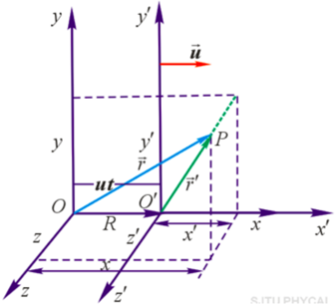
1.4 相对运动

考虑两个相对运动为平动的参考系，分别建立坐标系$K(Oxyz)$和$K'(O'x'y'z')$，设 $\vec{R}$为O'对O的位矢。

对于同一个质点P，任意时刻在两个坐标系中的位置矢量分别为$\vec{r}$和$\vec{r}'$，则有

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

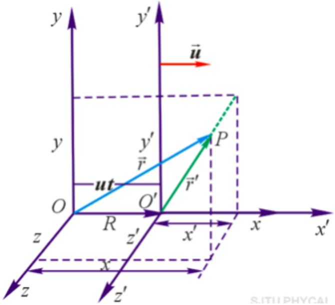


1.4 相对运动

牛顿的绝对时空观

- 空间绝对性：空间两点的距离在任何坐标系测量结果都相同.
- 时间绝对性：运动所经历的时间在任何坐标系测量结果都相同.

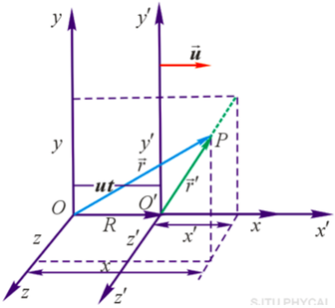
$$\vec{R}=\vec{u}t=\vec{u}t'$$



1.4 相对运动

伽利略坐标变换:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$
$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R} = \vec{r} - \vec{u}t,$$
$$t = t'$$



伽利略坐标变换:

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

1.4 相对运动

伽利略速度变换:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

对时间t求导，可得质点在两个坐标系中的速度关系:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

即

$$\vec{v}_K = \vec{u} + \vec{v}_{K'}$$

注意: 上述速度变换式只适用于低速运动($v \ll c$)的物体。

1.4 相对运动

伽利略加速度变换:

$$\vec{v}_K = \vec{u} + \vec{v}_{K'}$$

速度关系对时间t求导，可得质点在两个坐标系中的加速度关系:

$$\vec{a}_K = \vec{a} + \vec{a}_{K'}$$

称为伽利略加速度变换式。

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = 0, \quad \vec{a}_K = \vec{a}_{K'}$$

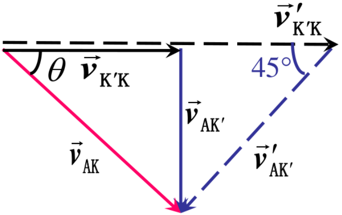
对相对做匀速运动的各个参考系加速度是相同的

1.4 相对运动

例1.4-1 某人以4 km/h的速度向东行进时，感觉风从正北吹来。如果将速度增加一倍，则感觉风从东北方向吹来。求相对于地面的风速和风向。

解：取地面为基本参考系K，人为运动参考系K'

$$\vec{v}_{AK} = \vec{v}_{AK'} + \vec{v}_{K'K}$$
$$\vec{v}_{AK} = \vec{v}\,'_{AK'} + \vec{v}\,'_{K'K}$$



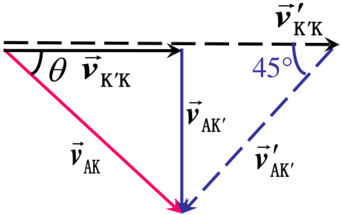
由图中的几何关系：

$$v_{K'K} = v'_{K'K} - v'_{AK'}\cos 45^\circ = 2v_{K'K} - \frac{\sqrt{2}}{2}v'_{AK'}$$
$$= v_{AK}\cos\theta$$
$$v_{AK'} = v'_{AK'}\sin 45^\circ = v_{AK}\sin\theta$$

