

# § 5.2 时间序列的 平稳性及其检验

# 一、问题的引出：非平稳变量与经典 回归模型

## 1.常见的数据类型

到目前为止，经典计量经济模型常用到的数据有：

- 时间序列数据（time-series data）;
- 截面数据(cross-sectional data)

★时间序列数据是最常见，也是最常用到的数据。

## 2.时间序列数据的平稳性检验

- 时间序列的平稳性可以替代**随机抽样假定**，采用平稳的时间序列作为样本，建立经典计量经济学模型，在模型设定正确的前提下，模型随机干扰项仍然满足**极限法则**和经典模型的**基本假设**（序列无关假设除外），特别是**正态性假设**。

- 采用平稳时间序列建立经典计量经济学结构模型，可以有效地减少**虚假回归**。

**虚假回归**: 在经济行为上**并不存在因果关系**的变量，如果将它们分别作为计量经济学模型的被解释变量和解释变量，也能够显示较强的统计上的因果关系。（有较高的 $R^2$ ）

非平稳时间序列由于具有共同的变化趋势，如消费、收入、价格序列往往表现为一致的上升或下降，容易出现虚假回归的情况。这时通过经典的**因果关系模型**进行分析，**一般不会得到有意义的结果**。

- ✓ 虚假回归，不仅可以出现在非平稳时间序列之间，也可能出现在平稳时间序列之间和截面数据序列之间。
- ✓ 当然，非平稳时间序列之间出现虚假回归的可能性更大
- ✓ 因此对时间序列进行平稳性检验，可以有效地减少虚假回归。

## 二、时间序列数据的平稳性

一般地，若对于每一特定的 $t(t \in T)$ ,  $X_t$ 为一随机变量，则称这一簇随机变量 $\{X_t\}$ 为一个随机过程。

若指标集 $T$ 为一连续区间，则 $\{X_t\}$ 为连续型随机过程。若 $T$ 为离散集合，如 $T = (0, 1, 2, \dots)$ 或 $T = (\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ ，则 $\{X_t\}$ 为离散型随机过程。

随机过程的统计特征通常用其分布及数字特征来刻画。

离散型时间指标集的随机过程通常称为随机型时间序列，简称时间序列。

经济分析中常用的时间序列数据都是经济变量随机序列的一个实现。



假定某个时间序列 $\{X_t\}$  ( $t=1, 2, \dots$ ) 是由某一随机过程 (**stochastic process**) 生成的, 如果满足下列条件:

- 1) 均值 $E(X_t)=\mu$ , 是与时间 $t$  无关的常数;
- 2) 方差 $\text{Var}(X_t)=\sigma^2$ , 是与时间 $t$  无关的常数;
- 3) 协方差 $\text{Cov}(X_t, X_{t+k})=\gamma_k$ , 是只与时期间隔 $k$ 有关, 与时间 $t$  无关的常数;

则称该随机时间序列是 (宽) 平稳的 (**stationary**), 而该随机过程是一平稳随机过程 (**stationary stochastic process**)。

## 严平稳时间序列

指时间序列 $\{X_t\}$ 联合分布函数与时间的位移无关

设 $\{X_t\}$ 为一随机过程,  $n, h$ 为任意实数,  
若联合分布函数满足

$$F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

则称 $\{X_t\}$ 为严格平稳过程, 它的分布结构不随着  
时间推移而变化。

例1. 一个最简单的随机时间序列是一具有零均值同方差的独立分布序列：

$$X_t = \mu_t, \quad \mu_t \sim N(0, \sigma^2)$$

该序列常被称为是一个白噪声（white noise）。

由于 $X_t$ 具有相同的均值与方差，且协方差为零，由定义，一个白噪声序列是平稳的。

例2. 另一个简单的随机时间列序被称为**随机游走** (**random walk**)，该序列由如下随机过程生成：

$$X_t = X_{t-1} + \mu_t$$

这里， $\mu_t$ 是一个白噪声。

容易知道该序列有相同的**均值**： $E(X_t) = E(X_{t-1})$

为了检验该序列是否具有相同的方差，可假设 $X_t$ 的初值为 $X_0$ ，则易知

$$X_t = X_0 + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_t$$

由于 $X_0$ 为常数， $\mu_t$ 是一个白噪声，因此 $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$

即 $X_t$ 的方差与时间 $t$ 有关而非常数，它是一非平稳序列。

- 然而，对X取一阶差分（**first difference**）：

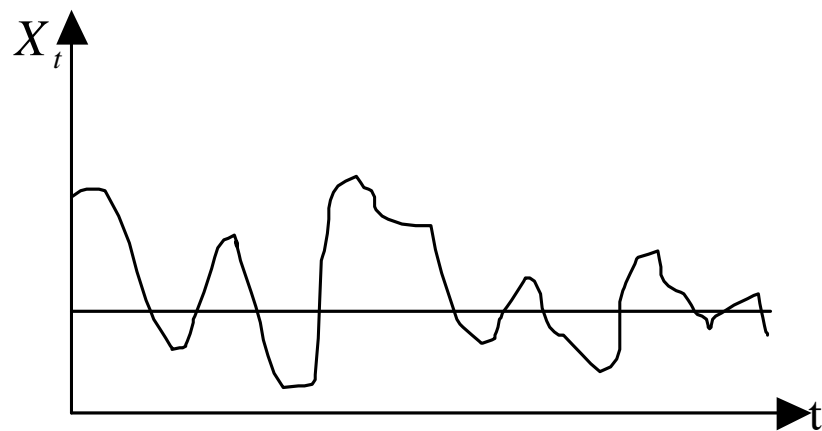
$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \mu_t$$

