2.1.1 证明一个正则参数曲面是球面的一部分的充要条件是它的所有法线都经过一个定点.

证. (1)必要性: 设正则参数曲面$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$位于以点P为球心,

R为半径的球面上, 则$[\vec{r}(u,v)-\overrightarrow{OP}]^2=R^2$. (2分)

两边微分得$\mathrm{d}\vec{r}(u,v)[\vec{r}(u,v)-\overrightarrow{OP}]=0$.

$\mathrm{d}\vec{r}(u,v)$可以是曲面在点(u,v)处的任意一个切向量.

因此上式说明$\vec{r}(u,v)-\overrightarrow{OP}$是曲面在点$(u,v)$处的一个法向量.

这说明该曲面的所有法线都经过定点P. (3分)

(2)充分性: 设正则参数曲面$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$的所有法线都经过一个定点P,

则$\vec{r}(u,v)-\overrightarrow{OP}//\vec{r}_u\times\vec{r}_v$. 因此$[\vec{r}(u,v)-\overrightarrow{OP}]\cdot\vec{r}_u=0$, $[\vec{r}(u,v)-\overrightarrow{OP}]\cdot\vec{r}_v=0$.

进而$\dfrac{\mathrm{d}[(\vec{r}(u,v)-\overrightarrow{OP})^2]}{\mathrm{d}u}=0$, $\dfrac{\mathrm{d}[(\vec{r}(u,v)-\overrightarrow{OP})^2]}{\mathrm{d}v}=0$. (3分)

可见$(\vec{r}(u,v)-\overrightarrow{OP})^2$与$u,v$都无关, 因此为常数, 记为$R^2$.

则曲面$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$在以P为球心, R为半径的球面上. (2分)

(2.2.1) 已知曲面的第一基本形式为 $\mathrm{I} = \cos^2 u\,\mathrm{d}u^2 + \sin^2 v\,\mathrm{d}v^2$，它上面的三条曲面曲线 $u+v=0$，$u-v=0$ 和 $v=1$ 围成一个曲边三角形，求

(1) 该曲边三角形所围曲面域的面积；

(2) 该曲边三角形的三个内角；

(3) 该曲边三角形的三条曲边的长度.

解. $E(u,v)=\cos^2 u,\quad F(u,v)=0,\quad G(u,v)=\sin^2 v,$

$u+v=0$ 与 $u-v=0$ 相交于点 $A=(0,0)$ 处，$u-v=0$ 与 $v=1$ 相交于点 $B=(1,1)$ 处，$u+v=0$ 与 $v=1$ 相交于点 $C=(-1,1)$ 处. ……(1分)

(1) 这三条曲线在参数平面中所围的区域 D 可用不等式表示为 $\begin{cases}-v\le u\le v\\ 0\le v\le 1\end{cases}$，……(1分)

所求曲面域的面积为

$$\iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint\limits_D \sqrt{\cos^2 u\sin^2 v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint\limits_D \cos u\sin v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \quad \text{……(1分)}$$

$$=\int_0^1 \sin v\,\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}\cos u\,\mathrm{d}u=2\int_0^1\sin^2 v\,\mathrm{d}v=\int_0^1(1-\cos 2v)\,\mathrm{d}v=1-\tfrac{1}{2}\sin 2. \quad \text{……(1分)}$$

(2) 在点 $A(0,0)$ 处，$E(0,0)=1,\quad F(0,0)=0,\quad G(0,0)=0,$

由 $u-v=0$ 得到沿着有向弧 AB 的切方向为 $(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)=(1:1)$，

由 $u+v=0$ 得到沿着有向弧 AC 的切方向为 $(\delta u:\delta v)=(-1:1)$，……(1分)

$$\angle A=\arccos\left.\frac{E\,\mathrm{d}u\,\delta u+F(\mathrm{d}u\,\delta v+\mathrm{d}v\,\delta u)+G\,\mathrm{d}v\,\delta v}{\sqrt{E(\mathrm{d}u)^2+2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+G(\mathrm{d}v)^2}\sqrt{E(\delta u)^2+2F\,\delta u\,\delta v+G(\delta v)^2}}\right|_{(0,0)} \quad \text{……(1分)}$$

$$=\arccos\frac{1\times 1\times(-1)}{\sqrt{1\times 1^2}\sqrt{1\times(-1)^2}}=\arccos(-1)=\pi; \quad \text{……(1分)}$$

