驻波表达式

$$y_1 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) \text{，} \quad y_2 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$$

$$y = y_1 + y_2 = (2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x)\cdot\cos\frac{2\pi}{T}t$$

合振幅 A' 随**x** 作周期性变化 $A' = \left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|$

1. $\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm k\pi$ $\quad k = 0, 1, 2, \cdots \quad A' = 2A$

波腹 $x = \pm k\frac{\lambda}{2}$ $\quad x = 0, \quad \pm\frac{\lambda}{2}, \quad \pm\lambda\cdots$

2. $\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $\quad k = 0, 1, 2, \cdots \quad A' = O$

波节 $x = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4}$ $\quad x = \pm\frac{\lambda}{4}, \quad \pm\frac{3\lambda}{4}\cdots$

3. 相邻两波节之间质点振动同相位，任一波节两侧振动相位相反，在波节处产生π的相位跃变．（与行波不同，无相位的传播）．

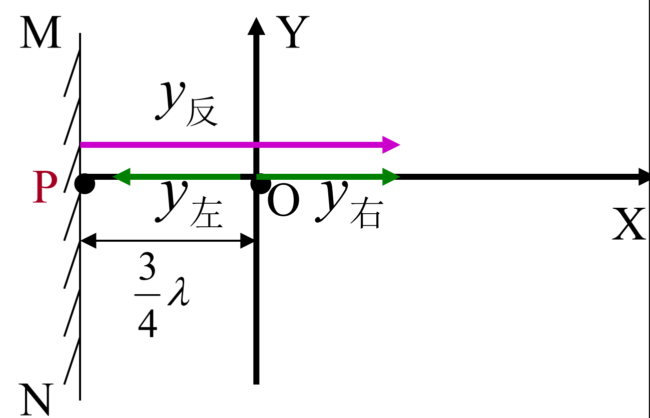
相位跃变（半波损失）

当波从波疏介质垂直入射到波密介质被反射到波疏介质时形成波节. 入射波与反射波在此处的相位时时相反，即反射波在分界处产生 π 的相位跃变，相当于出现了半个波长的波程差，称半波损失.

例2. 已知$x=0$处有一$y_o = A\cos\omega t$的振源，产生的波沿x轴正、负方向传播。波长为λ，MN为一波密反射面。

求：合成波

解：先求反射波方程： 方法一



$$y_{入}^{P} = A\cos[\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x]_{x=-\frac{3}{4}\lambda}$$

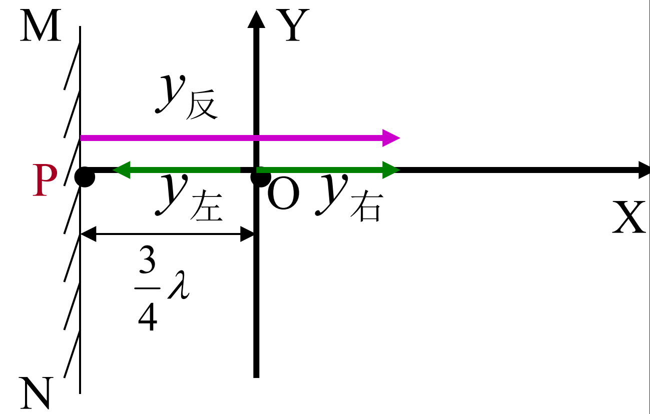
$$= A\cos[\frac{2\pi}{T}t - \frac{3}{2}\pi]$$

$$y_{反}^{P} = A\cos[(\frac{2\pi}{T}t - \frac{3}{2}\pi) + \pi] = A\cos[\frac{2\pi}{T}t - \frac{1}{2}\pi]$$

$$y_{反} = A\cos[\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x' - \frac{1}{2}\pi]$$

$$\overset{x'=x+\frac{3}{4}\lambda}{=\!=\!=\!=} A\cos[\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x]$$

法二：$y_{反} = A\cos[\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \alpha]$



其中：α为反射波在$x=0$处的初相

振源o处初相$\varphi = 0$

入射波（$y_{左}$）在P点位相落后o的位相为：

$$\Delta\varphi' = -\frac{3}{2}\pi$$

反射波（$y_{右}$）在o点位相落后P的位相为：

$$\Delta\varphi'' = -\frac{3}{2}\pi$$

且在P点存在半波损失，

故反射波在o点位相较振源o点的位相落后：

$$2\times(-\frac{3}{2}\pi) - \pi = -4\pi$$

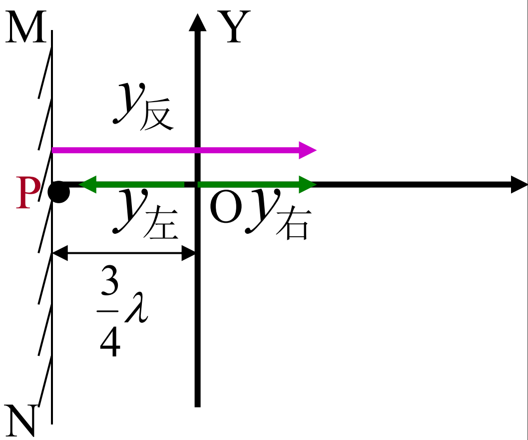
即：$\alpha = -4\pi \quad \therefore y_{反} = A\cos[\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x]$

