第七章 定积分

§7.1 定积分的概念，可积条件

一、定积分的定义

定义: 设f 为闭区间$[a, b]$ 上的连续函数，$f(x) \geq 0$，由曲线$y = f(x), x = a, x = b$ 及x 轴围成的平面图形，称为曲边梯形。

例1：求在区间$[0, 1]$ 上，求抛物线$y = x^2$ 为曲边的曲边梯形的面积。

注：由曲边梯形的面积可以引出定积分的定义。

定义: 设$f(x)$ 是定义在$[a,b]$ 上的函数，在$[a,b]$ 上依次插入分点$\{x_i\}_{i=0}^n$, 作分划$P: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$. 任取点$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，记小区间$[x_{i-1},x_i]$ 的长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，令$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$。若$\lambda\to 0$ 时，$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，不依赖于分划P，且不依赖于ξ_i 的选择，则称$f(x)$ 在$[a,b]$ 上Riemann 可积。$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的定积分或Riemann 积分，记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

注1：$\epsilon-\delta$ 语言表述：给定数I, $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall$分划$P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，任意取点$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，只要$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}<\delta$，就有$\left|\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\epsilon$，则称$f(x)$ 在$[a,b]$ 上Riemann 可积，称I 是$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的定积分。

注2：在函数极限$\lim_{x\to a} f(x)$ 中，对每个变量x，$f(x)$ 唯一确定；而对黎曼和极限，同一个λ 可对应不同的分划，从而使得Riemann 极限比通常极限复杂的多。

注3：定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是数，它的值仅与函数f 及区间$[a,b]$ 有关，e.g. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \cdots$，这与不定积分不同。

二、定积分的几何意义

对于$[a,b]$上的连续函数$f(x)\geq 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$表示由曲线$y=f(x), x=a, x=b$及x轴围成的曲边梯形的面积。

当$f(x)\leq 0$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b(-f(x))\mathrm{d}x$是位于$x$轴下方的曲边梯形面积的相反数，不妨称为“负面积”。

对于非定号的$f(x)$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$表示曲线$y=f(x)$在x轴上方部分所有曲边梯形的正面积，与下方所有曲边梯形负面积的代数和。

三、定积分存在的条件

（一）必要条件

定理: 若函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，则$f(x)$ 在$[a,b]$ 上有界。

注：可积函数一定有界，但有界函数未必可积。

例1：证明Dirichlet 函数$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$ 有界但不可积。

今后讨论可积性，总假定函数在$[a,b]$ 上有界。

（二） Darboux 和

定义: 设$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 为$[a, b]$ 的一个分划，由于f 在$[a, b]$ 上有界，故由确界存在定理，对任意i, f 在$[x_{i-1}, x_i]$ 上有上下确界。定义

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$
$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

则M_i, m_i 与分划P 有关。定义和式

$$\overline{S}(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \underline{S}(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

分别称为对应于分划P 的Darboux 上和与Darboux 下和，统称Darboux 和。

注：$\underline{S}(P) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \overline{S}(P)$。与Riemann 和相比，Darboux 和仅与分划P 有关，与点集$\{\xi_i\}$ 无关。

性质1：在原有的分划P中加入新的分点形成新的分划P'，则$\overline{S}(P') \le \overline{S}(P), \underline{S}(P') \ge \underline{S}(P)$（即增加分点，上和不增，下和不减）。

性质2："任一下和"不超过"任意上和"。

注：由上述性质知，所有上和的集合$\{\overline{S}(P)\}$有下确界，所有下和的集合$\{\underline{S}(P)\}$有上确界。

记$L = \inf\{\overline{S}(P) | P$ 为所有可能分划$\}$，称上积分；

记$\ell = \sup\{\underline{S}(P) | P$ 为所有可能分划$\}$，称下积分。

则对任意分划P, Q：$\underline{S}(P) \le \ell \le L \le \overline{S}(Q)$。

Darboux 定理: 对任意$[a, b]$上有界的函数$f(x)$，恒有$\lim\limits_{\lambda \to 0} \overline{S}(P) = L$, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \underline{S}(P) = \ell$，其中$\lambda = \max_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\}$。

注：该极限分割可任意，故区别于"单调函数极限等于确界"。

（三）充要条件

定理:（定积分存在的第一充要条件）有界函数$f(x)$在$[a,b]$上可积 $\Longleftrightarrow$ $L=\ell$，即$\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}(P)=\lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}(P)$。

注1：Dirichlet 函数的不可积性，正是由于上积分不等于下积分。

注2：记$w_i=M_i-m_i$，则$\overline{S}(P)-\underline{S}(P)=\sum\limits_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i$，故:

$$\text{可积第一充要条件} \Longleftrightarrow \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i=0.$$

事实上，$w_i=\sup\limits_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}|f(x')-f(x'')|$。

注3：第一充要条件几何意义：分割无限细分时，总阴影面积（上下和之差）趋于0.

