

理论力学思考题习题

参考答案

周衍柏 第三版

阮病毒 整理

2007-10-22

目录

第一章 质点力学	- 4 -
第一章 思考题	- 4 -
第一章思考题解答	- 5 -
第一章习题	- 11 -
第一章习题解答	- 18 -
第二章 质点组力学	- 72 -
第二章思考题	- 72 -
第二章思考题解答	- 72 -
第二章习题	- 74 -
第二章习题解答	- 77 -
第三章 刚体力学	- 96 -
第三章思考题	- 96 -
第三章思考题解答	- 97 -
第三章习题	- 102 -
第三章习题解答	- 108 -
第四章 转动参考系	- 140 -
第四章思考题	- 140 -
第四章思考题解答	- 140 -
第四章习题	- 143 -
第四章习题解答	- 145 -
第五章 分析力学	- 156 -
第五章思考题	- 156 -
第五章思考题解答	- 157 -
第五章习题	- 164 -
第五章习题解答	- 170 -

第一章 质点力学

第一章 思考题

- 1.1 平均速度与瞬时速度有何不同？在上面情况下，它们一致？
- 1.2 在极坐标系中， $v_r = \dot{r}$ ， $v_\theta = r\dot{\theta}$ 。为什么 $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ 而非 \ddot{r} ？为什么 $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ 而非 $r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}$ ？你能说出 a_r 中的 $-r\dot{\theta}^2$ 和 a_θ 中另一个 $\dot{r}\dot{\theta}$ 出现的原因和它们的物理意义吗？
- 1.3 在内禀方程中， a_n 是怎样产生的？为什么在空间曲线中它总沿着主法线方向？当质点沿空间运动时，副法线方向的加速度 a_b 等于零，而作用力在副法线方向的分量 F_b 一般不等于零，这是不是违背了牛顿运动定律呢？
- 1.4 在怎样的运动中只有 a_r 而无 a_n ？在怎样的运动中又只有 a_n 而无 a_r ？在怎样的运动中既有 a_n 而无 a_r ？
- 1.5 $\frac{d\vec{r}}{dt}$ 与 $\frac{dr}{dt}$ 有无不同？ $\frac{d\vec{v}}{dt}$ 与 $\frac{dv}{dt}$ 有无不同？试就直线运动与曲线运动分别加以讨论。
- 1.6 人以速度 \vec{v} 向篮球网前进，则当其投篮时应用什么角度投出？跟静止时投篮有何不同？
- 1.7 雨点以匀速度 \vec{v} 落下，在一有加速度 a 的火车中看，它走什么路径？
- 1.8 某人以一定的功率划船，逆流而上。当船经过一桥时，船上的渔竿不慎落入河中。两分钟后，此人才发现，立即返棹追赶。追到渔竿之处是在桥的下游 600 米的地方，问河水的流速是多大？
- 1.9 物体运动的速度是否总是和所受的外力的方向一致？为什么？
- 1.10 在那些条件下，物体可以作直线运动？如果初速度的方向和力的方向一致，则物体是沿力的方向还是沿初速度的方向运动？试用一具体实例加以说明。
- 1.11 质点仅因重力作用而沿光滑静止曲线下滑，达到任一点时的速度只和什么有关？为什么是这样？假如不是光滑的将如何？
- 1.12 为什么被约束在一光滑静止的曲线上运动时，约束力不作功？我们利用动能定理或能量积分，能否求出约束力？如不能，应当怎样去求？
- 1.13 质点的质量是 1 千克，它运动时的速度是 $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}$ ，式中 \vec{i} 、 \vec{j} 、 \vec{k} 是沿 x 、 y 、 z 轴上的单位矢量。求此质点的动量和动能的量值。

- 1.14 在上题中, 当质点以速度运动到 $(1, 2, 3)$ 点时, 它对原点 O 及 z 轴的动量矩各是多少?
- 1.15 动量矩守恒是否就意味着动量也守恒? 已知质点受有心力作用而运动时, 动量矩是守恒的, 问它的动量是否也守恒?
- 1.16 如 $F = F(r)$, 则在三维直角坐标系中, 仍有 $\nabla \times F = 0$ 的关系存在吗? 试验之。
- 1.17 在平方反比引力问题中, 势能曲线应具有什么样的形状?
- 1.18 我国发射的第一颗人造地球卫星的轨道平面和地球赤道平面的交角为 68.5° , 比苏联及美国第一次发射的都要大。我们说, 交角越大, 技术要求越高, 这是为什么? 又交角大的优点是什么?
- 1.19 卢瑟福公式对引力库仑场来讲也能适用吗? 为什么?

第一章思考题解答

1.1 答: 平均速度是运动质点在某一时间间隔 $t \rightarrow t + \Delta t$ 内位矢大小和方向改变的平均快慢速度, 其方向沿位移的方向即沿 Δt 对应的轨迹割线方向; 瞬时速度是运动质点在某时刻或某未知位矢和方向变化的快慢程度其方向沿该时刻质点所在点轨迹的切线方向。在 $\Delta t \rightarrow 0$ 的极限情况, 二者一致, 在匀速直线运动中二者也一致的。

1.2 答: 质点运动时, 径向速度 V_r 和横向速度 V_θ 的大小、方向都改变, 而 a_r 中的 \ddot{r} 只反映了 V_r 本身大小的改变, a_θ 中的 $r\ddot{\theta} + r\dot{\theta}$ 只是 V_θ 本身大小的改变。事实上, 横向速度 V_θ 方向的改变会引起径向速度 V_r 大小大改变, $-r\dot{\theta}^2$ 就是反映这种改变的加速度分量; 径向速度 V_r 的方向改变也引起 V_θ 的大小改变, 另一个 $r\dot{\theta}$ 即为反映这种改变的加速度分量, 故 $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$, $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ 。这表示质点的径向与横向运动在相互影响, 它们一起才能完整地描述质点的运动变化情况

1.3 答: 内禀方程中, a_n 是由于速度方向的改变产生的, 在空间曲线中, 由于 \mathbf{a} 恒位于密切面内, 速度 \mathbf{v} 总是沿轨迹的切线方向, 而 a_n 垂直于 \mathbf{v} 指向曲线凹陷一方, 故 a_n 总是沿助法线方向。质点沿空间曲线运动时, $a_b = 0, F_b \neq 0$ 何与牛顿运动定律不矛盾。因质点除受作用力 \mathbf{F} , 还受到被动的约反作用力 \mathbf{R} , 二者在副法线方向的分量成平衡力 $F_b + R_b = 0$, 故 $a_b = 0$ 符合牛顿运动率。有人会问: 约束反作用力靠谁施加, 当然是与质点接触的周围其他物体由于受到质点的作用而对质点产生的反作用力。有人也许还会问: 某时刻若 F_b 与 R_b 大小不等, a_b 就不为零了? 当然是这样, 但此时刻质点受合力的方向与原来不同,

质点的位置也在改变，副法线在空间中方位也不再是原来 a_b 所在的方位，又有了新的副法线，在新的副法线上仍满足 $F_b + R_b = 0$ 即 $a_b = 0$ 。这反映了牛顿定律得瞬时性和矢量性，也反映了自然坐标系的方向虽质点的运动而变。

1.4 答：质点在直线运动中只有 a_τ 而无 a_n ，质点的匀速曲线运动中只有 a_n 而无 a_τ ；质点作变速运动时即有 a_τ 又有 a_n 。

1.5 答： $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 即反应位矢 \mathbf{r} 大小的改变又反映其方向的改变，是质点运动某时刻的速度矢量，

而 $\frac{dr}{dt}$ 只表示 r 大小的改变。如在极坐标系中， $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\mathbf{i} + r\dot{\theta}\mathbf{j}$ 而 $\frac{dr}{dt} = \dot{r}$ 。在直线运动中，规

定了直线的正方向后， $\frac{dr}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$ 。且 $\frac{dr}{dt}$ 的正负可表示 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 的指向，二者都可表示质点的运

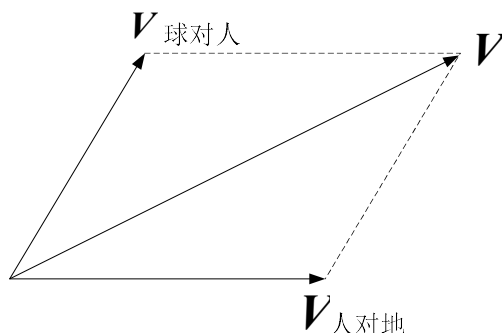
动速度；在曲线运动中 $\frac{dr}{dt} \neq \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$ ，且 $\frac{dr}{dt}$ 也表示不了 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 的指向，二者完全不同。

$\frac{dv}{dt}$ 表示质点运动速度的大小，方向的改变是加速度矢量，而 $\frac{dv}{dt}$ 只是质点运动速度大小

的改变。在直线运动中规定了直线的正方向后，二者都可表示质点运动的加速度；在曲线运

动中，二者不同， $\frac{dv}{dt} = a_\tau + a_n$ ，而 $\frac{dv}{dt} = a_\tau$ 。

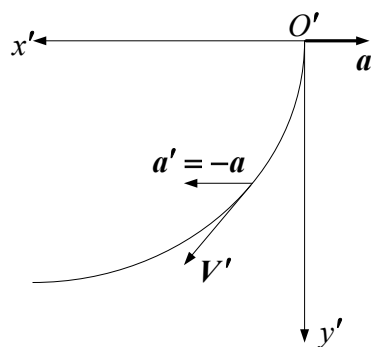
1.6 答：不论人是静止投篮还是运动投篮，球对地的方向总应指向篮筐，其速度合成如题 1.6



题1-6图

图所示，故人以速度 \mathbf{v} 向球网前进时应向高于篮筐的方向投出。静止投篮是直接向篮筐投出，（事实上要稍高一点，使球的运动有一定弧度，便于投篮）。

1.7 答：火车中的人看雨点的运动，是雨点的匀速下落运动及向右以加速度 a 的匀速水平直线运动的合成运动如题 1.7 图所示，



题1-7图

$o'x'y'$ 是固定于车的坐标系，雨点相对车的加速度 $\mathbf{a}' = -\mathbf{a}$ ，其相对运动方程 $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}at^2 \\ y' = vt \end{cases}$ 消

去 t 的轨迹

$$y'^2 = \frac{2v^2}{a}x'$$

如题图，有人会问：车上的人看雨点的轨迹是向上凹而不是向下凹呢？因加速度总是在曲线凹向的内侧， \mathbf{a}' 垂直于 \mathbf{v}' 方向的分量 \mathbf{a}'_n 在改变着 \mathbf{v}' 的方向，该轨迹上凹。

1.8 答：设人发觉干落水时，船已上行 s' ，上行时船的绝对速度 $V_{\text{船}} - V_{\text{水}}$ ，则

$$s' = (V_{\text{船}} - V_{\text{水}}) \times 2 \quad (1)$$

船反向追赶竿的速度 $V_{\text{船}} + V_{\text{水}}$ ，设从反船到追上竿共用时间 t ，则

$$(V_{\text{船}} + V_{\text{水}})t = 600 + s' \quad (2)$$

又竿与水同速，则

$$V_{\text{水}}(2 + t) = 600 \quad (3)$$

①+③=②得

$$V_{\text{水}} = 150 \text{ m/min}$$

1.9 答：不一定一致，因为是改变物体运动速度的外因，而不是产生速度的原因，加速度的方向与合外力的方向一致。外力不但改变速度的大小还改变速度的方向，在曲线运动中外力与速度的方向肯定不一致，只是在加速度直线运动二者的方向一致。

1.10 答：当速度与物体受的合外力同一方位线且力矢的方位线不变时，物体作直线运动。在曲线运动中若初速度方向与力的方向不一致，物体沿出速度的方向减速运动，以后各时刻

既可沿初速度方向运动，也可沿力的方向运动，如以一定初速度上抛的物体，开始时及上升过程中初速度的方向运动，到达最高点下落过程中沿力的方向运动。

在曲线运动中初速度的方向与外力的方向不一致，物体初时刻速度沿初速度的反方向，但以后既不会沿初速度的方向也不会沿外力的方向运动，外力不断改变物体的运动方向，各时刻的运动方向与外力的方向及初速度的方向都有关。如斜抛物体初速度的方向与重力的方向不一致，重力的方向决定了轨道的形状开口下凹，初速度的方向决定了射高和射程。

1.11 答：质点仅因重力作用沿光滑静止曲线下滑，达到任意点的速度只和初末时刻的高度差有关，因重力是保守力，而光滑静止曲线给予质点的发向约束力不做功，因此有此结论。假如曲线不是光滑的，质点还受到摩擦力的作用，摩擦力是非保守力，摩擦力的功不仅与初末位置有关，还与路径有关，故质点到达任一点的速度不仅与初末高度差有关，还与曲线形状有关。

1.12 答：质点被约束在一光滑静止的曲线上运动时，约束力的方向总是垂直于质点的运动方向，故约束力不做功，动能定理或能量积分中不含约束力，故不能求出约束力。但用动能定理或能量积分可求出质点在某位置的速度，从而得出 a_n ，有牛顿运动方程 $F_n + R_n = ma_n$ 便可求出 R_n ，即为约束力

1.13 答：动量

$$p = mv = 1 \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + \sqrt{3}^2} = 4 \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \right)$$

动能

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times \left(3^2 + 2^2 + \sqrt{3}^2 \right) = 8 \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

1.14 答：

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = (2\sqrt{3} - 6)\mathbf{i} + (9 - \sqrt{3})\mathbf{j} + (2 - 6)\mathbf{k}$$

故

$$\begin{cases} J_0 = \sqrt{(2\sqrt{3} - 6)^2 + (9 - \sqrt{3})^2 + (-4)^2} \approx 8.67 \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \right) \\ J_z = -4 \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \right) \end{cases}$$

1.15 答：动量矩守恒意味着外力矩为零，但并不意味着外力也为零，故动量矩守恒并不意味着动量也守恒。如质点受有心力作用而运动动量矩守恒是由于力过力心，力对力心的矩为零，但这质点受的力并不为零，故动量不守恒，速度的大小和方向每时每刻都在改变。

1.16 答：若 $F = F(r)$ ，在球坐标系中有

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F(r) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial F(r)}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\theta - \frac{\partial F(r)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\varphi = 0$$

由于坐标系的选取只是数学手段的不同，它不影响力场的物理性质，故在三维直角坐标系中仍有 $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ 的关系。在直角坐标系中

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_x(r)\mathbf{i} + F_y(r)\mathbf{j} + F_z(r)\mathbf{k}$$

故

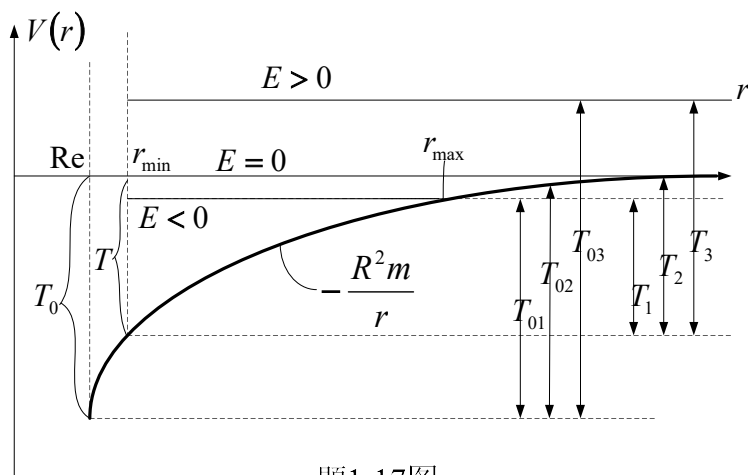
$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x(r) & F_y(r) & F_z(r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F(r)\frac{x}{r} & F(r)\frac{y}{r} & F(r)\frac{z}{r} \end{vmatrix} = \nabla \times F(r) \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r} = \nabla \times \nabla \times F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} = \nabla \times F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

事实上据“ ∇ ”算符的性质，上述证明完全可以简写为

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times F(r) \mathbf{r} = 0$$

这表明有心力场是无旋场记保守立场

1.17 答平方反比力场中系统的势能 $V(r) = -\frac{k^2 m}{r}$ ，其势能曲线如题图 1.17 图所示，



题1-17图

由 $T + V(r) = E$ 知 $T = E - V(r)$, 因 $T > 0$, 故有 $E > V(r)$ 。

若 $E < 0$ ，其势能曲线对应于近日点 r_{\min} 和远日点 r_{\max} 之间的一段。近日点处 $E - V(r) - T$ 即为进入轨道需要的初动能若 $E > 0$ 则质点的运动无界，对应于双曲线轨道的运动；若 $E = 0$ 位于有界和无界之间，对应于抛物线轨道的运动；这两种轨道的运动都没有近日点，即对大的 r 质点的运动是无界的，当 r 很大时 $V(r) \rightarrow 0$ ，还是选无限远为零势点

的缘故，从图中可知，做双曲轨道运动比抛物轨道和椭圆轨道需要的进入轨道需要的动能要大。事实及理论都证明，平方反比引力场中质点的轨道正是取决于进入轨道时初动能的大小由

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{k^2m}{r} = E \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

得

$$V^2 \begin{cases} > \frac{k^2}{r} \\ = \frac{k^2}{r} \\ < \frac{k^2}{r} \end{cases}$$

即速度 V 的大小就决定了轨道的形状，图中 T_1, T_2, T_3 对应于进入轨道时的达到第一二三宇宙速度所需的能量由于物体总是有限度的，故 r 有一极小值 R_e ，既相互作用的二质点不可能无限接近，对于人造卫星的发射 R_e 其为地球半径。 $T_0 = E - V(r)$ 为地面上发射时所需的初动能，图示 T_{01}, T_{02}, T_{03} 分别为使卫星进入轨道时达到一二三宇宙速度在地面上的发射动能。 $(T_{0i} - T_i)$ $i=1,2,3$ 为进入轨道前克服里及空气阻力做功所需的能量。

1.18 答：地球附近的物体都受到随地球自转引起的惯性离心力的作用，此力的方位线平行于赤道平面，指向背离地轴。人造地球卫星的轨道平面和地球赤道平面的夹角越大，则卫星的惯性离心力与轨道平面的家教越大，运动中受的影响也越大，对卫星导向控制系统的要求越高。交角越大，对地球的直接探测面积越大，其科学使用价值越高。

1.19 答：对库仑引力场有 $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{k'}{r} = E$ ，其中 $k' = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0}$ 若 $V^2 > \frac{2k'}{r}$ ，则， $E > 0$ ，轨道是双曲线的一点，与斥力情况相同，卢瑟福公式也适用，不同的是引力情况下力心在双曲线凹陷方位内侧；若 $V^2 \leq \frac{2k'}{r}$ ，则 $E \leq 0$ ，轨道椭圆 ($E < 0$) 或抛物线 ($E = 0$)，卢瑟福公式不适用，

仿照课本上的推证方法，在入射速度 $V_0 > \frac{2k'}{r}$ 的情况下即可得卢瑟福公式。近代物理学的正，负粒子的对撞试验可验证这一结论的近似正确性。

第一章习题

1.1 沿水平方向前进的枪弹，通过某一距离 s 的时间为 t_1 ，而通过下一等距离 s 的时间为 t_2 。

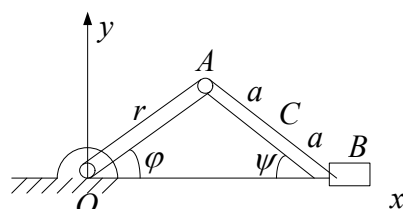
试证明枪弹的减速度（假定是常数）为

$$\frac{2s(t_2 - t_1)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)}$$

1.2 某船向东航行，速率为每小时 15km，在正午某一灯塔。另一船以同样速度向北航行，在下午 1 时 30 分经过此灯塔。问在什么时候，两船的距离最近？最近的距离是多少？

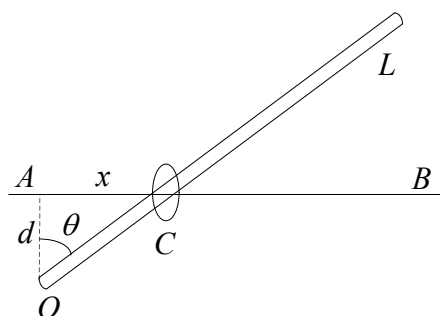
1.3 曲柄 $\overline{OA} = r$ ，以匀角速 ω 绕定点 O 转动。此曲柄借连杆 AB 使滑块 B 沿直线 Ox 运动。

求连杆上 C 点的轨道方程及速度。设 $\overline{AC} = \overline{CB} = a$ ， $\angle AOB = \varphi$ ， $\angle ABO = \psi$ 。



第 1.3 题图

1.4 细杆 OL 绕 O 点以角速 ω 转动，并推动小环 C 在固定的钢丝 AB 上滑动。图中的 d 为已知常数，试求小球的速度及加速度的量值。



第1.4题图

1.5 矿山升降机作加速度运动时，其变加速度可用下式表示：

$$a = c \left(1 - \sin \frac{\pi t}{2T} \right)$$

式中 c 及 T 为常数，试求运动开始 t 秒后升降机的速度及其所走过的路程。已知升降机的初速度为零。

1.6 一质点沿位矢及垂直于位矢的速度分别为 λr 及 $\mu \theta$ ，式中 λ 及 μ 是常数。试证其沿位矢及垂直于位矢的加速度为

$$\lambda^2 r - \frac{\mu^2 \theta^2}{r}, \mu \theta \left(\lambda + \frac{\mu}{r} \right)$$

1.7 试自

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

出发, 计算 \ddot{x} 及 \ddot{y} 。并由此推出径向加速度 a_r 及横向加速度 a_θ 。

1.8 直线 FM 在一给定的椭圆平面内以匀角速 ω 绕其焦点 F 转动。求此直线与椭圆的焦点 M 的速度。已知以焦点为坐标原点的椭圆的极坐标方程为

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta}$$

式中 a 为椭圆的半长轴, e 为偏心率, 都是常数。

1.9 质点作平面运动, 其速率保持为常数。试证其速度矢量 \mathbf{v} 与加速度矢量 \mathbf{a} 正交。

1.10 一质点沿着抛物线 $y^2 = 2px$ 运动其切向加速度的量值为法向加速度量值的 $-2k$ 倍。

如此质点从正焦弦 $\left(\frac{p}{2}, p\right)$ 的一端以速度 u 出发, 试求其达到正焦弦另一端时的速率。

1.11 质点沿着半径为 r 的圆周运动, 其加速度矢量与速度矢量间的夹角 α 保持不变。求质点的速度随时间而变化的规律。已知出速度为 v_0 。

1.12 在上题中, 试证其速度可表为

$$v = v_0 e^{(\theta - \theta_0) \cot \alpha}$$

式中 θ 为速度矢量与 x 轴间的夹角, 且当 $t = 0$ 时, $\theta = \theta_0$ 。

1.13 假定一飞机从 A 处向东飞到 B 处, 而后又向西飞回原处。飞机相对于空气的速度为 \mathbf{v}' , 而空气相对于地面的速度为 \mathbf{v}_0 。 A 与 B 之间的距离为 l 。飞机相对于空气的速度 \mathbf{v}' 保持不变。

(a) 假定 $\mathbf{v}_0 = 0$, 即空气相对于地面是静止的, 试证来回飞行的总时间为

$$t_0 = \frac{2l}{v'}$$

(b) 假定空气速度为向东 (或向西), 试证来回飞行的总时间为

$$t_B = \frac{t_0}{1 - \frac{v_0^2}{v'^2}}$$

(c) 假定空气的速度为向北 (或向南), 试证来回飞行的总时间为

$$t_N = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v'^2}}}$$

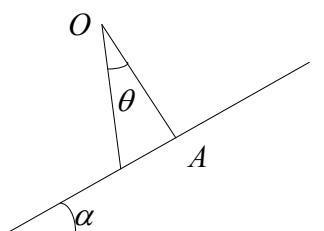
1.14 一飞机在静止空气中每小时的速率为 100 千米。如果飞机沿每边为 6 千米的正方形飞行，且风速为每小时 28 千米，方向与正方形的某两边平行，则飞机绕此正方形飞行一周，需时多少？

1.15 当一轮船在雨中航行时，它的雨篷遮着篷的垂直投影后 2 米的甲板，篷高 4 米。但当轮船停航时，甲板上干湿两部分的分界线却在篷前 3 米。如果雨点的速度为 8 米/秒，求轮船的速率。

1.16 宽度为 d 的河流，其流速与到河岸的距离成正比。在河岸处，水流速度为零，在河流中心处，其值为 c 。一小船以相对速度 u 沿垂直于水流的方向行驶，求船的轨迹以及船在对岸靠拢的地点。

1.17 小船 M 被水冲走后，由一荡桨人以不变的相对速度 C_2 朝岸上 A 点划回。假定河流速度 C_1 沿河宽不变，且小船可以看成是一个质点，求船的轨迹。

1.18 一质点自倾角为 α 的斜面上方 O 点，沿一光滑斜槽 OA 下降。如欲使此质点到达斜面上所需的时间为最短，问斜槽 OA 与竖直线所成之角 θ 应为何值？



第1.18题图

1.19 将质量为 m 的质点竖直抛上于有阻力的媒质中。设阻力与速度平方成正比，即 $R = mk^2gv^2$ 。如上抛时的速度为 v_0 ，试证此质点又落至投掷点时的速度为

$$v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{1 + k^2 v_0^2}}$$

1.20 一枪弹以仰角 α 、初速度 v_0 自倾角为 β 的斜面的下端发射。试证子弹击中斜面的地方和发射点的距离 d （沿斜面量取）及此距离的最大值分别为

$$d = \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin(\alpha - \beta)}{g \cos^2 \beta}$$

$$d_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \sec^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right).$$

1.21 将一质点以初速 v_0 抛出， v_0 与水平线所成之角为 α 。此质点所受到的空气阻力为其速度的 mk 倍， m 为质点的质量， k 为比例系数。试求当此质点的速度与水平线所成之角又为 α 时所需的时间。

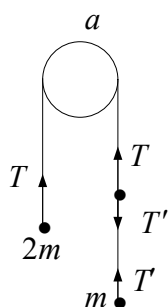
1.22 如向互相垂直的匀强电磁场 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 中发射一电子，并设电子的初速度 \mathbf{V} 与 \mathbf{E} 及 \mathbf{B} 垂直。试求电子的运动规律。已知此电子所受的力为 $e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ，式中 \mathbf{E} 为电场强度， e 为电子所带的电荷， \mathbf{v} 为任一瞬时电子运动的速度。

1.23 在上题中，如

(a) $\mathbf{B} = 0$ ，则电子的轨道为在竖直平面 (xy 平面) 的抛物线；

(b) 如 $\mathbf{E} = 0$ ，则电子的轨道为半径等于 $\frac{mV}{eB}$ 的圆。试证明之。

1.24 质量为 m 与 $2m$ 的两质点，为一不可伸长的轻绳所联结，绳挂在一光滑的滑轮上。在 m 的下端又用固有长度为 a 、倔强系数 k 为 $\frac{mg}{a}$ 的弹性绳挂上另外一个质量为 m 的质点。在开始时，全体保持竖直，原来的非弹性绳拉紧，而有弹性的绳则处在固有的长度上。由此静止状态释放后，求证这运动是简谐的，并求出其振动周期 τ 及任何时刻两段绳中的张力 T 及 T' 。



第1.24题图

1.25 滑轮上系一不可伸长的绳，绳上悬一弹簧，弹簧另一端挂一重为 W 的物体。当滑轮以匀速转动时，物体以匀速 v_0 下降。如将滑轮突然停住，试求弹簧的最大伸长及最大张力。假定弹簧受 W 的作用时的静伸长为 λ_0 。

1.26 一弹性绳上端固定，下端悬有 m 及 m' 两质点。设 a 为绳的固有长度， b 为加 m 后的伸长， c 为加 m' 后的伸长。今将 m' 任其脱离而下坠，试证质点 m 在任一瞬时离上端 O 的距离为

$$a + b + c \cos \sqrt{\frac{g}{b}} t$$

1.27 一质点自一水平放置的光滑固定圆柱面凸面的最高点自由滑下。问滑至何处，此质点将离开圆柱面？假定圆柱体的半径为 r 。

1.28 重为 W 的不受摩擦而沿半长轴为 a 、半短轴为 b 的椭圆弧滑下，此椭圆的短轴是竖直的。如小球自长 $2a$ 的端点开始运动时，其初速度为零，试求小球在到达椭圆的最低点时它对椭圆的压力。

1.29 一质量为 m 的质点自光滑圆滚线的尖端无初速地下滑。试证在任一点的压力为 $2mg \cos \theta$ ，式中 θ 为水平线和质点运动方向间的夹角。已知圆滚线方程为

$$x = a(2\theta + \sin 2\theta), y = -a(1 - \cos 2\theta)$$

1.30 在上题中，如圆滚线不是光滑的，且质点自圆滚线的尖端自由下滑，达到圆滚线的最低点时停止运动，则摩擦系数 μ 应满足下式

$$\mu^2 e^{\mu\pi} = 1$$

试证明之。

1.31 假定单摆在有阻力的媒质中振动，并假定振幅很小，故阻力与 $\dot{\theta}$ 成正比，且可写为

$R = -2mkl\dot{\theta}$ ，式中 m 是摆锤的质量， l 为摆长， k 为比例系数。试证当 $k^2 < \frac{g}{l}$ 时，单摆的振动周期为

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - k^2 l}}$$

1.32 光滑楔子以匀加速度 a_0 沿水平面运动。质量为 m 的质点沿楔子的光滑斜面滑下。求质点的相对加速度 a' 和质点对楔子的压力 P 。

1.33 光滑钢丝圆圈的半径为 r ，其平面为竖直的。圆圈上套一小环，其中为 w 。如钢丝圈以匀加速度 a 沿竖直方向运动，求小环的相对速度 v_r 及圈对小环的反作用力 R 。

1.34 火车质量为 m ，其功率为常数 k 。如果车所受的阻力 f 为常数，则时间与速度的关系为：

$$t = \frac{mk}{f^2} \ln \frac{k - v_0 f}{k - v f} - \frac{m(v - v_0)}{f}$$

如果 f 和速度 v 成正比，则

$$t = \frac{mv}{2f} \ln \frac{vk - fv_0^2}{v(k - vf)}$$

式中 v_0 为初速度，试证明之。

1.35 质量为 m 的物体为一锤所击。设锤所加的压力，是均匀地增减的。当在冲击时间 τ 的一半时，增至极大值 P ，以后又均匀减小至零。求物体在各时刻的速率以及压力所作的总功。

1.36 检验下列的力是否是保守力。如是，则求出其势能。

$$(a) F_x = 6abz^3y - 20bx^3y^2, F_y = 6abxz^3 - 10bx^4y, F_z = 18abxyz^2$$

$$(b) \mathbf{F} = iF_x(x) + jF_y(y) + kF_z(z)$$

1.37 根据汤川核力理论，中子与质子之间的引力具有如下形式的势能：

$$V(r) = \frac{ke^{-ar}}{r}, k < 0$$

试求

(a) 中子与质子间的引力表达式，并与平方反比定律相比较；

(b) 求质量为 m 的粒子作半径为 a 的圆运动的动量矩 J 及能量 E 。

1.38 已知作用在质点上的力为

$$F_x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$$

$$F_y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z$$

$$F_z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$$

式中系数 a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 都是常数。问这些 a_{ij} 应满足什么条件，才有势能存在？如这些条件满足，试计算其势能。

1.39 一质点受一与距离 $\frac{3}{2}$ 次方成反比的引力作用在一直线上运动。试证此质点自无穷远到

达 a 时的速率和自 a 静止出发到达 $\frac{a}{4}$ 时的速率相同。

1.40 一质点受一与距离成反比的引力作用在一直线上运动，求其达到 O 点所需的时间。

1.41 试导出下面有心力量值的公式：

$$F = \frac{mh^2}{2} \frac{dp^{-2}}{dr}$$

式中 m 为质点的质点， r 为质点到力心的距离， $h = r^2\dot{\theta} = \text{常数}$ ， p 为力心到轨道切线的垂直距离。

1.42 试利用上题的结果，证明：

(a) 如质点走一圆周，同时力心位于此圆上，则力与距离五次方成反比。

(b) 如一质点走一对数螺线，而其质点即力心，则力与距离立方成反比。

1.43 质点所受的有心力如果为

$$F = -m \left(\frac{\mu^2}{r^2} + \frac{\nu}{r^3} \right)$$

式中 μ 及 ν 都是常数，并且 $\nu < h^2$ ，则其轨道方程可写成

$$r = \frac{a}{1 + e \cos k\theta}$$

试证明之。式中 $k^2 = \frac{h^2 - \nu}{h^2}$, $a = \frac{k^2 h^2}{\mu^2}$, $e = \frac{A k^2 h^2}{\mu^2}$ (A 为积分常数)。

1.45 如 \dot{s}_a 及 \dot{s}_p 为质点在远日点及近日点处的速率，试证明

$$\dot{s}_p : \dot{s}_a = (1+e) : (1-e)$$

1.46 质点在有心力作用下运动。此力的量值为质点到力心距离 r 的函数，而质点的速率则与距离成反比，即 $v = \frac{a}{r}$ 。如果 $a^2 > h^2$ ($h = r^2 \dot{\theta}$)，求点的轨道方程。设当 $r = r_0$ 时， $\theta = 0$ 。

1.47 (a) 某彗星的轨道为抛物线，其近日点距离为地球轨道（假定为圆形）半径的 $\frac{1}{n}$ 。则此彗星运行时，在地球轨道内停留的时间为一年的

$$\frac{2}{3\pi} \frac{n+2}{n} \sqrt{\frac{n-1}{2n}}$$

倍，试证明之。

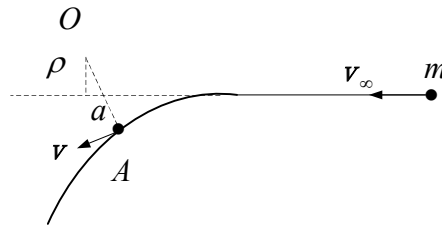
(b) 试再证任何作抛物线轨道的彗星停留在地球轨道（仍假定为圆形）内的最长时间为一年的 $\frac{2}{3\pi}$ 倍，或约为 76 日。

1.48 试根据 § 1.9 中所给出的我国第一颗人造地球卫星的数据，求此卫星在近地点和远地点的速率 v_1 及 v_2 以及它绕地球运行的周期 τ （参看 79 页）。

1.49 在行星绕太阳的椭圆运动中，如令 $a - r = ae \cos E$, $\int \frac{2\pi}{\tau} dt = T$ ，式中 τ 为周期， a 为半长轴， e 为偏心率， E 为一个新的参量，在天文学上叫做偏近点角。试由能量方程推出下面的开普勒方程：

$$T = E - e \sin E$$

1.50 质量为 m 的质点在有心斥力场 $\frac{mc}{r^3}$ 中运动，式中 r 为质点到力心 O 的距离， c 为常数。当质点离 O 很远时，质点的速度为 v_∞ ，而其渐进性与 O 的垂直距离则为 ρ （即瞄准距离）。试求质点与 O 的最近距离 a 。



第1.50题图

第一章习题解答

1.1 由题可知示意图如题 1.1.1 图:



题1.1.1图

设开始计时的时刻速度为 v_0 , 由题可知枪弹作匀减速运动设减速度大小为 a .

则有:

$$\begin{cases} s = v_0 t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2 \\ 2s = v_0 (t_1 + t_2) - \frac{1}{2} a (t_1 + t_2)^2 \end{cases}$$

由以上两式得

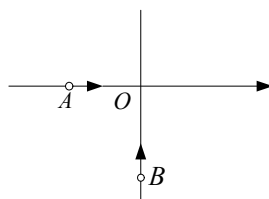
$$v_0 = \frac{s}{t_1} + \frac{1}{2} a t_1$$

再由此式得

$$a = \frac{2s(t_2 - t_1)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)}$$

证明完毕.

1.2 解 由题可知, 以灯塔为坐标原点建立直角坐标如题 1.2.1 图.



题1.2.1图

设 A 船经过 t_0 小时向东经过灯塔, 则向北行驶的 B 船经过 $\left(t_0 + 1\frac{1}{2}\right)$ 小时经过灯塔

任意时刻 A 船的坐标

$$x_A = -(15t_0 - 15t), \quad y_A = 0$$

B 船坐标 $x_B = 0$,

$$y_B = -\left[15\left(t_0 + 1\frac{1}{2}\right) - 15t\right]$$

则 AB 船间距离的平方

$$d^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

即

$$\begin{aligned} d^2 &= (15t_0 - 15t)^2 + \left[15\left(t_0 + 1\frac{1}{2}\right) - 15t\right]^2 \\ &= 450t^2 - (900t_0 + 675)t + 225t_0^2 + 225\left(t_0 + 1\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

d^2 对时间 t 求导

$$\frac{d(d^2)}{dt} = 900t - (900t_0 + 675)$$

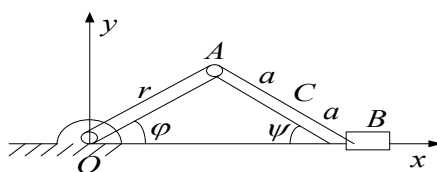
AB 船相距最近, 即 $\frac{d(d^2)}{dt} = 0$, 所以

$$t - t_0 = \frac{3}{4}h$$

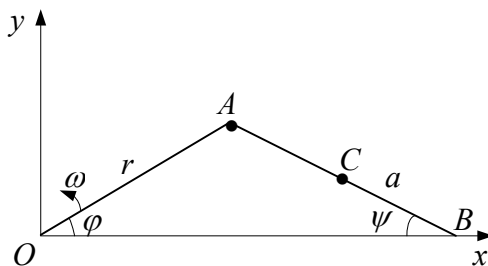
即午后 45 分钟时两船相距最近最近距离

$$s_{\min} = \sqrt{\left(15 \times \frac{3}{4}\right)^2 + \left(15 \times \frac{3}{4} - 15 \times \frac{3}{2}\right)^2} \text{ km}$$

1.3 解 (1) 如题 1.3.2 图



第1.3题图



题1.3.2图

由题分析可知，点 C 的坐标为

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi + a \cos \psi \\ y = a \sin \psi \end{cases}$$

又由于在 ΔAOB 中，有 $\frac{r}{\sin \psi} = \frac{2a}{\sin \varphi}$ （正弦定理）所以

$$\sin \varphi = \frac{2a \sin \psi}{r} = \frac{2y}{r}$$

联立以上各式运用

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

由此可得

$$\cos \varphi = \frac{x - a \cos \psi}{r} = \frac{x - \sqrt{a^2 - y^2}}{r}$$

得

$$\frac{4y^2}{r^2} + \frac{x^2 + a^2 - y^2 - 2x\sqrt{a^2 - y^2}}{r^2} = 1$$

得

$$3y^2 + x^2 + a^2 - r^2 = 2x\sqrt{a^2 - y^2}$$

化简整理可得

$$4x^2(a^2 - y^2) = (x^2 + 3y^2 + a^2 - r^2)^2$$

此即为 C 点的轨道方程.

(2) 要求 C 点的速度，分别求导

$$\begin{cases} \dot{x} = -r\omega \sin \varphi - \frac{r\omega \cos \varphi}{2 \cos \psi} \sin \psi \\ \dot{y} = \frac{r\omega \cos \varphi}{2} \end{cases}$$

其中

$$\omega = \dot{\varphi}$$

又因为

$$r \sin \varphi = 2a \sin \psi$$

对两边分别求导

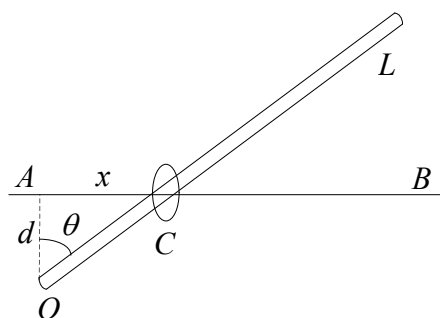
故有

$$\dot{\psi} = \frac{r\omega \cos \varphi}{2a \cos \psi}$$

所以

$$\begin{aligned} V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} &= \sqrt{\left(-r\omega \sin \varphi - \frac{r\omega \cos \varphi}{2 \cos \psi} \sin \psi\right)^2 + \frac{r^2 \omega^2 \cos^2 \varphi}{4}} \\ &= \frac{r\omega}{2 \cos \psi} \sqrt{\cos^2 \varphi + 4 \sin \varphi \cos \psi \sin(\varphi + \psi)} \end{aligned}$$

1.4 解 如题 1.4.1 图所示,



第1.4题图

OL 绕 O 点以匀角速度转动, C 在 AB 上滑动, 因此 C 点有一个垂直杆的速度分量

$$v_{\perp} = \omega \times \overline{OC} = \omega \sqrt{d^2 + x^2}$$

C 点速度

$$v = \frac{v_{\perp}}{\cos \theta} = v_{\perp} \sec \theta = \omega d \sec^2 \theta = \omega \frac{d^2 + x^2}{d}$$

又因为 $\dot{\theta} = \omega$ 所以 C 点加速度

$$a = \frac{dv}{dt} = \omega d \cdot 2 \sec \theta \cdot \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot \dot{\theta} = 2d\omega^2 \sec^2 \theta \tan \theta = \frac{2\omega^2 x(d^2 + x^2)}{d^2}$$

1.5 解 由题可知, 变加速度表示为

$$a = c \left(1 - \sin \frac{\pi t}{2T} \right)$$

由加速度的微分形式我们可知

$$a = \frac{dv}{dt}$$

代入得

$$dv = c \left(1 - \sin \frac{\pi t}{2T} \right) dt$$

对等式两边同时积分

$$\int_0^v dv = c \int_0^t \left(1 - \sin \frac{\pi t}{2T} \right) dt$$

可得：

$$v = ct + \frac{2T}{\pi} c \cos \frac{\pi t}{2T} + D \quad (D \text{ 为常数})$$

代入初始条件： $t=0$ 时， $v=0$ ， 故

$$D = -\frac{2T}{\pi} c$$

即

$$v = c \left[t + \frac{2T}{\pi} \left(\cos \frac{\pi t}{2T} - 1 \right) \right]$$

又因为

$$v = \frac{ds}{dt}$$

所以

$$ds = c \left[t + \frac{2T}{\pi} \left(\cos \frac{\pi t}{2T} - 1 \right) \right] dt$$

对等式两边同时积分， 可得：

$$s = c \left[\frac{1}{2} t^2 + \frac{2T}{\pi} \left(\frac{2T}{\pi} \sin \frac{\pi t}{2T} - t \right) \right]$$

1.6 解 由题可知质点的位矢速度

$$v_{//} = \lambda r \text{ ①}$$

沿垂直于位矢速度

$$v_{\perp} = \mu \theta$$

又因为 $v_{//} = \dot{r} = \lambda r$ ， 即

$$\dot{r} = \lambda r$$

$$v_{\perp} = \dot{\theta}r = \mu\theta \quad \text{即} \quad \dot{\theta} = \frac{\mu\theta}{r}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\mathbf{i}) + \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}\mathbf{j}) \quad (\text{取位矢方向}\mathbf{i}, \text{垂直位矢方向}\mathbf{j})$$

所以

$$\frac{d}{dt}(\dot{r}\mathbf{i}) = \frac{d\dot{r}}{dt}\mathbf{i} + \dot{r}\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \ddot{r}\mathbf{i} + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{j}$$

$$\frac{d}{dt}(r\dot{\theta}\mathbf{j}) = \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\mathbf{j} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\mathbf{j} + r\dot{\theta}\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{j} + r\ddot{\theta}\mathbf{j} + r\dot{\theta}^2\mathbf{i}$$

故

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{i} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{j}$$

即 沿位矢方向加速度

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

垂直位矢方向加速度

$$a_{\perp} = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

对③求导

$$\ddot{r} = \lambda\dot{r} = \lambda^2 r$$

对④求导

$$\ddot{\theta} = -\frac{\mu\theta}{r^2}\dot{r} + \frac{\mu}{r}\dot{\theta} = \mu\theta\left(\frac{\mu}{r} + \lambda\right)$$

把③④⑦⑧代入⑤⑥式中可得

$$a_{//} = \lambda^2 r - \frac{\mu^2 \theta^2}{r}$$

$$a_{\perp} = \mu\theta\left(\lambda + \frac{\mu}{r}\right)$$

1.7 解 由题可知

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{①} - \text{②}$$

对①求导

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \quad \text{③}$$

对③求导

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta \quad \text{④}$$

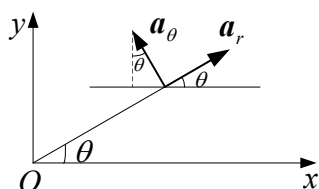
对②求导

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \quad (5)$$

对⑤求导

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (6)$$

对于加速度 a ，我们有如下关系见图 1.7.1 图



题1.7.1图

即

$$\begin{cases} \ddot{x} = a_r \cos \theta + a_\theta \sin \theta \\ \ddot{y} = a_r \sin \theta + a_\theta \cos \theta \end{cases} \quad (7)-(8)$$

对⑦⑧俩式分别作如下处理：⑦ $\times \cos \theta$ ，⑧ $\times \sin \theta$

即得

$$\begin{cases} \ddot{x} \cos \theta = a_r \cos \theta - a_\theta \sin \theta \cos \theta \\ \ddot{y} \sin \theta = a_r \sin \theta + a_\theta \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad (9)-(10)$$

⑨+⑩得

$$a_r = \ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta \quad (11)$$

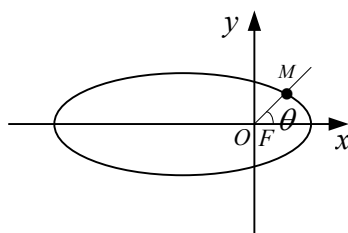
把④⑥代入 (11)得

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

同理可得

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

1.8 解 以焦点 F 为坐标原点，运动如图 1.8.1 图所示]



题1.8.1图

则 M 点坐标

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

对 x, y 两式分别求导

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

故

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta)^2 + (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta)^2 = \dot{r}^2 + r^2 \omega^2$$

如图所示的椭圆的极坐标表示法为

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta}$$

对 r 求导可得 (利用 $\dot{\theta} = \omega$) 又因为

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a(1-e^2)} + \frac{e \cos \theta}{a(1-e^2)}$$

即

$$\cos \theta = \frac{a(1-e^2) - r}{re}$$

所以

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{a^2(1-e^2)^2 + r^2 - 2ar(1-e^2)}{r^2 e^2}$$

故有

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{e^2 \omega^2 r^4}{a^2(1-e^2)^2} \sin^2 \theta + r^2 \omega^2 \\ &= \frac{e^2 \omega^2 r^4}{a^2(1-e^2)^2} \left[1 - \frac{a^2(1-e^2)^2 + r^2 - 2ar(1-e^2)}{r^2 e^2} \right] + r^2 \omega^2 \\ &= \frac{r^2 \omega^2}{a^2(1-e^2)} \cdot \left[\frac{e^2 r^2 - r^2 + 2ar(1-e^2)}{1-e^2} \right] = \frac{\omega^2 r^2}{b^2} (2a-r)r \end{aligned}$$

即

$$v = \frac{r\omega}{b} \sqrt{r(2a-r)}$$

(其中 $b^2 = (1 - e^2)a^2$, b 为椭圆的半短轴)

1.9 证 质点作平面运动, 设速度表达式为

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$$

令为位矢与轴正向的夹角, 所以

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + v_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + v_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt} - v_y \dot{\theta} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{dv_y}{dt} + v_x \dot{\theta} \right) \mathbf{j}$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \left[\left(\frac{dv_x}{dt} - v_y \dot{\theta} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{dv_y}{dt} + v_x \dot{\theta} \right) \mathbf{j} \right] \cdot (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}) \\ &= v_x \frac{dv_x}{dt} - v_x v_y \dot{\theta} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_x v_y \dot{\theta} = v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} \end{aligned}$$

又因为速率保持为常数, 即

$$v_x^2 + v_y^2 = C, C \text{ 为常数}$$

对等式两边求导

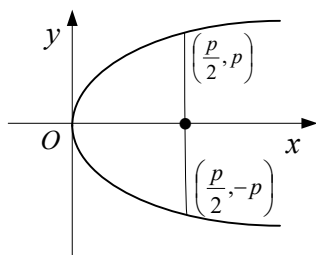
$$2v_x \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt} = 0$$

所以

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$$

即速度矢量与加速度矢量正交.

