第五章　波动（wave）

声波、水波、电磁波都是物理学中常见的波，它对应一种物质波。各种类型的波有其特殊性，但也有普遍的共性，它们都有类似的波动方程。

机械振动在弹性介质中的传播称为机械波。

一、机械波的形成

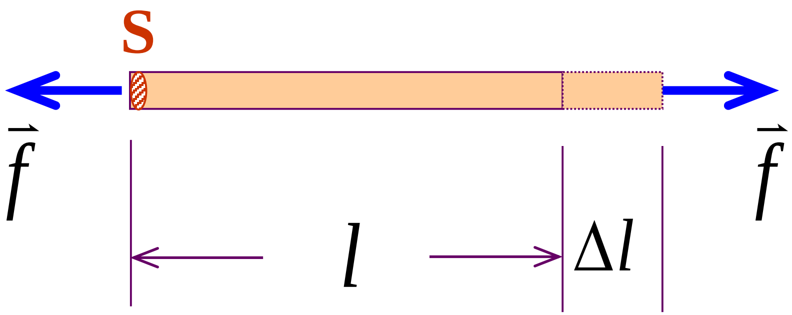
1、机械波产生的条件：波源(振源)、弹性媒质

2、弹性体的形变规律

1) 弹性体——在外力作用下，物体发生形变(形状和体积的变化)，当外力撤消后，这种变化能够完全消失的物体。

2) 弹性形变:

i) 固体拉伸和压缩的形变（长变）



胁强 $\dfrac{f}{S}$ 正应力

胁变 $\dfrac{\Delta l}{l}$ 线应变

物理规律: 在弹性限度内应力与应变成正比，比例系数称为材料的弹性模量。

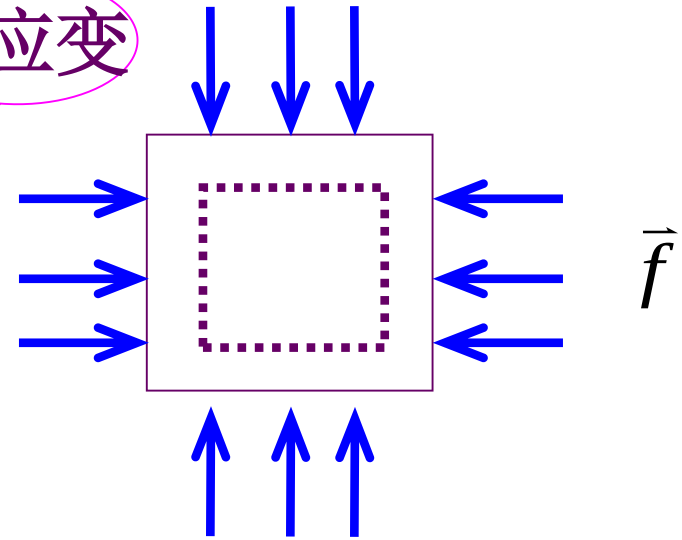
$$E = \frac{f/S}{\Delta l/l} \Longrightarrow f = \frac{ES}{\underline{l}}\Delta l = \underline{k}\Delta l$$

E——杨氏弹性模量

ii）容积形变

体应力 $P=\dfrac{f}{S}$

体应变 $\dfrac{\Delta V}{V}$



容变弹性模量定义为:

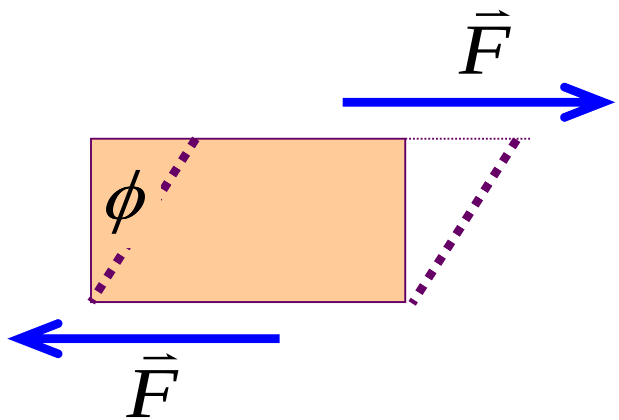
$$K=\frac{-P}{\Delta V/V} \qquad P=\frac{f}{S}=-K\frac{\Delta V}{V}$$

