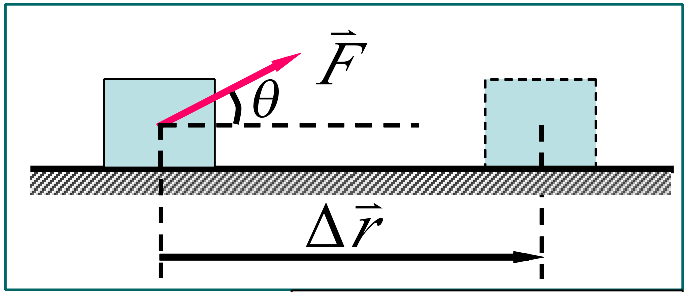
第二章　守恒定律

§2.1能量守恒

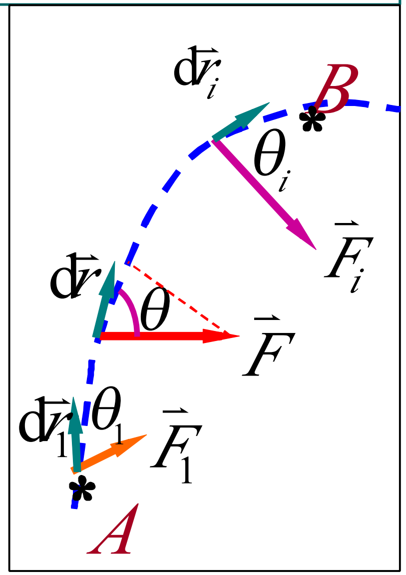
一、功

1. 恒力作用下的功



$$A = F\cos\theta \cdot \left|\Delta\vec{r}\right| = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

2. 变力的功



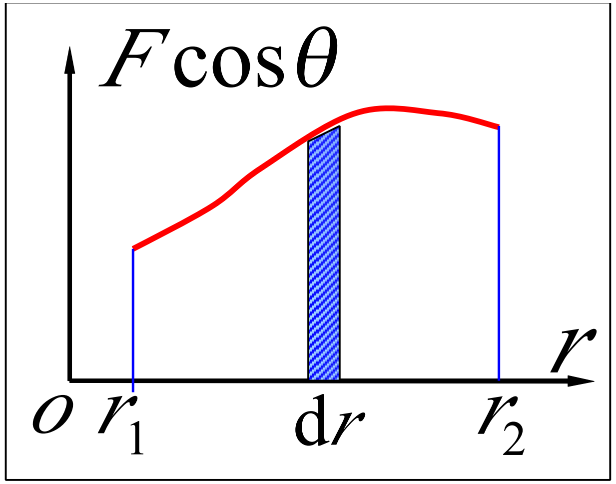
$$\boxed{A = \int_a^b \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b F\cos\theta\,\mathrm{d}r}$$

讨论　(1)　功的正、负

$$\begin{cases} 0^\circ < \theta < 90^\circ，\quad A > 0 \\ 90^\circ < \theta < 180^\circ，\quad A < 0 \\ \theta = 90^\circ \quad \vec{F}\perp\mathrm{d}\vec{r} \quad A = 0 \end{cases}$$

(2) 作功的图示

$$A=\int_{r_1}^{r_2} F\cos\theta\,\mathrm{d}r$$



（3）功是一个过程量，与路径有关.

（4）合力的功，等于各分力的功的代数和.

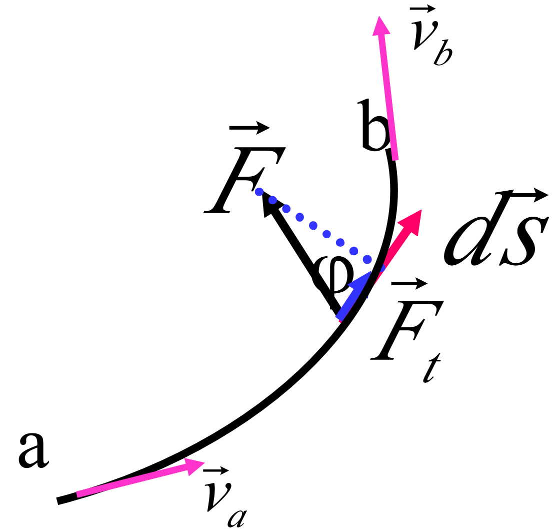
$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k} \qquad \mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j}+\mathrm{d}z\vec{k}$$

$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b (F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z)$$

$$A_x=\int_{x_a}^{x_b}F_x\mathrm{d}x \qquad A_y=\int_{y_a}^{y_b}F_y\mathrm{d}y \qquad A_z=\int_{z_a}^{z_b}F_z\mathrm{d}z$$

$$\boxed{A=A_x+A_y+A_z}$$

3. 动能定理



$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F\cos\varphi ds = F_t ds$$

$$= ma_t ds = m\frac{dv}{dt}ds = mvdv$$

$$\int_0^A dA = \int_{v_a}^{v_b} mvdv \Rightarrow A = \tfrac{1}{2}mv_b^2 - \tfrac{1}{2}mv_a^2 = \vec{E}_{Kb} - \vec{E}_{Ka}$$

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2$$

E_k是状态量,称为质点的平动动能。

合力对物体所做的功等于物体动能的增量

[例1]质点m=0.5Kg,运动方程x=5t,y=0.5t² (SI)，求从t=2s到t=4s这段时间内外力所作的功.

解法1：用功的定义式

$$\left.\begin{aligned} &A=\int \vec{f}\cdot d\vec{r} \\ &\vec{f}=m\vec{a} \\ &\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{j} \\ &\vec{r}=5t\vec{i}+0.5t^2\vec{j} \\ &\Downarrow \\ &d\vec{r}=5dt\vec{i}+tdt\vec{j} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow A=\int_2^4 0.5tdt$$

$$=0.25t^2\Big|_2^4=3J$$

解法2：用动能定理

$$A=\Delta E_k=\frac{1}{2}m(v_4^2-v_2^2)$$

$$=\frac{1}{2}\times 0.5\times(41-29)$$

$$=3J$$

$$\left.\begin{aligned} &v=\sqrt{v_x^2+v_y^2} \\ &v_x=\frac{dx}{dt}=5 \\ &v_y=\frac{dy}{dt}=t \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &v_2=\sqrt{29} \\ &v_4=\sqrt{41} \end{aligned}$$

二、势能

1. 重力(gravitation)作功

$$\boxed{\vec{P} = -mg\vec{k}}$$

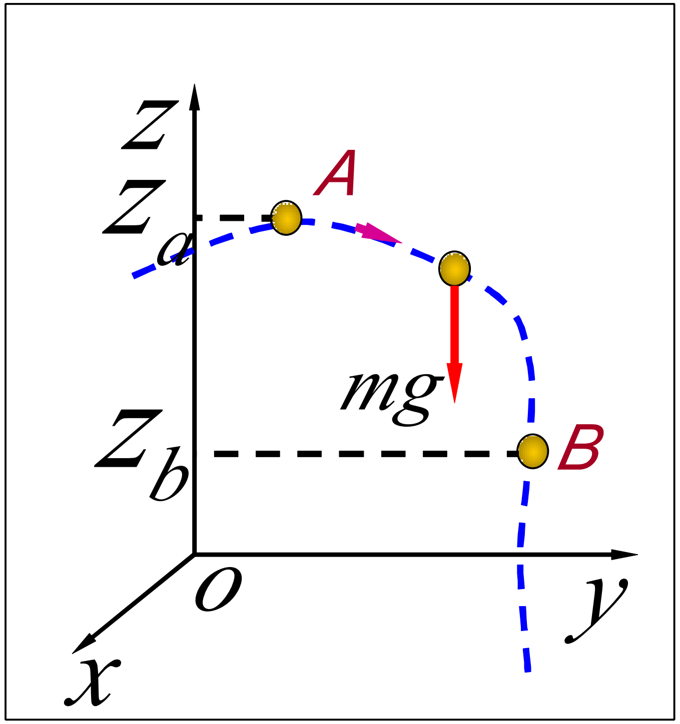
$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}$$

$$A = \int_a^b \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_{z_a}^{z_b} -mg\mathrm{d}z$$

