第九章 静电场中的导体和电介质 习题参考解答

1、一导体球半径为 R_1，其外同心地罩以内、外半径分别为 R_2 和 R_3 的厚导体壳，此系统带电后内球电势为 U，外球所带电量为 Q，求此系统各处的电势和电场分布?

解：设内球带电量为 $q_{内}$,依据题意可知电场分布 $E=\begin{cases}0 & r<R_1\\ \dfrac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1<r<R_2\\ 0 & R_2<r<R_3\\ \dfrac{q_{内}+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R_3\end{cases}$

$$U=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr+\int_{R_3}^{\infty}\frac{q_{内}+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{q_{内}+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$q_{内}=\frac{U4\pi\varepsilon_0 R_1R_2R_3-R_1R_2Q}{R_2R_3-R_1R_3+R_1R_2}$$

$$\therefore\quad U=\begin{cases}U & r<R_1\\ \dfrac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{-q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\dfrac{q_{内}+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} & R_1<r<R_2\\ \dfrac{q_{内}+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} & R_2<r<R_3\\ \dfrac{q_{内}+Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r>R_3\end{cases}$$

注上式采用带电球壳的电势叠加，也可用 $u=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 获得

2、半径为 R_1 和 R_2 ($R_1<R_2$)的相互绝缘的两同心导体球壳，现使内球壳带上+q 电量时求: (1) 外球的电荷与电势；(2) 若把外球接地后再重新绝缘，外球的电势与电荷；

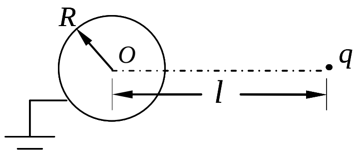
(3) 然后把内球壳再接地，这时内球的电荷为多少？这时外球的电势又为多少?

解：(1) $q_{外}=0\qquad U_{外}=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{R_2}^{\infty}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

(2) $q_{外}=-q\qquad U=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}=0\qquad (\because \vec{E}_{外}=0)$

(3) $U_{内}=\dfrac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=0\Rightarrow q_{内}=\dfrac{R_1}{R_2}q$

$$U_{外}=\frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=\frac{\frac{R_1}{R_2}q-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^{\,2}}=\frac{q(R_1-R_2)}{4\pi\varepsilon_0 R_2^{\,2}}$$



3、如图所示，一个接地导体球半径为 R，有一个电量为 q 的点电荷，点电荷距球心的距离为l，求导体球表面的感应电荷 Q。

解：设接地导体上的感应电荷为 Q，分布在导体球的表面， 因

导体球接地，球上各点电势均为零，即球心 O 点处电势 U_0 为零。U_0 由点电荷 q 和球面上感应电荷共同产生

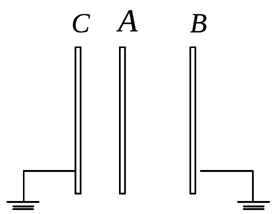
$$U_0=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}=0$$

$$Q=-\frac{R}{l}q$$

4、A、B、C 是三块平行金属板，面积均为 200cm^2，A、B 相距 4.0mm，A、C 相距 2.0mm，B、C 两板均接地，现使 A 板带正电 3.0×10^{-7}C 不计边缘效应，求:

(1) B 板和 C 板上的感应电荷;

(2) A 板的电势。



解:（1）设 B 板感应电荷为$-q_1$，C 板的感应电荷为$-q_2$

$$q_1+q_2=q \qquad (1)$$

$$E_1=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}=\frac{q_1}{\varepsilon_0 s}$$

$$E_2=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}=\frac{q_2}{\varepsilon_0 s}$$

得 $$\frac{E_1}{E_2}=\frac{q_1}{q_2} \qquad (2)$$

根据题意 $U_A-U_B=U_A-U_C$

$$E_1d_1=E_2d_2$$

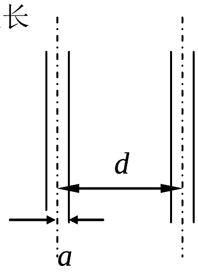
得 $$\frac{E_1}{E_2}=\frac{d_2}{d_1}=\frac{1}{2} \qquad (3)$$

由（1)、(2)、(3）式可得 $q_1=1.0\times10^{-7}\,C$， $q_2=2.0\times10^{-7}\,C$。

（2） $U_A=E_1d_1=\frac{q_1}{\varepsilon_0 S}d_1$

$$=\frac{1.0\times10^{-7}\times4.0\times10^{-3}}{8.85\times10^{-12}\times0.02}=2.3\times10^{3}V$$

