2016复变函数期末考试答案

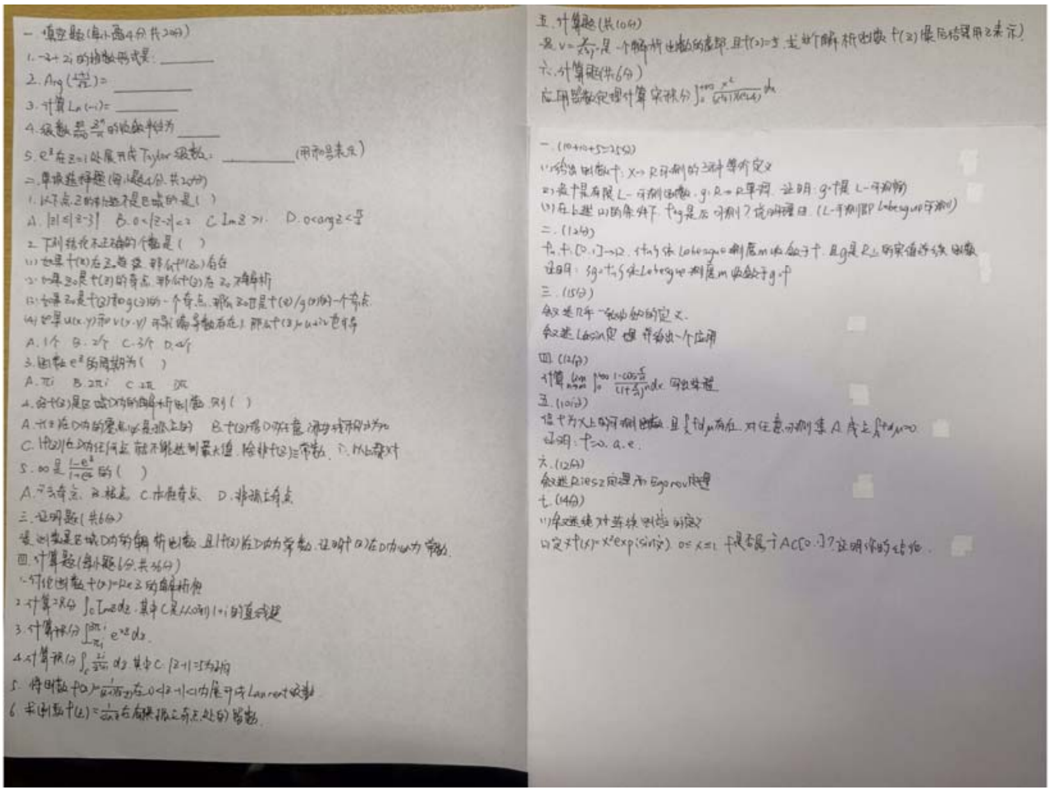
张知远出品

梁天一校对

热心同学：诸振剑 李园保

更新日志：修改部分问题

原卷



一、填空题（每小题4分 共20分）

1. -2+2i 的指数形式是：______

2. $\mathrm{Arg}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=$ ______

3. 计算 $\mathrm{Ln}(-i)=$ ______

4. 级数 $\sum \frac{z^n}{n}$ 的收敛半径为 ______

5. e^z 在 z=i 处展开成 Taylor 级数：______（用和号表示）

二、单项选择题（每小题4分，共20分）

1. 以下点 z 的轨迹不是区域的是（ ）

A. $|z|\le|z-3|$ B. $0<|z-1|<2$ C. $\mathrm{Im}\,z>1$ D. $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$

2. 下列结论不正确的个数是（ ）

(1) 如果 f(z) 在 z_0 可导，那么 $f'(z_0)$ 存在

(2) 如果 z_0 是 f(z) 的奇点，那么 f(z) 在 z_0 不解析

(3) 如果 z_0 是 f(z) 和 g(z) 的一个奇点，那么 z_0 也是 f(z)/g(z) 的一个奇点

(4) 如果 u(x,y) 和 v(x,y) 可微（偏导数存在），那么 f(z)=u+iv 也可导

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

3. 函数 e^z 的周期为（ ）

A. πi B. 2πi C. 2π D. π

4. 设 f(z) 是区域 D 内的解析函数，则（ ）

A. [illegible] B. [illegible]

C. |f(z)| 在 D 内任何点都不能达到最大值，除非 f(z) 为常数 D. 以上都对

5. ∞ 是 $\frac{1-e^z}{1+e^z}$ 的（ ）

A. 可去奇点 B. 极点 C. 本性奇点 D. 非孤立奇点

三、证明题（共6分）

设函数是区域 D 内的解析函数，且 |f(z)| 在 D 内为常数，证明 f(z) 在 D 内也为常数。

四、计算题（每小题6分，共36分）

1. 讨论函数 $f(z)=|z|\mathrm{Re}\,z$ 的解析性

2. 计算积分 $\int_C \mathrm{Im}\,z\,dz$，其中 C 是从 0 到 1+i 的直线段

3. 计算积分 $\int_{\pi i}^{3\pi i} e^{2z}\,dz$

4. 计算积分 $\oint_C$ [illegible] dz，其中 C：|z-1|=3 为正向

5. 将函数 f(z)=[illegible] 在 0<|z-1|<1 内展开成 Laurent 级数

6. 求函数 f(z)=[illegible] 在有限孤立奇点处的留数

五、计算题（共10分）

已知 $v=\frac{y}{x^2+y^2}$ 是一个解析函数的虚部，且 f(2)=[illegible]，求解析函数 f(z)（最后结果用 z 表示）

六、计算题（共6分）

应用留数定理计算实积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

一、(10+10+5=25分)

(1) 给出函数 f: X→R 可测的3种等价定义

(2) 设 f 是有限 L-可测函数，g: R→R 单调，证明 g∘f 是 L-可测的

(3) 在上题 (2) 的条件下，f∘g 是否可测？说明理由（L-可测即 Lebesgue 可测）

二、(12分)

