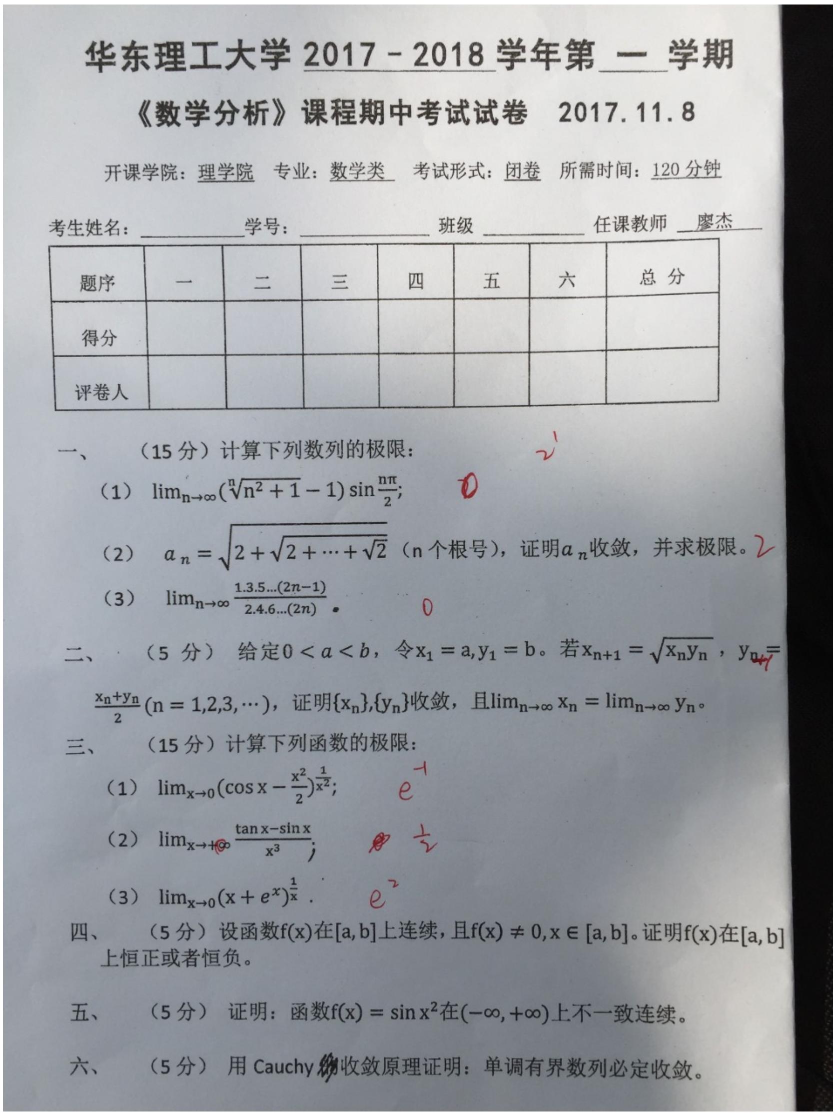
# 理学院 2017 级年级会科研学习部大一第一学期数学分析期中试卷解析

题目：



华东理工大学 2017－2018 学年第 一 学期

《数学分析》课程期中考试试卷 2017.11.8

开课学院：理学院 专业：数学类 考试形式：闭卷 所需时间：120 分钟

考生姓名：__________ 学号：__________ 班级 __________ 任课教师 廖杰

| 题序 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总 分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | |
| 评卷人 | | | | | | | |

一、 （15 分）计算下列数列的极限： 2

（1） $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n^2+1}-1)\sin\frac{n\pi}{2}$； 0

（2） $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$（n 个根号），证明 $a_n$ 收敛，并求极限。 2

（3） $\lim_{n\to\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}$。 0

二、 （5 分） 给定 $0<a<b$，令 $x_1=a, y_1=b$。若 $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$，$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}(n=1,2,3,\cdots)$，证明 $\{x_n\},\{y_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n$。

三、 （15 分）计算下列函数的极限：

（1） $\lim_{x\to 0}(\cos x-\frac{x^2}{2})^{\frac{1}{x^2}}$； $e^{-1}$

（2） $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$； $\frac{1}{2}$

（3） $\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$． $e^2$

四、 （5 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\neq 0, x\in[a,b]$。证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正或者恒负。

