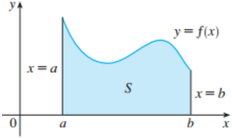
§1 定积分的概念

一、曲边梯形的面积

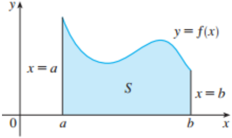
定义:设$f \in C[a,b]$，$f(x) \geq 0$，由曲线$y = f(x), x = a$, $x = b$ 及x 轴围成的平面图形，称为曲边梯形。

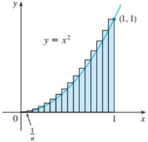


§1 定积分的概念

一、曲边梯形的面积

定义:设$f \in C[a,b]$，$f(x) \geq 0$，由曲线$y=f(x), x=a$, $x=b$ 及x 轴围成的平面图形，称为曲边梯形。

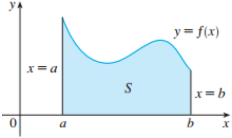


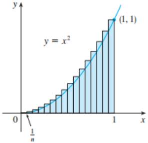


§1 定积分的概念

一、曲边梯形的面积

定义:设$f \in C[a,b]$，$f(x) \geq 0$，由曲线$y = f(x), x = a$, $x = b$ 及x 轴围成的平面图形，称为曲边梯形。



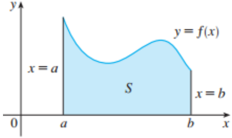


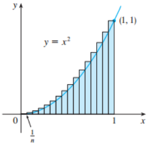
例1：求$[0,1]$ 上以$y = x^2$ 为曲边的曲边梯形的面积。

§1 定积分的概念

一、曲边梯形的面积

定义:设$f \in C[a,b]$，$f(x) \geq 0$，由曲线$y = f(x), x = a$, $x = b$ 及x 轴围成的平面图形，称为曲边梯形。





例1：求$[0,1]$ 上以$y = x^2$ 为曲边的曲边梯形的面积。

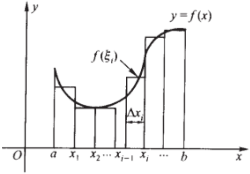
$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

8.1.定积分的概念

定义:设$f(x)$ 是定义在$[a,b]$ 上的函数，在$[a,b]$ 上依次插入分点$\{x_i\}_{i=0}^{n}$，作分划$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$。任意取点$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，记$[x_{i-1}, x_i]$ 的长度为$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，令$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n}\{\Delta x_i\}$。

8.1.定积分的概念

定义:设$f(x)$ 是定义在$[a,b]$ 上的函数，在$[a,b]$ 上依次插入分点$\{x_i\}_{i=0}^n$，作分划$P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$。任意取点$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，记$[x_{i-1},x_i]$ 的长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，令$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$。



若$\lambda\to 0$ 时，

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在，不依赖于分划P，且不依赖于ξ_i 的选择，则称$f(x)$ 在$[a,b]$ 上Riemann 可积。$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的定积分或Riemann 积分，记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

注1：定积分的$\epsilon-\delta$ 语言表述如下：设有定数I,
$\forall\epsilon>0,\exists\,\delta>0,\forall$ 分划$P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，
任意取点$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，只要$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}<\delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\epsilon,$$

则称$f(x)$ 在$[a,b]$ 上Riemann 可积，称I 是$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的定积分。

注1：定积分的$\epsilon-\delta$ 语言表述如下：设有定数I, $\forall\epsilon>0, \exists\,\delta>0, \forall$ 分划$P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，任意取点$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，只要$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}<\delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \epsilon,$$

则称$f(x)$ 在$[a,b]$ 上Riemann 可积，称I 是$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的定积分。

注2：在函数极限$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 中，对每个变量x，$f(x)$ 唯一确定；而对黎曼和极限，同一个λ 可对应不同的分划，从而使得Riemann 极限比通常极限复杂得多。

注1：定积分的$\epsilon-\delta$ 语言表述如下：设有定数I,

$\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall$ 分划$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，任意取点$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，只要$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\} < \delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \epsilon,$$

则称$f(x)$ 在$[a, b]$ 上Riemann 可积，称I 是$f(x)$ 在$[a, b]$ 上的定积分。

注2：在函数极限$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 中，对每个变量x，$f(x)$ 唯一确定；而对黎曼和极限，同一个λ 可对应不同的分划，从而使得Riemann 极限比通常极限复杂得多。

注3：定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是数，值仅与f 及区间$[a, b]$ 有关，e.g. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \cdots$，这与不定积分不同。

二、定积分的几何意义

对于$[a,b]$ 上的连续函数$f(x)\geq 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线$y=f(x), x=a, x=b$ 及x 轴围成的曲边梯形的面积。

二、定积分的几何意义

对于$[a,b]$ 上的连续函数$f(x)\geq 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线$y=f(x), x=a, x=b$ 及x 轴围成的曲边梯形的面积。

当$f(x)\leq 0, \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b(-f(x))\mathrm{d}x$ 是位于x 轴下方的曲边梯形面积的相反数，不妨称为“负面积”。

二、定积分的几何意义

对于$[a,b]$ 上的连续函数$f(x)\geq 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线$y=f(x), x=a, x=b$ 及x 轴围成的曲边梯形的面积。

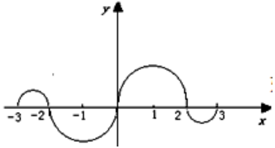
当$f(x)\leq 0, \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b(-f(x))\mathrm{d}x$ 是位于x 轴下方的曲边梯形面积的相反数，不妨称为“负面积”。

对于非定号的$f(x), \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示

曲线$y=f(x)$ 在x 轴上方部分所有曲边梯形的正面积，与下方所有曲边梯形负面积的代数和。

补充题1: 设连续函数$y = f(x)$ 在$[-3,-2]$ 和$[2,3]$ 上的图形分别是直径为1的上半圆周和下半圆周，在区间$[-2,0]$ 和$[0,2]$ 上的图形分别是直径为2的下半圆周和上半圆周。如果$G(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则$G(x)$ 的非负范围是多少？

A. $[-3,3]$ B. $[-3,-2]\cup[0,2]$ C. $[0,3]$ D. $[-3,-2]\cup[0,3]$



补充题2: 设有曲线$C_n : x^{2n} + y^{2n} = 1$ (n 为正整数)。D_n 为C_n 所围的平面区域的面积, 求$\lim\limits_{n\to\infty} D_n$。

§2 定积分存在的条件

一、必要条件

定理:若函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，则$f(x)$ 在$[a,b]$ 上有界。

§2 定积分存在的条件

一、必要条件

定理:若函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，则$f(x)$ 在$[a,b]$ 上有界。

注：可积函数一定有界，但有界函数未必可积。

例1：证明Dirichlet 函数$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$ 有界但不可积。

今后讨论可积性，总假定函数在$[a,b]$ 上有界。

二、充分条件

判别一个函数是否可积，用定义十分复杂，以下给出的准则只与被积函数有关，而不涉及定积分的值。

1 Darboux 和

定义:设$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 为$[a, b]$的一个分划，由于f 在$[a, b]$ 上有界，故由确界存在定理，对任意$i, f(x)$ 在$[x_{i-1}, x_i]$ 上有上下确界。定义

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$
$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

则M_i, m_i 与分划P 有关。

定义和式

$$\overline{S}(P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\underline{S}(P)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i,$$

分别称为对应于分划P 的Darboux 上和与Darboux 下和，统称Darboux 和。

定义和式

$$\overline{S}(P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\underline{S}(P)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i,$$

分别称为对应于分划P 的Darboux 上和与Darboux 下和，统称Darboux 和。

显然，$\underline{S}(P)\le\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\le\overline{S}(P)$。

定义和式

$$\overline{S}(P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\underline{S}(P)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i,$$

分别称为对应于分划P 的Darboux 上和与Darboux 下和，统称Darboux 和。

显然，$\underline{S}(P)\le\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\le\overline{S}(P)$。

注：与Riemann 和相比，Darboux 和仅与分划P 有关，与点集$\{\xi_i\}$ 无关。

性质1：在原有的分划P 中加入新的分点形成新的分划P'，则$\overline{S}(P') \le \overline{S}(P), \underline{S}(P') \ge \underline{S}(P)$（即增加分点，上和不增，下和不减）。

性质1：在原有的分划P 中加入新的分点形成新的分划P'，则$\overline{S}(P') \leq \overline{S}(P), \underline{S}(P') \geq \underline{S}(P)$（即增加分点，上和不增，下和不减）。

性质2：任一下和不超过任意上和。

性质1：在原有的分划P 中加入新的分点形成新的分划P'，则$\overline{S}(P') \leq \overline{S}(P), \underline{S}(P') \geq \underline{S}(P)$（即增加分点，上和不增，下和不减）。

性质2：任一下和不超过任意上和。

注：由上述性质知，所有上和的集合$\{\overline{S}(P)\}$ 有下确界，所有下和的集合$\{\underline{S}(P)\}$ 有上确界。

性质1：在原有的分划P 中加入新的分点形成新的分划P'，则$\overline{S}(P') \le \overline{S}(P), \underline{S}(P') \ge \underline{S}(P)$（即增加分点，上和不增，下和不减）。

性质2：任一下和不超过任意上和。

注：由上述性质知，所有上和的集合$\{\overline{S}(P)\}$ 有下确界，所有下和的集合$\{\underline{S}(P)\}$ 有上确界。

记$L = \inf\{\overline{S}(P)|P$ 为所有可能分划$\}$，称上积分；

记$\ell = \sup\{\underline{S}(P)|P$ 为所有可能分划$\}$，称下积分。

则对任意分划$P, Q, \underline{S}(P) \le \ell \le L \le \overline{S}(Q)$。

Darboux 定理: 对任意$[a,b]$ 上有界的函数$f(x)$，恒有$\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}(P)=L$, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}(P)=\ell$，其中$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$。

Darboux 定理: 对任意$[a,b]$ 上有界的函数$f(x)$，恒有$\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}(P)=L$, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}(P)=\ell$，其中$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$。

注：该极限分割可任意，故区别于“单调函数极限等于确界”。

Darboux 定理: 对任意$[a,b]$ 上有界的函数$f(x)$，恒有$\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}(P)=L$, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}(P)=\ell$，其中$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$。

注：该极限分割可任意，故区别于“单调函数极限等于确界”。

二、充要条件

定理:（定积分存在的第一充要条件）有界函数$f(x)$在$[a,b]$ 上可积 $\Longleftrightarrow$ $L=\ell$，即$\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}(P)=\lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}(P)$。

Darboux 定理: 对任意$[a,b]$上有界的函数$f(x)$，恒有$\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}(P)=L$, $\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}(P)=\ell$，其中$\lambda=\max_{1\leq i\leq n}\{\Delta x_i\}$。

