§3 二次曲线的中心 主方向 直径和切线

1. 直线与二次曲线的相关位置

二次曲线 **S** 的方程为：

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0 \quad ①$$

设直线 l 过点 $M_0(x_0,y_0)$，方向向量为 $\vec{v}(\mu,\nu)$，则 l 的参数方程为：

$$\begin{cases} x=x_0+\mu t \\ y=y_0+\nu t \end{cases} \qquad -\infty<t<+\infty \qquad ②$$

讨论直线l与二次曲线的相关位置

$$\varphi(\mu,\nu)t^2+2\left[F_1(x_0,y_0)\mu+F_2(x_0,y_0)\nu\right]t+F(x_0,y_0)=0 \quad ③$$

其中$\varphi(\mu,\nu)=a_{11}\mu^2+2a_{12}\mu\nu+a_{22}\nu^2$

$$F_1(x,y)=a_{11}x+a_{12}y+a_1$$

$$F_2(x,y)=a_{12}x+a_{22}y+a_2$$

定义：设二次曲线 S 的方程为①，若非零向量$\vec{v}$的坐标(μ,ν)满足$\varphi(\mu,\nu)=0$，则称$\vec{v}$是 S 的渐近方向；若满足$\varphi(\mu,\nu)\neq 0$，则称$\vec{v}$是 S 的非渐近方向。

情形 **1**、若 $\varphi(\mu,\nu)\neq 0$，

③是 **t** 的二次方程，方程有解的判别式：

$$\Delta = 4\left[F_1(x_0,y_0)\mu + F_2(x_0,y_0)\nu\right]^2 - 4\varphi(\mu,\nu)F(x_0,y_0)$$

1.1、　若 $\Delta > 0$，则 l 与 **S** 有两个不同交点；

1.2、　若 $\Delta = 0$，则 l 与 **S** 有两个重合交点；

1.3　若 $\Delta < 0$，则 l 与 **S** 没有交点。

情形 **2**、若 $\varphi(\mu,\nu)=0$

2.1、若 $F_1(x_0,y_0)\mu + F_2(x_0,y_0)\nu \neq 0$，则③是 **t** 的一次方程，从而 l 与 **S** 有一个交点（切线）。

2.2、若 $F_1(x_0,y_0)\mu+F_2(x_0,y_0)\nu=0$，且 $F(x_0,y_0)=0$，则 l 在 **S** 上。

2.3、若 $F_1(x_0,y_0)\mu+F_2(x_0,y_0)\nu=0$，且 $F(x_0,y_0)\neq 0$，则 **t** 无解，l 与 **S** 不相交。

定理：椭圆型曲线没有渐近方向，双曲型曲线有两个渐近方向，抛物型曲线有一个渐近方向：$\mu:\nu=-a_{12}:a_{11}=-a_{22}:a_{12}$。

2. 二次曲线的对称中心

定义：点O'称为曲线 **S** 的对称中心（简称中心），如果 **S** 上任一点M_1，关于O'的对称点M_2仍在 **S** 上。

定理：点$O'(x_0,y_0)$是二次曲线 **S** 的对称中心的充分必要条件为 O' 的坐标 (x_0,y_0) 是方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0 \\ F_2(x,y)=0 \end{cases}$$

的解。

定理：$I_2 \neq 0$时，二次曲线 S 由唯一的对称中心；$I_2 = 0$，且$I_3 = 0$时，S 有无穷多个对称中心，它们组成一条直线，称它是 S 的中心直线，其方程为 $F_1(x,y)=0$（或者 $F_2(x,y)=0$）；当 $I_2 = 0$，但 $I_3 \neq 0$时，S 没有对称中心。

具有唯一对称中心的二次曲线称为中心型曲线。
没有对称中心或者有无穷多个对称中心的二次曲线称为非中心型曲线，其中没有对称中心的称为无心曲线，有无穷多个对称中心称为线心曲线。

