第四章 抛物型方程的差分法

第四章 抛物型方程的差分法

偏微分方程按是否与时间有关分成两类：

第四章 抛物型方程的差分法

偏微分方程按是否与时间有关分成两类：

- 驻定问题：不随时间t改变，例如椭圆型方程

第四章 抛物型方程的差分法

偏微分方程按是否与时间有关分成两类：

- 驻定问题：不随时间t改变，例如椭圆型方程
- 非驻定方程：与时间t有关，例如：抛物型方程、双曲型方程。

第四章 抛物型方程的差分法

偏微分方程按是否与时间有关分成两类：

- 驻定问题：不随时间t改变，例如椭圆型方程
- 非驻定方程：与时间t有关，例如：抛物型方程、双曲型方程。
- 本章主要讨论非驻定问题的差分法

第四章 抛物型方程的差分法

偏微分方程按是否与时间有关分成两类：

- 驻定问题：不随时间t改变，例如椭圆型方程
- 非驻定方程：与时间t有关，例如：抛物型方程、双曲型方程。
- 本章主要讨论非驻定问题的差分法

$\star$4.1 一维抛物型方程的差分格式

第四章 抛物型方程的差分法

偏微分方程按是否与时间有关分成两类：

- 驻定问题：不随时间t改变，例如椭圆型方程
- 非驻定方程：与时间t有关，例如：抛物型方程、双曲型方程。
- 本章主要讨论非驻定问题的差分法

⋆4.1 一维抛物型方程的差分格式

最简单的抛物型方程是一维线性方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x})+d(x,t)u=f(x,t),(x,t)\in\Omega. \qquad (1)$$

在Ω内，函数a恒正，$d\geq 0$.通常考虑下列两种定解问题：

- 初值问题(或称Cauchy（柯西）问题)Ω为带状区域$\{(x,t)| -\infty < x < \infty, 0 < t < T\}$,求$u(x,t)$满足方程(1)和初始条件

$$u(x,0) = \phi(x), -\infty < x < \infty. \tag{2}$$

- 初值问题(或称Cauchy（柯西）问题)Ω为带状区域$\{(x,t)|-\infty<x<\infty, 0<t<T\}$,求$u(x,t)$满足方程(1)和初始条件

$$u(x,0)=\phi(x), -\infty<x<\infty. \tag{2}$$

- 初边值问题(或称混合问题) Ω为带状区域$\{(x,t)|0<x<l, 0<t<T\}$,求$u(x,t)$满足方程(1)和初始条件

$$u(x,0)=\phi(x), -\infty<x<\infty. \tag{3}$$

以及边界条件

$$\alpha_1(t)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}+\alpha_0(t)u(0,t)=\alpha_2(t), \tag{4}$$

$$\beta_1(t)\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}+\beta_0(t)u(l,t)=\beta_2(t). \tag{5}$$

- 随着系数$\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$的改变可构成不同类型的边界条件，但必须满足条件

$$\alpha_0(t) \geq 0, \alpha_1(t) \leq 0, |\alpha_0| + |\alpha_1| > 0,$$

$$\beta_0(t) \geq 0, \beta_1(t) \leq 0, |\beta_0| + |\beta_1| > 0,$$

- 随着系数$\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$的改变可构成不同类型的边界条件，但必须满足条件

$$\alpha_0(t) \geq 0, \alpha_1(t) \leq 0, |\alpha_0| + |\alpha_1| > 0,$$

$$\beta_0(t) \geq 0, \beta_1(t) \leq 0, |\beta_0| + |\beta_1| > 0,$$

- 当$\alpha_1(t) = \beta_1(t) = 0$,则成为第一边界条件

$$u(0,t) = \alpha(t), u(l,t) = \beta(t), 0 \geq t \leq T. \tag{6}$$

- 随着系数$\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$的改变可构成不同类型的边界条件，但必须满足条件

$$\alpha_0(t) \geq 0, \alpha_1(t) \leq 0, |\alpha_0| + |\alpha_1| > 0,$$

$$\beta_0(t) \geq 0, \beta_1(t) \leq 0, |\beta_0| + |\beta_1| > 0,$$

- 当$\alpha_1(t) = \beta_1(t) = 0$,则成为第一边界条件

$$u(0,t) = \alpha(t), u(l,t) = \beta(t), 0 \geq t \leq T. \tag{6}$$

- 假设$\alpha(0) = \phi(0), \beta(0) = \phi(l)$,设$f$和$\phi$充分光滑，则上述问题有惟一充分光滑的解。

⋆4.1.1 常系数热传导方程的差分格式

⋆4.1.1 常系数热传导方程的差分格式

在(1)中设a为正的常数，$d \equiv 0$,则得到常系数的一维热传导方程

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, (x, t) \in \Omega. \tag{7}$$

