⋆2.4特征展开法

- 特征展开法主要求解齐次边界条件的定解问题

⋆2.4特征展开法

- 特征展开法主要求解齐次边界条件的定解问题
- 利用特征展开法的关键是找到一个特征函数系(它是某个特征值问题的全部特征函数),使得未知函数、初始函数和自由项都可以按照此函数系展开

⋆2.4特征展开法

- 特征展开法主要求解齐次边界条件的定解问题
- 利用特征展开法的关键是找到一个特征函数系(它是某个特征值问题的全部特征函数),使得未知函数、初始函数和自由项都可以按照此函数系展开

⋆2.4.1弦振动方程的初边值问题

考察弦振动方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{2.4.1}$$

⋆2.4特征展开法

- 特征展开法主要求解齐次边界条件的定解问题
- 利用特征展开法的关键是找到一个特征函数系(它是某个特征值问题的全部特征函数),使得未知函数、初始函数和自由项都可以按照此函数系展开

⋆2.4.1弦振动方程的初边值问题

考察弦振动方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), & 0<x<l, t>0 \\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t\geq 0, \\ u(x,0)=\phi(x), u_t(x,0)=\psi(x), & 0\leq x\leq l \end{cases} \tag{2.4.1}$$

- 对于齐次问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & 0<x<l, t>0 \\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t\geq 0, \end{cases}$$

由2.3节开头的推导我们已知它对应的特征值问题是

- $$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

由例题2.3.1可知该特征值问题的特征函数系为$\{\sin \alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$,其中$\alpha_n = n\pi/l$

- $$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

  由例题2.3.1可知该特征值问题的特征函数系为$\{\sin \alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$,其中$\alpha_n = n\pi/l$

- 将函数$u(x,t), f(x,t), \phi(x), \psi(x)$关于$x$按特征函数系$\{\sin \alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$展开

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \alpha_n x,\ f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \alpha_n x$$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \alpha_n x, \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \alpha_n x$$

其中(利用$\{\sin \alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$的正交性，可参考3月17号思考题1的结论）

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \alpha_n x dx, c_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \alpha_n x dx,$$

$$d_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \alpha_n x dx, \tag{2.4.2}$$

- $$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$$
  由例题2.3.1可知该特征值问题的特征函数系为$\{\sin\alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$,其中$\alpha_n=n\pi/l$
- 将函数$u(x,t), f(x,t), \phi(x), \psi(x)$关于$x$按特征函数系$\{\sin\alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$展开

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\alpha_n x,\ f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\alpha_n x$$

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\alpha_n x,\ \psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}d_n\sin\alpha_n x$$

其中(利用$\{\sin\alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$的正交性，可参考3月17号思考题1的结论)

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\alpha_n x dx,\ c_n=\frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\alpha_n x dx,$$

$$d_n=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\alpha_n x dx, \tag{2.4.2}$$

- 将展开式代入(2.4.1)的方程和初始条件⇒

$$\sum_{n=1}^{\infty}[u_n''(t) + (a\alpha_n)^2 u_n(t) - f_n(t)]\sin\alpha_n x = 0, t > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(0) - c_n]\sin\alpha_n x = 0, \sum_{n=1}^{\infty}[u_n'(0) - d_n]\sin\alpha_n x = 0$$

- 将展开式代入(2.4.1)的方程和初始条件⇒

$$\sum_{n=1}^{\infty}[u_n''(t)+(a\alpha_n)^2u_n(t)-f_n(t)]\sin\alpha_n x=0, t>0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(0)-c_n]\sin\alpha_n x=0, \sum_{n=1}^{\infty}[u_n'(0)-d_n]\sin\alpha_n x=0$$

- 根据特征函数的正交性⇒（下面一系列二阶常微分方程的初值问题）

$$\begin{cases} u_n''(t)+(a\alpha_n)^2u_n(t)=f_n(t), & t>0 \\ u_n(0)=c_n, u_n'(0)=d_n, & n=1,2,\cdots \end{cases}$$

- 将展开式代入(2.4.1)的方程和初始条件⇒

$$\sum_{n=1}^{\infty}[u_n''(t)+(a\alpha_n)^2u_n(t)-f_n(t)]\sin\alpha_n x=0, t>0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(0)-c_n]\sin\alpha_n x=0, \sum_{n=1}^{\infty}[u_n'(0)-d_n]\sin\alpha_n x=0$$

- 根据特征函数的正交性⇒（下面一系列二阶常微分方程的初值问题）

$$\begin{cases} u_n''(t)+(a\alpha_n)^2u_n(t)=f_n(t), & t>0 \\ u_n(0)=c_n, u_n'(0)=d_n, & n=1,2,\cdots \end{cases}$$