在点 $B(1,1)$ 处，$E(1,1)=\cos^2 1,\quad F(1,1)=0,\quad G(1,1)=\sin^2 1,$

由 $u-v=0$ 得到沿着有向弧 BA 的切方向为 $(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)=(-1:-1)$，

由 $v=1$ 得到沿着有向弧 BC 的切方向为 $(\delta u:\delta v)=(-1:0)$，……(1分)

$$\angle B=\arccos\left.\frac{E\,\mathrm{d}u\,\delta u+F(\mathrm{d}u\,\delta v+\mathrm{d}v\,\delta u)+G\,\mathrm{d}v\,\delta v}{\sqrt{E(\mathrm{d}u)^2+2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+G(\mathrm{d}v)^2}\sqrt{E(\delta u)^2+2F\,\delta u\,\delta v+G(\delta v)^2}}\right|_{(1,1)} \quad \text{……(1分)}$$

$$=\arccos\frac{\cos^2 1\times(-1)\times(-1)}{\sqrt{\cos^2 1\times(-1)^2+\sin^2 1\times(-1)^2}\sqrt{\cos^2 1\times(-1)^2}}=1; \quad \text{……(1分)}$$

在点 $C(-1,1)$ 处，$E(-1,1)=\cos^2 1,\quad F(-1,1)=0,\quad G(-1,1)=\sin^2 1,$

由 $u+v=0$ 得到沿着有向弧 CA 的切方向为 $(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)=(1:-1)$，

由 $v=1$ 得到沿着有向弧 CB 的切方向为 $(\delta u:\delta v)=(1:0)$，……(1分)

$$\angle C=\arccos\left.\frac{E\,\mathrm{d}u\,\delta u+F(\mathrm{d}u\,\delta v+\mathrm{d}v\,\delta u)+G\,\mathrm{d}v\,\delta v}{\sqrt{E(\mathrm{d}u)^2+2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+G(\mathrm{d}v)^2}\sqrt{E(\delta u)^2+2F\,\delta u\,\delta v+G(\delta v)^2}}\right|_{(-1,1)} \quad \text{……(1分)}$$

$$=\arccos\frac{\cos^2 1\times 1\times 1}{\sqrt{\cos^2 1\times 1^2+\sin^2 1\times(-1)^2}\sqrt{\cos^2 1\times 1^2}}=1. \quad \text{……(1分)}$$

(3) 在曲边 AB 上，$u-v=0$，$v=u$，$\mathrm{d}v=\mathrm{d}u$，$u\in[0,1]$，……(1分)

$(\mathrm{d}s)^2=\cos^2 u(\mathrm{d}u)^2+\sin^2 u(\mathrm{d}u)^2=(\mathrm{d}u)^2$，曲边长度为 $\int_0^1\sqrt{(\mathrm{d}u)^2}=\int_0^1\mathrm{d}u=1$；……(2分)

在曲边 BC 上，$v=1$，$\mathrm{d}v=0$，$u\in[-1,1]$，……(1分)

$(\mathrm{d}s)^2=\cos^2 u(\mathrm{d}u)^2$，曲边长度为 $\int_{-1}^1\sqrt{\cos^2 u(\mathrm{d}u)^2}=2\sin 1$；……(2分)

在曲边 CA 上，$u+v=0$，$v=-u$，$\mathrm{d}v=-\mathrm{d}u$，$u\in[-1,0]$，……(1分)

$(\mathrm{d}s)^2=\cos^2 u(\mathrm{d}u)^2+\sin^2(-u)(-\mathrm{d}u)^2=(\mathrm{d}u)^2$，曲边长度为 $\int_{-1}^0\sqrt{(\mathrm{d}u)^2}=1$. ……(2分)

(2.2.2)改写$\vec{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, u+v)$的参数方程，使得它的曲纹坐标网成为正交网.

