

习题六

6.1 随机选取 15 位学生，把他们分成三组，每组 5 人，每一组用一种方法教学。一段时间后，对这 15 位学生进行统考，统考的成绩如下：

方法	成绩				
甲	75	62	71	58	73
乙	81	85	68	92	90
丙	73	79	60	75	81

问：这三种教学方法的效果有无显著差异？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解 这可以看作是一个单因子方差分析问题。教学方法就是因子 A ，设三组学生的成绩分别为 $\xi_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2, 3$ 。检验三种教学方法的效果有无显著差异，相当于要检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 。

计算结果见下表：

水平	观测值（成绩）					\bar{X}_i	SS_i
A_1 甲	75	62	71	58	73	67.8	218.8
A_2 乙	81	85	68	92	90	83.2	362.8
A_3 丙	73	79	60	75	81	73.6	271.2
						$SS_A = 604.93$	$SS_e = 852.8$

方差分析表为：

来源	平方和	自由度	均方	F 值	分位数
A	$SS_A = 604.93$	$r - 1 = 2$	302.465	$F_A = 4.256$	$F_{0.95}(2, 12) = 3.89$
误差	$SS_e = 852.8$	$n - r = 12$	71.067		
总和	$SS_T = 1457.73$	$n - 1 = 14$			

对显著水平 $\alpha = 0.05$ ，查 F 分布表，可得 $F_{1-\alpha}(r-1, n-r) = F_{0.95}(2, 12) = 3.89$ ，

因为 $F_A = 4.256 > 3.89$ ，所以拒绝 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ ，结论是：这三种教学方法的效果有显著差异。比较各水平的均值，还可以看出，乙组学生的成绩最高，甲组学生的成绩最低。

6.2 对某地区 3 所小学五年级男生的身高（单位：cm）进行抽查，测得数据如下：

小学	身 高					
第一小学	128.1	134.1	133.1	138.9	140.8	127.4
第二小学	150.3	147.9	136.8	126.0	150.7	155.8
第三小学	140.6	143.1	144.5	143.7	148.5	146.4

问：这 3 所小学五年级男生的身高是否有显著的差异？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解 这可以看作是一个单因子方差分析问题。不同的小学就是因子 A ，设 3 所小学五年级男生的身高分别为 $\xi_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2, 3$ 。检验三种教学方法的效果有无显著差异，

相当于要检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 。

计算结果见下表：

水平	观测值（身高）	\bar{X}_i	SS_i
A_1	128.1 134.1 133.1 138.9 140.8 127.4	133.7333	149.01
A_2	150.3 147.9 136.8 126.0 150.7 155.8	144.5833	612.83
A_3	140.6 143.1 144.5 143.7 148.5 146.4	144.4667	37.413
		$SS_A = 465.88$	$SS_e = 799.25$

方差分析表为：

来源	平方和	自由度	均方	F 值	分位数
A	$SS_A = 465.88$	$r - 1 = 2$	232.94	$F_A = 4.37$	$F_{0.95}(2, 15) = 3.68$
误差	$SS_e = 799.25$	$n - r = 15$	53.28		
总和	$SS_T = 1265.13$	$n - 1 = 17$			

对显著水平 $\alpha = 0.05$ ，查 F 分布表，可得 $F_{1-\alpha}(r-1, n-r) = F_{0.95}(2, 15) = 3.68$ ，

因为 $F_A = 4.37 > 3.68$ ，所以拒绝 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ ，结论是：这 3 所小学五年级男生的身高有显著差异。比较各水平的均值，还可以看出，第二小学五年级男生的身高最高，第一小学五年级男生的身高最低。

6.3 单因子的方差分析中，若每个水平下对指标的观测次数是不同的，水平 A_i 下指标的观测值记为 $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$ ($i = 1, 2, \dots, r$)。试分析，此时如何进行方差分析？

解 当因子水平的各观测次数可能不同时，因子水平 A_i 下观测次数为 n_i ，且 $\sum_{i=1}^r n_i = n$ 。

$$\text{此时, } \bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, SS_i = \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \bar{X}_i,$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X})^2, SS_e = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 = \sum_{i=1}^r SS_i, SS_A = \sum_{i=1}^r n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2$$

