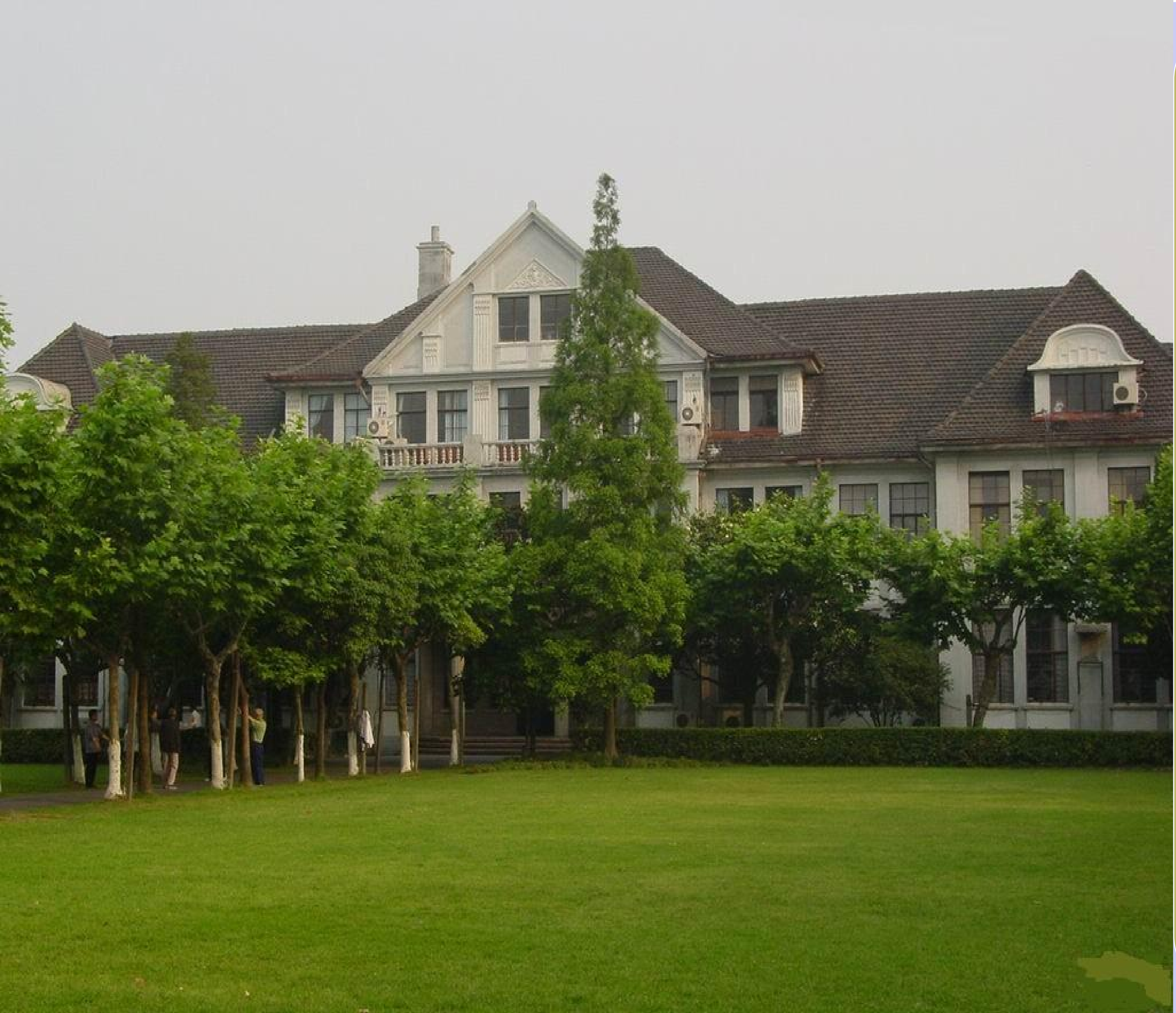

微分方程数值方法

邓淑芳

sfangd@163.com

教材:微分方程数值方法;

编著:李瑞遐　何志庆　;

华东理工大学出版社

主要内容

- 微分方程:含有未知函数以及未知函数导数的方程。

- 微分方程:含有未知函数以及未知函数导数的方程。
- 常微分方程：未知函数是一元函数的方程。

- 微分方程:含有未知函数以及未知函数导数的方程。
- 常微分方程：未知函数是一元函数的方程。
- 偏微分方程：未知函数是多元函数的方程。

- 微分方程:含有未知函数以及未知函数导数的方程。
- 常微分方程：未知函数是一元函数的方程。
- 偏微分方程：未知函数是多元函数的方程。

方程的解

- 微分方程:含有未知函数以及未知函数导数的方程。
- 常微分方程：未知函数是一元函数的方程。
- 偏微分方程：未知函数是多元函数的方程。

方程的解

- 解析解：若能找到一个具有所要求阶连续导数的解析函数，将它代入微分方程，恰好使得方程所有条件满足。

- 微分方程:含有未知函数以及未知函数导数的方程。
- 常微分方程：未知函数是一元函数的方程。
- 偏微分方程：未知函数是多元函数的方程。

方程的解

- 解析解：若能找到一个具有所要求阶连续导数的解析函数，将它代入微分方程，恰好使得方程所有条件满足。
- 数值解：求函数在一些离散点$x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$上的近似值$u_1, u_2, \cdots, u_m, \cdots$.

为什么要研究数值求解方法

为什么要研究数值求解方法

- 在实际问题中，获取或感兴趣的往往只是一个特定点上的数据，如：温度分布只能一个点一个点地测定。这些离散点上地函数值对于解决实际问题来讲一般已经足够了，寻找解析解的一般形式解未必很有必要。

为什么要研究数值求解方法

- 在实际问题中，获取或感兴趣的往往只是一个特定点上的数据，如：温度分布只能一个点一个点地测定。这些离散点上地函数值对于解决实际问题来讲一般已经足够了，寻找解析解的一般形式解未必很有必要。
- 在很多情况下寻找解析解也很难。

为什么要研究数值求解方法

- 在实际问题中，获取或感兴趣的往往只是一个特定点上的数据，如：温度分布只能一个点一个点地测定。这些离散点上地函数值对于解决实际问题来讲一般已经足够了，寻找解析解的一般形式解未必很有必要。
- 在很多情况下寻找解析解也很难。
- 不存在解析解，两种处理方法：级数方法、Picard的逐次逼近法。

