习题四

4.1 设$\left(X_1, X_2, ..., X_{16}\right)$是取自正态总体$N\left(\mu, 1\right)$的样本，设$H_0: \mu = 0, H_1;\ \mu \neq 0.$ 分别求以下列集合为拒绝域的检验犯第一类错误的概率.

(1)$\left\{\left(x_1, x_2, ..., x_{16}\right) \middle| 4\overline{x} < -1.6449\right\}$；

(2)$\left\{\left(x_1, x_2, ..., x_{16}\right) \middle| 2.08 < 4\overline{x} < 2.21\right\}$.

（1）**解** 犯第一类错误的概率为

$$P\left\{拒绝H_0 \middle| H_0为真\right\} = P\left\{4\overline{x} < -1.6449 \middle| \mu = 0\right\} = P\left\{\overline{x} < \frac{-1.6449}{4} \middle| \mu = 0\right\}$$

$$= P\left\{\frac{\overline{x} - 0}{\sqrt{1^2/16}} < \frac{-1.6449}{4\sqrt{12/16}}\right\} = \Phi\left(-1.6449\right) = 1 - \Phi\left(1.6449\right)$$

$$= 1 - 0.95 = 0.05$$

（2）犯第一类错误的概率为

$$P\left\{拒绝H_0 \middle| H_0为真\right\} = P\left\{2.08 < 4\overline{x} < 2.21 \middle| \mu = 0\right\} = P\left\{\frac{2.08}{4} < \overline{x} < \frac{2.21}{4} \middle| \mu = 0\right\}$$

$$= P\left\{\frac{2.08}{4\sqrt{\frac{1^2}{16}}} < \frac{\overline{x} - 0}{\sqrt{\frac{1^2}{16}}} < \frac{2.21}{4\sqrt{\frac{1^2}{16}}} \middle| \mu = 0\right\} = \Phi\left(2.21\right) - \Phi\left(2.08\right)$$

$$= 0.9864 - 0.9812 = 0.0052$$

4.2 设$\left(X_1, X_2, ..., X_{16}\right)$是取自正态总体$N\left(\mu, 1\right)$的样本，在显著性水平$\alpha = 0.05$下检验$H_0: \mu = 0, H_1;\ \mu \neq 0.$若正态总体的期望的真值为$\mu = 0.08$，求该检验犯第二类错误的概率.

解 犯第二类错误的概率为

$$\beta = P\left\{接受H_0 \middle| H_0为假\right\} = P\left\{统计量观测值落入接受域 \middle| \mu = 0.08\right\}$$

$$= P\left\{\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n} \in \omega_0 \middle| \mu = 0.08\right\} = P\left\{\left|\frac{\overline{x} - 0}{1}\sqrt{16}\right| \le \mu_{1-\frac{\alpha}{2}} \middle| \mu = 0.08\right\}$$

$$= P\left\{-1.96 \le 4\overline{x} \le 1.96 \middle| \mu = 0.08\right\} = P\left\{\frac{-1.96}{4} \le \overline{x} \le \frac{1.96}{4} \middle| \mu = 0.08\right\}$$

$$= P\left\{\frac{-1.96}{4} - 0.08 \le \bar{x} - 0.08 \le \frac{1.96}{4} - 0.08 \middle| \mu = 0.08\right\}$$

$$= P\left\{\frac{\frac{-1.96}{4} - 0.08}{\sqrt{\frac{1^2}{16}}} \le \frac{\bar{x} - 0.08}{\sqrt{\frac{1^2}{16}}} \le \frac{\frac{1.96}{4} - 0.08}{\sqrt{\frac{1^2}{16}}} \middle| \mu = 0.08\right\}$$

$$= P\left\{-1.96 - 0.32 \le \frac{\bar{x} - 0.08}{\sqrt{\frac{1^2}{16}}} \le 1.96 - 0.32 \middle| \mu = 0.08\right\}$$

$$= \Phi\left(1.64\right) - \Phi\left(-2.28\right) = \Phi\left(1.64\right) - \left[1 - \Phi\left(2.28\right)\right] = \Phi\left(1.64\right) + \Phi\left(2.28\right) - 1$$

$$= 0.9495 + 0.9887 - 1 = 0.9382$$

4.3 设总体 $\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，已知其中 $\sigma=\sigma_0$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是 ξ 的样本，μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$[\underline{\theta},\bar{\theta}]$，其中$\underline{\theta},\bar{\theta}=\bar{X}\mp u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$；检验$H_0$：$\mu=\mu_0$的统计量$U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$。证明：在显著水平$\alpha$下，拒绝假设$H_0$：$\mu=\mu_0$的充分必要条件是$\mu_0\notin[\underline{\theta},\bar{\theta}]$。这说明参数的区间估计与参数的假设检验有着一一对应的关系，可以用参数的区间估计代替参数的假设检验。

证　在显著水平α下，拒绝假设H_0 $\mu=\mu_0$的充分必要条件是

$$|U| > u_{1-\alpha/2} \text{，其中 } U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n} \text{，}$$

即

$$\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}\right| > u_{1-\alpha/2} \text{，}$$

也就是

$$\left|\bar{X}-\mu_0\right| > u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \text{，}$$

它等价于

$$\mu_0 < \bar{X}-u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \text{ 或 } \mu_0 > \bar{X}+u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \text{，}$$

即

$$\mu_0 \notin [\underline{\theta}, \overline{\theta}]\ ，\quad 其中\ \underline{\theta} = \overline{X} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\ ，\ \overline{\theta} = \overline{X} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\ 。$$

