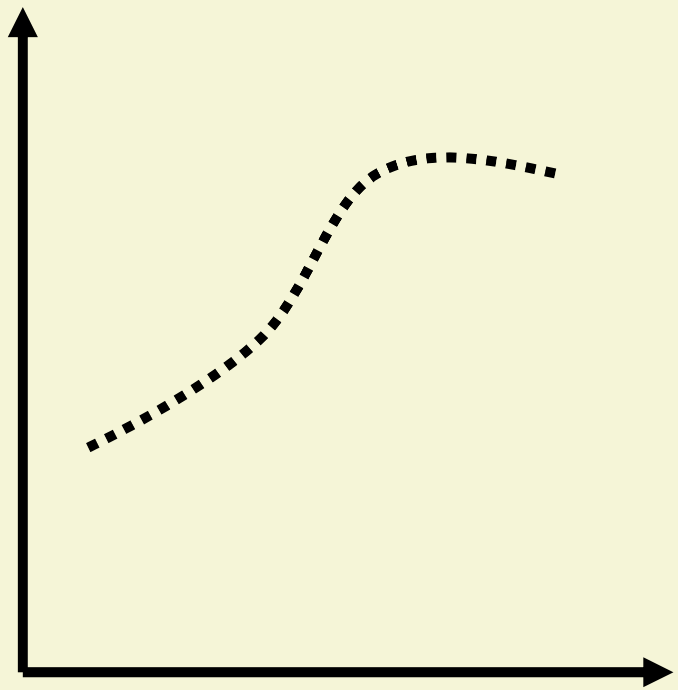
第六章 增长曲线模型预测技术

- 增长曲线外推预测技术主要是用来进行曲线拟合和预测
- 假设已经搜集到一组历史数据，在坐标系上描点如图：



- 分析数据的增长特征，找到合适的拟合曲线
- 根据历史数据，估计出曲线的参数，建立预测方程
- 根据预测方程，进行预测

一、增长曲线模型的基本类型和特征

1、多项式曲线

$$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_m t^m$$

$a_0: t = 0$时初始值

$a_1:$增长速率

$a_2:$加速度

$a_3:$加速度的变化率

若 $y_t = a_0 + a_1 t$

$$\frac{dy_t}{dt} = a_1$$

一阶差分： $u_t^{(1)} = y_t - y_{t-1} = a_0 + a_1 t - a_0 - a_1(t-1) = a_1$

规律：增长曲线为一次曲线，则一阶差分为常量

若 $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$

$$\frac{d^2 y_t}{dt^2} = 2a_2$$

$$u_t^{(1)} = y_t - y_{t-1} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 - \left[a_0 + a_1 (t-1) + a_2 (t-1)^2 \right]$$

$$= a_1 - a_2 + 2a_2 t$$

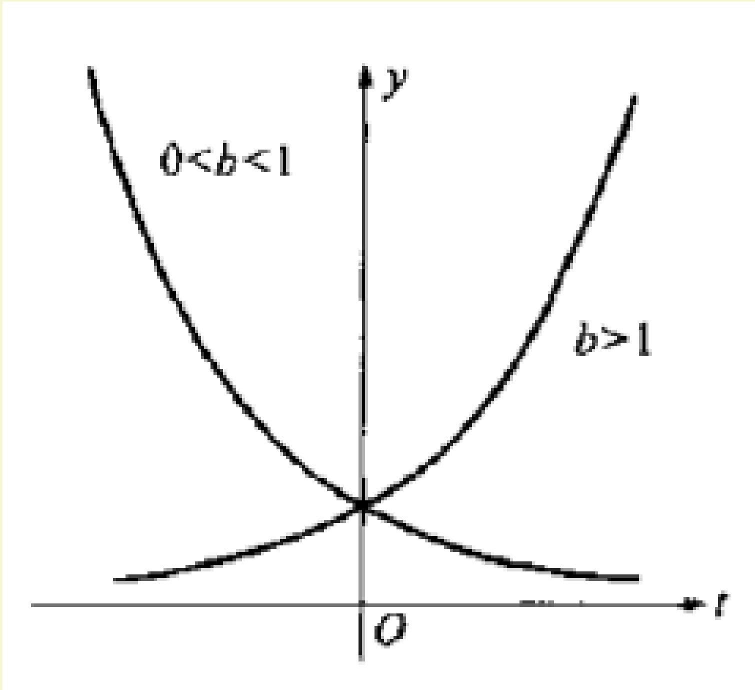
$$u_{t-1}^{(1)} = a_1 - a_2 + 2a_2 (t-1)$$