1.4 相对运动

解得:

$$
\begin{aligned}
v'_{AK'} &= \sqrt{2}v_{K'K} = 5.66\ \mathrm{km/h} \\
v_{AK'} &= \frac{\sqrt{2}}{2}v'_{AK'} = 4\ \mathrm{km/h} \\
v_{AK} &= \sqrt{v_{K'K}^2 + v_{AK'}^2} \\
&= 5.66\ \mathrm{km/h}
\end{aligned}
$$



风速的方向:

$$\tan\theta = \frac{v_{AK'}}{v_{K'K}} = 1, \quad \theta = 45°, \quad \text{东偏南}45°$$

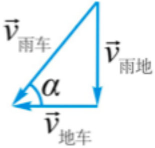
1.4 相对运动

例1.4-2 一货车在行驶过程中，遇到5 m/s竖直下落的大雨，车上紧靠挡板平放有长为$l = 1$ m的木板。如果木板上表面距挡板最高端的距离$h = 1$ m，问货车以多大的速度行驶，才能使木板不致淋雨？

解：车在前进的过程中，雨相对于车向后下方运动，使雨不落在木板上，挡板最上端处的雨应飘落在木板的最左端的左方。

$$\alpha = 45°,$$

$$v_{车} = |v_{地车}| = |v_{雨地}| = 5 \text{ m/s}$$



1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

一、牛顿运动定律

1687年，牛顿（I. Newton）发表他的名著《自然哲学的数学原理》，标志经典力学体系的确立。

虽然牛顿运动定律是对质点而言，但这并不限制定律的广泛适用性。因为复杂的物体（刚体、流体、弹性体等）在原则上可看作是质点的组合。

1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

1. 牛顿第一定律(惯性定律)

任何物体都保持静止的或沿一直线作匀速运动的状态，直到作用在它上面的力迫使它改变这种状态为止。

说明:

- 惯性: 任何物体具有保持其运动状态不变的性质。
- 力是引起运动状态改变的原因。
- 惯性系与非惯性系。
  地面系、地心系、日心系、 银心系
- 在惯性系中成立

1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

2. 牛顿第二定律

物体受到外力作用时，它所获得的加速度的大小与合外力的大小成正比，与物体的质量成反比，加速度的方向与合外力的方向相同。

数学形式：$\vec{F} = m\vec{a}$, 或$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

讨论:

(1) 力是产生加速度的原因。

(2) 惯性质量: 平动惯性大小的量度

(3) 瞬时性, 矢量性

(4) 在惯性系中成立。

1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

3. 牛顿第三定律(作用力和反作用力定律)

当物体A以力$\vec{F}_{\mathrm{AB}}$作用在物体B上时，物体B也必定同时以力$\vec{F}_{\mathrm{BA}}$作用在物体A上，两力作用在同一直线上，大小相等，方向相反。

数学形式：$\vec{F}_{\mathrm{AB}} = -\vec{F}_{\mathrm{BA}}$

讨论:

(1) 作用力和反作用力总是成对出现.

(2) 作用力和反作用力作用于不同物体, 不能平衡或抵消.

(3) 作用力和反作用力属于同一种性质的力.

(4) 在惯性系中成立.

1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

二、力学中的常见力

1. 万有引力: 存在于任何 两个物体间的相互吸引力。

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

m_1和m_2为两个质点的引力质量(和惯性质量相等)，r为两个质点的距离，G叫做引力常量。

$$G = 6.67259 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$$

忽略地球自转的影响物体所受的重力就等于它所受的万有引力：

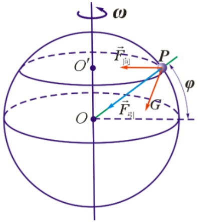
$$mg = G\frac{m_E m}{R^2}$$

1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

2. 重力: 重力是地球表面物体所受地球吸引而受的力。

- 在重力作用下任何物体产生的加速度是重力加速度g。
- 重力与重力加速度的方向都是竖直向下。
- 考虑到地球自转，重力是地球引力的一个分力。

$$
\begin{aligned}
G &= mg \\
g &= g_0(1 - 0.0035\cos^2\varphi)
\end{aligned}
$$



φ地理纬度角，g_0是地球两极处的重力加速度.

