§1 反常积分的概念和计算

一、反常积分概念

在Riemann 积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中有两个限制条件：

(1) 积分区间$[a, b]$ 有限$\Longrightarrow$ 无穷限广义积分。

§1 反常积分的概念和计算

一、反常积分概念

在Riemann 积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中有两个限制条件：

(1) 积分区间$[a,b]$ 有限$\Longrightarrow$ 无穷限广义积分。

(2) $f(x)$ 在$[a,b]$ 上有界$\Longrightarrow$ 无界函数广义积分。

§1 反常积分的概念和计算

一、反常积分概念

在Riemann 积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中有两个限制条件：

(1) 积分区间$[a,b]$ 有限$\Longrightarrow$ 无穷限广义积分。

(2) $f(x)$ 在$[a,b]$ 上有界$\Longrightarrow$ 无界函数广义积分。

1 无穷限广义积分

定义1: 设函数$f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上有定义，对任意$A>a$，$f(x)\in R[a,A]$，则称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 为无穷限广义积分。若$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 存在有限，则称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛（或$f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上可积），否则则称广义积分发散。

注1：区别不定积分、定积分和广义积分的可积性。

注1：区别不定积分、定积分和广义积分的可积性。

注2：同理可定义$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 的可积性、收敛性、发散性。

注1：区别不定积分、定积分和广义积分的可积性。

注2：同理可定义$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 的可积性、收敛性、发散性。

当$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ 均收敛时，我们称$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

注1：区别不定积分、定积分和广义积分的可积性。

注2：同理可定义$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 的可积性、收敛性、发散性。

当$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ 均收敛时，我们称$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

显然$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_{A}^{B} f(x)\mathrm{d}x$，其中$A, B$ 独立。

注1：区别不定积分、定积分和广义积分的可积性。

注2：同理可定义$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 的可积性、收敛性、发散性。

当$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ 均收敛时，我们称$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

显然$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_{A}^{B} f(x)\mathrm{d}x$，其中$A, B$ 独立。

若$\exists c \in \mathbb{R}$，使得$\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 中至少有一个发散，则称$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

注3：若$f \in C[a,+\infty), F(x)$ 是$f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} F(A) - F(a)$$

故$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$ 的敛散性。

若$\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$ 存在，则形式上可记为$F(+\infty)$，此时

$$\int_A^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(A)。$$

注3：若$f \in C[a,+\infty), F(x)$ 是$f(x)$ 的一个原函数，则

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to+\infty} F(A) - F(a)$

故$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$ 的敛散性。

若 $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$ 存在，则形式上可记为$F(+\infty)$，此时

$\int_A^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(A)$。

例1：讨论$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性($p \in \mathbb{R}$)。

注3：若$f\in C[a,+\infty), F(x)$ 是$f(x)$ 的一个原函数，则

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to+\infty} F(A) - F(a)$

故$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性$\Longleftrightarrow \lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$ 的敛散性。

若$\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$ 存在，则形式上可记为$F(+\infty)$，此时

$\int_A^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(A)$。

例1：讨论$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性$(p\in\mathbb{R})$。

注：$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义：当$f(x)\geq 0$ 时，表示$y=f(x)$，直线$x=a$，x 轴所围的区域面积。

注3：若$f \in C[a,+\infty)$, $F(x)$ 是$f(x)$ 的一个原函数，则

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to+\infty} F(A) - F(a)$

故$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性$\Longleftrightarrow \lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$ 的敛散性。

若$\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$ 存在，则形式上可记为$F(+\infty)$，此时

$\int_A^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(A)$。

例1：讨论$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性$(p \in \mathbb{R})$。

注：$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义：当$f(x) \geq 0$ 时，表示$y = f(x)$，直线$x = a$，x 轴所围的区域面积。

例2：计算$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

例1：判别$\int_a^{+\infty} \cos x \mathrm{d}x$ 的敛散性。

例1：判别$\int_a^{+\infty} \cos x \mathrm{d}x$ 的敛散性。

2 无穷限广义积分的性质

(1) 线性性质

设$f(x), g(x)$ 均在$[a, +\infty)$ 上可积，则$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_1 f(x) + k_2 g(x)$ 可积，且

$$\int_a^{+\infty} (k_1 f(x) + k_2 g(x)) \mathrm{d}x = k_1 \int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x + k_2 \int_a^{+\infty} g(x) \mathrm{d}x.$$