二阶差分：$u_t^{(2)} = u_t^{(1)} - u_{t-1}^{(1)} = 2a_2$

规律：增长曲线为二次曲线，则二阶差分为常量

2、简单指数型增长曲线

$$y_t = ab^t$$



$$a > 0$$

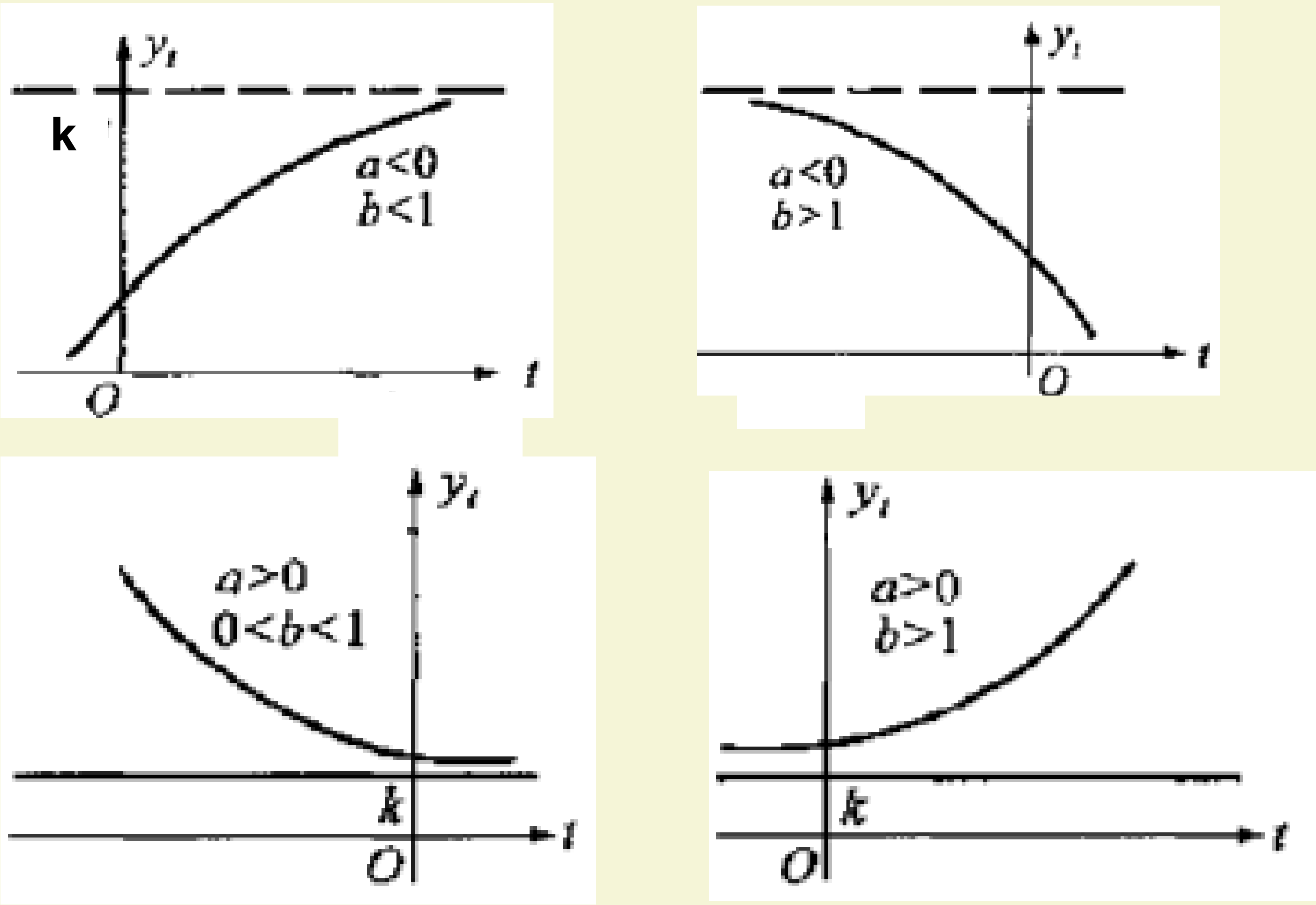
$$y_t = ab^t$$

$$\lg y_t = \lg a + \lg b \bullet t$$

$$\frac{u_t^{(1)}}{y_{t-1}} = \frac{ab^t - ab^{t-1}}{ab^{t-1}} = \frac{ab^{t-1}(b-1)}{ab^{t-1}} = b-1$$

3、修正指数型增长曲线

$$y_t = k + ab^t$$



$$y_t = k + ab^t$$

$$u_t = y_t - y_{t-1} = ab^{t-1}(b-1)$$

$$\lg u_t = \lg a(b-1) + (t-1) \bullet \lg b$$

4、双指数曲线

$$y_t = a \cdot b^t \cdot c^{t^2}$$

$$\lg y_t = \lg a + \lg b \cdot t + \lg c \cdot t^2$$