OMN区域内的合成波：

$$y_{合} = y_{左} + y_{反}$$

$$= A\cos[\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x] + A\cos[\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x]$$

$$= 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\frac{2\pi}{T}t \text{ —— 驻波}$$



$x > 0$区域内的合成波：

$$y'_{合} = y_{右} + y_{反}$$

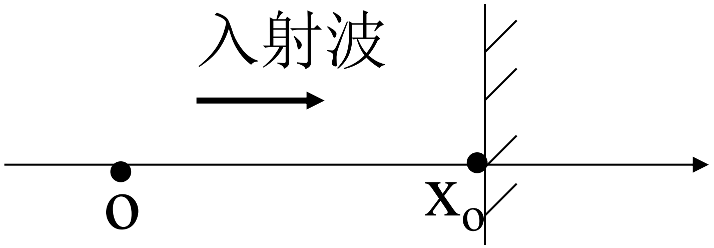
$$= A\cos[\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x] + A\cos[\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x]$$

$$= 2A\cos[\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x] \text{ —— 行波}$$

例. 如图所示,有一平面简谐波: $y_{\lambda} = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$向右传播,

在距坐标原点o为$x_o = 5\lambda$处被垂直界面发射,反射面可看着固定端,

反射中无吸收,试求:



(1)反射波的波动方程;

(2)驻波的波动方程;

(3)在o到x_o间各波节和波腹的坐标.

解(1): $y_{反o} = A\cos(2\pi\frac{t}{T} + \alpha)$

$$\alpha = 0 - (5\times 2\pi) - \pi - (5\times 2\pi) = -21\pi$$

$\therefore$ 反射波的波动方程为:

$$y_{反} = A\cos(2\pi\frac{t}{T} + 2\pi\frac{x}{\lambda} - 21\pi) = -A\cos 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$$

(2)驻波方程为: $y = y_{入} + y_{反} = -2A\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\frac{2\pi}{T}t$

驻波方程为: $y = y_{入} + y_{反} = -2A\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\frac{2\pi}{T}t$

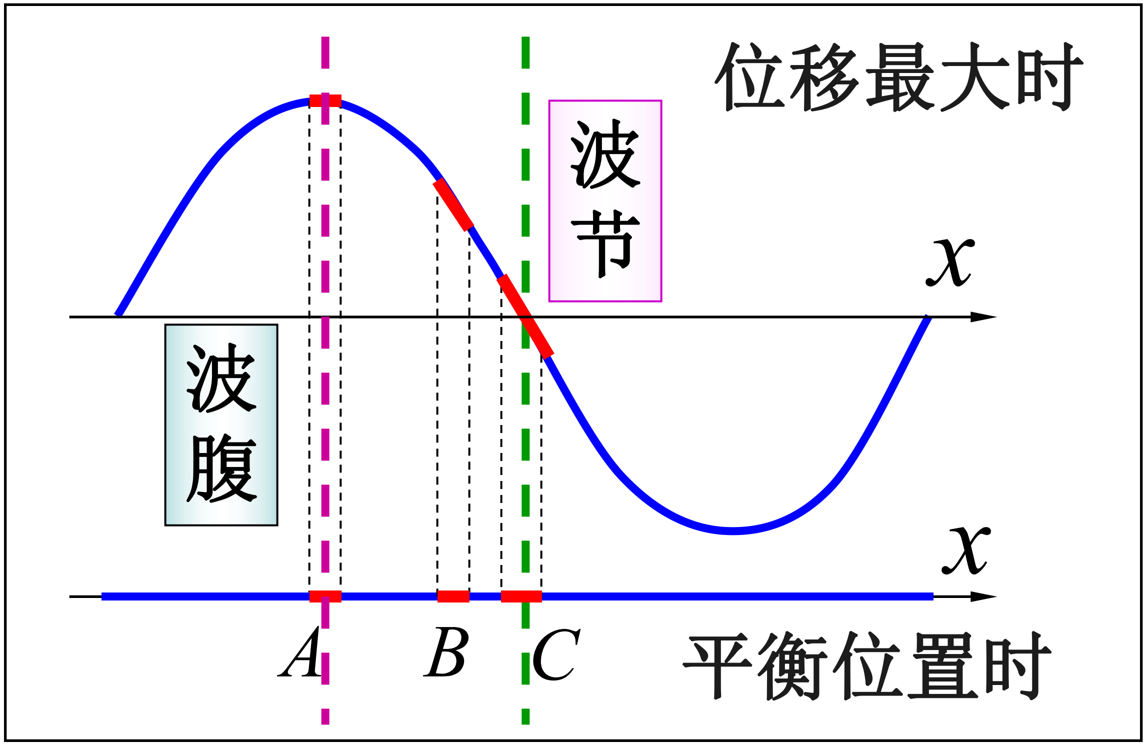
(3)由 $\frac{2\pi}{\lambda}x = k\pi \Rightarrow$ 得波节点的坐标: $x = \frac{k}{2}\lambda$

