第七章　马尔科夫预测技术

对应于书180页 市场状态转移概率预测

马尔科夫分析是俄国数学家马尔科夫建立的一种分析随机过程的方法。最初用于预测密闭气体中分子运动的规律，现在广泛应用于市场预测、经济管理、人事管理、项目选址等预测，决策问题。

一、马尔科夫分析的基本原理

考虑时间，状态都是离散的马尔科夫过程，称为离散时间马尔科夫链

定义1：设$\{x_n, n=0,1,2,\cdots\}$是一随机变量序列，满足条件

(1)　x_n可能取值的全体组成的状态空间E为至多可列集

(2)　对任意$n_1, n_2, \cdots, n_k, n_{k+1}$及状态$i_1, i_2, \cdots, i_{k+1} \in E$，若

$n_1 < n_2 < \cdots < n_{k+1}$，以下等式成立

$$\mathrm{P}\left\{x_{n_{k+1}} = i_{k+1} \middle| x_{n_1} = i_1, \cdots, x_{n_k} = i_k\right\} = \mathrm{P}\left\{x_{n_{k+1}} = i_{k+1} \middle| x_{n_k} = i_k\right\} \qquad (*)$$

则称$\{x_n\}$为离散时间离散状态的Markov链，（*）称为马氏性或无后效性

定义2：若马氏链$\{x_n, n=0,1,2,\cdots\}$对任意非负整数$m,n,t,$及状态$i,j\in E,$只要$\mathrm{P}(x_m=i)>0,\mathrm{P}(x_n=i)>0,$就满足

$$\mathrm{P}(x_{m+t}=j\,|\,x_m=i)=\mathrm{P}(x_{n+t}=j\,|\,x_n=i)$$

则称$\{x_n, n=0,1,2,\cdots\}$具有齐次性

即：由状态i经过t时刻转移到状态j的概率与何时处于状态i无关

下面我们考虑具有齐次性的马氏链，$E=\{1,2,\cdots,N\}$

一步转移概率：$p(x_{n+1}=j \mid x_n=i)=p_{ij} \qquad i,j=1,2,\cdots,N$

$$p_{ij}\geq 0 \quad \sum_{j=1}^{N} p_{ij}=1$$

一步转移概率矩阵：

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{N1} & \cdots & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix}$$

有：$p_{ij}\geq 0 \quad i,j=1,2,\cdots,N$

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}=1 \quad i,j=1,2,\cdots,N$$

二步转移概率：$p(x_2 = j \mid x_0 = i) = p_{ij}(2) = \sum_{k=1}^{N} p_{ik} p_{kj}$

二步转移概率矩阵：

$$P(2) = \begin{pmatrix} p_{11}(2) & p_{12}(2) & \cdots & p_{1N}(2) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{N1}(2) & p_{N2}(2) & \cdots & p_{NN}(2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N} p_{1k} p_{k1} & \sum_{k=1}^{N} p_{1k} p_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{N} p_{1k} p_{kN} \\ \sum_{k=1}^{N} p_{2k} p_{k1} & \cdots & \cdots & \sum_{k=1}^{N} p_{2k} p_{kN} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{N} p_{Nk} p_{k1} & \cdots & \cdots & \sum_{k=1}^{N} p_{Nk} p_{kN} \end{pmatrix}$$

$$= P^2$$

N步转移概率：

$$p(x_n = j \mid x_0 = i) = p_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}(n-1) \cdot p_{kj}$$

N步转移概率矩阵：

$$P(n) = P^n$$

其中：$p_{ij}(n) \geq 0 \quad i, j = 1, 2, \cdots, N$

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}(n) = 1 \quad i, j = 1, 2, \cdots, N$$

例：某味精的销售状态为“畅销”，“滞销”两种，分表以“1”“2”代表

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$P(2) = P \times P = \begin{pmatrix} 0.55 & 0.45 \\ 0.54 & 0.46 \end{pmatrix}$$

