决策论

决策是指人们为了达到某个目标，而在若干种不同行动方案中做出的选择。

决策过程：

确定目标 → 收集信息 → 制定方案 → 选择方案 → 做出决策

决策问题的要素

决策者：决策的主体

状态（事件）集 E：由不受决策者控制的自然因素引发的事件的集合。

决策（方案）集 S：可供选择的行动方案

报酬（或损失）函数：定义在 $E \times S$ 上的一个二元函数，表示在某状态出现时，决策者采取某个行动方案得到的报酬或损失。

决策准则：衡量行动方案的标准

决策问题分类

按重要性分为战略决策、策略决策、执行决策

按决策的结构分为程序决策、非程序决策

按定量和定性分为定量决策、定性决策

按决策过程的连续性分为单项决策、序贯决策

按决策环境分为确定型、不确定型、风险型三类

确定型：决策者掌握了决策所需的各种信息，即对未来状态，以及各种行动方案的后果完全了解。

风险型：决策者对未来状态没有完全掌握，但能估算出它们的概率分布。

不确定型：决策者对未来状态一无所知，只能凭主观倾向进行决策。

1. 不确定型决策

假设：状态集 E 和决策集 S 皆为有限集。

$$E=\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}, \quad S=\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$$

报酬函数 $a_{ij}=a(E_i, S_j)$

数学模型可以用一个矩阵或表格表示：

a_{ij} \ E_j / S_i	E_1	E_2	$\cdots$	E_n
S_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
S_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
S_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

决策准则：悲观主义准则、乐观主义准则、
等可能性准则、最小机会损失准则

(1) 悲观（保守）主义准则
（maxmin准则，Wald准则）：

分析每种决策下的最坏结果，从中选择最好的。

即选择决策 S_k 使得 $\min\limits_{j} a_{kj} = \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$

注：如果是损失函数，悲观主义准则应选择 S_k 使得

$$\max_{j} a_{kj} = \min_{i} \max_{j} a_{ij}$$

(2) 乐观主义准则（maxmax准则）：

对每种决策按最有利的结果考量。

即选择决策 S_k 使得 $\max\limits_{j} a_{kj} = \max\limits_{i} \max\limits_{j} a_{ij}$

注：如果是损失函数，乐观主义准则应选择 S_k 使得

$$\min_j a_{kj} = \min_i \min_j a_{ij}$$

(3) 等可能性（Laplace）准则

Laplace 认为：在没有确切理由说明这一事件比另一事件发生的可能性大时，可以认为它们的机会均等，即每一事件发生的概率皆为 1/n，然后选择期望收益最大的决策。

即选择决策 S_k 使得 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj} = \max_i \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

注：如果是损失函数，Laplace 准则应选择 S_k 使得

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj} = \min_i \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

(4) 最小机会损失准则

（后悔值准则，Savage 准则）

决策者在事件发生后可能会对已经做出的决策后悔，希望一个更好的决策。定义

事件E_j发生时, 采取决策S_i的机会损失（后悔值）为:

$$a'_{ij} = \max_k a_{kj} - a_{ij}$$

注：如果是损失函数， 机会损失定义为 $a'_{ij} = a_{ij} - \min_k a_{kj}$

最小机会损失准则：从最大机会损失中选最小的，

即选择决策 S_k 使得 $\max_j a'_{kj} = \min_i \max_j a'_{ij}$

(5) 折衷主义准则（乐观系数法）：

悲观主义和乐观主义之间的折衷。

设 $0 \le \alpha \le 1$ 为乐观系数，选择决策 S_k 使得

$$\alpha \max_j a_{kj} + (1-\alpha)\min_j a_{kj}$$

$$= \max_i \left\{ \alpha \max_j a_{ij} + (1-\alpha)\min_j a_{ij} \right\}$$

例 1. 某商店打算销售某种夏季服装，预计销量可能为 1000、1500、2000、2500 件，每件服装的进货价为 100 元，销售价为 120 元，卖不完的服装可以在夏季末以每件 80 元处理掉，问如何决策可获得最大销售利润？

a_{ij} \ E_j / S_i	1000	1500	2000	2500
1000	2	2	2	2
1500	1	3	3	3
2000	0	2	4	4
2500	–1	1	3	5