解 $\vec{r}_u=(\cos v, \sin v, 1)$， $\vec{r}_v=(-u\sin v, u\cos v, 1)$.

$E=\vec{r}_u^2=2$， $F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v=1$， $G=\vec{r}_v^2=u^2+1$.

方法一 $\mathrm{I}=2\mathrm{d}u^2+2\mathrm{d}u\mathrm{d}v+(u^2+1)\mathrm{d}v^2=2(\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\mathrm{d}v)^2+(u^2+\frac{1}{2})\mathrm{d}v^2$.

取新参数x,y使得$\mathrm{d}x=\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}y=\mathrm{d}v$,

这只需取$x=u+\frac{1}{2}v, y=v$, 即$u=x-\frac{1}{2}y, v=y$即可.

则$\mathrm{I}=2\mathrm{d}x^2+[(x-\frac{1}{2}y)^2+\frac{1}{2}]\mathrm{d}y^2$,

得到的新参数方程为$\vec{r}(u,v)=\vec{r}^*(x,y)=((x-\frac{1}{2}y)\cos y, (x-\frac{1}{2}y)\sin y, x+\frac{1}{2}y)$,

其曲纹坐标网为正交网.

方法二 取两个正交的曲线族$A(u,v)\mathrm{d}u+B(u,v)\mathrm{d}v=0$和$C(u,v)\delta u+D(u,v)\delta v=0$.

正交的充要条件为$E\,\mathrm{d}u\delta v+F(\mathrm{d}u\delta v+\delta u\,\mathrm{d}v)+G\,\mathrm{d}v\delta v$,

即$EBD-F(AD+BC)+GAC=0$.

即$2BD-AD-BC+(u^2+1)AC=0$.

令$A=0, B=1$, 则$2D-C=0$. 这只需取$C=2, D=1$.

得到两族正交曲线为$\mathrm{d}v=0$和$2\delta u+\delta v=0$.

取新参数x,y使得$\mathrm{d}x=2\mathrm{d}u+\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}y=\mathrm{d}v$,

这只需取$x=2u+v, y=v$, 即$u=\frac{1}{2}(x-y), v=y$即可.

得到的新参数方程为$\vec{r}(u,v)=\vec{r}^*(x,y)=(\frac{1}{2}(x-y)\cos y, \frac{1}{2}(x-y)\sin y, \frac{1}{2}(x+y))$,

其曲纹坐标网为正交网.

部分其他结果 $\begin{cases}u=y-x\\ v=2x\end{cases}$, $\begin{cases}u=x+y\\ v=-2y\end{cases}$, $\begin{cases}u=2x+y\\ v=-2y\end{cases}$, $\cdots$

(2.2.3)请在球面$\vec{S}(\varphi,\theta) = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi)$与圆柱面$\vec{C}(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$之间设计一个保角变换.

解 $\vec{S}_\varphi = (-\sin\varphi\cos\theta, -\sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$, $\vec{S}_\theta = (-\cos\varphi\sin\theta, \cos\varphi\cos\theta, 0)$.

$E_{\vec{S}} = \vec{S}_\varphi^2 = 1$, $F_{\vec{S}} = \vec{S}_\varphi \vec{S}_\theta = 0$, $G_{\vec{S}} = \vec{S}_\theta^2 = \cos^2\varphi$,

$\mathrm{I}_{\vec{S}} = E_{\vec{S}}\,\mathrm{d}\varphi^2 + 2F_{\vec{S}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta + G_{\vec{S}}\,\mathrm{d}\theta^2 = \mathrm{d}\varphi^2 + \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\theta^2$. （3分）

$\vec{C}_u = (-\sin u, \cos u, 0)$, $\vec{C}_v = (0, 0, 1)$.

