2.19、(2) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A\cosh x, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = k, & t \geq 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$

解：令$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$,为了使$v(x,t)$满足齐次方程齐次边界条件，$w(x)$满足

$$\begin{cases} a^2 w''(x) + a\cosh x = 0 \\ w(0) = 0, w(l) = k \end{cases}$$

可求出

$$w(x) = -\frac{A}{a^2}\cosh x + c_1 x + c_2, c_1 = (k - \frac{A}{a^2} + \frac{A}{a^2}\cosh l)/l, c_2 = \frac{A}{a^2}$$

$v(x,t)$满足以下定解问题

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = -w(x), v_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

利用特征展开法，特征函数为$\{\sin \frac{n\pi}{l}x\}_1^\infty$,将$v(x,t),w(x)$按特征函数展开

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,\ w(x)=\sum_{n=1}^{\infty}w_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$w_n=\frac{2}{l}\int_0^l w(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$=\frac{2c_2}{n\pi}[1-(-1)^n]-\frac{2c_1 l}{n\pi}(-1)^n-\frac{A}{a^2}\frac{2n\pi}{[(n\pi)^2+l^2]}[1-(-1)^n\cosh l]$$

带入方程和初始条件

$$v_n''(t)+(\frac{an\pi}{l})^2 v_n(t)=0,\ v_n(0)=-w_n$$

解出$v_n(t)=-w_n\cos\frac{an\pi}{l}t$,所以原定解问题的解

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}-w_n\cos\frac{an\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x$$

这次作业：

- 对于非齐次边界条件的处理方法一般是通过函数变换，转换为齐次边界条件
- 对于变换，做作业的时候可以参考书上或者ppt上的结论，但是考试的时候这些结论是不会给出的，希望大家还是记住思路，稍微推导一下即可
- 对于方程右端的非齐次项和边界条件都与t无关时，可新选择适当的变换把方程和边界条件同时齐次化，这时可转化为齐次方程齐次边界条件的定解问题，不仅可以利用分离变量法还可以利用特征展开法进行求解，在利用特征展开法时求解时，求解的是齐次常微分方程，比较容易求解
- 这次的作业题是属于我们介绍的特殊情况，好多同学，直接利用书上的结论，直接给出了$w(x)$的表达形式，然后利用特征展开法求解齐次边界条件定解问题。也可以试试我们上面介绍的，把方程和边界条件同时齐次化