⋆3.1.3 九点差分格式

⋆3.1.3 九点差分格式

- 为简单起见，仅考虑正方形网格，即$\tau = h$.

⋆3.1.3 九点差分格式

- 为简单起见，仅考虑正方形网格，即$\tau = h$.
- 由Taylor展开，得

$$\Box u(i,j) = \frac{1}{2h^2}[u(i+1,j+1)+u(i+1,j-1)+u(i-1,j+1)+u(i-1,j-1)$$

$$-4u(i,j)] = \triangle\ u(i,j) + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{(i,j)}$$

$$+\frac{h^4}{360}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 15\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 15\frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)_{(i,j)} + O(h^6), \qquad (22)$$

⋆3.1.3 九点差分格式

- 为简单起见，仅考虑正方形网格，即$\tau = h$.
- 由Taylor展开，得

$$\Box u(i,j) = \frac{1}{2h^2}[u(i+1,j+1)+u(i+1,j-1)+u(i-1,j+1)+u(i-1,j-1)$$

$$-4u(i,j)] = \triangle\, u(i,j) + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{(i,j)}$$

$$+\frac{h^4}{360}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 15\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 15\frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)_{(i,j)} + O(h^6), \quad (22)$$

-

$$\Diamond u(i,j) = \frac{1}{h^2}[u(i+1,j)+u(i-1,j)+u(i,j+1)+u(i,j-1)-4u(i,j)]$$

$$= \triangle\, u(i,j) + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{(i,j)} + \frac{h^4}{360}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)_{(i,j)} + O(h^6). \quad (23)$$

⋆3.1.3 九点差分格式

- 为简单起见，仅考虑正方形网格，即$\tau = h$.
- 由Taylor展开，得

$$\Box u(i,j) = \frac{1}{2h^2}[u(i+1,j+1)+u(i+1,j-1)+u(i-1,j+1)+u(i-1,j-1)$$

$$-4u(i,j)] = \triangle\ u(i,j) + \frac{h^2}{12}(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4})_{(i,j)}$$

$$+\frac{h^4}{360}(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 15\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 15\frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6})_{(i,j)} + O(h^6), \quad (22)$$

-

$$\Diamond u(i,j) = \frac{1}{h^2}[u(i+1,j)+u(i-1,j)+u(i,j+1)+u(i,j-1)-4u(i,j)]$$

$$= \triangle\ u(i,j) + \frac{h^2}{12}(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4})_{(i,j)} + \frac{h^4}{360}(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6})_{(i,j)} + O(h^6). \quad (23)$$

- 算子$\Box\Diamond$分别表示式中所涉及的节点除(i,j)之外分别以(i,j)为中点的正方形和菱形的顶点。

⋆3.1.3 九点差分格式

- 为简单起见，仅考虑正方形网格，即$\tau = h$.
- 由Taylor展开，得

$$\Box u(i,j) = \frac{1}{2h^2}[u(i+1,j+1)+u(i+1,j-1)+u(i-1,j+1)+u(i-1,j-1)$$

$$-4u(i,j)] = \triangle\ u(i,j) + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{(i,j)}$$

$$+\frac{h^4}{360}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 15\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 15\frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)_{(i,j)} + O(h^6), \quad (22)$$

-

$$\Diamond u(i,j) = \frac{1}{h^2}[u(i+1,j)+u(i-1,j)+u(i,j+1)+u(i,j-1)-4u(i,j)]$$

$$= \triangle\ u(i,j) + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{(i,j)} + \frac{h^4}{360}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)_{(i,j)} + O(h^6). \quad (23)$$

- 算子$\Box\Diamond$分别表示式中所涉及的节点除(i,j)之外分别以(i,j)为中点的正方形和菱形的顶点。

- 从(22)和(23)式分别得到逼近Poisson方程(1)的差分方程分别为：

$$-\Box u_{ij} = f_{ij}, \tag{24}$$

$$-\Diamond u_{ij} = f_{ij}, \tag{25}$$

- 从(22)和(23)式分别得到逼近Poisson方程(1)的差分方程分别为：

$$-\Box u_{ij} = f_{ij}, \tag{24}$$

$$-\Diamond u_{ij} = f_{ij}, \tag{25}$$

- 截断误差都为$O(h^2)$

- 从(22)和(23)式分别得到逼近Poisson方程(1)的差分方程分别为:

$$-\Box u_{ij} = f_{ij}, \tag{24}$$

$$-\Diamond u_{ij} = f_{ij}, \tag{25}$$

- 截断误差都为$O(h^2)$
- 若记

$$\boxplus u_{ij} = \frac{2}{3}\Diamond u_{ij} + \frac{1}{3}\Box u_{ij}, \tag{26}$$

