2.4 功 能量 动能定理

一、功的概念

物体在力$\vec{F}$的作用下发生一无限小的位移$d\vec{r}$(元位移)时，此力对它做的功定义为

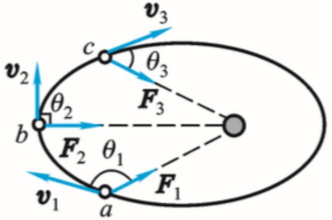
$$dA = F\cos\theta|d\vec{r}| \quad (\theta\text{为力与位移的夹角})$$

可以写成两个矢量的标积:

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \text{单位: } \mathrm{N\cdot m} = \mathrm{J}(\text{焦耳})$$

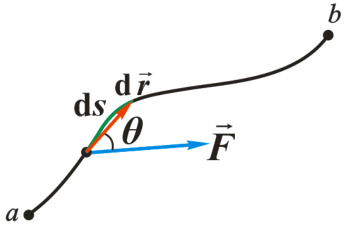
功是标量,没有方向,但有正负。

如图行星绕日运动,万有引力做功a点为负，b点为零，c点为正



2.4 功 能量 动能定理

变力从a到b做的功



$$A = \int dA = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$
$$= \int_a^b F\cos\theta ds$$

在直角坐标系

$$A = \int dA = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

功率： 单位时间做的功

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad \text{单位: J/s (W)}$$

2.4 功 能量 动能定理

二、能量

能量是反映各种运动形式共性的物理量,各种 运动形式的相互转化可以用能量来量度。各种运动 形式的相互转化遵守能量守恒定律。

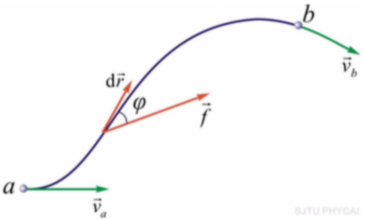
能量是物体状态的单值函数。物体状态发生变化，它的能量也随之变化。

与机械运动直接相关的能量是机械能，它是物体机械运动状态(即位置和速度)的单值函数，包括动能和势能。

2.4 功 能量 动能定理

三、动能定理

设质点在变力$\vec{F}$的作用下沿曲线从a点移动到b点，变力所做的功为：



$$A=\int_a^b F\cos\varphi|d\vec{r}|$$

由牛顿第二定律：

$$F\cos\varphi=ma_t=m\frac{dv}{dt}$$

$$\therefore\quad F\cos\varphi|d\vec{r}|=m\frac{dv}{dt}ds=mvdv$$

$$\Rightarrow\quad A=\int_{v_1}^{v_2}mvdv=\frac{1}{2}mv_b^2-\frac{1}{2}mv_a^2$$

2.4 功 能量 动能定理

$$A=\int_{v_1}^{v_2} mv dv=\frac{1}{2}mv_b^2-\frac{1}{2}mv_a^2$$

定义质点的**动能**: $E_k=\frac{1}{2}mv^2$

则有: $A_{ab}=E_{kb}-E_{ka}=\Delta E_k$

动能定理: 合外力对质点所做的功等于质点动能的增量。

2.4 功 能量 动能定理

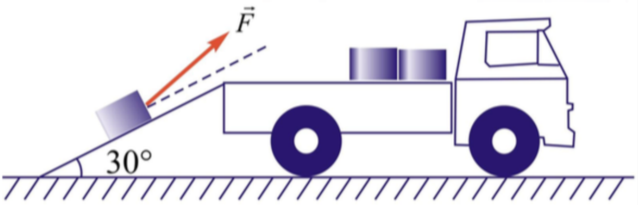
$$A = E_{kb} - E_{ka}$$

讨论:

1. $A > 0 \rightarrow E_{kb} > E_{ka}$, $A < 0 \rightarrow E_{kb} < E_{ka}$
2. 功是一个过程量，而动能是一个状态量。
3. 用动能定理解决某些力学问题比牛顿运动定律简便。
4. A, E_k与参考系有关，动能定理只在惯性系中成立。
5. 微分形式: $\vec{F} \cdot d\vec{r} = dE_k$, $\vec{F} \cdot \vec{v} = \dfrac{dE_k}{dt}$

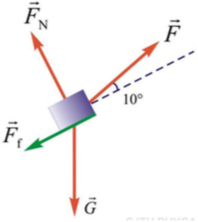
2.4 功 能量 动能定理

例2.4-1 装有货物的木箱，重量$G = 980\mathrm{N}$，要把它运上汽车。现将长$l = 3\mathrm{m}$的木板搁在汽车后部，构成一斜面,然后把木箱沿斜面拉上汽车。斜面与地面成$30°$角，木箱与斜面间的滑动摩擦因数$\mu = 0.20$，绳的拉力与斜面成$10°$角,大小为700N。 求:(1)木箱所受各力所做的功；(2)合外力对木箱所做的功；(3) 如改用起重机把木箱直接吊上汽车能不能少做些功?



