§1 中值定理

一、Fermat 定理

Newton 在研究物体运动和Leibniz 在研究曲线的几何性质过程中，分别独立地发现了微分和导数。事实上，微分的思想可追溯到Fermat 对函数的极值的研究。

§1 中值定理

一、Fermat 定理

Newton 在研究物体运动和Leibniz 在研究曲线的几何性质过程中，分别独立地发现了微分和导数。事实上，微分的思想可追溯到Fermat 对函数的极值的研究。

定义： 设$f(x)$ 在点x_0 的一个领域$O(x_0,\delta)$ 有定义，若对$\forall x\in O(x_0,\delta)$ 成立不等式$f(x)\le f(x_0)$，则称x_0 是$f(x)$ 的一个极大值点，$f(x_0)$ 称为相应的极大值。同理可定义极小值点。

注1：区别极值点与最值点。

注1：区别极值点与最值点。

注2：“极大”“极小”指在x_0附近的局部范围内函数的大小关系，因此是局部性质。

注1：区别极值点与最值点。

注2：“极大”“极小”指在x_0附近的局部范围内函数的大小关系，因此是局部性质。

注3：在一个区间内，$f(x)$的极小值完全可能大于$f(x)$的某些极大值点。

注1：区别极值点与最值点。

注2：“极大”“极小”指在x_0 附近的局部范围内函数的大小关系，因此是局部性质。

注3：在一个区间内，$f(x)$ 的极小值完全可能大于$f(x)$的某些极大值点。

注4：函数在一个区间内极值点可以为无穷多个。例$f(x) = \sin(1/x)$。

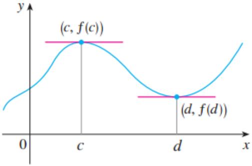
中值定理之费马定理

费马定理：设x_0 是函数$f(x)$ 的一个极值点，且$f(x)$ 在x_0 处可导，则$f'(x_0) = 0$。

中值定理之费马定理

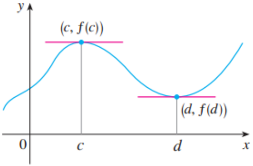
费马定理：设x_0 是函数$f(x)$ 的一个极值点，且$f(x)$ 在x_0 处可导，则$f'(x_0) = 0$。

注1：（Fermat 定理的几何意义）若$y = f(x)$ 在其极值点可导，则该点的切线平行于x 轴。



费马定理： 设x_0 是函数$f(x)$ 的一个极值点，且$f(x)$ 在x_0 处可导，则$f'(x_0) = 0$。

注1：（Fermat 定理的几何意义）若$y = f(x)$ 在其极值点可导，则该点的切线平行于x 轴。

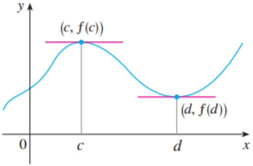


注2：由费马定理，若x_0 是$f(x)$ 的极值点，则只有两种情况（1）$f(x)$ 在x_0 处不可导；（2）$f'(x_0)$ 存在等于0。

中值定理之费马定理

费马定理： 设x_0 是函数$f(x)$ 的一个极值点，且$f(x)$ 在x_0 处可导，则$f'(x_0) = 0$。

注1：（Fermat 定理的几何意义）若$y = f(x)$ 在其极值点可导，则该点的切线平行于x 轴。



注2：由费马定理，若x_0 是$f(x)$ 的极值点，则只有两种情况（1）$f(x)$ 在x_0 处不可导；（2）$f'(x_0)$ 存在等于0。

注3：当$f(x)$ 可导时，$f'(x_0) = 0$ 是x_0 为$f(x)$ 的极值点的必要非充分条件。例$f(x) = x^3$ 在$x = 0$ 处。

中值定理之Rolle 定理

Rolle 定理：设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 上可导，且$f(a)=f(b)$，则$\exists\xi\in(a,b)$, 使得$f'(\xi)=0$。

中值定理之Rolle 定理

Rolle 定理：设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 上可导，且$f(a)=f(b)$，则$\exists\xi\in(a,b)$, 使得$f'(\xi)=0$。

注1：Rolle 定理条件是充分的，三条件缺一不可。

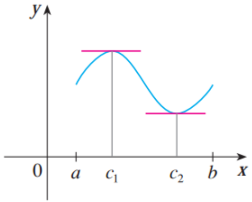
例$f_1(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1) \\ 0; & x=1 \end{cases}$, $f_2(x)=|1-2x|, x\in[0,1]$; $f_3(x)=x, x\in[0,1]$。

Rolle 定理：设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 上可导，且$f(a)=f(b)$，则$\exists \xi \in (a,b)$, 使得$f'(\xi)=0$。

注1：Rolle 定理条件是充分的，三条件缺一不可。

例$f_1(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1) \\ 0; & x=1 \end{cases}$, $f_2(x)=|1-2x|, x\in[0,1]$; $f_3(x)=x, x\in[0,1]$。

注2：（Rolle 定理的几何意义）满足定理条件的函数一定在(a,b) 中某一点存在与x 轴平行的切线。

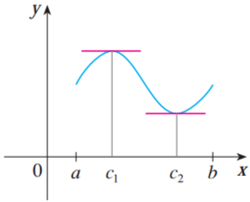


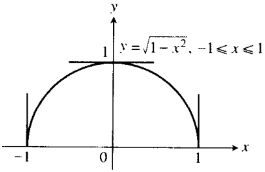
Rolle 定理：设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 上可导，且$f(a)=f(b)$，则$\exists\xi\in(a,b)$, 使得$f'(\xi)=0$。

注1：Rolle 定理条件是充分的，三条件缺一不可。

例$f_1(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1) \\ 0; & x=1 \end{cases}$，$f_2(x)=|1-2x|, x\in[0,1]$; $f_3(x)=x, x\in[0,1]$。

注2：（Rolle 定理的几何意义）满足定理条件的函数一定在(a,b) 中某一点存在与x 轴平行的切线。





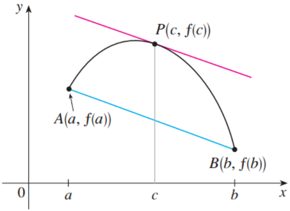
注3：Rolle 定理假设不要求f 在a,b 点可微(见上图)。

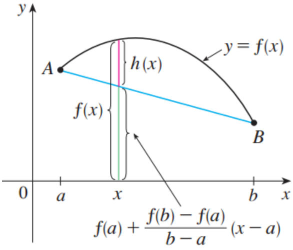
Lagrange 中值定理： 设函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 上可导，则至少存在一点$\xi \in (a,b)$, 使得$f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

中值定理之Lagrange 中值定理

Lagrange 中值定理： 设函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 上可导，则至少存在一点$\xi \in (a,b)$, 使得$f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

注1：（Lagrange 中值定理几何意义）若$f(x)$ 在(a,b) 上可导，则曲线$f(x)$ 上至少有一点的切线平行于两端点的连线。





注2：$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 称为Lagrange 公式，可写成

$$\begin{aligned} f(b)-f(a) &= f'(\xi)(b-a) \\ f(b)-f(a) &= f'(a+\theta(b-a)),(b-a)(0<\theta<1) \\ \Delta y &= f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x \end{aligned}$$

