《微分几何》课程电子课件

教师：杨勤民

Tel: (021)64253147

Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程QQ群号：1045698545

第一章 曲线论

§1.1 向量函数

§1.2 曲线的概念

§1.3 空间曲线

§1.1 向量函数

一、向量函数的极限

二、向量函数的连续性

三、向量函数的微商

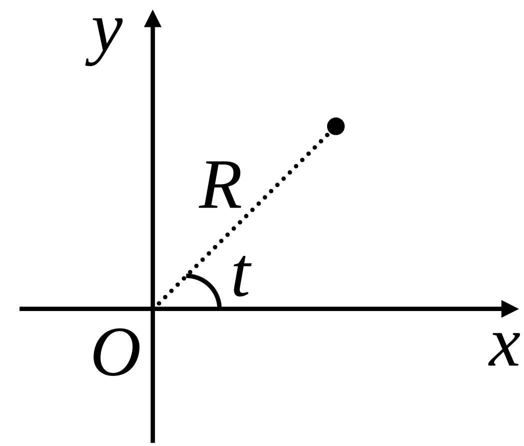
四、向量函数的Taylor公式

五、向量函数的积分

六、两个重要命题

向量函数引例

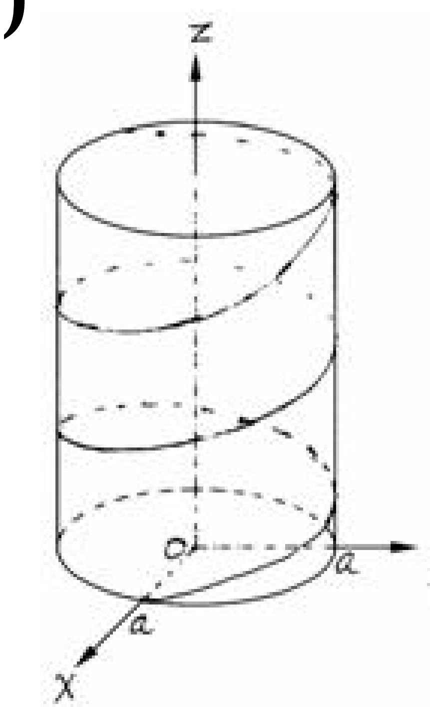
圆：



$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi)$$

改记为：$\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t), \quad t \in [0, 2\pi)$

圆柱螺线：

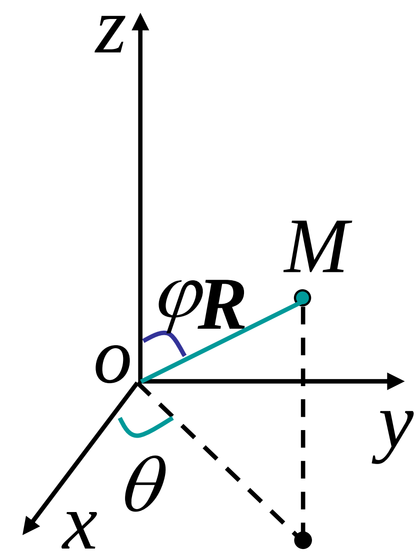


$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \\ z(t) = vt \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

改记为：$\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, vt), \quad t \in \mathbb{R}$

向量函数引例(续)

球面:



$$\begin{cases} x(\varphi,\theta) = R\sin\varphi\cos\theta \\ y(\varphi,\theta) = R\sin\varphi\sin\theta \\ z(\varphi,\theta) = R\cos\varphi \end{cases}$$

$$0 \le \varphi \le \pi,\quad 0 \le \theta < 2\pi$$

改记为:

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = (R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi),$$

$$0 \le \varphi \le \pi,\quad 0 \le \theta < 2\pi$$

向量函数的概念(vector-valued functions):

取值为向量的函数

$\vec{r}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad m$维向量$\mapsto n$维向量

向量函数的表示:

$$\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t)) = f(t)\vec{e}_1 + g(t)\vec{e}_2 + h(t)\vec{e}_3$$

其中 $f(t), g(t), h(t)$ 为数量函数,

$\vec{e}_1 = (1,0,0), \quad \vec{e}_2 = (0,1,0), \quad \vec{e}_3 = (0,0,1)$ (自然基底)

$$\vec{r}(u,v) =$$
$$(f(u,v), g(u,v), h(u,v)) = f(u,v)\vec{e}_1 + g(u,v)\vec{e}_2 + h(u,v)\vec{e}_3$$

一、向量函数的极限 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}$

设 $\vec{r}(t)$ 在 t_0 附近有定义，

它在 t_0 可能也有定义，但不是必须有定义，

$\vec{a}$ 是一个与 t 无关的常向量，

若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，使得

$$\forall t\in O(t_0,\delta)/\{t_0\}，有 \left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|<\varepsilon,$$

则称：当 t 趋近于 t_0 时 $\vec{r}(t)$ 趋近于 $\vec{a}$.

