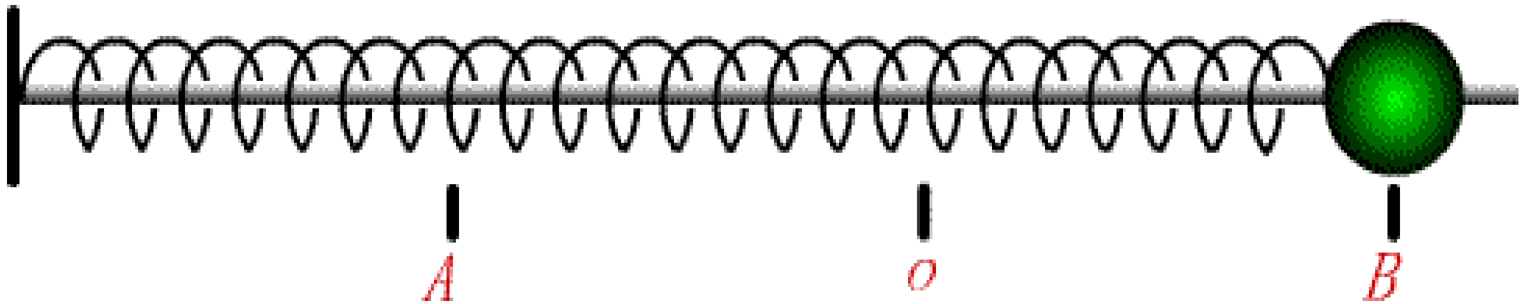
第 四章　振 动

•谐振动方程

•谐振动的合成



4.1 谐振动

物体在一定位置附近作来回往复运动——机械振动

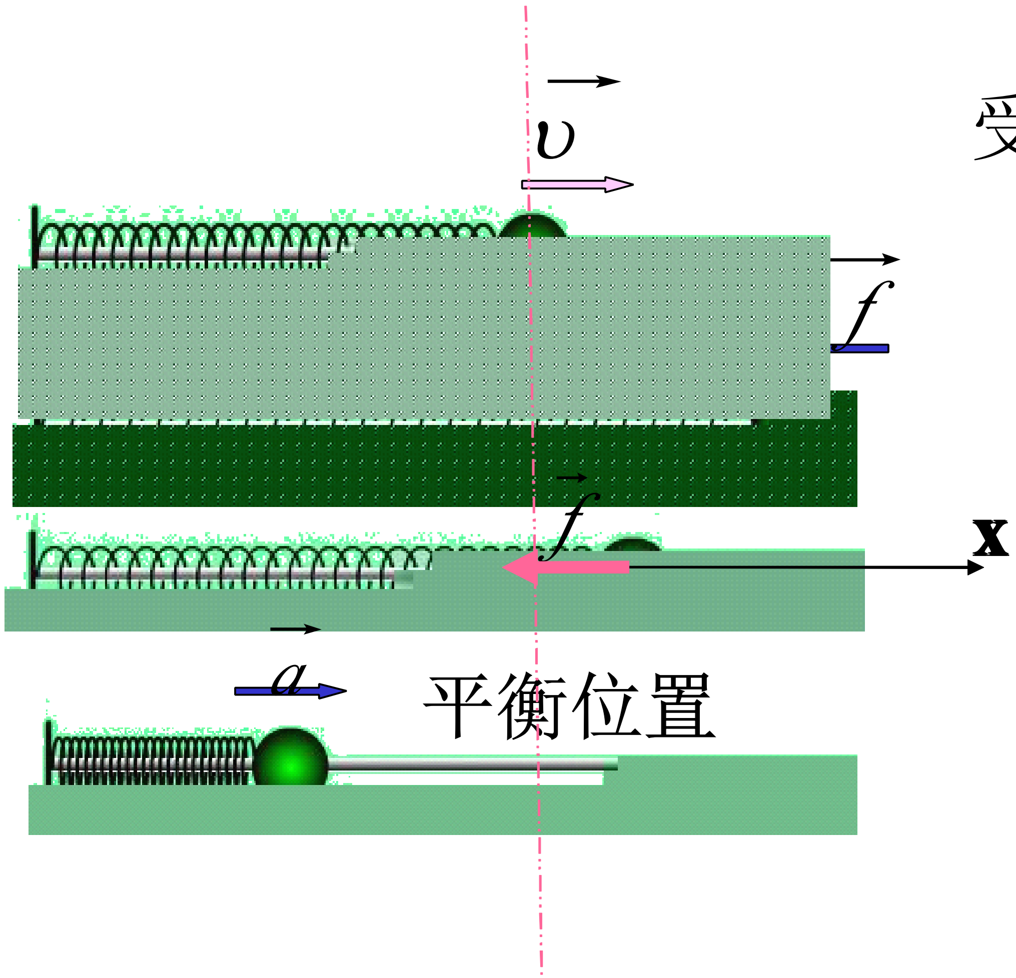
分类
- 受迫振动
- 自由振动
  - 阻尼自由振动
  - 无阻尼自由振动
    - 无阻尼自由非谐振动
    - 无阻尼自由谐振动（简谐振动）

•昼夜交替

•树枝摇曳

•波涛起伏

1. 弹簧振子



任意位置：

受力：$f = -kx = ma$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

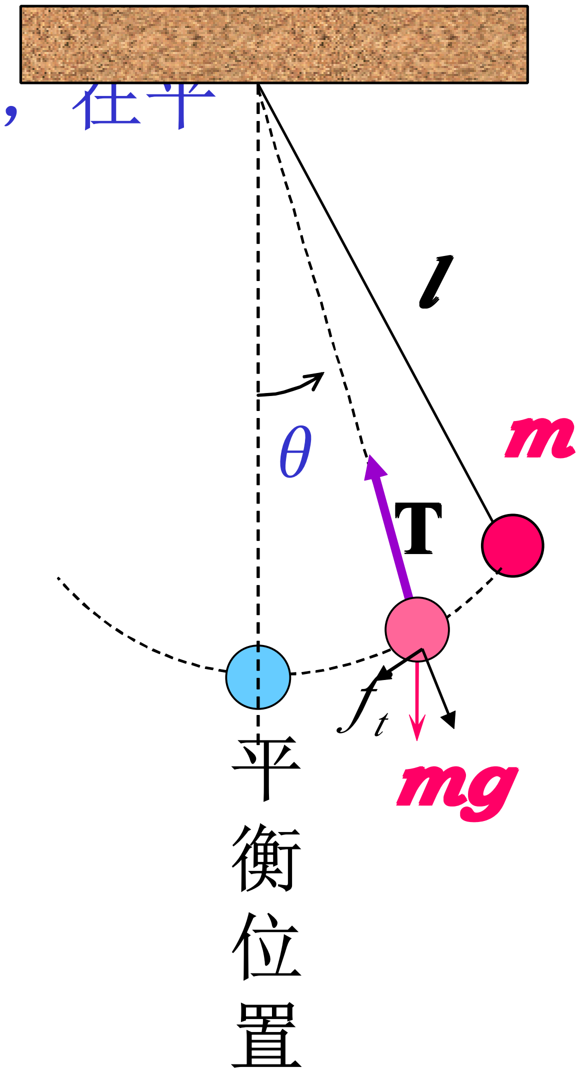
$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

谐振动动力学方程

<u>线性恢复力</u>、惯性是产生振动的两个最基本的原因

2、单摆（数学摆）

<u>不可伸长</u>的<u>轻质</u>细线下悬挂一质点，在平衡位置附近 $(\theta<5^{\circ})$小角摆动的装置。



1.平衡位置： $f_t=0$，$a=0$

任意位置 θ 取逆时针方向为正

$$f_t = -mg\sin\theta \approx -mg\theta = ma_t$$

$$= ml\alpha = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

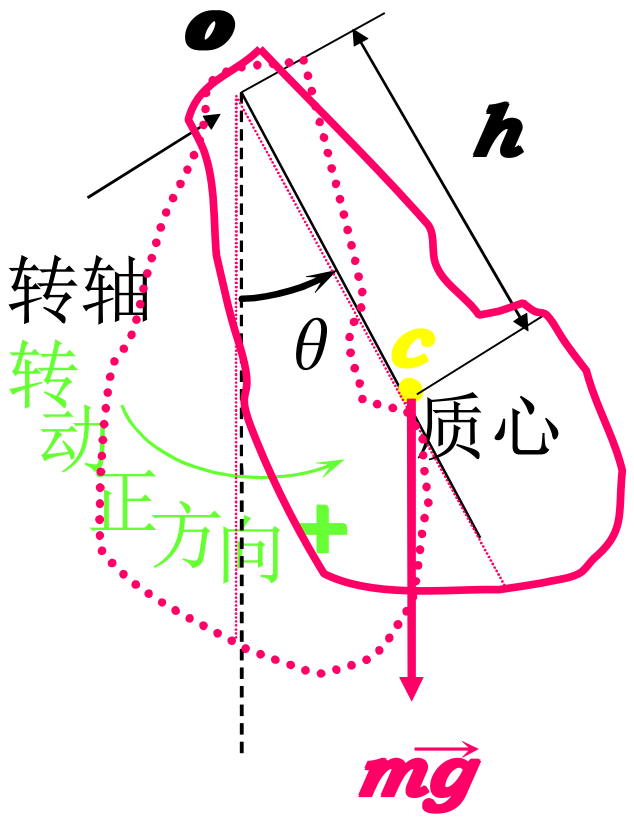
$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

——动力学方程

3、复摆（物理摆）

一个可绕水平固定轴自由小角摆动的刚体装置.

质心偏离平衡位置为 θ 角度的任意位置



$$M = J\alpha$$

取逆时针方向为正

$$-mgh\sin\theta \approx mgh\theta = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{J}\theta = 0$$

——动力学方程

- 平衡位置
- 线性恢复力矩
- 惯性

4. 谐振动方程

动力学方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{mgh}{J}\theta=0$$

•弹簧振子 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

•单摆 $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$

•复摆 $\omega=\sqrt{\frac{mgh}{J}}$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

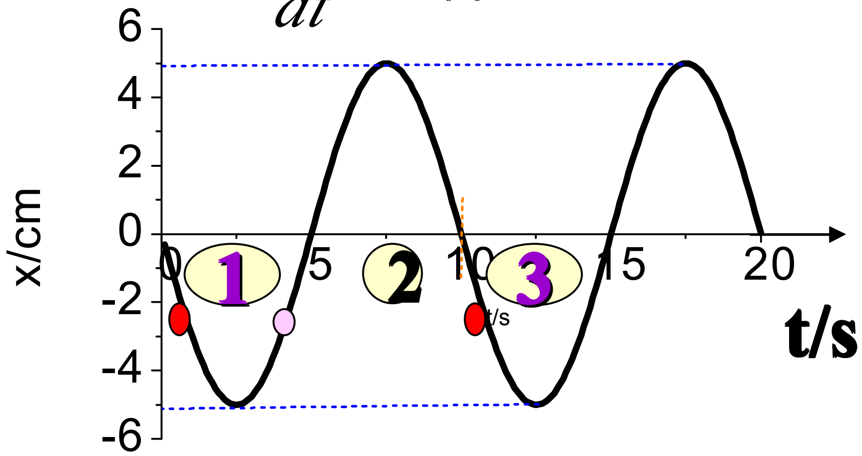
——相同数学方程

$\Longrightarrow$ ***x=Acos (ωt+φ)***

——运动学方程

5. 谐振动的振动曲线

$v=\frac{dx}{dt}$ **x(t)**曲线斜率



运动学方程

x=Acos (ωt+φ)

$x_1 = x_2 = x_3 < 0$

$$v=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$v_1 = v_3 = -v_2 , v_1 < 0$$

$$a=\frac{dv}{dt}=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)=-\omega^2 x$$

加速度和位移成正比，方向相反

4.1.2三个描述谐振动的物理量

(1)周期**T**、频率$\boldsymbol{\nu}$， 圆频率$\boldsymbol{\omega}$

周期为往返一次所需要的时间 $\Rightarrow T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

⇩

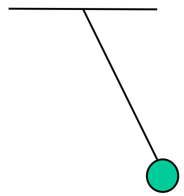
相同的运动状态 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

例如$\mathbf{t_0}$, $\mathbf{t_1=t_0+}T$时刻, $x_0=x_1, v_0=v_1$

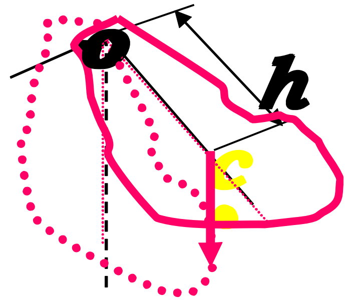
$$x_0=A\cos(\omega t_0+\varphi), x_1=A\cos[\omega(t_0+T)+\varphi]$$

$$[\omega(t_0+T)+\varphi]-(\omega t_0+\varphi)=2\pi$$

周期



$$T=\frac{2\pi}{\omega}\begin{cases}\text{弹簧振子}\quad T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} & \left(\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}\right)\\[2ex] \text{单摆}\quad T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} & \left(\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}\right)\\[2ex] \text{复摆}\quad T=2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgh}} & \left(\omega=\sqrt{\dfrac{mgh}{J}}\right)\end{cases}$$



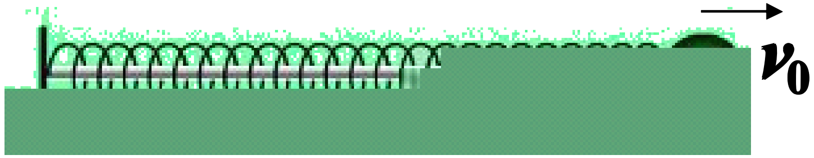
4-5 如果把一个弹簧振子和一个单摆拿到月球上去，振动的周期如何变化？

周期和初始状态无关，只和物体本身的固有性质有关

(2) 振幅A：物体最大位移的绝对值

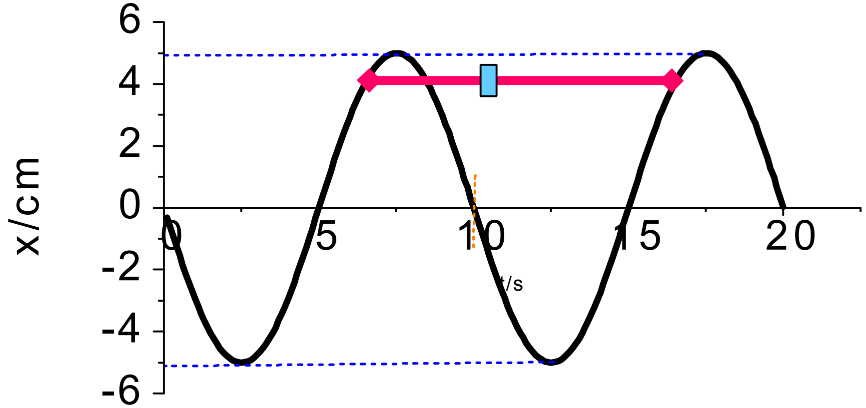
$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

由初始条件（x_0，v_0）确定A



$$x|_{t=0} = x_0 \quad v|_{t=0} = v_0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi \end{cases} \xrightarrow{\text{消去}\varphi} \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + (v_0^2/\omega^2)}$$

任一时刻的运动状态



(3) 位相（相位、周相）

位相$\Phi = \omega t + \varphi$表示t时刻物体的振动状态

$\because$ $x=A\cos(\omega t+\varphi)$　　$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$

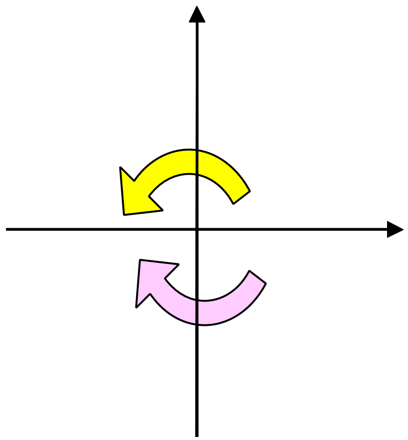
$\therefore$ 当A, ω确定时，由$(\omega t + \varphi)$就可确定 t时刻振动物的位置和速度，即确定了谐振子 t时刻的运动状态 .