相比较有限增量公式，它给出了$\Delta y,\Delta x$ 与函数导数值之间的精确关系。

注2：$f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 称为Lagrange 公式，可写成

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= f'(\xi)(b - a) \\ f(b) - f(a) &= f'(a + \theta(b - a)), (b - a)(0 < \theta < 1) \\ \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x \end{aligned}$$

相比较有限增量公式，它给出了$\Delta y, \Delta x$ 与函数导数值之间的精确关系。

中值定理之Lagrange 中值定理

注2：$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 称为Lagrange 公式，可写成

$$\begin{aligned} f(b)-f(a) &= f'(\xi)(b-a) \\ f(b)-f(a) &= f'(a+\theta(b-a)),(b-a)(0<\theta<1) \\ \Delta y &= f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x \end{aligned}$$

相比较有限增量公式，它给出了$\Delta y, \Delta x$ 与函数导数值之间的精确关系。

物理解释: 把$(f(b)-f(a))/(b-a)$ 设想为f 在$[a,b]$ 上的平均变化率而$f'(\xi)$ 是f 在ξ 的瞬时变化率。也即在某内点处的瞬时变化率一定等于整个区间上的平均变化率。

四、Cauchy 中值定理

Cauchy 中值定理： 设函数$f(x)$ 和$g(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 上可导，对$\forall x\in(a,b), g'(x)\neq 0$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$, s.t. $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。

四、Cauchy 中值定理

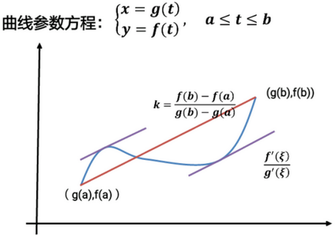
Cauchy 中值定理： 设函数$f(x)$ 和$g(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 上可导，对$\forall x\in(a,b), g'(x)\neq 0$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$, s.t. $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。

注1：Cauchy 中值定理可看成Lagrange 中值定理的参数表达形式。

四、Cauchy 中值定理

Cauchy 中值定理： 设函数$f(x)$ 和$g(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 上可导，对$\forall x \in (a,b), g'(x) \neq 0$，则至少存在一点$\xi \in (a,b)$, s.t. $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。

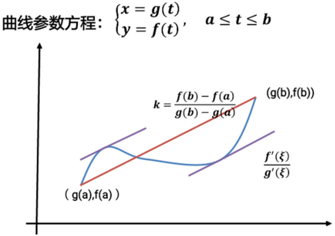
注1：Cauchy 中值定理可看成Lagrange中值定理的参数表达形式。



四、Cauchy 中值定理

Cauchy 中值定理： 设函数$f(x)$ 和$g(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 上可导，对$\forall x\in(a,b), g'(x)\neq 0$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$, s.t. $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。

注1：Cauchy 中值定理可看成Lagrange 中值定理的参数表达形式。



注2：Lagrange 中值定理是Cauchy 中值定理的特例，令$g(x)=x$ 即可。

作业： 课本P_{181} $1,4,5,6,22$。

五、中值定理的应用

1一阶导函数与单调性的关系

定理： 设$f(x)$ 在区间I 上可导，则$f(x)$ 在I 上单调增加（递减） $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in I, f'(x) \geq 0 (f'(x) \leq 0)$。

五、中值定理的应用

1一阶导函数与单调性的关系

定理： 设$f(x)$ 在区间I 上可导，则$f(x)$ 在I 上单调增加（递减） $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in I, f'(x) \geq 0 (f'(x) \leq 0)$。

五、中值定理的应用

1一阶导函数与单调性的关系

定理： 设$f(x)$ 在区间I 上可导，则$f(x)$ 在I 上单调增加（递减）$\Longleftrightarrow$ $\forall x \in I, f'(x) \geq 0(f'(x) \leq 0)$。

五、中值定理的应用

1一阶导函数与单调性的关系

定理： 设$f(x)$ 在区间I 上可导，则$f(x)$ 在I 上单调增加（递减） $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in I, f'(x) \geq 0(f'(x) \leq 0)$。

注1：若$f(x)$ 在区间I 上可导，则$f(x)$ 在I 上严格增加 $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$，且$f(x)$ 在任一长度为正的子区间上$f'(x) \neq 0$。

五、中值定理的应用

1一阶导函数与单调性的关系

定理： 设$f(x)$ 在区间I 上可导，则$f(x)$ 在I 上单调增加（递减） $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in I, f'(x)\geq 0(f'(x)\leq 0)$。

注1：若$f(x)$ 在区间I 上可导，则$f(x)$ 在I 上严格增加 $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in I, f'(x)\geq 0$，且$f(x)$ 在任一长度为正的子区间上$f'(x)\neq 0$。

$\not\Rightarrow \forall x\in I, f'(x)>0$, 例$f(x)=x^3$ 满足$f'(0)=0$。

五、中值定理的应用

1一阶导函数与单调性的关系

定理： 设$f(x)$在区间I上可导，则$f(x)$在I上单调增加（递减）$\iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0 (f'(x) \leq 0)$。

注1：若$f(x)$在区间I上可导，则$f(x)$在I上严格增加 $\iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$，且$f(x)$在任一长度为正的子区间上$f'(x) \neq 0$。

$\not\Rightarrow \forall x \in I, f'(x) > 0$, 例$f(x) = x^3$满足$f'(0) = 0$。

例1：证明不等式$\sin x > x - \dfrac{x^3}{6} (x > 0)$

作业： 课本P_{182} 12(1)(5)。

2构造辅助函数法

(不定积分基本定理) 若I为区间，$f, g \in C(I)$，且最多除有限个点外有$f'(x) = g'(x)$，则存在常数C，使得在区间I上成立$f(x) = g(x) + C$。

2构造辅助函数法

(不定积分基本定理) 若I 为区间，$f, g \in C(I)$，且最多除有限个点外有$f'(x) = g'(x)$，则存在常数C，使得在区间I上成立$f(x) = g(x) + C$。

例2：设$\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + a_n = 0$，证明：方程$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ 在$(0,1)$ 上至少有一个根。

2构造辅助函数法

(不定积分基本定理) 若I为区间，$f, g \in C(I)$，且最多除有限个点外有$f'(x) = g'(x)$，则存在常数C，使得在区间I上成立$f(x) = g(x) + C$。

例2：设$\dfrac{a_0}{n+1} + \dfrac{a_1}{n} + \cdots + a_n = 0$，证明：方程$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$在$(0, 1)$上至少有一个根。

例3：设函数$f(x)$在$[0, 1]$上连续，在$(0, 1)$上可导，且$f(0) = f(1) = 0, f(1/2) = 1$。证明：

(1)存在$\xi \in (1/2, 1)$, 使得$f(\xi) = \xi$;

(2)$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists \eta \in (0, \xi)$, 使得$f'(\eta) - \lambda[f(\eta) - \eta] = 1$。

