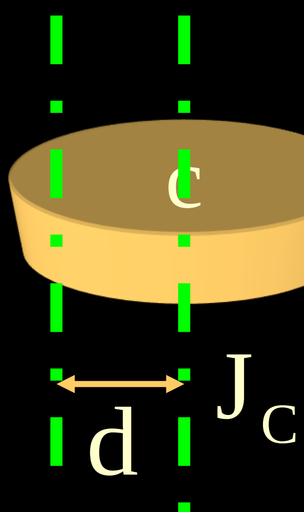
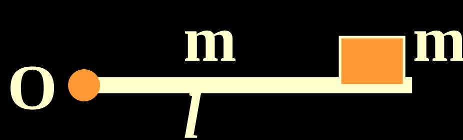
第二课堂　刚体的定轴转动

- 刚体
  - 运动描述
    - 角量
    - 线量
      - $v=\omega r$
      - $a_n=\omega^2 r$
      - $a_t=\alpha r$
  - 运动规律——转动定律　$M=J\alpha$

- 转动惯量
  - $J=\sum_i m_i r_i^2=\int r^2 dm$　（书P106 表3-1）
  - 平行轴定律　$J=J_C+md^2$
  - 叠加原理（补偿法）





$J=\frac{1}{3}ml^2+ml^2$

自测练习P7　1

1、一飞轮从静止开始作匀加速转动，飞轮边上一点的法向加速度a_n和切向加速度a_t值的变化为

（A）a_n不变，a_t为零；（B）a_n不变，a_t不变

（C）a_n增大，a_t为零（D）a_n增大，a_t不变

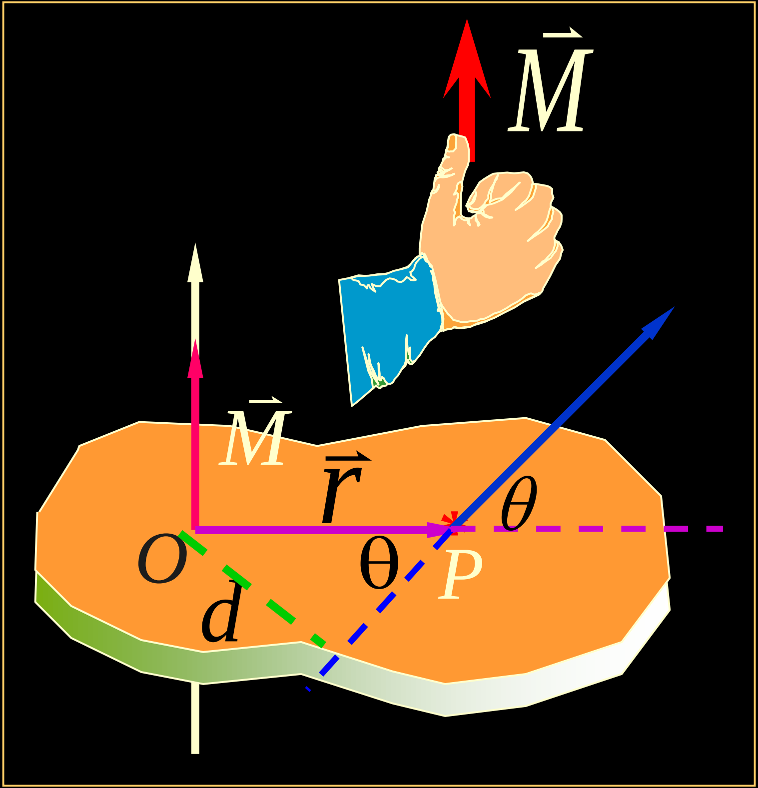
2、两个匀质圆盘A和B的密度分别为ρ_A和ρ_B若$\rho_A > \rho_B$，但两圆盘的质量与厚度相同，两圆盘对通过盘心垂直于盘面轴的转动惯量各为J_A和J_B，则

（A） $J_A>J_B$ （B） $J_A<J_B$ （C） $J_A=J_B$ （D）不能确定

力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

$$M = Fr\sin\theta = Fd$$

重力矩 $\vec{M}=\vec{r}_c\times m\vec{g}$



刚体的平衡:

$$\sum\vec{F}_i=0,\ \sum\vec{M}_i=0$$

质点和刚体的组合:

