

# 数学建模与系统仿真

课程负责人:许春根 教授

主讲老师: 许春根、范金华、窦本年、谢建春

CT技术与图像重建

主讲人: 范金华



Tel: 84315877(O)

Email: [jinhuaafan@hotmail.com](mailto:jinhuaafan@hotmail.com)

# CT技术的图像重建



## 背景

- CT(计算机断层成像 )技术是20世纪50至70年代由美国科学家科马克和英国科学家豪斯费尔德发明的.
- 1971年第一代供临床应用的CT设备问世.
- 螺旋式CT机等新型设备被医疗机构普遍采用.
- CT技术在工业无损探测、资源勘探、生态监测等领域也得到了广泛的应用.

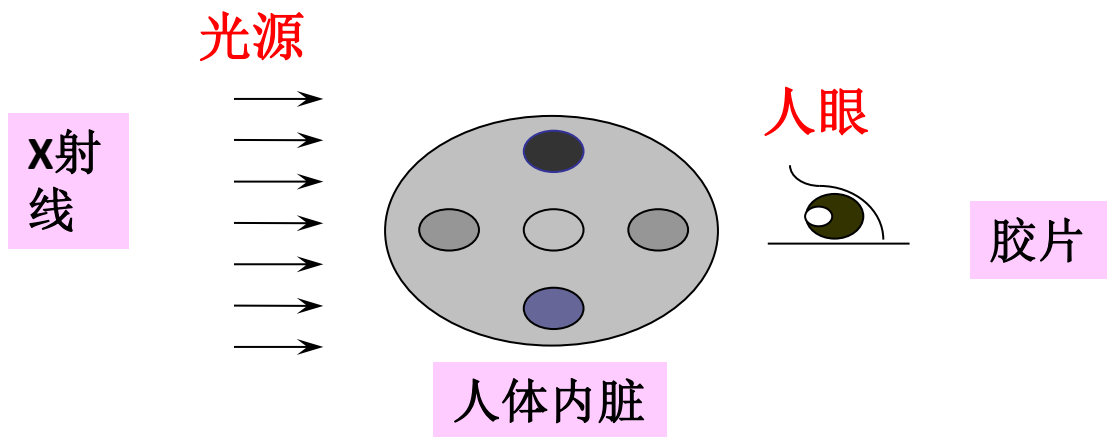
什么是CT，它与传统的X射线成像有什么区别？

## 概念图示： CT技术原理

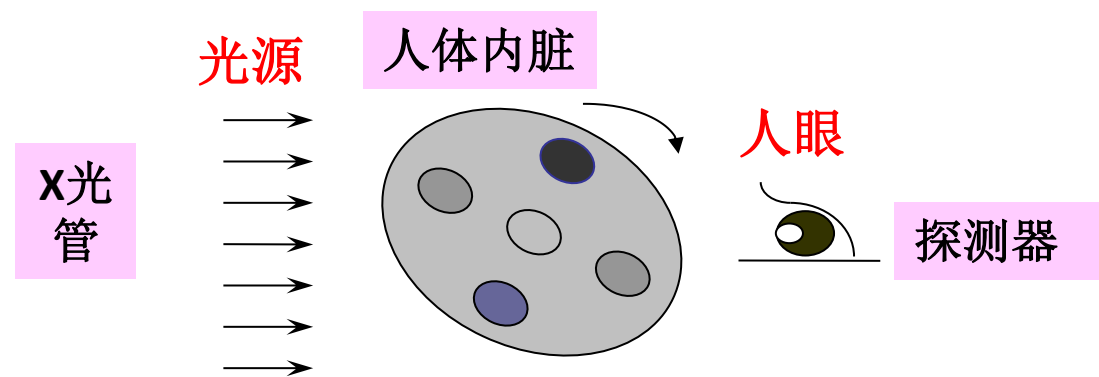
一个半透明物体嵌入5个不同透明度的球

单方向观察无法确定球的数目和透明度

让物体旋转从多角度观察能分辨出5个球及各自的透明度



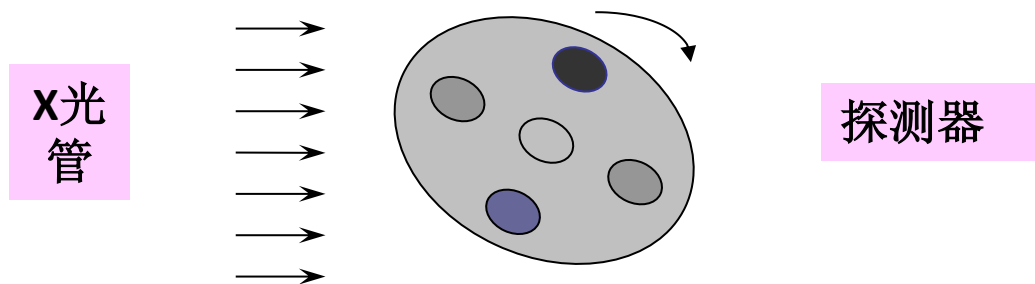
传统的X射线成像原理



CT技术原理

图像重建

# CT技术基本步骤



**CT技术:** 在不同深度的断面上,从各个角度用探测器接收旋转的X光管发出、穿过人体而使强度衰减的射线;

经过测量和计算将人体器官和组织的影像重新构建.

