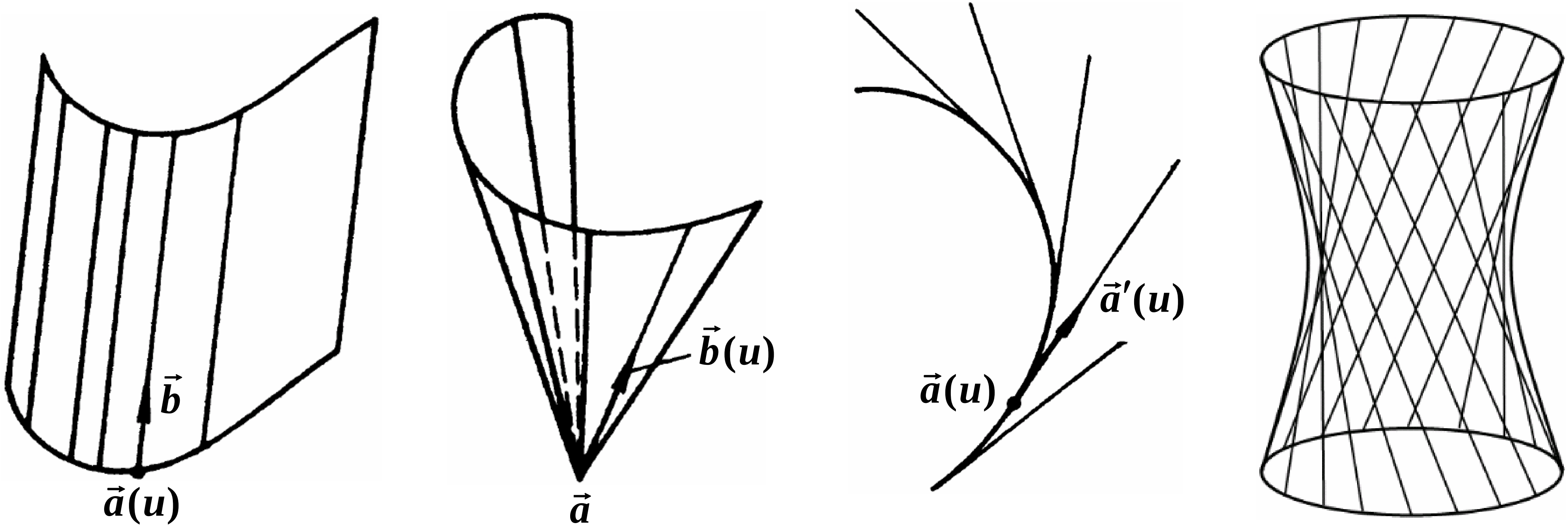
§2.4 直纹面和可展曲面

一、直纹面

二、可展曲面

一、直纹面

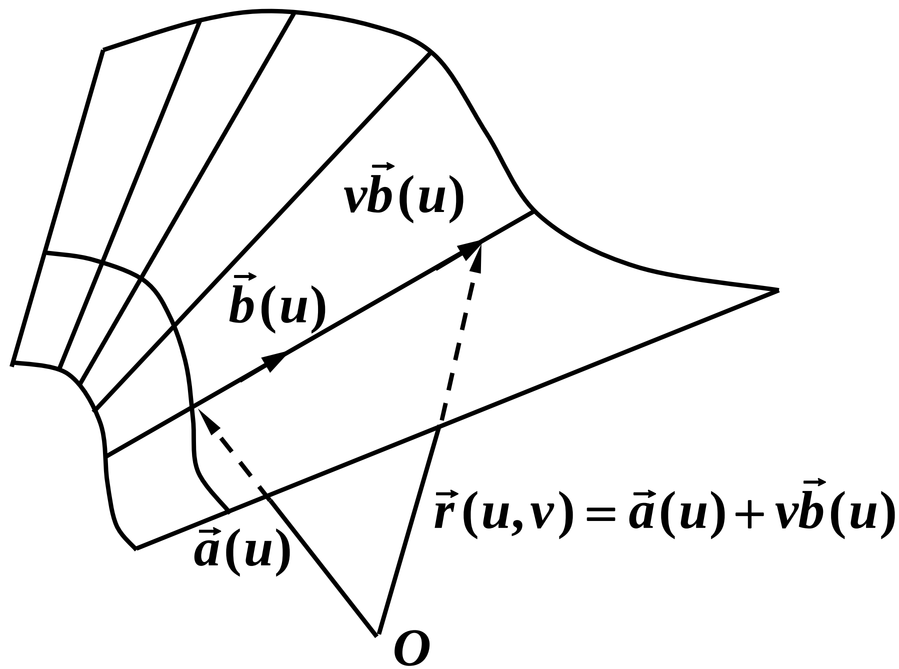
1. 概念　称由直线的轨迹构成的曲面为**直纹面**.