2.4 功 能量 动能定理

解：木箱所受的力分析如图所示



(1)每个力所做的功:

拉力F 所做的功

$$\begin{aligned} A_1 &= Fl\cos 10^\circ = 700 \times 3 \times 0.985 \\ &= 2.07 \times 10^3 (\mathrm{J}) \end{aligned}$$

重力所做的功:

$$\begin{aligned} A_2 &= Gl\cos(180^\circ - 60^\circ) = 980 \times 3 \times (-0.5) \\ &= -1.47 \times 10^3 (\mathrm{J}) \end{aligned}$$

正压力所做的功

$$A_3 = F_N l \cos 90^\circ = 0$$

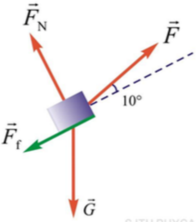
2.4 功 能量 动能定理

根据牛顿第二定律:

$$F_{\mathrm{N}} + F\sin 10^\circ - G\cos 30^\circ = 0$$

$$F_{\mathrm{N}} = G\cos 30^\circ - F\sin 10^\circ = 727(\mathrm{N})$$

$$F_{\mathrm{f}} = \mu F_{\mathrm{N}} = 0.20 \times 727 = 145(\mathrm{N})$$



摩擦力所做的功:

$$A_4 = F_{\mathrm{f}} l \cos 180^\circ = -145 \times 3 = -435(\mathrm{J})$$

(2) 合力所做的功:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 165\mathrm{J}$$

2.4 功 能量 动能定理

(3)如改用起重机把木箱吊上汽车。所用拉力F'至少要等于重力。这时拉力所做的功为

$$A' = F'l\sin 30^\circ = 980 \times 30 \times 0.5 = 1.47 \times 10^3(\mathrm{J})$$

等于重力所做的功,而符号相反,这时合外力所做的功为零。 与(1)中F做的功相比较,用了起重机能够少做功。

(1)中推力F所多做的功:

$$2.07 \times 10^3 - 1.47 \times 10^3 = 0.60 \times 10^3(\mathrm{J})$$

其中, 435J的功用于克服摩擦力,转变成热量;余下165J的功将使木箱的动能增加。

2.4 功 能量 动能定理

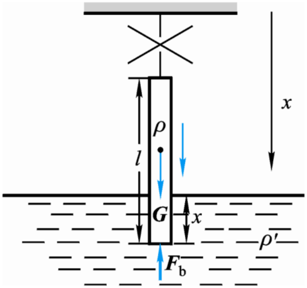
例2.4-2 有一密度为ρ的细棒，长度为l，其上端用细线悬着，下端紧贴着密度为ρ'的液体表面。现将悬线剪断，求细棒在恰好全部没入水中时的沉降速度。设液体没有黏性。

解：在下落的过程中，棒受力如图所示．取竖直向下为Ox轴的正方向。当棒的浸没长度为x时，浮力大小为(设棒的截面积$S=1$)

$$F_{\mathrm{b}}=\rho' x g$$

此时棒受到的合外力为

$$F=mg-F_{\mathrm{b}}=\rho l g-\rho' x g$$



2.4 功 能量 动能定理

下落过程中合外力作的功

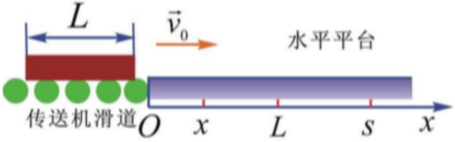
$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^l (G - F_\mathrm{b})dx \\
&= \int_0^l (\rho l - \rho' x) g dx = \rho l^2 g - \frac{1}{2}\rho' l^2 g
\end{aligned}
$$

令末速度v, 应用动能定理

$$
g\rho l^2 - \frac{1}{2}\rho' l^2 g = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho l v^2
$$

$$
\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\rho g l - \rho' g l}{\rho}}
$$

