

# 第二章 几何光学成像

几何光学中心问题：成像、成像仪器

## §1 成像

### 一、物、像基本概念

**同（单）心光束：**光线本身或其延长线交于同一点

在反射或折射之后，光线方向改变，单心性没有被破坏，仍具有一个交点（顶点），该点便是发光点的像。

同心光束可以分为发散的、会聚的和平行的三种，平行光束的光线交点在无穷远。

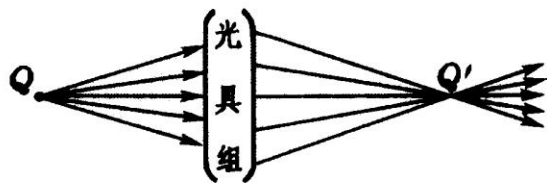
进入人眼的光束方能引起视觉，人眼所能看到的是成像于视网膜上的光束的顶点，而**不是光束本身**。

**光学系统或光具组：**不同材料不同形状的反射面、  
折射面以及光阑组成的系统

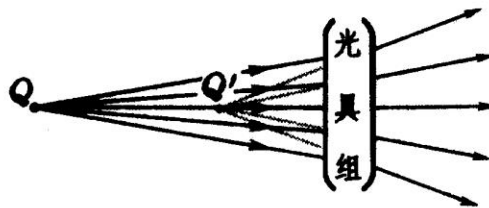
透镜、反射镜、棱镜和光阑等是构成光学系统的基本元件  
光学系统的作用就是用以变换光束。

入射的同心光束经过光学系统后，出射光束仍为同心光束，该光学系统称为理想光学系统（理想光具组）。

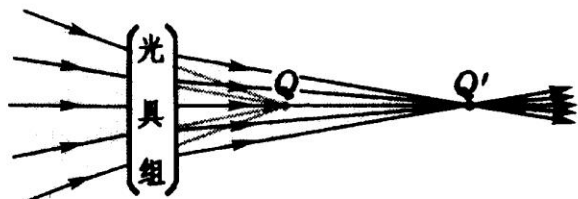
光具组（光学系统）使 $Q$ 点（物点）成像于 $Q'$ 点（像点）



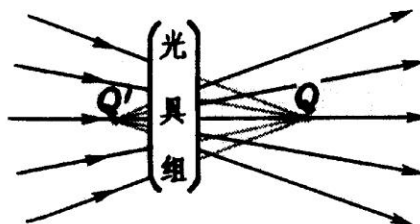
a 实物成实像



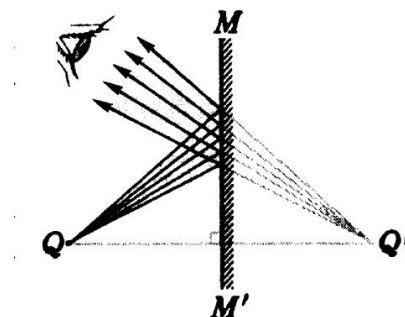
b 实物成虚像



c 虚物成实像



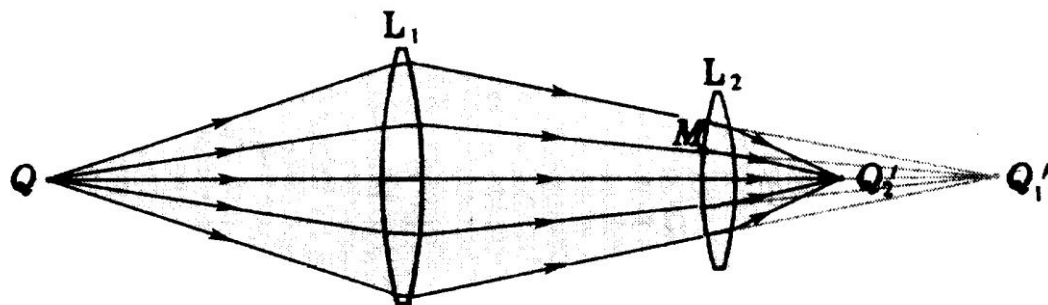
d 虚物成虚像



- {
实像： 从光具组出射的是会聚的同心光束，其会聚点为实像
- 虚像： 从光具组出射的是发散的同心光束，其反向延长线的会聚点为虚像

- 像的观察
- {
实像：接收屏或眼睛直接观察
  - 虚像：眼睛判断入射光线的发光中心

- 实物：**入射光具组的是发散的同心光束，对应会聚点为实物
- 虚物：**入射光具组的是会聚的同心光束，对应会聚点为虚物

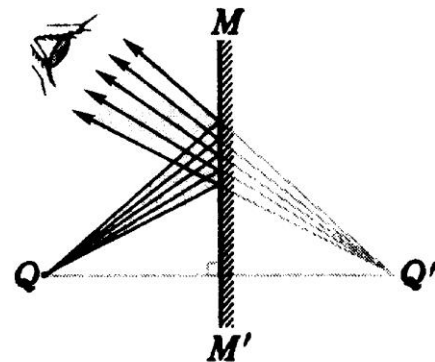


## 二、物、像共轭性

物点 $Q$ ——理想光具组——像点 $Q'$

$Q$ 、 $Q'$ 一一对应

共轭点



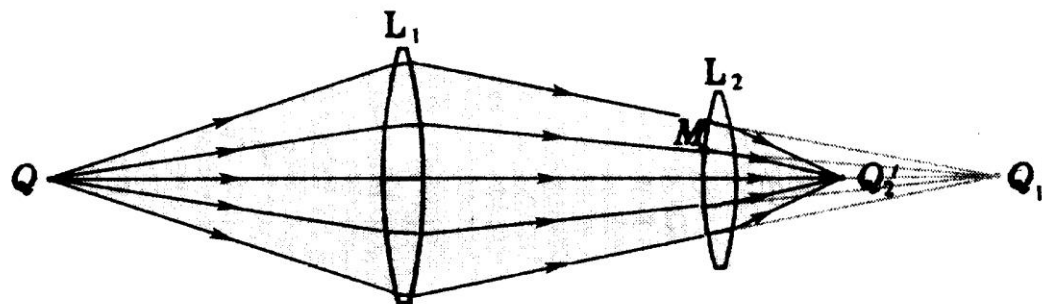
物、像共轭是光路可逆原理的必然结果

### 三、物、像等光程性

费马原理:  $\delta \int_A^B n(l) dl = 0$

物点 $Q$ 与像点 $Q'$ 之间各光线的光程相等

\*虚物、虚像间的等光程性: ——虚光程



$$(QM_1Q')_1 = (QM_1Q')_2 \dots (1)$$

$$(QM_2Q')_1 = (QM_2Q')_2 \dots (2)$$

(1)-(2):  $(Q'_1M_2Q'_2)_1 = (Q'_1M_2Q'_2)_2$  虚物 $Q'_1$ 与实像 $Q'_2$ 间等光程

## §2 单球面傍轴成像

共轴球面光具组：球心在同一直线上的折射或  
反射球面组系统

光轴：球心连线

傍轴光线：在光轴附近，物点 $Q$ ——像点 $Q'$

### 一、单个球面折射的物像公式

费马原理+傍轴光线近似条件：

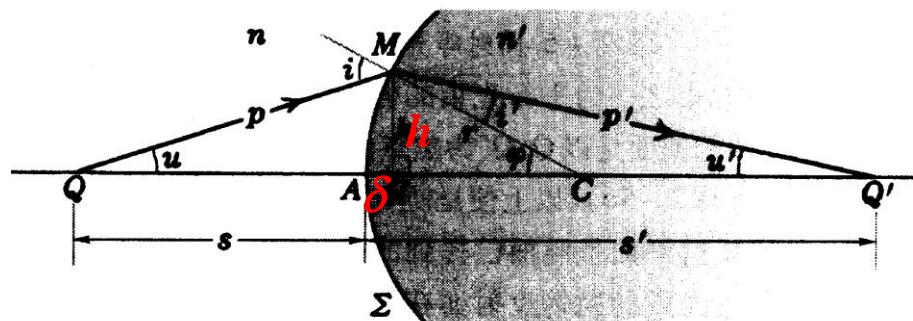
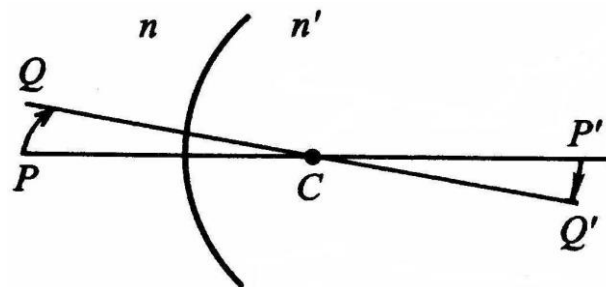
费马原理：

$$nS + n'S' = n\overline{QM} + n'\overline{MQ'}$$

$$\overline{QM} = \sqrt{(S + \delta)^2 + h^2}$$

$$\overline{MQ'} = \sqrt{(S' - \delta)^2 + h^2}$$

$$h^2 = r^2 - (r - \delta)^2 = 2r\delta - \delta^2$$



$$\therefore nS + n'S' = nS \sqrt{1 + 2\delta \frac{S+r}{S^2}} + n'S' \sqrt{1 + 2\delta \frac{r-S'}{S'^2}}$$

近轴光线:  $\delta \rightarrow 0$ :  $\sqrt{1 + 2\delta \frac{S+r}{S^2}} \approx 1 + \delta \frac{S+r}{S^2}$

$$\sqrt{1 + 2\delta \frac{r-S'}{S'^2}} \approx 1 + \delta \frac{r-S'}{S'^2}$$

$$nS + n'S' = nS \left( 1 + \delta \frac{S+r}{S^2} \right) + n'S' \left( 1 + \delta \frac{r-S'}{S'^2} \right)$$

$$\frac{n}{S} \delta (r+S) + \frac{n'}{S'} \delta (r-S') = 0$$

$$\therefore \frac{n}{S} + \frac{n'}{S'} = \frac{n' - n}{r} \quad \text{球面折射物像公式}$$

