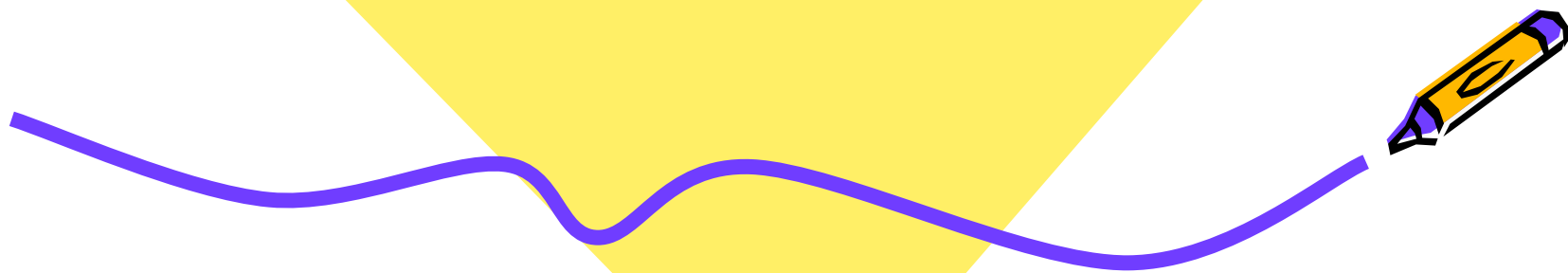




练习二十八



一 (1) 曲面 $xyz = 8$ 上平行于平面 $x + 2y + 4z + 3 = 0$ 的切平面方程是**D**

(A) $x + 2y + 4z = 17$

(B) $x + 2y + 4z = 14$

(C) $x + 2y + 4z = 21$

(D) $x + 2y + 4z = 12$



(2) 若曲线 $\begin{cases} xyz = 2 \\ x = y + z \end{cases}$ 上点 $(2,1,1)$ 处切向量与 oz 轴夹锐角，则此切向量与 oy 轴所夹的角为 (**B**)

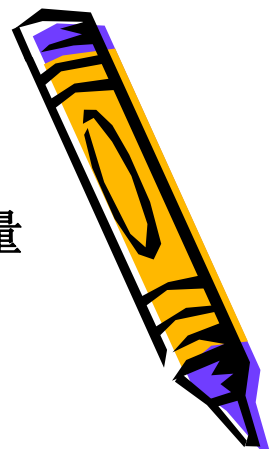
- (A) $\frac{\pi}{4}$; (B) $\frac{3\pi}{4}$; (C) $\frac{\pi}{3}$; (D) $\frac{2\pi}{3}$ 。

分析： 曲线在 $(2,1,1)$ 的一个切向量为

$$\vec{l} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ yz & xz & xy \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}_{(2,1,1)} = \{0, 3, -3\} = 3\{0, 1, -1\}$$

由于切向量与轴夹锐角，所以取 $\vec{l}_1 = \{0, -1, 1\}$

此向量与 y 轴夹角： $\cos \theta = \frac{\vec{l}_1 \cdot \vec{j}}{|\vec{l}_1|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \therefore \theta = \frac{3\pi}{4}$



(3) 函数 $z = 1 - x^2 - y^2$ 在点 $M_0(3, -4)$ 处沿函数过该点的等值线外法向

\vec{n} 的方向导数 $\frac{\partial z}{\partial \vec{n}} \Big|_{M_0} =$ (C)