由于 $\mu_t$ 是一个白噪声，则序列 $\{\Delta X_t\}$ 是平稳的。

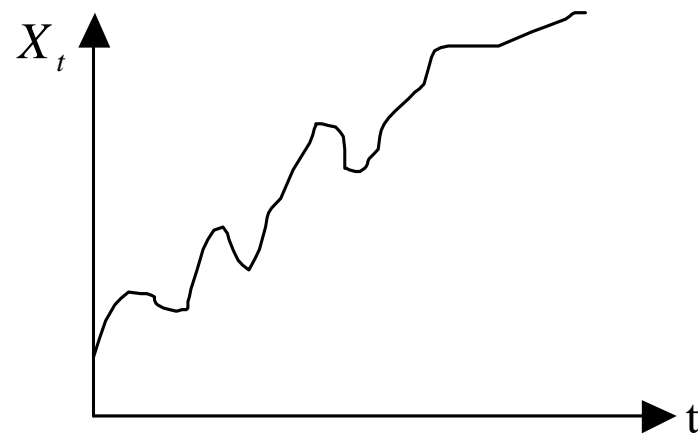
后面将会看到：如果一个时间序列是非平稳的，它常常可通过取差分的方法而形成平稳序列。

### 三、平稳性检验的图示判断

- 给出一个随机时间序列，首先可通过该序列的**时间路径图**来粗略地判断它是否是平稳的。
- 一个**平稳的时间序列**在图形上往往表现出一种围绕其均值不断波动的过程；
- 而**非平稳序列**则往往表现出在不同的时间段具有不同的均值（如持续上升或持续下降）。



(a)



(b)

图 9.1 平稳时间序列与非平稳时间序列图



- 进一步的判断:

## 检验样本自相关函数及其图形

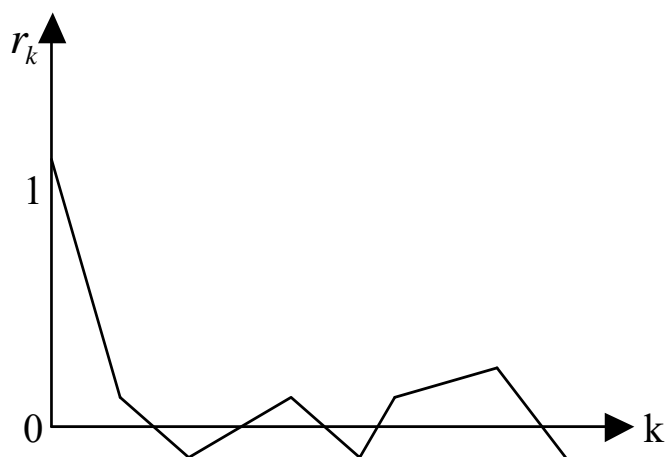
定义随机时间序列的**自相关函数**（**autocorrelation function, ACF**）如下：

$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$$

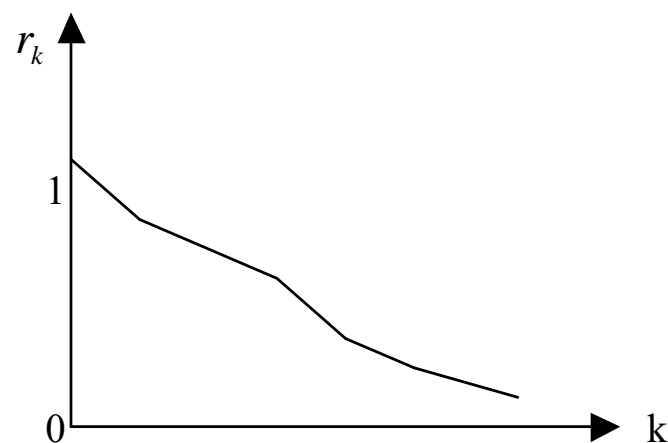
**样本自相关函数**（Sample autocorrelation function）。

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

易知，随着 $k$ 的增加，样本自相关函数下降且趋于零。但从下降速度来看，平稳序列要比非平稳序列快得多。



(a)



(b)

图 9.1.2 平稳时间序列与非平稳时间序列样本相关图

- 注意:

确定样本自相关函数 $r_k$ 某一数值是否足够接近于0是非常有用的，因为它可检验对应的自相关函数 $\rho_k$ 的真值是否为0的假设。

**Bartlett曾证明:**如果时间序列由白噪声过程生成，则对所有的 $k>0$ ，样本自相关系数近似地服从以0为均值， $1/n$  为方差的正态分布，其中 $n$ 为样本数。

也可检验对所有 $k>0$ ，自相关系数都为0的联合假设，这可通过如下 $Q_{LB}$ 统计量进行：

$$Q_{LB} = n(n+2) \sum_{k=1}^m \left( \frac{r_k^2}{n-k} \right)$$

该统计量近似地服从自由度为 $m$ 的 $\chi^2$ 分布（ $m$ 为滞后长度）。

因此：如果计算的 $Q$ 值大于显著性水平为 $\alpha$ 的临界值，则有 $1-\alpha$ 的把握拒绝所有 $\rho_k (k>0)$ 同时为0的假设。

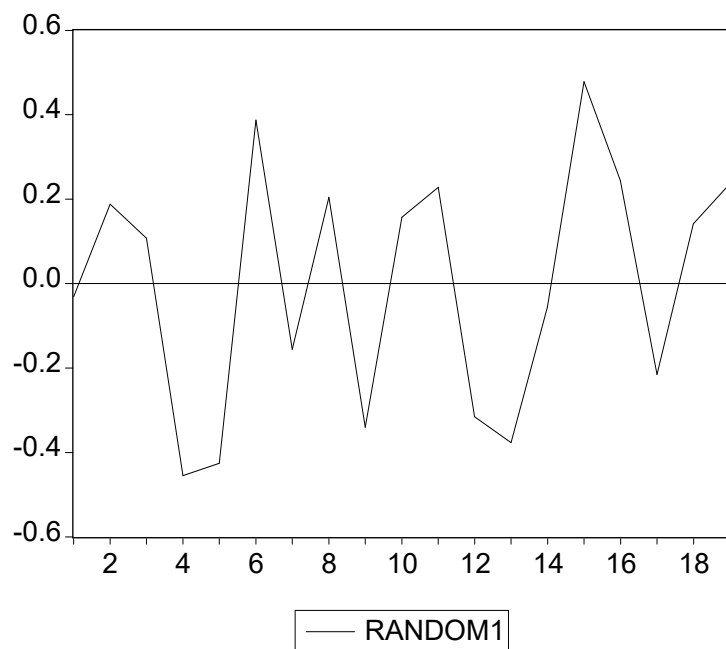
例：下表9.1.1序列Random1是通过一随机过程（随机函数）生成的有19个样本的随机时间序列。

