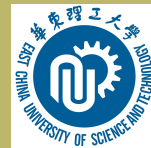


★2.4特征展开法

- 特征展开法主要求解齐次边界条件的定解问题



Home Page

Title Page



Page 1 of 14

Go Back

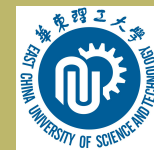
Full Screen

Close

Quit

★2.4特征展开法

- 特征展开法主要求解**齐次边界条件**的定解问题
- 利用特征展开法的关键是找到一个特征函数系(它是某个特征值问题的全部特征函数),使得未知函数、初始函数和自由项都可以按照此函数系展开



Home Page

Title Page



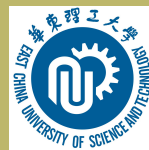
Page 1 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



★2.4特征展开法

- 特征展开法主要求解齐次边界条件的定解问题
- 利用特征展开法的关键是找到一个特征函数系(它是某个特征值问题的全部特征函数),使得未知函数、初始函数和自由项都可以按照此函数系展开

★2.4.1弦振动方程的初边值问题

考察弦振动方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

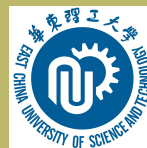
Page 1 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



★2.4特征展开法

- 特征展开法主要求解齐次边界条件的定解问题
- 利用特征展开法的关键是找到一个特征函数系(它是某个特征值问题的全部特征函数),使得未知函数、初始函数和自由项都可以按照此函数系展开

★2.4.1弦振动方程的初边值问题

考察弦振动方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.4.1)$$

- 对于齐次问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

由2.3节开头的推导我们已知它对应的特征值问题是

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 14

Go Back

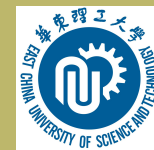
Full Screen

Close

Quit

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

由例题2.3.1可知该特征值问题的特征函数系为 $\{\sin \alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$,其中 $\alpha_n = n\pi/l$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 2 of 14](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

由例题2.3.1可知该特征值问题的特征函数系为 $\{\sin \alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$, 其中 $\alpha_n = n\pi/l$

- 将函数 $u(x, t), f(x, t), \phi(x), \psi(x)$ 关于 x 按特征函数系 $\{\sin \alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 展开

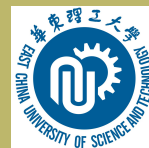
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \alpha_n x, f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \alpha_n x$$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \alpha_n x, \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \alpha_n x$$

其中(利用 $\{\sin \alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 的正交性, 可参考3月17号思考题1的结论)

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \alpha_n x dx, c_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \alpha_n x dx,$$

$$d_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \alpha_n x dx, \quad (2.4.2)$$


[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀](#) [▶](#)
[◀](#) [▶](#)
[Page 2 of 14](#)
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

由例题2.3.1可知该特征值问题的特征函数系为 $\{\sin \alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$, 其中 $\alpha_n = n\pi/l$

- 将函数 $u(x, t), f(x, t), \phi(x), \psi(x)$ 关于 x 按特征函数系 $\{\sin \alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 展开

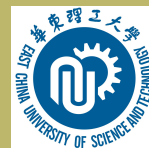
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \alpha_n x, f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \alpha_n x$$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \alpha_n x, \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \alpha_n x$$

其中(利用 $\{\sin \alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 的正交性, 可参考3月17号思考题1的结论)

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \alpha_n x dx, c_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \alpha_n x dx,$$

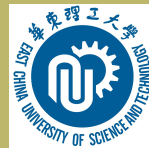
$$d_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \alpha_n x dx, \quad (2.4.2)$$


[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀](#) [▶](#)
[◀](#) [▶](#)
[Page 2 of 14](#)
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

- 将展开式代入(2.4.1)的方程和初始条件 \Rightarrow

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n''(t) + (a\alpha_n)^2 u_n(t) - f_n(t)] \sin \alpha_n x = 0, t > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(0) - c_n] \sin \alpha_n x = 0, \sum_{n=1}^{\infty} [u_n'(0) - d_n] \sin \alpha_n x = 0$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 3 of 14

