第四章　偏微分方程

一、波动方程

二、热传导方程

三、调和方程

一、波动方程

1 振动方程的导出及定解条件

一条弦拉紧在x轴的点x=0和x=L之间。

假如弦是柔软的。（即在弦上的张力只成切线作用于弦上，对弯曲不产生阻力。）弦的运动在一个固定的平面上发生。弦上的点不作沿横向的运动。

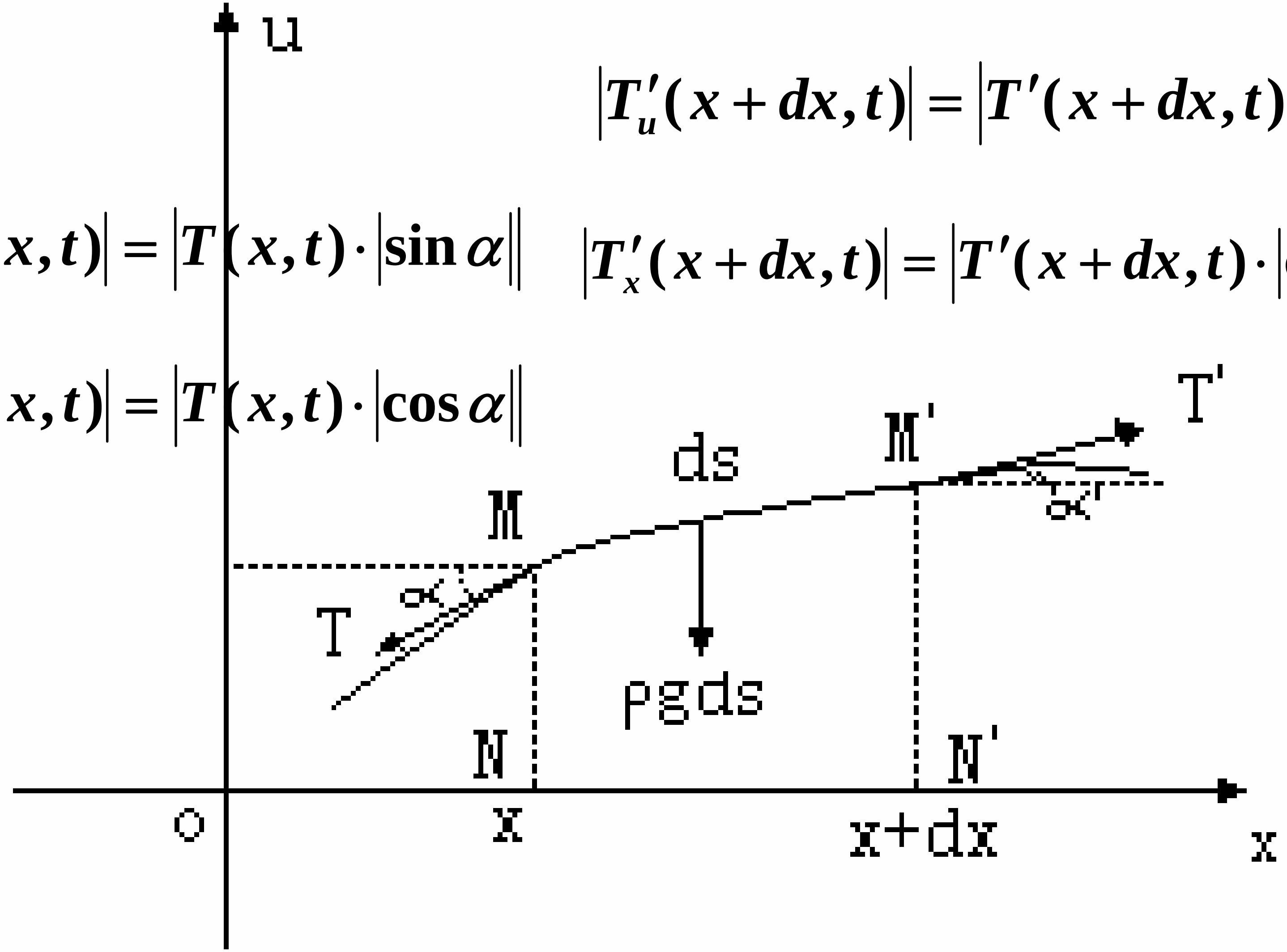
位移$u=u(x,t);u\in c^2(R)\cap c^1(\bar{R})$（比较小）；弦上的张力$T(x,t)\in c^1(\bar{R})$，弦密度$\rho$是常数；没有外部的横向力作用在弦上。

