⋆2.5 分离变量法-Laplace 方程的定解问题

⋆2.5 分离变量法-Laplace 方程的定解问题

矩阵上Laplace方程的定解问题

$\star$2.5 分离变量法-Laplace 方程的定解问题

矩阵上Laplace方程的定解问题

考虑由下述定解问题描述的矩形平板$(0 \le x \le a, 0 \le y \le b)$上的温度分布的平衡状态：

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, 0 < y < b, \\ u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, & 0 \le y \le b \\ u(x, 0) = f(x), u(x, b) = 0, & 0 \le x \le a \end{cases}$$

其中$f(x)$是已知的连续函数，且满足相容性条件$f(0) = f(a) = 0$.

分析：有界区域上的齐次方程，齐次边界条件的定解问题，可以选用分离变量法求解

解:

- 变量分离，令$u(x,y)=X(x)Y(y)$,代入方程得

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

比值为常数记为$-\lambda$,即

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ Y''(y)-\lambda Y(y)=0 \end{cases}$$

解：

- 变量分离，令$u(x,y)=X(x)Y(y)$,代入方程得

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

比值为常数记为$-\lambda$,即

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ Y''(y)-\lambda Y(y)=0 \end{cases}$$

- 利用边界条件(选齐次的边界条件)，得到特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ 0<x<a \\ X(0)=X(a)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

解:

- 变量分离，令$u(x,y)=X(x)Y(y)$,代入方程得

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

比值为常数记为$-\lambda$,即

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ Y''(y)-\lambda Y(y)=0 \end{cases}$$

- 利用边界条件(选齐次的边界条件)，得到特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ 0<x<a \\ X(0)=X(a)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

特征值为：$\lambda_n=(\frac{n\pi}{a})^2=\beta_n^2>0, n=1,2,\cdots$

对应的特征函数为：$X_n(x)=\sin\beta_n x, n=1,2,\cdots$

- 对于Y的方程可得通解为

$$Y_n(y) = C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}, n = 1, 2, \cdots$$

- 对于Y的方程可得通解为

$$Y_n(y) = C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}, n = 1, 2, \cdots$$

得到一列特解

$$u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = (C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}) \sin \beta_n x, n = 1, 2, \cdots$$

- 对于Y的方程可得通解为

$$Y_n(y) = C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}, n = 1, 2, \cdots$$

得到一列特解

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = (C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}) \sin \beta_n x, n = 1, 2, \cdots$$

- 将特解叠加(特解满足线性齐次方程，齐次边界条件)

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}) \sin \beta_n x$$

- 对于Y的方程可得通解为

$$Y_n(y) = C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}, n = 1, 2, \cdots$$

得到一列特解

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = (C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}) \sin \beta_n x, n = 1, 2, \cdots$$

- 将特解叠加(特解满足线性齐次方程，齐次边界条件)

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}) \sin \beta_n x$$

- 利用Fourier级数确定系数C_n和D_n，由边界条件知

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + D_n) \sin \beta_n x \\ u(x,b) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{\beta_n b} + D_n e^{-\beta_n}) \sin \beta_n x \end{cases}$$

利用特征函数的正交性，所以可得

$$\begin{cases} C_n + D_n = f_n, \\ C_n e^{\beta_n b} + D_n e^{-\beta_n b} = 0 \end{cases}$$

其中

$$f_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(z)\sin\beta_n z dz$$

利用特征函数的正交性，所以可得

$$\begin{cases} C_n + D_n = f_n, \\ C_n e^{\beta_n b} + D_n e^{-\beta_n b} = 0 \end{cases}$$

其中

$$f_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(z)\sin\beta_n z dz$$

解得

$$C_n = -\frac{e^{\beta_n b}}{e^{\beta_n b} - e^{-\beta_n b}} f_n, D_n = \frac{e^{\beta_n b}}{e^{\beta_n b} - e^{-\beta_n b}} f_n$$

利用特征函数的正交性，所以可得

$$\begin{cases} C_n + D_n = f_n, \\ C_n e^{\beta_n b} + D_n e^{-\beta_n b} = 0 \end{cases}$$