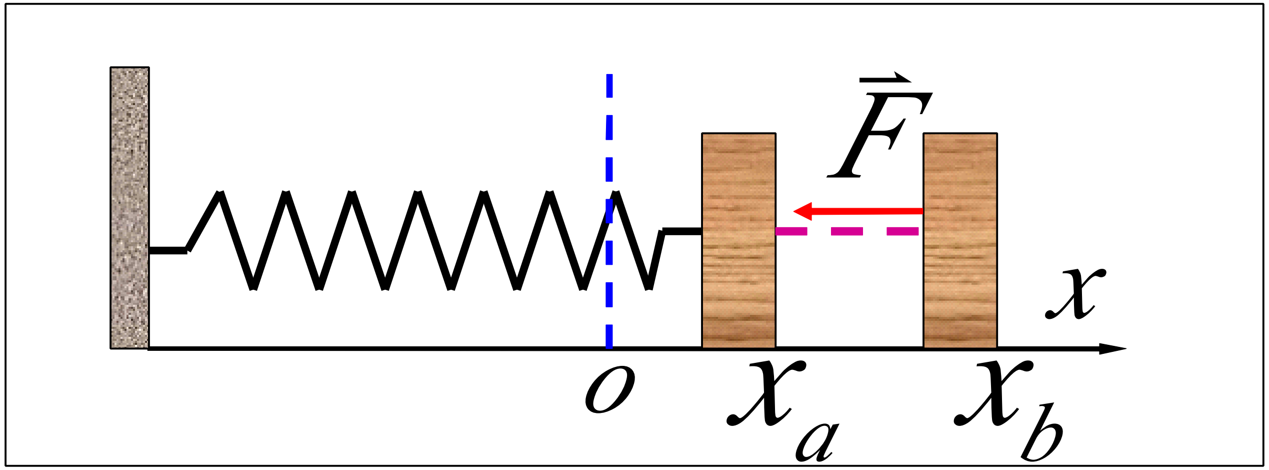
$$= \int_{z_a}^{z_b} \mathrm{d}(-mgz)$$

$$= -(mgz_b - mgz_a)$$

$$A = \oint -mg\,\mathrm{d}z = 0$$



2. 弹性力(elastic force)作功



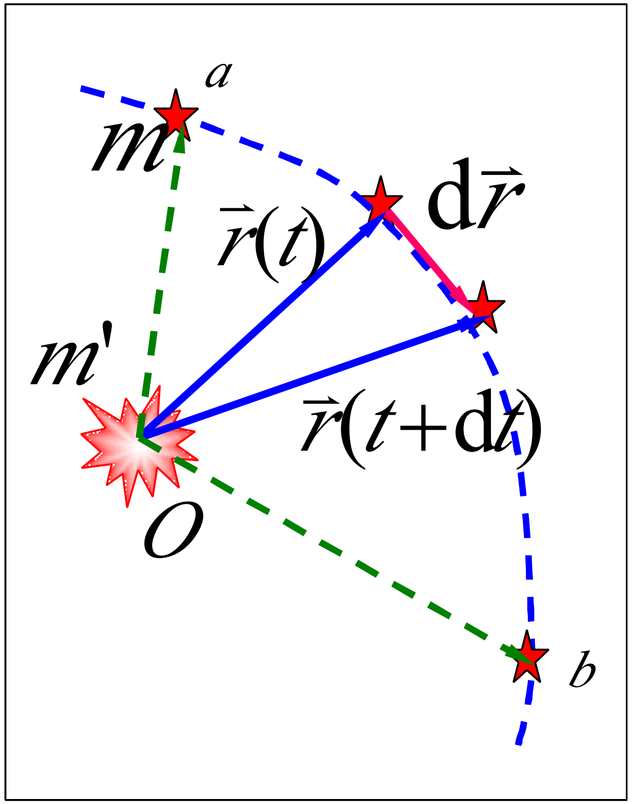
$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

$$A = \int_{x_a}^{x_b} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{x_a}^{x_b} -kx\mathrm{d}x = \int_{x_a}^{x_b} \mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$A = -\left(\frac{1}{2}kx_b^2 - \frac{1}{2}kx_a^2\right) \qquad A = \oint -kx\mathrm{d}x = 0$$

3. 万有引力(universal gravitation)作功

以m'为参考系，m的位置矢量为$\vec{r}$



m' 对 m 的万有引力为

$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{m'm}{r^2}\vec{r}_0}$$

m 由 A点移动到 B点时 $\vec{F}$ 作功为

$$A = \int \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_{r_a}^{r_b} -G\frac{m'm}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$= -\int_{r_a}^{r_b}\mathrm{d}\left(-G\frac{m'm}{r}\right) = -\left[(-G\frac{m'm}{r_b}) - (-G\frac{m'm}{r_a})\right]$$

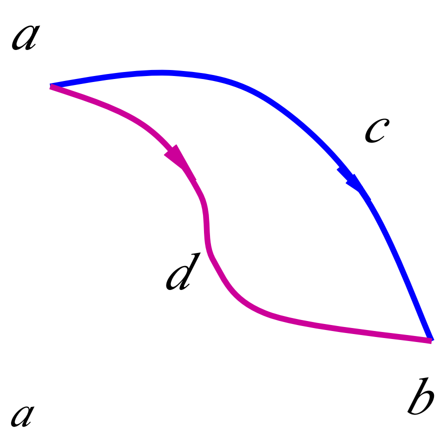
4. 保守力和非保守力(conservative force and non-conservative force)

保守力:力所作的功与路径无关,仅决定于相互作用质点的始末相对位置 .

重力功 $A=-(mgz_b-mgz_a)$

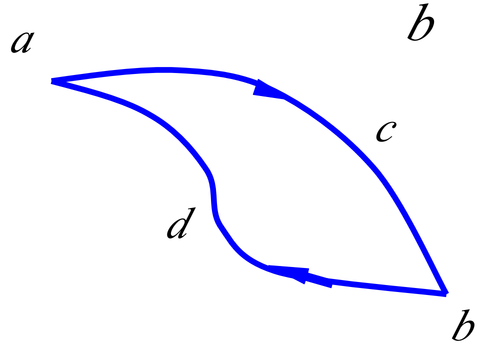
弹力功 $A=-(\frac{1}{2}kx_b^2-\frac{1}{2}kx_a^2)$

引力功 $A=-\left[(-G\frac{m'm}{r_b})-(-G\frac{m'm}{r_a})\right]$



$$\int_{acb}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{adb}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\oint_l\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0$$



非保守力:力所作的功与路径有关 .(例如摩擦力)

5. 势能(potential energy)

保守力作功的特点： $A=\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} \;=\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b}\mathrm{d}G(\vec{r})$

$$\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}G(\vec{r})$$

如果能找到 $G(\vec{r})$，则 $A=G(\vec{r}_b)-G(\vec{r}_a)$

$G(\vec{r})$ 不是唯一的。 定义势能 $E_P=-G(\vec{r})$

$$A=G(\vec{r}_B)-G(\vec{r}_A)$$

$$=-\left[E_P(\vec{r}_B)-E_P(\vec{r}_A)\right]=-\Delta E_P$$

◆ 势能　　与物体间相互作用及相对位置有关的能量 .

重力功

$$A=-(mgz_b-mgz_a)$$

弹力功

$$A=-(\frac{1}{2}kx_b^2-\frac{1}{2}kx_a^2)$$

引力功

$$A=-\left[(-G\frac{m'm}{r_b})-(-G\frac{m'm}{r_a})\right]$$

重力势能

$$E_{\mathrm{p}}=mgz$$

弹性势能

$$E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kx^2$$

引力势能

$$E_{\mathrm{p}}=-G\frac{m'm}{r}$$

◆ 保守力的功

$$\boxed{A=-(E_{\mathrm{p}2}-E_{\mathrm{p}1})=-\Delta E_{\mathrm{P}}}$$

讨论

- 势能是状态函数 $E_p = E_p(x, y, z)$
- 势能具有相对性，势能大小与势能零点的选取有关 .
- 势能是属于系统的 .
- 势能计算 $\boxed{A = -(E_p - E_{p_0}) = -\Delta E_p}$

令 $E_{p0} = 0$

$$\boxed{E_p(x, y, z) = \int_{(x, y, z)}^{E_{p0}=0} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

三、机械能守恒定律

1. 质点系的动能定理

考虑n个质点组成的质点系（系统）

对第i个质点 $A_i = \frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2 - \frac{1}{2}m_i\upsilon_{i0}^2$

n个质点 $\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\upsilon_{i0}^2 = E_k - E_{k0}$

$$A_{外} + A_{内} = E_k - E_{k0}$$

2. 系统的功能原理

$$A_{保内} + A_{非保内}$$

$$A_{保内} = -(E_p - E_{p0})$$

$$A_{外} + A_{非保内} = (E_k - E_{k0}) + (E_p - E_{p0}) = (E_k + E_p) - (E_{k0} + E_{p0})$$

$$A_{外} + A_{非保内} = E - E_0$$

3. 机械能守恒定律

质点的动能定理 $A_{合}=\frac{1}{2}m\upsilon_2^2-\frac{1}{2}m\upsilon_1^2$

当$A_{合}=0 \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2=$常数 $\Rightarrow$ 质点动能守恒

系统的动能定理 $A_{外}+A_{内}=E_k-E_{k0}$

当 $A_{外}+A_{内}=0 \Rightarrow E_k=$常数 $\Rightarrow$ 系统动能守恒

系统的功能原理 $A_{外}+A_{非保内}=E-E_0$

当 $A_{外}+A_{非保内}=0 \Rightarrow E=$常数 $\Rightarrow$ 系统机械能守恒

$E_k+E_p=$常数

讨论：

1. 在非惯性系中应用动能定理、功能原理时，必须考虑惯性力作功。

2.封闭系统（$A_{外}=0$）

$$\begin{cases} A_{非保内}=0 — 机械能 \quad 守恒 \\ A_{非保内}\neq 0 — 机械能 \quad 不守恒 \end{cases}$$

