§1 函数项级数的一致收敛性

对于大量非初等函数，如何利用级数来研究它们的连续性，可微性，可积性以及如何计算它们的导数和积分成为基本理论问题。这就需要引入一致收敛概念(Stokes & Seidal 引入)。

§1 函数项级数的一致收敛性

对于大量非初等函数，如何利用级数来研究它们的连续性，可微性，可积性以及如何计算它们的导数和积分成为基本理论问题。这就需要引入一致收敛概念(Stokes & Seidal 引入)。

一、点态收敛

1 点态收敛

设$u_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$ 具有公共定义域E，称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

为函数项级数，称$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ 是该级数的部分和函数。

定义1：设$\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$在$E$上有定义。对$x_0 \in E$，若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$x_0$点收敛，或称$x_0$是$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛点。否则称它在$x_0$点发散。

定义1：设$\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在E 上有定义。对$x_0 \in E$，若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在x_0 点收敛，或称x_0 是$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点。否则称它在x_0 点发散。

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛点的全体所构成的集合称为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域。

定义1：设$\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在E 上有定义。对$x_0 \in E$，若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在x_0 点收敛，或称x_0 是$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点。否则称它在x_0 点发散。

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛点的全体所构成的集合称为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域。

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛域$D \subseteq E$，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 定义了集合D 上的一个函数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), x \in D$$

$S(x)$ 称为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数。由于这是通过逐点定义的方式得到，故称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在D 上点态收敛于$S(x)$。

例1：求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 与$\sum_{n=1}^{\infty}(n!)x^n$ 的收敛域。

例1：求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 与$\sum_{n=1}^{\infty}(n!)x^n$ 的收敛域。

2 函数项级数与函数部分和序列之间的关系

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ 收敛。

此时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$。

已知$S_n(x)$，则$u_1(x) = S_1(x), u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)(n \geq 2)$。

例1：求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n!)x^n$ 的收敛域。

2 函数项级数与函数部分和序列之间的关系

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ 收敛。

此时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$。

已知$S_n(x)$，则$u_1(x) = S_1(x), u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)(n \geq 2)$。

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 与函数序列$\{S_n(x)\}$ 的收敛性本质上完全一致。今后，常通过讨论函数序列来研究函数项级数的性质。

二、函数项级数（函数序列）的基本问题

若有限个函数$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ 在D 上有定义，且具有某种分析性质，如连续、可导、Riemann 可积。

二、函数项级数（函数序列）的基本问题

若有限个函数$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ 在D 上有定义，且具有某种分析性质，如连续、可导、Riemann 可积。

(1) 连续性

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} u_k(x)?$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} S_n(x)$$

二、函数项级数（函数序列）的基本问题

若有限个函数$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ 在D 上有定义，且具有某种分析性质，如连续、可导、Riemann 可积。

(1) 连续性

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} u_k(x)?$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} S_n(x)$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0)$$

例2：设$S_n(x) = x^n$，则$S_n(x)$ 在$(-1, 1]$ 上收敛。

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

二、函数项级数（函数序列）的基本问题

若有限个函数$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ 在D 上有定义，且具有某种分析性质，如连续、可导、Riemann 可积。

(1) 连续性

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} u_k(x) ?$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} S_n(x)$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0)$$

例2：设$S_n(x) = x^n$，则$S_n(x)$ 在$(-1, 1]$ 上收敛。

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

(2) 可积性

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\mathrm{d}x ?$$

(2) 可积性

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\mathrm{d}x?$$

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(x)\mathrm{d}x \iff \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x$$

(2) 可积性

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\mathrm{d}x?$$

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(x)\mathrm{d}x \iff \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x \iff \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x$$

(2) 可积性

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\mathrm{d}x?$$

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(x)\mathrm{d}x \iff \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x \iff \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x$$

例3：设$S_n(x) = nx(1-x^2)^n$，则$S_n(x)$ 在$[0,1]$ 上收敛于$S(x) = 0$。

(2) 可积性

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\mathrm{d}x?$$

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(x)\mathrm{d}x \iff \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x \iff \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x$$

例3：设$S_n(x) = nx(1-x^2)^n$，则$S_n(x)$ 在$[0,1]$ 上收敛于$S(x) = 0$。

$$\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 nx(1-x^2)^n\mathrm{d}x = \frac{n}{2(n+1)} \not\to \int_0^1 S(x)\mathrm{d}x。$$

(3) 可微性

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_n(x)?$$

(3) 可微性

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_n(x) ?$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} S_n(x)$$

(3) 可微性

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_n(x)?$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} S_n(x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}S_n(x)}{\mathrm{d}x}$$

(3) 可微性

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_n(x)?$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} S_n(x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}S_n(x)}{\mathrm{d}x}$$

例4：设$S_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$，则$S_n(x)$ 在$\mathbb{R}$ 上收敛。

(3) 可微性

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_n(x)?$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} S_n(x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}S_n(x)}{\mathrm{d}x}$$

例4：设$S_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$，则$S_n(x)$ 在$\mathbb{R}$ 上收敛。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} S(x) = 0, \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cos nx$$

一般不收敛于0（如$x = 0$）。

三、一致收敛性

1 定义

回顾：点态收敛$\forall x_0 \in D, S_n(x_0) \to S(x_0)(n \to \infty) \iff \forall \epsilon > 0, \exists N(x_0, \epsilon) > 0, \forall n > N$，有$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \epsilon$。

三、一致收敛性

1 定义

回顾：点态收敛$\forall x_0 \in D, S_n(x_0) \to S(x_0)(n \to \infty) \iff \forall \epsilon > 0, \exists N(x_0, \epsilon) > 0, \forall n > N$，有$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \epsilon$。

举例：记$S_n(x) = x^n, \forall x \in (-1, 1), S(x) = 0$

三、一致收敛性

1 定义

回顾：点态收敛$\forall x_0 \in D, S_n(x_0) \to S(x_0)(n \to \infty) \iff \forall \epsilon > 0, \exists N(x_0, \epsilon) > 0, \forall n > N$，有$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \epsilon$。

举例：记$S_n(x) = x^n, \forall x \in (-1, 1), S(x) = 0$

一致收敛：设$\{S_n(x)\}(x \in D)$ 是一函数序列，$\forall \epsilon > 0$, $\exists N(\epsilon) > 0, \forall n > N, \forall x \in D$，有$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$，则称$S_n(x)$在$D$ 上一致收敛于$S(x)$，记$S_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} S(x)$。

三、一致收敛性

1 定义

回顾：点态收敛$\forall x_0 \in D, S_n(x_0) \to S(x_0)(n \to \infty) \iff \forall \epsilon > 0, \exists N(x_0, \epsilon) > 0, \forall n > N$，有$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \epsilon$。

举例：记$S_n(x) = x^n, \forall x \in (-1, 1), S(x) = 0$

一致收敛：设$\{S_n(x)\}(x \in D)$ 是一函数序列，$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) > 0, \forall n > N, \forall x \in D$，有$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$，则称$S_n(x)$在$D$ 上一致收敛于$S(x)$，记$S_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} S(x)$。

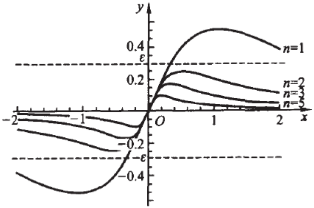
若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和序列$\{S_n(x)\}$ 在D 上一致收敛于$S(x)$，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在D 上一致收敛于$S(x)$。

几何意义：$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), \forall n > N$，函数$y = S_n(x)$ $(x \in D)$ 的图像落在带状区域$\{(x, y) | x \in D, S(x) - \epsilon < y < S(x) + \epsilon\}$ 之间。

几何意义：$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), \forall n > N$，函数$y = S_n(x)$ $(x \in D)$ 的图像落在带状区域$\{(x, y) | x \in D, S(x) - \epsilon < y < S(x) + \epsilon\}$ 之间。

2 一致收敛性的判别

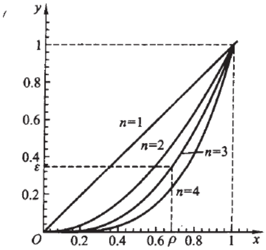
例5：设$S_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2 x^2}$，则$S_n(x) \overset{(-\infty,+\infty)}{\Longrightarrow} 0$。