(A) $-6\vec{i} + 8\vec{j}$; (B) $3\vec{i} - 4\vec{j}$; (C) -10 ; (D) 10 。

分析： 由于 $z_x = -2x, z_y = -2y$ $\nabla f(M_0) = \{-6, 8\}$

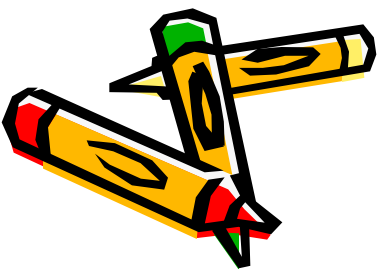
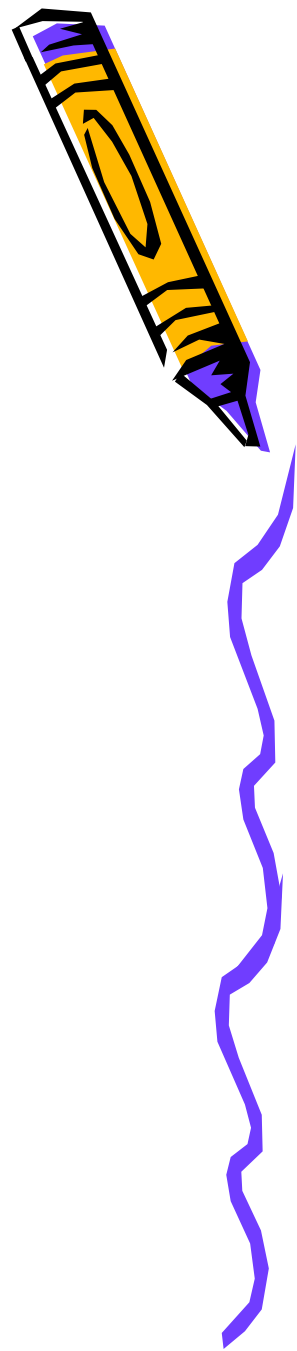
所以 $\vec{n} = -\{-6, 8\}$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{n}} \Big|_{M_0} = \nabla f(M_0) \cdot \vec{n}^0 = \{-6, 8\} \cdot \left\{ \frac{6}{10}, -\frac{8}{10} \right\} = -10 \quad \text{选(C)}$$



一、(4) 椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ 在点 $P_0 = (-1, -1, 1)$ 处的切平面与平面 $x + y + z = 1$ 夹角为 (D)

(A) 0 ; (B) $\frac{\pi}{4}$; (C) $\frac{\pi}{3}$; (D) $\frac{\pi}{2}$



二. 填空题:



(1) 空间曲线 $x = f(y), y = g(z)$ 上对应于 $z = z_0$ 点的切线方程是_____.

分析: $x = f[g(z)], y = g(z), z = z.$

切向量 $\vec{s} = \{f'[g(z_0)] \cdot g'(z_0), g'(z_0), 1\}$

切线方程

$$\frac{x - f[g(z_0)]}{f'[g(z_0)] \cdot g'(z_0)} = \frac{y - g(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{z - z_0}{1}$$



(2) 曲面 $z = x^2 + y^2$ 上垂直于直线 $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2z = 2 \end{cases}$ 的切平面方程是 $2x + 2y - z - 2 = 0$ 。

分析：曲面上任意点处法向量为 $\vec{n} = \{2x, 2y, -1\}$

已知直线的方向向量为 $\vec{l} = \{1, 0, 2\} \times \{0, 1, 2\} = \{-2, -2, 1\}$

由于 \vec{l} 平行于 \vec{n}

所以, $\frac{2x}{-2} = \frac{2y}{-2} = -1$ 切点为 $(1, 1, 2)$

切平面为 $2(x - 1) + 2(y - 1) - (z - 2) = 0$

即 $2x + 2y - z - 2 = 0$



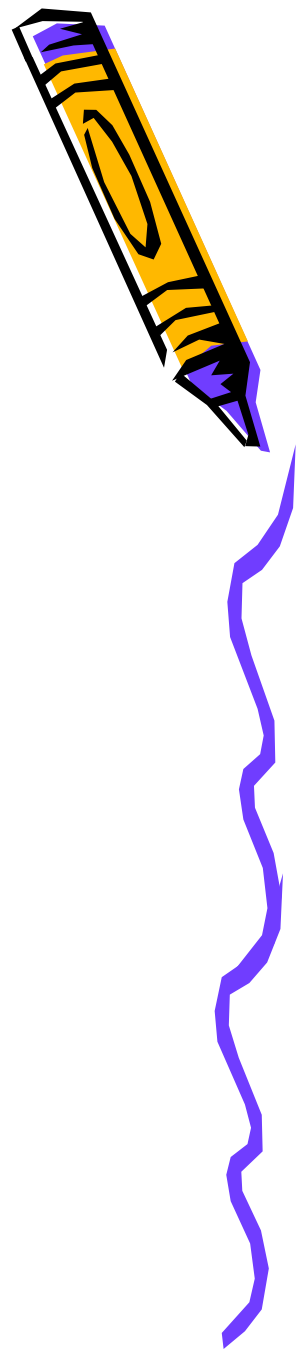
二、(3) 曲线 $\vec{r} = \{1, t, t^2\}$ 上在
 $M_0 = (1, 2, 4)$ 点处的法平面方程是

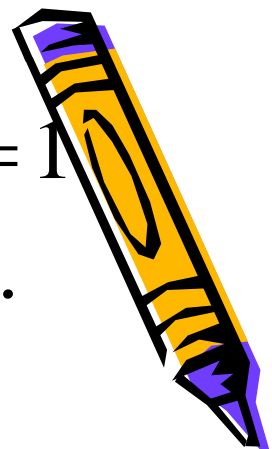
$$y + 4z - 18 = 0$$

二、(4) 曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 24$

上平行于平面 $3x - y - 2z = 0$

的切平面方程是 $3x - y - 2z = \pm 12$





三. 求平面 $y + z = x - 1$ 与曲面 $x^3 - y^2 - z^3 = 1$ 的交线上点 $M_0 = (1, 1, -1)$ 处的切线方程.

