应用微分方程

秦衍

第一章　高阶常微分方程

一、高阶线性微分方程解的结构

二、n阶常系数线性微分方程

三、Euler方程

四、高阶微分方程的降阶

一、高阶线性微分方程解的结构

方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x) \qquad (1.1)$$

相应的齐次方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \qquad (1.2)$$

问题:研究解的结构?

定理 1（叠加原理）：设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程（1.2）的解，则 $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ 也是方程（1.2）的解，其中 c_1 和 c_2 为常数。

定理 2：设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f_i(x)$$

的解，则 $y_1(x)+y_2(x)$ 是方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f_1(x)+f_2(x$$

的解。

定义：对 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 若存在不全为零的常数 $c_1, \cdots, c_n$，使得 $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) = 0$，则称 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 线性相关，否则称为线性无关.

定理 3：设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是方程（1.2）的个线性无关的解，则 $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$ 也是方程（1.2）的解。称为通解。其中 $c_1, \cdots, c_n$ 为任意常数。

定理 4：非齐次方程（1.1）的通解等于它所对应的齐次方程（1.2）的通解加上方程（1.1）的一个特解。

二、n阶常系数线性微分方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=f(x) \qquad (2.1)$$

其中 $a_{n-1},\cdots.a_1,a_0$ 是实常数，

特别当 $f(x)\equiv 0$ 时，称为齐次的

2.1 n阶常系数线性齐次方程

$$L(y)\overset{\Delta}{=}y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0 \qquad （2.2）$$

将 $y=e^{\lambda x}$ 代入（2.2）

$$L\left[e^{\lambda x}\right]=(\lambda^{n}+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_{1}\lambda+a_{0})e^{\lambda x}$$

$$F(\lambda)=\lambda^{n}+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_{1}\lambda+a_{0}=0 \qquad (2.3)$$

特征方程

$$L(e^{\lambda x})=0 \Leftrightarrow F(\lambda)=0$$

$e^{\lambda x}$ 是微分方程（2.2）的解 $\Leftrightarrow$ λ 是（2.3）的根（特征根）

1. λ 是（2.3）的 k 重实根 $(k \geq 1)$：

则 $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \cdots, x^{k-1}e^{\lambda x}$ 都是（2.2）的解，且它们线性无关

2. λ 是（2.3）的 k 重复根 $(k \geq 1)$：

设 $\lambda = \alpha + i\beta$，则 $\alpha - i\beta$ 也是（2.3）的 k 重复根

于是

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \cdots x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \cdots x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

都是（2.2）的解，且它们也线性无关。

对于二阶常系数线性方程

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \qquad (2.4)$$

其中 a_1, a_0 是实常数

相应的齐次方程为：

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad （2.5）$$

$e^{\lambda x}$ 是方程（2.5）的解 $\Leftrightarrow \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$

1、λ_1 和 λ_2 是两个不同的实根，则 $e^{\lambda_1 x}$ 和 $e^{\lambda_2 x}$ 是方程（2.5）的两个线性无关的解，通解为

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x};$$

2、λ_1 和 λ_2 是两个相同的实根，则 $e^{\lambda_1 x}$ 和 $xe^{\lambda_1 x}$ 是方程（2.5）的解，通解为：

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x};$$

3、λ_1 和 λ_2 是一对共轭复根 $\alpha \pm i\beta$ ，得两个线性无关的复数值解

$$e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

从而方程（2.5）的两个线性无关的解为

$$e^{\alpha x}\cos\beta x = \frac{1}{2}(e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x})$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x = \frac{1}{2i}(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x})$$

例 1：解初值问题

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 2 \end{cases}$$

解：$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$

通解 $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

由初值 $c_1 = 0, c_2 = 1$

得解 $y = e^{-x} \sin 2x$

上页 下页 返回

例 2：解方程 $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 3y = 0$

解：特征方程 $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0$

$$(\lambda - 1)^2(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0$$

$\therefore \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1 + i\sqrt{2}, \lambda_4 = 1 - i\sqrt{2}$

通解为 $y = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^x \cos\sqrt{2}x + c_4 e^x \sin\sqrt{2}x$

