分离变量法的基本思路：

- 判断方程和边界条件是否是齐次的，如果是，可利用分离变量法求解
- 第一步：先做变量分离(即写成独立变量函数相乘的形式,例如如果u是$u(x,y)$可令$u(x,y) = X(x)Y(y)$,如果$u = u(x,t)$,可令$u(x,t) = X(x)T(t)$)
- 第二步：将变量分离的形式代入齐次方程和齐次边界条件可得特征值问题和关于另一个变量的方程（例如P44中，得到的是$X(x)$的特征值问题和$Y(y)$的方程，弦振动初边值问题得到是$X(x)$的特征值问题和$T(t)$的方程）,从而判断出特征值和特征函数
- 第三步：得到特解（特解满足线性齐次方程和齐次边界条件），将特解进行叠加
- 第四步：叠加的系数可由初值条件确定。(利用特征函数的正交性，即可算出系数)

下面以弦振动方程为例，来熟悉一下分离变量法的过程：

利用分离变量法求解齐次方程齐次边界条件的弦振动方程定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & 0<x<l, t>0 \\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t\geq 0, \\ u(x,0)=\phi(x), u_t(x,0)=\psi(x), & 0\leq x\leq l \end{cases}$$

解：第一步：变量分离,令$u(x,t)=X(x),T(t)$,
第二步：将变量分离形式的u代入齐次方程齐次边界条件可得$X(x)$的特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \\ X(0)=X(l)=0, \end{cases} \tag{1}$$

和$T(t)$的方程

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0, \tag{2}$$

求解特征值问题(1)可得

$$X_n=\sin\frac{n\pi}{l}x, \lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2, n=1,2,\cdots$$

将λ_n的表达形式代入(2),求解方程可得

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{an\pi}{l}t+D_n\sin\frac{an\pi}{l}t$$

第三步：根据$X_n(x), T_n(t)$的表达形式，可得特解

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = (C_n \cos\frac{an\pi}{l}t + D_n \sin\frac{an\pi}{l}t)\sin\frac{n\pi}{l}x, \quad (3)$$

特解满足线性齐次方程和边界条件，利用第二章的预备知识中的叠加原理，进行叠加，可得

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n \cos\frac{an\pi}{l}t + D_n \sin\frac{an\pi}{l}t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

第四步：利用初始条件确定系数C_n, D_n

$$\begin{cases} u(x,0) = \phi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \phi(x) \\ \frac{an\pi}{l}D_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x \end{cases}$$

利用特征函数的正交性可得

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^x \phi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi, C_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^x \psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi,$$

将C_n, D_n代入(3)即得定解问题的解。

2.14、(2) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a, 0<y<b \\ u(0,y)=0, u(a,y)=ay, & 0\le y\le b \\ u(x,0)=0, u(x,b)=0, & 0\le x\le a \end{cases}$

解：方法一，分离变量法

第一步：变量分离，令$u(x,y)=X(x)Y(y)$,

第二步：由齐次方程和齐次边界条件,可得到Y部分的特征值问题和X的方程

$$\begin{cases} Y''(y)+\lambda Y(y)=0 \\ Y(0)=0, Y(b)=0 \end{cases}$$

$$X''(x)-\lambda X(x)=0$$

求解特征值问题⇒ $\lambda_n=(\frac{n\pi}{b})^2, n=1,2,\cdots$,特征函数$Y_n(y)=\sin\frac{n\pi}{b}y, n=1,2,\cdots,n$

将λ_n代入$X(x)$的方程可得

$$X_n=D_{1n}e^{\frac{n\pi}{b}x}+D_{2n}e^{-\frac{n\pi}{b}x}$$

第三步：根据X_n, Y_n的表达形式可得特解

$$u_n(x,y)=(D_{1n}e^{\frac{n\pi}{b}x}+D_{2n}e^{-\frac{n\pi}{b}x})\sin\frac{n\pi}{b}y$$

由于特解满足线性齐次方程和齐次边界条件，利用叠加原理进行叠加

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(D_{1n}e^{\frac{n\pi}{b}x}+D_{2n}e^{-\frac{n\pi}{b}x})\sin\frac{n\pi}{b}y$$

