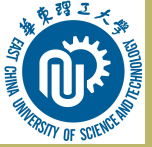


## ★3.3 半无界问题:对称延拓法



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

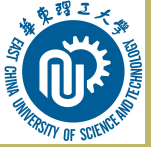
Page 1 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



### ★3.3 半无界问题:对称延拓法

本节的基本思路：利用对称延拓法，把半无界问题转化成整个空间上的初值问题，再利用初值问题的求解公式进行求解，最后定出半无界问题的解。这里仅以半直线为例，讨论热传导方程和波动方程

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 1 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

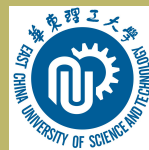


## ★3.3 半无界问题:对称延拓法

本节的基本思路：利用对称延拓法，把半无界问题转化成整个空间上的初值问题，再利用初值问题的求解公式进行求解，最后定出半无界问题的解。这里仅以半直线为例，讨论热传导方程和波动方程

### ★3.3.1 热传导方程的半无界问题

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 1 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



## ★3.3 半无界问题:对称延拓法

本节的基本思路：利用对称延拓法，把半无界问题转化成整个空间上的初值问题，再利用初值问题的求解公式进行求解，最后定出半无界问题的解。这里仅以半直线为例，讨论热传导方程和波动方程

### ★3.3.1 热传导方程的半无界问题

求解定义在半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \geq 0 \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

为了施行对称延拓，我们先证明下面的引理：

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 1 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



引理3.3.1如果 $\phi$ 是奇函数(偶函数或周期函数),则初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in R^1 \end{cases}$$

的解 $u(x, t)$ 也是 $x$ 的奇函数(偶函数或周期函数)

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



引理3.3.1如果 $\phi$ 是奇函数(偶函数或周期函数),则初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in R^1 \end{cases}$$

的解 $u(x, t)$ 也是 $x$ 的奇函数(偶函数或周期函数)

证明: 仅以奇函数为例,

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_R \phi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) dy$$

于是

$$\begin{aligned} u(-x, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_R \phi(y) \exp\left(-\frac{(x+y)^2}{4a^2 t}\right) dy \\ &\stackrel{y=-\eta}{=} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_R \phi(-\eta) \exp\left(-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2 t}\right) d\eta \quad (\phi \text{ 是奇函数}) \\ &= -\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_R \phi(\eta) \exp\left(-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2 t}\right) d\eta = -u(x, t) \end{aligned}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 14

Go Back

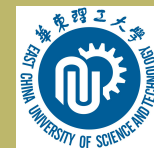
Full Screen

Close

Quit

## 求解定义在半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \geq 0 \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.3.1)$$



Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 3 of 14

Go Back

Full Screen

Close

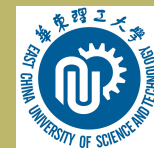
Quit

## 求解定义在半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \geq 0 \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

为了使 $u$ 满足 $u(0, t) = 0$ ,只要 $u(x, t)$ 是 $x$ 的奇函数即可。我们做奇延拓(要求 $\phi(0) = 0$ ),把 $\phi(x)$ 奇延拓成 $\Phi(x)$ , 考虑初值问题

$$\begin{cases} U_t - a^2 U_{xx} = 0, & x \in R, t > 0 \\ U(x, 0) = \Phi(x), & x \in R \end{cases}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 3 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



## 求解定义在半直线上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \geq 0 \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

为了使 $u$ 满足 $u(0, t) = 0$ ,只要 $u(x, t)$ 是 $x$ 的奇函数即可。我们做奇延拓(要求 $\phi(0) = 0$ ),把 $\phi(x)$ 奇延拓成 $\Phi(x)$ , 考虑初值问题

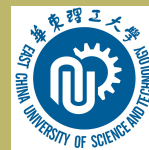
$$\begin{cases} U_t - a^2 U_{xx} = 0, & x \in R, t > 0 \\ U(x, 0) = \Phi(x), & x \in R \end{cases}$$

当 $x \geq 0$ 时,  $u(x, t) = U(x, t)$ 就是(3.3.1)的解。对于 $U(x, t)$

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_R \Phi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) dy \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 \Phi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) dy + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \Phi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) dy \\ &\stackrel{def}{=} A + B \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 \Phi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right) dy$$

$$\stackrel{y=-\eta}{=} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\infty}^0 \Phi(-\eta) \exp\left(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2t}\right) d(-\eta)$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 4 of 14