例1：判别$\int_a^{+\infty} \cos x\mathrm{d}x$ 的敛散性。

2 无穷限广义积分的性质

(1) 线性性质

设$f(x), g(x)$ 均在$[a, +\infty)$ 上可积，则$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_1 f(x)+ k_2 g(x)$ 可积，且

$$\int_a^{+\infty}(k_1 f(x) + k_2 g(x))\mathrm{d}x = k_1 \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x + k_2 \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 分部积分法

设$u(x), v(x)$ 的导函数$u'(x), v'(x)$ 在$[a, +\infty)$ 上连续，若下式中有两项存在，则第三项也存在，且

$$\int_a^{+\infty} u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v(x)\mathrm{d}u(x).$$

(3) 变量代换

若$\phi(t)$ 在$[\alpha,\beta)$ 上单调，且$\phi'(t) \in R[\alpha,\beta)$，$\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = +\infty$，则

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t.$

其它性质，如区间可加性，见$P_{369}, 9$。

(3) 变量代换

若$\phi(t)$ 在$[\alpha,\beta)$ 上单调，且$\phi'(t)\in R[\alpha,\beta)$，$\phi(\alpha)=a$，$\phi(\beta)=+\infty$，则

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t.$

其它性质，如区间可加性，见$P_{369}, 9$。

3 无界函数广义积分

计算半径为a 的圆的周长：则

$$\ell=4\int_0^a \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=4a\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}。$$

$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$ 不是Riemann 积分，而为无界函数广义积分。

定义:若函数$f(x)$ 在点x_0 的任一去心领域上无界，则称x_0 为$f(x)$ 的奇点。

定义:若函数$f(x)$ 在点x_0 的任一去心领域上无界，则称x_0 为$f(x)$ 的奇点。

定义:设函数$f(x)$ 在$x = b$ 的左领域无界，若$\forall \eta \in (0, b-a)$, $f(x) \in R[a, b-\eta]$，则称$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为无界函数广义积分。

若 $\lim\limits_{\eta \to 0^+} \int_a^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x$ 存在有限，称广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，积分值$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\eta \to 0^+} \int_a^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x$。否则，称广义积分发散。

定义:若函数$f(x)$ 在点x_0 的任一去心领域上无界，则称x_0 为$f(x)$ 的奇点。

定义:设函数$f(x)$ 在$x=b$ 的左领域无界，若$\forall \eta \in (0, b-a)$, $f(x) \in R[a, b-\eta]$，则称$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为无界函数广义积分。

若 $\lim\limits_{\eta\to 0^+} \int_a^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x$ 存在有限，称广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，积分值$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\eta\to 0^+} \int_a^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x$。否则，称广义积分发散。

同理可定义a 或$c \in (a, b)$ 为奇点时无界函数广义积分。

当$c \in (a, b)$ 为奇点时，只有$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 均收敛时，才称广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且规定

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

注1：若$f\in C[a,b), F(x)$ 是f 在$[a,b)$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to 0^+}\int_a^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to 0^+} F(b-\eta)-F(a) = F(b-0)-F(a)$$

注1：若$f \in C[a,b)$, $F(x)$ 是f 在$[a,b)$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to 0^+} \int_a^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to 0^+} F(b-\eta) - F(a) = F(b-0) - F(a)$$

注2：无界函数广义积分的性质类似无穷限广义积分，留给大家思考。

注1：若$f \in C[a,b), F(x)$ 是f 在$[a,b)$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to0^+}\int_a^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to0^+} F(b-\eta)-F(a) = F(b-0)-F(a)$$

注2：无界函数广义积分的性质类似无穷限广义积分，留给大家思考。

例4：讨论$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性$(p \in \mathbb{R})$。

注1：若$f \in C[a,b)$, $F(x)$ 是f 在$[a,b)$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to0^+}\int_a^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to0^+} F(b-\eta)-F(a) = F(b-0)-F(a)$$

注2：无界函数广义积分的性质类似无穷限广义积分，留给大家思考。

例4：讨论$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性$(p \in \mathbb{R})$。

思考：讨论$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性$(p \in \mathbb{R})$。

注1：若$f \in C[a,b)$, $F(x)$ 是f 在$[a,b)$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to0^+}\int_a^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to0^+} F(b-\eta)-F(a) = F(b-0)-F(a)$$

注2：无界函数广义积分的性质类似无穷限广义积分，留给大家思考。

例4：讨论$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性$(p \in \mathbb{R})$。

思考：讨论$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性$(p \in \mathbb{R})$。

