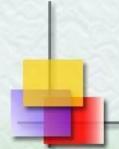
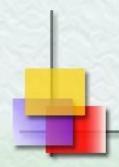
§ 3 伯努利试验与直线上的随机游动



引入随机变量的概念:

也可以用大写的英文字母 X,Y,...表示.



- 1. 伯努利概型
 - 1) 伯努利试验
 - ——只有两个可能结果的随机试验
 - 2) 重 复 独 立 试 验
 - ——试验在相同的条件下重复进行,各试验结果互不 影响。
 - 3) n 重 伯 努 利 试 验
 - 一进行n次重复独立试验,每次试验的结果只有两个且事件A的概率都保持不变,记为 E^n

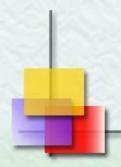
n 重伯努利试验的概率空间的样本点 : $(A_1,A_2,...,A_n)$ 其中 $A_i = A_i$ or $\overline{A_i}$

事件域: 所有样本点的子集构成

若有l个A, n-l个 \overline{A}

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n) = p^lq^{n-l}$$

可列重伯努利试验的概率空间: $(A_1, A_2, ..., A_n, ...)$



二、伯努利概型的一些分布

1. 0-1分布(两点分布,伯努利分布)

分布律:

X	0	1
P	\boldsymbol{q}	p

$$P(X = m) = p^m q^{1-m}, m = 0,1; p+q=1$$



2. 二项分布 b(k;n,p) (Binomial Distribution)

(n次伯努利试验中A成功k次的概率)

$$b(k;n,p) = C_n^k p^k q^{n-k}, q = 1-p, k = 0,1,\dots,n$$

(1)
$$\sum_{k=0}^{n} b(k;n,p) = 1$$

(2) b(k;n,p)是 $(px+q)^n$ 展开式中 x^k 的系数,

$$(px+q)^{n} = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} (px)^{k} q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} p^{k} q^{n-k} x^{k}$$

例1. 产品次品率 20%,进行重复抽样检查,共取 5件,求(1) 其中恰有 2件次品,

(2) 至少有 2 件次品的概率

解:
$$n=5, p=0.2$$

(1)
$$P_5(2) = C_5^2(0.2)^2(0.8)^3 = 0.2048$$

$$(2) P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5)$$

$$= 0.2048 + 0.0512 + 0.0064 + 0.0003 = 0.2627$$

或者,用对立事件来处理,即

$$1 - P_5(0) - P_5(1) = 1 - 0.32768 - 0.4096 = 0.2627$$

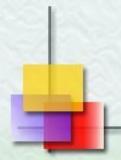
3、几何分布g(k,p) (Geometrical Distribution)

(首次成功发生在第 k 次)

p —— A 发生的概率

$$g(k,p) = P(\eta = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

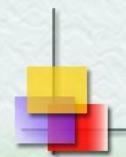
记为 $\xi \sim Ge(p)$



4、巴斯卡分布 f(k;r,p)

第r次成功发生在第k次

$$f(k;r,p) = {k-1 \choose r-1} p^r q^{k-r}, \quad k = r,r+1\cdots$$



验证规范性

$$\sum_{k=r}^{\infty} f(k;r,p) = \sum_{k=r}^{\infty} {k-1 \choose r-1} p^{r} q^{k-r} = \sum_{l=0}^{\infty} {r+l-1 \choose r-1} p^{r} q^{l}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} {r+l-1 \choose l} p^r q^l = \sum_{l=0}^{\infty} {-r \choose l} (-1)^l p^r q^l = p^r (1-q)^{-r} = 1$$

$$\begin{pmatrix} -r \\ l \end{pmatrix} = (-1)^l \begin{pmatrix} r+l-1 \\ l \end{pmatrix}, (1+x)^l = \sum_{r=0}^{\infty} \begin{pmatrix} l \\ r \end{pmatrix} x^r$$

P87 (分赌注问题)

甲、乙两个赌徒按某种方式下注赌博,说定先胜 t 局者将赢得全部赌注,但进行到甲胜 r 局,乙胜 s 局(r<t, s<t)时,因故不得不中止,试问如何分配这些赌注才公平合理?

$$\Rightarrow n = t - r, m = t - s$$

问题: 在出现 m 次 A 之前出现 n 次 A 的概率 ?

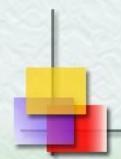
$$p_{\mathbb{H}} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+k-1}{k} p^{n} q^{k} = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} p^{k} q^{m}$$

$$= \sum_{k=n}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} p^{k} q^{m+n-1-k}$$

$$p_{\parallel} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+k-1}{k} p^n q^k$$

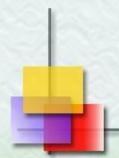
$$p_{\parallel} = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} p^k q^m$$

$$p_{\#} = \sum_{k=n}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} p^{k} q^{m+n-1-k}$$



P88 例 4 (巴拿赫火柴盒问题)

数学家的左、右衣袋中各放有一盒装有N根火柴的火柴盒,求发现一盒用光时,另一盒有r根的概率.

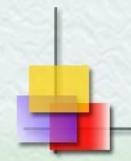


解: 看作 $p = \frac{1}{2}$ 的伯努利试验,要左边空而右边剩r 根,应该是左边摸过 N+1 次而右边摸过 N-r 次,这事件的概率为

$$f\left(2N-r+1;N+1,\frac{1}{2}\right) = {2N-r \choose N} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r+1}$$

所求的概率为

$$u_r = 2 \cdot f\left(2N - r + 1; N + 1, \frac{1}{2}\right) = {2N - r \choose N} 2^{-2N + r}$$

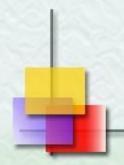


3. 直线上的随机游动

考虑 X 轴上的一个质点,假定它只能位于整数点,在时刻 t=0 时,它处于初始位置 a (整数),以后每隔单位时间,分别以概率 p(q=1-p) 向正的(负的)动一个单位,求质点在时刻 t=n 时的位置,用这种方式描述的质点运动称为随机游动.

