

§1 函数极限

一、函数极限定义

定义： 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个去心领域内有定义，设 A 是一个定数。

若对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 A 是函数 $f(x)$ 在 x_0 处的极限。记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow x_0$)。若不存在上述实数 A , 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限不存在。

§1 函数极限

一、函数极限定义

定义： 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个去心领域内有定义，设 A 是一个定数。

若对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \epsilon$ ，
则称 A 是函数 $f(x)$ 在 x_0 处的极限。记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A$
($x \rightarrow x_0$)。若不存在上述实数 A ，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限不存在。

注1： $f(x)$ 在 x 趋于 x_0 是否收敛、收敛时极限是什么，完全由函数在点 x_0 附近（但不包括 x_0 ）的性质决定，因此是函数在 x_0 处的局部性质。

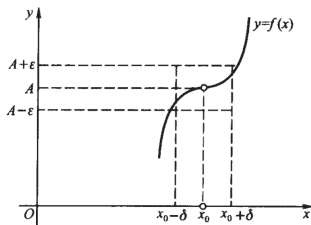
3.1.函数极限

注2: $x_n \rightarrow a$ 一般可省略 $n \rightarrow \infty$, 但 $f(x) \rightarrow A(x \rightarrow a)$ 中 $x \rightarrow a$ 一般不能省略。

3.1.函数极限

注2: $x_n \rightarrow a$ 一般可省略 $n \rightarrow \infty$, 但 $f(x) \rightarrow A(x \rightarrow a)$ 中 $x \rightarrow a$ 一般不能省略。

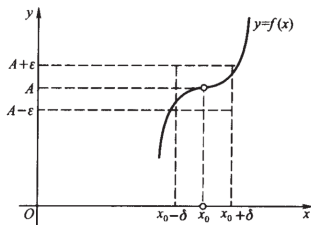
几何意义: 只要 x 落在 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 内, 曲线 $y = f(x)$ 就落在两条直线 $y = A - \epsilon$ 与 $y = A + \epsilon$ 之间。



3.1.函数极限

注2: $x_n \rightarrow a$ 一般可省略 $n \rightarrow \infty$, 但 $f(x) \rightarrow A(x \rightarrow a)$ 中 $x \rightarrow a$ 一般不能省略。

几何意义: 只要 x 落在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内, 曲线 $y = f(x)$ 就落在两条直线 $y = A - \epsilon$ 与 $y = A + \epsilon$ 之间。

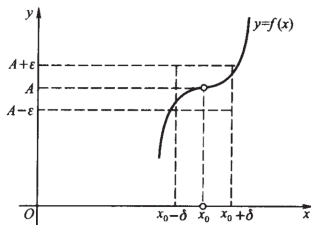


例1: 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, 其中 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 。

3.1.函数极限

注2: $x_n \rightarrow a$ 一般可省略 $n \rightarrow \infty$, 但 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow a)$ 中 $x \rightarrow a$ 一般不能省略。

几何意义: 只要 x 落在 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 内, 曲线 $y = f(x)$ 就落在两条直线 $y = A - \epsilon$ 与 $y = A + \epsilon$ 之间。



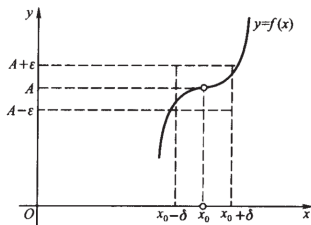
例1: 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, 其中 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 。

例2: 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ 。

3.1.函数极限

注2: $x_n \rightarrow a$ 一般可省略 $n \rightarrow \infty$, 但 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow a)$ 中 $x \rightarrow a$ 一般不能省略。

几何意义: 只要 x 落在 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 内, 曲线 $y = f(x)$ 就落在两条直线 $y = A - \epsilon$ 与 $y = A + \epsilon$ 之间。



例1: 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, 其中 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 。

例2: 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ 。

例3: 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$ 。

二、函数的极限的性质

性质1(唯一性): 设 A 与 B 都是函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 处的极限, 则 $A = B$ 。

二、函数的极限的性质

性质1(唯一性): 设 A 与 B 都是函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 处的极限, 则 $A = B$ 。

性质2(局部有界性): 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\exists \delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $O(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ 中有界。

二、函数的极限的性质

性质1(唯一性): 设 A 与 B 都是函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 处的极限, 则 $A = B$ 。

性质2(局部有界性): 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\exists \delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $O(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ 中有界。

性质3(局部保序性): 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时成立 $f(x) > g(x)$ 。

二、函数的极限的性质

性质1(唯一性): 设 A 与 B 都是函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 处的极限, 则 $A = B$ 。

性质2(局部有界性): 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\exists \delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $O(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ 中有界。

性质3(局部保序性): 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时成立 $f(x) > g(x)$ 。

性质4(夹逼性): 若在 $O(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ 内有 $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ 。

三、函数极限的四则运算

定理： 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

(I) 线性运算 $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B$ (α, β 为常数);

三、函数极限的四则运算

定理： 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

(I) 线性运算 $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B$ (α, β 为常数);

(II) 乘法 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = AB$;

三、函数极限的四则运算

定理： 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

(I) 线性运算 $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B$ (α, β 为常数);

(II) 乘法 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = AB$;

(III) 除法 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$)。

三、函数极限的四则运算

定理： 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

(I) 线性运算 $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B$ (α, β 为常数);

(II) 乘法 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = AB$;

(III) 除法 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$)。

例1: 已知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+ax+1} = b$, 求 a, b .

三、函数极限的四则运算

定理： 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

(I) 线性运算 $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B$ (α, β 为常数);

(II) 乘法 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = AB$;

(III) 除法 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$)。

例1: 已知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+ax+1} = b$, 求 a, b .

作业: 课本 P_{86} 1(1-3), 2(3)(5-7)(9-10), 3(1) P_{87} 8, 9

四、函数极限与数列极限的关系

定理：(Heine定理，又叫归结原则)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0, \text{ 都有 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A。$$

四、函数极限与数列极限的关系

定理：(Heine定理，又叫归结原则)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0, \text{ 都有 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A。$$

定理：(归结原则的推论)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 存在 } \iff \forall \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0, \text{ 都有 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \text{ 存在。}$$

四、函数极限与数列极限的关系

定理：(Heine定理，又叫归结原则)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0, \text{ 都有 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A。$$

定理：(归结原则的推论)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 存在 } \iff \forall \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0, \text{ 都有 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \text{ 存在。}$$

注：函数极限基本性质（唯一性定理和四则运算法则）证

法：（1） $\epsilon - \delta$ ；（2）用归结原则转化成数列问题去解决。

四、函数极限与数列极限的关系

定理：(Heine定理, 又叫归结原则)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0, \text{ 都有 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A。$$

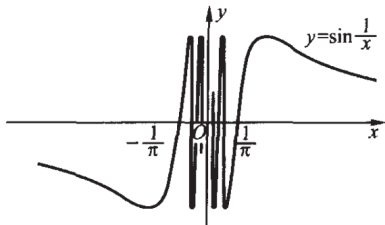
定理：(归结原则的推论)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 存在 } \iff \forall \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0, \text{ 都有 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \text{ 存在。}$$

