

## ★3.1 差分解的稳定性与收敛性



Home Page

Title Page



Page 1 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- ★3.1 差分解的稳定性和收敛性
- ★3.1.1 极值原理与差分解的唯一性



Home Page

Title Page



Page 1 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- ★3.1 差分解的稳定性和收敛性
- ★3.1.1 极值原理与差分解的唯一性

- 这里仅考虑Poisson方程第一边值问题(1)、(2)的差分方程组



Home Page

Title Page



Page 1 of 10

Go Back

Full Screen

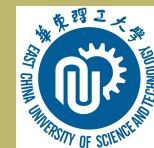
Close

Quit

## ★3.1 差分解的稳定性与收敛性

### ★3.1.1 极值原理与差分解的唯一性

- 这里仅考虑Poisson方程第一边值问题(1)、(2)的差分方程组
- 假设 $\Omega_h$ 和 $\Gamma_h$ 非空，并且 $\bar{\Omega}_h$ 是连通的，即对 $\bar{\Omega}_h$ 中任意两点 $P, Q$ 在 $\bar{\Omega}_h$ 中必存在一系列点 $P_1, P_2, \dots, P_m$ ，使得点列 $P, P_1, \dots, P_m, Q$ 中任意两个相继的点是相邻的点



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 10

Go Back

Full Screen

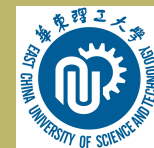
Close

Quit

## ★3.1 差分解的稳定性和收敛性

### ★3.1.1 极值原理与差分解的唯一性

- 这里仅考虑Poisson方程第一边值问题(1)、(2)的差分方程组
- 假设 $\Omega_h$ 和 $\Gamma_h$ 非空，并且 $\bar{\Omega}_h$ 是连通的，即对 $\bar{\Omega}_h$ 中任意两点 $P, Q$ 在 $\bar{\Omega}_h$ 中必存在一系列点 $P_1, P_2, \dots, P_m$ ，使得点列 $P, P_1, \dots, P_m, Q$ 中任意两个相继的点是相邻的点
- 对 $\bar{\Omega}_h$ 中所有的点按一定的顺序编号，先对内点进行编号，再接着对边界点编号，



Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 1 of 10

Go Back

Full Screen

Close

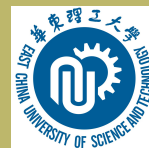
Quit

### ★3.1 差分解的稳定性和收敛性

#### ★3.1.1 极值原理与差分解的唯一性

- 这里仅考虑Poisson方程第一边值问题(1)、(2)的差分方程组
- 假设 $\Omega_h$ 和 $\Gamma_h$ 非空，并且 $\bar{\Omega}_h$ 是连通的，即对 $\bar{\Omega}_h$ 中任意两点 $P, Q$ 在 $\bar{\Omega}_h$ 中必存在一系列点 $P_1, P_2, \dots, P_m$ ，使得点列 $P, P_1, \dots, P_m, Q$ 中任意两个相继的点是相邻的点
- 对 $\bar{\Omega}_h$ 中所有的点按一定的顺序编号，先对内点进行编号，再接着对边界点编号，
- 差分方程组中第 $i$ 个节点的未知量记为 $u_i$ ，则差分方程组可统一的写成

$$\begin{cases} L_h u_i = a_{ii} u_i - \sum_{j \in U(i)} a_{ij} u_j = g_i, i \in \Omega_h, \\ u_i = \phi_i, i \in \Gamma_h \end{cases} \quad (35)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 1 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

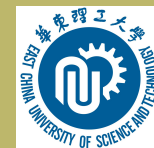
### ★3.1 差分解的稳定性和收敛性

#### ★3.1.1 极值原理与差分解的唯一性

- 这里仅考虑Poisson方程第一边值问题(1)、(2)的差分方程组
- 假设 $\Omega_h$ 和 $\Gamma_h$ 非空，并且 $\bar{\Omega}_h$ 是连通的，即对 $\bar{\Omega}_h$ 中任意两点 $P, Q$ 在 $\bar{\Omega}_h$ 中必存在一系列点 $P_1, P_2, \dots, P_m$ ，使得点列 $P, P_1, \dots, P_m, Q$ 中任意两个相继的点是相邻的点
- 对 $\bar{\Omega}_h$ 中所有的点按一定的顺序编号，先对内点进行编号，再接着对边界点编号，
- 差分方程组中第 $i$ 个节点的未知量记为 $u_i$ ，则差分方程组可统一的写成

$$\begin{cases} L_h u_i = a_{ii} u_i - \sum_{j \in U(i)} a_{ij} u_j = g_i, i \in \Omega_h, \\ u_i = \phi_i, i \in \Gamma_h \end{cases} \quad (35)$$