可以证明离差分解公式： $SS_T = SS_e + SS_A$ ，以及在 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r$ 成立时有

$$F_A = \frac{SS_A / (r-1)}{SS_e / (n-r)} \sim F(r-1, n-r)$$

对于给定的显著性水平 α ， H_0 的拒绝域为 $F_A > F_{1-\alpha}(r-1, n-r)$ 。

6.4 对某厂早，中，晚三班的产量统计如下：

班次	产量				
早班	279	334	303	338	198
中班	229	274	310		
晚班	210	285	117		

问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下能否认为不同班次的产量无显著性差异？

解 方差分析的前提为早、中、晚班的产量均服从正态分布，相互独立且方差相等，

$$\xi_i \sim N(\mu_i, \delta^2), i = 1, 2, 3.$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$F_A = \frac{\frac{SS_A}{r-1}}{\frac{SS_e}{n-r}} = \frac{14365.53/2}{30453.2/8} = 1.8869$$

查表

$$F_{1-\alpha}(r-1, n-r) = F_{0.95}(2, 8) = 4.4589; F_A < F_{1-\alpha}(r-1, n-r)$$

故接受 H_0 ，即在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下认为不同班次产量无显著性差异。

方差分析：单因素方差分析						
SUMMARY						
组	观测数	求和	平均	方差		
行 1	5	1452	290.4	3248.3		
行 2	3	813	271	1647		
行 3	3	612	204	7083		
方差分析						
差异源	SS	df	MS	F	P-value	F crit
组间	14365.53	2	7182.764	1.886899	0.213154	4.45897
组内	30453.2	8	3806.65			
总计	44818.73	10				

6.5 对 3 种不同密度（单位：g/cm³）的木材：A₁ = 0.34~0.47，A₂ = 0.48~0.52，

A₃ = 0.53~0.56；采用 3 种不同的加荷速度（单位：kg/(cm²·min)）：B₁ = 600，B₂ = 2400，

B₃ = 4200；测得木材的抗压强度（单位：kg/cm²）如下：

		加荷速度		
		B_1	B_2	B_3
比重	A_1	3.72	3.90	4.02
	A_2	5.22	5.24	5.08
	A_3	5.28	5.74	5.54

问：（1）密度的不同对于木材的抗压强度是否有显著的影响？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

（2）加荷速度的不同对于木材的抗压强度是否有显著的影响？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解 这可以看作是一个不考虑交互作用的双因子方差分析问题。设在不同的加荷速度下不同

密度木材的抗压强度为 $\xi_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)$ ，其中， $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$ ， $i = 1, 2, 3$ ，

$j = 1, 2, 3$ 。

检验密度的不同对木材的抗压强度是否有显著影响，相当于要检验

$$H_{01}: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3。$$

检验加荷速度的不同对木材的抗压强度是否有显著影响，相当于要检验

$$H_{02}: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3。$$

计算结果见下表：

	B_1	B_2	B_3	$\bar{X}_{i\cdot}$	$SS_{i\cdot}$
A_1	3.72	3.90	4.02	3.88	0.0456
A_2	5.22	5.24	5.08	5.18	0.0152
A_3	5.28	5.74	5.54	5.520	0.1064
$\bar{X}_{\cdot j}$	4.74	4.96	4.88	$\bar{X} = 4.86$	$SS_B = 0.0744$
$SS_{\cdot j}$	1.5624	1.8104	1.2152	$SS_A = 4.4952$	$SS_e = 0.0928$

方差分析表为：

来源	平方和	自由度	均方	F 值	分位数
A	4.4952	$r - 1 = 2$	2.2476	96.88	$F_{0.95}(2, 4) = 6.94$
B	0.0744	$s - 1 = 2$	0.0372	1.60	$F_{0.95}(2, 4) = 6.94$
误差	0.0928	$(r - 1)(s - 1) = 4$	0.0232		
总和	4.6624	$rs - 1 = 8$			