其中

$$f_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(z) \sin \beta_n z dz$$

解得

$$C_n = -\frac{e^{\beta_n b}}{e^{\beta_n b} - e^{-\beta_n b}} f_n, D_n = \frac{e^{\beta_n b}}{e^{\beta_n b} - e^{-\beta_n b}} f_n$$

定解问题的解为

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{sh\beta_n(b-y)}{sh\beta_n b} \int_0^a f(z) \sin \beta_n z dz] \sin \beta_n x$$

分离变量法的一般步骤

- 判断方程和边界条件是否是齐次的，如果是，可利用分离变量法求解
- 先做变量分离(即写成独立变量函数相乘的形式)
- 代入齐次方程和齐次边界条件可得特征值问题,从而特判断出特征值和特征函数
- 得到特解（特解满足齐次方程和齐次边界条件），将特解进行叠加
- 叠加的系数可由初值条件确定。

- 熟练掌握特征展开法和分离变量法
- 在有界区域定解问题中，当边界条件是齐次的时候，可以利用特征展开法求解
- 在有界区域定解问题中，当方程和边界条件都是齐次的时候，既可以利用分离变量法也可以利用特征展开法求解
- 无论特征展开法还是分离变量法都要求边界条件是齐次
- 当边界条件是非齐次的时候，如何求解呢，其基本思想就是想办法将非齐次的边界条件转化为齐次边界条件，如何进行转化呢，这就是2.6节的主要内容

回家作业：

利用分离变量方法求解

$$2.14、(2)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=\cos x, & 0<x<a, 0<y<b \\ u(0,y)=0, u_x(a,y)=ay, & 0\le y\le b \\ u(x,0)=0, u(x,b)=0, & 0\le x\le a \end{cases}$$

$$2.17、(2)\begin{cases} u_t=u_{xx}, & 0<x<2, t>0 \\ u(0,t)=u(2,t)=0, & t\ge 0 \\ u(x,0)=\frac{1}{2}\sin \pi x, & 0\le x\le 2 \end{cases}$$

⋆2.6非齐次边界条件的处理

⋆2.6非齐次边界条件的处理

对带有非齐次边界条件的定解问题，我们寻求适当的变换，使之归结为齐次边界条件的情形。

⋆2.6非齐次边界条件的处理

对带有非齐次边界条件的定解问题，我们寻求适当的变换，使之归结为齐次边界条件的情形。

设有定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = u_1(t), u(l,t) = u_2(t), & t \geq 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{2.7.1}$$

⋆2.6非齐次边界条件的处理

对带有非齐次边界条件的定解问题，我们寻求适当的变换，使之归结为齐次边界条件的情形。

设有定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = u_1(t), u(l,t) = u_2(t), & t \geq 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), 0 \leq x \leq l & \end{cases} \tag{2.7.1}$$

- 作变换

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

使得函数$v(x,t)$满足齐次边界条件，

⋆2.6非齐次边界条件的处理

对带有非齐次边界条件的定解问题，我们寻求适当的变换，使之归结为齐次边界条件的情形。

设有定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = u_1(t), u(l,t) = u_2(t), & t \geq 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{2.7.1}$$

- 作变换

  $$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

  使得函数$v(x,t)$满足齐次边界条件，

- 即要求$w(0,t) = u_1(t), w(l,t) = u_2(t)$，因为两点可以确定一条直线，所以可以取$w(x,t) = A(t)x + B(t)$,由此可解出

⋆2.6非齐次边界条件的处理

对带有非齐次边界条件的定解问题，我们寻求适当的变换，使之归结为齐次边界条件的情形。

设有定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = u_1(t), u(l,t) = u_2(t), & t \geq 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{2.7.1}$$

- 作变换
$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$
使得函数$v(x,t)$满足齐次边界条件，
- 即要求$w(0,t) = u_1(t), w(l,t) = u_2(t)$，因为两点可以确定一条直线，所以可以取$w(x,t) = A(t)x + B(t)$,由此可解出

$$w(x,t) = \frac{1}{l}[u_2(t) - u_1(t)]x + u_1(t)$$

⋆2.6非齐次边界条件的处理

对带有非齐次边界条件的定解问题，我们寻求适当的变换，使之归结为齐次边界条件的情形。

设有定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = u_1(t), u(l,t) = u_2(t), & t \geq 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{2.7.1}$$