解法1: $\begin{cases} y + z = x - 1 \\ x^3 - y^2 - z^3 = 1 \end{cases}$ 两边对 x 求导得

$$\begin{cases} y_x + z_x = 1 \\ 3x^2 - 2yy_x - 3z^2z_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_x = 0 \\ z_x = 1 \end{cases}$$

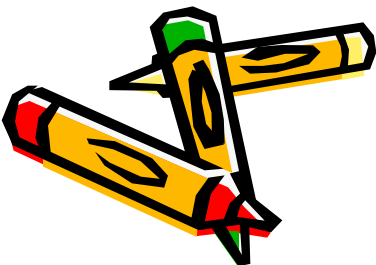
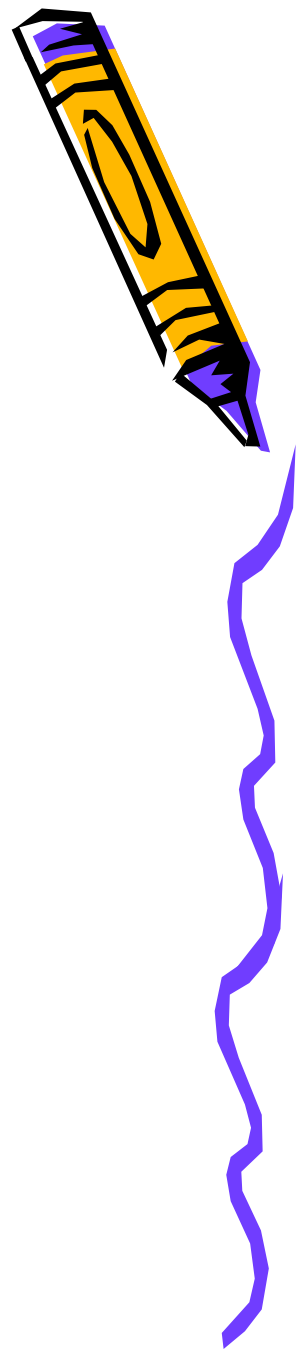
$$\Rightarrow \text{切向量 } \vec{l} = \{1, 0, 1\}$$

切线方程为 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{1}$



解法2: 设
$$\begin{cases} F(x, y, z) = y + z - x + 1 = 0 \\ G(x, y, z) = x^3 - y^2 - z^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

取切向量 $\vec{l} = \nabla F \times \nabla G$





四. 求原点到椭球面 $x^2 + y^2 + 2z^2 = 31$ 上
 $M_0 = (3, 2, 3)$ 点处切平面的距离。

解：切平面法向量

$$\vec{n} = \{2x, 2y, 4z\} \Big|_{M_0} = \{6, 4, 12\} // \{3, 2, 6\}$$

切平面方程为 $3(x-3) + 2(y-2) + 6(z-3) = 0$

即 $3x + 2y + 6z - 31 = 0$

所以 $d = \frac{|-31|}{\sqrt{9+4+36}} = \frac{31}{7}$



五. 求函数 $u = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 在点 $M_0 = (1, 2, -2)$ 处沿向量

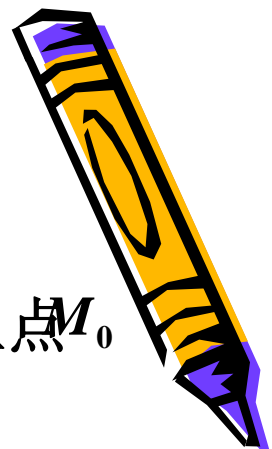
$\vec{\tau}$ 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial \tau} \Big|_{M_0}$, 其中 $\vec{\tau}$ 为曲线 $\vec{r} = \{t, 2t^2, -2t^4\}$ 上点 M_0 处与 z 轴夹锐角的切向量.

