1.2线性多步法

1.2.1 多步法的构造

- 若在计算u_{m+1}时用到前k步的值$u_m, u_{m-1}, \cdots, u_{m-k+1}$, $(k < 1)$,则称该方法为多步法，也称为k步法。

1.2线性多步法
1.2.1 多步法的构造

- 若在计算u_{m+1}时用到前k步的值$u_m, u_{m-1}, \cdots, u_{m-k+1}, (k < 1)$,则称该方法为多步法，也称为$k$步法。
- 线性k步法的一般形式为

$$u_{m+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_{m-i+1} + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{m-i+1}, m = k-1, k, \cdots, \quad (34)$$

α_i, β_i为常数，$f_{m-i+1} = f(x_{m-i+1}, u_{m-i+1})$,上式关于$f_{m-i+1}$是线性的，故称为线性多步法

1.2线性多步法
1.2.1 多步法的构造

- 若在计算u_{m+1}时用到前k步的值$u_m, u_{m-1}, \cdots, u_{m-k+1}, (k < 1)$,则称该方法为多步法，也称为$k$步法。
- 线性k步法的一般形式为

$$u_{m+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_{m-i+1} + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{m-i+1}, m = k-1, k, \cdots, \quad (34)$$

  α_i, β_i为常数，$f_{m-i+1} = f(x_{m-i+1}, u_{m-i+1})$,上式关于$f_{m-i+1}$是线性的，故称为线性多步法
- $\beta_0 = 0$,方法显式的，$\beta_0 \neq 0$方法隐式的

1.2线性多步法
1.2.1 多步法的构造

- 若在计算u_{m+1}时用到前k步的值$u_m, u_{m-1}, \cdots, u_{m-k+1}, (k < 1)$,则称该方法为多步法，也称为$k$步法。
- 线性k步法的一般形式为

$$u_{m+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_{m-i+1} + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{m-i+1}, m = k-1, k, \cdots, \quad (34)$$

α_i, β_i为常数，$f_{m-i+1} = f(x_{m-i+1}, u_{m-i+1})$,上式关于$f_{m-i+1}$是线性的，故称为线性多步法

- $\beta_0 = 0$,方法显式的，$\beta_0 \neq 0$方法隐式的
- 定义1.6 对线性多步法(34),记

$$R_{m+1} = u(x_{m+1}) - [\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u(x_{m-i+1}) + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{m-i+1}, u(x_{m-i+1}))], \quad (35)$$

则称R_{m+1}为局部截断误差。

三种构造线性多步法的方法：(1).用Taylor展开构造多步法

三种构造线性多步法的方法：(1).用Taylor展开构造多步法

- 公式(34)中的系数可用待定系数法确定，利用Taylor展开使局部截断误差达到一定的阶数，并由此确定出系数。

三种构造线性多步法的方法：(1).用Taylor展开构造多步法

- 公式(34)中的系数可用待定系数法确定，利用Taylor展开使局部截断误差达到一定的阶数，并由此确定出系数。
- 利用式(1)中的微分方程，式(35)可以重写为

$$R_{m+1} = u(x_{m+1}) - [\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_{m-i+1} + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i u'_{m-i+1}], \qquad (36)$$

三种构造线性多步法的方法：(1).用Taylor展开构造多步法

- 公式(34)中的系数可用待定系数法确定，利用Taylor展开使局部截断误差达到一定的阶数，并由此确定出系数。
- 利用式(1)中的微分方程，式(35)可以重写为

$$R_{m+1} = u(x_{m+1}) - [\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_{m-i+1} + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i u'_{m-i+1}], \qquad (36)$$

- 将上式右端各项在点x_m进行Taylor展开

$$u(x_{m+1}) = \sum_{j=0} \frac{1}{j!} h^j u^{(j)}(x_m), u(x_{m-i+1}) = \sum_{j=0} \frac{(1-i)^j}{j!} h^j u^{(j)}(x_m),$$

$$u'(x_{m+1}) = \sum_{j=1} \frac{(1-i)^{j-1}}{(j-1)!} h^{j-1} u^{(j)}(x_m),$$

- 把它们代入(36)

$$R_{m+1} = \sum_{j=} c_j h^j u^{(j)}(x_m), \tag{37}$$

其中

$$c_0 = 1 - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i, c_1 = 1 - \sum_{i=2}^{k} (1-i)\alpha_i - \sum_{i=0}^{k} \beta_i$$

$$c_j = \frac{1}{j!}[1 - \sum_{i=2}^{k} (1-i)^j \alpha_i - j \sum_{i=0}^{k} (1-i)^{j-1} \beta_i], j = 2, 3, \cdots, \tag{38}$$

• 把它们代入(36)

$$R_{m+1} = \sum_{j=} c_j h^j u^{(j)}(x_m), \tag{37}$$

其中

$$c_0 = 1 - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i, c_1 = 1 - \sum_{i=2}^{k} (1-i)\alpha_i - \sum_{i=0}^{k} \beta_i$$

$$c_j = \frac{1}{j!}[1 - \sum_{i=2}^{k} (1-i)^j \alpha_i - j \sum_{i=0}^{k} (1-i)^{j-1} \beta_i], j = 2, 3, \cdots, \tag{38}$$

• 欲使方法是p阶的，则应有$R_{m+1} = O(h^{p+1})$,于是α_i, β_i必须满足

$$c_j = 0, j = 0, 1, \cdots, p, \tag{39}$$

- 把它们代入(36)

$$R_{m+1} = \sum_{j=} c_j h^j u^{(j)}(x_m), \tag{37}$$

其中

$$c_0 = 1 - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i, c_1 = 1 - \sum_{i=2}^{k} (1-i)\alpha_i - \sum_{i=0}^{k} \beta_i$$

$$c_j = \frac{1}{j!}[1 - \sum_{i=2}^{k} (1-i)^j \alpha_i - j \sum_{i=0}^{k} (1-i)^{j-1} \beta_i], j = 2, 3, \cdots, \tag{38}$$

