第五章 波动

习题课

波　动

波动方程

1.平面简谐波:

x: 波线上各质点的空间位置(平衡位置)坐标

y: 质点离开自身平衡位置的位移

2.平面简谐波的波动方程： $y = f(x,t)$

波线上任意质点(x)的位移y随时间t变化的函数关系(振动方程)

$$y = A\cos[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi]$$

(已知坐标原点的振动方程)

$$y = A\cos[\omega(t \mp \frac{x - x_o}{u}) + \varphi_{x0}]$$

(已知任意X_0点的振动方程)

由题意求解

某一点的振动曲线y-t 图或某一时刻的波形图y-x 图

平面简谐波的能量

$$\Delta W_k = \Delta W_p = \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2 \sin^2 \omega(t-\frac{x}{u})$$

$$\Delta W = \Delta W_k + \Delta W_p = \rho\Delta V A^2\omega^2 \sin^2 \omega(t-\frac{x}{u})$$

惠更斯原理

波的干涉

相干条件： 振动方向相同，频率相同，相位差恒定

$$\boldsymbol{A} = \sqrt{\boldsymbol{A}_1^2 + \boldsymbol{A}_2^2 + 2\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 \cos\Delta\varphi}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi(\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1)/\lambda$$

波程差：$\Delta r = r_2 - r_1$

驻波 $y_1 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ $y_2 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$

$$y_{合} = y_1 + y_2 = (2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x)\cos\frac{2\pi}{T}t$$

没有振动状态、
没有能量传播

•波节位置： $\left|2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 0$ $x = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4}$, $k = 0,1,2,\cdots$

•波腹位置： $\left|2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 2A$ $x = \pm k\cdot\frac{\lambda}{2}$, $k = 0,1,2,\cdots$

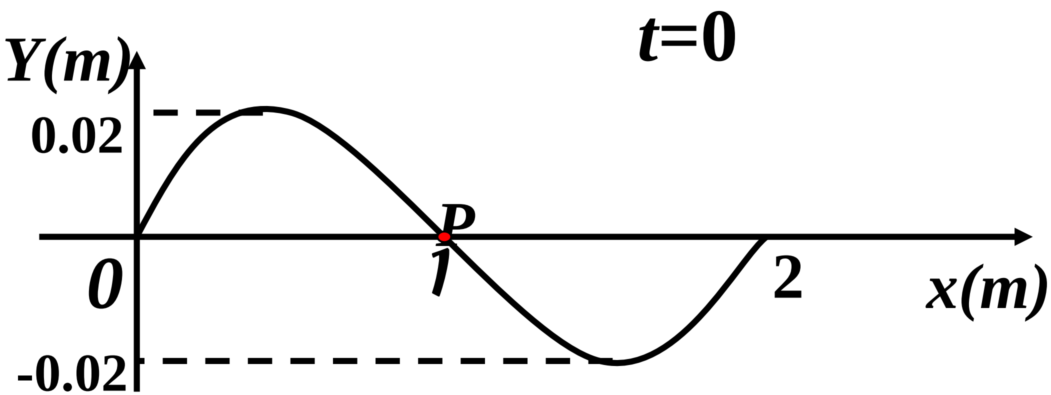
•相邻两波节(腹)间距： $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$

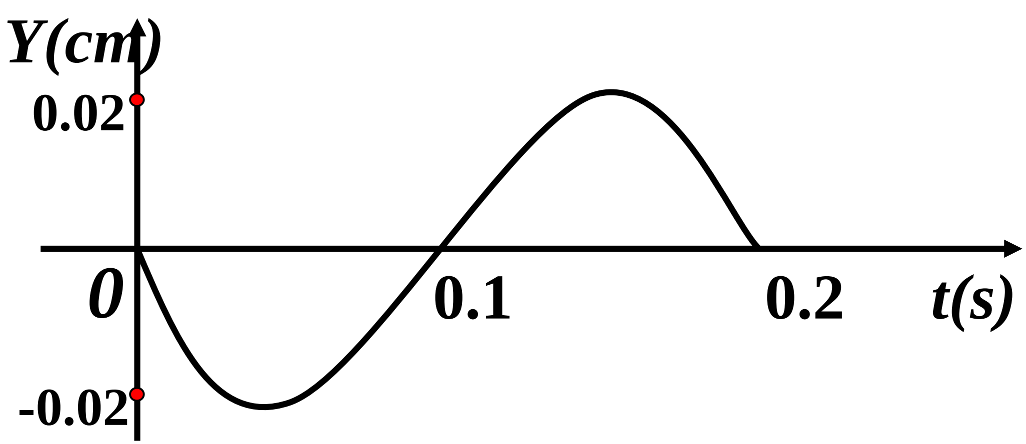
•半波损失 $\begin{cases} \text{波疏媒质} \longrightarrow \text{波密媒质} \\ \text{固定端反射} \end{cases}$

