华东理工大学 2012–2013 学年第二学期

《高等数学(下)A》期末考试试卷　2013.6

一．解下列各题(每小题 6 分，共 12 分):

1. 求微分方程 $x^2y'+xy-1=0$ 满足初始条件 $y(2)=1$ 的特解 .

解：　$y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{x^2}$　　（1 分）

通解 $y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[C+\int\dfrac{1}{x^2}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right]=\dfrac{1}{x}(C+\ln x)$　　（2+1 分）

$y(2)=\dfrac{1}{2}(C+\ln 2)=1\Rightarrow C=2-\ln 2$　　（1 分）

所求特解为 $y=\dfrac{2-\ln 2+\ln x}{x}$　　（1 分）

2. 求微分方程 $x^2y''+(y')^2=0$ 满足初始条件 $y(1)=1, y'(1)=-1$ 的特解 .

解：令 $y'=p(x)$，则 $y''=\dfrac{dp}{dx}$，　　（1 分）

方程化为 $x^2\dfrac{dp}{dx}+p^2=0$，解得 $\dfrac{1}{p}=-\dfrac{1}{x}+C_1$　　（1+1 分）

代入初始条件得 $C_1=0$，　$y'=p=-x$，　　（1 分）

积分 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+C_2$　　山初始条件得 $C_2=\dfrac{3}{2}$　　（1 分）

所求特解为 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}$　　（1 分）

二．解下列各题(每小题 6 分，共 12 分):

1. 设山方程组 $\begin{cases}x^2u+yz=v\\ \sin x+2zv=u\end{cases}$ 确定函数 $\begin{cases}z=z(x,y,v)\\ u=u(x,y,v)\end{cases}$，计算 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

解：$\begin{cases}2xu+x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \cos x+2v\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\end{cases}$　　（3 分）

$\begin{cases}x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial x}=-2xu\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}-2v\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos x\end{cases}$

解得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{4xuv-y\cos x}{-2x^2v-y}=\dfrac{y\cos x-4xuv}{y+2x^2v}$　　（3 分）

2. 求椭圆抛物面$z=x^2+\dfrac{y^2}{4}-1$上平行于平面$2x+y+z+1=0$的切平面方程 .

解：椭圆抛物面上点(x_0,y_0,z_0)处的切平面法向量$\vec{n}=\left\{2x_0,\dfrac{y_0}{2},-1\right\}$　　　（2 分）

由$\vec{n}//\vec{n_1}=\{2,1,1\}$得$\dfrac{2x_0}{2}=\dfrac{\frac{y_0}{2}}{1}=\dfrac{-1}{1}$　　　（2 分）

有$x_0=-1, y_0=-2, z_0=1$　　　（1 分）

所求切平面方程为$2(x+1)+(y+2)+(z-1)=0$即$2x+y+z+3=0$　（1 分）

三．解下列各题(每小题 6 分，共 12 分):

1. 计算二次积分$\displaystyle\int_0^a dx\int_{-x}^{-a+\sqrt{a^2-x^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dy$，

其中常数$a>0$.

解：原式$=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{1}{\rho\sqrt{4a^2-\rho^2}}\cdot\rho\,d\rho=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\arcsin\frac{\rho}{2a}\Big|_0^{-2a\sin\theta}d\theta$　（3+0 分）

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\arcsin(-\sin\theta)\,d\theta=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\theta\,d\theta=\frac{\pi^2}{32}$$　（2+1 分）

2.（11 学分）

计算曲面积分$\displaystyle\oiint_{\Sigma}\vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{S}$，

其中$\vec{f}(x,y,z)=(x+y\cos z)\vec{i}+(y+z\cos x)\vec{j}+(z+x\cos y)\vec{k}$，

Σ是由旋转抛物面$z=1-x^2-y^2$与xoy坐标面所围立体Ω的边界曲面外侧 .

解：　利用高斯公式

原式$=\displaystyle\oiint_{\Sigma}(x+y\cos z)dydz+(y+z\cos x)dzdx+(z+x\cos y)dxdy$

$$=\iiint_{\Omega}3dv=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^{1-\rho^2}dz=6\pi\int_0^1\rho(1-\rho^2)d\rho=\frac{3\pi}{2}$$

（3+2+1 分）

（9，8 学分）

求旋转抛物面$x^2+y^2=z$被圆锥面$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$所截下的

有界部分曲面的面积S .

