微分几何的研究内容：$\boxed{\text{微分流形}}$的几何性质

$\boxed{\text{光滑曲线、曲面的一般化}}$

微分几何的主要工具：流形上的微积分

微分几何的重要性：

广义相对论的基础、力学、工程技术

不学好几何，很难在数学相关领域走得太远

—— 高斯

古典微分几何的奠基人: Euler, Monge, Gauss

1736年, 瑞士数学家**Euler**引入了平面曲线的内蕴坐标, 即以曲线弧长作为参数来表示曲线上的点的坐标, 开始了曲线的内蕴几何学;

1807年, 法国数学家**Monge**(蒙日)出版了《分析在几何学上的应用》, 把微积分应用到曲线和曲面的研究之中;

1827年, 德国数学家**Gauss**发表了《关于曲面的一般研究》, 奠定了现代形式曲面论的基础, 建立了曲面的内蕴几何学.

近代微分几何的创始人：Riemann

1854年，**Riemann**创立的黎曼几何学, 成为近代微分几何的主要内容, 并在广义相对论中起了重要作用。

近代微分几何的杰出贡献者: Cartan, 陈省身

Cartan(嘉当)于**20**世纪二三十年代开创并发展了外微分形式与活动标架法，建立起李群与微分几何之间的联系；

陈省身开创并发展了整体微分几何、纤维丛微分几何、陈省身示性类等领域，被誉为微分几何之父，获得**Wolf**(沃尔夫)奖.

微分几何的局部理论与整体理论

局部微分几何研究三维欧氏空间中曲线和曲面在一点附近的性质，其中的一个主要问题是寻求几何不变量，并确定这些不变量能在多大程度上刻划曲线和曲面；

整体微分几何以局部性质为基础来研究图形的整体性质.

本课程的主要内容

三维欧氏空间中曲线和曲面的局部理论

题西林壁

——苏轼

横看成岭侧成峰，

远近高低各不同；

不识庐山真面目，

只缘身在此山中。

课堂要求

- 不迟到、不早退、不缺课、不得自由出入教室;
- 不打电话、不玩手机、不睡觉;
- 勤记笔记;
- 认真听讲、积极思考。

课后要求

- 及时复习，适当预习;
- 及时独立地完成作业;
- 不抄袭作业、也不要借作业给他人抄袭;
- 周三上课前交作业。

§0 向量复习

一、向量(矢量)

二、点积(内积)

三、三维向量的叉积(外积、向量积)

（Lagrange恒等式、双重叉积公式）

四、三维向量的混合积

五、垂直，平行，共面的条件

第一章　曲线论

- 向量函数
- 曲线的概念
- 空间曲线

§1.1 向量函数

一、向量函数的极限

二、向量函数的连续性

三、向量函数的微商

四、向量函数的Taylor公式

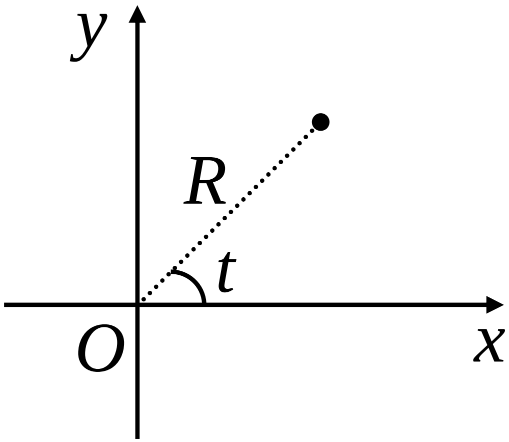
五、向量函数的积分

六、两个重要命题

向量函数引例

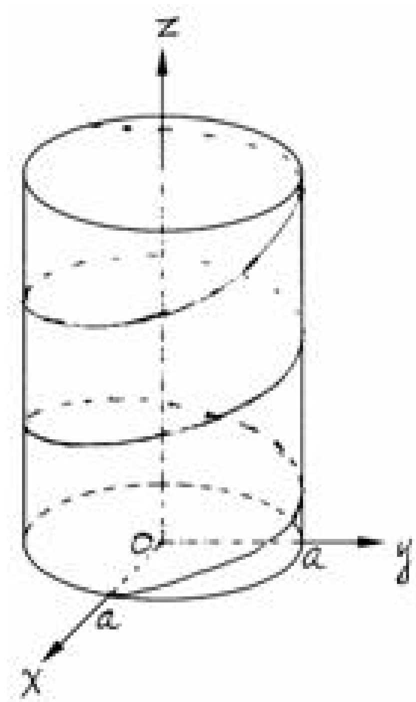
圆：

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi)$$



改记为：$\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t), \quad t \in [0, 2\pi)$

圆柱螺线：



$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \\ z(t) = vt \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

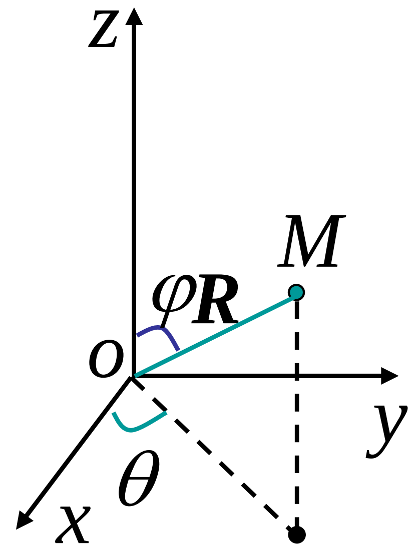
改记为：$\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, vt), \quad t \in \mathbb{R}$

向量函数引例(续)

球面：

$$\begin{cases} x(\varphi,\theta) = R\sin\varphi\cos\theta \\ y(\varphi,\theta) = R\sin\varphi\sin\theta \\ z(\varphi,\theta) = R\cos\varphi \end{cases}$$

$$0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le \theta < 2\pi$$



改记为：

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = (R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi),$$

$$0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

向量函数的概念(vector-valued functions):

取值为向量的函数

$\vec{r}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,\quad m$维向量$\mapsto n$维向量

向量函数的表示:

$$\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t)) = f(t)\vec{e}_1 + g(t)\vec{e}_2 + h(t)\vec{e}_3$$

其中 $f(t), g(t), h(t)$ 为数量函数,

$\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \ \vec{e}_3 = (0,0,1)$ (自然基底)

$$\vec{r}(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v)) = f(u,v)\vec{e}_1 + g(u,v)\vec{e}_2 + h(u,v)\vec{e}_3$$

一、向量函数的极限 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}$

设$\vec{r}(t)$在 t_0附近的区间 I 有定义,

它在 t_0可能也有定义，但不是必须有定义,

$\vec{a}$ 是一个与 t 无关的常向量,

若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$, 使得

$$\forall t\in O(t_0,\delta)/\{t_0\}\cap I,\ 有\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|<\varepsilon,$$

则称：当 t 趋近于 t_0时 $\vec{r}(t)$ 趋近于 $\vec{a}$.