5、半径均为 a 的两根平行长直导线，相距为 d (d>>a)，求单位长度上的电容。



解：设两导线间任意 P 点，距导线中心为 r，则 P 点 E 为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-r)}$$

两导线间的电势差 U_A-U_B

$$U_A-U_B=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int Edr=\int_a^{d-a}\left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-r)}\right]dr$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a}-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{d-a}$$

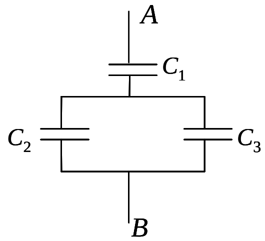
$$=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a}$$

$$C=\frac{q/l}{U_A-U_B}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d-a}{a}}$$

6、如图，连接三个电容器，$C_1=50\mu F, C_2=30\mu F, C_3=20\mu F,$

（1）求该连接的总电容；

（2）当在 AB 两端加 100V 的电压后，各电容器上的电压和电量各是多少？



解:（1）设总电容为 C，则 $\dfrac{1}{C}=\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2+C_3}$

$$C=\frac{C_1(C_2+C_3)}{C_1+C_2+C_3}=25\mu F$$

（2）设 AB 两端的电压为 U

$$Q_1=CU=25\times10^{-6}\times100=2.5\times10^{-3}C$$

$$U_1=\frac{Q_1}{C_1}=\frac{2.5\times10^{-3}}{50\times10^{-6}}=50V \qquad U_2=U_3=U-U_1=100-50=50V$$

$$Q_2=C_2U_2=30\times10^{-6}\times50=1.5\times10^{-3}C \qquad Q_3=C_3U_3=20\times10^{-6}\times50=1.0\times10^{-3}C$$

7、一空气平行板电容器，极板面积 $S=0.2m^2$，间距 d=1.0cm，充电使其两板电势差 $U_0=3\times10^3V$，然后断开电源再在两极板间充满介质，最后两板间电压降至 1×10^3V，试计算: (1) 原空气电容器电容 C_0； (2) 每一极板上所带电量 Q；

(3) 两板间原电场强度 E_0； (4) 放入介质后的电容和两板间场强 E；

(5) 介质极化后每一面上的极化电荷 Q'； (6) 介质的相对介电常数ε_r？

解: (1) $$C_0=\frac{\varepsilon_0 s}{d}=\frac{8.85\times10^{-12}\times0.2}{1.0\times10^{-2}}=1.77\times10^{-10}F$$

(2) $$Q_0=C_0U_0=1.77\times10^{-10}\times3\times10^3=5.31\times10^{-7}C$$

(3) $$E_0=\frac{U_0}{d}=\frac{3\times10^3}{1.0\times10^{-2}}=3\times10^5\ V/m$$

(4) $$C=\frac{Q}{U}=\frac{5.31\times10^{-7}}{1\times10^3}=5.31\times10^{-10}F$$

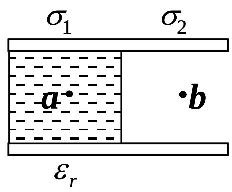
$$E=\frac{U}{d}=\frac{1000}{1\times10^{-2}}=10^5\ V/m$$

(5) $$Q'=\sigma's=(E_0-E_1)\varepsilon_0 s$$

$$=(3\times10^5-10^5)\times8.85\times10^{-12}\times0.2=3.54\times10^{-7}C$$

(6) $$\varepsilon_r=\frac{C}{C_0}=\frac{5.31\times10^{-10}}{1.77\times10^{-10}}=3$$

8、平行板电容器极板面积为S，两板间距离为d，当极板上充以等量异号电荷Q后断开电源，然后在电容器的左半面插入相对介电常数为 $\varepsilon_r=3$ 的陶瓷介质板(忽略边缘效应)，求： (1) 极板上的自由电荷面密度分布σ_1、σ_2； (2) 两极板之间a、b两点电场强度E、电位移矢量D和极化强度P； (3) 陶瓷板插入前、后两极板电势差变化多少?