⋆4.1.1 常系数热传导方程的差分格式

在(1)中设a为正的常数，$d\equiv 0$,则得到常系数的一维热传导方程

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, (x,t)\in\Omega. \tag{7}$$

- 在研究分子扩散过程时会遇到类似的方程，因此方程(7)也称为扩散方程。

⋆4.1.1 常系数热传导方程的差分格式

在(1)中设a为正的常数，$d \equiv 0$,则得到常系数的一维热传导方程

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, (x,t) \in \Omega. \tag{7}$$

- 在研究分子扩散过程时会遇到类似的方程，因此方程(7)也称为扩散方程。
- 当$f = 0$时，对初始条件(2),此问题有解析解

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}} \exp[-\frac{(\xi - x)^2}{4at}]\phi(\xi)d\xi.$$

用差分方法求解上述问题

用差分方法求解上述问题

- 先对区域进行离散：

用差分方法求解上述问题

- 先对区域进行离散：
  - 空间步长$h=\frac{l}{N}$,时间步长$\tau,\tau<T$,作两族平行直线

$$x=x_j=jh, j=1,2,\cdots,N.$$

$$t=t_k=k\tau, k=0,1,2,\cdots,M=[\frac{T}{\tau}]$$

用差分方法求解上述问题

- 先对区域进行离散：
  - 空间步长$h = \frac{l}{N}$,时间步长$\tau, \tau < T$,作两族平行直线

$$x = x_j = jh, j = 1, 2, \cdots, N.$$

$$t = t_k = k\tau, k = 0, 1, 2, \cdots, M = [\frac{T}{\tau}]$$

  - 这两族直线将Ω分割成小矩形网格，交点(x_j, t_k)称为节点，记为(j, k).

用差分方法求解上述问题

- 先对区域进行离散：
  - 空间步长$h=\frac{l}{N}$,时间步长$\tau,\tau<T$,作两族平行直线

$$x=x_j=jh,j=1,2,\cdots,N.$$

$$t=t_k=k\tau,k=0,1,2,\cdots,M=[\frac{T}{\tau}]$$

  - 这两族直线将Ω分割成小矩形网格，交点(x_j,t_k)称为节点，记为(j,k).
  - 在$x=0,x=l,t=0$上的节点称为边界节点。

用差分方法求解上述问题

- 先对区域进行离散：
  - 空间步长$h = \frac{l}{N}$,时间步长$\tau, \tau < T$,作两族平行直线

$$x = x_j = jh, j = 1, 2, \cdots, N.$$

$$t = t_k = k\tau, k = 0, 1, 2, \cdots, M = [\frac{T}{\tau}]$$

  - 这两族直线将Ω分割成小矩形网格，交点(x_j, t_k)称为节点，记为(j, k).
  - 在$x = 0, x = l, t = 0$上的节点称为边界节点。
  - 其余的称为内节点(简称内点)

用差分方法求解上述问题

- 先对区域进行离散：
  - 空间步长$h=\frac{l}{N}$,时间步长$\tau,\tau<T$,作两族平行直线

$$x=x_j=jh,j=1,2,\cdots,N.$$

$$t=t_k=k\tau,k=0,1,2,\cdots,M=[\frac{T}{\tau}]$$

  - 这两族直线将Ω分割成小矩形网格，交点(x_j,t_k)称为节点，记为(j,k).
  - 在$x=0,x=l,t=0$上的节点称为边界节点。
  - 其余的称为内节点(简称内点)
  - 我们的目的：求出方程定解问题的真解在(j,k)处的解$u(x_j,t_k)$的近似值u_j^k,即定义在节点上的网函数u_j^k.

对方程用直接差分法进行离散，用适当的差商代替方程中的偏微商，就可得到以下几种最简差分格式

- (1).古典显格式

对方程用直接差分法进行离散，用适当的差商代替方程中的偏微商，就可得到以下几种最简差分格式

- (1).古典显格式
  - 在节点(j,k)上，用$u(x_j,t_k)$在t方向的向前差商代替$\frac{\partial u(x_j,t_k)}{\partial t}$,

对方程用直接差分法进行离散，用适当的差商代替方程中的偏微商，就可得到以下几种最简差分格式

- (1).古典显格式
  - 在节点(j,k)上，用$u(x_j,t_k)$在t方向的向前差商代替$\frac{\partial u(x_j,t_k)}{\partial t}$,
  - 用$u(x_j,t_k)$在x方向的二阶中心差商代替$\frac{\partial^2 u(x_j,t_k)}{\partial x^2}$，即得古典显格式

$$L_h^{(1)}u_j^k = \frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau} - a\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} = f_j^k, \qquad (8)$$

$$j=1,2,\cdots,N-1, k=0,1,\cdots,M-1.$$

式中$f_j^k = f(x_j,t_k)$

对方程用直接差分法进行离散，用适当的差商代替方程中的偏微商，就可得到以下几种最简差分格式

- (1).古典显格式
  - 在节点(j,k)上，用$u(x_j,t_k)$在t方向的向前差商代替$\frac{\partial u(x_j,t_k)}{\partial t}$，
  - 用$u(x_j,t_k)$在x方向的二阶中心差商代替$\frac{\partial^2 u(x_j,t_k)}{\partial x^2}$，即得古典显格式

