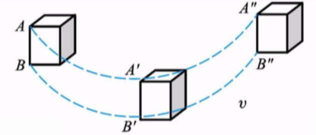
第三章 刚体的运动

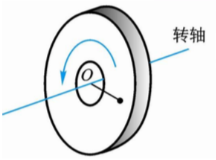
3.1 刚体模型及其运动

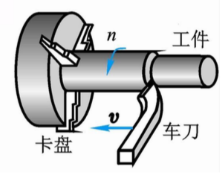
一、刚体

刚体: 既考虑物体的质量，又考虑形状和大小，但忽略其形变的物体模型。

刚体可看作是质量连续分布的且任意两质量元之间相对距离保持不变的质点系.







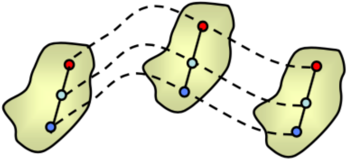
3.1 刚体模型及其运动

二、平动和转动

1. 平动

当刚体运动时，如果刚体内任何一条给定的直线，在运动中始终保持它的方向不变，这种运动叫平动.

平动时，刚体内各质点在任一时刻具有相同的速度和加速度. 刚体内任何一个质点的运动，都可代表整个刚体的运动，如质心.



可以用质点动力学的方法来处理刚体的平动问题.

3.1 刚体模型及其运动

2. 转动

如果刚体的各个质点在运动中都绕同一直线做圆周运动，这种运动就叫做转动，这一 直线就叫做转轴. 如果转轴是固定不动的，就叫做 定轴转动. 如：门、 窗的转动等. 可

以证明，刚体的一般运动可看作是平动和转 动的叠加.

如:车轮的滚动.

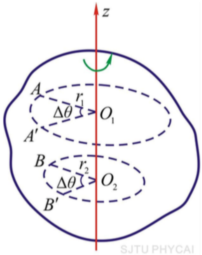
3.1 刚体模型及其运动

3. 刚体的定轴转动

定轴转动时，刚体上各点都绕同一固定转轴做不同半径的圆周运动.

在同一时间内，各点转过的圆弧长度不同，但在相同时间内转过的角度相同，称为**角位移**，它可以用来描述整个刚体的转动.

做定轴转动时，刚体内各点具有相同的**角量**，包括角位移、角速度和角加速度. 但不同位置的质点具有不同的**线量**，包括位移、速度和加速度.



3.1 刚体模型及其运动

角量:

角位移: $\Delta\theta$

角速度: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

角加速度: $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

线量与角量的关系:

路程: $\Delta s = r\Delta\theta$

速度: $v = r\omega$

加速度: $a_t = r\alpha,\ a_n = r\omega^2$

匀角加速转动 v.s. **匀加速直线运动**

匀角加速转动	匀加速直线运动
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$
$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$	$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

3.1 刚体模型及其运动

三、自由度

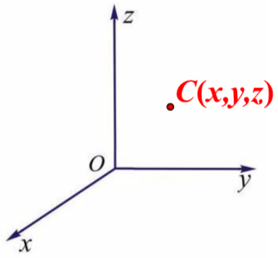
所谓**自由度**就是决定系统在空间的位置所需要的独立坐标的数目.

质点: $(x, y, z) \quad i = 3$

做直线运动的质点: 1个自由度

做平面运动的质点: 2个自由度

做空间运动的质点: 3个自由度



物体有几个自由度, 它的运动定律就归结为几个独立的方程.

3.1 刚体模型及其运动

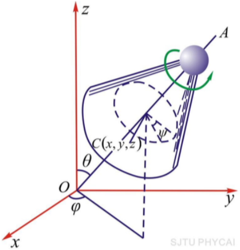
运动刚体: 质心的平动+绕过质心轴的转动

自由刚体有 6个自由度:

确定质心位置→3个平动自由度(x, y, z)

确定转轴的方向→2个转动自由度(θ, φ)

确定转动的角位置→1个转动自由度(ψ)



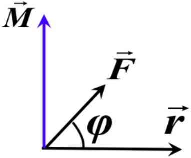
刚性细棒:

$$i = 3\text{个平动自由度} + 2\text{个转动自由度} = 5\text{个自由度}$$

3.2 力矩 转动惯量 定轴转动定律

一、力矩

$\vec{F}$对O点的力矩:

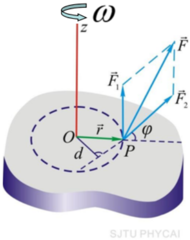


$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

大小: $M = rF\sin\varphi$

讨论

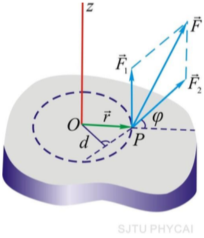
1. 只有垂直转轴的外力分量才产生沿转轴方向的力矩M_z，而平行于转 轴的外力分量产生的力矩M_{xy}则被轴承上支承力的力矩所抵消.



