《微分几何》课程电子课件

教师：杨勤民

Tel: (021)64253147

Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程QQ群号：1045698545

§3.3 用活动标架法研究曲面

一、曲面论的基本定理

二、曲面的第一和第二基本形式

三、曲面上的曲率、法曲率、测地曲率和测地挠率

四、曲面的主曲率、欧拉公式、高斯曲率和平均曲率

五、曲面上向量的平行移动

六、闭曲面上的高斯-波涅公式

一、曲面论的基本定理

给出一个曲面(S): $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, 设其曲纹坐标网正交,

则曲面(S)上任一点$\vec{r}(u,v)$处存在三个有序的两两正交的单位向量:

$$\vec{e}_1(u,v)=\vec{r}_u\big/\sqrt{E},\ \vec{e}_2(u,v)=\vec{r}_v\big/\sqrt{G},\ \vec{e}_3(u,v)=\vec{n}(u,v).$$

无穷小位移
$$\begin{cases} \mathrm{d}\vec{r}=\omega^1\vec{e}_1+\omega^2\vec{e}_2,\ \omega^3=0, \\ \mathrm{d}\vec{e}_1=\omega_1^2\vec{e}_2+\omega_1^3\vec{e}_3, \\ \mathrm{d}\vec{e}_2=\omega_2^1\vec{e}_1+\omega_2^3\vec{e}_3, \\ \mathrm{d}\vec{e}_3=\omega_3^1\vec{e}_1+\omega_3^2\vec{e}_2, \end{cases}$$

其中$\omega_i^j+\omega_j^i=0\ \ (i,j=1,2,3).$

双参数活动标架的结构方程

$$\mathrm{d}\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega_2^1,\ \mathrm{d}\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2,$$

$$\mathrm{d}\omega^3 = \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 = 0$$

$$\mathrm{d}\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2$$

(曲面论中对于正交坐标网的Gauss公式)

$$\mathrm{d}\omega_3^1 = \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 \text{和 } \mathrm{d}\omega_3^2 = \omega_3^1 \wedge \omega_1^2$$

(曲面论中的Codazzi-Mainardi公式)

活动标架语言表达的曲面论的基本定理

给出六个双参数u,v的Pfaff形式

$$\omega^1(u,v,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v),\ \omega^2(u,v,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v),\ \omega^3(u,v,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v),$$

$$\omega_1^2(u,v,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v),\ \omega_2^3(u,v,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v),\ \omega_3^1(u,v,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v),$$

如果它们满足结构方程，且$\omega_i^j+\omega_j^i=0(i,j=1,2,3)$，则差一空间合同变换确定一个双参数活动标架

$$\{\vec{r}(u,v);\ \vec{e}_1(u,v),\vec{e}_2(u,v),\vec{e}_3(u,v)\}$$

使得它的相对分量就是给定的ω^i和ω_i^j. 活动标架的原点$\vec{r}(u,v)$的轨迹是一曲面，$\vec{e}_1(u,v)$和$\vec{e}_2(u,v)$正好是曲面的坐标网的单位切向量，$\vec{e}_3(u,v)$是曲面的单位法向量.

二、曲面的第一和第二基本形式

曲面$(S):\vec{r}=\vec{r}(u,v)$，设其曲纹坐标网正交.

$\mathrm{d}\vec{r}=\omega^1\vec{e}_1+\omega^2\vec{e}_2$，其中$\omega^1=\sqrt{E}\,\mathrm{d}u$，$\omega^2=\sqrt{G}\,\mathrm{d}v$.

第一基本形式 $\mathrm{I}=\mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2$.

称曲面(S)的只与ω^1和ω^2有关的量为曲面的内蕴量.

面积元素 $\mathrm{d}A=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=\omega^1\wedge\omega^2$.

$$\omega_1^2=\left(\frac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2}\right)\omega^1+\left(\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1\wedge\omega^2}\right)\omega^2.$$

第二基本形式

$$\mathrm{II} = -\mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{e}_3 = -(\omega^1\vec{e}_1+\omega^2\vec{e}_2)\cdot(\omega_3^1\vec{e}_1+\omega_3^2\vec{e}_2)$$

$$= -\omega^1\omega_3^1-\omega^2\omega_3^2 = \omega^1\omega_1^3+\omega^2\omega_2^3.$$

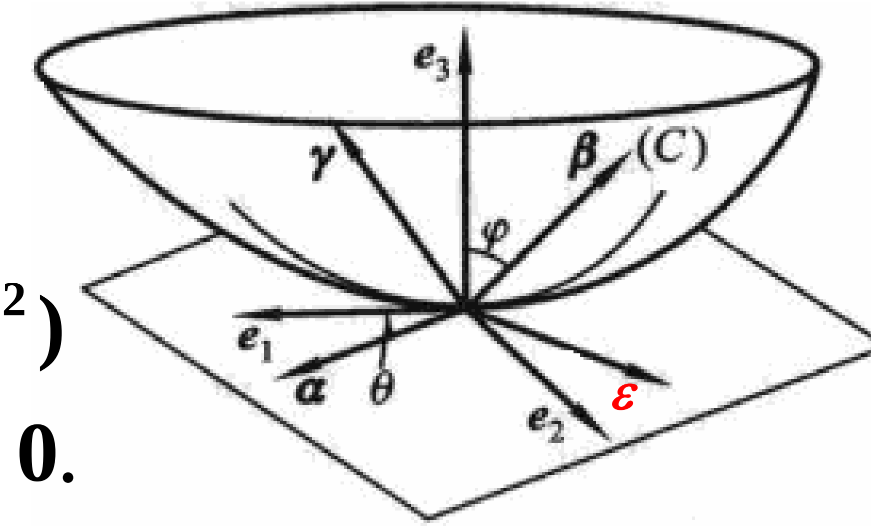
将 $\omega_1^3 = a\omega^1+b\omega^2, \omega_2^3 = b\omega^1+c\omega^2$ 代入得

$$\mathrm{II} = a(\omega^1)^2+2b\omega^1\omega^2+c(\omega^2)^2$$

$$= aE\mathrm{d}u^2+2b\sqrt{EG}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+cG\mathrm{d}v^2,$$

因此 $a=\dfrac{L}{E},\ b=\dfrac{M}{\sqrt{EG}},\ c=\dfrac{N}{G}.$

三、曲面上的曲线的法曲率、测地曲率和测地挠率



设曲面(S): $\vec{r}=\vec{r}(u,v)=\vec{r}(u^1,u^2)$ 的曲纹坐标网为正交网，即$F\equiv 0$.

(S)上的曲线(C): $u=u(s), v=v(s)$，其中s为弧长参数.