1.10 解 由题可知运动轨迹如题 1.10.1 图所示,



题1.10.1图

则质点切向加速度

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

法向加速度 $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ ，而且有关系式

$$\frac{dv}{dt} = -2k \frac{v^2}{\rho} \quad (1)$$

又因为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

$$y^2 = 2px$$

所以

$$y' = \frac{p}{y} \quad (3)$$

$$y'' = -\frac{p^2}{y^3} \quad (4)$$

联立①②③④

$$\frac{dv}{dt} = -2kv^2 \frac{\frac{p^2}{|y^3|}}{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

又

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \dot{y} \frac{dv}{dy}$$

把 $y^2 = 2px$ 两边对时间求导得

$$\dot{x} = \frac{y\dot{y}}{p}$$

又因为

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

所以

$$\dot{y}^2 = \frac{v^2}{1 + \frac{y^2}{p^2}} \quad (6)$$

把⑥代入⑤

$$\frac{v}{\left(1 + \frac{y^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{dv}{dy} = -2kv^2 \cdot \frac{\frac{p^2}{y^3}}{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

既可化为

$$\frac{dv}{v} = -2kp \frac{dy}{y^2 + p^2}$$

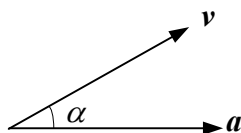
对等式两边积分

$$\int_u^v \frac{dv}{v} = -2kp \int_p^y \frac{dy}{y^2 + p^2}$$

所以

$$v = ue^{-k\pi}$$

1.11 解 由题可知速度和加速度有关系如图 1.11.1 所示



题1.11.1图

$$\begin{cases} a_n = \frac{v^2}{r} = a \sin \alpha \\ a_t = \frac{dv}{dt} = a \cos \alpha \end{cases}$$

两式相比得

$$\frac{v^2}{r \sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{dv}{dt}$$

即

$$\frac{1}{r} \cot \alpha dt = \frac{dv}{v^2}$$

对等式两边分别积分

$$\int_0^t \frac{1}{r} \cot \alpha dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2}$$

即

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} - \frac{t}{r} \cot \alpha$$

此即质点的速度随时间而变化的规律.

1.12 证 由题 1.11 可知质点运动有关系式

$$\begin{cases} \frac{v^2}{r} = a \sin \alpha \\ \frac{dv}{dt} = a \cos \alpha \end{cases} \quad \text{①②}$$

所以 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \omega$, 联立①②, 有

$$\frac{dv}{d\theta} \omega = \frac{v^2}{r \sin \alpha} \cos \alpha$$

又因为

$$v = \omega r$$

所以 $\frac{dv}{v} = \cot \alpha d\theta$, 对等式两边分别积分, 利用初始条件 $t=0$ 时, $\theta = \theta_0$

$$v = v_0 e^{(\theta - \theta_0) \cot \alpha}$$

1.13 证 (a) 当 $v_0 = 0$, 即空气相对地面上静止的, 有 $\mathbf{v}_{\text{绝}} = \mathbf{v}_{\text{相}} + \mathbf{v}_{\text{牵}}$. 式中 $v_{\text{绝}}$ 质点相对静止参考系的绝对速度, $v_{\text{相}}$ 指向点运动参考系的速度, $v_{\text{牵}}$ 指运动参考系相对静止参考系的速度.

可知飞机相对地面参考系速度: $v_{\text{绝}} = v'$, 即飞机在舰作匀速直线运动. 所以飞机来回飞行的总时间

$$t_0 = \frac{2l}{v'}.$$

(b) 假定空气速度向东, 则当飞机向东飞行时速度

$$v_1 = v' + v_0$$

飞行时间

$$t_1 = \frac{l}{v' + v_0}$$

当飞机向西飞行时速度

$$v = v_{\text{相}} + v_{\text{牵}} = v' - v_0$$

飞行时间

$$t_2 = \frac{l}{v' - v_0}$$

故来回飞行时间

$$t = t_1 + t_2 = \frac{l}{v' + v_0} + \frac{l}{v' - v_0} = \frac{2v'l}{v'^2 - v_0^2}$$

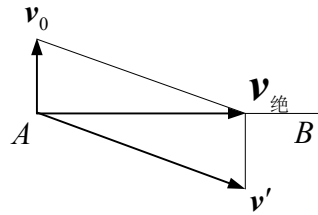
即

$$t = \frac{\frac{2l}{v'}}{1 - \frac{v_0^2}{v'^2}} = \frac{t_0}{1 - \frac{v_0^2}{v'^2}}$$

同理可证，当空气速度向西时，来回飞行时间

$$t = \frac{t_0}{1 - \frac{v_0^2}{v'^2}}$$

(c) 假定空气速度向北. 由速度矢量关系如题 1.13.1 图



题1.13.1图

$$v_{\text{绝}} = v_0 + v'$$

$$v = \sqrt{v'^2 - v_0^2}$$

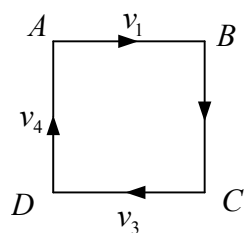
所以来回飞行的总时间

$$t = \frac{2l}{\sqrt{v'^2 - v_0^2}} = \frac{\frac{2l}{v'}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v'^2}}} = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v'^2}}}$$

同理可证空气速度向南时，来回飞行总时间仍为

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v'^2}}}$$

1.14 解 正方形如题 1.14.1 图。



由题可知 $v_{\text{牵}} = v_{\text{风}} = 28 \text{ km/h}$ 设风速 $A \rightarrow B$, $v_{\text{相}} = 100 \text{ km/h}$, 当飞机

$$A \rightarrow B, v_1 = (100 + 28) \text{ km/h} = 128 \text{ km/h}$$

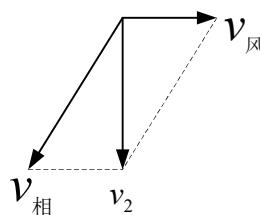
$$B \rightarrow D, v_2 = \sqrt{100^2 - 28^2} \text{ km/h} = 96 \text{ km/h}$$

$$C \rightarrow D, v_3 = (100 - 28) \text{ km/h} = 72 \text{ km/h}$$

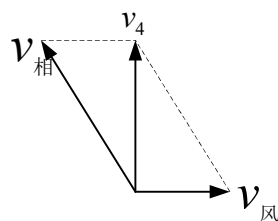
$$D \rightarrow A, v_4 = \sqrt{100^2 - 28^2} \text{ km/h} = 96 \text{ km/h}$$

故飞机沿此边长 6 km/h 正方形飞行一周所需总时间

$$t = \left(\frac{6}{128} + \frac{6}{96} + \frac{6}{72} + \frac{6}{96} \right) h = \frac{49}{192} h = 15 \frac{5}{16} \text{ min}$$

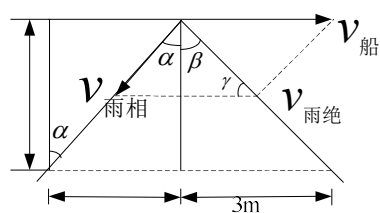


题1.14.2图



题1.14.3图

1.15 解 船停止时, 干湿分界线在篷前 3, 由题画出速度示意图如题. 15.1 图



题1.15.1图

$$v_{\text{雨绝}} = v_{\text{雨相}} + v_{\text{船}}$$

故

$$\frac{v_{\text{船}}}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{v_{\text{雨绝}}}{\sin(\pi - \alpha - \beta - \gamma)}$$

又因为 $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, 所以

$$v_{\text{船}} = \frac{v_{\text{雨绝}} \sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha}$$

由图可知

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin \beta = \frac{3}{5}, \cos \beta = \frac{4}{5}$$

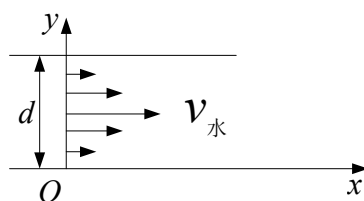
$$v_{\text{雨绝}} = 8 \text{ m/s}$$

所以

$$v_{\text{船}} = \frac{v_{\text{雨绝}} (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)}{\cos \alpha} = 8 \text{ m/s}$$

1.16 解 以一岸边为 x 轴, 垂直岸的方向为 y 轴. 建立如题 1.16.1 图所示坐标系

.



题1.16.1图

所以水流速度

$$v = \begin{cases} ky \left(0 \leq y \leq \frac{d}{2} \right) \\ k(d-y) \left(\frac{d}{2} \leq y \leq d \right) \end{cases}$$

又因为河流中心处水流速度为 c

$$c = k \times \frac{d}{2} = k \times \left(d - \frac{d}{2} \right)$$

所以 $k = \frac{2c}{d}$ 。当 $0 \leq y \leq \frac{d}{2}$ 时, $v_{\text{水}} = \frac{2c}{d} y$ 即

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{2c}{d}y & \text{①} \\ y = ut & \text{②} \end{cases}$$

得 $dx = \frac{2cu}{d}tdt$ ，两边积分

$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{2cu}{d}tdt$$

$$x = \frac{cu}{d}t^2 \quad \text{③}$$

联立②③，得

$$x = \frac{c}{ud}y^2 \left(0 \leq y \leq \frac{d}{2}\right) \quad \text{④}$$

同理，当 $d \geq y \geq \frac{d}{2}$ 时， $v_{\text{水}} = \frac{2c}{d}(d-y)$ 即

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2c}{d}(d-y) = \frac{2c}{d}(d-ut)$$

$$\int dx = \int \frac{2c}{d}(d-ut)dt$$

$$x = \frac{2c}{u}y - \frac{cy^2}{ud} + D (D \text{ 为一常数}) \quad \text{⑤}$$

由④知，当 $y = \frac{d}{2}$ 时， $x = \frac{cd}{4u}$ 代入⑤得

$$D = -\frac{cd}{2u}$$

有

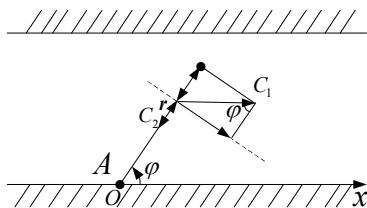
$$x = \frac{2c}{u}y - \frac{cy^2}{ud} - \frac{cd}{2u}, \quad \left(\frac{d}{2} \leq y \leq d\right)$$

所以船的轨迹

$$\begin{cases} x = \frac{c}{ud}y^2 \left(0 \leq y \leq \frac{d}{2}\right) \\ x = \frac{2c}{u}y - \frac{c}{ud}y^2 - \frac{cd}{2u} \left(\frac{d}{2} \leq y \leq d\right) \end{cases}$$

船在对岸的了；靠拢地点，即 $y = d$ 时有 $x = \frac{cd}{2u}$

1.17 解 以 A 为极点, 岸为极轴建立极坐标如题. 17.1 图.



题1.17.1图

船沿垂直于 \mathbf{r} 的方向的速度为 $-C_1 \sin \varphi$, 船沿径向 \mathbf{r} 方向的速度为 C_2 和 C_1 沿径向的分量的合成, 即

$$\begin{cases} r \frac{d\varphi}{dt} = -C_1 \sin \varphi \\ \frac{dr}{dt} = C_1 \cos \varphi - C_2 \end{cases} \quad \text{①---②}$$

②/①得 $\frac{dr}{r} = \left(\frac{C_2}{C_1 \sin \varphi} - \cot \varphi \right) d\varphi$, 对两积分:

$$\ln r = \frac{C_2}{C_1} \ln \tan \frac{\varphi}{2} - \ln \sin \varphi + C$$

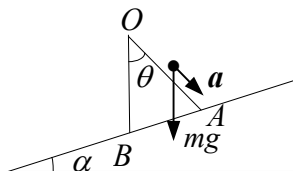
设 $\frac{C_2}{C_1} = k, \frac{\varphi}{2} = \alpha, C$ 为常数, 即

$$\ln r = \ln \frac{\sin^{k-1} \alpha}{2 \cos^{k+1} \alpha} + C$$

代入初始条件 $r = r_0$ 时, $\varphi = \varphi_0$. 设 $\frac{\varphi_0}{2} = \alpha_0$, 有 $C = \ln r_0 - \ln \frac{\sin^{k-1} \alpha_0}{2 \cos^{k+1} \alpha_0}$, 得

$$r = r_0 \frac{\sin^{k-1} \alpha}{\cos^{k+1} \alpha} \cdot \frac{\cos^{k+1} \alpha_0}{\sin^{k-1} \alpha_0}$$

1.18 解 如题 1.18.1 图



题1.18.1图

质点沿 OA 下滑, 由受力分析我们可知质点下滑的加速度为 $a = g \cos \theta$. 设竖直线

$OB = h$, 斜槽 $OA = s$, 易知 $\angle OBA = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle OAB = \frac{\pi}{2} - \theta + \alpha$, 由正弦定理

$$\frac{s}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{h}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha\right)}$$

即

$$s = \frac{h \cos \alpha}{\cos(\theta - \alpha)} \quad (1)$$

又因为质点沿光滑面 OA 下滑, 即质点做匀速直线运动.

所以

$$s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} g \cos \theta t^2 \quad (2)$$

有①②

$$\frac{1}{2} g \cos \theta \cos(\theta - \alpha) t^2 - h \cos \alpha = 0$$

欲使质点到达 A 点时间最短, 由 $t^2 = \frac{2h \cos \alpha}{g \cos \theta \cos(\theta - \alpha)}$ 可知, 只需求出

$\cos \theta \cos(\theta - \alpha)$ 的极大值即可, 令

$$y = \cos \theta \cos(\theta - \alpha) = \cos \theta (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha)$$

$$y = \cos \alpha \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin \alpha$$

把 y 对 θ 求导

$$\frac{dy}{d\theta} = 2 \cos \theta (-\sin \theta) \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos 2\theta \cdot 2 \cdot \sin \alpha$$

极大值时 $\frac{dy}{d\theta} = 0$, 故有

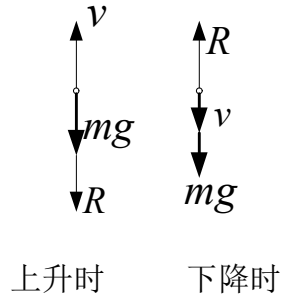
$$\tan \theta = \sin 2\theta$$

由于是斜面的夹角, 即 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

所以

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

1.19 解 质点从抛出到落回抛出点分为上升和下降阶段. 取向上为正各力示意图如题 1.19.1 图,



题 1.19.1 图

则两个过程的运动方程为:

上升

$$m\ddot{y} = -mg - mk^2 g \dot{y}^2 \quad (1)$$

下降:

$$-m\ddot{y} = -mg + mk^2 g \dot{y}^2 \quad (2)$$

对上升阶段:

$$\frac{dv}{dt} = -g(1 + k^2 v^2)$$

$$\frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{v dv}{dy} = -g(1 + k^2 v^2)$$

即

$$\frac{v dv}{1 + k^2 v^2} = -g dy$$

对两边积分

$$\int_{v_0}^0 \frac{v dv}{1 + k^2 v^2} = -\int_0^h g dy$$

所以

$$h = \frac{1}{2k^2 g} \ln(1 + k^2 v_0^2) \quad (3)$$

即质点到达的高度.

对下降阶段:

$$\frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{v dv}{dy} = g - k^2 g v^2$$

即

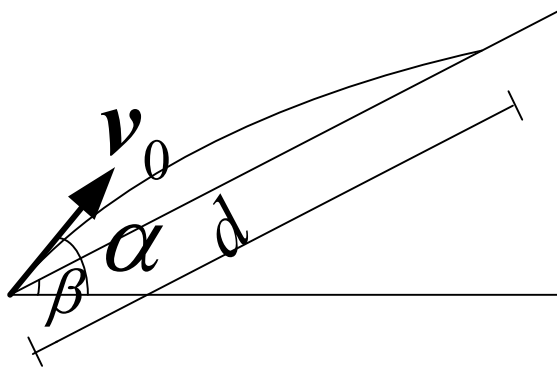
$$\int_0^{v_1} \frac{v dv}{1 - k^2 v^2} = \int_h^0 g dy$$

$$h = -\frac{1}{2k^2 g} \ln(1 - k^2 v_1^2) \quad (4)$$

由③=④可得

$$v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{1 + k^2 v_0^2}}$$

1.20 解 作子弹运动示意图如题 1.20.1 图所示.



题 1.20.1 图

水平方向不受外力，作匀速直线运动有

$$d \cos \beta = v_0 \cos \alpha \cdot t \quad (1)$$

竖直方向作上抛运动，有

$$d \sin \beta = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

由①得

$$t = \frac{d \cos \beta}{v_0 \cos \alpha} \quad (3)$$

代入化简可得

$$d = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{\cos \alpha \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \beta}$$

因为子弹的运动轨迹与发射时仰角 α 有关，即 d 是 α 的函数，所以要求 d 的最大

值. 把 d 对 α 求导, 求出极值点.

$$\frac{dd}{d\alpha} = \frac{2v_0^2}{g \cos^2 \beta} [-\sin \alpha \sin(\alpha - \beta) + \cos \alpha \cos(\alpha - \beta)] = 0$$

即

$$\sin \alpha \sin(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos(\alpha - \beta)$$

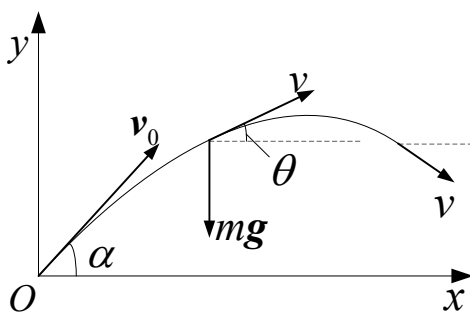
$$\cos(2\alpha - \beta) = 0$$

所以 $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$, 代入 d 的表达式中可得:

$$\begin{aligned} d_{\max} &= \frac{2v_0^2}{g \cos^2 \beta} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} \\ &= \frac{2v_0^2}{g} \sec^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

此即为子弹击中斜面的地方和发射点的距离 d 的最大值

1.21 解 阻力一直与速度方向相反, 即阻力与速度方向时刻在变化, 但都在轨道上没点切线所在的直线方向上, 故用自然坐标比用直角坐标好.



题1.21.1图

轨道的切线方向上有:

$$m \frac{dv}{dt} = -mkv - mg \sin \theta \quad (1)$$

轨道的法线方向上有:

$$m \frac{v^2}{r} = mg \cos \theta \quad (2)$$

由于角是在减小的, 故

$$r = -\frac{ds}{d\theta} \quad (3)$$

由于初末状态由速度与水平方向夹角 θ 来确定，故我们要想法使①②变成关于 θ 的等式

由①

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = mv \frac{dv}{ds}$$

即

$$mv \frac{dv}{ds} = -mkv - mg \sin \theta \quad (4)$$

把代入可得

$$mv^2 \frac{d\theta}{ds} = -mg \cos \theta \quad (5)$$

用④÷⑤可得

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{d\theta} = \frac{kv + g \sin \theta}{g \cos \theta}$$

$$\frac{1}{v^2} dv = \frac{k}{g \cos \theta} d\theta + \frac{\sin \theta}{v \cos \theta} d\theta$$

$$\frac{dv}{v^2 \cos \theta} = \frac{k d\theta}{g \cos^2 \theta} + \frac{\sin \theta}{v \cos^2 \theta} d\theta$$

$$\frac{\cos \theta dv - v \sin \theta d\theta}{v^2 \cos^2 \theta} = \frac{k d\theta}{g \cos^2 \theta}$$

即 $\frac{d(v \cos \theta)}{v^2 \cos^2 \theta} = \frac{k d\theta}{g \cos^2 \theta}$ ，两边积分得

$$-\frac{1}{v \cos \theta} = \frac{k}{g} \tan \theta + C \quad (6)$$

代入初始条件 $t=0$ 时， $\theta = \alpha, v = v_0$ 即可得

$$C = -\left(\frac{1}{v_0 \cos \alpha} + \frac{k}{g} \tan \alpha \right)$$

代入⑥式，得

$$v = \frac{gv_0 \cos \alpha}{\cos \theta [kv \cos(\tan \alpha - \tan \theta) + g]} \quad (7)$$

又因为 $v = \omega r, m \frac{v^2}{r} = mg \cos \theta$

所以

$$\omega = \frac{d\theta}{-dt} - \frac{g \cos \theta}{v} \quad (8)$$

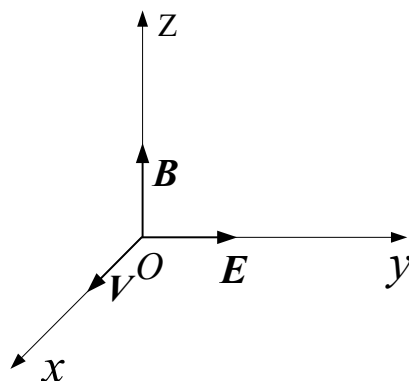
把⑦代入⑧

$$\frac{gv_0 \cos \alpha}{\cos \theta [kv \cos(\tan \alpha - \tan \theta) + g]} d\theta = -g \cos \theta dt$$

积分后可得

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{k} \ln \left(1 + \frac{2kv_0 \sin \alpha}{g} \right)$$

1.22 各量方向如题 1.22.1 图.



题1.22.1图

电子受力

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = eE\mathbf{j} + e \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = ev_y B \mathbf{i} + (eE + evB)\mathbf{j}$$

则电子的运动微分方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = ev_y B = eB\dot{y} \\ m\ddot{y} = eE - ev_x B = eE - eB\dot{x} \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \quad (2)-(3)-(4)$$

由② $m \frac{dv_x}{dt} = eB \frac{dy}{dt}$, 即 $\int_v^{v_x} dv_x = \frac{eB}{m} \int_0^y dy$

$$v_x = \frac{eB}{m}y + V \quad (5)$$

代入③整理可得

$$\ddot{y} + \frac{e^2 B^2}{m^2} y = \frac{e}{m}(E - BV) \quad (6)$$

对于齐次方程 $\ddot{y} + \frac{e^2 B^2}{m^2} y = 0$ 的通解

$$Y_1 = A_1 \cos \frac{eB}{m}t + A_2 \sin \frac{eB}{m}t$$

非齐次方程的特解

$$Y_2 = \frac{m}{eB^2}(E - BV)$$

所以非齐次方程的通解

$$y = Y_1 + Y_2 = A_1 \cos \frac{eB}{m}t + A_2 \sin \frac{eB}{m}t + \frac{m}{eB^2}(E - BV)$$

代入初始条件: $t=0$ 时, $y=0$ 得 $A_1 = \frac{m}{eB}\left(V - \frac{E}{B}\right)$

$t=0$ 时, $v_y=0$ 得 $A_2=0$, 故

$$y = \frac{m}{eB}\left(V - \frac{E}{B}\right)\cos \frac{eB}{m}t - \frac{mV}{eB} + \frac{mE}{eB^2} \quad (7)$$

同理, 把⑦代入⑤可以解出

$$x = \frac{E}{B}t + \frac{m}{eB}\left(V - \frac{E}{B}\right)\sin \frac{eB}{m}t$$

把⑦代入⑤

$$\frac{dx}{dt} = \frac{eB}{m}\left[\frac{m}{eB}\left(V - \frac{E}{B}\right)\cos \frac{eB}{m}t - \frac{mV}{eB} + \frac{mE}{eB^2}\right] + V$$

$$dx = \left(V - \frac{E}{B}\right)\cos \frac{eB}{m}t \cdot dt + \frac{E}{B}dt$$

$$x = \frac{m}{eB}\left(V - \frac{E}{B}\right)\sin \frac{eB}{m}t + \frac{E}{B}t + C$$

代入初条件 $t=0$ 时, $x=0$, 得 $C=0$. 所以

$$x = \frac{m}{eB}\left(V - \frac{E}{B}\right)\sin \frac{eB}{m}t + \frac{E}{B}t$$

1.23 证 (a) 在 1.22 题中, $\mathbf{B} = 0$ 时, 则电子运动受力 $\mathbf{F} = eE\mathbf{j}$ 电子的运动微分方程

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = eE \quad \text{①-②-③} \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

对②积分

$$\dot{y} = \frac{eE}{m}t + C_1 \quad \text{④}$$

对④再积分

$$y = \frac{eE}{2m}t^2 + C_1 + C_2$$

又

$$x = vt, z = 0$$

故

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = \frac{eEx^2}{2mv} + C \end{cases} \quad (C = C_1 + C_2 \text{ 为一常数})$$

此即为抛物线方程.

(b) 当 $\mathbf{E} = 0$ 时

则电子受力

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = e \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = eBv_y\mathbf{i} - eBv_x\mathbf{j}$$

则电子的运动微分方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = eBv_y \\ m\ddot{y} = -eBv_x \quad \text{①-②-③} \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

同 1.22 题的解法, 联立①-②解之, 得

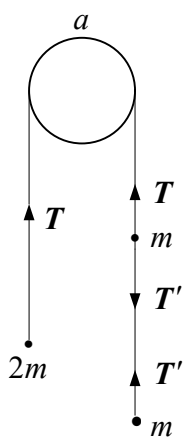
$$\begin{cases} x = \frac{m}{eB} V \sin \frac{eB}{m} t \\ y = \frac{m}{eB} V \cos \frac{eB}{m} t \end{cases}$$

于是

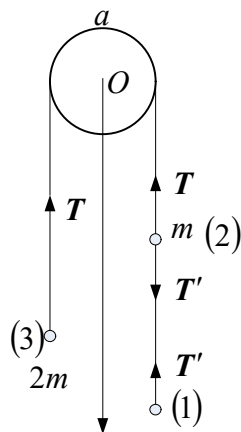
$$x^2 + y^2 = \left(\frac{mv}{eB} \right)^2$$

及电子轨道为半径的圆 $\frac{mV}{eB}$.

1.24 解以竖直向下为正方向, 建立如题 1.24.2 图所示坐标,



题 1.24.1 图



题 1.24.2 图

以①开始所在位置为原点. 设①-②-③处物体所处坐标分别为 y_1, y_2, y_3 , 则 3 个物体运动微分方程为:

$$\begin{cases} mg - T' = m\ddot{y}_1 \\ T' + mg - T = m\ddot{y}_2 \\ 2mg - T = 2m\ddot{y}_3 \end{cases} \quad \text{①-②-③}$$

由②于③与、之间是, 即不可伸长轻绳连接, 所以有 $y_2 = -y_3$, 即

$$\ddot{y} = -\ddot{y} \quad \text{④}$$

之间用倔强系数 $k = \frac{mg}{a}$ 弹性绳联结 .

故有

$$T' = k(y_1 - y_2 - a) = \frac{mg}{a}(y_1 - y_2 - a) \quad \text{⑤}$$

由①⑤得

$$\ddot{y}_1 = -\frac{g}{a}(y_1 - y_2) + 2g \quad (6)$$

由②③④得

$$T' = 3m\ddot{y}_2 + mg \quad (7)$$

代入①, 有

$$\ddot{y}_1 = -3\ddot{y}_2 \quad (8)$$

代入⑥, 有

$$\ddot{y}_1 + \frac{4g}{3a}y_1 = g \quad (9)$$

此即为简谐振动的运动方程.

角频率

$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{3a}}$$

所以周期

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{3a}{g}}$$

解⑨得

$$y_1 = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t + \frac{3a}{4}$$

以初始时③为原点, $t=0$ 时, $y_1=0$, $\dot{y}_1=0$. 所以

$$y_1 = -\frac{3}{4}a \cos \omega t + \frac{3}{4}a \quad (10)$$

代入①得

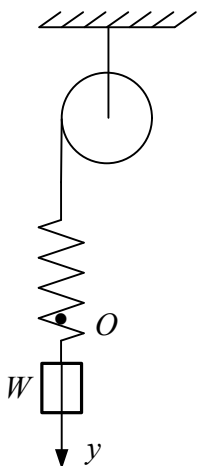
$$T' = mg \left(1 - \cos 2\sqrt{\frac{g}{3a}}t \right)$$

联立-③④⑧⑩得

$$T = 2mg \left(1 - \frac{1}{3} \cos 2\sqrt{\frac{g}{3a}}t \right)$$

1.25 解, 选向下为正方向, 滑轮刚停时物体所在平衡位置为坐标原点. 建立如题

.25.1 图所示坐标系.



题 2.15.1 图

原点的重力势能设为 0. 设弹簧最大伸长 λ_{\max} . 整个过程中, 只有重力做功, 机械能守恒:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{W}{g} v_0^2 + \frac{1}{2} k \lambda_0^2 = -\frac{W}{g} \cdot g \cdot (\lambda_{\max} - \lambda_0) + \frac{1}{2} k \lambda_{\max}^2 & \text{①-②} \\ W = k \lambda_0 \end{cases}$$

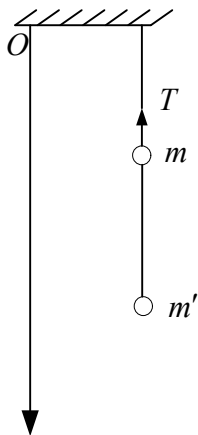
联立①②得

$$\lambda_{\max} = \lambda_0 + v_0 \sqrt{\frac{\lambda_0}{g}}$$

弹簧的最大张力即为弹簧伸长最长时的弹力, T_{\max} 为最大张力, 即

$$T_{\max} = k \lambda_{\max} = W \left[1 + \frac{v_0}{\sqrt{g \lambda_0}} \right]$$

1.26 解 以绳顶端为坐标原点. 建立如题 1.26.1 图所示坐标系.



题 1.26.1 图

设绳的弹性系数为 k , 则有

$$mg = kb \quad ①$$

当 m' 脱离下坠前, m 与 m' 系统平衡. 当 m' 脱离下坠前, m 在拉力 T 作用下上升, 之后作简运. 运动微分方程为

$$mg - k(y - a) = m\ddot{y} \quad ②$$

联立①② 得

$$\ddot{y} + \frac{g}{b}y = g \frac{a+b}{b} \quad ③$$

$$\ddot{y} + \frac{g}{b}y = 0$$

齐次方程通解

$$Y_1 = A_1 \cos \sqrt{\frac{g}{b}}t + A_2 \sin \sqrt{\frac{g}{b}}t$$

非齐次方程③的特解

$$Y_0 = a + b$$

所以③的通解

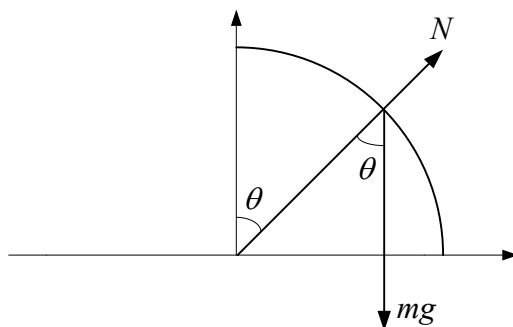
$$Y_1 = A_1 \cos \sqrt{\frac{g}{b}}t + A_2 \sin \sqrt{\frac{g}{b}}t + a + b$$

代入初始条件: $t = 0$ 时, $y = a + b + c$, 得 $A_1 = c, A_2 = 0$; 故有

$$y = c \cos \sqrt{\frac{g}{b}}t + a + b$$

即为 m 在任一时刻离上端 O 的距离.

1.27 解对于圆柱凸面上运动的质点受力分析如图 1-24.



题1.27.1图

运动的轨迹的切线方向上有：

$$mg \sin \theta = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

法线方向上有：

$$mg \cos \theta - N = m \frac{v^2}{R} \quad (2)$$

对于①有 $g \sin \theta = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt}$ (s 为运动路程，亦即半圆柱周围弧长) 即

$$v dv = g \sin \theta ds$$

又因为

$$R d\theta = ds$$

即

$$v dv = g \sin \theta R d\theta \quad (3)$$

设质点刚离开圆柱面时速度 v_0 ，离开点与竖直方向夹角 θ_0 ，对③式两边积分

$$\int_0^{v_0} v dv = \int_0^{\theta_0} g \sin \theta R d\theta$$

$$\frac{1}{2} v_0^2 = gR(1 - \cos \theta_0) \quad (4)$$

刚离开圆柱面时 $N = 0$ 即

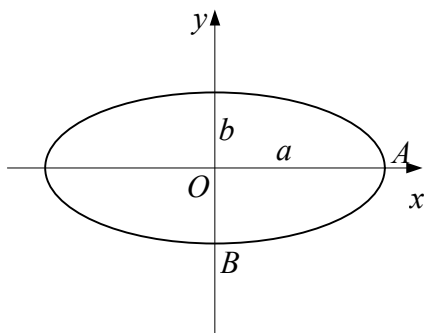
$$mg \cos \theta_0 = m \frac{v_0^2}{R} \quad (5)$$

联立④⑤ 得

$$\theta_0 = \arccos \frac{2}{3}$$

即为刚离开圆柱面时与竖直方向夹角.

1.28 解 建立如题 1.28.1 图所示直角坐标.



题1.28.1图

椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

从 A 滑到最低点 B , 只有重力做功. 机械能守恒. 即

$$mgb = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2)$$

设小球在最低点受到椭圆轨道对它的支持力为 N 则有:

$$N = mg = m \frac{v^2}{\rho} \quad (3)$$

ρ 为 B 点的曲率半径.

$A \rightarrow B$ 的轨迹:

$$y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

得

$$y' = \frac{bx}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}; \quad y'' = \frac{b}{a^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

又因为

$$\frac{1}{\rho} = k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{b}{a^2}$$

所以

$$N = mg + \frac{mv^2}{\rho} = mg + \frac{b}{a^2} \times 2mgh = W \left(1 + 2 \frac{b^2}{a^2} \right)$$

故根据作用力与反作用力的关系小球到达椭圆最低点对椭圆压力为

$$W \left(1 + 2 \frac{b^2}{a^2} \right)$$

方向垂直轨道向下.

1.29 解质点作平面直线运动, 运动轨迹方程为

$$\begin{cases} x = a(2\theta + \sin 2\theta) \\ y = -a(1 + \cos 2\theta) \end{cases} \quad \text{①-②}$$

由曲线运动质点的受力分析, 我们可以得到:

$$\begin{cases} mg \cos \theta - N = m \frac{v^2}{\rho} \\ mg \sin \theta = m \frac{dv}{dt} \end{cases} \quad \text{③-④}$$

因为曲线上每点的曲率

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{⑤}$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{2a \sin 2\theta}{2a + 2a \cos 2\theta} = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \quad \text{⑥}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{d\theta}{dx} \\ &= \frac{2 \cos 2\theta (1 + \cos 2\theta) + 2 \sin^2 2\theta}{(1 + \cos 2\theta)^2} \cdot \frac{1}{2a + 2a \cos 2\theta} = \frac{1}{a(1 + \cos 2\theta)^2} \quad \text{⑦} \end{aligned}$$

把⑥⑦代入曲率公式⑤中

$$k = \frac{1}{4a \cos \theta}$$

所以

$$\rho = \frac{1}{k} = 4a \cos \theta \quad (8)$$

由④

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} = g \sin \theta$$

即 $v dv = g \sin \theta ds$, 又有数学关系可知 $dy = ds \sin \theta$, 即 $v dv = g dy$ 所以

$$v^2 = 2gy = -2ga(1 + \cos 2\theta) \quad (9)$$

把⑧⑨代入①

$$N = mg \cos \theta = m \frac{v^2}{\rho}$$

$$mg \cos \theta + m \frac{2ga(1 + \cos 2\theta)}{4a \cos \theta} = 2mg \cos \theta$$

1.30 证当题 1.29 所述运动轨迹的曲线不光滑时, 质点的运动方程为:

$$\begin{cases} m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos \theta - N \\ d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = (mg \sin \theta - \mu N)ds \end{cases} \quad (1)(2)(3)(4)(5)$$

由 1.29 题可知

$$\rho = 4a \cos \theta \quad (2)$$

由数学知识知

$$\rho d\theta = ds \quad (3)$$

把①③④代入②

$$\frac{1}{2} dv^2 = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) 4a \cos \theta d\theta + \mu v^2 d\theta$$

$$\frac{dv^2}{d\theta} - 2\mu(v^2) = 4ag(\sin 2\theta - \mu - \mu \cos 2\theta) \quad (5)$$

这是一个非齐次二阶微分方程. 解为

$$v^2 = \frac{ag}{1+\mu^2} [-4\mu \sin 2\theta + 2 \cos 2\theta (1 - \mu^2)] - 2ag + Ce^{2\mu\theta}$$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $v = 0$ 得

$$C = \frac{4ag}{1+\mu^2} e^{-\pi\mu}$$

即

$$v^2 = \frac{ag}{1+\mu^2} \left[-4\mu \sin 2\theta + 2 \cos 2\theta (1-\mu^2) \right] + 2ag + \frac{4ag}{1+\mu^2} e^{2\mu\theta - \mu\pi}$$

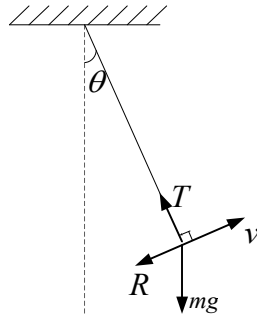
当 $\theta = \pi$, $v = 0$ 时, 即

$$0 = \frac{4ag}{1+\mu^2} e^{-\mu\pi} - 2ag \left(\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} - 1 \right)$$

故有

$$\mu^2 e^{\mu\pi} = 1$$

1.31 证: 单摆运动受力分析如图 1.31.1 图所示。



题1.31.1图

因为

$$M = I\beta \quad (1)$$

即

$$M = -mgl \sin \theta - 2mkl \dot{\theta} \cdot l$$

$$I = ml^2$$

$$\beta = \ddot{\theta}$$

所以

$$l\ddot{\theta} = -g \sin \theta - 2kl\dot{\theta}$$

又单摆摆角 θ 很小, 有 $\sin \theta = \theta$

上式即化为:

$$\ddot{\theta} + 2k\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (2)$$

此即为一个标准的有阻尼振动方程。

设 $\omega_0 = \frac{g}{l}$ 为固有频率, 又由于 $k^2 < \frac{g}{l}$, 即阻力很小的情况。方程②的解为

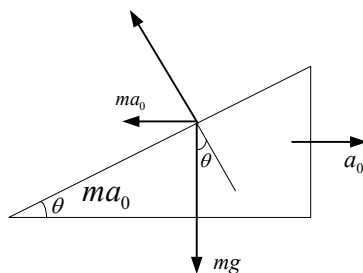
$$\theta = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}, \beta = k$$

$$\text{所以单摆振动周期 } \tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - k^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - k^2 l}}$$

结论得证。

1.32 解：设楔子的倾角为 θ ，楔子向右作加速度 a_0 的匀加速运动，如图 1.32.1 图。



题1.32.1图

我们以楔子为参考系，在非惯性系中分析此题，则质点受到一个大小为 $ma_0 = F_{\text{非惯}}$ 的非惯性力，方向与 a_0 相反。

质点在楔子这个非惯性系中沿斜面下滑，沿斜面的受力分析：

$$mg \sin \theta + ma_0 \cos \theta = ma' \quad (1)$$

垂直斜面受力平衡：

$$mg \cos \theta = ma_0 \sin \theta + N \quad (2)$$

联立①②得

$$\begin{cases} a' = g \sin \theta + a_0 \cos \theta \\ N = mg \left(\cos \theta - \frac{a_0}{g} \sin \theta \right) \end{cases}$$

此即楔子相对斜面的加速度 a' 。

对斜面的压力 P 与斜面对 m 的支持力 N 等大反方向。同理可得当楔子向左作加速度为 a_0 的匀加速运动时，质点 m 的 a' 和楔子对斜面的压力 P 为

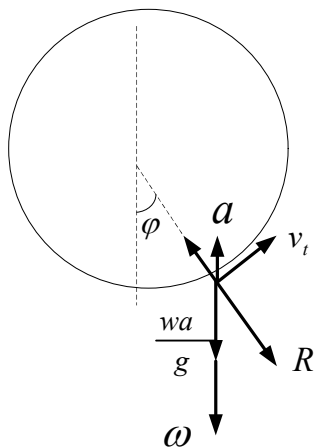
$$\begin{cases} a' = g \sin \theta - a_0 \cos \theta \\ P = mg \left(\cos \theta + \frac{a_0}{g} \sin \theta \right) \end{cases}$$

综上所述可得

$$\begin{cases} a' = g \sin \theta \mp a_0 \cos \theta \\ P = mg \left(\cos \theta \mp \frac{a_0}{g} \sin \theta \right) \end{cases}$$

1.33

解 设钢丝圆圈以加速度 \mathbf{a} 向上作匀加速运动如题 1.33.1 图,



我们以钢丝圆圈作参考系, 在圆圈这个非惯性系里来分析此题。

圆圈上的小环会受到一个大小为 $\left(\frac{\omega}{g}a\right)$ 方向与 \mathbf{a} 相反的惯性力的作用, 则圆环运动到圆圈上某点, 切线方向受力分析:

$$\left(\frac{\omega}{g}a + \omega\right)\sin\varphi = ma_t = -\frac{\omega}{g}\frac{dv_r}{dt} \quad (1)$$

法线方向受力分析有:

$$\left(\frac{\omega}{g}a + \omega\right)\cos\varphi - R = -m\frac{v_r^2}{r} \quad (2)$$

对①

$$\left(\frac{\omega}{g}a + \omega\right)\sin\varphi = ma_t = -\frac{\omega}{g}\frac{dv_r}{dt}$$

两边同乘以 rg

$$r(a + g)\sin\varphi = -\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right) \cdot \frac{dv_r}{d\varphi} = -v_r \frac{dv_r}{d\varphi}$$

即

$$r(a + g)\sin\varphi d\varphi = -v_r dv_r$$

$$\text{两边同时积分 } \int_{\varphi_0}^{\varphi} r(a + g)\sin\varphi d\varphi = -\int_{v_{r0}}^{v_r} v_r dv_r$$

$$v_r = \sqrt{v_{r0}^2 + 2(a + g)(\cos\varphi - \cos\varphi_0)r} \quad (3)$$

把③代入②可解得

$$R = \frac{\omega}{r} \left[\left(1 + \frac{a}{g}\right) (3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)r + \frac{v_{r0}^2}{g} \right]$$

同理可解出, 当钢丝圆圈以加速度 \mathbf{a} 竖直向下运动时小环的相对速度

$$v_r = \sqrt{v_{r0}^2 + 2(g - a)(\cos\varphi - \cos\varphi_0)r}$$

$$R = \frac{\omega}{r} \left[\left(1 - \frac{a}{g} \right) (3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0) r + \frac{v_{r0}^2}{g} \right]$$

综上所述，小环的相对速度 v_r

$$v_r = \sqrt{v_{r0}^2 + 2(g \mp a)(\cos \varphi - \cos \varphi_0)r}$$

圈对小环的反作用力

$$R = \frac{\omega}{r} \left[\left(1 \mp \frac{a}{g} \right) (3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0) r + \frac{v_{r0}^2}{g} \right]$$

1.34 证：(1) 当火车所受阻力 f 为常数时，因为功率 P 与牵引力有如下关系：

$$P = F_{\text{牵}} v$$

所以

$$k = (F_{\text{合}} + f)v$$

即

$$k = \left(m \frac{dv}{dt} + f \right) v$$

$$\frac{mv dv}{k - fv} = dt$$

对两边积分

$$\int_{v_0}^v \frac{v dv}{k - fv} = \int_0^t \frac{dt}{m}$$

$$t = \frac{mk}{f^2} \ln \frac{k - v_0 f}{k - vf} - \frac{m(v - v_0)}{f}$$

(2) 当阻力 f 和速度 v 成正比时，设 $f = lv$ ， l 为常数。同理由 (1) 可知

$$k = \left(m \frac{dv}{dt} + f \right) v$$

即

$$k = mv \frac{dv}{dt} + lv^2$$

$$\frac{v dv}{k - lv^2} = \frac{dt}{m}$$

对两边积分

$$\int_{v_0}^v \frac{v dv}{k - lv^2} = \int_0^t \frac{dt}{m}$$

$$t = \frac{m}{2l} \ln \frac{k - lv_0^2}{k - lv^2} = \frac{mv}{2f} \ln \frac{vk - fv_0^2}{v(k - vf)}$$

1.35 解 锤的压力是均匀增加的，设 $F = kt$ ， k 为常数，由题意可知

$$\int_0^P dF = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt, \text{ 得}$$

$$P = \frac{k}{2} \tau,$$

所以

$$k = \frac{2P}{\tau},$$

即

$$F = \frac{2P}{\tau} t$$

故

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{2P}{\tau} t$$

$$mdv = \frac{2P}{\tau} t dt$$

两边同时积分

$$m \int_0^v dv = \frac{2P}{\tau} \int_0^t t dt$$

得

$$v = \frac{P}{m\tau} t^2, \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\tau}{2} \right) \textcircled{1}$$

又因为当 F 增至极大值 P 后, 又均匀减小到 0, 故此时有 $F = k'(t - \tau)$, k' 为常数,

$$\int_P^0 dF = k' \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} dt$$

$$k' = -\frac{2P}{\tau}$$

所以

$$F = -\frac{2P}{\tau} (t - \tau)$$

即

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{2P}{\tau} (\tau - t)$$

$$m \int_{v_{\frac{\tau}{2}}}^v dv = \frac{2P}{\tau} \int_{\frac{\tau}{2}}^t (\tau - t) dt$$

$$mv - mv_{\frac{\tau}{2}} = -\frac{2P}{\tau} \left[\frac{1}{2} (\tau - t)^2 - \frac{1}{2} \left(\tau - \frac{\tau}{2} \right)^2 \right] \textcircled{2}$$

由①得

$$mv_{\frac{\tau}{2}} = \frac{P\tau}{4} \quad ③$$
$$v = \frac{P}{2m\tau}(-\tau^2 + 4t\tau - 2t^2)$$

整个过程压力所做功 W

又因为

$$\frac{dW}{dt} = Fv$$

即

$$dW = Fvdt$$

对上式两边分段积分

$$\int_0^W dW = \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{2P}{\tau} \cdot \frac{P}{m\tau} t^2 dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \frac{2P}{\tau} (\tau - t) \cdot \frac{P}{2m\tau} (-\tau^2 + 4t\tau - 2t^2) dt$$

得

$$W = \frac{P^2 \tau^2}{8m}$$

1. 36

解 (a) 保守力 F 满足条件 $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ 对题中所给的力的表达式, 代入上式即

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= (18abxz^2 - 18abxz^2) \mathbf{i} + (18abz^2y - 18abz^2y) \mathbf{j} + \\ &\quad (6abz^3 - 40bx^3y - 6abz^3 + 40abx^3y) \mathbf{k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以此力是保守力, 其势为

$$\begin{aligned}
V &= -\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= -\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \\
&= -\int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} (6abz^3 y - 20bx^3 y^2) dx - \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} (6abxz^3 - 10bx^4 y) dy - \\
&\quad \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} 18abxyz^2 dz = 5bx^4 y^2 - 6abxyz^3
\end{aligned}$$