解：（1）左右两边电势差相等 $E_1 d = E_2 d$ $\quad \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}d = \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r}d \rightarrow \dfrac{\sigma_1}{3\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$ (1)

且 $\sigma_1\dfrac{S}{2} + \sigma_2\dfrac{S}{2} = Q$ (2)

由（1）、（2）解得 $\sigma_1 = \dfrac{3Q}{2S}$, $\quad \sigma_2 = \dfrac{Q}{2S}$

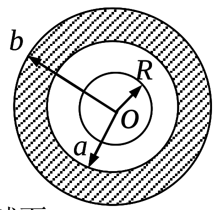
（2）此组合可看作两电容器的并联，电势差相等，距离相等

$$\therefore E_a = E_b = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \qquad D_a = \sigma_1 = \frac{3Q}{2S}, \qquad D_b = \sigma_2 = \frac{Q}{2S}$$

$$P_a = x_e\varepsilon_0 E_a = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E_a = \frac{Q}{S} \qquad P_a = 0\ (\text{真空}\varepsilon_r = 1)$$

(3) $$\Delta U = U - U' = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S} - \frac{Qd}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}d$$

9、半径为R的导体球，带有电荷Q，球外有一均匀电介质的同心球壳，球壳内、外半径分别为a和b，相对介电常数为 ε_r，如图所示，试求： (1) 介质内、外的电位移矢量D和电场强度E ； (2) 介质内的电极化强度 **P** 和介质两表面上的极化电荷面密度σ'； (3) 画出电场线和电位移线，加以比较?



解：（1）由题可知场的分布是球对称，应用高斯定理为半径r的同心球面

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q \qquad D = \frac{q}{4\pi r} \qquad E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$r < R \qquad D_1 = 0 \qquad E_1 = 0$$

$$R < r < a \qquad D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2}, E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

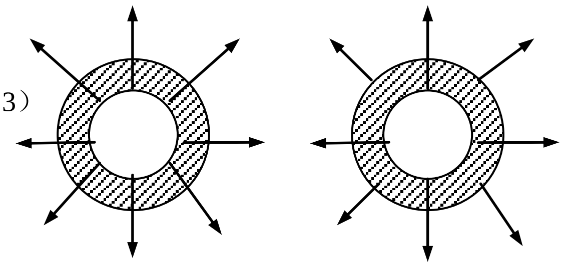
$$a < r < b \qquad D_3 = \frac{Q}{4\pi r^2}, E_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

$$r > b \qquad D_4 = \frac{Q}{4\pi r^2}, E_4 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (\ E, D\text{方向均为径向}\ )$$

（2）介质内的极化强度 $P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_3 = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} = (1 - \dfrac{1}{\varepsilon_r})\dfrac{Q}{4\pi r^2}$

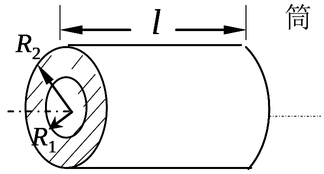
$$\sigma_a' = P_a\cos\pi = -(1 - \frac{1}{\varepsilon_r})\frac{Q}{4\pi a^2};\quad \sigma_b' = P_b\cos 0^0 = (1 - \frac{1}{\varepsilon_r})\frac{Q}{4\pi b^2}$$

（3）



电位移线　　　　电场线

10、圆柱形的电容器由半径为 R_1 的导线和与它同轴的导体圆筒构成，圆筒的半径为 R_2，长为 l，其间充满相对介电常数为 ε_r 的溶液。设沿轴线单位长度导线上的电荷为 λ，单位长度圆筒上的电荷为–λ。 略去边缘效应，试求:



(1) 介质中电位移矢量 D、电场强度 **E** 和极化强度 **P** ；
(2) 两极的电势差；(3) 介质表面的极化电荷?

解：(1)　应用有介质时高斯定理　$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = D2\pi r l = \lambda l$

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r} \qquad E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} \qquad P = \varepsilon_0 x_e E = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$$

方向：　R_1 指向 R_2

(2)　$$U_1 - U_2 = \int \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{R_2}^{R_1} E\cdot dr = \int_{R_2}^{R_1}\frac{\lambda dr}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} = \frac{\lambda}{2\lambda\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

(3)　$$\sigma_1' = P\cos\pi = -(\varepsilon_r - 1)\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r R_1}, \qquad \sigma_2' = P\cos 0^0 = (\varepsilon_r - 1)\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r R_2}$$

