的最值

最值问题是求函数在定义域内某个区域上的最大(小)值。最值点可能在内部、也可能在边界上。故求函数最值，需求出在区域内部的所有极值及在区域边界上的最值，再进行比较。

例4：在以$O(0,0), A(1,0)$ 和$B(0,1)$ 为顶点所围成的三角形闭区域上找点，使得它们到三个顶点的距离平方和分别为最大和最小，并求出最大值和最小值。

注：$(1/3,1/3)$ 是该三角形的重心。可证明：三角形的重心到它三顶点的距离平方和最小。

例5：求$f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$ 在全平面上的最值。

三、函数的最值

最值问题是求函数在定义域内某个区域上的最大(小)值。最值点可能在内部、也可能在边界上。故求函数最值，需求出在区域内部的所有极值及在区域边界上的最值，再进行比较。

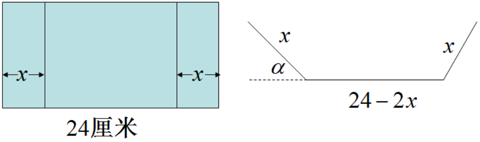
例4：在以$O(0,0), A(1,0)$ 和$B(0,1)$ 为顶点所围成的三角形闭区域上找点，使得它们到三个顶点的距离平方和分别为最大和最小，并求出最大值和最小值。

注：$(1/3,1/3)$ 是该三角形的重心。可证明：三角形的重心到它三顶点的距离平方和最小。

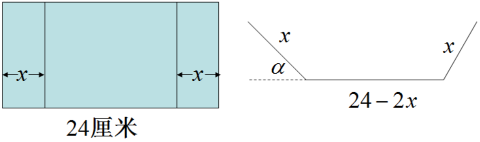
例5：求$f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$ 在全平面上的最值。

注：若f 定义在无界区域上，可去掉明显取不到最值的某个无界子域，使之成为有界区域上的最值问题。

例6：有一宽为24cm 的长方形铁板，把它两边折起来，做成一个横截面为等腰梯形的水槽。问采用怎样的折法，才能使梯形的截面积最大。



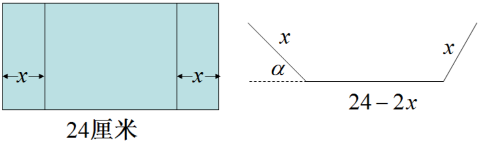
例6：有一宽为24cm 的长方形铁板，把它两边折起来，做成一个横截面为等腰梯形的水槽。问采用怎样的折法，才能使梯形的截面积最大。



四、最小二乘法

问题提出：已知一组大致满足线性关系的实验数据(x_1, y_1), $(x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$。上述$n$ 个点未必落在同一直线上。如何根据这组观测到的数据，推断直线$y = ax + b$，s.t. 接近真实值。

例6：有一宽为24cm 的长方形铁板，把它两边折起来，做成一个横截面为等腰梯形的水槽。问采用怎样的折法，才能使梯形的截面积最大。



四、最小二乘法

问题提出：已知一组大致满足线性关系的实验数据(x_1, y_1), $(x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$。上述$n$ 个点未必落在同一直线上。如何根据这组观测到的数据，推断直线$y = ax + b$，s.t. 接近真实值。

想法一：取各个偏差代数和$\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)$ 作为总偏差。但由于这些偏差有负有正，取代数和可能互相抵消。这样，虽然偏差的代数和很小，却不足以保证每个偏差很小。

想法二：取各偏差平方和，使$Q=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2$ 最小。将$y=ax+b$ 视为变量y 与x 之间的近似函数关系，称为这组数据在最小二乘意义下的拟合曲线（实践中称经验公式）。利用二元函数求极值方法，可求出

想法二：取各偏差平方和，使$Q=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2$ 最小。将$y=ax+b$ 视为变量y 与x 之间的近似函数关系，称为这组数据在最小二乘意义下的拟合曲线（实践中称经验公式）。利用二元函数求极值方法，可求出

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2},b=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

想法二：取各偏差平方和，使$Q=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2$ 最小。将$y=ax+b$ 视为变量y 与x 之间的近似函数关系，称为这组数据在最小二乘意义下的拟合曲线（实践中称经验公式）。利用二元函数求极值方法，可求出

