

# 第五章

## 时间序列计量经济学模型

# § 5.1 序列相关性

## **Serial Correlation**

- 一、序列相关性概念
- 二、实际经济问题中的序列相关性
- 三、序列相关性的后果
- 四、序列相关性的检验
- 五、具有序列相关性模型的估计
- 六、案例

## 一、序列相关性概念

对于模型

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + \mu_i \quad i=1, 2, \dots, n$$

随机项互不相关的基本假设表现为

$$\text{Cov}(\mu_i, \mu_j) = 0 \quad i \neq j, i, j=1, 2, \dots, n$$

如果对于不同的样本点，随机误差项之间不再是不相关的，而是存在某种相关性，则认为出现了序列相关性。

在其他假设仍成立的条件下，**序列相关**即意味着

$$E(\mu_i \mu_j) \neq 0$$

或

$$\text{Cov}(\boldsymbol{\mu}) = E(\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}') = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \cdots & E(\mu_1 \mu_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\mu_n \mu_1) & \cdots & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma^2 & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$= \sigma^2 \boldsymbol{\Omega} \neq \sigma^2 \mathbf{I}$$

如果仅存在

$$E(\mu_i \mu_{i-1}) \neq 0 \quad i=1,2, \dots, n$$

称为一阶列相关，或自相关（autocorrelation）

自相关往往可写成如下形式：

$$\mu_i = \rho \mu_{i-1} + \varepsilon_i \quad -1 < \rho < 1$$

其中： $\rho$ 被称为自协方差系数（coefficient of autocovariance）或一阶自相关系数（first-order coefficient of autocorrelation）

$\varepsilon_i$ 是满足以下标准的OLS假定的随机干扰项：

$$E(\varepsilon_i) = 0, \quad \text{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2, \quad \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-s}) = 0 \quad s \neq 0$$

