对策论

对策论研究竞争性活动，小至游戏，大至商业竞争乃至战争，这类活动具有特点：

- 竞争对手能够采取的各种策略是清楚的；
- 各方一旦选定自己的策略，竞争的结果就清楚了；
- 每方都试图选取对自己最有利的策略，以便在竞争中获得最好的结果，

称为对策活动。

对策活动的三个基本要素

局中人： 对策的参与者，有权决定自己的行动方案，可以是两个，也可以是多个。

策略集： 可供局中人采用的可行的行动方案全体，可以是有限的，也可以是无限的。

各局中人选定的策略形成一个局势。

赢得或支付函数： 当一个局势形成后，对策的结果也就确定了，这个结果可以量化为各局中人的赢得或支付函数。

对策的分类

按局中人的个数：二人对策、多人对策

按各局中人赢得函数的代数和：零和对策、非零和对策

按局中人的策略个数：有限对策、无限对策

按各局中人之间是否允许合作：合作对策、非合作对策

……

矩阵对策（二人有限零和对策）

局中人：I、II

I 的策略集：$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$

II 的策略集：$S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$

局势：(α_i, β_j)

局中人 I 的赢得矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$

局中人 II 的赢得矩阵 $B = -A = (-a_{ij})_{m \times n}$

矩阵对策简记为：$G = \{\mathrm{I}, \mathrm{II}; S_1, S_2; A\}$

或 $G = \{S_1, S_2; A\}$

纯策略对策：局中人只选定某个策略。

例. 乒乓球赛排阵

甲、乙两队进行乒乓球团体赛，双方均可排出三种不同阵容，根据以往记录，两队不同阵容的交手结果（甲队的得分数）如下：

甲＼乙	β_1	β_2	β_3
α_1	3	1	2
α_2	6	0	-3
α_3	-5	-1	4

问：两队各排什么阵容最稳妥？

两队应采取所谓的“理智行为”，即从最坏的情形中争取最好的结果。

对于甲队，采用 α_1 时，最少得分 $\min\{3, 1, 2\} = 1$

采用 α_2 时，最少得分 $\min\{6, 0, -3\} = -3$

采用 α_3 时，最少得分 $\min\{-5, -1, 4\} = -5$

甲队最好的结果是得分 $\max\{1, -3, -5\} = 1$，

即采用策略 α_1。

对于乙队，采用 β_1 时，最多失分 $\max\{3, 6, -5\} = 6$

采用 β_2 时，最多失分 $\max\{1, 0, -1\} = 1$

采用 β_3 时，最多失分 $\max\{2, -3, 4\} = 4$

乙队最好的结果是失分 $\min\{6, 1, 4\} = 1$，

即采用策略 β_2。

注：若甲队采用 α_1，则乙队必须采用 β_2，否则甲队的赢得会更大；另一方 面，若乙队采用 β_2，则甲队必须采用 α_1，否则甲队的赢得将减 少，因此，α_1、β_2 分别是甲乙两队的最稳 妥策略。

一般地，对于矩阵对策 $G=\{S_1, S_2; A\}$，若有 i^*, j^* 使得

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*}$$

记 $V_G = a_{i^*j^*}$，称 V_G 为对策 G 的值，局势 $(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$ 为对策 G 的鞍点（平衡点，纯策 略意义下的解），$\alpha_{i^*}, \beta_{j^*}$ 分别是局中人 I、II 的最优纯策略。

注：并非所有矩阵对策在纯策略意义下都有解。

例. 田忌齐王赛马

齐王的策略 \ 田忌的策略	β_1 (上中下)	β_2 (上下中)	β_3 (中上下)	β_4 (中下上)	β_5 (下上中)	β_6 (下中上)	
α_1 (上中下)	3	1	1	1	– 1	1	–1
α_2 (上下中)	1	3	1	1	1	– 1	–1
α_3 (中上下)	1	– 1	3	1	1	1	–1
α_4 (中下上)	– 1	1	1	3	1	1	–1
α_5 (下上中)	1	1	1	– 1	3	1	–1
α_6 (下中上)	1	1	– 1	1	1	3	–1
	3	3	3	3	3	3	