- 作变换

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

  使得函数$v(x,t)$满足齐次边界条件，

- 即要求$w(0,t) = u_1(t), w(l,t) = u_2(t)$，因为两点可以确定一条直线，所以可以取$w(x,t) = A(t)x + B(t)$,由此可解出

$$w(x,t) = \frac{1}{l}[u_2(t) - u_1(t)]x + u_1(t)$$

- 这样把$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$代回到原方程就可得到v 所满足的齐次边界条件的定解问题，利用上节方法求解$v(x,t)$,最终得到问题(2.7.1)的解u.

类似地，可将其他类型的非齐次边界条件齐次化，如果边界条件是下述情况之一，则可分别取出相应的函数$w(x,t)$

类似地，可将其他类型的非齐次边界条件齐次化，如果边界条件是下述情况之一，则可分别取出相应的函数$w(x,t)$

- (1)边界条件$u(0,t)=u_1(t), u_x(l,t)=u_2(t)$(已知所经过的一点以及另一点的斜率).可取

$$w(x,t)=u_2(t)x+u_1(t)$$

类似地，可将其他类型的非齐次边界条件齐次化，如果边界条件是下述情况之一，则可分别取出相应的函数$w(x,t)$

- (1)边界条件$u(0,t)=u_1(t), u_x(l,t)=u_2(t)$(已知所经过的一点以及另一点的斜率).可取

$$w(x,t)=u_2(t)x+u_1(t)$$

- (2)边界条件$u_x(0,t)=u_1(t), u(l,t)=u_2(t)$,(已知所经过的一点以及另一点的斜率)可取

$$w(x,t)=u_1(t)(x-l)+u_2(t)$$

类似地，可将其他类型的非齐次边界条件齐次化，如果边界条件是下述情况之一，则可分别取出相应的函数$w(x,t)$

- (1)边界条件$u(0,t)=u_1(t), u_x(l,t)=u_2(t)$(已知所经过的一点以及另一点的斜率).可取

$$w(x,t)=u_2(t)x+u_1(t)$$

- (2)边界条件$u_x(0,t)=u_1(t), u(l,t)=u_2(t)$,(已知所经过的一点以及另一点的斜率)可取

$$w(x,t)=u_1(t)(x-l)+u_2(t)$$

- (3)边界条件$u_x(0,t)=u_1(t), u_x(l,t)=u_2(t)$,，(已知所经过的两点的斜率)可取

$$w(x,t)=\frac{u_2(t)-u_1(t)}{2l}x^2+u_1(t)x.$$

- (4) 边界条件$u(0,t)=u_1(t), (u_x+\sigma u)(l,t)=u_2(t)$,可取

$$w(x,t)=\frac{u_2(t)-\sigma u_1(t)}{1+\sigma l}x+u_1(t);$$

- (5)边界条件为$u_x(0,t)=u_1(t),(u_x+\sigma u)(l,t)=u_2(t)$,可取

$$w(x,t)=u_1(t)x+\frac{1}{\sigma}[u_2(t)-(1+\sigma l)u_1(t)];$$

- (6)边界条件为$(u_x-\sigma u)(0,t)=u_1(t),u(l,t)=u_2(t),$,可取

$$w(x,t)=\frac{u_1(t)+\sigma u_2(t)}{1+\sigma l}x+\frac{u_2(t)-lu_1(t)}{1+\sigma l};$$

- (7)边界条件为$(u_x-\sigma u)(0,t)=u_1(t),u_x(l,t)=u_2(t)$,可取

$$w(x,t)=u_2(t)x+\frac{u_2(t)-u_1(t)}{\sigma};$$

- (8)边界条件为$(u_x-\sigma_1 u)(0,t)=u_1(t),(u_x+\sigma_2 u)(l,t)=u_2(t)$,可取

$$w(x,t)=\frac{\sigma_1 u_2(t)+\sigma_2 u_1(t)}{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_1\sigma_2 l}x+\frac{u_2(t)-(1+\sigma_2 l)u_1(t)}{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_1\sigma_2 l}$$

