第二章　曲面论

- 曲面的概念
- 曲面的第一基本形式
- 曲面的第二基本形式
- 直纹面和可展曲面
- 曲面论的基本定理
- 曲面上的测地线
- 常高斯曲率的曲面

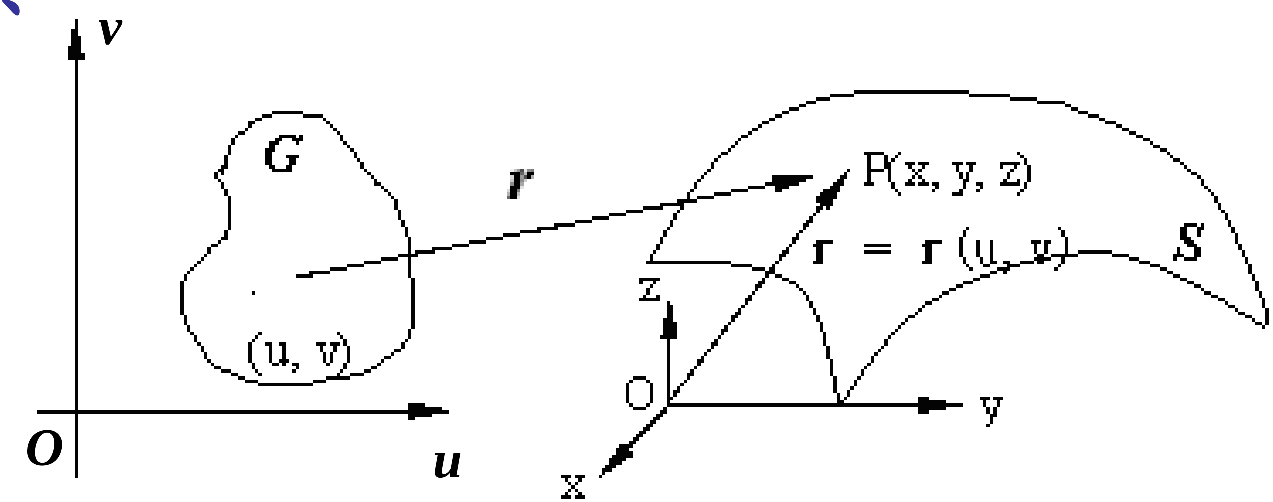
§2.1 曲面的概念

一、曲面的参数表示

二、曲面的切平面和法线

三、曲面上的曲线族和曲线网

一、曲面的参数表示



一般参数表示

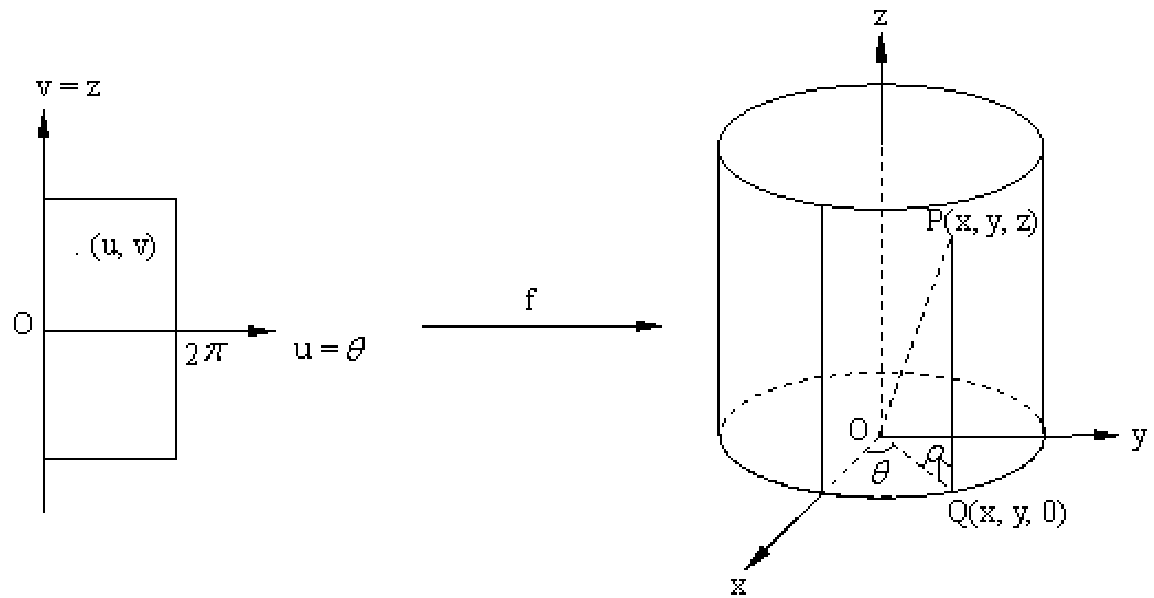
$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \qquad (u,v) \in G \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

