Real Analysis 5.1

Hansong Huang

ECUST

At ECUST

2019.05

5.1 单调函数

为什么研究单调函数，只需要研究单增函数?

$$f \mapsto -f.$$

定理5.1.1 单调函数f在闭区间$[a,b]$上至多有可数个间断点，且只有第一类间断点.

第一类间断点：左右极限存在，但不相等.

一般，函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$在x附近的行为：
定义

$$\omega(x,\delta)=\sup\{|f(y')-f(y'')|:y',y''\in B(x,\delta)\}.$$

$\omega(x,\delta)$的意义，
固定f, x, $\omega(x,\delta)$关于δ单调？

一般，函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$在x附近的行为：
定义

$$\omega(x,\delta)=\sup\{|f(y')-f(y'')|:y',y''\in B(x,\delta)\}.$$

$\omega(x,\delta)$的意义，
固定f, x, $\omega(x,\delta)$关于δ单调？
f在x点连续，是否推出

$$\overline{\lim}_{\delta\to 0}\omega(x,\delta)<\varepsilon$$

一般，函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$在x附近的行为：
定义

$$\omega(x,\delta)=\sup\{|f(y')-f(y'')|:y',y''\in B(x,\delta)\}.$$

$\omega(x,\delta)$的意义，
固定f, x, $\omega(x,\delta)$关于δ单调？
f在x点连续，是否推出

$$\overline{\lim}_{\delta\to 0}\omega(x,\delta)<\varepsilon$$

$$\overline{\lim}_{\delta\to 0}\omega(x,\delta)=0.$$

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(x,\delta)=0.$$

$$\omega(x,\delta) = \sup\{|f(y') - f(y'')| : y', y'' \in B(x,\delta)\}.$$

f在x点连续$\Rightarrow \lim_{\delta\to 0}\omega(x,\delta) = 0.$
问题：$\Leftarrow$？证明你的直觉.

对于单调函数，f在任一点的左右极限都存在（Exercise: 给出证明。）

$$f(x^+) = \lim_{t\to 0^+} f(x+t), \quad f(x^-) = \lim_{t\to 0^+} f(x-t).$$

$$f(x^+) - f(x^-) \geq 0.$$

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(x,\delta) = f(x^+) - f(x^-).$$

对于单调函数，f在任一点的左右极限都存在（Exercise: 给出证明。）

$$f(x^+) = \lim_{t\to 0^+} f(x+t), \quad f(x^-) = \lim_{t\to 0^+} f(x-t).$$

$$f(x^+) - f(x^-) \geq 0.$$

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(x,\delta) = f(x^+) - f(x^-).$$

记$\omega(x) = f(x^+) - f(x^-)$.

$\omega(x) = 0$当且仅当f在x点连续. (?)

例子1 $D=\{x_n\}$是任一可数集. 构造单调函数恰以D为间断点集.

例子1 $D=\{x_n\}$是任一可数集. 构造单调函数恰以D为间断点集.

思考：如果只有一个点a, 作$\chi_{(a,+\infty)}$.

如果是有限个点？

例子1 $D=\{x_n\}$是任一可数集. 构造单调函数恰以D为间断点集.

思考：如果只有一个点a, 作$f=\chi_{(a,+\infty)}$.

如果是有限个点？

$$f=\sum_{i=1}^{n}\chi_{(x_i,+\infty)}.$$

例子1 $D=\{x_n\}$是任一可数集. 构造单调函数恰以D为间断点集.

思考：如果只有一个点a, 作$f=\chi_{(a,+\infty)}$.

如果是有限个点？

$$f=\sum_{i=1}^{n}\chi_{(x_i,+\infty)}.$$

无限个点？

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}\chi_{(x_i,+\infty)}?$$

例子1 $D=\{x_n\}$是任一可数集. 构造单调函数恰以D为间断点集.

思考：如果只有一个点a, 作$f=\chi_{(a,+\infty)}$.

如果是有限个点？

$$f=\sum_{i=1}^{n}\chi_{(x_i,+\infty)}.$$

无限个点？

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\chi_{(x_i,+\infty)}.$$

引理 设$F_n(n \geq 1)$ 是$[a,b]$上的实函数，且在x点连续. 如果$\{F_n\}$一致收敛于F,则F在x点连续.

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \chi_{(x_i,+\infty)}.$$

当$x \neq x_i, \forall i$, f 在x点连续.
当$x = x_i$, ??

引理 设$F_n(n \geq 1)$ 是$[a,b]$上的实函数，且在x点连续. 如果$\{F_n\}$一致收敛于F,则F在x点连续.

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \chi_{(x_i,+\infty)}.$$

当$x \neq x_i, \forall i$, f 在x点连续.
当$x = x_i$, ??

$$\sum_{j \neq i} \frac{1}{2^j} \chi_{(x_j,+\infty)}.$$

在$x = x_i$点连续，$\frac{1}{2^i}\chi_{(x_i,+\infty)}$ 在该点不连续，所以f在$x = x_i$点??