# X射线强度衰减与图像重建的数学原理



$I \sim$  射线强度

$l \sim$  物质在射线方向的厚度

$I_0 \sim$  入射强度

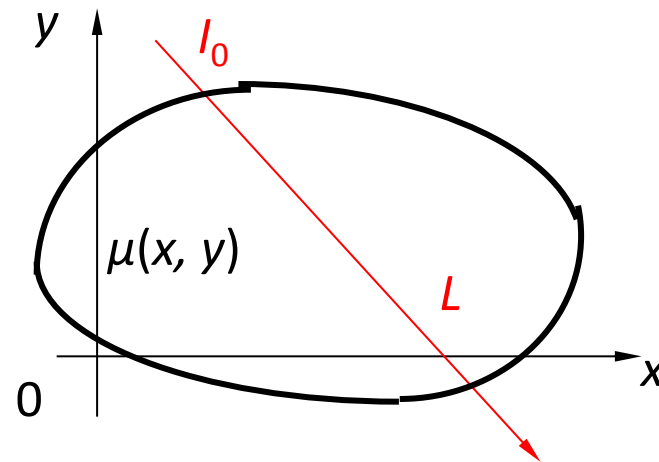
$\mu \sim$  物质对射线的衰减系数

- 射线强度的衰减率与强度成正比.

$$\frac{dI}{dl} = -\mu I$$

$$\Rightarrow I = I_0 e^{-\mu l}$$

- 射线沿直线 $L$ 穿行, 穿过由不同衰减系数的物质组成的非均匀物体(人体器官).



$$\mu l \Rightarrow \int_L \mu(x, y) dl$$

$$\Rightarrow I = I_0 \exp\left(-\int_L \mu(x, y) dl\right)$$

$$\Rightarrow \int_L \mu(x, y) dl = \ln \frac{I_0}{I}$$

# x射线强度衰减与图像重建的数学原理

$$\int_L \mu(x, y) dl = \ln \frac{I_0}{I}$$

右端数值可从CT 的测量数据得到

图像  
重建

多条直线 $L$ 的线积分  $\int_L \mu(x, y) dl$   $\Rightarrow$  被积函数 $\mu(x, y)$

$\Rightarrow$  反映人体器官大小、形状、密度的图像

数学  
原理

$$P_f(L) = \int_L f(x, y) dl$$

Radon变换

$$f(Q) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dF_Q(q)}{q}$$

Radon逆变换

$F_Q(q) \sim$  与 $Q$ 相距 $q$ 的直线 $L$ 的线积分 $P_f(L)$ 对所有 $q$ 的平均值

实际上只能在有限条直线上得到投影(线积分).

# 图像重建的代数模型

$m$ 个像素( $j=1, \dots, m$ ),

$n$ 束射线( $i=1, \dots, n$ )

每个像素对射线的衰减系数是常数

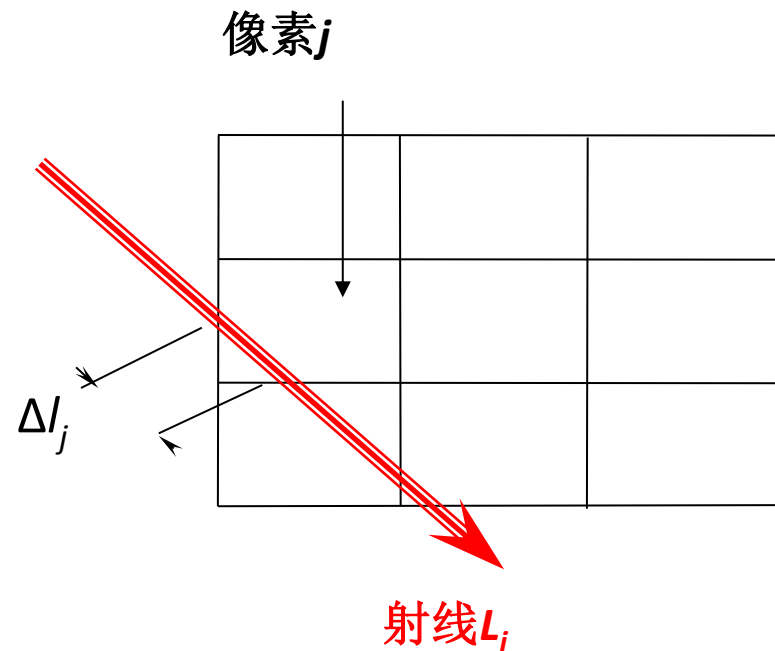
$\mu_j \sim$  像素 $j$ 的衰减系数

$\Delta l_j \sim$  射线在像素 $j$ 中的穿行长度

$J(L_i) \sim$  射线 $L_i$ 穿过的像素 $j$ 的集合

$\ln(I_0 / I)_i \sim L_i$  的强度测量数据

$$\int_L \mu(x, y) dl = \ln \frac{I_0}{I} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j \in J(L_i)} \mu_j \Delta l_j = \ln(I_0 / I)_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$



## 图像重建的代数模型

### 常用算法

$$\ln(I_0 / I)_i = b_i, \quad \mu_j = x_j$$

设像素的边长和射线的宽度均为 $\sigma$

### 中心线法

$a_{ij}$ ~射线 $L_i$ 的中心线在像素 $j$ 内的长度 $l_{ij}$ 与 $\sigma$ 之比.

$$\sum_{j \in J(L_i)} \mu_j \Delta l_j = \ln(I_0 / I)_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b$$

### 面积法

$a_{ij}$ ~射线 $L_i$ 的中心线在像素 $j$ 内的面积 $s_{ij}$ 与 $\sigma$ 之比.

### 中心法

$a_{ij}=1$ ~射线 $L_i$ 经过像素 $j$ 的中心点.