求导： $$\frac{y_t'}{y_t} = \lg b + 2\lg c \cdot t = \frac{u_t}{y_t}$$

5、龚珀资(Gompertz)曲线

$$y_t = k \cdot a^{b^t} \quad a > 0 \quad b > 0$$

考虑$k > 0$

$$y_t' = k \cdot a^{b^t} \cdot b^t \cdot \ln a \cdot \ln b$$

$$y_t'' = k \cdot a^{b^t} \cdot b^t \cdot \ln a \cdot (\ln b)^2 \cdot (b^t \ln a + 1)$$

$a > 1$　　无拐点

$0 < a < 1$　　拐点为$\left(\dfrac{\ln\left[-(\ln a)^{-1}\right]}{\ln b}, \dfrac{k}{e}\right)$

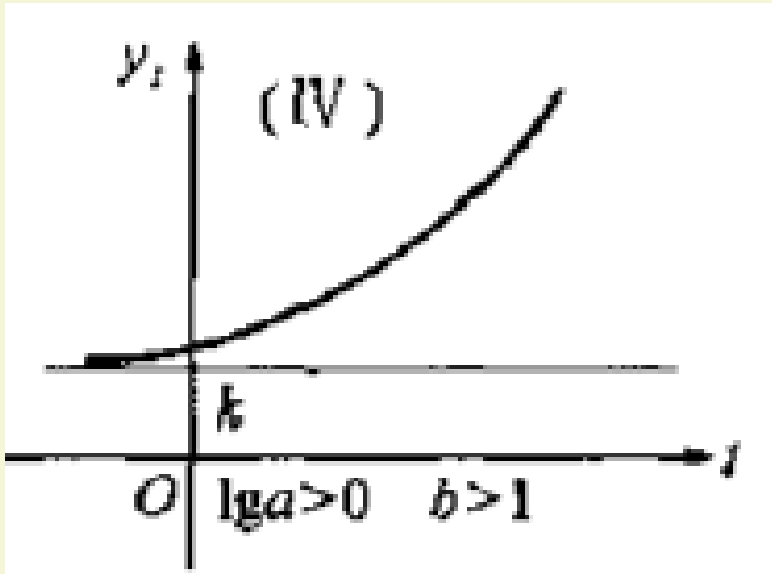
(1) $a>1 \quad b>1$

$t \to -\infty \quad b^t \to 0 \quad a^{b^t} \to 1 \quad y_t \to k \quad \therefore$以$k$为渐近线