f **表示正压力**

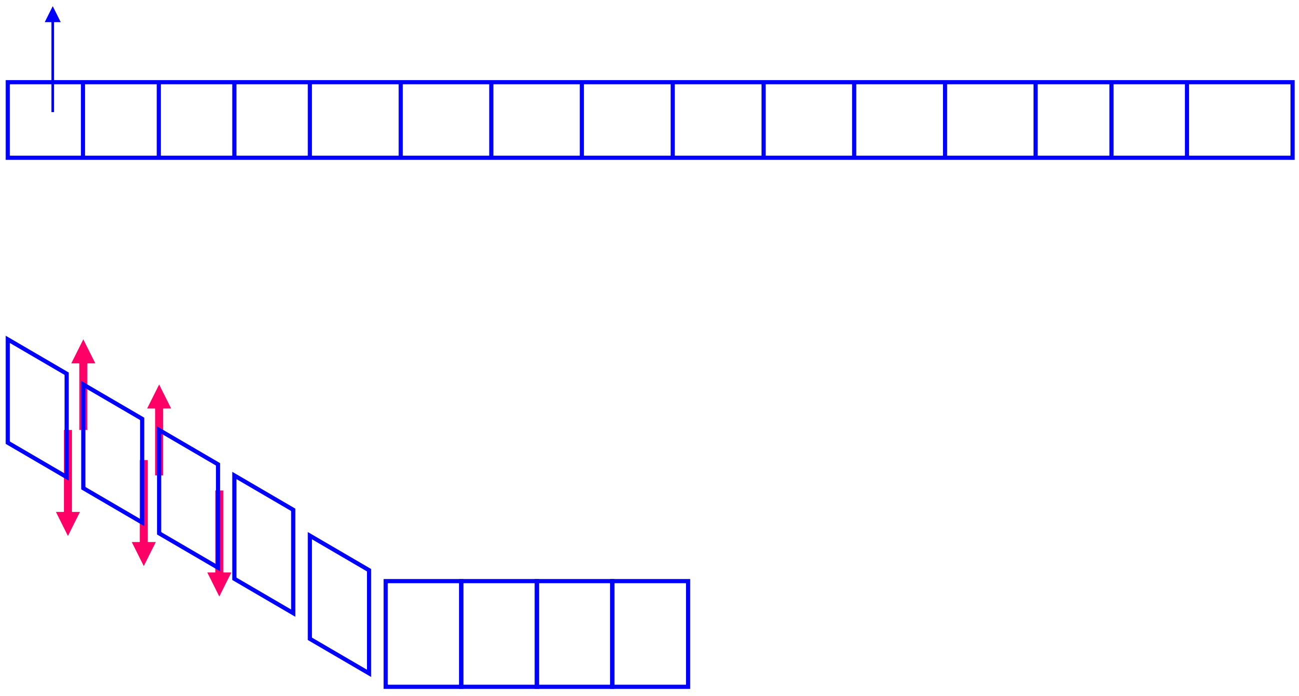
S受力面积

iii) 剪切形变

$$G=\frac{F/S}{\phi} \qquad \frac{F}{S}=G\phi$$



G 称为切变弹性模量

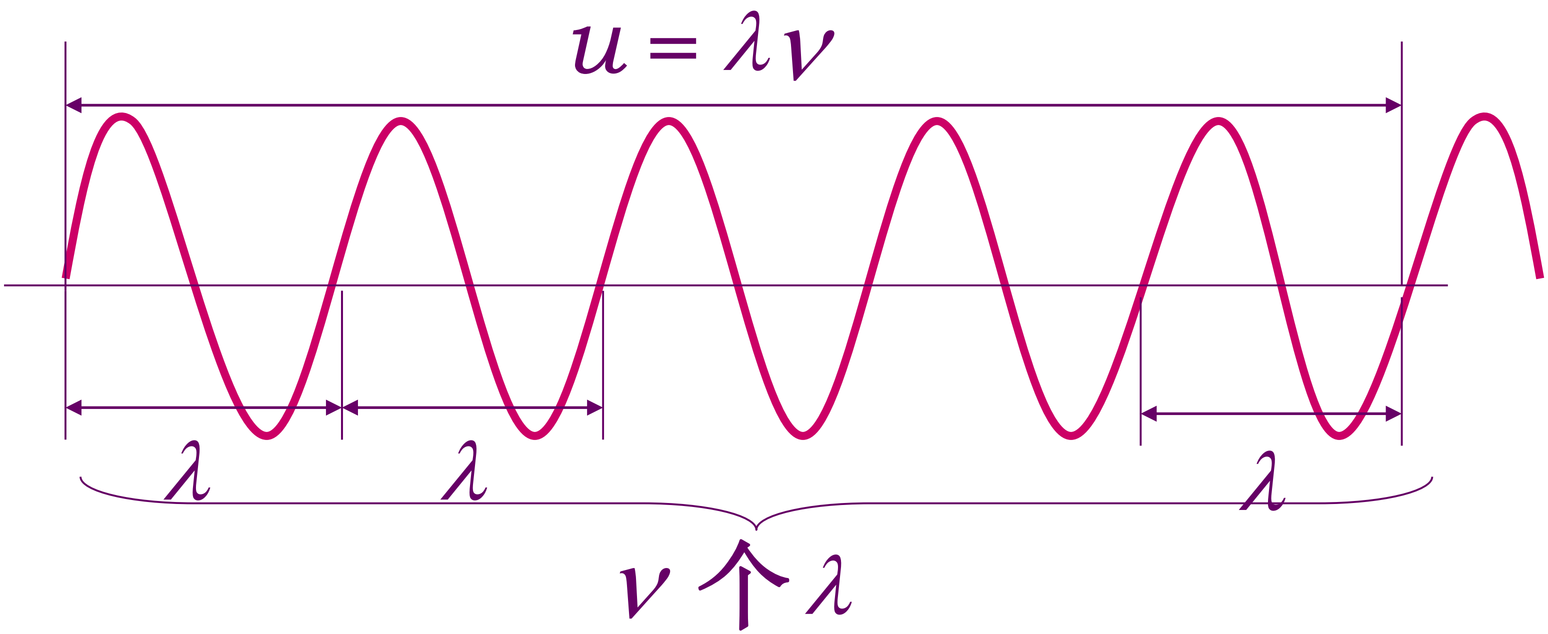


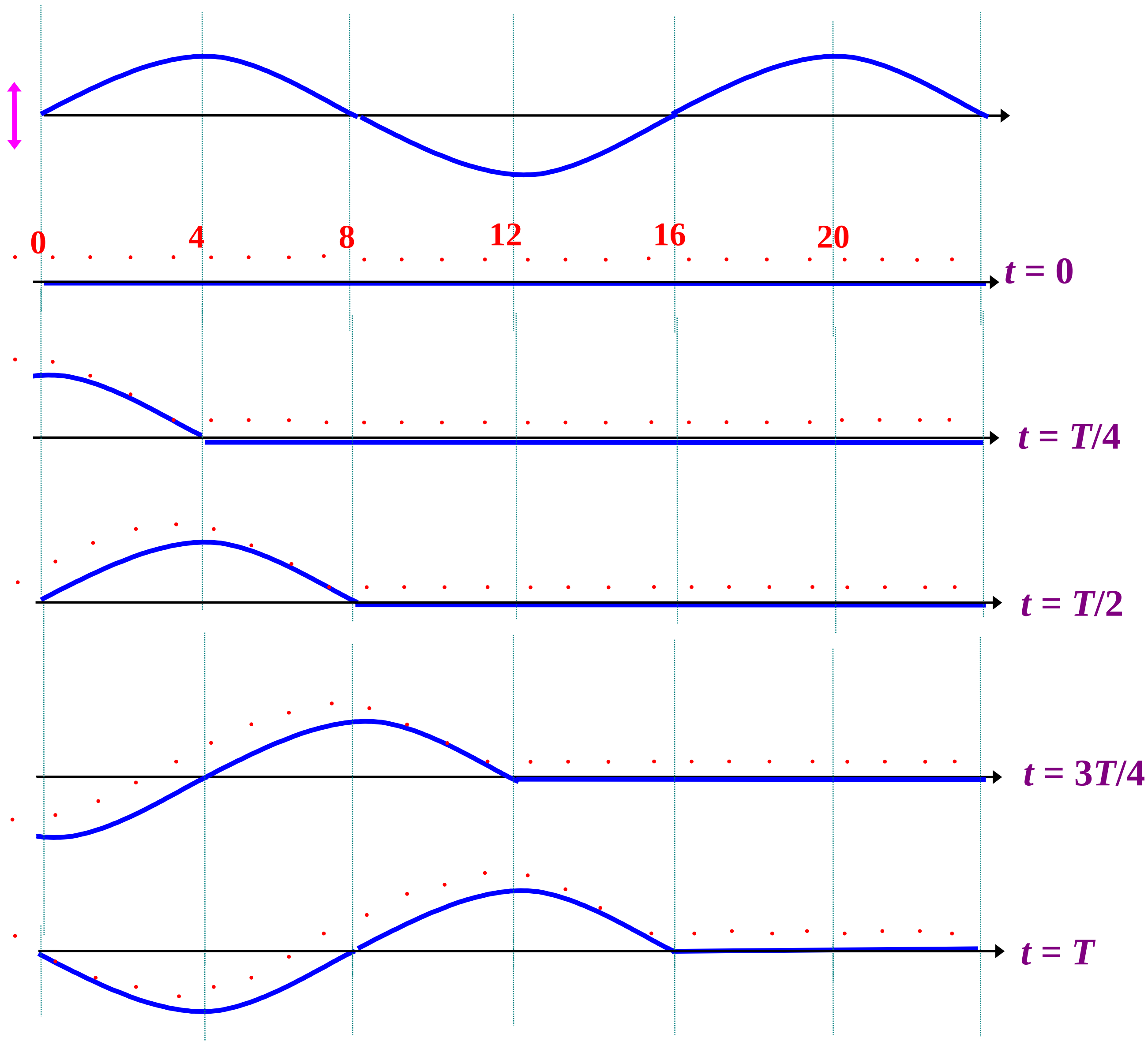
3、波的种类：

横波 (transversal wave) ——波的传播方向与质点的振动方向垂直

纵波 (longitudinal wave) ——波的传播方向与质点的振动方向平行

在液体和气体只能传播纵波





弹性绳上的横波

二、 波的周期性和波速

周期性： 时间上的周期性（振动周期）

空间上的周期性（波长）

波长 λ ——振动相位相同的两个相邻波阵面之间的距离。或振动在一个周期中传播的距离。