多普勒效应： $\nu_r = \left(\frac{u + u_r}{u - u_s}\right)\nu_s$

例：已知：t=0时波形图和p点处的振动曲线。

求：该平面简谐波的波动方程。





P点振动曲线

解：由p点的振动曲线可知：

$A=0.02\text{m}$　　　T=0.2s

$\omega = 2\pi/T = 10\pi$

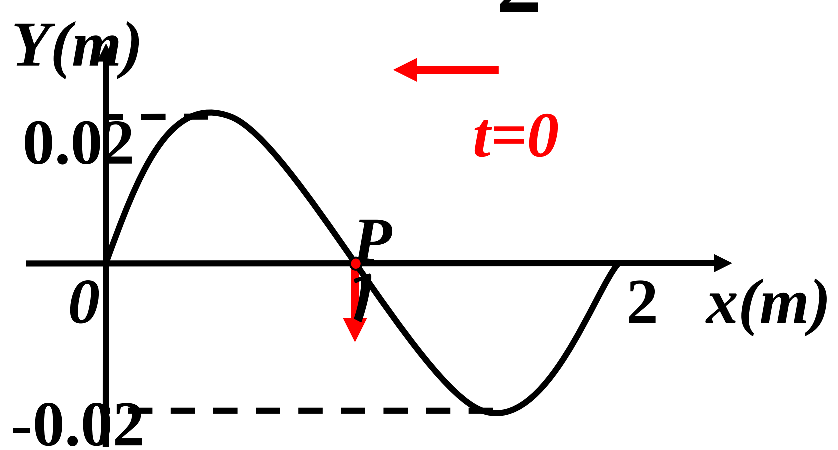
t=0时：$\begin{cases} y_p=0 \\ v_p<0 \end{cases} \longrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

