第三章　常微分方程边值问题和特征值问题

一、二阶边值问题解的存在唯一性

二、二阶边值问题解的积分表示

三、特征值问题

一、二阶边值问题解的存在唯一性

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ \alpha_1 y'(a) + \alpha_2 y(a) = \alpha \\ \beta_1 y'(b) + \beta_2 y(b) = \beta \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $a < x < b$，函数 $p(x), q(x)$ 和 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$

二阶线性方程初值问题的解是存在且唯一的。但二阶线性方程边值问题可能有一个解，可能没有解，也可能有无穷多个解。

例 1：解下列边值问题

（1）$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 2, y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$ $\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

（2）$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 2, y(\pi) = 1 \end{cases}$ $\quad 0 < x < \pi$

（3）$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 2, y(\pi) = -2 \end{cases}$ $\quad 0 < x < \pi$

解：方程 $y'' + y = 0$ 的通解为 $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

（1）从 $y(0) = 2$ 得 $c_1 = 2$，再从 $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ 得 $c_2 = 1$

有唯一解： $y = 2\cos x + \sin x$

（2）从 $y(0) = 2$ 得 $c_1 = 2$，从 $y(\pi) = 1$ 得

$c_1 = -1 \Rightarrow$ 矛盾。$\therefore$（2）无解

（3）从 $y(0) = 2$ 得 $c_1 = 2$，从 $y(\pi) = -2$ 得 $c_1 = 2$，

得通解 $y = 2\cos x + c_2 \sin x$，其中 c_2 是任意常数，

$\therefore$（3）有无穷多个解。

上页 下页 返回

例 2：解初值问题

$$\begin{cases} y'' + 9y = 0, & 0 < x < \pi \\ -3y'(0) + y(0) = -3, & 9y'(\pi) + y(\pi) = -2 \end{cases}$$

解：方程的通解为： $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

利用边值条件，有： $\begin{cases} c_1 - 9c_2 = -3 \\ -(c_1 + 6c_2) = -2 \end{cases}$

得 $c_1 = 0, c_2 = \dfrac{1}{3}$

于是边值问题有解： $y = \dfrac{1}{3}\sin 3x$ 。

例 3：解边值问题 $\begin{cases} y'' + 3y = \cos x \\ y(0) = \dfrac{1}{2}, y(\pi) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

解：因为齐次方程的两个线性无关的解为 $\cos\sqrt{3}x, \sin\sqrt{3}x$，非齐次方程有一特解 $\dfrac{1}{2}\cos x$，故

通解为：$y = c_1\cos\sqrt{3}x + c_2\sin\sqrt{3}x + \dfrac{1}{2}\cos x$，

代入边界条件。得出 $c_1 = c_2 = 0$，

故边值问题的解为：$y = \dfrac{1}{2}\cos x$ 。

例 4：解边值问题

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{2x}{1+x^2}y' + \dfrac{2}{1+x^2}y = x^2+1 \\ y(0)=1, y(1)=\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

解： $y_1(x) = x$ 是相应的齐次方程的一个特解，

故齐次方程的另一个特解是:

$$y_2(x) = x\int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} dx = x\int \frac{x^2+1}{x^2} dx = x^2-1,$$

$$K(x,s) = \frac{\begin{vmatrix} s & s^2-1 \\ x & x^2-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & s^2-1 \\ 1 & 2s \end{vmatrix}} = \frac{(x^2-1)s - x(s^2-1)}{s^2+1}$$

于是非齐次方程的特解是：

$$y_p(x)=\int_0^x K(x,s)f(s)ds$$

$$=\int_0^x\left[(x^2-1)s-x(s^2-1)\right]ds=\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{2}x^2$$

原方程的通解是：

$$y=c_1x+c_2(x^2-1)+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{2}x^2$$