例5：讨论广义积分$\int_{-1}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性。

4 无穷限广义积分与无界函数广义积分的关系

两种广义积分可互换转换

4 无穷限广义积分与无界函数广义积分的关系

两种广义积分可互换转换

$\Longrightarrow$ 比如当$a > 0$ 时，

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x(\text{令 } x = t^{-1}) = -\int_{1/a}^{0} t^{-2}f(t^{-1})\mathrm{d}t =$$

$\int_0^{1/a} t^{-2}f(t^{-1})\mathrm{d}t$，令$g(t) = t^{-2}f(t^{-1})$，得$\int_0^{1/a} g(t)\mathrm{d}t$。

4 无穷限广义积分与无界函数广义积分的关系

两种广义积分可互换转换

$\Longrightarrow$ 比如当$a > 0$ 时，

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x(\text{令 } x = t^{-1}) = -\int_{1/a}^{0} t^{-2} f(t^{-1})\mathrm{d}t =$$

$\int_0^{1/a} t^{-2} f(t^{-1})\mathrm{d}t$，令$g(t) = t^{-2} f(t^{-1})$，得$\int_0^{1/a} g(t)\mathrm{d}t$。

问题： $\int_0^{1/a} g(t)\mathrm{d}t$ 是否为无界函数广义积分？

4 无穷限广义积分与无界函数广义积分的关系

两种广义积分可互换转换

$\Longrightarrow$ 比如当$a>0$ 时，

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x(令\ x=t^{-1})=-\int_{1/a}^0 t^{-2}f(t^{-1})\mathrm{d}t=$$

$\int_0^{1/a} t^{-2}f(t^{-1})\mathrm{d}t$，令$g(t)=t^{-2}f(t^{-1})$，得$\int_0^{1/a} g(t)\mathrm{d}t$。

问题： $\int_0^{1/a} g(t)\mathrm{d}t$ 是否为无界函数广义积分？

例如令$f(x)=1/x^2$，则$t=1/x$ 变换为常义积分；若原广义积分中令$u=1/x^2$，则变换为收敛的无界函数广义积分。

4 无穷限广义积分与无界函数广义积分的关系

两种广义积分可互换转换

$\Longrightarrow$ 比如当$a>0$时，

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x(\text{令 } x=t^{-1}) = -\int_{1/a}^{0} t^{-2}f(t^{-1})\mathrm{d}t =$$

$\displaystyle\int_0^{1/a} t^{-2}f(t^{-1})\mathrm{d}t$，令$g(t)=t^{-2}f(t^{-1})$，得$\displaystyle\int_0^{1/a} g(t)\mathrm{d}t$。

问题： $\displaystyle\int_0^{1/a} g(t)\mathrm{d}t$ 是否为无界函数广义积分？

例如令$f(x)=1/x^2$，则$t=1/x$ 变换为常义积分；若原广义积分中令$u=1/x^2$，则变换为收敛的无界函数广义积分。

故课本有误，但采取合适的变换后，仍可化为无界函数广义积分。

$\Longleftarrow$ 设$x = b$ 是$f(x)$ 在$[a, b]$ 上的唯一奇点，即$f(x)$ 在$x = b$ 的左领域无界。

$\Longleftarrow$ 设$x = b$ 是$f(x)$ 在$[a, b]$ 上的唯一奇点，即$f(x)$ 在$x = b$ 的左领域无界。

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$(令 $t = \dfrac{1}{b-x}$) $= \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \dfrac{1}{t^2} f(b - \dfrac{1}{t})\mathrm{d}t$ 为无穷限广义积分。

故后面的讨论只对无穷限广义积分进行。

$\Longleftarrow$ 设$x=b$ 是$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的唯一奇点，即$f(x)$ 在$x=b$ 的左领域无界。

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$(令 $t=\frac{1}{b-x}$) $=\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty}\frac{1}{t^2}f(b-\frac{1}{t})\mathrm{d}t$ 为无穷限广义积分。

故后面的讨论只对无穷限广义积分进行。

二、广义积分的计算

例6：计算$I_n=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^n\mathrm{d}x$。

$\Longleftarrow$ 设$x=b$ 是$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的唯一奇点，即$f(x)$ 在$x=b$ 的左领域无界。

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x(\text{令 } t=\frac{1}{b-x})=\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty}\frac{1}{t^2}f(b-\frac{1}{t})\mathrm{d}t$$ 为无穷限广义积分。

故后面的讨论只对无穷限广义积分进行。

二、广义积分的计算

例6：计算$I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}x^n\mathrm{d}x$。

例7：计算$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$。

$\Longleftarrow$ 设$x=b$ 是$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的唯一奇点，即$f(x)$ 在$x=b$ 的左领域无界。

