1.3 二阶线性偏微分方程的分类与化简

二阶线性偏微分方程的一般形式为

1.3 二阶线性偏微分方程的分类与化简

二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

其中a_{ij}, b_i, c, f都是实值函数，当$n = 2$时可以写成

1.3 二阶线性偏微分方程的分类与化简

二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

其中a_{ij}, b_i, c, f都是实值函数，当$n = 2$时可以写成

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + gu = f$$

它极类似于二次代数方程（二次曲线），但是两者之间没有必然的联系，然而人们仍利用二次曲线来划分二阶方程的类型

1.3 二阶线性偏微分方程的分类与化简

二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

其中a_{ij}, b_i, c, f都是实值函数，当$n = 2$时可以写成

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + gu = f$$

它极类似于二次代数方程（二次曲线），但是两者之间没有必然的联系，然而人们仍利用二次曲线来划分二阶方程的类型

二次曲线	二阶方程	标准形式
双曲线	双曲型方程	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$
椭圆	椭圆型方程	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$
抛物线	抛物型方程	$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$

⋆1.3.1 两个自变量的二阶线性偏微分方程的分类与化简

二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f, \quad (1.3.1)$$

目的：通过自变量的非奇异变换来化简方程的主部，从而据此分类。

⋆1.3.1 两个自变量的二阶线性偏微分方程的分类与化简

二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f, \quad (1.3.1)$$

目的：通过自变量的非奇异变换来化简方程的主部，从而据此分类。
考察自变量变换

$$\begin{cases} \xi=\xi(x,y), \\ \eta=\eta(x,y) \end{cases} \qquad (1.3.2)$$

$\star$1.3.1 两个自变量的二阶线性偏微分方程的分类与化简

二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f, \quad (1.3.1)$$

目的：通过自变量的非奇异变换来化简方程的主部，从而据此分类。
考察自变量变换

$$\begin{cases} \xi=\xi(x,y), \\ \eta=\eta(x,y) \end{cases} \qquad (1.3.2)$$

假设它的Jacobi行列式

$$J=\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}\neq 0$$

由隐函数定理知，该变换是可逆的，即存在逆变换$x=x(\xi,\eta),y=y(\xi,\eta)$

⋆1.3.1 两个自变量的二阶线性偏微分方程的分类与化简

二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f, \quad (1.3.1)$$

目的：通过自变量的非奇异变换来化简方程的主部，从而据此分类。
考察自变量变换

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y),\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases} \qquad (1.3.2)$$

假设它的Jacobi行列式

$$J=\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}\neq 0$$

由隐函数定理知，该变换是可逆的，即存在逆变换$x=x(\xi,\eta),y=y(\xi,\eta)$

直接计算，有

直接计算，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

直接计算，有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\frac{\partial \eta}{\partial x})^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\frac{\partial \xi}{\partial y})^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\frac{\partial \eta}{\partial y})^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

将以上等式带入(1.3.1)得到

$$a_{11}^{*}u_{\xi\xi}+2a_{12}^{*}u_{\xi\eta}+a_{22}^{*}u_{\eta\eta}+b_{1}^{*}u_{\xi}+b_{2}^{*}u_{\eta}+c^{*}u=f^{*}, \quad (1.3.3)$$

将以上等式带入(1.3.1)得到

$$a_{11}^{*}u_{\xi\xi}+2a_{12}^{*}u_{\xi\eta}+a_{22}^{*}u_{\eta\eta}+b_{1}^{*}u_{\xi}+b_{2}^{*}u_{\eta}+c^{*}u=f^{*}, \quad (1.3.3)$$

系数之间的关系

将以上等式带入(1.3.1)得到

$$a_{11}^{*}u_{\xi\xi}+2a_{12}^{*}u_{\xi\eta}+a_{22}^{*}u_{\eta\eta}+b_{1}^{*}u_{\xi}+b_{2}^{*}u_{\eta}+c^{*}u=f^{*},\quad(1.3.3)$$

系数之间的关系

$$a_{11}^{*}=a_{11}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^{2}+2a_{12}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^{2}$$

$$a_{12}^{*}=a_{11}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+a_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)+a_{22}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

$$a_{22}^{*}=a_{11}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^{2}+2a_{12}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^{2}$$

其他系数之间的关系

其他系数之间的关系

$$b_1^* = a_{11}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial\xi}{\partial x} + b_2\frac{\partial\xi}{\partial y},$$

$$b_2^* = a_{11}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial\eta}{\partial x} + b_2\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

$$c^* = c(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)), f^* = f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$$

- 我们希望选取一个变换(1.3.2),使得方程（1.3.3）有比（1.3.1）更简单的形式
- 其中a_{11}^*, a_{22}^*具有相同的形式
- 如果

$$a_{11}\phi_x^2 + 2a_{12}\phi_x\phi_y + a_{22}\phi_y^2 = 0, \qquad (1.3.5)$$

- 我们希望选取一个变换(1.3.2),使得方程（1.3.3）有比（1.3.1）更简单的形式
- 其中a_{11}^*, a_{22}^*具有相同的形式
- 如果

$$a_{11}\phi_x^2 + 2a_{12}\phi_x\phi_y + a_{22}\phi_y^2 = 0, \tag{1.3.5}$$

有两个相互独立的解$\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)$,那么取

$$\xi = \phi_1(x, y), \eta = \phi_2(x, y)$$

- 我们希望选取一个变换(1.3.2),使得方程（1.3.3）有比（1.3.1）更简单的形式
- 其中a_{11}^*, a_{22}^*具有相同的形式
- 如果

$$a_{11}\phi_x^2 + 2a_{12}\phi_x\phi_y + a_{22}\phi_y^2 = 0, \tag{1.3.5}$$

有两个相互独立的解$\phi_1(x,y), \phi_2(x,y)$,那么取

$$\xi = \phi_1(x,y), \eta = \phi_2(x,y)$$

- 就能保证$a_{11}^* = a_{22}^* = 0$,从而方程得到简化。

- 我们希望选取一个变换(1.3.2),使得方程（1.3.3）有比（1.3.1）更简单的形式
- 其中a_{11}^*, a_{22}^*具有相同的形式
- 如果

$$a_{11}\phi_x^2 + 2a_{12}\phi_x\phi_y + a_{22}\phi_y^2 = 0, \tag{1.3.5}$$

有两个相互独立的解$\phi_1(x,y), \phi_2(x,y)$,那么取

$$\xi = \phi_1(x,y), \eta = \phi_2(x,y)$$

- 就能保证$a_{11}^* = a_{22}^* = 0$,从而方程得到简化。
- 所以，方程（1.3.5）的解的结构对方程（1.3.1）的化简至关重要

假设$\phi_x^2+\phi_y^2\neq 0$,用ϕ_y^2除方程(1.3.5),得

$$a_{11}(\frac{\phi_x}{\phi_y})^2+2a_{12}\frac{\phi_x}{\phi_y}+a_{22}=0. \tag{1.3.6}$$