注：该极限分割可任意，故区别于“单调函数极限等于确界”。

二、充要条件

定理:（定积分存在的第一充要条件）有界函数$f(x)$在$[a,b]$上可积 $\Longleftrightarrow$ $L=\ell$，即$\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}(P)=\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}(P)$。

注1：Dirichlet 函数的不可积性，正是由于上积分不等于下积分。

注2：记$w_i = M_i - m_i$，则$\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i$，故

$$\text{可积第一充要条件} \iff \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i = 0.$$

事实上，$w_i = \sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]} |f(x') - f(x'')|$。

注2：记$w_i = M_i - m_i$，则$\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i$，故

$$\text{可积第一充要条件} \iff \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i = 0.$$

事实上，$w_i = \sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]} |f(x') - f(x'')|$。

注3：第一充要条件有几何意义。

定理:（定积分存在的第二充要条件）有界函数f在$[a,b]$上可积$\iff \forall\epsilon > 0, \exists$ 分划P，s.t. $\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum_{\lambda(P)} w_i \Delta x_i < \epsilon$。

分析：要使和式当$\lambda(P)\to 0$ 时，$\sum_{i=1}^{n} w_i\Delta x_i \to 0$

(1)$\lambda(P)$ 充分小时，w_i 都很小；

(2)w_i 不能很小，但与之对应的Δx_i 之和很小。

定理:（定积分存在的第三充要条件）有界函数$f(x)$在$[a,b]$ 上可积 $\Longleftrightarrow$ $\forall\epsilon>0,\forall\sigma>0,\exists$ 分划P, s.t.振幅$w_i\geq\epsilon$的那些小区间$[x_{i-1},x_i]$ 长度之和$\sum_{w_i\geq\epsilon}\Delta x_i<\sigma$。

三、充分条件（可积函数类）

1 闭区间$[a,b]$ 上有界单调函数必定可积。

分析：要使和式当$\lambda(P) \to 0$时，$\sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i \to 0$

(1)$\lambda(P)$充分小时，w_i都很小；

(2)w_i不能很小，但与之对应的Δx_i之和很小。

定理:（定积分存在的第三充要条件）有界函数$f(x)$在$[a,b]$上可积$\iff \forall \epsilon > 0, \forall \sigma > 0, \exists$分划$P$, s.t.振幅$w_i \geq \epsilon$的那些小区间$[x_{i-1}, x_i]$长度之和$\sum_{w_i \geq \epsilon} \Delta x_i < \sigma$。

三、充分条件（可积函数类）

1 闭区间$[a,b]$上有界单调函数必定可积。

2 闭区间$[a,b]$上的连续函数必定可积。

3 闭区间$[a, b]$ 上只有有限个不连续点的有界函数必定可积。

3 闭区间$[a,b]$ 上只有有限个不连续点的有界函数必定可积。

例2： $f(x)=\begin{cases} 1/x-[1/x], & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \in R[0,1]$ 。

3 闭区间$[a,b]$ 上只有有限个不连续点的有界函数必定可积。

例2： $f(x)=\begin{cases} 1/x-[1/x], & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}\in R[0,1]$ 。

注：该题可推广：设有界函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上不连续点为$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，则$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积($P_{285}7$)。

3 闭区间$[a,b]$ 上只有有限个不连续点的有界函数必定可积。

例2： $f(x)=\begin{cases} 1/x-[1/x], & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \in R[0,1]$ 。

注：该题可推广：设有界函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上不连续点为$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，则$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积($P_{285}7$)。

例3：Riemann 函数

$\begin{cases} 1/q, & x=p/q \\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c \end{cases} \in R[0,1]$ 且$\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x=0$。

3 闭区间$[a,b]$ 上只有有限个不连续点的有界函数必定可积。

例2：$f(x)=\begin{cases}1/x-[1/x], & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}\in R[0,1]$ 。

注：该题可推广：设有界函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上不连续点为$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，则$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积($P_{285}7$)。

例3：Riemann 函数

$\begin{cases}1/q, & x=p/q\\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}\in R[0,1]$ 且$\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x=0$。

注：$R(x)$ 具有无穷多个不连续点且不满足例3的推广，但$R(x)$ 仍可积。

作业： 课本P_{285} 1(2) 5(2), 6, 9。

补充1: 设$f(x)$ 是定义在$[a,b]$ 上的有界函数。利用可积第三充要条件证明：若任给$\delta>0$，均有$f\in R[a+\delta,b]$，则$f\in R([a,b])$。并利用该题证明P_{285} 5(4)。

补充2: (对比P_{286} 9)。若$f(x)\in R[a,b]$，$A\le f(x)\le B$，$g(u)\in R[A,B]$，是否有$g(f(x))\in R[a,b]$？若是，请证明；若不是，给出反例。

若$f(x)\notin R[a,b]$，$A\le f(x)\le B, g(u)\notin R[A,B]$，是否有$g(f(x))\notin R[a,b]$？若是，请证明；若不是，给出反例。

思考题: 哪些函数分别满足如下要求，并说明理由。

(i) 任意下和等于任意上和; (ii)某个下和等于另外某分割的上和; (iii)连续，且所有的下和都相等。

§3 定积分的性质

一、定积分的性质

性质1（线性性质）：设$f(x), g(x)$ 均在$[a, b]$ 上可积，k_1, k_2 是常数，则函数$k_1 f(x) + k_2 g(x)$ 在$[a, b]$ 上也可积，且

$$\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1 \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k_2 \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

§3 定积分的性质

一、定积分的性质

性质1（线性性质）：设$f(x), g(x)$ 均在$[a, b]$ 上可积，k_1, k_2 是常数，则函数$k_1 f(x) + k_2 g(x)$ 在$[a, b]$ 上也可积，且

$$\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1 \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k_2 \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

性质2（乘积可积性）：设$f(x), g(x)$ 均在$[a, b]$ 上可积，则$f(x) \cdot g(x)$ 在$[a, b]$ 上可积。

§3 定积分的性质

一、定积分的性质

性质1（线性性质）：设$f(x), g(x)$ 均在$[a,b]$ 上可积，k_1, k_2 是常数，则函数$k_1 f(x) + k_2 g(x)$ 在$[a,b]$ 上也可积，且

$$\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1 \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k_2 \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

性质2（乘积可积性）：设$f(x), g(x)$ 均在$[a,b]$ 上可积，则$f(x)\cdot g(x)$ 在$[a,b]$ 上可积。

注1：一般$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x \neq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

§3 定积分的性质

一、定积分的性质

性质1（线性性质）：设$f(x), g(x)$ 均在$[a, b]$ 上可积，k_1, k_2 是常数，则函数$k_1 f(x) + k_2 g(x)$ 在$[a, b]$ 上也可积，且

$$\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1 \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k_2 \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

性质2（乘积可积性）：设$f(x), g(x)$ 均在$[a, b]$ 上可积，则$f(x) \cdot g(x)$ 在$[a, b]$ 上可积。

注1：一般$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x \neq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

注2：为何不考虑除法的可积性？

性质3（保号性）：若$f \in R[a,b], f(x) \geq 0$，则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$。

性质3（保号性）：若$f \in R[a,b], f(x) \geq 0$，则$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \geq 0$。

推论（保序性）：若$f, g \in R[a,b]$，且在$[a,b]$上恒有$f(x) \geq g(x)$，则成立$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x) \mathrm{d}x$。

性质3（保号性）：若$f \in R[a,b], f(x) \geq 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$。

推论（保序性）：若$f, g \in R[a,b]$，且在$[a,b]$上恒有$f(x) \geq g(x)$，则成立$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

若$f \in C[a,b]$且$f(x) \geq 0$但不恒为0，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$。

性质3（保号性）：若$f \in R[a,b], f(x) \geq 0$，则$\int_a^b f(x)$ $\mathrm{d}x \geq 0$。

推论（保序性）：若$f, g \in R[a,b]$，且在$[a,b]$ 上恒有$f(x) \geq g(x)$，则成立$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

若$f \in C[a,b]$ 且$f(x) \geq 0$ 但不恒为0，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$。

该命题可推广至：设$f \in R[a,b]$ 且$f(x)$ 在$[a,b]$ 上> 0，则$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x > 0$。

性质4（区间可加性）：设$a < c < b$

(1) 若$f \in R[a,b]$，则$f \in R[a,c]$ 且$f \in R[c,b]$；

(2) 若$f \in R[a,c]$ 且$f \in R[c,b]$，则$f \in R[a,b]$，并成立
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$。

性质4（区间可加性）：设$a < c < b$

(1) 若$f \in R[a,b]$，则$f \in R[a,c]$ 且$f \in R[c,b]$；

(2) 若$f \in R[a,c]$ 且$f \in R[c,b]$，则$f \in R[a,b]$，并成立$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$。

若函数f 的绝对值函数$|f|$ 在$[a,b]$ 上可积，则称f 在$[a,b]$ 绝对可积。

性质4（区间可加性）：设$a < c < b$

(1) 若$f \in R[a,b]$，则$f \in R[a,c]$ 且$f \in R[c,b]$；

(2) 若$f \in R[a,c]$ 且$f \in R[c,b]$，则$f \in R[a,b]$，并成立 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$。

若函数f 的绝对值函数$|f|$ 在$[a,b]$ 上可积，则称f 在$[a,b]$ 绝对可积。

以下讨论$f, f^2, |f|$ 三者可积性的关系。

(1) f 可积$\Longrightarrow$ $|f|$ 可积；

(2) f 可积$\Longrightarrow$ f^2 可积；

(3) f^2 可积 $\Longleftrightarrow$ $|f|$ 可积。

其余情况不可。

二、积分中值定理

定理:（积分第一中值定理）设$f(x)$ 和$g(x)$ 均在$[a, b]$ 上可积，$g(x)$ 在$[a, b]$ 上不变号，则$\exists \eta \in [m, M]$，s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \eta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

这里M, m 分别表示$f(x)$ 在$[a, b]$ 的上确界和下确界。

二、积分中值定理

定理:（积分第一中值定理）设$f(x)$ 和$g(x)$ 均在$[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在$[a,b]$ 上不变号，则$\exists\eta\in[m,M]$，s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\eta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

这里M,m 分别表示$f(x)$ 在$[a,b]$ 的上确界和下确界。

特别地，若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，则$\exists\xi\in[a,b]$, s.t.

