§1 函数极限

一、函数极限定义

定义： 设函数$y = f(x)$ 在x_0 的某个去心领域内有定义，设A是一个定数。

若对$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有$|f(x) - A| < \epsilon$，则称A 是函数$f(x)$ 在x_0 处的极限。记为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 或$f(x) \to A$ $(x \to x_0)$。若不存在上述实数A，则称函数$f(x)$ 在点x_0 处的极限不存在。

§1 函数极限

一、函数极限定义

定义： 设函数$y = f(x)$ 在x_0 的某个去心领域内有定义，设A 是一个定数。

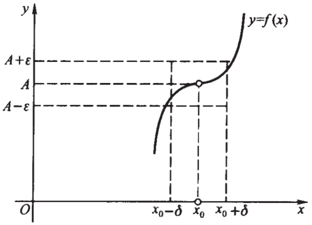
若对$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有$|f(x) - A| < \epsilon$，则称A 是函数$f(x)$ 在x_0 处的极限。记为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 或$f(x) \to A$ $(x \to x_0)$。若不存在上述实数A，则称函数$f(x)$ 在点x_0 处的极限不存在。

注1：$f(x)$ 在x 趋于x_0 是否收敛、收敛时极限是什么，完全由函数在点x_0 附近（但不包括x_0）的性质决定，因此是函数在x_0 处的局部性质。

注2：$x_n \to a$一般可省略$n \to \infty$，但$f(x) \to A(x \to a)$中$x \to a$ 一般不能省略。

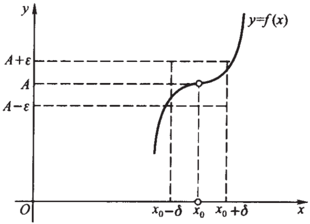
注2：$x_n \to a$一般可省略$n \to \infty$，但$f(x) \to A(x \to a)$中$x \to a$ 一般不能省略。

几何意义： 只要x 落在$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 内， 曲线$y = f(x)$ 就落在两条直线$y = A - \epsilon$ 与$y = A + \epsilon$ 之间。



注2：$x_n \to a$一般可省略$n \to \infty$，但$f(x) \to A(x \to a)$中$x \to a$ 一般不能省略。

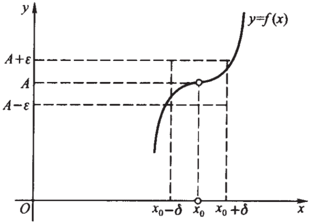
几何意义： 只要x 落在$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 内，曲线$y = f(x)$ 就落在两条直线$y = A - \epsilon$ 与$y = A + \epsilon$ 之间。



例1：证明$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$，其中$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$。

注2：$x_n \to a$一般可省略$n \to \infty$，但$f(x) \to A(x \to a)$中$x \to a$ 一般不能省略。

几何意义： 只要x 落在$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 内，曲线$y = f(x)$ 就落在两条直线$y = A - \epsilon$ 与$y = A + \epsilon$ 之间。

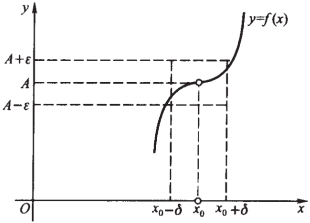


例1：证明$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$，其中$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$。

例2：证明$\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$。

注2：$x_n \to a$一般可省略$n \to \infty$，但$f(x) \to A(x \to a)$中$x \to a$ 一般不能省略。

几何意义： 只要x 落在$(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$ 内，曲线$y = f(x)$ 就落在两条直线$y = A - \epsilon$ 与$y = A + \epsilon$ 之间。



例1：证明$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$，其中$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$。

例2：证明$\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$。

例3：证明$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x(x-1)}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}$。

二、函数的极限的性质

性质1(唯一性)：设A 与B 都是函数$f(x)$ 在$x \to x_0$ 处的极限，则$A = B$。

二、函数的极限的性质

性质1(唯一性)：设A 与B 都是函数$f(x)$ 在$x \to x_0$ 处的极限，则$A = B$。

性质2(局部有界性)：设$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，则$\exists \delta > 0$，使得$f(x)$在$O(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ 中有界。

二、函数的极限的性质

性质1(唯一性)：设A 与B 都是函数$f(x)$ 在$x \to x_0$ 处的极限，则$A = B$。

性质2(局部有界性)：设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则$\exists\delta > 0$，使得$f(x)$在$O(x_0,\delta)\backslash\{x_0\}$ 中有界。

性质3(局部保序性)：若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，则$\exists\delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$ 时成立$f(x) > g(x)$。

二、函数的极限的性质

性质1(唯一性)：设A 与B 都是函数$f(x)$ 在$x \to x_0$ 处的极限，则$A = B$。

性质2(局部有界性)：设$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则$\exists \delta > 0$，使得$f(x)$ 在$O(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ 中有界。

性质3(局部保序性)：若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，则$\exists \delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$ 时成立$f(x) > g(x)$。

性质4(夹逼性)：若在$O(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ 内有$f(x) \geq g(x) \geq h(x)$，且$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$，则$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$。

三、函数极限的四则运算

定理： 设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$，则

(I)线性运算 $\lim_{x \to x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B(\alpha, \beta$ 为常数)；

三、函数极限的四则运算

定理： 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，则

(I)线性运算 $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B(\alpha,\beta$ 为常数)；

(II)乘法 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = AB$；

三、函数极限的四则运算

定理： 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，则

(I)线性运算 $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha f(x)+\beta g(x)) = \alpha A+\beta B(\alpha,\beta$ 为常数)；

(II)乘法 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = AB$；

(III)除法 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}(B\neq 0)$。

三、函数极限的四则运算

定理： 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，则

(I)线性运算 $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B(\alpha,\beta$ 为常数)；

(II)乘法 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = AB$；

(III)除法 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}(B \neq 0)$。

例1：已知 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2+ax+1} = b$，求 a, b.

三、函数极限的四则运算

定理： 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则

(I)线性运算 $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha A+\beta B(\alpha,\beta$ 为常数)；

(II)乘法 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=AB$；

(III)除法 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$。

例1：已知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+ax+1}=b$，求$a,b$.

作业：课本P_{86} $1(1-3),2(3)(5-7)(9-10),3(1)$ P_{87} $8,9$

四、函数极限与数列极限的关系

定理：(Heine定理，又叫归结原则)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0, \text{都有} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A\text{。}$$

四、函数极限与数列极限的关系

定理： (Heine定理，又叫归结原则)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \iff \forall \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0, \text{都有} \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A\text{。}$$

定理： (归结原则的推论)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\ \text{存在} \iff \forall \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0, \text{都有} \lim_{n\to\infty} f(x_n)\ \text{存在。}$$

四、函数极限与数列极限的关系

定理：(Heine定理，又叫归结原则)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$。

定理：(归结原则的推论)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\iff \forall \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在。

注：函数极限基本性质（唯一性定理和四则运算法则）证法：（1）$\epsilon-\delta$；（2）用归结原则转化成数列问题去解决。

四、函数极限与数列极限的关系

定理：(Heine定理，又叫归结原则)

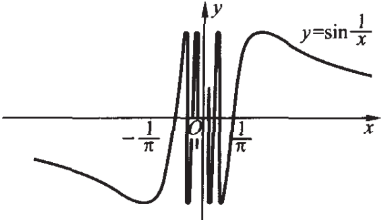
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0, \text{都有} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A。$$

定理：(归结原则的推论)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\ \text{存在} \iff \forall \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0, \text{都有} \lim_{n\to\infty} f(x_n)\ \text{存在。}$$