沿着曲线$\phi(x,y)=c$，有

$$d\phi=\phi_x dx+\phi_y dy=0$$

于是

假设$\phi_x^2+\phi_y^2\neq 0$,用ϕ_y^2除方程(1.3.5),得

$$a_{11}\left(\frac{\phi_x}{\phi_y}\right)^2+2a_{12}\frac{\phi_x}{\phi_y}+a_{22}=0. \tag{1.3.6}$$

沿着曲线$\phi(x,y)=c$，有

$$d\phi=\phi_x dx+\phi_y dy=0$$

于是

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\phi_x}{\phi_y}.$$

假设$\phi_x^2+\phi_y^2\neq 0$,用ϕ_y^2除方程(1.3.5),得

$$a_{11}(\frac{\phi_x}{\phi_y})^2+2a_{12}\frac{\phi_x}{\phi_y}+a_{22}=0. \qquad (1.3.6)$$

沿着曲线$\phi(x,y)=c$，有

$$d\phi=\phi_x dx+\phi_y dy=0$$

于是

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\phi_x}{\phi_y}.$$

方程(1.3.6)变成

$$a_{11}(dy)^2-2a_{12}dxdy+a_{22}(dx)^2=0, \qquad (1.3.7)$$

假设$\phi_x^2+\phi_y^2\neq 0$,用ϕ_y^2除方程(1.3.5),得

$$a_{11}(\frac{\phi_x}{\phi_y})^2+2a_{12}\frac{\phi_x}{\phi_y}+a_{22}=0. \qquad (1.3.6)$$

沿着曲线$\phi(x,y)=c$，有

$$d\phi=\phi_x dx+\phi_y dy=0$$

于是

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\phi_x}{\phi_y}.$$

方程(1.3.6)变成

$$a_{11}(dy)^2-2a_{12}dxdy+a_{22}(dx)^2=0, \qquad (1.3.7)$$

- 如果$\phi = \phi(x,y)$是方程(1.3.5)的解，则$\phi(x,y) = C$是方程（1.3.7）的一簇积分曲线

- 如果$\phi = \phi(x,y)$是方程(1.3.5)的解，则$\phi(x,y) = C$是方程（1.3.7）的一簇积分曲线
- 反之，若$\phi(x,y) = C$是方程(1.3.7)的一簇积分曲线且$\phi_x^2 + \phi_y^2 \neq 0$,则$\phi = \phi(x,y)$是方程(1.3.5)的解

- 如果$\phi = \phi(x,y)$是方程(1.3.5)的解，则$\phi(x,y) = C$是方程（1.3.7）的一簇积分曲线
- 反之，若$\phi(x,y) = C$是方程(1.3.7)的一簇积分曲线且$\phi_x^2+\phi_y^2 \neq 0$,则$\phi = \phi(x,y)$是方程(1.3.5)的解
- 解方程（1.3.5）等价于求解方程（1.3.7）

- 如果$\phi = \phi(x,y)$是方程(1.3.5)的解，则$\phi(x,y) = C$是方程（1.3.7）的一簇积分曲线
- 反之，若$\phi(x,y) = C$是方程(1.3.7)的一簇积分曲线且$\phi_x^2 + \phi_y^2 \neq 0$,则$\phi = \phi(x,y)$是方程(1.3.5)的解
- 解方程（1.3.5）等价于求解方程（1.3.7）
- 常微分方程(1.3.7)称为偏微分方程(1.3.1)的特征方程，其积分曲线称为方程（1.3.1）的特征线。

记$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.易证$\Delta^* = a_{12}^{*2} - a_{11}^*a_{22}^* = \Delta \times J^2$,因此在变换(1.3.2)之下，$\Delta$的符号不变，利用$\Delta$的符号来讨论方程(1.3.7)解及相应的变换

记$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.易证$\Delta^* = a_{12}^{*2} - a_{11}^*a_{22}^* = \Delta \times J^2$,因此在变换(1.3.2)之下，$\Delta$的符号不变，利用$\Delta$的符号来讨论方程(1.3.7)解及相应的变换

(1)在(x_0, y_0)的邻域内$\Delta > 0$，方程(1.3.7)可分解为

记$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.易证$\Delta^* = a_{12}^{*2} - a_{11}^*a_{22}^* = \Delta \times J^2$,因此在变换(1.3.2)之下，$\Delta$的符号不变，利用$\Delta$的符号来讨论方程(1.3.7)解及相应的变换

(1)在(x_0, y_0)的邻域内$\Delta > 0$，方程(1.3.7)可分解为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$$

记$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.易证$\Delta^* = a_{12}^{*2} - a_{11}^* a_{22}^* = \Delta \times J^2$,因此在变换(1.3.2)之下，$\Delta$的符号不变，利用$\Delta$的符号来讨论方程(1.3.7)解及相应的变换

(1)在(x_0, y_0)的邻域内$\Delta > 0$，方程(1.3.7)可分解为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$$

存在两簇不同的积分曲线$\phi_1 = c_1, \phi_2 = c_2$，且函数$\phi_1, \phi_2$无关，做变换

记$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.易证$\Delta^* = a_{12}^{*2} - a_{11}^* a_{22}^* = \Delta \times J^2$,因此在变换(1.3.2)之下，$\Delta$的符号不变，利用$\Delta$的符号来讨论方程(1.3.7)解及相应的变换
(1)在(x_0, y_0)的邻域内$\Delta > 0$，方程(1.3.7)可分解为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$$

存在两簇不同的积分曲线$\phi_1 = c_1, \phi_2 = c_2$，且函数$\phi_1, \phi_2$无关，做变换

$$\xi = \phi_1(x, y), \eta = \phi_2(x, y)$$

记$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.易证$\Delta^* = a_{12}^{*2} - a_{11}^*a_{22}^* = \Delta \times J^2$,因此在变换(1.3.2)之下，$\Delta$的符号不变，利用$\Delta$的符号来讨论方程(1.3.7)解及相应的变换
(1)在(x_0, y_0)的邻域内$\Delta > 0$，方程(1.3.7)可分解为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$$

