⋆2.1.2极值原理和差分解的唯一性

⋆2.1.2极值原理和差分解的唯一性

引理2.1(极值原理) 设$u_0, u_1, \cdots, u_N$是一组不全相等的数，记$S = \{u_0, u_1, \cdots, u_N\}$，

$$L_h u_m = a_m u_{m-1} + b_m u_m + c_m u_{m+1}, m = 1, 2, \cdots, N-1, \tag{22}$$

其中$b_m > 0, a_m < 0, c_m < 0, b_m \geq |a_m| + |c_m|$.

- (1)若$L_h u_m \leq 0 (m = 1, 2, \cdots, N-1)$,则不能在$u_1, u_2, \cdots, u_{N-1}$中取$S$中正的最大值；
- (2)若$L_h u_m \geq 0 (m = 1, 2, \cdots, N-1)$,则不能在$u_1, u_2, \cdots, u_{N-1}$中取$S$中负的最小值；

⋆2.1.2极值原理和差分解的唯一性

引理2.1(极值原理) 设$u_0, u_1, \cdots, u_N$是一组不全相等的数，记$S = \{u_0, u_1, \cdots, u_N\}$，

$$L_h u_m = a_m u_{m-1} + b_m u_m + c_m u_{m+1}, m = 1, 2, \cdots, N-1, \tag{22}$$

其中$b_m > 0, a_m < 0, c_m < 0, b_m \geq |a_m| + |c_m|$.

- (1)若$L_h u_m \leq 0 (m = 1, 2, \cdots, N-1)$,则不能在$u_1, u_2, \cdots, u_{N-1}$中取$S$中正的最大值；
- (2)若$L_h u_m \geq 0 (m = 1, 2, \cdots, N-1)$,则不能在$u_1, u_2, \cdots, u_{N-1}$中取$S$中负的最小值；

证明：用反证法证明(1),假设在$u_1, u_2, \cdots, u_{N-1}$中取到$S$的最大值，记

$$M = \max_{0 \leq m \leq N} |u_m| > 0$$

Home Page

Title Page

Go Back

Full Screen

Close

Quit

⋆2.1.2极值原理和差分解的唯一性

引理2.1(极值原理) 设$u_0, u_1, \cdots, u_N$是一组不全相等的数，记$S = \{u_0, u_1, \cdots, u_N\}$，

$$L_h u_m = a_m u_{m-1} + b_m u_m + c_m u_{m+1}, m = 1, 2, \cdots, N-1, \qquad (22)$$

其中$b_m > 0, a_m < 0, c_m < 0, b_m \geq |a_m| + |c_m|$.

- (1)若$L_h u_m \leq 0 (m = 1, 2, \cdots, N-1)$,则不能在$u_1, u_2, \cdots, u_{N-1}$中取$S$中正的最大值；
- (2)若$L_h u_m \geq 0 (m = 1, 2, \cdots, N-1)$,则不能在$u_1, u_2, \cdots, u_{N-1}$中取$S$中负的最小值；

证明：用反证法证明(1),假设在$u_1, u_2, \cdots, u_{N-1}$中取到$S$的最大值，记

$$M = \max_{0 \leq m \leq N} |u_m| > 0$$

由于S中的数不全相等，一定存在某个$i (1 \leq i \leq N-1)$使得$u_i = M$,并且u_{i-1}与u_{i+1}中至少有一个小于M,于是

$$L_h u_i = a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = b_i M + a_i u_{i-1} + c_i u_{i+1} > b_i M + (a_i + c_i) M \geq 0$$

这与$L_h u_i \leq 0$矛盾，从而证明了(1).
同理可证明(2).

定理2.1差分方程组(5)和(10)都有惟一解。

定理2.1差分方程组(5)和(10)都有惟一解。
证：考虑与方程组(5)对应的齐次方程

$$\begin{cases} L_h u_m = -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + q_m u_m = 0, \quad m = 1, 2, \cdots, N-1 \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases} \tag{23}$$

定理2.1差分方程组(5)和(10)都有惟一解。
证：考虑与方程组(5)对应的齐次方程

$$\begin{cases} L_h u_m = -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + q_m u_m = 0, \ \ m = 1, 2, \cdots, N-1 \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases} \tag{23}$$

由于$L_h u_m$中的系数满足极值原理的条件，由极值原理可知不能在$u_1, u_2, \cdots, u_{N-1}$中取到正的最大值和负的最小值，从而齐次方程组(23)只有零解，方程组(5)有唯一解。
同理可证方程组(10)也有唯一解。

定理2.1差分方程组(5)和(10)都有惟一解。
证：考虑与方程组(5)对应的齐次方程

$$\begin{cases} L_h u_m = -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + q_m u_m = 0, \quad m = 1, 2, \cdots, N-1 \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases} \tag{23}$$

