# 大学物理

# 力 学

## MECHANICS

# 第一篇　力　学

- **静力学**：研究物体平衡的条件
- **运动学**：研究物体位置随时间的变化
- **动力学**：研究各类运动发生的原因

# 第一章 质点的运动规律

## §1-1质点运动的描述

一、质点：物体只有质量而没有大小、形状的几何抽象

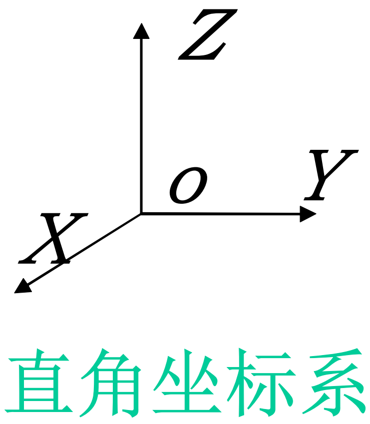
理想模型(物理学中常用的一种科学分析方法)

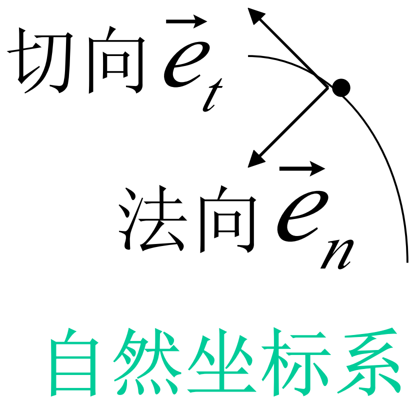
二、物体运动是绝对的而运动的描述是相对的

绝对性：不存在绝对静止的物体

相对性：描述运动需以别的物体（参照系）作参照，在不同的参照系中，对同一物体的运动具有不同的描述。

**坐标系：** 参照系的数学抽象，用于对运动定量描述。



## 三、描述质点运动的物理量

### 1°位置矢量(位矢):

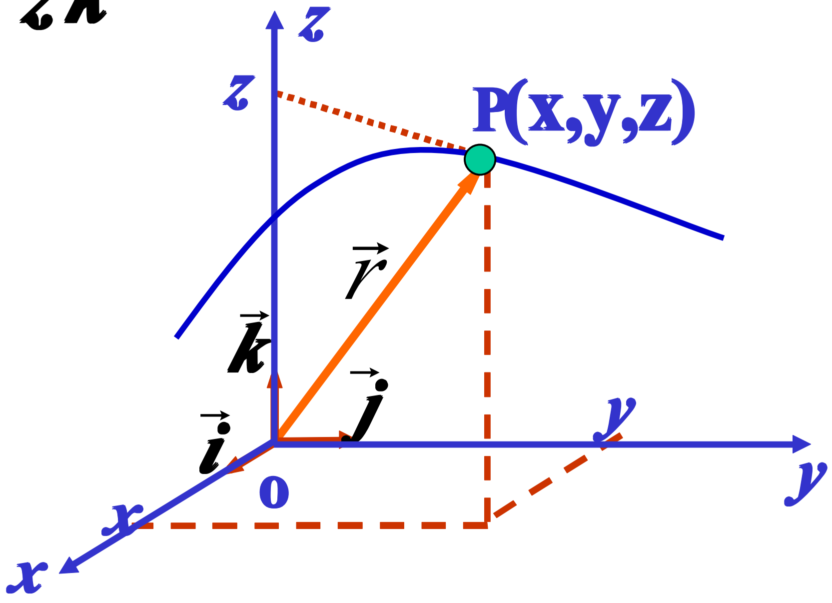
质点的位置可用坐标（$x,y,z$）表示，也可用矢径 $\vec{r}$ 表示。 如图. 矢径也称为位置矢量，简称位矢。

直角坐标系：$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} \quad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|} \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|}$$

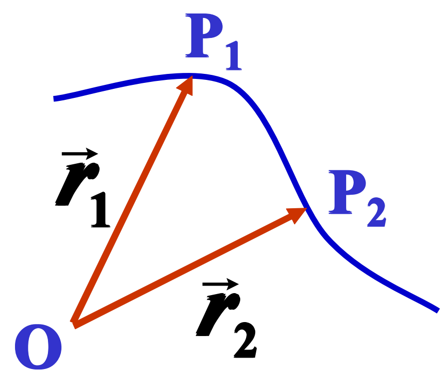
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$



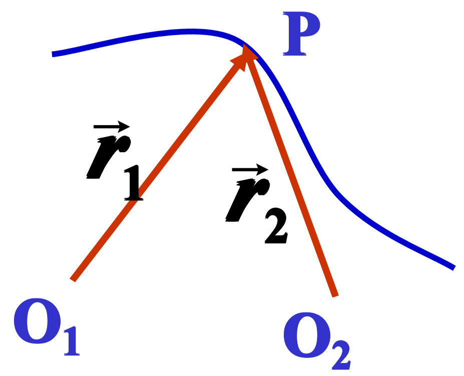
位置矢量 $\vec{r}$ 的性质：

**1.** 矢量性：$\vec{r}$ 有大小，有方向。遵守矢量运算法则。

**2.** 瞬时性：即：$\vec{r}(t)$ 是 $t$ 的函数。




**3.** 相对性：质点P在同一时刻 $t$ 相对于不同参照系的位置矢量不同。

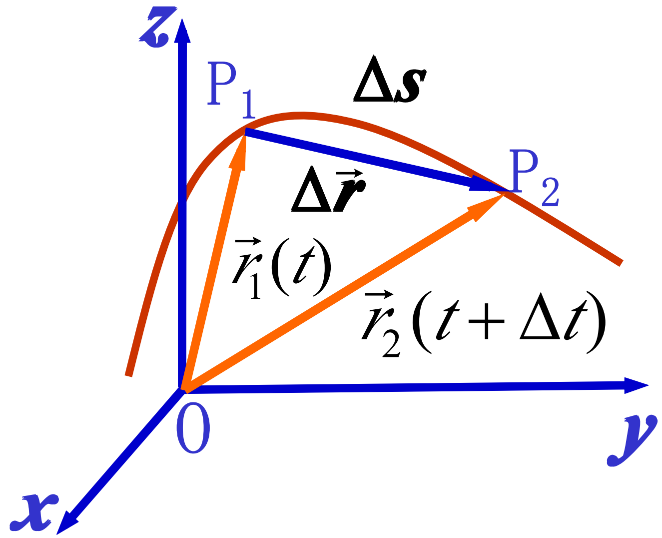


位移：　　位置矢量的增量

$t$ 时刻，$P_1$点，位矢为 $\vec{r}_1(t)$，

$t+\Delta t$ 时刻，$P_2$点，位矢为 $\vec{r}_2(t+\Delta t)$

从$P_1$到$P_2$的有向线段（位移）记为 $\Delta\vec{r}$




$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

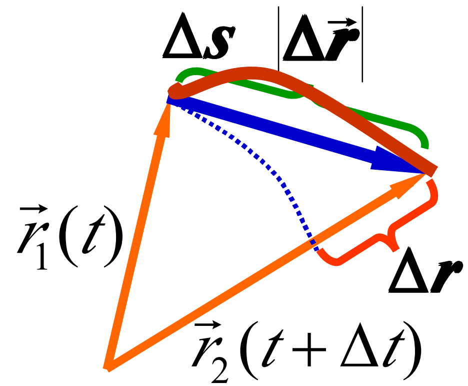
注意

1. $\Delta\vec{r}$是矢量。

2. $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta r$，　　$\Delta r = |\vec{r}_2| - |\vec{r}_1|$

3. $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$，　$\Delta s$——路程（标量）。

只有在极限 $\Delta t \to 0$ 时，$|d\vec{r}| = ds$

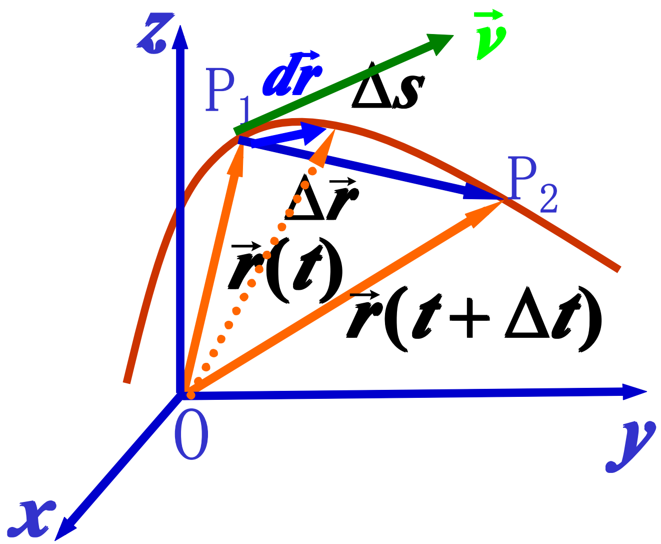


## 2 °速度:

〈1〉 速度的定义:

平均速度 $\bar{\vec{v}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

瞬时速度（速度） $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$



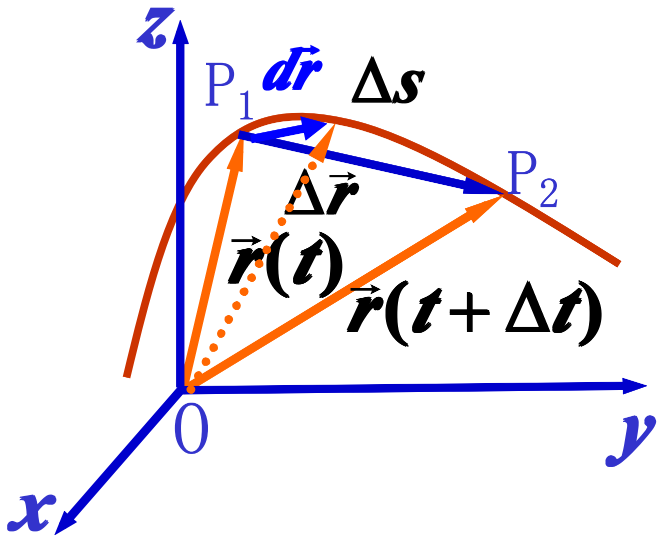

〈2〉 速度的方向:

沿该时刻该位置轨道的切线方向并指向前进的一侧。

〈3〉 速度的大小:

$$v = \left|\vec{v}\right| = \frac{\left|d\vec{r}\right|}{dt}$$

## 〈4〉速率的定义：




平均速率 $\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

瞬时速率 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{ds}{dt}$

$\because \Delta S\neq\left|\Delta\vec{r}\right|$ 而 $\mathrm{d}S=\left|d\vec{r}\right|$

$\therefore \bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\neq\left|\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|=\left|\bar{\vec{v}}\right|$ ——平均速度的大小≠平均速率

$\left|\vec{v}\right|=\dfrac{\left|d\vec{r}\right|}{dt}=\dfrac{ds}{dt}=v$ ——瞬时速度的大小＝瞬时速率

## 〈5〉直角坐标系中，速度表达式

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\boldsymbol{\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}}$$