波的周期 T ——波传过一个波长的时间，或一个完整的波通过波线上某一点所需要的时间。

$$\nu = \frac{1}{T}$$

波动的频率=介质中质点的振动频率。

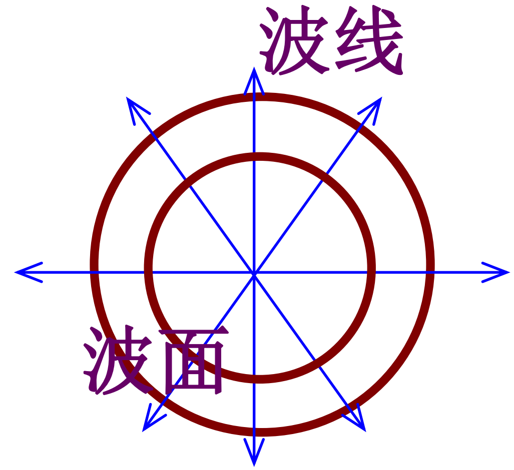
波速 u—单位时间某种一定的振动状态(或振动相位)所传播的距离，也称之相速 。

$$\Rightarrow \lambda = uT$$

$$u = \sqrt{\frac{弹性模量}{密度}} \left(= \sqrt{\frac{E}{\rho}} \right)$$

三、波的几何描述：

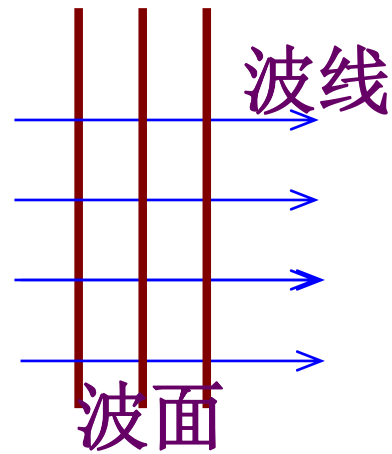
波线（波射线）—波的传播方向



波面（相面、波阵面）—某时刻介质内振动相位相同的点组成的面

波前—某时刻处在最前面的波面。

（球面波　　平面波）

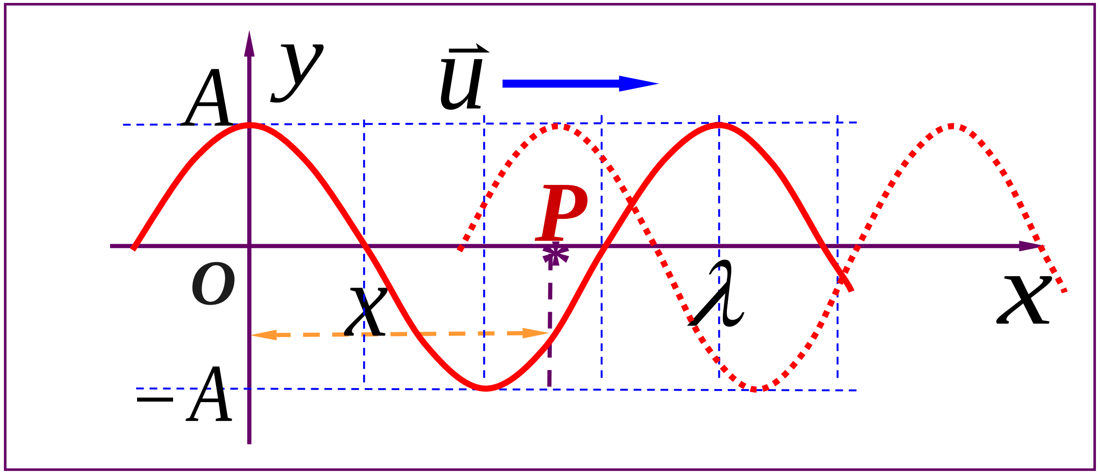


在各向同性均匀介质中，波线与波阵面垂直.