$$\left|T'_u(x+dx,t)\right| = \left|T'(x+dx,t)\right| \cdot \left|\sin\alpha'\right|$$

$$\left|T_u(x,t)\right| = \left|T(x,t)\right| \cdot \left|\sin\alpha\right|$$

$$\left|T'_x(x+dx,t)\right| = \left|T'(x+dx,t)\right| \cdot \left|\cos\alpha'\right|$$

$$\left|T_x(x,t)\right| = \left|T(x,t)\right| \cdot \left|\cos\alpha\right|$$



$$\sin\alpha = \frac{|u_x(x,t)|}{\sqrt{1+|u_x(x,t)|^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+|u_x(x,t)|^2}}$$

当 $u_x(x,t)$ 很小时， $\sin\alpha \approx |u_x(x,t)|$ $\quad \cos\alpha \approx 1$

$$ds = \sqrt{1+u_x^2(x,t)}dx \approx dx$$

作用在线段 $[x, x+dx]$ 上的净张力：

横向分量： $|T(x,t)|u_x(x,t) - |T'(x+dx,t)|u_x(x+dx,t)$

平行分量： $|T(x,t)| - |T'(x+dx,t)|$

$$|T(x,t)| = |T'(x+dx,t)| \; (= T)$$

在线段$\left[x, x+dx\right]$上应用牛顿第二定律，有

$$\rho dx u_{tt}(x^{*}, t) = T\left\{u_x(x+dx, t) - u_x(x, t)\right\} - \rho g ds$$

两边除以ρdx，且取$dx \to 0$得一维波动方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - g$$

其中$a^2 = \dfrac{T}{\rho}$

忽略重力g得到$u_{tt} = a^2 u_{xx}$

若弦还受到外力的作用$F = F(x, t)$

则方程化为：　$u_{tt} - a u_{xx} = f(x, t)$，

其中$f(x, t) = \dfrac{F(x, t)}{\rho}$

边界条件

弦的端点被分别对应于在 x=0 和 x=L 的已知作用 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 所驱动。如果 $\alpha(t)\equiv\beta(t)\equiv 0$，固定边界条件

第一类边界条件

弦的端点 x=0 和 x=L 分别地受到已知的横向力 $\gamma(t)$ 和 $\delta(t)$ 的作用。作用于 $[0,h]$ 的横向力由 $Tu_x(h,t)+\gamma(t)$ 给出。根据牛顿第二定律，必有

$$\rho h u_{tt}(x^*,t)=Tu_x(h,t)+\gamma(t)$$

$h\to 0^+$ 得 $Tu_x(0,t)+\gamma(t)=0$　　（$x=0$ 处）

另一端 $Tu_x(L,t)-\delta(t)=0$　　第二类边界条件

当 $\gamma(t)\equiv\delta(t)\equiv 0$ 时，称为自由边界条件

上页 下页 返回

假定弦的左端点用具有弹性常数 k 的弹簧连接到 x 轴上的点 x=o 上，u（x，t）满足 $Tu_x(0,t)=ku(0,t)$

弹性边界条件

第三类边界条件

振动弦的混合初一边值问题

（PDE） $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 当 $0<x<L,\quad t>0$

（IC） $\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$ $0\le x\le L$

（BC） $\begin{cases} u(0,t)=\varphi(t) \\ u(L,t)=\psi(t) \end{cases}$ $t\ge 0$，

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$，称为一维波动方程。

若讨论薄膜收振动的情况，可推出二维的波动方程：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x,y,t)$$