定理:（定积分存在的第二充要条件）有界函数f在$[a,b]$上可积 $\iff$ $\forall \epsilon > 0, \exists$ 分划P，s.t.

$$\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i < \epsilon.$$

分析：要使和式当$\lambda(P) \to 0$ 时，$\sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i \to 0$:

(1)$\lambda(P)$ 充分小时，w_i 都很小；

(2)w_i 不能很小，但与之对应的Δx_i 之和很小。

定理:（定积分存在的第三充要条件）有界函数$f(x)$在$[a,b]$上可积 $\iff$ $\forall \epsilon > 0, \forall \sigma > 0, \exists$ 分划P, s.t.振幅$w_i \geq \epsilon$的那些小区间$[x_{i-1}, x_i]$ 长度之和$\sum_{w_i \geq \epsilon} \Delta x_i < \sigma$。

（四）可积函数类（充分条件）

命题1. 闭区间$[a,b]$上的连续函数必定可积。

命题2. 闭区间$[a,b]$上有界单调函数必定可积。

命题3. 闭区间$[a,b]$上只有有限个不连续点的有界函数必定可积。

例2：Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases} 1/q, & x=p/q(q>0,(p,q)=1,p,q\in\mathbb{Z}) \\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c \end{cases}$$

在$[0,1]$上可积且$\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x=0$。

注：我们已证明过$\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=0,\forall x_0\in\mathbb{R}$，故Riemann函数在无理点处处连续，在有理点处处不连续。$R(x)$具有无穷多个不连续点，但$R(x)$仍然可积。

作业： 课本P_{285} 1(2) 5(2)，6，9。

补充1：设$f(x)$ 是在$[a,b]$ 上有定义的有界函数。利用可积第三充要条件证明：若对任给$\delta > 0$，均有$f \in R[a+\delta, b]$，则$f \in R([a,b])$。并利用该题证明P_{285} 5(4)。

补充2：若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，$A \le f(x) \le B, g(u)$ 在$[A,B]$ 上可积，是否有$g(f(x))$ 在$[a,b]$ 上可积？或是，给出证明；若不是，给出反例。

补充3：若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上不可积，$A \le f(x) \le B, g(u)$ 在$[A,B]$ 上不可积，是否有$g(f(x))$ 在$[a,b]$ 上一定不可积？或是，给出证明；若不是，给出反例。

§7.2 定积分的性质

一、定积分的简单性质

性质1（线性性质）：设$f(x), g(x)$ 均在$[a, b]$ 上可积，k_1, k_2 是常数，则函数$k_1 f(x) + k_2 g(x)$ 在$[a, b]$ 上也可积，且

$$\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1 \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k_2 \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

性质2（乘积可积性）：设$f(x), g(x)$ 均在$[a, b]$ 上可积，则$f(x) \cdot g(x)$ 在$[a, b]$ 上可积。

注1：一般$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x \neq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。如$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x \neq \int_0^1 x\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 x\mathrm{d}x.$

注2：为何不考虑除法的可积性?

性质3（保号性）：若$f \in R[a,b], f(x) \geq 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0.$

推论（保序性）：若$f, g \in R[a,b]$，且在$[a,b]$上恒有$f(x) \geq g(x)$，则成立$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

显然，若$f \in C[a,b]$，且$f(x) \geq 0$但不恒为0，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$。

该命题可推广至：设$f \in R[a,b]$，且在$[a,b]$上$f(x) > 0$，则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$。

为证该命题，首先证：若$f \in R[a,b]$且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$，则存在$\mu > 0$和子区间$[c,d] \subseteq [a,b]$，在$[c,d]$上成立$f(x) \geq \mu > 0$。

性质4（区间可加性）： 设$a < c < b$

(1) 若$f \in R[a,b]$，则$f \in R[a,c]$ 且$f \in R[c,b]$；

(2) 若$f \in R[a,c]$ 且$f \in R[c,b]$，则$f \in R[a,b]$，并成立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

