2016年青年教师课堂教学竞赛

姚媛媛

华东理工大学理学院

第二讲: 单调有界收敛定理与迭代数列

第二讲: 单调有界收敛定理与迭代数列

第二讲: 单调有界收敛定理与迭代数列

男子100米世界纪录

9.95 秒	海因斯(美国)	1968 年
9.93 秒	史密斯(美国)	1983 年
9.86 秒	刘易斯(美国)	1991 年
9.79 秒	格林(美国)	1999 年
9.74 秒	鲍威乐(牙买加)	2007 年
9.58 秒	博尔特(牙买加)	2009 年

第二讲: 单调有界收敛定理与迭代数列

男子100米世界纪录

9.95 秒	海因斯(美国)	1968 年
9.93 秒	史密斯(美国)	1983 年
9.86 秒	刘易斯(美国)	1991 年
9.79 秒	格林(美国)	1999 年
9.74 秒	鲍威乐(牙买加)	2007 年
9.58 秒	博尔特(牙买加)	2009 年

单调有界收敛定理: 单减有下界的数列收敛到下确界, 单增类似.

迭代函数单调递增

迭代函数单调递增

迭代数列

迭代函数单调递增

$$\text{迭代数列}\begin{cases} \text{初始点 } {\color{red}a_1} \\ \end{cases}$$

迭代函数单调递增

$$\text{迭代数列}\begin{cases}\text{初始点 } a_1 \\ \text{迭代规则 } a_{n+1} = f(a_n)\end{cases}$$

迭代函数单调递增

迭代数列 $\begin{cases} \text{初始点 } a_1 \\ \text{迭代规则 } a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$

例1 《庄子· 天下篇》一尺之棰, 日取其半, 万世不竭.

迭代函数单调递增

$$\text{迭代数列}\begin{cases}\text{初始点 } a_1\\ \text{迭代规则 } a_{n+1}=f(a_n)\end{cases}$$

例1《庄子· 天下篇》一尺之棰, 日取其半, 万世不竭.

设$a_1=1$, $\boxed{a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

迭代函数单调递增

迭代数列$\begin{cases} \text{初始点 } a_1 \\ \text{迭代规则 } a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$

例1 《**庄子· 天下篇**》一尺之棰, 日取其半, 万世不竭.
设$a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解 由题意, $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} > 0$. (**单调递减有下界**)

迭代函数单调递增

$$\text{迭代数列}\begin{cases}\text{初始点 } a_1 \\ \text{迭代规则 } a_{n+1}=f(a_n)\end{cases}$$

例1《庄子· 天下篇》一尺之棰, 日取其半, 万世不竭.

设$a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解 由题意, $a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}>0$. (**单调递减有下界**)

故由单调有界收敛定理, $\{a_n\}$ 极限存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

迭代函数单调递增

迭代数列$\begin{cases} \text{初始点 } a_1 \\ \text{迭代规则 } a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$

例1《庄子· 天下篇》一尺之棰, 日取其半, 万世不竭.
设$a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解 由题意, $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} > 0$. (**单调递减有下界**)
故由单调有界收敛定理, $\{a_n\}$ 极限存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

☞迭代函数$f(x) = \dfrac{x}{2}$ 单调递增, 相应迭代数列单调.

迭代函数单调递减

迭代函数单调递减

例2 意大利Fibonacci 提出兔子繁殖问题.

迭代函数单调递减

例2 意大利Fibonacci 提出兔子繁殖问题.

- 一对刚出生的小兔(设兔子雌雄成对出生);

迭代函数单调递减

例2 意大利Fibonacci 提出兔子繁殖问题.

- 一对刚出生的小兔(设兔子雌雄成对出生);
- 兔子从第三个月开始达到成熟期;

迭代函数单调递减

例2 意大利Fibonacci 提出兔子繁殖问题.

- 一对刚出生的小兔(设兔子雌雄成对出生);
- 兔子从第三个月开始达到成熟期;
- 每月初, 每对成熟兔子生一对小兔;

迭代函数单调递减

例2 意大利Fibonacci 提出兔子繁殖问题.