对于某些特殊问题(例如：方程右端得非齐次项和边界条件都与t无关),还可以寻求适当的变换，把方程和边界条件同时齐次化。

例：求解边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = B, t \geq 0 & \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

其中A、B都是常数

例：求解边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = B, t \geq 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

其中A、B都是常数

解：方程和边界条件中的非齐次项都与t无关，令

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$$

例：求解边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = B, t \geq 0 & \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

其中A、B都是常数

解：方程和边界条件中的非齐次项都与t无关，令

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$$

代入方程

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = a^2 w''(x) + A$$

为使v的方程和边界条件都是齐次的，取w是问题

$$\begin{cases} a^2 w''(x) + A = 0, & 0 \leq x \leq l \\ w(0) = 0, w(l) = B & \end{cases}$$

的解，

例：求解边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = B, t \geq 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

其中A、B都是常数

解：方程和边界条件中的非齐次项都与t无关，令

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$$

代入方程

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = a^2 w''(x) + A$$

为使v的方程和边界条件都是齐次的，取w是问题

$$\begin{cases} a^2 w''(x) + A = 0, & 0 \leq x \leq l \\ w(0) = 0, w(l) = B \end{cases}$$

的解，由此解出

$$w(x) = -\frac{A}{2a^2}x^2 + (\frac{Al}{2a^2} + \frac{B}{l})x$$

$v(x,t)$满足

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 & 0 < x < l, t > 0 \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, & t \geq 0 \\ v(x,0) = -w(x), v_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

$v(x,t)$满足

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 & 0 < x < l, t > 0 \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, & t \geq 0 \\ v(x,0) = -w(x), v_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

利用特征展开法或者分离变量法可求出$v(x,t)$，最后得到原问题的解$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$

例：求解边值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -bu, & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, u(l,t) = k, t \geq 0 & \\ u(x,0) = \frac{k}{l^2}x^2, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

其中b、k都是常数

例：求解边值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -bu, & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, u(l,t) = k, t \geq 0 \\ u(x,0) = \frac{k}{l^2}x^2, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

其中b、k都是常数

解：先把边界条件齐次化，令$u(x,t) = k + v(x,t)$,则v满足

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = -bv - bk, & 0 < x < l, t > 0 \\ v_x(0,t) = 0, v(l,t) = 0, t \geq 0 \\ v(x,0) = \frac{k}{l^2}x^2 - k, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

例：求解边值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -bu, & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, u(l,t) = k, t \geq 0 & \\ u(x,0) = \frac{k}{l^2}x^2, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

其中b、k都是常数

解：先把边界条件齐次化，令$u(x,t) = k + v(x,t)$,则v满足

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = -bv - bk, & 0 < x < l, t > 0 \\ v_x(0,t) = 0, v(l,t) = 0, t \geq 0 & \\ v(x,0) = \frac{k}{l^2}x^2 - k, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

利用特征展开法求解此定解问题⇒特征函数系为$\{\cos\beta_n x\}_{n=1}^{\infty}, \beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$.

例：求解边值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -bu, & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, u(l,t) = k, t \geq 0 & \\ u(x,0) = \frac{k}{l^2}x^2, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

其中b、k都是常数
解：先把边界条件齐次化，令$u(x,t) = k + v(x,t)$,则v满足

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = -bv - bk, & 0 < x < l, t > 0 \\ v_x(0,t) = 0, v(l,t) = 0, t \geq 0 & \\ v(x,0) = \frac{k}{l^2}x^2 - k, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

利用特征展开法求解此定解问题⇒特征函数系为$\{\cos\beta_n x\}_{n=1}^{\infty}, \beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$.
把$v(x,t), -bk, \frac{k}{l^2}x^2 - k$关于$x$按特征函数系$\{\cos\beta_n x\}_{n=1}^{\infty}$展开：

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\cos\beta_n x, -bk = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos\beta_n x, \frac{k}{l^2}x^2 - k = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\beta_n x$$

