第十一次作业

一．填空题：

1．设随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases} ae^{-(x+y)}, & 0<x,y<+\infty \\ 0, & 其他 \end{cases}$，则$a=$ $\underline{1}$，$P(X\le 2,Y\le 1)=\underline{1-e^{-1}-e^{-2}+e^{-3}}$。

2．若二维随机变量(X,Y)的联合分布列为

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

则随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$\underline{F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0 \text{ or } y<0 \\ 1/6, & 0\le x<1, 0\le y<1 \\ 5/12, & 0\le x<1, y\ge 1 \\ 1/2, & x\ge 1, 0\le y<1 \\ 1, & x\ge 1, y\ge 1 \end{cases}}$$

3. 设随机变量 $X_i\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$，$i=1,2$，且满足$P(X_1X_2=0)=1$，

则$P(X_1=X_2)=\underline{\quad 0 \quad}$.

二. 选择题

（1）设(X,Y)服从二维均匀的分布，联合密度函数为

$f(x,y)=\begin{cases} A, & 0<x<1, |y|<x \\ 0, & 其它 \end{cases}$，　　则常数$\boldsymbol{A}$=（　A　）. B

（A）$\frac{1}{2}$　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 4.

（2）设（X，Y）的分布函数为$F(x,y)$，则$P\{X\ge a,Y>b\}$=（ C　）

A．$F(a,b)$　　　　　　B．$1-F(a,b)$

C．$1+F(a-0,b)-F(+\infty,b)-F(a-0,+\infty)$

D．　$1+F(a,b)-F(+\infty,b)-F(a,+\infty)$

（3）设$F_1(x)$，$F_2(x)$为两个分布函数，其相应的概率密度为$f_1(x)$, $f_2(x)$是连续函数，则可以作为某个连续随机变量的概率密度函数的是（　D　）

A．$f_1(x)f_2(x)$　　　　　　B．$2f_1(x)F_2(x)$

C．$f_1(x)F_2(x)$　　　　　　D．$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

三．　计算题

1．设二维随机向量(ξ,η)仅取$(1,1),(2,3),(4,5)$三个点，且取它们的概率相同，求(ξ,η)的联合分布列。

解：

ξ \ η	1	3	5
1	$\frac{1}{3}$	0	0
2	0	$\frac{1}{3}$	0
4	0	0	$\frac{1}{3}$

2．某箱装有 100 件产品，其中一、二、三等品分别为 80，10，10 件，现在从中随机抽取一件，记$X_i=\begin{cases}1 & 抽到i等品\\0 & 其他\end{cases}$,（$i=1,2,3$）

试求随机变量X_1和X_2的联合概率分布。

解：令$A_i=$"抽到i等品"，$i=1,2,3$,则A_1,A_2,A_3两两不相容.

$$P(A_1)=0.8,\quad P(A_2)=P(A_3)=0.1$$

$$P(X_1=0,X_2=0)=P(A_3)=0.1$$

$$P(X_1=0,X_2=1)=P(A_2)=0.1$$

$$P(X_1=1,X_2=0)=P(A_1)=0.8$$

$$P(X_1=1,X_2=1)=P(\phi)=0$$

3． 将一硬币抛掷 3 次，X 表示 3 次中出现正面的次数，Y 表示 3 次中出现正面次数与反面次数之差的绝对值，求 X 和 Y 的联合分布率。

解：当连抛三次出现三次反面时，(X,Y) 的取值为 $(0,3)$；

出现一次正面两次反面时，(X,Y) 的取值为 $(1,1)$；

出现两次正面一次反面时，(X,Y) 的取值为 $(2,1)$；

出现三次正面时，(X,Y) 的取值为 $(3,3)$。

并且 $P\{X=0,Y=3\}=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$；$P\{X=1,Y=1\}=\binom{3}{1}(\frac{1}{2})^3=\frac{3}{8}$；

$P\{X=2,Y=1\}=\binom{3}{1}(\frac{1}{2})^3=\frac{3}{8}$；$P\{X=3,Y=3\}=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$

所以，(X,Y) 的联合概率分布为：

X \ Y	1	3
0	0	$1/8$
1	$3/8$	0
2	$3/8$	0
3	0	$1/8$

4．设随机向量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}A(6-x-y), & 0<x<2,\ 2<y<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（1）确定常数 A；（2）求 $P\{X<1,Y<3\},P\{X+Y<4\}$

解：（1）根据规范性有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1\ \therefore A=\frac{1}{8}$

（2） $P\{X<1,Y<3\}=\frac{1}{8}\int_0^1\int_2^3(6-x-y)dxdy=\frac{3}{8}$

$$P(X+Y\le 4)=\frac{1}{8}\int_0^2\int_2^{4-x}(6-x-y)dydx=\frac{2}{3}$$

5. 若随机变量 X, Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且满足 $P(X^2=Y^2)=1$。求二维随机变量 (X, Y) 的联合概率分布。

解：由于 $P(X^2=Y^2)=1$，故 $P(X^2\ne Y^2)=0$。故有

$P(X=0,Y=1)=P(X=1,Y=0)=P(X=0,Y=-1)=0$，

易得 (X, Y) 的联合概率分布如下：

Y \ X	0	1
-1	0	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{3}$	0
1	0	$\frac{1}{3}$

第十二次作业

一. 填空题：

1. 如果随机向量 (ξ,η) 的联合分布列为

ξ \ η	0	1
0	0. 1	b
1	a	0. 4

并且$P(\xi=1|\eta=1)=\dfrac{2}{3}$，则 a=___0.3______, b=___0.2_____.