为什么要研究数值求解方法

- 在实际问题中，获取或感兴趣的往往只是一个特定点上的数据，如：温度分布只能一个点一个点地测定。这些离散点上地函数值对于解决实际问题来讲一般已经足够了，寻找解析解的一般形式解未必很有必要。
- 在很多情况下寻找解析解也很难。
- 不存在解析解，两种处理方法：级数方法、Picard的逐次逼近法。
- 对于具有解析解的微分方程，数值解并非无用武之地，例如：求解在某一特定时刻的数值，很多情况下还得借助于数值计算。

为什么要研究数值求解方法

- 在实际问题中，获取或感兴趣的往往只是一个特定点上的数据，如：温度分布只能一个点一个点地测定。这些离散点上地函数值对于解决实际问题来讲一般已经足够了，寻找解析解的一般形式解未必很有必要。
- 在很多情况下寻找解析解也很难。
- 不存在解析解，两种处理方法：级数方法、Picard的逐次逼近法。
- 对于具有解析解的微分方程，数值解并非无用武之地，例如：求解在某一特定时刻的数值，很多情况下还得借助于数值计算。

微分方程数值解、数值逼近、数值线性代数鼎足三分。

第一章　常微分方程初值问题

考虑一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = f(x,u), \ \ x_0 < x \le b, \\ u(x_0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

其中f是x和u的已知函数，u_0是给定的初值，记$D = \{(x,u) | x_0 \le x \le b, |u| < +\infty\}$,

第一章　常微分方程初值问题

考虑一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = f(x,u), \ \ x_0 < x \le b, \\ u(x_0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

其中f是x和u的已知函数，u_0是给定的初值，记$D = \{(x,u)|x_0 \le x \le b, |u| < +\infty\}$,假设函数$f$在区域$D$上连续且关于变量$u$满足Lipschitz条件：存在正的常数$L$，使得对区域$D$上任意两点$(x,u_1)$和$(x,u_2)$成立

$$|f(x,u_1) - f(x,u_2)| \le L|u_1 - u_2|$$

则初值问题(1)有唯一解。

- 只有当f是一些特殊类型的函数时，才能求出问题(1)的解析解，一般情况下只能求其近似解或数值解。

- 只有当f是一些特殊类型的函数时，才能求出问题(1)的解析解，一般情况下只能求其近似解或数值解。
- 所谓数值解，就是求函数$u(x)$在一些离散点$x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$上的近似值$u_1, u_2, \cdots, u_m, \cdots$.

- 只有当f是一些特殊类型的函数时，才能求出问题(1)的解析解，一般情况下只能求其近似解或数值解。
- 所谓数值解，就是求函数$u(x)$在一些离散点$x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$上的近似值$u_1, u_2, \cdots, u_m, \cdots$.
- 假设这些点是等距离分布的，即$x_m = x_0 + mh, m = 1, 2, \cdots$其中$h$称为步长。

- 只有当f是一些特殊类型的函数时，才能求出问题(1)的解析解，一般情况下只能求其近似解或数值解。
- 所谓数值解，就是求函数$u(x)$在一些离散点$x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$上的近似值$u_1, u_2, \cdots, u_m, \cdots$.
- 假设这些点是等距离分布的，即$x_m = x_0 + mh, m = 1, 2, \cdots$其中$h$称为步长。
- 第一章主要讨论初值问题(1)的数值求解问题，几个经典的数值方法：Euler(欧拉)法、梯形法、Runge-Kutta(龙格-库塔)法以及线性多步法。

- 只有当f是一些特殊类型的函数时，才能求出问题(1)的解析解，一般情况下只能求其近似解或数值解。
- 所谓数值解，就是求函数$u(x)$在一些离散点$x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$上的近似值$u_1, u_2, \cdots, u_m, \cdots$.
- 假设这些点是等距离分布的，即$x_m = x_0 + mh, m = 1, 2, \cdots$其中$h$称为步长。
- 第一章主要讨论初值问题(1)的数值求解问题，几个经典的数值方法：Euler(欧拉)法、梯形法、Runge-Kutta(龙格-库塔)法以及线性多步法。
- 以后的讨论中，我们总是假设函数$f(x, u)$在D上连续且关于u满足Lipschitz条件，以至于边值问题(1)有惟一解。

⋆1.1 单步法

⋆1.1.1 Euler法及其误差

⋆1.1 单步法

⋆1.1.1 Euler法及其误差

- 初值问题(1)的解$u(x)$在$x-u$平面上是一条过点(x_0,u_0)的曲线,该曲线在(x_0,u_0)处的切线斜率为$f(x_0,u_0)$

⋆1.1 单步法

⋆1.1.1 Euler法及其误差

- 初值问题(1)的解$u(x)$在$x-u$平面上是一条过点(x_0,u_0)的曲线,该曲线在(x_0,u_0)处的切线斜率为$f(x_0,u_0)$
- 过点(x_0,u_0)以$f(x_0,u_0)$为斜率做直线$u-u_0=f(x_0,u_0)(x-x_0)$

⋆1.1 单步法

⋆1.1.1 Euler法及其误差

- 初值问题(1)的解$u(x)$在$x-u$平面上是一条过点(x_0,u_0)的曲线,该曲线在(x_0,u_0)处的切线斜率为$f(x_0,u_0)$
- 过点(x_0,u_0)以$f(x_0,u_0)$为斜率做直线$u-u_0=f(x_0,u_0)(x-x_0)$
- 它和直线$x=x_1$的交点的纵坐标记为u_1，则$u_1=u_0+hf(x_0,u_0)$

⋆1.1 单步法

⋆1.1.1 Euler法及其误差

- 初值问题(1)的解$u(x)$在$x-u$平面上是一条过点(x_0,u_0)的曲线,该曲线在(x_0,u_0)处的切线斜率为$f(x_0,u_0)$
- 过点(x_0,u_0)以$f(x_0,u_0)$为斜率做直线$u-u_0=f(x_0,u_0)(x-x_0)$
- 它和直线$x=x_1$的交点的纵坐标记为u_1，则$u_1=u_0+hf(x_0,u_0)$
- 当h很小时，u_1可以作为$u(x_1)$的近似值

