

## § 6.2 随机时间序列分析模型

# 一、时间序列线性模型的基本形式

(1) **p阶自回归 (Autoregressive Models) 过程AR(p)**

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

其中,  $E\varepsilon_t = 0$ ,  $E\varepsilon_t \varepsilon_k = 0$  ( $t \neq k$ ),  $E\varepsilon_t Y_{t-i} = 0$

(2) **移动平均 (moving average) 过程MA(q):**

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

其中,  $E\varepsilon_t = 0$ ,  $E\varepsilon_t \varepsilon_k = 0$  ( $t \neq k$ ),

(3) 将纯AR(p)与纯MA(q)结合，得到一个一般的自回归移动平均（**autoregressive moving average**）过程**ARMA**（**p,q**）：

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

该式表明：

（1）一个随机时间序列可以通过一个自回归移动平均过程生成，即该序列可以由其自身的过去或滞后值以及随机扰动项来解释。

（2）如果该序列是平稳的，即它的行为并不会随着时间的推移而变化，那么我们就可以通过该序列过去的行为来预测未来。

这也正是随机时间序列分析模型的优势所在。

- 随机时间序列模型的平稳性条件
- 随机时间序列模型的识别
- 随机时间序列模型的估计
- 随机时间序列模型的检验
- 随机时间序列模型的预测

## 二、随机时间序列模型的平稳性条件

## 1、AR(p)模型的平稳性条件

考虑p阶自回归模型AR(p)

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad (*)$$

- 引入滞后算子 (lag operator)  $L$ :

$$LX_t = X_{t-1}, L^2 X_t = X_{t-2}, \dots, L^p X_t = X_{t-p}$$

(\*) 式变换为

$$(1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \dots - \varphi_p L^p) X_t = \varepsilon_t$$

记  $\Phi(L) = (1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \dots - \varphi_p L^p)$ , 则称多项式方程



记  $\Phi(L) = (1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \dots - \varphi_p L^p)$ , 则称多项式方程

$$\Phi(z) = (1 - \varphi_1 z - \varphi_2 z^2 - \dots - \varphi_p z^p) = 0$$

为AR(p)的特征方程(characteristic equation)。

可以证明, 如果该特征方程的所有根在单位圆外(根的模大于1), 则AR(p)模型是平稳的。

## 例9.2.1 AR(1)模型的平稳性条件。

对1阶自回归模型AR(1)

$$X_t = \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

而AR(1)的特征方程

$$\Phi(z) = 1 - \varphi z = 0$$

的根为

$$z = 1/\varphi$$

AR(1)稳定，即  $|\varphi| < 1$ ，意味着特征根大于1。

对1阶自回归模型AR(1)

$$X_t = \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

方程两边平方再求数学期望，得到 $X_t$ 的方差

$$E(X_t^2) = \varphi^2 E(X_{t-1}^2) + E(\varepsilon_t^2) + 2E(X_{t-1}\varepsilon_t)$$

由于 $X_t$ 仅与 $\varepsilon_t$ 相关，因此， $E(X_{t-1}\varepsilon_t)=0$ 。如果该模型稳定，则有 $E(X_t^2)=E(X_{t-1}^2)$ ，从而上式可变换为：

$$\gamma_0 = \sigma_X^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \varphi^2}$$

在稳定条件下，该方差是一非负的常数，从而有  $|\varphi| < 1$ 。

例9.2.2 AR(2)模型的平稳性。  $X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$

对应的特征方程  $1 - \varphi_1 z - \varphi_2 z^2 = 0$  的两个根  $z_1$ 、 $z_2$  满足：

$$z_1 z_2 = -1/\varphi_2, \quad z_1 + z_2 = -\varphi_1/\varphi_2$$

解出  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{z_1 z_2} \quad \varphi_1 = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}$$

由AR(2)的平稳性， $|\varphi_2| = 1/|z_1| |z_2| < 1$ ，则至少有一个根的模大于1，不妨设  $|z_1| > 1$ ，有

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} - \frac{1}{z_1 z_2} = 1 - \left(1 - \frac{1}{z_1}\right)\left(1 - \frac{1}{z_2}\right) < 1$$

$$\left(1 - \frac{1}{z_1}\right)\left(1 - \frac{1}{z_2}\right) > 0$$

于是  $|z_2| > 1$ 。由  $\varphi_2 - \varphi_1 < 1$  可推出同样的结果。

综上，有

$$\varphi_1 + \varphi_2 < 1, \quad \varphi_2 - \varphi_1 < 1, \quad |\varphi_2| < 1$$

这就是**AR(2)的平稳性条件**，或称为**平稳域**。它是一顶点分别为  $(-2, -1)$ ， $(2, -1)$ ， $(0, 1)$  的三角形。

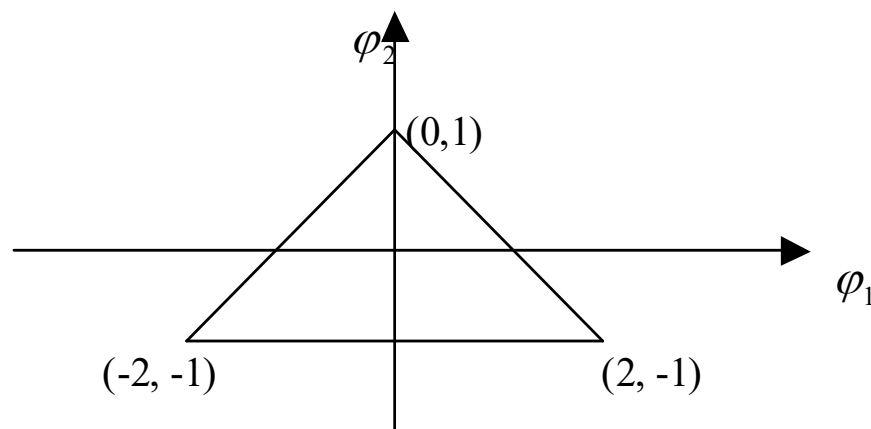


图 9.2.1 AR(2)模型的平稳域

### 例9.2.2 AR(2)模型的平稳性。

对AR(2)模型

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

方程两边同乘以 $X_t$ ，再取期望得：

$$\gamma_0 = \varphi_1 \gamma_1 + \varphi_2 \gamma_2 + E(X_t \varepsilon_t)$$

$$\text{又由于 } E(X_t \varepsilon_t) = \varphi_1 E(X_{t-1} \varepsilon_t) + \varphi_2 E(X_{t-2} \varepsilon_t) + E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$$

$$\text{于是 } \gamma_0 = \varphi_1 \gamma_1 + \varphi_2 \gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2$$

