运筹帷幄之中

# 存贮论

*Introduction*

决胜千里之外

# 存贮论

本章主要内容：

（1）存贮问题及其基本概念

（2）确定型存贮模型

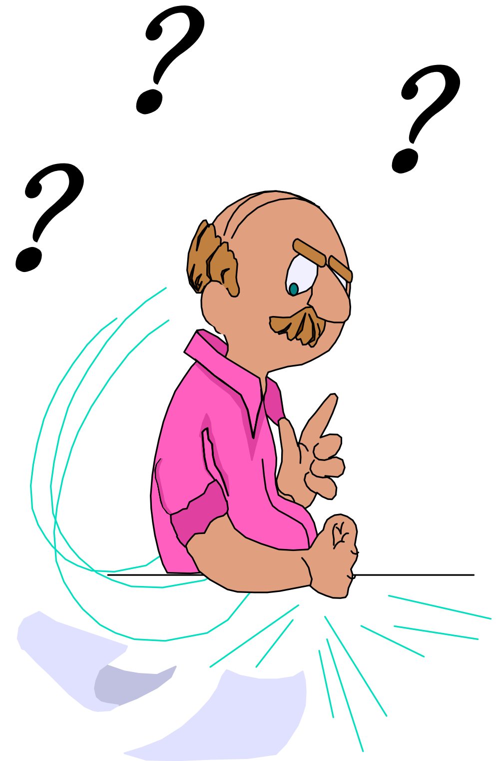
（3）单周期的随机型存贮模型

# 存贮论

## 一、问题的提出

- 水库蓄水问题
- 生产用料问题
- 商店存货问题

…………



存储是解决供需不协调的一种措施.

# 存贮论

**两方面的矛盾:**

短缺造成的损失和存储形成的费用

**作用:**

协调供需关系，平抑波动，保障供给

**问题:**

对于特定的需求模型，如何确定最佳补充周期和补充量。费用分析是基本的衡量标准

# 存贮论

## 二、发展概况

1915年美国经济学家哈里斯(Harris F.）对商业中的库存问题建立了一个简单模型，并求得了最优解，但未被人们注意。1918年威尔逊（Wilson R.H)建立确定性库存模型，并重新得出了哈里斯的公式，被称为威尔逊公式。二次大战后开始研究随机性库存模型。50年代美国的经济学家们研究了最优存储策略...

存储论是研究最优存储策略的理论和方法。研究在不同需求、供货及到达等情况下，确定在什么时间点及一次提出多大批量的订货，使用于订购、存储和可能发生短缺的费用的总和为最少。