4.4 某车间加工的钢轴直径 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，根据长期积累的资料，已知其中 $\sigma = 0.012$（cm)。按照设计要求，钢轴直径的均值应该是 $\mu = 0.150$（cm）。现从一批钢轴中抽查 75 件，测得它们直径的样本均值为 0.154（cm)，问：这批钢轴的直径是否符合设计要求？（显著水平 $\alpha = 0.05$）

解 问题相当于要检验 H_0： $\mu = 0.150$ 。$n = 75$，$\overline{X} = 0.154$，已知 $\sigma = 0.012$ 。

$$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n} = \frac{0.154 - 0.150}{0.012}\sqrt{75} = 2.8868\ 。$$

对 $\alpha = 0.05$，查 $N(0,1)$ 分布表可得 $u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.9600$ 。

因为 $|\ U\ | = |\ 2.8868\ | > 1.9600$ ，所以拒绝 H_0： $\mu = 0.150$ ，这批钢轴的直径不符合设计要求。

4.5 某厂生产的一种保险丝，其熔化时间（单位：ms）$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，在正常情况下，标准差 $\sigma = 20$。现从某天生产的保险丝中抽取 25 个样品，测量熔化时间，计算得到样本均值为 $\overline{X} = 62.24$，修正样本方差为 $S^{*2} = 404.77$，问：这批保险丝熔化时间的标准差，与正常情况相比，是否有显著的差异？（显著水平 $\alpha = 0.05$）

解 问题相当于要检验 H_0：$\sigma = 20$ 。$n = 25$，$S^{*2} = 404.77$。

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1)\times 404.77}{20^2} = 24.286\ 。$$

对 $\alpha = 0.05$，查 χ^2 分布表可得

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(24) = 12.401,$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(24) = 39.364,$$

因为 $12.401 < \chi^2 = 24.286 < 39.364$ ， 所以接受 H_0：$\sigma = 20$ ，这批保险丝熔化时间的标准差，与正常情况相比，没有显著的差异。

4.6　从切割机切割所得的金属棒中，随机抽取 15 根，测得长度（单位：cm）为：

10.5 ，10.6 ，10.1 ，10.4 ，10.5 ，10.3 ，10.3 ，10.2 ，
10.9 ，10.6 ，10.8 ，10.5 ，10.7 ，10.2 ，10.7 。

设金属棒长度 $\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$ 。问：

（1）是否可以认为金属棒长度的平均值 $\mu = 10.5$ ？（显著水平$\alpha = 0.05$）

（2）是否可以认为金属棒长度的标准差 $\sigma = 0.15$ ？（显著水平$\alpha = 0.05$）

解　$n = 15$，$\overline{X} = 10.4867$，$S^* = 0.235635$ 。

（1）问题相当于要检验 H_0：$\mu = 10.5$。

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S^*}\sqrt{n} = \frac{10.4867 - 10.5}{0.235635} \times \sqrt{15} = -0.2192$$ 。

对$\alpha = 0.05$，查t分布表可得 $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(14) = 2.1448$ 。

因为 $|T| = |-0.2192| < 2.1448$ ，所以接受 H_0：$\mu = 10.5$ ；

（2）问题相当于要检验 H_0：$\sigma = 0.15$ 。

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2} = \frac{(15-1) \times 0.235635^2}{0.15^2} = 34.548$$ 。

对$\alpha = 0.05$，查χ^2分布表可得

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(14) = 5.629,\quad \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(14) = 26.119,$$

因为 $\chi^2 = 34.548 > 26.119$ ，所以拒绝 H_0：$\sigma = 0.15$ 。

4.7　某化工产品的含硫量 $\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中μ、$\sigma > 0$ 都未知，取 5 个样品，测得含硫量为：

4.28，4.40，4.42，4.35，4.37 。

（1）检验假设 H_0：$\mu = 4.50$ （显著水平$\alpha = 0.05$）；

（2）检验假设 H_0：$\sigma = 0.04$ （显著水平 $\alpha = 0.05$）。

解　　$n = 5$，$\overline{X} = 4.364$，$S^* = 0.054129$ 。

（1）
$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S^*}\sqrt{n} = \frac{4.364 - 4.50}{0.054129} \times \sqrt{5} = -5.618$$ 。

对$\alpha = 0.05$，查t分布表可得 $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(4) = 2.7764$ 。

因为 $|T| = |-5.618| = 5.618 > 2.7764$ ，所以拒绝 H_0： $\mu = 4.50$ ；

（2） $$\chi^2 = \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2} = \frac{(5-1)\times 0.054129^2}{0.04^2} = 7.325$$ 。

对$\alpha = 0.05$，查χ^2分布表可得

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(4) = 0.484，\quad \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(4) = 11.143，$$

因为 $0.484 < \chi^2 = 7.325 < 11.143$ ，所以接受 H_0： $\sigma = 0.04$ 。

4.8 甲、乙两台机床生产同一种型号的滚珠。从甲机床生产的滚珠中抽取 8 颗，测得滚珠直径的样本均值为$\bar{X} = 15.012$，修正样本标准差为$S_x^* = 0.309$；从乙机床生产的滚珠中抽取 9 颗，测得滚珠直径的样本均值为$\bar{Y} = 14.989$，修正样本标准差为$S_y^* = 0.162$。设两台机床生产的滚珠直径都服从正态分布，而且方差相等。问：这两台机床生产滚珠直径的平均值是否有显著的差异？（显著水平$\alpha = 0.05$）