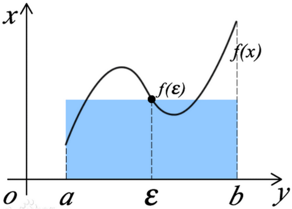
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

注1：当$f\in C[a,b]$ 时，上述积分第一中值定理结论可加强为$\xi\in(a,b)$。

注2：当$f \in C[a,b], g(x) \equiv 1$ 时，结论为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$。

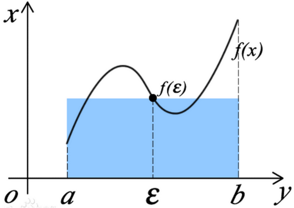
注2：当$f \in C[a,b], g(x) \equiv 1$ 时，结论为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$。

几何意义：当$f(x) \geq 0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线$y = f(x)$和直线$x = a, x = b$ 及x 轴围成的曲边梯形的面积。



注2：当$f \in C[a,b], g(x) \equiv 1$ 时，结论为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$。

几何意义：当$f(x) \geq 0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线$y = f(x)$ 和直线$x = a, x = b$ 及x 轴围成的曲边梯形的面积。



注3：$g(x)$ 的保号性条件不满足时，定理未必成立。e.g. $f(x) = g(x) = x, [a,b] = [-1,1]$，则

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \neq \mu \cdot \int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x = 0.$$

三、定积分与求和表达式的关系

例6：把下列极限表示成积分的形式。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k\pi}{n}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{2n}{n^2+k^2}$。

三、定积分与求和表达式的关系

例6：把下列极限表示成积分的形式。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k\pi}{n}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{2n}{n^2+k^2}$。

例7：设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，且$f(x)>0$，证明：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x \le \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right).$$

四、几个著名不等式

1 Cauchy 不等式及Schwarz 不等式

定理: （Cauchy 不等式）设$a_i, b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为任意实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

四、几个著名不等式

1 Cauchy 不等式及Schwarz 不等式

定理: （Cauchy 不等式）设$a_i, b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为任意实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Cauchy 不等式的积分形式称为Schwarz 不等式。

定理: （Schwarz 不等式）若$f(x), g(x)$ 在$[a, b]$ 上可积，则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

例8：已知$f(x) \geq 0$，在$[a,b]$ 上连续，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1, k$为任意实数，求证

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2 \leq 1.$$

例8：已知$f(x)\geq 0$，在$[a,b]$ 上连续，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1, k$ 为任意实数，求证

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2 \leq 1.$$

2 Hölder 不等式及Hölder 不等式积分形式

定理：（Hölder 不等式）设$a_i, b_i \geq 0 (i = 1, \cdots, n), p, q$ 为满足$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ 的正数，则

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

特别地，$p = q = 2$ 时即Cauchy 不等式，故Hölder 不等式是Cauchy 不等式的推广。

定理:（Hölder 不等式的积分形式）设$f(x), g(x)$在$[a, b]$ 上可积，p, q 为满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的正数，则

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

定理: （Hölder 不等式的积分形式）设$f(x), g(x)$ 在$[a, b]$ 上可积，p, q 为满足$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 的正数，则

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

例9：证明$\int_0^\pi x a^{\sin x}\mathrm{d}x \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x}\mathrm{d}x \geq \frac{\pi^3}{4}(a > 0).$

3 Minkowski 不等式及其积分形式

定理: （Minkowski 不等式）设$a_i, b_i \geq 0(i = 1, \cdots, n)$，则对$\forall p > 1$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

3 Minkowski 不等式及其积分形式

定理: （Minkowski 不等式）设$a_i, b_i \geq 0 (i = 1, \cdots, n)$，则对$\forall p > 1$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

定理: （Minkowski 不等式的积分形式）
设$f(x), g(x) \geq 0$ 且$f(x), g(x)$ 在$[a, b]$ 上可积，则$\forall p > 1$，有

$$\left(\int_a^b (f(x) + g(x))^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b f^p(x) \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x) \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

五、积分估计及积分不等式

例16：设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上二阶可导，$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，记$M=\sup_{a\le x\le b}|f''(x)|$，证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a)^3/24$.

五、积分估计及积分不等式

例16：设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上二阶可导，$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，记$M=\sup_{a\le x\le b}|f''(x)|$，证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a)^3/24.$

例17：设$a,b>0, f(x)\ge 0$ 且$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，$\int_{-a}^{b} xf(x)\mathrm{d}x=0$。试证：$\int_{-a}^{b} x^2 f(x)\mathrm{d}x \le ab\int_{-a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$。

五、积分估计及积分不等式

例16：设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上二阶可导，$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，记$M=\sup_{a\le x\le b}|f''(x)|$，证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a)^3/24.$

例17：设$a,b>0, f(x)\ge 0$ 且$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，$\int_{-a}^b xf(x)\mathrm{d}x=0$。试证：$\int_{-a}^b x^2 f(x)\mathrm{d}x \le ab\int_{-a}^b f(x)\mathrm{d}x$。

作业： 课本P_{293} 4(3)(4), 5, 7, 9, 10, 13。

§4 微积分基本定理

一、变限积分

设$f\in R[a,b]$，则对$\forall x\in[a,b], \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 存在，且随x 的改变而改变，故它是定义在$[a,b]$ 上关于x 的函数，称为变上限积分。同理$\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ 称为变下限积分。

§4 微积分基本定理

一、变限积分

设$f \in R[a,b]$，则对$\forall x \in [a,b], \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 存在，且随x的改变而改变，故它是定义在$[a,b]$ 上关于x 的函数，称为变上限积分。同理$\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ 称为变下限积分。

注：变上限函数扩展了函数的形式，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 与我们所熟悉的初等函数形式迥异，但它确实是一种函数的表现形式。

§4 微积分基本定理

一、变限积分

设$f \in R[a,b]$，则对$\forall x \in [a,b]$, $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 存在，且随x 的改变而改变，故它是定义在$[a,b]$ 上关于x 的函数，称为变上限积分。同理$\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ 称为变下限积分。

注：变上限函数扩展了函数的形式，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 与我们所熟悉的初等函数形式迥异，但它确实是一种函数的表现形式。

关于这两个积分具有如下性质：

命题1：设$f \in R[a,b]$，则$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \in C[a,b]$

命题2：设$f \in R[a,b], x \in [a,b]$ 是f 的连续点，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$。

命题2：设$f \in R[a,b], x \in [a,b]$ 是f 的连续点，则
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$。

原函数存在定理:若$f \in C[a,b]$，则f 在$[a,b]$ 上存在原函数（即连续函数的原函数可微）。

命题2：设$f \in R[a,b], x \in [a,b]$ 是f 的连续点，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$。

原函数存在定理:若$f \in C[a,b]$，则f 在$[a,b]$ 上存在原函数（即连续函数的原函数可微）。

注：$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(x)$ 给出对积分上限求导法则。

命题2：设$f \in R[a,b], x \in [a,b]$ 是f 的连续点，则
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)。$$

原函数存在定理:若$f \in C[a,b]$，则f 在$[a,b]$ 上存在原函数（即连续函数的原函数可微）。

注：$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(x)$ 给出对积分上限求导法则。

思考题: 若$g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在某区间上处处可微，是否有在该区间上$g'(x) = f(x)$?

例3：计算$F(x)=\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ 的导数。

例3：计算$F(x)=\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ 的导数。

例4：求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{x^3}$。

例3：计算$F(x)=\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\mathrm{d}t$ 的导数。

例4：求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\mathrm{d}t}{x^3}$。

可以由变上限积分导出微积分基本定理：

微积分基本定理:设$f\in C[a,b]$, $F(x)$ 是$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的一个原函数，则成立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

注1：该定理的结论被称为Newton-Leibniz 公式，也常记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b$。它沟通了微分与积分的桥梁，是高等数学乃至整个数学领域最优美的结论之一。

注1：该定理的结论被称为Newton-Leibniz 公式，也常记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b$。它沟通了微分与积分的桥梁，是高等数学乃至整个数学领域最优美的结论之一。

注2：微积分基本定理的条件可以减弱：

设$f(x) \in R[a,b], F(x)$ 为$f(x)$ 在$[a,b]$ 上一个原函数，则$\forall x \in [a,b]$，成立：$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$。

注1：该定理的结论被称为Newton-Leibniz 公式，也常记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)|_a^b$。它沟通了微分与积分的桥梁，是高等数学乃至整个数学领域最优美的结论之一。

注2：微积分基本定理的条件可以减弱：

设$f(x) \in R[a,b], F(x)$ 为$f(x)$ 在$[a,b]$ 上一个原函数，则$\forall x \in [a,b]$，成立：$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$。

注3：（1）可积函数未必有原函数。

（2）有原函数的函数未必可积。

例5：设$f\in R[A,B], a,b\in(A,B)$ 是f 的两个连续点，证明

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x = f(b)-f(a).$$

作业： 课本P_{310} 1(1)(3) 再加上$F(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, 2(2)(4), 3, 5.

补充1：设f 在$[a,b]$ 上可微，且满足$\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=\frac{x}{3}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，求$f$。

补充2：证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=0$。

积分第二中值定理:设函数$f \in R[a,b]$，则

(i) 若函数g 在$[a,b]$ 上减且$g(x) \geq 0$，则$\exists \xi \in [a,b]$, s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$.

(ii) 若函数g 在$[a,b]$ 上增且$g(x) \geq 0$，则$\exists \eta \in [a,b]$, s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_\eta^b f(x)\mathrm{d}x$.

积分第二中值定理:设函数$f \in R[a,b]$，则

(i) 若函数g 在$[a,b]$ 上减且$g(x) \geq 0$，则$\exists \xi \in [a,b]$, s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$.

(ii) 若函数g 在$[a,b]$ 上增且$g(x) \geq 0$，则$\exists \eta \in [a,b]$, s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_\eta^b f(x)\mathrm{d}x$.

推论：设$f \in R[a,b]$，若g 为单调函数，则$\exists \xi \in [a,b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

积分第二中值定理:设函数$f \in R[a,b]$，则

(i) 若函数g 在$[a,b]$ 上减且$g(x) \geq 0$，则$\exists \xi \in [a,b]$, s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$.

(ii) 若函数g 在$[a,b]$ 上增且$g(x) \geq 0$，则$\exists \eta \in [a,b]$, s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_\eta^b f(x)\mathrm{d}x$.

