《微分几何》课程电子课件

教师：杨勤民

Tel: (021)64253147

Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程QQ群号：1045698545

§2.4 直纹面和可展曲面

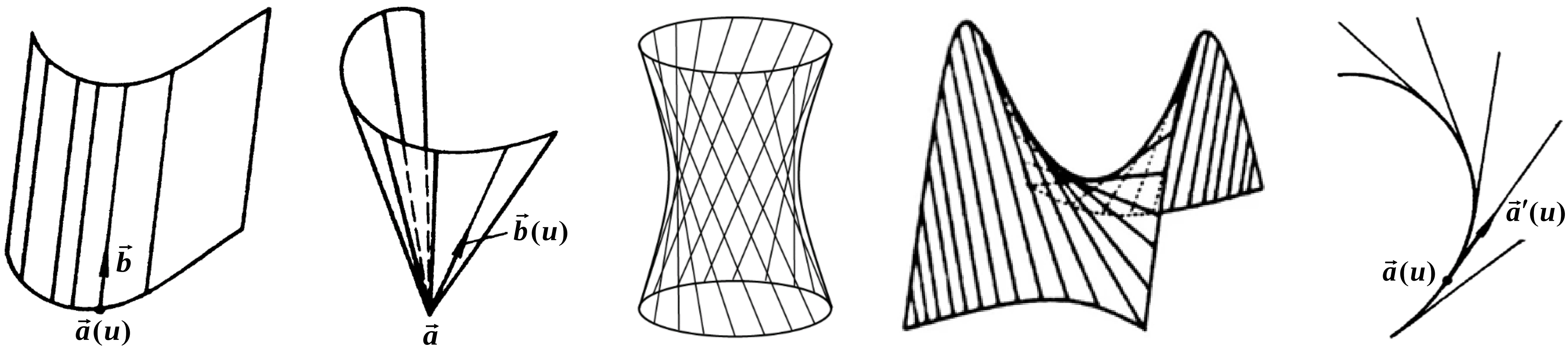
一、直纹面

二、可展曲面

三、线汇(不讲)

一、直纹面

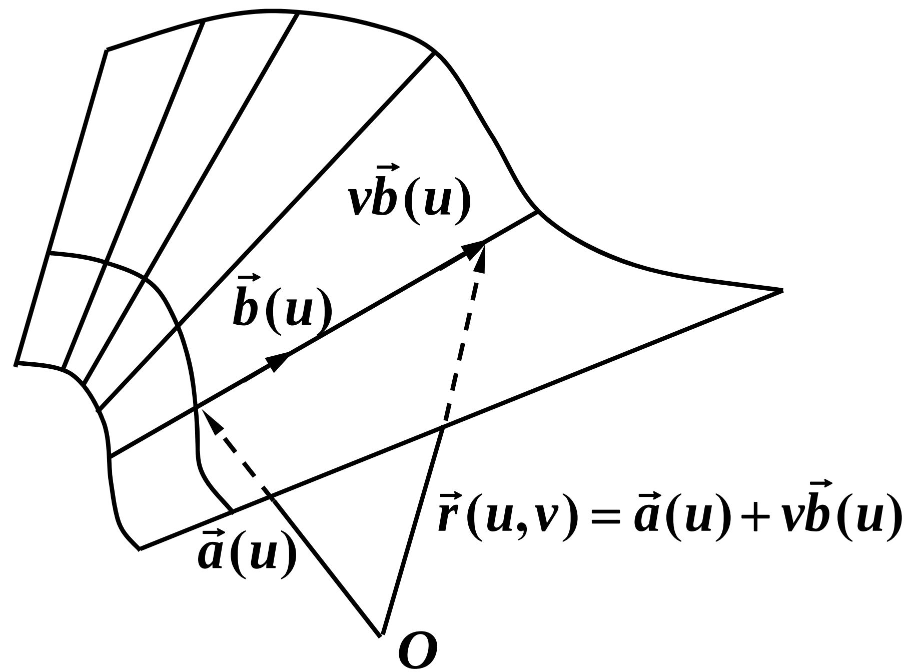
1. 概念 称由直线的运动轨迹构成的曲面为直纹面.



称组成直纹面的直线为直纹面的直母线.

称直纹面上和所有直母线都相交且只相交一次的曲线为直纹面的导线.

2. 直纹面的参数表示

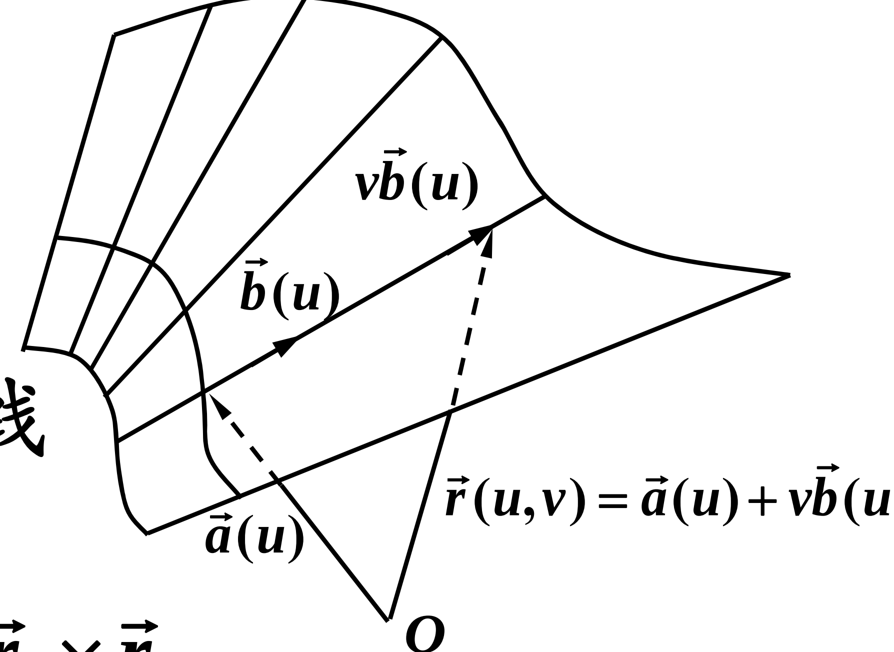


设曲线$\vec{a}=\vec{a}(u)$是一条导线,

过导线上的点$\vec{a}(u)$的直母线方向的单位向量为$\vec{b}(u)$,

则直纹面的方程为$\vec{r}(u,v)=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$.