讨论:

1) 焦距: 当 $S' = \infty$ : 物距 $S$  = 物方焦距  $f = \frac{nr}{n' - n}$

无穷远像点的共轭点为物方焦点

当 $S = \infty$ : 像距 $S'$  = 像方焦距  $f' = \frac{n'r}{n' - n}$

无穷远物点的共轭点为像方焦点

$$\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'} \quad \therefore \frac{n}{S} + \frac{n'}{S'} = \frac{n' - n}{r} \rightarrow \frac{f'}{S'} + \frac{f}{S} = 1 \text{ (高斯公式)}$$

$$\text{光焦度: } \Phi = \frac{n' - n}{r}$$

$r$ 以m为单位, 光焦度单位 $\text{m}^{-1}$ , 称为屈光度 $D$  ( $1D = 1\text{m}^{-1}$ )



例:  $n=1.0$ ,  $n'=1.5$ ,  $r=200\text{mm} \rightarrow \Phi=2.5D$ , 光焦度为2.5屈光度

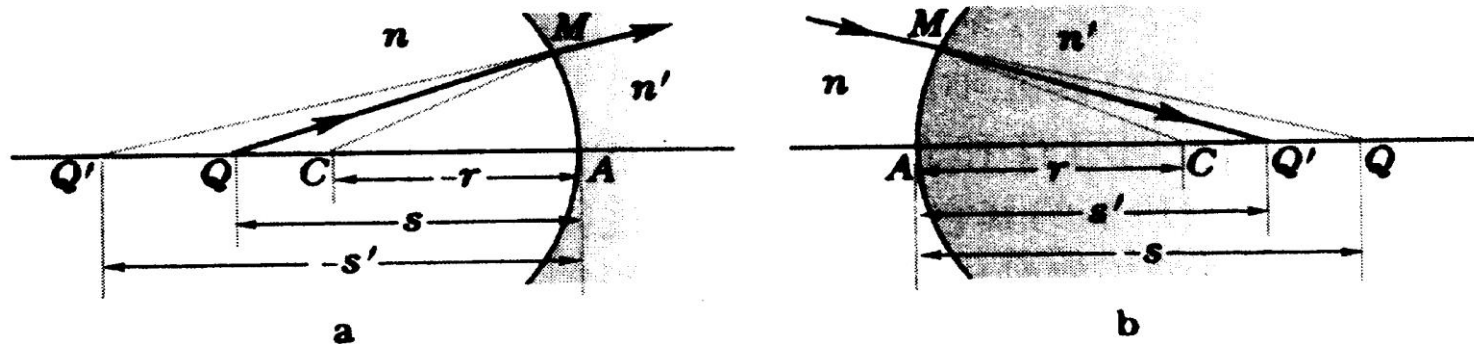
$\Phi > 0$ : 表示折射球面对平行于主轴的平行光束是会聚的;

$\Phi < 0$ : 表示折射球面对平行于主轴的平行光束是发散的。

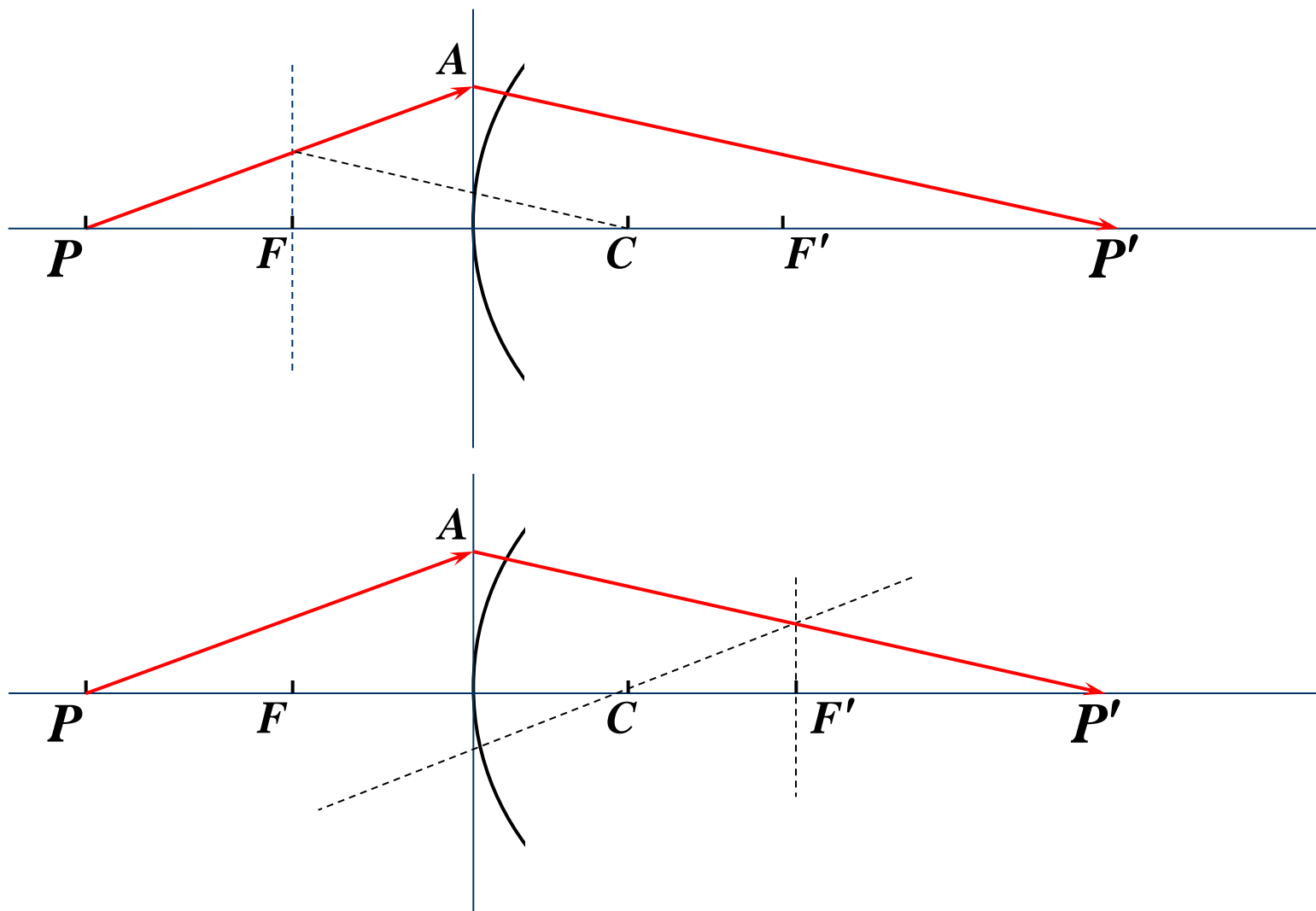
对于折射平面:  $r = \infty \rightarrow \Phi = 0$

表示平面折射系统对垂直入射的平行光无屈折作用

2) 符号法则: 图中以绝对值标示



### 3) 球面折射成像作图法:



## 二、单个球面反射的物像公式

球面折射物像公式:  $\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n' - n}{r}$

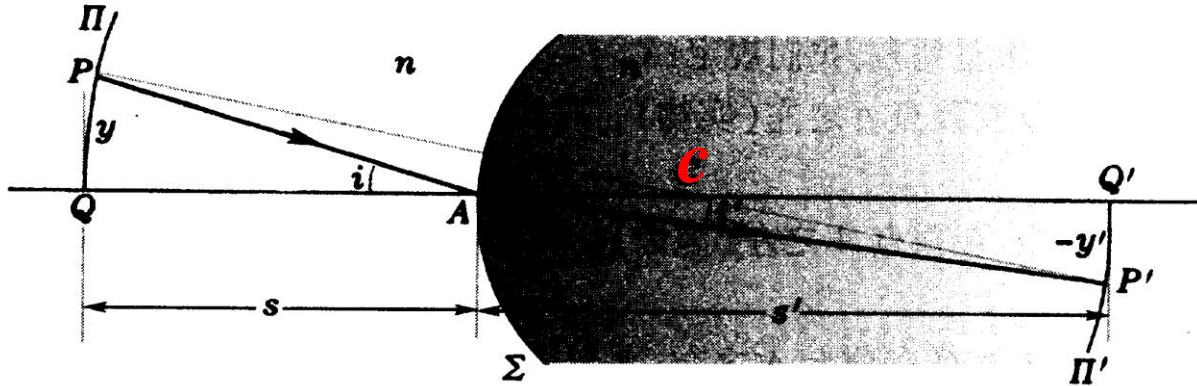
反射球面:  $i = -i'$   
 $n' = -n$   $\rightarrow n \sin i = n' \sin i'$  反射定律

球面反射物像公式:  $\frac{n}{s} + \frac{-n}{-s'} = \frac{-n - n}{r}$

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = -\frac{2}{r} \quad f = f' = -\frac{r}{2}$$

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{1}{f} \quad (\text{高斯公式})$$

### 三、傍轴物点成像与横向放大率



物平面:  $\overline{QP}$   
 像平面:  $\overline{Q'P'}$  } 共轭面

横向放大率:  $V = \frac{y'}{y}$   $\begin{cases} >1 & \text{放大} \\ <1 & \text{缩小} \end{cases}$   $\begin{cases} V > 0 & \text{正立像} \\ V < 0 & \text{倒立像} \end{cases}$

傍轴条件:  $y^2, y'^2 \ll S^2, S'^2, r^2$

$$n \sin i = n' \sin i' \rightarrow ni \approx n'i'$$

$$i \approx \frac{y}{S} \rightarrow nyS' = n'y'S$$
$$i' \approx \frac{y'}{S'}$$

$$\therefore \text{折射球面: } V = \frac{y'}{y} = \frac{nS'}{n'S}$$

与 $y$ 无关

$$\text{反射球面: } V = -\frac{S'}{S}$$

四、逐次成像  $V = V_1 \cdot V_2 \cdot \dots$

五、拉格朗日—亥姆霍兹定理 (46)

