华东理工大学 2012 - 2013 学年第二学期

《微分几何》课程期末考试试卷 A 2013. 6. 26

开课学院：理学院，　专业：数、信计，　考试形式：闭卷，　所需时间 120 分钟

考生姓名：__________ 学号：__________ 班级：__________ 任课教师：杨勤民

题序	一	二	三	四	五	总　分
得分						
评卷人	杨	勤	民			

一、单项选择题（每小题4分，共28分）

1. 下列各量中，不是内蕴量的是　(　)

(A) 曲面的高斯曲率；　(B) 曲面上曲线的测地曲率；

(C) 曲面上测地三角形的内角和；　(D) 曲面上曲线的曲率。

2. 如果曲线的所有密切平面都经过一个定点，则此曲线一定是　(　)

(A) 测地线；　(B) 螺线；　(C) 平面曲线；　(D) 渐近曲线。

3. 曲面上曲线的曲率k，测地曲率k_g，法曲率k_n之间的关系是　(　)

(A) $k = k_g + k_n$；　(B) $k_g = k + k_n$；

(C) $k^2 = k_g^2 + k_n^2$；　(D) $k_g^2 = k^2 + k_n^2$。

4. 球面上测地三角形的内角之和　(　)

(A) 大于180度；　(B) 等于180度；　(C) 小于180度；　(D) 其他。

5. 曲面上的曲纹坐标网是正交网的充要条件是　(　)

(A) $F \equiv M \equiv 0$；　(B) $F \equiv 0$；　(C) $M \equiv 0$；　(D) $L \equiv N \equiv 0$。

6. 曲面上高斯曲率$K > 0$的点称为曲面的　(　)

(A) 椭圆点；　(B) 脐点；　(C) 双曲点；　(D) 抛物点。

7. 单参数曲面族 $x^2 + (y-\alpha)^2 + (z-2\alpha)^2 = 1$ 的包络是　(　)

(A) $5x^2 + (2y-z)^2 = 4$；　(B) $5x^2 + (2y-z)^2 = 5$；

(C) $5x^2 + (2y-z)^2 = 6$；　(D) $5x^2 + (2y-z)^2 = 7$。

二、填空题（请在每空中填入最简结果，每空2分，共44分）

1. 曲线$\vec{r}(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$在点$t = 1$处：单位切向量 $\vec{\alpha}(1) =$__________，主法向量$\vec{\beta}(1) =$__________，副法向量$\vec{\gamma}(1) =$__________，密切平面方程为______________，从切平面方程为______________，法平面方程为______________，曲率$k(1) =$________，挠率$\tau(1) =$________。

2. 曲面 $\vec{r}(u,v) = \left(u - \dfrac{u^3}{3} + uv^2, v - \dfrac{v^3}{3} + u^2 v, u^2 - v^2\right)$ 在点$(0,0)$处：第一类基本量$E(0,0) =$_____，$F(0,0) =$_____，$G(0,0) =$_____，第一基本形式 $\mathrm{I}(0,0) =$__________；第二类基本量$L(0,0) =$______，$M(0,0) =$______，$N(0,0) =$______，第二基本形式 $\mathrm{II}(0,0) =$__________；平均曲率 $H(0,0) =$______，高斯曲率 $K(0,0) =$______。

3. 设曲面的第一基本形式是 $ds^2 = [U(u) + V(v)](du^2 + dv^2)$，则相对分量

$\omega^1 =$____________________，$\omega^2 =$____________________，$\omega_1^2 =$____________________，

高斯曲率$K =$____。

[注：请在试卷空白处或试卷背面解答以下各题]

三、(共10分)设曲面S上的高斯曲率处处为负或零，试用高斯-波涅公式证明该曲面上不能有两条测地线交于相异的两点P和Q。

四、(共10分)设V是n维实向量空间，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是它的一组基，$\alpha = e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_p (0 < p < n)$，$V$中一向量$v$满足$v \wedge \alpha = 0$，求证：$v$是$e_1, e_2, \cdots, e_p$的线性组合。

五、(共8分)证明在正则曲面上任一点，每对共轭方向上的法曲率的倒数之和为$\dfrac{2H}{K}$，其中H和K分别为该点处曲面的平均曲率和高斯曲率。

华东理工大学 2012 - 2013 学年第二学期

《微分几何》课程期末考试试卷 B 2013. 6. 26

开课学院：理学院， 专业：数、信计， 考试形式：闭卷， 所需时间 120 分钟

考生姓名：__________ 学号：__________ 班级：__________ 任课教师：杨勤民

题序	一	二	三	四	五	总 分
得分						
评卷人	杨	勤	民			

一、单项选择题（每小题4分，共28分）

1. 若两曲面之间存在等距变换，则对应曲线在对应点必具有相同的 ( )
(A) 曲率； (B) 挠率； (C) 法曲率； (D) 测地曲率。

2. 曲率和挠率均为非零常数的曲线一定是 ( )
(A) 直线； (B) 圆柱螺线； (C) 圆； (D) 平面曲线。

3. 曲面上非脐点处的两个主方向之间的夹角为 ( )
(A) $\frac{\pi}{2}$； (B) 0； (C) π； (D) 不确定。

4. 下列关于特殊曲线的论断，不正确的是 ( )
(A) 若曲线上有无穷多个点处的曲率为零，则该曲线必为直线；
(B) 平面曲线的密切平面就是曲线所在平面本身；
(C) 沿渐近曲线，曲面的切平面与该渐近曲线的密切平面重合；
(D) 沿测地线，曲面的切平面与该测地线的密切平面垂直。

5. 曲面上的曲纹坐标网是共轭网的充要条件是 ( )
(A) $F \equiv M \equiv 0$； (B) $F \equiv 0$； (C) $M \equiv 0$； (D) $L \equiv N \equiv 0$。

6. 曲面上高斯曲率$K < 0$的点称为曲面的 ( )
(A) 椭圆点； (B) 脐点； (C) 双曲点； (D) 抛物点。

7. 单参数平面族 $\alpha^2 x + 2\alpha y + 2z = 2\alpha$ 的包络是 ( )
(A) $(y-1)^2 = xz$； (B) $(y-1)^2 = 2xz$；
(C) $(y-1)^2 = 3xz$； (D) $(y-1)^2 = 4xz$。

二、填空题（请在每空中填入最简结果，每空2分，共44分）

1. 曲线$\vec{r}(t) = (3t-t^3, 3t^2, 3t+t^3)$在点$t=-1$处：单位切向量 $\vec{\alpha}(-1) =$__________，主法向量$\vec{\beta}(-1) =$__________，副法向量$\vec{\gamma}(-1) =$__________，密切平面方程为__________，从切平面方程为__________，法平面方程为__________，曲率$k(-1) =$________，挠率$\tau(-1) =$________。

2. 曲面 $\vec{r}(u,v) = (u+v,\ u-v,\ 2uv)$ 在点$(0,0)$处：第一类基本量$E(0,0) =$__________，$F(0,0) =$__________，$G(0,0) =$__________，第一基本形式$\mathrm{I}(0,0) =$__________；第二类基本量$L(0,0) =$________，$M(0,0) =$________，$N(0,0) =$________，第二基本形式

$\mathrm{II}(0,0) =$____________；平均曲率 $H(0,0) =$______，高斯曲率 $K(0,0) =$______。

3. 设曲面的第一基本形式是 $\mathrm{d}s^2 = \dfrac{\mathrm{d}u^2 - 4v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + 4u\,\mathrm{d}v^2}{4(u - v^2)}(u > v^2)$，则相对分量

$\omega^1 =$______________，$\omega^2 =$_____，$\omega_1^2 =$_____，高斯曲率 $K =$_____。

[注：请在试卷空白处或试卷背面解答以下各题]

三、(共10分)利用高斯-波涅公式证明：若曲面S上存在两族夹角为定角的测地线，则它的高斯曲率处处为零。

四、(共10分)设$\omega = \sum\limits_{1\le i<j\le n} a_{ij}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$，$a_{ij} + a_{ji} = 0$，求证：

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1\le i<j<k\le n}\Big(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}\Big)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k。$$

五、(共8分)设曲线$\vec{r} = \vec{r}(s)$有固定的非零挠率τ_0，$\vec{\beta}$和$\vec{\gamma}$分别为该曲线的主法向量和副法向量，(1)证明曲线$\vec{r}^* = \dfrac{1}{\tau_0}\vec{\beta} - \int \vec{\gamma}\,\mathrm{d}s$ 有固定的曲率$k^* = |\tau_0|$；(2)求$\vec{r}^*$的挠率τ^*。

华东理工大学 2012 - 2013 学年第二学期
《微分几何》课程期末考试标准答案 A 2013. 8

一、单项选择题（每小题4分，共28分）

D C C A B A B

二、填空题（请在每空中填入最简结果，每空2分，共44分）

1. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-1, 0, 0)$, $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$,

$y - z + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $y + z - 7 = 0$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12}$.

2. 1, 0, 1, $\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2$, 2, 0, -2, $2\,\mathrm{d}u^2 - 2\,\mathrm{d}v^2$, 0, -4.

3. $\sqrt{U(u) + V(v)}\,\mathrm{d}u$, $\sqrt{U(u) + V(v)}\,\mathrm{d}v$,

$\frac{U'\,\mathrm{d}v - V'\,\mathrm{d}u}{2(U + V)}$, $\frac{U'U' + V'V' - (U'' + V'')(U + V)}{2(U + V)^3}$.