定理1： 矩阵对策在纯策略意义下有解的充要条件：

存在纯局势 $(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$ 使得对一切 i, j 均有

$$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$$

（$a_{i^*j^*}$ 是 j^* 列的最大值， i^* 行的最小值）

证明：设 $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j a_{i^*j}$,

$$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i a_{ij^*} ,$$

由 $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j a_{i^*j} \le a_{i^*j^*} \le \max\limits_i a_{ij^*} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$

易证结论成立。

例　求矩阵对策的解，设矩 阵对策 $G=\{S_1, S_2; A\}$，其中 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}, S_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$.赢得矩阵为

II的策略 / I的策略	β_1	β_2	β_3	β_4	min
α_1	6	5	6	5	5
α_2	1	4	2	−1	−1
α_3	8	5	7	5	5
α_4	0	2	6	2	0
max	8	5	7	5	

当矩阵对策的解不唯一时，具有可交换性：

若 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$、$(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$ 皆是对策 G 的解，则 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_2})$、$(\alpha_{i_2}, \beta_{j_1})$ 也是对策 G 的解，即局中人可任意选取最 优纯策略，不依赖于对方的策略。

混合策略对策：局中人按某种概率分布选用各个策略。

设局中人 I 以概率 x_i 采用策略 α_i，即

$$0 \le x_i \le 1, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

局中人 II 以概率 y_j 采用策略 β_j，即

$$0 \le y_j \le 1, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

称 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$ 为局中人 I 的一个混合策略，

$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$ 为局中人 II 的一个混合策略，

(x, y) 为一个（混合）局势。

局中人 I 的期望赢得 $E(x, y) = x^T A y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$

当局中人 I 采用混合策略 x 时，最不利的期望赢得是

$$\min_y E(x,y)$$

因此 I 可保证自己的期望赢得不少于

$$\max_x \min_y E(x,y)$$

同样，局中人 II 可保证自己的期望支付不多于

$$\min_y \max_x E(x,y)$$

一般地，若有局势 (x^*, y^*) 使得

$$E(x^*, y^*) = \max_x \min_y E(x,y) = \min_y \max_x E(x,y)$$

称 (x^*, y^*) 为对策 $G=(S_1, S_2; A)$ 在混合策略意义下的解（鞍点）， x^*, y^*为 I、II 的最优混合策略。

矩阵对策在混合策略意义下有解的充要条件：

存在局势 x^*, y^* 使得对一切 x, y 有

$$E(x, y^*) \le E(x^*, y^*) \le E(x^*, y).$$

设(x^*, y^*) 为对策 $G=(S_1, S_2; A)$ 在混合策略意义下的解（鞍点），x^*, y^*为 I、II 的最优混合策略。

$$E(x^*, y^*) = \max_x \min_y E(x, y) = \min_y E(x^*, y)$$

$$E(x^*, y^*) = \min_y \max_x E(x, y) = \max_x E(x, y^*)$$

$$E(x,y)=\sum_i\sum_j a_{ij}x_iy_j=xAy$$

当局中人 I 取纯策略 α_i 时，其期望赢得为

$$E(i,y)=e_i^T Ay=\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j$$

其中 e_i 为 m 维单位向量；

当局中人 II 取纯策略 β_j 时，其期望赢得为

$$E(x,j)=x^T A\bar{e}_j=\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i$$