- 欲使方法是p阶的，则应有$R_{m+1} = O(h^{p+1})$,于是α_i, β_i必须满足

$$c_j = 0, j = 0, 1, \cdots, p, \tag{39}$$

- 此时局部截断误差为

$$R_{m+1} = c_{p+1} h^{p+1} u^{(p+1)}(x_m) + \cdots. \tag{40}$$

上式右端第一项称为局部截断误差的主项

- 对任意给定的p,由线性方程组(39)确定出α_i, β_i,这样可构造出各种各样的线性多步方法，并能同时得到局部截断误差

- 对任意给定的p,由线性方程组(39)确定出α_i, β_i,这样可构造出各种各样的线性多步方法，并能同时得到局部截断误差
- 线性方程组(39)共有$p+1$个方程，$2k+1$个未知数，p最多可取$2k$,也就是说，有可能构造出$2k$阶的k步方法

- 对任意给定的p,由线性方程组(39)确定出α_i, β_i,这样可构造出各种各样的线性多步方法，并能同时得到局部截断误差
- 线性方程组(39)共有$p+1$个方程，$2k+1$个未知数，p最多可取$2k$,也就是说，有可能构造出$2k$阶的k步方法
- 例如$p=4, k=2$,则方程组(39)为

$$\begin{cases} 1-\alpha_1-\alpha_2=0, \\ 1+\alpha_2-\beta_0-\beta_1-\beta_2=0 \\ 1-\alpha_2-2(\beta_0-\beta_2)=0, \\ 1+\alpha_2-3(\beta_0+\beta_2)=0 \\ 1-\alpha_2-4(\beta_0-\beta_2)=0 \end{cases}$$

它有唯一解

$$\alpha_1=0, \alpha_2=1, \beta_1=\frac{4}{3}, \beta_2=\beta_3=\frac{1}{3}$$

- 对任意给定的p,由线性方程组(39)确定出α_i, β_i,这样可构造出各种各样的线性多步方法，并能同时得到局部截断误差
- 线性方程组(39)共有$p+1$个方程，$2k+1$个未知数，p最多可取$2k$,也就是说，有可能构造出$2k$阶的k步方法
- 例如$p=4, k=2$,则方程组(39)为

$$\begin{cases} 1-\alpha_1-\alpha_2=0, \\ 1+\alpha_2-\beta_0-\beta_1-\beta_2=0 \\ 1-\alpha_2-2(\beta_0-\beta_2)=0, \\ 1+\alpha_2-3(\beta_0+\beta_2)=0 \\ 1-\alpha_2-4(\beta_0-\beta_2)=0 \end{cases}$$

  它有唯一解

$$\alpha_1=0, \alpha_2=1, \beta_1=\frac{4}{3}, \beta_2=\beta_3=\frac{1}{3}$$

- 于是得到一个四阶二步方法

$$u_{m+1}=u_{m-1}+\frac{h}{3}(f_{m+1}+4f_m+f_{m-1}). \tag{41}$$

- 式(41)是二步法中阶最高的方法，称为Milne（米尔尼）方法，它的局部截断误差为

$$R_{m+1} = -\frac{1}{90}h^5u^{(5)}(x_m) + O(h^6). \tag{42}$$

- 式(41)是二步法中阶最高的方法，称为Milne（米尔尼）方法，它的局部截断误差为

$$R_{m+1} = -\frac{1}{90}h^5 u^{(5)}(x_m) + O(h^6). \tag{42}$$

- 如果对式(1)中的微分方程两边从x_{m-1}到x_{m+1}积分，则有

$$u(x_{m+1}) = u(x_{m-1}) + \int_{x_{m-1}}^{x_{m+1}} f(x, u(x))dx$$

再对上式中的积分用Simpson(辛普生)积分也可得式(41),所以式(41)有时也称为Simpson公式

- 式(41)是二步法中阶最高的方法，称为Milne（米尔尼）方法，它的局部截断误差为

$$R_{m+1} = -\frac{1}{90}h^5u^{(5)}(x_m) + O(h^6). \tag{42}$$

- 如果对式(1)中的微分方程两边从x_{m-1}到x_{m+1}积分，则有

$$u(x_{m+1}) = u(x_{m-1}) + \int_{x_{m-1}}^{x_{m+1}} f(x, u(x))dx$$

再对上式中的积分用Simpson(辛普生)积分也可得式(41),所以式(41)有时也称为Simpson公式

- 两个四阶公式

$$u_{m+1} = \frac{1}{8}(9u_m - u_{m-2}) + \frac{3}{8}h(f_{m+1} + 2f_m - f_{m-1}), R_{m+1} = -\frac{1}{40}h^5u^{(5)}(x_m) + Oh^6 \tag{43}$$

$$u_{m+1} = u_{m-3} + \frac{4}{3}h(2f_m - f_{m-1} + 2f_{m-2}), R_{m+1} = \frac{14}{45}h^5u^{(5)}(x_m) + O(h^6), \tag{44}$$

它们分别是三步方法和四步方法

例3、求a, b, c, d使二步公式

$$u_{m+1} = au_m + bu_{m-1} + h(cf_m + df_{m-1})$$

的阶尽量高，并求局部截断误差的主项

例3、求a, b, c, d使二步公式

$$u_{m+1} = au_m + bu_{m-1} + h(cf_m + df_{m-1})$$

的阶尽量高，并求局部截断误差的主项
解：局部截断误差为

$$R_{m+1} = u(x_{m+1}) - \{au(x_m) + bu(x_{m-1}) + h[cu^{'}(x_m) + du^{'}(x_{m-1})]\}$$

例3、求a, b, c, d使二步公式

$$u_{m+1} = au_m + bu_{m-1} + h(cf_m + df_{m-1})$$

的阶尽量高，并求局部截断误差的主项

解：局部截断误差为

$$R_{m+1} = u(x_{m+1}) - \{au(x_m) + bu(x_{m-1}) + h[cu'(x_m) + du'(x_{m-1})]\}$$

利用Taylor展开，得

$$u(x_{m-1}) = u(x_m) - hu'(x_m) + \frac{h^2}{2}u''(x_m) - \frac{h^3}{6}u'''(x_m) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_m) + \cdots$$

$$u'(x_{m-1}) = u'(x_m) - hu''(x_m) + \frac{h^2}{2}u'''(x_m) - \frac{h^3}{6}u^{(4)}(x_m) + \cdots$$

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + hu'(x_m) + \frac{h^2}{2}u''(x_m) + \frac{h^3}{6}u'''(x_m) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_m) + \cdots$$

