补充材料1-3. 数学建模初等案例

1. 椅子能在不平的地面上放稳吗

问题分析 通常 ~ 三只脚着地 放稳 ~ 四只脚着地

模型假设

- 四条腿一样长，椅脚与地面点接触，四脚连线呈正方形;
- 地面高度连续变化，可视为数学上的连续曲面;
- 地面相对平坦，使椅子在任意位置至少三只脚同时着地。

模型构成

用数学语言把椅子位置和四只脚着地的关系表示出来

- 椅子位置　利用正方形(椅脚连线)的对称性

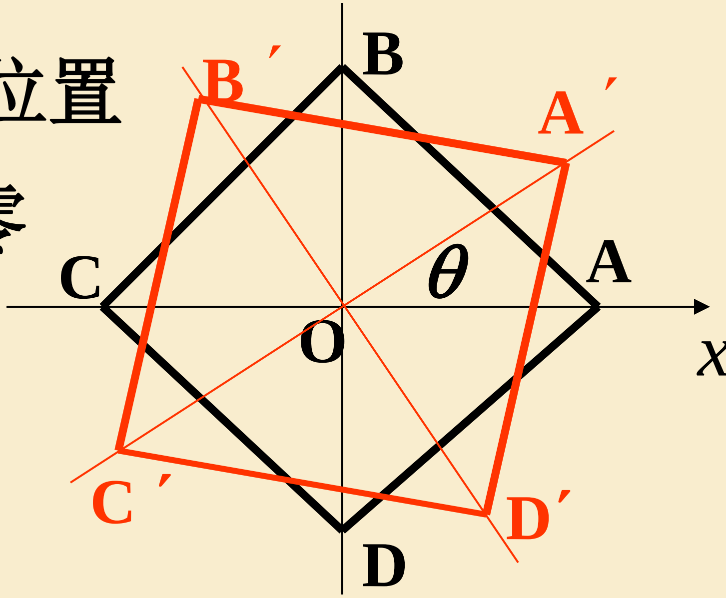
用 θ(对角线与 x 轴的夹角)表示椅子位置

- 四只脚着地　椅脚与地面距离为零

距离是 θ 的函数

四个距离(四只脚) → 两个距离

正方形对称性



A,C 两脚与地面距离之和 ~ $f(\theta)$

B,D 两脚与地面距离之和 ~ $g(\theta)$

正方形ABCD

绕O点旋转

模型构成

用数学语言把椅子位置和四只脚着地的关系表示出来

地面为连续曲面 ⇨ $f(\theta)$, $g(\theta)$是连续函数

椅子在任意位置至少三只脚着地 ⇨ 对任意θ, $f(\theta)$, $g(\theta)$至少一个为0

数学问题

已知：$f(\theta)$, $g(\theta)$是连续函数；

对任意θ，$f(\theta)\cdot g(\theta)=0$；

且 $g(0)=0$，$f(0)>0$.

证明：存在θ_0，使$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

模型求解

给出一种简单、粗糙的证明方法

将椅子旋转90^0，对角线AC和BD互换。

由$g(0)=0$， $f(0) > 0$ ，知$f(\pi/2)=0$, $g(\pi/2)>0$.

令$h(\theta)= f(\theta)-g(\theta)$, 则$h(0)>0$和$h(\pi/2)<0$.

由 f, g的连续性知 h为连续函数, 据连续函数的基本性质, 必存在θ_0 , 使$h(\theta_0)=0$, 即$f(\theta_0) = g(\theta_0)$.

因为$f(\theta) \cdot g(\theta)=0$, 所以$f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$.

