华东理工大学网络学院

本科《离散数学》考前辅导

主讲教师：施劲松副教授

2012年03月07日

本次辅导主要内容

- 课程主要内容及考试中所占比例
- 考试主要题型及各题分值比例

课程主要内容及考试中所占比例

1、命题逻辑（约20%）

2、集合与二元关系（约40%）

3、代数结构（约12%）

4、图论（约28%）

考试主要题型及各题分值比例

一、判断、选择题（包括所有学习内容）（20%）

二、化主析取、主合取范式（10%）

三、包含排斥原理的应用（12%）

四、集合、二元关系的证明题（8%）

五、偏序关系、哈斯图及其中的特殊元素(15%)

六、半群、群、交换群、循环群等的证明题（10%）

七、图论中几类特殊图的作图题（15%）

八、图论中几类特殊图的证明题、计算题（10%）

一、命题逻辑的考试主要内容

1、命题及其真值的判定

2、重言式、永假式、蕴含式的判定

3、化命题公式为主析取、主合取范式

二、集合与二元关系的考试主要内容

1、集合的各种运算（∩、∪、−、⊕、～、× 等）

2、包含排斥原理的应用

3、关系的五个性质及其综合性质(如“等价关系”)

4、关系的几种运算（逆、复合运算）

5、偏序、全序关系及哈斯图中特殊位置的元素

三、代数结构的考试主要内容

1、幺元e、零元θ、逆元

2、半群、独异点、群的定义

3、交换群与循环群之间的关联

四、图论的考试主要内容

1、图的基本概念

2、路（包括回路、圈等）与连通性

3、欧拉图、汉密尔顿图

4、平面图

5、图的色数

6、树、根树（主要是“最优树”）及其应用

一、判断、选择题（各章知识点均有）

1、“如果$1+1=4$, 那么许嵩就唱《素颜》。”是个真命题。

解：对！对$P \to Q$而言，若P为“假”，则$P \to Q$必为“真”。

2、$A \to (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \to C$;

解：对！

3、集合 X 满足 $|X|=n$，则 X 上有 $3^{\frac{n^2-n}{2}}\cdot 2^n$ 个不同的反对称关系。

解：对！根据关系矩阵中主对角线以外的元素个数即可得知。

4、若 $X\times Y=X\times Z$，且 $X\neq\phi$，则 $Y=Z$。

解：对！

5、集合 $P(\phi)$ 的幂集是 $\{\phi,\{\phi\}\}$。

解：对！

6、$\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}\oplus\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\}$

解：对！

7、 $(A\subseteq B)\wedge(B\in C)\Rightarrow A\subseteq C$

解：错！

8、A 上的关系 R 的对称闭包 $s(R)=I_A\cup R$。

解：错！应该是： $s(R)=R\cup R^c$

9、 良序集一定是全序集。

解：对！

10、哈密尔顿图没有割点！

解：对！

11、 集合A的两个划分的交集一定是集合A的交叉划分。

解：错！

12、如果简单无向图 G 含有 5 个结点构成的完全图作为其子图，那么 G 的色数至少 为 5。

解：对！但要注意逆命题不成立！

13、设 G 为无向图，若 G 中恰有 n 个结点，$n-1$ 条边，则 G 必为一棵树。

解：错！因为G未必连通！

14、设 G 为简单无向图，如果 G 中恰有两个奇点，那么 G 中任意两个结点 u 和 v 之间必存在一条通路。

解：错！也是因为G未必连通！

15、集合 $\{011, 10, 001, 110, 000, 010\}$ 不是前缀码。

解：不对！

16、循环群中的生成元一定是唯一的。

解：错！

17、群中只有幺元e才满足“逆元就是其自身”这一性质。

解：错！

18、下列集合$X=\{a,b,c\}$上的关系中，不具有传递性的是（　）。

（A）$R_1=\{<a,c>\}$；（B）$R_2=\{<a,c>,<a,a>\}$；

（C）$R_3=\{<a,c>,<c,a>\}$；（D）$R_4=\{<a,c>,<a,b>\}$。

解：(*C*)。

19、下列关于树的描述，唯一不正确的是（ ）。

（A）所谓树，就是指任何一条边都是割边的连通图；

（B）任何一个前缀码未必都能对应一棵二叉树；

（C）设 T 为带权 $w_1 \le w_2 \le \cdots \le w_m$ 的一棵最优树，则带权 w_1、w_2 的两片树叶在 T 中一定是兄弟；

（D）所谓树，就是指满足“无圈，但增加一条新边之后即能得到一个且仅有一个圈。”这一特征的图。

解：选 (*B*)。

20、设 R 是在正整数集合 Z^+ 上如下定义的二元关系

$$R=\left\{<x,y>\middle|(x,y\in Z^+)\wedge((x+2y=15)\vee(2x+y=15))\right\},$$

则它一共有＿＿＿＿＿＿个二元序偶，且有自反性、对称性、传递性、反自反性和反对称性诸性质中的＿＿＿＿＿性质。

(注: $R=\{<1,7>,<7,1>,<3,6>,<6,3>,<5,5>,<7,4>,<4,7>,$
$<9,3>,<3,9>,<11,2>,<2,11>,<13,1>,<1,13>\}$)

21、设$L(x)$：x是狒狒；$E(x)$：x是食物；$F(x,y)$：x对y过敏。则命题“不是所有狒狒对所有食物都不过敏。”可符号化为（　　）。

（A）$(\exists x)(L(x) \to F(x,y))$；

（B）$(\exists x)(\exists y)(L(x) \wedge E(y) \wedge F(x,y))$；

（C）$(\exists x)(\exists y)(L(x) \wedge E(y) \to F(x,y))$；

（D）$(\exists x)(\exists y)(L(x) \to E(y) \wedge F(x,y))$

解：选 (*B*).

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R^c	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

22、集合 $A=\{1,2,3\}$， $R=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x=y\}$ 为 A 上的一个二元关系，则下列命题中（　　）为真。

（A）R 不是自反的；　　（B）R 不是反自反的；
（C）R 不是传递的；　　（D）R 不是对称的。

解：选　(*B*)。

23、下列选项中唯一不正确的是（　　）。

（A）平面图的对偶图一定是连通图；

（B）所谓3叉树，就是指每个结点的出度小于或等于3的根树；

（C）强连通有向图必然是单侧连通的；

（D）“所有结点的度数和等于2倍的边数”这个结论只对简单图成立。

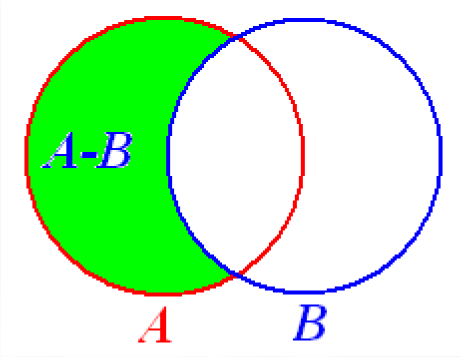
解：选　(*D*)。

24、已知集合$A=\{1,2,3\}$，集合$B=\{2,3,4\}$，则下列选项中唯一正确的是（　　）。

（A）$A-B=\{1\}$　　（B）$B-A=\{1,2,3\}$

（C）$A-B=\{1,2,3\}$　　（D）$A-B=\{1,2,3,4\}$

解：(A).



$$\boldsymbol{A-B=A-(A\cap B)}$$

25、连通平面图的欧拉公式是（　　）。

（A）$v-e+r=2$　　（B）$e-v+r=2$

（C）$e-v-r=2$　　（D）$e+v-r=2$

解：(A).