于是

$$au(x_m)+bu(x_{m-1})+h[cu'(x_m)+du'(x_{m-1})=(a+b)u(x_m)+(-b+c+d)hu'(x_m)$$

$$+(b-2d)\frac{h^2}{2}u''(x_m)+(-b+3d)\frac{h^3}{6}u'''(x_m)+(b-4d)\frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_m)+\cdots.$$

于是

$$au(x_m)+bu(x_{m-1})+h[cu^{'}(x_m)+du^{'}(x_{m-1})=(a+b)u(x_m)+(-b+c+d)hu^{'}(x_m)$$

$$+(b-2d)\frac{h^2}{2}u^{''}(x_m)+(-b+3d)\frac{h^3}{6}u^{'''}(x_m)+(b-4d)\frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_m)+\cdots.$$

把上式同$u(x_{m+1})$的Taylor展开式相比较，得

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -b+c+d=1 \\ b-2d=1, \\ -b+3d=1 \end{cases}$$

解方程组，得

于是

$$au(x_m)+bu(x_{m-1})+h[cu'(x_m)+du'(x_{m-1}) = (a+b)u(x_m)+(-b+c+d)hu'(x_m)$$

$$+(b-2d)\frac{h^2}{2}u''(x_m)+(-b+3d)\frac{h^3}{6}u'''(x_m)+(b-4d)\frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_m)+\cdots.$$

把上式同$u(x_{m+1})$的Taylor展开式相比较，得

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -b+c+d=1 \\ b-2d=1, \\ -b+3d=1 \end{cases}$$

解方程组，得

$$a=-4, b=5, c=4, d=2$$

从而所求公式是

$$u_{m+1}=-4u_m+5u_{m-1}+2h(2f_m+f_{m-1})$$

它是三阶的，局部截断误差的主项是$\frac{1}{6}h^4u^{(4)}(x_m)$.

(2).用数值积分构造多步法(Adams(阿达姆斯)法)

(2).用数值积分构造多步法(Adams(阿达姆斯)法)

- 对式(1)中的微分方程从x_m到x_{m+1}积分，有

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, u(x))dx. \tag{45}$$

(2).用数值积分构造多步法(Adams(阿达姆斯)法)

- 对式(1)中的微分方程从x_m到x_{m+1}积分，有

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, u(x))dx. \qquad (45)$$

- 如果以$x_m, x_{m-1}, \cdots, x_{m-k}$为插值节点构造$f(x,u(x))$的$k$次Lagrange（拉格朗日）插值多项式$L_k(x)$,记差值余项为$r_k(x)$,则

$$f(x,u(x)) = L_k(x) + r_k(x)$$

$$L_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \left(\prod_{j=0, j\neq i}^{k} \frac{x - x_{m-j}}{x_{m-i} - x_{m-j}} \right) f(x_{m-i}, u(x_{m-i})),$$

$$r_k(x) = \frac{u^{(k+2)}(\xi_m)}{(k+1)!} \prod_{j=0}^{k} (x - x_{m-j}), \xi_m \in (x_{m-k}, x_{m+1})$$

于是

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} L_k(x)dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} r_k(x)dx$$

略去余项，得公式

$$u_{m+1} = u_m + h \sum_{i=0}^{k} \beta_{ki} f_{m-i}, \tag{46}$$

略去余项，得公式

$$u_{m+1} = u_m + h\sum_{i=0}^{k}\beta_{ki}f_{m-i}, \tag{46}$$

局部截断误差为

$$R_{m+1} = \int_{x_m}^{x_{m+1}} r_k(x)dx = c_{k+2}h^{k+2}u^{(k+2)}(\eta_m), \eta_m \in (x_{m-k}, x_{m+1}). \tag{47}$$

其中

$$\beta_{ki} = \frac{1}{h}\int_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{j=0,j\neq i}^{k} \frac{x - x_{m-j}}{x_{m-i} - x_{m-j}}dx = \frac{(-1)^i}{i!(k-i)!}\int_0^1 \prod_{j=0,j\neq i}(t+j)dt, \tag{48}$$

$$c_{k+2} = \frac{h^{-(k+2)}}{(k+1)!}\int_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{x_m}^{x_{m+1}}\prod_{j=0}^{k}(x-x_{m-j})dx = \frac{1}{(k+1)!}\int_0^1 \prod_{j=0,j\neq i}(t+j)dt, \tag{49}$$

略去余项，得公式

$$u_{m+1} = u_m + h\sum_{i=0}^{k}\beta_{ki}f_{m-i}, \tag{46}$$

局部截断误差为

$$R_{m+1} = \int_{x_m}^{x_{m+1}} r_k(x)dx = c_{k+2}h^{k+2}u^{(k+2)}(\eta_m), \eta_m \in (x_{m-k}, x_{m+1}). \tag{47}$$

其中

$$\beta_{ki} = \frac{1}{h}\int_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{j=0,j\neq i}^{k} \frac{x-x_{m-j}}{x_{m-i}-x_{m-j}}dx = \frac{(-1)^i}{i!(k-i)!}\int_0^1 \prod_{j=0,j\neq i}(t+j)dt, \tag{48}$$

$$c_{k+2} = \frac{h^{-(k+2)}}{(k+1)!}\int_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{x_m}^{x_{m+1}}\prod_{j=0}^{k}(x-x_{m-j})dx = \frac{1}{(k+1)!}\int_0^1 \prod_{j=0,j\neq i}(t+j)dt, \tag{49}$$

上面积分中已经作了变量变换$x = x_m + th$,公式(46)称为Adams-Bashforh方法，它是$k+1$步$k+1$阶的显式方法. 因为$L_k(x)$是$f(x,u(x))$的外插多项式($x \in [x_m, x_{m+1}]$在插值节点所决定的最大区间$[x_{m-k}, x_m]$之外),故又称公式(46)为Adams外插公式