注：函数极限基本性质（唯一性定理和四则运算法则）证

法：（1） $\epsilon - \delta$ ；（2）用归结原则转化成数列问题去解决。

例1：证明 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时极限不存在。



五、单侧极限

五、单侧极限

污染控制成本 城市和公司欲求急剧增长的污染控制成本，其成本与从周边环境清除污染物的百分比有关。设从一个化学垃圾场清除 $p\%$ 的污染物所花费的成本 $C(p) = \frac{48000}{100-p}$ 。试问公司能担负起清理100% 的污染物吗？求 $\lim_{p \rightarrow 100^-} C(p)$ 。

五、单侧极限

污染控制成本 城市和公司欲求急剧增长的污染控制成本，其成本与从周边环境清除污染物的百分比有关。设从一个化学垃圾场清除 $p\%$ 的污染物所花费的成本 $C(p) = \frac{48000}{100-p}$ 。试问公司能担负起清理100%的污染物吗？求 $\lim_{p \rightarrow 100^-} C(p)$ 。

定义： 设 $f(x)$ 在 $(x_0 - \rho, x_0)$ ($\rho > 0$) 有定义。若存在 $A \in \mathbb{R}$ ，对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ，有 $|f(x) - A| < \epsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限，记为 $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 。

五、单侧极限

污染控制成本 城市和公司欲求急剧增长的污染控制成本，其成本与从周边环境清除污染物的百分比有关。设从一个化学垃圾场清除 $p\%$ 的污染物所花费的成本 $C(p) = \frac{48000}{100-p}$ 。试问公司能担负起清理100%的污染物吗？求 $\lim_{p \rightarrow 100^-} C(p)$ 。

定义： 设 $f(x)$ 在 $(x_0 - \rho, x_0)$ ($\rho > 0$) 有定义。若存在 $A \in \mathbb{R}$ ，对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ，有 $|f(x) - A| < \epsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限，记为 $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 。

显然 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A$ 。

五、单侧极限

污染控制成本 城市和公司欲求急剧增长的污染控制成本，其成本与从周边环境清除污染物的百分比有关。设从一个化学垃圾场清除 $p\%$ 的污染物所花费的成本 $C(p) = \frac{48000}{100-p}$ 。试问公司能担负起清理100%的污染物吗？求 $\lim_{p \rightarrow 100^-} C(p)$ 。

定义： 设 $f(x)$ 在 $(x_0 - \rho, x_0)$ ($\rho > 0$) 有定义。若存在 $A \in \mathbb{R}$ ，对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ，有 $|f(x) - A| < \epsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限，记为 $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 。

显然 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A$ 。

例1: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$ 。

五、单侧极限

污染控制成本 城市和公司欲求急剧增长的污染控制成本，其成本与从周边环境清除污染物的百分比有关。设从一个化学垃圾场清除 $p\%$ 的污染物所花费的成本 $C(p) = \frac{48000}{100-p}$ 。试问公司可能担负起清理100%的污染物吗？求 $\lim_{p \rightarrow 100^-} C(p)$ 。

定义： 设 $f(x)$ 在 $(x_0 - \rho, x_0)$ ($\rho > 0$) 有定义。若存在 $A \in \mathbb{R}$ ，对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ，有 $|f(x) - A| < \epsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限，记为 $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 。

显然 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A$ 。

例1: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$ 。

例2: $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x^2-1}} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0$ 。

3.1.函数极限

注：所有函数极限的性质与运算，均适用于左（右）极限。

3.1.函数极限

注：所有函数极限的性质与运算，均适用于左（右）极限。

作业：课本 P_{87} 5(2)(3)(4)

六、函数极限定义的扩充

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,
有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

自变量的极限过程有6种： $x \rightarrow x_0, x_0^+, x_0^-, \infty, +\infty, -\infty$ ；
函数值极限有4种： $f(x) \rightarrow A, \infty, +\infty, -\infty$ 。共24种。

3.1.函数极限

注：所有函数极限的性质与运算，均适用于左（右）极限。

作业：课本 P_{87} 5(2)(3)(4)

六、函数极限定义的扩充

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时,}$
有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

自变量的极限过程有6种： $x \rightarrow x_0, x_0^+, x_0^-, \infty, +\infty, -\infty$ ；
函数值极限有4种： $f(x) \rightarrow A, \infty, +\infty, -\infty$ 。共24种。

仔细分析 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的定义，

$\forall \epsilon > 0, \dots$ ，有 $|f(x) - A| < \epsilon$ 描述的是 $f(x) \rightarrow A$ 的情景；
 $\exists \delta > 0$ ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时描述的是 $x \rightarrow x_0$ 的过程。

3.1.函数极限

对四种函数极限值和六种自变量极限过程，有如下表达：

$$f(x) \rightarrow A, \quad \forall \epsilon > 0, \dots, \text{有 } |f(x) - A| < \epsilon$$

$$f(x) \rightarrow \infty, \quad \forall G > 0, \dots, \text{有 } |f(x)| > G$$

$$f(x) \rightarrow +\infty, \quad \forall G > 0, \dots, \text{有 } f(x) > G$$

$$f(x) \rightarrow -\infty, \quad \forall G > 0, \dots, \text{有 } f(x) < -G$$

3.1.函数极限

对四种函数极限值和六种自变量极限过程，有如下表达：

$$f(x) \rightarrow A, \quad \forall \epsilon > 0, \dots, \text{有 } |f(x) - A| < \epsilon$$

$$f(x) \rightarrow \infty, \quad \forall G > 0, \dots, \text{有 } |f(x)| > G$$

$$f(x) \rightarrow +\infty, \quad \forall G > 0, \dots, \text{有 } f(x) > G$$

$$f(x) \rightarrow -\infty, \quad \forall G > 0, \dots, \text{有 } f(x) < -G$$

以及

$$x \rightarrow x_0, \quad \dots, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta, \dots$$

$$x \rightarrow x_0^+, \quad \dots, \exists \delta > 0, \forall 0 < x - x_0 < \delta, \dots$$

$$x \rightarrow x_0^-, \quad \dots, \exists \delta > 0, \forall -\delta < x - x_0 < 0, \dots$$

$$x \rightarrow \infty, \quad \dots, \exists X > 0, \forall |x| > X, \dots$$

$$x \rightarrow +\infty, \quad \dots, \exists X > 0, \forall x > X, \dots$$

$$x \rightarrow -\infty, \quad \dots, \exists X > 0, \forall x < -X, \dots$$

3.1.函数极限

对四种函数极限值和六种自变量极限过程，有如下表达：

$$f(x) \rightarrow A, \quad \forall \epsilon > 0, \dots, \text{有 } |f(x) - A| < \epsilon$$

$$f(x) \rightarrow \infty, \quad \forall G > 0, \dots, \text{有 } |f(x)| > G$$

$$f(x) \rightarrow +\infty, \quad \forall G > 0, \dots, \text{有 } f(x) > G$$

$$f(x) \rightarrow -\infty, \quad \forall G > 0, \dots, \text{有 } f(x) < -G$$

以及

$$x \rightarrow x_0, \quad \dots, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta, \dots$$

$$x \rightarrow x_0^+, \quad \dots, \exists \delta > 0, \forall 0 < x - x_0 < \delta, \dots$$

$$x \rightarrow x_0^-, \quad \dots, \exists \delta > 0, \forall -\delta < x - x_0 < 0, \dots$$

$$x \rightarrow \infty, \quad \dots, \exists X > 0, \forall |x| > X, \dots$$

$$x \rightarrow +\infty, \quad \dots, \exists X > 0, \forall x > X, \dots$$

$$x \rightarrow -\infty, \quad \dots, \exists X > 0, \forall x < -X, \dots$$

组合起来，不难写出任意一种函数极限，e.g. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ 。

3.1.函数极限

例1: 证明 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$.