所以P点振动方程：$$y_P = 0.02\cos(10\pi t + \frac{\pi}{2})$$

由y~t曲线可知，

p 点在t=0时，$v_0<0$

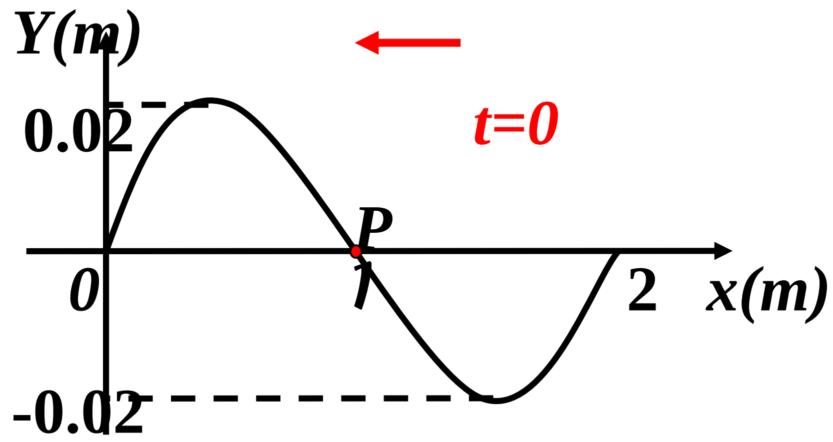
即t=0波形图上，p点是向下运动的。



（波形图）

波沿x负方向传播。

又由波形图可看出$\lambda = 2m$,

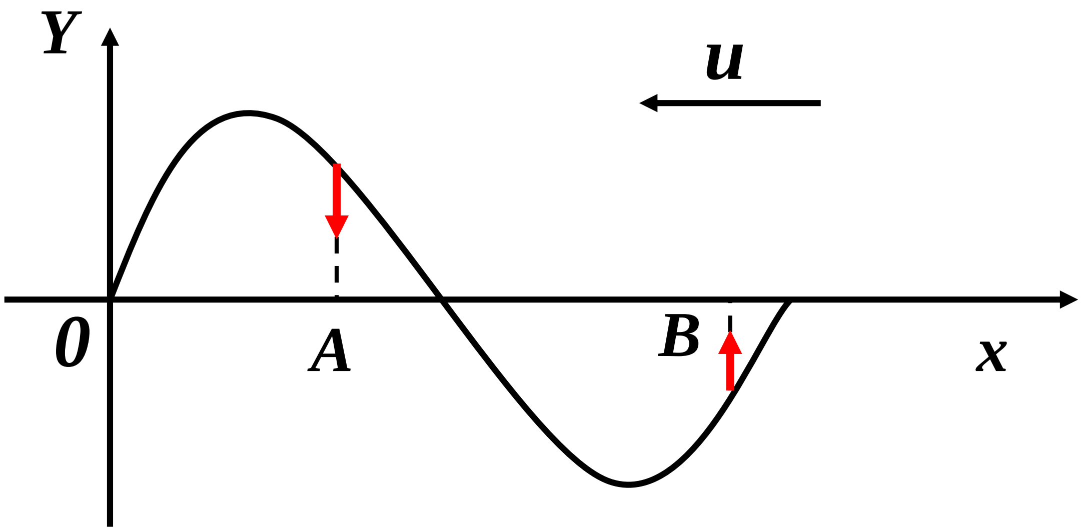


波动方程为:

$$y = 0.02\cos[10\pi t + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\lambda}(x-1)]$$

$$= 0.02\cos(10\pi t - \frac{\pi}{2} + \pi x)$$

讨论：已知某时该波形图如下。问这时A处的质元势能在增加还是减少？B处呢？

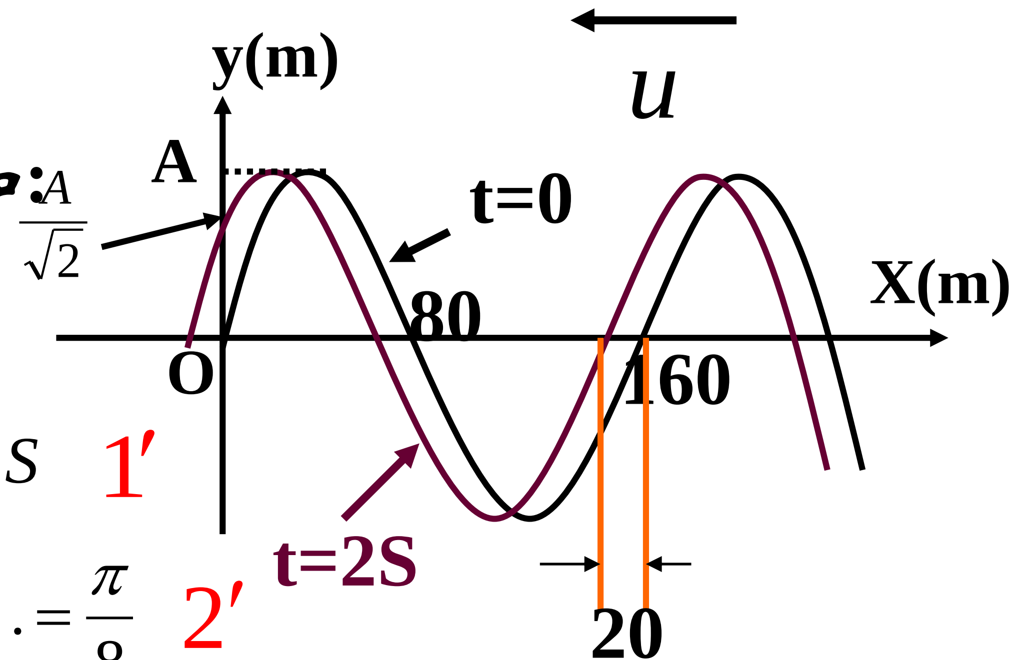


答：A处和B处质元都向着平衡位置运动。所以动能在增加，势能也在增加。

图示一平面余弦波在t=0时刻与t=2S时刻的波形图.