隔离体法 — 质点用牛顿定律 / 刚体用转动定律

例1、一转动惯量为J的圆盘绕一固定轴转动，起初角速度为ω_0。设它所受阻力矩与转动角速度成正比，即$M=-k\omega$（k为正的常数），求圆盘的角速度从ω_0变为$\omega_0/2$时所需的时间。

解：根据转动定律

$$f = ma \Rightarrow -kv = m\frac{dv}{dt}$$

$$M = J\alpha \Rightarrow -k\omega = J\frac{d\omega}{dt}$$

$$\therefore \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{k}{J}dt$$

$$\int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}} \frac{d\omega}{\omega} = -\int_0^t \frac{k}{J}dt \Rightarrow t = \frac{J\ln 2}{k}$$

自测练习：P9 3

自测练习：P9 3

$$M = J\alpha \Rightarrow t^2 R = \frac{1}{2} mR^2 \alpha$$

$$\alpha = \frac{2t^2}{mR}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2t^2}{mR}$$

$$\Rightarrow d\omega = \frac{2t^2}{mR} dt$$

$$\int_0^{\omega} d\omega = \int_0^{2} \frac{2t^2}{mR} dt$$

例2、均匀细棒OA，质量为m，长为L。棒的一端可绕O点自由转动，另一端用细绳悬挂在E点。设开始时细棒OA与水平夹角θ，且AE⊥OA。求：（1）绳AE中张力；（2）细绳刚断开时棒OA的角加速度；（3）棒下落到垂直位置时中点的切向加速度和法向加速度。

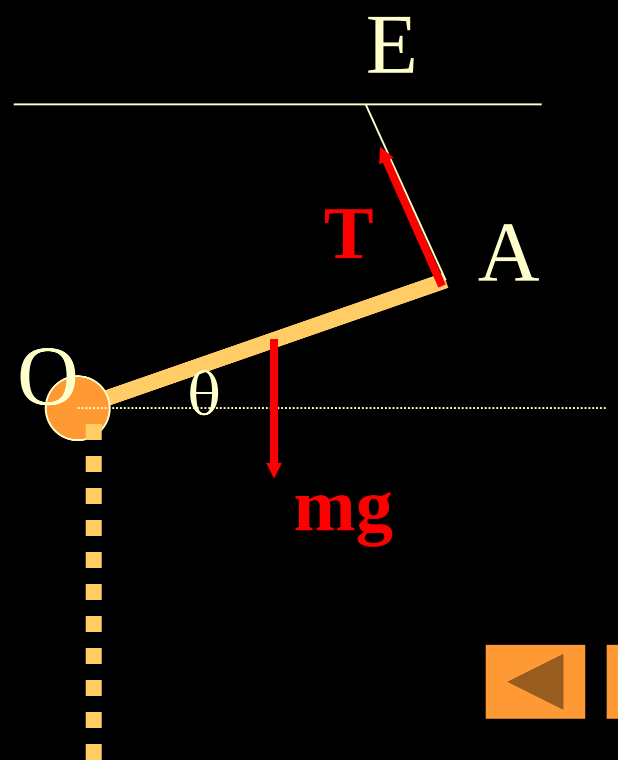
$$(1)\quad mg\frac{l}{2}\cos\theta - Tl = 0$$

