

## ★4.2 稳定性和收敛性



Home Page

Title Page



Page 1 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

## ★4.2 稳定性和收敛性

### ★4.2.1 基本概念



Home Page

Title Page



Page 1 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit



## ★4.2 稳定性和收敛性

### ★4.2.1 基本概念

- $U^k = [u_1^k, u_2^k, \dots, u_{N-1}^k]^T$ : 差分方程在第 $k$ 层上的值改写成向量形式。

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 1 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit



## ★4.2 稳定性和收敛性

### ★4.2.1 基本概念

- $U^k = [u_1^k, u_2^k, \dots, u_{N-1}^k]^T$ : 差分方程在第 $k$ 层上的值改写成向量形式。
- $U(x, t_k) = [u(x_1, t_k), \dots, u(x_{N-1}, t_k)]^T$  : 微分方程的真解 $u(x, t)$ 限制在 $t = t_k$ 处的网格点上的向量。

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

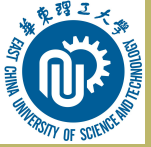
Page 1 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit



## ★4.2 稳定性和收敛性

### ★4.2.1 基本概念

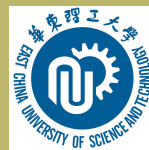
- $U^k = [u_1^k, u_2^k, \dots, u_{N-1}^k]^T$ : 差分方程在第 $k$ 层上的值改写成向量形式。
- $U(x, t_k) = [u(x_1, t_k), \dots, u(x_{N-1}, t_k)]^T$  : 微分方程的真解 $u(x, t)$ 限制在 $t = t_k$ 处的网格点上的向量。
- $\Phi = [\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_N)]^T$ : 初始条件在 $x_j$ 处的值, 则有 $\Phi = U^0$ .

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 1 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

## ★4.2 稳定性和收敛性

### ★4.2.1 基本概念

- $U^k = [u_1^k, u_2^k, \dots, u_{N-1}^k]^T$ : 差分方程在第 $k$ 层上的值改写成向量形式。
- $U(x, t_k) = [u(x_1, t_k), \dots, u(x_{N-1}, t_k)]^T$  : 微分方程的真解 $u(x, t)$ 限制在 $t = t_k$ 处的网格点上的向量。
- $\Phi = [\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_N)]^T$ : 初始条件在 $x_j$ 处的值, 则有 $\Phi = U^0$ .
- 对于向量 $U^k$ , 将其在 $x$ 方向上作一个连续延拓(延拓的方法不惟一), 记延拓后的函数为 $u^k(x)$ 使其满足: 关于自变量 $x$ 在其定义域上连续且 $u^k(x_j) = u_j^k$ .



## ★4.2 稳定性和收敛性

### ★4.2.1 基本概念

- $U^k = [u_1^k, u_2^k, \dots, u_{N-1}^k]^T$ : 差分方程在第 $k$ 层上的值改写成向量形式。
- $U(x, t_k) = [u(x_1, t_k), \dots, u(x_{N-1}, t_k)]^T$  : 微分方程的真解 $u(x, t)$ 限制在 $t = t_k$ 处的网格点上的向量。
- $\Phi = [\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_N)]^T$ : 初始条件在 $x_j$ 处的值, 则有 $\Phi = U^0$ .
- 对于向量 $U^k$ , 将其在 $x$ 方向上作一个连续延拓(延拓的方法不惟一), 记延拓后的函数为 $u^k(x)$ 使其满足: 关于自变量 $x$ 在其定义域上连续且 $u^k(x_j) = u_j^k$ .
- $u^k(x)$ 被作为在 $t = t_k$ 层上的微分方程的真解 $u(x, t_k)$ 的近似, 在讨论稳定性与收敛性过程中, 要 $u^k(x)$ 与 $u^0(x)$ (即 $\phi(x)$ )进行比较。

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

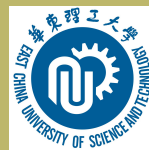
Page 1 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit