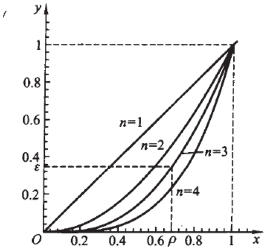
例6：考虑$S_n(x) = x^n$ 在$[0,1)$ 与$[0,\rho](0 < \rho < 1)$上的一致收敛性。

例6：考虑$S_n(x) = x^n$ 在$[0,1)$ 与$[0,\rho](0<\rho<1)$上的一致收敛性。

例6：考虑$S_n(x) = x^n$ 在$[0,1)$ 与$[0,\rho](0<\rho<1)$上的一致收敛性。

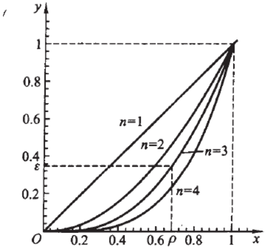


例6：考虑$S_n(x) = x^n$ 在$[0, 1)$ 与$[0, \rho](0 < \rho < 1)$上的一致收敛性。



定义：对$\forall [a, b] \subseteq D$，若函数序列$\{S_n(x)\}$ 在$[a, b]$ 上一致收敛于$S(x)$，则称$\{S_n(x)\}$ 在D 上内闭一致收敛于$S(x)$。

例6：考虑$S_n(x) = x^n$ 在$[0,1)$ 与$[0,\rho](0<\rho<1)$上的一致收敛性。



定义：对$\forall[a,b]\subseteq D$，若函数序列$\{S_n(x)\}$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于$S(x)$，则称$\{S_n(x)\}$ 在D 上内闭一致收敛于$S(x)$。

$\{S_n(x)\}$ 在D 上一致收敛$\Longrightarrow$ $\{S_n(x)\}$ 在D 上内闭一致收敛。反之不可，e.g. $S_n(x) = x^n$。

下面建立一致收敛的两充分必要条件。

定理1：设$\{S_n(x)\}$ 在D 上一致收敛于$S(x)$ $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|S_n(x)-S(x)|=0$。

下面建立一致收敛的两充分必要条件。

定理1：设$\{S_n(x)\}$ 在D 上一致收敛于$S(x) \iff$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|S_n(x)-S(x)|=0$。

注：对具体问题，经常可用微分法求得$|S_n(x)-S(x)|$ 在D 上的上确界或最大值，从而为使用该定理提供了可能。

下面建立一致收敛的两充分必要条件。

定理1：设$\{S_n(x)\}$在D上一致收敛于$S(x)$ $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|S_n(x)-S(x)|=0$。

注：对具体问题，经常可用微分法求得$|S_n(x)-S(x)|$在D上的上确界或最大值，从而为使用该定理提供了可能。

例7：考虑$S_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$在$(0,+\infty)$上的一致收敛性。

下面建立一致收敛的两充分必要条件。

定理1：设$\{S_n(x)\}$在D上一致收敛于$S(x)$ $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|S_n(x)-S(x)|=0$。

注：对具体问题，经常可用微分法求得$|S_n(x)-S(x)|$在D上的上确界或最大值，从而为使用该定理提供了可能。

例7：考虑$S_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$在$(0,+\infty)$上的一致收敛性。

例8：设$S_n(x)=(1-x)x^n$，则$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛。

下面建立一致收敛的两充分必要条件。

定理1：设$\{S_n(x)\}$ 在D 上一致收敛于$S(x)$ $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|S_n(x)-S(x)|=0$。

注：对具体问题，经常可用微分法求得$|S_n(x)-S(x)|$ 在D 上的上确界或最大值，从而为使用该定理提供了可能。

例7：考虑$S_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ 在$(0,+\infty)$ 上的一致收敛性。

例8：设$S_n(x)=(1-x)x^n$，则$\{S_n(x)\}$ 在$[0,1]$ 上一致收敛。

例9：设$S_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$，则$\forall a>0, S_n(x)$ 在$[0,a]$ 上一致收敛。

以下定理给出判别法非一致收敛的一种途径：

定理2：设$\{S_n(x)\}$在D上点态收敛于$S(x)$，则$S_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} S(x)$
$\iff \forall \{x_n\} \subseteq D$，成立$\lim\limits_{n\to\infty}(S_n(x_n) - S(x_n)) = 0$。

以下定理给出判别法非一致收敛的一种途径：

定理2：设$\{S_n(x)\}$在D上点态收敛于$S(x)$，则$S_n(x) \overset{D}{\Rightarrow} S(x)$ $\Longleftrightarrow$ $\forall \{x_n\} \subseteq D$，成立$\lim\limits_{n\to\infty}(S_n(x_n) - S(x_n)) = 0$。

注：该定理经常用来判别非一致收敛性。

例10：设$S_n(x) = nx(1-x^2)^n$，则$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上非一致收敛。

以下定理给出判别法非一致收敛的一种途径：

定理2：设$\{S_n(x)\}$在D上点态收敛于$S(x)$，则$S_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} S(x)$ $\Longleftrightarrow$ $\forall \{x_n\} \subseteq D$，成立$\lim\limits_{n\to\infty}(S_n(x_n) - S(x_n)) = 0$。

注：该定理经常用来判别非一致收敛性。

例10：设$S_n(x) = nx(1-x^2)^n$，则$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上非一致收敛。

例11：设$S_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$，则$\{S_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上非一致收敛。

以下定理给出判别法非一致收敛的一种途径：

定理2：设$\{S_n(x)\}$在D上点态收敛于$S(x)$，则$S_n(x)\overset{D}{\rightrightarrows}S(x)$ $\Longleftrightarrow$ $\forall\{x_n\}\subseteq D$，成立$\lim\limits_{n\to\infty}(S_n(x_n)-S(x_n))=0$。

注：该定理经常用来判别非一致收敛性。

例10：设$S_n(x)=nx(1-x^2)^n$，则$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上非一致收敛。

例11：设$S_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$，则$\{S_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上非一致收敛。

注：比较例9，由于$\{S_n(x)\}$在$[0,a]$上一致收敛，故应在$+\infty$处破坏一致收敛性，故这里取$x_n=n$。

作业： 课本P_{68} 1 除(11), 7, 8。

§2 一致收敛级数的判别的性质

一、一致收敛的Cauchy 准则及应用

§2 一致收敛级数的判别的性质

一、一致收敛的Cauchy 准则及应用

回顾：级数收敛的Cauchy 准则

级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall m > n > N,$ 有$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| = |\sum_{n+1}^{m} x_k| < \epsilon$。

§2 一致收敛级数的判别的性质

一、一致收敛的Cauchy 准则及应用

回顾：级数收敛的Cauchy 准则

级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛 $\iff$ $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall m > n > N$, 有$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| = |\sum_{n+1}^{m} x_k| < \epsilon$。

则对$\forall x_0 \in D, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛 $\iff$ $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon, x_0) > 0$, $\forall m > n > N$, 有$|u_{n+1}(x_0) + u_{n+2}(x_0) + \cdots + u_m(x_0)| < \epsilon$。

§2 一致收敛级数的判别的性质

一、一致收敛的Cauchy 准则及应用

回顾：级数收敛的Cauchy 准则

级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛 $\iff$ $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall m > n > N$, 有$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| = |\sum_{n+1}^{m} x_k| < \epsilon$。

则对$\forall x_0 \in D$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛 $\iff$ $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon, x_0) > 0$, $\forall m > n > N$, 有$|u_{n+1}(x_0) + u_{n+2}(x_0) + \cdots + u_m(x_0)| < \epsilon$。

类似，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在D 上一致收敛 $\iff$ $\forall \epsilon > 0$, $\exists N(\epsilon) > 0$, $\forall m > n > N$, $\forall x \in D$，有$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_m(x)| < \epsilon$。

以上即为函数项级数一致收敛的Cauchy 准则。

注1：相应地，函数序列$\{S_n(x)\}$在D上一致收敛$\Longleftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall m > n > N, \forall x \in D, |S_m(x) - S_n(x)| < \epsilon$。

