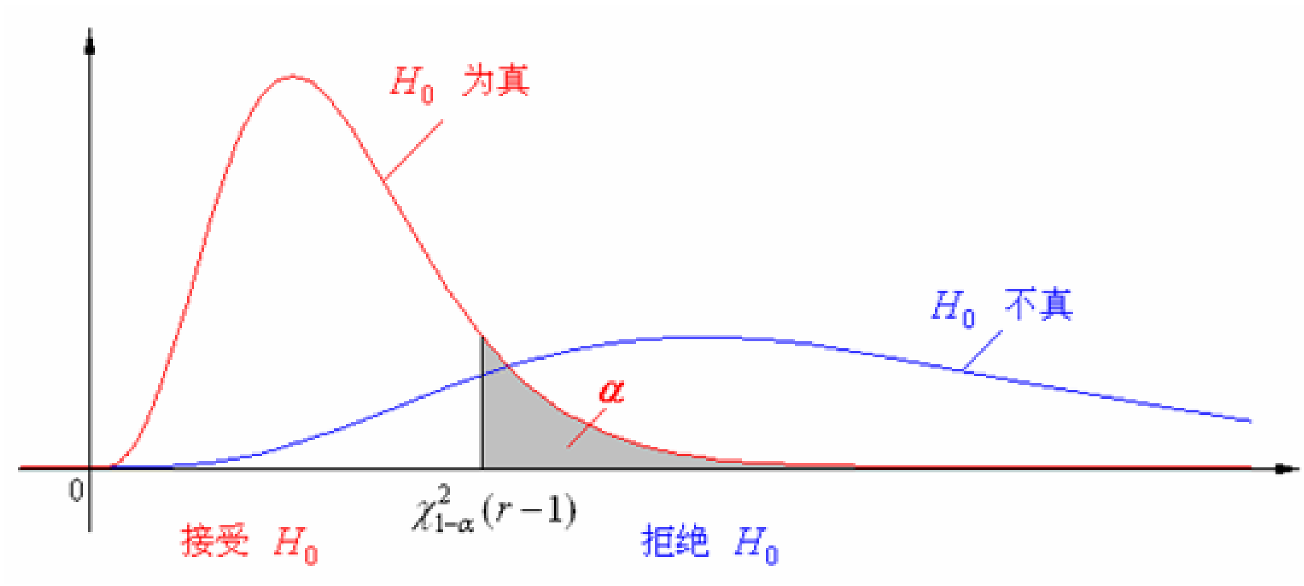
4.4 总体分布的拟合检验

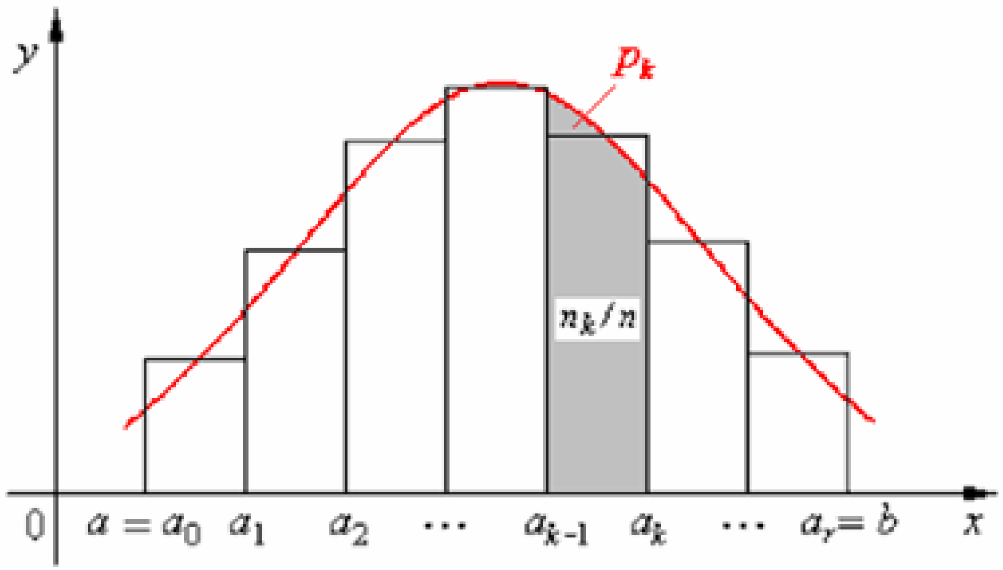


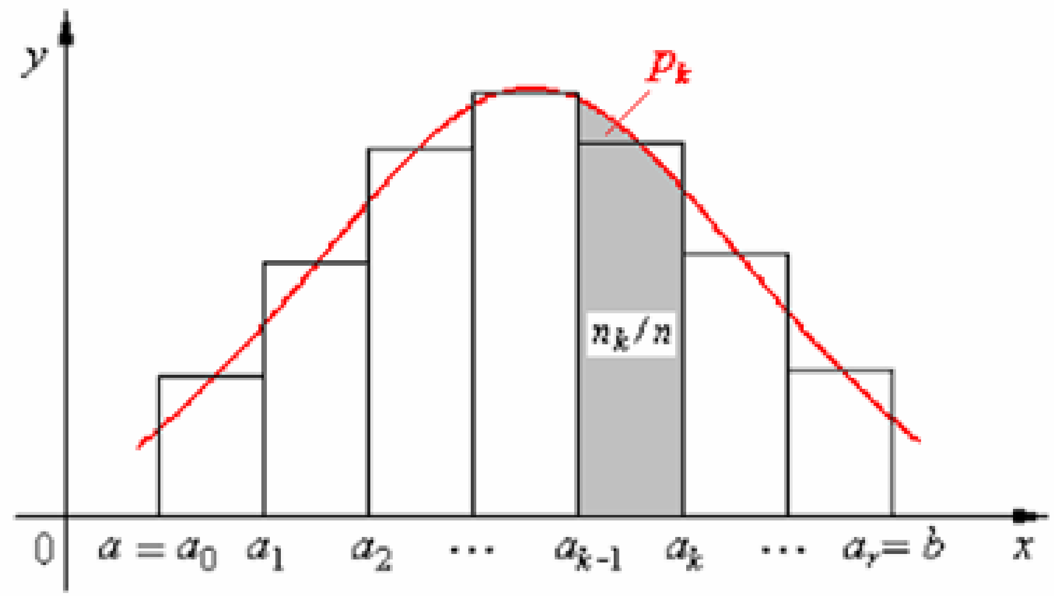
前面讲到的假设检验，都是**参数检验**，也就是说，检验时，总体分布的形式是已知的，只是要对分布中一些未知参数作检验。但是，有时情况并非如此，在有些问题中，总体服从什么分布是未知的，我们的任务，就是要对总体是否服从某个分布作检验。这样的检验，称为**总体分布的检验，**它是一种**非参数检验**。

$$\text{统计推断}\begin{cases}\text{估计}\begin{cases}\text{非参数估计}\\\text{参数估计}\end{cases}\\\text{假设检验}\begin{cases}\text{参数检验}\\\text{非参数检验}\end{cases}\end{cases}$$