其中

$$f_n = -\frac{2}{l}\int_0^l bk\cos\beta_n x dx = (-1)^n \frac{4bk}{(2n-1)\pi},$$

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l (\frac{k}{l^2}x^2 - k)\cos\beta_n x dx = (-1)^n \frac{32k}{(2n-1)^3\pi^3}$$

其中

$$f_n = -\frac{2}{l}\int_0^l bk\cos\beta_n x dx = (-1)^n \frac{4bk}{(2n-1)\pi},$$

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l (\frac{k}{l^2}x^2 - k)\cos\beta_n x dx = (-1)^n \frac{32k}{(2n-1)^3\pi^3}$$

把这些展开式代入$v(x,t)$的定解问题得

$$\sum_{n=1}^{\infty}[v_n^{'}(t) + (b+\beta_n^2)v_n(t) - f_n]\cos\beta_n x = 0, t > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[v_n(0) - c_n]\cos\beta_n x = 0$$

利用特征函数的正交性可得

$$v_n^{'}(t) + (b+\beta_n^2)v_n(t) = f_n, t > 0$$

$$v_n(0) = c_n, n = 1, 2, \cdots$$

解得

$$v_n(t) = c_n e^{-(b+\beta_n^t)t} + \frac{f_n}{(b+\beta_n^2)}(1 - e^{(b+\beta_n^2)t})$$

于是

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\frac{32k}{(2n-1)^3\pi^3}e^{-(b+\beta_n^2)t} + \frac{4bk}{(2n-1)\pi(b+\beta_n^2)}(1-e^{-(b+\beta_n^2)t})]\cos\beta_n x$$

原定解问题的解$u(x,t) = k + v(x,t)$

⋆2.7物理意义、驻波解与共振

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

⋆2.7物理意义、驻波解与共振

Fourier级数方法有明显的物理意义，我们以两端固定的一位弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

为例以说明.

⋆2.7物理意义、驻波解与共振

Fourier级数方法有明显的物理意义，我们以两端固定的一位弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

为例以说明.

定解问题的级数解的每一项可以写成以下形式：

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= (C_n \cos\frac{n\pi at}{l} + D_n \sin\frac{n\pi at}{l}) \sin\frac{n\pi x}{l} \\ &= A_n \cos(w_n t - \theta_n) \sin\frac{n\pi x}{l}, \end{aligned}$$

$\star$2.7物理意义、驻波解与共振

Fourier级数方法有明显的物理意义，我们以两端固定的一位弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

为例以说明.
定解问题的级数解的每一项可以写成以下形式：

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= (C_n \cos\frac{n\pi at}{l} + D_n \sin\frac{n\pi at}{l}) \sin\frac{n\pi x}{l} \\ &= A_n \cos(w_n t - \theta_n) \sin\frac{n\pi x}{l}, \end{aligned}$$

其中$A_n = \sqrt{C_n^2 + D_n^2}, w_n = \frac{n\pi a}{l}, \theta_n = \arctan\frac{D_n}{C_n}.u_n(x,t)$

- $u_n(x,t)$称为振动元素

- $u_n(x,t)$称为振动元素
- 对于每一个固定点x，$u_n(x,t)$表示一个简谐振动，$A_n\sin\frac{n\pi x}{l}$表示振幅，$w_n = \frac{n\pi a}{l}$ 表示角频率，$\theta_n = \arctan\frac{D_n}{C_n}$表示初相位,角频率和初始相位都与点$x$无关，只是振幅随点的位置的改变而改变。

- $u_n(x,t)$称为振动元素
- 对于每一个固定点x，$u_n(x,t)$表示一个简谐振动，$A_n \sin\frac{n\pi x}{l}$表示振幅，$w_n = \frac{n\pi a}{l}$ 表示角频率，$\theta_n = \arctan\frac{D_n}{C_n}$表示初相位,角频率和初始相位都与点$x$无关，只是振幅随点的位置的改变而改变。
- 在点$x = 0, \frac{1}{n}l, \frac{2}{n}l, \cdots, \frac{n-1}{n}l, l$处，振动元素$u_n(x,t)$的振幅为零，而在点$x = \frac{1}{2n}l, \frac{3}{2n}l, \cdots, \frac{2n-1}{2n}l$处，振幅达到最大，这种波称为驻波，这些点称为节点；

