

$$2.7、(2) \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0, t) = 0, u(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \cos \frac{\pi}{2l} x, \\ u_t(x, 0) = \cos \frac{3\pi}{2l} x + \cos \frac{5\pi}{2l} x & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

**解：** 对应的特征值问题为  $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow$  特征函

数  $\{\cos \frac{(2n-1)\pi}{2l} x\}_{n=1}^{\infty}$ .

**u(x, t)**按特征函数系展开, 代入方程和初始条件可得

$$\begin{cases} u_n''(t) + a^2 [\frac{(2n-1)\pi}{2l}]^2 u_n(t) = 0 \\ u_n(0) = u_n'(0) = 0, \end{cases} \quad n \neq 1, 2, 3 \quad \begin{cases} u_1''(t) + a^2 [\frac{\pi}{2l}]^2 u_1(t) = 0 \\ u_1(0) = 1, u_1'(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_i''(t) + a^2 [\frac{(2i-1)\pi}{2l}]^2 u_i(t) = 0 \\ u_i(0) = 0, u_i'(0) = 1, \end{cases} \quad i = 2, 3$$

**求解以上方程组**  $\Rightarrow u_1(t) = \cos \frac{a\pi}{2l} t, \quad u_2(t) = \frac{2l}{3a\pi} \sin \frac{3a\pi}{2l} t, \quad u_3(t) = \frac{2l}{5\pi a} \sin \frac{5a\pi}{2l} t, \quad u_n(t) = 0, n = 4, 5, \dots$

**所以定解问题得解为**

$$u(x, t) = \cos \frac{a\pi}{2l} t \cos \frac{\pi}{2l} x + \frac{2l}{3a\pi} \sin \frac{3a\pi}{2l} t \cos \frac{3\pi}{2l} x + \frac{2l}{5\pi a} \sin \frac{5a\pi}{2l} t \cos \frac{5\pi}{2l} x$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

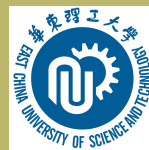
Page 1 of 4

Go Back

Full Screen

Close

Quit



$$2.7、(3) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin \frac{2\pi}{l}x \sin \frac{2\pi}{l}t, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

**解：**对应的特征值问题为  $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow$  特征函数  $\{\sin \frac{n\pi}{l}x\}_{n=1}^{\infty}$ .

**■**  $u(x, t)$  按特征函数系展开，代入方程和初始条件可得

$$\begin{cases} u_n''(t) + (\frac{n\pi}{l})^2 u_n(t) = 0 \\ u_n(0) = u_n'(0) = 0, \quad n \neq 2 \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} u_2''(t) + (\frac{2\pi}{l})^2 u_2(t) = \sin \frac{2\pi}{l}t \\ u_2(0) = u_2'(0) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

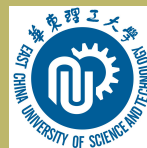
**■** 定解问题(1)的解  $u_n(t) = 0, n \neq 2$ , 定解问题(2)利用齐次化原理有

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \int_0^t \frac{l}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{l}\tau \sin \frac{2\pi}{l}(t - \tau) d\tau \\ &= -\frac{l}{4\pi}t \cos \frac{2\pi t}{l} + \frac{l^2}{8\pi^2} \sin \frac{2\pi}{l}t \end{aligned}$$

**■** 所以原定解问题的解为

$$u(x, t) = \left(-\frac{l}{4\pi}t \cos \frac{2\pi t}{l} + \frac{l^2}{8\pi^2} \sin \frac{2\pi}{l}t\right) \sin \frac{2\pi}{l}x$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 2 of 4](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



$$2.9、(2) \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = \cos x, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u_x(0, t) = 0, u_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \cos 2x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

**解：**对应的特征值问题为  $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow$  特征函数  $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ .

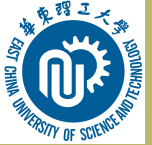
**解：** $u(x, t)$  按特征函数系展开，代入方程和初始条件可得

$$\begin{cases} u_1'(t) + a^2 u_1(t) = 1 \\ u_1(0) = 0, \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} u_2'(t) + 4a^2 u_2(t) = 0 \\ u_2(0) = 1, \end{cases} \quad (2)$$
$$\begin{cases} u_n'(t) + a^2 u_n(t) = 0, \\ u_n(0) = 0, \end{cases} \quad n = 3, 4, \dots \quad (3)$$

**解：**方程(1)的解  $u_1(t) = \frac{1}{a^2}(1 - e^{-a^2 t})$ ，方程(2)的解  $u_2(t) = e^{-4a^2 t}$ ，定解问题(3)的解为  $u_n(t) = 0, n \geq 0$ ，所以原定解问题的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{a^2}(1 - e^{-a^2 t}) \cos x + e^{-4a^2 t} \cos 2x$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 3 of 4](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



## 对于特征展开法作业注意：

- 由齐次方程和齐次边界条件给出相应的特征值问题，由特征值问题直接给出特征值和特征函数即可，这里不要推导特征值的过程；
- 将已知函数和未知函数按特征函数展开，代回原定解问题的方程和初始条件，利用特征函数的正交性这时会得到一系列的常微分方程的初值问题，
- 在这些常微分方程的初值问题中，如果出现了类似2.7(3)中齐次方程齐次初始条件的方程组(1),我们可判断出这类方程组只有零解
- 如果是非齐次方程，要利用齐次化原理求出解，这里求解的时候需要将积分的最后表达形式计算出来，一般积分会涉及到三角函数，指数函数，还有多项式函数的积分不会有很复杂的计算

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 4 of 4](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)