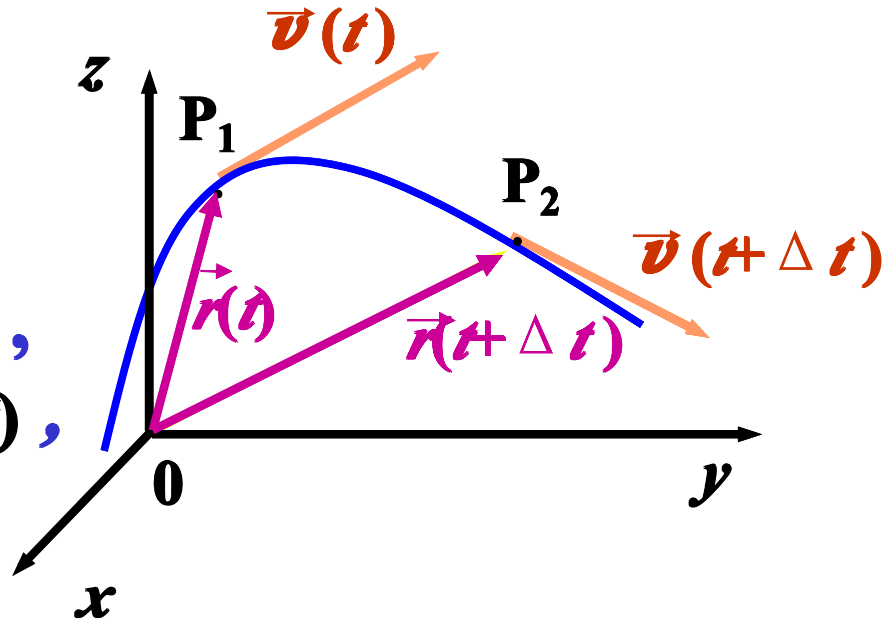
$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\boldsymbol{v = \left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

瞬时速度 $\vec{v}$ 的性质：矢量性、瞬时性、相对性

## $3^0$ 加速度

### 〈1〉 加速度的定义

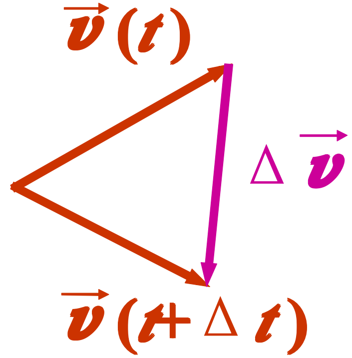



设：$t$时刻质点的速度为 $\vec{v}(t)$，

$t+\Delta t$时刻的速度为$\vec{v}(t+\Delta t)$，

$$\Delta\vec{v}=\vec{v}_{(t+\Delta t)}-\vec{v}_{(t)}$$

平均加速度 $\overline{\vec{a}}=\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$




瞬时加速度

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

瞬时加速度$\vec{a}$的性质：矢量性、瞬时性、相对性

〈2〉加速度的方向 $\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

其方向即为 当$\Delta t\to 0$时，速度增量$\Delta\vec{v}$的极限方向，加速度的方向与同一时刻速度的方向一般不一致。

〈3〉直角坐标系中，加速度表达式

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\vec{i}+\frac{dv_y}{dt}\vec{j}+\frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

$$=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

$$\left.\begin{aligned} a_x&=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}\\ a_y&=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}\\ a_z&=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}\end{aligned}\right\}$$

$$a=|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

# 四、运动方程、轨道方程

**1°运动方程：** 位置(矢量)与时间的函数关系

矢量表达式 $\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$

标量式：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

将质点的运动方程中的时间 $t$ 消去，即可得质点的轨道方程。

质点的运动可以看作是各分运动的矢量合成，这个结论称为运动的叠加原理.

**2°轨道方程：** 质点位置坐标间的函数关系

$x=x(y)$ 或 $y=y(x)$

## 五、运动学的两类问题

第一类问题：　已知：$\vec{r}=\vec{r}(t)$

(求导问题)　求：$\vec{v}=\vec{v}(t)$、$\vec{a}=\vec{a}(t)$

第二类问题：　已知：$\vec{a}=\vec{a}(t)$

(积分问题)

初始条件：$t=0$　$\begin{cases} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{cases}$　$\begin{cases} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{cases}$

求：$\vec{v}=\vec{v}(t)$、$\vec{r}=\vec{r}(t)$

[例] $\vec{r} = t^3 \vec{i} + t^2 \vec{j}$ ( $r$以m计,$t$以 s 计)

1. $t = 1$s到 $t = 2$s的位移

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{i} + \vec{j} \\ \vec{r}_2 &= 8\vec{i} + 4\vec{j}\end{aligned}\right\} \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 7\vec{i} + 3\vec{j}$$

2. 上述时间内的平均速度

$$\overline{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = 7\vec{i} + 3\vec{j}$$

3. $t$=1s 及 $t$=2s 时刻的瞬时速度

$$v = \frac{d\vec{r}}{dt} = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} \left\{\begin{aligned}\vec{v}_1 &= 3\vec{i} + 2\vec{j} \\ \vec{v}_2 &= 12\vec{i} + 4\vec{j}\end{aligned}\right.$$

## 4. 上述时间内的平均加速度

$$\vec{\bar{a}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{v}_2 = 12\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\Longrightarrow \vec{\bar{a}} = 9\vec{i} + 2\vec{j}$$

## 5. $t=1\text{s}$ 时刻的瞬时加速度

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v} = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j}$$

$$\Longrightarrow \vec{a} = 6t\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{a}\big|_{t=1} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$$

[例] $\vec{r} = 3\cos(\frac{\pi}{6}t)\vec{i} + 3\sin(\frac{\pi}{6}t)\vec{j}$

试求： 1. 轨迹方程；

2. 瞬时速度；

3. 瞬时加速度。

---

解： 1.运动方程的标量式为

$$x = 3\cos(\frac{\pi}{6}t) \qquad y = 3\sin(\frac{\pi}{6}t)$$

从标量式中消去$t$得轨迹方程： $x^2 + y^2 = 3^2$

2. 瞬时速度：$\vec{r}=3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\vec{i}+3\sin\left(\frac{}{6}t\right)\vec{j}$

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=-3\times\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\vec{i}+3\times\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\vec{j}$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\frac{\pi}{2}$$

---

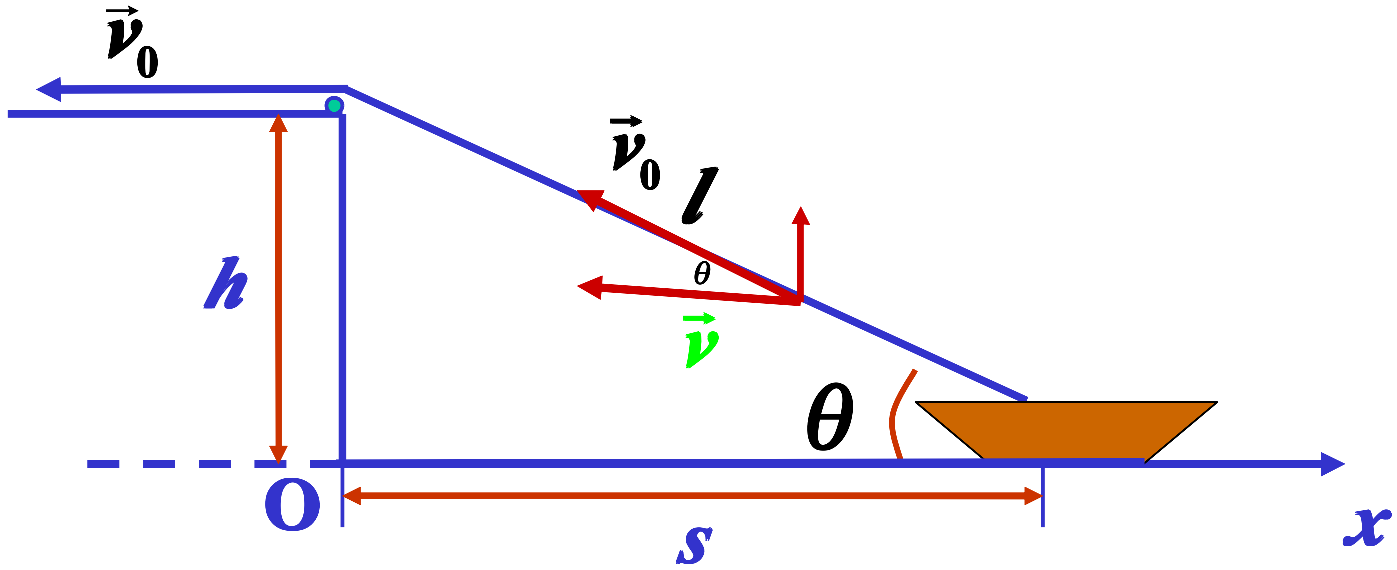
3. 瞬时加速度：

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-3\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\vec{i}-3\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\vec{j}$$

$$=-\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\left[3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\vec{i}+3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\vec{j}\right]=-\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\vec{r}$$

$\vec{a}$ 与 $\vec{r}$ 方向相反，可见加速度指向圆心。

例：在离水面高度为**h**的岸边，有人用绳子拉船靠岸，收绳的速率恒为$\mathbf{v_0}$，任一时刻船离岸边的距离为**s**，求船靠岸的速率。



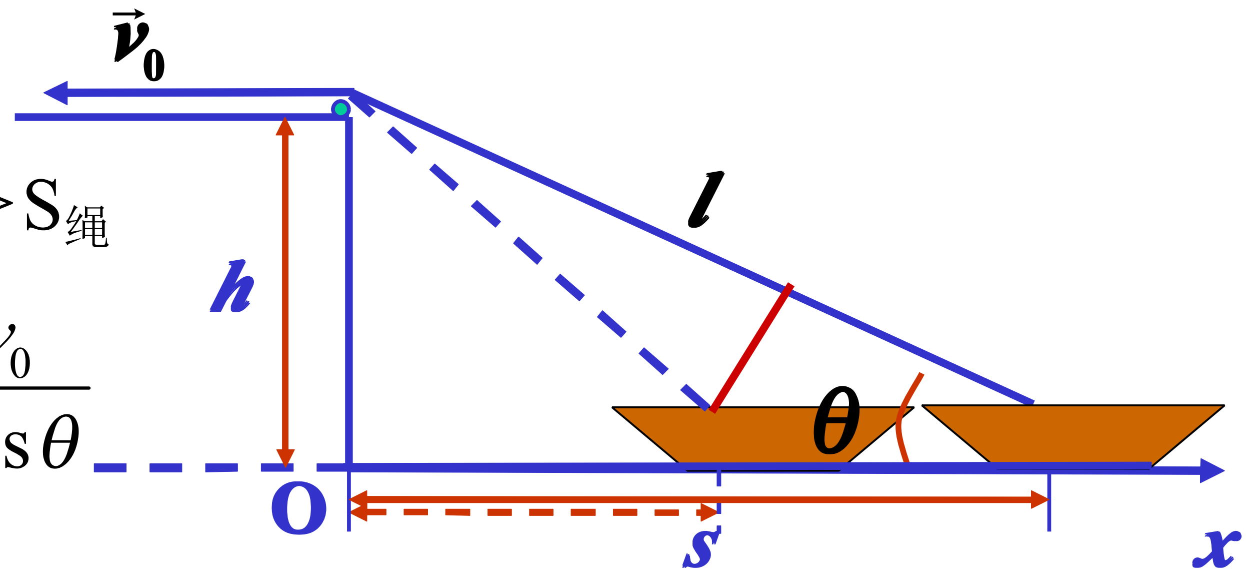

解：如图所示，把绳子的速度分解，其中一个水平分量就是船的速度

$$\vec{v} = \vec{v}_0 \cos\theta$$

## 定性分析：

∵相同时间内$S_{船} > S_{绳}$

∴$v > v_0$ 且 $v = \dfrac{v_0}{\cos\theta}$




## 定量分析：

$$\left.\begin{aligned} s &= \sqrt{l^2 - h^2} \\ v_{船} &= -\frac{ds}{dt} \end{aligned}\right\} v_{船} = -\frac{1}{2}\frac{2l\dfrac{dl}{dt}}{\sqrt{l^2 - h^2}}$$

$$v_0 = -\frac{dl}{dt} \qquad = \frac{l}{s}v_0 = \frac{v_0}{\cos\theta}$$

# § 1-2几种典型的质点运动问题

## 一、匀变速运动： $\vec{a}$为常矢量

初始条件：$t=o:\vec{r}=\vec{r}_o,\vec{v}=\vec{v}_o$

速度方程：

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}\Rightarrow d\vec{v}=\vec{a}dt\Rightarrow\int_{\vec{v}_o}^{\vec{v}}d\vec{v}=\int_o^t\vec{a}dt$$