解 设甲、乙两台机床生产的滚珠直径分别为 $\xi \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $\eta \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，其中 $\sigma_1 = \sigma_2$。问题相当于要检验 H_0： $\mu_1 = \mu_2$ 。

$$m = 8，\ \bar{X} = 15.012，\ S_x^* = 0.309，\ n = 9，\ \bar{Y} = 14.989，\ S_y^* = 0.162$$ 。

$$S_w = \sqrt{\frac{(m-1)S_x^{*2} + (n-1)S_y^{*2}}{m+n-2}} = \sqrt{\frac{(8-1)\times 0.309^2 + (9-1)\times 0.162^2}{8+9-2}} = 0.24198$$ ，

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} = \frac{15.012 - 14.989}{0.24198 \times \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{9}}} = 0.1956$$ 。

对$\alpha = 0.05$，查t分布表可得 $t_{1-\alpha/2}(m+n-2) = t_{0.975}(15) = 2.1314$ 。

因为$|T| = |0.1956| = 0.1956 < 2.1314$ ，所以接受 H_0： $\mu_1 = \mu_2$ ，这两台机床生产滚珠直径的平均值没有显著的差异。

4.9 甲、乙两台机床加工同一种零件，从这两台机床加工的零件中，随机抽取一些样品，测得它们的外径（单位：mm）如下：

机床甲	20.5，19.8，19.7，20.4，20.1，20.0，19.0，19.9
机床乙	19.7，20.8，20.5，19.8，19.4，20.6，19.2

假定零件的外径服从正态分布，问：
（1）是否可以认为两台机床加工零件外径的方差相等？（显著水平$\alpha = 0.05$）
（2）是否可以认为两台机床加工零件外径的均值相等？（显著水平$\alpha = 0.05$）

解　设甲、乙两台机床加工零件的外径分别为 $\xi \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $\eta \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$。

$m = 8$，$\overline{X} = 19.925$，$S_x{*} = 0.46522$，$S_x{*}^2 = 0.21643$；

$n = 7$，$\overline{Y} = 20.000$，$S_y{*} = 0.62981$，$S_y{*}^2 = 0.39667$。

（1）问题相当于要检验 H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$。

$$F = \frac{S_x{*}^2}{S_y{*}^2} = \frac{0.21643}{0.39667} = 0.5456$$。

对$\alpha = 0.05$，查F分布表，可得

$$F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1) = F_{0.975}(7, 6) = 5.70$$，

$$F_{\alpha/2}(m-1, n-1) = \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)} = \frac{1}{F_{0.975}(6, 7)} = \frac{1}{5.12} = 0.195$$，

因为 $0.195 < F = 0.5456 < 5.70$，所以接受 H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，可以认为两台机床加工零件的外径的方差相等。

（2）　问题相当于要检验 H_0：$\mu_1 = \mu_2$。

$$S_w = \sqrt{\frac{(m-1)S_x{*}^2 + (n-1)S_y{*}^2}{m+n-2}} = \sqrt{\frac{(8-1)\times 0.21643 + (7-1)\times 0.39667}{8+7-2}} = 0.54737$$，

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} = \frac{19.925 - 20.000}{0.54737 \times \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{7}}} = -0.2647$$。

对$\alpha = 0.05$，查t分布表可得 $t_{1-\alpha/2}(m+n-2) = t_{0.975}(13) = 2.1604$。

因为 $|T| = |-0.2647| = 0.2647 < 2.1604$，所以接受 H_0：$\mu_1 = \mu_2$，可以认为两台机床加工零件外径的均值相等。

4.10　按两种不同的配方生产橡胶，测得橡胶伸长率（单位：%）如下：

配方一	540，533，525，520，544，531，536，529，534
配方二	565，577，580，575，556，542，560，532，570，561

如果橡胶的伸长率服从正态分布，两种配方生产的橡胶伸长率的标准差是否有显著差异？（显著水平$\alpha = 0.05$）

解　设两种配方生产的橡胶伸长率分别为 $\xi \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $\eta \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$。问题相

当于要检验 H_0：$\sigma_1=\sigma_2$ 。

$m=9$， $S_x{*}^2=53.7778$；$n=10$， $S_y{*}^2=236.844$ 。

$$F=\frac{S_x{*}^2}{S_y{*}^2}=\frac{53.7778}{236.844}=0.227$$ 。

对 $\alpha=0.05$，查 F 分布表，可得

$$F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)=F_{0.975}(8,9)=4.10$$ ，

$$F_{\alpha/2}(m-1,n-1)=\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n-1,m-1)}=\frac{1}{F_{0.975}(9,8)}=\frac{1}{4.36}=0.229$$ ，

因为 $F=0.227<0.229$ ，所以拒绝 H_0：$\sigma_1=\sigma_2$ ，两种配方生产的橡胶伸长率的标准差有显著差异。

4.11 设一种元件的寿命服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，如果平均寿命不低于 1000 小时则为合格品，现从这批元件中随机地抽取了 25 件，测得样本的平均寿命为 966 小时。

（1）如果已知 $\sigma=100$ 小时，问在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，能否认为这批元件是合格的？

（2）假如 σ 未知，但已知所抽取的样本的修正标准差 $S^*=100$ 小时，结论又是什么？

解 问题相当于要检验 H_0：$\mu\ge 1000$（备选假设 H_1：$\mu<1000$）。

（1）已知 $\sigma=100$ ，$n=25$，$\overline{X}=966$，

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}=\frac{966-1000}{100}\times\sqrt{25}=-1.70$$ 。