3.1.函数极限

例1: 证明 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$.

注1: 关于函数极限性质: 唯一性 (成立); 局部有界 (对 ∞ 谈不上局部有界); 局部保序性和夹逼性 (只当函数是有限、 $+\infty$ 或 $-\infty$ 成立。当极限为未定号无穷大时, 不成立)。

3.1.函数极限

例1: 证明 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$.

注1: 关于函数极限性质: 唯一性 (成立); 局部有界 (对 ∞ 谈不上局部有界); 局部保序性和夹逼性 (只当函数是有限、 $+\infty$ 或 $-\infty$ 成立。当极限为未定号无穷大时, 不成立)。

注2: 关于函数极限的四则运算, 只要不是待定型如 $\infty + \infty$, $(+\infty) + (-\infty)$, $\infty + (\pm\infty)$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ 型, 四则运算法则总成立。

3.1.函数极限

例1: 证明 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$.

注1: 关于函数极限性质: 唯一性 (成立); 局部有界 (对 ∞ 谈不上局部有界); 局部保序性和夹逼性 (只当函数是有限、 $+\infty$ 或 $-\infty$ 成立。当极限为未定号无穷大时, 不成立)。

注2: 关于函数极限的四则运算, 只要不是待定型如 $\infty + \infty$, $(+\infty) + (-\infty)$, $\infty + (\pm\infty)$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{0}{0}$ 型, 四则运算法则总成立。

注3: 对于不同的函数极限, 分别有相应的Heine 定理, 它们的叙述、证明方法和作用类似。

3.1.函数极限

例2: 讨论极限

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_k x^k}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_j x^j},$$

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_k x^k}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_j x^j},$$

其中 a_n, a_k, b_m, b_j 均为非零实数, 也即两头两尾不为零。

3.1.函数极限

例2: 讨论极限

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_k x^k}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_j x^j},$$

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_k x^k}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_j x^j},$$

其中 a_n, a_k, b_m, b_j 均为非零实数, 也即两头两尾不为零。

作业: P_{86} 1(4)(7)(8), 3(2), 6(2-6), 7, 10(2)(4)(6), 11, 15。

补充：两个重要极限

引理： 对 $\forall x \in \mathbb{R}$ ，有 $|\sin x| \leq |x|$ ； 对 $\forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$ ，有 $|x| \leq |\tan x|$ 。

补充：两个重要极限

引理：对 $\forall x \in \mathbb{R}$ ，有 $|\sin x| \leq |x|$ ；对 $\forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$ ，有 $|x| \leq |\tan x|$ 。

两个重要极限： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ， $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 。

补充：两个重要极限

引理：对 $\forall x \in \mathbb{R}$ ，有 $|\sin x| \leq |x|$ ；对 $\forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$ ，有 $|x| \leq |\tan x|$ 。

两个重要极限： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ， $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 。

推论：(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a (a > 0)$.

补充：两个重要极限

引理：对 $\forall x \in \mathbb{R}$ ，有 $|\sin x| \leq |x|$ ；对 $\forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$ ，有 $|x| \leq |\tan x|$ 。

两个重要极限： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ， $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 。

推论：(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a (a > 0)$ 。

注意如下两个不等式并求出正确值：

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \neq 1$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} \neq e$ 。

七、复合函数的极限及变量代换

问题：已知 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$,

是否有 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$?

七、复合函数的极限及变量代换

问题：已知 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$,

是否有 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$?

反例：定义 $g(x) \equiv 0, a = 0$; $f(y) = \begin{cases} 1, & y = 0 \\ 0, & y \neq 0 \end{cases}$, $A = 0$ 。

七、复合函数的极限及变量代换

问题：已知 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$,

是否有 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$?

反例：定义 $g(x) \equiv 0, a = 0$; $f(y) = \begin{cases} 1, & y = 0 \\ 0, & y \neq 0 \end{cases}$, $A = 0$ 。

分析：在 $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$ 的过程中 $y \neq A$ ；而在 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ 的过程中， $g(x)$ 可以无限次等于 A 。

3.1.函数极限

命题： 设 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$ 。若存在点 a 的邻域 $O(a, \delta) \setminus \{a\}$ ，在其中 $g(x) \neq A$ ，则 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B$ 。

3.1.函数极限

命题： 设 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$ 。若存在点 a 的邻域 $O(a, \delta) \setminus \{a\}$ ，在其中 $g(x) \neq A$ ，则 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B$ 。

例1： 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ 。

3.1.函数极限

命题： 设 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$ 。若存在点 a 的邻域 $O(a, \delta) \setminus \{a\}$, 在其中 $g(x) \neq A$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B$ 。

例1: 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ 。

例2: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \beta$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \alpha^\beta$ 。

3.1.函数极限

命题： 设 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$ 。若存在点 a 的邻域 $O(a, \delta) \setminus \{a\}$, 在其中 $g(x) \neq A$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B$ 。

例1: 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ 。

例2: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \beta$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \alpha^\beta$ 。

例3: 求 $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{1/(x-a)}$ ($\sin a \neq 0$)。

§2 连续函数

一、连续函数的定义

直观：一笔划的曲线，笔尖不离开纸面能够作出其图像。

§2 连续函数

一、连续函数的定义

直观：一笔划的曲线，笔尖不离开纸面能够作出其图像。

定义1：若函数 $f(x)$ 在 x_0 点某邻域内有定义，且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ，则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续，或称 x_0 是 $f(x)$ 的连续点。

§2 连续函数

一、连续函数的定义

直观：一笔划的曲线，笔尖不离开纸面能够作出其图像。

定义1：若函数 $f(x)$ 在 x_0 点某邻域内有定义，且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ，则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续，或称 x_0 是 $f(x)$ 的连续点。

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x$ 满足 $|x - x_0| < \delta$, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 。

§2 连续函数

一、连续函数的定义

直观：一笔划的曲线，笔尖不离开纸面能够作出其图像。

定义1：若函数 $f(x)$ 在 x_0 点某邻域内有定义，且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ，则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续，或称 x_0 是 $f(x)$ 的连续点。

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x$ 满足 $|x - x_0| < \delta$, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 。

注1：函数在 x_0 点连续要求：(1) $f(x)$ 在 x_0 点有定义；(2) 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在；(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 。

§2 连续函数

一、连续函数的定义

直观：一笔划的曲线，笔尖不离开纸面能够作出其图像。

定义1：若函数 $f(x)$ 在 x_0 点某邻域内有定义，且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ，则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续，或称 x_0 是 $f(x)$ 的连续点。

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x$ 满足 $|x - x_0| < \delta$, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 。

注1：函数在 x_0 点连续要求：(1) $f(x)$ 在 x_0 点有定义；(2) 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在；(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 。

注2：上述(3)式可写成 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$ ，即极限与对应法则可以互换。

3.2.连续函数

定义2: 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 的每一点都连续, 称 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续。

3.2.连续函数

定义2: 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 的每一点都连续, 称 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续。

例1: 证明函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 上连续。

3.2.连续函数

定义2: 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 的每一点都连续, 称 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续。

例1: 证明函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 上连续。

定义3: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 左连续:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x$ 满足 $-\delta < x - x_0 \leq 0$, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

3.2.连续函数

定义2: 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 的每一点都连续, 称 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续。

例1: 证明函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 上连续。

定义3: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 左连续:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x$ 满足 $-\delta < x - x_0 \leq 0$, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 右连续:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, 0 \leq x - x_0 < \delta$, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 。