26、对一个无向图G而言，其中奇点的个数（　　）。

（A）一定为偶数；（B）一定为奇数；

（C）可奇可偶；（D）以上都不对

解：(A).

27、对于一个只含 5 个不同元素的集合A来说，集合A上的不同等价关系的数目是（　　）。

（A）31；（B）37；

（C）42；（D）52

解：(D).

28、以下关于群的描述中，错误论断的个数是（ ）。

（1）半群必定是群。

（2）交换群必定是循环群。

（3）群中只有幺元（又称“单位元”）才满足“逆元就是自身”这一特点。

（4）循环群中的生成元一定是唯一的。

（5）群$<G,*>$的任意两个子群的交集，在“ * ”运算下还是子群。

（A）2； （B）3； （C）4； （D）1

29、下列命题中唯一正确的是（　　）。

（A）欧拉图的子图一定是欧拉图；
（B）哈密尔顿图的子图一定是哈密尔顿图；
（C）平面图的子图一定是平面图；
（D）树的子图一定是树。

解：(*C*)。

二、化主析取、主合取范式

1、求解下列命题公式的主析取、主合取范式：

$$\neg((P \to Q) \wedge (R \to P)) \vee \neg((R \to \neg Q) \to \neg P)$$

解：依题意，有

原式 $\Leftrightarrow (\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg R \vee P)) \vee ((\neg R \vee \neg Q) \wedge P)$

$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge \neg P)) \vee ((\neg R \vee \neg Q) \wedge P)$

$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge \neg P)) \vee ((\neg R \wedge P) \vee (\neg Q \wedge P))$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge \neg P) \vee (\neg R \wedge P)$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$
$$\vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$$

$$\Leftrightarrow m_{001} \vee m_{011} \vee m_{100} \vee m_{101} \vee m_{110} \Leftrightarrow \Sigma_{1,3,4,5,6}$$ **主析取范式**

利用主析取范式和主合取范式的关系，进而可得

原式 $(\neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$

$$\Leftrightarrow M_{111} \wedge M_{010} \wedge M_{000} \Leftrightarrow \Pi_{0,2,7}$$ **主合取范式**

解毕——

2、给定命题公式 $A=(P\rightarrow(P\wedge Q))\vee R$，

（1）写出 A 的主析取范式中的所有小项；

（2）写出 A 的主合取范式中的所有大项。

解：$A=(P\rightarrow(P\wedge Q))\vee R$

$$\Leftrightarrow(\neg P\vee(P\wedge Q))\vee R$$

$$\Leftrightarrow(\neg P\vee P\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)$$

$$\Leftrightarrow T\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee R)\Leftrightarrow M_{100}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{0,1,2,3,5,6,7}$$

（1）即 A 的主析取范式的所有小项为

$m_{000}, m_{001}, m_{010}, m_{011}, m_{101}, m_{110}, m_{111}$。

（2）解：由上题的结果，知 A 的主合取范式为

$M_{100} \Leftrightarrow \prod_4$ ，进而所有大项为 M_{100}。

解毕——

3、求证下列命题的蕴含关系

（1）$P \wedge Q \Rightarrow P \rightarrow Q$；

证明：	（1） $P \wedge Q$	（已知）
	（2） P	（1）
	（3） Q	（1）
	（4） $P \rightarrow Q$	（2）、（3）

(2) $(P \to Q) \wedge (R \to Q) \Rightarrow (P \vee R) \to Q$

证明:	(1) $P \vee R$	(已知)
	(2) $\neg P \to R$	(1)
	(3) $R \to Q$	(已知)
	(4) $\neg P \to Q$	(2)、(3)
	(5) $P \to Q$	(已知)
	(6) Q	(4)、(5)

4、将下列句子翻译成命题公式

（1）仅当谢霆锋有时间而且天不下雨，谢霆锋将去镇上；

解：令 P：谢霆锋有时间；Q：天下雨；R：谢霆锋去镇上，则有

$$R \to P \wedge \neg Q$$

（2）周杰伦总是在图书馆看书，除非图书馆不开门或者周杰伦生病。

解：P：周杰伦在图书馆看书；Q：图书馆开门；R：周杰伦生病，则有

$$Q \wedge \neg R \to P$$

或者

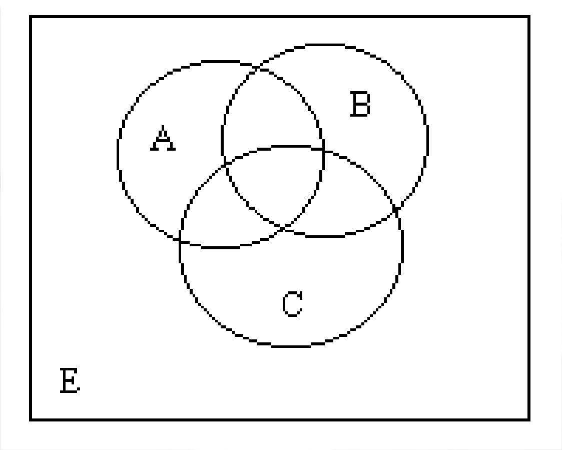
$$\neg P \to \neg Q \vee R$$

解毕——

三、包含排斥原理的应用

1、75 个金寨县宝冶希望小学的小学生来到锦江乐园，他们在那里可以骑旋转木马，坐云霄飞车，乘高空飞艇，已知其中 20 人这三种东西都乘坐过，其中 55 人至少乘坐过其中的两种。若每样乘坐一次的费用都是 20 元，这批学生在锦江乐园共花费了 2800 元，试确定有多少小学生没有乘坐过其中任何一种。

解：画图如下，设乘坐木马、飞车、飞艇的学生的集合分别记作 A, B, C,依题意，有 $|A\cap B\cap C|=20$,



$|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|-3|A\cap B\cap C|=55-20=35,$