注：函数极限基本性质（唯一性定理和四则运算法则）证法：（1）$\epsilon-\delta$；（2）用归结原则转化成数列问题去解决。

例1：证明$f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$当$x \to 0$时极限不存在。



五、单侧极限

五、单侧极限

污染控制成本 城市和公司欲求急剧增长的污染控制成本，其成本与从周边环境中清除污染物的百分比有关。设从一个化学垃圾场清除$p\%$ 的污染物所花费的成本$C(p)=\dfrac{48000}{100-p}$。试问公司能担负起清理100% 的污染物吗？求 $\lim\limits_{p\to 100^-} C(p)$。

五、单侧极限

污染控制成本 城市和公司欲求急剧增长的污染控制成本，其成本与从周边环境中清除污染物的百分比有关。设从一个化学垃圾场清除$p\%$ 的污染物所花费的成本$C(p)=\dfrac{48000}{100-p}$。试问公司能担负起清理100% 的污染物吗？求 $\lim\limits_{p\to 100^-} C(p)$。

定义： 设$f(x)$ 在$(x_0-\rho, x_0)(\rho>0)$ 有定义。若存在$A\in\mathbb{R}$，对$\forall\epsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in(x_0-\delta, x_0)$，有$|f(x)-A|<\epsilon$，则称$A$是$f(x)$ 在点x_0 的左极限，记为$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$。

五、单侧极限

污染控制成本 城市和公司欲求急剧增长的污染控制成本，其成本与从周边环境中清除污染物的百分比有关。设从一个化学垃圾场清除$p\%$ 的污染物所花费的成本$C(p)=\dfrac{48000}{100-p}$。试问公司能担负起清理100% 的污染物吗？求 $\lim\limits_{p\to 100^-} C(p)$。

定义： 设$f(x)$ 在$(x_0-\rho,x_0)(\rho>0)$ 有定义。若存在$A\in\mathbb{R}$，对$\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0,\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$，有$|f(x)-A|<\epsilon$，则称$A$ 是$f(x)$ 在点x_0 的左极限，记为$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$。

显然$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \iff f(x_0+0)=f(x_0-0)=A$。

五、单侧极限

污染控制成本 城市和公司欲求急剧增长的污染控制成本，其成本与从周边环境中清除污染物的百分比有关。设从一个化学垃圾场清除$p\%$ 的污染物所花费的成本$C(p)=\dfrac{48000}{100-p}$。试问公司能担负起清理100% 的污染物吗？求 $\lim\limits_{p\to 100^-} C(p)$。

定义： 设$f(x)$ 在$(x_0-\rho, x_0)(\rho>0)$ 有定义。若存在$A\in\mathbb{R}$，对$\forall\epsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in(x_0-\delta, x_0)$，有$|f(x)-A|<\epsilon$，则称$A$ 是$f(x)$ 在点x_0 的左极限，记为$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$。

显然$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \iff f(x_0+0)=f(x_0-0)=A$。

例1：$\lim\limits_{x\to 0^+} sgn\ x=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} sgn\ x=-1$。

五、单侧极限

污染控制成本 城市和公司欲求急剧增长的污染控制成本，其成本与从周边环境中清除污染物的百分比有关。设从一个化学垃圾场清除$p\%$ 的污染物所花费的成本$C(p)=\dfrac{48000}{100-p}$。试问公司能担负起清理100% 的污染物吗？求 $\lim\limits_{p\to 100^-} C(p)$。

定义： 设$f(x)$ 在$(x_0-\rho, x_0)(\rho>0)$ 有定义。若存在$A\in\mathbb{R}$，对$\forall\epsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in(x_0-\delta, x_0)$，有$|f(x)-A|<\epsilon$，则称$A$是$f(x)$ 在点x_0 的左极限，记为$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$。

显然$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \iff f(x_0+0)=f(x_0-0)=A$。

例1：$\lim\limits_{x\to 0^+} sgn\, x=1, \lim\limits_{x\to 0^-} sgn\, x=-1$。

例2：$\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x^2-1}}=+\infty, \lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}}=0$。

注：所有函数极限的性质与运算，均适用于左（右）极限。

注：所有函数极限的性质与运算，均适用于左（右）极限。

作业：课本P_{87} 5(2)(3)(4)

六、函数极限定义的扩充

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0,$ 当$0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有$|f(x) - A| < \epsilon$.

自变量的极限过程有6 种：$x \to x_0, x_0^+, x_0^-, \infty, +\infty, -\infty$；
函数值极限有4 种：$f(x) \to A, \infty, +\infty, -\infty$。共24 种。

注：所有函数极限的性质与运算，均适用于左（右）极限。

作业：课本P_{87} 5(2)(3)(4)

六、函数极限定义的扩充

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0,$ 当$0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有$|f(x) - A| < \epsilon$.

自变量的极限过程有6 种：$x \to x_0, x_0^+, x_0^-, \infty, +\infty, -\infty$；
函数值极限有4 种：$f(x) \to A, \infty, +\infty, -\infty$。共24 种。

仔细分析 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的定义，
$\forall\epsilon > 0, \cdots,$ 有$|f(x) - A| < \epsilon$ 描述的是$f(x) \to A$ 的情景；
$\exists\delta > 0,$ 当$0 < |x - x_0| < \delta$ 时描述的是$x \to x_0$ 的过程。

对四种函数极限值和六种自变量极限过程，有如下表达：

$$\begin{array}{rl} f(x) \to A, & \forall \epsilon > 0, \cdots, \text{有 } |f(x) - A| < \epsilon \\ f(x) \to \infty, & \forall G > 0, \cdots, \text{有 } |f(x)| > G \\ f(x) \to +\infty, & \forall G > 0, \cdots, \text{有 } f(x) > G \\ f(x) \to -\infty, & \forall G > 0, \cdots, \text{有 } f(x) < -G \end{array}$$

对四种函数极限值和六种自变量极限过程，有如下表达：

$$
\begin{array}{rl}
f(x) \to A, & \forall \epsilon > 0, \cdots, \text{有 } |f(x) - A| < \epsilon \\
f(x) \to \infty, & \forall G > 0, \cdots, \text{有 } |f(x)| > G \\
f(x) \to +\infty, & \forall G > 0, \cdots, \text{有 } f(x) > G \\
f(x) \to -\infty, & \forall G > 0, \cdots, \text{有 } f(x) < -G
\end{array}
$$

以及

$$
\begin{array}{rl}
x \to x_0, & \cdots, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta, \cdots \\
x \to x_0^+, & \cdots, \exists \delta > 0, \forall 0 < x - x_0 < \delta, \cdots \\
x \to x_0^-, & \cdots, \exists \delta > 0, \forall -\delta < x - x_0 < 0, \cdots \\
x \to \infty, & \cdots, \exists X > 0, \forall |x| > X, \cdots \\
x \to +\infty, & \cdots, \exists X > 0, \forall x > X, \cdots \\
x \to -\infty, & \cdots, \exists X > 0, \forall x < -X, \cdots
\end{array}
$$

对四种函数极限值和六种自变量极限过程，有如下表达：

$$\begin{aligned}
f(x) \to A, &\quad \forall \epsilon > 0, \cdots, \text{有 } |f(x) - A| < \epsilon \\
f(x) \to \infty, &\quad \forall G > 0, \cdots, \text{有 } |f(x)| > G \\
f(x) \to +\infty, &\quad \forall G > 0, \cdots, \text{有 } f(x) > G \\
f(x) \to -\infty, &\quad \forall G > 0, \cdots, \text{有 } f(x) < -G
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
x \to x_0, &\quad \cdots, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta, \cdots \\
x \to x_0^+, &\quad \cdots, \exists \delta > 0, \forall 0 < x - x_0 < \delta, \cdots \\
x \to x_0^-, &\quad \cdots, \exists \delta > 0, \forall -\delta < x - x_0 < 0, \cdots \\
x \to \infty, &\quad \cdots, \exists X > 0, \forall |x| > X, \cdots \\
x \to +\infty, &\quad \cdots, \exists X > 0, \forall x > X, \cdots \\
x \to -\infty, &\quad \cdots, \exists X > 0, \forall x < -X, \cdots
\end{aligned}$$

