




§ 5 曲面的交线 曲面所围成的区域

1. 画空间图形常用的三种方法

① 斜二测法（即斜二等轴测投影法）

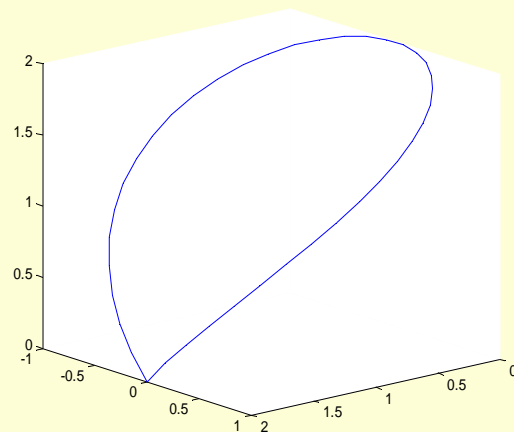
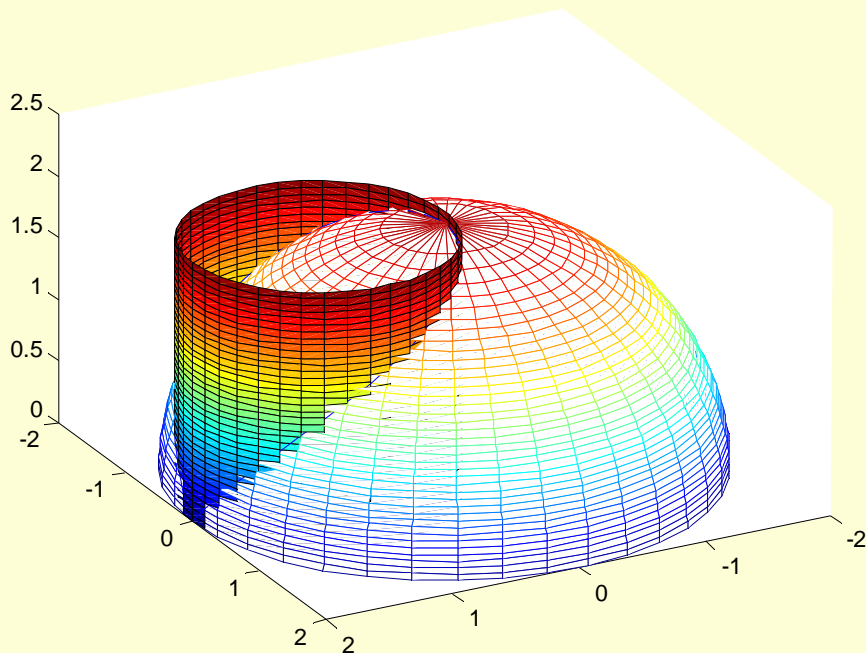
② 正等测法（即正等轴测投影法）