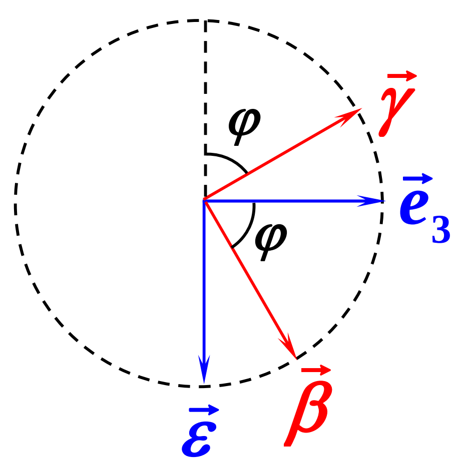
如图所示，$\vec{\varepsilon}=\vec{e}_3\times\vec{\alpha}$，它为切平面上的一个向量.

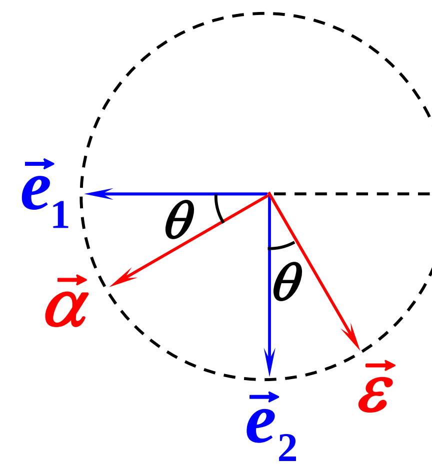
$$\vec{\alpha}=\vec{e}_1\cos\theta+\vec{e}_2\sin\theta$$

$$\vec{\varepsilon}=-\vec{e}_1\sin\theta+\vec{e}_2\cos\theta$$

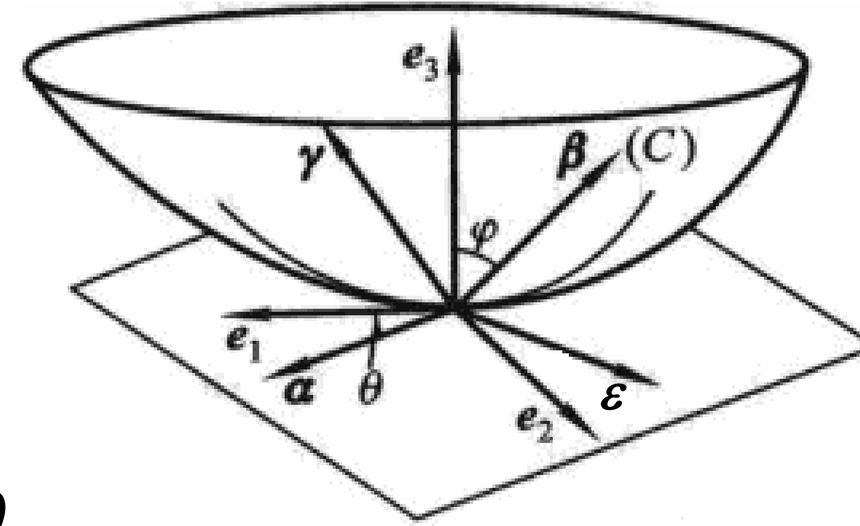
$$\vec{\beta}=\vec{\varepsilon}\sin\varphi+\vec{e}_3\cos\varphi$$

$$\vec{\gamma}=-\vec{\varepsilon}\cos\varphi+\vec{e}_3\sin\varphi$$





测地曲率与法曲率



曲率向量$k\vec{\beta}=\dfrac{d\vec{\alpha}}{ds}$，

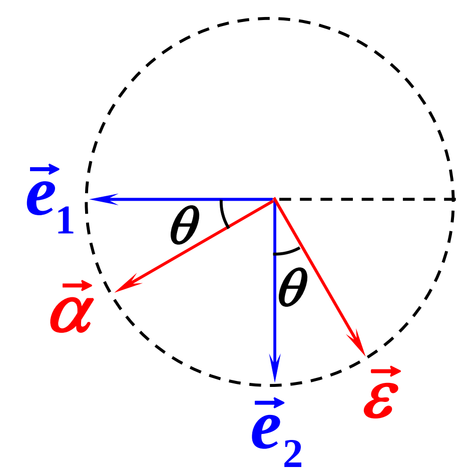
而$d\vec{\alpha}=d(\vec{e}_1\cos\theta+\vec{e}_2\sin\theta)$

$$=(\omega_1^2\vec{e}_2+\omega_1^3\vec{e}_3)\cos\theta-\vec{e}_1\sin\theta d\theta$$

$$+(\omega_2^1\vec{e}_1+\omega_2^3\vec{e}_3)\sin\theta+\vec{e}_2\cos\theta d\theta$$

$$=(d\theta+\omega_1^2)(-\vec{e}_1\sin\theta+\vec{e}_2\cos\theta)+(\omega_1^3\cos\theta+\omega_2^3\sin\theta)\vec{e}_3$$

$$=(d\theta+\omega_1^2)\vec{\varepsilon}+(\omega_1^3\cos\theta+\omega_2^3\sin\theta)\vec{e}_3.$$



测地曲率 $k_g=k\vec{\beta}\cdot\vec{\varepsilon}=\dfrac{d\theta}{ds}+\dfrac{\omega_1^2}{ds}$.

法曲率 $k_n=k\vec{\beta}\cdot\vec{e}_3=\dfrac{\omega_1^3\cos\theta+\omega_2^3\sin\theta}{ds}$.

$$\mathrm{d}\vec{r}=\vec{\alpha}\mathrm{d}s=(\cos\theta\vec{e}_1+\sin\theta\vec{e}_2)\mathrm{d}s=\cos\theta\mathrm{d}s\vec{e}_1+\sin\theta\mathrm{d}s\vec{e}_2,$$

而由无穷小位移公式$\mathrm{d}\vec{r}=\omega^1\vec{e}_1+\omega^2\vec{e}_2$,

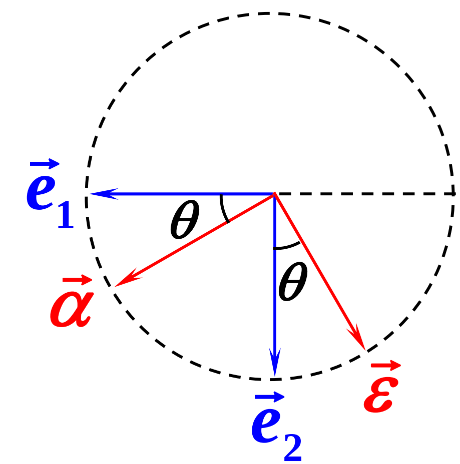
因此$\omega^1=\cos\theta\,\mathrm{d}s$, $\omega^2=\sin\theta\,\mathrm{d}s$.