例2.4-3 柔软均质物体以初速v_0 送上平台,物体前端在平台上滑行s距离后停止。设滑道上无摩擦,物体与台面间的摩擦因数为μ, 且 $s > L$, 求初速度v_0 。



解:

$$0 < x < L: \quad F_f = \mu \frac{m}{L} g x$$

$$x \geq L: \quad F_f = \mu m g$$

$$A_f = \int \vec{F}_f \cdot d\vec{x} = -\int F_f dx$$

$$= -\int_0^L \mu \frac{m}{L} g x dx - \int_L^s \mu m g dx$$

$$A_{\mathrm{f}} = -\mu m g(s - \frac{L}{2})$$

由动能定理:

$$A_{\mathrm{f}} = \Delta E_k = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\mu m g(s - \frac{L}{2})$$

$$\therefore \quad v_0 = \sqrt{2\mu g(s - \frac{L}{2})}$$

2.5 保守力 成对力的功 势能

一、 保守力

根据各种力做功的特点, 可将力分为保守力和 非保守力.

保守力: 做功与路径无关，只与始末位置有关的力。

如:重力、万有引力、弹性力以及静电力等。

非保守力: 做功不仅与始末位置有关, 还与路径有关的力.

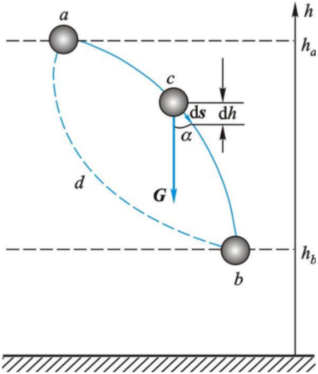
如:摩擦力.

2.5 保守力 成对力的功 势能

(1) 重力的功

设物体m从a点沿任一曲线移动到b点。在元位移$d\vec{r}$中，重力所做的元功为

$$\begin{aligned} dA &= m\vec{g}\cdot d\vec{r} = -mgdh \\ A &= \int_a^b dA = -mg\int_{h_a}^{h_b} dh \\ &= mgh_a - mgh_b \end{aligned}$$



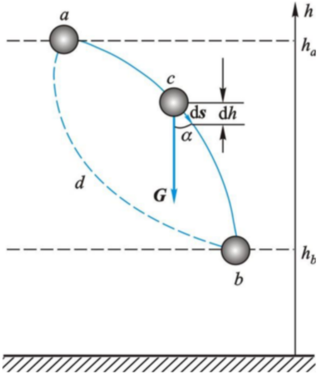
重力做功只与质点的起始和终点位置有关，与所经过的路径无关，重力是保守力！

2.5 保守力 成对力的功 势能

讨论:

如果物体沿闭合路径$adbca$运动一周，容易计算重力所做的功为:

$$\begin{aligned} A &= A_{adb} + A_{bca} \\ &= mg(h_a - h_b) + mg(h_b - h_a) \\ &= 0 \end{aligned}$$



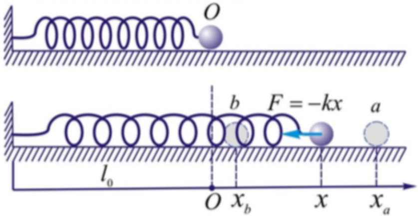
表明保守力沿任何闭合路径做功等于零。

$$\oint_L \vec{F}_{保} \cdot d\vec{r} = 0, \qquad (L\text{为任意闭合路径})$$

2.5 保守力 成对力的功 势能

(2)弹性力的功

设光滑水平桌面一端固定的轻弹簧(k)，另一端连接 质点m，当质点由a点运动到b点的过程中：



$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

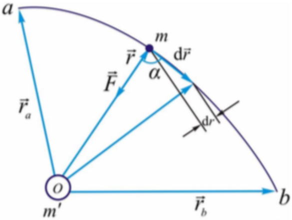
$$A = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{x_a}^{x_b} -kx dx = \frac{1}{2}kx_a^2 - \frac{1}{2}kx_b^2$$