由于序列相关性经常出现在以时间序列为样本的模型中，因此，本节将用下标 $t$ 代表 $i$ 。

## 二、实际经济问题中的序列相关性

### 1、经济变量固有的惯性

大多数经济时间数据都有一个明显的特点：**惯性**，表现在时间序列不同时间的前后关联上。

例如，绝对收入假设下居民总消费函数模型：

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \mu_t \quad t=1,2,\dots,n$$

由于**消费习惯**的影响被包含在随机误差项中，则可能出现序列相关性（往往是正相关）。

## 2、模型设定的偏误

所谓模型**设定偏误**（**Specification error**）是指所设定的模型“不正确”。主要表现在模型中丢掉了重要的解释变量或模型函数形式有偏误。

例如，本来应该估计的模型为

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \mu_t$$

但在模型设定中做了下述回归：

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_1 X_{2t} + v_t$$

因此， $v_t = \beta_3 X_{3t} + \mu_t$ ，如果 $X_3$ 确实影响 $Y$ ，则出现序列相关。



又如：如果真实的边际成本回归模型应为：

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_t^2 + \mu_t$$

其中：Y=边际成本，X=产出，

但建模时设立了如下模型：

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + v_t$$

因此，由于 $v_t = \beta_2 X_t^2 + \mu_t$ ，包含了产出的平方对随机项的系统性影响，随机项也呈现序列相关性。

### 3、数据的“编造”

在实际经济问题中，有些数据是通过已知数据生成的。

因此，新生成的数据与原数据间就有了内在的联系，表现出序列相关性。

## 二、序列相关性的后果

计量经济学模型一旦出现序列相关性，如果仍采用OLS法估计模型参数，会产生下列不良后果：

### 1、参数估计量非有效

因为，在有效性证明中利用了

$$E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \sigma^2 \mathbf{I}$$

即同方差性和互相独立性条件。

## 2、变量的显著性检验失去意义

如果存在序列相关，估计的参数方差  $s_{\hat{\beta}_i}$  出现偏误（偏大或偏小），t检验就失去意义。

其他检验也是如此。

### 3、模型的预测失效

区间预测与参数估计量的方差有关，在方差有偏误的情况下，使得预测估计不准确，预测精度降低。

所以，当模型出现序列相关性时，它的预测功能失效。

### 三、序列相关性的检验

### 三、序列相关性的检验

#### 基本思路：

**序列相关性**检验方法有多种，但基本思路相同：

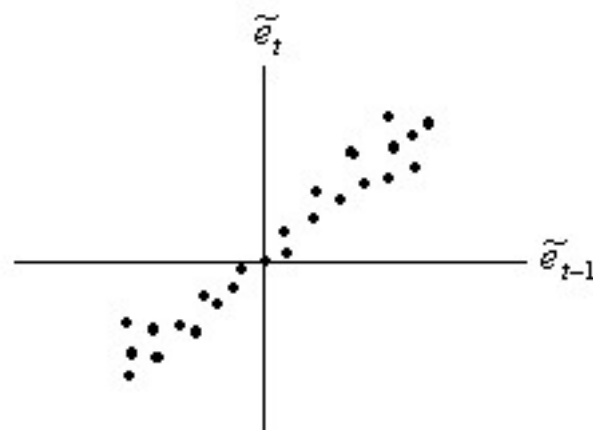
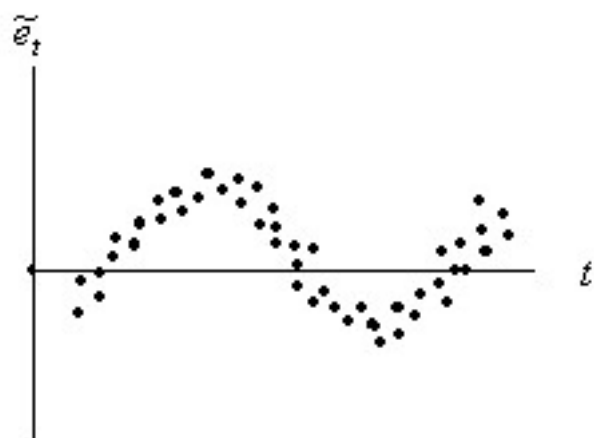
首先，采用 OLS 法估计模型，以求得随机误差项的“近似估计量”，用  $\tilde{e}_i$  表示：

$$\tilde{e}_i = Y_i - (\hat{Y}_i)_{ols}$$

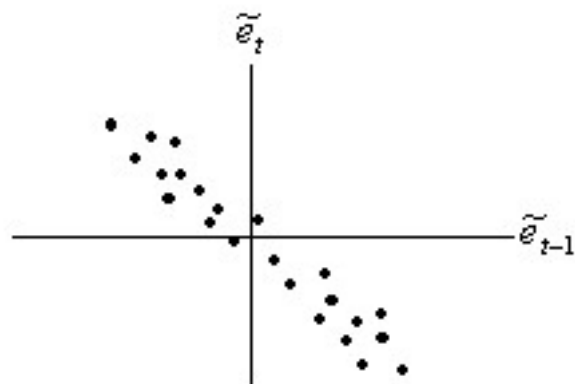
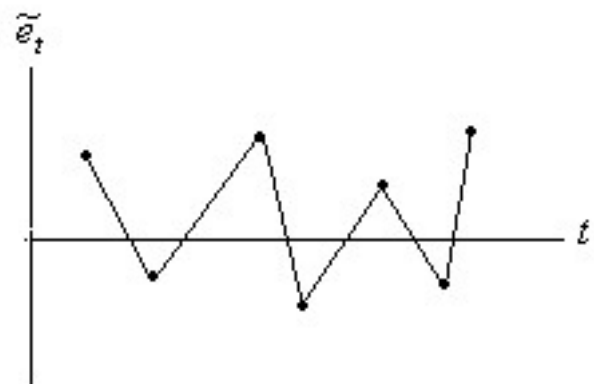
然后，通过分析这些“近似估计量”之间的相关性，以判断随机误差项是否具有序列相关性。

# 1、图示法

用 $\tilde{e}_i$ 的变化图形来判断 $\mu_i$ 的序列相关性:



正序列相关 (正自相关)



负序列相关 (负自相关)



## 2、回归检验法

以  $\tilde{e}_t$  为被解释变量, 以各种可能的相关量, 诸如以  $\tilde{e}_{t-1}$ 、 $\tilde{e}_{t-2}$ 、 $\tilde{e}_t^2$  等为解释变量, 建立各种方程:

$$\tilde{e}_t = \rho \tilde{e}_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\tilde{e}_t = \rho_1 \tilde{e}_{t-1} + \rho_2 \tilde{e}_{t-2} + \varepsilon_t$$

.....