即: $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, 2\lambda, \frac{5\lambda}{2}, 3\lambda, \frac{7\lambda}{2}, 4\lambda, \frac{9\lambda}{2}, 5\lambda.$

由 $\frac{2\pi}{\lambda}x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ 得波腹点的坐标: $x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$

即: $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4}, \frac{9\lambda}{4}, \frac{11\lambda}{4}, \frac{13\lambda}{4}, \frac{15\lambda}{4}, \frac{17\lambda}{4}, \frac{19\lambda}{4},$

四　驻波的能量



$$\mathrm{d}W_{\mathrm{p}} \propto \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{k}} \propto \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

驻波的能量在相邻的波腹和波节间往复变化，在相邻的波节间发生动能和势能间的转换，动能主要集中在波腹，势能主要集中在波节，但无长距离的能量传播.

驻 波 与 行 波 的 区 别

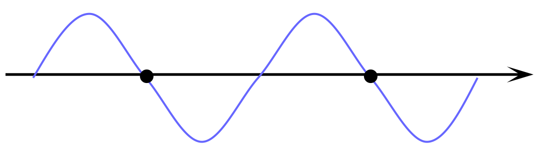
行波

1. $y = A\cos[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi_{x0}]$

（有振动状态的传播）

2. 各质元的振幅均为A

3.



一个波段中各质元振动位相均不同.

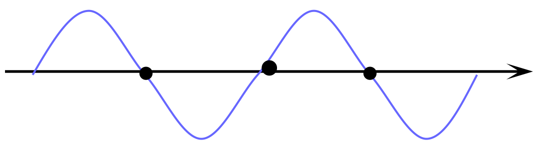
4. 能量随波传播

驻波

$$y = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\frac{2\pi}{T}t$$

（无振动状态的传播）

各质元的振幅(x)，范围:0-2A



相邻波节间各质元振动位相相同，一波节两边各点振动位相相反.

能量仅在相邻二波节间转换.

