第四章：导数与微分

§1 导数的定义

一、导数的引进

设某物体的运动规律为$s(t)$ ($s(t)$ 表示物体在t 时刻通过的距离与时间t 的关系)，如何求$t = t_0$ 时的瞬时速度?

物体从时刻t_0 到时刻t 的平均速度为$\bar{v} = \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$， t 越靠近t_0，平均速度的大小越接近物体在$t = t_0$ 时的瞬时速度。我们用$t \to t_0$ 时平均速度的极限来表示物体在$t = t_0$ 时的瞬时速度$v_{t_0} = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$。

二、导数的定义

1 定义：设函数$y=f(x)$在x_0附近有定义，对于自变量任一改变量Δx，函数改变量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。此时，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则此极限值就称作函数$f(x)$在点x_0的导数（或微商），记为$f'(x_0)$($y'|_{x=x_0}$, $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$, $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$)，称$f(x)$在$x_0$处可导。

函数$f(x)$ 的所有可导点的集合D 是$f(x)$ 定义域的子集，对每个$x_0 \in D$，唯一确定导数的值$f'(x_0)$。因此，函数$f(x)$ 的导数可看成自变量x 的一个函数，称为函数$f(x)$ 的导函数，记为$f'(x)$。导函数一般简称导数。

2 导数的几何定义

设$y = f(x)$ 是平面光滑连续曲线，$(x_0, f(x_0))$ 是曲线上一定点，则$f'(x_0)$ 为曲线在$(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率。

用途：求曲线$y=f(x)$在点$P_0(x_0,f(x_0))$处切线与法线方程（已知$f'(x_0)$存在）。

切线方程：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程：$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

作业： 课本P_{131} 1, 3

补充：判别下列命题真假

(1)若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$存在，则$f(x)$在$x_0$处可导；

(2)若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$存在，则$f(x)$在$x_0$处可导。

三、单侧导数

若$f'(x_0)$存在，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$与$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$均存在，分别定义为$f(x)$在$x_0$处的右导数（左导数），记为$f'_+(x_0)(f'_-(x_0))$。

由极限存在定义，若$f(x)$在x_0可导，则$f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$。

反之，若$f'_+(x_0)$与$f'_-(x_0)$至少有一个不存在，或左、右导存在但不相等，则$f(x)$在x_0处不可导。

注1：区分$f'_+(x_0)$ 与$f'(x_0+0)$；区分$f'(x_0)$ 与$(f(x_0))'$。

注2：函数$f(x)$ 在x_0 可导$\Rightarrow$ $f(x)$ 在x_0 连续$\not\Rightarrow$ $f(x)$ 在x_0 处可导。

注3：计算导数就是求$\dfrac{0}{0}$ 型不定式的函数极限，这是在学习微分之前学习极限理论的理由之一。

注4：函数在某一点是否可导，只与函数在该点附近的取值有关。因此与连续性类似，函数的可导性是局部性质。存在只在一点可导的函数及在定义域上任一点均不可导的函数。e.g.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\in\mathbb{Q}^c \\ x^2, & x\in\mathbb{Q} \end{cases} \quad 及\ g(x)=\begin{cases} 0, & x\in\mathbb{Q}^c \\ x, & x\in\mathbb{Q} \end{cases}$$

注5：函数$y=f(x)$ 在(a,b) 上可导是指在(a,b) 中每点均可导。在$[a,b]$ 上可导是指在(a,b) 上可导，且在a 点右导存在，b 点左导存在。

例：设函数$f(x)=\begin{cases} x^2+b, & x>2 \\ ax+1, & x\le 2 \end{cases}$，确定$a,b$, s.t. $f(x)$ 在$x=2$ 处可导。

作业： 课本P_{131} 6(1)(3) P_{132} 7, 9, 10

§4.2 导数四则运算及反函数复合函数求导法则

规律：简单的量通过定义来求，复杂的量通过运算法则去求。

一、基本初等函数

例1：常函数C 的导数为0，即$(C)' = 0$

例2：求$y = \sin x$ 的导数

例3：求$y = e^x$ 的导数

注：$y = e^x$ 的导函数恰为其本身，这是高等数学中讨论指数函数及对数函数经常将底取成e 的缘故。

例4：求$y = x^\alpha (x > 0)$ 的导数，其中α 为任意实数。

注：对具体给定的实数$\alpha, y = x^\alpha$ 的定义域可能扩大，故可导范围可能扩大。

二、求导四则运算

除少数简单函数外，可直接用定义求导的函数微乎其微，因此需对一般函数导出一系列的求导运算法则。

定理1：$(C_1 f(x) + C_2 g(x))' = C_1 f'(x) + C_2 g'(x)$ $(C_1, C_2$ 为常数)