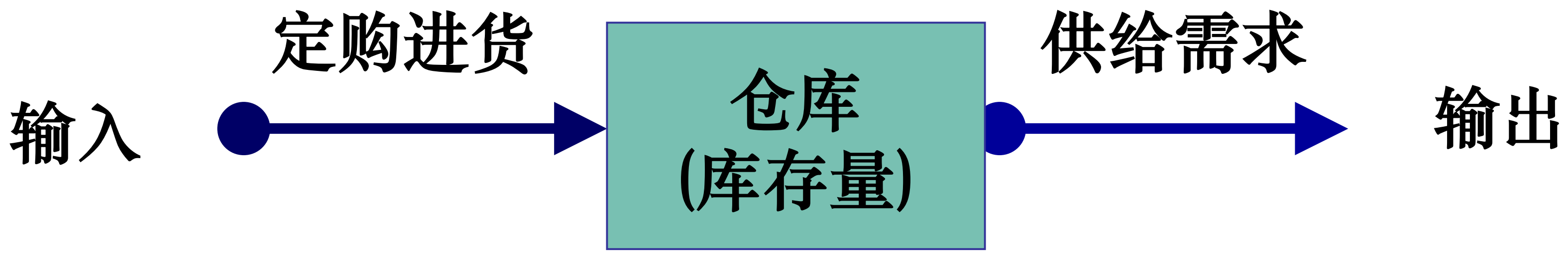
# 存贮论

## 三、存贮问题及其基本概念

存贮系统

是一个由补充、存贮、需求三个环节紧密构成的运行系统。

存贮由于需求（输出）而减少，通过补充（输入）而增加，其中心可视为仓库。

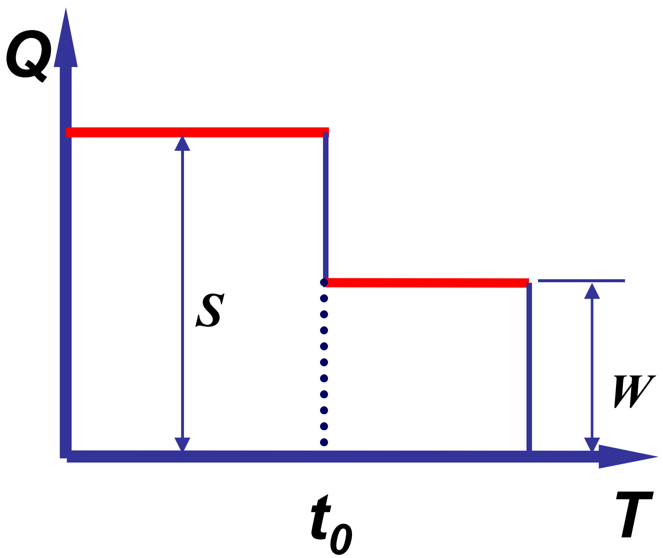


# 存贮论

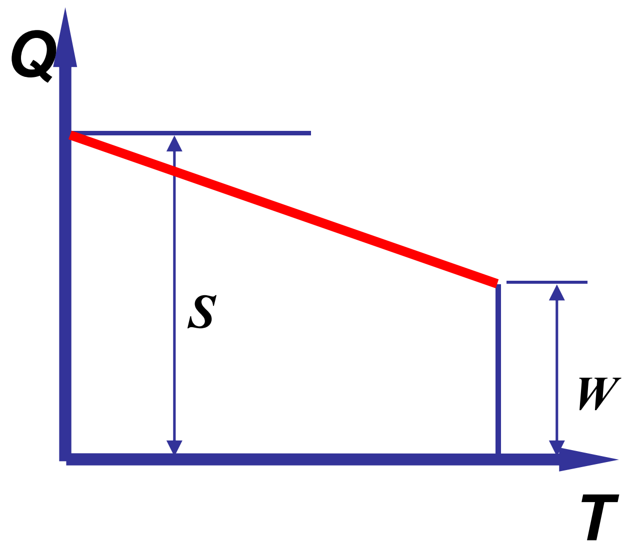
需求: 由于需求，从存贮中取出一定数量的存货，使存贮量减少，即存贮的输出。

需求类型： 间断的, 连续的;

确定性的, 随机性的




间断需求




连续需求

# 存贮论

补充(订货和生产)：由需求存货减少，必须加以补充，这是存贮的输入。

拖后时间(订货时间): 补充存贮的时间或备货时间

订货时间：可长，可短，确定性的, 随机性的

## 存贮费用

- ✓ 存储费：　占用资金利息\货物损坏支出等
- ✓ 订货费:
  - 固定费用：手续费\电信往来
  - 可变费用：货物本身价格, 运费
- ✓ 生产费：生产准备费、材料费用与加工费
- ✓ 缺货费：　缺货损失