初位相φ：物体的初始$(t = 0)$状态

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi \end{cases}$$

消去A

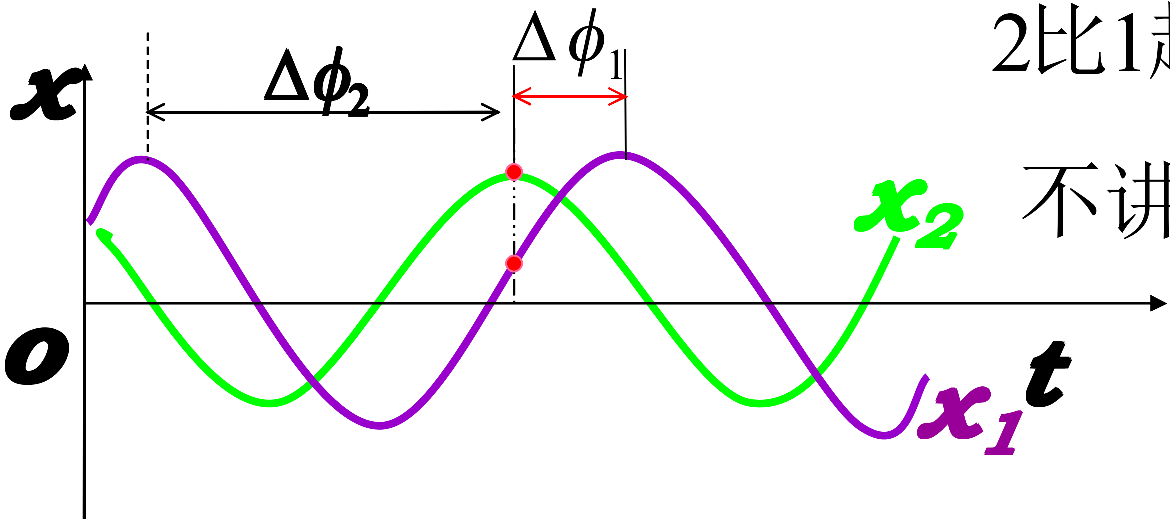
$$\Rightarrow \varphi = tg^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$



约定：初位相 φ　(-π，π]

(4)两个同频率谐振动位相之差

$\Delta\varphi > 0$



2比1超前 $\Delta\phi_1 = \omega\Delta t_1$,

不讲1比2超前 $\Delta\phi_2$

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

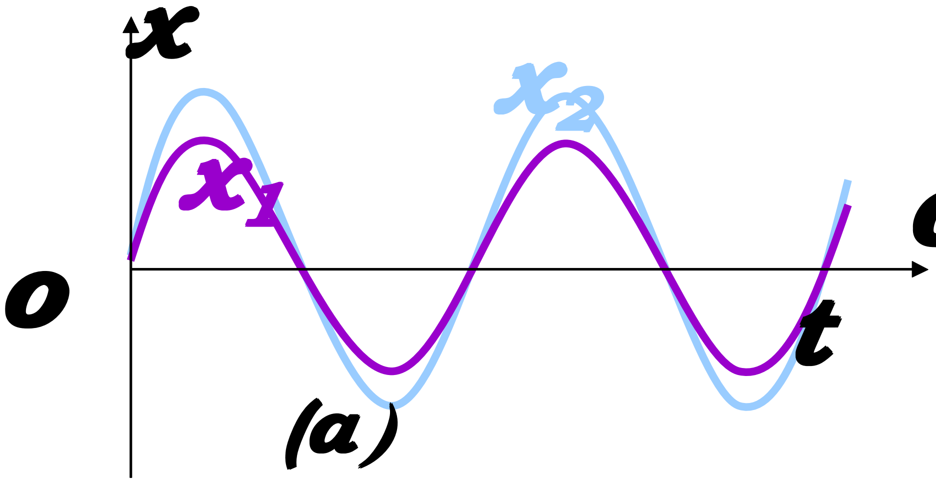
约定：$\Delta\phi \in (-\pi, \pi]$

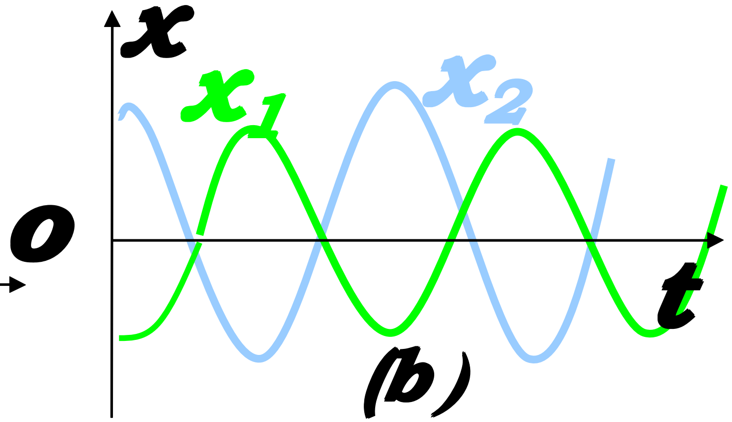
$\Rightarrow \Delta\phi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1$

特殊情况

$(a)\ \Delta\phi = 0$ 同(位)相

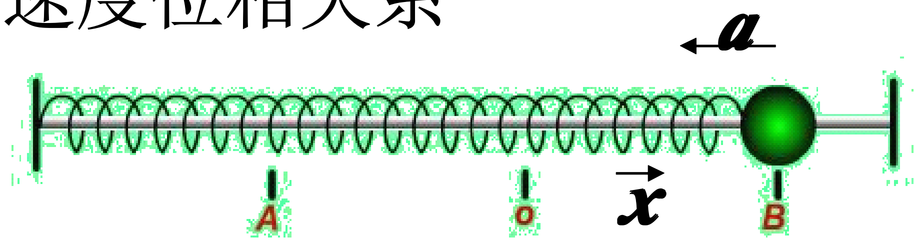
$(b)\ \Delta\phi = \pi$ 反(位)相





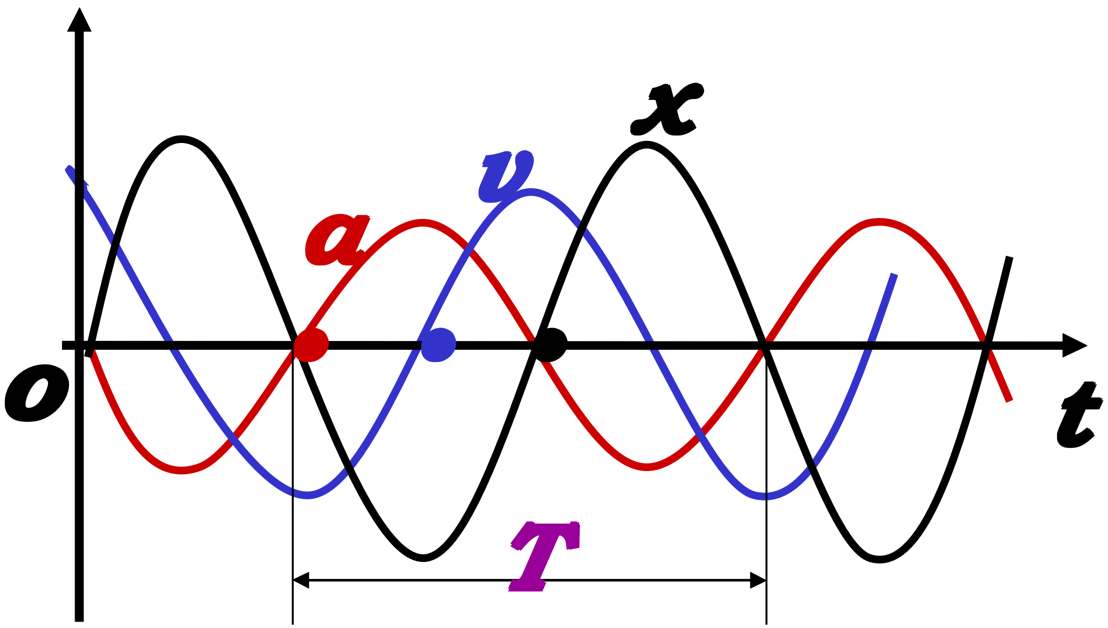
谐振动的位移、速度及加速度位相关系

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) = \omega A\cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

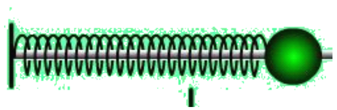


v比x超前$\pi/2$

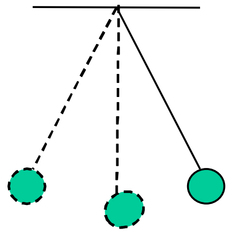
a比v超前$\pi/2$

a与x反相

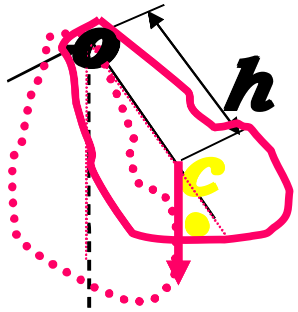
谐振动小结



$$\omega_{振} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$\omega_{单} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$



$$\omega_{复} = \sqrt{\frac{mgh}{J}}$$

I、动力学方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

1)、平衡位置，坐标系

2)、任意位置作受力分析

II、运动学方程

x=Acos(ω t+ φ)

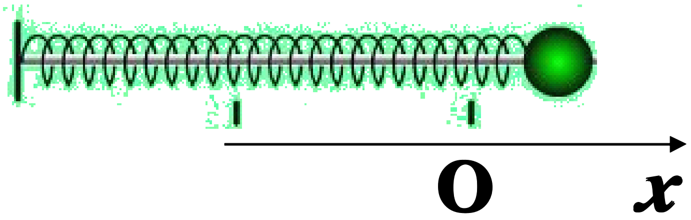
3)、ω

4) $A = \sqrt{x_0^2 + (v_0^2/\omega^2)}$

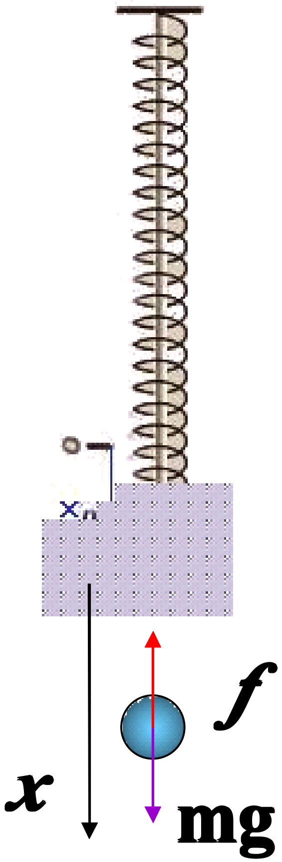
$$\varphi = tg^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega\ x_0}\right)$$

x_0的正负

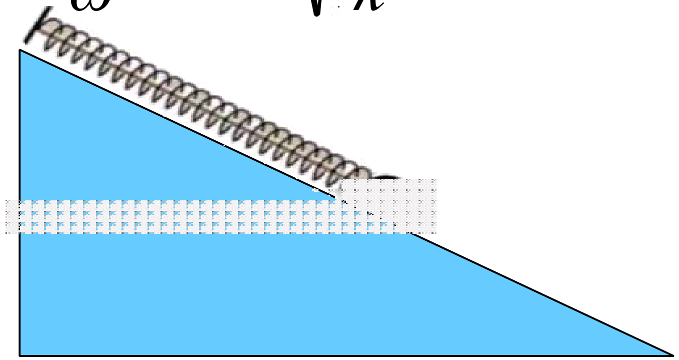
思考题
4-2



$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$



$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 \qquad \Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



- 平衡位置　$O': kx_0 = mg$
- 任意位置受力分析

$$-f+mg=-k(x+x_0)+mg=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

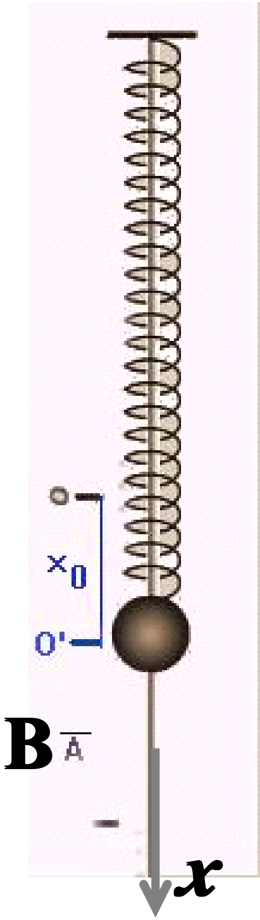
$$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \quad \Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