弹性力做功只与质点的起始和终了位置有关，而 与质点运动的路径无关，弹性力是保守力！

2.5 保守力 成对力的功 势能

(3)万有引力的功

设质量为m'的质点固定，另一质量为m的质点在m'的引力场中从a点运动到b点。



$$\vec{F} = -G\frac{mm'}{r^3}\vec{r}$$

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -G\frac{mm'}{r^2}\cos\alpha|d\vec{r}|$$

$$-|d\vec{r}|\cos\alpha = |d\vec{r}|\cos(\pi-\alpha) = dr$$

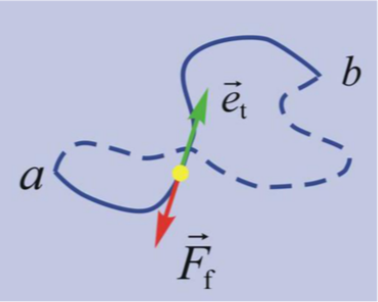
$$A = \int_a^b dA = -Gmm'\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = -Gmm'(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b})$$

万有引力的功仅由物体的始末位置决定，与路径无关，万有引力是保守力！

2.5 保守力 成对力的功 势能

(4)摩擦力力的功

质量为m的物体在桌面上沿曲线 路径从a点运动到b点，设物体 与桌面的摩擦因数为μ，



$$\vec{F}_{\mathrm{f}} = -\mu m g \vec{e}_t$$

$$A = \int_a^b \vec{F}_{\mathrm{f}} \cdot d\vec{r} = \int_a^b -\mu m g \vec{e}_t \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_a^b -\mu m g ds = -F_{\mathrm{f}} s_{ab}$$

其中s_{ab}为物体经过的路程，与物体的运动路径有关。

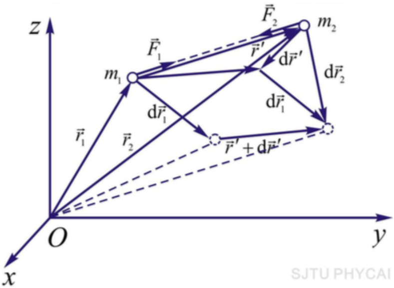
摩擦力做功与路径有关，摩擦力是非保守力!

2.5 保守力 成对力的功 势能

二、成对力的功

设有两个质点m_1和m_2，存在一对相互作用力$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$.

在dt时间内分别经过元位移$d\vec{r}$和$d\vec{r}$，这一对力所做的元功为



$$
\begin{aligned}
dA &= \vec{F}_1\cdot d\vec{r}_1+\vec{F}_2\cdot d\vec{r}_2\\
&= \vec{F}_2\cdot(d\vec{r}_2-d\vec{r}_1)\quad (\because \vec{F}_1=-\vec{F}_2)\\
&= \vec{F}_2\cdot d\vec{r}\,' \qquad d\vec{r}\,'=d\vec{r}_2-d\vec{r}_1
\end{aligned}
$$

相对元位移

2.5 保守力 成对力的功 势能

成对力的功: $dA = \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}'$

讨论:

(1) 成对作用力和反作用力所做的总功只与作用力及相对位移有关，而与每个质点各自的运动无关。

(2) 质点间的相对位移和作用力都是不随参考系而变化的，因此，任何一对作用力和反作用力所做的总功具有与参考系选择无关的不变性质。

(3) 一对内力的功可有其中一个物体所受的力及这个物体相对于另一个物体的位移来计算。

2.5 保守力 成对力的功 势能

三、势能

保守力的功只与物体的始末位置有关，而与参照系无关.

与物体的位置相联系的系统能量称为势能，常用E_p表示.

一对保守力的功可以写成如下形式

$$A_{ab}=-(E_{\mathrm{p}b}-E_{\mathrm{p}a})=\Delta E_{\mathrm{p}}$$

即物体在保守力场中a、b两点的势能$E_{\mathrm{p}a}$、$E_{\mathrm{p}b}$之差 等于质点由a点移动到b点过程中保守力做的功A_{ab}

成对保守内力的功等于系统势能的减少。

2.5 保守力 成对力的功 势能

如: $$A_{ab} = mg(h_a - h_b) = -(E_{\mathrm{p}b} - E_{\mathrm{p}a})$$

$$A_{ab} = Gmm'(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}) = -(E_{\mathrm{p}b} - E_{\mathrm{p}a})$$

$$A_{ab} = \frac{1}{2}kx_a^2 - \frac{1}{2}kx_b^2 = -(E_{\mathrm{p}b} - E_{\mathrm{p}a})$$