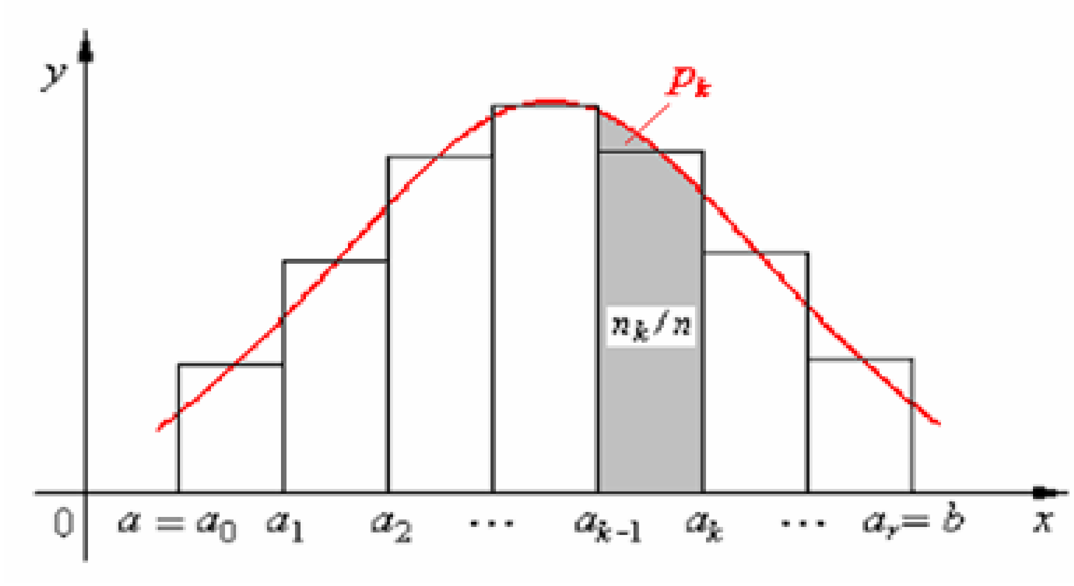
问题 设n_k是总体ξ的样本落在区间$(a_{k-1}, a_k]$中的频数，$k=1,2,\cdots,r$，要检验H_0：$\xi \sim F_0(x)$，其中，$F_0(x)$是某个已知的不含未知参数的分布。

分析: 回顾2.2节关于总体分布的估计,可以用样本的频率直方图曲线估计总体(连续型)的密度函数





作分点$a=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_r=b$，将$\xi$的取值范围$(a,b)$分成$r$个区间。设共进行了n次试验，落在区间$(a_{k-1},a_k]$中的样本观测值的个数为$n_k$，$n_k$称为频数，$n_k/n$称为频率。在每一个区间$(a_{k-1},a_k]$上，以$\dfrac{n_k/n}{a_k-a_{k-1}}$为高度，作长方形。这样得到的一排长方形，称为频率直方图。



设 $p_k = P\{a_{k-1} < \xi \le a_k\}$是总体$\xi$落在区间$(a_{k-1}, a_k]$ 中的概率，由于样本落在区间$(a_{k-1}, a_k]$ 中的频率 $\approx$ 总体落在区间$(a_{k-1}, a_k]$ 中的概率，所以，有$n_k / n \approx p_k$，$k = 1, 2, \cdots, r$ 。

如果ξ服从$F_0(x)$，则有$n_k / n \approx p_k$

如果ξ不服从$F_0(x)$，则n_k与$n\,p_k$的差别就会很大

不含未知参数的总体分布的检验

问题 设n_k是总体ξ的样本落在区间$(a_{k-1}, a_k]$中的频数，$k=1, 2, \cdots, r$， 要检验H_0：$\xi \sim F_0(x)$，其中，$F_0(x)$是某个已知的不含未知参数的分布。