周期是系统所固有的,另外加恒力作用后，只是平衡位置改变。

两类题

I. 证明是谐振动

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$



1）隔离体力分析，平衡位置，取为坐标原点

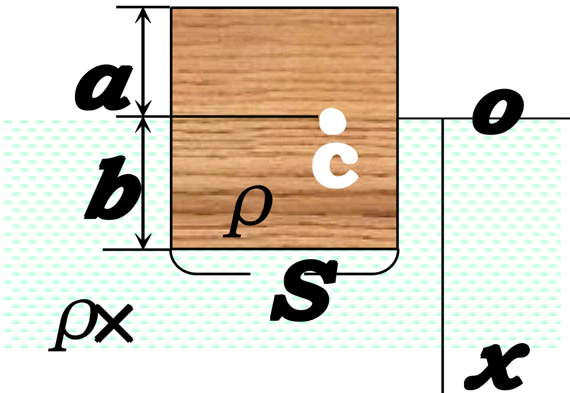
2）任意位置，受力分析，建立动力学方程

II. 求谐振动方程 x=Acos(ωt+ φ)

3)ω

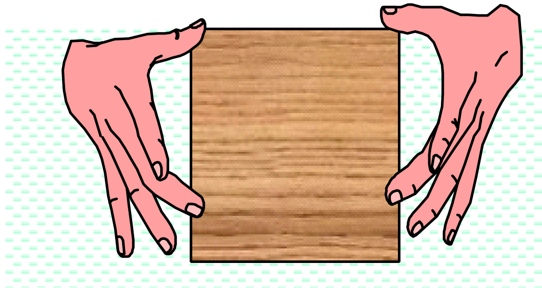
4)A,φ（和初始条件 x_0,v_0有关）

例3　　水面上浮有一方形木块，静止时水面以上高度为a，以下高度为b。水密度为ρ′，木块密度为ρ，不计水的阻力。现用外力将木块压入水中，使木块上表面与水面平齐。求证：放手后木块将作谐振动，并写出谐振动方程



解①确定平衡位置

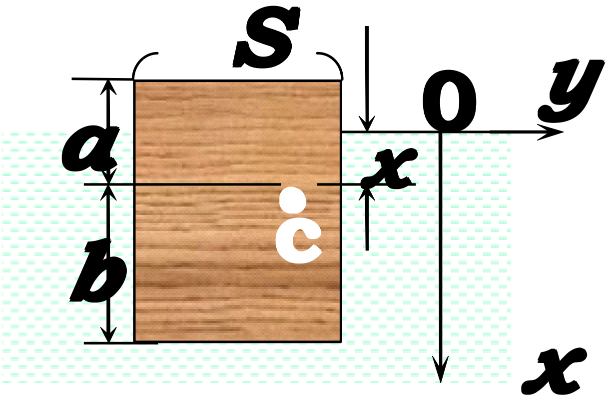
$$(a+b)S\rho g-bS\rho' g=0$$



②任意位置木块受力分析：$\sum F=(a+b)S\rho g-(b+x)S\rho' g$

$$=-S\rho' gx=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

任意位置



$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{S\rho' g}{\rho(a+b)S}x=0$$

所以木块作谐振动。

2）运动方程

③

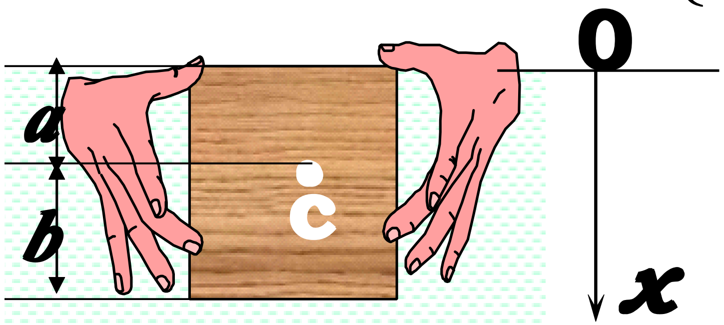
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\rho' g}{\rho(a+b)}x=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{\rho' g}{(a+b)\rho}}$$

④

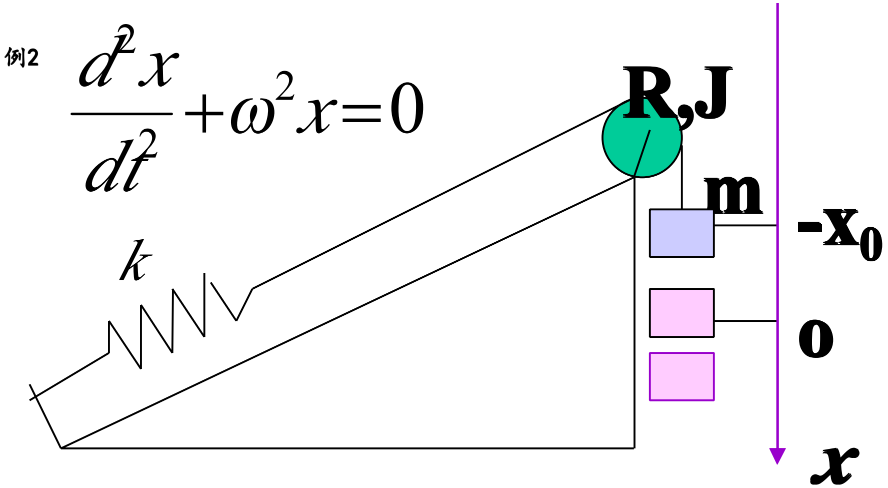
$$\because t=0\begin{cases}x_0=a\\ v_0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\sqrt{x_0^2+v_0^2/\omega^2}=a\\ \varphi=\tan^{-1}(-v_0/\omega\, x_0)=0,\pi\end{cases}$$



$(\because x_0=A\cos\varphi=a>0\ \therefore \pi$舍去）

$$\therefore x=a\cos\sqrt{\rho' g/[(a+b)\rho]}\,t$$

例2 $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$



已知：初态时弹簧处于原长

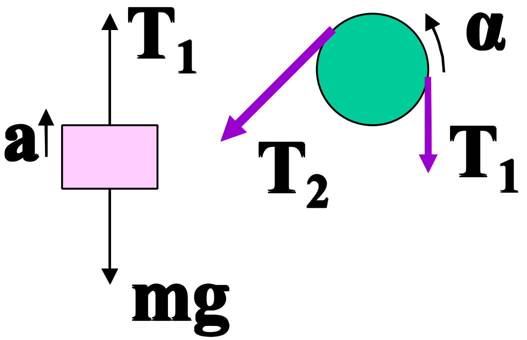
（1）证明物块作谐振动。

（2）写出振动表达式。

解:① 确定平衡位置

$$mg = kx_0 \Rightarrow x_0 = \frac{mg}{k} \cdots\cdots(1)$$

②写出任意位置x处物块的加速度



$$mg - T_1 = ma \cdots\cdots(2)$$

$$(T_1 - T_2)R = J\alpha = J\frac{a}{R} \cdots(3)$$

$$T_2 = k(x_0 + x) \cdots\cdots(4)$$

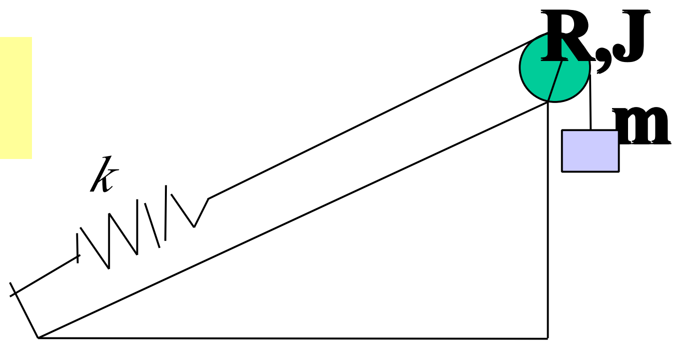
$$\left.\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{array}\right\} \Rightarrow a = -\frac{k}{J/R^2 + m}x$$

谐振动

（2）写出振动表达式。

$$\omega = R\sqrt{\frac{k}{J+mR^2}}$$

x=Acos(ω t+ φ)



$$*\text{初态为} t=0 \begin{cases} -x_0 = -mg/k < 0 \\ v_0 = 0 \end{cases}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0^2/\omega^2)}$$

$$\varphi = tg^{-1}(-\frac{v_0}{\omega\ x_0})$$

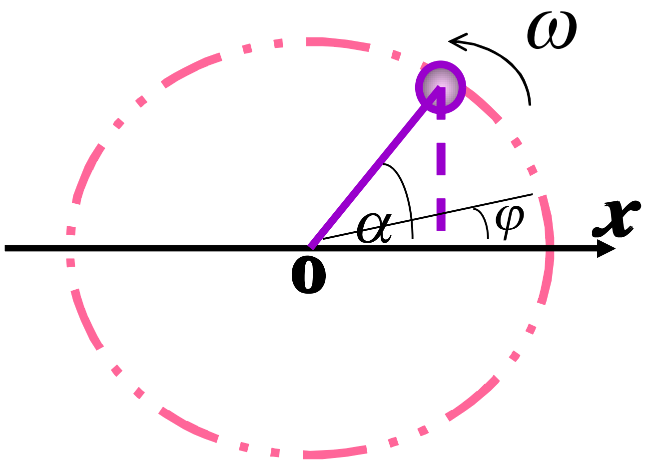
$$\Rightarrow \begin{cases} A = mg/k \\ \varphi = tg^{-1}(\frac{v_o}{\omega x_0}) = \pi \end{cases}$$

$$\varphi = 0, \pi\ ?$$

$$x = \frac{mg}{k}\cos(R\sqrt{\frac{k}{J+mR^2}}t + \pi)$$

4.1.3 旋转矢量表示法

ω 匀速率做圆周运动小球在直径上的投影的运动



$$x = r\cos\alpha$$

$$\alpha = \omega t + \varphi$$

$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

位相 $\alpha = \omega t + \varphi$

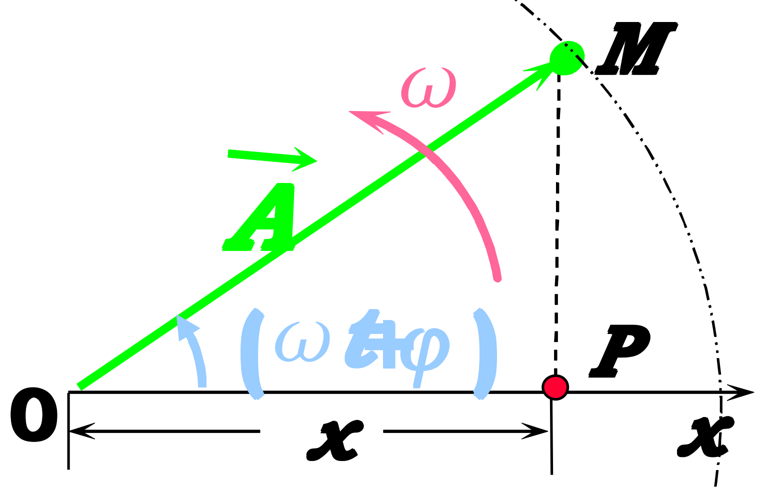
旋转矢量表示谐振动

旋转矢量A的特性

① $\vec{A}$ 的长度：振幅 A

② $\vec{A}$ 的旋转角速度：圆频率 ω

③ $\vec{A}$ 的旋转的方向：逆时针向



④ 旋转矢量 $\vec{A}$ 与参考方向 x 的夹角：相位$(\omega t+\varphi)$

⑤ t=0时旋转矢量 $\vec{A}$ 与参考方向 x 的夹角：初相位(φ)

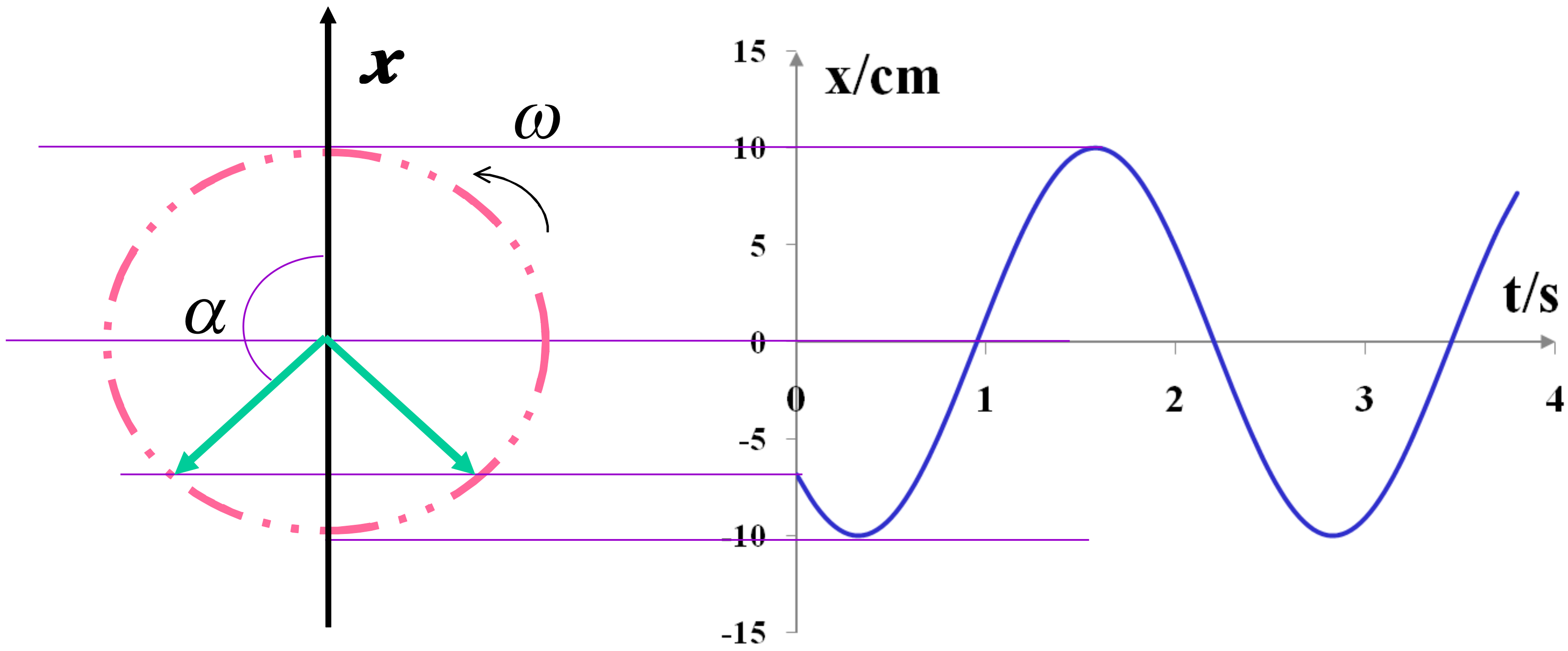
⑥ M 点在x轴上投影点P的运动规律：$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