对 $\alpha=0.05$，$1-\alpha=0.95$，查 $N(0,1)$ 分布表，可得分位数 $u_{1-\alpha}=u_{0.95}=1.645$ ，因为 $U=-1.70<-1.645=-u_{1-\alpha}$ ，所以拒绝 H_0：$\mu\ge 1000$ ，不能认为这批元件是合格的。

（2）σ 未知，但已知 $S^*=100$ ，

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S^*}\sqrt{n}=\frac{966-1000}{100}\times\sqrt{25}=-1.70$$ 。

对 $\alpha=0.05$，$1-\alpha=0.95$，自由度 $n-1=25-1=24$，查 t 分布表，可得分位数 $t_{1-\alpha}(n-1)=t_{0.95}(24)=1.7109$，因为 $T=-1.70>-1.7109=-t_{1-\alpha}(n-1)$，所以接受 H_0：$\mu\ge 1000$ ，可以认为这批元件是合格的。

4.12 设锰的熔化点（单位：℃）服从正态分布。进行 5 次试验，测得锰的熔化点如下：

1269 ，1271 ，1256 ，1265 ，1254 。

是否可以认为锰的熔化点显著高于 1250℃ ？（显著水平$\alpha = 0.05$）

解 设锰的熔化点$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，问题相当于要检验H_0：$\mu \le 1250$（H_1：$\mu > 1250$ ）。

$$n = 5，\ \overline{X} = 1263，\ S^* = 7.64853\ ，\ T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S^*}\sqrt{n} = \frac{1263 - 1250}{7.64853}\sqrt{5} = 3.8006。$$

对$\alpha = 0.05$，查 t 分布表，可得 $t_{1-\alpha}(n-1) = t_{0.95}(4) = 2.1318$ 。

因为 $T = 3.8006 > 2.1318$ ，所以拒绝 H_0：$\mu \le 1250$ ，接受 H_1：$\mu > 1250$ 。可认为锰的熔化点显著高于 1250℃。

4.13 某种导线的电阻（单位：Ω）服从正态分布，按照规定，电阻的标准差不得超过 0.005 。今在一批导线中任取 9 根，测得修正样本标准差 $S^* = 0.007$ ，这批导线的电阻的标准差，比起规定的电阻的标准差来，是否显著地偏大？（显著水平$\alpha = 0.05$）

解 设导线电阻$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，问题相当于要检验H_0：$\sigma \le 0.005$（H_1：$\sigma > 0.005$ ）。

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2} = \frac{(9-1)\times 0.007^2}{0.005^2} = 15.68\ 。$$

对$\alpha = 0.05$，查 χ^2 分布表，可得$\chi^2_{1-\alpha}(n-1) = \chi^2_{0.95}(8) = 15.507$。

因为$\chi^2 = 15.68 > 15.507$ ，所以拒绝 H_0：$\sigma \le 0.005$ ，接受H_1：$\sigma > 0.005$ 。这批导线的电阻的标准差，比起规定的电阻的标准差来，显著地偏大。

4.14 某厂从用旧工艺和新工艺生产的灯泡中，各取 10 只进行寿命试验，测得旧工艺生产的灯泡寿命的样本均值为 2460 小时，修正样本标准差为 56 小时；新工艺生产的灯泡寿命的样本均值为 2550 小时，修正样本标准差为 48 小时。设新、旧工艺生产的灯泡寿命都服从正态分布，而且方差相等。问：能否认为采用新工艺后，灯泡的平均寿命有显著的提高？（显著水平$\alpha = 0.05$）

解 设旧工艺生产的灯泡寿命和新工艺生产的灯泡寿命分别为总体 $\xi \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $\eta \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，其中$\sigma_1 = \sigma_2$。问题相当于要检验 H_0：$\mu_1 \ge \mu_2$（H_1：$\mu_1 < \mu_2$）。

$$m = 10，\ \overline{X} = 2460，\ S_x^* = 56，\ n = 10，\ \overline{Y} = 2550，\ S_y^* = 48，$$

$$S_w = \sqrt{\frac{(m-1)S_x^{*2} + (n-1)S_y^{*2}}{m+n-2}} = \sqrt{\frac{(10-1)\times 56^2 + (10-1)\times 48^2}{10+10-2}} = 52.1536\ ，$$

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}=\frac{2460-2550}{52.1536\times\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}}=-3.859$$ 。

对$\alpha=0.05$，查t分布表可得 $t_{1-\alpha}(m+n-2)=t_{0.95}(18)=1.7341$ 。

因为$T=-3.859<-1.7341$ ，所以拒绝 H_0： $\mu_1\ge\mu_2$ ，接受H_1： $\mu_1<\mu_2$ 。可以认为采用新工艺后，灯泡的平均寿命有显著的提高。

4.15 某厂从用新、旧工艺生产的灯泡中各取n只测试其寿命，设新、旧工艺生产的灯泡寿命分别为$\xi\sim N\left(\mu_1,\sigma_1{}^2\right)$和$\eta\sim N\left(\mu_2,\sigma_2{}^2\right)$，其样本分别记为$\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$和$\left(Y_1,Y_2,...,Y_n\right)$.令$Z_i=X_i-Y_i\left(i=1,2,...,\mathrm{n}\right)$；$Z_i$的均值为$\overline{Z}$；样本修正方差记为$S_z^{*2}$.（1）证明$\frac{\overline{Z}-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{S_z^*}\sqrt{n}\sim t\left(n-1\right)$；（2）求显著性水平$\alpha$下，$H_0:\mu_1=\mu_2$的拒绝域.