③ 正二测法（即正二等轴测投影法）

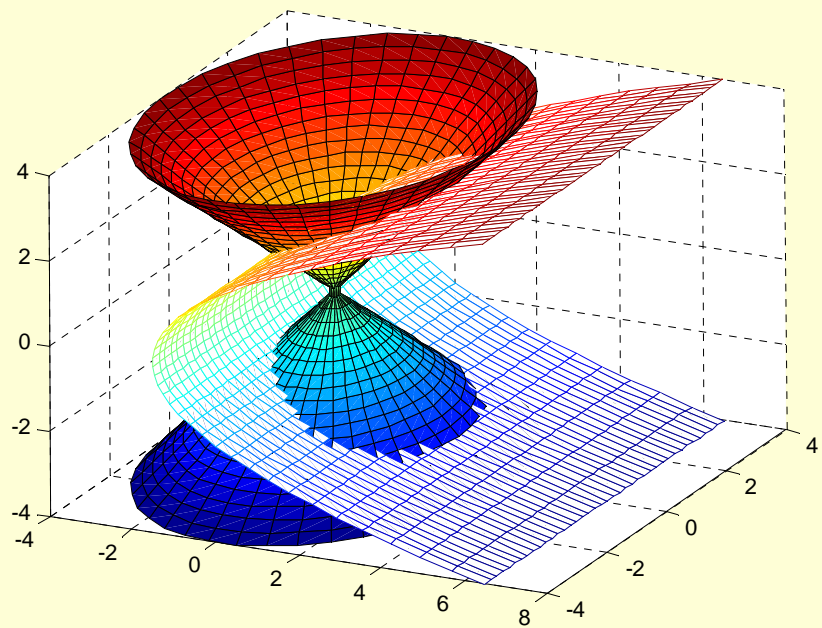
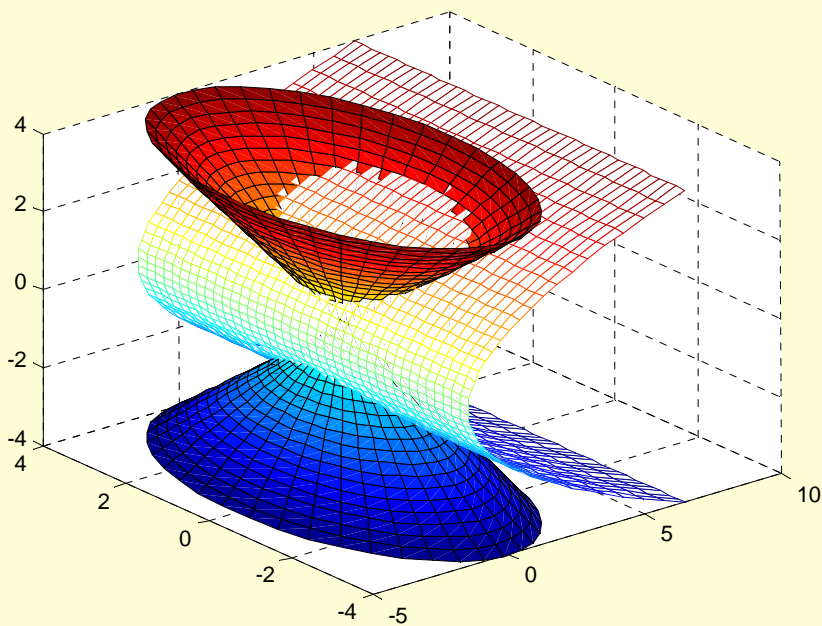


2. 曲线在坐标面上的投影 曲面的交线的画法以及曲面所围成区域的画法

例 1：画出 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases}$ 的交线（维维安尼曲线）

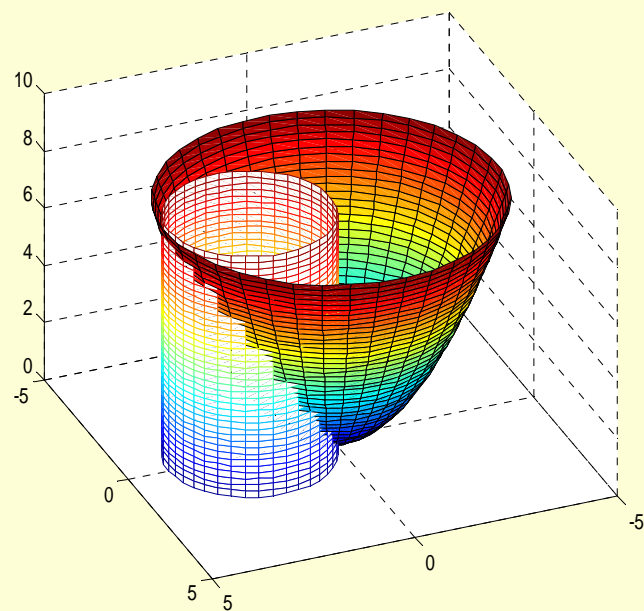


例 2：求 $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ 2x - z^2 + 3 = 0 \end{cases}$ 的交线