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



$$A = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 \Phi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right) dy$$
$$\stackrel{y=-\eta}{=} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\infty}^0 \Phi(-\eta) \exp\left(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2t}\right) d(-\eta)$$

(利用 $\Phi(-y) = -\Phi(y)$ , 交换积分上下限)

$$= -\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \phi(\eta) \exp\left(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2t}\right) d\eta$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 4 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

$$A = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 \Phi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right) dy$$
$$\stackrel{y=-\eta}{=} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\infty}^0 \Phi(-\eta) \exp\left(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2t}\right) d(-\eta)$$

(利用 $\Phi(-y) = -\Phi(y)$ , 交换积分上下限)

$$= -\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \phi(\eta) \exp\left(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2t}\right) d\eta$$

$$B = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \phi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right) dy$$

于是当 $x \geq 0, t > 0$ 时, 问题(3.3.1)的解

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 4 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

$$A = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 \Phi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right) dy$$
$$\stackrel{y=-\eta}{=} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\infty}^0 \Phi(-\eta) \exp\left(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2t}\right) d(-\eta)$$

(利用 $\Phi(-y) = -\Phi(y)$ , 交换积分上下限)

$$= -\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \phi(\eta) \exp\left(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2t}\right) d\eta$$

$$B = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \phi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right) dy$$

于是当 $x \geq 0, t > 0$ 时, 问题(3.3.1)的解

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \phi(y) \left[ \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+y)^2}{4a^2t}\right) \right] dy$$



同理对于半直线上的非齐次热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \leq 0 \\ u(0, t) = 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

其中 $\phi, f$ 满足 $\phi(0) = 0, f(0, t) = 0$ .

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 5 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



同理对于半直线上的非齐次热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \leq 0 \\ u(0, t) = 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

其中 $\phi, f$ 满足 $\phi(0) = 0, f(0, t) = 0$ .用奇延拓方法,考虑初值问题

$$\begin{cases} U_t - a^2 U_{xx} = F(x, t), & x \in R, t > 0 \\ U(x, 0) = \Phi(x), & x \in R \end{cases}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 5 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



同理对于半直线上的非齐次热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \leq 0 \\ u(0, t) = 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

其中 $\phi, f$ 满足 $\phi(0) = 0, f(0, t) = 0$ .用奇延拓方法,考虑初值问题

$$\begin{cases} U_t - a^2 U_{xx} = F(x, t), & x \in R, t > 0 \\ U(x, 0) = \Phi(x), & x \in R \end{cases}$$

可以求出它的解

$$U(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{R^1} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) \Phi(y) dy \\ + \int_0^t \int_{R^1} \frac{F(y, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy d\tau.$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 5 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



同理对于半直线上的非齐次热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \leq 0 \\ u(0, t) = 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

其中 $\phi, f$ 满足 $\phi(0) = 0, f(0, t) = 0$ .用奇延拓方法,考虑初值问题

$$\begin{cases} U_t - a^2 U_{xx} = F(x, t), & x \in R, t > 0 \\ U(x, 0) = \Phi(x), & x \in R \end{cases}$$

可以求出它的解

$$U(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{R^1} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) \Phi(y) dy \\ + \int_0^t \int_{R^1} \frac{F(y, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy d\tau.$$

当 $x \geq 0$ 时,  $u(x, t) = U(x, t)$ 就是定解问题的解。对于 $U(x, t)$ 的右边第一项类似齐次方程的处理, 下面处理第二项

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{R^1} \frac{F(y, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy d\tau \\
&= \int_0^t \int_{-\infty}^0 \frac{F(y, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy d\tau \\
&+ \int_0^t \int_0^\infty \frac{F(y, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy d\tau \stackrel{def}{=} A + B
\end{aligned}$$


[Home Page](#)
[Title Page](#)


Page 6 of 14

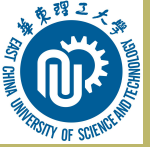
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{R^1} \frac{F(y, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy d\tau \\
&= \int_0^t \int_{-\infty}^0 \frac{F(y, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy d\tau \\
&+ \int_0^t \int_0^\infty \frac{F(y, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy d\tau \stackrel{def}{=} A + B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A & \stackrel{y=-\eta}{=} \int_0^t \int_\infty^0 \frac{F(-\eta, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d(-\eta) d\tau \\
&= - \int_0^t \int_0^\infty \frac{f(\eta, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\eta d\tau
\end{aligned}$$


[Home Page](#)
[Title Page](#)

[Page 6 of 14](#)
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)