- 齐次方程$u_n''(t)+(a\alpha_n)^2u_n(t)=0$的基本解组是$\cos\alpha_n t, \sin\alpha_n t$,所以齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} v_n''(t)+(a\alpha_n)^2v_n(t)=0, & t>0 \\ v_n(0)=c_n, v_n'(0)=d_n, & n=1,2,\cdots \end{cases}$$

的解

- 将展开式代入(2.4.1)的方程和初始条件⇒

$$\sum_{n=1}^{\infty}[u_n''(t)+(a\alpha_n)^2u_n(t)-f_n(t)]\sin\alpha_n x=0, t>0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(0)-c_n]\sin\alpha_n x=0, \sum_{n=1}^{\infty}[u_n'(0)-d_n]\sin\alpha_n x=0$$

- 根据特征函数的正交性⇒（下面一系列二阶常微分方程的初值问题）

$$\begin{cases} u_n''(t)+(a\alpha_n)^2u_n(t)=f_n(t), & t>0 \\ u_n(0)=c_n, u_n'(0)=d_n, & n=1,2,\cdots \end{cases}$$

- 齐次方程$u_n''(t)+(a\alpha_n)^2u_n(t)=0$的基本解组是$\cos\alpha_n t, \sin\alpha_n t$,所以齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} v_n''(t)+(a\alpha_n)^2v_n(t)=0, & t>0 \\ v_n(0)=c_n, v_n'(0)=d_n, & n=1,2,\cdots \end{cases}$$

的解

$$v_n(t)=c_n\cos a\alpha_n t+\frac{d_n}{a\alpha_n}\sin a\alpha_n t$$

- 利用叠加原理和常数变易公式（可参考3月17号的思考题2的结果）

$$u_n(t) = c_n \cos a\alpha_n t + \frac{d_n}{a\alpha_n}\sin a\alpha_n t + \frac{1}{a\alpha_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin a\alpha_n(t-\tau)d\tau$$

- 利用叠加原理和常数变易公式（可参考3月17号的思考题2的结果）

$$u_n(t) = c_n \cos a\alpha_n t + \frac{d_n}{a\alpha_n} \sin a\alpha_n t + \frac{1}{a\alpha_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin a\alpha_n (t-\tau) d\tau$$

- 于是

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos a\alpha_n t + \frac{d_n}{a\alpha_n} \sin a\alpha_n t) \sin \alpha_n x$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a\alpha_n} \sin \alpha_n x \int_0^t f_n(\tau) \sin a\alpha_n (t-\tau) d\tau, \qquad (2.4.3)$$

其中c_n, d_n, f_n由（2.4.2）式给出

- 利用叠加原理和常数变易公式（可参考3月17号的思考题2的结果）

$$u_n(t) = c_n \cos a\alpha_n t + \frac{d_n}{a\alpha_n} \sin a\alpha_n t + \frac{1}{a\alpha_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin a\alpha_n (t-\tau) d\tau$$

- 于是

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos a\alpha_n t + \frac{d_n}{a\alpha_n} \sin a\alpha_n t) \sin \alpha_n x$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a\alpha_n} \sin \alpha_n x \int_0^t f_n(\tau) \sin a\alpha_n (t-\tau) d\tau, \tag{2.4.3}$$

其中c_n, d_n, f_n由（2.4.2）式给出

- (2.4.3)给出的函数只是初边值问题(2.4.1)的一个形式解，不一定是古典解（古典解的定义在2-1.pdf的第9页中有介绍）

- (2.4.3)给出的函数只是初边值问题(2.4.1)的一个形式解，不一定是古典解（古典解的定义在2-1.pdf的第9页中有介绍）
- 如果对函数ϕ, ψ, f加上适当的光滑性条件，可以证明这个形式解的确是一个古典解

- (2.4.3)给出的函数只是初边值问题(2.4.1)的一个形式解，不一定是古典解（古典解的定义在2-1.pdf的第9页中有介绍）
- 如果对函数ϕ, ψ, f加上适当的光滑性条件，可以证明这个形式解的确是一个古典解
- **定理2.3.1** 设$\phi \in C^3[0,l], \psi \in C^2[0,l], f(x,t) \in C^2([0,l]\times[0,\infty))$,,并且满足相容性条件

$$\phi(0)=\phi(l)=0, \psi(0)=\psi(l)=0, \phi''(0)=\phi''(l)=0$$

$$a^2\phi''(0)+f(0,0)=a^2\phi''(l)+f(l,0)=0$$

则由公式(2.4.3)给出函数是初边值问题(2.4.1)的解。

利用特征展开法求解初边值问题的基本过程

- 根据齐次方程，齐次边界确定对应的特征值问题，进一步推导出特征函数系

利用特征展开法求解初边值问题的基本过程

- 根据齐次方程，齐次边界确定对应的特征值问题，进一步推导出特征函数系
- 将定解问题中的已知函数和未知函数按照特征函数系展开

利用特征展开法求解初边值问题的基本过程

- 根据齐次方程，齐次边界确定对应的特征值问题，进一步推导出特征函数系
- 将定解问题中的已知函数和未知函数按照特征函数系展开
- 将展开式代入定解问题的方程和初始条件

