**1.1** 设$A$、$B$、$C$是样本空间的事件，把下列事件用$A$、$B$、$C$表示出来：

（1）$A$发生；　　（2）$A$不发生，但$B$、$C$至少有一个发生；

（3）三个事件恰有一个发生；　　（4）三个事件中至少有两个发生；

（5）三个事件都不发生；　　（6）三个事件最多有一个发生；

（7）三个事件不都发生。

**解** (1) $A$；

（2）$\overline{A}(BC+B\overline{C}+\overline{B}C)$ 或$\overline{A}(B+C)$；

（3）$A\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,B\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,C$；

（4）$ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$ 或$AB+AC+BC$；

（5）$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或$\overline{A+B+C}$；

（6）$A\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,B\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,C$ 或$\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}$；

（7）$\overline{ABC}$ 或$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$。

**1.2** 随机地将15名新生平均分配到三个班级中去, 这15名新生中有3名是运动员,问:（1）每个班级各分到有1名运动员的概率是多少?（2）3名运动员被分到同一班级的概率是多少?

**解法一**　　将15名新生平均分配到三个班级，有$C_{15}^5C_{10}^5C_5^5$种不同做法。

（1）每个班级各有一名运动员，相当于先将3个运动员分配到三个班级，每班1个，再将12个非运动员分配到三个班级，每班4个，有$C_3^1C_2^1C_1^1\ C_{12}^4C_8^4C_4^4$种不同做法，所以，

$$P\{\text{每个班级各有一名运动员}\}=\frac{C_3^1C_2^1C_1^1C_{12}^4C_8^4C_4^4}{C_{15}^5C_{10}^5C_5^5}=\frac{3!\,C_{12}^4C_8^4C_4^4}{C_{15}^5C_{10}^5C_5^5}=\frac{25}{91}\ ;$$

（2）3名运动员分到同一班级，相当于先要确定分配到哪一个班级，有3种不同选择，然后将3个运动员分配到这个班级，再从12个非运动员中任取2人分配到这个班级，其余非运动员分配到其它两个班级，每班5个，有$3C_3^3\ C_{12}^2C_{10}^5C_5^5$种不同做法，所以，

$$P\{\text{3 名运动员分到同一班级}\}=\frac{3C_3^3C_{12}^2C_{10}^5C_5^5}{C_{15}^5C_{10}^5C_5^5}=\frac{6}{91}\ 。$$

**解法二**　　将15名新生平均分配到三个班级,可以看作是有15个空位子,每个班级各有5个空位子。从这15个空位子中任意选3个位子放运动员（其余位子自然是放非运动员，可不考虑），共有$C_{15}^3$种不同做法。

（1）每个班级各有一名运动员，相当于从每个班级的5个空位子中任意选1个位子放运动员，有$C_5^1C_5^1C_5^1$种不同做法，所以，

$$P\{\text{每个班级各有一名运动员}\}=\frac{C_5^1C_5^1C_5^1}{C_{15}^3}=\frac{25}{91} \quad ;$$

（2）3 名运动员分到同一班级，相当于先要确定分配到哪一个班级，有 3 种不同选择，从这个班级的 5 个空位子中任意选 3 个位子放运动员，有 $3C_5^3$ 种不同做法，所以，

$$P\{3\text{ 名运动员分到同一班级}\}=\frac{3C_5^3}{C_{15}^3}=\frac{6}{91} \quad 。$$

**1.3** $A$、$B$ 是随机事件，已知 $P(A)=a$，$P(B)=b$，$P(AB)=c$，求：

（1）$P(\overline{A}+\overline{B})$；（2）$P(\overline{A}\ \overline{B})$ ；（3）$P(\overline{A}B)$ ；（4）$P(\overline{A}+B)$ 。

**解** （1）$P(\overline{A}+\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-c$ ；

（2）$P(\overline{A}\ \overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$

$=1-a-b+c$ ；

（3）$P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(AB)=b-c$ ；

（4）$P(\overline{A}+B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)=1-a+b-(b-c)=1-a+c$ 。