向量参数表示

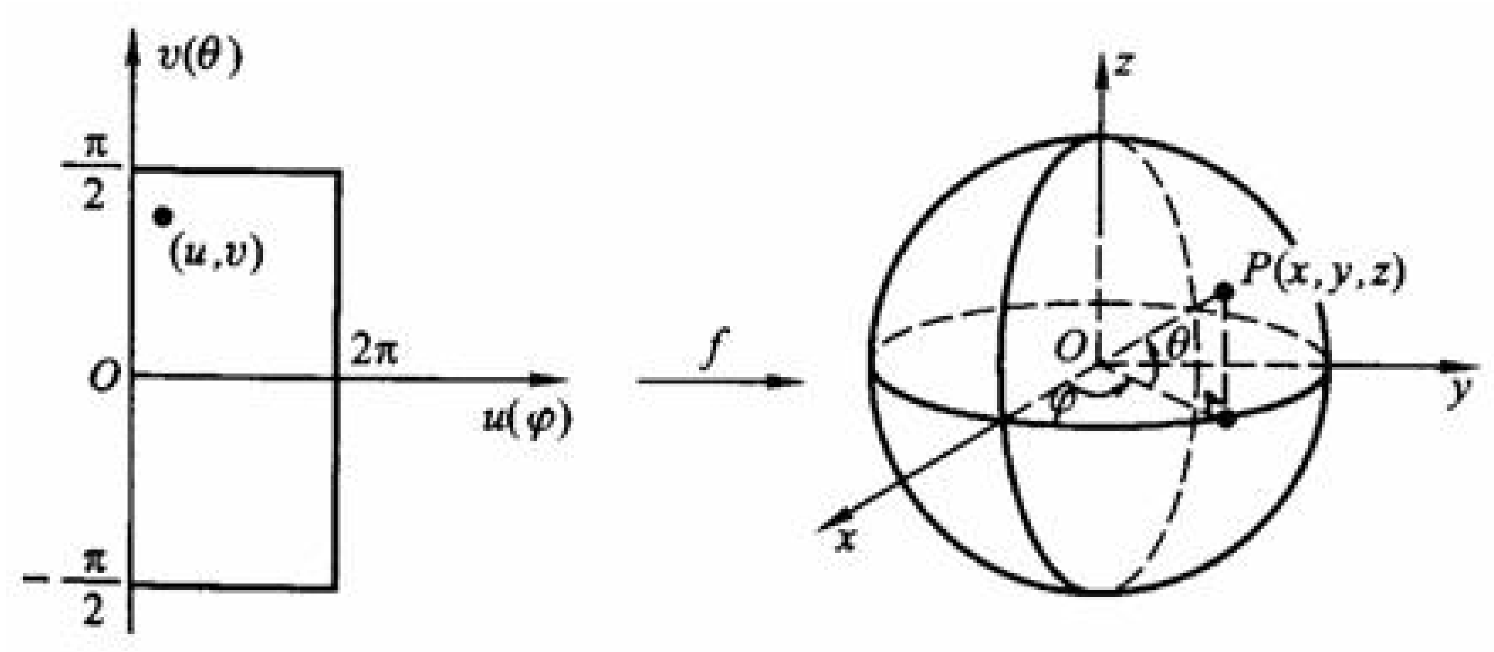
$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ (u,v) \in G$$

称 u,v 为曲面的参数或曲纹坐标.