其中 $\bar{e}_j$ 为 n 维单位向量。

$$E(x,y)=\sum_i\sum_j a_{ij}x_iy_j=\sum_i x_iE(i,y)=\sum_j y_jE(x,j)$$

定理：矩阵对策在混合策略意义下有解的充要条件：

存在局势 x^*, y^* 使得对一切 $i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$ 有

$$E(i,y^*) \le E(x^*,y^*) \le E(x^*,j).$$

证明：必要性由上一结论直接可得。

充分性． 任给 x，y，

$$E(x,y^*) = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i^T A y^* \le E(x^*,y^*) \sum_{i=1}^{m} x_i = E(x^*,y^*),$$

$$E(x^*,y) = (x^*)^T A \sum_{j=1}^{n} \bar{e}_j y_j \ge E(x^*,y^*) \sum_{j=1}^{n} y_j = E(x^*,y^*),$$

同样由上一结论可得。

矩阵对策的基本定理：

任何矩阵对策一定在混合策略意义下有解。

证明：只需证明存在 x^*, y^* 使得对一切 i, j 有

$$E(i, y^*) \le E(x^*, y^*) \le E(x^*, j).$$

考虑两个线性规划：

(P)

$$\begin{aligned} \max \quad & w \\ s.t. \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge w, \quad \forall j \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ & x_i \ge 0, \quad \forall i \end{aligned}$$

(D)

$$\begin{aligned} \min \quad & v \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le v, \quad \forall i \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & y_j \ge 0, \quad \forall j \end{aligned}$$

(P) 和 (D) 互为对偶问题，且

(P) 有可行解 $x = e_1$， $w = \min\limits_j a_{1j}$

(D) 有可行解 $y = \bar{e}_1$， $v = \max\limits_i a_{i1}$

因此，(P) 和 (D) 皆有最优解，设为 (x^*, w^*) , (y^*, v^*) ，则

$$E(i, y^*) \le v^* = w^* \le E(x^*, j), \quad \forall\, i, j .$$

又

$$E(x^*, y^*) = \sum_i E(i, y^*)\, x_i^* \le v^* \sum_i x_i^* = v^*$$

$$E(x^*, y^*) = \sum_j E(x^*, j)\, y_j^* \ge v^* \sum_j y_j^* = v^*$$

即 $E(x^*, y^*) = v^*$。

矩阵对策的解法

优超原理：

对于矩阵对策 $G=\{S_1, S_2; A\}$，若对一切 $j=1,\cdots,n$ 有

$$a_{i_1 j} \geq a_{i_2 j},$$

称纯策略 α_{i_1} 优超 α_{i_2}，因此局中人 I 不必选用 α_{i_2}。

若对一切 $i=1,\cdots,m$ 有

$$a_{ij_1} \leq a_{ij_2},$$

称纯策略 β_{j_1} 优超 β_{j_2}，因此局中人 II 不必选用 β_{j_2}。

例.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 3 & 0\\ 5 & 0 & 2 & 5 & 9\\ 7 & 3 & 9 & 5 & 9\\ 4 & 6 & 8 & 7 & 6\\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\alpha_3\text{优超 }\alpha_1,\alpha_2}\begin{pmatrix}7 & 3 & 9 & 5 & 9\\ 4 & 6 & 8 & 7 & 6\\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\beta_2\text{ 优超 }\beta_4,\beta_5]{\beta_1\text{ 优超 }\beta_3}\begin{pmatrix}7 & 3\\ 4 & 6\\ 6 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\alpha_3\text{优超 }\alpha_5}\begin{pmatrix}7 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$$

组合优超：

若对一切 $j=1,\cdots,n$ 有

$$\sum_{s=1}^{t}\lambda_s a_{i_s j}\ge a_{i_{t+1}j}\text{，其中}\sum_{s=1}^{t}\lambda_s=1\text{，}\lambda_1,\cdots,\lambda_t\ge 0,$$

则称 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_t}$ 组合优超 $\alpha_{i_{t+1}}$。

若对一切 $i=1,\cdots,m$ 有

$$\sum_{s=1}^{t}\mu_s a_{ij_s}\le a_{ij_{t+1}}\text{，其中}\sum_{s=1}^{t}\mu_s=1\text{，}\mu_1,\cdots,\mu_t\ge 0,$$

则称 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_t}$ 组合优超 $\beta_{j_{t+1}}$。

例.