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

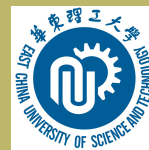
- 将展开式代入(2.4.1)的方程和初始条件 \Rightarrow

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n''(t) + (a\alpha_n)^2 u_n(t) - f_n(t)] \sin \alpha_n x = 0, t > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(0) - c_n] \sin \alpha_n x = 0, \sum_{n=1}^{\infty} [u_n'(0) - d_n] \sin \alpha_n x = 0$$

- 根据特征函数的正交性 \Rightarrow (下面一系列二阶常微分方程的初值问题)

$$\begin{cases} u_n''(t) + (a\alpha_n)^2 u_n(t) = f_n(t), & t > 0 \\ u_n(0) = c_n, u_n'(0) = d_n, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 3 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 将展开式代入(2.4.1)的方程和初始条件 \Rightarrow

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n''(t) + (a\alpha_n)^2 u_n(t) - f_n(t)] \sin \alpha_n x = 0, t > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(0) - c_n] \sin \alpha_n x = 0, \sum_{n=1}^{\infty} [u_n'(0) - d_n] \sin \alpha_n x = 0$$

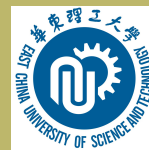
- 根据特征函数的正交性 \Rightarrow (下面一系列二阶常微分方程的初值问题)

$$\begin{cases} u_n''(t) + (a\alpha_n)^2 u_n(t) = f_n(t), & t > 0 \\ u_n(0) = c_n, u_n'(0) = d_n, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

- 齐次方程 $u_n''(t) + (a\alpha_n)^2 u_n(t) = 0$ 的基本解组是 $\cos \alpha_n t, \sin \alpha_n t$, 所以齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} v_n''(t) + (a\alpha_n)^2 v_n(t) = 0, & t > 0 \\ v_n(0) = c_n, v_n'(0) = d_n, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

的解



Home Page

Title Page



Page 3 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 将展开式代入(2.4.1)的方程和初始条件 \Rightarrow

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n''(t) + (a\alpha_n)^2 u_n(t) - f_n(t)] \sin \alpha_n x = 0, t > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(0) - c_n] \sin \alpha_n x = 0, \sum_{n=1}^{\infty} [u_n'(0) - d_n] \sin \alpha_n x = 0$$

- 根据特征函数的正交性 \Rightarrow (下面一系列二阶常微分方程的初值问题)

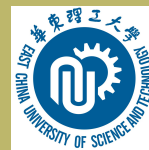
$$\begin{cases} u_n''(t) + (a\alpha_n)^2 u_n(t) = f_n(t), & t > 0 \\ u_n(0) = c_n, u_n'(0) = d_n, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

- 齐次方程 $u_n''(t) + (a\alpha_n)^2 u_n(t) = 0$ 的基本解组是 $\cos \alpha_n t, \sin \alpha_n t$, 所以齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} v_n''(t) + (a\alpha_n)^2 v_n(t) = 0, & t > 0 \\ v_n(0) = c_n, v_n'(0) = d_n, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

的解

$$v_n(t) = c_n \cos a\alpha_n t + \frac{d_n}{a\alpha_n} \sin a\alpha_n t$$



Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 3 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 利用叠加原理和常数变易公式（可参考3月17号的思考题2的结果）

$$u_n(t) = c_n \cos a\alpha_n t + \frac{d_n}{a\alpha_n} \sin a\alpha_n t + \frac{1}{a\alpha_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin a\alpha_n(t - \tau) d\tau$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 利用叠加原理和常数变易公式（可参考3月17号的思考题2的结果）

$$u_n(t) = c_n \cos a\alpha_n t + \frac{d_n}{a\alpha_n} \sin a\alpha_n t + \frac{1}{a\alpha_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin a\alpha_n(t - \tau) d\tau$$

- 于是

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos a\alpha_n t + \frac{d_n}{a\alpha_n} \sin a\alpha_n t \right) \sin \alpha_n x \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a\alpha_n} \sin \alpha_n x \int_0^t f_n(\tau) \sin a\alpha_n(t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