若选势能零点:

$$E_{\mathrm{p}b}\big|_{h_b=0} = 0 \Rightarrow \text{重力势能}\quad E_{\mathrm{p}} = mgh$$

$$E_{\mathrm{p}b}\big|_{r_b=\infty} = 0 \Rightarrow \text{引力势能}\quad E_{\mathrm{p}} = -G\frac{mm'}{r}$$

$$E_{\mathrm{p}b}\big|_{x_b=0} = 0 \Rightarrow \text{弹性势能}\quad E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kx^2$$

2.5 保守力 成对力的功 势能

讨论:

(1) 势能是相互作用有保守力的系统的属性。

(2) 势能的大小只有相对的意义，相对于势能零点而言。势能零点可以任意选取。势能差有绝对意义。

(3) 已知势能函数，可以计算保守力。

由 $A=-(E_{p_2}-E_{p_1})=-\Delta E_p \Rightarrow dA=-dE_p$

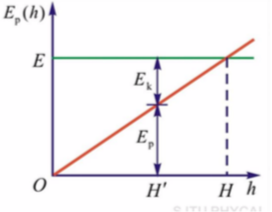
当质点在保守力作用下沿x轴发生位移则保守力做功

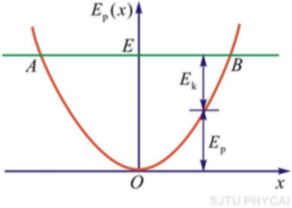
$$dA=F_x dx \Rightarrow F_x=-\frac{dE_p}{dx}$$

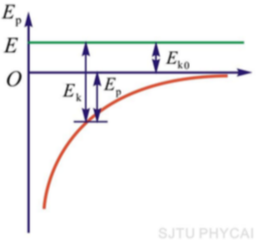
保守力沿某坐标轴的分量等于势能对此坐标的导数的负值.

2.5 保守力 成对力的功 势能

四、势能曲线







在系统总能量保持不变的条件下:

(1) 根据势能曲线的形状可以讨论物体的运动。

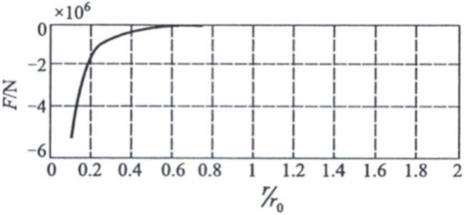
(2) 利用势能曲线，可以判断物体在各个位置所受 保守力的大小和方向。

2.5 保守力 成对力的功 势能

例2.5-1 1953年日本物理学家汤川秀树提出了核力理论，认为核子间的相互作用势能可以写成$V(r)=V_0\dfrac{e^{-r/r_0}}{r/r_0}$ $(V_0=500\text{MeV},\ r_0=1.5\times10^{-15}\text{m})$，试求核子相互作用力的表达式，并证明核力是短程力。

解：$F(r)=-\dfrac{dV}{dr}=V_0\left(\dfrac{r_0}{r^2}+\dfrac{1}{r}\right)e^{-r/r_0}$

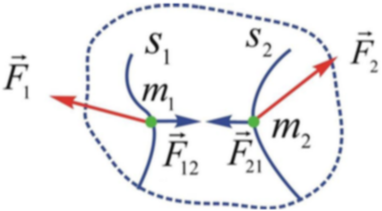
在$r>r_0$时$(\sim10^{-15}\text{m})$，核子间的相互作用力迅速趋于0，说明核子力是一短程力。



2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

一、质点系的动能定理

设系统由两个质点m_1和m_2组成，对质点1和2分别应用动能定理：



$$\int \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 = \Delta E_{k1}$$

$$\int \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \int \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 = \Delta E_{k2}$$

$$A_e = \int \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2$$

$$A_i = \int \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \int \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2$$

$$A_e + A_i = \Delta E_{k1} + \Delta E_{k2}$$

2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

$$A_e + A_i = \Delta E_k$$

质点系的动能定理: 系统的外力和内力做功的总和等于系统动能的增量。

2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

二、质点系的功能原理

内力的功可分为保守内力的功和非保守内力的功:

$$A_i = A_{ic} + A_{id}$$

$$\because \quad A_{ic} = -\Delta E_p$$

$$\therefore \quad A_e + A_{id} = \Delta E_k - A_{ic} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E$$