于是 $k_n=\dfrac{\omega_1^3\cos\theta+\omega_2^3\sin\theta}{\mathrm{d}s}$

$$=\frac{\cos\theta\mathrm{d}s\omega_1^3+\sin\theta\mathrm{d}s\omega_2^3}{\mathrm{d}s^2}$$

$$=\frac{\omega^1\omega_1^3+\omega^2\omega_2^3}{\mathrm{d}s^2}$$

$$=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}.$$



例1 设曲面的第一基本形式是 $\mathrm{I} = E\mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2$, 证明曲面上的曲线 (C) 的测地曲率 k_g 的 Liouville 公式:

$$k_g = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} - \frac{1}{2\sqrt{G}}(\ln E)_v \cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}(\ln G)_u \sin\theta,$$

其中 s 是 (C) 的弧长参数, θ 是 (C) 与 u-曲线的夹角.

证 由刚才得到的公式知 $k_g = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \dfrac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}$.

由 $\mathrm{I} = (\sqrt{E}\mathrm{d}u)^2 + (\sqrt{G}\mathrm{d}v)^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$ 知

可取 $\omega^1 = \sqrt{E}\mathrm{d}u, \quad \omega^2 = \sqrt{G}\mathrm{d}v,$

则 $\mathrm{d}\omega^1 = -(\sqrt{E})_v \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v, \quad \mathrm{d}\omega^2 = (\sqrt{G})_u \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v,$

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = \sqrt{EG}\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

$$\omega_1^2 = \frac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2}\omega^1 + \frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2}\omega^2$$

$$= \frac{-(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}\sqrt{E}\mathrm{d}u + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}\sqrt{G}\mathrm{d}v$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{G}}(\ln E)_v\sqrt{E}\mathrm{d}u + \frac{1}{2\sqrt{E}}(\ln G)_u\sqrt{G}\mathrm{d}v.$$

$$\omega^1 = \sqrt{E}\mathrm{d}u = \cos\theta\mathrm{d}s, \qquad \omega^2 = \sqrt{G}\mathrm{d}v = \sin\theta\mathrm{d}s.$$

$$k_g = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} - \frac{1}{2\sqrt{G}}(\ln E)_v\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}(\ln G)_u\sin\theta.$$

例2 设曲面的第一基本形式是 $\mathrm{I}=\mathrm{d}u^2+2\cos\varphi\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\mathrm{d}v^2$，其中 $\varphi(u,v)$ 是 (u,v) 处的 u-曲线和 v-曲线之间的夹角．求 u-曲线和 v-曲线的二等分角轨线的测地曲率．

解 $\mathrm{I}=\mathrm{d}u^2+2\cos\varphi\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\mathrm{d}v^2$

$$=(\mathrm{d}u+\cos\varphi\mathrm{d}v)^2+(\sin\varphi\mathrm{d}v)^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2.$$

取 $\omega^1=\mathrm{d}u+\cos\varphi\mathrm{d}v,\quad \omega^2=\sin\varphi\mathrm{d}v.$

则 $\mathrm{d}\omega^1=-\varphi_u\sin\varphi\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v,\quad \mathrm{d}\omega^2=\varphi_u\cos\varphi\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v,$

$\omega^1\wedge\omega^2=\sin\varphi\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.$

$$\omega_1^2=\frac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2}\omega^1+\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1\wedge\omega^2}\omega^2$$

$$= \frac{-\varphi_u \sin\varphi}{\sin\varphi}(\mathrm{d}u + \cos\varphi \mathrm{d}v) + \frac{\varphi_u \cos\varphi}{\sin\varphi}\sin\varphi \mathrm{d}v = -\varphi_u \mathrm{d}u.$$

(1) 当 $\theta = \frac{1}{2}\varphi$时，结合 $\begin{cases} \omega^1 = \mathrm{d}u + \cos\varphi \mathrm{d}v = \cos\theta \mathrm{d}s \\ \omega^2 = \sin\varphi \mathrm{d}v = \sin\theta \mathrm{d}s \end{cases}$

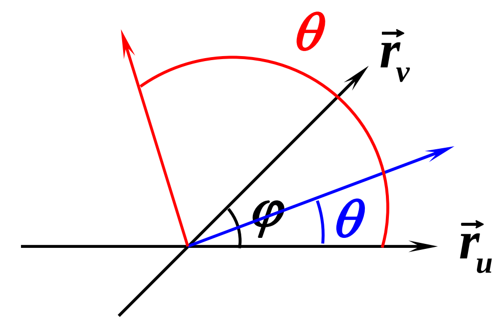
得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}}, \quad \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}}.$

$$k_g = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\frac{\varphi}{2}}{\mathrm{d}s} - \varphi_u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{2}(\varphi_u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + \varphi_v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}) - \varphi_u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}$$

$$= \frac{1}{2}(\varphi_v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} - \varphi_u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}) = \frac{\varphi_v - \varphi_u}{4\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

(2) 当$\theta=\dfrac{\pi+\varphi}{2}$时, 结合$\begin{cases}\omega^1=\mathrm{d}u+\cos\varphi\mathrm{d}v=\cos\theta\mathrm{d}s\\ \omega^2=\sin\varphi\mathrm{d}v=\sin\theta\mathrm{d}s\end{cases}$

得$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=-\dfrac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=\dfrac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$.

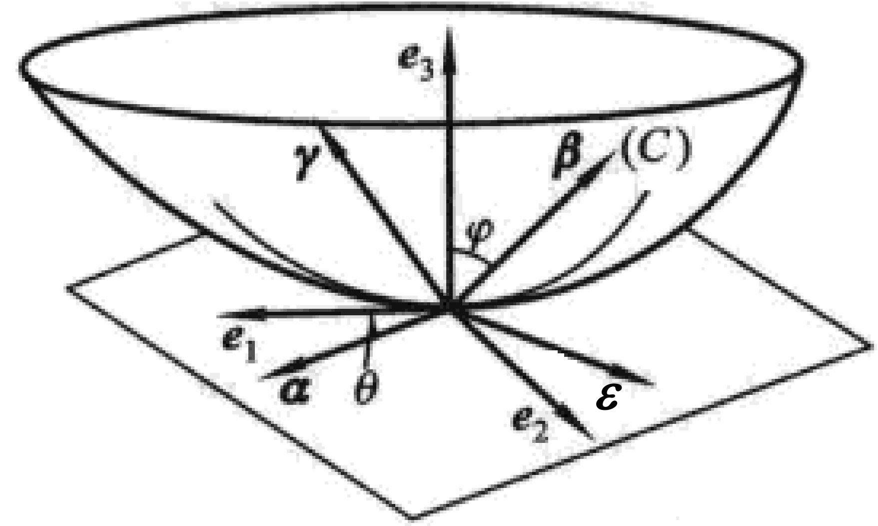


$$k_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}+\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}(\frac{\varphi+\pi}{2})}{\mathrm{d}s}-\varphi_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}$$

$$=\frac{1}{2}(\varphi_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}+\varphi_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s})-\varphi_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{2}(\varphi_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}-\varphi_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s})=\frac{\varphi_u+\varphi_v}{4\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

综上, 所求测地曲率为$\pm\dfrac{\varphi_v-\varphi_u}{4\cos\frac{\varphi}{2}}$或$\pm\dfrac{\varphi_u+\varphi_v}{4\sin\frac{\varphi}{2}}$.

