第1章 随机事件与概率

内容摘要

（一） 随机事件及其运算

1. 概念

（1）在一定条件下，事情结果可能有多种，且预先不一定知道何种结果将会发生的不确定现象称为随机现象。

（2）随机现象的每种基本结果称为样本点，记为ω。

（3）随机现象的所有的结果（样本点）全体构成样本空间，记为Ω。

（4）由某些样本点ω构成的集合，即Ω的子集，称为随机事件或事件，记为 A,B,…

（5）不包括任何样本点的空集ϕ称为不可能事件。

（6）所有样本点构成的集合，即样本空间Ω，称为必然事件。

2．事件的关系和运算

（1）如果事件A发生必然导致事件B发生，则称A被包含于B，或称B包含了A，记为$A\subset B$。

（2）$A.$、B二事件中任一事件发生必然导致另一事件发生，即$A\subset B, B\subset A$同时成立，此时A与B称为相等，记作$A=B$。

（3）对于事件A、B，如果不可能同时发生，则A、B称为互不相容（互斥）。

（4）如果二个事件A、B中，B="A不发生”，则A、B称为对立关系（互逆）。

（5）“A与B中至少有一事件发生”这一事件称为事件A与事件B的并，记作$A\bigcup B$。

（6）“A与B同时发生”这一事件称为事件A与事件B的交，记作$A\bigcap B$或AB。

（7）事件“A发生而B不发生” 称为事件A与事件B的差，记作$A-B$。

（8）事件的运算性质：

对任意事件$A.B.C$，有

交换律：$A\bigcup B=B\bigcup A$， $AB=BA$

结合律：$(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$, $(AB)C=A(BC)$

分配律：$A(B\bigcup C)=AB\bigcup AC$, $A\bigcup(BC)=(A\bigcup B)(A\bigcup C)$

对偶律（德莫根公式）：$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$, $\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$

一般地，对于任意事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$有：

$$\overline{A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_n}=\overline{A}_1\bigcap\overline{A}_2\bigcap\cdots\bigcap\overline{A}_n，\overline{A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap A_n}=\overline{A}_1\bigcup\overline{A}_2\bigcup\cdots\bigcup\overline{A}_n$$

（二）概率的定义及性质

1.概率的定义

（1）概率的统计定义

在不变条件下重复做n次试验，若n次试验中事件A发生的次数m，当试验次数n很大时，如果频率m/n稳定在某一数值p附近，则数值p称为随机事件A发生的概率，记作$P(A)=p$。简单地说“概率是频率的稳定值”。

（2）概率的几何定义

如果样本空间Ω是某几何区域，该区域的“测度”（一维时指“长度”，二维时指“面积”等）为S_{Ω}($S_{\Omega}<\infty$),假设任意一点落入测度相等的子区域（形状可以不同）是等可能的。以事件A表示Ω的某个子区域，S_A为子区域A的测度，则事件A发生的概率定义为$P(A)=S_A/S_{\Omega}$。

（3）概率的古典定义

如果样本空间$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,其中$n$是有限数(有限性),且$\omega_1$，$\cdots$,$\omega_n$发生的机会相等(等概性)，即$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\dfrac{1}{n}$，定义随机事件$A$的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{包含的样本点数}}{\Omega\text{中样本点总数}}=\frac{A\text{的有利事件数}}{\Omega\text{中基本事件总数}}=\frac{k}{n}$$

（4）概率的公理化定义

设Ω为一个样本空间，A为其中的任一随机事件，定义实值函数$P(A)$，如果它满足以下三个公理：

公理1:（非负性） $P(A)\geq 0$.

公理2:（规范性）$P(\Omega)=1$.

公理3 （可列可加性） 对于可列无穷个互不相容的随机事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

则 $P(A)$ 称为事件 A 发生的概率。

2．概率的性质

（1）不可能事件的概率是 0，即 $P(\phi)=0$.

（2）（有限可加性） 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ 。

（3）对任一事件 A，有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ 。

（4）对任意两个事件 $A,\ B$,有 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

（5）对任意两事件 A, B .若 $A \supset B$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

（6）（单调性）若 $A \supset B$，则 $P(A) \geq P(B)$

（7）（可加性）对任意二个事件 A, B，有 $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

（8）（半可加性）对任意二个事件 A, B，有 $P(A \bigcup B) \leq P(A) + P(B)$

（三）条件概率与独立性

1．条件概率的定义

设 A, B 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 中的两事件，$P(B)>0,$ 则 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 称为“在事件 B 发生条件下，事件 A 发生的条件概率”简称为条件概率。

2．乘法公式

（1）设 $A,\ B$ 为任意事件，则当 $P(B)>0$ 时，有 $P(AB)=P(B)P(A|B)$；

当 $P(A)>0$ 时，有 $P(AB)=P(A)P(B|A)$。

（2）乘法公式可推广到多个事件，即若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

3. 事件独立性和试验独立性的概念

（1）对于随机事件 *A,B*,若满足: *P(AB)=P(A)P(B)* 则称随机事件 *A* 与 *B* 相互独立。

（2）对于 n 个随机事件 $A_1,A_2,...,A_n$，若其中任意两个不同的事件相互独立,则称这 n 个随机事件 $A_1,A_2,...,A_n$ 两两独立。

（3）对于 n 个随机事件 $A_1,A_2,...,A_n$，若其中任意 $k\quad(2\le k\le n)$ 个不同的事件都满足:

$$P(A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})...P(A_{i_k})$$

则称这 n 个随机事件 $A_1,A_2,...,A_n$ 相互独立。

（4）如果一个随机试验的任一结果与另一个随机试验的任一结果相互独立，则称这两个随机试验相互独立。

（5）如果 n 个随机试验（对应）的任意 n 个结果相互独立，则称这 n 个随机试验相互独立。

（6）一个系统的可靠性是指这个系统能够正常工作的概率（注：这里的“正常工作”是指还能够工作，即不瘫痪）。

4. 事件独立的性质

若事件 *A* 与 *B* 相互独立，则 $A与\overline{B},\quad \overline{A}与B,\quad \overline{A}与\overline{B}$ 也都相互独立。

（四）全概率公式与贝叶斯公式

（1） 全概率公式

设 $A_1,A_2,...,A_n$ 为一个完备事件组，即 $A_1,A_2,...,A_n$ 互不相容，且 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，若

$P(A_i)>0\quad(i=1,2,...,n)$，则对任一事件 B，有 $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$。

（2） 贝叶斯公式

设 $A_1,A_2,...,A_n$ 为一个完备事件组，即 $A_1,A_2,...,A_n$ 互不相容，且 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，若

$P(A_i)>0 \quad (i=1,2,\ldots,n)$，$P(B)>0$，则：$P(A_i \mid B)=\dfrac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B \mid A_k)}$。