3.2.连续函数

定义4: 若 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上连续, 且在 a 点右连续, b 点左连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续。

3.2.连续函数

定义4: 若 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上连续, 且在 a 点右连续, b 点左连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续。

例2: 证明 $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续。

3.2.连续函数

定义4: 若 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上连续, 且在 a 点右连续, b 点左连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续。

例2: 证明 $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续。

作业: 课本 P_{99} 1(1)(2), 3, 4, 6

3.2.连续函数

定义4: 若 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上连续, 且在 a 点右连续, b 点左连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续。

例2: 证明 $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续。

作业: 课本 P_{99} 1(1)(2), 3, 4, 6

二、连续函数的四则运算、复合函数及反函数的性质

1 四则运算

定理1: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$, 则

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha f(x_0) + \beta g(x_0)$ (α, β 为常数);
- (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0)$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = f(x_0)/g(x_0)$, 假定 $g(x_0) \neq 0$ 。

3.2.连续函数

例3: 任意多项式函数 $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。

3.2.连续函数

例3: 任意多项式函数 $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。

例4: 证明: 若 $f(x), g(x) \in C(I)$, 则 $\max\{f(x), g(x)\}$, $\min\{f(x), g(x)\}$ 在 I 上连续。

3.2.连续函数

例3: 任意多项式函数 $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。

例4: 证明: 若 $f(x), g(x) \in C(I)$, 则 $\max\{f(x), g(x)\}$, $\min\{f(x), g(x)\}$ 在 I 上连续。

2 复合函数的连续性

由复合函数的极限性质可知, 若 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$, 未必有 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$ 。

3.2.连续函数

例3: 任意多项式函数 $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。

例4: 证明: 若 $f(x), g(x) \in C(I)$, 则 $\max\{f(x), g(x)\}$, $\min\{f(x), g(x)\}$ 在 I 上连续。

2 复合函数的连续性

由复合函数的极限性质可知, 若 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$, 未必有 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$ 。

但若 f, g 均为连续函数, 上述结论成立。

定理2: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$, 其中 $u_0 = g(x_0)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f \circ g(x) = f \circ g(x_0)$ 。

3.2.连续函数

3 反函数的连续性

定理3: (反函数连续性定理) 设 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且严格单调增加, $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$ 。则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续且严格单调递增 (严格递减情形类似)。

3.2.连续函数

3 反函数的连续性

定理3: (反函数连续性定理) 设 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且严格单调增加, $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$ 。则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续且严格单调递增 (严格递减情形类似)。

三、初等函数的连续性

1 三角函数与反三角函数

例1: $y = \sin x$ 在 \mathbb{R} 上连续。

3.2.连续函数

3 反函数的连续性

定理3: (反函数连续性定理) 设 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且严格单调增加, $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$ 。则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续且严格单调递增 (严格递减情形类似)。

三、初等函数的连续性

1 三角函数与反三角函数

例1: $y = \sin x$ 在 \mathbb{R} 上连续。

同理: $\cos x, \tan x, \sec x, \cot x, \csc x$ 在其定义域上连续。故一切三角函数在其定义域上连续。

3.2.连续函数

3 反函数的连续性

定理3: (反函数连续性定理) 设 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且严格单调增加, $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$ 。则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续且严格单调递增 (严格递减情形类似)。

三、初等函数的连续性

1 三角函数与反三角函数

例1: $y = \sin x$ 在 \mathbb{R} 上连续。

同理: $\cos x, \tan x, \sec x, \cot x, \csc x$ 在其定义域上连续。故一切三角函数在其定义域上连续。

由反函数连续性定理, 一切反三角函数在其定义域上连续。

3.2.连续函数

2 指数函数与对数函数

例2: 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。
故其反函数对数函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续。

3.2.连续函数

2 指数函数与对数函数

例2: 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。
故其反函数对数函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续。

3 幂函数

若 $x \in (0, +\infty)$, 则 $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续;

3.2.连续函数

2 指数函数与对数函数

例2: 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。
故其反函数对数函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续。

3 幂函数

若 $x \in (0, +\infty)$, 则 $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续;

3.2.连续函数

2 指数函数与对数函数

例2: 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。
故其反函数对数函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续。

3 幂函数

若 $x \in (0, +\infty)$, 则 $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续;

若 $x \in (-\infty, 0)$, 只有当 $\alpha \in \mathbb{Z}$ 或 $\alpha = \frac{n}{2m+1} (m, n \in \mathbb{Z})$ 时,
幂函数 x^α 才有定义。根据函数奇偶性, 可由 x^α 在 $(0, +\infty)$ 上的
连续性推出 x^α 在 $(-\infty, 0)$ 上的连续性。

3.2.连续函数

2 指数函数与对数函数

例2: 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。
故其反函数对数函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续。

3 幂函数

若 $x \in (0, +\infty)$, 则 $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续;

若 $x \in (-\infty, 0)$, 只有当 $\alpha \in \mathbb{Z}$ 或 $\alpha = \frac{n}{2m+1} (m, n \in \mathbb{Z})$ 时,
幂函数 x^α 才有定义。根据函数奇偶性, 可由 x^α 在 $(0, +\infty)$ 上的
连续性推出 x^α 在 $(-\infty, 0)$ 上的连续性。

若 $x = 0$, x^α 只对某些 α 在0 点有意义, 此时可用定义证明。

3.2.连续函数

2 指数函数与对数函数

例2: 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。
故其反函数对数函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续。

3 幂函数

若 $x \in (0, +\infty)$, 则 $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续;

若 $x \in (-\infty, 0)$, 只有当 $\alpha \in \mathbb{Z}$ 或 $\alpha = \frac{n}{2m+1} (m, n \in \mathbb{Z})$ 时,
幂函数 x^α 才有定义。根据函数奇偶性, 可由 x^α 在 $(0, +\infty)$ 上的
连续性推出 x^α 在 $(-\infty, 0)$ 上的连续性。

若 $x = 0$, x^α 只对某些 α 在0 点有意义, 此时可用定义证明。

故幂函数在其定义域内连续。

3.2.连续函数

由以上知，基本初等函数在其定义域上连续。由于初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算所产生的函数，故有

3.2.连续函数

由以上知，基本初等函数在其定义域上连续。由于初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算所产生的函数，故有

定理：一切初等函数在其定义域上连续。

3.2.连续函数

由以上知，基本初等函数在其定义域上连续。由于初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算所产生的函数，故有

定理：一切初等函数在其定义域上连续。

由此，可知初等函数求极限的一种方法——代入法：

即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ （其中 f 为某初等函数， x_0 为其定义域中的点）。

3.2.连续函数

由以上知，基本初等函数在其定义域上连续。由于初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算所产生的函数，故有

定理：一切初等函数在其定义域上连续。

由此，可知初等函数求极限的一种方法——代入法：

即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ （其中 f 为某初等函数， x_0 为其定义域中的点）。

作业：课本 P_{99} 2(1)(4)(6), 7(1)(4)

四、不连续点的类型

由连续定义， $f(x)$ 在 x_0 点连续必须满足

1) $f(x)$ 在 x_0 有定义； 2) $f(x_0 + 0), f(x_0 - 0)$ 均存在； 3)
 $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$ 。

四、不连续点的类型

由连续定义， $f(x)$ 在 x_0 点连续必须满足

1) $f(x)$ 在 x_0 有定义； 2) $f(x_0 + 0), f(x_0 - 0)$ 均存在； 3)
 $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$ 。

