考题：一颗子弹在枪筒里前进时所受的合力大小为

$$F = 400 - \frac{4\times10^5}{3}t$$

子弹从枪口射出的速率为300m/s。假设子弹离开枪口时合力刚好为零，则

$$F = 400 - \frac{4\times10^5}{3}t = 0 \Rightarrow t = 0.003s$$

（1）子弹走完枪筒全长所用的时间？

（2）子弹在枪筒中所受力的冲量？

$$I = \int_0^{0.003}\left(400 - \frac{4\times10^5}{3}t\right)dt = 0.6N\cdot s$$

（3）子弹的质量？

$$I = mv - 0 \Rightarrow m = \frac{I}{v} = \frac{0.6}{300} = 0.002kg$$

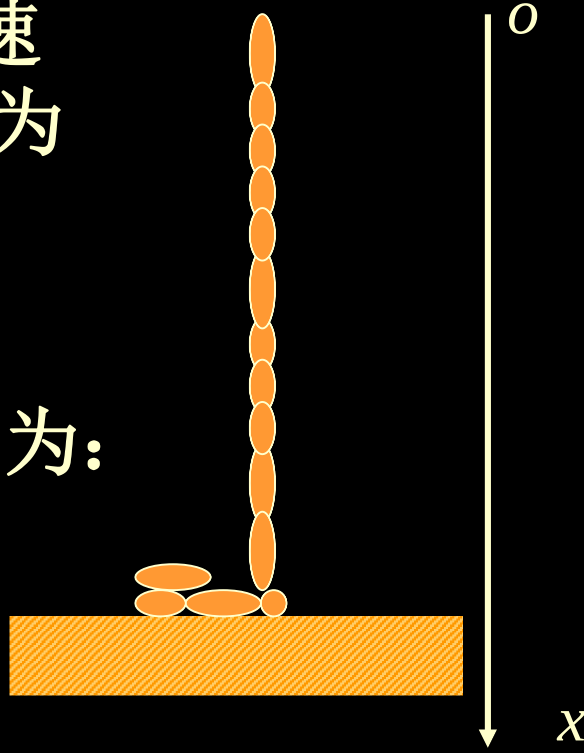
例、M的匀质链条，全长L，手持其上端，下端与地面接触，当链条自由下落在地面上，试证明任意时刻作用于桌面的压力等于桌面上绳的重量的三倍。

证明：设 t 时刻 x 的柔绳落至桌面，dt内将有质量ρdx的柔绳以dx/dt的速率碰到桌面而停止，它的动量变化为

$$dP = 0 - \rho dx \cdot v = -\rho dx \frac{dx}{dt}$$

根据动量定理，桌面对柔绳的冲力为：

$$F' = \frac{dP}{dt} = \frac{-\rho dx \cdot \frac{dx}{dt}}{dt} = -\rho v^2$$



柔绳对桌面的冲力$F=-F'$

$$F=\rho v^2=\frac{M}{L}v^2$$

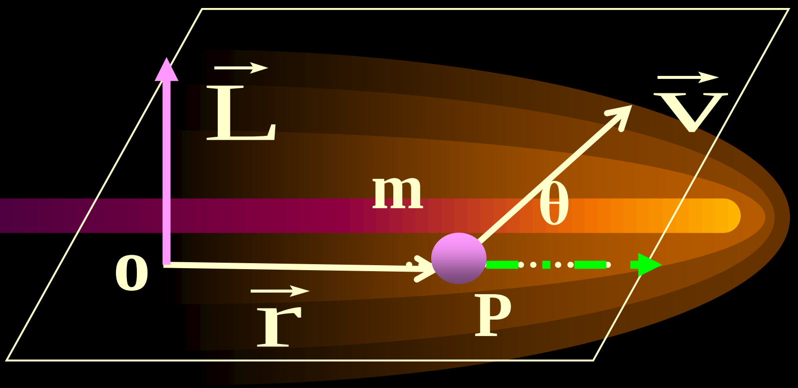
$$v^2=2gx \Rightarrow F=\frac{2Mgx}{L}$$