- $U(i)$ 表示在节点 $i$ 建立的差分方程中出现的内点组成的集合(不包括节点 $i$ )。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 1 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

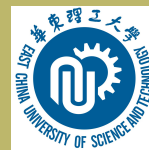
### ★3.1 差分解的稳定性和收敛性

#### ★3.1.1 极值原理与差分解的唯一性

- 这里仅考虑Poisson方程第一边值问题(1)、(2)的差分方程组
- 假设 $\Omega_h$ 和 $\Gamma_h$ 非空，并且 $\bar{\Omega}_h$ 是连通的，即对 $\bar{\Omega}_h$ 中任意两点 $P, Q$ 在 $\bar{\Omega}_h$ 中必存在一系列点 $P_1, P_2, \dots, P_m$ ，使得点列 $P, P_1, \dots, P_m, Q$ 中任意两个相继的点是相邻的点
- 对 $\bar{\Omega}_h$ 中所有的点按一定的顺序编号，先对内点进行编号，再接着对边界点编号，
- 差分方程组中第 $i$ 个节点的未知量记为 $u_i$ ，则差分方程组可统一的写成

$$\begin{cases} L_h u_i = a_{ii} u_i - \sum_{j \in U(i)} a_{ij} u_j = g_i, i \in \Omega_h, \\ u_i = \phi_i, i \in \Gamma_h \end{cases} \quad (35)$$

- $U(i)$ 表示在节点 $i$ 建立的差分方程中出现的内点组成的集合(不包括节点 $i$ )。
- 原差分方程中边界点的已知项都已移到等号的右边

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 1 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



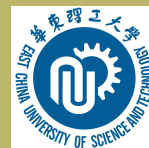
### ★3.1 差分解的稳定性和收敛性

#### ★3.1.1 极值原理与差分解的唯一性

- 这里仅考虑Poisson方程第一边值问题(1)、(2)的差分方程组
- 假设 $\Omega_h$ 和 $\Gamma_h$ 非空，并且 $\bar{\Omega}_h$ 是连通的，即对 $\bar{\Omega}_h$ 中任意两点 $P, Q$ 在 $\bar{\Omega}_h$ 中必存在一系列点 $P_1, P_2, \dots, P_m$ ，使得点列 $P, P_1, \dots, P_m, Q$ 中任意两个相继的点是相邻的点
- 对 $\bar{\Omega}_h$ 中所有的点按一定的顺序编号，先对内点进行编号，再接着对边界点编号，
- 差分方程组中第 $i$ 个节点的未知量记为 $u_i$ ，则差分方程组可统一的写成

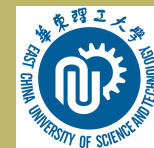
$$\begin{cases} L_h u_i = a_{ii} u_i - \sum_{j \in U(i)} a_{ij} u_j = g_i, i \in \Omega_h, \\ u_i = \phi_i, i \in \Gamma_h \end{cases} \quad (35)$$

- $U(i)$ 表示在节点 $i$ 建立的差分方程中出现的内点组成的集合(不包括节点 $i$ )。
- 原差分方程中边界点的已知项都已移到等号的右边
- 方程组(35)中未知数的数目等于内点的数目。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 1 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 假定方程组系数满足

$$\begin{aligned} a_{ii} &> 0, a_{ij} > 0, i \in \Omega_h, j \in U(i), \\ d_{ii} = a_{ii} - \sum_{j \in U(i)} a_{ij} &\begin{cases} \geq 0, \text{ 当 } i \in \Omega_{h_1} \text{ 时.} \\ > 0, \text{ 当 } i \in \Omega_{h_2} \text{ 时.} \end{cases} \end{aligned} \quad (36)$$