由于$L_h u_m$中的系数满足极值原理的条件，由极值原理可知不能在$u_1, u_2, \cdots, u_{N-1}$中取到正的最大值和负的最小值，从而齐次方程组(23)只有零解，方程组(5)有唯一解。
同理可证方程组(10)也有唯一解。

- 差分方程(5)和(10)的系数矩阵都是不可约对角占优矩阵，从而它们是非奇异的，方程组有惟一解。

⋆2.1.3 差分解的稳定性与收敛性

⋆2.1.3 差分解的稳定性与收敛性

定理2.2 差分方程组(5)的解u_m满足

$$|u_m| \le \max\{|\alpha|, |\beta|\} + \frac{1}{2}(x_m - a)(b - x_m) \max_{1\le m\le N-1} |f_m|, m = 1, 2, \cdots, N-1. \tag{24}$$

⋆2.1.3 差分解的稳定性与收敛性

定理2.2 差分方程组(5)的解u_m满足

$$|u_m| \le \max\{|\alpha|,|\beta|\}+\frac{1}{2}(x_m-a)(b-x_m)\max_{1\le m\le N-1}|f_m|, m=1,2,\cdots,N-1. \tag{24}$$

证明：把方程组

$$\begin{cases} L_h u_m = 0, & m=1,2,\cdots,N-1 \\ u_0=\alpha, u_N=\beta \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} L_h u_m = f_m, & m=1,2,\cdots,N-1 \\ u_0=u_N=0 \end{cases}$$

的解分别记为$u_m^{(1)}$和$u_m^{(2)}$,其中差分算子L_h由式(5)定义，则方程组(5)的解u_m为

$$u_m = u_m^{(1)} + u_m^{(2)}. \tag{25}$$

由极值原理可知

$$|u_m^{(1)}| \le \max\{|\alpha|,|\beta|\}, m=1,2,\cdots,N-1. \tag{26}$$

为了估计$u_m^{(2)}$，考虑差分方程

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}(v_{m+1} - 2v_m + v_{m-1}) = M, & m = 1, 2, \cdots, N-1 \\ v_0 = v_N = 0, \end{cases}$$

其中$M = \max_{1 \le m \le N-1} |f_m|$.

为了估计$u_m^{(2)}$，考虑差分方程

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}(v_{m+1}-2v_m+v_{m-1}) = M, \ \ m=1,2,\cdots,N-1 \\ v_0 = v_N = 0, \end{cases}$$

其中$M = \max_{1\le m\le N-1}|f_m|$.该差分方程是从边值问题

$$\begin{cases} -v'' = M, \\ v(a) = v(b) = 0, \end{cases} \tag{28}$$

得到，而此边值问题的解是

$$v(x) = \frac{M}{2}(x-a)(x-b)$$

因为$v(x)$是x的二次函数，它的四阶导数为零，从式(2),(3)看到$v(x)$在点x_m的二阶中心差商与$v''(x_m)$相等，因此差分方程(27)的解等于边值问题(28)的解，即

$$v_m = v(x_m) = \frac{M}{2}(x_m-a)(b-x_m) \ge 0$$

另一方面

$$L_h(v_m \pm u_m^{(2)}) = L_h v_m \pm L_h u_m^{(2)} = q_m v_m + M \pm f_m \geq 0,$$

$$v_0 \pm u_0^{(2)} = v_N \pm u_m^{(2)} = 0.$$

由极值原理可知

$$v_m \pm u_m^{(2)} \geq 0$$

即

$$|u_m^{(2)}| \leq v_m = \frac{M}{2}(x_m - a)(b - x_m), m = 1, 2, \cdots, N-1, \qquad (29)$$

综合式(25),(26),(29)就得到式(24).

另一方面

$$L_h(v_m \pm u_m^{(2)}) = L_h v_m \pm L_h u_m^{(2)} = q_m v_m + M \pm f_m \geq 0,$$

$$v_0 \pm u_0^{(2)} = v_N \pm u_m^{(2)} = 0.$$

由极值原理可知

$$v_m \pm u_m^{(2)} \geq 0$$

即

$$|u_m^{(2)}| \leq v_m = \frac{M}{2}(x_m - a)(b - x_m), m = 1, 2, \cdots, N-1, \qquad (29)$$

综合式(25),(26),(29)就得到式(24).