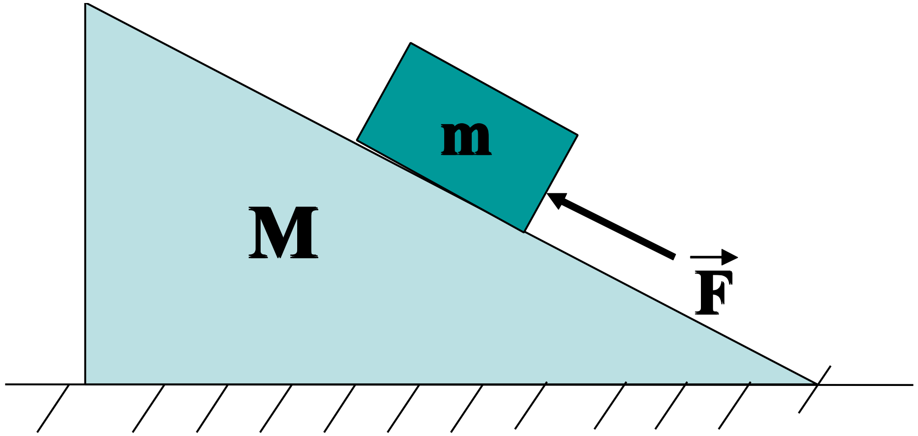
若：$A_{非保内}>0$ — 其它能量 $\rightarrow$ 机械能

$A_{非保内}<0$ — 机械能 $\rightarrow$ 其它能量

注意：一个封闭系统经历任何变化时，该系统的所有能量的总和是不变的——能量守恒定律

例1. M，m间有摩擦，

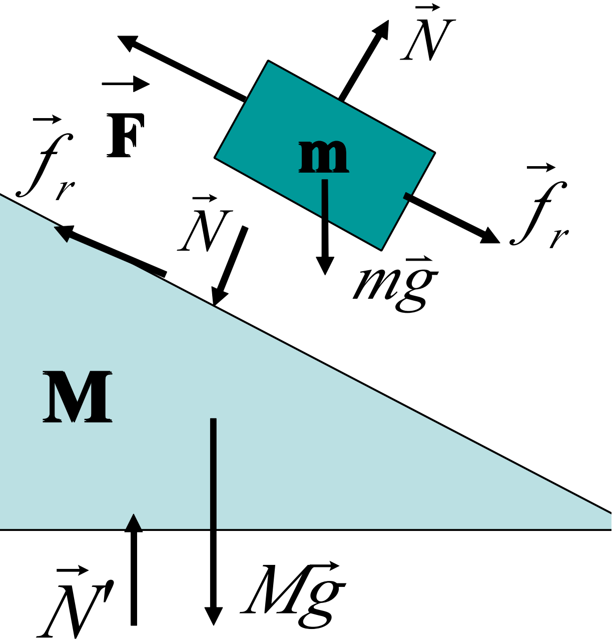
M与地面间无摩擦。



以m, M, 地面为系统，作用力

外力：$\vec{F}$

内力 $\begin{cases} \text{保守力：} mg, Mg \\ \text{非保守力：} f_r, N, N' \end{cases}$



系统的动能定理

$$A = A_{外} + A_{保内} + A_{非保内} = E_{k2} - E_{k1}$$

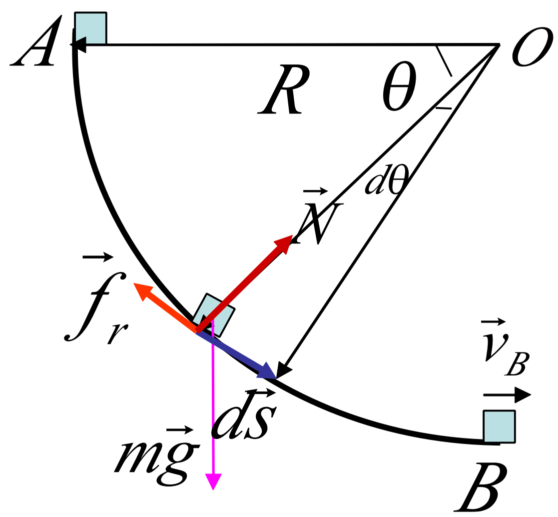
系统的功能原理

$$A_{外} + A_{非保内} = E_2 - E_1$$

机械能守恒定律

当$A_{外} + A_{非保内} = 0$　　则：$E_{k2} + E_{P2} = E_{k1} + E_{P1} = C$

例2. 一质量为m的物体, 由静止开始沿着四分之一的圆周, 从A滑到B, 在B处速度的大小为v_B, 圆半径为R. 求:物体从A到B, 摩擦力所做之功.



已知: **m, v_B , R, v_A=0**

求: **A_{fr}**

(1). 由功的定义解:

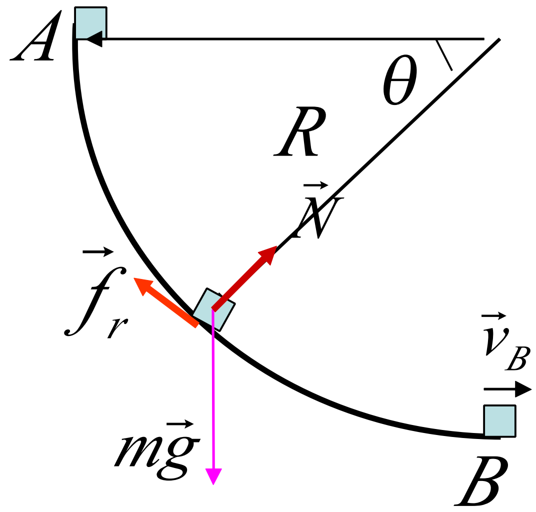
$$A_{f_r} = \int f_r \cdot \cos\varphi \cdot ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -f_r R d\theta$$

切向: $mg\cos\theta - f_r = ma_t = m\dfrac{dv}{dt} \Rightarrow f_r = mg\cos\theta - m\dfrac{dv}{dt}$

$$A_{f_r} = \int dA = \int_0^{v_B} mvdv - \int_0^{\frac{\pi}{2}} mgR\cos\theta \cdot d\theta = \frac{1}{2}m{v_B}^2 - mgR$$

(2). 应用动能定理解

以**m**为研究对象： $A = E_{k2} - E_{k1}$



合力
- **mg**
  - **mgcosθ**——做功
  - **mgsinθ**——不做功
- **N**——不做功
- **f_r**——做功

$$A = A_{mg\cos\theta} + A_{f_r} = \int mg\cos\theta \cdot ds + A_{f_r} = mgR + A_{f_r}$$

$$= \frac{1}{2}mv_B{}^2 - \frac{1}{2}mv_A{}^2 = \frac{1}{2}mv_B{}^2$$

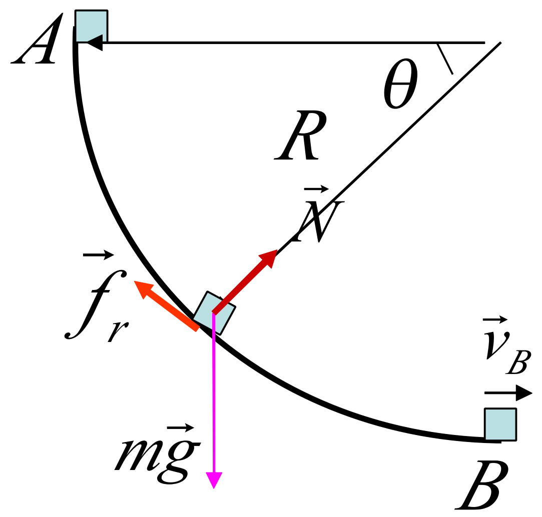
$$\therefore A_{f_r} = \frac{1}{2}mv_B{}^2 - mgR$$

(3). 应用功能原理解

以**m**和地球为研究系统:

$$A_{外} + A_{非保内} = E_2 - E_1 = (E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1})$$