注1：相应地，函数序列$\{S_n(x)\}$ 在D 上一致收敛 $\Longleftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall m > n > N, \forall x \in D, |S_m(x) - S_n(x)| < \epsilon$。

注2：在函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛的Cauchy 收敛准则中取$m = n + 1$，得$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) > 0, \forall n > N, \forall x \in D$, 有$|u_{n+1}(x)| < \epsilon$，即$u_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} 0$。此为函数项级数一致收敛的必要条件。

注1：相应地，函数序列$\{S_n(x)\}$ 在D 上一致收敛 $\Longleftrightarrow$ $\forall\epsilon>0,\exists N>0,\forall m>n>N,\forall x\in D,|S_m(x)-S_n(x)|<\epsilon$。

注2：在函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛的Cauchy 收敛准则中取$m=n+1$，得$\forall\epsilon>0,\exists N(\epsilon)>0,\forall n>N,\forall x\in D$, 有$|u_{n+1}(x)|<\epsilon$，即$u_n(x)\overset{D}{\rightrightarrows}0$。此为函数项级数一致收敛的必要条件。

例1：函数项级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在$(-1,1)$ 上非一致收敛。

注1：相应地，函数序列$\{S_n(x)\}$在D 上一致收敛 $\Longleftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall m > n > N, \forall x \in D, |S_m(x) - S_n(x)| < \epsilon$。

注2：在函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛的Cauchy 收敛准则中取$m = n + 1$，得$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) > 0, \forall n > N, \forall x \in D$, 有$|u_{n+1}(x)| < \epsilon$，即$u_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} 0$。此为函数项级数一致收敛的必要条件。

例1：函数项级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(x + \frac{1}{n}\right)^n$ 在$(-1, 1)$ 上非一致收敛。

由Cauchy 收敛原理可以导出如下的Weierstrass 判别法：

定理1(Weierstrass 判别法)：设函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $(x \in D)$ 的每一项$u_n(x)$ 满足$\forall x \in D, |u_n(x)| \le a_n$ 且$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在D 上一致收敛。

注1：Weierstrass 判别法要求$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 绝对一致收敛，故只对绝对一致收敛的级数有效。

注1：Weierstrass 判别法要求$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 绝对一致收敛，故只对绝对一致收敛的级数有效。

注2：绝对一致收敛级数未必能用Weierstrass 判别法判定。

注1：Weierstrass 判别法要求$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 绝对一致收敛，故只对绝对一致收敛的级数有效。

注2：绝对一致收敛级数未必能用Weierstrass 判别法判定。

例2：考虑非负函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, u_n(x) = \begin{cases} 1/n, & 1/(n+1) \le x < 1/n \\ 0, & x \text{ 为 } [0,1] \text{ 中其它值} \end{cases}$$

注1：Weierstrass 判别法要求$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 绝对一致收敛，故只对绝对一致收敛的级数有效。

注2：绝对一致收敛级数未必能用Weierstrass 判别法判定。

例2：考虑非负函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, u_n(x) = \begin{cases} 1/n, & 1/(n+1) \leq x < 1/n \\ 0, & x \text{ 为 } [0,1] \text{ 中其它值} \end{cases}$$

例3：$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\alpha} e^{-nx} (\alpha > 1)$ 在$[0, +\infty)$ 上一致收敛。

注1：Weierstrass 判别法要求$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 绝对一致收敛，故只对绝对一致收敛的级数有效。

注2：绝对一致收敛级数未必能用Weierstrass 判别法判定。

例2：考虑非负函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, u_n(x) = \begin{cases} 1/n, & 1/(n+1) \le x < 1/n \\ 0, & x \text{ 为 } [0,1] \text{ 中其它值} \end{cases}$$

例3：$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\alpha} e^{-nx} (\alpha > 1)$ 在$[0, +\infty)$ 上一致收敛。

例4：$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\alpha} e^{-nx} (0 < \alpha \le 1)$ 在$[0, +\infty)$ 上非一致收敛。

注1：Weierstrass 判别法要求$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 绝对一致收敛，故只对绝对一致收敛的级数有效。

注2：绝对一致收敛级数未必能用Weierstrass 判别法判定。

例2：考虑非负函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, u_n(x) = \begin{cases} 1/n, & 1/(n+1) \le x < 1/n \\ 0, & x \text{ 为 } [0,1] \text{ 中其它值} \end{cases}$$

例3：$\sum_{n=1}^{\infty} x^\alpha e^{-nx} (\alpha > 1)$ 在$[0, +\infty)$ 上一致收敛。

例4：$\sum_{n=1}^{\infty} x^\alpha e^{-nx} (0 < \alpha \le 1)$ 在$[0, +\infty)$ 上非一致收敛。

问题：若上题中$\alpha \le 0$，则该函数项级数在$[0, +\infty)$ 是否一致收敛？

作业：课本P_{82} $1(1) - (6)$.

二、A-D 判别法

回顾数项级数$A-D$ 判别法证明核心Abel 引理：

（Abel 引理）：设(1) $\{a_k\}$ 为单调数列；

(2) $\{B_k\}(B_k=\sum_{i=1}^{k}b_i, k=1,2,\cdots)$ 为有界数列，即$\exists M>0$, $\forall k\in\mathbb{Z}^+$，成立$|B_k|\le M$，则$|\sum_{k=1}^{p}a_kb_k|\le M(|a_1|+2|a_p|)$。

同理，$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|\le M(|a_{n+1}|+2|a_{n+p}|)$，其中$B_{n+k}=\sum_{i=n+1}^{n+k}b_i$。

二、A-D 判别法

回顾数项级数$A-D$ 判别法证明核心Abel 引理：

（Abel 引理）：设(1) $\{a_k\}$ 为单调数列；

(2) $\{B_k\}(B_k=\sum_{i=1}^{k} b_i, k=1,2,\cdots)$ 为有界数列，即$\exists M>0$, $\forall k\in\mathbb{Z}^+$，成立$|B_k|\le M$，则$|\sum_{k=1}^{p} a_k b_k|\le M(|a_1|+2|a_p|)$。

同理，$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right|\le M(|a_{n+1}|+2|a_{n+p}|)$，其中$B_{n+k}=\sum_{i=n+1}^{n+k} b_i$。

定理2（函数项级数一致收敛的A-D 判别法）：设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ $(x\in D)$ 满足如下条件之一，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在D 上一致收敛：

(1)(Dirichlet 判别法)$\forall x \in D, \{a_n(x)\}$ 关于n 单调，且$a_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} 0$；$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和序列一致有界。即

$\exists M > 0, \forall x \in D, \forall n \in \mathbb{Z}^+, |\sum_{k=1}^{n} b_k(x)| \leq M$;

(2) (Abel 判别法)$\forall x \in D, \{a_n(x)\}$ 关于n 单调，且$\{a_n(x)\}$ 在D 上一致有界。即$\exists M > 0, \forall x \in D, \forall n \in \mathbb{Z}^+, |a_n(x)| \leq M$;

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在D 上一致收敛。

(1)(Dirichlet 判别法)$\forall x\in D, \{a_n(x)\}$ 关于n 单调，且$a_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} 0$；$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和序列一致有界。即

$\exists M>0, \forall x\in D, \forall n\in\mathbb{Z}^+, |\sum_{k=1}^{n} b_k(x)|\le M$；

(2) (Abel 判别法)$\forall x\in D, \{a_n(x)\}$ 关于n 单调，且$\{a_n(x)\}$ 在D 上一致有界。即$\exists M>0, \forall x\in D, \forall n\in\mathbb{Z}^+, |a_n(x)|\le M$；

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在D 上一致收敛。

注：判别两函数乘积广义积分与两数列乘积的级数的Abel 判别法可由Dirichlet 判别法导出，此处判别一致收敛性则不可。

原因：由$\forall x \in D, \{a_n(x)\}$ 关于n 单调，$a_n(x) \to f(x)$ 及$\{a_n(x)\}$ 在D 上一致有界$\not\Longrightarrow a_n(x) - f(x) \overset{D}{\rightrightarrows} 0$。

e.g. $a_n(x) = e^{-nx}$，则$\forall x \in (0,1), a_n(x) \to 0$ 且$|a_n(x)| \leq 1$，但显然$a_n(x)$ 在$(0,1)$ 上非一致收敛。