因为 $F_A = 96.88 > 6.94 = F_{0.95}(2, 4)$ ，所以拒绝 H_{01} ，密度的不同对于木材的抗压强度有显著的影响；因为 $F_B = 1.60 < 6.94 = F_{0.95}(2, 4)$ ，所以接受 H_{02} ，加荷速度的不同对于木材的抗压强度没有显著的影响。

6.6 在农业试验中，选择 4 个不同品种的小麦种植在 3 种不同的土壤上，每块试验田的面积都相等。各块试验田上得到的小麦产量（单位：kg）分别为：

		土壤		
		B_1	B_2	B_3
小麦品种	A_1	26	25	24
	A_2	30	23	25
	A_3	22	21	20
	A_4	20	21	19

问：（1）品种的不同对于小麦产量是否有显著的影响？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

（2）土壤的不同对于小麦产量是否有显著的影响？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解 这可以看作是一个不考虑交互作用的双因子方差分析问题。设种在不同的土壤上不同品种小麦的产量为 $\xi_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)$ ，其中， $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$ ， $i = 1, 2, 3, 4$ ， $j = 1, 2, 3$ 。

检验品种的不同对于小麦产量是否有显著影响，相当于要检验

$$H_{01}: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

检验土壤的不同对于小麦产量是否有显著影响，相当于要检验

$$H_{02}: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.$$

计算结果见下表：

	B_1	B_2	B_3	$\bar{X}_{i\cdot}$	$SS_{i\cdot}$
A_1	26	25	24	25	2
A_2	30	23	25	26	26
A_3	22	21	20	21	2
A_4	20	21	19	20	2
$\bar{X}_{\cdot j}$	24.5	22.5	22.0	$\bar{X} = 23$	$SS_B = 14$
$SS_{\cdot j}$	59	11	26	$SS_A = 78$	$SS_e = 18$

方差分析表为：

来源	平方和	自由度	均方	F 值	分位数
A	$SS_A = 78$	$r - 1 = 3$	26	8.67	$F_{0.95}(3, 6) = 4.76$
B	$SS_B = 14$	$s - 1 = 2$	7	2.33	$F_{0.95}(2, 6) = 5.14$
误差	$SS_e = 18$	$(r - 1)(s - 1) = 6$	3		
总和	$SS_T = 110$	$rs - 1 = 11$			

因为 $F_A = 8.67 > 4.76 = F_{0.95}(3, 6)$ ，所以拒绝 H_{01} ，品种的不同对于小麦产量有显著的影响；因为 $F_B = 2.33 < 5.14 = F_{0.95}(2, 6)$ ，所以接受 H_{02} ，土壤的不同对于小麦产量没有显著的影响。

6.7 在某种化工产品的生产过程中，选择 3 种不同的浓度： $A_1=2\%$ ， $A_2=4\%$ ， $A_3=6\%$ ；

4 种不同的温度： $B_1=10^\circ\text{C}$ ， $B_2=24^\circ\text{C}$ ， $B_3=38^\circ\text{C}$ ， $B_4=52^\circ\text{C}$ ；每种浓度和温度的组合都重复试验 2 次，得到产品的收率（单位：%）如下：

		温度			
		B_1	B_2	B_3	B_4
浓度	A_1	10 , 14	11, 11	9 , 13	10 , 12
	A_2	7 , 9	8, 10	7 , 11	6 , 10
	A_3	5 , 11	13, 14	12 , 13	10 , 14

问：（1）浓度的不同对产品收率是否有显著的影响？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）
（2）温度的不同对产品收率是否有显著的影响？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）
（3）浓度与温度的交互作用对产品收率是否有显著的影响？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）
解 这是一个考虑交互作用的双因子方差分析问题。浓度就是因子 A ，温度就是因子 B 。

设各种浓度与温度下的收率为 $\xi_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)$ ，其中， $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$ ，
 $i = 1, 2, 3$ ， $j = 1, 2, 3, 4$ 。

检验浓度对产品收率是否有显著的影响，相当于要检验 $H_{01}: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ 。

检验温度对产品收率是否有显著的影响，相当于要检验 $H_{02}: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$ 。