- $u_n(x,t)$称为振动元素
- 对于每一个固定点x，$u_n(x,t)$表示一个简谐振动，$A_n \sin\frac{n\pi x}{l}$表示振幅，$w_n = \frac{n\pi a}{l}$ 表示角频率，$\theta_n = \arctan\frac{D_n}{C_n}$表示初相位,角频率和初始相位都与点$x$无关，只是振幅随点的位置的改变而改变。
- 在点$x = 0, \frac{1}{n}l, \frac{2}{n}l, \cdots, \frac{n-1}{n}l, l$处，振动元素$u_n(x,t)$的振幅为零，而在点$x = \frac{1}{2n}l, \frac{3}{2n}l, \cdots, \frac{2n-1}{2n}l$处，振幅达到最大，这种波称为驻波，这些点称为节点；
- 物理上也把特征展开法和分离变量法称为驻波法，得到的解是一些列具有特定频率的驻波的叠加

用Fourier级数方法得到的解的表达式还可以用来解释强迫振动中所产生的共振现象，例如初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x) sin\omega t, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

用Fourier级数方法得到的解的表达式还可以用来解释强迫振动中所产生的共振现象，例如初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x) sin\omega t, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

- 当$\omega \neq \omega_n (n = 1, 2, \cdots)$时

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{lB_n}{n\pi a} \sin\frac{n\pi x}{l} \int_0^t \sin\omega\tau \sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau) d\tau \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\omega_n(\omega^2 - \omega_n^2)} (\omega \sin\omega_n t - \omega_n \sin\omega t) \sin\frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

其中$\omega_n = \frac{n\pi a}{l}, B_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l} dx$,当$f(x) \in C^1([0,l])$,且$f(0) = f(l) = 0$时，这个形式解是上述初边值问题的解

用Fourier级数方法得到的解的表达式还可以用来解释强迫振动中所产生的共振现象，例如初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x) sin\omega t, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

- 当$\omega \neq \omega_n (n = 1, 2, \cdots)$时

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{lB_n}{n\pi a} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^t \sin \omega\tau \sin \frac{n\pi a}{l}(t-\tau) d\tau \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\omega_n(\omega^2 - \omega_n^2)} (\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t) \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

  其中$\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$, $B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$,当$f(x) \in C^1([0,l])$,且$f(0) = f(l) = 0$时，这个形式解是上述初边值问题的解

- 当ω 趋于某一个特征频率（或称为固有频率）$\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$时，级数解中的第$k$项的系数有极限

$$\lim_{\omega \to \omega_k} \frac{B_k}{\omega_k(\omega^2 - \omega_k^2)} (\omega \sin \omega_k t - \omega_k \sin \omega t) = \frac{B_k}{2\omega_k^2} \sin \omega_k t - \frac{B_k}{2\omega_k} t \cos \omega_k t.$$

用Fourier级数方法得到的解的表达式还可以用来解释强迫振动中所产生的共振现象，例如初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x) sin\omega t, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

- 当$\omega \neq \omega_n (n = 1, 2, \cdots)$时

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{lB_n}{n\pi a} \sin\frac{n\pi x}{l} \int_0^t \sin\omega\tau \sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau) d\tau \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\omega_n(\omega^2 - \omega_n^2)} (\omega \sin\omega_n t - \omega_n \sin\omega t) \sin\frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

其中$\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$, $B_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$,当$f(x) \in C^1([0,l])$,且$f(0) = f(l) = 0$时，这个形式解是上述初边值问题的解

- 当ω 趋于某一个特征频率（或称为固有频率）$\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$时，级数解中的第$k$项的系数有极限

$$\lim_{\omega \to \omega_k} \frac{B_k}{\omega_k(\omega^2 - \omega_k^2)} (\omega \sin\omega_k t - \omega_k \sin\omega t) = \frac{B_k}{2\omega_k^2} \sin\omega_k t - \frac{B_k}{2\omega_k} t\cos\omega_k t.$$