*方便地确定相位，相位差，初相位

*研究振动合成很方便

Back

二、振动曲线的旋转矢量表示法

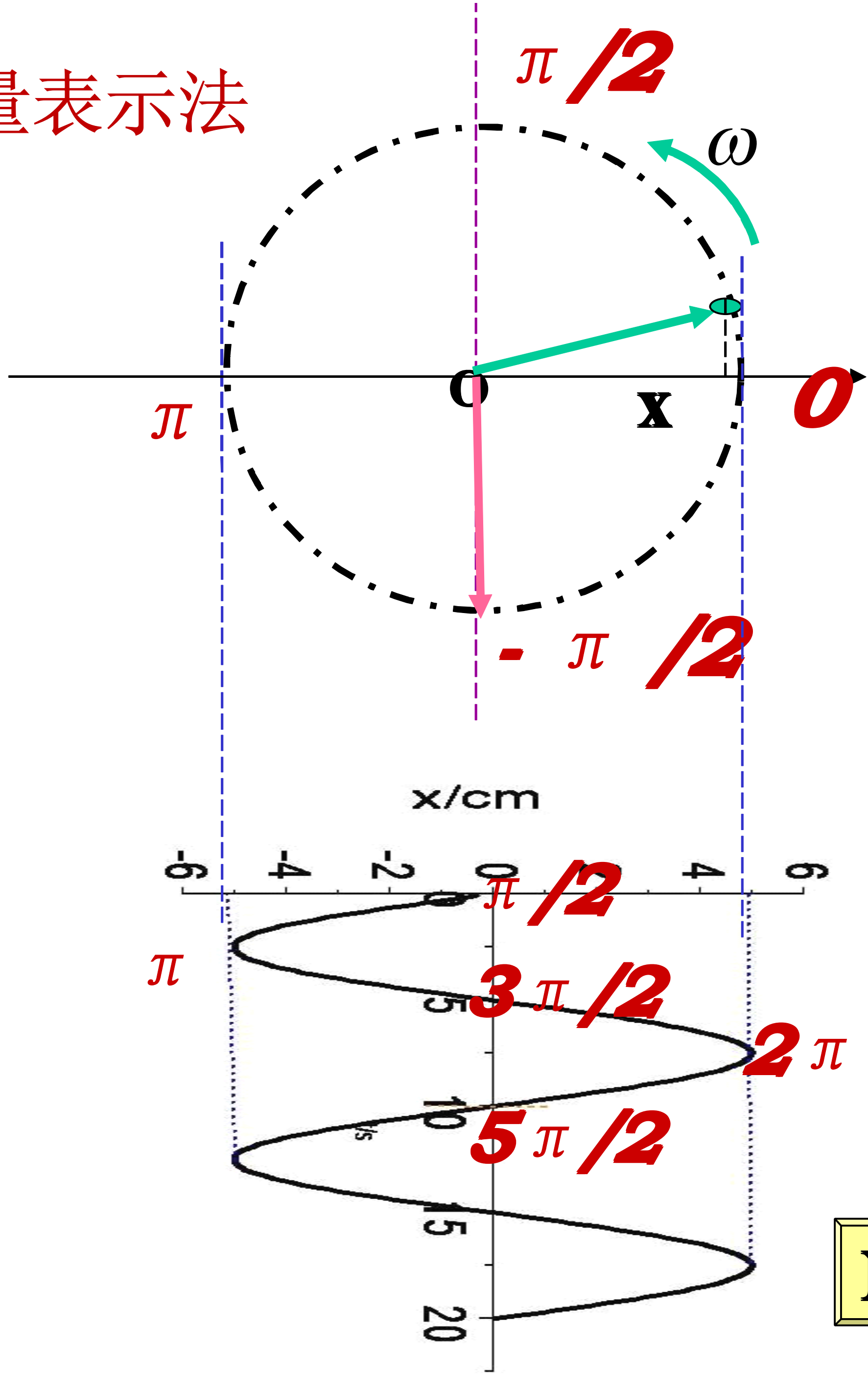


二、振动曲线的旋转矢量表示法

匀角速度旋转的矢量，长度为A

$$角速度\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$



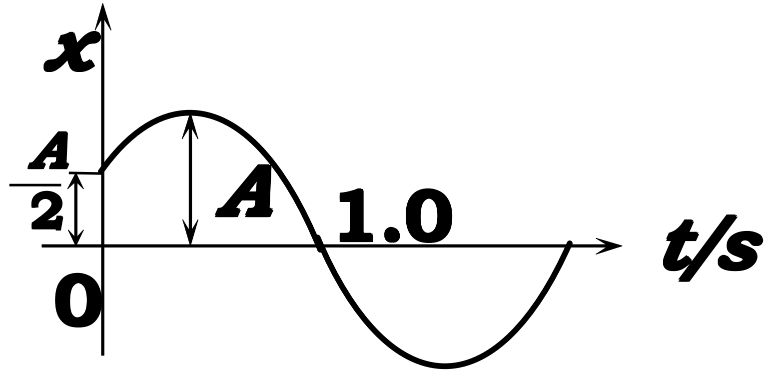
Next

例 一谐振动的振动曲线如图所示，

求**(1).** ω、 φ 以及振动表达式：**x=Acos(** ω **t+** φ **)**

(2).t=1秒和**t=1.5**秒两时刻的位相差△ φ

解：由图形可知：A,



$$t=0: \quad x_0=\frac{A}{2}, \quad v_0>0$$

$$t=1: \quad x_1=0, v_1<0$$

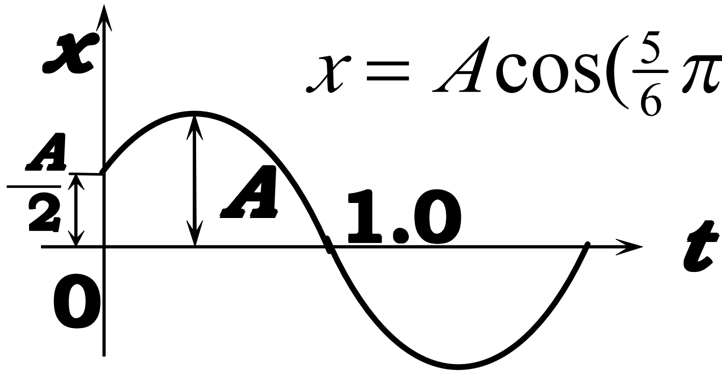
(1)解析法:

$$\left.\begin{aligned} t=0: \frac{A}{2}=A\cos\varphi \Rightarrow \varphi=\pm\frac{\pi}{3} \\ v_0=-A\omega\sin\varphi>0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi=-\frac{\pi}{3}$$

x=Acos(ω t+ ϕ)

$t=1: \quad x_1=0, v_1<0$

$$\varphi=-\frac{\pi}{3}$$



$$x=A\cos(\tfrac{5}{6}\pi t-\tfrac{1}{3}\pi)$$

$$\left.\begin{array}{l} t=1:0=A\cos(\omega-\frac{\pi}{3})\Rightarrow\omega-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{2} \\ v_1=-A\omega\sin(\omega-\frac{\pi}{3})<0 \end{array}\right\}\Rightarrow\omega-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$$

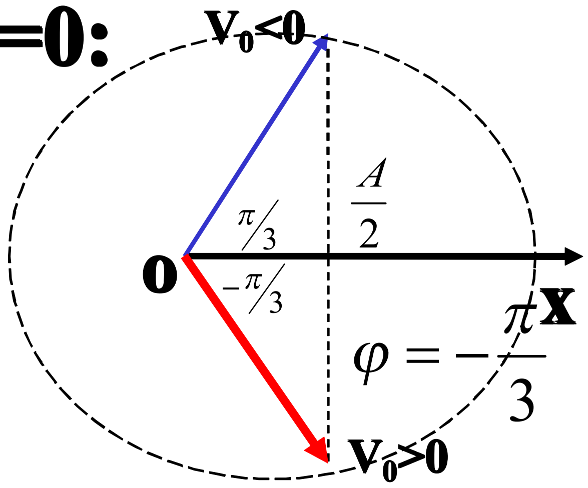
$$\omega=\frac{5\pi}{6}$$

△ ϕ = ϕ $_{1.5}$- ϕ $_1$ = ω Δ t

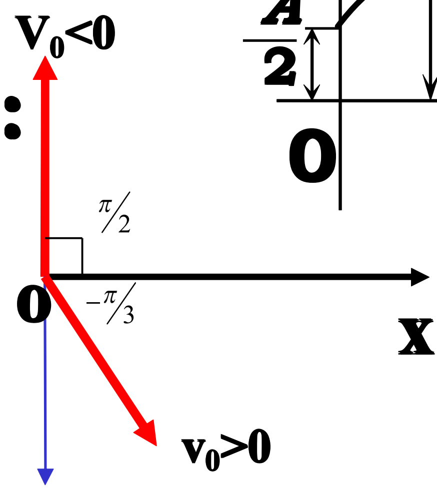
$$\Rightarrow\Delta\phi=\Delta t\cdot\omega=0.5\times\frac{5\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$$

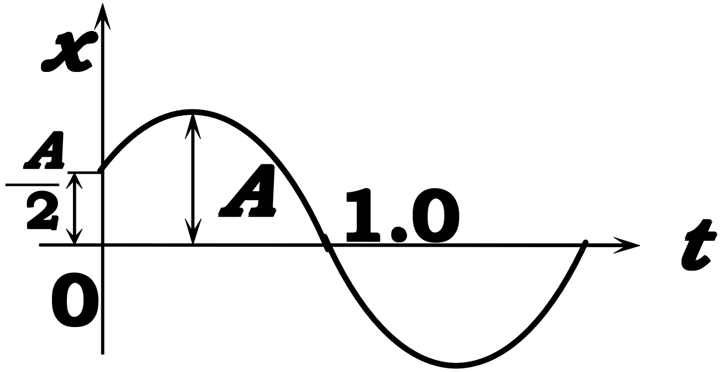
(2).旋转矢量法

t=0:



t=1:





$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$$

$$\Delta\varphi=\omega t=\omega$$

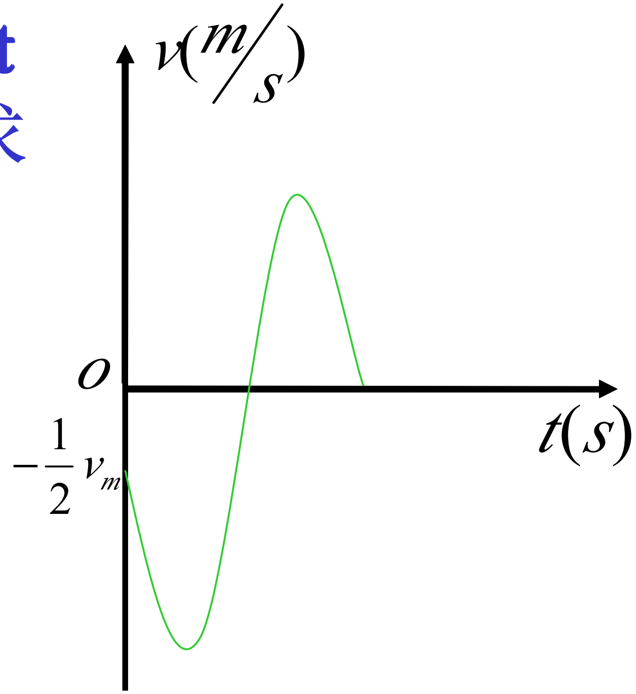
$$\omega=\frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore x=A\cos(\frac{5\pi}{6}t-\frac{\pi}{3})$$

1).ω、φ以及振动表达式：x=Acos(ωt+φ)

2).t=1秒和t=1.5秒两时刻的位相差△φ

例 质点按余弦规律作谐振动，其**v-t**关系曲线如图所示，周期**T=2s**。试求振动表达式。



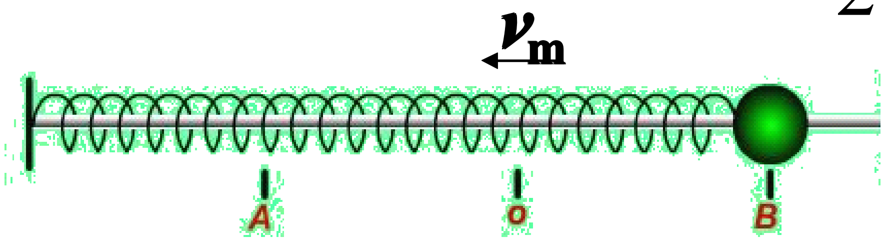
解：$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

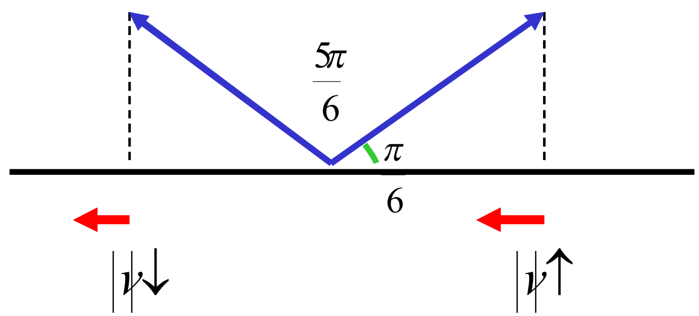
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$v_m = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_m}{\omega} = \frac{v_m}{\pi}$$

$$t = o: v_0 = -A\omega\sin\varphi = -\frac{1}{2}v_m$$

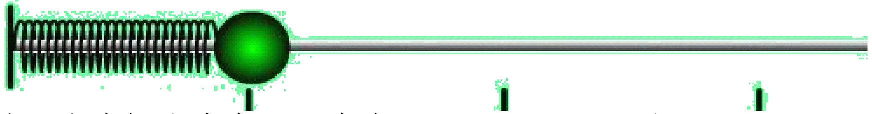
$$\varphi = \frac{\pi}{6}, \cancel{\frac{5\pi}{6}}$$

