碰撞

弹性碰撞: 碰后分开，动量守恒，动能守恒；

完全非弹性碰撞：碰后不分开，动量守恒，动能不守恒；

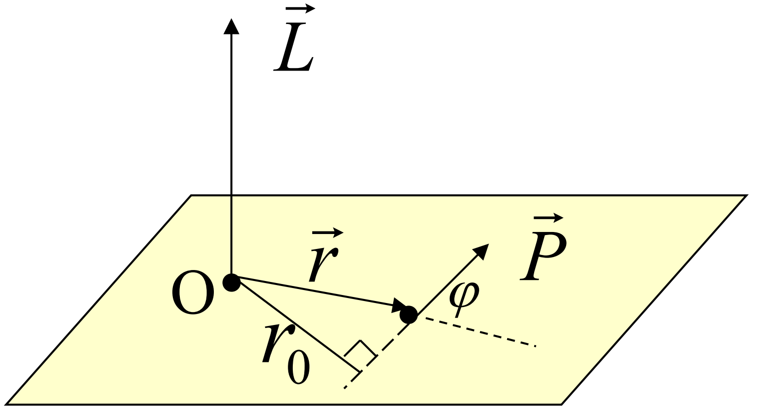
非弹性碰撞：碰后分开，动量守恒，动能不守恒。

质点的角动量 $\vec{L} \overset{def}{=} \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

2.4 角动量守恒

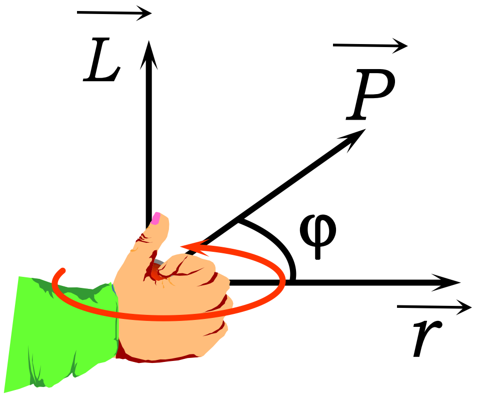
一. 质点的角动量（动量矩）



定义：质点对固定点的矢径与动量之矢积

$$\vec{L} \overset{def}{=} \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

大小: $rp\sin\varphi$ 方向:(右手)叉乘确定



※质点作圆周运动：

对圆心的角动量：$L=mvR$

二. 质点的角动量定理

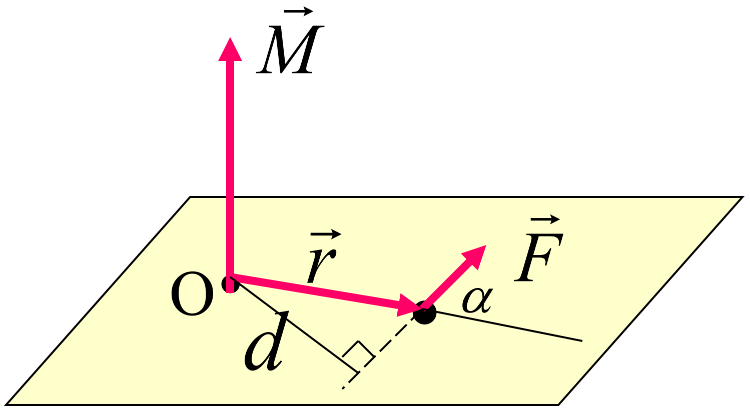
（1）定理的微分式

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d(\vec{r}\times\vec{p})}{dt}=\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}+\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}=\vec{r}\times\vec{F}+\vec{v}\times(m\vec{v})$$

$=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}$ −−力矩 ——角动量改变的原因！！！

$$\vec{r}\times\vec{F}\begin{cases}\text{大小}: rF\sin\alpha=Fd=M\\ \text{方向}:\text{由(右手)叉乘确定}\end{cases}$$



质点所受合外力矩等于其角动量对时间的变化率

（2）定理的积分式

$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}\Rightarrow \int_0^t \vec{M}dt=\int_{\vec{L}_0}^{\vec{L}} d\vec{L}=\vec{L}-\vec{L}_0 \quad (\text{其中：}\vec{J}_{\text{冲量矩}}\overset{def}{=}\int_0^t \vec{M}dt)$$