记

$$\alpha_j = \frac{1}{j!}\int_0^1 t(t+1)\cdot(t+j-1)dt, \tag{50}$$

记

$$\alpha_j = \frac{1}{j!}\int_0^1 t(t+1)\cdot(t+j-1)dt, \tag{50}$$

由于

$$1+t+i+\frac{(t+i)(t+i+1)}{2!}+\cdots+\frac{(t+i)(t+i+1)\cdots(t+k-1)}{(k-i)!}$$

$$=\frac{(t+i+1)(t+i+2)\cdots(t+k)}{(k-i)!}$$

记

$$\alpha_j = \frac{1}{j!}\int_0^1 t(t+1)\cdot(t+j-1)dt, \tag{50}$$

由于

$$1+t+i+\frac{(t+i)(t+i+1)}{2!}+\cdots+\frac{(t+i)(t+i+1)\cdots(t+k-1)}{(k-i)!}$$

$$=\frac{(t+i+1)(t+i+2)\cdots(t+k)}{(k-i)!}$$

则

$$\beta_{ki} = \frac{(-1)^i}{i!}\int_0^1 t(t+1)\cdots(t+i-1)\frac{(t+i+1)(t+i+2)\cdots(t+k)}{(k-i)!}dt$$

$$= (-1)^i\sum_{j=i}^{k}\frac{1}{i!(j-i)!}\int_0^1 t(t+1)\cdots(t+j-1)dt = (-1)^i\sum_{j=i}^{k}\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}\alpha_j, \tag{51}$$

$$c_{k+2} = \alpha_{k+1}, \tag{52}$$

其中

$$\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} = \frac{j(j-1)\cdots(j-i+1)}{i!}$$

- 这样处理的好处是α_j与k和i无关，简化了β_{ki}的计算

- 这样处理的好处是α_j与k和i无关，简化了β_{ki}的计算
- 教材上表1.4列出了$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_5$的值，表1.5列出了$\beta_{ki}$的值。

- 这样处理的好处是α_j与k和i无关，简化了β_{ki}的计算
- 教材上表1.4列出了$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_5$的值，表1.5列出了$\beta_{ki}$的值。
- 当$k = 0$时，式(46)就是Euler公式

- 这样处理的好处是α_j与k和i无关，简化了β_{ki}的计算
- 教材上表1.4列出了$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_5$的值，表1.5列出了$\beta_{ki}$的值。
- 当$k=0$时，式(46)就是Euler公式
- 当$k=3$时，则

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{24}(55f_m - 59f_{m-1} + 37f_{m-2} - 9f_{m-3}), \qquad (53)$$

$$R_{m+1} = \frac{251}{720}h^5u^{(5)}(\eta_m), \eta_m \in (x_{m-3}, x_{m+1}).$$

这是四阶Adams外插公式

以$x_{m+1}, x_m, \cdots, x_{m-k+1}$为插值节点构造$f(x, u(x))$的$k$次Lagrange插值多项式$L_k^*(x)$,记余项为$r_k^*(x)$,则

$$f(x, u(x)) = L_k^*(x) + r_k^*(x),$$

$$L_k^*(x) = \sum_{i=0}^{k}\Big(\prod_{j=0, j\neq i}^{k} \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}}\Big) f(x_{m-i+1}, u(x_{m-i+1})),$$

$$r_k^*(x) = \frac{u^{(k+2)}(\xi_m)}{(k+1)!} \prod_{j=0}^{k} (x - x_{m-j+1}), \xi_m \in (x_{m-k+1}, x_{m+1}).$$

以$x_{m+1},x_m,\cdots,x_{m-k+1}$为插值节点构造$f(x,u(x))$的$k$次Lagrange插值多项式$L_k^*(x)$,记余项为$r_k^*(x)$,则

$$f(x,u(x))=L_k^*(x)+r_k^*(x),$$

$$L_k^*(x)=\sum_{i=0}^{k}\Big(\prod_{j=0,j\neq i}^{k}\frac{x-x_{m-j+1}}{x_{m-i+1}-x_{m-j+1}}\Big)f(x_{m-i+1},u(x_{m-i+1})),$$

$$r_k^*(x)=\frac{u^{(k+2)}(\xi_m)}{(k+1)!}\prod_{j=0}^{k}(x-x_{m-j+1}),\xi_m\in(x_{m-k+1},x_{m+1}).$$

将它们代入式(45),得

$$u(x_{m+1})=u(x_m)+\int_{x_m}^{x_{m+1}}L_k^*(x)dx+\int_{x_m}^{x_{m+1}}r_k^*(x)dx$$

略去上式右端的余项得到公式

$$u_{m+1}=u_m+h\sum_{i=0}^{k}\beta_{ki}^*f_{m-i+1}, \tag{54}$$

以$x_{m+1}, x_m, \cdots, x_{m-k+1}$为插值节点构造$f(x, u(x))$的$k$次Lagrange插值多项式$L_k^*(x)$,记余项为$r_k^*(x)$,则

$$f(x, u(x)) = L_k^*(x) + r_k^*(x),$$

$$L_k^*(x) = \sum_{i=0}^{k}\left(\prod_{j=0, j\neq i}^{k} \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}}\right) f(x_{m-i+1}, u(x_{m-i+1})),$$

$$r_k^*(x) = \frac{u^{(k+2)}(\xi_m)}{(k+1)!} \prod_{j=0}^{k}(x - x_{m-j+1}), \xi_m \in (x_{m-k+1}, x_{m+1}).$$

将它们代入式(45),得

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} L_k^*(x)dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} r_k^*(x)dx$$

略去上式右端的余项得到公式

$$u_{m+1} = u_m + h \sum_{i=0}^{k} \beta_{ki}^* f_{m-i+1}, \tag{54}$$

局部截断误差

$$R_{m+1} = c_{k+2}^* h^{k+2} u^{(k+2)}(\eta_m), \eta_m \in (x_{m-k+1}, x_{m+1}). \tag{55}$$