检验方法

从$F_0(x)$求出$p_k = P\{a_{k-1} < \xi \le a_k\}, k=1, 2, \cdots, r$ 。

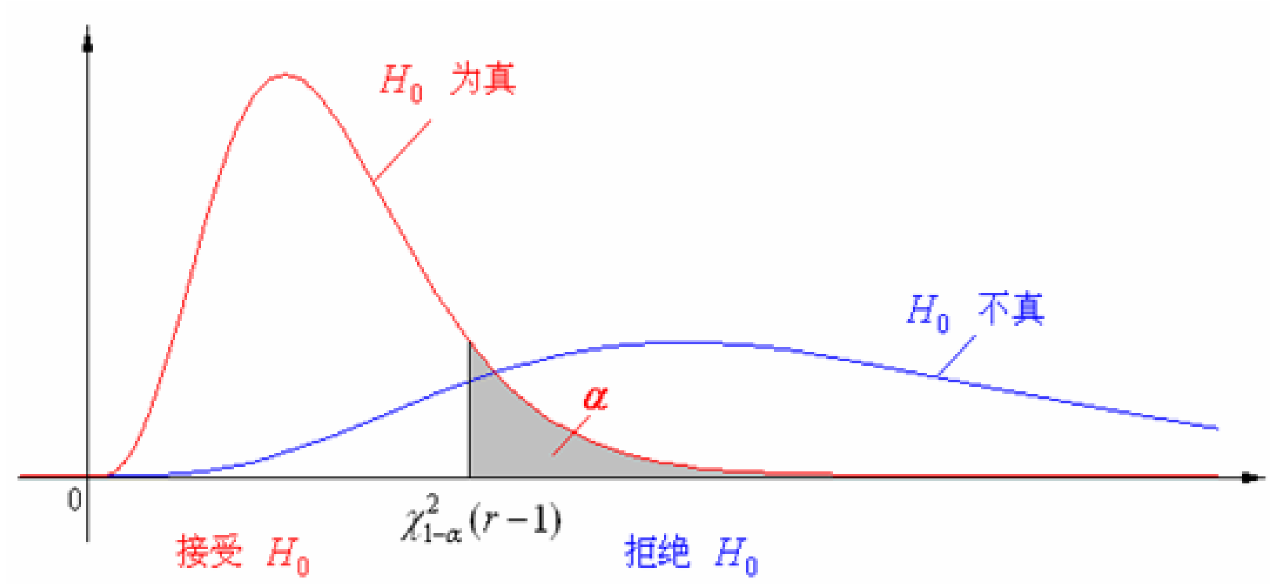
可以证明，若H_0为真，则当ξ的样本观测次数$n \to \infty$ 时，

有$\chi^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - n\,p_k)^2}{n\,p_k} \sim \chi^2(r-1)$;

若H_0不真，则χ^2的值会偏大

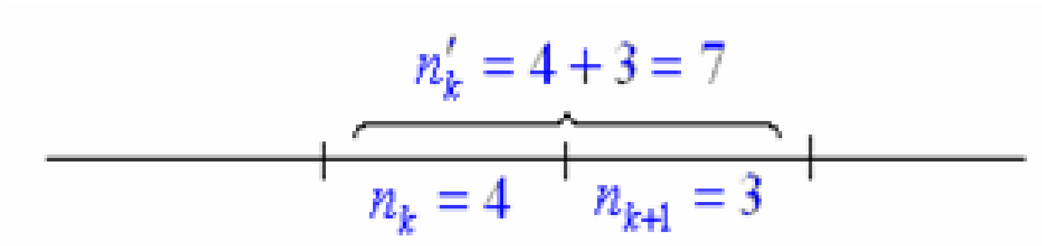
因此可得到检验方法如下：

从样本求出χ^2的值。对于给定的显著水平α，查χ^2分布的分位数表



当$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(r-1)$时拒绝$H_0$，否则接受$H_0$

为了保证检验结果比较可靠，最好有$n \geq 50$，$n_k \geq 5, k = 1, 2, \cdots, r$，如果有一些$n_k < 5$，可将相邻的区间合并成一个区间



计算χ^2时，可以用简化公式$\chi^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}\dfrac{n_k^2}{p_k} - n$

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{r}\frac{(n_k - n\,p_k)^2}{n\,p_k} = \sum_{k=1}^{r}\frac{n_k^2 - 2\,n_k n\,p_k + (n\,p_k)^2}{n\,p_k}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k^2}{p_k} - 2\sum_{k=1}^{r} n_k + n\sum_{k=1}^{r} p_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k^2}{p_k} - n$$

例 1　开奖机中有编号为 1，2，3，4 的四种奖球，在过去已经开出的 100 个号码中，出现号码 1，2，3，4 的次数依次为 36 次，27 次，22 次和 15 次，问：这台开奖机开出各种号码的概率是否相等？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解　开奖机开出的号码可以看作是一个总体 ξ，问题相当于要检验假设

$$H_0 ：\xi \sim P\{\xi = k\} = \frac{1}{4}，k = 1, 2, 3, 4。$$

作分点 $0.5 < 1.5 < 2.5 < 3.5 < 4.5$, 把 ξ 的取值范围分成下列4 个区间

$$(k - 0.5, k + 0.5]，k = 1, 2, 3, 4$$

H_0 为真时，ξ 落在各区间中的概率为

$$p_k = P\{ k - 0.5 < \xi \le k + 0.5 \} = P\{\xi = k\} = \frac{1}{4}，k = 1, 2, 3, 4$$

$$\chi^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k^2}{p_k} - n = \frac{1}{100} \times (\frac{36^2}{1/4} + \frac{27^2}{1/4} + \frac{22^2}{1/4} + \frac{15^2}{1/4}) - 100 = 9.36$$

$\chi^2_{1-\alpha}(r-1) = \chi^2_{0.95}(3) = 7.815$ 故拒绝原假设,即认为开出各号码概率不相等

含未知参数的总体分布的检验

问题 设n_k是总体ξ的样本落在区间$(a_{k-1}, a_k]$中的频数，$k=1,2,\cdots,r$，要检验H_0：$\xi \sim F_0(x)$，这里，$F_0(x)$是某个形式已知的分布，其中含有m个未知参数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$。

检验方法

求出$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$的极大似然估计$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m$，用它们代入$F_0(x)$，计算出总体$\xi$落在各个区间$(a_{k-1}, a_k]$中的概率的估计值

$$\hat{p}_k = \hat{P}\{a_{k-1} < \xi \le a_k\}, k = 1, 2, \cdots, r$$

可以证明，若H_0为真，则当ξ的样本观测次数$n \to \infty$时，有

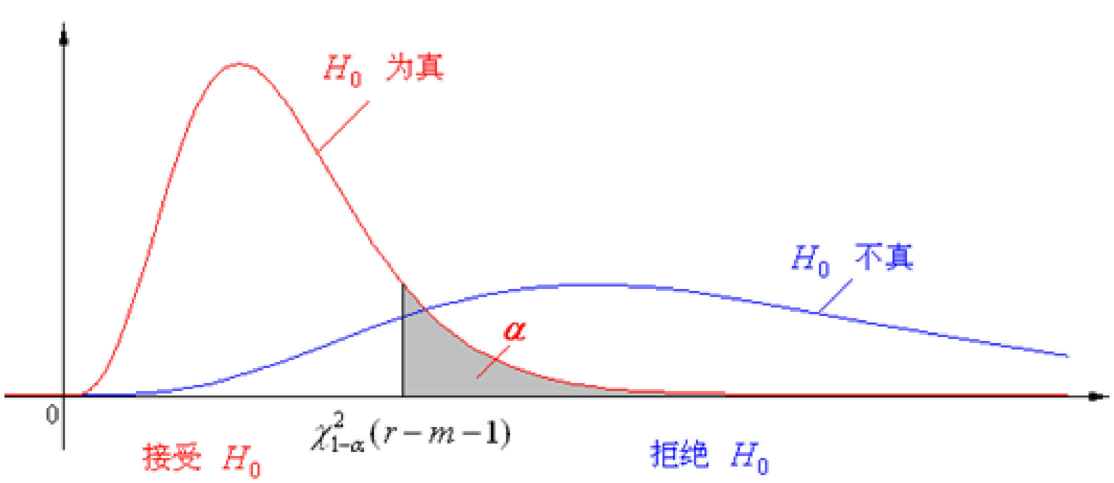
$$\chi^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k^2}{\hat{p}_k} - n \sim \chi^2(r-m-1)$$