用符号表示为：$\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}\Leftrightarrow\forall i,\ \lim\limits_{t\to t_0}r_i(t)=a_i$

向量函数极限的性质

若$\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)$, $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{s}(t)$和$\lim\limits_{t\to t_0}\lambda(t)$都存在, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$,

则

(1)线性性质：$\lim\limits_{t\to t_0}[\alpha\vec{r}(t)+\beta\vec{s}(t)]=\alpha\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)+\beta\lim\limits_{t\to t_0}\vec{s}(t)$

(2)数量乘法：$\lim\limits_{t\to t_0}[\lambda(t)\vec{r}(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\lambda(t)\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)$

(3)点积：$\lim\limits_{t\to t_0}[\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\vec{s}(t)$

(4)叉积：$\lim\limits_{t\to t_0}[\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\vec{s}(t)$

二、向量函数的连续性

$\vec{r}(t)$在 t_0连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$

$\vec{r}(t)$在 (a,b) 连续

$\vec{r}(t)$在 $[a,b)$ 连续

线性运算、数乘、点积、叉积的连续性

三、向量函数的微商(导矢)(derivative)

$\vec{r}(t)$ 在 t_0的微商

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \triangleq \vec{r}\,'(t_0) \triangleq \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

$\vec{r}(t)$ 在 (a,b) 的微商 $\vec{r}\,'(t)$

若$\vec{r}(t)=(f(t),g(t),h(t))$, 则$\vec{r}\,'(t)=(f\,'(t),g'(t),h'(t))$.

向量函数微商的性质

(1)线性性质：$[\alpha\vec{r}(t)+\beta\vec{s}(t)]'=\alpha\vec{r}'(t)+\beta\vec{s}'(t)$

(2)数量乘法：$[\lambda(t)\vec{r}(t)]'=\lambda'(t)\vec{r}(t)+\lambda(t)\vec{r}'(t)$

(3)点积：$[\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)]'=\vec{r}'(t)\cdot\vec{s}(t)+\vec{r}(t)\cdot\vec{s}'(t)$

(4)叉积：$[\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)]'=\vec{r}'(t)\times\vec{s}(t)+\vec{r}(t)\times\vec{s}'(t)$

(5)混合积：

$$(\vec{r}(t),\vec{s}(t),\vec{u}(t))'$$

$$=(\vec{r}'(t),\vec{s}(t),\vec{u}(t))+(\vec{r}(t),\vec{s}'(t),\vec{u}(t))+(\vec{r}(t),\vec{s}(t),\vec{u}'(t))$$

向量函数的高阶微商

k 阶微商：

若 $\vec{r}^{(k-1)}(t)$ 可微，则称 $\vec{r}^{(k)}(t)$ 为 $\vec{r}(t)$ 的 **k 阶微商**

C^k 类函数(k 次连续可微函数):

使得 $r^{(k)}(t)$ 连续的函数 $r(t)$

C^0 类函数： 连续函数

C^∞ 类函数： 无限次可微函数

性质： $\vec{r}(t)$ 在 $[t_1,t_2]$ 上是 C^k 类函数 $\Leftrightarrow$

它的分量函数在 $[t_1,t_2]$ 上都是 C^k 类函数.

四、向量函数的Taylor公式

设 $\vec{r}(t)$ 在 t_0 附近是 C^{n+1} 类函数, 则它有Taylor展开式

$$\vec{r}(t_0+\Delta t)=\vec{r}(t_0)+\Delta t\vec{r}'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\vec{r}''(t_0)+\cdots$$

$$+\frac{(\Delta t)^n}{n!}\vec{r}^{(n)}(t_0)+\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!}(\vec{r}^{(n+1)}(t_0)+\vec{\varepsilon}(t_0,\Delta t))$$

设 $\vec{r}(t)$ 在 t_0附近是 C^∞类函数, 则它有Taylor级数

$$\vec{r}(t_0+\Delta t)\mapsto\vec{r}(t_0)+\Delta t\vec{r}'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\vec{r}''(t_0)+\cdots$$

五、向量函数的积分

$$\int_a^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t \triangleq \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{r}(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

若 $\vec{r}(t)=(f(t),g(t),h(t))$, 则

$$\int_a^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t = \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t, \int_a^b g(t)\mathrm{d}t, \int_a^b h(t)\mathrm{d}t\right)$$