2构造辅助函数法

(不定积分基本定理) 若I为区间，$f, g \in C(I)$，且最多除有限个点外有$f'(x) = g'(x)$，则存在常数C，使得在区间I上成立$f(x) = g(x) + C$。

例2：设$\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + a_n = 0$，证明：方程$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$在$(0, 1)$上至少有一个根。

例3：设函数$f(x)$在$[0, 1]$上连续，在$(0, 1)$上可导，且$f(0) = f(1) = 0, f(1/2) = 1$。证明：

(1)存在$\xi \in (1/2, 1)$, 使得$f(\xi) = \xi$;

(2)$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists \eta \in (0, \xi)$, 使得$f'(\eta) - \lambda[f(\eta) - \eta] = 1$。

作业： 课本P_{182} 9，10(2)，$16 - 18, 27$。

4证明不等式及杂题

4证明不等式及杂题

例4：证明不等式$|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$

4证明不等式及杂题

例4：证明不等式$|\arctan a - \arctan b| \le |a - b|$

例5：证明恒等式

$$\arctan \frac{1+x}{1-x} - \arctan x = \begin{cases} \pi/4, & x < 1 \\ -(3\pi)/4 & x > 1 \end{cases}$$

4证明不等式及杂题

例4：证明不等式$|\arctan a - \arctan b| \le |a-b|$

例5：证明恒等式

$$\arctan\frac{1+x}{1-x} - \arctan x = \begin{cases} \pi/4, & x<1 \\ -(3\pi)/4 & x>1 \end{cases}$$

例6：设$f(x)$ 在$[1,+\infty)$ 上连续，在$(1,+\infty)$ 上可导，且$e^{-x^2}f'(x)$ 在$(1,+\infty)$ 上有界。证明函数$xe^{-x^2}f(x)$ 在$(1,+\infty)$ 上也有界。

4证明不等式及杂题

例4：证明不等式$|\arctan a-\arctan b|\leq|a-b|$

例5：证明恒等式

$$\arctan\frac{1+x}{1-x}-\arctan x=\begin{cases}\pi/4, & x<1\\ -(3\pi)/4 & x>1\end{cases}$$

例6：设$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续，在$(1,+\infty)$上可导，且$e^{-x^2}f'(x)$在$(1,+\infty)$上有界。证明函数$xe^{-x^2}f(x)$在$(1,+\infty)$上也有界。

作业：课本P_{182} 7，P_{183} 20 – 21，P_{184} 26

§2 上凸及下凸函数

若函数$f(x)$ 的图像类似于$y = e^x$，则称$f(x)$ 在I 上为下凸函数；若函数$f(x)$ 的图像类似于$y = \ln x$，则称$f(x)$ 在I 上为上凸函数。

§2 上凸及下凸函数

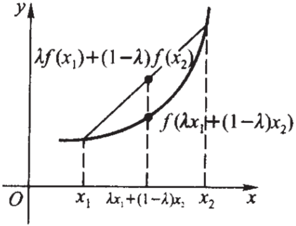
若函数$f(x)$ 的图像类似于$y=e^x$，则称$f(x)$ 在I 上为下凸函数；若函数$f(x)$ 的图像类似于$y=\ln x$，则称$f(x)$ 在I 上为上凸函数。

定义: 设$f(x)$ 在区间I 上有定义，对$\forall x_1, x_2\in I, x_1\neq x_2, \forall\lambda\in(0,1)$，有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

则称$f(x)$ 是I 上的下凸函数。

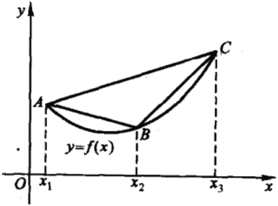
若不等号严格成立，则称$f(x)$ 在I 上严格下凸。类似可定义上凸函数及严格上凸函数。



6.2.上凸及下凸函数

命题1：函数$f(x)$ 在区间I 上为下凸函数 $\Longleftrightarrow$ $\forall x_1 < x_2 < x_3, x_1, x_2, x_3 \in I$，成立不等式

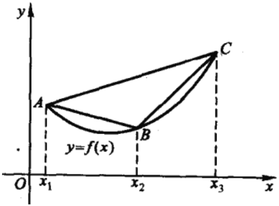
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$



（改≤ 为<，即为严格下凸定义的等价条件）

6.2.上凸及下凸函数

命题1：函数$f(x)$ 在区间I 上为下凸函数 $\Longleftrightarrow$ $\forall x_1 < x_2 < x_3, x_1, x_2, x_3 \in I$，成立不等式



$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

（改$\le$ 为$<$，即为严格下凸定义的等价条件）

命题2：若f 为开区间I 上的下凸函数，则

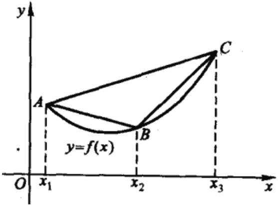
(1)f 处处存在有限的单侧导数，且$\forall x \in I, f'_-(x) \le f'_+(x)$

(2)$\forall x, y \in I, x < y$, 有$f'_-(x) \le f'_+(x) \le f'_-(y) \le f'_+(y)$，故$f'_-, f'_+$ 均为单调增加函数。

6.2.上凸及下凸函数

命题1： 函数$f(x)$ 在区间I 上为下凸函数 $\Longleftrightarrow$ $\forall x_1 < x_2 < x_3, x_1, x_2, x_3 \in I$，成立不等式

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$



（改$\le$ 为$<$，即为严格下凸定义的等价条件）

命题2： 若f 为开区间I 上的下凸函数，则

(1)f 处处存在有限的单侧导数，且$\forall x \in I, f'_-(x) \le f'_+(x)$

(2)$\forall x, y \in I, x < y$, 有$f'_-(x) \le f'_+(x) \le f'_-(y) \le f'_+(y)$，故$f'_-, f'_+$ 均为单调增加函数。

推论： 开区间上的下（上）凸函数必连续。

注：若凸函数的定义域不是开区间，则在端点处可不连续。

注：若凸函数的定义域不是开区间，则在端点处可不连续。

例$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, 1 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases}$ 在$[0, 1]$ 上为下凸函数，但在端点处不连续。

注：若凸函数的定义域不是开区间，则在端点处可不连续。

例$f(x)=\begin{cases}1, & x=0,1\\ 0, & 0<x<1\end{cases}$ 在$[0,1]$上为下凸函数，但在端点处不连续。

命题3：设f在I上可微，则f在I上为下凸函数 $\Longleftrightarrow$ f'在I上$\uparrow$.

注：若凸函数的定义域不是开区间，则在端点处可不连续。

例$f(x)=\begin{cases}1, & x=0,1\\ 0, & 0<x<1\end{cases}$ 在$[0,1]$上为下凸函数，但在端点处不连续。

命题3：设f 在I 上可微，则f 在I 上为下凸函数 $\Longleftrightarrow$ f' 在I 上$\uparrow$.