且有

$$(|A\cup B\cup C|-55)\times 20+35\times 40+20\times 60=2800,$$

解之即得 $|A\cup B\cup C|=65,$

故而，没有乘坐过其中任何一种的学生人数为 75－65＝10。

2、求在 1 到 1000（包含 1 和 1000）之间既不能被 5 整除，也不能被 6 整除，更不能被 8 整除的整数的个数。

解：设 A、B、C分别表示能被5、6、8 整除的数的集合，依题意，有

$$|A| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200,\quad |B| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166,$$

$$|C| = \left\lfloor \frac{1000}{8} \right\rfloor = 125,\quad |A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33,$$

$$|B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{24} \right\rfloor = 41,\quad |C \cap A| = \left\lfloor \frac{1000}{40} \right\rfloor = 25,$$

$$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{120} \right\rfloor = 8,$$

由包含排斥原理，有

$$|A\cup B\cup C| =$$

$$|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

$$=200+166+125-33-41-25+8=400$$

所以

$$|\sim A\cap\sim B\cap\sim C| = 1000-400=600$$

即为所求。

解毕——

四、集合、二元关系的证明题

1、证明下题：

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$$

证明：(利用性质：$A-B=A\cap\sim B$)

右式＝

$$(A\cap B)\cap\sim(A\cap C)=(A\cap B)\cap(\underline{\sim A}\cup\underline{\sim C})$$

$$=(A\cap B\cap\sim A)\cup(A\cap B\cap\sim C)$$

$$=\phi\cup(A\cap B\cap\sim C)$$

$$=A\cap(B\cap\sim C)$$

$$=A\cap(B-C)$$

＝左式　　　　证毕——

2、已知集合$A=\{1,2,3,4,5,\cdots,298,299,300\}$，以及$A$上的“同余模3”的关系$R=\{<x,y>\mid x\equiv y(\mathrm{mod}\,3),x,y\in A\}$.

(1)证明关系R是等价关系。

(2)求出集合A中所有300个元素的等价类。

(3)求出从集合A中不重复地任取三个数，满足三个数之和能被3整除的取法种数。

解：

(1) 证明"同余模 3"关系 R 是等价关系。

证：(1) 由于 $\forall x\in A$，$x-x=0$ 能被3整除，故 $\langle x,x\rangle\in R$；

(2) $\forall x,y\in A$，若 $\langle x,y\rangle\in R$，即 $x-y$ 能被3整除，则显然 $y-x$ 也能被3整除，即 $\langle y,x\rangle\in R$. 对称性成立.

(3) $\forall x,y,z\in A$，若 $\langle x,y\rangle\in R$. $\langle y,z\rangle\in R$，即 $x-y=3m$，$y-z=3n$，则 $x-z=(x-y)+(y-z)=3(m+n)$. 即 $\langle x,z\rangle\in R$. 传递性成立.

综合(1).(2).(3). 即知 R 为等价关系.

(2) 求出集合 A 中所有 300 个元素的等价类。

解：$[1]_R=\{1,4,7,\cdots,298\}=[4]_R=\cdots=[298]_R$.

$[2]_R=\{2,5,8,\cdots,299\}=[5]_R=\cdots=[299]_R$.

$[3]_R=\{3,6,9,\cdots,300\}=[6]_R=\cdots=[300]_R$.

(3) 试求出从 A 中不重复地任取 3 个数，满足 3 个数之和能被 3 整除的取法种数。

解：依题意，满足条件的取法种数为：

$$3C_{100}^{3}+C_{100}^{1}\cdot C_{100}^{1}\cdot C_{100}^{1}$$

3. 集合 $A=\{x+yi \mid x,y\in\mathbb{R}\wedge x\neq 0, i$ 是虚数单位$\}$，在 A 上定义关系 R：

$$<x+yi, u+vi>\in R \Leftrightarrow xu>0$$

试证明：R 为等价关系。

证明：（1）先证自反性，对任意的 $x+yi\in A$，由于 $xx=x^2>0$，所以按照定 义，必有

$$<x+yi, x+yi>\in R;$$

（2）再证对称性，对任意的 $<x+yi,u+vi>\in R$，即有 $xu>0$，亦即 $ux>0$，进而

$$<u+vi, x+yi>\in R;$$

（3）最后证传递性，对任意的 $<x+yi, u+vi>\in R$，$<u+vi, m+ni>\in R$，按照定义，

由于 $xu>0$，同时 $um>0$，故必有 $xm>0$，

进而 $<x+yi, m+ni>\in R$；

综合上述 3 条，知 R 为等价关系。

证毕——

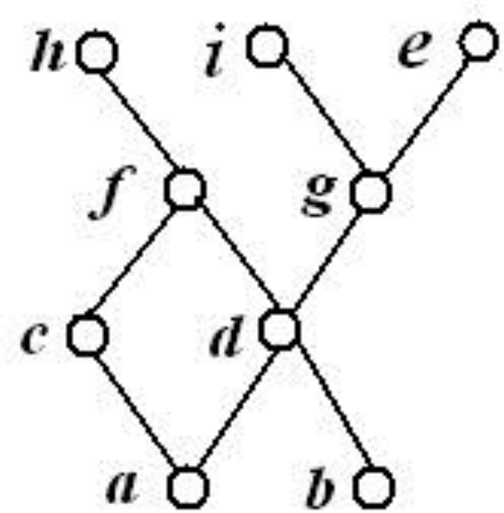
五、偏序关系、哈斯图及其中的特殊元素

1、设偏序集$<A,\leq>$有如下哈斯图，试求：

（1）、$B=\{a,b,d,g\}$的上界、上确界；

（2）、$C=\{h,i,e\}$的下界、下确界；

（3）、$D=\{b,c,e,h\}$的极大元、极小元；



解答如下：

（1）、$B=\{a,b,d,g\}$的上界、上确界；

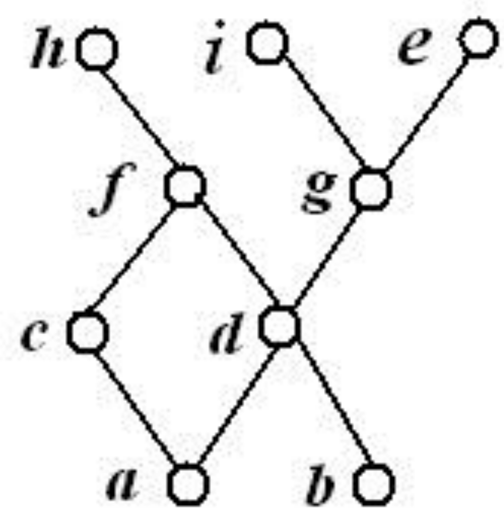
解：上界：$\boldsymbol{g,i,e}$；上确界：$\boldsymbol{g}$.