原因：由$\forall x \in D, \{a_n(x)\}$ 关于n 单调，$a_n(x) \to f(x)$ 及$\{a_n(x)\}$ 在D 上一致有界$\not\Longrightarrow a_n(x) - f(x) \overset{D}{\rightrightarrows} 0$。

e.g. $a_n(x) = e^{-nx}$，则$\forall x \in (0,1), a_n(x) \to 0$ 且$|a_n(x)| \leq 1$，但显然$a_n(x)$ 在$(0,1)$ 上非一致收敛。

例5：设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在$[0,1]$ 上一致收敛。

原因：由$\forall x \in D, \{a_n(x)\}$ 关于n 单调，$a_n(x) \to f(x)$ 及$\{a_n(x)\}$ 在D 上一致有界$\not\Longrightarrow a_n(x) - f(x) \overset{D}{\rightrightarrows} 0$。

e.g. $a_n(x) = e^{-nx}$，则$\forall x \in (0,1), a_n(x) \to 0$ 且$|a_n(x)| \leq 1$，但显然$a_n(x)$ 在$(0,1)$ 上非一致收敛。

例5：设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在$[0,1]$ 上一致收敛。

例6：设$\{a_n\}$ 单调收敛于0，则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$ 与$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx$ 在$(0,2\pi)$ 上内闭一致收敛。

原因：由$\forall x\in D,\{a_n(x)\}$关于$n$单调，$a_n(x)\to f(x)$及$\{a_n(x)\}$在$D$上一致有界$\not\Longrightarrow a_n(x)-f(x)\overset{D}{\rightrightarrows}0$。

e.g. $a_n(x)=e^{-nx}$，则$\forall x\in(0,1),a_n(x)\to 0$且$|a_n(x)|\leq 1$，但显然$a_n(x)$在$(0,1)$上非一致收敛。

例5：设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$[0,1]$上一致收敛。

例6：设$\{a_n\}$单调收敛于0，则$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx$与$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sin nx$在$(0,2\pi)$上内闭一致收敛。

问题： 何时$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx$与$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sin nx$在$[0,2\pi]$上一致收敛？非一致收敛？

事实上，设$\{a_n\}$为$\downarrow$的非负数列，则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx$在$(-\infty, +\infty)$一致收敛$\iff \lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$。

作业： 课本P_{82} 1(7) – (12)。

事实上，设$\{a_n\}$为$\downarrow$的非负数列，则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx$在$(-\infty,+\infty)$一致收敛$\iff \lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$。

作业： 课本P_{82} 1(7) – (12)。

三、一致收敛级数的性质

在引入一致收敛的概念后，我们来回答在什么条件下，和函数（极限函数）仍然保持连续性、可导性、可积性等分析性质。

事实上，设$\{a_n\}$为$\downarrow$的非负数列，则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx$在$(-\infty,+\infty)$一致收敛 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$。

作业：课本P_{82} 1(7) – (12)。

三、一致收敛级数的性质

在引入一致收敛的概念后，我们来回答在什么条件下，和函数（极限函数）仍然保持连续性、可导性、可积性等分析性质。

定理3（连续性定理）：设函数序列$\{S_n(x)\}$的每一项$S_n(x) \in C[a,b]$，且在$[a,b]$上一致收敛于$S(x)$，则$S(x)$在$[a,b]$上也连续。

事实上，设$\{a_n\}$ 为$\downarrow$ 的非负数列，则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx$ 在$(-\infty, +\infty)$ 一致收敛 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$。

作业： 课本P_{82} 1(7) – (12)。

三、一致收敛级数的性质

在引入一致收敛的概念后，我们来回答在什么条件下，和函数（极限函数）仍然保持连续性、可导性、可积性等分析性质。

定理3（连续性定理）：设函数序列$\{S_n(x)\}$ 的每一项$S_n(x) \in C[a, b]$，且在$[a, b]$ 上一致收敛于$S(x)$，则$S(x)$ 在$[a, b]$ 上也连续。

注1：定理中$S(x)$ 的连续性与定义区域是否为闭区间无关。

注2：$\lim\limits_{x\to x_0} S(x) = S(x_0) \iff \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} S_n(x)$。

注2：$\lim\limits_{x\to x_0} S(x) = S(x_0) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} S_n(x)$。

注3：若定理改成$S_n(x) \in C(a,b)$，且在(a,b) 上内闭一致收敛于$S(x)$，则$S(x) \in C(a,b)$。e.g. $S_n(x) = x^n, x \in (0,1)$。

注2：$\lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0) \iff \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} S_n(x)$。

注3：若定理改成$S_n(x) \in C(a,b)$，且在(a,b)上内闭一致收敛于$S(x)$，则$S(x) \in C(a,b)$。e.g. $S_n(x) = x^n, x \in (0,1)$。

定理3$'$：$\forall n, u_n(x) \in C[a,b]$，且$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$S(x)$，则$S(x) \in C[a,b]$。即对$\forall x_0 \in [a,b]$，

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} u_n(x)$$

注2：$\lim\limits_{x\to x_0} S(x) = S(x_0) \iff \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} S_n(x)$。

注3：若定理改成$S_n(x) \in C(a,b)$，且在(a,b)上内闭一致收敛于$S(x)$，则$S(x) \in C(a,b)$。e.g. $S_n(x) = x^n, x \in (0,1)$。

定理3′：$\forall n, u_n(x) \in C[a,b]$，且$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$S(x)$，则$S(x) \in C[a,b]$。即对$\forall x_0 \in [a,b]$，

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} u_n(x)$$

回顾例6：若$\{a_n\}$单调收敛于0，则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$与$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx$在$(0,2\pi)$上内闭一致收敛，故$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$与$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx$在$(0,2\pi)$上均连续。

注4：一致收敛并不是和函数连续的必要条件。

e.g.$S_n(x) = e^{-nx}, x \in (0, 1)$。

注4：一致收敛并不是和函数连续的必要条件。

e.g.$S_n(x)=e^{-nx}, x\in(0,1)$。

定理4：设函数$\{S_n(x)\}$ 的每一项$S_n(x)\in C[a,b]$，且在$[a,b]$上一致收敛于$S(x)$，则

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x.$$

注4：一致收敛并不是和函数连续的必要条件。

e.g.$S_n(x)=e^{-nx}, x\in(0,1)$。

定理4：设函数$\{S_n(x)\}$的每一项$S_n(x)\in C[a,b]$，且在$[a,b]$上一致收敛于$S(x)$，则

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x.$$

将定理中的$S_n(x)$看成$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的部分和序列，可得

定理4$'$（逐项积分定理）：设对每个$n, u_n(x)\in C[a,b]$，且$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$S(x)$，则

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

例7：证明：当$x \in (-1,1)$ 时成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \ln(1+x).$$

例7：证明：当$x \in (-1, 1)$ 时成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \ln(1+x).$$

注1：由$\ln(1+x)$ 的Taylor 展开式，我们只得到

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

此处给出了级数表达。

例7：证明：当$x \in (-1,1)$时成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \ln(1+x).$$

注1：由$\ln(1+x)$的Taylor 展开式，我们只得到

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

此处给出了级数表达。

注2：一致收敛性并不是使逐项积分成立的必要条件。e.g. $S_n(x) = nxe^{-nx}$ 在$[0,1]$上非一致收敛，但是逐项积分成立。

定理5：设函数序列$\{S_n(x)\}$满足

(1)$\{S_n(x)\}$在$[a,b]$上点态收敛于$S(x)$；

(2)$S_n'(x)\in C[a,b],\forall n\in\mathbb{Z}^+$；

(3)$\{S_n'(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$\sigma(x)$。则$S(x)$在$[a,b]$上可导且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x) \text{ 即 } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S(x)=\sigma(x).$$

如果把$\{S_n(x)\}$看成$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的部分和，则可得

定理5′（逐项求导定理）：设函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 满足

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a,b]$ 上点态收敛于$S(x)$；

(2) $u_n'(x) \in C[a,b], \forall n \in \mathbb{Z}^+$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于$\sigma(x)$，则$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a,b]$ 上可导，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_n(x).$$