例5：求$y = 5e^x + 3\sqrt{x}$ 的导数

定理2：$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

例6：求$y = 3^x \cos x$ 的导函数

定理3：$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

例7：求$y = \tan x$ 的导数。

三、反函数求导定理

定理4：（反函数求导定理）若$f'(x_0) \neq 0$, $f(x)$ 在x_0 的某领域内连续且严格单调，则其反函数$x = \phi(y)$ 在$y_0 = f(x_0)$ 处可导，且$\phi'(y_0) = 1/f'(x_0)$。

例8：求$y=\ln x$的导函数

例9：求$y=\arcsin x$的导函数

同理知：$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$, $(\text{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

注1：课本$P_{139-140}$基本初等函数的导数公式（左边一栏）是必须掌握的。

注2：从课本上列表可以看出，基本初等函数的导函数仍是基本初等函数的有限次四则运算及复合。故在这些函数的定义域内，至多除有限个点，它们不仅可导而且导函数连续(e.g. $y=x^{\frac{2}{3}}\in C(-\infty,+\infty), y^{'}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\in C(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$)。

注3：四则运算可推广至多个函数情况，见P_{140}

(1) $\left(\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(x)\right)^{'}=c_i\sum_{i=1}^{n}f_i^{'}(x)$

(2) $$\left(\prod_{i=1}^{n}f_i(x)\right)^{'}=\sum_{j=1}^{n}\left\{f_j^{'}(x)\prod_{i=1,i\neq j}^{n}f_i(x)\right\}$$

例10：求$y=e^x(x^2-3x-1)\arcsin x$ 的导数。

作业： 课本$P_{141-142}$ $1,2(1-4),3$偶数题,$4-6,8,9$。

四、复合函数求导

有限增量公式：若函数$f(x)$ 在x_0 可导，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $=f'(x_0)$，故有$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+o(1)(\Delta x\to 0)$。

两边同乘以Δx 得，$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$，该公式称为有限增量公式，是微分学的主要工具之一。

有限增量公式可以加强：设$f(x)$ 在x_0 可导，则存在函数$w(x)$ 满足$\lim\limits_{x\to x_0} w(x) = w(x_0) = 0$, s.t. $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + w(x)\Delta x$。

证明：定义$w(x) = \begin{cases} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0), & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$ 即可。

定理：（复合函数求导的链式法则）设$u = g(x)$ 在x_0 处可导，$y = f(u)$ 在$u_0 = g(x_0)$ 处可导，则$y = f(g(x))$ 在x_0 处可导，且有

$$[f(g(x))]'_{x=x_0} = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\right|_{u=u_0} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

注：关于复合函数求导证明的一个常见错误是从$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$出发，令$\Delta x\to 0$，得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$。

(1) 左边是关于$\Delta x\to 0$取极限，右边第一项是关于$\Delta u\to 0$取极限，极限过程不统一。

(2) 对上式左边令$\Delta x\to 0$，由极限定义$\Delta x\neq 0$；但右边$\Delta u=g(x)-g(x_0)$完全有可能在$\Delta x\to 0$的过程中无限次为0。因此，对$\dfrac{\Delta y}{\Delta u}$关于$\Delta u\to 0$取极限无意义。

(3) 链式法则可以推广到多重复合函数的情况：

e.g. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_1(f_2(f_3(\cdots f_n(x))))) = \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}f_2}\cdot\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}f_3}\cdots\frac{\mathrm{d}f_{n-1}}{\mathrm{d}f_n}\cdot\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}$。

例1：求$y = e^{\sin^2\frac{1}{x}}$ 的导数。

注：在运算熟练后，可默记中间变量而不必写出中间变量的表达式。

例2：设$n > 0$，在何条件下，$f(x) = \begin{cases} x^n\sin\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

(1)在$x = 0$ 处连续；(2)在$x = 0$ 处可导；(3)在$x = 0$ 处导函数连续。

形如$y = f(x) = u(x)^{v(x)} (u(x) > 0)$ 的函数称为幂指函数，对幂指函数求导，常采用 对数求导法。

$$\ln f(x) = v(x) \ln u(x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} u'(x)$$

