第五章 连续时间的马尔可夫链

5.1 连续时间的马尔可夫链

5.2 柯尔莫哥洛夫微分方程

5.3 生灭过程

5.1 连续时间的马尔可夫链

考虑取非负实数值的连续时间随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$，状态空间为$I=\{i_n, n \geq 0\}$（即参数集连续，状态空间离散的马尔可夫链）

定义 5.1

若对任意的$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1}$及$i_1, \cdots, i_n, i_{n+1} \in I$，有

$$P\{X(t_{n+1})=i_{n+1} \mid X(t_1)=i_1, X(t_2)=i_2, \cdots, X(t_n)=i_n\}$$
$$=P\{X(t_{n+1})=i_{n+1} \mid X(t_n)=i_n\}$$

则称$\{X(t), t \geq 0\}$为连续时间马尔可夫链。

$P\{X(s+t)=j \mid X(s)=i\}=p_{ij}(s,t)$ 表示系统在 s 时刻处于状态 i，经过时间 t 后转移到状态 j 的概率。

定义 5.2 若 $p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t)$（与 S 无关），则称马尔可夫链具有平稳的或齐次的转移概率，此时转移概率为 $P=(p_{ij}(t)),(i,j\in I,t\geq 0)$，称为齐次马尔可夫过程。

性质：若τ_i为过程在状态转移之前停留在状态I的时间，则对$s, t\geq 0$有

(1) $P\{\tau_i > s+t \mid \tau_i > s\} = P\{\tau_i > t\}$

(2) τ_i服从指数分布

- 过程在状态转移之前处于状态i的时间τ_i服从指数分布 $F_{\tau_i}(x)=1-e^{-v_i x}$

(1)当$v_i=\infty$时，$F_{\tau_i}(x)=1, P\{\tau_i>x\}=1-F_{\tau_i}(x)=0,$ 状态i的停留时间τ_i超过x的概率为0，则称状态i为瞬时状态；

(2)当$v_i=0$时，$F_{\tau_i}(x)=0, P\{\tau_i>x\}=1-F_{\tau_i}(x)=1,$ 状态i的停留时间τ_i超过x的概率为1，则称状态i为吸收状态。

说明： 一个连续时间马尔可夫链一旦进入状态 i 就具有下列性质：

（1） 在状态 i 的停留时间 τ_i 服从参数为 v_i 的指数分布

$v_i=\infty$， 称状态 i 为瞬时状态，

$v_i=0$， 称状态 i 为吸收状态。

（2）离开状态 i 时，则以概率 p_{ij} 进入状态 j，$\sum\limits_{j\neq i} p_{ij}=1$。

即：一个连续时间马尔可夫链实际上是：

（1)按照一个离散时间的马尔可夫链从一个状态转移到另一个状态；

（2）但在转移到下一个状态之前，它在各个状态停留的时间服从指数分布。

（3）在状态 i 的停留时间 τ_i 与下一个到达的状态相互独立。

定理 5.1

齐次马尔可夫过程的转移概率具有下列性质：

（1） $p_{ij}(t) \geq 0$ （非负性）；

（2） $\sum_{j \in I} p_{ij}(t) = 1$ （行和为 1）；

（3） $p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in I} p_{ik}(t) p_{kj}(s)$ （C—K 方程）

$$(3)\quad p_{ij}(t+s)=P\{X(t+s)=j \mid X(0)=i\}$$

$$=\sum_{k\in I} P\{X(t+s)=j, X(t)=k \mid X(0)=i\}$$

$$=\sum_{k\in I} P\{X(t+s)=j \mid X(t)=k, X(0)=i\}$$

$$\cdot P\{X(t)=k \mid X(0)=i\}$$

$$=\sum_{k\in I} P\{X(t+s)=j \mid X(t)=k\} P\{X(t)=k \mid X(0)=i\}$$

$$=\sum_{k\in I} P\{X(s)=j \mid X(0)=k\} P\{X(t)=k \mid X(0)=i\}$$

$$=\sum_{k\in I} p_{kj}(s) p_{ik}(t)=\sum_{k\in I} p_{ik}(t) p_{kj}(s)$$

正则性条件： $\lim\limits_{t\to 0} p_{ij}(t)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ (严格讲 $t\to 0^+$)