用符号表示为：$\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}\Leftrightarrow\forall i,\lim\limits_{t\to t_0}r_i(t)=a_i$

向量函数的极限的性质

若$\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)$, $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{s}(t)$和$\lim\limits_{t\to t_0}\lambda(t)$都存在,$\alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R}$,

则

(1)线性性质：$\lim\limits_{t\to t_0}[\alpha\vec{r}(t)+\beta\vec{s}(t)]=\alpha\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)+\beta\lim\limits_{t\to t_0}\vec{s}(t)$

(2)数量乘法：$\lim\limits_{t\to t_0}[\lambda(t)\vec{r}(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\lambda(t)\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)$

(3)点积：$\lim\limits_{t\to t_0}[\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\vec{s}(t)$

(4)叉积：$\lim\limits_{t\to t_0}[\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\vec{s}(t)$

二、向量函数的连续性

$\vec{r}(t)$在 t_0连续

$\vec{r}(t)$在 (a,b) 连续

$\vec{r}(t)$在 $[a,b)$ 连续

线性运算、数乘、点积、叉积的连续性

三、向量函数的微商(导矢)(derivative)

$\vec{r}(t)$ 在 t_0的微商

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \triangleq \vec{r}'(t_0) \triangleq \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

$\vec{r}(t)$ 在 (a,b) 的微商 $\vec{r}'(t)$

若$\vec{r}(t)=(f(t),g(t),h(t))$, 则$\vec{r}'(t)=(f'(t),g'(t),h'(t))$.

向量函数的微商的性质

(1)线性性质: $[\alpha\vec{r}(t)+\beta\vec{s}(t)]'=\alpha\vec{r}'(t)+\beta\vec{s}'(t)$

(2)数量乘法: $[\lambda(t)\vec{r}(t)]'=\lambda'(t)\vec{r}(t)+\lambda(t)\vec{r}'(t)$

(3)点积: $[\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)]'=\vec{r}'(t)\cdot\vec{s}(t)+\vec{r}(t)\cdot\vec{s}'(t)$

(4)叉积: $[\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)]'=\vec{r}'(t)\times\vec{s}(t)+\vec{r}(t)\times\vec{s}'(t)$

(5)混合积:

$$(\vec{r}(t),\vec{s}(t),\vec{u}(t))'$$
$$=(\vec{r}'(t),\vec{s}(t),\vec{u}(t))+(\vec{r}(t),\vec{s}'(t),\vec{u}(t))+(\vec{r}(t),\vec{s}(t),\vec{u}'(t))$$

向量函数的高阶微商

k阶微商：

若 $\vec{r}^{(k-1)}(t)$ 可微，则称 $\vec{r}^{(k)}(t)$ 为 $\vec{r}(t)$ 的 **k阶微商**

C^k类函数(k次连续可微函数):

使得 $r^{(k)}(t)$ 连续的函数 $r(t)$

C^0类函数： 连续函数

C^∞类函数： 无限次可微函数

性质： $\vec{r}(t)$ 在 $[t_1,t_2]$ 上是 C^k 类函数 $\Leftrightarrow$

它的分量函数在 $[t_1,t_2]$ 上都是 C^k 类函数.

四、向量函数的Taylor公式

设 $\vec{r}(t)$ 在 t_0 附近是 C^{n+1} 类函数, 则它有Taylor展开式

$$\vec{r}(t_0+\Delta t)=\vec{r}(t_0)+\Delta t\vec{r}'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\vec{r}''(t_0)+\cdots$$
$$+\frac{(\Delta t)^n}{n!}\vec{r}^{(n)}(t_0)+\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!}(\vec{r}^{(n+1)}(t_0)+\vec{\varepsilon}(t_0,\Delta t))$$

设 $\vec{r}(t)$ 在 t_0附近是 C^{∞}类函数, 则它有Taylor级数

$$\vec{r}(t_0+\Delta t)\mapsto\vec{r}(t_0)+\Delta t\vec{r}'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\vec{r}''(t_0)+\cdots$$

五、向量函数的积分

$$\int_a^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t \triangleq \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{r}(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

若 $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, 则

$$\int_a^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t = \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t, \int_a^b g(t)\mathrm{d}t, \int_a^b h(t)\mathrm{d}t\right)$$

向量函数的积分的性质

(1)线性：$\int_a^b [\alpha\vec{r}(t)+\beta\vec{s}(t)]\mathrm{d}t=\alpha\int_a^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t+\beta\int_a^b \vec{s}(t)\mathrm{d}t$

(2)对区间的可加性：$\int_a^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t=\int_a^c \vec{r}(t)\mathrm{d}t+\int_c^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t$

(3)线性点积：$\int_a^b \vec{\lambda}\cdot\vec{r}(t)\mathrm{d}t=\vec{\lambda}\cdot\int_a^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t$

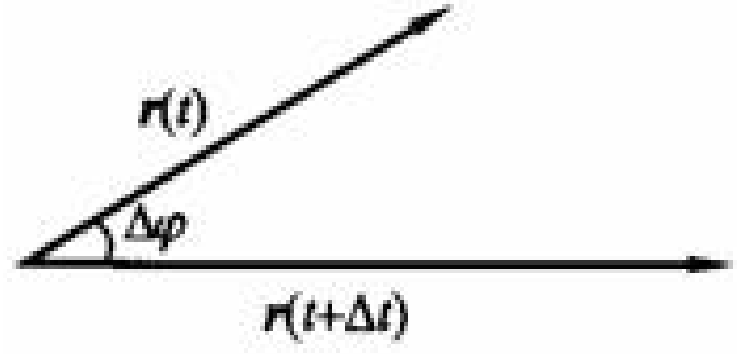
(4)线性叉积：$\int_a^b \vec{\lambda}\times\vec{r}(t)\mathrm{d}t=\vec{\lambda}\times\int_a^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t$

(5)变上限积分的微商公式：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \vec{r}(t)\mathrm{d}t=\vec{r}(x)$

六、两个重要命题

P10 命题6 $|\vec{r}(t)|$为常数 $\Leftrightarrow \forall t, \vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t)$

旋转速度



称 $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\left|\dfrac{\Delta \varphi}{\Delta t}\right|$ 为 $\vec{r}(t)$ 关于 t 的旋转速度.

P11 命题7

C^1类单位向量函数 $\vec{r}(t)$ (即$\left|\vec{r}(t)\right| \equiv 1$)关于 t 的旋转速度 $= \left|\vec{r}'(t)\right|$.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业！

P12： 3，5，6

§1.2 曲线的概念

一、曲线的参数表示

二、光滑曲线、正常点、正则曲线

三、曲线的切线与法平面

四、曲线的弧长与自然参数

一、曲线的向量参数表示法

参数

$$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)) \quad t\in I$$

可用于表示曲线

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \quad t\in I \\ z=z(t) \end{cases}$$

将 $\vec{r}(t)$ 的起点固定于原点 O,

则 $\vec{r}(t)$ 的终点的轨迹就是这条曲线.