$$L_h^{(1)}u_j^k = \frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau} - a\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} = f_j^k, \qquad (8)$$

$$j=1,2,\cdots,N-1, k=0,1,\cdots,M-1.$$

式中$f_j^k = f(x_j,t_k)$

  - $r = \frac{a\tau}{h^2}$称为网比，差分方程(8)又可以写成以下便于计算的格式

$$u_j^{k+1} = ru_{j+1}^k + (1-2r)u_j^k + ru_{j-1}^k + \tau f_j^k. \qquad (9)$$

对方程用直接差分法进行离散，用适当的差商代替方程中的偏微商，就可得到以下几种最简差分格式

- (1).古典显格式
  - 在节点(j,k)上，用$u(x_j,t_k)$在t方向的向前差商代替$\frac{\partial u(x_j,t_k)}{\partial t}$，
  - 用$u(x_j,t_k)$在x方向的二阶中心差商代替$\frac{\partial^2 u(x_j,t_k)}{\partial x^2}$，即得古典显格式

$$L_h^{(1)}u_j^k = \frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau} - a\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} = f_j^k, \qquad (8)$$

$$j=1,2,\cdots,N-1, k=0,1,\cdots,M-1.$$

式中$f_j^k = f(x_j,t_k)$

  - $r = \frac{a\tau}{h^2}$称为网比，差分方程(8)又可以写成以下便于计算的格式

$$u_j^{k+1} = ru_{j+1}^k + (1-2r)u_j^k + ru_{j-1}^k + \tau f_j^k. \qquad (9)$$

  - 第$k+1$层的值由第k层的值明显表示出来，无需解方程组，如此的差分格式成为显格式。

对方程用直接差分法进行离散，用适当的差商代替方程中的偏微商，就可得到以下几种最简差分格式

- (1).古典显格式
  - 在节点(j,k)上，用$u(x_j,t_k)$在t方向的向前差商代替$\frac{\partial u(x_j,t_k)}{\partial t}$，
  - 用$u(x_j,t_k)$在x方向的二阶中心差商代替$\frac{\partial^2 u(x_j,t_k)}{\partial x^2}$，即得古典显格式

$$L_h^{(1)}u_j^k = \frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau} - a\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} = f_j^k, \qquad (8)$$

$$j = 1,2,\cdots,N-1, k = 0,1,\cdots,M-1.$$

  式中$f_j^k = f(x_j,t_k)$

  - $r = \frac{a\tau}{h^2}$称为网比，差分方程(8)又可以写成以下便于计算的格式

$$u_j^{k+1} = ru_{j+1}^k + (1-2r)u_j^k + ru_{j-1}^k + \tau f_j^k. \qquad (9)$$

  - 第$k+1$层的值由第k层的值明显表示出来，无需解方程组，如此的差分格式成为显格式。

- 由Taylor展开，可知截断误差

$$R_j^k(u) = L_h^{(1)}u(x_j, t_k) - [Lu]_j^k = -\tau[\frac{1}{12r} - \frac{1}{2}](\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2})_j^k + O(\tau^2) \quad (10)$$

$$= O(\tau + h^2). \quad (10')$$

- 由Taylor展开，可知截断误差

$$R_j^k(u) = L_h^{(1)}u(x_j, t_k) - [Lu]_j^k = -\tau[\frac{1}{12r} - \frac{1}{2}](\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2})_j^k + O(\tau^2) \quad (10)$$

$$= O(\tau + h^2). \quad (10')$$

- 其中$(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2})_j^k$是$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$在矩形$\{x_{j-1} < x < x_{j+1}, t_k < t < t_{k+1}\}$中某点的值。

- 由Taylor展开，可知截断误差

$$R_j^k(u) = L_h^{(1)}u(x_j,t_k) - [Lu]_j^k = -\tau[\frac{1}{12r} - \frac{1}{2}](\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2})_j^k + O(\tau^2) \quad (10)$$

$$= O(\tau + h^2). \quad (10')$$

- 其中$(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2})_j^k$是$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$在矩形$\{x_{j-1} < x < x_{j+1}, t_k < t < t_{k+1}\}$中某点的值。
- 当u具有对x的四阶连续导数时，式$(10)'$总成立

- 由Taylor展开，可知截断误差

$$R_j^k(u) = L_h^{(1)} u(x_j, t_k) - [Lu]_j^k = -\tau[\frac{1}{12r} - \frac{1}{2}](\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2})_j^k + O(\tau^2) \quad (10)$$

$$= O(\tau + h^2). \quad (10')$$

- 其中$(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2})_j^k$是$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$在矩形$\{x_{j-1} < x < x_{j+1}, t_k < t < t_{k+1}\}$中某点的值。
- 当u具有对x的四阶连续导数时，式$(10)'$总成立
- 式(10)的导出需假定f与t无关，这在后面几种格式的截断误差的导出中也同样。