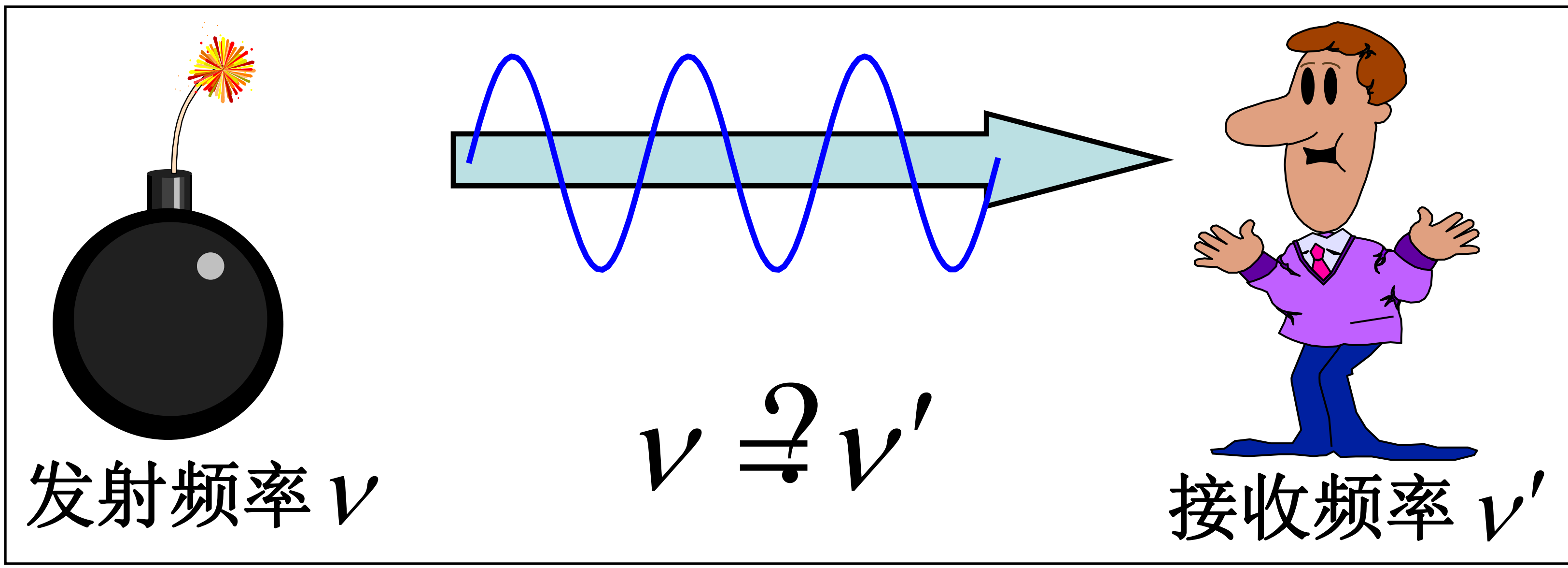
振动、行波、驻波能量的比较

	振动	行波	驻波
研究对象：	一个质点	一体元	二波节间的波段
动能：	$E_k \propto \sin^2(\omega t+\varphi)$	$\frac{1}{2}\rho\Delta VA^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$	集中在波腹附近
势能：	$E_p \propto \cos^2(\omega t+\varphi)$	$\frac{1}{2}\rho\Delta VA^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$	集中在波节附近
总能量：	$E=\frac{1}{2}kA^2$ （守恒）	$\rho\Delta VA^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$	二相邻波节间总能量守恒。
	动能 $\Leftrightarrow$ 势能	每个质元不断吸收、释放能量——能量传播。	动能 $\Leftrightarrow$ 势能 波腹 $\Leftrightarrow$ 波节 无能量的空间传播

5.8 多普勒效应

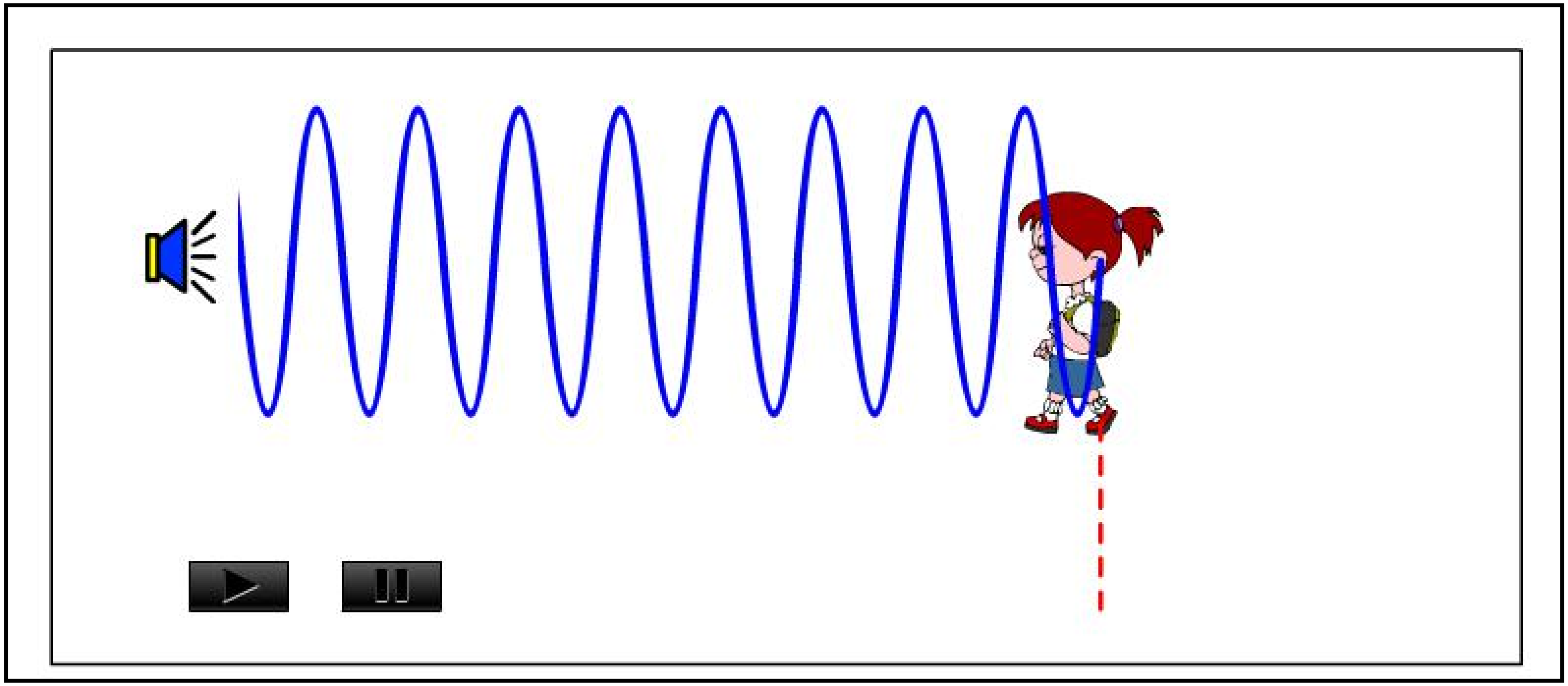
讨论 人耳听到的声音的频率与声源的频率相同吗？

接收频率——单位时间内观测者接收到的振动次数或完整波数.



只有波源与观察者相对静止时才相等.