若H_0不真，则χ^2的值会偏大

因此可得到检验方法如下：

求出$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$的极大似然估计$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m$，用它们代入$F_0(x)$

从样本求出$\chi^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k^2}{\hat{p}_k}-n$的值, 其中$\hat{p}_k=\hat{P}\{a_{k-1}<\xi\le a_k\}$



当$\chi^2>\chi^2_{1-\alpha}(r-m-1)$时拒绝$H_0$，否则接受$H_0$

例 2 一本书共 200 页，对每一页上的错字个数统计如下：

每一页上的错字个数 x_k	0	1	2	3
出现这种情况的页数 n_k	132	51	12	5

问：每一页上的错字个数 ξ 是否服从 Poisson 分布？（显著水平 $\alpha = 0.05$）

解　问题相当于要检验：$\xi \sim P(\lambda)$，其中含有一个未知参数 λ。

首先，求 λ 的极大似然估计。在习题三的 3.3 题中，我们已经推导出，当总体服从 *Poisson* 分布时，未知参数 λ 的极大似然估计为 $\hat{\lambda} = \overline{X}$。所以有

$$\hat{\lambda} = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r} n_k x_k = \frac{1}{200} \times (132 \times 0 + 51 \times 1 + 12 \times 2 + 5 \times 3) = 0.45$$

作分点$-0.5<0.5<1.5<2.5<+\infty$，把ξ的取值范围分成4个区间:

$$(-0.5,0.5],(0.5,1.5],(1.5,2.5],(2.5,+\infty)$$

H_0为真时,ξ落在各区间中的概率的估计值为：

$$\hat{p}_1=\hat{P}\{-0.5<\xi\le 0.5\}=\hat{P}\{\xi=0\}=\frac{\hat{\lambda}^0}{0\,!}e^{-\hat{\lambda}}=\frac{0.45^0}{0\,!}e^{-0.45}=0.63763$$

$$\hat{p}_2=\hat{P}\{0.5<\xi\le 1.5\}=\hat{P}\{\xi=1\}=\frac{\hat{\lambda}^1}{1\,!}e^{-\hat{\lambda}}=\frac{0.45^1}{1\,!}e^{-0.45}=0.28693$$

$$\hat{p}_3=\hat{P}\{1.5<\xi\le 2.5\}=\hat{P}\{\xi=2\}=\frac{\hat{\lambda}^2}{2\,!}e^{-\hat{\lambda}}=\frac{0.45^2}{2\,!}e^{-0.45}=0.06456$$

$$\begin{aligned}\hat{p}_4&=\hat{P}\{2.5<\xi<+\infty\}=1-\hat{P}\{\xi\le 2.5\}=1-\hat{p}_1-\hat{p}_2-\hat{p}_3\\&=1-0.63763-0.28693-0.06456=1-\hat{p}_1-\hat{p}_2-\hat{p}_3\end{aligned}$$

注意：不能用$\hat{p}_4=\hat{P}\{2.5<\xi\le 3.5\}=\hat{P}\{\xi=3\}=\dfrac{\hat{\lambda}^3}{3\,!}e^{-\hat{\lambda}}$来计算落在最后一个区间中的概率

$$\chi^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k^2}{\hat{p}_k} - n = \frac{1}{200}\times\left(\frac{132^2}{0.63763} + \frac{51^2}{0.28693} + \frac{12^2}{0.06456} + \frac{5^2}{0.01088}\right) - 200 = 4.598$$

查χ^2分布表，可得$\chi^2_{1-\alpha}(r-m-1) = \chi^2_{0.95}(2) = 5.991$

由于$\chi^2 = 4.598 < 5.991$，因此接受H_0：$\xi \sim P(\lambda)$

可以认为每一页上的错字个数服从*Poisson*分布。

4.5 正态分布的概率纸检验

正态分布比较常用，要检验总体是否服从正态分布当然可以用4.3节分布拟合检验的方法，本节再介绍一种方便直观的检验方法---概率纸检验法

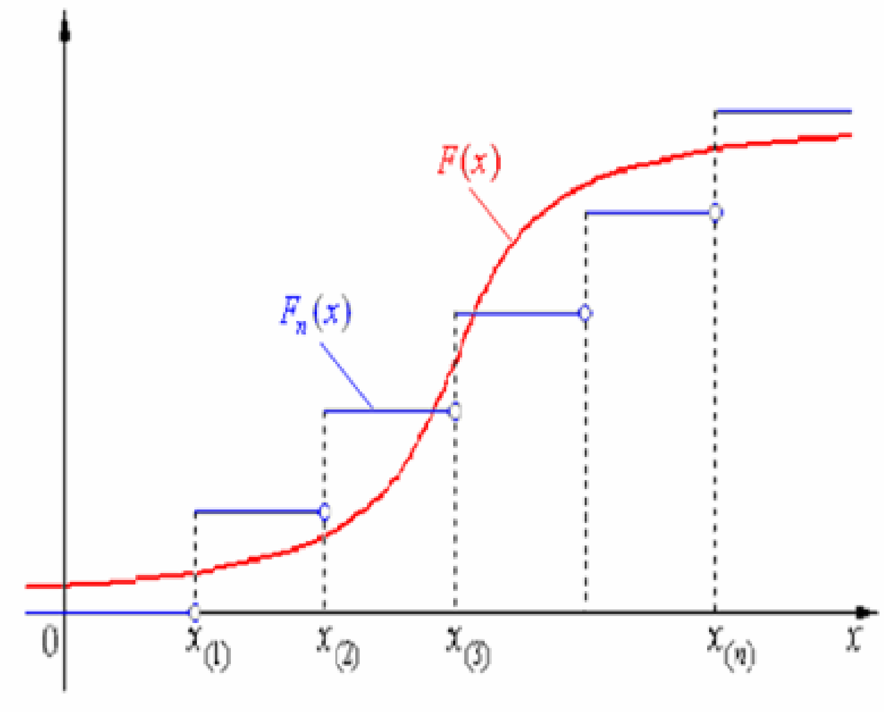
问题 设（$x_1, x_2, \cdots, x_n$）是总体ξ 的样本观测值，要检验H_0：$\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中，参数$\mu$，$\sigma$都未知。