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$(令 $t=\frac{1}{b-x}$) $=\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty}\frac{1}{t^2}f(b-\frac{1}{t})\mathrm{d}t$ 为无穷限广义积分。

故后面的讨论只对无穷限广义积分进行。

二、广义积分的计算

例6：计算$I_n=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^n\mathrm{d}x$。

例7：计算$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$。

例8：计算$\int_0^{\pi}x\ln\sin x\mathrm{d}x$。

例9：计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x \mathrm{d}x$。

例9：计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot x \mathrm{d}x$。

例10：求 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$。

例9：计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x\mathrm{d}x$。

例10：求 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$。

例11：计算 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x$。

例9：计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot x \mathrm{d}x$。

例10：求 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$。

例11：计算 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} \mathrm{d}x$。

三、Cauchy 主值

考虑广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \mathrm{d}x = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \int_A^B \sin x \mathrm{d}x = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} (\cos A - \cos B)$$

不存在，故广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \mathrm{d}x$ 发散。

若要求$A \to -\infty$与$B \to +\infty$同时进行，即令$A = -B$，则$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{B \to +\infty} (\cos(-B) - \cos B) = 0$，即广义积分在该意义下收敛。

若要求$A \to -\infty$与$B \to +\infty$同时进行，即令$A = -B$，则$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{B \to +\infty} (\cos(-B) - \cos B) = 0$，即广义积分在该意义下收敛。

定义:若$\lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} f(x) dx$收敛，则称该极限值为$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$的Cauchy主值，记为$(cpv) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$。

若要求$A \to -\infty$与$B \to +\infty$同时进行，即令$A = -B$，则$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim\limits_{B \to +\infty} (\cos(-B) - \cos B) = 0$，即广义积分在该意义下收敛。

定义:若$\lim\limits_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx$收敛，则称该极限值为$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$的Cauchy主值，记为$(cpv)\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$。

注：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$收敛$\Rightarrow (cpv)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$。

若要求$A\to-\infty$与$B\to+\infty$同时进行，即令$A=-B$，则$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx=\lim\limits_{B\to+\infty}(\cos(-B)-\cos B)=0$，即广义积分在该意义下收敛。

定义:若$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx$收敛，则称该极限值为$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx$的Cauchy主值，记为$(cpv)\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx$。

注：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$收敛$\Rightarrow (cpv)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$。

$(cpv)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx\not\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$收敛，例$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx$。

无界函数的广义积分也有相应的Cauchy 主值概念。

定义:设$f(x)$ 在$[a,b]$ 无界，c 是唯一的奇点。
若$\lim\limits_{\eta\to 0}\left[\int_a^{c-\eta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\eta}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right]$ 存在，则称此极限为广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的Cauchy 主值。

无界函数的广义积分也有相应的Cauchy 主值概念。

定义:设$f(x)$ 在$[a,b]$ 无界，c 是唯一的奇点。
若$\lim\limits_{\eta\to 0}\left[\int_a^{c-\eta} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\eta}^b f(x)\mathrm{d}x\right]$ 存在，则称此极限为广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的Cauchy 主值。

例12：计算$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 和$(cpv)\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$。

作业： P_{368} 3(1)(4 – 8)(10), 4(2)(4 – 6), 5, 6(2)(5), 10.

补充：找出下列广义积分计算中的错误，并说明理由，并计算其Cauchy 主值。在积分$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}$ 中，由于被积函数是奇函数，积分区间关于原点对称，从而所求积分为0。

§2 广义积分的收敛判别法

一、无穷限广义积分的Cauchy 收敛原则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛} \Longleftrightarrow \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x \text{ 存在。}$$

回顾 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在$\Rightarrow \forall\epsilon>0, \exists X>0, \forall x', x''>X$，成立$|f(x')-f(x'')|<\epsilon$。

§2 广义积分的收敛判别法

一、无穷限广义积分的Cauchy 收敛原则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛} \iff \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x \text{ 存在。}$$

回顾 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在$\Rightarrow \forall\epsilon > 0, \exists X > 0, \forall x', x'' > X$，成立$|f(x') - f(x'')| < \epsilon$。

定理1 （广义积分的Cauchy 收敛准则） $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\iff \forall\epsilon > 0, \exists A_0 > 0, \forall A', A'' \geq A_0$, 有$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \epsilon$。

1无穷限广义积分收敛性与函数在无穷远点收敛之间的关系

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \nRightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，e.g. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$。

1无穷限广义积分收敛性与函数在无穷远点收敛之间的关系

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \not\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，e.g. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$。