二、光滑曲线、正常点、正则曲线

光滑曲线(C^1类曲线、一阶光滑曲线)

若曲线上每点都存在切线, 并且切线连续变化.

C^k类曲线(k阶光滑曲线)

若曲线为$\vec{r}=\vec{r}(t), t\in I$, 且$\vec{r}(t)$为$I$上的$C^k$类函数,

则称这样的曲线为C^k类曲线或k阶光滑曲线.

正常点

若对于曲线 $\vec{r}=\vec{r}(t)$ 上一点 $(t=t_0)$ 有 $\vec{r}'(t_0)\neq\vec{0}$,

则称该点为曲线的正常点.

否则称该点为曲线的奇异点.

正则曲线

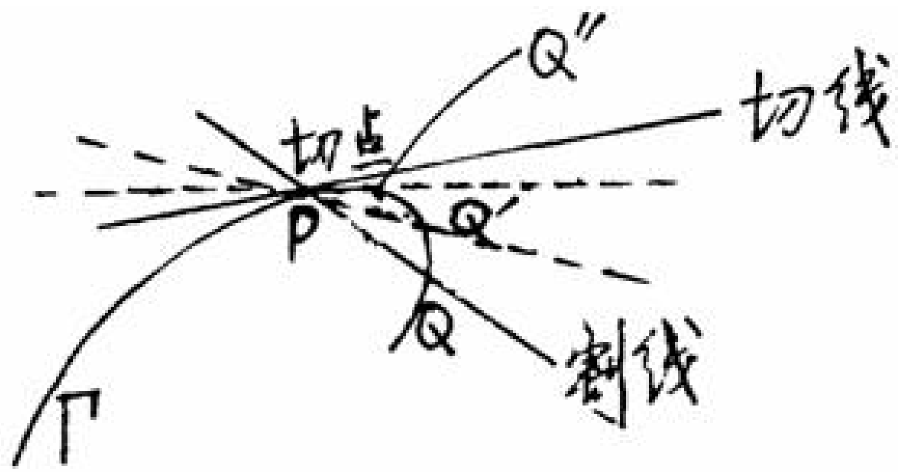
若某曲线上的每一点都是正常点,

则称该曲线为正则曲线.

我们只研究正则曲线.

三、曲线的切线和法平面

切线的定义 (割线的极限)



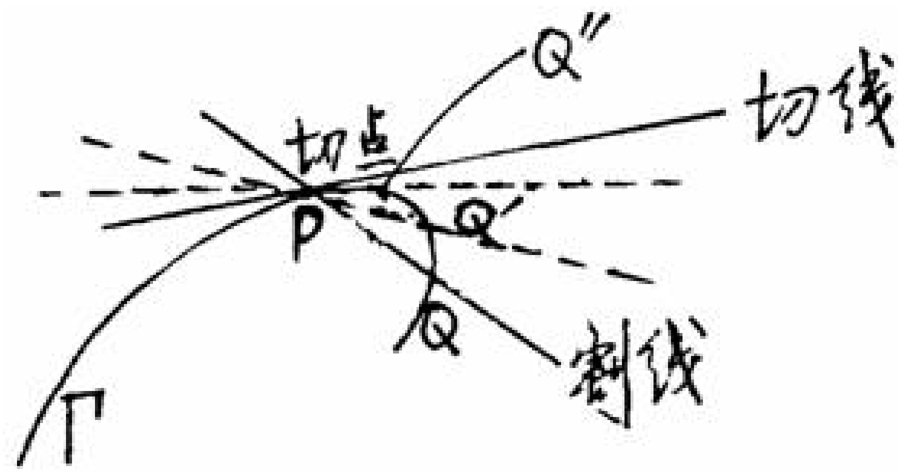
曲线 $\Gamma \in C^1 : \vec{r} = \vec{r}(t)$

切点 P : $\vec{r}(t_0)$

曲线上点 P 附近的一点 Q : $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$

当 $\Delta t \to 0$ 时, $Q \to P$, 直线 $PQ \to$ 曲线在点P处的切线.

切向量



$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$$

割线方向： $\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta t} // \overrightarrow{PQ}$

割线方向的极限： $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta t} = \vec{r}'(t_0)$

$\vec{r}'(t_0)$ 与切线方向一致，称 $\vec{r}'(t_0)$ 为**曲线在 P 点的切向量**.

注 $\vec{r}'(t_0)$ 的正向与曲线的参数 t 的增加方向一致.

切线方程(切线的向量参数表示)

曲线 $\Gamma \in C^1: \vec{r} = \vec{r}(t)$,　切点 $P: \vec{r}(t_0)$

设 $\vec{R}$ 为切线上任意一点的向径,

则 $[\vec{R} - \vec{r}(t_0)] // \vec{r}'(t_0)$

即 $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $s.t.$ $\vec{R} - \vec{r}(t_0) = \lambda \vec{r}'(t_0)$

所以切线方程为 $\vec{R} = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}'(t_0)$, 其中 λ 为参数.

切线方程(切线的一般表达式)

设 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\quad \vec{R}=(X,Y,Z)$

代入切线方程 $\vec{R}=\vec{r}(t_0)+\lambda\vec{r}'(t_0)$ 得到

$$\begin{cases} X = x(t_0)+\lambda x'(t_0) \\ Y = y(t_0)+\lambda y'(t_0) \\ Z = z(t_0)+\lambda z'(t_0) \end{cases}$$

消去参数 λ 得到切线的一般方程:

$$\frac{X-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{Y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{Z-z(t_0)}{z'(t_0)}$$

法平面方程(法平面的向量参数表示)

法平面：过切点且与切线垂直的平面

曲线 $\Gamma \in C^1$: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, 切点 P : $\vec{r}(t_0)$

设 $\vec{R}$ 为法平面上任意一点的向径,

则 $[\vec{R} - \vec{r}(t_0)] \perp \vec{r}'(t_0)$

即 $[\vec{R} - \vec{r}(t_0)] \cdot \vec{r}'(t_0) = 0$

所以法平面的方程为 $[\vec{R} - \vec{r}(t_0)] \cdot \vec{r}'(t_0) = 0$

法平面方程(法平面的一般表达式)

设 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\quad \vec{R}=(X,Y,Z)$

代入法平面方程 $[\vec{R}-\vec{r}(t_0)]\cdot\vec{r}'(t_0)=0$ 得到

$$[X-x(t_0)]x'(t_0)+[Y-y(t_0)]y'(t_0)+[Z-z(t_0)]z'(t_0)=0$$

它就是法平面的一般方程.

