华东理工大学 2015 – 2016 学年第二学期

《数学分析(中)》课程期末考试试卷 A 2016. 7. 6

开课学院：理学院，专业：____________________，考试形式：闭卷，所需时间 120 分钟

考生姓名：__________ 学号：__________ 班级：_________ 任课教师：姚媛媛

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总 分
得分										
评卷人										

(本试卷共九个大题)

一、计算下列积分（共16分, 每小题8分）

1. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\, \mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x$

二、判别以下级数的敛散性（共16分, 每小题8分）

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{4^n}$

三、求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$ 的收敛域，并计算其和函数. (10分)

四、将$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ 在$x_0=0$ 处展开成幂级数，并说明理由. (10分)

五、求集合$S=\{(x,y)|(x^2+y^2)(y^2-x^2+1)\le 0\}$ 的全部聚点并说明理由. (10分)

六、证明函数序列 $S_n(x) = (1 - x)x^n$ 在$[0, 1]$ 上一致收敛.（10分）

七、证明二元函数$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ 在$(0, 0)$ 点连续，但是在$(0, 0)$ 点不可微.（10分）

八、讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}(0 < x < \pi)$ 的敛散性(包括绝对收敛、条件收敛及发散性). (12分)

九、设$\{x_n\}$ 是$(0,1)$ 内的一个序列: $0 < x_n < 1$，且$x_i \neq x_j (i \neq j)$。试讨论函数$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$ 在$(0,1)$ 的连续性，其中$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$. (6分)

华东理工大学 2015 – 2016 学年第二学期

《数学分析(中)》课程期末考试试卷 B 2016. 7. 6

开课学院：理学院，专业：____________________，考试形式：闭卷，所需时间 120 分钟

考生姓名：__________ 学号：__________ 班级：_________ 任课教师：姚媛媛

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总 分
得分										
评卷人										

(本试卷共九个大题)

一、计算下列积分（共16分, 每小题8分）

1. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, \mathrm{d}x$

2. $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot x^n\, \mathrm{d}x$ (n 是非负整数)

二、判别以下级数的敛散性（共16分, 每小题8分）

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^3 + 3n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

三、求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$的收敛域，并计算其和函数. (10分)

四、将$f(x)=e^x$在$x_0=1$处展开成幂级数，并确定其收敛范围. (10分)

五、设$E,F\subseteq\mathbb{R}^n$为紧集，证明$E\cup F$是紧集.（10分）

六、证明函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(x+\frac{1}{n}\right)^{n}$ 在$(-1,1)$ 上非一致收敛.（10分）

七、设级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^{\alpha_0}}$ 收敛，证明：当$\alpha > \alpha_0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^{\alpha}}$ 也收敛.（10 分）

八、设$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$，证明：$f(x,y)$ 在$(0,0)$ 点可微，但$f_x(x,y)$ 与$f_y(x,y)$ 在$(0,0)$ 点均不连续.（12分）

九、举出一个发散的交错级数，使其通项趋向零.（6分）

华东理工大学 2010 - 2011 学年第二学期

《数学分析(中)》课程期末考试标准答案 A 2011. 7. 6

一、计算下列积分（共16分, 每小题8分）

1. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$　　　　2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

1. 解: 被积函数是奇函数(3分), 积分区间关于原点对称(3分)，故该积分值为0. (2分)

2. 解: 令$x = \sin t$ (2分)，则原式$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t$ (2分) $=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t$

$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t$ (2分) $=\dfrac{\pi}{4}$ (2分)

二、判别以下级数的敛散性（共16分, 每小题8分）

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n}}$　　　　2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{4^n}$

1. 解：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$ (6分), 故原级数收敛。(2分)

2. 解：$\displaystyle\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(2+(-1)^n)^n}{4^n}\right|} = \frac{3}{4} < 1$ (6分)，故由根式判别法原级数收敛。(2分)

三、求幂级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}x^n$ 的收敛域，并计算其和函数. (10分)

解: 由Dirichlet 判别法, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{n+2} = +\infty$. 故该级数的收敛域为$(-\infty, +\infty)$. (4分)