（2）、$C=\{h,i,e\}$的下界、下确界；

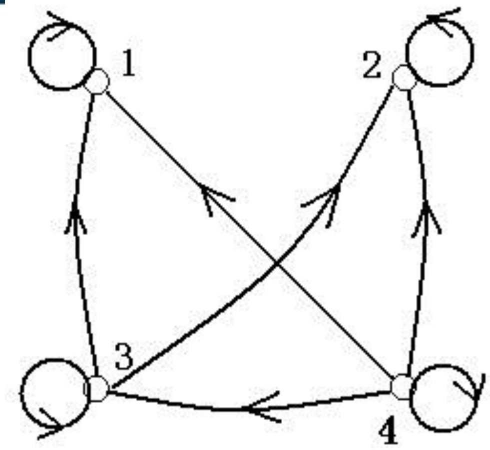
解：下界：$\boldsymbol{a,b,d}$；下确界：$\boldsymbol{d}$.

（3）、$D=\{b,c,h,e\}$的极大元、极小元；

解：极大元：$\boldsymbol{h}$，$\boldsymbol{e}$；极小元：$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$.



解毕——



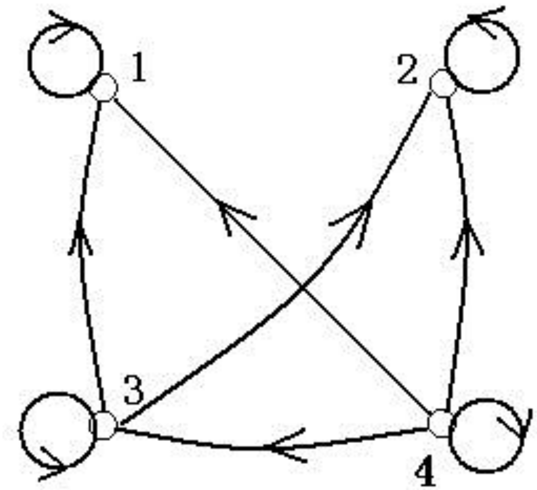
2、右下图给出了集合 $A=\{1,2,3,4\}$ 上的一个偏序关系 R 的关系图，

（1）、求出 $COVA$；

（2）、画出 R 的哈斯图；

（3）求 A 的子集 $B=\{1,2,4\}$ 的最小元，极大元，上确界。

2、右下图给出了集合 $A=\{1,2,3,4\}$ 上的一个偏序关系 R 的关系图，

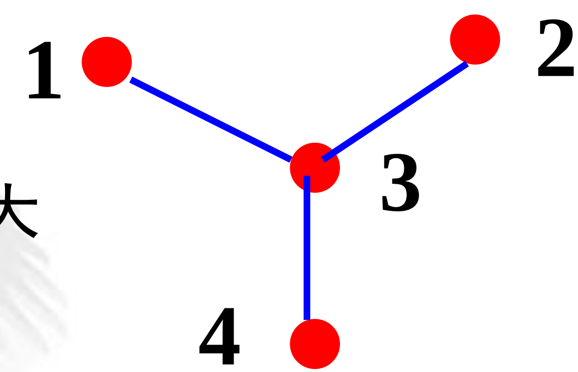


（1）、求出 $COVA$；

解：$\text{COVA}=\{<4,3>,<3,1>,<3,2>\}$

（2）、画出 R 的哈斯图；

解：哈斯图如右所示：



（3）求 A 的子集 $B=\{1,2,4\}$ 的最小元，极大元，上确界。

解：最小元：4；极大：1，2；上确界：无。

解毕——

六、半群、群、交换群 循环群等的证明题

1、设$<A,*>$是个半群，e是半群中的右幺元，且对每一个元素$a\in A$，存在一个元素$\overline{a}\in A$，使得$a*\overline{a}=e$，证明：$<A,*>$是个群。

证明：（1）先证右消去律。若$b*a=c*a$，则依题意，存在一个元素$\overline{a}\in A$，使得$a*\overline{a}=e$，进而$b*a*\overline{a}=c*a*\overline{a}$，即$b=b*e=c*e=c$；

（2）再证 e 是半群中的左幺元。由于 $(e*a)*\overline{a}=e*(a*\overline{a})=e*e=a*\overline{a}$，由（1）知必有 $e*a=a$，即 e 是半群中的左幺元，从而 e 是半群中的幺元；

（3）最后证明对每一个元素 $a\in A$，$\overline{a}\in A$ 就是它的逆元。由于

$$(\overline{a}*a)*\overline{a}=\overline{a}*(a*\overline{a})=\overline{a}*e=e*\overline{a}$$

由（1）知必有 $\overline{a}*a=e$，结合已知的 $a*\overline{a}=e$，即知 $\overline{a}\in A$ 就是 a 的逆元。

综合上述，即知 $<A,*>$ 是个群。

证毕——

2、设$<G, *>$是个独异点，并且对于G中的每个元素x都有$x*x=e$,其中e是幺元，证明$<G, *>$是个阿贝尔群（即交换群）。

证明：由 $\forall x\in G$, 都有 $x*x=e$成立, 及e是幺元，即知$x^{-1}=x$,亦即G中每个元素的逆元都是其自身. 故$<G, *>$已经是个群了。

又$\forall a$、$b\in G$, 由封闭性，显然有$b*a\in G$,且有前段结论，又有 $a^{-1}=a$, $b^{-1}=b$, $(b*a)^{-1}=b*a$,进而有

$$a*b=a^{-1}*b^{-1}=(b*a)^{-1}=b*a$$

即$*$在G中满足交换性,

综合即得$<G, *>$是个阿贝尔群。

证毕——

3、在全体不等于 1 的实数构成的集合 $G=\mathbb{R}-\{1\}$ 上定义如下的二元运算：

$$x\circ y=xy-x-y+2$$

（1）二元运算$\circ$满足哪些性质（在封闭性、交换性、结合性中讨论）？

（2）代数系统 $<G,\circ>$ 中是否有等幂元、幺元？每个元素是否都有逆元？

（3）集合 $<G,\circ>$ 构成什么样的代数系统（在广群、半群、独异点、群以及交换群中讨论）？

解：

（1）满足封闭性、交换性、结合性。

（2）有等幂元 2，有幺元 2。对每个 $x \in G$ 有 $x^{-1} = \dfrac{x}{x-1}$。

（3）G 是交换群。

3、设 Z 是整数集合，代数系统 <Z,*> 中的二元运算“*”定义如下：对任意的 $x,y \in Z$，

$$x*y=x+y-xy$$

其中 “=”右端就是整数间的加减法和乘法运算。

（1）求幺元 e；
（2）指出哪些元素有逆元，逆元是什么？

解：（1）假设 Z 中有关于运算“$*$”的幺元 e，则对任意 $x \in Z$，有

$$x * e = e * x = x,$$

因此，$x + e - xe = x$，即 $e(1 - x) = 0$，

所以，由 x 的任意性，只能是 $e = 0$。

（2）假设元素 $x \in Z$ 有逆元，设为 y，则由

$x * y = y * x = 0$，得

$$x + y - xy = 0,$$

从而解得

$$y = \frac{x}{x-1}$$

由于 $y \in Z$，因此 x 只能等于 0 或者 2，即只有 0 和 2 才有逆元，且

$$0^{-1} = 0,\quad 2^{-1} = 2$$

解毕——

4、实数集合 R 上定义二元运算“$\otimes$ ”为

$$a \otimes b = a \cdot b - 2 \cdot a - 2 \cdot b + 6,$$

其中，等号右 端的运算即实数间的加、减以及乘法运算。

(1) 验证$\otimes$ 运算满足交换律和结合律；

(2) 求$<R,\otimes>$的幺元e，零元θ.