这里

$$\beta_{ki}^* = \frac{1}{h}\int_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{j=0,j\neq i}^{k} \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}} dx$$

$$= \frac{(-1)^i}{i!(k-i)!}\int_{-1}^{0} \prod_{j=0,j\neq i}^{k} (t+j)dt = (-1)^i \sum_{j=i}^{k} \left(\begin{array}{c} j \\ i \end{array}\right) \alpha_j^*, \tag{56}$$

$$c_{k+2}^* = \frac{1}{(k+1)!}\int_{-1}^{0} \prod_{j=0}^{k} (t+j)dt = \alpha_{k+1}^*, \tag{57}$$

$$\alpha_j^* = \frac{1}{j!}\int_{-1}^{0} t(t+1)\cdots(t+j-1)dt, \tag{58}$$

这里

$$\beta_{ki}^{*}=\frac{1}{h}\int_{x_m}^{x_{m+1}}\prod_{j=0,j\neq i}^{k}\frac{x-x_{m-j+1}}{x_{m-i+1}-x_{m-j+1}}dx$$

$$=\frac{(-1)^i}{i!(k-i)!}\int_{-1}^{0}\prod_{j=0,j\neq i}^{k}(t+j)dt=(-1)^i\sum_{j=i}^{k}\binom{j}{i}\alpha_j^{*}, \tag{56}$$

$$c_{k+2}^{*}=\frac{1}{(k+1)!}\int_{-1}^{0}\prod_{j=0}^{k}(t+j)dt=\alpha_{k+1}^{*}, \tag{57}$$

$$\alpha_j^{*}=\frac{1}{j!}\int_{-1}^{0}t(t+1)\cdots(t+j-1)dt, \tag{58}$$

- 上面积分中已作变换$x=x_{m+1}+th$,并用了类似于外插公式中计算β_{ki}的技巧

这里

$$\beta_{ki}^* = \frac{1}{h}\int_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{j=0,j\neq i}^{k} \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}} dx$$

$$= \frac{(-1)^i}{i!(k-i)!}\int_{-1}^{0} \prod_{j=0,j\neq i}^{k} (t+j)dt = (-1)^i \sum_{j=i}^{k} \binom{j}{i} \alpha_j^*, \tag{56}$$

$$c_{k+2}^* = \frac{1}{(k+1)!}\int_{-1}^{0} \prod_{j=0}^{k} (t+j)dt = \alpha_{k+1}^*, \tag{57}$$

$$\alpha_j^* = \frac{1}{j!}\int_{-1}^{0} t(t+1)\cdots(t+j-1)dt, \tag{58}$$

- 上面积分中已作变换$x = x_{m+1} + th$,并用了类似于外插公式中计算β_{ki}的技巧
- 公式(54)称为Adams-Molton方法，它是k步$k+1$阶的隐式方法

这里

$$\beta_{ki}^* = \frac{1}{h}\int_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{j=0,j\neq i}^{k} \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}} dx$$

$$= \frac{(-1)^i}{i!(k-i)!}\int_{-1}^{0} \prod_{j=0,j\neq i}^{k} (t+j)dt = (-1)^i \sum_{j=i}^{k} \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \alpha_j^*, \tag{56}$$

$$c_{k+2}^* = \frac{1}{(k+1)!}\int_{-1}^{0} \prod_{j=0}^{k}(t+j)dt = \alpha_{k+1}^*, \tag{57}$$

$$\alpha_j^* = \frac{1}{j!}\int_{-1}^{0} t(t+1)\cdots(t+j-1)dt, \tag{58}$$

- 上面积分中已作变换$x = x_{m+1} + th$,并用了类似于外插公式中计算β_{ki}的技巧
- 公式(54)称为Adams-Molton方法，它是k步$k+1$阶的隐式方法
- 因为$L_k^*(x)$是$f(x, u(x))$的内插多项式($x \in [x_m, x_{m+1}]$在插值节点所决定的最大区间$[x_{m-k+1}, x_{m+1}]$之内),故又称公式(54)为Adams内插公式

这里

$$\beta_{ki}^* = \frac{1}{h}\int_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{j=0,j\neq i}^{k} \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}} dx$$

$$= \frac{(-1)^i}{i!(k-i)!}\int_{-1}^{0} \prod_{j=0,j\neq i}^{k} (t+j)dt = (-1)^i \sum_{j=i}^{k} \binom{j}{i} \alpha_j^*, \tag{56}$$

$$c_{k+2}^* = \frac{1}{(k+1)!}\int_{-1}^{0} \prod_{j=0}^{k}(t+j)dt = \alpha_{k+1}^*, \tag{57}$$

$$\alpha_j^* = \frac{1}{j!}\int_{-1}^{0} t(t+1)\cdots(t+j-1)dt, \tag{58}$$

- 上面积分中已作变换$x = x_{m+1} + th$,并用了类似于外插公式中计算β_{ki}的技巧
- 公式(54)称为Adams-Molton方法，它是k步$k+1$阶的隐式方法
- 因为$L_k^*(x)$是$f(x, u(x))$的内插多项式($x \in [x_m, x_{m+1}]$在插值节点所决定的最大区间$[x_{m-k+1}, x_{m+1}]$之内),故又称公式(54)为Adams内插公式
- 当$k = 0$时，式(54)就是向后的Euler法，当$k = 1$时，它是梯形法

(3).用数值微分构造多步法(Gear(吉尔)方法)

(3).用数值微分构造多步法(Gear(吉尔)方法)

以$x_{m+1}, x_m, \cdots, x_{m-k+1}$构 造 函 数$u(x)$的$k$次Lagrange插 值 多 项式$L_k(x)$,记余项为$r_k(x)$，则

$$u(x) = L_k(x) + r_k(x)$$

$$L_k(x) = \sum_{i=0}^{k}\left(\prod_{j=0, j\neq i}^{k} \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}}\right) u(x_{m-i+1})$$

$$r_k(x) = \frac{u^{(k+1)}(\xi_m)}{(k+1)!}\prod_{j=0}^{k}(x - x_{m-j+1}), \xi_m(x_{m-k+1}, x_{m+1})$$

(3).用数值微分构造多步法(Gear(吉尔)方法)

以$x_{m+1}, x_m, \cdots, x_{m-k+1}$构 造 函 数$u(x)$的$k$次Lagrange插 值 多 项 式$L_k(x)$,记余项为$r_k(x)$，则

$$u(x) = L_k(x) + r_k(x)$$

$$L_k(x) = \sum_{i=0}^{k}\Big(\prod_{j=0,j\neq i}^{k} \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}}\Big)u(x_{m-i+1})$$

$$r_k(x) = \frac{u^{(k+1)}(\xi_m)}{(k+1)!}\prod_{j=0}^{k}(x - x_{m-j+1}), \xi_m(x_{m-k+1}, x_{m+1})$$

将上面$u(x)$的表达式代入式(1)中的微分方程，并令$x = x_{m+1}$,于是有

$$L_k'(x_{m+1}) = f(x_{m+1}, u(x_{m+1})) - r_k'(x_{m+1}), \qquad (60)$$

(3).用数值微分构造多步法(Gear(吉尔)方法)