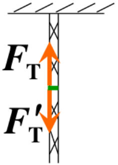
在计算精度要求不高时重力近似于地球引力。

1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

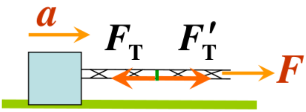
3. 弹力:

发生形变的物体，由于要恢复原状，对与它接触的物体会产生力的作用。

- 正压力
- 弹簧的弹力 $\vec{F} = -k\vec{x}$ (k为劲度系数)
- 绳中的张力



$F_T > F'_T$



$F_T < F'_T$

1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

4. 摩擦力：

- **静摩擦力**：当物体与接触面存在相对滑动趋势时，物体所受到接触面对它的阻力，其方向与相对滑动趋势方向相反。

  注：静摩擦力的大小随外力的变化而变化。

  最大静摩擦力：$F_s = \mu_s F_N$ (μ_s为静摩擦因数)

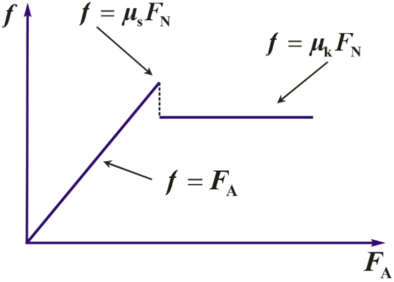
- **滑动摩擦力**：当物体相对于接触面滑动时，物体所受到接触面对它的阻力，其方向与滑动方向相反。

$$F_k = \mu_k F_N, \quad (\mu_k\text{为滑动摩擦因数})$$

对于给定的一对接触面，有$\mu_k < \mu_s < 1$.

1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

考虑放在水平面上的箱子在水平外力作用下运动，箱子所受摩擦力f与外力F_A 的关系如下图所示



1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

*三、基本相互作用

自然界中存在四种相互作用：

- 引力相互作用
- 电磁相互作用
- 强相互作用
- 弱相互作用

1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

四、牛顿运动定律应用举例

适用范围：惯性系、低速运动的宏观物体。

两类具体问题: 1. 常力作用下的连接体问题

2. 变力作用下的单体问题

解题步骤：

(1) 确定研究对象，对于物体系，画出隔离图；

(2) 进行受力分析，画出受力图；

(3) 建立坐标系；

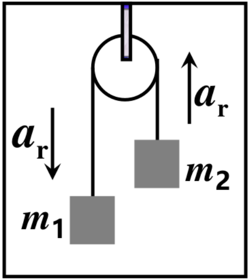
(4) 对各隔离体建立牛顿运动方程（分量式） 和物理量间的其他关系；

(5) 解方程、讨论。

1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

1. 常力作用下的连结体问题

例1.5-1 设电梯中有一质量可以忽略的滑轮，在滑轮两侧用轻绳悬挂着质量分别为m_1和m_2的重物A和B，已知$m_1 > m_2$. 当电梯(1)匀速上升，(2)匀加速上升时，求绳中的张力和物体A相对电梯的加速度。



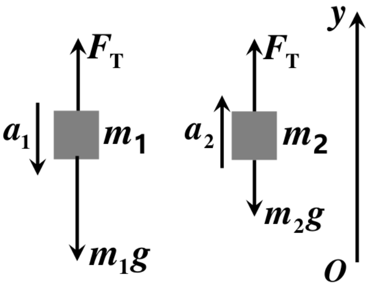
1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

解: 以地面为参考系,物体A和B为研究对象,分 别进行受力分析。 在竖直方向建立坐标系Oy .

(1)电梯匀速上升,物体对电梯的加速度a_r 等于它们 对地面的加速度。根据牛顿第二定律,对A和B分别 得到:

$$F_T - m_1 g = -m_1 a_r$$

$$F_T - m_2 g = m_2 a_r$$



解方程组得:

$$a_r = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$F_T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