- 一对刚出生的小兔(设兔子雌雄成对出生);
- 兔子从第三个月开始达到成熟期;
- 每月初, 每对成熟兔子生一对小兔;
- 不考虑兔子死亡.

迭代函数单调递减

例2 意大利Fibonacci 提出兔子繁殖问题.

- 一对刚出生的小兔(设兔子雌雄成对出生);
- 兔子从第三个月开始达到成熟期;
- 每月初, 每对成熟兔子生一对小兔;
- 不考虑兔子死亡.

求兔群增长率的极限.

迭代函数单调递减

例2 意大利Fibonacci 提出兔子繁殖问题.

- 一对刚出生的小兔(设兔子雌雄成对出生);
- 兔子从第三个月开始达到成熟期;
- 每月初, 每对成熟兔子生一对小兔;
- 不考虑兔子死亡.

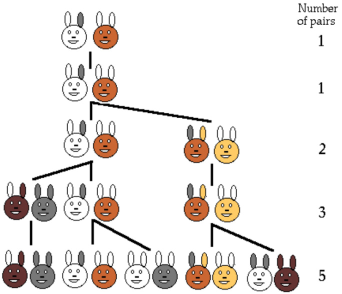
求兔群增长率的极限.

迭代函数单调递减

例2 意大利Fibonacci 提出兔子繁殖问题.

- 一对刚出生的小兔(设兔子雌雄成对出生);
- 兔子从第三个月开始达到成熟期;
- 每月初, 每对成熟兔子生一对小兔;
- 不考虑兔子死亡.

求兔群增长率的极限.

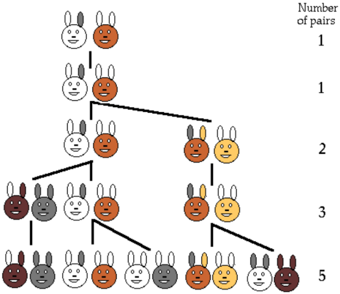


迭代函数单调递减

例2 意大利Fibonacci 提出兔子繁殖问题.

- 一对刚出生的小兔(设兔子雌雄成对出生);
- 兔子从第三个月开始达到成熟期;
- 每月初, 每对成熟兔子生一对小兔;
- 不考虑兔子死亡.

求兔群增长率的极限.



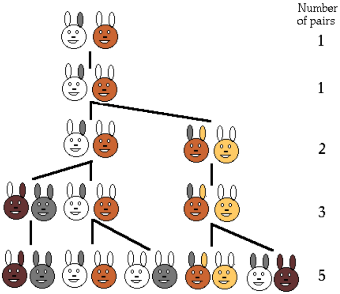
设a_n 是每月兔子总对数, 则$\{a_n\}$ 是Fibonacci 数列! 满足

迭代函数单调递减

例2 意大利Fibonacci 提出兔子繁殖问题.

- 一对刚出生的小兔(设兔子雌雄成对出生);
- 兔子从第三个月开始达到成熟期;
- 每月初, 每对成熟兔子生一对小兔;
- 不考虑兔子死亡.

求兔群增长率的极限.



设a_n 是每月兔子总对数, 则$\{a_n\}$ 是Fibonacci 数列! 满足

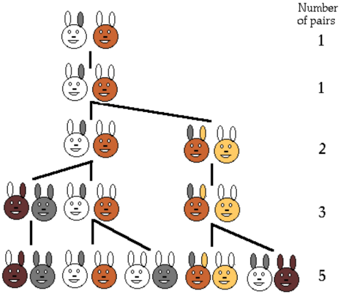
$$a_1 = a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} (n \geq 3).$$

迭代函数单调递减

例2 意大利Fibonacci 提出兔子繁殖问题.

- 一对刚出生的小兔(设兔子雌雄成对出生);
- 兔子从第三个月开始达到成熟期;
- 每月初, 每对成熟兔子生一对小兔;
- 不考虑兔子死亡.

求兔群增长率的极限.



