数理方法时间线

- **复数**
  - 基本运算
  - 写法
    - 实部虚部 —— $x+iy$
    - 指数 —— $z=re^{i\theta}$
  - 复变函数
    - 自变量是复数
    - $f(z)=f(x+iy)\neq f(x,y)$
    - $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$
- **解析函数**
  - 对象：复变函数
  - 可导性 —— 柯西黎曼条件
    - 满足cr条件且实部虚部可微是可导的充要条件
    - 直角坐标 —— $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$
    - 极坐标 —— $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$
    - 考点
      - 判断函数是否可导/解析
      - 已知解析函数实部求虚部
  - 解析
    - 区域内任意一点可导
    - 可以在这个区域内展开成一致收敛的函数
- **积分**
  - 柯西定理
    - 单连通 —— $\oint_C f(z)dz=0$
    - 复连通 —— $\oint_C f(z)dz=\sum_k\oint_{C_k} f(z)dz$
    - 重要 —— $\oint_{C_R}\frac{1}{(z-b)^n}dz=\begin{cases}0,\text{区域不包含}z=b\text{或}n\neq 1\\ 2\pi i\end{cases}$
- **级数**
  - 审敛法
    - 柯西 —— $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1$
    - 达朗贝尔 —— $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$
    - 例题 —— $\sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^n a_n$
  - 幂级数 —— 阿贝尔定理
    - 若级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$在某点$z_0$收敛，那么级数在a为圆心，$|z_0-a|$为半径的圆内绝对收敛，在$|z_0-a|\le r(r<1)$一致收敛
    - 收敛半径
      - 收敛点和发散点的分界圆周的半径叫做收敛半径
      - $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$
      - $R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$
- **级数展开**
  - 泰勒展开
    - $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z)\big|_{z=b}}{n!}(z-b)^k,|z-b|<R$
    - 常见函数
      - 正弦余弦 —— $\sin z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!},\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$
      - 指数 —— $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$
      - 等比数列 —— $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,|z|<1$
  - 洛朗展开
    - $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z)\big|_{z=b}}{n!}(z-b)^k,R_1<|z-b|<R_2$
    - 因式分解，拆分为常见函数
    - 极点分类
      - 可去 —— 分子分母是z趋于z0的同阶无穷小
      - m阶极点 —— 分母无穷小的阶数高于分子m阶
      - 本性奇点 —— 洛朗展开有无穷个负幂项
- **留数定理**
  - 什么是留数 —— 洛朗展开中的a_{-1}
  - 积分和留数的关系 —— $\oint_C f(z)dz=\sum_k\oint_{C_k} f(z)dz=2\pi i\sum_k {a_{-1}}^{(k)}$
  - 不同阶数奇点的求法 —— 在$z=z_0$是m阶极点：$a_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right)\right]$
  - 三角函数积分 —— $\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta\xrightarrow{z=e^{i\theta}}\int_{|z|=1}R\left(\frac{z-z^{-1}}{2i},\frac{z+z^{-1}}{2}\right)\frac{1}{iz}dz$
  - 无穷积分
    - Jordan定理
    - 极点在实轴上不考
    - $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\oint_C f(z)dz-\int_{C_R}f(z)dz=2\pi i\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{Res}f(z),\lim_{z\to\infty}zf(z)=0$
    - $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{ipx}dx=\oint_C f(z)e^{ipz}dz-\int_{C_R}f(z)e^{ipz}dz=2\pi i\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{Res}\left[f(z)e^{ipz}\right],\lim_{z\to\infty}f(z)=0$
    - $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(x)+\cos x}{h(x)}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(x)}{h(x)}dx+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{h(x)}dx=2\pi i\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{Res}\left[\frac{g(z)}{h(z)}\right]+\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz}}{h(z)}\right)$
- **拉普拉斯变换（期中不考）**
  - 原函数，像函数
  - 性质
    - 线性性质
    - 导数的拉普拉斯变换
  - 拉普拉斯变换反演
    - 像函数导数的反演
    - 像函数积分的反演
    - 普遍反演公式