如果存在某一种函数形式, 使得方程显著成立, 则说明原模型存在序列相关性。

**回归检验法的优点是:** (1) 能够确定序列相关的形式, (2) 适用于任何类型序列相关性问题的检验。

### 3、杜宾-瓦森 (Durbin-Watson) 检验法

**D-W** 检验是杜宾 ( **J.Durbin** ) 和瓦森 (G. S. Watson) 于1951年提出的一种检验序列自相关的方法, 该方法的假定条件是:

- (1) 解释变量X非随机;
- (2) 随机误差项 $\mu_i$ 为一阶自回归形式:

$$\mu_i = \rho\mu_{i-1} + \varepsilon_i$$

- (3) 回归模型中不应含有滞后应变量作为解释变量, 即不应出现下列形式:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \dots + \beta_k X_{ki} + \gamma Y_{i-1} + \mu_i$$

- (4) 回归含有截距项

## D.W. 统计量:

杜宾和瓦森针对原假设： $H_0: \rho=0$ ，即不存在一阶自回归，构造如下统计量：

$$D.W. = \frac{\sum_{t=2}^n (\tilde{e}_t - \tilde{e}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \tilde{e}_t^2}$$

该统计量精确的分布很难得到。

但是，他们成功地导出了临界值的下限 $d_L$ 和上限 $d_U$ ，且这些上下限只与样本的容量 $n$ 和解释变量的个数 $k$ 有关，而与解释变量 $X$ 的取值无关。

## D.W检验步骤:

- (1) 计算DW值
- (2) 给定 $\alpha$ , 由 $n$ 和 $k$ 的大小查DW分布表, 得临界值 $d_L$ 和 $d_U$
- (3) 比较、判断

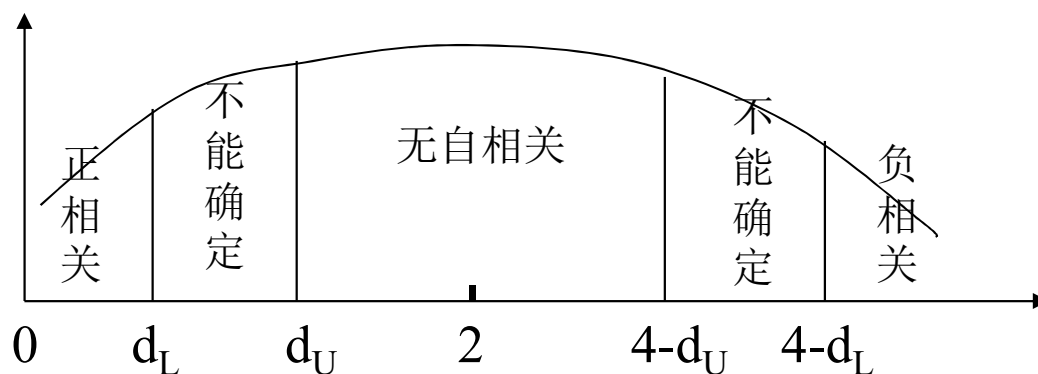
若  $0 < D.W. < d_L$                       存在正自相关

$d_L < D.W. < d_U$                       不能确定

$d_U < D.W. < 4 - d_U$                       无自相关

$4 - d_U < D.W. < 4 - d_L$                       不能确定

$4 - d_L < D.W. < 4$                       存在负自相关



特殊情况:

展开D.W.统计量:

$$D.W. = \frac{\sum_{t=2}^n (\tilde{e}_t - \tilde{e}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \tilde{e}_t^2}$$
$$D.W. = \frac{\sum_{t=2}^n \tilde{e}_t^2 + \sum_{t=2}^n \tilde{e}_{t-1}^2 - 2 \sum_{t=2}^n \tilde{e}_t \tilde{e}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n \tilde{e}_t^2} \quad (*)$$