利润表（万元）

maxmin 准则：

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max\left\{\begin{array}{l} \min\{2,2,2,2\}, \min\{1,3,3,3\} \\ \min\{0,2,4,4\}, \min\{-1,1,3,5\} \end{array}\right\}$$

$$= \max\{2,1,0,-1\} = 2$$

进货 1000 件。

maxmax 准则：

$$\max_i \max_j a_{ij} = \max\left\{\begin{matrix} \max\{2,2,2,2\}, \max\{1,3,3,3\} \\ \max\{0,2,4,4\}, \max\{-1,1,3,5\} \end{matrix}\right\}$$

$$= \max\{2\ ,3\ ,4\ ,5\} = 5$$

进货 **2500** 件。

乐观系数法 $(\alpha = 0.6)$：

$$\max_i \left\{\alpha \max_j a_{ij} + (1-\alpha)\min_j a_{ij}\right\}$$

$$= \max\left\{\begin{matrix} 0.6\times 2 + 0.4\times 2,\ \ 0.6\times 3 + 0.4\times 1 \\ 0.6\times 4 + 0.4\times 0,\ \ 0.6\times 5 - 0.4\times 1 \end{matrix}\right\}$$

$$= \max\{2\ ,2.2\ ,2.4\ ,2.6\} = 2.6$$

进货 **2500** 件。

Laplace 准则： $\max\limits_i \frac{1}{4}\sum\limits_j a_{ij} = \max\{2, 2.5, 2.5, 2\} = 2.5$

进货 1500 或 2000 件。

后悔值准则：

后悔值表

a'_{ij} \ E_j / S_i	1000	1500	2000	2500
1000	0	1	2	3
1500	1	0	1	2
2000	2	1	0	1
2500	3	2	1	0

$\min\limits_i \max\limits_j a'_{ij} = \min\{3, 2, 2, 3\} = 2$，进货 1500 或 2000 件。

2. 风险决策

决策者对未来状态没有完全掌握，但能估算出它们的概率分布。

(1) 最大期望收益准则

（**Expected Monetary Value，EMV**）

P_j：事件 E_j 发生的概率；

a_{ij}：采取决策 S_i，而事件 E_j 发生时的收益。

采取决策 S_i 时的期望收益 $\mathrm{EMV}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} P_j$

EMV 准则选取决策 S_k 使得 $\mathrm{EMV}_k = \max\limits_i \mathrm{EMV}_i$

(2) 最小期望机会损失准则

（Expected Opportunity Loss，EOL）

采取决策 S_i，而事件 E_j 发生时的机会损失为

$$a'_{ij} = \max_k a_{kj} - a_{ij}$$

采取决策 S_i 的期望机会损失 $\mathrm{EOL}_i = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} P_j$

EOL 准则选取决策 S_k 使得 $\mathrm{EOL}_k = \min_i \mathrm{EOL}_i$

性质：EOL 与 EMV 准则是一致的。

证明：$$\min_i \mathrm{EOL}_i = \min_i \sum_{j=1}^{n} \left(\max_k a_{kj} - a_{ij} \right) P_j$$

$$= \min_i \left(\sum_{j=1}^{n} \max_k a_{kj} P_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} P_j \right)$$

$$\Leftrightarrow \min_i\left(-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}P_j\right)$$

$$\Leftrightarrow \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}P_j = \max_i \mathrm{EMV}_i$$

(3) Bayes 决策

风险决策依赖决策者对各事件出现概率的估计，如果决策者通过调查、试验等途径能获得新的信息，并能利用这些信息修正原先对各事件出现概率的估计，则称修正后的概率为后验概率，原先的概率为先验概率。

后验概率、先验概率皆是主观概率。

用 **Bayes** 公式计算后验概率

假设决策者根据过去的经验或专家估计已获得各事件发生的先验概率：$P(E_1)$，$P(E_2)$，…，$P(E_n)$。

设调查或试验有 l 种可能的结果：A_1，A_2，…，A_l，并且通过分析已经知道事件为 E_j 时，试验结果为 A_k 的概率 $P(A_k|E_j)$。

则在试验结果为 A_k 时，事件 E_j 发生的概率为

$$P(E_j \mid A_k) = \frac{P(E_j)P(A_k \mid E_j)}{P(A_k)}$$

$$= \frac{P(E_j)P(A_k \mid E_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A_k \mid E_i)}$$