三、(共10分)设曲面S上的高斯曲率处处为负或零，试用高斯-波涅公式证明该曲面上不能有两条测地线交于相异的两点P和Q。

证：设在曲面域内两测地线相交于两点A, B, 它们包围的区域是G, 在交点处的内角分别为$\angle A$和$\angle B$, 由Gauss-Bonnet公式有

$$\int_G K\omega^1 \wedge \omega^2 + \int_{\partial G} k_g\,\mathrm{d}s + (\pi - \angle A) + (\pi - \angle B) = 2\pi.$$

因$k_g = 0$, 所以

$$\int_G K\omega^1 \wedge \omega^2 = \angle A + \angle B > 0,$$

这与$K \leq 0$矛盾.

四、(共10分)设V是n维实向量空间，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是它的一组基，$\alpha = e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_p (0 < p < n)$，$V$中一向量$v$满足$v \wedge \alpha = 0$，求证：$v$是$e_1, e_2, \cdots, e_p$的线性组合。

证：设$v = a_1 e_2 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$, 由已知, $v \wedge a = 0$, 即

$(a_1e_2 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n) \wedge (e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_p) = 0,$

所以有$(a_1e_1 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_p) + (a_2e_2 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_p) + \cdots + (a_ne_n \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_p) = 0$

由于$e_i \wedge e_i = 0$, 于是有

$(-1)^p a_{p+1} e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_p \wedge e_{p+1} + (-1)^p a_{p+2} e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_p \wedge e_{p+2} + \cdots + (-1)^p a_n e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_p \wedge e_n = 0.$

由于$\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$是V的一组基, 所以$a_{p+1} = a_{p+2} = \cdots = a_n = 0$, 因此

$v = a_1e_2 + a_2e_2 + \cdots + a_pe_p.$

五、(共8分)证明在正则曲面上任一点，每对共轭方向上的法曲率的倒数之和为$\dfrac{2H}{K}$，其中H和K分别为该点处曲面的平均曲率和高斯曲率。

证：设曲面$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$在任一点P的一对共轭方向为$P(u, v)\,\mathrm{d}u + Q(u, v)\,\mathrm{d}v = 0$, 与$(LQ - MP)\delta u + (MQ - NP)\delta v = 0$. 设$k_1$和$k_2$为这对共轭方向的法曲率, 则

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} &= \frac{E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2}{L\,\mathrm{d}u^2 + 2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2} + \frac{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}{L\delta u^2 + 2M\delta u\delta v + N\delta v^2} \\
&= \frac{EQ^2 - 2FPQ + GP^2}{LQ^2 - 2MPQ + NP^2} + \frac{E(MQ - NP)^2 - 2F(MQ - NP)(LQ - MP) + G(LQ - MP)^2}{L(MQ - NP)^2 - 2M(MQ - NP)(LQ - MP) + N(LQ - MP)^2} \\
&= \frac{(NE - 2MF + LG)(LQ^2 - 2MPQ + NP^2)}{(LN - M^2)(LQ - 2MPQ + NP^2)} \\
&= \frac{NE - 2MF + LG}{LN - M^2} = \frac{2H}{K}
\end{aligned}$$

华东理工大学 2012 - 2013 学年第二学期
《微分几何》课程期末考试标准答案 B 2013.6

一、单项选择题（每小题4分，共28分）

D　　B　　A　　A　　C　　C　　B

二、填空题（请在每空中填入最简结果，每空2分，共44分）

1. $(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$,　$(1,0,0)$,　$(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$,

$y+z+1=0$,　$x+2=0$,　$y-z-7=0$,　$\frac{1}{12}$,　$\frac{1}{12}$.

2. 2,　0,　2,　$2\,\mathrm{d}u^2+2\,\mathrm{d}v^2$,　0,　-2,　0,　$-4\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$,　0,　-1.

3. $\dfrac{\mathrm{d}u-2v\,\mathrm{d}v}{2\sqrt{u-v^2}}$,　$\mathrm{d}v$,　0,　0.

三、(共10分)利用高斯-波涅公式证明：若曲面S上存在两族夹角为定角的测地线，则它的高斯曲率处处为零。

证 设K为高斯曲率，k_g为测地曲率。在每族测地线上任取两条，围成曲面S上的一块曲边四边形区域G (2 分)，则有高斯- 波涅公式：

$$\iint_G K\,\mathrm{d}S+\oint_{\partial G}k_g\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{4}(\pi-\alpha_i)=2\pi \quad (3分)$$

设两族测地线所夹的定角为α，则

$$\sum_{i=1}^{4}(\pi-\alpha_i)=\alpha+(\pi-\alpha)+\alpha+(\pi-\alpha)=2\pi \quad (2分)$$

因∂G为测地线，所以$k_g=0$。上述高斯-波涅公式化简为$\iint_G K\,\mathrm{d}S=0.$

若S的高斯曲率不是处处为零，则必存在某点P处的高斯曲率$K_P\neq 0$，不妨设$K_P>0$。则在P点的邻近$K>0$，从而对于围绕P点的充分小的区域G'有$K>0$，于是$\iint_{G'}K\,\mathrm{d}S>0$。这与$K$在上述任选的由测地线围成的区域$G$上积分为零相矛盾，故$S$的高斯曲率是处处为零。　　(3分)

四、(共10分)设$\omega = \sum\limits_{1\le i<j\le n} a_{ij}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$，$a_{ij} + a_{ji} = 0$，求证：

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1\le i<j<k\le n} \Big(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}\Big) \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k。$$

证 由外微分的定义，$\mathrm{d}\omega = \sum\limits_{1\le i<j\le n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} \partial x^k \wedge \partial x^i \wedge \partial x^j$ (4分)

$= \sum\limits_{1\le k<i<j\le n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} \partial x^k \wedge \partial x^i \wedge \partial x^j + \sum\limits_{1\le i<k<j\le n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} \partial x^k \wedge \partial x^i \wedge \partial x^j + \sum\limits_{1\le i<j<k\le n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} \partial x^k \wedge \partial x^i \wedge \partial x^j$ (2分)

$= \sum\limits_{1\le i<j<k\le n} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} \partial x^i \wedge \partial x^j \wedge \partial x^k + \sum\limits_{1\le i<j<k\le n} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} \partial x^j \wedge \partial x^i \wedge \partial x^k + \sum\limits_{1\le i<j<k\le n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} \partial x^k \wedge \partial x^i \wedge \partial x^j$ (2分)

$= \sum\limits_{1\le i<j<k\le n} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} \partial x^i \wedge \partial x^j \wedge \partial x^k - \sum\limits_{1\le i<j<k\le n} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} \partial x^i \wedge \partial x^j \wedge \partial x^k + \sum\limits_{1\le i<j<k\le n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} \partial x^i \wedge \partial x^j \wedge \partial x^k$

$= \sum\limits_{1\le i<j<k\le n} \Big(\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\Big) \partial x^i \wedge \partial x^j \wedge \partial x^k$

$= \sum\limits_{1\le i<j<k\le n} \Big(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}\Big) \partial x^i \wedge \partial x^j \wedge \partial x^k$ (2分)

五、(共8分)设曲线$\vec{r} = \vec{r}(s)$有固定的非零挠率τ_0，$\vec{\beta}$和$\vec{\gamma}$分别为该曲线的主法向量和副法向量，(1)证明曲线$\vec{r}^* = \frac{1}{\tau_0}\vec{\beta} - \int \vec{\gamma}\,\mathrm{d}s$ 有固定的曲率$k^* = |\tau_0|$；(2)求$\vec{r}^*$的挠率τ^*。

解 (1) $\vec{r}^* = \frac{1}{\tau_0}\vec{\beta} - \int \vec{\gamma}\,\mathrm{d}s$, $\qquad (\vec{r}^*)' = \frac{1}{\tau_0}\dot{\vec{\beta}} - \vec{\gamma} = \frac{1}{\tau_0}(-k\vec{\alpha} + \tau_0\vec{\gamma}) - \vec{\gamma} = -\frac{k}{\tau_0}\vec{\alpha}$, (2分)

$(\vec{r}^*)'' = -\frac{\dot{k}}{\tau_0}\vec{\alpha} - \frac{k}{\tau_0}\dot{\vec{\alpha}} = -\frac{\dot{k}}{\tau_0}\vec{\alpha} - \frac{k}{\tau_0}(k\vec{\beta}) = -\frac{\dot{k}}{\tau_0}\vec{\alpha} - \frac{k^2}{\tau_0}\vec{\beta}$,

$(\vec{r}^*)' \times (\vec{r}^*)'' = \frac{k^3}{\tau_0^2}\vec{\gamma}$, $\qquad |(\vec{r}^*)' \times (\vec{r}^*)''| = \frac{k^3}{\tau_0^2}$, $\qquad |(\vec{r}^*)'| = \frac{k}{|\tau_0|}$,

$k^* = \frac{|(\vec{r}^*)' \times (\vec{r}^*)''|}{|(\vec{r}^*)'|^3} = \frac{k^3}{\tau_0^2}\Big/\Big(\frac{k}{|\tau_0|}\Big)^3 = |\tau_0|.$ (2分)

(2) $(\vec{r}^*)''' = -\frac{\ddot{k}}{\tau_0}\vec{\alpha} - \frac{\dot{k}}{\tau_0}\dot{\vec{\alpha}} - \frac{2k\dot{k}}{\tau_0}\vec{\beta} - \frac{k^2}{\tau_0}\dot{\vec{\beta}} = -\frac{\ddot{k}}{\tau_0}\vec{\alpha} - \frac{\dot{k}}{\tau_0}(k\vec{\beta}) - \frac{2k\dot{k}}{\tau_0}\vec{\beta} - \frac{k^2}{\tau_0}(-k\vec{\alpha} + \tau_0\vec{\gamma})$