Home Page

Title Page



Page 2 of 10

Go Back

Full Screen

Close

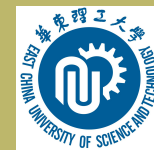
Quit

- 假定方程组系数满足

$$a_{ii} > 0, a_{ij} > 0, i \in \Omega_h, j \in U(i),$$

$$d_{ii} = a_{ii} - \sum_{j \in U(i)} a_{ij} \begin{cases} \geq 0, & \text{当 } i \in \Omega_{h_1} \text{ 时.} \\ > 0, & \text{当 } i \in \Omega_{h_2} \text{ 时.} \end{cases} \quad (36)$$

- 方程(8),(13),(16),(17)中的系数都满足上面条件。



Home Page

Title Page



Page 2 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

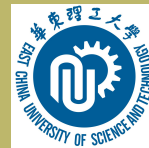
- 假定方程组系数满足

$$a_{ii} > 0, a_{ij} > 0, i \in \Omega_h, j \in U(i),$$

$$d_{ii} = a_{ii} - \sum_{j \in U(i)} a_{ij} \begin{cases} \geq 0, & \text{当 } i \in \Omega_{h_1} \text{ 时.} \\ > 0, & \text{当 } i \in \Omega_{h_2} \text{ 时.} \end{cases} \quad (36)$$

- 方程(8),(13),(16),(17)中的系数都满足上面条件。
- 在图3.3中, 设 $P$ 是非正则内点,  $Q, S$ 是内点,  $R, T$ 是边界点。如果用差分方程(13), 则把有关 $u_R, u_T$ 的项移到等号右边

$$U(P) = \{Q, S\}, d_{PP} = \frac{1}{hh_2} + \frac{1}{\tau\tau_2}, \quad (37)$$


[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀](#)
[▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Page 2 of 10](#)
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

- 假定方程组系数满足

$$a_{ii} > 0, a_{ij} > 0, i \in \Omega_h, j \in U(i),$$

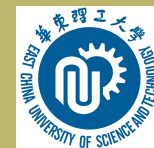
$$d_{ii} = a_{ii} - \sum_{j \in U(i)} a_{ij} \begin{cases} \geq 0, & \text{当 } i \in \Omega_{h_1} \text{ 时.} \\ > 0, & \text{当 } i \in \Omega_{h_2} \text{ 时.} \end{cases} \quad (36)$$

- 方程(8),(13),(16),(17)中的系数都满足上面条件。
- 在图3.3中, 设 $P$ 是非正则内点,  $Q, S$ 是内点,  $R, T$ 是边界点。  
如果用差分方程(13), 则把有关 $u_R, u_T$ 的项移到等号右边

$$U(P) = \{Q, S\}, d_{PP} = \frac{1}{hh_2} + \frac{1}{\tau\tau_2}, \quad (37)$$

- 如果用差分方程(16), 则把有关 $u_R$ 的项移到等号右边

$$U(P) = \{Q\}, d_{PP} = \frac{1}{hh_2}, \quad (38)$$


[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀](#)
[▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Page 2 of 10](#)
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

- 假定方程组系数满足

$$a_{ii} > 0, a_{ij} > 0, i \in \Omega_h, j \in U(i),$$

$$d_{ii} = a_{ii} - \sum_{j \in U(i)} a_{ij} \begin{cases} \geq 0, & \text{当 } i \in \Omega_{h_1} \text{ 时.} \\ > 0, & \text{当 } i \in \Omega_{h_2} \text{ 时.} \end{cases} \quad (36)$$

- 方程(8),(13),(16),(17)中的系数都满足上面条件。
- 在图3.3中, 设 $P$ 是非正则内点,  $Q, S$ 是内点,  $R, T$ 是边界点。  
如果用差分方程(13), 则把有关 $u_R, u_T$ 的项移到等号右边

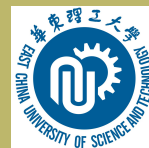
$$U(P) = \{Q, S\}, d_{PP} = \frac{1}{hh_2} + \frac{1}{\tau\tau_2}, \quad (37)$$

