5.1 设常数$\sigma > 0$,利用第一Green公式，证明Laplace方程的Robin边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x \in \Omega \\ (\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u)|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

解的唯一性

解：只要证明齐次方程齐次边界条件的定界问题只有零解即可，即证明

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x \in \Omega \\ (\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

只有零解。在第一Green公式$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}ds - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u dx$中取$v = u$,则

$$\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}ds - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = 0$$

由齐次边界条件$(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u)|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = -\alpha u, x \in \partial\Omega$,代入上式

$$\int_{\partial\Omega}\sigma u^2 ds+\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx=0$$

因为$\sigma > 0$，所以

$$\int_{\partial\Omega}\sigma u^2 ds=\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx=0$$

即u是常数，且在$\partial\Omega$上$u=0$,所以$u=0$

5.4 验证$\Gamma(x,y)$满足定义5.1.1中的条件(2),即证明

$$\Gamma(x,y)=\Gamma(|x-y|)=\frac{1}{(n-2)\omega_n}|x-y|^{2-n}, n\geq 3,$$

满足

$$-\Delta_x\Gamma(x,y)=0, x\in R^n\setminus\{y\}$$

其中ω_n是R^n中的单位球面的表面积,$|x-y|=[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2]^{1/2}$.

证明：证明类似ppt中$n=3$时的结论

$$-\Delta_x\Gamma(x,y)=-\sum_{i=1}^{n}\Gamma(x,y)_{x_ix_i}$$

其中直接计算可得

$$\Gamma(x,y)_{x_ix_i}=-\frac{1}{\omega_n}\{[(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{-\frac{n}{2}}$$

$$-n[(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{-\frac{n+2}{2}}(x_i-y_i)^2\}$$

所以

$$-\sum_{i=1}^{n}\Gamma(x,y)_{x_ix_i}=0$$