四、曲线的弧长与自然参数

设有光滑曲线 Γ：$\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$,

则以 $t=a$ 为起点, $t=t$ 为终点的曲线弧的弧长为

弧长微元ds

$$s(t)=\int_a^t \boxed{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t}=\int_a^t \boxed{\left|\vec{r}'(t)\right|\mathrm{d}t}$$

$s'(t)=\left|\vec{r}'(t)\right|>0 \;\Rightarrow\; s(t)$ 为关于 t 的严格单调递增函数

$\Rightarrow s(t)$ 存在反函数. 设其为 $t=t(s)$, 并代入曲线方程得

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=\vec{r}(t(s))=(x(t(s)),y(t(s)),z(t(s)))$$

它是一个以弧长 s 为参数的曲线方程.

称以弧长 s 为参数的曲线表示为曲线的自然参数表示.

称弧长参数 s 为曲线的自然参数.

命题 向径关于自然参数的微商的模等于1.

采用自然参数 s 后,切向量变成单位切向量.

以后用“·”代替“′”表示关于自然参数的微商,

即 $\dot{\vec{r}}(s) \triangleq \vec{r}'(s) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}$, $\ddot{\vec{r}}(s) \triangleq \vec{r}''(s) = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2}, \cdots$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

P28: 2, 8, 10, 11

§1.3 空间曲线

一、空间曲线的密切平面

二、空间曲线的基本三棱形

三、曲率、挠率和Frenet公式

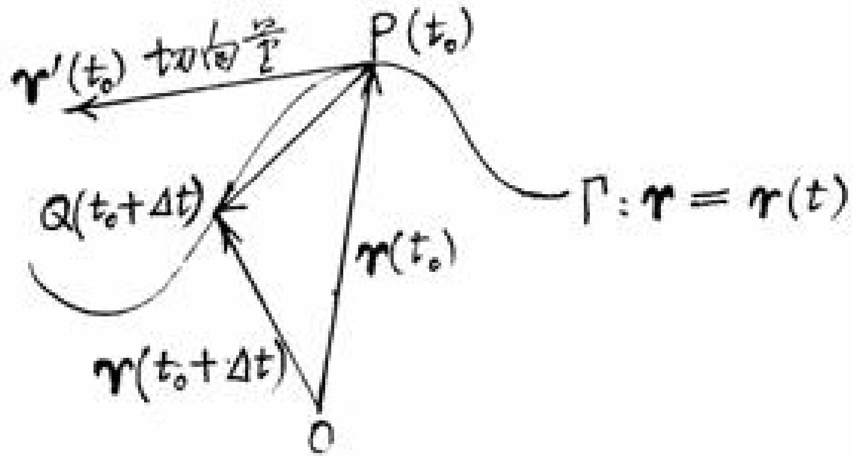
四、空间曲线在一点邻近的结构

五、空间曲线论的基本定理

六、一般螺线

一、空间曲线的密切平面(最贴近曲线的切平面)

曲线 $\Gamma \in C^2: \vec{r} = \vec{r}(t),$



切点 $P: \vec{r}(t_0)$

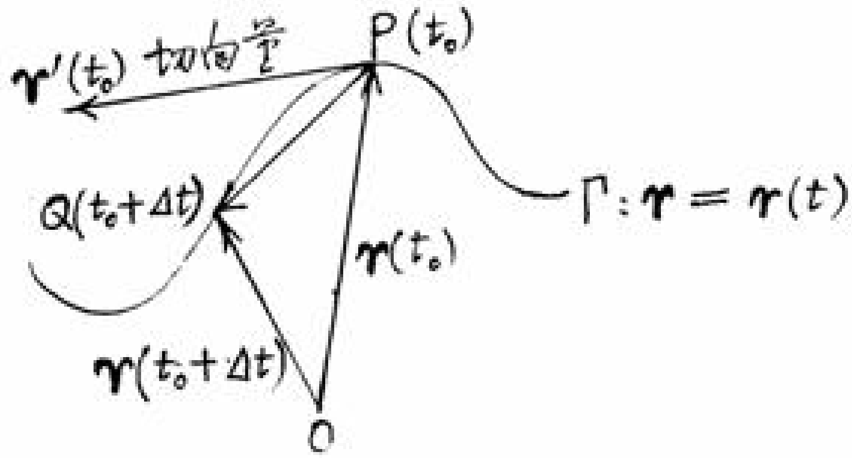
曲线上点 P 附近的一点 $Q: \vec{r}(t_0 + \Delta t)$

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0) = \vec{r}'(t_0)\Delta t + \tfrac{1}{2}[\vec{r}''(t_0) + o(\vec{1})](\Delta t)^2$$

$$\Rightarrow \vec{r}''(t_0) + o(\vec{1}) = \frac{2[\overrightarrow{PQ} - \vec{r}'(t_0)\Delta t]}{(\Delta t)^2} \subseteq \text{割平面}\,\sigma_Q$$

当 $\Delta t \to 0$ 时, $Q \to P$, $\vec{r}''(t_0) + o(\vec{1}) \to \vec{r}''(t_0) \subseteq$ 密切平面

密切平面的方程(向量参数表示)



当以 P 为起点时,

$\vec{r}'(t_0),\vec{r}''(t_0)\in$ 密切平面

假定 $\vec{r}'(t_0)$ 与 $\vec{r}''(t_0)$ 不平行 (注: 平行时称为逗留点)

设 $\vec{R}$ 是密切平面上的任意一点的向径,

则 $(\vec{R}-\vec{r}(t_0),\vec{r}'(t_0),\vec{r}''(t_0))=0$

它就是曲线在 P 点的密切平面的方程.

密切平面的方程(一般表达式)

设 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\quad \vec{R}=(X,Y,Z)$

代入密切平面方程 $(\vec{R}-\vec{r}(t_0),\vec{r}'(t_0),\vec{r}''(t_0))=0$ 得到

$$\begin{vmatrix} X-x(t_0) & Y-y(t_0) & Z-z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}=0$$

它就是密切平面的一般方程.

命题

一条C^2类曲线为平面曲线的充要条件是其所有点处的密切平面都为同一个平面.