**1.4** 向盛有 n 个球的器皿中投入一个白球, 如果器皿中原来的白球数从 0 到 $n$ 是等可能的,, 现在再从器皿中取出一个球, 试问这个球为白球的概率是多少?

**解** 设 $A_i=\{$器皿中原来有 $i$ 个白球$\}$（$i=0,1,2,\cdots,n$），因为已知器皿中原来的白球数从 0 到 $n$ 是等可能的，所以

$$P(A_i)=\frac{1}{n+1} \quad (i=0,1,2,\cdots,n) \quad 。$$

设 $B=\{$取出一球，恰好取到白球$\}$。当器皿中原来有 $i$ 个白球时，再投入 1 个白球，器皿中就有 $i+1$ 个白球，这时取出一球，恰好取到白球的概率是

$$P(B|A_i)=\frac{i+1}{n+1} \quad (i=0,1,2,\cdots,n) \quad 。$$

由全概率公式

$$P(B)=\sum_{i=0}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{i+1}{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i=0}^{n}(i+1)$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{n+2}{2(n+1)} \quad 。$$

**1.5** 无线通信中，由于随机干扰，当发出信号为“•”时，收到信号为“•”、“不清”、“—”的概率分别为 0.7、0.2 和 0.1；当发出信号为“—”时，收到信号为“—”、“不清”、“•”的概率分别为 0.9、0.1 和 0. 如果整个发报过程中“•”、“—”出现的概率分别为 0.6 和 0.4，当收到信号“不清”时，原发信号是什么？试加以推测.

**解** 设 $A=\{$ 收到“不清” $\}$， $B=\{$ 发出“·” $\}$， $\overline{B}=\{$ 发出“-” $\}$，由题意可知，

$P(B)=0.6$，$P(\overline{B})=0.4$，$P(A|B)=0.2$，$P(A|\overline{B})=0.1$，由贝叶斯公式，得

当原发信号为“·”时，收到“不清”的概率为

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}=\frac{0.6\times0.2}{0.6\times0.2+0.4\times0.1}=0.75 \quad ;$$

当原发信号为“—”时，收到“不清”的概率为

$$P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)=1-0.75=0.25 \quad 。$$

因为 $P(B|A)=0.75>0.25=P(\overline{B}|A)$，所以收到“不清”时，原发信号为“·”的可能性比较大。

**1. 6** 设 $A,B,C$ 相互独立,试证 $A-B$ 与 $C$ 相互独立。

**证** 因为 $A,B,C$ 相互独立，有

$$P((A-B)C)=P(AC-BC)=P(AC)-P(ABC)=P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C)$$

$$=[P(A)-P(A)P(B)]P(C)=[P(A)-P(AB)]P(C)=P(A-B)P(C) \quad ,$$

所以， $A-B$ 与 $C$ 相互独立。

**1.7** 口袋中有 5 个球，分别标有号码 1，2，3，4，5，现从这口袋中任取 3 个球。

（1）设 $\xi$ 是取出球中号码的最大值，求 $\xi$ 的概率分布，并求出 $\xi\le4$ 的概率；

（2）设 $\eta$ 是取出球中号码的最小值，求 $\eta$ 的概率分布，并求出 $\eta>3$ 的概率。

**解**（1）从 5 个球中取 3 个球，最大号码为 $k$，相当于先取 1 个号码为 $k$ 的球，再从号码小于 $k$ 的 $k-1$ 个球中取 2 个球，所以 $P\{\xi=k\}=\frac{C_1^1C_{k-1}^2}{C_5^3}=\frac{C_{k-1}^2}{10}$ （$k=3,4,5$） 。

由此求得 $\xi$ 的概率分布为

| $\xi$ | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| $P\{\xi=x_i\}$ | 0.1 | 0.3 | 0.6 |

$$P\{\xi \le 4\} = P\{\xi = 3\} + P\{\xi = 4\} = 0.1 + 0.3 = 0.4$$ ；

（2）从 5 个球中取 3 个球，最小号码为$k$，相当于先取 1 个号码为$k$的球，再从号码大于$k$的$5-k$个球中取 2 个球，所以 $P\{\eta = k\} = \dfrac{C_1^1 C_{5-k}^2}{C_5^3} = \dfrac{C_{5-k}^2}{10}$ （$k = 1, 2, 3$） 。