平面简谐波⇒一波线的情况代表整体

四、平面简谐波的表达式（波函数）

相位比较法



已知O点振动表达式：　$y = A\cos(\omega t+\varphi)$

O点运动传到 p点需用时间：　$\Delta t = \dfrac{x}{u}$

p点的运动方程：

$$y(x,t) = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

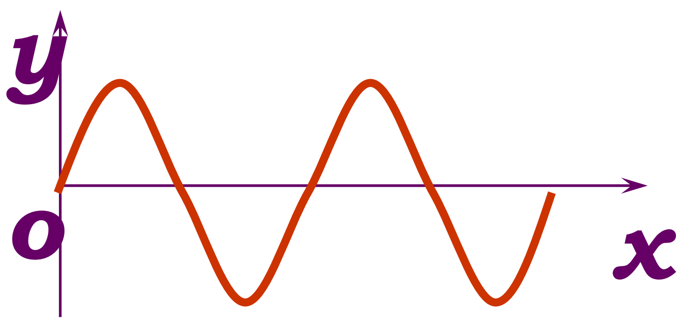
$$y(x,t) = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

波的表达式的物理含义：

1）当 $x=x_1$ 时 $$y(x,t) = A\cos[\omega(t\boxed{-\frac{x_1}{u})+\varphi]}$$

表示 x_1 处质点的振动方程

2）当 $t=t_1$ 时 $$y(x,t) = A\cos[\omega(t_1-\frac{x}{u})+\varphi]$$

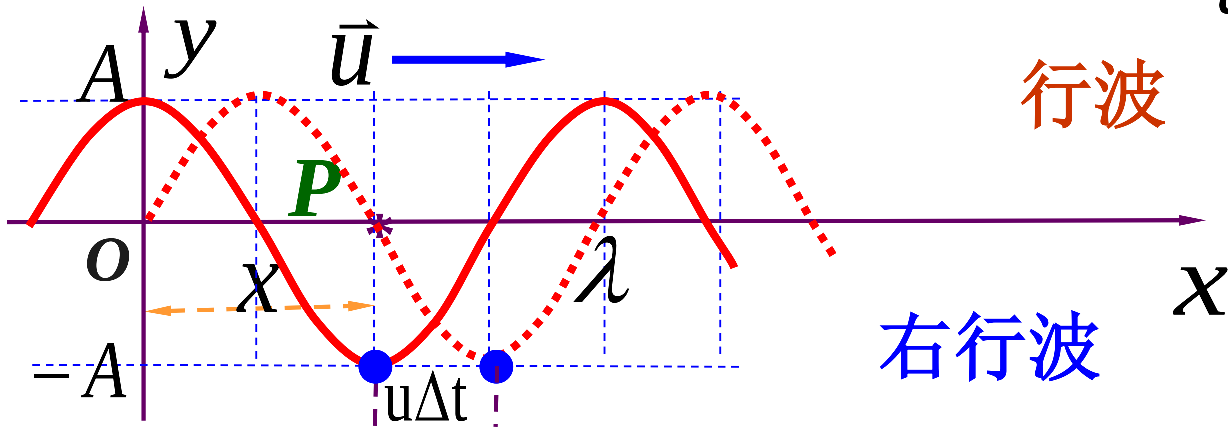


反映了 t_1 时刻各质元偏离平衡位置的情况。

3）t 与 *x* 都发生变化

$$t = t_1 \qquad y_1 = A\cos[\omega(t_1 - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

$$t' = t_1 + \Delta t \qquad y_{1+\Delta} = A\cos[\omega(t_1 + \Delta t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$



若 $y' = y_1 \Rightarrow \omega(t_1 - \frac{x}{u}) + \varphi = \omega(t_1 + \Delta t - \frac{x'}{u}) + \varphi$

$$\Rightarrow x' = x + u\Delta t$$

y_1的相位，向前传播了$u\Delta t$ 的距离

例1、一平面简谐波的波的表达式为

$$y = 0.25\cos(125t - 0.37x)(SI)$$

问（1）初相？ $\varphi = 0$

（2）圆频率？

（3）波速？ $\lambda = uT = u \times \frac{2\pi}{\omega}$

（4）波长？

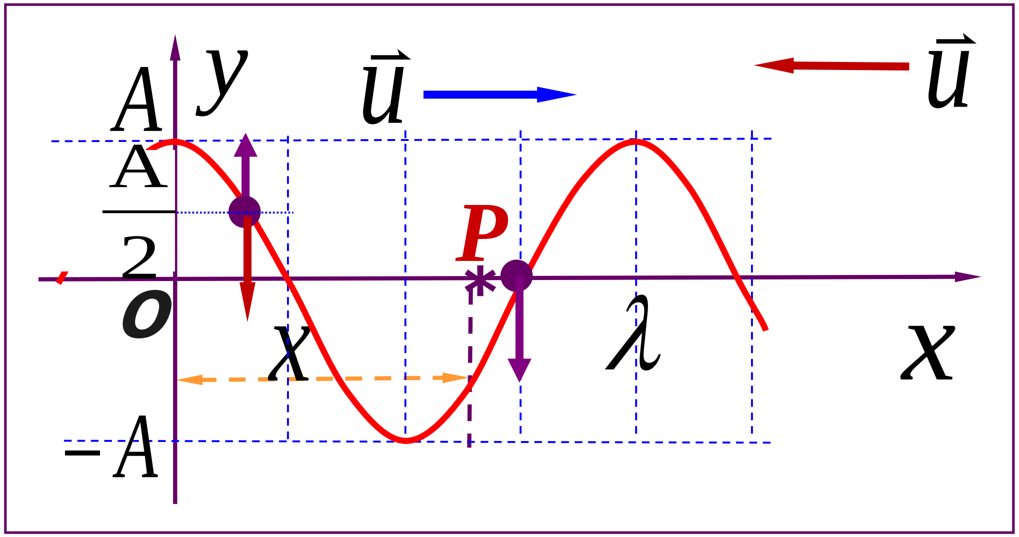
（5）相距为1m的两媒质的相位差？

解: $$y(x,t) = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

$$y = 0.25\cos \underbrace{125}_{\omega}(t - \frac{x}{\boxed{\frac{125}{0.37}}})$$

$$\Delta\varphi = (125t - 0.37x_2) - (125t - 0.37x_1) = -0.37(x_2 - x_1) < 0$$

$$y(x) = A\cos\left[\omega\left(t_1 - \frac{x}{u}\right) + \alpha\right]$$



$$\begin{cases} y = \frac{A}{2} \\ v < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{\pi}{3}$$