设a_n 是每月兔子总对数, 则$\{a_n\}$ 是Fibonacci 数列! 满足

$$a_1 = a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} (n \geq 3).$$

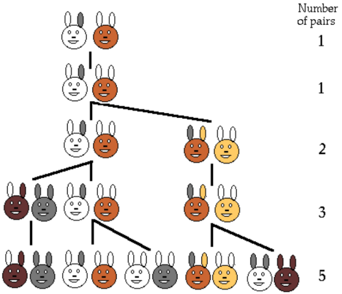
则兔群增长率为$(a_{n+1}/a_n) - 1$.

迭代函数单调递减

例2 意大利Fibonacci 提出兔子繁殖问题.

- 一对刚出生的小兔(设兔子雌雄成对出生);
- 兔子从第三个月开始达到成熟期;
- 每月初, 每对成熟兔子生一对小兔;
- 不考虑兔子死亡.

求兔群增长率的极限.



设a_n 是每月兔子总对数, 则$\{a_n\}$ 是Fibonacci 数列! 满足

$$a_1 = a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} (n \geq 3).$$

则兔群增长率为$(a_{n+1}/a_n) - 1$.

迭代函数单调递减

迭代函数单调递减

解 记$b_n = a_{n+1}/a_n$, 则$b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3/2, b_4 = 5/3, b_5 = 8/5, b_6 = 13/8, \cdots$ 且

迭代函数单调递减

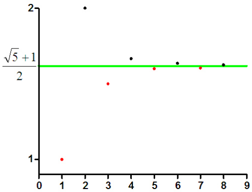
解 记$b_n = a_{n+1}/a_n$, 则$b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3/2, b_4 = 5/3, b_5 = 8/5, b_6 = 13/8, \cdots$ 且

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

迭代函数单调递减

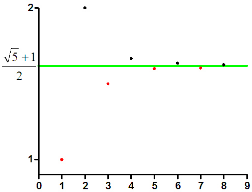
解 记$b_n = a_{n+1}/a_n$, 则$b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3/2, b_4 = 5/3, b_5 = 8/5, b_6 = 13/8, \cdots$ 且

$$\boxed{b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}}(n \geq 2).$$



迭代函数单调递减

解 记$b_n = a_{n+1}/a_n$, 则$b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3/2, b_4 = 5/3, b_5 = 8/5, b_6 = 13/8, \cdots$ 且

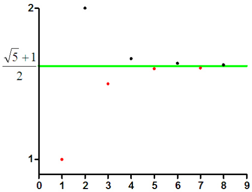


$$\boxed{b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}} (n \geq 2).$$

$$\Longrightarrow b_{n+2} = 2 - \frac{1}{1+b_n} (*) \Longrightarrow b_{n+2} - b_n = \frac{b_n - b_{n-2}}{(1+b_n)(1+b_{n-2})}$$

迭代函数单调递减

解 记$b_n = a_{n+1}/a_n$，则$b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3/2, b_4 = 5/3, b_5 = 8/5, b_6 = 13/8, \cdots$ 且



$$\boxed{b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}} (n \geq 2).$$

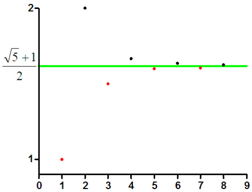
$$\Longrightarrow b_{n+2} = 2 - \frac{1}{1+b_n} (*) \Longrightarrow b_{n+2} - b_n = \frac{b_n - b_{n-2}}{(1+b_n)(1+b_{n-2})}$$

$0 < b_1 < b_3 < \cdots < b_4 < b_2 < 2.$ (奇项数列与偶项数列分别具有单调有界

迭代函数单调递减

解 记$b_n = a_{n+1}/a_n$, 则$b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3/2, b_4 = 5/3, b_5 = 8/5, b_6 = 13/8, \cdots$ 且

