四、微分方程组和高阶微分方程之间的互化

微分方程组可以化为高阶微分方程。高阶微分方程也可以化为微分方程组。

例 1：解方程组 $\begin{cases} y_1' = 1 - \dfrac{1}{y_2} \\ y_2' = \dfrac{1}{y_1 - x} \end{cases}$

解：从第二个方程有 $y_1 = x + \dfrac{1}{y_2'}$ （4.1）

上页 下页 返回

代入第一个方程得： $y_2 y_2'' - (y_2')^2 = 0$

这是一个不显含自变量的方程它的通解是：

$$y_2 = c_2 e^{c_1 x} \qquad (c_1 \neq 0, c_2 \neq 0)$$

代入（4.1）得 $y_1 = x + \dfrac{1}{c_1 c_2} e^{-c_1 x}$

于是方程组的通解是

$$\begin{cases} y_1 = x + \dfrac{1}{c_1 c_2} e^{-c_1 x} \\ y_2 = c_2 e^{c_1 x} \end{cases}$$

上页 下页 返回

例 2：把方程组$\begin{cases} y_1' = -7y_1 + y_2 \\ y_2' = -2y_1 - 5y_2 \end{cases}$化为高阶方程，再求它的解.

解：从第一个方程得： $y_2 = y_1' + 7y_1$ （4.2）

代入第一个方程得 $y_1'' + 12y_1' + 37y_1 = 0$

它的通解是： $y_1 = c_1 e^{-6x}\cos x + c_2 e^{-6x}\sin x$

代入（4.2）得

$$y_2 = e^{-6x}\left[c_1(\cos x - \sin x) + c_2(\cos x + \sin x)\right]$$

上页 下页 返回

例 3：把方程组$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_1 - 3y_2 + 3y_3 \end{cases}$化为高阶微分方程，再求它的解。

解：将第一个方程代入第二个方程得：$y_3 = y_1''$，又 $y_2 = y_1'$，代入第三个方程得：

$$y_1''' - 3y_1'' + 3y_1' - y_1 = 0$$

特征方程 $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 1$

得： $y_1 = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$

$$y_2 = y_1' = c_1 e^x + c_2 (x+1) e^x + c_3 (x^2 + 2x) e^x$$

$$y_3 = y_2' = c_1 e^x + c_2 (x+2) e^x + c_3 (x^2 + 4x + 2) e^x$$

这种化微分方程组为高阶微分方程的方法称为消去法。

对 n 阶微分方程初值问题:

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \\ y^{(i-1)}(x_0) = y_{i0} \quad i = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

令 $y_1 = y, y_2 = y', \cdots y_n = y^{(n-1)}$.

化为一阶微分方程组初值问题

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = F(x, y_1 y_2, \cdots, y_n) \\ y_i(x_0) = y_{i0} \quad i = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

这两个问题是等价的

特别，对n阶常系数线性齐次方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$$

令 $y_1=y, y_2=y', \cdots y_n=y^{(n-1)}$

等价的一阶线性方程组：

$$\begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2'=y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}'=y_n \\ y_n'=-a_0y_1-a_1y_2-\cdots-a_{n-1}y_n \end{cases}$$

特征方程

$$\begin{vmatrix} -\lambda & +1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & +1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & +1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0) \times (-1)^n = 0$$

五、二阶变系数线性微分方程

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad （5.1）$$

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad （5.2）$$

问题：已知 $y_1(x)$ 是齐次方程（5.2）的一个非零解，求方程（5.1）的解

假设方程（5.1）有形如 $y=y_1(x)u(x)$ 的解，代入方程，得:

$$u'' + \left(2\frac{y_1'}{y_1}+a_1(x)\right)u' = \frac{f(x)}{y_1} \qquad (5.3)$$

通解:

$$u = c_1 + c_2\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int a_1(x)dx}dx + \int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int a_1(x)dx}\left(\int y_1 f(x)e^{\int a_1(x)dx}dx\right)dx \qquad (5.4)$$

记 $y_2(x) = y_1\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int a_1(x)dx}dx$

$$y_p(x) = y_1\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int a_1(x)dx}\left(\int y_1 f(x)e^{\int a_1(x)dx}dx\right)dx$$

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)$$

由于 $\dfrac{y_2}{y_1} = \displaystyle\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a_1(x)dx} dx$

故 $\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' \neq 0 \quad \Rightarrow \; y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关.