## ★4.2 稳定性和收敛性

### ★4.2.1 基本概念

- $U^k = [u_1^k, u_2^k, \dots, u_{N-1}^k]^T$ : 差分方程在第 $k$ 层上的值改写成向量形式。
- $U(x, t_k) = [u(x_1, t_k), \dots, u(x_{N-1}, t_k)]^T$  : 微分方程的真解 $u(x, t)$ 限制在 $t = t_k$ 处的网格点上的向量。
- $\Phi = [\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_N)]^T$ : 初始条件在 $x_j$ 处的值, 则有 $\Phi = U^0$ .
- 对于向量 $U^k$ , 将其在 $x$ 方向上作一个连续延拓(延拓的方法不惟一), 记延拓后的函数为 $u^k(x)$ 使其满足: 关于自变量 $x$ 在其定义域上连续且 $u^k(x_j) = u_j^k$ .
- $u^k(x)$ 被作为在 $t = t_k$ 层上的微分方程的真解 $u(x, t_k)$ 的近似, 在讨论稳定性与收敛性过程中, 要 $u^k(x)$ 与 $u^0(x)$ (即 $\phi(x)$ )进行比较。
- 这种延拓只对 $x$ 进行, 而对 $t$ 依然是离散的, 故称为半延拓方法或半离散方法。

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 1 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- $U(x, k)$ 为差分格式在第 $k$ 层上的值，它可以取离散值，也可以是 $x$ 的连续函数， $u(x, k)$ 为微分方程在 $t = t_k$ 处的真解， $u(x, k)$ 和 $\phi(x)$ 取离散或连续形式取决于 $U(x, k)$ ,

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 2 of 10

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- $U(x, k)$ 为差分格式在第 $k$ 层上的值，它可以取离散值，也可以是 $x$ 的连续函数， $u(x, k)$ 为微分方程在 $t = t_k$ 处的真解， $u(x, k)$ 和 $\phi(x)$ 取离散或连续形式取决于 $U(x, k)$ ，
  - 采用离散化方法时

$$U(x, k) = U^k, \text{ 则 } u(x, k) = U(x, t_k), \phi(x) = \Phi;$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 2 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- $U(x, k)$  为差分格式在第  $k$  层上的值，它可以取离散值，也可以是  $x$  的连续函数， $u(x, k)$  为微分方程在  $t = t_k$  处的真解， $u(x, k)$  和  $\phi(x)$  取离散或连续形式取决于  $U(x, k)$ ,

- 采用离散化方法时

$$U(x, k) = U^k, \text{ 则 } u(x, k) = U(x, t_k), \phi(x) = \Phi;$$

- 采用半离散方法时

$$U(x, k) = u^k(x), \text{ 则 } u(x, k) = u(x, t_k), \phi(x) = u^0(x),$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[▶](#)[Page 2 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 设 $X$ 是定义在某个给定区域 $\bar{D}$ 上的具有某种性质的函数组成的Banach空间, 对于 $u \in X$ , 定义范数

$$\|u\|_{\infty} = \max_{x \in \bar{D}} |u(x)| \text{ 或 } \|u\|_{L^2} = \sqrt{\int_D |u(x)|^2 dx}.$$

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 3 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 设 $X$ 是定义在某个给定区域 $\bar{D}$ 上的具有某种性质的函数组成的Banach空间, 对于 $u \in X$ , 定义范数

$$\|u\|_{\infty} = \max_{x \in D} |u(x)| \text{ 或 } \|u\|_{L^2} = \sqrt{\int_D |u(x)|^2 dx}.$$

- 将 $u$ 在 $x_j$ 离散化, 得 $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ , 则可定义相应的Euclid范数

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |u_j|^2}, \|u\|_{2,h} = \sqrt{h \sum_{j=1}^n |u_j|^2}, \|u\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq n} |u_j|$$

这些范数可推广到 $u = [\dots, u_{-1}, u_0, u_1, \dots]^T$ 上。



- 若在二维空间中,  $u = u(x, y)$ , 将  $u$  在  $(x_i, y_j)$  离散时的  $u_{ij}$ , 则可得相应的范数定义, 比如

$$\|u\|_{2,h} = \sqrt{h_1 h_2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |u_{ij}|^2}.$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 4 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 若在二维空间中,  $u = u(x, y)$ , 将  $u$  在  $(x_i, y_j)$  离散时的  $u_{ij}$ , 则可得相应的范数定义, 比如

$$\|u\|_{2,h} = \sqrt{h_1 h_2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |u_{ij}|^2}.$$

- 对于  $X$  上的算子  $H : X \rightarrow X$ , 可以定义其范数

$$\|H\| = \max_{u \neq 0, u \in X} \frac{\|Hu\|}{\|u\|} = \max_{\|u\|=1, u \in X} \|Hu\|$$



- 后面的讨论都将在某种范数的意义下进行，而不指明哪一种范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



*Page 5 of 10*

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)





- 后面的讨论都将在某种范数的意义下进行，而不指明哪一种范数
- $L$  :为微分算子，对热传导方程(7)，有  $L = \frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ .

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 5 of 10

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 后面的讨论都将在某种范数的意义下进行，而不指明哪一种范数
- $L$  :为微分算子，对热传导方程(7)，有  $L = \frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ .
- $L_h$  :为差分算子，对古典显格式(8),有

$$L_h u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2},$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 5 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 后面的讨论都将在某种范数的意义下进行，而不指明哪一种范数
- $L$  :为微分算子，对热传导方程(7)，有  $L = \frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ .
- $L_h$  :为差分算子，对古典显格式(8),有

$$L_h u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2},$$

- 记第 $k$ 层上的局部阶段误差为 $R^k(x)$ ,则有

$$R^k(x) = Lu(x, k) - L_k U(x, k). \quad (49)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 5 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 定义4.1 若微分方程 $Lu = 0$ 在初始条件 $u|_{t=0} = \phi(x), x \in D$ (也可再加上某些边值条件)下满足:
  - (1) $\forall \phi(x) \in X$ ,以 $\phi(x)$ 为初值的方程存在惟一解 $u(x, t)$ ;
  - (2)存在常数 $c$ ,使 $\forall t \in (0, T]$ ,成立

$$\|u(x, t)\| \leq c\|u(x, 0)\| = c\|\phi(x)\|.$$

则称该定解问题在 $X$ 上对于变量 $x \in D$ 和 $t \in (0, T]$ 在 $\|\cdot\|$ 意义下是适定的。

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 6 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 定义4.1 若微分方程 $Lu = 0$ 在初始条件 $u|_{t=0} = \phi(x), x \in D$ (也可再加上某些边值条件)下满足:  
(1) $\forall \phi(x) \in X$ ,以 $\phi(x)$ 为初值的方程存在惟一解 $u(x, t)$ ;  
(2)存在常数 $c$ ,使 $\forall t \in (0, T]$ ,成立

$$\|u(x, t)\| \leq c\|u(x, 0)\| = c\|\phi(x)\|.$$

则称该定解问题在 $X$ 上对于变量 $x \in D$ 和 $t \in (0, T]$ 在 $\|\cdot\|$ 意义下是适定的。

- 定义4.2 设 $u(x, t)$ 是上述定义中定解问题的解,  $L_h$ 是求解此问题的差分算子, 对所有 $k$ , 满足 $0 < k \leq [\frac{T}{\tau}]$ , 若截断误差(41)满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|R^k(x)\| = 0, \quad (42)$$

则称该差分格式是相容的, 式(42)也称为相容条件

[Home Page](#)[Title Page](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)[Page 6 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 定义4.1 若微分方程 $Lu = 0$ 在初始条件 $u|_{t=0} = \phi(x), x \in D$ (也可再加上某些边值条件)下满足:
  - (1) $\forall \phi(x) \in X$ ,以 $\phi(x)$ 为初值的方程存在惟一解 $u(x, t)$ ;
  - (2)存在常数 $c$ ,使 $\forall t \in (0, T]$ ,成立

$$\|u(x, t)\| \leq c\|u(x, 0)\| = c\|\phi(x)\|.$$

则称该定解问题在 $X$ 上对于变量 $x \in D$ 和 $t \in (0, T]$ 在 $\|\cdot\|$ 意义下是适定的。

- 定义4.2 设 $u(x, t)$ 是上述定义中定解问题的解,  $L_h$ 是求解此问题的差分算子, 对所有 $k$ , 满足 $0 < k \leq [\frac{T}{\tau}]$ , 若截断误差(41)满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|R^k(x)\| = 0, \quad (42)$$

则称该差分格式是相容的, 式(42)也称为相容条件

- 若 $\|R^k\| = O(\tau^\alpha + h^\beta)$ 则称 $L_h$ 对 $L$ 的逼近具有 $(\alpha, \beta)$ 阶精度, 当 $\alpha, \beta$ 为正数时, 此逼近格式是相容的。