3.二次曲线的直径

定义：直线 l 称为曲线 **S** 的对称轴，如果对于曲线 **S** 上的任一点 $M_1(x_1, y_1)$，它关于直线 l 的对称点也在曲线 **S** 上。

定理：二次曲线 **S** 的沿非渐近方向 (μ, ν) 的平行弦的中点都在一条直线上，它的方程是 $\mu F_1(x, y) + \nu F_2(x, y) = 0$

定义：二次曲线 S 的沿非渐近方向 (μ,ν) 的平行弦中点所在的直线称为 S 的共轭于方向 (μ,ν) 的直径。

二次曲线 S 的共轭于方向 (μ,ν) 的直径的方程是 $\mu F_1(x,y)+\nu F_2(x,y)=0$。

直径方向为 $(\mu',\nu')=(-(a_{12}\mu+a_{22}\nu),(a_{11}\mu+a_{12}\nu))$ 称为 (μ,ν) 的共轭方向。满足

$$a_{11}\mu\mu'+a_{12}(\mu\nu'+\mu'\nu)+a_{22}\nu\nu'=0$$

可见方向 (μ,ν) 与 (μ',ν') 是对称。

推论:中心型曲线或线心曲线的直径一定经过中心。

对于中心型曲线 S 有一对共轭直径。

4.二次曲线的主方向

定义：如果二次曲线的直径垂直于它所在的共轭方向，称这样的直径为二次曲线 S 的主直径。主直径的方向以及垂直于主直径的方向称为二次曲线 S 的主方向。

设 l 是二次曲线 S 的对称轴（一条直线），故它与所共轭的非渐近方向 (μ,ν) 垂直，l 的方程是

$$\mu F_1(x,y)+\nu F_2(x,y)=0$$

$$y=-\frac{a_{11}\mu+a_{12}\nu}{a_{12}\mu+a_{22}\nu}x-\frac{a_1\mu+a_2\nu}{a_{12}\mu+a_{22}\nu},$$

$$k_1=-\frac{a_{11}\mu+a_{12}\nu}{a_{12}\mu+a_{22}\nu},k_2=\frac{\nu}{\mu},$$

$$\because\quad k_1\cdot k_2=-1\qquad\therefore\quad -\nu(a_{11}\mu+a_{12}\nu)+\mu(a_{12}\mu+a_{22}\nu)=0$$

$$(a_{11}\mu + a_{12}\nu) : \mu = (a_{12}\mu + a_{22}\nu) : \nu = \text{（记）}\ \xi$$

$$\begin{cases} (a_{11}-\xi)\mu + a_{12}\nu = 0 \\ a_{12}\mu + (a_{22}-\xi)\nu = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\xi & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\xi \end{vmatrix} = 0$$

$$\xi^2 - (a_{11}+a_{22})\xi + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

$$\xi^2 - I_1\xi + I_2 = 0$$

二次曲线S的特征方程

ξ代入方程组,求出特征向量,即得$\mu:\nu$称为属于ξ的主方向，若它是非渐近方向，代入直径方程，得主直径的方程。

椭圆和双曲线的两条对称轴显然是一对共轭直径。

例：求下列二次曲线的主直径：

①$4x^2-4xy+y^2-10x+10y-6=0$

②$5x^2+4xy+2y^2-24x-12y+18=0$

5.从原方程的系数确定二次曲线的位置

定理：对于椭圆，若取绝对值较小的特征根为 λ_1，则椭圆的长轴方向是属于 λ_1 的主方向，则双曲线，若取与 I_3 同号的特征根为 λ_1，则双曲线的实轴的方向是属于 λ_1 的主方向。

例：对二次曲线的

$5x^2+4xy+2y^2-24x-12y+18=0$ 作图。

6.二次曲线的切线和法线

定义: 直线l如果与二次曲线 S 有两个重合的交点或者l在 S 上，则称l是 S 的切线，l与 S 的交点称为切点。

设直线l的方程为 $\begin{cases} x = x_0 + \mu t \\ y = y_0 + \nu t \end{cases}$

$M_0(x_0, y_0)$在 S 上， l 的方向(μ, ν)