Bayes 决策以后验概率 $P(E_j|A_k)$ 为依据进行决策。

试验结果为 A_k 时的最大期望收益为

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} P(E_j \mid A_k)$$

试验前，决策者需对试验是否合算进行分析：

试验结果为 A_k 的概率 $P(A_k) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) P(A_k \mid E_i)$

试验前估算试验后的期望收益（后验期望收益）为

$$\sum_{k=1}^{l} P(A_k) \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} P(E_j \mid A_k)$$

当后验期望收益与先验 期望收益 $\max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} P(E_j)$ 之差大于试验费用时，可以 认为试验是合算的。

例 **2.** 某企业准备投产一种新产品，估计市场状况是畅销（E_1）、销路一般（E_2）、滞销（E_3）的概率分别为 **0.4**、**0.3**、**0.3**，三种市场状况下的盈利分别为 **200** 万元、 **100** 万元、−**100** 万元。若进行市场调查，调查费用 **5** 万元，调查结果也有畅销（A_1）、销路一般（A_2）、滞销（A_3）三种可能，实际市场状况为 E_j 时，调查结果为 A_k 的概率见下表，试为企业进行决策。

$P(A_k \mid E_j)$	E_1	E_2	E_3
A_1	0.7	0.1	0.1
A_2	0.2	0.8	0.2
A_3	0.1	0.1	0.7

调查结果为 A_k 的概率 $P(A_k)=\sum_{i=1}^{3}P(E_i)P(A_k\mid E_i)$

$$P(A_1)=0.4\times0.7+0.3\times0.1+0.3\times0.1=0.34$$

$$P(A_2)=0.4\times0.2+0.3\times0.8+0.3\times0.2=0.38$$

$$P(A_3)=0.4\times0.1+0.3\times0.1+0.3\times0.7=0.28$$

后验概率 $P(E_j\mid A_k)=\dfrac{P(E_j)P(A_k\mid E_j)}{P(A_k)}$

$P(E_j\mid A_k)$	E_1	E_2	E_3	$P(A_k)$
A_1	0.82	0.09	0.09	0.34
A_2	0.21	0.63	0.16	0.38
A_3	0.14	0.11	0.75	0.28
$P(E_j)$	0.4	0.3	0.3	

调查结果为 A_k 时投产的期望收益

$$A_1: \quad 0.82\times 200+0.09\times 100-0.09\times 100=164 \text{ 万元}$$

$$A_2: \quad 0.21\times 200+0.63\times 100-0.16\times 100=89 \text{ 万元}$$

$$A_3: \quad 0.14\times 200+0.11\times 100-0.75\times 100=-36 \text{ 万元}$$

因此，调查结果为 A_1 或 A_2 时投产，为 A_3 时不投产。

后验期望收益

$$0.34\times 164+0.38\times 89+0.28\times 0=89.58 \text{ 万元}$$

先验期望收益

$$\max\{0,\ 0.4\times 200+0.3\times 100-0.3\times 100\}=80 \text{ 万元}$$

即通过市场调查可增加期望收益 9.58 万元，大于调查费用，企业可以做市场调查。

(4) 完全信息（全情报）的价值（EVPI）

能完全准确地预测未来状态的信息称为完全信息。在获得完全信息的情况下，决策者能采取相应的决策而使收益最大化。 完全信息下的期望收益为

$$\sum_{j=1}^{n} P(E_j)\max_i a_{ij}$$

完全信息的价值

$$\mathrm{EVPI}=\sum_{j=1}^{n} P(E_j)\max_i a_{ij}-\max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}P(E_j)$$

对于例 2，完全信息下的期望收益为

$$0.4\times 200+0.3\times 100+0.3\times 0=110\ \text{万元}$$

$\mathrm{EVPI}=110-80=30$ 万元。