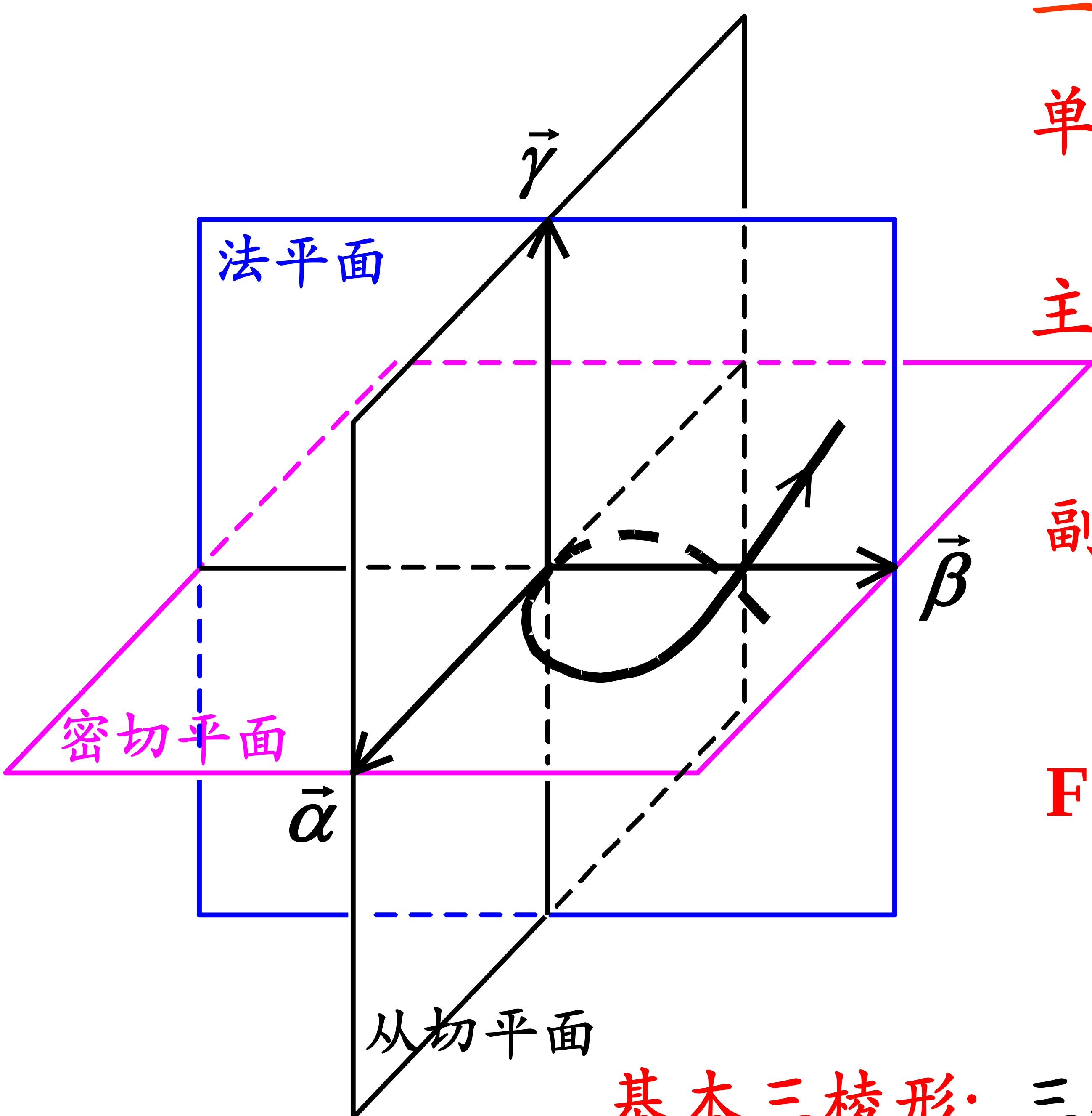
例题 P54-1

求圆柱螺线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt \ (a \neq 0)$ 在任意点处的密切平面方程.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

P55：5，9，10

二、空间曲线的基本三棱形



三个基本向量

单位切向量 $\vec{\alpha} = \dot{\vec{r}}$

主法向量 $\vec{\beta} = \dfrac{\dot{\vec{\alpha}}}{|\dot{\vec{\alpha}}|} = \dfrac{\ddot{\vec{r}}}{|\ddot{\vec{r}}|}$

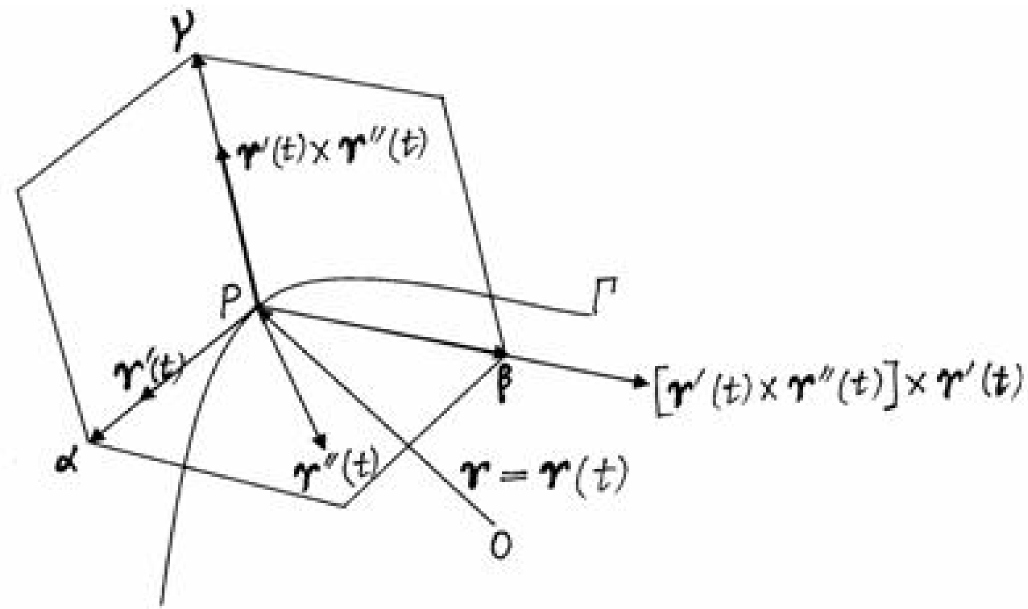
副法向量 $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta}$

Frenet标架 $\begin{cases} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \\ \vec{\gamma} \end{cases}$

基本三棱形：三个基本向量＋坐标面

基本向量的一般参数表示

单位切向量$\vec{\alpha}=\dfrac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$



副法向量$\vec{\gamma}=\dfrac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}$

主法向量$\vec{\beta}=\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}=\dfrac{[\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)]\times\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)||\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}$

特别注意：一般而言 $\vec{r}'(t)$与$\vec{r}''(t)$不垂直

思考

$\vec{r}'(t)$与$\vec{\alpha}$有何异同?

$\vec{r}''(t)$与$\vec{\beta}$有何异同?

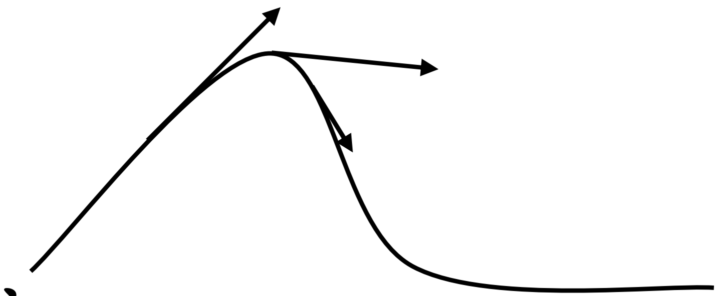
三个向量$\vec{r}'(t), \vec{r}''(t)$与$\vec{\beta}$之间有什么联系?