检验交互作用对产品收率是否有显著的影响，相当于要检验

$$H_{03}: \gamma_{11} = \gamma_{12} = \cdots = \gamma_{34}。$$

计算结果见下表：

		因子 B				$\bar{X}_{i\cdot}$	$SS_{i\cdot}$
		B_1	B_2	B_3	B_4		
因子 A	A_1	$12/8$	$11/0$	$11/8$	$11/2$	11.25	1.50
	A_2	$8/2$	$9/2$	$9/8$	$8/8$	8.50	2.00
	A_3	$8/18$	$13.5/0.5$	$12.5/0.5$	$12/8$	11.50	35.00
$\bar{X}_{\cdot j}$		9.3333	11.1667	10.8333	10.3333	$\bar{X} = 10.4167$	$SS_B = 11.50$
$SS_{\cdot j}$		21.3333	20.3333	12.3333	17.3333	$SS_A = 44.333$	$SS_{AB} = 27.00$

$$SS_e = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s SS_{ij} = 18.00 + 1.62 + 8.82 + 16.82 + 2.88 + 25.92 = 74.06。$$

方差分析表为：

来源	平方和	自由度	均方	F 值	分位数
A	44.3333	$r - 1 = 2$	22.1667	4.09	$F_{0.95}(2, 12) = 3.89$
B	11.50	$s - 1 = 3$	3.8333	0.71	$F_{0.95}(3, 12) = 3.49$
$A \times B$	27.00	$(r - 1)(s - 1) = 6$	4.5000	0.83	$F_{0.95}(6, 12) = 3.00$
误差	65.00	$rs(t - 1) = 12$	5.4167		
总和	147.8333	$rst - 1 = 23$			

因为 $F_A = 4.09 > 3.89 = F_{1-\alpha}(r-1, r s (t-1))$, 所以拒绝 H_{01} , 浓度的不同对产品收率有显著的影响。

因为 $F_B = 0.71 < 3.49 = F_{1-\alpha}(s-1, r s (t-1))$, 所以接受 H_{02} , 温度的不同对产品收率没有显著的影响。

因为 $F_{AB} = 0.83 < 3.00 = F_{1-\alpha}((r-1)(s-1), r s (t-1))$, 所以拒绝 H_{03} , 浓度与温度的交互作用对产品收率没有显著的影响。

6.8 某化工厂为了提高塑料大红 R 颜料的收率, 对合成过程中的酰氯化反应条件进行 3 因子 3 水平正交试验, 所取的因子和水平分别为:

因子 A 是酰氯化温度, A_1 是 85°C , A_2 是 95°C , A_3 是 105°C ;

因子 B 是 SOCl_2 用量, B_1 是 4.2 ml , B_2 是 4.6 ml , B_3 是 5.0 ml ;

因子 C 是催化剂用量, C_1 是 0.2 ml , C_2 是 0.5 ml , C_3 是 0.8 ml 。

选用正交表 $L_9(3^4)$, 将因子 A, B, C 依次安排在第 1, 2, 3 列。按照设计做试验, 各次试验中, 塑料大红 R 颜料的收率 (单位: %) 为:

表头	A	B	C	收率
列号	1	2	3	
试验号	1	2	3	
1	1	1	1	72.0
2	1	2	2	82.8
3	1	3	3	77.5
4	2	1	2	73.5
5	2	2	3	80.4
6	2	3	1	87.7
7	3	1	3	70.7
8	3	2	1	87.2
9	3	3	2	82.8

要求进行不考虑交互作用的正交试验设计, 列出方差分析表, 检验因子 A, B, C 的作用是否显著 (显著水平 $\alpha = 0.05$) , 并且找出最优水平组合。

解 (1) 选正交表。按照 $r = 3$, $m \geq 3$, n 尽可能小的原则, 选用 $L_9(3^4)$ 。

(2) 设计表头。将因子 A, B, C 依次安排在第 1, 2, 3 列。

(3) 按照设计做试验, 取得试验观测值。试验得到的观测值见下表。

(4) 求各列与各水平对应的均值和各列的平方和。计算结果见下表。

表头	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	观测值（收率）
列号	1	2	3	4
试验号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1
\bar{X}_{1j}	77.4333	72.0667	82.3	78.4
\bar{X}_{2j}	80.5333	83.4667	79.7	80.4
\bar{X}_{3j}	80.2333	82.6667	76.2	79.4
SS_j	17.54	242.96	56.22	6.00
				$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = 79.4$
				$SS_T = \sum_{j=1}^m SS_j = 79.4$

