
大学物理
振动与波动
VIBRATION AND WAVE
Jim Corwin/ALLSTOCK, INC. All rights reserved

第四章　振　动

任一物理量在某一定值附近往复变化——振动

位矢在某一定值附近往复变化 ——机械振动

机械振动的分类

- 受迫振动
- 自由振动
  - 阻尼自由振动
  - 无阻尼自由振动
    - 无阻尼自由非谐振动
    - 无阻尼自由谐振动（简谐振动）

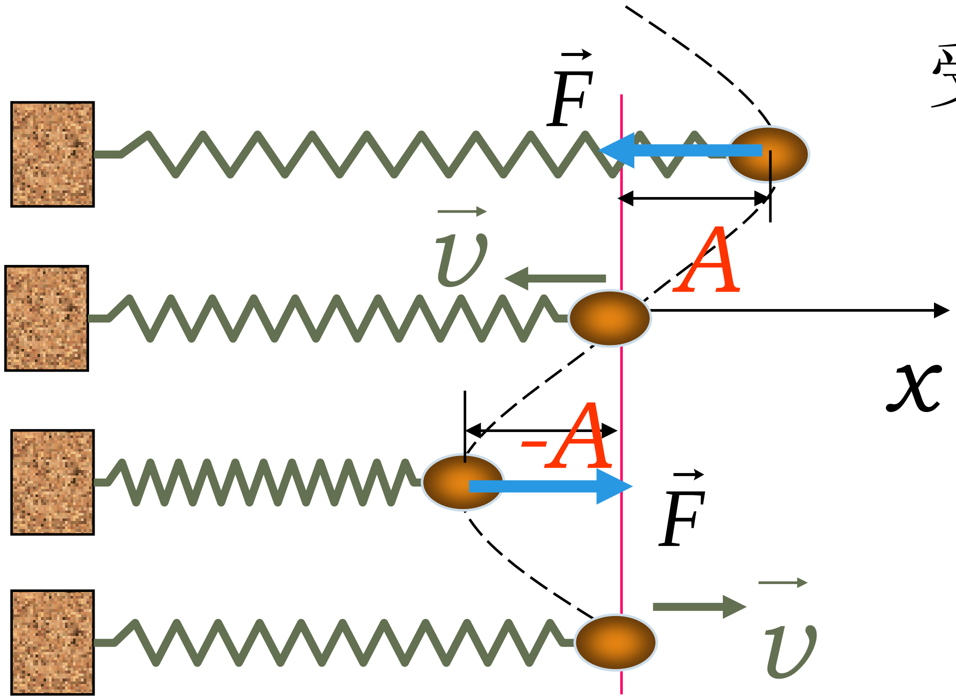
§4-1 简谐振动(理想模型)