例 3：解方程 $y^{(4)}+8y''+16y=0$

解：特征方程 $\lambda^4+8\lambda^2+16=0$

$\therefore\ \lambda_{1,2}=2i,\lambda_{3,4}=-2i$

通解 $y=(c_1+c_2x)\cos 2x+(c_3+c_4x)\sin 2x$

例 4：解初值问题

$$\begin{cases} y^{(4)} - y = 0 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = 1 \end{cases}$$

解：特征方程 $\lambda^4 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = i, \lambda_4 = -i$

通解 $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$

代入初始条件：

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ -c_1 + c_2 + c_4 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 = 0 \\ -c_1 + c_2 - c_4 = 1 \end{cases}$$

得 $c_1 = -\frac{1}{4}, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = 0, c_4 = -\frac{1}{2}$

解为：$y = \frac{1}{4}(e^{x} - e^{-x}) - \frac{1}{2}\sin x$

上页 下页 返回

2.2 *n*阶常系数线性非齐次方程

（2.1）的通解＝（2.2）的通解+（2.1）的特解

问题：求（2.1）的特解？

定理 5　设函数 $K(x)$ 是初值问题

$$\begin{cases} K^{(n)}+a_{n-1}K^{(n-1)}+\cdots+a_1K'+a_0K=0 \\ K(0)=K'(0)=\cdots=K^{(n-2)}(0)=0, K^{(n-1)}(0)=1 \end{cases}$$

的解，则 $y_p(x)=\int_0^x K(x-s)f(s)ds$ 是非齐次方程（2.1）的一个特解。

上页　下页　返回

证明：$y_p' = K(0)f(x) + \int_0^x K'(x-s)f(s)ds$

$$= \int_0^x K'(x-s)f(s)ds$$

$\cdots,$

$$y_p^{(n)} = K^{(n-1)}(0)f(x) + \int_0^x K^{(n)}(x-s)f(s)ds$$

$$= f(x) + \int_0^x K^{(n)}(x-s)f(s)ds$$

$$y_p^{(n)} + a_{n-1}y_p^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_p' + a_0 y_p$$

$$= f(x) + \int_0^x \left[K^{(n)}(x-s) + a_{n-1}K^{(n-1)}(x-s) + \right.$$

$$\left. \ldots + a_1 K'(x-s) + a_0 K(x-s)\right] f(s)ds$$

$$= f(x)$$

上页 下页 返回

例 1：二阶常系数线性非齐次方程

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \tag{2.4}$$

求解初值问题：

$$\begin{cases} K'' + a_1 K' + a_0 K = 0 \\ K(0) = 0, K'(0) = 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

则 $K(x)$ 的具体表达式

1、$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 实根 $K(x) = \dfrac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}$；

2、$\lambda_1 = \lambda_2$ 实根 $K(x) = xe^{\lambda_1 x}$；

3、$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $K(x) = \dfrac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x$。

则 $y_p(x) = \int_0^x K(x-s) f(s) ds$ 是非齐次方程（2.4）的一个特解

上页 下页 返回

例 2：解初值问题$\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{-x} \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases}$

解： $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$

$$y_p = \int_0^x (x-s)e^{-(x-s)}e^{-s}ds = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

通解 $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$

初值问题的解是： $y = (\frac{1}{2}x^2 + 3x + 1)e^{-x}$

例 3： $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x$

解：相应的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$，特征根为 1，2，3。

考虑初值问题

$$\begin{cases} K''' - 6K'' + 11K' - 6 = 0 \\ K(0) = K'(0) = 0, K''(0) = 1 \end{cases}$$

于是 $K(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$

由初始条件得: $\begin{cases} c_1+c_2+c_3=0 \\ c_1+2c_2+3c_3=0 \\ c_1+4c_2+9c_3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=\dfrac{1}{2} \\ c_2=-1 \\ c_3=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$K(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-2e^{2x}+e^{3x})$$

特解 $y_p(x)=\int_0^x \frac{1}{2}(e^{(x-s)}-2e^{2(x-s)}+e^{3(x-s)})\cdot 3s\,ds$

注意到 $\int_0^x se^{m(x-s)}ds=-\frac{1}{m}(x+\frac{1}{m}-\frac{1}{m}e^{mx})$

从而 $y_p(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{11}{12}+\frac{3}{2}e^{x}-\frac{3}{4}e^{2x}+\frac{1}{6}e^{3x}$

