第二章　常微分方程边值问题

第二章　常微分方程边值问题

- 对于初值问题只要方程的右端满足一定的光滑性条件，则存在惟一解。

第二章　常微分方程边值问题

- 对于初值问题只要方程的右端满足一定的光滑性条件，则存在惟一解。
- 对于边值问题要复杂的多，它可能有惟一解，也可能有无穷多个解或无解。

第二章　常微分方程边值问题

- 对于初值问题只要方程的右端满足一定的光滑性条件，则存在惟一解。
- 对于边值问题要复杂的多，它可能有惟一解，也可能有无穷多个解或无解。
- 例如$u'' + u = 0$的通解是$u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$,其中$c_1, c_2$是任意常数。

第二章　常微分方程边值问题

- 对于初值问题只要方程的右端满足一定的光滑性条件，则存在惟一解。
- 对于边值问题要复杂的多，它可能有惟一解，也可能有无穷多个解或无解。
- 例如$u'' + u = 0$的通解是$u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$,其中$c_1, c_2$是任意常数。
- 如果边界条件是$u(0) = 2, u(\frac{\pi}{2}) = 1$,则有唯一解

第二章　常微分方程边值问题

- 对于初值问题只要方程的右端满足一定的光滑性条件，则存在惟一解。
- 对于边值问题要复杂的多，它可能有惟一解，也可能有无穷多个解或无解。
- 例如$u'' + u = 0$的通解是$u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$,其中$c_1, c_2$是任意常数。
- 如果边界条件是$u(0) = 2, u(\frac{\pi}{2}) = 1$,则有唯一解
- 如果边界条件是$u(0) = 2, u(\pi) = -2$,则有无穷多个解

第二章　常微分方程边值问题

- 对于初值问题只要方程的右端满足一定的光滑性条件，则存在惟一解。
- 对于边值问题要复杂的多，它可能有惟一解，也可能有无穷多个解或无解。
- 例如$u'' + u = 0$的通解是$u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$,其中$c_1, c_2$是任意常数。
- 如果边界条件是$u(0) = 2, u(\frac{\pi}{2}) = 1$,则有唯一解
- 如果边界条件是$u(0) = 2, u(\pi) = -2$,则有无穷多个解
- 如果边界条件是$u(0) = 2, u(\pi) = 1$,则无解

第二章　常微分方程边值问题

- 对于初值问题只要方程的右端满足一定的光滑性条件，则存在惟一解。
- 对于边值问题要复杂的多，它可能有惟一解，也可能有无穷多个解或无解。
- 例如$u'' + u = 0$的通解是$u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$,其中$c_1, c_2$是任意常数。
- 如果边界条件是$u(0) = 2, u(\frac{\pi}{2}) = 1$,则有唯一解
- 如果边界条件是$u(0) = 2, u(\pi) = -2$,则有无穷多个解
- 如果边界条件是$u(0) = 2, u(\pi) = 1$,则无解
- 假设以后所考虑的边值问题都有唯一解

第二章　常微分方程边值问题

- 对于初值问题只要方程的右端满足一定的光滑性条件，则存在惟一解。
- 对于边值问题要复杂的多，它可能有惟一解，也可能有无穷多个解或无解。
- 例如$u'' + u = 0$的通解是$u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$,其中$c_1, c_2$是任意常数。
- 如果边界条件是$u(0) = 2, u(\frac{\pi}{2}) = 1$,则有唯一解
- 如果边界条件是$u(0) = 2, u(\pi) = -2$,则有无穷多个解
- 如果边界条件是$u(0) = 2, u(\pi) = 1$,则无解
- 假设以后所考虑的边值问题都有唯一解
- 本章讨论二阶常微分方程边值问题的数值解，主要介绍差分法和打靶法。

第二章　常微分方程边值问题

- 对于初值问题只要方程的右端满足一定的光滑性条件，则存在惟一解。
- 对于边值问题要复杂的多，它可能有惟一解，也可能有无穷多个解或无解。
- 例如$u'' + u = 0$的通解是$u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$,其中$c_1, c_2$是任意常数。
- 如果边界条件是$u(0) = 2, u(\frac{\pi}{2}) = 1$,则有唯一解
- 如果边界条件是$u(0) = 2, u(\pi) = -2$,则有无穷多个解
- 如果边界条件是$u(0) = 2, u(\pi) = 1$,则无解
- 假设以后所考虑的边值问题都有唯一解
- 本章讨论二阶常微分方程边值问题的数值解，主要介绍差分法和打靶法。
- 差分法:先将求解区间离散化，在这些离散点上用差商近似地代替导数，把微分方程化为差分方程。

第二章　常微分方程边值问题

- 对于初值问题只要方程的右端满足一定的光滑性条件，则存在惟一解。
- 对于边值问题要复杂的多，它可能有惟一解，也可能有无穷多个解或无解。
- 例如$u'' + u = 0$的通解是$u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$,其中$c_1, c_2$是任意常数。
- 如果边界条件是$u(0) = 2, u(\frac{\pi}{2}) = 1$,则有唯一解
- 如果边界条件是$u(0) = 2, u(\pi) = -2$,则有无穷多个解
- 如果边界条件是$u(0) = 2, u(\pi) = 1$,则无解
- 假设以后所考虑的边值问题都有唯一解
- 本章讨论二阶常微分方程边值问题的数值解，主要介绍差分法和打靶法。
- 差分法:先将求解区间离散化，在这些离散点上用差商近似地代替导数，把微分方程化为差分方程。
- 打靶法:将边值问题化为初值问题，然后再解初值问题。

⋆2.1差分法

⋆2.1.1 差分方程的建立

$\star$2.1差分法

$\star$2.1.1 差分方程的建立

对于二阶边值问题

$$\begin{cases} Lu = -u'' + q(x)u = f(x), \ \ a < x < b \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta \end{cases}, \qquad (1)$$

其中$q(x), f(x) \in C[a, b], q(x) \geq 0.$

⋆2.1差分法

⋆2.1.1 差分方程的建立

对于二阶边值问题

$$\begin{cases} Lu = -u'' + q(x)u = f(x), \ \ a < x < b \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta \end{cases}, \tag{1}$$

其中$q(x), f(x) \in C[a,b], q(x) \geq 0.$

- 区间剖分，离散化

$$x_m = a + mh, m = 0, 1, \cdots, N, \ \ h = \frac{b-a}{N}$$

x_m称为节点，h称为步长。

⋆2.1差分法

⋆2.1.1 差分方程的建立

对于二阶边值问题

$$\begin{cases} Lu = -u'' + q(x)u = f(x), \ \ a < x < b \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta \end{cases}, \tag{1}$$