1 第一类不连续点(跳跃间断点):

$f(x_0 + 0), f(x_0 - 0)$ 均存在，但 $f(x_0 + 0)$
 $\neq f(x_0 - 0)$

2 第二类不连续点: $f(x_0 + 0)$
与 $f(x_0 - 0)$ 至少有一不存在

3.2.连续函数

四、不连续点的类型

由连续定义, $f(x)$ 在 x_0 点连续必须满足

1) $f(x)$ 在 x_0 有定义; 2) $f(x_0 + 0), f(x_0 - 0)$ 均存在; 3)
 $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$ 。

1 第一类不连续点(跳跃间断点):

$f(x_0 + 0), f(x_0 - 0)$ 均存在, 但 $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$

2 第二类不连续点: $f(x_0 + 0)$
与 $f(x_0 - 0)$ 至少有一不存在

3 第三类不连续点(可去间断点):

$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, 但 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ 或 f 在 x_0 处无定义

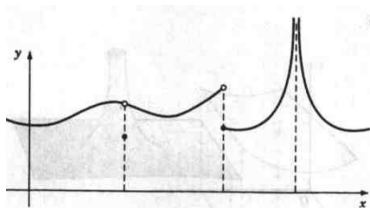


Figure: 破洞、断崖、火山口

3.2.连续函数

例1：证明Riemann 函数

$$R(x) = \begin{cases} 1/q, & x = p/q \ (q \in \mathbb{Z}^+, p \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1) \\ 0, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

(约定 $0 = 0/1, R(0) = 1$) 在任意点的极限为0。可此可知，该函数在一切无理点连续，在一切有理点不连续。

3.2.连续函数

例1：证明Riemann 函数

$$R(x) = \begin{cases} 1/q, & x = p/q \ (q \in \mathbb{Z}^+, p \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1) \\ 0, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

(约定 $0 = 0/1, R(0) = 1$) 在任意点的极限为0。可此可知，该函数在一切无理点连续，在一切有理点不连续。

例2：单调函数的不连续点必为第一类不连续点。

3.2.连续函数

例1：证明Riemann 函数

$$R(x) = \begin{cases} 1/q, & x = p/q \ (q \in \mathbb{Z}^+, p \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1) \\ 0, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

(约定 $0 = 0/1, R(0) = 1$) 在任意点的极限为0。可此可知，该函数在一切无理点连续，在一切有理点不连续。

例2：单调函数的不连续点必为第一类不连续点。

作业：课本 P_{100} 8(1)(2)(5)(7)(9), 9。

补充：讨论 $f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + x^{2n} + x^{-2n}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

在 $x = 0$ 处的间断性。

§3 无穷小量与无穷大量的阶

一、无穷小量与无穷小量的阶

定义1: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量。

§3 无穷小量与无穷大量的阶

一、无穷小量与无穷小量的阶

定义1: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量。

无穷小量是以0为极限的变量, 极限过程可以扩充到 $x \rightarrow x_0^+, x_0^-, -\infty, +\infty, \infty$ 。

§3 无穷小量与无穷大量的阶

一、无穷小量与无穷小量的阶

定义1: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量。

无穷小量是以0为极限的变量, 极限过程可以扩充到 $x \rightarrow x_0^+, x_0^-, -\infty, +\infty, \infty$ 。

例: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x, x^2, \sin x, x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$, 但趋于0的速度不同, 如何描述这种差异?

§3 无穷小量与无穷大量的阶

一、无穷小量与无穷小量的阶

定义1: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量。

无穷小量是以0为极限的变量, 极限过程可以扩充到 $x \rightarrow x_0^+, x_0^-, -\infty, +\infty, \infty$ 。

例: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x, x^2, \sin x, x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$, 但趋于0的速度不同, 如何描述这种差异?

方法: 取其中一个作为参考, 另一个与之相比, 用比值的极限来表达两个变量趋于0的快慢。

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

定义2: 设 $u(x), v(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时均为无穷小量。

(1) 高阶无穷小: 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $u(x)$ 关于 $v(x)$ 是高阶无穷小 (或 $v(x)$ 关于 $u(x)$ 是低阶无穷小) 是指

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = 0.$$

记为 $u(x) = o(v(x))(x \rightarrow x_0)$ 。

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

定义2: 设 $u(x), v(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时均为无穷小量。

(1) 高阶无穷小: 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $u(x)$ 关于 $v(x)$ 是高阶无穷小 (或 $v(x)$ 关于 $u(x)$ 是低阶无穷小) 是指

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = 0.$$

记为 $u(x) = o(v(x))(x \rightarrow x_0)$ 。

(2) 有界量: 称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $u(x)/v(x)$ 是有界量是指若 $\exists A > 0$, 当 x 在 x_0 的某个去心邻域中, 成立

$$|u(x)/v(x)| \leq A$$

记为 $u(x) = O(v(x))(x \rightarrow x_0)$ 。

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

(3) 同阶无穷小量: 称 $u(x)$ 与 $v(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时是同阶无穷小量, 是指 $\exists 0 < a < A$, 在 x_0 的某个去心邻域中, 成立

$$a \leq |u(x)/v(x)| \leq A.$$

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

(3) 同阶无穷小量：称 $u(x)$ 与 $v(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时是同阶无穷小量，是指 $\exists 0 < a < A$ ，在 x_0 的某个去心邻域中，成立

$$a \leq |u(x)/v(x)| \leq A.$$

特例： $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)/v(x) = c \neq 0$ 。

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

(3) 同阶无穷小量：称 $u(x)$ 与 $v(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时是同阶无穷小量，是指 $\exists 0 < a < A$ ，在 x_0 的某个去心邻域中，成立

$$a \leq |u(x)/v(x)| \leq A.$$

特例： $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)/v(x) = c \neq 0$ 。

(4) 等价无穷小量：称 $u(x)$ 与 $v(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时是等价无穷小量，若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)/v(x) = 1$$

记为 $u(x) \sim v(x)(x \rightarrow x_0)$ ，也即 $u(x) = v(x) + o(v(x))(x \rightarrow x_0)$ 。

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

(3) 同阶无穷小量：称 $u(x)$ 与 $v(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时是同阶无穷小量，是指 $\exists 0 < a < A$ ，在 x_0 的某个去心邻域中，成立

$$a \leq |u(x)/v(x)| \leq A.$$

特例： $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)/v(x) = c \neq 0$ 。

(4) 等价无穷小量：称 $u(x)$ 与 $v(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时是等价无穷小量，若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)/v(x) = 1$$

记为 $u(x) \sim v(x)(x \rightarrow x_0)$ ，也即 $u(x) = v(x) + o(v(x))(x \rightarrow x_0)$ 。

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

(3) 同阶无穷小量: 称 $u(x)$ 与 $v(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时是同阶无穷小量, 是指 $\exists 0 < a < A$, 在 x_0 的某个去心邻域中, 成立

$$a \leq |u(x)/v(x)| \leq A.$$

特例: $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)/v(x) = c \neq 0$ 。

(4) 等价无穷小量: 称 $u(x)$ 与 $v(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时是等价无穷小量, 若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)/v(x) = 1$$

记为 $u(x) \sim v(x)(x \rightarrow x_0)$, 也即 $u(x) = v(x) + o(v(x))(x \rightarrow x_0)$ 。

注: 在使用 o, O, \sim 三个符号时, 必须写出极限过程!