推论：设$f(x)$ 在区间I 上二阶可微，则f 在I 上为下凸函数 $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in I, f''(x)\geq 0$。

若$f(x)$ 在区间I 上二阶可微，则f 在I 上严格下凸 $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in I, f''(x)\geq 0$ 且在任一正长度的子区间上$f''(x)\not\equiv 0$。

例1：证明不等式

$$a\ln a+b\ln b\geq(a+b)[\ln(a+b)-\ln 2](a,b>0).$$

例1：证明不等式

$$a\ln a + b\ln b \geq (a+b)[\ln(a+b) - \ln 2](a, b > 0).$$

例2：设$a, b > 0, p, q$ 为满足$1/p + 1/q = 1$ 的正数，证明$ab \leq a^p/p + b^q/q$。

例1：证明不等式

$$a\ln a + b\ln b \geq (a+b)[\ln(a+b) - \ln 2](a, b > 0).$$

例2：设$a, b > 0, p, q$ 为满足$1/p + 1/q = 1$ 的正数，证明$ab \leq a^p/p + b^q/q$。

(**Jensen 不等式**)若$f(x)$ 为区间I 上的下凸（上凸）函数，则对$\forall x_i \in I$ 和满足$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ 的$\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$成立

$$f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \quad \left(f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \right).$$

例1：证明不等式

$$a\ln a+b\ln b\geq(a+b)[\ln(a+b)-\ln 2](a,b>0).$$

例2：设$a,b>0,p,q$ 为满足$1/p+1/q=1$ 的正数，证明$ab\leq a^p/p+b^q/q$。

(Jensen **不等式**)若$f(x)$ 为区间I 上的下凸（上凸）函数，则对$\forall x_i\in I$ 和满足$\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$ 的$\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 成立

$$f(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i)\leq\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)\ \left(f(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i)\geq\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)\right).$$

注：Jensen 不等式可证明几何平均数$\leq$ 算术平均数。

例1：证明不等式

$$a\ln a+b\ln b\geq(a+b)[\ln(a+b)-\ln 2](a,b>0).$$

例2：设$a,b>0,p,q$ 为满足$1/p+1/q=1$ 的正数，证明$ab\leq a^p/p+b^q/q$。

(Jensen 不等式)若$f(x)$ 为区间I 上的下凸（上凸）函数，则对$\forall x_i\in I$ 和满足$\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$ 的$\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 成立

$$f(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i)\leq\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)\ \left(f(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i)\geq\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)\right).$$

注：Jensen 不等式可证明几何平均数≤ 算术平均数。

作业： 课本P_{184} 23, 25

§3 导数的三大特性

一、导函数间断点必为第二类间断

§3 导数的三大特性

一、导函数间断点必为第二类间断

例1：设函数$f(x)$ 在(a,b) 内处处可导，证明(a,b) 中的点或者为$f'(x)$ 的连续点，或者为$f'(x)$ 的第二类间断点。

§3 导数的三大特性

一、导函数间断点必为第二类间断

例1：设函数$f(x)$ 在(a,b) 内处处可导，证明(a,b) 中的点或者为$f'(x)$ 的连续点，或者为$f'(x)$ 的第二类间断点。

注1：导函数间断点为第二类间断是在导数处处存在的前提下，e.g. $f(x)=|x|$。

§3 导数的三大特性

一、导函数间断点必为第二类间断

例1：设函数$f(x)$ 在(a,b) 内处处可导，证明(a,b) 中的点或者为$f'(x)$ 的连续点，或者为$f'(x)$ 的第二类间断点。

注1：导函数间断点为第二类间断是在导数处处存在的前提下，e.g. $f(x)=|x|$。

注2：若$f(x)$ 在(a,b) 可导，$f'(x)$ 在(a,b) 上单调，则$f'(x)$ 在(a,b) 上连续。

二、导数的介值性

(G. Darboux 定理)：若函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上处处可导，$f'(a)<f'(b)$，则$\forall c$ 满足$f'(a)<c<f'(b), \exists \xi \in (a,b)$, s.t. $f'(\xi)=c$。

二、导数的介值性

(G. Darboux 定理)：若函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上处处可导，$f'(a)<f'(b)$，则$\forall c$ 满足$f'(a)<c<f'(b), \exists \xi \in (a,b)$, s.t. $f'(\xi)=c$。

推论：若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可导，且$f'(x)\neq 0$，则$f(x)$ 在$[a,b]$ 上严格单调。

二、导数的介值性

(G. Darboux 定理)：若函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上处处可导，$f'(a)<f'(b)$，则$\forall c$ 满足$f'(a)<c<f'(b), \exists \xi \in (a,b)$, s.t. $f'(\xi)=c$。

推论：若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可导，且$f'(x)\neq 0$，则$f(x)$ 在$[a,b]$ 上严格单调。

三、单侧导数极限定理

定理：设f 在$[a,b]$ 上可微，在a 点右连续。若$f'(a+0)=A$，则$f'_+(a)=f'(a+0)=A$。

注1：该定理可推出“导数极限定理”：设f 在点a 的某领域$O(a)$ 内连续，在$O(a)\backslash\{a\}$ 内可导。若$\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ 存在，则f 在a 处可导，且$f'(x)$ 在a 点连续。

注1：该定理可推出“导数极限定理”：设f 在点a 的某领域$O(a)$ 内连续，在$O(a)\backslash\{a\}$ 内可导。若$\lim_{x\to a} f'(x)$ 存在，则f 在a 处可导，且$f'(x)$ 在a 点连续。

注2：该定理可应用于求分段函数在分段点的导数。

注1：该定理可推出“导数极限定理”：设f 在点a 的某领域$O(a)$ 内连续，在$O(a)\backslash\{a\}$ 内可导。若$\lim_{x\to a} f'(x)$ 存在，则f 在a 处可导，且$f'(x)$ 在a 点连续。

注2：该定理可应用于求分段函数在分段点的导数。

e.g. $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

§4 L'hospital 法则

待定型极限有$\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$、$0\cdot\infty$ 型、$\infty\pm\infty$ 型、∞^0 型、1^∞ 型、0^0 型几种，均可转化为$\frac{0}{0}$ 或$\frac{*}{\infty}$ 型。

§4 L'hospital 法则

待定型极限有$\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$、$0\cdot\infty$ 型、$\infty\pm\infty$ 型、∞^0 型、1^∞ 型、0^0 型几种，均可转化为$\frac{0}{0}$ 或$\frac{*}{\infty}$ 型。

一、$\frac{0}{0}$ 和$\frac{*}{\infty}$ 型极限

定理： （L'Hospital 法则）设函数$f(x)$ 和$g(x)$ 在$(a, a+\delta)(\delta>0)$ 上可导，$g'(x)\neq 0$。若(1) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0$ $\left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right)$ 或 $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\infty$ $\left(\frac{*}{\infty}\text{ 型}\right)$；(2) $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)/g'(x)$ 存在（可以为有限或∞）

则 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)/g(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)/g'(x)$。