当  $n$  较大时,  $\sum_{t=2}^n \tilde{e}_t^2, \sum_{t=2}^n \tilde{e}_{t-1}^2, \sum_{t=1}^n \tilde{e}_t^2$  大致相等, 则  $(*)$  可以简化为:

$$D.W. \approx 2 \left( 1 - \frac{\sum_{t=2}^n \tilde{e}_t \tilde{e}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n \tilde{e}_t^2} \right) \approx 2(1 - \rho)$$

$$D.W. \approx 2(1 - \frac{\sum_{t=2}^n \tilde{e}_t \tilde{e}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n \tilde{e}_t^2}) \approx 2(1 - \rho)$$

这里，

$$\frac{\sum_{t=2}^n \tilde{e}_t \tilde{e}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n \tilde{e}_t^2} \approx \frac{\sum_{t=2}^n \tilde{e}_t \tilde{e}_{t-1}}{\sum_{t=2}^n \tilde{e}_t^2} = \rho$$

为一阶自回归模型

$$\mu_i = \rho \mu_{i-1} + \varepsilon_i$$

的参数估计。

如果存在完全一阶正相关，即  $\rho=1$ ，则  $D.W. \approx 0$

完全一阶负相关，即  $\rho=-1$ ，则  $D.W. \approx 4$

完全不相关，即  $\rho=0$ ，则  $D.W. \approx 2$

## 4、拉格朗日乘数（Lagrange multiplier）检验

拉格朗日乘数检验克服了DW检验的缺陷，适合于高阶序列相关以及模型中存在滞后被解释变量的情形。

它是由布劳殊（Breusch）与戈弗雷（Godfrey）于1978年提出的，也被称为**GB检验**。

对于模型

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \mu_i$$

如果怀疑随机扰动项存在**p阶序列相关**：

$$\mu_t = \rho_1 \mu_{t-1} + \rho_2 \mu_{t-2} \cdots + \rho_p \mu_{t-p} + \varepsilon_t$$

作辅助回归：

$$\tilde{e}_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \tilde{e}_1 \mu_{t-1} + \cdots + \rho_p \tilde{e}_{t-p} + \varepsilon_t$$

计算：

$$LM = n R^2 \sim \chi^2$$

其中， $n$ 、 $R^2$ 为辅助回归的样本容量、可决系数：

给定 $\alpha$ ，查临界值 $\chi_{\alpha}^2(p)$ ，与 $LM$ 值比较，做出判断，  
实际检验中，可从1阶、2阶、...逐次向更高阶检验。



## 四、序列相关的补救

如果模型被检验证明存在序列相关性，则需要发展新的方法估计模型。

最常用的方法是广义最小二乘法（**GLS: Generalized least squares**）和广义差分法（**Generalized Difference**）。

# 1、广义最小二乘法

对于模型

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\mu}$$

如果存在序列相关，同时存在异方差，即有

$$\text{Cov}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') = E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \boldsymbol{\Omega}$$

$\boldsymbol{\Omega}$  是一对称正定矩阵，存在一可逆矩阵  $\mathbf{D}$ ，使得

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{D}\mathbf{D}'$$

变换原模型：

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Y}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\mu}$$

即

$$\mathbf{Y}_*=\mathbf{X}_*\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\mu}_* \quad (*)$$

(\*)式的OLS估计：

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}_* &= (\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*)^{-1}\mathbf{X}_*'\mathbf{Y}_* \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Y} \\ &= (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Y}\end{aligned}$$

这就是原模型的广义最小二乘估计量(GLS estimators),  
是无偏的、有效的估计量。

## 如何得到矩阵 $\Omega$ ?

对 $\Omega$ 的形式进行特殊设定后, 才可得到其估计值。

如设定随机扰动项为一阶序列相关形式

$$\mu_i = \rho \mu_{i-1} + \varepsilon_i$$

则

$$\text{Cov}(\mu, \mu') = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \cdots & \rho^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \sigma^2 \Omega$$