已落到桌面上的柔绳的重量为 $mg=\frac{M}{L}xg$

$$F_{总}=mg+F=3\frac{M}{L}xg$$

自测练习 **P2 11 7**

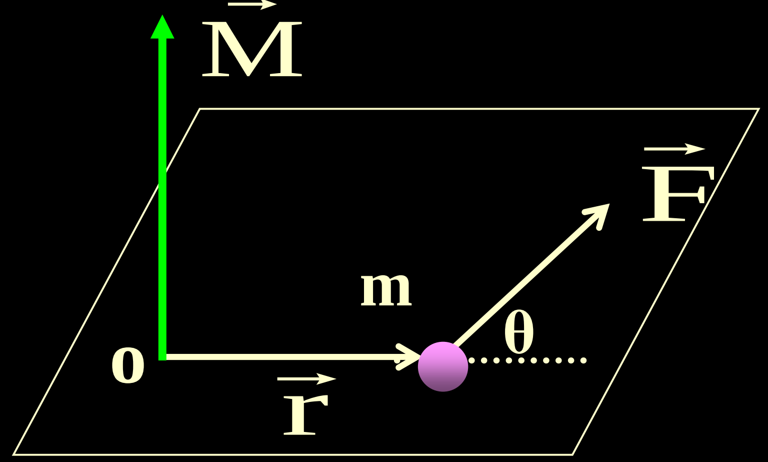
质点的角动量和力矩



角动量: $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

大小: $L = r\,m\,v\sin\theta$

方向: 右手螺旋定则判定



力矩: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

大小: $M = r\,F\sin\theta$

方向: 右手螺旋定则判定

质点的角动量定律: $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

例1：已知 $\vec{r} = a\cos\omega t\,\vec{i} + b\sin\omega t\,\vec{j}$，m。求对原点的角动量和力矩。

$$\vec{v} = -a\omega\sin\omega t\,\vec{i} + b\omega\cos\omega t\,\vec{j}$$

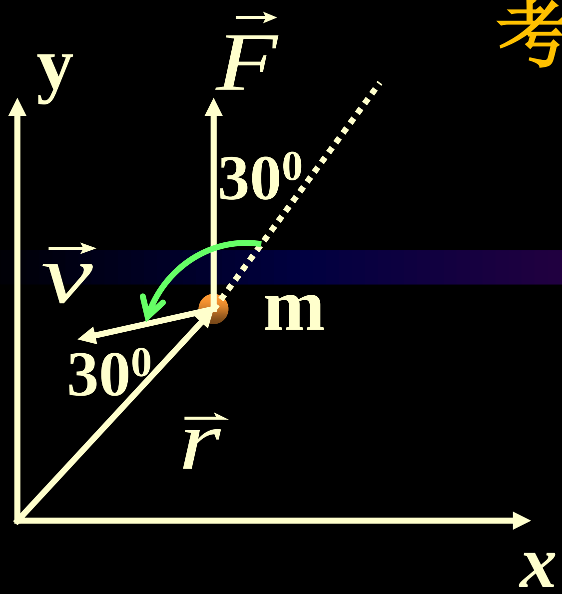
$$\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v} = m\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a\cos\omega t & b\sin\omega t & 0 \\ -a\omega\sin\omega t & b\omega\cos\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= abm\omega\cos^2\omega t\,\vec{k} + abm\omega\sin^2\omega t\,\vec{k} = abm\omega\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2\vec{r}$$

$$\vec{M} = \vec{r}\times m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r}\times\vec{r} = 0$$

考题：求对原点的角动量和力矩



$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

大小： $L = rmv\sin 150^0$

方向： $\vec{k}$ (垂直纸面向外)

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{M} = rF\sin 30^0 \vec{k}$
$\left\{ \begin{array}{l} \text{大小：} \quad M = rF\sin 30^0 \\ \text{方向：} \quad \vec{k} \end{array} \right.$