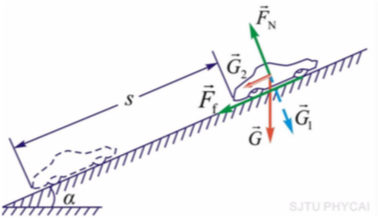
质点系的功能原理: 当系统从状态1变化到状态2时,它的机械能的增量等于外力的功与非保守内力的功的总和。

注意: 用质点动能定理时重力等是外力,需计算其所做的功。而运用系统功能原理时由于重力等保守内力做的功已由系统势能的变化所代替,因此不必再计算。

2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

例2.6-1 一汽车的速度$v_0 = 36\mathrm{km/h}$，驶至一斜率为0.010的斜坡时，关闭油门．设车与路面间的摩擦阻力为车重G的0.05倍，问汽车能冲上斜坡多远？

解法一：取汽车为研究对象，受力分析如图所示．设汽车能冲上斜坡的距离为s，此时汽车的末速度为0．根据动能定理：



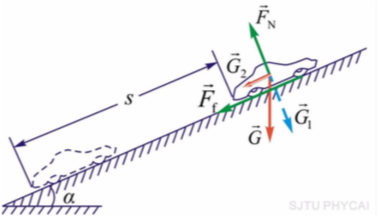
$$-F_f \cdot s - Gs\sin\alpha = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2,$$

$$F_f = \mu F_N = \mu G\cos\alpha$$

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha, \quad \cos\alpha \approx 1$$

$$s = \frac{v_0^2}{2g(\mu + \tan\alpha)} = 85\mathrm{m}$$

2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律



解法二：取汽车和地球这一系统为研究对象，运用系统的功能原理：

$$-F_f \cdot s = (0 + Gs\sin\alpha) - (\frac{1}{2}mv_0^2 + 0)$$

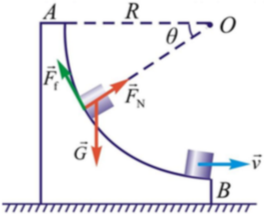
以下同解法一。

2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

例2.6-2 如图所示，一质量$m = 2\text{kg}$的物体从静止开始，沿四分之一的圆周从A滑到B，已知圆的半径$R = 4\text{m}$，设物体在B处的速度$v = 6\text{m/s}$，求在下滑过程中，摩擦力所作的功.

解：物体受力：重力的作用、摩擦力和正压力，摩擦力和正压力都是变力。正压力不做功。

用功能原理进行计算，把物体和地球作为系统。



$$
\begin{aligned}
A &= E_B - E_A = \frac{1}{2}mv^2 - mgR \\
&= \frac{1}{2} \times 2 \times 6^2 - 2 \times 9.8 \times 4 \\
&= -42.4(\text{J})
\end{aligned}
$$

2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

三、机械能守恒定律

由质点系的功能原理:

$$A_e + A_{id} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E$$

若 $A_e = 0, A_{id} = 0$

则 $\Delta E = 0 \Rightarrow E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0}$

机械能守恒定律: 如果系统内非保守内力与外力做的功都为零，即只有保守内力做功，则系统内各物体的动能和势能可以互相转化，但机械能的总值保持不变.

2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

四、能量守恒定律

由质点系的功能原理:

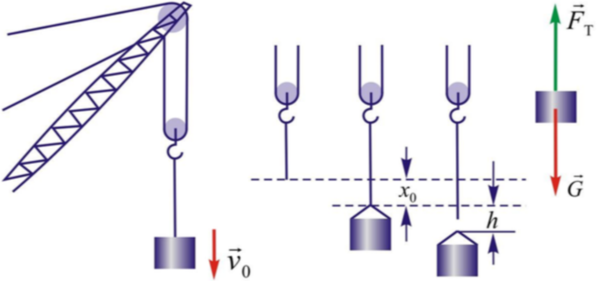
$$A_e + A_{id} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E$$

对孤立系统: $A_e = 0$, 则 $A_{id} = \Delta E$

能量守恒定律: 一个孤立系统经历任何变化时，该系统的所有能量的总和是不变的，能量只能从一种形式变化为另外一种形式，或从系统内一个物体传给另一个物体. 它是自然 界最普遍的定律之一.