- 如果用差分方程(16), 则把有关 $u_R$ 的项移到等号右边

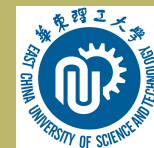
$$U(P) = \{Q\}, d_{PP} = \frac{1}{hh_2}, \quad (38)$$

- 如果用差分方程(17), 则把有关 $u_T$ 的项移到等号右边

$$U(P) = \{S\}, d_{PP} = \frac{1}{\tau\tau_2}, \quad (39)$$


[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀◀](#) [▶▶](#)
[◀](#) [▶](#)
[Page 2 of 10](#)
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

- 引理(3.1) (极值原理) 设 $u_i (i \in \bar{\Omega}_h)$ 是定义在节点上的一组不全相等的数, 并且式(35)中的差分算子 $L_h$ 满足条件(36), 若对每一个 $i \in \Omega_h$ 成立 $L_h u_i \leq 0$  ( $L_h u_i \geq 0$ ), 则不能在内点取到这组数的正的最大值(负的最小值).



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 3 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 引理(3.1) (极值原理) 设 $u_i (i \in \bar{\Omega}_h)$ 是定义在节点上的一组不全相等的数, 并且式(35)中的差分算子 $L_h$ 满足条件(36), 若对每一个 $i \in \Omega_h$ 成立 $L_h u_i \leq 0$  ( $L_h u_i \geq 0$ ), 则不能在内点取到这组数的正的最大值(负的最小值).

证明: 用反证法, 假设在某个内点 $i$ ,  $u_i$ 取到这组数的正的最大值 $M$ , 这里

$$M = \max_{x \in \bar{\Omega}_h} |u_i| > 0$$

由于 $\bar{\Omega}_h$ 是连通的, 并且这组数不全相等, 则一定存在某个内点 $k$ 使得 $u_k = M$ , 并且在点 $k$ 建立的差分方程中至少有一点 $m$ 成立 $u_m < M$ , 从而

$$L_h u_k = a_{kk} u_k - \sum_{j \in U(k)} a_{kj} u_j \begin{cases} > d_{kk} M \geq 0 & \text{当 } k \in \Omega_{h_1} \text{ 时} \\ \geq d_{kk} M > 0, & \text{当 } k \in \Omega_{h_2} \text{ 时} \end{cases}$$

这与条件 $L_h u_k \leq 0$ 矛盾, 于是引理的第一个结论成立。若用 $-u_i$ 代替 $u_i$ 重复上述讨论, 则可得引理的第二结论。

[Home Page](#)[Title Page](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)[Page 3 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)





- 引理(3.1) (极值原理) 设 $u_i (i \in \bar{\Omega}_h)$ 是定义在节点上的一组不全相等的数, 并且式(35)中的差分算子 $L_h$ 满足条件(36), 若对每一个 $i \in \Omega_h$ 成立 $L_h u_i \leq 0 (L_h u_i \geq 0)$ , 则不能在内点取到这组数的正的最大值(负的最小值).

证明: 用反证法, 假设在某个内点 $i$ ,  $u_i$ 取到这组数的正的最大值 $M$ , 这里

$$M = \max_{x \in \bar{\Omega}_h} |u_i| > 0$$

由于 $\bar{\Omega}_h$ 是连通的, 并且这组数不全相等, 则一定存在某个内点 $k$ 使得 $u_k = M$ , 并且在点 $k$ 建立的差分方程中至少有一点 $m$ 成立 $u_m < M$ , 从而

$$L_h u_k = a_{kk} u_k - \sum_{j \in U(k)} a_{kj} u_j \begin{cases} > d_{kk} M \geq 0 & \text{当 } k \in \Omega_{h_1} \text{ 时} \\ \geq d_{kk} M > 0, & \text{当 } k \in \Omega_{h_2} \text{ 时} \end{cases}$$

这与条件 $L_h u_k \leq 0$ 矛盾, 于是引理的第一个结论成立。若用 $-u_i$ 代替 $u_i$ 重复上述讨论, 则可得引理的第二结论。

- 定理3.1 差分方程(35)有惟一解。  
证: 考虑方程组(35)相对应的齐次方程组, 由极值原理可知它只有零解, 从而方程组有惟一解

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 3 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