1）完全弹性碰撞

动量守恒、动能守恒

2）完全非弹性碰撞（动能不守恒）

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = (m_1 + m_2) v$$

3）非弹性碰撞

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$

已知：m_1、m_2对心碰撞，球1原来静止，球2碰后静止，求恢复系数

$$m_1 v_1 = m_2 v_{20}$$

$$e = \frac{-v_1}{-v_{20}} = \frac{m_2}{m_1}$$

质点动力学——牛顿运动定律

- 动能定理 $A_{ab}=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=\frac{1}{2}mv_b^2-\frac{1}{2}mv_a^2$
- 功能原理：$A_{外}+A_{非保内}=E_b-E_a$
- 机械能守恒定律（$A_{外}+A_{非保内}=0$）
- 动量定理 $\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{外}dt=\sum m_i\vec{v}_{2i}-\sum m_i\vec{v}_{1i}$
- 动量守恒：$\vec{F}_{外}=0$ 碰撞、打击和爆炸
- 角动量定律 $\int \vec{M}dt=\int \vec{r}\times\vec{F}dt=\vec{L}-\vec{L}_0$
- 角动量守恒 $\vec{M}_{外}=0$

关于机械能守恒条件和动量守恒条件有以下几种说法，其中正确的是：

（A）不受外力作用的系统，其动量和机械能必然同时守恒。 非保守内力作功?

（B)所受合外力为零，内力都是保守力的系统，其机械能必然守恒。 合外力作功=0不是外力作功=0

（C)不受外力，而内力都是保守力的系统，其动量和机械能必然同时守恒。

（D)外力对一个系统做的功为零，则该系统的机械能和动量必然同时守恒。 非保守内力作功?

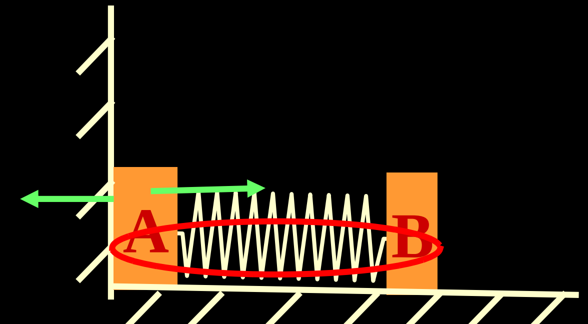
例、两木块A、B的质量分别为m_1和m_2，用一个质量不计、倔强系数为k的弹簧连接起来。把弹簧压缩x_0,并用线扎住，放在光滑水平面上，A紧靠墙壁，如图所示，然后烧断扎线。判断下列说法哪个正确。 [ ]