(b)同 (a),

由

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\
&= 0
\end{aligned}$$

所以此力 \mathbf{F} 是保守力, 则其势能为

$$\begin{aligned}
V &= -\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= -\int_{x_A}^{x_B} F_x dx - \int_{y_A}^{y_B} F_y dy - \int_{z_A}^{z_B} F_z dz
\end{aligned}$$

1.37 解 (a) 因为质子与中子之间引力势能表达式为

$$V(r) = \frac{ke^{-\alpha r}}{r} \quad (k < 0)$$

故质子与中子之间的引力 $F(r)$

$$\begin{aligned}
F(r) &= -\frac{dV(r)}{dr} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{ke^{-\alpha r}}{r} \right) \\
&= \frac{ke^{-\alpha r}}{r^2} + \frac{\alpha ke^{-\alpha r}}{r} \\
&= \frac{k(1 + \alpha r)e^{-\alpha r}}{r^2}
\end{aligned}$$

(b) 质量为 m 的粒子作半径为 a 的圆运动。

动量矩

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

由 (a) 知

$$F(r) = \frac{k(1 + \alpha r)e^{-\alpha r}}{r^2}$$

$F(r)$ 提供粒子作圆周运动的向心力, $F(r)$ 方向是沿着径向, 故

$$-\frac{k(1 + \alpha r)e^{-\alpha r}}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

当半径为 a 的圆周运动

$$-\frac{k(1 + \alpha a)e^{-\alpha a}}{a^2} = m \frac{v^2}{a}$$

两式两边同乘以 ma^3
即

$$-mka(1 + \alpha a)e^{-\alpha a} = m^2 v^2 a^2$$

又因为

$$J = mva$$

有

$$J^2 = -mka(1 + \alpha a)e^{-\alpha a}$$

做圆周运动的粒子的能量等于粒子的动能和势能之和。
所以

$$\begin{aligned} E &= T + V \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + V(a) \\ &= -\frac{k(1 + \alpha a)e^{-\alpha a}}{2a} + \frac{ke^{-\alpha a}}{a} = \frac{k(1 - \alpha a)e^{-\alpha a}}{2a} \end{aligned}$$

1.38 解 要满足势能的存在, 即力场必须是无旋场, 亦即力为保守力, 所以 $\nabla \times \mathbf{F} = 0$
即

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \end{array} \right.$$

得

$$\begin{cases} a_{32} = a_{23} \\ a_{12} = a_{21} \\ a_{13} = a_{31} \end{cases}$$

$a_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ 为常数满足上式关系，才有势能存在。

势能为：

$$\begin{aligned} V &= -\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\left(\int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz \right) \\ &= -\int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) dx - \\ &\quad \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) dy - \\ &\quad \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) dz \\ &= \frac{1}{2} (a_{11}x^2 + a_{12}y^2 + a_{31}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx) \end{aligned}$$

1.39 证 质点受一与距离 $\frac{3}{2}$ 成反比的力的作用。

设此力为

$$F(r) = kr^{-\frac{3}{2}} (k \text{ 为一常数}) \text{①}$$

又因为

$$F(r) = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = md \frac{v dv}{dr}$$

即

$$F(r) dr = m v dv$$

$$kr^{-\frac{3}{2}} dr = m v dv \text{②}$$

当质点从无穷远处到达 a 时，对②式两边分别积分：

$$\begin{aligned} \int_{+\infty}^a kr^{-\frac{3}{2}} dr &= m \int_0^v v dv \\ v^2 &= -\frac{4k}{m} a^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

当质点从 a 静止出发到达 $\frac{a}{4}$ 时，对②式两边分别积分：

$$\int_a^{\frac{a}{4}} kr^{-\frac{3}{2}} dr = m \int_0^v v dv$$

得

$$v^2 = -\frac{4k}{m}a^{\frac{1}{2}}$$

所以质点自无穷远到达 a 时的速率和自 a 静止出发到达 $\frac{a}{4}$ 时的速率相同。

1.40 解由题可知 $F(r) = -\frac{k}{r}$ (因为是引力, 方向与 r 径向相反所以要有负号)

由运动微分方程

$$-\frac{k}{r} = m \frac{dv}{dt}$$

即

$$\begin{aligned} -\frac{k}{r} &= m \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \\ -\frac{k}{r} dr &= m v dv \quad \text{①} \end{aligned}$$

对上式两边积分

$$\begin{aligned} -\int_a^r \frac{k}{r} dr &= \int_0^v m v dv \\ -k \ln \frac{r}{a} &= \frac{1}{2} m v^2 \end{aligned}$$

故

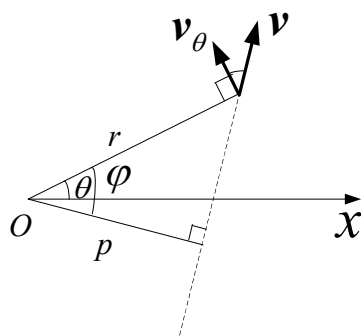
$$v = \pm \sqrt{\frac{2k}{m} \ln \frac{a}{r}}$$

又因为 r 与 v 的方向相反, 故取负号。

即

$$v = -\sqrt{\frac{2k}{m} \ln \frac{a}{r}} = \frac{dr}{dt}$$

1.41 证 画出有心力场中图示如题 1.41.图,



题1.41.1图

我们采用的是极坐标。所以

$$v_{\theta} = r\dot{\theta} = v \cos \varphi$$

又由于

$$h = r^2 \dot{\theta} = \text{常数}$$

即

$$h = r \bullet r \dot{\theta} = rv \cos \varphi$$

由图所示关系，又有 $p = r \cos \varphi$ ，故 $h = pv$ 即 $v = \frac{h}{p}$

由动能定理

$$\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

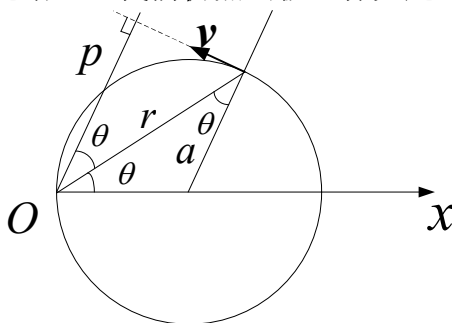
\mathbf{F} 沿 \mathbf{r} 方向

$$\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = Fdr$$

得

$$F = \frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dr} = \frac{1}{2}mh^2 \frac{dp^{-2}}{dr}$$

1.42 证 (a) 依据上题结论，我们仍然去极坐标如题 1.42.1 图。



题1.42.1图

质点运动轨迹为一圆周，则其极坐标方程为

$$r = 2a \cos \theta \quad (1)$$

$$p = r \cos \theta$$

由①②得

$$r^2 = 2ap \quad (2)$$

即

$$p = \frac{r^2}{2a} \quad (3)$$

故

$$F = \frac{1}{2}mh^2 \frac{dp^{-2}}{dr} = \frac{1}{2}mh^2 \frac{d\left(\frac{4a^2}{r^4}\right)}{dr} = -\frac{8a^2mh^2}{r^5}$$

即力与距离 5 次方成正比，负号表示力的方向与径向相反。

(b) 质点走一对数螺旋线，极点为力心，我们仍采用极坐标。对数螺旋

线 $r = e^{a\theta}$, a 为常数。有

$$\dot{r} = ar\dot{\theta}$$

根据题 1.41, $h = r^2\dot{\theta} = \text{常数}$, 有

$$\begin{aligned} F &= \frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dr} \\ &= \frac{1}{2}m \frac{d}{dr}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(a^2 + 1) \frac{d}{dr}(r^2\dot{\theta}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(a^2 + 1) \frac{d}{dr}\left(\frac{h^2}{r^2}\right) \\ &= -mh^2(a^2 + 1)r^{-3} \end{aligned}$$

故得证。

1.43 证 由毕耐公式

$$-\frac{F}{m} = -h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

质点所受有心力做双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ 运动

故

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{r} = \frac{1}{a\sqrt{\cos 2\theta}} \\ \frac{du}{d\theta} &= \frac{1}{a} \bullet \sin 2\theta \bullet \frac{1}{(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{1}{a} \left[\frac{2\cos 2\theta}{(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2} \sin 2\theta \bullet (\cos 2\theta)^{-\frac{5}{2}} \bullet 2\sin 2\theta \right] \\ &= \frac{1}{a} \left[2(\cos 2\theta)^{-\frac{1}{2}} + 3\sin^2 2\theta (\cos 2\theta)^{-\frac{5}{2}} \right] \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} F &= -mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) \\ &= -mh^2 \frac{1}{a^3 \cos 2\theta} \left[2(\cos 2\theta)^{-\frac{1}{2}} + 3\sin^2 2\theta (\cos 2\theta)^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}} \right] \\ &= -\frac{3mh^2}{a^3} (\cos 2\theta)^{-\frac{3}{2}} (1 + \tan^2 2\theta) = -\frac{3mh^2}{a^3} (\cos 2\theta)^{-\frac{7}{2}} \\ &= -\frac{3mh^2}{a^3 \left(\frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{7}{2}}} = -\frac{3ma^4h^2}{r^7} \end{aligned}$$

1.44 证 由毕耐公式

$$-\frac{F}{m} = -h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right)$$

将力 $F = -m \left(\frac{\mu^2}{r^2} + \frac{\nu}{r^3} \right)$ 带入此式

$$\frac{\mu^2}{r^2} + \frac{\nu}{r^3} = h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right)$$

因为

$$u = \frac{1}{r}$$

所以

$$\mu^2 u^2 + \nu u^3 = h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right)$$

即

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{\nu}{h^2} \right) u = \frac{\mu^2}{h^2}$$

令

$$k^2 = \frac{h^2 - \nu}{h^2}$$

上式化为

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + k^2 u = \frac{\mu^2}{h^2}$$

这是一个二阶常系数废气次方程。

解之得

$$u = A \cos(k\theta + \varphi) + \frac{\mu^2}{k^2 h^2}$$

A 微积分常数, 取 $\varphi = 0$, 故

$$u = A \cos k\theta + \frac{\mu^2}{k^2 h^2}$$

有

$$r = \frac{1}{u} = \frac{1}{A \cos k\theta + \frac{\mu^2}{k^2 h^2}} = \frac{\frac{k^2 h^2}{\mu^2}}{A \frac{k^2 h^2}{\mu^2} \cos k\theta + 1}$$

令

$$a = \frac{k^2 h^2}{\mu^2}, \quad e = \frac{A k^2 h^2}{\mu^2}$$

所以

$$r = \frac{a}{1 + e \cos k\theta}$$

1.45 证 由题意可知，质点是以太阳为力心的圆锥曲线，太阳在焦点上。
轨迹方程为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

在近日点处

$$\theta = 0^\circ, \quad r_a = \frac{p}{1 + e}$$

在远日点处

$$\theta = 180^\circ \quad r_p = \frac{p}{1 - e},$$

由角动量守恒有
所以

$$\dot{s}_p : \dot{s}_a = r_p : r_a = (1 + e)(1 - e)$$

1.46 解 因为质点速率

$$v = \frac{a}{r}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

所以

$$\frac{a^2}{r^2} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

又由于

$$h = r^2 \dot{\theta}$$

即

$$\frac{a^2}{r^2} = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{r^4 \dot{\theta}^2}{r^2}$$

$$\frac{a^2}{r^2} = \left(\frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{h^2}{r^2}$$

$$\left(\frac{dr}{d\theta} \bullet \frac{h}{r^2} \right)^2 = \frac{a^2 - h^2}{r^2}$$

又因为

$$a^2 > h^2$$

所以

$$\frac{dr}{r} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{h} d\theta$$

两边积分

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = \pm \int_0^\theta \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{h} d\theta$$

即

$$\ln \frac{r}{r_0} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{h} \theta$$

1.47 证 (a) 设地球轨道半径为 R 。则彗星的近日点距离为 $\frac{R}{n}$ 。圆锥曲线的极坐标方程为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

彗星轨道为抛物线，即 $e = 1$ 。近日点时 $\theta = 0$ 。故近日点有

$$r = \frac{p}{1 + e} = \frac{p}{2}$$

即

$$\frac{R}{n} = \frac{p}{2}, p = \frac{2R}{n} \quad (1)$$

又因为

$$p = \frac{h^2}{k^2}, h = r^2 \dot{\theta}$$

所以

$$h = k \sqrt{\frac{2R}{n}} \quad (2)$$

(彗星在单位时间内矢径扫过的面积 h)

扫过扇形面积的速度

$$v = \frac{h}{2} = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{2R}{n}} \quad (3)$$

又因为

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

故

$$ds = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

两边积分

$$\begin{aligned} \int_0^s ds &= \frac{1}{2} \int_{-\theta}^{\theta} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{4R^2}{h^2 (1 + \cos \theta)^2} d\theta \\ &= \frac{4R^2}{h^2} \left[\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{3(1 + \cos \theta)} + \frac{1}{3} \tan \frac{\theta}{2} \right] \quad (4) \end{aligned}$$

从数学上我们可以得到两轨道交点为地球轨道半径处。

即

$$R = \frac{p}{1 + \cos \theta} = \frac{2R/n}{1 + \cos \theta}$$

即

$$\cos \theta = \frac{2-n}{n} \quad (5)$$

又因为

$$\cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

所以

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \pm \sqrt{n-1} \quad (6)$$

把⑤⑥代入④（⑥式代入时取“+”即可）

$$s = \frac{4R^2}{h^2} \left[\frac{\sqrt{n-1}}{3 \frac{2}{n}} + \frac{1}{3} \sqrt{n-1} \right] = \frac{2R^2}{3H^2} \sqrt{n-1} (n+2)$$

故彗星在地球轨道内停留的时间为

$$\begin{aligned} t_1 = \frac{s}{v} &= \frac{\frac{2R^2}{3h^2} (n+2) \sqrt{n-1}}{\frac{k}{2} \sqrt{\frac{2R}{n}}} \\ &= \frac{4R^{\frac{3}{2}}}{k} \cdot \frac{n+2}{3n} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{2n}} \quad (7) \end{aligned}$$

设地球绕太阳运动一周的时间为 t_2 。

因为假定地球运动轨道为圆形，所以

$$r = R = \frac{p}{1 + e \cos \theta} = p$$

又由于 $p = \frac{h^2}{k^2}$ ，有 $h = kR^{\frac{1}{2}}$

地球绕太阳运动单位时间内矢径扫过的面积 h 。

扫过扇形速度

$$\begin{aligned} v &= \frac{h}{2} = \frac{kR^{\frac{1}{2}}}{2} \\ t_2 = \frac{s'}{v} &= \frac{\pi R^2}{\frac{1}{2} k R^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\pi R^{\frac{3}{2}}}{k} \\ \frac{t_1}{t_2} &= \frac{\frac{4R^{\frac{3}{2}}}{k} \cdot \frac{(n+2)}{3n} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{2n}}}{\frac{2\pi R^{\frac{3}{2}}}{k}} = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{n+2}{n} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{2n}} \quad (8) \end{aligned}$$

（b）由证明（a）知

彗星在地球轨道内停留时间 t_1

$$t_1 = \frac{4R^{3/2}}{k} \cdot \frac{(n+2)}{3n} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{2n}}$$

对此式求极大值，即对 n 求导，使 $\frac{dt_1}{dn} = 0$

即

$$\frac{dt_1}{dn} = \frac{4R^{3/2}}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} n^{-2} \left(1 + \frac{2}{n} \right) - 2 \sqrt{1 - \frac{1}{n}} n^{-2} \right] = 0$$

即

$$\frac{3}{n} = \frac{3}{2},$$

得

$$n = 2$$

验证

$$\frac{d^2 t_1}{dn^2} = \left[-\frac{3}{n^2 \sqrt{n-1}} - \left(\frac{3}{n} - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{2\sqrt{(n-1)^3}} \right] \Big|_{n=2} < 0$$

故 $n = 2$ 为极大值，代入⑧式可知

$$\frac{t_1}{t_2} \Big|_{\max} = \frac{2}{3\pi}$$

1.48 解 由 § 1.9 给出的条件：

人造地球卫星近、远点距离 r_1, r_2 分别为

$$r_1 = 439km, r_2 = 2348km.$$

地球半径 $R \approx 6400km$.

有椭圆运动中的能量方程可知：

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1 + R} = -\frac{GMm}{2a} \quad ①$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2 + R} = -\frac{GMm}{2a} \quad ②$$

$2a$ 为卫星运行的椭圆轨道的长轴

$$2a = r_1 + r_2 + 2R = 15623 \text{ km}$$

把 $2a$ 代入①②有

近地点速率

$$v_1 \approx 8.15 \times 10^3 \text{ m/s}$$

远地点速率

$$v_2 \approx 6.34 \times 10^3 \text{ m/s}$$

运动周期

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{k} \quad (\text{参见 1.47})$$

其中 a 为运动轨道的半长轴

$$k = \sqrt{GM}$$

所以

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \approx 114 \text{ min}$$

1.49 证 由行星绕太阳作椭圆运动的能量方程为

$$\frac{1}{2mv^2} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a}$$

a 为椭圆的半长轴。

令

$$k^2 = GM.$$

又因为

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2,$$

上式化为：

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k^2 m}{r} = -\frac{mk^2}{2a}$$

因为

$$h = r^2\dot{\theta}$$

即

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} = \frac{2k^2}{r} - \frac{k^2}{a}$$

所以

$$r^2\dot{r}^2 = 2rk^2 - h^2 - \frac{k^2 r^2}{a} \quad (1)$$

又因为行星椭圆轨道运动周期

$$\tau = \frac{2\pi a^{3/2}}{k}$$

即

$$\frac{k}{a^{3/2}} = \frac{2\pi}{\tau} = \text{常数 } C,$$

故

$$C^2 = \frac{k^2}{a^3}$$

又因为

$$p = a(1 - e^2)$$

$$p = \frac{h^2}{k^2}, p \text{ 为正焦弦的一半}$$

所以

$$h^2 = k^2 a(1 - e^2) = C^2 a^4(1 - e^2) \quad (2)$$

由题意可知

$$a - r = ae \cos E$$

即

$$\frac{dr}{dt} = ae \sin E \frac{dE}{dt} \quad (3)$$

把②③代入①可得

$$\frac{a^2 e^2 \sin^2 E}{C^2 a^2} \left(\frac{dE}{dt} \right)^2 r^2 = a^2 e^2 \sin^2 E$$

化简可得

$$\frac{r}{aC} \bullet \frac{dE}{dt} = 1, rdE = a dt$$

即

$$(1 - e \cos E) dE = \frac{2\pi}{\tau} dt$$

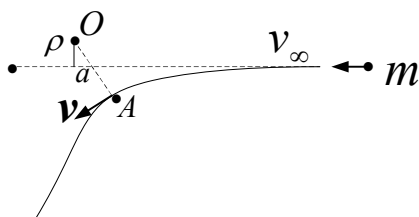
两边积分，由题设

$$\int \frac{2\pi}{\tau} dt = T$$

即

$$T = \int_0^E (1 - e \cos E) dE = E - e \sin E$$

1.50 解 质点在有心力场中运动，能量和角动量均守恒。无穷远处势能为零。



题1.50.1图

所以

$$\frac{1}{2} m v_{\infty}^2 = \frac{1}{2} m v^2 + V_{(a)} \quad (1)$$

$$m v_{\infty} \rho = m v a \quad (2)$$

任意一处

$$V_{(a)} = -\int F(r)dr = -\int_{\infty}^a \frac{mc}{r^3} dr = \frac{mc}{2a^2}$$

由② $v = \frac{v_{\infty}\rho}{a}$ 代入①

$$v_{\infty}^2 = \frac{v_{\infty}^2 \rho^2}{a^2} + \frac{c}{a^2}$$

所以

$$a = \left(\rho^2 + \frac{c}{v_{\infty}^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

第二章 质点组力学

第二章思考题

- 2.1 一均匀物体假如由几个有规则的物体并合（或剝去）而成，你觉得怎样去求它的质心？
- 2.2 一均匀物体如果有三个对称面，并且此三对称面交于一点，则此质点即均匀物体的质心，何故？
- 2.3 在质点动力学中，能否计算每一质点的运动情况？假如质点组不受外力作用，每一质点是否都将静止不动或作匀速直线运动？
- 2.4 两球相碰撞时，如果把此两球当作质点组看待，作用的外力为何？其动量的变化如何？如仅考虑任意一球，则又如何？
- 2.5 水面上浮着一只小船。船上一人如何向船尾走去，则船将向前移动。这是不是与质心运动定理相矛盾？试解释之。
- 2.6 为什么在碰撞过程中，动量守恒而能量不一定守恒？所损失的能量到什么地方去了？又在什么情况下，能量才也守恒？
- 2.7 选用质心坐标系，在动量定理中是否需要计入惯性力？
- 2.8 轮船以速度 V 行驶。一人在船上将一质量为 m 的铁球以速度 v 向船首抛去。有人认为：这时人作的功为

$$\frac{1}{2}m(V+v)^2 - \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mvV$$

你觉得这种看法对吗？如不正确，错在什么地方？

- 2.9 秋千何以能越荡越高？这时能量的增长是从哪里来的？
- 2.10 在火箭的燃料全部燃烧完后，§2.7（2）节中的诸公式是否还能应用？为什么？
- 2.11 多级火箭和单级火箭比起来，有哪些优越的地方？

第二章思考题解答

- 2.1.答：因均匀物体质量密度处处相等，规则形体的几何中心即为质心，故先找出各规则形体的质心把它们看作质点组，然后求质点组的质心即为整个物体的质心。对被割去的部分，先假定它存在，后以其负质量代入质心公式即可。
- 2.2.答：物体具有三个对称面已足以确定该物体的规则性，该三平面的交点即为该物体的几

何对称中心，又该物体是均匀的，故此点即为质心的位置。

2.3.答：对几个质点组成的质点组，理论上可以求每一质点的运动情况，但由于每一质点受到周围其它各质点的相互作用力都是相互关联的，往往其作用力难以预先知道；再者，每一质点可列出三个二阶运动微分方程，各个质点组有 $3n$ 个相互关联的三个二阶微分方程组，难以解算。但对于二质点组成的质点组，每一质点的运动还是可以解算的。

若质点组不受外力作用，由于每一质点都受到组内其它各质点的作用力，每一质点的合内力不一定等于零，故不能保持静止或匀速直线运动状态。这表明，内力不改变质点组整体的运动，但可改变组内质点间的运动。

2.4.答：把碰撞的二球看作质点组，由于碰撞内力远大于外力，故可以认为外力为零，碰撞前后系统的动量守恒。如果只考虑任一球，碰撞过程中受到另一球的碰撞冲力的作用，动量发生改变。

2.5.答：不矛盾。因人和船组成的系统在人行走前后受到的合外力为零（忽略水对船的阻力），且开船时系统质心的初速度也为零，故人行走前后系统质心相对地面的位置不变。当人向船尾移动时，系统的质量分布改变，质心位置后移，为抵消这种改变，船将向前移动，这是符合质心运动定理的。

2.6.答：碰撞过程中不计外力，碰撞内力不改变系统的总动量，但碰撞内力很大，使物体发生形变，内力做功使系统的动能转化为相碰物体的形变能（分子间的结合能），故动量守恒能量不一定守恒。只有完全弹性碰撞或碰撞物体是刚体时，即相碰物体的形变可以完全恢复或不发生形变时，能量也守恒，但这只是理想情况。

2.7.答：设质心的速度 \mathbf{v}_c ，第 i 个质点相对质心的速度 \mathbf{v}'_i ，则 $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}'_i$ ，代入质点组动

量定理可得 $\frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{v}'_i \right) = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_i \mathbf{F}_i^{(i)} + \sum_i (-m_i \mathbf{a}_c)$ 这里用到了质心运动定理

$\sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} = \sum_i m_i \mathbf{a}_c$ 。故选用质心坐标系，在动量定理中要计入惯性力。但质点组相对质心

的动量守恒 $\sum_i m_i \mathbf{v}'_i = \text{常矢量}$ 。当外力改变时，质心的运动也改变，但质点组相对于质心参考系的动量不变，即相对于质心参考系的动量不受外力影响，这给我们解决问题带来不少方便。值得指出：质点组中任一质点相对质心参考系有 \mathbf{v}'_i ，对质心参考系动量并不守恒。

2.8.答不对。因为人抛球前后球与船和人组成的系统的动量守恒，球抛出后船和人的速度不再是 V 。设船和人的质量为 M ，球抛出后船和人的速度为 V' ，则

$(M+m)V = MV_1 + m(V_1 + v)$ $V_1 = V - \frac{m}{M+m}v$ 球出手时的速度应是 $(V_1 + v)$ 。人做的

功应等于系统动能的改变，不是只等于小球动能的改变，故人做的功应为

$$\frac{1}{2}MV_1^2 + \frac{1}{2}m(V_1 + v)^2 - (M+m)V^2 = \frac{1}{2} \frac{Mm}{M+m} v^2 \text{ 显然与系统原来的速度无关。}$$

2.9.答：秋千受绳的拉力和重力的作用，在运动中绳的拉力提供圆弧运动的向心力，此力不做功，只有重力做功。重力是保守力，故重力势能与动能相互转化。当秋千荡到铅直位置向上去的过程中，人站起来提高系统重心的位置，人克服重力做功使系统的势能增加；当达到最高点向竖直位置折回过程中，人蹲下去，内力做功降低重心位置使系统的动能增大，这样循环往复，系统的总能不断增大，秋千就可以越荡越高。这时能量的增长是人体内力做功，消耗人体内能转换而来的。

2.10.答：火箭里的燃料全部烧完后，火箭的质量不再改变，然而质量不变是变质量物体运动问题的特例，故§2.7（2）中诸公式还能适用，但诸公式都已化为恒质量系统运动问题的公式。

2.11.答：由 $v = v_0 + v_r \ln \frac{m_0}{m_s} = v_0 + v_r \ln z$ 知，要提高火箭的速度必须提高喷射速度 v_r 或

增大质量比 $\frac{m_0}{m_s}$ 。由于燃料的效能，材料的耐温等一系列技术问题的限制， v_r 不能过大；

又由于火箭的外壳及各装置的质量 m_0 相当大，质量比也很难提高，故采用多级火箭，一级火箭的燃料燃完后外壳自行脱落减小火箭的质量使下一级火箭开始工作后便于提高火箭的速度。

若各级火箭的喷射速度都为 v_r ，质量比分别为 z_1, z_2, \dots, z_n ，各级火箭的工作使整体速度增加 v_1, v_2, \dots, v_n ，则火箭的最后速度

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_r (\ln z_1 + \ln z_2 + \dots + \ln z_n) = v_r \ln(z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n)$$

因每一个 z 都大于 1，故 v 可达到相当大的值。

但火箭级数越多，整个重量越大，制造技术上会带来困难，再者级越高，质量比越减小，级数很多时，质量比逐渐减小趋近于 1，速度增加很少。故火箭级数不能过多，一般三至四级火箭最为有效。

第二章习题.

2.1 求均匀扇形薄片的质心，此扇形的半径为 a ，所对的圆心角为 2θ ，并证半圆片的质心

离圆心的距离为 $\frac{4}{3} \frac{a}{\pi}$ 。

2.2 如自半径为 a 的球上，用一与球心相距为 b 的平面，切出一球形帽，求此球形帽的质心。

2.3 重为 W 的人，手里拿着一个重为 w 的物体。此人用与地平线成 α 角的速度 v_0 向前跳去，跳的距离增加了多少？

2.4 质量为 m_1 的质点，沿倾角为 θ 的光滑直角劈滑下，劈的本身，质量为 m_2 ，又可在光滑水平面自由滑动。试求

(a) 质点水平方向的加速度 \ddot{x}_1 ；

(b) 劈的加速度 \ddot{x}_2 ；

(c) 劈对质点的反作用力 R_1 ；

(d) 水平面对劈的反作用力 R_2 ；

2.5 半径为 a ，质量为 M 的薄圆片，绕垂直于圆片并通过圆心的竖直轴以匀角速 ω 转动，求绕此轴的动量矩。

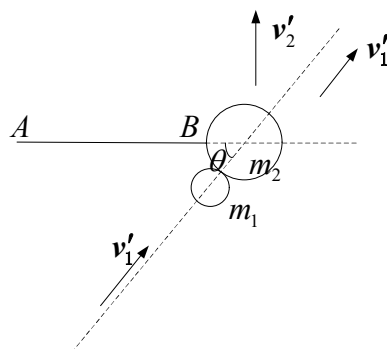
2.6 一炮弹的质量为 $M_1 + M_2$ ，射出时的水平及竖直分速度为 U 及 V 。当炮弹达到最高点时，其内部的炸药产生能量 E ，使此炸弹分为 M_1 及 M_2 两部分。在开始时，两者仍沿原方向飞行，试求它们落地时相隔的距离，不计空气阻力。

2.7 质量为 M ，半径为 a 的光滑半球，其底面放在光滑的水平面上。有一质量为 m 的质点沿此半球面滑下。设质点的初位置与球心的连线和竖直向上的直线间所成之角为 α ，并且起始时此系统是静止的，求此质点滑到它与球心的连线和竖直向上直线间所成之角为 θ 时 $\dot{\theta}$ 之值。

2.8 一光滑球 A 与另一静止的光滑球 B 发生斜碰。如两者均为完全弹性体，且两球的质量相等，则两球碰撞后的速度互相垂直，试证明之。

2.9 一光滑小球与另一相同的静止小球相碰撞。在碰撞前，第一小球运动的方向与碰撞时两球的联心线成 α 角。求碰撞后第一小球偏过的角度 β 以及在各种 α 值下 β 角的最大值。设恢复系数 e 为已知。

2.10 质量为 m_2 的光滑球用一不可伸长的绳系于固定点 A 。另一质量为 m_1 的球以与绳成 θ 角的速度 v_1 与 m_2 正碰。试求 m_1 与 m_2 碰后开始运动的速度 v'_1 及 v'_2 。设恢复系数 e 为已知。



第2.10题图

2.11 在光滑的水平桌面上，有质量各为 m 的两个质点，用一不可伸长的绳紧直相连，绳长为 a 。设其中一质点受到一个为绳正交的冲量 I 的作用，求证此后两质点各做圆滚线运动，

且其能量之比为 $\cot^2\left(\frac{It}{2am}\right) = 1$ ，式中 t 为冲力作用的时间。

2.12 质量为 m_1 的球以速度 v_1 与质量为 m_2 的静止球正碰。求碰撞后两球相对于质心的速度 V'_1 和 V'_2 又起始时，两球相对于质心的动能是多少？恢复系数 e 为已知。

2.13 长为 l 的均匀细链条伸直地平放在水平光滑桌面上，其方向与桌边缘垂直，此时链条的一半从桌上下垂。起始时，整个链条是静止的。试用两种不同的方法，求此链条的末端滑到桌子边缘时，链条的速度 v 。

2.14 一柔软、无弹性、质量均匀的绳索，竖直地自高处下坠至地板上。如绳索的长度等于 l ，每单位长度的质量等于 σ 。求当绳索剩在空中的长度等于 x ($x < l$) 时，绳索的速度及它对地板的压力。设开始时，绳索的速度为零，它的下端离地板的高度为 h 。

2.15 机枪质量为 M ，放在水平地面上，装有质量为 M' 的子弹。机枪在单位时间内射出的质量为 m 。其相对地面的速度则为 u ，如机枪与地面的摩擦系数为 μ ，试证当 M' 全部射出后，机枪后退的速度为

$$\frac{M'}{M}u - \frac{(M + M')^2 - M^2}{2mM}\mu g$$

2.16 雨滴落下时，其质量的增加率与雨滴的表面积成正比例，求雨滴速度与时间的关系。

2.17 设用某种液体燃料发动的火箭，喷气速度为 2074 米/秒，单位时间内所消耗的燃料为原始火箭总质量的 $\frac{1}{60}$ 。如重力加速度 g 的值可以认为是常数，则利用此种火箭发射人造太

阳行星时，所携带的燃料的重量至少是空火箭重量的 300 倍。试证明之。

2.18 原始总质量为 M_0 的火箭，发射时单位时间内消耗的燃料与 M_0 成正比，即 αM_0 (α 为比例常数)，并以相对速度 v 喷射。已知火箭本身的质量为 M ，求证只有当 $\alpha v > g$ 时，火箭才能上升；并证能达到的最大速度为

$$v \ln \frac{M_0}{M} - \frac{g}{\alpha} \left(1 - \frac{M}{M_0} \right)$$

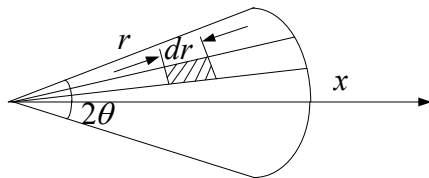
能到的最大高度为

$$\frac{v^2}{2g} \left(\ln \frac{M_0}{M} \right) + \frac{v}{\alpha} \left(1 - \frac{M}{M_0} - \ln \frac{M_0}{M} \right)$$

2.19 试以行星绕太阳的运动为例，验证维里定理。计算时可利用 1.9 中所有的关系和公式，即认为太阳是固定不动的。

第二章习题解答

2.1 解 均匀扇形薄片，取对称轴为 x 轴，由对称性可知质心一定在 x 轴上。



题2.1.1图

有质心公式

$$x_c = \frac{\int x dm}{\int dm}$$

设均匀扇形薄片密度为 ρ ，任意取一小面元 dS ，

$$dm = \rho dS = \rho r d\theta dr$$

又因为

$$x = r \cos \theta$$

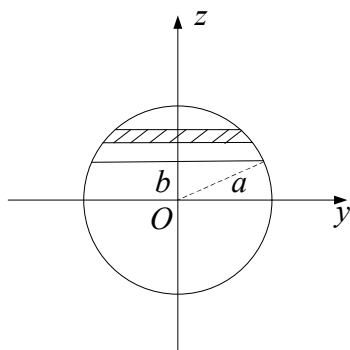
所以

$$x_c = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\iint x \rho r d\theta dr}{\iint \rho r d\theta dr} = \frac{2}{3} a \frac{\sin \theta}{\theta}$$

对于半圆片的质心，即 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 代入，有

$$x_c = \frac{2}{3} a \frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{2}{3} a \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} \frac{a}{\pi}$$

2.2 解 建立如图 2.2.1 图所示的球坐标系



题2.2.1图

把球帽看成垂直于 z 轴的所切层面的叠加（图中阴影部分所示）。设均匀球体的密度为 ρ 。

则

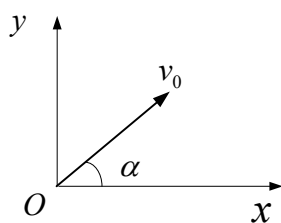
$$dm = \rho dv = \rho \pi y^2 dz = \rho \pi (a^2 - z^2)$$

由对称性可知，此球帽的质心一定在 z 轴上。

代入质心计算公式，即

$$z_c = \frac{\int z dm}{\int dm} = -\frac{3(a+b)^2}{4(2a+b)}$$

2.3 解 建立如题 2.3.1 图所示的直角坐标，原来 W_A 与共同作一个斜抛运动。



题2.3.1图

当达到最高点人把物体水皮抛出后，人的速度改变，设为 v_x ，此人即以 v_x 的速度作平抛运动。由此可知，两次运动过程中，在达到最高点时两次运动的水平距离是一致的（因为两次运动水平方向上均以 $v_{\text{水平}} = v_0 \cos \alpha$ 作匀速直线运动，运动的时间也相同）。所以我们只要比较人把物抛出后水平距离的变化即可。第一次运动：从最高点运动到落地，水平距离 s_1

$$s_1 = v_0 \cos \alpha \cdot t \quad (1)$$

$$v_0 \sin \alpha = gt \quad (2)$$

$$s_1 = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha \quad (3)$$

第二次运动:在最高点人抛出物体,水平方向上不受外力,水平方向上动量守恒,有

$$(W + w)v_0 \cos \alpha = Wv_x + w(v_x - u)$$

可知道

$$v_x = v_0 \cos \alpha + \frac{w}{W + w}u$$

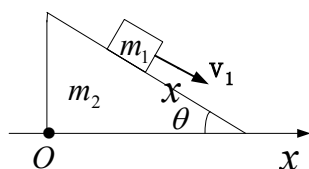
水平距离

$$s_2 = v_x t = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{w}{(w + W)g} uv_0 \sin \alpha$$

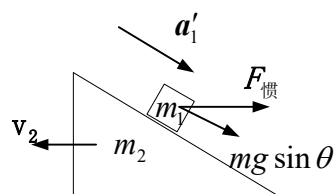
跳的距离增加了

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{w}{(W + w)g} uv_0 \sin \alpha$$

2.4解 建立如图 2.4.1 图所示的水平坐标。



题2.4.1图



题2.4.2图

以 m_1 , m_2 为系统研究,水平方向上系统不受外力,动量守恒,有

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = 0 \quad (1)$$

对 m_1 分析; 因为

$$a_{\text{绝}} = a + a_{\text{相对}} \quad (2)$$

m_1 在劈 m_2 上下滑,以 m_2 为参照物,则 m_1 受到一个惯性力 $F_{\text{惯}} = -m_1 \ddot{x}_2$ (方向与 m_2 加速度方向相反)。如图 2.4.2 图所示。所以 m_1 相对 m_2 下滑。由牛顿第二定律有

$$m_1 a_1' = m_1 g \sin \theta + m_1 \ddot{x}_2 \cos \theta \quad (2)$$

所以 m_1 水平方向的绝对加速度由②可知

$$a_{1绝} // = a_1' \cos \theta - \ddot{x}_2 \quad (3)$$

$$\ddot{x}_1 = \left(g \sin \theta = x_2 \cos \theta \right) \cos \theta - \ddot{x}_2 \quad (4)$$

联立①④，得

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_2 \sin \theta \cos \theta}{m_2 + m_1 \sin^2 \theta} g \quad (5)$$

把⑤代入①，得

$$\ddot{x}_2 = -\frac{m_1 \sin \theta \cos \theta}{m_2 + m_1 \sin^2 \theta} g \quad (6)$$

负号表示方向与 x 轴正方向相反。求劈对质点反作用力 R_1 。用隔离法。单独考察质点 m_1 的受力情况。因为质点垂直斜劈运动的加速度为 0，所以

$$R_1 - m_1 g \cos \theta + \left(-m_1 x_2 \ddot{\sin \theta} \right) = 0 \quad (7)$$

把⑥代入⑦得，

$$R_1 = \frac{m_1 m_2 \cos \theta}{m_2 + m_1 \sin^2 \theta} g \quad (8)$$

水平面对劈的反作用力 R_2 。仍用隔离法。因为劈在垂直水皮方向上无加速度，所以

$$R_2 - m_2 g - R_1 \cos \theta = 0 \quad (9)$$

于是

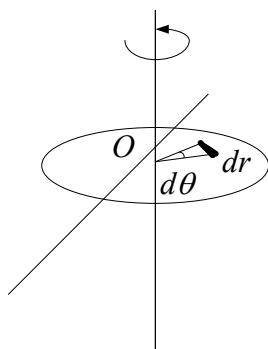
$$R_2 = \frac{m_2 (m_1 + m_2)}{m_2 + m_1 \sin^2 \theta} g \quad (10)$$

2.5解 因为质点组队某一固定点的动量矩

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

所以对于连续物体对某一定点或定轴，我们就应该把上式中的取和变为积分。如

图 2.5.1 图所示薄圆盘，任取一微质量元，



题2.5.1图

$$dm = \rho \cdot r d\theta dr$$

$$\rho = \frac{M}{\pi a^2}$$

所以圆盘绕此轴的动量矩 J

$$J = \iint \mathbf{r} \times (dm \mathbf{v}) = \iint r \cdot \rho r dr d\theta \cdot \omega r = \frac{1}{2} M a^2 \omega$$

2.6 解炮弹达到最高点时爆炸，由题目已知条件爆炸后，两者仍沿原方向飞行，分成的两个部分 M_1 ， M_2 ，速度分别变为沿水平方向的 v_1 ， v_2 ，并以此速度分别作平抛运动。由前面的知识可知，同一高处平抛运动的物体落地时的水平距离之差主要由初速度之差决定。进而转化为求 v_1 ， v_2 。炮弹在最高点炮炸时水平方向上无外力，所以水平方向上的动量守恒：

$$(M_1 + M_2)U = M_1 v_1 + M_2 v_2 \quad (1)$$

以 $(M_1 + M_2)$ 质点组作为研究对象，爆炸过程中能量守恒：

$$\frac{1}{2}(M_1 + M_2)U^2 = \frac{1}{2}M_1 v_1^2 + \frac{1}{2}M_2 v_2^2 - E \quad (2)$$

联立①②解之，得

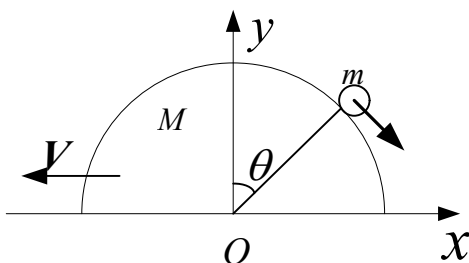
$$v_1 = U + \sqrt{\frac{2EM_1}{(M_1 + M_2)M_2}}$$

$$v_2 = U - \sqrt{\frac{2EM_1}{(M_1 + M_2)M_2}}$$

所以落地时水平距离之差 Δs

$$\Delta s = |s_1 - s_2| = |v_1 t - v_2 t| = \frac{V}{g} \sqrt{2E \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right)}$$

2.7 解 建立如题 2.7.1 图所示的直角坐标系。



题2.7.1图

当 m 沿半圆球 M 下滑时, M 将以 V 向所示正方向的反向运动。以 M 、 m 组成系统为研究对象, 系统水平方向不受外力, 动量守恒, 即

$$MV = mv_x$$

m 相对于地固连的坐标系 O_{xy} 的绝对速度

$$\mathbf{V}_{\text{绝对}} = \mathbf{V}_{\text{相}} + \mathbf{V}_{\text{牵}}$$

$\mathbf{V}_{\text{相}}$ 为 m 相对 M 的运动速度

$$u = a\dot{\theta} \quad (2)$$

故水平方向

$$v_x = u \cos \theta - V \quad (3)$$

竖直方向

$$v_y = u \sin \theta \quad (4)$$

在 m 下滑过程中, 只有保守力 (重力) 做功, 系统机械能守恒:
(以地面为重力零势能面)

$$mga \cos \alpha = mga \cos \theta + \frac{1}{2}mv_{\text{绝}}^2 + \frac{1}{2}MV^2 \quad (5)$$

$$v_{\text{绝}}^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad (6)$$

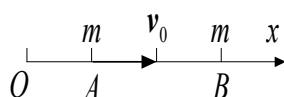
把③④代入⑥

$$v_{\text{绝}}^2 = u^2 + V^2 - 2uV \cos \theta \quad (7)$$

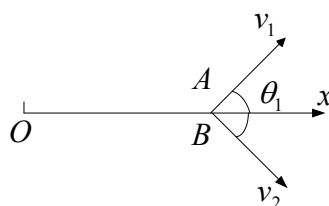
把①③代入⑤

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{a} \cdot \frac{\cos a - \cos \theta}{1 - \frac{m}{m+M} \cos^2 \theta}}$$

2.8证 以 AB 连线为 x 轴建立如题 2.8.1 图所示的坐标。



题2.8.1图



题2.8.1图

设 A 初始速度为与 x 轴正向夹角 θ_0 碰撞后, 设 A 、 B 运动如题 2.8.2 图所示。 A 、 B 速度分别为 v_1 、 v_2 , 与 x 轴正向夹角分别为 θ_1 、 θ_2 。以 A 、 B 为研究对象, 系统不受外力, 动量守恒。 x 方向:

$$mv_0 = mv_1 \cos \theta_1 + mv_2 \cos \theta_2 \quad ①$$

垂直 x 轴方向有:

$$0 = mv_1 \sin \theta_1 - mv_2 \sin \theta_2 \quad ②$$

可知

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad ③$$

整个碰撞过程只有系统内力做功, 系统机械能守恒:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \quad ④$$

由③④得

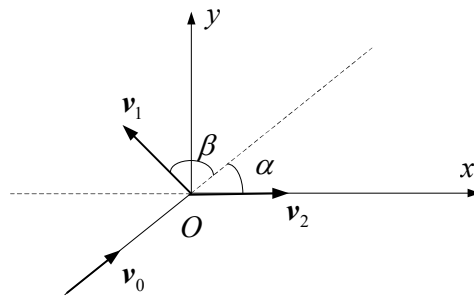
$$2v_1v_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) = 0$$

$$\theta_1 + \theta_2 = k\pi + \frac{\pi}{2} (k = 0, 1, 2, \dots)$$

即两球碰撞后速度相互垂直, 结论得证。

2.9 解 类似的碰撞问题, 我们一般要抓住动量守恒定理和机械能守恒定理得运

用，依次来分析条件求出未知量。设相同小球为 AB ，初始时 A 小球速度 v_0 ，碰撞后球 A 的速度为 v_1 ，球 B 的速度 v_2 以碰撞后 B 球速度所在的方向为 x 轴正向建立如题 2.9.1 图所示的坐标 (这样做的好处是可以减少未知量的分解，简化表达式)。以 A 、 B 为系统研究，碰撞过程中无外力做功，系统动量守恒。



题2.9.1图

x 方向上有:

$$mv_0 \cos \alpha = mv_1 \cos(\alpha + \beta) + mv_2 \quad (1)$$

y 方向上有:

$$mv_0 \sin \alpha = mv_1 \sin(\alpha + \beta) \quad (2)$$

又因为恢复系数

$$e = \frac{\text{碰后相对速度}}{\text{碰前相对速度}} = \frac{v_2 - v_1 \cos(\alpha + \beta)}{v_0 \cos \alpha}$$

即

$$e v_0 \cos \alpha = v_2 - v_1 \cos(\alpha + \beta) \quad (3)$$

用①-③

$$v_1 = \frac{(1-e)v_0 \cos \alpha}{2 \cos(\alpha + \beta)} \quad (4)$$

用④代入②得

$$v_0 \sin \alpha = \frac{(1-e)v_0 \cos \alpha}{2 \cos(\alpha + \beta)} \sin(\alpha + \beta)$$

$$\tan \beta = \frac{(1+e)\tan \alpha}{1-e+2\tan^2 \alpha}$$

$$\beta = \arctan \left[\frac{(1+e)\tan \alpha}{1-e+2\tan^2 \alpha} \right]$$

求在各种 α 值下 β 角的最大值，即为求极致的问题。

我们有

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

得

$$\frac{(1+e)\sec^2\alpha(1-e-a\tan^2\alpha)}{(1-e+2\tan^2\alpha)} = 0$$

即

$$1-e-a\tan^2\alpha=0$$

所以

$$\tan\alpha = \sqrt{\frac{1-e}{2}}$$

$$\beta_{\max} = \arctan \frac{1+e}{\sqrt{8(1-e)}}$$

即

$$\tan \beta_{\max} = \frac{1+e}{\sqrt{8(1-e)}}$$

由因为

$$\csc^2 \beta_{\max} = 1 + \cot^2 \beta_{\max} = 1 + \frac{8(1-e)}{(1+e)^2}$$

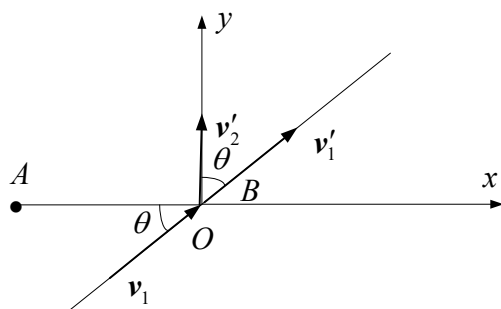
故

$$\sin \beta_{\max} = \frac{1}{\csc \beta_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{8(1-e)}{(1+e)^2}}} = \frac{1+e}{3-e}$$