$f_n, f: [0,1]\to R$，$\{f_n\}$ 依 Lebesgue 测度 m 收敛于 f，且 g 是 R 上的实值连续函数

证明：$\{g\circ f_n\}$ 依 Lebesgue 测度 m 收敛于 g∘f

三、(15分)

叙述 R 中一致收敛的定义

叙述 Lusin 定理并给出一个应用

四、(12分)

计算 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{(1+\frac{x}{n})^n}dx$，写出步骤

五、(10分)

设 f 为 X 上的可测函数，且 $\int_X f\,d\mu$ 存在，对任意可测集 A 成立 $\int_A f\,d\mu=0$

证明：f=0 a.e.

六、(12分)

叙述 Riesz 定理和 Egorov 定理

七、(14分)

(1) 叙述绝对连续函数的定义

(2) 定义 $f(x)=x^2\exp(\sin\frac{1}{x})$，0<x≤1，f 是否属于 AC[0,1]？证明你的结论。

一、填空

1. -2+2i (-3+2i?) 的指数形式是_____。

答：$-2+2\mathrm{i}=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$$-3+2\mathrm{i}=\sqrt{13}\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}+\frac{2}{\sqrt{13}}\mathrm{i}\right)=\sqrt{13}e^{\left(\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)+\pi\right)i}$$

2.$\mathrm{Arg}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=$________

答：$\because\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin(\frac{\pi}{4}),\therefore Arg\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=2k\pi+\frac{\pi}{4}(\mathrm{k}=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots)$

3.计算 Ln(-i)

答：$\mathrm{Ln}(-\mathrm{i})=\ln|-i|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}(-\mathrm{i})=(-\frac{\pi}{2}+2\mathrm{k}\pi)\mathrm{i}(\mathrm{k}=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots)$

4.级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n}$的收敛半径为_____。

答：$\mathrm{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$

5. e^z 在 z=i 处展开成 Taylor 级数：________。（用和式表示）

答：$e^z=e^{z-i}e^i=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^i}{n!}(z-i)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\cos(1)+i\sin(1))}{n!}(z-i)^n$(老师要求要能明显看出实

部和虚部，以及展开的系数)