受力分析
- 外力：无
- 保守内力：**mg**
- 非保守内力
  - **N:** 不 做功
  - $\boldsymbol{f_r}$**:** 做功

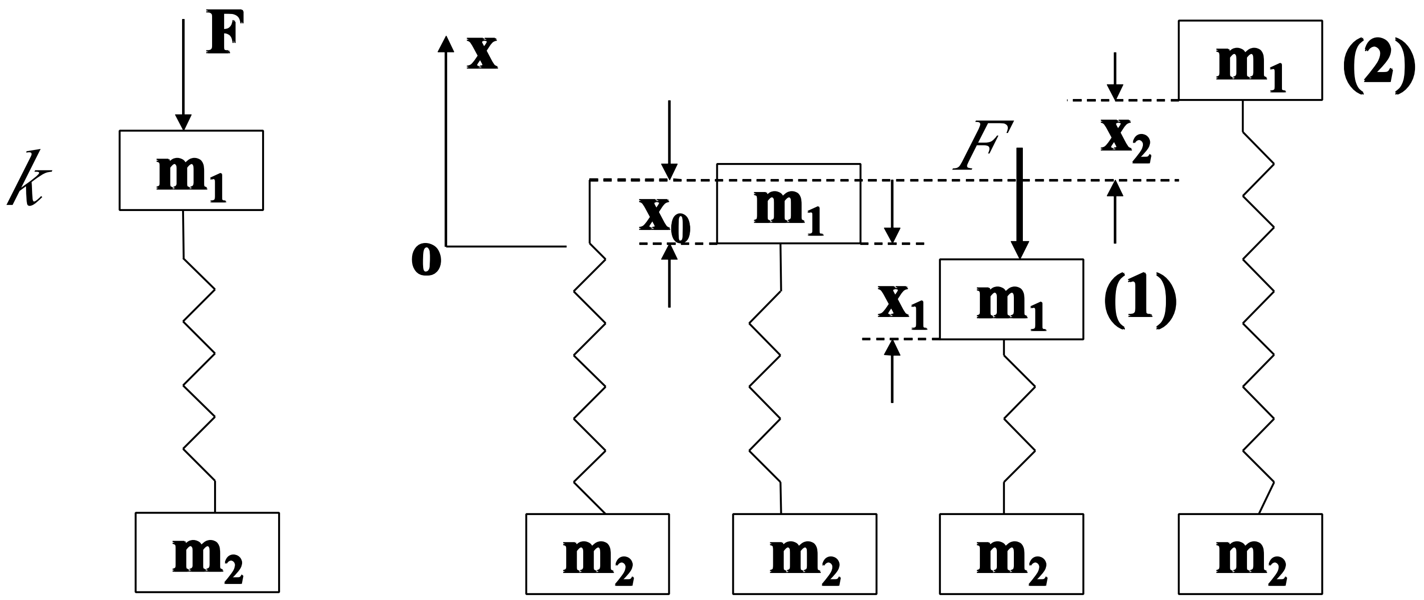


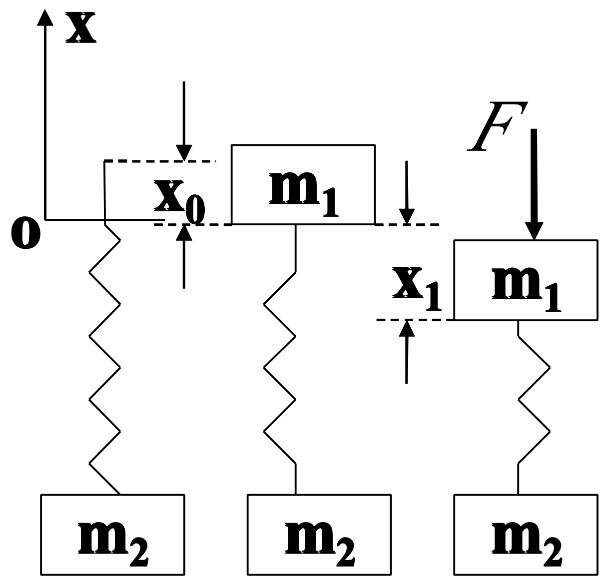
$$\therefore A_{f_r} = (\frac{1}{2}mv_B^{\ 2} + 0) - (0 + mgR)$$ **(以B点为重力势能零点)**

$$= \frac{1}{2}mv_B^{\ 2} - mgR$$

例3. m_2放在在地面上，m_1与m_2之间弹簧（k）相连，
问：（1）以m_1的平衡位置为弹性势能和重力势能的零点，写出系统（m_1，弹簧，地球）的总势能表达式？
（2）F力为多大，才能使力突然撤除时，上面板跳起，并能使下面的板刚好被提起？

选平衡位置为坐标原点o





（1）选平衡位置为坐标原点o，且以o点为弹性势能和重力势能的零点。

则：$E_{PG} = mgh_B - mgh_A$

$= -m_1 g x_1 = -k x_0 x_1$

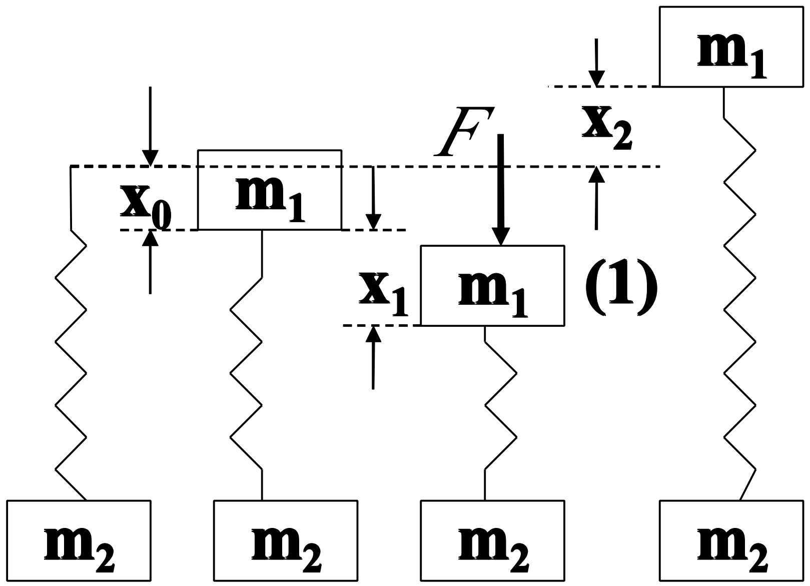
$$E_{PK} = \int_{x_1}^{0} -k(x + x_0)dx$$

$$E_{PK} = \frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2$$

$$= \frac{1}{2}k(x_1 + x_0)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$= \frac{1}{2}kx_1^2 + kx_1 x_0$$

总势能：$E_P = E_{PK} + E_{PG} = \frac{1}{2}kx_1^2$



（2）F力为多大，才能使力突然撤除时，上面板跳起，并能使下面的板刚好被提起？

机械能守恒定律

弹簧自然伸长处为弹性势能零点；

平衡位置为重力势能零点

$$\frac{1}{2}k(x_0+x_1)^2+m_1g(-x_1)=\frac{1}{2}kx_2{}^2+m_1g(x_2+x_0)$$

$$m_1g=kx_0$$

$$F+m_1g=k(x_1+x_0)$$

$$m_2g=kx_2$$

$$\left.\right\} F=(m_1+m_2)\ g$$

2.2动量守恒

一.动量守恒定律(conservation law)

质点系动量定理 $\vec{I}=\int_{t_0}^{t}\sum_i \vec{F}_i^{\mathrm{ex}}\,\mathrm{d}t=\sum_i \vec{p}_i-\sum_i \vec{p}_{i0}$

动量守恒定律

若质点系所受的合外力为零 $\vec{F}^{\mathrm{ex}}=\sum_i \vec{F}_i^{\mathrm{ex}}=0$

则系统的总动量守恒，即 $\vec{p}=\sum_i \vec{p}_i$ 保持不变 .

讨论

1）系统的动量守恒是指系统的总动量不变，系统内任一物体的动量是可变的, 各物体的动量必相对于同一惯性参考系 .

$$m\vec{v}=m\vec{u}+m\vec{v}'$$

2）守恒条件　合外力为零 $\vec{F}^{\mathrm{ex}} = \sum_i \vec{F}_i^{\mathrm{ex}} = 0$

当 $\vec{F}^{\mathrm{ex}} \ll \vec{F}^{\mathrm{in}}$ 时，可 略去外力的作用，近似地认为系统动量守恒．例如在碰撞，打击，爆炸等问题中.