故$f'(x) = f(x) \left[v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} u'(x) \right]$

注：也可利用$f(x) = e^{v(x) \ln u(x)}$ 和链式法则求导。

例3：求$y=x^{(x^x)}$的导数

注1：对数求导法在对乘积形式的函数求导时也非常有用。

例4：求$y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt{\frac{x+1}{x^2+x+1}}$的导数

注2：我们已考虑了基本初等函数的可导性；再加上导数的四则运算法则与反函数及复合函数的可导方法，即可求出所有初等函数的导函数。

作业：设$y=f(x)$与$x=\phi(y)$互为反函数，已知$f(2)=3, f'(2)=1/4$，设$F(x)=f^2[4x-\phi(2x+1)]$，求$F'(1)$。

课本P_{151} 2, 3(408), 4(3 − 6) P_{153} 12

§3 微分及一阶微分的形式不变性

一、微分的定义

考虑一个具体问题：用S 表示边长为x 的正方形的面积，则$S(x) = x^2$。如果给边长一个改变量Δx，则面积有相应的改变量$\Delta S = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$。

故当边长作微小改变时，$\Delta S \approx 2x\Delta x$ （为Δx 的线性函数），ΔS 与$2x\Delta x$ 相差一个高阶无穷小。

推广：是否对所有函数的改变量都有类似的线性逼近函数?

定义：设函数$y=f(x)$在x_0的某邻域内有定义。当给x_0一个增量Δx时，$x_0+\Delta x$属于该邻域，相对应的函数增量为$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。

若存在一个只与x_0有关，与Δx无关的数$g(x_0)$，s.t. 当$\Delta x\to 0$时，有$\Delta y=g(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$，则称$f(x)$在$x_0$处可微。

称$g(x_0)\Delta x$为$f(x)$在x_0处的微分，记成$\mathrm{d}y$或$\mathrm{d}f(x)$，即$\mathrm{d}y=g(x_0)\Delta x$；且当$\Delta x$充分小时，有$\Delta y\sim g(x_0)\Delta x$，就称$g(x_0)\Delta x$为$\Delta y$的线性主要部分（即$\mathrm{d}y$为$\Delta y$的线性主要部分）。

注1：因为当$y=f(x)=x$时，$\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$，又$\Delta y=1\cdot\Delta x+0$，故$\mathrm{d}x=\Delta x$。故$\mathrm{d}y=g(x_0)\Delta x$通常写为$\mathrm{d}y=g(x_0)\mathrm{d}x$ ($\mathrm{d}x$称为自变量的微分)。

注2：若函数$y=f(x)$在某一区间上每一点都可微，则称$f(x)$在该区间上可微。

注3：微分$\mathrm{d}y$既与x有关，也与$\mathrm{d}x$有关。但x与$\mathrm{d}x$是两个独立的变量。

二、导数和微分的关系

定理：一元函数f在点x_0处可微$\Longleftrightarrow$ f在点x_0处可导。

注4：若$f(x)$在x处可导，则$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$。故$f'(x)$

$$= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\text{因变量微分}}{\text{应变量微分}},$$ 故导数又称微商。

注5：微分有几何解释。

三、微分的运算法则及一阶微分的形式不变性

由导数与微分的关系，能推出如下微分运算法则

(1) $\mathrm{d}(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha \mathrm{d}(f(x))+\beta \mathrm{d}(g(x))$;

(2) $\mathrm{d}(f(x)g(x))=g(x)\mathrm{d}(f(x))+f(x)\mathrm{d}(g(x))$;

(3) $\mathrm{d}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\mathrm{d}f(x)-f(x)\mathrm{d}g(x)}{g^2(x)}$;

(4) $\mathrm{d}(f\circ g(x))=f'(g(x))g'(x)\mathrm{d}x$.

