刚体力学

- 转动惯量
  - 刚体的动量矩
    - 刚体对于任意一个点的动量矩

      $$\begin{aligned}\boldsymbol{J} &= \sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i)\\ &= \sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i))\\ &= \sum_i m_i(\boldsymbol{\omega} r_i^2 - r_i(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_i))\end{aligned}$$

    - $$\boldsymbol{J} = \overleftrightarrow{I}\boldsymbol{\omega}$$

      $$\overleftrightarrow{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

      $$\boldsymbol{\omega} = (\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z)^T$$

      - 如果写出分量
        - $$I_{xy} = \sum_i x_i y_i m_i$$

          $$I_{xx} = \sum_i (y_i^2 + z_i^2) m_i$$

        - xyz是固定在刚体上的坐标，因此坐标确定后，$\overleftrightarrow{I}$就是常量
  - 刚体的转动动能

    $$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\overleftrightarrow{I}\boldsymbol{\omega}$$

  - 转动惯量
    - $T = \frac{1}{2}I\omega^2$，I是对瞬时轴(以ω所在的方向为轴)的转动惯量
    - 当ω方向在变化，I也在变化
    - 将刚体等效为一个质点绕距离为k之外的轴做定轴转动，则：

      $k = \sqrt{\frac{I}{m}}$，k称为回转半径
    - 平行轴定理
  - 惯量张量和惯量椭球
    - 对任意轴的转动惯量

      $$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\overleftrightarrow{I}\boldsymbol{\omega}$$

      设$\boldsymbol{\omega} = (\omega\alpha \quad \omega\beta \quad \omega\gamma)$

      有：$I\omega^2 = \omega(\alpha \quad \beta \quad \gamma)\overleftrightarrow{I}(\alpha \quad \beta \quad \gamma)^T\omega$

      $\Rightarrow I = (\alpha \quad \beta \quad \gamma)\overleftrightarrow{I}(\alpha \quad \beta \quad \gamma)^T$

    - 惯量椭球

      在转动轴上，取$|OQ| = \frac{1}{\sqrt{I}} = R$，得到$Q$的坐标

      $\boldsymbol{OQ} = (x \quad y \quad z) = R(\alpha \quad \beta \quad \gamma)$，带入转动惯量式子，

      $$I = (\alpha \quad \beta \quad \gamma)\overleftrightarrow{I}(\alpha \quad \beta \quad \gamma)^T$$

      $$I = \frac{1}{R}\boldsymbol{OQ}\overleftrightarrow{I}\frac{1}{R}\boldsymbol{OQ}^T$$

      因为$\frac{1}{R^2} \equiv I$，$\boldsymbol{OQ}\overleftrightarrow{I}\boldsymbol{OQ}^T = 1$

      Q的轨迹是一个椭球
      - 要求任意方向的转动惯量，只要把这个方向与椭球的交点求出来，

        然后计算到原点的距离R，利用公式$I = \frac{1}{R^2}$算转动惯量就行了
  - 总结：绕固定轴转动惯量的求法
    - 直接法
      - 看成定轴转动，积分，求转动惯量
    - 张量法
      - 求出转动惯量张量，由转动轴与坐标轴的夹角，求出转动惯量
    - 惯量椭球法
      - 求出惯量椭球，求出转动轴与惯量椭球的交点，求出转动惯量