同样地，由原式还可得到

$$\gamma_1 = \varphi_1 \gamma_0 + \varphi_2 \gamma_1$$

$$\gamma_2 = \varphi_1 \gamma_1 + \varphi_2 \gamma_0$$

于是方差为

$$\gamma_0 = \frac{(1 - \varphi_2)\sigma_\varepsilon^2}{(1 + \varphi_2)(1 - \varphi_1 - \varphi_2)(1 + \varphi_1 - \varphi_2)}$$

由平稳性的定义，该方差必须是一不变的正数，于是有

$$\varphi_1 + \varphi_2 < 1, \quad \varphi_2 - \varphi_1 < 1, \quad |\varphi_2| < 1$$

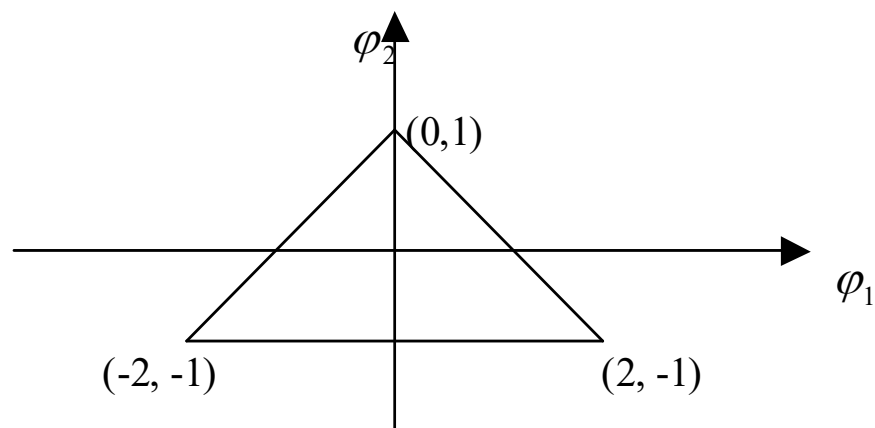


图 9.2.1 AR(2)模型的平稳域

对高阶自回模型**AR(p)**来说，多数情况下没有必要直接计算其特征方程的特征根，但有一些有用的规则可用来检验高阶自回归模型的稳定性：

(1)**AR(p)**模型稳定的必要条件是：

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_p < 1$$

(2) 由于 $\varphi_i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) 可正可负，**AR(p)**模型稳定的充分条件是：

$$|\varphi_1| + |\varphi_2| + \dots + |\varphi_p| < 1$$



## 2、MA(q)模型的平稳性

对于移动平均模型MR(q):

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

其中 $\varepsilon_t$ 是一个白噪声，于是

$$E(X_t) = E(\varepsilon_t) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) - \dots - \theta_q E(\varepsilon_q) = 0$$

$$\gamma_0 = \text{var}(X_t) = (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = \text{cov}(X_t, X_{t-1}) = (-\theta_1 + \theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_3 + \dots + \theta_{q-1} \theta_q) \sigma_\varepsilon^2$$

.....

$$\gamma_{q-1} = \text{cov}(X_t, X_{t-q+1}) = (-\theta_{q-1} + \theta_1 \theta_q) \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_q = \text{cov}(X_t, X_{t-q}) = -\theta_q \sigma_\varepsilon^2$$

当滞后期大于q时， $X_t$ 的自协方差系数为0。

因此:有限阶移动平均模型总是平稳的。

### 3、ARMA(p,q)模型的平稳性

由于ARMA (p,q)模型是AR(p)模型与MA(q)模型的组合：

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

而MA(q)模型总是平稳的，因此ARMA (p,q)模型的平稳性取决于AR(p)部分的平稳性。

当AR(p)部分平稳时，则该ARMA(p,q)模型是平稳的，否则，不是平稳的。

## 最后

(1) 一个平稳的时间序列总可以找到生成它的平稳的随机过程或模型；

(2) 一个非平稳的随机时间序列通常可以通过差分的方法将它变换为平稳的，对差分后平稳的时间序列也可找出对应的平稳随机过程或模型。

因此，如果我们将一个非平稳时间序列通过 $d$ 次差分，将它变为平稳的，然后用一个平稳的ARMA( $p, q$ )模型作为它的生成模型，则我们就说该原始时间序列是一个自回归单整移动平均 (autoregressive integrated moving average) 时间序列，记为ARIMA( $p, d, q$ )。

例如，一个ARIMA(2, 1, 2)时间序列在它成为平稳序列之前先得差分一次，然后用一个ARMA(2, 2)模型作为它的生成模型的。

当然，一个ARIMA( $p, 0, 0$ )过程表示了一个纯AR( $p$ )平稳过程；一个ARIMA(0, 0,  $q$ )表示一个纯MA( $q$ )平稳过程。

### 三、随机时间序列模型的识别

所谓随机时间序列模型的识别，就是对于一个平稳的随机时间序列，找出生成它的合适的随机过程或模型，即判断该时间序列是遵循一纯AR过程、还是遵循一纯MA过程或ARMA过程。

所使用的工具主要是时间序列的自相关函数（autocorrelation function, **ACF**）及偏自相关函数（partial autocorrelation function, **PACF**）。

# 1、AR(p)过程

## (1) 自相关函数ACF

### 1阶自回归模型AR(1)

$$X_t = \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

的k阶滞后自协方差为：

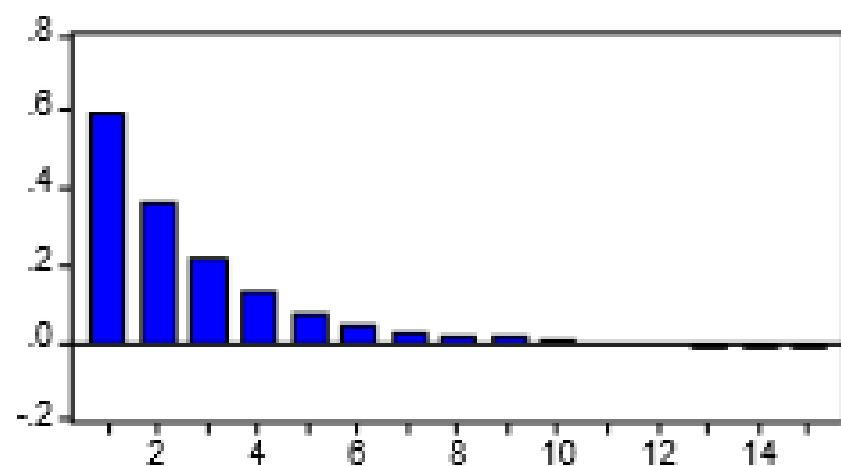
$$\gamma_k = E(X_{t-k}(\varphi X_{t-1} + \varepsilon_t)) = \varphi \gamma_{k-1} = \varphi^k \gamma_0 \quad k=1,2,\dots$$