解:
$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} = - \frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{M_0} = -\frac{2}{27}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} = \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{M_0} = \frac{5}{27}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_0} = - \frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{M_0} = \frac{4}{27}$$

$$\therefore \nabla u \Big|_{M_0} = \left\{ -\frac{2}{27}, \frac{5}{27}, \frac{4}{27} \right\}$$



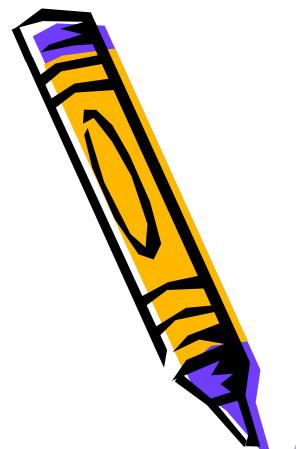
$\therefore M_0(1,2,-2)$ 对应于参数 $t=1$

\therefore 在 M_0 处切线方向为 $\{1, 4t, -8t^3\}_{t=1} = \{1, 4, -8\}$

由于 $\vec{\tau}$ 与 $\vec{k} = \{0, 0, 1\}$ 成锐角, 所以, $\vec{\tau} \cdot \vec{k} > 0$

应取 $\vec{\tau} = \{-1, -4, 8\}$ $\vec{\tau}^0 = \{-\frac{1}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{8}{9}\}$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{\tau}} \right|_{M_0} = \left\{ -\frac{2}{27}, \frac{5}{27}, \frac{4}{27} \right\} \cdot \left\{ -\frac{1}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{8}{9} \right\} = \frac{14}{243}$$



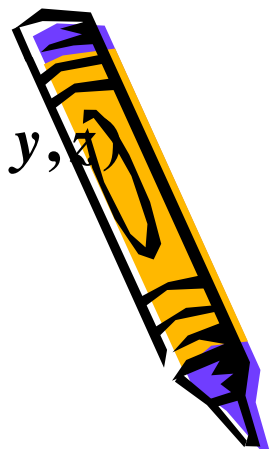
六. 证明曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ($a > 0$) 上任一点 $P = (x, y, z)$ ($xyz \neq 0$) 处切平面在三坐标轴上截距之和为定值.

解: 令 $F(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a}$

$$F_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad F_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad F_z = \frac{1}{2\sqrt{z}},$$

在任一点处法向量为 $\vec{n} = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \frac{1}{2\sqrt{y_0}}, \frac{1}{2\sqrt{z_0}} \right\}$

切平面: $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0$





与三个坐标轴的截距为 $x = \sqrt{x_0}(\sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) + x_0$

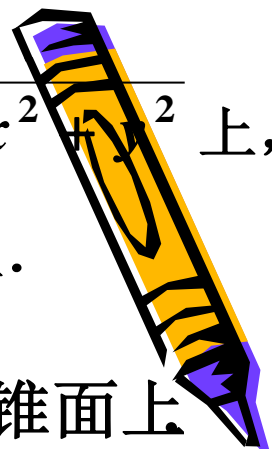
$$y = \sqrt{y_0}(\sqrt{x_0} + \sqrt{z_0}) + y_0 \quad z = \sqrt{z_0}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0}) + z_0$$

$$x + y + z = 2\sqrt{x_0 y_0} + 2\sqrt{y_0 z_0} + 2\sqrt{x_0 z_0} + x_0 + y_0 + z_0$$

$$= (\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0})^2 = a$$



七. 试证曲线 $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ 在锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 上, 且曲线上任一点处的切线与锥面上过该点的母线夹角为定值.



证明: 由于 $x^2 + y^2 = e^{2t} = z^2$, $z = e^t > 0$ 所以曲线在锥面上

连接点 $(e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ 与锥面顶点 O 的锥面母线方程为

$$\frac{X}{e^t \cos t} = \frac{Y}{e^t \sin t} = \frac{Z}{e^t}$$

而曲线的切线方向向量为:

$$\vec{\tau} = \{e^t (\cos t - \sin t), e^t (\sin t + \cos t), e^t\}$$

该向量与母线方向向量 $\vec{OM} = \{e^t \cos t, e^t \sin t, e^t\}$ 夹角余弦:

$$\cos \theta = \frac{\vec{OM} \cdot \vec{\tau}}{|\vec{OM}| |\vec{\tau}|} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

故结论成立。



八. 证明曲面 $z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 上任一点 $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ($x_0^2 + y_0^2 \neq 0$) 处

的法线都垂直于直线 $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$.

