运筹学

(Operations Research)

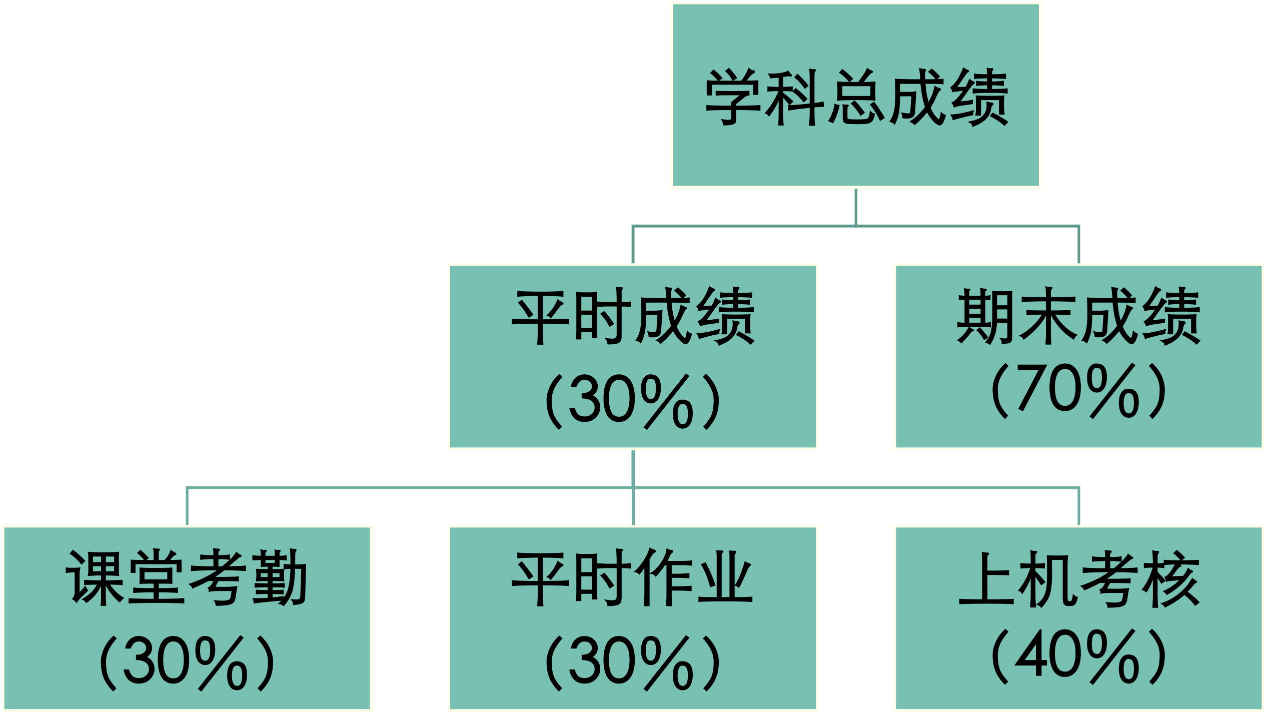
刘培海

华东理工大学理学院

本课程授课方式与考核

课堂教学：**56**课时

上机实验课：**8**课时



运筹帷幄之中

绪　论

Introduction

决胜千里之外

绪 论

本章主要内容:

（1）运筹学简述

（2）运筹学的主要内容

（3）本课程的教材及参考书

（4）本课程的特点和要求

（5）本课程授课方式与考核

绪 论

什么是运筹学?

Operational Research

运用研究、

运作研究

绪 论

什么是运筹学

是一门应用学科，它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法解决实际中提出的专门问题，为决策者选择最优决策提供量化依据。

运筹学简述

运筹学（**Operations Research,**简写**OR** ）

系统工程的最重要的理论基础之一，在美国有人把运筹学称之为管理科学(**Management Science**)。运筹学所研究的问题，可简单地归结为一句话：

"依照给定条件和目标，从众多方案中选择最佳方案"

故有人称之为最优化技术。

运筹学简述

运筹学的历史与发展

“运筹学思想的出现可以追溯到很早—“田忌赛马”　。

齐王要与大臣田忌赛马，双方各出上、中、下马各一匹，对局三次，每次胜负1000金。田忌在好友、著名的军事谋略家孙膑的指导下，以以下安排：

齐王	上	中	下
田忌	下	上	中

运筹学简述

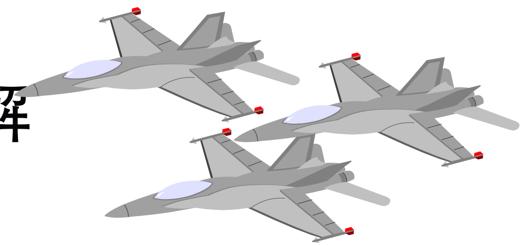
丁谓的皇宫修复工程

北宋年间，丁谓负责修复火毁的开封皇宫。他的施工方案是：先将皇宫前的一条大街挖成一条大沟，将大沟与汴水相通。使用挖出的土就地制砖，令与汴水相连形成的河道承担繁重的运输任务；修复工程完成后，实施大沟排水，并将原废墟物回填，修复成原来的大街。丁谓将取材、运输及清废用“一沟三用”巧妙地解决了，体现了系统规划的思想。

运筹学简述

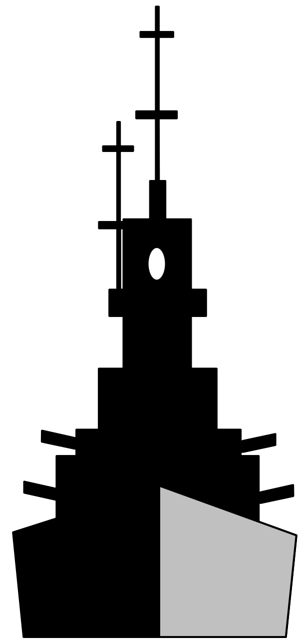
国际上运筹学的思想可追溯到1914年，当时的兰彻斯特提出了军事运筹学的作战模型。1917年，丹麦工程师埃尔朗在研究自动电话系统中通话线路与用户呼叫的数量关系问题时，提出了埃尔朗公式，研究了随机服务系统中的系统排队与系统拥挤问题。存储论的最优批量公式是在20世纪20年代初提出的。

运筹学简述



"运作研究(Operational Research)小组”:解决复杂的战略和战术问题。例如:

1. 如何合理运用雷达有效地对付德军德空袭
2. 对商船如何进行编队护航，使船队遭受德国潜艇攻击时损失最少;
3. 在各种情况下如何调整反潜深水炸弹的爆炸深度，才能增加对德国潜艇的杀伤力等。



运筹学简述

- 在生产管理方面的应用，最早是1939年前苏联的康特洛为奇提出了生产组织与计划中的线性规划问题，并给出解乘数法的求解方法，出版了第一部关于线性规划的著作《生产组织与计划中的数学方法》。
- 1960年康特洛为奇再次出版了《最佳资源利用的经济计算》，受到国内外的一致重视，为此康特洛为奇获得了诺贝尔经济学奖。
- 线性规划提出后很快受到经济学家的重视，

如：二次世界大战中从事运输模型研究的美国经济学家库普曼斯（T.C.Koopmans），阿罗、萨谬尔逊、西蒙、多夫曼和胡尔威茨等都获得了诺贝尔奖。

运筹学简述

- **20**世纪**50**年代中期，钱学森、许国志等教授在国内全面介绍和推广运筹学知识，
- **1956**年，中国科学院成立第一个运筹学研究室，
- **1957**年运筹学运用到建筑和纺织业中，
- **1958**年提出了图上作业法，山东大学的管梅谷教授提出了“中国邮递员问题”，
- **1970**年，在华罗庚教授的直接指导下，在全国范围内推广统筹方法和优选法。

运筹学的主要内容

1. 线性规划（**Linear Program**）是一个成熟的分支，它有效的算法——单纯形法，主要解决生产计划问题，合理下料问题，最优投资问题。

2. 整数规划(**Integrate Program)**：在线性规划的基础上，变量加上整数约束。

3. 非线性规划(**Nonlinear Program)**：目标函数和约束条件是非线性函数，如证券投资组合优化:如何合理投资使风险最小。

4. 动态规划(**Dynamic Program)**：多阶段决策问题。是美国贝尔曼于**1951**年提出的。

运筹学的主要内容

5、图与网络(Graph Theory and Network)：中国邮递员问题、哥尼斯堡城问题、最短路、最大流问题。

6、存储论（Inventory Theory)：主要解决生产中的库存问题，订货周期和订货量等问题。

7、排队论(Queue Theory)：主要研究排队系统中的系统排队和系统拥挤现象，从而评估系统的服务质量。

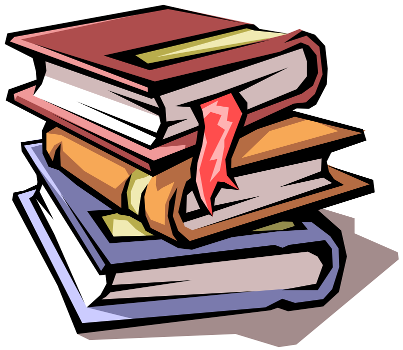
8、对策论(Game Theory)：主要研究具有斗争性质的优化问题。

9、决策分析(Decision Analysis)：主要研究定量化决策。

本课程的教材及参考书

参考教材

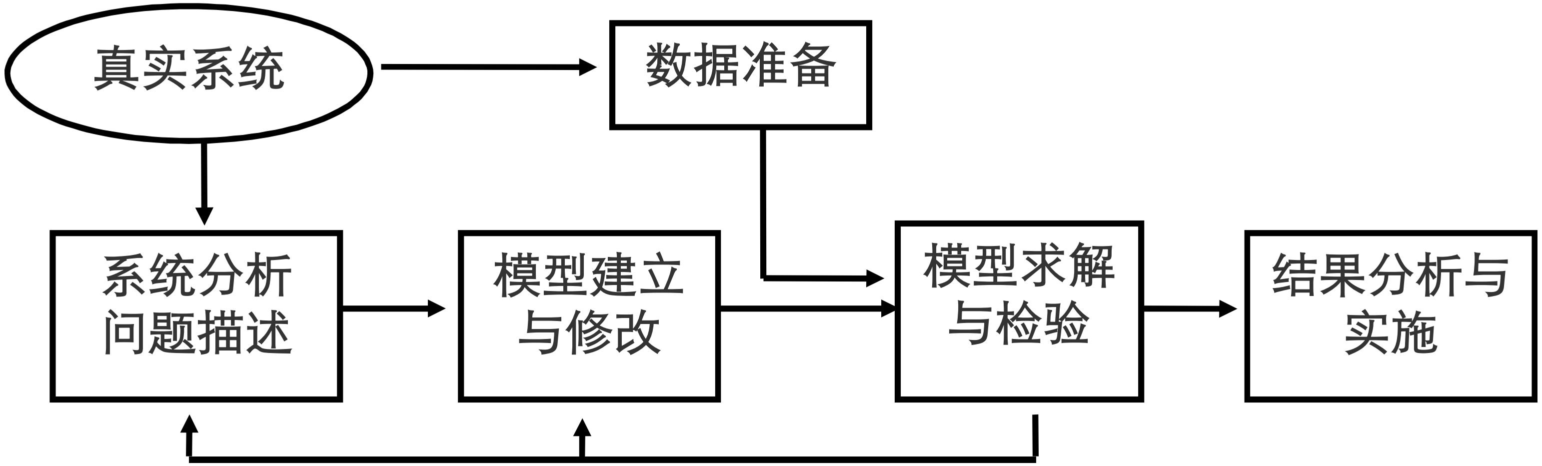
- 《运筹学教程》胡运权主编 （第4版）清华出版社
- 《管理运筹学》韩伯棠主编 （第2版）高等教育出版社
- 《运筹学》(修订版) 钱颂迪主编 清华出版社



本课程的特点和要求

特点： 系统整体优化；多学科的配合；模型方法的应用

运筹学的研究的主要步骤：



第一章

运筹帷幄之中

线性规划及单纯形法

Linear Programming

决胜千里之外

Chapter1 线性规划

本章主要内容：

- LP的数学模型
- 图解法
- 单纯形法
- 单纯形法的进一步讨论－人工变量法
- LP模型的应用

线性规划问题的数学模型

G.B. Dantzig 于**1947** 年认识到许多实际的计划关系都可以用一组线性不等式来刻画，而评价计划好坏的规则可以用一个线性函数来描述，因此提出了线性规划模型，并给出了实际可行的求解方法（即单纯形算法）。

线性规划问题的数学模型

1. 规划问题

生产和经营管理中经常提出如何合理安排，使人力、物力等各种资源得到充分利用，获得最大的效益，这就是规划问题。

线性规划通常解决下列两类问题:

（1）当任务或目标确定后，如何统筹兼顾，合理安排，用最少的资源 （如资金、设备、原标材料、人工、时间等）去完成确定的任务或目标

（2）在一定的资源条件限制下，如何组织安排生产获得最好的经济效益（如产品量最多 、利润最大.）

线性规划问题的数学模型

例1.1 某厂生产两种产品，下表给出了单位产品所需资源及单位产品利润

项目	I	II	每天可用能力
设备A（h）	0	5	15
设备B（h）	6	2	24
调试工序（h）	1	1	5
利润（元）	2	1	

问：应如何安排生产计划，才能使总利润最大?