其中 c_n, d_n, f_n 由 (2.4.2) 式给出

- 利用叠加原理和常数变易公式（可参考3月17号的思考题2的结果）

$$u_n(t) = c_n \cos a\alpha_n t + \frac{d_n}{a\alpha_n} \sin a\alpha_n t + \frac{1}{a\alpha_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin a\alpha_n(t - \tau) d\tau$$

- 于是

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos a\alpha_n t + \frac{d_n}{a\alpha_n} \sin a\alpha_n t \right) \sin \alpha_n x \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a\alpha_n} \sin \alpha_n x \int_0^t f_n(\tau) \sin a\alpha_n(t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

其中 c_n, d_n, f_n 由 (2.4.2) 式给出

- (2.4.3)给出的函数只是初边值问题(2.4.1)的一个形式解，不一定是古典解（古典解的定义在2-1.pdf的第9页中有介绍）



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 5 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- (2.4.3)给出的函数只是初边值问题(2.4.1)的一个形式解，不一定是古典解（古典解的定义在2-1.pdf的第9页中有介绍）
- 如果对函数 ϕ, ψ, f 加上适当的光滑性条件，可以证明这个形式解的确是一个古典解

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 5 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- (2.4.3)给出的函数只是初边值问题(2.4.1)的一个形式解，不一定是古典解（古典解的定义在2-1.pdf的第9页中有介绍）
- 如果对函数 ϕ, ψ, f 加上适当的光滑性条件，可以证明这个形式解的确是一个古典解
- **定理2.3.1** 设 $\phi \in C^3[0, l], \psi \in C^2[0, l], f(x, t) \in C^2([0, l] \times [0, \infty))$, 并且满足相容性条件

$$\phi(0) = \phi(l) = 0, \psi(0) = \psi(l) = 0, \phi''(0) = \phi''(l) = 0$$

$$a^2 \phi''(0) + f(0, 0) = a^2 \phi''(l) + f(l, 0) = 0$$

则由公式(2.4.3)给出函数是初边值问题(2.4.1)的解。



利用特征展开法求解初边值问题的基本过程

- 根据齐次方程，齐次边界确定对应的特征值问题，进一步推导出特征函数系

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 6 of 14

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



利用特征展开法求解初边值问题的基本过程

- 根据齐次方程，齐次边界确定对应的特征值问题，进一步推导出特征函数系
- 将定解问题中的已知函数和未知函数按照特征函数系展开

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 6 of 14

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



利用特征展开法求解初边值问题的基本过程

- 根据齐次方程，齐次边界确定对应的特征值问题，进一步推导出特征函数系
- 将定解问题中的已知函数和未知函数按照特征函数系展开
- 将展开式代入定解问题的方程和初始条件

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

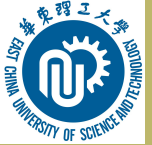
Page 6 of 14

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



利用特征展开法求解初边值问题的基本过程

- 根据齐次方程，齐次边界确定对应的特征值问题，进一步推导出特征函数系
- 将定解问题中的已知函数和未知函数按照特征函数系展开
- 将展开式代入定解问题的方程和初始条件
- 利用特征函数的正交性，可得一系列的常微分方程的初值问题

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 6 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



利用特征展开法求解初边值问题的基本过程

- 根据齐次方程，齐次边界确定对应的特征值问题，进一步推导出特征函数系
- 将定解问题中的已知函数和未知函数按照特征函数系展开
- 将展开式代入定解问题的方程和初始条件
- 利用特征函数的正交性，可得一系列的常微分方程的初值问题
- 利用常微分方程的求解

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 6 of 14

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



利用特征展开法求解初边值问题的基本过程

- 根据齐次方程，齐次边界确定对应的特征值问题，进一步推导出特征函数系
- 将定解问题中的已知函数和未知函数按照特征函数系展开
- 将展开式代入定解问题的方程和初始条件
- 利用特征函数的正交性，可得一系列的常微分方程的初值问题
- 利用常微分方程的求解
- 回代到展开式中，即可得定解问题解的表达形式

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 6 of 14

[Go Back](#)