$\qquad = \frac{k^3 - \ddot{k}}{\tau_0}\vec{\alpha} - \frac{3k\dot{k}}{\tau_0}\vec{\beta} - k^2\vec{\gamma}$,

$((\vec{r}^*)', (\vec{r}^*)'', (\vec{r}^*)''') = -\frac{k^5}{\tau_0^2}$, (2分)

$\tau^* = \frac{((\vec{r}^*)', (\vec{r}^*)'', (\vec{r}^*)''')}{\big|(\vec{r}^*)' \times (\vec{r}^*)''\big|^2} = -\frac{k^5}{\tau_0^2}\Big/\Big|\frac{k^3}{\tau_0^2}\Big|^2 = -\frac{\tau_0^2}{k}.$ (2分)

华东理工大学 2013 - 2014 学年第二学期

《微分几何》课程期末考试试卷 A 2014. 6. 27

开课学院：理学院， 专业：数、信计， 考试形式：闭卷， 所需时间 120 分钟

考生姓名：__________ 学号：__________ 班级：__________ 任课教师：杨勤民

题序	一	二	三	四	五	六	总 分
得分							
评卷人							

一、判断题(在正确命题后面的括号内画"√"，错误的后面画"×"，每小题2分，共18分)

1. 沿渐近曲线，曲面的切平面与该渐近曲线的从切平面重合. ( )
2. 球面曲线的所有主法线必过一个定点. ( )
3. 曲面上的直线一定是测地线. ( )
4. 空间曲线的曲率和挠率完全确定了空间曲线的形状和位置. ( )
5. 挠率的绝对值是曲线的副法向量对于弧长的旋转速度. ( )
6. 曲线必穿过法平面和密切平面，但不穿过从切平面. ( )
7. 高斯曲率与第二类基本量有关，不是内蕴量. ( )
8. C^4 类的曲线 $\vec{r}=\vec{r}(s)$ 为一般螺线的充要条件是 $(\ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}, \ddddot{\vec{r}})=0$. ( )
9. 若曲线的所有密切平面经过一个定点，则此曲线必为平面曲线. ( )

二、单项选择题（每小题4分，共16分）

1. 下列关于测地线的说法中，不正确的是 ( )

(A) 测地线具有等距不变性；

(B) 平面上的测地线必是直线；

(C) 测地线一定是连接其上两点的最短的曲面曲线；

(D) 通过曲面上一点，且具有相同切线的一切曲面曲线中，测地线的曲率最小.

2. 平面曲线的下列哪个量恒等于零 ( )

(A) 曲率； (B) 相对曲率； (C) 挠率； (D) 测地曲率.

3. 向量函数 $\vec{r}(t)$ 具有固定长的充要条件是 ( )

(A) $\vec{r}\times\vec{r}'=0$； (B) $\vec{r}\cdot\vec{r}'=0$； (C) $\vec{r}\times\vec{r}''=0$； (D) $\vec{r}'\times\vec{r}''=0$.

4. 曲面上的曲线是下列哪种曲线的充要条件是沿此曲线的曲面的法线组成一可展曲面. ( )

(A) 渐近曲线； (B) 曲率线； (C) 测地线； (D) 法截线.

三、填空题（请在每空中填入最简结果，每空2分，共36分）

1. 曲线 $\vec{r}(t)=(t\sin t, t\cos t, te^t)$ 在 $t=0$ 处的单位切向量 $\vec{\alpha}(0)=$__________，主法向量 $\vec{\beta}(0)=$__________，副法向量 $\vec{\gamma}(0)=$__________，密切平面方程为__________，从切平面方程为__________，法平面方程为__________，曲率 $k(0)=$__________，挠率 $\tau(0)=$__________.

2. 曲面$\vec{r}(u,v)=((u+v)\cos v-\sin v,\,(u+v)\sin v+\cos v,\,u+v)$ 在$\vec{r}(0,0)$ 处：第一类基本量$E(0,0)=$_____，$F(0,0)=$_____，$G(0,0)=$_____，第一基本形式$\mathrm{I}(0,0)=$__________；第二类基本量$L(0,0)=$_____，$M(0,0)=$_____，$N(0,0)=$_____，第二基本形式$\mathrm{II}(0,0)=$_____________；平均曲率$H(0,0)=$_____，高斯曲率$K(0,0)=$_____.

四、(共10分)设$x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\varphi$, 将$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 用$\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta$ 表示出来.

五、(共10分)求C^3 类曲线$\vec{r}(u)$ 的切线面$\vec{R}(u,v)=\vec{r}(u)+v\vec{r}\,'(u)$ 上的曲线$u+v=c$ 的法曲率.

六、(共10分)设曲面的第一基本形式是$\mathrm{d}s^2=\dfrac{1}{v^2}(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$, 计算该曲面的活动标架的相对分量$\omega^1,\omega^2,\omega_1^2$ 和高斯曲率K.

华东理工大学 2013 - 2014 学年第二学期

《微分几何》课程期末考试试卷 B 2014. 6. 27

开课学院: 理学院, 专业: 数、信计, 考试形式: 闭卷, 所需时间 120 分钟

考生姓名: ____________ 学号: ____________ 班级: ____________ 任课教师: 杨勤民

题序	一	二	三	四	五	六	总 分
得分							
评卷人							

一、判断题(在正确命题后面的括号内画"√", 错误的后面画"×", 每小题2分, 共18分)

1. 曲面上任意两点之间的测地线一定是唯一的. ( )
2. 球面曲线的所有法平面必过一个定点. ( )
3. 曲面上的直线既是渐近线, 又是测地线. ( )
4. 正则曲面上任何一点处有且仅有两个主方向. ( )
5. 旋转曲面上的子午线和平行圆构成曲率线网. ( )
6. 若曲线的所有切线都经过一个定点, 则该曲线一定是直线. ( )
7. 测地线的单位切向量在Levi-Civita平行移动意义下是平行的. ( )
8. 平均曲率恒为零的曲面必是可展曲面. ( )
9. 主法线与固定方向夹固定角的曲线一定是螺线. ( )

二、单项选择题（每小题4分, 共16分）

1. 设曲面的第一、第二基本形式分别是 $\mathrm{I} = E\,\mathrm{d}u^2 + G\,\mathrm{d}v^2, \mathrm{II} = L\,\mathrm{d}u^2 + N\,\mathrm{d}v^2$, 则曲面的两个主曲率分别是 ( )

(A) $k_1 = \dfrac{L}{E},\quad k_2 = \dfrac{N}{G}$; (B) $k_1 = \dfrac{E}{L},\quad k_2 = \dfrac{G}{N}$;

(C) $k_1 = k_2 = -\dfrac{1}{2\sqrt{G}}\dfrac{\partial \ln E}{\partial v}$; (D) $k_1 = k_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{E}}\dfrac{\partial \ln G}{\partial u}$.

2. 下列曲线中不是正则曲线的是 ( )

(A) $\vec{r}(t) = (t^3, t^2, t),\ t \in \mathbb{R}$; (B) $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t),\ t \in \mathbb{R}$;

(C) $\vec{r}(t) = (t^3, t^2, 0),\ t \in \mathbb{R}$; (D) $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0),\ t \in \mathbb{R}$.

3. 向量函数$\vec{r}(t)$ 具有固定方向的充要条件是 ( )

(A) $\vec{r} \times \vec{r}\,' = 0$; (B) $\vec{r} \cdot \vec{r}\,' = 0$; (C) $\vec{r} \times \vec{r}\,'' = 0$; (D) $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = 0$.

4. 如果曲面上的某曲线的主法线重合于曲面的法线, 则该曲面曲线一定是 ( )

(A) 渐近曲线; (B) 曲率线; (C) 测地线; (D) 法截线.

三、填空题（请在每空中填入最简结果, 每空2分, 共36分）

1. 曲线 $\vec{r}(t) = (\cos t,\ \sin t,\ \sqrt{2}t^2)$ 在点$t = 0$ 处的单位切向量 $\vec{\alpha}(0) =$ ____________, 主法向量$\vec{\beta}(0) =$ ____________, 副法向量$\vec{\gamma}(0) =$ ____________, 密切平面方程为____________, 从切平面方程为____________, 法平面方程为____________, 曲率$k(0) =$ ________, 挠率$\tau(0) =$ ________.

2. 曲面$\vec{r}(u,v)=((u+v)\sin v+\cos v,\ (u+v)\cos v-\sin v,\ u^2+v)$ 在$\vec{r}(0,0)$ 处：第一类基本量$E(0,0)=$____，$F(0,0)=$____，$G(0,0)=$____，第一基本形式$\mathrm{I}(0,0)=$________；第二类基本量$L(0,0)=$____，$M(0,0)=$____，$N(0,0)=$____，第二基本形式$\mathrm{II}(0,0)=$__________；平均曲率$H(0,0)=$____，高斯曲率$K(0,0)=$____.

四、(共10分) 设$x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$ 是u,v,w 的光滑函数，证明 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}w$.

五、(共10分)求单参数曲面族 $x^2+(y-2\alpha)^2+(z-3\alpha)^2=1$ 的包络.

六、(共10分)设曲面的第一基本形式是$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+2\cos\varphi\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+\mathrm{d}v^2$, 其中$\varphi$ 是u,v 的连续可微函数, 计算此曲面的活动标架的相对分量$\omega^1,\omega^2,\omega_1^2$ 和高斯曲率K.