3. 直母线上的法向量



$$\vec{r}(u,v)=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$$

u-曲线是导线, v-曲线是直母线

$$\vec{r}_u=\vec{a}'(u)+v\vec{b}'(u),\quad \vec{r}_v=\vec{b}(u).$$

$$\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\vec{a}'\times\vec{b}+v\vec{b}'\times\vec{b},\qquad \vec{n}=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}.$$

考虑当点P在直母线上移动时, P点处法向量的变化:

(1) 当$\vec{a}'\times\vec{b}\,//\,\vec{b}'\times\vec{b}$, 即$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=0$时, $\vec{n}$的方向保持不变.

此时在同一条直母线的点有相同的切平面.

(2) 当$\vec{a}'\times\vec{b}$与$\vec{b}'\times\vec{b}$不平行, 即$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')\neq 0$时,

此时, 点P在同一条直母线变化时, $\vec{n}$也有变化.

4. 直纹面上的Gauss曲率 $K\le 0$

$$\vec{r}(u,v)=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u) \;\Rightarrow\; \vec{r}_u=\vec{a}'+v\vec{b}',\vec{r}_v=\vec{b}.$$

$$\Rightarrow\; \vec{r}_{uv}=\vec{b}',\;\; \vec{r}_{vv}=\vec{0}. \quad N=\frac{(\vec{r}_{vv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=0,$$

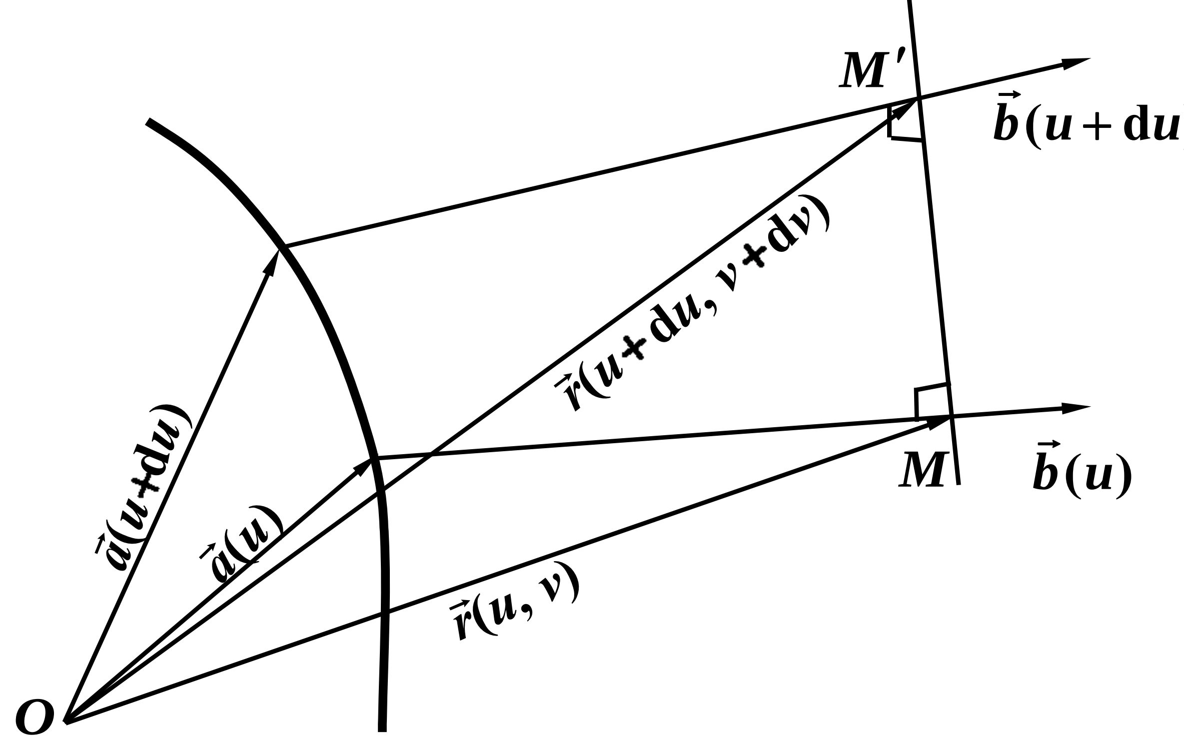
$$M=\frac{(\vec{r}_{uv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{(\vec{b}',\vec{a}'+v\vec{b}',\vec{b})}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{(\vec{b}',\vec{a}',\vec{b})}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

因此 $K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=-\dfrac{(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')^2}{(EG-F^2)^2}\le 0.$

当$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')\neq 0$时, $K<0$;

当$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=0$时, $K=0$. (—— 可展曲面)

5. 腰点和腰曲线



腰点：邻近的两直母线的公垂线的垂足的极限位置.

腰曲线：腰点的轨迹.

腰曲线的方程：$\vec{r}(u)=\vec{a}(u)-\dfrac{\vec{a}'(u)\vec{b}'(u)}{[\vec{b}'(u)]^2}\vec{b}(u)$（当$\vec{b}'\neq\vec{0}$）.