解：

1. 决策变量：设产品I、II的产量分别为 x_1、x_2

2. 目标函数：设总利润为z，则有：

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

3. 约束条件：

$$\begin{cases} 5x_2 \le 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

线性规划问题的数学模型

例1.2 已知资料如下表所示，问如何安排生产才能使利润最大？或如何考虑利润大，产品好销。

产品 \ 设备	A	B	C	D	利润（元）
I	2	1	4	0	2
II	2	2	0	4	3
有效台时	12	8	16	12	

解：

1. 决策变量：设产品I、II的产量分别为 x_1、x_2

2. 目标函数：设总利润为z，则有： $\max z = 2x_1 + 3x_2$

3. 约束条件：

$$
\begin{cases}
2x_1 + 2x_2 \le 12 \\
x_1 + 2x_2 \le 8 \\
4x_1 \le 16 \\
4x_2 \le 12 \\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0
\end{cases}
$$

线性规划问题的数学模型

例1.3

注意每种原料可同时
生成三种药物，如1单位
原料甲可提取ABC三种药物
分别1，2，3单位

这

原

位原料可提取的药物量

药物 / 原料	A	B	C	单位成本（元/吨）
甲	1	2	3	5
乙	2	0	1	6
丙	1	4	1	7
丁	1	2	2	8

要求：生产A种药物至少160单位；B种药物恰好200单位，C种药物不超过180单位，且使原料总成本最小。

解：1. 决策变量：设四种原料的使用量分别为：x_1、x_2、x_3、x_4

2. 目标函数：设总成本为z

$$\min\ z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4$$

3. 约束条件：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 160 \\ 2x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 200 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 180 \\ x_1、x_2、x_3、x_4 \geq 0 \end{cases}$$

线性规划问题的数学模型

例1.4　某航运局现有船只种类、数量以及计划期内各条航线的货运量、货运成本如下表所示：

航线号	船队类型	编队形式			货运成本（千元／队）	货运量（千吨）
		拖轮	A型驳船	B型驳船		
1	1	1	2	—	36	25
	2	1	—	4	36	20
2	3	2	2	4	72	40
	4	1	—	4	27	20

船只种类	船只数
拖　轮	30
A型驳船	34
B型驳船	52

航线号	合同货运量
1	200
2	400

问：应如何编队，才能既完成合同任务，又使总货运成本为最小？

线性规划问题的数学模型

解：设：x_j为第j号类型船队的队数（j = 1，2，3，4），

z 为总货运成本

则：$\min z = 36x_1 + 36x_2 + 72x_3 + 27x_4$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 30 \\ 2x_1 + 2x_3 \leq 34 \\ 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 52 \\ 25x_1 + 20x_2 \geq 200 \\ 40x_3 + 20x_4 \geq 400 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4) \end{cases}$$

线性规划问题的数学模型

2. 线性规划的数学模型由三个要素构成

决策变量	**Decision variables**
目标函数	**Objective function**
约束条件	**Constraints**

怎样辨别一个模型是线性规划模型?

其特征是:

（1）问题的目标函数是多个决策变量的线性函数，通常是求最大值或最小值;

（2）问题的约束条件是一组多个决策变量的线性不等式或等式。

线性规划问题的数学模型

3. 建模条件

(1) 优化条件：问题所要达到的目标能用线型函数描述，且能够用极值 （**max** 或 **min**）来表示；

(2) 限定条件：达到目标受到一定的限制，且这些限制能够用决策变量的线性等式或线性不等式表示；

(3) 选择条件：有多种可选择的方案供决策者选择，以便找出最优方案。

线性规划问题的数学模型

4. 建模步骤

(1) 确定决策变量：即需要我们作出决策或选择的量。一般情况下，题目问什么就设什么为决策变量;

(2)写出目标函数：即问题所要达到的目标，并明确是**max**还是 **min**；

(3) 找出所有限定条件：即决策变量受到的所有的约束。

线性规划问题的数学模型

5. 线性规划数学模型的一般形式

目标函数：

$$\max\ (\min)\quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

约束条件：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (= \cdot \ge)\ b_1 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (= \cdot \ge)\ b_m \\ x_j \ge 0 \qquad (j = 1 \cdot 2 \cdots n) \end{cases}$$

简写为：

$$\max(\min)\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (= \cdot \ge)\, b_i \qquad (\mathrm{i} = 1 \cdot 2 \cdots m)$$

$$x_j \ge 0 \qquad\qquad (\mathrm{j} = 1 \cdot 2 \cdots n)$$

线性规划问题的数学模型

向量形式： $\max\ (\min)\ z = CX$

$$\begin{cases} \sum p_j x_j \le (= \cdot \ge) B \\ X \ge 0 \end{cases}$$

其中： $C = (c_1 \quad c_2 \cdots \quad c_n)$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad P_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

线性规划问题的数学模型

矩阵形式:

$$\max \quad (\min) \quad Z = CX$$

$$\begin{cases} AX \leq (= \cdot \geq)\ B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

其中: $C = (c_1 \quad c_2 \cdots \quad c_n)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

线性规划问题的数学模型

6. 线性规划问题的标准形式

$$\max\ (\min)\quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (=\cdot\ge)\ b_1 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (=\cdot\ge)\ b_m \\ x_j \ge 0 \qquad (j = 1\cdot 2\cdots n) \end{cases}$$

特点：

(1) 目标函数求最大值（有时求最小值）

(2) 约束条件都为等式方程，且右端常数项b_i都大于或等于零

(3) 决策变量x_j为非负。

线性规划问题的数学模型

（2）如何化标准形式

命题 1．任何线性规划都可以化为标准形。

目标函数的转换

如果是求极小值即 $\min z = \sum c_j x_j$ ，则可将目标函数乘以 (-1)，可化为求极大值问题。

即　$\max z' = -z = -\sum c_j x_j$　也就是：令 $z' = -z$，可得到上式。

变量的变换

若存在取值无约束的变量 x_j，可令 $x_j = x_j' - x_j''$

其中：$x_j', x_j'' \geq 0$

线性规划问题的数学模型

- 约束方程的转换：由不等式转换为等式。

$$\sum a_{ij}x_j \le b_i \quad \Longrightarrow \quad \sum a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$$

$x_{n+i} \ge 0$ 称为松弛变量

$$\sum a_{ij}x_j \ge b_i \quad \Longrightarrow \quad \sum a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$$

$x_{n+i} \ge 0$ 称为剩余变量

- 常量 $b_i < 0$ 的变换:约束方程两边乘以（－1）

线性规划问题的数学模型

例1.5 将下列线性规划问题化为标准形式

$$\min\ Z = -2x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \ge 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = -5 \\ x_1, x_2 \ge 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

解:（1）因为x_3无符号要求，即x_3取正值也可取负值，标准型中要求变量非负，所以

用 $x_3' - x_3''$ 替换 x_3，且 $x_3', x_3'' \ge 0$

线性规划问题的数学模型

(2) 第一个约束条件是“≤”号，在“≤”左端加入松驰变量x_4，$x_4 \geq 0$,化为等式；

(3) 第二个约束条件是“≥”号，在“≥”左端减去剩余变量x_5，$x_5 \geq 0$；

(4) 第3个约束方程右端常数项为-5，方程两边同乘以(-1),将右端常数项化为正数；

(5) 目标函数是最小值，为了化为求最大值，令z′=-z,得到max z′=-z，即当z达到最小值时z′达到最大值，反之亦然；

线性规划问题的数学模型

标准形式如下：

$$\max Z = 2x_1 - x_2 - 3(x_3' - x_3'') + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + (x_3' - x_3'') + x_4 & = 7 \\ x_1 - x_2 - (x_3' - x_3'') - x_5 & = 2 \\ 5x_1 - x_2 - 2(x_3' - x_3'') & = 5 \\ x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

线性规划问题的数学模型

例1.6 将线性规划问题化为标准型

$$\min \quad Z = -x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 \le 5 \\ x_1 - 3x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \text{无约束} \end{cases}$$

解:

$$\max \ Z' = x_1 - 2(x_3 - x_4)$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 8(x_3 - x_4) + x_5 = 5 \\ x_1 - 3(x_3 - x_4) - x_6 = 4 \\ x_1, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

线性规划问题的数学模型

规定线性规划的典则形为：

$$\max \quad z = c^T x \quad s.t. \quad Ax \le b, \quad x \ge 0$$

命题 2．任何线性规划都可以化为典则形。

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le -b_i \end{cases}$$

线性规划的求解---图解法

1. 线性规划问题的解

线性规划问题

$$\max\,(\min)\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (= \cdot \ge)\ b_i \quad (i = 1 \cdot 2 \cdots m) \quad \cdots\cdots(2)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1 \cdot 2 \cdots n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

求解线性规划问题，就是从满足约束条件(2)、(3)的方程组中找出一个解，使目标函数(1)达到最大值。

线性规划的求解---图解法

线性规划问题的求解方法

一 般 有
两种方法

- 图 解 法
  - 两个变量、直角坐标
  - 三个变量、立体坐标
- 单纯形法
  - 适用于任意变量、但必需将一般形式变成标准形式

下面我们分析一下简单的情况—— 只有两个决策变量的线性规划问题，这时可以通过图解的方法来求解。图解法具有简单、直观、便于初学者窥探线性规划基本原理和几何意义等优点。

线性规划的求解---图解法

2. 线性规划问题的图解法

- 解题步骤

1 在直角平面坐标系中画出所有的约束等式，并找出所有约束条件的公共部分，称为可行域，可行域中的点称为可行解。

2 标出目标函数值增加或者减小的方向。

3 若求最大（小）值，则令目标函数等值线沿（逆）目标函数值增加的方向平行移动，找与可行域最后相交的点，该点就是最优解。

4 将最优解代入目标函数，求出最优值。

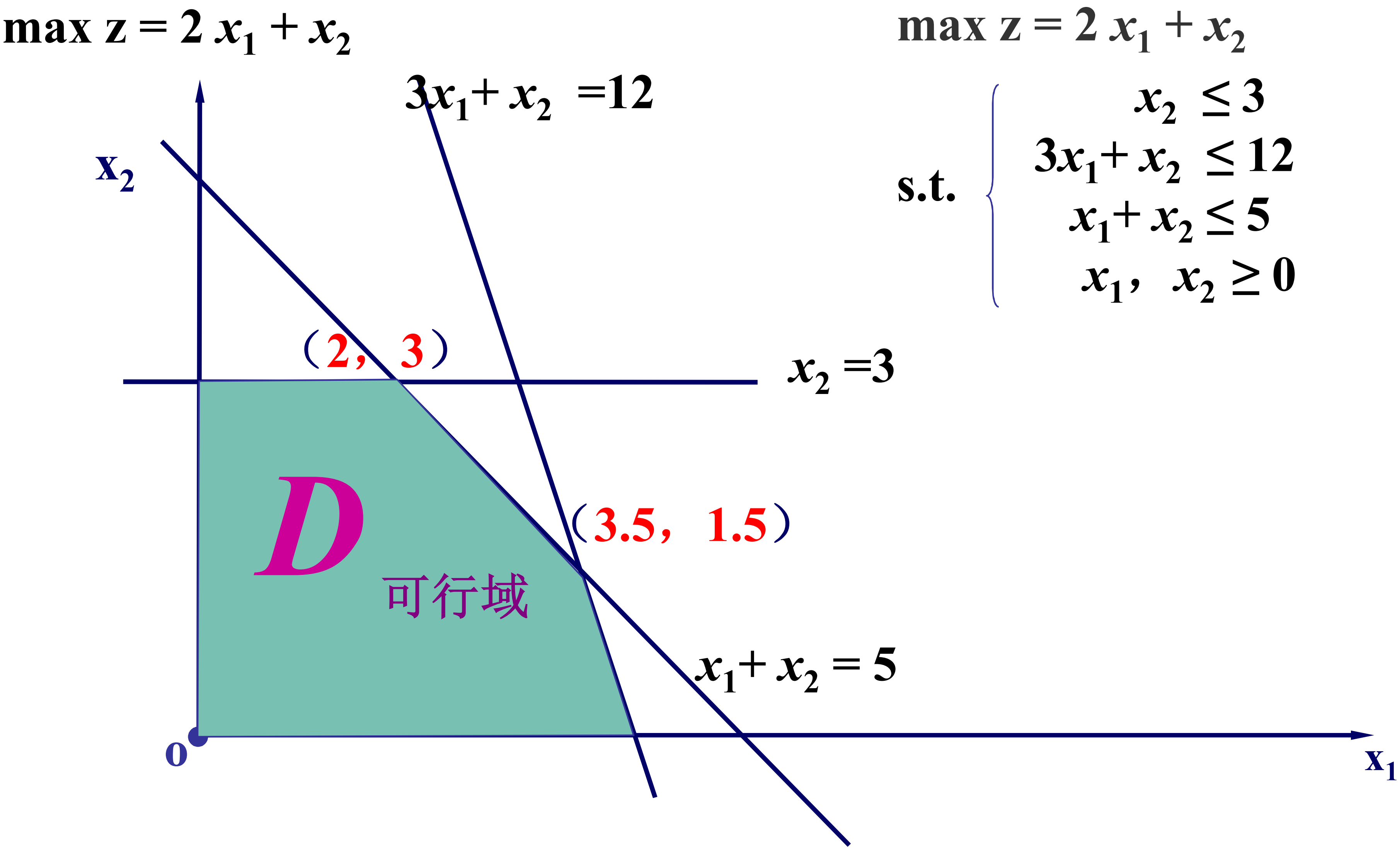
线性规划的求解---图解法

例1.7 用图解法求解线性规划问题

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} x_2 \le 3 \\ 3x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