利用特征展开法求解初边值问题的基本过程

- 根据齐次方程，齐次边界确定对应的特征值问题，进一步推导出特征函数系
- 将定解问题中的已知函数和未知函数按照特征函数系展开
- 将展开式代入定解问题的方程和初始条件
- 利用特征函数的正交性，可得一系列的常微分方程的初值问题

利用特征展开法求解初边值问题的基本过程

- 根据齐次方程，齐次边界确定对应的特征值问题，进一步推导出特征函数系
- 将定解问题中的已知函数和未知函数按照特征函数系展开
- 将展开式代入定解问题的方程和初始条件
- 利用特征函数的正交性，可得一系列的常微分方程的初值问题
- 利用常微分方程的求解

利用特征展开法求解初边值问题的基本过程

- 根据齐次方程，齐次边界确定对应的特征值问题，进一步推导出特征函数系
- 将定解问题中的已知函数和未知函数按照特征函数系展开
- 将展开式代入定解问题的方程和初始条件
- 利用特征函数的正交性，可得一系列的常微分方程的初值问题
- 利用常微分方程的求解
- 回代到展开式中，即可得定解问题解的表达形式

例2.4.1 求解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \frac{1}{2}xt, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin\frac{x}{2}, u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

例2.4.1 求解初边值问题

$$
\begin{cases}
u_{tt}-u_{xx}=\frac{1}{2}xt, & 0<x<\pi, t>0\\
u(0,t)=u_x(\pi,t)=0, & t\geq 0\\
u(x,0)=\sin\frac{x}{2}, u_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq\pi
\end{cases}
$$

分析：有界区域上齐次边界条件的定解问题，所以可以利用特征展开法求解

例2.4.1 求解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\frac{1}{2}xt, & 0<x<\pi, t>0 \\ u(0,t)=u_x(\pi,t)=0, & t\geq 0 \\ u(x,0)=\sin\frac{x}{2}, u_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq \pi \end{cases}$$

分析：有界区域上齐次边界条件的定解问题，所以可以利用特征展开法求解

解：

- 对应的特征值问题为

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<\pi \\ X(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}$$

由例2.3.2可知特征函数系为$\{\sin\alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$,其中$\alpha_n=(2n-1)/2$

例2.4.1 求解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \frac{1}{2}xt, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin\frac{x}{2}, u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

分析：有界区域上齐次边界条件的定解问题，所以可以利用特征展开法求解

解：

- 对应的特征值问题为

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ \ 0 < x < \pi \\ X(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

由例2.3.2可知特征函数系为$\{\sin\alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$,其中$\alpha_n = (2n-1)/2$

- 把函数$\phi(x) = \sin\frac{x}{2}, \psi(x) = 0, f(x,t) = \frac{1}{2}xt$关于$x$按特征函数系展开，可算出

$$c_1 = 1, c_n = 0, n \geq 2, d_n = 0, f_n(t) = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi\alpha_n^2}t, n = 1, 2, \cdots$$

- 直接代入公式(2.4.3),计算可得

$$u(x,t)=(\cos\frac{t}{2}+\frac{16}{\pi}t-\frac{32}{\pi}\sin\frac{t}{2})\sin\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\pi\alpha_n^4}(t-\frac{\sin\alpha_n t}{\alpha_n})\sin\alpha_n x$$

$$=\cos\frac{t}{2}\sin\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\pi\alpha_n^4}(t-\frac{\sin\alpha_n t}{\alpha_n})\sin\alpha_n x$$

回家作业：
2.7、利用特征展开法求解弦振动方程的初边值问题(2)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, u(l,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \cos\frac{\pi}{2l}x, & \\ u_t(x,0) = \cos\frac{3\pi}{2l}x + \cos\frac{5\pi}{2l}x & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin\frac{2\pi}{l}x \sin\frac{2\pi}{l}t, & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, u(l,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

⋆2.4.2热传导方程的初值问题

考虑热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \phi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{2.4.6}$$

⋆2.4.2热传导方程的初值问题

考虑热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \phi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{2.4.6}$$

分析：有界区域上齐次边界条件的定解问题，所以利用特征展开法求解

⋆2.4.2热传导方程的初值问题

考虑热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \phi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{2.4.6}$$

分析：有界区域上齐次边界条件的定解问题，所以利用特征展开法求解

解：

- 对应的特征值问题为

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

- 特征函数系为$\{\cos\beta_n x\}_{n=1}^{\infty}$,其中$\beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$