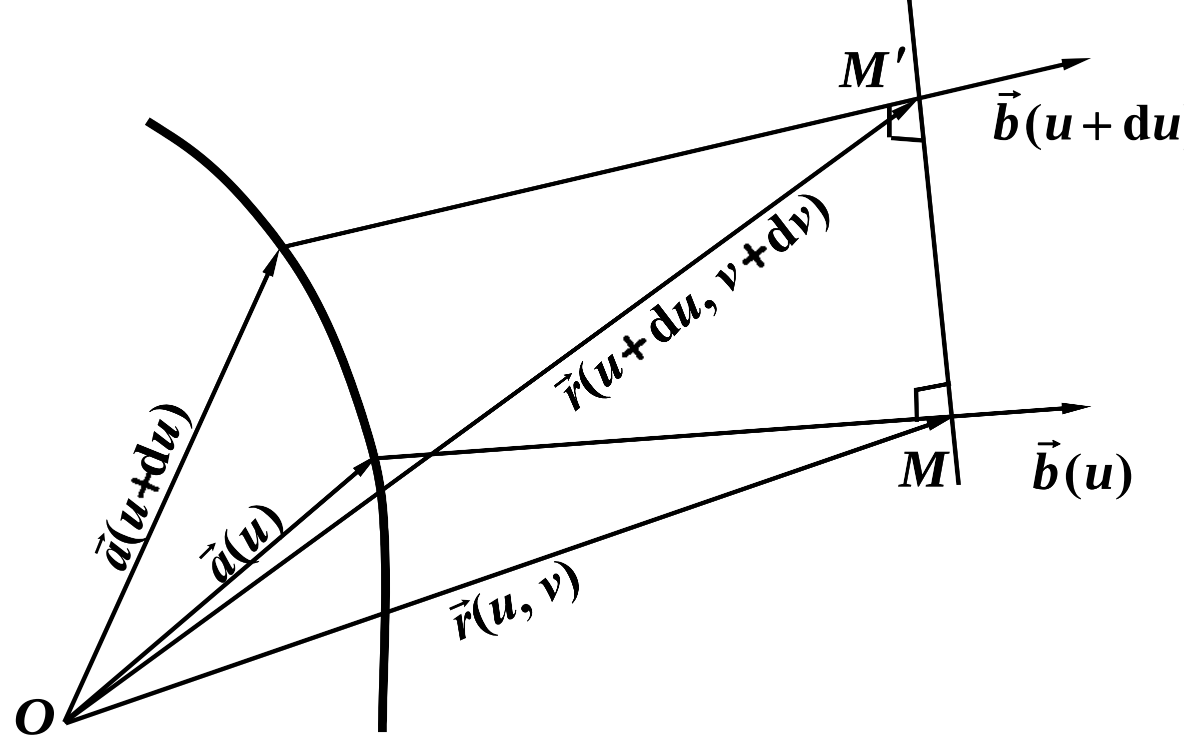
当$\vec{b}'(u)\neq\vec{0}$时导线为腰曲线的充要条件是$\vec{a}'(u)\vec{b}'(u)=0$.

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}(u) + v\vec{b}(u),$$

$$\overrightarrow{OM'} = \vec{a}(u+\Delta u)$$

$$+(v+\Delta v)\vec{b}(u+\Delta u),$$

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$$



$$= \Delta\vec{a} + v\Delta\vec{b} + \Delta v[\vec{b}(u) + \Delta\vec{b}]$$ (为俩直母线的公垂线方向)

其中 $\Delta\vec{a} = \vec{a}(u+\Delta u) - \vec{a}(u)$, $\Delta\vec{b} = \vec{b}(u+\Delta u) - \vec{b}(u)$.

由$\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{b}(u) = 0$和$\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{b}(u+\Delta u) = 0$得$\overrightarrow{MM'}\cdot\Delta\vec{b} = 0$.

即 $\Delta\vec{a}\cdot\Delta\vec{b} + v\Delta\vec{b}^2 + \Delta v\vec{b}(u)\cdot\Delta\vec{b} + \Delta v\Delta\vec{b}^2 = 0.$

两边同除以Δu^2得

$$\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta\vec{b}}{\Delta u}+v\left(\frac{\Delta\vec{b}}{\Delta u}\right)^2+\frac{\Delta v}{\Delta u}\vec{b}(u)\cdot\frac{\Delta\vec{b}}{\Delta u}+\frac{\Delta v}{\Delta u}\frac{\Delta\vec{b}}{\Delta u}\Delta\vec{b}=0.$$

令$\Delta u\to 0$得$\vec{a}'(u)\cdot\vec{b}'(u)+v\vec{b}'^2(u)+L\vec{b}(u)\cdot\vec{b}'(u)=0,\quad (*)$

其中$L=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta u}=-\dfrac{\vec{a}'(u)\cdot\vec{b}(u)}{\vec{b}^2(u)}$在后面会给出证明.

$\vec{b}(u)$恒为单位向量,因此$\vec{b}(u)\cdot\vec{b}'(u)=0$,代入(*)式得到

直母线上腰点的参数应满足$v=-\dfrac{\vec{a}'(u)\cdot\vec{b}'(u)}{\vec{b}'^2(u)}$.