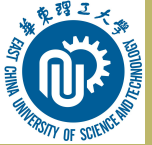
### ★3.3.2 差分解的稳定性与收敛性

- 定理3.2(比较定理) 设 $V_i$ 和 $v_i$ 满足

$$\begin{cases} L_h V_i \geq |L_h v_i|, & \text{当 } i \in \Omega_h \text{ 时;} \\ V_i \geq |v_i|, & \text{当 } i \in \Gamma_h \text{ 时} \end{cases} \quad (41)$$

则

$$V_i \geq |v_i|, i \in \bar{\Omega}_h. \quad (42)$$



Home Page

Title Page

◀◀

▶▶

◀

▶

Page 4 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

### ★3.3.2 差分解的稳定性与收敛性

- 定理3.2(比较定理) 设 $V_i$ 和 $v_i$ 满足

$$\begin{cases} L_h V_i \geq |L_h v_i|, & \text{当 } i \in \Omega_h \text{ 时;} \\ V_i \geq |v_i|, & \text{当 } i \in \Gamma_h \text{ 时} \end{cases} \quad (41)$$

则

$$V_i \geq |v_i|, i \in \bar{\Omega}_h. \quad (42)$$

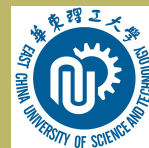
证明：式(41)等价于

$$\begin{cases} L_h(V_i \pm v_i) \geq 0, & \text{当 } i \in \Omega_h \text{ 时} \\ V_i \pm v_i \geq 0, & \text{当 } i \in \Gamma_h \text{ 时} \end{cases}$$

由极值原理有

$$V_i \pm v_i \geq 0, i \in \bar{\Omega}_h,$$

亦即式(42)成立



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

### ★3.3.2 差分解的稳定性与收敛性

- 定理3.2(比较定理) 设 $V_i$ 和 $v_i$ 满足

$$\begin{cases} L_h V_i \geq |L_h v_i|, & \text{当 } i \in \Omega_h \text{ 时;} \\ V_i \geq |v_i|, & \text{当 } i \in \Gamma_h \text{ 时} \end{cases} \quad (41)$$

则

$$V_i \geq |v_i|, i \in \bar{\Omega}_h. \quad (42)$$

证明：式(41)等价于

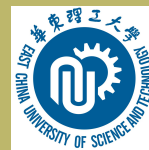
$$\begin{cases} L_h(V_i \pm v_i) \geq 0, & \text{当 } i \in \Omega_h \text{ 时} \\ V_i \pm v_i \geq 0, & \text{当 } i \in \Gamma_h \text{ 时} \end{cases}$$

由极值原理有

$$V_i \pm v_i \geq 0, i \in \bar{\Omega}_h,$$

亦即式(42)成立

- 在定理3.2中，若取 $v_i \equiv 0$ ,则得到下面推论



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

### ★3.3.2 差分解的稳定性与收敛性

- 定理3.2(比较定理) 设 $V_i$ 和 $v_i$ 满足

$$\begin{cases} L_h V_i \geq |L_h v_i|, & \text{当 } i \in \Omega_h \text{ 时;} \\ V_i \geq |v_i|, & \text{当 } i \in \Gamma_h \text{ 时} \end{cases} \quad (41)$$

则

$$V_i \geq |v_i|, i \in \bar{\Omega}_h. \quad (42)$$

证明：式(41)等价于

$$\begin{cases} L_h(V_i \pm v_i) \geq 0, & \text{当 } i \in \Omega_h \text{ 时} \\ V_i \pm v_i \geq 0, & \text{当 } i \in \Gamma_h \text{ 时} \end{cases}$$

由极值原理有

$$V_i \pm v_i \geq 0, i \in \bar{\Omega}_h,$$

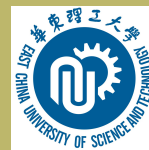
亦即式(42)成立

- 在定理3.2中，若取 $v_i \equiv 0$ ,则得到下面推论
- 推论3.1 设

$$\begin{cases} L_h V_i \geq 0, & \text{当 } i \in \Omega_h \text{ 时} \\ V_i \geq 0, & \text{当 } i \in \Gamma_h \text{ 时} \end{cases}$$