3）若某一方向合外力为零，则此方向动量守恒．

$$
\begin{cases}
F_x^{\mathrm{ex}} = 0, & p_x = \sum m_i v_{ix} = C_x \\
F_y^{\mathrm{ex}} = 0, & p_y = \sum m_i v_{iy} = C_y \\
F_z^{\mathrm{ex}} = 0, & p_z = \sum m_i v_{iz} = C_z
\end{cases}
$$

4）动量守恒定律只在惯性参考系中成立，是自然界最普遍，最基本的定律之一．

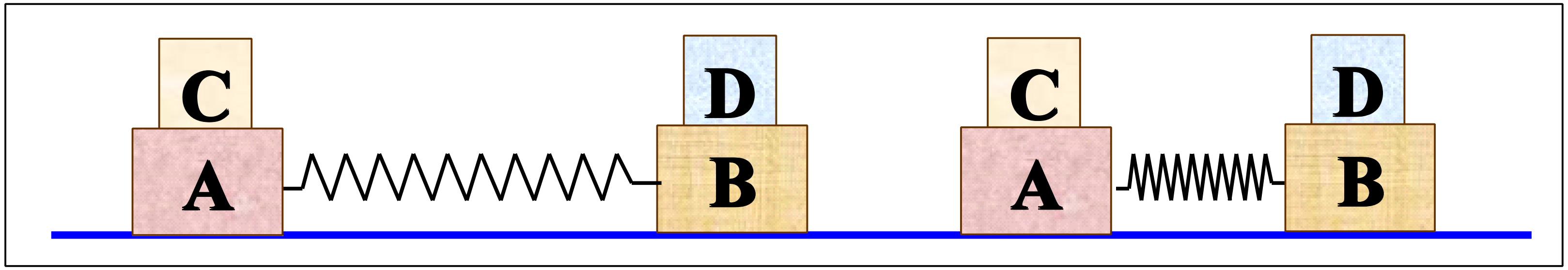
例1.　　如图的系统，物体 A，B 置于光滑的桌面上，物体 A 和 C，　B 和 D 之间摩擦因数均不为零，首先用外力沿水平方向相向推压 A 和 B，　使弹簧压缩，后拆除外力，　则 A 和 B 弹开过程中，　对 A、B、C、D 组成的系统

（A）动量守恒，机械能守恒　．

（B）动量不守恒，机械能守恒．

（C）动量不守恒，机械能不守恒．

（D）动量守恒，机械能不一定守恒．



二.冲量和动量定理

1. 冲量(impulse)

牛顿定律的变化形式：

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

冲量　力对时间的积累效果（矢量） $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t$

2. 动量定理

在给定的时间内，外力(external force)作用在质点上的冲量，等于质点在此时间内动量的增量 .

（1）质点的动量定理

$$\vec{I} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

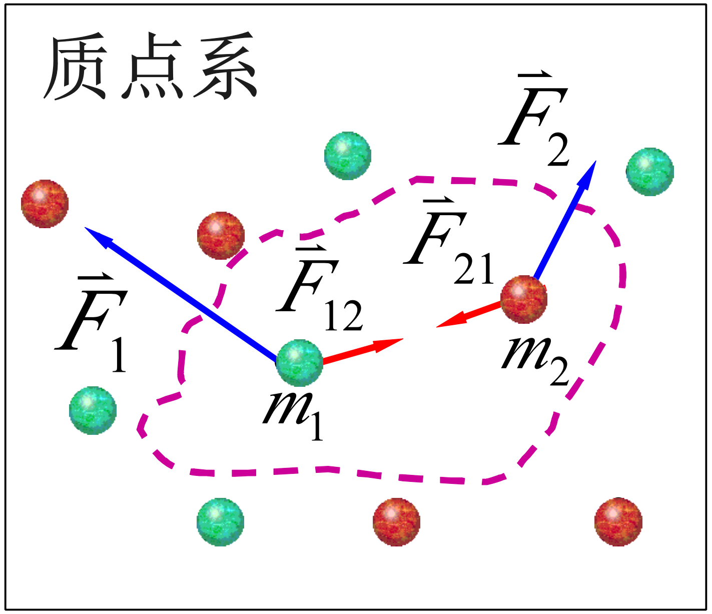
分量形式：

$$\vec{I} = I_x\vec{i} + I_y\vec{j} + I_z\vec{k} \quad \begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x \mathrm{d}t = mv_{2x} - mv_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y \mathrm{d}t = mv_{2y} - mv_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z \mathrm{d}t = mv_{2z} - mv_{1z} \end{cases}$$

（2）质点系的动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12})\mathrm{d}t = m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{10}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21})\mathrm{d}t = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{20}$$



因为内力 $\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0$，故

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\mathrm{d}t=(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)-(m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20})$$

◈ 质点系动量定理　作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量.

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}^{\mathrm{ex}}\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i0}}$$

$$\boxed{\vec{I}=\vec{p}-\vec{p}_0}$$

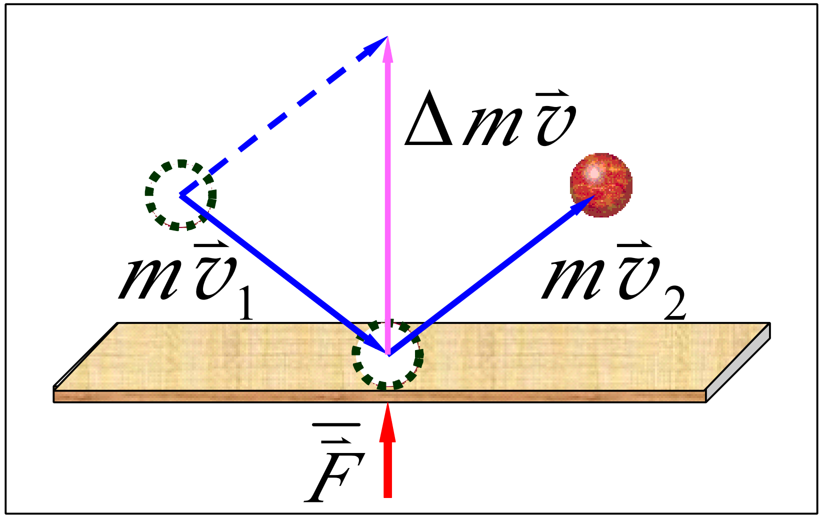
讨论：

➢ 动量定理：

1. 仅适用于惯性系。
2. 式中各速度都必须对同一个惯性系。
3. 式中各速度都必须相对同一个时刻。

➢ 动量定理常应用于碰撞问题

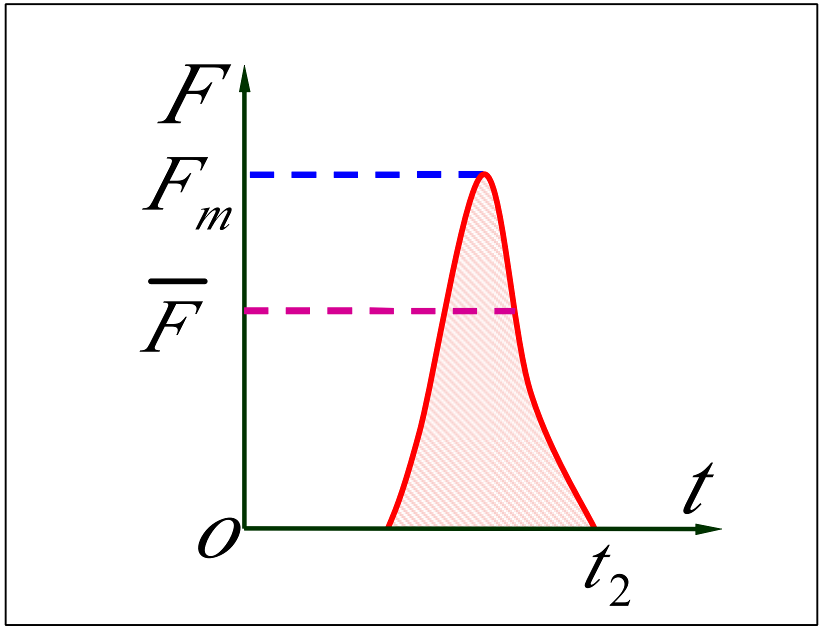
$$\overline{\vec{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t}{t_2 - t_1} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$



注意

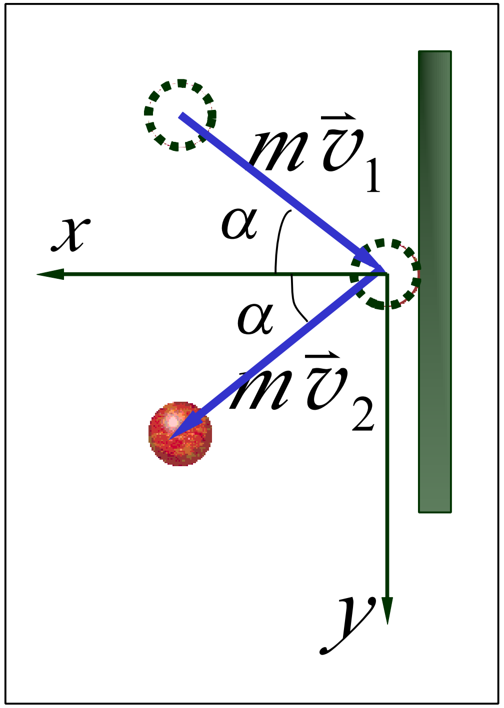
在 $\Delta\vec{p}$ 一定时 Δt 越小，则 $\overline{F}$ 越大．

例如人从高处跳下、飞机与鸟相撞、打桩等碰撞事件中，作用时间很短，冲力很大．



例 1　一质量为0.05kg、速率为$10\,m\cdot s^{-1}$的刚球，以与钢板法线呈45º角的方向撞击在钢板上，并以相同的速率和角度弹回来．设碰撞时间为0.05s．求在此时间内钢板所受到的平均冲力 $\overline{\vec{F}}$．