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

## 2、广义差分法

广义差分法是将原模型变换为满足OLS法的差分模型，再进行OLS估计。

如果原模型

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \mu_i$$

存在

$$\mu_t = \rho_1 \mu_{t-1} + \rho_2 \mu_{t-2} + \cdots + \rho_l \mu_{t-l} + \varepsilon_t$$

可以将原模型变换为：

$$\begin{aligned} Y_t - \rho_1 Y_{t-1} - \cdots - \rho_l Y_{t-l} &= \beta_0 (1 - \rho_1 - \cdots - \rho_l) + \beta_1 (X_{1t} - \rho_1 X_{1t-1} - \cdots - \rho_l X_{1t-l}) \\ &+ \cdots + \beta_k (X_{kt} - \rho_1 X_{kt-1} - \cdots - \rho_l X_{kt-l}) + \varepsilon_t \end{aligned}$$

该模型为广义差分模型，不存在序列相关问题。  
可进行OLS估计。

注意：

- 广义差分法就是上述广义最小二乘法，但是却损失了部分样本观测值。

如：一阶序列相关的情况下，广义差分是估计

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1 - \rho) + \beta_1(X_{1t} - \rho X_{1t-1}) + \cdots + \beta_k(X_{kt} - \rho X_{kt-1}) + \varepsilon_t$$
$$t = 2, 3, \cdots, n$$

这相当于

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

去掉第一行后左乘原模型  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\mu}$ 。即运用了GLS法，但第一次观测值被排除了。

### 3、随机误差项相关系数的估计

应用广义最小二乘法或广义差分法，必须已知随机误差项的相关系数 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_L$ 。

实际上，人们并不知道它们的具体数值，所以必须首先对它们进行估计。

常用的估计方法有：

- 科克伦-奥科特（**Cochrane-Orcutt**）迭代法。
- 杜宾（**durbin**）两步法



## (1) 科克伦-奥科特迭代法。

以一元线性模型为例：

首先，采用OLS法估计原模型

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \mu_i$$

得到的 $\mu$ 的“近似估计值”，并以之作为观测值使用OLS法估计下式

$$\mu_i = \rho_1 \mu_{i-1} + \rho_2 \mu_{i-2} + \dots + \rho_L \mu_{i-L} + \varepsilon_i$$

得到 $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_l$ ，作为随机误差项的相关系数 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l$ 的**第一次估计值**。

其次，将 $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_L$ 代入广义差分模型

$$Y_i - \rho_1 Y_{i-1} - \dots - \rho_L Y_{i-L} = \beta_0 (1 - \hat{\rho}_1 - \dots - \hat{\rho}_L) + \beta_1 (X_i - \hat{\rho}_1 X_{i-1} - \dots - \hat{\rho}_L X_{i-L}) + \varepsilon_i$$

$$i = 1 + L, 2 + L, \dots, n$$

进行OLS估计，得到 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$

再次，将 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ 代回原模型  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \mu_i$

求出 $\mu_i$ 新的“近似估计值”，并以之作为样本观测值，再次估计

$$\mu_i = \rho_1 \mu_{i-1} + \rho_2 \mu_{i-2} + \dots + \rho_L \mu_{i-L} + \varepsilon_i$$

得到 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_L$ 的第二次估计值 $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_L$

类似地，可进行第三次、第四次迭代。

关于迭代的次数，可根据具体的问题来定。

一般是事先给出一个精度，当相邻两次 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_L$ 的估计值之差小于这一精度时，迭代终止。

实践中，有时只要迭代两次，就可得到较满意的结果。两次迭代过程也被称为科克伦-奥科特两步法。

## 注意：

- 如果能够找到一种方法，求得 $\Omega$ 或各序列相关系数 $\rho_j$ 的估计量，使得GLS能够实现，则称为可行的广义最小二乘法（FGLS, Feasible Generalized Least Squares）。
- FGLS估计量，也称为可行的广义最小二乘估计量（feasible general least squares estimators）
- 可行的广义最小二乘估计量不再是无偏的，但却是一致的，而且在科克伦-奥科特迭代法下，估计量也具有渐近有效性。
- 前面提出的方法，就是FGLS

