机械波产生的条件：波源(振源)、弹性媒质

——通过弹性形变将振动状态传播出去

机械波种类：横波、纵波

平面简谐波的周期性

波长 λ ——振动相位相同的两个相邻点之间的距离。或振动在一个周期中传播的距离。

波的周期 T ——波传过一个波长的时间，或一个完整的波通过波线上某一点所需要的时间。

$$\nu = \frac{1}{T}$$

波动的频率=介质中质点的振动频率。

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \qquad \frac{2\pi}{T} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

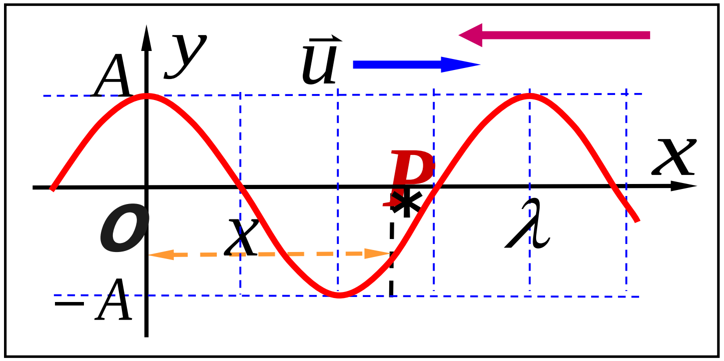
波速 *u* —相速 $\quad u = \sqrt{\dfrac{\text{弹性模量}}{\text{密度}}} \qquad u = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda\nu$

平面简谐波的波函数

波是振动状态的传播，后一点重复前一点

——相位比较法

$$y_o = A\cos(\omega t + \varphi)$$



$$y(x,t) = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

$$y(x,t) = A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) + \varphi]$$

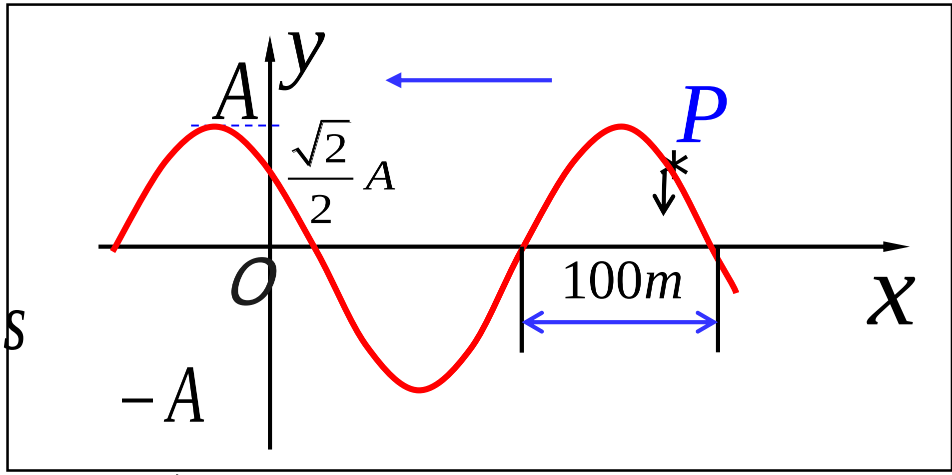
$x=x_p$, p点的振动方程

$t=t_1$, 质点偏移平衡位置的情况，即波形图

例、如图所示为一平面简谐波在t=0时刻的波形图，设此简谐波的频率为250Hz，且此时质点P的运动方向向下，求

（1）该波的波函数；

（2）在距原点O为100处质点的振动方程与振动速度表达式。



$$\omega = 2\pi\nu = 500\pi \qquad \lambda = 200m$$

$$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu = 200 \times 250 = 50000m/s$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \qquad y_0 = A\cos\left(500\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = A\cos\left(500\pi(t + \frac{x}{50000}) + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y_{100} = A\cos\left(500\pi(t + \frac{100}{50000}) + \frac{\pi}{4}\right) = A\cos\left(500\pi\, t + \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$v = \frac{dy_{100}}{dt} = -A500\pi\sin\left(500\pi t + \frac{5\pi}{4}\right)$$

问题（1）在波线上哪些点的振动状态与100m处一致?

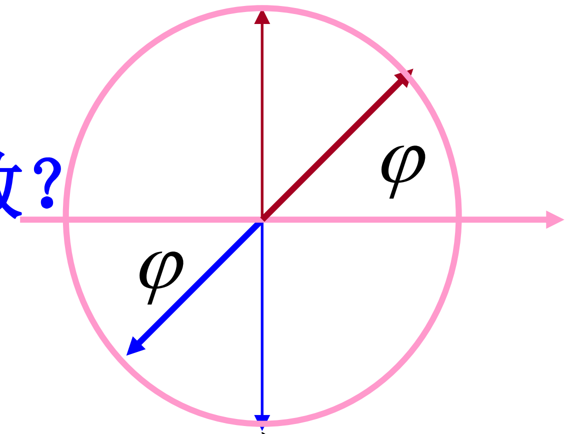
（2）哪些点振动速度与100m 大小相等而方向相反?

$$\Delta\varphi = \left(500\pi(t + \frac{x}{50000}) + \frac{\pi}{4}\right) - \left(500\pi t + \frac{5\pi}{4}\right) = 2k\pi$$

$$x = (2k+1)100 \qquad \mathrm{k} = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\Delta\varphi=\left(500\pi(t+\frac{x}{50000})+\frac{\pi}{4}\right)-\left(500\pi t+\frac{5\pi}{4}\right)=(2k+1)\pi$$