⋆1.1 单步法

⋆1.1.1 Euler法及其误差

- 初值问题(1)的解$u(x)$在$x-u$平面上是一条过点(x_0,u_0)的曲线,该曲线在(x_0,u_0)处的切线斜率为$f(x_0,u_0)$
- 过点(x_0,u_0)以$f(x_0,u_0)$为斜率做直线$u-u_0=f(x_0,u_0)(x-x_0)$
- 它和直线$x=x_1$的交点的纵坐标记为u_1，则$u_1=u_0+hf(x_0,u_0)$
- 当h很小时，u_1可以作为$u(x_1)$的近似值
- 类似地，过点(x_1,u_1)以$f(x_1,u_1)$为斜率做直线，该直线和直线$x=x_2$的交点的纵坐标记为u_2，则$u_2=u_1+hf(x_1,u_1)$

⋆1.1 单步法

⋆1.1.1 Euler法及其误差

- 初值问题(1)的解$u(x)$在$x-u$平面上是一条过点(x_0,u_0)的曲线,该曲线在(x_0,u_0)处的切线斜率为$f(x_0,u_0)$
- 过点(x_0,u_0)以$f(x_0,u_0)$为斜率做直线$u-u_0=f(x_0,u_0)(x-x_0)$
- 它和直线$x=x_1$的交点的纵坐标记为u_1，则$u_1=u_0+hf(x_0,u_0)$
- 当h很小时，u_1可以作为$u(x_1)$的近似值
- 类似地，过点(x_1,u_1)以$f(x_1,u_1)$为斜率做直线，该直线和直线$x=x_2$的交点的纵坐标记为u_2，则$u_2=u_1+hf(x_1,u_1)$
- 如此继续下去，得到递推公式

$$u_{m+1}=u_m+hf(x_m,u_m), m=0,1,\cdots, \tag{3}$$

⋆1.1 单步法

⋆1.1.1 Euler法及其误差

- 初值问题(1)的解$u(x)$在$x-u$平面上是一条过点(x_0,u_0)的曲线,该曲线在(x_0,u_0)处的切线斜率为$f(x_0,u_0)$
- 过点(x_0,u_0)以$f(x_0,u_0)$为斜率做直线$u-u_0=f(x_0,u_0)(x-x_0)$
- 它和直线$x=x_1$的交点的纵坐标记为u_1，则$u_1=u_0+hf(x_0,u_0)$
- 当h很小时，u_1可以作为$u(x_1)$的近似值
- 类似地，过点(x_1,u_1)以$f(x_1,u_1)$为斜率做直线，该直线和直线$x=x_2$的交点的纵坐标记为u_2，则$u_2=u_1+hf(x_1,u_1)$
- 如此继续下去，得到递推公式

$$u_{m+1}=u_m+hf(x_m,u_m),m=0,1,\cdots, \tag{3}$$

- 由此式得到的值u_m就作为$u(x_m)$的近似值$(m=1,2,\cdots)$,这就是Euler法，也称为Euler折线法

⋆1.1 单步法

⋆1.1.1 Euler法及其误差

- 初值问题(1)的解$u(x)$在$x-u$平面上是一条过点(x_0,u_0)的曲线,该曲线在(x_0,u_0)处的切线斜率为$f(x_0,u_0)$
- 过点(x_0,u_0)以$f(x_0,u_0)$为斜率做直线$u-u_0=f(x_0,u_0)(x-x_0)$
- 它和直线$x=x_1$的交点的纵坐标记为u_1，则$u_1=u_0+hf(x_0,u_0)$
- 当h很小时，u_1可以作为$u(x_1)$的近似值
- 类似地，过点(x_1,u_1)以$f(x_1,u_1)$为斜率做直线，该直线和直线$x=x_2$的交点的纵坐标记为u_2，则$u_2=u_1+hf(x_1,u_1)$
- 如此继续下去，得到递推公式

$$u_{m+1}=u_m+hf(x_m,u_m),m=0,1,\cdots, \tag{3}$$

- 由此式得到的值u_m就作为$u(x_m)$的近似值$(m=1,2,\cdots)$,这就是Euler法，也称为Euler折线法
- 它是求解常微分方程初值的最简单的方法。公式(3)称为Euler公式

Euler公式还可以通过以下几种不同的方法导出

Euler公式还可以通过以下几种不同的方法导出

- 用一阶向前差商代替一阶导数，

$$\frac{u(x_{m+1})-u(x_m)}{h}\approx u^{'}(x_m)$$

于是由(1)得

$$u(x_{m+1})\approx u(x_m)+hu^{'}(x_m) \tag{4}$$

记u_m为$u(x_m)$得近似值，即得Euler公式(3)。

Euler公式还可以通过以下几种不同的方法导出

- 用一阶向前差商代替一阶导数，

$$\frac{u(x_{m+1}) - u(x_m)}{h} \approx u^{'}(x_m)$$

于是由(1)得

$$u(x_{m+1}) \approx u(x_m) + hu^{'}(x_m) \tag{4}$$

记u_m为$u(x_m)$得近似值，即得Euler公式(3)。

- 对(1)中的方程两边从x_m到x_{m+1}积分，得

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, u(x))dx$$

对上式中的积分用左矩形公式可得式(4),从而得公式(3)。

Euler公式还可以通过以下几种不同的方法导出

- 用一阶向前差商代替一阶导数，

$$\frac{u(x_{m+1})-u(x_m)}{h}\approx u'(x_m)$$

于是由(1)得

$$u(x_{m+1})\approx u(x_m)+hu'(x_m) \tag{4}$$

记u_m为$u(x_m)$得近似值，即得Euler公式(3)。

- 对(1)中的方程两边从x_m到x_{m+1}积分，得

$$u(x_{m+1})=u(x_m)+\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x,u(x))dx$$