质点所受合外力的冲量矩等于其角动量的变化

三. 质点角动量守恒定律

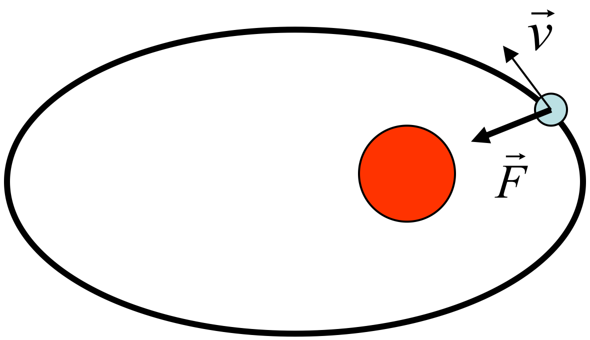
条件：$\vec{M}=0$ $\begin{cases}\text{①质点不受外力} \\ \text{②外力通过固定点}\end{cases}$

则：$\vec{L}=\vec{L}_0$ ——恒矢量

若合外力矩为零，则质点的角动量守恒。

讨论：

1、行星受到太阳的引力作用，但为何能保持在稳定的轨道上运行?



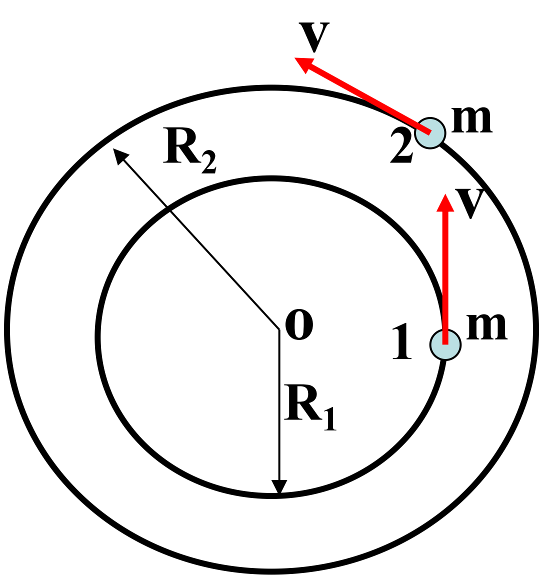
$\because \vec{M}_{行星对太阳} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$

即行星绕太阳旋转时$\vec{L}$守恒.

2、$P_1=P_2$，如何区分二者?

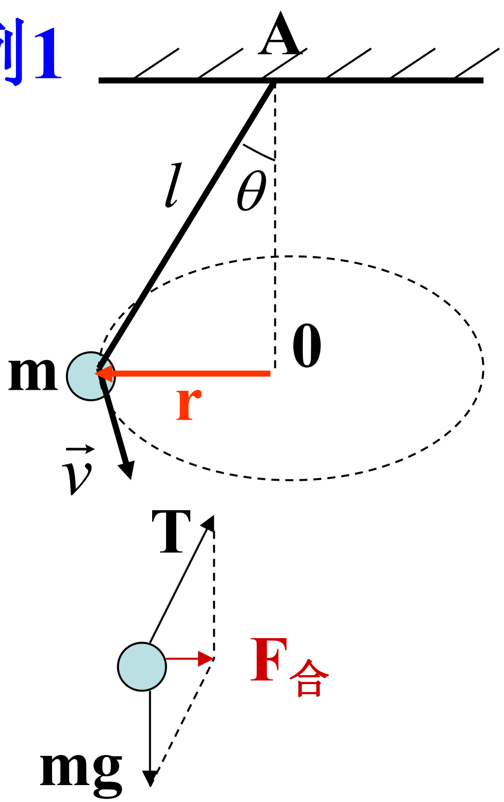
可由角动量来区分二者。

$\because L_1 \neq L_2 \quad (mvR_1 \neq mvR_2)$



匀速率圆周运动

例1



问:(1).$\vec{L}_0$守恒否?　(2).$\vec{L}_A$守恒否?