由此求得$\eta$的概率分布为

| $\eta$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P\{\eta = y_j\}$ | 0.6 | 0.3 | 0.1 |

$$P\{\eta > 3\} = 0$$ 。

**1.8** 设随机变量$\xi$、$\eta$都服从二项分布，$\xi \sim b(2, p)$，$\eta \sim b(3, p)$。已知$P\{\xi \ge 1\} = \dfrac{5}{9}$，试求$P\{\eta \ge 1\}$的值。

**解** 由 $P\{\xi \ge 1\} = 1 - P\{\xi = 0\} = 1 - (1-p)^2 = \dfrac{5}{9}$ **可解得** $1 - p = \pm\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \pm\dfrac{2}{3}$ ，因为$1 - p > 0$，舍去负值，得到$1 - p = \dfrac{2}{3}$ ，**即有** $p = \dfrac{1}{3}$ 。

所以 $P\{\eta \ge 1\} = 1 - P\{\eta = 0\} = 1 - (1-p)^3 = 1 - (1 - \dfrac{1}{3})^3 = 1 - \dfrac{8}{27} = \dfrac{19}{27}$ 。

**1.9** 某商店出售某种商品，据以往经验，月销售量服从普阿松分布$P(3)$。问在月初进货时要库存多少此种商品，才能以 99%的概率充分满足顾客的需要。

**解** 设月初要进货$a$件，$\xi$是月销售量，$\xi \sim P(3)$ 。要满足顾客需要，必须有$\xi \le a$，根据题意，要有

$$P\{\xi \le a\} = \sum_{k=0}^{a} P\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^{a} \frac{3^k}{k\,!} \mathrm{e}^{-3} \ge 0.99$$ 。

直接计算或查书后附录中普阿松分布的概率表，可以求得：

$$\sum_{k=0}^{7} \frac{3^k}{k!} \mathrm{e}^{-3} \approx 0.988 < 0.99 \quad , \quad \sum_{k=0}^{8} \frac{3^k}{k!} \mathrm{e}^{-3} \approx 0.996 > 0.99$$ 。

由此可见，月初至少要进货 8 件，才能以$99\%$以上的概率满足顾客的需要。

**1.10** 已知随机变量$\xi$的概率密度为$\varphi(x) = Ae^{-|x|}$，（$-\infty < x < +\infty$）。求：

（1）系数$A$；（2）随机变量$\xi$落在区间（0，1）内的概率；（3）随机变量$\xi$的分布函数。

**解** （1）因为 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}A\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{+\infty}A\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2A$，所以 $A=\dfrac{1}{2}$ ；

（2） $P\{0<\xi<1\}=\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-1}}{2}\approx 0.31606$ ；

（3）当 $x<0$ 时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$ ；

当 $x\geq 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{x}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{2}=1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$ ；

即有

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x} & x<0\\ 1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} & x\geq 0\end{cases}。$$

**1.11** 设连续型变量 $\xi$ 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ Ax^2 & 0\leq x<1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$

求：（1）系数 $A$；（2）$\xi$ 的概率密度 $\varphi(2)$； （3）$P\{-0.3<\xi<0.7\}$。

**解**（1）因为 $\xi$ 连续，在 $x=1$，有 $F(1-0)=F(1)$，而 $F(1-0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}A(1-\varepsilon)^2=A$，

$F(1)=1$，所以必有 $A=1$ ；

（2） $\varphi(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)=\begin{cases}0'=0 & x<0\\ (x^2)'=2x & 0\leq x<1\\ 1'=0 & x\geq 1\end{cases}$ ，即有 $\varphi(x)=\begin{cases}2x & 0\leq x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ ；

（3） $P\{-0.3<\xi<0.7\}=F(0.7)-F(-0.3)=0.7^2-0=0.49$ 。

**1.12** 修理某机器所需时间（单位：小时）服从以 $\lambda=1/2$ 为参数的指数分布。试问：
（1）修理时间超过 2 小时的概率是多少？
（2）若已持续修理了 9 小时，总共需要至少 10 小时才能修好的条件概率是什么？

**解** 设 $\xi$ 是修理时间，$\xi\sim E(\dfrac{1}{2})$，$\xi$ 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$ 。

（1） $P\{\xi>2\}=1-P\{\xi\leq 2\}=1-F(2)=1-(1-\mathrm{e}^{-\frac{2}{2}})=\mathrm{e}^{-1}\approx 0.367879$ ；