$$(2)\quad mg\frac{l}{2}\cos\theta = J\alpha = \frac{1}{3}ml^2\alpha$$

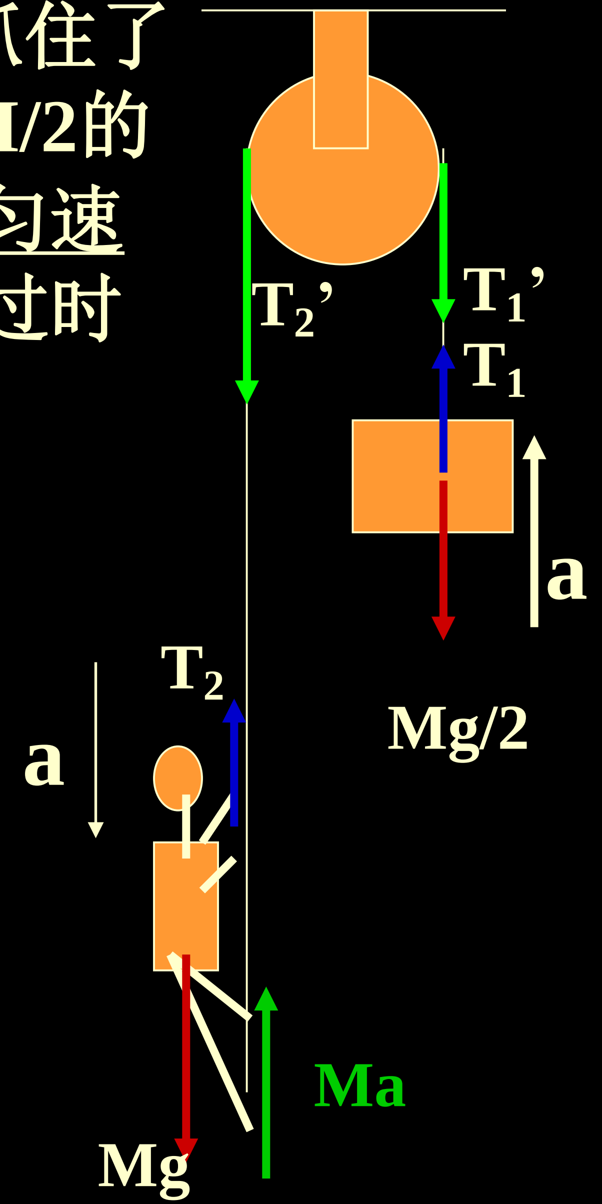
$$(3)\quad M = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow a_t = 0$$

$$mg\frac{l}{2}(\sin\theta + 1) = \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$a_n = \omega^2\frac{l}{2}$$



例3、（自测练习 p11 2）一轻绳绕过一轮轴光滑的定滑轮R，其质量M/4，均匀分布在其边缘上。绳子的A端有一质量为M的人抓住了绳端，而在绳的另一端B系了一质量为M/2的重物，如图。设人从静止开始以相对绳匀速向上爬时，绳与滑轮间无相对滑动，经过时间t，求B端重物上升的速度？