以$x_{m+1}, x_m, \cdots, x_{m-k+1}$构造函数$u(x)$的$k$次Lagrange插值多项式$L_k(x)$,记余项为$r_k(x)$，则

$$u(x) = L_k(x) + r_k(x)$$

$$L_k(x) = \sum_{i=0}^{k}\Big(\prod_{j=0, j\neq i}^{k} \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}}\Big) u(x_{m-i+1})$$

$$r_k(x) = \frac{u^{(k+1)}(\xi_m)}{(k+1)!}\prod_{j=0}^{k}(x - x_{m-j+1}), \xi_m(x_{m-k+1}, x_{m+1})$$

将上面$u(x)$的表达式代入式(1)中的微分方程，并令$x = x_{m+1}$,于是有

$$L_k^{'}(x_{m+1}) = f(x_{m+1}, u(x_{m+1})) - r_k^{'}(x_{m+1}), \tag{60}$$

记

$$b_{ki} = h\Big(\prod_{j=0, j\neq i}^{k} \frac{x - x_{m-j+1}}{x_{m-i+1} - x_{m-j+1}}\Big)'_{x = x_{m+1}} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}, & \text{当} i = 0 \text{时} \\ \frac{(-1)^i}{i}\begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix}, & \text{当} i > 0 \text{时} \end{cases} \tag{61}$$

$$L_k'(x_{m+1}) = \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{k} b_{ki}u(x_{m-i+1}) = \frac{b_{k0}}{h}[u(x_{m+1}) - \sum_{i=1}^{k}\alpha_{ki}u(x_{m-i+1})].$$

又

$$r_k'(x_{m+1}) = \frac{h^k}{k+1}u^{(k+1)}(\eta_m), \eta_m \in (x_{m-k+1}, x_{m+1})$$

把上面两式代入式(60),得

$$u(x_{m+1}) = \sum_{i=1}^{k}\alpha_{ki}u(x_{m-i+1}) + \alpha_{k0}hf(x_{m+1}, u(x_{m+1})) - \frac{\alpha_{k0}}{k+1}h^{k+1}u^{(k+1)}(\eta_m).$$

$$L_k'(x_{m+1}) = \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{k} b_{ki}u(x_{m-i+1}) = \frac{b_{k0}}{h}[u(x_{m+1}) - \sum_{i=1}^{k}\alpha_{ki}u(x_{m-i+1})].$$

又

$$r_k'(x_{m+1}) = \frac{h^k}{k+1}u^{(k+1)}(\eta_m), \eta_m \in (x_{m-k+1}, x_{m+1})$$

把上面两式代入式(60),得

$$u(x_{m+1}) = \sum_{i=1}^{k}\alpha_{ki}u(x_{m-i+1}) + \alpha_{k0}hf(x_{m+1}, u(x_{m+1})) - \frac{\alpha_{k0}}{k+1}h^{k+1}u^{(k+1)}(\eta_m).$$

略去上式右边的余项得公式

$$u_{m+1} = \sum_{i=1}^{k}\alpha_{ki}u_{m-i+1} + \alpha_{k0}hf_{m+1}, \tag{63}$$

$$L_k'(x_{m+1}) = \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{k} b_{ki}u(x_{m-i+1}) = \frac{b_{k0}}{h}[u(x_{m+1}) - \sum_{i=1}^{k}\alpha_{ki}u(x_{m-i+1})].$$

又

$$r_k'(x_{m+1}) = \frac{h^k}{k+1}u^{(k+1)}(\eta_m), \eta_m \in (x_{m-k+1}, x_{m+1})$$

把上面两式代入式(60),得

$$u(x_{m+1}) = \sum_{i=1}^{k}\alpha_{ki}u(x_{m-i+1}) + \alpha_{k0}hf(x_{m+1}, u(x_{m+1})) - \frac{\alpha_{k0}}{k+1}h^{k+1}u^{(k+1)}(\eta_m).$$

略去上式右边的余项得公式

$$u_{m+1} = \sum_{i=1}^{k}\alpha_{ki}u_{m-i+1} + \alpha_{k0}hf_{m+1}, \tag{63}$$

其局部截断误差是

$$R_{m+1} = -\frac{\alpha_{k0}}{k+1}h^{k+1}u^{(k+1)}(\eta_m). \tag{64}$$

公式(63)称为Gear法，它是k步k阶的隐式方法

1.2.3 多步法的稳定性与收敛性

1.2.3 多步法的稳定性与收敛性

将线性k步法公式(34)改写成

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j u_{m+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{m+j}, m = 0, 1, \cdots, \tag{78}$$

其中$\alpha_k = 1, |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$.即在确定$u_{m+k}$时用到了$u_{m+k-1}, u_{m+k-2}, \cdots, u_m$这$k$个值。

1.2.3 多步法的稳定性与收敛性

将线性k步法公式(34)改写成

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u_{m+j}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{m+j}, m=0,1,\cdots, \tag{78}$$

其中$\alpha_k = 1, |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$.即在确定$u_{m+k}$时用到了$u_{m+k-1}, u_{m+k-2}, \cdots, u_m$这$k$个值。

- 定义1.7 如果多步法(78)至少是一阶的，则称该方法是相容的。

1.2.3 多步法的稳定性与收敛性

将线性k步法公式(34)改写成

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u_{m+j}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{m+j}, m=0,1,\cdots, \tag{78}$$

其中$\alpha_k = 1, |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$.即在确定$u_{m+k}$时用到了$u_{m+k-1}, u_{m+k-2},\cdots,u_m$这$k$个值。

- 定义1.7 如果多步法(78)至少是一阶的，则称该方法是相容的。
- 定义1.8 如果多步法(78)满足：存在正常数c和h_0，使得用任意步长$h \in (0,h_0]$以及用任意两组初值$u_0,u_1,\cdots,u_{k-1}$和$v_0,v_1,\cdots,v_{k-1}$计算得到的两组数值$u_k,u_{k+1},\cdots,u_n$和$v_k,v_{k+1},\cdots,v_n$成立

$$\max_{k\le m\le n}|u_m-v_m|\le c\max_{0\le j\le k-1}|u_j-v_j|,$$

则称该方法是稳定的,其中$n=[\frac{b-x_0}{h}]$.