(1)　$\vec{L}_0\begin{cases} L_0 = rmv = l\sin\theta mv & \text{(恒定)} \\ \text{方向:竖直向上} & \text{(不变)} \end{cases}$

$\therefore \vec{L}_0$守恒

另解:$\because F_合$指向O点, $\therefore M_o = 0$

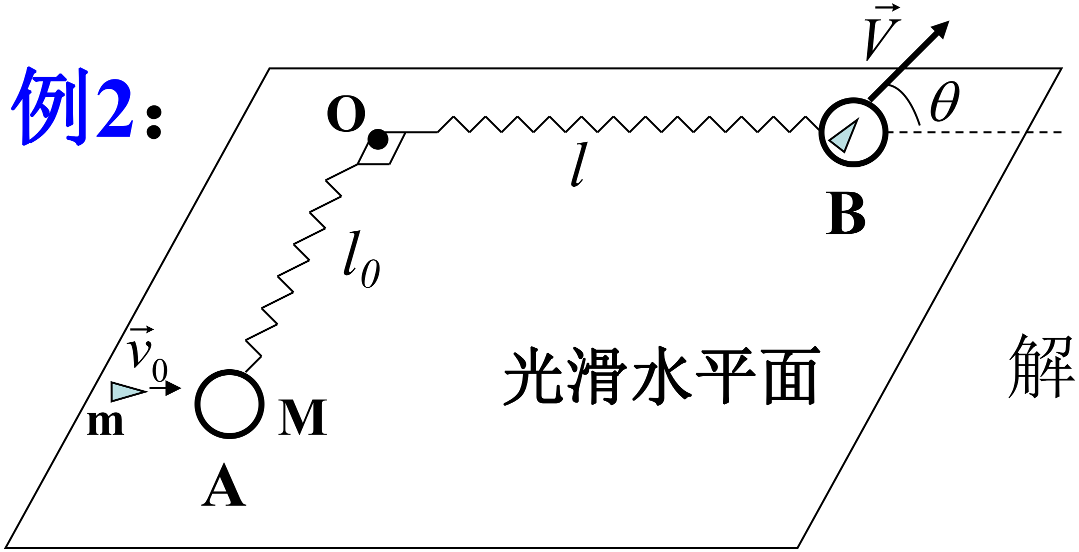
(2)　$\vec{L}_A\begin{cases} L_A = mvl & \text{(恒定)} \\ \text{方向: 变} \end{cases}$

另解:$\because M_A = F_合 l\cos\theta \neq 0$

$\therefore \vec{L}_A$不守恒.

言及角动量必须指明是对那个定点而言, 否则无意义.

例2：



已知：$k, m, M, \vec{v}_0, l, l_0$

求：$\vec{V} = ?$

解：（1）完全非弹性碰撞

且$\{m, M\}$动量守恒。

即：$mv_0 = (m+M)V_1$ （1）

(2)$\{m, M$,地球，弹簧$\}$：E守恒

即：$\frac{1}{2}(m+M)V_1^2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$ （2）

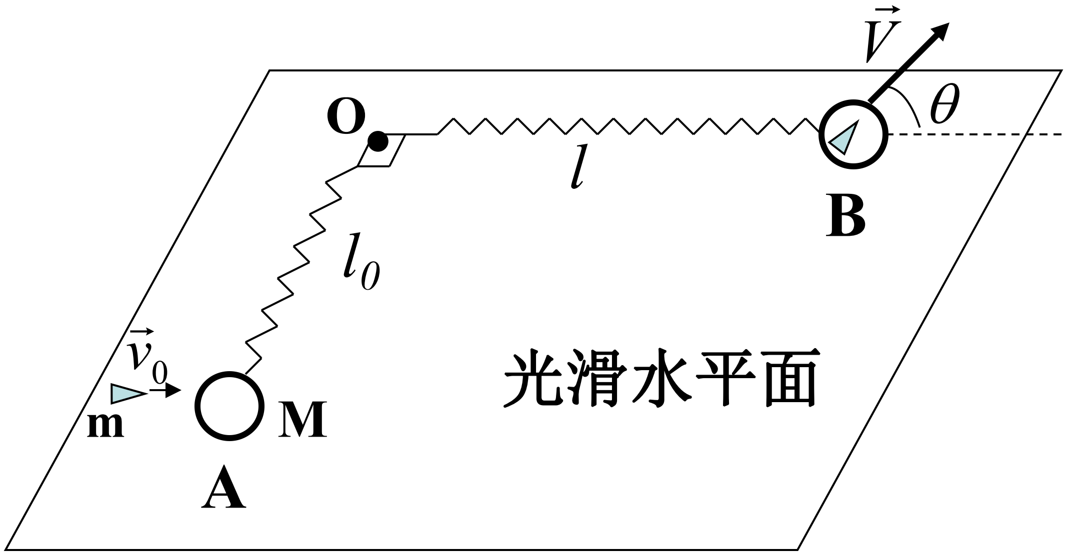
$$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\} V = \sqrt{\frac{m^2 v_0^2}{(m+M)^2} - \frac{k(l-l_0)^2}{m+M}}$$