含义： 过程刚进入某状态不可能立即又跳跃到另一状态。

	正则性	分布律	转移方程
时间离散	$p_{ii}^{(0)}=1,$ $p_{ij}^{(0)}=0(i\neq j)$	$p_{ij}^{(n)}\geq 0,$ $\sum\limits_{j\in I} p_{ij}^{(n)}=1$	$p_{ij}^{(n)}=\sum\limits_{k\in I} p_{ik}^{(l)} p_{kj}^{(n-l)}$
时间连续	$\lim\limits_{t\to 0} p_{ij}(t)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$	$p_{ij}(t)\geq 0$ $\sum\limits_{j\in I} p_{ij}(t)=1$	$p_{ij}(t+s)=\sum\limits_{k\in I} p_{ik}(t) p_{kj}(s)$

定义 5.3 齐次马尔可夫过程的

（1）初始概率分布：$\{p_j, j \in I\}$， $p_j = P\{X(0) = j\}$

（2）绝对概率分布：$\{p_j(t), j \in I\}$， $p_j(t) = P\{X(t) = j\}, t \geq 0$

定理 5.2（齐次马氏过程的绝对概率及有限维分布的性质）

（1） $p_j(t) \geq 0$；

（2） $\sum_{j \in I} p_j(t) = 1$；

（3） $p_j(t) = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}(t)$ （用初始概率分划）

（4） $p_j(t+\tau) = \sum_{i \in I} p_i(t) p_{ij}(\tau)$ （用绝对概率分划）

（5） $P\{X(t_1)=i_1, \cdots, X(t_n)=i_n\} = \sum_{i \in I} p_i p_{ii_1}(t_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \cdots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$

例 5.1 证明泊松过程$\{X(t), t \geq 0\}$为连续时间齐次马氏链

证明：（1）证明泊松过程$\{X(t), t \geq 0\}$具有马尔可夫性。

已知 $X(0)=0$，对任意的$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1}$，$i_1, \cdots, i_n, i_{n+1} \in I$，

$$P\{X(t_{n+1})=i_{n+1} \mid X(t_1)=i_1, X(t_2)=i_2, \cdots, X(t_n)=i_n\}$$

$$=P\{X(t_{n+1})-X(t_n)=i_{n+1}-i_n \mid X(t_1)-X(0)=i_1, \cdots, X(t_n)-X(t_{n-1})=i_n-i_{n-1}\}$$

$=P\{X(t_{n+1})-X(t_n)=i_{n+1}-i_n\}$（因为泊松过程是独立增量过程）

而 $P\{X(t_{n+1})=i_{n+1} \mid X(t_n)=i_n\}$

$$=P\{X(t_{n+1})-X(t_n)=i_{n+1}-i_n \mid X(t_n)-X(0)=i_n\}$$

$=P\{X(t_{n+1})-X(t_n)=i_{n+1}-i_n\}$（因为泊松过程是独立增量过程）

所以 $P\{X(t_{n+1})=i_{n+1} \mid X(t_1)=i_1, X(t_2)=i_2, \cdots, X(t_n)=i_n\}$

$=P\{X(t_{n+1})=i_{n+1} \mid X(t_n)=i_n\}$，即泊松过程具有马氏性。

（2）有齐次性

当 $j<i$ 时， $p_{ij}(s,t)=P\{X(s+t)=j\,|\,X(s)=i\}=0$

当 $j\geq i$ 时，

$$p_{ij}(s,t)=P\{X(s+t)=j\,|\,X(s)=i\}=P\{X(s+t)-X(s)=j-i\}$$

$$=\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t}$$，只与 t 有关

即 $p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t)$，故泊松过程具有齐次性。

泊松过程第一定义条件(3)

泊松过程的第一种定义

定义 2： 称计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$为具有参数$\lambda>0$的泊松过程，若它满足下列条件：

（1） $N(0)=0$；

（2） $N(t)$是独立增量过程；

（3）在任一长度为t的区间中，事件A发生的次数服从参数λt的泊松分布，即对任意的$t\geq 0$，有

$$P\{N(s+t)-N(\mathrm{s})=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},n=0,1,2,\cdots$$