得：$\vec{v}=\vec{v}_o+\vec{a}t$

$$=\left(v_{ox}\vec{i}+v_{oy}\vec{j}+v_{oz}\vec{k}\right)+\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)t$$

$$=\left(v_{ox}+a_xt\right)\vec{i}+\left(v_{oy}+a_yt\right)\vec{j}+\left(v_{oz}+a_zt\right)\vec{k}$$

运动方程：

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}\Rightarrow d\vec{r}=\vec{v}dt=\left(\vec{v}_o+\vec{a}t\right)dt\Rightarrow\int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}}d\vec{r}=\int_o^t\left(\vec{v}_o+\vec{a}t\right)dt$$

得：$\vec{r}=\vec{r}_o+\vec{v}_o t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2$

$$=(x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k})+(v_{0x}\vec{i}+v_{0y}\vec{j}+v_{0z}\vec{k})t+\frac{1}{2}(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})t^2$$

$$=\left(x_0+v_{0x}t+\frac{1}{2}a_xt^2\right)\vec{i}+\left(y_0+v_{0y}t+\frac{1}{2}a_yt^2\right)\vec{j}+\left(z_0+v_{0z}t+\frac{1}{2}a_zt^2\right)\vec{k}$$

运动叠加原理

# 抛体运动

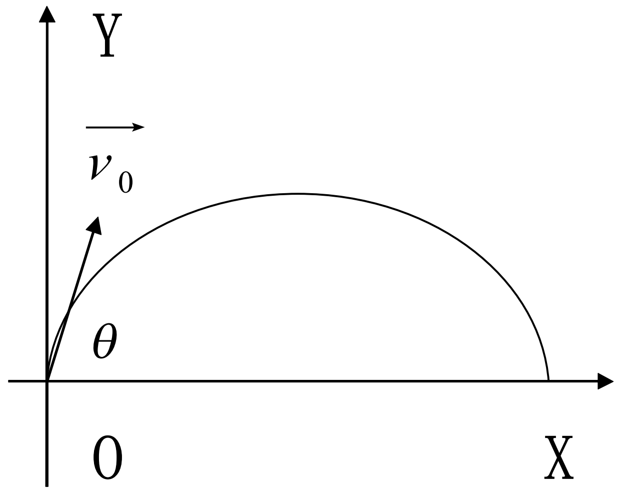
1） 定义：不计空气阻力，从地面附近抛出物体所作的运动

2） 加速度 $\vec{g} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$

$$\vec{v} = (v_{ox} + a_x t)\vec{i} + (v_{oy} + a_y t)\vec{j}$$

$$\vec{r} = \left(x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2\right)\vec{i} + \left(y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2\right)\vec{j}$$

3） 速度 $\Rightarrow \begin{cases} v_x = v_{x0} = v_0 \cos\theta \\ v_y = v_{y0} - gt = v_0 \sin\theta - gt \end{cases}$




4） 运动方程 $\Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos\theta t \\ y = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

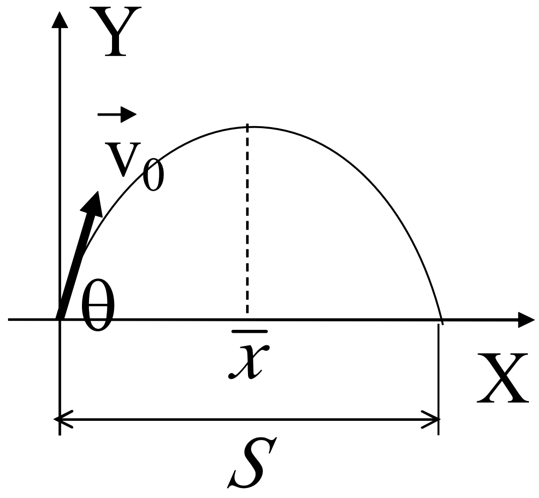
5） 轨迹方程

由运动方程 $\Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos\theta t \\ y = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{消}t} y = tg\theta x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$

6）射程

令 **y=0** 得 $t_0=\dfrac{2v_0\sin\theta}{g},(t_0=0\text{舍去})$

$$\text{射程}S|_{t=t_0}=v_0\cos\theta\frac{2v_0\sin\theta}{g}=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$$




另解： $S=2\bar{x}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\bar{x}}=tg\theta-\frac{g}{v_o^{\ 2}\cos^2\theta}\bar{x}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{x}=\frac{v_0^2}{2g}\sin 2\theta$$

$$v_{0x}=v_0\cos\theta$$

$$v_{0y}=v_0\sin\theta-gt$$

$$x=v_0\cos\theta t$$

$$y=v_0\sin\theta t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$y=tg\theta x-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

匀变速运动：

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}t$$

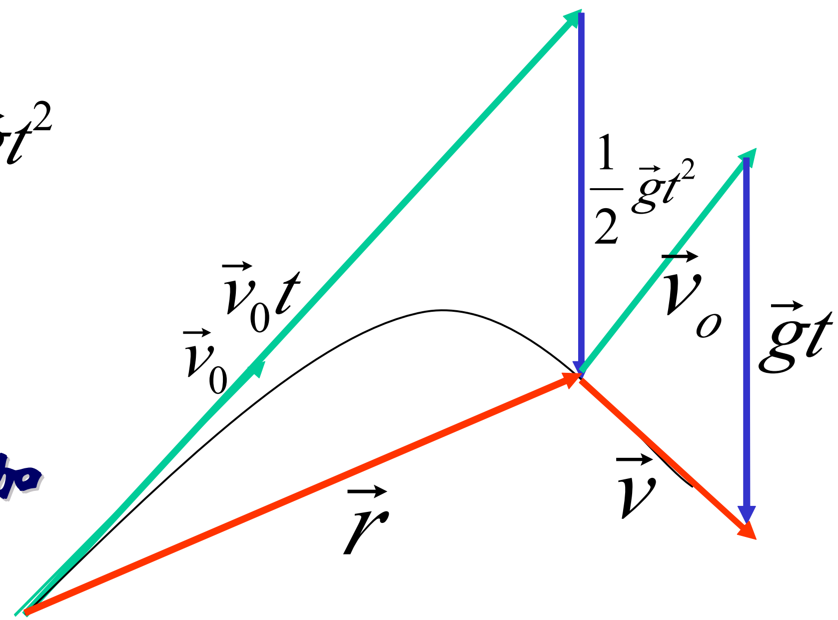
$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

7）抛体运动的矢量表示：

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}t \quad , \qquad \vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

**初速$\vec{v}_0$方向的匀速直线运动和**

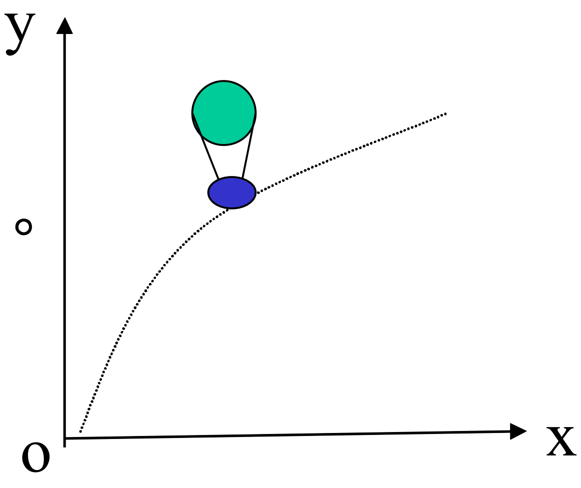
**竖直方向上自由落体运动的叠加**



【例】一汽球以速率$v_0$从地面上升，由于风的影响，随着高度的上升，汽球的水平速度$v_x=by$增大，其中**b**是正的常量，**y**是从地面算起的高度。

**1**、试求汽球的位矢方程。

**2**、求汽球水平漂移的距离与高度的关系。




解：1、$\vec{r}_{(t)} = x_{(t)}\vec{i} + y_{(t)}\vec{j}$　　$(1')$

已知：$v_y = v_0 \Rightarrow y_{(t)} = v_0 t$　　$(2')$

$$\frac{dx}{dt} = v_x = by = bv_0 t \longrightarrow \int_0^x dx = \int_0^t bv_0 t dt \longrightarrow x = \frac{bv_0}{2}t^2 \qquad (3')$$

$$\left.\begin{matrix}(1')\\(2')\\(3')\end{matrix}\right\} \vec{r} = \frac{bv_0}{2}t^2\vec{i} + v_0 t\vec{j}$$

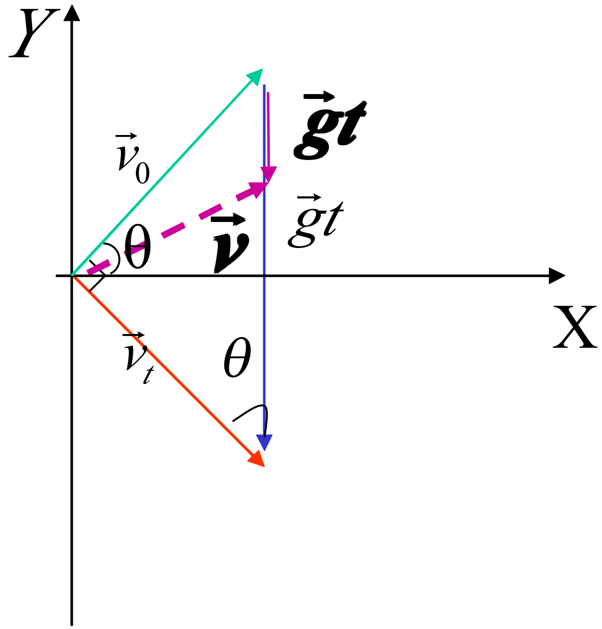
2、由$(2')(3')$消去$t$得：$x = \dfrac{b}{2v_0}y^2$

[例]一人在平地上以$\vec{v}_0$抛出一个铅球，抛射角为$\theta(>45^0)$。试问：经过多少时间后，铅球的速度方向与$\vec{v}_0$相垂直，

此时铅球的速度大小为多少？

解：由抛体运动的速度矢量图可知，

当$v_t \perp v_0$时，有：




$$gt\sin\theta = v_0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{g\sin\theta},$$

$$\frac{v_0}{v_t} = tg\theta \Rightarrow v_t = \frac{v_0}{tg\theta}$$

## 三个物理量

$$\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

## 二个方程

运动方程： $\vec{r} = \vec{r}(t) \Longrightarrow \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