测地挠率τ_g



考虑标架场$\{\vec{r};\vec{\alpha},\vec{\varepsilon},\vec{e}_3\}$的无穷小位移:

$$\mathrm{d}\vec{r}=\vec{\alpha}\mathrm{d}s=\mathrm{d}s\vec{\alpha}+0\vec{\varepsilon}+0\vec{e}_3$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{d}\vec{\alpha}=0\vec{\alpha}+?\vec{\varepsilon}+?\vec{e}_3\\ \dot{\vec{\alpha}}=k\vec{\beta}=k_g\vec{\varepsilon}+k_n\vec{e}_3\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{d}\vec{\alpha}=0\vec{\alpha}+k_g\mathrm{d}s\vec{\varepsilon}+k_n\mathrm{d}s\vec{e}_3$$

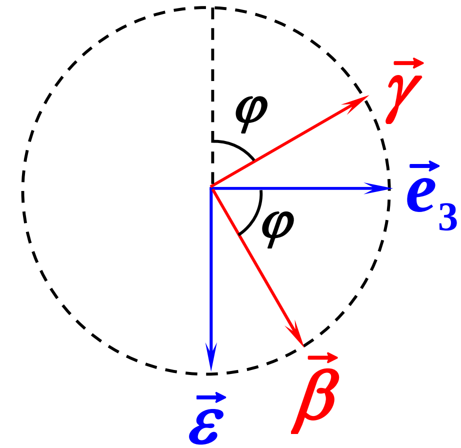
$$\mathrm{d}\vec{\varepsilon}=?\vec{\alpha}+0\vec{\varepsilon}+?\vec{e}_3=-k_g\mathrm{d}s\vec{\alpha}+0\vec{\varepsilon}+?\vec{e}_3$$

$$\triangleq -k_g\mathrm{d}s\vec{\alpha}+0\vec{\varepsilon}+\boxed{\tau_g}\mathrm{d}s\vec{e}_3$$

测地挠率

$$\mathrm{d}\vec{e}_3=?\vec{\alpha}+?\vec{\varepsilon}+0\vec{e}_3=-k_n\mathrm{d}s\vec{\alpha}-\tau_g\mathrm{d}s\vec{\varepsilon}+0\vec{e}_3$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{\alpha}} = 0\vec{\alpha} + k_g\vec{\varepsilon} + k_n\vec{e}_3 \\ \dot{\vec{\varepsilon}} = -k_g\vec{\alpha} + 0\vec{\varepsilon} + \tau_g\vec{e}_3 \\ \dot{\vec{e}}_3 = -k_n\vec{\alpha} - \tau_g\vec{\varepsilon} + 0\vec{e}_3 \end{cases}$$



$$\tau_g \triangleq \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{e}_3 = -\vec{\varepsilon} \cdot \dot{\vec{e}}_3 = -\vec{\varepsilon} \cdot \mathrm{d}(\vec{\beta}\cos\varphi + \vec{\gamma}\sin\varphi)/\mathrm{d}s$$

$$= -\vec{\varepsilon} \cdot (\dot{\vec{\beta}}\cos\varphi - \vec{\beta}\sin\varphi\dot{\varphi} + \dot{\vec{\gamma}}\sin\varphi + \vec{\gamma}\cos\varphi\dot{\varphi})$$

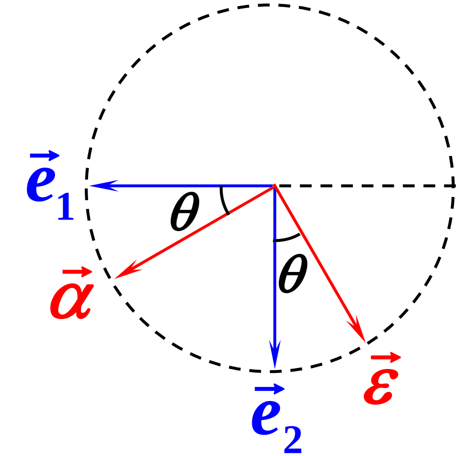
$$= -\vec{\varepsilon} \cdot [(-k\vec{\alpha} + \tau\vec{\gamma})\cos\varphi - \vec{\beta}\sin\varphi\dot{\varphi} - \tau\vec{\beta}\sin\varphi + \vec{\gamma}\cos\varphi\dot{\varphi}]$$

$$= \tau\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\dot{\varphi} + \tau\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\dot{\varphi}$$

$$= \tau + \dot{\varphi}.$$

当φ为常数时, $\tau_g = \tau$.　(如渐近曲线, 测地线)

$$\tau_g = -\vec{\varepsilon}\cdot\dot{\vec{e}}_3 = -\vec{\varepsilon}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{e}_3}{\mathrm{d}s}$$



$$= -(-\vec{e}_1\sin\theta + \vec{e}_2\cos\theta)\cdot\frac{\omega_3^1\vec{e}_1 + \omega_3^2\vec{e}_2}{\mathrm{d}s}$$

$$= \frac{\sin\theta\omega_3^1 - \cos\theta\omega_3^2}{\mathrm{d}s} = \frac{\sin\theta\mathrm{d}s\omega_3^1 - \cos\theta\mathrm{d}s\omega_3^2}{\mathrm{d}s^2}$$

$$= \frac{\omega^2\omega_3^1 - \omega^1\omega_3^2}{\mathrm{d}s^2} \triangleq \frac{\mathrm{III}}{\mathrm{I}},$$

注：$\mathrm{d}\vec{r} = \omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2$

$= \vec{\alpha}\mathrm{d}s$

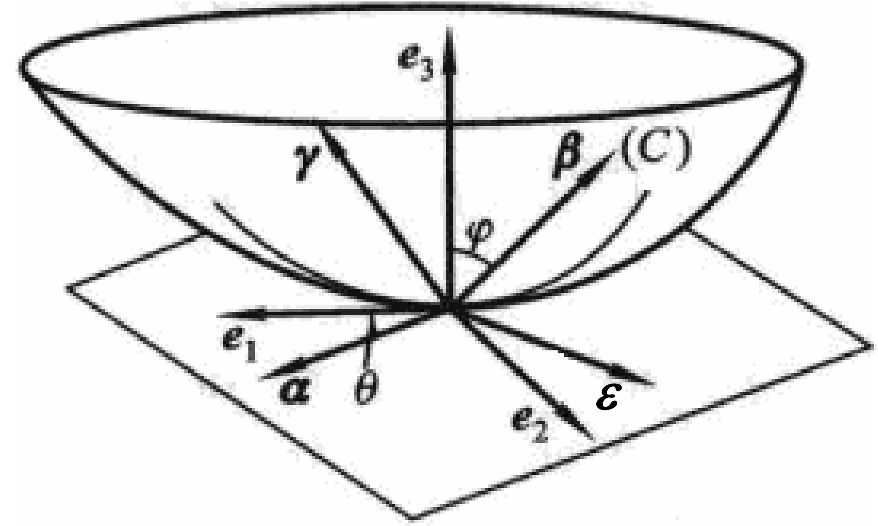
$= (\cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2)\mathrm{d}s$

其中 $\mathrm{III} = \omega^1\omega_2^3 - \omega^2\omega_1^3$

注：$\mathrm{I} = \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3$

(Cartan 称 III 为曲面的第三基本形式).