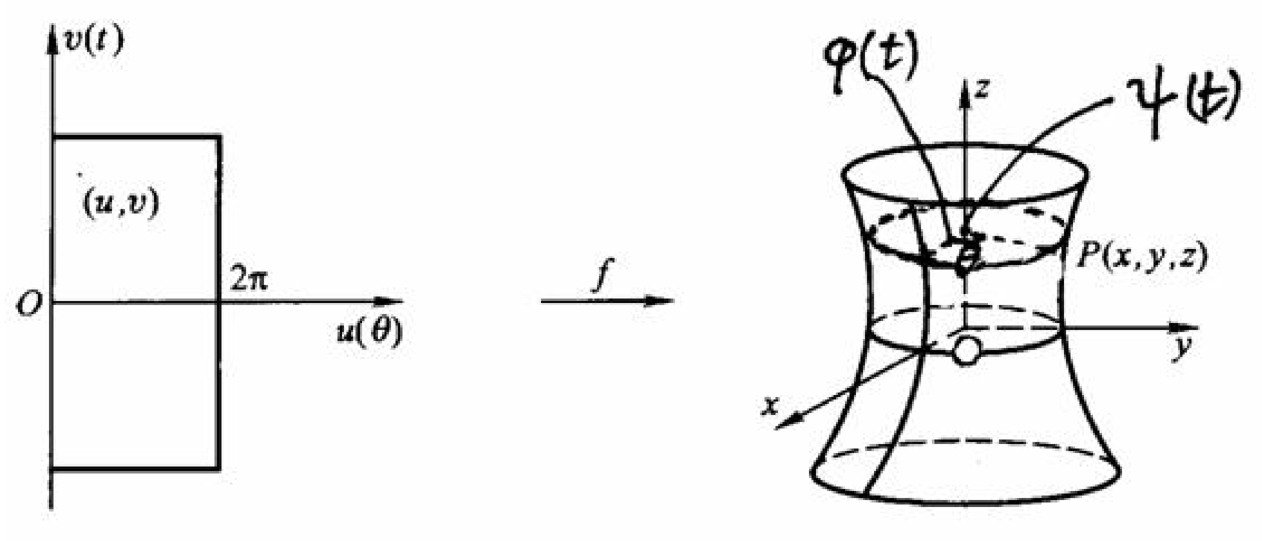
圆柱面



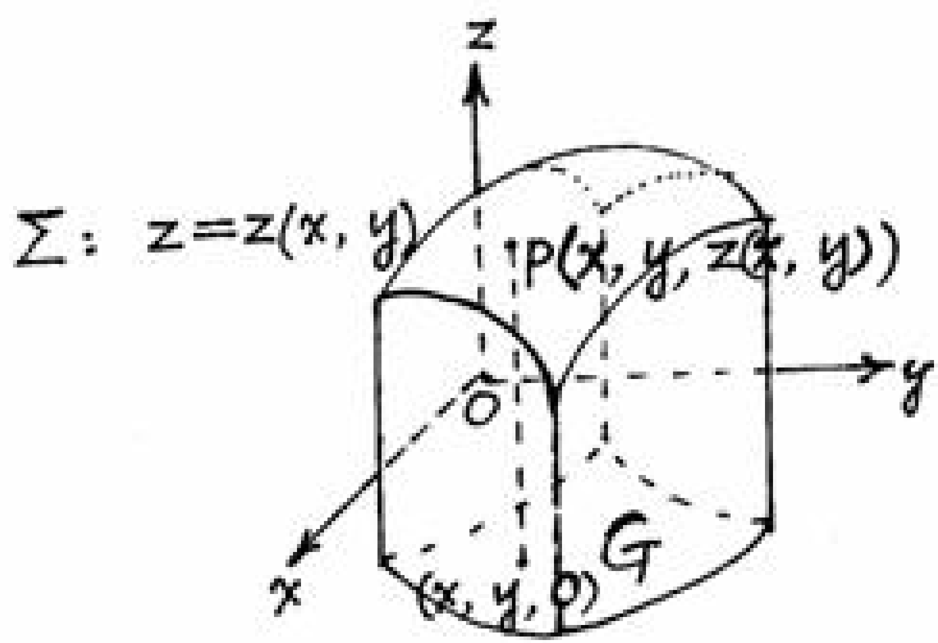
球面



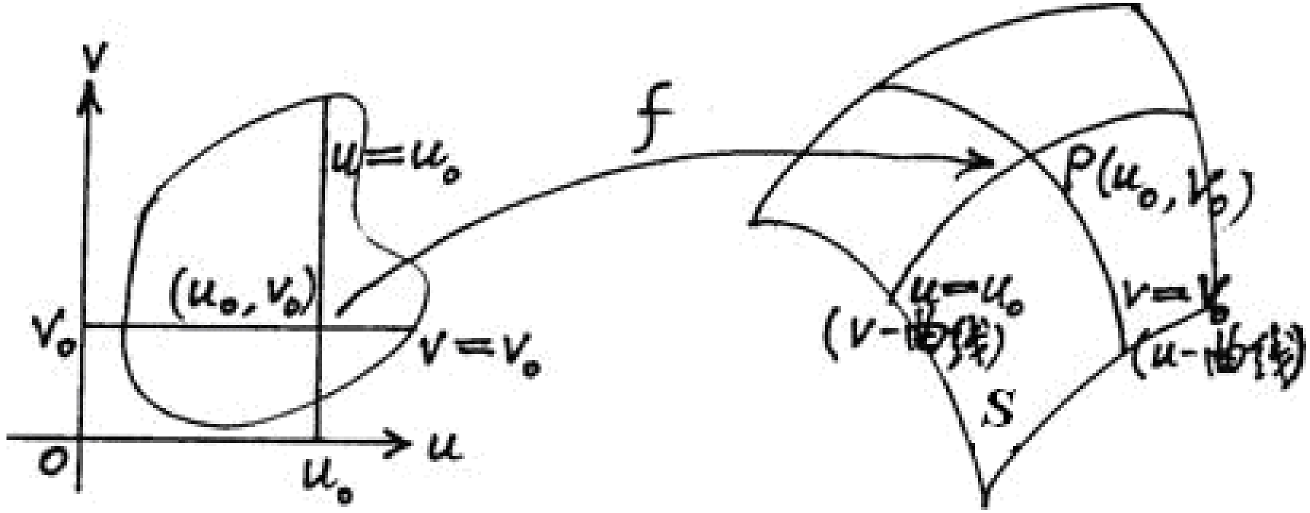
旋转面



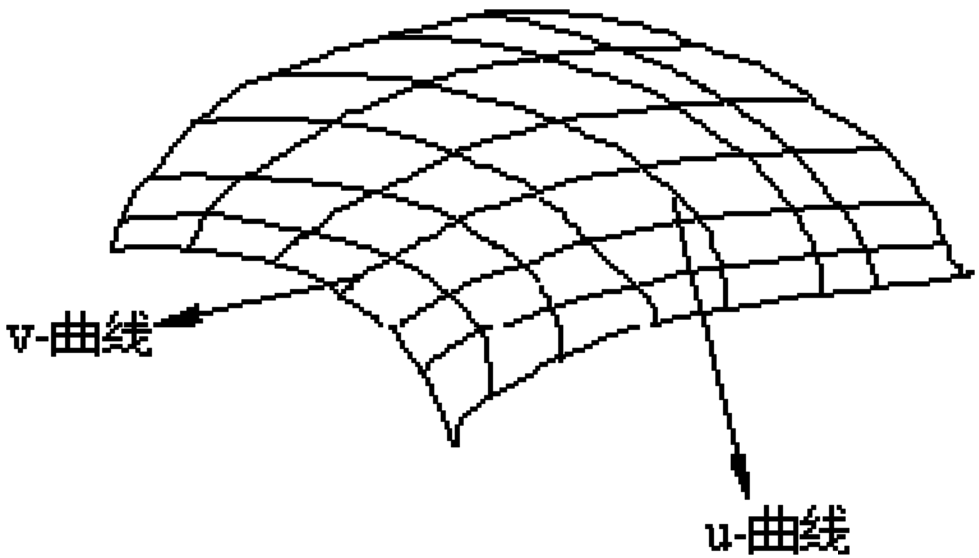
显式曲面