若函数f 的绝对值函数$|f|$ 在$[a,b]$ 上可积，则称f 在$[a,b]$ 绝对可积。

性质5（绝对可积性）： $f \in R[a,b]$，则$|f| \in R[a,b]$ 且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

注：(1) f 可积$\Longrightarrow$ $|f|$ 可积；

(2) f 可积$\Longrightarrow$ f^2 可积；

(3) f^2 可积 $\Longleftrightarrow$ $|f|$ 可积。

二、积分中值定理

定理:（积分第一中值定理）设$f(x)$ 和$g(x)$ 均在$[a,b]$上可积，$g(x)$ 在$[a,b]$ 上不变号，则$\exists\eta\in[m,M]$，s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\eta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

这里M,m 分别表示$f(x)$ 在$[a,b]$ 的上确界和下确界。

特别地，若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，则$\exists\xi\in[a,b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

注1：当$f \in C[a,b]$时，上述积分第一中值定理中$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$结论可加强为$\xi \in (a,b)$。

注2：当$f \in C[a,b], g(x) \equiv 1$时，上述结论为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$。

几何意义：当$f(x) \geq 0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$表示由曲线$y = f(x)$和直线$x = a, x = b$及x轴围成的曲边梯形的面积。

注3：$g(x)$的保号性条件不满足时，定理未必成立。e.g. $f(x) = g(x) = x, [a,b] = [-1,1]$，则

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \neq \mu \cdot \int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x = 0.$$

三、一些积分不等式证明

例6：（Hölder 不等式）设$f(x), g(x)$ 在$[a, b]$ 上可积，p, q 为满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的正数，则

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \le \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

例7：设$f(x)$ 在$[a, b]$ 上连续，且$f(x) > 0$，证明：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x \le \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right).$$

四、定积分与求和表达式的关系

例8：把下列极限表示成积分的形式。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k\pi}{n}$;

作业： 课本P_{293} 4(3)(4), 5, 7, 9, 10, 13。

补充：计算$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{2n}{n^2+k^2}$。

§7.3 微积分基本定理

一、变限积分

设$f \in R[a,b]$，则对$\forall x \in [a,b]$, $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 存在，且随x的改变而改变，故它是定义在$[a,b]$上关于x的函数，称为变上限积分。同理$\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ 称为变下限积分。

注：变上限函数扩展了函数的形式，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 与我们所熟悉的初等函数形式迥异，但它确实是一种函数的表现形式。

关于这两个积分具有如下性质：

命题1：设$f \in R[a,b]$，则$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是$[a,b]$上的连续函数。

命题2：设$f \in R[a,b], x \in [a,b]$ 是f 的连续点，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x).$$

原函数存在定理: 若$f \in C[a,b]$，则f 在$[a,b]$ 上存在原函数（即连续函数的原函数可微）。

注：$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(x)$ 给出了对积分上限求导的一个法则。

思考题：若$g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在某区间上处处可微，是否有在该区间上$g'(x) = f(x)$?

例3：计算$F(x)=\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ 的导数。

例4：求极限 $\lim_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{x^3}$。

可以由变上限积分导出微积分基本定理：

微积分基本定理: 设$f\in C[a,b], F(x)$ 是$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的一个原函数，则成立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

注1：该定理的结论被称为Newton-Leibniz 公式，也常记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b$。它沟通了微分与积分的桥梁，是高等数学乃至整个数学领域最优美的结论之一。

注2：微积分基本定理的条件可以减弱：
设$f(x) \in R[a,b], F(x)$ 为$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的一个原函数，
则$\forall x \in [a,b]$，成立N-L 公式：$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$。

注3：（1）可积函数未必有原函数。

（2）有原函数的函数未必可积。

作业： 课本P_{310} 1(1)(3), 2(2)(4), 3, 5.

补充1：设f 在$[a,b]$ 上可微，且满足$\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{3}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，求$f$。

补充2：证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x = 0$。

补充3：求$F(x) = \int_{x^2}^{x^3}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 的导数。

变限积分的用法除了证明微积分基本定理外，还可以证明下叙积分第二中值定理（§8.2）：

积分第二中值定理: 设函数$f \in R[a,b]$，则

(i) 若函数g 在$[a,b]$ 上减且$g(x) \geq 0$，则$\exists \xi \in [a,b]$, s.t.
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) 若函数g 在$[a,b]$ 上增且$g(x) \geq 0$，则$\exists \eta \in [a,b]$, s.t.
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_\eta^b f(x)\mathrm{d}x.$$