- 把显格式写成矩阵形式

- 把显格式写成矩阵形式
- 记

$$
U^k = [u_1^k, u_2^k, \cdots, u_{N-1}^k]^T,
$$

$$
F^k = [f_1^k, f_2^k, \cdots, f_{N-1}^k]^T,
$$

$$
C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

其中U^k和F^k是$N-1$维向量，C是$N-1$阶矩阵。

- 把显格式写成矩阵形式
- 记

$$U^k = [u_1^k, u_2^k, \cdots, u_{N-1}^k]^T,$$
$$F^k = [f_1^k, f_2^k, \cdots, f_{N-1}^k]^T,$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

其中U^k和F^k是$N-1$维向量，C是$N-1$阶矩阵。

- 设边界条件为齐次的，即$\alpha(t) = \beta(t) = 0$,，则式(9)可写成矩阵形式：

$$U^{k+1} = [(1-2r)I + rC]U^k + \tau F^k, \tag{11}$$

- 古典隐格式

- 古典隐格式
  - 在节点$(j,k+1)$上，用$u(x_j,t_{k+1})$在t方向用向后差商代替$\frac{\partial u(x_j,t_{k+1})}{\partial t}$.

- 古典隐格式
  - 在节点$(j, k+1)$上，用$u(x_j, t_{k+1})$在t方向用向后差商代替$\frac{\partial u(x_j,t_{k+1})}{\partial t}$.
  - 在节点$(j, k+1)$上，用$u(x_j, t_{k+1})$在x方向用二阶中心差商代替$\frac{\partial^2 u(x_j,t_{k+1})}{\partial x^2}$.

- 古典隐格式
  - 在节点$(j,k+1)$上，用$u(x_j,t_{k+1})$在t方向用向后差商代替$\frac{\partial u(x_j,t_{k+1})}{\partial t}$.
  - 在节点$(j,k+1)$上，用$u(x_j,t_{k+1})$在x方向用二阶中心差商代替$\frac{\partial^2 u(x_j,t_{k+1})}{\partial x^2}$.
  - 古典差分格式

$$L_h^{(2)} u_j^{k+1} = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a\frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} = f_j^{k+1}. \quad (12)$$

$$j = 1, 2, \cdots, N-1, k = 0, 1, \cdots, M-1.$$

  - 引进网比可进一步写成

$$-ru_{j+1}^{k+1} + (1+2r)u_j^{k+1} - ru_{j-1}^{k+1} = u_j^k + \tau f_j^{k+1}. \quad (13)$$

- 古典隐格式
  - 在节点$(j, k+1)$上，用$u(x_j, t_{k+1})$在t方向用向后差商代替$\frac{\partial u(x_j,t_{k+1})}{\partial t}$.
  - 在节点$(j, k+1)$上，用$u(x_j, t_{k+1})$在x方向用二阶中心差商代替$\frac{\partial^2 u(x_j,t_{k+1})}{\partial x^2}$.
  - 古典差分格式

$$L_h^{(2)} u_j^{k+1} = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a\frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} = f_j^{k+1}. \quad (12)$$

$$j = 1, 2, \cdots, N-1, k = 0, 1, \cdots, M-1.$$

  - 引进网比可进一步写成

$$-ru_{j+1}^{k+1} + (1+2r)u_j^{k+1} - ru_{j-1}^{k+1} = u_j^k + \tau f_j^{k+1}. \quad (13)$$

  - 第$k+1$层的值不能用第k层的值明显表示，而是要通过解一个三对角的代数方程组得到，如此的差分格式称为隐格式

- 古典隐格式
  - 在节点$(j,k+1)$上，用$u(x_j,t_{k+1})$在t方向用向后差商代替$\frac{\partial u(x_j,t_{k+1})}{\partial t}$.
  - 在节点$(j,k+1)$上，用$u(x_j,t_{k+1})$在x方向用二阶中心差商代替$\frac{\partial^2 u(x_j,t_{k+1})}{\partial x^2}$.
  - 古典差分格式

$$L_h^{(2)}u_j^{k+1}=\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}-a\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2}=f_j^{k+1}. \quad (12)$$

$$j=1,2,\cdots,N-1,k=0,1,\cdots,M-1.$$

  - 引进网比可进一步写成

$$-ru_{j+1}^{k+1}+(1+2r)u_j^{k+1}-ru_{j-1}^{k+1}=u_j^k+\tau f_j^{k+1}. \quad (13)$$

  - 第$k+1$层的值不能用第k层的值明显表示，而是要通过解一个三对角的代数方程组得到，如此的差分格式称为隐格式

- 假设边界条件齐次，可写成矩阵形式

$$[(1+2r)I - rC]U^{k+1} = U^k + \tau F^{k+1}. \tag{14}$$

这里系数矩阵是严格对角占优的，因此方程组有唯一解,一般可用追赶法求解

- 假设边界条件齐次，可写成矩阵形式

$$[(1+2r)I - rC]U^{k+1} = U^k + \tau F^{k+1}. \tag{14}$$

这里系数矩阵是严格对角占优的，因此方程组有唯一解,一般可用追赶法求解

- 它的截断误差为

$$R_j^k(u) = L_h^{(2)} u(x_j, t_k) - [Lu]_j^k = -\tau[\frac{1}{12r} + \frac{1}{2}](\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2})_j^k + O(\tau^2) \quad (15)$$

$$= (\tau + h^2), \quad (15)'$$

其中$(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2})_j^k$是$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$在矩形$\{x_{j-1} < x < x_{j+1}, t_k < t < t_{k+1}\}$中某点的值。