表 9.1.1 一个纯随机序列与随机游走序列的检验

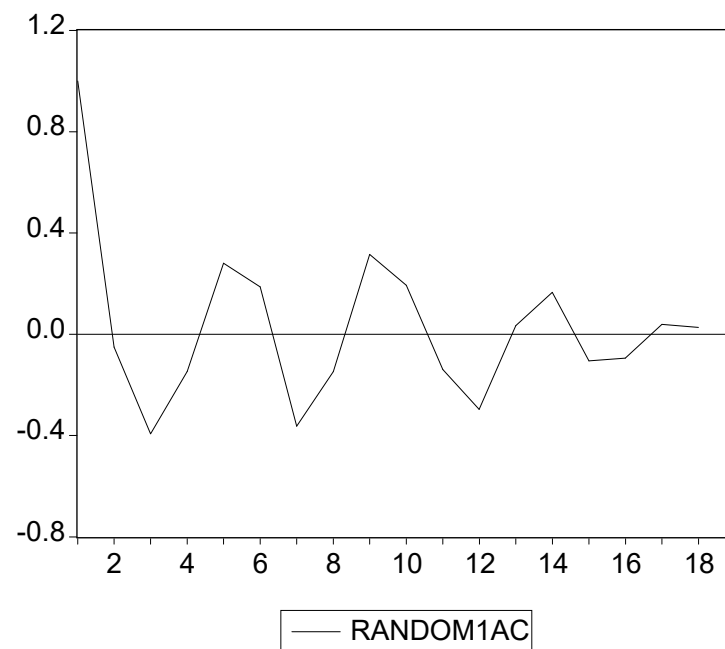
序号	Random1	自相关系数 $r_k$ (k=0, 1, ...17)	$Q_{LB}$	Random2	自相关系数 $r_k$ (k=0, 1, ...17)	$Q_{LB}$
1	-0.031	K=0, 1.000		-0.031	1.000	
2	0.188	K=1, -0.051	0.059	0.157	0.480	5.116
3	0.108	K=2, -0.393	3.679	0.264	0.018	5.123
4	-0.455	K=3, -0.147	4.216	-0.191	-0.069	5.241
5	-0.426	K=4, 0.280	6.300	-0.616	0.028	5.261
6	0.387	K=5, 0.187	7.297	-0.229	-0.016	5.269
7	-0.156	K=6, -0.363	11.332	-0.385	-0.219	6.745
8	0.204	K=7, -0.148	12.058	-0.181	-0.063	6.876
9	-0.340	K=8, 0.315	15.646	-0.521	0.126	7.454
10	0.157	K=9, 0.194	17.153	-0.364	0.024	7.477
11	0.228	K=10, -0.139	18.010	-0.136	-0.249	10.229
12	-0.315	K=11, -0.297	22.414	-0.451	-0.404	18.389
13	-0.377	K=12, 0.034	22.481	-0.828	-0.284	22.994
14	-0.056	K=13, 0.165	24.288	-0.884	-0.088	23.514
15	0.478	K=14, -0.105	25.162	-0.406	-0.066	23.866
16	0.244	K=15, -0.094	26.036	-0.162	0.037	24.004
17	-0.215	K=16, 0.039	26.240	-0.377	0.105	25.483
18	0.141	K=17, 0.027	26.381	-0.236	0.093	27.198
19	0.236			0.000		

- 容易验证：该样本序列的均值为0，方差为0.0789。

从图形看：它在其样本在0附近上下波动，且样本自相关系数迅速下降到0，随后在0附近波动且逐渐收敛于0。



(a)



(b)

由于该序列由一随机过程生成，可以认为不存在序列相关性，因此该序列为一白噪声。

- 根据Bartlett的理论： $\rho_k \sim N(0, 1/19)$

因此任一 $r_k$  ( $k > 0$ ) 的95%的置信区间都将是

$$[-Z_{0.025} \cdot \sigma, Z_{0.025} \cdot \sigma] = [-1.96 \times \sqrt{1/19}, 1.96 \times \sqrt{1/19}] = [-0.4497, 0.4497]$$

可以看出： $k > 0$ 时， $r_k$ 的值确实落在了该区间内，因此可以接受 $\rho_k$  ( $k > 0$ ) 为0的假设。

同样地，从 $Q_{LB}$ 统计量的计算值看，滞后17期的计算值为26.38，未超过5%显著性水平的临界值27.58，因此，可以接受所有的自相关系数 $\rho_k$  ( $k > 0$ ) 都为0的假设。

