3.3 定轴转动中的功能关系

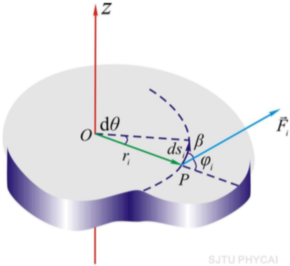
一、力矩的功

对于刚体因两质元的相对距离不变，内力做功之和为零.

对于定轴转动，平行于轴的外力对质元不做功.

3.3 定轴转动中的功能关系

设作用在质元Δm_i上的外力$\vec{F}_i$位于转动平面内：



$$
\begin{aligned}
dA_i &= \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = F_i \cos\beta ds_i \\
&= F_i \sin\varphi_i r_i d\theta = M_i d\theta
\end{aligned}
$$

合外力对刚体做的元功：

$$dA = \sum_i dA_i = \sum_i M_i d\theta = M d\theta$$

力矩的功： $$A = \int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta$$

3.3 定轴转动中的功能关系

二、刚体的转动动能

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$$ 刚体的转动动能

3.3 定轴转动中的功能关系

三、定轴转动的动能定理

由定轴转动定律，若J不变， $M = J\frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(J\omega)$

则物体在dt时间内转过角位移$d\theta$时，外力矩所做元功为

$$\begin{aligned} dA &= Md\theta = \frac{d}{dt}(J\omega)d\theta = Jd\omega\frac{d\theta}{dt} = J\omega d\omega \\ A &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega d\omega = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2 \end{aligned}$$

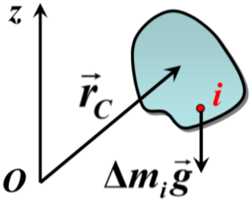
刚体定轴转动的动能定理: 总外力矩对刚体所做的功等于刚体转动动能的增量.

3.3 定轴转动中的功能关系

四、刚体的重力势能

以地面为势能零点，刚体和地球系统的重力势能:

$$
\begin{aligned}
E_p &= \sum_i \Delta m_i g z_i \\
&= mg \sum_i \frac{\Delta m_i z_i}{m} \\
&= mg z_C
\end{aligned}
$$

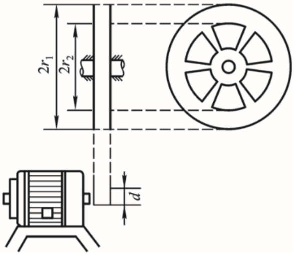


3.3 定轴转动中的功能关系

例3.3-1 冲床上配置5000kg的飞轮，$r_1 = 0.3\text{m}$，$r_2 = 0.2\text{m}$. 今用转速为900r/min,传动轴直径$d = 0.1\text{m}$的电动机来驱动飞轮. (1)飞轮的转动动能; (2)冲断0.5mm的薄钢片需要$9.8 \times 10^4\text{N}$，所消耗的能量全部由飞轮提供，问冲断钢片后飞轮的转速.

解:(1)飞轮的质量集中在轮缘，其近似转动惯量

$$J = \frac{m}{2}(r_1^2 + r_2^2)$$



飞轮的转速:
$$n_{飞} = n_{电}\frac{d_{电}}{d_{飞}}$$

飞轮的角速度:
$$\omega = \frac{2\pi n_{飞}}{60}$$

飞轮转动动能 $E_k = \dfrac{1}{2}J\omega^2 = 40055\ \mathrm{J}$

(2)在冲断钢片过程中，冲力F做的功

$$A = Fd = 49\mathrm{J}$$

此后飞轮的能量

$$E_k' = E_k - A = \frac{1}{2}J\omega'^2$$

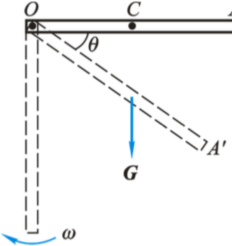
由此求得飞轮转速

$$n'_{飞} = \frac{1}{2\pi}\omega' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2E_k'}{J}}$$

3.3 定轴转动中的功能关系

例3.3-2 一质量为m，长为l的均质细杆OA，可绕其一端的光滑轴O在竖直平面内转动，今使棒从水平位置开始自由下摆，求细棒摆到竖直位置时其中心点C和端点A的速度.

解:由机械能守恒



$$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}J\omega^2$$

$$J=\frac{1}{3}ml^2$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}}$$

$$v_A=l\omega=\sqrt{3gl}$$

$$v_C=\frac{l}{2}\omega=\frac{1}{2}\sqrt{3gl}$$

3.4 角动量定理和角动量守恒定律

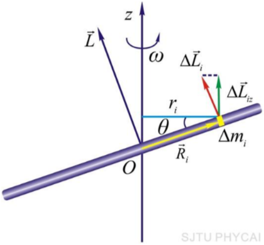
一、刚体的角动量

质元Δm_i对O点的角动量为

$$\Delta\vec{L}_i=\vec{R}_i\times(\Delta m_i\vec{v}_i)$$

因$\vec{v}_i\perp\vec{R}_i$, 所以$\Delta\vec{L}_i$的大小为

$$\Delta L_i=\Delta m_i R_i v_i$$



刚体关于O的角动量:

$$\vec{L}=\sum_i\Delta\vec{L}_i=\sum_i(\vec{R}_i\times\Delta m_i\vec{v}_i)$$

3.4 角动量定理和角动量守恒定律

对于定轴转动, $\vec{L}$对沿定轴的分量L_z为

$$\begin{aligned} L_z &= \sum_i \Delta L_i \cos\theta = \sum_i \Delta m_i R_i v_i \cos\theta \\ &= \sum_i \Delta m_i r_i v_i = (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\omega \end{aligned}$$

称刚体绕定轴转动的角动量.