$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{R^1} \frac{F(y, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy d\tau \\ &= \int_0^t \int_{-\infty}^0 \frac{F(y, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy d\tau \\ &+ \int_0^t \int_0^{\infty} \frac{F(y, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy d\tau \stackrel{\text{def}}{=} A + B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^t \int_{-\infty}^0 \frac{F(y, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy d\tau \\ &= - \int_0^t \int_0^{\infty} \frac{f(\eta, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\eta d\tau \end{aligned}$$

$$B = \int_0^t \int_0^{\infty} \frac{f(\eta, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\eta d\tau$$

所以定解问题的解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \phi(y) \left[ \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+y)^2}{4a^2 t}\right) \right] dy \\ &+ \int_0^t \int_0^{\infty} \frac{f(y, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left[ \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) - \exp\left(-\frac{(x+y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \right] dy d\tau \end{aligned}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 6 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

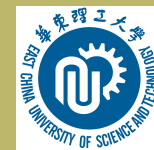
## 对于对称延拓法

- 根据已知条件选择合适的延拓方法, 例如若  $u(0, t) = 0$ , 可选择奇函数的延拓, 将半无界区延拓到无界区域; 如果  $u_x(0, t) = 0$ , 则可选择偶函数的对称延拓, 将半无界区延拓到无界区域
- 利用Fourier变换构造出延拓后的无界区域定解问题解的表达形式
- 将无界区域解的表达形式进行分析化简, 化简成半无界区域上的表达形式。
- 例如半无界热传导方程的初值问题中, 首先利用奇延拓将半无界的定界问题化为无界区域上的定界问题, 接着利用Fourier变换求出无界区域上的解  $U(x, t)$ , 其中  $U(x, t)$  是由  $\Phi$  表示出来, 然后将  $U(x, t)$  的表达形式进行化简, 主要是利用函数的奇偶性将空间变量由无界化简为半无界, 再由半无界的初始函数表示出来就可以了
- 根据上面的解题思路, 下面看看半无界区域上的弦振动方程的初值问题

### ★3.3.2 半无界弦的振动问题

考察半无界弦的振动问题，即求解半直线上一维波动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0 \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### ★3.3.2 半无界弦的振动问题

考察半无界弦的振动问题，即求解半直线上一维波动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0 \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

首先考察初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x \in R^1, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in R^1 \end{cases} \quad (3.3.3)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

### ★3.3.2 半无界弦的振动问题

考察半无界弦的振动问题，即求解半直线上一维波动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0 \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

首先考察初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x \in R^1, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in R^1 \end{cases} \quad (3.3.3)$$

**引理3.3.2** 若自由项  $f(x, t)$ , 以及初值函数  $\phi(x)$  和  $\psi(x)$  都是  $x$  的奇函数(偶函数或周期函数), 则由(3.2.19)式给出的问题(3.3.3)的解  $u(x, t)$  也是  $x$  的奇函数(偶函数或周期函数).

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 8 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### ★3.3.2 半无界弦的振动问题

考察半无界弦的振动问题，即求解半直线上一维波动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0 \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

首先考察初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x \in R^1, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in R^1 \end{cases} \quad (3.3.3)$$

**引理3.3.2** 若自由项  $f(x, t)$ , 以及初值函数  $\phi(x)$  和  $\psi(x)$  都是  $x$  的奇函数(偶函数或周期函数), 则由(3.2.19)式给出的问题(3.3.3)的解  $u(x, t)$  也是  $x$  的奇函数(偶函数或周期函数).

证明: 以奇函数为例, 已知

$$f(x, t) = -f(-x, t), \phi(x) = -\phi(-x), \psi(x) = -\psi(-x)$$

于是

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

$$u(-x, t) = \frac{1}{2}[\phi(-x + at) + \phi(-x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{-x-at}^{-x+at} \psi(y) dy$$

$$+ \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{-x-a(t-s)}^{-x+a(t-s)} f(y, s) dy ds$$


[Home Page](#)
[Title Page](#)


Page 9 of 14

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)



$$u(-x, t) = \frac{1}{2}[\phi(-x + at) + \phi(-x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{-x-at}^{-x+at} \psi(y) dy \\ + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{-x-a(t-s)}^{-x+a(t-s)} f(y, s) dy ds$$

