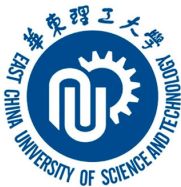


2015年青年教师课堂教学竞赛

姚媛媛

华东理工大学理学院



第四讲: 闭区间套定理

第四讲: 闭区间套定理

《庄子·天下篇》一尺之棰, 日取其半, 万世不竭.

第四讲: 闭区间套定理

《庄子·天下篇》一尺之棰, 日取其半, 万世不竭.

闭区间套定理: 若一系列闭区间 $[a_n, b_n]$ 满足条件

(1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{Z}^+;$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0,$

则存在唯一的点 $\xi \in \cap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, 且 $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

第四讲: 闭区间套定理


《庄子·天下篇》一尺之棰, 日取其半, 万世不竭.

闭区间套定理: 若一系列闭区间 $[a_n, b_n]$ 满足条件

$$(1) [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{Z}^+;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0,$$

则存在唯一的点 $\xi \in \cap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, 且 $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

 闭区间套定理可推广至一般度量空间的闭区域套, 从而比单调有界收敛定理应用更为广泛.

闭区间套定理

闭区间套定理解决问题思路

闭区间套定理

闭区间套定理解决问题思路

- (a) 构造闭区间套 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ } 常用二分法
(b) 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

闭区间套定理

闭区间套定理解决问题思路

- (a) 构造闭区间套 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$
 - (b) 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$
 - (c) 满足某特殊性质, 这种特殊性质要能解决问题 (最难!)
- } 常用二分法

闭区间套定理

例 用闭区间套定理证明 e 是无理数.

闭区间套定理

例 用闭区间套定理证明 e 是无理数.

证 (a) $I_1 = [2, 3]$.

I_n 将 I_{n-1} 分 n 等分, 取第2个.

闭区间套定理

例 用闭区间套定理证明 e 是无理数.

证 (a) $I_1 = [2, 3]$.

I_n 将 I_{n-1} 分 n 等分, 取第2个.

则 $I_n = [\frac{a_n}{n!}, \frac{a_n+1}{n!}]$, a_n 为某正整数.

闭区间套定理

例 用闭区间套定理证明 e 是无理数.

证 (a) $I_1 = [2, 3]$.

I_n 将 I_{n-1} 分 n 等分, 取第2个.

则 $I_n = [\frac{a_n}{n!}, \frac{a_n+1}{n!}]$, a_n 为某正整数.

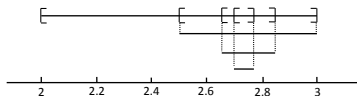
闭区间套定理

例 用闭区间套定理证明 e 是无理数.

证 (a) $I_1 = [2, 3]$.

I_n 将 I_{n-1} 分 n 等分, 取第2个.

则 $I_n = [\frac{a_n}{n!}, \frac{a_n+1}{n!}]$, a_n 为某正整数.



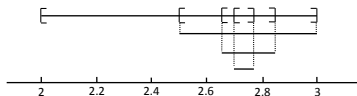
闭区间套定理

例 用闭区间套定理证明 e 是无理数.

证 (a) $I_1 = [2, 3]$.

I_n 将 I_{n-1} 分 n 等分, 取第2个.

则 $I_n = [\frac{a_n}{n!}, \frac{a_n+1}{n!}]$, a_n 为某正整数.



(b) $I_{n+1} \subseteq (\frac{a_n}{n!}, \frac{a_n+1}{n!})$, 故 I_{n+1} 中的点不可能具有分母 $n!$

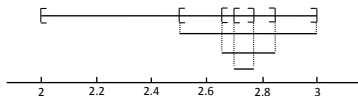
闭区间套定理

例 用闭区间套定理证明 e 是无理数.

证 (a) $I_1 = [2, 3]$.

I_n 将 I_{n-1} 分 n 等分, 取第2个.

则 $I_n = [\frac{a_n}{n!}, \frac{a_n+1}{n!}]$, a_n 为某正整数.



(b) $I_{n+1} \subseteq (\frac{a_n}{n!}, \frac{a_n+1}{n!})$, 故 I_{n+1} 中的点不可能具有分母 $n!$

由闭区间套定理, $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{e\}$. 若 e 为有理数, 则

$$e = \frac{p}{q} = \frac{p(q-1)!}{q!}, \text{ 矛盾! } \square$$

闭区间套定理应用

闭区间套定理应用



闭区间套定理应用

猜价格

- 参赛者不知道商品价格.



闭区间套定理应用

猜价格

- 参赛者不知道商品价格.
- 主持人给出提示语'高'或'低'.



闭区间套定理应用

猜价格

- 参赛者不知道商品价格.
- 主持人给出提示语'高'或'低'.
- 一分钟之内猜中商品最多者获胜.



闭区间套定理应用

猜价格

- 参赛者不知道商品价格.
- 主持人给出提示语'高'或'低'.
- 一分钟之内猜中商品最多者获胜.

如何在最快的时间内猜中价格?



闭区间套定理应用

猜价格

- 参赛者不知道商品价格.
- 主持人给出提示语'高'或'低'.
- 一分钟之内猜中商品最多者获胜.

如何在最快的时间内猜中价格?



最优策略: 二分法!

参考文献



波利亚. 数学的发现.

内蒙古人民出版社, 呼和浩特, 1979.



顾森. 思考的乐趣——*Matrix 67* 数学笔记.

人民邮电出版社, 北京, 2013.



曹广福. 科学网博客: 庄子、二进制与区间套

<http://blog.sciencenet.cn/blog-40247-670483.html>



Jonathan Sondow. *A Geometric Proof that e Is Irrational and a New Measure of Its Irrationality*, 113(7)(2006), 637-641.

Thank you!