一 波源不动，观察者相对介质以速度 v_o 运动



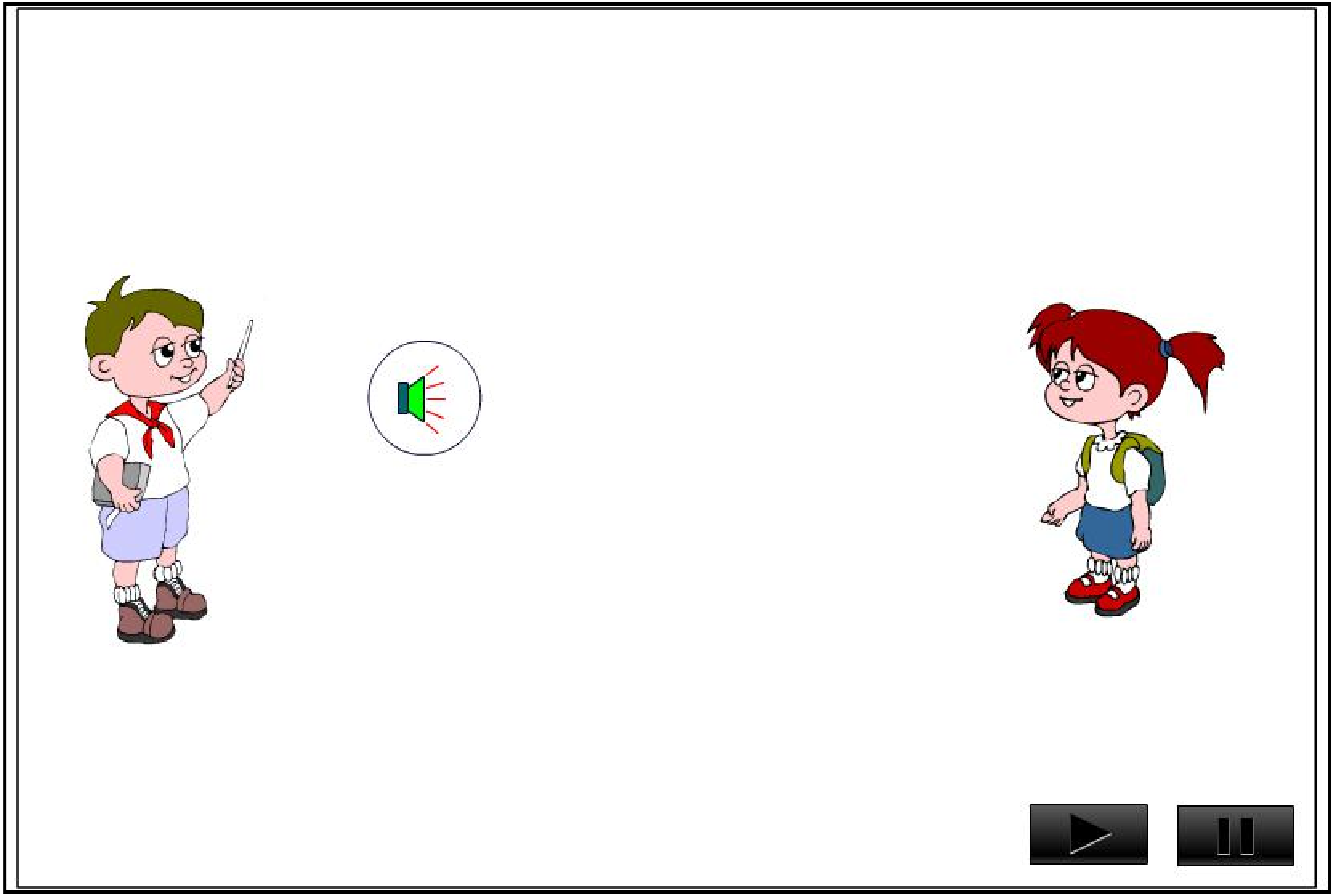
11

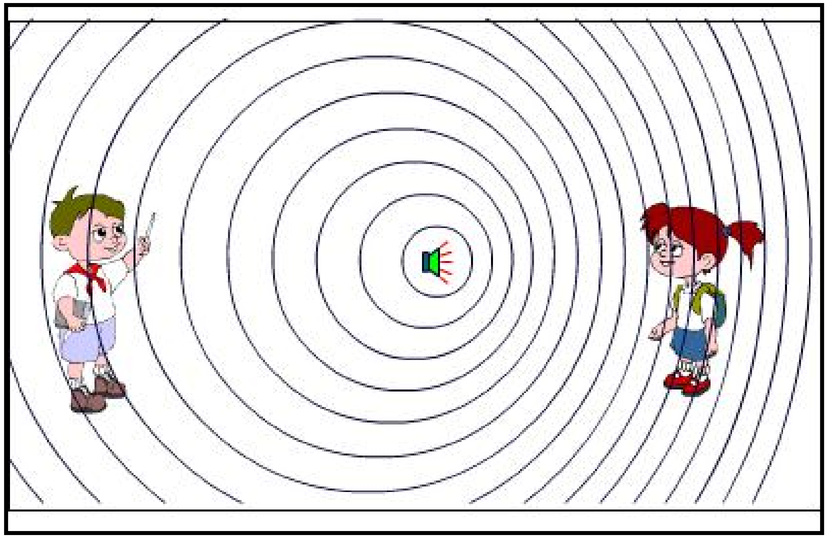
观察者接收的频率

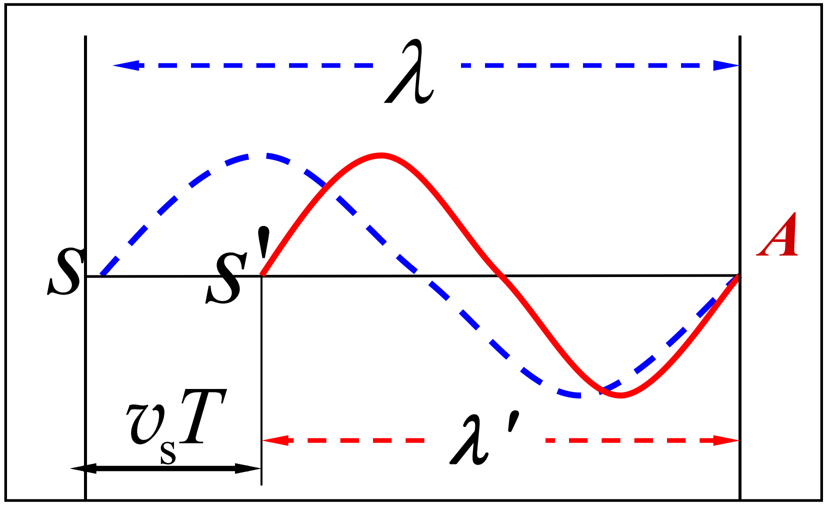
$$\nu' = \frac{u + v_o}{u}\nu$$ 观察者向波源运动

$$\nu' = \frac{u - v_o}{u}\nu$$ 观察者远离波源

二　观察者不动，波源相对介质以速度 v_{s} 运动