证明: $z_x = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$ $z_y = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$

所以法向量为 $\vec{n} = \left\{ \frac{y_0^3}{(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{x_0^3}{(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}}, -1 \right\}$

直线的方向向量 $\vec{l} = \{x_0, y_0, z_0\}$ $z_0 = \frac{x_0 y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$

于是 $\vec{n} \cdot \vec{l} = \frac{x_0 y_0^3}{(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x_0^3 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x_0 y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$

$= \frac{x_0 y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} - \frac{x_0 y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = 0 \quad \therefore \vec{n} \perp \vec{l}$



九. 设函数 $F(x, y, z)$ 有一阶连续偏导数, 且 $\nabla F \neq 0$, 对任意实数 x, y, z 和 t 有 $F(tx, ty, tz) = t^k F(x, y, z)$ (k 是正整数), 证明曲面 $F(x, y, z) = 0$ 上任一点处的切平面都通过一个定点.

证明: $F(tx, ty, tz) = t^k F(x, y, z)$ 两端对 t 求导:

$$xF_x + yF_y + zF_z = kt^{k-1}F(x, y, z)$$

$$\text{令 } t = 1, \text{ 则 } xF_x + yF_y + zF_z = kF$$

曲面 $F(x, y, z) = 0$ 上任意点 (x, y, z) 处切平面的法向量

$$\vec{n} = \{F_x, F_y, F_z\}$$



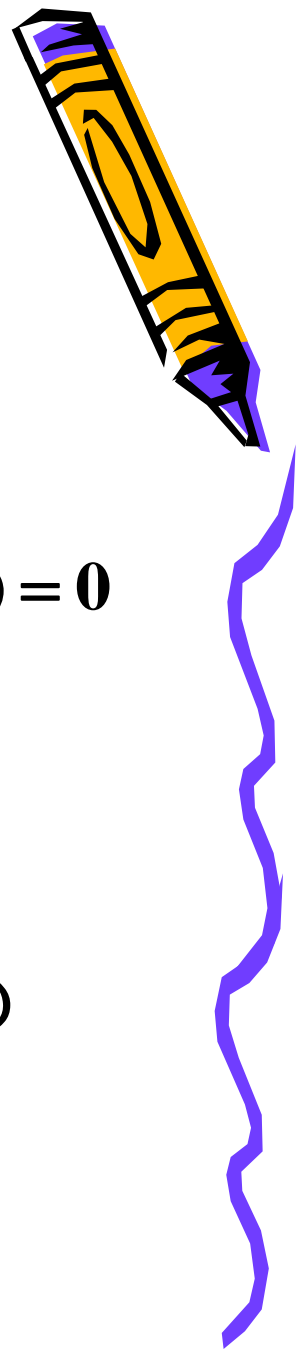
切平面方程为：

$$F_x(X-x) + F_y(Y-y) + F_z(Z-z) = 0$$

$$\text{即 } XF_x + YF_y + ZF_z = xF_x + yF_y + zF_z = kF(x,y,z) = 0$$

当 $(X,Y,Z) = (0,0,0)$ 时，满足上方程

所以，任意一点处的切平面都过定点 $(0,0,0)$



+

在函数 $u = xyz$ 的等值面族中求一个曲面,
使它和平面 $3x + 6y + 2z = 18$ 相切.

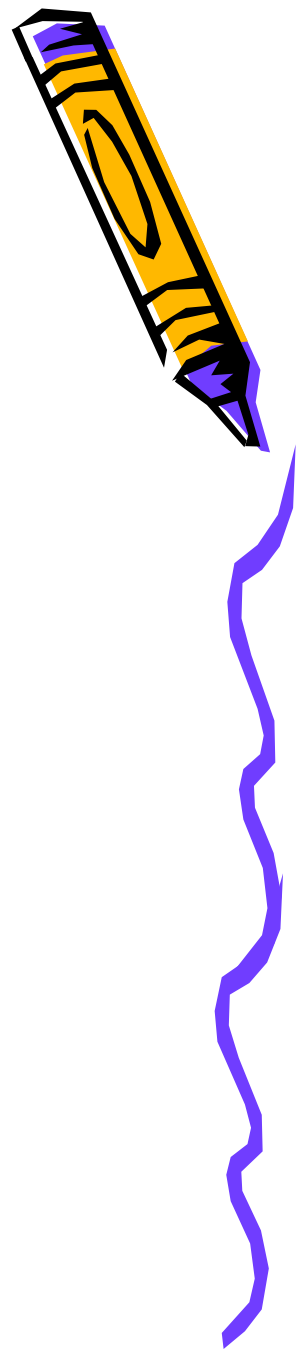
解: $\nabla u = \{yz, xz, xy\} // \{3, 6, 2\}$

有 $\frac{yz}{3} = \frac{xz}{6} = \frac{xy}{2}$ 于是 $x = 2y, z = 3y$

代入 $3x + 6y + 2z = 18$

解得 $x = 2, y = 1, z = 3$ 此为切点坐标

因此所求曲面为 $xyz = 6$



十一

过直线 $L: \begin{cases} x + y = b \\ x + ay - z = 3 \end{cases}$ 作曲面 $z = x^2 + y^2$ 的切平面 π ,

已知切点坐标是 $P = (1, -2, 5)$, 求 a, b 之值.

