1. 关于曲线$\vec{r}(t)$的一些公式和量

三个基本向量 $\vec{\alpha}(t), \vec{\beta}(t), \vec{\gamma}(t)$

切线、主法线、副法线

密切平面、从切平面、法平面

弧长公式、自然参数表示

曲率$k = \dfrac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}$、挠率$\tau = \dfrac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|^2}$

2. 关于曲线$\vec{r}(s)$的一些公式和量(其中s为弧长参数)

s为弧长参数 $\Leftrightarrow |\dot{\vec{r}}(s)|=1$

$$\vec{\alpha}(s)=\dot{\vec{r}}(s),\quad \vec{\beta}(s)=\frac{\ddot{\vec{r}}(s)}{|\ddot{\vec{r}}(s)|},\quad \vec{\gamma}(s)=\vec{\alpha}(s)\times\vec{\beta}(s)$$

$$k(s)=|\ddot{\vec{r}}(s)|,\quad \tau(s)=-\dot{\vec{\gamma}}(s)\vec{\beta}(s)=\vec{\gamma}(s)\dot{\vec{\beta}}(s)$$

Frenet公式: $$\begin{cases}\dot{\vec{\alpha}}(s)=k(s)\vec{\beta}(s)\\ \dot{\vec{\beta}}(s)=-k(s)\vec{\alpha}(s)+\tau(s)\vec{\gamma}(s)\\ \dot{\vec{\gamma}}(s)=-\tau(s)\vec{\beta}(s)\end{cases}$$

3. 螺线

定义:切线和固定方向成固定角

三个等价定义:

主法线与某固定方向垂直

副法线与某固定方向成固定角

曲率与挠率之比为常数

4. 曲面的切平面、法向量和法线

切平面：$(\vec{P}-\vec{r}(u,v),\vec{r}_u(u,v),\vec{r}_v(u,v))=0$

法向：$\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)$

单位法向量：$\vec{n}(u,v)=\dfrac{\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)}{|\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)|}$

法线：$(\vec{P}-\vec{r}(u,v))\times(\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v))=0$

5. 曲面$\vec{r}(u,v)$的第一、二、三类基本量和基本形式

$$E=\vec{r}_u^{\,2}、F=\vec{r}_u\vec{r}_v、G=\vec{r}_v^{\,2}、\mathrm{d}s^2=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2$$

$$L=\vec{r}_{uu}\vec{n}=\frac{(\vec{r}_{uu},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=-\vec{r}_u\vec{n}_u$$

$$M=\vec{r}_{uv}\vec{n}=\frac{(\vec{r}_{uv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=-\vec{r}_u\vec{n}_v=-\vec{r}_v\vec{n}_u$$

$$N=\vec{r}_{vv}\vec{n}=\frac{(\vec{r}_{vv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=-\vec{r}_v\vec{n}_v$$

$$\mathrm{II}=L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2=-\mathrm{d}\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$e、f、g、\mathrm{III}、\mathrm{III}-2H\,\mathrm{II}+K\,\mathrm{I}=0$$

6. 由E、F、G引出的计算

曲面曲线的弧长

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t$$

曲面上两方向的交角

$$\arccos\frac{E\mathrm{d}u\delta u+F(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}}$$

曲面区域的面积$\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$

等距变换($\mathrm{I}_1=\mathrm{I}_2$)和保角变换($\mathrm{I}_1=\lambda\mathrm{I}_2$)

7. 由E、F、G、L、M、N引出的计算

法曲率$k_n = \dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$

Dupin指标线 $Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = \pm 1$

椭圆点($LN - M^2 > 0$)、双曲点(< 0)、抛物点

渐近方向、渐近曲线 $\mathrm{II} = 0$

共轭方向、共轭曲线网

$$L\mathrm{d}u\delta u + M(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + N\mathrm{d}v\delta v = 0$$

7. 由E、F、G、L、M、N引出的计算(续)

主方向、曲率线
$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}v^2 & -\mathrm{d}u\mathrm{d}v & \mathrm{d}u^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

主方向判别定理: (d)是主方向$\Leftrightarrow \mathrm{d}\vec{n} = \lambda \mathrm{d}\vec{r}$;

主曲率、平均曲率H、Gauss曲率K

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)},\quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

Euler公式: $k_n = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$