华东理工大学 2013 - 2014 学年第二学期
《微分几何》课程期末考试标准答案 A 2014. 8

一、判断题(每小题2分，共18分)

1. × **2.** × **3.** √ **4.** × **5.** √ **6.** √ **7.** × **8.** √ **9.** √

二、单项选择题（每小题4分，共16分）

1. C **2.** C **3.** B **4.** B

三、填空题（每空2分, 共36分）

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}(0,\ 1,\ 1)$, $\frac{\sqrt{6}}{6}(2,\ -1,\ 1)$, $\frac{\sqrt{3}}{3}(1,\ 1,\ -1)$,

$x+y-z=0$, $2x-y+z=0$, $y+z=0$, $\frac{\sqrt{6}}{2}$, -1.

2. 2, 1, 1, $2\,\mathrm{d}u^2+2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+\mathrm{d}v^2$, 0, -1, -1, $-2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v-\mathrm{d}v^2$, 0, -1.

四、(共10分)设$x=r\sin\varphi\cos\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\varphi$, 将 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 用 $\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta$ 表示出来.

解 $\mathrm{d}x=\sin\varphi\cos\theta\,\mathrm{d}r+r\cos\varphi\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi-r\sin\varphi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$,

$\mathrm{d}y=\sin\varphi\sin\theta\,\mathrm{d}r+r\cos\varphi\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi+r\sin\varphi\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$,

$\mathrm{d}z=\cos\varphi\,\mathrm{d}r-r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$. .... (3分)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=&(\sin\varphi\cos\theta\,\mathrm{d}r+r\cos\varphi\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi-r\sin\varphi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta)\\&\wedge(\sin\varphi\sin\theta\,\mathrm{d}r+r\cos\varphi\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi+r\sin\varphi\cos\theta\,\mathrm{d}\theta)\\&\wedge(\cos\varphi\,\mathrm{d}r-r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi)\end{aligned}$$ .... (3分)

$$=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\end{vmatrix}\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta$$

$=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta$ .... (4分)

五、(共10分)求C^3 类曲线$\vec{r}(u)$ 的切线面$\vec{R}(u,v)=\vec{r}(u)+v\vec{r}\,'(u)$ 上的曲线$u+v=c$ 的法曲

率.

解 $\vec{R}_u(u,v)=\vec{r}'(u)+v\vec{r}''(u),\qquad \vec{R}_v(u,v)=\vec{r}'(u),$ ....(1分)

$E(u,v)=\vec{R}_u^2(u,v)=\vec{r}'^2(u)+2v\vec{r}'(u)\cdot\vec{r}''(u)+v^2\vec{r}''^2(u),$

$F(u,v)=\vec{R}_u(u,v)\cdot\vec{R}_v(u,v)=\vec{r}'^2(u)+v\vec{r}'(u)\cdot\vec{r}''(u),\ G(u,v)=\vec{R}_v^2(u,v)=\vec{r}'^2(u).$ .....(2分)

$\vec{n}(u,v)=\dfrac{\vec{R}_u(u,v)\times\vec{R}_v(u,v)}{|\vec{R}_u(u,v)\times\vec{R}_v(u,v)|}=\dfrac{v\vec{r}''(u)\times\vec{r}'(u)}{|v||\vec{r}''(u)\times\vec{r}'(u)|},$

$\vec{R}_{uu}(u,v)=\vec{r}''(u)+v\vec{r}'''(u),\quad \vec{R}_{uv}(u,v)=\vec{r}''(u),\quad \vec{R}_{vv}(u,v)=\vec{0}.$ ....(2分)

$L(u,v)=\vec{n}(u,v)\cdot\vec{r}_{uu}(u,v)=-\dfrac{|v|(\vec{r}'(u),\vec{r}''(u),\vec{r}'''(u))}{|\vec{r}'(u)\times\vec{r}''(u)|},$

$M(u,v)=\vec{n}(u,v)\cdot\vec{r}_{uv}(u,v)=0,\quad N(u,v)=\vec{n}(u,v)\cdot\vec{r}_{vv}(u,v)=0.$ ....(2分)

在曲线$u+v=c$上有 $\mathrm{d}u+\mathrm{d}v=0$, 因此 $\mathrm{d}u=-\mathrm{d}v$. ....(1分)

法曲率$k_n(u,v)=\dfrac{L(u,v)\,\mathrm{d}u^2+2M(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+N(u,v)\,\mathrm{d}v^2}{E(u,v)\,\mathrm{d}u^2+2F(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+G(u,v)\,\mathrm{d}v^2}=\dfrac{-(\vec{r}'(u),\vec{r}''(u),\vec{r}'''(u))}{|v|\vec{r}''^2(u)|\vec{r}'(u)\times\vec{r}''(u)|}.$ (2分)

六、(共10分)设曲面的第一基本形式是$\mathrm{d}s^2=\dfrac{1}{v^2}(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$, 计算该曲面的活动标架的相对分量$\omega^1,\omega^2,\omega_1^2$和高斯曲率$K$.

解 因为 $\mathrm{d}s^2=\dfrac{1}{v^2}(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)=\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{v}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{v}\right)^2,$

所以$\omega^1=\dfrac{\mathrm{d}u}{v},\quad \omega^2=\dfrac{\mathrm{d}v}{v}.$ ....(4分)

$\omega^1\wedge\omega^2=\dfrac{1}{v^2}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v,\quad \mathrm{d}\omega^1=\dfrac{1}{v^2}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v,\quad \mathrm{d}\omega^2=0.$

$\omega_1^2=\dfrac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2}\omega^1+\dfrac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1\wedge\omega^2}\omega^2=\dfrac{\mathrm{d}u}{v}.$ ....(3分)

$\mathrm{d}\omega_1^2=\dfrac{1}{v^2}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v,\quad K=-\dfrac{\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}=-1.$ ....(3分)

华东理工大学 2013 - 2014 学年第二学期
《微分几何》课程期末考试标准答案 B 2014. 6

一、判断题(每小题2分，共18分)

1. × **2.** √ **3.** √ **4.** × **5.** √ **6.** √ **7.** √ **8.** × **9.** ×

二、单项选择题（每小题4分，共16分）

1. A **2.** C **3.** A **4.** C

三、填空题（每空2分, 共36分）

1. $(0,\ 1,\ 0)$, $(-\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{2\sqrt{2}}{3})$, $(\frac{2\sqrt{2}}{3},\ 0,\ \frac{1}{3})$,

$2\sqrt{2}x + z - 2\sqrt{2} = 0$, $x - 2\sqrt{2}z - 1 = 0$, $y = 0$, 3, 0.

2. 1, 0, 1, $\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2$, 0, 1, 1, $2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \mathrm{d}v^2$, $\frac{1}{2}$, -1.

四、(共10分) 设$x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ 是u,v,w 的光滑函数, 证明 $\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\mathrm{d}u\wedge \mathrm{d}v\wedge \mathrm{d}w$.

证 $\mathrm{d}x = x_u\,\mathrm{d}u + x_v\,\mathrm{d}v + x_w\,\mathrm{d}w$, $\mathrm{d}y = y_u\,\mathrm{d}u + y_v\,\mathrm{d}v + y_w\,\mathrm{d}w$, $\mathrm{d}z = z_u\,\mathrm{d}u + z_v\,\mathrm{d}v + z_w\,\mathrm{d}w$, (2分)

$\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z$

$= (x_u\,\mathrm{d}u + x_v\,\mathrm{d}v + x_w\,\mathrm{d}w)\wedge(y_u\,\mathrm{d}u + y_v\,\mathrm{d}v + y_w\,\mathrm{d}w)\wedge(z_u\,\mathrm{d}u + z_v\,\mathrm{d}v + z_w\,\mathrm{d}w)$ . . . . (2分)

$= [(x_uy_v - x_vy_u)\,\mathrm{d}u\wedge \mathrm{d}v + (x_wy_v - x_vy_w)\,\mathrm{d}v\wedge \mathrm{d}w + (x_wy_u - x_uy_w)\,\mathrm{d}w\wedge \mathrm{d}u]\wedge(z_u\,\mathrm{d}u + z_v\,\mathrm{d}v + z_w\,\mathrm{d}w)$

$= [(x_uy_v - x_vy_u)z_w - (x_wy_v - x_vy_w)z_u + (x_wy_u - x_uy_w)z_v]\,\mathrm{d}u\wedge \mathrm{d}v\wedge \mathrm{d}w$ . . . . (4分)

$= \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & zx_w \end{vmatrix}\mathrm{d}u\wedge \mathrm{d}v\wedge \mathrm{d}w = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\mathrm{d}u\wedge \mathrm{d}v\wedge \mathrm{d}w$ . . . . (2分)

五、(共10分)求单参数曲面族 $x^2 + (y-2\alpha)^2 + (z-3\alpha)^2 = 0$ 的包络.

解 曲面族为$x^2 + (y-2\alpha)^2 + (z-3\alpha)^2 = 0$ . . . . (1)

将上式两边关于α 求导得$2(y-2\alpha)(-2) + 2(z-3\alpha)(-3) = 0$, 即$2y + 3z - 13\alpha = 0$ (2) (4分)

由(2)得$\alpha = (2y+3z)/13$, ... (2分)

代入(1)得到所求包络为$x^2+[y-2(2y+3z)/13]^2+[z-3(2y+3z)/13]^2=0$, ...(2分)

即$\begin{cases} x=0 \\ 3y=2z \end{cases}$..(2分)

(或) 五、(共10分)求单参数曲面族 $x^2+(y-2\alpha)^2+(z-3\alpha)^2=1$ 的包络.