## 五、案例：中国商品进口模型

我们主要研究中国商品进口与国内生产总值的关系。（下表）。

表 4.2.1 1978~2001 年中国商品进口与国内生产总值

	国内生产总值 GDP (亿元)	商品进口 M (亿美元)		国内生产总值 GDP (亿元)	商品进口 M (亿美元)
1978	3624.1	108.9	1990	18547.9	533.5
1979	4038.2	156.7	1991	21617.8	637.9
1980	4517.8	200.2	1992	26638.1	805.9
1981	4862.4	220.2	1993	34634.4	1039.6
1982	5294.7	192.9	1994	46759.4	1156.1
1983	5934.5	213.9	1995	58478.1	1320.8
1984	7171.0	274.1	1996	67884.6	1388.3
1985	8964.4	422.5	1997	74462.6	1423.7
1986	10202.2	429.1	1998	78345.2	1402.4
1987	11962.5	432.1	1999	82067.46	1657
1988	14928.3	552.7	2000	89442.2	2250.9
1989	16909.2	591.4	2001	95933.3	2436.1

资料来源：《中国统计年鉴》（1995、2000、2002）。

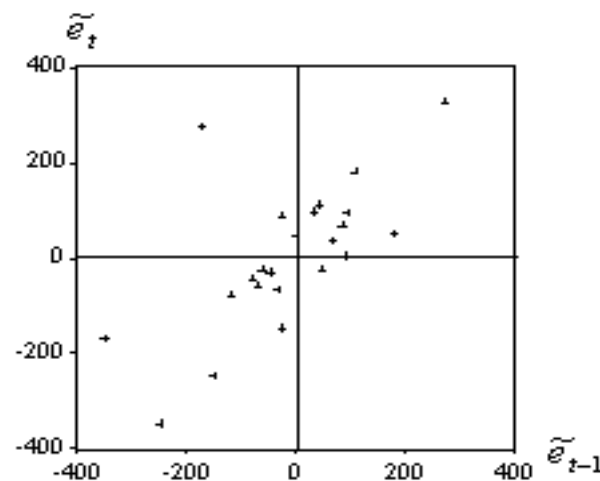
## 1. 通过OLS法建立如下中国商品进口方程:

$$\hat{M}_t = 152.91 + 0.02GDP_t$$

(2.32)      (20.12)

$$R^2=0.948 \quad \bar{R}^2=0.946 \quad SE=154.9 \quad DW=0.628$$

## 2. 进行序列相关性检验。



- DW检验

取 $\alpha=5\%$ ，由于 $n=24$ ， $k=2$ (包含常数项)，查表得：

$$d_l=1.27, \quad d_u=1.45$$

由于  $DW=0.628 < d_l$ ，故：存在正自相关。

- 拉格朗日乘数检验

2阶滞后：

$$\tilde{e}_t = 6.593 - 0.0003GDP_t + 1.094\tilde{e}_{t-1} - 0.786\tilde{e}_{t-2}$$

(0.23)    (-0.50)                    (6.23)    (-3.69)

$$R^2=0.6614$$

于是， $LM=22 \times 0.6614=13.89$

取 $\alpha=5\%$ ， $\chi^2$ 分布的临界值 $\chi^2_{0.05}(2)=5.991$

$$LM > \chi^2_{0.05}(2) \quad \text{故：存在自相关}$$



3阶滞后:

$$\tilde{e}_t = 6.692 - 0.0003GDP + 1.108\tilde{e}_{t-1} - 0.819\tilde{e}_{t-2} + 0.032\tilde{e}_{t-3}$$

$$(0.22) \quad (-0.497) \quad (4.541) \quad (-1.842) \quad (0.087)$$

$$R^2=0.6615$$

于是,  $LM=21 \times 0.6615=14.55$

取 $\alpha=5\%$ ,  $\chi^2$ 分布的临界值 $\chi^2_{0.05}(3)=7.815$

$$LM > \chi^2_{0.05}(3)$$

表明: 存在正自相关; 但 $\tilde{e}_{t-3}$ 的参数不显著, 说明不存在3阶序列相关性。

### 3、运用广义差分法进行自相关的处理

第一步，估计 $\rho$

$$\rho_1 = 0.938 \quad \rho_2 = -0.469$$

第二步，作差分变换：

$$M_t^* = M_t - (0.938M_{t-1} - 0.469M_{t-2})$$

$$GDP_t^* = GDP_t - (0.938GDP_{t-1} - 0.469GDP_{t-2})$$

则**M\***关于**GDP\***的OLS估计结果为:

$$\hat{M}_t^* = 86.18 + 0.020GDP_t^*$$

$$(2.76) \quad (16.46)$$

$$R^2 = 0.9313 \quad \bar{R}^2 = 0.9279 \quad D.W. = 1.583$$

取 $\alpha=5\%$ ,  $DW > d_u = 1.43$  (样本容量 $24-2=22$ )

表明: 已不存在自相关

为了与OLS估计结果对比, 计算 $\hat{\beta}_0$ :

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}_0^* / (1 - \hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_2) = 86.18 / (1 - 0.938 + 0.469) = 162.30$$

于是原模型为:

$$\hat{M}_t = 162.30 + 0.020GDP_t$$

与OLS估计结果的差别只在截距项:  $\hat{M}_t = 152.91 + 0.02GDP_t$

例1 . 请判断下列各陈述是否正确：

(1) 当存在自相关时,普通最小二乘法估计量(biased)且失去有效性(inefficient)。

(2) 在自回归模型中,由于某些解释变量是被解后变量(lagged),如:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 y_{t-1} + u_t$$

那么杜宾—沃森 d 法不适用。

(3) 在杜宾—沃森 d 检验法中,我们假定误差项方差(homoscedastic)。

(4) 在用一阶差分法消除自相关时,我们假定自相关系数  $\rho = 1$

例2 1. 有如下一个回归方程,共 95 个样本点:

$$\hat{y}_t = 1.3 + 9.23x_{1t} + 1.8x_{2t} - 4.8x_{3t} + 11.9x_{4t}$$

写出 D—W ( $\alpha=0.05$ ) 的步骤,并根据给出的数值,判断

是否存在自相关

例3 5. 为研究劳动力在制造业中所占比率的变动  
得到以下两种回归推导(利用美国 1949—1964 年度数据)

$$\text{模型 A: } \hat{Y}_t = 0.4529 - 0.0041t \quad R^2 = 0.5484$$

$$(-3.9608)$$

$$\text{模型 B: } \hat{Y}_t = 0.4786 - 0.00127t + 0.0005t^2$$

$$(-3.2724) \quad (2.7777)$$

$$R^2 = 0.6629, \quad d = 1.82$$

其中,  $Y$  代表劳动力比率,  $t$  代表时间 ( $\alpha = 0.05$ )

请回答以下问题:

(1) 模型  $A$  或  $B$  中存在自相关吗?

(2) 如果模型  $A$  中存在自相关, 而模型  $B$  中不存在:

例4 6. 对模型

$$Y = X\beta + U$$

已进行了最小二乘估计, 其中  $X$  为  $(n \times k)$  矩阵,  $n = 2$   
已知

$$\hat{\rho} = \frac{\sum \hat{u}_i \hat{u}_{i-1}}{\sum \hat{u}_{i-1}^2} = 0.5$$

$$I\hat{\gamma}'I\hat{\gamma} = 40 \quad \hat{u}_i^2 = 1 \quad \hat{u}_{20}^2 = 4$$

例5 0. 已知模型  $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$ , 一阶自相关  $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + \eta_t$

0.6, 样本数据如下:

4, 8, 6, 2, 9

$$y_t = 4, 8, 6, 3, 9 \quad t = 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$x_t = 2, 5, 2, 1, 10 \quad t = 1, 2, 3, 4, 5.$$

请回答以下问题:

(1) 计算变换后的  $Y^*$  和  $X^*$  ( $Y^* = BY$ ,  $X^* =$



$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = (X^{*'}X^*)^{-1}X^{*'}Y^*$$

$$(X^{*'}X^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.07 & -0.6 \\ -0.06 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha} = 2.26 \quad \hat{\beta} = 0.8$$