5.2 柯尔莫哥洛夫微分方程

引理 5.1

设齐次马尔可夫链满足正则性条件 $\lim\limits_{t\to 0^+} p_{ij}(t)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$，则

$\forall i, j\in I$， $p_{ij}(t)$ 是 t 的一致连续函数。

含义：在很短的时间内，不可能从一个状态转移到另一状态。

$$p_{ij}(0)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$ (连续→极限值=函数值)

定理 5.3

设 $p_{ij}(t)$ 是齐次马氏过程的转移概率，则下列极限存在

（1） $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{1 - p_{ii}(\Delta t)}{\Delta t} = v_i = q_{ii} \le \infty$；

（2） $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} = q_{ij} < \infty, i \ne j$

[q_{ij}：在 Δt 内从状态 i 到 j 的转移速率（或跳跃强度）]

推论

（1）对 I 有限齐次马尔可夫过程，有 $q_{ii}=\sum_{j\neq i}q_{ij}<\infty$。

转移速率矩阵 $Q=\begin{bmatrix}-q_{00} & q_{01} & \cdots & q_{0n}\\ q_{10} & -q_{11} & \cdots & q_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ q_{n0} & q_{n1} & \cdots & -q_{nn}\end{bmatrix}$，行和为 0，

$\forall i,j\in I, q_{ij}\geq 0$。

（2）对 I 无限齐次马尔可夫过程，有 $q_{ii}\geq\sum_{j\neq i}q_{ij}$。（行和非正）

定理 5.4（柯尔莫哥洛夫向后方程)

（用 Q 解微分方程（1）或（2）求转移概率 $p_{ij}(t)$ 的方法）

假设 $\sum_{k\neq i} q_{ik} = q_{ii}$，则对一切 i, j 及 $t \geq 0$，有

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\neq i} q_{ik}\, p_{kj}(t) - q_{ii}\, p_{ij}(t)$$

矩阵形式： $P'(t) = QP(t)$ （ $P(t)$ 在后面）

（固定最后状态 j 时用，I 有限或生灭过程适用）

定理 5.5（柯尔莫哥洛夫向前方程）

在适当的正则条件下

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) q_{kj} - p_{ij}(t) q_{jj}$$

矩阵形式 $\quad P'(t) = P(t)Q \quad$ （ $P(t)$在前面）

（固定状态i时用）

$$Q = \begin{bmatrix} -q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & -q_{11} & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -q_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}, \quad P(t) = \begin{bmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & p_{02}(t) & \cdots \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots \\ p_{20}(t) & p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

定理 5.6

齐次马氏过程在t时刻处于状态$j\in I$的绝对概率$p_j(t)$满足

下列方程：$p_j'(t)=-p_j(t)q_{jj}+\sum_{k\neq j}p_k(t)q_{kj}$

定义 5.4（状态互通和不可约马尔可夫链）

设连续时间马尔可夫链的转移概率为 $p_{ij}(t)$，若存在时刻 t_1 和 t_2，使得 $p_{ij}(t_1)>0$， $p_{ji}(t_2)>0$，则称状态 i 与 j 是互通的。若所有状态都是互通的，则称此马尔可夫链为不可约的。

定理 5.7

设连续时间马尔可夫链是不可约的，则有下列性质：

（1）若它是正常返的，则 $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)=\pi_j>0$， $j\in I$，

这里 π_j 是方程组 $\begin{cases}\pi_j q_{jj}=\sum\limits_{k\neq j}\pi_k q_{kj}\\ \sum\limits_{j\in I}\pi_j=1\end{cases}$ （即 $\begin{cases}\Pi Q=0\\ \sum\limits_{j\in I}\pi_j=1\end{cases}$ ）的唯一非负解。

此时称 $\{\pi_j, j\in I\}$ 是该过程的平稳分布，并且有 $\lim\limits_{t\to\infty} p_j(t)=\pi_j$

（2） 若它是零常返的或非常返的，则

$\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)=\lim\limits_{t\to\infty} p_j(t)=0$， $i,j\in I$ 。

例 5.2 考虑两个状态的连续时间的齐次马尔可夫链在转移到状态1之前链在状态0停留的时间是参数为λ的指数变量，而在回到状态0之前它停留在状态1的时间是参数为μ的指数变量。求它的平稳分布和绝对分布。