又 $\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = \dfrac{1}{y_1^2} e^{-\int a_1(x)dx} \qquad \Rightarrow e^{\int a_1(x)dx} = \dfrac{1}{y_1 y_2' - y_1' y_2}$

代入（5.4）积分得到

$$y_p(x) = y_2 \int \frac{y_1}{y_1 y_2' - y_1' y_2} f(x)dx - y_1 \int \frac{y_2}{y_1 y_2' - y_1' y_2} f(x)dx$$

（5.5）

定理 5：若 $y_1(x)$ 是方程（5.2）的一个非零解，则

$$y_2(x)=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int a_1(x)dx}dx$$ 是方程（5.2）与 $y_1(x)$

线性无关的解，$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ 是方程（5.2）的通解，其中 c_1， c_2 是任意常数。

将（5.5）写成定积分的形式

$$y_p(x)=\int_{x_0}^{x}K(x,s)f(s)ds \qquad (5.6)$$

是非齐次方程（5.1）的一个特解，其中 x_0 是任意一点。

这里 $K(x,s)=\dfrac{1}{W(s)}\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}$

$$W(s)=\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) \end{vmatrix}$$

$W(s)$ 称为 $y_1(s)$ 和 $y_2(s)$ 的 **Wronsky**（伏朗斯基）

行列式

例 1：解方程 $y'' - 2y\sec^2 x = 0$

解：可以验证 $y_1(x) = \tan x$ 方程的一个特解

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a_1(x)dx} dx$$

$$= \tan x \int \cot^2 x dx = \tan x \int (\csc^2 x - 1) dx$$

$$= -x \tan x - 1$$

通解

$$y = c_1 \tan x + c_2 (x \tan x + 1)$$

例 2：解方程 $xy'' + 2y' - xy = -1$

解：$$y'' + \frac{2}{x}y' - y = -\frac{1}{x}$$

可以验证 $y_1(x) = \frac{1}{x}e^x$ 是相应的齐次方程的一个特解

$$y_2(x) = y_1\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a_1(x)dx} dx$$

$$= \frac{1}{x}e^x \int x^2 e^{-2x} e^{-\int \frac{2}{x}dx} dx = -\frac{1}{2x}e^{-x}$$

取 $y_2(x) = \frac{1}{x}e^{-x}$

$$W(s)=\begin{vmatrix} \frac{1}{s}e^{s} & \frac{1}{s}e^{-s} \\ (\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2})e^{s} & (-\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2})e^{-s} \end{vmatrix}=-\frac{2}{s^2}$$

$$K(x,s)=\begin{vmatrix} \frac{1}{s}e^{s} & \frac{1}{s}e^{-s} \\ \frac{1}{x}e^{x} & \frac{1}{x}e^{-x} \end{vmatrix}W^{-1}(s)=-\frac{s}{2x}(e^{s-x}-e^{x-s})$$

上页 下页 返回

$$y_p(x)=\frac{1}{2x}\int_0^x (e^{s-x}-e^{x-s})ds$$

$$=\frac{1}{2x}\left[(e^x-1)e^{-x}+(e^{-x}-1)e^x\right]$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}e^{-x}-\frac{1}{2x}e^x$$

通解为： $y=c_1\frac{1}{x}e^x+c_2\frac{1}{x}e^{-x}+\frac{1}{x}$ 。

上页 下页 返回