组合起来，不难写出任意一种函数极限, e.g. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$。

例1：证明 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{x-1}=-\infty.$

例1：证明 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{x-1}=-\infty.$

注1：关于函数极限性质：唯一性（成立）；局部有界（对∞ 谈不上局部有界）；局部保序性和夹逼性（只当函数是有限、$+\infty$ 或$-\infty$ 成立。当极限为未定号无穷大时，不成立）。

例1：证明 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{x-1}=-\infty.$

注1：关于函数极限性质：唯一性（成立）；局部有界（对∞ 谈不上局部有界）；局部保序性和夹逼性（只当函数是有限、$+\infty$ 或$-\infty$ 成立。当极限为未定号无穷大时，不成立）。

注2：关于函数极限的四则运算，只要不是待定型如$\infty+\infty$, $(+\infty)+(-\infty), \infty+(\pm\infty), 0\cdot\infty, \dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}$ 型，四则运算法则总成立。

例1：证明 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2}{x-1}=-\infty.$

注1：关于函数极限性质：唯一性（成立）；局部有界（对∞ 谈不上局部有界）；局部保序性和夹逼性（只当函数是有限、$+\infty$ 或$-\infty$ 成立。当极限为未定号无穷大时，不成立）。

注2：关于函数极限的四则运算，只要不是待定型如$\infty+\infty$, $(+\infty)+(-\infty), \infty+(\pm\infty), 0\cdot\infty, \dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}$ 型，四则运算法则总成立。

注3：对于不同的函数极限，分别有相应的Heine 定理，它们的叙述、证明方法和作用类似。

例2：讨论极限

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_kx^k}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_jx^j},$$

$$\ell=\lim_{x\to 0}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_kx^k}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_jx^j},$$

其中a_n, a_k, b_m, b_j 均为非零实数，也即两头两尾不为零。

例2：讨论极限

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_kx^k}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_jx^j},$$

$$\ell=\lim_{x\to 0}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_kx^k}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_jx^j},$$

其中a_n, a_k, b_m, b_j 均为非零实数，也即两头两尾不为零。

作业： P_{86} 1(4)(7)(8), 3(2), 6(2 – 6), 7, 10(2)(4)(6), 11, 15。

补充：两个重要极限

引理： 对$\forall x \in \mathbb{R}$，有$|\sin x| \le |x|$；对$\forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$，有$|x| \le |\tan x|$。

补充：两个重要极限

引理： 对$\forall x \in \mathbb{R}$，有$|\sin x| \le |x|$；对$\forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$，有$|x| \le |\tan x|$。

两个重要极限： $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$，$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$。

补充：两个重要极限

引理： 对$\forall x \in \mathbb{R}$，有$|\sin x| \le |x|$；对$\forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$，有$|x| \le |\tan x|$。

两个重要极限： $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$，$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$。

注：以上两极限可导出微分学所有基本初等函数求导法则。

补充：两个重要极限

引理： 对$\forall x\in\mathbb{R}$，有$|\sin x|\le|x|$；对$\forall x\in(-\pi/2,\pi/2)$，有$|x|\le|\tan x|$。

两个重要极限： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$。

注：以上两极限可导出微分学所有基本初等函数求导法则。

推论：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a(a>0)$.

补充：两个重要极限

引理：对$\forall x\in\mathbb{R}$，有$|\sin x|\le|x|$；对$\forall x\in(-\pi/2,\pi/2)$，有$|x|\le|\tan x|$。

两个重要极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$。

注：以上两极限可导出微分学所有基本初等函数求导法则。

推论：(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$ (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, (4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a(a>0)$.

注意如下两个不等式并求出正确值：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}\ne1$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}\ne e$。

七、复合函数的极限及变量代换

问题：已知 $\lim_{x\to a} g(x) = A$, $\lim_{y\to A} f(y) = B$，

是否有 $\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to A} f(y) = B$？

七、复合函数的极限及变量代换

问题：已知$\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, $\lim\limits_{y\to A} f(y) = B$，

是否有$\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to A} f(y) = B$？

反例：定义$g(x) \equiv 0, a = 0$; $f(y) = \begin{cases} 1, & y = 0 \\ 0, & y \neq 0 \end{cases}$, $A = 0$。

七、复合函数的极限及变量代换

问题：已知 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, $\lim\limits_{y\to A} f(y) = B$，

是否有 $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to A} f(y) = B$？

反例：定义$g(x) \equiv 0, a = 0$; $f(y) = \begin{cases} 1, & y = 0 \\ 0, & y \neq 0 \end{cases}$，$A = 0$。

分析：在 $\lim\limits_{y\to A} f(y) = B$ 的过程中$y \neq A$；而在 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$ 的过程中，$g(x)$ 可以无限次等于A。

命题： 设$\lim_{x\to a} g(x) = A$, $\lim_{y\to A} f(y) = B$。若存在点a 的邻域$O(a,\delta)\backslash\{a\}$，在其中$g(x) \neq A$, 则$\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$。

命题： 设$\lim\limits_{x\to a} g(x) = A, \lim\limits_{y\to A} f(y) = B$。若存在点$a$的邻域$O(a,\delta)\backslash\{a\}$，在其中$g(x) \neq A$, 则$\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = B$。

例1：证明$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$。

命题： 设$\lim_{x\to a} g(x)=A$, $\lim_{y\to A} f(y)=B$。若存在点a 的邻域$O(a,\delta)\backslash\{a\}$，在其中$g(x)\neq A$, 则$\lim_{x\to a} f(g(x))=B$。

例1：证明$\lim_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$。

思考题： 设$\lim_{x\to a} g(x)=A$, $\lim_{y\to A} f(y)=B$。证明: $\lim_{x\to a} f(g(x))$只有3种可能性：

(1) $\lim_{x\to a} f(g(x))=B$; (2) $\lim_{x\to a} f(g(x))=f(A)$; (3) $\lim_{x\to a} f(g(x))$ 不存在。

§2 连续函数

一、连续函数的定义

直观：一笔划的曲线，笔尖不离开纸面能够作出其图像。

§2 连续函数

一、连续函数的定义

直观：一笔划的曲线，笔尖不离开纸面能够作出其图像。

定义1： 若函数$f(x)$在x_0点某邻域内有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$点连续，或称$x_0$是$f(x)$的连续点。

§2 连续函数

一、连续函数的定义

直观：一笔划的曲线，笔尖不离开纸面能够作出其图像。

定义1： 若函数$f(x)$ 在x_0 点某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称$f(x)$ 在x_0 点连续，或称x_0 是$f(x)$ 的连续点。

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall\ x$ 满足$|x - x_0| < \delta,$ 有$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$。

§2 连续函数

一、连续函数的定义

直观：一笔划的曲线，笔尖不离开纸面能够作出其图像。

定义1： 若函数$f(x)$在x_0点某邻域内有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$点连续，或称$x_0$是$f(x)$的连续点。

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall\ x$ 满足$|x - x_0| < \delta$, 有$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$。

注1：函数在x_0点连续要求：(1) $f(x)$在x_0点有定义；(2) 极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在；(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

§2 连续函数

一、连续函数的定义

直观：一笔划的曲线，笔尖不离开纸面能够作出其图像。

定义1： 若函数$f(x)$ 在x_0 点某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称$f(x)$ 在x_0 点连续，或称x_0 是$f(x)$ 的连续点。

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall\ x$ 满足$|x - x_0| < \delta,$ 有$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$。

注1：函数在x_0 点连续要求：(1) $f(x)$ 在x_0 点有定义；(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

注2：上述(3) 式可写成 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$，即极限与对应法则可以互换。

定义2： 若函数$f(x)$ 在开区间(a, b) 的每一点都连续，称$f(x)$ 在(a, b) 上连续。

定义2： 若函数$f(x)$ 在开区间(a,b) 的每一点都连续，称$f(x)$ 在(a,b) 上连续。

例1：证明函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间$(0,1)$ 上连续。

定义2： 若函数$f(x)$ 在开区间(a,b) 的每一点都连续，称$f(x)$ 在(a,b) 上连续。

例1：证明函数$f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间$(0,1)$ 上连续。

定义3： 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$ 在x_0 左连续：
$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x$ 满足 $-\delta<x-x_0\leq 0$，有$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$.