存在两簇不同的积分曲线$\phi_1 = c_1, \phi_2 = c_2$，且函数$\phi_1, \phi_2$无关，做变换

$$\xi = \phi_1(x, y), \eta = \phi_2(x, y)$$

此时$a_{11}^* = a_{22}^* = 0$,方程(1.3.3)可以化简成

记$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.易证$\Delta^* = a_{12}^{*2} - a_{11}^* a_{22}^* = \Delta \times J^2$,因此在变换(1.3.2)之下，$\Delta$的符号不变，利用$\Delta$的符号来讨论方程(1.3.7)解及相应的变换

(1)在(x_0, y_0)的邻域内$\Delta > 0$，方程(1.3.7)可分解为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$$

存在两簇不同的积分曲线$\phi_1 = c_1, \phi_2 = c_2$，且函数$\phi_1, \phi_2$无关，做变换

$$\xi = \phi_1(x, y), \eta = \phi_2(x, y)$$

此时$a_{11}^* = a_{22}^* = 0$,方程(1.3.3)可以化简成

$$u_{\xi\eta} = Au_\xi + Bu_\eta + Cu + D$$

记$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.易证$\Delta^* = a_{12}^{*2} - a_{11}^* a_{22}^* = \Delta \times J^2$,因此在变换(1.3.2)之下，$\Delta$的符号不变，利用$\Delta$的符号来讨论方程(1.3.7)解及相应的变换

(1)在(x_0, y_0)的邻域内$\Delta > 0$，方程(1.3.7)可分解为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$$

存在两簇不同的积分曲线$\phi_1 = c_1, \phi_2 = c_2$，且函数$\phi_1, \phi_2$无关，做变换

$$\xi = \phi_1(x, y), \eta = \phi_2(x, y)$$

此时$a_{11}^* = a_{22}^* = 0$,方程(1.3.3)可以化简成

$$u_{\xi\eta} = Au_\xi + Bu_\eta + Cu + D$$

若令$s=\xi+\eta, t=\xi-\eta$,又可进一步化简成

若令$s = \xi + \eta, t = \xi - \eta$,又可进一步化简成

$$u_{tt} - u_{ss} = A_1 u_t + B_1 u_s + C_1 u + D_1. \qquad (1.3.8)$$

若令$s=\xi+\eta, t=\xi-\eta$,又可进一步化简成

$$u_{tt}-u_{ss}=A_1u_t+B_1u_s+C_1u+D_1. \tag{1.3.8}$$

结论:

若令$s=\xi+\eta, t=\xi-\eta$,又可进一步化简成

$$u_{tt}-u_{ss}=A_1u_t+B_1u_s+C_1u+D_1. \qquad (1.3.8)$$

结论:

- 如果在(x_0,y_0)处$\Delta = a_{12}^2-a_{11}a_{22} > 0$,则称方程(1.3.1)在点$(x_0,y_0)$处是**双曲型**.

若令$s=\xi+\eta, t=\xi-\eta$,又可进一步化简成

$$u_{tt}-u_{ss}=A_1u_t+B_1u_s+C_1u+D_1. \qquad (1.3.8)$$

结论:

- 如果在(x_0,y_0)处$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,则称方程(1.3.1)在点$(x_0,y_0)$处是**双曲型**.
- 若在(x_0,y_0)的邻域内是双曲型的，则在该邻域内方程可化简成形如方程(1.3.8)的标准型。

若令$s=\xi+\eta, t=\xi-\eta$,又可进一步化简成

$$u_{tt}-u_{ss}=A_1u_t+B_1u_s+C_1u+D_1. \qquad (1.3.8)$$

结论:

- 如果在(x_0,y_0)处$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,则称方程(1.3.1)在点$(x_0,y_0)$处是**双曲型**.
- 若在(x_0,y_0)的邻域内是双曲型的，则在该邻域内方程可化简成形如方程(1.3.8)的标准型。
- 如果方程（1.3.1）在每一点$(x,y)\in\Omega$处都是双曲型的，则称它在Ω中是双曲型的

(2)在(x_0, y_0)的邻域内$\Delta = 0$, 此时方程(1.3.7)可化简成

(2)在(x_0, y_0)的邻域内$\Delta = 0$, 此时方程(1.3.7)可化简成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

(2)在(x_0, y_0)的邻域内$\Delta = 0$, 此时方程(1.3.7)可化简成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

由此解出一簇积分曲线$\phi_1(x, y) = c$，再任取与$\phi_1(x, y)$无关的$\phi_2(x, y)$，做变换

$$\xi = \phi_1(x, y), \eta = \phi_2(x, y)$$

(2)在(x_0, y_0)的邻域内$\Delta = 0$, 此时方程(1.3.7)可化简成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

由此解出一簇积分曲线$\phi_1(x, y) = c$，再任取与$\phi_1(x, y)$无关的$\phi_2(x, y)$，做变换

$$\xi = \phi_1(x, y), \eta = \phi_2(x, y)$$

则有$a_{11}^* = 0$。由$\Delta = 0$推出$\Delta^* = 0$,所以$a_{12}^* = 0$,可证明$a_{22}^* \neq 0$，于是方程(1.3.1)化简成

(2)在(x_0, y_0)的邻域内$\Delta = 0$, 此时方程(1.3.7)可化简成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

由此解出一簇积分曲线$\phi_1(x, y) = c$，再任取与$\phi_1(x, y)$无关的$\phi_2(x, y)$，做变换

$$\xi = \phi_1(x, y), \eta = \phi_2(x, y)$$

则有$a_{11}^* = 0$。由$\Delta = 0$推出$\Delta^* = 0$,所以$a_{12}^* = 0$,可证明$a_{22}^* \neq 0$，于是方程(1.3.1)化简成

$$u_{\eta\eta} = Au_\xi + Bu_\eta + Cu + D.$$

(2)在(x_0,y_0)的邻域内$\Delta=0$, 此时方程(1.3.7)可化简成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}}{a_{11}}$$

由此解出一簇积分曲线$\phi_1(x,y)=c$，再任取与$\phi_1(x,y)$无关的$\phi_2(x,y)$，做变换

$$\xi=\phi_1(x,y),\eta=\phi_2(x,y)$$

则有$a_{11}^*=0$。由$\Delta=0$推出$\Delta^*=0$,所以$a_{12}^*=0$,可证明$a_{22}^*\neq 0$，于是方程(1.3.1)化简成

$$u_{\eta\eta}=Au_\xi+Bu_\eta+Cu+D.$$

若再令

若再令

$$v = u\exp\{-\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} B(\xi,\tau)d\tau\}$$

若再令

$$v = u\exp\{-\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} B(\xi,\tau)d\tau\}$$

可进一步化简成

若再令

$$v = u\exp\{-\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} B(\xi,\tau)d\tau\}$$

可进一步化简成

$$v_{\eta\eta} = A_1 v_\xi + C_1 v + D_1, \qquad (1.3.9)$$

若再令

$$v = u\exp\{-\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} B(\xi,\tau)d\tau\}$$

可进一步化简成

$$v_{\eta\eta} = A_1 v_\xi + C_1 v + D_1, \tag{1.3.9}$$

结论:

- 如果在(x_0, y_0)处$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \equiv 0$,则称以上方程在点$(x_0, y_0)$处是**抛物型**.