所以

$$\beta_{\max} = \sin^{-1} \left(\frac{1+e}{3-e} \right)$$

2.10 以 m_1, m_2 为研究对象。当 m_1, m_2 发生正碰撞后，速度分别变为 $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ ，随即 m_2 在不可伸长的绳 AB 约束下作圆周运动。以 AB 的连线为 x 轴建立如题 2.10.1 图所示。



题2.10.1图

碰撞过程中无外力做功，动量守恒：

$$m_1 \mathbf{v}_1 = m_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v}_2' \quad (1)$$

随即 m_2 在 AB 的约束下方向变为沿 y 轴的正向，速度变为 \mathbf{v}_2'

故 y 方向上有

$$m_1 v_1 \sin \theta = m_1 v_1' \sin \theta + m_2 v_2' \quad (2)$$

故恢复系数定义有：

$$e = \frac{\text{碰后相对速度}}{\text{碰前相对速度}} = \frac{v_2' \sin \theta - v_1'}{v_1}$$

即

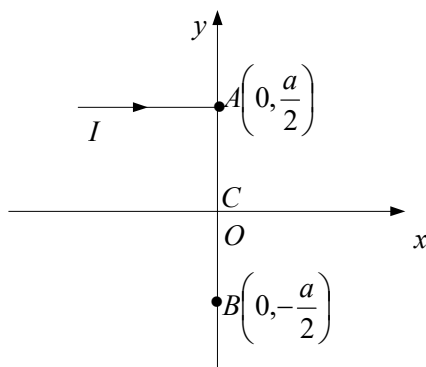
$$e v_1 = v_2' \sin \theta - v_1' \sin \theta - v_1' \quad (3)$$

联立①②③得

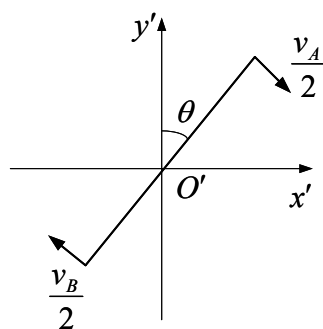
$$v_1' = \frac{m_1 \sin^2 \theta - e m_2}{m_2 + m_1 \sin^2 \theta} v_1$$

$$v_2' = \frac{m_1 (1 + e) \sin \theta}{m_2 + m_1 \sin^2 \theta} v_1$$

2.11 解 如图所示，



题2.11.1图



题2.12.2图

有两质点 A , B 中间有一绳竖直相连, 坐标分别为: $A\left(0, \frac{a}{2}\right) B\left(0, -\frac{a}{2}\right)$, 质量为 m

, 开始时静止。现在有一冲量 I 作用与 A , 则 I 作用后, A 得到速度 $v_A = \frac{I}{m}$, B

仍静止不动: $v_B = 0$ 。它们的质心 C 位于原点, 质心速度我为

$$v_C = \frac{mv_A + mv_B}{2m} = \frac{v_A}{2}$$

现在把坐标系建在质心 C 上, 因为系统不再受外力作用, 所以质心将以速率 $\frac{v_A}{2}$ 沿

x 轴正向匀速正向、反向运动。由于质心系是惯性系, 且无外力, 所以 A , B 分

别以速率 $\frac{v_A}{2}$ 绕质心作匀速圆周运动, 因而他们作的事圆滚线运动。经过时间 t 后

, 如图所示:

$$\theta = \frac{\frac{v_A}{2}}{\frac{a}{2}} t = \frac{v_A}{a} t = \frac{It}{am}$$

于是在 O_{xy} 系中 A 的速度

$$\begin{cases} v_{Ax} = \frac{u_A}{2}(1 + \cos \theta) \\ v_{Ay} = -\frac{u_A}{2} \sin \theta \end{cases}$$

B 的速度:

$$\begin{cases} v_{Bx} = \frac{u_A}{2}(1 - \cos \theta) \\ v_{By} = \frac{u_A}{2} \sin \theta \end{cases}$$

因此

$$E_A : E_B = \frac{\left[\frac{v_A}{2} \cdot (1 + \cos \theta)\right]^2 + \left[\frac{v_A}{2} \sin \theta\right]^2}{\left[\frac{v_A}{2} \cdot (1 - \cos \theta)\right]^2 + \left[-\frac{v_A}{2} \sin \theta\right]^2} = \frac{1 + \cos \theta}{1 - \sin \theta} = \cot^2\left(\frac{It}{2am}\right) : 1$$

2.12 解 对于质心系的问题, 我们一般要求求出相对固定参考点的物理量, 在找

出质心的位置和质心运动情况，由此去计算物体相对或绝对物理量及其间的关系

。由题可知，碰前 m_1 速度为 v_1 ， m_2 速度 $v_2 = 0$ 。碰后速度 m_1 ， m_2 分别设为 v'_1, v'_2 。碰撞过程中无外力做功，动量守恒。

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad ①$$

有恢复系数 e

$$e = \left| \frac{v'_2 - v'_1}{v_1} \right| \quad ②$$

联立①②得

$$v'_1 = \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$v'_2 = \frac{m_1(1+e)}{m_1 + m_2} v_1$$

再由质点组质心的定义：

$$r_c = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$$

r_c 为质心对固定点位矢， r_1 ， r_2 分别为 m_1 ， m_2 对同一固定点的位矢

所以

$$v_c = \dot{r}_c = \frac{m_1 \dot{r}_1 + m_2 \dot{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

（质点组不受外力，所以质心速度不变。）

设两球碰撞后相对质心的速度 V'_1 ， V'_2 。

$$V'_1 = v'_1 - v_c = \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} v_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = -\frac{em_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (\text{负号表示与 } v_1 \text{ 相反})$$

$$V'_2 = v'_2 - v_c = \frac{m_1(1+e)}{m_1 + m_2} v_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{em_2}{m_1 + m_2} v_1$$

同理，碰撞前两球相对质心的速度

$$V_1 = v_1 - v_c = v_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$V_2 = v_2 - v_c = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (\text{负号表示方向与 } v_1 \text{ 相反})$$

所以开始时两球相对质心的动能：

$$T = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}v\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(-\frac{m_2}{m_1+m_2}v\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \cdot v_1^2$$

2.13 用机械能守恒方法；在链条下滑过程中，只有保守力重力做功，所以链条的机械能守恒。以桌面所平面为重力零势能面。

$$-\left(\frac{m}{2}g\right) \cdot \frac{l}{4} = -mg \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2}mv^2$$

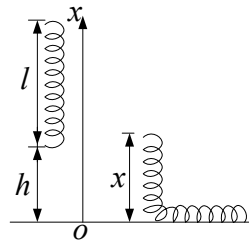
有

$$v = \frac{\sqrt{3gl}}{2}$$

2.14 此类题为变质量问题，我们一般研究运动过程中质量的变化与力的关系

$$F_{(t)} = \frac{d}{dt}(mv)$$

以竖直向上我 x 轴正向建立如题 2.14.1 图所示坐标。



题 2.14.1 图

绳索离地面还剩 x 长时受重力

$$F_{(t)} = -\alpha xy$$

则

$$-\alpha xy = \frac{d}{dt}(\alpha xv)$$

$$-xy = \frac{d(xv)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$-g = v \frac{dv}{dx}$$

$$\int_0^v v dv = -\int_{h+l}^x g dx$$

所以

$$v^2 = 2g(h + l - x)$$

求地板的压力，有牛顿第三定律知，只需求出地板对绳索的支持力 N 即可，它们是一对作用力与反作用力。这是我们以快要落地的一小微元作为研究对象。它的速度由 v 变为 0。用动量守恒，有

$$N - \sigma(l - x)g = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{d(\sigma x v)}{dt} = v\sigma \frac{dx}{dt} = \sigma v^2$$

又因为

$$v^2 = 2g(h + l - x)$$

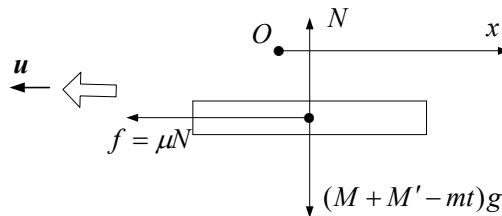
$$N = \sigma(l - x)g + \sigma \cdot 2g(h + l - x) = \sigma g[2h + 3(l - x)]$$

2.15 解 这是一道变质量的问题，对于此类问题，我们由书上 p. 137 的 (2.7.2) 式

$$\frac{d}{dt}(mv) - \frac{dm}{dt}u = F \quad (1)$$

来分析。

以机枪后退方向作为 x 轴正方向，建立如题 2.15.1 图的坐标。



题2.15图

竖直方向上支持力与重力是一对平衡力。水平方向上所受合外力 F 即为摩擦力

$$F = f = -\mu n = -\mu(M + M' - mt)g \quad (2)$$

单位时间质量的变化

$$\frac{dM'}{dt} = m \quad (3)$$

由①②式

$$\frac{d}{dt}[(M + M' - mt)v] - \frac{dM'}{dt}u = -\mu g(M + M' - mt)$$

$$\int_0^v d[(M + M' - mt)v] - \int_0^u dM'u = -\mu g \int_0^{\frac{M'}{m}} (M + M' - mt)dt$$

$$(M + M' - m \frac{M'}{m})v - M'u = -\mu g(M + M') \frac{M'}{m} + \mu g \frac{1}{2} \left(\frac{M'}{m} \right)$$

所以

$$v = \frac{M'}{m}u - \frac{(M + M')^2 - M^2}{2Mm} \mu g$$

2.16 解 这是一个质量增加的问题。雨滴是本题 m 。导致雨滴 m 变化的微元 Δm 的速度 $u = 0$ 。

所以我们用书上 p. 138 的 (2.7.4) 式分析

$$\frac{d}{dt}(mv) = F \quad (1)$$

雨滴的质量变化是一类比较特殊的变质量问题。我们知道处理这类问题常常理想化模型的几何形状。对于雨滴我们常看成球形，设其半径为 r ，则雨滴质量 m 是与半径 r 的三次方成正比（密度看成一致不变的）。

$$m = k_1 r^3 \quad (2)$$

有题目可知质量增加率与表面积成正比。即

$$\frac{dm}{dt} = k \cdot 4\pi r^2 = k_2 r^2 \quad (3)$$

k_1, k_2 为常数。我们对②式两边求导

$$\frac{dm}{dt} = k_1 \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt} \quad (4)$$

由于③=④，所以

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k_2}{3k_1} = \lambda \quad (5)$$

对⑤式两边积分

$$\int_a^r dr = \int_0^t \lambda dt$$

$$r = \lambda t + a \quad (6)$$

$$m = k_1 (\lambda t + a)^3 \quad (7)$$

以雨滴下降方向为正方向，对①式分析

$$\frac{d}{dt}[k_1(\lambda t + a)^3 v] = k_1(\lambda t + a)^3 g \quad (8)$$

$$\int_0^v d[k_1(\lambda t + a)^3 v] = \int_0^t k_1(\lambda t + a)^3 g dt$$

$$k_1(\lambda t + a)^3 v = \frac{1}{\lambda} k_1 g \frac{1}{4} (\lambda t + a)^4 + k_3 \quad (k_3 \text{ 为常数})$$

当 $t=0$ 时， $v=0$ ，所以

$$k_3 = -\frac{k_1 g a^4}{4\lambda}$$

$$v = \frac{g}{4\lambda} \left[\lambda t + a - \frac{a^4}{(\lambda t + a)^3} \right]$$

2.17 证 这是变质量问题中的减质量问题，我们仍用书上 p. 137 (2.7.2) 式

$$\frac{d}{dt}(mv) - \frac{dm}{dt}u = F \quad (1)$$

来分析。设空火箭质量 m_0 ，燃料质量 m' 。以向上为正方向，则火箭任一时刻的质量

$$m = m_0 + m' - \frac{m_0 + m'}{60} t \quad (2)$$

喷气速度 2074 m/s 是指相对火箭的速度，即 $v_{\text{相}} = 2074 \text{ m/s}$ 。有①式

$$\frac{dm}{dt}v + m \frac{dv}{dt} - \frac{dm}{dt}u = F$$

$$F = \frac{dm}{dt}(v - u) + m \frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}v_{\text{相}} + m \frac{dv}{dt}$$

$$-\left(m_0 + m' - \frac{m_0 + m'}{60} t\right)g = \frac{m_0 + m'}{60} t_{\text{相}} + \left(m_0 + m' - \frac{m_0 + m'}{60} t\right) \cdot \frac{dv}{dt}$$

化简

$$dv = -gdt + \frac{\frac{m_0 + m'}{60} v_{\text{相}} \cdot dt}{m_0 + m' - \frac{m_0 + m'}{60} t}$$

对两边积分

$$v = -gt - v_{\text{相}} \ln \left(1 - \frac{t}{60} \right) \quad (3)$$

此既火箭速度与时间的关系。当火箭燃料全部燃尽所用时间 t ，由题意知

$$t = \frac{m'}{\frac{m_0 + m'}{60}} = \frac{60 m'}{m_0 + m'} \quad (4)$$

代入③可得火箭最终的速度 v_{max} ，（即速度的最大值）。

$$v_{\text{max}} = -g \cdot \frac{60m'}{m_0 + m'} - v_{\text{相}} \ln \left(1 - \frac{m'}{m_0 + m'} \right)$$

考虑到

$$\frac{dv_{\text{max}}}{dx} = \frac{v_{\text{相}}(1+x) - 60g}{(1+x)^2}$$

其中 $x = \frac{m'}{m_0}$ ，易知当 $x \geq 0$ 时， $\frac{dv_{\text{max}}}{dx}$ 恒成立，即 v_{max} 为 $\frac{m'}{m_0}$ 的增函数。又当

$\frac{m'}{m_0} = 300$ 时，

$$v_{\text{max}} = -g \cdot \frac{60 \frac{m'}{m_0}}{1 + \frac{m'}{m_0}} - v_{\text{相}} \ln \left[1 - \frac{\frac{m'}{m_0}}{1 + \frac{m'}{m_0}} \right] = 11.25 \text{ km/s}$$

而要用此火箭发射人造太阳行星需要的速度至少应为第二宇宙速度

$v_2 = 11.2 \text{ km/s}$ 。

故所携带燃料重量至少是空火箭重量的 300 倍。

2.18 证 要使火箭上升，必须有发动机推力 $>$ 火箭的重量，即

$$v_{\text{相}} \frac{dm}{dt} > M_0 g$$

$$v_{\text{相}} \frac{dm}{dt} > v \alpha M_0$$

即 $\alpha v > g$ 火箭才能上升，结论得证。由于喷射速度 $v_{\text{相}} = v$ 是常数，单位时间放出的质量

$$\frac{dm}{dt} = \alpha M_0$$

质量变化是线性规律

$$f = 1 - \alpha t = \frac{M_0}{M} \quad (1)$$

火箭飞行速度

$$v_{\text{火}} = v \ln(1 - \alpha t) - gt \quad (2)$$

又因为燃料燃烧时间

$$t = \frac{M_0 - M}{\alpha M_0} \quad (3)$$

代入②得火箭最大速度 v_{max}

$$v_{\text{max}} = v \ln \frac{M_0}{M} - g \frac{M_0 - M}{\alpha M_0} = v \ln \frac{M_0}{M} - \frac{g}{\alpha} \left(1 - \frac{M}{M_0}\right)$$

又因为②式又可以写成

$$\frac{ds}{dt} = v_{\text{火}} = v \ln(1 - \alpha t) - gt$$

积分可得

$$s = \frac{v}{\alpha} [(1 - \alpha t) \ln(1 - \alpha t) + \alpha t] - \frac{1}{2} g t^2 \quad (4)$$

从开始到燃烧尽这一段时间内火箭上升高度 S_1 。把③代入④得

$$S_1 = -\frac{1}{2} g \left(\frac{M_0 - M}{\alpha M_0} \right)^2 + \frac{v}{\alpha} \left(\frac{M}{M_0} - \ln \frac{M}{M_0} + \frac{M_0 - M}{M_0} \right)$$

之后火箭作初速度为 v_{max} 的竖直上抛运动。可达高度 S_2

$$S_2 = \frac{v_{\text{max}}^2}{2g} = \frac{v^2 2g}{g} \left(\ln \frac{M}{M_0} \right)^2 - \frac{v}{\alpha} \left(1 - \frac{M}{M_0} \right) \ln \frac{M}{M_0} + \frac{g}{2\alpha^2} \left(1 - \frac{M}{M_0} \right)^2$$

故火箭能达到的最大高度

$$S_{\text{max}} = S_1 + S_2 = \frac{v^2 2g}{g} \left(\ln \frac{M}{M_0} \right)^2 + \frac{v}{\alpha} \left(1 - \frac{M}{M_0} - \ln \frac{M}{M_0} \right)$$

2.19 证 假设该行星做椭圆运动，质量为 m ，周期为 τ 。某一时刻位置为 \mathbf{r} ，速

度为 v ，则

$$T = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{1}{2} m v^2 dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{2} m \int_0^\tau d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) - \frac{1}{2} \int_0^\tau \mathbf{r} \cdot d\mathbf{v} \right] =$$

$$- \frac{m}{2\tau} \int_0^\tau \mathbf{r} d(v)$$

又因为

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \frac{r}{r}$$

于是

$$T = -\frac{M}{2\tau} \int_0^\tau r \left(-\frac{GM}{r^2} \frac{r}{r} \right) dt = -\frac{m}{2\tau} \int_0^\tau -\frac{GM}{r} dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{GMm}{r} dt = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{r}$$

第三章 刚体力学

第三章思考题

3.1 刚体一般是由 n (n 是一个很大得数目) 个质点组成。为什么刚体的独立变量却不是 $3n$ 而是 6 或者更少?

3.2 何谓物体的重心? 他和重心是不是 总是重合在一起的?

3.3 试讨论图形的几何中心, 质心和重心重合在一起的条件。

3.4 简化中心改变时, 主矢和主矩是不是也随着改变? 如果要改变, 会不会影响刚体的运动?

3.5 已知一匀质棒, 当它绕过其一端并垂直于棒的轴转动时, 转动惯量为 $\frac{1}{3}ml^2$, m 为棒的质量, l 为棒长。问此棒绕通过离棒端为 $\frac{1}{4}l$ 且与上述轴线平行的另一轴线转动时, 转动惯量是不是等于 $\frac{1}{3}ml^2 + m\left(\frac{1}{4}l\right)^2$? 为什么?

3.6 如果两条平行线中没有一条是通过质心的, 那么平行轴定理式 (3.5.12) 能否应用? 如不能, 可否加以修改后再用?

3.7 在平面平行运动中, 基点既然可以任意选择, 你觉得选择那些特殊点作为基点比较好? 好处在哪里? 又在 (3.7.1) 及 (3.7.4) 两式中, 哪些量与基点有关? 哪些量与基点无关?

3.8 转动瞬心在无穷远处, 意味着什么?

3.9 刚体做平面平行运动时, 能否对转动瞬心应用动量矩定理写出它的动力学方程? 为什么?

3.10 当圆柱体以匀加速度自斜面滚下时, 为什么用机械能守恒定律不能求出圆柱体和斜面之间的反作用力? 此时摩擦阻力所做的功为什么不列入? 是不是我们必须假定没有摩擦力? 没有摩擦力, 圆柱体能不能滚?

3.11 圆柱体沿斜面无滑动滚下时, 它的线加速度与圆柱体的转动惯量有关, 这是为什么? 但圆柱体沿斜面既滚且滑向下运动时, 它的线加速度则与转动惯量无关? 这又是为什么?

3.12 刚体做怎样的运动时, 刚体内任一点的线速度才可以写为 $\omega \times r$? 这时 r 是不是等于该质点到转动轴的垂直距离? 为什么?

3.13 刚体绕固定点转动时, $\frac{d\omega}{dt} \times r$ 为什么叫转动加速度而不叫切向加速度? 又 $\omega \times (\omega \times r)$ 为什么叫向轴加速度而不叫向心加速度?

3.14 在欧勒动力学方程中, 既然坐标轴是固定在刚体上, 随着刚体一起转动, 为什么我们还可以用这种坐标系来研究刚体的运动?

3.15 欧勒动力学方程中的第二项 $(I_1 - I_2)\omega_x\omega_y$ 等是怎样产生的? 它的物理意义又是什么?

第三章思考题解答

3.1 答: 确定一质点在空间中得位置需要 3 个独立变量, 只要确定了不共线三点的位置刚体的位置也就确定了, 故须九个独立变量, 但刚体不变形, 此三点中任二点的连线长度不变, 即有三个约束方程, 所以确定刚体的一般运动不需 3n 个独立变量, 有 6 个独立变量就够了. 若刚体作定点转动, 只要定出任一点相对定点的运动刚体的运动就确定了, 只需 3 个独立变量; 确定作平面平行运动刚体的代表平面在空间中的方位需一个独立变量, 确定任一点在平面上的位置需二个独立变量, 共需三个独立变量; 知道了定轴转动刚体绕转动轴的转角, 刚体的位置也就定了, 只需一个独立变量; 刚体的平动可用一个点的运动代表其运动, 故需三个独立变量。

3.2 答物体上各质点所受重力的合力作用点即为物体的重心。当物体的大小远小于地球的线度时物体上各质点所在点的重力加速度都相等, 且方向彼此平行即重力场为均匀场, 此时质心与重心重合。事实上但物体的线度很大时各质点所在处 g 的大小是严格相等, 且各质点的重力都指向地心, 不是彼此平行的, 重心与质心不和。

3.3 答 当物体为均质时, 几何中心与质心重合; 当物体的大小远小于地球的线度时, 质心与重心重合; 当物体为均质且大小远小于地球的线度时, 三者都重合。

3.4 答 主矢 \mathbf{F} 是力系各力的矢量和, 他完全取决于力系中各力的大小和方向, 故主矢不随简化中心的位置而改变, 故而也称之为力系的主矢; 简化中心的位置不同, 各力对简化中心的位矢 \mathbf{r}_i 也就不同则各力对简化中心的力矩也就不同, 故主矩随简化中心的位置而变, 被称之为力系对简化中心的主矩。分别取 O 和 O' 为简化中心, 第 i 个力 \mathbf{F}_i 对 O 和 O' 的位矢分别为 \mathbf{r}_i 和 \mathbf{r}'_i , 则 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{OO}'$, 故

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{O'} &= \sum_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{OO}') \times \mathbf{F}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) - \mathbf{OO}' \times \sum_i \mathbf{F}_i \\ &= \mathbf{M}_O + \mathbf{OO}' \times \sum_i \mathbf{F}_i \end{aligned}$$

即 $\mathbf{M}_{O'} \neq \mathbf{M}_O$

主矢不变, 表明刚体的平动效应不变, 主矩随简化中心的位置改变, 表明力系的作用对刚体

上不同点有不同的转动效应，但不改变整个刚体的转动规律或者说不影响刚体绕质心的转动。设 O 和 O' 对质心 C 的位矢分别为 r_C 和 r'_C ，则 $r'_C = r_C + OO'$ ，把 O 点的主矢 $F = \sum_i F_i$ ，主矩 M_O 移到 C 点得力系对重心的主矩

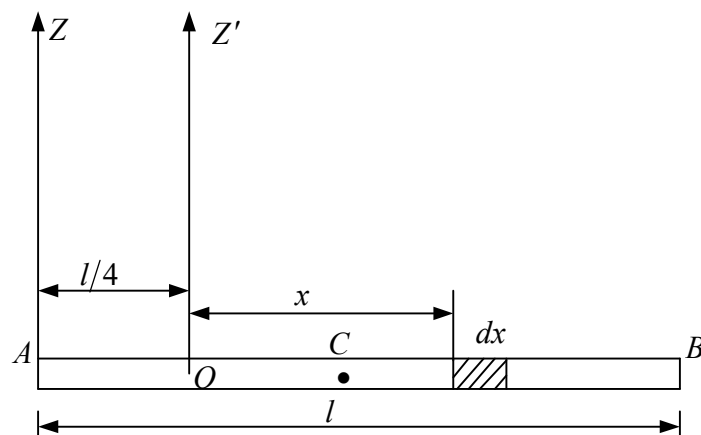
$$M_C = M_O + r_C \times \sum_i F_i$$

把 O' 为简化中心得到的主矢 $F = \sum_i F_i$ 和主矩 $M_{O'}$ 移到 C 点可得

$$M_C = M_{O'} + r_C \times \sum_i F_i = M_{O'} + (r'_C - OO') \times \sum_i F_i = M_{O'} + r_C \times \sum_i F_i$$

简化中心的改变引起主矩的改变并不影响刚体的运动。事实上，简化中心的选取不过人为的手段，不会影响力系的物理效应。

3.5 答 不等。如题 3-5 图示，



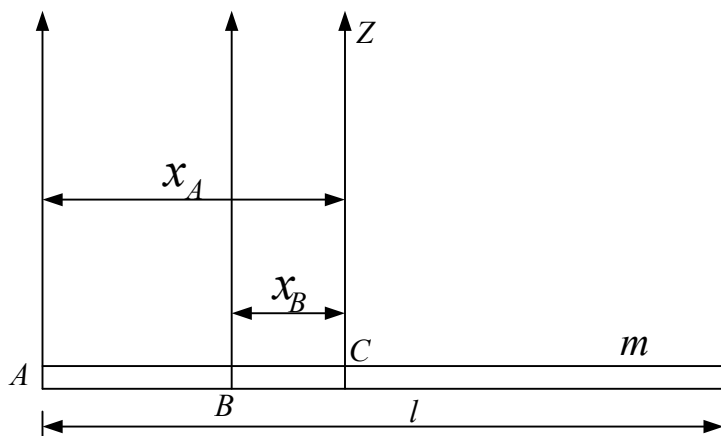
题3-5图

$dm = \frac{m}{l} dx$ 绕 Oz 轴的转动惯量

$$I_z = \int_{-\frac{l}{4}}^{\frac{3l}{4}} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{7}{48} ml^2 \neq \frac{1}{3} ml^2 + m \left(\frac{1}{4} l \right)^2$$

这表明平行轴中没有一条是过质心的，则平行轴定理 $I = I_c + md^2$ 是不适应的

3.6 不能，如 3-5 题。但平行轴定理修改后可用于不过质心的二平行轴。如题 3-6 图所示，



题3-6图

均质棒上 A, B 二点到质心的距离分别为 x_A 和 x_B 由平行轴定理得:

$$I_A = I_c + mx_A^2$$

$$I_B = I_c + mx_B^2$$

则 $I_A - I_B = m(x_A^2 - x_B^2)$, 此式即可用于不过质心的二平行轴。如上题用此式即可求得:

$$I_z = \frac{1}{3}ml^2 + m\left[\left(\frac{l^2}{4}\right) - \left(\frac{l^2}{2}\right)\right] = \frac{7}{48}ml^2$$

3.7 答 任一瞬时, 作平面平行运动的刚体上或与刚体固连且与刚体一起运动的延拓平面总有也仅有一点的瞬时速度为零 (转动瞬心) 从运动学观点看由 (3.7.1) 式

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

知选此点的基点较好, 这样选基点, 整个刚体仅绕此点作瞬时转动从 (3.7.4) 式

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_A + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' - \mathbf{r}'\omega^2$$

可知, 求加速度时选加速度为零的点为基点较方便, 但实际问题中, 加速度瞬心往往不如速度瞬心好找。

从动力学角度考虑, 选质心为基点较好, 因质心的运动可由质心运动定理解决; 而且质点系相对质心的动量矩定理于对固定点的动量矩定理具有相同的形式, 亦即刚体绕过质心与平面垂直的轴的转动可用刚体绕定轴转动的定律去解决。

因刚体上不同点有不同的速度和加速度, 基点选取的不同, 则 (3.7.1) 和 (3.7.4) 式中 $\mathbf{v}_A, \mathbf{a}_A$ 不同, 即 \mathbf{v}_A 和 \mathbf{a}_A 与基点有关; 又任一点相对基点的位矢 \mathbf{r}' 于基点的选取有关。故

任一点绕基点转动速度 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$, 相对基点的切线加速度 $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}'$ 和相对基点的向心加速度

$-r\omega^2$ 与基点选取有关；角速度 ω 为刚体各点所共有与基点选取无关，故 $\frac{d\omega}{dt}$ 也与基点选取

无关；基点选取的不同是人为的方法，它不影响刚体上任一点的运动，故任一点的速度 \mathbf{v} , \mathbf{a} 与基点的选取无关。这也正是基点选取任意性的实质所在。

3.8 答 转动瞬心在无穷远处，标志着此瞬时刚体上各点的速度彼此平行且大小相等，意味着刚体在此瞬时的角速度等于零，刚体作瞬时平动

3.9 答 转动瞬心的瞬时速度为零，瞬时加速度并不为零，否则为瞬时平动瞬心参考系是非惯性系，应用动量矩定理是必须计入惯性力系对瞬心的力矩。而惯性力系向瞬心简化的结果，惯性力系的主矩一般不为零（向质心简化的结果惯性力系的主矩为零），故相对瞬心与相对定点或者质心的动量矩定理有不同的形式；另外，转动瞬心在空间中及刚体上的位置都在不停的变化，（质心在刚体上的位置是固定的），

故对瞬心的写出的动量矩定理在不同时刻是对刚体上不同点的动力学方程，即瞬心参考系具有不定性；再者，瞬心的运动没有像质心一点定理那样的原理可直接应用。故实际问题一般不对瞬心应用动量矩定理写其动力学方程。

3.10 答 因圆柱体沿斜面滚下时，圆柱体与斜面之间的反作用力不做功，只有重力做功，故机械能守恒且守恒定律中不含反作用，故不能求出此力。此过程中由于圆柱体只滚动不滑动，摩擦力做功为零，故不列入摩擦力的功，也正是摩擦力不做功才保证了机械能守恒；若圆柱体即滚且滑的向下运动，摩擦力做功不为零必须列入摩擦力的功。机械能不守恒，必须用动能定理求解。在纯滚动过程中不列入摩擦力的功并不是没有摩擦力，事实上，正是摩擦力与重力沿下滑方向的分离组成力偶使圆柱体转动且摩擦阻力阻止了柱体与斜面的相对滑动，才使圆柱体沿斜面滚动而不滑动；如果斜面不能提供足够的摩擦力，则圆柱体会连滚带滑的向下运动；如果斜面绝对光滑，即斜面对圆柱体不提供摩擦力，则圆柱体在重力作用下沿斜面只滑动不滚动。

答 圆柱体沿斜面无滑动滚动，如课本 195 页例[2]示， $\ddot{x}_c = a\ddot{\theta}$ ，当柱体一定时，相对质心的转动惯量越大则 $\ddot{\theta}$ 越小，故与转动惯量有关。当圆柱体沿斜面既滚动又滑动地向下运动时，如课本图 3.7.7 有

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - f$$

这里 f 是滑动摩擦力， $f = \mu n = \mu mg \cos \alpha$ ， μ 是滑动摩擦系数，（注意，无滑动时，静摩擦力 f 并不一定达到极限值， $f \neq \mu' n$ ， μ' 是静摩擦系数）、所以

$$\ddot{x}_c = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

与转动惯量无关。又有转动定律得

$$I\ddot{\theta} = fa$$

即

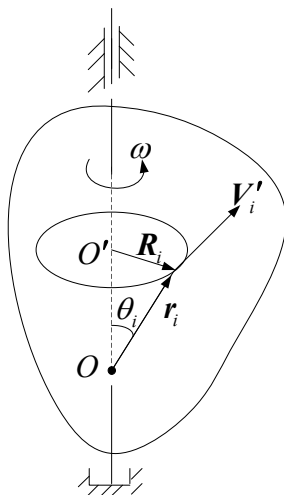
$$\ddot{\theta} = \frac{mg\mu a}{I} \cos \alpha$$

由 $\ddot{x}_c = a\ddot{\theta} + \ddot{S}$ 得圆柱与斜面的相对滑动加速度

$$\ddot{S} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \frac{ma^2}{I} \mu g \cos \alpha$$

与转动惯量有关

3.11 答 刚体作定点转动或定轴转动时，



题3-12图

体内任一点的线速度才可写为 $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ ，这时 \boldsymbol{r} 是任一点到左边一点引出的矢径不等于该点到转轴的垂直距离对定点运动刚体圆点一般取在定点位置，对定轴转动刚体，坐标原点可取在定轴上任一点；包含原点且与转轴垂直的平面内的各点， \boldsymbol{r} 才等于到转轴的垂直距离。当刚体作平面平行运动或任意运动时，任一点相对与基点的速度也可写为 $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'$ ，其中 \boldsymbol{r}' 为该点向基点引的矢径。

3.12 答 刚体绕定点转动时， $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$ 的大小、方向时刻改变，任意时刻 $\boldsymbol{\omega}$ 所在的方位即

为瞬时转轴， $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}$ 表示由于 $\boldsymbol{\omega}$ 大小和方向的改变引起的刚体上某点绕瞬时轴的转动速

度，故称转动加速度。 $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$ 是由于刚体上某点绕瞬时轴转动引起速度方向改变产生的加速度，它恒垂直指向瞬时转轴，此方向轨迹的曲率中心或定点，故称向轴加速度而不称向心加速度。

3.13 答 在对定点应用动量矩定理推导欧勒动力学方程时，既考虑了刚体绕定点 O 转动的定量矩 \boldsymbol{J} 随固连于刚体的坐标系绕定点转动引起的动量矩改变 $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J}$ ，又考虑了 \boldsymbol{J} 相对固连于刚体的坐标轴的运动引起动量矩的改变 $J_x \dot{\boldsymbol{i}} + J_y \dot{\boldsymbol{j}} + J_z \dot{\boldsymbol{k}}$ 也就是说，既考虑了随刚体运动的牵连运动，又考虑了相对于刚体的相对运动，是以固定参考系观测矢量对时间微商的，故用这种坐标系并不影响对刚体运动的研究。

3.14 答 欧勒动力学方程的第二项是由于动量矩矢量 \mathbf{J} 随刚体以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动产生的

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ I_1\omega_x & I_2\omega_y & I_3\omega_z \end{vmatrix} = \left[-(I_2 - I_3)\omega_y\omega_z \right] \mathbf{i} + \left[(I_1 - I_3)\omega_z\omega_x \right] \mathbf{j} + \left[(I_2 - I_1)\omega_x\omega_y \right] \mathbf{k}$$

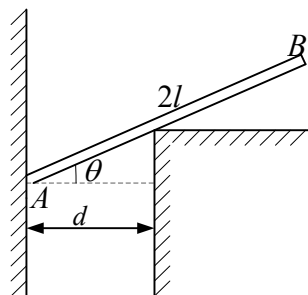
它们具有定性力矩的物理意义, 各项的负值表示了惯性力系对定点的主矩在各动轴上的分量

第三章习题

3.1 半径为 r 的光滑半球形碗, 固定在水平面上。一均质棒斜靠在碗缘, 一端在碗内, 一端则在碗外, 在碗内的长度为 c , 试证棒的全长为

$$\frac{4(c^2 - 2r^2)}{c}$$

3.2 长为 $2l$ 的均质棒, 一端抵在光滑墙上, 而棒身则如图示斜靠在与墙相距为 d ($d \leq l \cos \theta$) 的光滑棱角上。求棒在平衡时与水平面所成的角 θ 。



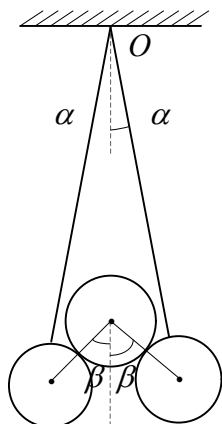
第3.2题图

3.3 两根均质棒 AB 、 BC 在 B 处刚性联结在一起, 且 $\angle ABC$ 形成一直角。如将此棒的 A 点用绳系于固定点上, 则当平衡时, AB 和竖直直线所成的角 θ_0 满足下列关系

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{b^2}{a^2 + 2ab}$$

式中 a 及 b 为棒 AB 和 BC 的长度, 试证明之。

3.4 相同的两个均质光滑球悬在结于定点 O 的两根绳子上, 此两球同时又支持一个等重的均质球, 求 α 角及 β 角之间的关系。



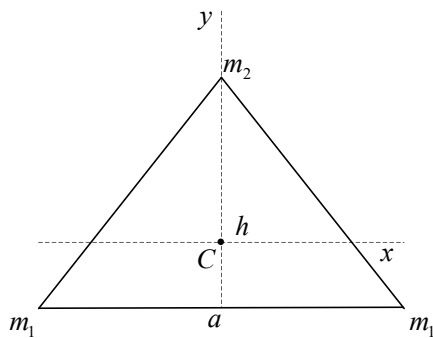
第3.4题图

3.5 一均质的梯子，一端置于摩擦系数为 $\frac{1}{2}$ 的地板上，另一端则斜靠在摩擦系数为 $\frac{1}{3}$ 的高墙上，一人的体重为梯子的三倍，爬到梯子的顶端时，梯尚未开始滑动，则梯与地面的倾角，最小当为若干？

3.6 把分子看作相互间距离不变的质点组，试决定以下两种情况下分子的中心主转动惯量：

(a) 二原子分子。它们的质量是 m_1 ， m_2 ，距离是 l 。

(b) 形状为等腰三角形的三原子分子，三角形的高是 h ，底边的长度为 a 。底边上两个原子的质量为 m_1 ，顶点上的为 m_2 。



第3.6 (b)题图

3.7 如椭球方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

试求此椭球绕其三个中心主轴转动时的中心主转动惯量。设此椭球的质量为 m ，并且密度 ρ 是常数。

3.8 半径为 R 的非均质圆球，在距中心 r 处的密度可以用下式表示：

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \alpha \frac{r^2}{R^2} \right)$$

式中 ρ_0 及 α 都是常数。试求此圆球绕直径转动时的回转半径。

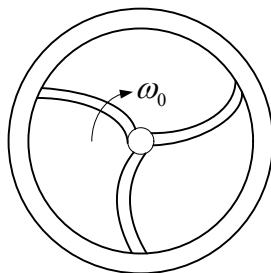
3.9 立方体绕其对角线转动时的回转半径为

$$k = \frac{d}{3\sqrt{2}}$$

试证明之。式中 d 为对角线的长度。

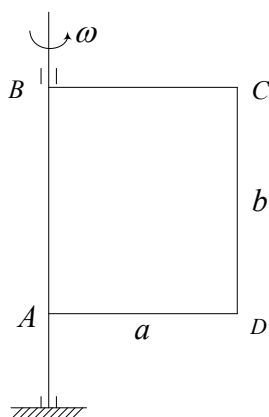
3.10 一均质圆盘，半径为 a ，放在粗糙水平桌上，绕通过其中心的竖直轴转动，开始时的角速度为 ω_0 。已知圆盘与桌面的摩擦系数为 μ ，问经过多少时间后盘将静止？

3.11 通风机的转动部分以初角速 ω_0 绕其轴转动。空气阻力矩与角速成正比，比例常数为 k 。如转动部分对其轴的转动惯量为 I ，问经过多少时间后，其转动的角速减为初角速的一半？又在此时间内共转了多少转？



第3.11题图

3.12 矩形均质薄片 $ABCD$ ，边长为 a 与 b ，重为 mg ，绕竖直轴 AB 以初角速 ω_0 转动。此时薄片的每一部分均受到空气的阻力，其方向垂直与薄片的平面，其量值与面积及速度平方成正比，比例系数为 k 。问经过多少时间后，薄片的角速减为初角速的一半？



第3.12题图

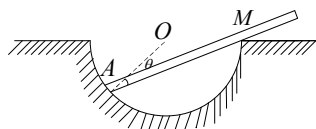
3.13 一段半径 R 为已知的均质圆弧，绕通过弧线垂直的轴线摆动。求其作微振动时的周期。

3.14 试求复摆悬点上的反作用力在水平方向的投影 R_x 与竖直方向的投影 R_y 。设此摆的重量为 mg ，对转动轴的回转半径为 k ，转动轴到摆重心的距离为 a ，且摆无初速地自离平衡位置为一已知角 θ_0 处下降。

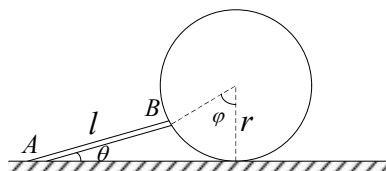
3.15 一轮的半径为 r ，以匀速 v_0 无滑动地沿一直线滚动。求轮上任一点的速度及加速度。又最高点及最低点的速度各等于多少？哪一点是转动瞬心？

3.16 一矩形板 $ABCD$ 在平行于自身的平面内运动，其角速度为定值 ω 。在某一瞬时， A 点的速度为 v ，其方向则沿对角线 AC 。试求此瞬时 B 点的速度，以 v 、 ω 及矩形的边长等表示之。假定 $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b$ 。

3.17 长为 l 的杆 AB 在一固定平面内运动。其 A 端在半径 r ($r \leq \frac{1}{2}$) 的圆周里滑动，而杆本身则于任何时刻均通过此圆周的 M 点。试求杆上任一点的轨迹及转动瞬心的轨迹。



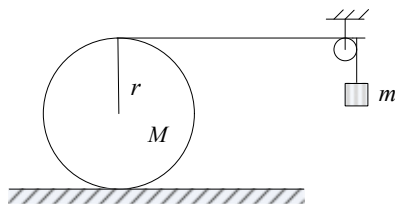
3.18 一圆盘以匀速度 v_0 沿一直线无滑动地滚动。杆 AB 以铰链固结于盘的边缘上的 B 点，其 A 端则沿上述直线滑动。求 A 点的速度与盘的转角 φ 的关系，设杆长为 l ，盘的半径为 r 。



第3.18题图

3.19 长为 $2a$ 的均质棒 AB ，以铰链悬挂于 A 点上。如起始时，棒自水平位置无初速地运动，并且当棒通过竖直位置时，铰链突然松脱，棒成为自由体。试证在以后的运动中，棒的质心的轨迹为一抛物线，并求当棒的质心下降 h 距离后，棒一共转了几转？

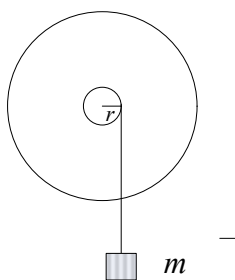
3.20 质量为 M 半径为 r 的均质圆柱体放在粗糙水平面上。柱的外面绕有轻绳，绳子跨过一个很轻的滑轮，并悬挂一质量为 m 的物体。设圆柱体只滚不滑，并且圆柱体与滑轮间的绳子是水平的。求圆柱体质心的加速度 a_1 ，物体的加速度 a_2 及绳中张力 T 。



第3.20题图

3.21 一飞轮有一半径为 r 的杆轴。飞轮及杆轴对于转动轴的总转动惯量为 I 。在杆轴上绕

有细而轻的绳子，绳子的另一端挂一质量为 m 的重物。如飞轮受到阻尼力矩 G 的作用，求飞轮的角加速度。若飞轮转过 θ 角后，绳子与杆轴脱离，并再转过 φ 角后，飞轮停止转动，求飞轮所受到的阻尼力矩的量值。



第3.21题图

3.22 一面粗糙另一面光滑的平板，质量为 M ，将光滑的一面放在水平桌上，目标那上放一质量为 m 的球。若板沿其长度方向突然有一速度 V ，问此球经过多少时间后开始滚动而不滑动？

3.23 重为 W_1 的木板受水平力 F 的作用，在一不光滑的平面上运动，板与平面间的摩擦系数为 μ 。在板上放一重为 W_2 的实心圆柱，此圆柱在板上滚动而不滑动，试求木板的加速度 a 。

3.24 半径为 a 的球，以初速 V 及初角速 ω 抛掷于一倾角为 α 的斜面上，使其沿着斜面向上滚动。如 $V > a\omega$ ，其中 ω 的方向使球有向下滚动的趋势，且摩擦系数 $\mu > \frac{2}{7} \tan \alpha$ ，试证经过 $\frac{5V + 2a\omega}{5g \sin \alpha}$ 的时候，球将停止上升。

3.25 均质实心圆球，栖于另一固定圆球的顶端。如使其自此位置发生此微偏离，则将开始滚下。试证当两球的公共法线与竖直线所成之角 φ 满足下列关系

$$2 \sin(\varphi - \lambda) = 5 \sin \lambda (3 \cos \varphi - 2)$$

时，则将开始滑动，式中 λ 为摩擦角。

3.26 棒的一端置于光滑水平面上，另一端则靠在光滑墙上，且棒与地面的倾角为 α 。如任其自此位置开始下滑，则当棒与地面的倾角变为

$$\sin^{-1} \left(\frac{2}{3} \sin \alpha \right)$$

时，棒将与墙分离，试证明之。

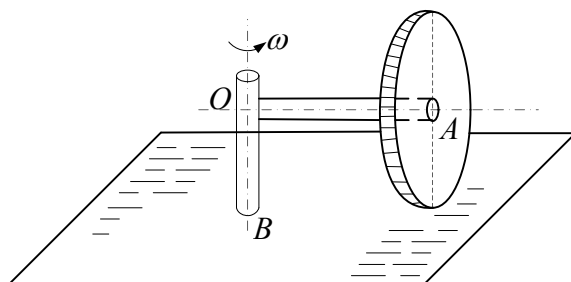
3.27 试研究上题中棒与墙分离后的运动。并求棒落地时的角速度 Ω ，设棒长为 $2a$ 。

3.28 半径为 r 的均质实心圆柱，放在倾角为 θ 的粗糙斜面上，摩擦系数为 μ 。设运动不是纯滚动，试求圆柱体质心加速度 a 及圆柱体的角加速度 α 。

3.29 均质实心球和一外形相等的空心球壳沿着一斜面同时自同一高度自由滚下，问哪一

个球滚得快些？并证它们经过相等距离所需的时间比是 $\sqrt{21}:5$ 。

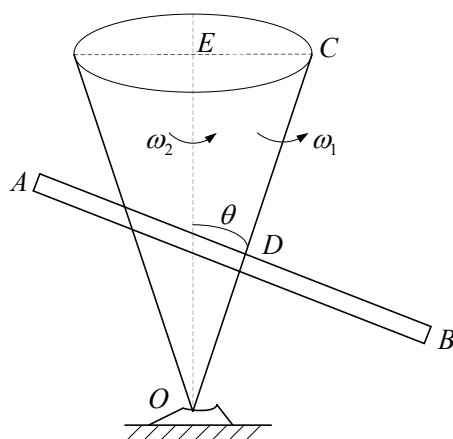
3.30 碾磨机碾轮的边缘沿水平面作纯滚动，轮的水平轴则以匀角速 ω 绕铅垂轴 OB 转动。如 $OA=c$ ， $OB=b$ ，试求轮上最高点的速度及加速度的量值。



第3.30题图

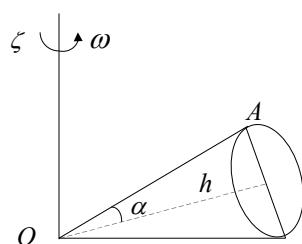
3.31 转轮 AB ，绕 OC 轴转动的角速度为 ω_1 ，而 OC 绕竖直线 OE 转动的角速度则为 ω_2 。如 $\overline{AD} = \overline{DB} = \alpha$ ， $\overline{OD} = b$ ， $\angle COE = \theta$ ，试求转轮最低点 B 的速度。