线性规划的求解---图解法

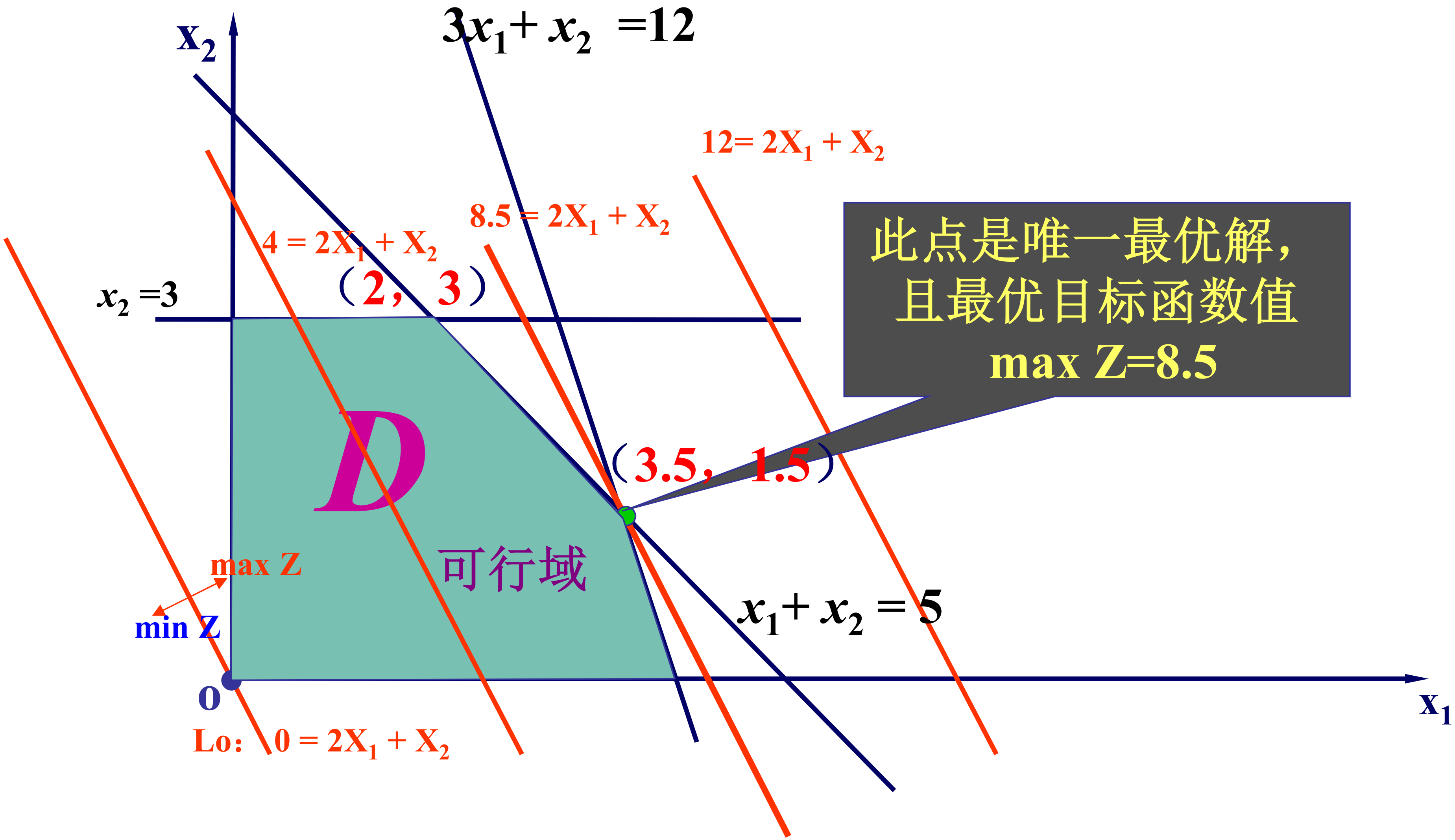


$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_2 \le 3 \\ 3x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

线性规划的求解---图解法

$\max z = 2x_1 + x_2$



线性规划的求解---图解法

例1.8　max　$z = -x_1 + x_2$

$$s.t.\quad 2x_1 - x_2 \geq -2,\quad x_1 - 2x_2 \leq 2,\quad x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

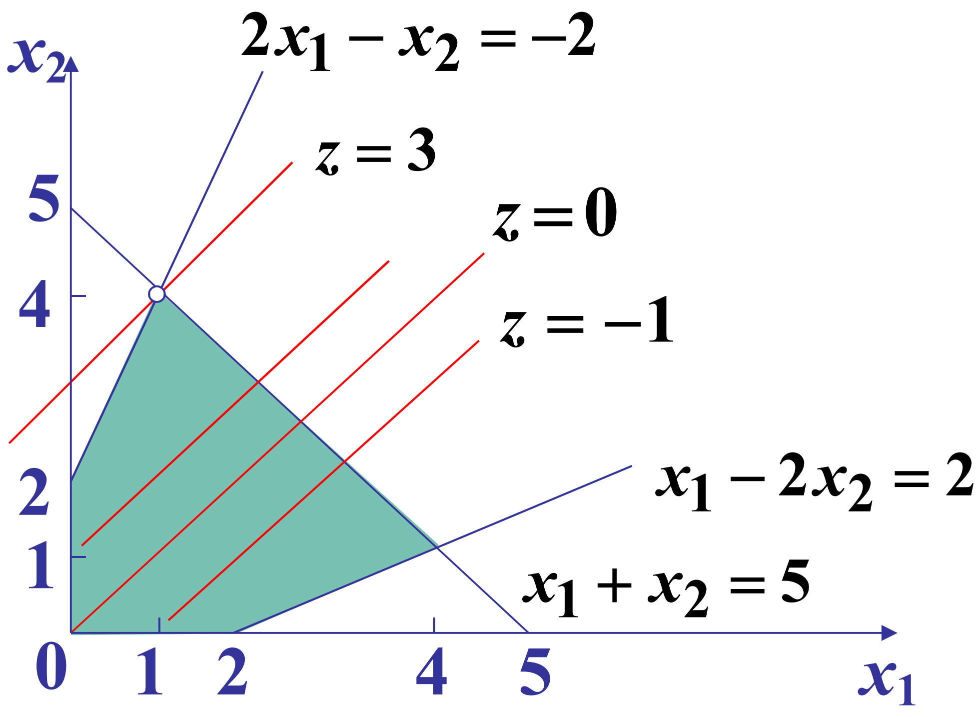
解. (1) 画出可行域;

(2) 画等值线:

$z = -x_1 + x_2$ 是一族以 z 为参数的等值线;

(3) 最优值 $z^* = 3$,

最优解 (1,4) 。



线性规划的求解---图解法

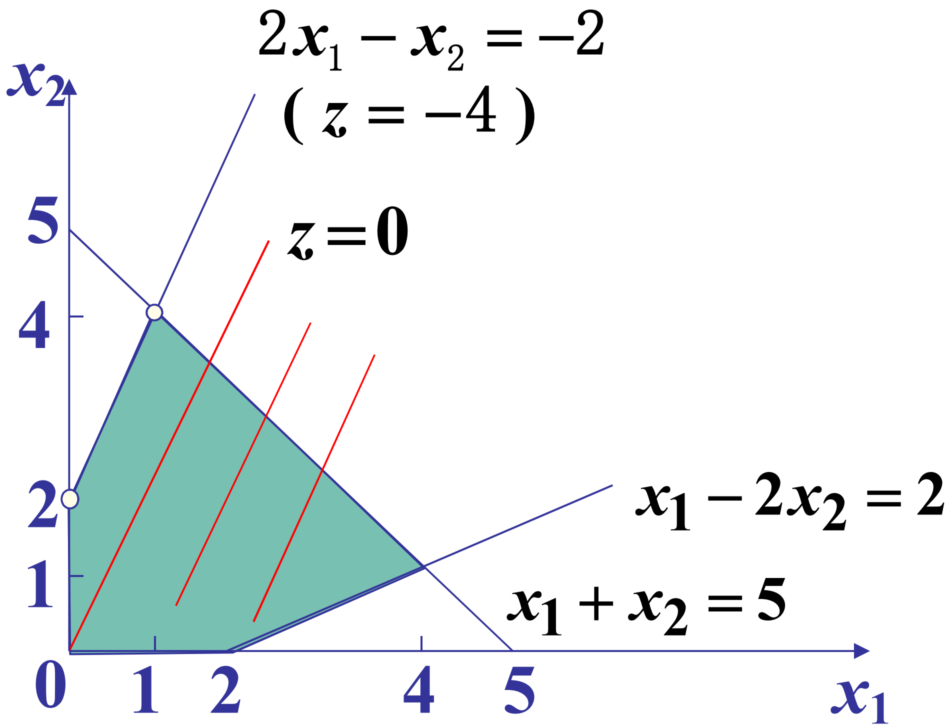
例1.9 $\min \quad z = 4x_1 - 2x_2$

$$s.t. \quad 2x_1 - x_2 \geq -2, \quad x_1 - 2x_2 \leq 2, \quad x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

解. 可行域同上例;

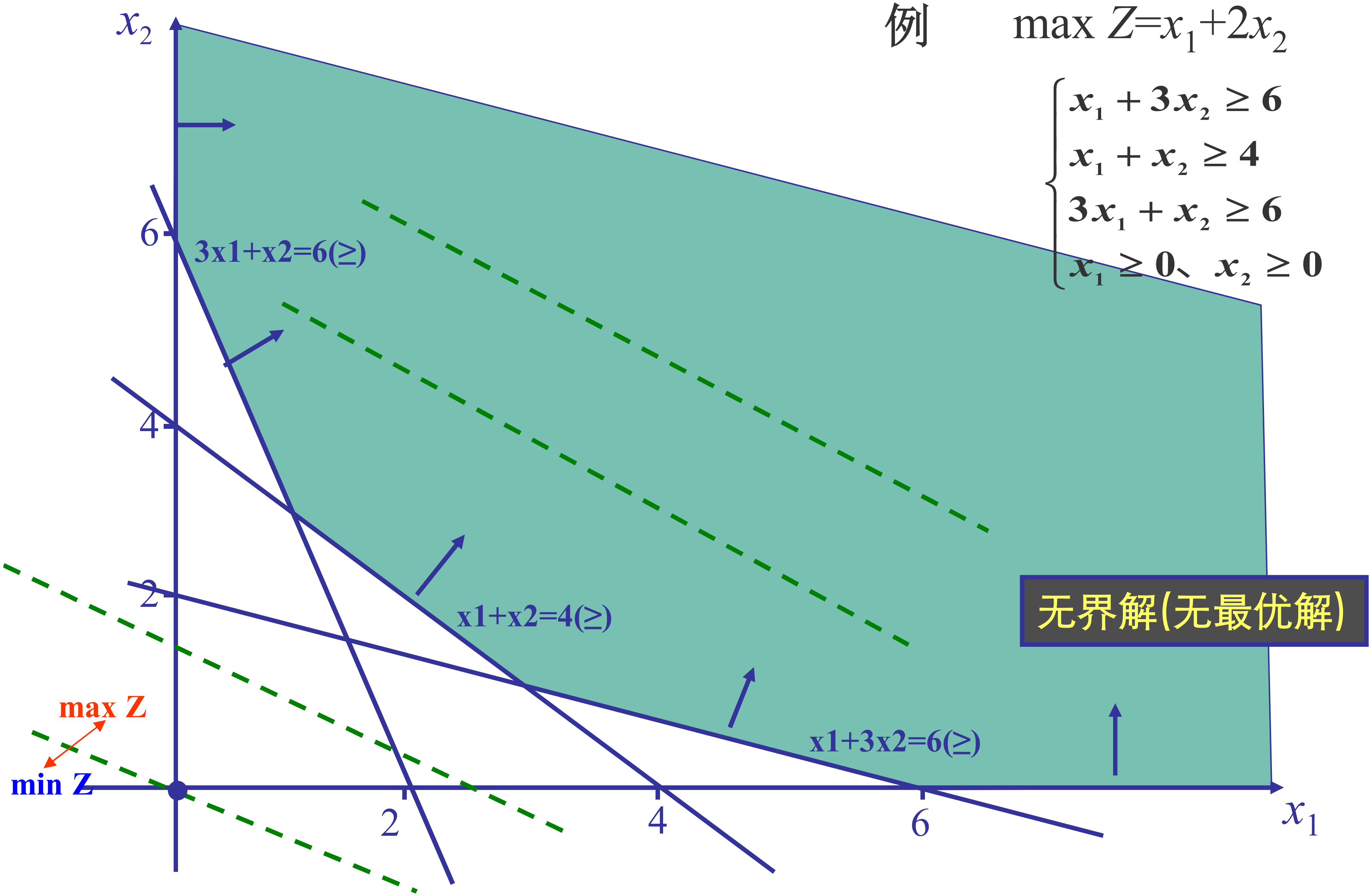
最优值 $z^* = -4$,连接 (0,2) 、(1,4) 之线段上的点皆是最优解。