评注和思考

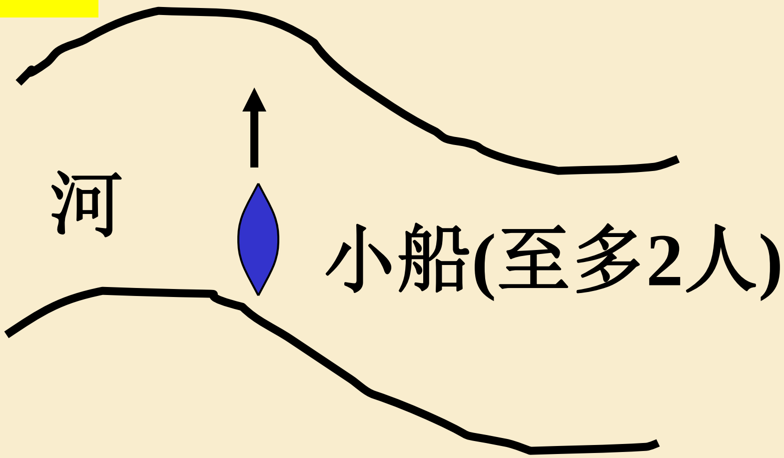
建模的关键 ~ θ和 $f(\theta)$, $g(\theta)$的确定

假设条件的本质与非本质 考察四脚呈长方形的椅子

2 商人们怎样安全过河

问题(智力游戏)

随从们密约，在河的任一岸，一旦随从的人数比商人多，就杀人越货.



但是乘船渡河的方案由商人决定.商人们怎样才能安全过河?

ΔΔΔ 3名商人

××× 3名随从

问题分析

多步决策过程

决策~ 每一步(此岸到彼岸或彼岸到此岸)船上的人员

要求~在安全的前提下(两岸的随从数不比商人多), 经有限步使全体人员过河.

模型构成

x_k~第k次渡河前此岸的商人数　　x_k, y_k=0,1,2,3;

y_k~第k次渡河前此岸的随从数　　k=1,2,… …

$s_k=(x_k, y_k)$~过程的状态　　S ~ 允许状态集合

$S=\{(x, y) \mid x=0, y=0,1,2,3;\ x=3, y=0,1,2,3;\ x=y=1,2\}$

u_k~第k次渡船上的商人数　　u_k, v_k=0,1,2;

v_k~第k次渡船上的随从数　　k=1,2,… …

$d_k=(u_k, v_k)$~决策　　$D=\{(u, v) \mid u+v=1, 2\}$ ~允许决策集合

$s_{k+1}=s_k+(-1)^k d_k$　　~状态转移律

多步决策问题

求$d_k \in D$(k=1,2, …n), 使$s_k \in S$, 并按转移律由 $s_1=(3,3)$到达 $s_{n+1}=(0,0)$.