推论：设$f \in R[a,b]$，若g 为单调函数，则$\exists \xi \in [a,b]$,
s.t. $$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

注：积分第二中值定理及其推论是今后建立反常积分收敛判别法的工具。

二、定积分的计算

（一）Newton-Leibniz 公式

(1) 若$f \in C[a,b]$，F 为f的任一原函数;

(2) 若$f \in R[a,b]$，有原函数F（F 在$[a,b]$ 上连续），且在(a,b) 内除有限个点外有$F'(x) = f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

例1：计算$\int_{-1}^1 x^2 \mathrm{d}x$。

例2：求$\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x$。

例3：$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \\ e^x, & x \in [0,1] \end{cases}$

（二）定积分的换元法

定理: 设$f(x)\in C[a,b]$, $x=\phi(t)$ 在$t\in[\alpha,\beta]$（或$[\beta,\alpha]$）上有连续导数，其值域包含于$[a,b]$，且满足$\phi(\alpha)=a$, $\phi(\beta)=b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t.$$

注1：换元后定积分$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$ 的上下限α,β 必须与原定积分上下限a,b 相对应，而不必考虑α 与β 谁大谁小。

注2：对定积分作变量代换$x=\phi(t)$ 时，并不要求$\phi(t)$是一个单调、一一对应的函数，这一点与不定积分换元法有所不同。

求不定积分时，通过换元，求出新变量t的不定积分后，还需将变量t还原成x，故要求$x=\phi(t)$有反函数。

求定积分时，通过换元，写出关于新变量t的被积函数与关于新变量t的上下限后，可直接求出积分的值。

例5：求$\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^4)}$.

例6：求半径为r的圆的面积。

例7：计算$\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$。

例8：计算$\displaystyle\int_0^2 \frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}\mathrm{d}x$,

（注：原函数为$\displaystyle arctan\frac{x(x-2)}{x-1}$，在$x=1$处无定义）

作业： 课本P_{311} 6(4)(15 − 18)(20), 11(2)(3).

（三）定积分的分部积分法

由不定积分的分部积分公式 $\int uv' \mathrm{d}x = uv - \int u' v \mathrm{d}x$，可立即推出定积分的分部积分公式：

定理: 设 $u(x), v(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有连续导数，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x.$$

例9：求 $\int_0^{\pi} x \sin x \mathrm{d}x$。

作业： 课本 P_{311} 6(8 – 10)(13), 15

（四）对称性、周期性在定积分计算中的应用

定理: 设$f \in R[-a,a]$,

(1) 若f 是奇函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$;

(2) 若f 是偶函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$。

推论1：设$f \in R[0,a]$，且$f(x) = -f(a-x)$，即关于区间中点$a/2$ 为奇函数，则$\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$。

推论2：设$f \in R[0,a]$，且$f(x) = f(a-x)$，即关于区间中点$a/2$ 为偶函数，则$\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a/2} f(x)\mathrm{d}x$。

定理：设$f(x)$是以T为周期的可积函数，则$\forall a$,

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x.$$

作业：课本P_{312} 12。

补充1：设f 连续，证明下式，并用此计算P_{312}10(2)(3)。

(1) $\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^\pi f(\sqrt{a^2+b^2}\cos x)\mathrm{d}x$。

补充2：计算$I = \int_0^{2\pi}\sin(\sin x + x)\mathrm{d}x$ 和$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\mathrm{d}x$。

（五）利用递推法求定积分

例10：求$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x.$

注：I_n 在n 为奇数和偶数时表达式的不同。

例11：求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x \mathrm{d}x$。

归纳：形如$\int_\alpha^\beta \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x$ 的积分。

(1) 若m 与n 中至少有一奇，可用本例中换元积分法。

(2) 若m, n 均偶，一般只能通过三角函数恒等变形（如半角公式等），将三角函数的幂指数降低到1后解决。

但对$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x$，只要$m, n$ 中有一偶，即可利用例13递推公式求得定积分。

（六）变上限积分及积分中值定理的应用

例12：设$f(x) \in R[0,a]$，对$\forall x > 0$，有$f(x) > 0$，满足方程$f(x) = \sqrt{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}(0 \le x \le a)$，求$f(x)$。

例13：设$f \in C[0,2\pi]$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x。$$

例14：设$f \in C[0,\pi]$，且$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0, \int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x = 0$。证明：在$(0,\pi)$ 内至少存在两不同点ξ_1, ξ_2, s.t. $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

作业： 课本P_{312} 14, 17, 19, 20, 23.