注1：在定理5中，因为$S_n'(x) \overset{[a,b]}{\Rightarrow} \sigma(x)$，故

$\forall x_0 \in [a,b], \int_{x_0}^{x} S_n'(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于$\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\mathrm{d}t$。

即$\int_{x_0}^{x} S_n'(t)\mathrm{d}t = S_n(x) - S_n(x_0)$ 一致收敛，故$S_n(x)$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于$S(x)$。

注1：在定理5中，因为$S_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \sigma(x)$，故

$\forall x_0 \in [a,b], \int_{x_0}^{x} S_n'(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于$\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\mathrm{d}t$。

即$\int_{x_0}^{x} S_n'(t)\mathrm{d}t = S_n(x) - S_n(x_0)$ 一致收敛，故$S_n(x)$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于$S(x)$。

注2：一致收敛并非逐项求导定理的必要条件。e.g.
$S_n(x) = \dfrac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)$。

注1：在定理5中，因为$S_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \sigma(x)$，故

$\forall x_0 \in [a,b], \int_{x_0}^{x} S_n'(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于$\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\mathrm{d}t$。

即$\int_{x_0}^{x} S_n'(t)\mathrm{d}t = S_n(x) - S_n(x_0)$ 一致收敛，故$S_n(x)$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于$S(x)$。

注2：一致收敛并非逐项求导定理的必要条件。e.g.
$S_n(x) = \dfrac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)$。

注3：若$\{S_n(x)\}$ 或（$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$）在$(a,b)$ 上收敛于$S(x)$，且每个$S_n'(x)$ （或$u_n'(x)$）$\in C[a,b]$ 的前提下，由$\{S_n'(x)\}$ （或$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$）在$(a,b)$ 上内闭一致收敛可得$S(x)$ 在(a,b) 上可导。

例8：证明：对一切$x \in (-1, 1)$，成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

例8：证明：对一切$x \in (-1, 1)$，成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

在连续性定理中，若$\{S_n(x)\}$ 连续，$S_n(x)$ 在$[a, b]$ 上一致收敛于$S(x)$，则$S(x)$ 连续；

例8：证明：对一切$x \in (-1, 1)$，成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

在连续性定理中，若$\{S_n(x)\}$ 连续，$S_n(x)$ 在$[a, b]$ 上一致收敛于$S(x)$，则$S(x)$ 连续；

反之，若$\{S_n(x)\}$ 连续，$S(x)$ 连续$\not\Rightarrow$ $S_n(x)$ 在$[a, b]$ 上一致收敛于(x)。e.g. $S_n(x) = nxe^{-nx}, [a, b] = [0, 1]$。

但是有如下的Dini 定理：

定理6（Dini 定理）：设函数序列$\{S_n(x)\}$ 在闭区间$[a,b]$ 上点态收敛于$S(x)$，

(1) $S_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在$[a,b]$ 上连续；

(2) $S(x)$ 在$[a,b]$ 上连续；

(3) 对任意固定$x\in[a,b]$, $\{S_n(x)\}$ 关于n 单调。

则$\{S_n(x)\}$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于$S(x)$。

定理6（Dini 定理）：设函数序列$\{S_n(x)\}$ 在闭区间$[a,b]$ 上点态收敛于$S(x)$，

(1) $S_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在$[a,b]$ 上连续；

(2) $S(x)$ 在$[a,b]$ 上连续；

(3) 对任意固定$x\in[a,b],\{S_n(x)\}$ 关于n 单调。

则$\{S_n(x)\}$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于$S(x)$。

注1：Dini 定理中闭区间不可以换成开区间。若换成开区间，则得到$\{x_k\}\subseteq(a,b), x_k\to\xi$，则$\xi\in[a,b]$。若$\xi=a,\{S_n(x)\}$ 在点a 的连续性未知。

反例：$S_n(x)=x^n,(a,b)=(0,1)$。

定理6′：设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a,b]$ 上点态收敛于$S(x)$，若

(1) $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在$[a,b]$ 上连续；

(2) $S(x)$ 在$[a,b]$ 上连续；

(3) $\forall$ 固定$x \in [a,b], \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是正项或负项级数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于$S(x)$。

定理6′：设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a,b]$ 上点态收敛于$S(x)$，若

(1) $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在$[a,b]$ 上连续；

(2) $S(x)$ 在$[a,b]$ 上连续；

(3) $\forall$ 固定$x\in[a,b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是正项或负项级数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于$S(x)$。

例9：证明$\forall a>0$，$\left\{S_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ 在$[0,a]$ 上一致收敛。

定理6′：设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a,b]$ 上点态收敛于$S(x)$，若

(1) $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在$[a,b]$ 上连续；

(2) $S(x)$ 在$[a,b]$ 上连续；

(3) $\forall$ 固定$x \in [a,b], \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是正项或负项级数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于$S(x)$。

例9：证明$\forall a > 0$，$\left\{ S_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \right\}$ 在$[0,a]$ 上一致收敛。

函数项级数可被用来构造处处连续处处不可微的函数。见课本p_{80}。

总结：一致收敛判别法

1° Weierstrass 判别法（也称*M*-判别法，优级数判别法）只对绝对一致收敛有效，存在绝对一致收敛的函数项级数，*M*-判别法失效。

总结：一致收敛判别法

1° Weierstrass 判别法（也称M-判别法，优级数判别法）只对绝对一致收敛有效，存在绝对一致收敛的函数项级数，M-判别法失效。

2° Cauchy 一致收敛准则
充要条件，应用复杂，是未能获得极限函数下主要办法。

总结：一致收敛判别法

1° Weierstrass 判别法（也称M-判别法，优级数判别法）
只对绝对一致收敛有效，存在绝对一致收敛的函数项级数，M-判别法失效。

2° Cauchy 一致收敛准则
充要条件，应用复杂，是未能获得极限函数下主要办法。

3° A-D判别法
充要条件，基于Abel 变换得到。

总结：一致收敛判别法

1° Weierstrass 判别法（也称M-判别法，优级数判别法）

只对绝对一致收敛有效，存在绝对一致收敛的函数项级数，M-判别法失效。

2° Cauchy 一致收敛准则

充要条件，应用复杂，是未能获得极限函数下主要办法。

3° A-D判别法

充要条件，基于Abel 变换得到。

4° Dini 定理

在数项级数中无对应物。条件要求高，若关心的区间不是有界闭区间，可考虑内闭一致收敛。

总结：一致收敛判别法

1° Weierstrass 判别法（也称M-判别法，优级数判别法）

只对绝对一致收敛有效，存在绝对一致收敛的函数项级数，M-判别法失效。

2° Cauchy 一致收敛准则

充要条件，应用复杂，是未能获得极限函数下主要办法。

3° A-D判别法

充要条件，基于Abel 变换得到。

4° Dini 定理

在数项级数中无对应物。条件要求高，若关心的区间不是有界闭区间，可考虑内闭一致收敛。

5° 上确界判别法（可推出对角线判别法，若$\exists\{x_n\}\subseteq D$, s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}|S_n(x_n)-S(x_n)|\neq 0$，则非一致收敛）

充要条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|S_n(x)-S(x)|=0$。

作业： 课本P_{82} 2, 7, 9 加上“并据此证明$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\ln n}$ 在$(0,\pi]$上非一致收敛”。

补充题1：判别$f_n(x)=\frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}$ 在$(0,+\infty)$ 上是否一致收敛，并说明理由。

补充题2：设$f(x)$ 在$\mathbb{R}$ 上连续，$\forall x\neq 0$，有$|f(x)|<|x|$，令$f_1(x)=f(x), f_{n+1}(x)=f(f_n(x)), n=1,2,\cdots$。求证：$\{f_n(x)\}$ 在$[-a,a]$ 上一致收敛。

附加题（09年全国大学生数学竞赛题）：设函数列$\{f_n(x)\}$ 逐点收敛，其中每个函数$f_n(x)$ 在$[a,b]$ 上可微，且$\exists M>0$, s.t. $\forall n\in\mathbb{Z}^{+}$，有$|f_n'(x)|\leq M$。求证：$\{f_n(x)\}$ 在$[a,b]$ 上一致收敛。

