2.3 初值问题的D'Alembert公式及其物理意义

初值问题（Cauchy 问题）

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases} \tag{1.7}$$

作变量变换：$\xi = x - at, \eta = x + at$

方程化为 $u_{\xi\eta} = 0$

有 $u = F(\xi) + G(\eta)$，

其中 F 和 G 是任意两个可微函数。

于是：$u(x,t) = F(x - at) + G(x + at)$

代入初始条件： $F(x)+G(x)=\varphi(x)$

$$-F^{/}(x)+G^{/}(x)=\frac{1}{a}\psi(x)$$

两边从 x_0 到 x 积分，得：

$$-F(x)+G(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(\tau)d\tau-F(x_0)+G(x_0)$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x)-\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(\tau)d\tau+F(x_0)-G(x_0)\right]$$

$$G(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x)+\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(\tau)d\tau-F(x_0)+G(x_0)\right]$$

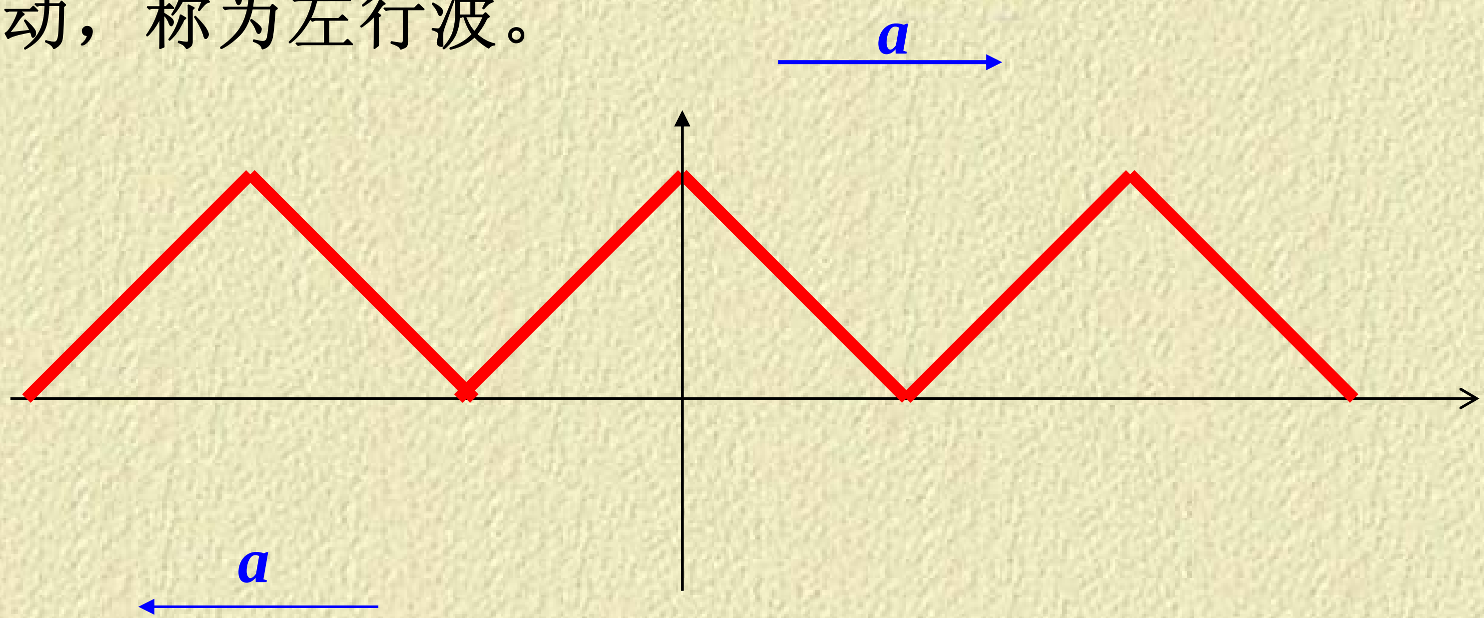
$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)d\tau$$