若讨论电磁波的运动方式，则推出三维波动方程：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = f(x,y,z,t)$$

2　混合问题的分离变量法与齐次化原理

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

用分离变量法求解

找形如 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 的解，代入方程，有

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = \text{常数} \stackrel{\Delta}{=} -\lambda \text{（待定）}$$

于是得到：$X'' + \lambda X = 0$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0$$

上页　下页　返回

从边界条件知：$X(0)=X(L)=0$，从而得到一个特征值问题：

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0)=X(L)=0 \end{cases}$$

对λ分三种情况讨论：

当$\lambda<0$时，方程的通解是：

$$X = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

从边值条件得：$c_1=c_2=0$，此时特征值问题只有零解。

当$\lambda=0$时，方程的通解是：

$$X = c_1 + c_2 x$$

从边值条件也得：$c_1=c_2=0$。

当$\lambda>0$时，方程的通解是：

$$X=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

从$X(0)=0$得$c_1=0$，从$X(L)=0$得$c_2\sin\sqrt{\lambda}L=0$。

为了有非零解，必须$\sin\sqrt{\lambda}L=0$

于是$\sqrt{\lambda}L=n\pi \qquad n=1,2,\cdots$

特征值是：$\lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2 \qquad n=1,2,\cdots$

对应的特征函数是：$X_n=\sin\dfrac{n\pi}{L}x \qquad n=1,2,\cdots$

讨论$T'' + \left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 T = 0$

其通解是：$T_n = A_n \cos\frac{an\pi}{L}t + B_n \sin\frac{an\pi}{L}t$

$$u_n(x,t) = X_n T_n = (A_n \cos\frac{an\pi}{L}t + B_n \sin\frac{an\pi}{L}t)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

对每一个$n, u_n(x,t)$都满足（1.1），从而根据迭加原理

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos\frac{an\pi}{L}t + B_n \sin\frac{an\pi}{L}t)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

适当的选取 A_n, B_n

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{L}x = \varphi(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{an\pi}{L}\sin\frac{n\pi}{L}x = \psi(x)$$

A_n 和 $\dfrac{an\pi}{L}B_n$ 分别是函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在区间 $[0, L]$

上的 **Fourier** 正弦级数的系数，于是:

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{L}\xi d\xi$$

$$B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^L \psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{L}\xi d\xi$$

$$u_n(x,t)=\left(A_n\cos\frac{an\pi}{L}t+B_n\sin\frac{an\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$=D_n\cos(w_n-\vartheta_n)t\sin\frac{n\pi}{L}x$$ 简谐波（驻波）

$$D_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}$$ 振幅

$$w_n=\frac{an\pi}{L}=\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{L}}$$ 园频率

$$\vartheta_n=\arctan\frac{B_n}{A_n}$$ 初相

当 $x=\dfrac{mL}{n},\quad m=0,1,\cdots,n$ 时， $u_n(x,t)=0$ 节点

当 $x=\dfrac{(2m-1)L}{2n},\quad m=0,1,\cdots,n$ 时， $\sin\dfrac{n\pi}{l}x=\pm1$ 腹点

例 1：设有 1 根长为 10 个单位的弦，两端固定，初速为零，初位移为 $\varphi(x)=\dfrac{x(10-x)}{1000}$，求弦作微小横向振动时的位移。

解：设位移函数为 $u(x,t)$，它满足定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<10, t>0 \\ u\big|_{x=0}=0, \qquad u\big|_{x=10}=0 \\ u\big|_{t=0}=\dfrac{x(10-x)}{1000}, \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 \end{cases}$$

$$A_n = \frac{2}{10}\int_0^{10} \frac{\xi(10-x)}{1000}\sin\frac{n\pi}{10}\xi d\xi$$

$$= \frac{1}{5000}\int_0^{10} \xi(10-\xi)\cdot\frac{10}{n\pi} d\left(-\cos\frac{n\pi}{10}\xi\right)$$

