

### ★3.2.3 一维弦振动方程的初值问题



Home Page

Title Page



Page 1 of 10

Go Back

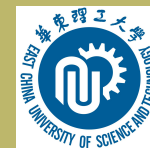
Full Screen

Close

Quit

### ★3.2.3 一维弦振动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in R^1 \end{cases} \quad (3.2.12)$$



Home Page

Title Page



Page 1 of 10

Go Back

Full Screen

Close

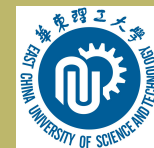
Quit

### ★3.2.3 一维弦振动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in R^1 \end{cases} \quad (3.2.12)$$

解：对方程和初始条件关于 $x$ 施行Fourier变换

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} = -a^2 \lambda^2 \hat{u}(\lambda, t), & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\phi}(\lambda), \hat{u}_t(\lambda, 0) = \hat{\psi}(\lambda) \end{cases}$$



Home Page

Title Page



Page 1 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

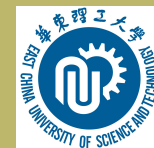
### ★3.2.3 一维弦振动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in R^1 \end{cases} \quad (3.2.12)$$

解：对方程和初始条件关于 $x$ 施行Fourier变换

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} = -a^2 \lambda^2 \hat{u}(\lambda, t), & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\phi}(\lambda), \hat{u}_t(\lambda, 0) = \hat{\psi}(\lambda) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\lambda, t) = C_1(\lambda)e^{ia\lambda t} + C_2(\lambda)e^{-ia\lambda t}$$



Home Page

Title Page



Page 1 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

### ★3.2.3 一维弦振动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in R^1 \end{cases} \quad (3.2.12)$$

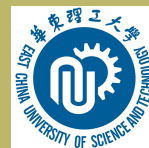
解：对方程和初始条件关于 $x$ 施行Fourier变换

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} = -a^2 \lambda^2 \hat{u}(\lambda, t), & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\phi}(\lambda), \hat{u}_t(\lambda, 0) = \hat{\psi}(\lambda) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\lambda, t) = C_1(\lambda)e^{ia\lambda t} + C_2(\lambda)e^{-ia\lambda t}$$

(通解之所以写成上面形式是为了后面在做Fourier逆变换时容易写出原函数的表达式) 由初始条件

$$\begin{cases} C_1(\lambda) + C_2(\lambda) = \hat{\phi}(\lambda) \\ ia\lambda(C_1(\lambda) - C_2(\lambda)) = \hat{\psi}(\lambda) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(\lambda) = \frac{1}{2}\hat{\phi}(\lambda) - \frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi} \\ C_2(\lambda) = \frac{1}{2}\hat{\phi}(\lambda) + \frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi} \end{cases}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 1 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

### ★3.2.3 一维弦振动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in R^1 \end{cases} \quad (3.2.12)$$

解：对方程和初始条件关于 $x$ 施行Fourier变换

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} = -a^2 \lambda^2 \hat{u}(\lambda, t), & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\phi}(\lambda), \hat{u}_t(\lambda, 0) = \hat{\psi}(\lambda) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\lambda, t) = C_1(\lambda)e^{ia\lambda t} + C_2(\lambda)e^{-ia\lambda t}$$

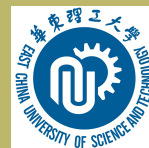
(通解之所以写成上面形式是为了后面在做Fourier逆变换时容易写出原函数的表达式) 由初始条件

$$\begin{cases} C_1(\lambda) + C_2(\lambda) = \hat{\phi}(\lambda) \\ ia\lambda(C_1(\lambda) - C_2(\lambda)) = \hat{\psi}(\lambda) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(\lambda) = \frac{1}{2}\hat{\phi}(\lambda) - \frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda) \\ C_2(\lambda) = \frac{1}{2}\hat{\phi}(\lambda) + \frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda) \end{cases}$$

得到

$$\hat{u}(\lambda, t) = \frac{1}{2}\hat{\phi}(\lambda)(e^{ia\lambda t} + e^{-ia\lambda t}) - \frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{ia\lambda t} - e^{-ia\lambda t}), \quad (3.2.13)$$

作Fourier逆变换求出原函数



Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 1 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit



一般作Fourier逆变换求原函数时，如果不能直接看出原函数的表达形式，可以先由Fourier逆变换定义写出来，然后再将积分进行化简，例如

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)e^{\pm ia\lambda t}] &= \frac{1}{2\pi} \int_R \hat{\phi}(\lambda)e^{\pm ia\lambda t} e^{i\lambda x} d\lambda (\text{由Fourier逆变换定义}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_R \hat{\phi}(\lambda)e^{i\lambda(x \pm at)} d\lambda (\text{指数函数合并化简，提出} i\lambda) \\ &= \phi(x \pm at) (\text{由Fourier逆变换的定义，相当于定义中} x \text{变为} x \pm at)\end{aligned}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 2 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



一般作Fourier逆变换求原函数时，如果不能直接看出原函数的表达形式，可以先由Fourier逆变换定义写出来，然后再将积分进行化简，例如

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)e^{\pm ia\lambda t}] = \frac{1}{2\pi} \int_R \hat{\phi}(\lambda)e^{\pm ia\lambda t} e^{i\lambda x} d\lambda \text{ (由Fourier逆变换定义)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_R \hat{\phi}(\lambda)e^{i\lambda(x \pm at)} d\lambda \text{ (指数函数合并化简, 提出 } i\lambda \text{)}$$

$$= \phi(x \pm at) \text{ (由Fourier逆变换的定义, 相当于定义中 } x \text{ 变为 } x \pm at \text{)}$$

所以

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2}\hat{\phi}(\lambda)(e^{ia\lambda t} + e^{-ia\lambda t})\right] = \frac{1}{2}[\phi(x + at) + \phi(x - at)], \quad (3.2.14)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 2 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)





一般作Fourier逆变换求原函数时，如果不能直接看出原函数的表达形式，可以先由Fourier逆变换定义写出来，然后再将积分进行化简，例如

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)e^{\pm ia\lambda t}] = \frac{1}{2\pi} \int_R \hat{\phi}(\lambda)e^{\pm ia\lambda t} e^{i\lambda x} d\lambda \text{ (由Fourier逆变换定义)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_R \hat{\phi}(\lambda)e^{i\lambda(x \pm at)} d\lambda \text{ (指数函数合并化简, 提出 } i\lambda \text{)}$$

$$= \phi(x \pm at) \text{ (由Fourier逆变换的定义, 相当于定义中 } x \text{ 变为 } x \pm at \text{)}$$

所以

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2}\hat{\phi}(\lambda)(e^{ia\lambda t} + e^{-ia\lambda t})\right] = \frac{1}{2}[\phi(x + at) + \phi(x - at)], \quad (3.2.14)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 2 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

对于

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{ia\lambda t} - e^{-ia\lambda t})\right] =$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 3 of 10

[Go Back](#)

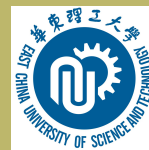
[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

对于

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{ia\lambda t} - e^{-ia\lambda t})\right] = \frac{1}{2\pi} \int_R \frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{ia\lambda t} - e^{-ia\lambda t})e^{ix\lambda}d\lambda$$



Home Page

Title Page



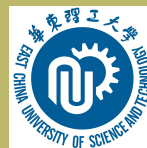
Page 3 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit



对于

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{ia\lambda t}-e^{-ia\lambda t})\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_R\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{ia\lambda t}-e^{-ia\lambda t})e^{ix\lambda}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_R\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{i(x+at)\lambda}-e^{i(x-at)\lambda})d\lambda\end{aligned}$$

括号里的表达形式可以看成是原函数在上限的值减去下限的值

$$= \frac{1}{2\pi}\int_R\hat{\psi}(\lambda)\frac{i}{2a\lambda}\left(\int_{x-at}^{x+at}e^{i\lambda y}i\lambda dy\right)d\lambda$$

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 3 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

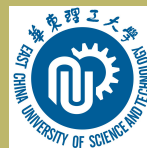
对于

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{ia\lambda t}-e^{-ia\lambda t})\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_R\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{ia\lambda t}-e^{-ia\lambda t})e^{ix\lambda}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_R\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{i(x+at)\lambda}-e^{i(x-at)\lambda})d\lambda\end{aligned}$$