（2）$P\{\xi>10|\xi>9\}=\dfrac{P\{\xi>10\}}{P\{\xi>9\}}=\dfrac{1-(1-\mathrm{e}^{-\frac{10}{2}})}{1-(1-\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}})}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{10}{2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\approx 0.606531$ 。

**1.13** 某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩（百分制）近似服从正态分布 $N(72,\sigma^2)$，且 96 分以上占学生总数的 2.3%，试求考生的外语成绩在 60 至 84 分之间的概率。

**解** 设 $\xi$ 是学生外语成绩，$\xi\sim N(72,\sigma^2)$，已知

$$P\{\xi>96\}=1-\Phi(\frac{96-72}{\sigma})=1-\Phi(\frac{24}{\sigma})=0.023,$$

即有 $\Phi(\dfrac{24}{\sigma})=0.977$，查表得 $\dfrac{24}{\sigma}=1.9954$，$\sigma=\dfrac{24}{1.9954}\approx 12$ ，于是有

$$P\{60\le\xi\le 84\}=\Phi(\frac{84-72}{\sigma})-\Phi(\frac{60-72}{\sigma})\approx\Phi(\frac{84-72}{12})-\Phi(\frac{60-72}{12})$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=\Phi(1)-1+\Phi(1)=0.8413-1+0.8413=0.6826 \text{ 。}$$

**1.14** 设 $\xi\sim N\left(0,1\right)$. 求：（1）$\eta=2\xi^2+1$ 的概率密度；（2）$\eta=\left|\xi\right|$ 的概率密度.

**解** 因为 $\xi\sim N(0,1)$ ，$\xi$ 的概率密度为 $\varphi_\xi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 。

（1）当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $y=f(x)=2x^2+1$ 严格单调下降,反函数为 $x=f_1^{-1}(y)=-\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}$，

$y\in(1,+\infty)$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f_1^{-1}(y)=(-\sqrt{\dfrac{y-1}{2}})'=\dfrac{-1}{2\sqrt{2(y-1)}}$ 。

$$\varphi_1(y)=\begin{cases}\varphi_\xi(f_1^{-1}(y))\left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f_1^{-1}(y)\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(-\sqrt{\frac{y-1}{2}})^2}{2}}\left|\dfrac{-1}{2\sqrt{2(y-1)}}\right| & y\in(1,+\infty)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{\pi(y-1)}}\mathrm{e}^{-\frac{y-1}{4}} & y>1\\ 0 & y\le 1\end{cases};$$

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$y=f(x)=2x^2+1$ 严格单调上升，反函数为 $x=f_2^{-1}(y)=\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}$，

$y \in (1,+\infty)$， $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f_2^{-1}(y) = (\sqrt{\dfrac{y-1}{2}})' = \dfrac{1}{2\sqrt{2(y-1)}}$ 。

$$\varphi_2(y) = \begin{cases} \varphi_\xi(f_2^{-1}(y))\left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f_2^{-1}(y)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(\sqrt{\frac{y-1}{2}})^2}{2}} \left|\dfrac{1}{2\sqrt{2(y-1)}}\right| & y \in (1,+\infty) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{\pi(y-1)}} \mathrm{e}^{-\frac{y-1}{4}} & y > 1 \\ 0 & y \le 1 \end{cases} ;$$

$$\varphi_\eta(y) = \varphi_1(y) + \varphi_2(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}} \mathrm{e}^{-\frac{y-1}{4}} & y > 1 \\ 0 & y \le 1 \end{cases} ;$$

（2）当 $x \in (-\infty,0)$ 时， $y = f(x) = |\ x\ |$ 严格单调下降，反函数为 $x = f_1^{-1}(y) = -y$，

$y \in (0,+\infty)$， $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f_1^{-1}(y) = (-y)' = -1$ 。

$$\varphi_1(y) = \begin{cases} \varphi_\xi(f_1^{-1}(y))\left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f_1^{-1}(y)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(-y)^2}{2}} |-1| & y \in (0,+\infty) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases} ;$$

当 $x \in (0,+\infty)$ 时， $y = f(x) = |\ x\ |$ 严格单调上升，反函数为 $x = f_2^{-1}(y) = y$，

$y \in (0,+\infty)$， $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f_2^{-1}(y) = y' = 1$ 。

$$\varphi_2(y) = \begin{cases} \varphi_\xi(f_2^{-1}(y))\left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f_2^{-1}(y)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} |1| & y \in (0,+\infty) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases} ;$$

$$\varphi_\eta(y)=\varphi_1(y)+\varphi_2(y)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$ 。