$$= \frac{1}{500n\pi}\left[-\xi(10-\xi)\cos\frac{n\pi}{10}\xi\right]_0^{10}$$

$$+\frac{1}{500n\pi}\int_0^{10}(2\xi-10)\cos\frac{n\pi}{10}\xi d\xi$$

$$=\frac{1}{50(n\pi)^2}\int_0^{10}(2\xi-10)d(\sin\frac{n\pi}{10}\xi)$$

$$=-\frac{2}{50(n\pi)^2}\int_0^{10}\sin\frac{n\pi}{10}\xi d\xi$$

$$=\frac{2}{5n^3\pi^3}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}0 & n\text{为偶数}\\ \dfrac{4}{5n^3\pi^3} & n\text{为奇数}\end{cases}$$

$$B_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^{10}0\cdot\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi=0$$

所求的解为：

$$u(x,t)=\frac{4}{5\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\frac{(2k+1)\pi}{10}x\cos\frac{(2k+1)\pi t}{10}$$

例 2：用分离变量法解波动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0 \\ u(x,0) = x^2 - 2x, u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

解：用分离变量法求解

找形如 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 的解，代入方程，有

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = 常数 \stackrel{\Delta}{=} -\lambda$$ （待定）

于是得到：

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0$$

上页 下页 返回

从边界条件知：$X(0)=X'(1)=0$，从而得到一个特征值问题：

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X'(1)=0 \end{cases}$$

对λ分三种情况讨论：

当$\lambda<0$时，方程的通解是：

$$X=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

从边值条件得：$c_1=c_2=0$，此时特征值问题只有零解。

当$\lambda=0$时，方程的通解是：

$$X=c_1+c_2x$$

从边值条件也得：$c_1=c_2=0$。

从边界条件知：$X(0)=X'(1)=0$，从而得到一个特征值问题：

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X'(1)=0 \end{cases}$$

对λ分三种情况讨论：

当$\lambda<0$时，方程的通解是：

$$X=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

从边值条件得：$c_1=c_2=0$，此时特征值问题只有零解。

当$\lambda=0$时，方程的通解是：

$$X=c_1+c_2x$$

从边值条件也得：$c_1=c_2=0$。

当 $\lambda > 0$ 时，方程的通解是：

$$X = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x$$

代入边界条件得：$c_1 = 0, c_2 \cos\sqrt{\lambda} = 0$

于是特征值为：$\lambda_n = \left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 \quad n = 1,2,\cdots$

相应的特征函数为：$X_n = \sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2}x$ 。

接着讨论 $T'' + \left(\dfrac{(2n-1)a\pi}{2}\right)^2 T = 0$

上页 下页 返回

其通解是：$T_n = A_n\cos\frac{(2n-1)a\pi}{2}t + B_n\sin\frac{(2n-1)a\pi}{2}t$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{(2n-1)a\pi}{2}t+B_n\sin\frac{(2n-1)a\pi}{2}t)\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}x$$

利用初始条件：$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}x = x^2-2x$,

$$\frac{(2n-1)a\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}x=0,$$

$\therefore B_n = 0$

$$\therefore A_n = 2\int_0^1(\xi^2-2\xi)\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}\xi d\xi = -\frac{32}{(2n-1)^3\pi^3}$$

$$u(x,t)=-\frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\cos\frac{(2n-1)a\pi}{2}t\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}x$$

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < L, t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \qquad (1.2)$$

用分离变量法求解

找形如 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 的解，

通过讨论特征值问题得到特征值 λ_n 和特征函数 $X_n(x)$

于是解为：$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$，

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) X_n(x) = \varphi(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) X_n(x) = \varphi(x)$$

两边同时乘以 $X_m(x)$，然后从 0 到 L 积分：

$$\int_0^L \varphi(x) X_m(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L X_n(x) X_m(x) dx$$

$$\therefore A_m = \frac{\int_0^L \varphi(x) X_m(x) dx}{\int_0^L X_m^2(x) dx}。$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) X_n(x) = \psi(x)$$

$$\int_0^L \varphi(x) X_m(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} a B_n \int_0^L X_n(x) X_m(x) dx$$

$$\therefore B_m = \frac{\int_0^L \psi(x) X_m(x) dx}{a\sqrt{\lambda_n} \int_0^L X_m^2(x) dx}。$$