二、单选题

1.以下点 z 的轨迹不是区域的是（）

A. $|z| \leq |z-3|$ B.$0<|z-2|<2$ C.$\mathrm{Im}z>1$ D.$0<\arg z<\frac{\pi}{4}$

答：A（A 点集在 Rez=1.5 的直线上的个点不是内点，所以 A 不是开集，所以 A 不是区域）

2.下列结论不正确的个数是（）

（1）如果 f(z)在 z_0 连续，那么 $f'(z_0)$存在

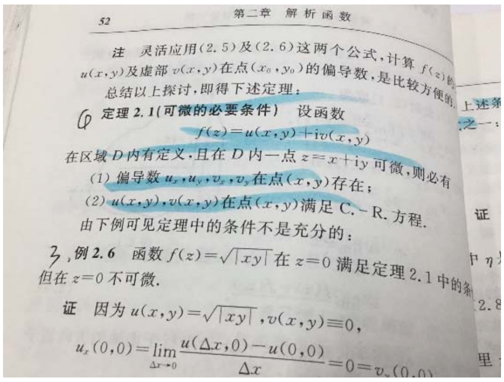
（2）如果 z_0 是 f(z)的奇点，那么 f(z)在 z_0 不解析

（3）如果 z_0 是 f(z)和 g(z)的一个奇点，那么 z_0 也是 f(z)/g(z)的一个奇点

（4）如果 u(x,y)和 v(x,y)可导（偏导数存在），那么 f(z)=u+vi 也可导

A.1 个 B.2 个 C.3 个 D.4 个

答：C（1）（3）（4）错（（1）连续不一定可导（3）若$\mathrm{f(z)}=z^{-1}, g(z)=z^{-2}$）（4）



52　　第二章　解析函数

注　灵活应用(2.5)及(2.6)这两个公式，计算 $f(z)$的实部 $u(x,y)$及虚部 $v(x,y)$在点(x_0,y_0)的偏导数，是比较方便的。

总结以上探讨，即得下述定理：

6 **定理 2.1(可微的必要条件)**　设函数

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

在区域 D 内有定义，且在 D 内一点 $z=x+iy$ 可微，则必有

(1) 偏导数 u_x, u_y, v_x, v_y 在点(x,y)存在；

(2) $u(x,y), v(x,y)$在点(x,y)满足 C.-R. 方程.

由下例可见定理中的条件不是充分的：

3, **例 2.6**　函数 $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在 $z=0$ 满足定理 2.1 中的条件，但在 $z=0$ 不可微.

证　因为 $u(x,y)=\sqrt{|xy|}, v(x,y)\equiv 0$,

$$u_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=0=v_y(0,0)$$

偏导数存在是必要条件，而且也没说是否满足 C.R.方程

3.函数 e^z 的周期为（）

A. πi　B. $2\pi i$　C. 2π　D. π

答：$e^z=e^{Rez}e^{Imzi}=e^{Rez}(\cos(Imz)+i\ \sin(Imz))$，所以$e^{z+2\pi i}=e^z$，周期为$2\pi\mathrm{i}$。B

4.设 f(z)是区域 D 内的解析函数，则（）

A.f(z)在 D 内的零点必是孤立的 B. f(z)沿 D 内任意闭曲线积分为 0

C.|f(z)|在 D 内任何点就不能达到最大值，除非$\mathrm{f(z)}\equiv\mathrm{C}$　D.以上都对

答：C （A 缺失非恒为 0，B 缺失多连通区域时的闭包连续性）

5.∞是$\frac{1-e^z}{1+e^z}$的（）

A.可去奇点 B.极点 C.本质奇点 D.非孤立奇点

答：非孤立奇点 D

三、证明题

设函数是区域 D 内的解析函数，且|f(z)|在 D 内为常数，证明 f(z)在 D 内必为常数。

证：

设 f(z)=u(x,y)+v(x,y)i

若$|f(z)|\equiv C=0$，则显然$\mathrm{f(z)}\equiv 0$.

若$|f(z)|\equiv C\neq 0$，有$\mathrm{f(z)}\not\equiv 0$.