各段光线对光轴的倾角  $u, u', u'' \dots$

拉格朗日—亥姆霍兹定理:  $ynu = y'n'u' = \dots$

$ynu$  乘积在成像过程中是恒量

## §3 薄透镜成像

**透镜：**两个折射面包围一种透明介质组成的光具组  
球面透镜、轴对称非球面透镜、  
柱面透镜以及阶梯透镜（菲涅耳透镜）等

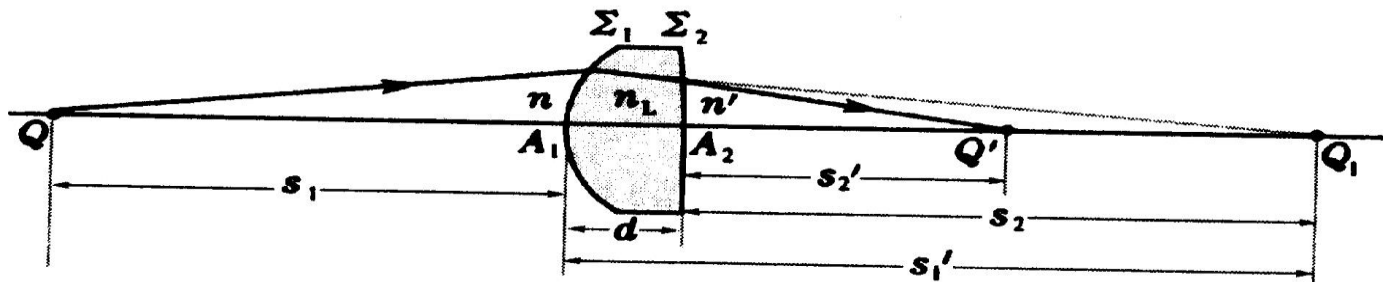
**球面透镜：**以球面组成，透镜材料通常是光学玻璃；  
透镜中央部分比边缘部分厚——凸透镜；  
反之——凹透镜。

**主光轴：**两球面曲率中心的连线，

**顶点：**主光轴与球面交点，两顶点间的距离称为透镜厚度。

透镜厚度 $d$ 与成像性质相关的距离相比可以忽略——**薄透镜**；  
不能忽略——**厚透镜**。

# 一、薄透镜焦距公式



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{S_1} + \frac{n_L}{S'_1} = \frac{n_L - n}{r_1} \quad (1) \\ \frac{n_L}{-(S'_1 - d)} + \frac{n'}{S'_2} = \frac{n' - n_L}{r_2} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} : \frac{n}{S_1} + \frac{n'}{S'_2} = \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}$$

$$\downarrow S'_1 - d \approx S'_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{n_L}{S'_1} + \frac{n'}{S'_2} = \frac{n' - n_L}{r_2} \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} S'_2 = \infty \rightarrow \text{物方焦距: } f &= \frac{n}{\frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n}{r_2}} \\ S_1 = \infty \rightarrow \text{像方焦距: } f' &= \frac{n'}{\frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n}{r_2}} \end{aligned} \right\} \frac{f}{f'} = \frac{n}{n'}$$

或由两个折射球面物像公式导出:

$$\begin{aligned} \frac{f'_1}{S'_1} + \frac{f_1}{S_1} &= 1 \\ \frac{f'_2}{S'_2} + \frac{f_2}{S_2} &= 1 \end{aligned} \xrightarrow{S = S_1, \quad S' = S'_2, \quad S'_1 = -S_2} \frac{f'_1 f'_2}{S'} + \frac{f_1 f_2}{S} = f'_1 + f_2$$

$$\left\{ \begin{aligned} S' = \infty \rightarrow \text{物方焦距: } f &= S = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2} \\ S = \infty \rightarrow \text{像方焦距: } f' &= S' = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} \end{aligned} \right. \quad \text{代入 } f_1, f'_1, f_2, f'_2$$

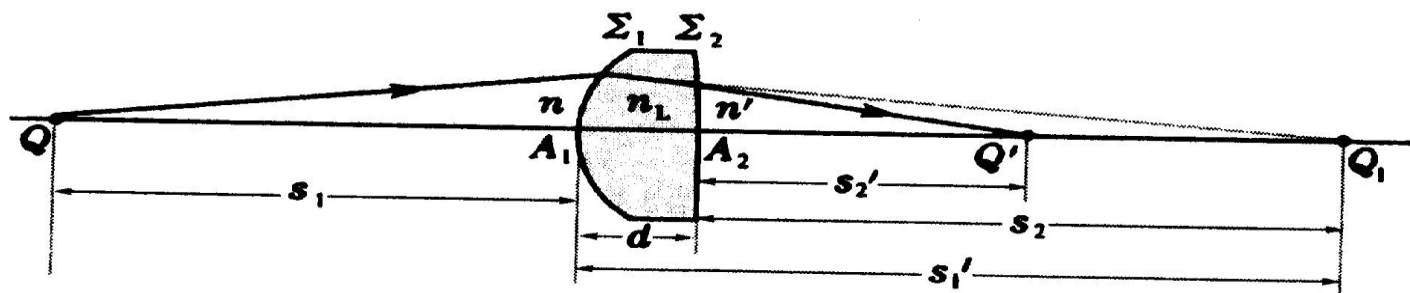


$$\text{当 } n = n' = n_o: \quad f = f' = \frac{1}{\left(\frac{n_L}{n_o} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \xrightarrow{n_o=1} \frac{1}{(n_L - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

薄透镜焦距公式（磨镜者公式）

$n_L > n_o$  时:  $\frac{1}{r_1} > \frac{1}{r_2} \rightarrow f = f' > 0$ : 会聚透镜（凸透镜）

$\frac{1}{r_1} < \frac{1}{r_2} \rightarrow f = f' < 0$ : 发散透镜（凹透镜）



薄透镜的焦距不仅与透镜自身的几何形状和折射率有关，还与透镜所处介质有关

$$\frac{n}{S} + \frac{n'}{S'} = \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}$$

**\*薄透镜光焦度：**  $\Phi = \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2} = \Phi_1 + \Phi_2$

薄透镜的光焦度等于两个折射球面光焦度之和

## 二、薄透镜成像公式

### 1、高斯公式

$$\frac{f}{S} + \frac{f'}{S'} = 1 \xrightarrow{f=f'} \frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{1}{f}$$

$S$ 、 $S'$ 、 $f$  均从薄透镜光心算起

### 2、牛顿公式

$$\begin{aligned} S &= x + f \\ S' &= x' + f' \end{aligned} \rightarrow xx' = ff'$$

物距 $x$ 、像距 $x'$ 分别从焦点 $F$ 、 $F'$ 算起

### 3、横向放大率

$$V_1 = -\frac{nS'_1}{n'S_1}, \quad V_2 = -\frac{n_L S'_2}{n'S_2} \quad \text{且 } S_1 = S, \quad -S_2 = S'_1, \quad S'_2 = S'$$

$$V = V_1 \cdot V_2 = -\frac{nS'}{n'S} = -\frac{fS'}{fS} \xrightarrow{f=f'} V = -\frac{S'}{S}$$

### 三、薄透镜成像作图法

#### 1、焦面

- 主光轴：各折射球面球心连线
- 付光轴：过透镜中心（光心）的直线
- 物方焦面：过物方焦点与主光轴垂直的平面
- 像方焦面：过像方焦点与主光轴垂直的平面

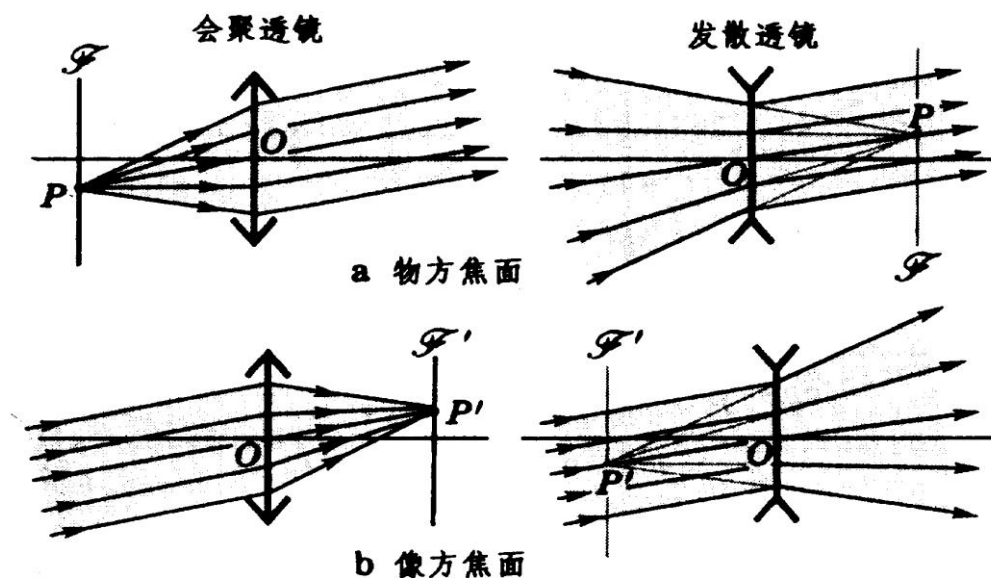
焦点  $\xleftrightarrow{\text{共轭}}$  轴上无穷远点

焦面  $\xleftrightarrow{\text{共轭}}$  无穷远平面

#### 2、作图法求物像关系

- 当物、像方折射率相等时，通过光心的光线经透镜后方向不变
- 通过物方焦点的入射光线，经透镜后出射光线平行于主光轴
- 平行于主光轴的入射光线，经透镜后出射光线通过像方焦点