**1.15** 袋中有 5 只乒乓球，编号为 1，2，3，4，5。现从中任取 3 只乒乓球，乒乓球的最大编号的数学期望。

**解** 从 5 个球中任取 3 个球，共有 $C_5^3$ 种取法。取到球的最大号码为 $i$，最小号码为 $j$，相当于先取 1 个号码为 $i$ 的球和 1 个号码为 $j$ 的球，再从号码小于 $i$ 大于 $j$ 的 $i-j-1$ 个球中取 1 个球，有 $C_1^1C_{i-j-1}^1C_1^1$ 种取法。所以 $(\xi,\eta)$ 的联合概率分布为

$$P\{\xi=i,\eta=j\}=\frac{C_1^1C_{i-j-1}^1C_1^1}{C_5^3}=\frac{C_{i-i-1}^1}{10}\quad（i=3,4,5；\ j=1,2,3）$$ 。

| $\xi$ \ $\eta$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 3 | $\frac{1}{10}$ | 0 | 0 |
| 4 | $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | 0 |
| 5 | $\frac{3}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

**1.16** 设二维随机变量 $(\xi,\eta)$ 的联合分布函数为

$$F(x,y)=A(B+arctan\frac{x}{2})(C+arctan\frac{y}{3})$$

求:（1）$A,B,C$ 的值;（2）$(\xi,\eta)$ 的联合概率密度函数; (3)边缘分布函数及边缘概率密度函数.

**解** （1） 由二维随机变量分布函数的性质可知

$$\begin{cases}0=F(-\infty,+\infty)=A(B-\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2}) & (1)\\ 0=F(+\infty,-\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C-\frac{\pi}{2}) & (2)\\ 1=F(+\infty,+\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2}) & (3)\end{cases}$$

由（3）得 $$A=\frac{1}{(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})}\qquad（4）$$

（4）代入（1）得 $0=\dfrac{(B-\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})}{(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})}=\dfrac{B-\frac{\pi}{2}}{B+\frac{\pi}{2}}$ ，解得 $B=\dfrac{\pi}{2}$ ；

（4）代入（2）得 $0=\dfrac{(B+\frac{\pi}{2})(C-\frac{\pi}{2})}{(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})}=\dfrac{C-\frac{\pi}{2}}{C+\frac{\pi}{2}}$ ，解得 $C=\dfrac{\pi}{2}$ ；

再将 $B=\dfrac{\pi}{2}$ 和 $C=\dfrac{\pi}{2}$ 代入（4），求得 $A=\dfrac{1}{\pi^2}$ 。

$(\xi,\eta)$ 的联合分布函数为 $F(x,y)=\dfrac{1}{\pi^2}(\dfrac{\pi}{2}+\arctan\dfrac{x}{2})(\dfrac{\pi}{2}+\arctan\dfrac{y}{3})$ 。

（2）$(\xi,\eta)$ 的联合概率密度为

$$\varphi(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1+(\frac{x}{2})^2}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1+(\frac{y}{3})^2}=\frac{6}{\pi^2(x^2+4)(y^2+9)}$$ 。

（3）$\xi,\eta$ 的边缘分布函数为

$$F_\xi(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{2} \quad , \quad F_\eta(y)=F(+\infty,y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{y}{3}$$ ；

$\xi,\eta$ 的边缘概率密度为

$$\varphi_\xi(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_\xi(x)=\frac{2}{\pi(x^2+4)} \quad , \quad \varphi_\eta(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_\eta(y)=\frac{3}{\pi(y^2+9)}$$ 。

**1.17** 设随机变量 $\xi$ 与 $\eta$ 独立，$\xi$ 服从 $\left[0,2\right]$ 上的均匀分布，$\eta$ 服从指数分布 $E\left(2\right)$，求：(1) 二维随机变量 $\left(\xi,\eta\right)$ 的联合密度函数；(2) $P\left\{\xi\le\eta\right\}$ 的值.