- 从(22)和(23)式分别得到逼近Poisson方程(1)的差分方程分别为：

$$-\Box u_{ij} = f_{ij}, \tag{24}$$

$$-\Diamond u_{ij} = f_{ij}, \tag{25}$$

- 截断误差都为$O(h^2)$
- 若记

$$\boxplus u_{ij} = \frac{2}{3}\Diamond u_{ij} + \frac{1}{3}\Box u_{ij}, \tag{26}$$

则

$$\boxplus u_{ij} = \triangle\ u(i,j) + \frac{h^2}{12}\triangle^2\ u(i,j) + \frac{h^4}{360}(\triangle^3\ u + 2\frac{\partial^4(\triangle\ u)}{\partial x^2 \partial y^2})_{(i,j)} + O(h^6). \tag{27}$$

略去上式右端$O(h^6)$

- 从(22)和(23)式分别得到逼近Poisson方程(1)的差分方程分别为：

$$-\Box u_{ij} = f_{ij}, \tag{24}$$

$$-\Diamond u_{ij} = f_{ij}, \tag{25}$$

- 截断误差都为$O(h^2)$
- 若记

$$\boxplus u_{ij} = \frac{2}{3}\Diamond u_{ij} + \frac{1}{3}\Box u_{ij}, \tag{26}$$

则

$$\boxplus u_{ij} = \triangle\, u(i,j) + \frac{h^2}{12}\,\triangle^2\, u(i,j) + \frac{h^4}{360}(\triangle^3\, u + 2\frac{\partial^4(\triangle\, u)}{\partial x^2 \partial y^2})_{(i,j)} + O(h^6). \tag{27}$$

略去上式右端$O(h^6)$

- 则得微分方程(1)在节点(i,j)的又一个差分方程

$$-\boxplus\, u_{ij} = f_{ij} + \frac{h^2}{12}(\Delta f)_{ij} + \frac{h^4}{360}(\Delta^2 f + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2})_{ij}. \tag{28}$$

- 从(22)和(23)式分别得到逼近Poisson方程(1)的差分方程分别为：

$$-\Box u_{ij} = f_{ij}, \tag{24}$$

$$-\Diamond u_{ij} = f_{ij}, \tag{25}$$

- 截断误差都为$O(h^2)$
- 若记

$$\boxplus u_{ij} = \frac{2}{3}\Diamond u_{ij} + \frac{1}{3}\Box u_{ij}, \tag{26}$$

则

$$\boxplus u_{ij} = \triangle\ u(i,j) + \frac{h^2}{12}\triangle^2\ u(i,j) + \frac{h^4}{360}(\triangle^3\ u + 2\frac{\partial^4(\triangle\ u)}{\partial x^2 \partial y^2})_{(i,j)} + O(h^6). \tag{27}$$

略去上式右端$O(h^6)$

- 则得微分方程(1)在节点(i,j)的又一个差分方程

$$-\boxplus u_{ij} = f_{ij} + \frac{h^2}{12}(\Delta f)_{ij} + \frac{h^4}{360}(\Delta^2 f + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2})_{ij}. \tag{28}$$

- 截断误差$O(h^6)$.

- 截断误差$O(h^6)$.
- 建立差分方程时共用到九个节点，故称为九点差分格式

- 截断误差$O(h^6)$.
- 建立差分方程时共用到九个节点，故称为九点差分格式
- 当f为常数时，则化为简单形式$-\boxplus u_{ij}=f_{ij}$

- 截断误差$O(h^6)$.
- 建立差分方程时共用到九个节点，故称为九点差分格式
- 当f为常数时，则化为简单形式$-\boxplus u_{ij} = f_{ij}$
- 若Ω是不规则的，边界条件很难达到$O(h^6)$.

- 截断误差$O(h^6)$.
- 建立差分方程时共用到九个节点，故称为九点差分格式
- 当f为常常数时，则化为简单形式$-\boxplus u_{ij}=f_{ij}$
- 若Ω是不规则的，边界条件很难达到$O(h^6)$.
- 九点格式特别适用于比较规则的区域，如矩形区域。

⋆3.2 三角形网格

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

⋆3.2 三角形网格

- 为了提高解的精确度，通常要增加节点的数量，单节点数量增加时，计算量也随之增大。

⋆3.2 三角形网格

- 为了提高解的精确度，通常要增加节点的数量，单节点数量增加时，计算量也随之增大。
- 为了提高近似解的精度，又节省计算量，应该在函数变换较快的地方多取一些节点，变化较慢的地方少取一些节点。