$$A=\begin{pmatrix}3&2&4&2\\4&3&2&8\\2&4&6&2\end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{\frac{1}{2}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3\text{ 优超 }\alpha_1}\begin{pmatrix}4&3&2&8\\2&4&6&2\end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{\beta_1\text{ 优超 }\beta_4}\begin{pmatrix}4&3&2\\2&4&6\end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{2}\beta_3\text{ 优超 }\beta_2}\begin{pmatrix}4&2\\2&6\end{pmatrix}$$

求解矩阵对策 $G=\{S_1, S_2; A\}$ 等价于求解不等式组：

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq v, \quad \forall j \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq v, \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i \qquad y_j \geq 0, \quad \forall j$$

特例：

若存在 v^* 和概率向量 x^*, y^* 使得

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* = v^*, \quad \forall j, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* = v^*, \quad \forall i$$

则 (x^*, y^*) 为对策 $G=(S_1, S_2; A)$ 的解，v^* 为对策的值。

2X2对策的解法

例. $A=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$

解. $\begin{cases}7x_1+4x_2=v\\ 3x_1+6x_2=v\\ x_1+x_2=1\end{cases}$ $\quad\quad$ $\begin{cases}7y_1+3y_2=v\\ 4y_1+6y_2=v\\ y_1+y_2=1\end{cases}$

$x_1=\frac{1}{3}$， $x_2=\frac{2}{3}$， $y_1=y_2=\frac{1}{2}$

$v=5$

求解矩阵对策 $G=\{S_1, S_2; A\}$ 等价于求解线性规划：

(*P*) 或 (*D*)

$$\begin{aligned} \max \quad & w \\ s.t. \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge w, \quad \forall j \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ & x_i \ge 0, \quad \forall i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & v \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le v, \quad \forall i \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & y_j \ge 0, \quad \forall j \end{aligned}$$

假设每个 $a_{ij} > 0$，否则可对矩阵 A 的每个元素加上常数 δ 使得 $a_{ij} + \delta > 0$，对策的解不变。

线性规划 (P) 等价于

$$\max \quad w$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{x_i}{w} \ge 1, \quad \forall j$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{w} = \frac{1}{w}$$

$$\frac{x_i}{w} \ge 0, \quad \forall i$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{w}$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{x_i}{w} \ge 1, \quad \forall j$$

$$\frac{x_i}{w} \ge 0, \quad \forall i$$

$$\Leftrightarrow$$

(P')

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m} x_i$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge 1, \quad \forall j$$

$$x_i \ge 0, \quad \forall i$$

类似地，线性规划 (D) 等价于

$$(D')\quad \begin{aligned} \max\ & \sum_{j=1}^{n} y_j \\ s.t.\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1,\quad \forall i \\ & y_j \ge 0,\quad \forall j \end{aligned}$$

(P') 和 (D') 互为对偶问题。设 x^*, y^* 是 (P') 和 (D') 的最优解，$\sum_{i=1}^{m} x_i^* = \sum_{j=1}^{n} y_j^* = \frac{1}{v^*}$，则

$(v^* x^*, v^* y^*)$ 是对策的解，v^* 是对策的值。

例.

$$A=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$$

$$(P)\quad \min\ x_1+x_2 \qquad\qquad (D)\quad \max\ y_1+y_2$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & 7x_1+4x_2\ge 1\\ & 3x_1+6x_2\ge 1\\ & x_1,x_2\ge 0\end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} s.t.\quad & 7y_1+3y_2\le 1\\ & 4y_1+6y_2\le 1\\ & y_1,y_2\ge 0\end{aligned}$$

$$x_1=\frac{1}{15},\quad x_2=\frac{2}{15} \qquad\qquad y_1=y_2=\frac{1}{10}$$

$$v^*=5,\quad x^*=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix},\quad y^*=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$2\times n$或$m\times 2$对策的图解法