轨道方程： $f(x,y,z)=0$

（轨迹方程）

## 二类问题

已知$\vec{r}(t)$：
$$\begin{cases} \xrightarrow{\text{一次求导}} \vec{v}(t) \\ \xrightarrow{\text{二次求导}} \vec{a}(t) \end{cases}$$

已知$a$及初始条件$r_0$、$v_0$
$$\begin{cases} \xrightarrow{\text{一次积分}} \vec{v}(t) \\ \xrightarrow{\text{二次积分}} \vec{r}(t) \end{cases}$$

## 几种典型的质点运动

1、匀变速运动：$\vec{a}$为常矢量

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}t = (v_{ox} + a_x t)\vec{i} + (v_{oy} + a_y t)\vec{j} + (v_{oz} + a_z t)\vec{k}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$= \left(x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2\right)\vec{i} + \left(y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2\right)\vec{j} + \left(z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2\right)\vec{k}$$

## *抛体运动：

$$\vec{v} = v_0 \cos\theta \vec{i} + \left(v_0 \sin\theta - gt\right)\vec{j}$$

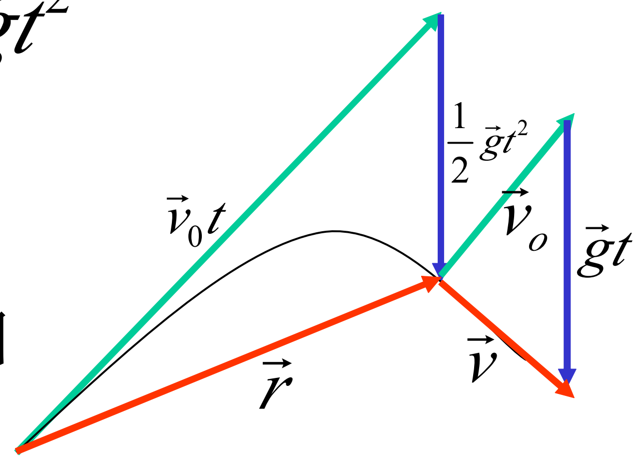
$$\vec{r} = \left(v_0 \cos\theta \cdot t\right)\vec{i} + \left(v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}$$

$x$方向匀速直线运动与$y$方向上竖直上抛运动的叠加

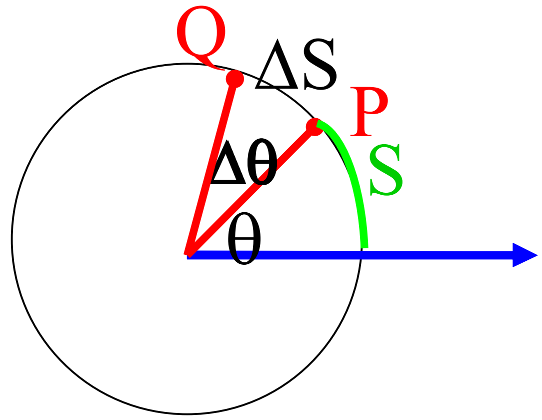
$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}t \qquad \vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

初速$\vec{v}_0$方向的匀速直线运动与

竖直方向上自由落体运动的叠加



## 二、圆周运动：运动轨迹为圆的质点运动




### 1.圆周运动角量和线量关系

（1）角量的描述

角位置θ :质点,圆心连线同参考线夹角

约定：逆(顺)时针为正(负)

角位移Δθ: Δt内质点转过的角度. $[\Delta S = R\Delta\theta]$

角速度ω: $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$

$$\left[\ v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega\ \right]$$

角加速度**α**： $\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

**α** 与**ω**同号，角加速； **α** 与**ω**异号，角减速

（**2**）角量表示的匀角加速运动**(*α***为常量）

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha \Rightarrow d\omega = \alpha dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha dt \Rightarrow \underline{\underline{\omega - \omega_0 = \alpha t}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \Rightarrow d\theta = (\omega_0 + \alpha t)dt$$

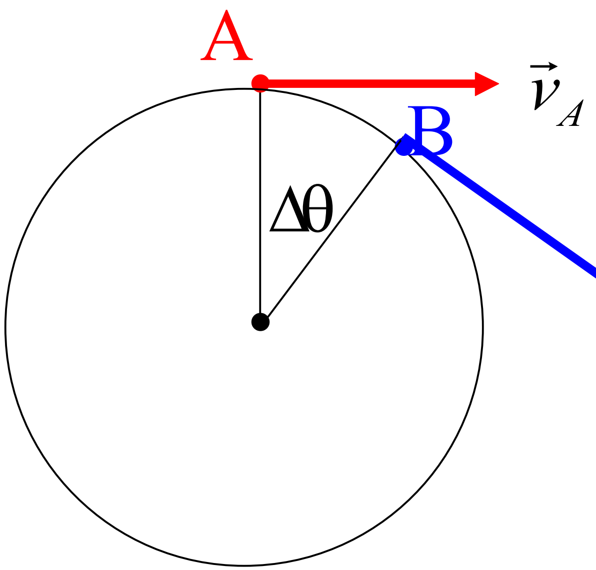
$$\Downarrow$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t)dt \Rightarrow \underline{\underline{\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2}}$$

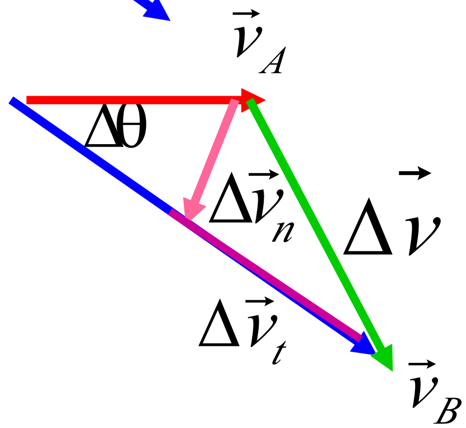
## 2.加速度

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$=\lim\frac{\vec{v}_B-\vec{v}_A}{\Delta t}$$




令$\Delta\vec{v}=\Delta\vec{v}_n+\Delta\vec{v}_t$




**则：** $\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_t}{\Delta t}=\vec{a}_n+\vec{a}_t$

法向加速度： $a_n=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\vec{v}|\Delta\theta}{\Delta t}$

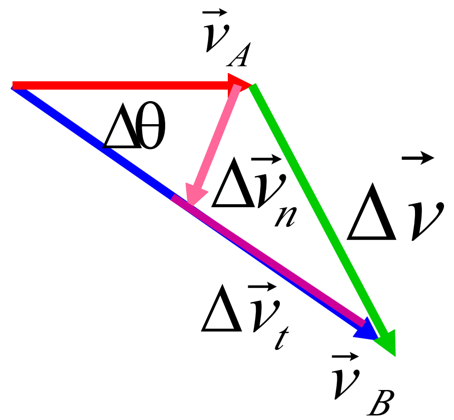
方向指向圆心

物理意义：速度方向改变的反映。 $=v\omega=\omega^2R=\frac{v^2}{R}$

## 切向加速度：

$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta \vec{v}_t}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

方向沿切向

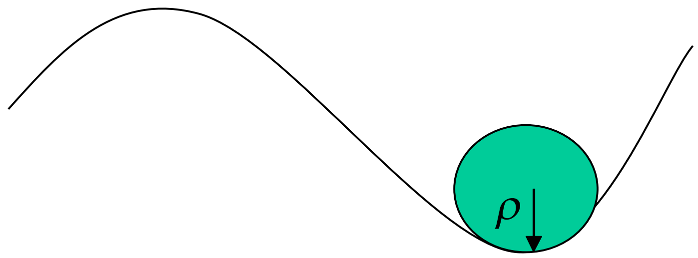



物理意义：速度大小改变的反映。

## 一般平面曲线运动：

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t \begin{cases} 大小：a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \\ 方向：指向轨道内侧 \end{cases}$$

其中： $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$，　$\rho$ – 曲率半径



一质点从静止开始沿半径为**R**的圆周作匀变速圆周运动。当切向加速度和法向加速度大小相等时，该质点走过的路程是（ ）

（A）**R/2** √

（B）**R**

（C）$\pi R/2$

（D）$\pi R$

$$S = R\theta$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad \theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$a_n = \omega^2 R = (\alpha t)^2 R \qquad \omega - \omega_0 = \alpha t$$

$$= a_t = R\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha t^2 = 1$$

[例]一质点作半径为$R$的圆周运动，$\theta = \frac{1}{R}(v_0 t - \frac{1}{2}bt^2)$

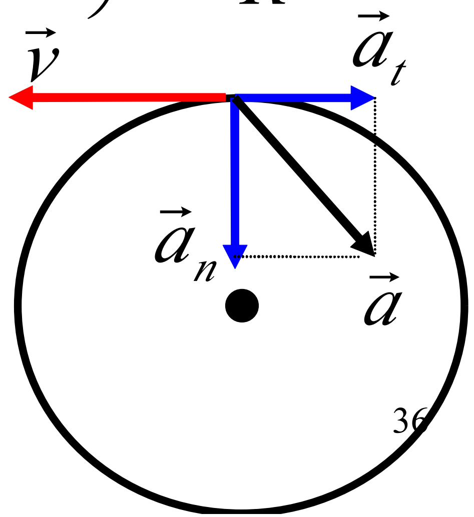
（$v_0$、$b$均为常数）

试求：$t$时刻的加速度$a$

解：$a = \sqrt{a_n^{\ 2} + a_t^{\ 2}} = \sqrt{\frac{1}{R^2}(v_0 - bt)^4 + b^2}$

$$a_n = R\omega^2 = R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = R\left(\frac{1}{R}(v_0 - bt)\right)^2 = \frac{1}{R}(v_0 - bt)^2$$

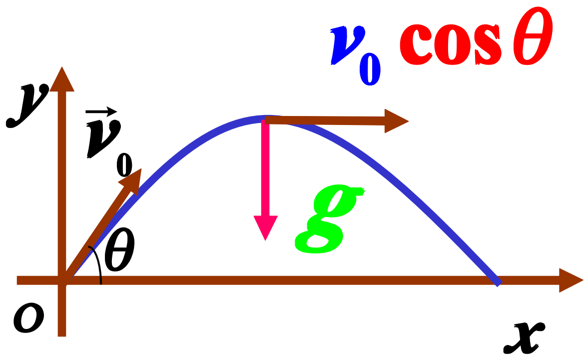
$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = -b$$



两物体以相同的初速$v_0$作斜抛运动，物体1的抛角为$60^o$，物体2的抛角为$45^o$，这两抛物线最高点的曲率半径之比 $\rho_1 : \rho_2$ 为

(A) 1:2　　(B) $1:\sqrt{2}$　　(C) 2:1　　(D) $\sqrt{2}:1$

曲率半径 $\rho = \dfrac{v^2}{a_n}$




斜抛运动，总加速度为 $\vec{g}$

最高点 $a_n = g$

$a_t = 0, \quad v = v_0 \cos\theta$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{(v_0 \cos 60^o)^2}{(v_0 \cos 45^o)^2} = \frac{1}{2}$$