§3 幂级数

形如$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$ 的函数项级数称为幂级数，可看成多项式的推广。

§3 幂级数

形如$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$ 的函数项级数称为幂级数，可看成多项式的推广。

一、收敛半径

由Cauchy 判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 当$\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x-x_0|^n} = |x-x_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ 时绝对收敛；> 1 时发散。

§3 幂级数

形如$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$ 的函数项级数称为幂级数，可看成多项式的推广。

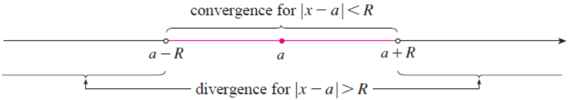
一、收敛半径

由Cauchy 判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 当$\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x-x_0|^n} = |x-x_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ 时绝对收敛；> 1 时发散。

记$A = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$。定义

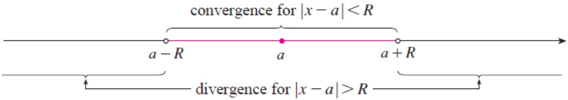
$$R = \begin{cases} +\infty, & A = 0, \quad \text{幂级数在每一点都收敛} \\ 1/A, & A \in (0,+\infty), \\ 0, & A = +\infty, \quad \text{幂级数只在 } x = x_0 \text{ 处收敛，其余点发散} \end{cases}$$

定理1（Cauchy-Hadamard 定理）幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$在$|x-x_0|<R$ 时绝对收敛；$|x-x_0|>R$ 时发散。在区间的端点$|x-x_0|=R$ 时，幂级数收敛与否需要另行判断。



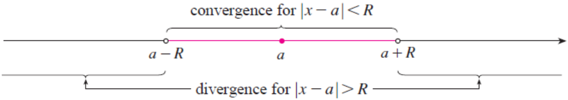
11.3.幂级数

定理1（Cauchy-Hadamard 定理）幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在$|x-x_0|<R$ 时绝对收敛；$|x-x_0|>R$ 时发散。在区间的端点$|x-x_0|=R$ 时，幂级数收敛与否需要另行判断。



对任意幂级数, 存在以x_0 为中心、R 为半径的区间。区间内幂级数绝对收敛; 区间外幂级数发散，故称R 为幂级数的收敛半径。$R=0$ 只在$x=x_0$ 处收敛; $R=+\infty$ 对一切$x\in\mathbb{R}$ 均收敛。

定理1（Cauchy-Hadamard 定理）幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$在$|x-x_0|<R$ 时绝对收敛；$|x-x_0|>R$ 时发散。在区间的端点$|x-x_0|=R$ 时，幂级数收敛与否需要另行判断。



对任意幂级数, 存在以x_0 为中心、R 为半径的区间。区间内幂级数绝对收敛; 区间外幂级数发散，故称R 为幂级数的收敛半径。$R=0$ 只在$x=x_0$ 处收敛; $R=+\infty$ 对一切$x\in\mathbb{R}$ 均收敛。

注：$R=\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ 完全地解决了幂级数收敛半径的计算，但有时利用其它方法可能更方便。如

定理2（d'Alembert 判别法）：如果对幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$成立$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = A$，则$R = 1/A$。

定理2（d'Alembert 判别法）：如果对幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$成立$\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n| = A$，则$R = 1/A$。

例1：给出幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2+(-1)^n]^n}{n}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$的收敛半径及收敛域。

定理2（d'Alembert 判别法）：如果对幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$成立$\lim_{n\to\infty} \left|a_{n+1}/a_n\right| = A$，则$R = 1/A$。

例1：给出幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2+(-1)^n]^n}{n} \left(x-\frac{1}{2}\right)^n$ 的收敛半径及收敛域。

例2：给出幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$ 的收敛半径及收敛域。

定理2（d'Alembert 判别法）：如果对幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$成立$\lim_{n\to\infty} \left|a_{n+1}/a_n\right| = A$，则$R = 1/A$。

例1：给出幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2+(-1)^n]^n}{n}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$ 的收敛半径及收敛域。

例2：给出幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}x^n$ 的收敛半径及收敛域。

例3：给出幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}$ 的收敛半径及收敛域。

作业： 课本P_{92} $1(1)(2)(5)(6)(8), 2, 3.$

二、幂级数的性质

Abel 曾系统地研究过幂级数，并建立了Abel 第一和第二定理。

定理3（Abel 第一定理）：若$\sum a_n(x-x_0)^n$ 在点$x=\xi$ 收敛，则它必在$|x-x_0|<|\xi-x_0|$ 内绝对收敛；又若$\sum a_n(x-x_0)^n$ 在点$x=\xi$ 发散，则它必在$|x-x_0|>|\xi-x_0|$ 也发散。

二、幂级数的性质

Abel 曾系统地研究过幂级数，并建立了Abel 第一和第二定理。

定理3（Abel 第一定理）：若$\sum a_n(x-x_0)^n$ 在点$x=\xi$ 收敛，则它必在$|x-x_0|<|\xi-x_0|$ 内绝对收敛；又若$\sum a_n(x-x_0)^n$ 在点$x=\xi$ 发散，则它必在$|x-x_0|>|\xi-x_0|$ 也发散。

在前一情况下，$|\xi-x_0|\le R$；在后一情况下，$|\xi-x_0|\ge R$。加上等号是因为在区间(x_0-R,x_0+R) 的端点，可能收敛也可能发散，然后用Cauchy-Hadamard 定理可知。

定理4（Abel 第二定理）：设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为R，则

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在(x_0-R, x_0+R) 上内闭一致收敛；

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在x_0+R 点收敛，则在任意闭区间$[a, x_0+R] \subseteq (x_0-R, x_0+R]$ 上一致收敛。

定理4（Abel 第二定理）：设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为R，则

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在(x_0-R, x_0+R) 上内闭一致收敛；

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在x_0+R 点收敛，则在任意闭区间$[a, x_0+R] \subseteq (x_0-R, x_0+R]$ 上一致收敛。

总而言之，幂级数在包含于收敛域中的任意闭区间上一致收敛。

定理4（Abel 第二定理）：设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为R，则

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在(x_0-R, x_0+R) 上内闭一致收敛；

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在x_0+R 点收敛，则在任意闭区间$[a, x_0+R] \subseteq (x_0-R, x_0+R]$ 上一致收敛。

总而言之，幂级数在包含于收敛域中的任意闭区间上一致收敛。

由Abel 第二定理可得

(1) 和函数的连续性：幂级数在它的收敛域上连续

定理5：设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为R，则和函数在(x_0-R, x_0+R) 上连续；若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在$x=x_0+R$（或$x=x_0-R$）处收敛，则和函数在$x=x_0+R$（或$x=x_0-R$）左（右）连续。

(1) 和函数的连续性：幂级数在它的收敛域上连续

定理5：设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为R，则和函数在(x_0-R, x_0+R) 上连续；若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在$x=x_0+R$（或$x=x_0-R$）处收敛，则和函数在$x=x_0+R$（或$x=x_0-R$）左（右）连续。

(2) 逐项可积性：幂级数在包含于收敛域中的任意闭区间上可以逐项积分

定理6：设a, b 是幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 收敛域中的任意两点，则

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x-x_0)^n \mathrm{d}x.$$

特别地，取$a = x_0, b = x$，则

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}.$$

特别地，取$a=x_0, b=x$，则

$$\int_{x_0}^{x}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t-x_0)^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}.$$

注：虽然逐项积分所得的与原幂级数的收敛半径相同，但收敛域有可能扩大、不可能缩小。

特别地，取$a = x_0, b = x$，则

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t - x_0)^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}.$$

注：虽然逐项积分所得的与原幂级数的收敛半径相同，但收敛域有可能扩大、不可能缩小。

因为若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ 在x 处收敛，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \cdot \frac{(x - x_0)}{n+1}$$

由Abel 判别法知$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$ 在x 处收敛。

例4：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}$ 的收敛域为$(-1,1)$。

例4：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}$ 的收敛域为$(-1,1)$。

(3) 逐项可导性：幂级数在它的收敛域内部可以逐项求导

定理7：设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为R，则它在(x_0-R,x_0+R) 上可逐项求导，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$$