求: (1) 坐标原点处介质质点的振动方程;

(2) 该波的波动方程.



解: (1)由t=0时波形图可知:

原点处: $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ 2′

$\lambda = 160m \quad u = \frac{20}{2} = 10m/S$ 1′

$T = \ldots = 16S \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \ldots = \frac{\pi}{8}$ 2′

原点处介质质点的振动方程: $y_0 = A\cos(\frac{\pi}{8}t - \frac{\pi}{2})(SI)$ 2′

(2)波动方程:

$$y_0 = A\cos[\frac{\pi}{8}(t + \frac{x}{u}) - \frac{\pi}{2}] = \ldots$$ 3′

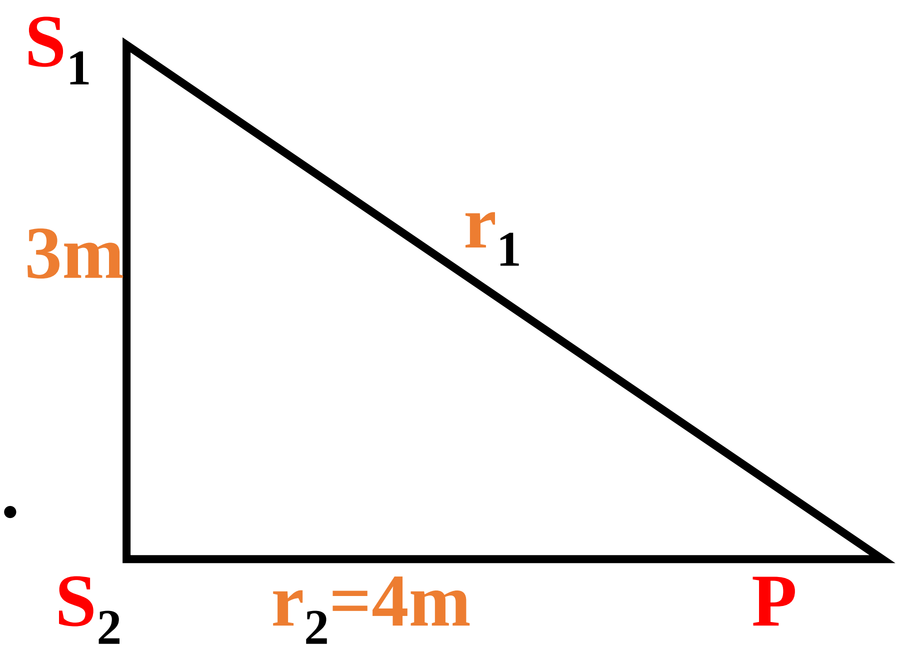
例： 已知相干波源S_1,S_2的振动方程

$$y_{10}=5\cos 5\pi t$$

$$y_{20}=5\cos(5\pi t+\pi)$$

波源位置如图，波速u=10m/s.

求：p点的合振动方程。



解：波传到P点时的分振动方程分别为：

$$y_{1p}=5\cos 5\pi(t-\frac{r_1}{u})=5\cos(5\pi t-\frac{\pi}{2}) \qquad (\because r_1=5m)$$