- 定理2.2 表明方程(5)的解关于边值问题(1)的右端和初值是稳定的，即当f, α, β有一个小的改变时，所引起的差分解的改变也是很小的。

另一方面

$$L_h(v_m \pm u_m^{(2)}) = L_h v_m \pm L_h u_m^{(2)} = q_m v_m + M \pm f_m \geq 0,$$

$$v_0 \pm u_0^{(2)} = v_N \pm u_m^{(2)} = 0.$$

由极值原理可知

$$v_m \pm u_m^{(2)} \geq 0$$

即

$$|u_m^{(2)}| \leq v_m = \frac{M}{2}(x_m - a)(b - x_m), m = 1, 2, \cdots, N-1, \qquad (29)$$

综合式(25),(26),(29)就得到式(24).

- 定理2.2 表明方程(5)的解关于边值问题(1)的右端和初值是稳定的，即当f, α, β有一个小的改变时，所引起的差分解的改变也是很小的。

定理2.3 设$u(x)$是边值问题(1)的解，u_m是差分方程(5)的解，则

$$|u(x_m)| - u_m| \le \frac{(b-a)^2}{96} h^2 \max_{a \le x \le b} |u^{(4)}(x)|, m = 1, 2, \cdots, N-1.$$

定理2.3 设$u(x)$是边值问题(1)的解，u_m是差分方程(5)的解，则

$$|u(x_m)| - u_m| \le \frac{(b-a)^2}{96} h^2 \max_{a \le x \le b} |u^{(4)}(x)|, m = 1, 2, \cdots, N-1.$$

证：记

$$\epsilon_m = u(x_m) - u_m$$

再由(3)-(5)可知

$$\begin{cases} L_h \epsilon_m = R_m, \ \ m = 1, 2, \cdots, N-1 \\ \epsilon_0 = \epsilon_N = 0 \end{cases}$$

其中R_m是由式(3)定义，从定理2.2得

$$|\epsilon_m| \le \frac{1}{2}(x_m - a)(b - x_m) \max_{1 \le m \le N-1} |R_m|$$

$$\le \frac{(b-a)^2}{96} h^2 \max_{1 \le m \le N-1} |u^{(4)}(x)|.$$

- 由于差分方程(8)的系数也满足极值原理条件，类似定理2.2的证明，定理2.2的结论对差分方程(8)也是成立。

- 由于差分方程(8)的系数也满足极值原理条件，类似定理2.2的证明，定理2.2的结论对差分方程(8)也是成立。
- 类似定理2.3的证明，差分方程(8)的解u_m满足

$$
\begin{aligned}
|u(x_m)-u_m| &\le \frac{1}{2}(x_m-a)(b-x_m)\max_{1\le m\le N-1}|R_m| \\
&\le \frac{(b-a)^2}{8}\max_{1\le m\le N-1}|R_m|, \qquad (31)
\end{aligned}
$$

- 由于差分方程(8)的系数也满足极值原理条件，类似定理2.2的证明，定理2.2的结论对差分方程(8)也是成立。
- 类似定理2.3的证明，差分方程(8)的解u_m满足

$$
\begin{aligned}
|u(x_m)-u_m| &\le \frac{1}{2}(x_m-a)(b-x_m)\max_{1\le m\le N-1}|R_m| \\
&\le \frac{(b-a)^2}{8}\max_{1\le m\le N-1}|R_m|,
\end{aligned}
\tag{31}
$$

- 式(30)和式(31)不仅给出看差分方程(5)和(8)的解的误差估计，而且表明当$h\to 0$时差分解收敛到原边值问题的解，收敛速度分别为h^2和h^4.

★2.2 打靶法

★2.2.1 打靶法的基本思想

⋆2.2 打靶法

⋆2.2.1 打靶法的基本思想

把求二阶边值问题

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u'), a < x < b, \\ \alpha_1 u'(a) + \alpha_2 u(a) = \alpha, \\ \beta_1 u'(b) + \beta_2 u(b) = \beta, \end{cases} \tag{32}$$

的解转化为求初值问题

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u'), \\ u(a) = \alpha_1 s + \alpha d_1, u'(a) = -\alpha_2 s + \alpha d_2, \\ \alpha_1 d_2 + \alpha_2 d_1 = 1, \end{cases} \tag{33}$$

的解和求函数方程

$$\beta_1 \omega_x(b, s) + \beta_2 \omega(b, s) = \beta,$$

的根，这就是打靶法，又称为简单打靶法。

- 对任意的s,初值问题(33)解$u(x)$都满足边值问题(32)中的微分方程和点a的边界条件，如果我们能找到s,使得$u(x)$也满足式(32)中在点b 的边界条件，则$u(x)$就是边值问题(32)的解，$u(x)$显然是s的函数，记

$$u(x) = \omega(x, s)$$

. 如果s满足

$$\beta_1\omega_x(b, s) + \beta_2\omega(b, s) = \beta, \tag{35}$$

则$u(x) = \omega(x, s)$就是边值问题(32)的解。

- 对任意的s,初值问题(33)解$u(x)$都满足边值问题(32)中的微分方程和点a的边界条件，如果我们能找到s,使得$u(x)$也满足式(32)中在点b 的边界条件，则$u(x)$就是边值问题(32)的解，$u(x)$显然是s的函数，记