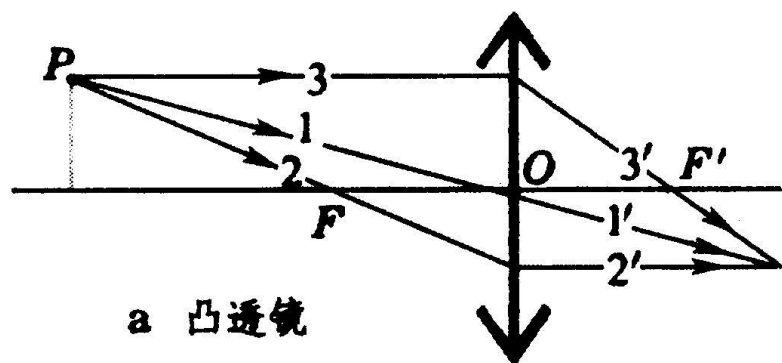
- 物方焦面上轴外一点为中心的入射同心光束，经透镜后出射光束是与主光轴成一定倾角的平行光束
- 与光轴成一定倾角的入射平行光束，经透镜后出射光束是像方焦面上点为中心的同心光束



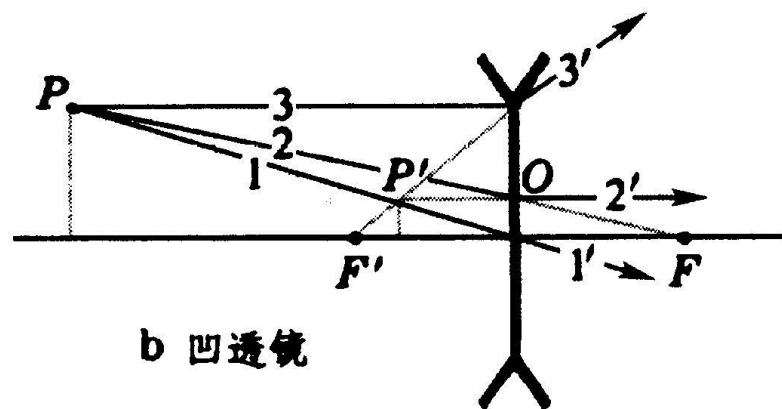
**共轭关系：**通过物点的每条光线的共轭线（或其延长线）都通过像点

物点→两条入射光线→两条共轭出射光线→像点

## 作图法求傍轴物点的像

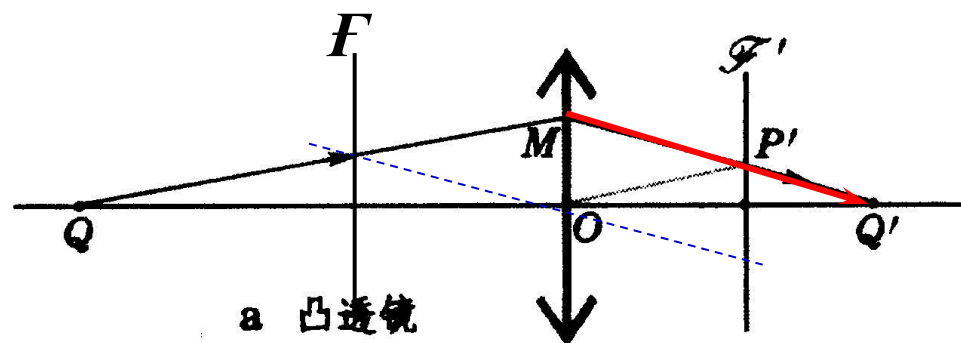


a 凸透镜

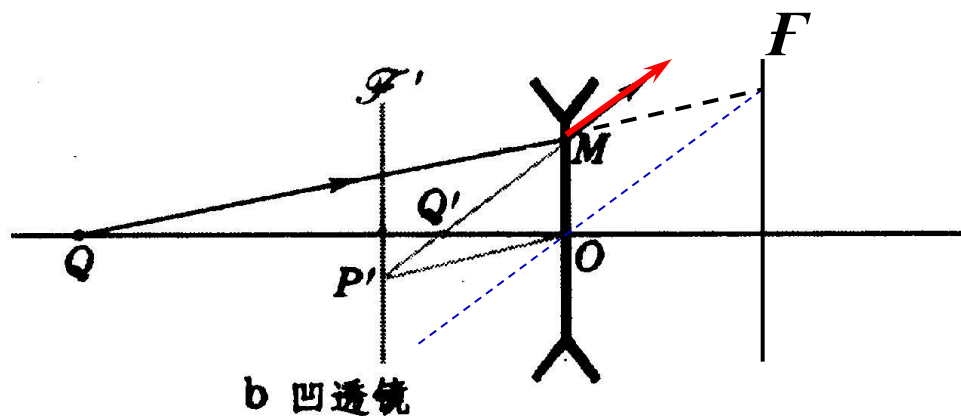


b 凹透镜

## 作图法求轴上物点的像



a 凸透镜



b 凹透镜

## 四、透镜组（共轴光具组）成像

### 1、密接（复合）透镜组焦距（曲率吻合）

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{S'_1} + \frac{1}{S_1} = \frac{1}{f_1} \\ \frac{1}{S'_2} + \frac{1}{S_2} = \frac{1}{f_2} \end{array} \right\} S_2 = -S'_1 \rightarrow \frac{1}{S'_2} + \frac{1}{S_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}$$

复合透镜组焦距： $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$

光焦度： $\Phi = \frac{1}{f} \rightarrow$  复合透镜  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$

### 2、透镜组成像 $\left\{ \begin{array}{l} \text{成像公式} \\ \text{作图法} \end{array} \right.$

## §4 理想共轴球面系统（光具组理论）

### 一、理想成像与共线变换

**理想成像：**物方每个同心光束均转化为像方对应同心光束

**理想光具组：**满足理想成像要求的光具组

**理想光具组性质：**物方与像方**点、线、面**均一一对应  
—— **共线变换**

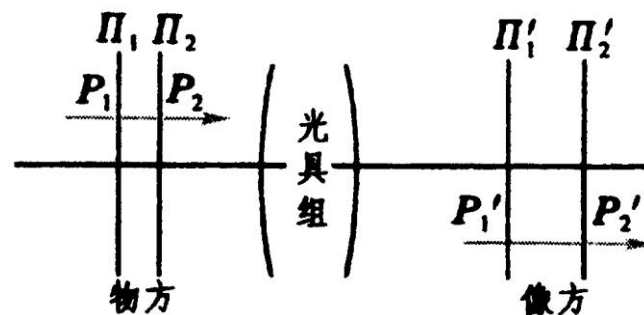
- \*主光轴上任何一点的共轭点仍在主光轴上

- \*任何垂直于光轴的平面的共轭面仍垂直于光轴

- \*在垂直于光轴的同一直面内横向放大率相同

- \*在垂直于光轴的不同平面内,若有两个平面横向放大率相同,则横向放大率处处相同(望远系统)





理想光具组理论不涉及光具组的具体结构，是一种几何理论，研究的是共线变换的普遍几何性质

## 二、共轴理想光具组的基点和基面

基点 (cardinal point) : 焦点、主点

基面 (cardinal plane) : 焦面、主面

焦点(focus)、焦面(focal plane)

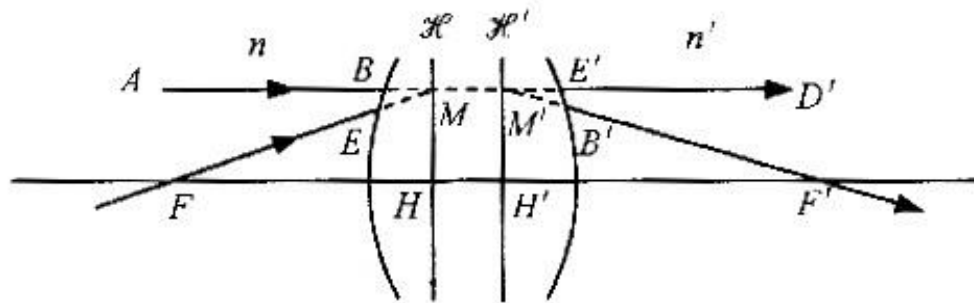
{ 物方焦面  $\Gamma$  —— 物方焦点  $F$   
像方焦面  $\Gamma'$  —— 像方焦点  $F'$

主点(principal point)、主面(principal plane)