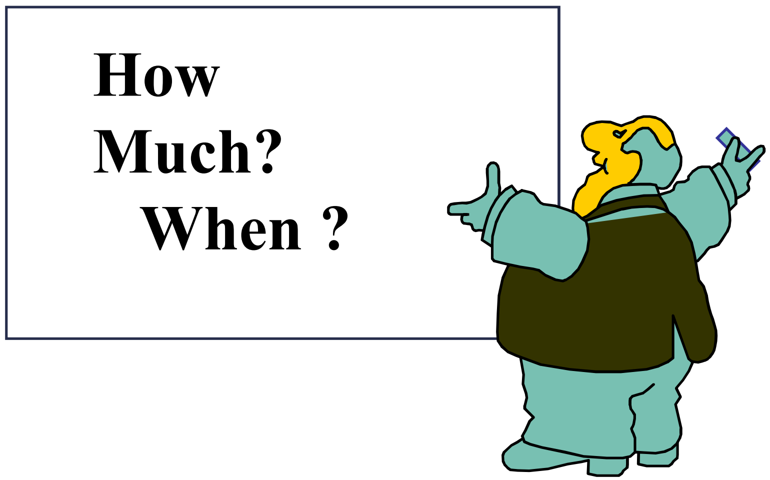
# 存贮论

## 存贮策略

存贮论主要解决存贮策略问题，即如下两个问题：

1. 补充存贮物资时，每次补充数量(Q)是多少?

2. 应该间隔多长时间(T)来补充这些存贮物资?



# 存贮论

## 存贮策略

库存策略：库存策略是指决定在什么情况下对存贮进行补充以及补充数量是多少。

分类

t－循环策略

（t，S）策略

（s，S）策略

# 存贮论

$t-$循环策略：不论现在库存数量为多少，每隔一个固定时间补充一个固定的存贮量$Q$。

（$t$，$S$）策略：每隔一个固定的时间t补充一次，补充的数量以补足一个固定的贮存量S为准。

（$s$，$S$）策略：库存余额为I，若$I>s$，则不对库存进行补充；若$I\leq s$，则对库存进行补充，数量$Q=s-I$。

# 存贮论

## 存贮类型

存储模型

确定性存储模型

随机性存储模型

确定型存贮摸型：如果存贮模型被模型中的需求、补充等一些数据为确定的数值时，称为确定型存贮摸型。

随机型存贮模型：如果含有随机变量，称为随机型存贮模型。

## 二、确定型存贮模型

**模型I：**不允许缺货，补充时间极短（**经济订购批量 or E.O.Q**）

假设：

- 需求是连续均匀的，即单位时间的需求量$R$为常数
- 补充可以瞬时实现，即补充时间近似为零
- 单位存贮费$C_1$，单位缺货费$C_2=\infty$，订购费用$C_3$；货物单价$K$