例4：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}$ 的收敛域为$(-1,1)$。

(3) 逐项可导性：幂级数在它的收敛域内部可以逐项求导

定理7：设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为R，则它在(x_0-R, x_0+R) 上可逐项求导，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$$

注：虽然逐项求导所得的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ 与原幂级数的收敛半径相同，但收敛域可能缩小，不可能扩大。

因为若$\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ 在x 处收敛，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} \cdot \frac{(x-x_0)}{n}$$

由Abel 判别法知$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在x 处收敛。

因为若$\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ 在x 处收敛，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} \cdot \frac{(x-x_0)}{n}$$

由Abel 判别法知$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在x 处收敛。

三、逐项可导、逐项可积在求和函数中的应用

例5：求$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的和函数。

因为若$\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ 在x 处收敛，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} \cdot \frac{(x-x_0)}{n}$$

由Abel 判别法知$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在x 处收敛。

三、逐项可导、逐项可积在求和函数中的应用

例5：求$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的和函数。

例6：求$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$ 的和函数。

若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均绝对收敛，则它们的Cauchy 乘积$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也绝对收敛（其中$c_n = \sum_{i+j=n+1} a_i b_j$）且

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均绝对收敛，则它们的Cauchy 乘积$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也绝对收敛（其中$c_n = \sum_{i+j=n+1} a_i b_j$）且

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 不是绝对收敛时，上述结论未必成立。e.g. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$，但可证明：

若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均绝对收敛，则它们的Cauchy 乘积$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也绝对收敛（其中$c_n = \sum_{i+j=n+1} a_i b_j$）且

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 不是绝对收敛时，上述结论未必成立。e.g. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$，但可证明：

例7：设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 及Cauchy 乘积$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 均收敛，

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

作业： 课本P_{93} 4(2)(5)(7), 6(2), 7(1)(2)(7), 8, 9.

§4 函数的幂级数展开

一、Taylor 级数与函数的幂级数展开

定义1：若函数$f(x)$ 在x_0 的某个领域$O(x_0, r)$ 上可以表示成幂级数$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ （意味着该幂级数有正的收敛半径），则称$f(x)$ 在x_0 附近（也称在x_0 处）或在$O(x_0, r)$ 上可展开成幂级数，并将该幂级数称为f 在x_0 的幂级数展开式。

§4 函数的幂级数展开

一、Taylor 级数与函数的幂级数展开

定义1：若函数$f(x)$ 在x_0 的某个领域$O(x_0,r)$ 上可以表示成幂级数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ （意味着该幂级数有正的收敛半径），则称$f(x)$ 在x_0 附近（也称在x_0 处）或在$O(x_0,r)$ 上可展开成幂级数，并将该幂级数称为f 在x_0 的幂级数展开式。

由幂级数的逐项可导性，

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} a_n\cdot n(n-1)\cdots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k}。$$

令$x=x_0$ 得$a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$。

定义2：设f 在x_0 的某领域$O(x_0, r)$ 上无穷次可微，则称$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为$f(x)$ 在x_0 的Taylor 级数。

定义2：设f 在x_0 的某领域$O(x_0, r)$ 上无穷次可微，则称 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为$f(x)$ 在x_0 的Taylor 级数。

定理1（幂级数展开的唯一性定理）：若函数$f(x)$ 在$O(x_0, r)$ 上可展开幂级数，则展开式唯一，即为f 在x_0 处的Taylor 级数。

定义2：设f 在x_0 的某领域$O(x_0, r)$ 上无穷次可微，则称
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ 为$f(x)$ 在x_0 的Taylor 级数。

定理1（幂级数展开的唯一性定理）：若函数$f(x)$ 在$O(x_0, r)$ 上可展开幂级数，则展开式唯一，即为f 在x_0 处的Taylor 级数。

注：一个无穷次可微的函数的Taylor 级数并非一定能收敛于函数本身（也即一个无穷次可微的函数未必能展开成幂级数）。

定义2：设f 在x_0 的某领域$O(x_0,r)$ 上无穷次可微，则称
$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为$f(x)$ 在x_0 的Taylor 级数。

定理1（幂级数展开的唯一性定理）：若函数$f(x)$ 在$O(x_0,r)$ 上可展开幂级数，则展开式唯一，即为f 在x_0 处的Taylor 级数。

注：一个无穷次可微的函数的Taylor 级数并非一定能收敛于函数本身（也即一个无穷次可微的函数未必能展开成幂级数）。

例1：设$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ ，求$f(x)$ 在$x=0$ 处的Taylor 级数。

以下考虑一个无穷次可微的函数能展开成幂级数的充要条件，工具是以前学过的Taylor 公式：

以下考虑一个无穷次可微的函数能展开成幂级数的充要条件，工具是以前学过的Taylor 公式：

设$f(x)$ 在$O(x_0, r)$ 上有$n+1$ 阶导数，则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x)$$

$r_n(x)$ 是n 阶Taylor 公式的余项。

以下考虑一个无穷次可微的函数能展开成幂级数的充要条件，工具是以前学过的Taylor 公式：

设$f(x)$ 在$O(x_0, r)$ 上有$n+1$ 阶导数，则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x)$$

$r_n(x)$ 是n 阶Taylor 公式的余项。

我们假定的函数是无穷次可微，故上述公式对$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ 均成立。

改写$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$。

改写$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$。

定理2：f 在$O(x_0, r)$ 上能展开成幂级数 $\Longleftrightarrow$ f 的Taylor 公式的余项$r_n(x) \to 0(n \to \infty)$ 对一切$x \in O(x_0, r)$ 均成立。

改写$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$。

定理2：f 在$O(x_0, r)$ 上能展开成幂级数 $\Longleftrightarrow$ f 的Taylor 公式的余项$r_n(x) \to 0(n \to \infty)$ 对一切$x \in O(x_0, r)$ 均成立。

注：区别Taylor 公式及Taylor 级数。Taylor 公式并不涉及无限项求和问题，只有有限项；同时，对函数f 的要求只需要若干次可微性，这都与Taylor 级数不同。

在Taylor 公式中，余项有

$r_n(x) = O((x - x_0)^n)(x \to x_0)$ Peano 余项；

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}(0 \leq \theta \leq 1)$$

Lagrange 余项

在Taylor 公式中，余项有

$r_n(x) = O((x-x_0)^n)(x \to x_0)$ Peano 余项；

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}(0 \le \theta \le 1)$$

Lagrange 余项

为讨论各种函数的Taylor 展开式，还需$r_n(x)$ 的积分形式：

定理3：设$f(x)$ 在$O(x_0, r)$ 上任意阶可导，则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x), x \in O(x_0, r)$$

其中$r_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \mathrm{d}t$。

对于余项$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \mathrm{d}t$。

对于余项$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \mathrm{d}t$。

若把$f^{(n+1)}(t)$ 看成一个函数，$(x-t)^n$ 看成另外一个函数，则由积分第一中值定理，可得Lagrange 余项：

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

对于余项$r_n(x)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t$。

若把$f^{(n+1)}(t)$ 看成一个函数，$(x-t)^n$ 看成另外一个函数，则由积分第一中值定理，可得Lagrange 余项：

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,\mathrm{d}t=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

若把$f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$ 看成一个函数，1 看成别一个函数，由积分第一中值定理，可得Cauchy 余项：

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!}\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}t=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$$

二、函数展开成幂级数的方法

(1) 直接法

写出级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，证明余项$r_n(x)\to 0(n\to\infty)$在$O(x_0,r)$上成立。

二、函数展开成幂级数的方法

(1) 直接法

写出级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，证明余项$r_n(x)\to 0(n\to\infty)$ 在$O(x_0, r)$ 上成立。

例2：$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty)$。

二、函数展开成幂级数的方法

(1) 直接法

写出级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，证明余项$r_n(x)\to 0(n\to\infty)$在$O(x_0,r)$ 上成立。

例2：$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$。

例3：$\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},x\in(-\infty,+\infty)$。