即腰曲线方程为$\vec{r}(u)=\vec{a}(u)-\dfrac{\vec{a}'(u)\vec{b}'(u)}{[\vec{b}'(u)]^2}\vec{b}(u)$.

$$\overrightarrow{MM'} = \Delta\vec{a} + v\Delta\vec{b} + \Delta v[\vec{b}(u) + \Delta\vec{b}],$$

由$\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{b}(u) = 0$得

$$\Delta\vec{a} \cdot \vec{b}(u) + v\Delta\vec{b} \cdot \vec{b}(u) + \Delta v[\vec{b}(u) + \Delta\vec{b}] \cdot \vec{b}(u) = 0.$$

两边同除以Δu得

$$\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta u} \cdot \vec{b}(u) + v\frac{\Delta\vec{b}}{\Delta u} \cdot \vec{b}(u) + \frac{\Delta v}{\Delta u}[\vec{b}(u) + \Delta\vec{b}] \cdot \vec{b}(u) = 0.$$

于是$\dfrac{\Delta v}{\Delta u} = -\dfrac{\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta u} \cdot \vec{b}(u) + v\frac{\Delta\vec{b}}{\Delta u} \cdot \vec{b}(u)}{[\vec{b}(u) + \Delta\vec{b}] \cdot \vec{b}(u)}$.　　令$\Delta u \to 0$得

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta u} = -\frac{\vec{a}'(u) \cdot \vec{b}(u) + v\vec{b}'(u) \cdot \vec{b}(u)}{\vec{b}^2(u)} = -\frac{\vec{a}'(u) \cdot \vec{b}(u)}{\vec{b}^2(u)}.$$

二、可展曲面

设 S 是直纹面,如果 S 的切平面沿每一条直母线是不变的,则称S是可展曲面.

即 $\vec{r}(u,v)=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$, 且 $(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=0.$

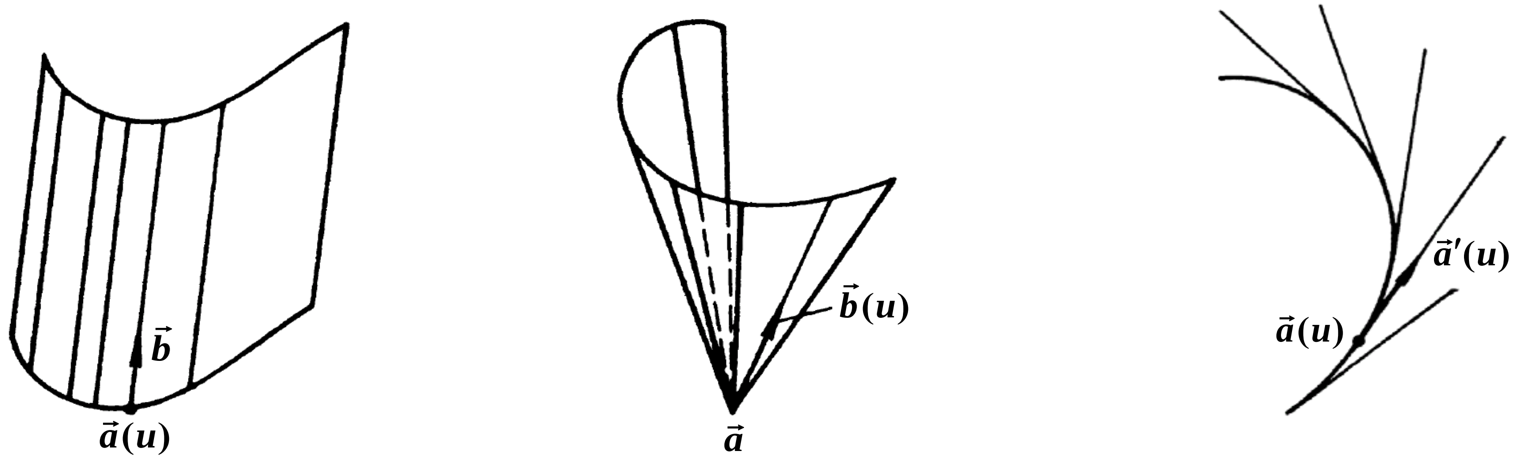
$\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\vec{a}'\times\vec{b}+v\vec{b}'\times\vec{b},$

$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=0 \Leftrightarrow \vec{a}'\times\vec{b}\,//\,\vec{b}'\times\vec{b}$, $\vec{n}$ 的方向保持不变.

此时在同一条直母线的点有相同的切平面.

$\vec{b}(u)$为单位向量这一条件可以弱化为$\vec{b}(u)$为非零向量.

P78 命题1 每一可展曲面或是柱面或是锥面或是一条曲线的切线曲面. 反之亦然.



证 取腰曲线为导线, 设可展曲面为 $\vec{r}(u,v)=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$,

其中 $|\vec{b}(u)|=1, (\vec{a}'(u),\vec{b}(u),\vec{b}'(u))=0,\ \vec{a}'(u)\cdot\vec{b}'(u)=0.$

(1) 当 $\vec{a}'(u)=0$ 时, $\vec{a}(u)$ 为常向量.

腰曲线退化为一点, 各条直母线都经过这个公共的腰点,

此时曲面是以该公共腰点为顶点的锥面.

(2) 当 $\vec{a}'(u) \neq 0, \vec{b}'(u) \neq 0$ 时,

由 $|\vec{b}(u)| = 1$ 知 $\vec{b}'(u) \perp \vec{b}(u)$.

由 $\vec{a}'(u) \cdot \vec{b}'(u) = 0$ 知 $\vec{b}'(u) \perp \vec{a}'(u)$.

由$(\vec{a}'(u), \vec{b}(u), \vec{b}'(u)) = 0$知三向量$\vec{a}'(u), \vec{b}(u), \vec{b}'(u)$共面.

因此 $\vec{b}(u) // \vec{a}'(u)$.

以v为参数的直线$\vec{a}(u) + v\vec{b}(u)$是曲线$\vec{a}(u)$在u点的切线.

此时该曲面是腰曲线的切线曲面.