若再令

$$v = u\exp\{-\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} B(\xi,\tau)d\tau\}$$

可进一步化简成

$$v_{\eta\eta} = A_1 v_\xi + C_1 v + D_1, \qquad (1.3.9)$$

结论:

- 如果在(x_0, y_0)处$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \equiv 0$,则称以上方程在点$(x_0, y_0)$处是**抛物型**.
- 若在(x_0, y_0)的邻域内是抛物型的，则在该邻域内方程可化简成(1.3.9)的标准型

若再令

$$v = u\exp\{-\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} B(\xi,\tau)d\tau\}$$

可进一步化简成

$$v_{\eta\eta} = A_1 v_\xi + C_1 v + D_1, \qquad (1.3.9)$$

结论:

- 如果在(x_0, y_0)处$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \equiv 0$,则称以上方程在点$(x_0, y_0)$处是**抛物型**.
- 若在(x_0, y_0)的邻域内是抛物型的，则在该邻域内方程可化简成(1.3.9)的标准型
- 如果方程（1.3.1）在每一点$(x, y) \in \Omega$处都是抛物型的，则称它在Ω中是抛物型的

(3)在(x_0, y_0)的邻域内$\Delta < 0$, 此时方程(1.3.7)对应的二次方程无实根，但有两个共轭负根：$\alpha(x,y) \pm i\beta(x,y)$,由$\frac{dy}{dx} = \alpha(x,y) \pm i\beta(x,y)$解出方程（1.3.7）

(3)在(x_0, y_0)的邻域内$\Delta < 0$, 此时方程(1.3.7)对应的二次方程无实根，但有两个共轭负根：$\alpha(x,y) \pm i\beta(x,y)$,由$\frac{dy}{dx} = \alpha(x,y) \pm i\beta(x,y)$解出方程（1.3.7）

$$\phi(x,y) = \phi_1(x,y) \pm i\phi_2(x,y) = c_\pm$$

其中ϕ_1, ϕ_2都是实值函数。做变换

$$\xi = \phi_1(x,y), \;\; \eta = \phi_2(x,y)$$

(3)在(x_0, y_0)的邻域内$\Delta < 0$, 此时方程(1.3.7)对应的二次方程无实根，但有两个共轭负根：$\alpha(x,y) \pm i\beta(x,y)$,由$\frac{dy}{dx} = \alpha(x,y) \pm i\beta(x,y)$解出方程（1.3.7）

$$\phi(x,y) = \phi_1(x,y) \pm i\phi_2(x,y) = c_\pm$$

其中ϕ_1, ϕ_2都是实值函数。做变换

$$\xi = \phi_1(x,y), \quad \eta = \phi_2(x,y)$$

简单计算可知$a_{11}^* = a_{22}^*, a_{12}^* = 0$,此时方程(1.3.1)化简成

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = Au_\xi + Bu_\eta + Cu + D, \qquad (1.3.10)$$

(3)在(x_0,y_0)的邻域内$\Delta < 0$, 此时方程(1.3.7)对应的二次方程无实根，但有两个共轭负根：$\alpha(x,y) \pm i\beta(x,y)$,由$\frac{dy}{dx} = \alpha(x,y) \pm i\beta(x,y)$解出方程（1.3.7）

$$\phi(x,y) = \phi_1(x,y) \pm i\phi_2(x,y) = c_\pm$$

其中ϕ_1, ϕ_2都是实值函数。做变换

$$\xi = \phi_1(x,y), \quad \eta = \phi_2(x,y)$$

简单计算可知$a_{11}^* = a_{22}^*, a_{12}^* = 0$,此时方程(1.3.1)化简成

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = Au_\xi + Bu_\eta + Cu + D, \qquad (1.3.10)$$

结论:

- 如果在(x_0, y_0)处$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,则称以上方程在点$(x_0, y_0)$处是**椭圆型**.

结论:

- 如果在(x_0, y_0)处$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,则称以上方程在点$(x_0, y_0)$处是**椭圆型**.
- 若在(x_0, y_0)的邻域内是椭圆型的，则在该邻域内方程可化简成(1.3.10)的标准型。

结论:

- 如果在(x_0,y_0)处$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$,则称以上方程在点$(x_0,y_0)$处是**椭圆型**.
- 若在(x_0,y_0)的邻域内是椭圆型的，则在该邻域内方程可化简成(1.3.10)的标准型。
- 如果方程（1.3.1）在每一点$(x,y)\in\Omega$处都是椭圆型的，则称它在Ω中是椭圆型的

Home Page

Title Page

Go Back

Full Screen

Close

Quit

结论:

- 如果在(x_0,y_0)处$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$,则称以上方程在点$(x_0,y_0)$处是**椭圆型**.
- 若在(x_0,y_0)的邻域内是椭圆型的，则在该邻域内方程可化简成(1.3.10)的标准型。
- 如果方程（1.3.1）在每一点$(x,y)\in\Omega$处都是椭圆型的，则称它在Ω中是椭圆型的

注意:

1、若方程在Ω的某一部分上是某一种类型的，而在Ω其余部分上是另一种类型的，则称它在Ω上是混合型的。

结论:

- 如果在(x_0,y_0)处$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$,则称以上方程在点$(x_0,y_0)$处是**椭圆型**.
- 若在(x_0,y_0)的邻域内是椭圆型的，则在该邻域内方程可化简成(1.3.10)的标准型。
- 如果方程（1.3.1）在每一点$(x,y)\in\Omega$处都是椭圆型的，则称它在Ω中是椭圆型的

注意:
1、若方程在Ω的某一部分上是某一种类型的，而在Ω其余部分上是另一种类型的，则称它在Ω上是混合型的。
2、在一般形式的偏微分方程化成标准型的过程中，如果采用的变换不同，得到的标准形式也会不同，但主阶项（高阶项）的形式不会改变