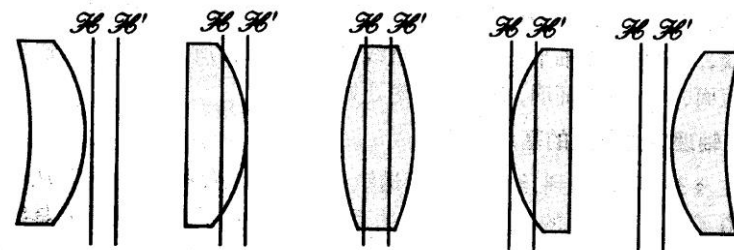
横向放大率为1的一对共轭面

{ 物方主面  $H$  —— 物方主点  $H$   
像方主面  $H'$  —— 像方主点  $H'$

薄透镜 { 物、像方主点重合 —— 光心  
物、像方主面重合 —— 透镜平面



系统的主面和主点



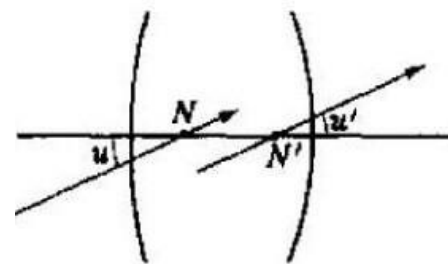
不同曲率透镜的主面

\*节点 (nodal point) : 轴上角放大率等于1的共轭点

{ 物方节点  $N$   
 像方节点  $N'$

通过节点的任意共轭光线方向不变,  $\mu = \mu'$

薄透镜 {  $f = f'$ : 节点=主点=光心  
 $f \neq f'$ : 节点 $\neq$ 主点=光心



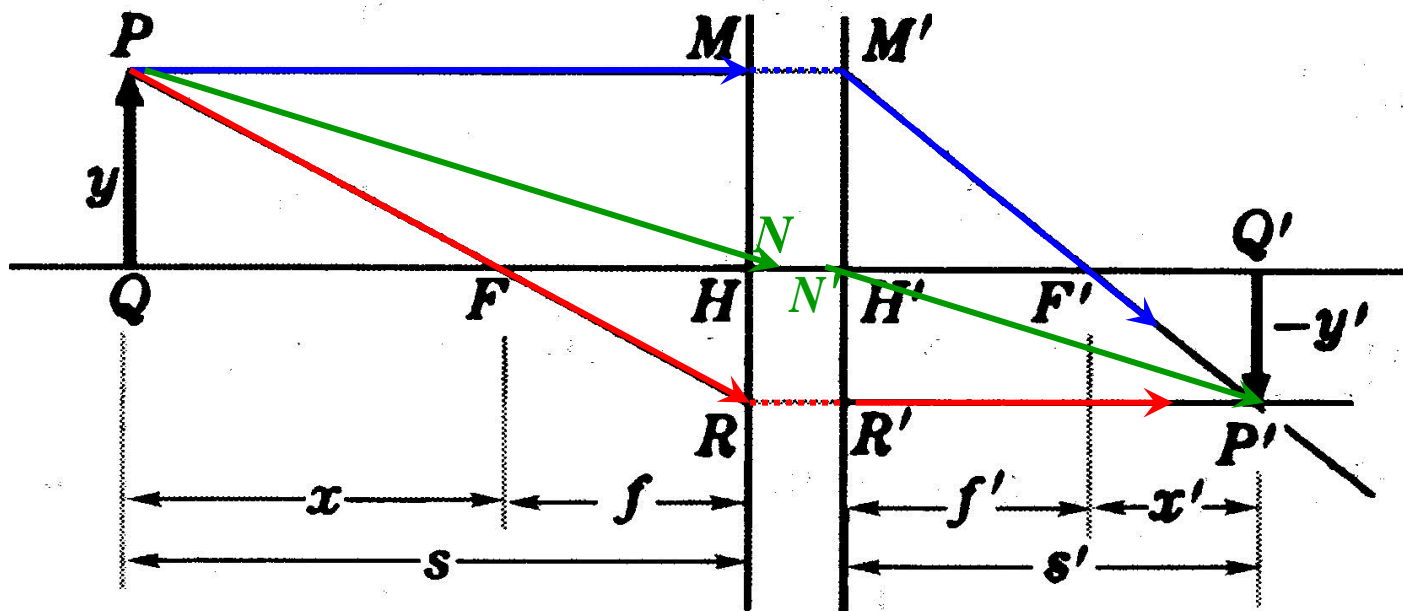
### 三、理想光具组物像关系

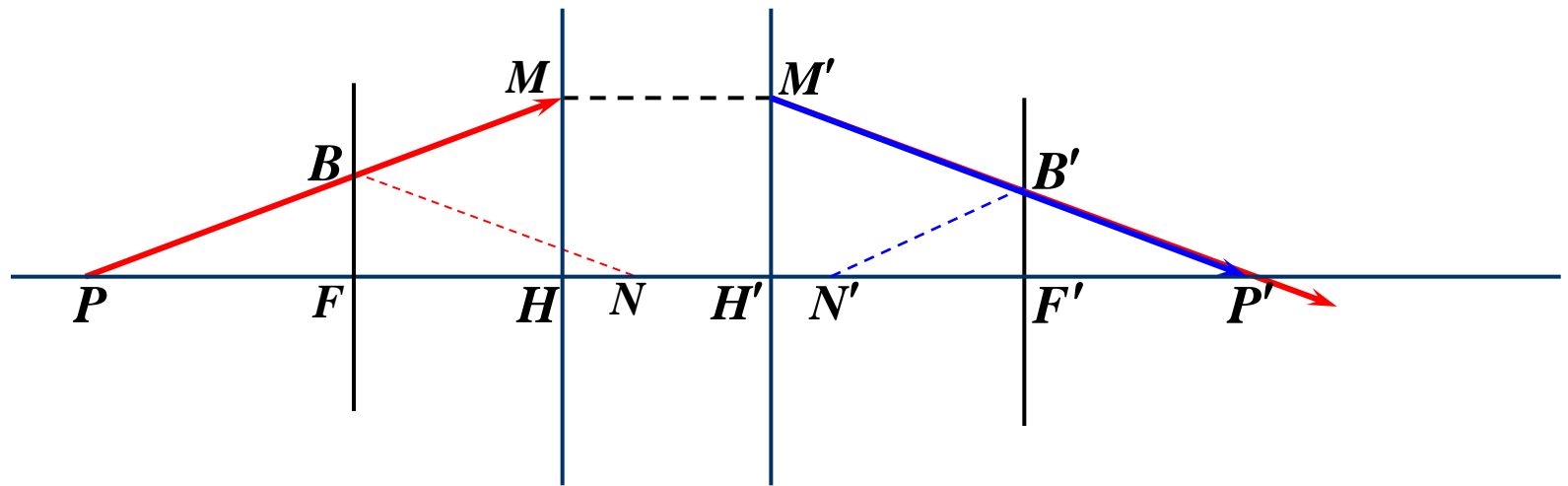
物距 $S$ :  $Q-H$ ; 物方焦距:  $F-H$

像距 $S'$ :  $H'-Q'$ ; 像方焦距:  $H'-F'$

符号规则:

- 1、作图法: 傍轴物点——三条特殊光线  
轴上物点 —— 任意光线

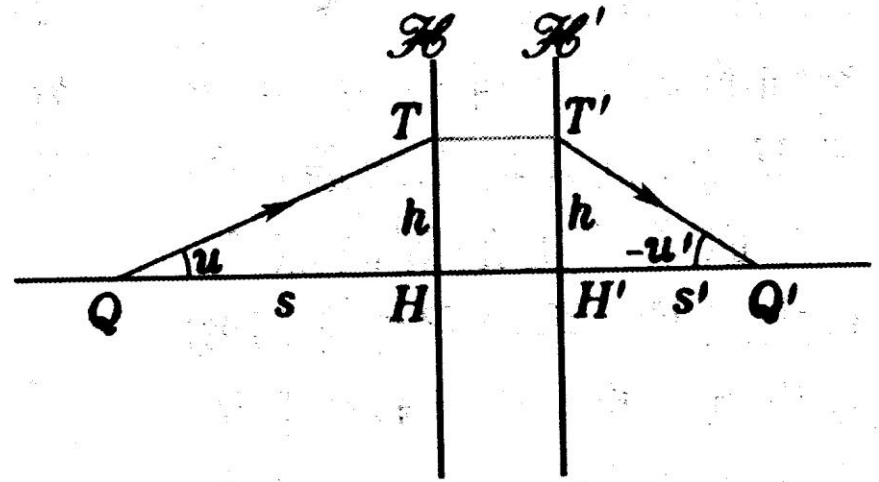




入射线只和物方基点、基面相关  
出射线只和像方基点、基面相关

## 2. 计算法——物像公式

$$\frac{f}{S} + \frac{f'}{S'} = 1$$



横向放大率:  $V = \frac{y'}{y} = -\frac{fS'}{fS}$

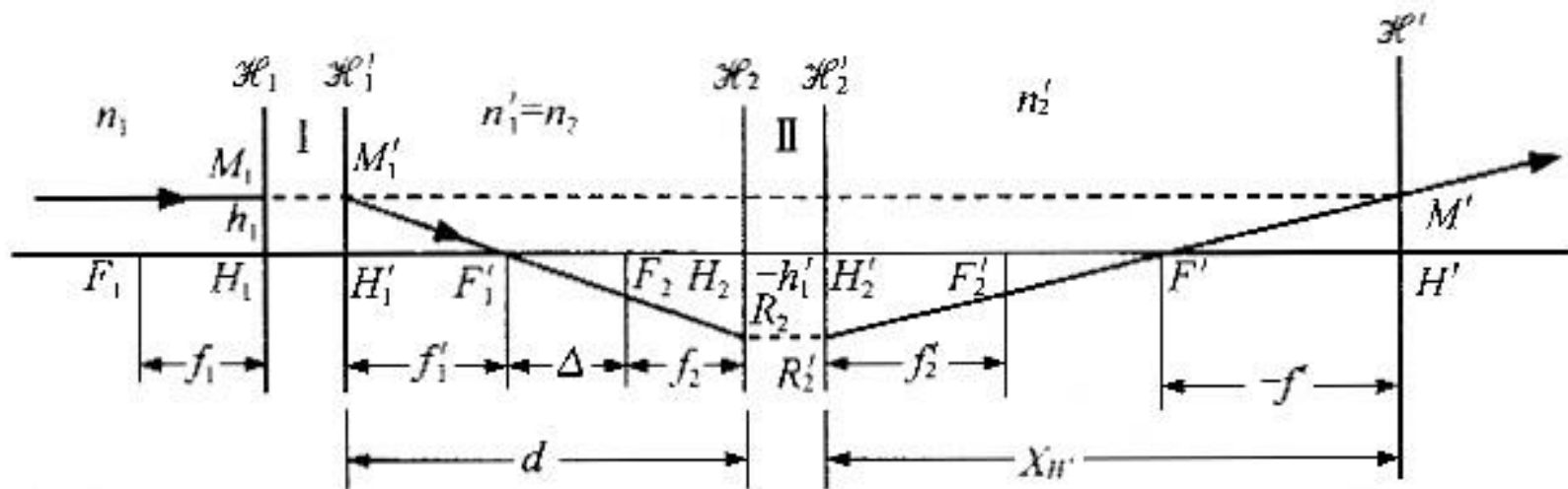
角放大率:  $W = \frac{\text{tg}\mu'}{\text{tg}\mu} = -\frac{S}{S'}$

$$\left. \begin{array}{l} V = \frac{y'}{y} = -\frac{fS'}{fS} \\ W = \frac{\text{tg}\mu'}{\text{tg}\mu} = -\frac{S}{S'} \end{array} \right\} VW = \frac{y'}{y} \cdot \frac{\text{tg}\mu'}{\text{tg}\mu} = \frac{f}{f'} \xrightarrow{\text{单个折射球面}} = \frac{n}{n'}$$

$$\therefore y' \text{tg}\mu' n' = y \text{tg}\mu n$$

(Helmholtz公式)