（1）**证明** 因新旧工艺生产的灯泡寿命可以认为相互独立，即ξ与η独立。

$Z_i=X_i-Y_i\left(i=1,2,...,n\right)$可以视为$Z=\xi-\eta$的样本。

$$EZ=E\xi-E\eta=\mu_1-\mu_2。$$

于是根据定理 6 有$\frac{\overline{Z}-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{S_Z^*}\sim t\left(n-1\right)$。

（2）根据（1）的结论有

$$\frac{\overline{Z}-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{S_Z^*}\sim t\left(n-1\right)$$

若$H_0:\mu_1=\mu_2$成立，选取检验统计量为$T=\frac{\overline{Z}-0}{S_Z^*}\sim t\left(n-1\right)$，显著性水平$\alpha$下，$H_0$的拒绝域为$\left|T\right|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)$。

4.16 甲、乙两台车床生产的滚珠的直径（单位：mm）都服从正态分布，现从两台车床生产的滚珠中分别抽取 8 个和 9 个，测得直径如下：

甲车床生产的滚珠	15.0，14.5，15.2，15.5，14.8，15.1，15.2，14.8
乙车床生产的滚珠	15.2，15.0，14.8，15.2，15.0，15.0，14.8，15.1，14.8

问：乙车床产品的方差是否显著地小于甲车床产品的方差？（显著水平$\alpha=0.05$）

解 设甲乙两台车床生产的滚珠的直径分别为 $\xi\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $\eta\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$。

问题相当于要检验 H_0：$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$（$H_1$：$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ）。

$m = 8$， $S_x{*}^2 = 0.0955357$；$n = 9$， $S_y{*}^2 = 0.0261111$ 。

$$F = \frac{S_x{*}^2}{S_y{*}^2} = \frac{0.0955357}{0.0261111} = 3.66 \text{ 。}$$

对 $\alpha = 0.05$，查 F 分布表，可得 $F_{1-\alpha}(m-1, n-1) = F_{0.95}(7,8) = 3.50$。

因为 $F = 3.66 > 3.50$ ，拒绝 H_0：$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$ ，接受 H_1：$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ 。可认为乙车床产品的方差显著地小于甲车床产品的方差。

4.17 一颗六面体的骰子掷了 300 次，出现各种点数的频数统计如下：

点数	1	2	3	4	5	6
频数	43	49	56	45	66	41

是否可以认为这颗骰子是均匀的？（显著水平 $\alpha = 0.05$）

解 骰子掷出的点数可以看作是一个总体 ξ ，问题相当于要检验假设

$$H_0：\xi \sim P\{\xi = k\} = \frac{1}{6}，\ k = 1,2,3,4,5,6 \text{ 。}$$

作分点 $0.5 < 1.5 < 2.5 < 3.5 < 4.5 < 5.5 < 6.5$， 把 ξ 的取值范围分成下列 6 个区间

$$(k - 0.5, k + 0.5]，\ k = 1,2,3,4,5,6 \text{ 。}$$

H_0 为真时，ξ 落在各区间中的概率为

$$p_k = P\{\, k - 0.5 < \xi \le k + 0.5 \,\} = P\{\xi = k\} = \frac{1}{6} \ ，\ k = 1,2,3,4,5,6 \text{ 。}$$

$$\chi^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r} \frac{n_k^2}{p_k} - n = \frac{1}{300}\left(\frac{43^2}{1/6} + \frac{49^2}{1/6} + \frac{56^2}{1/6} + \frac{45^2}{1/6} + \frac{66^2}{1/6} + \frac{41^2}{1/6}\right) - 300 = 8.96 \text{ 。}$$

对显著水平 $\alpha = 0.05$，$1-\alpha = 0.95$, 自由度 $r - 1 = 6 - 1 = 5$，查 χ^2 分布表，可得

$\chi^2_{1-\alpha}(r-1) = \chi^2_{0.95}(5) = 11.070$ 。

因为 $\chi^2 = 8.96 < 11.070$，所以接受 H_0，可以认为这颗骰子是均匀的。

4.18 在圆周率 π=3.1415926535⋯ 的前 800 位小数中，数字 0，1，2，⋯，9 出现的频数统计如下：

数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
频数	74	92	83	79	80	73	77	75	76	91

是否可以认为各种数字出现的可能性是相同的？（显著水平 $\alpha = 0.05$）

解　设 ξ 是在圆周率小数中出现的数字，问题相当于要检验

$$H_0：\xi \sim P\{\xi = k\} = \frac{1}{10}，\ k = 0,1,\cdots,9。$$

作分点 $-0.5 < 0.5 < 1.5 < 2.5 < 3.5 < 4.5 < 5.5 < 6.5 < 7.5 < 8.5 < 9.5$，把 ξ 的取值范围分成 10 个区间：$(k-0.5, k+0.5]$，$k = 0,1,\cdots,9$。

H_0 为真时，ξ 落在各区间中的概率为：

$$p_k = P\{k-0.5 < \xi \le k+0.5\} = P\{\xi = k\} = \frac{1}{10}，\ k = 0,1,\cdots,9。$$

$$\chi^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{9}\frac{n_k^2}{p_k} - n = \frac{1}{800}(\frac{74^2}{1/10} + \frac{92^2}{1/10} + \frac{83^2}{1/10} + \cdots + \frac{91^2}{1/10}) - 800 = 5.125 。$$