由于幂级数在其收敛域内任何一个有限闭区间内都逐项可积，

故$\displaystyle\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}t^n\,\mathrm{d}t$ (3分) $=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{n+1}{n!}t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x(e^x-1)$. (3分)

四、将$f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ 在$x_0 = 0$ 处展开成幂级数，并说明理由. (10分)

解: $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, 该幂级数的收敛域为$(-1, 1)$. (4分)

由于幂级数在其收敛域内逐项可导(2分)，故对某个δ 满足$0 < \delta < 1$，在$(-\delta, \delta)$ 上有$\displaystyle\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$. (2分)

五、求集合$S = \{(x,y)|(x^2+y^2)(y^2-x^2+1) \leq 0\}$ 的全部聚点并说明理由. (10分)

解: $S = \{(0,0)\} \cup \{(x,y)|x^2-y^2 \geq 1\}$ (4分)

$\forall (x,y) \in \{(x,y)|x^2-y^2 \geq 1\}$, 设$x > 0$，则$(x+\frac{1}{n}, y) \to (x,y)$ 且$(x+\frac{1}{n}, y) \in S$, 故$S' = \{(x,y)|x^2-y^2 \geq 1\}$. (6分)

六、利用上确界判别法证明函数序列 $S_n(x) = (1-x)x^n$ 在$[0,1]$ 上一致收敛.（10分）

解: $\forall x \in [0,1], S_n(x) \to 0$, 故$|S_n(x) - 0| = (1-x)x^n$. (2分)

由于$((1-x)x^n)' = x^{n-1}[n-(n+1)x]$, 故$x < n/(n+1)$ 时, $(1-x)x^n \uparrow$; $x \geq n/(n+1)$ 时, $(1-x)x^n \downarrow$。(4分)

从而 $\sup\limits_{x\to[0,1]} |S_n(x) - 0| = \left(1 + \dfrac{n}{n+1}\right) = \dfrac{1}{(n+1)(1+\frac{1}{n})^n} \to 0$，故$\{S_n(x)\}$ 在$[0,1]$ 上一致收敛于0. (4分)

七、证明二元函数$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ 在$(0,0)$ 点连续，但是在$(0,0)$ 点不可微.（10分）

解: 由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|xy|} = 0 = f(0,0)$, 故$f$ 在$(0,0)$ 点连续. (2分)

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} = \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0, \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0.$ (2分)

由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\Delta f - f_x(0,0)x - f_y(0,y)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (4分)

在上式中令$x = y$，则$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{2}x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$，故原二元函数不可微. (2分)

八、讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^p}(0 < x < \pi)$ 的敛散性（包括绝对收敛、条件收敛及发散性）.(12分)

解: 当$p > 1$ 时，由$\left|\dfrac{\cos nx}{n^p}\right| \leq \dfrac{1}{n^p}$，由$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 收敛知，原幂级数绝对收敛(3分)；

当$0 < p \leq 1$ 时，由$\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leq \dfrac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$ 知$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos kx$ 的部分和有界，又$\frac{1}{n^p}$ 单调递减趋于0，故由Dirichlet 判别法，知原幂级数收敛(3分)；

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{\cos nx}{n^p}\right| \geq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2 nx}{n^p} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+\cos 2nx}{2n^p}$。同上可由Dirichlet 判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2nx}{2n^p}$ 收敛；又$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^p}$ 发散知原幂级数条件收敛（3分）；

当$p \leq 0$ 时，由$\dfrac{\cos nx}{n^p} \not\to 0$ 知原幂级数发散。（3分）

九、设$\{x_n\}$ 是$(0,1)$ 内的一个序列: $0 < x_n < 1$，且$x_i \neq x_j (i \neq j)$。试讨论函数$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n}$ 在$(0,1)$ 的连续性，其中$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$. (6分)

解: 1° 因$\left|\dfrac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}\right| \leq \dfrac{1}{2^n}, \forall x \in (0,1)$，且$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$ 在$(0,1)$ 上一致收敛。(2分)

2° 设$x_0 \neq x_n (n = 1, 2, \cdots)$ 为$(0,1)$ 内任意一点，则通项$u_n(x) = \dfrac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$ 在$x = x_0$

处连续，由1° 和和函数连续性定理，知$f(x)$ 在$x = x_0$ 处连续。(2分)