$$u(x) = \omega(x, s)$$

. 如果s满足

$$\beta_1 \omega_x(b, s) + \beta_2 \omega(b, s) = \beta, \tag{35}$$

则$u(x) = \omega(x, s)$就是边值问题(32)的解。

- 把求边值问题(32)的解转化为求初值问题(33)的解和求解函数方程(35)的根，这就是打靶法，又称为简单打靶法

⋆2.2.2 线性边值问题的打靶法

⋆2.2.2 线性边值问题的打靶法

考虑线性边值问题

$$\begin{cases} Lu = u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), a < x < b, \\ \alpha_1 u'(a) + \alpha_2 u(a) = \alpha, \\ \beta_1 u'(b) + \beta_2 u(b) = \beta. \end{cases} \tag{36}$$

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

⋆2.2.2 线性边值问题的打靶法

考虑线性边值问题

$$\begin{cases} Lu = u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), a < x < b, \\ \alpha_1 u'(a) + \alpha_2 u(a) = \alpha, \\ \beta_1 u'(b) + \beta_2 u(b) = \beta. \end{cases} \tag{36}$$

将初值问题

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ u(a) = 1, u'(a) = 0 \end{cases} \tag{37}$$

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ u(a) = 0, u'(a) = 1 \end{cases} \tag{38}$$

和

$$\begin{cases} Lu = f(x), \\ u(a) = u'(a) = 0 \end{cases} \tag{39}$$

的解分别记为$u_1(x), u_2(x)$和$u_0(x)$,则边值问题

$$\begin{cases} Lu = f(x), \\ u(a) = s_1, u'(a) = s_2, \end{cases} \tag{40}$$

的解可表示为

$$u(x) = s_1 u_1(x) + s_2 u_2(x) + u_0(x), \tag{41}$$

把式(36)中的边界条件代入式(41),得

$$\begin{cases} \alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2 = \alpha, \\ (\beta_1 u^{'}(b) + \beta_2 u_1(b))s_1 + (\beta_1 u^{'}{}_2(b) + \beta_2 u_2(b))s_2 = \beta - \beta_1 u_0^{'}(b) - \beta_2 u_0(b). \end{cases} \tag{42}$$

上式是关于s_1, s_2的二阶线性方程组，如果能从中解出s_1, s_2,将它们代入式(41)便得到线性边值问题(36)的解。

把式(36)中的边界条件代入式(41),得

$$\begin{cases} \alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2 = \alpha, \\ (\beta_1 u'(b) + \beta_2 u_1(b))s_1 + (\beta_1 u'{}_2(b) + \beta_2 u_2(b))s_2 = \beta - \beta_1 u_0'(b) - \beta_2 u_0(b). \end{cases} \tag{42}$$

上式是关于s_1, s_2的二阶线性方程组，如果能从中解出s_1, s_2,将它们代入式(41)便得到线性边值问题(36)的解。
解线性边值问题(36)的打靶法分两步：

把式(36)中的边界条件代入式(41),得

$$\begin{cases} \alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2 = \alpha, \\ (\beta_1 u'(b) + \beta_2 u_1(b))s_1 + (\beta_1 u'_2(b) + \beta_2 u_2(b))s_2 = \beta - \beta_1 u'_0(b) - \beta_2 u_0(b). \end{cases} \tag{42}$$

上式是关于s_1, s_2的二阶线性方程组，如果能从中解出s_1, s_2,将它们代入式(41)便得到线性边值问题(36)的解。
解线性边值问题(36)的打靶法分两步：

- 求边值问题(37)~(39)的解$u_1(x), u_2(x), u_0(x)$;

把式(36)中的边界条件代入式(41),得

$$\begin{cases} \alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2 = \alpha, \\ (\beta_1 u^{'}(b) + \beta_2 u_1(b))s_1 + (\beta_1 u^{'}{}_2(b) + \beta_2 u_2(b))s_2 = \beta - \beta_1 u_0^{'}(b) - \beta_2 u_0(b). \end{cases} \tag{42}$$

上式是关于s_1, s_2的二阶线性方程组，如果能从中解出s_1, s_2,将它们代入式(41)便得到线性边值问题(36)的解。
解线性边值问题(36)的打靶法分两步：

- 求边值问题(37)~(39)的解$u_1(x), u_2(x), u_0(x)$;
- 解线性方程组(42),并把解s_1, s_2代入式(41)便得边值问题(36)的解$u(x)$