线性规划的求解---图解法

例　　max $Z=x_1+2x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0、x_2 \geq 0 \end{cases}$$



线性规划的求解---图解法

例

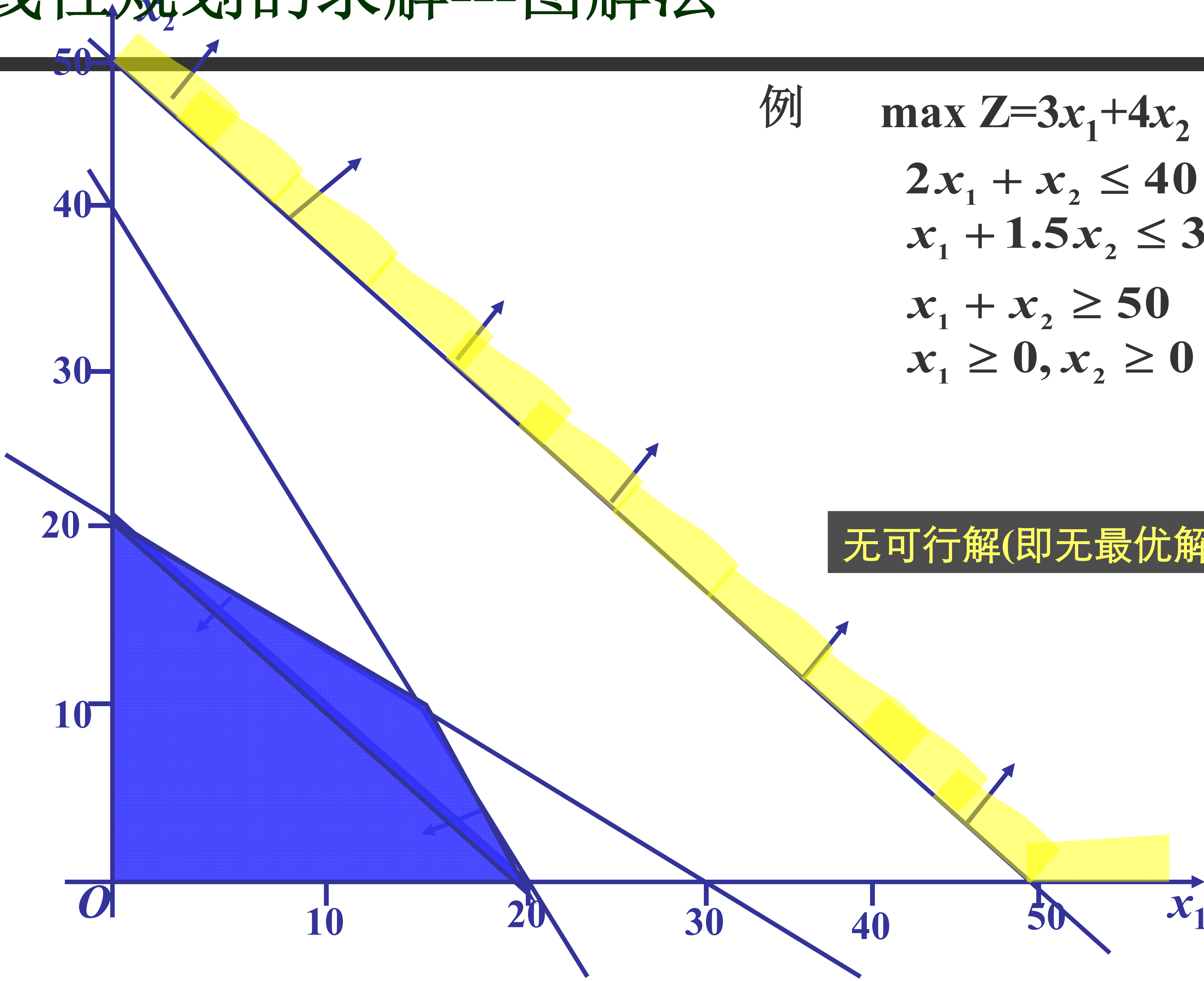
$$\max Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$2x_1 + x_2 \le 40$$

$$x_1 + 1.5x_2 \le 30$$

$$x_1 + x_2 \ge 50$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$



无可行解(即无最优解)

线性规划的求解---图解法

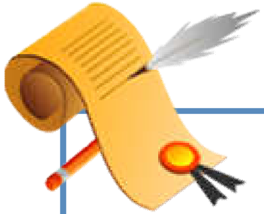
由图解法得到线性规划 问题解的几种情形

- 有最优解
  - 有唯一最优解
  - 有无穷多最优解
- 无最优解
  - 解无界
  - 不可行 （可行域为空集 ）

有唯一最优解、有无穷多最优解、解无界：可行域存在

问题：如何求解一般的线性规划问题？

线性规划的求解---图解法



学习要点：

1. 通过图解法了解线性规划有几种解的形式（唯一最优解；无穷多最优解；无界解；无可行解）

2. 作图的关键有三点：

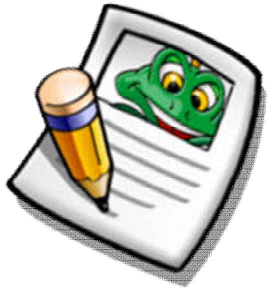
(1) 可行解区域要画正确

(2) 目标函数增加的方向不能画错

(3) 目标函数的直线怎样平行移动

单纯形法基本原理

1. 线性规划问题的解的概念



线性规划问题

$$\max(\min)\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (=\cdot\ge)\ b_i \quad (i=1\cdot 2\cdots m) \quad \cdots\cdots(2)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=1\cdot 2\cdots n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

- 可行解：满足约束条件②、③的解为可行解。所有可行解的集合为可行域。
- 最优解：使目标函数达到最大值的可行解。

单纯形法基本原理

- **基**：设A为约束条件②的m×n阶系数矩阵(m<n)，其秩为m，B是矩阵A中m阶满秩子矩阵（｜B｜≠0），称B是规划问题的一个基。设：

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mm} \end{bmatrix}=(p_1\cdots p_m)$$

称 B中每个列向量$P_j\,(j=1\ 2\ \cdots\ \cdots m)$ 为基向量。

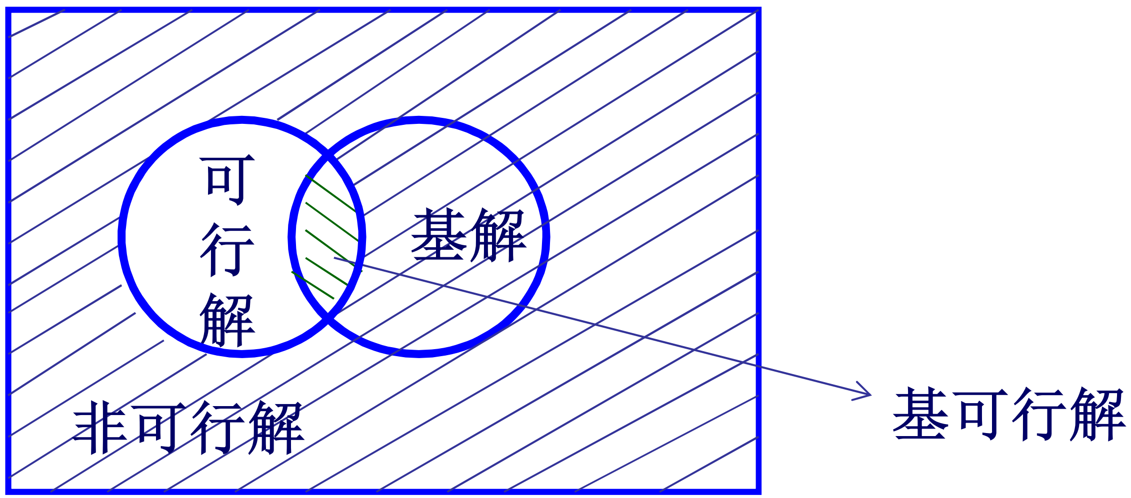
与基向量P_j 对应的变量x_j 为**基变量**。

除基变量以外的变量为**非基变量**。

- **基解**：某一确定的基B，令非基变量等于零，由约束条件方程②解出基变量，称这组解为基解。在基解中变量取非0值的个数不大于方程数m，基解的总数不超过 C_n^m

单纯形法基本原理

- **基可行解**：满足变量非负约束条件的基本解，简称基可行解。
- **可行基**：对应于基可行解的基称为可行基。



单纯形法基本原理

设 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个基，$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N})$

相应地，设 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix}$

则线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{Bx}_B + \boldsymbol{Nx}_N = \boldsymbol{b}$

令 $\boldsymbol{x}_N = \mathbf{0}$，可解出 $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

即关于基 $\boldsymbol{B}$ 的基本解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

若 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$，则该基本解为基本可 行解。

单纯形法基本原理

例10. $\max \quad x_1 - x_2$

$$
\begin{aligned}
s.t.\quad -2x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 2 \\
x_1 - 2x_2 \quad + x_4 \qquad &= 2 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 5 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

基 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 对应基本解 $(-1, 0, 0, 3, 6)^T$

基 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 对应基本可行解 $(4, 1, 9, 0, 0)^T$

单纯形法基本原理

例1.11 求线性规划问题的所有基矩阵。

$$\max\ Z = 4x_1 - 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ -10x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ x_j \geq 0, j = 1,\cdots,5 \end{cases}$$

解: 约束方程的系数矩阵为2×5矩阵 $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

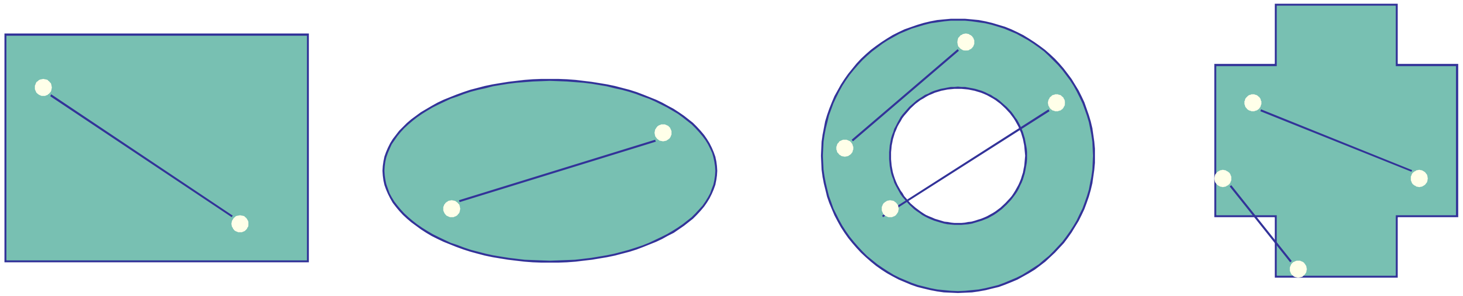
r(A)=2，2阶子矩阵有10个，其中基矩阵只有9个，即

$$B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -10 & 6 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -10 & 1 \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \quad B_6 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B_7 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \quad B_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

单纯形法基本原理

2. 凸集及其顶点



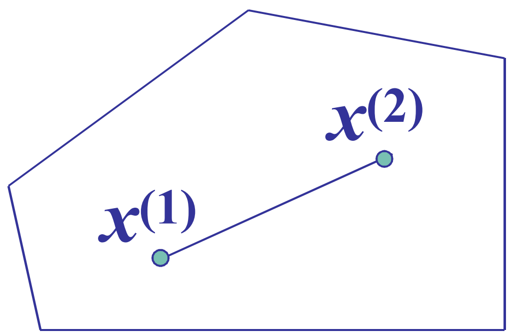
凸集：如果集合C中任意两个点X_1、X_2，其连线上的所有点也都是集合C中的点，称C为凸集。

单纯形法基本原理

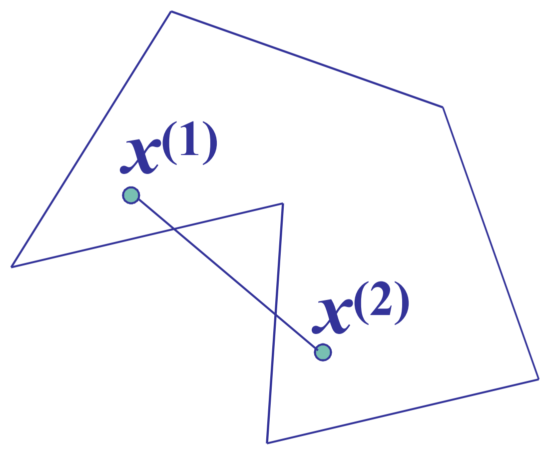
凸集：设 $K \subseteq R^n$，若任给 $x^{(1)}, x^{(2)} \in K$ 和 $0 \le \lambda \le 1$，