因此，该随机过程是一个平稳过程。

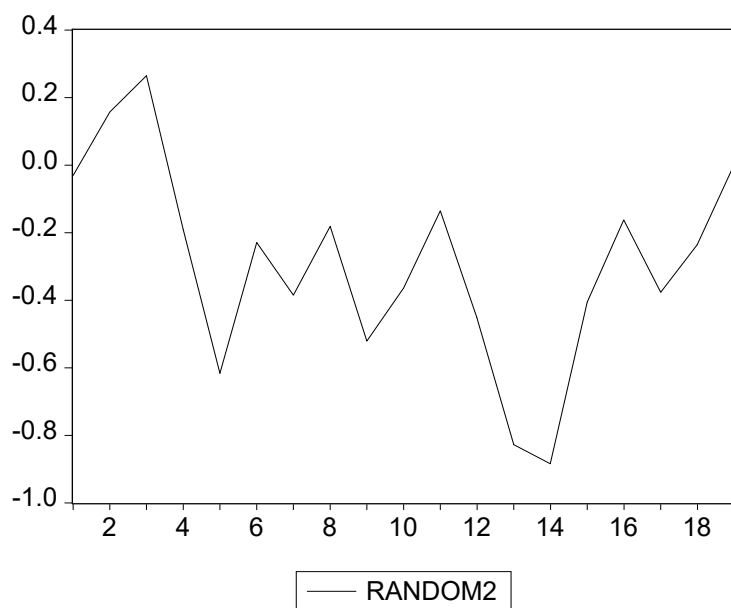


- 序列Random2是由一随机游走过程

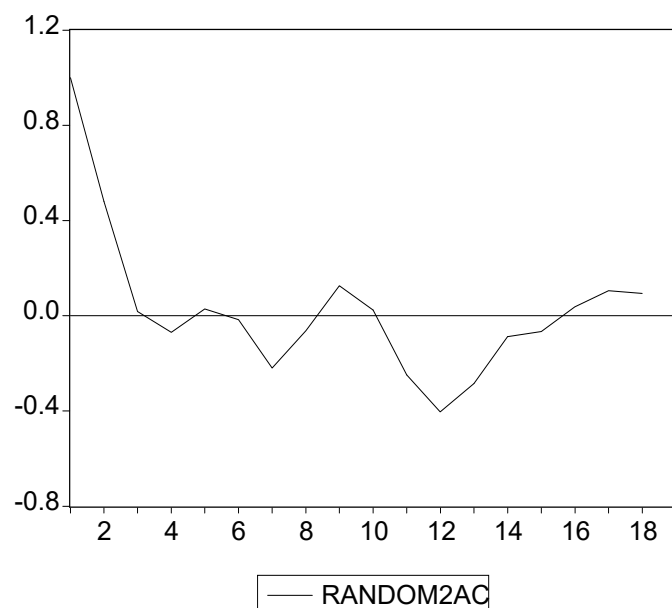
$$X_t = X_{t-1} + \mu_t$$

生成的一随机游走时间序列样本。

其中，第0项取值为0， $\mu_t$ 是由Random1表示的白噪声。



(a)



(b)

**图形表示出：**该序列具有相同的均值，但从样本自相关图看，虽然自相关系数迅速下降到0，但随着时间的推移，则在0附近波动且呈发散趋势。

样本自相关系数显示： $r_1=0.48$ ，落在了区间 $[-0.4497, 0.4497]$ 之外，因此在5%的显著性水平上拒绝 $\rho_1$ 的真值为0的假设。

该随机游走序列是非平稳的。

例 9.1.4 检验中国支出法 GDP 时间序列的平稳性。

表 9.1.2 1978~2000 年中国支出法 GDP (单位: 亿元)

年份	GDP	年份	GDP	年份	GDP
1978	3605.6	1986	10132.8	1994	46690.7
1979	4073.9	1987	11784	1995	58510.5
1980	4551.3	1988	14704	1996	68330.4
1981	4901.4	1989	16466	1997	74894.2
1982	5489.2	1990	18319.5	1998	79003.3
1983	6076.3	1991	21280.4	1999	82673.1
1984	7164.4	1992	25863.6	2000	89112.5
1985	8792.1	1993	34500.6		

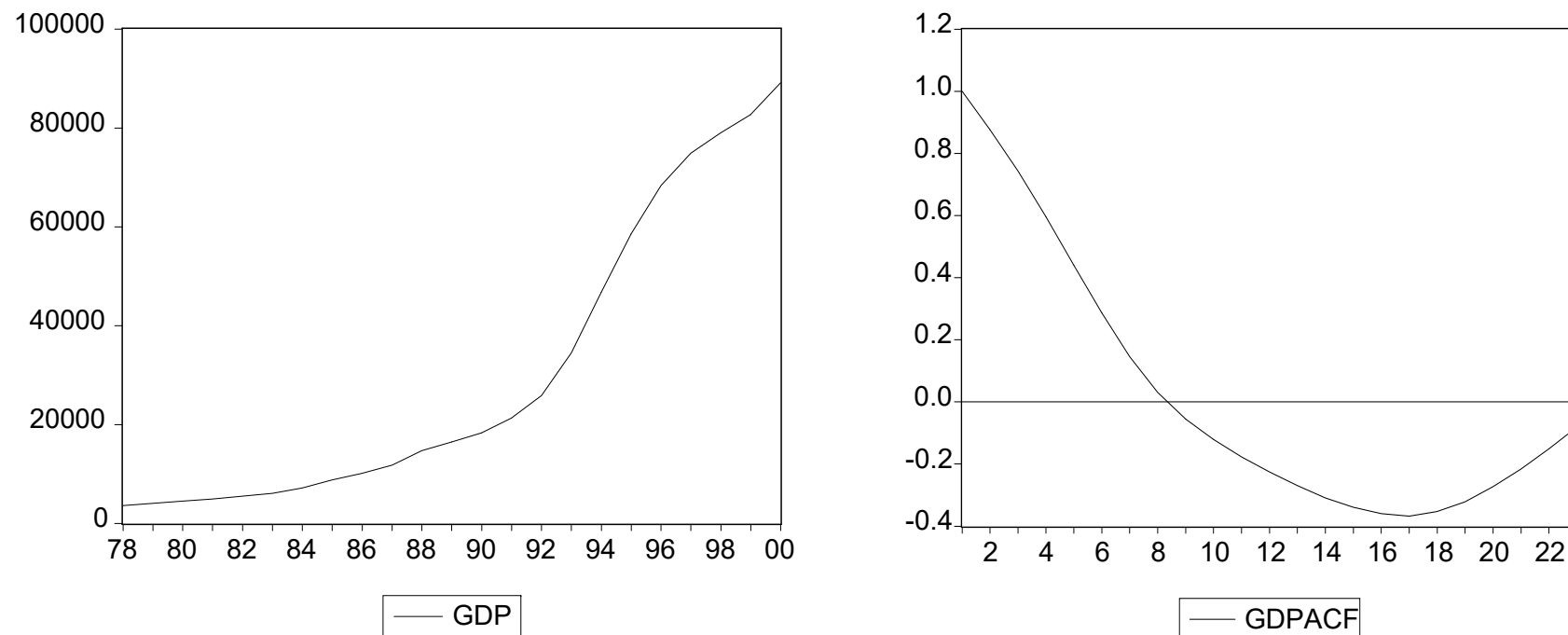


图 9.1.5 1978~2000 年中国 GDP 时间序列及其样本自相关图

- 图形：表现出了一个持续上升的过程，可初步判断是非平稳的。
- 样本自相关系数：缓慢下降，再次表明它的非平稳性。

•从滞后18期的 $Q_{LB}$ 统计量看:

$$Q_{LB}(18)=57.18>28.86=\chi^2_{0.05}$$

**拒绝:** 该时间序列的自相关系数在滞后1期之后的值全部为0的假设。

**结论:**

1978~2000年间中国GDP时间序列是非平稳序列。

- 例9.1.5 检验 § 2.10 中关于人均居民消费与人均国内生产总值这两时间序列的平稳性。

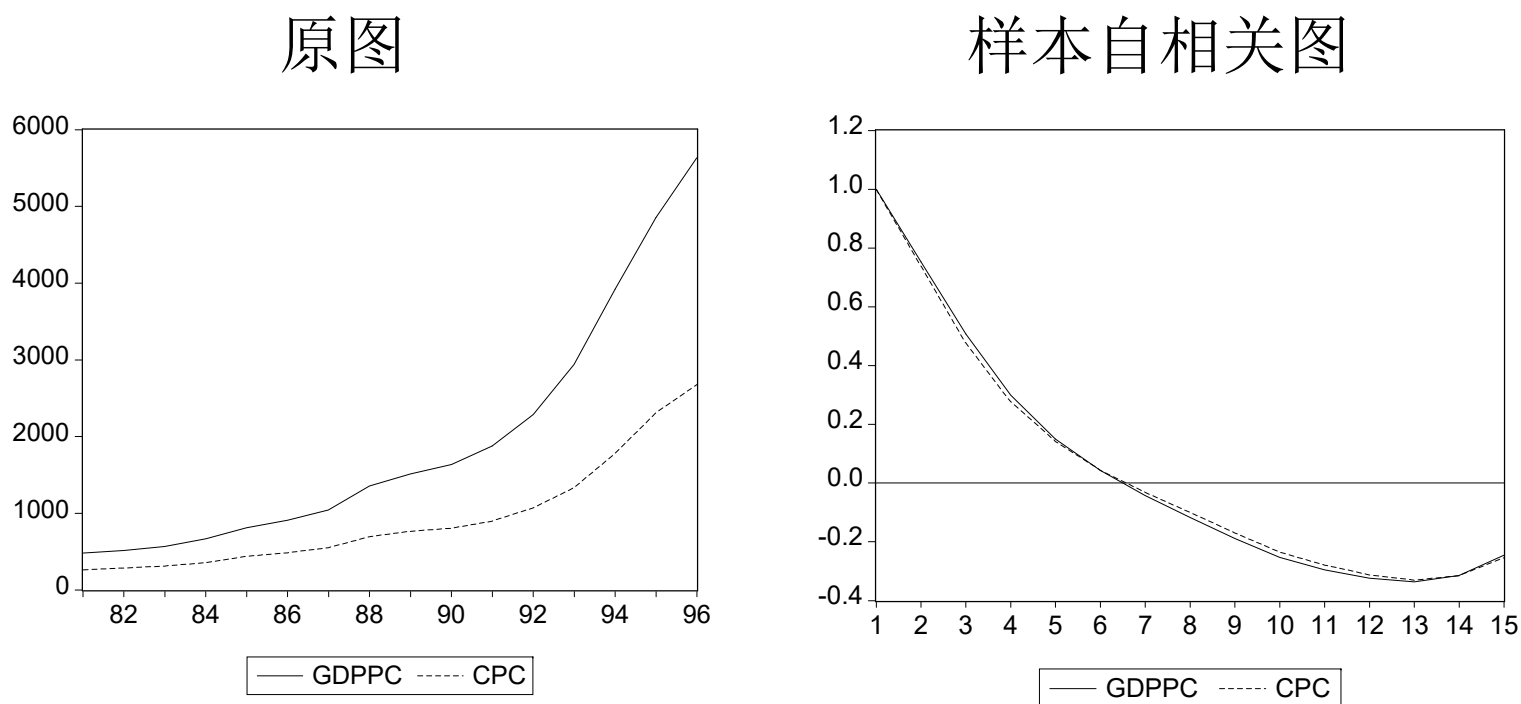


图 9.1.6 1981~1996 中国居民人均消费与人均 GDP 时间序列及其样本自相关图

- 从图形上看：人均居民消费（CPC）与人均国内生产总值（GDPPC）是非平稳的。

- 从滞后14期的 $Q_{LB}$ 统计量看：

CPC与GDPPC序列的统计量计算值均为57.18，超过了显著性水平为5%时的临界值23.68。再次表明它们的非平稳性。

就此来说，运用传统的回归方法建立它们的回归方程是无实际意义的。

不过，第三节中将看到，如果两个非平稳时间序列是协整的，则传统的回归结果却是有意义的，而这两时间序列恰是协整的。



## 四、平稳性的单位根检验

**单位根检验 (unit root test)** 是统计检验中普遍应用的一种检验方法。

## 1、DF检验

我们已知道，随机游走序列

$$X_t = X_{t-1} + \mu_t$$

是非平稳的，其中 $\mu_t$ 是白噪声。

而该序列可看成是随机模型

$$X_t = \rho X_{t-1} + \mu_t$$

中参数 $\rho=1$ 时的情形。

也就是说，我们对式

$$X_t = \rho X_{t-1} + \mu_t \quad (*)$$

做回归，如果确实发现 $\rho=1$ ，就说随机变量 $X_t$ 有一个单位根。

- $(*)$  式可变形为差分形式：

$$\begin{aligned} \Delta X_t &= (\rho - 1)X_{t-1} + \mu_t \\ &= \delta X_{t-1} + \mu_t \end{aligned} \quad (**)$$