解　曲面族为$x^2+(y-2\alpha)^2+(z-3\alpha)^2=1$ ....(1)

将上式两边关于α求导得$2(y-2\alpha)(-2)+2(z-3\alpha)(-3)=0$, 即$2y+3z-13\alpha=1$ (2) (4分)

由(2)得$\alpha=(2y+3z)/13$, ...(2分)

代入(1)得到所求包络为$x^2+[y-2(2y+3z)/13]^2+[z-3(2y+3z)/13]^2=0$, ...(2分)

即$13x^2+(3y-2z)^2=13$. ....(2分)

六、(共10分)设曲面的第一基本形式是$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+2\cos\varphi\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+\mathrm{d}v^2$, 其中$\varphi$是$u,v$的连续可微函数, 计算此曲面的活动标架的相对分量$\omega^1,\omega^2,\omega_1^2$和高斯曲率$K$.

解 因为$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+2\cos\varphi\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+\mathrm{d}v^2=(\mathrm{d}u+\cos\varphi\,\mathrm{d}v)^2+(\sin\varphi\,\mathrm{d}v)^2$,

所以$\omega^1=\mathrm{d}u+\cos\varphi\,\mathrm{d}v$,　$\omega^2=\sin\varphi\,\mathrm{d}v$. ....(4分)

$\omega^1\wedge\omega^2=\sin\varphi\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$,　$\mathrm{d}\omega^1=-\varphi_u\sin\varphi\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$,　$\mathrm{d}\omega^2=\varphi_u\cos\varphi\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$.

$\omega_1^2=\dfrac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2}\omega^1+\dfrac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1\wedge\omega^2}\omega^2=-\varphi_u\,\mathrm{d}u$. ....(3分)

$\mathrm{d}\omega_1^2=\varphi_{uv}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$,　$K=-\dfrac{\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}=-\dfrac{\varphi_{uv}}{\sin\varphi}$. ....(3分)

华东理工大学 2014 - 2015 学年第二学期
《微分几何》课程期末考试试卷 A 2015. 7. 8

开课学院: 理学院, 专业: 数、信计, 考试形式: 闭卷, 所需时间 120 分钟

考生姓名: ____________ 学号: ____________ 班级: ____________ 任课教师: 杨勤民

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得分									
评卷人									

一、(共15分) 求曲线 $\vec{r}(t) = (2t,\ t^2+t,\ t^3+3t^2)$ 在 $t=0$ 处的三个基本向量，密切平面方程, 从切平面方程, 法平面方程, 曲率和挠率.

二、(共16分) 求曲面 $\vec{r}(u,v) = (v\cos u,\ v\sin u,\ u+v)$ 在 $\vec{r}(0,0)$ 处的第一基本形式, 第二基本形式, 平均曲率和高斯曲率.

三、(共22分) 已知曲面的第一基本形式为 $\mathrm{I} = \cos^2 u\,(\mathrm{d}u)^2 + \sin^2 v\,(\mathrm{d}v)^2$, 它上面的三条曲面曲线 $u+v=0, u-v=0$ 和 $v=1$ 围成一个曲边三角形, 求

(1) 该曲边三角形所围曲面域的面积;

(2) 该曲边三角形的三个内角;

(3) 该曲边三角形的三条曲边的长度.

四、(共12分) 设 $\varphi = yz\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}z,\ \xi = \sin z\,\mathrm{d}x + \cos z\,\mathrm{d}y,\ \eta = \mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$, 计算

(1) $\varphi\wedge\xi,\ \xi\wedge\eta,\ \eta\wedge\varphi$;

(2) $\mathrm{d}\varphi,\ \mathrm{d}\xi,\ \mathrm{d}\eta$.

五、(共10分) 设曲面的第一基本形式是 $\mathrm{I} = (u+\sin v)[(\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}v)^2]$, 计算该曲面的活动标架的相对分量 $\omega^1, \omega^2, \omega_1^2$ 和高斯曲率 K.

六、(共10分)判断曲面 $\vec{r}(u,v) = (u+v,\ u-v,\ 2uv)$ 是不是可展曲面, 并给出理由.

七、(共10分)设曲面 S 上的高斯曲率处处为负, 证明曲面 S 上不存在围成单连通区域的光滑的闭测地线.

八、(共5分)高斯绝妙定理是什么？为什么说它是微分几何发展史上的一个里程碑？

华东理工大学 2014 - 2015 学年第二学期
《微分几何》课程期末考试试卷 B 2015. 7. 8

开课学院: 理学院, 专业: 数、信计, 考试形式: 闭卷, 所需时间 120 分钟

考生姓名: ______ 学号: ______ 班级: ______ 任课教师: 杨勤民

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得分									
评卷人									

一、(共15分) 求曲线 $\vec{r}(t)=(3t,\,t^2+t,\,t^3+2t^2)$ 在 $t=0$ 处的三个基本向量，密切平面方程, 从切平面方程, 法平面方程, 曲率和挠率.

二、(共16分) 求曲面 $\vec{r}(u,v)=(v\cos u,\,v\sin u,\,u-v)$ 在 $\vec{r}(0,0)$ 处的第一基本形式, 第二基本形式, 平均曲率和高斯曲率.

三、(共22分) 已知曲面的第一基本形式为 $\mathrm{I}=\cos^2 u\,(\mathrm{d}u)^2+\sin^2 v\,(\mathrm{d}v)^2$, 它上面的三条曲面曲线 $u+v=0, u-v=0$ 和 $u=1$ 围成一个曲边三角形, 求

(1) 该曲边三角形所围曲面域的面积;

(2) 该曲边三角形的三个内角;

(3) 该曲边三角形的三条曲边的长度.

四、(共12分) 设 f 和 g 是两个光滑函数, d 为外微分算子, 计算

(1) $\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}g+g\,\mathrm{d}f)$; (2) $\mathrm{d}[(f-g)(\mathrm{d}f+\mathrm{d}g)]$;

(3) $\mathrm{d}[(f\,\mathrm{d}g)\wedge(g\,\mathrm{d}f)]$; (4) $\mathrm{d}(g\,\mathrm{d}f)+\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}g)$.

五、(共10分) 设曲面的第一基本形式是 $\mathrm{I}=\dfrac{(\mathrm{d}u)^2-4v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+4u(\mathrm{d}v)^2}{4(u-v^2)}$ (其中 $u>v^2$), 计算该曲面的活动标架的相对分量 $\omega^1, \omega^2, \omega_1^2$ 和高斯曲率 K.

六、(共10分)判断曲面 $xy=(z-1)^2$ 是不是可展曲面, 并给出理由.

七、(共10分)求圆柱面 $\vec{r}(u,v)=(\cos u,\,\sin u,\,v)$ 上的测地线.

八、(共5分)活动标架法的基本思想和步骤是什么？

华东理工大学 2014 - 2015 学年第二学期

《微分几何》课程期末考试标准答案 A 2015. 7

一、解. (1) $\vec{r}\,'(t) = (2,\ 2t+1,\ 3t^2+6t)$, $\vec{r}\,'(0) = (2,\ 1,\ 0)$, $|\vec{r}\,'(0)| = \sqrt{5}$,

$\vec{\alpha}(0) = \dfrac{\vec{r}(0)}{|\vec{r}\,'(0)|} = (2,\ 1,\ 0)/\sqrt{5} = (\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \frac{\sqrt{5}}{5},\ 0)$; ....(2分)

$\vec{r}\,''(t) = (0,\ 2,\ 6t+6)$, $\vec{r}\,''(0) = (0,\ 2,\ 6)$, $\vec{r}\,'(0)\times\vec{r}\,''(0) = (6,\ -12,\ 4)$,

$|\vec{r}\,'(0)\times\vec{r}\,''(0)| = 14$, $\vec{\gamma}(0) = \dfrac{\vec{r}\,'(0)\times\vec{r}\,''(0)}{|\vec{r}\,'(0)\times\vec{r}\,''(0)|} = (3,\ -6,\ 2)/7 = (\frac{3}{7},\ -\frac{6}{7},\ \frac{2}{7})$; ......(2分)

$\vec{\beta}(0) = \vec{\gamma}(0)\times\vec{\alpha}(0) = (-2,\ 4,\ 15)/(7\sqrt{5}) = (-\frac{2\sqrt{5}}{35},\ \frac{4\sqrt{5}}{35},\ \frac{3\sqrt{5}}{7})$. ....(2 分)

(2) $\vec{r}(0) = (0,\ 0,\ 0)$

密切平面为$\vec{\gamma}(0)\cdot[\vec{P}-\vec{r}(0)] = 0$, 即$(\frac{3}{7},\ -\frac{6}{7},\ \frac{2}{7})\cdot(x-0,\ y-0,\ z-0) = 0$,

化简得: $3x-6y+2z = 0$; ....(1分)

从切平面为$\vec{\beta}(0)\cdot[\vec{P}-\vec{r}(0)] = 0$, 即$(-\frac{2\sqrt{5}}{35},\ \frac{4\sqrt{5}}{35},\ \frac{3\sqrt{5}}{7})\cdot(x-0,\ y-0,\ z-0) = 0$,

化简得: $2x-4y-15z = 0$; ....(1分)

法平面为$\vec{r}\,'(0)\cdot[\vec{P}-\vec{r}(0)] = 0$, 即$(2,\ 1,\ 0)\cdot(x-0,\ y-0,\ z-0) = 0$,

化简得: $2x+y = 0$. ....(1分)

(3) 曲率$k(0) = \dfrac{|\vec{r}\,'(0)\times\vec{r}\,''(0)|}{|\vec{r}\,'(0)|^3} = \dfrac{14}{5\sqrt{5}} = \dfrac{14\sqrt{5}}{25}$. ....(3分)

(4) $\vec{r}\,'''(t) = (0,\ 0,\ 6)$, ...(1分)