无限制随机游动 有吸收壁的随机游动

有反射壁及弹性壁的随机游动



无限制随机游动

问题: 初始位置: 原点; t=n的位置: S_n

分析: x: 前n次游动中向右游动的次数,

y: 前 n 次游动中向左移动的次数,

则
$$\begin{cases} x + y = n \\ x - y = k \end{cases}$$
 即 $x = \frac{n+k}{2}$, (k必须与n具有相同的奇偶性)

$$P\left\{S_{n}=k\right\} = \left(\frac{n}{n+k}\right) q^{\frac{n-k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}}$$

当k与n奇偶性相反时,概率为0

两端带吸收壁的随机游动

问题: 初始位置: t=0, x=a,

吸收壁: x = 0及 x = a + b

 q_n : 初始位置为n, 最终在x = a + b被吸收的概率

分析: $q_0 = 0, q_{a+b} = 1$

$$q_n = pq_{n+1} + qq_{n-1}$$
 $n = 1, 2, \dots, a+b-1$

$$p(q_{n+1}-q_n)=q(q_n-q_{n-1})$$

记
$$c_n = q_{n+1} - q_n, r = \frac{q}{p}$$

则有 $c_n = rc_{n-1}$



$$c_n = rc_{n-1}$$

下面分两种情况求解:

赌徒破产模型

(i) 对称随机游动

$$r=1$$
即 $p=q=rac{1}{2}$, 这时 $c_n=c_{n-1}$, $q_{n+1}-q_n=q_n-q_{n-1}=\cdots=q_1-q_0=d$

$$\begin{cases} q_n = q_0 + nd \\ q_0 = 0, q_{a+b} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_n = \frac{n}{a+b}, \quad q_a = \frac{a}{a+b}$$

(ii)
$$r \neq 1$$
, 即 $p \neq q$

$$c_n = rc_{n-1} = r^2c_{n-2} = \cdots = r^nc_0$$

$$q_n - q_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (q_{k+1} - q_k) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k = \sum_{k=0}^{n-1} r^k c_0 = \frac{1 - r^n}{1 - r} c_0$$

$$q_0 = 0, q_{a+b} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1-r^{a+b}}{1-r}c_0 = 1 \Rightarrow q_n = \frac{1-r^n}{1-r^{a+b}}$$

$$q_a = \frac{1 - r^a}{1 - r^{a+b}} = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

4. 推广的伯努利试验与多项分布

n次重复独立试验每次试验的可能结果记为 A_1,A_2,\cdots,A_r

$$P(A_i) = p_i, i = 1, 2, \dots r$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1 \qquad p_i \ge 0$$

在n次试验中 A_1 出现 k_1 次,…… A_r 出现 k_r 次的概率为

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$$

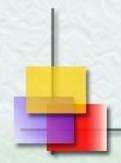
这里 $k_i \ge 0$,且 $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$ 称为多项分布



P93 例 5.

人类的血型分为O,A,B,AB四型,假定某地区的居民中这四种血型的人的百分比分别为 0.4,0.3,0.25,0.05,若从此地区居民中随机地选出 5 人,求有两个为O型,其他三个分别为A,B,AB型的概率.

解: 概率为 $P = \frac{5!}{2!1!1!1!} \times 0.4^2 \times 0.3 \times 0.25 \times 0.05 = 0.036$



P93 例 6. (平面上随机游动)

一质点从平面上某点出发,等可能地向上、下、左、右方向移动,每次移动的距离为 1,求经过 2n 次移动后回到出发点的概率.



解: A_1, A_2, A_3, A_4 表示质点向上、下、左、右移动一格,

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{4}$$

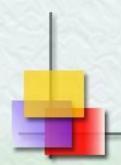
$$P = \sum_{k+m=n} \frac{(2n)!}{(k!)^2 (m!)^2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2 [(n-k)!]^2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{n!}{k!(n-k)!}\right]^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} {2n \choose n} \sum_{k=0}^{n} {n \choose k}^2$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \left(\frac{2n}{n}\right)^2$$

例2. 赌徒破产模型

甲有本金a元, 决心再赢b元停止赌博. 设甲每局 赢的概率是 0.5, 每局输赢都是一元钱, 甲输光后 停止赌博, 求甲输光的概率.



解:用A表示甲前一局赢,用 B_k 表示甲有本金k元时最后输光.

$$p(0) = 1, p(a+b) = 0$$

$$p(k) = P(B_k) = P(A)P(B_k | A) + P(\overline{A})P(B_k | \overline{A})$$

$$= \frac{1}{2}P(B_{k+1}) + \frac{1}{2}P(B_{k-1}) = \frac{1}{2}p(k+1) + \frac{1}{2}p(k-1)$$

$$p(k+1)-p(k) = p(k)-p(k-1) = \cdots = p(1)-p(0) = p(1)-1$$

上式两边对 $k = n-1, n-2, \dots, 0$ 求和后得到

$$p(n)-1 = n(p(1)-1)$$

取
$$n = a + b$$
,得到

$$0-1 = p(a+b)-1 = (a+b)(p(1)-1) p(1)-1 = -\frac{1}{a+b}$$
$$p(a) = 1 + a(p(1)-1) = \frac{b}{a+b}$$