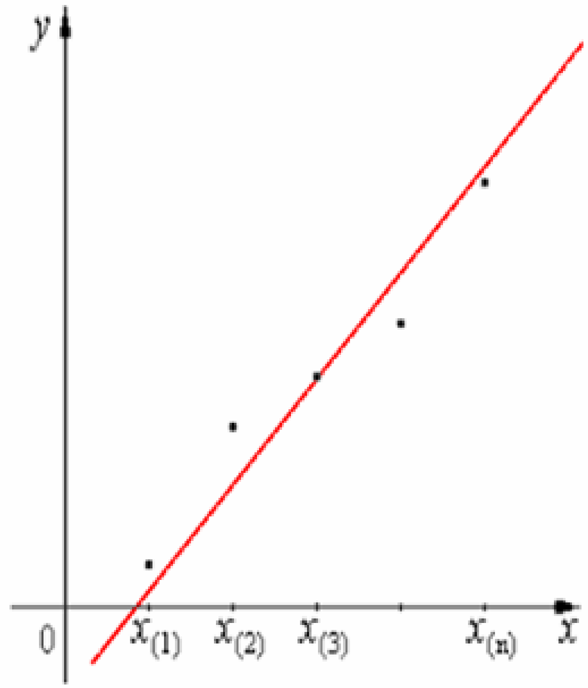
分析： 在2.2节讲到可以用样本的经验分布函数来估计总体的分布函数，因为根据格里文科定理，样本的经验分布函数以概率一致收敛于总体的分布函数，即样本经验分布函数是总体分布函数的良好近似

经验分布函数$F_n(x)$是一个阶梯函数，正态分布的分布函数$F(x)$ 图像是一条连续曲线。概率纸检验的想法是：同时作出$F_n(x)$ 和$F(x)$ 的图像，

如果两者很接近，就接受假设H_0，

如果两者相差很大，就拒绝H_0。





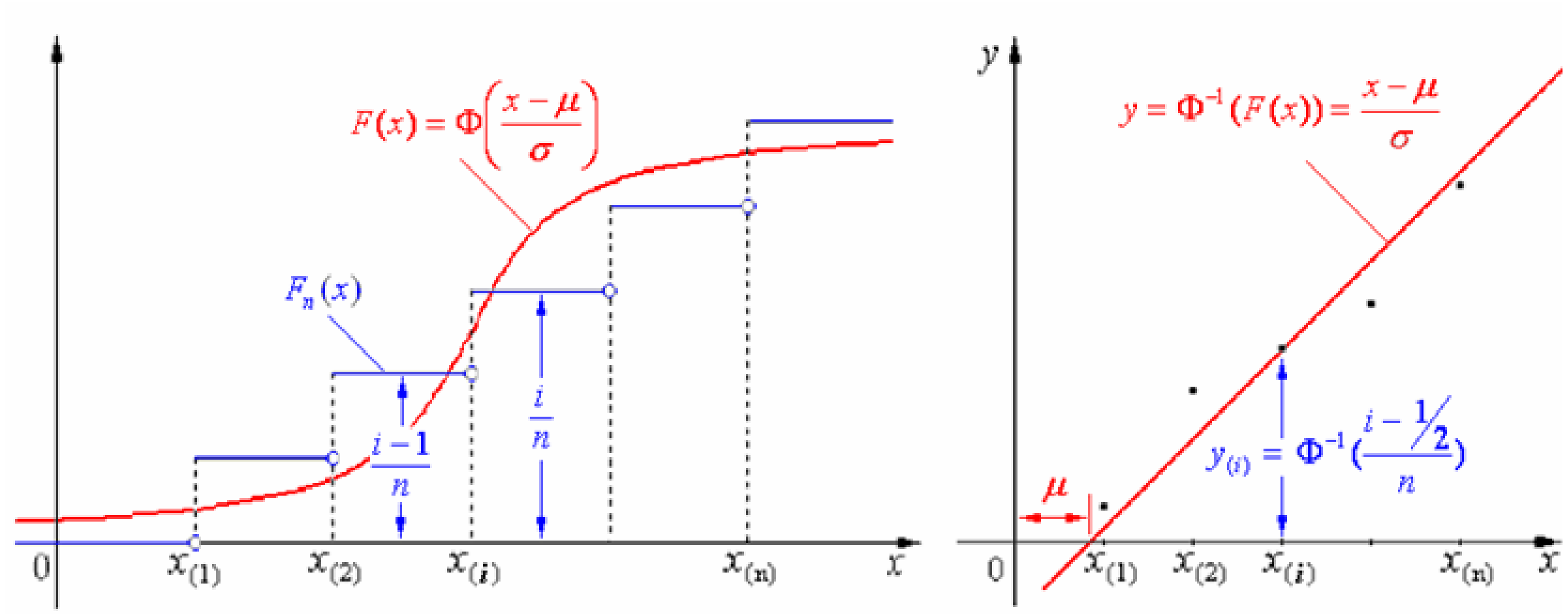
但是，由于$F(x)$的图像是一条连续曲线，$F_n(x)$与$F(x)$的图像是否符合，很难看清楚，所以，进一步的想法是：通过函数变换，把曲线变成直线，把阶梯函数变成一串点子，把问题变成看一串点子是不是在一条直线上，这样就很容易看清楚了。

正态分布的分布函数$F(x)=P\{\xi\le x\}=P\left\{\frac{\xi-\mu}{\sigma}\le\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

其中，$\Phi(x)$是标准正态分布$N(0,1)$的分布函数，取它的反函数

$$y=\Phi^{-1}(F(x))=\Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

就把$F(x)$变成了一条直线$y=\frac{x-\mu}{\sigma}$，这条直线的斜率为$\frac{1}{\sigma}$，直线与x 轴的交点坐标为$(\mu,0)$