11、一单芯同轴电缆，中心为一半径 R_1=0.5cm 的金属导线，它外围包一层 ε_r=5 的固体介质，最外面是金属包皮。当在此电缆上加上电压后，介质内紧靠内表面处的场强 E_1 为紧靠外表面处的场强 E_2 的 2.5 倍。若介质的击穿场强 E_m=40kV/cm，求此电缆能受的最大电压是多少？

解：设内外圆筒单位长度带电量±λ，则介质中的场强　$E_1 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$

介质内外表面的场强　$E_1 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1}$　　$E_2 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_2}$

根据题意　$E_1 = 2.5E_2$ 可解得　$R_2 = 2.5R_1 = 2.5\times 0.5 = 1.25\text{cm}$

又 E_1 的场强最大，故电压升高后，该处先击穿。令 $E_1 = E_M$，则有

$$\lambda = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 E_M$$

电缆能承受的最大电压

$$U_M=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}dr=R_1E_M\ln\frac{R_2}{R_1}=18.3\text{kV}$$

12、一空气平板电容器的电容 C=1.0 pF，充电到电量为 $Q=1.0\times10^{-6}$C 后将电源切断

(1) 求两极板间的电位差和电场能量；

(2) 将两极板拉到原距离的两倍, 试计算拉开前后电场能量的变化；

解：(1) $$U=\frac{Q}{C}=\frac{1.0\times10^{-6}}{1.0\times10^{-12}}=1.0\times10^{6}\text{V}$$

$$W_e=\frac{Q^2}{2C}=\frac{\left(1.0\times10^{-6}\right)^2}{2\times1.0\times10^{-12}}=0.5\text{J}$$

(2) $$C'=\frac{\varepsilon_0 S}{2d}=\frac{1}{2}C$$

$$W'_e=\frac{Q^2}{2C'}=2W_e$$

$$\Delta W_e=W'_e-W_e=W_e=0.5\text{J}$$

13、电量为 Q_0，半径为 R_0 导体球，置于相对介电常数为 ε_r 的介质球壳中，如果介质的内半径为 R_0，外半径为 R，求:

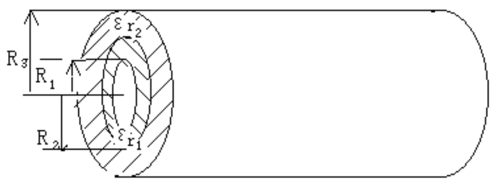
(1) 介质中的电场能量密度；

(2) 贮存在介质球壳内的电场能量。

解：(1)能量密度 $\omega=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2$

由于场分布为球对称，应用高斯定理得

$$D=\frac{Q_0}{4\pi r^2}\qquad E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{Q_0}{4\pi r^2\varepsilon_0\varepsilon_r}$$



$$\omega=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\left[\frac{Q_0}{4\pi r^2\varepsilon_0\varepsilon_r}\right]^2=\frac{Q_0^{\ 2}}{32\pi^2 r^4\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

（2） $$W=\int\omega_e dV=\int_{R_0}^{R}\frac{Q_0^{\ 2}}{32\pi^2 r^4\varepsilon_0\varepsilon_r}4\pi r^2 dr=\frac{Q_0^{\ 2}}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R}\right)$$

14、两层相对介电常数分别为 ε_{r1} 和 ε_{r2} 的介质，充满圆柱形电容器两极板之间 (如图)，电容器内、外两极圆筒在单位长度上的带电量分别为 λ 和$-\lambda$。求:

(1) 单位长度上的电容；

（2）此电容器系统单位长度上的电场的能量。

解:（1）设介质 1 中电场强度为 E_1,介质 2 中的电场强度为 E_2，由于在两介质中电场分布为轴对称，由高斯定理得

$$D=\frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$\therefore\quad E_1=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}r},\qquad E_2=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}r}$$

$$U_1-U_2=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}r}dr+\int_{R_2}^{R_3}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}r}dr$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}}\ln\frac{R_3}{R_2}$$

$$C=\frac{Q}{U_1-U_3}=\frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}}\ln\frac{R_3}{R_2}}$$

$$C_0=\frac{C}{l}=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_2}\ln\frac{R_2}{R_1}+\varepsilon_{r_1}\ln\frac{R_3}{R_2}}$$

（2）
$$W_0=\frac{Q^2}{2C_0}=\frac{\lambda^2(\varepsilon_{r_2}\ln\frac{R_2}{R_1}+\varepsilon_{r_1}\ln\frac{R_3}{R_2})}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}}$$