

# 数学建模与系统仿真

课程负责人:许春根 教授

主讲老师: 许春根、范金华、窦本年、谢建春

减肥计划——节食与运动

主讲人: 范金华



Tel: 84315877(O)

Email: [jinhuafan@hotmail.com](mailto:jinhuafan@hotmail.com)

# 减肥计划——节食与运动

## 背景

- 体重指数  $BMI = w(kg) / l^2(m^2)$ .  $18.5 < BMI < 25$  ~ 正常;  $BMI > 25$  ~ 超重;  $BMI > 30$  ~ 肥胖.
- 多数减肥食品达不到减肥目标, 或不能维持.
- 通过控制饮食和适当的运动, 在不伤害身体的前提下, 达到减轻体重并维持下去的目标.

## 分析

- 体重变化由体内能量守恒破坏引起.
- 饮食（吸收热量）引起体重增加.
- 代谢和运动（消耗热量）引起体重减少.

## 模型假设



- 1) **体重增加正比于吸收的热量**——每8000千卡增加体重1千克;
- 2) **代谢引起的体重减少正比于体重**——每周每千克体重消耗200千卡 ~ 320千卡(因人而异), 相当于70千克的人每天消耗2000千卡 ~ 3200千卡;
- 3) 运动引起的体重减少正比于体重, 且与运动形式有关;
- 4) 为了安全与健康, 每周体重减少不宜超过1.5千克, 每周吸收热量不要小于10000千卡.

## 减肥计划（问题）



某甲体重**100**千克，目前每周吸收**20000**千卡热量，体重维持不变。  
现欲减肥至**75**千克。

1) 在不运动的情况下安排一个**两阶段计划**。

第一阶段：每周减肥**1**千克，每周吸收热量逐渐减少,直至达到下限（**10000**千卡）；

第二阶段：每周吸收热量保持下限，减肥达到目标。

2) 若要**加快进程**，第二阶段增加运动，试安排计划。

3) 给出达到目标后**维持体重**的方案。

## 基本模型

$w(k)$  ~ 第 $k$ 周(末)体重

$c(k)$  ~ 第 $k$ 周吸收热量

$$w(k+1) = w(k) + \alpha c(k+1) - \beta w(k)$$

$\alpha=1/8000$ (千克/千卡)

$\beta$  ~ 代谢消耗系数(因人而异)

### 1) 不运动情况的两阶段减肥计划

- 确定某甲的代谢消耗系数

每周吸收20000千卡  $w=100$ 千克不变

$$\Rightarrow w = w + \alpha c - \beta w \quad \beta = \frac{\alpha c}{w} = \frac{20000}{8000 \times 100} = 0.025$$

即每周每千克体重消耗  $20000/100=200$ 千卡

## 1) 不运动情况的两阶段减肥计划

- 第一阶段:  $w(k)$  每周减1千克,  $c(k)$  减至下限10000千卡

$$w(k) - w(k+1) = 1 \quad w(k+1) = w(k) + \alpha c(k+1) - \beta w(k)$$

$$\Rightarrow c(k+1) = \frac{1}{\alpha} [\beta w(k) - 1] \quad w(k) = w(0) - k$$

$$\Rightarrow c(k+1) = \frac{\beta}{\alpha} w(0) - \frac{1}{\alpha} (1 + \beta k) \quad \begin{aligned} \alpha &= 1/8000 \\ \beta &= 0.025 \end{aligned}$$

$$= 12000 - 200k \geq C_m = 10000 \quad \Rightarrow k \leq 10$$

第一阶段10周, 每周减1千克, 第10周末体重90千克

吸收热量为  $c(k+1) = 12000 - 200k, k = 0, 1, \dots, 9$

## 1) 不运动情况的两阶段减肥计划

- 第二阶段：每周 $c(k)$ 保持 $C_m$ ,  $w(k)$ 减至75千克

基本模型  $w(k+1) = w(k) + \alpha c(k+1) - \beta w(k)$

$$\Rightarrow w(k+1) = (1-\beta)w(k) + \alpha C_m$$

$$w(k+n) = (1-\beta)^n w(k) + \alpha C_m [1 + (1-\beta) + \cdots + (1-\beta)^{n-1}]$$

$$= (1-\beta)^n \left[ w(k) - \frac{\alpha C_m}{\beta} \right] + \frac{\alpha C_m}{\beta}$$

以  $\beta = 0.025$ ,  $\alpha = \frac{1}{8000}$ ,  $C_m = 10000$  代入得

$$w(k+n) = 0.975^n [w(k) - 50] + 50$$

- 第二阶段：每周 $c(k)$ 保持 $C_m$ ,  $w(k)$ 减至75千克



$$w(k+n) = 0.975^n [w(k) - 50] + 50$$

已知  $w(k) = 90$ , 要求  $w(k+n) = 75$ , 求  $n$

$$75 = 0.975^n (90 - 50) + 50$$

$$n = \frac{\lg(25/40)}{\lg 0.975} = 19$$

第二阶段19周, 每周吸收热量保持10000千卡, 体重按

$$w(n) = 40 \times 0.975^n + 50 \quad (n = 1, 2, \dots, 19) \quad \text{减少至75千克.}$$



## 2) 第二阶段增加运动的减肥计划



根据资料每小时每公斤体重消耗的热量  $\gamma$  (千卡):

跑步	跳舞	乒乓	自行车(中速)	游泳(50米/分)
7.0	3.0	4.4	2.5	7.9

模型  $w(k+1) = w(k) + \alpha c(k+1) - \beta' w(k)$      $\beta' = \beta + \alpha \gamma t$

$t \sim$  每周运动时间(小时)

$$\alpha = 1/8000 \text{ (千克/千卡)}, \beta = 0.025$$

取  $\alpha \gamma t = 0.003$ , 即  $\gamma t = 24$

$$\beta' = 0.025 + 0.003 = 0.028$$

$$w(k+n) = (1 - \beta')^n \left[ w(k) - \frac{\alpha C_m}{\beta'} \right] + \frac{\alpha C_m}{\beta'}$$

$$75 = 0.972^n (90 - 44.6) + 44.6 \quad \Rightarrow \quad n = 14$$

运动  $\gamma t = 24$  (每周跳舞8小时或自行车10小时), 14周即可.

## 2) 第二阶段增加运动的减肥计划



增加运动相当于提高代谢消耗系数 $\beta$

$$\beta (= 0.025) \rightarrow \beta' = \beta + \alpha \eta (= 0.028)$$

提高**12%**

减肥所需时间从**19周**降至**14周**

减少**25%**

- 这个模型的结果**对代谢消耗系数 $\beta$ 很敏感**.
- 应用该模型时要仔细确定代谢消耗系数 $\beta$   
(对不同的人; 对同一人在不同的环境).

### 3) 达到目标体重75千克后维持不变的方案



每周吸收热量 $c(k)$ 保持某常数 $C$ , 使体重 $w$ 不变

$$w(k+1) = w(k) + \alpha c(k+1) - (\beta + \alpha \gamma)w(k)$$

$$\Rightarrow w = w + \alpha C - (\beta + \alpha \gamma)w \quad \Rightarrow C = \frac{(\beta + \alpha \gamma)w}{\alpha}$$

• 不运动  $C = 8000 \times 0.025 \times 75 = 15000$  (千卡)

• 运动(内容同前)  $C = 8000 \times 0.028 \times 75 = 16800$  (千卡)