答案 A

【例】已知一质点在**XOY**平面内运动，$\vec{r}=6t\vec{i}+\left(4t^2-8\right)\vec{j}$

试求：**1**、质点作何运动？

**2**、**t=1**秒时质点的$a_n$和$a_t$为多少？该处的$\rho$为多少？

解：1、$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=6\vec{i}+8t\vec{j}$

$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=8\vec{j}$

匀变速曲线运动

2、$a_{n1}=\dfrac{v_1^2}{\rho}=\sqrt{a^2-a_{t1}^2}=\sqrt{8^2-(6.4)^2}=4.8\left(m/s^2\right)$

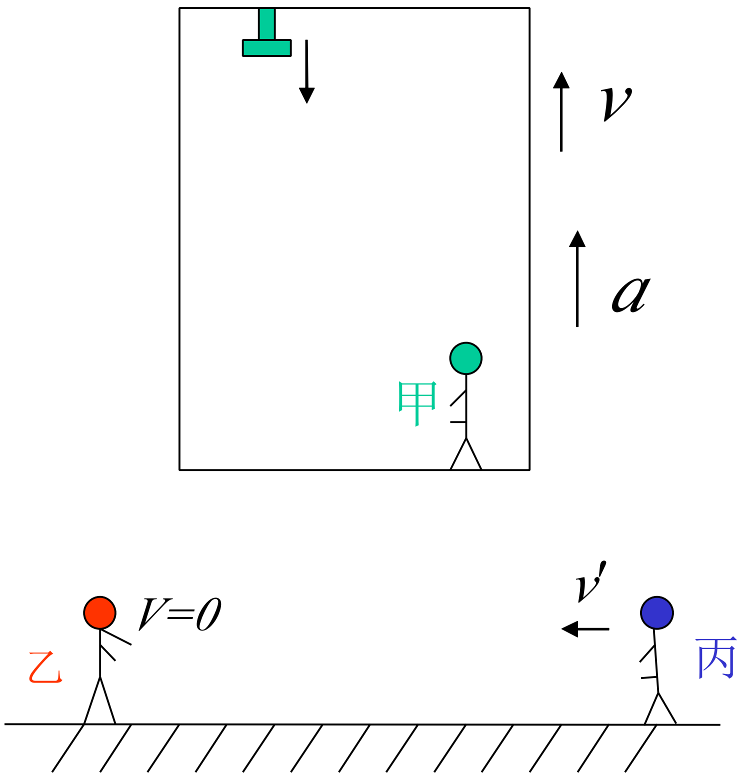
$a_{t1}=\dfrac{dv}{dt}\Big|_{t=1}$

$v=\sqrt{36+64t^2}$

$a_{t1}=\dfrac{64t}{\sqrt{36+64t^2}\Big|_{t=1}}=6.4\left(m/s^2\right)$

$\rho=\dfrac{v_1^2}{a_{n1}}=\dfrac{100}{4.8}=20.8(m)$

# § 1-3 运动描述的相对性

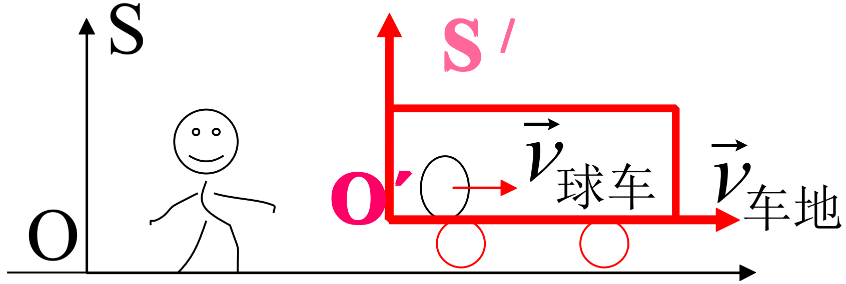



螺母的运动？

甲： 自由落体。

乙： 竖直上抛。

丙： 斜抛运动。




地面上人看来：

$$\vec{v}_{球地}=\vec{v}_{球车}+\vec{v}_{车地}$$

$$\vec{x}_{球地}=\vec{x}_{球车}+\vec{x}_{车地}$$

## 基本关系式

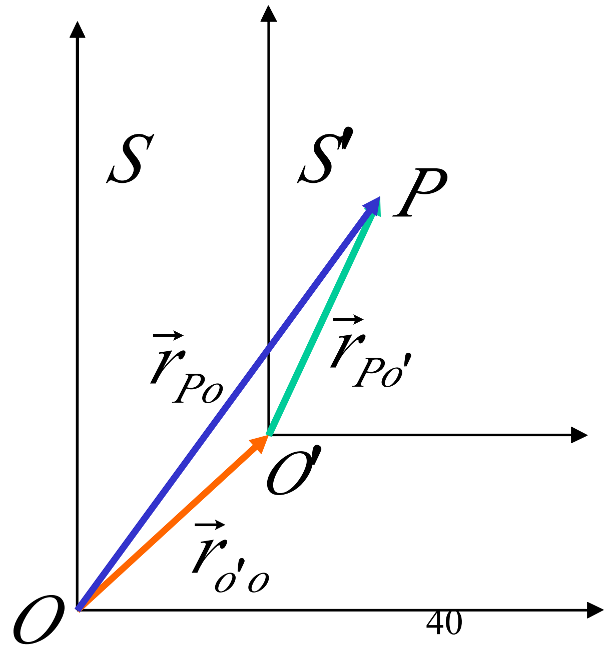
设：$S'$系坐标原点在$S$系中的位矢为$\overrightarrow{r_{O'O}}$，

$S'$系坐标原点对$S$系的相对速度为$\overrightarrow{v_{O'O}}$

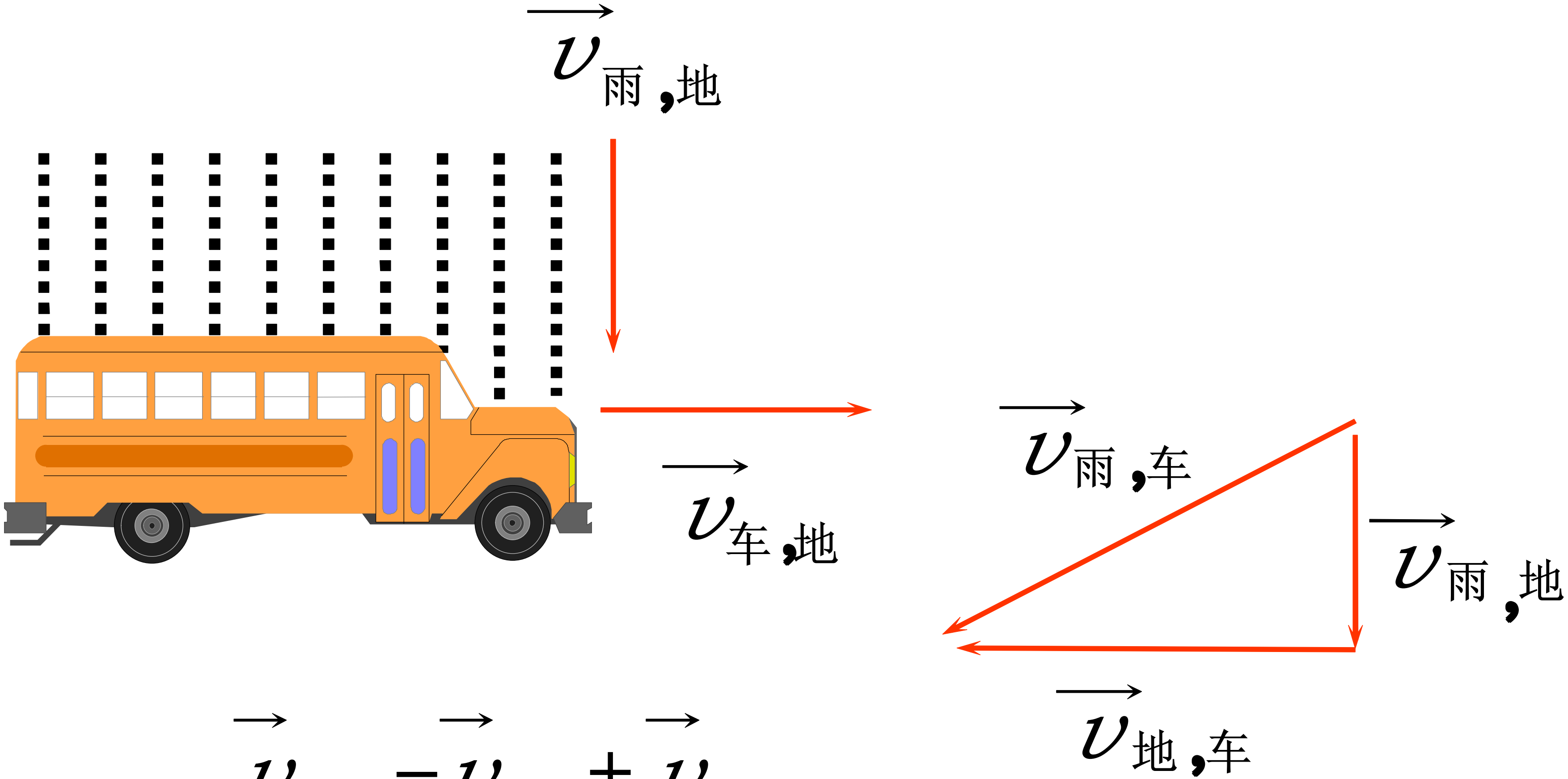
$S'$系坐标原点在$S$系中的加速度为$\overrightarrow{a_{O'O}}$

则有：

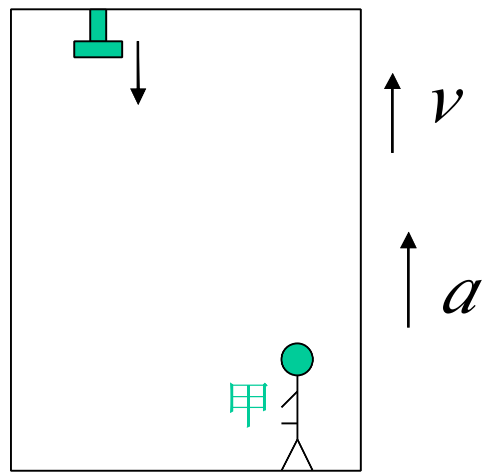
$$\begin{cases}\overrightarrow{r_{po}}=\overrightarrow{r_{po'}}+\overrightarrow{r_{o'o}}\\ \overrightarrow{v_{po}}=\overrightarrow{v_{po'}}+\overrightarrow{v_{o'o}}\\ \overrightarrow{a_{po}}=\overrightarrow{a_{po'}}+\overrightarrow{a_{o'o}}\end{cases}$$

