三、常系数线性微分方程组

3.1 常系数线性齐次方程组

$$\underline{y}' = A\underline{y} \qquad (3.1)$$

其中 A 是 n 阶实常数矩阵。

找形如 $e^{\lambda x}\underline{h}$ 的非零解，这里数 λ 和 n 维向量 $\underline{h}$ 是待定的

$$A\underline{h} = \lambda\underline{h}$$

$\underline{y} = e^{\lambda x}\underline{h}$ 是方程组（3.1）的解当且仅当 λ 是矩阵 A 的特征值，$\underline{h}$ 是相应的特征向量.。

$\det(A - \lambda I) = 0$ 特征方程

上页 下页 返回

两种求齐次方程基本解组的方法：

1. 特征向量法：

记 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值，如果 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\underline{h}_1,\underline{h}_2,\cdots,\underline{h}_n$（这里 $\underline{h}_i$ 是对应于 λ_i 的特征向量），则

$$e^{\lambda_1 x}\underline{h}_1,e^{\lambda_2 x}\underline{h}_2,\cdots,e^{\lambda_n x}\underline{h}_n \qquad (3.2)$$

是方程（3.1）的基本解组，

矩阵： $B(x)=\left[e^{\lambda_1 x}\underline{h}_1,e^{\lambda_2 x}\underline{h}_2,\cdots,e^{\lambda_n x}\underline{h}_n\right]$

是方程组（3.1）的基本解矩阵

$\underline{y}=B(x)\underline{c}$ 是方程组（3.1）的通解。

上页 下页 返回

若 λ 是 A 的一个复特征值，$\underline{h}$ 是相应的复特征向量，记 $\underline{z} = e^{\lambda x}\underline{h} = \underline{u}(x) + i\underline{v}(x)$

则 $\underline{z}$ 和 $\bar{\underline{z}}$ 都是方程组（3.8）的解向量。

（3.1）的两个线性无关的实解向量

$$\underline{u}(x) = \frac{1}{2}(\underline{z} + \bar{\underline{z}}),$$ 实部

$$\underline{v}(x) = \frac{1}{2i}(\underline{z} - \bar{\underline{z}}),$$ 虚部

例 1：解方程组

$$\underline{y}' = \begin{bmatrix} -3 & 48 & -28 \\ -4 & 40 & -22 \\ -6 & 57 & -31 \end{bmatrix} \underline{y}$$

解：特征方程是

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 48 & -28 \\ -4 & 40-\lambda & -22 \\ -6 & 57 & -31-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

特征值是 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$，

上页 下页 返回

对应的特征向量分别是：

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

三个特征向量是线性无关的

方程的通解是：

$$\underline{y} = c_1 e^{x} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{3x} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

例 2：解方程组

$$\underline{y}' = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \underline{y}$$

解：特征方程是 $\begin{vmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (6+\lambda)^2 + 1 = 0.$

特征值是 $\lambda_1 = -6+i, \lambda_2 = -6-i$，

特征向量分别是 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix}$。

$$e^{(-6+i)x}\begin{bmatrix}1\\1+i\end{bmatrix}=e^{-6x}\left(\begin{bmatrix}\cos x\\\cos x-\sin x\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}\sin x\\\cos x+\sin x\end{bmatrix}\right)$$

方程组的基本解组是

$$e^{-6x}\begin{bmatrix}\cos x\\\cos x-\sin x\end{bmatrix},e^{-6x}\begin{bmatrix}\sin x\\\cos x+\sin x\end{bmatrix}$$

通解是:

$$\underline{y}=e^{-6x}\left(c_1\begin{bmatrix}\cos x\\\cos x-\sin x\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}\sin x\\\cos x+\sin x\end{bmatrix}\right)$$

2. 待定系数法

先假设方程组解的形式，再将其代入方程组求出其中的待定系数

（1）、如果 λ 是矩阵 A 的 k 重实特征值 $(k \geq 1)$，则方程组（3.1）有如下形式的解：

$$e^{\lambda x}(\underline{h_0} + x\underline{h_1} + \cdots + x^{k-1}\underline{h_{k-1}})$$