$\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} \in K$，则称 K 是凸集。

凸集



非凸集

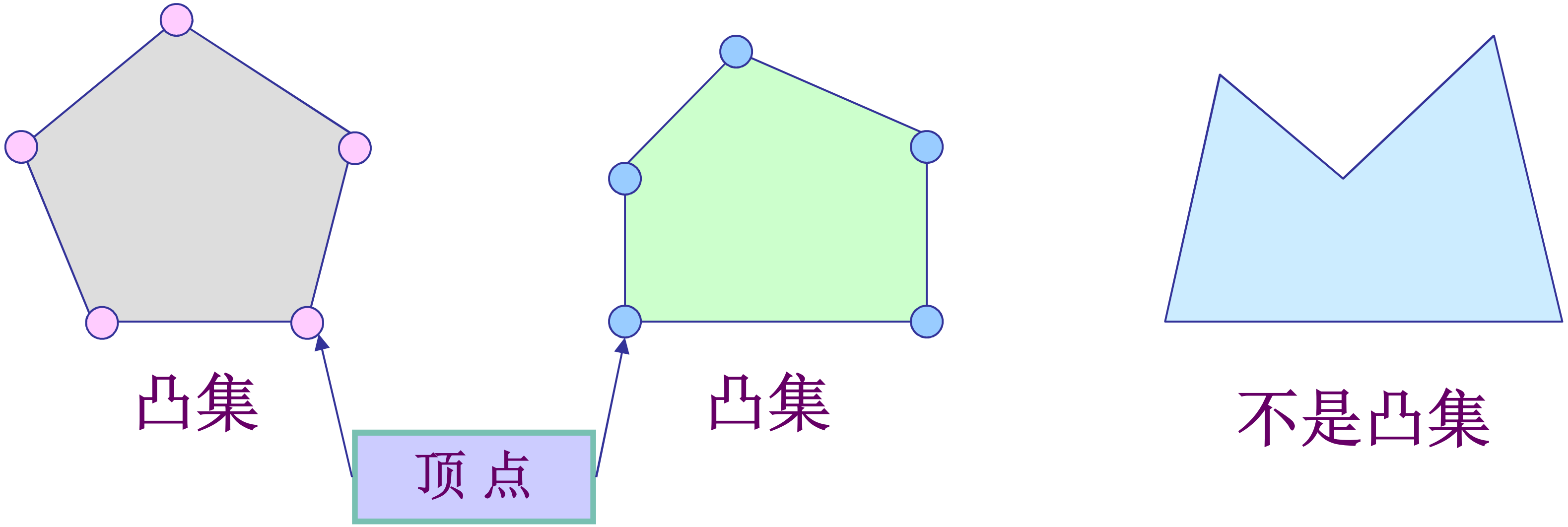


凸组合：若 $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)}$，$0 \le \lambda_i \le 1\,(i = 1, 2, \cdots, k)$，

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$，则称 x 是 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}$ 的凸组合。

单纯形法基本原理

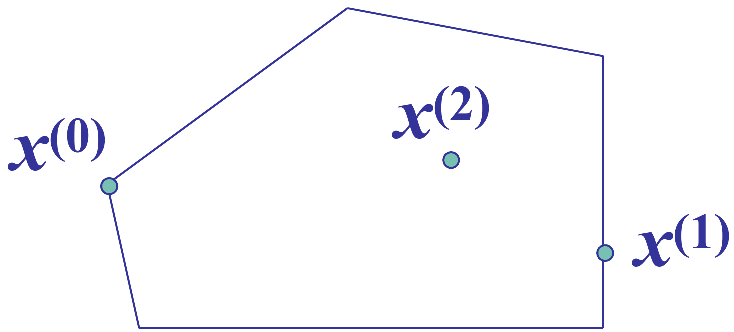
结论： K 是凸集当且仅当对于任意正整数 k， K 中任意 k 个点的凸组合皆属于 K 。



顶点：如果凸集C中不存在任何两个不同的点X_1，X_2，使X成为这两个点连线上的一个点

单纯形法基本原理

凸集的顶点：设 K 是凸集，$x \in K$，若 K 中不存在不同于 x 的两点 $x^{(1)}, x^{(2)}$ 使得 x 是 $x^{(1)}$ 和 $x^{(2)}$ 的凸组合，则称 x 是 K 的顶点。



$x^{(0)}$ 是顶点

$x^{(1)}$、$x^{(2)}$不是顶点

单纯形法基本原理

3. 几个基本定理

考虑标准形线性规划：

$$(LP)\qquad \max \quad z = c^T x \quad s.t. \quad Ax = b, \quad x \geq 0$$

其中 $A \in R^{m \times n}$ 且行满秩。

定理1：若线性规划问题存在可行解，则该问题的可行域是凸集。

定理2：线性规划问题的基可行解X对应可行域(凸集)的顶点。

定理3：若问题存在最优解，一定存在一个基可行解是最优解。（或在某个顶点取得）

单纯形法基本原理

定理 1. 线性规划 (LP) 的可行域 $D=\{x \mid Ax=b, x\geq 0\}$ 是凸集。

证明：任给 $x^{(1)}, x^{(2)} \in D$ 和 $0\leq \lambda \leq 1$，

因为 $Ax^{(1)}=b$，$Ax^{(2)}=b$，所以

$$A(\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)})=\lambda Ax^{(1)}+(1-\lambda)Ax^{(2)}=b;$$

因为 $x^{(1)}, x^{(2)}\geq 0$，所以 $\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\geq 0$，

所以 $\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\in D$，$D$ 是凸集。

单纯形法基本原理

引理1. 线性规划的可行解 x 是基本可行解当且仅当约束矩阵 A 中与 x 的正分量对应的列向量线性独立。

证明. 必要性由基本可行解的定义可证。注意到线性独立的列向量组可扩充成 A 的一个基，充分性即可证。

定理 2. 线性规划的基本可行解 对应可行域 D 的顶点。

证明. 若x是基本可行解, 不妨设其只有前k个分量为正。

若 x 不是 D 的顶点，则必有 $x^{(1)} \neq x^{(2)} \in D$ 和 $0 < \lambda < 1$ 使得 $x = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}$。

单纯形法基本原理

当 $j > k$ 时，$\lambda x_j^{(1)} + (1-\lambda)x_j^{(2)} = x_j = 0$，所以

$$x_j^{(1)} = x_j^{(2)} = 0.$$ 注：可行域中 $x_j^{(1)} \geq 0$，$x_j^{(2)} \geq 0$.

因为 $Ax^{(1)} = Ax^{(2)} = b$，所以

$$A(x^{(1)} - x^{(2)}) = \sum_{j=1}^{k} P_j(x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) = 0.$$

由于 $x^{(1)} \neq x^{(2)}$，所以至少有一个 $j\ (1 \leq j \leq k)$ 使得

$$x_j^{(1)} - x_j^{(2)} \neq 0,$$

即 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 线性相关，与引理矛盾 。

单纯形法基本原理

另一方面，若x是可行域 D 的顶点，仍设其只有前 k 个分量为正。若 $P_1, P_2, \ldots, P_k$ 线性相关，即存在不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 使得 $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j = 0$，于是

任给 $\delta > 0$，$\sum_{j=1}^{k} (x_j \pm \lambda_j \delta) P_j = \sum_{j=1}^{k} P_j x_j = b$，

令 $y = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k, 0, \cdots, 0)^T$，

$$x^{(1)} = x + \delta y, \quad x^{(2)} = x - \delta y,$$

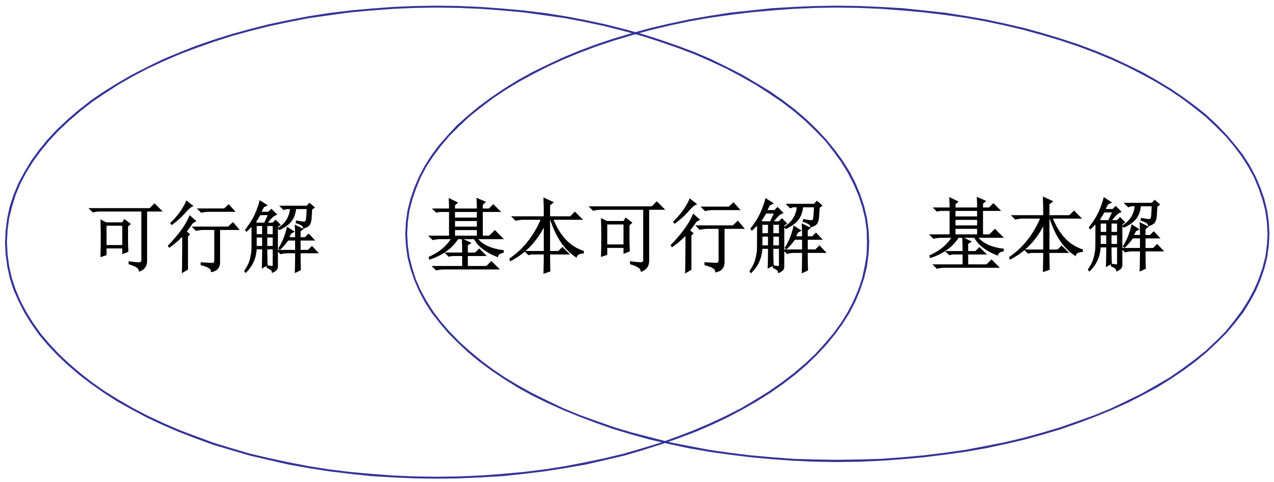
注：满足约束条件(2)，只要保证非负性就属于D

当δ充分小时，$x^{(1)}, x^{(2)} \in D$，但 $x = \frac{1}{2}(x^{(1)} + x^{(2)})$，

与 x是可行域的 D 顶点矛盾，因此 $P_1, P_2, \ldots, P_k$ 线性独立，由引理知 x是基本可行解。

单纯形法基本原理

定理 3. 若线性规划有最优解， 则最优解一定可以在顶点上到达，即一定有 基本可行解是最优解。

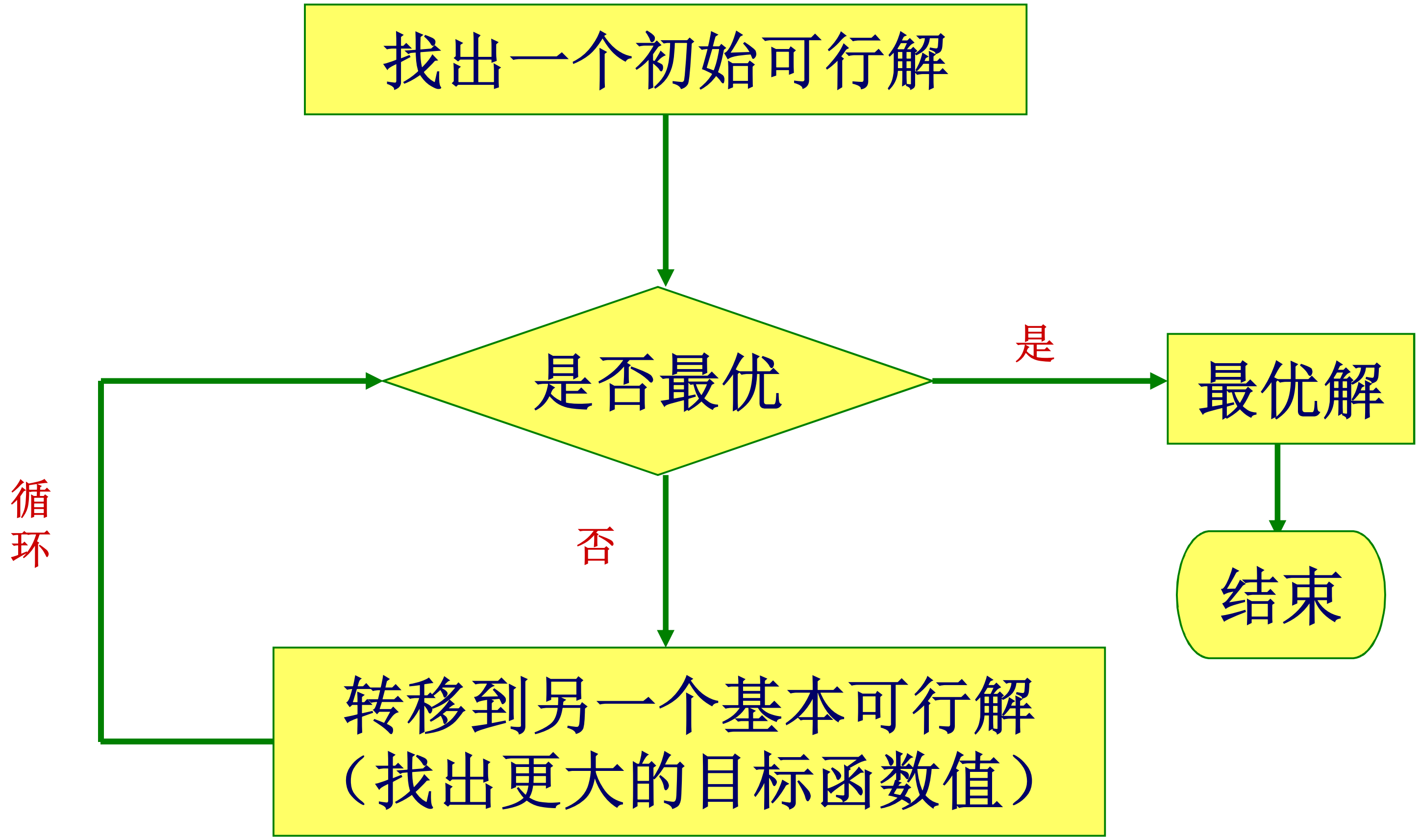


基本可行解的数量不超 过 C_n^m 个，

如何从中找出最优解？

单纯形法

单纯形法的思路



核心是：变量迭代

单纯形法

三个问题：

(1) 如何给出初始基本可行解？

(2) 如何判定一个基本可行解是否最优解？

(3) 如何迭代？

单纯形法

设 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个基本可行基， $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{N})$