(3) 对不是零元的元素a，求其逆元b。

解:(1)验证$\otimes$运算满足交换律和结合律;

先验算交换律，显然，对任意的$a,b\in R$，

$$a\otimes b=a\cdot b-2\cdot a-2\cdot b+6=b\cdot a-2\cdot b-2\cdot a+6=b\otimes a,$$

再验证结合律，$(a\otimes b)\otimes c=(a\cdot b-2\cdot a-2\cdot b+6)\otimes c$

$$=(a\cdot b-2\cdot a-2\cdot b+6)\cdot c-2\cdot(a\cdot b-2\cdot a-2\cdot b+6)-2\cdot c+6$$

$$=a\cdot(b\cdot c-2\cdot b-2\cdot c+6)-2\cdot a-2(b\cdot c-2\cdot b-2\cdot c+6)+6$$

$$=a\otimes(b\otimes c),$$

(2)解: $\forall a\in R$, 由 $a\otimes e=a$, 即

$$a=a\cdot e-2\cdot a-2\cdot e+6$$

解之得 $e(a-2)=3(a-2)$

由 a 的任意性, 知幺元 $e=3$.

同理，$\forall a \in R$，由 $a \otimes \theta = \theta$，即

$$\theta = a \cdot \theta - 2 \cdot a - 2 \cdot \theta + 6$$

解之得 $\theta(a-3) = 2(a-3)$

由 a 的任意性，知零元 $\theta = 2$.

(3) 解：对任意的 $a \in R$，且 $a \neq 2$，由

$$a \otimes b = a \cdot b - 2 \cdot a - 2 \cdot b + 6 = 3 = e$$

即可解得 a 的逆元 $b = \dfrac{2a-3}{a-2}$。

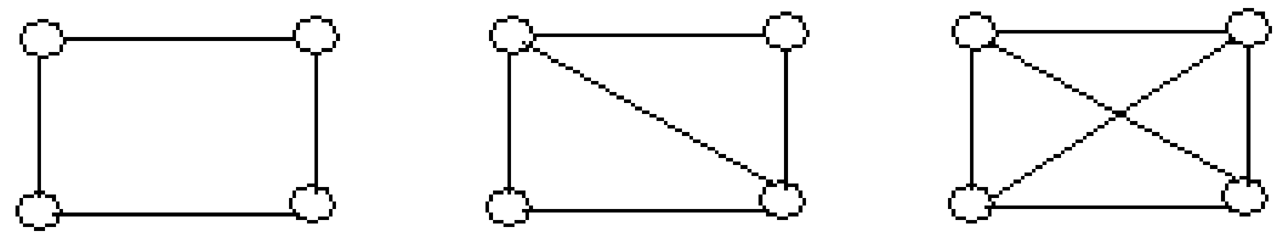
解毕——

七、图论中几类特殊树、图的作图题

1、画出符合下列要求的图（形）：

(0) 请画出 4 个结点的所有不同构的简单 Hamilton 图。

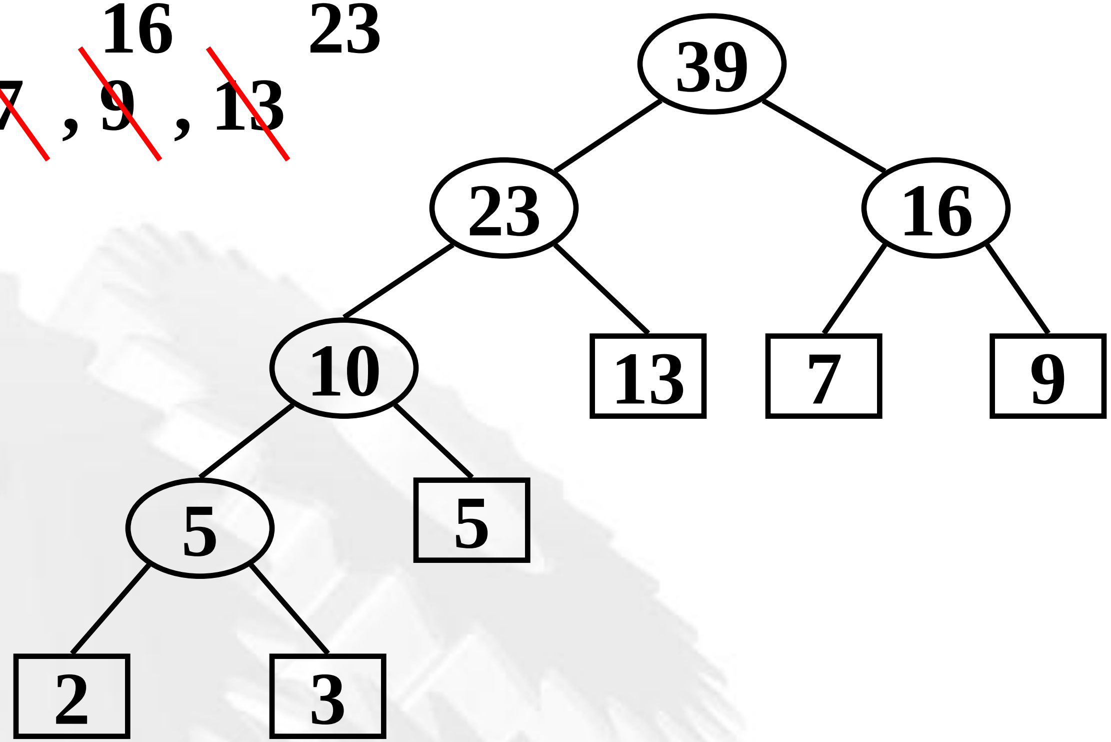
解：画图如下：



(1)：设有权7, 5, 2, 9, 3, 13求相应的最优二叉树.

~~5~~ ~~10~~ 16 23

解： ~~2~~ , ~~3~~ , ~~5~~ , ~~7~~ , ~~9~~ , ~~13~~



$$w(T)=(2+3)\times 4+5\times 3+(7+9+13)\times 2.$$

解毕——

问题：如何求最优 m 叉树呢?