- 当$\omega = \omega_k$时，级数解可以写成

$$u(x,t) = \sum_{n\neq k}^{\infty} \frac{B_n}{\omega_n(\omega_k^2-\omega_n^2)}(\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t) \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{B_k}{2\omega_k^2} \sin \omega_k t - \frac{B_k}{2\omega_k} t \cos \omega_k t$$

- 当$\omega = \omega_k$时，级数解可以写成

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n\neq k}^{\infty} \frac{B_n}{\omega_n(\omega_k^2-\omega_n^2)}(\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &\quad + \frac{B_k}{2\omega_k^2} \sin \omega_k t - \frac{B_k}{2\omega_k} t \cos \omega_k t \end{aligned}$$

- 对于固有频率为ω_k的第k个振动元素$u_k(x,t)$，其振幅随着时间t一起无限增大，这种现象称为共振

- 当$\omega=\omega_k$时，级数解可以写成

$$u(x,t)=\sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty}\frac{B_n}{\omega_n(\omega_k^2-\omega_n^2)}(\omega\sin\omega_n t-\omega_n\sin\omega t)\sin\frac{n\pi x}{l}+\frac{B_k}{2\omega_k^2}\sin\omega_k t-\frac{B_k}{2\omega_k}t\cos\omega_k t$$

- 对于固有频率为ω_k的第k个振动元素$u_k(x,t)$，其振幅随着时间t一起无限增大，这种现象称为共振
- 在物理上，这表示一根两端固定的弦线，如果在一个周期外力的作用下做强迫振动，当这个周期的外力的频率和弦线的某一特征频率相等，那么弦线将产生共振，导致弦线在某一时刻断裂。

- 当$\omega = \omega_k$时，级数解可以写成

$$u(x,t) = \sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty} \frac{B_n}{\omega_n(\omega_k^2-\omega_n^2)}(\omega\sin\omega_n t - \omega_n \sin\omega t)\sin\frac{n\pi x}{l} + \frac{B_k}{2\omega_k^2}\sin\omega_k t - \frac{B_k}{2\omega_k} t\cos\omega_k t$$

- 对于固有频率为ω_k的第k个振动元素$u_k(x,t)$，其振幅随着时间t一起无限增大，这种现象称为共振
- 在物理上，这表示一根两端固定的弦线，如果在一个周期外力的作用下做强迫振动，当这个周期的外力的频率和弦线的某一特征频率相等，那么弦线将产生共振，导致弦线在某一时刻断裂。
- 要避免共振现象，必须首先知道这个问题的固有频率，即去求某一个特征值问题的解

- 当$\omega=\omega_k$时，级数解可以写成

$$u(x,t)=\sum_{n\neq k}^{\infty}\frac{B_n}{\omega_n(\omega_k^2-\omega_n^2)}(\omega\sin\omega_n t-\omega_n\sin\omega t)\sin\frac{n\pi x}{l}+\frac{B_k}{2\omega_k^2}\sin\omega_k t-\frac{B_k}{2\omega_k}t\cos\omega_k t$$

- 对于固有频率为ω_k的第k个振动元素$u_k(x,t)$，其振幅随着时间t一起无限增大，这种现象称为共振
- 在物理上，这表示一根两端固定的弦线，如果在一个周期外力的作用下做强迫振动，当这个周期的外力的频率和弦线的某一特征频率相等，那么弦线将产生共振，导致弦线在某一时刻断裂。
- 要避免共振现象，必须首先知道这个问题的固有频率，即去求某一个特征值问题的解
- 但是有些问题中，例如在电磁振荡理论中，经常利用共振现象来调频，所以特征值问题无论是在建筑工程方面，还是无线电、电子工程等方面都有着重要的应用

回家作业：

求解下列初边值问题

2.19、(2) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=A\cosh x, & 0<x<l, t>0 \\ u(0,t)=t, u_x(l,t)=k, & t\geq 0 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq l \end{cases}$

其中A,k为常数，$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$