则

$$V_i \geq 0, i \in \bar{\Omega}_h$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit



对于差分方程组(35)的解进行估计, 分别考虑下面三个方程组

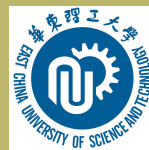
$$\begin{cases} L_h u_i = 0, \text{ 当 } i \in \Omega_h \text{ 时} \\ u_i = \phi_i, \text{ 当 } i \in \Gamma_h \text{ 时} \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} L_h u_i = \begin{cases} g_i, & \text{当 } i \in \Omega_{h_1} \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } i \in \Omega_{h_2} \text{ 时} \end{cases} \\ u_i = 0, \text{ 当 } i \in \Gamma_h \text{ 时} \end{cases} \quad (44)$$

$$\begin{cases} L_h u_i = \begin{cases} 0, & \text{当 } i \in \Omega_{h_1} \text{ 时} \\ g_i, & \text{当 } i \in \Omega_{h_2} \text{ 时} \end{cases} \\ u_i = 0, \text{ 当 } i \in \Gamma_h \text{ 时} \end{cases} \quad (45)$$

由定理3.1,它们都有唯一解。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 5 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



对于差分方程组(35)的解进行估计, 分别考虑下面三个方程组

$$\begin{cases} L_h u_i = 0, \text{当} i \in \Omega_h \text{时} \\ u_i = \phi_i, \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} L_h u_i = \begin{cases} g_i, & \text{当} i \in \Omega_{h_1} \text{时} \\ 0, & \text{当} i \in \Omega_{h_2} \text{时} \end{cases} \\ u_i = 0, \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases} \quad (44)$$

$$\begin{cases} L_h u_i = \begin{cases} 0, & \text{当} i \in \Omega_{h_1} \text{时} \\ g_i, & \text{当} i \in \Omega_{h_2} \text{时} \end{cases} \\ u_i = 0, \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases} \quad (45)$$

由定理3.1,它们都有唯一解。如果把它们解分别记为 $u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, u_i^{(3)}$ ,则差分方程组(35)的解 $u_i$ 可表示为

$$u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)} + u_i^{(3)}. \quad (46)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 5 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

对于差分方程组(35)的解进行估计, 分别考虑下面三个方程组

$$\begin{cases} L_h u_i = 0, \text{当} i \in \Omega_h \text{时} \\ u_i = \phi_i, \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} L_h u_i = \begin{cases} g_i, & \text{当} i \in \Omega_{h_1} \text{时} \\ 0, & \text{当} i \in \Omega_{h_2} \text{时} \end{cases} \\ u_i = 0, \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases} \quad (44)$$

$$\begin{cases} L_h u_i = \begin{cases} 0, & \text{当} i \in \Omega_{h_1} \text{时} \\ g_i, & \text{当} i \in \Omega_{h_2} \text{时} \end{cases} \\ u_i = 0, \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases} \quad (45)$$

由定理3.1,它们都有唯一解。如果把它们解分别记为 $u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, u_i^{(3)}$ ,则差分方程组(35)的解 $u_i$ 可表示为

$$u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)} + u_i^{(3)}. \quad (46)$$

由于方程组(43)是齐次的, 从而

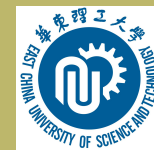
$$u_i^{(i)} = \begin{cases} 0, & \text{当} i \in \Omega_h \text{时} \\ \phi_i, & \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases} \quad (47)$$



为了估计 $u_i^{(2)}$ ,以坐标原点为中心做一个包围区域 $\Omega$ 的圆, 设圆的半径为 $R$ ,记

$$V_i = \frac{K}{4}(R^2 - x_i^2 - y_i^2), i \in \bar{\Omega}_h, \quad (48)$$

这里 $(x_i, y_i)$ 是节点 $i$ 的坐标,  $K$ 是待定的正常数。



Home Page

Title Page



Page 6 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

为了估计 $u_i^{(2)}$ ,以坐标原点为中心做一个包围区域 $\Omega$ 的圆, 设圆的半径为 $R$ ,记

$$V_i = \frac{K}{4}(R^2 - x_i^2 - y_i^2), i \in \bar{\Omega}_h, \quad (48)$$

这里 $(x_i, y_i)$ 是节点 $i$ 的坐标,  $K$ 是待定的正常数。  
对于五点差分格式, 当 $i \in \Omega_{h_1}$ 时

$$L_h V_i = \frac{K}{4} \left( \frac{(x_i + h)^2 - 2x_i^2 + (x_i - h)^2}{h^2} + \frac{(y_i + \tau)^2 - 2y_i^2 + (y_i - \tau)^2}{\tau^2} \right) = K, \quad (49)$$