二、函数展开成幂级数的方法

(1) 直接法

写出级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，证明余项$r_n(x)\to 0(n\to\infty)$ 在$O(x_0,r)$ 上成立。

例2：$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$。

例3：$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},x\in(-\infty,+\infty)$。

同理，$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},x\in(-\infty,+\infty)$。

例4：$\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,x\in(-1,1)$。

例4：$\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,x\in(-1,1)$。

例5：$\arctan x=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},x\in[-1,1]$。

例4：$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots, x \in (-1,1)$。

例5：$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, x \in [-1,1]$。

例6：$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, x \in (-1,1]$。

例4：$\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots, x\in(-1,1)$。

例5：$\arctan x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}, x\in[-1,1]$。

例6：$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n, x\in(-1,1]$。

例7：$(1+x)^\alpha=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}x^n, \begin{cases} x\in(-1,1), & \alpha\le -1\\ x\in(-1,1], & -1<\alpha<0\\ x\in[-1,1], & \alpha>0\end{cases}$。其中$\alpha\neq 0, \alpha\notin\mathbb{Z}^+$。

例4：$\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots, x\in(-1,1)$。

例5：$\arctan x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}, x\in[-1,1]$。

例6：$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n, x\in(-1,1]$。

例7：$(1+x)^\alpha=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}x^n, \begin{cases} x\in(-1,1), & \alpha\le -1 \\ x\in(-1,1], & -1<\alpha<0 \\ x\in[-1,1], & \alpha>0 \end{cases}$。其中$\alpha\neq 0, \alpha\notin\mathbb{Z}^+$。

(2) 间接法（理论基础：幂级数展开唯一性定理）

通过对某些已知展开式的函数变换、四则运算、逐项求导或逐项求积等手段得到。

六个重要公式

$$
\begin{aligned}
1/(1-x) &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots, x \in (-1,1) \\
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots, x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots, x \in \mathbb{R} \\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}+\cdots, x \in (-1,1] \\
(1+x)^\alpha &= \binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\cdots
\end{aligned}
$$

展开式成立范围：$\alpha \le -1$ 时为$(-1,1)$；$-1<\alpha<0$ 时为$(-1,1]$；$\alpha>0$ 时为$[-1,1]$。其中$\alpha \ne 0, \alpha \notin \mathbb{Z}^+$。

例8：求$f(x) = 1/x^2$ 在$x = 1$ 处的幂级数展开式。

例8：求$f(x) = 1/x^2$ 在$x = 1$ 处的幂级数展开式。

例9：求$f(x) = \dfrac{1}{3+5x-2x^2}$ 在$x = 0$ 处的幂级数展开式。

例8：求$f(x) = 1/x^2$ 在$x = 1$ 处的幂级数展开式。

例9：求$f(x) = \dfrac{1}{3 + 5x - 2x^2}$ 在$x = 0$ 处的幂级数展开式。

三、两个函数相乘或相除的幂级数展开

设$f(x)$ 与$g(x)$ 的幂级数展开分别为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$，收敛半径分别为$R_1, R_2$，则$|x| < \min\{R_1, R_2\}$ 时，

例8：求$f(x)=1/x^2$ 在$x=1$ 处的幂级数展开式。

例9：求$f(x)=\dfrac{1}{3+5x-2x^2}$ 在$x=0$ 处的幂级数展开式。

三、两个函数相乘或相除的幂级数展开

设$f(x)$ 与$g(x)$ 的幂级数展开分别为$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$，收敛半径分别为$R_1,R_2$，则$|x|<\min\{R_1,R_2\}$ 时，

$f(x)g(x)$ 的幂级数展开就是它们的Cauchy 乘积

$$f(x)g(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\ 其中\ c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}.$$

例10：求$e^x \sin x$ 在$x = 0$ 处的幂级数展开（到x^5）。

例10：求$e^x \sin x$ 在$x = 0$ 处的幂级数展开（到x^5）。

关于幂级数相除，有定理：若$h(x) = f(x)/g(x)$，其中f 和g 均在点x_0 可以展开成幂级数，且$g(x_0) \neq 0$，则h 也可在x_0 展开成幂级数。

例10：求$e^x \sin x$ 在$x=0$ 处的幂级数展开（到x^5）。

关于幂级数相除，有定理：若$h(x)=f(x)/g(x)$，其中f 和g 均在点x_0 可以展开成幂级数，且$g(x_0)\neq 0$，则h 也可在x_0 展开成幂级数。

设$f(x), g(x)$ 的幂级数展开分别为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$，则$b_0\neq 0$ 时，可用待定系数法确定$f(x)/g(x)$ 的幂级数展开。

例10：求$e^x \sin x$ 在$x=0$ 处的幂级数展开（到x^5）。

关于幂级数相除，有定理：若$h(x)=f(x)/g(x)$，其中f 和g 均在点x_0 可以展开成幂级数，且$g(x_0)\neq 0$，则h 也可在x_0 展开成幂级数。

设$f(x), g(x)$ 的幂级数展开分别为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$，则$b_0 \neq 0$ 时，可用待定系数法确定$f(x)/g(x)$ 的幂级数展开。

设$f(x)/g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$，则$(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，比较$x^n$ 的系数，得

$$
\begin{aligned}
& b_0 c_0 = a_0 \Rightarrow c_0 = a_0/b_0 \\
& b_0 c_1 + b_1 c_0 = a_1 \Rightarrow c_1 = (a_1 - b_1 c_0)/b_0 \\
& b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 = a_2 \Rightarrow c_2 = (a_2 - b_1 c_1 - b_2 c_0)/b_0 \\
& \ldots
\end{aligned}
$$

例11：求$\tan x$ 在$x = 0$ 处的幂级数展开（到x^5）。

例11：求$\tan x$ 在$x=0$ 处的幂级数展开（到x^5）。

例12：求$\ln(\sin x)/x$ 在$x=0$ 的幂级数展开（到x^4）。其中函数$\sin x/x$ 理解成$f(x)=\begin{cases}\sin x/x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$。

例11：求$\tan x$ 在$x=0$ 处的幂级数展开（到x^5）。

例12：求$\ln(\sin x)/x$ 在$x=0$ 的幂级数展开（到x^4）。其中函数$\sin x/x$ 理解成$f(x)=\begin{cases}\sin x/x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$。

该题需用到命题：设幂级数展开式$y=f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在$x=0$ 附近成立；又有幂级数展开式$z=\phi(y)=\sum_{n=0}^{\infty}b_ny^n$ 在$(-\rho,\rho)$ 中成立，如果满足条件$|a_0|=|f(0)|<\rho$，则复合函数$z=\phi(f(x))$ 在$x=0$ 的邻近可以展开成幂级数。

例11：求$\tan x$ 在$x=0$ 处的幂级数展开（到x^5）。

例12：求$\ln(\sin x)/x$ 在$x=0$ 的幂级数展开（到x^4）。其中函数$\sin x/x$ 理解成$f(x)=\begin{cases}\sin x/x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$。

该题需用到命题：设幂级数展开式$y=f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在$x=0$ 附近成立；又有幂级数展开式$z=\phi(y)=\sum_{n=0}^{\infty}b_ny^n$ 在$(-\rho,\rho)$ 中成立，如果满足条件$|a_0|=|f(0)|<\rho$，则复合函数$z=\phi(f(x))$ 在$x=0$ 的邻近可以展开成幂级数。

最后说明幂级数在近似计算中的应用。

例13：计算$I=\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$，要求精确到0.0001。

作业： 课本P_{106} 1(1 – 5)(8)(10), 2(1)(2), 3(1), 4, 5.

补充题：求下列幂级数的收敛域。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n}x\right]^{n}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}x^{n}(\alpha>0)$

四、用多项式逼近连续函数

定义： 设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上有定义，若存在多项式序列$\{P_n(x)\}$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于$f(x)$，则称$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可由多项式一致逼近。

$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可用多项式一致逼近 $\Longleftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0, \exists$ 多项式$P(x)$，s.t. $|P(x) - f(x)| < \epsilon$ 对$\forall x \in [a,b]$ 成立。

Weierstrass 证明：闭区间$[a,b]$ 上的任意连续函数$f(x)$ 均可用多项式一致逼近。