(3) 当 $\vec{a}'(u) \neq 0, \vec{b}'(u) = 0$ 时, $\vec{b}(u)$为常向量.

此时该曲面是腰曲线为准线, 该常向量为母线方向的柱面.

综合(1), (2), (3)知, 可展曲面要么是锥面, 要么是切线曲面, 要么是柱面. 反之可用可展曲面的定义证明, 略.

单参数曲面族的包络

设$\{S_\alpha\}: F(x,y,z,\alpha)=0$是一族曲面,$\alpha$是参数,$F$有一阶连续偏导数. 若有一曲面$S$满足:

(1) 它的每个点是$\{S_\alpha\}$中某个曲面上的点,且这两个曲面在该公共点处有相同的切平面;

(2) 对于$\{S_\alpha\}$中的每一个曲面S_α,在S上存在一点$P_\alpha \in S_\alpha$,且S与S_α在P_α处有相同的切平面,

则称S为单参数曲面族$\{S_\alpha\}$的包络.

对于包络S上的每一点(x,y,z)有$\begin{cases} F(x,y,z,\alpha)=0 \\ F_{\alpha}(x,y,z,\alpha)=0 \end{cases}$

从中消去α得到一个方程$\varphi(x,y,z)=0.$

称该方程所表示的曲面S^*为曲面族的判别曲面.

当曲面上的点和包络上的点都是正常点时$S^*=S.$

证 (1) 先证 $S\subseteq S^*$. $\forall$点$P\in S$, 在S上取一条过点P的

曲线Γ, 设其方程为$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, 且$\overrightarrow{OP}=\vec{r}(t_0)$.

对于曲线Γ上的任意一点$(x(t),y(t),z(t))$,

设它在曲面族中以$\alpha(t)$为参数值的曲面上,即

$$F(x(t),y(t),z(t),\alpha(t))=0. \quad ①$$

两边对 t 求导得$F_x x'(t)+F_y y'(t)+F_z z'(t)+F_\alpha \alpha'(t)=0$. ②

$(F_x,F_y,F_z)\big|_{t=t_0}$ 为曲面$S_{\alpha(t_0)}$在点P处的法向量,

$\vec{r}'(t_0)$ 为曲线Γ的切向量 $\Rightarrow \vec{r}'(t_0)$为$S$的一个切向量.

由包络的定义, S与$S_{\alpha(t_0)}$在点P相切, 有公共的法向.

因此 $(F_x,F_y,F_z)\big|_{t=t_0}\perp \vec{r}'(t_0)$, 即

$$[F_x x'(t)+F_y y'(t)+F_z z'(t)]\big|_{t=t_0}=0. \qquad ③$$

由②和③得 $F_\alpha\big|_{t=t_0}\alpha'(t_0)=0$. 由$\Gamma$的任意性知 $F_\alpha\big|_{t=t_0}=0$.

结合①知, 点P的坐标满足$\begin{cases}F(x,y,z,\alpha)=0\\ F_\alpha(x,y,z,\alpha)=0\end{cases}$, 即 $P\in S^*$.

(2) 下证 $S^* \subseteq S$． $\forall (x,y,z) \in S^*$，$\exists \alpha(x,y,z)$使得

$$F(x,y,z,\alpha(x,y,z))=0, \quad F_\alpha(x,y,z,\alpha(x,y,z))=0.$$

$\forall$点$P \in S^*$，在S^*上任取一条过点P的曲线Γ，

设其方程为$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$，

则$F(x(t),y(t),z(t),\alpha(x(t),y(t),z(t)))=0.$

两边对t求导得$F_x x'(t)+F_y y'(t)+F_z z'(t)+\overset{0}{\boxed{F_\alpha}}\alpha'(t)=0.$

即$F_x x'(t)+F_y y'(t)+F_z z'(t)=0.$

即在点P处，($S_{\alpha(P)}$的法向)$\perp$(Γ的切向$(x'(t),y'(t),z'(t))$).

由Γ的任意性知，$S_{\alpha(P)}$与S^*在点P处相切．因此$P \in S$．

对于包络S上的每一点(x,y,z)有$\begin{cases} F(x,y,z,\alpha)=0 \\ F_\alpha(x,y,z,\alpha)=0 \end{cases}$

从中消去α得到一个方程$\varphi(x,y,z)=0.$

称该方程所表示的曲面S^*为曲面族的判别曲面.

当曲面上的点和包络上的点都是正常点时$S^*=S.$

称包络S与族中的曲面S_α相切的曲线为特征线.

每个α对应一条特征线$\begin{cases} F(x,y,z,\alpha)=0 \\ F_\alpha(x,y,z,\alpha)=0 \end{cases}.$

特征线的轨迹就是包络.

曲面族中的每一曲面沿特征线与包络相切.

例1 求单参数平面族 $x\cos\alpha + y\sin\alpha - z\sin\alpha = 1$ 的包络.

解 设$F(x,y,z,\alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha - z\sin\alpha - 1$,

则$F_\alpha(x,y,z,\alpha) = -x\sin\alpha + y\cos\alpha - z\cos\alpha$.