推论：设$f \in R[a,b]$，若g 为单调函数，则$\exists \xi \in [a,b]$, s.t. $$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

注：积分第二中值定理及其推论是今后建立反常积分收敛判别法的工具。

§5 定积分的计算

一、定积分的基本计算

（补充）Newton-Leibniz 公式成立的条件：

§5 定积分的计算

一、定积分的基本计算

（补充）Newton-Leibniz 公式成立的条件：

(1) 若$f \in C[a,b]$，则对f 的任何原函数F，有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

§5 定积分的计算

一、定积分的基本计算

（补充）Newton-Leibniz 公式成立的条件：

(1) 若$f\in C[a,b]$，则对f 的任何原函数F，有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$;

(2) 若$f\in R[a,b]$，且有原函数F，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

§5 定积分的计算

一、定积分的基本计算

（补充）Newton-Leibniz 公式成立的条件：

(1) 若$f \in C[a,b]$，则对f 的任何原函数F，有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

(2) 若$f \in R[a,b]$，且有原函数F，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

(3) 若$f \in R[a,b]$，F 在$[a,b]$ 上连续，且在(a,b) 内除有限个点外有$F'(x) = f(x)$，则有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$。

§5 定积分的计算

一、定积分的基本计算

（补充）Newton-Leibniz 公式成立的条件：

(1) 若$f \in C[a,b]$，则对f 的任何原函数F，有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

(2) 若$f \in R[a,b]$，且有原函数F，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

(3) 若$f \in R[a,b]$，F 在$[a,b]$ 上连续，且在(a,b) 内除有限个点外有$F'(x) = f(x)$，则有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$。

例1：计算$\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x$。

§5 定积分的计算

一、定积分的基本计算

（补充）Newton-Leibniz 公式成立的条件：

(1) 若$f \in C[a,b]$，则对f 的任何原函数F，有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

(2) 若$f \in R[a,b]$，且有原函数F，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

(3) 若$f \in R[a,b]$，F 在$[a,b]$ 上连续，且在(a,b) 内除有限个点外有$F'(x) = f(x)$，则有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$。

例1：计算$\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x$。

例2：求$\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x$。

§5 定积分的计算

一、定积分的基本计算

（补充）Newton-Leibniz 公式成立的条件：

(1) 若$f \in C[a,b]$，则对f 的任何原函数F，有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

(2) 若$f \in R[a,b]$，且有原函数F，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

(3) 若$f \in R[a,b]$，F 在$[a,b]$ 上连续，且在(a,b) 内除有限个点外有$F'(x) = f(x)$，则有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$。

例1：计算$\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x$。

例2：求$\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x$。

例3：设$n > 1$ 为自然数，求$\int_0^n (x - [x])\mathrm{d}x$。

例4：$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in[-\frac{\pi}{2},0) \\ e^x, & x\in[0,1]\end{cases}$

例4： $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in[-\frac{\pi}{2},0)\\ e^x, & x\in[0,1]\end{cases}$

二、定积分的换元公式法

定理:设$f(x)\in C[a,b], x=\phi(t)$ 在$[\alpha,\beta]$ (或$[\beta,\alpha]$) 上有连续导数，其值域包含于$[a,b]$ 且满足$\phi(\alpha)=a, \phi(\beta)=b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t.$$

例4： $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in[-\frac{\pi}{2},0) \\ e^x, & x\in[0,1]\end{cases}$

二、定积分的换元公式法

定理:设$f(x)\in C[a,b], x=\phi(t)$ 在$[\alpha,\beta]$ (或$[\beta,\alpha]$) 上有连续导数，其值域包含于$[a,b]$ 且满足$\phi(\alpha)=a, \phi(\beta)=b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t.$$

注1：换元后定积分$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$ 的上下限α,β 必须与原定积分上下限a,b 相对应，无须考虑α 与β 谁大谁小。

注2：对定积分作变量代换$x=\phi(t)$时，并不要求$\phi(t)$是一个单调、一一对应的函数，这一点与不定积分换元法有所不同。

注2：对定积分作变量代换$x = \phi(t)$时，并不要求$\phi(t)$是一个单调、一一对应的函数，这一点与不定积分换元法有所不同。

求不定积分时，通过换元，求出新变量t的不定积分后，还需将变量t还原成x，故要求$x = \phi(t)$有反函数。

注2：对定积分作变量代换$x = \phi(t)$ 时，并不要求$\phi(t)$ 是一个单调、一一对应的函数，这一点与不定积分换元法有所不同。

求不定积分时，通过换元，求出新变量t 的不定积分后，还需将变量t 还原成x，故要求$x = \phi(t)$ 有反函数。

求定积分时，通过换元，写出关于新变量t 的被积函数与关于新变量t 的上下限后，可直接求出积分的值。

注2：对定积分作变量代换$x=\phi(t)$ 时，并不要求$\phi(t)$ 是一个单调、一一对应的函数，这一点与不定积分换元法有所不同。

求不定积分时，通过换元，求出新变量t 的不定积分后，还需将变量t 还原成x，故要求$x=\phi(t)$ 有反函数。

求定积分时，通过换元，写出关于新变量t 的被积函数与关于新变量t 的上下限后，可直接求出积分的值。

例5：求$\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^4)}$.

例6：求半径为r 的圆的面积。

例7：计算$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$。

作业： 课本P_{311} 6(4)(15 – 18)(20), 11(2)(3).

补充：计算$\int_{-2}^{2}\min\left\{\frac{1}{|x|},x^2\right\}\mathrm{d}x$ 和$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$。

例7：计算$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$。

作业： 课本P_{311} 6(4)(15 – 18)(20), 11(2)(3).

补充：计算$\int_{-2}^{2}\min\left\{\frac{1}{|x|},x^2\right\}\mathrm{d}x$ 和$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$。

三、定积分的分部积分法

由不定积分的分部积分公式$\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\mathrm{d}x$，可立即推出定积分的分部积分公式：

例7：计算$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$。

作业： 课本P_{311} 6(4)(15 – 18)(20), 11(2)(3).

补充：计算$\int_{-2}^{2}\min\left\{\frac{1}{|x|},x^2\right\}\mathrm{d}x$ 和$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$。

三、定积分的分部积分法

由不定积分的分部积分公式$\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\mathrm{d}x$，可立即推出定积分的分部积分公式：

定理:设$u(x),v(x)$ 在区间$[a,b]$ 上有连续导数，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x.$$

例8：设$f(x)=\begin{cases}\sin(x/2), & x\geq 0\\ x\arctan x, & x<0\end{cases}$，

求$\int_0^{\pi+1} f(x-1)\mathrm{d}x$。

例8：设$f(x)=\begin{cases}\sin(x/2), & x\geq 0\\ x\arctan x, & x<0\end{cases}$，

求$\int_0^{\pi+1} f(x-1)\mathrm{d}x$。

例9：求$\int_1^{e+1} x^2\ln(x-1)\mathrm{d}x$。

例8：设$f(x)=\begin{cases}\sin(x/2), & x\geq 0\\ x\arctan x, & x<0\end{cases}$，

求$\int_0^{\pi+1} f(x-1)\mathrm{d}x$。

例9：求$\int_1^{e+1} x^2\ln(x-1)\mathrm{d}x$。

例10：设$F(x)=\int_0^x \sin(1/t)\mathrm{d}t$，求$F'(0)$。

作业： 课本P_{311} $6(8-10)(13), 15$

四、对称性在定积分计算中的应用

定理:设$f \in R[-a,a]$,

(1) 若f 是奇函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$;

(2) 若f 是偶函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$。

四、对称性在定积分计算中的应用

定理: 设$f \in R[-a,a]$，

(1) 若f 是奇函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$；

(2) 若f 是偶函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$。

推广命题1：设$f \in R[0,a]$，且$f(x) = -f(a-x)$，即关于区间中点$a/2$ 为奇函数，则$\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$。

四、对称性在定积分计算中的应用

定理:设$f \in R[-a,a]$，

(1) 若f 是奇函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$；

(2) 若f 是偶函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$。

推广命题1：设$f \in R[0,a]$，且$f(x) = -f(a-x)$，即关于区间中点$a/2$ 为奇函数，则$\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$。

推广命题2：设$f \in R[0,a]$，且$f(x) = f(a-x)$，即关于区间中点$a/2$ 为偶函数，则$\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a/2} f(x)\mathrm{d}x$。

例11：计算$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} \mathrm{d}x$。

例11：计算$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\mathrm{d}x$。

例12：计算$\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

例11：计算 $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} \mathrm{d}x$。

例12：计算 $\int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \mathrm{d}x$。

注：对定积分用换元法和分部积分法往往能使被积函数的原函数不是初等函数的一些积分项相互抵消，从而有可能计算出定积分的值。这与不定积分计算完全不同。

作业：课本P_{312} 12。

补充1：设f 连续，证明下式并由此计算P_{312}10(2)(3)。

(1) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)\mathrm{d}x$

$= 2\int_0^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\cos x)\mathrm{d}x$

补充2：求$\int_0^{2\pi}\sin(\sin x + x)\mathrm{d}x$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\mathrm{d}x$。

作业：课本P_{312} 12。

补充1：设f 连续，证明下式并由此计算P_{312}10(2)(3)。

(1) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)\mathrm{d}x$

$= 2\int_0^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\cos x)\mathrm{d}x$

补充2：求$\int_0^{2\pi}\sin(\sin x + x)\mathrm{d}x$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\mathrm{d}x$。

五、利用递推法求定积分

例13：求$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$.

注：I_n 在n 为奇数和偶数时表达式的不同是今后导出Wallis 公式的关键：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$。

例14：求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x dx$。

例14：求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x dx$。

归纳：对$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$，只要$m, n$中有一偶，即可利用例13递推公式求得定积分。

例14：求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x\mathrm{d}x$。

归纳：对$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\mathrm{d}x$，只要$m, n$中有一偶，即可利用例13递推公式求得定积分。

六、变上限积分及积分中值定理的应用

例15：设f是周期为T的可积函数，证明：对任意实数a，成立$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$。

例16：设$f(x)\in R[0,a]$，对$\forall x>0$，有$f(x)>0$，满足方程$f(x)=\sqrt{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}(0\le x\le a)$，求$f(x)$。

例16：设$f(x) \in R[0,a]$，对$\forall x>0$，有$f(x)>0$，满足方程$f(x)=\sqrt{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}(0\le x\le a)$，求$f(x)$。

例17：设$f\in C[0,2\pi]$，证明
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x。$$

例16：设$f(x)\in R[0,a]$，对$\forall x>0$，有$f(x)>0$，满足方程$f(x)=\sqrt{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}(0\le x\le a)$，求$f(x)$。

例17：设$f\in C[0,2\pi]$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x。$$

例18：设$f\in C[0,\pi]$，且$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$, $\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$。证明：在$(0,\pi)$内至少存在两不同点$\xi_1,\xi_2$, s.t. $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

例16：设$f(x)\in R[0,a]$，对$\forall x>0$，有$f(x)>0$，满足方程$f(x)=\sqrt{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}(0\le x\le a)$，求$f(x)$。

例17：设$f\in C[0,2\pi]$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x。$$

例18：设$f\in C[0,\pi]$，且$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$, $\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$。证明：在$(0,\pi)$内至少存在两不同点$\xi_1,\xi_2$, s.t. $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

作业： 课本P_{312} 14, 17, 19, 20, 23.

