1. $p_0 \in \mathbb{Z}$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $p_n \in \mathbb{N}$ 且 $0 \leqslant p_n \leqslant 9$, 证明：数列 $\left\{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{p_k}{10^k}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛。

   对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，$\sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{p_k}{10^k} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{p_k}{10^k} = \frac{p_{n+1}}{10^{n+1}} \geqslant 0$， 所以数列 $\left\{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{p_k}{10^k}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 单调上升。而对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，$\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{p_k}{10^k} < p_0 + 1$， 所以数列 $\left\{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{p_k}{10^k}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 有上界，所以 数列 $\left\{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{p_k}{10^k}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛。

2. 证明：对任意的实数 $x \geqslant 0$, 都存在唯一的一个数列 $\{p_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 满足

   (a) $p_0 \in \mathbb{N}$;

   (b) 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $p_n \in \mathbb{N}$ 且 $0 \leqslant p_n \leqslant 9$;

   (c) 对任意的 N>0, 存在整数 $n > N$ 使得 $p_n \neq 9$;

   (d) $x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{p_k}{10^k}$ 。

   令 $p_0 = \max\{i \in \mathbb{N} : i \leqslant x\}$,
   对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, 令 $p_n = \max\left\{i \in \mathbb{N} : i \leqslant 10^n \left(x - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{p_k}{10^k}\right)\right\}$，则数列 $\{p_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 满足

   (a) $p_0 \in \mathbb{N}$;

   (b) 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $p_n \in \mathbb{N}$ 且 $0 \leqslant p_n \leqslant 9$;

   (c) 对任意的 N>0, 存在整数 $n > N$ 使得 $p_n \neq 9$;

   (d) $x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{p_k}{10^k}$ 。

   如果任意的数列 $\{p_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 若满足

   (a) $p_0 \in \mathbb{N}$;

   (b) 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $p_n \in \mathbb{N}$ 且 $0 \leqslant p_n \leqslant 9$;

   (c) 对任意的 N>0, 存在整数 $n > N$ 使得 $p_n \neq 9$;

   (d) $x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{p_k}{10^k}$ 。

   因为数列 $\left\{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{p_k}{10^k}\right\}_{n=0}^{+\infty}$ 单调上升收敛到 x， 所以 $x \geqslant p_0$; 因为存在整数 $N > 0$ 使

得 $p_N \neq 9$，又因为 $0 \leqslant p_N \leqslant 9$，则 $0 \leqslant p_N < 9$, 所以

$$\begin{aligned} x - p_0 &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{10^k} \\ &= \sum_{k=1}^{N}\frac{p_k}{10^k} + \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=N+1}^{n}\frac{p_k}{10^k} \\ &< \sum_{k=1}^{N}\frac{9}{10^k} + \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=N+1}^{n}\frac{9}{10^k} \\ &= 1 \end{aligned}$$

所以 $x - 1 < p_0 \leqslant x$.

对任意的 $n \in \mathbb{N}$，当 $n > 1$ 时 , $x \geqslant \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{p_k}{10^k}$。则存在整数 $n' > n$ 使得 $p_{n'} \neq 9$，又因为 $0 \leqslant p_{n'} \leqslant 9$ 所以 $0 \leqslant p_{n'} < 9$， 所以

$$\begin{aligned} 10^n\left(x - \sum_{k=0}^{n}\frac{p_k}{10^k}\right) &= 10^n\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{p_k}{10^k} \\ &= 10^n\left(\sum_{k=n+1}^{n'}\frac{p_k}{10^k} + \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=n'+1}^{m}\frac{p_k}{10^k}\right) \\ &< 10^n\left(\sum_{k=n+1}^{n'}\frac{9}{10^k} + \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=n'+1}^{m}\frac{9}{10^k}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

所以 $10^n\left(x - \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{p_k}{10^k}\right) - 1 < p_n \leqslant 10^n\left(x - \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{p_k}{10^k}\right)$.

所以，对任意的数列 $\{p_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 和 $\{p'_n\}_{n=0}^{+\infty}$， 如果 $\{p_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 满足

(a) $p_0 \in \mathbb{N}$;

(b) 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $p_n \in \mathbb{N}$ 且 $0 \leqslant p_n \leqslant 9$;

(c) 对任意的 N>0, 存在整数 $n > N$ 使得 $p_n \neq 9$;

(d) $x = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{p_k}{10^k}$。

数列 $\{p'_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 也满足

(a) $p'_0 \in \mathbb{N}$;

(b) 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $p'_n \in \mathbb{N}$ 且 $0 \leqslant p'_n \leqslant 9$;

(c) 对任意的 N>0, 存在整数 $n > N$ 使得 $p'_n \neq 9$;

(d) $x = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{p'_k}{10^k}$。

则 $x-1<p_0\leqslant x$，$x-1<p_0'\leqslant x$, 且对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$，$10^n\left(x-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{p_k}{10^k}\right)-1<p_n\leqslant 10^n\left(x-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{p_k}{10^k}\right)$, $10^n\left(x-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{p_k'}{10^k}\right)-1<p_n'\leqslant 10^n\left(x-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{p_k'}{10^k}\right)$, 再结合对任意的 $n\in\mathbb{N}$,$p_n\in\mathbb{N}$ 及 $p_n'\in\mathbb{N}$，由数学归纳法 可得 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, $p_n=p_n'$.