$$\nu' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda - v_s T} = \frac{u}{u - v_s}\nu$$

观察者接收的频率

$$\nu' = \frac{u}{u - v_s}\nu$$ 波源向观察者运动

$$\nu' = \frac{u}{u + v_s}\nu$$ 波源远离观察者

三　波源与观察者同时相对介质运动 (v_{s}, v_{o})

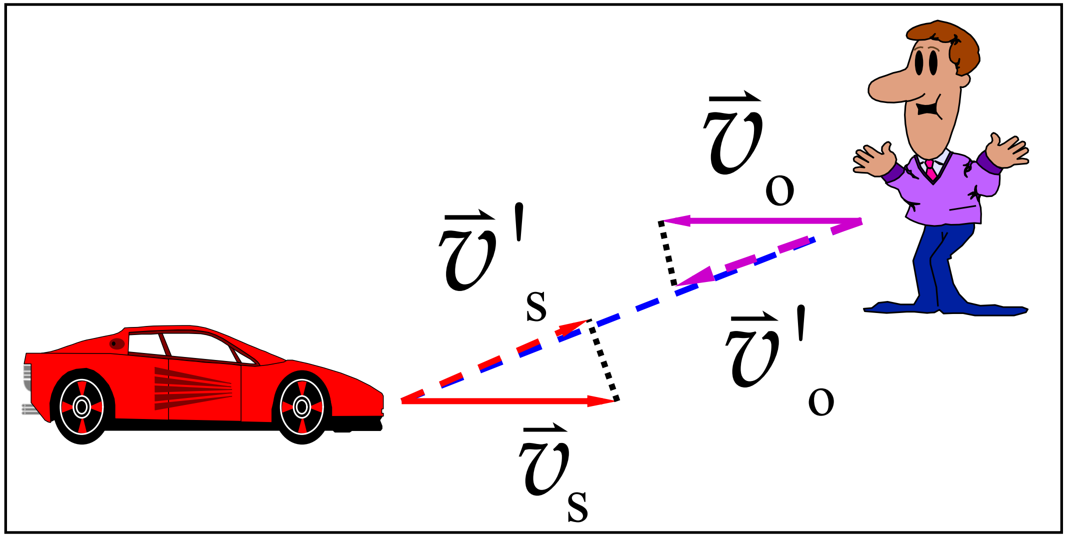
$$\boxed{\nu' = \frac{u \pm v_{o}}{u \mp v_{s}} \nu}$$

v_{o}　观察者向波源运动 $+$，远离 $-$.

v_{s}　波源向观察者运动 $-$，远离 $+$.

