三、Euler方程

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = f(x) \quad（3.1）$$

其中 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 是实常数且 $a_n \neq 0$

假设 $x \neq 0$ 我们只考虑 $x > 0$，
当 $x < 0$ 时，只需令 $t = -x$ 即可

$$a_n t^n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} t^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 t \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(-t)$$

$(t > 0)$

求出它的解，再用 $-x$ 代换 t 就得方程（3.1）关于 $x < 0$ 的解

作自变量变换 $\tau = \ln x$，则 $x = e^{\tau}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2 y}{d\tau^2} - \frac{dy}{d\tau}\right)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3 y}{d\tau^3} - 3\frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2\frac{dy}{d\tau}\right)$$

一般地

$$\frac{d^k y}{dx^k} = \frac{1}{x^k}\left(\frac{d^k y}{d\tau^k} - b_{k-1}\frac{d^{k-1} y}{d\tau^{k-1}} + \cdots + b_1\frac{dy}{d\tau}\right)$$

例 1：解方程 $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$

解：令 $\tau = \ln x$，原方程化为 $\dfrac{d^2 y}{d\tau^2} + 2\dfrac{dy}{d\tau} + y = 0$

特征方程 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \therefore \lambda_{1,2} = -1$

通解 $y = (c_1 + c_2\tau)e^{-\tau} = (c_1 + c_2 \ln x)x^{-1}$。

例 2：解方程 $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x^4 e^x \quad (x > 0)$

解：令 $\tau = \ln x$，方程化为 $\dfrac{d^2 y}{d\tau^2} - 4\dfrac{dy}{d\tau} + 3y = 2e^{4\tau} e^{e^{\tau}}$

$$\frac{d^2y}{d\tau^2}-4\frac{dy}{d\tau}+3y=2e^{4\tau}e^{e^{\tau}}$$

特征方程: $\lambda^2-4\lambda+3=0 \quad \Rightarrow \lambda_1=1,\lambda_2=3$

$$y_p(\tau)=\int_0^{\tau}K(\tau-s)f(s)ds=\int_0^{\tau}\frac{1}{2}(e^{3(\tau-s)}-e^{(\tau-s)})\cdot 2e^{4s}e^{e^s}ds$$

$$=e^{3\tau}\int_0^{\tau}e^{s}e^{e^s}ds-e^{\tau}\int_0^{\tau}e^{3s}e^{e^s}ds$$

$$=e^{3\tau}(e^{e^{\tau}}-e)-e^{\tau}\left[(e^{2\tau}-2e^{\tau}+2)e^{e^{\tau}}-e\right]$$

$$=2(e^{2\tau}-e^{\tau})e^{e^{\tau}}-e\cdot e^{3\tau}+e\cdot e^{\tau}$$

通解:

$$y=c_1e^{3\tau}+c_2e^{\tau}+2(e^{2\tau}-e^{\tau})e^{e^{\tau}}$$

$$=c_1x^3+c_2x+2(x^2-x)e^{x}$$

例 3：解方程 $x^2y'' + xy' + y = 2\sin\ln x \quad (x > 0)$

解：令 $\tau = \ln x$，方程化为 $\dfrac{d^2y}{d\tau^2} + y = 2\sin\tau$

特征方程 $\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$

设特解为 $y_p(\tau) = (A\cos\tau + B\sin\tau)\tau$，代入方程得

$A = -1, B = 0$

故通解为：

$$y = c_1\cos\tau + c_2\sin\tau - \tau\cos\tau$$

$$= c_1\cos\ln x + c_2\sin\ln x - (\ln x)\cos\ln x$$

上页 下页 返回

例 4：解方程 $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3 + 3x \quad (x > 0)$

解：令 $\tau = \ln x$，方程化为

$$\frac{d^3y}{d\tau^3} - 4\frac{d^2y}{d\tau^2} + 5\frac{dy}{d\tau} - 2y = e^{3\tau} + 3e^{\tau}$$

特征方程是 $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0 \quad \therefore \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$