## 四、共轴球面系统的组合



$$d = f_1' + \Delta + f_2$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{h_1}{-h_1'} &= \frac{f_1'}{\Delta + f_2} \\ \frac{h_1}{-h_1'} &= \frac{-f'}{f_2' + \overline{F_2'F'}} \end{aligned} \right\} f' = -\frac{f_1'(f_2' + \overline{F_2'F'})}{\Delta + f_2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} F_1'、F' \text{ 为系统 II 的一对共轭点} &\rightarrow \overline{F_2'F'} = \frac{f_2 f_2'}{\Delta} \\ X_{H'} &= f_2' + \overline{F_2'F'} - f' \end{aligned} \right.$$

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} \text{ —— 组合系统像方焦距公式}$$

$$X_{H'} = \frac{d}{\Delta} f_2' \text{ —— 组合系统像方主面位置公式}$$

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} \text{ —— 组合系统物方焦距公式}$$

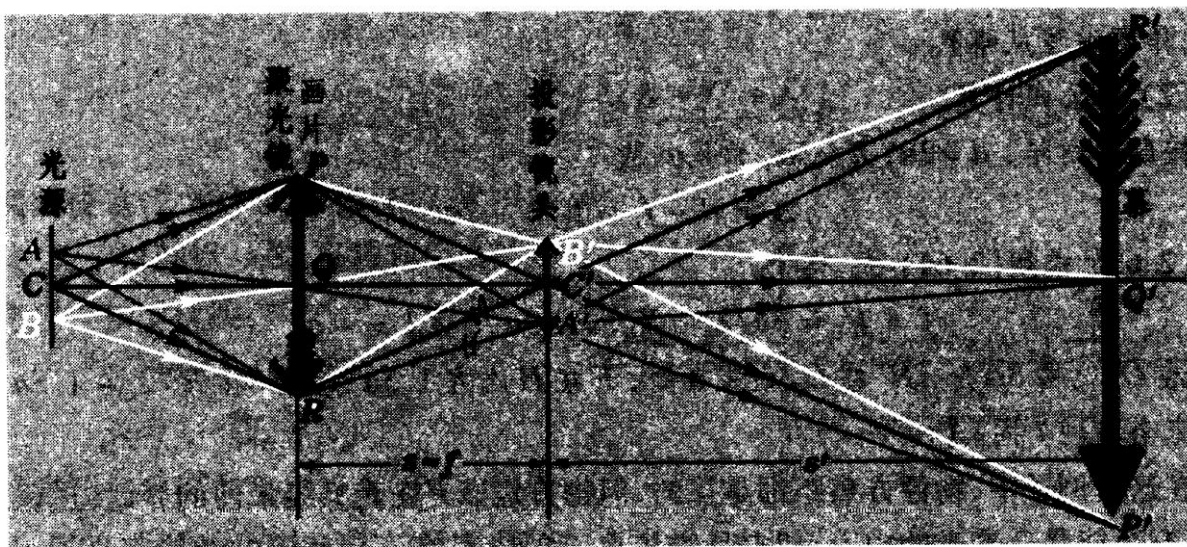
$$X_H = \frac{d}{\Delta} f_2 \text{ —— 组合系统物方主面位置公式}$$

## § 5 光学仪器

### 一、投影仪器 (projector)

——电影放映机、幻灯机、印相放大机、投影仪等

会聚透镜——成放大实象

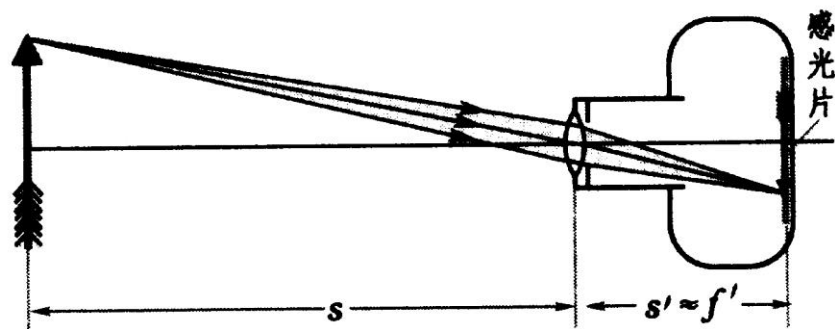


$$S \approx f, S' \gg f \quad V = -\frac{S'}{S} \approx -\frac{S'}{f} \rightarrow S' \uparrow, V \uparrow$$



## 二、照相机 (camera)

### 会聚透镜——成缩小实象



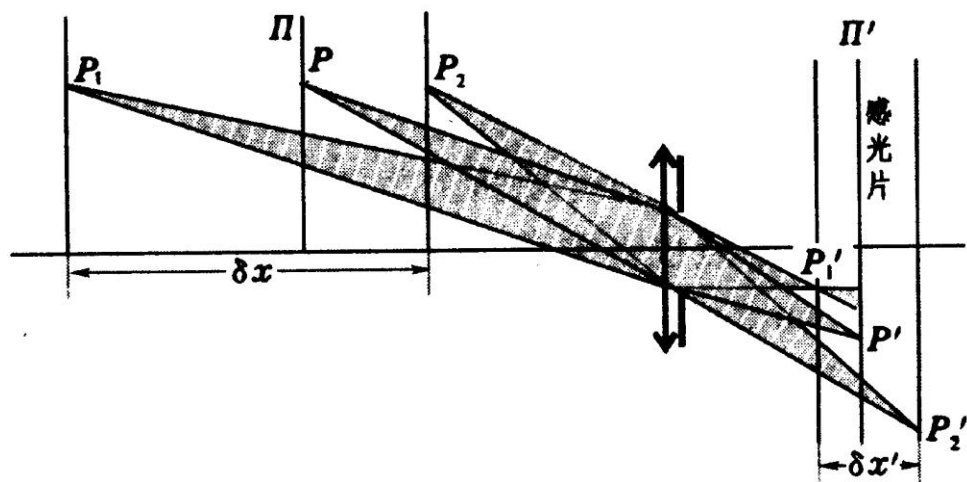
$$S \gg f, S' \approx f$$

微调 $S'$ ,  
在底片上成清晰像

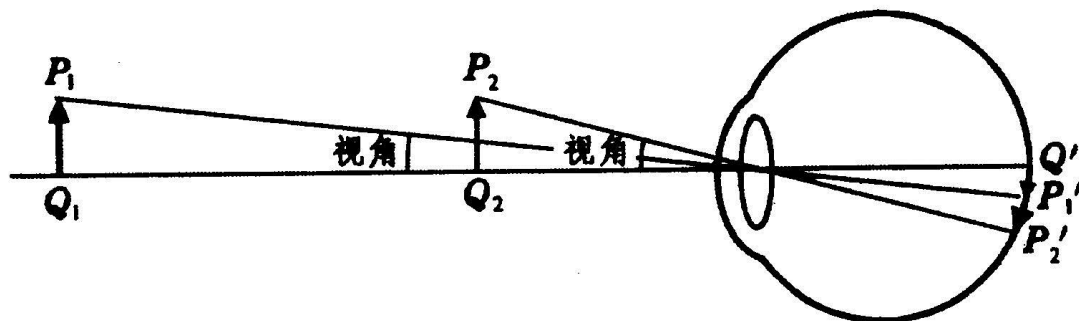
### 光阑的作用:

- 1) 调节照度
- 2) 调节景深

光阑 $\downarrow$ , 照度 $\downarrow$ , 景深 $\uparrow$   
 $f$ 一定: 物距 $\uparrow$ , 景深 $\uparrow$



### 三、眼睛



曲率（焦距）可调

主要结构

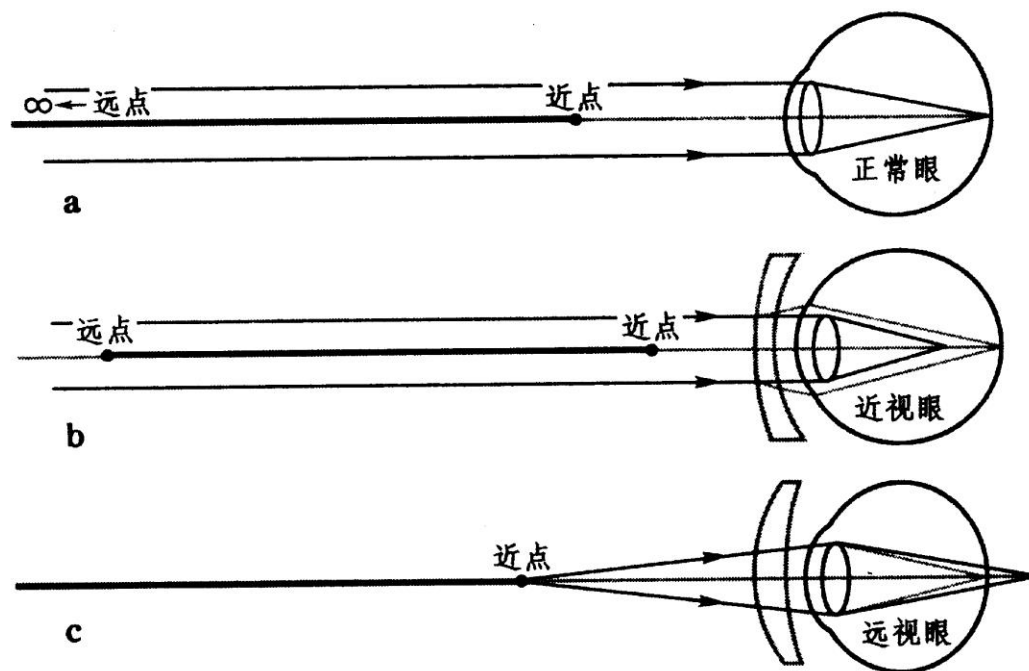
前房（水状液——物方）  
晶状体（眼球——折射率不均匀的透镜）  
后房（玻璃状液——像方）  
网膜（底片/成像屏）