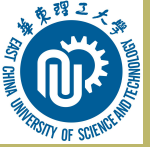
其中

$$\phi(-x + at) = \phi(-(x - at)) = -\phi(x - at),$$

$$\phi(-a - xt) = \phi(-(x + at)) = -\phi(x + at)$$

$$\frac{1}{2a} \int_{-x-at}^{-x+at} \psi(y) dy \stackrel{y=-\eta}{=} \frac{1}{2a} \int_{x+at}^{x-at} \psi(-\eta) d(-\eta) = -\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\eta) d\eta$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 9 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 9 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

$$u(-x, t) = \frac{1}{2}[\phi(-x + at) + \phi(-x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{-x-at}^{-x+at} \psi(y) dy \\ + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{-x-a(t-s)}^{-x+a(t-s)} f(y, s) dy ds$$

其中

$$\phi(-x + at) = \phi(-(x - at)) = -\phi(x - at),$$

$$\phi(-a - xt) = \phi(-(x + at)) = -\phi(x + at)$$

$$\frac{1}{2a} \int_{-x-at}^{-x+at} \psi(y) dy \stackrel{y=-\eta}{=} \frac{1}{2a} \int_{x+at}^{x-at} \psi(-\eta) d(-\eta) = -\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\eta) d\eta$$

类似地

$$\frac{1}{2a} \int_0^t \int_{-x-a(t-s)}^{-x+a(t-s)} f(y, s) dy ds \stackrel{y=-\eta}{=} -\frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(\eta, s) d\eta ds$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 9 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

$$u(-x, t) = \frac{1}{2}[\phi(-x + at) + \phi(-x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{-x-at}^{-x+at} \psi(y) dy \\ + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{-x-a(t-s)}^{-x+a(t-s)} f(y, s) dy ds$$

其中

$$\phi(-x + at) = \phi(-(x - at)) = -\phi(x - at),$$

$$\phi(-a - xt) = \phi(-(x + at)) = -\phi(x + at)$$

$$\frac{1}{2a} \int_{-x-at}^{-x+at} \psi(y) dy \stackrel{y=-\eta}{=} \frac{1}{2a} \int_{x+at}^{x-at} \psi(-\eta) d(-\eta) = -\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\eta) d\eta$$

类似地

$$\frac{1}{2a} \int_0^t \int_{-x-a(t-s)}^{-x+a(t-s)} f(y, s) dy ds \stackrel{y=-\eta}{=} -\frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(\eta, s) d\eta ds$$

所以

$$u(-x, t) = -u(x, t)$$

用对称延拓法求解问题(3.3.2), 要使 $u(0, t) = 0$ , 只需 $u(x, t)$ 是 $x$ 的奇函数。对 $f, \phi, \psi$ 作奇延拓:

$$F(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & x \geq 0, t \geq 0 \\ -f(-x, t), & x < 0, t \geq 0 \end{cases} \quad \Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0 \\ -\phi(-x), & x < 0 \end{cases}$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 14

Go Back

Full Screen

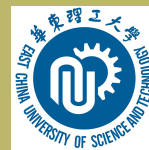
Close

Quit

用对称延拓法求解问题(3.3.2), 要使 $u(0, t) = 0$ , 只需 $u(x, t)$ 是 $x$ 的奇函数。对 $f, \phi, \psi$ 作奇延拓:

$$F(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & x \geq 0, t \geq 0 \\ -f(-x, t), & x < 0, t \geq 0 \end{cases} \quad \Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0 \\ -\phi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}$$



Home Page

Title Page



Page 10 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

用对称延拓法求解问题(3.3.2), 要使 $u(0, t) = 0$ , 只需 $u(x, t)$ 是 $x$ 的奇函数。对 $f, \phi, \psi$ 作奇延拓:

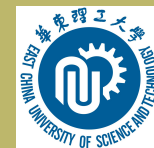
$$F(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & x \geq 0, t \geq 0 \\ -f(-x, t), & x < 0, t \geq 0 \end{cases} \quad \Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0 \\ -\phi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

与 $F(x, t), \Phi(x), \Psi(x)$ 对应的初值问题的解为

$$U(x, t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+at) + \Phi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} F(y, s) dy ds.$$

$U(x, t)|_{x \geq 0} = u(x, t)$  就是(3.3.2)的解. 下面确定它的表达形式



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



用对称延拓法求解问题(3.3.2), 要使 $u(0, t) = 0$ , 只需 $u(x, t)$ 是 $x$ 的奇函数。对 $f, \phi, \psi$ 作奇延拓:

$$F(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & x \geq 0, t \geq 0 \\ -f(-x, t), & x < 0, t \geq 0 \end{cases} \quad \Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0 \\ -\phi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

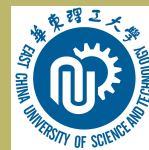
$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