因此，AR(1)模型的自相关函数为

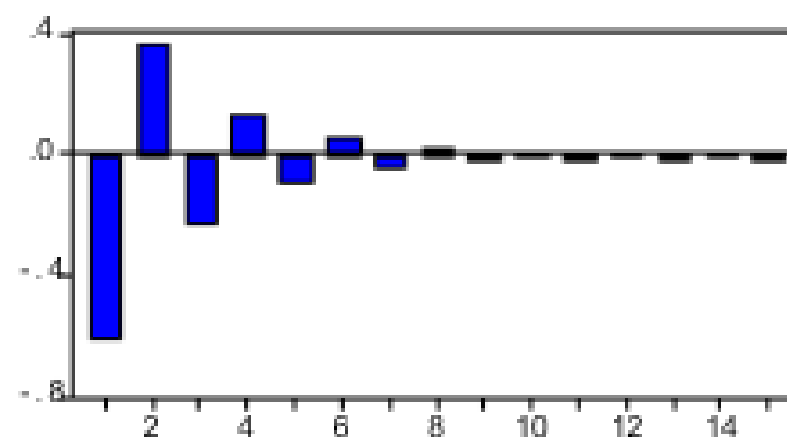
$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0 = \varphi^k \quad k=1,2,\dots$$

由AR(1)的稳定性知 $|\varphi| < 1$ ，因此， $k \rightarrow \infty$ 时，呈指数形衰减，直到零。这种现象称为拖尾或称AR(1)有无穷记忆（infinite memory）。

注意， $\varphi < 0$ 时，呈振荡衰减状。



$1 > \phi_1 > 0$



$-1 < \phi_1 < 0$

图 AR(1) 过程的自相关函数

## 2 阶自回归模型AR(2)

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

该模型的方差 $\gamma_0$ 以及滞后1期与2期的自协方差 $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ 分别为

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \varphi_1 \gamma_1 + \varphi_2 \gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2 & \gamma_1 &= \varphi_1 \gamma_0 + \varphi_2 \gamma_1 \\ \gamma_2 &= \varphi_1 \gamma_1 + \varphi_2 \gamma_0\end{aligned}$$

类似地, 可写出一般的**k期滞后自协方差**:

$$\gamma_k = E(X_{t-k}(\varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t)) = \varphi_1 \gamma_{k-1} + \varphi_2 \gamma_{k-2} \quad (K=2,3,\dots)$$

于是, AR(2)的**k 阶自相关函数**为:

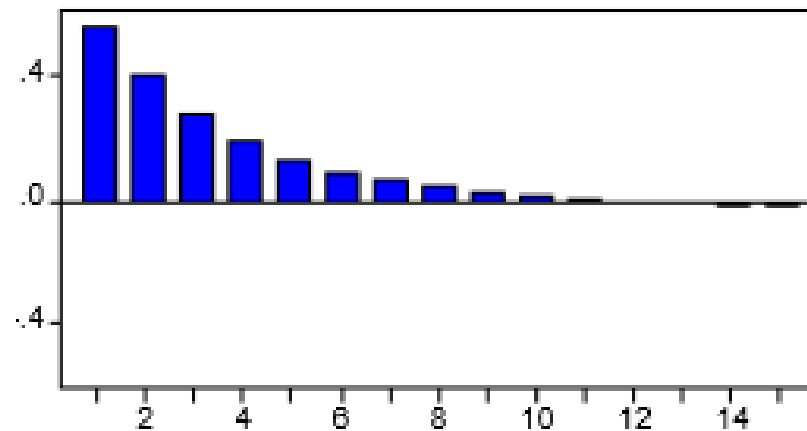
$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} \quad (K=2,3,\dots)$$

其中 : $\rho_1 = \varphi_1 / (1 - \varphi_2)$ ,  $\rho_0 = 1$

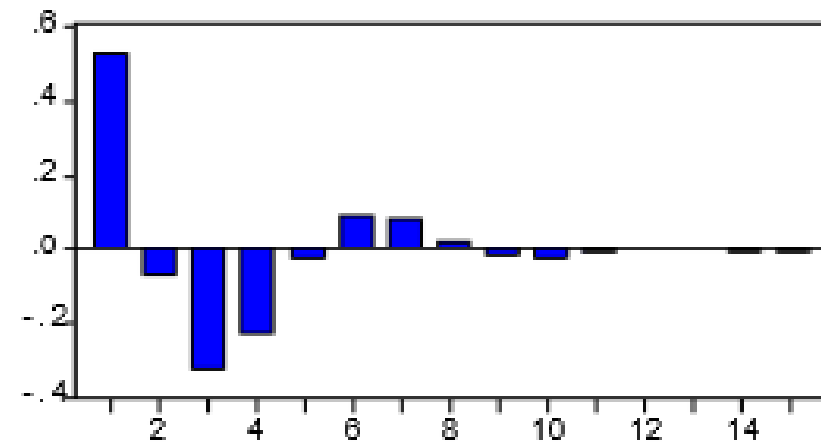
如果AR(2)稳定, 则由 $\varphi_1 + \varphi_2 < 1$ 知 $|\rho_k|$ 衰减趋于零, 呈拖尾状。



至于衰减的形式，要看AR(2)特征根的实虚性，若为实根，则呈单调或振荡型衰减，若为虚根，则呈正弦波型衰减。



两个特征根为实根



两个特征根为共轭复根图

AR(2) 过程的自相关函数

一般地, **p阶自回归模型AR(p)**

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

**k期滞后协方差为:**

$$\begin{aligned}\gamma_k &= E(X_{t-K}(\varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t)) \\ &= \varphi_1 \gamma_{k-1} + \varphi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \varphi_p \gamma_{k-p}\end{aligned}$$