对于非齐次方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \quad 0 < x < L, t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad (1.3)$$

形如：$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$ 的解，它满足上述齐次边界条件，这里 $u_n(t)$ 是待定的函数。

令 $f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$，

其中 $f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi,t) \sin \frac{n\pi}{L} \xi d\xi$。

代入前面的方程得： $u_n''(t)+\left(\dfrac{an\pi}{L}\right)^2 u_n(t)=f_n(t)$

$$u_n(0)=u_n'(0)=0$$

$$u_n(t)=\frac{L}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{L}(t-\tau)d\tau$$

非齐次方程的解为：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{an\pi}$$

$$\times\left[\int_0^t\left(\int_0^L f(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi}{L}\xi d\xi\right)\sin\frac{an\pi}{L}(t-\tau)d\tau\right]\sin\frac{n\pi}{L}x$$

特征函数法

例 3：用特征函数法解波动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0 \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

解：用分离变量法求解

找形如 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 的解，代入相应的齐次方程，有

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = \text{常数} \overset{\Delta}{=} -\lambda \text{（待定）}$$

于是得到： $X'' + \lambda X = 0$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0$$

上页 下页 返回

当$\lambda > 0$时，方程的通解是：

$$X = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

代入边界条件得：$c_1 = 0, c_2 \cos\sqrt{\lambda} = 0$

于是特征值为：$\lambda_n = \left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 \quad n = 1,2,\cdots$

相应的特征函数为：$X_n = \sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2}x$。

令$A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2}x$，

则$f_n = 2\int_0^1 A\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2}\xi d\xi = \dfrac{4A}{(2n-1)\pi}$。

代入前面的方程得：$u_n''(t)+\left(\frac{a(2n-1)\pi}{2}\right)^2 u_n(t)=f_n$

$$u_n(0)=u_n'(0)=0$$

$$u_n(t)=\frac{2}{a(2n-1)\pi}\int_0^t f_n \sin\frac{a(2n-1)\pi}{2}(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{8A}{a^2(2n-1)^3\pi^3}(\cos\frac{a(2n-1)\pi}{2}t-1)$$

非齐次方程的解为：

$u(x,t)=$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8A}{a^2(2n-1)^3\pi^3}(\cos\frac{a(2n-1)\pi}{2}t-1)\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}x$$

用特征函数法解波动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \quad 0 < x < L, t > 0 \\ u(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

用分离变量法求解

特征值 $\lambda_n, \quad n = 1,2,\cdots$

相应的特征函数 $X_n(x)$。

形如：$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x)$ 的解，它满足上述齐次边界条件，这里 $u_n(t)$ 是待定的函数。

$$u_n''(t)+\lambda_n a^2 u_n(t)= f_n$$

$$u_n(0)=u_n'(0)=0$$

令 $f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x)$

$u_n(t)$

非齐次方程的解为：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n(x)$$

定理 1（齐次化原理）若 $w(x,t,\tau)$ 是混合问题

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2w_{xx}=0 \quad 0<x<L, t>\tau \\ w(0,t,\tau)=w(L,t,\tau)=0 \\ w(x,\tau,\tau)=0, w_t(x,\tau,\tau)=f(x,\tau) \end{cases} \tag{1.4}$$

的解（其中 $\tau \geq 0$ 是参数），则 $u(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)d\tau$

是混合问题（1.3）的解

证明：

$$u_t(x,t)=w(x,t,t)+\int_0^t w_t(x,t,\tau)d\tau=\int_0^t w_t(x,t,\tau)d\tau$$

$$u_{tt}(x,t)=w_t(x,t,t)+\int_0^t w_{tt}(x,t,\tau)d\tau$$

$$=f(x,t)++\int_0^t a^2w_{xx}(x,t,\tau)d\tau=f(x,t)+a^2u_{xx}(x,t)$$

且 $u(0,t)=u(L,t)=0$， $u(x,0)=u_t(x,0)=0$ 。

$\therefore u(x,t)$ 是方程（1.3）的解

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2 w_{xx}=0 \quad 0<x<L, t>\tau \\ w(0,t,\tau)=w(L,t,\tau)=0 \\ w(x,\tau,\tau)=0, w_t(x,\tau,\tau)=f(x,\tau) \end{cases} \qquad (1.4)$$