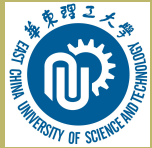
[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

例2.4.1 求解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \frac{1}{2}xt, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin \frac{x}{2}, u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



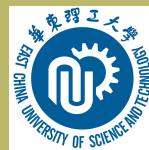
Page 7 of 14

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



例2.4.1 求解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \frac{1}{2}xt, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin \frac{x}{2}, u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

分析：有界区域上齐次边界条件的定解问题，所以可以利用特征展开法求解

Home Page

Title Page



Page 7 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

例2.4.1 求解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \frac{1}{2}xt, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin \frac{x}{2}, u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

分析：有界区域上齐次边界条件的定解问题，所以可以利用特征展开法求解

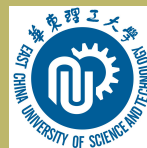
解：

- 对应的特征值问题为

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < \pi \\ X(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

由例2.3.2可知特征函数系为 $\{\sin \alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$, 其中 $\alpha_n = (2n - 1)/2$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 7 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



例2.4.1 求解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \frac{1}{2}xt, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin \frac{x}{2}, u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

分析：有界区域上齐次边界条件的定解问题，所以可以利用特征展开法求解

解：

- 对应的特征值问题为

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < \pi \\ X(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

由例2.3.2可知特征函数系为 $\{\sin \alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ，其中 $\alpha_n = (2n - 1)/2$

- 把函数 $\phi(x) = \sin \frac{x}{2}$, $\psi(x) = 0$, $f(x, t) = \frac{1}{2}xt$ 关于 x 按特征函数系展开，可算出

$$c_1 = 1, c_n = 0, n \geq 2, d_n = 0, f_n(t) = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi \alpha_n^2} t, n = 1, 2, \dots$$

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 7 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 直接代入公式(2.4.3), 计算可得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left(\cos \frac{t}{2} + \frac{16}{\pi} t - \frac{32}{\pi} \sin \frac{t}{2} \right) \sin \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\pi \alpha_n^4} \left(t - \frac{\sin \alpha_n t}{\alpha_n} \right) \sin \alpha_n x \\ &= \cos \frac{t}{2} \sin \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\pi \alpha_n^4} \left(t - \frac{\sin \alpha_n t}{\alpha_n} \right) \sin \alpha_n x \end{aligned}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



回家作业:

2.7、利用特征展开法求解弦振动方程的初边值问题(2)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0, t) = 0, u(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \cos \frac{\pi}{2l} x, \\ u_t(x, 0) = \cos \frac{3\pi}{2l} x + \cos \frac{5\pi}{2l} x & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin \frac{2\pi}{l} x \sin \frac{2\pi}{l} t, & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0, t) = 0, u(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



★2.4.2热传导方程的初值问题

考虑热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.4.6)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



★2.4.2热传导方程的初值问题

考虑热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.4.6)$$

分析：有界区域上齐次边界条件的定解问题，所以利用特征展开法求解

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

★2.4.2热传导方程的初值问题

考虑热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.4.6)$$

分析：有界区域上齐次边界条件的定解问题，所以利用特征展开法求解

解：

- 对应的特征值问题为

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

- 特征函数系为 $\{\cos \beta_n x\}_{n=1}^{\infty}$, 其中 $\beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$

★2.4.2热传导方程的初值问题

考虑热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.4.6)$$

分析：有界区域上齐次边界条件的定解问题，所以利用特征展开法求解

解：

- 对应的特征值问题为

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

- 特征函数系为 $\{\cos \beta_n x\}_{n=1}^{\infty}$, 其中 $\beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$

- 把 $u(x, t), f(x, t), \phi(x)$ 关于 x 按特征函数系展开

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cos \beta_n x, f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos \beta_n x,$$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \beta_n x$$

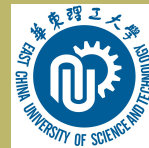
其中

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \cos \beta_n x dx, c_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \cos \beta_n x dx$$

- 把展开式代入(2.4.6)的方程和初始条件得

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u'_n(t) - (a\beta_n)^2 u_n(t) - f_n(t)] \cos \beta_n x = 0, t > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(0) - c_n] \cos \beta_n x = 0$$