从而有**自相关函数** :

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p}$$

可见, 无论k有多大,  $\rho_k$ 的计算均与其 1 到p阶滞后的自相关函数有关, 因此呈拖尾状。

如果AR(p)是稳定的, 则 $|\rho_k|$ 衰减且趋于零。

## (2) 偏自相关函数

自相关函数ACF(k)给出了 $X_t$ 与 $X_{t-k}$ 的总体相关性，但总体相关性可能掩盖了变量间完全不同的隐含关系。

例如，在AR(1)随机过程中， $X_t$ 与 $X_{t-2}$ 间有相关性可能主要是由于它们各自与 $X_{t-1}$ 间的相关性带来的：

$$\rho_2 = \varphi^2 = \rho_1^2 = E(X_t X_{t-1})E(X_{t-1} X_{t-2})$$

即自相关函数中包含了这种所有的“间接”相关。

与之相反， $X_t$ 与 $X_{t-k}$ 间的偏自相关函数 (partial autocorrelation, 简记为PACF) 则是消除了中间变量 $X_{t-1}, \dots, X_{t-k+1}$ 带来的间接相关后的直接相关性，它是在已知序列值 $X_{t-1}, \dots, X_{t-k+1}$ 的条件下， $X_t$ 与 $X_{t-k}$ 间关系的度量。

在AR(1)中,

从 $X_t$ 中去掉 $X_{t-1}$ 的影响, 则只剩下随机扰动项 $\varepsilon_t$ , 显然它与 $X_{t-2}$ 无关, 因此我们说 $X_t$ 与 $X_{t-2}$ 的偏自相关系数为零, 记为

$$\rho_2^* = \text{Corr}(\varepsilon_t, X_{t-2}) = 0$$

同样地, 在AR(p)过程中, 对所有的 $k > p$ ,  $X_t$ 与 $X_{t-k}$ 间的偏自相关系数为零。

AR(p)的一个主要特征是: $k > p$ 时,  $\rho_k^* = \text{Corr}(X_t, X_{t-k}) = 0$

即 $\rho_k^*$ 在 $p$ 以后是截尾的。

一随机时间序列的识别原则:

若 $X_t$ 的偏自相关函数在 $p$ 以后截尾, 即 $k > p$ 时,  $\rho_k^* = 0$ , 而它的自相关函数 $\rho_k$ 是拖尾的, 则此序列是自回归AR(p)序列。

需指出的是，

在实际识别时，由于样本偏自相关函数 $r_k^*$ 是总体偏自相关函数 $\rho_k^*$ 的一个估计，由于样本的随机性，当 $k > p$ 时， $r_k^*$ 不会全为0，而是在0的上下波动。但可以证明，当 $k > p$ 时， $r_k^*$ 服从如下渐近正态分布：

$$r_k^* \sim N(0, 1/n)$$

式中 $n$ 表示样本容量。

因此，如果计算的 $r_k^*$ 满足

$$|r_k^*| < \frac{2}{\sqrt{n}}$$

我们就有95.5%的把握判断原时间序列在 $p$ 之后截尾。

---

偏自相关函数是描述随机过程结构特征的另一种方法。用  $\phi_{kj}$  表示  $k$  阶自回归过程中第  $j$  个回归系数，则  $k$  阶自回归模型表示为：

$$x_t = \phi_{k1}x_{t-1} + \phi_{k2}x_{t-2} + \cdots + \phi_{kk}x_{t-k} + u_t$$

其中  $\phi_{kk}$  是最后一个回归系数。若把  $\phi_{kk}$  看作是滞后期  $k$  的函数，则称

$$\phi_{kk}, \quad k = 1, 2, \dots$$

为偏自相关函数。它由下式中的红项组成。

$$x_t = \phi_{11}x_{t-1} + u_{1t}$$

$$x_t = \phi_{21}x_{t-1} + \phi_{22}x_{t-2} + u_{2t}$$

...

$$x_t = \phi_{k1}x_{t-1} + \phi_{k2}x_{t-2} + \cdots + \phi_{kk}x_{t-k} + u_{kt}$$

因偏自相关函数中每一个回归系数  $\phi_{kk}$  恰好表示  $x_t$  与  $x_{t-k}$  在排除了其中间变量  $x_{t-1}$  ,

$x_{t-2}$  ,  $\cdots$  ,  $x_{t-k+1}$  影响之后的相关系数,

$$x_t - \phi_{k1}x_{t-1} - \phi_{k2}x_{t-2} - \cdots - \phi_{k,k-1}x_{t-k+1} = \phi_{kk}x_{t-k} + u_{kt}$$

所以偏自相关函数由此得名。

## 2、MA(q)过程

对MA(1)过程

$$X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

可容易地写出它的自协方差系数：

$$\gamma_0 = (1 + \theta^2)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = -\theta\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \cdots = 0$$

于是，MA(1)过程的自相关函数为：

$$\rho_1 = \frac{-\theta}{(1 + \theta^2)}$$

$$\rho_2 = \rho_3 = \cdots = 0$$

可见，当 $k > 1$ 时， $\rho_k > 0$ ，即 $X_t$ 与 $X_{t-k}$ 不相关，MA(1)自相关函数是截尾的。



MA(1)过程可以等价地写成 $\varepsilon_t$ 关于无穷序列 $X_t, X_{t-1}, \dots$ 的线性组合的形式:

$$\varepsilon_t = X_t + \theta X_{t-1} + \theta^2 X_{t-2} + \dots$$

或

$$X_t = -\theta X_{t-1} - \theta^2 X_{t-2} - \dots + \varepsilon_t \quad (*)$$

(\*)是一个AR( $\infty$ )过程, 它的偏自相关函数非截尾但却趋于零, 因此MA(1)的偏自相关函数是非截尾但却趋于零的。

注意:

(\*)式只有当 $|\theta| < 1$ 时才有意义, 否则意味着距 $X_t$ 越远的 $X$ 值, 对 $X_t$ 的影响越大, 显然不符合常理。

因此, 我们把 $|\theta| < 1$ 称为MA(1)的可逆性条件(invertibility condition)或可逆域。

一般地， $q$ 阶移动平均过程MA( $q$ )