由经验分布函数的定义可知，如果将样本观测值$x_1, x_2, \cdots, x_n$
按从小到大的次序排列成$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)}$,则有

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{当}\ x < x_{(1)} \\ \dfrac{i}{n} & \text{当}\ x_{(i)} \le x < x_{(i+1)}, i = 1, 2, \cdots, n-1 \\ 1 & \text{当}\ x \ge x_{(n)} \end{cases}$$

令$F_n(x) = \dfrac{i-1}{n}$，对它也取$\Phi(x)$的反函数，令：

$$y_{(i)} = \Phi^{-1}(F_n(x_{(i)})) = \Phi^{-1}\left(\frac{i - 1/2}{n}\right),\ i = 1, 2, \cdots$$

以（$x_{(i)}, y_{(i)}$）为坐标，作一串点子，这就是变换以后的代表经验分布函数$F_n(x)$的点子。

这样，我们就得到了一种正态分布的检验方法：

作出变换以后代表经验分布函数$F_n(x)$的一串点子。

如果这一串点子近似在一条直线上，就接受H_0 ：$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，而且可以认为这条直线的方程就是$y=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$，从这条直线的斜率，可以求出σ 的估计$\hat{\sigma}$ ，从这条直线与x 轴的交点，可以求出μ 的估计$\hat{\mu}$ 。如果这一串点子明显地不在一条直线上，就拒绝H_0 。

在上面介绍的检验法中，关键的一步是求$\Phi(x)$的反函数，在没有计算机的年代，这是很难求的。为此，人们发明了一种“正态概率纸”，在x轴方向，刻度是等间距的在y轴方向，刻度是不等间距的，中间密，两头疏。按照“正态概率纸”上的刻度，画坐标为（$x_{(i)},\frac{i-1/2}{n}$）的点子，实际得到的是坐标为（$x_{(i)},\Phi^{-1}(\frac{i-1/2}{n})$）的点子。

现在，外面已经很难买到现成的“正态概率纸”，但是，我们可以利用计算机软件，画出正态概率纸上的点子，完成正态分布的概率纸检验。

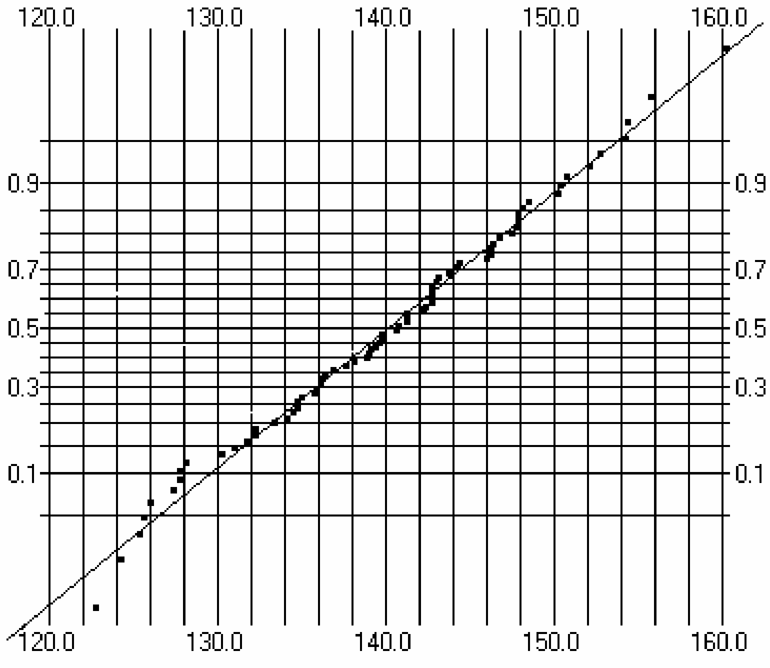
正态分布的概率纸检验，它的优点是简单、直观，但是，它也有缺点：检验全凭主观感觉，看点子是否在一直线上，缺少客观的标准。

例 1　从某小学五年级男生中抽取 72 人，测量身高，得到数据（单位：cm）如下：

128.1, 144.4, 150.3, 146.2, 140.6, 139.7, 134.1, 124.3, 147.9, 143.0, 143.1, 142.7,
126.0, 125.6, 127.7, 154.4, 142.7, 141.2, 133.4, 131.0, 125.4, 130.3, 146.3, 146.8,
142.7, 137.6, 136.9, 122.7, 131.8, 147.7, 135.8, 134.8, 139.1, 139.0, 132.3, 134.7,
150.4, 142.7, 144.3, 136.4, 134.5, 132.3, 152.7, 148.1, 139.6, 138.9, 136.1, 135.9,
142.2, 152.1, 142.4, 142.7, 136.2, 135.0, 154.3, 147.9, 141.3, 143.8, 138.1, 139.7,
127.4, 146.0, 155.8, 141.2, 146.4, 139.4, 140.8, 127.7, 150.7, 160.3, 148.5, 147.5,