$C-K$方程：切普曼一柯尔莫哥洛夫方程

$$p_{ij}(m+n) = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}(m)\, p_{kj}(n)$$

二、状态转移概率的估算

例：有销售情况统计数据如下：

时间	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
状态	1	1	2	1	2	2	1	1	1	2	1	2	1	1	2	2	2	1	1	2

状态 $1 \to 1$ 共5次　　状态 $1 \to 2$ 共6次

状态 $2 \to 1$ 共5次　　状态 $2 \to 2$ 共3次

$$\therefore \quad p_{11} = \frac{5}{11} \quad p_{12} = \frac{6}{11} \qquad p = \begin{pmatrix} \frac{5}{11} & \frac{6}{11} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$p_{21} = \frac{5}{8} \quad p_{22} = \frac{3}{8}$$

一般情况：

状态 转移次数 状态		未来状态			
		S_1	S_2		S_N
当前状态	S_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1N}
	S_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2N}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	S_N	a_{N1}	a_{N2}	$\cdots$	a_{NN}

$$p_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^{N} a_{ik}} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, N$$

三、市场占有率预测

1、确定当前市场占有率 $(s_1, s_2, \cdots, s_N)$

2、确定状态转移矩阵 P

3、第n个月（年）的市场占有率为

$$(s_1(n), s_2(n), \cdots, s_N(n)) = (s_1, s_2, \cdots, s_N) \cdot P^n$$

4、稳定的市场平衡状态:$(s_1^*, s_1^*, \cdots, s_N^*)$

$$\begin{cases} (s_1^*, s_2^*, \cdots, s_N^*) = (s_1^*, s_2^*, \cdots, s_N^*) \cdot P \\ s_1^* + s_2^* + \cdots + s_N^* = 1 \end{cases}$$

解得$s_1^*, s_2^*, \cdots, s_N^*$

例：东南亚市场上行销上海、日本、香港三种味精，当前市场占有率为（0.4，0.3，0.3），状态转移矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$P(2) = \begin{pmatrix} 0.52 & 0.24 & 0.24 \\ 0.48 & 0.28 & 0.24 \\ 0.48 & 0.24 & 0.28 \end{pmatrix}$$

$$P(3)=\begin{pmatrix} 0.496 & 0.252 & 0.252 \\ 0.504 & 0.252 & 0.244 \\ 0.504 & 0.244 & 0.252 \end{pmatrix}$$

则三个月后市场占有率为:

$$(s_1(3), s_2(3), s_3(3)) = (0.4 \quad 0.3 \quad 0.3)\begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}^3$$

$$= (0.5008 \quad 0.2496 \quad 0.2496)$$

平衡状态：

$$\begin{cases} s_1^* = 0.4s_1^* + 0.6s_2^* + 0.6s_3^* \\ s_2^* = 0.3s_1^* + 0.3s_2^* + 0.1s_3^* \\ s_3^* = 0.3s_1^* + 0.1s_2^* + 0.3s_3^* \\ s_1^* + s_2^* + s_3^* = 1 \end{cases}$$

$$(s_1^* \quad s_2^* \quad s_3^*) = (0.5 \quad 0.25 \quad 0.25)$$

四、带利润的马氏链

当系统由 i 转移到 j 时，赋予利润 r_{ij} ,构成利润矩阵R

$$R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1N} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{N1} & r_{N2} & \cdots & r_{NN} \end{pmatrix}$$

当前状态为i ,则

一步转移的期望利润为：$v_i(1)=\sum_{k=1}^{N} p_{ik} r_{ik} = q_i$ 即时的期望利润

二步转移的期望利润为：$v_i(2)=\sum_{j=1}^{N}[r_{ij}+v_j(1)]\cdot p_{ij}$

n步转移的期望利润为：$v_i(n)=\sum_{j=1}^{N}[r_{ij}+v_j(n-1)]\cdot p_{ij}$

例：

$$P=\begin{pmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}\qquad R=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