题2.15图



第3.31题图

3.32 高为 h 、顶角为 2α 的圆锥在一平面上滚动而不滑动。如已知此锥以匀角速 ω 绕 $O\xi$ 轴转动，试求圆锥底面上 A 点的转动加速度 a_1 和向轴加速度 a_2 的量值。



第3.32题图

3.33 一回转仪， $I_1 = I_2 = 2I_3$ ，依惯性绕重心转动，并作规则进动。已知此回转仪的自

转角速度为 ω_1 ，并知其自转轴与进动轴间的夹角 $\theta = 60^\circ$ ，求进动角速度 ω_2 的量值。

3.34 试用欧勒动力学方程，证明在欧勒-潘索情况中，动量矩 J 及动量 T 都是常数。

3.35 对称陀螺的轴位于竖直位置，陀螺以很大的角速度 ω_1 作稳定的自转。今突然在离开顶点 d 处受到一与陀螺的对称轴垂直的冲量 I 作用。试证陀螺在以后的运动中，最大章动角近似地为

$$2tg^{-1}\left(\frac{Id}{I_3\omega_1}\right)$$

式中 I_3 是陀螺绕对称轴转动的转动惯量。

3.36 一个 $I_1 = I_2 \neq I_3$ 的刚体，绕其重心作定点转动。已知作用在刚体上的阻尼力是一力偶，位于与转动瞬轴相垂直的平面内，其力偶矩与瞬时角速度成正比，比例常数为 $I_3\lambda$ ，试证刚体的瞬时角速度在三惯量主轴上的分量为

$$\omega_x = ae^{-\lambda t I_3/I_1} \sin\left(\frac{n}{\lambda} e^{-\lambda t} + \varepsilon\right)$$

$$\omega_y = ae^{\lambda t I_3/I_1} \cos\left(\frac{n}{\lambda} e^{-\lambda t} + \varepsilon\right)$$

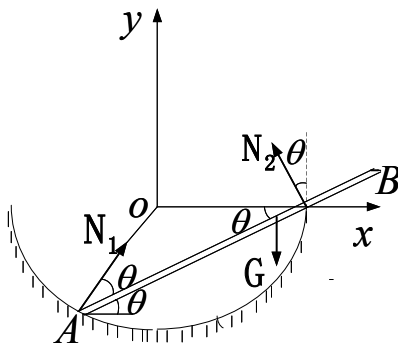
$$\omega_z = \Omega e^{-\lambda t}$$

式中 a, ε, Ω 都是常数，而

$$n = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \Omega。$$

第三章习题解答

3.1 解 如题 3.1.1 图。



题3.1.1图

均质棒受到碗的弹力分别为 N_1 , N_2 , 棒自身重力为 G 。棒与水平方向的夹角为 θ 。设棒的长度为 l 。

由于棒处于平衡状态, 所以棒沿 x 轴和 y 轴的和外力为零。沿过 A 点且与 z 轴平行的合力矩为 0。即:

$$\sum F_x = N_1 \cos 2\theta - N_2 \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = N_1 \sin 2\theta + N_2 \cos \theta - G = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_i = N_2 c - G \frac{l}{2} \cos \theta = 0 \quad (3)$$

由①②③式得:

$$l = \frac{2c(2\cos^2 \theta - 1)}{\cos^2 \theta} \quad (4)$$

又由于

$$2r \cos \theta = c,$$

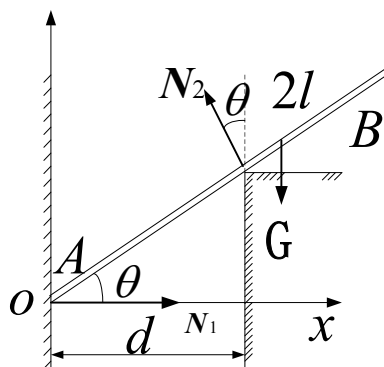
即

$$\cos \theta = \frac{c}{2r} \quad (5)$$

将⑤代入④得:

$$l = \frac{4(c^2 - 2r^2)}{c}$$

3.2 解 如题 3.2.1 图所示,



题3.2.1图

均质棒分别受到光滑墙的弹力 N_1 ，光滑棱角的弹力 N_2 ，及重力 G 。由于棒处于平衡状态，所以沿 y 方向的合力矩为零。即

$$\sum F_y = N_2 \cos \theta - G = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_z = N_2 \frac{d}{\cos \theta} - G \frac{2l}{2} \cos \theta = 0$$

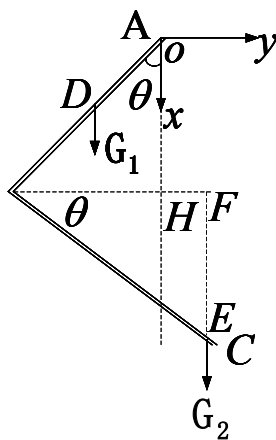
由①②式得：

$$\cos^3 \theta = \frac{d}{l}$$

所以

$$\theta = \arccos \left(\frac{d}{l} \right)^{1/3}$$

3.3 解 如题 3.3.1 图所示。



题3.3.1图

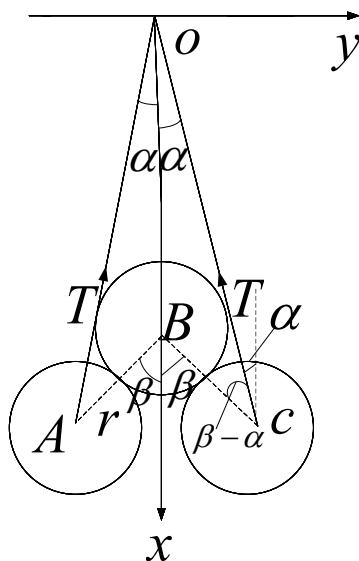
AB 棒受到重力 $G_1 = \rho a g l$ 。棒受到的重力 $G_2 = \rho b g l$ 。设均质棒的线密度为 ρ 。

由题意可知，整个均质棒沿 z 轴方向的合力矩为零。

$$\sum M_z = G_1 \cdot OD \sin \theta - G_2 (BF - BH) = \rho g a \frac{a}{2} \sin \theta - \rho g b \left(\frac{b}{2} \cos \theta - a \sin \theta \right) = 0$$

$$\tan \theta = \frac{b^2}{a^2 + 2ab}$$

3.4 解 如题 3.4.1 图。



题3.4.1图

Ox 轴竖直向下，相同的球 A 、 B 、 C 互切， B 、 C 切于 D 点。设球的重力大小为 G ，半径为 r ，则对 A 、 B 、 C 三个球构成的系统来说，在 x 轴方向的合力应
为零。即：

$$\sum F_x = 3G - 2T \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

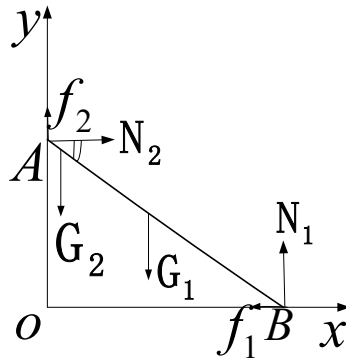
对于 C 球，它相对于过 D 点与 z 轴平行的轴的合力矩等于零。即：

$$\sum M_D = Tr \sin(\beta - \alpha) - Gr \sin \beta = 0 \quad (2)$$

由式得：

$$\tan \beta = 3 \tan \alpha$$

3.5 解 如题 3.5.1 图。



题3.5.1图

梯子受到地面和墙的弹力分别为 N_1 , N_2 , 受地面和墙的摩擦力分别为 f_1 , f_2 。梯子和人的重力分别为 G_1 , G_2 且 $G_2 = 3G_1$ 。设梯长为 l , 与地面夹角为 θ 。由于梯子处于平衡, 所以

$$\sum F_x = N_2 - f_1 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = f_2 + N_1 - G_1 - G_2 = 0 \quad (2)$$

且梯子沿过 A 点平行于 z 轴的合力矩为零。即:

$$\sum M_i = G_2 l \cos \theta + G_1 \frac{l}{2} \cos \theta - f_2 l \cos \theta - N_2 l \sin \theta = 0 \quad (3)$$

又因梯子是一个刚体。当一端滑动时, 另一端也滑动, 所以当梯与地面的倾角达到最小时,

$$f_1 = \frac{1}{2} N_1 \quad (4)$$

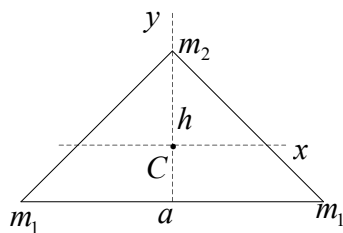
$$f_2 = \frac{1}{3} N_2 \quad (5)$$

由①②③④⑤得: $\tan \theta = \frac{41}{24}$

所以

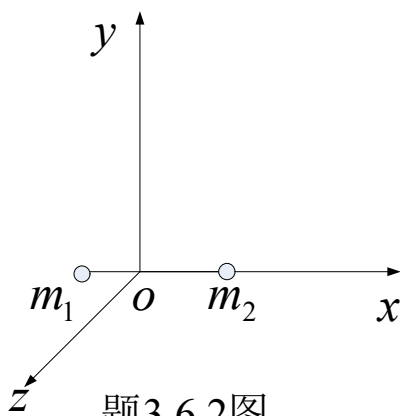
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{41}{24} \right)$$

3.6 解 (a) 取二原子的连线为 x 轴, 而 y 轴与 z 轴通过质心。 O 为质心, 则 Ox , Oy , Oz 轴即为中心惯量主轴。



题3.6.1图

设 m_1 、 m_2 的坐标为 $(l_1, 0, 0), (l_2, 0, 0)$, 因为 O 为质心 (如题 3.6.2 图)



故

$$m_1 l_1 + m_2 l_2 = 0 \quad ①$$

且

$$l_2 - l_1 = l \quad ②$$

由①②得

$$l_1 = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}, l_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}$$

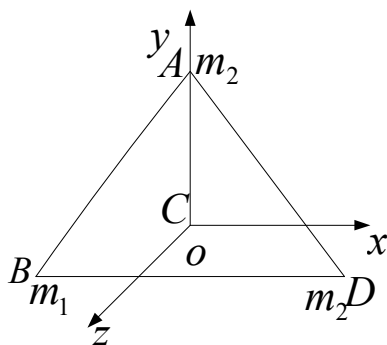
所以中心惯量主轴:

$$I_1 = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = 0$$

$$I_2 = \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2$$

$$I_3 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2$$

(b) 如题 3.6.3 图所示,



题3.6.3图

该原子由 A 、 B 、 D 三个原子构成。 C 为三个原子分子的质心。由对称性可知，图中 Cx 、 Cy 、 Cz 轴即为中心惯量主轴。设 A 、 B 、 D 三原子的坐标分别为

$(0, y_A, 0)$ 、 $\left(-\frac{a}{2}, y_B, 0\right)$ 、 $\left(\frac{a}{2}, y_D, 0\right)$ 因为 C 为分子的质心。所以

$$y_C = \frac{m_A y_A + m_B y_B + m_D y_D}{m_A + m_B + m_D} = \frac{m_2 y_A + m_1 y_B + m_1 y_D}{m_2 + m_1 + m_1} = 0 \quad (1)$$

又由于

$$y_B = y_D \quad (2)$$

$$y_A - y_B = h \quad (3)$$

由①②③得：

$$y_A = \frac{2m_1 h}{2m_1 + m_2} \cdot y_B = y_D = -\frac{m_2 h}{2m_1 + m_2}$$

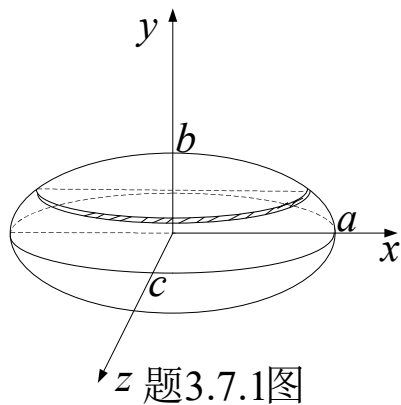
故该分子的中心主转动惯量

$$I_1 = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = \frac{2m_1 m_2}{2m_1 + m_2} h^2 (i = A, B, D)$$

$$I_2 = \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) = \frac{m_1 a^2}{2} (i = A, B, D)$$

$$I_3 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \frac{2m_1 m_2}{2m_1 + m_2} h^2 + \frac{m_1 a^2}{2} (i = A, B, D)$$

3.7 解 如题 3.7.1 图所示。



沿 y 轴平行于 Oxy 平切椭球得切面为一椭圆，则该椭圆方程为：

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)} = 1$$

可求该切面的面积

$$S_{(y)} = \pi ac \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

故积分

$$\int y^2 dm = \int_{-b}^b y^2 S_{(y)} \cdot \rho dy = \int_{-b}^b y^2 \pi ac \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \rho dy = \frac{4}{15} \pi \rho ab^3 c$$

同理可求

$$\int x^2 dm = \frac{4}{15} \pi \rho a^3 bc, \quad \int z^2 dm = \frac{4}{15} \pi \rho abc^3$$

故中心主转动惯量：

$$I_1 = \int (y^2 + z^2) dm = \frac{4}{15} \pi \rho abc (b^2 + c^2)$$

$$I_2 = \int (x^2 + z^2) dm = \frac{4}{15} \pi \rho abc (a^2 + c^2)$$

$$I_3 = \int (x^2 + y^2) dm = \frac{4}{15} \pi \rho abc (a^2 + b^2)$$

又由于椭球体积

$$V = \int_{-b}^b S_{(y)} dy = \int_{-b}^b \pi ac \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{4}{3} \pi abc$$

故

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi abc}$$

将 ρ 代入 I_1, I_2, I_3 得:

$$I_1 = \frac{1}{5}m(b^2 + c^2)$$

$$I_2 = \frac{1}{5}m(a^2 + c^2)$$

$$I_3 = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2)$$

3.8 解 设 dm 表示距球心为 r 的一薄球壳的质量, 则

$$dm = \pi r^2 \rho dr = \pi \rho_0 r^2 \left(1 - \alpha \frac{r^2}{R^2}\right) dr$$

所以该球对球心的转动惯量

$$I = \int_0^R r^2 dm = \pi \rho_0 \int_0^R r^4 \left(1 - \alpha \frac{r^2}{R^2}\right) dr = \pi \rho_0 R^5 \frac{7-5\alpha}{35} \quad ①$$

在对称球中, 绕直径转动时的转动惯量

$$I' = \frac{2}{3} I \quad ②$$

又球的质量

$$m = \int_0^R dm = \pi \rho_0 \int_0^R r^2 \left(1 - \alpha \frac{r^2}{R^2}\right) dr = \pi \rho_0 R^3 \frac{5-3\alpha}{15} \quad ③$$

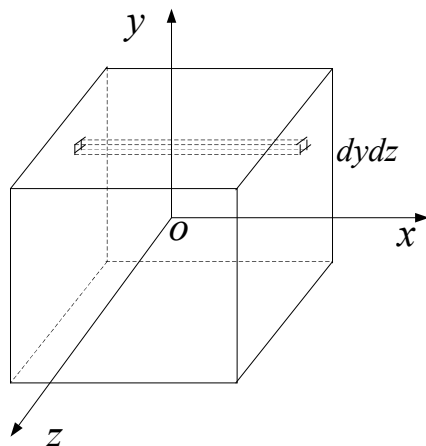
又绕直径的回转半径

$$k = \sqrt{\frac{I'}{m}} \quad ④$$

由①②③④得

$$k = \sqrt{\frac{14-10\alpha}{35-21\alpha}} R$$

3.9 解 如题 3.9.1 图所示 $Oxyz$ 坐标系。



题 3.9.1图

O 为正方体中心。 Ox 、 Oy 、 Oz 分别与正方体的边平行。由对称性可知， Ox 、 Oy 、 Oz 轴就是正方体的中心惯量主轴。设正方体的边长为 a 。设为平行于轴的一小方条的体积，则正方体绕轴的转动惯量

$$I_{xx} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho a (y^2 + z^2) dy dz = \frac{m}{6} a^2$$

根据对称性得

$$I_{yy} = I_{zz} = I_{xx} = \frac{m}{6} a^2$$

易求正方体的对角线与 Ox 、 Oy 、 Oz 轴的夹角都为 θ 。且

$$\cos \theta = \frac{1}{3}$$

故正方体绕对角线的转动惯量

$$I = I_{xx} \cos^2 \theta = I_{yy} \cos^2 \theta = I_{zz} \cos^2 \theta = \frac{m}{6} a^2 \quad (1)$$

又由于

$$d = \sqrt{3}a \quad (2)$$

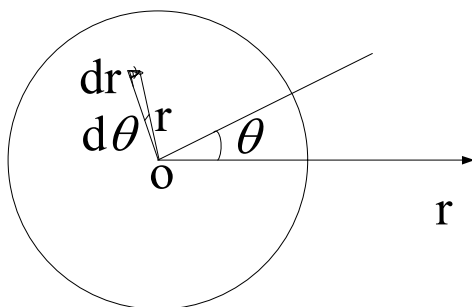
绕对角线的回转半径

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad (3)$$

由①②③得

$$k = \frac{d}{3\sqrt{2}}$$

3.10 解 如题 3.10.1 图。



题3.10.1图

z 轴过 O 点垂直纸面向外。均质圆盘的密度为 ρ 。设盘沿顺时针转动，则沿 z 的方向有 $\frac{dI_z}{dt} = M_z$

即

$$I\dot{\omega}_z = M_z \quad ①$$

I 为转盘绕 z 轴的转动惯量： $I = \frac{1}{2}ma^2$ (m 为盘的质量)，

$$\omega_z = -\omega \quad ②$$

(ω 为盘转动的角频率，负号因为规定顺时针转动)

$$M_z = \int_0^{2\pi} \int_0^a \mu g \rho r^2 d\theta dr = \frac{2\pi}{3} \mu g \rho a^3 = \frac{2}{3} \mu g \rho m a \quad (m = \pi \rho a^2) \quad ③$$

由①②③得

$$\dot{\omega} = -\frac{4\mu g}{3a}$$

又因为

$$\omega_{(0)} = \omega_0,$$

故

$$\omega_{(t)} = \omega_0 - \frac{4\mu g}{3a} t$$

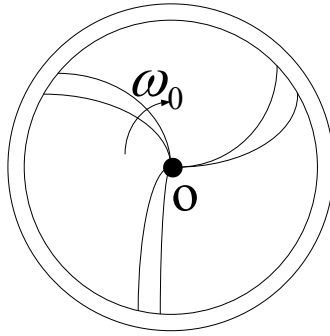
所以

$$\omega_{(t)} = 0,$$

得

$$t = \frac{3a\omega_0}{4\mu g}$$

3.11 解 如题 3.11.1 图所示,



题3.11.1图

设 z 轴通过 O 点垂直纸面指向外。则对 z 轴有:

$$\frac{dz}{dt} = M_z$$

设通风机转动的角速度大小为 $\omega_{(t)}$, 由于通风机顺时针转动。所以 $\omega_z = -\omega_{(t)}$, 将 $z = -I\omega_{(t)}, M_z = k\omega_{(t)}$ 代入上式得: $-I\dot{\omega}_{(t)} = k\omega_{(t)}$ 。又由于 $\dot{\omega}_{(0)} = \omega_{(0)}$, 解得:

$$\omega_{(t)} = \omega_0 e^{-\frac{k}{I}t}$$

故当 $\omega_{(t)} = \frac{\omega_0}{2}$ 时, $t = \frac{I}{k} \ln 2$ 。又由于 $\omega_{(t)} = \dot{\theta}_{(t)}$ (θ 为通风机转动的角度)

设 $\theta_{(0)} = 0$,

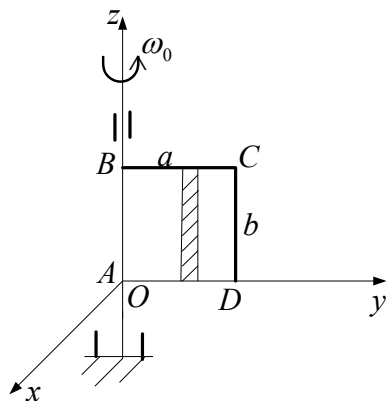
$$\dot{\theta}_{(t)} = \omega_0 e^{-\frac{k}{I}t}$$

$$\theta_{(t)} = \int_0^t \omega_0 e^{-\frac{k}{I}t} dt + \theta_{(0)} = \frac{I\omega_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{I}t} \right)$$

故当 $t = \frac{I}{k} \ln 2$ 时, $\theta_{(t)} = \frac{I\omega_0}{2k}$, t 时间内通风机转动的转数

$$n = \frac{\theta_{(t)} - \theta_{(0)}}{2\pi} = \frac{I\omega_0}{4\pi k}$$

3.12 解 如题 3.12.1 图,



第 3.12.1 图

坐标 $Oxyz$ 与薄片固连, 则沿 z 轴方向有: $\frac{dz}{dt} = M_z$ 且

$$z = I\omega_z \quad (1)$$

现取如图阴影部分的小区域 $dS = a dy$, 该区域受到的阻力

$$df = k dS v^2 = k a dy (\omega_z y)^2$$

df 对 z 轴的力矩 $dM_z = -df \cdot y = -ka \omega_z^2 y^3 dy$ 所以

$$M_z = \int_0^a dM_z = -k \frac{a^3 b}{4} \omega_z^2 \quad (2)$$

又薄片对轴的转动惯量

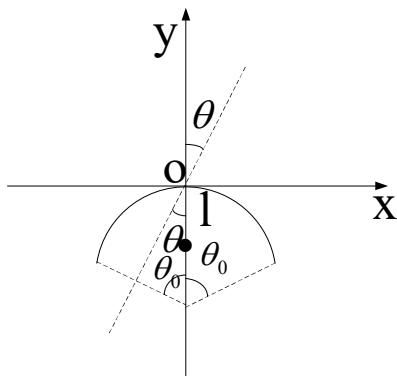
$$I = \int_0^a y^2 dm = \int_0^a y^2 \rho b dy = \frac{1}{3} m a^2 (m = \rho ab) \quad (3)$$

由①②③得:

$$\omega_{z(t)} = \frac{1}{\frac{3ka^2b}{4m}t + \frac{1}{\omega_0}}$$

$$\text{当 } \omega_{z(t)} = \frac{\omega_0}{2} \text{ 时, } t = \frac{4m}{3ka^2b\omega_0}$$

3.13 解 如题 3.13.1 图所示,



题3.13.1图

坐标系 $Oxyz$ 的原点位于圆弧最顶点。设圆弧平衡时，质心 c 的坐标为 $c(0, -l, 0)$ 。

如图所示圆弧偏离平衡位置一小角度 θ ，则 θ 满足微分方程

$$-mgl \sin \theta = I\ddot{\theta}$$

I 为圆弧相对于 Oz 轴的转动惯量。当 θ 很小时， $\sin \theta \approx \theta$ ，代入上式得：

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I} \theta = 0 \quad (1)$$

圆弧上对应转角为 θ 的一小段圆弧的坐标为 $(R \sin \theta, R \cos \theta - R, 0)$

质心 c 的纵坐标

$$y_c = \frac{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \rho d\theta R (R \cos \theta - R)}{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \rho R d\theta} = -R + \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} R$$

上式中 ρ 为圆弧的线密度

$$l = R - \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} R \quad (2)$$

又

$$I = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \rho R [(R \cos \theta - R)^2 + (R \sin \theta)^2] d\theta = 2mR^2 \left(1 - \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \right) \quad (3)$$

其中 $m = 2\rho R\theta_0$ ，将②③代入①得

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2R} \theta = 0 \quad (4)$$

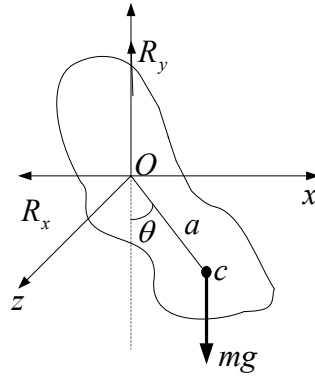
解④式得通解

$$\theta_{(t)} = A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{2R}} t + \varphi \right)$$

微振动周期

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g/2R}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

3.14 解 如题 3.14.1 图所示坐标系 $Oxyz$ 。



题3.14.1图

由动量定理及动量矩定理得：

$$m\ddot{x}_c = m(-x_c\dot{\theta}^2 - y_c\ddot{\theta}) = R_x \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_c = m(-y_c\dot{\theta}^2 + x_c\ddot{\theta}) = R_y - mg \quad (2)$$

$$mk^2\ddot{\theta} = -mga \sin \theta \quad (3)$$

其中

$$x_c = a \sin \theta, y_c = -a \cos \theta$$

又根据机械能守恒定律得：

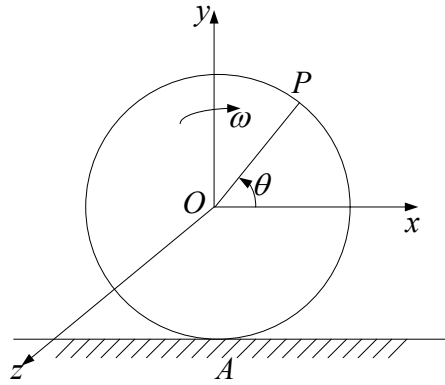
$$\frac{1}{2}mk^2\dot{\theta}^2 = mga(\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (4)$$

由①②③④解得：

$$R_x = \frac{mga^2}{k^2}(2\cos \theta_0 + 3\cos \theta)\sin \theta$$

$$R_y = \frac{mga^2}{k^2}[(3\cos \theta - 2\cos \theta_0)\cos \theta - 1] + mg$$

3.15 解 如题 3.15.1 图所示坐标系 $Oxyz$ 。



题3.15.1图

由于球作无滑滚动，球与地面的接触点 A 的速度与地面一致，等于零，所以 A 点为转动瞬心。以 O 为基点。设球的角速度 $\omega = -\omega k$ ，则

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_0 + \omega \times \mathbf{OA} = v_0 \mathbf{i} + (-\omega k) \times (-r \mathbf{j}) = (v_0 - \omega r) \mathbf{k} = 0$$

$$\omega = \frac{v_0}{r}$$

设轮缘上任意一点 p ， \mathbf{Op} 与 x 轴交角为 θ ，则

$$\mathbf{Op} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}$$

故

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p &= \mathbf{v}_0 + \omega \times \mathbf{Op} = v_0 \mathbf{i} + (-\omega k) \times (r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}) \\ &= (v_0 + \omega r \sin \theta) \mathbf{i} - \omega r \cos \theta \mathbf{j} \end{aligned}$$

当 $\theta = 90^\circ$ 时，得最高点的速度 $v_{top} = 2v_0$

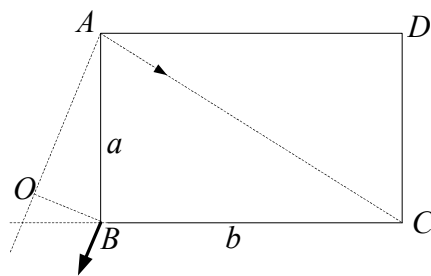
$$\begin{aligned} \mathbf{a}_p &= \mathbf{a}_0 + \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{Op} + \omega \times (\omega \times \mathbf{Op}) \\ &= (-\omega k) \times [(-\omega k) \times (r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j})] \\ &= -\omega^2 r \cos \theta \mathbf{i} - \omega^2 r \sin \theta \mathbf{j} = -\frac{v_0^2}{r} (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \end{aligned}$$

当 $\theta = 90^\circ$ 和 -90° 时分别得到最高点和最低点的加速度

$$\mathbf{a}_{top} = -\frac{v_0^2}{r} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}_{bottom} = \frac{v_0^2}{r} \mathbf{j}$$

3.16 解 如题 3.16.1 图所示，



题3.16.1图

由题意知该时刻瞬心一定处在 AC 的垂线 AO 中。设瞬心为 O 。则

$$AO = \frac{v}{\omega}$$

易知 v_B 的方向如图，在 $\triangle AOB$ 中

$$OB^2 = AO^2 + AB^2 - 2AO \cdot AB \cos \angle OAB = \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 + a^2 - 2\frac{v}{\omega}a \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$OB = \frac{1}{\omega} \sqrt{v^2 + \omega^2 a^2 - 2\omega v \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

$$v_B = \omega \cdot OB = \sqrt{v^2 + \omega^2 a^2 - 2\omega v \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

$$\cos \angle OBA = \frac{OB^2 + BA^2 - AO^2}{2BO \cdot BA} = \frac{AB - AO \cos \angle OAB}{BO}$$

$$= \frac{\omega a - v \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{v^2 + \omega^2 a^2 - 2\omega v \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}}}$$

$$\angle OBA = \cos^{-1} \left[\frac{\omega a - v \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{v^2 + \omega^2 a^2 - 2\omega v \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}}} \right]$$

$\angle OBA$ 即为 v_B 与 CB 边的夹角大小。

3.17 解 如题 3.17.1 图所示，

速度为 ω ，则

$$v_D = v_0 - \omega r = 0$$

$$\omega = \frac{v_0}{r}$$

$$v_B = \omega \cdot DB = \omega \cdot 2r \sin \frac{\varphi}{2} = 2v_0 \sin \frac{\varphi}{2} \quad (1)$$

因为 A 点的速度沿地面水平向右，分别作 v_A 和 v_B 的垂线交于 C 点，则 C 点即为杆的瞬心。且得

$$v_A = v_B \cdot \frac{AC}{BC} = v_B \frac{\sin \angle ABC}{\sin \angle CAB}$$

由几何知识可知 v_B 与竖直方向夹角为 $\frac{\varphi}{2}$ ， $\angle ABN = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$ 又知

$$\angle ABN = 90^\circ - \theta$$

$$\angle CBA = 180^\circ - \angle MBC - \angle ABN = \theta + \frac{\varphi}{2}$$

又 $\angle CAB = 90^\circ - \theta$ ，所以

$$v_A = v_B \frac{\sin\left(\theta + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos \theta} = v_B \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right) \quad (2)$$

又 $BN = AB \sin \theta = OD - OB \cos \varphi$ 。即： $l \sin \theta = r - r \cos \varphi$ 得

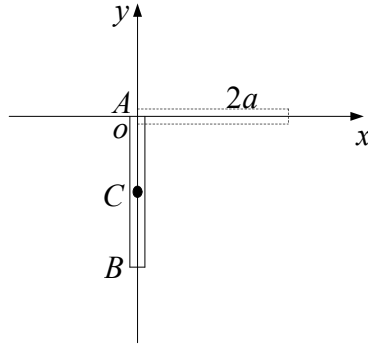
$$\sin \theta = \frac{r}{l} (1 - \cos \varphi) \quad (3)$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{1}{l} \sqrt{l^2 - 4r^2 \sin^4 \frac{\varphi}{2}} \quad (4)$$

由①②③④解得：

$$v_A = 2v_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left(\frac{r \sin \varphi}{\sqrt{l^2 - 4r^2 \sin^4 \frac{\varphi}{2}}} + 1 \right)$$

3.19 解 如题 3.19.1 图，



题3.19.1图

固定坐标系 Oxy 。杆从水平位置摆到竖直位置过程中只有重力做功，故机械能守恒。设此时的角速度为 ω_0 ，则

$$mga = \frac{1}{2}m(a\omega_0)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ma^2\right)\omega_0^2$$

右边第一项为质心运动动能，第二项为杆绕质心转动的动能。解上式得：

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2a}}$$

在杆脱离悬点后，根据动量定理和动量矩定理：

$$m\ddot{x}_c = 0 \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_c = -mg \quad (2)$$

$$I\dot{\omega}_z = M_z \quad (3)$$

③式中 I 为杆绕质心的转动惯量， M_z 为沿过质心平行于 z 轴的合力矩，易知

$M_z = 0$ ，又 $\omega_{z(0)} = \omega_0$ ，代入③式得

$$\omega_{z(t)} = \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2a}}$$

即杆将作匀速转动。

$$\dot{x}_{c(0)} = -\omega_0 a = -\sqrt{\frac{3ga}{2}}, x_{c(0)} = 0$$

$$\dot{y}_{c(0)} = 0, y_{c(0)} = -a$$

解①②得

$$x_c = -\sqrt{\frac{3ga}{2}}t, y_c = -a - \frac{1}{2}gt^2 \quad (4)$$

$$y_c = -\frac{1}{3a}x_c^2 - a$$

所以质心的轨迹为一抛物线。

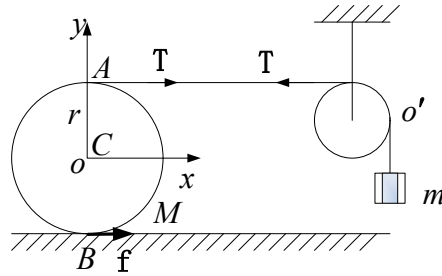
故当 $y_c = -a - h$ 时，杆的质心下降 h ，代入④式得

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

故 t 时间内杆的转数

$$n = \frac{\omega_0 t}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g}{2a}} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3h}{a}}$$

3.20 解 如题 3.20.1 图，



题3.20.1图

设圆柱体的转动角速度为 $\omega = -\omega \mathbf{k}$ ，设它受到地面的摩擦力为 f ，由动量定理和动量矩定理知：

$$\sum F_x = T + f = M\ddot{x}_c = Ma_1 \quad (1)$$

$$\sum M_z = -Tr + fr = -\frac{1}{2}Mr^2\dot{\omega} \quad (2)$$

对于滑块。由动量定理知：

$$\sum F_y = T - mg = m\ddot{y} = -ma^2 \quad (3)$$

$$\dot{x}_c = r\omega$$

$$a_1 = \ddot{x}_c = r\dot{\omega} \quad (4)$$

以 C 为基点：

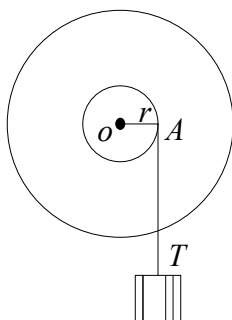
$$a_{Ax} = a_1 + \dot{\omega}r$$

假设绳不可拉伸。则 $a_{Ax} = a_2$ 。故 $a_2 = a_1 + \dot{\omega}r \quad (5)$

由①②③④⑤解得：

$$a_1 = \frac{4mg}{3M+8m}, a_2 = \frac{8mg}{3M+8m}, T = \frac{3mMg}{3M+8m}$$

3.21 解 (1) 如题 3.21.1 图。



题3.21.1图

设 z 轴过 O 点垂直纸面向外。绳子上的弹力为 T 。对于飞轮，根据动量矩定理，在 z 轴方向：

$$\sum M_z = Tr - G = I\dot{\omega} \quad (1)$$

$$mg - T = ma \quad (2)$$

a 为物块下落的加速度。因为物块的加速度应与 A 点加速度一样大小，故

$$a = \dot{\omega}r \quad (3)$$

由①②③解得：

$$\dot{\omega} = \frac{mgr - G}{I + mr^2}$$

(2) 假若飞轮受到的阻尼力矩为 G 的话，由 (1) 问知，飞轮的角加速度

$\dot{\omega} = \frac{mgr - G}{I + mr^2}$ 。现在来求绳子脱落以后飞轮的角加速度 $\dot{\omega}'$ 。同样根据动量矩，在

z 轴方向：

$$I\dot{\omega}' = -G$$

$$\dot{\omega}' = -\frac{G}{I}$$

可以证明：类似于位移、加速度、初速度和末速度之间的关系式 $v_t^2 - v_0^2 = 2as$ 。

角位移、角加速度、角初速度、角末速度之间也有类似的关系：

$$\dot{\theta}_t^2 - \dot{\theta}_0^2 = 2\ddot{\theta}\theta$$

$$\dot{\theta}_t^2 = 2\dot{\omega}\theta = 2\frac{mgr - G}{I + mr^2}\theta \quad (4)$$

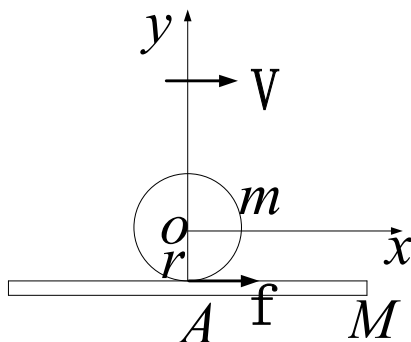
对于绳子脱落到停止转动的过程有：

$$0 - \dot{\theta}_t^2 = 2\dot{\omega}'\varphi = 2\left(-\frac{G}{I}\right)\varphi \quad (5)$$

④⑤式中 $\dot{\theta}_t$ 指绳子脱落时飞轮的角加速度，由④⑤解得：

$$G = \frac{mgIr\theta}{I\theta + (I + mr^2)\varphi}$$

3.22 解 如题 3.22.1 图。



题3.22.1图

Ox 轴与速度方向一致， Oz 轴垂直纸面向外。设球的半径为 r ，则球绕任一直径

的转动惯量 $I = \frac{2}{5}mr^2$ 。由动量定理和动量矩定理可知：

$$m\ddot{x}_c = \mu N \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_c = N - mg = 0 \quad (2)$$

$$I\dot{\omega} = \mu Nr \quad (3)$$

$$M\ddot{x}'_c = -\mu N \quad (4)$$

由①②③④得：

$$\ddot{x}_c = \mu g, \dot{\omega} = \frac{5\mu g}{2r}, \ddot{x}'_c = -\frac{\mu mg}{M}$$

设球与板的接触点为 A ，则 t 时刻 A 点的速度为：

$$v_A = v_0 + \omega r = \ddot{x}_c t + \dot{\omega} tr = \mu g t + \frac{5\mu g}{2r} tr \quad (5)$$

$$v' = V + \ddot{x}'_c t = V - \frac{\mu mg}{M} t \quad (6)$$

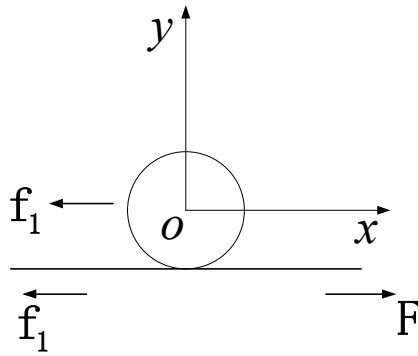
球由滑动变为滚动的条件是：

$$v_A = v' \quad (7)$$

由⑤⑥⑦解得：

$$t = \frac{V}{\left(\frac{7}{2} + \frac{m}{M}\right)\mu g}$$

3.23 解 如题 3.23.1 图所示。



题3.23.1图

设圆柱的半径为 r ，与木板之间的摩擦力为 f_2 ，弹力为 N_1 ，木板受地面的摩擦力为 f_1 ，弹力为 N_2 ，对木板由动量定理得：

$$F - f_1 - f_2 = \frac{W_1}{g} a \quad (1)$$

$$N_2 - W_1 - N_1 = 0 \quad (2)$$

对圆柱，由角动量定理和动量定理得：

$$\frac{W_2}{g} \ddot{x}_c = f_2 \quad (3)$$

$$\frac{W_2}{g} \ddot{y}_c = N_1 - W_2 = 0 \quad (4)$$

$$I\dot{\omega} = f_2 r \quad (5)$$

其中 I 为圆柱绕中心轴的转动惯量，所以

$$I = \frac{1}{2} \frac{W_2}{g} r^2 \quad (6)$$

$$f_1 = \mu N_2 \quad (7)$$

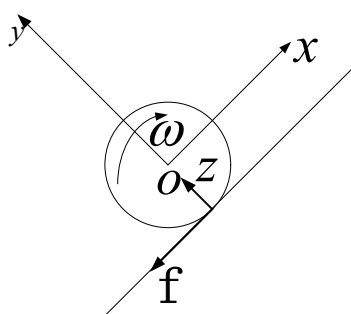
无滑滚动的条件：

$$\ddot{x}_c + \dot{\omega} r = a \quad (8)$$

由①～⑧式解得

$$a = \frac{F - \mu(W_1 + W_2)}{W_1 + \frac{W_2}{3}} g$$

3.24 解 如题 3.24.1 图，



题3.24.1图

$Oxyz$ 坐标不与圆柱固连，是固定坐标系。由于 $v > \omega a$ ，所以圆柱与斜面接触的边缘有相对与斜面向上的运动趋势，所以斜面对圆柱的摩擦力沿斜面向下。

对圆柱：

$$m\dot{v}_c = -f - mg \sin \alpha \quad (1)$$

$$0 = N - mg \cos \alpha \quad (2)$$

$$-\frac{2}{5} ma^2 \dot{\omega} = -fa \quad (3)$$

$$f = \mu N \quad (4)$$

由①②③④式得

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{2}{5}ma \frac{d\omega}{dt} - mg \sin \alpha$$

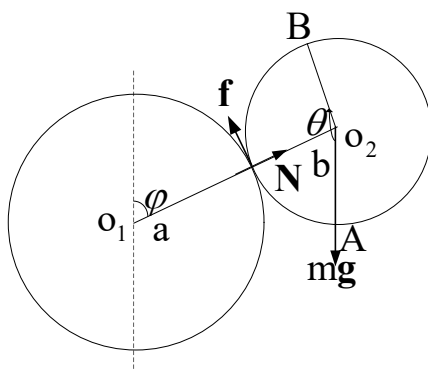
设从0到 t 的过程中, 圆柱的速度从 V 变到0, 角速度从 ω 变到0, 所以

$$\int_V^0 dv = -\int_\omega^0 \frac{2}{5}a d\omega - \int_0^t g \sin \alpha dt$$

$$-V = \frac{2}{5}a\omega - g \sin \alpha t$$

$$t = \frac{5V + 2a\omega}{5g \sin \alpha}$$

3.25 解 如题 3.25.1 图。



题3.25.1图

设大球和小球的半径分别为 a , b 。 O_1, O_2 分别为大球和小球的球心, O_2A 为方向竖直向下的定线, O_2B 为小球上的一动线。当小球位于大球顶端时, O_2A 与 O_2B 重合。设 $\angle AO_2B = \theta$, O_1O_2 与竖直方向的夹角为 φ , 根据无滑条件:

$$a\varphi = (\theta - \varphi)b \quad ①$$

$$mg \sin \varphi - f = m(a+b)\ddot{\varphi} \quad ②$$

$$mg \cos \varphi - N = m(a+b)\dot{\varphi}^2 \quad ③$$

$$f = N \tan \lambda \quad ④$$

$$f_b = \frac{2}{5}mb^2\ddot{\theta} \quad ⑤$$

从最高点运动到图示位置过程中, 机械能守恒, 即

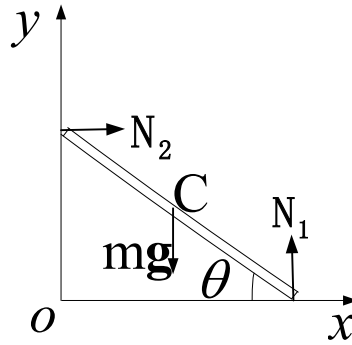
$$mg(a+b)(1 - \cos \varphi) = \frac{1}{2}m[(a+b)\dot{\varphi}]^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5}mb^2\dot{\theta}^2 \quad ⑥$$

$$\dot{\theta} = \frac{a+b}{b} \dot{\phi}, \ddot{\theta} = \frac{a+b}{b} \ddot{\phi} \quad (7)$$

由①～⑦解得

$$2 \sin(\varphi - \lambda) = 5 \sin \lambda (3 \cos \varphi - 2)$$

3.26 如题 3.26.1 图所示



题3.26.1图

坐标系 $Oxyz$ 。设杆的长度为 $2a$ ，质量为 m 。受到墙和地面的作用力分别为 N_2, N_1 ，当杆与地面的倾斜角为 θ 时，质心 C 的坐标为：

$$x_c = a \cos \theta$$

$$y_c = a \sin \theta$$

对上两式求时间导数，的质心的速度和加速度：

$$\begin{cases} \dot{x}_c = -a \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{y}_c = a \cos \theta \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_c = -a \cos \theta \dot{\theta}^2 - a \sin \theta \ddot{\theta} \\ \ddot{y}_c = -a \sin \theta \dot{\theta}^2 + a \cos \theta \ddot{\theta} \end{cases} \quad (1)$$

$$v_c = \sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} = a \dot{\theta} \quad (2)$$

$$mga(\sin \alpha - \sin \theta) = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (3)$$

$$I = \frac{1}{3} m a^2 \quad (4)$$

由②③④得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a}(\sin \alpha - \sin \theta) \quad (5)$$

对⑤式求时间导数得

$$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{4a} \cos \theta \quad (6)$$

又由动量定理

$$N_2 = m\ddot{x}_c \quad (7)$$

当杆脱离墙时，有

$$N_2 = 0 \quad (8)$$

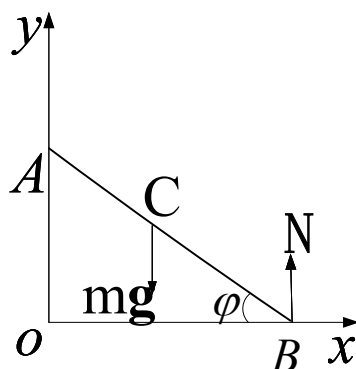
由①⑤⑥⑦⑧得

$$3 \sin \theta = 2 \sin \alpha \quad (9)$$

所以

$$\theta = \arcsin\left(\frac{2}{3} \sin \alpha\right)$$

3.27 解 如题 3.27.1 图，



题3.27.1图

设 φ 为杆与地面的倾角， θ 为杆脱离墙时的 φ 值。设杆脱离墙时，杆的角速度为 ω 横纵速度分别为 \dot{x}_c, \dot{y}_c ，当杆落地时，质心 C 的横纵速度分别为 \dot{x}'_c, \dot{y}'_c ，杆的角速度为 ω' 。当 φ 由 θ 变为 0 的过程中，机械能守恒：

$$mga(\sin \theta - \sin 0) = \frac{1}{2}m[(\dot{x}'_c{}^2 + \dot{y}'_c{}^2) - (\dot{x}_c{}^2 + \dot{y}_c{}^2)] + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ma^2[\omega'^2 - \omega^2] \quad (1)$$

又因为此过程中杆已离开墙，所以杆在水平方向受力为零，故质心水平方向匀速，

即

$$\dot{x}'_c = \dot{x}_c \quad (2)$$

又 B 点只有水平方向的速度, 根据 $\mathbf{V}_c = \mathbf{V}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{BC}$, 知当杆落地时, \dot{y}'_c 与 ω' 有如下关系:

$$\dot{y}'_c = -\omega'_a \quad (3)$$

且由 3.26 题式①得:

$$\dot{y}_c = a \cos \theta \dot{\theta} = a \cos \theta \omega \quad (4)$$

将②③④代入①得:

$$g \sin \theta = \frac{2}{3} a \omega'^2 - \frac{1}{2} a \left(\frac{1}{3} + \cos^2 \theta \right) \omega^2 \quad (5)$$

由 3.26 题式⑤⑨得

$$\omega^2 = \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a} (\sin \varepsilon - \sin \theta) \quad (6)$$

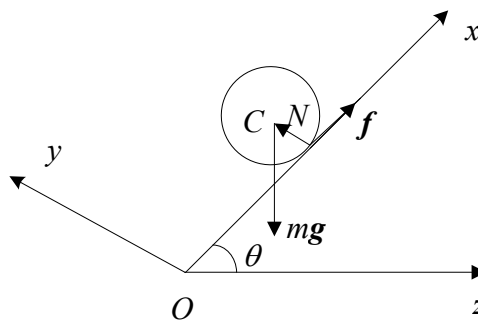
$$\sin \theta = \frac{2}{3} \sin \alpha \quad (7)$$