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛$\not\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

1无穷限广义积分收敛性与函数在无穷远点收敛之间的关系

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \not\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，e.g. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$。

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛$\not\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

例1：$f(x)=\begin{cases} n[1-2^n|x-n|], & x\in[n-2^{-n},n+2^{-n}] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

1无穷限广义积分收敛性与函数在无穷远点收敛之间的关系

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \nRightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，e.g. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$。

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛$\nRightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

例1：$f(x)=\begin{cases} n[1-2^n|x-n|], & x\in[n-2^{-n},n+2^{-n}] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

该例同时说明，无穷限广义积分收敛$\nRightarrow$ 被积函数有界。且课本P_{362} 给出了另外一个例子。

问题： 在什么情况下，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$？

问题：在什么情况下，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$？

(1) 设 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则$A=0$。（作业）

(2) 设$f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上可导，且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。（作业）

(3) 设 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且$f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上一致连续，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

(4) 设 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$f(x)$ 单调，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$。（作业）

二、绝对收敛与条件收敛

定义:设$f(x)$ 在任意有限区间$[a, A] \subseteq [a, +\infty)$ 上可积,且$\int_a^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$ 收敛,则称$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 绝对收敛。若$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 收敛而非绝对收敛,则称$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 条件收敛。

二、绝对收敛与条件收敛

定义:设$f(x)$ 在任意有限区间$[a, A] \subseteq [a, +\infty)$ 上可积，且$\int_a^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$ 收敛，则称$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 绝对收敛。若$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 收敛而非绝对收敛，则称$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 条件收敛。

推论：若广义积分$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 绝对收敛，则它一定收敛。

二、绝对收敛与条件收敛

定义:设$f(x)$ 在任意有限区间$[a, A] \subseteq [a, +\infty)$ 上可积，且$\int_a^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$ 收敛，则称$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 绝对收敛。若$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 收敛而非绝对收敛，则称$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 条件收敛。

推论：若广义积分$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 绝对收敛，则它一定收敛。

注：区别“定积分可积必绝对可积，反之不一定”。

二、绝对收敛与条件收敛

定义:设$f(x)$ 在任意有限区间$[a, A] \subseteq [a, +\infty)$ 上可积，且$\int_a^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$ 收敛，则称$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 绝对收敛。若$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 收敛而非绝对收敛，则称$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 条件收敛。

推论：若广义积分$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 绝对收敛，则它一定收敛。

注：区别“定积分可积必绝对可积，反之不一定”。

例2：讨论$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x \sin x}{\sqrt{x^3 + a^2}} \mathrm{d}x$ 的敛散性（a 是常数）。

三、无穷限非负函数广义积分的比较判别法

定理1 （比较判别法）设在$[a,+\infty)$ 上恒有$0 \le f(x) \le K\phi(x), K > 0$，则

(1) 当$\int_a^{+\infty} \phi(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；

(2) 当$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散时，$\int_a^{+\infty} \phi(x)\mathrm{d}x$ 也发散。

三、无穷限非负函数广义积分的比较判别法

定理1 （比较判别法）设在$[a,+\infty)$ 上恒有$0 \le f(x) \le K\phi(x), K > 0$，则

(1) 当$\int_a^{+\infty} \phi(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；

(2) 当$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散时，$\int_a^{+\infty} \phi(x)\mathrm{d}x$ 也发散。

注：“在$[a,+\infty)$ 上恒有$0 \le f(x) \le K\phi(x), K > 0$”可放宽为$\exists A \ge a$, 在$[A,+\infty)$ 上恒有$0 \le f(x) \le K\phi(x)$。

推论：（比较判别法的极限形式）设在$[a,+\infty)$ 上恒有$f(x)\geq 0$ 和$\phi(x)\geq 0$，且 $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\phi(x)}=\ell$.

(1) 若$0\leq\ell<+\infty$，则$\int_a^{+\infty}\phi(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；

(2) 若$0<\ell\leq+\infty$，则$\int_a^{+\infty}\phi(x)\mathrm{d}x$ 发散时，$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也发散。

推论：（比较判别法的极限形式）设在$[a,+\infty)$ 上恒有$f(x)\geq 0$ 和$\phi(x)\geq 0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\phi(x)}=\ell$.