有： $q_1=0.5\times5+0.5\times1=3$

$q_2=0.4\times1-0.6\times1=-0.2$

二个月后： $v_1(2)=0.5\times(5+3)+0.5\times(1-0.2)=4.4$

$v_2(2)=0.4\times(1+3)+0.6\times(-1-0.2)=0.88$

三个月后： $v_1(3)=0.5\times(5+4.4)+0.5\times(1+0.88)=5.64$

$v_2(3)=0.4\times(1+4.4)+0.6\times(-1+0.88)=2.088$

例：人力资源预测

某高等学校为编制师资发展规则，需要预测未来老师队伍构成比例。对老师状况进行分类，可以分为：助教、讲师、副教授、教授、流失及退休五个状态。

当前状态： $S_0 = (135 \quad 240 \quad 115 \quad 60 \quad 0)$

转移概率矩阵：

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.25 & 0 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0.55 & 0.21 & 0.24 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

分析三年后的老师结构及三年内为保持编制不变应引进多少研究生充实老师队伍。

解：

$$S_1 = S_0 P = (81 \quad 198 \quad 123 \quad 72 \quad 76)$$

$$S_2 = (81 + 76,\ 198,\ 123,\ 72,\ 0)\ P$$

$$= (94,\ 182,\ 117,\ 83,\ 74)$$

$$S_3 = (94 + 74,\ 182,\ 117,\ 83,\ 0)\ P$$

$$= (101,\ 176,\ 111,\ 91,\ 72)$$

若：

$$S_3 = S_0 \cdot P^3 = (29 \quad 110 \quad 102 \quad 92 \quad 217)$$

五、吸收态马尔可夫链及其应用

1、状态分类:

连通状态空间：设马尔可夫链的状态空间为S＝（S_1，S_2，…，S_n），若从S_i可以转移至S_j，并且可以从S_j转移至S_i，称S_i与S_j状态是连通的。如果状态空间S中的任意两状态都是连通的，则称S为一个连通状态空间。

马尔可夫链的各个状态分类：

（1）封闭类：若连通状态空间内的任何一状态都不可能到达状态空间外的任何一状态。

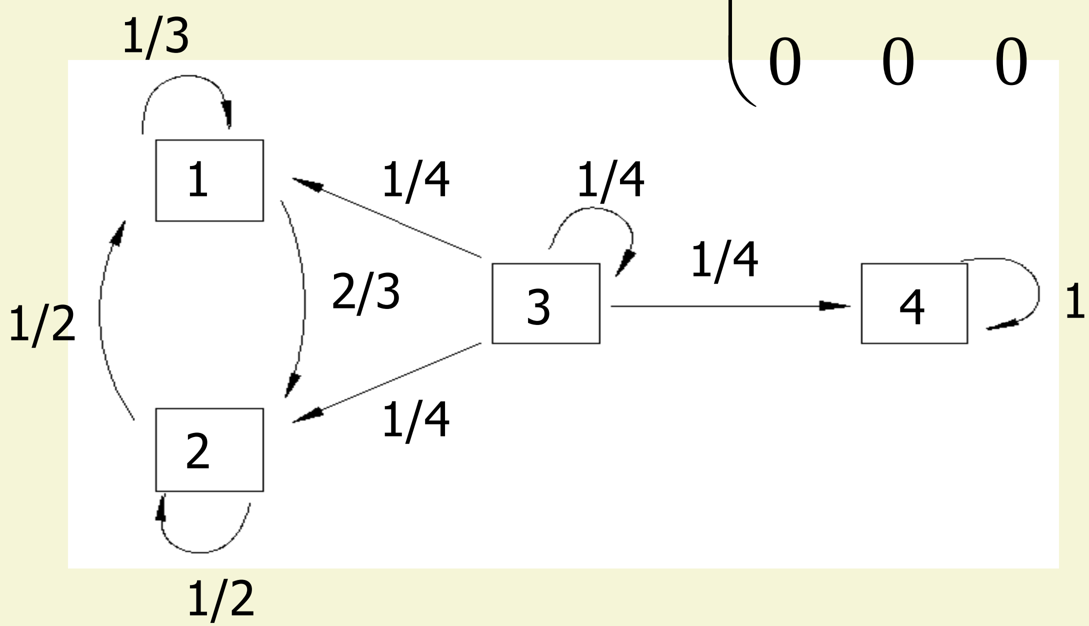
若封闭类仅由一个状态构成，则称之为吸收态。含有吸收态的马尔可夫链称为吸收性马尔可夫链。