2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

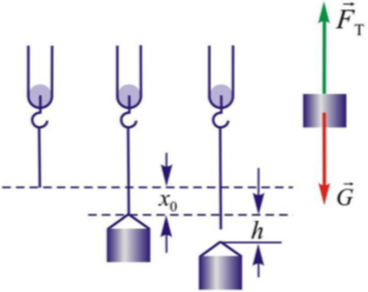
例2.6-3 起重机用钢丝绳吊运一质量为m的物体，以速度v_0做匀速下降，如图所示．当起重机突然刹车时，物体因惯性进行下降，问使钢丝绳再有多少微小的伸长？(设钢丝绳的劲度系数为k，钢丝绳的重力忽略不计.) 这样突然刹车后，钢丝绳所受的最大拉力将有多大？



2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

解：研究物体、地球和钢丝绳所组成的系统．系统的机械能守恒。

首先讨论起重机突然停止的瞬时位置处的机械能，设这时钢丝绳的伸长量为x_0，则有



$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad E_{p1}^{弹} = \frac{1}{2}kx_0^2$$

设物体因惯性继续下降的微小距离为h，并以这最低位置作为重力势能的零点，则有

$$E_{p1}^{重} = 0$$

2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

再讨论物体下降到最低位置时的机械能:

$$E_{k2}=0, \quad E_{p2}^{弹}=\frac{1}{2}k(x_0+h)^2, \quad E_{p2}^{重}=0$$

机械能守恒:

$$\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}kx_0^2+mgh=\frac{1}{2}k(x_0+h)^2$$

物体做匀速运动时，钢丝绳的伸长量x_0满足: $mg=kx_0$

$$\therefore h=\sqrt{\frac{m}{k}}v_0$$

2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

最低位置时相应的伸长量$x=x_0+h$是钢丝绳的最大伸长量，所以钢丝绳所受的最大拉力

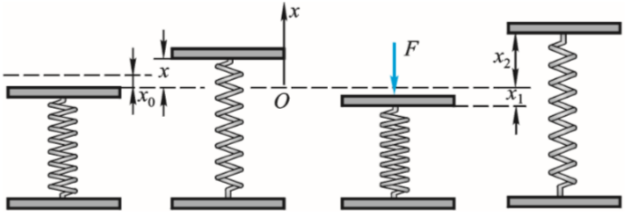
$$\begin{aligned} F'_{T,m} &= F_{T,m} = k(x_0+h) \\ &= k\left(\frac{mg}{k}+\sqrt{\frac{m}{k}}v_0\right) = mg+\sqrt{km}v_0 \end{aligned}$$

2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

例2.6-4 用一弹簧将质量为m_1和m_2的上下两水平木板 连接，下板放在地面上。

(1) 如以上板在弹簧上的平衡位置为重力势能和弹性势能的零点，试写出上板、弹簧以及地球这个系统的总势能。

(2)对上板加多大的向下压力F，才能突然撤去它，使上板向上跳而把下板拉起来?



2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

解: (1) 取上板的平衡位置为原点, 弹簧恢复到原长时就是x_0

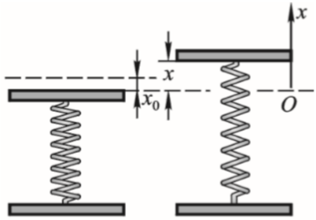
弹性势能: $E_{pe}=\frac{1}{2}k(x-x_0)^2-\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}kx^2-kx_0x$

重力势能: $E_{pg}=m_1gx$

总势能

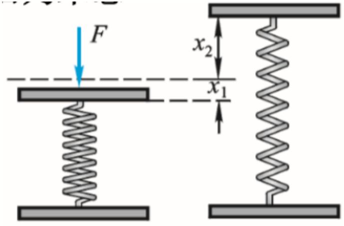
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2-kx_0x+m_1gx$$

$$kx_0 = m_1g \Rightarrow E_p=\frac{1}{2}kx^2$$



2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

(2) 加力F时为初态，撤去力F后为末态



初态：　$E_{k1}=0,\ E_{p1}=\frac{1}{2}kx_1^2$

末态：　$E_{k2}=0,\ E_{p2}=\frac{1}{2}kx_2^2$

根据机械能守恒定律：$\frac{1}{2}kx_1^2=\frac{1}{2}kx_2^2 \Rightarrow x_1=x_2$

恰好提起m_2时：$k(x_2-x_0)=m_2g$

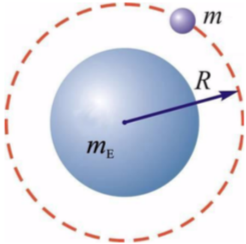
$F=kx_1,\quad m_1g=kx_0 \Rightarrow F=(m_1+m_2)g$

2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

例2.6-5 讨论宇宙速度

1. 第一宇宙速度

已知:地球半径为R, 质量为m_E, 人 造地球卫星质量为m. 要使卫星在距地面h高度绕地球做匀速圆周运动, 求其发射速度.