1、从小到大排序；

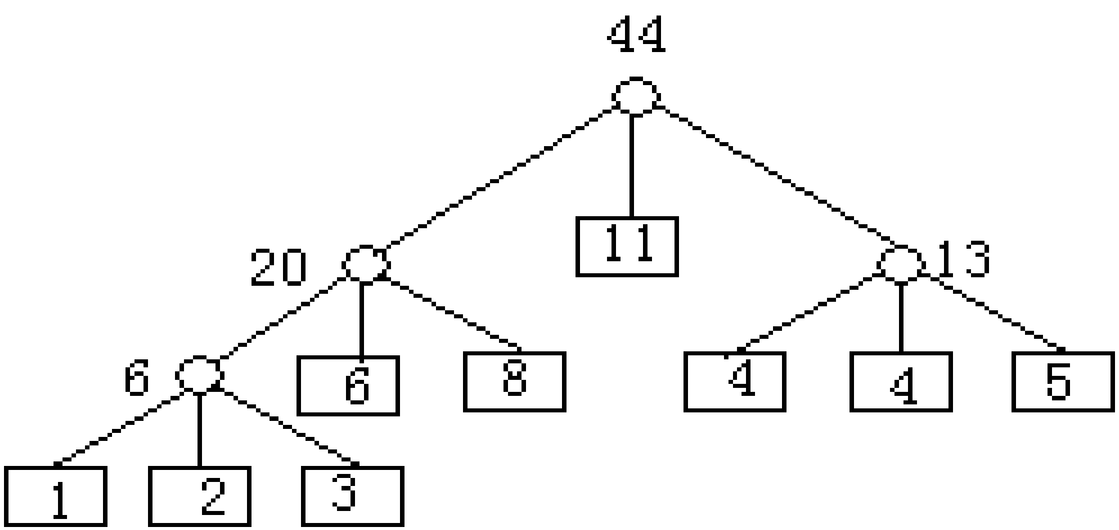
2、计算“$\dfrac{\text{个数}n-1}{\text{叉数}m-1}$”；

3、若能整除，则为完全树；否则……

(2) 请画出一棵带权为 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 8, 11 的最优 3 叉树。

解：画图如下：

由 $\dfrac{n-1}{m-1}=\dfrac{9-1}{3-1}=4$，即能整除，结合 3 叉树的构造算法，得知该最优树应该是个完全 3 叉树，最终得到下图所示的最优 3 叉树：



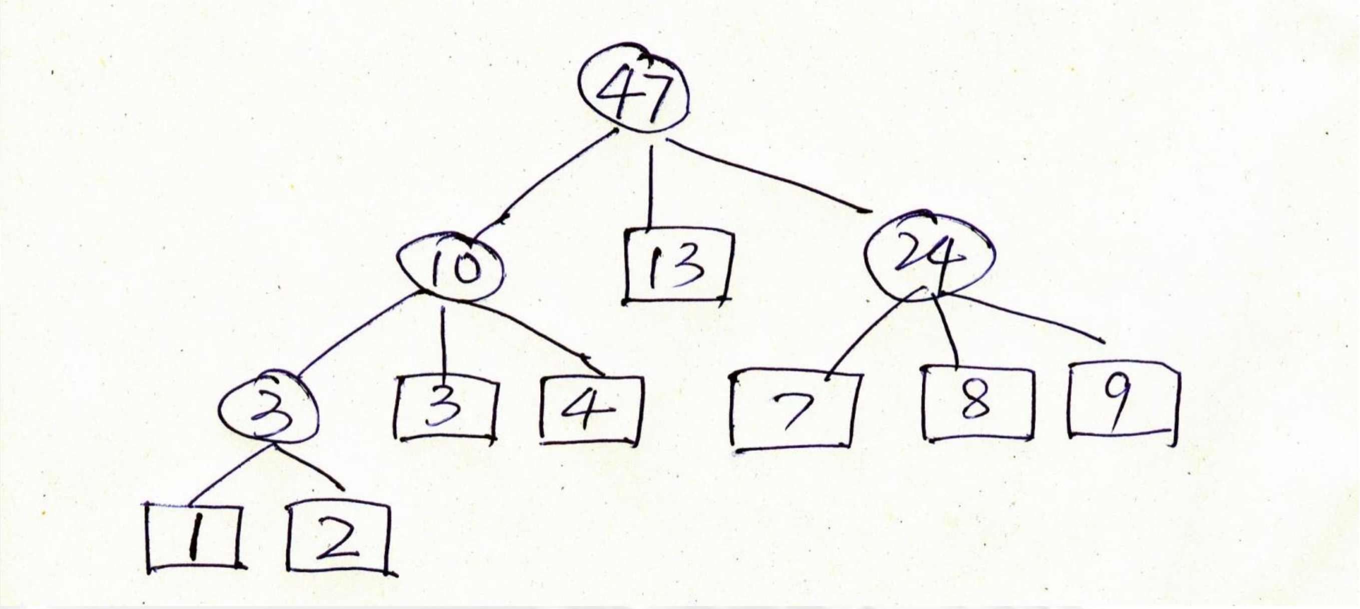
(3). 请画出带权 4, 3, 1, 2, 7, 8, 9, 13 的一棵最优三叉树.

解：排序：1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 13

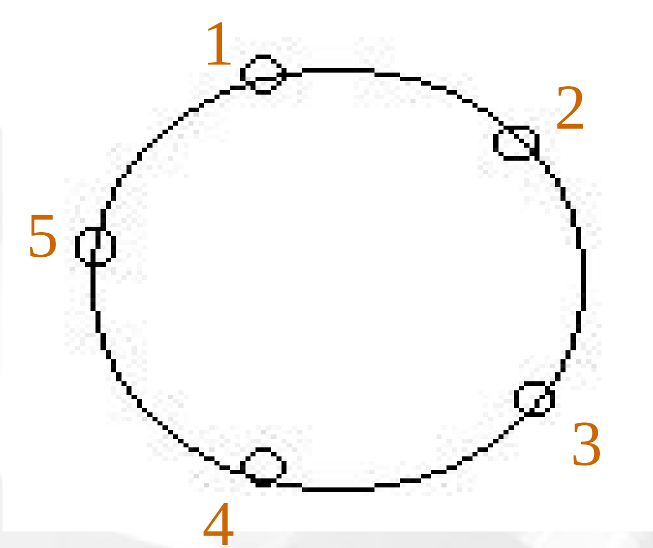
由于 $\frac{8-1}{3-1}=3\cdots\cdots1$（余数）

故应先取"余数+1"个最小权值作为兄弟……

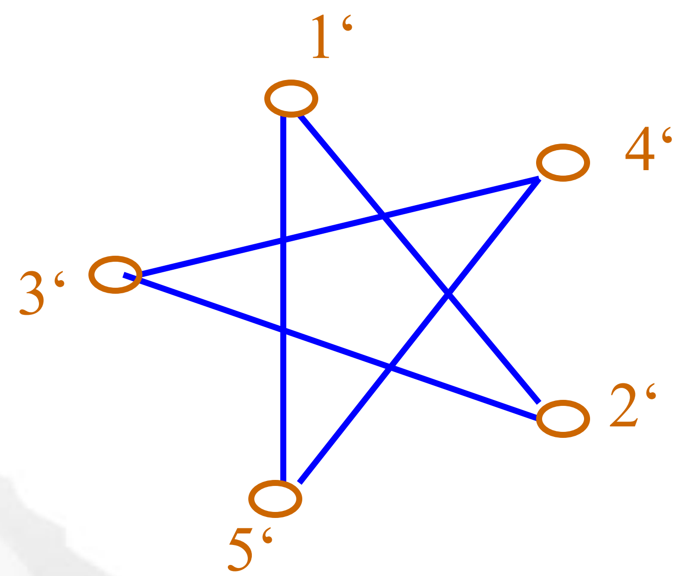
1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 13