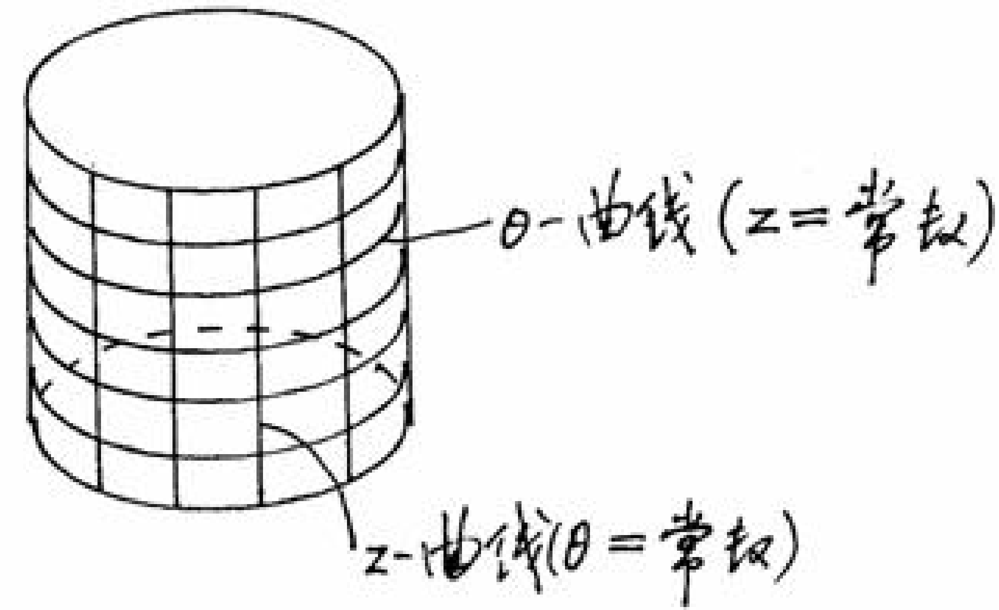


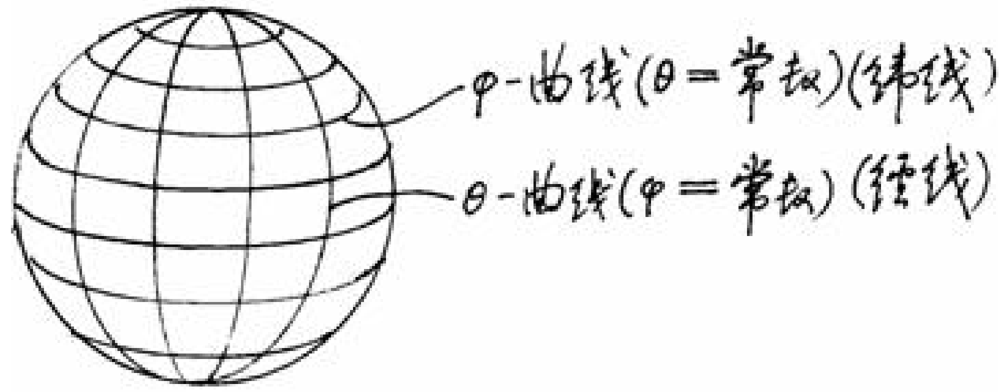
坐标曲线

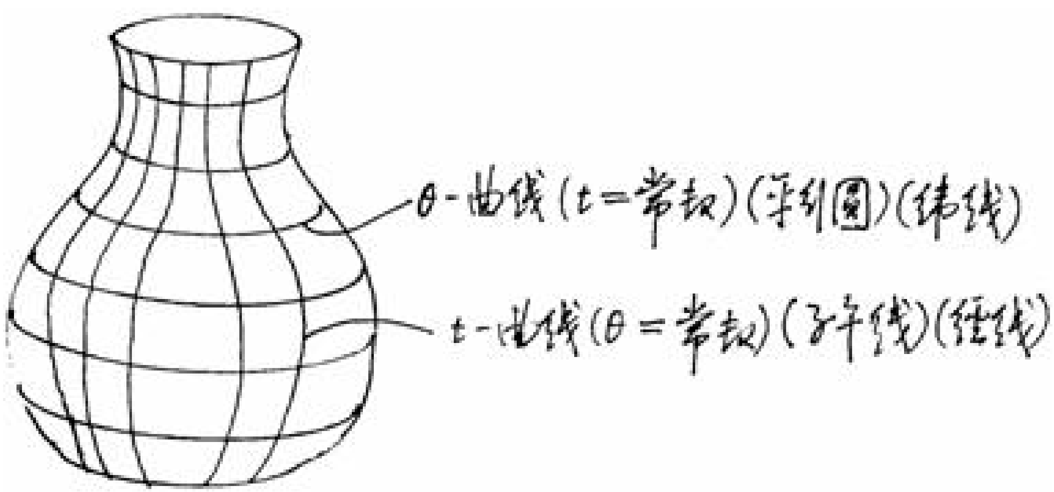


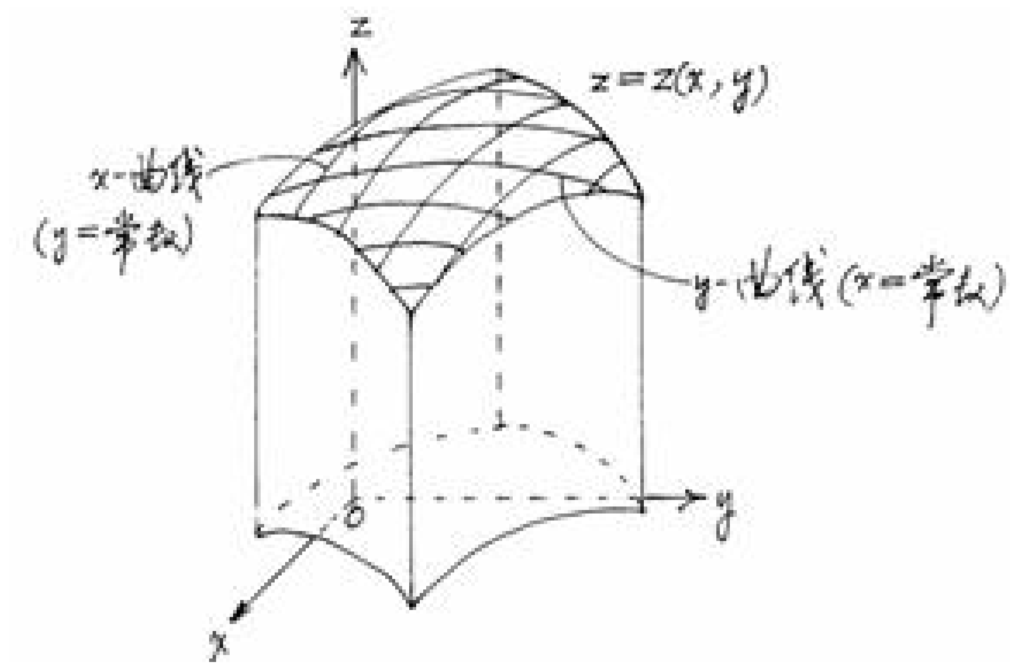
曲纹坐标网(坐标曲线网)




θ-曲线(z=常数)
z-曲线(θ=常数)


φ-曲线(θ=常数)(纬线)
θ-曲线(φ=常数)(经线)


θ-曲线(t=常数)(平行圆)(纬线)
t-曲线(θ=常数)(子午线)(经线)


z
z=z(x,y)
x-曲线
(y=常数)
y-曲线(x=常数)
o
y
x

二、曲面的切平面和法线

1. 一些概念

光滑曲面 (C^1类曲面、一阶正则曲面)