$t=t_1$的波形图

$$\begin{cases} y = \frac{A}{2} \\ v > 0 \end{cases} \Rightarrow \Phi = -\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ v < 0 \end{cases} \Rightarrow \Phi = \frac{\pi}{2}$$

例2下图为t=0时刻的波形图，已知T=2s, BC=20m，求:

1）波函数(或波的数学表达式）

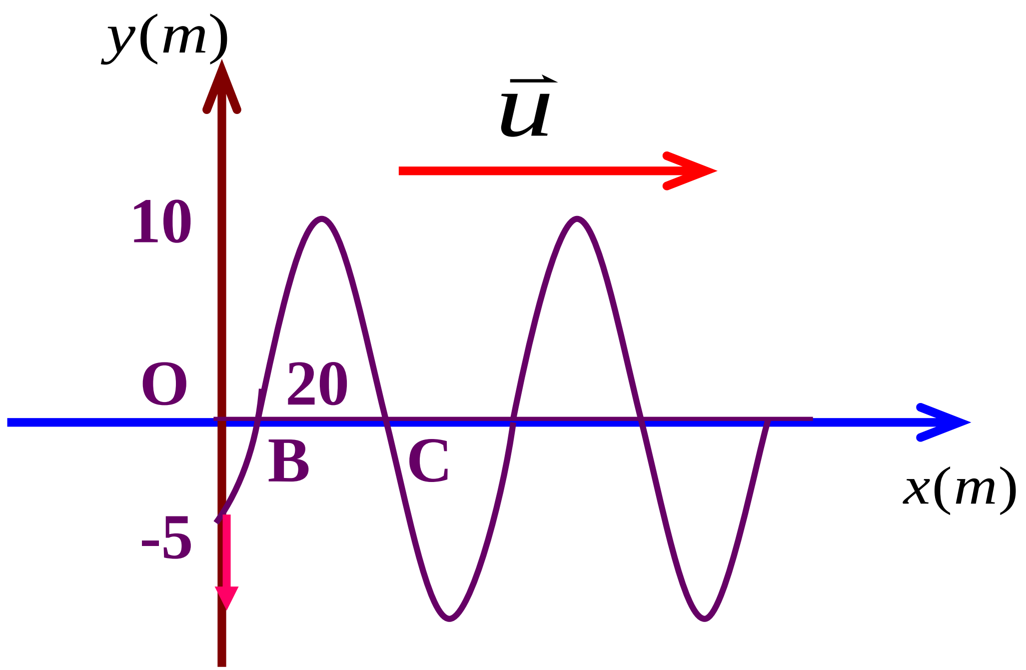
2）OB两点间的距离;

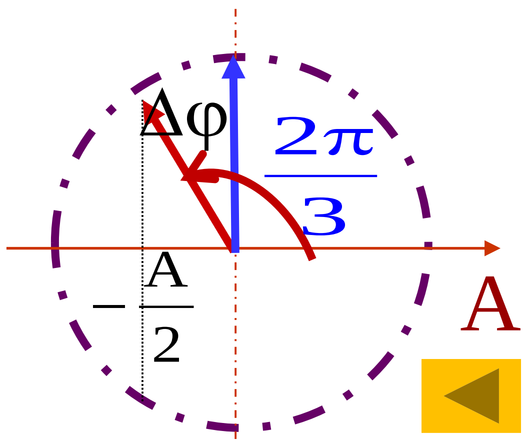
3）画出t=1时的波形图。

$$A = 10$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$\lambda = 2\overline{BC} = 40$$





解： **(1)** $$y_0 = 10\cos(\pi t + \frac{2}{3}\pi)$$

$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{40}{2} = 20$$

$$y = 10\cos\left[\pi(t - \frac{x}{20}) + \frac{2}{3}\pi\right](m)$$

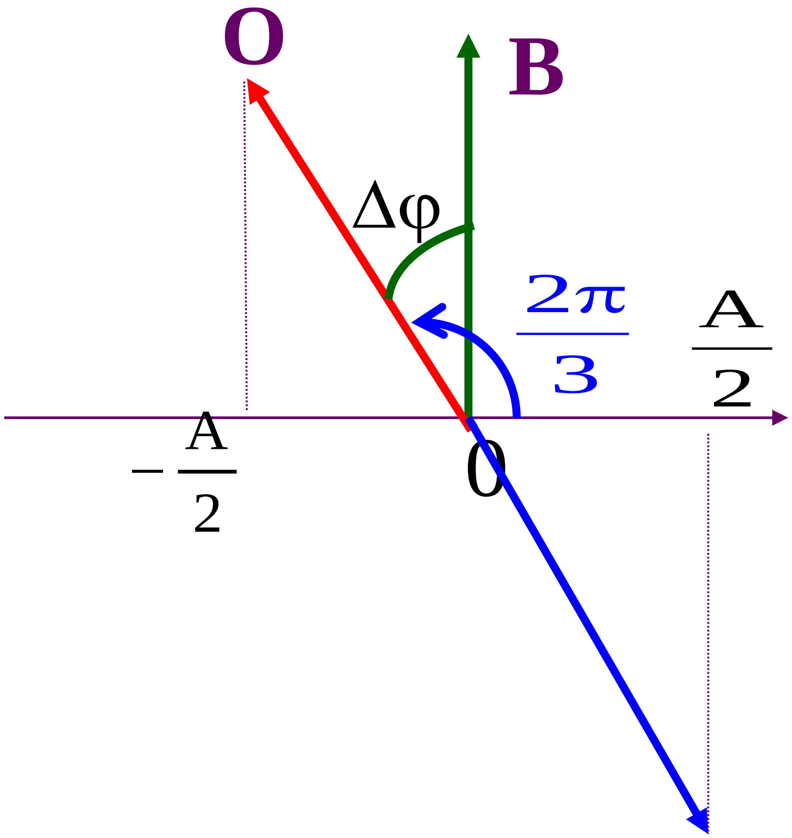
(2) $$\Delta\varphi = [\omega(t - \frac{x_2}{u}) + \varphi] - [\omega(t - \frac{x_1}{u}) + \varphi]$$

$$= -\omega\frac{x_2}{u} - (-\omega\frac{x_1}{u}) = -\frac{2\pi}{T}\frac{1}{u}(x_2 - x_1)$$

$$= -\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$$

(2) $\varphi_B = \dfrac{\pi}{2}$

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\Delta\varphi}{\overline{OB}} \Rightarrow \overline{OB} = \frac{1}{12}\lambda = \frac{10}{3}(m)$$