（A）弹簧由初态恢复为原长的过程中，以A、B、弹簧为系统动量守恒。

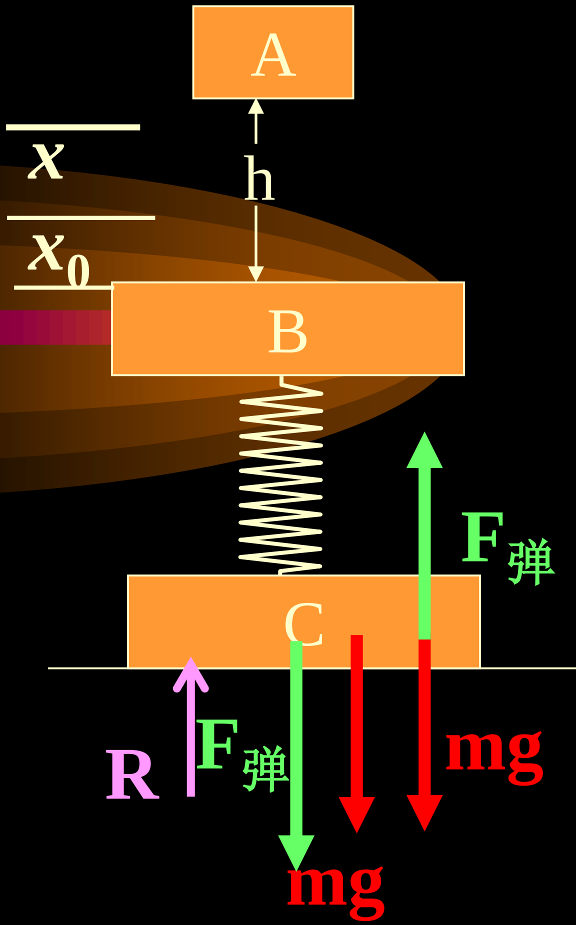
（B）在上述过程中，系统机械能守恒。

（C）当A离开墙后，整个系统动量守恒，机械能不守恒

（D）A离开墙后，整个系统的总机械能为$kx_0^2/2$，总动量为零。



例1、m_A由高度为h处自由下落，与m_B作完全非弹性碰撞。物体B由k的轻弹簧和地面上m_C联接。现要使物体A与物体B碰撞从而压缩弹簧后又反弹时，恰好能将下端的C提离地面，试问物体A自由下落的高度 h应为多少？



$$kx \ge m_c g$$

$$m_A gh = \frac{1}{2} m_A v_{A0}^2$$

$$m_A v_{A0} = (m_A + m_B) v$$

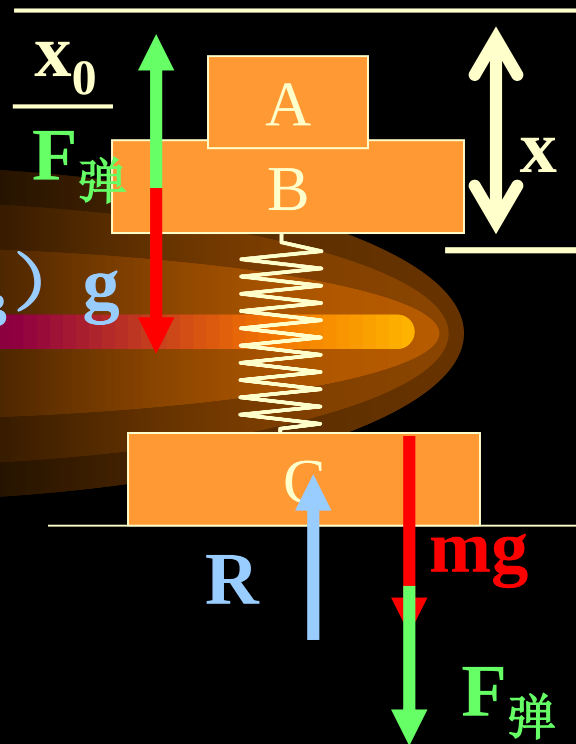
$$\frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kx^2 + (m_A + m_B)g(x + x_0) + 0$$