(5) 列方差分析表，作显著性检验。

来源	平方和	自由度	均方	<i>F</i> 值	分位数
<i>A</i>	$SS_A = 17.54$	$r-1=2$	8.77	$F_A = 2.92$	$F_{0.95}(2, 2) = 19.0$
<i>B</i>	$SS_B = 242.96$	$r-1=2$	121.48	$F_B = 40.49$	$F_{0.95}(2, 2) = 19.0$
<i>C</i>	$SS_C = 56.22$	$r-1=2$	28.11	$F_C = 9.37$	$F_{0.95}(2, 2) = 19.0$
误差	$SS_e = 6.00$	$8-2-2-2=2$	3.00		
总和	$SS_T = 322.72$	$n-1=8$			

因为 $F_A = 2.92 < 19.0 = F_{1-\alpha}(f_A, f_e)$ ，所以因子 *A*（酰氯化温度）作用不显著。

因为 $F_B = 40.49 > 19.0 = F_{1-\alpha}(f_B, f_e)$ ，所以因子 *B*（ SOCl_2 用量）作用显著。

因为 $F_C = 9.37 < 19.0 = F_{1-\alpha}(f_C, f_e)$ ，所以因子 *C*（催化剂用量）作用不显著。

(6) 寻找最优水平组合。

对于因子 *A*，因为 A_1 的均值 $\bar{X}_{11} = 77.4333$ ， A_2 的均值 $\bar{X}_{21} = 80.5333$ ， A_3 的均值 $\bar{X}_{31} = 80.2333$ ，其中 $\bar{X}_{21} = 80.5333$ 最大，所以 A_2 是最优水平。

对于因子 *B*，因为 B_1 的均值 $\bar{X}_{12} = 72.0667$ ， B_2 的均值 $\bar{X}_{22} = 83.4667$ ， B_3 的均值 $\bar{X}_{32} = 82.6667$ ，其中 $\bar{X}_{22} = 83.4667$ 最大，所以 B_2 是最优水平。

对于因子 C ，因为 C_1 的均值 $\bar{X}_{13} = 82.3$ ， C_2 的均值 $\bar{X}_{23} = 79.7$ ， C_3 的均值 $\bar{X}_{33} = 76.2$ ，其中 $\bar{X}_{13} = 82.3$ 最大，所以 C_1 是最优水平。

把 3 个因子的最优水平组合起来，就得到最优水平组合 (A_2, B_2, C_1) ，即酰氯化温度为 95°C ， SOCl_2 用量为 4.6 ml，催化剂用量为 0.2 ml。

6.9 在梳棉机上纺粘锦混纺纱，为了提高质量，减少棉结粒数，进行 3 因子 2 水平正交试验。所取的因子和水平分别为：

因子 A 是金属针布， A_1 是日本产品， A_2 是青岛产品；

因子 B 是产量水平， B_1 是 6 kg， B_2 是 10 kg；

因子 C 是锡林速度， C_1 是 238 转 / 分， C_2 是 320 转 / 分。

在进行正交试验设计时，考虑金属针布与锡林速度的交互作用 $A \times C$ 。

选用正交表 $L_8(2^7)$ ，将因子 A, B, C 依次安排在第 1, 2, 4 列。按照设计做试验，各次试验中，得到棉结粒数为：

表头	A	B	C	棉结粒数
列号	1	2	4	
试验号	1	2	4	
1	1	1	1	0.30
2	1	1	2	0.35
3	1	2	1	0.20
4	1	2	2	0.30
5	2	1	1	0.15
6	2	1	2	0.50
7	2	2	1	0.15
8	2	2	2	0.40

要求进行考虑交互作用的正交试验设计，列出方差分析表，检验因子 A, B, C 以及交互作用 $A \times C$ 是否显著（显著水平 $\alpha = 0.05$ ），并且找出最优水平组合（棉结粒数越少越好）。