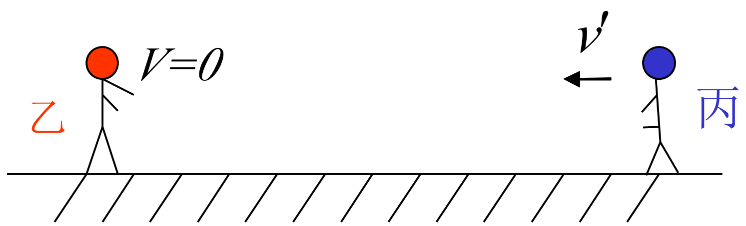


一般关系式：$\vec{M}_{PO} = \vec{M}_{PO'} + \vec{M}_{O'O}$




$$\vec{v}_{雨,车} = \vec{v}_{雨,地} + \vec{v}_{地,车}$$




螺母的运动？

甲：自由落体。✗

乙：竖直上抛。✓

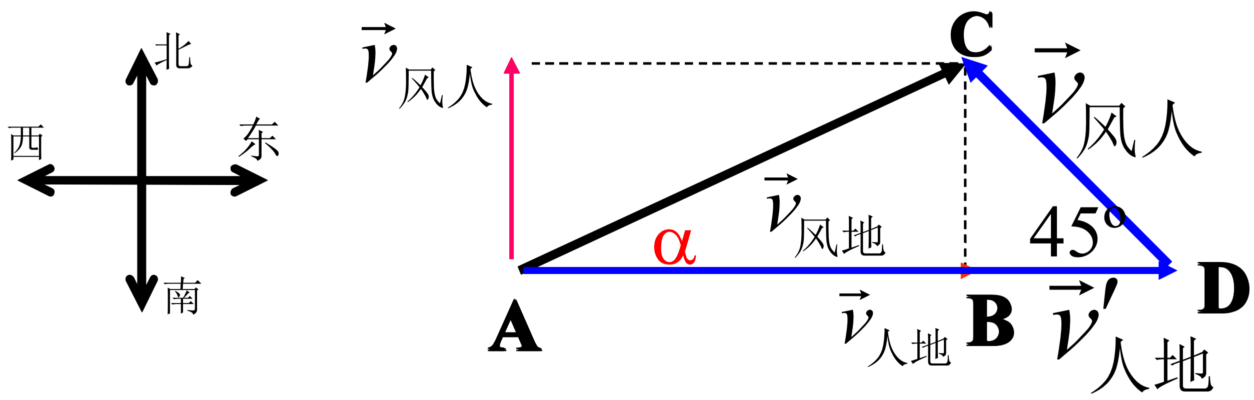
丙：斜抛运动。✓

$$\vec{a}_{螺甲}=\vec{a}_{螺地}+\vec{a}_{地甲}=\vec{a}_{螺地}-\vec{a}_{甲地}=-g\vec{j}-a\vec{j}=-(g+a)\vec{j}$$

甲：初速度为0，加速度为（g+a)的竖直下落。

**[例]. 某人东行,v=50m/min时感觉有南风，v=75m/min时感觉有东南风，求风速。**

解：由题给条件写出矢量式：$\vec{v}_{风地}=\vec{v}_{风人}+\vec{v}_{人地}$



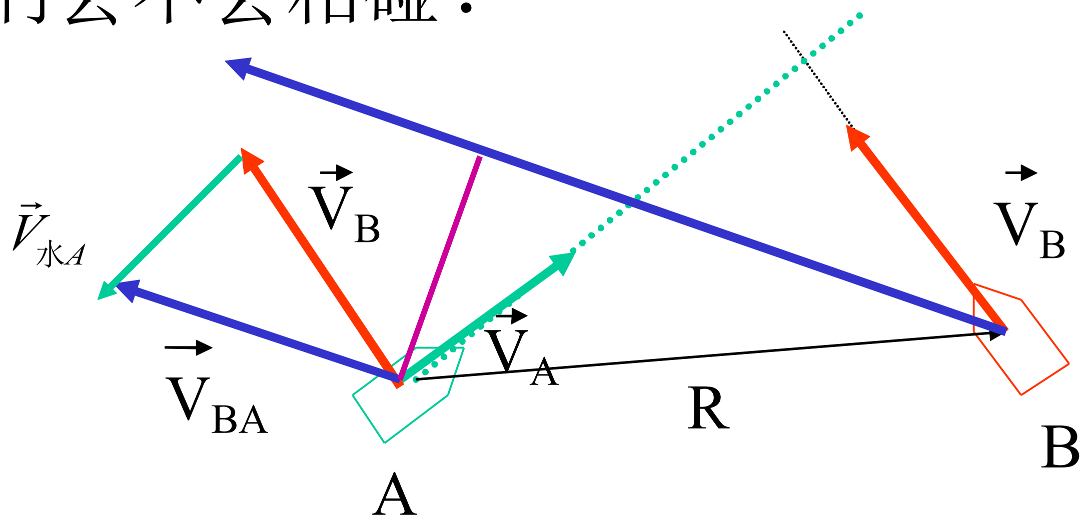

由图：**BD=75-50=25 ∴BD=BC=25**

$$AC=(AB^2+BC^2)^{1/2}=(50^2+25^2)^{1/2}=55.9\text{m/min}$$

$$\alpha=\tan^{-1}(25/50)=27^{\circ}$$

所以,风速大小为**55.9m/min**;方向为东偏北**27°**

例:如图所示，两船$A$和$B$各以$\vec{V}_A$和$\vec{V}_B$行驶，试问：它们会不会相碰？




$$\vec{V}_{BA} = \vec{V}_{B水} + \vec{V}_{水A}$$

# §1-4 牛顿运动定律

## 一、对三条定律的说明

### 1.第一定律

[物体具有保持运动状态不变的属性]

（1）指明了任何物体都具有惯性

（2）阐明了力的真正涵义，
即：力是改变物体运动
状态的原因，而不是
维持运动状态的原因。

牛　顿

### 2.第二定律

[物体运动状态变化的规律]

表达式： $$\vec{F}=k\frac{d\vec{p}}{dt}=k\frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

$SI$制中, $k=1 \quad \Rightarrow \vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}=m\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\frac{dm}{dt}$

$\because$ 当 $v<<c$ 时 $m$ 可视为恒量 $\quad \therefore \vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\vec{a}$

说明：矢量性：

对应性：某方向的力只改变该方向物体运动状态。

$$Rt\text{系}\begin{cases} F_x = ma_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ F_y = ma_y = m\dfrac{d^2y}{dt^2} \\ F_z = ma_z = m\dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

自然坐标系 $$\begin{cases} F_n = ma_n = m\dfrac{v^2}{\rho} \\ F_t = ma_t = m\dfrac{dv}{dt} \end{cases}$$

瞬时性　$\vec{F}=m\vec{a}$是一个瞬时公式,$\vec{F}$变,$\vec{a}$随之变。

## 3.第三定律 [力的相互作用性]

作用力与反作用力:

大小相等、方向相反，作用在不同物体上。

## 二、牛顿运动定律的适用范围

1.宏观（运动范围$>10^{-8}cm$)领域

2.$\vec{F}=m\vec{a}$仅适用于低速（$v<<c$)领域

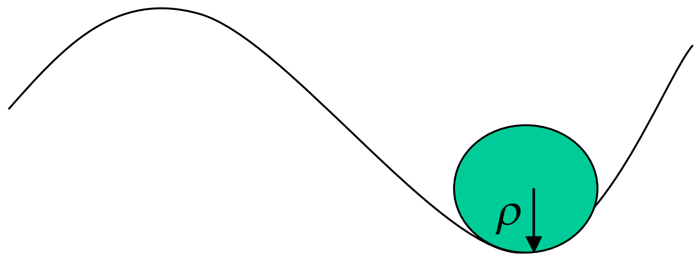
3.惯性参照系:

　在此参照系中观察，一个不受力作用的物体将保持静止或匀速直线运动状态不变。

## 圆周运动角量和线量关系

$$\Delta S = R\Delta\theta \qquad v = R\omega \qquad a_n = \omega^2 R \qquad a_t = R\alpha$$

## 平面曲线运动：

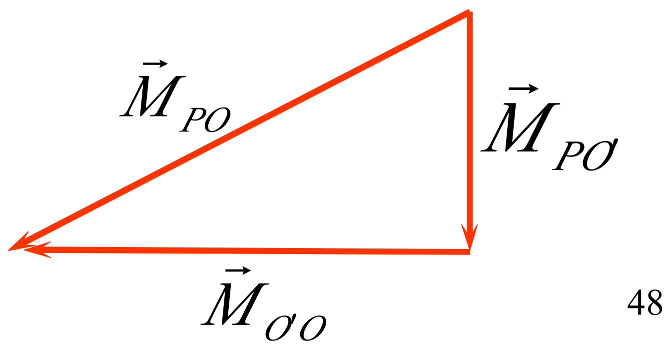



$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t \begin{cases} \text{大小：} a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \\ \text{方向：指向轨道内侧} \end{cases}$$

其中：$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}, \rho$ $-$曲率半径

## 运动描述相对性的一般关系式：

$$\vec{M}_{PO} = \vec{M}_{PO'} + \vec{M}_{O'O}$$



# §1-4 牛顿运动定律

## 一、对三条定律的说明

**1.**第一定律 [物体具有保持运动状态不变的属性]

**2.**第二定律 [物体运动状态变化的规律]

矢量性，

对应性，

瞬时性

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}=m\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\frac{dm}{dt}$$

当$m$可视为恒量时 $\vec{F}=m\vec{a}$

**3.**第三定律 [力的相互作用性]

## 二、牛顿运动定律的适用范围

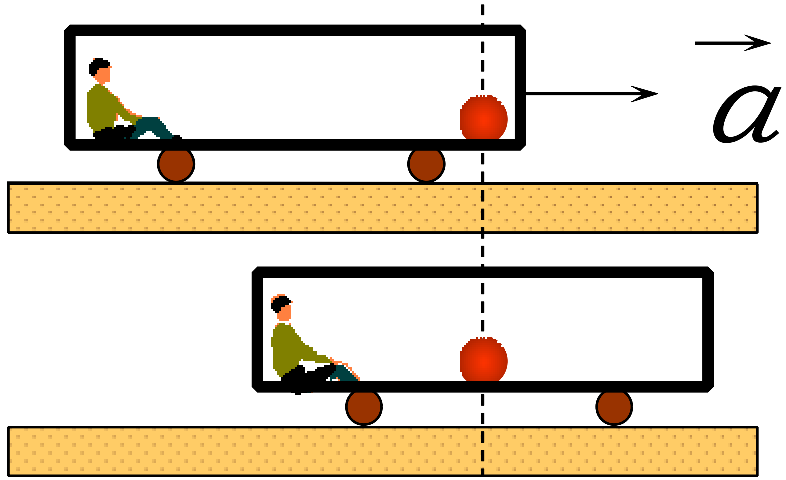
1.宏观（运动范围 $>10^{-8}\,cm$)领域

2.$\vec{F}=m\vec{a}$仅适用于低速（$v<<c$)领域

3.惯性参照系：

在此参照系中观察，一个不受力作用的物体将保持静止或匀速直线运动状态不变。

例：加速小车上的小球。
（小球与小车间无摩擦）




地面观察者：$F = 0$，$a = 0$

车上观察者：$F = 0$，$a \neq 0$

## 三、动力学的二类问题

**1.** 已知物体的运动状态或平衡状态，由力学规律来推断作用在物体上的力。

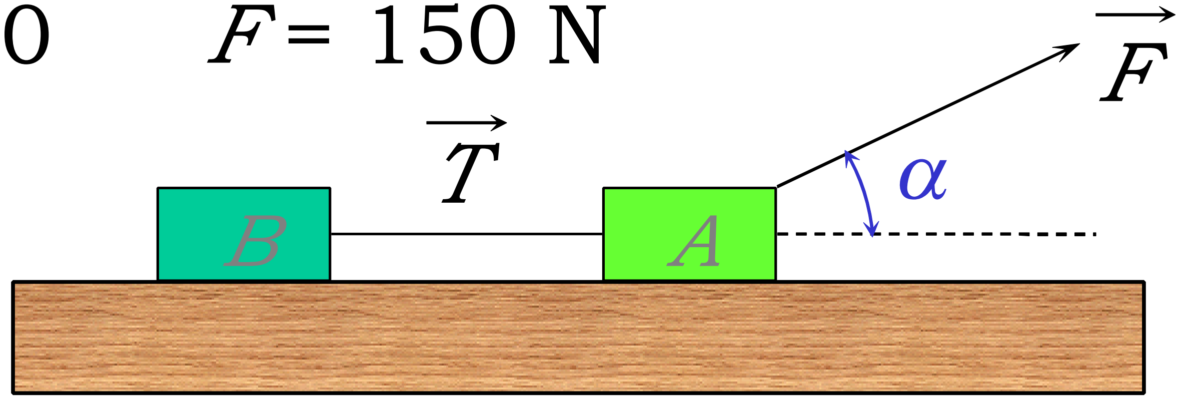
**2.** 已知作用在物体上的力,由力学规律来决定该物体的运动状态或平衡状态。