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2},\quad b=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

最小二乘法应用广泛，物理学、化学、生物学、医学、经济学、商业统计等用它确定经验公式。数理统计中的回归分析方法需用到该工具。许多计算机软件也用该方法作拟合曲线。

作业： 课本P_{216} 4, 11, 13。

§7 条件极值与Lagrange 乘数法

一、问题引入

例1：求双曲柱面$x^2 - y^2 = 1$ 上到原点距离最近的点。

§7 条件极值与Lagrange 乘数法

一、问题引入

例1：求双曲柱面$x^2 - y^2 = 1$ 上到原点距离最近的点。

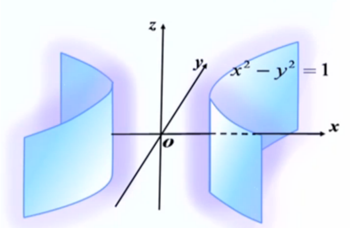
问题：求目标函数$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件$g(x, y, z) = x^2 - y^2 - 1 = 0$ 下的最小值。

§7 条件极值与Lagrange 乘数法

一、问题引入

例1：求双曲柱面$x^2 - y^2 = 1$ 上到原点距离最近的点。

问题：求目标函数$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件$g(x, y, z) = x^2 - y^2 - 1 = 0$ 下的最小值。

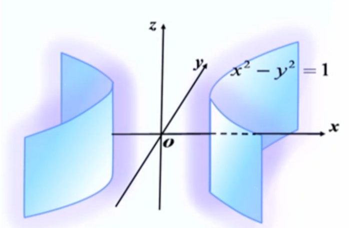


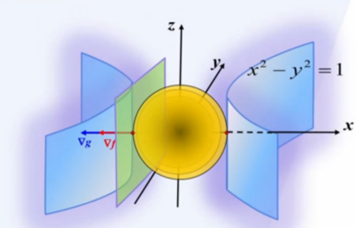
§7 条件极值与Lagrange 乘数法

一、问题引入

例1：求双曲柱面$x^2 - y^2 = 1$ 上到原点距离最近的点。

问题：求目标函数$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件$g(x, y, z) = x^2 - y^2 - 1 = 0$ 下的最小值。



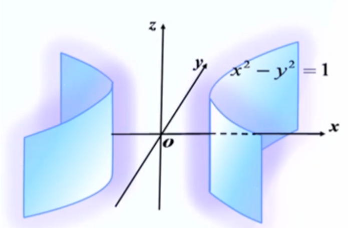


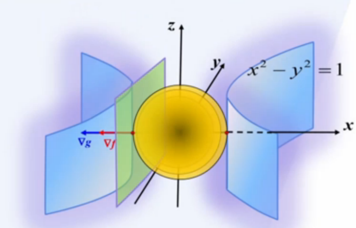
§7 条件极值与Lagrange 乘数法

一、问题引入

例1：求双曲柱面$x^2 - y^2 = 1$ 上到原点距离最近的点。

问题：求目标函数$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件$g(x, y, z) = x^2 - y^2 - 1 = 0$ 下的最小值。

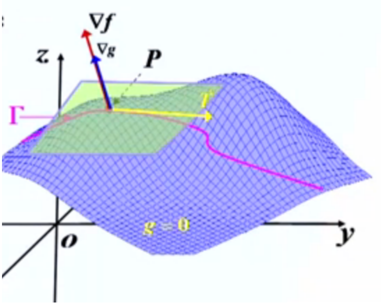




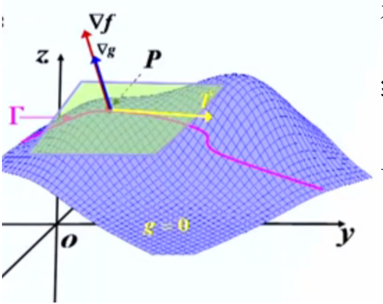
关键：$\nabla f \parallel \nabla g \Rightarrow P = (\pm 1, 0, 0)$

一般情况： 目标函数$f(x, y, z)$ 在约束条件$g(x, y, z) = 0$ 下的极值点P 是否有$\nabla f \parallel \nabla g$?