解：已知状态空间 $I=\{0,1\}$，两状态的停留时间 $\tau_0 \sim E(\lambda)$， $\tau_1 \sim E(\mu)$

（1）求平稳分布（$\pi_0=\mu_0$， $\pi_1=\lambda_0$）

当 $h\to 0$ 时 $(h>0)$，

$$p_{01}(h)=P\{\tau_0\le h\}=1-e^{-\lambda h}\sim\lambda h,\quad p_{10}(h)=P\{\tau_1\le h\}=1-e^{-\mu h}\sim\mu h$$

即 $$\begin{cases} p_{01}(h)=\lambda h+o(h) \\ p_{10}(h)=\mu h+o(h) \end{cases},$$

$$q_{00}=\lim_{h\to 0}\frac{1-p_{00}(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{01}(h)}{h}=\lambda=q_{01},$$

$$q_{11}=\lim_{h\to 0}\frac{1-p_{11}(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{10}(h)}{h}=\mu=q_{10}$$

转移速率矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

由柯尔莫哥洛夫向前方程

$$\begin{pmatrix} p'_{00}(t) & p'_{01}(t) \\ p'_{10}(t) & p'_{11}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

$$p'_{00}(t) = \mu p_{01}(t) - \lambda p_{00}(t) = \mu(1 - p_{00}(t)) - \lambda p_{00}(t) = \mu - (\mu + \lambda) p_{00}(t)$$

$p'_{00}(t) + (\mu + \lambda) p_{00}(t) = \mu$，（一阶线性非齐次微分方程）

通解：$p_{00}(t) = \dfrac{\mu}{\mu + \lambda} + C_1 e^{-(\mu+\lambda)t}$，由 $p_{00}(0) = 1$ 得：$C_1 = \dfrac{\lambda}{\mu + \lambda}$

因此，$p_{00}(t) = \dfrac{\mu}{\mu + \lambda} + \dfrac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-(\mu+\lambda)t}$，

令 $\mu_0 = \dfrac{\mu}{\mu + \lambda}, \lambda_0 = \dfrac{\lambda}{\mu + \lambda}$，则 $p_{00}(t) = \mu_0 + \lambda_0 e^{-(\mu+\lambda)t}$

同理得 $p_{01}(t) = \lambda_0 [1 - e^{-(\mu+\lambda)t}]$，$p_{11}(t) = \lambda_0 + \mu_0 e^{-(\mu+\lambda)t}$，

$p_{10}(t) = \mu_0 [1 - e^{-(\mu+\lambda)t}]$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right),$$

由于此连续时间的马尔可夫链为正常返的不可约的，故平稳分布为

$$\pi_0=\lim_{t\to\infty}p_{10}(t)=\lim_{t\to\infty}p_{00}(t)=\mu_0\text{，}\quad \pi_1=\lim_{t\to\infty}p_{01}(t)=\lim_{t\to\infty}p_{11}(t)=\lambda_0$$

（2）求绝对分布（ $p_0(t)=\mu_0, p_1(t)=\lambda_0$ ）

若取初始分布为以上平稳分布，即

$$p_0=P\{X(0)=0\}=\mu_0\text{，}\quad p_1=P\{X(0)=1\}=\lambda_0$$

则过程在时刻 t 的绝对概率分布为

$$p_0(t)=p_0p_{00}(t)+p_1p_{10}(t)=\mu_0[\lambda_0e^{-(\lambda+\mu)t}+\mu_0]+\lambda_0\mu_0[1-e^{-(\lambda+\mu)t}]=\mu_0$$

$$p_1(t)=p_0p_{01}(t)+p_1p_{11}(t)=\lambda_0\mu_0[1-e^{-(\lambda+\mu)t}]+\lambda_0[\lambda_0+\mu_0e^{-(\lambda+\mu)t}]=\lambda_0$$

例 5.3 机器维修问题。（例 1 的应用）

在上例中，以状态 0 代表某机器正常工作，状态 1 代表机器出故障。状态转移概率与上例相同，即在h时间内，机器从正常工作变为出故障的概率为 $p_{01}(h)=\lambda h+o(h)$；在h时间内，机器从有故障变为经修复后正常工作的概率为$p_{10}(h)=\mu h+o(h)$，试求在$t=0$时正常工作的机器，在$t=5$时为正常工作的概率。