对上式中的积分用左矩形公式可得式(4),从而得公式(3)。

- 假设函数$u(x)$具有二阶连续函数，由Taylor公式得

$$u(x_{m+1})=u(x_m)+hu'(x_m)+\frac{h^2}{2}u''(\xi_m),\xi_m\in(x_m,x_{m+1})$$

略去上市中的h^2项后，也得式(4),从而得公式(3)。

- 单步法：在公式(3)中，计算u_{m+1}的值只用到前一步的值u_m,这样的方法称为单步法。所以Euler法是单步法

- 单步法：在公式(3)中，计算u_{m+1}的值只用到前一步的值u_m,这样的方法称为单步法。所以Euler法是单步法
- 单步法的一般形式为

$$u_{m+1} = u_m + h\phi(x_m, u_m, h), m = 0, 1, \cdots \tag{7}$$

其中$\phi(x, u, h)$称为增量函数，对于Euler法，增量函数就是$f(x, u)$

- 单步法：在公式(3)中，计算u_{m+1}的值只用到前一步的值u_m,这样的方法称为单步法。所以Euler法是单步法
- 单步法的一般形式为

$$u_{m+1} = u_m + h\phi(x_m, u_m, h), m = 0, 1, \cdots \tag{7}$$

其中$\phi(x, u, h)$称为增量函数，对于Euler法，增量函数就是$f(x, u)$

- 定义1.1 对于单步法(7),记

$$R_{m+1} = u(x_{m+1}) - [u(x_m) + h\phi(x_m, u(x_m), h)], \tag{8}$$

$$\epsilon_{m+1} = u(x_{m+1}) - u_{m+1}, \tag{9}$$

称R_{m+1}为局部截断误差，ϵ_{m+1}为整体截断误差

- 单步法：在公式(3)中，计算u_{m+1}的值只用到前一步的值u_m,这样的方法称为单步法。所以Euler法是单步法
- 单步法的一般形式为

$$u_{m+1} = u_m + h\phi(x_m, u_m, h), m = 0, 1, \cdots \tag{7}$$

其中$\phi(x, u, h)$称为增量函数，对于Euler法，增量函数就是$f(x, u)$

- 定义1.1 对于单步法(7),记

$$R_{m+1} = u(x_{m+1}) - [u(x_m) + h\phi(x_m, u(x_m), h)], \tag{8}$$

$$\epsilon_{m+1} = u(x_{m+1}) - u_{m+1}, \tag{9}$$

称R_{m+1}为局部截断误差，ϵ_{m+1}为整体截断误差

- 由定义可知：局部截断误差是指当u_m等于准确值$u(x_m)$时按公式(7)计算一步得到的值与准确值$u(x_{m+1})$之差。整体截断误差是指从初值出发按公式(7)计算$m+1$步后得到的值u_{m+1}与准确值$u(x_{m+1})$之差

• 定理1.1 设$u(x)$具有二阶连续导数，则Euler法的局部截断误差为$R_{m+1} = \frac{h^2}{2}u''(\xi_m), \xi_m \in (x_m, x_{m+1})$.

- 定理1.1　设$u(x)$具有二阶连续导数，则Euler法的局部截断误差为$R_{m+1}=\frac{h^2}{2}u''(\xi_m), \xi_m\in(x_m,x_{m+1})$.
证明：利用Taylor公式，得

$$R_{m+1}=u(x_{m+1})-[u(x_m)+hf(x_m,u(x_m))]$$

$$=u(x_{m+1})-u(x_m)-hu'(x_m)=\frac{h^2}{2}u''(\xi_m)$$

定理1.2 设单步法(7)的局部截断误差满足$|R_m| \leq R$,且增量函数$\phi(x,u,h)$关于u满足Lipschitz条件，则其整体截断误差满足

$$|\epsilon_m| \leq \frac{e^{L(x_m-x_0)}-1}{hL}R$$

, 其中L为ϕ关于u的Lipschitz常数

定理1.2 设单步法(7)的局部截断误差满足$|R_m| \le R$,且增量函数$\phi(x,u,h)$关于u满足Lipschitz条件，则其整体截断误差满足

$$|\epsilon_m| \le \frac{e^{L(x_m-x_0)}-1}{hL}R$$

, 其中L为ϕ关于u的Lipschitz常数
证明：根据局部截断误差的定义，得

$$u(x_m)=u(x_{m-1})+h\phi(x_{m-1},u(x_{m-1}),h)+R_m$$

又

$$u_m=u_{m-1}+h\phi(x_{m-1},u_{m-1},h)$$

两式相减，得

定理1.2 设单步法(7)的局部截断误差满足$|R_m| \leq R$,且增量函数$\phi(x,u,h)$关于u满足Lipschitz条件，则其整体截断误差满足

$$|\epsilon_m| \leq \frac{e^{L(x_m-x_0)}-1}{hL}R$$

, 其中L为ϕ关于u的Lipschitz常数

证明：根据局部截断误差的定义，得

$$u(x_m) = u(x_{m-1}) + h\phi(x_{m-1}, u(x_{m-1}), h) + R_m$$

又

$$u_m = u_{m-1} + h\phi(x_{m-1}, u_{m-1}, h)$$

两式相减，得

$$\epsilon_m = \epsilon_{m-1} + h[\phi(x_{m-1}, u(x_{m-1}), h) - \phi(x_{m-1}.u_{m-1}, h)] + R_m$$

于是

$$|\epsilon_m| < (1+hL)|\epsilon_{m-1}| + R$$

继续递推下去，有

$$|\epsilon_m| < (1+hL)^m|\epsilon_0| + R\sum_{j=0}^{m-1}(1+hL)^j$$

$$= (1+hL)^m|\epsilon_0| + \frac{(1+hL)^m - 1}{hL}R$$

由于$\epsilon_0 = u(x_0) - u_0 = 0$，再利用不等式$1 + x < e^x (x > 0)$,$hm = x_m - x_0$,便得定理结论

继续递推下去，有

$$|\epsilon_m| < (1+hL)^m|\epsilon_0| + R\sum_{j=0}^{m-1}(1+hL)^j$$

$$= (1+hL)^m|\epsilon_0| + \frac{(1+hL)^m - 1}{hL}R$$

由于$\epsilon_0 = u(x_0) - u_0 = 0$，再利用不等式$1+x < e^x (x>0)$,$hm = x_m - x_0$,便得定理结论

- 定理1.3 设$u(x)$具有二阶连续导数，则Euler法的整体截断误差满足

$$|\epsilon_m| \le \frac{M_2}{2L}(e^{L(x_m-x_0)} - 1)h$$

其中L为$f(x,u)$关于u的Lipschitz常数，$M_2 = \max\limits_{x_0\le x\le b}|u''(x)|$.