定 义1.9 如果多步法(78)满足：对$(x_0, b]$中任意一个固定的点a,当k个初值满足

$$\lim_{h\to 0}(u(x_m) - u_m) = 0, \quad m = 0, 1, \cdots, k-1$$

时，成立

$$\lim_{h\to 0, x_0+mh=a} u_m = u(a)$$

则称该方法是收敛的。

定义1.9 如果多步法(78)满足：对$(x_0, b]$中任意一个固定的点a,当k个初值满足

$$\lim_{h\to 0}(u(x_m)-u_m)=0,\quad m=0,1,\cdots,k-1$$

时，成立

$$\lim_{h\to 0, x_0+mh=a} u_m = u(a)$$

则称该方法是收敛的。
记

$$\rho(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\lambda^j,\quad \sigma(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\beta_j\lambda^j$$

这两个多项式由多步法(78)完全确定，分别称$\rho(\lambda)$和$\sigma(\lambda)$是多步法(78)的第一和第二特征多项式。

定义1.9 如果多步法(78)满足：对$(x_0, b]$中任意一个固定的点a,当k个初值满足

$$\lim_{h\to 0}(u(x_m)-u_m)=0,\quad m=0,1,\cdots,k-1$$

时，成立

$$\lim_{h\to 0,x_0+mh=a} u_m = u(a)$$

则称该方法是收敛的。
记

$$\rho(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\lambda^j,\ \ \sigma(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\beta_j\lambda^j$$

这两个多项式由多步法(78)完全确定，分别称$\rho(\lambda)$和$\sigma(\lambda)$是多步法(78)的第一和第二特征多项式。

定理1.8 多步法(78)相容的充分必要条件是$\rho(1)=0, \rho'(1)=\sigma(1)$.

定理1.8 多步法(78)相容的充分必要条件是$\rho(1)=0, \rho^{'}(1)=\sigma(1)$.
证：利用Taylor展开，公式(78)的局部截断误差是

$$R_{m+k}=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u(x_{m+j})-h\sum_{j=0}^{k}\beta_j u^{'}(x_{m+j})$$

$$=(\sum_{j=0}^{k}\alpha_j)u(x_m)+\sum_{j=0}^{k}(j\alpha_j-\beta_j)hu^{'}(x_m)+\cdots$$

$$=\rho(1)u(x_m)+[\rho^{'}(1)-\sigma(1)]hu^{'}(x_m)+\cdots.$$

于是多步法至少是一阶的充要条件是$\rho(1)=\rho^{'}(1)-\sigma(1)=0$.再由相容性定义便得到定理。

定理1.8 多步法(78)相容的充分必要条件是$\rho(1)=0, \rho'(1)=\sigma(1)$.
证：利用Taylor展开，公式(78)的局部截断误差是

$$R_{m+k}=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u(x_{m+j})-h\sum_{j=0}^{k}\beta_j u'(x_{m+j})$$

$$=(\sum_{j=0}^{k}\alpha_j)u(x_m)+\sum_{j=0}^{k}(j\alpha_j-\beta_j)hu'(x_m)+\cdots$$

$$=\rho(1)u(x_m)+[\rho'(1)-\sigma(1)]hu'(x_m)+\cdots.$$

于是多步法至少是一阶的充要条件是$\rho(1)=\rho'(1)-\sigma(1)=0$.再由相容性定义便得到定理。

- 定理1.9 多步法稳定的充分必要条件是$\rho(\lambda)$满足根条件:$\rho(\lambda)$的所有根的模小于或等于1，并且模等于1 的根为单根。

定理1.8 多步法(78)相容的充分必要条件是$\rho(1)=0, \rho'(1)=\sigma(1)$.
证：利用Taylor展开，公式(78)的局部截断误差是

$$R_{m+k}=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u(x_{m+j})-h\sum_{j=0}^{k}\beta_j u'(x_{m+j})$$

$$=(\sum_{j=0}^{k}\alpha_j)u(x_m)+\sum_{j=0}^{k}(j\alpha_j-\beta_j)hu'(x_m)+\cdots$$

$$=\rho(1)u(x_m)+[\rho'(1)-\sigma(1)]hu'(x_m)+\cdots.$$

于是多步法至少是一阶的充要条件是$\rho(1)=\rho'(1)-\sigma(1)=0$.再由相容性定义便得到定理。

- 定理1.9 多步法稳定的充分必要条件是$\rho(\lambda)$满足根条件:$\rho(\lambda)$的所有根的模小于或等于1，并且模等于1 的根为单根。
- 定理1.10 多步法(78)收敛的充分必要条件是它是相容的和稳定的。

下面讨论绝对稳定性：

下面讨论绝对稳定性：
对于模型

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \mu u, & x_0 \le x \le b \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

其中μ是常数(可以是复数),

下面讨论绝对稳定性：
对于模型

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \mu u, \quad x_0 \le x \le b \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

其中μ是常数(可以是复数),多步法公式为

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j u_{m+j} = \bar{h} \sum_{j=0}^{k} \beta_j u_{m+j}, \tag{80}$$

其中$\bar{h} = \mu h$,

下面讨论绝对稳定性：
对于模型

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \mu u, & x_0 \le x \le b \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

其中μ是常数(可以是复数),多步法公式为

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j u_{m+j} = \bar{h} \sum_{j=0}^{k} \beta_j u_{m+j}, \tag{80}$$

其中$\bar{h} = \mu h$,记

$$\phi(\lambda, \bar{h}) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \lambda^j - \bar{h} \sum_{j=0}^{k} \beta_j \lambda^j, \tag{81}$$

下面讨论绝对稳定性：
对于模型

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \mu u, & x_0 \le x \le b \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

其中μ是常数(可以是复数),多步法公式为

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j u_{m+j} = \bar{h} \sum_{j=0}^{k} \beta_j u_{m+j}, \tag{80}$$

其中$\bar{h} = \mu h$,记

$$\phi(\lambda, \bar{h}) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \lambda^j - \bar{h} \sum_{j=0}^{k} \beta_j \lambda^j, \tag{81}$$

- 公式(81)是多步法的特征多项式。

下面讨论绝对稳定性：
对于模型

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \mu u, & x_0 \leq x \leq b \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