括号里的表达形式可以看成是原函数在上限的值减去下限的值

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2\pi}\int_R\hat{\psi}(\lambda)\frac{i}{2a\lambda}\left(\int_{x-at}^{x+at}e^{i\lambda y}i\lambda dy\right)d\lambda \\ &= -\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\left(\frac{1}{2\pi}\int_R\hat{\psi}(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda\right)dy\end{aligned}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 3 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



对于

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{ia\lambda t}-e^{-ia\lambda t})\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_R\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{ia\lambda t}-e^{-ia\lambda t})e^{ix\lambda}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_R\frac{i}{2a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)(e^{i(x+at)\lambda}-e^{i(x-at)\lambda})d\lambda\end{aligned}$$

括号里的表达形式可以看成是原函数在上限的值减去下限的值

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2\pi}\int_R\hat{\psi}(\lambda)\frac{i}{2a\lambda}\left(\int_{x-at}^{x+at}e^{i\lambda y}i\lambda dy\right)d\lambda \\ &= -\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\left(\frac{1}{2\pi}\int_R\hat{\psi}(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda\right)dy = -\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy, \quad (3.2.15)\end{aligned}$$

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 3 of 10

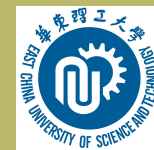
Go Back

Full Screen

Close

Quit

由(3.2.13),(3.2.14)和(3.2.15)可得



Home Page

Title Page



Page 4 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit



由(3.2.13),(3.2.14)和(3.2.15)可得

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\phi(x + at) + \phi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, \quad (3.2.16)$$

这就是著名的d'Alembert 公式。若 $\phi \in C^2(R^1)$ ,  $\psi \in C^1(R^1)$ ,则由公式(3.2.16)给出的 $u(x, t)$ 是问题(3.2.12)的古典解。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 4 of 10

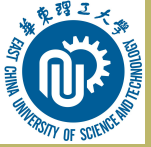
[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)





由(3.2.13),(3.2.14)和(3.2.15)可得

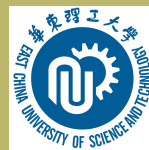
$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\phi(x + at) + \phi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, \quad (3.2.16)$$

这就是著名的d'Alembert 公式。若  $\phi \in C^2(R^1)$ ,  $\psi \in C^1(R^1)$ , 则由公式(3.2.16)给出的  $u(x, t)$  是问题(3.2.12)的古典解。

由

$$\frac{1}{2}(e^{ia\lambda t} + e^{-ia\lambda t}) = \cos a\lambda t, \quad \frac{i}{2a\lambda}(e^{ia\lambda t} - e^{-ia\lambda t}) = -\frac{1}{a\lambda} \sin a\lambda t$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 4 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



由(3.2.13),(3.2.14)和(3.2.15)可得

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\phi(x + at) + \phi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, \quad (3.2.16)$$

这就是著名的d'Alembert 公式。若 $\phi \in C^2(R^1)$ ,  $\psi \in C^1(R^1)$ ,则由公式(3.2.16)给出的 $u(x, t)$ 是问题(3.2.12)的古典解。

由

$$\frac{1}{2}(e^{ia\lambda t} + e^{-ia\lambda t}) = \cos a\lambda t, \quad \frac{i}{2a\lambda}(e^{ia\lambda t} - e^{-ia\lambda t}) = -\frac{1}{a\lambda} \sin a\lambda t$$

以及(3.2.14)和(3.2.15),有

$$\begin{cases} \mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda) \cos a\lambda t] = \frac{1}{2}[\phi(x + at) + \phi(x - at)] \\ \mathcal{F}^{-1}[\hat{\psi}(\lambda) \frac{\sin a\lambda t}{a\lambda}] = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy, \end{cases} \quad (3.2.17)$$

((3.2.17)的结果, 在以后的计算中可直接利用其结果)

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

## 对于非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}^1, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases} \quad (3.2.18)$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

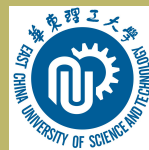
Page 5 of 10

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



对于非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}^1, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases} \quad (3.2.18)$$

关于 $x$ 施行Fourier变换

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} = -a^2 \lambda^2 \hat{u}(\lambda, t) + \hat{f}(\lambda, t), \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\phi}(\lambda), \hat{u}_t(\lambda, 0) = \hat{\psi}(\lambda) \end{cases}$$