⋆3.2 三角形网格

- 为了提高解的精确度，通常要增加节点的数量，单节点数量增加时，计算量也随之增大。
- 为了提高近似解的精度，又节省计算量，应该在函数变换较快的地方多取一些节点，变化较慢的地方少取一些节点。
- 矩形网格的优点：容易建立差分方程，缺点：节点的疏密过度不够灵活。

⋆3.2 三角形网格

- 为了提高解的精确度，通常要增加节点的数量，单节点数量增加时，计算量也随之增大。
- 为了提高近似解的精度，又节省计算量，应该在函数变换较快的地方多取一些节点，变化较慢的地方少取一些节点。
- 矩形网格的优点：容易建立差分方程，缺点：节点的疏密过度不够灵活。
- 三角形可以克服这个缺点。

⋆3.2 三角形网格

- 为了提高解的精确度，通常要增加节点的数量，单节点数量增加时，计算量也随之增大。
- 为了提高近似解的精度，又节省计算量，应该在函数变换较快的地方多取一些节点，变化较慢的地方少取一些节点。
- 矩形网格的优点：容易建立差分方程，缺点：节点的疏密过度不够灵活。
- 三角形可以克服这个缺点。
- Green第二公式

$$\iint_D (u\Delta v - v\Delta u)dxdy = \int_{\partial D} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})ds, \tag{30}$$

⋆3.2 三角形网格

- 为了提高解的精确度，通常要增加节点的数量，单节点数量增加时，计算量也随之增大。
- 为了提高近似解的精度，又节省计算量，应该在函数变换较快的地方多取一些节点，变化较慢的地方少取一些节点。
- 矩形网格的优点：容易建立差分方程，缺点：节点的疏密过度不够灵活。
- 三角形可以克服这个缺点。
- Green第二公式

$$\iint_D (u\Delta v - v\Delta u)dxdy = \int_{\partial D} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})ds, \tag{30}$$

- 令函数$v = 1$,

$$\iint_D \Delta u dxdy = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds, \tag{31}$$

其中∂D表示区域D的边界，n是∂D的外法线方向。

⋆3.2 三角形网格

- 为了提高解的精确度，通常要增加节点的数量，单节点数量增加时，计算量也随之增大。
- 为了提高近似解的精度，又节省计算量，应该在函数变换较快的地方多取一些节点，变化较慢的地方少取一些节点。
- 矩形网格的优点：容易建立差分方程，缺点：节点的疏密过度不够灵活。
- 三角形可以克服这个缺点。
- Green第二公式

$$\iint_D (u\Delta v - v\Delta u)dxdy = \int_{\partial D} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})ds, \qquad (30)$$

- 令函数$v = 1$,

$$\iint_D \Delta u dxdy = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds, \qquad (31)$$

其中∂D表示区域D的边界，n是∂D的外法线方向。

- 以Poisson 方程第一边值问题(1),(2)为例，只要区域D完全包含在$\bar{\Omega}$内，则式(31)化为

$$-\int_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial n}ds=\iint_D f\,dxdy. \tag{32}$$

上式称为Poisson方程的积分守恒形式，利用它可以构造差分方程。

- 以Poisson 方程第一边值问题(1),(2)为例，只要区域D完全包含在$\bar{\Omega}$内，则式(31)化为

$$-\int_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial n}ds=\iint_D f\,dxdy. \tag{32}$$

上式称为Poisson方程的积分守恒形式，利用它可以构造差分方程。

对区域$\bar{\Omega}$进行三角形剖分

- 剖分时三角形互不重叠

- 以Poisson 方程第一边值问题(1),(2)为例，只要区域D完全包含在$\bar{\Omega}$内，则式(31)化为

$$-\int_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial n}ds=\iint_D f\,dxdy. \tag{32}$$

上式称为Poisson方程的积分守恒形式，利用它可以构造差分方程。

对区域$\bar{\Omega}$进行三角形剖分

- 剖分时三角形互不重叠
- 任何一个三角形的顶点都不在其他三角形的边上，(顶点对顶点)

- 以Poisson 方程第一边值问题(1),(2)为例，只要区域D完全包含在$\bar{\Omega}$内，则式(31)化为

$$-\int_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial n}ds=\iint_D f\,dxdy. \tag{32}$$

  上式称为Poisson方程的积分守恒形式，利用它可以构造差分方程。

对区域$\bar{\Omega}$进行三角形剖分

- 剖分时三角形互不重叠
- 任何一个三角形的顶点都不在其他三角形的边上，(顶点对顶点)
- 在边界Γ附近用三角形的直边代替曲边。

在内点建立差分方程

- 记P是内点，假设与它相邻的点共有6个，依次记为$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$.