其中$q(x), f(x) \in C[a, b], q(x) \geq 0.$

- 区间剖分，离散化

$$x_m = a + mh, m = 0, 1, \cdots, N, \ \ h = \frac{b-a}{N}$$

x_m称为节点，h称为步长。

- 方程离散化，利用Taylor公式

$$\frac{1}{h^2}[u(x_{m+1}) - 2u(x_m) + u(x_{m-1})] = u''(x_m) - R_m, \tag{2}$$

其中

$$R_m = -\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_m), \xi_m \in (x_{m-1}, x_{m+1}), \tag{3}$$

- 将(2)代入(1)的微分方程，有

$$L_h u(x_m) = -\frac{1}{h^2}[u(x_{m+1})-2u(x_m)+u(x_{m-1})]+q(x_m)u(x_m) = f(x)+R_m, \tag{4}$$

- 将(2)代入(1)的微分方程，有

$$L_h u(x_m) = -\frac{1}{h^2}[u(x_{m+1})-2u(x_m)+u(x_{m-1})]+q(x_m)u(x_m) = f(x)+R_m, \tag{4}$$

- 略去余项R_m,便得式(1)中的微分方程在内部节点x_m的差分方程，再考虑式(1)的边界条件

- 将(2)代入(1)的微分方程，有

$$L_h u(x_m) = -\frac{1}{h^2}[u(x_{m+1}) - 2u(x_m) + u(x_{m-1})] + q(x_m)u(x_m) = f(x) + R_m, \tag{4}$$

- 略去余项R_m,便得式(1)中的微分方程在内部节点x_m的差分方程，再考虑式(1)的边界条件
- 可得边值问题(1)的差分方程

$$\begin{cases} L_h u_m = -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + q_m u_m = f_m, \quad m = 1, 2, \cdots, N-1 \\ u_0 = \alpha, u_N = \beta \end{cases} \tag{5}$$

其中$q_m = q(x_m), f_m = f(x_m)$.解线性代数方程组(5)，得$u(x_m)$的近似值$u_m$.

- 将(2)代入(1)的微分方程，有

$$L_h u(x_m) = -\frac{1}{h^2}[u(x_{m+1}) - 2u(x_m) + u(x_{m-1})] + q(x_m)u(x_m) = f(x) + R_m, \tag{4}$$

- 略去余项R_m,便得式(1)中的微分方程在内部节点x_m的差分方程，再考虑式(1)的边界条件
- 可得边值问题(1)的差分方程

$$\begin{cases} L_h u_m = -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + q_m u_m = f_m, \ \ m = 1, 2, \cdots, N-1 \\ u_0 = \alpha, u_N = \beta \end{cases} \tag{5}$$

其中$q_m = q(x_m), f_m = f(x_m)$.解线性代数方程组(5)，得$u(x_m)$的近似值$u_m$.

- $u_0, u_1, \cdots, u_N$称为边值问题(1)的差分解。

- 方程组(5)可以写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} 2+h^2q_1 & -1 & & \\ -1 & 2+h^2+q_2 & -1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2+h^2q_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2f_1+\alpha \\ h^2f_2 \\ \vdots \\ h^2f_{N-2} \\ h^2f_{N-1}+\beta \end{bmatrix}$$

其系数矩阵是对称的三对角矩阵。

- L: 微分算子，$Lu=-u''+q(x)u=f(x)$微分方程

- 方程组(5)可以写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} 2+h^2q_1 & -1 & & \\ -1 & 2+h^2+q_2 & -1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2+h^2q_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2f_1+\alpha \\ h^2f_2 \\ \vdots \\ h^2f_{N-2} \\ h^2f_{N-1}+\beta \end{bmatrix}$$

其系数矩阵是对称的三对角矩阵。

- L: 微分算子，$Lu=-u''+q(x)u=f(x)$微分方程
- L_h :差分算子，$L_hu_m=-\frac{1}{h^2}(u_{m+1}-2u_m+u_{m-1})+q_mu_m=f_m$差分方程

- 方程组(5)可以写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} 2+h^2q_1 & -1 & & \\ -1 & 2+h^2+q_2 & -1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2+h^2q_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2f_1+\alpha \\ h^2f_2 \\ \vdots \\ h^2f_{N-2} \\ h^2f_{N-1}+\beta \end{bmatrix}$$

其系数矩阵是对称的三对角矩阵。

- L: 微分算子，$Lu = -u'' + q(x)u = f(x)$微分方程
- L_h :差分算子，$L_hu_m = -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + q_mu_m = f_m$差分方程
- 建立差分方程的关键是$u(x)$的二阶中心差商代替$u''(x)$,即

$$\frac{u(x_{m+1}) - 2u(x_m) + u(x_{m-1})}{h^2} \approx u''(x)$$

- 方程组(5)可以写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} 2+h^2q_1 & -1 & & \\ -1 & 2+h^2+q_2 & -1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2+h^2q_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2f_1+\alpha \\ h^2f_2 \\ \vdots \\ h^2f_{N-2} \\ h^2f_{N-1}+\beta \end{bmatrix}$$

  其系数矩阵是对称的三对角矩阵。
- L: 微分算子，$Lu = -u'' + q(x)u = f(x)$微分方程
- L_h :差分算子，$L_hu_m = -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + q_mu_m = f_m$差分方程
- 建立差分方程的关键是$u(x)$的二阶中心差商代替$u''(x)$,即

$$\frac{u(x_{m+1}) - 2u(x_m) + u(x_{m-1})}{h^2} \approx u''(x)$$

- 称$R_m(u) = Lu(x_m) - L_hu(x_m)$是用差分算子$L_h$代替微分算子$L$所产生的阶段误差.