定义2： 若函数$f(x)$ 在开区间(a,b) 的每一点都连续，称$f(x)$ 在(a,b) 上连续。

例1：证明函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间$(0,1)$ 上连续。

定义3： 若$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$ 在x_0 左连续：
$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x$ 满足 $-\delta<x-x_0\leq 0$, 有$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$.

若$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$ 在x_0 右连续：
$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,0\leq x-x_0<\delta$, 有$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$。

定义4：若$f(x)$ 在区间(a, b) 上连续，且在a 点右连续，b 点左连续，则称$f(x)$ 在$[a, b]$ 上连续。

定义4：若$f(x)$ 在区间(a,b) 上连续，且在a 点右连续，b 点左连续，则称$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续。

例2：证明$f(x)=\sqrt{x(1-x)}$ 在闭区间$[0,1]$ 上连续。

定义4： 若$f(x)$ 在区间(a,b) 上连续，且在a 点右连续，b 点左连续，则称$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续。

例2：证明$f(x)=\sqrt{x(1-x)}$ 在闭区间$[0,1]$ 上连续。

作业： 课本P_{99} $1(1)(2),3,4,6$

定义4：若$f(x)$ 在区间(a,b) 上连续，且在a 点右连续，b 点左连续，则称$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续。

例2：证明$f(x)=\sqrt{x(1-x)}$ 在闭区间$[0,1]$ 上连续。

作业：课本P_{99} $1(1)(2),3,4,6$

二、连续函数的四则运算、复合函数及反函数的性质

1 四则运算

定理1：设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha f(x_0)+\beta g(x_0)$($\alpha,\beta$ 为常数)；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=f(x_0)g(x_0)$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x)=f(x_0)/g(x_0)$, 假定$g(x_0)\neq 0$。

例3：任意多项式函数$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上连续。

例3：任意多项式函数$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上连续。

例4：证明：若$f(x),g(x)\in C(I)$，则$\max\{f(x),g(x)\}$, $\min\{f(x),g(x)\}$ 在I 上连续。

例3：任意多项式函数$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上连续。

例4：证明：若$f(x), g(x) \in C(I)$，则$\max\{f(x), g(x)\}$, $\min\{f(x), g(x)\}$ 在I 上连续。

2 复合函数的连续性

由复合函数的极限性质可知，若$\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$，$\lim\limits_{y\to A} f(y) = B$，未必有$\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to A} f(y) = B$。

例3：任意多项式函数$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上连续。

例4：证明：若$f(x), g(x) \in C(I)$，则$\max\{f(x), g(x)\}$, $\min\{f(x), g(x)\}$ 在I 上连续。

2 复合函数的连续性

由复合函数的极限性质可知，若$\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, $\lim\limits_{y\to A} f(y) = B$，未必有$\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to A} f(y) = B$。

但若f, g 均为连续函数，上述结论成立。

定理2： 若$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$, $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$，其中$u_0 = g(x_0)$，则$\lim\limits_{x\to x_0} f\circ g(x) = f\circ g(x_0)$。

3 反函数的连续性

定理3：(反函数连续性定理)设$y=f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上连续且严格单调增加，$f(a)=\alpha, f(b)=\beta$。则其反函数$x=f^{-1}(y)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上连续且严格单调递增（严格递减情形类似）。

3 反函数的连续性

定理3：(反函数连续性定理)设$y = f(x)$ 在闭区间$[a, b]$ 上连续且严格单调增加，$f(a) = \alpha, f(b) = \beta$。则其反函数$x = f^{-1}(y)$ 在$[\alpha, \beta]$ 上连续且严格单调递增（严格递减情形类似）。

三、初等函数的连续性

1 三角函数与反三角函数

例1：$y = \sin x$ 在$\mathbb{R}$ 上连续。

3 反函数的连续性

定理3：(反函数连续性定理)设$y=f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上连续且严格单调增加，$f(a)=\alpha, f(b)=\beta$。则其反函数$x=f^{-1}(y)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上连续且严格单调递增（严格递减情形类似）。

三、初等函数的连续性

1 三角函数与反三角函数

例1：$y=\sin x$ 在$\mathbb{R}$ 上连续。

同理：$\cos x, \tan x, \sec x, \cot x, \csc x$ 在其定义域上连续。故一切三角函数在其定义域上连续。

3 反函数的连续性

定理3： (反函数连续性定理)设$y=f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上连续且严格单调增加，$f(a)=\alpha, f(b)=\beta$。则其反函数$x=f^{-1}(y)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上连续且严格单调递增（严格递减情形类似）。

三、初等函数的连续性

1 三角函数与反三角函数

例1：$y=\sin x$ 在$\mathbb{R}$ 上连续。

同理：$\cos x, \tan x, \sec x, \cot x, \csc x$ 在其定义域上连续。故一切三角函数在其定义域上连续。

由反函数连续性定理，一切反三角函数在其定义域上连续。

2 指数函数与对数函数

例2：指数函数$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上连续。故其反函数对数函数$y = \log_a x$ 在$(0, +\infty)$ 上连续。

2 指数函数与对数函数

例2：指数函数$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上连续。故其反函数对数函数$y = \log_a x$ 在$(0, +\infty)$ 上连续。

3 幂函数

若$x \in (0, +\infty)$，则$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ 在$(0, +\infty)$ 上连续；

2 指数函数与对数函数

例2：指数函数$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上连续。故其反函数对数函数$y = \log_a x$ 在$(0, +\infty)$ 上连续。

3 幂函数

若$x \in (0, +\infty)$，则$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ 在$(0, +\infty)$ 上连续；

2 指数函数与对数函数

例2：指数函数$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上连续。故其反函数对数函数$y = \log_a x$ 在$(0, +\infty)$ 上连续。

3 幂函数

若$x \in (0, +\infty)$，则$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ 在$(0, +\infty)$ 上连续；

若$x \in (-\infty, 0)$，只有当$\alpha \in \mathbb{Z}$ 或$\alpha = \dfrac{n}{2m+1} (m, n \in \mathbb{Z})$ 时，幂函数x^α 才有定义。根据函数奇偶性，可由x^α 在$(0, +\infty)$ 上的连续性推出x^α 在$(-\infty, 0)$ 上的连续性。

2 指数函数与对数函数

例2：指数函数$y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上连续。故其反函数对数函数$y=\log_a x$ 在$(0,+\infty)$ 上连续。

3 幂函数

若$x\in(0,+\infty)$，则$x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$ 在$(0,+\infty)$ 上连续；

若$x\in(-\infty,0)$，只有当$\alpha\in\mathbb{Z}$ 或$\alpha=\dfrac{n}{2m+1}(m,n\in\mathbb{Z})$ 时，幂函数x^α 才有定义。根据函数奇偶性，可由x^α 在$(0,+\infty)$ 上的连续性推出x^α 在$(-\infty,0)$ 上的连续性。

若$x=0$，x^α只对某些α 在0 点有意义，此时可用定义证明。

2 指数函数与对数函数

例2：指数函数$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上连续。故其反函数对数函数$y = \log_a x$ 在$(0, +\infty)$ 上连续。

3 幂函数

若$x \in (0, +\infty)$，则$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ 在$(0, +\infty)$ 上连续；