令 $t'=t-\tau$，则 $w(x,t,\tau)=w(x,t'+\tau,\tau)$

$$\begin{cases} w_{t't'}-a^2 w_{xx}=0, \quad 0<x<L, t'>0 \\ w(0,t'+\tau,\tau)=w(L,t'+\tau,\tau)=0 \\ t'=0\text{时，} \quad w=0, w_{t'}=f(x,\tau) \end{cases}$$

解为： $w(\tau,t'+\tau,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{L}t'\sin\frac{n\pi}{L}x$

其中： $B_n(\tau)=\frac{2}{an\pi}\int_0^L f(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi}{L}\xi d\xi$

$$w(x,t,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{L}(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$u(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)d\tau$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t B_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{L}(t-\tau)d\tau\right]\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{an\pi}\left[\int_0^t(\int_0^L f(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi}{L}\xi d\xi)\sin\frac{an\pi}{L}(t-\tau)d\tau\right]\sin\frac{n\pi}{L}x$$

例 3：解波动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=A \quad 0<x<1, t>0 \\ u(0,t)=u_x(1,t)=0 \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

解：用分离变量法求解

特征值为：$\lambda_n=\left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 \quad n=1,2,\cdots$

相应的特征函数为：$X_n=\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2}x$。

非齐次方程的解为：

$$u(x,t)=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8A}{a^2(2n-1)^3\pi^3}\left(\cos\frac{a(2n-1)\pi}{2}t-1\right)\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}x$$

用齐次化原理讨论：若 $w(x,t,\tau)$ 是混合问题

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2w_{xx}=0 \quad 0<x<1,t>\tau \\ w(0,t,\tau)=w_x(1,t,\tau)=0 \\ w(x,\tau,\tau)=0, w_t(x,\tau,\tau)=A \end{cases} \qquad (1.4)$$

的解（其中 $\tau \geq 0$ 是参数），则 $u(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)d\tau$

是混合问题（1.3）的解

令 $t'=t-\tau$，则 $w(x,t,\tau)=w(x,t'+\tau,\tau)$

$$\begin{cases} w_{t't'}-a^2w_{xx}=0, \quad 0<x<1,t'>0 \\ w(0,t'+\tau,\tau)=w_x(1,t'+\tau,\tau)=0 \\ t'=0\text{时}, \quad w=0, w_{t'}=A \end{cases}$$

解为：

$$w(\tau, t' + \tau, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\tau) \sin \frac{a(2n-1)\pi}{2} t' \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} x$$

其中： $B_n(\tau) = \frac{2}{a(2n-1)\pi} \int_0^1 A \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \xi d\xi$

$$w(x, t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\tau) \sin \frac{a(2n-1)\pi}{2} (t-\tau) \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} x$$

$$u(x, t) = \int_0^t w(x, t, \tau) d\tau$$

对于一般的波动方程混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \quad 0 < x < L, t > 0 \\ u(0,t) = g(t), u(L,t) = h(t) \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \qquad (1.6)$$

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

（III）$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \\ u(0,t)=g(t), u(L,t)=h(t), \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0. \end{cases}$

（I)、（II）已解决，（III）可令

$$v(x,t)=u(x,t)-g(t)-\frac{x}{L}(h(t)-g(t))$$

（III）化为 $\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=g''(t)-\frac{x}{L}(h''(t)-g''(t)) \\ v(0,t)=v(L,t)=0 \\ v(x,0)=-g(0)-\frac{x}{L}(h(0)-g(0)) \\ v_t(x,0)=-g'(0)-\frac{x}{L}(h'(0)-g'(0)) \end{cases}$

又可分解为（I）、（II）。