Home Page

Title Page

« »

◀ ▶

Page 6 of 10

Go Back

Full Screen

Close

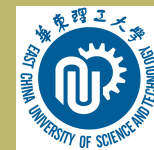
Quit

- 对前一节引进的二层差分格式，都可用矩阵和向量记号表示成

$$AU^{k+1} = BU^k + \tau F. \quad (43)$$

假设 $A$ 可逆，令 $Q = A^{-1}B$ ,则上式又可化为

$$U^{k+1} = QU^k + \tau A^{-1}F. \quad (44)$$



Home Page

Title Page



Page 7 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 对前一节引进的二层差分格式，都可用矩阵和向量记号表示成

$$AU^{k+1} = BU^k + \tau F. \quad (43)$$

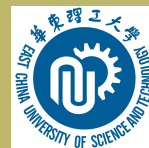
假设 $A$ 可逆，令 $Q = A^{-1}B$ ,则上式又可化为

$$U^{k+1} = QU^k + \tau A^{-1}F. \quad (44)$$

- 由于差分方程的近似解(设在第 $k_0$ 层有误差 $\epsilon^{k_0}$ 时得到的第 $k$ 层的解) 和差分方程的精确解之差满足齐次的差分方程

$$AU^{k+1} = BU^k \text{ 或 } U^{k+1} = QU^k. \quad (45)$$

所以下面只考虑齐次的情形



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 对前一节引进的三层差分格式，都可用矩阵和向量记号表示成

$$AU^{k+1} = BU^k + \tau F. \quad (43)$$

假设 $A$ 可逆，令 $Q = A^{-1}B$ ，则上式又可化为

$$U^{k+1} = QU^k + \tau A^{-1}F. \quad (44)$$

- 由于差分方程的近似解(设在第 $k_0$ 层有误差 $\epsilon^{k_0}$ 时得到的第 $k$ 层的解)和差分方程的精确解之差满足齐次的差分方程

$$AU^{k+1} = BU^k \text{ 或 } U^{k+1} = QU^k. \quad (45)$$

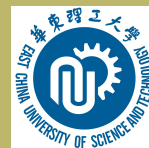
所以下面只考虑齐次的情形

- 对于三层格式，可适当引进新变量化成二层格式，如Richardson格式的齐次形式为

$$U^{k+1} = 2r(C - 2I)U^k + U^{k-1}.$$

令 $W^k = \begin{bmatrix} U^k \\ U^{k-1} \end{bmatrix}$ ，则化为二层格式 $W^{k+1} = QW^k$ ，其中

$$Q = \begin{bmatrix} 2r(C - 2I) & I \\ I & 0 \end{bmatrix}. \quad (46)$$


[Home Page](#)
[Title Page](#)
[«](#)
[»](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Page 7 of 10](#)
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)



下面限于讨论系数及右端与时间 $t$ 无关的线性抛物方程，此时 $A, B, F$ 和 $Q$ 都与 $k$ 无关，设 $h$ 与 $\tau$ 之间满足一定关系，设 $h = g(\tau)$ ,  $g(\tau)$ 连续且 $g(0) = 0$ , 于是 $A = A(\tau)$ ,  $B = B(\tau)$ ,  $Q = Q(\tau)$ .

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 8 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



下面限于讨论系数及右端与时间 $t$ 无关的线性抛物方程, 此时 $A, B, F$ 和 $Q$ 都与 $k$ 无关, 设 $h$ 与 $\tau$ 之间满足一定关系, 设 $h = g(\tau)$ ,  $g(\tau)$ 连续且 $g(0) = 0$ , 于是 $A = A(\tau)$ ,  $B = B(\tau)$ ,  $Q = Q(\tau)$ .

- 定义4.3对于差分格式(45), 如存在 $\tau_0 > 0$ 和常数 $K > 0$ , 对一切 $U^0 \in X$ ,  $0 < \tau \leq \tau_0$  和  $0 \leq K \leq [\frac{T}{\tau}] - 1$ 成立

$$\|U^{k+1}\| = \|Q^{k+1}U^0\| \leq K\|U^0\|. \quad (47)$$

则称此差分格式在范数 $\|\cdot\|$ 意义下, 关于初值稳定

[Home Page](#)[Title Page](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

下面限于讨论系数及右端与时间 $t$ 无关的线性抛物方程, 此时 $A, B, F$ 和 $Q$ 都与 $k$ 无关, 设 $h$ 与 $\tau$ 之间满足一定关系, 设 $h = g(\tau)$ ,  $g(\tau)$ 连续且 $g(0) = 0$ , 于是 $A = A(\tau)$ ,  $B = B(\tau)$ ,  $Q = Q(\tau)$ .