要求检验学生身高是否服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。

采用正态分布的概率纸检验，画出的图像见下图。



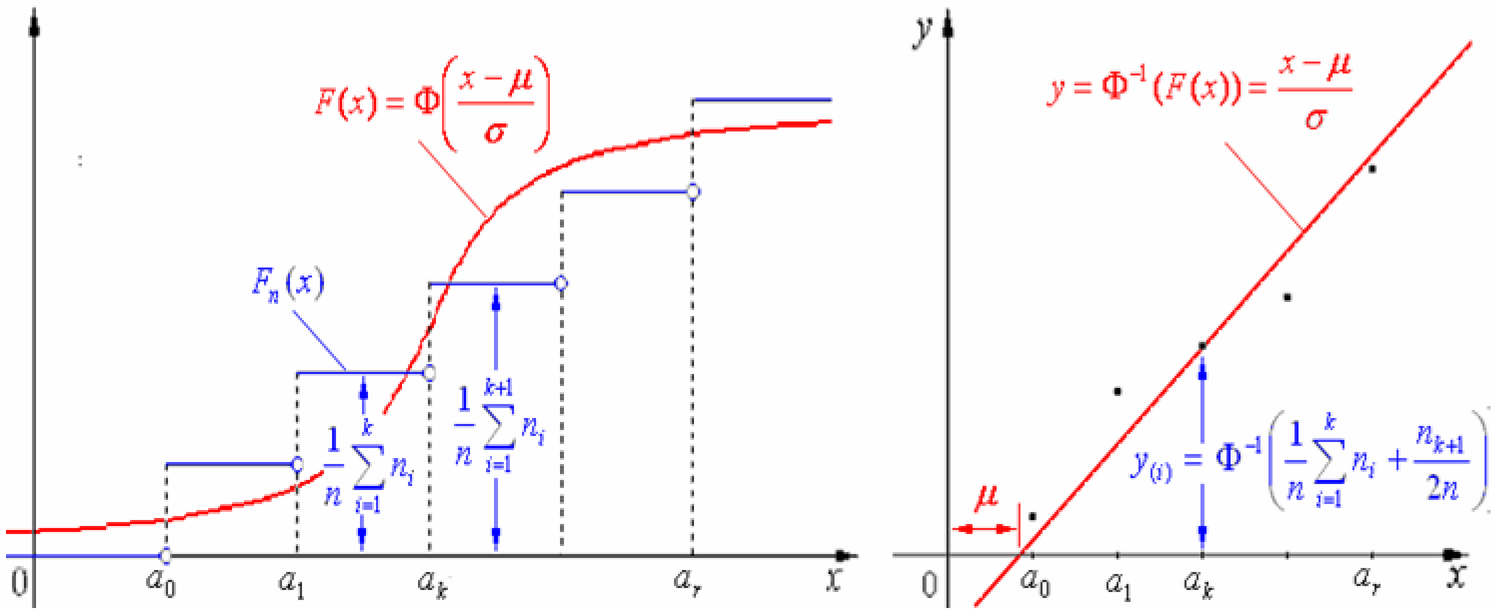
从上图可以看出，点子几乎落在一直线上，所以，可以认为学生身高服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$

而且还可以估计出 $\hat{\mu}=140.133$， $\hat{\sigma}=8.293$。

如果已知的不是具体的样本观测值，而是落在各个区间中的频数，也可以作正态分布的概率纸检验。

作分点$a=a_0<a_1<a_2<...<a_r=b$，将总体ξ 的取值范围(a,b) 分成r个区间。设共进行了n次试验，落在区间$(a_{k-1},a_k]$中的频数（样本观测值的个数）为n_k ，$k=1,2,\cdots,r$ 。这时，在a_k点的左侧邻域，$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i$，在$a_k$点的右侧邻域，$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k+1}n_i$，所以，在$a_k$ 处，令$F_n(a_k)$ $=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i+\frac{n_{k+1}}{2n},k=1,2,\cdots,r-1$。作正态分布的概率纸检验时，只需要作一串坐标为

$\left(a_k,\Phi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i+\frac{n_{k+1}}{2n}\right)\right)$的点子就可以了。


$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
$F_n(x)$
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i$
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k+1} n_i$
0
a_0
a_1
a_k
a_r
x
y
$y = \Phi^{-1}(F(x)) = \frac{x-\mu}{\sigma}$
$y_{(i)} = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i + \frac{n_{k+1}}{2n}\right)$
μ

4.6 独立性的检验

在概率论中，我们介绍过随机变量的独立性的概念。在某些特殊的情况下，可以很方便地直接判断出两个随机变量是否相互独立；但是，在更多的实际问题中，两个随机变量是否相互独立，往往就不那么容易判断了。

问题 设有两个总是同时出现的随机变量 ξ 和 η 。ξ 可能处于 r 种不同的状态：

$A_1, A_2, \cdots, A_r$ ，η 可能处于 s 种不同的状态：$B_1, B_2, \cdots, B_s$ 。

现在共进行了 n 次观测，在这 n 次观测中，出现状态组合 (A_i, B_j) 的频数为 n_{ij} ，

$i = 1, 2, \cdots, r$ ， $j = 1, 2, \cdots, s$ 。即有

	B_1	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_s	总和
A_1	n_{11}	$\cdots$	n_{1j}	$\cdots$	n_{1s}	$n_{1\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_i	n_{i1}	$\cdots$	n_{ij}	$\cdots$	n_{is}	$n_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_r	n_{r1}	$\cdots$	n_{rj}	$\cdots$	n_{rs}	$n_{r\bullet}$
总和	$n_{\bullet 1}$	$\cdots$	$n_{\bullet j}$	$\cdots$	$n_{\bullet s}$	n

其中，$n_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{s}n_{ij},i=1,2,\cdots,r,n_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{r}n_{ij},j=1,2,\cdots,s,n=\sum_{i=1}^{r}n_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{s}n_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}n_{ij}$

要检验H_0:ξ与η独立这一假设是否成立。

分析推导

如果H_0为真,ξ与η独立，显然应该有

$$P\{\xi\in A_i,\eta\in B_j\}=P\{\xi\in A_i\}P\{\eta\in B_j\}$$

因为$P\{\xi\in A_i,\eta\in B_j\}\approx\dfrac{n_{ij}}{n}$，$P\{\xi\in A_i\}\approx\dfrac{n_{i\bullet}}{n}$，$P\{\eta\in B_j\}\approx\dfrac{n_{\bullet j}}{n}$，所以有

$$\frac{n_{ij}}{n}\approx\frac{n_{i\bullet}}{n}\frac{n_{\bullet j}}{n}，\text{即有}n_{ij}\approx\frac{n_{i\bullet}n_{\bullet j}}{n};$$