$y_t' > 0 \quad y_t$增大

$y_t'' > 0$ 即：$y_t' - y_{t-1}' > 0$ 即 $y_t - y_{t-1} - y_{t-1} + y_{t-2} > 0$

即：$y_t + y_{t-2} > 2y_{t-1}$ 曲线为下凸

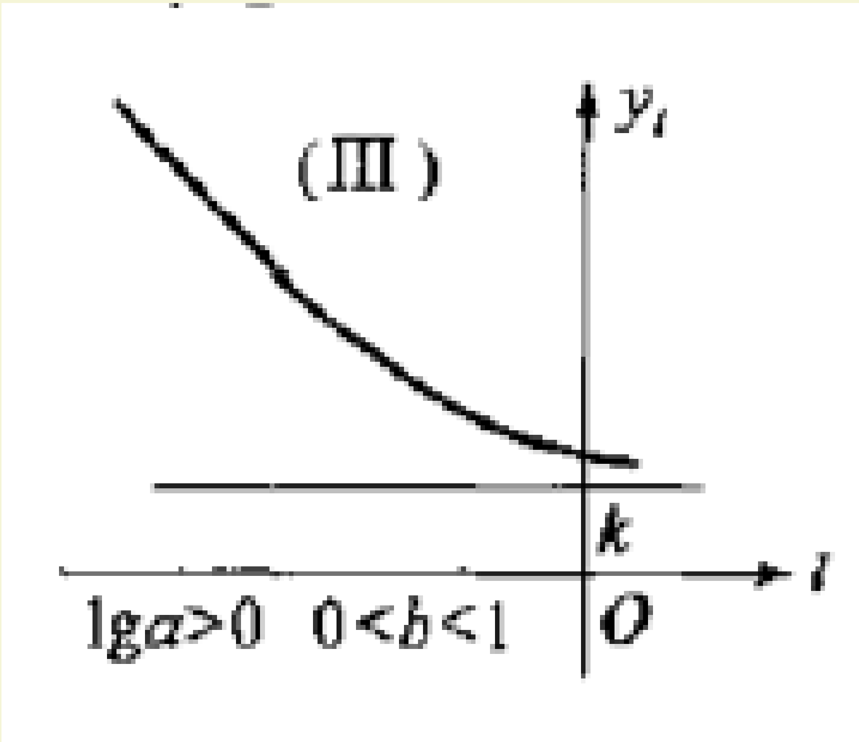


(2) $a>1 \quad 0<b<1$

$t \to +\infty \quad b^t \to 0 \quad a^{b^t} \to 1 \quad y_t \to k \quad \therefore$ 以k为下渐近线

$y_t'<0 \quad y_t$减小

$y_t''>0$ 曲线下凸



(3) $0<a<1 \quad 0<b<1$

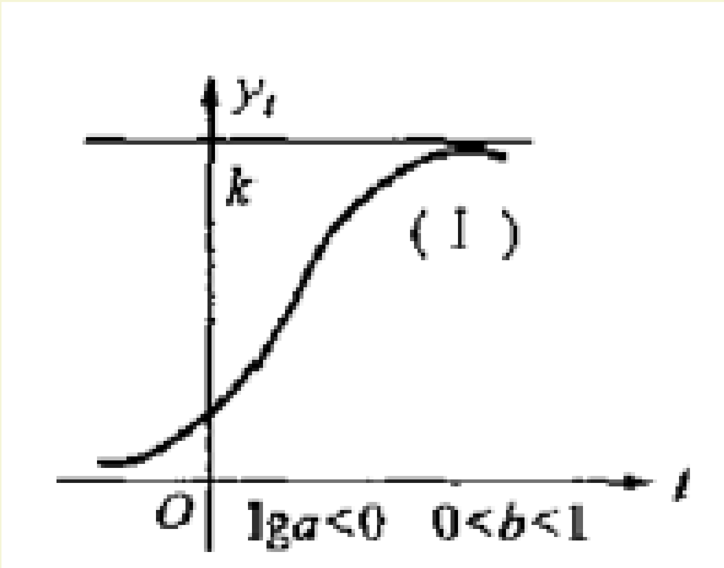
$t \to +\infty \quad b^t \to 0 \quad a^{b^t} \to 1 \quad y_t \to k$ 以k为渐近线