§6 定积分在几何计算中的应用

一、微元法

回忆求曲边梯形面积S 的步骤：

对区间$[a,b]$ 作划分$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，记$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，得到小曲边梯形面积的近似值$\Delta S_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i$，求和，取极限

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

§6 定积分在几何计算中的应用

一、微元法

回忆求曲边梯形面积S 的步骤：

对区间$[a,b]$ 作划分$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，记$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，得到小曲边梯形面积的近似值$\Delta S_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i$，求和，取极限

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

换一个角度，将分点x_{i-1} 和x_i 分别记为x 和$x+\Delta x$，将区间$[x,x+\Delta x]$ 上小曲边梯形的面积记为ΔS，取$\xi_i=x$，则$\Delta S\approx f(x)\Delta x$。

一般地，(1) 若U 是一个与变量x 的变化区间$[a, b]$ 有关的量；

一般地，(1) 若U 是一个与变量x 的变化区间$[a, b]$ 有关的量；

(2) U 对于区间$[a, b]$ 具有可加性。即若把区间$[a, b]$ 分成许多区间，则U 相应地分成许多部分量，而U 等于所有部分量之和；

一般地，(1) 若U 是一个与变量x 的变化区间$[a,b]$ 有关的量；

(2) U 对于区间$[a,b]$ 具有可加性。即若把区间$[a,b]$ 分成许多区间，则U 相应地分成许多部分量，而U 等于所有部分量之和；

(3) 在任意$[x,x+\Delta x]$ 上，$\Delta U\approx f(x)\Delta x$，且$\Delta x\to 0$ 时，$\Delta U-f(x)\Delta x=o(\Delta x)$ （即$\mathrm{d}U=f(x)\mathrm{d}x$），这时可考虑用$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 来表示这个量U。这种方法称为微元法。

8.6.定积分在几何计算中的应用

一般地，(1) 若U 是一个与变量x 的变化区间$[a,b]$ 有关的量；

(2) U 对于区间$[a,b]$ 具有可加性。即若把区间$[a,b]$ 分成许多区间，则U 相应地分成许多部分量，而U 等于所有部分量之和；

(3) 在任意$[x,x+\Delta x]$ 上，$\Delta U\approx f(x)\Delta x$，且$\Delta x\to 0$ 时，$\Delta U-f(x)\Delta x=o(\Delta x)$ （即$\mathrm{d}U=f(x)\mathrm{d}x$），这时可考虑用$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 来表示这个量U。这种方法称为微元法。

注1：微元法的关键：给出近似表达$\Delta U\approx f(x)\Delta x$。一般情况下，严格检验$\Delta U-f(x)\Delta x$ 是否为Δx 的高阶无穷小并不容易，因此，对$\Delta U\approx f(x)\Delta x$ 的合理性要特别小心。

8.6.定积分在几何计算中的应用

一般地，(1) 若U 是一个与变量x 的变化区间$[a,b]$ 有关的量；

(2) U 对于区间$[a,b]$ 具有可加性。即若把区间$[a,b]$ 分成许多区间，则U 相应地分成许多部分量，而U 等于所有部分量之和；

(3) 在任意$[x, x+\Delta x]$ 上，$\Delta U \approx f(x)\Delta x$，且$\Delta x \to 0$ 时，$\Delta U - f(x)\Delta x = o(\Delta x)$ （即$\mathrm{d}U = f(x)\mathrm{d}x$），这时可考虑用$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 来表示这个量U。这种方法称为微元法。

注1：微元法的关键：给出近似表达$\Delta U \approx f(x)\Delta x$。一般情况下，严格检验$\Delta U - f(x)\Delta x$ 是否为Δx 的高阶无穷小并不容易，因此，对$\Delta U \approx f(x)\Delta x$ 的合理性要特别小心。

注2：微元法略去了$\Delta x \to 0$ 的极限过程及运算过程中可能出现的高阶无穷小，故使用方便。

二、求平面图形的面积

1直角坐标系下平面图形的面积

连续曲线$y = f(x)(f(x) \geq 0)$ 及两直线$x = a, x = b$ $(a < b)$ 所围成的曲边梯形的面积，则$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

二、求平面图形的面积

1直角坐标系下平面图形的面积

连续曲线$y = f(x)(f(x) \geq 0)$ 及两直线$x = a, x = b$ $(a < b)$ 所围成的曲边梯形的面积，则$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

若$y = f(x)(f(x) \leq 0)$，则$A = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

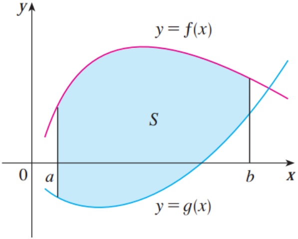
二、求平面图形的面积

1直角坐标系下平面图形的面积

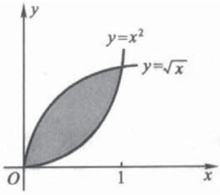
连续曲线$y=f(x)(f(x)\geq 0)$ 及两直线$x=a, x=b$ $(a<b)$ 所围成的曲边梯形的面积，则$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

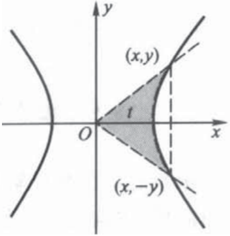
若$y=f(x)(f(x)\leq 0)$，则$A=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

问题： 求由曲线$y=f_{上}(x), y=f_{下}(x)$（其中$f_{上}(x)$, $f_{下}(x)\geq 0$），$x=a, x=b$ 所围成的图形面积。

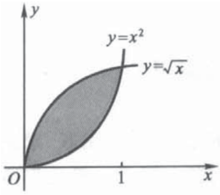


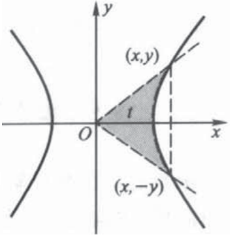
例1：计算由抛物线$y = x^2$和$x = y^2$所围区域的面积。





例1：计算由抛物线$y = x^2$ 和$x = y^2$ 所围区域的面积。





例2：设(x, y) 是等轴双曲线$x^2 - y^2 = 1$ 上的任意一点，求由双曲线与连接点(x, y) 和原点的线段，连接点$(x, -y)$ 和原点的线段所围成的曲边三角形的面积。

2参数方程所决定的图形面积

若$y=f(x)$是用参数形式$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$，$t\in[T_1,T_2]$表述。$x'(t)\in C[T_1,T_2]$，且$x'(t)$在$[T_1,T_2]$上不变号，记$A$为$x=x(t),y=y(t),x$轴$x=a,x=b$所围图形面积，则

$$A=\int_{T_1}^{T_2}|y(t)x'(t)|\mathrm{d}t。$$

2参数方程所决定的图形面积

若$y = f(x)$ 是用参数形式$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $, t \in [T_1, T_2]$ 表述。$x'(t) \in C[T_1, T_2]$，且$x'(t)$ 在$[T_1, T_2]$ 上不变号，记A为$x = x(t), y = y(t), x$ 轴$x = a, x = b$ 所围图形面积，则

$$A = \int_{T_1}^{T_2} |y(t)x'(t)| \mathrm{d}t。$$

例3：求旋轮线（摆线）$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $, t \in [0, 2\pi]$ 与x 轴所围成的区域的面积。

2参数方程所决定的图形面积

若$y=f(x)$ 是用参数形式$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$,$t\in[T_1,T_2]$ 表述。$x'(t)\in C[T_1,T_2]$，且$x'(t)$ 在$[T_1,T_2]$ 上不变号，记A 为$x=x(t),y=y(t),x$ 轴$x=a,x=b$ 所围图形面积，则

$A=\int_{T_1}^{T_2}|y(t)x'(t)|\mathrm{d}t$。

例3：求旋轮线（摆线）$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$,$t\in[0,2\pi]$ 与x 轴所围成的区域的面积。

例4：求叶形线$\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=2t^2-t^3 \end{cases}$，$t\in[0,2]$ 所围图形面积。

3极坐标下求面积

设曲线的极坐标方程$r = r(\theta)$ 是区间$[\alpha, \beta]$ 上的连续函数，其中$\beta - \alpha \le 2\pi$，求两条极径$\theta = \alpha, \theta = \beta$ 与$r = r(\theta)$ 所围成图形面积。

3极坐标下求面积

设曲线的极坐标方程$r=r(\theta)$ 是区间$[\alpha,\beta]$ 上的连续函数，其中$\beta-\alpha\le 2\pi$，求两条极径$\theta=\alpha,\theta=\beta$ 与$r=r(\theta)$ 所围成图形面积。

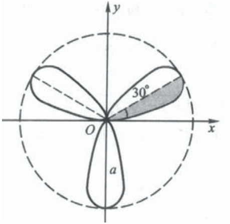
由微元法可知$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$。

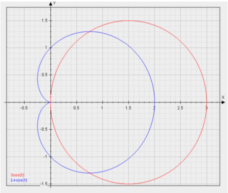
3极坐标下求面积

设曲线的极坐标方程$r = r(\theta)$ 是区间$[\alpha, \beta]$ 上的连续函数，其中$\beta - \alpha \le 2\pi$，求两条极径$\theta = \alpha, \theta = \beta$ 与$r = r(\theta)$ 所围成图形面积。

由微元法可知$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$。

例5：求三叶玫瑰线$r = a\sin 3\theta, \theta \in [0, \pi]$ 所围图形面积。



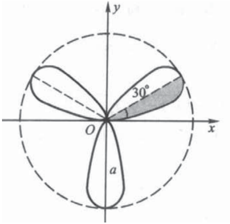


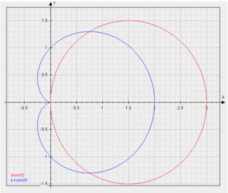
3极坐标下求面积

设曲线的极坐标方程$r = r(\theta)$ 是区间$[\alpha, \beta]$ 上的连续函数，其中$\beta - \alpha \leq 2\pi$，求两条极径$\theta = \alpha, \theta = \beta$ 与$r = r(\theta)$ 所围成图形面积。

由微元法可知$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$。

例5：求三叶玫瑰线$r = a\sin 3\theta, \theta \in [0, \pi]$ 所围图形面积。





例6：求$r = 3\cos\theta$ 与$r = 1 + \cos\theta(-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3})$ 所围图形面积。

三、求曲线的弧长

定义弧长：设平面曲线参数方程

为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in [T_1, T_2]$，对区间$[T_1, T_2]$作划分：$T_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$ 得到曲线上顺次排列的$n + 1$ 个点$P_0, P_1, \cdots, P_n$，$P_i = (x(t_i), y(t_i))$。

三、求曲线的弧长

定义弧长：设平面曲线参数方程

为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in [T_1, T_2]$，对区间$[T_1, T_2]$ 作划分：$T_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$ 得到曲线上顺次排列的$n+1$ 个点$P_0, P_1, \cdots, P_n$，$P_i = (x(t_i), y(t_i))$。

用$\overline{P_{i-1}P_i}$ 表示连结点P_{i-1} 和P_i 直线段的长度，则相应折线的长度可表示为$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}$。

三、求曲线的弧长

定义弧长：设平面曲线参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in [T_1, T_2]$，对区间$[T_1, T_2]$ 作划分：$T_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$ 得到曲线上顺次排列的$n+1$ 个点$P_0, P_1, \cdots, P_n$，$P_i = (x(t_i), y(t_i))$。