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}} (n \geq 2).$$



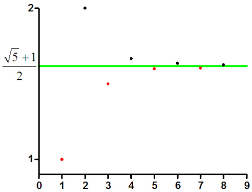
$$\Longrightarrow b_{n+2} = 2 - \frac{1}{1+b_n} (*) \Longrightarrow b_{n+2} - b_n = \frac{b_n - b_{n-2}}{(1+b_n)(1+b_{n-2})}$$

$0 < b_1 < b_3 < \cdots < b_4 < b_2 < 2$. (奇项数列与偶项数列分别具有单调有界

由(*) 式$\lim_{k\to\infty} b_{2k} = \lim_{k\to\infty} b_{2k-1} = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

迭代函数单调递减

解 记$b_n = a_{n+1}/a_n$, 则$b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3/2, b_4 = 5/3, b_5 = 8/5, b_6 = 13/8, \cdots$ 且



$$\boxed{b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}} (n \geq 2).$$

$$\Longrightarrow b_{n+2} = 2 - \frac{1}{1+b_n} (*) \Longrightarrow b_{n+2} - b_n = \frac{b_n - b_{n-2}}{(1+b_n)(1+b_{n-2})}$$

$0 < b_1 < b_3 < \cdots < b_4 < b_2 < 2$. (奇项数列与偶项数列分别具有单调有界

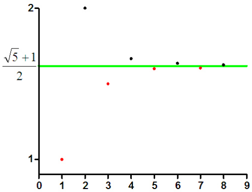
由$(*)$ 式 $\lim\limits_{k\to\infty} b_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} b_{2k-1} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

答案: 兔群增长率极限为$(\sqrt{5}-1)/2 \approx 0.618$, 黄金分割数!

迭代函数单调递减

解 记$b_n = a_{n+1}/a_n$, 则$b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3/2, b_4 = 5/3, b_5 = 8/5, b_6 = 13/8, \cdots$ 且

$$\boxed{b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}} (n \geq 2).$$



$$\Longrightarrow b_{n+2} = 2 - \frac{1}{1+b_n} (*) \Longrightarrow b_{n+2} - b_n = \frac{b_n - b_{n-2}}{(1+b_n)(1+b_{n-2})}$$

$0 < b_1 < b_3 < \cdots < b_4 < b_2 < 2.$ (**奇项数列与偶项数列分别具有单调有界**

由(*) 式$\lim\limits_{k\to\infty} b_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} b_{2k-1} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

答案: 兔群增长率极限为$(\sqrt{5}-1)/2 \approx 0.618$, 黄金分割数!

☞迭代函数$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ 单调递减, 迭代数列奇偶项分别单调.

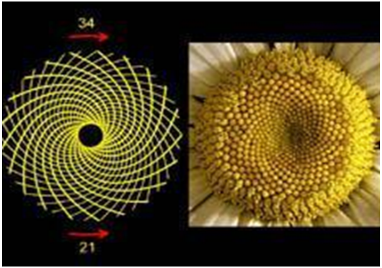
Fibonacci 数列与黄金分割

Fibonacci 数列与黄金分割

大自然中有很多Fibonacci数列与黄金分割的例子，最典型的便以斐波那契螺旋方式排列的向日葵种子和巴特农神庙.

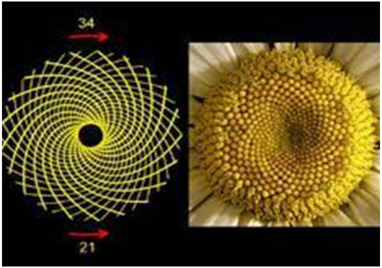
Fibonacci 数列与黄金分割

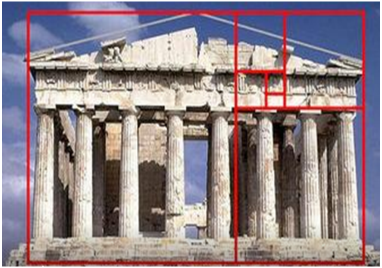
大自然中有很多Fibonacci数列与黄金分割的例子，最典型的便以斐波那契螺旋方式排列的向日葵种子和巴特农神庙.