解：从上例中得$Q=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$，$\lambda_0=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$，$\mu_0=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$，

$$p_{00}(t)=\lambda_0 e^{-(\lambda+\mu)t}+\mu_0,\quad p_{10}(t)=\mu_0[1-e^{-(\mu+\lambda)t}],$$

$$p_{00}(5)=\lambda_0 e^{-5(\lambda+\mu)}+\mu_0,\quad p_{10}(5)=\mu_0[1-e^{-5(\mu+\lambda)}]$$

已知初始分布：$p_0=P\{X(0)=0\}=1$，$p_1=P\{X(0)=1\}=0$，

$$P\{X(5)=0\}=p_0p_{00}(5)+p_1p_{10}(5)=\lambda_0 e^{-5(\lambda+\mu)}+\mu_0$$

5.3 生灭过程

定义 5.5

设齐次马尔可夫过程$\{X(t), t\geq 0\}$的状态空间为$I=\{0,1,2,\cdots\}$，转移概率为$p_{ij}(t)$，如果

$$\begin{cases} p_{i,i+1}(h)=\lambda_i h+o(h), & (\lambda_i>0) \\ p_{i,i-1}(h)=\mu_i h+o(h), & (\mu_i>0,\mu_0=0) \\ p_{i,i}(h)=1-(\lambda_i+\mu_i)h+o(h), & \\ p_{i,j}(h)=o(h), \quad |i-j|\geq 2, & \end{cases}$$

则称$\{X(t), t\geq 0\}$为生灭过程，λ_i为出生率，μ_i为死亡率。

若$\lambda_i=i\lambda$，$\mu_i=i\mu$，则称$\{X(t), t\geq 0\}$为线性生灭过程。

若$\mu_i\equiv 0$，则称$\{X(t), t\geq 0\}$为纯生过程。

若$\lambda_i\equiv 0$，则称$\{X(t), t\geq 0\}$为纯灭过程。

生灭过程的转移概率和平稳分布

设生灭过程的状态转移矩阵

$$P(t)=\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
p_{00}(t) & p_{01}(t) & \cdots & p_{0j}(t) & \cdots \\
p_{10}(t) & p_{11}(t) & \cdots & p_{2j}(t) & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
p_{i-1,0}(t) & p_{i-1,1}(t) & \cdots & p_{i-1,j}(t) & \cdots \\
p_{i,0}(t) & p_{i,1}(t) & \cdots & p_{i,j}(t) & \cdots \\
p_{i+1,0}(t) & p_{i+1,1}(t) & \cdots & p_{i+1,j}(t) & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots &
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ (\text{第}i+1\text{行}) \\ \\ \\ \end{array} \\
\qquad\qquad\qquad(\text{第}j+1\text{列}) &
\end{array}$$

转移速率： $q_{ii}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-p_{ii}(t)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(\lambda_i+\mu_i)t+o(t)}{t}=\lambda_i+\mu_i$,

$$q_{ij}=\lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)}{t}=\begin{cases}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\lambda_i t+o(t)}{t}, & j=i+1\\ \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mu_i t+o(t)}{t}, & j=i-1\\ \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{o(t)}{t}, & |i-j|\geq 2\end{cases}=\begin{cases}\lambda_i, & j=i+1\\ \mu_i, & j=i-1\\ 0, & |i-j|\geq 2\end{cases}$$

转移速率矩阵（注意主对角线和上下平行线上的元素）为

$$
Q=\begin{pmatrix}
-\lambda_0 & \lambda_0 & & & & & \\
\mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & & & & \\
 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & \mu_i & -(\lambda_i+\mu_i) & \lambda_i & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots
\end{pmatrix} \quad （第 i+1 行）
$$

即

$$
\begin{array}{c}
Q=\begin{pmatrix}
-\lambda_0 & \lambda_0 & & & & \\
\mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & \mu_{j-1} & -(\lambda_{j-1}+\mu_{j-1}) & \lambda_{j-1} & \\
 & & & \mu_j & -(\lambda_j+\mu_j) & \ddots \\
 & & & & \mu_{j+1} & \ddots \\
 & & & & & \ddots
\end{pmatrix} \\
(第 j+1 列)
\end{array}
$$