五、 （5 分） 证明：函数 $f(x)=\sin x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续。

六、 （5 分） 用 Cauchy 收敛原理证明：单调有界数列必定收敛。

一、(1)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n^2+1}-1\right)\sin\frac{n\pi}{2}$$

解：$\because \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n^2+1}\right)=1$，$\left|\frac{\sin n\pi}{2}\right|\le 1$

编者 ：数学 171 张知远
校对人：数学 171 梁天一

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n^2+1}-1\right)\sin\frac{n\pi}{2}=0$$

（2）构造数列$\{x_n\}$ $x_1=\sqrt{2}$ $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$（这个假设不写就被扣分了）首先由 $0<x_1=\sqrt{2}<2$，设 $0<x_k<2$，则 $0<x_{k+1}=\sqrt{x_k+2}<2$，由数学归纳法可知 $\forall n$，$0<x_n<2$。

由 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-\sqrt{2+x_{n-1}}=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{2+x_n}+\sqrt{2+x_{n-1}}}$

可知数列$\{x_{n+1}-x_n\}$保持同号；再由$x_2-x_1>0$，可知$\forall n$，$x_{n+1}-x_n>0$(方案 1)

由 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-x_n=\dfrac{(-x_n+2)(x_n+1)}{\sqrt{x_n+2}+x_n}>0$(好用直观的方案 2)

所以$\{x_n\}$是单调增加有上界的数列，因此收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对等式$x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}$

两端求极限，得到方程 $a=\sqrt{a+2}$，解此方程，得到 $a=2$，

因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2$$

(3) ）应用不等式 $2k>\sqrt{(2k-1)(2k+1)}$，得到 $0<\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdot(2n)}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$

，可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdot(2n)}=0$$

二、首先易知$\forall n$，有 $x_n\le y_n$。由$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n}\left(\sqrt{y_n}-\sqrt{x_n}\right)\ge0$,

$y_{n+1}-y_n=\frac{1}{2}(x_n+y_n)\ge0$，得到 $a\le x_n<x_{n+1}<y_{n+1}<y_n\le b$，即$\{x_n\}$是单调增加有上 界的数列，$\{y_n\}$是单调减少有下界的数列，所以它们收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$

，对$y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$的两端求极限，得到 $x=y$。

三、(1)

$$\lim_{x\to0}\left(\cos x-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left(1-(1-\cos x)-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left(1-x^2+o(x)\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-1}$$

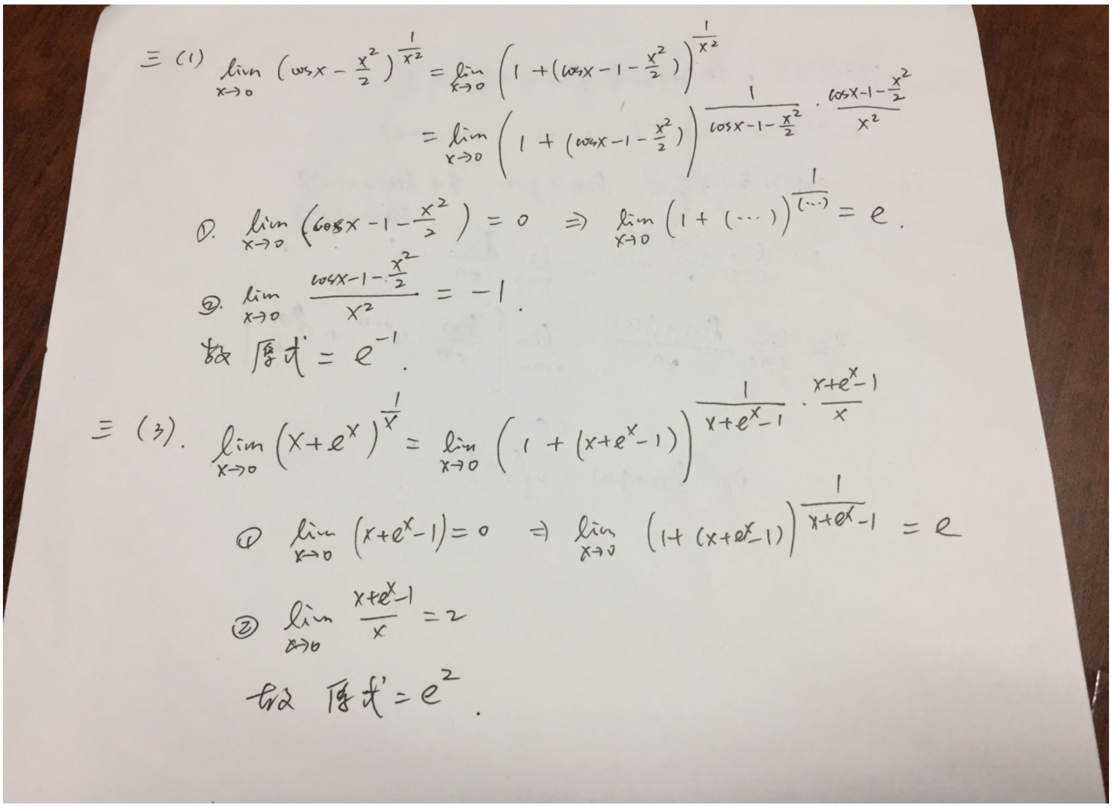
(2)