Fibonacci 数列与黄金分割

大自然中有很多Fibonacci数列与黄金分割的例子，最典型的便以斐波那契螺旋方式排列的向日葵种子和巴特农神庙.





迭代函数规律总结(重点)

设$\{x_n\}$ 满足递推关系$x_{n+1} = f(x_n)$, 其中f 在区间I 上单调, 同时$\{x_n\} \subseteq I$. 则只有两种可能:

(a) 若f 单调单增, 此时$\{x_n\}$ 为单调数列;

(b) 若f 单调递减, 此时$\{x_{2k-1}\}$ 和$\{x_{2k}\}$ 分别单调, 且单调性相反.

混沌

☞ 若 f 不单调$\Rightarrow$ 可能混沌!

混沌

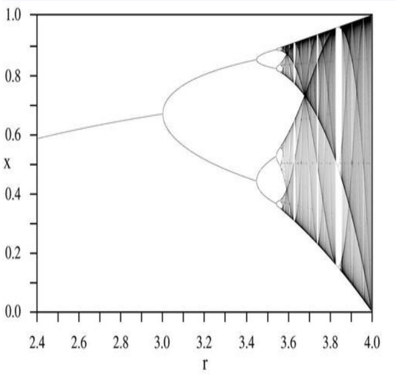
☞ 若f 不单调$\Rightarrow$ 可能混沌!

例3 logistic 迭代函数$f(x) = rx(1-x)$, 其中$0 < r \le 4$.

混沌

☞ 若f 不单调$\Rightarrow$ 可能混沌!

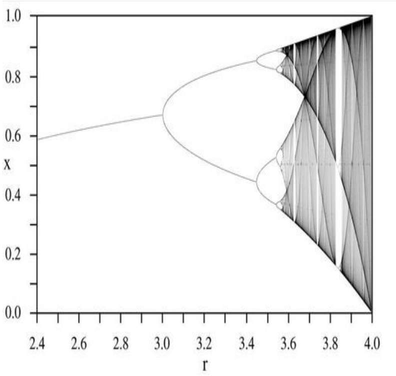
例3 logistic 迭代函数$f(x) = rx(1-x)$, 其中$0 < r \leq 4$.



混沌

☞ 若f 不单调$\Rightarrow$ 可能混沌!

例3 logistic 迭代函数$f(x) = rx(1-x)$, 其中$0 < r \leq 4$.

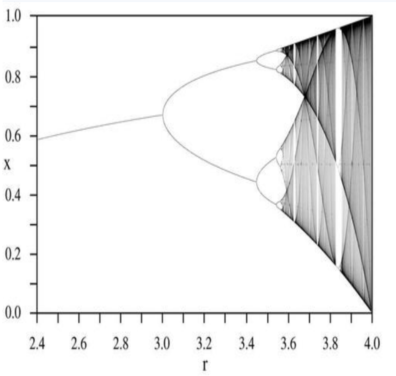


洛伦茨(蝴蝶效应): 一只蝴蝶在巴西扇动翅膀, 可导致得克萨斯引起龙卷风!

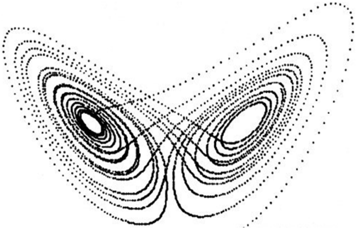
混沌

☞ 若f 不单调$\Rightarrow$ 可能混沌!

例3 logistic 迭代函数$f(x) = rx(1-x)$, 其中$0 < r \leq 4$.



洛伦茨(蝴蝶效应): 一只蝴蝶在巴西扇动翅膀, 可导致得克萨斯引起龙卷风!



参考文献

王树和. 好玩的数学.
科学出版社, 北京, 2015.

丁玖. 智者的困惑——混沌分形漫谈.
高等教育出版社, 北京, 2013.

T.Y. Li, J.A. Yorke. *Period three implies Chaos.*
The American Mathematical Monthly, 82(1975), 985-992.

果壳网、维基百科、微课与慕课、CTEX中文论坛

Thank you!