$y = f \circ g(x)$ 可看成$y = f(u)$ 与$u = g(x)$ 的复合，故$\mathrm{d}(f \circ g(x)) = f^{'}(g(x))\, g^{'}(x)\mathrm{d}x$ 可写成$\mathrm{d}(f(u)) = f^{'}(u)\mathrm{d}u$，这时$u$ 是中间变量，x 才是真正的自变量。

这与$y = f(u), u$ 为自变量时微分表达式一模一样。换句话说：无论u 是自变量还是中间变量，$y = f(u)$ 的微分形式是相同的，这称为“一阶微分的形式不变性”。

注6：一阶微分的这种不变性只是形式的，而非真正的不变性。

注7：对高阶微分，形式不变性不再成立。

一阶微分的形式不变性可用来求函数微分，优点是每一步计算不必考虑真正的自变量是什么。

例1：设$y=\ln(x+e^{x^2})$，求$\mathrm{d}y$。

例2：设$y=e^{\sin(ax+b)}$，求$\mathrm{d}y$。

作业：课本P_{153} 13(1)(3)(5)(6)。

补充：1 证明：若$f'(x_0)\neq 0$，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\mathrm{d}y}=1$。

2 设$f(x)$ 在$x=0$ 处连续，且有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，则$f(x)$ 在$x=0$ 处可微。

§4.4 隐函数与参数方程的函数求导

一、隐函数求导

我们称$y = f(x)$形式的函数（y 单独放一边，另一边是只含自变量x 的表达式）为显函数。

如果在一定条件下，方程$F(x, y) = 0$ 可以唯一的决定一个y 关于x 的函数$y = y(x)$，我们称它为隐函数。

有些隐函数可以显化，如$F(x, y) = x + y = 0$。更多的是隐函数不能被显化的情况，如*Kepler* 方程$y - x - \epsilon \sin y = 0$ (ϵ 为常数，$0 < \epsilon < 1$)。

问题：如何求出由$F(x,y)=0$ 决定的$y=y(x)$ 的导数?

隐函数求导法则：若函数$y=y(x)$ 满足$F(x,y)=0$，则将它代入得到恒等式$F(x,y(x))\equiv 0$。然后对x 利用复合函数的求导法则，就有可能计算出$y=y'(x)$（整个过程无须从隐函数解出显函数）。

例1：求由方程$e^{xy}+x^2y-1=0$ 确定的隐函数$y=y(x)$ 的导函数$y'(x)$。

例2：设函数$y=y(x)$ 满足单位圆方程$x^2+y^2=1$，用显函数与隐函数两种办法求$y'(x)$。

注：由$x^2+y^2=1$ 确定的函数不只一个，那么由隐函数定理求导法则得到的$y'(x)$ 是指哪一个？

回答：由隐函数求导法则确定的$y'(x)$ 对每一个函数均有效。

二、参数方程所表示的函数求导法

在解析几何上，我们遇到过曲线的参数表示法。如圆的方程$x^2+y^2=\rho^2$ 参数表示$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$,$\theta\in[0,2\pi)$，那么如何对参数方程所表示的曲线求导？

设自变量x 和应变量y 的函数关系由参数形式 $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$,$\alpha \leq t \leq \beta$ 确定，其中$x=\phi(t), y=\psi(t)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上处处可导，$\phi(t)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上严格单调，且$\phi^{'}(t) \neq 0$。

由反函数存在、连续及可导定理，知$x=\phi(t)$ 的反函数$t=\phi^{-1}(x)$ 存在，且$(\phi^{-1}(x))^{'}=1/\phi^{'}(t)$.

故y 关于x 的关系式可写成$y=\psi(t)=\psi(\phi^{-1}(x))$，

则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\psi^{'}(t)\cdot\dfrac{1}{\phi'(t)}=\dfrac{\psi^{'}(t)}{\phi'(t)}.$

注1：参数方程所表示的函数求导法是复合函数与反函数求导公式的结合。

注2：$\begin{cases} \mathrm{d}y = \psi'(t)\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x = \phi'(t)\mathrm{d}t \end{cases}$，故可看成由微分形式两边分别相除的结果。

例3：半径为1的轮子置于平面上，轮子边缘一点A 与地面接触。当轮子沿地面无滑动地滚动一周时，求A 点的运动的参数方程，以及该函数方程确定的$y = f(x)$ 的导数y'.