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

其自协方差系数为

$$r_k = E(X_t X_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2) & \text{当 } k = 0 \\ \sigma_\varepsilon^2 (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k} \theta_q) & \text{当 } 1 \leq k \leq q \\ 0 & \text{当 } k > q \end{cases}$$

相应的自相关函数为

$$\rho_k = \frac{r_k}{r_0} = \begin{cases} 1 & \text{当 } k = 0 \\ (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k} \theta_q) / (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2) & \text{当 } 1 \leq k \leq q \\ 0 & \text{当 } k > q \end{cases}$$

可见，当 $k > q$ 时， $\mathbf{X}_t$ 与 $\mathbf{X}_{t-k}$ 不相关，即存在截尾现象，因此，当 $k > q$ 时， $\rho_k = 0$ 是MA( $q$ )的一个特征。

于是：可以根据自相关系数是否从某一点开始一直为0来判断MA( $q$ )模型的阶。

与MA(1)相仿，可以验证MA(q)过程的偏自相关函数是非截尾但趋于零的。

**MA(q)模型的识别规则：**若随机序列的自相关函数截尾，即自q以后， $\rho_k=0$ （ $k>q$ ）；而它的偏自相关函数是拖尾的，则此序列是滑动平均MA(q)序列。

**同样需要注意的是：**在实际识别时，由于样本自相关函数 $r_k$ 是总体自相关函数 $\rho_k$ 的一个估计，由于样本的随机性，当 $k>q$ 时， $r_k$ 不会全为0，而是在0的上下波动。但可以证明，当 $k>q$ 时， $r_k$ 服从如下渐近正态分布：

$$r_k \sim N(0, 1/n)$$

式中n表示样本容量。

因此，如果计算的 $r_k$ 满足： $|r_k| < \frac{2}{\sqrt{n}}$

我们就有95.5%的把握判断原时间序列在q之后截尾。

### 3、ARMA(p, q) 过程

**ARMA(p,q)**的自相关函数，可以看作MA(q)的自相关函数和AR(p)的自相关函数的混合物。

当 $p=0$ 时，它具有截尾性质；

当 $q=0$ 时，它具有拖尾性质；

当 $p$ 、 $q$ 都不为0时，它具有拖尾性质

从识别上看，通常：

**ARMA(p, q)**过程的偏自相关函数（**PACF**）可能在 $p$ 阶滞后前有几项明显的尖柱（**spikes**），但从 $p$ 阶滞后项开始逐渐趋向于零；

而它的自相关函数（**ACF**）则是在 $q$ 阶滞后前有几项明显的尖柱，从 $q$ 阶滞后项开始逐渐趋向于零。

**表 9.2.1          ARMA(p,q)模型的 ACF 与 PACF 理论模式**

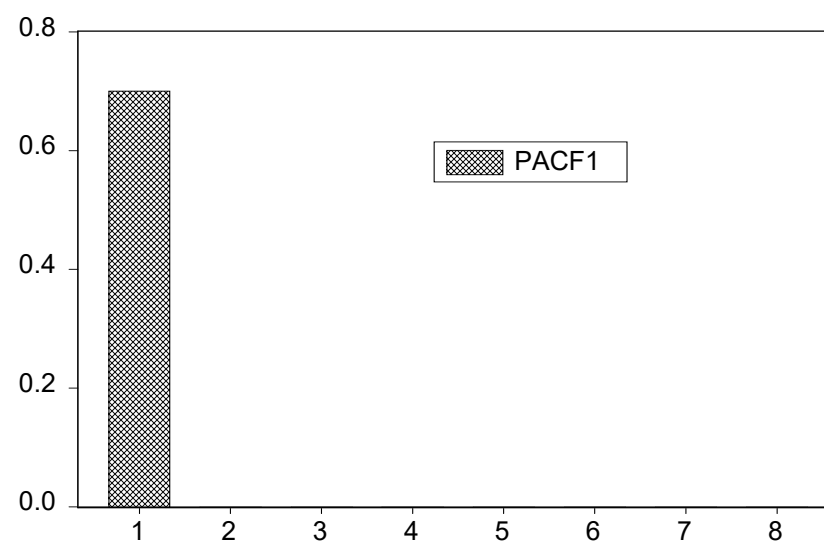
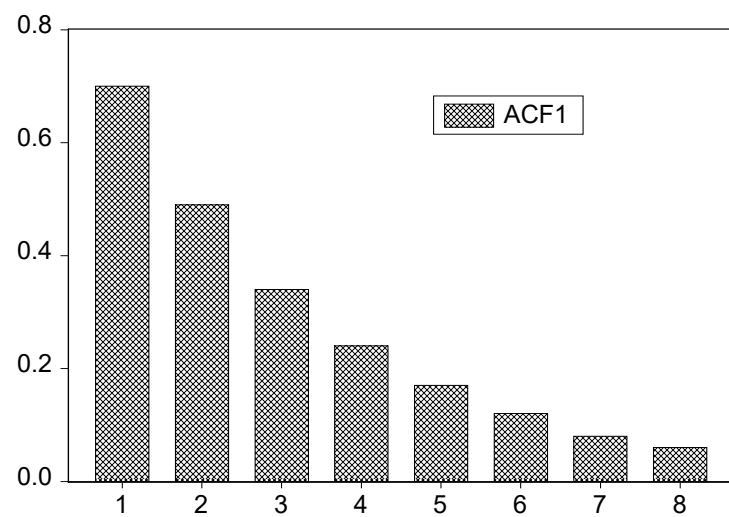
模型	ACF	PACF
白噪声	$\rho_k = 0$	$\rho_k^* = 0$
AR(p)	衰减趋于零（几何型或振荡型）	P 阶后截尾： $\rho_k^* = 0$ , $k > p$
MA(q)	q 阶后截尾：, $\rho_k = 0$ , $k > q$	衰减趋于零（几何型或振荡型）
ARMA(p,q)	q 阶后衰减趋于零（几何型或振荡型）	p 阶后衰减趋于零（几何型或振荡型）