继续递推下去，有

$$|\epsilon_m| < (1+hL)^m|\epsilon_0| + R\sum_{j=0}^{m-1}(1+hL)^j$$

$$= (1+hL)^m|\epsilon_0| + \frac{(1+hL)^m - 1}{hL}R$$

由于$\epsilon_0 = u(x_0) - u_0 = 0$，再利用不等式$1 + x < e^x (x > 0)$,$hm = x_m - x_0$,便得定理结论

- 定理1.3 设$u(x)$具有二阶连续导数，则Euler法的整体截断误差满足

$$|\epsilon_m| \leq \frac{M_2}{2L}(e^{L(x_m - x_0)} - 1)h$$

其中L为$f(x,u)$关于u的Lipschitz常数，$M_2 = \max\limits_{x_0 \leq x \leq b} |u^{''}(x)|$.

- 定理1.4 设$f(x,u)$关于x,u均满足Lipschitz条件，K, L为相应的Lipschitz常数，则Euler法的整体截断误差满足

$$|\epsilon_m| \leq \frac{K + LM_1}{2L}(e^{L(x_m - x_0)} - 1)h$$

其中$M_1 = \max\limits_{x_0 \leq x \leq b} |u^{'}(x)|$.

继续递推下去，有

$$|\epsilon_m| < (1+hL)^m|\epsilon_0| + R\sum_{j=0}^{m-1}(1+hL)^j$$

$$= (1+hL)^m|\epsilon_0| + \frac{(1+hL)^m - 1}{hL}R$$

由于$\epsilon_0 = u(x_0) - u_0 = 0$，再利用不等式$1 + x < e^x (x > 0)$,$hm = x_m - x_0$,便得定理结论

- 定理1.3 设$u(x)$具有二阶连续导数，则Euler法的整体截断误差满足

$$|\epsilon_m| \leq \frac{M_2}{2L}(e^{L(x_m - x_0)} - 1)h$$

其中L为$f(x,u)$关于u的Lipschitz常数，$M_2 = \max\limits_{x_0 \leq x \leq b} |u''(x)|$.

- 定理1.4 设$f(x,u)$关于x,u均满足Lipschitz条件，K,L为相应的Lipschitz常数，则Euler法的整体截断误差满足

$$|\epsilon_m| \leq \frac{K + LM_1}{2L}(e^{L(x_m - x_0)} - 1)h$$

其中$M_1 = \max\limits_{x_0 \leq x \leq b} |u'(x)|$.

- 定理1.3与1.4都是用来估计Euler法的整体截断误差，其中K, L, M_1, M_2都不易确定

- 定理1.3与1.4都是用来估计Euler法的整体截断误差，其中K, L, M_1, M_2都不易确定
- 定理虽然不能给出ϵ_m的一个定量估计，但在理论上具有重要意义，例：x_m是$(x_0, b]$中一个固定点时，

- 定理1.3与1.4都是用来估计Euler法的整体截断误差，其中K, L, M_1, M_2都不易确定
- 定理虽然不能给出ϵ_m的一个定量估计，但在理论上具有重要意义，例：x_m是$(x_0, b]$中一个固定点时，$\lim\limits_{h\to 0} \epsilon_m = 0$,即$\lim\limits_{h\to 0} u_m = u(x_m)$这说明Euler法得到的数值解收敛到初值问题(1)的解。

- 定理1.3与1.4都是用来估计Euler法的整体截断误差，其中K, L, M_1, M_2都不易确定
- 定理虽然不能给出ϵ_m的一个定量估计，但在理论上具有重要意义，例：x_m是$(x_0, b]$中一个固定点时，$\lim\limits_{h\to 0}\epsilon_m = 0$,即$\lim\limits_{h\to 0} u_m = u(x_m)$这说明Euler法得到的数值解收敛到初值问题(1)的解。
- 从定理1.2可以看出，只要增量函数$\phi(x, u, h)$关于u满足Lipschtiz条件，单步法的整体截断误差比局部截断误差低一阶。

- 定理1.3与1.4都是用来估计Euler法的整体截断误差，其中K, L, M_1, M_2都不易确定
- 定理虽然不能给出ϵ_m的一个定量估计，但在理论上具有重要意义，例：x_m是$(x_0, b]$中一个固定点时，$\lim\limits_{h\to 0} \epsilon_m = 0$,即$\lim\limits_{h\to 0} u_m = u(x_m)$这说明Euler法得到的数值解收敛到初值问题(1)的解。
- 从定理1.2可以看出，只要增量函数$\phi(x, u, h)$关于u满足Lipschtiz条件，单步法的整体截断误差比局部截断误差低一阶。
- 由于估计整体截断误差比局部复杂的多，以后主要讨论方法的局部截断误差。