与 $F(x, t), \Phi(x), \Psi(x)$ 对应的初值问题的解为

$$U(x, t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+at) + \Phi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} F(y, s) dy ds.$$

$U(x, t)|_{x \geq 0} = u(x, t)$ 就是(3.3.2)的解. 下面确定它的表达形式  
当 $x \geq at$ 时,  $x - at \geq 0, x + at \geq 0$ , 此时

$$\Phi(x \pm at) = \phi(x \pm at), \Psi(\xi) = \psi(\xi), F(y, s) = f(y, s)$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

用对称延拓法求解问题(3.3.2), 要使 $u(0, t) = 0$ , 只需 $u(x, t)$ 是 $x$ 的奇函数。对 $f, \phi, \psi$ 作奇延拓:

$$F(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & x \geq 0, t \geq 0 \\ -f(-x, t), & x < 0, t \geq 0 \end{cases} \quad \Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0 \\ -\phi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

与 $F(x, t), \Phi(x), \Psi(x)$ 对应的初值问题的解为

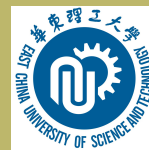
$$U(x, t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+at) + \Phi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} F(y, s) dy ds.$$

$U(x, t)|_{x \geq 0} = u(x, t)$  就是(3.3.2)的解. 下面确定它的表达形式  
当 $x \geq at$ 时,  $x - at \geq 0, x + at \geq 0$ , 此时

$$\Phi(x \pm at) = \phi(x \pm at), \Psi(\xi) = \psi(\xi), F(y, s) = f(y, s)$$

所以

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\phi(x+at) + \phi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(y, s) dy ds.$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 14

Go Back

Full Screen

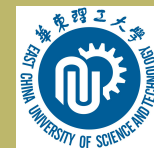
Close

Quit

当  $0 \leq x < at$  时,  $x - at < 0, x + at > 0$ , 所以

$$\Phi(x + at) = \phi(x + at), \Phi(x - at) = \Phi(-(at - x)) = -\phi(at - x)$$

$$\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2a} \left[ \int_{x-at}^0 \Psi(\xi) d\xi + \int_0^{x+at} \Psi(\xi) d\xi \right]$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 11 of 14

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

当  $0 \leq x < at$  时,  $x - at < 0, x + at > 0$ , 所以

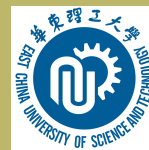
$$\Phi(x + at) = \phi(x + at), \Phi(x - at) = \Phi(-(at - x)) = -\phi(at - x)$$

$$\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2a} \left[ \int_{x-at}^0 \Psi(\xi) d\xi + \int_0^{x+at} \Psi(\xi) d\xi \right]$$

上式右端第一项是在小于零的区间, 利用  $\Psi(\xi) = -\psi(-\xi), \xi < 0, \Psi(\xi) = \psi(\xi), \xi > 0$ , 所以

$$= \frac{1}{2a} \left[ \int_{x-at}^0 (-\psi(-\xi)) d\xi + \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi \right] \quad (\text{右边第一项 } \xi = -\eta)$$

$$= \frac{1}{2a} \left[ \int_{at-x}^0 (-\psi(\eta)) (-d\eta) + \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi \right] = \frac{1}{2a} \left[ \int_{at-x}^0 \psi(\xi) d\xi + \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi \right]$$

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 11 of 14

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

当  $0 \leq x < at$  时,  $x - at < 0, x + at > 0$ , 所以

$$\Phi(x + at) = \phi(x + at), \Phi(x - at) = \Phi(-(at - x)) = -\phi(at - x)$$

$$\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2a} \left[ \int_{x-at}^0 \Psi(\xi) d\xi + \int_0^{x+at} \Psi(\xi) d\xi \right]$$

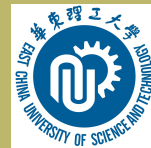
上式右端第一项是在小于零的区间, 利用  $\Psi(\xi) = -\psi(-\xi), \xi < 0, \Psi(\xi) = \psi(\xi), \xi > 0$ , 所以

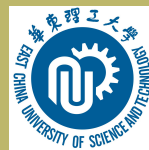
$$= \frac{1}{2a} \left[ \int_{x-at}^0 (-\psi(-\xi)) d\xi + \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi \right] \quad (\text{右边第一项 } \xi = -\eta)$$

$$= \frac{1}{2a} \left[ \int_{at-x}^0 (-\psi(\eta)) (-d\eta) + \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi \right] = \frac{1}{2a} \left[ \int_{at-x}^0 \psi(\xi) d\xi + \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi \right]$$