求 $\frac{d^3y}{d\tau^3} - 4\frac{d^2y}{d\tau^2} + 5\frac{dy}{d\tau} - 2y = e^{3\tau}$ 的特解 $y_{p1}(\tau)$

设 $y_{p1}(\tau) = Ae^{3\tau}$ 代入方程解得 $A = \frac{1}{4}$

求 $\frac{d^3y}{d\tau^3}-4\frac{d^2y}{d\tau^2}+5\frac{dy}{d\tau}-2y=3e^{\tau}$ 的特解 $y_{p2}(\tau)$

设 $y_{p2}(\tau)=B\tau^2e^{\tau}$ 代入方程得 $B=-\frac{3}{2}$

$\therefore$ 通解

$$y=c_1e^{\tau}+c_2\tau e^{\tau}+c_3e^{2\tau}+\frac{1}{4}e^{3\tau}-\frac{3}{2}\tau^2e^{\tau}$$

$$=c_1x+c_2x\ln x+c_3x^2+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x\ln^2 x$$

四、高阶微分方程的降阶

4.1 不显含未知函数的方程

$$F(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

令 $p = y'$，则方程化为 $F(x, p, p', \cdots p^{(n-1)}) = 0$

*n-1*阶方程

$$F(x, y^{(k)}, \cdots, y^{(n)}) = 0$$

令 $p = y^{(k)}$，则方程化为 $F(x, p, p', \cdots p^{(n-k)}) = 0$

*n-k*阶方程

例 1：解方程：$y''' - \frac{1}{x} y'' = 0$

解：令 $p = y''$，方程化为 $p' - \frac{1}{x} p = 0$

其通解为 $p = cx$，即 $y'' = cx$

两次积分得 $y = c_1 x^3 + c_2 x + c_3$。

例 2：解方程$(1 + x^2) y'' + y'^2 + 1 = 0$

解：令 $y' = p$，原方程化为$(1 + x^2)\frac{dp}{dx} + p^2 + 1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{dp}{1+p^2} = -\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\arctan p = -\arctan x + \overline{c_1}$$

$$p = \frac{\tan \overline{c_1} - x}{1 + x\tan \overline{c_1}} = \frac{c_1 - x}{1 + c_1 x}$$

当 $c_1 \neq 0$ 时,

$$y = \int p dx = \int \frac{c_1 - x}{1 + c_1 x} dx = \frac{1 + c_1^2}{c_1^2} \ln(1 + c_1 x) - \frac{1}{c_1} x + c_2$$

当 $c_1 = 0$ 时, $p = -x, y = -\frac{1}{2} x^2 + c$

上页 下页 返回

例 3：解初值问题

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'} \\ y(2) = 0, y'(2) = 4 \end{cases}$$

解：令 $p = y'$ 方程化为 $\begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{p}{x} + \dfrac{x^2}{p} \\ p(2) = 4 \end{cases}$

令 $z = p^2$ 方程化为 $\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2}{x} z + 2x^2 \\ z(2) = 16 \end{cases}$

由常数变易公式

$$z = e^{\int \frac{2}{x}dx}\left(c + \int 2x^2 e^{-\int \frac{2}{x}dx} dx\right) = cx^2 + 2x^3$$

$$16 = c \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 \qquad \therefore c = 0$$

$$p^2 = 2x^3 \quad \therefore p = \pm\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}$$ （负号舍去）

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{2}x^{\frac{3}{2}} \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ 解 $\quad y = \dfrac{2}{5}\sqrt{2}x^{\frac{5}{2}} - \dfrac{16}{5}$

4.2 不显含自变量x的方程

$$F(y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

令 $p = y'$，并把 p 看作 y 的函数，则

$$y' = p$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(p\frac{dp}{dy}) = \frac{d}{dy}(p\frac{dp}{dy})\frac{dy}{dx} = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p(\frac{dp}{dy})^2$$

用数学归纳法不难证明 $y^{(k)}$ 可以用 $p,\dfrac{dp}{dy},\cdots,\dfrac{d^{k-1}p}{dy^{k-1}}$ 表示，

得到：$G(y,p,\dfrac{dp}{dy},\cdots,\dfrac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}})=0$