一般情况： 目标函数$f(x,y,z)$ 在约束条件$g(x,y,z)=0$ 下的极值点P 是否有$\nabla f \parallel \nabla g$?



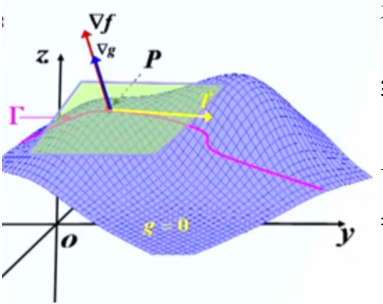
一般情况： 目标函数$f(x,y,z)$ 在约束条件$g(x,y,z)=0$ 下的极值点P 是否有$\nabla f \parallel \nabla g$?



在曲面$g(x,y,z)=0$ 上任取过P 曲线$\Gamma:\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=w(t) \end{cases}$，则点$P$ 也为f 在Γ 上的极值点。

13.7.条件极值与Lagrange 乘数法

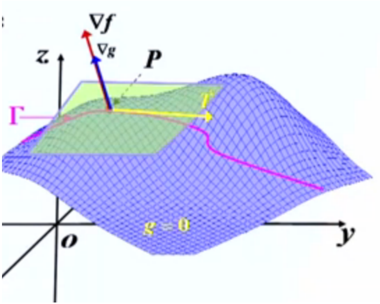
一般情况： 目标函数$f(x,y,z)$ 在约束条件$g(x,y,z)=0$ 下的极值点P 是否有$\nabla f \parallel \nabla g$?



在曲面$g(x,y,z)=0$ 上任取过P 曲线$\Gamma:\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=w(t) \end{cases}$，则点$P$ 也为f 在Γ上的极值点。

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=f_x\cdot\phi'(t)+f_y\cdot\psi'(t)+f_z\cdot w'(t)=0$$

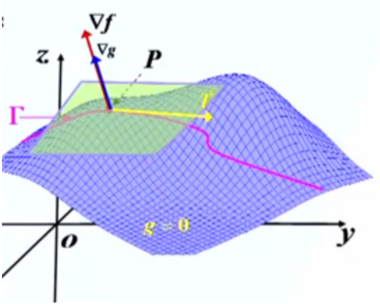
一般情况： 目标函数$f(x,y,z)$ 在约束条件$g(x,y,z)=0$ 下的极值点P 是否有$\nabla f \parallel \nabla g$?



在曲面$g(x,y,z)=0$ 上任取过P 曲线$\Gamma: \begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=w(t) \end{cases}$，则点$P$ 也为f 在Γ 上的极值点。

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = f_x\cdot\phi'(t)+f_y\cdot\psi'(t)+f_z\cdot w'(t)=0$$
$$\Rightarrow (f_x,f_y,f_z)\cdot(\phi'(t),\psi'(t),w'(t))=0$$

一般情况： 目标函数$f(x,y,z)$ 在约束条件$g(x,y,z)=0$ 下的极值点P 是否有$\nabla f \parallel \nabla g$?



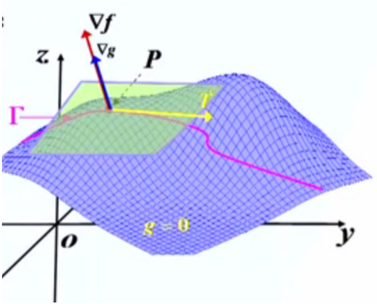
在曲面$g(x,y,z)=0$ 上任取过P 曲线$\Gamma:\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=w(t) \end{cases}$，则点$P$ 也为f 在Γ 上的极值点。

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=f_x\cdot\phi'(t)+f_y\cdot\psi'(t)+f_z\cdot w'(t)=0$$

$$\Rightarrow (f_x,f_y,f_z)\cdot(\phi'(t),\psi'(t),w'(t))=0$$

记$\vec{T}=(\phi'(t),\psi'(t),w'(t))$，则$\nabla f\perp\vec{T}$

一般情况： 目标函数$f(x,y,z)$ 在约束条件$g(x,y,z)=0$ 下的极值点P 是否有$\nabla f \parallel \nabla g$?