$(\vec{r}\,'(0),\ \vec{r}\,''(0),\ \vec{r}\,'''(0)) = (\vec{r}\,'(0)\times\vec{r}\,''(0))\cdot\vec{r}\,'''(0) = 24$,

挠率$\tau(0) = \dfrac{(\vec{r}\,'(0),\ \vec{r}\,''(0),\ \vec{r}\,'''(0))}{|\vec{r}\,'(0)\times\vec{r}\,''(0)|^2} = \dfrac{6}{49}$. ....(2分)

二、解. (1) $\vec{r}_u(u,v) = (-v\sin u,\ v\cos u,\ 1)$, $\vec{r}_u(0,0) = (0,\ 0,\ 1)$, ...(1分)

$\vec{r}_v(u,v) = (\cos u,\ \sin u,\ 1)$, $\vec{r}_v(0,0) = (1,\ 0,\ 1)$, ...(1分)

$E(0,0) = \vec{r}_u^{\,2}(0,0) = 1$, ...(1分)

$F(0,0) = \vec{r}_u(0,0)\cdot\vec{r}_v(0,0) = 1$, ...(1分)

$G(0,0) = \vec{r}_v^{\,2}(0,0) = 2$, ...(1分)

$\mathrm{I} = E(0,0)(\mathrm{d}u)^2 + 2F(0,0)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G(0,0)(\mathrm{d}v)^2 = (\mathrm{d}u)^2 + 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + 2(\mathrm{d}v)^2$. ....(1分)

(2) $\vec{r}_{uu}(u,v)=(-v\cos u,\ -v\sin u,\ 0)$, $\vec{r}_{uu}(0,0)=(0,\ 0,\ 0)$,

$\vec{r}_{uv}(u,v)=(-\sin u,\ \cos u,\ 0)$, $\vec{r}_{uv}(0,0)=(0,\ 1,\ 0)$,

$\vec{r}_{vv}(u,v)=(0,\ 0,0)$, ... (1分)

$\vec{r}_u(0,0)\times\vec{r}_v(0,0)=(0,1,0)$, $|\vec{r}_u(0,0)\times\vec{r}_v(0,0)|=1$,

$\vec{n}(0,0)=\vec{r}_u(0,0)\times\vec{r}_v(0,0)/|\vec{r}_u(0,0)\times\vec{r}_v(0,0)|=(0,1,0)$, ... (1分)

$L(0,0)=\vec{r}_{uu}(0,0)\cdot\vec{n}(0,0)=0$, ... (1分)

$M(0,0)=\vec{r}_{uv}(0,0)\cdot\vec{n}(0,0)=1$, ... (1分)

$N(0,0)=\vec{r}_{vv}(0,0)\cdot\vec{n}(0,0)=0$, ... (1分)

$\mathrm{II}=L(0,0)(\mathrm{d}u)^2+2M(0,0)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+N(0,0)(\mathrm{d}v)^2=2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$. .... (1分)

(3) $H(0,0)=\left.\dfrac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}\right|_{(0,0)}=\dfrac{0-2\times1\times1+0}{2(1\times2-1^2)}=-1$. .... (2分)

$K(0,0)=\left.\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}\right|_{(0,0)}=\dfrac{0-1^2}{1\times2-1^2}=-1$. .... (2分)

三、解. $E(u,v)=\cos^2u$, $F(u,v)=0$, $G(u,v)=\sin^2v$,

$u+v=0$与$u-v=0$相交于点$A=(0,0)$处, $u-v=0$与$v=1$相交于点$B=(1,1)$处,

$u+v=0$与$v=1$相交于点$C=(-1,1)$处. .... (1分)

(1) 这三条曲线在参数平面中所围的区域D可用不等式表示为$\begin{cases}-v\le u\le v\\ 0\le v\le 1\end{cases}$, ... (1分)

所求曲面域的面积为

$\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint\limits_D\sqrt{\cos^2u\sin^2v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint\limits_D\cos u\sin v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ .... (1分)

$=\int_0^1\sin v\,\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}\cos u\,\mathrm{d}u=2\int_0^1\sin^2v\,\mathrm{d}v=\int_0^1(1-\cos2v)\,\mathrm{d}v=1-\frac{1}{2}\sin2$. .... (1分)

(2) 在点$A(0,0)$处, $E(0,0)=1$, $F(0,0)=0$, $G(0,0)=0$,

由$u-v=0$得到沿着有向弧AB的切方向为$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)=(1:1)$,

由$u+v=0$得到沿着有向弧AC的切方向为$(\delta u:\delta v)=(-1:1)$, ... (1分)

$\angle A=\arccos\left.\dfrac{E\,\mathrm{d}u\,\delta u+F(\mathrm{d}u\,\delta v+\mathrm{d}v\,\delta u)+G\,\mathrm{d}v\,\delta v}{\sqrt{E(\mathrm{d}u)^2+2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+G(\mathrm{d}v)^2}\sqrt{E(\delta u)^2+2F\,\delta u\,\delta v+G(\delta v)^2}}\right|_{(0,0)}$ .... (1分)

$$= \arccos \frac{1 \times 1 \times (-1)}{\sqrt{1 \times 1^2}\sqrt{1 \times (-1)^2}} = \arccos(-1) = \pi;$$ ……(1分)

在点$B(1,1)$处, $E(1,1) = \cos^2 1, \quad F(1,1) = 0, \quad G(1,1) = \sin^2 1,$

由$u - v = 0$得到沿着有向弧BA的切方向为$(\mathrm{d}u{:}\,\mathrm{d}v) = (-1{:}-1),$

由$v = 1$得到沿着有向弧BC的切方向为$(\delta u{:}\,\delta v) = (-1{:}0),$ ……(1分)

$$\angle B = \arccos \left.\frac{E\,\mathrm{d}u\,\delta u + F(\mathrm{d}u\,\delta v + \mathrm{d}v\,\delta u) + G\,\mathrm{d}v\,\delta v}{\sqrt{E(\mathrm{d}u)^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G(\mathrm{d}v)^2}\sqrt{E(\delta u)^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G(\delta v)^2}}\right|_{(1,1)}$$ ……(1分)

$$= \arccos \frac{\cos^2 1 \times (-1) \times (-1)}{\sqrt{\cos^2 1 \times (-1)^2 + \sin^2 1 \times (-1)^2}\sqrt{\cos^2 1 \times (-1)^2}} = 1;$$ ……(1分)

在点$C(-1,1)$处, $E(-1,1) = \cos^2 1, \quad F(-1,1) = 0, \quad G(-1,1) = \sin^2 1,$

由$u + v = 0$得到沿着有向弧CA的切方向为$(\mathrm{d}u{:}\,\mathrm{d}v) = (1{:}-1),$

由$v = 1$得到沿着有向弧CB的切方向为$(\delta u{:}\,\delta v) = (1{:}0),$ ……(1分)

$$\angle C = \arccos \left.\frac{E\,\mathrm{d}u\,\delta u + F(\mathrm{d}u\,\delta v + \mathrm{d}v\,\delta u) + G\,\mathrm{d}v\,\delta v}{\sqrt{E(\mathrm{d}u)^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G(\mathrm{d}v)^2}\sqrt{E(\delta u)^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G(\delta v)^2}}\right|_{(-1,1)}$$ ……(1分)

$$= \arccos \frac{\cos^2 1 \times 1 \times 1}{\sqrt{\cos^2 1 \times 1^2 + \sin^2 1 \times (-1)^2}\sqrt{\cos^2 1 \times 1^2}} = 1.$$ ……(1分)

(3) 在曲边AB上, $u - v = 0,\ v = u,\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}u,\ u \in [0,1],$ ……(1 分)

$(\mathrm{d}s)^2 = \cos^2 u(\mathrm{d}u)^2 + \sin^2 u(\mathrm{d}u)^2 = (\mathrm{d}u)^2$, 曲边长度为$\int_0^1 \sqrt{(\mathrm{d}u)^2} = \int_0^1 \mathrm{d}u = 1;$ ……(2分)

在曲边BC上, $v = 1,\ \mathrm{d}v = 0,\ u \in [-1,1],$ ……(1分)

$(\mathrm{d}s)^2 = \cos^2 u(\mathrm{d}u)^2$, 曲边长度为$\int_{-1}^1 \sqrt{\cos^2 u(\mathrm{d}u)^2} = 2\sin 1;$ ……(2 分)

在曲边CA上, $u + v = 0,\ v = -u,\ \mathrm{d}v = -\mathrm{d}u,\ u \in [-1,0],$ ……(1分)

$(\mathrm{d}s)^2 = \cos^2 u(\mathrm{d}u)^2 + \sin^2(-u)(-\mathrm{d}u)^2 = (\mathrm{d}u)^2$, 曲边长度为$\int_{-1}^0 \sqrt{(\mathrm{d}u)^2} = 1.$ ……(2分)

四、解. (1) $\varphi \wedge \xi = (yz\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}z)\wedge(\sin z\,\mathrm{d}x + \cos z\,\mathrm{d}y)$

$= -\cos z\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \sin z\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + yz\cos z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y;$ ……(2分)

$\xi\wedge\eta = (\sin z\,\mathrm{d}x + \cos z\,\mathrm{d}y)\wedge(\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z) = z\cos z\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - z\sin z\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \sin z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y;$ ..(2分)

$\eta\wedge\varphi = (\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z)\wedge(yz\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}z) = \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + yz^2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x - yz\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$ ……(2分)

(2) $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}(yz\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}z) = \mathrm{d}(yz)\wedge\mathrm{d}x + \mathrm{d}(\mathrm{d}z) = (z\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z)\wedge\mathrm{d}x + 0 = y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x - z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y;$ (2分)