解　建立如图坐标系，设小球受到的力为$\vec{F}'$，$\vec{F}'=-\vec{F}$，由动量定理得



$$\overline{\vec{F}}'\Delta t=-\overline{\vec{F}}\Delta t=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$$

$$\vec{v}_1=-v\cos\alpha\,\vec{i}+v\sin\alpha\,\vec{j}$$

$$\vec{v}_2=v\cos\alpha\,\vec{i}+v\sin\alpha\,\vec{j}$$

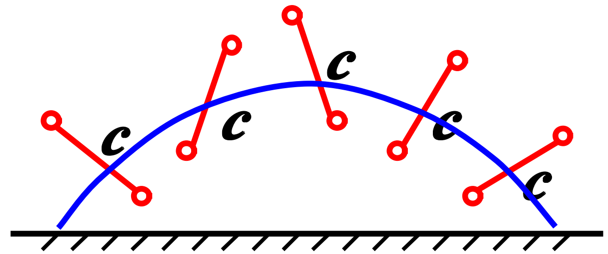
代入即得：

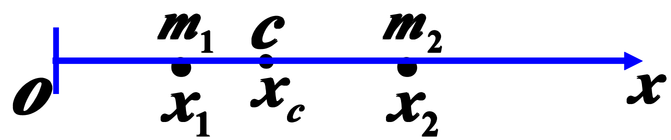
$$\overline{\vec{F}}=-\frac{2mv\cos\alpha}{\Delta t}\vec{i}=-14.1\vec{i}\,(N)$$

三. 质心和质心运动定律

1. 质心

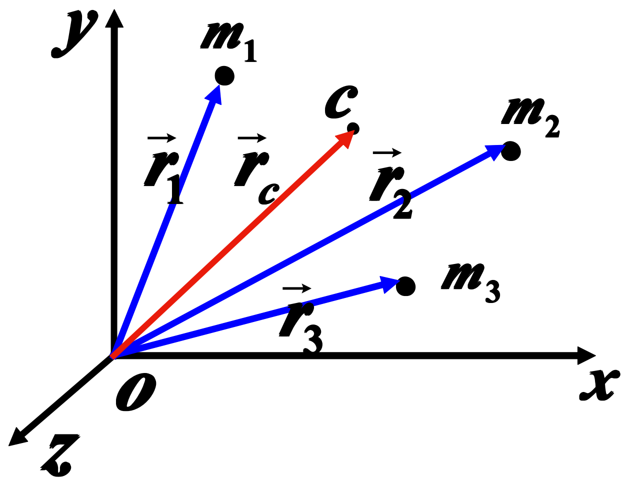
m_1和m_2 $\quad \boxed{x_c = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}}$





质点系

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_i m_i x_i}{m} \\ y_c &= \frac{\sum_i m_i y_i}{m} \\ z_c &= \frac{\sum_i m_i z_i}{m} \end{aligned}\right\} \quad \vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}$$



质量连续分布 $\quad \vec{r}_c = \dfrac{\int \vec{r}\,dm}{m}$

m: 总质量

2. 质心运动定律

质心速度 $\vec{\upsilon}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}\right) = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_i m_i \vec{\upsilon}_i}{m}$

$$m\vec{\upsilon}_c = \sum_i m_i \vec{\upsilon}_i$$

质点系总动量等于总质量与质心速度的乘积

即 $\vec{p} = m\vec{\upsilon}_c$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = m\vec{a}_c$$

$\sum \vec{F}_i^{ex} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \sum \vec{F}_i^{ex} = m\vec{a}_c$ 质心运动定律

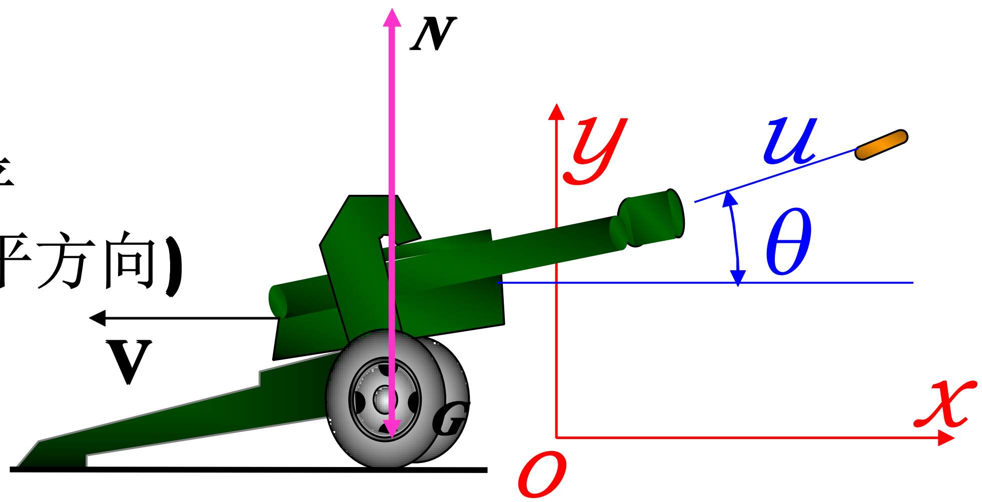
$\sum \vec{F}_i^{ex}$是合外力，$\sum \vec{F}_i^{ex} = 0$，质心静止或匀速直线运动

[例2]. 炮车以仰角 θ 发射一炮弹，炮车和炮弹的质量分别为M和m, 炮弹射出炮口时相对炮身的速度为u，不计炮车与地面之间的摩擦。试求：

（1）炮弹射出炮口时，炮车的反冲速度。

解**(1)**：$\{M、m\}$

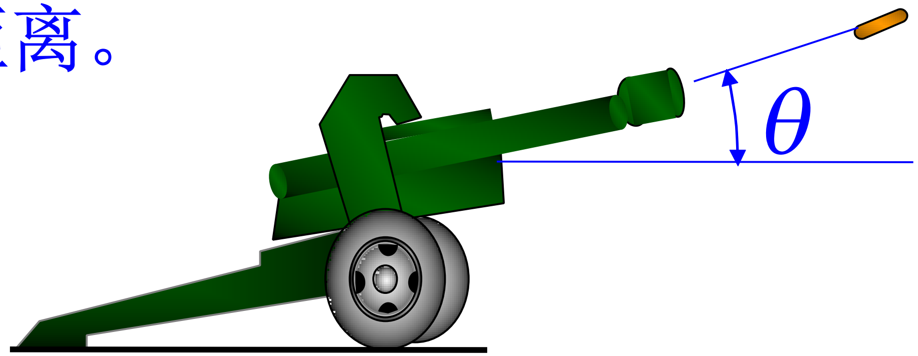
设炮弹出口时相对地面的水平分速度为$\boldsymbol{v_x}$,炮车速度为V (在水平方向)



$$\because \vec{F}_x = 0$$

$$\left.\begin{aligned} MV_x + mv_x &= 0 \\ v_x &= u\cos\theta + V_x \end{aligned}\right\} \quad V_x = -\frac{m}{m+M} u\cos\theta$$

（2）若炮筒长为l(即炮弹在发射过程中相对于炮的行程），则在发射过程中炮车移动的距离。



解(2)：方法一

$$V_x(t) = -\frac{m}{m+M}u(t)\cos\theta$$

$$(\Delta x)_{炮} = \int_0^t V_x(t)dt = -\frac{m}{m+M}\int_0^t u\,(t)\cos\theta dt$$

其中：$\int_0^t u(t)dt = l$

$$\left.\begin{array}{l} (\Delta x)_{炮} = -\frac{m}{m+M}\int_0^t u\,(t)\cos\theta dt \\ \int_0^t u(t)dt = l \end{array}\right\} (\Delta x)_{炮} = -\frac{ml\cos\theta}{m+M}$$

解(2)：方法二

$\{m、M\} \because \vec{F}_x = 0$

又：$\left.\begin{array}{l} \therefore \vec{a}_{cx} = 0 \\ v_c = 0 \end{array}\right\} \Delta x_c = 0$

按定义：$x_c = \dfrac{Mx_{炮} + mx_{弹}}{M+m}$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x_c = 0 \\ x_c = \frac{Mx_{炮} + mx_{弹}}{M+m} \end{array}\right\} M\Delta x_{炮} + m\Delta x_{弹} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} M\Delta x_{炮} + m\Delta x_{弹} = 0 \\ \Delta x_{弹} = l\cos\theta + \Delta x_{炮} \end{array}\right\} (\Delta x)_{炮} = -\frac{ml\cos\theta}{m+M}$$

2.3 碰撞

一. 碰撞（collision）

碰撞　两物体互相接触时间极短而互作用力较大的相互作用，动量守恒.　$\because \vec{F}^{\text{ex}} \ll \vec{F}^{\text{in}} \quad \therefore \sum_i \vec{p}_i = \vec{C}$

弹性碰撞(perfect elastic collision)　两物体碰撞之后分开，动能守恒。

$$E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{k}1} + E_{\mathrm{k}2} = C$$

完全非弹性碰撞(perfect inelastic collision)两物体碰撞后,以同一速度运动，动能不守恒。

非弹性碰撞(inelastic collision)

两物体碰撞后分开，动能不守恒。

例 1 设有两个质量分别为 m_1 和 m_2 ，速度分别为 $\vec{v}_{10}$ 和 $\vec{v}_{20}$ 的弹性小球作对心碰撞，两球的速度方向相同. 若碰撞是完全弹性的，求碰撞后的速度 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$.