解 （1）选正交表。按照 $r = 2$ ， $m \geq 4$ ， n 尽可能小的原则，选用 $L_8(2^7)$ 。

（2）设计表头。根据题意和查交互作用表，可将因子 A, B, C 安排在第 1, 2, 4 列，交互作用 $A \times C$ 安排在第 5 列。

(3) 按照设计做试验，取得试验观测值。试验得到的观测值见下表。

(4) 求各列与各水平对应的均值和各列的平方和。计算结果见下表。

表头	$A \quad B \quad C \quad A \times C$							观测值 (棉结粒数) X_k
列号 试验号	1	2	3	4	5	6	7	
1	1	1	1	1	1	1	1	0.30
2	1	1	1	2	2	2	2	0.35
3	1	2	2	1	1	2	2	0.20
4	1	2	2	2	2	1	1	0.30
5	2	1	2	1	2	1	2	0.15
6	2	1	2	2	1	2	1	0.50
7	2	2	1	1	2	2	1	0.15
8	2	2	1	2	1	1	2	0.40
\bar{X}_{1j}	0.2875	0.3250	0.3000	0.2000	0.3500	0.2875	0.3125	$\bar{X} = 0.29375$
\bar{X}_{2j}	0.3000	0.2625	0.2875	0.3875	0.2375	0.3000	0.2750	
SS_j	0.0003125	0.0078125	0.0003125	0.0703125	0.0253125	0.0003125	0.0028125	$SS_T = 0.1071875$

(5) 列方差分析表，作显著性检验。

来源	平方和	自由度	均方	F 值	分位数
A	$SS_A = 0.0003125$	$r - 1 = 1$	0.0003125	$F_A = 0.27$	$F_{0.95}(1, 3) = 10.1$
B	$SS_B = 0.0078125$	$r - 1 = 1$	0.0078125	$F_B = 6.82$	$F_{0.95}(1, 3) = 10.1$
C	$SS_C = 0.0703125$	$r - 1 = 1$	0.0703125	$F_C = 61.36$	$F_{0.95}(1, 3) = 10.1$
$A \times C$	$SS_{AC} = 0.0253125$	$(r - 1)^2 = 1$	0.0253125	$F_{AC} = 22.09$	$F_{0.95}(1, 3) = 10.1$
误差	$SS_e = 0.0034375$	$7 - 1 - 1 - 1 = 3$	0.0011458		
总和	$SS_T = 0.1071875$	$n - 1 = 7$			

因为 $F_A = 0.27 < 10.1 = F_{1-\alpha}(f_A, f_e)$ ，所以因子 A （金属针布）作用不显著。

因为 $F_B = 6.82 < 10.1 = F_{1-\alpha}(f_B, f_e)$ ，所以因子 B （产量水平）作用不显著。

因为 $F_C = 61.36 > 10.1 = F_{1-\alpha}(f_C, f_e)$ ，所以因子 C （锡林速度）作用显著。

因为 $F_{AC} = 22.09 > 10.1 = F_{1-\alpha}(f_{AC}, f_e)$ ，所以 A 与 C 的交互作用 $A \times C$ 显著。

(6) 寻找最优水平组合。

对于因子 A ，因为 A_1 的均值 $\bar{X}_{11} = 0.2875$ ， A_2 的均值 $\bar{X}_{21} = 0.3000$ ，其中 $\bar{X}_{11} = 0.2875$ 最小，所以 A_1 是最优水平。

对于因子 B ，因为 B_1 的均值 $\bar{X}_{12} = 0.3250$ ， B_2 的均值 $\bar{X}_{22} = 0.2625$ ，其

中 $\bar{X}_{22} = 0.2625$ 最小，所以 B_2 是最优水平。

对于因子 C ，因为 C_1 的均值 $\bar{X}_{14} = 0.2000$ ， C_2 的均值 $\bar{X}_{24} = 0.3875$ ，其中 $\bar{X}_{14} = 0.2000$ 最大，所以 C_1 是最优水平。