$$kx_0 = m_B g$$

问题：（1）AB向下运动时的最大动能？

（2）AB向下运动时弹簧的最大压缩量？

（3）桌面所受的最大压力？(已知v）



$(m_A+m_B)g=F_弹$　速度最大

速度为零时，压缩量最大

压缩量最大，桌面的正压力最大

$$\cancel{kx=(m_A+m_B)g}$$

$$\frac{1}{2}(m_A+m_B)v^2+\frac{1}{2}kx_0^2$$

$$=\frac{1}{2}kx^2-(m_A+m_B)g(x-x_0)+E_{\cancel{k\max}}$$

$$kx_0=m_Bg$$

$$R=m_Cg+kx_{max}$$

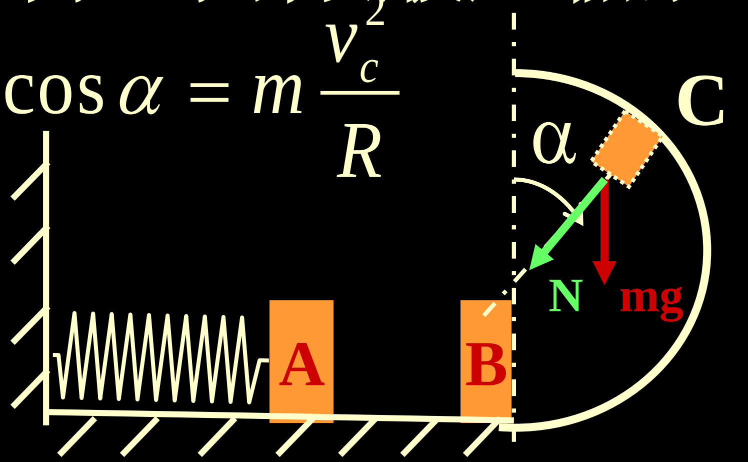
$F_弹$<重力　v ↗

$(m_A+m_B)g=F_弹$

$F_弹$>重力　v ↘

例2、木块A和B为m、弹簧k一端固定、一端与A接触，所有接触面光滑。开始B静止置于圆环轨道底端，用力推木块A使弹簧压缩x后释放，A脱离弹簧后与B作完全弹性碰撞，碰后B升到C点与轨道脱离，求弹簧被压缩的距离x。

$$N + mg\cos\alpha = m\frac{v_c^2}{R}$$



$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$v_B = v_A$$

（完全弹性碰撞，A、B质量相同，交换速度）

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_c^2 + mg(R + R\cos\alpha)$$

$$mg\cos\alpha = m\frac{v_c^2}{R}$$

通过最高点的条件？

绳子拉小球作圆周运动

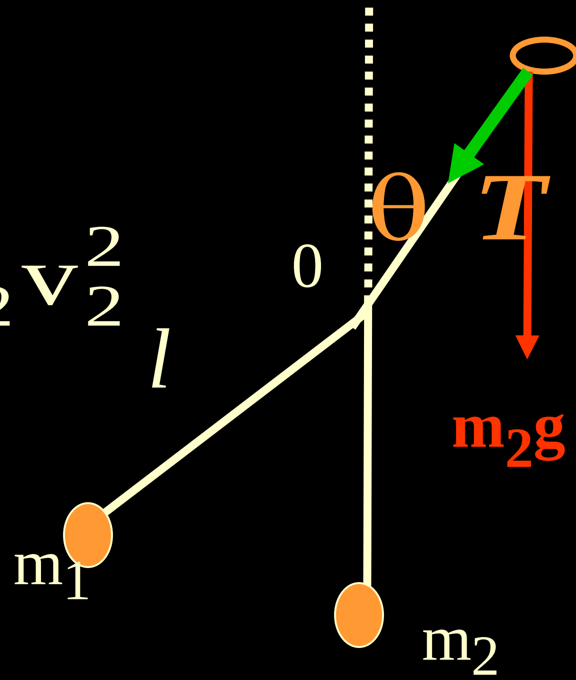
习题册二15、已知两根长为l的绳子，一端固定于o点，质量分别m_1和m_2的小球系于它们的另一端。如把m_1拉至水平位置放下，使m_1、m_2发生对心碰撞（完全弹性碰撞），设$m_1=3m_2$。求碰后m_2沿圆周上升的高度。

解：
$$m_1 g l=\frac{1}{2}mv_{10}^2 \Rightarrow v_{10}=\sqrt{2gl}$$

$$m_1 v_{10}=m_1 v_1+m_2 v_2$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_{10}^2=\frac{1}{2}m_1 v_1^2+\frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

$$v_1=\frac{1}{2}v_{10},\ v_2=\frac{3}{2}v_{10}$$



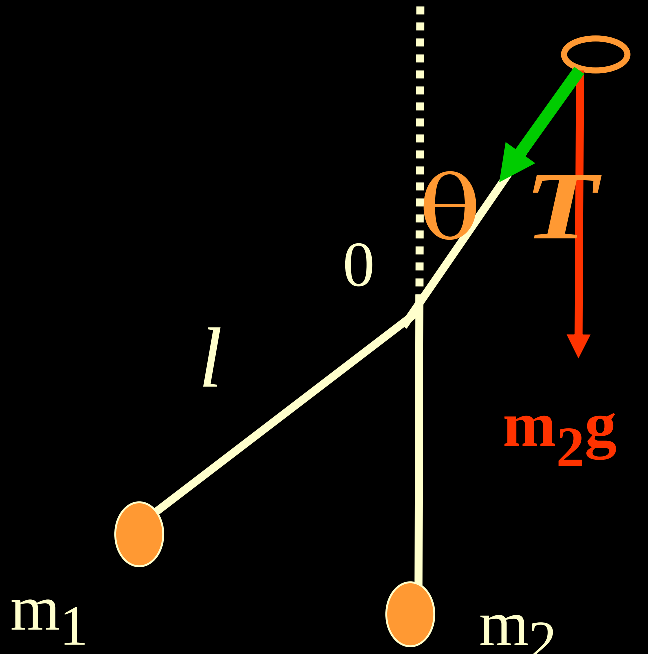
$$m_2 g \boxed{l(1+\cos\theta)} + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2$$