$x=200k \qquad \mathrm{k}=\pm1,\pm2,\cdots$



（3）若 t_1=0.001s时的波形图，则波函数？

令 $t=t'+t_1 \Rightarrow t'=t-t_1$

$$y_0=A\cos\left(500\pi t'+\frac{\pi}{4}\right)=A\cos\left(500\pi(t-t_1)+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=A\cos\left(500\pi t-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y=A\cos\left(500\pi(t+\frac{x}{50000})-\frac{\pi}{4}\right)$$

1、机械波的能量

$$\Delta W_p=\frac{1}{2}k(\Delta y)^2=\frac{1}{2}ES\Delta x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

$$\Delta W_k=\frac{1}{2}\Delta m\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2=\frac{1}{2}\rho\Delta VA^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})]$$

体元的总机械能：

$$\Delta W=\Delta W_k+\Delta W_p=\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})]$$

机械波的能量特点：

（1）任一时刻、任一质元　　$\Delta W_K=\Delta W_P$

（2）$\Delta W_{总}=\Delta W(t)$

$0\rightarrow\Delta W_{max}$　　　$\Delta W_{max}\rightarrow 0$

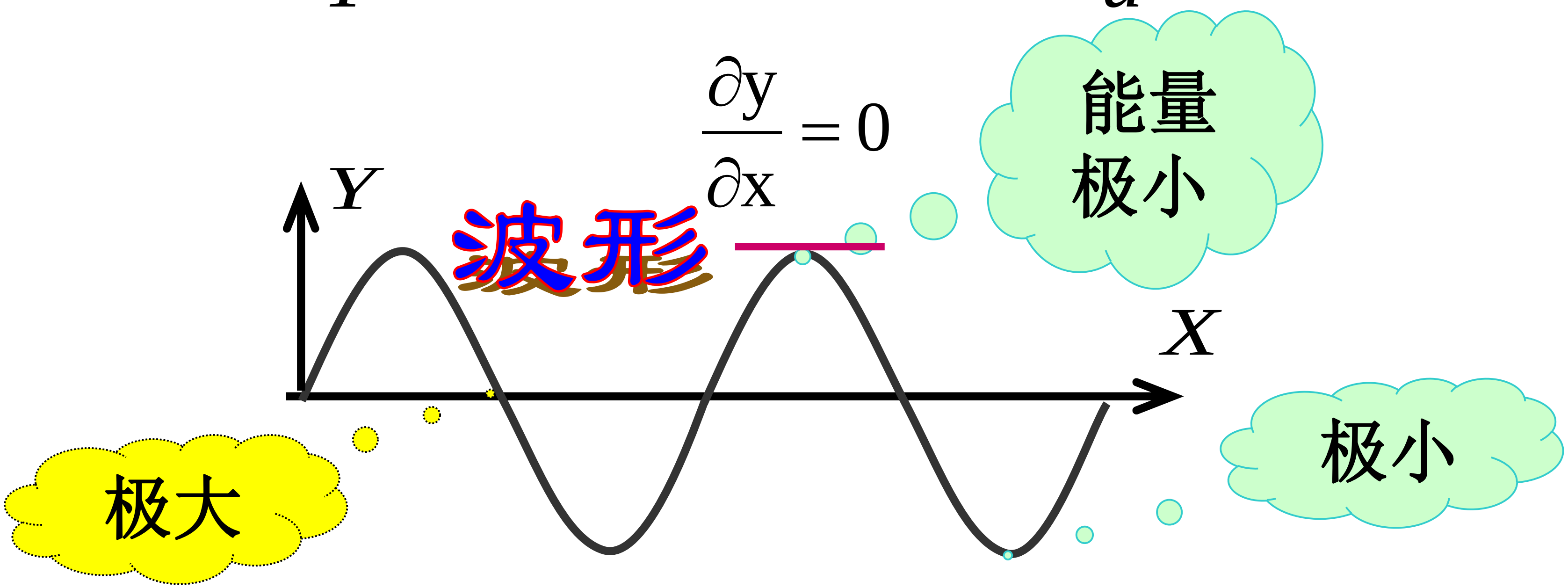
质元而言：机械能不守恒，波动是能量传递的一种方式

能量密度＝单位体积内的总机械能

$$\omega = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \rho\omega^2 A^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})]$$

平均能量密度（对时间平均)

$$\overline{\omega} = \frac{1}{T}\int_0^T \rho A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})]dt = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

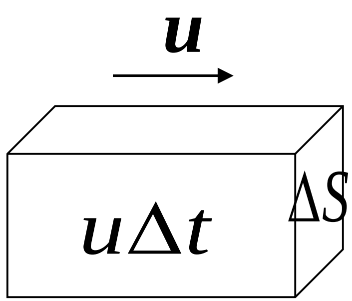


2、能流、 能流密度 (energy flux density)

能流： 单位时间内垂直通过某一面积的能量

平均能流 $\overline{P}$ ——一个周期内能流的平均值。

若Δt 有ΔW的平均能量通过ΔS



$$\Delta W = u \cdot \Delta t \cdot \Delta S \cdot \overline{\omega}$$

$$\overline{P} = u \cdot \Delta S \cdot \overline{\omega} = \mathrm{u}\Delta \mathrm{S}\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