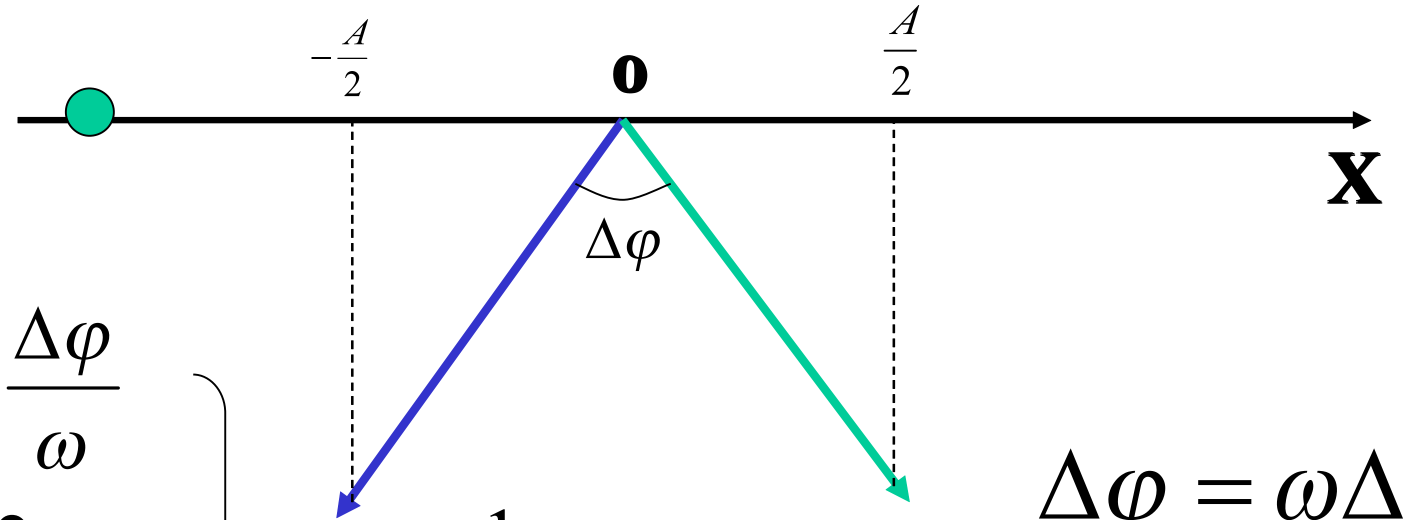




$$\therefore x = \frac{v_m}{\pi}\cos(\pi t + \frac{\pi}{6})$$

例 一弹簧振子由 $-A$ 处释放，求振子从 $-\dfrac{A}{2}$ 处向右运动到 $\dfrac{A}{2}$ 处所需的最短时间。（已知：$T=2$秒）



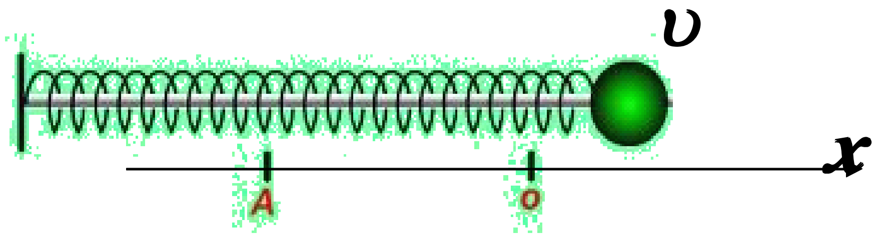


$$\Delta\varphi = \omega\Delta t$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta\varphi}{\omega} \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} = \pi \\ \Delta\varphi &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}\right\} \quad \Delta t = \frac{1}{3}(s)$$

4.1.4谐振动的能量

谐振动能量表达式



$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$E_p = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m[-\omega A\sin(\omega t+\varphi)]^2 = \tfrac{1}{2}m\underline{\omega^2}\,\underline{A^2}\sin^2(\omega t+\varphi)$$

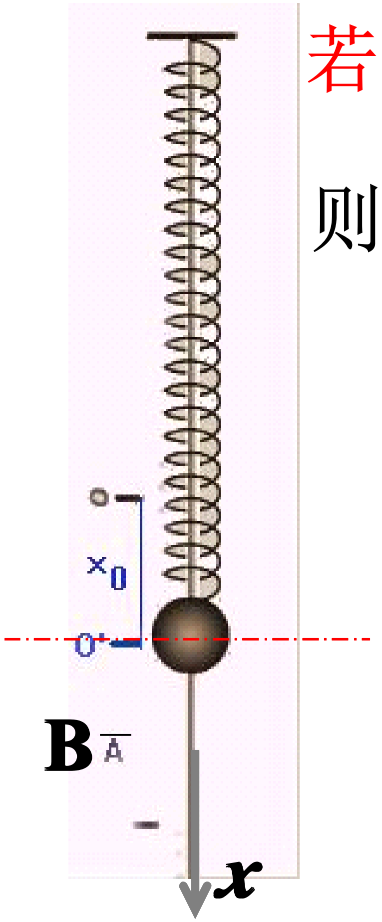
$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}m\upsilon_m^{\;2}$$

谐振动总能量与振幅平方成正比

说明:该结论对任一谐振系统均成立

势能是从该点到零势能点保守力所做的功

试说明竖直悬挂弹簧振子的势能为$E_p=\frac{1}{2}kx^2$



若以平衡位置（0’）为弹性势能和重力势能零点

则B点处：$E_p^{弹}=\int_x^0 -k(x+x_0)dx=\frac{1}{2}k(x+x_0)^2-\frac{1}{2}kx_0^{\ 2}$

$$E_p^{重}=-mgx$$

$$\therefore E_P^B=E_P^{弹}+E_P^{重}=\frac{1}{2}k(x+x_0)^2-\frac{1}{2}kx_0^{\ 2}-mgx$$

$$=\frac{1}{2}kx^2+\cancel{kxx_0}+\cancel{\frac{1}{2}kx_0^{\ 2}}-\cancel{\frac{1}{2}kx_0^{\ 2}}-\cancel{mgx}$$

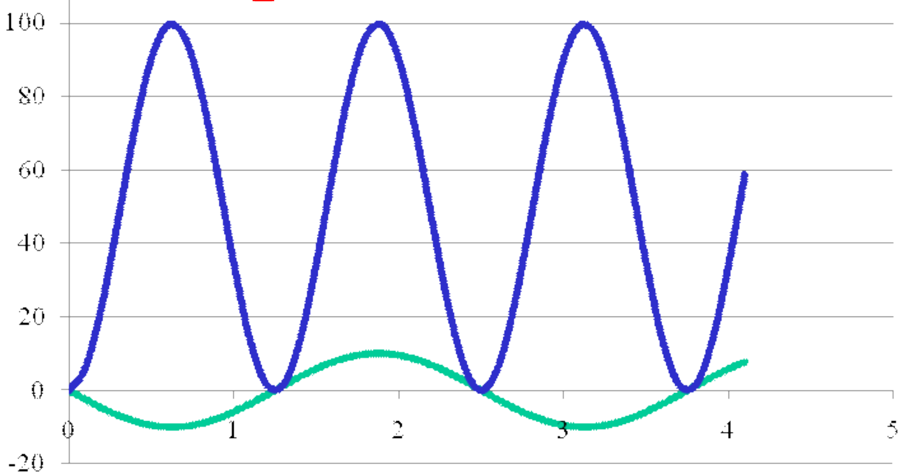
又$\because mg=kx_0$

$$\boxed{\therefore E_P^B=E_p^{弹}+E_p^{重}=\frac{1}{2}kx^2}$$

x是与平衡位置之间的位移，不是弹簧的伸长量

Ep,Ek呈现周期性变化，频率为系统固有频率2倍，但总能量不变 **x,Ep**

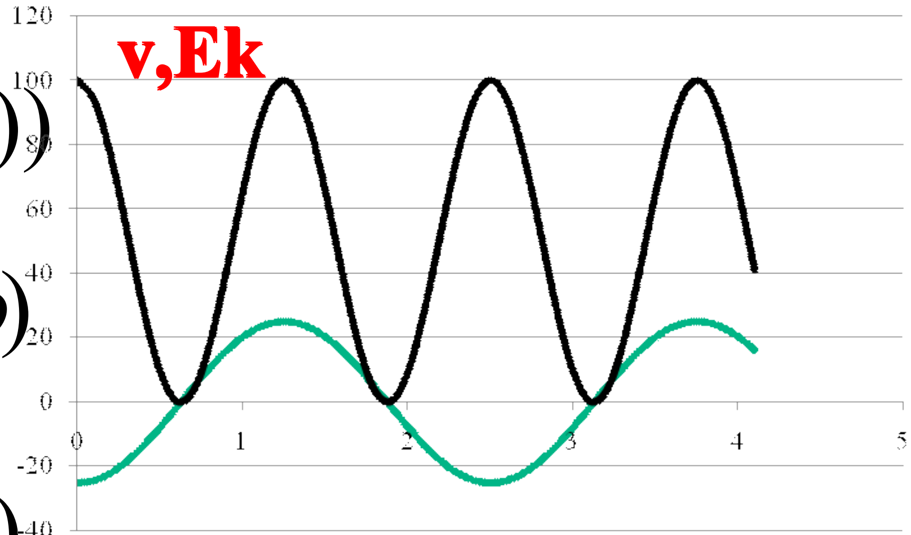
$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$



$$v = A\omega\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

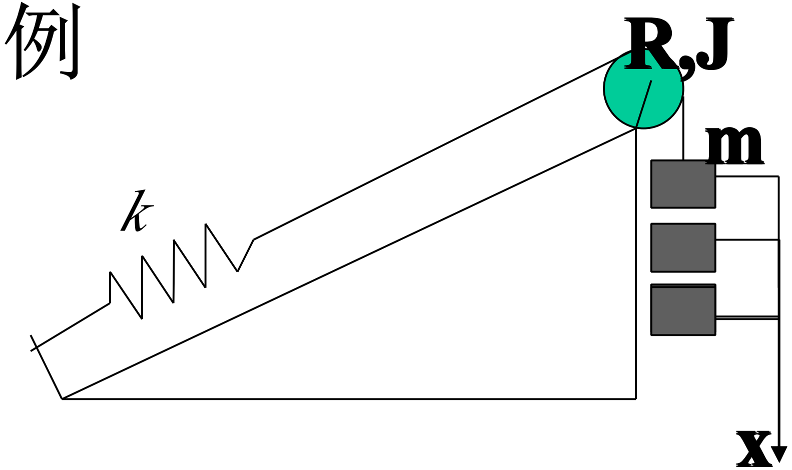
$$= \frac{1}{4}kA^2\left(1+\cos 2(\omega t+\varphi)\right)$$



$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_m^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$= \frac{1}{4}m\upsilon_m^2\left(1-\cos 2(\omega t+\varphi)\right)$$

例



已知：初态时弹簧处于原长

试证明：物块作谐振动，

o（平衡位置：势能零

点）$\{m、J、k、地面\}$ E守恒

任意位置(x)处

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2+\frac{1}{2}kx^2=常量$$

$$\frac{1}{2}(m+\frac{J}{R^2})v^2+\frac{1}{2}kx^2=常量$$

两边对时间求导得：

$$(m+\frac{J}{R^2})v\frac{dv}{dt}+kx\frac{dx}{dt}=0$$

$$(m+\frac{J}{R^2})\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{kR^2}{mR^2+J}x=0$$

——谐振动

其中：$\omega=R\sqrt{\frac{k}{J+mR^2}}$

[例] 已知：$m_1=1.0kg$（与弹簧固接）$m_2=3.0kg, k=25\,{}^{N}\!/_{m}$,

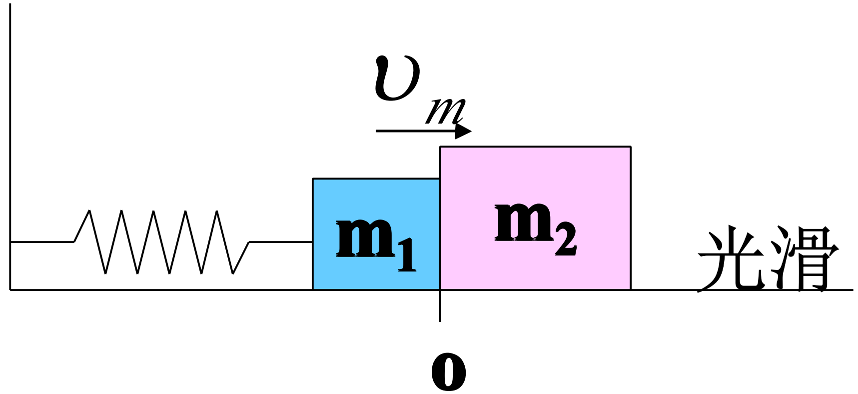
现将弹簧压缩$b=0.20m$后由静止释放。

求（1）m_2与m_1分离后，m_1作谐振动的振幅A,

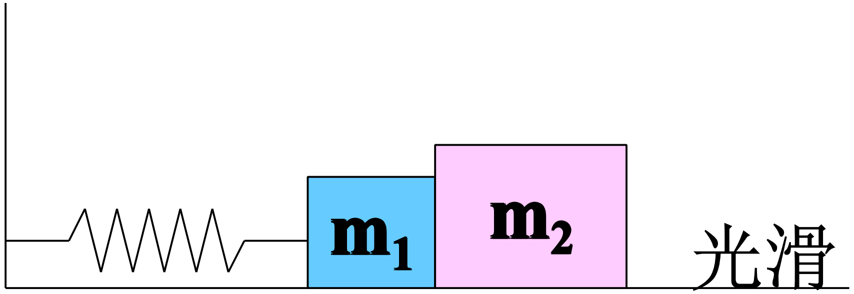
（2）m_1从释放后到再一次将弹簧压缩到最大时所需的时间。

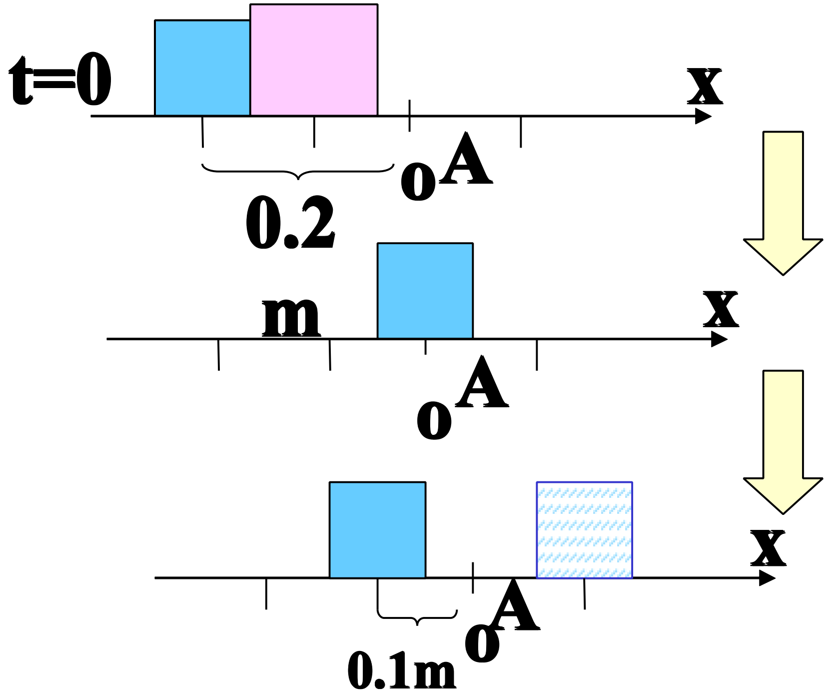
解：看运动

（**1**）分析：平衡位置处$\boldsymbol{v_m}$,
且是**m₁**、**m₂**分离处



$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}kb^2&=\frac{1}{2}(m_1+m_2){v_m}^2\\ \frac{1}{2}m_1{v_m}^2&=\frac{1}{2}kA^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow A=0.1m\ \mathbf{<0.2m}$$