向量函数的积分的性质

(1)线性：$\int_a^b [\alpha\vec{r}(t)+\beta\vec{s}(t)]\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t + \beta\int_a^b \vec{s}(t)\mathrm{d}t$

(2)对积分区间的可加性：$\int_a^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t = \int_a^c \vec{r}(t)\mathrm{d}t + \int_c^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t$

(3)线性点积：$\int_a^b \vec{\lambda}\cdot\vec{r}(t)\mathrm{d}t = \vec{\lambda}\cdot\int_a^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t$

(4)线性叉积：$\int_a^b \vec{\lambda}\times\vec{r}(t)\mathrm{d}t = \vec{\lambda}\times\int_a^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t$

(5)变上限积分的微商公式：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \vec{r}(t)\mathrm{d}t = \vec{r}(x)$

六、两个重要命题

P7 命题6 $|\vec{r}(t)|$为常数$\Leftrightarrow \forall t, \vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t).$

证 ($\Rightarrow$) $|\vec{r}(t)|$为常数,即$\exists c, \forall t$ 有 $|\vec{r}(t)| = c.$

因此 $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t) = |\vec{r}(t)|^2 = c^2.$

两边关于t求微商得 $\vec{r}'(t)\cdot\vec{r}(t)+\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t) = 0.$

即 $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t) = 0.$ 亦即 $\forall t,$ 有 $\vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t).$

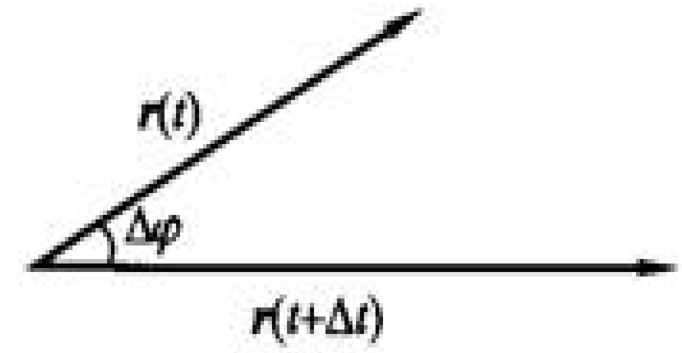
($\Leftarrow$) 设 $\forall t,$ 有 $\vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t),$ 即 $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t) = 0.$

因此 $[|\vec{r}(t)|^2]' = [\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t)]' = \vec{r}'(t)\cdot\vec{r}(t)+\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t) = 0.$

从而 $|\vec{r}(t)|^2$ 为常数,即 $|\vec{r}(t)|$为常数.

旋转速度

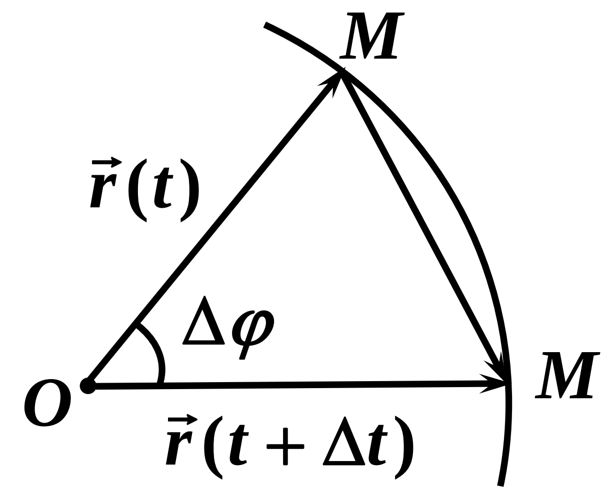
称 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left|\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|$ 为 $\vec{r}(t)$ 关于 t 的旋转速度.



P8 命题7

C^1 类单位向量函数 $\vec{r}(t)$(即 $|\vec{r}(t)|\equiv 1$)关于 t 的旋转速度 $=|\vec{r}'(t)|$.

证 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left|\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{|\overset{\frown}{MM'}|}{|\Delta t|}$



$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\overrightarrow{MM'}|}{|\Delta t|}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\overset{\frown}{MM'}|}{|\overrightarrow{MM'}|} = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}\right|\cdot 1 = |\vec{r}'(t)|$$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业！

1.1 证明 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\vec{r}(t)}{\rho(t)}\right)=\dfrac{\vec{r}'(t)\rho(t)-\vec{r}(t)\rho'(t)}{\rho^2(t)}$.

1.2. 证明$\vec{r}(t)$具有固定方向的充要条件是$\vec{r}(t)\times\vec{r}'(t)=\vec{0}$.

1.3. 证明$\vec{r}(t)$平行与固定平面的充要条件是

$$(\vec{r}(t),\vec{r}'(t),\vec{r}''(t))=0.$$