- 方程组(5)可以写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} 2+h^2q_1 & -1 & & \\ -1 & 2+h^2+q_2 & -1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2+h^2q_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2f_1+\alpha \\ h^2f_2 \\ \vdots \\ h^2f_{N-2} \\ h^2f_{N-1}+\beta \end{bmatrix}$$

其系数矩阵是对称的三对角矩阵。

- L: 微分算子，$Lu=-u''+q(x)u=f(x)$微分方程
- L_h :差分算子，$L_hu_m=-\frac{1}{h^2}(u_{m+1}-2u_m+u_{m-1})+q_mu_m=f_m$差分方程
- 建立差分方程的关键是$u(x)$的二阶中心差商代替$u''(x)$,即

$$\frac{u(x_{m+1})-2u(x_m)+u(x_{m-1})}{h^2}\approx u''(x)$$

- 称$R_m(u)=Lu(x_m)-L_hu(x_m)$是用差分算子L_h代替微分算子L所产生的阶段误差.
- 称$R_m=L_h(u(x_m)-u_m)$为差分方程(5)的截断误差。

- 方程组(5)可以写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} 2+h^2q_1 & -1 & & \\ -1 & 2+h^2+q_2 & -1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2+h^2q_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2f_1+\alpha \\ h^2f_2 \\ \vdots \\ h^2f_{N-2} \\ h^2f_{N-1}+\beta \end{bmatrix}$$

  其系数矩阵是对称的三对角矩阵。

- L: 微分算子，$Lu=-u''+q(x)u=f(x)$微分方程
- L_h :差分算子，$L_hu_m=-\frac{1}{h^2}(u_{m+1}-2u_m+u_{m-1})+q_mu_m=f_m$差分方程
- 建立差分方程的关键是$u(x)$的二阶中心差商代替$u''(x)$,即

$$\frac{u(x_{m+1})-2u(x_m)+u(x_{m-1})}{h^2}\approx u''(x)$$

- 称$R_m(u)=Lu(x_m)-L_hu(x_m)$是用差分算子L_h代替微分算子L所产生的阶段误差.
- 称$R_m=L_h(u(x_m)-u_m)$为差分方程(5)的截断误差。
- (5)中$R_m=-\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_m),\xi_m\in(x_{m-1},x_{m+1})$.

还可以先假设差分方程的形式，再用Taylor展开确定其中的系数，例如：

还可以先假设差分方程的形式，再用Taylor展开确定其中的系数，例如：
设式(1)中的微分方程在节点x_m的差分方程为

$$-\frac{1}{h^2}(u_{m+1}-2u_m+u_{m-1})+c_0(q_m u_m-f_m)+c_1(q_{m+1}u_{m+1}-f_{m+1})$$
$$+c_2(q_{m-1}u_{m-1}+f_{m-1})=0$$

其中c_0, c_1, c_2是待定的数，利用Taylor展开

还可以先假设差分方程的形式，再用Taylor展开确定其中的系数，例如：
设式(1)中的微分方程在节点x_m的差分方程为

$$-\frac{1}{h^2}(u_{m+1}-2u_m+u_{m-1})+c_0(q_m u_m-f_m)+c_1(q_{m+1}u_{m+1}-f_{m+1})$$

$$+c_2(q_{m-1}u_{m-1}+f_{m-1})=0$$

其中c_0, c_1, c_2是待定的数，利用Taylor展开

$$-\frac{1}{h^2}[u(x+h)-2u(x)+u(x-h)]+c_0[q(x)u(x)-f(x)]$$

$$+c_1[q(x+h)u(x+h)-f(x+h)]+c_2[q(x-h)u(x-h)-f(x-h)]$$

$$=-[u''(x)+\frac{h^2}{12}u^{(4)}(x)+\frac{h^4}{360}u^{(6)}(x)+O(h^6)]$$

$$+c_0u''(x)+c_1u''(x+h)+c_2u''(x-h)$$

$$=-[u''(x)+\frac{h^2}{12}u^{(4)}(x)+\frac{h^4}{360}u^{(6)}(x)]+(c_0+c_1+c_2)u''(x)$$

$$+(c_1-c_2)hu'''(x)+\frac{1}{2}(c_1+c_2)h^2u^{(4)}(x)+\frac{1}{6}(c_1-c_2)h^3u^{(5)}(x)$$

$$+\frac{1}{24}(c_1+c_2)h^4u^{(6)}(x)+\frac{1}{120}(c_1-c_2)h^5u^{(7)}(x)+O(h^6)$$

令

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = 0 \\ \frac{1}{2}(c_1 + c_2) = \frac{1}{12} \end{cases}$$

其解是$c_0 = \frac{5}{6}, c_1 = c_2 = \frac{1}{12}$

令

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = 0 \\ \frac{1}{2}(c_1 + c_2) = \frac{1}{12} \end{cases}$$

其解是$c_0 = \frac{5}{6}, c_1 = c_2 = \frac{1}{12}$可以得到以下形式的差分方程

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + \frac{1}{12}(q_{m+1}u_{m+1} + 10q_m u_m + q_{m-1}u_{m-1}) \\ = \frac{1}{12}(f_{m+1} + 10f_m + f_{m-1}), m = 1, 2, \cdots, N-1, \\ u_0 = \alpha, u_N = \beta \end{cases} \tag{8}$$

令

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = 0 \\ \frac{1}{2}(c_1 + c_2) = \frac{1}{12} \end{cases}$$

其解是$c_0 = \frac{5}{6}, c_1 = c_2 = \frac{1}{12}$可以得到以下形式的差分方程

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + \frac{1}{12}(q_{m+1}u_{m+1} + 10q_m u_m + q_{m-1}u_{m-1}) \\ = \frac{1}{12}(f_{m+1} + 10f_m + f_{m-1}), m = 1, 2, \cdots, N-1, \\ u_0 = \alpha, u_N = \beta \end{cases} \tag{8}$$

其截断误差为

$$R_m = \frac{h^4}{240}u^{(6)}(x_m) + O(h^6).$$

令

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = 0 \\ \frac{1}{2}(c_1 + c_2) = \frac{1}{12} \end{cases}$$

其解是$c_0 = \frac{5}{6}, c_1 = c_2 = \frac{1}{12}$可以得到以下形式的差分方程

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + \frac{1}{12}(q_{m+1}u_{m+1} + 10q_m u_m + q_{m-1}u_{m-1}) \\ = \frac{1}{12}(f_{m+1} + 10f_m + f_{m-1}), m = 1, 2, \cdots, N-1, \\ u_0 = \alpha, u_N = \beta \end{cases} \tag{8}$$

其截断误差为

$$R_m = \frac{h^4}{240}u^{(6)}(x_m) + O(h^6).$$

差分方程(5)的截断误差是$O(h^2)$,差分方程(8)比差分方程(5)的精度高。

差分方程(5)的截断误差是$O(h^2)$,差分方程(8)比差分方程(5)的精度高。
整理后方程组(8)可以写成

$$\begin{cases} -(1-\frac{h^2}{12}q_{m-1})u_{m-1}+(2+\frac{5}{6}h^2q_m)u_m-(1-\frac{h^2}{12}q_{m+1})u_{m+1} \\ =\frac{h^2}{12}(f_{m-1}+10f_m+f_{m+1}), m=1,2,\cdots,N-1, \\ u_0=\alpha, u_N=\beta. \end{cases} \tag{10}$$