量纲分析： $\mathrm{ms}^{-1}\mathrm{m}^{2}\mathrm{Jm}^{-3} = \mathrm{Js}^{-1}$

$\Rightarrow$ 平均能流=功率

能流密度（波的强度）——单位时间内通过垂直于波速方向的单位面积的平均能量

$$\vec{I}=\frac{1}{2}\rho A^{2}\omega^{2}\vec{u}$$

能流密度是矢量，其方向与波速方向相同。

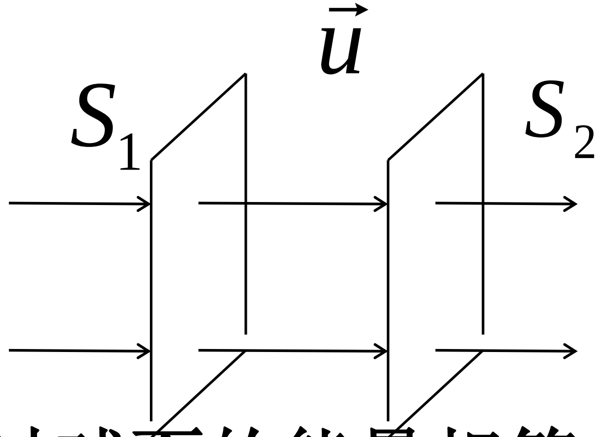
- 平面波和球面波的振幅

在均匀不吸收能量的媒质中传播的平面波在行进方向上振幅不变。而球面波的振幅与离波源的距离成反比。

(1)平面波 设 $S_1=S_2$, 则单位时间内通过S的能量相等

$$\frac{1}{2}\rho u\omega^2 A_1^2 S = \frac{1}{2}\rho u\omega^2 A_2^2 S$$

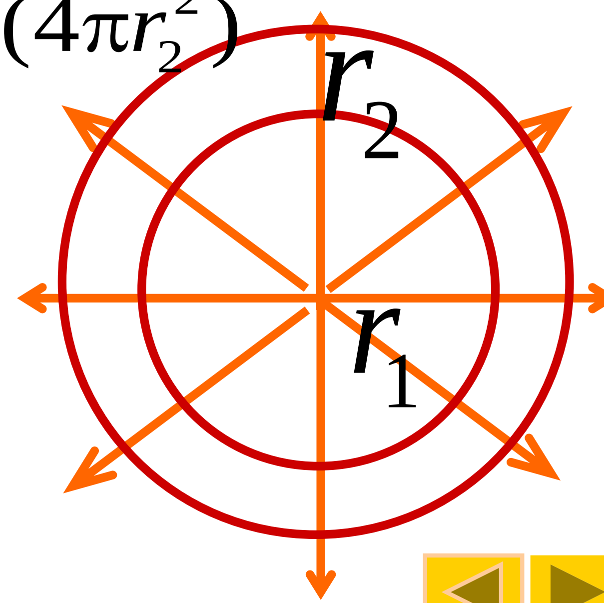
$$\Rightarrow A_1 = A_2$$



(2)球面波 设S_1、S_2 , 则单位时间内通过球面的能量相等

$$\frac{1}{2}\rho u\omega^2 A_1^2(4\pi r_1^2) = \frac{1}{2}\rho u\omega^2 A_2^2(4\pi r_2^2)$$

$$\therefore A_1 r_1 = A_2 r_2$$



球面简谐波的波函数：

$$y = \frac{A}{r}\cos\omega(t - \frac{r}{u})$$

总结：

平面简谐波的能量密度：

$$\Delta\omega = \Delta\omega_k + \Delta\omega_p = \rho\omega^2 A^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u})]$$

波的平均能量密度： $\overline{\omega} = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2$

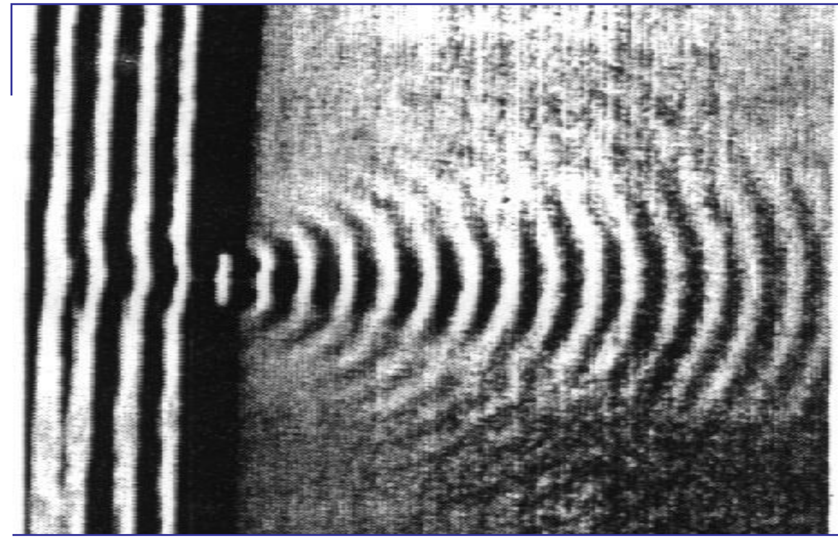
平均能流（功率）： $\overline{P} = u \cdot \Delta S \cdot \overline{\omega}$

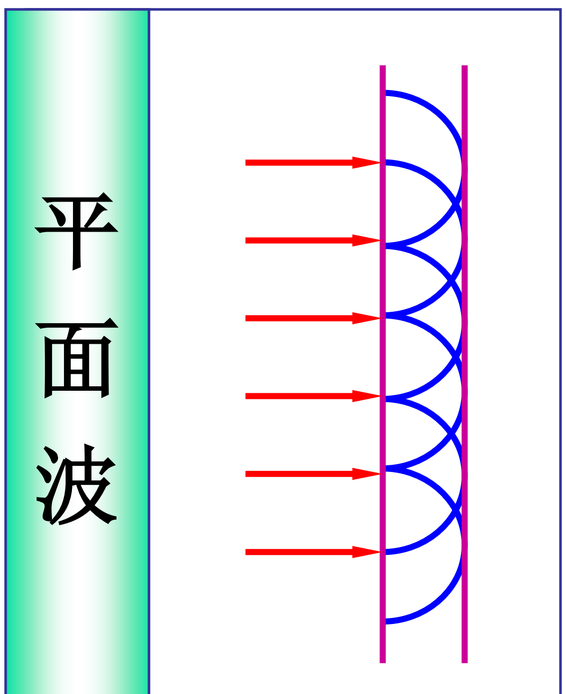
平均能流密度（波的强度）： $I = u\overline{\omega} = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 u$