由边值条件得： $c_1=1, c_2=-1$，

从而得解： $y=\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{2}x^2+x+1$。

一般的边值问题：

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ \alpha_1 y'(a) + \alpha_2 y(a) = \alpha \\ \beta_1 y'(b) + \beta_2 y(b) = \beta \end{cases} \tag{1.1}$$

假设 $y_1(x), y_2(x)$ 是其相应的齐次方程的两个线性无关的解， $y_p(x)$ 是非齐次方程的一个特解，

故非齐次方程的通解为：

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x),$$

上页 下页 返回

代入边值条件得： $$Hc = g \tag{1.2}$$

其中

$$H = \begin{bmatrix} \alpha_1 y_1'(a) + \alpha_2 y_1(a) & \alpha_1 y_2'(a) + \alpha_2 y_2(a) \\ \beta_1 y_1'(b) + \beta_2 y_1(b) & \beta_1 y_2'(b) + \beta_2 y_2(b) \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_1 y_p'(a) - \alpha_2 y_p(a) \\ \beta - \beta_1 y_p'(b) - \beta_2 y_p(b) \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

定理 1：边值问题（1.1）有唯一解的充要条件是：$|H| \neq 0$；若 $r(H) = r(\overline{H}) < 2$，则（1.1）有无穷多个解；若 $r(H) < r(\overline{H})$，则边值问题（1.1）无解。

定理 2：边值问题（1.1）有唯一解的充要条件是对应的齐次边值问题。

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ \alpha_1 y'(a) + \alpha_2 y(a) = 0 \\ \beta_1 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

只有零解。

证明：设 $y_1(x), y_2(x)$ 是相应的齐次方程组的线性无关的解，故（1.3）的通解为：

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

上页 下页 返回

将它们代入边值条件，得：$\boldsymbol{Hc}=\mathbf{0}$　　　　（1.4）

（1.3）只要零解$\Rightarrow \left|\boldsymbol{H}\right| \neq 0$，由定理 1，得（1.1）有唯一解，反之，若（1.1）有唯一解，由定理可知$\left|\boldsymbol{H}\right| \neq 0$，于是（1.4）只有零解，即（1.3）只有零解。

推论：齐次边值问题（1.3）有非零解的充要条件是：$\left|\boldsymbol{H}\right| = 0$。

上页　下页　返回

例 5：讨论边值问题

$$\begin{cases} y'' + y = 0, & 0 < x < \pi \\ y'(0) + \alpha_2 y(0) = \alpha, y'(\pi) = \beta \end{cases}$$

的解存在唯一性，其中 α, α_2, β 是参数。

解： $y_1(x) = \cos x, y_2(x) = \sin x$ 是微分方程的两个线性无关的解，

$$y_1(0) = 1, y_1(\pi) = -1, y'_1(0) = y'_1(\pi) = 0;$$

$$y_2(0) = y_2(\pi) = 0, y'_1(0) = 1, y'_1(\pi) = -1。$$

于是得： $H = \begin{bmatrix} -\alpha_2 & +1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$， $g = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，

$$\overline{H} = [H, g] = \begin{bmatrix} -\alpha_2 & 1 & \alpha \\ 0 & -1 & \beta \end{bmatrix}$$

若$\alpha_2 \neq 0$，边值问题有唯一解；

若$\alpha_2 = 0$，当$\alpha + \beta = 0$时，边值问题有无穷多个解；

当$\alpha + \beta \neq 0$时，边值问题无解。

二、二阶边值问题解的积分表示

非齐次边值条件的边值问题

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ \qquad y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases} \qquad (2.1)$$

可以通过函数变换将边值条件齐次化

例如令 $z(x) = y(x) + Ax + B$，

取 $A = \dfrac{\alpha - \beta}{b - a}, B = \dfrac{a\beta - b\alpha}{b - a}$，

上页 下页 返回

则问题化为

$$\begin{cases} z'' + p(x)z' + q(x)z = f(x) + Ap(x) + (Ax+B)q(x) \\ z(a) = z(b) = 0 \end{cases}$$