作业： 下表是某地区年消费( $y$ )和可支配

年份	$y$	$x$	年份	$y$
1(1985)	12.3	12.6	7	21.1
2	14.0	14.3	8	22.4
3	16.3	16.8	9	23.8
4	17.9	19.0	10	25.2
5	18.8	20.3	11	26.3
6	19.9	21.2	12	28.0

应用 OLS 法得如下结果：

$$\hat{y} = 1.09 + 0.89x \quad R^2 = 0.998$$

请回答以下问题：

1. 该模型的拟合优度如何？ 2. 该模型的估计量是否有效？ 3. 该模型的估计量是否无偏？ 4. 该模型的估计量是否一致？ 5. 该模型的估计量是否渐近正态？ 6. 该模型的估计量是否渐近有效？ 7. 该模型的估计量是否渐近无偏？ 8. 该模型的估计量是否渐近一致？ 9. 该模型的估计量是否渐近正态？ 10. 该模型的估计量是否渐近有效？

**7.24. 答:**

(1) 残差  $\hat{u}_t = -0.004 \ 0.183 \ 0.258 \ -0.1 \ -0.3$   
 $-0.015 \ -0.139 \ -0.163 \ -0.098 \ 0$

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{12} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{12} \hat{u}_t^2} = \frac{0.445967}{0.411722} = 1.083175$$

$$0.971 = d_L < d = 1.083175 < d_u = 1.331$$

不能确定是否具有自相关性。

(2) 作变换

利用杜宾两步法：

$$\hat{y}_i = 0.39787 + 0.820919x_i + 0.490834y_{i-1} - 0.;$$

则  $\hat{\rho} = 0.490834$ 。作差分

$$y_i^* = y_i - 0.490834y_{i-1}$$

$$x_i^* = x_{i-1} - 0.490834x_{i-1}$$

对变换后的数据应用 OLS 法, 估计模型  $y_i^* = \alpha^*$  得回归方程:

$$\hat{y}_i^* = 0.738392 + 0.868463x_i^* \quad R^2 = 0.996$$

$$\alpha^* = \frac{\alpha}{1-\rho} = \frac{0.738392}{1-0.490834} = 1.450198$$

校正后的回归方程:

$$\hat{y}_i = 1.450198 + 0.868463x_i \quad R^2 = 0.99606$$

9. 26. 设模型为

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t$$

$u_t$  具有一阶线性自相关:  $u_t = 0.8u_{t-1} + v_t$ , 其中  $v_t$  满足本假定. 变量的观测值如下表所示.

$t$	1	2	3	4	5
$y_t$	10	14	15	20	22
$x_t$	6	8	10	14	16

求参数的广义最小二乘估计量

9. 26. 答: 作差分:

$$y_t - 0.8y_{t-1} = 0.2\beta_0 + \beta_1(x_t - 0.8x_{t-1}) + (u_t -$$

$$\text{设 } y_t^* = y_t - 0.8y_{t-1} \quad \alpha = 0.2\beta_0 \quad x_t^* = x_t - 0.8x_{t-1}$$

$$v_t = u_t - 0.8u_{t-1}$$

则  $y_t^* = \alpha + \beta_1 x_t^* + v_t$  对此模型应用 (

$$\hat{y}_t^* = 1.275 + 1.061x_t^* \quad R^2 = 0.889$$

$$(0.881) \quad (0.216) \quad D-W = 2.1$$

## 课堂练习

5 在对英国如何按要素成本对最终产品定价的一项研究中，根据 1950-1960 年度数据，得到如下结果：

$$\begin{aligned} \widehat{PF_t} = & 2.033 + 0.273W_t - 0.521X_t + 0.256M_t + 0.028M_{t-1} + 0.1 \\ & \text{se}=(0.992) \quad (0.127) \quad (0.099) \quad (0.024) \quad (0.039) \quad (0.1) \\ & R^2=0.984 \quad d= \end{aligned}$$

其中 PF=按要素成本定价的最终产品价格，W = 每个雇员的工薪，X = 每个就业者的值，M=进口价格， $M_{t-1}$  = 滞后一年的进口价格，以及  $PF_{t-1}$  = 前一年按要素成本定价。<sup>①</sup>