把式(36)中的边界条件代入式(41),得

$$\begin{cases} \alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2 = \alpha, \\ (\beta_1 u'(b) + \beta_2 u_1(b))s_1 + (\beta_1 u'_2(b) + \beta_2 u_2(b))s_2 = \beta - \beta_1 u_0'(b) - \beta_2 u_0(b). \end{cases} \tag{42}$$

上式是关于s_1, s_2的二阶线性方程组，如果能从中解出s_1, s_2,将它们代入式(41)便得到线性边值问题(36)的解。
解线性边值问题(36)的打靶法分两步：

- 求边值问题(37)~(39)的解$u_1(x), u_2(x), u_0(x)$;
- 解线性方程组(42),并把解s_1, s_2代入式(41)便得边值问题(36)的解$u(x)$
- 如果用数值方法解初值问题$(37) \sim (39)$，则式(42)中$u_i'(b)$用数值微分计算，从而得到边值问题(36)的数值解。

把式(36)中的边界条件代入式(41),得

$$\begin{cases} \alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2 = \alpha, \\ (\beta_1 u'(b) + \beta_2 u_1(b))s_1 + (\beta_1 u'_2(b) + \beta_2 u_2(b))s_2 = \beta - \beta_1 u'_0(b) - \beta_2 u_0(b). \end{cases} \tag{42}$$

上式是关于s_1, s_2的二阶线性方程组，如果能从中解出s_1, s_2,将它们代入式(41)便得到线性边值问题(36)的解。
解线性边值问题(36)的打靶法分两步：

- 求边值问题(37)∼(39)的解$u_1(x), u_2(x), u_0(x)$;
- 解线性方程组(42),并把解s_1, s_2代入式(41)便得边值问题(36)的解$u(x)$
- 如果用数值方法解初值问题$(37) \sim (39)$，则式(42)中$u'_i(b)$用数值微分计算，从而得到边值问题(36)的数值解。
- 为了提高数值精度，通常步长都比较小，因此从点a计算到b的步数就很多，由于误差积累，结果可能较差。为了解决这一问题

把式(36)中的边界条件代入式(41),得

$$\begin{cases} \alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2 = \alpha, \\ (\beta_1 u'(b) + \beta_2 u_1(b))s_1 + (\beta_1 u'_2(b) + \beta_2 u_2(b))s_2 = \beta - \beta_1 u'_0(b) - \beta_2 u_0(b). \end{cases} \tag{42}$$

上式是关于s_1, s_2的二阶线性方程组，如果能从中解出s_1, s_2,将它们代入式(41)便得到线性边值问题(36)的解。
解线性边值问题(36)的打靶法分两步：

- 求边值问题(37)∼(39)的解$u_1(x), u_2(x), u_0(x)$;
- 解线性方程组(42),并把解s_1, s_2代入式(41)便得边值问题(36)的解$u(x)$
- 如果用数值方法解初值问题$(37) \sim (39)$，则式(42)中$u_i'(b)$用数值微分计算，从而得到边值问题(36)的数值解。
- 为了提高数值精度，通常步长都比较小，因此从点a计算到b的步数就很多，由于误差积累，结果可能较差。为了解决这一问题
- 把区间$[a, b]$分成若干个小区间，然后在每个小区间上解初值问题，再利用解在分点处满足一定的光滑性建立线性方程组，求出方程组的解便获得边值问题的解。这就是多重打靶法

考虑线性边值问题(36),假设把求解区间$[a,b]$分成m个小区间$[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,m)$,这里$a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$.把初值问题

$$\begin{cases} Lu=0, x\in[x_{i-1},x_i], \\ u(x_{i-1})=1, u^{'}(x_{i-1})=0, \end{cases} \tag{43}$$

$$\begin{cases} Lu=0, x\in[x_{i-1},x_i], \\ u(x_{i-1})=0, u^{'}(x_{i-1})=1, \end{cases} \tag{44}$$

和

$$\begin{cases} Lu=f(x), x\in[x_{i-1},x_i], \\ u(x_{i-1})=u^{'}(x_{i-1})=0, \end{cases} \tag{45}$$

的解分别记为$u_{i1}(x), u_{i2}(x)$和$u_{i0}(x)$,则初值问题

$$\begin{cases} Lu=f(x), x\in[x_{i-1},x_i], \\ u(x_{i-1})=s_{i1}, u^{'}(x_{i-1})=s_{i2}, \end{cases} \tag{46}$$

的解是

$$u_i(x)=s_{i1}u_{i1}(x)+s_{i2}u_{i2}(x)+u_{i0}(x), x\in[x_{i-1},x_i]. \tag{47}$$

设

$$u(x) = u_i(x), x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \cdots, m-1 \tag{48}$$