其中 $\underline{h_j}(j = 0,1,\cdots,k-1)$ 实待定的向量。

将其代入方程组（3.1）得到：

$$\lambda e^{\lambda x}(\underline{h_0} + x\underline{h_1} + \cdots + x^{k-1}\underline{h_{k-1}}) + e^{\lambda x}(\underline{h_1} + \cdots + (k-1)x^{k-2}\underline{h_{k-1}})$$

$$= Ae^{\lambda x}(\underline{h_0} + x\underline{h_1} + \cdots + x^{k-1}\underline{h_{k-1}})$$

上页 下页 返回

$$(\lambda \underline{h}_0 + \underline{h}_1) + x(\lambda \underline{h}_1 + 2\underline{h}_2) + \cdots + x^{k-2}(\lambda \underline{h}_{k-2} + (k-1)\underline{h}_{k-1}) + x^{k-1}\lambda \underline{h}_{k-1}$$

$$= A\underline{h}_0 + xA\underline{h}_1 + \cdots + x^{k-1}A\underline{h}_{k-1}$$

利用 x^i 前的系数相等，得到

$$\lambda \underline{h}_0 + \underline{h}_1 = A\underline{h}_0$$

$$\lambda \underline{h}_1 + 2\underline{h}_2 = A\underline{h}_1$$

$$\cdots\cdots$$

$$\lambda \underline{h}_{k-2} + (k-1)\underline{h}_{k-1} = A\underline{h}_{k-2}$$

$$\lambda \underline{h}_{k-1} = A\underline{h}_{k-1}.$$

上页 下页 返回

$$\underline{h_1} = (A - \lambda I)\underline{h_0}$$

$$\underline{h_2} = \frac{1}{2}(A - \lambda I)\underline{h_1} = \frac{1}{2!}(A - \lambda I)^2 \underline{h_0}$$

……

$$\underline{h_{k-1}} = \frac{1}{(k-1)!}(A - \lambda I)^{k-1} \underline{h_0}$$

$$(A - \lambda I)^k \underline{h_0} = 0.$$

（2）、如果$\alpha \pm i\beta$ 是矩阵 A 的k 重复特征值$(k \geq 1)$，则方程组（3.1）有如下形式的解:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x(\underline{u_0} + x\underline{u_1} + \cdots + x^{k-1}\underline{u_{k-1}})$$

$$+ e^{\alpha x} \sin \beta x(\underline{v_0} + x\underline{v_1} + \cdots + x^{k-1}\underline{v_{k-1}})$$

其中$\underline{u_j}$ 和$\underline{v_j}(j = 0,1,\cdots.k-1)$ 实待定的向量。

例 1：解方程组 $\underline{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \underline{y}$

解：特征方程是

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$$

对 $\lambda = -1$，设 $\underline{y} = e^{-x} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ 是方程组的解，代入方程组，

$$\begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + 2a_2 \\ 4a_1 + 3a_2 \end{bmatrix}$$

解出：$a_2 = -a_1$，而 a_1 是任意常数，

于是 $\underline{y} = e^{-x} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是方程组的解

对 $\lambda_2=5$，设 $\underline{y}=e^{5x}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$ 是方程组的解，代入方程组，

$$\begin{bmatrix}5a_1\\5a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+2a_2\\4a_1+3a_2\end{bmatrix}$$

得 $a_2=2a_1$，a_1 是任意常数，于是 $\underline{y}=e^{5x}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 是方程组的解。

方程组的通解是：

$$\underline{y}=c_1e^{-x}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+c_2e^{5x}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

例 2：求方程组 $\underline{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{y}$ 的基本解组

解：特征方程是

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0$$

特征值是 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

对 $\lambda_1 = 0$，设 $\underline{y} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ 是方程组的解，代入方程组，

$$0 = \begin{bmatrix} a_2 + a_3 \\ a_1 + a_2 - a_3 \\ a_2 + a_3 \end{bmatrix}$$

得： $a_2 = -\frac{1}{2}a_1, a_3 = \frac{1}{2}a_1$

其中 a_1 是任意常数,，于是 $\underline{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是方程组的解

对$\lambda_2=\lambda_3=1$，设$\underline{y}=e^x\left(\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}+x\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}\right)$是方程的解,