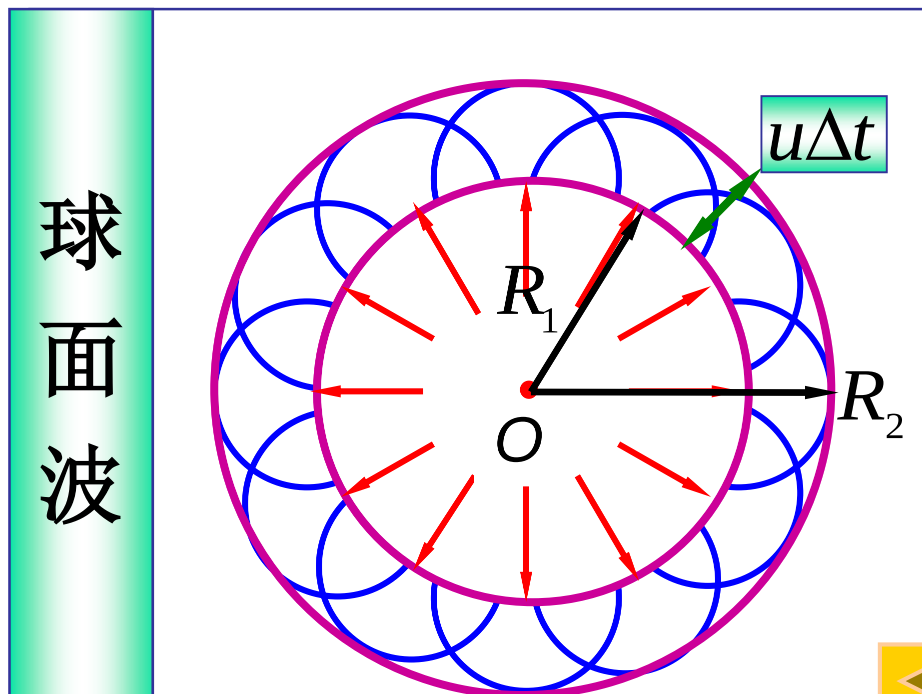
单位时间、通过单位面积的能量 （**W/m²**）

六、惠更斯原理（1690年）

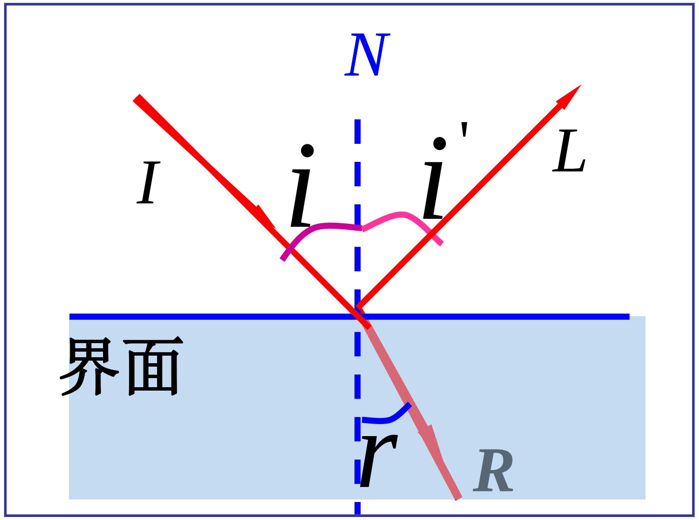
介质中波动传播到的各点都可以看作是发射子波的波源，而在其后的任意时刻，这些子波的包络就是新的波前.