$\vec{V}$的方向，即θ＝？

$A \to B$的过程

$\{m, M\}$：$\because F_{合}=kx \neq 0$

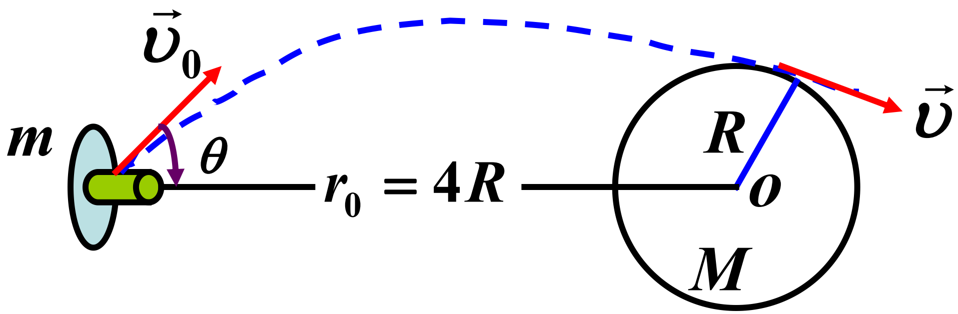
$\therefore$动量不守恒



但$F_{合}$始终通过o点，$\therefore \vec{M}_O = 0$　即$\vec{L}_O$守恒

$$\left.\begin{aligned}(m+M)V_1 l_0 &= (m+M)Vl\sin\theta \\ mv_0 &= (m+M)V_1\end{aligned}\right\} \theta = \sin^{-1}\frac{l_0 m v_0}{l\sqrt{m^2 v_0^2 - k(l-l_0)^2(M+m)}}$$

例3 发射一宇宙飞船去考察一行星(M, R)，当飞船静止于空间距行星中心 $4R$ 时，以$\vec{\upsilon}_0$发射一仪器(m)。要使仪器恰好掠着行星表面着陆，θ 角为多大？着陆滑行初速度υ多大？(发射后不计其他物体对仪器的作用)



L守恒 $$m\upsilon_0 r_0 \sin\theta = m\upsilon R$$

E守恒 $$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - G\frac{Mm}{r_0} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - G\frac{Mm}{R}$$

解得 $\sin\theta$, υ

一般力的功：

$$A=\int dA=\int \vec{F}\cdot d\vec{s}=\int F\cos\theta ds=\frac{1}{2}mv_b^2-\frac{1}{2}mv_a^2$$

保守力的功：$\boxed{A_{\text{保内}}=-(E_{pb}-E_{pa})}$

$$E_{P\text{重}}=mgh$$

$$\boxed{E_p(x,y,z)=\int_{(x,y,z)}^{E_{pa}=0}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