作业：课本P_{152} $5(1)(3), 6, 7, 9-11$。

§4.5 高阶导数与高阶微分

一、高阶导数定义

设物体的运动方程为$s = s(t)$，则物体运动速度$v(t) = s'(t)$。则物体在t 时的瞬时加速度$\alpha(t) = v'(t) = (s'(t))' = s''(t)$。

定义：若$y = f(x)$ 可导，若它的导函数$f'(x)$ （$y'(x), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$）仍然可导，则$f'(x)$ 的导数$(f'(x))'$ 被称为$f(x)$ 的二阶导数。记为$f''(x)$ （$y''(x), \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}$），这时称$f(x)$ 是二阶可导函数。

如果$f(x)$ 在区间I 上每一点都二阶可导，则称$f(x)$ 在I 上二阶可导，在区间的端点指单侧导数。

以此类推，$y=f(x)$ 的$n-1$ 阶导数的导数称为$f(x)$ 的n 阶导数，记为$f^{(n)}(x)$，即$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$，也可记为$y^{(n)}(x), \dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}, \dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$。

注1：各阶导数记号$f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(n)}(x)(n\geq 4)$，零阶导数$f^{(0)}(x)=f(x)$。二阶及二阶以上的导数，统称高阶导数。

注2：f 在x_0 处的n 阶导数记为$f^{(n)}(x_0)$, $y^{(n)}\Big|_{x=x_0}$, $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\Big|_{x=x_0}$，$\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\Big|_{x=x_0}$ 等。

二、高阶导数的计算

1直接法：逐阶求导，寻求规律，写出通式（有时需要用数学归纳法证明）

例1：$y = x^{\alpha}$

例2：$y = e^{\alpha x}$

例3：$y = \ln x$

例4：$y = \sin x$

2高阶导数的运算法则

(1)$[c_1 f(x)+c_2 g(x)]^{(n)} = c_1 f^{(n)}(x) + c_2 g^{(n)}(x)$

(2)(Leibniz 公式)$[f(x)\cdot g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$，其中$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

例5：求$x^2 \sin x$ 的80 阶导数

例6：求$y = \dfrac{1}{x(x-1)}$ 的n 阶导数

例7：求$y = \arcsin x$ 在0 处的n 阶导数

3隐函数及参数方程所表示函数的高阶导数

注1：对隐函数所表示的函数求高阶导数，思路：逐步求导，低阶代入

例8：求由方程$e^{xy}+x^2y-1=0$确定的隐函数$y=y(x)$的二阶导数$y''(x)$。

注2：对参数形式$\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$，求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\psi''(t)\phi'(t)-\psi'(t)\phi''(t)}{[\phi'(t)]^3}.$$

例9：求摆线$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$，$0 \le t \le 2\pi$ 在$t = \pi$ 处二阶导函数$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ 的值。

作业：P_{164} 1(1)(5)(9)，2(4 – 6)，3，4(2)(4)(6), 5(1), 6(1)(3), 7(1)(3) 8, 12。

三、高阶微分

类似于高阶导数，可以定义高阶微分

一阶微分$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$

二阶微分$\mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}[f'(x)\mathrm{d}x] = \mathrm{d}[f'(x)]\mathrm{d}x = f''(x)\mathrm{d}x^2$

类似地，可以导出y的n阶微分的表达式：$\mathrm{d}^n y = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$，故$\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f^{(n)}(x)$，这就是我们记$f(x)$的$n$阶导数为$\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$的原因。

注1：区别$\mathrm{d}(x^2), \mathrm{d}x^2$和$\mathrm{d}^2 x$。

$\mathrm{d}(x^2) = 2x\mathrm{d}x$（表示$x^2$的一阶微分）；
$\mathrm{d}x^2 = (\mathrm{d}x)^2 = (\Delta x)^2$;
$\mathrm{d}^2 x = \mathrm{d}(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}(\Delta x) = 0$（表示$x$的二阶微分）。

注2：高阶微分不具有形式不变性。

对复合函数$\begin{cases} y = f(u) \\ u = g(x) \end{cases}$，$u$ 中间变量，x 自变量。

若高阶微分具有形式不变性，则$\mathrm{d}^2 y = f''(u)\,\mathrm{d}u^2$。

但$\mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(f'(u)\mathrm{d}u) = \mathrm{d}(f'(u))\mathrm{d}u + f'(u)\mathrm{d}(\mathrm{d}u) = f''(u)\mathrm{d}u^2 + f'(u)\mathrm{d}^2 u$。由于$u$ 是中间变量，$\mathrm{d}^2 u$ 一般不等于0，故高阶微分不具有形式不变性。

注3：求高阶微分，只需求$f^{(n)}(x)$，然后令$\mathrm{d}^n y = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$。

作业：课本P_{164} 9(1)(7) 10, 11(1)(3)