当 $i \in \Omega_{h_2}$ 时, 仍以图3.3为例, 设 $i = P, Q, S$ 为内点,  $R, T$ 为边界点, 对格式(13)

$$\begin{aligned} L_h V_i &\geq \frac{K}{4} \left[ \frac{1}{h} \left( \frac{(x_i + h_2)^2 - x_i^2}{h_2} - \frac{x_i^2 - (x_i - h)^2}{h} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\tau} \left( \frac{(y_i + \tau_2)^2 - y_i^2}{\tau_2} - \frac{y_i^2 - (y_i - \tau)^2}{\tau} \right) \right] \\ &= \frac{K}{4} \left( 2 + \frac{h_2}{h} + \frac{\tau_2}{\tau} \right), \end{aligned} \quad (50)$$

类似地，对格式(16)

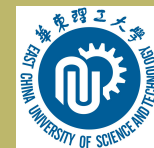
$$L_h V_i \geq \frac{K}{4} \left(1 + \frac{h_2}{h}\right), \quad (51)$$

对格式(17)

$$L_h V_i \geq \frac{K}{4} \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau}\right). \quad (52)$$

式(50)~(52)可以统一地写成

$$L_h V_i = a_i K, a_i \geq \frac{1}{4}, i \in \Omega_{h_2}, \quad (53)$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

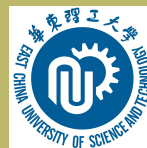
Page 7 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit



类似地，对格式(16)

$$L_h V_i \geq \frac{K}{4} \left(1 + \frac{h_2}{h}\right), \quad (51)$$

对格式(17)

$$L_h V_i \geq \frac{K}{4} \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau}\right). \quad (52)$$

式(50)~(52)可以统一地写成

$$L_h V_i = a_i K, a_i \geq \frac{1}{4}, i \in \Omega_{h_2}, \quad (53)$$

于是由式(48)定义的 $V_i$ 满足

$$\begin{cases} L_h V_i = \begin{cases} K, & \text{当 } i \in \Omega_{h_1} \text{ 时;} \\ a_i K, & \text{当 } i \in \Omega_{h_2} \text{ 时} \end{cases} \\ V_i \geq 0, \text{ 当 } i \in \Gamma_h \text{ 时} \end{cases}$$

将上式同式(44)相比较，取 $K = \max_{j \in \Omega_{h_1}} |g_j|$ ，并利用比较定理，得

$$|u_i^{(2)}| \leq V_i \leq \frac{R^2}{4} \max_{j \in \Omega_{h_1}} |g_j|, i \in \Omega_h, \quad (54)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

最后估计 $u_i^{(3)}$ , 设 $U_i$ 满足

$$\begin{cases} L_h U_i = \begin{cases} 0, & \text{当 } i \in \Omega_{h_1} \text{ 时;} \\ |g_i|, & \text{当 } i \in \Omega_{h_2} \text{ 时} \end{cases} \\ U_i = 0, \text{ 当 } i \in \Gamma_h \text{ 时} \end{cases}$$

将上式同(45)相比较, 利用比较原理, 得

$$|u_i^{(3)}| \leq U_i, i \in \Omega_h.$$

现在估计 $U_i$ . 由于 $U_i \geq 0$ , 而当 $i \in \Gamma_h$ 时 $U_i = 0$ , 所以 $U_i$ 的最大值一定在 $\Omega_h$ 内取到。如果只考虑内点集 $\Omega_h$ , 则非正则内点相对于正则内点来说就是边界点, 显然 $\Omega_{h_2}$ 非空, 又 $L_h U = 0 (i \in \Omega_{h_1})$ , 在 $\Omega_h$ 上应用极值原理, 得

