第 28 卷第 2 期
2012 年 4 月

大 学 数 学
COLLEGE MATHEMATICS

Vol. 28, No. 2
Apr. 2012

纠正一道习题的解答

郭效江， 朱 丹， 曹华林
（海军航空工程学院青岛分院 航空工程基础教研室，山东 青岛 266041）

［摘 要］针对《近世代数习题解》中一道习题的错解，深入分析了错误的原因，利用一个概率问题的解答给出了正确的解答，并得到了第二类 Stirling 数的解析表达式.

［关键词］映射；满射；一般加法公式；第二类 Stirling 数
［中图分类号］O153 ［文献标识码］C ［文章编号］1672-1454(2012)02-0145-03

由于工作的关系，我们研习了《近世代数习题解》的一部分，从中解决了一些困惑，感到获益匪浅. 但我们也发现此书中一道习题的解答有错误. 我们对此解答的错因作了深入分析，利用概率论中一个问题的解答给出了正确的解答，并顺带求得了第二类 Stirling 数的解析表达式.

1 原题及错解

解答有错误的习题是[1]中第一大题的第二小问，出于讨论的方便，我们摘抄相关的部分.

原题 设 M，N 是两个非空集合，且 $|M|=m$，$|N|=n$. 问：M 到 N 可建立满射的条件为何？能建立多少个？

解 M 到 N 可建立满射的充要条件为 $m \geqslant n$. 又因为是满射，故 N 中每个元素都必须有逆象. 于是 N 中元素 b_1 的逆象在 M 中有 m 种取法，b_2 的逆象有 $m-1$ 种取法，…，b_n 的逆象有 $m-n+1$ 种取法，故共有

$$P_m^n = m(m-1)\cdots(m-n+1)$$

种取法，亦即 M 到 N 能而且只能建立 P_m^n 个满射.

2 错因分析

这个解答是错误的，错在集合 M 到集合 N 可建立的满射的个数上. 因为按上述解答的办法，虽然可以保证集合 N 中每个元素都存在逆象，使所得的映射是满射. 但是这样所得到的满射只是一部分，产生了遗漏！这是由于满射首先是映射，而按照映射的要求，集合 M 中的每一个元素都必须在集合 N 中有唯一的元素与之对应. 因此集合 M 中剩余的 $m-n$ 个元素，尚需在集合 N 中确定各自的像元素. 所以按上述解答的办法，即使集合 N 中每一个元素在前 n 步中所取的原像相同，但如果集合 M 中剩余的 $m-n$ 个元素所取的像有所不同，就有可能产生不同的满射.

此解答的错误还可以通过反例来说明. 这需要用到满射的一个特性.

引理 设 M，N 是两个非空集合，且 $M=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$N=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，f 是集合 M 到集合 N 的一个满射. 如果将集合 N 中元素 b_i 的原像集记为 $f^{-1}(b_i)$，即

$$f^{-1}(b_i)=\{a_k \mid a_k \in M,\ f(a_k)=b_i\},$$

［收稿日期］2009-09-21

则

$$M=\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(b_i)\text{，且}\quad i\neq j\text{ 时 } f^{-1}(b_i)\cap f^{-1}(b_j)=\varnothing .$$

证　先证明 $M=\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(b_i)$. 由于 f 是集合 M 到集合 N 的一个映射，故 $\forall x\in M$，$\exists b_i\in N$，使 $f(x)=b_i$，也就是 $x\in f^{-1}(b_i)$，从而 $M\subset\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(b_i)$；反之，由于 f 是集合 M 到集合 N 的一个满射，故 $\forall x\in\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(b_i)$，$\exists 1\leqslant i\leqslant n$，使 $x\in f^{-1}(b_i)$，也就是 $x\in M$ 且 $f(x)=b_i$，从而 $\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(b_i)\subset M$.

再证明 $i\neq j$ 时，$f^{-1}(b_i)\cap f^{-1}(b_j)=\varnothing$，采用反证法. 假设 $i\neq j$ 时，$f^{-1}(b_i)\cap f^{-1}(b_j)\neq\varnothing$，故 $\exists x\in f^{-1}(b_i)\cap f^{-1}(b_j)$，即 $x\in f^{-1}(b_i)$ 且 $x\in f^{-1}(b_j)$，从而 $x\in M$ 并有 $f(x)=b_i$ 和 $f(x)=b_j$，但这与 f 是集合 M 到集合 N 的映射相矛盾.