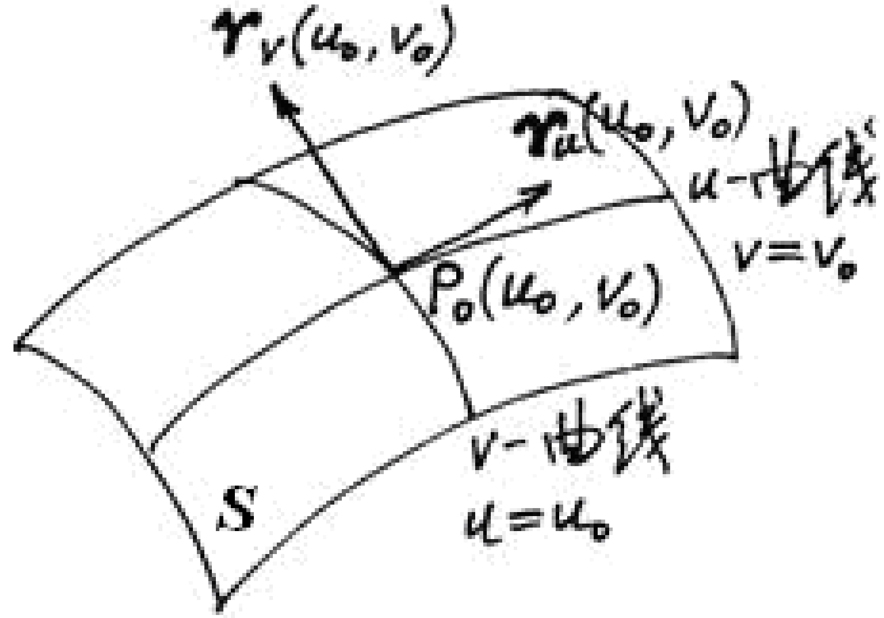
曲面上每一点都存在切平面，并且切平面连续变化.

C^k类曲面(k阶正则曲面)

若$\vec{r}(u,v)$为G上的C^k类函数,

则称这样的曲面为C^k类曲面或k阶正则曲面.

曲面的正常点



经过该点的两条坐标曲线的切向量不平行.

即,曲面上使得 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \big|_{(u_0,v_0)} \neq \vec{0}$ 的点 (u_0, v_0).

若曲面上的点都是正常点,则称该曲面为正则的.

正规坐标网　正则曲面的曲纹坐标网.

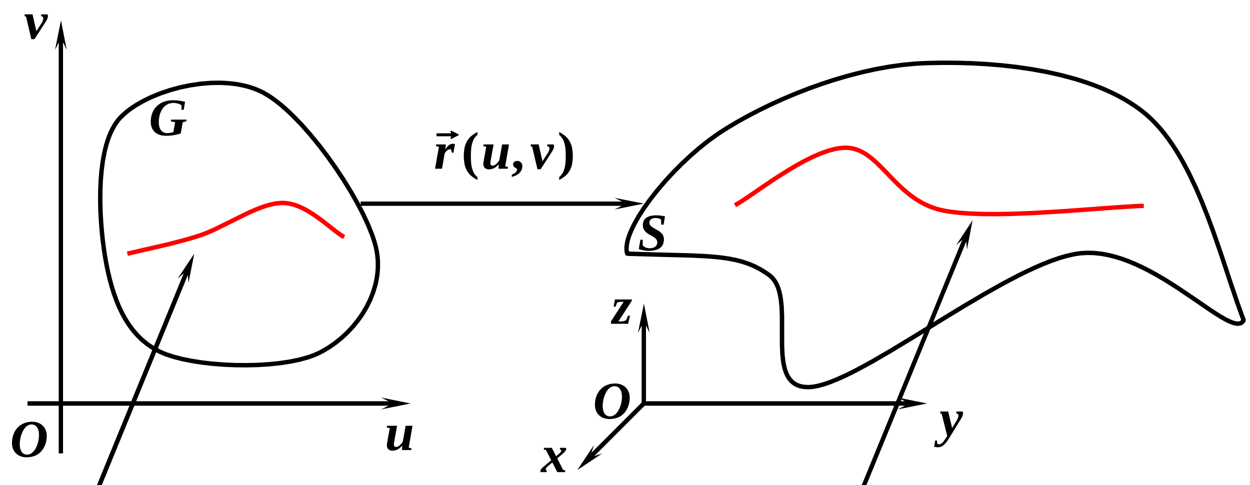
特点　经过曲面上的每一点有唯一一条 u-曲线和唯一一条v-曲线,这两族曲线彼此不相切.

P62-命题1　曲面在正常点的邻域内总可以有

$$z = z(x, y) \quad \text{或} \quad y = y(z, x) \quad \text{或} \quad x = x(y, z)$$

形式的参数表示.

曲面上的曲线

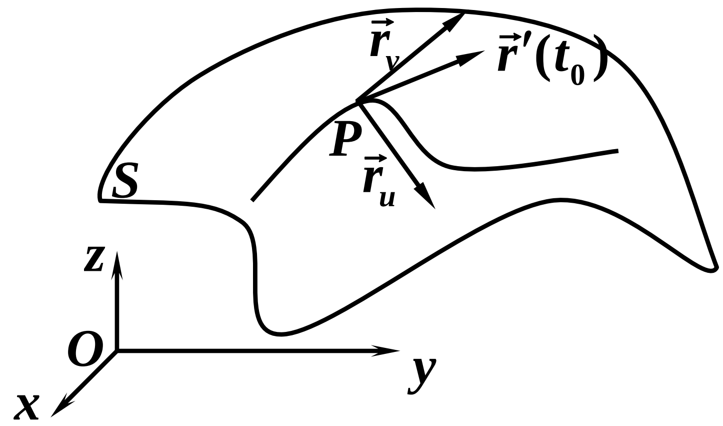


$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

曲面上的曲线 $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$

2. 切向量、切方向和切平面

曲面上的曲线 $\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))$



切向量 $\vec{r}'(t_0)=\vec{r}'(u(t_0),v(t_0))$

$$=\left(\vec{r}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\vec{r}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\bigg|_{t=t_0}$$