图 9.2.2 ARMA(p,q)模型的 ACF 与 PACF 理论模式

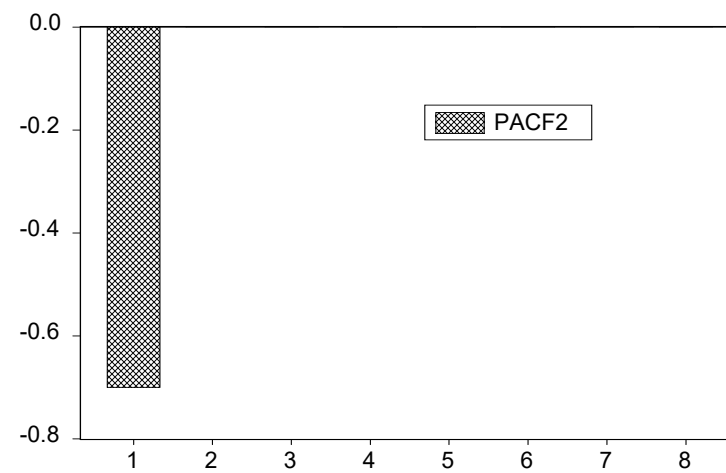
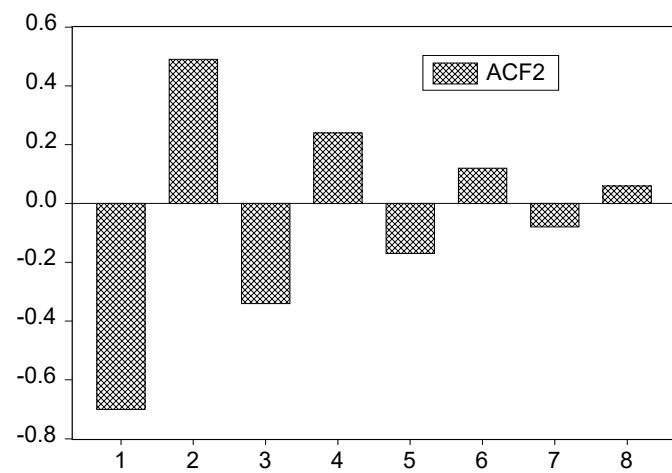
ACF

PACF

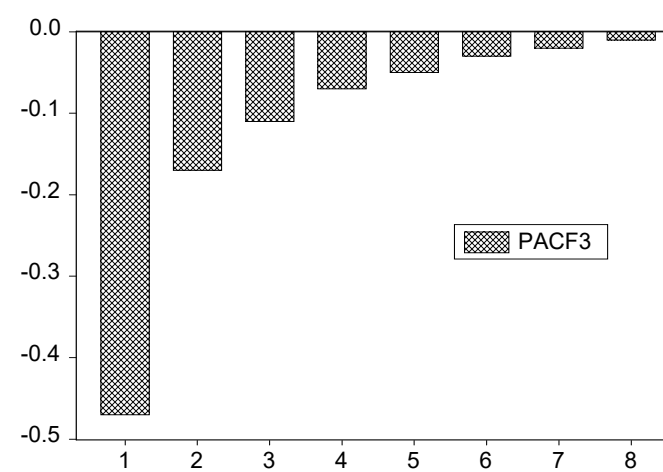
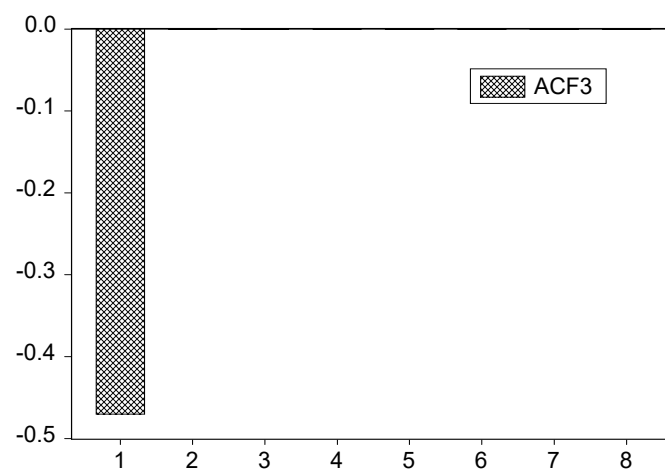
模型 1:  $X_t = 0.7X_{t-1} + \varepsilon_t$



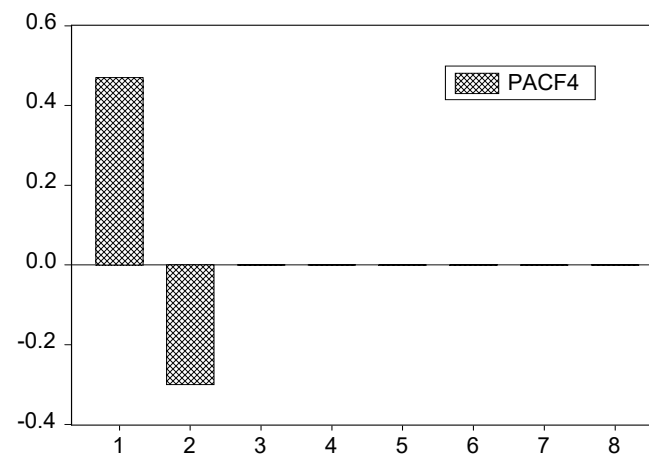
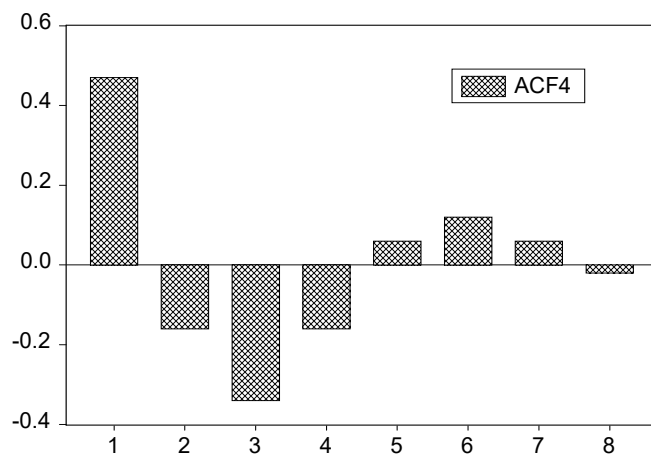
模型 2:  $X_t = -0.7X_{t-1} + \varepsilon_t$