例1.3.1 $yu_{xx}+u_{yy}-u_x=0$

例1.3.1 $yu_{xx} + u_{yy} - u_x = 0$

解： $a_{11} = y, a_{12} = 0, a_{22} = 1$,所以$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y$,

例1.3.1 $yu_{xx}+u_{yy}-u_x=0$

解： $a_{11}=y, a_{12}=0, a_{22}=1$,所以$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-y$,

当$y>0$时，$\Delta<0$,是椭圆型方程

当$y<0$时，$\Delta>0$,是双曲型方程

当$y=0$时，$\Delta=0$,是抛物型方程

例1.3.2

$$x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0,(x,y)\in\Omega,(0,0)\notin\Omega$$

例1.3.2

$$x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0,(x,y)\in\Omega,(0,0)\notin\Omega$$

解：当$x=0,y\neq 0$时，方程化为$u_{yy}=0$

例1.3.2

$$x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0,(x,y)\in\Omega,(0,0)\notin\Omega$$

解：当$x=0,y\neq 0$时，方程化为$u_{yy}=0$
当$y=0,x\neq 0$时，方程化为$u_{xx}=0$

例1.3.2

$$x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0,(x,y)\in\Omega,(0,0)\notin\Omega$$

解：当$x=0,y\neq 0$时，方程化为$u_{yy}=0$
当$y=0,x\neq 0$时，方程化为$u_{xx}=0$
当$x\neq 0,y\neq 0$时，$\Delta=x^2y^2-x^2y^2=0$,所以方程是抛物型方程,

例1.3.2

$$x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0,(x,y)\in\Omega,(0,0)\notin\Omega$$

解：当$x=0,y\neq 0$时，方程化为$u_{yy}=0$
当$y=0,x\neq 0$时，方程化为$u_{xx}=0$
当$x\neq 0,y\neq 0$时，$\Delta=x^2y^2-x^2y^2=0$,所以方程是抛物型方程,对应的特征方程是

$$x^2dy^2-2xydxdy+y^2dx^2=0$$

例1.3.2

$$x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0,(x,y)\in\Omega,(0,0)\notin\Omega$$

解：当$x=0,y\neq 0$时，方程化为$u_{yy}=0$
当$y=0,x\neq 0$时，方程化为$u_{xx}=0$
当$x\neq 0,y\neq 0$时，$\Delta=x^2y^2-x^2y^2=0$,所以方程是抛物型方程,对应的特征方程是

$$x^2dy^2-2xydxdy+y^2dx^2=0$$

$$\Rightarrow (xdy-ydx)^2=0,\text{或}\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

由此解出一簇积分曲线（特征线）$y=Cx$,做变换

例1.3.2

$$x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0,(x,y)\in\Omega,(0,0)\notin\Omega$$

解：当$x=0,y\neq 0$时，方程化为$u_{yy}=0$
当$y=0,x\neq 0$时，方程化为$u_{xx}=0$
当$x\neq 0,y\neq 0$时，$\Delta=x^2y^2-x^2y^2=0$,所以方程是抛物型方程,对应的特征方程是

$$x^2dy^2-2xydxdy+y^2dx^2=0$$

$$\Rightarrow (xdy-ydx)^2=0,\text{或}\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

由此解出一簇积分曲线（特征线）$y=Cx$,做变换

$$\xi=\frac{x}{y},\eta=y$$

原方程可化为

$$u_{\eta\eta}=0$$

例1.3.3

$$u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0$$

例1.3.3

$$u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3+\sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0$$

解：因为

$$\Delta = \cos^2 x + 3 + \sin^2 x = 4 > 0,$$

所以方程是双曲型方程。

例1.3.3

$$u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3+\sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0$$

解：因为

$$\Delta = \cos^2 x + 3 + \sin^2 x = 4 > 0,$$

所以方程是双曲型方程。对应的特征方程是

$$dy^2 + 2\cos x dx dy - (3+\sin^2 x)dx^2 = 0$$

它可分解为两个方程

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x - 2, \frac{dy}{dx} = -\cos x + 2$$

例1.3.3

$$u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3+\sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0$$

解：因为

$$\Delta = \cos^2 x + 3 + \sin^2 x = 4 > 0,$$

所以方程是双曲型方程。对应的特征方程是

$$dy^2 + 2\cos x dxdy - (3+\sin^2 x)dx^2 = 0$$

它可分解为两个方程

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x - 2, \frac{dy}{dx} = -\cos x + 2$$

解得两簇特征线（积分曲线）

$$y + \sin x + 2x = C_1, y + \sin x - 2x = C_2$$

例1.3.3

$$u_{xx}-2\cos x u_{xy}-(3+\sin^2 x)u_{yy}-yu_y=0$$

解：因为

$$\Delta=\cos^2 x+3+\sin^2 x=4>0,$$

所以方程是双曲型方程。对应的特征方程是

$$dy^2+2\cos x dxdy-(3+\sin^2 x)dx^2=0$$

它可分解为两个方程

$$\frac{dy}{dx}=-\cos x-2,\frac{dy}{dx}=-\cos x+2$$

解得两簇特征线（积分曲线）

$$y+\sin x+2x=C_1,y+\sin x-2x=C_2$$

选取变换

$$\xi=y+\sin x+2x,\eta=y+\sin x-2x$$

例1.3.3

$$u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0$$

解：因为

$$\Delta = \cos^2 x + 3 + \sin^2 x = 4 > 0,$$

所以方程是双曲型方程。对应的特征方程是

$$dy^2 + 2\cos x dx dy - (3 + \sin^2 x)dx^2 = 0$$

它可分解为两个方程

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x - 2, \frac{dy}{dx} = -\cos x + 2$$