将⑥⑦代入⑤得

$$\omega'^2 = \frac{3g \sin \theta}{2a} \left(1 - \frac{1}{9} \sin^2 \alpha \right)$$

$$\omega' = \left[\frac{3g \sin \alpha}{2a} \left(1 - \frac{1}{9} \sin^2 \alpha \right) \right]^{1/2}$$

3.28 解 如题 3.28.1 图。



题3.28.1图

对圆柱有如下基本运动微分方程:

$$m\ddot{x}_c = f - mg \sin \theta = -ma \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_c = N - mg \cos \theta = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\omega} = f \cdot r \quad (3)$$

$$f = \mu N \quad (4)$$

$$\mu = \tan \lambda \quad (5)$$

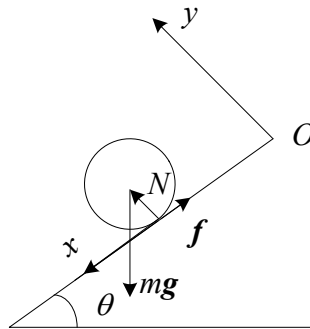
由①②③④得

$$a = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) \quad (6)$$

将⑤代入⑥得

$$a = \frac{\sin(\theta - \lambda)}{\cos \lambda} g$$

3.29 解 如题 3.29.1 图。



题3.29.1图

设斜面的倾角为 θ ，实心球或球壳的质量为 m ，半径为 r ，转动惯量为 I ，则可列出下列方程：

$$mg \sin \theta - f = ma \quad (1)$$

$$f \cdot r = I\dot{\omega} \quad (2)$$

又有无滑动条件

$$a_c - r\dot{\omega} = 0 \quad (3)$$

由①②③式得

$$a_c = \frac{mg \sin \theta}{m + \frac{I}{r^2}} \quad (4)$$

$$I_{\text{实}} = \frac{2}{5}mr^2 \quad (5)$$

$$I_{\text{空}} = \int (x^2 + y^2) \rho ds = \int (r^2 - r \cos \varphi) \rho^2 r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = \frac{2}{3}mr^2 \quad (6)$$

将⑤⑥代入④得

$$\frac{a_{c\text{实}}}{a_{c\text{空}}} = \frac{25}{21} \quad (7)$$

对初速为 0 的匀加速运动，时间，加速度，位移有如下关系：

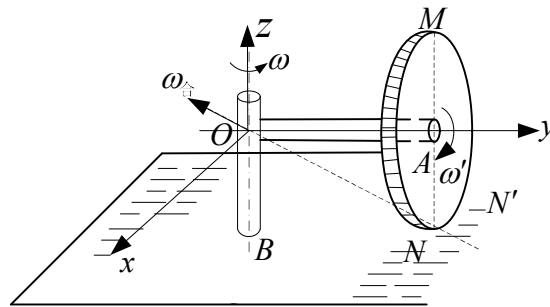
$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \quad (8)$$

当 $s_{\text{实}} = s_{\text{空}}$ 时，将⑦代入⑧得：

$$\frac{t_{\text{实}}}{t_{\text{空}}} = \frac{5}{\sqrt{21}}$$

故实心球滚得快些。

3.30 解 如题 3.30.1 图以 OA 为 y 轴。 OB 为 z 轴。建立与碾轮一起转动的动坐标系 $Oxyz$ ，设碾轮绕 Oy 轴转动的角速度 $\omega' = -\omega'\mathbf{j}$ ，水平轴的转动角速度为 $\omega = \omega\mathbf{k}$ 。所以 M 点的合角速度为



题3.30.1图

$$\omega_{\text{合}} = \omega + \omega' = -\omega'\mathbf{j} + \omega\mathbf{k}$$

又因为 O 点和 N 点的速度为 0，所以 ON 即为瞬时轴。设 ON 与地面成 θ 夹角，由于 $\omega_{\text{合}}$ 沿瞬时轴方向，所以：

$$\frac{\omega}{\omega'} = \tan \theta = \frac{OB}{OA} = \frac{b}{c}$$

$$\omega' = \frac{c}{b} \omega$$

$$\mathbf{V}_M = \omega_{\text{合}} \times \mathbf{OM} = \left[\left(-\frac{c}{b} \omega \right) \mathbf{j} + \omega \mathbf{k} \right] \times (c\mathbf{j} + b\mathbf{k}) = -2\omega c \mathbf{i}$$

$$V_M = 2\omega c$$

$$\mathbf{a}_M = \frac{d\omega_{\text{合}}}{dt} \times \mathbf{OM} + \omega_{\text{合}} \times (\omega_{\text{合}} \times \mathbf{OM}) = (\dot{\omega} \times \omega_{\text{合}}) \times \mathbf{OM} + \omega_{\text{合}} \times (\omega_{\text{合}} \times \mathbf{OM})$$

$$= [\omega \mathbf{k} \times (-\omega' \mathbf{j} + \omega \mathbf{k})] \times (c\mathbf{j} + b\mathbf{k}) + [-\omega' \mathbf{j} + \omega \mathbf{k}] \times (-2\omega c \mathbf{i}) = -3\omega^2 c \mathbf{j} - \frac{c}{b} \omega^2 c \mathbf{k}$$

故

$$a_M = \omega^2 c \sqrt{9 + \left(\frac{c}{b} \right)^2}$$

第四章 转动参考系

第四章思考题

- 4.1 为什么在以角速度 ω 转动的参照系中，一个矢量 \mathbf{G} 的绝对变化率应当写作 $\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{G}}{dt} + \omega \times \mathbf{G}$ ？在什么情况下 $\frac{d^*\mathbf{G}}{dt} = 0$ ？在什么情况下 $\omega \times \mathbf{G} = 0$ ？又在什么情况下 $\frac{d\mathbf{G}}{dt} = 0$ ？
- 4.2 式 (4.1.2) 和式 (4.2.3) 都是求单位矢量 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} 对时间 t 的微商，它们有何区别？你能否由式 (4.2.3) 推出式 (4.1.2)？
- 4.3 在卫星式宇宙飞船中，宇航员发现自己身轻如燕，这是什么缘故？
- 4.4 惯性离心力和离心力有哪些不同的地方？
- 4.5 圆盘以匀角速度 ω 绕竖直轴转动。离盘心为 r 的地方安装着一根竖直管，管中有一物体沿管下落，问此物体受到哪些惯性力的作用？
- 4.6 对于单线铁路来讲，两条铁轨磨损的程度有无不同？为什么？
- 4.7 自赤道沿水平方向朝北或朝南射出的炮弹，落地是否发生东西偏差？如以仰角 40° 朝北射出，或垂直向上射出，则又如何？
- 4.8 在南半球，傅科摆的振动面，沿什么方向旋转？如把它安装在赤道上某处，它旋转的周期是多大？
- 4.9 在上一章刚体运动学中，我们也常采用动坐标系，但为什么不出现科里奥利加速度？

第四章思考题解答

4.1.答：矢量 \mathbf{G} 的绝对变化率即为相对于静止参考系的变化率。从静止参考系观察变矢量 \mathbf{G} 随转动系以角速度 ω 相对与静止系转动的同时 \mathbf{G} 本身又相对于动系运动，所以矢量 \mathbf{G} 的绝对变化率应当写作 $\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{G}}{dt} + \omega \times \mathbf{G}$ 。其中 $\frac{d^*\mathbf{G}}{dt}$ 是 \mathbf{G} 相对于转动参考系的变化率即相对变化率； $\omega \times \mathbf{G}$ 是 \mathbf{G} 随动系转动引起 \mathbf{G} 的变化率即牵连变化率。若 \mathbf{G} 相对于参考系不变化，则有 $\frac{d^*\mathbf{G}}{dt} = 0$ ，此时牵连运动就是绝对运动， $\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \omega \times \mathbf{G}$ ；若 $\omega = 0$ 即动系作动平

动或瞬时平动，则有 $\omega \times \mathbf{G} = 0$ 此时相对运动即为绝对运动 $\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{G}}{dt}$ ；另外，当某瞬时

$\omega // \mathbf{G}$ ，则 $\omega \times \mathbf{G} = 0$ ，此时瞬时转轴与 \mathbf{G} 平行，此时动系的转动不引起 \mathbf{G} 的改变。当动

系作平动或瞬时平动且 \mathbf{G} 相对动系瞬时静止时，则有 $\frac{d\mathbf{G}}{dt} = 0$ ；若 \mathbf{G} 随动系转动引起的变

化 $\omega \times \mathbf{G}$ 与相对动系运动的变化 $\frac{d^*\mathbf{G}}{dt}$ 等值反向时，也有 $\frac{d\mathbf{G}}{dt} = 0$ 。

4.2.答：式 (4.1.2) $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \omega \mathbf{j}$ $\frac{d\mathbf{j}}{dt} = -\omega \mathbf{i}$ 是平面转动参考系的单位矢对时间的微商，表示由

于动系转动引起 \mathbf{i}, \mathbf{j} 方向的变化率。由于动坐标系中的 z 轴静止不动。故有 $\frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0$ ；又 ω 恒

沿 z 轴方位不变，故不用矢积形式完全可以表示 $\frac{d\mathbf{i}}{dt}$ 和 $\frac{d\mathbf{j}}{dt}$ 。

式 (4.2.3) $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \omega \times \mathbf{i}$ ， $\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \omega \times \mathbf{j}$ $\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \omega \times \mathbf{k}$ 是空间转动坐标系的单位矢对时间的微商，

表示由于动系转动引起 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 方向的变化率，因动系各轴都转动 $\frac{d\mathbf{k}}{dt} \neq 0$ ；又 ω 在空间的方

位随时间改变不同时刻有不同的瞬时转轴，故必须用矢积表示 $\frac{d\mathbf{i}}{dt}, \frac{d\mathbf{j}}{dt}, \frac{d\mathbf{k}}{dt}$ 。(4.1.2) 是

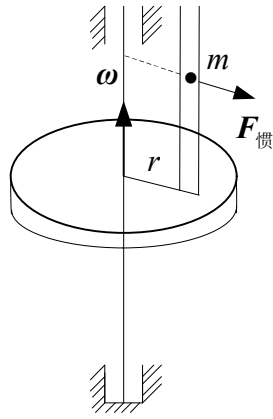
(4.2.3) 的特例，当 $\omega // \mathbf{k}$ 代入 (4.2.3) $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \omega \times \mathbf{j} = \omega \mathbf{j}$ ， $\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \omega \times \mathbf{i} = -\omega \mathbf{i}$ ， $\frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0$ 即为 (4.1.2)

式。不能由式 (4.1.2) 推出 (4.2.3)。

4.3.答：人随卫星式飞船绕地球转动过程中受到惯性离心力作用，此力与地心引力方向相反，使人处于失重状态，故感到身轻如燕。

4.4.答：惯性离心力是随转动坐标系一起转动的物体受到惯性离心力，它作用于随动系一起转动的物体上，它不是物体间的相互作用产生的，也不是产生反作用力，是物体的惯性在非惯性系的反映；离心力是牛顿力，是作用于给曲线运动提供向心力的周围物体上的力，或者说离心力是作用于转动坐标系上的力，它是向心力的反作用力。

4.5.答：如题 4.5 所示，



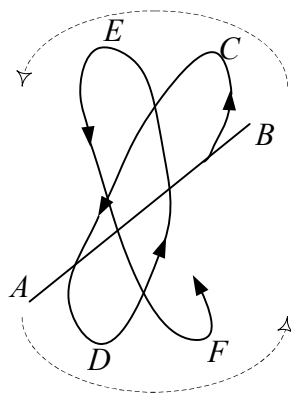
题4-5图

由于物体 m 相对于圆盘的速度矢量 $\mathbf{v}' \parallel \boldsymbol{\omega}$ ，故科里奥利力 $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = 0$ ；又 $\boldsymbol{\omega} = \text{恒矢量}$ ， $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$ ，故牵连切向惯性力 $-m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} = 0$ ；所以物体只受到牵连法向惯性力即惯性离心力的作用，如图示 $F_{\text{惯}} = mr\omega^2$ ，方向垂直于转轴向外。

4.6.答：单线铁路上，南来北往的列车都要通过，以北半球为例，火车受到的科氏惯性力总是指向运动方向的右侧（南半球相反），从北向南来的列车使西侧铁轨稍有磨损，故两条铁轨的磨损程度并不相同。

4.7.答：抛体的落地偏差是由于科里奥利力 $-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'m$ 引起的，当炮弹自赤道水平方向朝北或朝正南射出时，出刻 $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{v}'$ ，科里奥利力为零，但炮弹运行受重力作用改变方向使得 $\boldsymbol{\omega}$ 与 \mathbf{v}' 不平行 $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \neq 0$ ，朝北和朝南射出的炮弹都有向东的落地偏差。若以仰角 40° 或垂直向上射出，炮弹上升和降落过程中科氏惯性力方向相反，大小相等，且上升时间等于下降时间，故落地无偏差。

4.8.答：单摆震动面的旋转是摆锤受到科里奥利力 $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ 的缘故，其中 m 是摆锤的质量， $\boldsymbol{\omega}$ 是地球绕地轴的自转角速度， \mathbf{v}' 是摆锤的速度。南半球上摆锤受到的科氏力总是指向起摆动方向的左侧，如题 4.8 图是南半球上单摆的示意图，若没有科氏惯性力，单摆将沿 AB 摆动，事实上由于科里奥利力的作用单摆从 A 向 B 摆动逐渐向左侧移动到达 C 点，从 C 点向回摆动过程中逐渐左偏到达 D 点，以此推论，摆动平面将沿逆时针方向偏转。科里奥利力很小，每一次摆动，平面的偏转甚微，必须积累很多次摆动，才显出可觉察的偏转。



题4-8图

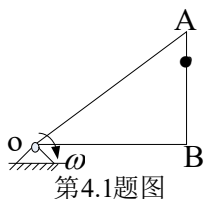
(图中是为了便于说明而过分夸张的示意图)。由 $C' = \frac{2\pi}{\omega \sin \lambda}$ ，在赤道上纬度

$\lambda = 0, C' = \infty$ ，即在赤道上摆动平面不偏转。这里不难理解的，若摆动平面沿南北方向， $\omega // \mathbf{v}'$ ，科氏惯性力为零；若单摆平面沿东西方位，则科氏力一定在赤道平面与 B 单摆的摆动平面共面，故不会引起摆动平面的偏转。

4.9.答：在上一章刚体运动学中，动系固连于刚体一起转动，但刚体上任一点相对于动坐标系没有相对运动，即各点的相对速度 $\mathbf{v}' = 0$ ，故科里奥利加速度 $\mathbf{a}_c = 2\omega \times \mathbf{v}' = 0$ 。事实上，科氏加速度是牵连转动与相对运动相互影响而产生的，没有相对运动，就谈不到科里奥利加速度的存在。

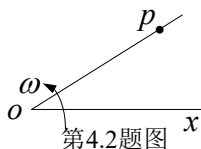
第四章习题

4.1 一等腰直角三角形 OAB 在其自身平面内以匀角速 ω 绕顶点 O 转动。某一点 P 以匀相对速度沿 AB 边运动，当三角形转了一周时， P 点走过了 AB 。如已知 $\overline{AB} = b$ ，试求 P 点在 A 时的绝对速度与绝对加速度。



第4.1题图

4.2 一直线以匀角速 ω 在一固定平面内绕其一端 O 转动。当直线为 Ox 的位置时，有一质点 P 开始从 O 点沿该直线运动。如欲使此点的绝对速度 \mathbf{v} 的量值为常数，问此点应按何种规律沿此直线运动？



第4.2题图

4.3 P 点离开圆锥顶点 O ，以速度 \mathbf{v}' 沿母线作匀速运动，此圆锥则以匀角速 ω 绕其轴转动。求开始 t 秒后 P 点绝对加速度的量值，假定圆锥体的半顶角为 α 。

4.4 小环重 W ，穿在曲线形 $y = f(x)$ 的光滑钢丝上，此曲线通过坐标原点，并绕竖直轴 oy 以匀角速 ω 转动。如欲使小环在曲线上任何位置均处于相对平衡状态，求此曲线的形状及曲线对小环的约束反作用力。

4.5 在一光滑水平直管中有一质量为 m 的小球。此管以匀角速 ω 绕通过其一端的竖直轴转动。如开始时，球距转动轴的距离为 a ，球相对于管的速度为零，而管的总长则为 $2a$ 。求球刚要离开管口时的相对速度与绝对速度，并求小球从开始运动到离开管口所需的时间。

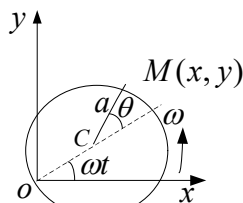
4.6 一光滑细管可在竖直平面内绕通过其一端的水平轴以匀角速 ω 转动，管中有一质量为 m 的质点。开始时，细管取水平方向，质点距转动轴的距离为 a ，质点相对于管的速度为 v_0 ，试求质点相对于管的运动规律。

4.7 质量分别为 m 及 m' 的两个质点，用一固定有长度为 a 的弹性绳相连，绳的倔强系数为 $k = \frac{2mm'\omega^2}{m+m'}$ 。如将此系统放在光滑的水平管中，管子绕管上某点以匀角速 ω 转动，试求任一瞬时两质点间的距离。设开始时，质点相对于管子是静止的。

4.8 轴为竖直而顶点向下的抛物线形金属丝上，以匀角速 ω 绕竖直轴转动。另有一质量为 m 的小环套在此金属丝上，并沿着金属丝滑动。试求小环运动微分方程。已知抛物线的方程为 $x^2 = 4ay$ ，式中 a 为常数。计算时可忽略摩擦阻力。

4.9 在上题中，试用两种方法求小环相对平衡的条件。

4.10 质量为 m 的小环 M ，套在半径为 a 的光滑圆圈上，并可沿着圆圈滑动。如圆圈在水平面内以匀角速 ω 绕圈上某点 O 转动，试求小环沿圆圈切线方向的运动微分方程。



第4.10图

4.11 如自北纬为 λ 的地方，以仰角 α 自地面向东方发射一炮弹，炮弹的腔口速度为 V 。计及地球自转，试证此炮弹落地的横向偏离为

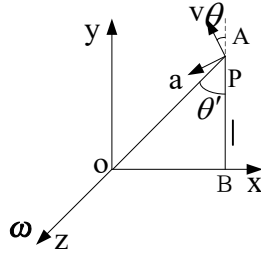
$$d = \frac{4V^3}{g^2} \omega \sin \lambda \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

式中 ω 为地球自转的角速度。计算时可忽略 ω^2 项。

4.12 一质点如以初速 v_0 在纬度为 λ 的地方竖直向上射出，达到 h 高后，复落至地面。假定空气阻力可以忽略不计，试求落至地面时的偏差。

第四章习题解答

4.1 解如题 4.1.1 图所示.



题 4.1.

坐标系 $Oxyz$ 的原点位于转动的固定点, Ox 轴沿 OB , Oz 轴与角速度的方向一致, 即 $\omega = \omega k$. 设 P 点沿运动的相对速度为 $\mathbf{v}' = v' j$ 则有题意得:

$$\frac{b}{v'} = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ 得: } v' = \frac{\omega b}{2\pi}$$

故 P 在 A 点时的绝对速度

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}' + \omega \times \mathbf{OA} \\ &= \frac{\omega b}{2\pi} j + \omega k \times (b j + b i) \\ &= \frac{\omega b}{2\pi} [-2\pi i + (1 + 2\pi) j] \\ |\mathbf{v}| &= \frac{\omega b}{2\pi} \sqrt{8\pi^2 + 4\pi + 1} \end{aligned}$$

设 \mathbf{v} 与 y 轴(即 AB 边)的夹角为 θ , 则 $\tan \theta = \left| \frac{v_x}{v_y} \right| = \frac{2\pi}{2\pi + 1}$, 故 \mathbf{v} 与 AB 边的夹角为

$\arctan \frac{2\pi}{2\pi + 1}$, 且指向左上方。

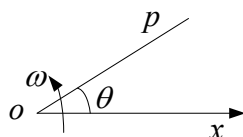
P 在 A 点时绝对速度

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}' - \omega^2 \mathbf{OA} + 2\omega \times \mathbf{v}' \\ &= 0 - \omega^2 (b i + b j) + 2\omega k \times \frac{\omega b}{2\pi} j \\ &= -\frac{\omega^2 b}{\pi} [(1 + \pi) i + \pi j] \\ |\mathbf{a}| &= \frac{\omega^2 b}{\pi} \sqrt{2\pi^2 + 2\pi + 1} \end{aligned}$$

设 a 与 y 轴 (AB 边) 的夹角为 θ' , 则 $\tan \theta' = \left| \frac{a_x}{a_y} \right| = \frac{\pi+1}{\pi}$, 故 a 与 AB 边的夹角为

$\arctan \frac{\pi+1}{\pi}$, 且指向左下方。

4.2 解 如题 4.2.1 图所示,



题 4.2.1 图

以 Ox 转动的方向为极角方向建立坐标系。 Oz 轴垂直纸面向外, 设 P 点相对速度

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP} \\ &= \dot{r}\mathbf{e}_r + \omega\mathbf{k} \times r\mathbf{e}_r \quad (1) \\ &= \dot{r}\mathbf{e}_r + \omega r\mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

设绝对速度 \mathbf{v} 的量值为常数 v , 则:

$$\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 = v^2 \quad (2)$$

对②式两边同时求时间导数得:

$$2\dot{r}(\dot{r} + \omega^2 r) = 0$$

依题意 $\dot{r} \neq 0$, 故 $\dot{r} + \omega^2 r = 0$ 解得通解

$$r(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

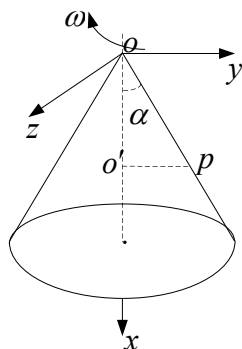
当 $t=0$ 时, $r(t)=0$, 将其代入①式得知的:

$$t=0 \text{ 时, } \dot{r} = v.$$

$$\text{即 } \begin{cases} A=0 \\ B\omega=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=\frac{v}{\omega} \end{cases}$$

最后有 $r(t) = \frac{v}{\omega} \sin \omega t$

4.3 解 如题 4.3.1 图所示,



题 4. 3. 1 图

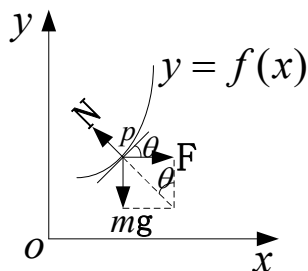
直角坐标 $Oxyz$ 的原点位于圆锥顶点 O , x 轴过圆锥的对称轴. O' 为 P 点在轴上对应的一点, 且有 $O'P \perp x$ 轴, 所以 P 点的绝对加速度:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}' - \omega^2 \mathbf{R} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \\ &= 0 - \omega^2 \mathbf{O'P} + 2\boldsymbol{\omega} \times 2\omega v'(\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}) \\ &= -\omega^2 O'P \sin \alpha \mathbf{j} + 2\omega v' \sin \alpha \mathbf{k} \\ &= -\omega^2 v' t \sin \alpha \mathbf{j} + 2\omega v' \sin \alpha \mathbf{k} \end{aligned}$$

最后有

$$a = \omega v' \sin \alpha \sqrt{\omega^2 t^2 + 4}$$

4.4 解 如题 4.4.1 图所示,



题 4.4.1 图

坐标系 Oxy 是以 ω 绕 y 轴转动的坐标系. 图中画出的是曲线 $y = f(x)$ 的一段, 在任意一点 P 处, 假设某质点在此处静止, 则该质点除了受重力、钢丝的约束力之外, 还会受惯性离心力 F 的作用, $F = m\omega^2 x$, 方向沿 x 轴正向, 在 N, F, mg 作用下, 质点处于平衡状态, 则有

$$\frac{F}{mg} = \tan \theta (\theta \text{ 为过 } P \text{ 点的切线与水平方向夹角}) \quad ①$$

$$N = \frac{mg}{\cos \theta} \quad (2)$$

有①得

$$\frac{m\omega^2 x}{mg} = \tan \theta = \frac{dx}{dy}, \text{得} \frac{dx}{dy} = \frac{\omega^2 x}{g} \quad (3)$$

又因为 $y = f(x)$ 过原点. 对上式积分得抛物线 $y = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$

有③得

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega^2 x}{g}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\omega^2}{g} y}}$$

将 $\cos \theta$ 代入②的反作用力

$$N = W \sqrt{1 + \frac{2\omega^2}{g} y}$$

4.5 以直管为参照系, O_x 方向沿管, O_z 沿竖直轴建立坐标系 O_{xyz} , 则小球受力为:

$$\mathbf{G} = mg, \mathbf{N}, \mathbf{F}_{\text{牵}} = m\omega^2 x \mathbf{i}, \mathbf{F}_{\text{科}} = -2m\omega \dot{x} \mathbf{j}$$

故沿 O_x 方向运动的微分方程为:

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x$$

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0 \quad (1)$$

有初始条件: $t = 0, x = a, \dot{x} = 0$ 可得①式解为

$$x = \frac{a}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t})$$

故当邱刚离开管口时, 即 $x = 2a, \dot{x} > 0$ 时. 则

$$\begin{cases} 2a = \frac{a}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) \\ \frac{a}{2} (e^{\omega t} \omega - \omega e^{-\omega t}) > 0 \end{cases}$$

得

$$t = \ln(2 + \sqrt{3}) / \omega$$

所以此时:

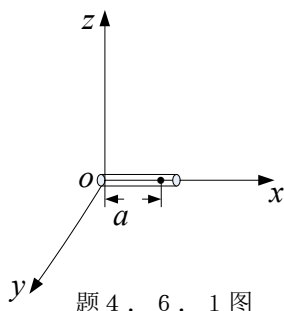
$$\mathbf{v}' = \dot{x}|_{x=2a} \mathbf{i} = \frac{a}{2} \omega \mathbf{k} \times 2\sqrt{3}\mathbf{i} = \sqrt{3}a\omega \mathbf{i}$$

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')|_{x=2a} = \sqrt{3}a\omega \mathbf{i} + 2a\omega \mathbf{j}$$

故当球刚要离开管口时的相对速度为 $\sqrt{3}a\omega \mathbf{i}$, 绝对速度为 $\sqrt{3}a\omega \mathbf{i} + 2a\omega \mathbf{j}$, 小球

从开始运动到离开管口所需时间为 $\ln(2 + \sqrt{3}) / \omega$

4.6 解 以光滑细管为参考系, O_x 沿管, O_z 沿水平轴建立坐标系 $Oxyz$, 如题 4.6.1 图所示,



则小球受力为:

$$\mathbf{G} = mg, \mathbf{N}, \mathbf{F}_{\text{牵}} = m\omega^2 x \mathbf{i}, \mathbf{F}_{\text{科}} = -2m\omega \dot{x} \mathbf{j}$$

故沿 O_x 方向运动的微分方程为:

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x - mg \sin \omega t$$

$$\ddot{x} - \omega^2 x = -g \sin \omega t \quad (1)$$

方程 $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$ 的通解

$$x(t) = C_1 e^{-\omega t} + C_2 e^{\omega t}$$

而方程①的特解为:

$$x(t) = \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t$$

故方程①的通解为:

$$x(t) = C_1 e^{-\omega t} + C_2 e^{\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t$$

初始条件为当 $t = 0$ 时,

$$x = a, \dot{x} = v_0$$

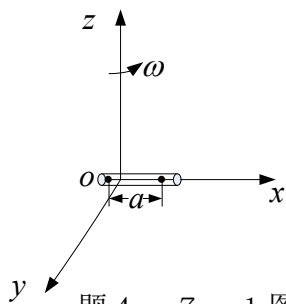
故可得

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \left(a - \frac{v_0}{\omega} + \frac{g}{2\omega^2} \right) \\ C_2 = \frac{1}{2} \left(a + \frac{v_0}{\omega} - \frac{g}{2\omega^2} \right) \end{cases}$$

所以质点相对于管的运动规律为:

$$x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{v_0}{\omega} - \frac{g}{2\omega^2} \right) e^{\omega t} + \frac{1}{2} \left(a - \frac{v_0}{\omega} + \frac{g}{2\omega^2} \right) e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t$$

4.7 解 以水平细管为参考系, Ox 沿管, Oz 沿竖直转动轴向上建立坐标系 $Oxyz$, 如题图 4.7.1 图所示



题 4.7.1 图

则易得质点 m, m' 沿 Ox 反方向的运动微分方程为:

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x + k(s-a) \quad (1)$$

$$m'(\ddot{x} + \ddot{s}) = m'\omega^2(x+s) - k(s-a) \quad (2)$$

将方程①②作简单变换可得:

$$m'\ddot{s} + \frac{m'}{m}k(s-a) = m'\omega^2 s - k(s-a)$$

化简得

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 2\omega^2 a$$

其通解为:

$$s = C_1 e^{-i\omega t} + C_2 e^{i\omega t} + 2a$$

初始条件为:

$$s|_{t=0} = a, \dot{s}|_{t=0} = 0$$

故可得:

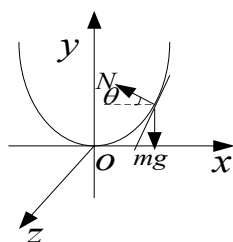
$$\left. \begin{array}{l} C_1 + C_2 = -a \\ -i\omega(C_1 - C_2) = 0 \end{array} \right\} \text{得 } C_1 = C_2 = -\frac{a}{2}$$

故

$$s = 2a - a \cos \omega t$$

$$s = a(2 - \cos \omega t)$$

4.8 解 以抛物线形金属丝为参照物 Ox 沿抛物线在顶点的切线方向, Oy 沿竖直轴建立坐标系 $Oxyz$,



题 4 . 8 . 1 图

则小环的运动微分方程为:

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x - N_x \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = -mg + N_y \quad (2)$$

$$m\ddot{z} = 0 = N_z + 2mv'\omega$$

$$\frac{N_x}{N_y} = \cot \theta = \frac{dy}{dx}$$

$$y = \frac{1}{4a} x^2$$

故

$$\ddot{y} = \frac{1}{2a} (\dot{x}^2 + x\ddot{x}), \frac{N_x}{N_y} = \frac{1}{2a} x$$

代入①②得

$$\frac{m\ddot{x} - m\omega^2 x}{m \frac{1}{2a}(\dot{x}^2 + x\dot{x}) + mg} = -\frac{1}{2a}x$$

化简即得

$$\left(1 + \frac{x^2}{4a^2}\right)\ddot{x} + \frac{x}{4a^2}\dot{x}^2 - \omega^2 x + \frac{g}{2a}x = 0$$

4.9 解一当小环相对平衡时，由上题可知即要求 x 为常数，故

$$\dot{x} = 0, \ddot{x} = 0$$

故

$$\omega^2 = \frac{g}{2a}$$

解二 以地面为参照系，则小球受力 \mathbf{N}, \mathbf{G} ，如图 4-8 所示. 其中 O_{xyz} 为固定地面的坐标系，故平衡时有：

$$\begin{cases} N \cos \theta = m\omega^2 x \\ N \sin \theta = mg \end{cases}$$

$$\tan \theta = \frac{mg}{\omega^2 x} = \frac{dx}{dy} = \frac{2a}{x}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{2a}$$

4.10 解 以地面为参考系，则小环的运动微分方程为：

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - \dot{r}^2\varphi^2) = N \cos \frac{\theta}{2} \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = N \sin \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

其中 $r = 2a \cos \frac{\theta}{2}$, $\varphi = \omega t + \frac{\theta}{2}$, θ 为 M 与圆心 C 的连线和通过 O 点的直径间所夹的角

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}}{\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2} = \frac{a \cos \frac{\theta}{2} \ddot{\theta} - 2a \sin \frac{\theta}{2} \dot{\theta} \left(\omega + \frac{1}{2} \dot{\theta} \right)}{-a \sin \frac{\theta}{2} \ddot{\theta} - a \cos \frac{\theta}{2} (\dot{\theta}^2 + 2\omega^2 + 2\omega\dot{\theta})}$$

化简得

$$\ddot{\theta} + \sin \theta \omega^2 = 0$$

4.11 解 以地面为非惯性参考系，建立坐标系 $Oxyz$ ， Ox 指正南， Oz 竖直向上，发射点为原点 O ，炮弹的运动微分方程为：

$$m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y} \sin \lambda \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = -2m\omega(\dot{x} \sin \lambda + \dot{z} \cos \lambda) \quad (2)$$

$$m\ddot{z} = -mg + 2m\omega\dot{y} \cos \lambda \quad (3)$$

初始条件为

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = y = z = 0 \\ \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = c \cos \alpha \\ \dot{z} = v \sin \alpha \end{cases}$$

故将①②③积分一次代入初始条件后得：

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\omega y \sin \lambda \\ \dot{y} = V \cos \alpha - 2\omega(x \sin \lambda + z \cos \lambda) \\ \dot{z} = V \sin \alpha - gt + 2\omega y \cos \lambda \end{cases}$$

$$\ddot{x} = 2\omega V \sin \lambda \cos \alpha \quad (4)$$

$$\ddot{y} = 2\omega \cos \lambda (gt - V \sin \alpha) \quad (5)$$

$$\ddot{z} = -g + 2\omega V \cos \lambda \cos \alpha \quad (6)$$

有⑥可得落地时间：

$$t = \frac{2V \sin \alpha}{g} \times \frac{1}{1-b} \quad (7)$$

其中

$$b = \frac{2\omega V \cos \lambda \cos \alpha}{g}$$

$$b \propto \omega \ll 1$$

所以将 $\frac{1}{1-b}$ 展开可得

$$\frac{1}{1-b} \approx 1+b$$

$$t = \frac{2V \sin \alpha}{g} (1+b)$$

由式及初始条件可得

$$x = \omega V \sin \lambda \cos \alpha t^2$$

所以炮弹落地时的横向偏离为

$$d = \omega V \sin \lambda \cos \alpha \frac{4V^2 \sin^2 \alpha}{g^2} (1+b)^2 \approx \frac{4V^3}{g^2} \omega \sin \lambda \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

4.12 解 以地面为非惯性，建立坐标系 $Oxyz$, Ox 指向正南， Oz 竖直向上，上抛点为原点 O ，质点的运动微分方程为：

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y} \sin \lambda \\ m\ddot{y} = -2m\omega(\dot{x} \sin \lambda + \dot{z} \cos \lambda) \\ m\ddot{z} = -mg + 2m\omega\dot{x} \cos \lambda \end{cases} \quad (1)$$

初始条件为：

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = y = z = 0 \\ \dot{x} = \dot{y} = c \cos \alpha \\ \dot{z} = v_0 \end{cases}$$

如上题同理可得

$$\dot{x} = 2\omega y \sin \lambda \quad (2)$$

$$\dot{y} = -2\omega(x \sin \lambda + z \cos \lambda) \quad (3)$$

$$\dot{z} = v_0 - gt + 2\omega x \cos \lambda \quad (4)$$

代入①式得

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -2\omega \cos \lambda (gt - v_0) \\ \dot{z} = -g \end{cases}$$

有④式求出落地时间为:

$$t = \frac{2v_0}{g}$$

有③式得:

$$y = \frac{1}{3} \omega \cos \lambda g t^3 - \omega \cos \lambda v_0 t^2$$

将 $t = \frac{2v_0}{g}, v_0 = \sqrt{2gh}$ 代入得复落至地面时:

$$d = -\frac{4}{3} \sqrt{\frac{8h^3}{g}} \omega \cos \lambda$$

(d 取负值, 说明落地时偏西)

第五章 分析力学

第五章思考题

5.1 虚功原理中的“虚功”二字作何解释？用虚功原理理解平衡问题，有何优点和缺点？

5.2 为什么在拉格朗日方程中， θ_a 不包含约束反作用力？又广义坐标与广义力的含义如何？我们根据什么关系由一个量的量纲定出另一个量的量纲？

5.3 广义动量 p_a 和广义速度 \dot{q}_a 是不是只相差一个乘数 m ？为什么 p_a 比 \dot{q}_a 更富有意义？

5.4 既然 $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}$ 是广义动量，那么根据动量定理， $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} \right)$ 是否应等于广义力 θ_a ？为什么

在拉格朗日方程(5.3.14)式中多出了 $\frac{\partial T}{\partial q_a}$ 项？你能说出它的物理意义和所代表的物理量吗？

5.5 为什么在拉格朗日方程只适用于完整系？如为不完整系，能否由式(5.3.13)得出式(5.3.14)？

5.6 平衡位置附近的小振动的性质，由什么来决定？为什么 $2s^2$ 个常数只有 $2s$ 个是独立的？

5.7 什么叫简正坐标？怎样去找？它的数目和力学体系的自由度之间有何关系又每一简正坐标将作怎样的运动？

5.8 多自由度力学体系如果还有阻尼力，那么它们在平衡位置附近的运动和无阻尼时有何不同？能否列出它们的微分方程？

5.9 dL 和 $d\bar{L}$ 有何区别？ $\frac{\partial L}{\partial q_a}$ 和 $\frac{\partial \bar{L}}{\partial q_a}$ 有何区别？

5.10 哈密顿正则方程能适用于不完整系吗？为什么？能适用于非保守系吗？为什么？

5.11 哈密顿函数在什么情况下是整数？在什么情况下是总能量？试详加讨论，有无是总能量而不为常数的情况？

5.12 何谓泊松括号与泊松定理？泊松定理在实际上的功用如何？

5.13 哈密顿原理是用什么方法运动规律的？为什么变分符号 δ 可置于积分号内也可移到积分号外？又全变分符号 Δ 能否这样？

5.14 正则变换的目的及功用何在？又正则变换的关键何在？

5.15 哈密顿-雅可比理论的目的何在？试简述该理论解题时所应用的步骤。

5.16 正则方程(5.5.15)与(5.10.10)及(5.10.11)之间关系如何? 我们能否用一正则变换由前者得出后者?

5.17 在研究机械运动的力学中, 刘维定理能否发挥作用? 何故?

5.18 分析力学学完后, 请把本章中的方程和原理与牛顿运动定律相比较, 并加以评价.

第五章思考题解答

5.1 答: 作用于质点上的力在任意虚位移中做的功即为虚功, 而虚位移是假想的、符合约束的、无限小的、即时位置变更, 故虚功也是假想的、符合约束的、无限小的、且与过程无关的功, 它与真实的功完全是两回事. 从 $\delta W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i$ 可知: 虚功与选用的坐标系无关, 这正是虚功与过程无关的反映; 虚功对各虚位移中的功是线性迭加, 虚功对应于虚位移的一次变分. 在虚功的计算中应注意: 在任意虚过程中假定隔离保持不变, 这是虚位移无限小性的结果.

虚功原理给出受约束质点系的平衡条件, 比静力学给出的刚体平衡条件有更普遍的意义; 再者, 考虑到非惯性系中惯性力的虚功, 利用虚功原理还可解决动力学问题, 这是刚体力学的平衡条件无法比拟的; 另外, 利用虚功原理解理想约束下的质点系的平衡问题时, 由于约束反力自动消去, 可简便地求出平衡条件; 最后又有广义坐标和广义力的引入得到广义虚位移原理, 使之在非纯力学体系也能应用, 增加了其普适性及使用过程中的灵活性. 由于虚功方程中不含约束反力, 故不能求出约束反力, 这是虚功原理的缺点. 但利用虚功原理并不是不能求出约束反力, 一般如下两种方法: 当刚体受到的主动力为已知时, 解除某约束或某一方向的约束代之以约束反力; 再者, 利用拉格朗日方程未定乘数法, 景观比较麻烦, 但能同时求出平衡条件和约束反力.

5.2 答 因拉格朗日方程是从虚功原理推出的, 而虚功原理只适用于具有理想约束的力学体系. 虚功方程中不含约束反力, 故拉格朗日方程也只适用于具有理想约束下的力学体系, θ_α 不含约束力; 再者拉格朗日方程是从力学体系动能改变的观点讨论体系的运动, 而约束反作用力不能改变体系的动能, 故 θ_α 不含约束反作用力, 最后, 几何约束下的力学体系其广义坐标数等于体系的自由度数, 而几何约束限制力学体系的自由运动, 使其自由度减小, 这表明约束反作用力不对应有独立的广义坐标, 故 θ_α 不含约束反作用力. 这里讨论的是完整系的拉

格朗日方程, 对受有几何约束的力学体系既非完整系, 则必须借助拉格朗日未定乘数法对拉格朗日方程进行修正.

广义坐标市确定质点或质点系完整的独立坐标, 它不一定是长度, 可以是角度或其他物理量, 如面积、体积、电极化强度、磁化强度等. 显然广义坐标不一定是长度的量纲. 在完整约束下, 广义坐标数等于力学体系的自由度; 广义力明威力实际上不一定有力的量纲可以是力也可以是力矩或其他物理量, 如压强、场强等等, 广义力还可以理解为: 若让广义力对应的广义坐标作单位值的改变, 且其余广义坐标不变, 则广义力的数值等于外力的功由

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \theta_{\alpha} \delta q_{\alpha} = \delta W$$
 知, $\theta_{\alpha} \delta q_{\alpha}$ 有功的量纲, 据此关系已知其中一个量的量纲则可得另一个量的量纲. 若 q_{α} 是长度, 则 θ_{α} 一定是力, 若 θ_{α} 是力矩, 则 q_{α} 一定是角度, 若 q_{α} 是体积, 则 θ_{α} 一定是压强等.