差分方程(5)的截断误差是$O(h^2)$,差分方程(8)比差分方程(5)的精度高。
整理后方程组(8)可以写成

$$\begin{cases} -(1-\frac{h^2}{12}q_{m-1})u_{m-1}+(2+\frac{5}{6}h^2q_m)u_m-(1-\frac{h^2}{12}q_{m+1})u_{m+1} \\ =\frac{h^2}{12}(f_{m-1}+10f_m+f_{m+1}), m=1,2,\cdots,N-1, \\ u_0=\alpha, u_N=\beta. \end{cases} \tag{10}$$

- 系数是三对角阵

差分方程(5)的截断误差是$O(h^2)$,差分方程(8)比差分方程(5)的精度高。
整理后方程组(8)可以写成

$$\begin{cases} -(1-\frac{h^2}{12}q_{m-1})u_{m-1}+(2+\frac{5}{6}h^2q_m)u_m-(1-\frac{h^2}{12}q_{m+1})u_{m+1} \\ =\frac{h^2}{12}(f_{m-1}+10f_m+f_{m+1}), m=1,2,\cdots,N-1, \\ u_0=\alpha, u_N=\beta. \end{cases} \tag{10}$$

- 系数是三对角阵
- $q(x)$不是常数时，它不是对称矩阵。

现在考虑一般的二阶边值问题

$$\begin{cases} -u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \\ \alpha_1 u'(\alpha) + \alpha_2 u(\alpha) = \alpha, \\ \beta_1 u'(b) + \beta_2 u(b) = \beta, \end{cases} \tag{11}$$

其中$p(x), q(x), f(x) \in C[a,b], a_1^2 + a_2^2 \neq 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0.$

现在考虑一般的二阶边值问题

$$\begin{cases} -u^{''}+p(x)u^{'}+q(x)u=f(x), \\ \alpha_1 u^{'}(\alpha)+\alpha_2 u(\alpha)=\alpha, \\ \beta_1 u^{'}(b)+\beta_2 u(b)=\beta, \end{cases} \tag{11}$$

其中$p(x), q(x), f(x) \in C[a,b], a_1^2+a_2^2 \neq 0, \beta_1^2+\beta_2^2 \neq 0.$

- 由于微分方程出现了一阶导数，它也要用差商代替，因为二阶中心差商代替二阶导数产生的误差为$O(h^2)$., 希望一阶导数用差商代替所产生的误差也是$O(h^2)$,

现在考虑一般的二阶边值问题

$$\begin{cases} -u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \\ \alpha_1 u'(\alpha) + \alpha_2 u(\alpha) = \alpha, \\ \beta_1 u'(b) + \beta_2 u(b) = \beta, \end{cases} \tag{11}$$

其中$p(x), q(x), f(x) \in C[a,b], a_1^2 + a_2^2 \neq 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0.$

- 由于微分方程出现了一阶导数，它也要用差商代替，因为二阶中心差商代替二阶导数产生的误差为$O(h^2)$., 希望一阶导数用差商代替所产生的误差也是$O(h^2)$,
- 由于

  $$\frac{1}{2h}[u(x_{m+1}) - u(x_{m-1})] = u'(x_m) + \frac{h^2}{6}u'''(\eta_m), \eta_m \in (x_{m-1}, x_{m+1}),$$

  上式左边是$u(x)$在点x_m的一阶中心差商，再利用(2)式的结论，于是

现在考虑一般的二阶边值问题

$$\begin{cases} -u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \\ \alpha_1 u'(\alpha) + \alpha_2 u(\alpha) = \alpha, \\ \beta_1 u'(b) + \beta_2 u(b) = \beta, \end{cases} \tag{11}$$

其中$p(x), q(x), f(x) \in C[a,b], a_1^2 + a_2^2 \neq 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0.$

- 由于微分方程出现了一阶导数，它也要用差商代替，因为二阶中心差商代替二阶导数产生的误差为$O(h^2)$., 希望一阶导数用差商代替所产生的误差也是$O(h^2)$,
- 由于

  $$\frac{1}{2h}[u(x_{m+1}) - u(x_{m-1})] = u'(x_m) + \frac{h^2}{6}u'''(\eta_m), \eta_m \in (x_{m-1}, x_{m+1}),$$

  上式左边是$u(x)$在点x_m的一阶中心差商，再利用(2)式的结论，于是
-

$$u''(x_m) + p(x_m)u'(x_m) = -\frac{1}{h^2}[u(x_{m+1}) - 2u(x_m) + u(x_{m-1})]$$

$$+\frac{p(x_m)}{2h}[u(x_{m+1}) - u(x_{m-1})] + O(h^2).$$

- 略去余项$O(h^2)$,得边值问题(11)中的微分方程在节点x_m的差分方程

$$-\frac{1}{h^2}(u_{m+1}-2u_m+u_{m-1})+\frac{p_m}{2h}(u_{m+1}-u_{m-1})+q_m u_m = f_m, \quad (12)$$

- 略去余项$O(h^2)$,得边值问题(11)中的微分方程在节点x_m的差分方程

$$-\frac{1}{h^2}(u_{m+1}-2u_m+u_{m-1})+\frac{p_m}{2h}(u_{m+1}-u_{m-1})+q_m u_m=f_m, \quad (12)$$

- 由于边界条件出现u的一阶导数，也要把一阶导数用函数在节点的值表示

- 略去余项$O(h^2)$,得边值问题(11)中的微分方程在节点x_m的差分方程

$$-\frac{1}{h^2}(u_{m+1}-2u_m+u_{m-1})+\frac{p_m}{2h}(u_{m+1}-u_{m-1})+q_m u_m=f_m, \quad (12)$$

- 由于边界条件出现u的一阶导数，也要把一阶导数用函数在节点的值表示
- 在点b，用$u(x)$在点b的一阶向后差商代替$u'(b)$，则

$$\frac{1}{h}[u(x_N)-u(x_{N-1})]=u'(b)-\frac{h}{2}u''(\eta),\eta\in(x_{N-1},x_N)$$

- 略去余项$O(h^2)$,得边值问题(11)中的微分方程在节点x_m的差分方程

$$-\frac{1}{h^2}(u_{m+1}-2u_m+u_{m-1})+\frac{p_m}{2h}(u_{m+1}-u_{m-1})+q_m u_m=f_m,\quad (12)$$

- 由于边界条件出现u的一阶导数，也要把一阶导数用函数在节点的值表示
- 在点b，用$u(x)$在点b的一阶向后差商代替$u'(b)$，则

$$\frac{1}{h}[u(x_N)-u(x_{N-1})]=u'(b)-\frac{h}{2}u''(\eta),\eta\in(x_{N-1},x_N)$$