称组成直纹面的直线为**直纹面的直母线**.

称直纹面上和所有直母线都相交且只相交一次的曲线为**直纹面的导线**.

2. 直纹面的参数表示

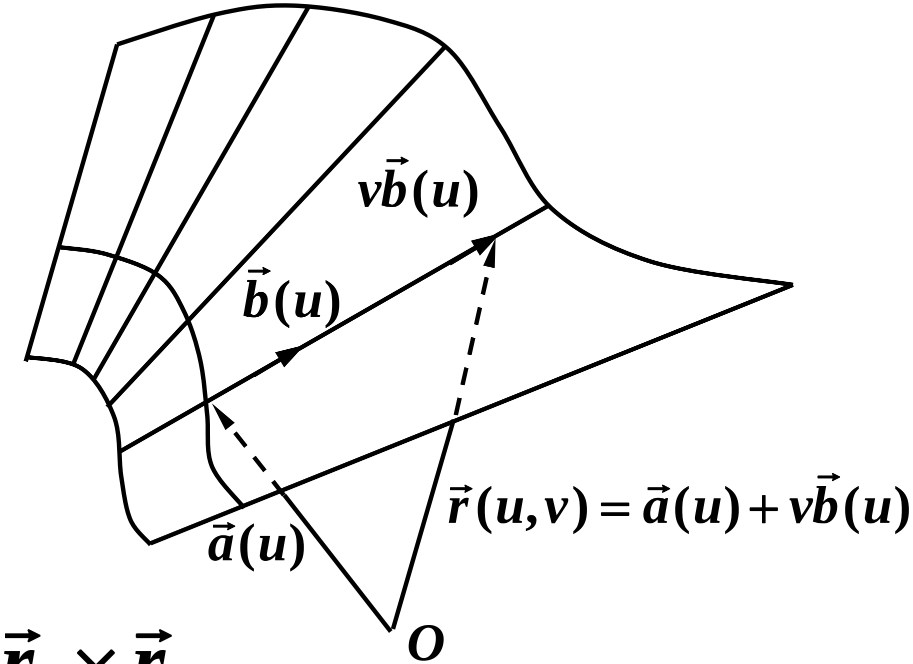


设曲线$\vec{a}=\vec{a}(u)$是一条导线,

过导线上的点$\vec{a}(u)$的直母线的单位向量为$\vec{b}(u)$,

则直纹面的方程为$\vec{r}(u,v)=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$.

3. 直母线上的法向量



u-曲线是导线

v-曲线是直母线

$$\vec{r}_u=\vec{a}'(u)+v\vec{b}'(u),\quad \vec{r}_v=\vec{b}(u).$$

$$\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\vec{a}'\times\vec{b}+v\vec{b}'\times\vec{b},\qquad \vec{n}=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}.$$

考虑当点P在直母线上移动时, P点处法向量的变化:

(1) 当$\vec{a}'\times\vec{b}\,//\,\vec{b}'\times\vec{b}$, 即$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=0$时, $\vec{n}$的方向保持不变.

此时在同一条直母线的点有相同的切平面.

(2) 当$\vec{a}'\times\vec{b}$与$\vec{b}'\times\vec{b}$不平行, 即$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')\neq 0$时,

此时, 点P在同一条直母线变化时, $\vec{n}$也有变化.