若$x \in (-\infty, 0)$，只有当$\alpha \in \mathbb{Z}$ 或$\alpha = \dfrac{n}{2m+1} (m, n \in \mathbb{Z})$ 时，幂函数x^α 才有定义。根据函数奇偶性，可由x^α 在$(0, +\infty)$ 上的连续性推出x^α 在$(-\infty, 0)$ 上的连续性。

若$x = 0$，x^α只对某些α 在0 点有意义，此时可用定义证明。

故幂函数在其定义域内连续。

由以上知，基本初等函数在其定义域上连续。由于初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算所产生的函数，故有

由以上知，基本初等函数在其定义域上连续。由于初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算所产生的函数，故有

定理： 一切初等函数在其定义域上连续。

由以上知，基本初等函数在其定义域上连续。由于初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算所产生的函数，故有

定理： 一切初等函数在其定义域上连续。

由此，可知初等函数求极限的一种方法——代入法：

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$（其中 f 为某初等函数，x_0 为其定义域中的点）。

由以上知，基本初等函数在其定义域上连续。由于初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算所产生的函数，故有

定理： 一切初等函数在其定义域上连续。

由此，可知初等函数求极限的一种方法——代入法：

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$（其中$f$ 为某初等函数，x_0 为其定义域中的点）。

作业： 课本P_{99} 2(1)(4)(6), 7(1)(4)

四、不连续点的类型

由连续定义，$f(x)$ 在x_0 点连续必须满足

1) $f(x)$ 在x_0 有定义；2) $f(x_0+0), f(x_0-0)$ 均存在；3) $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$。

四、不连续点的类型

由连续定义，$f(x)$ 在x_0 点连续必须满足

1) $f(x)$ 在x_0 有定义；2) $f(x_0+0), f(x_0-0)$ 均存在；3) $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$。

1 第一类不连续点(跳跃间断点)：
$f(x_0+0), f(x_0-0)$ 均存在，但$f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$

2 第二类不连续点： $f(x_0+0)$ 与$f(x_0-0)$ 至少有一不存在

3.2.连续函数

四、不连续点的类型

由连续定义，$f(x)$ 在x_0 点连续必须满足

1) $f(x)$ 在x_0 有定义；2) $f(x_0+0), f(x_0-0)$ 均存在；3) $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$。

1 第一类不连续点(跳跃间断点)：
$f(x_0+0), f(x_0-0)$ 均存在，但$f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$

2 第二类不连续点： $f(x_0+0)$ 与$f(x_0-0)$ 至少有一不存在

3 第三类不连续点(可去间断点)：
$f(x_0+0)=f(x_0-0)$，但$f(x_0-0)=f(x_0+0) \neq f(x_0)$ 或f 在x_0 处无定义

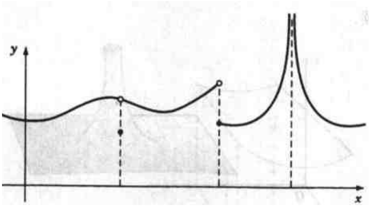


Figure: 破洞、断崖、火山口

例1：证明Riemann 函数

$$R(x) = \begin{cases} 1/q, & x = p/q \ (q \in \mathbb{Z}^+, p \in \mathbb{Z}, (p,q) = 1) \\ 0, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

(约定$0 = 0/1, R(0) = 1$) 在任意点的极限为0。可此可知，该函数在一切无理点连续，在一切有理点不连续。

例1：证明Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases} 1/q, & x=p/q\,(q\in\mathbb{Z}^+,p\in\mathbb{Z},(p,q)=1) \\ 0, & x\text{ 是无理数} \end{cases}$$

(约定$0=0/1, R(0)=1$) 在任意点的极限为0。可此可知，该函数在一切无理点连续，在一切有理点不连续。

例2：单调函数的不连续点必为第一类不连续点。

例1：证明Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases} 1/q, & x=p/q\,(q\in\mathbb{Z}^+, p\in\mathbb{Z}, (p,q)=1) \\ 0, & x\text{ 是无理数} \end{cases}$$

(约定$0=0/1, R(0)=1$) 在任意点的极限为0。可此可知，该函数在一切无理点连续，在一切有理点不连续。

例2：单调函数的不连续点必为第一类不连续点。

作业：课本P_{100} 8(1)(2)(5)(7)(9), 9。

补充：讨论$f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n+x^{2n}+x^{-2n}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

在$x=0$ 处的间断性。

§3 无穷小量与无穷大量的阶

一、无穷小量与无穷小量的阶

定义1： 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，称当$x\to x_0$ 时$f(x)$ 是无穷小量。

§3 无穷小量与无穷大量的阶

一、无穷小量与无穷小量的阶

定义1： 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，称当$x \to x_0$ 时$f(x)$ 是无穷小量。

无穷小量是以0 为极限的变量，极限过程可以扩充到$x \to x_0^+, x_0^-, -\infty, +\infty, \infty$。

§3 无穷小量与无穷大量的阶

一、无穷小量与无穷小量的阶

定义1： 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量。

无穷小量是以0 为极限的变量，极限过程可以扩充到 $x\to x_0^+, x_0^-, -\infty, +\infty, \infty$。

例：当 $x\to 0$ 时，$x, x^2, \sin x, x\sin\dfrac{1}{x}\to 0$，但趋于0 的速度不同，如何描述这种差异？

§3 无穷小量与无穷大量的阶

一、无穷小量与无穷小量的阶

定义1： 若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$，称当$x \to x_0$ 时$f(x)$ 是无穷小量。

无穷小量是以0 为极限的变量，极限过程可以扩充到$x \to x_0^+, x_0^-, -\infty, +\infty, \infty$。

例：当$x \to 0$ 时，$x, x^2, \sin x, x\sin\frac{1}{x} \to 0$，但趋于0 的速度不同，如何描述这种差异？

方法：取其中一个作为参考，另一个与之相比，用比值的极限来表达两个变量趋于0 的快慢。

定义2：设$u(x), v(x)$ 当$x \to x_0$ 时均为无穷小量。

(1) 高阶无穷小：当$x \to x_0$ 时，$u(x)$ 关于$v(x)$ 是高阶无穷小（或$v(x)$ 关于$u(x)$ 是低阶无穷小）是指

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = 0.$$

记为$u(x) = o(v(x))(x \to x_0)$。

定义2：设$u(x), v(x)$ 当$x \to x_0$ 时均为无穷小量。

(1) 高阶无穷小：当$x \to x_0$ 时，$u(x)$ 关于$v(x)$ 是高阶无穷小（或$v(x)$ 关于$u(x)$ 是低阶无穷小）是指

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = 0.$$

记为$u(x) = o(v(x))(x \to x_0)$。

(2) 有界量：称当$x \to x_0$ 时，$u(x)/v(x)$ 是有界量是指若$\exists A > 0$，当x 在x_0 的某个去心邻域中，成立

$$\left|u(x)/v(x)\right| \le A$$

记为$u(x) = O(v(x))(x \to x_0)$。

(3) 同阶无穷小量：称$u(x)$ 与$v(x)$ 是当$x \to x_0$ 时是同阶无穷小量，是指$\exists 0 < a < A$，在x_0 的某个去心邻域中，成立

$$a \leq \left| u(x)/v(x) \right| \leq A.$$

(3) 同阶无穷小量：称$u(x)$ 与$v(x)$ 是当$x \to x_0$ 时是同阶无穷小量，是指$\exists 0 < a < A$，在x_0 的某个去心邻域中，成立

$$a \leq \left|u(x)/v(x)\right| \leq A.$$

特例：$\lim\limits_{x \to x_0} u(x)/v(x) = c \neq 0$。

(3) 同阶无穷小量：称$u(x)$ 与$v(x)$ 是当$x \to x_0$ 时是同阶无穷小量，是指$\exists 0 < a < A$，在x_0 的某个去心邻域中，成立