在内点建立差分方程

- 记P是内点，假设与它相邻的点共有6个，依次记为$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$.
- 分别过边$PA_1, \cdots, PA_6$的中点做该边的垂线，他们的交点分别记为$B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, B_i是ΔPA_iA_{i+1}的外接圆的中心。

在内点建立差分方程

- 记P是内点，假设与它相邻的点共有6个，依次记为$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$.
- 分别过边$PA_1, \cdots, PA_6$的中点做该边的垂线，他们的交点分别记为$B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, B_i是ΔPA_iA_{i+1}的外接圆的中心。
- 把多边形$B_1B_2\cdots B_6$取作(32)中的积分区域D.由于

$$\int_{\overline{B_{i-1}B_i}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{u(A_i) - u(P)}{|PA_i|} |B_{i-1}B_i|, i = 1, 2, \cdots, 6$$

$$\int\int_D f dxdy \approx a(P)f(P).$$

其中$B_0 = B_6, a(P)$是多边形$B_1B_2\cdots B_6$的面积

$$a(P) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5} |PA_i||B_{i-1}B_i|,$$

把上面的式子代入式(32)便得到在点P的差分方程

$$\frac{1}{a(P)}\sum_{i=1}^{6} \frac{|B_{i-1}B_i|}{|PA_i|}(u_p - u_{A_i}) = f(P). \tag{33}$$

在内点建立差分方程

- 记P是内点，假设与它相邻的点共有6个，依次记为$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$.
- 分别过边$PA_1, \cdots, PA_6$的中点做该边的垂线，他们的交点分别记为$B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, B_i是ΔPA_iA_{i+1}的外接圆的中心。
- 把多边形$B_1B_2\cdots B_6$取作(32)中的积分区域D.由于

$$\int_{\overline{B_{i-1}B_i}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{u(A_i) - u(P)}{|PA_i|} |B_{i-1}B_i|, i = 1, 2, \cdots, 6$$

$$\int\int_D f dxdy \approx a(P) f(P).$$

其中$B_0 = B_6, a(P)$是多边形$B_1B_2\cdots B_6$的面积

$$a(P) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{5} |PA_i||B_{i-1}B_i|,$$

把上面的式子代入式(32)便得到在点P的差分方程

$$\frac{1}{a(P)} \sum_{i=1}^{6} \frac{|B_{i-1}B_i|}{|PA_i|} (u_p - u_{A_i}) = f(P). \qquad (33)$$

在边界点建立差分方程

- 第一类边界：P为边界点，则$u_P = \phi(P)$.

在边界点建立差分方程

- 第一类边界：P为边界点，则$u_P = \phi(P)$.
- 第三类边界：

在边界点建立差分方程

- 第一类边界：P为边界点，则$u_P = \phi(P)$.
- 第三类边界：
  - P为边界点，与它相邻的节点为A_1, A_2, A_3, A_4,其中A_4, A_1也是边界点。

在边界点建立差分方程

- 第一类边界：P为边界点，则$u_P = \phi(P)$.
- 第三类边界：
  - P为边界点，与它相邻的节点为A_1, A_2, A_3, A_4,其中A_4, A_1也是边界点。
  - 过边$PA_1, \cdots PA_4$的中点作该边的垂线，它们的交点记为B_1, B_2, B_3.记PA_1的中点为B_0,PA_4的中点为B_4.

在边界点建立差分方程

- 第一类边界：P为边界点，则$u_P = \phi(P)$.
- 第三类边界：
  - P为边界点，与它相邻的节点为A_1, A_2, A_3, A_4,其中A_4, A_1也是边界点。
  - 过边$PA_1, \cdots PA_4$的中点作该边的垂线，它们的交点记为B_1, B_2, B_3.记PA_1的中点为B_0,PA_4的中点为B_4.
  - 把多边形$PB_0B_2B_2B_3B_4$取为式(32)中的积分区域D.

$$\int_{\overline{B_{i-1}B_i}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{u(A_i) - u(P)}{|PA_i|} |B_{i-1}B_i|, i = 1, 2, 3, 4$$

$$\int_{\overline{PB_0}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \int_{\overline{PB_0}} (\phi - \sigma u) ds$$

$$\approx \frac{|PB_0|}{2} [\phi(P) - \sigma(P)u(P) + \phi(B_0) - \sigma(B_0)u(B_0)]$$