检验  $(*)$  式是否存在单位根 $\rho=1$ ，也可通过  $(**)$  式判断是否有 $\delta=0$ 。

一般地：

- 检验一个时间序列 $X_t$ 的平稳性，可通过检验带有截距项的一阶自回归模型

$$X_t = \alpha + \rho X_{t-1} + \mu_t \quad (*)$$

中的参数 $\rho$ 是否小于1。

可以证明，(\*)式中的参数 $\rho > 1$ 或 $\rho = 1$ 时，时间序列是非平稳的；

或者：检验其等价变形式

$$\Delta X_t = \alpha + \delta X_{t-1} + \mu_t \quad (**)$$

中的参数 $\delta$ 是否小于0。

对应于(\*\*)式，则是 $\delta > 0$ 或 $\delta = 0$ 。

Dicky和Fuller于1976年提出了这一情形下t统计量服从的分布（这时的t统计量称为 $\tau$ 统计量），即**DF分布**（见表9.1.3）。

表 9.1.3 DF 分布临界值表

显著性水平	样 本 容 量					t分布临界值 ( $n=\infty$ )
	25	50	100	500	$\infty$	
0.01	-3.75	-3.58	-3.51	-3.44	-3.43	-2.33
0.05	-3.00	-2.93	-2.89	-2.87	-2.86	-1.65
0.10	-2.63	-2.60	-2.58	-2.57	-2.57	-1.28

- 因此，可通过OLS法估计

$$\Delta X_t = \alpha + \delta X_{t-1} + \mu_t$$

并计算t统计量的值，与DF分布表中给定显著性水平下的临界值比较：

如果：t < 临界值，则拒绝零假设  $H_0: \delta = 0$ ，  
认为时间序列不存在单位根，是平稳的。

## 2、ADF检验

**DF**检验假定了时间序列是由具有白噪声随机误差项的一阶自回归过程**AR(1)**生成的。

但在实际检验中，时间序列可能由更高阶的自回归过程生成的，或者随机误差项并非白噪声，这样用**OLS**法进行估计均会表现出随机误差项出现自相关（autocorrelation），导致DF检验无效。

另外，如果时间序列包含有明显的随时间变化的某种趋势（如上升或下降），则也容易导致上述检验中的自相关随机误差项问题。

为了保证DF检验中随机误差项的白噪声特性，Dicky和Fuller对DF检验进行了扩充，形成了**ADF（Augment Dickey-Fuller）**检验。

**ADF检验是通过下面三个模型完成的：**

模型 1: 
$$\Delta X_t = \delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^m \beta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (*)$$

模型 2: 
$$\Delta X_t = \alpha + \delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^m \beta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (**)$$

模型 3: 
$$\Delta X_t = \alpha + \beta t + \delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^m \beta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (***)$$

- **模型3 中的t是时间变量**，代表了时间序列随时间变化的某种趋势（如果有的话）。
- **检验的假设都是：针对H1:  $\delta < 0$ , 检验 H0:  $\delta = 0$ , 即存在一单位根。**



每个模型中选取适当的滞后差分项，估计出上述三个模型的适当形式。然后从模型3开始，然后模型2、模型1进行检验

1) 只要其中有一个模型的检验结果拒绝了零假设，就可以认为时间序列是平稳的；

2) 当三个模型的检验结果都不能拒绝零假设时，则认为时间序列是非平稳的。

**检验原理**与DF检验相同，只是对模型1、2、3进行检验时，有各自相应的临界值。

表 9.1.4 不同模型使用的 ADF 分布临界值表

模型	统计量	样本容量	0.01	0.025	0.05	0.10
1	$\tau_{\delta}$	25	-2.66	-2.26	-1.95	-1.60
		50	-2.62	-2.25	-1.95	-1.61
		100	-2.60	-2.24	-1.95	-1.61
		250	-2.58	-2.23	-1.95	-1.61
		500	-2.58	-2.23	-1.95	-1.61
		>500	-2.58	-2.23	-1.95	-1.61
2	$\tau_{\delta}$	25	-3.75	-3.33	-3.00	-2.62
		50	-3.58	-3.22	-2.93	-2.60
		100	-3.51	-3.17	-2.89	-2.58
		250	-3.46	-3.14	-2.88	-2.57
		500	-3.44	-3.13	-2.87	-2.57
		>500	-3.43	-3.12	-2.86	-2.57
	$\tau_{\alpha}$	25	3.41	2.97	2.61	2.20
		50	3.28	2.89	2.56	2.18
		100	3.22	2.86	2.54	2.17
		250	3.19	2.84	2.53	2.16
		500	3.18	2.83	2.52	2.16
		>500	3.18	2.83	2.52	2.16
3	$\tau_{\delta}$	25	-4.38	-3.95	-3.60	-3.24
		50	-4.15	-3.80	-3.50	-3.18
		100	-4.04	-3.73	-3.45	-3.15
		250	-3.99	-3.69	-3.43	-3.13
		500	-3.98	-3.68	-3.42	-3.13
		>500	-3.96	-3.66	-3.41	-3.12
	$\tau_{\alpha}$	25	4.05	3.59	3.20	2.77
		50	3.87	3.47	3.14	2.75
		100	3.78	3.42	3.11	2.73
		250	3.74	3.39	3.09	2.73
		500	3.72	3.38	3.08	2.72
		>500	3.71	3.38	3.08	2.72
	$\tau_{\beta}$	25	3.74	3.25	2.85	2.39
		50	3.60	3.18	2.81	2.38
		100	3.53	3.14	2.79	2.38
		250	3.49	3.12	2.79	2.38
		500	3.48	3.11	2.78	2.38
		>500	3.46	3.11	2.78	2.38

例3 检验1978~2000年间GDP时间序列的平稳性。

1) 经过尝试, 模型3取了2阶滞后:

$$\Delta GDP_t = -1011.33 + 229.27T + 0.0093GDP_{t-1} + 1.50\Delta GDP_{t-1} - 1.01\Delta GDP_{t-2}$$

(-1.26)    (1.91)            (0.31)            (8.94)            (-4.95)

通过拉格朗日乘数检验 (Lagrange multiplier test) 对随机误差项的自相关性进行检验:

$$LM(1) = 0.92, \quad LM(2) = 4.16,$$

小于5%显著性水平下自由度分别为1与2的 $\chi^2$ 分布的临界值, 可见不存在自相关性, 因此该模型的设定是正确的。

从 $\delta$ 的系数看,  $t >$  临界值, 不能拒绝存在单位根的原假设。

时间T的t统计量小于ADF分布表中的临界值, 因此不能拒绝不存在趋势项的原假设。需进一步检验模型2。

## 回顾：拉格朗日乘数（Lagrange multiplier）检验

拉格朗日乘数检验适合于：高阶序列相关以及模型中存在滞后被解释变量的情形。

对于模型

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \mu_i$$

如果怀疑随机扰动项存在**p阶序列相关**：

$$\mu_t = \rho_1 \mu_{t-1} + \rho_2 \mu_{t-2} \cdots + \rho_p \mu_{t-p} + \varepsilon_t$$