- 于是得到在点b的一个差分方程

$$\frac{\beta_1}{h}(u_N-u_{N-1})+\beta_2 u_N=\beta. \quad (13)$$

- 略去余项$O(h^2)$,得边值问题(11)中的微分方程在节点x_m的差分方程

$$-\frac{1}{h^2}(u_{m+1}-2u_m+u_{m-1})+\frac{p_m}{2h}(u_{m+1}-u_{m-1})+q_m u_m = f_m, \quad (12)$$

- 由于边界条件出现u的一阶导数，也要把一阶导数用函数在节点的值表示
- 在点b，用$u(x)$在点b的一阶向后差商代替$u'(b)$，则

$$\frac{1}{h}[u(x_N)-u(x_{N-1})] = u'(b) - \frac{h}{2}u''(\eta), \eta \in (x_{N-1}, x_N)$$

- 于是得到在点b的一个差分方程

$$\frac{\beta_1}{h}(u_N - u_{N-1}) + \beta_2 u_N = \beta. \quad (13)$$

• 在点a，类似建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{h}(u_1 - u_0) + \alpha_2 u_0 = \alpha. \tag{14}$$

- 在点a，类似建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{h}(u_1 - u_0) + \alpha_2 u_0 = \alpha. \tag{14}$$

式(12-14)组成了一个以$u_0, u_1, \cdots, u_N$为未知数的方程组

$$\begin{cases} -(1+\frac{h}{2}p_m)u_{m-1} + (2+h^2q_m)u_m - (1-\frac{h}{2}p_m)u_{m+1} = h^2 f_m, m = 1, 2, \cdots, N-1 \\ (-\alpha_1 + h\alpha_2)u_0 + \alpha_1 u_1 = h\alpha \\ -\beta_1 u_{N-1} + (\beta_1 + h\beta_2)u_N = h\beta \end{cases} \tag{15}$$

- 在点a，类似建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{h}(u_1 - u_0) + \alpha_2 u_0 = \alpha. \tag{14}$$

式(12-14)组成了一个以$u_0, u_1, \cdots, u_N$为未知数的方程组

$$\begin{cases} -(1+\frac{h}{2}p_m)u_{m-1} + (2+h^2q_m)u_m - (1-\frac{h}{2}p_m)u_{m+1} = h^2 f_m, m = 1, 2, \cdots, N-1 \\ (-\alpha_1 + h\alpha_2)u_0 + \alpha_1 u_1 = h\alpha \\ -\beta_1 u_{N-1} + (\beta_1 + h\beta_2)u_N = h\beta \end{cases} \tag{15}$$

- 系数矩阵是三对角阵

- 在点a，类似建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{h}(u_1 - u_0) + \alpha_2 u_0 = \alpha. \tag{14}$$

式(12-14)组成了一个以$u_0, u_1, \cdots, u_N$为未知数的方程组

$$\begin{cases} -(1+\frac{h}{2}p_m)u_{m-1} + (2+h^2q_m)u_m - (1-\frac{h}{2}p_m)u_{m+1} = h^2 f_m, m = 1, 2, \cdots, N-1 \\ (-\alpha_1 + h\alpha_2)u_0 + \alpha_1 u_1 = h\alpha \\ -\beta_1 u_{N-1} + (\beta_1 + h\beta_2)u_N = h\beta \end{cases} \tag{15}$$

- 系数矩阵是三对角阵
- 在端点b, a的差分方程的截断误差是O(h)，比内点差分方程的截断误差低一阶

- 在点a，类似建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{h}(u_1 - u_0) + \alpha_2 u_0 = \alpha. \tag{14}$$

式(12-14)组成了一个以$u_0, u_1, \cdots, u_N$为未知数的方程组

$$\begin{cases} -(1+\frac{h}{2}p_m)u_{m-1} + (2+h^2q_m)u_m - (1-\frac{h}{2}p_m)u_{m+1} = h^2 f_m, m = 1, 2, \cdots, N-1 \\ (-\alpha_1 + h\alpha_2)u_0 + \alpha_1 u_1 = h\alpha \\ -\beta_1 u_{N-1} + (\beta_1 + h\beta_2)u_N = h\beta \end{cases} \tag{15}$$

- 系数矩阵是三对角阵
- 在端点b, a的差分方程的截断误差是O(h)，比内点差分方程的截断误差低一阶
- 为了在端点获得截断误差为$O(h^2)$的差分方程，必须要用三个点上的函数值表示u的一阶导数

- 在点a，类似建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{h}(u_1 - u_0) + \alpha_2 u_0 = \alpha. \tag{14}$$

式(12-14)组成了一个以$u_0, u_1, \cdots, u_N$为未知数的方程组

$$\begin{cases} -(1+\frac{h}{2}p_m)u_{m-1} + (2+h^2q_m)u_m - (1-\frac{h}{2}p_m)u_{m+1} = h^2 f_m, m = 1,2,\cdots,N-1 \\ (-\alpha_1 + h\alpha_2)u_0 + \alpha_1 u_1 = h\alpha \\ -\beta_1 u_{N-1} + (\beta_1 + h\beta_2)u_N = h\beta \end{cases} \tag{15}$$

- 系数矩阵是三对角阵
- 在端点b, a的差分方程的截断误差是O(h)，比内点差分方程的截断误差低一阶
- 为了在端点获得截断误差为$O(h^2)$的差分方程，必须要用三个点上的函数值表示u的一阶导数
- 例如在点b，利用Taylor展开

$$u'(x_N) - [au(x_N) + bu(x_{N-1}) + cu(x_{N-2})]$$

$$= -(a+b+c)u(x_N) + [1+(b+2c)h]u'(x_N) - \frac{1}{2}(b+4c)h^2u''(x_N) + \frac{1}{6}(b+8c)h^3u'''(x_N) + \cdots$$

- 要使余项的阶尽可能高，a, b, c必须满足

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 1+(b+2c)h=0 \\ b+4c=0 \end{cases}$$

- 要使余项的阶尽可能高，a, b, c必须满足

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 1+(b+2c)h=0 \\ b+4c=0 \end{cases}$$

其解为

$$a=\frac{3}{2h}, b=-\frac{2}{h}, c=\frac{1}{2h}$$

- 要使余项的阶尽可能高，a, b, c必须满足

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 1+(b+2c)h=0 \\ b+4c=0 \end{cases}$$

其解为

$$a=\frac{3}{2h}, b=-\frac{2}{h}, c=\frac{1}{2h}$$

- 于是

$$u^{'}(x_N)=\frac{1}{2h}[3u(x_N)-4u(x_{N-1})+u(x_{N-2})]+\frac{h^2}{3}u^{'''}(x_N)+\cdots.$$