相应地，设 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_B\\ \boldsymbol{x}_N\end{pmatrix}$

则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{Bx}_B+\boldsymbol{Nx}_N=\boldsymbol{b}$

可解出 $\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{Nx}_N$

令 $\boldsymbol{x}_N=0$，可得$\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

即关于基 $\boldsymbol{B}$ 的基本解 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_B\\ \boldsymbol{x}_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$

若 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geq \boldsymbol{0}$，则该基本解为基本可 行解。

单纯形法

设 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个基本可行基， $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B}\ \ \boldsymbol{N})$

相应地，设 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_B\\ \boldsymbol{x}_N\end{pmatrix}$

则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B+\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{b}$

可解出 $\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N$

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{x}_B+\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{C}_N-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}_N$$

$\boldsymbol{x}_N\geq 0$，如果$\boldsymbol{x}_N$中系数都小于等于 0,

那么可以发现此时 $\boldsymbol{Z}$已经取得最大值

单纯形法 举例

例12 试以下例来讨论如何用单纯形法求解。

某工厂在计划期内要安排生产Ⅰ、Ⅱ两种产品，已知生产单位产品所需的设备台时及A、B两种原材料的消耗，如表1-1所示。

资源 \ 产品	Ⅰ	Ⅱ	拥有量
设　备	1	2	8台时
原材料 A	4	0	16 kg
原材料 B	0	4	12 kg

每生产一件产品Ⅰ可获利2元，每生产一件产品Ⅱ可获利3元，问应如何安排计划使该工厂获利最多?

单纯形法 举例

已知本例的标准型为:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \qquad (1-11)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\cdots,5 \end{cases} \qquad (1-12)$$

单纯形法 举例

1、求初始解（找一个基可行解作为初始解）

基可行解： **n**个变量中， **m**个基变量，**n-m**个非基变量。在基可行解中，令非基变量为**0**，求基变量。通常找的基变量要易求基可行解，并且保证基变量对应的系数列向量是线性独立的。

单纯形法 举例

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 8 \\
4x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad &= 16 \qquad (1-12) \\
4x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 12
\end{aligned}
$$

x_3,x_4,x_5 对应的列向量P_3,P_4,P_5是线性独立的，这些向量构成一个基B 。对应于B的变量x_3,x_4,x_5为基变量.

把基变量用非基变量来表示，从**(1-12)**式中可以得到（**1-13**）

$$
\begin{cases}
x_3 = \ \ 8 - x_1 - 2x_2 \\
x_4 = 16 - 4x_1 \\
x_5 = 12 \qquad\ \ - 4x_2
\end{cases}
\qquad (1-13)
$$

单纯形法 举例

将**(1-13)**式代入目标函数**(1-11)**：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \qquad (1-11)$$

得到

$$z = 0 + 2x_1 + 3x_2 \qquad (1-14)$$

令 $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = 0$，得基本可行解 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0,8,16,12)^T$，

目标函数值 $\boldsymbol{z}^0 = 0$ 。

此基可行解的经济含义是：工厂没有安排生产产品I、II，资源都没有被利用，所以工厂的利润为*z*=0。

单纯形法 举例

二、检查最优性

分析目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$,

因为 x_1和 x_2的系数为正，因此若 x_1或 x_2的值可以增加，则目标函数值可以增加 。没有达到最优，求下 一个基可行解

若目标函数变量系数全小于等于0，则达到最优解

单纯形法 举例

三、如何求下一个基可行解？寻找换入、换出基变量

目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2$

选择正系数最大的那个非基变量

■ 确定x2换进，保持x_1=0，由(1-13)式得到

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_5 = 12 \quad - 4x_2 \end{cases} \quad (1-13)$$

考察 x_2 是否可以增加

$$\begin{cases} x_3 = 8 - 2x_2 \geq 0 \\ x_4 = 16 \geq 0 \\ x_5 = 12 - 4x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \leq 4 \\ x_2 \leq 3 \end{cases}$$

x_2可以增大到 3

把x_2作为一个新的基变量　x_5出基

单纯形法 举例

$x_2 = 3$时， $x_5 = 0$，即 x_2取代 x_5 成为基变量。

从而新基中基变量为 x_3, x_4， x_2,非基变量 x_1， x_5

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_5 = 12 - 4x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2 - x_1 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_2 = 3 - \frac{1}{4}x_5 \end{cases}$$

求出新基变量，即用非基变量表示基变量

此时目标函数可表示为：

$$z = 9 + 2x_1 - \frac{3}{4}x_5$$

令 $x_1 = x_5 = 0$，得基本可行解 $x^{(1)} = (0,3,2,16,0)^T$，

目标函数值 $z^1 = 9$ 。

单纯形法 举例

继续重复过程二三

分析目标函数 $z = 9 + 2x_1 - \frac{3}{4}x_5$

目标函数 中存在非基变量的系数 大于0，非最优解

把x_1换进，考察 x_1是否可以增大

$$\text{由}\begin{cases} x_3 = 2 - x_1 + \frac{1}{2}x_5 \geq 0 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \geq 0 \\ x_2 = 3 - \frac{1}{4}x_5 \geq 0 \end{cases} \quad \text{得}\begin{cases} x_1 \leq 2 \\ x_1 \leq 4 \end{cases}$$

x_1可以增大到 2

把x_1作为一个新的基变量 x_3出基

单纯形法 举例

$x_1=2$时， $x_3=0$，即 x_1取代 x_3 成为基变量。

从而新的基变量为 x_1, x_4， x_2,非基变量 x_3， x_5

$$\begin{cases} x_3 = 2 - \quad x_1 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_2 = 3 \qquad\quad - \frac{1}{4}x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - \quad x_3 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_2 = 3 \qquad\quad - \frac{1}{4}x_5 \\ x_4 = 8 + 4x_3 - 2x_5 \end{cases}$$

此时目标函数可表示为： $z = 13 - 2x_3 + \frac{1}{4}x_5$

令 $x_3 = x_5 = 0$，得基本可行解 $x^{(2)} = (2,3,0,8,0)^T$，

目标函数值 $z^2 = 13$ 。

单纯形法 举例

目标函数 $z = 13 - 2x_3 + \frac{1}{4}x_5$

把x_5换进，考察 x_5是否可以增大

$$
由\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 + \frac{1}{2}x_5 \geq 0 \\ x_2 = 3 - \frac{1}{4}x_5 \geq 0 \\ x_4 = 8 + 4x_3 - 2x_5 \geq 0 \end{cases}
\qquad
\begin{cases} x_5 \geq -2 \\ x_5 \leq 12 \\ x_5 \leq 4 \\ \text{所以 } x_5 \text{ 可以增大到 } 4 \end{cases}
$$

把x_5作为一个新的基变量 x_4出基

单纯形法 举例

$x_1=5$时，$x_4=0$，即 x_5取代 x_4 成为基变量。

从而新的基变量为 x_1, x_5，x_2,非基变量 x_3，x_4

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_2 = 3 - \frac{1}{4}x_5 \\ x_4 = 8 + 4x_3 - 2x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - \frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = 2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{8}x_4 \\ x_5 = 4 + 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

目标函数可表示为： $z = 14 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{8}x_4$

令 $x_3 = x_4 = 0$，得基本可行解 $x^{(2)} = (4,2,0,0,4)^T$，

目标函数值 $z^3 = 14$ 。

此时目标函数变量所有系数都小于0，取得最优解

单纯形法的计算步骤—检验数

考虑标准形线性规划：

$$(LP) \quad \max \quad z = c^T x \quad s.t. \quad Ax = b, \quad x \geq 0$$

其中 $A \in R^{m \times n}$ 且行满秩。

设已有 (LP) 的一个可行基 B，

$$A = (B, N), \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix},$$

则 $Ax = (B, N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = Bx_B + Nx_N = b$

所以 $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

单纯形法的计算步骤—检验数

$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ 对应的目标函数值为

$$z = (c_B^T, c_N^T)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$

$$= c_B^T B^{-1} b - c_B^T B^{-1} N x_N + c_N^T x_N$$

$$= c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$

由于 $c_B^T - c_B^T B^{-1} B = 0^T$，所以

$$z = c_B^T B^{-1} b + (c^T - c_B^T B^{-1} A) x$$

检验数

$$= c_B^T B^{-1} b + \sum_{j=1}^{n} (\underline{c_j - c_B^T B^{-1} P_j}) x_j$$

非基变量

单纯形法的计算步骤

令 $\delta_j = c_j - c_B^T B^{-1} P_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$，则

$$z = c_B^T B^{-1} b + \sum_{j=1}^{n} \delta_j x_j$$

称 $\delta_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$ 为检验数 。

若 x_j 是基变量，则 $\delta_j = 0$ 。

结论 1. 若 $\delta_j \le 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$，则以 B 为基的基本可行解 $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}$ 是最优的。

单纯形法的计算步骤

在上面得例子，基变量 $x_3, x_4, x_5 \Rightarrow x_3, x_4, x_2$

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_5 = 12 - 4x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2 - x_1 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_2 = 3 - \frac{1}{4}x_5 \end{cases}$$

如何确定换出变量?

如何确定换进变量?

$$\begin{cases} 8 = x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ 16 = 4x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 \\ 12 = 0x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ 16 = 4x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 \\ 3 = 0x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + \frac{1}{4}x_5 \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

$$z - 9 = 2x_1 - \frac{3}{4}x_5$$

目标函数

单纯形法的计算步骤

基变量 $x_3, x_4, \; x_5 \Rightarrow x_3, x_4, \; x_2$

$$\begin{cases} 8 = x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ 16 = 4x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 \\ 12 = 0x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ 16 = 4x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 \\ 3 = 0x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + \frac{1}{4}x_5 \end{cases}$$

目标函数

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

$$z - 9 = 2x_1 - \frac{3}{4}x_5$$

$$8 = x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \qquad 2 = x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 - \frac{1}{2}x_5$$

$$16 = 4x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 \qquad 16 = 4x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5$$

$$12 = 0x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 \qquad 3 = 0x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + \frac{1}{4}x_5$$

单纯形法的计算步骤

单纯形表

c_B	X_B	b	x_1	$\cdots$	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	$\cdots$	x_n	θ_i
	c_j		c_1	$\cdots$	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	$\cdots$	c_n	
c_1	x_1	b_1	1	$\cdots$	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$\cdots$	$\cdots$	a_{1n}	θ_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$,	$\vdots$
c_m	x_m	b_m	0	$\cdots$	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	$\cdots$	a_{mn}	θ_m
	σ_j		0	$\cdots$	$\cdots$	0					

其中： $\theta_i = \frac{b_i}{a_{kj}} \Big| a_{kj} > 0$ $\qquad$ $\sigma_j = c_j - \sum c_i a_{ij} = c_j - z_j$

单纯形法的计算步骤

例1.13 用单纯形法求下列线性规划的最优解

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 40 \\ x_1 + 3x_2 \le 30 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解：1）将问题化为标准型，加入松驰变量x_3、x_4则标准型为:

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

单纯形法的计算步骤

2）求出线性规划的初始基可行解，列出初始单纯形表。

c_j			3	4	0	0	θ_i
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	40	2	1	1	0	
0	x_4	30	1	3	0	1	
σ_j		0	3	4	0	0	

检验数

$$\sigma_1 = c_1 - (c_3 a_{11} + c_4 a_{21}) = 3 - (0 \times 2 + 0 \times 1) = 3$$

$$\sigma_2 = c_2 - (c_3 a_{21} + c_4 a_{22}) = 4 - (0 \times 1 + 0 \times 3) = 4$$

单纯形法的计算步骤

换入列

$b_i/a_{i2}, \quad a_{i2}>0$

将3化为1

			3	4	0	0	
c_B	基变量	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ_i
0	x_3	40	2	1	1	0	40
0	x_4	30	1	3	0	1	10
σ_j		0	3	4	0	0	
0	x_3	30	5/3	0	1	−1/3	18
4	x_2	10	1/3	1	0	1/3	30
σ_j		- 40	5/3	0	0	−4/3	
3	x_1	18	1	0	3/5	−1/5	
4	x_2	4	0	1	−1/5	−2/5	
σ_j		- 70	0	0	−1	−1	