$t \to -\infty \quad b^t \to +\infty \quad a^{b^t} \to 0 \quad y_t \to o$ 以o为渐近线

$y_t' > 0 \quad y_t$增大

$y_t'' \quad t \in (-\infty,$拐点$) \quad y_t'' > 0$ 曲线下凸

$t \in ($拐点$,+\infty) \quad y_t'' < 0$ 曲线上凸



(4) $0 < a < 1 \quad b > 1$

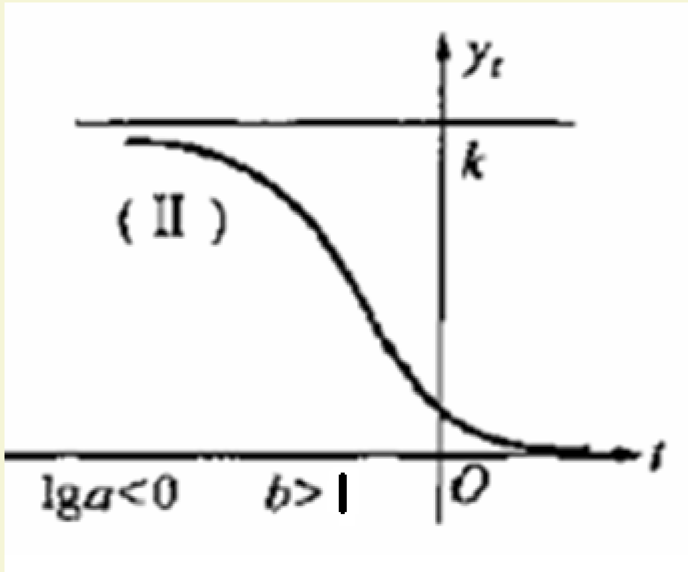
$t \to +\infty \quad b^t \to +\infty \quad a^{b^t} \to 0 \quad y_t \to o$ 以o为渐近线

$t \to -\infty \quad b^t \to 0 \quad a^{b^t} \to 1 \quad y_t \to k$ 以k为渐近线

$y_t' < 0 \quad y_t$减小

$y_t'' \quad t \in (-\infty, \text{拐点}) \quad y_t'' < 0$ 曲线上凸

$t \in (\text{拐点}, +\infty) \quad y_t'' > 0$ 曲线下凸



规律： $\lg y_t = \lg k + \lg a \cdot b^t$

$$\frac{y'(t)}{y_t} = \lg a \cdot b^t \cdot \ln b = \frac{u_t}{y_t}$$

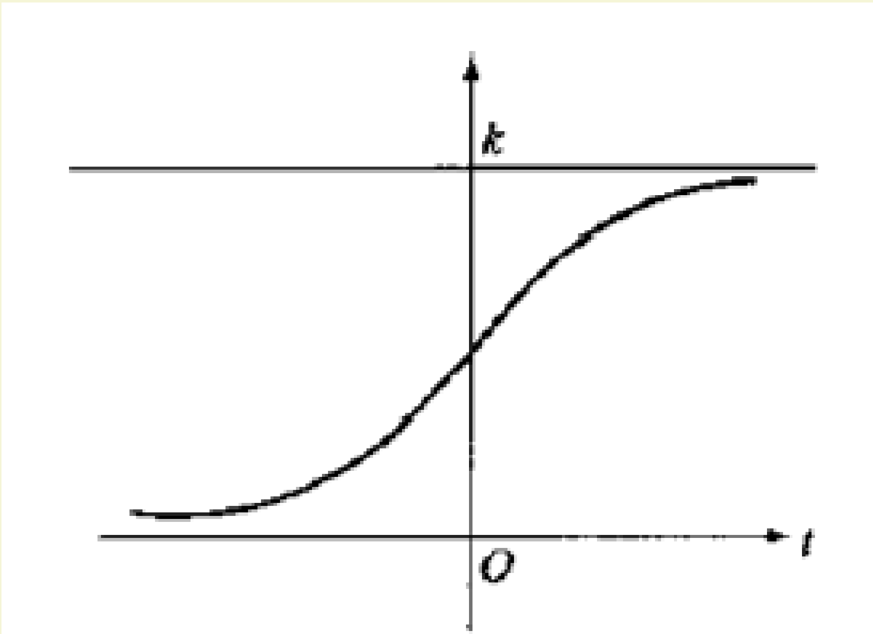
$$\lg \frac{u_t}{y_t} = \cdots \quad t$$