略去上式中的余项便得到一个在点b的差分方程

$$\frac{\beta_1}{2h}(u_{N-2}-4u_{N-1}+3u_N)+\beta_2 u_N=\beta. \qquad (16)$$

- 要使余项的阶尽可能高，a, b, c必须满足

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 1+(b+2c)h=0 \\ b+4c=0 \end{cases}$$

其解为

$$a=\frac{3}{2h}, b=-\frac{2}{h}, c=\frac{1}{2h}$$

- 于是

$$u^{'}(x_N)=\frac{1}{2h}[3u(x_N)-4u(x_{N-1})+u(x_{N-2})]+\frac{h^2}{3}u^{'''}(x_N)+\cdots.$$

略去上式中的余项便得到一个在点b的差分方程

$$\frac{\beta_1}{2h}(u_{N-2}-4u_{N-1}+3u_N)+\beta_2 u_N=\beta. \qquad (16)$$

- 类似地，在点a建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{2h}(-3u_0+4u_1-u_2)+\alpha_2 u_0=\alpha. \tag{17}$$

- 类似地，在点a建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{2h}(-3u_0+4u_1-u_2)+\alpha_2 u_0=\alpha. \tag{17}$$

- 差分方程(16),(17)的截断误差为$O(h^2)$

- 类似地，在点a建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{2h}(-3u_0+4u_1-u_2)+\alpha_2 u_0=\alpha. \tag{17}$$

- 差分方程(16),(17)的截断误差为$O(h^2)$
- 与差分方程(12)相结合得到线性方程组

$$\begin{cases} -(1+\frac{h}{2}p_m)u_{m-1}+(2+h^2q_m)u_m-(1-\frac{h}{2}p_m)u_{m+1}=h^2f_m, \\ m=1,2,\cdots,N-1. \\ (-\frac{3}{2}\alpha_1+h\alpha_2)u_0+2\alpha_1u_1-\frac{1}{2}\alpha_1u_2=h\alpha, \\ \frac{1}{2}\beta_1u_{N-2}-2\beta_2u_{N-1}+(\frac{3}{2}\beta_1+h\beta_2)u_N=h\beta \end{cases} \tag{18}$$

- 类似地，在点a建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{2h}(-3u_0+4u_1-u_2)+\alpha_2 u_0=\alpha. \tag{17}$$

- 差分方程(16),(17)的截断误差为$O(h^2)$
- 与差分方程(12)相结合得到线性方程组

$$\begin{cases} -(1+\frac{h}{2}p_m)u_{m-1}+(2+h^2q_m)u_m-(1-\frac{h}{2}p_m)u_{m+1}=h^2f_m, \\ m=1,2,\cdots,N-1. \\ (-\frac{3}{2}\alpha_1+h\alpha_2)u_0+2\alpha_1u_1-\frac{1}{2}\alpha_1u_2=h\alpha, \\ \frac{1}{2}\beta_1u_{N-2}-2\beta_2u_{N-1}+(\frac{3}{2}\beta_1+h\beta_2)u_N=h\beta \end{cases} \tag{18}$$

- 系数矩阵不是三对角阵。

- 类似地，在点a建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{2h}(-3u_0+4u_1-u_2)+\alpha_2 u_0=\alpha. \tag{17}$$

- 差分方程(16),(17)的截断误差为$O(h^2)$
- 与差分方程(12)相结合得到线性方程组

$$\begin{cases} -(1+\frac{h}{2}p_m)u_{m-1}+(2+h^2q_m)u_m-(1-\frac{h}{2}p_m)u_{m+1}=h^2f_m, \\ m=1,2,\cdots,N-1. \\ (-\frac{3}{2}\alpha_1+h\alpha_2)u_0+2\alpha_1u_1-\frac{1}{2}\alpha_1u_2=h\alpha, \\ \frac{1}{2}\beta_1u_{N-2}-2\beta_2u_{N-1}+(\frac{3}{2}\beta_1+h\beta_2)u_N=h\beta \end{cases} \tag{18}$$

- 系数矩阵不是三对角阵。

- 既要使在端点建立的差分方程的截断误差是$O(h^2)$,又要使差分方程组的系数矩阵是三对角阵，可以采用下面的差分格式

- 既要使在端点建立的差分方程的截断误差是$O(h^2)$,又要使差分方程组的系数矩阵是三对角阵，可以采用下面的差分格式
- 设函数$u(x)$能光滑地延拓到区间$[a,b]$之外，记节点为

$$x_m = a + (m - \frac{1}{2})h, m = 0, 1, \cdots, N$$

其中步长$h = \frac{b-a}{N-1}$.

- 既要使在端点建立的差分方程的截断误差是$O(h^2)$,又要使差分方程组的系数矩阵是三对角阵，可以采用下面的差分格式
- 设函数$u(x)$能光滑地延拓到区间$[a,b]$之外，记节点为

$$x_m = a + (m - \frac{1}{2})h, m = 0, 1, \cdots, N$$

其中步长$h = \frac{b-a}{N-1}$.

- 此时$x_0 = a - \frac{h}{2}, x_N = b + \frac{h}{2}$在$[a,b]$之外

- 既要使在端点建立的差分方程的截断误差是$O(h^2)$,又要使差分方程组的系数矩阵是三对角阵，可以采用下面的差分格式
- 设函数$u(x)$能光滑地延拓到区间$[a,b]$之外，记节点为

$$x_m = a + (m - \frac{1}{2})h, m = 0, 1, \cdots, N$$

其中步长$h = \frac{b-a}{N-1}$.