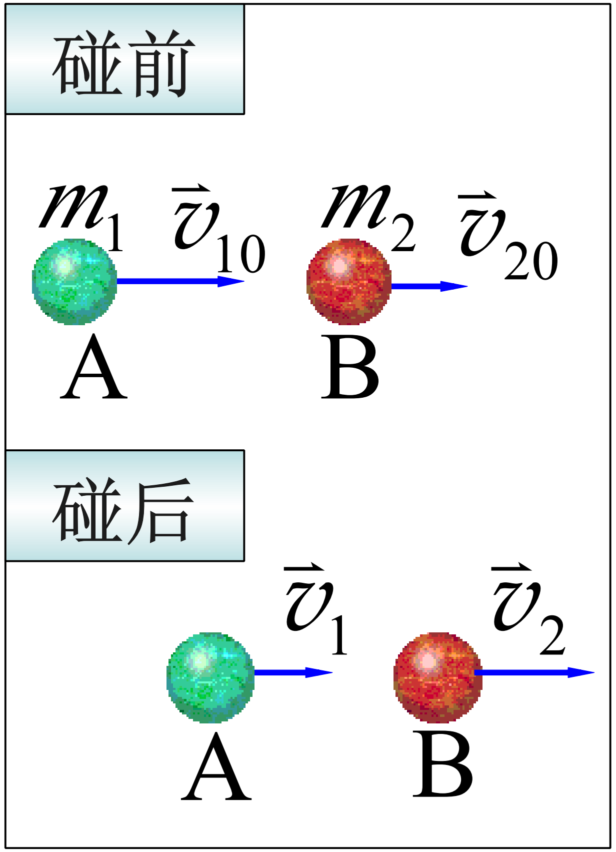
解 取速度方向为正向，

由动量守恒定律得

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

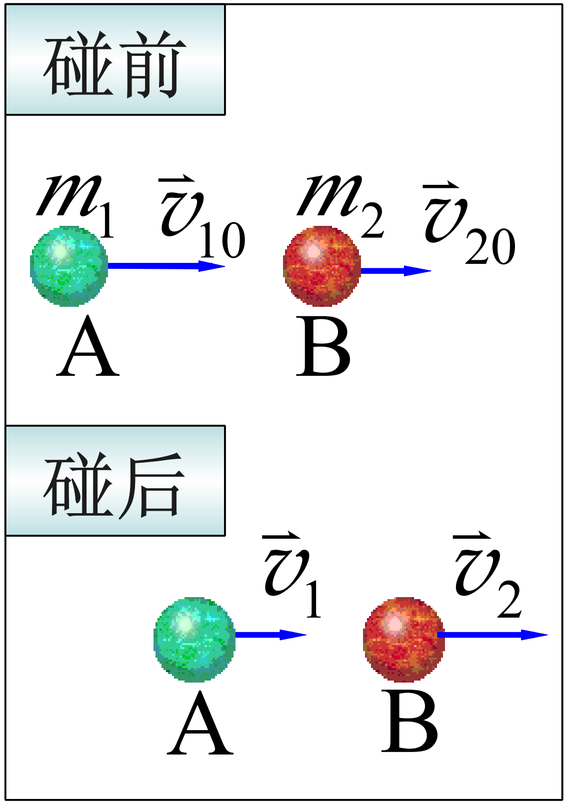
由动能守恒定理得

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$



$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1 v_{10}}{m_1 + m_2}$$



讨 论

（**1**）若 $m_1 = m_2$ 则 $v_1 = v_{20}$，$v_2 = v_{10}$

（**2**）若 $m_2 >> m_1$ 且 $v_{20}=0$ 则 $v_1 \approx -v_{10}$，$v_2 \approx 0$

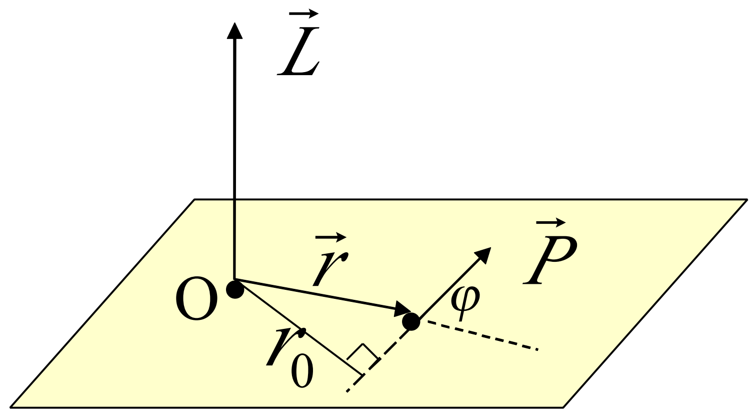
（**3**）若 $m_2 << m_1$ 且 $v_{20}=0$ 则 $v_1 \approx v_{10}$，$v_2 \approx 2v_{10}$

2.4 角动量守恒

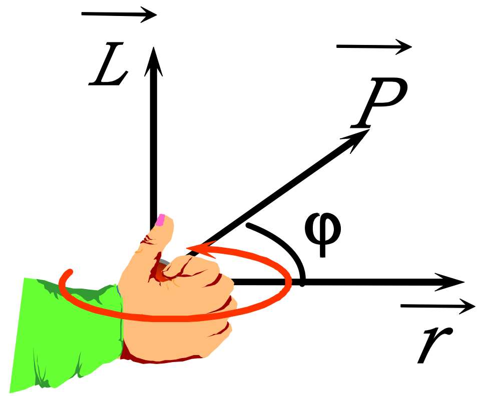
一. 质点的角动量（动量矩）

定义：质点对固定点的矢径与动量之矢积

$$\vec{L} \overset{def}{=} \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



大小: $rp\sin\varphi$ 方向:(右手)叉乘确定



※质点作圆周运动：

对圆心的角动量：$L=mvR$

二. 质点的角动量定理

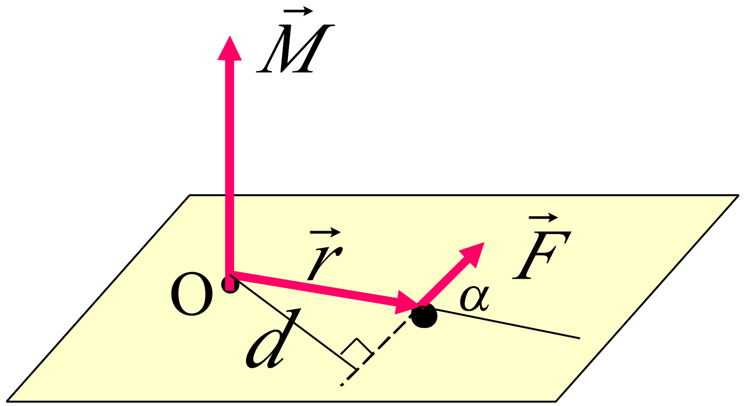
（1）定理的微分式

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d(\vec{r}\times\vec{p})}{dt}=\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}+\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}=\vec{r}\times\vec{F}+\vec{v}\times(m\vec{v})$$

$=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}$ --力矩 ——角动量改变的原因！！！

$$\vec{r}\times\vec{F}\begin{cases}\text{大小}: rF\sin\alpha=Fd=M\\ \text{方向}:\text{由(右手)叉乘确定}\end{cases}$$



质点所受合外力矩等于其角动量对时间的变化率

（2）定理的积分式

$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}\Rightarrow\int_0^t\vec{M}dt=\int_{\vec{L}_0}^{\vec{L}}d\vec{L}=\vec{L}-\vec{L}_0\quad(\text{其中：}\vec{J}_{\text{冲量矩}}\overset{def}{=}\int_0^t\vec{M}dt)$$

质点所受合外力的冲量矩等于其角动量的变化

三. 质点角动量守恒定律

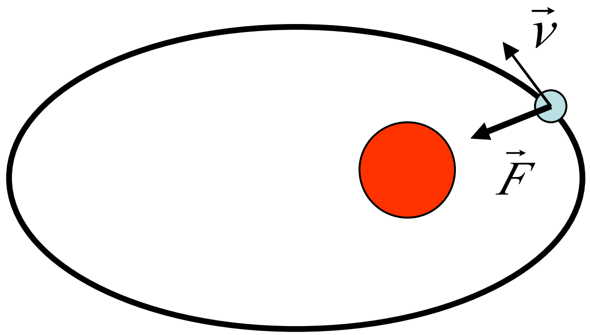
条件：$\vec{M}=0$ $\begin{cases}\text{①质点不受外力}\\ \text{②外力通过固定点}\end{cases}$

则：$\vec{L}=\vec{L}_0$ ——恒矢量

若合外力矩为零，则质点的角动量守恒。

讨论:

1、行星受到太阳的引力作用, 但为何能保持在稳定的轨道上运行?