波的反射和折射：



反射定律

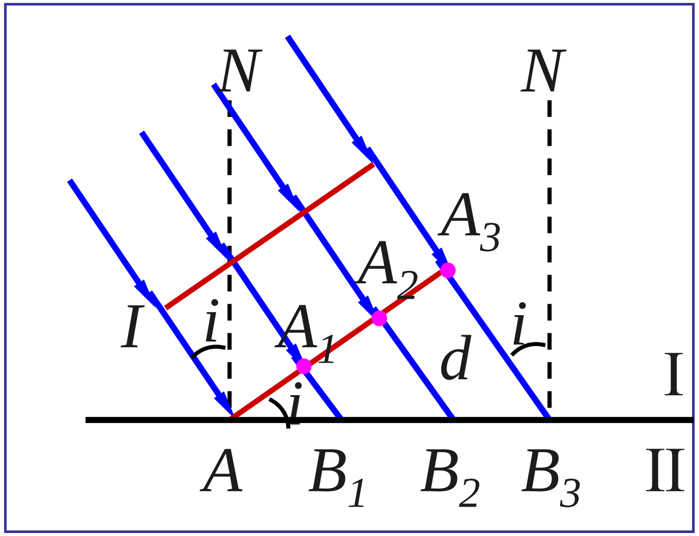
1）反射线、入射线和界面的法线在同一平面内；

2）$i = i'$

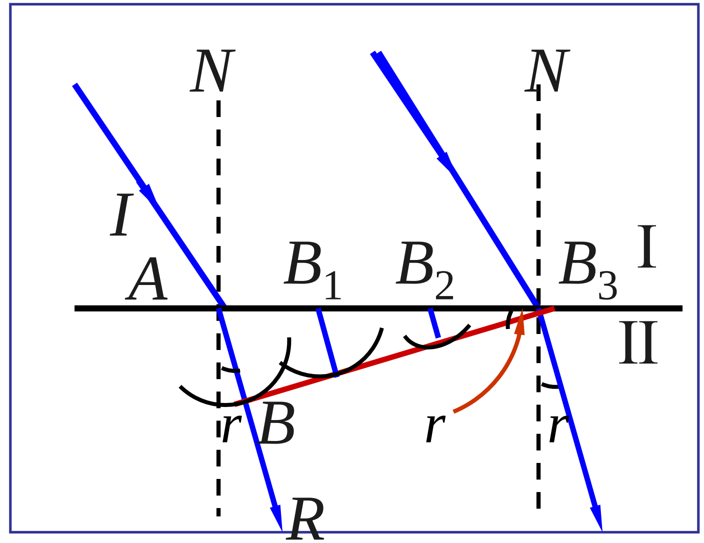
波的折射

1）折射线、入射线和界面的法线在同一平面内；

2）$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u_1}{u_2}.$$



时刻 t



时刻 $t+\triangle t$

$$\sin\gamma = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}_3}$$

$$\sin i = \frac{A_3B_3}{AB_3}$$

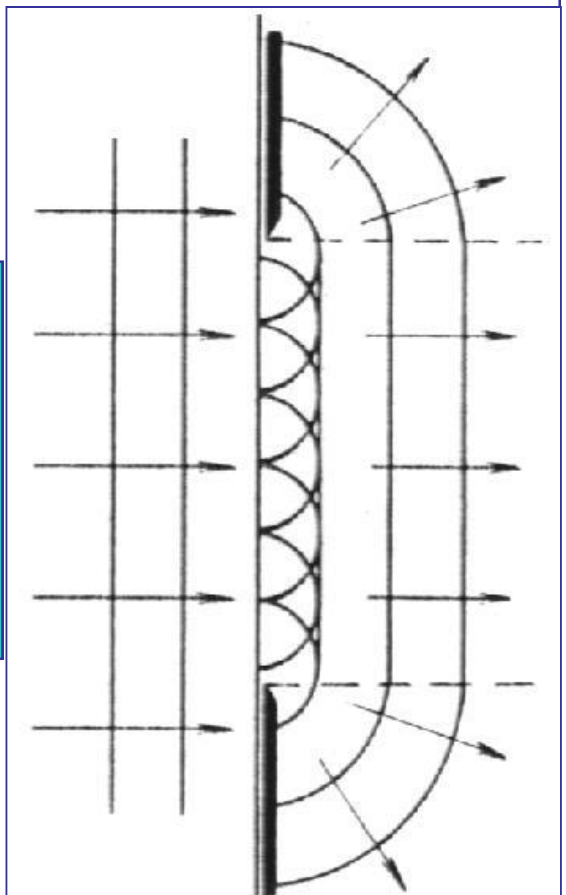
$$AB = u_2\Delta t$$

$$\mathrm{A_3B_3 = u_1\Delta t}$$

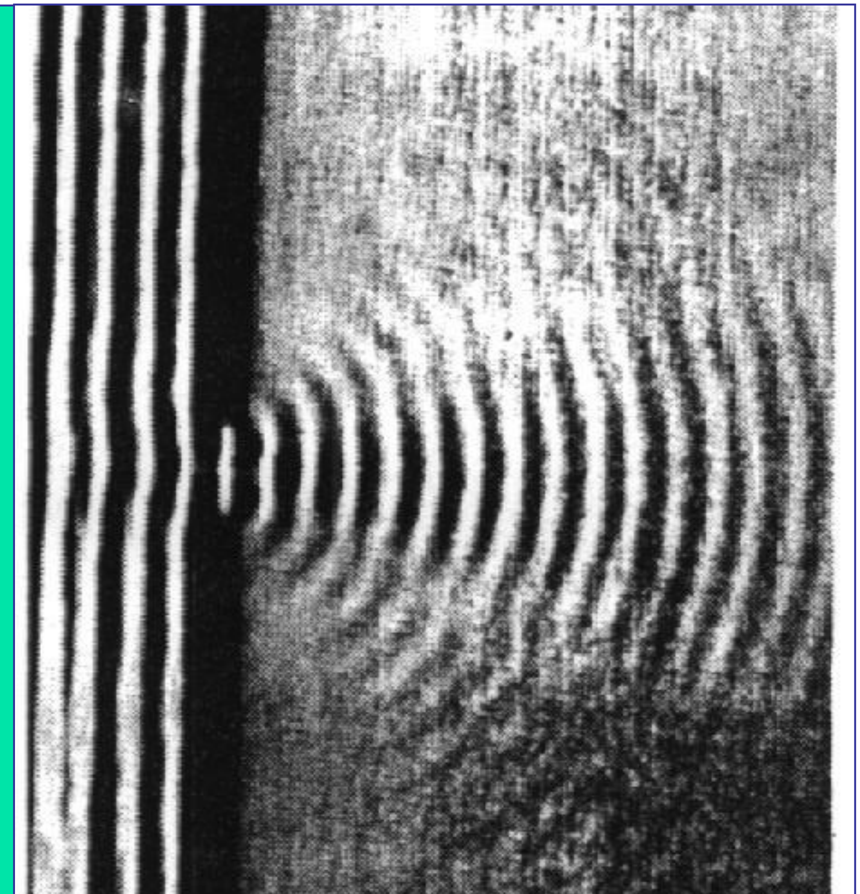
$$\therefore \quad \frac{\sin \mathrm{i}}{\sin \mathrm{r}} = \frac{\mathrm{A_3B_3}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{u_1}}{\mathrm{u_2}}$$

波的衍射

波在传播过程中遇到障碍物时，能绕过障碍物的边缘，在障碍物的阴影区内继续传播.