**解** （1）由 $\xi\sim U(0,2)$，可知 $\varphi_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & 0\le x\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ ；

由 $\eta\sim E(2)$，可知 $\varphi_\eta(y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$ ；

因为 $\xi,\eta$ 相互独立，所以（$\xi,\eta$）的联合概率密度为

$$\varphi(x,y)=\varphi_\xi(x)\varphi_\eta(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-2y} & 0\le x<2,\ y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ ；

（2） $P\{\xi \le \eta\} = \iint\limits_{x \le y} \varphi(x,.y)dxdy = \int_0^2 \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-4}}{4}$

**1.18** 已知$\xi_1$和$\xi_2$的分布分别为

| $\xi_1$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

| $\xi_2$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

并且$P\left\{\xi_1\xi_2 = 0\right\} = 1$.（1）求$\xi_1$与$\xi_2$的联合概率分布;（2）问$\xi_1$与$\xi_2$是否独立;（3）求$\max\left(\xi_1, \xi_2\right)$的概率分布.

**解**（1） 由 $P\{\xi_1\xi_2 = 0\} = 1$ 可知 $P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 1\} = P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 1\} = 0$ 。

得到（$\xi_1,\xi_2$）的联合概率分布如下：

| $\xi_1 \backslash \xi_2$ | $0$ | $1$ | $P\{\xi_1 = x_i\}$ |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $1/4$ | $0$ | $1/4$ |
| $0$ | $0$ | $1/2$ | $1/2$ |
| $1$ | $1/4$ | $0$ | $1/4$ |
| $P\{\xi_2 = y_j\}$ | $1/2$ | $1/2$ | $1$ |

（2）因为$P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 0\} = \frac{1}{4} \ne \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = P\{\xi_1 = -1\}P\{\xi_2 = 0\}$，所以$\xi_1,\xi_2$不独立;

（3）因为 $P\{\zeta = 0\} = P\{\max(\xi_1,\xi_2) = 0\} = P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 0\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 0\}$

$= \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$ ， $P\{\zeta = 1\} = 1 - P\{\zeta = 0\} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ，

所以 $\zeta=\max(\xi_1,\xi_2)$ 的概率分布为

| $\zeta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P\{\zeta=z_k\}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |

**1.19** 某工厂生产的一种产品，其寿命$\xi$（以年为单位）服从指数分布$E\left(\frac{1}{4}\right)$。工厂规定售出产品在一年内损坏可以调换。已知售出一个产品若在一年内不损坏，工厂可获利 100 元，若在一年内损坏，调换一个产品，工厂净损失 300 元。试求该厂售出一个产品平均可获利多少元？

**解法一** 设$\eta$为该厂售出一个产品的获利。

$$\eta=f(\xi)=\begin{cases}-300 & \text{当}\xi\le 1\text{时}\\ 100 & \text{当}\xi>1\text{时}\end{cases}$$

因为 $\xi\sim E(\frac{1}{4})$，所以$\xi$的概率密度为$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ 。

$$E\eta=Ef(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(-300)\times\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}100\times\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\mathrm{d}x$$

$$=-300(1-e^{-\frac{1}{4}})+100e^{-\frac{1}{4}}=-300+400e^{-\frac{1}{4}}\approx 11.52\quad。$$

**解法二** 设$\eta$为该厂售出一个产品的获利。

$$P\{\eta=-300\}=P\{\xi\le 1\}=\int_{-\infty}^{1}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\mathrm{d}x=1-e^{-\frac{1}{4}}\quad,$$

$$P\{\eta=100\}=P\{\xi>1\}=\int_1^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\mathrm{d}x=e^{-\frac{1}{4}}\quad,$$

$\eta$的概率分布为

| $\eta$ | $-300$ | $100$ |
|---|---|---|
| $P\{\eta=y_j\}$ | $1-e^{-\frac{1}{4}}$ | $e^{-\frac{1}{4}}$ |

所以 $E\eta=\sum_{j=1}^{2}y_jP\{\eta=y_j\}=-300(1-e^{-\frac{1}{4}})+100e^{-\frac{1}{4}}=-300+400e^{-\frac{1}{4}}\approx 11.52$ 。

**1.20** 设随机变量$\xi$的分布为

| $\xi$ | $-2$ | 0 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.4 | 0.3 | 0.3 |

求$E\xi$; $D\xi$; $E\left(\xi^2+2\right)$的值.