Home Page

Title Page



Page 11 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 把 $u(x, t), f(x, t), \phi(x)$ 关于 x 按特征函数系展开

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cos \beta_n x, f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos \beta_n x,$$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \beta_n x$$

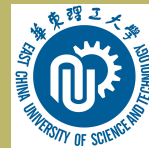
其中

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \cos \beta_n x dx, c_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \cos \beta_n x dx$$

- 把展开式代入(2.4.6)的方程和初始条件得

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u'_n(t) - (a\beta_n)^2 u_n(t) - f_n(t)] \cos \beta_n x = 0, t > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(0) - c_n] \cos \beta_n x = 0$$



Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 11 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 根据特征函数系的正交性可推出（一阶常微分方程的初值问题）

$$\begin{cases} u_n'(t) + (a\beta_n)^2 u_n(t) = f_n(t), t > 0 \\ u_n(0) = c_n, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 12 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 根据特征函数系的正交性可推出（一阶常微分方程的初值问题）

$$\begin{cases} u_n'(t) + (a\beta_n)^2 u_n(t) = f_n(t), t > 0 \\ u_n(0) = c_n, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

- 利用一阶非齐次常微分方程的求解方法可得(参看3月17号思考题3的结论)

$$u_n(t) = c_n e^{(a\beta_n)^2 t} + \int_0^t e^{(a\beta_n)^2 (s-t)} f_n(s) ds$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 12 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 根据特征函数系的正交性可推出（一阶常微分方程的初值问题）

$$\begin{cases} u'_n(t) + (a\beta_n)^2 u_n(t) = f_n(t), t > 0 \\ u_n(0) = c_n, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

- 利用一阶非齐次常微分方程的求解方法可得(参看3月17号思考题3的结论)

$$u_n(t) = c_n e^{(a\beta_n)^2 t} + \int_0^t e^{(a\beta_n)^2 (s-t)} f_n(s) ds$$

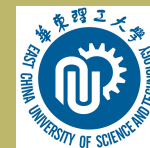
- 代回展开式

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{-(a\beta_n)^2 t} + \int_0^t e^{(a\beta_n)^2 (s-t)} f_n(s) ds \right) \cos \beta_n x$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 12 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

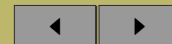
利用同样的方法可以推出，热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.4.8)$$



Home Page

Title Page



Page 13 of 14

Go Back

Full Screen

Close

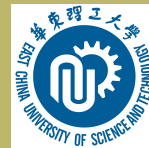
Quit

利用同样的方法可以推出，热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.4.8)$$

• 解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-s)\right\} \sin \frac{n\pi y}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \right) f(y, s) dy ds \\ &= \int_0^t \int_0^l G(x, y, t-s) f(y, s) dy ds \end{aligned}$$



Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 13 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

利用同样的方法可以推出，热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.4.8)$$

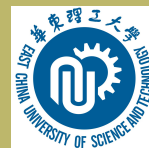
• 解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-s)\right\} \sin \frac{n\pi y}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \right) f(y, s) dy ds \\ &= \int_0^t \int_0^l G(x, y, t-s) f(y, s) dy ds \end{aligned}$$

• 函数

$$G(x, t, t-s) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-s)\right\} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{l}$$

称为抛物型方程的初值(2.4.8)的Green函数



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 13 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

利用同样的方法可以推出，热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.4.8)$$

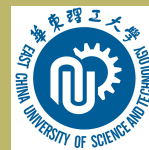
• 解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-s)\right\} \sin \frac{n\pi y}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \right) f(y, s) dy ds \\ &= \int_0^t \int_0^l G(x, y, t-s) f(y, s) dy ds \end{aligned}$$

• 函数

$$G(x, t, t-s) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-s)\right\} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{l}$$

称为抛物型方程的初值(2.4.8)的Green函数



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 13 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



回家作业2.9、利用特征展开法解下列热传导方程的初值问题

$$(2) \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = \cos x, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u_x(0, t) = 0, u_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \cos 2x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 14 of 14

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)