3.2 力矩 转动惯量 定轴转动定律

2. $M_z = rF_2\sin\varphi = F_2 d$

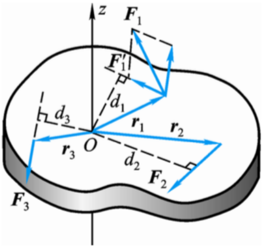
$d = r\sin\varphi$是转轴到力作用线的距离，称为力臂. M_z叫做力F对转轴oz的力矩



3. 在转轴方向确定后，力对转轴的力矩的正负由右螺旋法则决定.

刚体所受的关于定轴的合力矩:

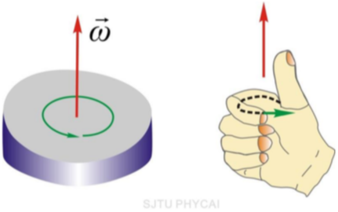
$$\begin{aligned} M_z &= \sum_i M_{iz} \\ &= F_1' d_1 + F_3 d_3 - F_2 d_2 \end{aligned}$$



3.2 力矩 转动惯量 定轴转动定律

二、角速度矢量

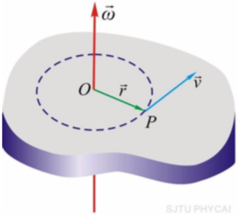
角速度的方向:与刚体转动方向呈右手螺旋关系。



在定轴转动中，角速度的方向沿转轴方向. 因此，计算中可用正负表示角速度的方向.

线速度和角速度之间的矢量关系：

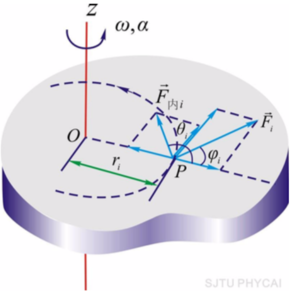
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



3.2 力矩 转动惯量 定轴转动定律

三、定轴转动定律

对刚体中任一质量元Δm_i受外力$\vec{F}_i$和内力$\vec{F}_{内i}$应用牛顿第二定律，可得



$$\vec{F}_i + \vec{F}_{内i} = \Delta m_i \vec{a}_i$$

采用自然坐标系，上式切向分量式为

$$F_i \sin\varphi_i + F_{内i} \sin\theta_i = \Delta m_i a_{it} = \Delta m_i r_i \alpha$$

$$F_i r_i \sin\varphi_i + F_{内i} r_i \sin\theta_i = \Delta m_i r_i^2 \alpha$$

3.2 力矩 转动惯量 定轴转动定律

对刚体内各个质点的相应式子，相加得

$$\sum_i F_i r_i \sin\varphi_i + \sum_i F_{内 i} r_i \sin\theta_i = \sum_i (\Delta m_i r_i^2)\alpha$$

对于成对的内力，对同一转轴的力矩之和为零，则

$$\sum_i F_{内 i} r_i \sin\theta_i = 0$$

$$\sum_i F_i r_i \sin\varphi_i = \sum_i (\Delta m_i r_i^2)\alpha$$

$$J \equiv \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

J称为刚体对转轴的**转动惯量**.

3.2 力矩 转动惯量 定轴转动定律

$$M_z = J\alpha = J\frac{d\omega}{dt}$$

刚体定轴转动定律: 刚体在做定轴转动时，刚体的角加速度与它所受到的合外力矩成正比，与刚体的转动 惯量成反比.

与平动定律比较: $F = ma = m\dfrac{dv}{dt}$

转动惯量J是量度定轴刚体转动惯性的物理量，质量m是平动中惯性大小的量度.

3.2 力矩 转动惯量 定轴转动定律

四、转动惯量

定义: $J \equiv \sum_i \Delta m_i r_i^2$　　单位(SI): $\mathrm{kg \cdot m^2}$

刚体为质量连续体时:

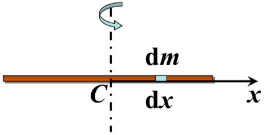
$$J = \int r^2 dm \quad (r\text{为质元}dm\text{到转轴的距离})$$

转动惯量取决于刚体本身的性质，即刚体的形状、大小、质量分布以及转轴的位置.

3.2 力矩 转动惯量 定轴转动定律

例3.2-1 求均质细棒(m, l)的转动惯量: (1)转轴通过中心C与棒垂直, (2)转轴通过棒的一端O与棒垂直.