曲率线和曲率线网



$$\tau_g = -\vec{\varepsilon}\cdot\dot{\vec{e}}_3 = \frac{\mathrm{III}}{\mathrm{I}}$$

当 $\mathrm{III}=0$ 时， $\tau_g = 0 \Rightarrow \vec{\varepsilon} \perp \mathrm{d}\vec{e}_3$

$|\vec{e}_3| = 1 \Rightarrow \vec{e}_3 \perp \mathrm{d}\vec{e}_3$

$\Rightarrow \mathrm{d}\vec{e}_3 \,/\!/\, \vec{\alpha}$

主方向判别定理

$\Rightarrow$ 曲线(C)是曲率线.

曲面上**曲率线网的微分方程**为 $\mathrm{III} = \omega^1\omega_2^3 - \omega^2\omega_1^3 = 0.$

四、曲面的主曲率、Euler公式、Gauss曲率和平均曲率

$$k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2}$$

$$= \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\cos 2\theta + b\sin 2\theta$$

注：$\omega^1 = \sqrt{E}\,\mathrm{du} = \cos\theta\,\mathrm{ds}$，

$\omega^2 = \sqrt{G}\,\mathrm{dv} = \sin\theta\,\mathrm{ds}$

为了求 k_n 的最值，令 $\dfrac{\mathrm{d}k_n}{\mathrm{d}\theta} = 0$ 得 $\tan 2\theta_0 = \dfrac{2b}{a-c}$

因此 $(\cos 2\theta_0, \sin 2\theta_0) = \pm (a-c, 2b)\Big/\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}$

主曲率 $k_{1,2} = \dfrac{a+c}{2} \pm \dfrac{\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$

平均曲率 $H=\dfrac{k_1+k_2}{2}=\dfrac{a+c}{2}.$

Gauss曲率 $K=k_1k_2=ac-b^2.$

主曲率方程 $(a-k)(c-k)-b^2=0.$

$$\mathrm{d}\omega_1^2=\omega_1^3\wedge\omega_3^2=(a\omega^1+b\omega^2)\wedge(-b\omega^1-c\omega^2)$$

$$=(b^2-ac)\omega^1\wedge\omega^2$$

$K=ac-b^2=\dfrac{-\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}$ (用相对分量表示的高斯曲率)

因ω^1,ω^2和ω_1^2都是内蕴量，所以Gauss曲率是内蕴量.

例3 设曲面的第一基本形式是 $ds^2=\frac{du^2+dv^2}{v^2}$,

计算一组相对分量 $\omega^1,\omega^2,\omega_1^2$,并求高斯曲率 K.

解 $$ds^2=\frac{du^2+dv^2}{v^2}=\left(\frac{du}{v}\right)^2+\left(\frac{dv}{v}\right)^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2,$$

取 $\omega^1=\frac{du}{v},\omega^2=\frac{dv}{v}$.

$$d\omega^1=-\frac{1}{v^2}dv\wedge du=\frac{1}{v^2}du\wedge dv,\quad d\omega^2=0.$$

$$\omega^1\wedge\omega^2=\frac{du}{v}\wedge\frac{dv}{v}=\frac{1}{v^2}du\wedge dv.$$

$$\omega_1^2=\frac{d\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2}\omega^1+\frac{d\omega^2}{\omega^1\wedge\omega^2}\omega^2=\omega^1=\frac{du}{v}.$$

$$d\omega_1^2=\frac{1}{v^2}du\wedge dv,\quad K=\frac{-d\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}=-1.$$

主方向　即，主曲率所在的切方向.

$$\text{主方向与}\vec{e}_1\text{的夹角}\theta_0\text{满足}\tan 2\theta_0=\frac{2b}{a-c}.$$

当$\vec{e}_1$和$\vec{e}_2$是主方向时(即$\theta_0=0$时)

$$b=0,\quad a=k_1,\quad c=k_2,\quad \omega_1^3=k_1\omega^1,\quad \omega_2^3=k_2\omega^2.$$

注: $a=\dfrac{L}{E},\ b=\dfrac{M}{\sqrt{EG}},\ c=\dfrac{N}{G},\ \omega^1=\sqrt{E}\,\mathrm{du},\ \omega^2=\sqrt{G}\,\mathrm{dv}$

$$\mathrm{II}=a(\omega^1)^2+2b\omega^1\cdot\omega^2+c(\omega^2)^2=k_1(\omega^1)^2+k_2(\omega^2)^2.$$

$$\mathrm{III}=\omega^1\omega_2^3-\omega^2\omega_1^3=(k_2-k_1)\omega^1\omega^2.$$

令θ是曲面曲线(C)的切方向与$\vec{e}_1$的夹角,则

$$\omega^1=\cos\theta ds,\ \omega^2=\sin\theta ds.$$

代入$\mathrm{II}=k_1(\omega^1)^2+k_2(\omega^2)^2$得到

$$k_n=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta\ \ (\text{Euler公式}).$$

代入$\mathrm{III}=(k_2-k_1)\omega^1\omega^2$得到

$$\tau_g=\frac{\mathrm{III}}{\mathrm{I}}=(k_2-k_1)\sin\theta\cos\theta.$$

当曲线(C)为坐标曲线$\theta = 0$时

$$\omega^1 = \mathrm{d}s, \qquad \omega^2 = 0, \qquad \omega_1^3 = a\,\mathrm{d}s, \qquad \omega_2^3 = b\,\mathrm{d}s$$

$$k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = a$$

$$k_g \mathrm{d}s = \mathrm{d}\theta + \omega_1^2 = \omega_1^2$$

$$\tau_g = \frac{\mathrm{III}}{\mathrm{I}} = b$$

当曲线(C)为渐近曲线时

$$\mathrm{II}=0,$$

$$\varphi\equiv\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad\tau_g=\tau+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}=\tau$$

若再取渐近曲线(C)的切方向为$\vec{e}_1$(即坐标曲线的方向),

则$a=0,\ \tau_g=b,$

$$K=ac-b^2=-b^2=-\tau_g^2=-\tau^2,$$

于是$\tau=\pm\sqrt{-K}.$

Enneper(恩内佩尔)定理:

对于渐近曲线有$\tau=\pm\sqrt{-K}.$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业！

3.9 设曲面的第一基本形式是

$$ds^2 = [U(u)+V(v)](du^2+dv^2),$$

计算一组相对分量$\omega^1,\omega^2,\omega_1^2$，并求高斯曲率$K$.