定义1.2 如果方法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$,则称该方法是p阶方法

定义1.2 如果方法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$,则称该方法是p阶方法

- 由定理1.1 可知Euler法是一阶方法

定义1.2 如果方法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$,则称该方法是p阶方法

- 由定理1.1 可知Euler法是一阶方法
- 若用一阶向后差商代替一阶导数，即

$$\frac{u(x_{m+1})-u(x_m)}{h} \approx u'(x_{m+1})$$

则从式(1)可得

$$u(x_{m+1}) \approx u(x_m) + hf(x_{m+1}, u(x_{m+1}).$$

记u_m是$u(x_m)$的近似值，可得

$$u_{m+1} = u_m + hf(x_{m+1}, u_{m+1}), m = 0, 1, \cdots , \tag{10}$$

上式称为向后的Euler方法

定义1.2 如果方法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$,则称该方法是p阶方法

- 由定理1.1 可知Euler法是一阶方法
- 若用一阶向后差商代替一阶导数，即

$$\frac{u(x_{m+1})-u(x_m)}{h}\approx u'(x_{m+1})$$

则从式(1)可得

$$u(x_{m+1})\approx u(x_m)+hf(x_{m+1},u(x_{m+1})).$$

记u_m是$u(x_m)$的近似值，可得

$$u_{m+1}=u_m+hf(x_{m+1},u_{m+1}),m=0,1,\cdots, \tag{10}$$

上式称为向后的Euler方法

- 式(5)中的积分采用右矩形公式也可导出式(10)。

- 定理1.5 设$u(x)$具有二阶连续导数，则向后的Euler法的局部截断误差为

$$R_{m+1} = -\frac{h^2}{2}u''(x_m) + O(h^3).$$

- 定理1.5 设$u(x)$具有二阶连续导数，则向后的Euler法的局部截断误差为

$$R_{m+1} = -\frac{h^2}{2}u''(x_m) + O(h^3).$$

证明：设$u_m = u(x_m)$,由公式(10)计算一步得到的值记为u_{m+1},则

$$u_{m+1} = u(x_m) + hf(x_{m+1}, u_{m+1})$$

根据局部截断误差的定义，

- 定理1.5 设$u(x)$具有二阶连续导数，则向后的Euler法的局部截断误差为

$$R_{m+1} = -\frac{h^2}{2}u''(x_m) + O(h^3).$$

证明：设$u_m = u(x_m)$,由公式(10)计算一步得到的值记为u_{m+1},则

$$u_{m+1} = u(x_m) + hf(x_{m+1}, u_{m+1})$$

根据局部截断误差的定义，得

$$R_{m+1} = u(x_{m+1}) - u_{m+1} = u(x_{m+1}) - u(x_m) - hf(x_{m+1}, u_{m+1})$$

$$= u(x_{m+1}) - [u(x_{m+1}) - hu'(x_{m+1}) + \frac{h^2}{2}u''(\eta_m)] - hf(x_{m+1}, u_{m+1})$$

- 定理1.5 设$u(x)$具有二阶连续导数，则向后的Euler法的局部截断误差为

$$R_{m+1} = -\frac{h^2}{2}u''(x_m) + O(h^3).$$

证明：设$u_m = u(x_m)$,由公式(10)计算一步得到的值记为u_{m+1},则

$$u_{m+1} = u(x_m) + hf(x_{m+1}, u_{m+1})$$

根据局部截断误差的定义，得

$$R_{m+1} = u(x_{m+1}) - u_{m+1} = u(x_{m+1}) - u(x_m) - hf(x_{m+1}, u_{m+1})$$

$$= u(x_{m+1}) - [u(x_{m+1}) - hu'(x_{m+1}) + \frac{h^2}{2}u''(\eta_m)] - hf(x_{m+1}, u_{m+1})$$

$$= h[f(x_{m+1}, u(x_{m+1})] - hf(x_{m+1}, u_{m+1}) - \frac{h^2}{2}u''(\eta_m)$$

$$= hf_u(x_{m+1}, \xi_{m+1})(u(x_{m+1}) - u_{m+1}) - \frac{h^2}{2}u''(\eta_m)$$

其中$\eta_m \in (x_m, x_{m+1})$, ξ_{m+1}介于$u(x_{m+1})$与u_{m+1}之间。

- 定理1.5 设$u(x)$具有二阶连续导数，则向后的Euler法的局部截断误差为

$$R_{m+1} = -\frac{h^2}{2}u''(x_m) + O(h^3).$$

证明：设$u_m = u(x_m)$,由公式(10)计算一步得到的值记为u_{m+1},则

$$u_{m+1} = u(x_m) + hf(x_{m+1}, u_{m+1})$$

根据局部截断误差的定义，得

$$R_{m+1} = u(x_{m+1}) - u_{m+1} = u(x_{m+1}) - u(x_m) - hf(x_{m+1}, u_{m+1})$$

$$= u(x_{m+1}) - [u(x_{m+1}) - hu'(x_{m+1}) + \frac{h^2}{2}u''(\eta_m)] - hf(x_{m+1}, u_{m+1})$$

$$= h[f(x_{m+1}, u(x_{m+1})] - hf(x_{m+1}, u_{m+1}) - \frac{h^2}{2}u''(\eta_m)$$

$$= hf_u(x_{m+1}, \xi_{m+1})(u(x_{m+1}) - u_{m+1}) - \frac{h^2}{2}u''(\eta_m)$$

其中$\eta_m \in (x_m, x_{m+1}), \xi_{m+1}$介于$u(x_{m+1})$与$u_{m+1}$之间。

假设$|hf_u(x_{m+1},\xi_{m+1})|<1$,利用公式$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\cdots(|t|<1)$得

$$R_{m+1}=-\frac{1}{1-hf_u(x_{m+1},\xi_{m+1})}\frac{h^2}{2}u''(\eta_m)=-\frac{h^2}{2}u''(x_m)+O(h^3)$$

假设$|hf_u(x_{m+1},\xi_{m+1})|<1$,利用公式$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\cdots(|t|<1)$得

$$R_{m+1}=-\frac{1}{1-hf_u(x_{m+1},\xi_{m+1})}\frac{h^2}{2}u^{''}(\eta_m)=-\frac{h^2}{2}u^{''}(x_m)+O(h^3)$$

- 向后Euler法是一阶方法。

假设$|hf_u(x_{m+1},\xi_{m+1})|<1$,利用公式$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\cdots(|t|<1)$得

$$R_{m+1}=-\frac{1}{1-hf_u(x_{m+1},\xi_{m+1})}\frac{h^2}{2}u''(\eta_m)=-\frac{h^2}{2}u''(x_m)+O(h^3)$$

- 向后Euler法是一阶方法。
- 向后的Euler法是单步法

假设$|hf_u(x_{m+1},\xi_{m+1})|<1$,利用公式$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\cdots(|t|<1)$得

$$R_{m+1}=-\frac{1}{1-hf_u(x_{m+1},\xi_{m+1})}\frac{h^2}{2}u''(\eta_m)=-\frac{h^2}{2}u''(x_m)+O(h^3)$$

- 向后Euler法是一阶方法。
- 向后的Euler法是单步法
- 向后的Euler公式右端也包含u_{m+1}，它是关于u_{m+1}的函数方程，这种方法称为隐式方法

假设$|hf_u(x_{m+1},\xi_{m+1})|<1$,利用公式$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\cdots(|t|<1)$得

$$R_{m+1}=-\frac{1}{1-hf_u(x_{m+1},\xi_{m+1})}\frac{h^2}{2}u''(\eta_m)=-\frac{h^2}{2}u''(x_m)+O(h^3)$$

- 向后Euler法是一阶方法。
- 向后的Euler法是单步法
- 向后的Euler公式右端也包含u_{m+1}，它是关于u_{m+1}的函数方程，这种方法称为隐式方法
- Euler法为显式方法，右端不含u_{m+1}

1.1.2 梯形法

对式(5)积分

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, u(x))dx$$

积分采用梯形公式

$$u(x_{m+1}) \approx u(x_m) + \frac{h}{2}[f(x_m, u(x_m)) + f(x_{m+1}, u(x_{m+1}))]$$

从而得

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{2}[f(x_m, u_m) + f(x_{m+1}, u_{m+1})], m = 0, 1, \cdots . \quad (11)$$