由$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha - z\sin\alpha - 1 = 0 \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha - z\cos\alpha = 0 \end{cases}$ 得

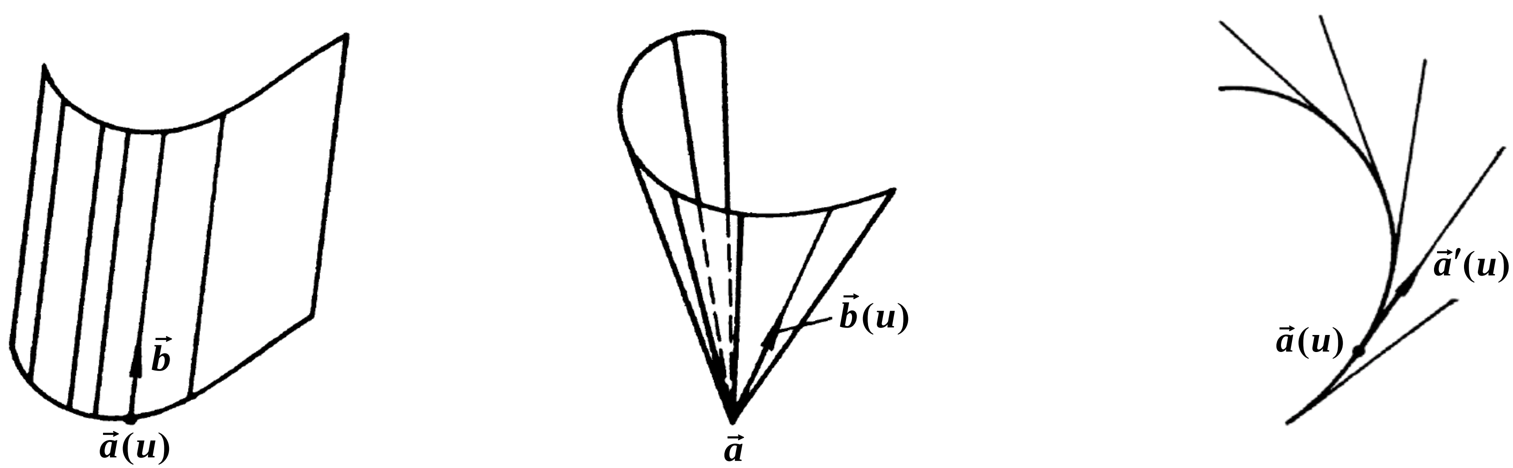
$$\sin\alpha = \frac{y-z}{x^2+(y-z)^2}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{x^2+(y-z)^2}.$$

代入 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$得到包络 $x^2+(y-z)^2 = 1$.

P81命题2 一个曲面为可展曲面的充要条件是此曲面为单参数平面族的包络.

平面 → 沿着直母线的公共切平面

直母线 → 包络面的特征线



① 包络的特征线 = 可展曲面的直母线

② 平面族中的平面 = 可展曲面沿着一条直母线的切平面

证 (充分性)

设单参数平面族为$A(\alpha)x+B(\alpha)y+C(\alpha)z+D(\alpha)=0.$

则特征线为 S_α: $\begin{cases} A(\alpha)x+B(\alpha)y+C(\alpha)z+D(\alpha)=0 \\ A'(\alpha)x+B'(\alpha)y+C'(\alpha)z+D'(\alpha)=0 \end{cases}.$

该特征线为两个平面的交线, 因此是直线.

包络是这些特征线(直线)的轨迹, 因此是直纹面.

由包络的定义, 平面族中的平面

$$A(\alpha)x+B(\alpha)y+C(\alpha)z+D(\alpha)=0 \qquad (*)$$

与包络相切于特征线S_α.

即包络沿每一条直母线S_α有相同的切平面(*).

故这个包络是可展曲面.

(必要性)

设一可展曲面为 $\vec{r}(u,v)=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$,

其中 $(\vec{a}'(u),\vec{b}(u),\vec{b}'(u))=0.$

则沿直母线$\vec{\rho}(v)=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$的切平面就是点$(u,0)$处

的切平面 $(\vec{R}-\vec{a}(u),\vec{a}'(u),\vec{b}(u))=0$ (与 v 无关).

当以u为参数时, 它表示一个单参数平面族.

该平面族中的每个平面与上述可展曲面在公共点处相切,

由包络的定义, 该平面族的包络就是上述可展曲面.

P81命题3 一个曲面为可展曲面的充要条件是

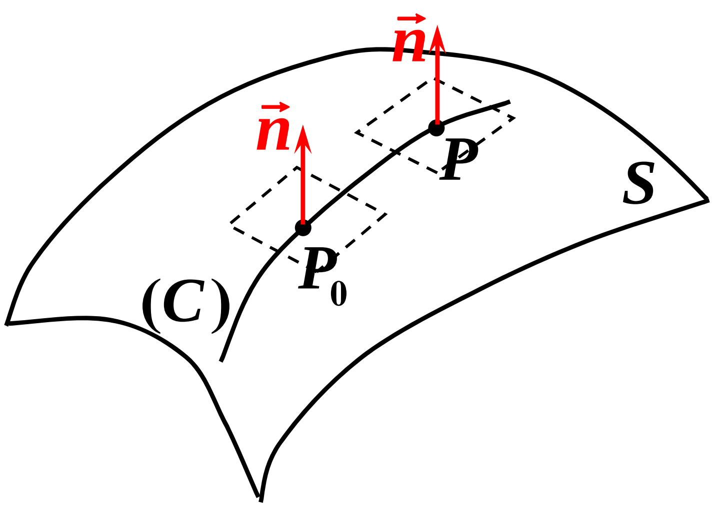
它的Gauss曲率恒等于零.

有一族曲率线为渐近曲线

?

直母线

沿着$k_N=0$的曲率线(C)有 $\mathrm{d}\vec{n}=-k_N\mathrm{d}\vec{r}=0\Rightarrow\vec{n}$为常向量



P_0处切平面: $(\vec{R}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0$

$\parallel$?