上式中被积函数一样, 合并积分区域, 所以有

$$= \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi(\xi) d\xi$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 11 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



当  $0 \leq x < at$  时,  $x - at < 0, x + at > 0$ , 所以

$$\Phi(x + at) = \phi(x + at), \Phi(x - at) = \Phi(-(at - x)) = -\phi(at - x)$$

$$\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2a} \left[ \int_{x-at}^0 \Psi(\xi) d\xi + \int_0^{x+at} \Psi(\xi) d\xi \right]$$

上式右端第一项是在小于零的区间, 利用  $\Psi(\xi) = -\psi(-\xi), \xi < 0, \Psi(\xi) = \psi(\xi), \xi > 0$ , 所以

$$= \frac{1}{2a} \left[ \int_{x-at}^0 (-\psi(-\xi)) d\xi + \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi \right] \quad (\text{右边第一项 } \xi = -\eta)$$

$$= \frac{1}{2a} \left[ \int_{at-x}^0 (-\psi(\eta)) (-d\eta) + \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi \right] = \frac{1}{2a} \left[ \int_{at-x}^0 \psi(\xi) d\xi + \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi \right]$$

上式中被积函数一样, 合并积分区域, 所以有

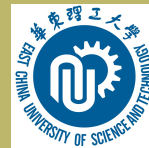
$$= \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi(\xi) d\xi$$

下面处理最后一项

$$\frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} F(y, s) dy ds$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 11 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

此项的积分中 $y$ 的范围是从负的区域到正的区域，所以我们将 $y$ 的积分区域分为两部分，一部分是从负的区域到零，另一部分是从0到正的区域，即



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 12 of 14

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

此项的积分中 $y$ 的范围是从负的区域到正的区域，所以我们将 $y$ 的积分区域分为两部分，一部分是从负的区域到零，另一部分是从0到正的区域，即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} F(y, s) dy ds \\ &= \frac{1}{2a} \left[ \int_0^{t-\frac{x}{a}} \left( \int_{x-a(t-s)}^0 (-f(-y, s)) dy + \int_0^{x+a(t-s)} f(y, s) dy \right) ds \right. \\ & \quad \left. + \int_{t-\frac{x}{a}}^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(y, s) dy ds \right] \end{aligned}$$

右边第一项令 $y = -\eta$ ,类似于 $\psi$ 项的处理，可得

$$= \frac{1}{2a} \left[ \int_0^{t-\frac{x}{a}} \int_{a(t-s)-x}^{a(t-s)+x} f(y, s) dy ds + \int_{t-\frac{x}{a}}^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(y, s) dy ds \right]$$





所以定解问题(3.2.2)的解为

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2}[\phi(x + at) - \phi(at - x)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi(y) dy \\ & + \frac{1}{2a} \left( \int_0^{t-\frac{x}{a}} \int_{a(t-s)-x}^{a(t-s)+x} f(y, s) dy ds + \int_{t-\frac{x}{a}}^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(y, s) dy ds \right) \end{aligned}$$

Home Page

Title Page



Page 13 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

所以定解问题(3.2.2)的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\phi(x + at) - \phi(at - x)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi(y) dy \\ + \frac{1}{2a} \left( \int_0^{t-\frac{x}{a}} \int_{a(t-s)-x}^{a(t-s)+x} f(y, s) dy ds + \int_{t-\frac{x}{a}}^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(y, s) dy ds \right)$$

**定理3.3.1** 如果  $\phi \in C^2([0, \infty))$ ,  $\psi \in C^1([0, \infty))$ ,  $f \in C^1([0, \infty)^2)$ , 并且满足相容性条件

$$\phi(0) = \psi(0) = 0, a^2 \phi''(0) + f(0, 0) = 0$$

那么半无界问题(3.3.2)的古典解(二次连续可微的解) $u(x, t)$ 存在, 并且可以用上面的公式表示

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 13 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



## 回家作业

$$3.11、(1) \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x > 0 \\ u_x(0, t) = 0 \end{cases}$$

这里的函数 $\phi, f$ 满足 $\phi'(0) = 0, f_x(0, t) = 0$

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 14 of 14

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



## 回家作业

$$3.11、(1) \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x > 0 \\ u_x(0, t) = 0 \end{cases}$$

这里的函数 $\phi, f$ 满足 $\phi'(0) = 0, f_x(0, t) = 0$

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 14 of 14

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)