注1：定理结果可推广至$x \to a^-, x \to a, x \to \infty$ 情况。

注1：定理结果可推广至$x \to a^-, x \to a, x \to \infty$ 情况。

注2：L'Hospital 法则确实是计算极限的强有力工具，但要学会将L'Hospital 法则与其它工具相结合，如等价量代换，变量代换，有限增量公式等。

6.4.L'hospital 法则

注1：定理结果可推广至$x \to a^-, x \to a, x \to \infty$ 情况。

注2：L'Hospital 法则确实是计算极限的强有力工具，但要学会将L'Hospital 法则与其它工具相结合，如等价量代换，变量代换，有限增量公式等。

例1：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

注1：定理结果可推广至$x \to a^-, x \to a, x \to \infty$ 情况。

注2：L'Hospital 法则确实是计算极限的强有力工具，但要学会将L'Hospital 法则与其它工具相结合，如等价量代换，变量代换，有限增量公式等。

例1：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

例2：$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln \sin mx}{\ln \sin nx}$

注1：定理结果可推广至$x \to a^-, x \to a, x \to \infty$ 情况。

注2：L'Hospital 法则确实是计算极限的强有力工具，但要学会将L'Hospital 法则与其它工具相结合，如等价量代换，变量代换，有限增量公式等。

例1：$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

例2：$\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln \sin mx}{\ln \sin nx}$

例3：$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\tan x}{x^3}$

注1：定理结果可推广至$x \to a^-, x \to a, x \to \infty$情况。

注2：L'Hospital 法则确实是计算极限的强有力工具，但要学会将L'Hospital 法则与其它工具相结合，如等价量代换，变量代换，有限增量公式等。

例1：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

例2：$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln \sin mx}{\ln \sin nx}$

例3：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \tan x}{x^3}$

例4：求$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^a}{e^{bx}}$，其中$a > 0, b > 0$。

二、其它待定型

$$0\cdot\infty, \infty\pm\infty, \infty^0, 1^\infty, 0^0$$

6.4.L'hospital 法则

二、其它待定型

$0\cdot\infty, \infty\pm\infty, \infty^0, 1^\infty, 0^0$

方法：通过恒等变形转化为$\frac{0}{0}$ 或$\frac{*}{\infty}$ 型，然后采用L'Hospital 法则

二、其它待定型

$$0\cdot\infty, \infty\pm\infty, \infty^0, 1^\infty, 0^0$$

方法：通过恒等变形转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{*}{\infty}$型，然后采用L'Hospital 法则

例5：$\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x-\frac{1}{x})$

二、其它待定型

$0\cdot\infty, \infty\pm\infty, \infty^0, 1^\infty, 0^0$

方法：通过恒等变形转化为$\frac{0}{0}$ 或$\frac{*}{\infty}$ 型，然后采用L'Hospital 法则

例5： $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x - \dfrac{1}{x})$

例6： $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^x$

注1：当 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不是$\dfrac{0}{0}$ 或$\dfrac{*}{\infty}$ 型，不能用L'Hospital 法则。

6.4.L'hospital 法则

注1：当 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不是$\dfrac{0}{0}$ 或$\dfrac{*}{\infty}$ 型，不能用L'Hospital 法则。

注2：L'Hospital 法则，对于$\dfrac{0}{0}$ 或$\dfrac{*}{\infty}$ 型，若 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f^{(}x)}{g^{(}x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$；若 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 仍可能存在。

6.4.L'hospital 法则

注1：当 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不是$\dfrac{0}{0}$ 或$\dfrac{*}{\infty}$ 型，不能用L'Hospital 法则。

注2：L'Hospital 法则，对于$\dfrac{0}{0}$ 或$\dfrac{*}{\infty}$ 型，若 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$；若 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在， $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 仍可能存在。

作业： 课本P_{191} 1, 2(2)(3)(16)(19), 3(1)(3) , 4, 5, 7

§5 Taylor 公式

在近似计算中，我们希望用简单的函数或是性质比较好的函数来局部近似表示一个比较复杂的函数。

§5 Taylor 公式

在近似计算中，我们希望用简单的函数或是性质比较好的函数来局部近似表示一个比较复杂的函数。

例如：$f(x)$ 在x_0 连续时，

$$f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) = f(x_0) + o(1) \approx f(x_0).$$

§5 Taylor 公式

在近似计算中，我们希望用简单的函数或是性质比较好的函数来局部近似表示一个比较复杂的函数。

例如：$f(x)$ 在x_0 连续时，

$$f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) = f(x_0) + o(1) \approx f(x_0).$$

$f(x)$ 在x_0 处可导时，

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

§5 Taylor 公式

在近似计算中，我们希望用简单的函数或是性质比较好的函数来局部近似表示一个比较复杂的函数。

例如：$f(x)$ 在x_0 连续时，

$$f(x)=f(x_0)+(f(x)-f(x_0))=f(x_0)+o(1)\approx f(x_0).$$

$f(x)$ 在x_0 处可导时，

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

目标：用多项式逼近一个函数。

6.5.Taylor 公式

对于有限增量公式，其精确度对$x - x_0$只有一阶。为提高精确度，必须考虑用更高次数的多项式逼近。

对于有限增量公式，其精确度对$x-x_0$只有一阶。为提高精确度，必须考虑用更高次数的多项式逼近。

唯一性定理： 设f在x_0的某领域$O(x_0)$有定义，且有

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_n)^n+o((x-x_0)^n)$$

$(x\to x_0)$，则$a_0=f(x_0), a_1=f'(x_0), \cdots, a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$。

对于有限增量公式，其精确度对$x-x_0$只有一阶。为提高精确度，必须考虑用更高次数的多项式逼近。

唯一性定理： 设f在x_0的某领域$O(x_0)$有定义，且有

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_n)^n+o((x-x_0)^n)$$

$(x\to x_0)$，则$a_0=f(x_0),a_1=f'(x_0),\cdots,a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$。

对一般的函数$f(x)$，我们以$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$为系数构造多项式：

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n。$$

考察余项$r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ 的性质。

一、带Peano 余项的Taylor 公式

若函数$f(x)$ 在x_0 处存在n 阶导数$f^{(n)}(x_0)$，则存在x_0 的一个领域，对该领域任意一点x，有$f(x) =$

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x)$$

$(x \to x_0)$，其中$r_n(x) = o((x - x_0)^n)$。

考察余项$r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ 的性质。

一、带Peano 余项的Taylor 公式

若函数$f(x)$ 在x_0 处存在n 阶导数$f^{(n)}(x_0)$，则存在x_0 的一个领域，对该领域任意一点x，有$f(x) =$

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x)$$

$(x \to x_0)$，其中$r_n(x) = o((x - x_0)^n)$。

理解条件：$f(x)$ 在x_0 处有n 阶导数，指f 在x_0 某领域内存在所有的$k(< n)$ 阶导数，但$f^{(n)}(x)$ 只要求在x_0 点存在。