解：$\begin{cases} x^2+y^2=z \\ z=2-\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$　　消去 z，得 $x^2+y^2=1$

曲面在 xoy 坐标面上的投影为 $D: x^2+y^2\le 1$　　（2 分）

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$　　（2 分）

$$S=\iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho$$　　（0+1 分）

$$=2\pi\cdot\frac{5\sqrt{5}-1}{12}=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$　　（1 分）

四．(本题 8 分)

（11 学分）

计算曲线积分 $\int_L \vec{f}(x,y)\cdot d\vec{s}$，其中 $\vec{f}(x,y)=-e^y\cos x\,\vec{i}+(x^2+1-e^y\sin x)\vec{j}$，

L 是从点 $A=(0,1)$ 沿半圆周 $x=\sqrt{1-y^2}$ 到点 $B=(0,-1)$ 的有向弧段．

解：设 $L_1: x=0,$ 从点B到点A　　L与L_1围成的有界闭区域为D　　（1 分）

$$原式=\int_L -e^y\cos x dx+(x^2+1-e^y\sin x)dy$$

$$=(\int_{L+L_1}-\int_{L_1})(x^2+1-e^y\sin x)dy-e^y\cos x dx$$　（利用格林公式）

$$=-\iint_D 2x d\sigma-\int_{L_1}dy=-2\int_0^1 x dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy-\int_{-1}^1 dy$$　　（2+1+1+1 分）

$$=-4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx-2=-\frac{4}{3}-2=-\frac{10}{3}$$　　（1+1 分）

（9 学分）

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{2n}$ 的收敛域与和函数．

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(x-1)^{2n+2}}{n(x-1)^{2n}}\right|=(x-1)^2$　　(1 分)

当 $(x-1)^2<1$即$0<x<2$ 时级数收敛；当 $(x-1)^2>1$即$x<0$或$x>2$ 时级数发散，

（1 分）

$x=0$或$x=2$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}n$，发散　　（1 分）

所以幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{2n}$的收敛域为$(0,2)$　　　　（1 分）

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{2n}\qquad (0<x<2)$

则$\int^{x}\frac{S(x)}{x-1}dx=\int^{x}\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{2n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^{2n}}{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)^2}{1-(x-1)^2}$　　（1+1 分）

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{2n}=S(x)=(x-1)\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)^2-1+1}{1-(x-1)^2}\right]'=\frac{x-1}{2}\left[\frac{1}{1-(x-1)^2}\right]'$$　（1 分）

$$=\frac{(x-1)^2}{\left[1-(x-1)^2\right]^2}\qquad (0<x<2)$$　（1 分）

（8 学分）

半径为R的半球形水池内灌满了水，将水从池内抽出，当抽出水所作的功是将水全部抽尽所作功的一半时，求水面下降的高度H.

解：取球心为坐标原点，x轴铅直向下

$\forall[x,x+dx]\qquad dW=\rho g\pi x(R^2-x^2)dx$　　（2 分）

当水面下降的高度为H时，

作功$W(H)=\int_0^H\rho g\pi x(R^2-x^2)dx=\frac{1}{4}\rho g\pi H^2(2R^2-H^2)$　　（1+1 分）

将水抽尽作功$W=\int_0^R\rho g\pi x(R^2-x^2)dx=\frac{1}{4}\rho g\pi R^4$　　（1+1 分）

由$W(H)=\frac{1}{2}W$，得$\frac{1}{2}R^4=H^2(2R^2-H^2)$，有$H=\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}R$　　（2 分）

五．(本题 8 分)