$\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}(\sin z\,\mathrm{d}x + \cos z\,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}\sin z\wedge\mathrm{d}x + \mathrm{d}\cos z\wedge\mathrm{d}y = \sin z\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \cos z\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$; ....(2分)

$\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}(\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z) = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) + \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z = 0$. ....(2分)

五、解. 因为 $\mathrm{I} = (u+\sin v)[(\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}v)^2] = (\sqrt{u+\sin v}\,\mathrm{d}u)^2 + (\sqrt{u+\sin v}\,\mathrm{d}v)^2$,

所以$\omega^1 = \sqrt{u+\sin v}\,\mathrm{d}u$, $\omega^2 = \sqrt{u+\sin v}\,\mathrm{d}v$; ....(4分)

$\omega^1\wedge\omega^2 = (u+\sin v)\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}\omega^1 = -\dfrac{\cos v}{2\sqrt{u+\sin v}}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}\omega^2 = \dfrac{1}{2\sqrt{u+\sin v}}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$;

$\omega_1^2 = \dfrac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2}\omega^1 + \dfrac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1\wedge\omega^2}\omega^2 = -\dfrac{\cos v}{2(u+\sin v)}\mathrm{d}u + \dfrac{1}{2(u+\sin v)}\mathrm{d}v$, ...(3 分)

$\mathrm{d}\omega_1^2 = -\dfrac{u\sin v+2}{2(u+\sin v)^2}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$, $K = -\dfrac{\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2} = \dfrac{u\sin v+2}{2(u+\sin v)^3}$. ....(3分)

六、解. 该曲面方程可化为$x^2 - y^2 = 2z$, ...(5分)

可见该曲面为双曲抛物面(马鞍面), 故不为可展曲面. ....(5分)

另外得出$LN - M^2 = -\dfrac{4}{2u^2+2v^2+1} \neq 0$ 或 $K = -\dfrac{1}{(2u^2+2v^2+1)^2} \neq 0$也可.

七、证. (反证法) 若存在所述闭测地线, 设它所围成的曲面部分为G, 则有高斯-波涅公式$\iint_G K\,\mathrm{d}\sigma + \oint_{\partial G} k_g\,\mathrm{d}s = 2\pi$, 其中$K$为曲面的高斯曲率, ∂G为G的正向边界曲线, k_g为测地曲率. ....(3分)

高斯曲率$K < 0$, 所以$\iint_G K\,\mathrm{d}\sigma \leq 0$. ....(2分)

又∂G为测地线, 所以$k_g = 0$, ...(2分)

代入上述公式得$2\pi \leq 0$. 最后一式显然不可能成立, 故曲面S上不存在围成单连通区域的光滑的闭测地线. ....(3分)

八、解. 高斯绝妙定理是说曲面的高斯曲率是曲面的内蕴量. ....(2分)

该定理说明曲面的度量本身蕴含着一定的弯曲性质, 并由此产生了曲面的内蕴几何学. 黎曼将这个定理推广到高维内蕴几何学, 形成黎曼几何. 因此高斯绝妙定理是微分几何发展史上的一个里程碑. ....(3分)

华东理工大学 2014 - 2015 学年第二学期
《微分几何》课程期末考试标准答案 B 2015. 8

一、解. (1) $\vec{r}'(t) = (3,\ 2t+1,\ 3t^2+4t)$, $\quad \vec{r}'(0) = (3,\ 1,\ 0)$, $\quad |\vec{r}'(0)| = \sqrt{10}$,

$\vec{\alpha}(0) = \dfrac{\vec{r}(0)}{|\vec{r}'(0)|} = (3,\ 1,\ 0)/\sqrt{10} = (\frac{3\sqrt{10}}{10},\ \frac{\sqrt{10}}{10},\ 0)$; ....(2分)

$\vec{r}''(t) = (0,\ 2,\ 6t+4)$, $\quad \vec{r}''(0) = (0,\ 2,\ 4)$, $\quad \vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0) = (4,\ -12,\ 6)$,

$|\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)| = 14$, $\quad \vec{\gamma}(0) = \dfrac{\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)}{|\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)|} = (2,\ -6,\ 3)/7 = (\frac{2}{7},\ -\frac{6}{7},\ \frac{3}{7})$; .....(2分)

$\vec{\beta}(0) = \vec{\gamma}(0)\times\vec{\alpha}(0) = (-3,\ 9,\ 20)/(7\sqrt{10}) = (-\frac{3\sqrt{10}}{70},\ \frac{9\sqrt{10}}{70},\ \frac{2\sqrt{10}}{7})$. ....(2分)

(2) $\vec{r}(0) = (0,\ 0,\ 0)$

密切平面为$\vec{\gamma}(0)\cdot[\vec{P}-\vec{r}(0)] = 0$, 即$(\frac{2}{7},\ -\frac{6}{7},\ \frac{3}{7})\cdot(x-0,\ y-0,\ z-0) = 0$,

化简得: $2x-6y+3z = 0$; ....(1分)

从切平面为$\vec{\beta}(0)\cdot[\vec{P}-\vec{r}(0)] = 0$, 即$(-\frac{3\sqrt{10}}{70},\ \frac{9\sqrt{10}}{70},\ \frac{2\sqrt{10}}{7})\cdot(x-0,\ y-0,\ z-0) = 0$,

化简得: $3x-9y-20z = 0$; ....(1分)

法平面为$\vec{r}'(0)\cdot[\vec{P}-\vec{r}(0)] = 0$, 即$(3,\ 1,\ 0)\cdot(x-0,\ y-0,\ z-0) = 0$,

化简得: $3x+y = 0$. ....(1分)

(3) 曲率$k(0) = \dfrac{|\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)|}{|\vec{r}'(0)|^3} = \dfrac{7}{5\sqrt{10}} = \dfrac{7\sqrt{10}}{50}$. ....(3分)

(4) $\vec{r}'''(t) = (0,\ 0,\ 6)$, ...(1分)

$(\vec{r}'(0),\ \vec{r}''(0),\ \vec{r}'''(0)) = (\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0))\cdot\vec{r}'''(0) = 36$,

挠率$\tau(0) = \dfrac{(\vec{r}'(0),\ \vec{r}''(0),\ \vec{r}'''(0))}{|\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)|^2} = \dfrac{9}{49}$. ....(2分)

二、解. (1) $\vec{r}_u(u,v) = (-v\sin u,\ v\cos u,\ 1)$, $\quad \vec{r}_u(0,0) = (0,\ 0,\ 1)$, ...(1分)

$\vec{r}_v(u,v) = (\cos u,\ \sin u,\ -1)$, $\quad \vec{r}_v(0,0) = (1,\ 0,\ -1)$, ...(1分)

$E(0,0) = \vec{r}_u^2(0,0) = 1$, ...(1分)

$F(0,0) = \vec{r}_u(0,0)\cdot\vec{r}_v(0,0) = -1$, ...(1分)

$G(0,0) = \vec{r}_v^2(0,0) = 2$, ...(1分)

$\mathrm{I} = E(0,0)(\mathrm{d}u)^2 + 2F(0,0)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G(0,0)(\mathrm{d}v)^2 = (\mathrm{d}u)^2 - 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + 2(\mathrm{d}v)^2$. ....(1分)

(2) $\vec{r}_{uu}(u,v)=(-v\cos u,\ -v\sin u,\ 0)$, $\vec{r}_{uu}(0,0)=(0,\ 0,\ 0)$,

$\vec{r}_{uv}(u,v)=(-\sin u,\ \cos u,\ 0)$, $\vec{r}_{uv}(0,0)=(0,\ 1,\ 0)$,

$\vec{r}_{vv}(u,v)=(0,\ 0,0)$, ... (1分)

$\vec{r}_u(0,0)\times\vec{r}_v(0,0)=(0,1,0)$, $|\vec{r}_u(0,0)\times\vec{r}_v(0,0)|=1$,

$\vec{n}(0,0)=\vec{r}_u(0,0)\times\vec{r}_v(0,0)/|\vec{r}_u(0,0)\times\vec{r}_v(0,0)|=(0,1,0)$, ... (1分)

$L(0,0)=\vec{r}_{uu}(0,0)\cdot\vec{n}(0,0)=0$, ... (1分)

$M(0,0)=\vec{r}_{uv}(0,0)\cdot\vec{n}(0,0)=1$, ... (1分)

$N(0,0)=\vec{r}_{vv}(0,0)\cdot\vec{n}(0,0)=0$, ... (1分)

$\mathrm{II}=L(0,0)(\mathrm{d}u)^2+2M(0,0)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+N(0,0)(\mathrm{d}v)^2=2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$. .... (1分)

(3) $H(0,0)=\left.\dfrac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}\right|_{(0,0)}=\dfrac{0-2\times1\times(-1)+0}{2(1\times2-(-1)^2)}=1$. .... (2分)

$K(0,0)=\left.\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}\right|_{(0,0)}=\dfrac{0-1^2}{1\times2-(-1)^2}=-1$. .... (2分)

三、解. $E(u,v)=\cos^2 u$, $F(u,v)=0$, $G(u,v)=\sin^2 v$,

$u+v=0$与$u-v=0$相交于点$A=(0,0)$处, $u-v=0$与$u=1$相交于点$B=(1,1)$处,

$u+v=0$与$u=1$相交于点$C=(1,-1)$处. .... (1分)

(1) 这三条曲线在参数平面中所围的区域D可用不等式表示为$\begin{cases}-u\le v\le u\\ 0\le u\le 1\end{cases}$, ... (1分)