解: 设发射速度为v_1，绕地球的运动速度为v。

机械能守恒: $$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{m_E m}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m_E m}{R+h}$$

万有引力提供向心力: $$G\frac{m_E m}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h}$$

2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

得 $v_1 = \sqrt{\dfrac{2Gm_E}{R} - \dfrac{Gm_E}{R+h}}$

$\because \quad mg \approx G\dfrac{mm_E}{R^2} \quad \therefore \quad \dfrac{Gm_E}{R} = gR$

$v_1 = \sqrt{gR(2 - \dfrac{R}{R+h})}$

$\because \quad h \ll R$

第一宇宙速度: $v_1 \approx \sqrt{gR} = 7.9 \times 10^3 \ \mathrm{m/s}$

2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

2. 第二宇宙速度

宇宙飞船脱离地球引力而必须具有的发射速度。

(1) 脱离地球引力时，飞船的动能必须大于或等于零。

(2) 脱离地球引力处，飞船的引力势能为零。

由机械能守恒:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{m_E m}{R} = E_{k\infty} + E_{p\infty} = 0$$

得:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2Gm_E}{R}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}v_1 = 11.2 \times 10^3\ \mathrm{m/s}$$

2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

3. 第三宇宙速度

物体脱离太阳引力所需的最小速度v_3'应满足

$$\frac{1}{2}mv_3'^2 = G\frac{m_s m}{r'}$$

物体相对太阳的速度为:

$$v_3' = \sqrt{\frac{2Gm_s}{r'}} = 42.2 \times 10^3 \ \mathrm{m/s}$$

地球相对太阳的速度:

$$v' = 29.8 \times 10^3 \ \mathrm{m/s}$$

物体相对于地球的发射速度:

$$v_3'' = v_3' - v'$$

2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

从地面发射物体要飞出太阳系，既要克服地球引力，又要克服太阳引力，所以发射时物体的动能必须满足

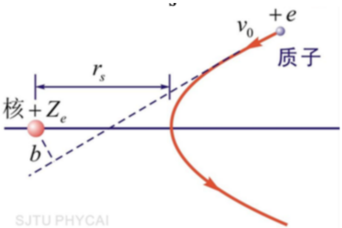
$$\frac{1}{2}mv_3^2=\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}mv''^2_3$$

第三宇宙速度：

$$\begin{aligned} v_3 &= \sqrt{v_2^2+v''^2_3}=\sqrt{v_2^2+(v'_3-v')^2} \\ &= 16.7\times10^3\ \mathrm{m/s} \end{aligned}$$

2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

例2.6-6 当质子以初速v_0通过质量较大的原子核时，原 子核可看作不动，质子受到原子核斥力的作用引起了散射，它运行的轨迹将是一双曲线，如图所示．求质子和原子核最接近的距离r_s.



解：原子核看作不动，取原子核所在处为坐标原点O. 设原子核带电荷量为Ze，质子受到原子核的静电斥力$k\frac{Ze^2}{r^2}$，此力始终通过O点.

2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

故质子对O点的角动量守恒，即

$$mv_0b = mv_sr_s \tag{1}$$

式中b是质子在无限远处的初速度v_0的方向线与原子核间的垂直距离，v_s是质子在离原子核最近处的速度. 在无限远处，质子的总能量为$\frac{1}{2}mv_0^2$

在离原子核最近处，质子的总能量为$\frac{1}{2}mv_s^2 + k\frac{Ze^2}{r_s}$

飞行过程中，质子的总能量也守恒，即

$$\frac{1}{2}mv_s^2 + k\frac{Ze^2}{r_s} = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{2}$$

2.6 质点系的功能原理 机械能守恒定律

从方程(??)和(??)中消去v_s，可得

$$k\frac{Ze^2}{r_s}=\frac{1}{2}mv_0^2\left[1-\left(\frac{b}{r_s}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow r_s=2k\frac{Ze^2}{mv_0}+\sqrt{\left(2k\frac{Ze^2}{mv_0}\right)^2+4b^2}$$