波的衍射



水波通过狭缝后的衍射

波函数的等价形式:

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

$$\begin{cases} u=\dfrac{\lambda}{T} \\ \omega=2\pi\nu=\dfrac{2\pi}{T} \end{cases}$$

$$y=A\cos[2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

$$=A\cos\left[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi\right]$$

$$=A\cos[\omega t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\varphi]$$

若定义 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ 为**波数**

$$y(x,t)=A\cos[\omega t-kx+\varphi]$$

$$y(x,t) = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u})]$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega\sin[\omega(t - \frac{x}{u})]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2\cos[\omega(t - \frac{x}{u})] = -\omega^2 y$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A\frac{\omega}{u}\sin[\omega(t - \frac{x}{u})]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{u^2}A\cos[\omega(t - \frac{x}{u})] = -\frac{\omega^2}{u^2}y$$

波动的微分方程（波动方程）：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2}+\omega^2 y=0$$

振动方程

若y_1、y_2分别是它的解，则y_1+y_2也是它的解.

——波遵从叠加原理

实例：探照灯的交叉；
光的干涉；
脉冲波的叠加等；

七、波的干涉 (interference)

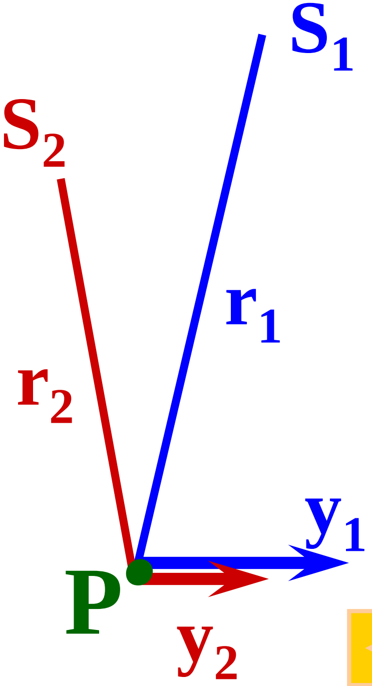
两个基本的原理：

（1）波的独立传播原理（电磁波例子）

——若有几列波同时在介质中传播，则它们各自将以原有的振幅、频率和波长独立传播。

（2）波的叠加原理（交响乐例子）

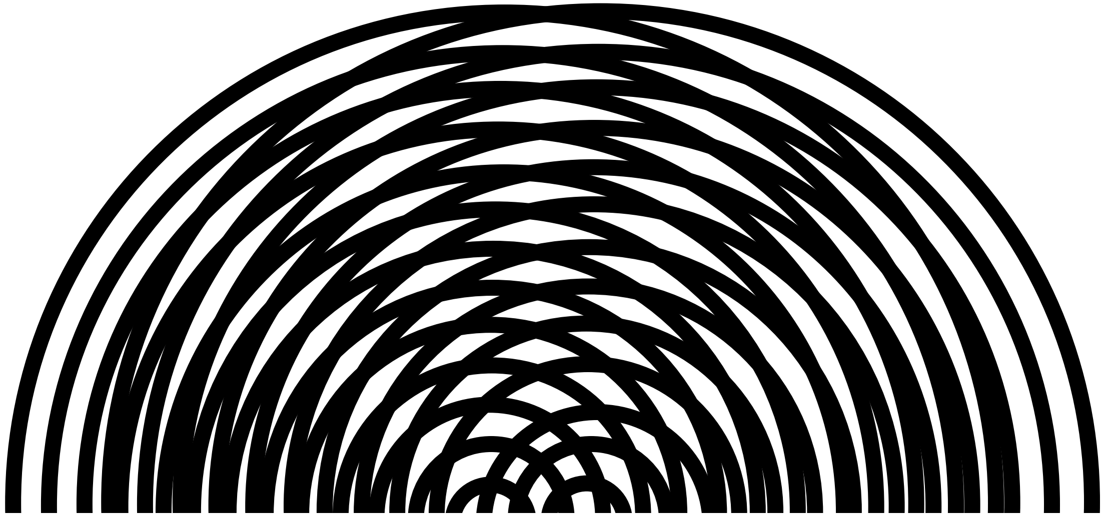
——在几列波相遇处，质元的位移等于各列波单独传播时在该处引起的位移的矢量和。



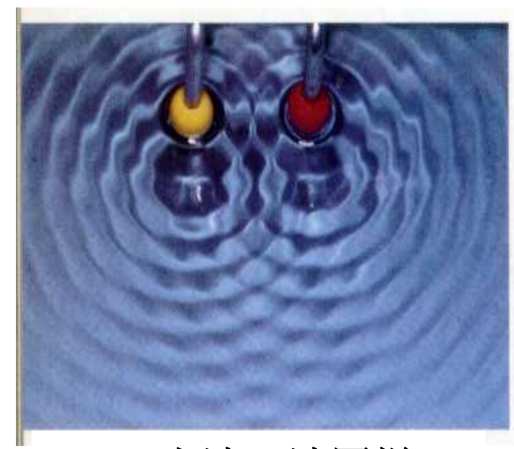
简谐波的叠加 = 简谐振动叠加