在曲面$g(x,y,z)=0$ 上任取过P 曲线$\Gamma:\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=w(t) \end{cases}$，则点$P$ 也为f 在Γ 上的极值点。

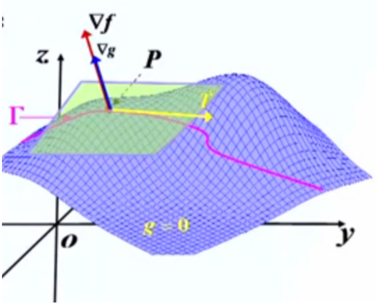
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=f_x\cdot\phi'(t)+f_y\cdot\psi'(t)+f_z\cdot w'(t)=0$$

$$\Rightarrow (f_x,f_y,f_z)\cdot(\phi'(t),\psi'(t),w'(t))=0$$

记$\vec{T}=(\phi'(t),\psi'(t),w'(t))$，则$\nabla f\perp\vec{T}$

由曲线Γ 的任意性, $\nabla f\perp$ 曲面$g=0$ 在P 点切平面

一般情况： 目标函数$f(x,y,z)$ 在约束条件$g(x,y,z)=0$ 下的极值点P 是否有$\nabla f \parallel \nabla g$?



在曲面$g(x,y,z)=0$ 上任取过P 曲线$\Gamma:\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=w(t) \end{cases}$，则点$P$ 也为f 在Γ 上的极值点。

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=f_x\cdot\phi'(t)+f_y\cdot\psi'(t)+f_z\cdot w'(t)=0$$

$$\Rightarrow (f_x,f_y,f_z)\cdot(\phi'(t),\psi'(t),w'(t))=0$$

记$\vec{T}=(\phi'(t),\psi'(t),w'(t))$，则$\nabla f\perp\vec{T}$

由曲线Γ 的任意性, $\nabla f\perp$ 曲面$g=0$ 在P 点切平面

$\Rightarrow \nabla f \parallel \nabla g$

故若构造Lagrange 函数（λ 称为Lagrange 乘数）
$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)$

则条件极值点就在方程组

$$\begin{cases} L_x=f_x(x_0,y_0,z_0)-\lambda_0 g_x(x_0,y_0,z_0)=0 \\ L_y=f_y(x_0,y_0,z_0)-\lambda_0 g_y(x_0,y_0,z_0)=0 \\ L_z=f_z(x_0,y_0,z_0)-\lambda_0 g_z(x_0,y_0,z_0)=0 \\ L_\lambda=g(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases}$$

的所有解(x_0,y_0,z_0,λ_0) 所对应的(x_0,y_0,z_0) 中。

上述方法称为Lagrange 乘数法。

故若构造Lagrange 函数（λ 称为Lagrange 乘数）
$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)$

则条件极值点就在方程组

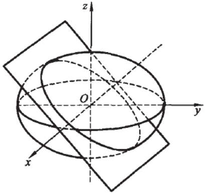
$$\begin{cases} L_x = f_x(x_0,y_0,z_0)-\lambda_0 g_x(x_0,y_0,z_0)=0 \\ L_y = f_y(x_0,y_0,z_0)-\lambda_0 g_y(x_0,y_0,z_0)=0 \\ L_z = f_z(x_0,y_0,z_0)-\lambda_0 g_z(x_0,y_0,z_0)=0 \\ L_\lambda = g(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases}$$

的所有解(x_0,y_0,z_0,λ_0) 所对应的(x_0,y_0,z_0) 中。

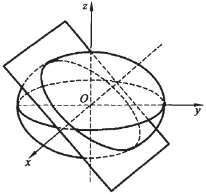
上述方法称为Lagrange 乘数法。

注：Lagrange 乘数法将一个条件极值问题的极值点严格地限制在一个无条件极值问题的稳定点范围内，从而解决问题。

例2：求平面$x+y+z=0$与椭球面$x^2+y^2+4z^2=1$相交而成的椭圆面积。



例2：求平面$x+y+z=0$ 与椭球面$x^2+y^2+4z^2=1$ 相交而成的椭圆面积。



一般地，考虑目标函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在m 个约束条件$g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\ (i=1,2,\cdots,m;m<n)$ 下的极值。此处$f,g_i(i=1,2,\cdots,m)$ 具有连续偏导，且Jacobi 矩阵