- 六点对称格式(Crank-Nicolson格式):

- 六点对称格式(Crank-Nicolson格式):
  - 将古典显格式和古典隐格式作算术平均，即得六点对称格式

$$L_h^{(3)}u_j^k=\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}-\frac{a}{2}[\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2}+\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2}]$$
$$+\frac{1}{2}[f_j^k+f_j^{k+1}]. \tag{16}$$

- 六点对称格式(Crank-Nicolson格式):
  - 将古典显格式和古典隐格式作算术平均，即得六点对称格式

$$L_h^{(3)}u_j^k=\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}-\frac{a}{2}\left[\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2}+\frac{u_{j+1}^{k}-2u_j^{k}+u_{j-1}^{k}}{h^2}\right]+\frac{1}{2}[f_j^k+f_j^{k+1}]. \tag{16}$$

  - 它可以看作在节点$(j,k+\frac{1}{2})$上在t方向用中心差商代替$\frac{\partial u(x_j,t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial t}$.

- 六点对称格式(Crank-Nicolson格式):
  - 将古典显格式和古典隐格式作算术平均，即得六点对称格式

$$L_h^{(3)}u_j^k = \frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau} - \frac{a}{2}\left[\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + \frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2}\right] + \frac{1}{2}[f_j^k + f_j^{k+1}]. \quad (16)$$

  - 它可以看作在节点$(j, k+\frac{1}{2})$上在t方向用中心差商代替$\frac{\partial u(x_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial t}$.
  - 在x方向用k层和$k+1$层的二阶中心差商的算术平均代替$\frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial x^2}$

- 六点对称格式(Crank-Nicolson格式):
  - 将古典显格式和古典隐格式作算术平均，即得六点对称格式

$$L_h^{(3)}u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - \frac{a}{2}\left[\frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}\right] + \frac{1}{2}[f_j^k + f_j^{k+1}]. \quad (16)$$

  - 它可以看作在节点$(j, k+\frac{1}{2})$上在t方向用中心差商代替$\frac{\partial u(x_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial t}$.
  - 在x方向用k层和$k+1$层的二阶中心差商的算术平均代替$\frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial x^2}$
  - 引用网比的记号，格式(16)可写成

$$-\frac{r}{2}u_{j+1}^{k+1} + (1+r)u_j^{k+1} - \frac{r}{2}u_{j-1}^{k+1} = \frac{r}{2}u_{j+1}^k + (1-r)u_j^k + \frac{r}{2}u_{j-1}^k + \frac{\tau}{2}(f_j^k + f_j^{k+1}). \quad (17)$$

- 六点对称格式(Crank-Nicolson格式):
  - 将古典显格式和古典隐格式作算术平均，即得六点对称格式

$$L_h^{(3)}u_j^k = \frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau} - \frac{a}{2}\left[\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + \frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2}\right] + \frac{1}{2}[f_j^k + f_j^{k+1}]. \tag{16}$$

  - 它可以看作在节点$(j, k+\frac{1}{2})$上在t方向用中心差商代替$\frac{\partial u(x_j,t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial t}$.
  - 在x方向用k层和$k+1$层的二阶中心差商的算术平均代替$\frac{\partial^2 u(x_j,t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial x^2}$
  - 引用网比的记号，格式(16)可写成

$$-\frac{r}{2}u_{j+1}^{k+1}+(1+r)u_j^{k+1}-\frac{r}{2}u_{j-1}^{k+1} = \frac{r}{2}u_{j+1}^k+(1-r)u_j^k+\frac{r}{2}u_{j-1}^k+\frac{\tau}{2}(f_j^k+f_j^{k+1}). \tag{17}$$

- 可以通过解一个三对角的线性方程组，可由第k层的值计算出第$k+1$层的值。方程组的系数矩阵也是严格对角占优的，故方程组唯一可解

- 可以通过解一个三对角的线性方程组，可由第k层的值计算出第$k+1$层的值。方程组的系数矩阵也是严格对角占优的，故方程组唯一可解
- 矩阵形式

$$[(1+r)I-\frac{r}{2}C]U^{k+1}=[(1-r)I+\frac{r}{2}C]U^k+\frac{\tau}{2}[F^{k+1}+F^k], \quad (18)$$