解得两簇特征线（积分曲线）

$$y + \sin x + 2x = C_1, y + \sin x - 2x = C_2$$

选取变换

$$\xi = y + \sin x + 2x, \eta = y + \sin x - 2x$$

原方程可化为

$$u_{\xi\eta} + \frac{\xi + \eta}{32}(u_\xi + u_\eta) = 0$$

例题：判断方程的类型，化简为标准形式，求出通解的表达形式

$$u_{xx} + u_{xy} = 0$$

例题：判断方程的类型，化简为标准形式，求出通解的表达形式

$$u_{xx} + u_{xy} = 0$$

解：$\Delta = (1/2)^2 - 1 \times 0 = \frac{1}{4} > 0$, 所以方程是双曲型方程

例题：判断方程的类型，化简为标准形式，求出通解的表达形式

$$u_{xx} + u_{xy} = 0$$

解：$\Delta = (1/2)^2 - 1 \times 0 = \frac{1}{4} > 0$, 所以方程是双曲型方程

特征方程

$$(dy)^2 - dxdy = 0$$

$$\Rightarrow (dy - dx)dy = 0 \Rightarrow y - x = c_1, y = c_2$$

例题：判断方程的类型，化简为标准形式，求出通解的表达形式

$$u_{xx} + u_{xy} = 0$$

解：$\Delta = (1/2)^2 - 1 \times 0 = \frac{1}{4} > 0$, 所以方程是双曲型方程

特征方程

$$(dy)^2 - dxdy = 0$$

$$\Rightarrow (dy - dx)dy = 0 \Rightarrow y - x = c_1, y = c_2$$

令

$$\xi = y - x, \eta = y$$

原方程可化为

例题：判断方程的类型，化简为标准形式，求出通解的表达形式

$$u_{xx} + u_{xy} = 0$$

解：$\Delta = (1/2)^2 - 1 \times 0 = \frac{1}{4} > 0$, 所以方程是双曲型方程
特征方程

$$(dy)^2 - dxdy = 0$$

$$\Rightarrow (dy - dx)dy = 0 \Rightarrow y - x = c_1, y = c_2$$

令

$$\xi = y - x, \eta = y$$

原方程可化为

$$u_{\xi\eta} = 0$$

左右两端关于ξ积分$\Rightarrow u_\eta = g(\eta)$,再关于$\eta$积分，假设$g(\eta)$的原函数为$G(\eta)$

$$u = F(\xi) + G(\eta)$$

例题：判断方程的类型，化简为标准形式，求出通解的表达形式

$$u_{xx} + u_{xy} = 0$$

解：$\Delta = (1/2)^2 - 1 \times 0 = \frac{1}{4} > 0$, 所以方程是双曲型方程
特征方程

$$(dy)^2 - dxdy = 0$$

$$\Rightarrow (dy - dx)dy = 0 \Rightarrow y - x = c_1, y = c_2$$

令

$$\xi = y - x, \eta = y$$

原方程可化为

$$u_{\xi\eta} = 0$$

左右两端关于ξ积分$\Rightarrow u_\eta = g(\eta)$,再关于$\eta$积分，假设$g(\eta)$的原函数为$G(\eta)$

$$u = F(\xi) + G(\eta)$$

所以原方程的通解为

$$u(x, y) = F(y - x) + G(y)$$

其中$F(y - x), G(y)$关于$y - x, y$的任意的二次连续可微的函数

关于二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f,$$

的分类；化简；通解三个问题，注意以下几点：

Home Page

Title Page

Go Back

Full Screen

Close

Quit

关于二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f,$$

的分类；化简；通解三个问题，注意以下几点：

- 判断方程的类型：根据$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$的符号，$\Delta>0$,双曲型；$\Delta=0$，抛物型；$\Delta<0$,椭圆型

关于二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f,$$

的分类；化简；通解三个问题，注意以下几点：

- 判断方程的类型：根据$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$的符号，$\Delta > 0$,双曲型；$\Delta = 0$，抛物型；$\Delta < 0$,椭圆型
- 化成标准形时所作的自变量非奇异变换：根据特征方程积分曲线的情况；

关于二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f,$$

的分类；化简；通解三个问题，注意以下几点：

- 判断方程的类型：根据$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$的符号，$\Delta > 0$,双曲型；$\Delta = 0$，抛物型；$\Delta < 0$,椭圆型
- 化成标准形时所作的自变量非奇异变换：根据特征方程积分曲线的情况；(1)$\Delta > 0$时，根据特征方程的两簇不同的积分曲线，给出ξ, η的变换

Home Page

Title Page

Go Back

Full Screen

Close

Quit

关于二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f,$$

的分类；化简；通解三个问题，注意以下几点：

- 判断方程的类型：根据$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$的符号，$\Delta>0$,双曲型；$\Delta=0$，抛物型；$\Delta<0$,椭圆型
- 化成标准形时所作的自变量非奇异变换：根据特征方程积分曲线的情况；(1)$\Delta>0$时，根据特征方程的两簇不同的积分曲线，给出ξ,η的变换
  (2)$\Delta=0$时，根据特征方程的一簇积分曲线，给出一个变量的变换，再选取一个和它无关的函数作为第二个变量的变换。(可以利用Jacobi行列式验证两个函数是否无关）

关于二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f,$$

的分类；化简；通解三个问题，注意以下几点：

- 判断方程的类型：根据$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$的符号，$\Delta > 0$,双曲型；$\Delta = 0$，抛物型；$\Delta < 0$,椭圆型
- 化成标准形时所作的自变量非奇异变换：根据特征方程积分曲线的情况；(1)$\Delta > 0$时，根据特征方程的两簇不同的积分曲线，给出ξ, η的变换
  (2)$\Delta = 0$时，根据特征方程的一簇积分曲线，给出一个变量的变换，再选取一个和它无关的函数作为第二个变量的变换。(可以利用Jacobi行列式验证两个函数是否无关)
  (3)$\Delta < 0$时,根据特征方程复形式的积分曲线的实部和虚部的函数给出相应的变换

关于二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f,$$

的分类；化简；通解三个问题，注意以下几点：

- 判断方程的类型：根据$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$的符号，$\Delta > 0$,双曲型；$\Delta = 0$，抛物型；$\Delta < 0$,椭圆型
- 化成标准形时所作的自变量非奇异变换：根据特征方程积分曲线的情况；(1)$\Delta > 0$时，根据特征方程的两簇不同的积分曲线，给出ξ, η的变换
(2)$\Delta = 0$时，根据特征方程的一簇积分曲线，给出一个变量的变换，再选取一个和它无关的函数作为第二个变量的变换。(可以利用Jacobi行列式验证两个函数是否无关）
(3)$\Delta < 0$时,根据特征方程复形式的积分曲线的实部和虚部的函数给出相应的变换
- 偏微分方程求通解时：左右两端关于一个变量积分时，要加上其他自变量的任意函数。