  - 但是B_0不是节点，取

$$u(B_0) \approx \frac{1}{2}(u(P) + u(A_1)),$$

- 于是

$$\int_{\overline{PB_0}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{|PA_1|}{4}[\phi(P)+\phi(B_0)-(\sigma(P)+\frac{\sigma(B_0)}{2})u(P)-\frac{\sigma(B_0)}{2}u(A_1)]$$

其中$\sigma(B_0)$和$\phi(B_0)$既可以用离B_0最近的边界点的函数值代替，也可以用节点P和A_1的函数值的平均值代替。

- 于是

$$\int_{\overline{PB_0}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{|PA_1|}{4}[\phi(P)+\phi(B_0)-(\sigma(P)+\frac{\sigma(B_0)}{2})u(P)-\frac{\sigma(B_0)}{2}u(A_1)]$$

其中$\sigma(B_0)$和$\phi(B_0)$既可以用离B_0最近的边界点的函数值代替，也可以用节点P和A_1的函数值的平均值代替。

- 类似地可得

$$\int_{\overline{PB_4}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{|PA_4|}{4}[\phi(P)+\phi(B_4)-(\sigma(P)+\frac{\sigma(B_4)}{2})u(P)-\frac{\sigma(B_4)}{2}u(A_4)]$$

把上面的式子代入式(32)便得到在边界点P的差分方程

- 于是

$$\int_{\overline{PB_0}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{|PA_1|}{4}[\phi(P)+\phi(B_0)-(\sigma(P)+\frac{\sigma(B_0)}{2})u(P)-\frac{\sigma(B_0)}{2}u(A_1)]$$

其中$\sigma(B_0)$和$\phi(B_0)$既可以用离B_0最近的边界点的函数值代替，也可以用节点P和A_1的函数值的平均值代替。

- 类似地可得

$$\int_{\overline{PB_4}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{|PA_4|}{4}[\phi(P)+\phi(B_4)-(\sigma(P)+\frac{\sigma(B_4)}{2})u(P)-\frac{\sigma(B_4)}{2}u(A_4)]$$

把上面的式子代入式(32)便得到在边界点P的差分方程

对于特殊的区域，若采用特殊的三角形，差分方程将取比较简单的形式：

- 于是

$$\int_{\overline{PB_0}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{|PA_1|}{4}[\phi(P)+\phi(B_0)-(\sigma(P)+\frac{\sigma(B_0)}{2})u(P)-\frac{\sigma(B_0)}{2}u(A_1)]$$

其中$\sigma(B_0)$和$\phi(B_0)$既可以用离B_0最近的边界点的函数值代替，也可以用节点P和A_1的函数值的平均值代替。

- 类似地可得

$$\int_{\overline{PB_4}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{|PA_4|}{4}[\phi(P)+\phi(B_4)-(\sigma(P)+\frac{\sigma(B_4)}{2})u(P)-\frac{\sigma(B_4)}{2}u(A_4)]$$

把上面的式子代入式(32)便得到在边界点P的差分方程

对于特殊的区域，若采用特殊的三角形，差分方程将取比较简单的形式：

- 当P点的周围是直角边长分别为h和τ的直角三角形，差分方程与五点差分格式相同。

- 于是

$$\int_{\overline{PB_0}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{|PA_1|}{4}[\phi(P)+\phi(B_0)-(\sigma(P)+\frac{\sigma(B_0)}{2})u(P)-\frac{\sigma(B_0)}{2}u(A_1)]$$

  其中$\sigma(B_0)$和$\phi(B_0)$既可以用离B_0最近的边界点的函数值代替，也可以用节点P和A_1的函数值的平均值代替。

- 类似地可得

$$\int_{\overline{PB_4}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{|PA_4|}{4}[\phi(P)+\phi(B_4)-(\sigma(P)+\frac{\sigma(B_4)}{2})u(P)-\frac{\sigma(B_4)}{2}u(A_4)]$$

  把上面的式子代入式(32)便得到在边界点P的差分方程

对于特殊的区域，若采用特殊的三角形，差分方程将取比较简单的形式：

- 当P点的周围是直角边长分别为h和τ的直角三角形，差分方程与五点差分格式相同。
- 当P点的周围是边长为h的等边三角形，差分方程为

$$\frac{2}{3h^2}(6u_p - \sum_{i=1}^{6} u_{A_i}) = f(P). \tag{34}$$

作业：
2、证明公式(34)

$$\frac{2}{3h^2}(6u_p - \sum_{i=1}^{6} u_{A_i}) = f(P). \tag{34}$$

即当P的周围是边长为h的等边三角形时，差分方程化为(34)

3、证明：对矩形网格，用积分守恒形式(32)导出的差分方程与五点格式(8)相同