对显著水平 $\alpha = 0.05$，$1-\alpha = 0.95$，自由度 $r-1 = 10-1 = 9$，查 χ^2 分布表，可得 $\chi^2_{1-\alpha}(r-1) = \chi^2_{0.95}(9) = 16.919$。

因为 $\chi^2 = 5.125 < 16.919$，所以接受 H_0，可以认为各种数字出现的可能性是相同的。

4.19　某电话总机在一天中各个时间段内接到的电话数统计如下：

时间段	0:00～9:00	9:00～12:00	12:00～15:00	15:00～24:00
电话数	189	132	121	198

问：是否可以认为电话的来到时刻 ξ 服从 $[\,0, 24\,]$ 上的均匀分布？（显著水平 $\alpha = 0.05$）

解　问题相当于要检验假设 H_0：$\xi \sim U(0, 24)$。

作分点 $0 < 9 < 12 < 15 < 24$，把 ξ 的取值范围分成下列 4 个区间

$$(0, 9]，(9, 12]，(12, 15]，(15, 24] 。$$

H_0：$\xi \sim U(0, 24)$ 为真时，ξ 落在各区间中的概率为

$$p_1 = P\{\,0 < \xi \le 9\,\} = \frac{9-0}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}，$$
$$p_2 = P\{\,9 < \xi \le 12\,\} = \frac{12-9}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}，$$
$$p_3 = P\{\,12 < \xi \le 15\,\} = \frac{15-12}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}，$$
$$p_4 = P\{\,15 < \xi \le 24\,\} = \frac{24-15}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}。$$

$$\chi^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k^2}{p_k}-n=\frac{1}{640}\times(\frac{189^2}{3/8}+\frac{132^2}{1/8}+\frac{121^2}{1/8}+\frac{198^2}{3/8})-640=73$$ 。

对显著水平$\alpha=0.05$，$r-1=3$, 查χ^2分布表，可得$\chi^2_{1-\alpha}(r-1)=\chi^2_{0.95}(3)=7.815$。

因为$\chi^2=73>7.815$，所以拒绝 H_0：$\xi\sim U(0,24)$，不能认为电话的来到时刻服从[0, 24]上的均匀分布。

4.20 一个四面体的骰子，四面分别涂上红、黄、蓝、白四种颜色，任意抛掷，直到白色一面朝下为止，记录下所需的抛掷次数，做这样的试验 200 次，得到结果如下：

到白色一面朝下为止所需的抛掷次数	1	2	3	4	⩾5
出现这种结果的频数	56	48	32	28	36

问：是否可以认为这颗四面体骰子是均匀的？（显著水平$\alpha=0.05$）

解 如果四面体骰子是均匀的，则每次抛掷，得到白色一面朝下的概率为$p=\frac{1}{4}$。设ξ是连续抛掷，直到白色一面朝下为止，记录下的抛掷次数，则ξ应该服从几何分布$g(\frac{1}{4})$：

$$P\{\xi=k\}=(1-p)^{k-1}p=(\frac{3}{4})^{k-1}\times\frac{1}{4}\quad,\quad k=1,2,3,\cdots$$ 。

所以，问题相当于要检验假设 H_0：$\xi\sim g(\frac{1}{4})$ 。

作分点 $0.5<1.5<2.5<3.5<4.5<+\infty$， 把 ξ 的取值范围分成下列 5 个区间

$$(0.5,1.5]，(1.5,2.5]，(2.5,3.5]，(3.5,4.5]，(4.5,+\infty)$$ 。

H_0：$\xi\sim P\{\xi=k\}=(\frac{3}{4})^{k-1}\times\frac{1}{4}$ ，$k=1,2,3,\cdots$为真时，ξ落在各区间中的概率为

$$p_1=P\{\,0.5<\xi\le1.5\,\}=P\{\,\xi=1\,\}=(\frac{3}{4})^0\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\ ,$$

$$p_2=P\{\,1.5<\xi\le2.5\,\}=P\{\,\xi=2\,\}=(\frac{3}{4})^1\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}\ ,$$

$$p_3=P\{\,2.5<\xi\le3.5\,\}=P\{\,\xi=3\,\}=(\frac{3}{4})^2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{64}\ ,$$

$$p_4=P\{\,3.5<\xi\le4.5\,\}=P\{\,\xi=4\,\}=(\frac{3}{4})^3\times\frac{1}{4}=\frac{27}{256}\ ,$$

$$p_5=P\{\,4.5<\xi<+\infty\,\}=1-p_1-p_2-p_3-p_4=1-\frac{1}{4}-\frac{3}{16}-\frac{9}{64}-\frac{27}{256}=\frac{81}{256}$$ 。

$$\chi^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k^2}{p_k}-n=\frac{1}{200}\times(\frac{56^2}{1/4}+\frac{48^2}{3/16}+\frac{32^2}{9/64}+\frac{28^2}{27/256}+\frac{36^2}{81/256})-200=18.216$$ 。

对显著水平$\alpha=0.05$，$r-1=4$, 查χ^2分布表，可得$\chi^2_{1-\alpha}(r-1)=\chi^2_{0.95}(4)=9.488$。

因为$\chi^2 = 18.216 > 9.488$，所以拒绝 H_0：$\xi \sim g(\frac{1}{4})$，不能认为这颗四面体骰子是均匀的。

4.21　从某厂生产的布匹中抽查50匹，查得布匹上的疵点数如下：

疵点数	0	1	2	3	≥4
频数	20	16	8	6	0

问:是否可以认为每匹布上的疵点数 ξ 服从Poisson(普阿松)分布?（显著水平$\alpha = 0.05$）

解　问题相当于要检验 H_0：$\xi \sim P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$，$k = 0,1,2,\cdots$，其中含有一个未知参数$\lambda$。