$$\ln x = o(1)(x \rightarrow 1), \ln x = o(x)(x \rightarrow +\infty), \ln x = o\left(\frac{1}{x}\right)(x \rightarrow 0^+)$$

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

例1: 证明 $O(x^2) = o(x)(x \rightarrow 0)$ 成立。

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

例1: 证明 $O(x^2) = o(x)(x \rightarrow 0)$ 成立。

注: 含有 o, O 的等式叫渐近等式, 与普通等式不大一样。
一般只能从左往右, 而不能从右往左读。

例 $x^{\frac{3}{2}} = o(x), (x \rightarrow 0^+)$, 但 $x^{\frac{3}{2}} \neq O(x^2)(x \rightarrow 0)$ 。

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

例1: 证明 $O(x^2) = o(x)(x \rightarrow 0)$ 成立。

注: 含有 o, O 的等式叫渐近等式, 与普通等式不大一样。
一般只能从左往右, 而不能从右往左读。

例 $x^{\frac{3}{2}} = o(x), (x \rightarrow 0^+)$, 但 $x^{\frac{3}{2}} \neq O(x^2)(x \rightarrow 0)$ 。

在实际运用中, 若极限过程是 $x \rightarrow x_0$, 我们往往选取 $v(x) = (x - x_0)^k (k > 0)$ 作为与 $u(x)$ 比较的无穷小量 (若极限过程为 $x \rightarrow \infty$, 则选取 $v(x) = \frac{1}{x^k}$) 。

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

例1: 证明 $O(x^2) = o(x)(x \rightarrow 0)$ 成立。

注: 含有 o, O 的等式叫渐近等式, 与普通等式不大一样。
一般只能从左往右, 而不能从右往左读。

例 $x^{\frac{3}{2}} = o(x), (x \rightarrow 0^+)$, 但 $x^{\frac{3}{2}} \neq O(x^2)(x \rightarrow 0)$ 。

在实际运用中, 若极限过程是 $x \rightarrow x_0$, 我们往往选取 $v(x) = (x - x_0)^k (k > 0)$ 作为与 $u(x)$ 比较的无穷小量 (若极限过程为 $x \rightarrow \infty$, 则选取 $v(x) = \frac{1}{x^k}$)。

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{(x - x_0)^k} = c \neq 0$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $u(x)$ 为 k 阶无穷小量。

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

例1: 证明 $O(x^2) = o(x)(x \rightarrow 0)$ 成立。

注: 含有 o, O 的等式叫渐近等式, 与普通等式不大一样。
一般只能从左往右, 而不能从右往左读。

例 $x^{\frac{3}{2}} = o(x), (x \rightarrow 0^+)$, 但 $x^{\frac{3}{2}} \neq O(x^2)(x \rightarrow 0)$ 。

在实际运用中, 若极限过程是 $x \rightarrow x_0$, 我们往往选取 $v(x) = (x - x_0)^k (k > 0)$ 作为与 $u(x)$ 比较的无穷小量 (若极限过程为 $x \rightarrow \infty$, 则选取 $v(x) = \frac{1}{x^k}$)。

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{(x - x_0)^k} = c \neq 0$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $u(x)$ 为 k 阶无穷小量。

例2: 求当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - \sin x$ 的阶数。

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

无穷小量不一定有阶。

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

无穷小量不一定有阶。

例3: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $x \sin \frac{1}{x}$ 没有阶。

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

无穷小量不一定有阶。

例3: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $x \sin \frac{1}{x}$ 没有阶。

二、等价无穷小量代换

1 等价关系具有(1)自反性; (2)对称性; (3)传递性。

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

无穷小量不一定有阶。

例3: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $x \sin \frac{1}{x}$ 没有阶。

二、等价无穷小量代换

1 等价关系具有(1)自反性; (2)对称性; (3)传递性。

2 定理: 设 $u(x)$, $v(x)$ 和 $w(x)$ 在 x_0 的某去心邻域上有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)/w(x) = 1$, 则

(1) 当 $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)w(x) = A$ 时, $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)v(x) = A$;

(2) 当 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{w(x)} = A$ 时, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = A$ 。

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

3 常用的等价无穷小量

当 $x \rightarrow 0$ 时

$$(1) x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1;$$

$$(2) 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} (x \rightarrow 0);$$

$$(3) (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x (x \rightarrow 0)。$$

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

3 常用的等价无穷小量

当 $x \rightarrow 0$ 时

$$(1) x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1;$$

$$(2) 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} (x \rightarrow 0);$$

$$(3) (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x (x \rightarrow 0)。$$

例4: 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3(2x)}。$

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

3 常用的等价无穷小量

当 $x \rightarrow 0$ 时

$$(1) x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1;$$

$$(2) 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} (x \rightarrow 0);$$

$$(3) (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x (x \rightarrow 0).$$

例4: 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3(2x)}$ 。

注: 在等价量代换中, 乘除可代换, 加减不可以随意代换。

例: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3(2x)} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{(2x)^3} = 0。$

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

在加減中，起作用的常是更高阶的无穷小量。

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

在加减中，起作用的常是更高阶的无穷小量。

例5: 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{3}}}{\ln(1+2x)}$ 。

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

在加减中，起作用的常是更高阶的无穷小量。

例5: 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{3}}}{\ln(1+2x)}$ 。

例6: 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ 。

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

在加减中，起作用的常是更高阶的无穷小量。

例5: 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{3}}}{\ln(1+2x)}$ 。

例6: 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ 。

三、无穷大量与无穷大量的阶

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\pm\infty$)，则称当 $x \rightarrow x_0$ 时， $f(x)$ 是无穷大量 (或正、负无穷大量)，其余定义类推。

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

在加减中，起作用的常是更高阶的无穷小量。

例5: 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{3}}}{\ln(1+2x)}$ 。

例6: 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ 。

三、无穷大量与无穷大量的阶

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\pm\infty$)，则称当 $x \rightarrow x_0$ 时， $f(x)$ 是无穷大量 (或正、负无穷大量)，其余定义类推。

无穷大量与无穷大量的阶可由无穷小量及无穷小量的阶类推得到 (略)。

3.3.无穷小量与无穷大量的阶

作业：补充题1：求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt[3]{x} - 1) \cdots (\sqrt[n]{x} - 1)}{(x - 1)^{n-1}}$.

补充题2：证明：(1) $o(x^m) + o(x^n) = o(x^n) (m > n > 0)$

(2) $o(x^m)o(x^n) = o(x^{m+n}) (m, n > 0)$

(3) 若 $|f(x)| \leq M$ ，则 $f(x)o(x) = o(x)$

(4) $x^m o(1) = o(x^m)$.