# 隔离体法解题步骤

- 选隔离体——研究对象
- 确定参照系，建坐标系
- 受力分析并作受力图
- 初定运动状态
- 列方程并求解

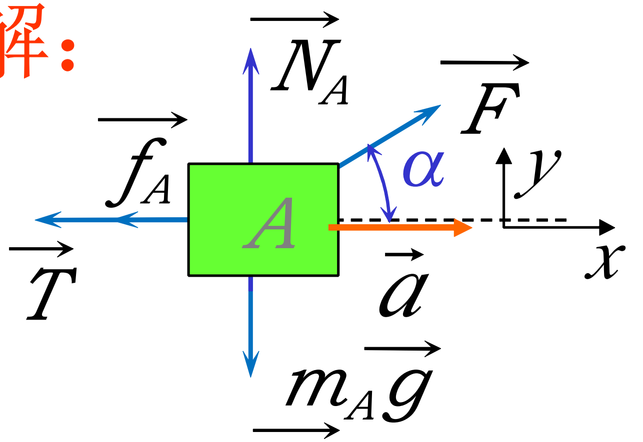
[例] $\alpha = 30^\circ$ $m_A = 50\ \mathrm{kg}$ $m_B = 30\ \mathrm{kg}$

$\mu = 0.10$ $F = 150\ \mathrm{N}$

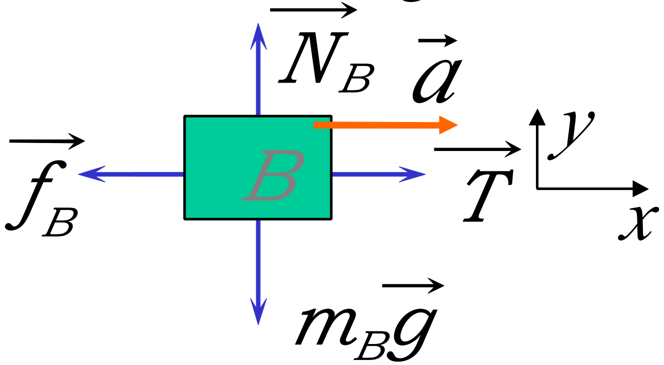



求：$a, T$

解:




$$
A\left\{\begin{array}{l}
F\cos\alpha - T - f_A = m_A a \\
F\sin\alpha + N_A - m_A g = 0 \\
f_A = \mu N_A
\end{array}\right.
$$




$$
B\left\{\begin{array}{l}
T - f_B = m_B a \\
N_B - m_B g = 0 \\
f_B = \mu N_B
\end{array}\right.
$$

$$a=\frac{F(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)-\mu g(m_A+m_B)}{m_A+m_B}=0.74$$

$$T=\frac{m_B(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)F}{m_A+m_B}=\cdots\cdots\cdots$$

讨论：当$\alpha$为何值时，$a=a_{max}$

由 $\frac{d(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}{d\alpha}=0$　得：$\alpha=tg^{-1}\mu$

因为 $\frac{d^2(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}{d\alpha^2}<0$ 所以是极大值

即：当 $\alpha=\mathrm{tg}^{-1}\mu$ 时 $a=a_{max}$

## [ 例 ] 一圆锥摆。已知：$\omega, l$ 求：$\theta$

$$T\sin\theta = ma_n$$

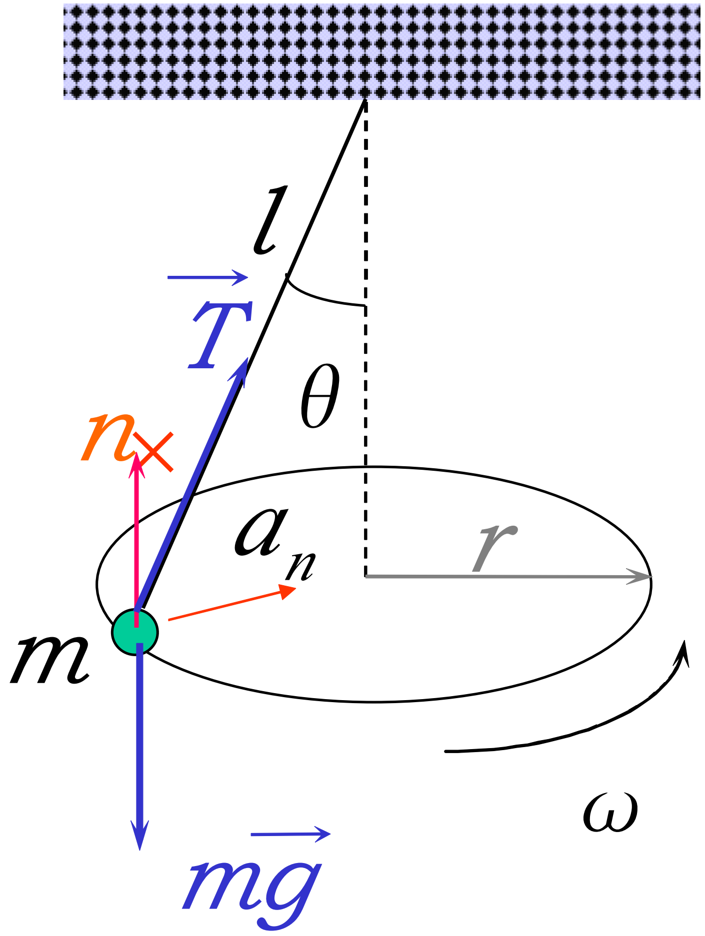
$$= mr\omega^2$$

$$= ml\sin\theta\omega^2$$

$$T\cos\theta - mg = 0$$

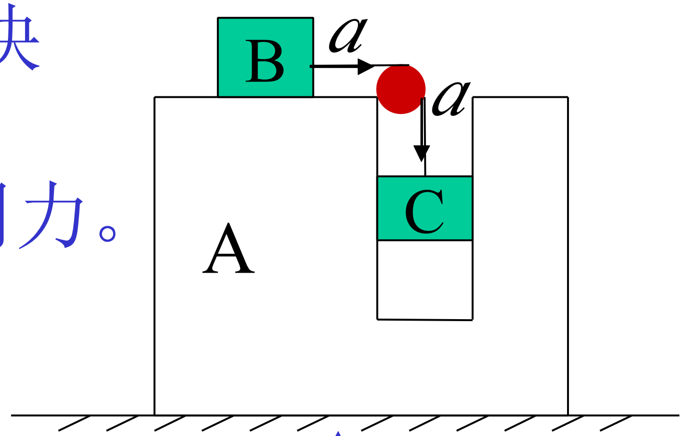
解得：

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)$$

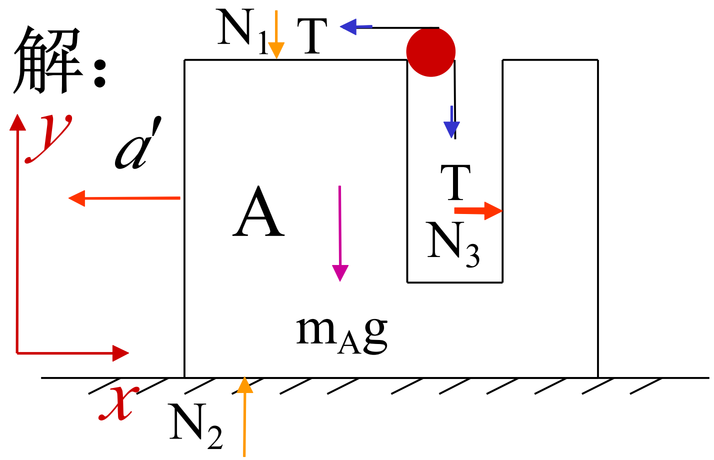


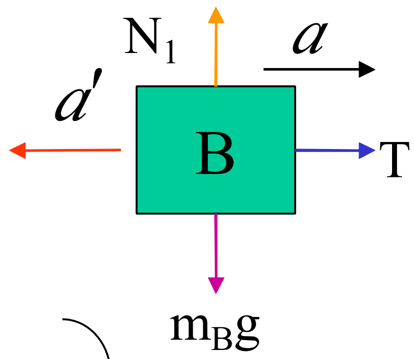
例：已知：所有接触面均光滑，C物块沿槽下滑。

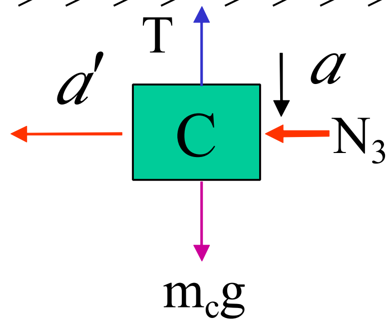
求：A、B、C的运动状态及相互作用力。




解：




$$A\begin{cases} T-N_3=m_A a' \\ N_2-N_1-m_A g-T=0 \end{cases}$$

$$B\begin{cases} T=m_B a''=m_B(a-a') \\ N_1-m_B g=0 \end{cases}$$

$$\mathrm{C}\begin{cases} N_3=m_C a' \\ m_C-T=m_C a \end{cases}$$

$T$

$a$

$a'$

$$\vec{a}''_{B地}=\vec{a}_{BA}+\vec{a}'_{A地}$$

$$\vec{a}'''_{C地}=\vec{a}_{CA}+\vec{a}'_{A地}$$

质量为$m$的子弹以速度$v_0$水平射入砂土中，设子弹所受阻力与速度反向，大小与速度成正比，比例系数为$k$，忽略子弹的重力，求：

（1）子弹射入砂土后，速度随时间变化的函数式；

（2）子弹射入砂土的最大深度。

解（1）：$F=-kv=ma=m\frac{dv}{dt}$ ⇒ $\int_0^t -\frac{k}{m}dt=\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}$ ⇓ $\ln\frac{v}{v_0}=-\frac{k}{m}t$ ⇒ $v=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$

（2）$-kv=m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=mv\frac{dv}{dx}$

⇓

$\int_0^{x_m}dx=\int_{v_0}^{0}-\frac{m}{k}dv$ ⇒ $x_m=\frac{m}{k}v_0$

[例] 细棒 $\rho$ ,$l$ ,下端紧贴 $\rho'$液面,上端悬挂.试求悬线剪断后,细棒全部没入液体时的速度(不计液体粘性)

解:

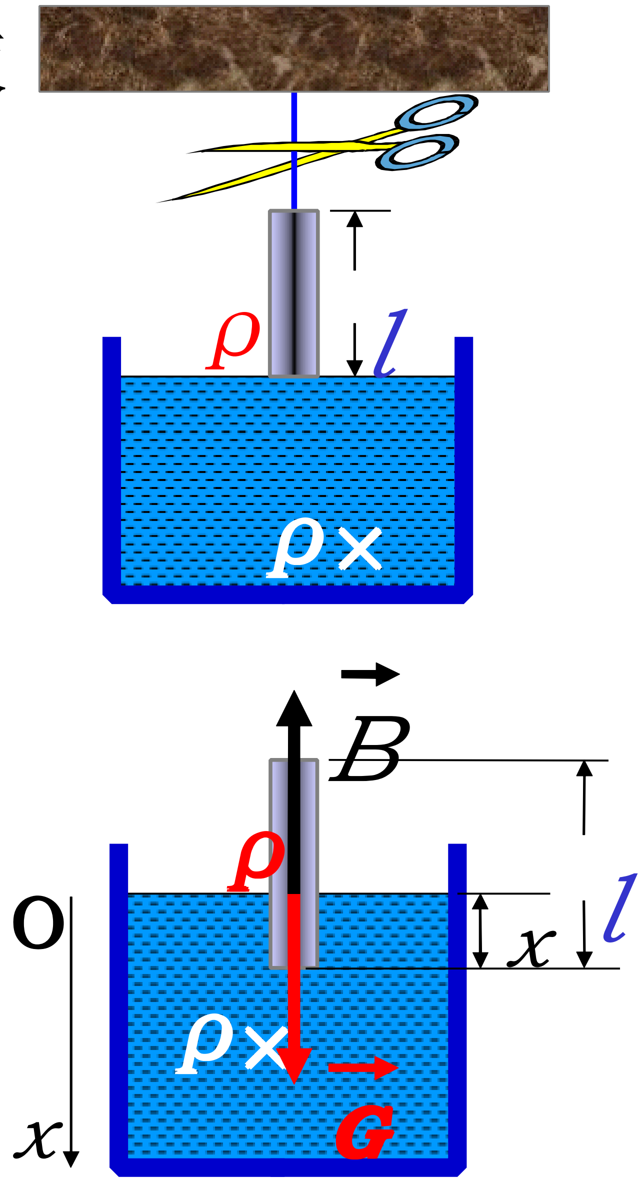
$$\vec{B}+\vec{G}=m\vec{a} \Rightarrow G-B=m\frac{dv}{dt}$$

$$\rho lsg-\rho' xsg=\rho ls\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$(\rho l-\rho' x)gdx=\rho lvdv$$

$$\int_0^l(\rho l-\rho' x)gdx=\int_0^v \rho lvdv$$

$$v=\sqrt{\frac{(2\rho-\rho')gl}{\rho}}$$



# §1-5 非惯性系中的力学定律

物体质量为$m$，受外力为$\vec{F}$,相对惯性系的加速度为$\vec{a}$

相对非惯性系的加速度为$\vec{a}'$

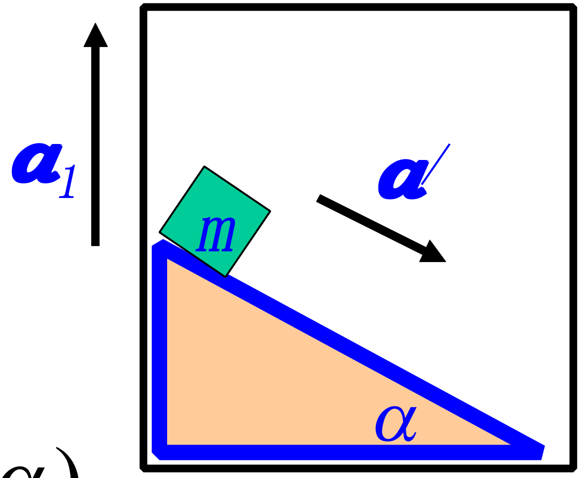
非惯性系相对惯性系的加速度为$\vec{a}''$

则：$\vec{F} = m\vec{a} = m（\vec{a}' + \vec{a}''）$

$$\left.\begin{aligned} &\vec{F} - m\vec{a}'' = m\vec{a}' \\ &\vec{F}' = -m\vec{a}'' \quad \text{——惯性力} \end{aligned}\right\} \vec{F} + \vec{F}' = m\vec{a}'$$

讨论：惯性力是一个假想的力 (惯性力只有受力物体而无施力物体),是运动学思想与动力学思想等效性的体现。

[例]升降机内有倾角为$\alpha$的一光滑斜面，斜面固定在升降机底板上，当升降机以匀加速度$\boldsymbol{a}_1$ 上升时,质量为$m$的工件由斜面顶端下滑，试求此工件相对于斜面的加速度$\boldsymbol{a}'$以及相对于地面的加速度$\boldsymbol{a}$



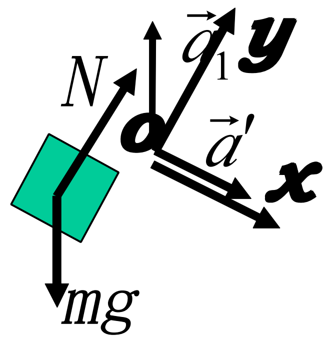

解一：*取地面为参照系(惯性系)*

*选工件为隔离体 工件受力如图示*

$$m\vec{g}+\vec{N}=m\vec{a}=m(\vec{a}'+\vec{a}_1)$$

***x***方向：$mg\sin\alpha = ma_x = m(a' - a_1\sin\alpha)$

***y***方向：$N - mg\cos\alpha = ma_y = ma_1\cos\alpha$



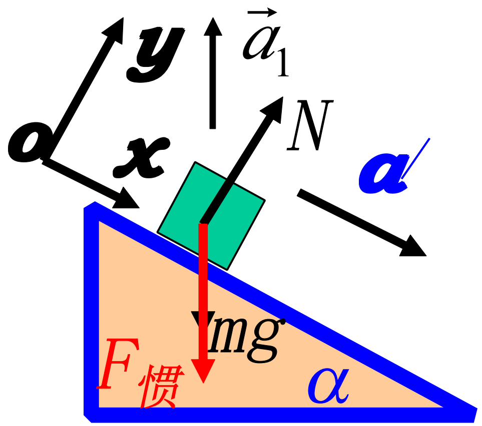

可解得：$a' = (a_1 + g)\sin\alpha$

$N = m(a_1 + g)\cos\alpha$

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}'=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}a_x=a'-a_1\sin\alpha\\ a'=(a_1+g)\sin\alpha\end{array}\right\}\begin{array}{l}a_x=g\sin\alpha\\ a_y=a_1\cos\alpha\end{array}\end{array}\right\}\ a=\sqrt{g^2\sin^2\alpha+a_1^2\cos^2\alpha}$$

## 解二:取升降机为参照系(非惯性系)




$$由\ \vec{F}+\vec{F}_{惯}=m\vec{a}'$$

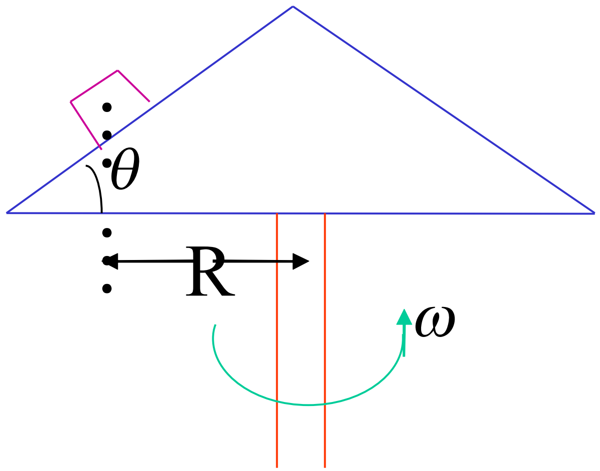
$$\Rightarrow m\vec{g}+\vec{N}-m\vec{a}_1=m\vec{a}'$$

$$\left.\begin{array}{ll}x方向 & mg\sin\alpha+ma_1\sin\alpha=ma'\\ y方向 & -mg\cos\alpha+N-ma_1\cos\alpha=0\end{array}\right\}$$

$$\longrightarrow\quad a'=(a_1+g)\sin\alpha\qquad N=m(a_1+g)\cos\alpha$$

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}'=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}\ \Longrightarrow\ a=\sqrt{g^2\sin^2\alpha+a_1^2\cos^2\alpha}$$

【例】倾角为**θ**圆锥体以**ω**的角速度绕竖直轴匀速转动，侧面放一质量为**m**的物体，转轴与物体间距为**R**，为使物体能在圆锥体上保持静止不动，问物体与圆锥体间的静摩擦系数至少为多少？




解一：取地面为参照系(惯性系)

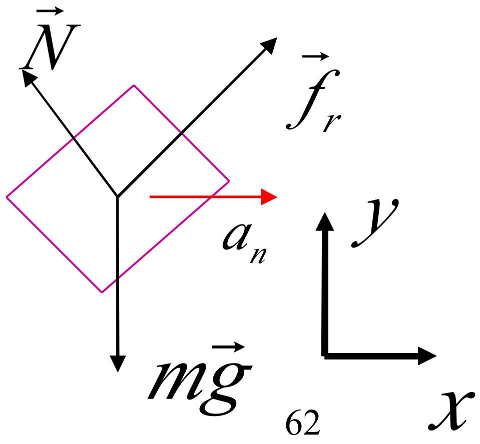
物体受力如图

运动状态：匀速率圆周运动

$$x: \quad f_r\cos\theta - N\sin\theta = mR\omega^2 \cdots(1)$$

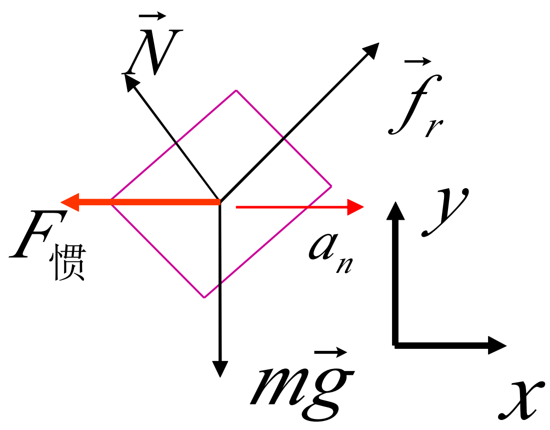
$$y: \quad f_r\sin\theta + N\cos\theta - mg = 0\cdots(2)$$

$$f_r = N\mu\cdots\cdots(3)$$




$$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\right\} \mu_{\min} = \frac{g\sin\theta + R\omega^2\cos\theta}{g\cos\theta - R\omega^2\sin\theta}$$

## 解二：取圆锥体为参照系(非惯性系)




物体受力如图

运动状态：静止

$$x: \quad f_r\cos\theta - N\sin\theta - ma_n = 0 \cdots (1)$$

$$y: \quad f_r\sin\theta + N\cos\theta - mg = 0 \cdots (2)$$

$$f_r = \mu N \cdots (3)$$

$$a_n = R\omega^2 \cdots (4)$$

$$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{matrix}\right\} \mu_{\min} = \frac{g\sin\theta + R\omega^2\cos\theta}{g\cos\theta - R\omega^2\sin\theta}$$