$\ddot{\vec{r}}(s)$与$\vec{\beta}$有何异同?

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

P55： 2，3，4，6

三、空间曲线的曲率、挠率和Frenet公式



1. 曲率(描述曲线的弯曲程度)

即：切向量关于自然参数的旋转速度

设曲线$\Gamma \in C^3$的自然参数表示为$\vec{r} = \vec{r}(s)$

则它在点s处的单位切向量为$\vec{\alpha}(s) = \dot{\vec{r}}(s)$

回忆P11命题7

(单位向量函数关于参数的旋转速度为其微商的模)

定义曲线Γ在点s处的曲率为$k(s) = \left|\dot{\vec{\alpha}}(s)\right| = \left|\ddot{\vec{r}}(s)\right|$

2. 挠率(描述空间曲线的扭转程度)

即： 密切平面的法向关于自然参数的有向旋转速度

曲线Γ：$\vec{r}=\vec{r}(s)$在点s处的副法向量为$\vec{\gamma}(s)=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$

$$\dot{\vec{\gamma}}=(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})^{\cdot}=\dot{\vec{\alpha}}\times\vec{\beta}+\vec{\alpha}\times\dot{\vec{\beta}}=\vec{\alpha}\times\dot{\vec{\beta}}$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow\dot{\vec{\gamma}}\perp\vec{\alpha}\\ |\vec{\gamma}|=1\Rightarrow\dot{\vec{\gamma}}\perp\vec{\gamma}\end{array}\right\}\Rightarrow\dot{\vec{\gamma}}\,//\,\vec{\beta}$$

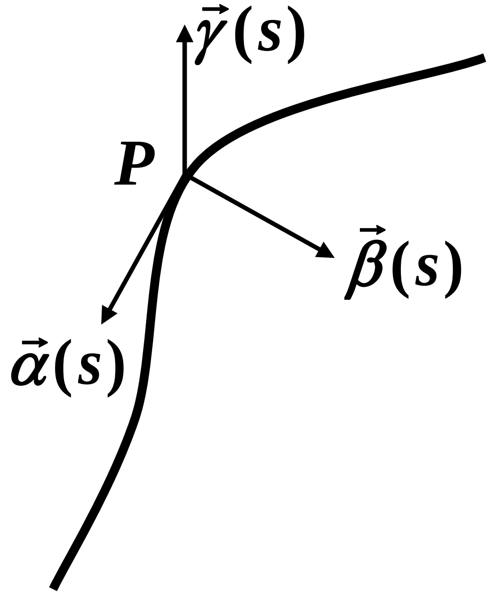
定义**Γ在点s处的挠率**为$\tau(s)=\begin{cases}|\dot{\vec{\gamma}}| & \text{当}\dot{\vec{\gamma}}\text{与}\vec{\beta}\text{异向时}\\ -|\dot{\vec{\gamma}}| & \text{当}\dot{\vec{\gamma}}\text{与}\vec{\beta}\text{同向时}\end{cases}$

可见$\dot{\vec{\gamma}}(s)=-\tau(s)\vec{\beta}(s)$，$\tau(s)=-\dot{\vec{\gamma}}(s)\vec{\beta}(s)$.

3. Frenet公式 (空间曲线论的基本公式)

即： 用基本向量表示基本向量的微商

$$\begin{cases} \dot{\vec{\alpha}}(s) = k(s)\vec{\beta}(s) \\ \dot{\vec{\beta}}(s) = -k(s)\vec{\alpha}(s) + \tau(s)\vec{\gamma}(s) \\ \dot{\vec{\gamma}}(s) = -\tau(s)\vec{\beta}(s) \end{cases}$$



也可写为 $$\begin{bmatrix} \dot{\vec{\alpha}}(s) \\ \dot{\vec{\beta}}(s) \\ \dot{\vec{\gamma}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\alpha}(s) \\ \vec{\beta}(s) \\ \vec{\gamma}(s) \end{bmatrix}$$

4. 曲率和挠率的一般参数表示

设有C^3类空间曲线$\Gamma: \vec{r}=\vec{r}(t)$, 则

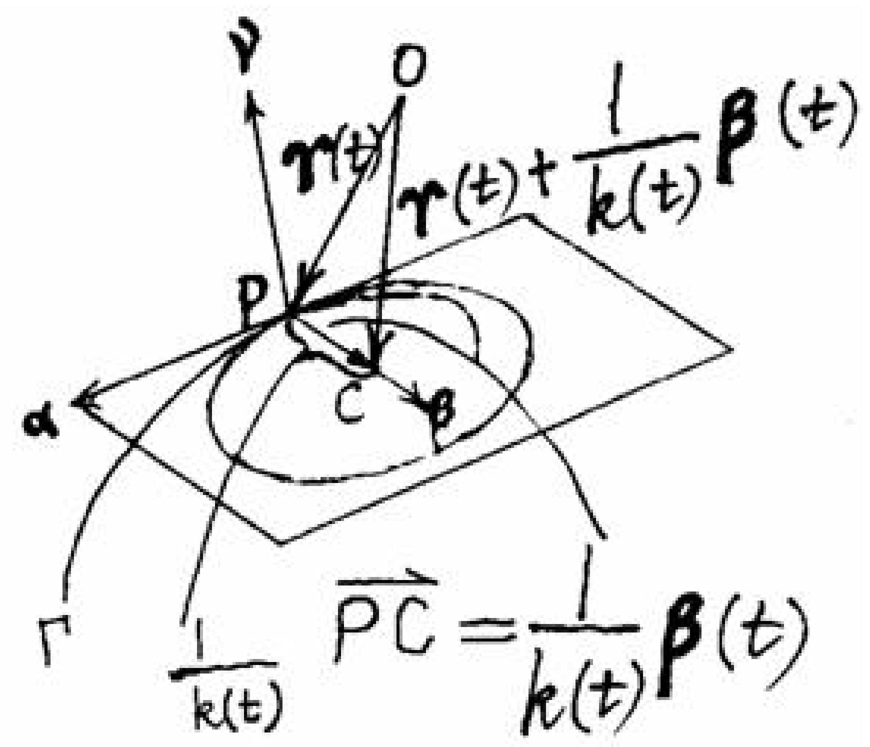
$$k(t)=\frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$$

$$\tau(t)=\frac{(\vec{r}'(t),\vec{r}''(t),\vec{r}'''(t))}{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|^2}$$

5. 密切圆(曲率圆)和曲率半径

曲率半径: $\dfrac{1}{k(t)}$

曲率中心: $\vec{r}(t)+\dfrac{1}{k(t)}\vec{\beta}(t)$



密切圆在切点处与曲线具有相同的曲率和密切平面.

$$k(t)=\frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}\qquad \tau(t)=\frac{(\vec{r}'(t),\vec{r}''(t),\vec{r}'''(t))}{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|^2}$$

例 P55-7(1)

求曲线$\vec{r}(t)=(a\cosh t, a\sinh t, at)$的曲率和挠率$(a>0)$.