- 定义4.3对于差分格式(45), 如存在 $\tau_0 > 0$ 和常数 $K > 0$ , 对一切 $U^0 \in X$ ,  $0 < \tau \leq \tau_0$  和  $0 \leq K \leq [\frac{T}{\tau}] - 1$ 成立

$$\|U^{k+1}\| = \|Q^{k+1}U^0\| \leq K\|U^0\|. \quad (47)$$

则称此差分格式在范数 $\|\cdot\|$ 意义下, 关于初值稳定

- 显然式(47)成立当且仅当

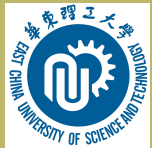
$$\|Q^{k+1}\| \leq K, \quad (47')$$

因此也可以用(47')代替(47)作为稳定的定义。

- 定义4.4 若初值没有误差，即 $U^0 = 0$ ,对于格式(43)或(44),如存在 $\tau_0 > 0$ 和常数 $K > 0$ ，使对一切 $0 < \tau \leq \tau_0$  和 $0 \leq K \leq [\frac{T}{\tau}] - 1$ 成立

$$\|U^{k+1}\| \leq K\|F\|,$$

则称此格式(43)或(44)在范数 $\|\cdot\|$ 的意义下关于右端稳定。



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 定义4.4 若初值没有误差, 即 $U^0 = 0$ , 对于格式(43)或(44), 如存在 $\tau_0 > 0$ 和常数 $K > 0$ , 使对一切 $0 < \tau \leq \tau_0$  和 $0 \leq K \leq [\frac{T}{\tau}] - 1$ 成立

$$\|U^{k+1}\| \leq K\|F\|,$$

则称此格式(43)或(44)在范数 $\|\cdot\|$ 的意义下关于右端稳定。

- 由差分格式(44), 可推出当 $\|A^{-1}\| \leq K'$ 和 $\|Q^k(\tau)\| \leq K''$  (即差分格式按初值稳定)时, 有

$$\|U^{k+1}\| \leq \tau(k+1)K'K''\|F\| \leq TK'K''\|F\|$$

, 即可知差分格式按右端稳定, 因此我们下面只考虑格式按初值的稳定性。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 定义4.4 若初值没有误差, 即 $U^0 = 0$ , 对于格式(43)或(44), 如存在 $\tau_0 > 0$ 和常数 $K > 0$ , 使对一切 $0 < \tau \leq \tau_0$  和 $0 \leq K \leq [\frac{T}{\tau}] - 1$ 成立

$$\|U^{k+1}\| \leq K\|F\|,$$

则称此格式(43)或(44)在范数 $\|\cdot\|$ 的意义下关于右端稳定。

- 由差分格式(44), 可推出当 $\|A^{-1}\| \leq K'$ 和 $\|Q^k(\tau)\| \leq K''$  (即差分格式按初值稳定)时, 有

$$\|U^{k+1}\| \leq \tau(k+1)K'K''\|F\| \leq TK'K''\|F\|$$

, 即可知差分格式按右端稳定, 因此我们下面只考虑格式按初值的稳定性。

- 差分格式关于初值稳定的实际含义是, 若格式的解在某层存在误差, 则由它所引起的以后各层上的误差不超过原始误差的常数倍, 因此每层的误差传播时能得到控制的。

- 定义4.4 若初值没有误差, 即 $U^0 = 0$ , 对于格式(43)或(44), 如存在 $\tau_0 > 0$ 和常数 $K > 0$ , 使对一切 $0 < \tau \leq \tau_0$  和 $0 \leq K \leq [\frac{T}{\tau}] - 1$ 成立

$$\|U^{k+1}\| \leq K\|F\|,$$

则称此格式(43)或(44)在范数 $\|\cdot\|$ 的意义下关于右端稳定。

- 由差分格式(44), 可推出当 $\|A^{-1}\| \leq K'$ 和 $\|Q^k(\tau)\| \leq K''$  (即差分格式按初值稳定)时, 有