模型求解

$S=\{(x, y)|\ x=0, y=0,1,2,3;$

$x=3, y=0,1,2,3;\ x=y=1,2\}$

- 穷举法 ~ 编程上机
- 图解法

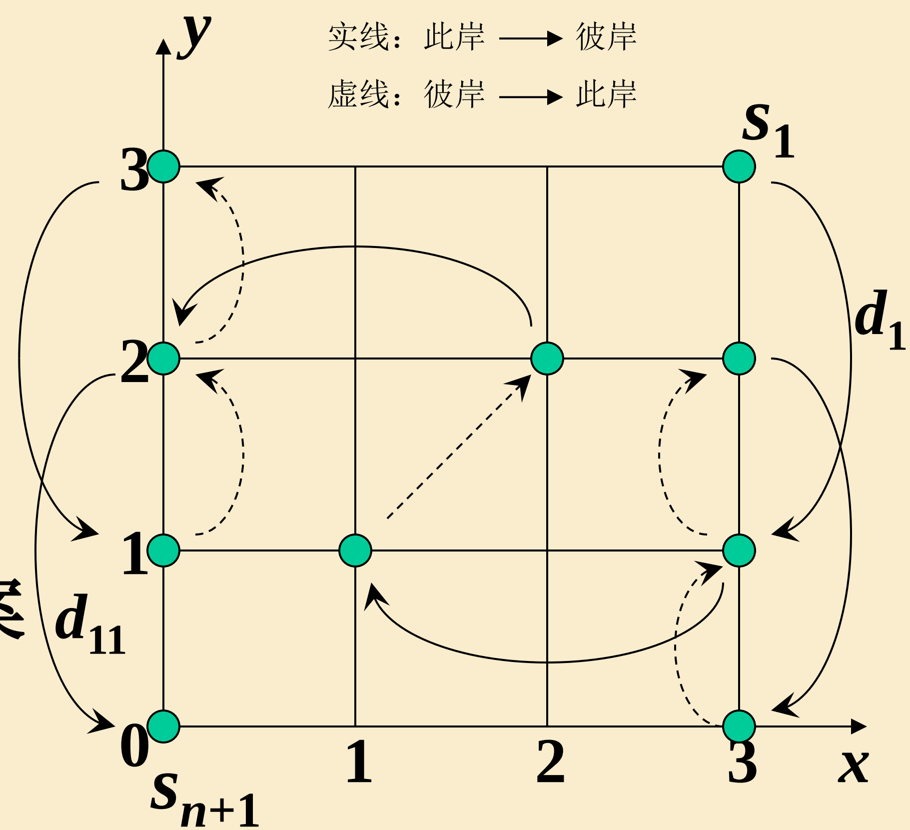
状态$s=(x,y)$ ~ 16个格点

允许状态 ~ 10个●点

允许决策 ~ 移动1或2格;

k奇,左下移; k偶,右上移.

$d_1, \ldots, d_{11}$给出安全渡河方案



评注和思考

规格化方法，易于推广

考虑4名商人各带一随从的情况

3 如何预报人口的增长

背景

世界人口增长概况

年	1625	1830	1930	1960	1974	1987	1999
人口(亿)	5	10	20	30	40	50	60

中国人口增长概况

年	1908	1933	1953	1964	1982	1990	1995	2000
人口(亿)	3.0	4.7	6.0	7.2	10.3	11.3	12.0	13.0

研究人口变化规律　　　控制人口过快增长

常用的计算公式　今年人口 x_0, 年增长率 r

k年后人口　$x_k = x_0(1+r)^k$

指数增长模型——马尔萨斯提出（1798）

基本假设：人口(相对)增长率 r 是常数

$x(t)$ ~时刻t的人口

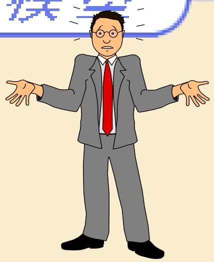
$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{x(t)} = r\Delta t$$

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = x_0 e^{rt}$$

$$x(t) = x_0(e^r)^t \approx x_0(1+r)^t$$

随着时间增加，人口按指数规律无限增长



指数增长模型的应用及局限性

- 与19世纪以前欧洲一些地区人口统计数据吻合
- 适用于19世纪后迁往加拿大的欧洲移民后代
- 可用于短期人口增长预测
- 不符合19世纪后多数地区人口增长规律
- 不能预测较长期的人口增长过程

19世纪后人口数据　　人口增长率r不是常数(逐渐下降)

阻滞增长模型(Logistic模型)