$$T + m_2 g \cos\theta = m_2 \frac{v_2^2}{l}$$

$$T = 0 \Rightarrow g l \cos\theta = v_2^2$$

$$\cos\theta = \frac{5}{6}$$

$$h = \frac{11}{6} l$$



例3、具有半圆形凹槽的木块，放置在光滑地面上，木块质量M。m的质点从最高点由静止下滑，摩擦力忽略不计，求质点下滑至最低点时给木块的压力

设木块、槽、地球为系统

$$N - mg = m\frac{v_{mM}^2}{R}$$

$$\vec{v}_{m地} = \vec{v}_{mM} + \vec{v}_{M地}$$

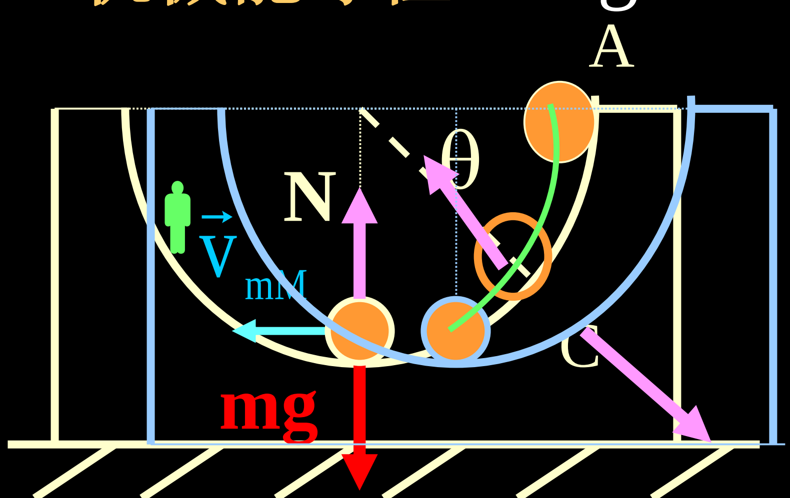
水平方向动量守恒

$$0 = mv_{m地} + Mv_{M地}$$

$$= m(v_{mM} + v_{M地}) + Mv_{M地}$$

机械能守恒

$$mgR = \frac{1}{2}m(v_{mM} + v_{M地})^2 + \frac{1}{2}Mv_{M地}^2$$



1、当m下滑到C点，m相对M的速度和M的速度？

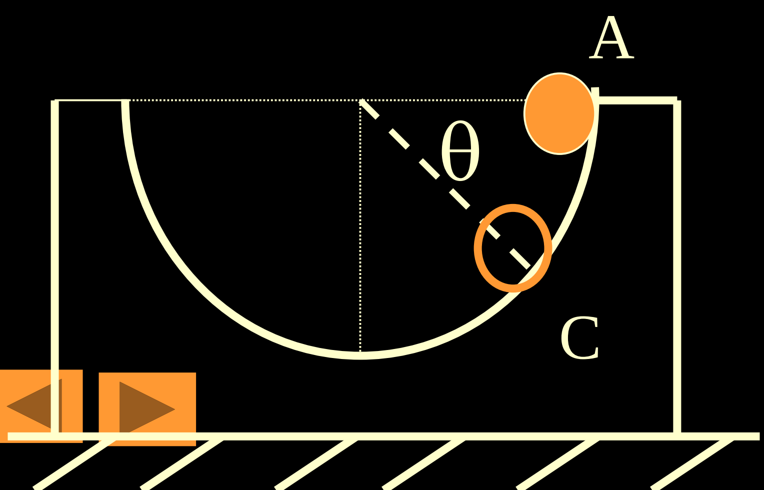
2、此时滑块在地面上移动了多少距离？

$$mv_{m地x} + Mv_{M地} = m(v'\sin\theta + v_{M地}) + Mv_{M地} = 0$$

$$mgR\sin\theta = \frac{1}{2}m\left[(v'\sin\theta + v_{M地})^2 + (v'\cos\theta)^2\right] + \frac{1}{2}Mv^2_{M地}$$