（2）过渡类：一个连通状态空间之内的状态可以到达连通空间之外的状态，但外面的状态不可能转入其内，称之为过渡类。

马尔可夫链不论从哪个过渡类中的状态开始，经过足够多的转移步数后，都可以达到某一个封闭类。

例：有转移矩阵：

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



1、2是封闭类

3是过渡类

4是吸收类

2、过渡态分析：

用于商业货款回收、售后服务的期望费用、企业经营中货款回收等问题

(1) 目的：用于确定

ⅰ 含有吸收态的马尔可夫链在最终到达吸收态前的过渡状态中停留的平均时间。

ⅱ 从某一过渡状态出发，在其被吸收前所经历的期望步数。

ⅲ 转移过程从某一过渡状态出发，最终为某特殊吸收态或为封闭类所吸收的概率。

(2) 标准形矩阵：

$$P=\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$

其中：P_1是封闭类矩阵。　若处于吸收态，则P_1等于I。

R是过渡态到吸收态转移概率矩阵

Q是过渡态之间的转移概率矩阵

(3) 基本矩阵：

$$M=(I-Q)^{-1}=I+Q+Q^2+\cdots=\sum_{i=0}^{+\infty} Q^i$$

M的每一行和表示从某一状态出发，最终转至吸收态之前的总期望转移数。

M_{ij}表示S_i转到S_j的平均次数。

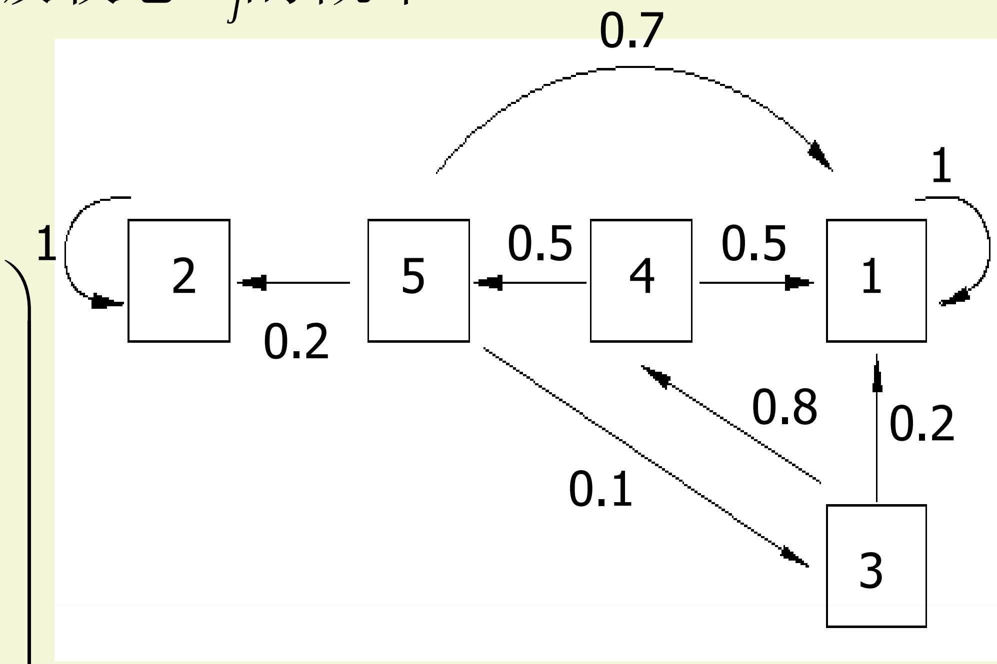
(4) 吸收态转移概率矩阵：

$$B = MR = (I-Q)^{-1} \cdot R$$

b_{ij}表示从过渡态S_i出发，进入吸收态S_j的概率。

例：

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



解：标准形矩阵

$$
\begin{array}{ccc}
 & P & \\
P = & \left(\begin{array}{cc:ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0.2 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \\
0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\
0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0
\end{array}\right) & \\
 & R \qquad\qquad\qquad Q &
\end{array}
$$

$$
B = MR = \begin{pmatrix}
0.92 & 0.08 \\
0.90 & 0.10 \\
0.80 & 0.20
\end{pmatrix}
$$

b_{11}表明状态3进入吸收态1的概率为0.92。

b_{12}表明状态3进入吸收态2的概率为0.08。

b_{21}表明状态4进入吸收态1的概率为0.90。

3、应用：

例：银行短期贷款回收

某银行把它应收的短期贷款期限定为1个季度，即转移期为一季度，并规定超过3个季度不能回收的短期贷款划为呆帐。据以下资料，计算短期货款回收率。

贷款状态划分为：

$S=($结清、呆帐、欠1季、欠2季、欠3季）

假定未来应分期回收贷款向量 $K=(4,2,1)$，单位：千万。

转移概率矩阵：

$$P$$