刚体转动惯量: $J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$

刚体绕定轴的角动量:

$$L_z = J\omega$$

3.4 角动量定理和角动量守恒定律

二、定轴转动刚体的角动量定理

由定轴转动定律，若J不变，

$$M_z = J\frac{d\omega}{dt} = \frac{d(J\omega)}{dt} = \frac{dL_z}{dt}$$

称为角动量定理的微分形式.

角动量定理的积分形式:

$$\int_{t_0}^{t} M_z dt = J\omega - (J\omega)_0$$

$\int_{t_0}^{t} M_z dt$为$\Delta t = t - t_0$时间内力矩M对给定轴的冲量矩.

3.4 角动量定理和角动量守恒定律

角动量定理比转动定律的适用范围更广，适用于刚体，非刚体和物体系.

对几个物体组成的系统，如果它们对同一给定轴的角动量分别为$J_1\omega_1$，$J_2\omega_2$

系统对该轴的角动量为 $L_z = \sum_i J_i\omega_i$

且系统满足角动量定理：$M_z = \dfrac{dL_z}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\sum_i J_i\omega_i\right)$

3.4 角动量定理和角动量守恒定律

三、定轴转动刚体的角动量守恒定律

定轴转动角动量定理: $$M_z = \frac{d(J\omega)}{dt}$$

当$M_z = 0$时: $$\frac{d(J\omega)}{dt} = 0$$

即: $$J\omega = J_0\omega_0 \text{ (常量)}$$

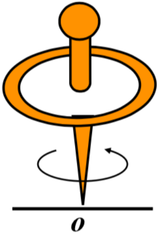
定轴转动角动量守恒定律: 物体在定轴转动中，当对转轴的合外力矩为零时，物体对转轴的角动量保持不变.

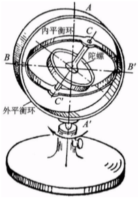
适用于刚体、非刚体和物体系.

3.4 角动量定理和角动量守恒定律

1. 刚体(J不变)的角动量守恒

若$M=0$, 则$J\omega=$ 常量, 而刚体的J不变, 故ω的大小, 方向保持不变. 如:直立旋转陀螺不倒.





应用:定向回转仪

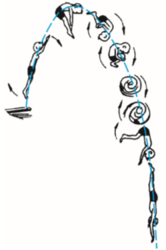
3.4 角动量定理和角动量守恒定律

2. 非刚体(J可变)的角动量守恒

$$J\omega = J_0\omega_0 = 常量$$

当J增大，ω就减小，当J减小，ω就增大.

如：跳水中的转动，芭蕾舞、花样滑冰、恒星塌缩及中子星的形成等.



3.4 角动量定理和角动量守恒定律

3. 物体系的角动量守恒

若系统由几个物体组成，当系统受到的外力对轴的力矩的矢量和为零，则系统的总角动量守恒：

$$\sum_i J_i \omega_i = \text{常量}$$

如：直升机机尾加侧向旋叶，是为防止机身的反转.

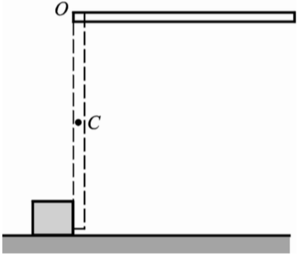
3.4 角动量定理和角动量守恒定律

例3.4-1 匀质细棒：l、m，可绕通过端点O的水平轴转动．棒从水平位置自由释放后，在竖直位置与放在地面的物体m相撞．该物体与地面的摩擦因数为μ，撞后物体沿地面滑行一距离s而停止．求撞后棒的质心C离地面的最大高度h，并说明棒在碰撞后将向左摆 或向右摆的条件．

解：分三个阶段进行分析．

第一阶段：棒自由摆落的过程，机械能守恒．

$$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega$$



3.4 角动量定理和角动量守恒定律

第二阶段: 碰撞过程. 系统的对O轴的角动量守恒.

$$\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega = mvl + \left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega'$$

第三阶段: 碰撞后物体的滑行过程与棒的上升过程. 物体做匀减速直线运动.

$$-\mu mg = ma$$

$$0 = v^2 + 2as$$

联合求解, 即得碰撞后棒的角速度:

$$\omega' = \frac{\sqrt{3gl} - 3\sqrt{2\mu gs}}{l}$$

3.4 角动量定理和角动量守恒定律

$$\omega' = \frac{\sqrt{3gl} - 3\sqrt{2\mu gs}}{l}$$

ω'取正值，表示碰后棒向左摆；反之，表示向右摆.