- 可以通过解一个三对角的线性方程组，可由第k层的值计算出第$k+1$层的值。方程组的系数矩阵也是严格对角占优的，故方程组唯一可解
- 矩阵形式

$$[(1+r)I - \frac{r}{2}C]U^{k+1} = [(1-r)I + \frac{r}{2}C]U^{k} + \frac{\tau}{2}[F^{k+1} + F^{k}], \quad (18)$$

- 截断误差的推导需将函数在$(x_j, t_{k+\frac{1}{2}})(t_{k+\frac{1}{2}} = (k+\frac{1}{2})\tau)$处展开，得

$$R_j^k(u) = L_h^{(3)}u(x_j, t_k) - [Lu]_j^k = O(\tau^2 + h^2), \quad (19)$$

- 双层加权平均格式

- 双层加权平均格式
  - 把六点对称格式的推导方法进一步的推广。

- 双层加权平均格式
  - 把六点对称格式的推导方法进一步的推广。
  - 将差分格式建立在(j,k)和$(j,k+1)$连线的任意点$(j,k+\theta)$上，其中θ为参数，$0\leq\theta\leq1$，在x方向上用第k层和第$k+1$层上的二阶中心差商的加权平均代替二阶偏导，即可得加权格式

$$
\begin{aligned}
L_h^{(4)}u_j^k &= \frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau} - [a\theta\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2} \\
&+a(1-\theta)\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2}] = \tau[\theta f_j^{k+1}+(1-\theta)f_j^k], \quad (20)
\end{aligned}
$$

$$j=1,\cdots,N-1, k=0,1,\cdots,M-1, 0\leq\theta\leq1.$$

- 引进网比记号，格式(20)又可写成

$$(1+2\theta)u_j^{k+1}-\theta r(u_{j+1}^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}),$$

$$=[1-2(1-\theta)r]u_j^k+(1-\theta)r(u_{j+1}^k+u_{j-1}^k)+\tau[\theta f_j^{k+1}+(1-\theta)f_j^k]. \tag{21}$$

- 引进网比记号，格式(20)又可写成

$$(1+2\theta)u_j^{k+1} - \theta r(u_{j+1}^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}),$$

$$= [1-2(1-\theta)r]u_j^k + (1-\theta)r(u_{j+1}^k + u_{j-1}^k) + \tau[\theta f_j^{k+1} + (1-\theta)f_j^k]. \tag{21}$$

- 矩阵形式

$$[(1+2\theta r)I - \theta rC]U^{k+1}$$

$$= [(1-2(1-\theta)r)I + (1-\theta)rC]U^k + \tau[\theta F^{k+1} + (1-\theta)F^k]. \tag{22}$$

- 引进网比记号，格式(20)又可写成

$$
\begin{aligned}
&(1+2\theta)u_j^{k+1}-\theta r(u_{j+1}^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}),\\
&=[1-2(1-\theta)r]u_j^k+(1-\theta)r(u_{j+1}^k+u_{j-1}^k)+\tau[\theta f_j^{k+1}+(1-\theta)f_j^k].
\end{aligned}
\tag{21}
$$

- 矩阵形式

$$
\begin{aligned}
&[(1+2\theta r)I-\theta rC]U^{k+1}\\
&=[(1-2(1-\theta)r)I+(1-\theta)rC]U^k+\tau[\theta F^{k+1}+(1-\theta)F^k].
\end{aligned}
\tag{22}
$$

- 当$\theta=0$时，它化为古典显格式；当$\theta=1$时，它是古典隐格式;当$\theta=\frac{1}{2}$时得到六点对称格式。

- 引进网比记号，格式(20)又可写成

$$(1+2\theta)u_j^{k+1}-\theta r(u_{j+1}^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}),$$
$$=[1-2(1-\theta)r]u_j^k+(1-\theta)r(u_{j+1}^k+u_{j-1}^k)+\tau[\theta f_j^{k+1}+(1-\theta)f_j^k]. \tag{21}$$

- 矩阵形式

$$[(1+2\theta r)I-\theta rC]U^{k+1}$$
$$=[(1-2(1-\theta)r)I+(1-\theta)rC]U^k+\tau[\theta F^{k+1}+(1-\theta)F^k]. \tag{22}$$

- 当$\theta=0$时，它化为古典显格式；当$\theta=1$时，它是古典隐格式;当$\theta=\frac{1}{2}$时得到六点对称格式。
- 下面推导截断误差。在下面的截断误差的表达式中，令θ取不同的值即可得不同格式的截断误差

- 引进网比记号，格式(20)又可写成

$$(1+2\theta)u_j^{k+1}-\theta r(u_{j+1}^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}),$$
$$=[1-2(1-\theta)r]u_j^k+(1-\theta)r(u_{j+1}^k+u_{j-1}^k)+\tau[\theta f_j^{k+1}+(1-\theta)f_j^k]. \tag{21}$$

- 矩阵形式

$$[(1+2\theta r)I-\theta rC]U^{k+1}$$
$$=[(1-2(1-\theta)r)I+(1-\theta)rC]U^k+\tau[\theta F^{k+1}+(1-\theta)F^k]. \tag{22}$$