**解**

$$E\xi = -2\times 0.4 + 0\times 0.3 + 2\times 0.3 = -0.2$$

$$E\xi^2 = \left(-2\right)^2 \times 0.4 + 0^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.3 = 2.8$$

$$D\xi = E\xi^2 - \left(E\xi\right)^2 = 2.8 - \left(-0.2\right)^2 = 2.76$$

$$E\left(\xi^2+2\right) = E\xi^2 + 2 = 4.8$$

**1.21** 已知二维随机变量的联合概率密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(x+y) & 0<x<2,\quad 0<y<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}。$$

求$E\xi$，$E\eta$，$E(\xi\eta)$。

**解** $E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2 x\frac{1}{8}(x+y)\mathrm{d}y=\int_0^2\frac{x}{8}(2x+2)\mathrm{d}x=\frac{7}{6}$ ；

同理可得 $E\eta=\frac{7}{6}$ ；

$$E(\xi\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2 xy\frac{1}{8}(x+y)\mathrm{d}y=\int_0^2\frac{x}{8}(2x+\frac{8}{3})\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\text{。}$$

**1.22** 设$\left(\xi,\ \eta\right)$的联合分布为

| $\eta$ \ $\xi$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | 0 |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ |

（1）求$E\xi$; $E\eta$; $Cov\left(\xi,\eta\right)$; $\rho_{\xi\eta}$ 的值；

（2）问$\xi$与$\eta$是否独立？

**解** （1）因为$\xi,\eta$的联合概率分布和边缘概率分布为

| $\xi \backslash \eta$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $P\{\xi = x_i\}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | 0 | $\frac{3}{4}$ |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $P\{\eta = y_j\}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 1 |

所以

$$E\xi = \sum_{i=1}^{2} x_i P\{\xi = x_i\} = 1\times\frac{3}{4} + 3\times\frac{1}{4} = \frac{3}{2} \ ,$$

$$E\eta = \sum_{j=1}^{4} y_j P\{\eta = y_j\} = 0\times\frac{1}{8} + 1\times\frac{3}{8} + 2\times\frac{3}{8} + 3\times\frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E(\xi\ \eta) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} x_i y_j P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$$

$$= 1\times(0\times 0 + 1\times\frac{3}{8} + 2\times\frac{3}{8} + 3\times 0) + 3\times(0\times\frac{1}{3} + 1\times 0 + 2\times 0 + 3\times\frac{1}{3}) = \frac{9}{4} \ ,$$

$$Cov(\xi,\eta) = E(\xi\ \eta) - E\xi\ E\eta = \frac{9}{4} - \frac{3}{2}\times\frac{3}{2} = 0 \ ,$$

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{Cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi\ D\eta}} = \frac{0}{\sqrt{D\xi\ D\eta}} = 0 \ 。$$

（2）因为

$$P\{\xi = 1\}P\{\eta = 0\} = \frac{3}{4}\times\frac{1}{8} \neq 0 = P\{\xi = 1, \eta = 0\} \ ,$$

所以，$\xi$与$\eta$并不相互独立。

**1.23** 设$\xi_1$，$\xi_2$，$\xi_3$为独立随机变量，且$\xi_1 \sim U(0,6)$，$\xi_2 \sim N(0,4)$，$\xi_3 \sim E(3)$，求$\eta = \xi_1 - 2\xi_2 + 3\xi_3$的数学期望与方差。

**解** 因为 $\xi_1 \sim U(0,6)$，所以 $E\xi_1 = \frac{0+6}{2} = 3$，$D\xi_1 = \frac{(6-0)^2}{12} = 3$ ；

因为 $\xi_2 \sim N(0,4)$，所以 $E\xi_2 = 0$，$D\xi_2 = 4$ ；

因为 $\xi_3 \sim E(3)$，所以 $E\xi_3 = \frac{1}{3}$，$D\xi_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ 。

所以有

$$E(\xi_1 - 2\xi_2 + 3\xi_3) = E\xi_1 - 2E\xi_2 + 3E\xi_3 = 3 - 2\times 0 + 3\times\frac{1}{3} = 4 \ ;$$

又因为$\xi_1$，$\xi_2$，$\xi_3$相互独立，所以有

$$D(\xi_1 - 2\xi_2 + 3\xi_3) = D\xi_1 + 2^2 D\xi_2 + 3^2 D\xi_3 = 3 + 4\times 4 + 9\times\frac{1}{9} = 20 \ 。$$