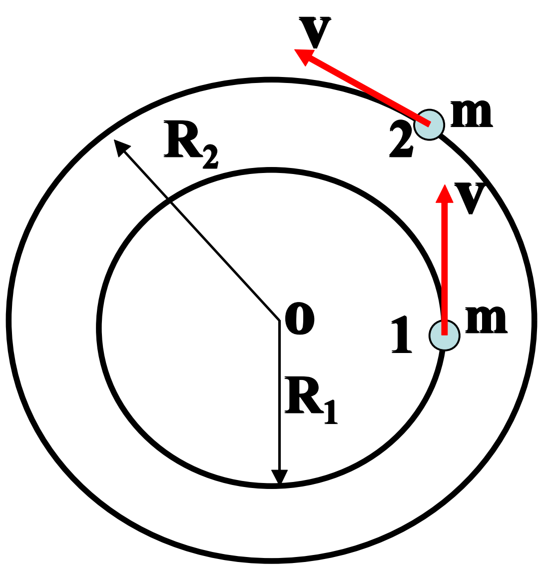
$$\because \vec{M}_{行星对太阳} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

即行星绕太阳旋转时$\vec{L}$守恒.

2、$P_1 = P_2$, 如何区分二者?

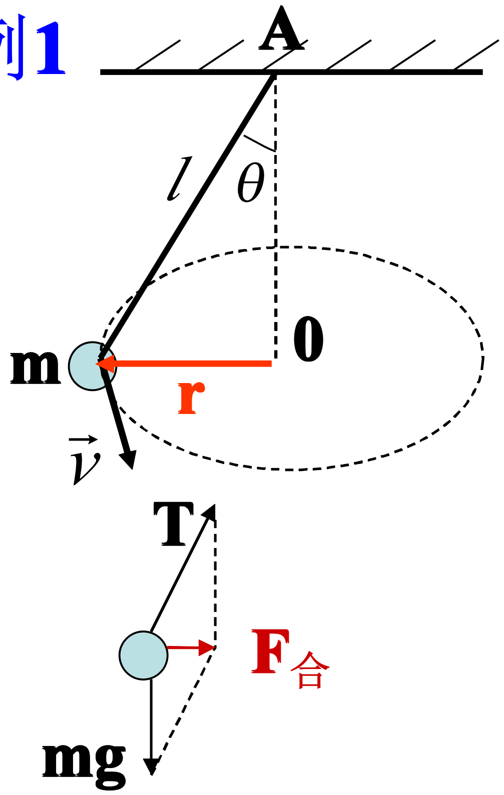
可由角动量来区分二者。

$$\because L_1 \neq L_2 \quad (mvR_1 \neq mvR_2)$$



匀速率圆周运动

例1



问:(1).$\vec{L}_0$守恒否?　(2).$\vec{L}_A$守恒否?

(1) $\vec{L}_0\begin{cases} L_0 = rmv = l\sin\theta mv & (恒定) \\ 方向:竖直向上 & (不变) \end{cases}$

$\therefore \vec{L}_0$守恒

另解: $\because F_{合}$指向O点, $\therefore M_o = 0$

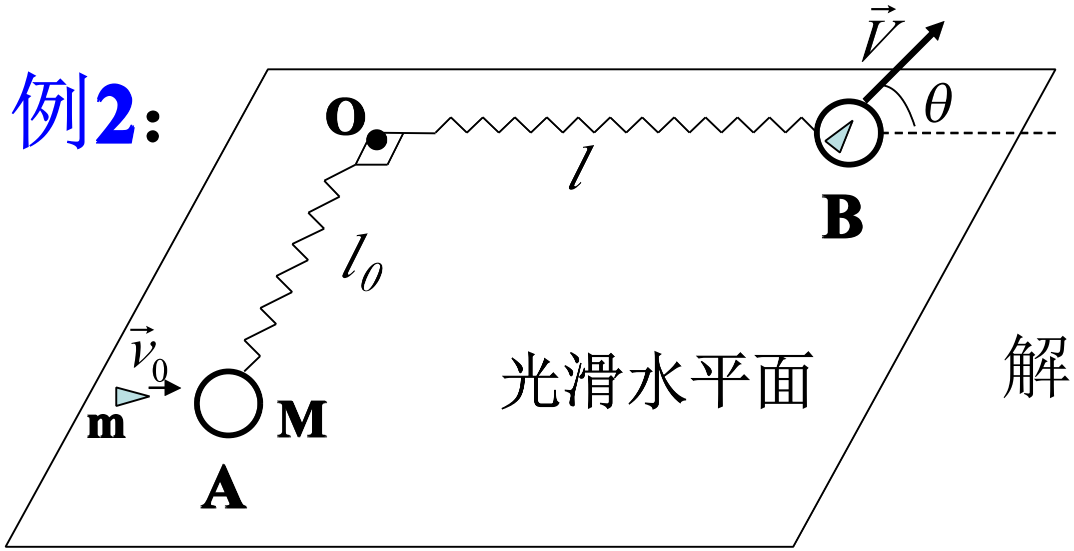
(2) $\vec{L}_A\begin{cases} L_A = mvl & (恒定) \\ 方向:变 & \end{cases}$

另解: $\because M_A = F_{合} l\cos\theta \neq 0$

$\therefore \vec{L}_A$不守恒.

言及角动量必须指明是对那个定点而言,否则无意义.

例2：



已知：$k, m, M, \vec{v}_0, l, l_0$

求：$\vec{V} = ?$

解：（1）完全非弹性碰撞

且$\{m, M\}$动量守恒。

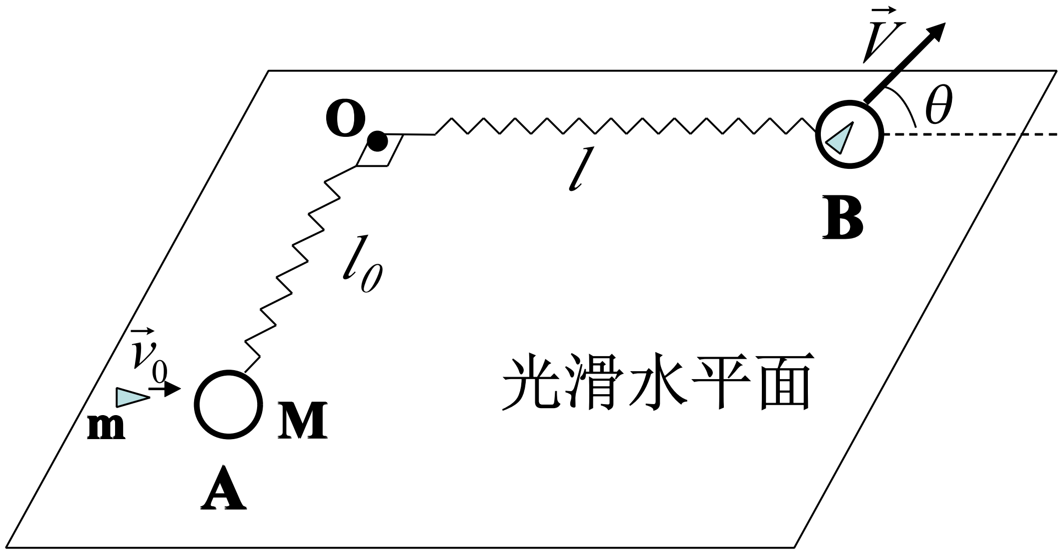
即：$mv_0 = (m+M)V_1$ （1）

(2)$\{m, M,$地球，弹簧$\}$：E守恒

即：$\frac{1}{2}(m+M)V_1^2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$ （2）

$$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\} V = \sqrt{\frac{m^2 v_0^2}{(m+M)^2} - \frac{k(l-l_0)^2}{m+M}}$$

$\vec{V}$的方向，即θ＝？



$A \to B$的过程

$\{m, M\}$: $\because F_{合} = kx \neq 0$

$\therefore$动量不守恒

但$F_{合}$始终通过o点，$\therefore \vec{M}_O = 0$　即$\vec{L}_O$守恒

$$\left.\begin{aligned}(m+M)V_1 l_0 &= (m+M)Vl\sin\theta \\ mv_0 &= (m+M)V_1\end{aligned}\right\} \theta = \sin^{-1}\frac{l_0 m v_0}{l\sqrt{m^2 v_0^2 - k(l-l_0)^2(M+m)}}$$