D'Alembert公式

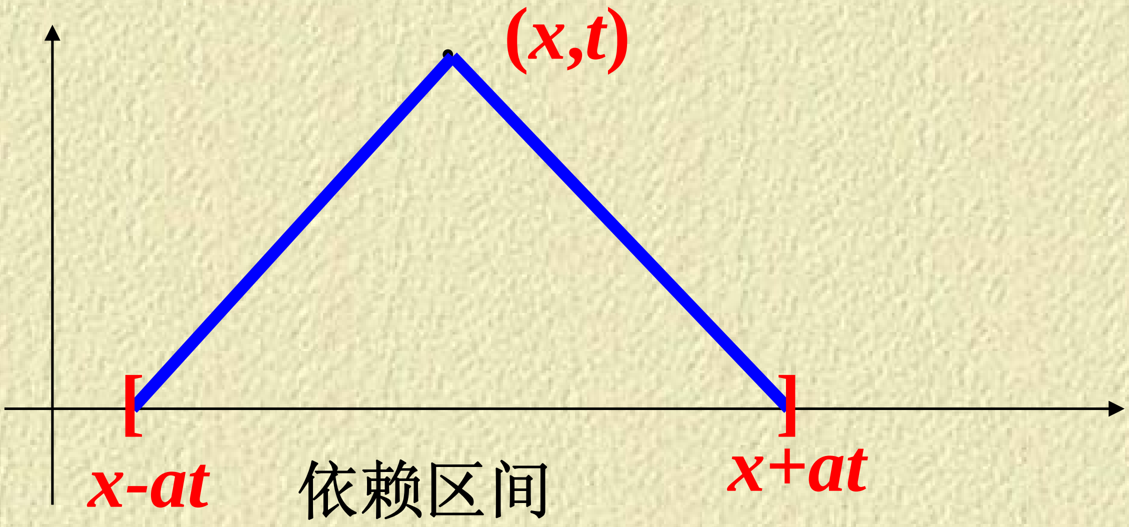
物理意义：解由两个函数$F(x-at)$和$G(x+at)$相加。

$F(x-at)$初始波形$F(x)$以速度a沿x轴正方向运动，称为行波，称为右行波。

$G(x+at)$表示初始波形$G(x)$以速度a沿X轴负方向运动，称为左行波。

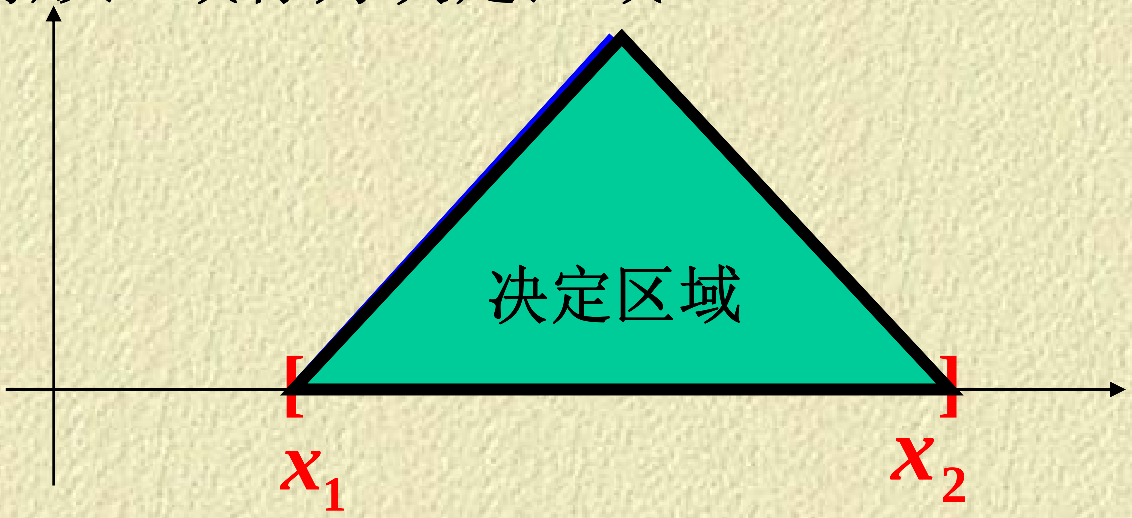


解在点 (x,t) 的数值仅依赖于 X 轴上区间 $[x-at, x+at]$ 上的初始条件，而与其他点上的初始条件无关，称 $[x-at, x+at]$ 为点 (x,t) 的依赖区间。



上页 下页 返回

对 x 轴上的一个区间 $[x_1, x_2]$，过点 x_1 作斜率为的 $\frac{1}{a}$ 直线 $x = x_1 + at$，过点 x_2 作斜率为的 $-\frac{1}{a}$ 直线 $x = x_2 - at$，它们和区间 $[x_1, x_2]$ 一起构成的一个三角形区域称为决定区域。



上页 下页 返回

过点x_1作斜率为的$-\dfrac{1}{a}$直线$x=x_1-at$，过点x_2作斜率为的$\dfrac{1}{a}$直线$x=x_2+at$，它们和区间$\left[x_1,x_2\right]$一起构成的一个区域$\left\{(x,t)\middle|x_1-at\le x\le x_2+at,t\ge 0\right\}$称为影响区域。

考虑非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}= f(x,t) & -\infty<x<+\infty, t>0 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases} \tag{1.8}$$

定理 2:（齐次化原理）若 $w(x,t,\tau)$ 是初值问题

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2w_{xx}=0 & -\infty<x<+\infty, t>\tau, \\ w(x,\tau,\tau)=0, \\ w_t(x,\tau,\tau)= f(x,\tau). \end{cases}$$

的解（其中 $\tau\geq 0$ 是参数），则 $u(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)d\tau$

是初值问题（1.8）的解。

证明：令$t' = t - \tau$，则$w(x,t,\tau) = w(x,t' + \tau,\tau)$，

于是$w(x,t' + \tau,\tau)$是初值问题

$$\begin{cases} w_{t't'} - a^2 w_{xx} = 0 & -\infty < x < +\infty, t' > 0, \\ t' = 0\text{时}, & w = 0, w_{t'} = f(x,\tau). \end{cases}$$