关于二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f,$$

的分类；化简；通解三个问题，注意以下几点：

- 判断方程的类型：根据$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$的符号，$\Delta>0$,双曲型；$\Delta=0$，抛物型；$\Delta<0$,椭圆型
- 化成标准形时所作的自变量非奇异变换：根据特征方程积分曲线的情况；(1)$\Delta>0$时，根据特征方程的两簇不同的积分曲线，给出ξ,η的变换
(2)$\Delta=0$时，根据特征方程的一簇积分曲线，给出一个变量的变换，再选取一个和它无关的函数作为第二个变量的变换。(可以利用Jacobi行列式验证两个函数是否无关）
(3)$\Delta<0$时,根据特征方程复形式的积分曲线的实部和虚部的函数给出相应的变换
- 偏微分方程求通解时：左右两端关于一个变量积分时，要加上其他自变量的任意函数。
- 特征方程的表达形式中dxdy的系数是$-2a_{12}$

关于二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f,$$

的分类；化简；通解三个问题，注意以下几点：

- 判断方程的类型：根据$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$的符号，$\Delta > 0$,双曲型；$\Delta = 0$，抛物型；$\Delta < 0$,椭圆型
- 化成标准形时所作的自变量非奇异变换：根据特征方程积分曲线的情况；(1)$\Delta > 0$时，根据特征方程的两簇不同的积分曲线，给出ξ, η的变换
  (2)$\Delta = 0$时，根据特征方程的一簇积分曲线，给出一个变量的变换，再选取一个和它无关的函数作为第二个变量的变换。(可以利用Jacobi行列式验证两个函数是否无关)
  (3)$\Delta < 0$时,根据特征方程复形式的积分曲线的实部和虚部的函数给出相应的变换
- 偏微分方程求通解时：左右两端关于一个变量积分时，要加上其他自变量的任意函数。
- 特征方程的表达形式中dxdy的系数是$-2a_{12}$
- a_{12}的值等于方程中u_{xy}前面系数的$\frac{1}{2}$

关于二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f,$$

的分类；化简；通解三个问题，注意以下几点：

- 判断方程的类型：根据$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$的符号，$\Delta > 0$,双曲型；$\Delta = 0$，抛物型；$\Delta < 0$,椭圆型
- 化成标准形时所作的自变量非奇异变换：根据特征方程积分曲线的情况；(1)$\Delta > 0$时，根据特征方程的两簇不同的积分曲线，给出ξ, η的变换
(2)$\Delta = 0$时，根据特征方程的一簇积分曲线，给出一个变量的变换，再选取一个和它无关的函数作为第二个变量的变换。(可以利用Jacobi行列式验证两个函数是否无关）
(3)$\Delta < 0$时,根据特征方程复形式的积分曲线的实部和虚部的函数给出相应的变换
- 偏微分方程求通解时：左右两端关于一个变量积分时，要加上其他自变量的任意函数。
- 特征方程的表达形式中dxdy的系数是$-2a_{12}$
- a_{12}的值等于方程中u_{xy}前面系数的$\frac{1}{2}$
- 椭圆型的“椭”字不要写错

作业：P23

1.8、判断方程的类型

(1)$y^2u_{xx}+x^3u_{yy}=0$

(3)$u_{xx}+(x^2+y)u_{yy}=0$

1.9、化简下列方程为标准形式

(1)$u_{xx}+2u_{xy}+3u_{yy}+u_x+u_y=0$

(3)$u_{xx}-4u_{xy}+4u_{yy}=\sin y$

1.10、确定下列方程的通解

(1)$u_{xx}+3u_{xy}+2u_{yy}=0$

⋆1.3.2 多个自变量的二阶线性偏微分方程的分类

⋆1.3.2 多个自变量的二阶线性偏微分方程的分类

对于两个自变量的二阶线性偏微分方程，根据Δ的符号来分类；下面从另外一个角度分析，写出(1.3.1)的主部系数组成的矩阵

⋆1.3.2 多个自变量的二阶线性偏微分方程的分类

对于两个自变量的二阶线性偏微分方程，根据Δ的符号来分类；下面从另外一个角度分析，写出(1.3.1)的主部系数组成的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Home Page
Title Page
Page 21 of 26
Go Back
Full Screen
Close
Quit

$\star$1.3.2 多个自变量的二阶线性偏微分方程的分类

对于两个自变量的二阶线性偏微分方程，根据Δ的符号来分类；下面从另外一个角度分析，写出(1.3.1)的主部系数组成的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

以及对应的二次型

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2$$

⋆1.3.2 多个自变量的二阶线性偏微分方程的分类

对于两个自变量的二阶线性偏微分方程，根据Δ的符号来分类；下面从另外一个角度分析，写出(1.3.1)的主部系数组成的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

以及对应的二次型

$$Q(\lambda_1,\lambda_2)=a_{11}\lambda_1^2+2a_{12}\lambda_1\lambda_2+a_{22}\lambda_2^2$$

记A的两个特征值为λ_1,λ_2,则有

$$\lambda_1\lambda_2=\mathbf{det}A=-\Delta.$$

（第一个等号是根据矩阵的所有特征值的乘积等于行列式的值）

根据前面介绍的方程的分类，我们可知：

- 若方程是双曲型的，即$\Delta > 0$,则$\lambda_1\lambda_2 < 0$,这说明二次型$Q(\lambda_1, \lambda_2)$既不是正定的也不是负定的，并且还是非退化的.

根据前面介绍的方程的分类，我们可知：

- 若方程是双曲型的，即$\Delta > 0$,则$\lambda_1\lambda_2 < 0$,这说明二次型$Q(\lambda_1, \lambda_2)$既不是正定的也不是负定的，并且还是非退化的.
- 若方程是抛物型的，即$\Delta = 0$,则$\lambda_1\lambda_2 = 0$,因此$\lambda_1\lambda_2$中必有一个为零，则说明二次型$Q(\lambda_1, \lambda_2)$是退化的.

根据前面介绍的方程的分类，我们可知：

- 若方程是双曲型的，即$\Delta > 0$,则$\lambda_1\lambda_2 < 0$,这说明二次型$Q(\lambda_1, \lambda_2)$既不是正定的也不是负定的，并且还是非退化的.
- 若方程是抛物型的，即$\Delta = 0$,则$\lambda_1\lambda_2 = 0$,因此$\lambda_1\lambda_2$中必有一个为零，则说明二次型$Q(\lambda_1, \lambda_2)$是退化的.
- 若方程是椭圆型的，即$\Delta < 0$,则$\lambda_1\lambda_2 > 0$,则说明二次型$Q(\lambda_1, \lambda_2)$是正定(或负定)的.