- 当$\theta=0$时，它化为古典显格式；当$\theta=1$时，它是古典隐格式;当$\theta=\frac{1}{2}$时得到六点对称格式。
- 下面推导截断误差。在下面的截断误差的表达式中，令θ取不同的值即可得不同格式的截断误差
- 利用Taylor展开及利用$u(x,t)$是微分方程的解，并假设f与t无关，则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}(a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})=a\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{\partial u}{\partial t})=a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},$$

$$
\begin{aligned}
\frac{u(x_j,t_{k+1})-u(x_j,t_k)}{\tau} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_k)+\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(x_j,t_k)+O(\tau^2)\\
&= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_k)+\frac{a^2\tau}{2}\frac{\partial^4}{\partial x^4}(x_j,t_k)+O(\tau^2), \qquad (23)
\end{aligned}
$$

$$\frac{u(x_j,t_{k+1})-u(x_j,t_k)}{\tau}=\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_k)+\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(x_j,t_k)+O(\tau^2)$$
$$=\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_k)+\frac{a^2\tau}{2}\frac{\partial^4}{\partial x^4}(x_j,t_k)+O(\tau^2), \tag{23}$$

$$\frac{u(x_{j+1},t_{k+1})-2u(x_j,t_{k+1})+u(x_{j-1},t_{k+1})}{h^2}$$
$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_{k+1})+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_{k+1})+O(h^4)$$
$$=[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_{k+1})+\tau\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_{k+1})+O(\tau^2)]$$
$$+\frac{h^2}{12}[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_k)+\tau\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^4}{\partial x^4}(x_j,t_k)+O(\tau^2)]+O(h^4)$$
$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_k)+(\frac{h^2}{12}+a\tau)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_k)+O(\tau^2)+O(\tau h^2)+O(h^4). \tag{24}$$

$$\frac{u(x_j,t_{k+1})-u(x_j,t_k)}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_k)+\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(x_j,t_k)+O(\tau^2)$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_k)+\frac{a^2\tau}{2}\frac{\partial^4}{\partial x^4}(x_j,t_k)+O(\tau^2), \tag{23}$$

$$\frac{u(x_{j+1},t_{k+1})-2u(x_j,t_{k+1})+u(x_{j-1},t_{k+1})}{h^2}$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_{k+1})+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_{k+1})+O(h^4)$$
$$= [\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_{k+1})+\tau\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_{k+1})+O(\tau^2)]$$
$$+\frac{h^2}{12}[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_k)+\tau\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^4}{\partial x^4}(x_j,t_k)+O(\tau^2)]+O(h^4)$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_k)+(\frac{h^2}{12}+a\tau)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_k)+O(\tau^2)+O(\tau h^2)+O(h^4). \tag{24}$$

$$\frac{u(x_{j+1},t_k)-2u(x_j,t_k)+u(x_{j-1},t_k)}{h^2}$$
$$= \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_k)+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_k)+O(h^4), \tag{25}$$

- 将式(24)乘以$(-a\theta)$,将(25)乘以$(-a(1-\theta))$，并将它们与式(23)相加，由于截断误差与θ有关，故这一点的局部截断误差为$R_j^k(\theta)$

- 将式(24)乘以$(-a\theta)$,将(25)乘以$(-a(1-\theta))$，并将它们与式(23)相加，由于截断误差与θ有关，故这一点的局部截断误差为$R_j^k(\theta)$
- 截断误差为

$$R_j^k(\theta) = a[a\tau(\frac{1}{2}-\theta) - \frac{h^2}{12}]\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + O(\tau^2) + O(\tau h^2) + O(h^4). \tag{26}$$

- 将式(24)乘以$(-a\theta)$,将(25)乘以$(-a(1-\theta))$，并将它们与式(23)相加，由于截断误差与θ有关，故这一点的局部截断误差为$R_j^k(\theta)$
- 截断误差为

$$R_j^k(\theta) = a[a\tau(\frac{1}{2}-\theta) - \frac{h^2}{12}]\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + O(\tau^2) + O(\tau h^2) + O(h^4). \tag{26}$$

- 当$\theta = \frac{1}{2}$时，可知六点对称格式的截断误差阶为$O(\tau^2 + h^2)$,看起来优于古典显格式和古典隐格式的$O(\tau + h^2)$

- 将式(24)乘以$(-a\theta)$,将(25)乘以$(-a(1-\theta))$，并将它们与式(23)相加，由于截断误差与θ有关，故这一点的局部截断误差为$R_j^k(\theta)$
- 截断误差为

$$R_j^k(\theta) = a[a\tau(\frac{1}{2}-\theta) - \frac{h^2}{12}]\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_k) + O(\tau^2) + O(\tau h^2) + O(h^4). \tag{26}$$

- 当$\theta=\frac{1}{2}$时，可知六点对称格式的截断误差阶为$O(\tau^2+h^2)$,看起来优于古典显格式和古典隐格式的$O(\tau+h^2)$
- 由于$r=\frac{a\tau}{h^2}$为常数，因此$O(\tau)$与$O(h^2)$同阶，因此实际上前者的截断误差阶并没有被提高