- 此时$x_0 = a - \frac{h}{2}, x_N = b + \frac{h}{2}$在$[a,b]$之外
- 仍旧用差分方程(12)作为在节点$x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}$的差分方程

由于

$$\frac{1}{h}[u(x_N) - u(x_{N-1})] = u^{'}(b) + \frac{h^2}{24}u^{'''}(\xi), \xi \in (x_{N-1}, x_N)$$

$$\frac{1}{2}[u(x_N) + u(x_{N-1})] = u(b) + \frac{h^2}{8}u^{''}(\eta), \eta \in (x_{N-1}, x_N)$$

由于

$$\frac{1}{h}[u(x_N)-u(x_{N-1})]=u^{'}(b)+\frac{h^2}{24}u^{'''}(\xi),\xi\in(x_{N-1},x_N)$$

$$\frac{1}{2}[u(x_N)+u(x_{N-1})]=u(b)+\frac{h^2}{8}u^{''}(\eta),\eta\in(x_{N-1},x_N)$$

于是得到一个在点b的差分方程

$$\frac{\beta_1}{h}(u_N-u_{N-1})+\frac{\beta_2}{2}(u_N+u_{N-1})=\beta, \tag{19}$$

由于

$$\frac{1}{h}[u(x_N) - u(x_{N-1})] = u^{'}(b) + \frac{h^2}{24}u^{'''}(\xi), \xi \in (x_{N-1}, x_N)$$

$$\frac{1}{2}[u(x_N) + u(x_{N-1})] = u(b) + \frac{h^2}{8}u^{''}(\eta), \eta \in (x_{N-1}, x_N)$$

于是得到一个在点b的差分方程

$$\frac{\beta_1}{h}(u_N - u_{N-1}) + \frac{\beta_2}{2}(u_N + u_{N-1}) = \beta, \tag{19}$$

同样在点a也可以建立一个类似的差分方程

$$\frac{\alpha_1}{h}(u_1 - u_0) + \frac{\alpha_2}{2}(u_1 + u_0) = \alpha, \tag{20}$$

由于

$$\frac{1}{h}[u(x_N)-u(x_{N-1})]=u'(b)+\frac{h^2}{24}u'''(\xi),\xi\in(x_{N-1},x_N)$$

$$\frac{1}{2}[u(x_N)+u(x_{N-1})]=u(b)+\frac{h^2}{8}u''(\eta),\eta\in(x_{N-1},x_N)$$

于是得到一个在点b的差分方程

$$\frac{\beta_1}{h}(u_N-u_{N-1})+\frac{\beta_2}{2}(u_N+u_{N-1})=\beta, \tag{19}$$

同样在点a也可以建立一个类似的差分方程

$$\frac{\alpha_1}{h}(u_1-u_0)+\frac{\alpha_2}{2}(u_1+u_0)=\alpha, \tag{20}$$

方程(19),(20)的截断误差都是$O(h^2)$,将(12),(19),(20)组成一个方程组

$$\begin{cases} -(1+\frac{h}{2}p_m)u_{m-1}+(2+h^2q_m)u_m-(1-\frac{h}{2}p_m)u_{m+1}=h^2f_m, \\ m=1,2,\cdots,N-1. \\ (-\alpha_1+\frac{h}{2}\alpha_2)u_0+(\alpha_1+\frac{h}{2}\alpha_2)u_1=h\alpha, \\ (-\beta_1+\frac{h}{2}\beta_2)u_{N-1}+(\beta_1+\frac{h}{2}\beta_2)u_N=h\beta \end{cases}, \tag{21}$$

由于

$$\frac{1}{h}[u(x_N)-u(x_{N-1})]=u^{'}(b)+\frac{h^2}{24}u^{'''}(\xi),\xi\in(x_{N-1},x_N)$$

$$\frac{1}{2}[u(x_N)+u(x_{N-1})]=u(b)+\frac{h^2}{8}u^{''}(\eta),\eta\in(x_{N-1},x_N)$$

于是得到一个在点b的差分方程

$$\frac{\beta_1}{h}(u_N-u_{N-1})+\frac{\beta_2}{2}(u_N+u_{N-1})=\beta, \tag{19}$$

同样在点a也可以建立一个类似的差分方程

$$\frac{\alpha_1}{h}(u_1-u_0)+\frac{\alpha_2}{2}(u_1+u_0)=\alpha, \tag{20}$$

方程(19),(20)的截断误差都是$O(h^2)$,将(12),(19),(20)组成一个方程组

$$\begin{cases} -(1+\frac{h}{2}p_m)u_{m-1}+(2+h^2q_m)u_m-(1-\frac{h}{2}p_m)u_{m+1}=h^2f_m, \\ m=1,2,\cdots,N-1. \\ (-\alpha_1+\frac{h}{2}\alpha_2)u_0+(\alpha_1+\frac{h}{2}\alpha_2)u_1=h\alpha, \\ (-\beta_1+\frac{h}{2}\beta_2)u_{N-1}+(\beta_1+\frac{h}{2}\beta_2)u_N=h\beta \end{cases}, \tag{21}$$

- 方程组(15,18,21)都是对应于边值问题(11)的差分方程。

- 方程组(15,18,21)都是对应于边值问题(11)的差分方程。
- 方程组(15)和(21)的系数矩阵是三对角阵，方程组(18)却不是三对角阵；

- 方程组(15,18,21)都是对应于边值问题(11)的差分方程。
- 方程组(15)和(21)的系数矩阵是三对角阵，方程组(18)却不是三对角阵；
- 方程组(18)和(21)中每个方程的截断误差都是$O(h^2)$

- 方程组(15,18,21)都是对应于边值问题(11)的差分方程。
- 方程组(15)和(21)的系数矩阵是三对角阵，方程组(18)却不是三对角阵；
- 方程组(18)和(21)中每个方程的截断误差都是$O(h^2)$
- 方程组(15)中端点处差分方程的截断误差只有$O(h)$

- 方程组(15,18,21)都是对应于边值问题(11)的差分方程。
- 方程组(15)和(21)的系数矩阵是三对角阵，方程组(18)却不是三对角阵；
- 方程组(18)和(21)中每个方程的截断误差都是$O(h^2)$
- 方程组(15)中端点处差分方程的截断误差只有$O(h)$
- 式(11)中出现的一阶导数项可以通过适当的自变量变换而消掉，记

$$\phi(x) = \int e^{\int p(x)dx} dx,$$

- 方程组(15,18,21)都是对应于边值问题(11)的差分方程。
- 方程组(15)和(21)的系数矩阵是三对角阵，方程组(18)却不是三对角阵；
- 方程组(18)和(21)中每个方程的截断误差都是$O(h^2)$
- 方程组(15)中端点处差分方程的截断误差只有$O(h)$
- 式(11)中出现的一阶导数项可以通过适当的自变量变换而消掉，记

$$\phi(x) = \int e^{\int p(x)dx} dx,$$

- 则

$$\phi^{'}(x) = e^{\int p(x)dx} > 0,$$

因此函数ϕ是严格单调函数，它存在反函数ϕ^{-1},令

$$t = \phi(x)$$

- 则式(11)中的微分方程化为

$$-\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{q(x)}{(\phi'(x))^2}u=\frac{f(x)}{(\phi'(x))^2}.$$

其中$x=\phi^{-1}(t)$,从而方程中不含一阶导数项，形式上与式(1)中的微分方程相同。

- 则式(11)中的微分方程化为

$$-\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{q(x)}{(\phi'(x))^2}u=\frac{f(x)}{(\phi'(x))^2}.$$