柯尔莫哥洛夫向后方程为 $P'(t)=QP(t)$，即

$$p'_{ij}(t)=\mu_i p_{i-1,j}(t)-(\lambda_i+\mu_i)p_{i,j}(t)+\lambda_i p_{i+1,j}(t)\text{，}\quad i,j\in I$$

柯尔莫哥洛夫向前方程为 $P'(t)=P(t)Q$，即

$$p'_{ij}(t)=\lambda_{j-1}p_{i,j-1}(t)-(\lambda_j+\mu_j)p_{i,j}(t)+\mu_{j+1}p_{i,j+1}(t)\text{，}\quad i,j\in I$$

以上方程难解。用平稳分布，$\lim\limits_{t\to 0}p_{ij}(t)=\pi_j$，

$$\begin{cases}\lambda_0\pi_0=\mu_1\pi_1\\(\lambda_j+\mu_j)\pi_j=\lambda_{j-1}\pi_{j-1}+\mu_{j+1}\pi_{j+1},\ j\ge 1\end{cases}\text{，}\quad \text{即 } \lambda_i\pi_i=\mu_{i+1}\pi_{i+1}\text{，}$$

$i\in I$

连续时间不可约的马尔可夫链

$$\begin{cases}\Pi Q=0\\\sum\limits_{j\in I}\pi_j=1\end{cases}$$

$$\pi_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0,\quad \pi_2=\frac{\lambda_1}{\mu_2}\pi_1=\frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}\pi_0\cdots,\pi_j=\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}\pi_{j-1}=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\pi_0,\cdots$$

由 $\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j=1$， $\pi_0(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j})=1$， 得平稳分布

$$\pi_0=\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1},\quad \pi_j=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1},\quad j\geq 1$$

可见，平稳分布的充要条件为$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}<\infty$

例 5.4　M/M/s 排队系统

服务站内有 s 个服务员，顾客按参数为λ的泊松过程到来。当顾客到达时，若有空闲的服务员则直接为其服务，若没有则要加入排队行列。排队者一个接一个地接受服务，相继的服务时间是独立的指数随机变量，均值为$\frac{1}{\mu}$。以$X(t)$表示时刻t系统中的人数，则$\{X(t), t\geq 0\}$为生灭过程。此时，$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 1\leq n\leq s \\ s\mu, & n>s \end{cases}$，$\lambda_n=\lambda\ (n\geq 0)$，

特别，$s=1$时，$\mu_n=\mu$，$\lambda_n=\lambda$，则当$\frac{\lambda}{\mu}<1$时，有平稳分布为

$$\pi_n=\frac{(\lambda/\mu)^n}{1+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\lambda}{\mu})^n}=(\frac{\lambda}{\mu})^n(1-\frac{\lambda}{\mu}),\quad n\geq 0$$

排队问题为$M/M/S/\infty/\infty/FCFS$表示顾客到达间隔时间为负指数分布(泊松流)；服务时间为负指数分布；有s个服务台；系统等待空间容量无限(等待制)；顾客源无限，采用先到先服务规则。后三个符号可以省略

例 5.5 尤尔过程

设群体中各个成员独立地活动且以指数率 λ 生育。若假设没有任何成员死亡，以 $X(t)$ 记时刻 t 群体的总量，则 $X(t)$ 是一个纯生过程，其 $\lambda_n = n\lambda, n>0$，称此纯生过程为尤尔过程。试计算（1）从一个个体开始，在时刻 t 群体的总量的分布；（2）从一个个体开始，在时刻 t 群体诸成员年龄之和的均值。

解：(1)设T_i表示群体成员个数从i增加到$i+1$所需要的时间，则

$$T_i \sim E(\lambda_i),\quad \lambda_i = i\lambda,\quad T_1, T_2, \cdots T_i, \cdots \text{相互独立}$$

据题意， $X(0)=1$， 要求 $P\{X(t)=j \mid X(0)=1\}=p_{1j}(t)$， $j \in I=\{1,2,\cdots\}$

$$P\{T_1 \le t\} = 1-e^{-\lambda t},$$

$$P\{T_1+T_2 \le t\} = \int_{-\infty}^{\infty} P\{T_1+T_2 \le t \mid T_1 = x\} dF_{T_1}(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P\{T_2 \le t-x\} f_{T_1}(x) dx = \int_0^t (1-e^{-2\lambda(t-x)})\lambda e^{-\lambda x} dx = (1-e^{-\lambda t})^2$$