用$\overline{P_{i-1}P_i}$ 表示连结点P_{i-1} 和P_i 直线段的长度，则相应折线的长度可表示为$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}$。

若当$\lambda = \max_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\} \to 0$ 时，极限$\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}$ 存在，且与$[T_1, T_2]$ 的划分无关，则称该曲线可求长，称$\ell = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}$ 为该条曲线的弧长。

定义： 若$x'(t), y'(t) \in C[T_1, T_2]$，

且$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$，则由参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，$t \in [T_1, T_2]$

所确定的曲线称为光滑曲线。

定义： 若$x'(t), y'(t) \in C[T_1, T_2]$，且$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$，则由参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，$t \in [T_1, T_2]$所确定的曲线称为光滑曲线。

定理： （弧长公式）若由参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，$t \in [T_1, T_2]$确定的曲线是光滑曲线，则它可求长，弧长

$$\ell = \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

定义： 若$x'(t), y'(t) \in C[T_1, T_2]$，

且$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$，则由参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $, t \in [T_1, T_2]$

所确定的曲线称为光滑曲线。

定理： （弧长公式）若由参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，

$t \in [T_1, T_2]$ 确定的曲线是光滑曲线，则它可求长，弧长

$$\ell = \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

应用(1)：曲线段由$y = f(x)(a \leq x \leq b)$ 给出的弧长公

式$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases}$ $, x \in [a, b]$，此时$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x$。

应用(2)：曲线段极坐标方程$r = r(\theta)(\alpha \le \theta \le \beta)$。假定$r(\theta)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数。$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$。

应用(2)：曲线段极坐标方程$r = r(\theta)(\alpha \le \theta \le \beta)$。假定$r(\theta)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数。$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$。

例7：求半径为a 的圆的周长。

作业： 课本P_{330} 3(2)(4)(6), 4

应用(2)：曲线段极坐标方程$r=r(\theta)(\alpha\le\theta\le\beta)$。假定$r(\theta)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数。$\ell=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$。

例7：求半径为a 的圆的周长。

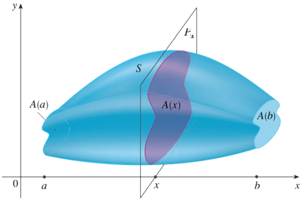
作业： 课本P_{330} 3(2)(4)(6), 4

四、求某些特殊的几何体体积

只考虑两种情况（1）已知几何体的截面积，求此几何体的体积；（2）求旋转体的体积。至于一般的几何体体积在重积分中给出。

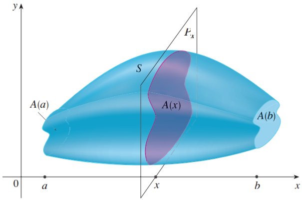
1 已知几何体的截面积，求几何体的体积。

设三维空间中一个几何体夹在平面$x = a$ 和$x = b$ 之间。对$\forall x \in [a, b]$，过x 点且与x 轴垂直的平面与该几何体相截，截面面积$A(x)$ 已知，且$A(x) \in C[a, b]$。



1 已知几何体的截面积，求几何体的体积。

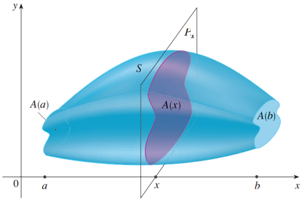
设三维空间中一个几何体夹在平面$x=a$ 和$x=b$ 之间。对$\forall x\in[a,b]$，过x 点且与x 轴垂直的平面与该几何体相截，截面面积$A(x)$ 已知，且$A(x)\in C[a,b]$。



由微元法知$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$。

1 已知几何体的截面积，求几何体的体积。

设三维空间中一个几何体夹在平面$x = a$ 和$x = b$ 之间。对$\forall x \in [a, b]$，过x 点且与x 轴垂直的平面与该几何体相截，截面面积$A(x)$ 已知，且$A(x) \in C[a, b]$。

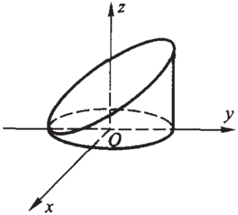


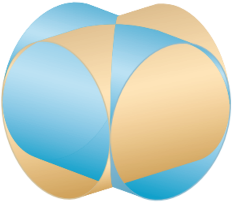
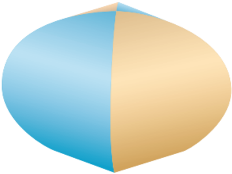
由微元法知$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x$。

注：《九章算术》记载，南北朝数学家祖暅（祖冲之之子）在求出球体积的同时，得到被后人称为“祖暅原理”的结论：夫叠基成立积，缘幂势既同，则积不容异。与上述求体积公式的推导完全一样。

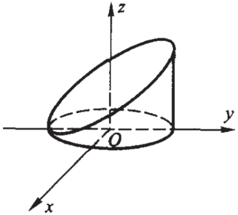
8.6.定积分在几何计算中的应用

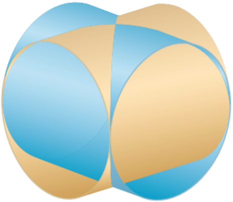
例8：已知一个直圆柱体的底面半径为a，平面P_1 过其底面圆周上的一点，且与其底面所在的平面P_2 成夹角θ，求圆柱体被P_1 与P_2 所截得的那部分的体积。

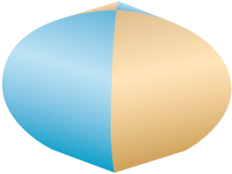


例8：已知一个直圆柱体的底面半径为a，平面P_1 过其底面圆周上的一点，且与其底面所在的平面P_2 成夹角θ，求圆柱体被P_1 与P_2 所截得的那部分的体积。

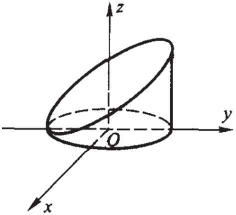


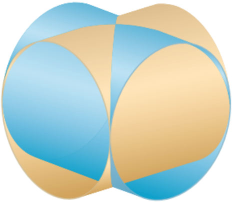
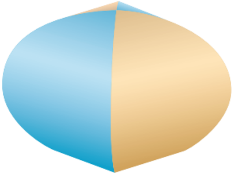




注：若采用与x 轴垂直的平面与该几何体相截，则截面是一个直角梯形，处理起来麻烦很多。故在实际计算时要具体分析，找到最简便的方案。

例8：已知一个直圆柱体的底面半径为a，平面P_1 过其底面圆周上的一点，且与其底面所在的平面P_2 成夹角θ，求圆柱体被P_1 与P_2 所截得的那部分的体积。



注：若采用与x 轴垂直的平面与该几何体相截，则截面是一个直角梯形，处理起来麻烦很多。故在实际计算时要具体分析，找到最简便的方案。

例9：求直圆柱面$x^2+y^2=a^2$ 和$x^2+z^2=a^2$ 所围成的几何体体积。

作业： 课本P_{330} 5(2)(4)

2 旋转体的体积

（1）直角坐标系下旋转体的体积

$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x$ 的一个重要用途就是求旋转体的体积。

2 旋转体的体积

（1）直角坐标系下旋转体的体积

$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$ 的一个重要用途就是求旋转体的体积。

设$f(x)\in C[a,b]$，对于由$0\le y\le |f(x)|$ 与$a\le x\le b$ 所界定的平面图形绕x 轴旋转一周所得到的旋转体，若用过x 点且与x 轴垂直的平面去截，得到的截面为半径为$|f(x)|$ 的圆，故$A(x)=\pi[f(x)]^2$，从而旋转体的体积

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

2 旋转体的体积

（1）直角坐标系下旋转体的体积

$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$ 的一个重要用途就是求旋转体的体积。

设$f(x)\in C[a,b]$，对于由$0\le y\le |f(x)|$ 与$a\le x\le b$ 所界定的平面图形绕x 轴旋转一周所得到的旋转体，若用过x 点且与x 轴垂直的平面去截，得到的截面为半径为$|f(x)|$ 的圆，故$A(x)=\pi[f(x)]^2$，从而旋转体的体积

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

例10：求$x^2+(y-b)^2=a^2(0<a\le b)$ 绕x 轴所围成的旋转体的体积。

（2）参数方程下旋转体的体积

设曲线参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,$t \in [T_1, T_2]$，设在$[T_1, T_2]$ 上$x'(t)$ 和$y(t)$ 连续，$x'(t)$ 在$[T_1, T_2]$ 上不变号，则

$$V = \pi \int_{T_1}^{T_2} y^2(t)|x'(t)|\mathrm{d}t.$$

（2）参数方程下旋转体的体积

设曲线参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [T_1, T_2]$，设在$[T_1, T_2]$上$x'(t)$和$y(t)$连续，$x'(t)$在$[T_1, T_2]$上不变号，则

$$V = \pi \int_{T_1}^{T_2} y^2(t)|x'(t)|\mathrm{d}t.$$

例11：求旋轮线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$一拱与x轴围成的图形绕x轴旋转一周所得到的旋转体体积。

（3）极坐标下旋转体的体积

定理： 极坐标下由$0 \le r \le r(\theta)(\theta \in [\alpha,\beta] \subseteq [0,\pi])$ 所表示的区域绕极轴旋转一周所得的旋转体的体积为

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\theta) \sin\theta \mathrm{d}\theta.$$

（3）极坐标下旋转体的体积

定理： 极坐标下由$0 \le r \le r(\theta)(\theta \in [\alpha,\beta] \subseteq [0,\pi])$ 所表示的区域绕极轴旋转一周所得的旋转体的体积为

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta.$$

注：不可利用$x(\theta) = r(\theta)\cos\theta, y(\theta) = r(\theta)\sin\theta$，代入$V = \pi \int_{T_1}^{T_2} y^2(t)|x'(t)|\mathrm{d}t$.

（3）极坐标下旋转体的体积

定理： 极坐标下由$0 \le r \le r(\theta)(\theta \in [\alpha,\beta] \subseteq [0,\pi])$ 所表示的区域绕极轴旋转一周所得的旋转体的体积为

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta.$$

注：不可利用$x(\theta) = r(\theta)\cos\theta, y(\theta) = r(\theta)\sin\theta$，代入$V = \pi \int_{T_1}^{T_2} y^2(t)|x'(t)|\mathrm{d}t$.