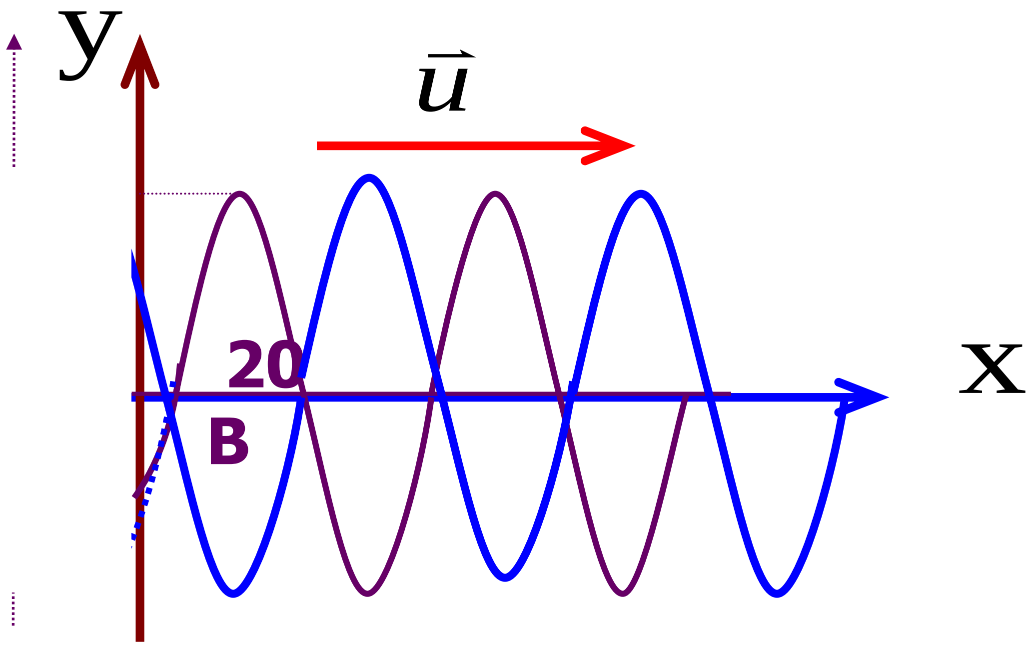
(3) $y_0 = 10\cos\left[\dfrac{2}{3}\pi - \dfrac{\pi x}{20}\right]$

$$y_1 = 10\cos\left[\frac{5}{3}\pi - \frac{\pi x}{20}\right]$$

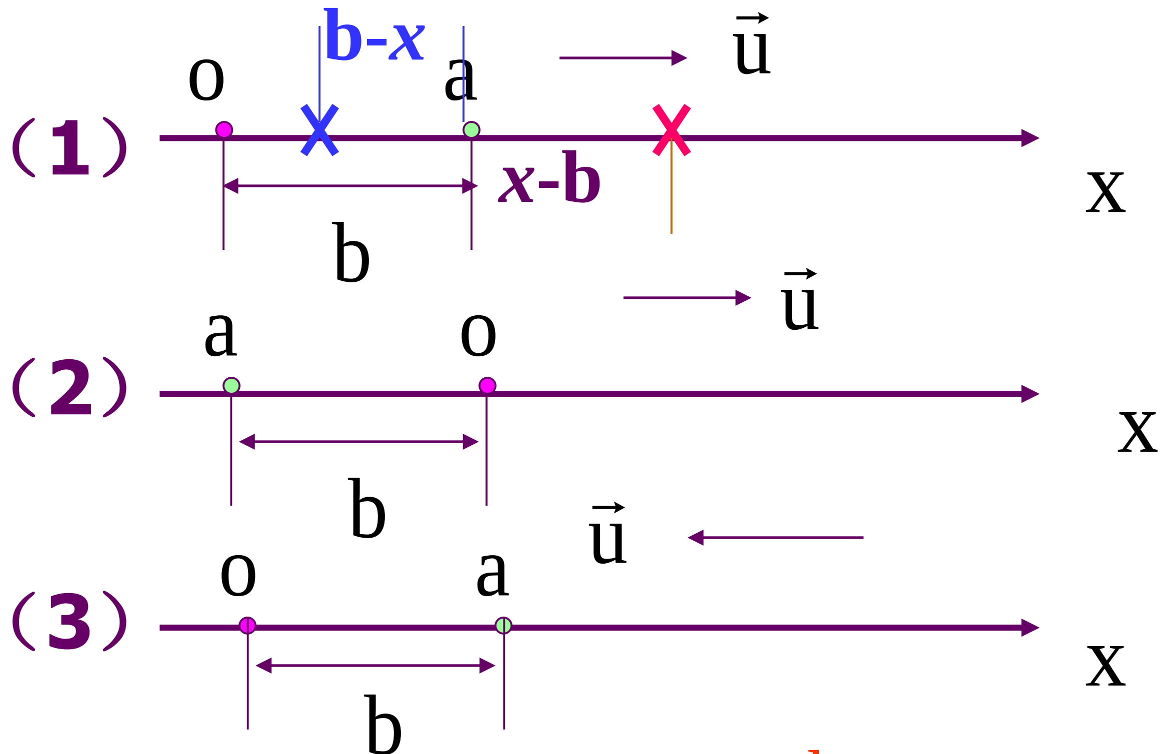
$$= 10\cos\left[\pi + \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi x}{20}\right]$$

$$y_0 = 10\cos\left[\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi x}{20}\right]$$

$$y_1 = 10\cos\left[\pi + \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi x}{20}\right]$$