解：设重物的加速度为a

人：　$Mg - T_2 - Ma = 0$

物：　$T_1 - \frac{M}{2}g = \frac{M}{2}a$

滑轮：　$T_2R - T_1R = J\alpha$　　$J = \frac{M}{4}R^2$

$a = \alpha R$

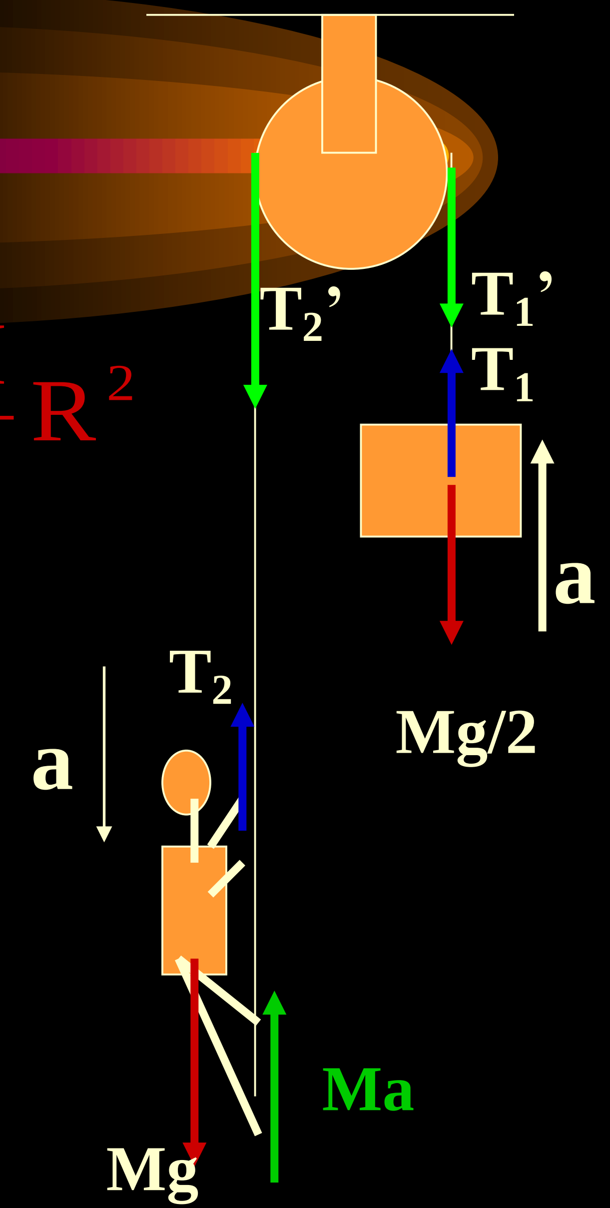
解：设重物的加速度为a

人： $Mg-T_2-Ma=0$

物： $T_1-\frac{M}{2}g=\frac{M}{2}a$

滑轮： $T_2R-T_1R=J\alpha$

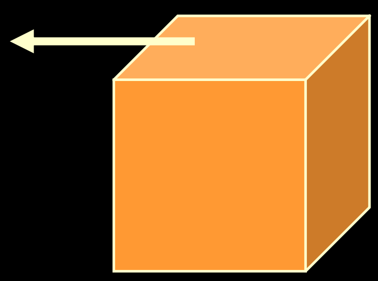
$$J=\frac{M}{4}R^2$$



$a=\alpha R \quad \rightarrow a=2g/7$

$v = at$

自测练习：P7 7



刚体的功能表式

- 转动动能 $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$
- 力矩的功 $A = \int M d\theta$
- 重力势能 $E_p = mgz_c$
- 角动量 $L = J\omega$

刚体基本定律

- 动能定律 $A = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2$
- 功能原理

$$A = \frac{1}{2}J\omega^2 + mgz_c - \left(\frac{1}{2}J\omega_0^2 + mgz_{c0}\right)$$

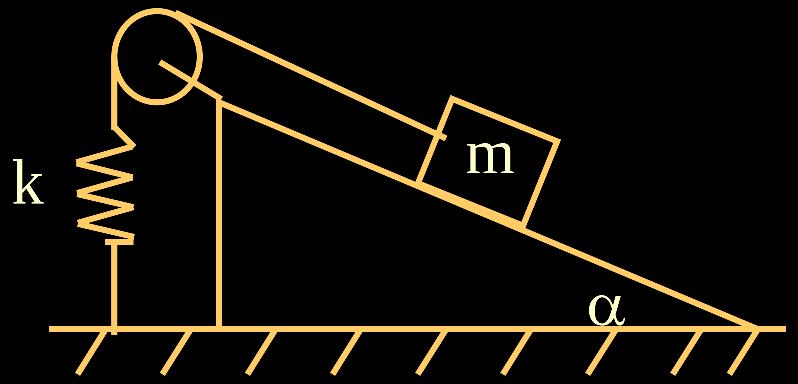
- 机械能守恒

若刚体＋质点 $A_{外} + A_{非保守内力} = 0$

- 角动量定理 $\int M dt = J\omega - J_0\omega_0$

例4、如图所示，物体质量为**m**，放在光滑的斜面上，斜面与水平面的倾角为**α**，弹簧弹性系数为**k**,滑轮的转动惯量为**J**，半径为**R**。先把物体托住，使弹簧维持原长，然后由静止释放，求：物体沿斜面滑下距离 ***l*** 时的速度？

$$mgl\sin\alpha = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}kl^2$$



$$v = R\omega$$

$$v = \sqrt{\frac{2mgl\sin\alpha - kl^2}{m + \frac{J}{R^2}}}$$

例5、m_1、l 的均匀细杆可在水平桌面上绕通过某一端的竖直固定轴转动，又m_2 与其碰撞v_1、v_2，已知细杆与桌面的滑动摩擦系数为μ，求（1）若经过多少时间，杆停止转动；（2）杆转过的角度？