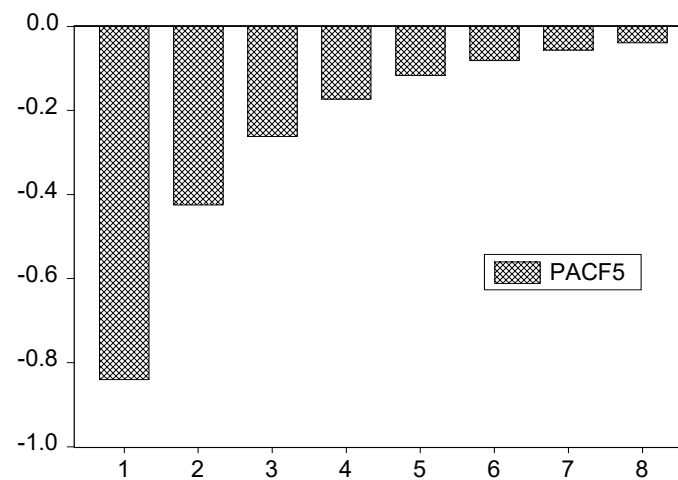
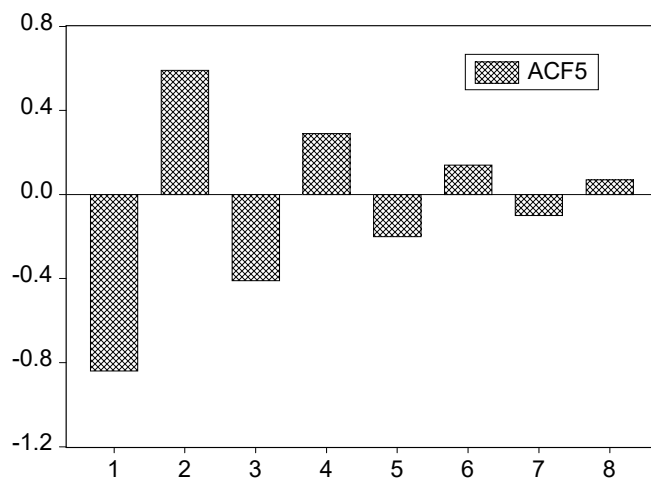
模型 3:  $X_t = \varepsilon_t - 0.7\varepsilon_{t-1}$



模型 4:  $X_t = 0.7X_{t-1} - 0.49X_{t-2} + \varepsilon_t$

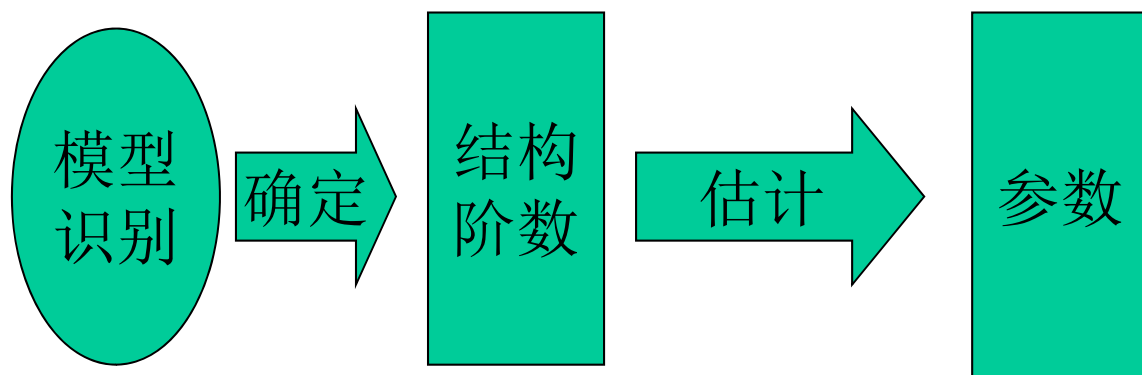


模型 5:  $X_t = -0.7X_{t-1} + \varepsilon_t - 0.7\varepsilon_{t-1}$





## 四、随机时间序列模型的估计



AR(p)、MA(q)、ARMA(p,q)模型的估计方法较多，大体上分为3类：

- (1) 最小二乘估计；
- (2) 矩估计；
- (3) 利用自相关函数的直接估计。

下面有选择地加以介绍。

# 1. AR(p)模型的Yule Walker方程估计

在AR(p)模型的识别中，曾得到

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \varphi_p \rho_{k-p}$$

利用 $\rho_k = \rho_{-k}$ ，得到如下方程组：

$$\rho_1 = \varphi_1 + \varphi_2 \rho_1 + \cdots + \varphi_p \rho_{p-1}$$

$$\rho_2 = \varphi_1 \rho_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_p \rho_{p-2}$$

.....

$$\rho_p = \varphi_1 \rho_{p-1} + \varphi_2 \rho_{p-1} + \cdots + \varphi_p \rho_{p-k}$$

此方程组被称为**Yule Walker**方程组。该方程组建立了AR(p)模型的模型参数 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ 与自相关函数 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ 的关系，

利用实际时间序列提供的信息，首先求得自相关函数的估计值  $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_p$

然后利用Yule Walker方程组，求解模型参数的估计值  $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_p$

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_0 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_0 & \cdots & \hat{\rho}_{p-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \cdots & \hat{\rho}_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_p \end{bmatrix}$$

由于  $\varepsilon_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p}$  于是

$$\sigma_\varepsilon^2 = E\varepsilon_t^2 = \cdots = \gamma_0 - \sum_{i,j=1}^p \phi_i \phi_j \gamma_{j-i}$$

从而可得 $\sigma_\varepsilon^2$ 的估计值  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \hat{\gamma}_0 - \sum_{i,j=1}^p \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j \hat{\gamma}_{j-i}$

在具体计算时， $\hat{\rho}_k$  可用样本自相关函数 $r_k$ 替代。

## 2. MA(q)模型的矩估计

将MA(q)模型的自协方差函数中的各个量用估计量代替，得到：

$$\hat{\gamma}_k = \begin{cases} \hat{\sigma}_\varepsilon^2 (1 + \hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2 + \cdots + \hat{\theta}_q^2) & \text{当 } k = 0 \\ \hat{\sigma}_\varepsilon^2 (-\hat{\theta}_k + \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_{k+1} + \cdots + \hat{\theta}_{q-k} \hat{\theta}_q) & \text{当 } 1 \leq k \leq q \\ 0 & \text{当 } k > q \end{cases} \quad (*)$$

**首先**求得自协方差函数的估计值，(\*)是一个包含(q+1)个待估参数

$$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \cdots \hat{\theta}_q, \hat{\sigma}_\varepsilon^2$$