(4)、自补图；



G



$\overline{G}$

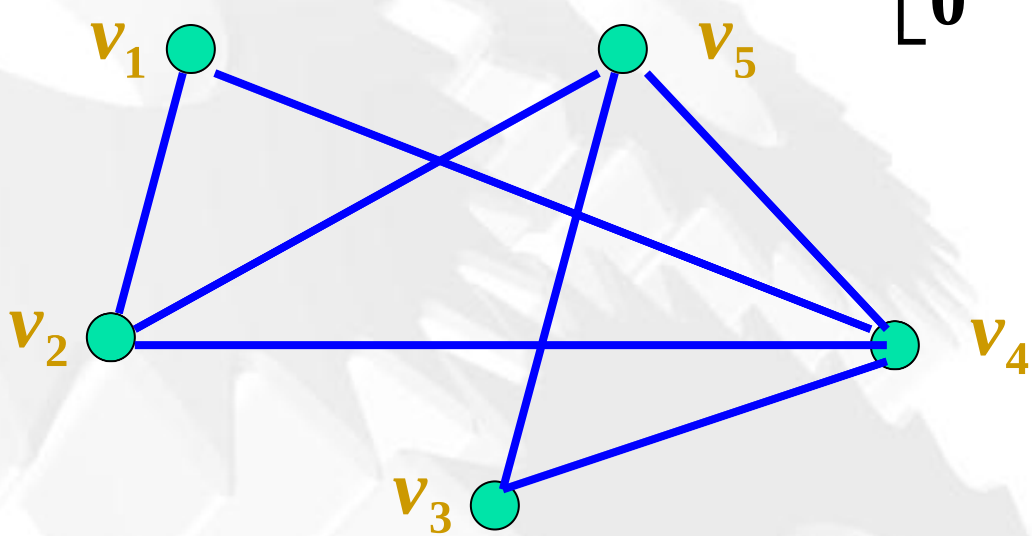
显然$G \cong \overline{G}$. 即图G是个自补图.

证明G是自补图时，先画补图$\overline{G}$，再标号！

2、 画出图G，其邻接矩阵$A=[a_{ij}]$如下：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

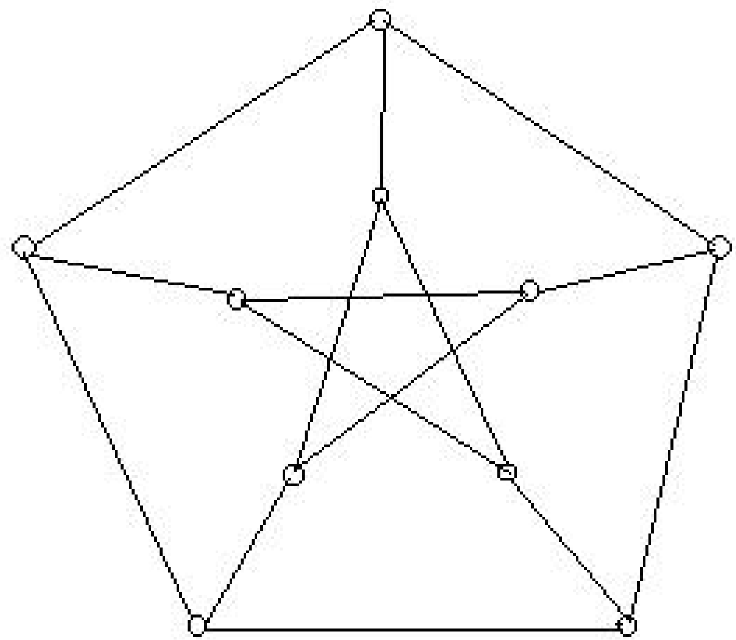
解：由于A是5阶矩阵，因此G有5个顶点，设其为v_1, v_2, v_3, v_4, v_5，若$a_{ij}=1$，则从v_i到v_j画一条边，则可画图如下：



解毕——

八、图论中几类特殊图的证明题

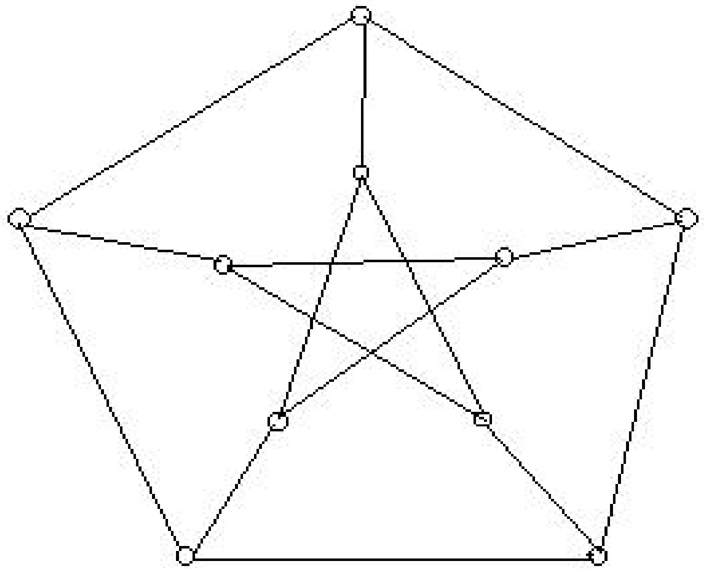
1、证明*Peterson*（彼得森）图不是平面图。



Peterson图

证明：（反证法）

假设它是平面图，且它的点数、边数、面数分别是 v,e,r，



Peterson图

由于图G中围成一个面至少需要5条边，所以，必有$2e \geq 5r$，即$r \leq \frac{2}{5}e$，将其代入欧拉公式$2 = v - e + r$中，解不等式，即得$e \leq (v-2)5/3$.