1.1.2 梯形法

对式(5)积分

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, u(x))dx$$

积分采用梯形公式

$$u(x_{m+1}) \approx u(x_m) + \frac{h}{2}[f(x_m, u(x_m)) + f(x_{m+1}, u(x_{m+1}))]$$

从而得

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{2}[f(x_m, u_m) + f(x_{m+1}, u_{m+1})], m = 0, 1, \cdots . \quad (11)$$

- 式(11)称为梯形法，是隐式方法

1.1.2 梯形法

对式(5)积分

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, u(x))dx$$

积分采用梯形公式

$$u(x_{m+1}) \approx u(x_m) + \frac{h}{2}[f(x_m, u(x_m)) + f(x_{m+1}, u(x_{m+1}))]$$

从而得

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{2}[f(x_m, u_m) + f(x_{m+1}, u_{m+1})], m = 0, 1, \cdots . \qquad (11)$$

- 式(11)称为梯形法，是隐式方法
- 局部截断误差$O(h^3)$

1.1.2 梯形法

对式(5)积分

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, u(x))dx$$

积分采用梯形公式

$$u(x_{m+1}) \approx u(x_m) + \frac{h}{2}[f(x_m, u(x_m)) + f(x_{m+1}, u(x_{m+1}))]$$

从而得

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{2}[f(x_m, u_m) + f(x_{m+1}, u_{m+1})], m = 0, 1, \cdots. \qquad (11)$$

- 式(11)称为梯形法，是隐式方法
- 局部截断误差$O(h^3)$
- 将公式(3)和公式(10)相加再除以2即得公式(11),由定理1.1和定理1.5可知，Euler法和向后的Euler法的局部截断误差主项分别为$\frac{h^2}{2}u''(x_m)$ 和$-\frac{h^2}{2}u''(x_m)$，因此可以期望梯形法的局部截断误差为$O(h^3)$,利用定理5的证明方法可以证明梯形法是二阶方法

1.1.2 梯形法

对式(5)积分

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, u(x))dx$$

积分采用梯形公式

$$u(x_{m+1}) \approx u(x_m) + \frac{h}{2}[f(x_m, u(x_m)) + f(x_{m+1}, u(x_{m+1}))]$$

从而得

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{2}[f(x_m, u_m) + f(x_{m+1}, u_{m+1})], m = 0, 1, \cdots . \quad (11)$$

- 式(11)称为梯形法，是隐式方法
- 局部截断误差$O(h^3)$
- 将公式(3)和公式(10)相加再除以2即得公式(11),由定理1.1和定理1.5可知，Euler法和向后的Euler法的局部截断误差主项分别为$\frac{h^2}{2}u''(x_m)$ 和$-\frac{h^2}{2}u''(x_m)$，因此可以期望梯形法的局部截断误差为$O(h^3)$,利用定理5的证明方法可以证明梯形法是二阶方法

例1. 取步长$h = 0.2$,分别用Euler法，向后的Euler法和梯形法解初值问题

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = u + x - 1, \ \ 0 < x \le 1 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

例1. 取步长$h=0.2$,分别用Euler法，向后的Euler法和梯形法解初值问题

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = u + x - 1, & 0 < x \le 1 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

解：$u_0 = 1, x_0 = 0, x_m = mh$,对于Euler法

$$u_{m+1} = u_m + h(u_m + x_m - 1), m = 0, 1, 2, 3, 4$$

计算结果如下

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1	1.04	1.128	1.2736	1.4883

例1. 取步长$h=0.2$,分别用Euler法，向后的Euler法和梯形法解初值问题

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = u + x - 1, & 0 < x \le 1 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

解：$u_0 = 1, x_0 = 0, x_m = mh$,对于Euler法

$$u_{m+1} = u_m + h(u_m + x_m - 1), m = 0, 1, 2, 3, 4$$

计算结果如下

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1	1.04	1.128	1.2736	1.4883

对向后的Euler法：

$$u_{m+1} = u_m + h(u_{m+1} + x_{m+1} - 1)$$

于是

$$u_{m+1} = \frac{u_m + h(x_{m+1} - 1)}{1 - h}, m = 0, 1, 2, 3, 4$$

计算结果如下：

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1.05	1.1625	1.3531	1.6414	2.0518

例1. 取步长$h=0.2$,分别用Euler法，向后的Euler法和梯形法解初值问题

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = u + x - 1, & 0 < x \le 1 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

解：$u_0 = 1, x_0 = 0, x_m = mh$,对于Euler法

$$u_{m+1} = u_m + h(u_m + x_m - 1), m = 0, 1, 2, 3, 4$$

计算结果如下

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1	1.04	1.128	1.2736	1.4883

对向后的Euler法：

$$u_{m+1} = u_m + h(u_{m+1} + x_{m+1} - 1)$$

于是

$$u_{m+1} = \frac{u_m + h(x_{m+1} - 1)}{1 - h}, m = 0, 1, 2, 3, 4$$

计算结果如下：

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1.05	1.1625	1.3531	1.6414	2.0518

对于梯形法：

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{2}(u_m + x_m - 1 + u_{m+1} + x_{m+1} - 1)$$

于是

$$u_{m+1} = \frac{u_m + \frac{h}{2}(u_m + x_m + x_{m+1} - 2)}{1 - \frac{h}{2}}, m = 0, 1, 2, 3, 4$$

计算结果如下：

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1.0222	1.0938	1.2258	1.4315	1.7274

对于梯形法：

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{2}(u_m + x_m - 1 + u_{m+1} + x_{m+1} - 1)$$

于是

$$u_{m+1} = \frac{u_m + \frac{h}{2}(u_m + x_m + x_{m+1} - 2)}{1 - \frac{h}{2}}, m = 0, 1, 2, 3, 4$$

计算结果如下：

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1.0222	1.0938	1.2258	1.4315	1.7274

对于初值问题的真解是$u(x) = e^x - x$，计算结果如下：

$u(x_1)$	$u(x_2)$	$u(x_3)$	$u(x_4)$	$u(x_5)$
1.0214	1.0918	1.2221	1.4255	1.7183

对于梯形法：

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{2}(u_m + x_m - 1 + u_{m+1} + x_{m+1} - 1)$$

于是

$$u_{m+1} = \frac{u_m + \frac{h}{2}(u_m + x_m + x_{m+1} - 2)}{1 - \frac{h}{2}}, m = 0, 1, 2, 3, 4$$