(1) 若$0\leq \ell<+\infty$，则$\displaystyle\int_a^{+\infty}\phi(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；

(2) 若$0<\ell\leq+\infty$，则$\displaystyle\int_a^{+\infty}\phi(x)\mathrm{d}x$ 发散时，$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也发散。

例3：讨论$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+3x^3+5x^2+2x-1}}\mathrm{d}x$ 的敛散性。

推论：（比较判别法的极限形式）设在$[a,+\infty)$ 上恒有$f(x)\geq 0$ 和$\phi(x)\geq 0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\phi(x)}=\ell$.

(1) 若$0\leq \ell<+\infty$，则$\int_a^{+\infty}\phi(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；

(2) 若$0<\ell\leq+\infty$，则$\int_a^{+\infty}\phi(x)\mathrm{d}x$ 发散时，$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也发散。

例3：讨论$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+3x^3+5x^2+2x-1}}\mathrm{d}x$ 的敛散性。

注：请举例说明当比较判别法的极限形式中$\ell=0$ 或$+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty}\phi(x)\mathrm{d}x$ 和$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性可以产生不同的情况。

在以上两例中，我们都是取比较简单的$\dfrac{1}{x^p}$作为比较对象（这正是p-积分之所以重要的原因）。将上述定理中$\phi(x)$具体取为$\dfrac{1}{x^p}$，即得如下Cauchy 判别法。

在以上两例中，我们都是取比较简单的$\dfrac{1}{x^p}$ 作为比较对象（这正是p-积分之所以重要的原因）。将上述定理中$\phi(x)$ 具体取为$\dfrac{1}{x^p}$，即得如下Cauchy 判别法。

定理2 （Cauchy 判别法）设在$[a, +\infty) \subseteq [0, +\infty)$ 上恒有$f(x) \geq 0, K$ 是正常数。

(1) 若$f(x) \leq \dfrac{K}{x^p}$ 且$p > 1$，则$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) 若$f(x) \geq \dfrac{K}{x^p}$ 且$p \leq 1$，则$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

推论（Cauchy 判别法的极限形式）设在设在$[a,+\infty)$ $\subseteq [0,+\infty)$ 上恒有 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = \ell$.

(1) 若$0 \leq \ell < +\infty$ 且$p > 1$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) 若$0 < \ell \leq +\infty$ 且$p \leq 1$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

推论（Cauchy 判别法的极限形式）设在设在$[a,+\infty)\subseteq[0,+\infty)$ 上恒有 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=\ell$.

(1) 若$0\le\ell<+\infty$ 且$p>1$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) 若$0<\ell\le+\infty$ 且$p\le 1$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

例4：讨论 $\int_1^{+\infty} x^a e^{-x}\mathrm{d}x$ 的敛散性($a\in\mathbb{R}$)。

作业： 课本P_{380} $1(2),3,4$

四、无穷限一般函数广义积分的收敛判别法

回顾“积分第二中值定理”设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在$[a,b]$ 上单调，则$\exists\xi\in[a,b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

四、无穷限一般函数广义积分的收敛判别法

回顾“积分第二中值定理”设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在$[a,b]$ 上单调，则$\exists\xi\in[a,b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定理4：若下列两条件之一满足，则$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

(1) (Dirichlet 判别法) $F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 在$[a,+\infty)$ 上有界，$g(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上单调且$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$；

(2) (Abel 判别法) $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$g(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上单调有界。

注1：Abel 判别法的充分性可由Dirichlet 判别法的充分性导出。

注1：Abel 判别法的充分性可由Dirichlet 判别法的充分性导出。

注2：事实上，Abel 判别法和Dirichlet 判别法中的条件不仅是广义积分收敛的必要条件，也是充分条件。如

注1：Abel 判别法的充分性可由Dirichlet 判别法的充分性导出。

注2：事实上，Abel 判别法和Dirichlet 判别法中的条件不仅是广义积分收敛的必要条件，也是充分条件。如

命题：设$\forall A > a$，f 在$[a, A] \subseteq [a, +\infty)$ 上可积，即f 在$[a, +\infty)$ 上内闭可积。

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ 分解$f = uv$, s.t.

(1) u 在$[a, +\infty)$ 上单调，且 $\lim\limits_{u \to +\infty} u(x) = 0$；

(2) $\forall A > a$，积分$\int_a^A v(x)\mathrm{d}x$ 存在有界。

注1：Abel 判别法的充分性可由Dirichlet 判别法的充分性导出。

注2：事实上，Abel 判别法和Dirichlet 判别法中的条件不仅是广义积分收敛的必要条件，也是充分条件。如

命题：设$\forall A > a$，f 在$[a, A] \subseteq [a, +\infty)$ 上可积，即f 在$[a, +\infty)$ 上内闭可积。

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ 分解$f = uv$, s.t.