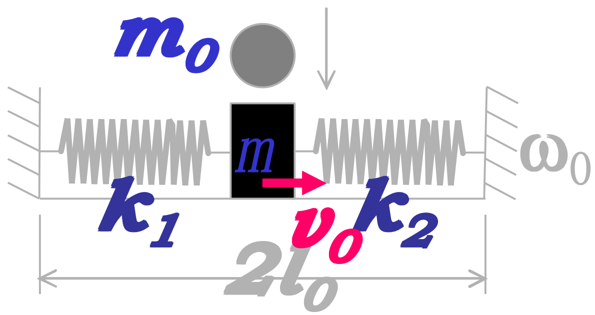


$$\boxed{t=\frac{1}{4}T_1+\frac{3}{4}T_2}$$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}=\frac{4}{5}\pi \\ T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}=\frac{2}{5}\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow t=1.57s$$

（2）m_1从释放后到再一次将弹簧压缩到最大时所需的时间。

[例题4-3]两根弹簧(弹性系数分别为k_1, k_2自然长度均为l_0)与物体m连接后作A_0的谐振. 当m运动到两弹簧处于自然长度时, 突然速度为0的质点m_0轻粘在m上, 求：m_0粘上后振动系统周期和振幅



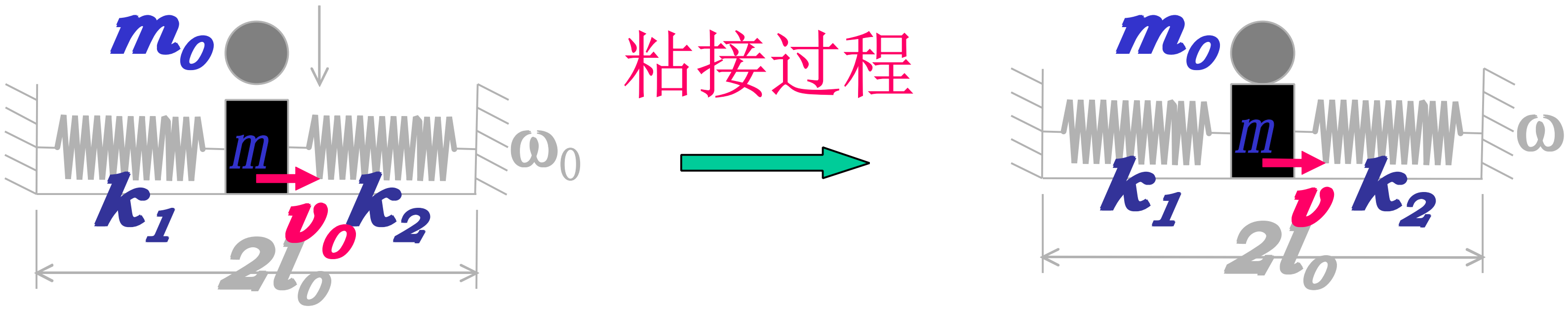
解：设$\mathbf{m_0}$与$\mathbf{m}$一起偏离平衡位置$\mathbf{x}$

$$-(k_1+k_2)x=(m+m_0)\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-(\frac{k_1+k_2}{m+m_0})x=-\frac{K}{M}x$$

$$\therefore K=k_1+k_2 \quad M=m+m_0$$

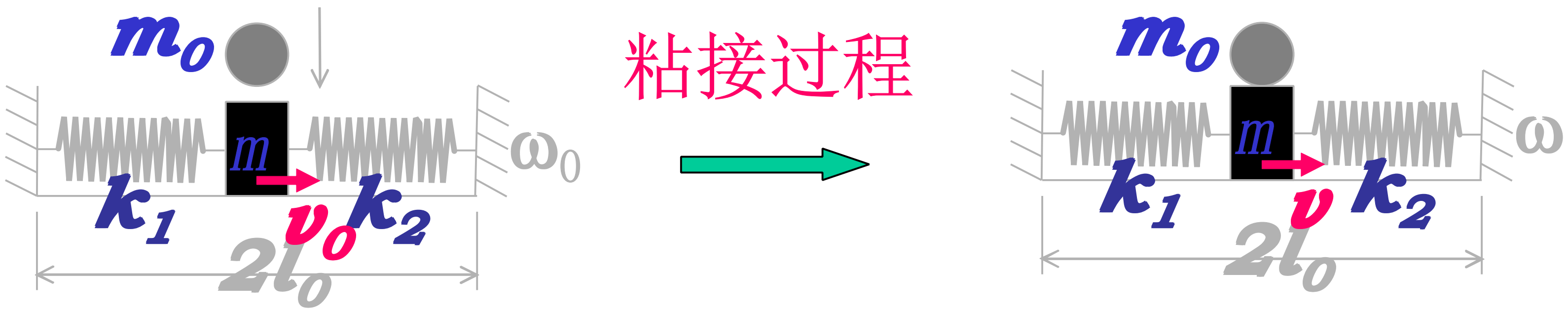
则：$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m_0+m}{k_1+k_2}}$



$$
\left.
\begin{aligned}
v_0 &= A_0\omega_0 = A_0\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} \\
v &= A\omega = A\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m+m_0}} \\
mv_0 &= (m+m_0)v
\end{aligned}
\right\}
\Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{m+m_0}}A_0
$$

（粘接过程系统水平方向动量守恒）

解法二：由谐振能量求A



$$\left.\begin{aligned}
&\text{粘接前}\quad E_0=\frac{1}{2}(k_1+k_2)A_0^2=\frac{1}{2}mv_0^2\\
&\text{粘接后}\quad E=\frac{1}{2}(k_1+k_2)A^2=\frac{1}{2}(m+m_0)v^2\\
&\qquad\qquad mv_0=(m+m_0)v
\end{aligned}\right\}\Rightarrow A=\sqrt{\frac{m}{m+m_0}}A_0$$

[例]求证：串联弹簧的$K=\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$

证明：

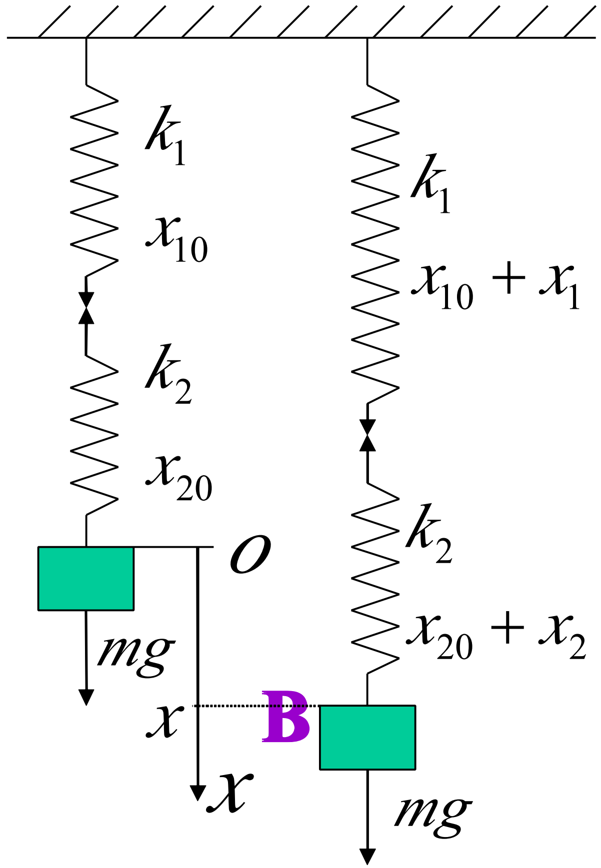
1） 平衡位置**O**处

$$mg=k_1x_{10}=k_2x_{20}\cdots\cdots(1)$$

2）B位置

$$x=x_1+x_2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$k_1(x_{10}+x_1)=k_2(x_{20}+x_2)\cdots(3)$$



由（1）（3）得：$k_1x_1=k_2x_2\cdots(4)$

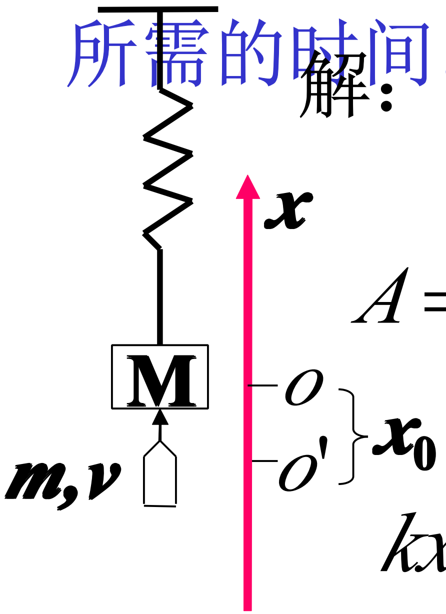
由（2）（4）得：$x_2=\dfrac{k_1}{k_1+k_2}x$

$\{m\}$：$F_{合}=mg-k_2(x_{20}+x_2)=-k_2x_2$

$$F_{合}=-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x=-Kx$$

$$\therefore K=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$

例 弹簧振子（M，k）竖直悬挂，处于平衡，子弹（m）以速度v由下而上射入物块并嵌入其内。求：(1).物块振动的T和A; (2).物块从开始运动到最远处所需的时间。



解：谐振子的周期 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=\sqrt{x_0^2+\frac{(M+m)v_0^2}{k}}$$

动量守恒 $v_0=\dfrac{mv}{m+M}$

$$kx_0=mg\rightarrow x_0=\frac{mg}{k}$$

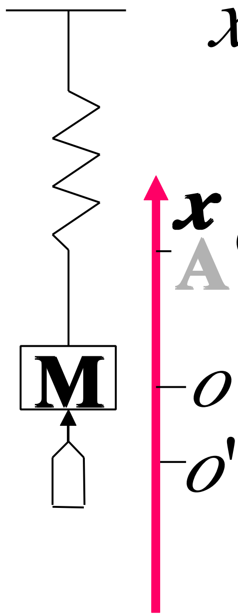
$$A=\sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2}+\frac{m^2v^2}{k(m+M)}}$$

解法二：能量守恒

$$E=\cancel{\frac{1}{2}}kA^2=\cancel{\frac{1}{2}}(m+M)v_0^2+\cancel{\frac{1}{2}}kx_0^2$$

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{M+m}{k}v_0^2}=$$

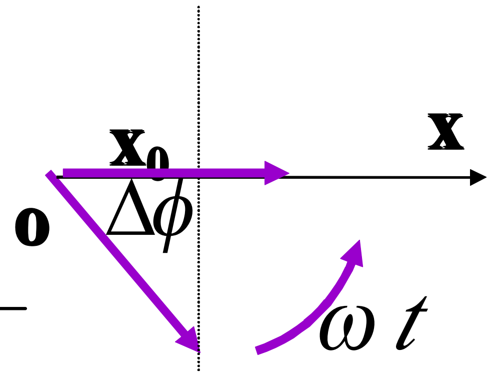
(2).物块从开始运动到最远处所需的时间?