以$r(\theta)$ 为半径，与极线成θ 角的扇形绕极轴旋转一周，所得的体积为:

$$V = \frac{1}{3}\pi(r(\theta)\sin\theta)^2(r\cos\theta) + \pi\int_{r\cos\theta}^{r}(r^2 - x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)(1 - \cos\theta).$$

$\forall[\theta, \theta + \Delta\theta] \subseteq [\alpha, \beta]$,

$$\Delta V \approx \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)(1 - \cos(\theta + \Delta\theta)) - \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)(1 - \cos\theta)$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)(\cos\theta - \cos(\theta + \Delta\theta))$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3(\theta)\sin(\theta + \frac{\Delta\theta}{2})\sin\frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)\sin\theta\Delta\theta.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(r(\theta)\sin\theta)^2(r\cos\theta) + \pi\int_{r\cos\theta}^{r}(r^2 - x^2)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)(1 - \cos\theta).$$
$$\forall[\theta, \theta + \Delta\theta] \subseteq [\alpha, \beta],$$
$$\Delta V \approx \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)(1 - \cos(\theta + \Delta\theta)) - \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)(1 - \cos\theta)$$
$$= \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)(\cos\theta - \cos(\theta + \Delta\theta))$$
$$= \frac{4}{3}\pi r^3(\theta)\sin(\theta + \frac{\Delta\theta}{2})\sin\frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)\sin\theta\Delta\theta.$$

故由微元法$V = \frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta.$

作业： 课本P_{330} 7(6)(8), 12.

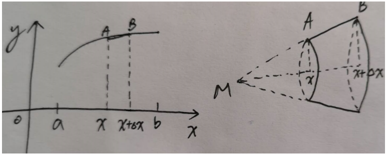
作业：课本P_{330} 7(6)(8), 12.

五、求旋转曲面的面积

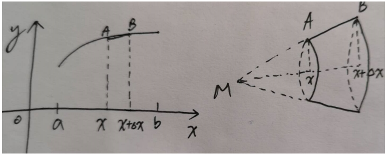
1 直角坐标下旋转曲面的面积

设将曲线$y = f(x)(a \leq x \leq b)(f(x) \geq 0, f'(x)$ 连续) 绕x轴旋转，得一旋转面，求该旋转面的面积。

8.6.定积分在几何计算中的应用



$$\forall [x, x+\Delta x] \subseteq [a, b],$$
$$\Delta S \approx \pi f(x+\Delta x)\overline{MB} - \pi f(x)\overline{MA}$$
$$= \pi[f(x+\Delta x) - f(x)]\overline{MB} + \pi f(x)\overline{AB}$$

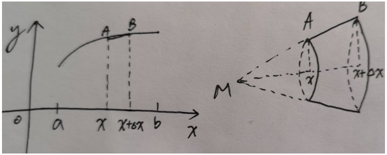


$$\forall [x, x+\Delta x] \subseteq [a,b],$$
$$\Delta S \approx \pi f(x+\Delta x)\overline{MB} - \pi f(x)\overline{MA}$$
$$= \pi[f(x+\Delta x) - f(x)]\overline{MB} + \pi f(x)\overline{AB}$$

由 $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \dfrac{f(x+\Delta x)}{f(x+\Delta x)-f(x)}$，从而

$$\Delta S \approx \pi(f(x) + f(x+\Delta x))\overline{AB}$$
$$= \pi(f(x)+f(x+\Delta x))\sqrt{(\Delta x)^2 + [f(x+\Delta x) - f(x)]^2}$$
$$\approx 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\Delta x$$

8.6.定积分在几何计算中的应用



$$\forall [x, x+\Delta x] \subseteq [a,b],$$
$$\Delta S \approx \pi f(x+\Delta x)\overline{MB} - \pi f(x)\overline{MA}$$
$$= \pi[f(x+\Delta x) - f(x)]\overline{MB} + \pi f(x)\overline{AB}$$

由 $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \dfrac{f(x+\Delta x)}{f(x+\Delta x)-f(x)}$， 从而

$$\Delta S \approx \pi(f(x)+f(x+\Delta x))\overline{AB}$$
$$= \pi(f(x)+f(x+\Delta x))\sqrt{(\Delta x)^2 + [f(x+\Delta x)-f(x)]^2}$$
$$\approx 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\Delta x$$

故由微元法， $S_{表} = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$

若$f(x) < 0$，则$y = f(x)$ 绕x 轴旋转一周所得到的表面积与$y = -f(x)$ 绕x 轴旋转一周所得到的表面积相等，故

若$f(x)<0$，则$y=f(x)$ 绕x 轴旋转一周所得到的表面积与$y=-f(x)$ 绕x 轴旋转一周所得到的表面积相等，故

$$S_{表}=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x=2\pi\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}\ell。$$

若$f(x) < 0$，则$y = f(x)$ 绕x 轴旋转一周所得到的表面积与$y = -f(x)$ 绕x 轴旋转一周所得到的表面积相等，故

$$S_{表} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x = 2\pi \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}\ell。$$

例12：设曲线$y = \sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求该曲线、所作切线及x 轴所围成的图形绕x 轴旋转一周所得旋转体的表面积。

若$f(x)<0$，则$y=f(x)$ 绕x 轴旋转一周所得到的表面积与$y=-f(x)$ 绕x 轴旋转一周所得到的表面积相等，故

$$S_{表}=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x=2\pi\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}\ell。$$

例12：设曲线$y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求该曲线、所作切线及x 轴所围成的图形绕x 轴旋转一周所得旋转体的表面积。

注：利用弧长在不同直角坐标系下的不变性，可得：若曲线绕某旋转轴旋转，则得到的旋转体的表面积$S_{表}=\int_a^b 2\pi D(\ell)\mathrm{d}\ell$，其中$D(\ell)$ 为该曲线到旋转轴ℓ 的距离，$\mathrm{d}\ell$ 为弧长微分。

2 参数方程下旋转曲面的面积

设$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [T_1, T_2]$ 确定平面上的一段光滑曲线，则它绕x 轴旋转一周得到一旋转曲面。

2 参数方程下旋转曲面的面积

设$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,$t \in [T_1, T_2]$ 确定平面上的一段光滑曲线，则它绕x 轴旋转一周得到一旋转曲面。

在$S_{表} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x$ 中
令$x = x(t), y = y(t)$,

2 参数方程下旋转曲面的面积

设$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [T_1, T_2]$ 确定平面上的一段光滑曲线，则它绕x 轴旋转一周得到一旋转曲面。

在$S_{表} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x$ 中

令$x = x(t), y = y(t)$，

则$S_{表} = 2\pi \int_{T_1}^{T_2} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$。

2 参数方程下旋转曲面的面积

设$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,$t \in [T_1, T_2]$ 确定平面上的一段光滑曲线，则它绕x 轴旋转一周得到一旋转曲面。

在$S_{表} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x$ 中

令$x = x(t), y = y(t)$，

则$S_{表} = 2\pi \int_{T_1}^{T_2} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$。

例13：求旋轮线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$,$t \in [0, 2\pi]$ 一拱绕x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积。

3 极坐标下旋转曲面的面积

由$r = r(\theta)(\theta \in [\alpha,\beta] \subseteq [0,\pi])$ 所决定的曲线绕极轴旋转一周所得到的旋转体的表面积为（将$x(\theta) = r(\theta)\cos\theta$, $y(\theta) = r(\theta)\sin(\theta)$ 代入）：

$$S_{表} = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta.$$

3 极坐标下旋转曲面的面积

由$r=r(\theta)(\theta\in[\alpha,\beta]\subseteq[0,\pi])$ 所决定的曲线绕极轴旋转一周所得到的旋转体的表面积为（将$x(\theta)=r(\theta)\cos\theta$, $y(\theta)=r(\theta)\sin(\theta)$ 代入）：

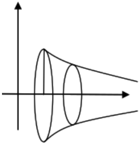
$$S_{表}=2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta.$$

例14：求双纽线$r^2=a^2\cos 2\theta$ (i) 绕极轴；(ii) 绕$\theta=\dfrac{\pi}{2}$；(3) 绕$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 所得到的旋转曲面的面积。

作业：课本P_{332} 13(5)。

补充1：求$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \le t \le 2\pi$ (i)绕y 轴；(ii) 绕直线$y = 2a$ 所得到的旋转曲面的面积。

补充2：(加百利喇叭悖论)加百利是圣经中的天使，他吹奏一只长喇叭让魔鬼坠入地狱（据称这是由托里拆利提出），设加百利喇叭由曲线$y = \frac{1}{x}(1 \le x < +\infty)$ 围绕x 轴旋转而成。



证明(1)喇叭的体积是一个有限值；

(2)喇叭的表面积无穷大；

(3)由上面两个结论似乎得到这样印象：加百利喇叭的内部可以被有限数量的油漆充满，但是同时有限数量的油漆却不能刷遍喇叭的内部表面，应当如何解释这个悖论？

六、求曲线的曲率

1 曲率的定义

在生产实践中，常常需要考虑曲线的弯曲程度。如厂房结构中的钢梁、车床上的轴等，它们在外力的作用下会发生弯曲，弯曲到一定程度就要断裂。故在计算梁或轴的长度时，需考虑弯曲程度。

六、求曲线的曲率

1 曲率的定义

在生产实践中，常常需要考虑曲线的弯曲程度。如厂房结构中的钢梁、车床上的轴等，它们在外力的作用下会发生弯曲，弯曲到一定程度就要断裂。故在计算梁或轴的长度时，需考虑弯曲程度。

曲线的弯曲程序不仅与切线方向变化角度$\Delta\phi$ 大小有关，而且还与所考察的曲线段的弧长Δs 有关。故一段曲线的弯曲程度通常用$\overline{K}=\left|\frac{\Delta\phi}{\Delta s}\right|$ 衡量。$\overline{K}$ 称为曲线段$\widehat{AB}$ 的平均曲率，刻画了曲线段$\widehat{AB}$ 的平均弯曲程度（取绝对值为使曲率不负）。

令$\Delta s \to 0, B \to A, \widehat{AB}$ 上的平均曲率的极限能精确地刻画曲线在A 的弯曲程度，定义

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \phi}{\Delta s} \right| = \left| \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} \right|,$$

则K 称为曲线在A 点的曲率。

令$\Delta s \to 0, B \to A, \widehat{AB}$ 上的平均曲率的极限能精确地刻画曲线在A 的弯曲程度，定义

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \phi}{\Delta s} \right| = \left| \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} \right|,$$

则K 称为曲线在A 点的曲率。

注1：对半径为R 的圆，圆周上任意弧段$\widehat{AB}$ 的切线方向变化角度$\Delta\phi = \Delta\alpha$，其中$\Delta\alpha$ 为圆心角。

令$\Delta s \to 0, B \to A, \widehat{AB}$ 上的平均曲率的极限能精确地刻画曲线在A 的弯曲程度，定义

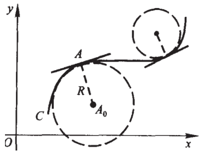
$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \phi}{\Delta s} \right| = \left| \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} \right|,$$