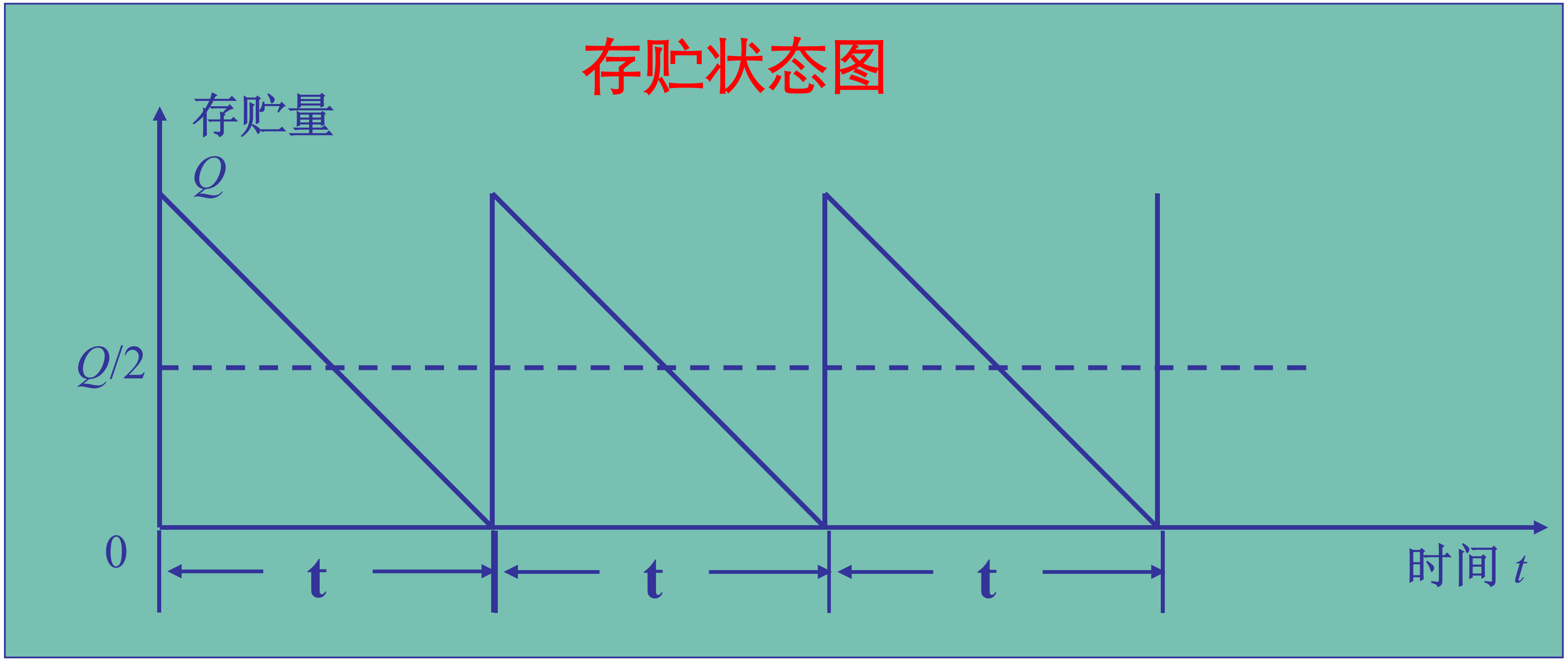
# 存贮论

研究目的：

1．补充存贮物资时，每次补充数量($Q$)是多少?

2．应该间隔多长时间($t$)来补充这些存贮物资?

使得总费用最少



# 存贮论

主要参数有:

需求率： R

单位货物单位时间的存贮费: $c_1$

每次订货费: $c_3$ 货物单价: K

每次订货量: Q

订货周期: t

这些量都是确定的、不变的数值。各参量之间的关系:

订货量 Q 单位存贮费 $c_1$ 每次订购费 $c_3$

越小 存贮费用越小 订货费用越大

越大 存贮费用越大 订货费用越小

# 存贮论

## 采用*t*-循环策略

$$t^* = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}}$$

$$Q^* = Rt^* = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}}$$

经济订货批量公式，
简称EOQ

$$C^* = C(t^*) = \sqrt{2C_1 C_3 R}$$

例2　某轧钢厂每月按计划需生产角钢30000顿，每吨每月需要存储费53元，每次生产需要装配费25000又元。
求E.O.Q 及最低费用

# 存贮论

## 模型II：不允许缺货，补充时间较长

最优存贮周期 $$t^* = \sqrt{\frac{2C_3P}{C_1R(P-R)}}$$

经济生产批量 $$Q^* = Rt^* = \sqrt{\frac{2C_3RP}{C_1(P-R)}}$$

结束生产时间 $$t_3^* = \frac{R}{P}t^*$$

最大存贮量 $$A^* = R(t^* - t_3^*) = \frac{R(P-R)}{P}t^*$$

平均总费用 $$C^* = 2C_3/t^*$$

**例3** **某厂每月需要甲产品1000件，每月生产率为5000件，每批装配费为500元，每月没见产品存储费为20元。求E.O.Q及最低费用**

# 存贮论

## 三、单周期的随机性存贮模型

在前面讨论的模型中，我们把需求看成是固定不变的已知常量。但是，在现实世界中，更多的情况却是需求为一个随机变量。为此，在本节中我们将介绍需求是随机变量，特别是需求服从均匀分布和正态分布这两种简单情况的存贮模型。典型的单周期存储模型是“报童问题”（Newsboy Problem），它是由报童卖报演变而来的，在存储论和供应链的研究中有广泛地应用。