代入二次曲线 S 的方程中，得

$$\varphi(\mu,\nu)t^2+2\left[\mu F_1(x_0,y_0)+\nu F_2(x_0,y_0)\right]t+F(x_0,y_0)=0$$

l 与 S 有两个重合的交点

$$\Delta=4\left[\mu F_1(x_0,y_0)+\nu F_2(x_0,y_0)\right]^2-4\varphi(\mu,\nu)F(x_0,y_0)=0$$

M_0 在 S 上　　$\therefore F(x_0,y_0)=0$

$$\Delta=0\Leftrightarrow \mu F_1(x_0,y_0)+\nu F_2(x_0,y_0)=0$$

情形 **1**、$F_1(x_0,y_0)$与$F_2(x_0,y_0)$不全为零，则有

$\mu:\nu=-F_2(x_0,y_0):F_1(x_0,y_0)$

因此过二次曲线 **S** 上的点$M_0(x_0,y_0)$的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{-F_2(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{F_1(x_0,y_0)}$$

即：$F_1(x_0,y_0)(x-x_0)+F_2(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

情形 **2**、$F_1(x_0,y_0)=F_2(x_0,y_0)=0$

过M_0的任意一条直线都是 **S** 的切线（该点称为曲线 **S** 的奇异点）。

求过二次曲线外引一点 $M_1(x_1, y_1)$ 的切线 l（此时 l 不可能整条直线在 S 上）

设 l 的方向为 (μ, ν)，则它应满足 $\varphi(\mu, \nu) \neq 0$,并且

$$\left[\mu F_1(x_1, y_1) + \nu F_2(x_1, y_1)\right]^2 - \varphi(\mu, \nu) F(x_1, y_1) = 0$$

l 的方程为 $\dfrac{x - x_1}{\mu} = \dfrac{y - y_1}{\nu}$

$$\left[(x - x_1)F_1(x_1, y_1) + (y - y_1)F_2(x_1, y_1)\right]^2 - \varphi(x - x_1, y - y_1)F(x_1, y_1) = 0$$

是 $(x - x_1), (y - y_1)$ 的二次齐次多项式或零多项式。

若为齐次多项式，当它可以分解成两个实系数一次因式的乘积时，便得一对（相交若重合）直线l_1，l_2，如果l_i的方向(μ_i, v_i)满足$\varphi(\mu_i, v_i) \neq 0$，则$l_i$是过$M_i$的 **S** 的切线：如果$\varphi(\mu_i, v_i) = 0 \quad i = 1,2$ 则l_i是过M_i的 **S** 的切线不存在。

若是零多项式，则过 M_1 的任意一条直线 **S** 的切线。

定义：过曲线上一点，且垂直于过该点的切线的直线称为曲线在这点的法线。

$M_0(x_0, y_0)$ 在 S 上，切线为

$$(x - x_0)F_1(x_0, y_0) + (y - y_0)F_2(x_0, y_0) = 0$$

法线为 $$\frac{x - x_0}{F_1(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F_2(x_0, y_0)}$$

例：求二次曲线 $4x^2 - 4xy + y^2 - 10x + 10y - 6 = 0$ 通过点（**4**，**0**）的切线。

双曲线的渐近线

定义：在渐近方向并且与双曲线 S 没有交点的直线 l 称为双曲线 S 的渐近线。

设 $(\mu_i, \nu_i), i = 1,2$ 是双曲线 S 的渐近方向，设 l_i 是方向为 (μ_i, ν_i) 的渐近线，满足

$$\mu_i F_1(x, y) + \nu_i F_2(x, y) = 0$$

双曲线的渐近线也就是经过中心且方向为渐近方向的直线。

例：给定方程

$$(A_1 x + B_1 y + C_1)^2 - (A_2 x + B_2 y + C_2)^2 = 1$$

其中 $A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$，证明：它表示一条双曲线，并且求出它的渐近线