其中$x=\phi^{-1}(t)$,从而方程中不含一阶导数项，形式上与式(1)中的微分方程相同。

- 前面讨论的二阶边值问题都是线性的，导出的差分方程组都是线性方程组，但是对于非线性边值问题

$$\begin{cases} u^{''}=f(x,u,u^{'}),a<x<b,\\ u(a)=\alpha,u(b)=\beta, \end{cases}$$

- 则式(11)中的微分方程化为

$$-\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{q(x)}{(\phi'(x))^2}u=\frac{f(x)}{(\phi'(x))^2}.$$

其中$x=\phi^{-1}(t)$,从而方程中不含一阶导数项，形式上与式(1)中的微分方程相同。

- 前面讨论的二阶边值问题都是线性的，导出的差分方程组都是线性方程组，但是对于非线性边值问题

$$\begin{cases} u''=f(x,u,u'), a<x<b, \\ u(a)=\alpha, u(b)=\beta, \end{cases}$$

- 他的差分方程

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}(u_{m+1}-2u_m+u_{m-1})+f(x_m,u_m,\frac{u_{m+1}-u_{m-1}}{2h})=0, m=1,2,\cdots,N-1, \\ u_0=\alpha, u_N=\beta \end{cases}$$

是非线性方程组，解非线性方程组比解线性方程组要困难得多。

例1. 取步长$h=\frac{1}{2}$,用差分方程解边值问题

$$\begin{cases} -u'' + \frac{2}{(x+2)^2}u = 0, \quad -1 < x < 1 \\ u(-1) = 1, u(1) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

例1. 取步长$h = \frac{1}{2}$,用差分方程解边值问题

$$\begin{cases} -u'' + \frac{2}{(x+2)^2}u = 0, \quad -1 < x < 1 \\ u(-1) = 1, u(1) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

解：用两种格式计算

例1. 取步长$h=\frac{1}{2}$,用差分方程解边值问题

$$\begin{cases} -u'' + \frac{2}{(x+2)^2}u = 0, & -1 < x < 1 \\ u(-1) = 1, u(1) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

解：用两种格式计算
(1)对应于差分方程(5),我们得到差分方程组

$$\begin{cases} \frac{20}{9}u_1 - u_2 = 1 \\ -u_1 + \frac{17}{8}u_2 - u_3 = 0, \\ -u_2 + \frac{52}{25}u_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

例1. 取步长$h=\frac{1}{2}$,用差分方程解边值问题

$$\begin{cases} -u'' + \frac{2}{(x+2)^2}u = 0, \quad -1 < x < 1 \\ u(-1) = 1, u(1) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

解：用两种格式计算

(1)对应于差分方程(5),我们得到差分方程组

$$\begin{cases} \frac{20}{9}u_1 - u_2 = 1 \\ -u_1 + \frac{17}{8}u_2 - u_3 = 0, \\ -u_2 + \frac{52}{25}u_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

由第1个和第3个方程，得

$$u_1 = \frac{9}{20}(u_2+1), u_3 = \frac{25}{52}(u_2+\frac{1}{3})$$

例1. 取步长$h=\frac{1}{2}$,用差分方程解边值问题

$$\begin{cases} -u'' + \frac{2}{(x+2)^2}u = 0, \quad -1 < x < 1 \\ u(-1) = 1, u(1) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

解：用两种格式计算
(1)对应于差分方程(5),我们得到差分方程组

$$\begin{cases} \frac{20}{9}u_1 - u_2 = 1 \\ -u_1 + \frac{17}{8}u_2 - u_3 = 0, \\ -u_2 + \frac{52}{25}u_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

由第1个和第3个方程，得

$$u_1 = \frac{9}{20}(u_2+1), u_3 = \frac{25}{52}(u_2+\frac{1}{3})$$

代入第2个方程，解得

$$u_1 = \frac{563}{828} = 0,679952, u_2 = \frac{952}{1863} = 0.511004, u_3 = \frac{3025}{7452} = 0.405931$$

(2)对应于差分方程(10),我们得到差分方程组

$$\begin{cases} \frac{59}{27}u_1 - \frac{95}{96}u_2 = \frac{23}{24} \\ -\frac{53}{54}u_1 + \frac{101}{48}u_2 - \frac{149}{150}u_3 = 0 \\ -\frac{95}{96}u_1 + \frac{31}{15}u_3 = \frac{215}{648} \end{cases}$$

(2)对应于差分方程(10),我们得到差分方程组

$$\begin{cases} \frac{59}{27}u_1 - \frac{95}{96}u_2 = \frac{23}{24} \\ -\frac{53}{54}u_1 + \frac{101}{48}u_2 - \frac{149}{150}u_3 = 0 \\ -\frac{95}{96}u_1 + \frac{31}{15}u_3 = \frac{215}{648} \end{cases}$$

其解

$$u_1 = 0.664180, u_2 = 0.498213, u_3 = 0.399103$$

(2)对应于差分方程(10),我们得到差分方程组

$$\begin{cases} \frac{59}{27}u_1 - \frac{95}{96}u_2 = \frac{23}{24} \\ -\frac{53}{54}u_1 + \frac{101}{48}u_2 - \frac{149}{150}u_3 = 0 \\ -\frac{95}{96}u_1 + \frac{31}{15}u_3 = \frac{215}{648} \end{cases}$$

其解

$$u_1 = 0.664180, u_2 = 0.498213, u_3 = 0.399103$$

该边值问题的真解$u(x) = \frac{1}{x+2}$,于是

$$u(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}, u(0) = \frac{1}{2}, u(\frac{1}{2}) = \frac{2}{5}$$

经过比较，用差分方程(10)计算的结果比差分方程(5)好得多

作业：

1、对给定的步长$h=\frac{1}{4}$,用差分法解下列边值问题

$$\begin{cases} u^{''}+u=0 \\ u(0)=1, u(1)=1 \end{cases}$$

5、对边值问题

$$\begin{cases} -(p(x)u^{'})^{'}+r(x)u^{'}+q(x)u=f(x), \\ u(a)=\alpha, u(b)=\beta \end{cases}$$

设$p^{'}(x), q(x), r(x), f(x)\in C[a,b], p(x)>0, q(x)\geq 0$, 证明：差分方程

$$L_h u_m \equiv -\frac{1}{h^2}[p_{m+\frac{1}{2}}(u_{m+1}-u_m)-p_{m-\frac{1}{2}}(u_m-u_{m-1})]$$
$$+r_m\frac{u_{m+1}-u_{m-1}}{2h}+q_m u_m=f_m$$

的截断误差为$O(h^2)$