第四步：由x部分的边界条件，利用特征函数的正交性，可得

$$\begin{cases} D_{1n}+D_{2n}=0 \\ D_{1n}e^{\frac{n\pi}{b}a}+D_{2n}e^{-\frac{n\pi}{b}a}=\frac{2}{b}\int_0^b ay\sin\frac{n\pi}{b}ydy=\frac{2ab}{n\pi}(-1)^{n+1} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} D_{1n}=c_n(e^{\frac{an\pi}{b}}-e^{-\frac{an\pi}{b}})^{-1}, \\ D_{2n}=-c_n(e^{\frac{an\pi}{b}}-e^{-\frac{an\pi}{b}})^{-1} \end{cases}$$

所以原定解问题的解为

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2ab}{n\pi}(-1)^{n+1}\frac{e^{\frac{n\pi}{b}x}-e^{-\frac{n\pi}{b}x}}{e^{\frac{an\pi}{b}}-e^{-\frac{an\pi}{b}}}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

解：方法二：特征展开法，对应的特征函数为$\{\sin\frac{n\pi}{b}x\}_{n=1}^{\infty}$,$u(x,t), ay$,按特征函数系展开，

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\sin\frac{n\pi}{b}y,\ ay=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi}{b}y$$

其中$c_n=-\frac{2ab}{n\pi}\cos n\pi=\frac{2ab}{n\pi}(-1)^{n+1}$.代入原定解问题

$$\begin{cases} u_n''(x)-(\frac{n\pi}{b})^2u_n(0)=0, \\ u_n(0)=0, u_n(a)=c_n, \quad n=1,2,\cdots \end{cases}$$

求解此问题

$$u_n(x)=D_{1n}e^{\frac{n\pi}{b}x}+D_{2n}e^{-\frac{n\pi}{b}x},\ D_{1n}=c_n(e^{\frac{an\pi}{b}}-e^{-\frac{an\pi}{b}})^{-1},\ D_{2n}=-c_n(e^{\frac{an\pi}{b}}-e^{-\frac{an\pi}{b}})^{-1}$$

所以原定解问题的解为

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2ab}{n\pi}(-1)^{n+1}\frac{e^{\frac{n\pi}{b}x}-e^{-\frac{n\pi}{b}x}}{e^{\frac{an\pi}{b}}-e^{-\frac{an\pi}{b}}}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

2.17、(2) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 2, t > 0 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{2}\sin \pi x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

解： 令$u(x,t) = X(x)T(t)$,由齐次方程和齐次边界条件可得$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(2) = 0 \end{cases}$ $T'(t) + \lambda T(t) = 0$ 由特征值问题可知特征值为$\lambda_n = (\frac{n\pi}{2})^2, n = 1, 2, \cdots$,特征函数$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{2}x, n = 1, 2, \cdots, n$,将$\lambda_n$代入$T(t)$的方程可得$T_n(t) = c_n e^{-(\frac{n\pi}{2})^2 t}$,所以特解为

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = c_n e^{-(\frac{n\pi}{2})^2 t} \sin \frac{n\pi}{2} x$$

叠加

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(\frac{n\pi}{2})^2 t} \sin \frac{n\pi}{2} x$$

由初始条件可得

$$c_2 = \frac{1}{2}, c_n = 0, n = 1, 3, 4, \cdots$$

所以原定解问题的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2} e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$$

3月31号作业注意：

- 作业14.(2)中，注意特征值问题是$\begin{cases} Y''(y)+\lambda Y(y)=0 \\ Y(0)=0, Y(b)=0 \end{cases}$,有的同学写成的是$\begin{cases} Y''(y)-\lambda Y(y)=0 \\ Y(0)=0, Y(b)=0 \end{cases}$这种情形也可以，但是特征值不能调用P34中的结论
- 大部分同学在利用分离变量法求解时，特解求出来之后，后面的过程有误，应该是将特解进行叠加，再利用初值条件，确定叠加系数，希望同学参考答案订正一下