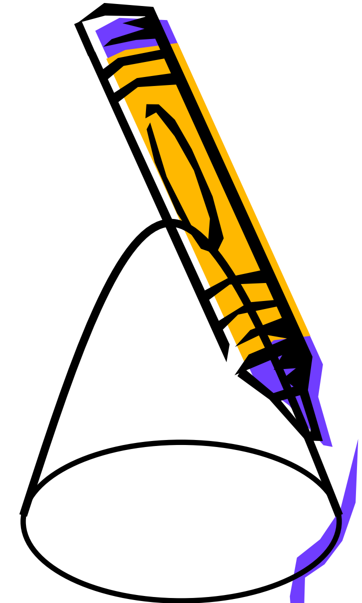
练习三十二（选讲）

七、求平面曲线$\begin{cases} z=1-x^2 \\ y=0 \end{cases}$ $(z\geq 0)$绕z轴旋转一周形成的曲面面积.



解：旋转曲面方程为：$z=1-x^2-y^2$

该曲面在xoy面上的投影为:

$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 1\}$$

所以曲面面积为: $S=\iint\limits_D \sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_D \sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{(1+4\rho^2)}\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\cdot\left[\frac{1}{8}\frac{2}{3}(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^1=\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi.$$

八、曲面$z=13-x^2-y^2$将球面$x^2+y^2+z^2=25$分成三部分，求这三部分曲面面积的比。

解 从z轴上方往下方看依次得交线为$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z=4 \end{cases}$和$\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ z=-3 \end{cases}$

依次截得曲面面积记为S_1, S_2, S_3.

$$S_1=\iint_{D_1}\sqrt{1+\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}\frac{5}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3\frac{5}{\sqrt{25-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho=10\pi$$

$$S_3=\iint_{D_3}\frac{5}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4\frac{5}{\sqrt{25-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\rho=20\pi$$

$$S_2=S_{球}-S_1-S_3=70\pi,$$

$$\therefore S_1:S_2:S_3=1:7:2.$$