P处切平面: $(\vec{R}-\vec{r})\cdot\vec{n}=0$

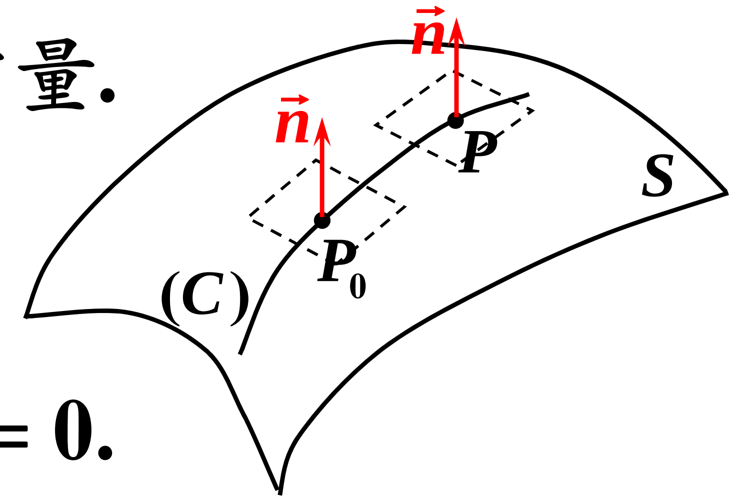
$\Leftarrow\ (\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0\Leftarrow\ \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{n}=0$ √

证（充分性） 设在曲面S上，$K = k_1 k_2 \equiv 0$，不妨设$k_2 = 0$.

由主方向判别定理，沿着k_2所在主方向有$\mathrm{d}\vec{n} = -k_2 \mathrm{d}\vec{r} = 0$.

因此在这样的曲率线(C)上，单位法向量为常向量.

$\vec{n}$与$\mathrm{d}\vec{r}$垂直 $\Rightarrow$ $\vec{n}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0 \Rightarrow$ $\vec{n}\cdot\vec{r}$为常量.



$\forall$点$P_0 \in (C)$，记$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$，则

沿着(C)有$\vec{r}\cdot\vec{n} = \vec{r}_0\cdot\vec{n}$，即$(\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot\vec{n} = 0$.

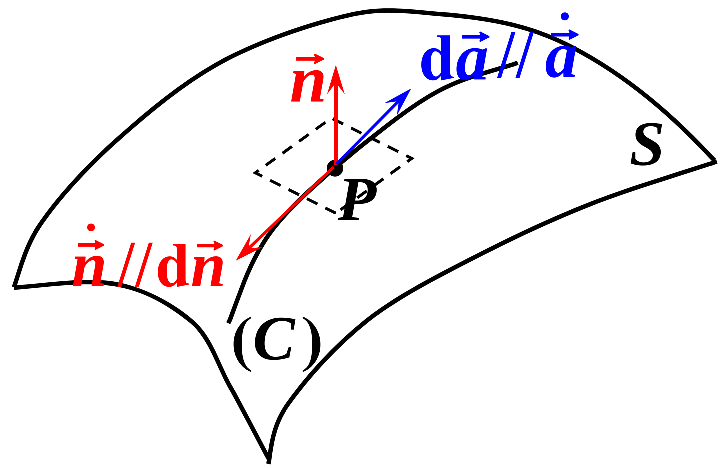
即(C)上每点都在过P_0的切平面$(\vec{R} - \vec{r}_0)\cdot\vec{n} = 0$上.

由点P_0在(C)上的任意性知，(C)上点享有相同的切平面.

所有这样的切平面形成一个单参数平面族，S为它的包络...

P82命题4 曲面上的曲线是曲率线的充要条件是沿此曲线上的点处的曲面法线组成一可展曲面.

(该命题用可展曲面刻画了曲率线的特征)



法线曲面方程 $\vec{r}(s,t)=\vec{a}(s)+t\,\vec{n}(s)$

$(\dot{\vec{a}},\vec{n},\dot{\vec{n}})=0 \Leftrightarrow \dot{\vec{a}},\vec{n},\dot{\vec{n}}$共面

$\Leftrightarrow \dot{\vec{n}}\,//\,\dot{\vec{a}} \Leftrightarrow d\vec{n}\,//\,d\vec{a} \Leftrightarrow$ (d)为主方向

证 (必要性) 设曲面上的曲线$\vec{a}(s)$是曲率线,

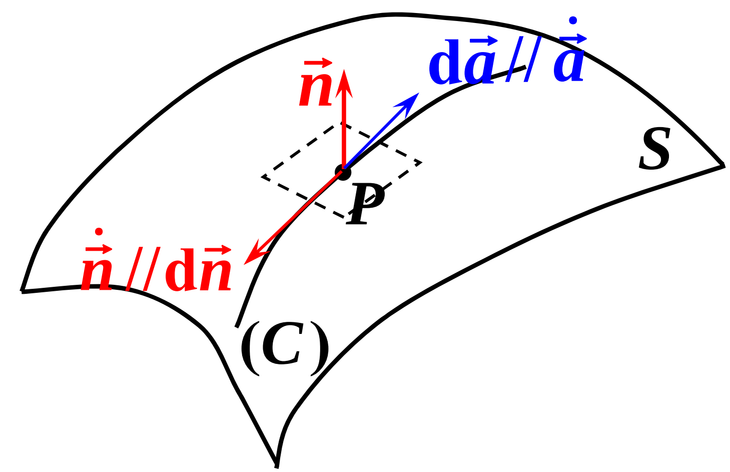
由主方向判别定理, $\mathrm{d}\vec{n} /\!/ \mathrm{d}\vec{a}$, 即$\dot{\vec{n}} /\!/ \dot{\vec{a}} \Rightarrow (\dot{\vec{a}}, \vec{n}, \dot{\vec{n}}) = 0.$

$\therefore$ 沿$\vec{a}(s)$的曲面法线组成的曲面$\vec{a}(s) + t\,\vec{n}(s)$为可展曲面.