$E_{\vec{C}} = \vec{C}_u^2 = 1$, $F_{\vec{C}} = \vec{C}_u \vec{C}_v = 0$, $G_{\vec{C}} = \vec{C}_v^2 = 1$,

$\mathrm{I}_{\vec{C}} = E_{\vec{C}}\,\mathrm{d}u^2 + 2F_{\vec{C}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G_{\vec{C}}\,\mathrm{d}v^2 = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2$. （3分）

要使$u = u(\varphi,\theta)$, $v = v(\varphi,\theta)$成为球面$\vec{S}$和圆柱面$\vec{C}$之间的一个保角变换, 只需要第一基本形式成比例, 即$\dfrac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}v^2} = \dfrac{\mathrm{d}\varphi^2}{\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\theta^2}$. 这只需要$\dfrac{\mathrm{d}u}{\sec\varphi\,\mathrm{d}\varphi} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} = 1$即可.

不妨令$\begin{cases} u = \int_0^\varphi \sec\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \ln\frac{1+\sin\varphi}{|\cos\varphi|} = \ln|\tan(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4})| \\ v = \theta \end{cases}$, 则此变换为球面$\vec{S}$和圆柱面$\vec{C}$之间的一个保角变换. （4分）

(2.3.2)求C^3 类曲线$\vec{r}(u)$ 的切线面$\vec{R}(u,v)=\vec{r}(u)+v\vec{r}'(u)$ 上的曲线$u+v=c$ 的法曲率.

解 $\vec{R}_u(u,v)=\vec{r}'(u)+v\vec{r}''(u),\qquad \vec{R}_v(u,v)=\vec{r}'(u),$ ....(1分)

$E(u,v)=\vec{R}_u^2(u,v)=\vec{r}'^2(u)+2v\vec{r}'(u)\cdot\vec{r}''(u)+v^2\vec{r}''^2(u),$

$F(u,v)=\vec{R}_u(u,v)\cdot\vec{R}_v(u,v)=\vec{r}'^2(u)+v\vec{r}'(u)\cdot\vec{r}''(u),\ G(u,v)=\vec{R}_v^2(u,v)=\vec{r}'^2(u).$ ....(2分)

$$\vec{n}(u,v)=\frac{\vec{R}_u(u,v)\times\vec{R}_v(u,v)}{|\vec{R}_u(u,v)\times\vec{R}_v(u,v)|}=\frac{v\vec{r}''(u)\times\vec{r}'(u)}{|v||\vec{r}''(u)\times\vec{r}'(u)|},$$

$\vec{R}_{uu}(u,v)=\vec{r}''(u)+v\vec{r}'''(u),\quad \vec{R}_{uv}(u,v)=\vec{r}''(u),\quad \vec{R}_{vv}(u,v)=\vec{0}.$ ....(2分)

$$L(u,v)=\vec{n}(u,v)\cdot\vec{r}_{uu}(u,v)=-\frac{|v|(\vec{r}'(u),\vec{r}''(u),\vec{r}'''(u))}{|\vec{r}'(u)\times\vec{r}''(u)|},$$

$M(u,v)=\vec{n}(u,v)\cdot\vec{r}_{uv}(u,v)=0,\quad N(u,v)=\vec{n}(u,v)\cdot\vec{r}_{vv}(u,v)=0.$ ....(2分)

在曲线$u+v=c$上有$\mathrm{d}u+\mathrm{d}v=0$, 因此$\mathrm{d}u=-\mathrm{d}v$. ....(1分)

$$\text{法曲率}k_n(u,v)=\frac{L(u,v)\,\mathrm{d}u^2+2M(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+N(u,v)\,\mathrm{d}v^2}{E(u,v)\,\mathrm{d}u^2+2F(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+G(u,v)\,\mathrm{d}v^2}=\frac{-(\vec{r}'(u),\vec{r}''(u),\vec{r}'''(u))}{|v|\vec{r}''^2(u)|\vec{r}'(u)\times\vec{r}''(u)|}.\ (2\text{分})$$

(2.3.3)求曲面$\vec{r}(u,v)=\{u,v,u^2+v^3\}$上的抛物点, 椭圆点和双曲点的集合.