解: 曲面 $z = x^2 + y^2$ 的切平面 π 为

$$2(x-1) - 4(y+2) - (z-5) = 0$$

$$\text{即 } 2x - 4y - z - 5 = 0$$



由直线 L 的方程可以得到

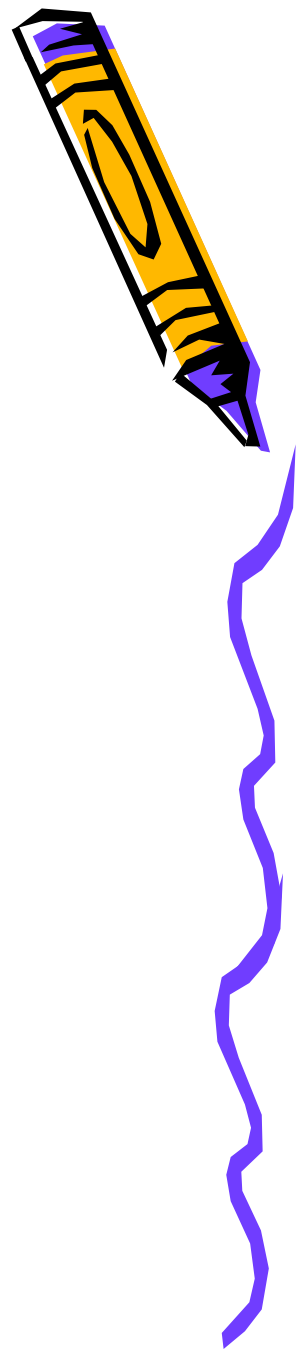
$$x = b - y$$

$$\text{及 } z = x + ay - 3 = b - y + ay - 3$$

$$\text{代入 } \pi \quad \text{有 } (-5 - a)y + (b - 2) = 0$$

$$\text{得 } -5 - a = 0 \text{ 且 } b - 2 = 0$$

$$\therefore a = -5, \quad b = 2$$



十二. 在曲线 $x = t + 1, y = t^2, z = t^3 - 1$ 上求:

(1) 与 x 轴平行的切线;