是复杂的天然光学仪器

是所有目视光学仪器光路系统的组成部分之一  
(*visual optical instrument*)

\*远点：肌肉完全松弛时能看清的物点  
近点：肌肉最紧张时能看清的物点

调焦范围  
( $\infty \sim 25cm$ )

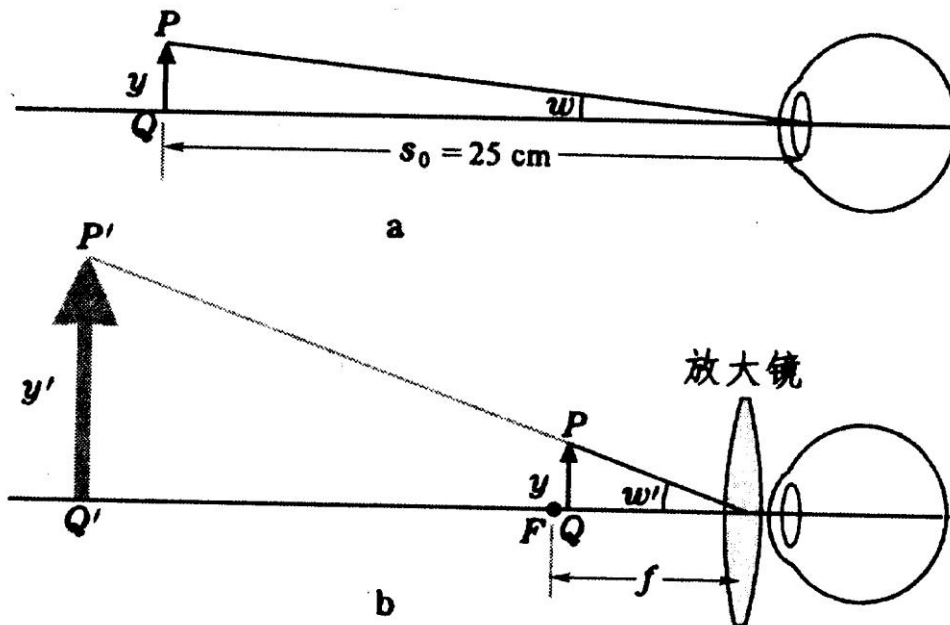


\*明视距离：25cm

\*分辨本领：网膜近轴区域（黄斑区）—— $1'$ （白昼）  
网膜边缘分辨率急剧下降

## 四、放大镜 (magnifier)、目镜 (eyepiece)

——  $f \leq$  明视距离的会聚透镜 (紧贴眼睛放置)



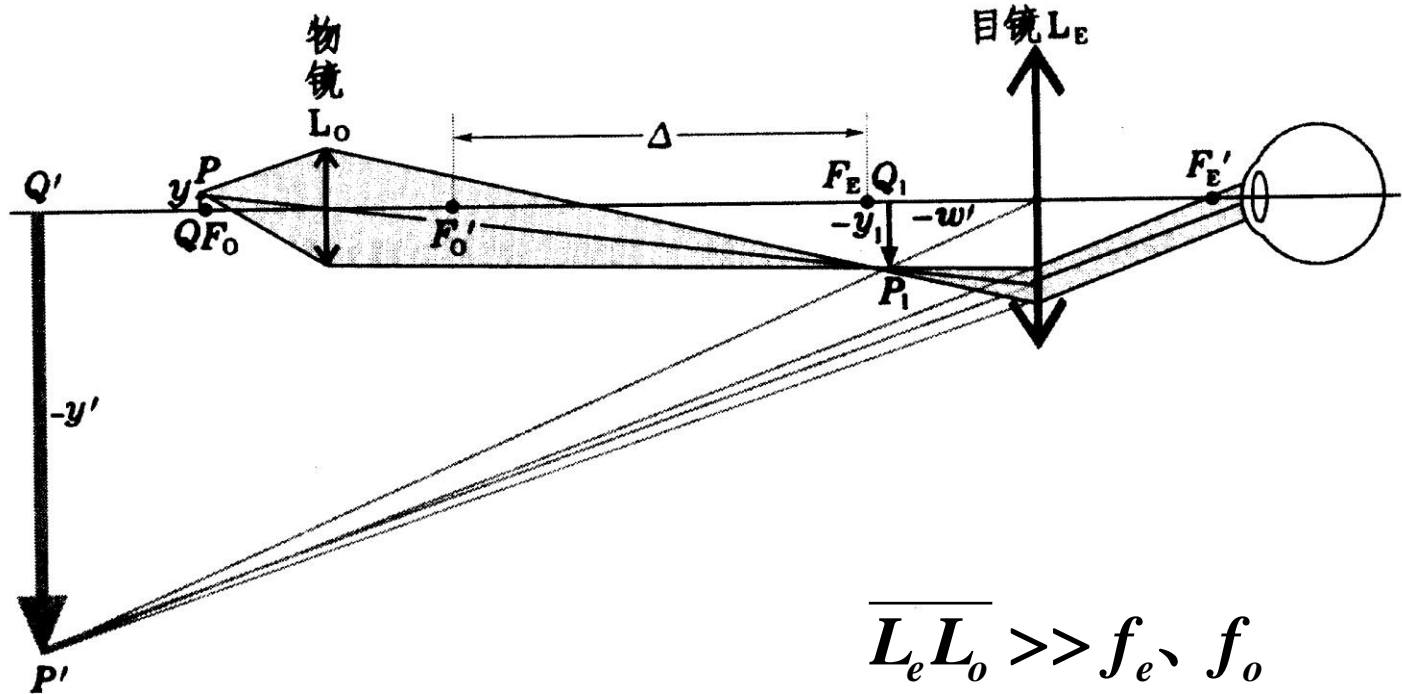
$$\omega = \frac{y}{s_0}$$

$$\omega' = \frac{y}{f}$$

物体位置：使透镜成虚像在 ~ 明视距离之内  
 $S < f$ ：焦深

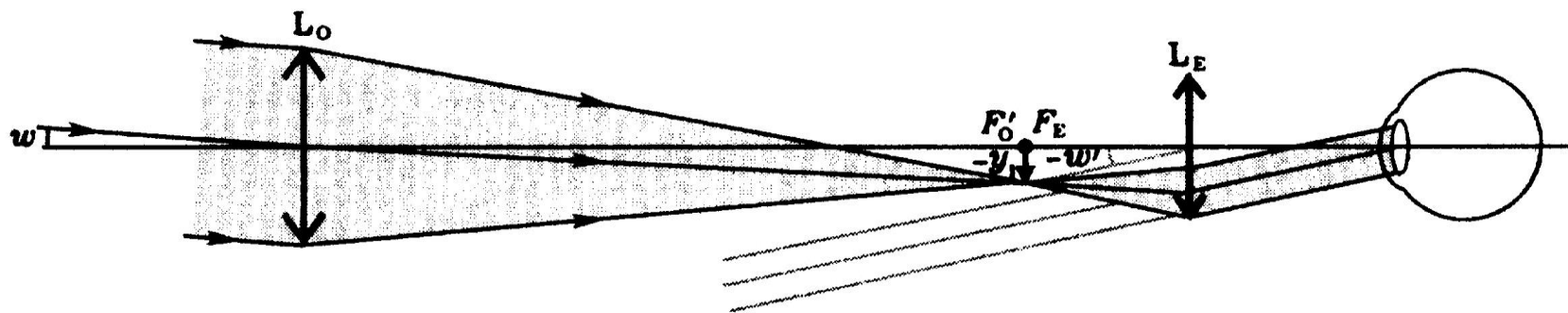
## 五、显微镜 (microscope)

### 高放大倍率



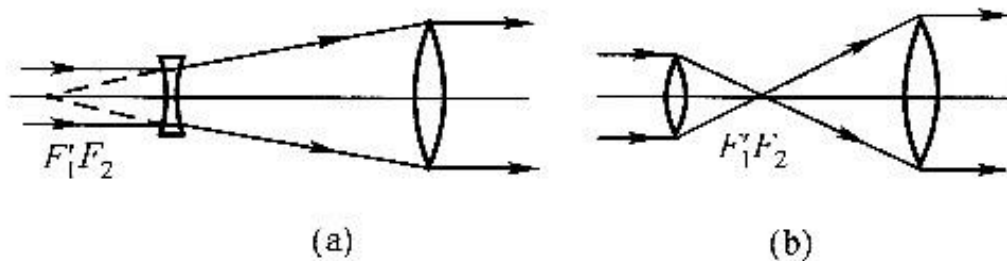
结构 { 目镜  $L_e$  (eyepiece) : 放大镜  
物镜  $L_o$  (objective) : 焦距很小的会聚透镜