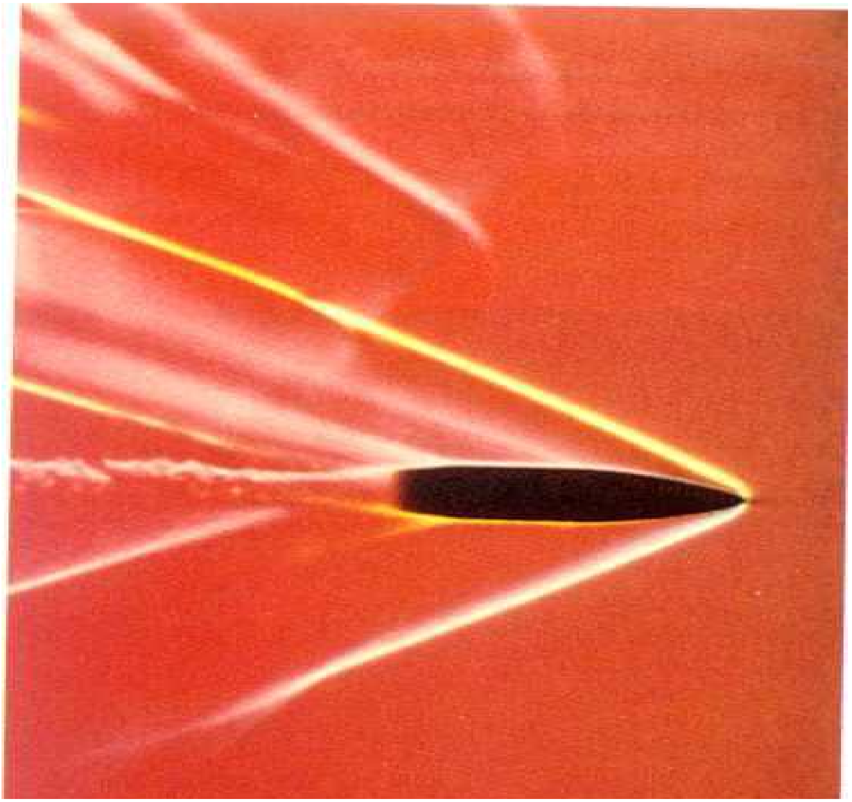
若波源与观察者不沿二者连线运动

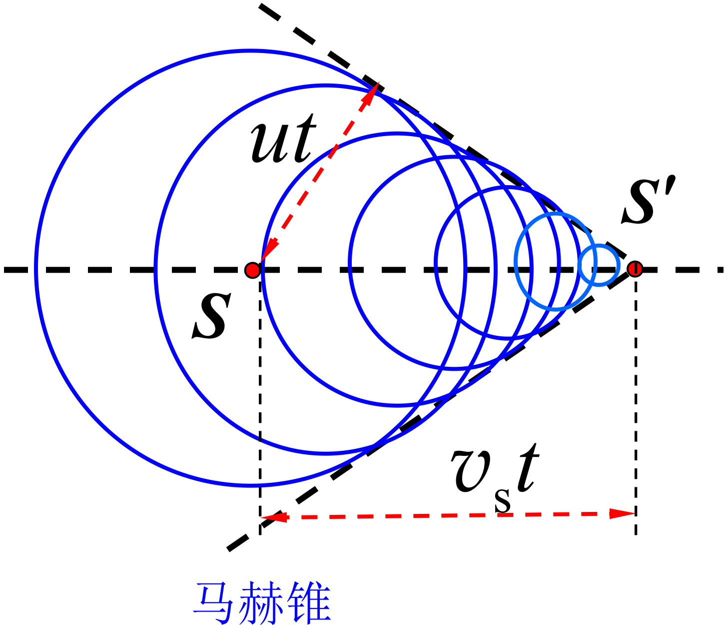
$$\boxed{\nu' = \frac{u \pm v'_{o}}{u \mp v'_{s}} \nu}$$



当 $\upsilon_s \gg u$ 时，
所有波前将聚集在一个圆锥面上，波的能量高度集中形成冲击波或激波，如核爆炸、超音速飞行等.