换出行

乘以1/3后得到

最优解 $x = (18,4,0,0)^T$，最优值 $Z^* = 3x_1 + 4x_2 = 70$

单纯形法的计算步骤

3）进行最优性检验

如果表中所有检验数 $\sigma_j \leq 0$ ，则表中的基可行解就是问题的最优解，计算停止。否则继续下一步。

4）从一个基可行解转换到另一个目标值更大的基可行解，列出新的单纯形表

① 确定换入基的变量。选择$\sigma_j > 0$，对应的变量x_j作为换入变量，当有一个以上检验数大于0时，一般选择最大的一个检验数，即：$\sigma_k = \max\{\sigma_j \mid \sigma_j > 0\}$ ，其对应的x_k作为换入变量。

② 确定换出变量。根据下式计算并选择θ，选最小的θ对应基变量作为换出变量。$\theta_L = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0\right\}$

单纯形法的计算步骤

③ 用换入变量x_k替换基变量中的换出变量，得到一个新的基。对应新的基可以找出一个新的基可行解，并相应地可以画出一个新的单纯形表。

5）重复3）、4）步直到计算结束为止。

单纯形法的计算步骤

例1.14 用单纯形法求解

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 15 \\ \dfrac{1}{3}x_1 + x_2 + 5x_3 \le 20 \\ x_1、x_2、x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：将数学模型化为标准形式：

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 15 \\ \dfrac{1}{3}x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 = 20 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

不难看出x_4、x_5可作为初始基变量，列单纯形表计算。

单纯形法的计算步骤

c_j			1	2	1	0	0	θ_i
c_B	基变量	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	15	2	-3	2	1	0	—
0	x_5	20	1/3	1	5	0	1	20
σ_j		0	1	2	1	0	0	
0	x_4	75	3	0	17	1	3	25
2	x_2	20	1/3	1	5	0	1	60
σ_j		-40	1/3	0	−9	0	−2	
1	x_1	25	1	0	17/3	1/3	1	
2	x_2	35/3	0	1	28/9	-1/9	2/3	
σ_j		-145/3	0	0	-98/9	-1/9	-7/3	

最优解 $x=(25,35/3,0,0,0)^T, Z^*=x_1+2x_2+x_3=145/3$

单纯形法的计算步骤

学习要点：

1. 线性规划解的概念以及3个基本定理

2. 熟练掌握线性规划问题的标准化

3.熟练掌握单纯形法的解题思路及求解步骤

单纯形法的进一步讨论－人工变量法

人工变量法：

前面讨论了在标准型中系数矩阵有单位矩阵，很容易确定一组基可行解。在实际问题中有些模型并不含有单位矩阵，为了得到一组基向量和初基可行解，在约束条件的等式左端加一组虚拟变量，得到一组基变量。这种人为加的变量称为人工变量，构成的可行基称为人工基，用大M法或两阶段法求解，这种用人工变量作桥梁的求解方法称为人工变量法。

单纯形法的进一步讨论－人工变量法

例1.14 用大M法解下列线性规划

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1、x_2、x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解：首先将数学模型化为标准形式

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

系数矩阵中不存在单位矩阵，无法建立初始单纯形表。

单纯形法的进一步讨论－人工变量法

故人为添加两个单位向量，得到人工变量单纯形法数学模型：

其中：**M**是一个很大的抽象的数。

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$P1\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, 5 \end{cases}$$

$$\mathrm{X} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5)$$

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 - Mx_6 - Mx_7$$

$$P2\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, 7 \end{cases}$$

$$\overline{\mathrm{X}} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5, 0, 0)$$

$$= (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5, \boldsymbol{x}_6, \boldsymbol{x}_7)$$

如果X是P1的可行解，那么$\overline{\mathrm{X}}$一定是P2的可行解

反过来，若 $\overline{\mathrm{X}} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5, \boldsymbol{x}_6, \boldsymbol{x}_7)$是P2的最优解

若P2的最优值有界，则必有 $\boldsymbol{x}_6 = \boldsymbol{x}_7 = 0$，从而 X是P1的可行解

单纯形法的进一步讨论－人工变量法

c_j			3	2	-1	0	0	-M	-M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
-M	x_6	4	-4	3	1	-1	0	1	0	4
0	x_5	10	1	-1	2	0	1	0	0	5
-M	x_7	1	2	-2	1	0	0	0	1	1 →
σ_j			3-2M	2+M	-1+2M↑	-M				
-M	x_6	3	-6	5	0	-1	0	1		3/5 →
0	x_5	8	-3	3	0	0	1	0		8/3
-1	x_3	1	2	-2	1	0	0	0		——
σ_j			5-6M	5M↑	0	-M	0	0		
2	x_2	3/5	−6/5	1	0	−1/5	0			——
0	x_5	31/5	3/5	0	0	3/5	1			31/3
-1	x_3	11/5	−2/5	0	1	−2/5	0			——
σ_j			5	0	0	0	0			
2	x_2	13	0	1	0	1	2			
3	x_1	31/3	1	0	0	1	5/3			
-1	x_3	19/3	0	0	1	0	2/3			
σ_j			0	0	0	-5	-25/3			

单纯形法的进一步讨论－人工变量法

c_j			3	2	-1	0	0	-M	-M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
-M	x_6	4	-4	3	1	-1	0	1	0	4
0	x_5	10	1	-1	2	0	1	0	0	5
-M	x_7	1	2	-2	1	0	0	0	1	1 →
σ_j			3-2M	2+M	-1+2M ↑	-M	0	0	0	
-M	x_6	3	-6	5	0	-1	0	1		3/5 →
0	x_5	8	-3	3	0	0	1	0		8/3
-1	x_3	1	2	-2	1	0	0	0		---
σ_j			5-6M	5M ↑	0	-M	0	0		
2	x_2	3/5	-6/5	1	0	－1/5	0			--
0	x_5	31/5	3/5	0	0	3/5	1			31/3 →
-1	x_3	11/5	-2/5	0	1	－2/5	0			---
σ_j			5 ↑	0	0	0	0			
2	x_2	13	0	1	0	1	2			
3	x_1	31/3	1	0	0	1	5/3			
-1	x_3	19/3	0	0	1	0	2/3			
σ_j			0	0	0	-5	-25/3			

单纯形法的进一步讨论－人工变量法

例1.14-1 用大M法解下列线性规划

$$\max Z = 3x_1 - x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ -2x_1 \qquad\quad + x_3 = 1 \\ x_1、x_2、x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：首先将数学模型化为标准形式

$$\max Z = 3x_1 - x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 3 \\ -2x_1 \qquad + x_3 \qquad\quad = 1 \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, \cdots, 5 \end{cases}$$

系数矩阵中不存在单位矩阵，无法建立初始单纯形表。

单纯形法的进一步讨论－人工变量法

故人为添加两个单位向量，得到人工变量单纯形法数学模型:

$$\max Z = 3x_1 - x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, \cdots, 7 \end{cases}$$

其中：**M**是一个很大的抽象的数，不需要给出具体的数值，可以理解为它能大于给定的任何一个确定数值；再用前面介绍的单纯形法求解该模型，计算结果见下表。

单纯形法的进一步讨论－人工变量法

C_j			3	-1	-1	0	0	-M	-M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
-M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	3/2
-M	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	1 →
σ_j		4M	3-6M	-1+M	-1+3M	0	-M	0	0	
0	x_4	10	3	-2	0	1	0	0	-1	–
-M	x_6	1	0	1	0	0	-1	1	-2	1 →
-1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	–
σ_j		M+1	1	-1+M	0	0	-M	0	-3M+1	

单纯形法的进一步讨论－人工变量法

C_j			3	-1	-1	0	0	-M	-M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x4	12	3	0	0	1	-2	2	-5	4 →
-1	x2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	–
-1	x3	1	-2	0	1	0	0	0	1	–
σ_j		2	1	0	0	0	-1	-M+1	-M-1	
3	x1	4	1	0	0	1/3	-2/3	2/3	-5/3	
-1	x2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
-1	x3	9	0	0	1	2/3	-4/3	4/3	-7/3	
σ_j		-2	0	0	0	-1/3	-1/3	-M+1/3	-M+2/3	

单纯形法的进一步讨论－两阶段法

用计算机处理数据时，只能用很大的数代替M,可能造成计算上的错误，故多采用两阶段法。

第一阶段：在原线性规划问题中加入人工变量，构造如下模型：

$$\max Z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1 \cdots x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\min \omega = x_{n+1} + \cdots + x_{n+m} + 0x_1 + \cdots + 0x_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \ddots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad + x_{n+m} = b_m \\ x_1 \cdots x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

明显，辅助问题最优值≥0，并且有一个初始基本可行解

$$x_j = 0 \ \ (j = 1, 2, \cdots, n), \quad x_{n+i} = b_i \ \ (i = 1, 2, \cdots, m)$$

用单纯形法求解辅助模型，若最优值ω=0,说明问题存在基可行解，可以进行第二个阶段；否则，原问题无可行解，停止运算。

单纯形法的进一步讨论－两阶段法

结论 4. 原问题有可行解

$\Leftrightarrow$ 辅助问题的最优值 $w^* = 0$。

第二阶段（当 $w^* = 0$ 时做）

删去第一阶段结束时人工变量中的非基变量在单纯形表中对应的列（若有人工变量是基变量将人工变量变为非基变量）；

考虑原目标函数，重新计算所有非基变量的检验数后继续迭代。

单纯形法的进一步讨论－人工变量法

例1.15 两阶段法解下列线性规划

$$\max Z = 3x_1 - x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad - x_5 = 3 \\ -2x_1 \quad + x_3 \qquad\qquad = 1 \\ x_1、x_2、x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解：第一阶段的线性规划问题可写为：(注意：没有化为极大化问题)

$$\min \omega = x_6 + x_7$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \quad + x_4 \qquad\qquad = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 \quad + x_6 \quad = 3 \\ -2x_1 \quad + x_3 \qquad\qquad + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, \ldots, \ x_7 \geq 0 \end{cases}$$

单纯形法的进一步讨论－两阶段法

C_j			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
1	x6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	3/2
1	x7	1	-2	0	1	0	0	0	1	1 →
ω		4	6	-1	-3	0	1	0	0	
0	x4	10	3	-2	0	1	0	0	-1	–
1	x6	1	0	1	0	0	-1	1	-2	1 →
0	x3	1	-2	0	1	0	0	0	1	–
ω		1	0	-1	0	0	1	0	3	
0	x4	12	3	0	0	1	-2	2	-5	
0	x2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
0	x3	1	-2	0	1	0	0	0	0	
ω		0	0	0	0	0	0	1	1	

单纯形法的进一步讨论－两阶段法

第二阶段:

在第一阶段的最终表中，去掉人工变量，将目标函数的系数换成原问题的目标函数系数，作为第二阶段计算的初始表（用单纯形法计算）。

例: $\max Z = 3x_1 - x_2 - x_3$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, \ldots, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

单纯形法的进一步讨论－两阶段法

第二阶段：　　$\max Z = 3x_1 - x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5$

cj			3	-1	-1	0	0			
cB	xB	b	x1	x2	x3	x4	x5			
0	x4	12	3	0	0	1	-2			4 →
-1	x2	1	0	1	0	0	-1			–
-1	x3	1	-2	0	1	0	0			–
σ_j		2	1	0	0	0	-1			
3	x1	4	1	0	0	1/3	-2/3			
-1	x2	1	0	1	0	0	-1			
-1	x3	9	0	0	1	2/3	-4/3			
σ_j		-2	0	0	0	-1/3	-1/3			

∴最优解为（4　1　9　0　0），目标函数 Z = 2

单纯形法的进一步讨论－两阶段法

例1-16. $\max \quad z = x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4$

$$
\begin{aligned}
s.t. \quad & x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\
& 3x_1 + 3x_3 + x_4 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

辅助问题

$$
\begin{aligned}
\max \quad & w = -x_6 - x_7 \\
s.t. \quad & x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 4 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\
& 3x_1 + 3x_3 + x_4 + x_7 = 4 \\
& x_1, x_2, \cdots, x_7 \geq 0
\end{aligned}
$$

单纯形法的进一步讨论－两阶段法

c_j			0	0	0	0	0	-1	-1	θ_i
c_B	基变量	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
-1	x_6	4	0	1	2	1	0	1	0	2
0	x_5	4	-1	2	1	1	1	0	0	4
-1	x_7	4	3	0	3	1	0	0	1	4/3
σ_j		8	3	1	5	2	0	0	0	
-1	x_6	4/3	-2	1	0	1/3	0	1	-2/3	4
0	x_5	8/3	-2	2	0	2/3	1	0	-1/3	2
0	x_3	4/3	1	0	1	1/3	0	0	1/3	---
σ_j		4/3	-2	1	0	1/3	0	0	-5/3	