# 存贮论

- 基本的订货策略
  - 按决定是否订货的条件划分：

    订购点订货法、定期订货法

  - 按订货量的决定方法划分：

    定量订货法、补充订货法

# 存贮论

**单周期的存贮模型：**

周期中只能提出一次订货

发生短缺时也不允许再提出订货

周期结束后，剩余货可以处理

存贮策略的优劣，通常以赢利的期望值的大小作为衡量标准

# 存贮论

例：某商店拟出售一批日历画片，每售出一千张可赢利700元。如果在新年期间不能售出，必须削价处理。由于削价，一定可以售完，此时每千张赔损400元。

根据以往经验，市场需求的概率见表：

| 需求量(千张) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 概率$P(r)$ | 0.05 | 0.1 | 0.25 | 0.35 | 0.15 | 0.1 |

每年只能订货一次，问应订购日历画片几千张才能使获利的期望值最大?

# 存贮论

解：如果该店订货4千张，可能获利的数值

| 市场需求(千张) | 获利 (元) |
| --- | --- |
| **0** | **(-400)×4=-1600** |
| **1** | **(-400)×3+700=-500** |
| **2** | **(-400)×2+700×2=600** |
| **3** | **(-400)×1+700×3=1700** |
| **4** | **(-400)×0+700×4=2800** |
| **5** | **(-400)×0+700×4=2800** |

# 存贮论

订购量为4千张时获利的期望值

$$E\left[C(4)\right]=(-16)\times 0.05+(-5)\times 0.10$$

$$+6\times 0.25+17\times 0.35+28\times 0.15$$

$$+28\times 0.10=13.15\text{（元）}$$

# 存贮论

| 获利 需求量 订货量 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 获利期望值 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | -400 | 700 | 700 | 700 | 700 | 700 | 645 |
| **2** | -800 | 300 | 1400 | 1400 | 1400 | 1400 | 1180 |
| **3** | -1200 | -100 | 1000 | 2100 | 2100 | 2100 | 1440* |
| **4** | -1600 | -500 | 600 | 1700 | 2800 | 2800 | 1315 |
| **5** | -2000 | -900 | 200 | 1300 | 2400 | 3500 | 1025 |

# 存贮论

该店订购3千张日历画片获利期望值最大

- 本例也可从相反的角度考虑求解，即计算损失期望值最小的办法求解

当订货量为Q时，可能发生

- 滞销赔损（供大于求）
- 缺货损失（供小于求）

因缺货而失去销售机会的损失

# 存贮论

当该店订购量为2千张时，损失的可能值

供货大于需求时滞销损失

市场需求量为0时滞销损失 (-400)×2=-800 (元)

市场需求量为1时滞销损失 (-400)×1=-400 (元)

市场需求量为2时滞销损失 0 (元)

供货小于需求时缺货损失

市场需求量为3时缺货损失 (-700)×1=-700 (元)

市场需求量为4时缺货损失 (-700)×2=-1400 (元)

市场需求量为5时缺货损失 (-700)×3=-2100 (元)

# 存贮论

当订购量为2千张时，滞销和缺货两种损失之和的期望值

$$E[C(2)]=(-800)\times 0.05+(-400)\times 0.10+0\times 0.25+(-700)\times 0.35+(-1400)\times 0.15+(-2100)\times 0.10=-745\text{（元）}$$

# 存贮论

| 订货量（千张） | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 损失的期望值 | -1925 | -1280 | -745 | -485* | -610 | -900 |

该店订购3千张可使损失的期望值最小。

结论同前

❖说明对同一问题可从两个不同的角度考虑:

获利最大、损失最小

# 存贮论

## 模型Ⅵ：需求是离散随机变量

典型例—报童问题：报童每天售出的报纸份数$r$是一个离散随机变量，

- 每天售出 r 份报纸的概率为P(r) (根据经验已知)，且 $\Sigma p(r)=1$；
- 每售出一份报纸能赚K元；
- 如售剩报纸，每剩一份赔h元。

问报童每天应准备多少份报纸?