3.10 设曲面的第一基本形式是

$$ds^2 = \frac{du^2-4v\,du\,dv+4u\,dv^2}{4(u-v^2)} \quad (u>v^2),$$

计算一组相对分量$\omega^1,\omega^2,\omega_1^2$，并求高斯曲率$K$.

五、曲面上向量的平行移动

设$\vec{v}(u^1,u^2)$是曲面S：$\vec{r}=\vec{r}(u^1,u^2)$上的(切)向量场，

称$\mathrm{d}\vec{v}$在S的切平面上的投影$\mathrm{D}\vec{v}$为$\vec{v}$的绝对微分.

$$\mathrm{d}\vec{e}_\alpha=\sum_{j=1}^{3}\omega_\alpha^j\vec{e}_j,\quad \mathrm{D}\vec{e}_\alpha=\sum_{\beta=1}^{2}\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta. \qquad \text{设}\ \vec{v}=\sum_{\beta=1}^{2}v^\beta\vec{e}_\beta,$$

$$\text{则}\ \mathrm{d}\vec{v}=\sum_{\beta=1}^{2}(\mathrm{d}v^\beta\vec{e}_\beta+v^\beta\mathrm{d}\vec{e}_\beta)=\sum_{\beta=1}^{2}\mathrm{d}v^\beta\vec{e}_\beta+\sum_{\alpha=1}^{2}v^\alpha\mathrm{d}\vec{e}_\alpha$$

$$=\sum_{\beta=1}^{2}\mathrm{d}v^\beta\vec{e}_\beta+\sum_{\alpha=1}^{2}v^\alpha\sum_{j=1}^{3}\omega_\alpha^j\vec{e}_j=\sum_{\beta=1}^{2}\mathrm{d}v^\beta\vec{e}_\beta+\sum_{j=1}^{3}\sum_{\alpha=1}^{2}v^\alpha\omega_\alpha^j\vec{e}_j.$$

$$\mathrm{D}\vec{v}=\sum_{\beta=1}^{2}\Big(\mathrm{d}v^\beta+\sum_{\alpha=1}^{2}v^\alpha\omega_\alpha^\beta\Big)\vec{e}_\beta\triangleq\sum_{\beta=1}^{2}\mathrm{D}v^\beta\vec{e}_\beta.$$

Levi-Civita(列维-奇维塔)平行移动

给出曲面S上的一条曲线(C): $u^\alpha = u^\alpha(s), \alpha = 1,2,$

注：即曲线(C)的方程为$\vec{r} = \vec{r}(u^1(s), u^2(s))$

曲面上沿曲线(C)的向量场$\vec{v}(u^1(s), u^2(s)) \triangleq v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2,$

如果$\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{d}s} = \vec{0}$, 即$\dfrac{\mathrm{d}v^\beta}{\mathrm{d}s} + \sum\limits_{\alpha=1}^{2} v^\alpha \dfrac{\omega_\alpha^\beta}{\mathrm{d}s} = 0\ (\beta = 1,2),$

亦即$\dfrac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}s} + v^2\dfrac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s} = 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}s} + v^1\dfrac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s} = 0,$

注：$\omega_l^l = 0$

则称$\vec{v}(u^1(s), u^2(s))$沿(C)在Levi-Civita意义下是平行的.

若设$\omega_\alpha^\beta=\sum_{\gamma=1}^{2}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta}\mathrm{d}u^\gamma$，则得到平行向量场$\vec{v}=\sum_{\beta=1}^{2}v^\beta\vec{e}_\beta$应满足的微分方程组：

$$\frac{\mathrm{d}v^\beta}{\mathrm{d}s}+\sum_{\alpha=1}^{2}v^\alpha\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta}\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s}=0\ \ (\beta=1,2).$$

如果在曲线(C)的一点$\vec{r}(u^1(s_0),u^2(s_0))$处给出曲面的一个切向量$\vec{v}_0=\sum_{\beta=1}^{2}v_0^\beta\vec{e}_\beta$，则上述方程组对于初始条件：$s=s_0$时$v^\beta=v_0^\beta$，存在唯一解$v^\beta=v^\beta(s)$，

沿曲线(C)的向量场$\vec{v}=\sum_{\beta=1}^{2}v^\beta\vec{e}_\beta$平行于给定的向量$\vec{v}_0$，

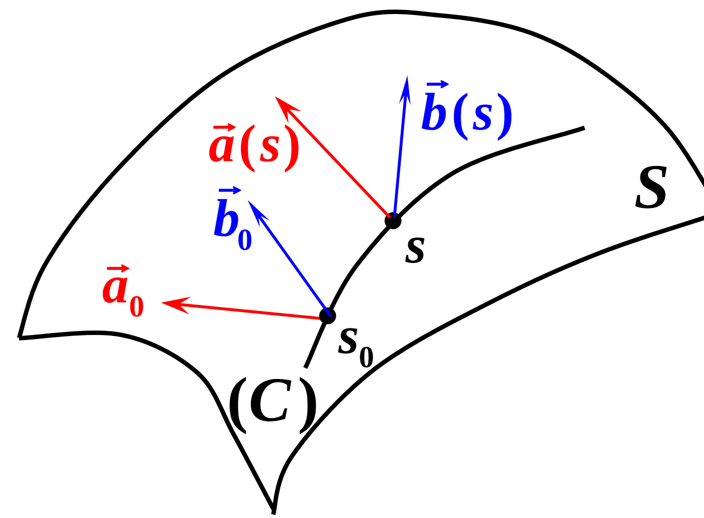
称该向量场为向量$\vec{v}_0$沿曲线(C)的平行移动.

P158命题1 向量沿曲面上一条曲线平行移动时，保持向量的内积不变.

证 设曲面S沿它上面的曲线(C)有两个平行的向量场 $\vec{a}(s)$和$\vec{b}(s)$， $\vec{e}_1(s)$与$\vec{e}_2(s)$是正交的单位切向量，

$$\vec{a}(s)=a^1(s)\vec{e}_1(s)+a^2(s)\vec{e}_2(s),$$

$$\vec{b}(s)=b^1(s)\vec{e}_1(s)+b^2(s)\vec{e}_2(s).$$



则由平行移动的定义，

$$\frac{\mathrm{d}a^1}{\mathrm{d}s}+a^2\frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s}=0,\quad \frac{\mathrm{d}a^2}{\mathrm{d}s}+a^1\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}b^1}{\mathrm{d}s}+b^2\frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s}=0,\quad \frac{\mathrm{d}b^2}{\mathrm{d}s}+b^1\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}=0.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\vec{a}(s)\cdot\vec{b}(s)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[a^1(s)b^1(s)+a^2(s)b^2(s)]$$

$$=\frac{\mathrm{d}a^1}{\mathrm{d}s}b^1+a^1\frac{\mathrm{d}b^1}{\mathrm{d}s}+\frac{\mathrm{d}a^2}{\mathrm{d}s}b^2+a^2\frac{\mathrm{d}b^2}{\mathrm{d}s}$$

$$=(-a^2\frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s})b^1+a^1(-b^2\frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s})+(-a^1\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s})b^2+a^2(-b^1\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s})$$

$$=(a^2b^1+a^1b^2-a^1b^2-a^2b^1)\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}=0.$$

即$\vec{a}(s)\cdot\vec{b}(s)$与$s$无关,保持不变.