课本 P_{108} 1(2)(5)(8-10), 3(1-3)(5)(7)(10)(11)

3.4.有限覆盖定理

定义： 设一区间集 E 及某一区间 I （开、闭均可）。若对 I 中任意一点 ξ ，在 E 中可找到一个区间 Δ ，使得 $\xi \in \Delta$ ，则称 E 覆盖 I 。例

3.4.有限覆盖定理

定义： 设一区间集 E 及某一区间 I （开、闭均可）。若对 I 中任意一点 ξ ，在 E 中可找到一个区间 Δ ，使得 $\xi \in \Delta$ ，则称 E 覆盖 I 。例

$\left[0, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right), \dots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right), \dots$ 及 $[1, 2]$ 覆盖 $[0, 2]$ 。

3.4.有限覆盖定理

定义： 设一区间集 E 及某一区间 I （开、闭均可）。若对 I 中任意一点 ξ ，在 E 中可找到一个区间 Δ ，使得 $\xi \in \Delta$ ，则称 E 覆盖 I 。例

$[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}), [\frac{2}{3}, \frac{3}{4}), \dots, [\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}), \dots$ 及 $[1, 2]$ 覆盖 $[0, 2]$ 。

Borel 定理： 如果 $\{O_\alpha\}$ 是区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖，则存在 $\{O_\alpha\}$ 的一个有限子集 $\{O_1, O_2, \dots, O_n\}$ 使得它也覆盖 $[a, b]$ 。也即，有限闭区间的任何一个开覆盖均有有限子覆盖。

4.1.实数七大基本定理

注1：有限覆盖定理价值：将无限转化成有限。

4.1.实数七大基本定理

注1：有限覆盖定理价值：将无限转化成有限。

注2：有限覆盖定理中条件不能随便变动。如将闭区间改成开区间或无界区间、或将开覆盖中每个开区间改成闭区间，则结论不再成立。例

4.1.实数七大基本定理

注1：有限覆盖定理价值：将无限转化成有限。

注2：有限覆盖定理中条件不能随便变动。如将闭区间改成开区间或无界区间、或将开覆盖中每个开区间改成闭区间，则结论不再成立。例

$$(0, 1) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (1/n, 1 + 1/n), \mathbb{R} \subseteq \bigcup_{x \in \mathbb{R}} (x - 1, x + 1)$$

4.1.实数七大基本定理

注1：有限覆盖定理价值：将无限转化成有限。

注2：有限覆盖定理中条件不能随便变动。如将闭区间改成开区间或无界区间、或将开覆盖中每个开区间改成闭区间，则结论不再成立。例

$$(0, 1) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (1/n, 1 + 1/n), \mathbb{R} \subseteq \bigcup_{x \in \mathbb{R}} (x - 1, x + 1)$$

$$[0, 2] \subseteq \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \cdots \cup \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) \cup \cdots \cup [1, 2].$$

4.1.实数七大基本定理

注1：有限覆盖定理价值：将无限转化成有限。

注2：有限覆盖定理中条件不能随便变动。如将闭区间改成开区间或无界区间、或将开覆盖中每个开区间改成闭区间，则结论不再成立。例

$$(0, 1) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (1/n, 1 + 1/n), \mathbb{R} \subseteq \bigcup_{x \in \mathbb{R}} (x - 1, x + 1)$$

$$[0, 2] \subseteq \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \cdots \cup \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) \cup \cdots \cup [1, 2].$$

作业：用有限覆盖定理证明致密性定理。

3.5.实数七大基本定理

例1：由有限覆盖定理证明确界存在定理。

3.5.实数七大基本定理

例1：由有限覆盖定理证明确界存在定理。

注1：闭区间套定理常把某区间上满足的性质采取二分法归结为某点领域中的局部性质；而有限覆盖定理则将某点领域中的“局部”性质扩充到整个区间上。

3.5.实数七大基本定理

例1：由有限覆盖定理证明确界存在定理。

注1：闭区间套定理常把某区间上满足的性质采取二分法归结为某点领域中的局部性质；而有限覆盖定理则将某点领域中的“局部”性质扩充到整个区间上。

注2：七大定理以不同的形式刻画了实数的连续性。Cauchy收敛准则表明由实数构成的基本数列 $\{x_n\}$ 必存在实数极限，这一性质称为实数系的完备性。七大基本定理的等价性说明连续性与完备性等价。

3.5.实数七大基本定理

注3: 七大定理可相互推出, 有兴趣的同学可以证明。

3.5.实数七大基本定理

注3：七大定理可相互推出，有兴趣的同学可以证明。

注4：前六个定理属于同一类型，都指出在某一条件下便有某种点存在。

3.5.实数七大基本定理

注3: 七大定理可相互推出，有兴趣的同学可以证明。

注4: 前六个定理属于同一类型，都指出在某一条件下便有某种点存在。

要求: 脚踏实地地将每个定理条件、结论搞清楚。并至少对每个定理能独立证明一个常见的命题或习题。看别人十个现成的题解还不如自己动手做一个题。

§4 闭区间上的连续函数

一、有界性定理

定理： 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则它在 $[a, b]$ 上有界。

§4 闭区间上的连续函数

一、有界性定理

定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则它在 $[a, b]$ 上有界。

注：开区间上的连续函数未必有界。

§4 闭区间上的连续函数

一、有界性定理

定理： 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则它在 $[a, b]$ 上有界。

注：开区间上的连续函数未必有界。

作业： 课本 P_{117} 1 P_{118} 4。

§4 闭区间上的连续函数

一、有界性定理

定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则它在 $[a, b]$ 上有界。

注：开区间上的连续函数未必有界。

作业：课本 P_{117} 1 P_{118} 4。

二、最值定理

定理：若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则它在 $[a, b]$ 上必能取到最大（小）值，即 $\exists \xi, \eta \in [a, b]$, 使得 $\forall x \in [a, b], f(\xi) \leq f(x) \leq f(\eta)$ 。

3.6.闭区间上的连续函数

注1：开区间上的连续函数未必能取到最大（小）值。

3.6.闭区间上的连续函数

注1：开区间上的连续函数未必能取到最大（小）值。

注2：最值定理 \Rightarrow 有界性定理；有界性定理（运用两次） \Rightarrow 最值定理。

3.6.闭区间上的连续函数

注1：开区间上的连续函数未必能取到最大（小）值。

注2：最值定理 \Rightarrow 有界性定理；有界性定理（运用两次） \Rightarrow 最值定理。

三、零点存在定理

定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)f(b) < 0$ ，则一定存在 $\xi \in (a, b)$ ，使 $f(\xi) = 0$ 。

3.6.闭区间上的连续函数

注1：开区间上的连续函数未必能取到最大（小）值。

注2：最值定理 \Rightarrow 有界性定理；有界性定理（运用两次） \Rightarrow 最值定理。

三、零点存在定理

定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)f(b) < 0$ ，则一定存在 $\xi \in (a, b)$ ，使 $f(\xi) = 0$ 。

注1：它和实数理论密切相关，故定理证明需要用到实数系的基本定理。

3.闭区间上的连续函数

注2: 在定理条件下, $f(x) = 0$ 在 (a, b) 之间可能不止一个根。又 $f(a), f(b)$ 同号时, 也不能说明 $[a, b]$ 中没有 $f(x)$ 的根。

3.闭区间上的连续函数

注2: 在定理条件下, $f(x) = 0$ 在 (a, b) 之间可能不止一个根。又 $f(a), f(b)$ 同号时, 也不能说明 $[a, b]$ 中没有 $f(x)$ 的根。

注3: 这个证明是闭区间套定理的典型应用, 将原来闭区间的某种性质“浓缩”到某点附近。

3.闭区间上的连续函数

注2: 在定理条件下, $f(x) = 0$ 在 (a, b) 之间可能不止一个根。又 $f(a), f(b)$ 同号时, 也不能说明 $[a, b]$ 中没有 $f(x)$ 的根。

注3: 这个证明是闭区间套定理的典型应用, 将原来闭区间的某种性质“浓缩”到某点附近。

注4: 该方法可以求近似解。设 $[0, 1]$ 上的连续函数 f 的表达式明确, $f(0)f(1) < 0$ 且 f 只有一根。

用二分法做10次, 得 $[a_{10}, b_{10}]$ 。取区间中点 C 为近似值, 则误差可估计为 $|C - \xi| < 2^{-10} \approx 0.001$ 。