(1) u 在$[a, +\infty)$ 上单调，且 $\lim\limits_{u \to +\infty} u(x) = 0$；

(2) $\forall A > a$，积分$\int_a^A v(x)\mathrm{d}x$ 存在有界。

例5：讨论$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性。

例6：设$f(x) > 0 \downarrow$，试证$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 同时敛散。

例6：设$f(x)>0\downarrow$，试证$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 同时敛散。

例6：设$f(x) > 0 \downarrow$，试证$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 同时敛散。

例7：证明广义积分$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\mathrm{d}x$ 当$p \leq \frac{1}{2}$ 时发散；当$\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时条件收敛；当$p > 1$ 时绝对收敛。

例6：设$f(x)>0\downarrow$，试证$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 同时敛散。

例7：证明广义积分$\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\mathrm{d}x$ 当$p\le\frac{1}{2}$ 时发散；当$\frac{1}{2}<p\le 1$ 时条件收敛；当$p>1$ 时绝对收敛。

注1：本题利用了如下推理

条件收敛$\pm$ 条件收敛$\not\Rightarrow$ 条件收敛；
条件收敛$\pm$ 绝对收敛$\Rightarrow$ 条件收敛；
绝对收敛$\pm$ 绝对收敛$\Rightarrow$ 绝对收敛。

注2：本例虽然有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^p+\sin x}=0$ 且 $\left|\int_0^A \sin x dx\right|\le 2$ 对每个 $A>a$ 成立。但 $p\le\dfrac{1}{2}$ 时，积分仍发散，说明Dirichlet 判别法中单调性条件仍不可少。

注2：本例虽然有 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p+\sin x}=0$ 且 $\left|\int_0^A \sin x dx\right|\leq 2$ 对每个 $A>a$ 成立。但 $p\leq\frac{1}{2}$ 时，积分仍发散，说明Dirichlet 判别法中单调性条件仍不可少。

例8：讨论广义积分 $\int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1}\right)\mathrm{d}x$ 的敛散性。

注2：本例虽然有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^p+\sin x}=0$ 且 $\left|\int_0^A \sin x\mathrm{d}x\right|\le 2$ 对每个$A>a$ 成立。但$p\le\dfrac{1}{2}$ 时，积分仍发散，说明Dirichlet 判别法中单调性条件仍不可少。

例8：讨论广义积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1}\right)\mathrm{d}x$ 的敛散性。

注：尽管$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^2+p}\mathrm{d}x$ 与$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{p}{x+1}\mathrm{d}x$ 均发散，却无法得出$\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1}\right)\mathrm{d}x$ 收敛或发散的任何结论。即

发散$\pm$ 发散$\not\Rightarrow$ 发散。

例9：判断$\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)\mathrm{d}x$ 的敛散性。

作业： 课本P_{380} 5(1)(4)

补充：判别下列命题真假

(1) 若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=0$；

(2) 若f 在$(-\infty,+\infty)$ 上连续，且$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=f(x),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=-f(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

五、无界函数广义积分的收敛判别法

关于无穷区间广义积分的结论可平行用于无界函数广义积分。若$f(x)$ 在$[a, b]$ 上只有一个奇点$x = b$ 的情况，结果如下：

五、无界函数广义积分的收敛判别法

关于无穷区间广义积分的结论可平行用于无界函数广义积分。若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上只有一个奇点$x=b$ 的情况，结果如下：

定理5：（Cauchy 收敛定理）广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件：$\forall\epsilon>0, \exists\delta>0, \forall\eta', \eta''\in(0,\delta)$，有

$$\left|\int_{b-\eta'}^{b-\eta''} f(x)\mathrm{d}x\right|<\epsilon.$$

五、无界函数广义积分的收敛判别法

关于无穷区间广义积分的结论可平行用于无界函数广义积分。若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上只有一个奇点$x=b$ 的情况，结果如下：

定理5：（Cauchy 收敛定理）广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件：$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall\eta',\eta''\in(0,\delta)$，有

$$\left|\int_{b-\eta'}^{b-\eta''} f(x)\mathrm{d}x\right|<\epsilon.$$

定理6：（比较判别法，M 或Weierstrass 判别法）设在$[a,b)$ 上恒有$0\le f(x)\le K\phi(x)$，其中K 为正常数，则

(1) 当$\int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；

(2) 当$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散时，$\int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x$ 也发散。

定理7：（比较判别法的极限形式）设在$[a,b)$ 上恒有$f(x)\geq 0,\phi(x)\geq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)/\phi(x)=\ell$，则