人口增长到一定数量后，增长率下降的原因：

资源、环境等因素对人口增长的阻滞作用

且阻滞作用随人口数量增加而变大 $\Rightarrow$ ***r*是*x*的减函数**

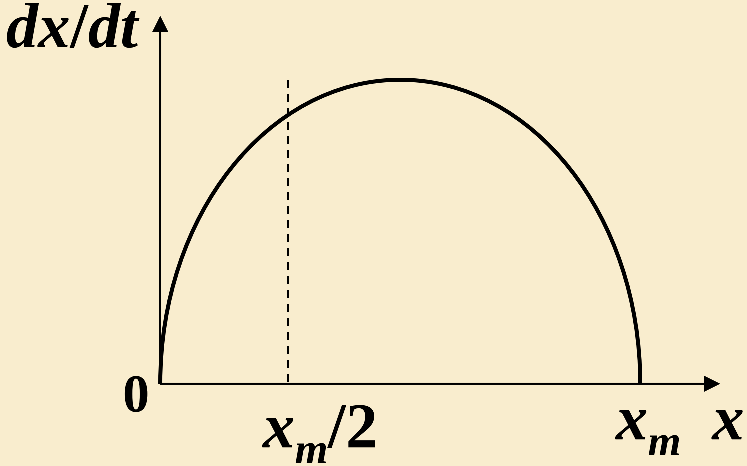
假设 $r(x) = r - sx \quad (r, s > 0)$ ***r*~固有增长率(*x*很小时)**

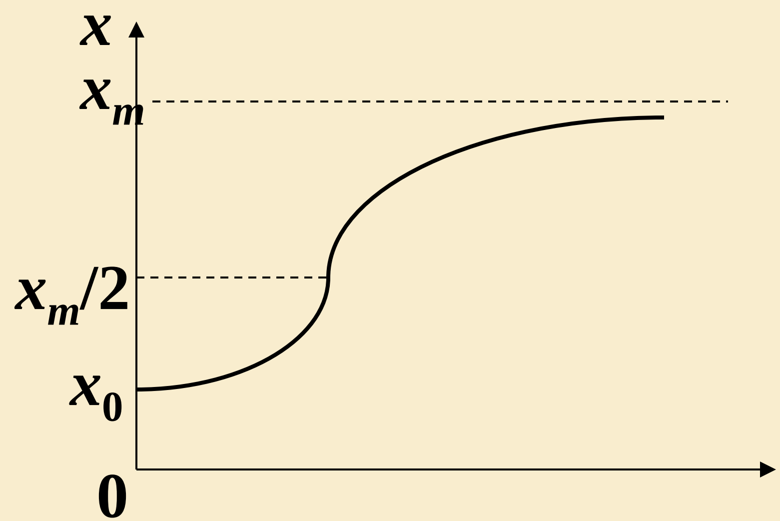
x_m~人口容量（资源、环境能容纳的最大数量）

$$\Rightarrow r(x_m) = 0 \Rightarrow s = \frac{r}{x_m} \qquad r(x) = r\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$$

阻滞增长模型(Logistic模型)

$$\frac{dx}{dt} = rx \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = r(x)x = rx\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$$





$$x(t) = \frac{x_m}{1 + \left(\frac{x_m}{x_0} - 1\right)e^{-rt}}$$

x(t)~S形曲线,

x增加先快后慢

阻滞增长模型(Logistic模型)

参数估计　用指数增长模型或阻滞增长模型作人口预报，必须先估计模型参数 r 或 r, x_m

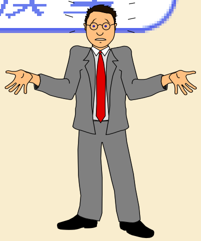
- 利用统计数据用最小二乘法作拟合

例：美国人口数据（单位~百万）

1860	1870	1880	……	1960	1970	1980	1990
31.4	38.6	50.2	……	179.3	204.0	226.5	251.4

⇨ $r=0.2557$, $x_m=392.1$

专家估计



阻滞增长模型（Logistic模型）

模型检验

用模型计算2000年美国人口，与实际数据比较

$$x(2000) = x(1990) + \Delta x = x(1990) + rx(1990)[1 - x(1990)/x_m]$$

$\Rightarrow$ $x(2000) = 274.5$　　实际为**281.4** (百万)

模型应用——预报美国2010年的人口

加入2000年人口数据后重新估计模型参数

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{r=0.2490,\ x_m=434.0}$　$\Rightarrow$ $x(2010)=306.0$

Logistic 模型在经济领域中的应用（如耐用消费品的售量）