例 P44-例4

证明曲率恒等于零的曲线是直线.

例 P44-例5

证明挠率恒等于零的曲线是平面曲线.

(注：称挠率不恒等于零的曲线为挠曲线)

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业！

P55: 7(2), 12

四、空间曲线在一点邻近的结构

在切点$\vec{r}(s_0)$附近，曲线$\vec{r}=\vec{r}(s)$在局部坐标系

$$[\vec{r}(s_0);\vec{\alpha}(s_0),\vec{\beta}(s_0),\vec{\gamma}(s_0)]$$

中的近似方程为(即点$\vec{r}(s_0+s)$的新坐标近似为)：

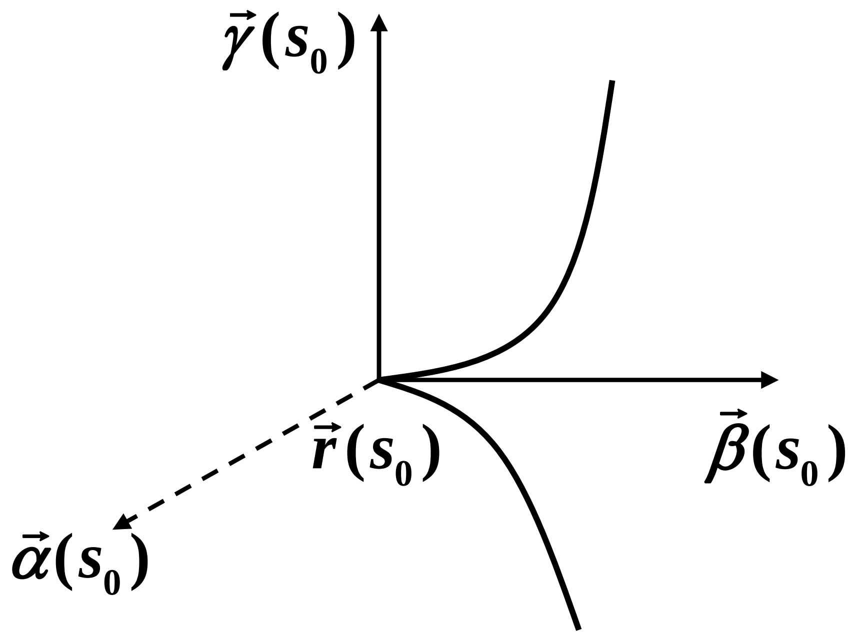
$$\begin{cases} \xi = s \\ \eta = \frac{1}{2}k(s_0)s^2 \\ \zeta = \frac{1}{6}k(s_0)\tau(s_0)s^3 \end{cases}$$

该近似曲线在法平面$\xi=0$上的投影为

$$(\xi=0),\ \eta=\tfrac{1}{2}k(s_0)s^2,\ \zeta=\tfrac{1}{6}k(s_0)\tau(s_0)s^3$$

从中消去参数s得到$(\xi=0), \zeta^2=\dfrac{2\tau^2(s_0)}{9k(s_0)}\eta^3$

它是半立方抛物线.

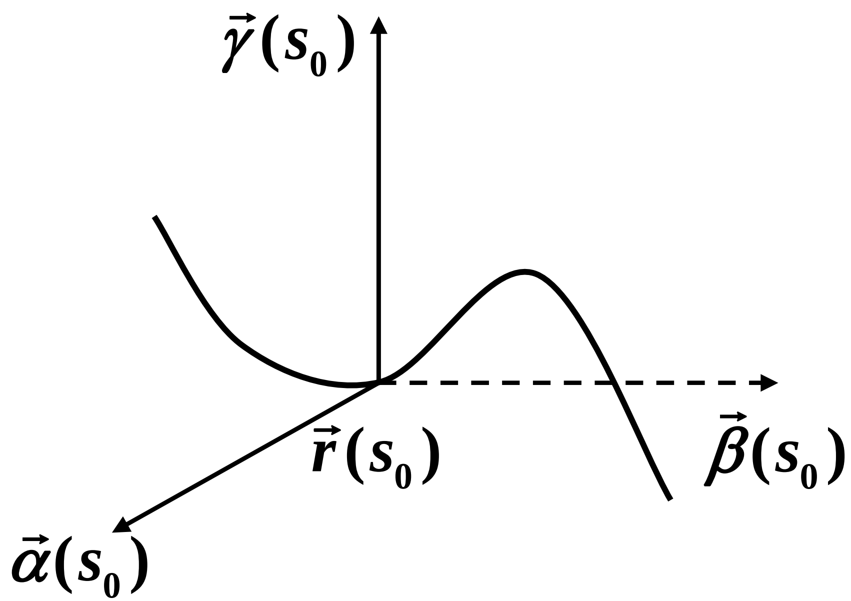


该近似曲线在从切平面$\eta=0$上的投影为

$$(\eta=0),\ \xi=s,\ \zeta=\frac{1}{6}k(s_0)\tau(s_0)s^3$$

从中消去参数s得到$(\eta=0), \zeta=\frac{1}{6}k(s_0)\tau(s_0)\xi^3$

它是立方抛物线.