(1) 若$0\leq \ell<+\infty$，$\displaystyle\int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x$ 收敛$\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；

(2) 若$0<\ell\leq +\infty$，$\displaystyle\int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x$ 发散$\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也发散。

定理7：（比较判别法的极限形式）设在$[a,b)$ 上恒有$f(x)\geq 0, \phi(x)\geq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)/\phi(x)=\ell$，则

(1) 若$0\leq \ell<+\infty$，$\int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x$ 收敛$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；

(2) 若$0<\ell\leq +\infty$，$\int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x$ 发散$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也发散。

注：特别地，取$\phi(x)=1/(b-x)^p$，得Cauchy 判别法

定理7：（比较判别法的极限形式）设在$[a,b)$ 上恒有$f(x)\geq 0,\phi(x)\geq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)/\phi(x)=\ell$，则

(1) 若$0\leq \ell<+\infty$，$\int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x$ 收敛$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；

(2) 若$0<\ell\leq +\infty$，$\int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x$ 发散$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也发散。

注：特别地，取$\phi(x)=1/(b-x)^p$，得Cauchy 判别法

定理8：（Cauchy 判别法）设在$[a,b)$ 上恒有$f(x)\geq 0$，若当x 属于b 的某个左邻域$[b-\eta_0,b)$ 时，存在正常数K，s.t.

(1) $f(x)\leq \dfrac{K}{(b-x)^p}$ 且$p<1$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) $f(x)\geq \dfrac{K}{(b-x)^p}$ 且$p\geq 1$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

定理9：（Cauchy 判别法的极限形式）设在$[a, b)$ 上恒有$f(x) \geq 0$，且$\lim\limits_{x \to b^-} (b-x)^p f(x) = \ell$，则

(1) 若$0 \leq \ell < +\infty$ 且$p < 1$，则$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$ 收敛；

(2) 若$0 < \ell \leq +\infty$ 且$p \geq 1$，则$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$ 发散。

定理9：（Cauchy 判别法的极限形式）设在$[a, b)$ 上恒有$f(x) \geq 0$，且$\lim\limits_{x \to b^-} (b-x)^p f(x) = \ell$，则

(1) 若$0 \leq \ell < +\infty$ 且$p < 1$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) 若$0 < \ell \leq +\infty$ 且$p \geq 1$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

定理10：若下列两条件之一满足，则$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛

(1) (Dirichlet 判别法) $F(\eta) = \int_a^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x$ 在$(0, b-a]$ 上有界，$g(x)$ 在$[a, b)$ 上单调且$\lim\limits_{x \to b^-} g(x) = 0$；

(2) (Abel 判别法) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$g(x)$ 在$[a, b)$ 上单调有界。

例11：讨论$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x^p \ln x}(p \in \mathbb{R})$ 的敛散性。

例11：讨论$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x^p \ln x}(p \in \mathbb{R})$ 的敛散性。

例12：判别$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{|x-a_1|^{p_1} \cdots |x-a_n|^{p_n}}$ 的敛散性，且$i \neq j$时，$a_i \neq a_j$。

例11：讨论$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x^p \ln x}(p \in \mathbb{R})$ 的敛散性。

例12：判别$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{|x-a_1|^{p_1} \cdots |x-a_n|^{p_n}}$ 的敛散性，且$i \neq j$时，$a_i \neq a_j$。

例13：讨论广义积分$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} \mathrm{d}x$ 的敛散性。

例11：讨论$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x^p \ln x}(p \in \mathbb{R})$ 的敛散性。

例12：判别$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{|x-a_1|^{p_1} \cdots |x-a_n|^{p_n}}$ 的敛散性，且$i \neq j$时，$a_i \neq a_j$。

例13：讨论广义积分$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} \mathrm{d}x$ 的敛散性。

例14：讨论$\int_0^{+\infty} \frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}} \mathrm{d}x$ 的敛散性。

例11：讨论 $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x^p \ln x} (p \in \mathbb{R})$ 的敛散性。

例12：判别 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{|x-a_1|^{p_1} \cdots |x-a_n|^{p_n}}$ 的敛散性，且 $i \neq j$ 时，$a_i \neq a_j$。

例13：讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} \mathrm{d}x$ 的敛散性。

例14：讨论 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}} \mathrm{d}x$ 的敛散性。

例15：判别 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x \cos^m x} \mathrm{d}x$ 的敛散性。

作业： 课本 P_{380} 7除(3), 8(1)(3)(5)(7)(8), 9除(3), 10, 11, 14