先求λ的极大似然估计。在习题三的3.3题中，我们已经推导出，当总体服从Poisson分布时，λ的极大似然估计为 $\hat{\lambda} = \overline{X}$。所以有

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r} n_k x_k = \frac{1}{50}\times(20\times 0 + 16\times 1 + 8\times 2 + 6\times 3) = 1 \text{ 。}$$

作分点 $-0.5 < 0.5 < 1.5 < 2.5 < +\infty$， 把 ξ 的取值范围分成4个区间：

$$(-0.5, 0.5]，(0.5, 1.5]，(1.5, 2.5]，(2.5, +\infty)\text{。}$$

H_0为真时，ξ 落在各区间中的概率的估计值为：

$$\hat{p}_1 = \hat{P}\{-0.5 < \xi \le 0.5\} = \hat{P}\{\xi = 0\} = \frac{\hat{\lambda}^0}{0\,!}\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}} = \frac{1^0}{0\,!}\mathrm{e}^{-1} = 0.36788 \text{ ，}$$

$$\hat{p}_2 = \hat{P}\{0.5 < \xi \le 1.5\} = \hat{P}\{\xi = 1\} = \frac{\hat{\lambda}^1}{1\,!}\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}} = \frac{1^1}{1\,!}\mathrm{e}^{-1} = 0.36788 \text{ ，}$$

$$\hat{p}_3 = \hat{P}\{1.5 < \xi \le 2.5\} = \hat{P}\{\xi = 2\} = \frac{\hat{\lambda}^2}{2\,!}\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}} = \frac{1^2}{2\,!}\mathrm{e}^{-1} = 0.18394 \text{ ，}$$

$$\hat{p}_4 = \hat{P}\{2.5 < \xi < +\infty\} = 1 - \hat{P}\{\xi \le 2.5\} = 1 - \hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \hat{p}_3$$
$$= 1 - 0.36788 - 0.36788 - 0.18394 = 0.08030 \text{ 。}$$

$$\chi^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{4}\frac{n_k^2}{\hat{p}_k} - n = \frac{1}{50}\times(\frac{20^2}{0.36788} + \frac{16^2}{0.36788} + \frac{8^2}{0.18394} + \frac{6^2}{0.08030}) - 50 = 1.589 \text{ 。}$$

对 $\alpha = 0.05$，$1-\alpha = 0.95$，自由度 $r - m - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$ ，查χ^2分布表，可得$\chi^2_{1-\alpha}(r-m-1) = \chi^2_{0.95}(2) = 5.991$。

由于 $\chi^2=1.589<5.991$，因此接受 H_0：$\xi\sim P\{\xi=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$，$k=0,1,2,\cdots$，可以认为每匹布上的疵点数服从 Poisson 分布。

4.22　从某车床生产的滚珠中，抽取 50 颗，测得它们的直径（单位：mm）落在各区间中的频数为：

区间	(14.14,14.51]	(14.51,14.88]	(14.88,15.25]	(15.25,15.62]	(15.62,15.99]
频数	6	8	20	11	5

已知滚珠直径的样本均值为 $\overline{X}=15.078$，样本标准差为 $S=0.428154$。

问：滚珠的直径 ξ 是否服从正态分布？（显著水平 $\alpha=0.05$）

解　问题相当于要检验 H_0：$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中，参数 μ，σ 都未知。

在 3.1 节的例 5 中，我们已经推导出，当 ξ 服从正态分布时，μ，σ 的极大似然估计分别是 $\overline{X}$ 和 S，所以有

$$\hat{\mu}=\overline{X}=15.078\ ,\ \hat{\sigma}=S=0.428154\ 。$$

作分点 $-\infty<14.51<14.88<15.25<15.62<+\infty$，把 ξ 的取值范围分成 5 个区间。

总体 ξ 落在各个区间 $(a_{k-1},a_k]$ 中的概率的估计值 $\hat{p}_k$ 可由下式求出：

$$\hat{p}_k=\hat{P}\{a_{k-1}<\xi\le a_k\}=\Phi(\frac{a_k-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}})-\Phi(\frac{a_{k-1}-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}})\ 。$$

用本题的数据代入，得计算结果如下：

$(a_{k-1},a_k]$	(−∞，14.51]	(14.51，14.88]	(14.88，15.25]	(15.25，15.62]	(15.62，+∞)
n_k	6	8	20	11	5
$\hat{p}_k$	0.11682	0.18778	0.26234	0.23495	0.19811

$$\chi^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k^2}{\hat{p}_k}-n$$

$$=\frac{1}{50}\times(\frac{6^2}{0.09232}+\frac{8^2}{0.22956}+\frac{20^2}{0.33418}+\frac{11^2}{0.24117}+\frac{5^2}{0.10277})-50=2.214\ 。$$

对 $\alpha=0.05$，$r-m-1=2$，查 χ^2 分布表，可得 $\chi^2_{1-\alpha}(r-m-1)=\chi^2_{0.95}(2)=5.991$。

因为$\chi^2 = 2.214 < 5.991$，所以接受 H_0：$\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，可以认为滚珠的直径服从正态分布。