P158推论 沿曲面上一条曲线平行移动时,保持向量的长度不变,也保持两方向的夹角不变.

设有方向场$\vec{v}(s)=\cos\theta(s)\vec{e}_1(s)+\sin\theta(s)\vec{e}_2(s)$,

其中$\theta(s)$为$\vec{v}(s)$与$\vec{e}_1(s)$的夹角.

则平行移动的定义中的条件简化成$\mathrm{d}\theta+\omega_1^2=0$.

证 $\vec{v}(s)=v^1\vec{e}_1+v^2\vec{e}_2$是曲面上的平行移动场的条件为

$$\frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}s}+v^2\frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s}=0,\quad \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}s}+v^1\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}=0,$$

即 $$\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}s}+\sin\theta\frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s}=0,\quad \frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}s}+\cos\theta\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}=0.$$

即 $$-\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}+\sin\theta\frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s}=0,\quad \cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}+\cos\theta\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}=0.$$

即$\mathrm{d}\theta+\omega_1^2=0$.

P158命题2　如果曲面的平行移动与路径无关，
则该曲面一定是可展曲面.

证 设方向场$\vec{v}=\cos\theta(u,v)\vec{e}_1(u,v)+\sin\theta(u,v)\vec{e}_2(u,v)$
沿曲面上的任意曲线(C): $\vec{r}=\vec{r}(u(s),v(s))$都是平行的.
由刚才得到的简化的平行移动条件有

$$\mathrm{d}\theta(u(s),v(s))+\omega_1^2(u(s),v(s))=0.$$

结合曲线(C)的任意性有$\mathrm{d}\theta(u,v)+\omega_1^2(u,v)=0.$

于是对于任意(u,v)有$\omega_1^2(u,v)=-\mathrm{d}\theta(u,v)$,

$$\mathrm{d}\omega_1^2(u,v)=-\mathrm{d}\mathrm{d}\theta(u,v)=0.$$

注: 由Poincaré引理

$$K(u,v)=\frac{-\mathrm{d}\omega_1^2(u,v)}{\omega^1(u,v)\wedge\omega^2(u,v)}=0.$$

因此曲面可展.

P159命题3 测地线是它的切线沿它自身平行的曲线,
即测地线是自平行曲线.

证 设测地线的切线方向与$\vec{e}_1(s)$所夹的角为$\theta(s)$,

由测地曲率的计算公式知$k_g(s)=\dfrac{\mathrm{d}\theta(s)}{\mathrm{d}s}+\dfrac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}$.

对于测地线上任意一点有$k_g=0$,

代入上式得$\mathrm{d}\theta(s)+\omega_1^2=0$.

因此方向场$\cos\theta(s)\vec{e}_1(s)+\sin\theta(s)\vec{e}_2(s)$是平行场.

即测地线上各切线在列维-奇维塔意义下是平行的.

P159命题4 当向量$\vec{v}$沿测地线平移时，它与测地线的夹角保持不变.

证 设$\vec{v}(s)$与$\vec{e}_1(s)$所夹的角为$\theta(s)$，则$\mathrm{d}\theta(s)+\omega_1^2=0$.

设测地线的切方向与$\vec{e}_1(s)$所夹的角为$\varphi(s)$，

则由测地线的自平行性质知$\mathrm{d}\varphi(s)+\omega_1^2=0$.

两式相减得$\mathrm{d}[\theta(s)-\varphi(s)]=0$.

即夹角$\theta(s)-\varphi(s)$与s无关，保持不变.

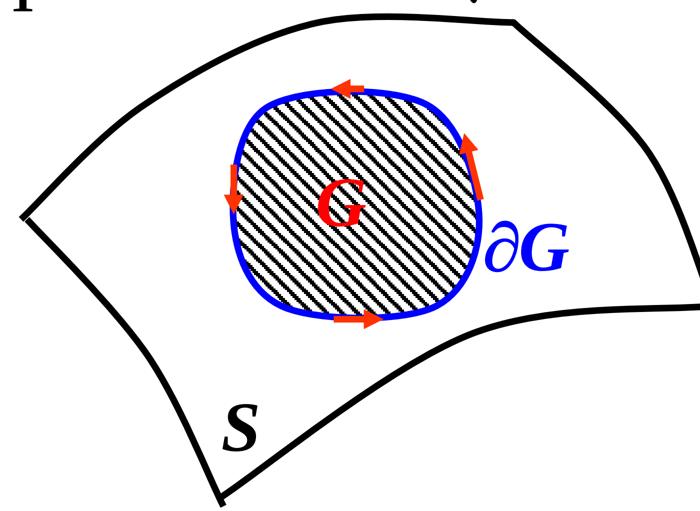
注：也可由P158推论直接得到结论

六、曲面的Gauss-Bonnet(高斯-波涅)公式

设G是曲面S上一个单连通区域,假定它的正向边界∂G是一条光滑的闭曲线.

将测地曲率的公式$k_g \mathrm{d}s = \mathrm{d}\theta + \omega_1^2$沿$\partial G$积分得

$$\int_{\partial G} k_g \mathrm{d}s = \int_{\partial G} \mathrm{d}\theta + \int_{\partial G} \omega_1^2$$

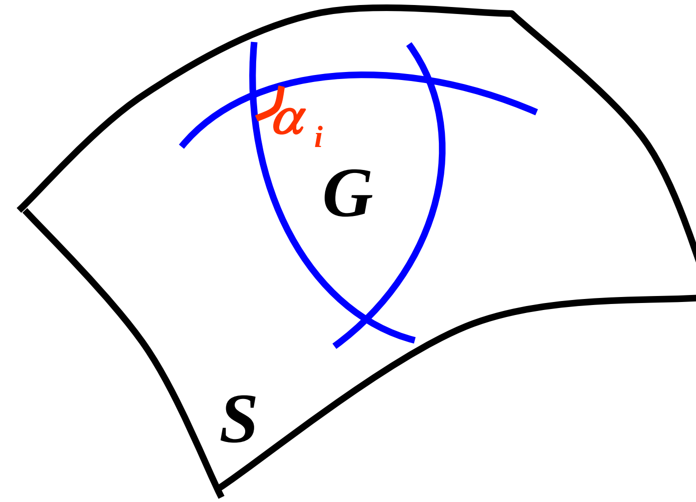


而$\int_{\partial G} \mathrm{d}\theta = 2\pi$

由Stokes公式$\int_{\partial G} \omega_1^2 = \int_G \mathrm{d}\omega_1^2 = -\int_G K\omega^1 \wedge \omega^2 = -\int_G K \mathrm{d}S$

因此 $\int_G K \mathrm{d}S + \int_{\partial G} k_g \mathrm{d}s = 2\pi$. (Gauss-Bonnet公式)

若G的边界∂G分段光滑，设它在非光滑点处的内角分别为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，则



$$\int_{\partial G} \mathrm{d}\theta = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i)$$

取代刚才证明过程中的$\int_{\partial G} \mathrm{d}\theta = 2\pi$得到

$$\int_G K \mathrm{d}S + \int_{\partial G} k_g \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i) = 2\pi.$$

(这是曲面上沿着分段光滑闭曲线的Gauss-Bonnet公式)

沿闭曲线作平行移动的角差计算公式

例4 假定曲面 S 上的一块单连通区域 G 的正向边界 ∂G 是一条光滑闭曲线. 证明：当单位切向量 $\vec{t}$ 沿 ∂G 平行移动一周后再回到出发点时与初始单位切向量 $\vec{t}$ 所夹的角度恰好是高斯曲率 K 在 G 上的曲面积分.