是边值问题(36)的解,

设

$$u(x)=u_i(x), x\in[x_{i-1},x_i], i=1,2,\cdots,m-1 \tag{48}$$

是边值问题(36)的解，则$u(x)$在$[a,b]$上具有一阶连续导数，从而

$$u_i(x_i)=u_{i+1}(x_i), u_i^{'}(x_i)=u_{i+1}^{'}(x_i), i=1,2,\cdots,m-1,$$

于是得

$$\begin{cases} s_{i1}u_{i1}(x_i)+s_{i2}u_{i2}(x_i)-s_{i+1,1}=-u_{i0}(x_i), i=1,2,\cdots,m-1, \\ s_{i1}u_{i1}^{'}(x_i)+s_{i2}u_{i2}^{'}(x_i)-s_{i+1,2}=-u_{i0}^{'}(x_i), \\ \alpha_2 s_{11}+\alpha_1 s_{12}=\alpha, \\ (\beta_1 u_{m1}^{'}(b)+\beta_2 u_{m1}(b))s_{m1}+(\beta_1 u_{m2}^{'}(b)+\beta_2 u_{m2}(b))s_{m2} \\ =\beta-\beta_1 u_{m0}^{'}(b)-\beta_2 u_{m0}(b). \end{cases} \tag{49}$$

设

$$u(x)=u_i(x), x\in[x_{i-1},x_i], i=1,2,\cdots,m-1 \tag{48}$$

是边值问题(36)的解，则$u(x)$在$[a,b]$上具有一阶连续导数，从而

$$u_i(x_i)=u_{i+1}(x_i), u_i'(x_i)=u_{i+1}'(x_i), i=1,2,\cdots,m-1,$$

于是得

$$\begin{cases} s_{i1}u_{i1}(x_i)+s_{i2}u_{i2}(x_i)-s_{i+1,1}=-u_{i0}(x_i), i=1,2,\cdots,m-1, \\ s_{i1}u_{i1}'(x_i)+s_{i2}u_{i2}'(x_i)-s_{i+1,2}=-u_{i0}'(x_i), \\ \alpha_2 s_{11}+\alpha_1 s_{12}=\alpha, \\ (\beta_1 u_{m1}'(b)+\beta_2 u_{m1}(b))s_{m1}+(\beta_1 u_{m2}'(b)+\beta_2 u_{m2}(b))s_{m2} \\ =\beta-\beta_1 u_{m0}'(b)-\beta_2 u_{m0}(b). \end{cases} \tag{49}$$

式(49)是以$s_{i1},s_{i2}(i=1,2,\cdots,m)$为未知数的$2m$阶线性方程组，解出$s_{i1},s_{i2}$，并将它们代入式(47)便从式(48)得到边值问题(36)的解。

设

$$u(x)=u_i(x), x\in[x_{i-1},x_i], i=1,2,\cdots,m-1 \tag{48}$$

是边值问题(36)的解，则$u(x)$在$[a,b]$上具有一阶连续导数，从而

$$u_i(x_i)=u_{i+1}(x_i), u_i^{'}(x_i)=u_{i+1}^{'}(x_i), i=1,2,\cdots,m-1,$$

于是得

$$\begin{cases} s_{i1}u_{i1}(x_i)+s_{i2}u_{i2}(x_i)-s_{i+1,1}=-u_{i0}(x_i), i=1,2,\cdots,m-1,\\ s_{i1}u_{i1}^{'}(x_i)+s_{i2}u_{i2}^{'}(x_i)-s_{i+1,2}=-u_{i0}^{'}(x_i),\\ \alpha_2 s_{11}+\alpha_1 s_{12}=\alpha,\\ (\beta_1 u_{m1}^{'}(b)+\beta_2 u_{m1}(b))s_{m1}+(\beta_1 u_{m2}^{'}(b)+\beta_2 u_{m2}(b))s_{m2}\\ =\beta-\beta_1 u_{m0}^{'}(b)-\beta_2 u_{m0}(b). \end{cases} \tag{49}$$

式(49)是以$s_{i1}, s_{i2}(i=1,2,\cdots,m)$为未知数的$2m$阶线性方程组，解出$s_{i1}, s_{i2}$，并将它们代入式(47)便从式(48)得到边值问题(36)的解。

解二阶线性边值问题(36)的多重打靶法分两步:

解二阶线性边值问题(36)的多重打靶法分两步:

- (1)在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上解初值问题$(43) \sim (45)$;

解二阶线性边值问题(36)的多重打靶法分两步:

- (1)在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上解初值问题$(43) \sim (45)$;
- (2)解线性方程组(49)并把解代入式(47),从式(48)得到边值问题(36)的解。

解二阶线性边值问题(36)的多重打靶法分两步：

- (1)在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上解初值问题$(43) \sim (45)$;
- (2)解线性方程组(49)并把解代入式(47),从式(48)得到边值问题(36)的解。