反之，如果H_0不真,ξ与η不独立，则n_{ij}与$\dfrac{n_{i\bullet}n_{\bullet j}}{n}$的差别就会很大。

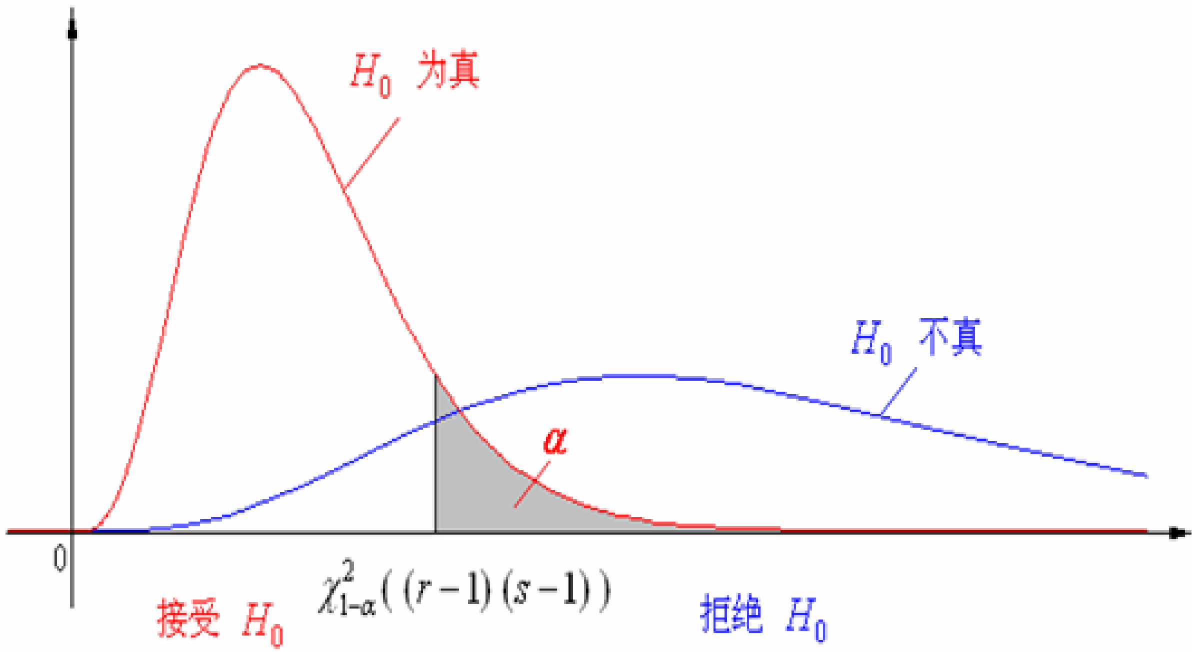
可以证明，若H_0为真，则当ξ的样本观测次数$n \to \infty$时，有

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{n}} \sim \chi^2((r-1)(s-1))$$

若H_0不真，则χ^2的值会偏大

因此可得到检验方法如下：

从样本求出χ^2的值。对于给定的显著水平α，自由度$(r-1)(s-1)$，查χ^2分布的分位数表，可得分位数$\chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1))$，使得$P\{\chi^2>\chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1))\}=\alpha$，当$\chi^2>\chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1))$时拒绝$H_0$，否则接受$H_0$。



计算时，可以用简化公式$\chi^2 = n(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^{2}}{n_{i\bullet}n_{\bullet j}} - 1)$。为什么可以这样简化？

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(n_{ij} - \frac{n_{i\bullet}n_{\bullet j}}{n})^2}{\frac{n_{i\bullet}n_{\bullet j}}{n}} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^2 - 2n_{ij}\frac{n_{i\bullet}n_{\bullet j}}{n} + \frac{n_{i\bullet}^2 n_{\bullet j}^2}{n^2}}{\frac{n_{i\bullet}n_{\bullet j}}{n}}$$

$$= n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^2}{n_{i\bullet}n_{\bullet j}} - 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}n_{ij} + \frac{\sum_{i=1}^{r}n_{i\bullet}\sum_{j=1}^{s}n_{\bullet j}}{n}$$

$$= n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^2}{n_{i\bullet}n_{\bullet j}} - 2n + \frac{n^2}{n}$$

$$= n(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^2}{n_{i\bullet}n_{\bullet j}} - 1)$$

例 1 为研究气管炎与吸烟的关系，对 339 人作调查，得到结果如下：

	B_1 不吸烟	B_2 每日吸烟 20 支以下	B_3 每日吸烟 20 支以上	总和
A_1 有气管炎	13	20	23	56
A_2 无气管炎	121	89	73	283
总和	134	109	96	339

问：气管炎是否与吸烟有关？（显著水平$\alpha = 0.05$）

解 设ξ为患气管炎的状况，η 为吸烟状况，问题相当于要检验：ξ 与 η 独立。

$$\chi^2 = n\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^{2}}{n_{i\bullet}n_{\bullet j}} - 1\right)$$

$$= 339\times\left(\frac{13^2}{56\times134}+\frac{20^2}{56\times109}+\frac{23^2}{56\times96}+\frac{121^2}{283\times134}+\frac{89^2}{283\times109}+\frac{73^2}{283\times96}-1\right)=8.634$$

对显著水平$\alpha = 0.05$，自由度$(r-1)(s-1)=2$，查χ^2分布的分位数表，可得分位数$\chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1)) = \chi^2_{0.95}(2) = 5.991$，由于$\chi^2 = 8.634 > 5.991$，所以拒绝假设$H_0$：$\xi$与$\eta$独立，检验的结论是：气管炎与吸烟有关。

假设检验的不合理问题

-------不要迷信数学**,**尤其是当数学的结论与直观矛盾的时侯

两厂生产同一产品，其重量指标都服从正态分布，

按规定其均值应该等于 **120**（**g**）。

甲厂抽 **5** 件产品测得：**119**，**120**，**119.2**，**119.7**，**119.6**。

乙厂抽 **5** 件产品测得：**110.5**，**106.3**，**122.2**，**113.8**，**117.2**，

问这两家工厂的产品是否都符合国家标准

解 $H_0:\mu=120, H_1:\mu\neq 120$

拒域域为$W_1=(-\infty,-t_{0.975}(4))\cup(t_{0.975}(4),+\infty)$

$$=(-\infty,-2.776)\cup(2.776,+\infty)$$

甲厂由$n=5,\ \overline{X}=119.5,\ S_x^*=0.4$，得:

$$\hat{T}_x=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S_x^*/\sqrt{n}}=\frac{119.5-120}{0.4/\sqrt{5}}=-2.795$$

而乙厂 $$\hat{T}_y=\frac{\overline{Y}-\mu_0}{S_y^*/\sqrt{n}}=\frac{114-120}{6.105/\sqrt{5}}=-2.198$$

$\because\ \hat{T}_x\in W_1$ 故推断甲厂产品的均值不等于120，而乙厂

$\hat{T}_y\notin W_1$ 产品的均值不能讲不等于120