$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad x_0 = A\cos\varphi,\ v_0 = -A\omega\sin\varphi$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) = \arctan\left(-\frac{mv/(m+M)}{\sqrt{k/(m+M)}\cdot\frac{mg}{k}}\right)$$

$$\Delta\phi = \arctan\left(\frac{v}{g}\sqrt{\frac{k}{m+m}}\right)$$

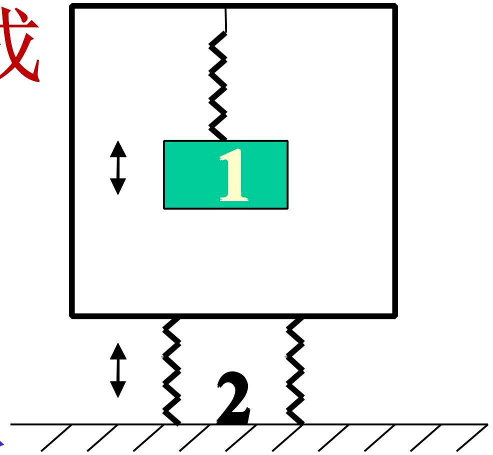


$$\therefore t = \frac{\Delta\phi}{\omega} = \sqrt{\frac{m+M}{k}}\, arc\tan\left(\frac{v}{g}\sqrt{\frac{k}{m+m}}\right)$$

4.2 振动的合成

- 同方向同频率
- 同方向不同频率
- 同频率，振动方向相互垂直
- 不同频率，振动方向相互垂直

1、两同方向、同频率谐振动的合成



振动方向同一条直线

物体同时参与两分振动：

- 频率不变，
- 振幅变化
- 初相位变化

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

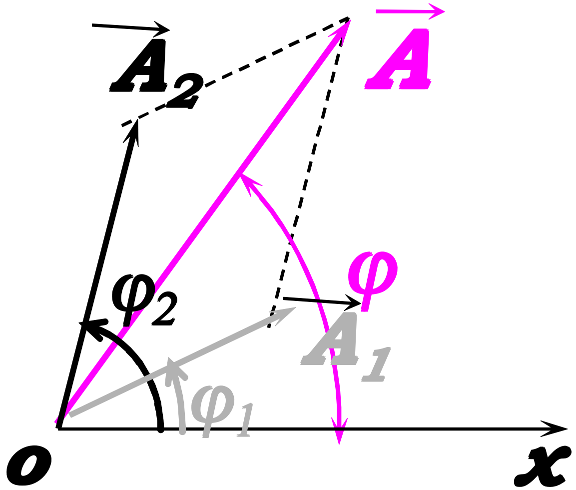
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\varphi = tan^{-1}\frac{A_1\, sin\,\varphi_1 + A_2\, sin\,\varphi_2}{A_1\, cos\,\varphi_1 + A_2\, cos\,\varphi_2}$$



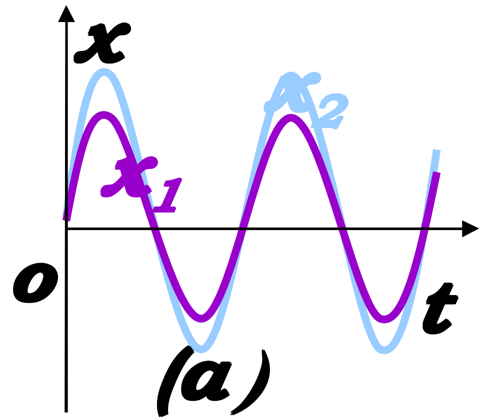
旋转矢量法

合振幅的讨论

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_1^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

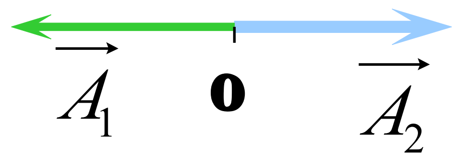
①若 $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ 合振动加强

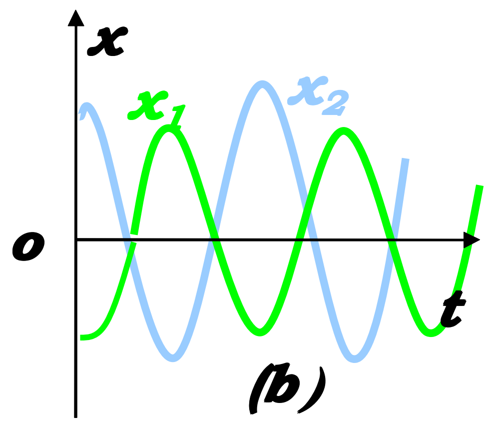
$$A = A_1 + A_2$$



②若 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ 合振动减弱

$$A = \left|A_2 - A_1\right|$$





例 两个同方向同频率的简谐振动，其振动表达式分别为

$$x_1 = 0.06\,\mathbf{cos}(5t + \frac{1}{2}\pi)\ m \quad，\quad x_2 = 0.02\,\mathbf{sin}(\pi - 5t)\ m$$

求：它们合振动的振动方程。 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

解：$x_2 = 0.02\cos(\frac{\pi}{2} - (\pi - 5t))$

$$= 0.02\cos(5t - \frac{\pi}{2})$$

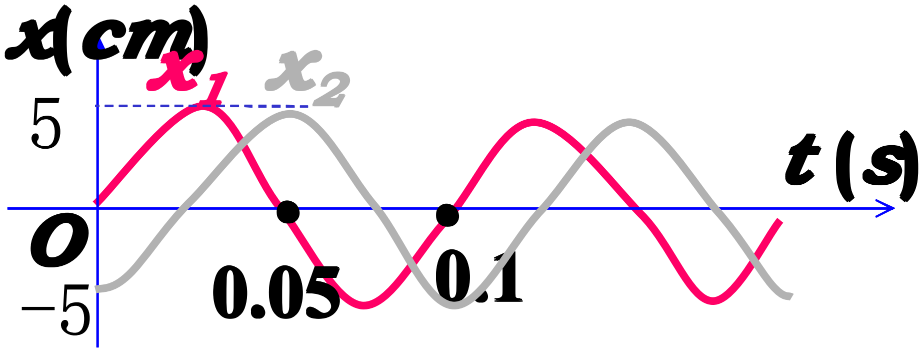
$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_1^2 + 2A_1 A_2 \cos\Delta\varphi}$$

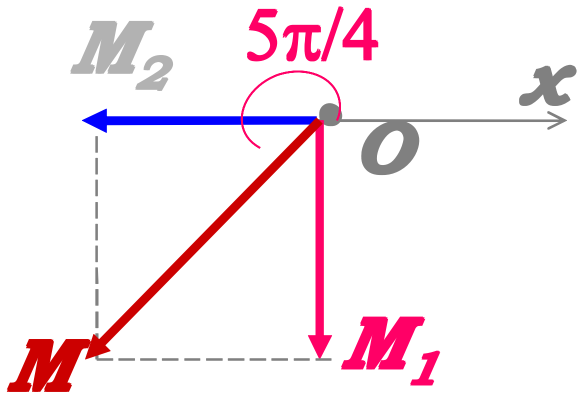
$$\therefore x = x_1 + x_2 = 0.04\cos(5t + \frac{\pi}{2})m$$

例4-6

[例题4-6]两同频率谐振动曲线如图所示，

求：它们合振动方程 $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$





解：

T=0.1s $\rightarrow \omega = 20\pi$

$A_1 = A_2 = 5\text{cm}$

$\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{2} \quad \varphi_2 = \pi$

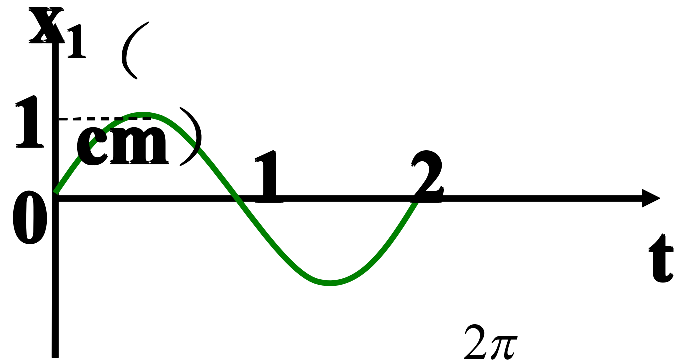
$A = 5\sqrt{2}cm$

$\varphi = -\dfrac{3}{4}\pi$

$$x = x_1 + x_2 = 5\sqrt{2}\cos(20\pi t - 3\pi/4)cm$$

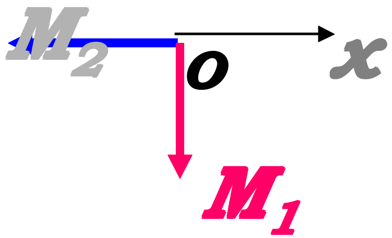
分振动位移曲线 ➡ 合振动

[例]: 两同方向,同频率的简谐振动,振动1的$x\sim t$曲线及振动2的$v\sim t$曲线如图所示.



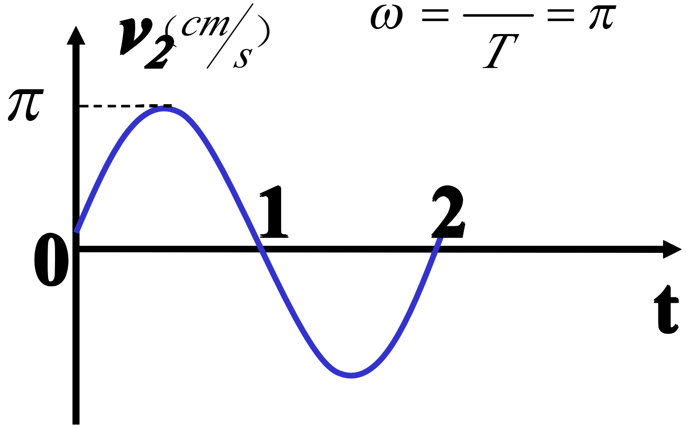
求: (1)$\varphi_2-\varphi_1$　　(2)$A_合$

解: $\therefore \varphi_1=-\dfrac{\pi}{2}$　　$A_1=1cm$



$\therefore \varphi_2=\pi$　　$A_2=1cm$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$$



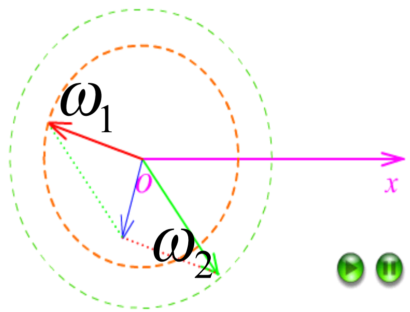
$v_{20}=0$且将增大(向正方向)

则: $\varphi_2-\varphi_1=\pi-(-\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{3}{2}\pi(或-\dfrac{\pi}{2})$

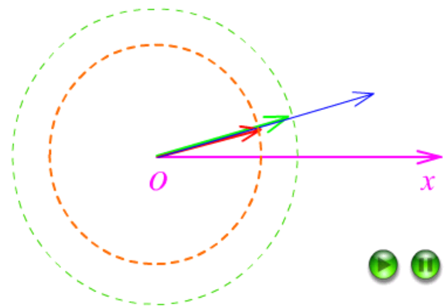
$\because v_{2\max}=A_2\omega=\pi$

$A=\sqrt{2}cm$

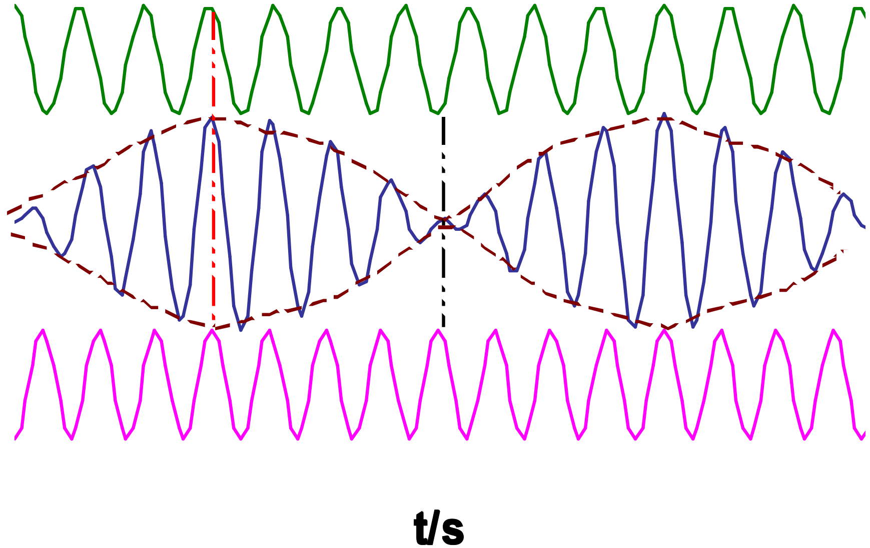
2、同方向，不同频率



频率相差大时，非谐振动，复杂的周期运动



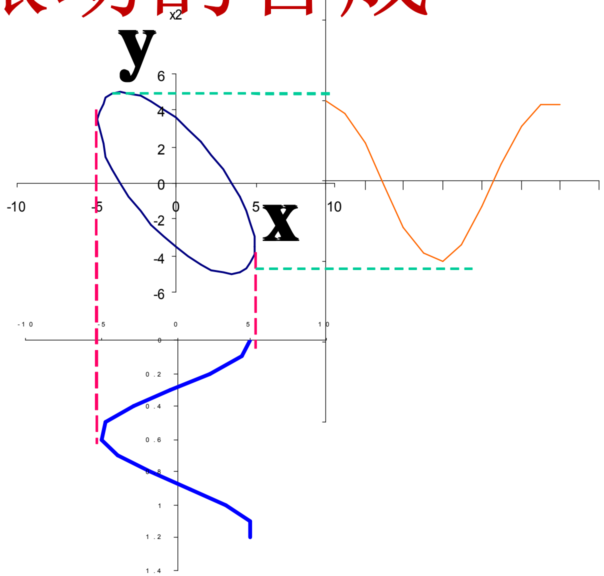
当**2**个振动存在微小频率差时，合振动时强时弱，周期性变化，称为拍。



- 测量频率
- 双簧管颤音
- 汽车速度监视器

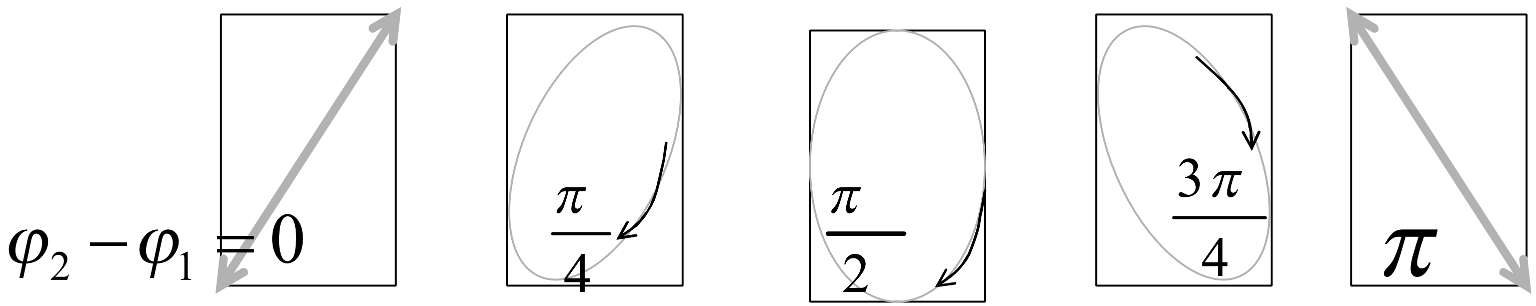
3、同频率两互相垂直谐振动的合成

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$



合振动的轨迹方程

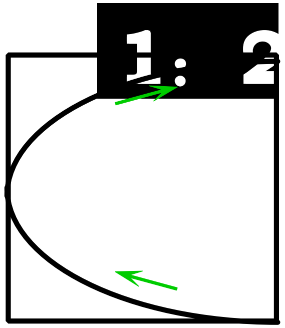
$$(\frac{x}{A_1})^2+(\frac{y}{A_2})^2-2(\frac{xy}{A_1A_2})\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