解：碰撞前后角动量守恒

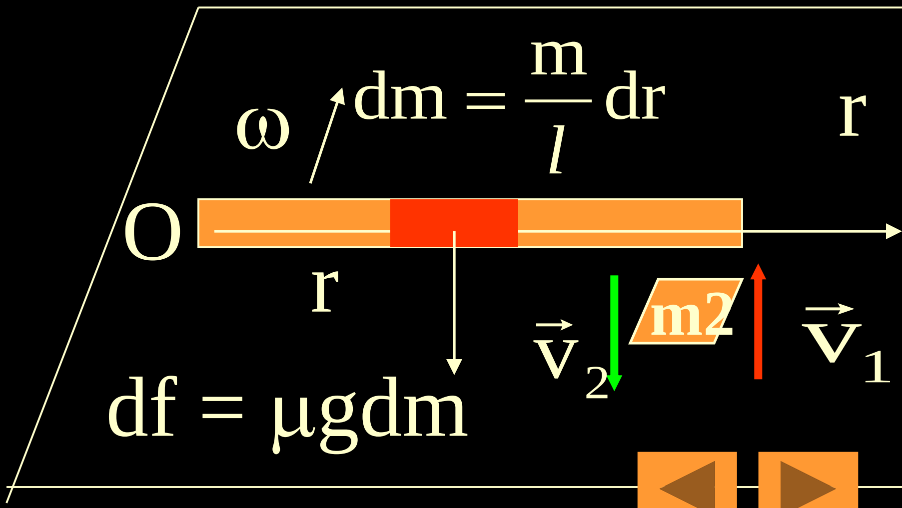
棒在摩擦力矩的作用下运动

$$m_2 v_1 l = -m_2 v_2 l + J\omega_0$$

$$J = \frac{1}{3} m_1 l^2$$

$$\Rightarrow \omega_0$$

$$dM_f = r\mu g dm = \frac{m_1 \mu g}{l} r dr$$



$$dM_f = r\mu g dm = \frac{m_1 \mu g}{l} r dr$$

$$M_f = \int_0^l \frac{m_1 \mu g}{l} r dr = \frac{1}{2}\mu m_1 g l$$

$$-M_f = J\alpha = \frac{1}{3} m l^2 \alpha$$

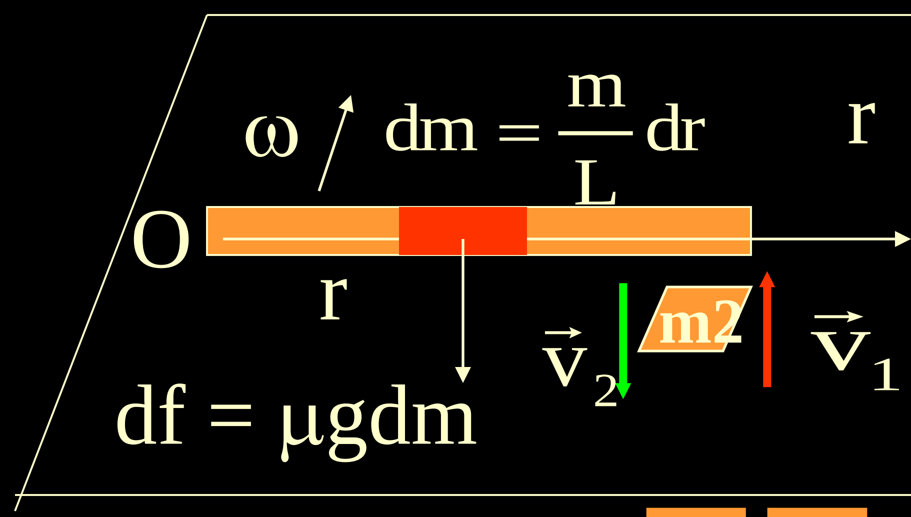
$$\alpha = -\frac{3\mu g}{2l}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0$$

$$\Rightarrow t$$

$$(2)\quad 2\Delta\theta\alpha = \cancelto{0}{\omega^2} - \omega_0^2$$

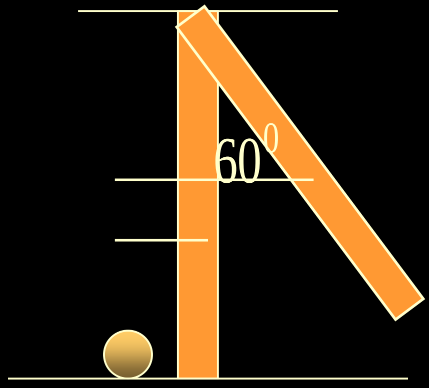
$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$