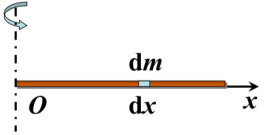
解: (1) $dm = \frac{m}{l}dx$



$$J_C = \int x^2 dm$$

$$= \int_{-l/2}^{l/2} \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{1}{12} m l^2$$

(2) $J = \int_0^l \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{1}{3} m l^2$



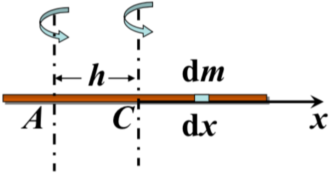
可见, 转动惯量因转轴位置不同而变, 故必须指明是关于某轴的转动惯量.

3.2 力矩 转动惯量 定轴转动定律

平行轴定理

刚体对任一转轴的转动惯量J等于对通过质心的平行转轴的转动惯量J_C加上刚体质量m乘以两平行转轴间距离h的平方.

$$J = J_C + mh^2$$



通过任一转轴A的转动惯量:
(取C为坐标原点)

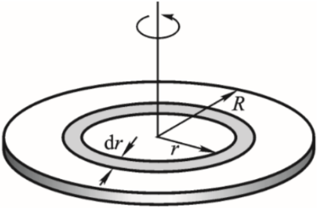
$$\begin{aligned} J &= \int (x+h)^2 dm \\ &= \int x^2 dm + h^2 \int dm + 2h \int x dm \\ &= J_c + mh^2 \end{aligned}$$

3.2 力矩 转动惯量 定轴转动定律

例3.2-2 求圆盘对于通过中心并与盘面垂直的转轴的转动惯量. 圆盘半径R, 质量m, 密度均匀.

解: 圆盘质量面密度

$$\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$$



取半径r, 宽度dr的圆环

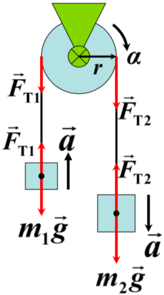
$$J = \int r^2 dm = \int_0^R 2\pi\sigma r^3 dr$$

$$= \frac{\pi\sigma R^4}{2} = \frac{1}{2} m R^2$$

3.2 力矩 转动惯量 定轴转动定律

例3.2-3 物体: m_1、$m_2(> m_1)$, 定滑轮: m、r, 受摩擦阻力矩为M_r. 轻绳不能伸长, 无相对滑动. 求物体的 加速度和绳的张力.

解: 由于考虑滑轮的质量和所受的摩擦阻力矩, $F'_{T1} \neq F'_{T2}$. 应用牛顿运动定律及转动定律:



$$F_{T1} - m_1 g = m_1 a$$

$$m_2 g - F_{T2} = m_2 a$$

$$F_{T2} r - F_{T1} r - M_r = J\alpha$$

$$a = r\alpha$$

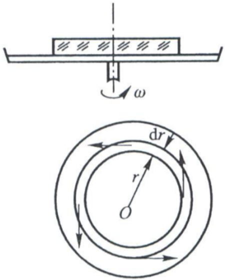
联立方程, 可解得 F_{T1}, F_{T2}, a, α.

此装置称阿特伍德机—可用于测量重力加速度g

3.2 力矩 转动惯量 定轴转动定律

例3.2-4 圆形台面以恒定角速度ω绕通过中心且垂直台面的轴旋转. 现一半径R, 质量为m的均质圆盘放在台面上. 设圆盘与台面间摩擦因数为μ, 问经过多少时 间才使圆盘达到角速度ω?

解: 把圆盘分成许多环形质元, 每个质元的质量$dm=\rho 2\pi r dr\delta$, δ是盘的厚度, 质元所受到的阻力矩为 $r\mu dmg$.



圆盘所受阻力矩为

$$M_r=\int r\mu dmg=\int r\mu\rho 2\pi r dr\delta g$$

3.2 力矩 转动惯量 定轴转动定律

$$
\begin{aligned}
M_r &= \int r\mu dmg = \int r\mu\rho 2\pi r dr\delta g \\
&= \mu g\rho\delta 2\pi \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3}\mu g\rho\delta\pi R^3 \\
m &= \rho\delta\pi R^2, \quad M_r = \frac{2}{3}\mu mgR
\end{aligned}
$$

由定轴转动定律:

$$
\frac{2}{3}\mu mgR = J\alpha = \frac{1}{2}mR^2\frac{d\omega}{dt}
$$

$$
\frac{2}{3}\mu g\int_0^t dt = \frac{1}{2}R\int_0^\omega d\omega
$$

$$
t = \frac{3}{4}\frac{R}{\mu g}\omega
$$