2. (ξ,η)的联合分布列为

$\xi \backslash \eta$	0	1	2
−1	$\frac{1}{15}$	t	$\frac{1}{5}$
1	s	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

若ξ,η相互独立，则（s, t）= （0. 1，$\dfrac{2}{15}$）。

3. 设(X,Y)在以原点为中心，r为半径的圆域R上服从均匀分布，求X的边缘概率密度为 $p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & |x|\le r\\ 0, & |x|>r\end{cases}$.

二. 选择题

（1）设随机变量X服从正态分布$N\left(\mu,4^2\right)$，随机变量Y服从正态分布$N\left(\mu,5^2\right)$，

记$p_1=P\left\{X\le\mu-4\right\}$，$p_2=P\left\{Y\ge\mu+5\right\}$，则__(A)__

(A) 对任何实数μ，都有$p_1=p_2$

(B) 对任何实数μ，都有$p_1<p_2$

(C) 仅对μ的个别值，有$p_1=p_2$

(D) 对任何实数μ，都有$p_1>p_2$

（2）设随机变量X的可能取值为x_1,x_2，Y的可能取值为y_1,y_2,y_3，若$P(X=x_1,Y=y_1)=P(X=x_1)P(Y=y_1)$，则随机变量$X$和$Y$（ C ）

A．一定独立　　B．一定不独立　　C．不一定独立　　D. 以上答案都不对

（3）. 设随机变量X，Y相互独立，服从相同的两点分布$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$，则（ A ）

A. $P\{X=Y\}=\dfrac{1}{2}$　B. $P\{X=Y\}=\dfrac{1}{3}$　C. $P\{X=Y\}=0$　D. $P\{X=Y\}=\dfrac{1}{4}$

三. 计算题

1．设随机变量ξ,η的联合分布列为

$\xi \backslash \eta$	0	1	2
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	0

（1） 求边缘分布列；

（2） 在$\eta=1$的条件下，ξ的条件分布列；

（3） 问ξ和η是否独立？

解：（1）

ξ	0	1	2
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

η	0	1	2
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{36}$

（2）$P(\xi=0|\eta=1)=\dfrac{P(\xi=0,\eta=1)}{P(\eta=1)}=\dfrac{4}{7}$

$$P(\xi=1|\eta=1)=\frac{P(\xi=1,\eta=1)}{P(\eta=1)}=\frac{3}{7}$$

$$P(\xi=2|\eta=1)=\frac{P(\xi=0,\eta=1)}{P(\eta=1)}=0$$

（3）$\because P(\xi=0,\eta=0)\neq P(\xi=0)P(\eta=0)$

$\therefore \xi$和η不独立

2．设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Axy & (x,y)\in G \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0<y\le x\}$，

（1） 求系数 A；

（2） X 和 Y 的边缘密度函数;

（3） $f_{X|Y}(x\,|\,y)$；

（4） X 和 Y 是否独立，为什么？

解：（1）根据规范性 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1 \quad \therefore A=\dfrac{1}{2}$

（2）$f_X(x)=\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^x \frac{1}{2}xydy=\frac{x^3}{4}, & 0\le x\le 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_y^2 \frac{1}{2}xydx=y-\frac{y^3}{4}, & 0\le y\le 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

（3）$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\ f_{X|Y}(x\,|\,y)=\begin{cases} \dfrac{2x}{4-y^2} & (x,y)\in G \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

（4）$\because G$ 不是矩形区间，$\therefore$ X 和 Y 不独立

3．设随机变量（X，Y）的联合密度为：$\phi(x,y)=\begin{cases} C & |x|<1, |y|<1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

试求：①常数 C；② $P\{X+Y>\frac{1}{2}\}$ 及 $P\{X^2+Y^2\le 1\}$；③ X 和 Y 的边缘密度函数

解：① $\because \int\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,y)dxdy=1$，$\therefore 4C=1$，得常数 $C=\dfrac{1}{4}$；

② $P\{X+Y>\frac{1}{2}\}=\iint\limits_{x+y>\frac{1}{2}} \phi(x,y)dxdy=\dfrac{9}{32}$；

$P\{X^2+Y^2\le 1\}=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \phi(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \dfrac{1}{4}dxdy=\dfrac{\pi}{4}$ ；

③X和Y的边缘密度函数分别为： $\varphi_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |x|<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，

$$\varphi_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |y|<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$