(2)电梯以加速度a上升时，A对地的加速度$a-a_r$，B 的对地的加速度为$a+a_r$, 根据牛顿第二定律，对A和B分别得到:

$$F_T - m_1 g = m_1(a - a_r)$$

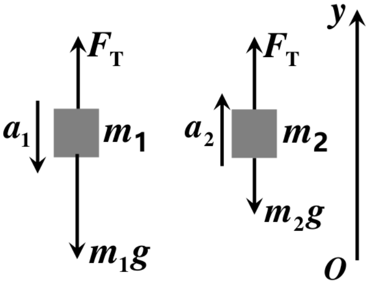
$$F_T - m_2 g = m_2(a + a_r)$$

$$a_r = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(a+g)$$

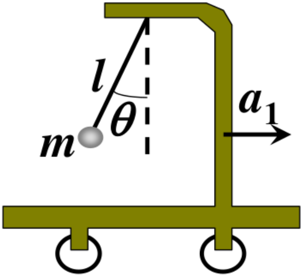
$$F_T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(a+g)$$

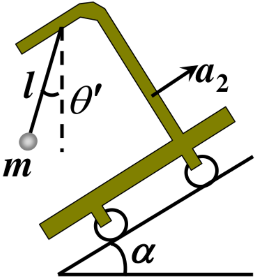
讨论:

当$a=-g$时, $a_r=0$,
$T=0$, 即滑 轮、质点都成为自由落体, 两个物体之间没有相对加速度。



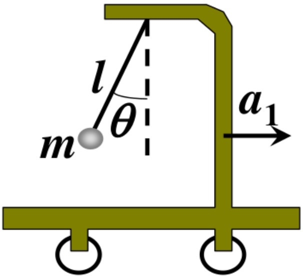
例1.5-2 一个质量为m、悬线长度为l的摆锤，挂在架子上，架子固定在小车上，如图所示。求在下列情况下悬线的方向(用摆的悬线与竖直方向所成的角θ表示)和线中的张力：(1)小车沿水平方向以加速度a_1做匀加速直线运动. (2)当小车以加速度a_2沿斜面(斜面与水平面成α角)向上做匀加速直线运动.

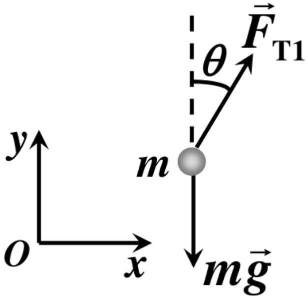




1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

解:(1)以小球为研究对象，当小车沿水平方向做匀 加速运动时，分析受力如图，建立图示坐标系。





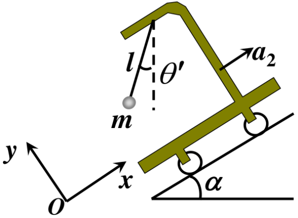
x方 向: $F_{T_1}\sin\theta = ma_1$

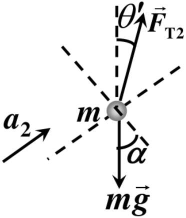
y方 向: $F_{T_1}\cos\theta - mg = 0$

$$F_{T_1} = m\sqrt{g^2 + a_1^2}$$

$$\tan\theta = \frac{a_1}{g},\quad \theta = \tan^{-1}\frac{a_1}{g}$$

解:(2)以小球为研究对象，当小车沿斜面作匀加速运 动时，分析受力如图，建立图示坐标系。





x方向:

$$F_{T_2}\sin(\alpha+\theta') - mg\sin\alpha = ma_2$$

y方向:

$$F_{T_2}\cos(\alpha+\theta') - mg\cos\alpha = 0$$

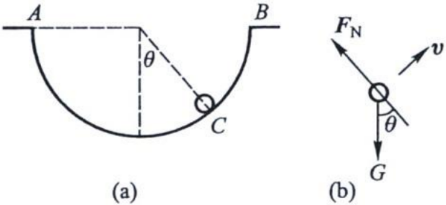
$$F_{T_2} = m\sqrt{2ga_2^2\sin\alpha + a_2^2 + g^2}$$