利用常数变易公式可得

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\phi}(\lambda) \cos a\lambda t + \frac{1}{a\lambda} \hat{\psi}(\lambda) \sin a\lambda t + \int_0^t \hat{f}(\lambda, s) \frac{\sin a\lambda(t-s)}{a\lambda} ds$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

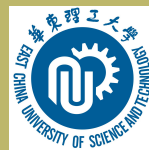
Page 5 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit



对于非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}^1, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases} \quad (3.2.18)$$

关于 $x$ 施行Fourier变换

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} = -a^2 \lambda^2 \hat{u}(\lambda, t) + \hat{f}(\lambda, t), \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\phi}(\lambda), \hat{u}_t(\lambda, 0) = \hat{\psi}(\lambda) \end{cases}$$

利用常数变易公式可得

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\phi}(\lambda) \cos a\lambda t + \frac{1}{a\lambda} \hat{\psi}(\lambda) \sin a\lambda t + \int_0^t \hat{f}(\lambda, s) \frac{\sin a\lambda(t-s)}{a\lambda} ds$$

利用(3.2.17),我们有

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda) \cos a\lambda t] = \frac{1}{2}[\phi(x+at) + \phi(x-at)]$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{a\lambda} \hat{\psi}(\lambda) \sin a\lambda t\right] = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 5 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\int_0^t \hat{f}(\lambda, s) \frac{\sin a\lambda(t-s)}{a\lambda} ds\right] = \int_0^t \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(\lambda, s) \frac{\sin a\lambda(t-s)}{a\lambda}\right] ds$$

利用(3.2.17)中的第二个关系式，直接可得

$$= \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(\xi, s) d\xi ds$$

所以定解问题(3.2.18)的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\phi(x+at) + \phi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(\xi, s) d\xi ds. \quad (3.2.19)$$

[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀](#) [▶](#)
[◀](#) [▶](#)

Page 6 of 10

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)



### 定理3.2.4对于 $n$ 维波动方程的定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 7 of 10

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

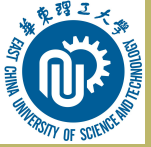
### 定理3.2.4对于 $n$ 维波动方程的定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

如果 $\phi(x), \psi(x), f(x, t)$ 关于 $x$ 都是实解析函数，则问题的解可以写成

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^{2k}}{(2k)!} \Delta^k \phi(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k \psi(x) \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{(2k+1)!} \int_0^t (t-\tau)^{2k+1} \Delta_x^k f(x, \tau) d\tau. \end{aligned}$$





### 定理3.2.4对于 $n$ 维波动方程的定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

如果 $\phi(x), \psi(x), f(x, t)$ 关于 $x$ 都是实解析函数，则问题的解可以写成

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^{2k}}{(2k)!} \Delta^k \phi(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k \psi(x) \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{(2k+1)!} \int_0^t (t-\tau)^{2k+1} \Delta_x^k f(x, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

- 对于高维波动方程的初值问题，类似于高维热传导方程，也可以利用Fourier变换方法求解，但比较复杂。这里不做详细的介绍

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 7 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



## 利用Fourier变换求解无界区域上的初始问题

- 首先观察定解问题中自变量的范围，选择合适的变量进行Fourier变换。（热传导、弦振动定解问题一般都是空间变量 $x$ 实行Fourier变换）
- 将方程和初始条件实行Fourier变换，原偏微分定界问题就转换为常微分方程的初值问题（此过程主要利用Fourier的微分性质，特别是函数一阶，二阶导数的Fourier变换）
- 利用第二章预备知识中介绍的常微分方程的求解方法，求出其解
- 最后作Fourier逆变换
- 最后一步中，主要会利用性质10中的第三个关系式，热传导方程会用到(3.1.3)的表达式，弦振动方程一般会用到(3.2.17)。
- 在Fourier逆变换求原函数时，如果不能判断出原函数的表达式，建议先利用定义将Fourier逆变换写出来，再将积分进行化简。化简的技巧本学期主要掌握ppt上例题的技巧就可以

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 8 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit



*Home Page*

*Title Page*



*Page 9 of 10*

*Go Back*

*Full Screen*

*Close*

*Quit*



回家作业:

$$3.6、(2) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t \sin x, & x \in R, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = \cos x, & x \in R \end{cases}$$

做题的时候不建议直接套用公式，按照Fourier变换求解的一般过程计算

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[«](#) [»](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 10 of 10

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)