中国科学院大学

2016 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：数学分析

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. (20 分) 计算极限
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

2. (20 分) 求定积分
$$I=\int_0^1 \log\left(1+\sqrt{x}\right)dx.$$

3. (15 分) 求二重极限
$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$$

4. (12 分) $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续正函数, 求证存在 $\xi\in(a,b)$, 使得
$$\int_a^{\xi} f(x)\,dx=\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

5. (15 分) 求以下曲面所围立体的体积:
$$S_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$
$$S_2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\,(z\geq 0).$$

6. (12 分) $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $f(x)$ 单调递增. 求证:
$$\int_a^b tf(t)\,dt\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\,dt.$$

7. (12 分) 若数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足以下条件:

   (a) $a_1\geq a_2\geq\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$;

   (b) 存在正数 M, 对任意的正整数 n, 均有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\right|\leq M$.

   证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

8. (15 分) 设 $0\leq a<b/2$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导且 $f(a)=a, f(b)=b$.

   (a) 求证存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=b-\xi$;

   (b) 若 $a=0$, 求证存在 $\alpha,\beta\in(a,b),\alpha\neq\beta$, 使得 $f'(\alpha)f'(\beta)=1$.

9. (15 分) 求椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上到直线 $2x+3y=6$ 距离最短的点, 并求其最短距离.

10. (15 分) 半径为 R 的球面 S 的球心在单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上, 求球面 S 在单位球内面积的最大值, 并求出此时的 R.