证 建立 S 上的活动标架场 $\{\vec{r};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 使 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 与 S 相切.

设 $\vec{t}$ 与 $\vec{e}_1$ 的夹角为 $\varphi(s)$,

则由平行移动的条件知

$$\mathrm{d}\varphi+\omega_1^2=0,$$

因此 $\omega_1^2=-\mathrm{d}\varphi.$

设∂G的切方向与$\vec{e}_1$的夹角为$\theta(s)$,

$$k_g \mathrm{d}s = \mathrm{d}\theta + \omega_1^2 = \mathrm{d}\theta - \mathrm{d}\varphi.$$

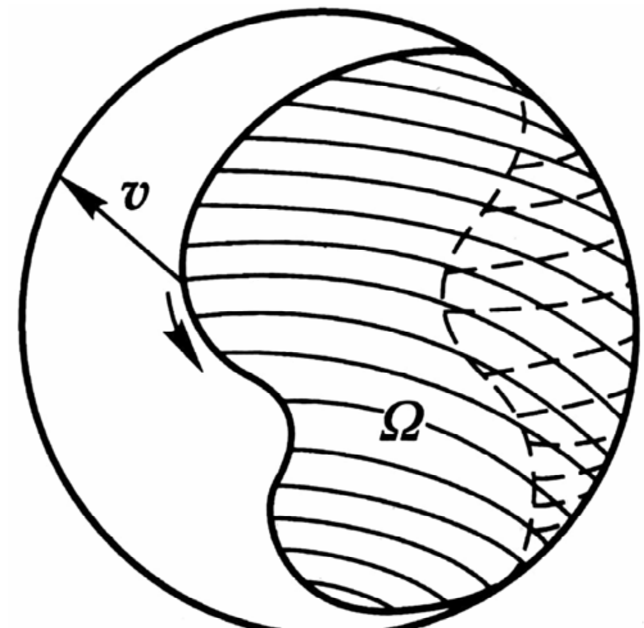
代入Gauss-Bonnet公式$\int_G K\mathrm{d}S + \int_{\partial G} k_g \mathrm{d}s = 2\pi$

得$\int_G K\mathrm{d}S + \int_{\partial G} (\mathrm{d}\theta - \mathrm{d}\varphi) = 2\pi.$

因此角差 $\int_{\partial G} \mathrm{d}\varphi = \int_G K\mathrm{d}S + \int_{\partial G} \mathrm{d}\theta - 2\pi = \int_G K\mathrm{d}S.$

例5 设(C)是球面上的简单正则闭曲线. 证明: 曲线(C)平分所在球面面积的充要条件是球面在(C)上的任何切向量沿(C)平行移动一周后回到原来位置.

证 假设(C)围成一个单连通区域Ω, 如图.



则球面上的任何一个切向量沿(C)平行移动一周后产生的角差

$$\Delta\omega = \int_{\Omega} K dS = \frac{1}{R^2} A(\Omega),$$

其中R是球面的半径, $A(\Omega)$是Ω的面积.

(充分性) 切向量沿(C)平行移动一周后回到原来位置,

因此存在$l \in \mathbb{Z}$使 $\Delta\omega = 2l\pi$, 即 $\dfrac{1}{R^2}A(\Omega) = 2l\pi$.

由$0 < A(\Omega) < 4\pi R^2$知$l = 1$.

因此 $A(\Omega) = 2\pi R^2$,刚好为球面面积的一半.

(必要性) 若(C)平分球面面积, 则$A(\Omega) = 2\pi R^2$,

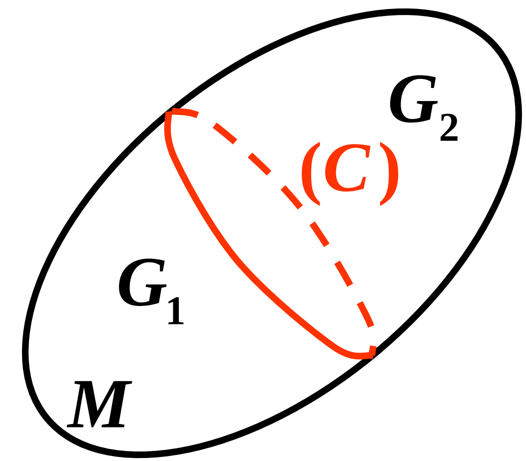
角差$\Delta\omega = \int_\Omega K dS = \dfrac{1}{R^2}A(\Omega) = 2\pi$.

即切向量沿(C)平行移动一周后回到原来位置.

如果某个闭曲面M能被一条光滑闭曲线(C)分割成两个单连通区域G_1和G_2，则

$$\int_{G_1} K\mathrm{d}S + \int_{\partial G_1} k_g \mathrm{d}s = 2\pi$$

$$\int_{G_2} K\mathrm{d}S + \int_{\partial G_2} k_g \mathrm{d}s = 2\pi$$



∂G_1与∂G_2只是定向相反，$\int_{\partial G_1} k_g \mathrm{d}s = -\int_{\partial G_2} k_g \mathrm{d}s$

因此 $\int_M K\mathrm{d}S = 4\pi$. (闭曲面的Gauss-Bonnet公式)

例6 设S是椭球面$x^2+4y^2+9z^2=36$，曲面上的高斯曲率为K，求$\int_S K\mathrm{d}S$.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

3.11 设有定了向的闭曲面S能被剖分成若干个曲边四边形,且每个四边形的每个顶点都刚好是四个四边形的公共顶点,K为高斯曲率,证明$\int_S K\mathrm{d}S = 0$.

3.12 在高斯曲率非正的单连通曲面上,试用高斯-波涅公式证明不能有两条测地线交于相异两点P和Q.

3.13 证明在高斯曲率恒为正的单连通封闭曲面上,任何两条闭测地线至少有一个交点.

3.14 若在单位球面上的两个大圆相交,交点处的内角为α,试求这两个大圆在该球面上所围区域的面积.