$$\tan(\alpha+\theta') = \frac{g\sin\alpha + a_2}{g\cos\alpha},$$

$$\theta' = \tan^{-1}\frac{g\sin\alpha + a_2}{g\cos\alpha} - \alpha$$

1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

例1.5-2 一质量为m的小球开始时位于图中A点，释放后沿半径为R的光滑轨道下滑，求小球到达C点时的速度和圆轨道的作用力。



解:对小球做受力分析, 得到方程

$$G + F_N = ma$$

在自然坐标系中

$$-mg\sin\theta = ma_t = m\frac{dv}{dt}$$

$$F_N - mg\cos\theta = ma_n = m\frac{v^2}{R}$$

1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

转换积分变量 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{d(R\theta)}$

代入前式 $-mg\sin\theta = m\frac{dv}{dt}$ 积分得

$$\int_0^v v dv = \int_{-\pi/2}^{\theta} -Rg\sin\theta d\theta$$

得: $v = \sqrt{2Rg\cos\theta}$

对圆轨道的作用力

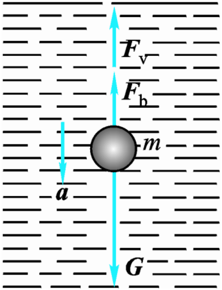
$$F_N = m\frac{v^2}{R} + mg\cos\theta = 3mg\cos\theta$$

1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

2. 变力作用下的单体问题

例1.5-3 计算一小球在水中竖直沉降的速度。已知小球的质量为m，水对小球的浮力为F_b，水对小球的粘性力为$F_\mathrm{v}=-Kv$，式中K是和水的黏性、小球的半径有关的一个常量。

解：以小球为研究对象，分析受力如图。小球的运动在竖直方向，以向下为正方向，列出小球运动方程：



$$G-F_\mathrm{b}-F_\mathrm{v}=ma$$

解得：$a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{mg-F_\mathrm{b}-Kv}{m}$

1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

令: $v_T = \dfrac{mg - F_b}{K} \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{K(v_T - v)}{m}$

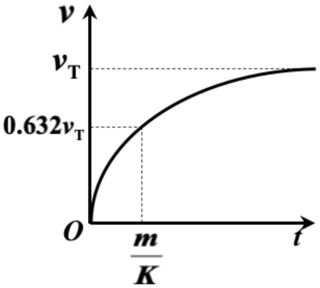
分离变量后积分得 $\displaystyle\int_0^v \frac{dv}{v_T - v} = \int_0^t \frac{K}{m} dt$

$$\ln \frac{v_T - v}{v_T} = \frac{K}{m} t$$

$$v = v_T(1 - e^{-Kt/m})$$

讨论: $t \to \infty, v = v_T$

v_T称为物体在气体或液体中沉降的终极速度.

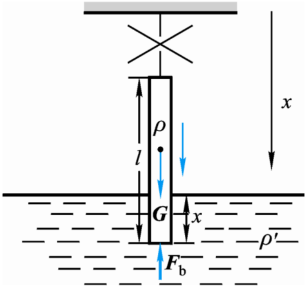


1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

例1.5-4 有一密度为ρ的细棒，长度为l，其上端用细线悬着，下端紧贴着密度为ρ'的液体表面．现将悬线剪断，求细棒在恰好全部没入水中时的沉降速度．设液体没有黏性．

解：在下落的过程中，棒受力如图所示．

取竖直向下为Ox轴的正方向．当棒的浸没长度为x时，浮力大小为(设棒的截面积$s=1$)



$$F_{\mathrm{b}} = \rho' x g$$

此时棒受到的合外力为

$$F = mg - F_{\mathrm{b}} = \rho l g - \rho' x g$$

1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

由牛顿第二定律得:

$$m\frac{dv}{dt} = g(\rho l - \rho' x)$$

使用:

$$m = \rho l, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

得:

$$\rho l v dv = g(\rho l - \rho' x)dx$$

积分得:

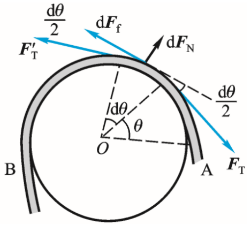
$$\int_0^v \rho l v dv = \int_0^l g(\rho l - \rho' x)dx$$

$$\rho l v^2 = 2\rho g l^2 - \rho' g l^2, \quad v = \sqrt{\frac{2\rho g l - \rho' g l}{\rho}}$$