$$E_{P\text{弹}}=\frac{1}{2}kx^2$$

$$E_{P\text{引}}=-\frac{GMm}{r}$$

系统的动能定理

$$A=A_{\text{外}}+A_{\text{保内}}+A_{\text{非保内}}=E_{k2}-E_{k1}$$

系统的功能原理

$$A_{\text{外}}+A_{\text{非保内}}=E_2-E_1$$

机械能守恒定律

当$A_{\text{外}}+A_{\text{非保内}}=0$　　则：$E_{k2}+E_{P2}=E_{k1}+E_{P1}=C$

质点系的动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{i0}$$

质点系动量守恒定律

若质点系所受的合外力为零 $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$

则系统的总动量守恒，即 $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$ 保持不变．

质心

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \vec{r}_c = \int r dm / m$$

质心运动定律

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_c$$

碰撞 $\begin{cases} \text{弹性碰撞: 碰后分开，动量守恒，动能守恒；} \\ \text{完全非弹性碰撞：碰后不分开，动量守恒，动能不守恒；} \\ \text{非弹性碰撞：碰后分开，动量守恒，动能不守恒。} \end{cases}$

质点的角动量 $\vec{L} \overset{def}{=} \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

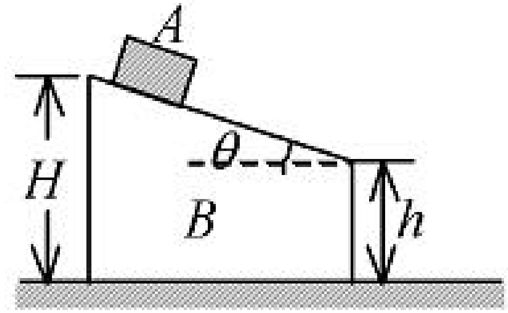
质点角动量守恒定律

$$\int_0^t \vec{M}dt = \int_{\vec{L}_0}^{\vec{L}} d\vec{L} = \vec{L} - \vec{L}_0$$

条件：$\vec{M} = 0$ $\begin{cases} \text{①质点不受外力} \\ \text{②外力通过固定点} \end{cases}$

则：$\vec{L} = \vec{L}_0$ ——恒矢量

两个质量分别为 m 和 M 的物体 A 和 B. 物体 B 为梯形物块，H、h 和 θ 如图所示. 物体 A 与 B 以及 B 与地面之间均为光滑接触. 开始时物体 A 位于物体 B 的左上方顶端处，物体 A 和 B 相对于地面均处于静止状态. 求当物体 A 沿物体 B 由斜面顶端滑至两物体分离时，物体 B 的动量.



解：建坐标如图，并设物体 A 对物体 B 的速度为 v，物体 B 对地的速度为 u. 水平方向动量守恒

$$Mu + m(u - v\cos\theta) = 0 \quad ①$$

机械能守恒

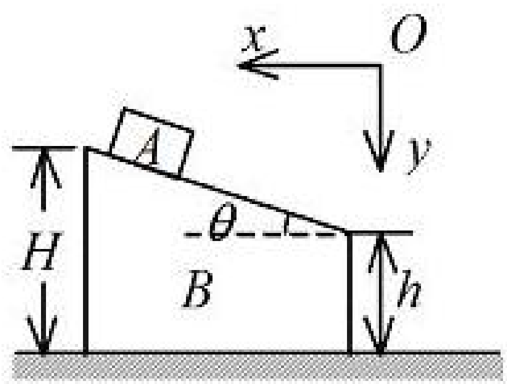
$$mg(H-h) = \frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}m[v^2\sin^2\theta + (u - v\cos\theta)^2] \quad ②$$

由式①、②可解出物体 B 的动量大小为

$$Mu = Mm\sqrt{\frac{2g(H-h)}{(M+m)[M+(M+m)\mathrm{tg}^2\theta]}}$$

或

$$Mu = Mm\sqrt{\frac{2g(H-h)\cos^2\theta}{(M+m)[M+m\sin^2\theta]}}$$



方向：沿 x 轴正向.