起点相同时 $\vec{r}'(t_0)$ 与 $\vec{r}_u\big|_{t=t_0}$, $\vec{r}_v\big|_{t=t_0}$ 共面

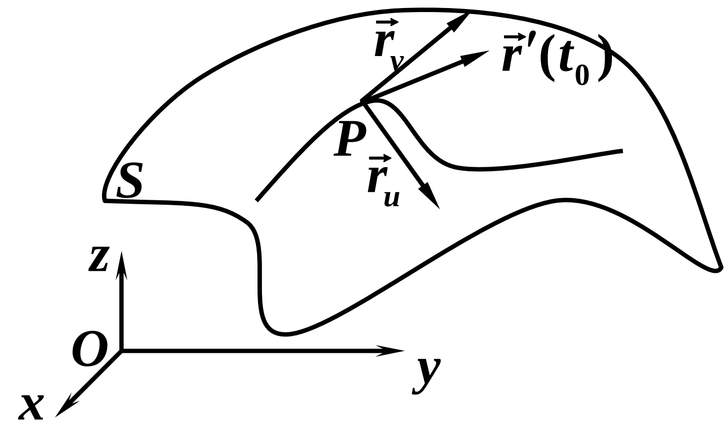
P62-命题2 曲面上正常点处的所有切方向都在过该点的坐标曲线的切向量 $\vec{r}_u$ 和 $\vec{r}_v$ 所决定的平面上.

称此平面为曲面在这一点的**切平面**.

切向量：切平面上的向量.

切方向：切向量的方向.

切方向的表示



曲面上的曲线 $\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))$

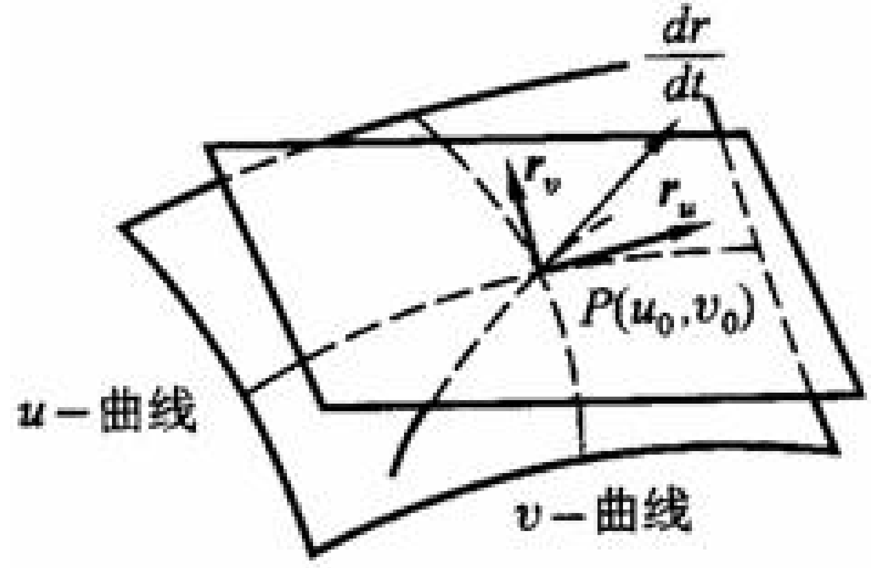
$$\vec{r}'(t_0)=\left(\vec{r}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\vec{r}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\Bigg|_{t=t_0}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}+\vec{r}_v\right)\Bigg|_{t=t_0}$$

$\Rightarrow \vec{r}'(t_0)$所决定的曲面的切方向完全依赖于 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$

因此 $\mathbf{d}u:\mathbf{d}v$ 给出了曲面上某点出的一个切方向.

切方向的表示方法：① $\vec{r}'(t)$, ② $(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$, ③ $\mathrm{d}\vec{r}(t)$, ⋯

切平面的方程(向量参数表示)



曲面 $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, 切点 (u_0,v_0),

$\vec{R}$ 为切平面上任一点的向径.

则 $\vec{R}-\vec{r}(u_0,v_0)$ 为一个切方向,

因此, 三个向量 $\vec{R}-\vec{r}(u_0,v_0),\vec{r}_u(u_0,v_0),\vec{r}_v(u_0,v_0)$ 共面.