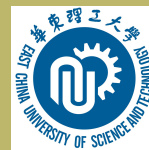
$$\max_{i \in \Omega_{h_1}} U_i \leq \max_{i \in \Omega_{h_2}} U_i.$$

设 $U_i$ 在非正则内点 $k$ 取到最大值, 即 $U_k = \max_{i \in \Omega_{h_2}} U_i$ , 于是

$$|g_k| = L_h U_k = a_{kk} U_k - \sum_{j \in U(k)} a_{kj} U_j \geq d_{kk} U_k$$

即

$$U_k \leq \frac{|g_k|}{d_{kk}} \leq \max_{j \in \Omega_{h_2}} \frac{|g_j|}{d_{jj}}.$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 8 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

从而

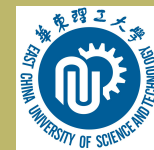
$$|u_i^{(3)}| \leq \max_{j \in \Omega_{h_2}} \frac{|g_j|}{d_{jj}}, i \in \Omega_h, \quad (55)$$

从式(46),(47),(54),(55)得到下面定理

• 定理3.3 差分方程组(35)的解满足

$$|u_i| \leq \frac{R^2}{4} \max_{j \in \Omega_{h_1}} |g_j| + \max_{j \in \Omega_{h_2}} \frac{|g_j|}{d_{jj}}, i \in \Omega_h,$$

$$u_i = \phi_i, i \in \Gamma_h.$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

从而

$$|u_i^{(3)}| \leq \max_{j \in \Omega_{h_2}} \frac{|g_j|}{d_{jj}}, i \in \Omega_h, \quad (55)$$

从式(46),(47),(54),(55)得到下面定理

- 定理3.3 差分方程组(35)的解满足

$$|u_i| \leq \frac{R^2}{4} \max_{j \in \Omega_{h_1}} |g_j| + \max_{j \in \Omega_{h_2}} \frac{|g_j|}{d_{jj}}, i \in \Omega_h,$$

$$u_i = \phi_i, i \in \Gamma_h.$$

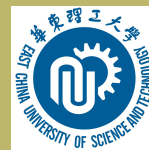
- 对五点差分格式, 有

$$\max_{i \in \Omega_{h_1}} |g_i| = \max_{i \in \Omega_{h_1}} |f_i|.$$

- 对于我们所考虑的非正则内点的几点情况((37)-(39)),有

$$\frac{1}{d_{ii}} \leq h_0^2$$

$$\frac{|g_i|}{d_{ii}} \leq \max_{j \in \Gamma_h} |\phi_j| + h_0^2 \max_{j \in \Omega_{h_2}} |f_j|, i \in \Omega_{h_2}. \quad (56)$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 定理3.3表明边值问题(1)、(2)的右端和边值是稳定的，亦即当 $f$ 和 $\phi$ 有一个小的改变时，所引起的差分解的改变也是很小的。

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 10 of 10

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)





- 定理3.3表明边值问题(1)、(2)的右端和边值是稳定的，亦即当 $f$ 和 $\phi$ 有一个小的改变时，所引起的差分解的改变也是很小的。
- 定理3.4 设Poisson方程第一边值问题(1)、(2)的解 $u(x, y) \in C^4(\bar{\Omega})$ ,  $u_i$ 是五点差分方程组(35)的解，则存在常数 $c$ ,使得

$$|u(i) - u_i| \leq ch_0^2, i \in \Omega_h,$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 10 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 定理3.3表明边值问题(1)、(2)的右端和边值是稳定的, 亦即当 $f$ 和 $\phi$ 有一个小的改变时, 所引起的差分解的改变也是很小的。
- 定理3.4 设Poisson方程第一边值问题(1)、(2)的解 $u(x, y) \in C^4(\bar{\Omega})$ ,  $u_i$ 是五点差分方程组(35)的解, 则存在常数 $c$ , 使得

$$|u(i) - u_i| \leq ch_0^2, i \in \Omega_h,$$

- 定理3.4说明当 $h_0 = \sqrt{h^2 + \tau^2} \rightarrow 0$ 时, 五点差分格式的解收敛到原边值问题的解, 并且收敛速度与 $h_0^2$ 同阶。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 10 of 10](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)