1.5 牛顿运动定律 力学中的常见力

例1.5-6 图为船上使用的绞盘，将绳索绕在绞盘固定 圆柱上。如绳子与圆柱的静摩擦因数为μ_s，绳子绕圆 柱的张角为θ_0. 当绳在柱面上将要滑动时，求绳子两端张力F_{T_A}与F_{T_B}大小比。

解：考虑张角$d\theta$的一段绳元



$$F_T\cos\frac{d\theta}{2}-F_T'\cos\frac{d\theta}{2}-\mu_s dF_N=0$$

$$F_T\sin\frac{d\theta}{2}+F_T'\sin\frac{d\theta}{2}-dF_N=0$$

$d\theta$很小时， $\sin(d\theta/2)=d\theta/2$, $\cos(d\theta/2)=1$

$$F_T+F_T'\approx 2F_T,\quad F_T'-F_T\approx dF_T$$

整理得:

$$dF_{\mathrm{T}} = -\mu_s dF_{\mathrm{N}}, \quad F_{\mathrm{T}} d\theta = dF_{\mathrm{N}}$$

消去dF_{N}, 并积分

$$\int_{F_{\mathrm{T_A}}}^{F_{\mathrm{T_B}}} \frac{dF_{\mathrm{T}}}{F_{\mathrm{T}}} = \int_0^{\theta_0} -\mu_s d\theta$$

$$F_{\mathrm{T_B}} = F_{\mathrm{T_A}} e^{-\mu_s \theta_0}$$

1.6 伽利略相对性原理 非惯性系 惯性力

一、伽利略相对性原理

一切彼此做匀速直线运动的惯性系，对于描写机械运动的力学规律来说是完全等价的。

在一个惯性系的内部所做的任何力学的实验都不能够确定这一惯性系本身是在静止状态，还是在做匀速直线运动，称为力学的相对性原理，或伽利略相对性原理.

1.6 伽利略相对性原理 非惯性系 惯性力

二、经典力学的时空观

以经典力学的时空观为基础，伽利略坐标变换指出了质点的加速度对于相对做匀速运动的不同惯性系K与K′来说是个绝对量，即

$$\vec{a}=\vec{a}'$$

牛顿力学中： $\vec{F}=\vec{F}',\quad m=m'$

因此有： $\vec{F}=m\vec{a},\quad \vec{F}'=m'\vec{a}'$

宏观低速物体的力学规律在任何惯性系中形式相同，或牛顿力学规律在伽利略变换下形式不变。

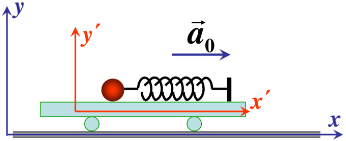
1.6 伽利略相对性原理 非惯性系 惯性力

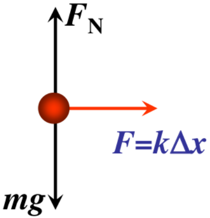
三、非惯性系

惯性系: 牛顿运动定律成立的参考系是惯性系。一切相对于惯性系(如地面系)做匀速直线运动的参考系也是惯性系。

非惯性系: 相对惯性系做加速运动的物体作为参考系。在非惯性系内牛顿运动定律不成立。

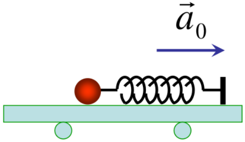
$$[S'] : a' = 0, \ F \neq ma'$$



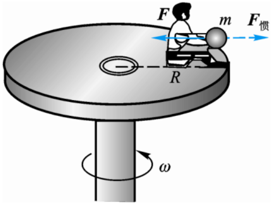


1.6 伽利略相对性原理 非惯性系 惯性力

平动加速系：相对于惯性系做加速直线运动，但是本身没有转动的物体。例如：在平直轨道上加速运动的火车。



转动参考系：相对惯性系转动的物体。例如：在水平面匀速转动转盘。



1.6 伽利略相对性原理 非惯性系 惯性力

四、惯性力

惯性力: 为了使牛顿第二定律的形式在非惯性系内成立而引进的一个虚构的力。

$$\vec{F}_{\mathrm{I}} = -m\vec{a}_0$$

$\vec{a}_0$是非惯性系相对惯性系的加速度。

在非惯性系中，动力学方程表示为

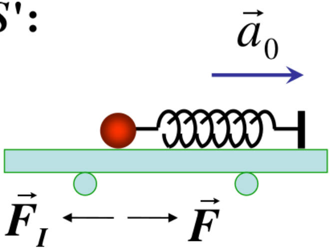
$$\vec{F} + \vec{F}_{\mathrm{I}} = m\vec{a}'$$