3° 设x_k 是$\{x_n\}$ 中任意一点，因

$$f(x) = \sum_{n\neq k} \frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n} + \frac{\operatorname{sgn}(x - x_k)}{2^k},$$

右边第一项在$x = x_k$ 处连续，第二项在$x = x_k$ 处间断，因此$f(x)$ 在$x = x_k$ 处间断。(2分)

华东理工大学 2010 - 2011 学年第二学期

《数学分析(中)》课程期末考试标准答案 B 2011. 8

一、计算下列积分（共16分, 每小题8分）

1. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$　　　　2. $I_n=\int_0^{+\infty} e^{-x}\cdot x^n\,\mathrm{d}x$ (n 是非负整数)

1. 解: 根据定积分的几何意义知原积分为单位圆周在第一象限的面积$\frac{\pi a^2}{4}$.

2. 解: $I_0=-e^{-x}|_0^{+\infty}=1$ (2分)

$I_n=-\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{d}(e^{-x})=-\left[x^n e^{-x}|_0^{+\infty}-n\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}\,\mathrm{d}x\right]=nI_{n-1}$ (6分)，故$I_n=n!$ (2分)

二、判别以下级数的敛散性（共16分, 每小题8分）

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^3+3n}$　　　　2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

1. 解: 由于$\frac{2n^2}{n^3+3n}\sim\frac{2}{n}$ (6分)，故原级数收敛。(2分)

2. 解: 由于$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}<1$，(6分) 由d'Alembert 判别法知原级数收敛. (2分)

三、求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$ 的收敛域，并计算其和函数. (10分)

解: 由$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot(2n+3)=1$，且$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm1)^{2n}}{(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}$ 发散，故幂级数的收敛域为$(-1,1)$. (2分)

由于幂级数在其收敛域内逐项可导，故$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$ (4分)

故$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ (2分), 从而原幂级数为$\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}$. (2分)

四、将$f(x)=e^x$ 在$x_0=1$ 处展开成幂级数，并确定其收敛范围. (10分)

解: $e^x=e^{1+(x-1)}$(2分)$=e\cdot e^{x-1}=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}$ (6分)，收敛范围为$(-\infty,+\infty)$. (2分)

五、设$E,F\subseteq\mathbb{R}^n$ 为紧集，证明$E\cup F$ 是紧集.（10分）

解: 由E,F 为紧集，故E,F 为有界闭集(4分)，故$E\cup F$ 也是有界闭集，故为紧集。(6分)

六、证明函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在$(-1,1)$ 上非一致收敛.（10分）

解: 取$x_n=1-\frac{1}{n}\in(-1,1)$，故 $n\left(x_n+\frac{1}{n}\right)^n=n\not\to 0$ (6分)，从而幂级数的通项非一致收敛于零，故原函数项级数非一致收敛. (4分)

七、设级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha_0}}$ 收敛，证明：当$\alpha>\alpha_0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha}}$ 也收敛.（10 分）

解: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha_0}}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-\alpha_0}}\right)$(4分), 由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha_0}}$ 收敛, $\frac{1}{n^{\alpha-\alpha_0}}$ 单调有界。(4分) 由Abel判别法，知原级数收敛. (2分)

八、设$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，证明: $f(x,y)$ 在$(0,0)$ 点可微，但$f_x(x,y)$ 与$f_y(x,y)$ 在$(0,0)$ 点均不连续.（12分）

解: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}=\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$ (2分)

由于$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\Delta f-f_x(0,0)x-f_y(0,y)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$. (4分)

$\left|\frac{xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\sqrt{\frac{xy}{2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}\to 0$, 故$f(x,y)$ 在$(0,0)$ 点可微. (2分)

当$(x,y)\neq(0,0)$, $f_x(x,y)=y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$. 取$x=y$, 则$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}\cos\frac{1}{2x^2}$ 不存在，故$f_x(x,y)$ 在$(0,0)$ 点不连续。同理，$f_y(x,y)$ 在$(0,0)$ 点不连续。(4分)

九、举出一个发散的交错级数，使其通项趋向零.（6分）

例: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}-\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n)}+\cdots$ (6分)