4.23　为研究色盲与性别的关系，对 1000 人作统计，得到结果如下：

	男	女
色盲	38	6
正常	442	514

问：色盲是否与性别有关？（显著水平$\alpha = 0.05$）

解　设 ξ 为患色盲的状况，η 为性别，问题相当于要检验 H_0：ξ 与 η 独立。

首先，求出联立表中各行、各列的总和：

	男	女	总和
色盲	38	6	44
正常	442	514	956
总和	480	520	1000

$$\chi^2 = n\,(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^{\;2}}{n_{i\bullet}\,n_{\bullet j}} - 1)$$

$$= 1000 \times (\frac{38^2}{44\times480} + \frac{6^2}{44\times520} + \frac{442^2}{956\times480} + \frac{514^2}{956\times520} - 1) = 27.139 \quad 。$$

对显著水平$\alpha = 0.05$，自由度$(r-1)\,(s-1) = (2-1)\times(2-1) = 1$，查 χ^2 分布表，可得分位数 $\chi^2_{1-\alpha}(\,(r-1)\,(s-1)\,) = \chi^2_{0.95}(1) = 3.841$ 。

因为$\chi^2 = 27.139 > 3.841$ ，所以拒绝 H_0：ξ 与 η 独立 ，可以认为色盲与性别有关。

4.24　为研究青少年犯罪与家庭状况的关系，对 1154 名青少年进行调查，得到统计结果如下：

	无犯罪记录	有犯罪记录
双亲完整家庭	973	88
单亲残缺家庭	70	23

问：青少年犯罪是否与家庭状况有关？（显著水平$\alpha = 0.05$）

解　设 ξ 为家庭状况，η 为有无犯罪记录，问题相当于要检验 H_0：ξ 与 η 独立。

首先，求出联立表中各行、各列的总和：

	无犯罪记录	有犯罪记录	总和
双亲完整家庭	973	88	1061
单亲残缺家庭	70	23	93
总和	1043	111	1154

$$\chi^2 = n\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^{\ 2}}{n_{i\bullet}\,n_{\bullet j}} - 1\right)$$

$$= 1154\times\left(\frac{973^2}{1061\times1043} + \frac{88^2}{1061\times111} + \frac{70^2}{93\times1043} + \frac{23^2}{93\times111} - 1\right) = 26.573$$ 。

对显著水平 $\alpha = 0.05$，自由度 $(r-1)(s-1) = (2-1)\times(2-1) = 1$，查 χ^2 分布表，可得分位数 $\chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1)) = \chi^2_{0.95}(1) = 3.841$ 。

因为 $\chi^2 = 26.573 > 3.841$ ，所以拒绝 H_0：ξ 与 η 独立 ，可以认为犯罪与家庭状况有关。

4. 25　为研究地下水位变化与地震的关系，某地震观测站收集了如下 1700 个观测结果：

	有地震	无地震
水位有变化	98	902
水位无变化	82	618

问：地下水位变化是否与地震有关？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解　设 ξ 为地下水位是否有变化，η 为地震是否发生。

问题相当于要检验 H_0：ξ 与 η 独立。

首先，求出联立表中各行、各列的总和：

	有地震	无地震	总和
水位有变化	98	902	1000
水位无变化	82	618	700
总和	180	1520	1700

$$\chi^2 = n\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^{\ 2}}{n_{i\bullet}\,n_{\bullet j}} - 1\right)$$

$$= 1700\times\left(\frac{98^2}{1000\times180} + \frac{902^2}{1000\times1520} + \frac{82^2}{700\times180} + \frac{618^2}{700\times1520} - 1\right) = 1.5938$$ 。

对显著水平 $\alpha = 0.05$ ，自由度 $(r-1)(s-1) = (2-1)\times(2-1) = 1$ ，查 χ^2 分布表，可得分位数 $\chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1)) = \chi^2_{0.95}(1) = 3.841$ 。

因为 $\chi^2 = 1.5938 < 3.841$ ，所以接受假设 H_0：ξ 与 η 独立，地下水位变化与发生地震无关。

4.26　为研究儿童智力发展与营养的关系，抽查了 950 名小学生，得到统计数据如下：

	智商			
	＜80	80～89	90～99	≥100
营养良好	245	228	177	219
营养不良	31	27	13	10

问：儿童的智力发展是否与营养状况有关？（显著水平$\alpha=0.05$）

解　设 ξ 为营养状况，η 为智商情况，问题相当于要检验 H_0：ξ 与 η 独立。

首先，求出联立表中各行、各列的总和：

	智商				总和
	＜80	80～89	90～99	≥100	
营养良好	245	228	177	219	869
营养不良	31	27	13	10	81
总和	276	255	190	229	950

$$\chi^2=n\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^{2}}{n_{i\bullet}\,n_{\bullet j}}-1\right)$$

$$=950\times\left(\frac{245^2}{869\times276}+\frac{228^2}{869\times255}+\frac{177^2}{869\times190}+\frac{219^2}{869\times229}\right.$$

$$\left.+\frac{31^2}{81\times276}+\frac{27^2}{81\times255}+\frac{13^2}{81\times190}+\frac{10^2}{81\times229}-1\right)=9.751\ 。$$

对显著水平$\alpha=0.05$，自由度$(r-1)(s-1)=(2-1)\times(4-1)=3$，查 χ^2 分布表，

可得分位数 $\chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1))=\chi^2_{0.95}(3)=7.815$ 。

因为 $\chi^2=9.751>7.815$，所以拒绝 H_0：ξ 与 η 独立 ，可以认为智力发展与营养状况有关。