4. 直纹面上的Gauss曲率$K\leqslant 0$

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=-\frac{(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')^2}{(EG-F^2)^2}$$

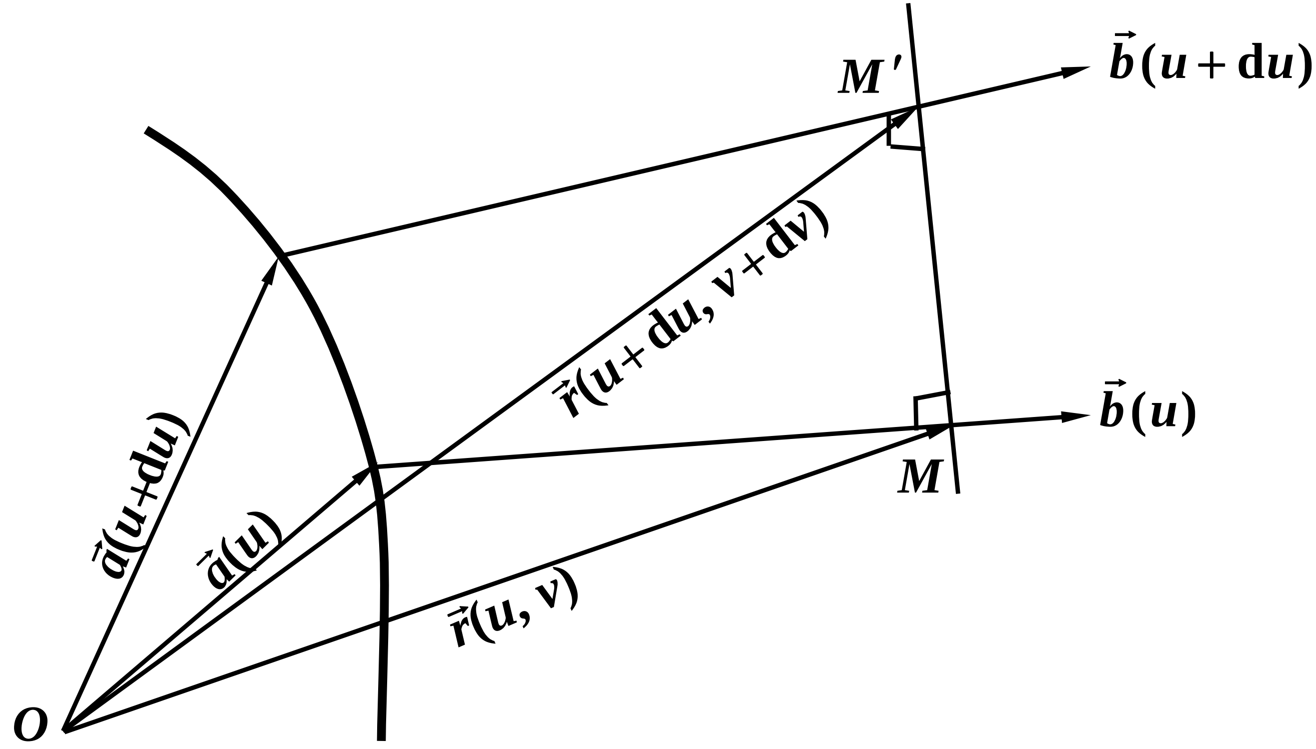
当$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')\neq 0$时，$K<0$,

此时的直纹面为双曲抛物面(马鞍面).

当$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=0$时，$K=0$,

此时的直纹面为可展曲面.

5. 腰点和腰曲线



腰点：邻近的两直母线的公垂线的垂足的极限位置.

腰曲线：腰点的轨迹.

腰曲线的方程：$\vec{r}(u)=\vec{a}(u)-\dfrac{\vec{a}'(u)\vec{b}'(u)}{[\vec{b}'(u)]^2}\vec{b}(u)$

导线为腰曲线的充要条件是$\vec{a}'(u)\vec{b}'(u)=0$.