例6、长为 l 质量m_0为的细棒可绕垂直于一端的水平轴自由转动，棒原来处于平衡状态。现有一质量为m的小球沿光滑水平面飞来，正好与棒的下端相碰撞，（设碰撞为完全弹性碰撞）使棒向上摆到60°处。求：

（1）小球的初速度

（2）棒在这一碰撞中所受到冲量为多少？



解：

$$mv_0 l = mvl + J\omega_0$$

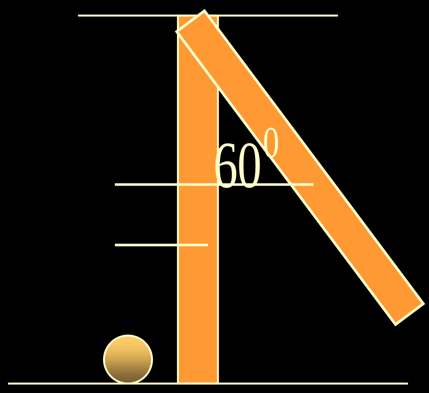
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega_0^2$$

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 = m_0 g\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos 60^0\right)$$

解： $$mv_0 l = mvl + J\omega_0$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega_0^2$$

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 = m_0 g\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos 60^0\right)$$

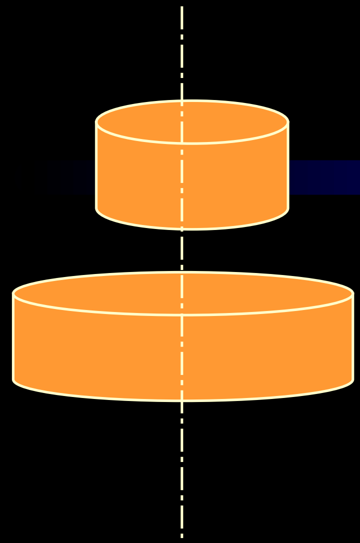


$$\int M dt = J\omega' - J\omega = \int Fl dt = l\int F dt = lI$$

$$Il = J\omega_0 \Rightarrow I = \frac{J\omega_0}{l}$$

自测练习：P9 7 8 p8 7 9 填2

自测练习：P9 7



$$J\omega_0 + 2J\frac{\omega_0}{2} = 3J\omega \Rightarrow \omega$$

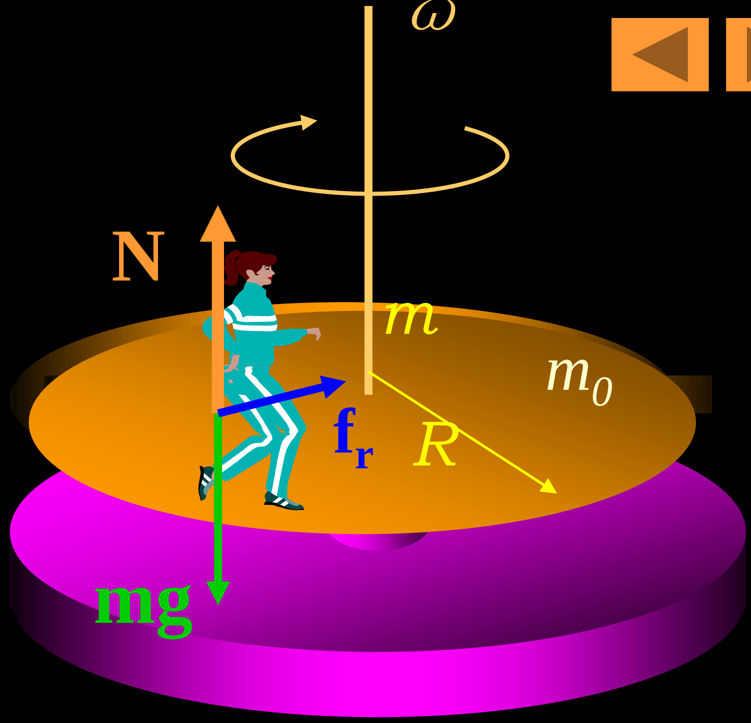
$$\Delta E_k = \frac{1}{2}3J\omega^2 - \left(\frac{1}{2}J\omega_0^2 + \frac{1}{2}2J\left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2\right)$$