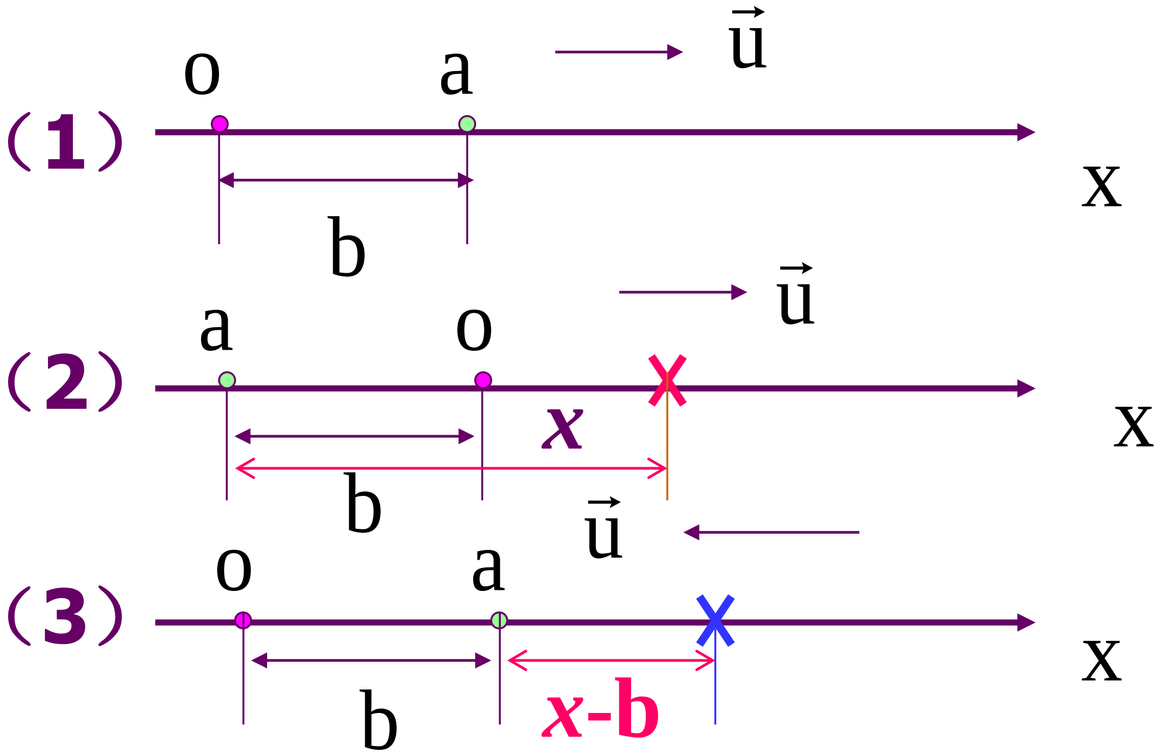


例3 已知 $y_a = A\cos[\omega t+\alpha]$ 则下列图中的波动方程如何？



$$y(x,t) = A\cos[\omega(t-\frac{x-b}{u})+\alpha]$$

$$y(x,t) = A\cos[\omega(t+\frac{b-x}{u})+\alpha]$$



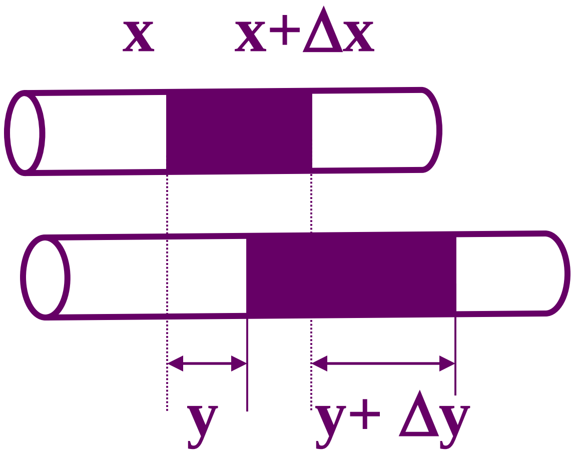
$$(2)\quad y(x,t) = A\cos[\omega(t-\frac{x+b}{u})+\alpha]$$

$$(3)\quad y(x,t) = A\cos[\omega(t+\frac{x-b}{u})+\alpha]$$

五、机械波的能量

1、机械波的能量

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})]$$



$$\frac{\Delta l}{l}\sim\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

质量为Δm 的媒质其势能为：

$$\frac{F}{S}=E\frac{\Delta y}{\Delta x}\Rightarrow F=\frac{ES}{\Delta x}\Delta y=k\Delta y$$

$$\boxed{E_p=\frac{1}{2}ky^2}$$

$$\Delta W_p=\frac{1}{2}k(\Delta y)^2=\frac{1}{2}\frac{ES}{\Delta x}(\Delta y)^2=\frac{1}{2}E\underbrace{\boxed{S\Delta x}}_{\Delta V}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\rho\Delta VA^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})]\quad(u=\sqrt{\frac{E}{\rho}})$$

质量为 Δm 的体元其动能为：

$$\Delta W_k = \frac{1}{2}\Delta m\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})]$$

体元的总机械能：

$$\Delta W = \Delta W_k + \Delta W_p = \rho\Delta V\omega^2 A^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})]$$