通解 $y(x)=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}-\frac{1}{2}x-\frac{11}{12}$。

上页 下页 返回

待定系数法

考虑二阶常系数线性非齐次方程

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \qquad （2.4）$$

若 $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$

α 为实常数，$P_n(x)$ 是一个 n 次多项式，此时特解可以设为：

$$y_p(x) = e^{\alpha x} A(x)$$

代入方程（2.4）

$$A''(x) + (2\alpha + a_1)A'(x) + (\alpha^2 + a_1\alpha + a_0)A(x) = P_n(x)$$

$$A''(x)+(2\alpha+a_1)A'(x)+(\alpha^2+a_1\alpha+a_0)A(x)=P_n(x)$$

若 α 不是特征方程 $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$ 的根 $\Rightarrow A(x)$ 是一个 n 次多项式

特解为 $y_p(x)=e^{\alpha x}A_n(x)$

若 α 是 $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$ 的单根, $2\alpha+a_1\neq 0\Rightarrow A(x)$ 是一个 $n+1$ 次多项式

特解为 $y_p(x)=xe^{\alpha x}A_n(x)$

若 α 是 $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$ 的重根, $\Rightarrow A(x)$ 是一个 $n+2$ 次多项式

特解为 $y_p(x)=x^2e^{\alpha x}A_n(x)$

其中 $A_n(x)$ 为 n 次多项式

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=f(x) \qquad (2.1)$$

其中$a_{n-1},\cdots.a_1,a_0$是实常数，

(1). 若 $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$

α 为实常数，$P_n(x)$ 是一个 n 次多项式，此时特解可以设为：

$$y_p(x)=e^{\alpha x}A_n(x)x^k$$

其中 $A_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式，若 α 不是特征方程的根，取

k=0；若 α 是特征方程的根，则 k 为特征根的重数。

上页 下页 返回

(2). 若 $f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x)$

α,β 为实常数， $P_n(x)$， $Q_m(x)$ 分别是一个 n 次、m 次多项式，此时特解可以设为：

$$y_p(x)=e^{\alpha x}(A_j(x)\cos\beta x+B_j(x)\sin\beta x)x^k$$

其中 $A_j(x)$ 是 x 的 j 次多项式，$j\le\max\{n,m\}$，若 $\alpha+i\beta$ 不是特征方程的根，取 k=0；若 $\alpha+i\beta$ 是特征方程的根，则 k 为特征根的重数。

例 3： $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x$

解：相应的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$， 特征根为 1， 2， 3。

由于 0 不是特征方程的根，故可设特解为： $y_p(x) = Ax + B$，

代入得

$$11A - 6Ax - 6B = 3x \Rightarrow \begin{cases} -6A = 3 \\ 11A - 6B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = -\dfrac{11}{12} \end{cases}$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{11}{12}$$

通解 $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{11}{12}$

例 4：求解方程 $y''' + y'' + y' + y = xe^{x}$

解：相应的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

特征根为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$，

由于 1 不是特征方程的根，故可设特解为：

$y_p(x) = (Ax + B)e^{x}$，代入得

$$\therefore \begin{cases} A = \dfrac{1}{4} \\ B = -\dfrac{3}{8} \end{cases}$$

通解 $y = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x + e^{x}(\frac{1}{4}x - \frac{3}{8})$

例 5：解方程 $y^{(4)}-4y''-5y=x+\cos x$

解：相应的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^{(4)}-4\lambda^{2}-5=0$$

特征根为 $\lambda_1=\sqrt{5},\lambda_2=-\sqrt{5},\lambda_3=i,\lambda_4=-i$

利用定理 2，先求 $y^{(4)}-4y''-5y=x$ 的特解，记为 $y_{1p}(x)$

令 $y_{1p}(x)=Ax+B$，代入方程得 $A=-\dfrac{1}{5},B=0$

再求 $y^{(4)}-4y''-5y=\cos x$ 的特解记为 $y_{2p}(x)$

令 $y_{2p}(x)=x(A\cos x+B\sin x)$ 代入得 $A=0,B=-\dfrac{1}{12}$

$$\therefore y=c_1e^{\sqrt{5}x}+c_2e^{-\sqrt{5}x}+c_3\cos x+c_4\sin x-\frac{1}{12}x\sin x-\frac{1}{5}x$$