计算结果如下：

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1.0222	1.0938	1.2258	1.4315	1.7274

对于初值问题的真解是$u(x) = e^x - x$，计算结果如下：

$u(x_1)$	$u(x_2)$	$u(x_3)$	$u(x_4)$	$u(x_5)$
1.0214	1.0918	1.2221	1.4255	1.7183

从上面的计算结果可以看出，Euler法和向后Euler法的结果较差，因为它们是一阶方法，梯形法的结果较好，因为它是二阶方法

- 对于隐式法，求u_{m+1}需要解一个函数方程，通常不能求出它的精确值，而是用迭代法求其近似值，若迭代初值取得好，收敛是很快的。
- 对于梯形法，我们先用Euler法算得一个值并记为$u_{m+1}^{(0)}$，把它作为迭代初值，然后利用梯形迭代公式(11)进行迭代,具体算法如下：

$$\begin{cases} u_{m+1}^{(0)} = u_m + hf(x_m, u_m), \\ u_{m+1}^{(n)} = u_m + \frac{h}{2}[f(x_m, u_m) + f(x_{m+1}, u_{m+1}^{(n-1)})], \quad n = 1, 2, \cdots . \end{cases} \tag{12}$$

- 对于隐式法，求u_{m+1}需要解一个函数方程，通常不能求出它的精确值，而是用迭代法求其近似值，若迭代初值取得好，收敛是很快的。
- 对于梯形法，我们先用Euler法算得一个值并记为$u_{m+1}^{(0)}$，把它作为迭代初值，然后利用梯形迭代公式(11)进行迭代,具体算法如下：

$$\begin{cases} u_{m+1}^{(0)} = u_m + hf(x_m, u_m), \\ u_{m+1}^{(n)} = u_m + \frac{h}{2}[f(x_m, u_m) + f(x_{m+1}, u_{m+1}^{(n-1)})], \quad n = 1, 2, \cdots . \end{cases} \tag{12}$$

- 分析迭代过程的收敛性，用式(11)减去上式，

$$u_{m+1} - u_{m+1}^{(n)} = \frac{h}{2}[f(x_{m+1}, u_{m+1}) - f(x_{m+1}, u_{m+1}^{(n-1)})]$$

- 于是

$$|u_{m+1} - u_{m+1}^{(n)}| \le \frac{hL}{2}|u_{m+1} - u_{m+1}^{(n-1)}| \le (\frac{hL}{2})^n|u_{m+1} - u_{m+1}^{(0)}|$$

其中L是$f(x, u)$关于u的Lipschitz常数。

- 从而当$\frac{hL}{2} < 1$迭代过程(12)收敛。

- 对于隐式法，求u_{m+1}需要解一个函数方程，通常不能求出它的精确值，而是用迭代法求其近似值，若迭代初值取得好，收敛是很快的。

- 对于梯形法，我们先用Euler法算得一个值并记为$u_{m+1}^{(0)}$，把它作为迭代初值，然后利用梯形迭代公式(11)进行迭代,具体算法如下：

$$\begin{cases} u_{m+1}^{(0)} = u_m + hf(x_m, u_m), \\ u_{m+1}^{(n)} = u_m + \frac{h}{2}[f(x_m, u_m) + f(x_{m+1}, u_{m+1}^{(n-1)})], \quad n = 1, 2, \cdots . \end{cases}, \tag{12}$$

- 分析迭代过程的收敛性，用式(11)减去上式，

$$u_{m+1} - u_{m+1}^{(n)} = \frac{h}{2}[f(x_{m+1}, u_{m+1}) - f(x_{m+1}, u_{m+1}^{(n-1)})]$$

- 于是

$$|u_{m+1} - u_{m+1}^{(n)}| \le \frac{hL}{2}|u_{m+1} - u_{m+1}^{(n-1)}| \le (\frac{hL}{2})^n|u_{m+1} - u_{m+1}^{(0)}|$$

其中L是$f(x, u)$关于u的Lipschitz常数。

- 从而当$\frac{hL}{2} < 1$迭代过程(12)收敛。

- 从式(12)看到，每迭代一次需要重新计算一次函数f的值，当f比较复杂时，计算量比较大，另一方面,由于$u_{m+1}^{(0)}$是用Euler法计算得到的值，相信它是一个好的迭代值。只要迭代一两次就够了。

- 从式(12)看到，每迭代一次需要重新计算一次函数f的值，当f比较复杂时，计算量比较大，另一方面,由于$u_{m+1}^{(0)}$是用Euler法计算得到的值，相信它是一个好的迭代值。只要迭代一两次就够了。
- 如果只迭代一次，我们就得到下面的算法：

$$\begin{aligned} &P: \bar{u}_{m+1} = u_m + hf(x_m, u_m), \\ &C: u_{m+1} = u_m + \frac{h}{2}[f(x_m, u_m) + f(x_{m+1}, \bar{u}_{m+1})] \end{aligned} \tag{14}$$

$\bar{u}_{m+1}$称为预测值,u_{m+1}称为校正值，这种算法称为预测一校正法

- 从式(12)看到，每迭代一次需要重新计算一次函数f的值，当f比较复杂时，计算量比较大，另一方面,由于$u_{m+1}^{(0)}$是用Euler法计算得到的值，相信它是一个好的迭代值。只要迭代一两次就够了。
- 如果只迭代一次，我们就得到下面的算法：

$$\begin{aligned} &P:\bar{u}_{m+1}=u_m+hf(x_m,u_m), \\ &C:u_{m+1}=u_m+\tfrac{h}{2}[f(x_m,u_m)+f(x_{m+1},\bar{u}_{m+1})] \end{aligned} \tag{14}$$

$\bar{u}_{m+1}$称为预测值,u_{m+1}称为校正值，这种算法称为预测－校正法

- 若将(14)写成一个等式，则

$$u_{m+1}=u_m+\frac{h}{2}[f(x_m,u_m)+f(x_{m+1},u_m+hf(x_m,u_m))]$$

它称为改进的Euler法，是显式方法，是二阶的。

作业：
1、证明梯形法是二阶方法
2、对于初值问题

$$\begin{cases} u' = u - \frac{2x}{u}, & 0 < x \le 1 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

分别写出Euler法、向后Euler法和梯形法的近似解的u_m的表达形式