*n-1*阶方程

例 3：求 $2yy'' = y'^2 + y^2$ 的通解。

解：令 $p = y'$ 方程化为 $2yp\dfrac{dp}{dy} = p^2 + y^2$

令 $z = p^2$ 得 $y\dfrac{dz}{dy} = z + y^2$

解得 $z = c_1 y + y^2$

$$p^2 = c_1 y + y^2 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{c_1 y + y^2}$$

积分可得，$\ln\left(y + \dfrac{c_1}{2} + \sqrt{y^2 + c_1 y}\right) = \pm x + c_2$。

例 4：解初值问题 $\begin{cases} y'' = e^{2y} \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$

解：令 $p = y'$:，方程化为 $p\dfrac{dp}{dy} = e^{2y}$， $p(0) = 1$

$$\frac{1}{2}(p^2 - 1) = \frac{1}{2}(e^{2y} - 1)$$

$\therefore p = \pm e^{y}$ （负号舍去）

由 $\dfrac{dy}{dx} = e^{y}$ 解得 $-e^{-y} = x + c$ ，

代入初始条件 $y(0) = 0$ $\therefore c = -1 \Rightarrow y = -\ln|1 - x|$。

4. 3 齐次方程

若对任意 $\lambda \neq 0$

$$F(x,\lambda y,\lambda y',\cdots,\lambda y^{(n)}) = \lambda^m F(x,y,y',\cdots y^{(n)})$$

则称微分方程 $F(x,y,y',\cdots y^{(n)}) = 0$ 是齐次方程.

如果取 $\lambda = \dfrac{1}{y}$，则

$$F(x,y,y',\cdots y^{(n)}) = y^m F(x,1,\frac{y'}{y},\cdots,\frac{y^{(n)}}{y})$$

上页 下页 返回

引入新的未知条件：$z=\dfrac{1}{y}y'$，从 $y'=yz$ 有

$$y''=y'z+yz'=y(z^2+z')$$

于是 $\dfrac{1}{y}y''=z'+z^2$

用数学归纳法可以证明 $\dfrac{1}{y}y^{(k)}$ 能够用 $z,z',\cdots z^{(k-1)}$ 表

示，方程化为以 z 为未知函数的 $n-1$ 阶方程。

例 5：解方程 $x^2yy'' = (y - xy')^2$

解：当 $y=0$ 时，它是一个解 $y=0$

当 $y \neq 0$ 时，令 $z = \frac{1}{y}y'$，则

$y' = yz$， $y'' = y(z' + z^2)$

原方程化为 $x^2z' + 2xz = 1$

其解为 $z = \frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2}$。

得通解 $y = e^{\int zdx} = e^{\ln|x| - \frac{c_1}{x} + \ln c_2} = c_2 x e^{-\frac{c_1}{x}}$

（它包含了解 $y=0$）

4. 4 全微分方程

若存在函数G，使得

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=\frac{d}{dx}G(x,y,y',\cdots y^{(n-1)})$$

则称方程$F(x,y,y',\cdots y^{(n)})=0$是全微分方程.

化为$n-1$阶方程$G(x,y,y',\cdots y^{(n-1)})=c_1$

若存在某个函数$\mu(x,y,y',\cdots y^{(n-1)})$能使

$$\mu(x,y,y',\cdots y^{(n-1)})F(x,y,y',\cdots y^{(n)})=0$$

成为全微分方程，此时称函数μ是积分因子。

例 6：解方程$(1+y^2)y'' - 2y(y')^2 = 0$

解：首先 $y=0$ 是一个特解；

当 $y \neq 0$ 时，取 $\mu = \dfrac{1}{(1+y^2)y'}$，有 $\dfrac{y''}{y'} - \dfrac{2yy'}{1+y^2} = 0$

即 $\dfrac{d}{dx}(\ln|y'| - \ln(1+y^2)) = 0$

于是 $\ln|y'| - \ln(1+y^2) = \ln c_1$

$\Rightarrow\ y' = c_1(1+y^2)$

积分可得 $y = \tan(c_1 x + c_2)$。

上页 下页 返回