作辅助回归：

$$\tilde{e}_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \tilde{e}_1 \mu_{t-1} + \cdots + \rho_p \tilde{e}_{t-p} + \varepsilon_t$$

## 回顾：拉格朗日乘数（Lagrange multiplier）检验

计算：

$$LM = (n - p)R^2 \sim \chi^2(p)$$

其中， $n$ 为样本容量， $R^2$ 为如下辅助回归的可决系数：

给定 $\alpha$ ，查临界值 $\chi_{\alpha}^2(p)$ ，与LM值比较，做出判断，

实际检验中，可从1阶、2阶、...逐次向更高阶检验。

2) 经试验, 模型2中滞后项取2阶:

$$\Delta GDP_t = 357.45 + 0.057GDP_{t-1} + 1.65\Delta GDP_{t-1} - 1.15\Delta GDP_{t-2}$$

$$\begin{array}{cccc} (-0.90) & (3.38) & (10.40) & (-5.63) \end{array}$$

$$\text{LM (1)} = 0.57 \quad \text{LM (2)} = 2.85$$

LM检验表明模型残差不存在自相关性, 因此该模型的设定是正确的。

从 $GDP_{t-1}$ 的参数值看, 其t统计量为正值, 大于临界值, 不能拒绝存在单位根为零假设。

常数项的t统计量小于AFD分布表中的临界值, 不能拒绝不存常数项的零假设。需进一步检验模型1。

3) 经试验，模型1中滞后项取2阶：

$$\Delta GDP_t = 0.063GDP_{t-1} + 1.701\Delta GDP_{t-1} - 1.194\Delta GDP_{t-2}$$

$$(4.15) \qquad (11.46) \qquad (-6.05)$$

$$LM(1) = 0.17 \qquad LM(2) = 2.67$$

LM检验表明模型残差项不存在自相关性，因此模型的设定是正确的。

从 $GDP_{t-1}$ 的参数值看，其t统计量为正值，大于临界值，不能拒绝存在单位根为零假设。

- 可断定中国支出法GDP时间序列是非平稳的。

- 例4 检验 § 2. 10中关于人均居民消费与人均国内生产总值这两时间序列的平稳性。（29个样本）

1)对**中国人均国内生产总值GDPPC**来说，经过尝试，三个模型的适当形式分别为

模型 3:

$$\Delta GDPPC_t = -75.08 + 45.36t - 0.15GDPPC_{t-1} + 1.03\Delta GDPPC_{t-1}$$

$$\begin{matrix} (-0.75) & (1.93) & (-1.04) & (2.31) \end{matrix}$$

$$LM(1) = 2.88 \quad LM(2) = 1.86$$

模型 2:

$$\Delta GDPPC_t = -192.02 + 0.652GDPPC_{t-1} + 0.040\Delta GDPPC_{t-1} - 1.425\Delta GDPPC_{t-2}$$

$$\begin{matrix} (-1.78) & (3.26) & (0.08) & (-2.96) \end{matrix}$$

$$-0.412\Delta GDPPC_{t-3} - 1.403\Delta GDPPC_{t-4}$$

$$\begin{matrix} (-0.67) & (-2.20) \end{matrix}$$

$$LM(1) = 1.67 \quad LM(2) = 1.71 \quad LM(3) = 6.28 \quad LM(4) = 8.92$$



模型 1:

$$\Delta GDP_{PC_t} = 0.196 GDP_{PC_{t-1}} + 0.875 \Delta GDP_{PC_{t-1}} - 0.975 \Delta GDP_{PC_{t-2}}$$

(2.63)

(2.61)

(-2.72)

LM (1) = 0.20

LM (2) = 3.53

- 三个模型中参数的估计值的t统计量均大于各自的临界值，因此不能拒绝存在单位根为零假设。
- 结论：人均国内生产总值（GDP<sub>PC</sub>）是非平稳的。

## 2) 对于人均居民消费CPC时间序列来说, 三个模型的适当形式为

模型 3:

$$\Delta CPC_t = -26.23 + 34.98t - 0.3646CPC_{t-1} + 1.4627\Delta CPC_{t-1}$$

(-0.477) (2.175) (-1.478) (2.318)

LM(1)=1.577 LM(2)=1.834

模型 2:

$$\Delta CPC_t = -79.88 + 0.545CPC_{t-1} + 0.508\Delta CPC_{t-1} - 1.655\Delta CPC_{t-2} - 0.027\Delta CPC_{t-3}$$

(-1.37) (3.37) (1.16) (-3.44) (-0.05)

$$-1.824\Delta CPC_{t-4}$$

(-3.03)

LM(1)=3.57 LM(2)= 4.10 LM(3)=4.89 LM(4)= 8.99

模型 1:

$$\Delta CPC_t = 0.37CPC_{t-1} + 0.88\Delta CPC_{t-1} - 1.48\Delta CPC_{t-2} + 0.08\Delta CPC_{t-3} - 1.71\Delta CPC_{t-4}$$

(3.60)	(2.37)	(-2.97)	(0.12)	(-2.68)
LM(1)=1.83	LM(2)= 1.84	LM(3)=2.00	LM(4)=2.33	

- 三个模型中参数 $CPC_{t-1}$ 的t统计量的值均比ADF临界值表中各自的临界值大，不能拒绝该时间序列存在单位根的假设，
- 因此，可判断人均居民消费序列CPC是非平稳的。