将正数a分为三个正数x,y,z之和，使$u=x^l y^m z^n$取最大值，求此最大值，其中l,m,n均为已知正的常数．

解：求函数$u=x^l y^m z^n$在条件$x+y+z=a$且$x,y,z>0$下的最大值

令$L(x,y,z,\lambda)=x^l y^m z^n+\lambda(x+y+z-a)$　　（2 分）

则由$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = lx^{l-1}y^m z^n + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = mx^l y^{m-1} z^n + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = nx^l y^m z^{n-1} + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y + z - a = 0 \end{cases}$ 解得$(x, y, z) = \left(\dfrac{la}{l+m+n}, \dfrac{ma}{l+m+n}, \dfrac{na}{l+m+n} \right)$

（1+1 分）

而$u\left(\dfrac{la}{l+m+n}, \dfrac{ma}{l+m+n}, \dfrac{na}{l+m+n} \right) = \dfrac{l^l m^m n^n a^{l+m+n}}{(l+m+n)^{l+m+n}} > 0$

由于正值连续函数$u = x^l y^m z^n$在平面$x + y + z = a$位于第一卦限部分的边界上

取值为零，没有取得最大值，因此$u\left(\dfrac{la}{l+m+n}, \dfrac{ma}{l+m+n}, \dfrac{na}{l+m+n} \right)$为最大值 .

（2 分）

所以满足要求的$(x, y, z) = \left(\dfrac{la}{l+m+n}, \dfrac{ma}{l+m+n}, \dfrac{na}{l+m+n} \right)$

最大值是$u\left(\dfrac{la}{l+m+n}, \dfrac{ma}{l+m+n}, \dfrac{na}{l+m+n} \right) = \dfrac{l^l m^m n^n a^{l+m+n}}{(l+m+n)^{l+m+n}}$ （2 分）

六. (每小题 4 分，共 8 分)

利用二重积分的方法证明下述两个命题：

1. (Cauchy—Shwarz 不等式)

设函数$f(x), g(x)$在$[a,b]$上连续，则$\left[\int_a^b f(x)g(x)\, dx \right]^2 \le \int_a^b f^2(x)\, dx \cdot \int_a^b g^2(x)\, dx$.

证：设$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, a \le y \le b\}$

则$\iint\limits_D [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2 dxdy \ge 0$ （1 分）

于是$\iint\limits_D f^2(x)g^2(y)\, dxdy + \iint\limits_D f^2(y)g^2(x)\, dxdy \ge 2\iint\limits_D f(x)f(y)g(x)g(y)dxdy$

而$\iint\limits_D f^2(x)g^2(y)dxdy = \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(y)dy = \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$ （1 分）

$\iint\limits_D f^2(y)g^2(x)dxdy = \int_a^b f^2(y)dy \cdot \int_a^b g^2(x)dx = \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$

$\iint\limits_D f(x)f(y)g(x)g(y)dxdy = \int_a^b f(x)g(x)dx \cdot \int_a^b f(y)g(y)dxdy = \left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2$

（1 分）

因此$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx$ （1 分）

2. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上具有连续导数，且$f(a)=0$，

则$\int_a^b f^2(x)\,dx \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2dx-\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)^2[f'(x)]^2dx$.

证： $f(x)=\int_a^x f'(x)dx$ （1 分）

由 Cauchy—Shwarz 不等式

$f^2(x)=\left[\int_a^x f'(x)dx\right]^2 \le \int_a^x [f'(x)]^2dx\cdot\int_a^x 1^2\,dx=(x-a)\int_a^x [f'(t)]^2dt$ （1 分）

关于x从a到b积分，且交换积分次序，有

$$\int_a^b f^2(x)dx \le \int_a^b (x-a)dx\int_a^x [f'(t)]^2dt=\int_a^b [f'(t)]^2dt\int_t^b (x-a)dx$$

（1 分）

$$=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(t)]^2dt-\frac{1}{2}\int_a^b [f'(t)]^2(t-a)^2dt$$

$$=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2dx-\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)^2[f'(x)]^2dx$$ （1 分）

七．选择题(每小题 4 分，共 16 分):

1. 微分方程$y''+y=x\sin x$的一个特解应具有形式 ( ).

(A). $x(ax+b)(c\sin x+d\cos x)$; (B). $x(ax+b)(\cos x+\sin x)$;

(C). $x(ax+b)\sin x+x(cx+d)\cos x$; (D). $(ax+b)\sin x$.