3.6.闭区间上的连续函数

四、介值定理

定理： 闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数必能取到最大值 M 与最小值 m 之间的任何值，也即值域是闭区间 $[m, M]$ 。

3.6.闭区间上的连续函数

四、介值定理

定理：闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数必能取到最大值 M 与最小值 m 之间的任何值，也即值域是闭区间 $[m, M]$ 。

注：区间上的函数即使不处处连续，也可以具有介值性。

3.6.闭区间上的连续函数

四、介值定理

定理：闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数必能取到最大值 M 与最小值 m 之间的任何值，也即值域是闭区间 $[m, M]$ 。

注：区间上的函数即使不处处连续，也可以具有介值性。

例： $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1] \\ -x, & x \in \mathbb{Q}^c \cap [-1, 1] \end{cases}$ 只在0点连续。

3.6.闭区间上的连续函数

四、介值定理

定理：闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数必能取到最大值 M 与最小值 m 之间的任何值，也即值域是闭区间 $[m, M]$ 。

注：区间上的函数即使不处处连续，也可以具有介值性。

例： $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1] \\ -x, & x \in \mathbb{Q}^c \cap [-1, 1] \end{cases}$ 只在0点连续。

作业：课本 P_{117} 2, 3 P_{118} 7, 9, 10, 14

补充：四条腿一样长的长方形椅子，放在不平的光滑地面上，通常只有三条腿落地。经过挪动，可以使四脚同时落地吗？

五、一致连续

函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续是指: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 。

五、一致连续

函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续是指: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 。

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(x_0, \epsilon) > 0, \forall |x - x_0| < \delta$, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 。

五、一致连续

函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续是指: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 。

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(x_0, \epsilon) > 0, \forall |x - x_0| < \delta$, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 。

例: 对在 $(0, +\infty)$ 上的连续函数 $f(x) = \sin 1/x$, 求出的

$$\delta = \min\{x_0/2, x_0^2\epsilon/2\}。$$

问题: 对 $\forall \epsilon > 0$, 能否找到 $\delta(\epsilon) > 0$, $\forall |x' - x''| < \delta$ 时, 有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$? \implies 一致连续!

一致连续

定义：设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，若

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \forall x', x'' \in X, |x' - x''| < \delta$ 有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$,

则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上一致连续。

一致连续

定义：设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，若

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \forall x', x'' \in X, |x' - x''| < \delta \text{ 有 } |f(x') - f(x'')| < \epsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上一致连续。

注： $f(x)$ 在 X 上一致连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 X 上连续。

一致连续

定义： 设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，若

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \forall x', x'' \in X, |x' - x''| < \delta \text{ 有 } |f(x') - f(x'')| < \epsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上一致连续。

注： $f(x)$ 在 X 上一致连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 X 上连续。

以下定理给出了判别非一致连续性的便利方法：

定理： 设 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，则 $f(x)$ 在 X 上一致连续 $\iff \forall \{x'_n\} \subseteq X, \{x''_n\} \subseteq X$ ，只要 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0$ ，就成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x'_n) - f(x''_n)) = 0$ 。

一致连续

例1: 证明(1)对于满足 $0 < \eta < 1$ 的每个 η , $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[\eta, 1)$ 上一致连续; (2)但在开区间 $(0, 1)$ 上非一致连续。

一致连续

例1: 证明(1)对于满足 $0 < \eta < 1$ 的每个 η , $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[\eta, 1)$ 上一致连续; (2)但在开区间 $(0, 1)$ 上非一致连续。

例2: $f(x) = x^2$ 在 $[0, A]$ (A 为任意有限正数) 上一致连续, 但在 $[0, +\infty)$ 上非一致连续。

一致连续

例1: 证明(1)对于满足 $0 < \eta < 1$ 的每个 η , $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[\eta, 1)$ 上一致连续; (2)但在开区间 $(0, 1)$ 上非一致连续。

例2: $f(x) = x^2$ 在 $[0, A]$ (A 为任意有限正数) 上一致连续, 但在 $[0, +\infty)$ 上非一致连续。

由上面可知: 长度为无限区间上的连续函数未必一致连续; 长度为有限开区间上的连续函数也未必一致连续。但有

一致连续

例1: 证明(1)对于满足 $0 < \eta < 1$ 的每个 η , $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[\eta, 1)$ 上一致连续; (2)但在开区间 $(0, 1)$ 上非一致连续。

例2: $f(x) = x^2$ 在 $[0, A]$ (A 为任意有限正数) 上一致连续, 但在 $[0, +\infty)$ 上非一致连续。

由上面可知: 长度为无限区间上的连续函数未必一致连续; 长度为有限开区间上的连续函数也未必一致连续。但有

Cantor 定理: 闭区间上的连续函数必定一致连续。

一致连续

思考题：判别对错

(1) f 在区间 $[a, b)$ 连续，则 f 在 $[a, b)$ 上一致连续；

(2) f 在区间 (a, b) 内的每一个闭区间上连续，则 f 在 (a, b) 上一致连续；

(3) f 在区间 (a, b) 上连续，又有 $a < c < d < b$ ，则 f 在 (c, d) 上一致连续。

一致连续

思考题：判别对错

(1) f 在区间 $[a, b)$ 连续，则 f 在 $[a, b)$ 上一致连续；

(2) f 在区间 (a, b) 内的每一个闭区间上连续，则 f 在 (a, b) 上一致连续；

(3) f 在区间 (a, b) 上连续，又有 $a < c < d < b$ ，则 f 在 (c, d) 上一致连续。

例3：若 f 在 $(a, b]$ 和 $[b, c)$ 上分别一致连续，则 f 在 (a, c) 上一致连续。

一致连续

思考题：判别对错

(1) f 在区间 $[a, b]$ 连续，则 f 在 $[a, b)$ 上一致连续；

(2) f 在区间 (a, b) 内的每一个闭区间上连续，则 f 在 (a, b) 上一致连续；

(3) f 在区间 (a, b) 上连续，又有 $a < c < d < b$ ，则 f 在 (c, d) 上一致连续。

例3：若 f 在 $(a, b]$ 和 $[b, c)$ 上分别一致连续，则 f 在 (a, c) 上一致连续。

以下给出连续函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续的充要条件。

定理： $f(x)$ 在有限开区间 (a, b) 上连续，则 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续 $\iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 均存在（有限）。

一致连续

判别下列函数在 $(0, 1)$ 上是否一致连续。

(1) $y = \sin x/x;$

(2) $y = \sin(1/x);$

(3) $y = \ln x;$

(4) $y = 1/(1 - x)。$

一致连续

判别下列函数在 $(0, 1)$ 上是否一致连续。

(1) $y = \sin x/x$;

(2) $y = \sin(1/x)$;

(3) $y = \ln x$;

(4) $y = 1/(1 - x)$ 。

注： $f(x)$ 在 (a, b) 和 (b, c) 上一致连续， $f(x)$ 在 $(a, b) \cup (b, c)$ 上未必一致连续。

总结1: 有界性定理、最值定理、零点存在定理、介值定理及Cantor定理是闭区间上连续函数最重要的分析性质, 务必熟练掌握。

总结2: 由于实数系七大基本定理等价, 故从理论上可采用任何一个定理去证明上述五大性质, 只是难易程度不同。

作业: 课本 P_{118} 8(2)(3), 11, 12, 15。