- 将式(24)乘以$(-a\theta)$,将(25)乘以$(-a(1-\theta))$，并将它们与式(23)相加，由于截断误差与θ有关，故这一点的局部截断误差为$R_j^k(\theta)$
- 截断误差为

$$R_j^k(\theta) = a[a\tau(\frac{1}{2}-\theta) - \frac{h^2}{12}]\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + O(\tau^2) + O(\tau h^2) + O(h^4). \tag{26}$$

- 当$\theta=\frac{1}{2}$时，可知六点对称格式的截断误差阶为$O(\tau^2+h^2)$,看起来优于古典显格式和古典隐格式的$O(\tau+h^2)$
- 由于$r=\frac{a\tau}{h^2}$为常数，因此$O(\tau)$与$O(h^2)$同阶，因此实际上前者的截断误差阶并没有被提高
- 当$r=\frac{a\tau}{h^2}$为常数时，取$\theta_{opt}=\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}$,截断误差为$R_j^k(\theta_{opt})=O(\tau^2+h^2)$

- Richardson格式

- Richardson格式
  - 对$u(x_j,t_k)$用(j,k)点的中心差商来代替$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_k)$.得Richardson格式：

$$L_h^{(s)}u_j^k=\frac{u_j^{k+1}-u_j^{k-1}}{2\tau}-\frac{a(u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k)}{h^2}=f_j^k. \qquad (27)$$

$$j=1,2,\cdots,N-1;k=0,1,\cdots,M-1,0\le\theta\le1.$$

- Richardson格式
  - 对$u(x_j,t_k)$用(j,k)点的中心差商来代替$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_k)$.得Richardson格式：

$$L_h^{(s)}u_j^k=\frac{u_j^{k+1}-u_j^{k-1}}{2\tau}-\frac{a(u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k)}{h^2}=f_j^k. \qquad (27)$$

$$j=1,2,\cdots,N-1;k=0,1,\cdots,M-1,0\leq\theta\leq 1.$$

  - 它与双层格式不同的是，在求第$k+1$层上的值时，要用到前两层上的值，

- Richardson格式
  - 对$u(x_j,t_k)$用(j,k)点的中心差商来代替$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_k)$.得Richardson格式：

$$L_h^{(s)}u_j^k = \frac{u_j^{k+1}-u_j^{k-1}}{2\tau} - \frac{a(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k)}{h^2} = f_j^k. \qquad (27)$$

$$j=1,2,\cdots,N-1; k=0,1,\cdots,M-1, 0\le\theta\le 1.$$

  - 它与双层格式不同的是，在求第$k+1$层上的值时，要用到前两层上的值，
  - 截断误差为$O(\tau^2+h^2)$.

- Richardson格式
  - 对$u(x_j,t_k)$用(j,k)点的中心差商来代替$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_k)$.得Richardson格式：

$$L_h^{(s)}u_j^k=\frac{u_j^{k+1}-u_j^{k-1}}{2\tau}-\frac{a(u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k)}{h^2}=f_j^k. \qquad (27)$$

$$j=1,2,\cdots,N-1;k=0,1,\cdots,M-1,0\leq\theta\leq 1.$$

  - 它与双层格式不同的是，在求第$k+1$层上的值时，要用到前两层上的值，
  - 截断误差为$O(\tau^2+h^2)$.

- 引进网比记号，此格式又可写为

$$u_j^{k+1} = 2r(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + u_j^{k-1} + 2\tau f_j^k, \tag{28}$$

- 引进网比记号，此格式又可写为

$$u_j^{k+1} = 2r(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + u_j^{k-1} + 2\tau f_j^k, \tag{28}$$

- 矩阵的形式为

$$U^{k+1} = 2r(C - 2I)U^k + U^{k-1} + 2\tau F^k. \tag{29}$$

- 引进网比记号，此格式又可写为

$$u_j^{k+1} = 2r(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + u_j^{k-1} + 2\tau f_j^k, \tag{28}$$

- 矩阵的形式为

$$U^{k+1} = 2r(C - 2I)U^k + U^{k-1} + 2\tau F^k. \tag{29}$$

- 从计算格式来看他是显格式，但一开始要先用其他双层格式，、由$k=0$的初值条件计算出第1层上的值，然后才能利用此格式进行计算。

作业：

3.对于扩散方程$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, a > 0$

(1)试求Du Fort-Frankel格式

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} = a\frac{u_{j+1}^k - u_j^{k+1} - u_j^{k-1} + u_{j-1}^k}{h^2}$$

的截断误差

(2)试求加权三层差分格式

$$(1+\theta)\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - \theta\frac{u_j^k - u_j^{k-1}}{\tau} = \frac{a}{h^2}\delta_x^2 u_j^{k+1}$$

的截断误差，并证明当$\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{12r}$时，截断误差的阶最高$(O(\tau^2 + h^4))$