如果不考虑交互作用，把 3 个因子的最优水平简单地组合起来，可以得到最优水平组合 (A_1, B_2, C_1) 。下面考虑交互作用。

对于交互作用 $A \times C$ ，各种双因子水平组合的均值为：

组合	均值	组合	均值
(A_1, C_1)	$\frac{X_1 + X_3}{2} = \frac{0.30 + 0.20}{2} = 0.25$	(A_1, C_2)	$\frac{X_2 + X_4}{2} = \frac{0.35 + 0.30}{2} = 0.325$
(A_2, C_1)	$\frac{X_5 + X_7}{2} = \frac{0.15 + 0.15}{2} = 0.15$	(A_2, C_2)	$\frac{X_6 + X_8}{2} = \frac{0.50 + 0.40}{2} = 0.45$

其中，0.15 最小，所以 (A_2, C_1) 是 $A \times C$ 的最优双因子水平组合。

把上面得到的各个单因子和双因子的最优水平组合，综合起来考虑（特别考虑到单因子 A 不显著，交互作用 $A \times C$ 十分显著），可以确定，3 个因子的最优水平组合为 (A_2, B_2, C_1) ，即金属针布应选用青岛产品，产量水平应选用 10 kg，锡林速度应选用 238 转 / 分。

6.10 某农药厂生产一种农药，为了提高产品收率，进行 4 因子 2 水平正交试验。所取的因子和水平分别为：

因子 A 是反应温度， A_1 是 60°C ， A_2 是 80°C ；

因子 B 是反应时间， B_1 是 2.5 小时， B_2 是 3.5 小时；

因子 C 是某两种原料的配比， C_1 是 1.1 / 1， C_2 是 1.2 / 1；

因子 D 是真空度， D_1 是 500 mmHg， D_2 是 600 mmHg。

在进行正交试验设计时，考虑反应温度与反应时间的交互作用 $A \times B$ 。

选用正交表 $L_8(2^7)$ ，将因子 A, B, C, D 依次安排在第 1, 2, 4, 7 列。按照设计做试验，各次试验中，得到农药产品的收率（单位：%）为：

表头	A	B	C	D	收率
列号 试验号	1	2	4	7	
1	1	1	1	1	86
2	1	1	2	2	95
3	1	2	1	2	91
4	1	2	2	1	94

5	2	1	1	2	91
6	2	1	2	1	96
7	2	2	1	1	83
8	2	2	2	2	88

要求进行考虑交互作用的正交试验设计，列出方差分析表，检验因子 A, B, C, D 以及交互作用 $A \times B$ 是否显著（显著水平 $\alpha = 0.05$ ），并且找出最优水平组合。

解 （1）选正交表。按照 $r = 2$ ， $m \geq 5$ ， n 尽可能小的原则，选用 $L_8(2^7)$ 。

（2）设计表头。根据题意和查交互作用表，可将因子 A, B, C, D 安排在第 1, 2, 4, 7 列，交互作用 $A \times B$ 安排在第 3 列。

（3）按照设计做试验，取得试验观测值。试验得到的观测值见下表。

（4）求各列与各水平对应的均值和各列的平方和。计算结果见下表。

表头	A	B	$A \times B$	C				D	观测值 (收率) X_k
列号 试验号	1	2	3	4	5	6	7		
1	1	1	1	1	1	1	1	86	
2	1	1	1	2	2	2	2	95	
3	1	2	2	1	1	2	2	91	
4	1	2	2	2	2	1	1	94	
5	2	1	2	1	2	1	2	91	
6	2	1	2	2	1	2	1	96	
7	2	2	1	1	2	2	1	83	
8	2	2	1	2	1	1	2	88	
\bar{X}_{1j}	91.50	92.00	88.00	87.75	90.25	89.75	89.75	$\bar{X} = 90.5$	
\bar{X}_{2j}	89.50	89.0	93.00	93.25	90.75	91.25	91.25		
SS_j	8.0	18.0	50.0	60.5	0.5	4.5	4.5	$SS_T = 146.0$	