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{结清} \\ \text{呆帐} \\ \text{欠1季} \\ \text{欠2季} \\ \text{欠3季} \end{array} \end{array}$$

解：

$$Q=\begin{pmatrix}0&0.8&0\\0&0&0.5\\0&0&0\end{pmatrix}\quad R=\begin{pmatrix}0.2&0\\0.5&0\\0.7&0.3\end{pmatrix}\quad M=\begin{pmatrix}1&0.8&0.4\\0&1&0.5\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$B=MR=\begin{pmatrix}0.88&0.12\\0.85&0.15\\0.70&0.30\end{pmatrix}$$

b_{11}表明状态3经过逐次转移，有0. 88可能性进入结清状态。

b_{12}表明状态3经过逐次转移，有0. 12可能性进入呆帐状态。

$$Y=KB=\begin{pmatrix}4&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.88&0.12\\0.85&0.15\\0.70&0.30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5.92&1.08\end{pmatrix}$$

即：预期可回收贷款5.92千万，呆帐1.08千万。贷款回收率85%

例：保修费用估计

若某商品投放市场后提供三年保修服务，

其转移概率矩阵为：

$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.85 & 0 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \text{产品售出一年内} \\ \text{产品售出二年内} \\ \text{产品售出三年内} \\ \text{保修期满} \\ \text{修理} \end{array}$$

保修期内，修理一件产品平均成本为30元，一旦产品经维修，在维修期内便能保证不需再修理。三年内已出售产品为（3.5　2.8　1.5），试估计维修费用。

解：

$$Q=\begin{pmatrix}0 & 0.9 & 0\\ 0 & 0 & 0.85\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad R=\begin{pmatrix}0 & 0.1\\ 0 & 0.15\\ 0.8 & 0.2\end{pmatrix}\quad M=\begin{pmatrix}1 & 0.9 & 0.765\\ 0 & 1 & 0.85\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B=MR=\begin{pmatrix}0.612 & 0.388\\ 0.68 & 0.32\\ 0.8 & 0.2\end{pmatrix}$$

总计维修费用V：

$$V=\begin{pmatrix}3.5 & 2.8 & 1.5\end{pmatrix}\cdot B\cdot\begin{pmatrix}0\\ 30\end{pmatrix}=76.62\text{万}$$

作业：193页　3、4、5、6