是某些实际振动的近似，可用来研究复杂振动

一、简谐振动的特征

1、弹簧振子：由物体和轻质弹簧组成系统

弹簧振子



$$受力: f = -kx$$

$$= m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

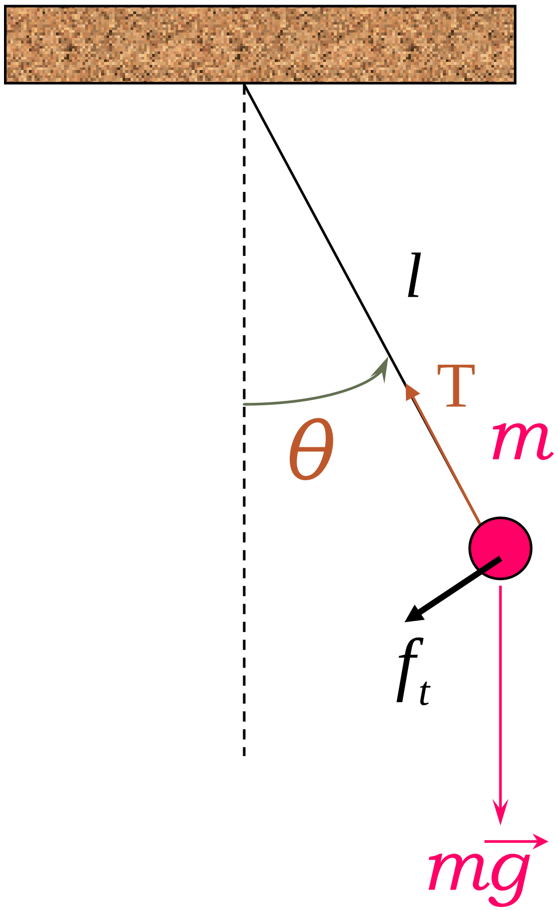
2、单摆（数学摆）

不可伸长的轻质细线下悬挂一质点，在平衡位置附近 (θ<5°的)小角摆动的装置。

$$f_t = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$$

$$= ma_t = ml\alpha = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$



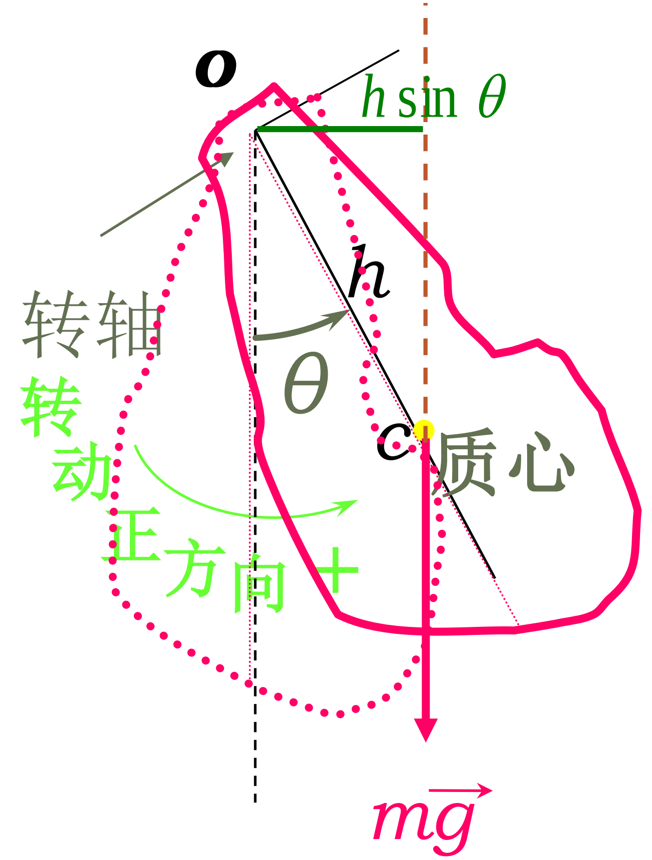
3、复摆（物理摆）

一个可绕水平固定轴自由小角摆动的刚体装置.

$$M = -mgh\sin\theta \approx -mgh\theta$$

$$= J\alpha = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{J}\theta = 0$$



$f = -kx$　　$f = -mg\theta$　　$M = -mgh\theta$

力(矩)的大小与(相对于平衡位置)位移成正比,方向始终指向平衡位置————线性恢复力(矩)

物体在线性恢复力(矩)作用下的运动——谐振动

弹簧振子 $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$

单　　摆 $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$

复　摆 $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{J}\theta = 0$

谐振动的微分运动方程

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

$$\begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \\ \omega = \sqrt{\frac{mgh}{J}} \end{cases}$$

只与系统本身有关

二、谐振动的运动方程与特征量

1. 谐振动的运动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \longrightarrow x=A\cos(\omega t+\varphi)\left[\theta=\theta_{max}\cos(\omega t+\phi)\right]$$

$$v=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

2. 谐振动的特征量

$$a=\frac{dv}{dt}=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi)$$

(1)周期、频率、圆频率

①周期T：完成一全振动所需的时间

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)=A\cos[\omega(t+T)+\varphi]$$

一个周期后位移相等， 所以 $\longrightarrow \omega T=2\pi$

数学式 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

$$\begin{cases} 弹簧振子 T=2\pi\sqrt{m/k} & (\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}) \\ 单摆 T=2\pi\sqrt{l/g} & (\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}) \\ 复摆 T=2\pi\sqrt{J/mgh} & (\omega=\sqrt{\dfrac{mgh}{J}}) \end{cases}$$

②频率ν：单位时间完成振动次数 数学式：$\nu=1/T$

③圆频率ω：2π秒内振动次数 数学式：$\omega=2\pi\nu$

(2)振幅A：物体最大位移的绝对值

由初始条件确定A

$$\left.x\right|_{t=0}=x_0,\quad \left.v\right|_{t=0}=v_0 \Rightarrow \begin{cases} x_0=A\cos\varphi \\ v_0=-\omega A\sin\varphi \end{cases}$$

消去φ $\Rightarrow A=\sqrt{x_0^2+(v_0^2/\omega^2)}$

(3)位相（相位、周相）

位相： $\phi = \omega t + \varphi$: t时刻物体的振动状态。

$\because$ $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

$\therefore$ 当A, ω确定时,由$(\omega t + \varphi)$就可确定t时刻振动物的运动状态.

初位相φ : 物体的初始$(t = 0)$状态

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi \end{cases}$$

消去A

$$\Rightarrow \varphi = tg^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

约定：初位相 φ ∈ (-π，π]