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

在满足约束条件的点满秩，即rank $J=m$。

定理1（条件极值的必要条件）：若点$\vec{\mathbf{x}}_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$为$f(\vec{\mathbf{x}})$ 满足约束条件的条件极值点，则可构造Lagrange 函数$L(x_1, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) = f(x_1, \cdots, x_n) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, \cdots, x_n)$，则条件极值就在方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f}{\partial x_k} - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_k} = 0 \\ g_\ell = 0 \end{cases} \tag{1}$$

所有解$(x_1, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ 所对应的点$(x_1, \cdots, x_n)$ 中。

定理1（条件极值的必要条件）：若点$\vec{\mathbf{x}}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$为$f(\vec{\mathbf{x}})$ 满足约束条件的条件极值点，则可构造Lagrange 函数$L(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=f(x_1,\cdots,x_n)-\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i(x_1,\cdots,x_n)$，则条件极值就在方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_k}=\dfrac{\partial f}{\partial x_k}-\displaystyle\sum_{i=1}^m\lambda_i\dfrac{\partial g_i}{\partial x_k}=0\\ g_\ell=0\end{cases}\tag{1}$$

所有解$(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ 所对应的点$(x_1,\cdots,x_n)$ 中。

定理2（条件极值的充分条件）：设点$\vec{\mathbf{x}}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$及$m$ 个常数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 满足方程组(**??**)，则当方阵

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_k\partial x_\ell}(\vec{\mathbf{x}}_0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\right)_{n\times n}$$

为正定（负定）矩阵时，$\vec{\mathbf{x}}_0$ 为满足约束条件的条件极小（大）值点，因此$f(\vec{\mathbf{x}}_0)$ 为满足约束条件的条件极小（大）值。

注：当定理2中的方阵为不定时，并不能说明$f(\vec{x}_0)$ 不是极值。如求$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ 在$z = 0$ 下的极值。

注：当定理2中的方阵为不定时，并不能说明$f(\vec{x}_0)$ 不是极值。如求$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ 在$z=0$ 下的极值。

例3(求隐函数的极值)：求由方程$2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$ 所确定的函数$z=z(x,y)$ 的极值。

注：当定理2中的方阵为不定时，并不能说明$f(\vec{x}_0)$ 不是极值。如求$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ 在$z=0$ 下的极值。

例3(求隐函数的极值)：求由方程$2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$ 所确定的函数$z=z(x,y)$ 的极值。

注：在一元连续函数中，若$f(x)$ 在$\mathbb{R}$ 上只有唯一的极值点，则该极值点就是最值点。二元连续函数则不然。

注：当定理2中的方阵为不定时，并不能说明$f(\vec{x}_0)$ 不是极值。如求$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ 在$z=0$ 下的极值。

例3(求隐函数的极值)：求由方程$2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$ 所确定的函数$z=z(x,y)$ 的极值。

注：在一元连续函数中，若$f(x)$ 在$\mathbb{R}$ 上只有唯一的极值点，则该极值点就是最值点。二元连续函数则不然。

例4：求函数$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2(b^2-ac<0,a,b,c>0)$ 在闭区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$ 上的最大值和最小值。

注：当定理2中的方阵为不定时，并不能说明$f(\vec{x}_0)$ 不是极值。如求$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ 在$z=0$ 下的极值。

例3(求隐函数的极值)：求由方程$2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$ 所确定的函数$z=z(x,y)$ 的极值。

注：在一元连续函数中，若$f(x)$ 在$\mathbb{R}$ 上只有唯一的极值点，则该极值点就是最值点。二元连续函数则不然。

例4：求函数$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2(b^2-ac<0,a,b,c>0)$ 在闭区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值。

注：求闭区域上的最值，一般先求闭区域内部上的极值，为无条件极值；再求闭区域边界上的极值，为条件极值问题。

作业： 课本P_{216} 9, P_{229} 1, 2, 6, 11, 14。