解 $\vec{r}_u=\{1,0,2u\}$, $\vec{r}_v=\{0,1,3v^2\}$, $\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\{-2u,-3v^2,1\}$, $\vec{n}=\dfrac{\{-2u,-3v^2,1\}}{\sqrt{4u^2+9v^4+1}}$.

$\vec{r}_{uu}=\{0,0,2\}$, $\vec{r}_{uv}=\{0,0,0\}$, $\vec{r}_{vv}=\{0,0,6v\}$.

$$L=\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}=\frac{2}{\sqrt{4u^2+9v^4+1}},\quad M=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}=0,\quad N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}=\frac{6v}{\sqrt{4u^2+9v^4+1}}.$$

$$LN-M^2=\frac{12v}{4u^2+9v^4+1}.$$

抛物点的集合为$\{(u,v)\mid LN-M^2=0\}=\{(u,v)\mid v=0\}$;

椭圆点的集合为$\{(u,v)\mid LN-M^2>0\}=\{(u,v)\mid v>0\}$;

双曲点的集合为$\{(u,v)\mid LN-M^2<0\}=\{(u,v)\mid v<0\}$.

(2.3.8)如果曲面S上的渐近曲线网的夹角是常数, 则曲面S的高斯曲率$K(u,v)$和平均曲率$H(u,v)$的平方成比例.

证 设曲面的方程为$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, 在点(u,v)处的两个主曲率为$k_1(u,v)$和$k_2(u,v)$, 且该点处的一个渐近方向与主曲率$k_1(u,v)$所在切方向的夹角为$\theta(u,v)$.

则在该点处, 两个渐近方向之间的夹角为$2\theta(u,v)$.

由题设条件知, 两个渐近方向之间的夹角是常数, 因此$\theta(u,v)=\theta$为常数.

由欧拉公式知$k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta=0$.

因此$k_1(u,v)=ck_2(u,v)$, 其中c为常数.

$$\frac{K(u,v)}{H^2(u,v)}=\frac{k_1(u,v)k_2(u,v)}{(\frac{k_1(u,v)+k_2(u,v)}{2})^2}=\frac{ck_2^2(u,v)}{[(c+1)k_2(u,v)/2]^2}=\frac{4c}{(c+1)^2}\text{为常数.}$$

即$K(u,v)$与$H^2(u,v)$成比例.

(2.4.1)判断下列曲面是不是可展曲面, 并给出理由.

(1) $\vec{r}(u,v) = \{u+v, u-v, 2uv\}$; (2) $xy = (z-1)^2$

解 (1)方法一: $\vec{r}(u,v) = \{u+v, u-v, 2uv\} = \{u,u,0\} + v\{1,-1,2u\} \triangleq \vec{a} + v\vec{b}$.

因为$(\vec{a}\,', \vec{b}, \vec{b}\,') = -4 \neq 0$, 所以该曲面不是可展曲面.

方法二: $\vec{r}_u(u,v) = \{1,1,2v\}, \vec{r}_v(u,v) = \{1,-1,2u\}, \cdots,$

$LN - M^2 = -\dfrac{4}{2u^2+2v^2+1} \neq 0 \Rightarrow K \neq 0$. 因此该曲面不是可展曲面.

(2)令$x = u+v,\ y = u-v,\ z = w+1$, 则可将原曲面方程可化为$u^2 = v^2 + w^2$, ...(5分)

可见该曲面为锥面, 故为可展曲面. ....(5分)

另外化为参数方程, 得出 $LN - M^2 = 0$ 或 $K = 0$也可.

(2.4.2)求单参数曲面族 $x^2+(y-\alpha)^2+(z-2\alpha)^2=1$ 的包络.

解 曲面族为$x^2+(y-\alpha)^2+(z-2\alpha)^2=1$ ....(1)

将上式两边关于α求导得$2(y-\alpha)(-1)+2(z-2\alpha)(-2)=0.$ ....(2)

由(2)得$\alpha=\dfrac{y+2z}{5}$.