$$a \le \left| u(x)/v(x) \right| \le A.$$

特例：$\lim\limits_{x \to x_0} u(x)/v(x) = c \neq 0$。

(4) 等价无穷小量：称$u(x)$ 与$v(x)$ 当$x \to x_0$ 时是等价无穷小量，若

$$\lim_{x \to x_0} u(x)/v(x) = 1$$

记为$u(x) \sim v(x)(x \to x_0)$，也即$u(x) = v(x) + o(v(x))(x \to x_0)$。

(3) 同阶无穷小量：称$u(x)$ 与$v(x)$ 是当$x \to x_0$ 时是同阶无穷小量，是指$\exists 0 < a < A$，在x_0 的某个去心邻域中，成立

$$a \leq \left| u(x)/v(x) \right| \leq A.$$

特例：$\lim\limits_{x \to x_0} u(x)/v(x) = c \neq 0$。

(4) 等价无穷小量：称$u(x)$ 与$v(x)$ 当$x \to x_0$ 时是等价无穷小量，若

$$\lim_{x \to x_0} u(x)/v(x) = 1$$

记为$u(x) \sim v(x)(x \to x_0)$，也即$u(x) = v(x) + o(v(x))(x \to x_0)$。

(3) 同阶无穷小量：称$u(x)$ 与$v(x)$ 是当$x \to x_0$ 时是同阶无穷小量，是指$\exists 0 < a < A$，在x_0 的某个去心邻域中，成立

$$a \leq \left| u(x)/v(x) \right| \leq A.$$

特例：$\lim\limits_{x \to x_0} u(x)/v(x) = c \neq 0$。

(4) 等价无穷小量：称$u(x)$ 与$v(x)$ 当$x \to x_0$ 时是等价无穷小量，若

$$\lim_{x \to x_0} u(x)/v(x) = 1$$

记为$u(x) \sim v(x)(x \to x_0)$，也即$u(x) = v(x) + o(v(x))(x \to x_0)$。

注：在使用$o, O, \sim$ 三个符号时，必须写出极限过程！

$$\ln x = o(1)(x \to 1), \ln x = o(x)(x \to +\infty), \ln x = o(\frac{1}{x})(x \to 0^+)$$

例1：证明$O(x^2) = o(x)(x \to 0)$ 成立。

例1：证明$O(x^2) = o(x)(x \to 0)$ 成立。

注：含有o, O 的等式叫渐近等式，与普通等式不大一样。一般只能从左往右，而不能从右往左读。

例$x^{\frac{3}{2}} = o(x), (x \to 0^+)$，但$x^{\frac{3}{2}} \neq O(x^2)(x \to 0)$。

例1：证明$O(x^2)=o(x)(x\to 0)$ 成立。

注：含有o,O 的等式叫渐近等式，与普通等式不大一样。一般只能从左往右，而不能从右往左读。

例$x^{\frac{3}{2}}=o(x),(x\to 0^+)$，但$x^{\frac{3}{2}}\neq O(x^2)(x\to 0)$。

在实际运用中，若极限过程是$x\to x_0$，我们往往选取$v(x)=(x-x_0)^k$ $(k>0)$ 作为与$u(x)$ 比较的无穷小量（若极限过程为$x\to\infty$，则选取$v(x)=\dfrac{1}{x^k}$）。

例1：证明$O(x^2) = o(x)(x \to 0)$ 成立。

注：含有o, O 的等式叫渐近等式，与普通等式不大一样。一般只能从左往右，而不能从右往左读。

例$x^{\frac{3}{2}} = o(x), (x \to 0^+)$，但$x^{\frac{3}{2}} \neq O(x^2)(x \to 0)$。

在实际运用中，若极限过程是$x \to x_0$，我们往往选取$v(x) = (x - x_0)^k$ $(k > 0)$ 作为与$u(x)$ 比较的无穷小量（若极限过程为$x \to \infty$，则选取$v(x) = \dfrac{1}{x^k}$）。

若$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{(x - x_0)^k} = c \neq 0$，则称当$x \to x_0$ 时，$u(x)$ 为k 阶无穷小量。

例1：证明$O(x^2) = o(x)(x \to 0)$ 成立。

注：含有o, O 的等式叫渐近等式，与普通等式不大一样。一般只能从左往右，而不能从右往左读。

例$x^{\frac{3}{2}} = o(x), (x \to 0^+)$，但$x^{\frac{3}{2}} \neq O(x^2)(x \to 0)$。

在实际运用中，若极限过程是$x \to x_0$，我们往往选取$v(x) = (x - x_0)^k$ $(k > 0)$ 作为与$u(x)$ 比较的无穷小量（若极限过程为$x \to \infty$，则选取$v(x) = \dfrac{1}{x^k}$）。

若$\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{(x - x_0)^k} = c \neq 0$，则称当$x \to x_0$ 时，$u(x)$ 为k 阶无穷小量。

例2：求当$x \to 0$ 时，$\tan x - \sin x$ 的阶数。

无穷小量不一定有阶。

无穷小量不一定有阶。

例3：当$x \to 0$ 时，无穷小量$x \sin \frac{1}{x}$ 没有阶。

无穷小量不一定有阶。

例3：当$x \to 0$ 时，无穷小量$x \sin \frac{1}{x}$ 没有阶。

二、等价无穷小量代换

1 等价关系具有(1)自反性；(2)对称性；(3)传递性。

无穷小量不一定有阶。

例3：当$x \to 0$ 时，无穷小量$x \sin \frac{1}{x}$ 没有阶。

二、等价无穷小量代换

1 等价关系具有(1)自反性；(2)对称性；(3)传递性。

2 **定理：** 设$u(x), v(x)$ 和$w(x)$ 在x_0 的某去心邻域上有定义，且$\lim\limits_{x \to x_0} v(x)/w(x) = 1$，则

(1) 当$\lim\limits_{x \to x_0} u(x)w(x) = A$ 时，$\lim\limits_{x \to x_0} u(x)v(x) = A$；

(2) 当$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{u(x)}{w(x)} = A$ 时，$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = A$。

3 常用的等价无穷小量

当$x \to 0$ 时

(1) $x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$；

(2) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}(x \to 0)$；

(3) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x(x \to 0)$。

3 常用的等价无穷小量

当$x \to 0$ 时

(1) $x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$；

(2) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}(x \to 0)$；

(3) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x(x \to 0)$。

例4：求$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3(2x)}$。

3 常用的等价无穷小量

当$x \to 0$ 时

(1) $x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$；

(2) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}(x \to 0)$；

(3) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x(x \to 0)$。

例4：求$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3(2x)}$。

注：在等价量代换中，乘除可代换，加减不可以随意代换。

例：$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3(2x)} \neq \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x}{(2x)^3} = 0$。

在加减中，起作用的常是更高阶的无穷小量。

在加减中，起作用的常是更高阶的无穷小量。

例5：求 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-e^{\frac{x}{3}}}{\ln(1+2x)}$。

在加减中，起作用的常是更高阶的无穷小量。

例5：求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-e^{\frac{x}{3}}}{\ln(1+2x)}$。

例6：求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$。

在加减中，起作用的常是更高阶的无穷小量。

例5：求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-e^{\frac{x}{3}}}{\ln(1+2x)}$。

例6：求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$。

三、无穷大量与无穷大量的阶

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$（或$\pm\infty$），则称当$x\to x_0$ 时，$f(x)$ 是无穷大量（或正、负无穷大量），其余定义类推。

在加减中，起作用的常是更高阶的无穷小量。

例5：求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-e^{\frac{x}{3}}}{\ln(1+2x)}$。

例6：求 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$。

三、无穷大量与无穷大量的阶

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ （或±∞），则称当$x\to x_0$ 时，$f(x)$ 是无穷大量（或正、负无穷大量），其余定义类推。

无穷大量与无穷大量的阶可由无穷小量及无穷小量的阶类推得到（略）。

作业：补充题1：求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)\cdots(\sqrt[n]{x}-1)}{(x-1)^{n-1}}$.