根据前面介绍的方程的分类，我们可知：

- 若方程是双曲型的，即$\Delta > 0$,则$\lambda_1\lambda_2 < 0$,这说明二次型$Q(\lambda_1, \lambda_2)$既不是正定的也不是负定的，并且还是非退化的.
- 若方程是抛物型的，即$\Delta = 0$,则$\lambda_1\lambda_2 = 0$,因此$\lambda_1\lambda_2$中必有一个为零，则说明二次型$Q(\lambda_1, \lambda_2)$是退化的.
- 若方程是椭圆型的，即$\Delta < 0$,则$\lambda_1\lambda_2 > 0$,则说明二次型$Q(\lambda_1, \lambda_2)$是正定(或负定)的.

多余多个自变量的二阶线性偏微分方程，我们可按照以上这种方式进行分类。

一般形式的多个自变量的二阶线性偏微分方程

一般形式的多个自变量的二阶线性偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x})u_{x_i} + c(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}), \quad (1.3.11)$$

其中$a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x}), b_i(\mathbf{x}), i, j = 1, \cdots, n, c(\mathbf{x})$以及$f(\mathbf{x})$都是$\Omega \subset R^n$中的连续函数，并且$a_{ij}(\mathbf{x})(i, j = 1, \cdots, n)$不同时为零。

一般形式的多个自变量的二阶线性偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x})u_{x_i} + c(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}), \quad (1.3.11)$$

其中$a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x}), b_i(\mathbf{x}), i, j = 1, \cdots, n, c(\mathbf{x})$以及$f(\mathbf{x})$都是$\Omega \subset R^n$中的连续函数，并且$a_{ij}(\mathbf{x})(i, j = 1, \cdots, n)$不同时为零。

引入主部系数矩阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$,以及对应的二次型

$$Q(\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})\lambda_i\lambda_j, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

一般形式的多个自变量的二阶线性偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x})u_{x_i} + c(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}), \quad (1.3.11)$$

其中$a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x}), b_i(\mathbf{x}), i,j = 1,\cdots,n, c(\mathbf{x})$以及$f(\mathbf{x})$都是$\Omega \subset R^n$中的连续函数，并且$a_{ij}(\mathbf{x})(i,j = 1,\cdots,n)$不同时为零。
引入主部系数矩阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$,以及对应的二次型

$$Q(\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})\lambda_i\lambda_j, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

定义：

定义：

- 若在点$\mathbf{x}_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)\in\Omega$处，二次型$Q(\lambda)$是正定或负定，则称方程在$\mathbf{x}_0$处是**椭圆型的**。

定义:

- 若在点$\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0) \in \Omega$处，二次型$Q(\lambda)$是正定或负定，则称方程在$\mathbf{x}_0$处是**椭圆型的**。
- 若在点$\mathbf{x}_0$处，二次型$Q(\lambda)$是退化的(即A的特征值中至少有一个为零)，并且非零特征值都同号，则称方程在$\mathbf{x}_0$处是**抛物型的**。

定义：

- 若在点$\mathbf{x}_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)\in\Omega$处，二次型$Q(\lambda)$是正定或负定，则称方程在$\mathbf{x}_0$处是**椭圆型的**。
- 若在点$\mathbf{x}_0$处，二次型$Q(\lambda)$是退化的(即A的特征值中至少有一个为零)，并且非零特征值都同号，则称方程在$\mathbf{x}_0$处是**抛物型的**。
- 若在点$\mathbf{x}_0$处，二次型$Q(\lambda)$既不是退化的，也不是正定或负定的，并且矩阵A的特征值中有$n-1$个同号，另一个与它们反号，则称方程在$\mathbf{x}_0$处是**双曲型的**

定义:

- 若在点$\mathbf{x}_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)\in\Omega$处，二次型$Q(\lambda)$是正定或负定，则称方程在$\mathbf{x}_0$处是**椭圆型的**。
- 若在点$\mathbf{x}_0$处，二次型$Q(\lambda)$是退化的(即A的特征值中至少有一个为零)，并且非零特征值都同号，则称方程在$\mathbf{x}_0$处是**抛物型的**。
- 若在点$\mathbf{x}_0$处，二次型$Q(\lambda)$既不是退化的，也不是正定或负定的，并且矩阵A的特征值中有$n-1$个同号，另一个与它们反号，则称方程在$\mathbf{x}_0$处是**双曲型的**
- 若次型$Q(\lambda)$既不是退化的，也不是正定或负定的，又不是双曲型的，则称方程在$\mathbf{x}_0$处是**超双曲型的**。这时矩阵A的特征值中至少又两个为正，两个为负

例如：
(1).对于高维Poisson方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f$$

例如：
(1).对于高维Poisson方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f$$

相应的二次型

例如：
(1).对于高维Poisson方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=f$$

相应的二次型

$$Q(\lambda)=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2$$

例如：
(1).对于高维Poisson方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=f$$

相应的二次型

$$Q(\lambda)=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2$$

是正定的，因此Poisson方程是椭圆型方程。

例如：
(1).对于高维Poisson方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=f$$

相应的二次型

$$Q(\lambda)=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2$$

是正定的，因此Poisson方程是椭圆型方程。
(2).对于高维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)+f.$$

例如：
(1).对于高维Poisson方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=f$$

相应的二次型

$$Q(\lambda)=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2$$

是正定的，因此Poisson方程是椭圆型方程。
(2).对于高维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)+f.$$

相应的二次型为

例如：
(1).对于高维Poisson方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=f$$

相应的二次型

$$Q(\lambda)=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2$$

是正定的，因此Poisson方程是椭圆型方程。
(2).对于高维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2})+f.$$

相应的二次型为

$$Q(\lambda)=\lambda_0^2-a^2(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2)$$

例如：
(1).对于高维Poisson方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=f$$

相应的二次型

$$Q(\lambda)=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2$$

是正定的，因此Poisson方程是椭圆型方程。
(2).对于高维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2})+f.$$

相应的二次型为

$$Q(\lambda)=\lambda_0^2-a^2(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2)$$

既不是退化，也不是正定与负定的，并且矩阵A的$n+1$个特征值中有n个同号，另一个与他们相反，因此波动方程是双曲型方程。

(3).对于高维热传导方程

(3).对于高维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}) + f.$$

(3).对于高维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) + f.$$

它有$n+1$个自变量，相应的二次型

(3).对于高维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}) + f.$$

它有$n+1$个自变量，相应的二次型

$$Q(\lambda) = -a^2(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2)$$

(3).对于高维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}) + f.$$

它有$n+1$个自变量，相应的二次型

$$Q(\lambda) = -a^2(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2)$$

是退化的，有一个特征值是零，其余的n个特征值都同号，所以热传导方程是抛物型方程.