华东理工大学 2015－2016 学年第二学期

《高等数学(下)》期中考试试卷（11 学分）2016.4

一、（本题 8 分）求方程 $x^2y''+(y')^2e^{-x}=(x^2+2x)y'$ 满足 $y(1)=0$， $y'(1)=e$ 的特解。

解：令 $y'=p$，则 $y''=\dfrac{dp}{dx}$，

原方程化为 $x^2\dfrac{dp}{dx}+(p)^2e^{-x}=(x^2+2x)p$，即

$\dfrac{1}{p^2}\dfrac{dp}{dx}+x^{-2}e^{-x}=(1+\dfrac{2}{x})\dfrac{1}{p}$，又令 $z=\dfrac{1}{p}$，则有 $\dfrac{dz}{dx}+(1+\dfrac{2}{x})z=x^{-2}e^{-x}$，

$$z=\frac{1}{p}=e^{-\int(1+\frac{2}{x})dx}[C+\int x^{-2}e^{-x}e^{\int(1+\frac{2}{x})dx}dx],$$

$\therefore y'=p=\dfrac{x^2e^x}{x+C_1}$，又 $y'(1)=e$，得 $C_1=0$，故 $y'=xe^x$，$\therefore y=(x-1)e^x+C_2$，再由于 $y(1)=0$，得 $C_2=0$，故 $\therefore y=(x-1)e^x$。

二、（本题 8 分）求满足 $f(x)=x\int_0^x f(t)dt+x$ 的可导函数 $f(x)$。

解：原方程化为，$\dfrac{f(x)}{x}=\int_0^x f(t)dt+1$，两边求导有 $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=f(x)$，

化简后有，$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=x+\dfrac{1}{x}$，故 $f(x)=Cxe^{\frac{x^2}{2}}$，

又 $\dfrac{f(x)}{x}=\int_0^x f(t)dt+1$，得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，可知 $C=1$，于是 $f(x)=xe^{\frac{x^2}{2}}$。

三、（本题 8 分）证明两直线 $l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$，$l_2$: $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$ 异面，并求它们的距离。

解：取 l_1 上一点 $A(1,-1,-1)$，l_2 上一点 $B(3,2,3)$，由于

$$[\overrightarrow{AB},\vec{l}_1,\vec{l}_2]=\begin{vmatrix}2&3&4\\1&2&3\\2&2&1\end{vmatrix}=-1\neq0$$ 因此 $\vec{l}_1$、$\vec{l}_2$ 为异面直线.

异面直线的距离为 $\left|\mathrm{Pr}j_{\vec{l}_1\times\vec{l}_2}\overrightarrow{AB}\right|=\left|\dfrac{\{-4,5,-2\}\cdot\{2,3,4\}}{\sqrt{16+25+4}}\right|=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}$

四、（本题 8 分）设 $f(x,y)=\begin{cases} x|y|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，（1）求 $f_x(0,0), f_y(0,0)$；

（2）判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性；（3）判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可微性。

解：（1） $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x}=0$，

$f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0-0}{y}=0$。

（2）由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x|y|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$，

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续。

（3）考虑 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$，

由于 $0\leq\left|\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\leq\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$，根据夹逼定理，

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微。

五、填空题（每小题 4 分，共 52 分）

1、微分方程 $y'''+2y''+y'=0$ 的通解为____________________。

答： $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3xe^{-x}$

2、微分方程 $y'=e^{2x-y}$ 的通解为____________________。

答： $e^y=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$

3、微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\sec\dfrac{y}{x}$ 满足 $y(1)=0$ 的特解为____________________。

答： $\sin\dfrac{y}{x}=\ln x$

4、微分方程 $y'+y=x$ 的通解为____________________。

答：$y=Ce^{-x}+x-1$

5、微分方程 $yy''=(y')^2$ 的通解为________________________。

答：$y=C_2e^{C_1x}$

6、求过点 $A(1,2,-3)$ 且与两个平面 $x+y+z=1$，$x-y-z=3$ 都平行的直线方程为：

______________________。

答：$\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{1}$

7、过点 $A(-1,1,2)$ 和 z 轴的平面方程为_______________________。

答：$x+y=0$

8、曲线 $\begin{cases} z=2x^2+y^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线为__________________。

答：$\begin{cases} 2x^2+y^2+x+y=1 \\ z=0 \end{cases}$

9、函数 $u=\ln(x+y^2+z^3)$ 在 $(1,1,1)$ 处沿 $\vec{l}=\{3,4,12\}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial l}=$__________。

答：$\dfrac{47}{39}$

10、设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(xy,y+z,x^2z)=0$ 确定，其中 F 具有一阶连续偏导数，则

$\dfrac{\partial z}{\partial \mathrm{x}}=$______________________________。

答：$-\dfrac{yF_1+2xzF_3}{F_2+x^2F_3}$

11、设 $u=f(xy,y^2z)$，其中 f 具有一阶连续偏导数，则

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=$______________________________。

答：xf_1+2yzf_2

12、设 y_1，y_2 为二阶常系数线性方程 $y''+py'+qy=e^x$ 的两个特解，且 $y_1-y_2=x$，则该微分方程的通解为____________________________________。

答： $y = C_1 x + C_2 + e^x$

13、坐标原点关于平面 $\pi: 6x + 2y - 9z + 121 = 0$ 的对称点的坐标为________________。

答： $(-12,-4,18)$

六、选择题（每题 4 分，共 16 分）

1、微分方程 $y'' - y = e^x + 1$ 的一个特解应具有形式（式中 a,b 为常数）（　　）

（A） $ae^x + b$；（B） $axe^x + b$

（C） $ae^x + bx$；（D） $axe^x + bx$

答：B

2、设 $z = e^{\frac{y}{x}}$，则 $dz =$（　　）

（A） $\frac{1}{x^2} e^{\frac{y}{x}} [(y'x - y)dx + xdy]$ （B） $-\frac{1}{x^2} e^{\frac{y}{x}} (ydx - xdy)$

（C） $\frac{1}{x^2} e^{\frac{y}{x}} (ydx + xdy)$ （D） $-\frac{1}{x^2} e^{\frac{y}{x}} (xdy - ydx)$

答：B

3、函数 $z = \sin(x^2 + y^2)$ 在点 $(-3,4)$ 处的等值线的法线方程为（　　）

（A） $3x + 4y = 0$ （B） $3x - 4y = 0$

（C） $4x + 3y = 0$ （D） $4x - 3y = 0$

答：C

4、已知 $|\overline{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 3$，$|\overline{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}$，则 $\overline{a}, \vec{b}$ 的夹角为（　　）

（A） $\frac{1}{2}$ （B） $-\frac{1}{2}$

（C） $\frac{2\pi}{3}$ （D） $\frac{\pi}{3}$

答：D