补充题2：证明：(1)$o(x^m)+o(x^n)=o(x^n)(m>n>0)$
(2)$o(x^m)o(x^n)=o(x^{m+n})(m,n>0)$
(3)若$|f(x)|\leq M$，则$f(x)o(x)=o(x)$
(4)$x^m o(1)=o(x^m)$.

课本P_{108} 1(2)(5)(8 – 10), 3(1 – 3)(5)(7)(10)(11)

定义： 设一区间集E 及某一区间I（开、闭均可）。若对I 中任意一点ξ，在E 中可找到一个区间Δ，使得$\xi \in \Delta$，则称E 覆盖I。例

定义：设一区间集E 及某一区间I（开、闭均可）。若对I 中任意一点ξ，在E 中可找到一个区间Δ，使得$\xi \in \Delta$，则称E 覆盖I。例

$$\left[0, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right), \cdots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right), \cdots$$ 及$[1,2]$ 覆盖$[0,2]$。

定义：设一区间集E 及某一区间I （开、闭均可）。若对I 中任意一点ξ，在E 中可找到一个区间Δ，使得$\xi\in\Delta$，则称E 覆盖I。例

$$\left[0,\frac{1}{2}\right),\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right),\left[\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right),\cdots,\left[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1}\right),\cdots \text{ 及}[1,2] \text{ 覆盖}[0,2]。$$

Borel 定理：如果$\{O_\alpha\}$ 是区间$[a,b]$ 的一个开覆盖，则存在$\{O_\alpha\}$ 的一个有限子集$\{O_1,O_2,\cdots,O_n\}$ 使得它也覆盖$[a,b]$。也即，有限闭区间的任何一个开覆盖均有有限子覆盖。

注1：有限覆盖定理价值：将无限转化成有限。

注1：有限覆盖定理价值：将无限转化成有限。

注2：有限覆盖定理中条件不能随便变动。如将闭区间改成开区间或无界区间、或将开覆盖中每个开区间改成闭区间，则结论不再成立。例

注1：有限覆盖定理价值：将无限转化成有限。

注2：有限覆盖定理中条件不能随便变动。如将闭区间改成开区间或无界区间、或将开覆盖中每个开区间改成闭区间，则结论不再成立。例

$(0,1)\subseteq\cup_{n=1}^{\infty}\left(1/n,1+1/n\right),\mathbb{R}\subseteq\cup_{x\in\mathbb{R}}(x-1,x+1)$

注1：有限覆盖定理价值：将无限转化成有限。

注2：有限覆盖定理中条件不能随便变动。如将闭区间改成开区间或无界区间、或将开覆盖中每个开区间改成闭区间，则结论不再成立。例

$(0,1) \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} (1/n, 1+1/n)$, $\mathbb{R} \subseteq \cup_{x\in\mathbb{R}}(x-1, x+1)$

$$[0,2] \subseteq \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \cdots \cup \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) \cup \cdots \cup [1,2].$$

注1：有限覆盖定理价值：将无限转化成有限。

注2：有限覆盖定理中条件不能随便变动。如将闭区间改成开区间或无界区间、或将开覆盖中每个开区间改成闭区间，则结论不再成立。例

$(0,1) \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} (1/n, 1+1/n)$, $\mathbb{R} \subseteq \cup_{x\in\mathbb{R}}(x-1, x+1)$

$$[0,2] \subseteq \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \cdots \cup \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) \cup \cdots \cup [1,2].$$

作业：用有限覆盖定理证明致密性定理。

例1：由有限覆盖定理证明确界存在定理。

例1：由有限覆盖定理证明确界存在定理。

注1：闭区间套定理常把某区间上满足的性质采取二分法归结为某点领域中的局部性质；而有限覆盖定理则将某点领域中的“局部”性质扩充到整个区间上。

例1：由有限覆盖定理证明确界存在定理。

注1：闭区间套定理常把某区间上满足的性质采取二分法归结为某点领域中的局部性质；而有限覆盖定理则将某点领域中的“局部”性质扩充到整个区间上。

注2：七大定理以不同的形式刻画了实数的连续性。Cauchy收敛准则表明由实数构成的基本数列$\{x_n\}$必存在实数极限，这一性质称为实数系的完备性。七大基本定理的等价性说明连续性与完备性等价。

注3：七大定理可相互推出，有兴趣的同学可以证明。

注3：七大定理可相互推出，有兴趣的同学可以证明。

注4：前六个定理属于同一类型，都指出在某一条件下便有某种点存在。

注3：七大定理可相互推出，有兴趣的同学可以证明。

注4：前六个定理属于同一类型，都指出在某一条件下便有某种点存在。

要求：脚踏实地地将每个定理条件、结论搞清楚。并至少对每个定理能独立证明一个常见的命题或习题。看别人十个现成的题解还不如自己动手做一个题。

§4 闭区间上的连续函数

一、有界性定理

定理： 若函数$f(x)$ 在$[a, b]$ 上连续，则它在$[a, b]$ 上有界。

§4 闭区间上的连续函数

一、有界性定理

定理： 若函数$f(x)$ 在$[a, b]$ 上连续，则它在$[a, b]$ 上有界。

注：开区间上的连续函数未必有界。

§4 闭区间上的连续函数

一、有界性定理

定理： 若函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，则它在$[a,b]$ 上有界。

注：开区间上的连续函数未必有界。

作业： 课本P_{117} 1 P_{118} 4。

§4 闭区间上的连续函数

一、有界性定理

定理：若函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，则它在$[a,b]$ 上有界。

注：开区间上的连续函数未必有界。

作业： 课本P_{117} 1 P_{118} 4。

二、最值定理

定理：若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，则它在$[a,b]$ 上必能取到最大（小）值，即$\exists \xi,\eta \in [a,b]$, 使得$\forall x \in [a,b]$, $f(\xi) \le f(x) \le f(\eta)$。

注1：开区间上的连续函数未必能取到最大（小）值。

注1：开区间上的连续函数未必能取到最大（小）值。

注2：最值定理$\Rightarrow$ 有界性定理；有界性定理（运用两次）$\Rightarrow$ 最值定理。

注1：开区间上的连续函数未必能取到最大（小）值。

注2：最值定理⇒ 有界性定理；有界性定理（运用两次）⇒ 最值定理。

三、零点存在定理

定理： 若函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，且$f(a)f(b)<0$，则一定存在$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=0$。

注1：开区间上的连续函数未必能取到最大（小）值。

注2：最值定理$\Rightarrow$ 有界性定理；有界性定理（运用两次）$\Rightarrow$ 最值定理。

三、零点存在定理

定理： 若函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，且$f(a)f(b)<0$，则一定存在$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=0$。

注1：它和实数理论密切相关，故定理证明需要用到实数系的基本定理。

注2：在定理条件下，$f(x) = 0$ 在(a, b) 之间可能不止一个根。又$f(a), f(b)$ 同号时，也不能说明$[a, b]$ 中没有$f(x)$ 的根。

注2：在定理条件下，$f(x)=0$ 在(a,b) 之间可能不止一个根。又$f(a),f(b)$ 同号时，也不能说明$[a,b]$ 中没有$f(x)$ 的根。

注3：这个证明是闭区间套定理的典型应用，将原来闭区间的某种性质"浓缩"到某点附近。

注2：在定理条件下，$f(x)=0$ 在(a,b) 之间可能不止一个根。又$f(a),f(b)$ 同号时，也不能说明$[a,b]$ 中没有$f(x)$ 的根。

注3：这个证明是闭区间套定理的典型应用，将原来闭区间的某种性质"浓缩"到某点附近。

注4：该方法可以求近似解。设$[0,1]$ 上的连续函数f 的表达式明确，$f(0)f(1)<0$ 且f 只有一根。

用二分法做10次，得$[a_{10},b_{10}]$。取区间中点C 为近似值，则误差可估计为$|C-\xi|<2^{-10}\approx 0.001$。

四、介值定理

定理： 闭区间$[a, b]$上的连续函数必能取到最大值M与最小值m之间的任何值，也即值域是闭区间$[m, M]$。

四、介值定理

定理： 闭区间$[a, b]$上的连续函数必能取到最大值M与最小值m之间的任何值，也即值域是闭区间$[m, M]$。

注：区间上的函数即使不处处连续，也可以具有介值性。

四、介值定理

定理： 闭区间$[a, b]$ 上的连续函数必能取到最大值M 与最小值m 之间的任何值，也即值域是闭区间$[m, M]$。

注：区间上的函数即使不处处连续，也可以具有介值性。

例：$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1] \\ -x, & x \in \mathbb{Q}^c \cap [-1, 1] \end{cases}$ 只在0 点连续。