需解决问题的类型

* 判断是否为简谐振动

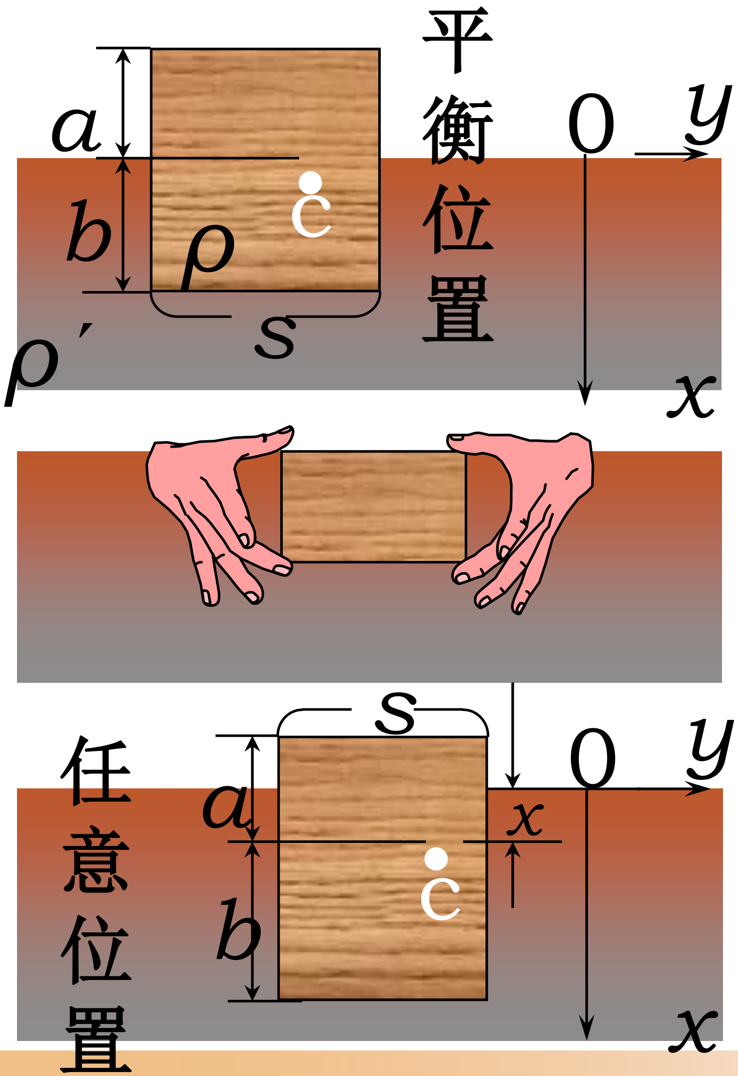
从简谐振动的特征入手

- 选平衡位置；
- 建坐标系，原点在平衡位置；
- 让物体有一小的(角)位移，看回复力(矩)。

* 已知表达式 $\Rightarrow$ A、T、φ

已知A、T、φ $\Rightarrow$ 表达式

[例] 水面上浮有一方形木块，静止时水面以上高度为a，以下高度为b。水密度为ρ′，木块密度为ρ，不计水的阻力。现用外力将木块压入水中，使木块上表面与水面平齐。求证：放手后木块将作谐振动，并写出谐振动方程



解:(1).确定平衡位置

$$(a+b)s\rho g - bs\rho' g = 0$$

(2).任意位置木块受力分析:

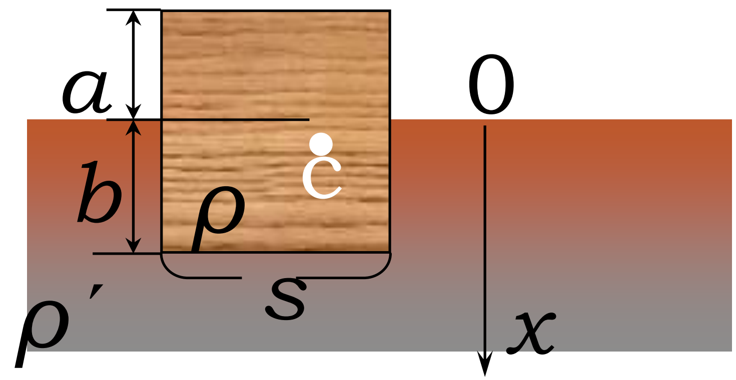
$$\sum F = (a+b)s\rho g - (b+x)s\rho' g$$

$$= -s\rho' g x$$ ——线性恢复力

所以木块作谐振动:

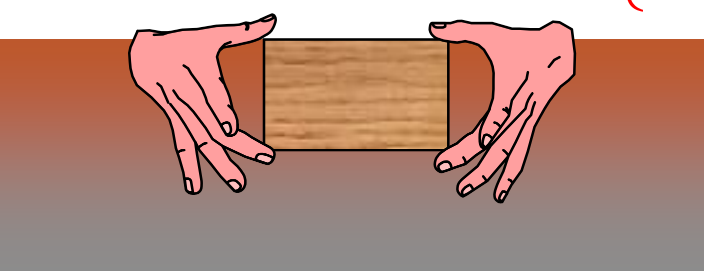
x=Acos(ωt+φ)

$$\sum F = -s\rho' g x = ma = (a+b)s\rho \frac{d^2x}{dt^2}$$



$$\omega = \sqrt{\frac{\rho' g}{(a+b)\rho}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{\rho' g}{(a+b)\rho} x = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \end{array} \right.$$

$$\because t = 0 \left\{ \begin{array}{l} x_0 = a \\ v_0 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2} = a \\ \varphi = tg^{-1}(-v_0/\omega\, x_0) = 0, \pi \end{array} \right.$$



$(\because x_0 = A\cos\varphi = a > 0 \therefore \pi$舍去）

$$\therefore x = a\cos\sqrt{\frac{\rho' g}{(a+b)\rho}}\; t$$