的非线性方程组，可以用**直接法**或**迭代法**求解。

常用的迭代方法有**线性迭代法**和**Newton-Raphsan迭代法**。

## (1) MA(1)模型的直接算法

对于MA(1)模型, (\*) 式相应地写成

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_0 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 (1 + \hat{\theta}_1^2) \\ \hat{\gamma}_1 = -\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \hat{\theta}_1 \end{cases}$$

于是

$$\hat{\theta}_1 = -\hat{\gamma}_1 / \hat{\sigma}_\varepsilon^2$$

$$\text{有} \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^4 - \hat{\gamma}_0 \hat{\sigma}_\varepsilon^2 + \hat{\gamma}_1^2 = 0 \quad \text{或} \quad \hat{\gamma}_0^{-1} \hat{\sigma}_\varepsilon^4 - \hat{\sigma}_\varepsilon^2 + \hat{\rho}_1^2 = 0$$

于是有解

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\hat{\gamma}_0}{2} (1 \pm \sqrt{1 - 4\hat{\rho}_1^2})$$

$$\hat{\theta}_1 = -\hat{\gamma}_1 / \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = -2\hat{\rho}_1 / (1 \pm \sqrt{1 - 4\hat{\rho}_1^2})$$

由于参数估计有两组解, 可根据可逆性条件 $|\theta_1| < 1$ 来判断选取一组。

## (2) MA(q)模型的迭代算法

对于 $q>1$ 的MA(q)模型，一般用迭代算法估计参数：

由(\*)式得

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = \frac{\hat{\gamma}_0}{1 + \hat{\theta}_1^2 + \dots + \hat{\theta}_q^2} \\ \hat{\theta}_k = -\left( \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2} - \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_2 \hat{\theta}_{k+2} - \dots - \hat{\theta}_{q-k} \hat{\theta}_q \right) \end{cases} \quad (**)$$

**第一步**，给出  $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_q$  的一组初值，比如

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2(0) = \hat{\gamma}_0 \quad \hat{\theta}_1(0) = \hat{\theta}_2(0) = \dots = \hat{\theta}_q(0) = 0$$

代入(\*\*)式，计算出第一次迭代值

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2(1) = \hat{\gamma}_0 \quad \hat{\theta}_k(1) = -\hat{\gamma}_k / \hat{\gamma}_0$$

**第二步**，将第一次迭代值代入（\*\*）式，计算出第二次迭代值

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2(2) = \hat{\gamma}_0 / (1 + \hat{\theta}_1^2(1) + \cdots + \hat{\theta}_q^2(1))$$

$$\hat{\theta}_k(2) = -(\hat{\gamma}_k / \hat{\gamma}_0 - \hat{\theta}_1(1)\hat{\theta}_{k+1}(1) - \cdots - \hat{\theta}_{q-k}(1)\hat{\theta}_q(1))$$

按此反复迭代下去，直到第m步的迭代值与第m-1步的迭代值相差不大时（满足一定的精度），便停止迭代，并用第m步的迭代结果作为（\*\*）的近似解。



### 3. ARMA (p, q) 模型的矩估计

在 ARMA(p,q) 中共有 (p+q+1) 个待估参数  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  与  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  以及  $\sigma_\varepsilon^2$ , 其估计量计算步骤及公式如下:

第一步, 估计  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$

$$\begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_q & \hat{\rho}_{q-1} & \cdots & \hat{\rho}_{q-p+1} \\ \hat{\rho}_{q+1} & \hat{\rho}_q & \cdots & \hat{\rho}_{q-p} \\ \vdots & & & \\ \hat{\rho}_{q+p-1} & \hat{\rho}_{q+p-2} & \cdots & \hat{\rho}_q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_{q+1} \\ \hat{\rho}_{q+2} \\ \vdots \\ \hat{\rho}_{q+p} \end{bmatrix}$$

$\hat{\rho}_k$  是总体自相关函数的估计值, 可用样本自相关函数  $r_k$  代替。

第二步，改写模型，求 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ 以及 $\sigma_\varepsilon^2$ 的估计值

将模型

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

改写为：

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \varphi_2 X_{t-2} - \dots - \varphi_p X_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (*)$$

$$\text{令} \quad \tilde{X}_t = X_t - \hat{\varphi}_1 X_{t-1} - \hat{\varphi}_2 X_{t-2} - \dots - \hat{\varphi}_p X_{t-p}$$

于是(\*)可以写成：

$$\tilde{X}_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

构成一个MA模型。按照估计MA模型参数的方法，可以得到 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ 以及 $\sigma_\varepsilon^2$ 的估计值。

例1 如下回归是基于美国 1960—2007 年期间共 48 个年度观测的 CPI 数据而得出的：

$$\begin{aligned} 1. \quad \widehat{\Delta \text{CPI}_t} &= 0.0334 \text{ CPI}_{t-1} \\ t &= (12.37) \\ R^2 &= 0.0703 \quad d = 0.3663 \quad \text{RSS} = 206.65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \widehat{\Delta \text{CPI}_t} &= 1.8662 + 0.0192 \text{ CPI}_{t-1} \\ t &= (3.27) \quad (3.86) \\ R^2 &= 0.249 \quad d = 0.4462 \quad \text{RSS} = 166.921 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \widehat{\Delta \text{CPI}_t} &= 1.1611 + 0.5344t - 0.1077 \text{ CPI}_{t-1} \\ t &= (2.37) \quad (4.80) \quad (-4.02) \\ R^2 &= 0.507 \quad d = 0.6071 \quad \text{RSS} = 109.608 \end{aligned}$$

其中 RSS=残差平方和。

a. 考察上述回归，你对 CPI 时间序列的平稳性有何看法？

例2.求MA (3) 模型

$$y_t = 1 + u_t + 0.8u_{t-1} - 0.5u_{t-2} + 0.3u_{t-3}$$

的自协方差和自相关函数。

例3.考虑如下AR (2) 随机过程

$$x_t = 0.1x_{t-1} + 0.06x_{t-2} + \varepsilon_t$$

该过程是否是平稳的随机过程。

例4.判断如下ARMA过程的平稳性

$$x_t = 0.7x_{t-1} - 0.1x_{t-2} + \varepsilon_t - 0.14\varepsilon_{t-1}$$

例5.把如下ARMA (1,1) 过程表示  
为 AR的形式:

$$x_t = \varphi x_{t-1} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$$