5.3 答 p_{α} 与 \dot{q}_{α} 不一定只相差一个常数 m , 这要由问题的性质、坐标系的选取形式及广义坐标的选用而定. 直角坐标系中质点的运动动能 $T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, 若取 y 为广义

坐标, 则 $q_y = y$, 而 $p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = m\dot{q}_y$, 相差一常数 m , 如定轴转动的刚体的动能

$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$, 取广义坐标 $q_{\alpha} = \theta$, 而 $p_{\theta} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = I \dot{\theta}$, p_{θ} 与 \dot{q}_{θ} 相差一常数——转动惯量 I ,

又如极坐标系表示质点的运动动能 $T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$, 若取 $q_{\alpha} = \theta$, 有 $\dot{q}_{\theta} = \dot{\theta}$, 而

$p_{\theta} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$, 二者相差一变数 mr^2 ; 若取 $q_{\alpha} = r$ 有 $\dot{q}_r = \dot{r}$, 而 $p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$, 二者

相差一变数 m . 在自然坐标系中 $T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2$, 取 $q_{\alpha} = s$, 有 $\dot{q}_s = \dot{s} = v$, 而 $p_s = m\dot{s}$, 二者

相差一变数 m . 从以上各例可看出: 只有在广义坐标为长度的情况下, p_{α} 与 \dot{q}_{α} 才相差一常数; 在广义坐标为角量的情形下, p_{α} 与 \dot{q}_{α} 相差为转动惯量的量纲.

p_{α} 为何比 \dot{q}_{α} 更富有物理意义呢? 首先, p_{α} 对应于动力学量, 他建立了系统的状态函数 T 、 L 或 H 与广义速度、广义坐标的联系, 它的变化可直接反应系统状态的改变, 而 \dot{q}_{α} 是对应于运动学量, 不可直接反应系统的动力学特征; 再者, 系统地拉格朗日函数 L 中不含某一广义坐标 q_i 时, 对应的广义动量 $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 是常数, 存在一循环积分, 给解决问题带来方便, 而此时循环坐标 q_i 对应的广义速度 \dot{q}_i 并不一定是常数, 如平方反比引力场中

$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k^2 m}{r}$, L 不含 θ , 故有 $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr\dot{\theta} = \text{常数}$, 但 $\dot{q}_\theta = \dot{\theta}$ 常数; 最

后, 由哈密顿正则方程知 p_α, q_α 是一组正则变量: 哈密顿函数 H 中不含某个广义坐标 q_i 时, 对应的广义动量 $p_i = \text{常数}$, 不含某个广义动量 p_i 时, 对应的广义坐标 $q_i = \text{常数}$

5.4 答 只有对于完整系, 广义坐标数等于自由度数, 才能消去所有的约束方程, 式 (5.3.13)

$$\sum_{\alpha=1}^S \left[\left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha \right) \delta q_\alpha \right] = 0$$

各 δq_α 才能全部相互独立, 得到式 (5.3.14), 故拉格朗日方程只适用于完整系, 非完整力学体系, 描述体系的运动需要的广义坐标多于自由度数, 各 δq_α 不全部独立, 不能得到 (5.3.14) 式, 但 (5.3.13) 式结合拉格朗日方程未定乘数法可用于非完整系。

5.6 答 力学体系在平衡位置附近的动力学方程 (5.4.4) 得久期方程 (本征值方程) (5.4.6) 式 $\|a_{\alpha\beta}\lambda^2 + C_{\alpha\beta}\| = 0$, 其中 $\alpha, \beta = 1, 2 \dots S$, 久期方程的各根 (本征值) λ_l 的性质决定体系平衡位置附近的小振动性质。

因从本征方程 (5.4.6) 式中可求出 $2S$ 个的本征值 λ_l ($l = 1, 2 \dots 2S$), 每一个 λ_l 对应一个独立的常数故 $2S^2$ 个常数中只有 $2S$ 个是独立的。

5.7 答 多自由度体系的小振动, 每一广义坐标对应于 S 个主频率的谐振动的叠加。若通过坐标间线性变换使得每一广义坐标仅对应一个频率的振动, 则变换后的坐标称之为简正坐标, 对应的频率为简正频率, 每一简正坐标对应一个简正频率, 而简正频率数和力学体系的自由度数相等, 故简正坐标数等于自由度数。

值得说的是, 每一简正振动为整个力学体系所共有, 反映的是各质点 (整体) 的振动之一, 其他坐标都作为简正坐标的线性函数, 由 S 个简正振动叠加而成。这种方法在统计物理, 固体物理中都有运用。

5.8 答 对一完整的稳定的力学体系在有阻尼的情况下, 它们在平衡位置附近将作衰减运动。

引入耗散函数 $F = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^S b_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$

则阻力

$$R_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\alpha} = -\sum_{\beta=1}^S b_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta$$

力学体系的运动方程改为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

其中 $T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^S a_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$, $V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^S C_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$, F 中是函数, 把在平衡位形区域展开成泰勒级数

$$b_{\alpha\beta} = (b_{\alpha\beta})_0 + \sum_{r=1}^S \left(\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial q_r} \right)_0 q_r + \text{高级项}$$

q_r 很小, 只保留头一项, 则 $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta}$ 均为常数。 T, V, F 代入运动方程得

$$\sum_{\beta=1}^S (a_{\alpha\beta} \ddot{q}_\beta + b_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta + c_{\alpha\beta} q_\beta) = 0, \beta = 1, 2 \cdots S$$

把 $q_\beta = A_\beta e^{\lambda t}$ 代入上式得本征值方程

$$\begin{cases} \|a_{\alpha\beta} \lambda^2 + b_{\alpha\beta} \lambda + c_{\alpha\beta}\| = 0 & \alpha = 1, 2 \cdots S \\ & \beta = 1, 2 \cdots S \end{cases}$$

在 $V > 0$, $F^2 < 4VT$ 的小阻尼情况下, 本征值 $\lambda_l = \mu_l + i\gamma_l$ ($l = 1, 2 \cdots 2S$), 且 $\mu_l < 0$ 振动方程为

$$q_\beta = \sum_{l=1}^S e^{-\mu_l t} \left\{ A^{(l)} \Delta_{i\beta} (-\mu_l + i\gamma_l) e^{i\gamma_l t} + A^{(l)} \Delta_{i\beta} (\mu_l - i\gamma_l) e^{-i\gamma_l t} \right\} (\beta = 1, 2 \cdots S)$$

显然是按指数率的衰减振动。

5.9 答: 因 $L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$, ($\alpha = 1, 2, \dots, s$), 故

$$dL = \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_{\alpha=1}^s (\dot{p}_\alpha dq_\alpha + p_\alpha d\dot{q}_\alpha) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

由 $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ 解得

$$\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(q_\beta, p_\beta, t), \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \dots, s \\ \beta = 1, 2, \dots, s \end{pmatrix}$$

所以

$$I(q_\alpha, p_\alpha, t) = L[q_\alpha, \dot{q}_\alpha(q_\beta, p_\beta, t), t]$$

则

$$dI = \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt = dL$$

而

$$\frac{\partial I}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \cdot \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial q_\beta} \neq \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

5.10 答: 拉格朗日方程只适用于完整系, 哈密顿正则方程有保守系拉格朗日方程推出, 故只

能适用于完整的，保守的力学体系，对非保守体系（5.3.18）改写为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha, (\alpha = 1, 2, \dots, s)$$

其中 Q_α 为非有势力，或写为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, (\alpha = 1, 2, \dots, s)$$

即 $\dot{p}_\alpha = Q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$ 。经勒让德变换后用课本上同样的方法可推得非保守系中的哈密顿正则方程

$$\begin{cases} \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \\ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha, (\alpha = 1, 2, \dots, s) \end{cases}$$

5.11 答：若哈密顿函数不显含时间 t ，则 $H = H(q_\alpha, p_\alpha)$ = 常熟；对稳定约束下的力学体系，动能不是速度的二次齐次函数，则 $H = T + V$ ，是以哈密顿正则变量表示的广义总能量，因不稳定约束的约束范例可以做功，但拉格朗日方程中不含约束力，故有此差异，此时 H 并不是真正的能量；对稳定的，保守的力学体系，若 H 含 t 则 H 是能量但不为常熟。

5.12 答：泊松括号是一种缩写符号，它表示已同一组正则变量为自变量的二函数之间的关系。若 $\varphi = \varphi(p_\alpha, q_\alpha, t), \psi = \psi(p_\alpha, q_\alpha, t), (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ ，则

$$[\varphi, \psi] = \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial q_\alpha} \right)$$

$[\varphi, H]$ 是物理学中最常用的泊松括号，用泊松括号可表示力学体系的运动正则方程

$$\dot{p}_\alpha = [p_\alpha, H], \dot{q}_\alpha = [q_\alpha, H], (\alpha = 1, 2, \dots, s)$$

用泊松括号的性质复杂微分运算问题化为简单的括号运算，这种表示法在量子力学，量子场论等课程中被广泛应用。

每一正则方程必对应一个运动积分，利用泊松括号从正则方程=积分

$$\varphi(p_\alpha, q_\alpha, t) = C_1, \psi(p_\alpha, q_\alpha, t) = C_2$$

可以推出另外一个积分 $[\varphi, \psi] = C_3$ ，这一关系称为泊松定理。

5.13 答：哈密顿原理是用变分的方法确定运动规律的，它是力学变分原理的积分形式。基本思想是在描述力学体系的 S 维空间中，用变分求极值的方法，从许多条端点相同的曲线中挑选一条真是轨道确定体系的运动变化规律。

因为对等时变分 $\delta t = 0$ ，故变分符号 δ 可置于积分号内也可置于积分号外，而不等时变分

$\Delta t \neq 0$ ，故全变分符号不能这样。

5.14 答：力学体系的哈密顿函数 H 中是否有循环坐标系或循环坐标的数目与坐标系（或参变数）的选取有关，故在正则方程形式不变的前提下，通过某种变数变换找到新的函数 H^* ，使之多出一些循环坐标，此即正则变换的目的及公用。由于每一循环坐标对应一个运动积分，正则变换后可多得到一些运动积分，给解决问题带来方便，正则变换的关键是母函数的选取，其选取的原则是使 H^* 中多出循环坐标，但并无一定的规律可循，要具体问题具体分析。

5.15 答：哈密顿正则方程是 $2s$ 个一阶微分方程的方程组，用泊松定理理解之，由而已知运动积分求出其余的运动积分往往是已知解的线性组合或横等时，并不能给出新的解；而用正则变换可多得到一些循环坐标是正则方程立即有解，但母函数的选取往往很困难，哈密顿—雅可毕理论的目的既是要弥补上述缺陷，通过一个特殊的正则变换，使得用新变量 $P_\alpha, Q_\alpha, (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 表示的哈密顿函数 $H^* = 0$ ，此时 P_α, Q_α 全部为常数 $\alpha_i, \beta_i, (i = 1, 2, \dots, s)$ ，这样哈密顿得主函数极为母函数，从而解决母函数难以寻找的困难。

5.16 答：对（5.9.8）式若为不稳定约束，只需以 h 代替 E 即可，故对（5.9.8）式分离变量后推出的（5.9.12）中也只需以 h 代 E 即可用于不稳定约束。正则方程利用哈—雅理论后得到结果十分普遍，可同时得出运动规律，轨道级动量，故比拉格朗日方程优越。

5.17 答：经典“牛顿力学”常用于几何的观点，运用形象化思维的方式，研究力学体系的受力情况及运动情况，然后通过运动非常及时物体的受力与运动变化间的相互联系和前因后果。这种方法形象，直观，物理意义鲜明，被广泛应用于工程实际。但由于它着眼于力，速度，加速度等矢量，给解决复杂的力学体系的运动问题带来许多不便；再者，它仅仅局限于纯力学体系的运动分析，其理论与方法难以建立与其它学科的联系。

5.18 答：十九世纪发展起来的“分析力学”方法弥补了上述缺陷，它用纯数学分析的方法用更具有概括性的抽象思维方式，从力学体系的一切可能的运动中挑选出实际运动的规律。这种方法尽管物理意义不如牛顿力学方法鲜明，但它给人们解决复杂力学体系的运动问题提供了有一方法；再者，由于广义坐标，广义力的引入使其理论在其它学科中也能广泛的应用。建立了经典物理学向近代物理学过渡的桥梁。

下面通过分析力学与牛顿力学理论及方法的比较扼要阐述分析力学的优越性。

牛顿力学的着眼点是力，实际力学体系除受到促使其运动状态改变的主动动力，往往还存在很多限制其运动的约束条件体现这些约束的约束反作用力都要作为未知数出现于运动微分方程，使未知量增加给解算带来许多麻烦；分析力学着眼于功和能在一定条件下，常常可以不考虑约束反作用力。如在理想条件下，用虚位移原理解决力学体系的平衡问题可撇开众多的未知未知约束力，直接得出平衡条件，比用牛顿力学中刚体受力的平衡方程方便得多；达朗伯——虚位移原理解决力学体系的动力学问题，由于虚功的概念、广义坐标的引入，也

可撇开约束力得解，比用牛顿方程即由此推出的动量定理，动量矩定理方便；拉格朗日方程、哈密顿原理即由此得到的分析力学一系列方程均具这一优点。从一分为二的观点来看，这也是分析力学的缺点——不能求出约束反作用力。当把待求的约束反力或做功的约束反力作为主动力来看，分析力学的理论修改后仍能应用。

牛顿力学用矢量的方法研究力学体系的运动，着眼于力、加速度、速度等矢量，而矢量具有方向性、相对性，在坐标变换中很费事，故牛顿力学的动力学方程都与参考系极坐标系的选取有关；分析力学用标量描述力学体系的运动及变化规律，着眼于功和能广义坐标和广义速度等一系列标量，标量便于变换及叠加，标量形式的运动方程也是便于写出的，且由于广义坐标和广义力的引入，是指超出立宪的范围也能应用，给参变量的选用也带来了许多方便，提高了灵活性。如用拉格朗日方程，哈密顿原理或哈密顿正则方程推证极坐标系，球坐标系的质点运动方程，比用牛顿力学的方法简便，但分析力学不如牛顿力学方法直观物理意义也不如牛顿力学方法清晰。

牛顿力学的动量守恒定律动量矩守恒定律总是以牛顿第三定律为先决条件的；而分析力学中循环坐标对应的广义动量守恒原理并不以牛顿第三定律为先决条件，其先决条件是拉格朗日函数或哈密顿函数中不含某广义坐标。若拉格朗日函数中不含某广义坐标，则对应于拉格朗日动力学的广义动量守恒；若哈密顿函数中不含某广义坐标，则对应于哈密顿动力学的广义动量守恒。牛顿动力学的动量守恒定律，动量矩守恒定律都是广义动量守恒原理对应的某循环坐标下的特例。恩西力学的理论更具有概括性，广义动量守恒原理具有更普遍的意义。

牛顿力学研究力学问题也用到共和能的概念，但其功能关系动能定理，功能原理，机械能守恒定律等，只不过提供了力学体系运动的某一方面特征，它的注意力集中于实际实现，而在实际实现的运动中，功能关系只能给出一个独立的方程不能提供完全的解；分析力学则不然，它不只是注意实际实现的运动，而是以力学体系的一切可能存在的运动中挑选出真实的运动，故分析力学中的功能关系指的是一切可能出现的运动中的功能关系，比实际实现的运动中的功能关系要丰富的多，它可以给出一组与力学体系自由度数相等的运动方程，足以确定体系的运动。如用牛顿力学中的功能关系——机械能守恒定律研究抛体运动（不计空气阻力），只能给出一个独立的方程，不能提供完全的解；而用拉格朗日方程则可以给出与自由度数相等的两个独立的运动方程，足以解决其运动。

牛顿力学机械能守恒定律中的势能对应于所有的势力，包括主动力和约束反力，而分析力学中的拉格朗日函数或哈密顿函数中的势能只对应于广义力，广义力只包含主动力，故两种势能不同。再者，分析力学中哈密顿函数 H 的守恒原理，在非稳定的约束情况下 $H = T_2 - T_0 + V$ 并非机械能，成为广义能量，只有在稳定的约束情况下 $H = T + V$ 才是机械能。故牛顿力学的机械能守恒定律要求有势力，而哈密顿函数的守恒原理要求 H 不显含 t 且为稳定约束，它们是从不同角度讨论机械能守恒的。分析力学的广义能量守恒比牛顿力学

的机械能守恒有着更广泛的意义。

牛顿力学定律不便于与其它形式的运动建立直接的联系，分析力学着眼于能量，便于进一步考虑能量的量子化问题，为从经典力学向近代物理学及其它领域过渡提供了方便的“跳板”。如哈密顿——雅可比方程量子化得到的薛定谔方程，哈密顿正则方程量子化得到量子力学的海森堡方程，经典泊松括号考虑量子化效应得到量子力学的泊松括号；哈密顿原理推广到量子力学的变分原理等。再者，能量便于与其运动形式转化，由于广义坐标概念的引入使得一系列分析力学的方程都适用于非力学体系；另外，分析力学是在多维的非欧几得空间中讨论问题的，故分析力学的理论及方法在物理学的各领域有广泛的应用，现代的场论都好似拉格朗日形成的，分析力学在物理学中有着重要的地位。

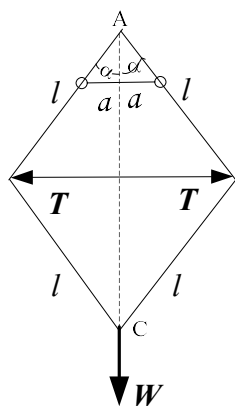
最后讨论一下哈密顿动力学与拉格朗日动力学的关系。在处理实际问题中哈密顿动力学不如拉格朗日动力学方便，拉格朗日动力学中从拉格朗日函数可直接写出力学体系的运动方程——拉格朗日方程；哈密顿动力学中则必须从拉格朗日函数转到哈密顿函数才可写出力学体系的运动方程——哈密顿正则方程，从哈密顿正则方程消去广义动量的结果其实不过是从另一途径达到拉格朗日方程，这样做的结果是绕了一个大圈子。

第五章习题

5.1 试用虚功原理解 3.1 题。

5.2 试用虚功原理解 3.4 题。

5.3 长度同为 L 的轻棒四根，光滑地联成一菱形 $ABCD$ 。 AB 、 AD 两边支于同一水平线上相距为 $2a$ 的两根钉上， BD 间则用一轻绳联结， C 点上系一重物 W 。设 A 点上的顶角为 2α ，试用虚功原理求绳中张力 T 。



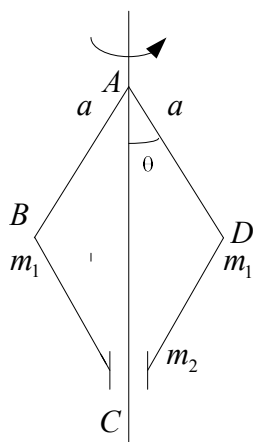
第5.3题图

5.4 一质点的重量为 W ，被约束在竖直圆周

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

上，并受一水平斥力 $k^2 x$ 的作用，式中 r 为圆的半径， k 为常数。试用未定乘数法求质点的平衡位置及约束反作用力的量值。

5.5 在离心节速器中，质量为 m^2 的质点 C 沿着一竖直轴运动，而整个系统则以匀角速 Ω 绕该轴转动。试写出此力学体系的拉氏函数。设连杆 AB 、 BC 、 CD 、 DA 等的质量均可不计。



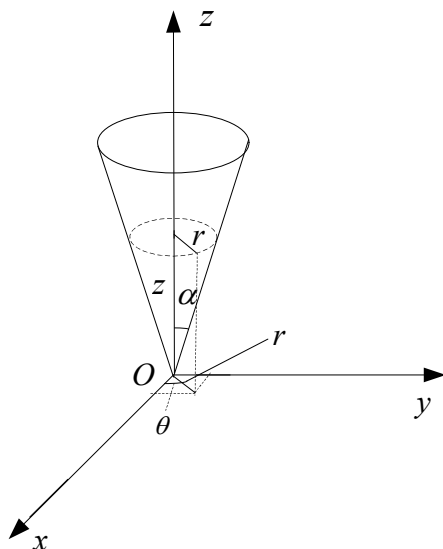
第5.5题图

5.6 试用拉格朗日方程解 4.10 题。

5.7 试用拉格朗日方程解本章补充例题 5.3。

5.8 一光滑细管可在竖直平面内绕通过其一端的水平轴以匀角速 ω 转动。管中有一质量为 m 的质点。开始时，细管取水平方向，质点距转动轴的距离为 a ，质点相对于管的速度为 v_0 ，试由拉格朗日方程求质点相对于管的运动规律。

5.9 设质量为 m 的质点，受重力作用，被约束在半顶角为 α 的圆锥面内运动。试以 r ， θ 为广义坐标，由拉格朗日方程求此质点的运动微分方程。



第5.9题图

5.10 试用拉格朗日方程解 2.4 题中的 (a) 及 (b)。

5.11 试用拉格朗日方程求 3.20 题中的 a_1 及 a_2 。

5.12 均质棒 AB ，质量为 m ，长为 $2a$ ，其 A 端可在光滑水平导槽上运动。而棒本身又可在竖直面内绕 A 端摆动。如除重力作用外， B 端还受有一水平的力 F 的作用。试用拉格朗日方程求其运动微分方程。如摆动的角度很小，则又如何？

答： $m(\ddot{x} + a\ddot{\theta} \cos \theta - a\dot{\theta}^2 \sin \theta) = F$

$$m[a\ddot{x} \cos \theta + (a^2 + k^2)\ddot{\theta}] = 2Fa \cos \theta - mga \sin \theta$$

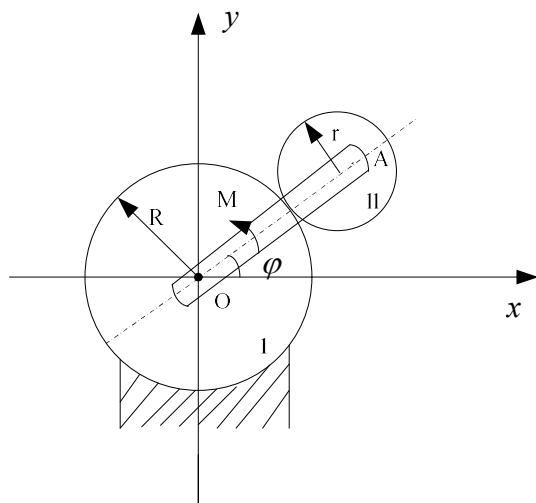
如 θ 很小，则

$$\ddot{x} + a\ddot{\theta} = \frac{F}{m}$$

$$\ddot{x} + \frac{4}{3}a\ddot{\theta} + g\theta = \frac{2F}{m}$$

式中 x 为任一瞬时 A 离定点 O 的距离， θ 为任一瞬时棒与竖直线间所成的角度， k 为绕质心的回转半径。

5.13 行星齿轮机构如右图所示。曲柄 OA 带动行星齿轮 II 在固定齿轮 I 上滚动。已知曲柄的质量为 m_1 ，且可认为是匀质杆。齿轮 II 的质量为 m_2 ，半径为 r ，且可认为是匀质圆盘。至于齿轮 I 的半径则为 R 。今在曲柄上作用一不变的力矩 M 。如重力的作用可以忽略不计，试用拉格朗日方程研究此曲柄的运动。



第5.13题图

5.14 质量为 m 的圆柱体 S 放在质量为 M 的圆柱体 P 上作相对滚动, 而 P 则放在粗糙平面上. 已知两圆柱的轴都是水平的, 且重心在同一竖直面内. 开始时此系统是静止的. 若以圆柱体 P 的重心的初始位置为固定坐标系的原点, 则圆柱 S 的重心在任一时刻的坐标为

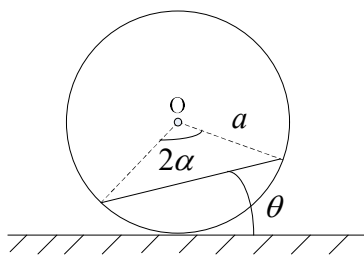
$$x = c \frac{m\theta + (3M + m)\sin\theta}{2(M + m)}$$

$$y = c \cos\theta$$

试用拉格朗日方程证明之. 式中 c 为两圆柱轴线间的距离, θ 为两圆柱连心线与竖直向上的直线间的夹角.

5.15 质量为 M 、半径为 a 的薄球壳, 其外表面是完全粗糙的, 内表面则完全光滑, 放在粗糙水平面上. 在球壳内放一质量为 m 、长为 $2a \sin\alpha$ 的匀质棒. 设此系统由静止开始运动, 且在开始的瞬间棒在通过球心的竖直平面内, 两端都与球壳相接触, 并与水平线成 β 角. 试用拉格朗日方程证明在以后的运动中, 此棒与水平线的夹角 θ 满足关系

$$\begin{aligned} & [(5M + 3m)(3\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 9m\cos^2\alpha\cos^2\theta] a\dot{\theta}^2 \\ & = 6g(5M + 3m)(\cos\theta - \cos\beta)\cos\alpha \end{aligned}$$

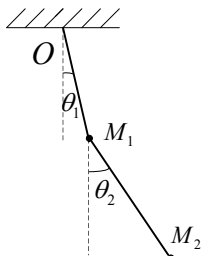


第5.15题图

5.16 半径为 r 的匀质小球, 可在一具有水平轴、半径为 R 的固定圆柱的内表面滚动. 试求圆

球平衡位置作微振动的方程及其周期.

5.17 质点 M_1 , 其质量为 m_1 , 用长为 l_1 的绳子系在固定点 O 上. 在质点 M_1 上, 用长为 l_2 的绳系另一质点 M_2 , 其质量为 m_2 . 以绳与竖直线所成的角度 θ_1 与 θ_2 为广义坐标, 求此系统在竖直平面内作微振动的运动方程. 如 $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$, 试再求出此系统的振动周期.



第 5.17 题图

5.18 在上题中, 如双摆的上端不是系在固定点 O 上, 而是系在一个套在光滑水平杆上、质量为 $2m$ 的小环上, 小环可沿水平杆滑动. 如 $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$, 试求其运动方程及其周期.

5.19 质量分别为 m_1 、 m_2 的二原子分子、平衡时原子间的距离为 a , 它们的相互作用力是准弹性的, 取二原子的连线为 x 轴, 试求此分子的运动方程。

5.20 已知一带电粒子在电磁场中的拉格朗日函数 L (非相对论的) 为

$$L = T - q\varphi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$$

式中 \mathbf{v} 为粒子的速度, m 为粒子的质量, q 为粒子所带的电荷, φ 为标量势, \mathbf{A} 为矢量势。试由此写出它的哈密顿函数。

5.21 试写出自由质点在作匀速转动的坐标系中的哈密顿函数的表示式。

5.22 试写出 § 3.9 中拉格朗日陀螺的哈密顿函数 H , 并由此求出它的三个第一积分。5.23 试用哈密顿正则方程解 4.10 题。

5.24 半径为 c 的匀质圆球, 自半径为 b 的固定圆球的顶端无初速地滚下, 试由哈密顿正则方程求动球球心下降的切向加速度。

5.25 试求由质点组的动量矩 \mathbf{J} 的笛卡儿分量所组成的泊松括号。

5.26 试求由质点组的动量 \mathbf{p} 和动量矩 \mathbf{J} 的笛卡儿分量所组成的泊松括号。

5.27 如果 φ 是坐标和动量的任意标量函数, 即 $\varphi = ar^2 + br \cdot \mathbf{p} + cp^2$, 其中 a, b, c 为常数, 试证 $[\varphi, J_z] = 0$ 。

5.28 半径为 a 的光滑圆形金属丝圈, 以匀角速 ω 绕竖直直径转动, 圈上套着一质量为 m 的小环。起始时, 小环自圆圈的最高点无初速地沿着圆圈滑下。当环和圈中心的联线与竖直向上的直径成角 θ 时, 用哈密顿原理求出小环的运动微分方程。

5.29 试用哈密顿原理解 4.10 题。

5.30 试用哈密顿原理求复摆作微振动时的周期。

5.31 试用哈密顿原理解 5.9 题。

5.32 试证 $Q = \ln\left(\frac{1}{q} \sin p\right)$, $P = q \operatorname{ctg} p$ 为一正则变换。

5.33 证：变换方程 $q = (2Q)^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} \cos P$, $p = (2Q)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} \sin P$ 代表一正则变换，并将正则方

程 $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$, $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ 变为 $\dot{Q} = \frac{\partial H^*}{\partial P}$, $\dot{P} = -\frac{\partial H^*}{\partial Q}$ 式中 $H = \frac{1}{2}(p^2 + k^2 q^2)$, $H^* = kQ$

5.34 如果利用下列关系把系数 p , q 换为 P , Q ：

$$q = \varphi_1(P, Q), p = \varphi_2(P, Q)$$

则当

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)} = 1$$

时，这种变换是一正则变换，试证明之。

5.35 试利用正则变换，由正则方程求竖直上抛的物体的运动规律。已知本问题的母函数

$$U = mg\left(\frac{1}{6}gQ^3 + qQ\right),$$
 式中 q 为确定物体位置的广义坐标， Q 为变换后新的广义坐标，

g 为重力加速度。

5.36 试求质点在势场

$$V = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{Fz}{r^3}$$

中运动的主函数 S ，式中 α 及 F 为常数

5.37 试用哈密顿-雅科毕偏微分方程求抛射体在真空中运动的轨道方程。

5.38 如力学体系的势能 V 及动能 T 可用下列二函数表示：

$$V = \frac{V_1 + V_2 + \cdots + V_s}{A_1 + A_2 + \cdots + A_s}$$

$$T = \frac{1}{2}(A_1 + A_2 + \cdots + A_s) \left(B_1 \dot{q}_1^2 + B_2 \dot{q}_2^2 + \cdots + B_s \dot{q}_s^2 \right)$$

式中 $V_\alpha, A_\alpha, B_\alpha (\alpha = 1, 2, \cdots, s)$ 都只是一个参数 q_α 的函数，则此力学体系的运动问题可用积分法求解，试证明之。

5.39 试用哈-雅方程求行星绕太阳运动时的轨道方程。

5.40 试由 (5.9.29) 及 (5.9.30) 两式推证 (5.9.31) 及 (5.9.32) 两式。

5.41 试求质点在库仑场和均匀场

$$V = \frac{\alpha}{R} - Fz$$

的合成场中运动时的势函数 S ，以抛物线坐标 ξ, η, θ 表示，式中 α 及 F 是常数，而

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (\text{参看图 1.2.4}).$$

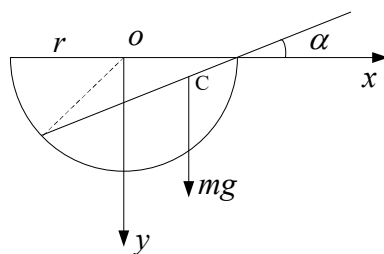
5.42 刘维定理的另一表达式是相体积不变定理。这里又有两种不同的说法：

(1) 考虑相宇中任何一个区域。当这区域的边界依照正则方程运动时，区域的体积在运动中不变。

(2) 相宇的体积元在正则变换下不变。试分别证明之。

第五章习题解答

5.1 解 如题 5.1.1 图



题5.1.1图

杆受理想约束，在满足题意的约束条件下杆的位置可由杆与水平方向夹角 α 所唯一确定。杆的自由度为 1，由平衡条件：

$$\delta\omega = \sum F_i \delta r_i = 0$$

即

$$mg \cdot \delta y = 0 \quad ①$$

变换方程

$$y_c = 2r \cos \alpha \sin \alpha - \frac{l}{2} \sin \alpha = r \sin 2\alpha - \frac{l}{2} \sin \alpha \quad ②$$

故

$$\delta y_c = \left(2r \cos 2\alpha - \frac{1}{2}l \cos \alpha \right) \delta \alpha \quad (3)$$

代回①式即

$$\left(2r \cos \alpha - \frac{1}{2}l \cos \alpha \right) \delta \alpha = 0$$

因 $\delta \alpha$ 在约束下是任意的，要使上式成立必须有：

$$r \cos 2\alpha - \frac{l}{2} \cos \alpha = 0$$

$$l = \frac{4r \cos 2\alpha}{\cos \alpha} \quad (4)$$

又由于

$$\cos \alpha = \frac{c}{2r}$$

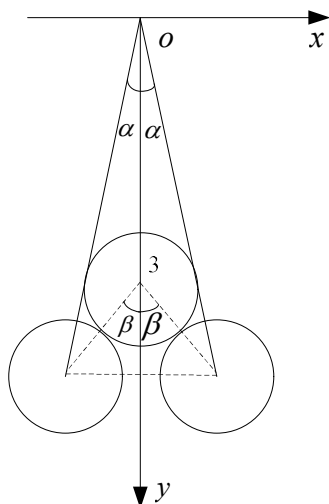
故

$$\cos 2\alpha = \frac{c^2 - 2r^2}{2r^2}$$

代回④式得

$$l = \frac{4(c^2 - 2r^2)}{c}$$

5.2 解 如题 5.2.1 图



题5.2.1图

三球受理想约束，球的位置可以由 α 确定，自由度数为 1，故。

$$x_1 = -2r \sin \beta = -(l+r) \sin \alpha$$

$$x_2 = 2r \sin \beta = (l+r) \sin \alpha$$

$$x_3 = 0$$

$$y_1 = (l+r) \cos \alpha$$

$$y_2 = (l+r) \cos \alpha$$

$$y_3 = (l+r) \cos \alpha - 2r \cos \beta$$

得

$$\delta y_1 = -(l+r) \sin \alpha \delta \alpha$$

$$\delta y_2 = -(l+r) \sin \alpha \delta \alpha$$

$$\delta y_3 = -(l+r) \sin \alpha \delta \alpha + 2r \sin \beta \frac{\delta \beta}{\delta \alpha} \cdot \delta \alpha$$

由虚功原理

$$\delta \omega = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r_i = 0$$

故

$$P_1 \delta y_1 + P_2 \delta y_2 + P_3 \delta y_3 = 0$$

$$-(l+r) \sin \alpha \delta \alpha - (l+r) \sin \alpha \delta \alpha - (l+r) \sin \alpha \delta \alpha + 2r \sin \beta \frac{\delta \beta}{\delta \alpha} \cdot \delta \alpha = 0 \quad (1)$$

因 $\delta \alpha$ 在约束条件下是任意的，要使上式成立，必须

$$-3(l+r) \sin \alpha + 2r \sin \beta \frac{\delta \beta}{\delta \alpha} = 0$$

故

$$\frac{\delta\alpha}{\delta\beta} = \frac{2r \sin \beta}{3(l+r)\sin \alpha} \quad (2)$$

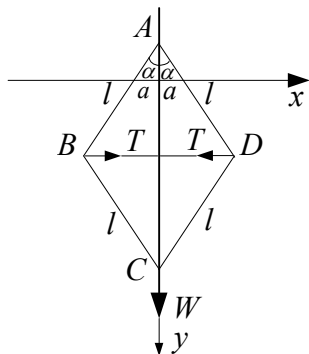
又由 $\delta x_1 = -2r \cos \beta \delta \beta = -(l+r) \cos \alpha \delta \alpha$ 得:

$$\frac{\delta\alpha}{\delta\beta} = \frac{2r \cos \beta}{(l+r) \cos \alpha} \quad (3)$$

由②③可得

$$\tan \beta = 3 \tan \alpha$$

5.3 解 如题 5.3.1 图,



题5.31图

在相距 $2a$ 的两钉处约束反力垂直于虚位移，为理想约束。去掉绳代之以力 T ，且视为主动力后采用虚功原理， α 一确定便可确定 ABCD 的位置。因此自由度数为 1。选 α 为广义坐。

由虚功原理:

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r_i = 0$$

$$^W \delta y_c - T_B \delta x_B + T_D \delta x_D = 0 \quad (1)$$

又

$$x_B = -l \sin \alpha, x_D = l \sin \alpha, y_c = 2l \cos \alpha - a \cot \alpha$$

取变分得

$$\delta x_B = -l \cos \alpha \delta \alpha; \delta x_D = l \cos \alpha \cdot \delta \alpha$$

$$\delta y_c = -2l \sin \alpha \delta \alpha = \frac{a}{\sin^2 \alpha} \delta \alpha$$

代入①式得：

$$W\left(-2l\sin\alpha\delta\alpha + \frac{a}{\sin^2\alpha}\delta\alpha\right) + T_D(l\cos\alpha + l\cos\alpha)\delta\alpha = 0$$

化简得

$$\left[W\left(-2l\sin\alpha + \frac{a}{\sin^2\alpha}\right) + 2Tl\cos\alpha\right]\delta\alpha = 0 \quad ②$$

设

$$T_B = T_D = T$$

因 $\delta\alpha$ 在约束条件下任意，欲使上式成立，须有：

$$W\left(-2l\sin\alpha + \frac{a}{\sin^2\alpha}\right) + 2Tl\cos\alpha = 0$$

由此得

$$T = W \tan\alpha \left(\frac{a}{2l} \csc^3\alpha - 1 \right)$$

5.4 解 自由度 $s=1$ ，质点位置为 (x, y) 。

由

$$\begin{aligned} F_{ix} + \sum_{\beta=1}^k \lambda_{\beta} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial x_i} &= 0 \\ F_{iy} + \sum_{\beta=1}^k \lambda_{\beta} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial y_i} &= 0 \end{aligned} \quad ①$$

由已知得

$$i = 1,$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

故

$$\begin{aligned} k^2x + 2\lambda x &= 0 \\ W + 2\lambda y &= 0 \end{aligned} \quad ②$$

约束方程

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad ③$$

联立②③可求得

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\pm r \\ \lambda=\mp \frac{W}{2r} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=\pm \sqrt{r^2 - \frac{W^2}{k^2}} \\ y=\frac{W}{k^2} \\ \lambda=-\frac{k^2}{2} \end{cases}$$

又由于

$$R = \lambda |\nabla f| = \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \lambda \sqrt{4(x^2 + y^2)} = 2\lambda r$$

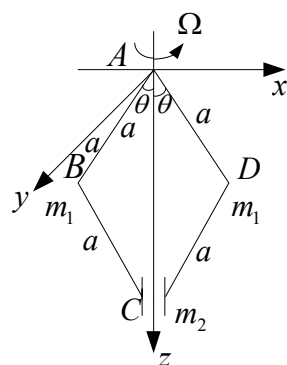
故

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \pm r \\ R &= \mp W \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} x &= \pm \sqrt{r^2 - \frac{W^2}{k^4}} \\ y &= \frac{W}{k^2} \\ R &= -k^2 r \end{aligned}$$

5.5 解 如题 5.5.1 图



题5.5.1图

按题意仅重力作用，为保守系。因为已知 $\psi = \Omega$ ，故可认为自由度为 1. 选广义坐标 $\theta = q$ ，在球面坐标系中，质点的 动能：

$$T_i = \frac{1}{2} m_i (\dot{r}_i^2 + r_i^2 \dot{\theta}_i^2 + r_i^2 \sin^2 \theta_i \dot{\psi}_i^2) \quad (\text{其中 } i \text{ 代表指标 } B, C, D)$$

由于

$$r_B = r_D = a,$$

$$\theta_B = \theta_D = \theta$$

所以

$$T_B = T_D = \frac{1}{2} m_1 (a^2 \dot{\theta}^2 + \Omega^2 a^2 \sin^2 \theta)$$

又由于

$$\theta_c = 0$$

$$r_c = 2a \cos \theta$$

故

$$T_c = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d(2a \cos \theta)}{dt} \right)^2 = 2m_2 a^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2$$

$$T = T_B + T_D + T_c = m_1 (a^2 \dot{\theta}^2 + \Omega^2 a^2 \sin^2 \theta) + 2m_2 a^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2$$

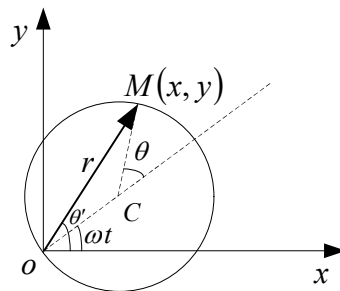
取 0x 为零势，体系势能为：

$$V = -2ga(m_1 + m_2) \cos \theta$$

故力学体系的拉氏函数为：

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= m_1 a^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta) + 2m_2 a^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + 2ga(m_1 + m_2) \cos \theta \end{aligned}$$

5.6 解 如题 5.6.1 图.



题5.6.1图

(1) 平面运动，一个自由度.

(2) 选广义坐标为 $q = \theta$ ，广义速度

(3) 因未定体系受力类型，由一般形式的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_\alpha \quad (1)$$

在

$$\delta W = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r_i = Q_1 \delta \theta = 0。$$

广义力

$$Q_1 = 0。$$

代入①得：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad (2)$$

在极坐标系下：

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{d 2a \cos \frac{\theta}{2}}{dt} \right)^2 + \left(2a \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 \left(\frac{d \left(\frac{\theta}{2} + \omega t \right)}{dt} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} m \left(4a^2 \omega^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 4a^2 \omega \dot{\theta} \cos^2 \frac{\theta}{2} + a^2 \dot{\theta}^2 \right) \quad (3)$$

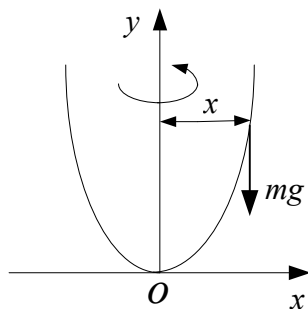
故

将以上各式代入②式得

$$ma^2 \ddot{\theta} - 2ma^2 \sigma \dot{\theta} \sin \theta + ma^2 \omega^2 \sin \theta + 2ma^2 \omega \dot{\theta} \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

5.7 解 如题 5.7.1 图



题5.7.1图

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \omega^2 x^2$$

又由于

$$\dot{y} = \frac{x}{2a} \dot{x}$$

所以

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + \left(\frac{x}{2a} \dot{x} \right)^2 + \omega^2 x^2 \right] = \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 \left(1 + \frac{x^2}{4a^2} \right) + \omega^2 x^2 \right] \quad (1)$$

取坐标原点为零势面

$$V = mgy = mg \frac{x^2}{4a} \quad (2)$$

拉氏函数

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 \left(1 + \frac{x^2}{4a^2} \right) + \omega^2 x^2 \right] - mg \frac{x^2}{4a} \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \left(\frac{m\dot{x}^2}{4a^2} + m\omega^2 \right) x - mg \frac{x}{2a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \left(1 + \frac{x^2}{4a^2} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \left(1 + \frac{x^2}{4a^2} \right) + m\dot{x}^2 \frac{x}{2a^2}$$

代入保守系拉格朗日方程 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ 得

$$m\ddot{x}\left(1+\frac{x^2}{4a^2}\right)+m\dot{x}^2\frac{x}{4a^2}-m\omega^2x+mg\frac{x}{2a}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}\left(1+\frac{x^2}{4a^2}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=m\ddot{x}\left(1+\frac{x^2}{4a^2}\right)+m\dot{x}^2\frac{x}{2a^2}$$

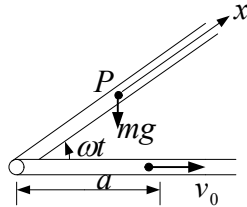
代入保守系拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

得

$$m\ddot{x}\left(1+\frac{x^2}{4a^2}\right)+m\dot{x}^2\frac{x}{4a^2}-m\omega^2x+mg\frac{x}{2a}=0$$

5.8 解：如图 5.8.1 图.



题5.8.1图

(1) 由于细管以匀角速 ω 转动，因此 $\dot{\theta} = \omega$ 可以认为质点的自由度为 1.

(2) 取广义坐标 $x = q$.

(3) 根据极坐标系中的动能

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + x^2\omega^2)$$

取初始水平面为零势能面，势能：

$$V = mgx \sin(\omega t)$$

拉氏函数

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) - mgx \sin(\omega t) \quad ①$$

(4)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = m\omega^2 x - mg \sin(\omega t)$$

代入拉氏方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

得:

$$m\ddot{x} - m\omega^2 x = -mg \sin(\omega t)$$

(5) 先求齐次方程的解.

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0 \quad (2)$$

$$x = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$$

特解为

$$\frac{g}{2\omega^2} \sin(\omega t)$$

故①式的通解为

$$x = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin(\omega t) \quad (3)$$

在 $t=0$ 时:

$$a = c_1 + c_2 \quad (4)$$

$$x = v_0 = c_1 \omega - c_2 \omega + \frac{g}{2\omega} \quad (5)$$

联立④⑤得

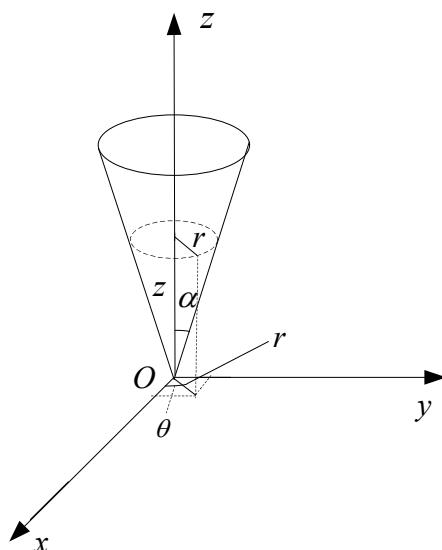
$$c_1 = \frac{1}{2} \left(a + \frac{v_0}{\omega} \right) - \frac{g}{4\omega^2}$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \left(a - \frac{v_0}{\omega} \right) + \frac{g}{4\omega^2}$$

将 c_1, c_2 代回式③可得方程的解为:

$$x = \left[\frac{1}{2} \left(a + \frac{v_0}{\omega} \right) - \frac{g}{4\omega^2} \right] e^{\omega t} + \left[\frac{1}{2} \left(a - \frac{v_0}{\omega} \right) + \frac{g}{4\omega^2} \right] e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin(\omega t)$$

5.9 解 如题 5.9.1 图.



第5.9题图

(1) 按题意为保守力系，质点被约束在圆锥面内运动，故自有度数为 2.

(2) 选广义坐标 $q_1 = r$, $q_2 = \theta$.

(3) 在柱坐标系中:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

$$z = r \cot \alpha$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \cot^2 \alpha)$$

以 Oxy 面为零势能面，则:

$$V = mgr \cot \alpha$$

拉氏函数

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \cot^2 \alpha) - mgr \cot \alpha \quad ①$$

(4) 因为 L 不显含 θ ，所以 θ 为循环坐标，即

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} = \text{常数} \quad ②$$

对另一广义坐标

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\dot{\theta}^2 - mg \cot \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} + m\dot{r} \cot^2 \alpha$$

代入保守系拉氏方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

有

$$m\ddot{r} + m\dot{r} \cot^2 \alpha - m\dot{\theta}^2 + mg \cot \alpha = 0$$

得

$$m\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + mg \sin \alpha \cos \alpha = 0 \quad (4)$$

所以此质点的运动微分方程为

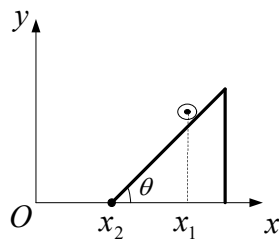
$$\begin{cases} r^2 \dot{\theta} = A \\ \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (A \text{ 为常数})$$

$$y_1 = (x_1 - x_2) \tan \theta$$

所以

$$T = \frac{1}{2} m_1 [\dot{x}_1^2 + (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \tan^2 \theta] + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

5.10 解如题 5.10.1 图.



题5.10.1图

(1) 体系自由度数为 2.

(2) 选广义坐标 $q_1 = x_1, q_2 = x_2$.

(3) 质点的速度 $v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2$,

劈的速度

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2$$

故体系动能

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

以 x 面为零势面，体系势能：

$$V = m_1g(x_1 - x_2)\tan\theta + C_2$$

其中 C_2 为劈势能.

拉氏函数

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1[\dot{x}_1^2 + (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \tan^2 \theta] + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - m_1g(x_1 - x_2)\tan\theta - C_2 \quad (1)$$

(4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -m_1g \tan\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= m_1\dot{x}_1 + m_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \tan^2 \theta \end{aligned}$$

代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

得：

$$m_1\ddot{x}_1(1 + \tan^2 \theta) - m_1\ddot{x}_2 \tan^2 \theta + m_1g \tan\theta = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = m_1g \tan\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = -m_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\tan^2 \theta + m_2\dot{x}_2$$

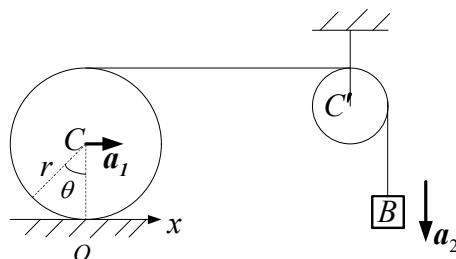
代入拉格朗日方程得

$$-m_1\ddot{x}_1 \tan^2 \theta + m_2\ddot{x}_2 \tan^2 \theta + m_2\ddot{x}_2 - m_1g \tan\theta = 0 \quad (3)$$

联立②，③得

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{m_2g \sin\theta \cos\theta}{m_2 + m_1 \sin^2 \theta} \\ \ddot{x}_2 = \frac{m_1g \sin\theta \cos\theta}{m_2 + m_1 \sin^2 \theta} \end{cases}$$

5.11 解 如题 5.11.1 图



题5.11.1图

(1) 本系统内虽有摩擦力, 但不做功, 故仍是保守系中有约束的平面平行运动, 自由度 $s = 1$.

(2) 选取广义坐标 $q = \theta$.

(3) 根据刚体力学

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{3}{4} M r^2 \dot{\theta}^2 + 2 m r^2 \dot{\theta}^2$$

其中绕质心转动惯量

$$I_C = \frac{1}{2} M r^2, v_C = r \dot{\theta}, v_B = 2 v_C$$

选 Ox 为零势面, 体系势能:

$$V = C - 2mgr\theta$$

其中 C 为常数.

拉氏函数

$$L = T - V = \frac{3}{4} M r^2 \dot{\theta}^2 + 2 m r^2 \dot{\theta}^2 + 2mgr\theta - C$$

(4)

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 2mgr, \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2} M r^2 \dot{\theta} + 4 m r^2 \dot{\theta}$$

代入保守系拉氏方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

得:

$$\frac{3}{2} M r^2 \ddot{\theta} + 4 m r^2 \ddot{\theta} - 2mgr = 0$$

$$\ddot{\theta} = \frac{4mg}{(3M+8m)r}$$

$$a_1 = r\ddot{\theta} = \frac{4mg}{3M+8m}$$

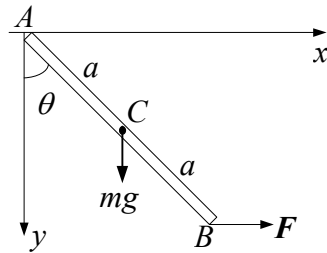
$$a_2 = 2a_1 = \frac{8mg}{3M+8m}$$

对于物体 B ，有

$$mg - T = ma_2$$

$$T = mg - ma_2 = \frac{3Mmg}{3M+8m}$$

5.12 解 如题 5.12.1 图.



题5.12.1图

(1) 棒作平面运动，一个约束，故自由度 $s = 2$ 。

(2) 选广义坐标 $q_1 = x, q_2 = \theta$ 。

(3) 力学体系的动能

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2$$

根据运动合成

$$v_C = (\dot{x} + a\omega \cos \theta)\mathbf{i} - a\omega \sin \theta \mathbf{j}$$

又

$$\omega = \dot{\theta}$$

故

$$v_C^2 = \dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos \theta$$

设 k 为绕质心的回转半径，代入①得动能

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + ma\dot{x}\dot{\theta}\cos \theta + \frac{1}{2}mk^2\dot{\theta}^2 \quad (2)$$

(4)

$$r_B = (x + 2a \sin \theta)j + 2a \cos \theta j$$

由

$$\delta W = \theta_\alpha \delta q_\alpha = \sum_{i=1}^2 F_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (3)$$

$$(\text{其中 } \vec{F}_C = mgj, \vec{F}_B = Fi)$$

则

$$\delta W = F(\delta x + 2a \cos \theta \delta \theta) - mga \sin \theta \delta \theta = F \delta x + (2aF \cos \theta - mga \sin \theta) \delta \theta = 0 \quad (4)$$

因为 δx 、 $\delta \theta$ 在约束条件下任意且独立，要使上式成立，必须：

$$Q_1 = F, Q_2 = 2aF \cos \theta - mga \sin \theta \quad (5)$$

(5)

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} + a\dot{\theta} \cos \theta)$$

代入一般形式的拉氏方程得：

$$m(\ddot{x} + a\ddot{\theta} \cos \theta - a\dot{\theta}^2 \sin \theta) = F \quad (6)$$

又

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -m a \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m(a^2 \dot{\theta} + a\dot{x} \cos \theta) + mk^2 \dot{\theta}$$

代入一般形式的拉氏方程得：

$$m[a\ddot{x} \cos \theta + (a^2 + k^2)\ddot{\theta}] = 2Fa \cos \theta - mga \sin \theta \quad (7)$$

⑥、⑦两式为运动微分方程

(6) 若摆动角很小，则，代入式得： $\sin \theta \rightarrow \theta, \cos \theta \rightarrow 1$ ，代入⑥⑦式得：

$$\begin{cases} \ddot{x} + a\ddot{\theta} - a\dot{\theta}^2 \theta = \frac{F}{m} \\ a\ddot{x} + (a^2 + k^2)\ddot{\theta} + ga\theta = \frac{2Fa}{m} \end{cases} \quad (8)$$

又

$$I_C = mk^2 = \frac{m}{12}(2a)^2$$

故

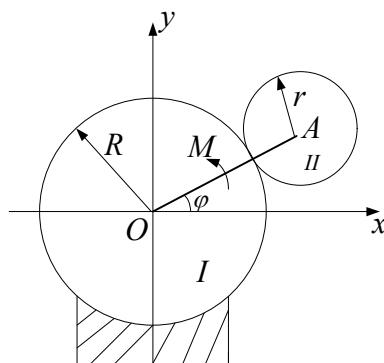
$$k^2 = \frac{1}{3}a^2$$

代入⑧式得:

$$\begin{cases} \ddot{x} + a\ddot{\theta} = \frac{F}{m} \\ \ddot{x} + \frac{4}{3}a\ddot{\theta} + g\theta = \frac{2F}{m} \end{cases}$$

(因为 θ 角很小, 故可略去 $-a\dot{\theta}^2\theta$ 项)

5.13 解 如题 5.13.1 图



题5.13.1图

(1) 由于曲柄长度固定, 自由度 $s=1$.