## 六、望远镜 (telescope)

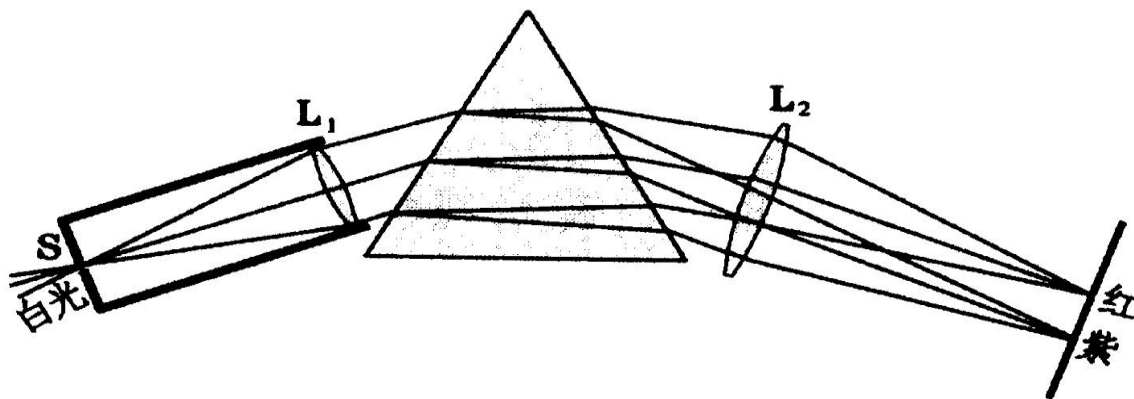


物体 $\infty \rightarrow L_o$  (长焦距)  $\rightarrow$  成像于 $L_o$ 的 $F'$ 处  $\approx L_e$ 的 $F$   
 成放大虚象于 $\infty \leftarrow L_e \leftarrow$

\*激光扩束器:



## 七、棱镜光谱仪



平行光管（会聚透镜）：出射平行光

棱镜（色散元件）：不同波长对应不同波长的平行光束

望远物镜：将不同方向平行光会聚于焦面不同位置处

——光谱分析

棱镜摄谱仪（prism spectrograph）

## § 6 光阑与像差

### 一、光阑

光学系统中各元件的边缘和孔径  
或特别附加的带孔屏障

—— **光阑**  
对光束起限制作用

- 孔径光阑——限制成像光束口径大小
- 视场光阑——限制成像的空间范围（即视场）

影响像的清晰度、照度、景深和分辨本领等

#### 1. 孔径光阑 入射光瞳和出射光瞳

限制轴上物点成像光束孔径角作用的光阑

——孔径光阑（孔阑）  
（有效光阑）



入射光瞳：孔阑经其前面的光学元件成在系统物空间的像

出射光瞳：孔阑经其后面的光学元件成在系统像空间的像

入瞳是物平面上各点成像光束的公共入口

出瞳是物平面上各点成像光束的公共出口

## 2. 视场光阑 入射窗和出射窗

限制成像范围作用的光阑——视场光阑（场阑）

入射窗：场阑经其前面的光学元件成在系统物空间的像

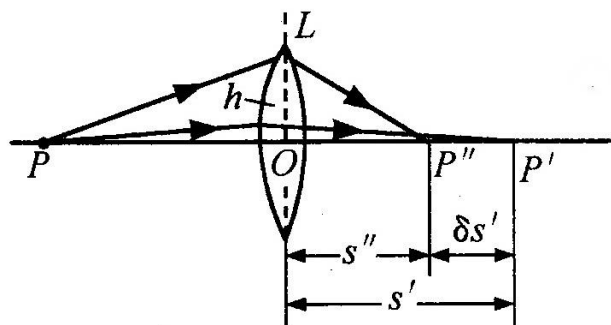
出射窗：场阑经其后面的光学元件成在系统像空间的像

## 二、像差概述

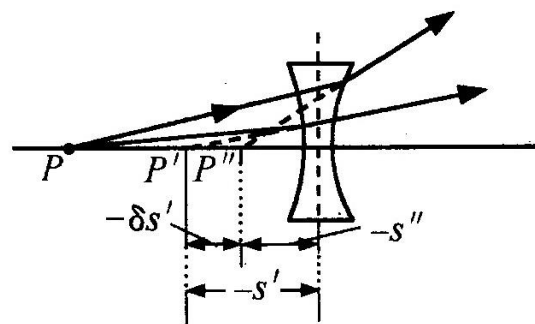
### 1. 单色像差

——单色光成像时，由于非傍轴光线引起的像差

单色像差 { 球面像差 } 大孔径光束引起  
彗形像差  
像散  
像场弯曲  
畸变 { 大视场引起

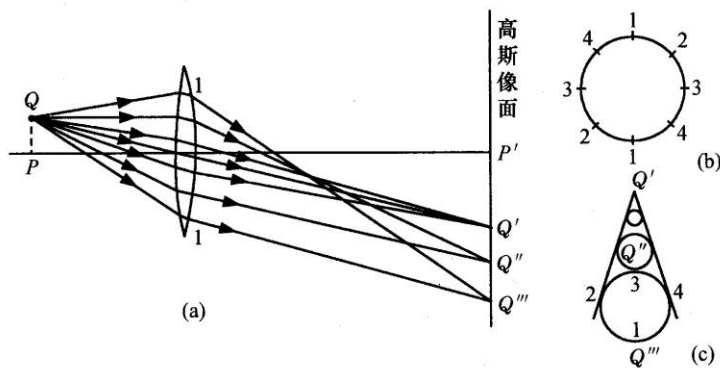


会聚透镜  $\delta' > 0$

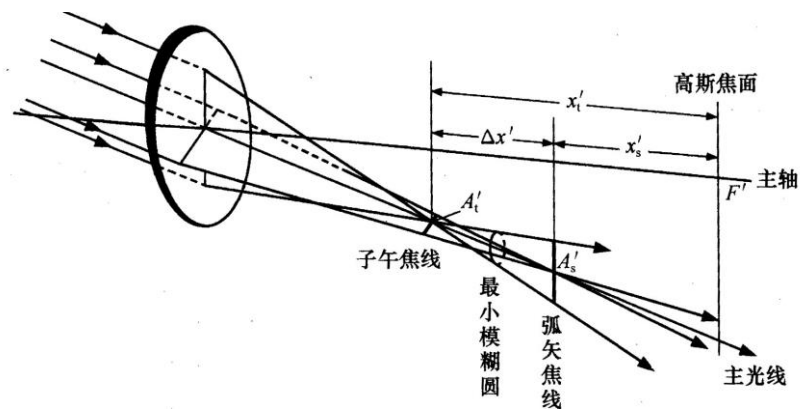


发散透镜  $\delta' < 0$

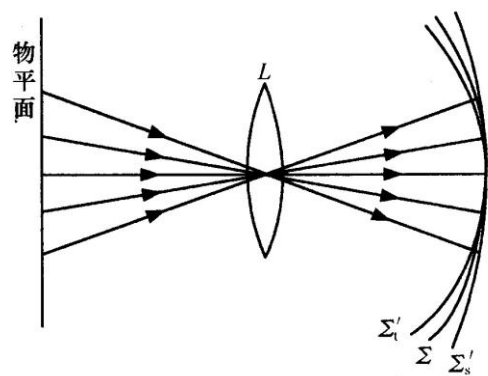
球差



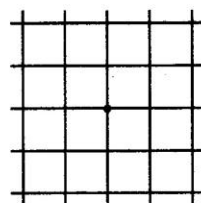
彗差



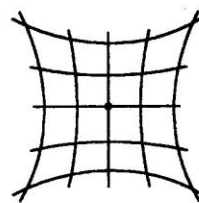
像散



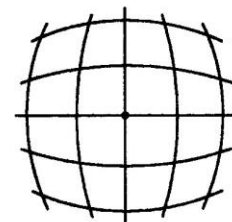
场曲



(a) 物



(b) 枕形畸变



(c) 桶形畸变

畸变

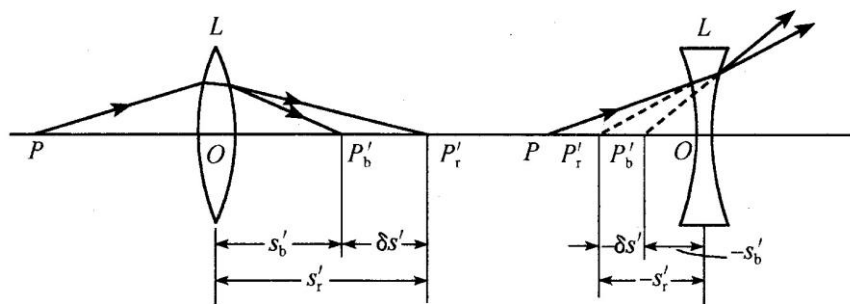
## 2. 色像差——复色光成像时，

由于介质折射率与光波长有关而产生的像差

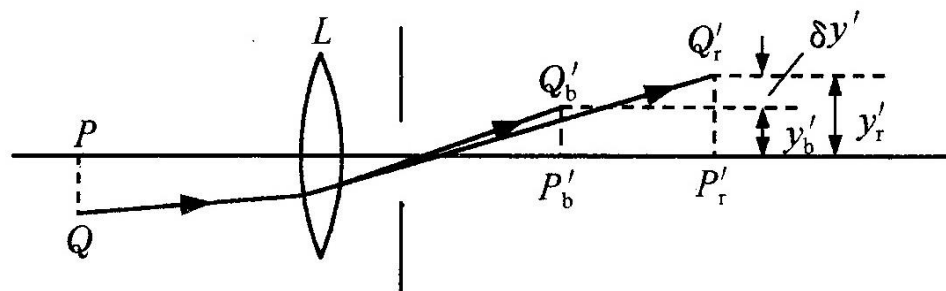
色差

位置色差：轴上物点发出的一束白光经透镜后  
各色光的像点位置不同

放大率色差：轴外物点发出的一束白光经透镜后  
各色光的像点高度不同



位置色差



放大率色差