考察余项$r_n(x)=f(x)-P_n(x)$ 的性质。

一、带Peano 余项的Taylor 公式

若函数$f(x)$ 在x_0 处存在n 阶导数$f^{(n)}(x_0)$，则存在x_0 的一个领域，对该领域任意一点x，有$f(x)=$

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x)$$

$(x\to x_0)$，其中$r_n(x)=o((x-x_0)^n)$。

理解条件：$f(x)$ 在x_0 处有n 阶导数，指f 在x_0 某领域内存在所有的$k(<n)$ 阶导数，但$f^{(n)}(x)$ 只要求在x_0 点存在。

注：该Taylor 公式是有限增量公式的推广。

二、带Lagrange 余项的Taylor 公式

若f 在x_0 的某领域$O(x_0)$ 中$n+1$ 阶可微，则对$\forall x \in O(x_0)$，在x 与x_0 之间存在ξ，使得$f(x)=$

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x)$$

$(x \to x_0)$，其中$r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$。

注1：该Taylor 公式是Lagrange 中值定理的推广。

注2：带lagrange 余项的Taylor 公式条件强于带Peano 余项的Taylor 公式，但结论也更强。

注2：带lagrange 余项的Taylor 公式条件强于带Peano 余项的Taylor 公式，但结论也更强。

作业： 课本P_{201} 1, 2

三、函数在$x = 0$ 处Taylor 公式

我们考虑函数$f(x)$ 在$x = 0$ 处的Taylor 公式，即

$$f(x) = f(0) + f^{'}(0)x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x)(x \to 0)$$

其中$r_n(x) = o(x^n)$ 或者$r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \theta \in (0, 1)$.

$f(x)$ 在$x = 0$ 处Taylor 公式又被称为Maclaurin 公式。

1直接法

例1：求$f(x) = e^x$ 的Maclaurin 公式。

1直接法

例1：求$f(x) = e^x$ 的Maclaurin 公式。

例2：求$f(x) = \sin x$ 的Maclaurin 公式。

1直接法

例1：求$f(x) = e^x$ 的Maclaurin 公式。

例2：求$f(x) = \sin x$ 的Maclaurin 公式。

例3：求$f(x) = (1+x)^\alpha$ (α 为任意实数)的Maclaurin 公式。

1直接法

例1：求$f(x) = e^x$ 的Maclaurin 公式。

例2：求$f(x) = \sin x$ 的Maclaurin 公式。

例3：求$f(x) = (1 + x)^\alpha$ (α 为任意实数)的Maclaurin 公式。

2间接法

1直接法

例1：求$f(x) = e^x$ 的Maclaurin 公式。

例2：求$f(x) = \sin x$ 的Maclaurin 公式。

例3：求$f(x) = (1+x)^\alpha$ (α 为任意实数)的Maclaurin 公式。

2间接法

例4：求$f(x) = 2^x$ 的Maclaurin 公式。

1直接法

例1：求$f(x)=e^x$ 的Maclaurin 公式。

例2：求$f(x)=\sin x$ 的Maclaurin 公式。

例3：求$f(x)=(1+x)^\alpha$ (α 为任意实数)的Maclaurin 公式。

2间接法

例4：求$f(x)=2^x$ 的Maclaurin 公式。

例5：求$f(x)=\sqrt[3]{2-\cos x}$ 的Maclaurin 公式（展开至4次）。

1直接法

例1：求$f(x) = e^x$ 的Maclaurin 公式。

例2：求$f(x) = \sin x$ 的Maclaurin 公式。

例3：求$f(x) = (1+x)^\alpha$ (α 为任意实数)的Maclaurin 公式。

2间接法

例4：求$f(x) = 2^x$ 的Maclaurin 公式。

例5：求$f(x) = \sqrt[3]{2-\cos x}$ 的Maclaurin 公式（展开至4次）。

注：在例5中为何不能利用$f(x) = \sqrt[3]{2}\left(1 - \frac{\cos x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$?

例6：求$f(x) = \sqrt{2 + \sin x}$ 的Maclaurin 公式（展开至3次）。

例6：求$f(x) = \sqrt{2+\sin x}$ 的Maclaurin 公式（展开至3次）。

例7：求$f(x) = \ln(1+x)$ 的Maclaurin 公式。

例6：求$f(x)=\sqrt{2+\sin x}$ 的Maclaurin 公式（展开至3次）。

例7：求$f(x)=\ln(1+x)$ 的Maclaurin 公式。

函数$f(x)$ 在$x=x_0$ 处的Taylor 公式可以通过它在$x=0$ 处的Taylor 公式作适当变换后直接得到，而无须用定义计算。

例6：求$f(x) = \sqrt{2+\sin x}$ 的Maclaurin 公式（展开至3次）。

例7：求$f(x) = \ln(1+x)$ 的Maclaurin 公式。

函数$f(x)$ 在$x = x_0$ 处的Taylor 公式可以通过它在$x = 0$ 处的Taylor 公式作适当变换后直接得到，而无须用定义计算。

例8：求$f(x) = \sqrt{x}$ 在$x = 1$ 处的Taylor 公式。

作业： 课本P_{216} 1(2)(6)(7) , 2(4)(5)

四、Taylor 公式的应用

1近似计算

例9：用e^x 的10 次Taylor 多项式求e 的近似值，并估计误差。

四、Taylor 公式的应用

1近似计算

例9：用e^x 的10 次Taylor 多项式求e 的近似值，并估计误差。

注：Taylor 公式只是一种局部性质，在进行近似计算时，不能远离x_0，否则效果较差。例

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \theta \in (0,1).$$

四、Taylor 公式的应用

1近似计算

例9：用e^x 的10 次Taylor 多项式求e 的近似值，并估计误差。

注：Taylor 公式只是一种局部性质，在进行近似计算时，不能远离x_0，否则效果较差。例

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\theta\in(0,1).$$

取$x=1,n=10$，则

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=0.64563492\cdots$$

与$\ln 2$ 的精确值0.69314718 误差较大。

误差$d_n' = \left|\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\right|_{x=1} \geq \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$。

误差$d_n' = \left|\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\right|_{x=1} \geq \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$。

若改用其它的Taylor 公式，如

$$
\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) \\
&= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi_1)^{2n+1}}\right] \\
&- \left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{2n}}{2n} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-\xi_2)^{2n+1}}\right] \\
&= 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right] + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi_1)^{2n+1}} \\
&+ \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-\xi_2)^{2n+1}}.
\end{aligned}
$$

令$x = \dfrac{1}{3}$，取前两项$\ln 2 \approx 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\right] = 0.6913\cdots$，比前面近似效果好很多。误差

$$
\begin{aligned}
d_n'' &= \left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi_1)^{2n+1}} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-\xi_2)^{2n+1}}\right|_{x=\frac{1}{3}} \\
&\le \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}\left[1 + \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^{2n+1}}\right] < \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}.
\end{aligned}
$$

作业：课本P_{216} 4

2求极限

例10：求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$。

2求极限

例10：求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$。

因为Peano 余项本身就是对于无穷小量的一个刻画，因此带Peano 余项的Taylor 公式在求极限中应用广泛。

例11：求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$。

2求极限

例10：求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$。

因为Peano 余项本身就是对于无穷小量的一个刻画，因此带Peano 余项的Taylor 公式在求极限中应用广泛。

例11：求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$。

例12：设$0<x_1<\frac{\pi}{2}, x_{n+1}=\sin x_n (n=1,2,\cdots)$。证明：(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ (ii) $x_n^2\sim\frac{3}{n}(n\to\infty)$。