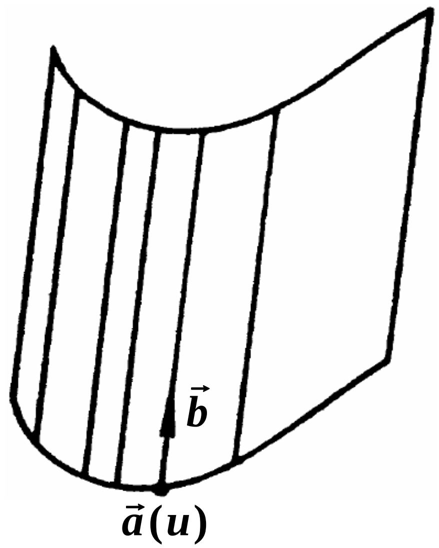
二、可展曲面

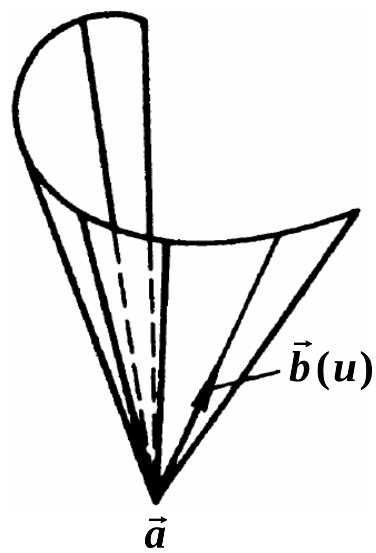
设S是直纹面,如果S的切平面沿每一条直母线是不变的,则称S是**可展曲面**.

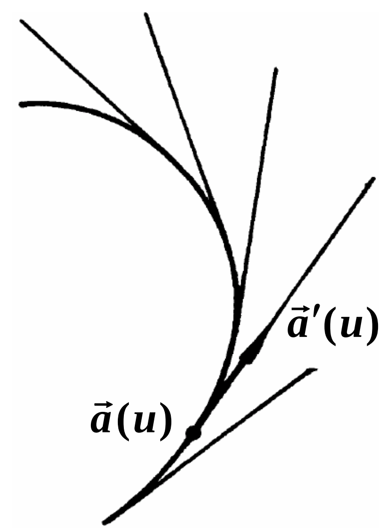
即 $\vec{r}(u,v)=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$, 且 $(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=0.$

P120 命题1

每一可展曲面或是柱面或是锥面或是一条曲线的切线曲面. 反之亦然.







单参数曲面族的包络

设$\{S_\alpha\}: F(x,y,z,\alpha)=0$是一族曲面，$\alpha$是参数，$F$有一阶连续偏导数. 若有一曲面$S$满足:

(1) 它的每个点是$\{S_\alpha\}$中某个曲面上的点，且这两个曲面在该公共点处有相同的切平面;

(2) 对于$\{S_\alpha\}$中的每一个曲面S_α，在S上存在一点$P_\alpha \in S_\alpha$，且S与S_α在P_α处有相同的切平面，

则称S为单参数曲面族$\{S_\alpha\}$的包络.

对于包络S上的每一点(x,y,z)有$\begin{cases} F(x,y,z,\alpha)=0 \\ F_\alpha(x,y,z,\alpha)=0 \end{cases}$

从中消去α得到一个方程$\varphi(x,y,z)=0$.

称该方程所表示的曲面S^*为曲面族的判别曲面.

当曲面上的点和包络上的点都是正常点时$S^*=S$.

称包络S与族中的曲面S_α相切的曲线为特征线.

特征线的轨迹就是包络.

曲面族中的每一曲面沿特征线与包络相切.

例 P131-5

求单参数平面族 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-z\sin\alpha=1$的包络.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

P131: 4

补充作业题

1. 判断下列曲面是不是可展曲面, 并给出理由.

(1) $\vec{r}(u,v)=(u+v,u-v,2uv)$;

(2) $xy=(z-1)^2$.

2. 求单参数曲面族 $x^2+(y-\alpha)^2+(z-2\alpha)^2=1$ 的包络.

3. 求双曲抛物面 $z=xy$ 沿着它与柱面 $x^2=y$ 的交线的切平面构成的单参数平面族的包络.

P124 命题2 一个曲面为可展曲面的充要条件是此曲面为单参数平面族的包络.

P125 命题3 一个曲面为可展曲面的充要条件是它的Gauss曲率恒等于零.

P126 命题4 曲面上的曲线是曲率线的充要条件是沿此曲线的曲面的法线组成一可展曲面.

P127 命题5 可展曲面可以与平面成等距对应.