其中μ是常数(可以是复数),多步法公式为

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j u_{m+j} = \bar{h} \sum_{j=0}^{k} \beta_j u_{m+j}, \tag{80}$$

其中$\bar{h} = \mu h$,记

$$\phi(\lambda, \bar{h}) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \lambda^j - \bar{h} \sum_{j=0}^{k} \beta_j \lambda^j, \tag{81}$$

- 公式(81)是多步法的特征多项式。
- 特征多项式的所有根的模都小于1时，则多步法关于$\bar{h}$是绝对稳定的。

下面讨论绝对稳定性：
对于模型

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \mu u, & x_0 \le x \le b \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

其中μ是常数(可以是复数),多步法公式为

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j u_{m+j} = \bar{h} \sum_{j=0}^{k} \beta_j u_{m+j}, \tag{80}$$

其中$\bar{h} = \mu h$,记

$$\phi(\lambda, \bar{h}) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \lambda^j - \bar{h} \sum_{j=0}^{k} \beta_j \lambda^j, \tag{81}$$

- 公式(81)是多步法的特征多项式。
- 特征多项式的所有根的模都小于1时，则多步法关于$\bar{h}$是绝对稳定的。
- 所有这样的$\bar{h}$在复平面上组成了该方法的绝对稳定区域。

- 当μ是实数时，要确定绝对稳定区间就是讨论在什么条件下实系数多项式的根按模小于1.

- 当μ是实数时，要确定绝对稳定区间就是讨论在什么条件下实系数多项式的根按模小于1.
- 定理1.11 (1)实系数二次多项式x^2+px+q的两个根的模都小于1的充分必要条件是

$$1+p+q>0, 1-p+q>0, 1-q>0;$$

(2)实系数三次多项式x^3+px^2+qx+r的三个根的模都小于1的充分必要条件是

$$1+r>0, 1-r>0, 1+p+q+r>0$$

$$1-p+q-r>0, 1-q+pr-r^2>0$$

例5.求三阶Adams外插公式

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{12}(23f_m - 16f_{m-1} + 5f_{m-2}), \tag{82}$$

的绝对稳定区间

例5.求三阶Adams外插公式

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{12}(23f_m - 16f_{m-1} + 5f_{m-2}), \tag{82}$$

的绝对稳定区间

解：它的特征多项式是

$$\phi(\lambda, \bar{h}) = \lambda^3 - \lambda^2 - \frac{\bar{h}}{12}(23\lambda^2 - 16\lambda + 5)$$

$$= \lambda^2 - (1 + \frac{23}{12}\bar{h})\lambda^2 + \frac{16}{12}\bar{h}\lambda - \frac{5}{12}\bar{h}$$

例5.求三阶Adams外插公式

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{12}(23f_m - 16f_{m-1} + 5f_{m-2}), \tag{82}$$

的绝对稳定区间
解：它的特征多项式是

$$\phi(\lambda, \bar{h}) = \lambda^3 - \lambda^2 - \frac{\bar{h}}{12}(23\lambda^2 - 16\lambda + 5)$$

$$= \lambda^2 - (1 + \frac{23}{12}\bar{h})\lambda^2 + \frac{16}{12}\bar{h}\lambda - \frac{5}{12}\bar{h}$$

根据定理1.11,它的所有根按模小于1的充要条件是

$$-1 < \frac{5}{12}\bar{h} < 1, \bar{h} < 0,$$

$$2 + \frac{11}{3}\bar{h} > 0, 1 - \frac{11}{12}\bar{h} + \frac{5}{8}\bar{h}^2 > 0.$$

例5.求三阶Adams外插公式

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{12}(23f_m - 16f_{m-1} + 5f_{m-2}), \qquad (82)$$

的绝对稳定区间
解：它的特征多项式是

$$\phi(\lambda, \bar{h}) = \lambda^3 - \lambda^2 - \frac{\bar{h}}{12}(23\lambda^2 - 16\lambda + 5)$$

$$= \lambda^2 - (1 + \frac{23}{12}\bar{h})\lambda^2 + \frac{16}{12}\bar{h}\lambda - \frac{5}{12}\bar{h}$$

根据定理1.11,它的所有根按模小于1的充要条件是

$$-1 < \frac{5}{12}\bar{h} < 1, \bar{h} < 0,$$

$$2 + \frac{11}{3}\bar{h} > 0, 1 - \frac{11}{12}\bar{h} + \frac{5}{8}\bar{h}^2 > 0.$$

前面三个不等式可得

$$-\frac{6}{11} < \bar{h} < 0$$

第四个不等式对任何$\bar{h}$都成立，所以三阶Adams外插公式地绝对稳定区间是$(-\frac{6}{11}, 0)$

p阶Adams方法的绝对稳定区间

p	外插公式	内插公式
1	$(-2, 0)$	$(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
2	$(-1, 0)$	$(-\infty, 0)$
3	$(-\frac{6}{11}, 0)$	$(-6, 0)$
4	$(-\frac{3}{10}, 0)$	$(-3, 0)$

p阶Adams方法的绝对稳定区间

p	外插公式	内插公式
1	$(-2,0)$	$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$
2	$(-1,0)$	$(-\infty,0)$
3	$(-\frac{6}{11},0)$	$(-6,0)$
4	$(-\frac{3}{10},0)$	$(-3,0)$

- 内插的绝对稳定区间比外插大得多。

p阶Adams方法的绝对稳定区间

p	外插公式	内插公式
1	$(-2, 0)$	$(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
2	$(-1, 0)$	$(-\infty, 0)$
3	$(-\frac{6}{11}, 0)$	$(-6, 0)$
4	$(-\frac{3}{10}, 0)$	$(-3, 0)$

- 内插的绝对稳定区间比外插大得多。
- 外插的绝对稳定区间比同阶的Runge-Kutta法小。

作业：
14、求α,使线性多步法

$$u_{m+2}-(1+\alpha)u_{m+1}+\alpha u_m=\frac{h}{2}[(3-\alpha)f_{m+1}+(1+\alpha)f_m]$$

是相容的和稳定的

15、证明三阶Adams内插公式

$$u_{m+1}=u_m+\frac{h}{12}(5f_{m+1}+8f_m-f_{m-1})$$

的绝对稳定区间是$(-6,0)$