编者 ：数学 171 张知远
校对人：数学 171 梁天一

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

(3)$\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+x+e^x-1)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+2x+o(x))^{\frac{1}{x}}=e^2$

廖杰老师官方解析:



三 (1) $\lim_{x\to 0}\left(\cos x-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\left(\cos x-1-\frac{x^2}{2}\right)\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$=\lim_{x\to 0}\left(1+\left(\cos x-1-\frac{x^2}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\cos x-1-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{\cos x-1-\frac{x^2}{2}}{x^2}}$

① $\lim_{x\to 0}\left(\cos x-1-\frac{x^2}{2}\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+(\cdots))^{\frac{1}{(\cdots)}}=e.$

② $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1-\frac{x^2}{2}}{x^2}=-1.$

故原式 $=e^{-1}.$

三 (3). $\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+(x+e^x-1)\right)^{\frac{1}{x+e^x-1}\cdot\frac{x+e^x-1}{x}}$

① $\lim_{x\to 0}(x+e^x-1)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+(x+e^x-1))^{\frac{1}{x+e^x-1}}=e$

② $\lim_{x\to 0}\frac{x+e^x-1}{x}=2$

故原式 $=e^2.$

四、设 $f(x)$在$[a,b]$上不保持定号，则存在$x',x''\in[a,b]$(不妨设$x'<x''$),使 $f(x')$，$f(x'')$ 不同号，

由闭区间上连续函数的中间值定理，必定存在$\xi\in[x',x'']$，使得 $f(\xi)=0$，这就产生矛盾，

所以 $f(x)$在$[a,b]$上必定恒正或恒负。

五、在$(-\infty,+\infty)$上，令$x_n'=\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}$，$x_n''=\sqrt{n\pi}$，则$x_n'-x_n''\to 0$（$n\to\infty$），

但$\lim_{n\to\infty}\left|(\sin(x_n')^2)-(\sin(x_n'')^2)\right|=1$,所以$\sin x^2$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续。

六、采用反证法。不妨设$\{x_n\}$是单调增加的有界数列。假设它不收敛，则

$$\exists\varepsilon_0>0,\ \forall N>0,\exists m,n>N:|x_m-x_n|>\varepsilon_0$$

取$N_1=1$，$\exists m_1>n_1>N_1:x_{m_1}-x_{n_1}>\varepsilon_0$；

取$N_2=m_1$，$\exists m_2>n_2>N_2:x_{m_2}-x_{n_2}>\varepsilon_0$；

……

取$N_k = m_{k-1}$，$\exists m_k > n_k > N_k: x_{m_k} - x_{n_k} > \varepsilon_0$；

……

于是$x_{m_k} - x_{n_1} > k \cdot \varepsilon_0 \longrightarrow +\infty$，与数列$\{x_n\}$有界矛盾。

（注：任何应用到确界存在定理而后接上柯西收敛定则的操作都是违章操作，因为这相当于主要运用确界存在定理证明，而不是柯西收敛定则）

编者 ：数学 171 张知远
校对人：数学 171 梁天一