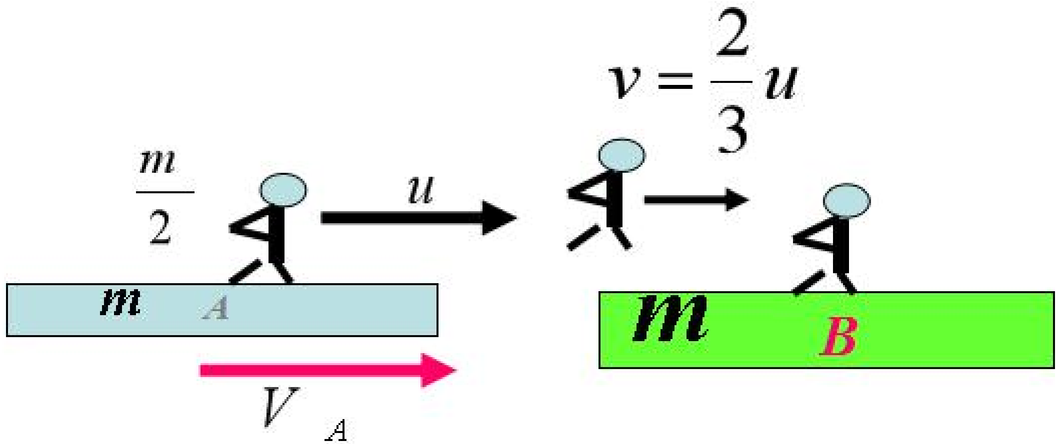
A、B两条船，质量都为m，静止在平静的湖面上，A船上有一质量为m/2的人，以水平速度u相对A船从A船跳到B船上。如果忽略水对船的阻力，求人跳到B船后，A船和B船的速度。

A 船

$$0=\frac{m}{2}(u+V_A)+mV_A$$

$$V_A=-\frac{1}{3}U$$

人的速度 $v=\frac{2}{3}u$



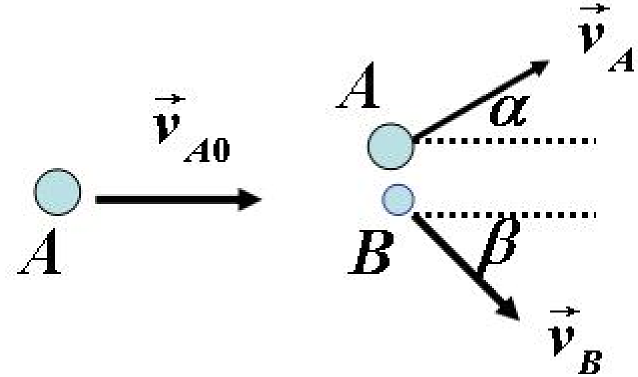
B 船

$$\frac{m}{2}\frac{2}{3}u=(\frac{m}{2}+m)V_B$$

$$V_B=\frac{2}{9}u$$

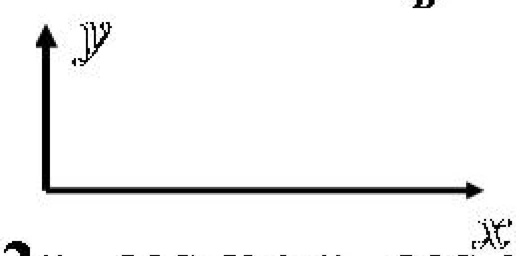
质量为 $7.2\times10^{-23}\,\mathrm{Kg}$ 、速率为 $6\times10^{7}\,\mathrm{m/s}$ 的粒子A与另一个质量为其一半而静止的粒子B发生二维完全弹性碰撞，碰撞后粒子A的速率为 $5\times10^{7}\,\mathrm{m/s}$

求：粒子B的速率及相对粒子A 原来速度方向的偏角；粒子A的偏转角。



$$\frac{1}{2}mv_{A0}^2=\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}\frac{m}{2}v_B^2$$

$$\rightarrow v_{A0}^2=v_A^2+\frac{1}{2}v_B^2 \quad \rightarrow v_B=4.7\times10^7\,m/s$$



X方向动量守恒

$$mv_{A0}=mv_A\cos\alpha+\frac{m}{2}v_B\cos\beta \quad \rightarrow 2v_{A0}=2v_A\cos\alpha+v_B\cos\beta$$

y方向动量守恒

$$0=mv_A\sin\alpha-\frac{m}{2}v_B\sin\beta \quad \rightarrow 0=2v_A\sin\alpha+v_B\sin\beta$$

可求得

$$\alpha=54.14^0 \qquad \beta=22.38^0$$