2. 设由方程$xe^z+\sin(yz)=e$确定函数$z=z(x,y)$，则该函数在点$(x,y)=(1,0)$处

沿方向$\vec{l}=\{1,1\}$的方向导数$\frac{\partial z}{\partial l}|_{(1,0)}=($).

(A). $-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{e}\right)$; (B). $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{e}\right)$; (C). $-\left(1+\frac{1}{e}\right)$; (D). $1+\frac{1}{e}$.

3. 设平行四边形的两条对角线 $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b},\vec{d}=3\vec{a}-4\vec{b}$，其中$|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，

且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则此平行四边形的面积$S=($).

(A). 20;　　　　(B). 10;　　　　(C). 4;　　　　(D). 2 .

4. (11 学分)

设曲线 L 是从原点 O 到点 $A=\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ 的直线段，

则曲线积分 $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds=($　　　$)$.

(A). $\frac{9}{16}$;　　　(B). $\frac{9}{8}$;　　　(C). $\frac{9}{4}$;　　　(D). $\frac{9}{2}$.

(9，8 学分)

设函数 $z=\frac{1}{x}\varphi(xy)+yf(2x-y,\sin y)$，其中 φ 具有二阶连续导数，

f 具有二阶连续偏导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=($　　　$)$.

(A). $-\frac{1}{x}\varphi_2+\frac{1}{x}\varphi_1+y\varphi_{12}+2f_1+2yf_{11}+2y\cos y\, f_{12}$;

(B). $-\frac{1}{x}\varphi_2+\frac{1}{x}\varphi_1+y\varphi_{12}+2f_1--2yf_{11}+2y\cos y\, f_{12}$;

(C). $y\varphi''+2f_1+2yf_{11}+2y\cos y\, f_{12}$;　　(D). $y\varphi''+2f_1-2yf_{11}+2y\cos y\, f_{12}$.

解答：CABD

八．填空题(每小题 4 分，共 24 分):

1. 已知 $y_1=1, y_2=1+x, y_3=1+x^2$ 是方程 $y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=\frac{2}{x^2}$ 的三个特解，则该方程的通解为 $y=$ ________________ .

解答：$C_1x+C_2x^2+1$　　（注意：小心，此题答案可能比较多）

2. 设 $f(x-y,\ln x)=\left(1-\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{e^x}{e^y\ln(x^x)}$，则 $f(x,y)=$ ____________ .

解答：$\frac{xe^x}{ye^{2y}}$

3. 设函数 $z=(y-2)(\sin x)\ln\left(y+e^{x^2}\right)+\arctan(x^2y)$，则 $z_x(1,2)=$_________ .

解答：$\frac{4}{5}$

4. 过点 $(1,2,3)$ 且与 y 轴垂直相交的点向式直线方程是 ________________________ .

解答：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{3}$　　（也可以是 $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{3}$）

5. (11 学分)

设向量场 $\overrightarrow{f}(x,y,z)=(x-z)\overrightarrow{i}+(x^3+yz)\overrightarrow{j}-3xy^2\overrightarrow{k}$，则 $\mathrm{rot}\overrightarrow{f}(x,y,z)\cdot\overrightarrow{k}=$_______ .

解答：$3x^2$

(9 学分)

将函数 $f(x)=\dfrac{2}{2-3x}$ 展开为 x 的幂级数，则其展开式为 $f(x)=$____________.

幂级数的收敛域是____________.

解答：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{3x}{2}\right)^n$

解答：$-\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{2}{3}$

(8 学分)

曲线 $9y^2=4(1+x^2)^3$ 在第一象限内介于 $0\le x\le 2\sqrt{2}$ 的一段弧长 $s=$____________.

解答：$\dfrac{38}{3}\sqrt{2}$

6. (11 学分)

设函数 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ 1, & 0<x\le\pi\end{cases}$ 的傅里叶级数展开式为

$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则对于 $n=1,2,3,\cdots$，系数 $b_n=$____________.

解答：$\dfrac{1}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$　　　（也可以是 $\dfrac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi)$）

(8 学分)

广义积分 $\int_{-2}^{-1}\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=$____________.

解答：$-\dfrac{\pi}{3}$