6、逻辑(Logistic)曲线

$$y_t = \frac{k}{1 + ae^{-bt}}$$

以o, k为渐近线

初始阶段发展缓慢，接着急剧增长，接着平稳发展，直至饱和



求导： $$y_t' = \frac{kabe^{-bt}}{(1+ae^{-bt})^2}$$

两边除以$y_t^{\,2}$ $$\frac{y_t'}{y_t^{\,2}} = \frac{1}{k}abe^{-bt} = \frac{u_t}{y_t^{\,2}}$$

取对数 $$\lg\frac{u_t}{y_t^{\,2}} = \lg\frac{ab}{k} - b\cdot(\lg e)\cdot t$$

二、曲线模型的识别方法

1、图示法：主观性强

2、残差平方和最小：不一定最好，如多项式曲线

3、增长特征法

（1）计算序列的滑动平均值，消除随机干扰

$$\bar{y}_t = \frac{\sum_{i=t-p}^{t+p} y_i}{2p+1}$$

（2）计算序列的平均增长

$$\bar{u}_t = \frac{\sum_{i=-p}^{p} i\bar{y}_{t+i}}{\sum_{i=-p}^{p} i^2}$$

例： $p=1$ $\quad \bar{u}_t = \dfrac{-\bar{y}_{t-1} + \bar{y}_{t+1}}{2}$

$p=2$ $\quad \bar{u}_t = \dfrac{-2\bar{y}_{t-2} - \bar{y}_{t-1} + \bar{y}_{t+1} + 2\bar{y}_{t+2}}{2^2+1+1+2^2}$

$p=3$ $\quad \bar{u}_t = \dfrac{-3\bar{y}_{t-3} - 2\bar{y}_{t-2} - \bar{y}_{t-1} + \bar{y}_{t+1} + 2\bar{y}_{t+2} + 3\bar{y}_{t+3}}{28}$

（3）计算样本序列的增长特征，判断曲线类型　167页

样本序列的平均增长特征	增长特征依时间变化的性质	曲线类型的识别
$\bar{u}_t$	基本一样	直　线
$\bar{u}_t$	线性变化	二次抛物线
$\bar{u}_t^{(2)}$	线性变化	三次抛物线
$\frac{\bar{u}_t}{\bar{y}_t}$	大致一样	指数曲线
$\frac{\bar{u}_t}{\bar{y}_t}$	线性变化	双指数曲线（对数抛物线）
$\lg\bar{u}_t$	线性变化	修正指数曲线
$\lg\frac{\bar{u}_t}{\bar{y}_t}$	线性变化	龚珀资曲线
$\lg\frac{\bar{u}_t}{\bar{y}_t^2}$	线性变化	逻辑曲线

- 例：已知一组历史数据，请根据数据特点选择合适的增长曲线进行拟和。

年份 t	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982
产量 y（箱）	164	193	255	279	512	606	766	838	941	1055	1088	1044

解：　分析数据增长特征如下

$$\bar{y}_t = \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3}$$

$$\bar{u}_t = \frac{\bar{y}_{t-1} + \bar{y}_{t+1}}{2}$$

(1) t	(2) y_t	(3) $\bar{y}_t$	(4) $\bar{u}_t$	(5) $\bar{u}_t/\bar{y}_t$	(6) $\lg \bar{u}_t$	(7) $\lg \bar{u}_t/\bar{y}_t$	(8) $\lg \bar{u}_t/\bar{y}_t^2$
1	164	—	—	—	—	—	—
2	193	204	—	—	—	—	—
3	255	242.3	72.35	0.299	1.859	−0.524	−1.912
4	279	348.7	111.7	0.320	2.048	−0.495	−3.037
5	512	465.7	139.7	0.300	2.145	−0.523	−3.191
6	606	628	135.5	0.216	2.132	−0.666	−3.464
7	766	736.7	110.2	0.150	2.042	−0.842	−3.691
8	838	848.3	104	0.123	2.017	−0.910	−3.839
9	941	944.7	89.9	0.115	1.954	−0.939	−3.915
10	1055	1028	58.8	0.057	1.769	−1.244	−4.256
11	1088	1062.3	—	—	—	—	—
12	1044	—	—	—	—	—	—