## 五、单整、趋势平稳与差分平稳随机过程

# 1.单整

随机游走序列

$$X_t = X_{t-1} + \mu_t$$

经差分后等价地变形为

$$\Delta X_t = \mu_t$$

由于 $\mu_t$ 是一个白噪声，因此差分后的序列 $\{\Delta X_t\}$ 是平稳的。

如果一个时间序列经过一次差分变成平稳的，就称原序列是一阶单整（**integrated of 1**）序列，记为**I(1)**。

一般地，如果一个时间序列经过**d**次差分后变成平稳序列，则称原序列是**d 阶单整**（**integrated of d**）**序列**，记为**I(d)**。

显然，**I(0)**代表一平稳时间序列。

现实经济生活中：

大多数非平稳的时间序列一般可通过一次或多次差分的形式变为平稳的。

但也有一些时间序列，无论经过多少次差分，都不能变为平稳的。这种序列被称为**非单整的**（**non-integrated**）。

例 上例中GDP的单整性（1978~2000年23个数据）

经过试算，发现中国支出法GDP是1阶单整的，  
适当的检验模型为

$$\Delta^2 GDP_t = 1174.08 + 261.25t - 0.495\Delta GDP_{t-1} + 0.966\Delta^2 GDP_{t-1}$$

$$\begin{array}{cccc} (-1.99) & (4.23) & (-5.18) & (6.42) \end{array}$$

$$R^2=0.7501 \quad LM(1)=0.40 \quad LM(2)=1.29$$

例 上例中中国人均居民消费与人均国内生产总值的单整性(29个数据)

经过试算，发现**中国人均国内生产总值GDPPC是2阶单整的**，适当的检验模型为

$$\Delta^3 GDPPC_t = -0.60 \Delta^2 GDPPC_{t-1}$$

(-2.17)

$$R^2=0.2778, \quad LM(1)=0.31 \quad LM(2)=0.54$$

同样地，**CPC也是2阶单整的**，适当的检验模型为

$$\Delta^3 CPC_t = -0.67 \Delta^2 CPC_{t-1}$$

(-2.08)

$$R^2=0.2515 \quad LM(1)=1.99 \quad LM(2)=2.36$$



## 2. 趋势平稳与差分平稳随机过程

考虑如下的含有一阶自回归的随机过程：

$$X_t = \alpha + \beta t + \rho X_{t-1} + \mu_t \quad (*)$$

其中： $\mu_t$ 是一白噪声， $t$ 为一时间趋势。

1)如果 $\rho=1$ ， $\beta=0$ ，则 $(*)$ 式成为一带位移的随机游走过程：

$$X_t = \alpha + X_{t-1} + \mu_t \quad (**)$$

根据 $\alpha$ 的正负， $X_t$ 表现出明显的上升或下降趋势。这种趋势称为**随机性趋势 (stochastic trend)**。

2)如果 $\rho=0$ ， $\beta \neq 0$ ，则 $(*)$ 式成为一带时间趋势的随机变化过程：

$$X_t = \alpha + \beta t + \mu_t \quad (***)$$

根据 $\beta$ 的正负， $X_t$ 表现出明显的上升或下降趋势。这种趋势称为**确定性趋势 (deterministic trend)**。

3) 如果 $\rho=1$ ,  $\beta \neq 0$ , 则 $X_t$ 包含有确定性与随机性两种趋势。

判断一个非平稳的时间序列, 它的趋势是随机性的还是确定性的, 可通过ADF检验中所用的第3个模型进行。

因此, (1)如果检验结果表明所给时间序列有单位根, 且时间变量前的参数显著为零, 则该序列显示出随机性趋势;

(2)如果没有单位根, 且时间变量前的参数显著地异于零, 则该序列显示出确定性趋势。

随机性趋势可通过差分的方法消除

如：对式

$$X_t = \alpha + X_{t-1} + \mu_t$$

可通过差分变换为

$$\Delta X_t = \alpha + \mu_t$$

该时间序列称为**差分平稳过程（difference stationary process）**；

确定性趋势无法通过差分的方法消除，而只能通过除去趋势项消除，

如：对式

$$X_t = \alpha + \beta t + \mu_t$$

可通过除去 $\beta t$ 变换为

$$X_t - \beta t = \alpha + \mu_t$$

该时间序列是平稳的，因此称为**趋势平稳过程**（**trend stationary process**）。

例1 设  $\{\varepsilon_t\}$  是一个均值为0，方差为1的独立同分布随机时间序列，定义如下随机过程

$$X_t = \varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-2}$$

- (1) 求  $E(X_t), Var(X_t)$ .
- (2) 证明自相关函数  $\rho_1 = -\frac{1}{2}, \rho_2 = \frac{1}{3}$
- (3) 当  $k > 2$  时，自相关函数  $\rho_k$  应为多少？

例2 设 $X_t$ 为一随机游走序列:  $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ .  
其中 $\varepsilon_t$ 是白噪声序列,且 $X_0=0$ .  
证明 $X_t$ 与 $X_{t+k}$ 的相关系数为:

$$\text{Corr}(X_t, X_{t+k}) = \sqrt{\frac{t}{t+k}}.$$

例3 如下回归是基于美国 1960—2007 年期间共 48 个年度观测的 CPI 数据而得出的：

$$\begin{aligned} 1. \quad \widehat{\Delta \text{CPI}_t} &= 0.0334 \text{ CPI}_{t-1} \\ t &= (12.37) \\ R^2 &= 0.0703 \quad d = 0.3663 \quad \text{RSS} = 206.65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \widehat{\Delta \text{CPI}_t} &= 1.8662 + 0.0192 \text{ CPI}_{t-1} \\ t &= (3.27) \quad (3.86) \\ R^2 &= 0.249 \quad d = 0.4462 \quad \text{RSS} = 166.921 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \widehat{\Delta \text{CPI}_t} &= 1.1611 + 0.5344t - 0.1077 \text{ CPI}_{t-1} \\ t &= (2.37) \quad (4.80) \quad (-4.02) \\ R^2 &= 0.507 \quad d = 0.6071 \quad \text{RSS} = 109.608 \end{aligned}$$

其中 RSS=残差平方和。

a. 考察上述回归，你对 CPI 时间序列的平稳性有何看法？



例4.求MA (3) 模型

$$y_t = 1 + u_t + 0.8u_{t-1} - 0.5u_{t-2} + 0.3u_{t-3}$$

的自协方差和自相关函数。