（5）列方差分析表，作显著性检验。

来源	平方和	自由度	均方	F 值	分位数
A	$SS_A = 8.0$	$r - 1 = 1$	8.0	$F_A = 3.2$	$F_{0.95}(1, 2) = 18.5$
B	$SS_B = 18.0$	$r - 1 = 1$	18.0	$F_B = 7.2$	$F_{0.95}(1, 2) = 18.5$
C	$SS_C = 60.5$	$r - 1 = 1$	60.5	$F_C = 24.2$	$F_{0.95}(1, 2) = 18.5$
D	$SS_D = 4.5$	$r - 1 = 1$	4.5	$F_D = 1.8$	$F_{0.95}(1, 2) = 18.5$
$A \times B$	$SS_{AB} = 50.0$	$(r - 1)^2 = 1$	50.0	$F_{AB} = 20.0$	$F_{0.95}(1, 2) = 18.5$
误差	$SS_e = 5.0$	$7 - 1 - 1 - 1 - 1 = 2$	2.5		
总和	$SS_T = 146.0$	$n - 1 = 7$			

因为 $F_A = 3.20 < 18.5 = F_{1-\alpha}(f_A, f_e)$, 所以因子 A (反应温度) 作用不显著。

因为 $F_B = 7.20 < 18.5 = F_{1-\alpha}(f_B, f_e)$, 所以因子 B (反应时间) 作用不显著。

因为 $F_C = 24.20 > 18.5 = F_{1-\alpha}(f_C, f_e)$, 所以因子 C (原料配比) 作用显著。

因为 $F_D = 1.80 < 18.5 = F_{1-\alpha}(f_D, f_e)$, 所以因子 D (真空度) 作用不显著。

因为 $F_{AB} = 20.00 > 18.5 = F_{1-\alpha}(f_{AB}, f_e)$, 所以 A 与 B 的交互作用 $A \times B$ 显著。

(6) 寻找最优水平组合。

对于因子 A , 因为 A_1 的均值 $\bar{X}_{11} = 91.5$, A_2 的均值 $\bar{X}_{21} = 89.5$, 其中 $\bar{X}_{11} = 91.5$ 最大, 所以 A_1 是最优水平。

对于因子 B , 因为 B_1 的均值 $\bar{X}_{12} = 92.0$, B_2 的均值 $\bar{X}_{22} = 89.0$, 其中 $\bar{X}_{12} = 92.0$ 最小, 所以 B_1 是最优水平。

对于因子 C , 因为 C_1 的均值 $\bar{X}_{14} = 87.75$, C_2 的均值 $\bar{X}_{24} = 93.25$, 其中 $\bar{X}_{24} = 93.25$ 最大, 所以 C_2 是最优水平。

对于因子 D , 因为 D_1 的均值 $\bar{X}_{17} = 89.75$, D_2 的均值 $\bar{X}_{27} = 91.25$, 其中 $\bar{X}_{27} = 91.25$ 最大, 所以 D_2 是最优水平。

如果不考虑交互作用, 把 4 个因子的最优水平简单地组合起来, 可以得到最优水平组合 (A_1, B_1, C_2, D_2) 。下面考虑交互作用。

对于交互作用 $A \times B$, 各种双因子水平组合的均值为:

组合	均值	组合	均值
(A_1, B_1)	$\frac{X_1 + X_2}{2} = \frac{86 + 95}{2} = 90.5$	(A_1, B_2)	$\frac{X_3 + X_4}{2} = \frac{91 + 94}{2} = 92.5$
(A_2, B_1)	$\frac{X_5 + X_6}{2} = \frac{91 + 96}{2} = 93.5$	(A_2, B_2)	$\frac{X_7 + X_8}{2} = \frac{83 + 88}{2} = 85.5$

其中, 93.5 最大, 所以 (A_2, B_1) 是 $A \times B$ 的最优双因子水平组合。

把上面得到的各个单因子的最优水平和双因子的最优水平组合, 综合起来考虑 (特别考虑到单因子 A 不显著, 交互作用 $A \times B$ 十分显著), 可以确定, 4 个因子的最优水平组合是 (A_2, B_1, C_2, D_2) , 即反应温度为 80°C , 反应时间为 2.5 小时, 两种原料的配比为 1.2/1, 真空度为 600 mmHg 。