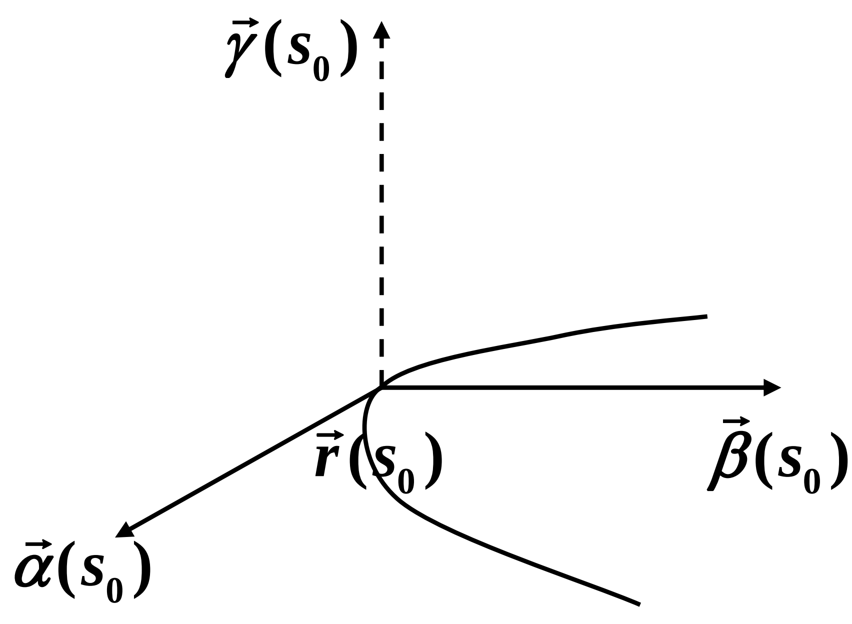


该近似曲线在密切平面$\zeta=0$上的投影为

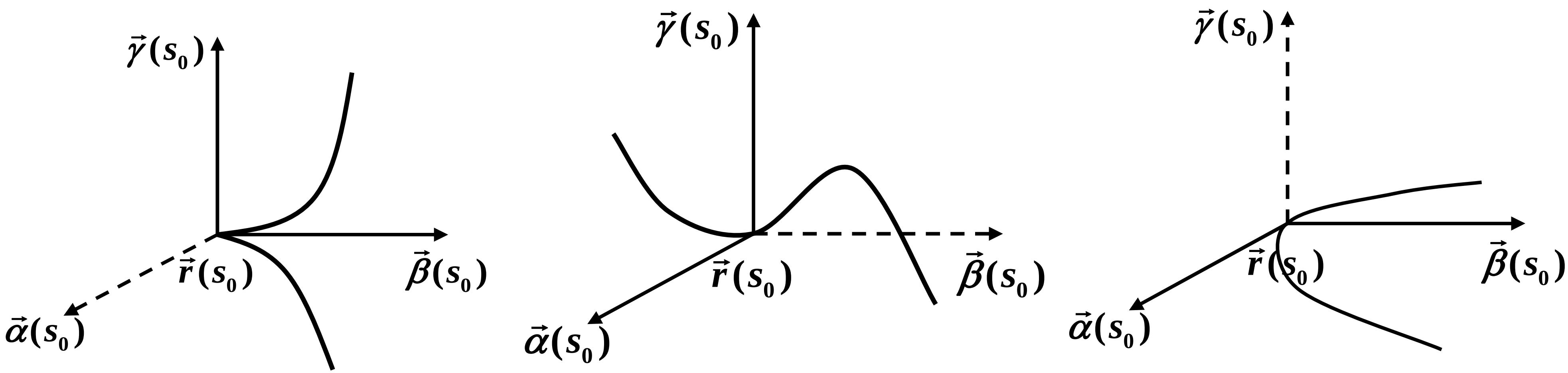
$$(\zeta=0),\ \xi=s,\ \eta=\tfrac{1}{2}k(s_0)s^2$$

从中消去参数s得到$(\zeta=0), \eta=\tfrac{1}{2}k(s_0)\xi^2$

它是抛物线.



局部曲线图形特点



1. 曲线穿过法平面和密切平面,但不穿过从切平面;

2. 主法向量总是指向曲线开口的方向;

3. 挠率的符号对曲线的影响(见课本P48图1-25):

$\tau(s_0) > 0$时,曲线从第六卦限经过$\vec{r}(s_0)$进入第一卦限;

$\tau(s_0) < 0$时,曲线从第二卦限经过$\vec{r}(s_0)$进入第五卦限.

五、空间曲线论的基本定理

设有闭区间$[s_0,s_1]$上的两个连续函数$k(s)>0$和$\tau(s)$, 则除了空间的位置差别外, 唯一的存在一条空间曲线, 使得参数 s 是该曲线的自然参数, 并且 $k(s)$ 和 $\tau(s)$ 分别是该曲线在 s 点处的曲率和挠率.

由基本定理知: $\begin{cases} k=k(s) \\ \tau=\tau(s) \end{cases}$ 完全确定了曲线的形状, 并且与曲线在空间中所处的位置和方向无关.

称 $\begin{cases} k=k(s) \\ \tau=\tau(s) \end{cases}$ 为**空间曲线的自然方程**.

证明思路

Step1. 增加条件使曲线的位置和方向固定;

Step2. 由 $k(s), \tau(s)$ 和增加的条件确定三个向量函数(后面会证明它们为曲线的三个基本向量);

Step3. 由增加的条件和第一个向量函数解出曲线的方程 $\vec{r}(s)$;

Step4. 证明 s 是该曲线的自然参数;

Step5. 证明该曲线的曲率是 $k(s)$, 挠率是 $\tau(s)$.

六、一般螺线

曲线的曲率和挠率完全确定了曲线的形状.

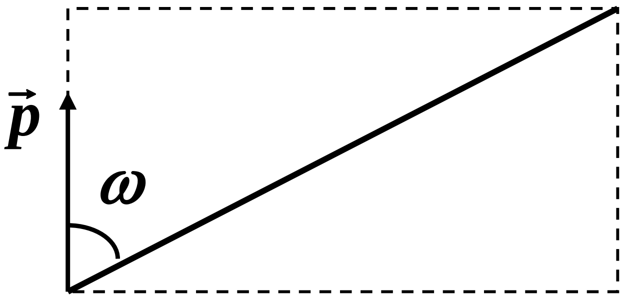
当曲线的曲率和挠率之间满足多种不同的关系时,
就会得到不同类型的曲线.

例如当 $k(s)\equiv 0$ 时得到直线(见P44例4)

当 $\tau(s)\equiv 0$ 时得到平面曲线(见P44例5)

特别地, 当 $\dfrac{k(s)}{\tau(s)}$ 为常数时得到一般螺线.

一般螺线的定义



将左图卷在圆柱上得到圆柱螺线;

将其卷在一般柱面上得到一般螺线.

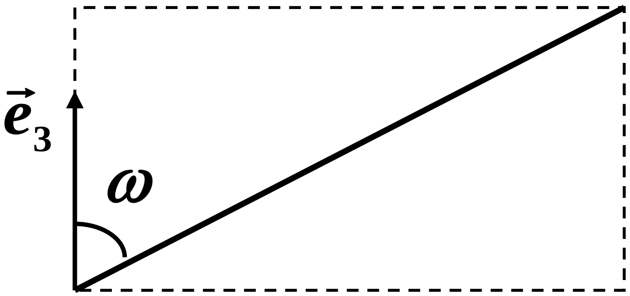
称切线和一个固定方向成固定角的曲线为**一般螺线**.

等价定义1 主法线和一个固定方向垂直的曲线.

等价定义2 副法线和一个固定方向成固定角的曲线.

等价定义3 使得 $\dfrac{k(s)}{\tau(s)}$ 为常数的曲线.

一般螺线的标准方程



设固定方向为 $\vec{e}_3$, 夹角为 ω, 柱面母线平行于 z 轴.

则螺线方程为 $\vec{r}=(x(s),y(s),s\cos\omega)$,

其中 $x(s),y(s)$ 满足 $x'^2(s)+y'^2(s)=\sin^2\omega$.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

P56: 20