切平面方程为 $(\vec{R}-\vec{r}(u_0,v_0),\vec{r}_u(u_0,v_0),\vec{r}_v(u_0,v_0))=0.$

切平面的方程(一般表达式)

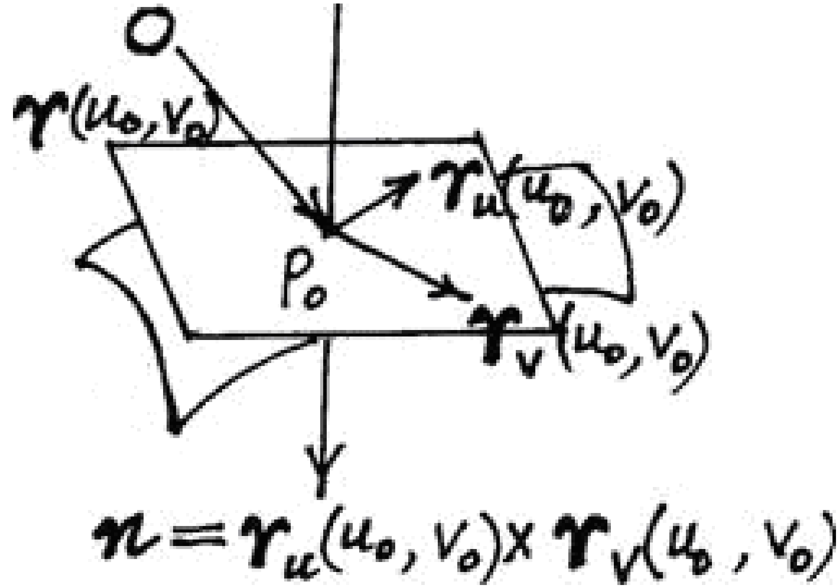
设$\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$，切点$(u_0,v_0)$,

$\vec{R}=(X,Y,Z)$为切平面上任一点的向径,

代入方程$(\vec{R}-\vec{r}(u_0,v_0),\vec{r}_u(u_0,v_0),\vec{r}_v(u_0,v_0))=0$得

$$\begin{vmatrix} X-x(u_0,v_0) & Y-y(u_0,v_0) & Z-z(u_0,v_0) \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}=0$$

2. 法向量(法方向)和法线



曲面 $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$， 切点 (u_0,v_0)，

$\vec{R}$ 为法线上任一点的向径.

则 $\vec{R}-\vec{r}(u_0,v_0)$ 为一个法向量(法方向)，

法线方程为 $\vec{R}-\vec{r}(u_0,v_0)=\lambda(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\big|_{(u_0,v_0)}$，

即 $\vec{R}=\vec{r}(u_0,v_0)+\lambda(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\big|_{(u_0,v_0)}$ (其中 λ 为参数).

法线的一般方程

设 $\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)), \quad \vec{R}=(X,Y,Z)$

代入法线方程 $\vec{R}=\vec{r}(u_0,v_0)+\lambda(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\big|_{(u_0,v_0)}$ 得到

$$\begin{cases} X=[x+\lambda(y_uz_v-z_uy_v)]\big|_{(u_0,v_0)} \\ Y=[y+\lambda(z_ux_v-x_uz_v)]\big|_{(u_0,v_0)} \\ Z=[z+\lambda(x_uy_v-y_ux_v)]\big|_{(u_0,v_0)} \end{cases}$$

消去参数 λ 得到法线的一般方程:

$$\frac{X-x(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}}=\frac{Y-y(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}}=\frac{Z-z(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}}$$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

P68: 4

补充作业题

2.1.1. 证明：一个正则参数曲面是球面的一部分的充分必要条件是它的所有法线都经过一个固定点.

三、曲面上的曲线族和曲线网

一族曲线(曲线族):

带有一个连续参数的一系列曲线的集合.

例如曲面上所有的u-曲线构成了一族曲线.

曲面上的曲线的表示形式

曲面$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$上的曲线有如下常见的表达形式:

(1) $\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))$

(2) $u=u(t),\ v=v(t)$

(3) $u=\varphi(v)$ 或 $v=\varphi(u)$

(4) $f(u,v)=0$

线性微分方程 $A(u,v)\mathrm{d}u+B(u,v)\mathrm{d}v=0\ (A^2+B^2\neq 0)$ 表示曲面上的一族曲线.

当 $A=0$ 时它表示曲线族 $v=c$, 即 u-曲线族.

当 $A\neq 0$ 时它表示曲线族 $u=\varphi(v,c)$.

二阶微分方程

$$A(u,v)\mathrm{d}u^2+2B(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+C\mathrm{d}v^2=0\ (B^2-AC>0)$$

表示曲面上的两族曲线.

当$\begin{cases}A=0\\C=0\end{cases}$时,它表示曲线族$v=c_1$和$u=c_2$,即曲纹坐标网

当$\begin{cases}A=0\\C\neq 0\end{cases}$时,它表示曲线族$v=c_1$和$v=\varphi(u,c_2)$.

当$A\neq 0$时,它表示曲线族$u=\varphi_1(v,c_1)$和$u=\varphi_2(v,c_2)$.