$u^2+v^2=C^2\neq 0$，分别对x，y微分，再应用C.-R.方程，讨论解二元一次齐次方程组

$$\begin{cases}2uu_x+2vv_x=0\\2uu_y+2vv_y=0\end{cases}$$

即得在D内$u_x=u_y=v_x=v_y=0$，所以f(z)为常值函数。

四、计算题

1.讨论函数f(z)=Rez的解析性

解：$\because \mathrm{f(z)=Rez=x\ \ (z=x+yi)}$

$$\therefore u_x=1, v_y=u_y=v_x=0$$

∴f(z)处处不符合C.-R.方程，所以f(z)处处不解析。

2. 计算积分$\int_{c}\mathrm{Im}(z)dz$，其中C是从0到1+i的直线段。

解：设z=x+yi

用参数方程

$$C: z=(1+i)t(0\le t\le 1)$$

$$dz=(1+i)dt$$

$$\mathrm{Im}\, z=t$$

$$\int_C \mathrm{Im}(z)dz=\int_0^1 Im(z(t))z'(t)dt=\int_0^1(1+i)tdt=\frac{1+i}{2}$$

3.计算积分$\int_{-\pi i}^{3\pi i}e^{2z}dz$

解：

$$\int_{-\pi i}^{3\pi i}e^{2z}dz=\frac{e^{6\pi i}-e^{-2\pi i}}{2}=0$$

4.计算积分$\oint\frac{2i}{z^2+1}dz$，其中C: $|z-1|=5$为正向

解：

$$\oint\frac{2i}{z^2+1}dz=2\pi i(1-1)=0$$

5.将函数$\mathrm{f(z)}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$在0<|z-1|<1内展开成Laurent级数

解：

$$\mathrm{f(z)}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{(z-1)-1}=\frac{1}{z-1}\cdot-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{n-1}$$

6.求函数$\mathrm{f(z)}=\frac{1}{\sin z}$在有限孤立奇点处的留数

解：f(z)的有限孤立奇点是kπ。

$$\underset{z=n\pi}{Res}f(z)=\frac{1}{\cos n\pi}=(-1)^n$$

五、计算题

设$\mathrm{v}=\frac{y}{x^2+y^2}$是一个解析函数的虚部，且$\mathrm{f(2)}=\frac{1}{2}$，求这个解析函数f(z)（结果用z表示）

解:

$$v_x=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},u_y=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow u=\int \mathrm{u}_y dy=\int\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy=-\frac{x}{x^2+y^2}+\psi(x)$$

$$\therefore u_x=v_y$$

$$\Rightarrow\left(-\frac{x}{x^2+y^2}+\psi(x)\right)'_x=\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y$$

$\Rightarrow \psi'(\mathrm{x})\equiv 0$
$\Rightarrow \psi(\mathrm{x})\equiv \mathrm{C}$

$$\therefore \mathrm{f(z)}=-\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}i+C$$

又因为$\mathrm{f}(2)=\frac{1}{2}$,得C=1。

$$\therefore \mathrm{f(z)}=(-\frac{x}{x^2+y^2}+1)+\frac{y}{x^2+y^2}i$$

接下来需要转化为z的表达式
利用公式

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2}$$

$$y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

得到

$$f(z)=(\frac{-x}{x^2+y^2}+1)+\frac{y}{x^2+y^2}i=\frac{-\bar{z}}{z\bar{z}}+1=-\frac{1}{z}+1$$

~~***华丽的分割线***~~

~~***大家都是学过唯一性定理的人了，所以我们在得到***~~

$$\mathrm{f(z)}=(-\frac{x}{x^2+y^2}+1)+\frac{y}{x^2+y^2}i$$

~~***之后又另外一种操作，另x=z，y=0，然后得到***~~

$$f(z)=(\frac{-z}{z^2+0^2}+1)+\frac{0}{z^2+0^2}i=-\frac{1}{z}+1$$

六、计算题

应用留数定理计算实积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

解: $\mathrm{I}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=\pi i\left(\frac{i^2}{(i+i)(i^2+4)}+\frac{(2i)^2}{(2i+2i)((2i)^2+1)}\right)=\frac{\pi}{6}$