⋆2.4.2热传导方程的初值问题

考虑热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \phi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{2.4.6}$$

分析：有界区域上齐次边界条件的定解问题，所以利用特征展开法求解

解：

- 对应的特征值问题为

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

- 特征函数系为$\{\cos \beta_n x\}_{n=1}^{\infty}$,其中$\beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$

- 把$u(x,t), f(x,t), \phi(x)$关于x按特征函数系展开

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\cos\beta_n x,\ f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\cos\beta_n x,$$

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\beta_n x$$

其中

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\cos\beta_n x dx,\ c_n=\frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\cos\beta_n x dx$$

- 把展开式代入(2.4.6)的方程和初始条件得

$$\sum_{n=1}^{\infty}[u_n^{'}(t)=(a\beta_n)^2u_n(t)-f_n(t)]\cos\beta_n x=0, t>0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(0)-c_n]\cos\beta_n x=0$$

- 把$u(x,t), f(x,t), \phi(x)$关于x按特征函数系展开

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\cos\beta_n x,\ f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\cos\beta_n x,$$

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\beta_n x$$

其中

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\cos\beta_n x dx,\ c_n=\frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\cos\beta_n x dx$$

- 把展开式代入(2.4.6)的方程和初始条件得

$$\sum_{n=1}^{\infty}[u_n^{'}(t)=(a\beta_n)^2u_n(t)-f_n(t)]\cos\beta_n x=0, t>0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(0)-c_n]\cos\beta_n x=0$$

- 根据特征函数系的正交性可推出（一阶常微分方程的初值问题）

$$\begin{cases} u_n'(t) + (a\beta_n)^2 u_n(t) = f_n(t), t > 0 \\ u_n(0) = c_n, n = 1, 2, \cdots . \end{cases}$$

- 根据特征函数系的正交性可推出（一阶常微分方程的初值问题）

$$\begin{cases} u_n'(t) + (a\beta_n)^2 u_n(t) = f_n(t), t > 0 \\ u_n(0) = c_n, n = 1, 2, \cdots . \end{cases}$$

- 利用一阶非齐次常微分方程的求解方法可得(参看3月17号思考题3的结论)

$$u_n(t) = c_n e^{(a\beta_n)^2 t} + \int_0^t e^{(a\beta_n)^2 (s-t)} f_n(s) ds$$

- 根据特征函数系的正交性可推出（一阶常微分方程的初值问题）

$$\begin{cases} u_n^{'}(t) + (a\beta_n)^2 u_n(t) = f_n(t), t > 0 \\ u_n(0) = c_n, n = 1, 2, \cdots . \end{cases}$$

- 利用一阶非齐次常微分方程的求解方法可得(参看3月17号思考题3的结论)

$$u_n(t) = c_n e^{(a\beta_n)^2 t} + \int_0^t e^{(a\beta_n)^2(s-t)} f_n(s) ds$$

- 代回展开式

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{-(a\beta_n)^2 t} + \int_0^t e^{(a\beta_n)^2(s-t) f_n(s) ds}) \cos \beta_n x$$

利用同样的方法可以推出，热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \phi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{2.4.8}$$

利用同样的方法可以推出，热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \phi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{2.4.8}$$

- 解为

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-(\frac{n\pi a}{l})^2 (t-s)\} \sin\frac{n\pi y}{l} \sin\frac{n\pi x}{l}\right) f(y,s) dy ds$$

$$= \int_0^t \int_0^l G(x,y,t-s) f(y,s) dy ds$$

利用同样的方法可以推出，热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \phi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{2.4.8}$$

- 解为

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^l \left(\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-(\frac{n\pi a}{l})^2(t-s)\} \sin\frac{n\pi y}{l} \sin\frac{n\pi x}{l}\right) f(y,s)dyds$$

$$= \int_0^t \int_0^l G(x,y,t-s) f(y,s)dyds$$

- 函数

$$G(x,t,t-s) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-(\frac{n\pi a}{l})^2(t-s)\} \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{n\pi y}{l}$$

称为抛物型方程的初值(2.4.8)的Green函数

利用同样的方法可以推出，热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \phi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{2.4.8}$$

- 解为

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-(\frac{n\pi a}{l})^2 (t-s)\} \sin \frac{n\pi y}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}\right) f(y,s) dy ds$$

$$= \int_0^t \int_0^l G(x,y,t-s) f(y,s) dy ds$$

- 函数

$$G(x,t,t-s) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-(\frac{n\pi a}{l})^2 (t-s)\} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{l}$$

称为抛物型方程的初值(2.4.8)的Green函数

回家作业2.9、利用特征展开法解下列热传导方程的初值问题

$$(2)\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = \cos x, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, u_x(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \cos 2x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$