例.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

设局中人I采取混合策略 $(x_1, 1-x_1)$, $0 \le x_1 \le 1$

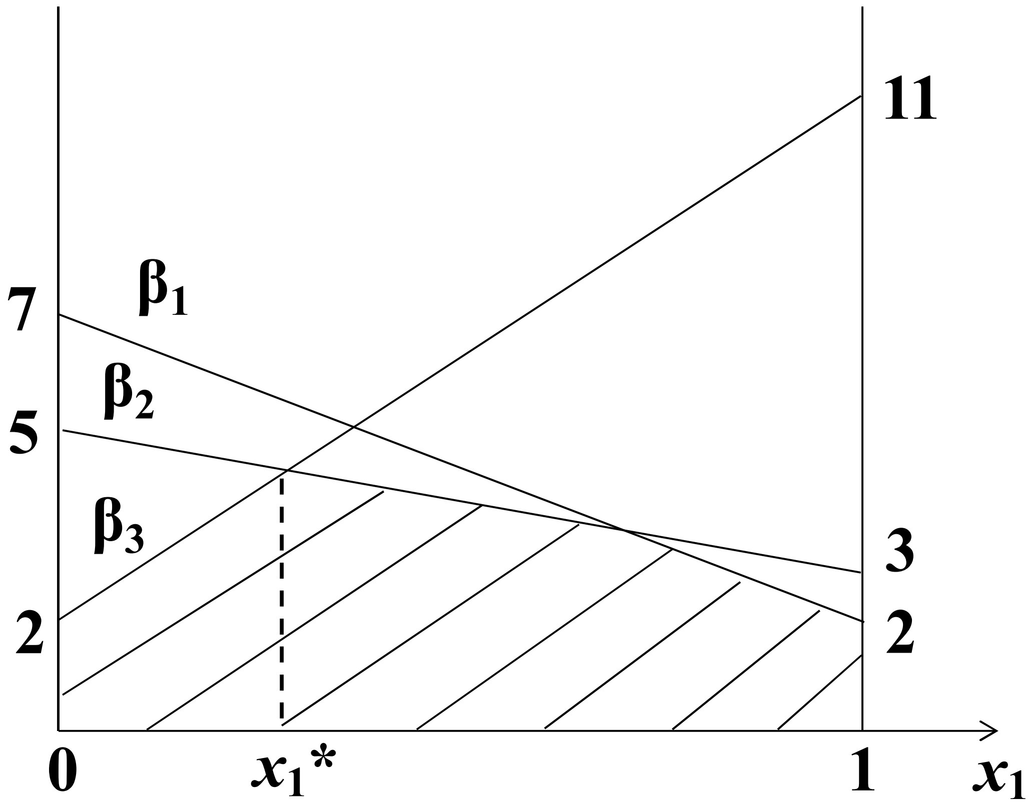
当局中人 II 采取策略 β_1、β_2、β_3 时，局中人 I 的赢得分别是

$$2x_1 + 7(1-x_1)$$

$$3x_1 + 5(1-x_1)$$

$$11x_1 + 2(1-x_1),$$

对应三条直线。



$$2x_1 + 7(1 - x_1)$$
$$3x_1 + 5(1 - x_1)$$
$$11x_1 + 2(1 - x_1)$$

局中人 I 的最优策略（3/11,8/11）

对策的值 49/11

局中人 I 按最小最大原则应选择 x^*为最优策略，由

$$3x_1 + 5(1 - x_1) = 11x_1 + 2(1 - x_1) = v$$

得 $x_1^*=3/11$，$x_2^*=8/11$， $v^*=49/11$

下面求局中人 II 的最优策略，设 $y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$

由 $2x_1^* + 7(1 - x_1^*) > v^*$， 得 $y_1^* = 0$

由 x_1^*，$x_2^* > 0$，得

$$3y_2^* + 11y_3^* = 49/11$$
$$5y_2^* + 2y_3^* = 49/11$$
$$y_2^* + y_3^* = 1$$

所以 $y_2^* = 9/11$，$y_3^* = 2/11$