$$I \propto A^2(t) \begin{cases} \text{强度} \\ \text{相干} \end{cases}$$

波的干涉之模拟演示



波的干涉——在媒质中某些位置的点振幅始终最大，另一些位置振幅始终最小，而其它位置，振动的强弱介乎二者之间，保持不变，形成稳定的叠加图样。



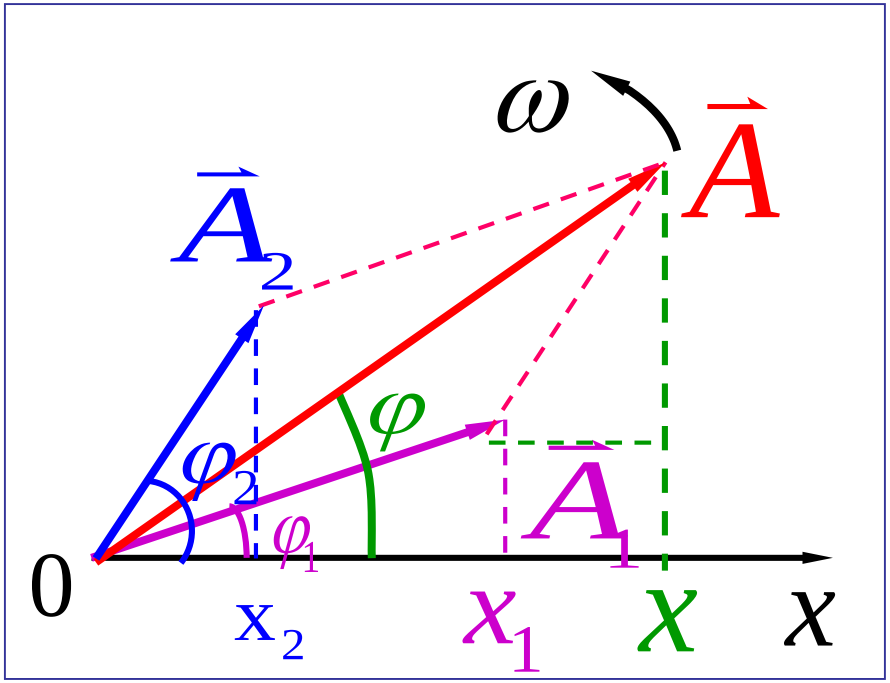
水波干涉图样

相干波源：同频率、同振动方向、相位差恒定

两个同方向同频率简谐运动的合成

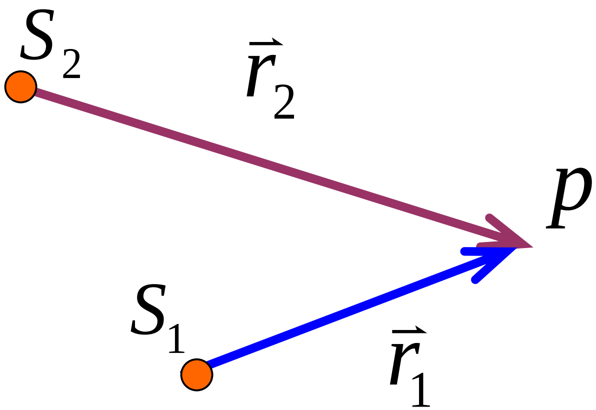
$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ &= A\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}}$$



$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$

设有两相干波源 S_1 和 S_2



波源振动表达式：

$$y_{10}(S_1,t)=A_{10}\cos(\omega t+\varphi_1)$$

$$y_{20}(S_2,t)=A_{20}\cos(\omega t+\varphi_2)$$

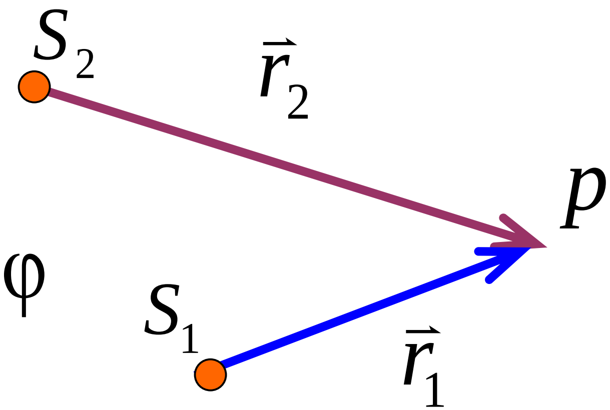
传播到 P 点引起的振动为：

$$y_1(p,t)=A_1\cos(\omega t+\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}r_1)$$

$$y_2(p,t)=A_2\cos(\omega t+\varphi_2-\frac{2\pi}{\lambda}r_2)$$

P 点两振动的位相差为： $\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$

$$\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$



合成波的强度：

$$I \propto A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$$

干涉相长（加强）的条件：

$$\Delta\varphi = \pm 2k\pi, \qquad k = 0,1,2,3,\ldots \qquad A = A_1 + A_2$$

干涉相消（减弱）的条件：

$$\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi, \qquad k = 0,1,2,\cdots \qquad A = |A_1 - A_2|$$

其他位相差 $\quad |A_1 - A_2| < A < A_1 + A_2$

例1、如图所示，三个同频率、振动方向相同（垂直纸面）的简谐波在传播过程中在O点相遇；若三个简谐波各自单独在S_1、S_2和S_3的振动方程分别为

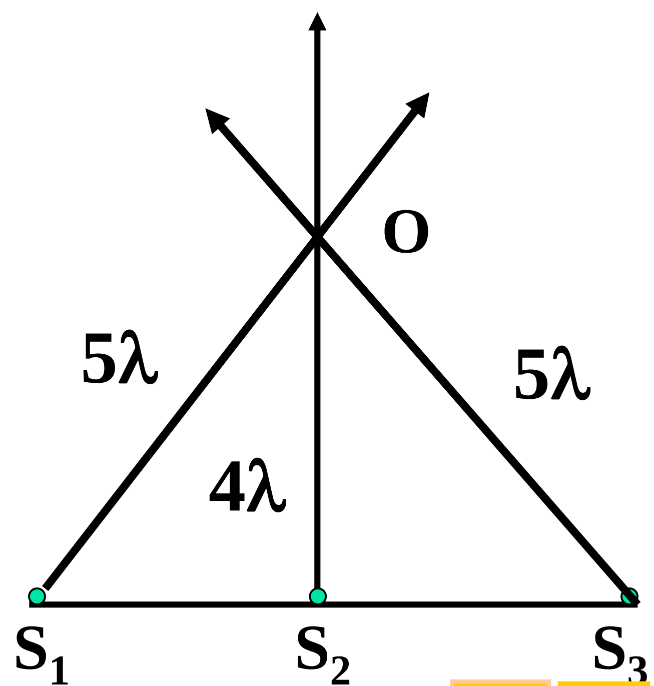
$$y_1 = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