作业：课本P_{217} 6(2)(5)(8)，9(2)

3证明不等式

前面介绍过不等式证明的多种方法：利用Lagrange 中值定理；利用函数的凸性；讨论导数的符号来得到函数的单调性。Taylor 公式也可用于不等式证明。

3证明不等式

前面介绍过不等式证明的多种方法：利用Lagrange 中值定理；利用函数的凸性；讨论导数的符号来得到函数的单调性。Taylor 公式也可用于不等式证明。

例13：设$\alpha > 1$，证明：当$x > -1$ 时成立$(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$ 且等号当且仅当$x = 0$ 时成立。

3证明不等式

前面介绍过不等式证明的多种方法：利用Lagrange 中值定理；利用函数的凸性；讨论导数的符号来得到函数的单调性。Taylor 公式也可用于不等式证明。

例13：设$\alpha > 1$，证明：当$x > -1$ 时成立$(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$ 且等号当且仅当$x = 0$ 时成立。

例14：设函数$f(x)$ 在$[0,1]$ 上二阶可导，且满足$|f''(x)| \leq 1$，$f(x)$ 在区间$(0,1)$ 达到最大值$\frac{1}{4}$。证明：$|f(0)| + |f(1)| \leq 1$。

作业：课本P_{217} 7(2)，11, 13

§6 函数作图

一、单调性与一阶导数

定理： 设$f(x)$ 在I 上可导，则$f(x)$ 在I 上单调递增（递减）$\Longleftrightarrow$ $\forall x \in I, f'(x) \geq 0(f''(x) \leq 0)$。

§6 函数作图

一、单调性与一阶导数

定理： 设$f(x)$ 在I 上可导，则$f(x)$ 在I 上单调递增（递减）$\Longleftrightarrow$ $\forall x \in I, f'(x) \geq 0(f''(x) \leq 0)$。

但函数在一点上导数大于0 $\nRightarrow$ 函数在该点充分小的领域内单调。

反例：$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$。

二、极值

由费马定理，若x_0为$f(x)$的一个极值点，则(1)$f(x)$在x_0处不可导；(2)$f'(x_0)=0$。

使$f'(x)=0$的点称为$f(x)$的**驻点**。

二、极值

由费马定理，若x_0为$f(x)$的一个极值点，则(1)$f(x)$在x_0处不可导；(2)$f'(x_0)=0$。

使$f'(x)=0$的点称为$f(x)$的驻点。

极值判别法之一： 设$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0)$和$(x_0,x_0+\delta)$（其中$\delta>0$）上可导，则

(1)若在$(x_0-\delta,x_0)$内$f'(x)<0$，而在$(x_0,x_0+\delta)$内$f'(x)>0$，则x_0为极小点；

(2)若在$(x_0-\delta,x_0)$内$f'(x)>0$，而在$(x_0,x_0+\delta)$内$f'(x)<0$，则x_0为极大点；

(3)若$f'(x)$在这两个区间内不变号，则x_0不是极值点。

极值判别法之二： 设$f'(x_0)=0$，且$f(x)$在x_0点二阶可导，

(1)若$f''(x_0)<0$，则x_0是$f(x)$的极大值点；

(2)若$f''(x_0)>0$，则x_0是$f(x)$的极小值点；

(3)若$f''(x_0)=0$，则x_0可能是$f(x)$的极值点，也可能不是$f(x)$的极值点。

e.g. 对$y=x^4$，$x=0$是极小值点；对$y=-x^4$，$x=0$是极大值点；对$y=x^3$，$x=0$不是极值点。

极值判别法之二： 设$f'(x_0)=0$，且$f(x)$ 在x_0 点二阶可导，

(1)若$f''(x_0)<0$，则x_0 是$f(x)$ 的极大值点；

(2)若$f''(x_0)>0$，则x_0 是$f(x)$ 的极小值点；

(3)若$f''(x_0)=0$，则x_0 可能是$f(x)$ 的极值点，也可能不是$f(x)$ 的极值点。

e.g. 对$y=x^4$，$x=0$ 是极小值点；对$y=-x^4$，$x=0$ 是极大值点；对$y=x^3$，$x=0$ 不是极值点。

注：以上两极值判别法均为充分非必要条件，目前还不知道函数在某点达到极值的充要条件。

例1：求$y=|x|e^{-|x-1|}$ 的极值。

作业： 课本P_{230} 1(5)(9)，3, 5

补充：设$f(x_0)$ 是连续函数$f(x)$ 的一个极小值，问$f^2(x_0)$ 是否为$f^2(x)$ 的一个极值？

例1：求$y=|x|e^{-|x-1|}$的极值。

作业： 课本P_{230} 1(5)(9)，3, 5

补充：设$f(x_0)$是连续函数$f(x)$的一个极小值，问$f^2(x_0)$是否为$f^2(x)$的一个极值？

三、最值

在自然科学、生产技术、经济管理等领域，经常需要研究如何花费最小代价去获取最大收益。

例1：求$y = |x|e^{-|x-1|}$ 的极值。

作业： 课本P_{230} 1(5)(9)，3, 5

补充：设$f(x_0)$ 是连续函数$f(x)$ 的一个极小值，问$f^2(x_0)$ 是否为$f^2(x)$ 的一个极值？

三、最值

在自然科学、生产技术、经济管理等领域，经常需要研究如何花费最小代价去获取最大收益。

意大利伽利略在1630 年提出“最速降线问题”：一个质点在重力作用下，从一个给定点到不在它垂直下方的另一点，如果不计磨擦力，问沿着什么曲线下滑时间最短？他说是圆。

瑞士约翰·伯努利1696年再次提出该问题，次年包括牛顿、莱布尼茨、洛比达和伯努利家族成员得到正确答案。约翰·伯努利解答蕴含的基本观点，促进了变分学的产生。

瑞士约翰·伯努利1696年再次提出该问题，次年包括牛顿、莱布尼茨、洛比达和伯努利家族成员得到正确答案。约翰·伯努利解答蕴含的基本观点，促进了变分学的产生。

答案：倒置摆线。

瑞士约翰·伯努利1696年再次提出该问题，次年包括牛顿、莱布尼茨、洛比达和伯努利家族成员得到正确答案。约翰·伯努利解答蕴含的基本观点，促进了变分学的产生。

答案：倒置摆线。

通常我们需要求一个函数在某一范围内的最大、最小值问题。最大、最小值统称为最值，使函数取得最大值、最小值的点称为函数的最大值、最小值点，统称为最值点。

瑞士约翰·伯努利1696年再次提出该问题，次年包括牛顿、莱布尼茨、洛比达和伯努利家族成员得到正确答案。约翰·伯努利解答蕴含的基本观点，促进了变分学的产生。

答案：倒置摆线。

通常我们需要求一个函数在某一范围内的最大、最小值问题。最大、最小值统称为最值，使函数取得最大值、最小值的点称为函数的最大值、最小值点，统称为最值点。

注：极大、极小值反映局部性质；最大、最小值反映整体性质。

考察函数在$[a, b]$ 上的最值点：(1)极值点；(2)端点。从以上两类点中找出使函数取得最大值、最小值的点即可。

考察函数在$[a,b]$ 上的最值点：(1)极值点；(2)端点。从以上两类点中找出使函数取得最大值、最小值的点即可。

四、凹凸性与拐点

定理： 设$f(x)$ 在区间I 上二阶可导，则$f(x)$ 为下凸（上凸）函数 $\iff \forall x \in I, f''(x) \geq 0 (f''(x) \leq 0)$.