$$\Rightarrow v' = \sqrt{\frac{(M+m)2gR\sin\theta}{(M+m) - m\sin^2\theta}}$$

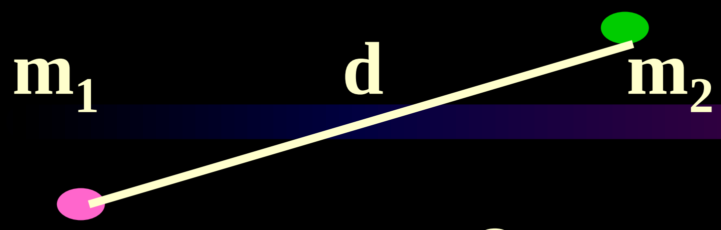
$$v_{M地} = -\frac{mv'\sin\theta}{m+M}$$



$$\Delta s = \int v_{M地}dt = \int -\frac{mv_{mMx}}{m+M}dt$$

$$= -\frac{m}{m+M}\Delta x_{mMx} = -\frac{m}{m+M}(R - R\cos\theta)$$

习题二　13



$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

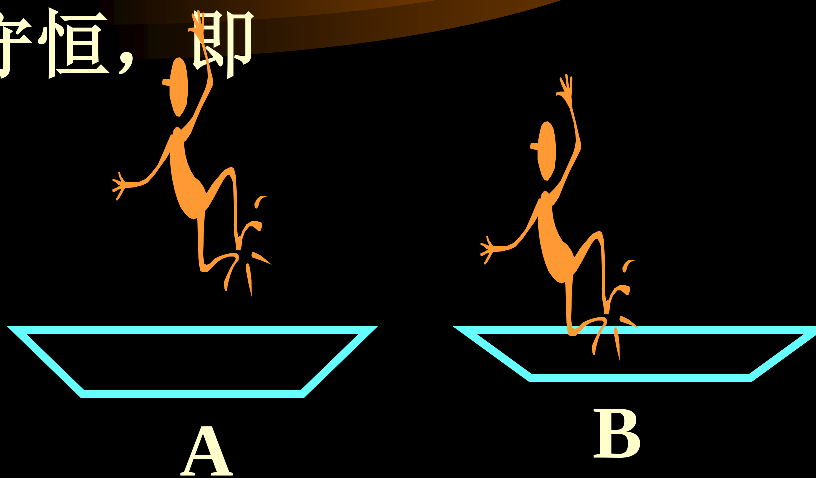
$$0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - G\frac{m_1 m_2}{d}$$

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_{2惯} + \vec{v}_{惯1} = \vec{v}_{2惯} - \vec{v}_{1惯}$$

习题册二　10　A、B两船质量为m，静止在平静的湖面上，A船上有一质量为m/2的人，以水平速度u相对A船从A船跳到B船上。如果忽略水对船的阻力，求人跳到B船后，A船和B船的速度。

解：在人跳出A船的过程中，水平方向无外力作用人、A船系统水平方向动量守恒，即

$$\begin{cases} 0 = m v_{A地} + \dfrac{m}{2} v_{人地} \\ v_{人地} = v_{人A} + v_{A地} = u + v_{A地} \end{cases}$$