自测练习：**P9 8**

$$(J+mr^2)w_1 = Jw + m\ v_{人地}r$$

$$\vec{v}_{人地} = \vec{v}_{人盘} + \vec{v}_{盘地}$$

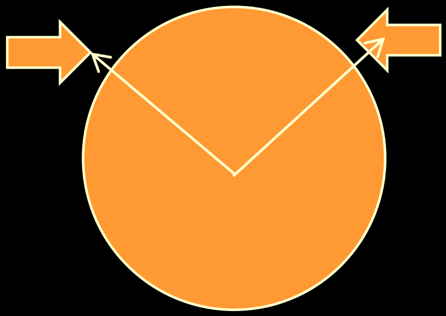
$$v_{人地} = v + wr$$



自测练习：**P8 7**

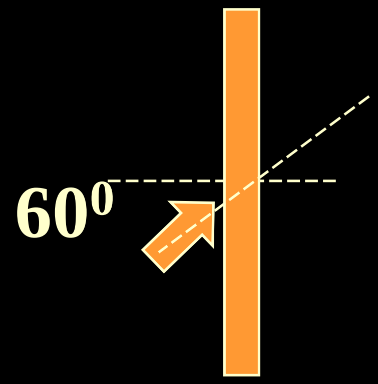
$$mvh - mvh + J\omega_0 = (J_0 + 2mr^2)\omega$$

$$\omega = \frac{J\omega_0}{J+2mr^2} \downarrow$$



自测练习：P8 9

$$mv\frac{l}{2}\sin 150^0 = J\omega = \left[\frac{1}{3}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\omega$$



自测练习：P8 填2

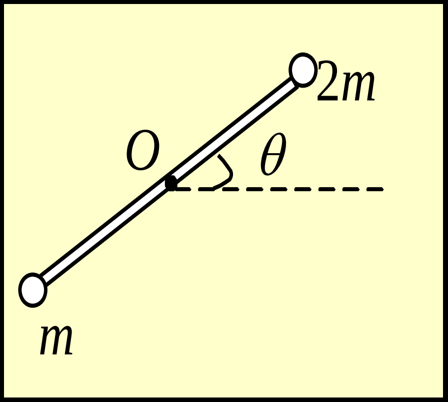
M=Jα

M=C J↑ α↓ ω↑ E_k↑ L↑

考题：一长为l、质量可以忽略的直杆，两端分别固定有质量为$2m$和m的小球，杆可绕通过其中心O且与杆垂直的水平光滑固定轴在铅直平面内转动．开始杆与水平方向成某一角度θ，处于静止状态，如图所示．释放后，杆绕O轴转动．则当杆转到水平位置时，该系统所受到的合外力矩的大小M＝________________，此时该系统角加速度的大小β＝________________．