代入(1)得到所求包络为$5x^2+4y^2+z^2-4yz-5=0.$

(2.4.3)求双曲抛物面$z = xy$沿着它与柱面$x^2 = y$的交线的切平面构成的单参数平面族的包络.

解 交线的参数方程为$\vec{r}(t) = \{t, t^2, t^3\}$.

双曲抛物面$z = xy$在参数为t的交点处的法向为$\{y, x, -1\} = \{t^2, t, -1\}$,

切平面为$t^2(x - t) + t(y - t^2) - (z - t^3) = 0$, 即$t^2x + ty - z - t^3 = 0$.

因此切平面族为$t^2x + ty - z - t^3 = 0$. ....(1)

(1)式两端对t求导得$2tx + y - 3t^2 = 0$. ....(2)

由(2)得$t = \dfrac{x \pm \sqrt{x^2 + 3y}}{3}$, 代入(1)得到所求包络面为

$2x^3 + 9xy - 27z \pm 2(x^2 + 3y)\sqrt{x^3 + 3y} = 0$.

(3.1.1)设$\varphi = yz\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}z,\ \xi = \sin z\,\mathrm{d}x + \cos z\,\mathrm{d}y,\ \eta = \mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$, 计算

(1) $\varphi\wedge\xi$, $\xi\wedge\eta$, $\eta\wedge\varphi$; (2) $\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}\xi$, $\mathrm{d}\eta$.

解. (1) $\varphi\wedge\xi = (yz\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}z)\wedge(\sin z\,\mathrm{d}x + \cos z\,\mathrm{d}y)$

$= -\cos z\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \sin z\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + yz\cos z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$; .... (2分)

$\xi\wedge\eta = (\sin z\,\mathrm{d}x + \cos z\,\mathrm{d}y)\wedge(\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z) = z\cos z\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - z\sin z\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \sin z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$; .. (2分)

$\eta\wedge\varphi = (\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z)\wedge(yz\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}z) = \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + yz^2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x - yz\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$. .... (2分)

(2) $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}(yz\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}z) = \mathrm{d}(yz)\wedge\mathrm{d}x + \mathrm{d}(\mathrm{d}z) = (z\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z)\wedge\mathrm{d}x + 0 = y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x - z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$; (2分)

$\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}(\sin z\,\mathrm{d}x + \cos z\,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}\sin z\wedge\mathrm{d}x + \mathrm{d}\cos z\wedge\mathrm{d}y = \sin z\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \cos z\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$; .... (2分)

$\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}(\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z) = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) + \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z = 0$. .... (2分)

(3.1.2)设f和g是两个光滑函数, d为外微分算子, 计算

(1) $\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}g+g\,\mathrm{d}f)$;　　(2) $\mathrm{d}[(f-g)(\mathrm{d}f+\mathrm{d}g)]$;

(3) $\mathrm{d}[(f\,\mathrm{d}g)\wedge(g\,\mathrm{d}f)]$;　　(4) $\mathrm{d}(g\,\mathrm{d}f)+\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}g)$.

解.

(1) $\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}g+g\,\mathrm{d}f)=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}g+\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}f=0$; ......(2分)

(2) $\mathrm{d}[(f-g)(\mathrm{d}f+\mathrm{d}g)]=(\mathrm{d}f-\mathrm{d}g)\wedge(\mathrm{d}f+\mathrm{d}g)$

$=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}f+\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}g-\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}f-\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}g=2\,\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}g$; ......(2分)

(3) $\mathrm{d}[(f\,\mathrm{d}g)\wedge(g\,\mathrm{d}f)]=\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}g)\wedge(g\,\mathrm{d}f)-(f\,\mathrm{d}g)\wedge[\mathrm{d}(g\,\mathrm{d}f)]$

$=(\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}g)\wedge(g\,\mathrm{d}f)-(f\,\mathrm{d}g)\wedge(\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}f)=0-0=0$; ......(3分)

(4) $\mathrm{d}(g\,\mathrm{d}f)+\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}g)=\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}f+\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}g=0$; ......(3分)