由于在小区间上求初值问题的数值解所需要计算的步数不太多，与简单打靶法比较，多重打靶法的数值稳定性较好，是解边值问题的一个有效的方法。

⋆2.2.2 非线性边值问题的打靶法

⋆2.2.2 非线性边值问题的打靶法

考虑二阶非线性边值问题

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u'), a < x < b, \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta, \end{cases} \tag{50}$$

⋆2.2.2 非线性边值问题的打靶法

考虑二阶非线性边值问题

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u'), a < x < b, \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta, \end{cases} \tag{50}$$

- 把初值问题

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u'), \\ u(a) = \alpha, u'(a) = s, \end{cases} \tag{51}$$

的解记为

$$u(x) = \omega(x, s). \tag{52}$$

如果s满足$\omega(b, s) = \beta$,则$u(x) = \omega(x, s)$就是边值问题(50)的解。

⋆2.2.2 非线性边值问题的打靶法

考虑二阶非线性边值问题

$$\begin{cases} u'' = f(x,u,u'), a < x < b, \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta, \end{cases} \tag{50}$$

- 把初值问题

$$\begin{cases} u'' = f(x,u,u'), \\ u(a) = \alpha, u'(a) = s, \end{cases} \tag{51}$$

的解记为

$$u(x) = \omega(x,s). \tag{52}$$

如果s满足$\omega(b,s) = \beta$,则$u(x) = \omega(x,s)$就是边值问题(50)的解。

- 记

$$F(s) = \omega(b,s) - \beta, \tag{53}$$

则解非线性边值问题(50)的打靶法实际上就是用某种迭代求函数方程$F(s) = 0$的根s^*, 在迭代过程中不断调整s，使得初值问题(51)的解满足边值问题(50)在点b的边界条件

介绍两种求函数方程根的迭代法

介绍两种求函数方程根的迭代法
弦截法：

- 设s_0, s_1是两个迭代初值，弦截法的迭代公式是

$$\begin{aligned} s_{m+1} = & \; s_m - \frac{F(s_m)}{F(s_m)-F(s_{m-1})}(s_m - s_{m-1}) \\ & \; s_m - \frac{\omega(b,s_m)-\beta}{\omega(b,s_m)-\omega(b,s_{m-1})}(s_m - s_{m-1}), m = 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{54}$$

介绍两种求函数方程根的迭代法
弦截法：

- 设s_0, s_1是两个迭代初值，弦截法的迭代公式是

$$\begin{aligned} s_{m+1} = \; & s_m - \frac{F(s_m)}{F(s_m)-F(s_{m-1})}(s_m - s_{m-1}) \\ & s_m - \frac{\omega(b,s_m)-\beta}{\omega(b,s_m)-\omega(b,s_{m-1})}(s_m - s_{m-1}), m = 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{54}$$

- 当迭代到$|F(s_m)|$与$|s_m - s_{m-1}|$都适当小时，s_m就作为s^*的近似值，$u(x) = \omega(x, s_m)$ 作为初值问题(50)的近似解。

介绍两种求函数方程根的迭代法
弦截法：

- 设s_0, s_1是两个迭代初值，弦截法的迭代公式是

$$
\begin{aligned}
s_{m+1} = \ & s_m - \frac{F(s_m)}{F(s_m)-F(s_{m-1})}(s_m - s_{m-1}) \\
& s_m - \frac{\omega(b,s_m)-\beta}{\omega(b,s_m)-\omega(b,s_{m-1})}(s_m - s_{m-1}), m = 1, 2, \cdots
\end{aligned} \tag{54}
$$

- 当迭代到$|F(s_m)|$与$|s_m - s_{m-1}|$都适当小时，s_m就作为s^*的近似值，$u(x) = \omega(x, s_m)$ 作为初值问题(50)的近似解。
- 弦截法每迭代一次需要计算一次$\omega(b, s)$的值，即解一次初值问题(51).

Home Page
Title Page
Page 16 of 18
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Newton法

- 设s_0是迭代初值，Newton法的迭代公式是

$$s_{m+1} = s_m - \frac{F(s_m)}{F'(s_m)} = s_m - \frac{\omega(b, s_m) - \beta}{\omega_s(b, s_m)}, m = 0, 1, \cdots .$$

Newton法

- 设s_0是迭代初值，Newton法的迭代公式是

$$s_{m+1} = s_m - \frac{F(s_m)}{F'(s_m)} = s_m - \frac{\omega(b, s_m) - \beta}{\omega_s(b, s_m)}, m = 0, 1, \cdots .$$

- 在上式中，每迭代一次除了计算$\omega(b, s_m)$外，还要计算$\omega_s(b, s_m)$.