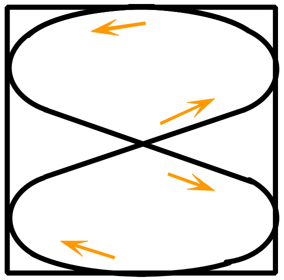


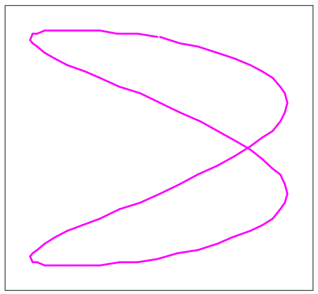
轨迹为椭圆/直线，方位、转向由**A**、$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$决定

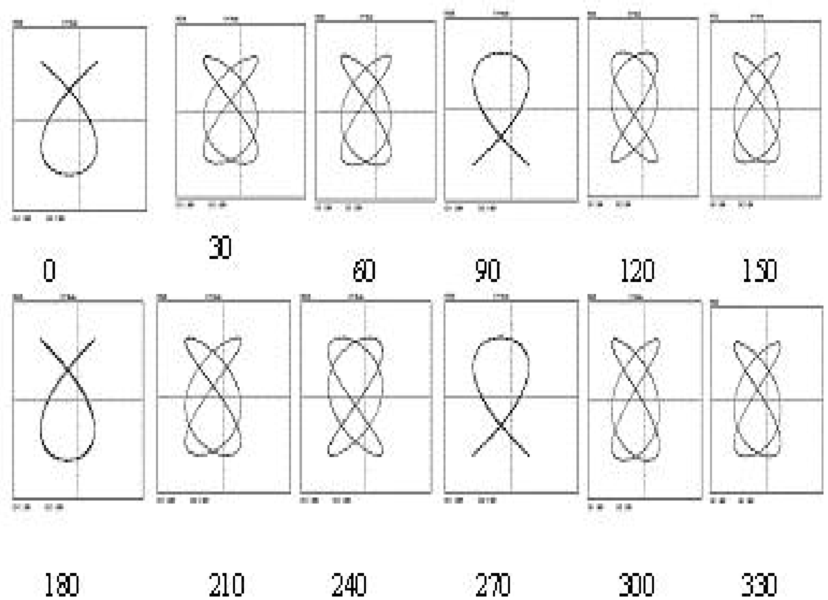
4、两个相互垂直不同频率谐振动的合成

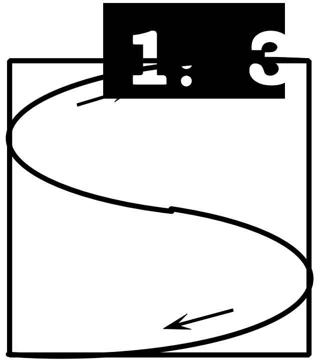
（1）李萨如图：由成（简单）整数比的两个垂直方向的谐振合成而形成封闭、稳定的曲线

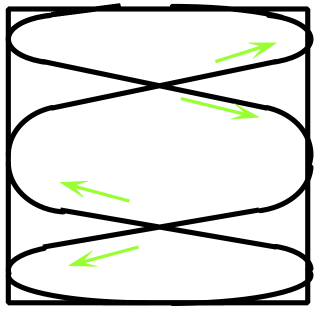


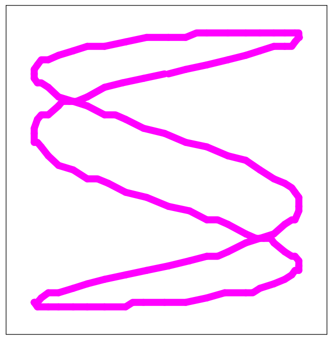






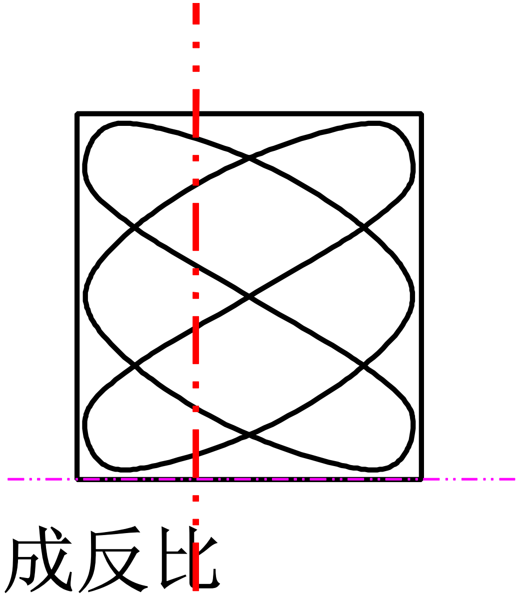






应用 无线电技术中测量频率

$$\frac{\nu_x}{\nu_y} = \frac{N_y}{N_x}$$

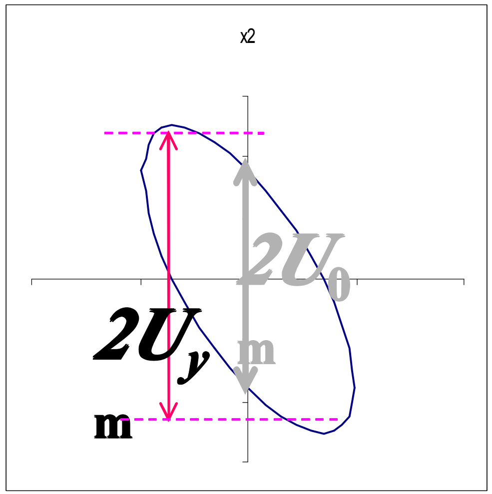


N—交点数，ν—频率，频率与交点数成反比

$$\left.\begin{array}{l} \nu_y = 50\text{Hz} \\ \nu_x = \nu_y \cdot \dfrac{N_y}{N_x} = 50 \cdot \dfrac{3}{2} = 75Hz \end{array}\right\} \nu_x = 75\text{Hz}$$

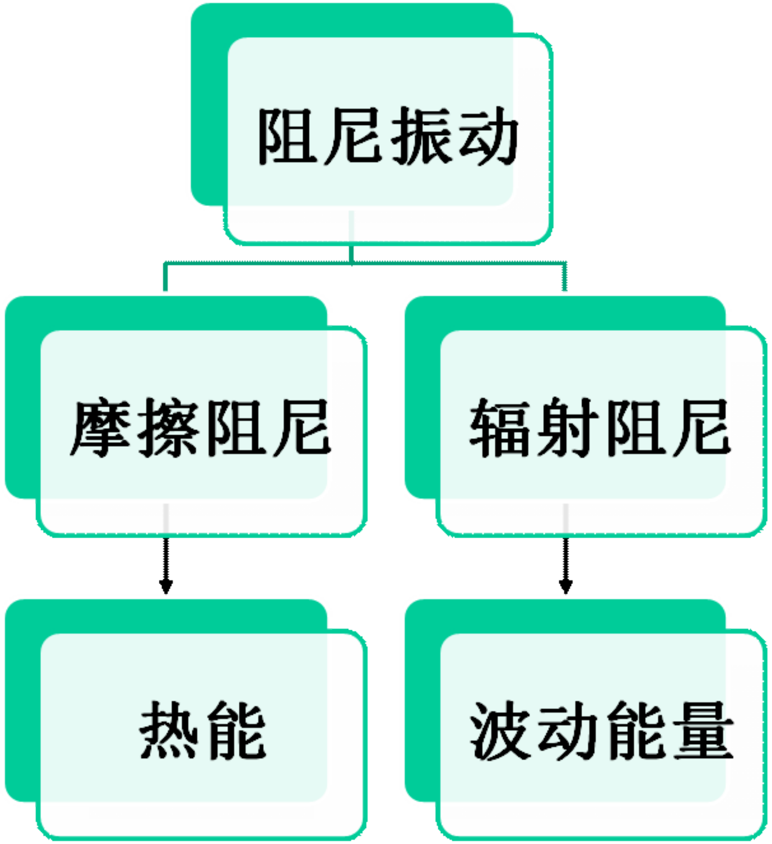
测量位相差

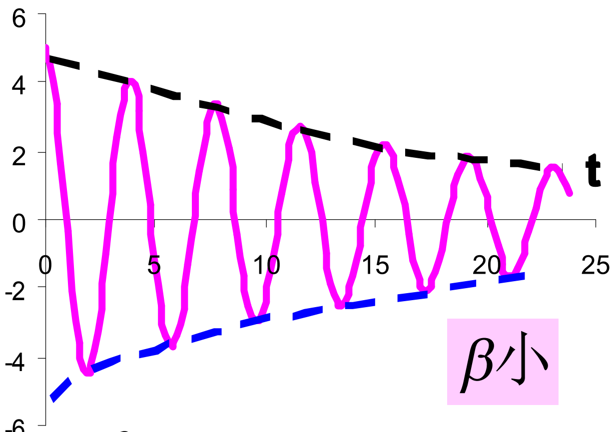
$$\sin\varphi = \frac{U_{y0}}{U_{ym}} \Rightarrow \varphi = \sin^{-1}\left(\frac{U_{y0}}{U_{ym}}\right)$$



*4.4　阻尼振动

振幅随时间而减小，非谐振动





$f_{阻} = -\gamma \cdot v$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\Rightarrow x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

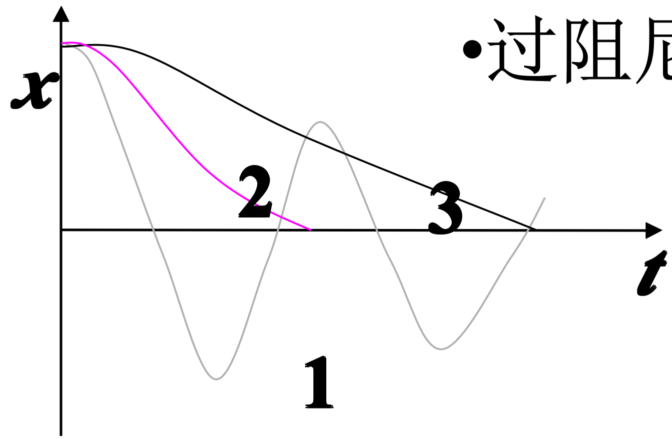
$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$　　$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} > T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$　　周期延长

阻尼系数

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)$$

- 欠阻尼**1**
- 临界阻尼**2**
- 过阻尼**3**

灵敏电流计



- 增大阻尼 $\longrightarrow$ 快速的回到回到平衡位置

微振仪，测量地震，区分第一、二次相隔时间较近的地震

*4.4 受迫振动

补充能量

⇩

阻尼振动

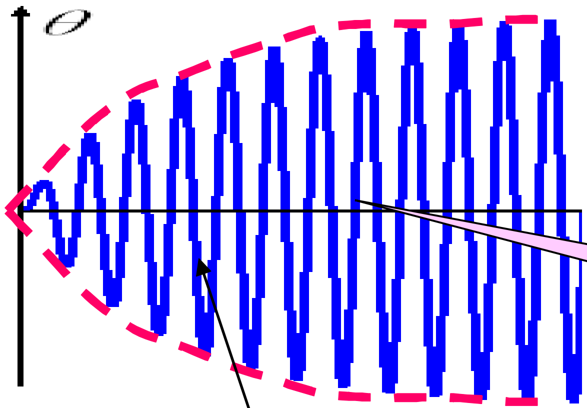
线性恢复力

阻尼力（小）

强迫力

周期性的外力作用下谐振动

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=h\cos pt$$



稳定

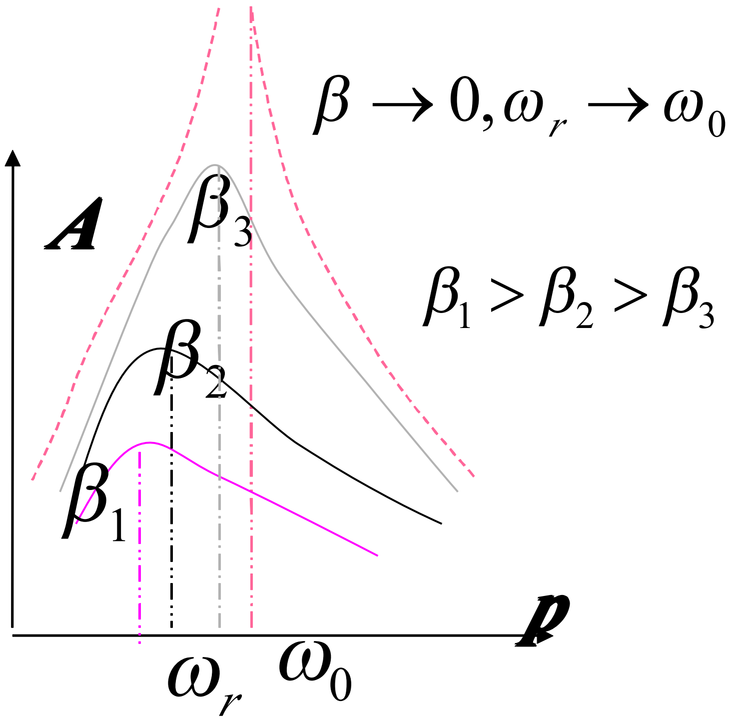
谐振动

$$x=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_1)+A\cos(pt+\varphi_2)$$

振幅的大小和强迫力的圆频率，阻尼系数有关

共振:　振幅达到最大值的现象称为共振,共振频率$\boldsymbol{w}_{\mathbf{r}}$

$$振幅A=\frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2-p^2)^2+4\beta^2p^2}}$$



共振利用:

- 微波炉
- 收音机的调谐
- 核磁共振
- 测量仪器
- 乐器的共鸣箱

共振危害:

- 雪崩
- 翻船
- 机器损坏
- 桥梁倒塌