(2) 选广义坐标 $q = \varphi$, 受一力矩, 重力忽略, 故可利用基本形式拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \quad ①$$

(3) 系统动能

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_A^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \\ &= \frac{1}{6}m_1(R+r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2(R+r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}m_2r^2 \cdot \left[\frac{(R+r)\dot{\varphi}}{r} \right]^2 \quad ② \\ &= \frac{1}{6}m_1(R+r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{4}m_2(R+r)^2\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

(4) 由定义式

$$Q_\varphi = \sum F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial \varphi_i} = M \quad (3)$$

(5)

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3} m_1 (R+r)^2 \dot{\varphi} + \frac{3}{2} m_2 (R+r)^2 \dot{\varphi}$$

代入①得:

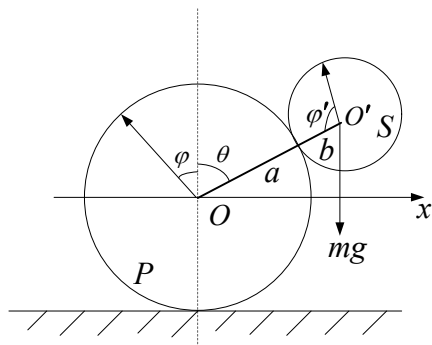
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = Q_\alpha = M$$

$$\frac{1}{3} m_1 (R+r)^2 \ddot{\varphi} + \frac{3}{2} m_2 (R+r)^2 \ddot{\varphi} = M$$

得

$$\ddot{\varphi} = \frac{2M}{3m_2 (R+r)^2 \left(1 + \frac{2m_1}{9m_2} \right)}$$

5.14. 解 如题 5.14.1 图.



题5.14.1图

(1) 因体系作平面平行运动, 一个约束方程:

$$a\dot{\varphi} + (a+b)\dot{\theta} = b\dot{\varphi}'$$

(2) 体系自由度 $s=2$, 选广义坐标 $q_1 = \theta, q_2 = \varphi$. 虽有摩擦, 但不做功, 为保守体系

(3) 体系动能:

$$T = P \text{ 轮平动动能} + P \text{ 轮质心转动动能} + S \text{ 轮质心动能} \\ + S \text{ 轮绕质心转动动能.}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} I_P \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{\varphi} a)^2 + \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}'^2 + \frac{m}{2} [(a+b)\dot{\theta} \cos \theta - a\dot{\varphi}]^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m(a+b)^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \quad \text{①} \\
&= \frac{3}{4} M \dot{\varphi}^2 a^2 + \frac{1}{4} m [a\dot{\varphi} + (a+b)\dot{\theta}]^2 + \frac{1}{2} m [(a+b)\dot{\theta} \cos \theta - a\dot{\varphi}]^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m(a+b)^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

以地面为零势面，体系势能

$$V = mg(a+b)\cos\theta + Mga$$

则保守系的拉氏函数

$$\begin{aligned}
L = T - V &= \frac{3}{4} M \dot{\varphi}^2 a^2 + \frac{1}{4} m [(a+b)\dot{\theta} + a\dot{\varphi}]^2 + \frac{1}{2} m [(a+b)\dot{\theta}^2 \cos \theta - a\dot{\varphi}]^2 + \quad \text{②} \\
&\quad \frac{m}{2} [(a+b)^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta] - mg(a+b)\cos\theta - Mga
\end{aligned}$$

(1) 因为 L 不显含 φ ，得知 φ 为循环坐标。

故

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2} Ma^2 \dot{\varphi} + \frac{1}{2} ma^2 \dot{\varphi} + \frac{1}{2} ma(a+b)\dot{\theta} - ma(a+b)\dot{\theta} \cos \theta + ma^2 \dot{\varphi} = \text{常数} \quad \text{③}$$

开始时：

$$\dot{\varphi} = \dot{\theta} = 0$$

则

$$\frac{3}{2} Ma^2 \dot{\varphi} + \frac{3}{2} ma^2 \dot{\varphi} + \frac{1}{2} ma(a+b)\dot{\theta} - ma(a+b)\dot{\theta} \cos \theta = 0$$

代入 $c = a+b$ 得

$$a\dot{\varphi} = \left[\frac{2mc \cos \theta - mc}{\varepsilon(M+m)} \right] \dot{\theta}$$

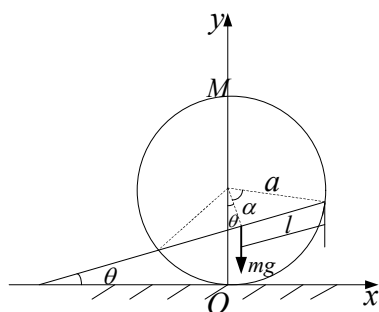
又 $t=0$ 时， $\theta = \varphi = 0$

所以

$$a\varphi = \frac{2mc \sin \theta - mc\theta}{3(M+m)}$$

$$\begin{aligned} x &= c \sin \theta - a\varphi = c \sin \theta - \frac{2mc \sin \theta - mc\theta}{3(M+m)} \\ &= c \frac{m\theta + (3M+m)\sin \theta}{3(M+m)} \\ y &= c \cos \theta \end{aligned}$$

5.15 解 如题 5.15.1 图



题5.15.1图

(1) 本系统作平面平行运动, 干限制在球壳内运动, 自由度 $s=2$; 选广义坐标 $q_1=x, q_2=\theta$, 体系摩擦力不做功, 为保守力系, 故可用保守系拉氏方程证明

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (1)$$

(2) 体系动能=球壳质心动能+球壳转动动能+杆质心动能+杆绕中心转动动能

$$T = CM\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \textcircled{2}$$

其中

$$I_1 = \frac{2}{3}Ma^2, I_2 = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}m(a \sin \alpha)^2,$$

$$\mathbf{v} = (\dot{x} + a \cos \alpha \cos \theta \dot{\theta})\mathbf{i} + a \cos \alpha \sin \theta \dot{\theta}\mathbf{j}, \omega_{\text{球}} = \frac{x}{a}, \omega_{\text{杆}} = \dot{\theta}$$

代入②得

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} M + m \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 \left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \right) + a m \dot{x} \dot{\theta} \cos \alpha \cos \theta$$

以地面为零势面，则势能：

$$Vmga \cos \alpha \cos \theta + C_1 \quad (\text{其中 } C_1 \text{ 为常数})$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} M + m \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 \left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \right) + am \dot{\theta} \cos \alpha \cos \theta - (mga \cos \alpha \cos \theta + C_1)$$

(3) 因为 x 是循环坐标, 故

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \left(\frac{5}{3} M + m \right) \dot{x}^2 + m \dot{a} \dot{\theta} \cos \alpha \cos \theta = \text{常熟} \quad (3)$$

而

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -m \dot{x} \dot{\theta} \cos \alpha \sin \theta + mga \cos \alpha \sin \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m a^2 \dot{\theta} \left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \right) + m \dot{x} \cos \alpha \cos \theta \end{aligned}$$

代入①式得

$$m a \ddot{\theta} \left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{3} \sin^2 \alpha + m \ddot{x} \cos \alpha \cos \theta - mg \cos \alpha \sin \theta \right) = 0 \quad (4)$$

联立③、④可得 (先由③式两边求导, 再与④式联立)

$$\begin{aligned} (5M + 3m) \left(3 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \right) a \ddot{\theta} - 9am \cos^2 \alpha \cos \theta \frac{d}{dt} (\dot{\theta} \cos \theta) + \\ (5M + 3m) 3g \cos \alpha \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

⑤试乘 $2\dot{\theta}$ 并积分得:

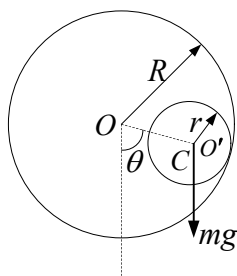
$$\begin{aligned} & \left[(5M + 3m) \left(3 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \right) - \cos^2 \alpha \cos^2 \theta \right] a \dot{\theta}^2 \\ &= 6g(5M + 3m) \cos \alpha \cos \theta + \text{常数} \end{aligned}$$

又由于当

$$\dot{\theta} = 0, \text{ 则 } \theta = \beta$$

$$\begin{aligned} \text{故常数} &= -6g(5M + 3m) \cos \alpha \cos \beta \\ & \left[(5M + 3m) \left(3 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \right) - 9m \cos^2 \alpha \cos^2 \theta \right] a \dot{\theta}^2 \\ &= 6g(5M + 3m) \cos \alpha (\cos \theta - \cos \beta) \end{aligned}$$

5.16 解 如题图 5.16.1.



题5.16.1图

(1) 由已知条件可得系统自由度 $s=1$ 。

(2) 取广义坐标 $q = \theta$ 。

(3) 根据刚体力学，体系动能：

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 \quad (1)$$

又

$$v_C = (R-r)\dot{\theta}, \omega = \frac{(R-r)\dot{\theta}}{r}, I_C = \frac{2}{5}mr^2$$

将以上各式代入①式得：

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{5}mr^2\left[\frac{(R-r)\dot{\theta}}{r}\right]^2 \\ &= \frac{7}{10}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

设原点 O 为零势能点，所以体系势能

$$V = -mg(R-r)\cos\theta$$

体系的拉氏函数

$$L = T - V = \frac{7}{10}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + mg(R-r)\cos\theta \quad (2)$$

(1) 因为体系只有重力势能做工，因而为保守系，故可采用

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg(R-r)\sin\theta = -mg(R-r)\theta$$

(因为微震动， θ 很小，所以 $\sin\theta \approx \theta$)

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{7}{5}m(R-r)^2\dot{\theta}^2$$

代入③式得

$$\frac{7}{5}m(R-r)^2\ddot{\theta} + mg(R-r)\theta = 0$$

即

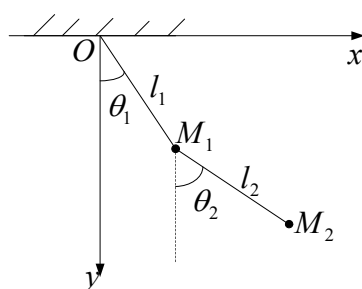
$$\ddot{\theta} + \frac{5}{7} \frac{g}{R-r} \theta = 0$$

(5) 解方程得

$$\theta = A \cos \left(\sqrt{\frac{5}{7} \frac{g}{R-r}} t + \varphi_0 \right)$$

$$\text{周期 } \tau = 2\pi \sqrt{\frac{7}{5} \frac{R-r}{g}}$$

5.17 解 如题 5.17.1 图



题5.17.1图

(1) 由题设知

$$v_1 = l_1 \dot{\theta}_1$$

$$v_2 = (l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2) \mathbf{i} + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \mathbf{j}$$

系统动能

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 \\ &= \frac{1}{2} M_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 (l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + \\ &\quad \frac{1}{2} M_2 (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 \\ &= \frac{1}{2} (M_1 + M_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + M l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad ①$$

取 x 轴为势能零点, 系统势能

$$V = -M_1 g l_1 \cos \theta_1 - M_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)$$

拉氏函数

$$L = T - V = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + M_1 g l_1 \cos \theta_1 + M_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \quad (2)$$

(2) 体系只有重力做功，为保守系，故可采用保守系拉氏方程。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (M_1 + M_2) g l_1 \sin \theta_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (M_1 + M_2) \dot{\theta}_1 + M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

代入拉氏方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

得：

$$\begin{aligned} (M_1 + M_2) \ddot{\theta}_1 + M_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + \\ M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (M_1 + M_2) g l_1 \sin \theta_1 = 0 \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} M_1 = M_2 = m, l_1 = l_2 = l, \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0, \\ \cos(\theta_1 - \theta_2) = 1, \sin \theta_1 = \theta_1 \text{ (因为是微震动)} \end{aligned}$$

代入上式得

$$2ml^2 \ddot{\theta}_1 + ml^2 \ddot{\theta}_2 + 2mgl\theta_1 = 0$$

即

$$2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + 2gl\theta_1 = 0 \quad (3)$$

同理

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= M_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - M_2 g l_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

$$\text{代入 } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \text{ 得}$$

$$M_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + M_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - \\ M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + M_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0$$

又

$$M_1 = M_2 = m, l_1 = l_2 = l, \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0, \sin \theta_2 = \theta_2, \cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$$

代入上式得

$$l \ddot{\theta}_2 + l \ddot{\theta}_1 + g \theta_2 = 0 \quad (4)$$

令

$$\theta_1 = A_1 e^{\lambda t}, \theta_2 = A_2 e^{\lambda t}$$

代入③④式得:

$$A_1 (2l\lambda^2 + 2g) + A_2 l\lambda^2 = 0 \\ A_1 l\lambda^2 + A_2 (l\lambda^2 + g) = 0$$

欲使 A_1, A_2 有非零解, 则须有

$$\begin{vmatrix} 2(l\lambda^2 + g) & l\lambda^2 \\ l\lambda^2 & l\lambda^2 + g \end{vmatrix} = 0$$

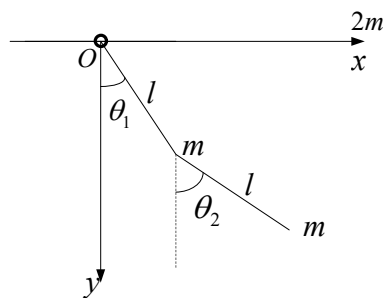
解得

$$\lambda^2 = \frac{-4gl \pm \sqrt{(4gl)^2 - 8g^2 l^2}}{2l^2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{l} g \\ \lambda = \pm i \left[\left(\frac{-2 \mp \sqrt{2}}{l} \right) g \right]^{\frac{1}{2}}$$

周期

$$\tau_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(2 + \sqrt{2})}} \\ \tau_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(2 - \sqrt{2})}}$$

5.18 解 如题 5.18.1 图



题5.18.1图

(1) 系统自由度 $s = 1$

(2) 取广义坐标 $q_1 = x, q_2 = \theta_1, q_3 = \theta_2$; 广义速度 $\dot{q}_1 = \dot{x}, \dot{q}_2 = \dot{\theta}_1, \dot{q}_3 = \dot{\theta}_2$

(3) 因为是微震动, $\cos \theta_1 \approx \cos \theta_2 \approx 1, \sin \theta_1 \approx \theta_1, \sin \theta_2 \approx \theta_2$,

体系动能:

$$T = \frac{1}{2}(2m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x} + l\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} + l\dot{\theta}_1) + l\dot{\theta}_2]^2$$

以 Ox 为势能零点, 体系势能

$$V = -2mgl \cos \theta_1 - mgl \cos \theta_2$$

拉氏函数

$$L = T - V = m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x} + l\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} + l\dot{\theta}_1) + l\dot{\theta}_2]^2 + 2mgl \cos \theta_1 + mgl \cos \theta_2$$

(4)

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + m(\dot{x} + l\dot{\theta}_1) + m[(\dot{x} + l\dot{\theta}_1) + l\dot{\theta}_2]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 4m\ddot{x} + 2ml\ddot{\theta}_1 + ml\ddot{\theta}_2 = 0$$

即

$$4\ddot{x} + 2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 = 0 \quad (1)$$

同理

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -2mgl \sin \theta_1 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= ml(\dot{x} + l\dot{\theta}_1) + ml[(x + l\dot{\theta}_1) + l\dot{\theta}_2] \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= 0 \\
ml(\ddot{x} + l\ddot{\theta}_1) + ml[(\ddot{x} + l\ddot{\theta}_1) + l\ddot{\theta}_2] + 2mgl \sin \theta_1 &= 0 \\
2\ddot{x} + 2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + 2g\theta_1 &= 0 \quad (2)
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= -mgl \sin \theta_2 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= ml[(\dot{x} + l\dot{\theta}_1) + l\dot{\theta}_2] \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= 0 \\
\ddot{x} + l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 &= 0 \quad (3)
\end{aligned}$$

设

$$\begin{aligned}
x &= Ae^{\lambda t}, \theta_1 = A_1 e^{\lambda t}, \theta_2 = A_2 e^{\lambda t} \\
\ddot{x} &= A\lambda^2 e^{\lambda t}, \ddot{\theta}_1 = A_1 \lambda^2 e^{\lambda t}, \ddot{\theta}_2 = A_2 \lambda^2 e^{\lambda t}
\end{aligned}$$

代入①②③式得

$$\left. \begin{aligned}
4A\lambda^2 + 2A_1 l\lambda^2 + A_2 l\lambda^2 &= 0 \\
2A\lambda^2 + 2A_1(l\lambda^2 + g) + A_2 l\lambda^2 &= 0 \\
A\lambda^2 + A_1 l\lambda^2 + A_2(l\lambda^2 + g) &= 0
\end{aligned} \right\}$$

欲使 A, A_1, A_2 有非零解，必须

$$\begin{vmatrix} 4\lambda^2 & 2l\lambda^2 & l\lambda^2 \\ 2\lambda^2 & 2(l\lambda^2 + g) & l\lambda^2 \\ \lambda^2 & l\lambda^2 & l\lambda^2 + g \end{vmatrix} = 0$$

解之

$$4\lambda^2(l\lambda^2 + g)(l\lambda^2 + 4g) = 0$$

又

$$\lambda \neq 0$$

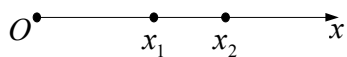
故可得

$$\lambda_1 = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}; \lambda_2 = \pm i\sqrt{\frac{4g}{l}}$$

周期

$$\tau_1 = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}; \tau_2 = \pi\sqrt{\frac{g}{l}}$$

5.19 解 如题 5.19.1 图



题5.19.1图

(1) 体系自由度 $s = 2$

(2) 取广义坐标

$$q_1 = x_1, q_2 = x_2$$

广义速度

$$\dot{q}_1 = \dot{x}_1, \dot{q}_2 = \dot{x}_2$$

(3) 体系动能

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

体系势能

$$V = \frac{1}{2}k[(x_2 - x_1) - a]^2$$

体系的拉氏函数

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - a)^2$$

(4) 体系中只有弹力做功, 体系为保守系, 可用

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= k(x_2 - x_1 - a), & \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= m_1\dot{x}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= -k(x_2 - x_1 - a), & \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= m_2\dot{x}_2 \end{aligned}$$

将以上各式代入①式得:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 + ka &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 - ka &= 0 \end{aligned} \right\} \textcircled{2}$$

先求齐次方程

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \textcircled{3}$$

设

$$\begin{aligned} x_1 &= Ae^{\lambda t}, x_2 = Be^{\lambda t} \\ \ddot{x}_1 &= A\lambda^2 e^{\lambda t}, \ddot{x}_2 = B\lambda^2 e^{\lambda t} \end{aligned}$$

代入③式得

$$\begin{aligned} A(m_1 \lambda^2 + k) - Bk &= 0 \\ -kA + B(\lambda^2 m_2 + k) &= 0 \end{aligned}$$

要使 A, B 有非零, 必须

$$\begin{vmatrix} m_1 \lambda^2 + k & -k \\ -k & m_2 \lambda^2 + k \end{vmatrix} = 0$$

即

$$m_1 m_2 \lambda^4 + m_1 \lambda^2 k + m_2 \lambda^2 k = 0$$

又 $\lambda \neq 0$

故

$$\lambda^2 = -\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} k$$

$$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} k}$$

通解为:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A + Bt + C_1 \sin(vt + \varepsilon) \\ x_2 &= A + Bt + C_2 \sin(vt + \varepsilon) \end{aligned} \right\}$$

其中

$$v = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} k}$$

又存在特解

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = a \end{array} \right\}$$

有②③式可得

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_1 \ddot{x}_2 = 0$$

$$B = -\frac{m_1}{m_2} A$$

$$C_2 = -\frac{m_1}{m_2} C_1$$

$$x_1 = A + Bt + C \sin(\nu t + \varepsilon)$$

$$x_2 = A + Bt - \frac{m_1}{m_2} C \sin(\nu t + \varepsilon)$$

式中 A, B, C 及 ε 为积分常数

$$\nu = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} \cdot k$$

k 为倔强系数。

5.20 解：以速度我广义速度 $\dot{q} = \mathbf{v}$ ，根据定义 $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \quad (1)$$

根据公式 (5.5.10)

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\alpha=1}^s \mathbf{p}_\alpha \cdot \dot{q}_\alpha - L \\ &= (m\mathbf{v} + q\mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} - (T - q\varphi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi \end{aligned}$$

又有①

得

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{p}-q\mathbf{A}}{m} \\ H &= \frac{1}{2}m \frac{(\mathbf{p}-q\mathbf{A})^2}{m^2} + q\varphi \\ &= \frac{1}{2m}(\mathbf{p}-q\mathbf{A})^2 + q\varphi\end{aligned}$$

5.21 解 取在转动坐标系的速度为广义速度 $\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{q}}$ ，则在固定坐标系中的速度：

$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ ，自由质点的动能 $T = \frac{1}{2}mv^2$ ，设质点势能为 V ，则质点的拉氏函数

$$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - V$$

根据定义：

$$\mathbf{p} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2}mv^2 \right)}{\partial \mathbf{v}'} = \frac{1}{2}m \frac{\partial (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2}{\partial \mathbf{v}'} = m\mathbf{v}$$

在转动坐标系中：

$$\begin{aligned}H &= \sum_{i=1}^s p_{\alpha} \cdot \dot{q}_{\alpha} - L = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' - \frac{1}{2}mv^2 + V = m\mathbf{v}(\mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \frac{1}{2}mv^2 + V \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - m\mathbf{v}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + V = \frac{1}{2m}p^2 - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{p} + V = \frac{1}{2m}p^2 - \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + V\end{aligned}$$

上式中 \mathbf{r} 为质点的位矢， $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ 为质点相对于固定坐标系的速度。

5.22 解：取在广义坐标 $q_1 = \theta, q_2 = \psi, q_3 = \varphi$ 。根据教材 (3.9.21) 和 (3.9.19) 式得动能：

$$T = \frac{1}{2} [I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2]$$

势能： $mgl \cos \theta$, l 为原点距离

$$\begin{aligned}H &= T + V \\ &= \frac{1}{2} [I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2] + mgl \cos \theta\end{aligned}$$

根据定义式

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}, \text{有 } p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \dot{\theta}$$

$$p_\varphi = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 \cos \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})$$

$$p_\psi = I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{I_1} p_\theta^2 + \frac{1}{I_1 \sin^2 \theta} (p_\varphi - p_\psi)^2 + \frac{1}{I_3} p_\psi^2 \right] + mgl \cos \theta \\ \text{故} \quad &= \frac{1}{2I_1} p_\theta^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + mgl \cos \theta \end{aligned}$$

因为

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + [H, H] = \dot{\theta} = 0$$

所以 $H = C_1$ 为第一积分. 又

$$\frac{\partial p_\psi}{\partial p_\theta} = 0, \frac{\partial p_\psi}{\partial p_\psi} = 1, \frac{\partial p_\psi}{\partial p_\varphi} = 0, \frac{\partial p_\psi}{\partial \theta} = -I_3 \dot{\varphi} \sin \theta, \frac{\partial p_\psi}{\partial \psi} = 0,$$

$$\frac{\partial p_\psi}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial H}{\partial \psi} = 0, \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{I} = \dot{\theta} = 0$$

故

$$[p_\psi, H] = 0$$

$$\dot{p}_\psi = 0$$

得 $p_\psi = C_2$ 为第二个第一积分.

同理

$$\frac{\partial p_\varphi}{\partial p_\theta} = 0, \frac{\partial p_\varphi}{\partial p_\psi} = 0, \frac{\partial p_\varphi}{\partial p_\varphi} = 1, \frac{\partial p_\varphi}{\partial \theta} \neq 0, \frac{\partial p_\varphi}{\partial \psi} = 0,$$

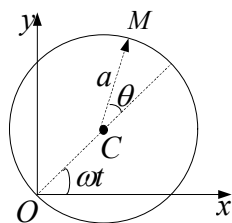
$$\frac{\partial p_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = 0, \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dot{\theta} = 0; [p_\varphi, H] = 0$$

即

$$\dot{p}_\varphi = 0$$

得 $p_\varphi = C_3$ 为第三个第一积分.

5.23 解如题 5.23.1 图,



题5.23.1图

由 5.6 题解得小球的动能

$$T = \frac{1}{2}m \left(4a^2\omega^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 4a^2\omega\dot{\theta} \cos^2 \frac{\theta}{2} + a^2\dot{\theta}^2 \right) \quad (1)$$

根据定义

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta} + 2ma^2\omega \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (2)$$

得

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ma^2} - 2\omega \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (3)$$

根据哈密顿函数的定义

$$\begin{aligned} H &= p_\theta \dot{\theta} - L = p_\theta \dot{\theta} - T + V \\ &= p_\theta \dot{\theta} - \frac{1}{2m} \left(4a^2\omega^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 4a^2\omega\dot{\theta} \cos^2 \frac{\theta}{2} + a^2\dot{\theta}^2 \right) + V \end{aligned}$$

代入③式后可求得:

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ma^2} - 2\omega p_\theta \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2 \theta \quad (4)$$

由正则方程得:

$$\dot{p}_\theta = \frac{-\partial H}{\partial \theta} = -\omega p_\theta \sin \theta + ma^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta \quad (5)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ma^2} - 2\omega \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (6)$$

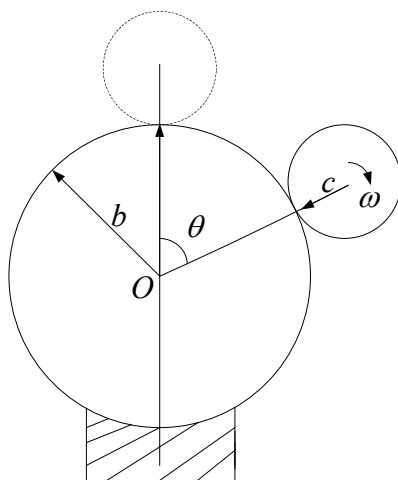
代入⑤得

$$\ddot{\theta} = \frac{-\omega p_\theta \sin \theta + ma^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta}{ma} + \omega \dot{\theta} \sin \theta = -\omega^2 \sin \theta$$

整理得

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

5.24 如题 5.24.1 图,



题5.24.1图

(1)小球的位置可由 θ 确定, 故自由度 $s=1$

(2)选广义坐标 $q = \theta$, 广义速度 $\dot{q} = \dot{\theta}$.

(3)小球动能

$$T = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

又由

$$v = (c+b)\dot{\theta}, \omega = \frac{v_1}{c} = \frac{c+b}{c}\dot{\theta}, \text{代入 ①式得}$$

$$T = \frac{1}{2}mv_1^2(a+b)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mc^2\left(\frac{c+b}{c}\dot{\theta}\right)^2 = \frac{7}{10}m\dot{\theta}^2(c+b)^2$$

设小球势能为 V , 取固定圆球中心 O 为零势点, 则

$$V = mg(c+b)\cos\theta$$

小球拉氏函数

$$L = T - V = \frac{7}{10}m\dot{\theta}^2(c+b)^2 - V = \frac{7}{10}m\dot{\theta}^2(c+b)^2 - mg(c+b)\cos\theta \quad \text{①}$$

根据定义

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{7}{5}m\dot{\theta}(c+b)^2$$

$$\dot{\theta} = \frac{5}{7} \frac{p_\theta}{m(c+b)^2}$$

有

$$H = p_\theta \dot{\theta} - L$$

$$\begin{aligned} &= p_\theta \left[\frac{5}{7} \frac{p_\theta}{m(c+b)^2} \right] - \frac{7}{10} m \left[\frac{5p_\theta}{7m(c+b)^2} \right]^2 \cdot (c+b)^2 + mg(c+b)\cos\theta \\ &= \frac{5p_\theta^2}{14m(c+b)^2} + mg(c+b)\cos\theta \end{aligned}$$

(4) 根据正则方程

$$\dot{p}_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta} = mg(c+b)\sin\theta \quad (4)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{5p_\theta}{7m(c+b)^2} \quad (5)$$

对式两边求时间导得:

$$\ddot{\theta} = \frac{5\dot{p}_\theta}{7m(c+b)^2} = \frac{5mg(c+b)\sin\theta}{7m(c+b)^2} = \frac{5g\sin\theta}{7(c+b)}$$

故小球球心切向加速度

$$a = (c+b)\ddot{\theta} = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

5.25 解根据第二章 § 2.3 的公式有:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \sum_{i=1}^n m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = \sum_{i=1}^n (y_i p_{iz} - z_i p_{iy}) \\ J_y &= \sum_{i=1}^n m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) = \sum_{i=1}^n (z_i p_{ix} - x_i p_{iz}) \\ J_z &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = \sum_{i=1}^n (x_i p_{iy} - y_i p_{ix}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

根据泊松括号的定义:

$$[\varphi, \psi] = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial q_\alpha} \right) \quad (2)$$

所以

$$[J_x, J_y] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial J_x}{\partial q_\alpha} \frac{\partial J_y}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial J_y}{\partial p_\alpha} \frac{\partial J_x}{\partial q_\alpha} \right)$$

同理可知：

$$[J_y, J_y] = 0, \quad [J_z, J_z] = 0$$

由②得：

$$\begin{aligned} [J_x, J_y] &= \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial J_x}{\partial q_\varepsilon} \frac{\partial J_y}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial J_y}{\partial p_\alpha} \frac{\partial J_x}{\partial q_\alpha} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial J_x}{\partial x_i} \frac{\partial J_y}{\partial p_{ix}} - \frac{\partial J_y}{\partial p_{ix}} \frac{\partial J_x}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\partial J_x}{\partial y_i} \frac{\partial J_y}{\partial p_{iy}} - \frac{\partial J_y}{\partial p_{iy}} \frac{\partial J_x}{\partial y_i} \right) + \left(\frac{\partial J_x}{\partial z_i} \frac{\partial J_y}{\partial p_{iz}} - \frac{\partial J_y}{\partial p_{iz}} \frac{\partial J_x}{\partial z_i} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i p_{iy} - y_i p_{ix}) = J_z \end{aligned}$$

同理可得：

$$[J_y, J_z] = J_x, \quad [J_z, J_x] = J_y$$

5.26 解 由题 5.25 可知 J_x, J_y, J_z 的表达式

因为

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\alpha} = 1, \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta} = 0; \frac{\partial p_y}{\partial x} = 0, \frac{\partial p_y}{\partial y} = 0, \frac{\partial p_y}{\partial z} = 0$$

故

$$\begin{aligned} [J_x, p_y] &= \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial J_x}{\partial q_\alpha} \frac{\partial p_y}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial p_y}{\partial p_\alpha} \frac{\partial J_x}{\partial q_\alpha} \right) \\ &= \frac{\partial J_x}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (y_i p_{iz} - z_i p_{iy})}{\partial y_i} \\ &= \sum_{i=1}^n p_{iz} = p_z \end{aligned}$$

同理可求得：

$$\begin{aligned} [J_z, p_y] &= \frac{\partial J_z}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (x_i p_{iy} - y_i p_{ix})}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^n -p_{ix} = -p_x \\ [J_y, p_y] &= \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

$$[J_y, p_z] = p_x, [J_y, p_x] = -p_z$$

$$[J_x, p_z] = -p_y, [J_x, p_x] = 0$$

$$[J_z, p_x] = p_y, [J_z, p_z] = 0$$

即

$$[J_x, p_y] = p_z, [J_y, p_z] = p_x, [J_z, p_x] = p_y$$

$$[J_x, p_z] = -p_y, [J_y, p_x] = -p_z, [J_z, p_y] = -p_x$$

$$[J_x, p_x] = 0, [J_y, p_y] = 0, [J_z, p_z] = 0$$

5.27 证取广义坐标

$$q_{1i} = x_i, q_{2i} = y_i, q_{3i} = z_i, i = 1, 2, 3 \cdots, n$$

因为

$$J_{iz} = x_i p_{iy} - y_i p_{ix}$$

$$\varphi_i = ar_i^2 + b\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{p}_i + cp_i^2$$

$$= a(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) + b(x_i p_{ix} + y_i p_{iy} + z_i p_{iz}) + c(p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2)$$

又因为

$$\frac{\partial J_{ix}}{\partial x_i} = -y_i, \frac{\partial J_{iz}}{\partial y_i} = -p_{ix}, \frac{\partial J_{iz}}{\partial z_i} = 0$$

$$\frac{\partial J_{iz}}{\partial p_{ix}} = -y_i, \frac{\partial J_{iz}}{\partial p_{iy}} = x_i, \frac{\partial J_{iz}}{\partial p_{iz}} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = 2ax_i + bp_{ix}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i} = 2ay_i + bp_{iy}$$

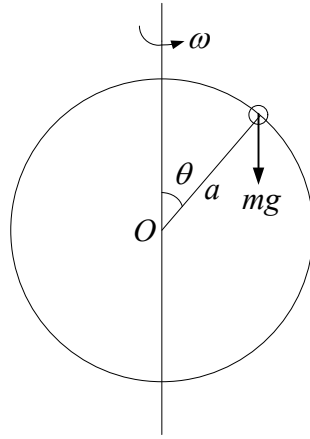
$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_{ix}} = 2cp_{ix} + bx_i, \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_{iy}} = 2cp_{iy} + by_i$$

所以

$$[\varphi, J_z] = \sum_{i=1}^n [\varphi_i, J_{iz}] = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_{i\alpha}} \frac{\partial J_{iz}}{\partial p_{i\alpha}} - \frac{\partial J_{iz}}{\partial q_{i\alpha}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_{i\alpha}} \right) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n [(2ax_i + bp_{ix})(-y_i) - p_{iy}(2cp_{ix} + bx_i) + (2ay_i + bp_{iy}) \cdot x_i - (2cp_{iy} + by_i)(-p_{ix})] = 0$$

5.28 解 如题 5.28.1 图



题5.28.1图

(1) 小环的位置可以由角 θ 唯一确定, 因此体系的自由度 $s=1$, 取广义坐标 $q=\theta$, 广义速度 $\dot{q}=\dot{\theta}$ 。小球的动能:

$$T = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\sin^2\theta\omega^2$$

以 O 为势能零点, 则小环势能

$$V = mga \cos \theta$$

所以拉氏函数

$$L = T - V = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\sin^2\theta\omega^2 - mga \cos \theta$$

(2) 由哈密顿原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

故

$$\int_{t_1}^{t_2} (ma^2\dot{\theta}\delta\dot{\theta} + ma^2\sin\theta\cos\theta\delta\theta\omega^2 + mga\sin\theta\delta\theta) dt = 0$$

$$\dot{\theta}\delta\dot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d}{dt}\delta\theta = \frac{d}{dt}\dot{\theta}\delta\theta - \ddot{\theta}\delta\theta$$

所以

$$\int_{t_1}^{t_2} ma^2 \frac{d}{dt}(\dot{\theta}\delta\theta) dt + \int_{t_1}^{t_2} (ma^2\sin\theta\cos\theta\omega^2 + mga\sin\theta - ma\ddot{\theta})\delta\theta dt = 0$$

$$ma\dot{\theta}\delta\theta \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} (ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta + mga\sin\theta - ma\ddot{\theta})\delta\theta dt = 0$$

又由于

$$\delta\theta\Big|_{t_1} = 0, \delta\theta\Big|_{t_2} = 0,$$

所以

$$\int_{t_1}^{t_2} (ma^2\omega^2 \sin\theta \cos\theta + mga \sin\theta - ma^2\ddot{\theta})\delta\theta dt = 0$$

因为 $\delta\theta$ 是任意的，所以有被积式为 0，即

$$ma^2\omega^2 \sin\theta \cos\theta + mga \sin\theta - ma^2\ddot{\theta} = 0$$

化简得

$$ma\ddot{\theta} = ma\omega^2 \sin\theta \cos\theta + mg \sin\theta$$

5.29 解 参考 5.23 题，设 $V=0$ ，体系的拉氏函数

$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + 2ma^2\omega\dot{\theta}\cos^2\frac{\theta}{2} + 2ma^2\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2} \quad ①$$

根据哈密顿原理

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$$

故

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ma^2\dot{\theta}\delta\dot{\theta} + 2ma^2\omega\delta\left(\dot{\theta}\cos^2\frac{\theta}{2}\right) - ma^2\omega^2\sin\theta\delta\theta \right] dt \quad ②$$

因为

$$\begin{aligned} \dot{\theta}\delta\dot{\theta} &= \dot{\theta} \frac{d}{dt} \delta\theta = \frac{d}{dt} (\dot{\theta}\delta\theta) - \ddot{\theta}\delta\theta \\ &= \frac{d}{dt} \theta \cdot \frac{1+\cos\theta}{2} = \frac{1}{2} \frac{d\sin\theta}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

所以

$$ma^2\dot{\theta}\delta\theta\Big|_{t_1}^{t_2} + ma^2\omega\delta(\sin\theta + \theta)\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} ma^2(\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta)\delta\theta dt = 0$$

又因为

$$\delta\theta\Big|_{t_1} = 0, \delta\theta\Big|_{t_2} = 0,$$

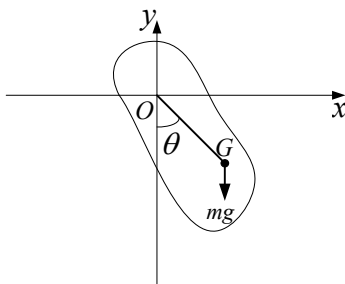
$$\delta(\sin\theta + \theta)\Big|_{t_1}^{t_2} = (\cos\theta\delta\theta + \delta\theta)\Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} ma^2 (\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta) \delta \theta dt = 0 \quad (3)$$

因为 $\delta \theta$ 是任意的，所以有

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

5.30 解 如题 5.30.1 图，



题5.30.1图

复摆位置可由角度 θ 唯一确定，自由度 $s=1$ ，取广义坐标 $q=\theta$ ，设 l 为复摆重心 G 与悬点 O 之间的距离。复摆的动能：

$$T = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2$$

取 x 为势能零点，则势能：

$$V = -mgl \cos \theta$$

复摆的拉氏量：

$$L = T - V = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \quad (1)$$

由哈密顿原：

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$$

故

$$\int_{t_1}^{t_2} (I_0 \dot{\theta} \delta \dot{\theta} - mgl \sin \theta \delta \theta) dt = 0$$

又因为

$$\dot{\theta} \delta \dot{\theta} = \dot{\theta} \frac{d}{dt} \delta \theta = \frac{d}{dt} (\dot{\theta} \delta \theta) - \ddot{\theta} \delta \theta$$

$$I_0 \dot{\theta} \delta \theta \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} (I_0 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta) \delta \theta dt = 0$$

$$\delta\theta|_{t_1} = \delta\theta|_{t_2} = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (I_0 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta) \delta\theta dt = 0 \quad (2)$$

因为 $\delta\theta$ 的任意性所以有：

$$I_0 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$$

根据已知 θ 很小，

$$\sin \theta \approx \theta$$

$$I_0 \ddot{\theta} + mgl \theta = 0 \quad (3)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I_0} \theta = 0$$

可求得：

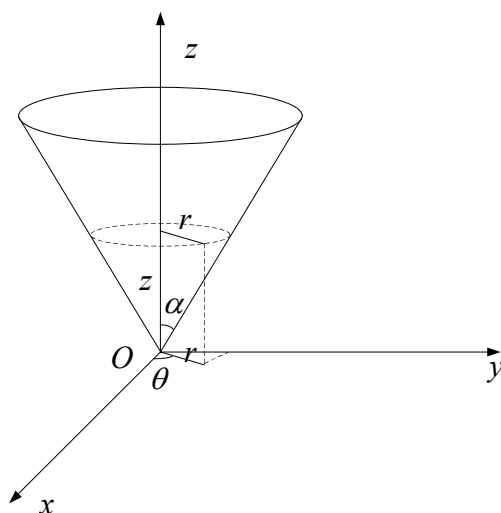
$$\theta = A \sin \left(\sqrt{\frac{mgl}{I_0}} t + \varphi \right)$$

其中 φ 为初相位。

周期

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mgl}}$$

5.31 解如题 5.31.1 图，



题5.31.1图

参考题 5.9，体系拉氏函数

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \cot^2 \alpha) - mgr \cot \alpha \quad (1)$$

根据哈密顿原理： $\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$

故

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[(m\dot{r}\ddot{r} + mr\ddot{\theta}^2\dot{r} + mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + m\dot{r}\cot^2\alpha\ddot{r}) - mg\cot\alpha\dot{r} \right] dt = 0 \quad (2)$$

因为

$$\begin{aligned} \dot{r}\delta\dot{r} &= \dot{r}\delta\frac{dr}{dt} = \dot{r}\frac{d}{dt}(\delta r) = \frac{d}{dt}(\dot{r}\delta r) = \dot{r}\delta r \\ r^2\dot{\theta}\delta\dot{\theta} &= r^2\dot{\theta}\frac{d}{dt}\delta\theta = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}\delta\theta) - r^2\ddot{\theta}\delta\theta - 2r\dot{r}\dot{\theta}\delta\theta \end{aligned}$$

代入②式得:

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} m\frac{d}{dt}(\dot{r}\delta r)dt + \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}\delta\theta)dt + \int_{t_1}^{t_2} m\cot^2\alpha\frac{d}{dt}(\dot{r}\delta r)dt - \\ &\int_{t_1}^{t_2} [m(1+\cot^2\alpha)\dot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cot^2\alpha]\delta rdt \\ &- \int_{t_1}^{t_2} m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta})\delta\theta dt = 0 \\ &m\dot{r}\delta r\Big|_{t_1}^{t_2} + mr^2\dot{\theta}\delta\theta\Big|_{t_1}^{t_2} + m\cot^2\alpha\dot{r}\delta r\Big|_{t_1}^{t_2} - \\ \text{所以} &\int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{\sin^2\alpha}(\dot{r} - r\dot{\theta}^2 \bullet \sin^2\alpha + g\sin\alpha \bullet \cos\alpha)\delta rdt - \quad (3) \\ &\int_{t_1}^{t_2} m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\delta\theta dt = 0 \end{aligned}$$

又因为

$$\delta r\Big|_{t_1} = \delta r\Big|_{t_2} = 0, \delta\theta\Big|_{t_1} = \delta\theta\Big|_{t_2} = 0,$$

且 δr 和 $\delta\theta$ 的任意性

所以

$$\begin{aligned} \dot{r} - r\dot{\theta}^2 \sin^2\alpha + g\sin\alpha \cos\alpha &= 0 \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) &= 0 \end{aligned}$$

所以运动微分方程为: $r^2\dot{\theta} = \text{常数}$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \sin^2\alpha + g\sin\alpha \cos\alpha = 0$$

5.32 证

$$\begin{aligned} Pdq - PdQ &= Pdq - q\cot p d\left[\ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right)\right] \\ &= Pdq - q\cot p \bullet \frac{q}{\sin p} d\left(\frac{1}{q}\sin p\right) \\ &= Pdq - \frac{q^2 \cos p}{\sin^2 p} \bullet \frac{q \cos p dp - \sin p dq}{q^2} \\ &= Pdq - q\cot^2 p dq + \cot p dq \\ &= Pdq - q\cot^2 p dp + dq \cot p + q \sec^2 p dP \\ &= Pdq + qdP + dq \cot p \\ &= d(Pq) + dq \cot p \\ &= d[q(P + \cot p)] = dU \end{aligned}$$

因为母函数不是 t 的显函数, 为正则变换。

5.33 证由

$$\begin{aligned}
 & Pdq - PdQ \\
 &= (2Q)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} \sin P d(2Q)^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} \cos P - PdQ \\
 &= \sin P \cos PdQ - 2Q \sin^2 PdP - PdQ \\
 &= \frac{1}{2} \sin 2PdQ + Q \cos 2PdP - QdP - PdQ \\
 &= \frac{1}{2} d(Q \sin 2P) - d(PQ) \\
 &= d[Q(\sin P \cos P - P)] = dU
 \end{aligned}$$

$U = Q(\sin P \cos P - P)$ 为母函数, 故为正则变换。又

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + k^2 q^2) = \frac{1}{2}[2Qk \sin^2 P + 2Qk \cos^2 P] = kQ$$

且

$$\frac{\partial U}{\partial t} = H - H^* = 0$$

当

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

变为 $\dot{Q} = \frac{\partial H^*}{\partial p}, P = -\frac{\partial H^*}{\partial Q}$ 时

$$H^* = kQ$$

5.34

证: 由

$$\begin{aligned}
 & Pdq - PdQ \\
 &= \varphi_2 d\varphi_1 - PdQ \\
 &= \varphi_2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial P} dP + \frac{\partial \varphi_1}{\partial Q} dQ \right) - PdQ \quad ① \\
 &\left(\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial Q} - P \right) dQ + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial p} dq
 \end{aligned}$$

又

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)} = 1$$

故

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial q}{\partial Q} \cdot \frac{\partial q}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \cdot \frac{\partial p}{\partial Q} = 1 \\
 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial Q} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial P} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial P} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial Q} = 1 \quad ②
 \end{aligned}$$

由于

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial Q} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial P} = \frac{\partial \left(\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial Q} \right)}{\partial P} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial P \partial Q}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial P} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial Q} = \frac{\partial \left(\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial P} \right)}{\partial Q} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial P \partial Q}$$

代入②式得

$$\frac{\partial \left(\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial Q} \right)}{\partial P} - \frac{\partial \left(\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial P} \right)}{\partial Q} = 1$$

得

$$\frac{\partial \left(\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial Q} - P \right)}{\partial P} = \frac{\partial \left(\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial P} \right)}{\partial Q}$$

所以存在母函数 $U(P, Q)$ 使:

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial P}$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial Q} - P$$

因此, 这种变换是正则变换.

5.35

解: 由于

$$U = mg \left(\frac{1}{6} g Q^3 + q Q \right)$$

故

$$p = \frac{\partial U}{\partial q} = mg Q \quad ①$$

$$p = \frac{-\partial U}{\partial Q} = -\frac{1}{2} mg^2 Q^2 - mgq \quad ②$$

由②得

$$q = -\frac{p}{mg} - \frac{1}{2} g Q^2$$

又

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

有

$$H = H^*$$

又

$$p = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + mgq = \frac{p^2}{2m} + mgq \\ &= \frac{1}{2m}(mgQ)^2 - p - \frac{1}{2}mg^2Q^2 = -p = H^* \end{aligned} \quad (3)$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial H^*}{\partial p} = -1$$

$$Q = -t + C_1 \quad (4)$$

又

$$\dot{p} = \frac{-\partial H^*}{\partial Q} = 0$$

故

$$p = C_2 \quad (5)$$

当 $t = 0$ 时,

$$q = 0, \dot{q} = v_0$$

由③式得:

$$p = -\frac{1}{2}mv_0^2,$$

即

$$C_2 = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$q = \frac{1}{2g}v_0^2 - \frac{1}{2}g(-t + C_1)^2$$

当 $t = 0$ 时, $q = 0$

$$C_1 = \frac{v_0}{g}$$

$$q = \frac{1}{2g}v_0^2 - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}gt \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2g}v_0^2 = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$