但实际上，对本图而言，$e = 15$，$v = 10$，且$15 > \frac{5}{3}(10-2)$

故而产生矛盾，即本图不是平面图。

证毕——

2、连通图G中有两棵生成树T_1、T_2，边$e \in T_1$，$e \notin T_2$，求证：存在边$f \in T_2$，$f \notin T_1$，使T_2+e-f也是G的生成树。

证明：依题意，根据树的等价定义，显然T_2+e含有唯一一个圈C，我们说，圈C中必然含有至少一条边f，它满足$f \in T_2$，且$f \notin T_1$，（否则，圈C中的除了e之外的每一条边都属于树T_1，那么加上边e，则

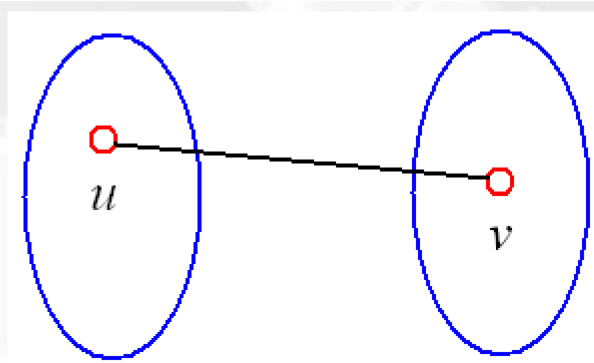
T_1中含有圈C，而这显然与T_1是生成树矛盾。）进而，在T_2+e中删除边f之后，树T_2中原本通过边f连通的结点现在通过圈C的另一半依旧连通，由于T_2+e-f的边数与T_2的边数相同，所以，T_2+e-f也是G的一棵生成树。

证毕——

2、若简单无向图 G 不连通，则其补图 $\bar{G}$ 必然连通。

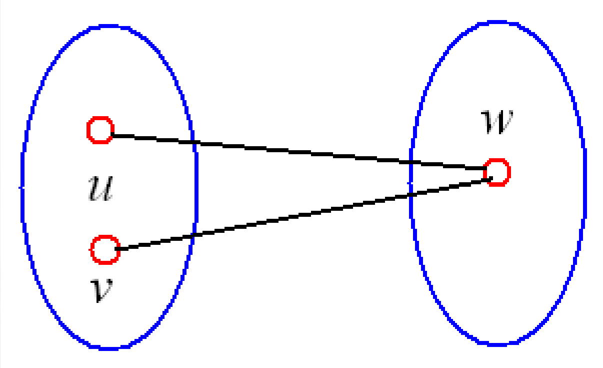
证明：依题意，G 至少含有两个连通分支，不妨设为 G_i 和 G_j，由于 G 的补图 $\bar{G}$ 与 G 有相同的结点集合，所以，对任意的两点 u 和 v，分以下两种情形讨论：

（1）若两点 u 和 v 属于 G 的不同连通分支，则 u 和 v 在 G 中无边相连，由补图的定义，即知 u 和 v 在 $\bar{G}$ 中必有一条边相连，即在 $\bar{G}$ 中连通；



（2）若两点 u 和 v 属于 G 的同一个连通分支 G_i，则在另一个连通分支 G_j 中必存在一点 w，由第一种情形的证明，知 u 和 w 在 $\bar{G}$ 中必有一条边相连，且 v 和 w 在 $\bar{G}$ 中也必有一条边相连，进而，在 $\bar{G}$ 中，有一条连接 u 和 v 的路 uwv 存在，即 u 和 v 在 $\bar{G}$ 中连通。

综合上述，知命题得证。



证毕——

3、已知一棵树有五个2度点，一个3度点，三个4度点，其余均为1度点，试问：这棵树有多少个1度点？

解：设此树有 x 个1度点，则必有下列两式成立：

$$\begin{cases} e=(x+5+1+3)-1 \\ 2e=1\times x+2\times 5+3\times 1+4\times 3 \end{cases}$$

其中，e是树的边数。

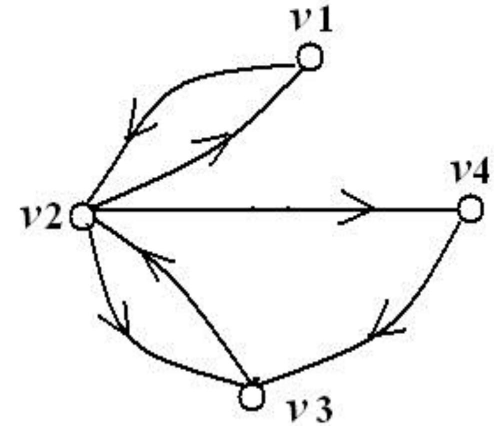
解之，即得

$$x=9$$

故此树有9个1度点。

解毕——

4、给出一个如下图的有向连通图 G.

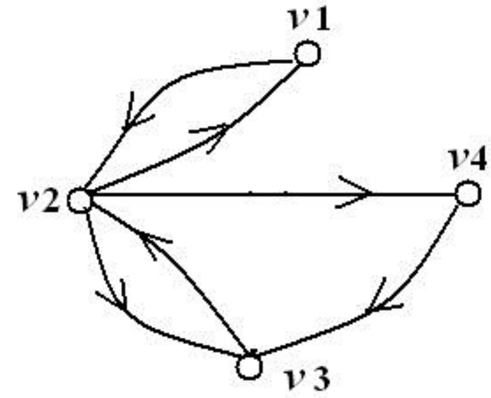


（1）写出它的邻接矩阵 A；

（2）图中长度为 3 的回路（注意起终点的不同）一共有多少条？

（3）其中长为 4 的路（不含回路）一共有几条？

解(1)：邻接矩阵如下所示



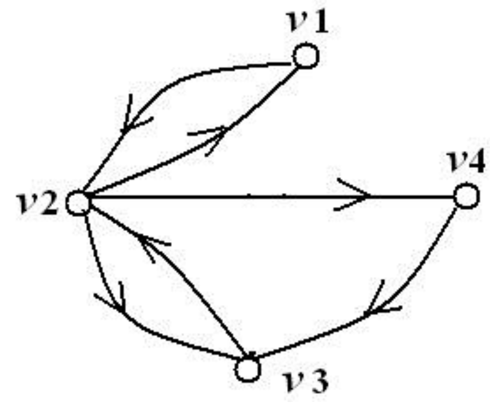
$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

解(2)：由

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&2&1&0\\1&0&1&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\qquad A^3=\begin{bmatrix}0&2&1&0\\2&1&2&2\\0&2&1&0\\1&0&1&1\end{bmatrix}$$

可知长度为3的回路即 A^3 的对角线元素之和3.

解(3)：由



$$A^4=\begin{bmatrix}2&1&2&2\\1&4&3&1\\2&1&2&2\\0&2&1&0\end{bmatrix}$$

可知长度为4的有向通路（不含回路）的条数即 A^4 中的非对角线元素之和18.

辅导结束！

最后，祝大家考试成功 ;–)