$$\|U^{k+1}\| \leq \tau(k+1)K'K''\|F\| \leq TK'K''\|F\|$$

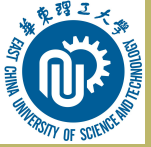
, 即可知差分格式按右端稳定, 因此我们下面只考虑格式按初值的稳定性。

- 差分格式关于初值稳定的实际含义是, 若格式的解在某层存在误差, 则由它所引起的以后各层上的误差不超过原始误差的常数倍, 因此每层的误差传播时能得到控制的。
- 定义4.5 对于微分方程的解 $u(x, t)$ 和差分方程在 $k$ 层上的解 $U(x, k)$ , 若对任意的初值条件 $\phi \in X$ , 对任意的 $t \in (0, T]$ , 成立

$$\lim_{h \rightarrow 0, k\tau \rightarrow t} \|u(x, t) - U(x, k)\| = 0, \quad (48)$$

则称该差分方程是收敛的。





### ★4.2.2 稳定性与收敛性的关系

一个差分格式的相容性在构造计算格式时就可以判断，下面的定理给出了差分格式的稳定性与收敛性之间的关系

Home Page

Title Page



Page 10 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit



### ★4.2.2 稳定性与收敛性的关系

一个差分格式的相容性在构造计算格式时就可以判断，下面的定理给出了差分格式的稳定性与收敛性之间的关系

- 定理4.1(Lax等价定理)对一个适定的初值问题，若给出的差分格式是相容的，则差分格式稳定的充分必要条件是它是收敛的。

Home Page

Title Page



Page 10 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

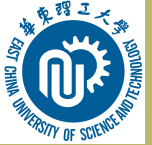


### ★4.2.2 稳定性与收敛性的关系

一个差分格式的相容性在构造计算格式时就可以判断，下面的定理给出了差分格式的稳定性与收敛性之间的关系

- 定理4.1(Lax等价定理)对一个适定的初值问题，若给出的差分格式是相容的，则差分格式稳定的充分必要条件是它是收敛的。
- 由于一个可用的差分格式总是相容的，为得到格式的收敛性，由上述定理，只要讨论它的稳定性即可，因此无论从理论上还是应用上，格式的稳定性理论都应是我们研究的重点。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 10 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### ★4.2.2 稳定性与收敛性的关系

一个差分格式的相容性在构造计算格式时就可以判断，下面的定理给出了差分格式的稳定性与收敛性之间的关系

- 定理4.1(Lax等价定理)对一个适定的初值问题，若给出的差分格式是相容的，则差分格式稳定的充分必要条件是它是收敛的。
- 由于一个可用的差分格式总是相容的，为得到格式的收敛性，由上述定理，只要讨论它的稳定性即可，因此无论从理论上还是应用上，格式的稳定性理论都应是我们研究的重点。
- 定理4.2 (Lax定理) 对于两层差分格式(43)或(44),如果它是相容的，且按初值是稳定的，则它是收敛的，且当 $\|R^k\| = O(\tau^\alpha + h^\beta)$ 时，有 $\|u(x, t) - U(x, k)\| = O(\tau^\alpha + h^\beta)$ 。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 10 of 10

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

### ★4.2.2 稳定性与收敛性的关系

一个差分格式的相容性在构造计算格式时就可以判断，下面的定理给出了差分格式的稳定性与收敛性之间的关系

- 定理4.1(Lax等价定理)对一个适定的初值问题，若给出的差分格式是相容的，则差分格式稳定的充分必要条件是它是收敛的。
- 由于一个可用的差分格式总是相容的，为得到格式的收敛性，由上述定理，只要讨论它的稳定性即可，因此无论从理论上还是应用上，格式的稳定性理论都应是我们研究的重点。
- 定理4.2 (Lax定理) 对于两层差分格式(43)或(44),如果它是相容的，且按初值是稳定的，则它是收敛的，且当 $\|R^k\| = O(\tau^\alpha + h^\beta)$ 时，有 $\|u(x, t) - U(x, k)\| = O(\tau^\alpha + h^\beta)$ 。
- 此定理说明差分格式的稳定性可导出收敛性，且若差分格式的截断误差是 $(\alpha, \beta)$ 阶精度的，则差分格式的解具有相同的收敛阶。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 10 of 10

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)