故只需讨论二阶边值问题

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

设 $y_1(x), y_2(x)$ 分别为满足初始条件:

$$\begin{cases} y_1(a) = 1 \\ y_1'(a) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_2(a) = 0 \\ y_2'(a) = 1 \end{cases}$$

的相应齐次方程的解（这二个解必定线性无关）

记 $W(s)=\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) \end{vmatrix}$

$$K(x,s)=\frac{1}{W(s)}\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}$$

故非齐次方程的特解为： $y_p(x)=\int_a^x K(x,s)f(s)ds$

非齐次方程的通解为：

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_p(x)$$

代入边值条件，得： $\begin{cases} c_1=0 \\ c_2y_2(b)+y_p(b)=0 \end{cases}$

如果 $y_2(b)\neq 0$，则 $c_1=0, c_2=-\dfrac{y_p(b)}{y_2(b)}$.

边值问题的解为：

$$y=-\frac{y_p(b)}{y_2(b)}y_2(x)+y_p(x)$$

$$=-\frac{y_2(x)}{y_2(b)}\int_a^b K(b,s)f(s)ds+\int_a^x K(x,s)f(s)ds$$

$$=\int_a^x\left[K(x,s)-\frac{y_2(x)}{y_2(b)}K(b,s)\right]f(s)ds$$

$$-\int_x^b\frac{y_2(x)}{y_2(b)}K(b,s)f(s)ds$$

上页 下页 返回

$$y=\int_a^x\left[K(x,s)-\frac{y_2(x)}{y_2(b)}K(b,s)\right]f(s)ds$$

$$-\int_x^b\frac{y_2(x)}{y_2(b)}K(b,s)f(s)ds$$

$$=\int_a^b G(x,s)f(x)ds$$

$$G(x,s)=\begin{cases}K(x,s)-\dfrac{y_2(x)}{y_2(b)}K(b,as) & s\in[a,x]\\ -\dfrac{y_2(x)}{y_2(b)}K(b,s) & s\in[x,b]\end{cases}$$

Green函数

例 1：利用 Green 函数解边值问题

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{2x}{1+x^2}y' + \dfrac{2}{1+x^2}y = x^2+1 \\ y(0)=0, y(1)=0 \end{cases}$$

解： $z_1(x) = x$ 是相应的齐次方程的一个特解，故它的另一个解是

$$z_2(x) = x\int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} dx = x\int \frac{x^2+1}{x^2} dx = x^2-1$$

令 $y_i = \alpha z_1(x) + \beta z_2(x)$

$$\because\ y_1(0)=1,\ y_1'(0)=0\ \therefore \begin{cases} -\beta=1 \\ \alpha=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=-1 \end{cases}$$

即 $y_1(x)=1-x^2$；

$$\because\ y_2(0)=0,\ y_2'(0)=1\ \therefore \begin{cases} -\beta=0 \\ \alpha=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=0 \end{cases}$$

即 $y_2(x)=x$；

$$W(s)=\begin{vmatrix} 1-s^2 & s \\ -2s & 1 \end{vmatrix}=1+s^2$$

$$K(x,s)=\frac{1}{W(s)}\begin{vmatrix} 1-s^2 & s \\ 1-x^2 & x \end{vmatrix}=\frac{(1-s^2)x-s(1-x^2)}{1+s^2}$$

于是 Green 函数

$$G(x,s)=\begin{cases}-\dfrac{s}{1+s^2}(1-x^2) & s\in[0,x]\\ -\dfrac{1-s^2}{1+s^2}x & s\in[x,1]\end{cases}$$

从而原边值问题的解为：

$$y=\int_0^1 G(x,s)(1+s^2)ds$$

$$=\int_0^x\left[-(1-x^2)\right]sds+\int_x^1(-x)(1-s^2)ds$$

$$=-\frac{x^2}{2}(1-x^2)-x\left[1-x-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x^3\right]$$

$$=\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x$$