将其代入方程组得

$$\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{bmatrix}+x\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2+a_3\\a_1+a_2-a_3\\a_2+a_3\end{bmatrix}+x\begin{bmatrix}b_2+b_3\\b_1+b_2-b_3\\b_2+b_3\end{bmatrix}$$

比较上式两边x项的系数得$b_2=0, b_3=b_1$

再比较两边常数项，得$a_2=b_1, a_3=a_1$

上页 下页 返回

于是

$$\underline{y} = e^{x}\left(a_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + b_1\left[\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + xb_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right]\right)$$ 是方程组的解

方程组的基本解组是

$$\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}, e^{x}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, e^{x}\begin{bmatrix}x\\1\\x\end{bmatrix}。$$

例 3：解方程组初值问题

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ y_1(0) = -2, y_2(0) = 1 \end{cases}$$

解：特征方程是 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

特征值是：$-1 \pm i$。

设 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = e^{-x} \left(\cos x \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \sin x \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right)$ 是方程组的解

把它代入方程组得到

$$a_2=-\frac{2}{5}a_1+\frac{1}{5}b_1,b_2=-\frac{1}{5}a_1-\frac{2}{5}b_1$$

方程组的通解是:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=e^{-x}\left(a_1\begin{bmatrix} \cos x \\ \frac{2}{5}\cos x-\frac{1}{5}\sin x \end{bmatrix}+b_1\begin{bmatrix} \sin x \\ \frac{1}{5}\cos x-\frac{2}{5}\sin x \end{bmatrix}\right)$$

从初始条件得 $a_1=-2,b_1=11$，从而初值问题的解是:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=e^{-x}\begin{bmatrix} -2\cos x+\sin x \\ \cos x \end{bmatrix}$$

3.2 常系数线性非齐次方程组

$$\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{f}(x) \qquad （3.3）$$

其中 A 是 n 阶实常数矩阵。

方法一：

（3.3）的通解＝（3.1）的通解+（3.3）的特解

特解 $\underline{y}_p(x) = B(x)\int B^{-1}(x) f(x)dx$

方法二：常数变易公式

$$\underline{y} = B(x)(\underline{c} + \int B^{-1}(x)\underline{f}(x)dx)$$

例 1：求非齐次方程组

$$\underline{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \underline{y} + \begin{bmatrix} e^{x} \\ 1 \end{bmatrix}$$ 的一个特解

解：特征方程是

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$$

对 $\lambda = -1$，设 $\underline{y} = e^{-x}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ 是方程组的解，代入方程组，

解出：$a_2 = -a_1$，而 a_1 是任意常数，

于是 $\underline{y} = e^{-x}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是方程组的解

对 $\lambda_2 = 5$，设 $\underline{y} = e^{5x}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ 是方程组的解，代入方程组，

得 $a_2 = 2a_1$， a_1 是任意常数，于是 $\underline{y} = e^{5x}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 是方程组的解。

方程组的通解是： $\underline{y} = c_1 e^{-x}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{5x}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

齐次方程组的基本解矩阵是 $B(x) = \begin{bmatrix} e^{-x} & e^{5x} \\ -e^{-x} & 2e^{5x} \end{bmatrix}$

$$B^{-1}(x)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2e^{x} & -e^{x}\\ e^{-5x} & e^{-5x}\end{bmatrix}$$

特解:

$$\underline{y_p}(x)=B(x)\int B^{-1}(x)\underline{f}(x)dx$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}e^{x}-\frac{2}{5}\\ -\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

例 2：解方程组 $\underline{y}' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \underline{y} + \begin{bmatrix} \sin x \\ -2\cos x \end{bmatrix}$

解：特征方程是 $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

特征值是 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$，对应的特征向量是 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

下面用待定系数法求方程组的特解

由于 i 不是特征值，可以设特解为

$$\underline{y_p} = \cos x \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \sin x \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

将它代入方程组并比较 x 同次幂的系数，得到

$$a_1 = 1, a_2 = 1, b_1 = -2, b_2 = -2$$

于是方程组的通解是：

$$\underline{y} = c_1 e^{x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos x - 2\sin x \\ \cos x - 2\sin x \end{bmatrix}$$