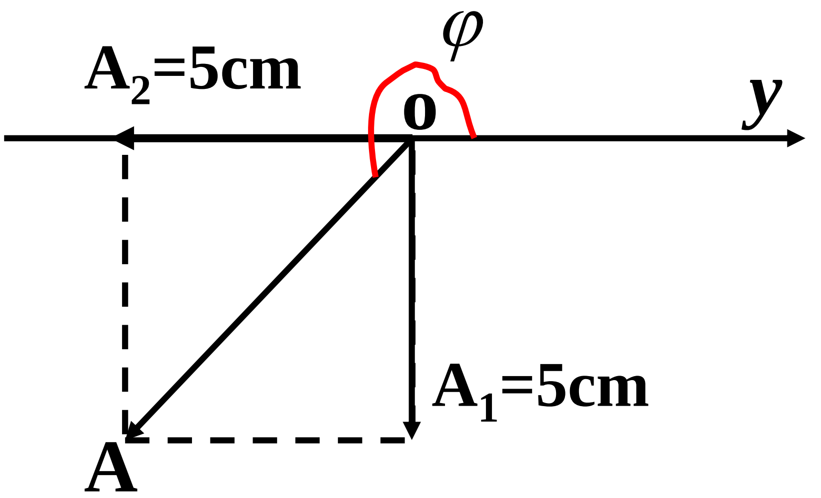
$$y_{2p}=5\cos[5\pi(t-\frac{r_2}{u})+\pi]=5\cos(5\pi t+\pi)$$

P点的合振动方程可用矢量图求：

$$A = 5\sqrt{2}cm$$

$$\varphi = \frac{5}{4}\pi(-\frac{3}{4}\pi)$$

$$y_p = 5\sqrt{2}\cos(5\pi t - \frac{3}{4}\pi)cm$$

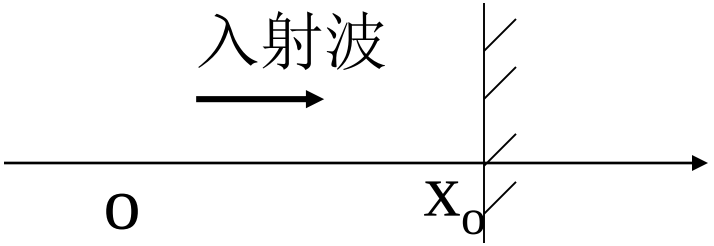


如图所示,有一平面简谐波: $y_\lambda = A\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$向右传播,在距坐标原点$o$为$x_o=5\lambda$处被垂直界面反射,反射面可看成固定端,反射中无吸收,试求:

(1)反射波的波动方程;

(2)驻波的波动方程;

(3)在o到x_o间各波节和波腹的坐标.



解(1): $y_{反o} = A\cos(2\pi\frac{t}{T}+\alpha)$

$$\alpha = 0-(5\times2\pi)-\pi-(5\times2\pi) = -21\pi$$

∴反射波的波动方程为:

$$y_{反} = A\cos(2\pi\frac{t}{T}+2\pi\frac{x}{\lambda}-21\pi) = -A\cos 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})$$

(2)驻波方程为: $y = y_{入}+y_{反} = -2A\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\frac{2\pi}{T}t$

驻波方程为：$y = y_{入} + y_{反} = -2A\sin\dfrac{2\pi}{\lambda}x\sin\dfrac{2\pi}{T}t$

(3)由$\dfrac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \Rightarrow$ 得波节点的坐标：$x = \dfrac{n}{2}\lambda$

即：$x = 0, \dfrac{\lambda}{2}, \lambda, \dfrac{3\lambda}{2}, 2\lambda, \dfrac{5\lambda}{2}, 3\lambda, \dfrac{7\lambda}{2}, 4\lambda, \dfrac{9\lambda}{2}, 5\lambda.$

由$\dfrac{2\pi}{\lambda}x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ 得波腹点的坐标：$x = (2n+1)\dfrac{\lambda}{4}$

即：$x = \dfrac{\lambda}{4}, \dfrac{3\lambda}{4}, \dfrac{5\lambda}{4}, \dfrac{7\lambda}{4}, \dfrac{9\lambda}{4}, \dfrac{11\lambda}{4}, \dfrac{13\lambda}{4}, \dfrac{15\lambda}{4}, \dfrac{17\lambda}{4}, \dfrac{19\lambda}{4},$

作业: 1（2）、2（2）、4、5、6、14