由归纳法得： $P\{T_1+T_2+\cdots+T_j \le t\} = (1-e^{-\lambda t})^j$

第一章公式(P12) $P(A) = \int P(A \mid Y=y) dF_Y(y)$

又 $P\{T_1+T_2+\cdots+T_j\le t\}=P\{X(t)\ge j+1\,|\,X(0)=1\}$

（解释：在 t 之前达到 $j+1$ 个=在[0， t]内至少达到 $j+1$ 个）

而 $P\{X(t)\ge j\,|\,X(0)=1\}=P\{X(t)=j\,|\,X(0)=1\}+P\{X(t)\ge j+1\,|\,X(0)=1\}$

即 $P\{T_1+T_2+\cdots+T_{j-1}\le t\}=p_{1j}(t)+P\{X(t)\ge j+1\,|\,X(0)=1\}$，

因此， $(1-e^{-\lambda t})^{j-1}=p_{1j}(t)+(1-e^{-\lambda t})^{j}$ ， 即

$$p_{1j}(t)=(1-e^{-\lambda t})^{j-1}-(1-e^{-\lambda t})^{j}=e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-1}$$

这是几何分布 $G(e^{-\lambda t})$， $E[X(t)\,|\,X(0)=1]=e^{\lambda t}$ 。

（2）设在时刻 t 群体诸成员年龄之和为 $A(t)$，初始个体的年龄为 a_0，假设 $[s,s+ds]$ 这段时间内群体总数不变，即为 $X(s)$，则得年龄之和的微元 $X(s)ds$， 故 $A(t)=a_0+\int_0^t X(s)ds$ 。

$$E[A(t)]=a_0+E\int_0^t X(s)ds=a_0+\int_0^t E[X(s)]ds=a_0+\int_0^t e^{\lambda s}ds=a_0+\frac{e^{\lambda t}-1}{\lambda}$$

例 5.6 机器维修

设有m台机床，s个工人$(s<m)$。机床或者工作，或者损坏等待维修。机床损坏后，空着的维修工人立即来修理，若维修工人不空，则机床按先坏先修排队等待维修。假定在h时间内，每台机床从工作转到损坏的概率为$\lambda h+o(h)$，每台修理的机床转到工作的概率为$\mu h+o(h)$，用$X(t)$表示时刻t损坏的机床台数，则$\{X(t), t\geq 0\}$是连续时间的马尔可夫链。求此过程的平稳分布。

解： 设时刻t损坏的机床为i台，当$h \to 0$时，在$[t, t+h]$内损坏的机床增加的一台是原来正在工作的$m-i$台之一，则

$$p_{i,i+1}(h) = C_{m-i}^{1}(\lambda h + o(h)) = (m-i)\lambda h + o(h), \quad i = 0,1,2,\cdots,m-1$$

而损坏的机床减少一台是原来正在修理的i（或s）台之一，则

$$p_{i,i-1}(h) = \begin{cases} C_i^1(\mu h + o(h)) = i\mu h + o(h), & 1 \le i \le s \\ C_s^1(\mu h + o(h)) = s\mu h + o(h), & s < i \le m \end{cases},$$

又 $p_{ij}(h) = o(h), \quad |i-j| \ge 2$，显然这是一个生灭过程，其中

$$\lambda_i = (m-i)\lambda, \quad i = 0,1,2,\cdots,m-1$$

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu, & 1 \le i \le s \\ s\mu, & s < i \le m \end{cases}$$

因此，它的平稳分布为

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{j=1}^{s} C_m^j \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \sum_{j=s+1}^{m} C_m^j \frac{(s+1)(s+2)\cdots j}{s^{j-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\right]^{-1},$$

$$\pi_j = \begin{cases} C_m^j \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \pi_0, & 1 \le j \le s \\ C_m^j \frac{(s+1)(s+2)\cdots j}{s^{j-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \pi_0, & s < j \le m \end{cases}$$

意义：可根据平均不工作的机床台数$\sum_{j=1}^{m} j\pi_j$安排维修工人的人数。