# 存贮论

设报童每天准备Q份报纸。

采用损失期望值最小准则确定Q

- 供过于求(r≤Q),因售剩而遭到的损失期望值 $$\sum_{r=0}^{Q} h(Q-r)P(r)$$

- 供不应求(r＞Q),因失去销售机会而少赚钱的损失期望值 $$\sum_{r=Q+1}^{\infty} k(r-Q)P(r)$$

- 总的损失期望值 $$C(Q)=h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)P(r)+\sum_{r=Q+1}^{\infty}k(r-Q)P(r)$$

# 存贮论

边际分析法（略）

**最佳订购量Q*的确定：**

$$\sum_{r=0}^{Q-1} P(r) < \frac{k}{k+h} \le \sum_{r=0}^{Q} P(r)$$

记 $F(Q) = \sum_{r=0}^{Q} P(r)$ $N = \frac{k}{k+h}$ **N称为损益转折概率**

如采用获利期望值最大准则，确定最佳订购量Q*，结果同上。（略）

# 存贮论

利用公式解上例

$$k = 700, h = 400, \frac{k}{k+h} = 0.637$$

$$P(0) = 0.05, P(1) = 0.10, P(2) = 0.25, P(3) = 0.35$$

$$\sum_{r=0}^{2} P(r) = 0.4 < 0.637 < \sum_{r=0}^{3} P(r) = 0.75$$

应订购日历画片3千张

# 存贮论

- 一般情况下有

$$P(r<Q^*) \le k/(k+h) \le P(r\le Q^*)$$

可以推出： $P(r\le Q^*) = k/(k+h)$

均匀分布 U[a, b] 情况：

$$P(r\le Q^*) = (Q^*-a)/(b-a) = k/(k+h)$$

正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 情况：

$$P(r\le Q^*) = \Phi[(Q^*-\mu)/\sigma] = k/(k+h)$$

# 存贮论

例：某种报纸 出售：k=15元／百张，未售赔付：h=20元／百张，销售概率：

| 销售量(r) | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 概率 P(r) | 0.05 | 0.10 | 0.20 | 0.20 | 0.25 | 0.15 | 0.05 |

问题：每日订购多少张报纸可使赚钱的期望值最高?

解：　**k/(k+h) = 15/(15+20) = 0.4286 ，Q = 8** 时

$$\sum_{r=0}^{7} P(r) = 0.35 < 0.4286 \leq \sum_{r=0}^{8} P(r) = 0.55$$

最优订货量 $Q^*$=8百张，赚钱的期望值最大。

# 存贮论

例：新年挂历，出售赢利：k = 20／本，年前未售出赔付：h = 16元／本，市场需求近似服从均匀分布 U[550, 1100]。问：该书店应订购多少本新年挂历，可使损失期望值最小?

解：均匀分布 **U[a, b]** 情况:

$$P(r \le Q^*) = (Q^*-a)/(b-a) = (Q^*-550) / 550$$

$$= k/(k+h) = 20 / (20+16)$$

所以，**Q* = 856(本)**，且挂历有剩余的概率为**5／9**，挂历脱销的概率为**4／9**。

# 存贮论

例 液体化工产品，需求近似服从正态分布 $N(1000, 100^2)$。有关数据如下：

售价 20元／kg，生产成本15元／kg；

需求不足时高价购买19元／kg；

多余处理价5元／kg。

问 生产量为多少时，可使获利期望值最大?

解 $k=(20-15)-(20-19)=4$元/kg(需求不足时损失)

$h = 15 - 5 = 10$元／kg(生产过剩时的损失)

# 存贮论

正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 情况：

$$P(d \le Q^*) = \Phi[(Q^* - \mu)/\sigma] = k/(k+h) = 0.286$$

查表得 $(Q^* - 1000)/100 = -0.56$

所以，$Q^* = 944(kg)$，且产品有剩余的概率为0.286，缺货的概率为0.714。