棒向左摆的条件为 $\quad \sqrt{3gl} - 3\sqrt{2\mu gs} > 0$

棒向右摆的条件为 $\quad \sqrt{3gl} - 3\sqrt{2\mu gs} < 0$

棒的质心C上升的最大高度，也可由机械能守恒定律求得：

$$mgh = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega'^2$$

$$h = \frac{l}{2} + 3\mu s - \sqrt{6\mu sl}$$

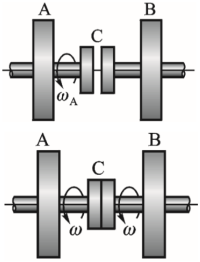
3.4 角动量定理和角动量守恒定律

例3.4-2 A、B两飞轮在同一中心线上，A轮转动惯量$J_A = 10\text{kg}\cdot\text{m}^2$，B轮$J_B = 20\text{kg}\cdot\text{m}^2$，开始时A轮转速600 r/min，B轮静止．求啮合后的转速，在啮合过程中，两轮的机械能有何变化?

解：两轮对共同转轴的角动量守恒

$$J_A\omega_A = (J_A + J_B)\omega$$

$$\omega = \frac{J_A\omega_A}{(J_A + J_B)}$$



代入各项数值得

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = 200\text{r/min}$$

3.4 角动量定理和角动量守恒定律

在啮合过程中，摩擦力矩做功，所以机械能不守恒，部分机械能将转化为热能.

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{2}J_{\mathrm{A}}\omega_{\mathrm{A}}^2+\frac{1}{2}J_{\mathrm{B}}\omega_{\mathrm{B}}^2-\frac{1}{2}(J_{\mathrm{A}}+J_{\mathrm{B}})\omega^2 \\ &= 1.32\times 10^4\mathrm{J}\end{aligned}$$

3.4 角动量定理和角动量守恒定律

例3.4-3 恒星晚期在一定条件下，会发生超新星爆发，这时星体中有大量物质喷入星际空间，同时星的内核却向内坍缩，成为体积很小的中子星．设某恒星绕自转轴每45天转一周，它的内核半径$R_0 \approx 2\times 10^7\,\mathrm{m}$，塌缩成半径$R\approx 6\times 10^3\,\mathrm{m}$的中子星．试求中子星的角速度．塌缩前后的星体内核均看作是均质圆球．

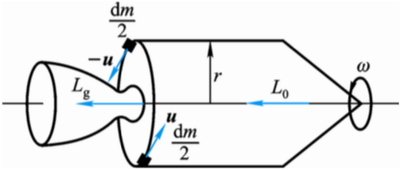
解：内核在塌缩前后的角动量守恒．

$$J\omega = J_0\omega_0,\quad J_0=\frac{2}{5}mR_0^2,\quad J=\frac{2}{5}mR^2$$

$$\omega=\omega_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^2=3\ \mathrm{rad/s}$$

3.4 角动量定理和角动量守恒定律

例3.4-4 如图的宇宙飞船对其中心轴的转动惯量为$J=2\times10^3\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，它以$\omega=0.2\ \mathrm{rad/s}$的角速度绕中心轴旋转．宇航员想用两个切向的控制喷管使飞船停止旋转，每个喷管的位置与轴线距离都是$r=1.5\mathrm{m}$．两喷管的喷气流量恒定，共是$\alpha=2\mathrm{kg/s}$．废气的喷射速率(相对于飞船周边)$u=50\mathrm{m/s}$，并且恒定．问喷管应喷射多长时间才能使飞船停止旋转．



解：把飞船和排出的废气看作一个系统，废气质量为m．可以认为废气质量远小于飞船的质量，

3.4 角动量定理和角动量守恒定律

故原来系统对于飞船中心轴的角动量近似地等于飞船自身的角动量，即 $\quad L_0 = J\omega$

在喷气过程中，以dm表示dt时间内喷出的气体，这些气体对中心轴的角动量为$dm \cdot r(u+v)$，方向与飞船的角动量相同．因$u = 50\mathrm{m/s}$远大于飞船的速率$v(=\omega r)$，所以此角动量近似地等于$dm \cdot ru$．在整个喷气过程中喷出废气的总角动量L_{g}应为

$$L_{\mathrm{g}} = \int_0^m dm \cdot ru = mru$$

当宇宙飞船停止旋转时，其角动量为零．系统这时的总角动量L_1就是全部排出的废气的总角动量，即为

$$L_1 = L_{\mathrm{g}} = mru$$

3.4 角动量定理和角动量守恒定律

在整个喷射过程中，系统所受的对于飞船中心轴的外力矩为零，所以系统对于此轴的角动量守恒，即$L_0 = L_1$，由此得

$$J\omega = mru$$

即
$$m = \frac{J\omega}{ru}$$

于是所需的时间为

$$t = \frac{m}{\alpha} = \frac{J\omega}{\alpha ru} = 2.67\ \mathrm{s}$$