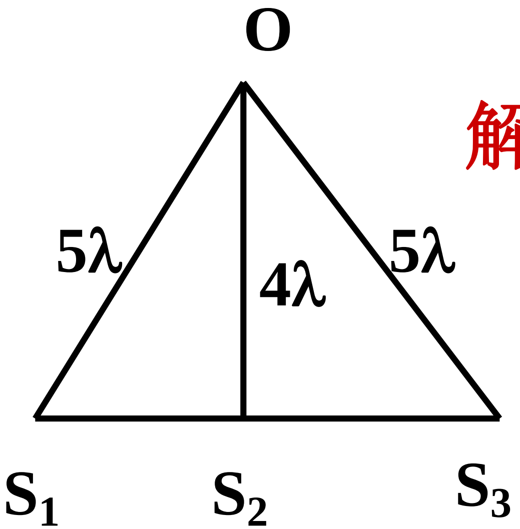
$$y_2 = A\cos(\omega t)$$

$$y_3 = 2A\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

且$S_2O = 4\lambda$，$S_1O = S_3O = 5\lambda$（λ为波长），求O点的合振动方程。

（设传播过程中各波振幅不变）

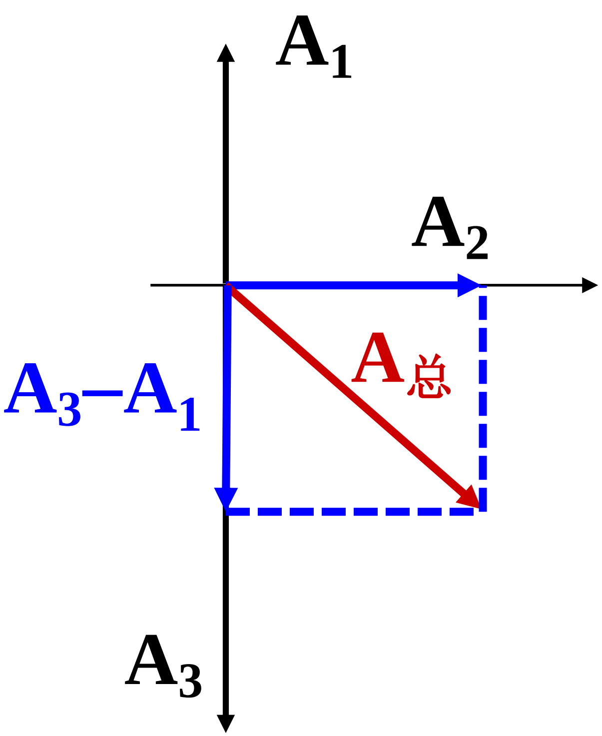




解：$$y_1 = A\cos(\omega(t-\frac{5\lambda}{u})+\frac{\pi}{2})$$

$$= A\cos(\omega t - 2\pi\frac{5\lambda}{Tu}+\frac{\pi}{2})$$

$$= A\cos(\omega t - 10\pi + \frac{\pi}{2})$$

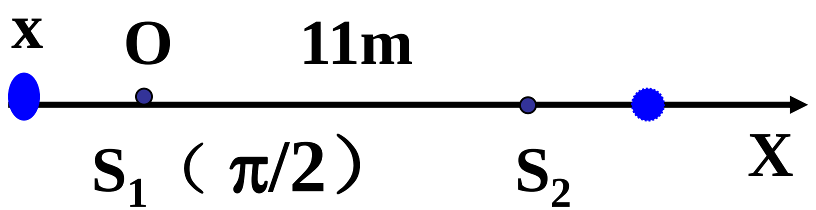


$$y_{2O} = A\cos(\omega t)$$

$$y_{3O} = 2A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y_O = \sqrt{2}A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

例2、习题8 相干波源S_1和S_2相距11m。S_1的相位比S_2的超前$\pi/2$，这两个相干波在S_1、S_2连线和延长线上传播时可看成两等幅的平面余弦波，它们的频率都等于100Hz，波速都等于400m/s。试求在S_1、S_2的连线及延长线上因干涉而静止不动的各点的位置。



$$\Delta\varphi = (2k+1)\pi$$

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = 4$$

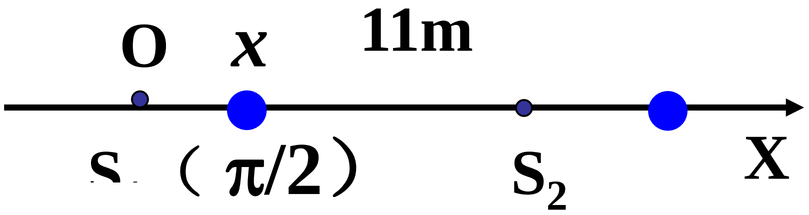
1）x 在S_1的左侧

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{4}(|x| - (|x| + 11)) = 6\pi$$ 加强

2）x在S_2的右侧

$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{4}(x-(|x|-11))=-5\pi$$ 静止

3) $0<x<11$



$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{4}(x-(11-x))$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{11}{2}\pi-\pi x=(2k+1)\pi$$

$$\Rightarrow x=-2k+5 \quad (k=0,\pm1,\pm2\cdots)$$

$$0\le x=-2k+5\le 11 \Rightarrow -3\le k\le 2$$

即x=1、3、5、7、9、11 及 x>11 的各点为干涉静止点