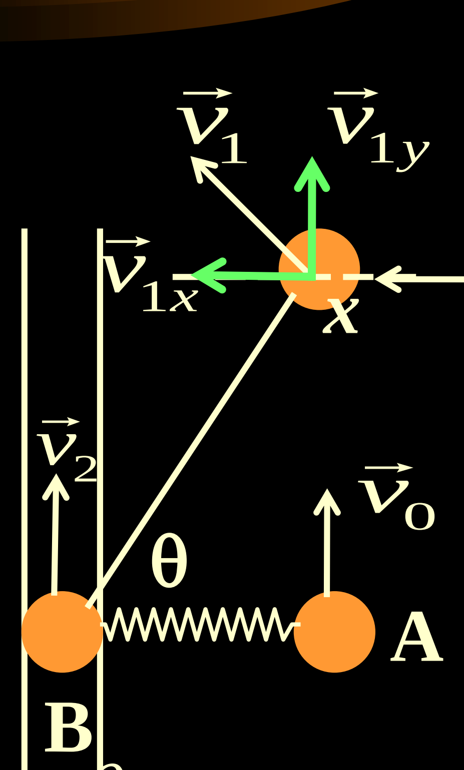


$$\Rightarrow v_{A地} = -\frac{1}{3} u$$ 方向与人跳出速度方向相反

同理人跳入B船过程，人、B船系统水平方向动量守恒

$$\frac{m}{2} v_{人地} = \left(m + \frac{m}{2} \right) v_{B地}$$

例4、小滑块A位于光滑水平桌面上，小滑块B处在位于桌面上的光滑小槽中，两滑块的质量都是m，并用长为l、不可伸长、无弹性的轻绳相连。开始时，A、B间的距离为$l/2$，A、B间的连线与小槽垂直，如图所示。今给滑块A一冲击，使之获得平行于槽的速度v_0，求滑块B开始运动时的速度。



解：设绳拉紧的瞬时，A的速度v_1，B的速度为v_2，建立图示坐标

y方向动量守恒

$$m v_0 = m v_{1y} + m v_2$$

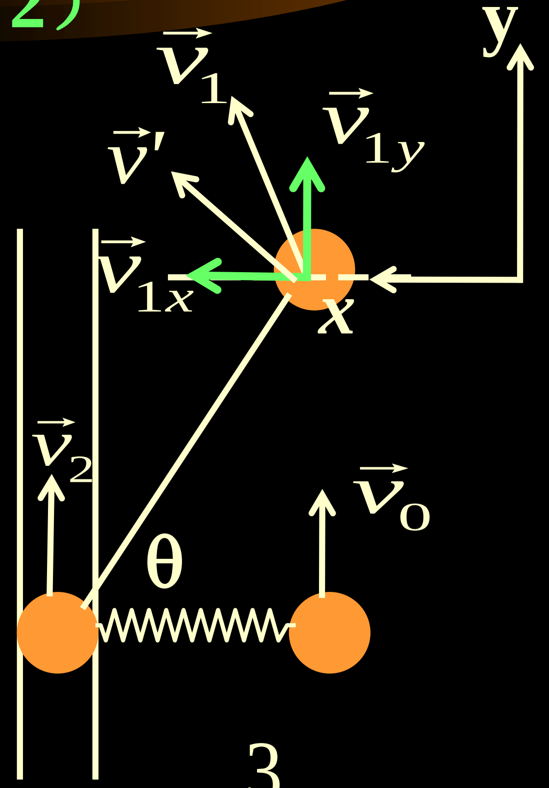
A对B所在位置的角动量守恒

$$m v_0 \frac{l}{2} = m v_{1x} l \sin\theta + m v_{1y} l \cos\theta$$

$$mv_0 = mv_{1y} + mv_2 \quad \Rightarrow v_0 = v_{1y} + v_2 \qquad (1)$$

$$mv_0\frac{l}{2} = mv_{1x}l\sin\theta + mv_{1y}l\cos\theta$$

$$\theta = 60^0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{3}v_{1x} + v_{1y} \qquad (2)$$



在绳拉紧时，A相对于B的运动是以B为中心的圆周运动v'⊥绳

$$\vec{v}_1 = \vec{v}' + \vec{v}_2$$

$$v_{1x} = v'\sin 60^0 \qquad (3)$$

$$v_{1y} = v'\cos 60^0 + v_2 \qquad (4)$$

联立（1）、（2）、（3）、（4）得 $v_2 = \dfrac{3}{7}v_0$