根据此引理，我们可以采取以下两个步骤来确定集合 M 到集合 N 的满射：

第一步，将集合 M 中 m 个不同元素分为 n 组；

第二步，在集合 M 的 n 个组与集合 N 的 n 个元素间建立一一映射.

按照这个方法，容易验证当 $m=4$，$n=2$ 时，集合 M 到集合 N 可建立 14 个满射. 而上述解答的结果是只能建立 12 个满射.

3　正确解答

要得到此问题的正确解答，先来解决一个概率问题 [2].

问题　将 m 个可分辨的球随机放入 n 个不同的盒子中，求 n 个盒子都有球的概率（$m\geqslant n$）.

解　这里的随机指的是 m 个球中每个球落入 n 个盒子中的任一个的可能性相同，即 n^m 个情况是等可能的.

令 B 表示事件"n 个盒子中至少一个空"，A_i（$i=1,2,\cdots,n$）表示事件"第 i 个盒子空". 于是 B^c 表示事件"n 个盒子都有球"，而且 $B=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，因而

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big).$$

又易算得

$$\mathrm{P}(A_1)=\frac{(n-1)^m}{n^m},\quad \mathrm{P}(A_1A_2)=\frac{(n-2)^m}{n^m},\quad\cdots,\quad \mathrm{P}(A_1\cdots A_{n-1})=\frac{1}{n^m},\quad \mathrm{P}(A_1A_2\cdots A_n)=0,$$

按一般加法公式，

$$\mathrm{P}(B)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}C_n^i\frac{(n-i)^m}{n^m},$$

所以所求的概率为

$$\mathrm{P}(B^c)=1-\mathrm{P}(B)=1-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}C_n^i\frac{(n-i)^m}{n^m}.$$

将上述例题中 m 个可分辨的球放在一起构成集合（不妨仍记为 M），n 个不同的盒子放在一起构成集合（不妨仍记为 N）. 易见事件"n 个盒子都有球"中的每一个基本事件都对应着原题中集合 M 到集合 N 的一个满射，并且这个对应是一一对应. 所以集合 M 到集合 N 总共可以建立 $n^m-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}C_n^i(n-i)^m$ 个满射.

值得指出的是，这个解法使用了"关系映射反演"的思想.

4　第二类 Stirling 数

在错因分析中我们给出了确定集合 M 到集合 N 的满射的一种方法，但我们并没有利用这个方法

来求集合 M 到集合 N 的全体满射的个数. 这主要是因为在第一步中将 m 个不同元素分为 n 组，总的分组个数的解析表达式是很难求得的. 在组合数学中把这个总的分组个数称为第二类 Stirling 数(参看[3])，通常记为 $S(m,n)$. 现在求得了集合 M 到集合 N 的满射的个数，回过头来我们就可以得到第二类 Stirling 数的解析表达式了.

定理　$S(m,n)=\frac{1}{n!}(n^m-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}C_n^i\,(n-i)^m)$.

证　由

$$n!S(m,n)=n^m-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}C_n^i\,(n-i)^m$$

即得

$$S(m,n)=\frac{1}{n!}(n^m-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}C_n^i\,(n-i)^m).$$

推论　$n!=n^n-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}C_n^i\,(n-i)^n$.

证　由于 $m=n$ 时 $S(m,n)=1$ ，由定理即得结论.

[参　考　文　献]

[1]　杨子胥，宋宝和. 近世代数习题解[M]. 济南：山东科学技术出版社，2003.

[2]　汪仁官. 概率论引论[M]. 北京：北京大学出版社，1995.

[3]　孙淑玲，许胤龙. 组合数学引论[M]. 合肥：中国科学技术大学出版社，1999.

The Correction of an Exercise's Solution

GUO Xiao-jiang，　*ZHU Dan*，　*CAO Hua-lin*

(Engineering Foundation Staff Room, Naval Aeronautical Engineering Academy Qingdao Branch, Qingdao 266041, China)

Abstract: The paper presents a detailed analysis of an error occurred in an exercise of The Exercise Collection of Modern Algebra. With the help of the solution to a probability question, we give the correction. An analytic expression about Stirling numbers of the second kind is also incorporated.

Key words: mapping; surjection; general additive formula; Stirling numbers of the second kind