交流与探讨

关于 Gronwall 不等式证明的注记*

孙 莉 （徐州师范大学数学系 江苏徐州 221116）

摘 要 个别文献关于 Gronwall 不等式的证明过程存有疏误, 通过补充修改, 可使之严格完整.

关键词 Gronwall 不等式; 证明; 微分; 疏误 中图分类号 O178

Gronwall 不等式是数学中非常重要的一个不等式. 自推出之日起, 便倍受关注. 该不等式曾出现过各种推广形式和不同的证明方法, 为研究诸多数学问题提供了一个很好的工具. 直至现在仍有很多文章在研究它[2]. 本文将指出个别文献[1,2] 在证明 Cronwall 不等式时所出现的疏误, 并给出改正措施.

命题(Gronwall 不等式) 设 K 为非负常数, $f(t)$ 和 $g(t)$ 为在区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上的连续非负函数, 且满足不等式 $f(t)\leqslant K+\int_\alpha^t f(s)g(s)\mathrm{d}s$, 则有 $f(t)\leqslant K\exp(\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

文[1] 给出了 Gronwall 不等式的一种证明方法:

设 $R(t)=\int_\alpha^t f(s)g(s)\mathrm{d}s$, 则 $f(t)\leqslant K+R(t)$. 用 $g(t)$ 乘不等式两边:

$$f(t)g(t)\leqslant Kg(t)+R(t)g(t),$$

$$R'(t)\leqslant Kg(t)+R(t)g(t), \tag{1}$$

$$\mathrm{d}R(t)\leqslant Kg(t)\mathrm{d}t+R(t)g(t)\mathrm{d}t, \tag{2}$$

用 $\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)$ 乘不等式两边:

$$\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)\mathrm{d}R(t)\leqslant Kg(t)\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)\mathrm{d}t+R(t)g(t)\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}[R(t)\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)]\leqslant -Kd[\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)],$$

两边从 α 到 t 积分 $R(t)\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)\leqslant K[1-\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)]$, 并由 $f(t)\leqslant K+R(t)$, 得

$$[f(t)-K]\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)\leqslant K[1-\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)],$$

所以

$$f(t)\leqslant K\exp(\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta. \qquad \square$$

上述证明过程有一个不严密的地方: 不等式(2) 是不正确的 !显然, 这里不等式(2) 是在不等式(1) 两边同乘以 $\mathrm{d}t$ 得来的. 但是由数学分析的知识可知, $\mathrm{d}t$ 是自变量 t 的微分, 就等于自变量 t 的增量 Δt, 而增量是可正可负的. 这样, 直接用 $\mathrm{d}t$ 乘以式(1) 两边而保持不等号不变得到(2) 式的做法便是错误的了. 为了避免上述错误的产生, 我们将证明修改如下:

设 $R(t)=\int_\alpha^t f(s)g(s)\mathrm{d}s$, 则 $f(t)\leqslant K+R(t)$. 用 $g(t)$ 乘不等式两边得

$$f(t)g(t)\leqslant Kg(t)+R(t)g(t),$$

即

$$R'(t)\leqslant Kg(t)+R(t)g(t),$$

* 收稿日期: 2005－05－11.
基金项目: 徐州师范大学自然科学研究基金(04XLB03).

再用 $\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)$ 乘上式两边，得

$$\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)R'(t)\leqslant Kg(t)\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)+R(t)g(t)\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s),$$

$$\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)R'(t)-R(t)g(t)\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)\leqslant Kg(t)\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s),$$

$$[R(t)\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)]'\leqslant -K[\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)]',$$

两边从 α 到 t 积分，$R(t)\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)\leqslant K[1-\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)]$，并由 $f(t)\leqslant K+R(t)$，得

$$[f(t)-K]\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)\leqslant K[1-\exp(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s)],$$

所以

$$f(t)\leqslant K\exp(\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta \qquad \square$$

文[2] 给出了 Gronwall 不等式的另一种证明方法：

由条件不等式得

$$\frac{f(t)g(t)}{K+\int_\alpha^t f(s)g(s)\mathrm{d}s}\leqslant g(t), \tag{3}$$

两边从 α 到 t 积分，得 $\ln(K+\int_\alpha^t f(s)g(s)\mathrm{d}s)-\ln K\leqslant\int_\alpha^t g(t)\mathrm{d}t.$

由上式和条件不等式，得 $f(t)\leqslant K\exp(\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$ $\square$

上述证明过程也有一个不严密的地方：不等式(3)是不正确的！因 Gronwall 不等式的条件中要求“$K\geqslant 0, f(t)\geqslant 0, g(t)\geqslant 0$”，这样，就不能保证 $K+\int_\alpha^t f(s)g(s)\mathrm{d}s$ 是恒不为零的，其实，该式是可以取到零的. 为此，我们将证明修改如下：

(i) 当 $K>0$ 时，由条件不等式得 $\dfrac{f(t)g(t)}{K+\int_\alpha^t f(s)g(s)\mathrm{d}s}\leqslant g(t)$，两边从 α 到 t 积分，得

$$\ln(K+\int_\alpha^t f(s)g(s)\mathrm{d}s)-\ln K\leqslant\int_\alpha^t g(t)\mathrm{d}t.$$

由上式和条件不等式，得 $f(t)\leqslant K\exp(\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$

(ii) 当 $K=0$ 时，这时条件不等式变为 $f(t)\leqslant\int_\alpha^t f(s)g(s)\mathrm{d}s$，结论变为 $f(t)\leqslant 0,\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$

事实上，对 $\forall\varepsilon>0$，成立 $f(t)<\varepsilon+\int_\alpha^t f(s)g(s)\mathrm{d}s$，从而由(i) 可知，

$$f(t)\leqslant\varepsilon\exp(\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

而由 ε 的任意性可知 $f(t)\leqslant 0,\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$

综合(i)、(ii) 得 $f(t)\leqslant K\exp(\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$ $\square$

参考文献

[1] 赵玉萍. Gronwall 不等式的应用及微分方程的奇解[J]. 青海师专学报(自然科学版)，2002，(5)：20－21.

[2] 匡继昌. 常用不等式(第三版)[M]. 济南：山东科学技术出版社，2004. 564

[3] 丁同仁，李承治. 常微分方程教程[M]. 北京：高等教育出版社，1991. 35－36