Real Analysis

Hansong Huang

ECUST

At ECUST

2019.03

Lebesgue积分

Lebesgue积分的引入

回顾（R）积分的主要性质

定义3.1.1

1. $f = \sum a_i \chi_{e_i} \in S^+(X)$, e_i两两不交，可测；$a_i \geq 0$, 定义

$$\int f d\mu = ?$$

定义3.1.1

1. $f=\sum a_i\chi_{e_i}\in S^+(X)$, e_i两两不交，可测；$a_i\geq 0$, 定义

$$\int f d\mu=\sum a_i \mu e_i.$$

定义3.1.1

1. $f=\sum a_i\chi_{e_i}\in S^+(X)$, e_i两两不交，可测；$a_i\geq 0$, 定义

$$\int f d\mu=\sum a_i\mu e_i.$$

esp. $a_i=0$, $\mu e_i=+\infty$, $a_i\mu(e_i)=0$.

定义3.1.1 1. $f = \sum a_i \chi_{e_i} \in S^+(X)$, e_i两两不交，可测；$a_i \geq 0$, 定义

$$\int f d\mu = \sum a_i \mu(e_i).$$

2. $f \in M^+(X)$. 规定

$$\int_X f d\mu = \sup_{??} \int h d\mu.$$

$?? : 0 \leq h \leq f, h \in M^+(X).$

定义3.1.1 1. $f=\sum a_i\chi_{e_i}\in S^+(X)$, e_i两两不交，可测；$a_i\geq 0$, 定义

$$\int fd\mu=\sum a_i\mu(e_i).$$

2. $f\in M^+(X)$. 规定

$$\int_X fd\mu=\sup_{??}\int hd\mu.$$

$??:0\leq h\leq f, h\in M^+(X).$
3. $f\in M(X)$, $f=f^+-f^-$

$$\int_X fd\mu=\int_X f^+d\mu-\int_X f^-d\mu?$$

定义3.1.1 1. $f=\sum a_i\chi_{e_i}\in S^+(X)$, e_i两两不交，可测；$a_i\geq 0$, 定义

$$\int f d\mu=\sum a_i\,\mu(e_i).$$

2. $f\in M^+(X)$. 规定

$$\int_X f d\mu=\sup_{??}\int h d\mu.$$

$??: 0\leq h\leq f, h\in M^+(X)$.

3. $f\in M(X)$,

$$\int_X f d\mu=\int_X f^+ d\mu-\int_X f^- d\mu?$$

条件，$\int_X f^+ d\mu$ 与$\int_X f^- d\mu$中一个有限.

定义3.1.1 1. $f=\sum a_i\chi_{e_i}\in S^+(X)$, e_i两两不交，可测；$a_i\geq 0$, 定义

$$\int fd\mu=\sum a_i\mu e_i.$$

2. $f\in M^+(X)$. 规定

$$\int_X fd\mu=\sup_{??}\int hd\mu.$$

$??:0\leq h\leq f, h\in M^+(X)$.

3. $f\in M(X)$,

$$\int_X fd\mu=\int_X f^+d\mu-\int_X f^-d\mu?$$

条件，$\int_X f^+d\mu$ 与$\int_X f^-d\mu$中一个有限.

$\int_X fd\mu$: f 在X 上关于测度μ的积分.

定义3.1.1 1. $f=\sum a_i\chi_{e_i}\in S^+(X)$, e_i两两不交，可测；$a_i\geq 0$, 定义

$$\int f d\mu=\sum a_i\mu(e_i).$$

思考: <u>这个定义与f的表达形式无关</u>

3. $f\in M(X)$,

$$\int_X f d\mu=\int_X f^+ d\mu-\int_X f^- d\mu?$$

条件，$\int_X f^+ d\mu$ 与$\int_X f^- d\mu$中一个有限.

<u>如果$\int_X f d\mu\in\mathbb{R}$, 称$f$ 在X 上可积.</u>

3. $f \in M(X)$,

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu?$$

条件，$\int_X f^+ d\mu$ 与$\int_X f^- d\mu$中一个有限.

如果$\int_X f d\mu \in \mathbb{R}$, 称$f$ 在X 上可积. $\Leftrightarrow$

$\int_X f^+ d\mu$ 与$\int_X f^- d\mu$都是有限的.

?? $\Leftrightarrow$ $\int_X (f^+ + f^-) d\mu$ 有限的,即$\int_X |f| d\mu$.

当f可测时，f 可积等价于$|f|$可积.

比较：面积元的Riemann积分，对于连续函数$h(x,y)$, h是$\mathcal{R}$-可积的等价于$|h|$是$\mathcal{R}$-可积的.

例:对任意可测集$A \subseteq X$,

$$\int_X \chi_A d\mu = 1 \cdot \mu A = \mu A$$

例:对任意可测集$A \subseteq X$,

$$\int_X \chi_A d\mu = 1 \cdot \mu A = \mu A = \int_A 1 d\mu.$$

例：Dirichelet函数. χ_Q, Q有理数集.

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_Q dm = mQ = 0$$

χ_Q Lebesgue可积($\mathcal{L}$ 可积),但不是Riemann可积($\mathcal{R}$可积).

3.1.2

$f \in M(X)$, $\int_X f d\mu$ 存在，$A \in \mathcal{A}$, 则$\int_A f d\mu$ 存在，且

$$\int_A f d\mu = \int_X f \cdot \chi_A d\mu.$$

3.1.2 $f \in M(X)$, $\int_X f d\mu$ 存在，$A \in \mathcal{A}$, 则$\int_A f d\mu$ 存在，且

$$\int_A f d\mu = \int_X f \cdot \chi_A d\mu.$$

证明：1. $f = \chi_e$.

2. $f = \sum a_i \chi_{e_i}$, $a_i \geq 0$.

3. $f = f^+ - f^-$.

记号： $\int_X f(x)d\mu(x)$.

$$\int_X f d\mu, \quad , \int f(x)d\mu(x);$$

$$\int_X f, \quad \int f, \int_X$$

$L^1(X,\mu) = \{f \in M(X) : \int_X f d\mu$ 有限$\}$.
$= \{f \in M(X) : \int_X |f| d\mu$ 有限$\}$.

$L^1(X,\mu) = \{f \in M(X) : \int_X |f| d\mu$ 有限$\}$.

$p > 0$, $L^p(X,\mu) = \{f \in M(X) : \int_X |f|^p d\mu$ 有限$\}$

$X \subseteq \mathbb{R}^n$, $L^1(X) = L^1(X, m)$. (m, Lebesgue测度) $L^1[a,b] = L^1([a,b], m)$.

思考：$L^1[a,b] = L^1(a,b)$.

Thank you!