所求曲面域的面积为

$\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint\limits_D\sqrt{\cos^2 u\sin^2 v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint\limits_D\cos u|\sin v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ .... (1分)

$=\int_0^1\cos u\,\mathrm{d}u\int_{-u}^u|\sin v|\,\mathrm{d}v=2\int_0^1\cos u\,\mathrm{d}u\int_0^u\sin v\,\mathrm{d}v=2\int_0^1\cos u\,(1-\cos u)\,\mathrm{d}u$

$=2\sin1-1-\frac{1}{2}\sin2=2\sin1-1-\sin1\cos1$. .... (1分)

(2) 在点$A(0,0)$处, $E(0,0)=1$, $F(0,0)=0$, $G(0,0)=0$,

由$u-v=0$得到沿着有向弧AB的切方向为$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)=(1:1)$,

由$u+v=0$得到沿着有向弧AC的切方向为$(\delta u:\delta v)=(1:-1)$, ... (1分)

$\angle A=\arccos\left.\dfrac{E\,\mathrm{d}u\,\delta u+F(\mathrm{d}u\,\delta v+\mathrm{d}v\,\delta u)+G\,\mathrm{d}v\,\delta v}{\sqrt{E(\mathrm{d}u)^2+2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+G(\mathrm{d}v)^2}\sqrt{E(\delta u)^2+2F\,\delta u\,\delta v+G(\delta v)^2}}\right|_{(0,0)}$ .... (1分)

$$= \arccos \frac{1\times 1\times 1}{\sqrt{1\times 1^2}\sqrt{1\times 1^2}} = \arccos 1 = 0;$$ ……(1分)

在点$B(1,1)$处，　$E(1,1)=\cos^2 1$,　$F(1,1)=0$,　$G(1,1)=\sin^2 1$,

由$u-v=0$得到沿着有向弧BA的切方向为$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)=(-1:-1)$,

由$u=1$得到沿着有向弧BC的切方向为$(\delta u:\delta v)=(0:-1)$, ……(1分)

$$\angle B = \arccos \left.\frac{E\,\mathrm{d}u\,\delta u + F(\mathrm{d}u\,\delta v + \mathrm{d}v\,\delta u) + G\,\mathrm{d}v\,\delta v}{\sqrt{E(\mathrm{d}u)^2+2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+G(\mathrm{d}v)^2}\sqrt{E(\delta u)^2+2F\,\delta u\,\delta v+G(\delta v)^2}}\right|_{(1,1)}$$ ……(1分)

$$= \arccos \frac{\sin^2 1\times(-1)\times(-1)}{\sqrt{\cos^2 1\times(-1)^2+\sin^2 1\times(-1)^2}\sqrt{\sin^2 1\times(-1)^2}} = \arccos\sin 1 = \frac{\pi}{2}-1;$$ ……(1分)

在点$C(1,-1)$处，　$E(1,-1)=\cos^2 1$,　$F(1,-1)=0$,　$G(1,-1)=\sin^2 1$,

由$u+v=0$得到沿着有向弧CA的切方向为$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)=(-1:1)$,

由$u=1$得到沿着有向弧CB的切方向为$(\delta u:\delta v)=(0:1)$, ……(1分)

$$\angle C = \arccos \left.\frac{E\,\mathrm{d}u\,\delta u + F(\mathrm{d}u\,\delta v + \mathrm{d}v\,\delta u) + G\,\mathrm{d}v\,\delta v}{\sqrt{E(\mathrm{d}u)^2+2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+G(\mathrm{d}v)^2}\sqrt{E(\delta u)^2+2F\,\delta u\,\delta v+G(\delta v)^2}}\right|_{(-1,1)}$$ ……(1分)

$$= \arccos \frac{\sin^2 1\times 1\times 1}{\sqrt{\cos^2 1\times(-1)^2+\sin^2 1\times 1^2}\sqrt{\sin^2 1\times 1^2}} = \arccos\sin 1 = \frac{\pi}{2}-1.$$ ……(1分)

(3) 在曲边AB上, $u-v=0$, $v=u$, $\mathrm{d}v=\mathrm{d}u$, $u\in[0,1]$, ……(1 分)

$(\mathrm{d}s)^2=\cos^2 u(\mathrm{d}u)^2+\sin^2 u(\mathrm{d}u)^2=(\mathrm{d}u)^2$, 曲边长度为$\int_0^1\sqrt{(\mathrm{d}u)^2}=\int_0^1 \mathrm{d}u=1$; ……(2分)

在曲边BC上, $u=1$, $\mathrm{d}u=0$, $v\in[-1,1]$, ……(1分)

$(\mathrm{d}s)^2=\sin^2 v(\mathrm{d}v)^2$, 曲边长度为$\int_{-1}^1\sqrt{\sin^2 v(\mathrm{d}v)^2}=2\int_0^1\sin v\mathrm{d}v=2-2\cos 1$; ……(2分)

在曲边CA上, $u+v=0$, $v=-u$, $\mathrm{d}v=-\mathrm{d}u$, $u\in[0,1]$, ……(1分)

$(\mathrm{d}s)^2=\cos^2 u(\mathrm{d}u)^2+\sin^2(-u)(-\mathrm{d}u)^2=(\mathrm{d}u)^2$, 曲边长度为$\int_0^1\sqrt{(\mathrm{d}u)^2}=1$. ……(2分)

四、解. (1) $\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}g+g\,\mathrm{d}f)=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}g+\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}f=0$; ……(3分)

(2) $\mathrm{d}[(f-g)(\mathrm{d}f+\mathrm{d}g)]=(\mathrm{d}f-\mathrm{d}g)\wedge(\mathrm{d}f+\mathrm{d}g)$

$=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}f+\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}g-\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}f-\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}g=2\,\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}g$; ……(3分)

(3) $\mathrm{d}[(f\,\mathrm{d}g)\wedge(g\,\mathrm{d}f)]=\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}g)\wedge(g\,\mathrm{d}f)-(f\,\mathrm{d}g)\wedge[\mathrm{d}(g\,\mathrm{d}f)]$

$=(\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}g)\wedge(g\,\mathrm{d}f)-(f\,\mathrm{d}g)\wedge(\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}f)=0-0=0$; ……(3分)

(4) $\mathrm{d}(g\,\mathrm{d}f)+\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}g)=\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}f+\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}g=0$; ……(3分)

五、解. 因为 $\mathrm{I}=\dfrac{(\mathrm{d}u)^2-4v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+4u(\mathrm{d}v)^2}{4(u-v^2)}=\Big(\dfrac{\mathrm{d}u-2v\,\mathrm{d}v}{2\sqrt{u-v^2}}\Big)^2+(\mathrm{d}v)^2$,

所以 $\omega^1=\dfrac{\mathrm{d}u-2v\,\mathrm{d}v}{2\sqrt{u-v^2}},\quad \omega^2=\mathrm{d}v$; ....(4分)

$\omega^1\wedge\omega^2=\dfrac{\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v}{2\sqrt{u-v^2}},\quad \mathrm{d}\omega^1=0,\quad \mathrm{d}\omega^2=0$;

$\omega_1^2=\dfrac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2}\omega^1+\dfrac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1\wedge\omega^2}\omega^2=0$, ...(3 分)

$\mathrm{d}\omega_1^2=0,\quad K=-\dfrac{\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}=0$. ....(3分)

六、解. 令 $x=u+v,\ y=u-v,\ z=w+1$, 则可将原曲面方程可化为 $u^2=v^2+w^2$, (5分)

可见该曲面为锥面, 故为可展曲面. ....(5分)

另外化为参数方程, 得出 $LN-M^2=0$ 或 $K=0$ 也可.

七、解. $\vec{r}_u(u,v)=(-\sin u,\cos u,0),\quad \vec{r}_v(u,v)=(0,0,1)$,

$E=\vec{r}_u^{\,2}(u,v)=1,\quad F=\vec{r}_u(u,v)\vec{r}_v(u,v)=0,\quad G=\vec{r}_v^{\,2}(u,v)=1$,

$E_u(u,v)=0,\quad G_u(u,v)=0,\quad E_v(u,v)=0,\quad G_v(u,v)=0$, ...(4分)

由刘维尔公式 $k_g(u,v)=\dfrac{\mathrm{d}\theta(u,v)}{\mathrm{d}s}-\dfrac{E_v}{2E\sqrt{G}}\cos\theta+\dfrac{G_u}{2G\sqrt{E}}\cos\theta=\dfrac{\mathrm{d}\theta(u,v)}{\mathrm{d}s}$,

对于测地线有 $k_g(u,v)=0$, 于是 $\dfrac{\mathrm{d}\theta(u,v)}{\mathrm{d}s}=0$, 因此 $\theta(u,v)$ 为常数. ....(4分)

$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\sqrt{\dfrac{E}{G}}\tan\theta=\tan\theta$ 为常数, 记该常数为 a, 则有 $v=au+b$, 其中 b 为常数.

故测地线方程为 $v=au+b$, 其中 a,b 为任意常数. ....(2分)

八、答. 活动标架法的基本思想是通过活动标架这个桥梁, 把微分几何中所研究的图形嵌入到空间合同变换群 G 中, 也就是把该图形看成 G 的子空间, 然后 G 的性质自然地传递到它的子空间上, 从而得到所要研究的图形的性质. ....(2分)

活动标架法的步骤是: 1. 设法找到一族活动标架, 使所研究的图形与这族活动标架一一对应起来; 2. 把活动标架微分一次得到活动标架的相对分量; 3. 把得到的相对分量再外微分一次, 得到它们应满足的结构方程; 4. 利用相对分量去描述图形的几何特点. ....(3分)