机械波的能量特点：

（1）任一时刻、任一质元　　$\Delta W_K = \Delta W_P$

（2）$\Delta W_{总} = \Delta W(t)$

$0 \rightarrow \Delta W_{max}$　　　$\Delta W_{max} \rightarrow 0$

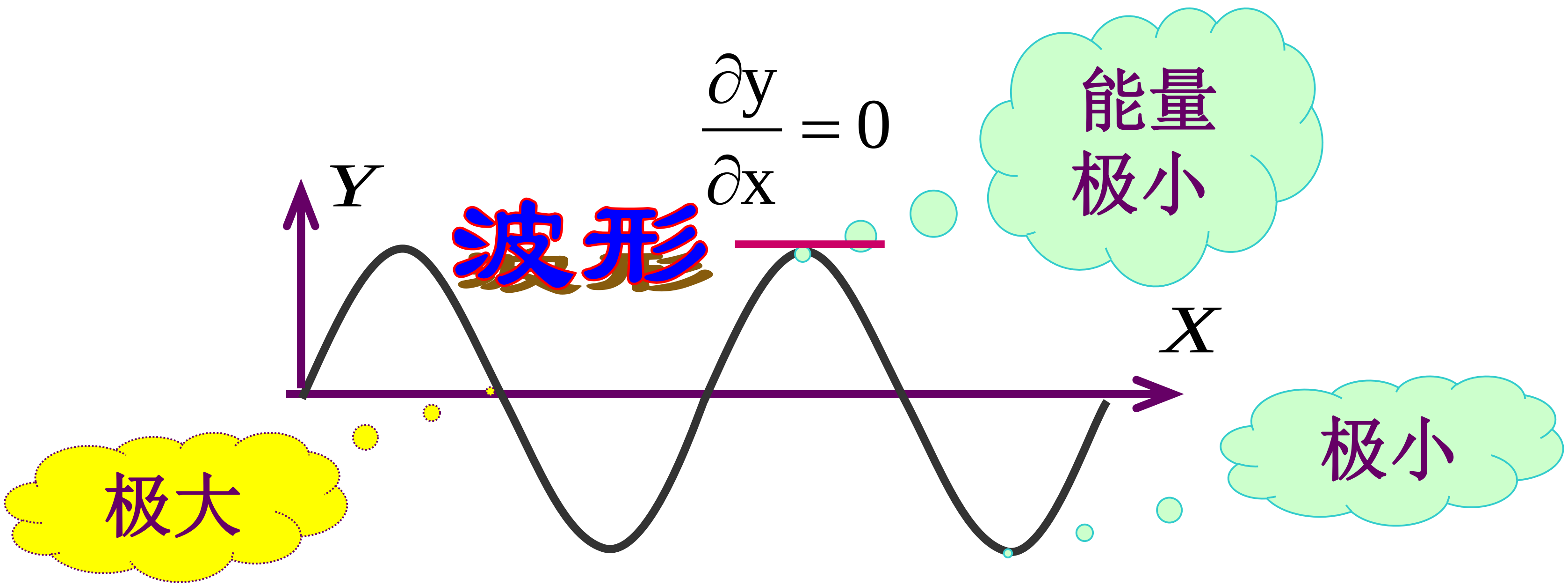
质元而言：机械能不守恒，波动是能量传递的一种方式

能量密度＝单位体积内的总机械能

$$\omega = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \rho\omega^2 A^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u})]$$

平均能量密度（对时间平均)

$$\overline{\omega} = \frac{1}{T}\int_0^T \rho A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u})]dt = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

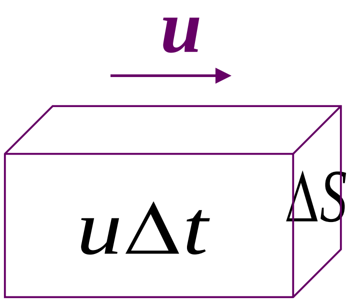


2、能流、 能流密度 (energy flux density)

能流：单位时间内垂直通过某一面积的能量

平均能流 $\overline{P}$ ——一个周期内能流的平均值。

若Δt 有ΔW的平均能量通过ΔS



$$\Delta W = u \cdot \Delta t \cdot \Delta S \cdot \overline{\omega}$$

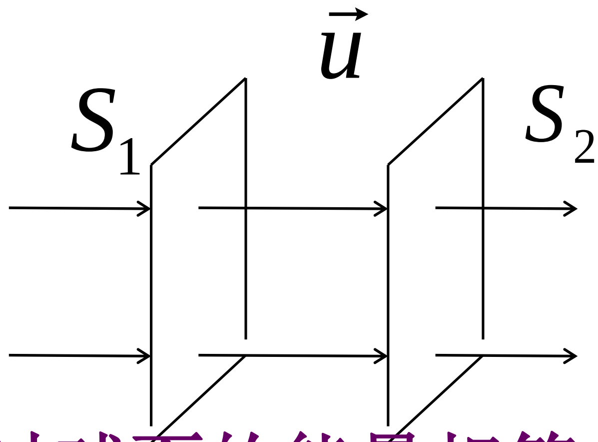
$$\overline{P} = u \cdot \Delta S \cdot \overline{\omega} = \mathrm{u}\Delta \mathrm{S}\frac{1}{2}\rho A^{2}\omega^{2}$$

量纲分析： $\mathrm{ms}^{-1}\mathrm{m}^{2}\mathrm{Jm}^{-3} = \mathrm{Js}^{-1}$

$\Rightarrow$ 平均能流=功率

(1)平面波 设 $S_1=S_2$，则单位时间内通过S的能量相等

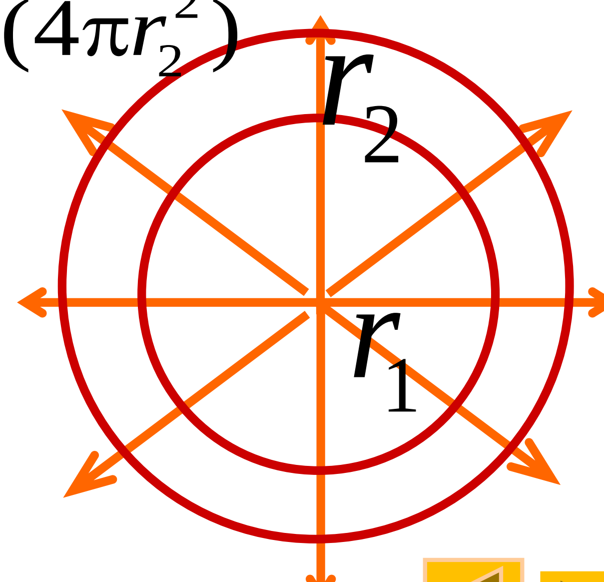
$$\frac{1}{2}\rho u\omega^2 A_1^2 S=\frac{1}{2}\rho u\omega^2 A_2^2 S$$



$$\Rightarrow A_1=A_2$$

(2)球面波 设 S_1、S_2，则单位时间内通过球面的能量相等

$$\frac{1}{2}\rho u\omega^2 A_1^2(4\pi r_1^2)=\frac{1}{2}\rho u\omega^2 A_2^2(4\pi r_2^2)$$



$$\therefore A_1 r_1=A_2 r_2$$

球面简谐波的波函数：

$$y=\frac{A}{r}\cos\omega(t-\frac{r}{u})$$

总结：

平面简谐波的能量密度：

$$\Delta\omega = \Delta\omega_k + \Delta\omega_p = \rho\omega^2 A^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})]$$

波的平均能量密度： $\overline{\omega} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$

平均能流（功率）： $\overline{P} = u \cdot \Delta S \cdot \overline{\omega}$

平均能流密度（波的强度）： $I = u\overline{\omega} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$

单位时间、通过单位面积的能量 （**W/m²**）