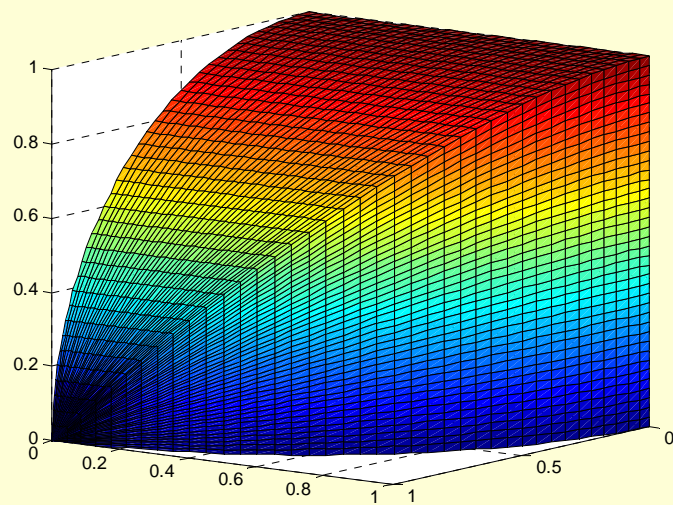


例 3: 求
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z \\ x^2 + y^2 = 4x \\ z = 0 \end{cases}$$

相交区域



例 4：园柱 $x^2 + y^2 = R^2$ 和 $x^2 + z^2 = R^2$ 的相交区域




曲面的MATLAB程序

用 **MATLAB** 作出椭球面 $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{(z+2)^2}{25} = 1$ 的图形。

将椭球面写成参数方程：


$$\begin{cases} x = 1 + 2 \cos u \cos v \\ y = 3 \cos u \sin v \\ z = -2 + 5 \sin u \end{cases} ; \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v < 2\pi$$




程序：

```
u=linspace(-pi/2,pi/2,40);    %将区间分成40等份
v=linspace(0,2*pi,40);        %将区间分成40等份
[z1,t1]=meshgrid(u,v);        %对区间打网格
x=1+2*cos(z1).*cos(t1);        %函数表达
y=3*cos(z1).*sin(t1);
z=-2+5*sin(z1);
surf(x,y,z)                   %绘出三维彩色表面图
```

注：在程序的解释语句前加“%”，程序会自动识别，不执行解释语句。






用 **MATLAB** 作出圆环面 $(\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 = 1$ 的图形。


将圆环面写成参数方程：

$$\begin{cases} x = (3 + \cos u) \cos v \\ y = (3 + \cos u) \sin v \\ z = \sin u \end{cases} ; \quad 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v < 2\pi$$

程序：

```
u=linspace(0,2*pi,40);           %将区间分成40等份
v=linspace(0,2*pi,40);
[s1,s2]=meshgrid(u,v);           %打网格
x=(3+sin(s1)).*cos(s2);           %函数表达
y=(3+sin(s1)).*sin(s2);
z=cos(s1);
surf(x,y,z);
axis([-6 6 -6 6 -6 6])           %三个坐标的显示范围为[-6,6]×[-6,6]×[-6,6]
```







用 **MATLAB** 作出曲面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 和 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 的交线
(称为维维安尼曲线)

将曲面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 表示为参数方程:

$$\begin{cases} x = \sqrt{4 - u^2} \cos v \\ y = \sqrt{4 - u^2} \sin v \\ z = u \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\pi ,$$

而 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 表示为参数方程:

$$\begin{cases} x = 1 + \cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{cases} \quad , \quad 0 \leq u \leq 2\pi, -\infty < v < \infty .$$





程序：


```
z=linspace(0,2,40);  
t=linspace(0,2*pi,40);  
[z1,t1]=meshgrid(z,t);  
x=sqrt(2^2-z1.^2).*cos(t1);  
y=sqrt(2^2-z1.^2).*sin(t1);  
mesh(x,y,z1);  
hold on ;  
u=linspace(0,2*pi,40);  
v=linspace(0,2.1,40);  
[z1,t1]=meshgrid(v,u);  
x=cos(t1)+1;  
y=sin(t1);  
z=z1;  
surf(x,y,z);  
az=45;  
el=30;  
view(az,el)
```

%绘出三维网状立体图

%保持目前的图表, 以后可以附加

%指定三维图形的观察角度, 其中**az**为水平旋转角度, **el**
%为垂直旋转角度。





维维安尼曲线用下列参数方程表示：

$$\begin{cases} x = \cos t + 1 \\ y = \sin t \\ z = \sqrt{2 - 2 \cos t} \end{cases}$$

程序：

`Clear;`

`t=linspace(0,2*pi,40);` %将区间分成**40**等份

`x=cos(t)+1;`

`y=sin(t);`

`z=sqrt(2-2*cos(t));`

`plot3(x,y,z);` %绘出三维函数的线性图形

`az=45;el=30;`

`view(az,el)`