的解，由$D'Alember$公式，得：

$$w(x,t,\tau) = w(x,t' + \tau,\tau) = \frac{1}{2a}\int_{x-at'}^{x+at'} f(\xi,\tau)d\xi$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi$$

得：$u(x,t) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi$

对于一般的波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

分解为

$$\text{（I）} \quad \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

由前面的结论

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau) d\tau$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau) d\tau$$

上页 下页 返回

例 1：解半直线弦振动方程的定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad x>0, t>0 \\ u(0,t)=0 \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

解：作奇延拓

$$\overline{\varphi}(x)=\begin{cases} \varphi(x), & x\geq 0 \\ -\varphi(-x), & x<0 \end{cases}, \quad \overline{\psi}(x)=\begin{cases} \psi(x), & x\geq 0 \\ -\psi(-x), & x<0 \end{cases}$$

初值问题

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0, \quad -\infty<x<+\infty, t>0 \\ v(x,0)=\overline{\varphi}(x), v_t(x,0)=\overline{\psi}(x) \end{cases}$$

上页 下页 返回

由 $D'Alembert$ 公式

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)d\tau, & x\ge at\\ \dfrac{1}{2}\left[\varphi(x+at)-\varphi(x-at)\right]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)d\tau, & 0\le x<at\end{cases}$$

通过对初值的延拓将半直线上问题化为直线上的问题，称为延拓法