四、介值定理

定理： 闭区间$[a,b]$ 上的连续函数必能取到最大值M 与最小值m 之间的任何值，也即值域是闭区间$[m,M]$。

注：区间上的函数即使不处处连续，也可以具有介值性。

例：$f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q}\cap[-1,1] \\ -x, & x\in\mathbb{Q}^c\cap[-1,1] \end{cases}$ 只在0 点连续。

作业： 课本P_{117} 2, 3 P_{118} 7, 9, 10, 14

补充：四条腿一样长的长方形椅子，放在不平的光滑地面上，通常只有三条腿落地。经过挪动，可以使四脚同时落地吗？

五、一致连续

函数$f(x)$ 在x_0 点连续是指：$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$。

五、一致连续

函数$f(x)$ 在x_0 点连续是指：$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$。

$\forall\epsilon > 0, \exists\delta(x_0, \epsilon) > 0, \forall|x - x_0| < \delta$，有$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$。

五、一致连续

函数$f(x)$ 在x_0 点连续是指：$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$。

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(x_0, \epsilon) > 0, \forall |x - x_0| < \delta$，有$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$。

例：对在$(0, +\infty)$ 上的连续函数$f(x) = \sin 1/x$，求出的

$$\delta = \min\{x_0/2, x_0^2\epsilon/2\}。$$

问题： 对$\forall \epsilon > 0$, 能否找到$\delta(\epsilon) > 0$，$\forall |x' - x''| < \delta$ 时，有$|f(x') - f(x'')| < \epsilon$? $\Longrightarrow$ 一致连续！

一致连续

定义： 设函数$f(x)$ 在区间X 上有定义，若

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \ \forall x', x'' \in X, |x' - x''| < \delta$ 有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$，

则称函数$f(x)$ 在区间X 上一致连续。

定义： 设函数$f(x)$ 在区间X 上有定义，若

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0,\ \forall x^{'}, x^{''} \in X, |x^{'} - x^{''}| < \delta$ 有 $|f(x^{'}) - f(x^{''})| < \epsilon$，

则称函数$f(x)$ 在区间X 上一致连续。

注：$f(x)$ 在X 上一致连续$\Rightarrow$ $f(x)$ 在X 上连续。

定义： 设函数$f(x)$ 在区间X 上有定义，若

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0,\ \forall x^{'}, x^{''} \in X, |x^{'} - x^{''}| < \delta \text{ 有 } |f(x^{'}) - f(x^{''})| < \epsilon,$$

则称函数$f(x)$ 在区间X 上一致连续。

注：$f(x)$ 在X 上一致连续$\Rightarrow f(x)$ 在X 上连续。

以下定理给出了判别非一致连续性的便利方法：

定理： 设$f(x)$ 在区间X 上有定义，则$f(x)$ 在X 上一致连续 $\Longleftrightarrow$ $\forall \{x_n^{'}\} \subseteq X, \{x_n^{''}\} \subseteq X$，只要$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^{'} - x_n^{''}) = 0$，就成立$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n^{'}) - f(x_n^{''})) = 0$。

例1：证明(1)对于满足$0 < \eta < 1$ 的每个η，$f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在$[\eta, 1)$ 上一致连续；(2)但在开区间$(0, 1)$ 上非一致连续。

例1：证明(1)对于满足$0 < \eta < 1$ 的每个η，$f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在$[\eta, 1)$上一致连续；(2)但在开区间$(0, 1)$ 上非一致连续。

例2：$f(x) = x^2$ 在$[0, A]$ （A 为任意有限正数）上一致连续，但在$[0, +\infty)$ 上非一致连续。

例1：证明(1)对于满足$0<\eta<1$ 的每个η，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$[\eta,1)$ 上一致连续；(2)但在开区间$(0,1)$ 上非一致连续。

例2：$f(x)=x^2$ 在$[0,A]$ （A 为任意有限正数）上一致连续，但在$[0,+\infty)$ 上非一致连续。

由上面可知：长度为无限区间上的连续函数未必一致连续；长度为有限开区间上的连续函数也未必一致连续。但有

例1：证明(1)对于满足$0<\eta<1$ 的每个η，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$[\eta,1)$上一致连续；(2)但在开区间$(0,1)$ 上非一致连续。

例2：$f(x)=x^2$ 在$[0,A]$ （A 为任意有限正数）上一致连续，但在$[0,+\infty)$ 上非一致连续。

由上面可知：长度为无限区间上的连续函数未必一致连续；长度为有限开区间上的连续函数也未必一致连续。但有

Cantor 定理： 闭区间上的连续函数必定一致连续。

思考题：判别对错

(1)f 在区间$[a,b)$ 连续，则f 在$[a,b)$ 上一致连续；

(2)f 在区间(a,b) 内的每一个闭区间上连续，则f 在(a,b) 上一致连续；

(3)f 在区间(a,b) 上连续，又有$a<c<d<b$，则f 在(c,d) 上一致连续。

思考题：判别对错

(1)f 在区间$[a, b)$ 连续，则f 在$[a, b)$ 上一致连续；

(2)f 在区间(a, b) 内的每一个闭区间上连续，则f 在(a, b) 上一致连续；

(3)f 在区间(a, b) 上连续，又有$a < c < d < b$，则f 在(c, d) 上一致连续。

例3：若f 在$(a, b]$ 和$[b, c)$ 上分别一致连续，则f 在(a, c) 上一致连续。

思考题：判别对错

(1)f 在区间$[a,b)$ 连续，则f 在$[a,b)$ 上一致连续；

(2)f 在区间(a,b) 内的每一个闭区间上连续，则f 在(a,b) 上一致连续；

(3)f 在区间(a,b) 上连续，又有$a<c<d<b$，则f 在(c,d) 上一致连续。

例3：若f 在$(a,b]$ 和$[b,c)$ 上分别一致连续，则f 在(a,c) 上一致连续。

以下给出连续函数$f(x)$ 在(a,b) 上一致连续的充要条件。

定理： $f(x)$ 在有限开区间(a,b) 上连续，则$f(x)$ 在(a,b) 上一致连续 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 均存在（有限）。

判别下列函数在$(0,1)$ 上是否一致连续。

(1) $y=\sin x/x$；
(2) $y=\sin(1/x)$；
(3) $y=\ln x$；
(4) $y=1/(1-x)$。

判别下列函数在$(0,1)$ 上是否一致连续。

(1) $y=\sin x/x$；
(2) $y=\sin(1/x)$；
(3) $y=\ln x$；
(4) $y=1/(1-x)$。

注：$f(x)$ 在(a,b) 和(b,c) 上一致连续，$f(x)$ 在$(a,b)\cup(b,c)$ 上未必一致连续。

总结

总结1：有界性定理、最值定理、零点存在定理、介值定理及Cantor 定理是闭区间上连续函数最重要的分析性质，务必熟练掌握。

总结2：由于实数系七大基本定理等价，故从理论上可采用任何一个定理去证明上述五大性质，只是难易程度不同。

作业： 课本P_{118} 8(2)(3), 11, 12, 15。