注意:

惯性力不是真正作用在物体上的力！ 惯性力无施力者，也无反作用力。

1.6 伽利略相对性原理 非惯性系 惯性力

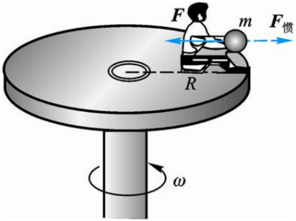
S':



S':

$$\vec{F} = k\vec{x}$$
$$\vec{F}_{\mathrm{I}} = -m\vec{a}_0$$
$$\vec{F} + \vec{F}_{\mathrm{I}} = m\vec{a}' = 0$$

S':



S':

$$\vec{F} = mR\omega^2\vec{e}_n$$
$$\vec{F}_{\mathrm{I}} = -m\vec{a}_0 = mR\omega^2\vec{e}_n$$
$$\vec{F} + \vec{F}_{\mathrm{I}} = m\vec{a}' = 0$$

1.6 伽利略相对性原理 非惯性系 惯性力

例1.6-1 一质量为60 kg的人，站在电梯中的磅秤上， 当电梯以0.5 m/s^{2}的加速度匀加速上升时，磅秤上指 示的读数是多少？

解：在电梯这个非惯性系中，人还受到一个$\vec{F}_{\mathrm{I}}$

$$F_{\mathrm{N}} - G - F_{\mathrm{I}} = 0$$

$$F_{\mathrm{N}} = G + F_{\mathrm{I}} = m(g + a) = 60 \cdot (9.8 + 0.5) = 618(\mathrm{N})$$

当电梯加速上升时，磅秤读数$F_{\mathrm{N}} > G$，超重

当电梯加速下降时，磅秤读数$F_{\mathrm{N}} < G$，失重

1.6 伽利略相对性原理 非惯性系 惯性力

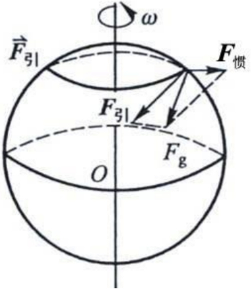
例1.6-2 试分析物体重量与地球纬度的关系.

解: 在地面上纬度φ处的惯性离心力

$$F_{\text{惯}} = m\omega^2 r = m\omega^2 R\cos\varphi$$

物体的重量

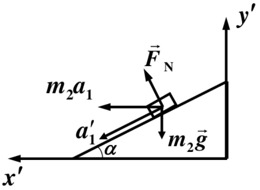
$$F_{\text{g}} = \sqrt{F_{\text{引}}^2 + F_{\text{惯}}^2 - 2F_{\text{引}}F_{\text{惯}}\cos\varphi}$$



$\varphi = \pm\pi/2$ 重量最大，$\varphi = 0$, 重量最小

1.6 伽利略相对性原理 非惯性系 惯性力

例1.6-3 一质量为m_1、顶角为α的三角形光滑物体上。放有一质量为m_2的物块。设各面间的摩擦力均可忽略不计。试用非惯性系中力学定律求解三角形物块的加速度。



解：将坐标系建立在三角形物块上，方向如 图，在该非惯性系中，应用非惯性系的力学定律，m_1与m_2的动力学方程如下：

$$m_1 \quad : \quad -F_N \sin\alpha + m_1 a_1 = 0$$

$$m_2 \quad : \quad F_N \sin\alpha + m_2 a_1 = m_2 a_2' \cos\alpha$$

$$F_N \cos\alpha - m_2 g = -m_2 a_2' \sin\alpha$$

$$a_1 = m_2 g \sin\alpha \cos\alpha / (m_1 + m_2 \sin^2\alpha)$$