则K 称为曲线在A 点的曲率。

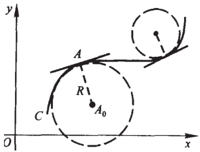
注1：对半径为R 的圆，圆周上任意弧段$\widehat{AB}$ 的切线方向变化角度$\Delta \phi = \Delta \alpha$，其中$\Delta \alpha$ 为圆心角。

故$\overline{K} = \dfrac{\Delta \phi}{\Delta s} = \dfrac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \dfrac{1}{R}$，即在任一点的曲率$K = \dfrac{1}{R}$。

设曲线在点A 处曲率$K \neq 0$，若过点A 作一个半径为$\frac{1}{K}$的圆，使它在A 点处与曲线有相同的切线，且在该点附近与该曲线位于切线的同一侧。我们把这个圆称为曲线在A处的曲率圆或密切圆。曲率圆的半径$R = \frac{1}{K}$ 和圆心A_0 分别称为曲线在A 处的曲率半径和曲率中心。

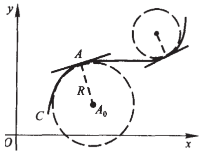


设曲线在点A处曲率$K \neq 0$，若过点A作一个半径为$\frac{1}{K}$的圆，使它在A点处与曲线有相同的切线，且在该点附近与该曲线位于切线的同一侧。我们把这个圆称为曲线在A处的曲率圆或密切圆。曲率圆的半径$R = \frac{1}{K}$和圆心A_0分别称为曲线在A处的曲率半径和曲率中心。



由曲率圆的定义可知：曲线在点A处与曲率圆既有相同的切线，又有相同的曲率和凸性。

设曲线在点A处曲率$K \neq 0$，若过点A作一个半径为$\frac{1}{K}$的圆，使它在A点处与曲线有相同的切线，且在该点附近与该曲线位于切线的同一侧。我们把这个圆称为曲线在A处的曲率圆或密切圆。曲率圆的半径$R = \frac{1}{K}$和圆心A_0分别称为曲线在A处的曲率半径和曲率中心。



由曲率圆的定义可知：曲线在点A处与曲率圆既有相同的切线，又有相同的曲率和凸性。

注2：对直线$\Delta\phi = 0$，故$K = 0$，即“直线不曲”。

2 曲率的计算

(1) 直角坐标系下曲率的计算

由导数几何意义，曲线在A 点切线斜率为$\tan\phi$,

即$y' = \tan\phi$，故$\phi = \arctan y'$，从而$\mathrm{d}\phi = \dfrac{y''}{1+(y')^2}\mathrm{d}x$，又

弧长微分$\mathrm{d}s = \sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$，故$K = \left|\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$。

2 曲率的计算

(1) 直角坐标系下曲率的计算

由导数几何意义，曲线在A 点切线斜率为$\tan\phi$,

即$y' = \tan\phi$，故$\phi = \arctan y'$，从而$\mathrm{d}\phi = \dfrac{y''}{1+(y')^2}\mathrm{d}x$，又

弧长微分$\mathrm{d}s = \sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$，故$K = \left|\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$。

(2) 参数方程下曲率计算

设光滑曲线由参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in [T_1, T_2]$ 确定，

且$x(t), y(t)$ 有二阶导数。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{x'^3(t)}.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{x'^3(t)}.$$

故在$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$中把$y''$与$y'$的表达式代入得

$$K=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{(x'^2(t)+y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{x'^3(t)}.$$

故在$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$中把$y''$与$y'$的表达式代入得

$$K=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{(x'^2(t)+y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}.$$

例15：求椭圆$x=a\cos t, y=b\sin t(0\le t\le 2\pi, 0<b\le a)$上曲率最大和最小点。

(3) 极坐标下曲率计算

设曲线的极坐标方程为$r=r(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]\subseteq[0,2\pi]$ 且$r(\theta)$ 二阶可导，则它在点(r,θ) 的曲率为

$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(3) 极坐标下曲率计算

设曲线的极坐标方程为$r=r(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]\subseteq[0,2\pi]$ 且$r(\theta)$ 二阶可导，则它在点(r,θ) 的曲率为

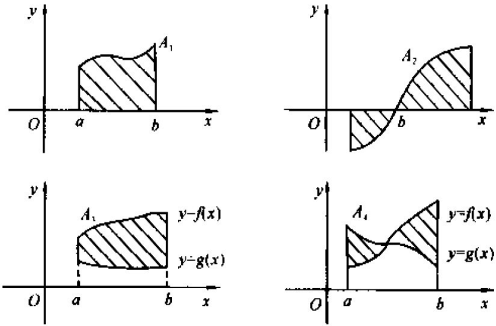
$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

作业： 课本P_{332} 17(1)(2), 18.

http://www.icourses.cn/zlgc/wkc/weike.html

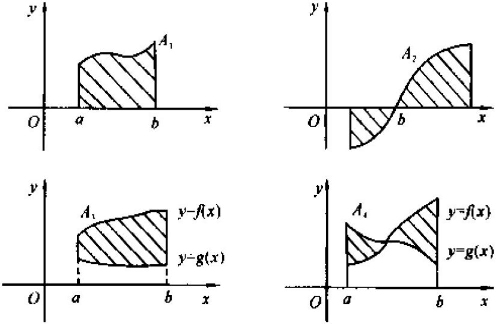
一、求平面图形的面积

(1) 直角坐标



一、求平面图形的面积

(1) 直角坐标



$A_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, A_2=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$，

$A_3=\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x, A_4=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$。

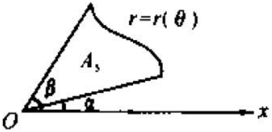
(2) 参数方程

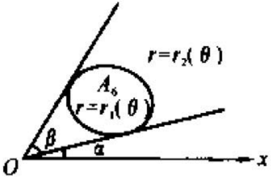
$A = \int_{T_1}^{T_2} |y(t)x'(t)| \mathrm{d}t$，注意对$x'(t)$ 在$[T_1, T_2]$ 上不变号。

(2) 参数方程

$A=\int_{T_1}^{T_2}|y(t)x'(t)|\mathrm{d}t$，注意对$x'(t)$ 在$[T_1,T_2]$ 上不变号。

(3) 极坐标

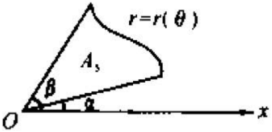


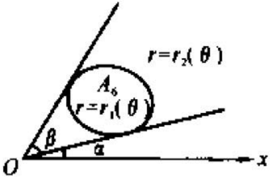


(2) 参数方程

$A = \int_{T_1}^{T_2} |y(t)x'(t)| \mathrm{d}t$，注意对$x'(t)$ 在$[T_1, T_2]$ 上不变号。

(3) 极坐标





$A_5 = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\mathrm{d}\theta, A_6 = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta))\mathrm{d}\theta$。

二、求曲线的弧长

对于有向曲线弧，弧长元素$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$

直角坐标：$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x = \sqrt{1 + x'^2(y)}\mathrm{d}y$

参数方程：$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$

极坐标：$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$

二、求曲线的弧长

对于有向曲线弧，弧长元素$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$

直角坐标：$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x = \sqrt{1 + x'^2(y)}\mathrm{d}y$

参数方程：$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$

极坐标：$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$

(1) 对直角坐标

$y = f(x), a \le x \le b, L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x$

$x = g(y), c \le y \le d, L = \int_c^d \sqrt{1 + x'^2(y)}\mathrm{d}y$

(2) 对参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (T_1 \le t \le T_2), \quad L = \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \mathrm{d}t$$

(2) 对参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (T_1 \le t \le T_2), \quad L = \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

(3) 对极坐标

$$r = r(\theta), \alpha \le \theta \le \beta, L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

(2) 对参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (T_1 \le t \le T_2), \quad L = \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

(3) 对极坐标

$$r = r(\theta), \alpha \le \theta \le \beta, L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

三、求体积

(1) 平行截面已知的立体体积 $V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x$

(2) 旋转体体积

1° 直角坐标

曲边梯形$y = f(x), a \leq x \leq b,$

$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x,\ V_y = 2\pi \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$

(2) 旋转体体积

1° 直角坐标

曲边梯形$y = f(x), a \leq x \leq b$,

$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$, $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$

2° 参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (T_1 \leq t \leq T_2), \quad V = \pi \int_{T_1}^{T_2} y^2(t)|x'(t)|\mathrm{d}t$$

(2) 旋转体体积

1° 直角坐标

曲边梯形$y = f(x), a \leq x \leq b$,

$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x$, $V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) \mathrm{d}x$

2° 参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (T_1 \leq t \leq T_2), \quad V = \pi \int_{T_1}^{T_2} y^2(t) |x'(t)| \mathrm{d}t$$

3° 极坐标

$0 \leq r \leq r(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$，绕极轴$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3(\theta) \sin\theta \mathrm{d}\theta$。

四、旋转体的表面积

(1) 直角坐标

曲线绕旋转轴旋转$S_{表} = 2\pi \int_a^b D(\ell)\mathrm{d}\ell$，$D(\ell)$ 表示曲线到旋转轴的距离。

$$y = f(x), a \le x \le b, S_x = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x,$$

$$x = g(y), c \le y \le d, S_y = 2\pi \int_c^d |g(y)| \sqrt{1 + x'^2(y)}\mathrm{d}y$$

四、旋转体的表面积

(1) 直角坐标

曲线绕旋转轴旋转$S_{表} = 2\pi \int_a^b D(\ell)\mathrm{d}\ell$，$D(\ell)$ 表示曲线到旋转轴的距离。

$y = f(x), a \le x \le b, S_x = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x$，

$x = g(y), c \le y \le d, S_y = 2\pi \int_c^d |g(y)| \sqrt{1 + x'^2(y)}\mathrm{d}y$

(2) 参数方程

$S_{表} = 2\pi \int_{T_1}^{T_2} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$

四、旋转体的表面积

(1) 直角坐标

曲线绕旋转轴旋转$S_{表} = 2\pi \int_a^b D(\ell)\mathrm{d}\ell$，$D(\ell)$ 表示曲线到旋转轴的距离。

$$y = f(x), a \le x \le b, S_x = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x,$$

$$x = g(y), c \le y \le d, S_y = 2\pi \int_c^d |g(y)| \sqrt{1 + x'^2(y)}\mathrm{d}y$$

(2) 参数方程

$$S_{表} = 2\pi \int_{T_1}^{T_2} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

(3) 极坐标 $r = r(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$

$$S_{表} = 2\pi \int_\alpha^\beta |r(\theta)\sin\theta| \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

五、曲率

(1) 直角坐标

$$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$$

五、曲率

(1) 直角坐标

$$K = \left| \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|$$

(2) 参数方程

$$K = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'^2(t)+y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

五、曲率

(1) 直角坐标

$$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$$

(2) 参数方程

$$K=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{(x'^2(t)+y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

(3) 极坐标

$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$