(充分性) 设$\vec{a}(s)$是曲面上的一条曲线,

沿$\vec{a}(s)$的曲面法线组成的曲面$\vec{a}(s) + t\,\vec{n}(s)$为可展曲面,

$$\left.\begin{array}{l} \text{则其中}\dot{\vec{a}}, \vec{n}, \dot{\vec{n}}\text{共面} \\ |\vec{n}(s)| \equiv 1 \Rightarrow \vec{n} \perp \dot{\vec{n}} \\ \text{曲面的法向}\vec{n} \perp \dot{\vec{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{\vec{n}} /\!/ \dot{\vec{a}}$$



$\Rightarrow \mathrm{d}\vec{n} /\!/ \mathrm{d}\vec{a} \Rightarrow (\mathrm{d})$为主方向

$\vec{a}(s)$每点处的切向都是主方向$\Rightarrow \vec{a}(s)$为曲面的曲率线.

P83命题5 可展曲面可以与平面成等距对应.

现象：柱面, 锥面和切线曲面“可以展开”成一个平面.

如何证明：选取适当的参数表示, 使得可展曲面和平面具有相同的第一基本形式.

证 (1) 当所给可展曲面是柱面时,

设柱面方程为 $\vec{r}(s,v)=\vec{a}(s)+v\vec{b}$,

其中 s 为曲线 $\vec{a}(s)$ 的弧长参数, $|\vec{b}|=1$, 且 $\dot{\vec{a}}(s)\cdot\vec{b}=0$.

则 $\vec{r}_s=\dot{\vec{a}}(s)$, $\vec{r}_v=\vec{b}$,

$$E=\vec{r}_s^{\,2}=\dot{\vec{a}}^2(s)=1,\ F=\vec{r}_s\cdot\vec{r}_v=\dot{\vec{a}}(s)\cdot\vec{b}=0,\ G=\vec{r}_v^{\,2}=\vec{b}^2=1.$$

$$\mathrm{I}_{柱}=E\mathrm{d}s^2+2F\mathrm{d}s\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2=\mathrm{d}s^2+\mathrm{d}v^2.$$

设平面方程为$\vec{r}^*(s,v)=(s,v,0)$,

则$\vec{r}_s^*=(1,0,0)$, $\vec{r}_v^*=(0,1,0)$, $E^*=1$, $F^*=0$, $G^*=1$.

$\mathrm{I}_{平}=E^*\mathrm{d}s^2+2F^*\mathrm{d}s\mathrm{d}v+G^*\mathrm{d}v^2=\mathrm{d}s^2+\mathrm{d}v^2=\mathrm{I}_{柱}$.

(2) 当所给可展曲面是锥面时,

设锥面方程为$\vec{r}(v,s)=\vec{a}+v\vec{b}(s)$, 其中$|\vec{b}(s)|=1$, s为弧长.

则$\vec{r}_v=\vec{b}(s)$, $\vec{r}_s=v\dot{\vec{b}}(s)$,

$E=\vec{r}_v^{\,2}=1$, $F=\vec{r}_v\cdot\vec{r}_s=v\vec{b}\cdot\dot{\vec{b}}=0$, $G=\vec{r}_s^{\,2}=v^2$.

$\mathrm{I}_{锥}=E\mathrm{d}v^2+2F\mathrm{d}v\mathrm{d}s+G\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}v^2+v^2\mathrm{d}s^2$.

设平面方程为$\vec{r}^*(v,s)=(v\cos s,v\sin s,0)$,

则$\vec{r}_v^*=(\cos s,\sin s,0)$, $\vec{r}_s^*=(-v\sin s,v\cos s,0)$,

$E^* = \vec{r}_v^{*2} = 1,\ F^* = \vec{r}_v^* \cdot \vec{r}_s^* = 0,\ \ G^* = \vec{r}_v^{*2} = v^2.$

$\mathrm{I}_{平} = E^* dv^2 + 2F^* dvds + G^* ds^2 = dv^2 + v^2 ds^2 = \mathrm{I}_{锥}.$

(3) 当所给可展曲面是切线曲面时,

设切线曲面方程为$\vec{r}(s,v) = \vec{a}(s) + v\dot{\vec{a}}(s)$, 其中$s$为弧长.

则$\vec{r}_s = \dot{\vec{a}} + v\ddot{\vec{a}}(s) = \vec{\alpha}(s) + vk(s)\vec{\beta}(s),\ \ \vec{r}_v = \dot{\vec{a}} = \vec{\alpha},$

$E = \vec{r}_s^{\,2} = 1 + v^2k^2,\ \ F = \vec{r}_s \cdot \vec{r}_v = 1,\ \ G = \vec{r}_v^{\,2} = 1.$

$\mathrm{I}_{切} = E ds^2 + 2F dsdv + G dv^2 = (1 + v^2k^2) ds^2 + 2dsdv + dv^2.$

设平面曲线$\vec{b}(s)$在s处与$\vec{a}(s)$有相同的曲率,

构造平面方程$\vec{r}^*(s,v) = \vec{b}(s) + v\dot{\vec{b}}(s)$,

则 $\mathrm{I}_{平} = (1 + v^2k^2) ds^2 + 2dsdv + dv^2 = \mathrm{I}_{切}.$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.23 证明挠曲线的主法线曲面与副法线曲面都不是可展曲面.

2.24 判断下列曲面是不是可展曲面,并给出理由.

(1) $\vec{r}(u,v)=(u+v,u-v,2uv)$;

(2) $xy=(z-1)^2$.

2.25 求单参数曲面族 $x^2+(y-\alpha)^2+(z-2\alpha)^2=1$ 的包络.

2.26 求双曲抛物面 $z=xy$ 沿着它与柱面 $x^2=y$ 的交线的切平面构成的单参数平面族的包络.