单纯形法的进一步讨论－两阶段法

c_j			0	0	0	0	0	-1	-1	θ_i
c_B	基变量	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
-1	x_6	4/3	-2	1	0	1/3	0	1	-2/3	4
0	x_5	8/3	-2	2	0	2/3	1	0	-1/3	2 →
0	x_3	4/3	1	0	1	1/3	0	0	1/3	---
σ_j		4/3	-2	1 ↑	0	1/3	0	0	-5/3	
-1	x_6	0	-1	0	0	0	-1/2	1	-1/2	→ 出基
0	x_2	4/3	-1	1	0	1/3	1/2	0	-1/6	
0	x_3	4/3	1	0	1	1/3	0	0	1/3	
σ_j		0	-1 ↑	0	0	0	-1/2	0	-3/2	

以 -1 为主元，把 x_1 变成基变量。

也可以 $-1/2$ 为主元，把 x_5 变成基变量。

单纯形法的进一步讨论－两阶段法

c_j			0	0	0	0	0	-1	-1	θ_i
c_B	基变量	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
-1	x_6	0	-1	0	0	0	-1/2	1	-1/2	
0	x_2	4/3	-1	1	0	1/3	1/2	0	-1/6	
0	x_3	4/3	1	0	1	1/3	0	0	1/3	
σ_j		4/3	-1	0	0	0	-1/2	0	-3/2	
0	x_1	0	1	0	0	0	1/2	-1	1/2	
0	x_2	4/3	0	1	0	1/3	1	-1	1/3	
0	x_3	4/3	0	0	1	1/3	-1/2	1	1/6	
σ_j		0	-1	0	0	0	-1/2	0	-3/2	

单纯形法的进一步讨论－两阶段法

原问题目标函数为 $\max \quad z = x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4$

原问题的单纯形表为

	c_j		1	3	-1	-1	0	θ_i
c_B	基变量	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_1	0	1	0	0	0	1/2	
3	x_2	4/3	0	1	0	1/3	1	
-1	x_3	4/3	0	0	1	1/3	-1/2	
σ_j		-8/3	0	0	0	-5/3	-4	

最优解 $x^* = (0, 4/3, 4/3, 0, 0)$， 最优值 $z^* = 8/3$

单纯形法的进一步讨论—计算中的几个问题

1、目标函数为极小化时解最优性判别

	max	min
$\delta_j = c_j - c_B^T B^{-1} P_j$	≤ 0	≥ 0

单纯形法的进一步讨论—计算中的几个问题

2、退化与Bland 规则

即计算出的 θ（用于确定换出变量）存在有两个以上相同的最小比值，会造成下一次迭代中由一个或几个基变量等于零，这就是退化（会产生退化解）。

为避免出现计算的循环，勃兰特(Bland)提出一个简便有效的规则（摄动法原理）：

(1) 当存在多个 $\sigma_j > 0$ 时，选下标最小的非基变量为换入变量；

(2) 当θ值出现两个以上相同的最小值时，选下标最小的基变量为换出变量。

单纯形法的进一步讨论—计算中的几个问题

x_1，x_3检验数相同，选择x_1进基

x_5，x_6 θ相同，选择x_5出基

C			2	-80	2	-24	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	2	1	-32	-4	36	1	0	0	2
0	x_6	2	1	-24	-1	6	0	1	0	2
0	x_7	1	0	0	1	0	0	1	1	-
Z		0	2	-80	2	-24	0	0	0	

单纯形法的进一步讨论—计算中的几个问题

3、无可行解 的判别

通过大M法或两阶段法求初始的基本可行解。但是如果在大M法的最优单纯形表的基变量中仍含有人工变量，或者两阶段法的辅助线性规划的目标函数的极小值大于零，那么该线性规划就不存在可行解。

单纯形法的进一步讨论—计算中的几个问题

例

C			-3	-2	-1	0	0	0	-M	-M	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
0	x_4	6	1	1	1	1	0	0	0	0	6/1
-M	x_7	4	1	0	-1	0	-1	0	1	0	-
-M	x_8	3	0	1	-1	0	0	-1	0	1	3/1
Z		-7M	-3+M	-2+M	-1-2M	0	-M	-M	0	0	
0	x_4	3	1	0	2	1	0	1	0	-1	3/1
-M	x_7	4	1	0	-1	0	-1	0	1	0	4/1
-2	x_2	3	0	1	-1	0	0	-1	0	1	-
Z		-6-4M	-3+M	0	-3-M	0	-M	-2	0	2-M	
-3	x_1	3	1	0	2	1	0	1	0	-1	
-M	x_7	1	0	0	-3	-1	-1	-1	1	1	
-2	x_2	3	0	1	-1	0	0	-1	0	1	
Z		-15-M	0	0	3-3M	3-M	-M	1-M	0	-1	

运算到检验数全负为止，仍含有人工变量，无可行解。

单纯形法的进一步讨论—计算中的几个问题

4　无最优解

无可行解是指原规划不存在可行解，从几何的角度解释是指线性规划问题的可行域为空集；

无最优解则是存在可行解，但是可行解的目标函数达不到最优值或无界解。

判别方法：无最优解判别定理

在求解极大化的线性规划问题过程中，若某单纯形表的检验行存在某个大于零的检验数，但是该检验数所对应的非基变量的系数列向量的全部系数都为负数或零，则该线性规划问题无最优解

单纯形法的进一步讨论—计算中的几个问题

C			2	2	0	0	θ
C	X_B	B	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	X_3	1	-1	1	1	0	
0	X_4	2	-1/2	1	0	1	
Z		0	2	2	0	0	

因$\sigma_1=2>0$ 但 $P_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\leq 0$ 所以原问题无最优解

单纯形法的进一步讨论—计算中的几个问题

5 无穷多最优解

若线性规划问题某个基本可行解所有的非基变量检验数都小于等于零，但其中存在一个检验数等于零，那么该线性规划问题有无穷多最优解。

例：最优表：

C			1	2	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	0	0	1	2	-1	2/2
2	x_2	3	0	1	0	1	0	3/1
1	x_1	2	1	0	0	-2	1	-
Z’		8	0	0	0	0	-1	

非基变量检验数 $\sigma_4=0$ ，所以有无穷多最优解。

单纯形法的进一步讨论

解的判别：

1）唯一最优解判别：最优表中所有非基变量的检验数非零，则线性规划具有唯一最优解。

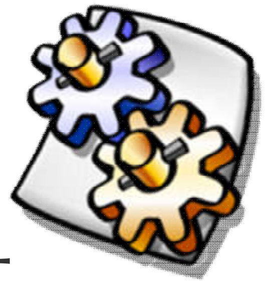
2）多重最优解判别：最优表中存在非基变量的检验数为零，则线性规划具有多重最优解（或无穷多最优解）。

3）无界解判别：某个$\lambda_k>0$且$a_{ik}\leq 0$（i=1，2,…,m）则线性规划具有无界解。

4）无可行解的判断：当用大M单纯形法计算得到最优解并且存在$R_i>0$时，则表明原线性规划无可行解。

5）退化解的判别：存在某个基变量为零的基本可行解。

线性规划模型的应用



一般而言，一个经济、管理问题凡是满足以下条件时，才能建立线性规划模型。

- 要求解问题的目标函数能用数值指标来反映，且为线性函数
- 存在着多种方案
- 要求达到的目标是在一定条件下实现的，这些约束可用线性等式或不等式描述

线性规划模型的应用

常见问题

- 合理利用线材问题：如何下料使用材最少。
- 配料问题：在原料供应量的限制下如何获取最大利润。
- 投资问题：从投资项目中选取方案，使投资回报最大。
- 产品生产计划：合理利用人力、物力、财力等，使获利最大。
- 劳动力安排：用最少的劳动力来满足工作的需要。
- 运输问题：如何制定调运方案，使总运费最小。

线性规划模型的应用

建立线性规划模型的过程可以分为四个步骤:

(1)设立决策变量;

(2)明确约束条件并用决策变量的线性等式或不等式表示;

(3)用决策变量的线性函数表示目标，并确定是求极大（Max）还是极小（Min）；

(4)根据决策变量的物理性质研究变量是否有非负性。

线性规划在经济管理中的应用

1. 资源的合理利用

某厂计划在下一生产周期内生产$B_1, B_2, \cdots B_n$种产品，要消耗$A_1, A_2, \cdots A_m$种资源，已知每件产品所消耗的资源数、每种资源的数量限制以及每件产品可获得的利润如表所示，问如何安排生产计划，才能充分利用现有的资源，使获得的总利润最大?

模型

$$\max\ Z = \sum c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum a_{ij} x_j \le b_i \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

单件消耗 资源＼产品	B_1	$\cdots$	B_n	资源限制
A_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
单件利润	C_1	$\cdots$	C_n	

线性规划在经济管理中的应用

2. 生产组织与计划问题

某工厂用机床$A_1, A_2, \cdots A_m$加工$B_1, B_2, \cdots B_n$种零件。在一个周期内，各机床可能工作的机时（台时），工厂必须完成各种零件的数量、各机床加工每个零件的时间（机时/个）和加工每个零件的成本（元/个）如表所示，问如何安排各机床的生产任务，才能完成加工任务，又使总成本最低?

加工成本 \ 零件 / 机床	B_1	$\cdots$	B_n
A_1	c_{11}	$\cdots$	c_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_m	c_{m1}	$\cdots$	c_{mn}

加工时间 \ 零件 / 机床	B_1	$\cdots$	B_n	机时限制
A_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	a_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	a_m
必须零件数	b_1	$\cdots$	b_n	

线性规划在经济管理中的应用

设x_{ij}为机床 A_i在一生产周期加工零件 B_j的数量，求 x_{ij}(一组变量）。模型：

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum a_{ij} x_{ij} \le a_i \\ \sum x_{ij} \ge b_j \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

线性规划在经济管理中的应用

3. 合理下料问题

例：现有一批某种型号的圆钢长8米，需要截取2.5米长的毛坯100根，长1.3米的毛坯200根。问如何才能既满足需要，又能使总的用料最少?

解：为了找到一个省料的套裁方案，必须先设计出较好的几个下料方案。其次要求这些方案的总体能裁下所有各种规格的圆钢，以满足对各种不同规格圆钢的需要并达到省料的目的，为此可以设计出4种下料方案以供套裁用。

	I	II	III	IV
2.5m	3	2	1	0
1.3m	0	2	4	6
料头	0.5	0.4	0.3	0.2

线性规划在管理中的应用

设按方案I、II、III、IV下料的原材料根数分别为x_j (j=1，2,3,4)，可列出下面的数学模型：

$$\min\ Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 100 \\ 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \geq 200 \\ x_j \geq 0 (j = 1.2.3.4) \end{cases}$$

线性规划在经济管理中的应用

4. 合理配料问题

某饲养场用n种饲料$B_1, B_2, \ldots B_n$配置成含有m种营养成分$A_1, A_2, \ldots A_m$的混合饲料，其余资料如表所示。问应如何配料，才能既满足需要，又使混合饲料的总成本最低?

含量 \ 饲料 成分	B_1	$\cdots$	B_n	最低需要量
A_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
原料单价	C_1	$\cdots$	C_n	

解：

设x_j表示第j种饲料所用的数量，其模型如下：

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i & (\mathrm{i} = 1,2 \cdots \mathrm{m}) \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

线性规划在管理中的应用

例：某人每天食用甲、乙两种食物（如猪肉、鸡蛋），其资料如下：问两种食物各食用多少，才能既满足需要、又使总费用最省?

含量 食物 / 成分	甲	乙	最低需要量
A_1	0.1	0.15	1.00
A_2	1.7	0.75	7.50
A_3	1.10	1.30	10.00
原料单价	2	1.5	

线性规划在管理中的应用

解：设X_j表示B_j种食物用量

$$\min\ Z = 2x_1 + 1.5x_2$$

$$\begin{cases} 0.10x_1 + 0.15x_2 \geq 1.00 \\ 1.70x_1 + 0.75x_2 \geq 7.50 \\ 1.10x_1 + 1.30x_2 \geq 10.00 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

线性规划在管理中的应用

5.人力资源分配问题

例1.11　某昼夜服务的公交线路每天各时间段内所需司机和乘务人员人数如下表所示:

班次	时间	所需人员
1	6:00——10:00	60
2	10:00——14:00	70
3	14:00——18:00	60
4	18:00——22:00	50
5	22:00——2:00	20
6	2:00——6:00	30

设司机和乘务人员分别在各时间段开始时上班，并连续工作8小时，问该公交线路应怎样安排司机和乘务人员，即能满足工作需要，又使配备司机和乘务人员的人数减少?

线性规划在管理中的应用

解：设x_i表示第i班次时开始上班的司机和乘务人员人数。

$$\min \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$s.t\begin{cases} x_1 + x_6 \geq 60 \\ x_1 + x_2 \geq 70 \\ x_2 + x_3 \geq 60 \\ x_3 + x_4 \geq 50 \\ x_4 + x_5 \geq 20 \\ x_5 + x_6 \geq 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

此问题最优解：$x_1 = 50$，　$x_2 = 20$，　$x_3 = 50$，　$x_4 = 0$，　$x_5 = 20$，　$x_6 = 10$，一共需要司机和乘务员150人。