Newton法

- 设s_0是迭代初值，Newton法的迭代公式是

$$s_{m+1} = s_m - \frac{F(s_m)}{F'(s_m)} = s_m - \frac{\omega(b, s_m) - \beta}{\omega_s(b, s_m)}, m = 0, 1, \cdots .$$

- 在上式中，每迭代一次除了计算$\omega(b, s_m)$外，还要计算$\omega_s(b, s_m)$.
- 对于给定的s,计算$\omega(b, s)$和$\omega_s(b, s)$的步骤如下：

Newton法

- 设s_0是迭代初值，Newton法的迭代公式是

$$s_{m+1} = s_m - \frac{F(s_m)}{F'(s_m)} = s_m - \frac{\omega(b, s_m) - \beta}{\omega_s(b, s_m)}, m = 0, 1, \cdots .$$

- 在上式中，每迭代一次除了计算$\omega(b, s_m)$外，还要计算$\omega_s(b, s_m)$.
- 对于给定的s,计算$\omega(b, s)$和$\omega_s(b, s)$的步骤如下：
  - (1)解初值问题(51),得到$\omega(x, s)$和$\omega(b, s)$
  - 计算$\omega_x(x, s)$需要求二阶线性初值问题(57)的解$v(x, s)$。$\omega(x, s)$满足方程

$$\begin{cases} \omega_{xx} = f(x, \omega, \omega_x), \\ \omega(a, s) = \alpha, \omega_x(a, s) = s. \end{cases}$$

上式对s求导，并记$v(x, s) = \omega_s(x, s)$,则$v(x, s)$满足

$$\begin{cases} v_{xx} = f_3(x, \omega, \omega_x) v_x + f_2(x, \omega, \omega_x) v, \\ v(a, s) = 0, v_x(a, s) = 1. \end{cases} \tag{57}$$

其中$v(x, s) = \omega_s(x, s)$

Newton法

- 设s_0是迭代初值，Newton法的迭代公式是

$$s_{m+1}=s_m-\frac{F(s_m)}{F'(s_m)}=s_m-\frac{\omega(b,s_m)-\beta}{\omega_s(b,s_m)},m=0,1,\cdots.$$

- 在上式中，每迭代一次除了计算$\omega(b,s_m)$外，还要计算$\omega_s(b,s_m)$.
- 对于给定的s,计算$\omega(b,s)$和$\omega_s(b,s)$的步骤如下：
  - (1)解初值问题(51),得到$\omega(x,s)$和$\omega(b,s)$
  - 计算$\omega_x(x,s)$需要求二阶线性初值问题(57)的解$v(x,s)$。$\omega(x,s)$满足方程

$$\begin{cases}\omega_{xx}=f(x,\omega,\omega_x),\\ \omega(a,s)=\alpha,\omega_x(a,s)=s.\end{cases}$$

上式对s求导，并记$v(x,s)=\omega_s(x,s)$,则$v(x,s)$满足

$$\begin{cases}v_{xx}=f_3(x,\omega,\omega_x)v_x+f_2(x,\omega,\omega_x)v,\\ v(a,s)=0,v_x(a,s)=1.\end{cases}\tag{57}$$

其中$v(x,s)=\omega_s(x,s)$

对于给定的s,计算$w(b,s)$和$w_s(b,s)$的步骤如下：

对于给定的s,计算$w(b, s)$和$w_s(b, s)$的步骤如下：

- 解初值问题(51),得到$w(x, s)$和$w(b, s)$;

对于给定的s,计算$w(b,s)$和$w_s(b,s)$的步骤如下：

- 解初值问题(51),得到$w(x,s)$和$w(b,s)$;
- 计算$w_x(x,s)$并求二阶线性初值问题(57)的解$v(x,s)$,则$w_s(b,s)=v(b,s)$.

对于给定的s,计算$w(b,s)$和$w_s(b,s)$的步骤如下：

- 解初值问题(51),得到$w(x,s)$和$w(b,s)$;
- 计算$w_x(x,s)$并求二阶线性初值问题(57)的解$v(x,s)$,则$w_s(b,s)=v(b,s)$.
- 用Newton法时，每迭代一次要解两个初值问题(51)和(57)，工作量比弦截法大。

对于给定的s,计算$w(b,s)$和$w_s(b,s)$的步骤如下：

- 解初值问题(51),得到$w(x,s)$和$w(b,s)$;
- 计 算$w_x(x,s)$并 求 二 阶 线 性 初 值 问 题(57)的解$v(x,s)$,则$w_s(b,s)=v(b,s)$.
- 用Newton法时，每迭代一次要解两个初值问题(51)和(57)，工作量比弦截法大。
- 也可用多重打靶法解二阶非线性边值问题。