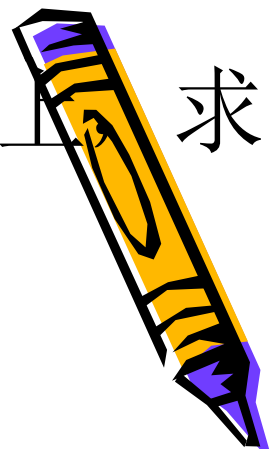
(2) 与 x 轴垂直的切线

解: 切向量 $\vec{l} = \{1, 2t, 3t^2\}$

$$(1) \quad \vec{l} = \{1, 2t, 3t^2\} // i = \{1, 0, 0\}$$

$$\Rightarrow t = 0 \quad \text{所以切点为 } (1, 0, -1)$$

切线方程为
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{0}$$

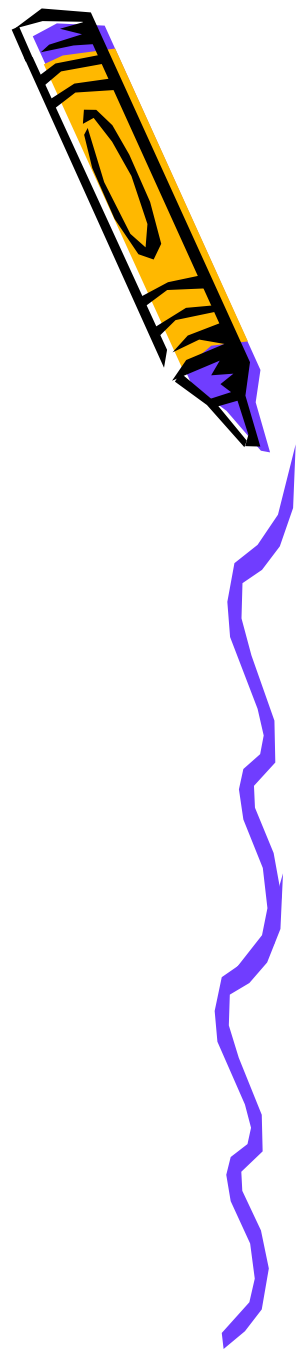


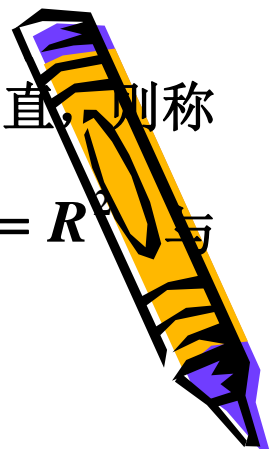
$$(2) \quad \vec{l} = \{1, 2t, 3t^2\} \perp i = \{1, 0, 0\}$$

$$\Rightarrow \{1, 2t, 3t^2\} \cdot \{1, 0, 0\} = 0$$

但这样的 t 不存在

所以这样的切线不存在





十三. 若两个曲面 Σ_1 和 Σ_2 在它们交线上任一点处的法向量都相互垂直, 则称这两个曲面正交。证明曲面 $\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与 $\Sigma_2: ayz + bzx + cxy = 0$ 正交 (其中常数 a, b, c, R 均为正数)。

证明: 设 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$


$$G(x, y, z) = ayz + bzx + cxy$$

则曲面 Σ_1 上任意点处的法向量为

$$\vec{n}_1 = \{F_x, F_y, F_z\} = \{2x, 2y, 2z\}$$

则曲面 Σ_2 上任意点处的法向量为

$$\vec{n}_2 = \{G_x, G_y, G_z\} = \{bz + cy, az + cx, ay + bx\}$$


$$\begin{aligned}\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= 2(bxz + cxy + ayz + cxy + ayz + bxz) \\ &= 4(ayz + bzx + cxy) = 0 \quad \therefore \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \quad \text{即两曲面正交.}\end{aligned}$$

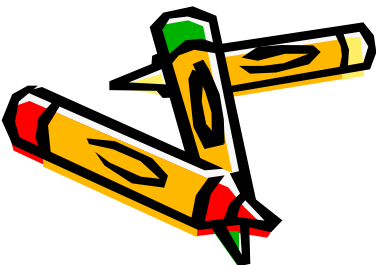
十四. 求曲线 $L: \begin{cases} x + y + z = 0, \\ xy + yz + zx = -3 \end{cases}$ 上的点P,

使L在点P处的切线平行于平面

$$x + y - z = 0$$

解: 曲线方程两边对 x 求导, $y = y(x)$, $z = z(x)$ 可得

$$\begin{cases} 1 + y_x + z_x = 0 \\ y + xy_x + zy_x + yz_x + xz_x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_x = \frac{x - z}{z - y} \\ z_x = \frac{y - x}{z - y} \end{cases}$$

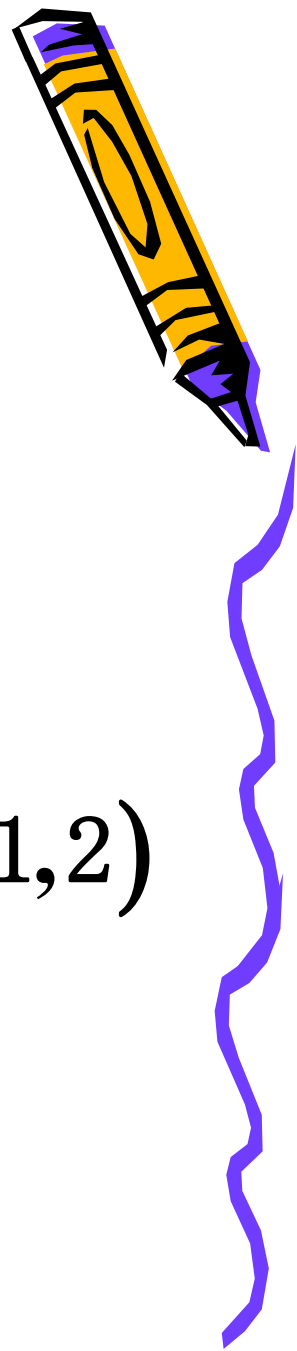


$$\Rightarrow \text{切向量 } \vec{l} = \left\{ 1, \frac{x-z}{z-y}, \frac{y-x}{z-y} \right\}$$

$$\text{由 } \vec{l} \perp \vec{n} = \{1, 1, -1\}$$

$$\text{得 } \vec{l} \cdot \vec{n} = 0$$

所以P点坐标为 $P_1(1, 1, -2), P_2(-1, -1, 2)$





十五. 求曲面 $xyz = 1$ 上任一点 (α, β, γ)