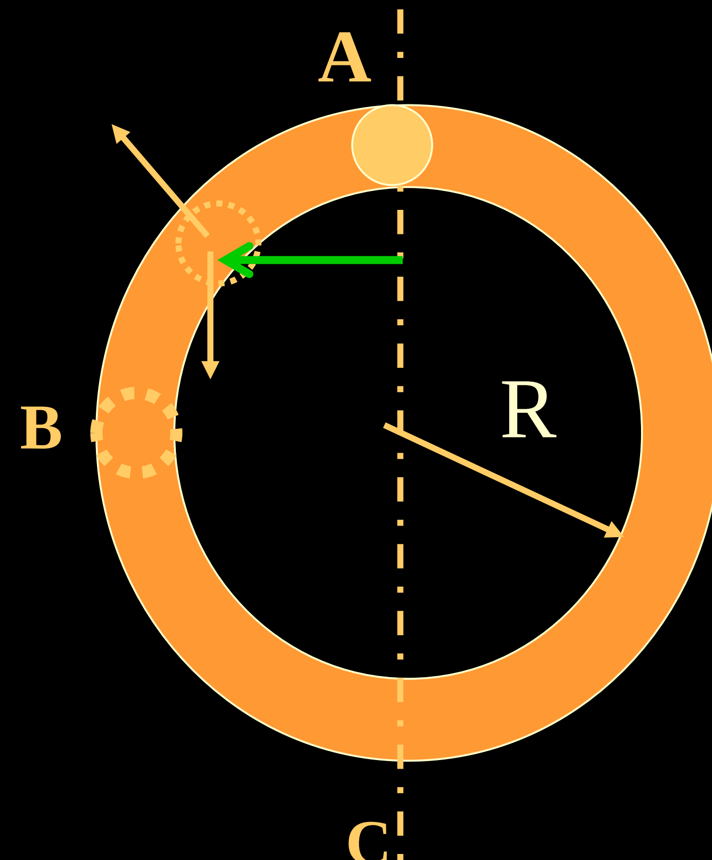
$$2mg\frac{l}{2}-mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}mgl$$

$$\frac{1}{2}mgl=\left(2m\left(\frac{l}{2}\right)^2+m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)\beta$$



例7、（书 P129 3-22） 如图所示，空心圆环可绕竖直轴AC自由转动，转动惯量为J_0，环的半径为R，初始角速度为ω_0，质量为m的小球静止于环内A点。由于微小干扰，小球向下滑到B点时，环的角速度与小球相对于环的速度各为多大？

（设环内壁光滑）



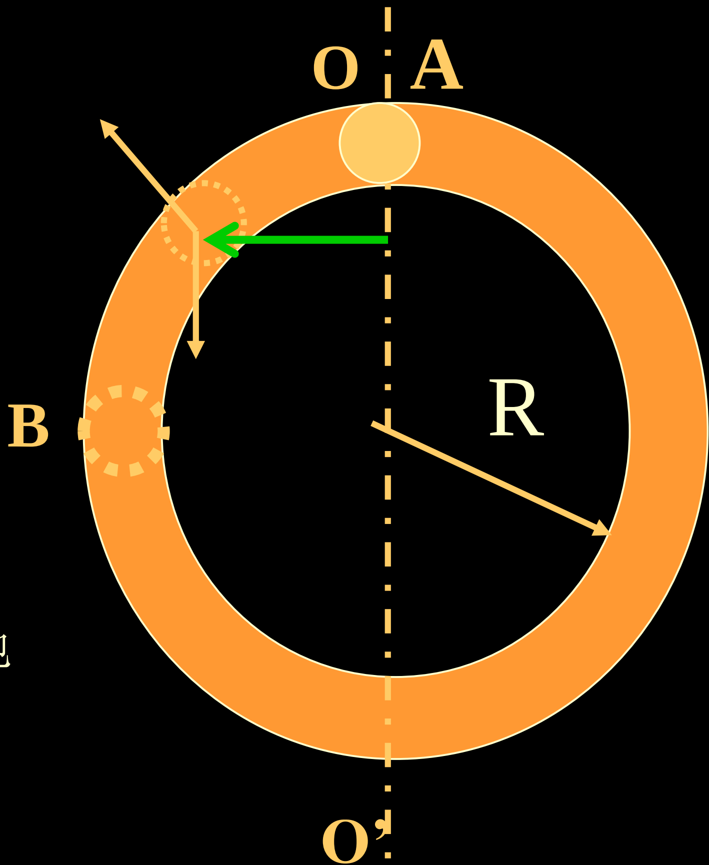
解：绕AC轴角动量守恒

$$J_0\omega_0 = (J_0 + mR^2)\omega$$

球、环、地球系统机械能守恒

设$E_{P重}(B)=0$

$$mgR + \frac{1}{2}J_0\omega_0^2 = \frac{1}{2}J_0\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{m地}^2$$



$$\vec{v}_{m地} = \vec{v}_{m环} + \vec{v}_{环地}$$

$$v^2_{m地} = v^2_{m环} + v^2_{环地}$$

$$= v^2_{m环} + \omega^2 R^2$$

$\vec{v}_{m环}$ ——向下

$\vec{v}_{环地}$ ——向外