设f单调递增，定义f的**跳跃函数**

$$s(x)=\sum_{\xi<x}[f(\xi^+)-f(\xi^-)]+f(x)-f(x^-).$$

$$s(x)=\sum_{\xi<x}[\omega(\xi)]+f(x)-f(x^-)=\sum_{i:x_i<x}[\omega(x_i)]+f(x)-f($$

其中$D=\{x_i:i\geq 1\}$为其间断点.

练习：给出一个例子，如果f只有有限个间断点，s的图像意义？

定理5.1.2 对$[a,b]$上的增函数f,存在分解$f=\varphi+s$, 其中s是f的跳跃函数，φ连续增函数.

Homework: 证明定理5.1.2.

引理5.1.3 (Vitali覆盖引理设$D = \{d\}$是一长度为正的闭区间族，$E \subseteq \mathbb{R}$有界，$\forall x \in E, \delta > 0$, 存在$d \in D$,使得$x \in d$,且$md < \delta$,则存在可数个不相交的$d_k \in D$, 使得

$$m*(E \setminus \cup_k d_k) = 0, (?)$$

且$m*(E) \leq \sum_k md_k$.

引理5.1.3 (Vitali覆盖引理设$D = \{d\}$是一长度为正的闭区间族，$E \subseteq \mathbb{R}$有界，$\forall x \in E, \delta > 0$, 存在$d \in D$,使得$x \in d$,且$md < \delta$,则存在可数个不相交的$d_k \in D$, 使得

$$m * (E \backslash \cup_k d_k) = 0, (?)$$

且$m * (E) \leq \sum_k md_k$.

高维推广?

定理5.1.4（Lebesgue）$[a,b]$上的增函数f几乎处处可微且$f' \in L^1[a,b]$,

$$\int_a^b f'(t)dt \leq f(b) - f(a).$$

例子:$[a,b]$上的增函数f, 满足

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

证明:对任意$a \leq x < y \leq b$,成立

$$\int_x^y f'(t)dt = f(y) - f(x).$$

5.2 有界变差函数 单调函数的和、差在线性运算下是否封闭?

函数类BV, $BV[a,b]$.

设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, 存在常数$M>0$,使得对于任意划分P:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b,$$

$$V(f,P)\equiv\sum|f(x_i)-f(x_{i-1})\leq M,$$

那么称f为有界变差函数.

$\sup_P V(f,P)$称为f在区间$[a,b]$上的全变差. 记为$V_a^b(f)$. 简写为$V(f)$.

性质:

1. 如果$f \in$ BV, 那么f有界.

2. 如果$f, g \in$ BV, 那么$f+g$, $f-g$, fg都属于BV.

3.如果$f, g \in$ BV, 且$|g| \geq c > 0$, 那么$f/g \in$BV.

4. 如果$f, g \in$ BV, 则$|f|, f^{+}, f^{-}$ $f \vee g$, $f \wedge g \in$ BV.

(提示:

$$f \vee g = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$$

)

练习：如果$f, g \in \mathsf{BV}$, 那么

$$V(f+g) \leq V(f) + V(g).$$

注意：$V(-g) = V(g)$, 所以上式表明

$$V(f-g) \leq V(f) + V(g).$$

练习：如果f在$[0,1]$上连续可导，那么$f' \in$BV.

(记为$C^1[0,1] \subseteq \text{BV}[0,1]$)

Lip 函数的定义.

Lip函数类是有界变差函数.

5.2.3 $a < c < b$, 证明:

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) = V_a^b(f).$$

固定$f \in$ BV, 定义$\pi(x) = V_a^x(f)$.
证明：(i) π单调递增.
(ii)定义$v = \pi - f$, 则v单调递增.
结论：$f = \pi - v$, **BV中的函数可以表达为两个单调函数之差.**

BV中的函数可以表达为两个单调函数之差.

推论：1.f至多有可数个间断点。（第一类，第三类）

2. f的分解

3. f几乎处处可微.

4. $\int_a^b |f'| dt \leq V_a^b(f)$. (提示：$|f'| \leq \pi'$, a.e.)

思考：如果$f \in C[0,1]$几乎处处可微，
且$f \in L^1$, 那么是否有$f \in$BV?

例:

$$f(x) = x^a \sin\frac{1}{x}, x \in [0.1].$$

讨论何时f ∈BV. (重要.)

绝对连续函数

绝对连续函数，定义：设$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, 如果对于任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得对于$[a, b]$中两两不交的开区间(a_k, b_k)，且$\sum b_k - a_k < \delta$, 成立

$$\sum |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

那么称f在$[a, b]$上绝对连续.

练习：f是$[0,1]$上的单调函数，$f(1)-f(0)=\int_0^1 f'(t)dt$. 那么$f$是否是绝对连续函数?

反之？

问：Cantor函数是否是绝对连续函数？

$C^1[a,b]$.
Lip函数.

定理5.3.4 如果$g \in L^1[a,b]$. 定义$f(x)=\int_a^x g(t)dt$, 则$f \in$ AC.且f'几乎处处存在，$f'=g$,a.e.

定理5.3.5 Newton-Leibniz公式.

Thank you!