处的法线方程和切平面方程，证明切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积是常数.

$$\vec{n} = \{F_x, F_y, F_z\} \Big|_{(\alpha, \beta, \gamma)} = \{\beta\gamma, \alpha\gamma, \alpha\beta\}$$

$$\text{法线方程为 } \frac{x-\alpha}{\beta\gamma} = \frac{y-\beta}{\alpha\gamma} = \frac{z-\gamma}{\alpha\beta}$$

$$\text{切平面方程为 } \beta\gamma(x-\alpha) + \alpha\gamma(y-\beta) + \alpha\beta(z-\gamma) = 0$$

$$\text{即 } \frac{x}{3\alpha} + \frac{y}{3\beta} + \frac{z}{3\gamma} = 1$$

$$\text{所以 } V = \frac{1}{6} |3\alpha \cdot 3\beta \cdot 3\gamma| = \frac{9}{2} \quad (\alpha\beta\gamma = 1)$$



十六. 求曲线 $x = t, y = -t^2, z = t^3$
上与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行的切线方程.

解: 切向量 $\vec{l} = \{1, -2t, 3t^2\}$

$$\{1, -2t, 3t^2\} \cdot \{1, 2, 1\} = 0 \Rightarrow t = 1, \frac{1}{3}$$

所以切点为 $M_1(1, -1, 1), M_2(\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27})$

对应的切向量为

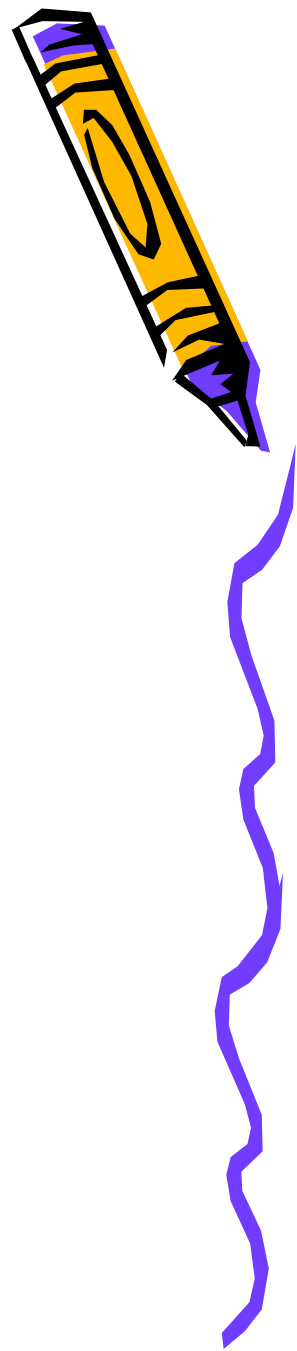
$$\vec{l}_1 = \{1, -2, 3\}, \quad \vec{l}_2 = \left\{1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\} // \{3, -2, 1\}$$



切线方程为

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}$$

$$L_2: \frac{x-\frac{1}{3}}{3} = \frac{y+\frac{1}{9}}{-2} = \frac{z-\frac{1}{27}}{1}$$



十七 求螺旋面
$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v (u \geq 0, v \in R) \\ z = v \end{cases}$$

在点(1,0,0)处的切平面与法线方程.

解1: $\frac{y}{x} = \tan v \quad y = x \tan z$

$$F(x, y, z) = y - x \tan z$$

$$F_x = -\tan z, \quad F_y = 1, \quad F_z = -x \sec^2 z$$

$$\vec{n} = \{0, 1, -1\}$$

切平面 $y - z = 0$

法线 $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$



解2 切点 $(1,0,0)$, $z_x = v_x$, $z_y = v_y$

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \end{cases} \text{两边对 } x \text{ 求偏导} \quad \begin{cases} 1 = u_x \cos v - u \sin v \cdot v_x \\ 0 = u_x \sin v + u \cos v \cdot v_x \end{cases}$$

代入 $u=1$, $v=0$ 解得 $v_x = 0$

同理可得 $v_y = 1$

$$\therefore \bar{n} = \{0, 1, -1\}$$

切平面方程: $y - z = 0$

$$\text{法线方程: } \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$