**1.24** 设$\{\xi_n\}$是独立同分布序列，$P\{\ \xi_k = \pm \log k\ \} = \frac{1}{2}$,（$n = 1,2,\cdots$), $k$ **为大于零的常数,试证明**$\{\xi_n\}$满足大数定理。

**解** $\{\xi_n\}$是独立同分布随机变量序列，$E\xi_k = \frac{1}{2}\log k + \frac{1}{2}(-\log k) = 0$，数学期望有限，满足辛钦大数定理的条件，可应用辛钦大数定理。

**1.2.5** 一复杂系统，由多个相互独立作用的部件组成，在运行期间，每个部件损坏的概率都是$0.1$，为了使整个系统可靠地工作，必须至少有 88%的部件起作用。

（1）已知系统中共有 900 个部件，求整个系统的可靠性（即整个系统能可靠地工作的概率）。

（2）为了使整个系统的可靠性达到$0.99$，整个系统至少需要由多少个部件组成？

**解** 设$\xi$是起作用的部件数 ，$\xi \sim b(n,p)$，当$n$比较大时，近似有$\xi \sim N(np,npq)$。

（1）$n = 900$，$p = 0.9$，$q = 1 - p = 0.1$, $np = 810$，$npq = 81$。

整个系统要能可靠地工作，至少要有 $n\times 88\% = 900\times 88\% = 792$ 个部件起作用，所以，这时系统能可靠地工作的概率等于

$$P\{792 \le \xi \le 900\} \approx \Phi(\frac{900-792}{\sqrt{81}}) - \Phi(\frac{792-810}{\sqrt{81}}) = \Phi(12) - \Phi(-2) \approx 0.9772 \ ;$$

（2）设至少需要$n$个部件，$np = 0.9n$，$npq = 0.09n$。

这时系统能可靠地工作的概率等于

$$P\{0.88n \le \xi \le n\} \approx \Phi(\frac{n-0.9n}{\sqrt{0.09n}}) - \Phi(\frac{0.88n-0.9n}{\sqrt{0.09n}}) = \Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) - \Phi(-\frac{\sqrt{n}}{15})$$

$$\approx 1 - \Phi(-\frac{\sqrt{n}}{15}) = \Phi(\frac{\sqrt{n}}{15})$$

（ 因为本题中$n$很大，$\frac{\sqrt{n}}{3}$的值远远超过了$4$，所以可以认为 $\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) \approx 1$ ） 。

要$\Phi(\frac{\sqrt{n}}{15}) \geq 0.99$，查表可得$\frac{\sqrt{n}}{15} \geq 2.3263$，即$n \geq (2.3263\times 15)^2 \approx 1218$，

即如果整个系统可靠性要达到$0.99$，它至少需要由$1218$个部件组成。

**1.26** 保险公司接受多种项目的保险，其中有一项是老年人寿保险，若一年中有 100000 人参加这项保险，每人每年需付保险费 20 元，在此类保险者里，每个人死亡的概率是$0.002$，死亡后家属立即向保险公司领得 8000 元。若不计保险公司支出的管理费，试求：
（1）保险公司在此项保险中亏本的概率；
（2）保险公司在此项保险中获益 80000 元以上的概率。

**解** 设$\xi$是死亡的人数，$\xi \sim b(n,p)$，$n=100000$，$p=0.002$，$q=1-p=0.998$。近似有 $\xi \sim N(np,npq)$，$np=100000\times 0.002=200$，$npq=200\times 0.998=199.6$。

保险公司的净获益为 $20\times 100000-8000\xi$。

（1）当 $20\times 100000-8000\xi<0$，即 $\xi>250$时，保险公司在此项保险中亏本，其概率为

$$P\{\xi>250\}\approx 1-\Phi(\frac{250-200}{\sqrt{199.6}})\approx 1-\Phi(3.539)\approx 0.0002\ ;$$

（2）若要 $20\times 100000-8000\xi>80000$，必须有 $\xi<240$，这时，概率为

$$P\{\xi<240\}\approx \Phi(\frac{240-200}{\sqrt{199.6}})\approx \Phi(2.831)\approx 0.9977\ 。$$