分别计算$\frac{\bar{u}_t}{\bar{y}_t}$、$\lg\frac{\bar{u}_t}{\bar{y}_t}$、$\lg\frac{\bar{u}_t}{\bar{y}_t^{\,2}}$和时间$t$的线性相关系数，得到

$\frac{\bar{u}_t}{\bar{y}_t}$和时间$t$的线性相关系数为　r=−0.9162

$\lg\frac{\bar{u}_t}{\bar{y}_t}$和时间$t$的线性相关系数为　r=−0.9152

$\lg\frac{\bar{u}_t}{\bar{y}_t^{\,2}}$和时间$t$的线性相关系数为　r=−0.764

因此选择双指数曲线。

三、增长曲线模型的参数估计

1、线性回归：多项式曲线，简单指数曲线，双指数曲线

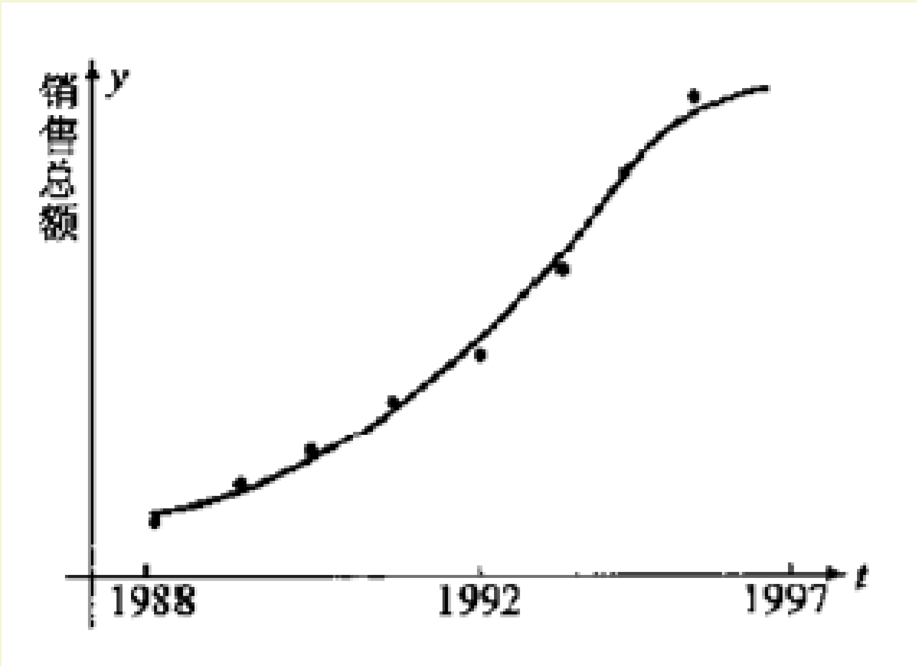
2、三和法：若有m个参数

将整个序列分为m个相等的时间周期，对每一个时间周期的数据求和以估计参数。

例：170页，已知某产品总销售额数据如下表，请预测1998年的销售额

年　　限	1988	1989	1990	1991	1992
t	0	1	2	3	4
总销售额（万元）	2 239	2 760	3 206	3 417	3 200
年　　限	1993	1994	1995	1996	1997
t	5	6	7	8	9
总销售额（万元）	3 308	4 182	4 381	5 610	6 510

解: 绘制散点图如下:



假设 $y=ka^{b^t}$ ， $\lg y=\lg k+b^t\cdot\lg a$

$$\left.\begin{aligned}\lg 2239&=\lg k+b^0\cdot\lg a\\ \lg 2760&=\lg k+b^1\cdot\lg a\\ \lg 3206&=\lg k+b^2\cdot\lg a\end{aligned}\right\rangle \lg(2239\times2760\times3206)=3\lg k+\lg a\cdot(b^0+b^1+b^2)$$

$$\left.\begin{aligned}\lg 3417&=\lg k+b^3\cdot\lg a\\ \lg 3200&=\lg k+b^4\cdot\lg a\\ \lg 3308&=\lg k+b^5\cdot\lg a\end{aligned}\right\rangle \lg(3417\times3200\times3308)=3\lg k+\lg a\cdot b^3(b^0+b^1+b^2)$$

$$\left.\begin{aligned}\lg 4182&=\lg k+b^6\cdot\lg a\\ \lg 4381&=\lg k+b^7\cdot\lg a\\ \lg 5610&=\lg k+b^8\cdot\lg a\\ \lg 6510&=\lg k+b^9\cdot\lg a\end{aligned}\right\rangle \lg(4182\times4381\times5610\times6510)=4\lg k+\lg a\cdot b^6(b^0+b^1+b^2+b^3)$$

$k = 2041.73 \quad a = 1.253 \quad b = 1.2$

$\hat{y} = 2041.73 \times (1.253)^{1.2^t}$

1998年 $\quad t = 10 \quad y = 8250.6$

3、三点法

假定曲线通过已知的三个点（始、中、终），且相邻的两点间时间距离相等，代入方程，求解参数。

例：以逻辑曲线的参数估计为例, 假设间隔时间为n

$$y_t = \frac{k}{1+ae^{-bt}}$$

$$\begin{cases} y_0 = \dfrac{k}{1+a} \\ y_1 = \dfrac{k}{1+ae^{-nb}} \\ y_2 = \dfrac{k}{1+ae^{-2nb}} \end{cases}$$

$$y_0=\frac{k}{1+a} \tag{10.3-11}$$

$$y_1=\frac{k}{1+ae^{-nb}} \tag{10.3-12}$$

$$y_2=\frac{k}{1+ae^{-2nb}} \tag{10.3-13}$$

由（10.3－11）确定参数值 a

$$a=\frac{k-y_0}{y_0} \tag{10.3-14}$$

又由（10.3－12）得

$$y_1\left(1+ae^{-nb}\right)=k$$

从而有

$$e^{-nb}=\frac{k-y_1}{ay_1} \tag{10.3-15}$$

$$
\begin{aligned}
b &= [\ln a + \ln y_1 - \ln(k - y_1)]/n \\
&= [\ln(k - y_0) - \ln y_0 + \ln y_1 - \ln(k - y_1)]/n
\end{aligned}
\tag{10.3-16}
$$

最后由（10.3—13）得到

$$
y_2\left[1 + \frac{(k - y_1)^2}{\frac{k - y_0}{y_0} \cdot y_1^2}\right] = k
$$

化简上式得到一个关于 k 的二次方程，求出 k 的两个根，取其较合理者代入（10.3—14）与（10.3—16）即得 a，b 的估计值。

4、参数估计的优选法： $y_t = ka^{b^t}$

用优选法确定k，将方程线性化： $\lg\lg\dfrac{y_t}{k} = \lg\lg a + \lg b \cdot t$

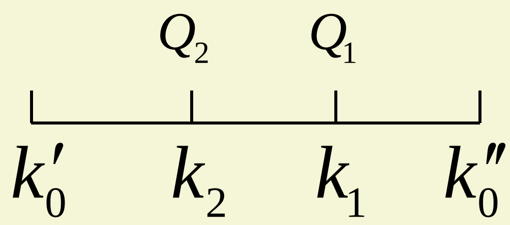
记 $Y_t = \lg\lg\dfrac{y_t}{k}, A = \lg\lg a, B = \lg b,$则有 $Y_t = A + Bt.$

优选标准：使预测值与实测值之差的平方和最小。

步骤：(1) $k_0' \le k \le k_0''$

(2) $k_1 = (k_0'' - k_0') \times 0.618 + k_0'$ Q_1

$k_2 = (k_0'' - k_0') \times 0.382 + k_0'$ Q_2



(3) 若$Q_1 > Q_2$ 区间缩小为$[k_0', k_1]$

若$Q_1 < Q_2$ 区间缩小为$[k_2, k_0'']$

四、预测实例 173页