考察函数在$[a,b]$ 上的最值点：(1)极值点；(2)端点。从以上两类点中找出使函数取得最大值、最小值的点即可。

四、凹凸性与拐点

定理： 设$f(x)$ 在区间I 上二阶可导，则$f(x)$ 为下凸（上凸）函数 $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in I, f''(x) \geq 0 (f''(x) \leq 0)$.

考虑$y = x^3$，在$(0,0)$ 点两端的凸性相反，这样的点称为拐点。

定理： 若$f(x)$ 二阶可导，且$(x_0, f(x_0))$ 是$y = f(x)$ 的拐点，则$f''(x_0) = 0$。

注1： $f''(x_0) = 0$ 是$(x_0, f(x_0))$ 为拐点的必要非充分条件.
e.g. $f(x) = x^4$。

注1：$f''(x_0)=0$ 是$(x_0,f(x_0))$ 为拐点的必要非充分条件. e.g. $f(x)=x^4$。

注2：由上述定理可知，若$(x_0,f(x_0))$ 是$y=f(x)$ 的拐点，则(1)$f''(x_0)=0$ 或 (2)$f''(x_0)$ 不存在。

注1：$f''(x_0) = 0$ 是$(x_0, f(x_0))$ 为拐点的必要非充分条件. e.g. $f(x) = x^4$。

注2：由上述定理可知，若$(x_0, f(x_0))$ 是$y = f(x)$ 的拐点，则(1)$f''(x_0) = 0$ 或 (2)$f''(x_0)$ 不存在。

例2：求曲线$y = \sqrt[3]{x^2}(x^2 - 4x)$ 的拐点。

注1：$f''(x_0)=0$ 是$(x_0,f(x_0))$ 为拐点的必要非充分条件. e.g. $f(x)=x^4$。

注2：由上述定理可知，若$(x_0,f(x_0))$ 是$y=f(x)$ 的拐点，则(1)$f''(x_0)=0$ 或 (2)$f''(x_0)$ 不存在。

例2：求曲线$y=\sqrt[3]{x^2}(x^2-4x)$ 的拐点。

五、渐近线

水平渐近线：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$，则称$y=b$ 是$y=f(x)$ 的水平渐近线。

注1：$f''(x_0)=0$ 是$(x_0,f(x_0))$ 为拐点的必要非充分条件. e.g. $f(x)=x^4$。

注2：由上述定理可知，若$(x_0,f(x_0))$ 是$y=f(x)$ 的拐点，则(1)$f''(x_0)=0$ 或 (2)$f''(x_0)$ 不存在。

例2：求曲线$y=\sqrt[3]{x^2}(x^2-4x)$ 的拐点。

五、渐近线

水平渐近线：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$，则称$y=b$ 是$y=f(x)$ 的水平渐近线。

垂直渐近线：$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$，则称$x=a$ 是$y=f(x)$ 的垂直渐近线。

斜渐近线：若$a \neq 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ 或$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$，则称$y=ax+b$ 是$f(x)$ 的斜渐近线。

斜渐近线：若$a \neq 0, \lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$ 或$\lim\limits_{x \to -\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$，则称$y = ax + b$ 是$f(x)$ 的斜渐近线。

显然，$a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}, b = \lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - ax)$。

斜渐近线：若$a \neq 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$ 或$\lim\limits_{x \to -\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$，则称$y = ax + b$ 是$f(x)$ 的斜渐近线。

显然，$a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - ax)$。

若上面极限对于$x \to \infty$ 成立，说明$y = ax + b$ 关于曲线$y = f(x)$ 在$x \to +\infty, -\infty$ 两方向上均为渐近线。

斜渐近线：若$a \neq 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ 或$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$，则称$y=ax+b$ 是$f(x)$ 的斜渐近线。

显然，$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$。

若上面极限对于$x\to\infty$ 成立，说明$y=ax+b$ 关于曲线$y=f(x)$ 在$x\to+\infty,-\infty$ 两方向上均为渐近线。

例3：求曲线$y=\dfrac{(x-1)^2}{3(x+1)}$ 的渐近线方程。

六、函数作图

作图步骤：

(1)确定函数的定义域，讨论函数的一些基本性质，如奇偶、对称和周期性。

六、函数作图

作图步骤：

(1)确定函数的定义域，讨论函数的一些基本性质，如奇偶、对称和周期性。

(2)计算$f'(x)$，找出$f(x)$ 的驻点及不可导点（判别单调性）。

六、函数作图

作图步骤：

(1)确定函数的定义域，讨论函数的一些基本性质，如奇偶、对称和周期性。

(2)计算$f'(x)$，找出$f(x)$ 的驻点及不可导点（判别单调性）。

(3)计算$f''(x)$，找出$f''(x)=0$ 的点与$f''(x)$ 不存在点，求出拐点（判别凹凸性）极值点。

六、函数作图

作图步骤：

(1)确定函数的定义域，讨论函数的一些基本性质，如奇偶、对称和周期性。

(2)计算$f'(x)$，找出$f(x)$ 的驻点及不可导点（判别单调性）。

(3)计算$f''(x)$，找出$f''(x) = 0$ 的点与$f''(x)$ 不存在点，求出拐点（判别凹凸性）极值点。

(4)求$f(x)$ 的渐近线（水平、垂直、斜渐近线）。

六、函数作图

作图步骤：

(1)确定函数的定义域，讨论函数的一些基本性质，如奇偶、对称和周期性。

(2)计算$f'(x)$，找出$f(x)$ 的驻点及不可导点（判别单调性）。

(3)计算$f''(x)$，找出$f''(x)=0$ 的点与$f''(x)$ 不存在点，求出拐点（判别凹凸性）极值点。

(4)求$f(x)$ 的渐近线（水平、垂直、斜渐近线）。

(5)列出表格，标明特殊点，必要时算几个特殊的函数值，然后作图。

例4：作出函数$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$的图像。

例4：作出函数$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图像。

该函数在概率论中是一个非常重要的函数，被称为正态分布函数，它呈钟形，与x 轴所围面积为1。

例4：作出函数$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$的图像。

该函数在概率论中是一个非常重要的函数，被称为正态分布函数，它呈钟形，与x轴所围面积为1。

例如：人们普遍认为，合理的考试成绩应该呈现正态分布或近似正态分布。

作业： P_{230} 2(5)(11)，7, 8(1)(9)，9(2), 11 – 13