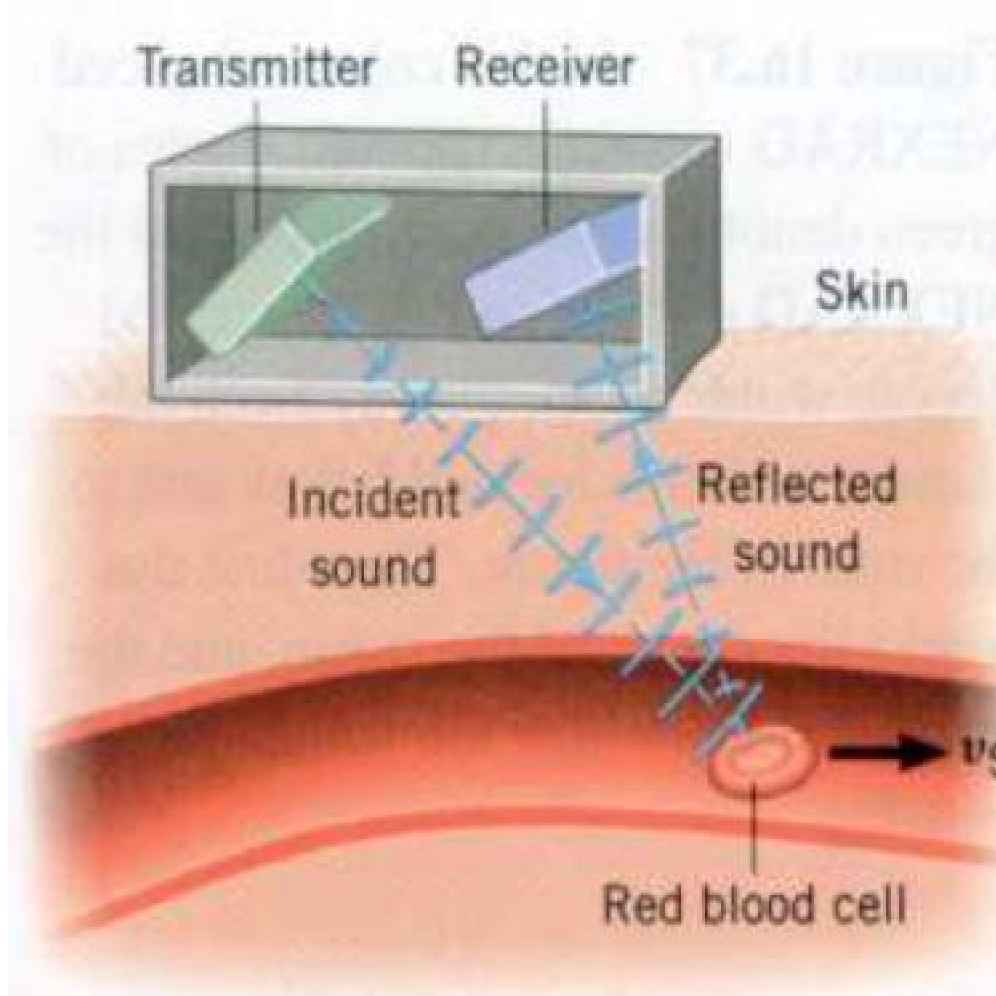
$$\nu_3 = \frac{u}{u-\upsilon_s}\nu_0$$





超音速的子弹在空气中形成的激波

警察用多普勒测速仪测速



超声多普勒效应测血流速

例1.设声波在媒质中的传播速度为*u*，声源的频率ν_S若声源不动，而接收器*R*相对媒质以速度υ_R沿着*S*, *R*连线向着声源*S*运动，则位于*S*, *R*连线中点的质点P的 振动频率为

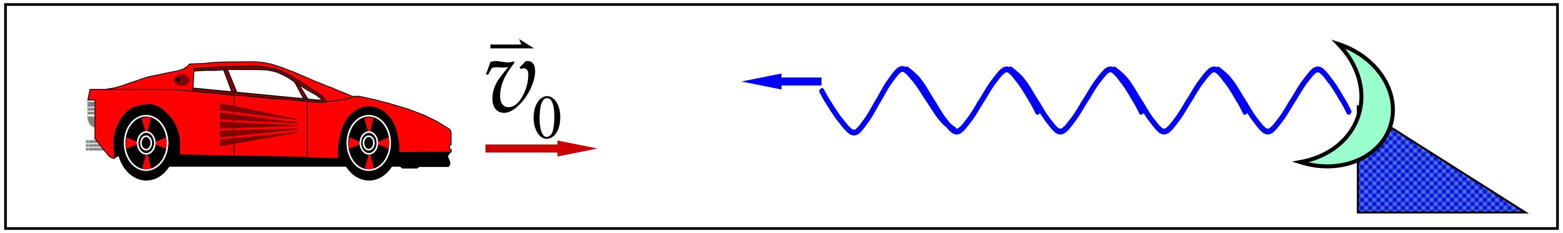
(1) ν_s

[redacted] $\dfrac{u+\upsilon_R}{u}\nu_s$

(3) $\dfrac{u}{u+\upsilon_R}\nu_s$

(4) $\dfrac{u}{u-\upsilon_R}\nu_s$

例2. 利用多普勒效应监测车速，固定波源发出频率为 $\nu = 100\text{kHz}$ 的超声波，当汽车向波源行驶时，与波源安装在一起的接收器接收到从汽车反射回来的波的频率为 $\nu'' = 110\text{kHz}$ ．已知空气中的声速为 $u = 330\text{ms}^{-1}$ ，求车速．



解　1）车为接收器 $\nu' = \dfrac{u + v_0}{u}\nu$

2）车为波源 $\nu'' = \dfrac{u}{u - v_s}\nu' = \dfrac{u + v_0}{u - v_s}\nu$

车速 $v_0 = v_s = \dfrac{\nu'' - \nu}{\nu'' + \nu}u = 56.8\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$