4.3 广义似然比检验

-Generalized Likelihood Ratio Test

在4.2节讲到的参数检验,有个前提,总体都是正态总体. 因此,检验统计量可以使用2.5节中正态总体常用的抽样分布. 那么,对于非正态总体,如何进行参数的检验呢? 在大样本的情况下,根据中心极限定理,样本均值近似服从正态分布,此时检验统计量还是很好构造的,但这种方法对小样本又不适用了. 针对一般的情况, Neyman 和Pearson在1928年提出了一种通过似然函数的比值来构造检验统计量的方法, 即广义似然比检验(Generalized Likelihood Ratio Test). 其基本思想类似于极大似然估计中的极大似然原理,即从考虑当前样本出现的可能性出发，通过原假设参数子空间的似然函数与整个参数空间的似然函数的极大值之比,来构造检验统计量进行检验的方法.

定义 1. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自总体ξ的样本，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为对应的样本观测值. 总体ξ的密度函数或分布列为 $p(x,\theta)$, $\theta\in\Theta$，其中$\Theta=\Theta_0\bigcup\Theta_1$为参数$\theta$的取值空间，且$\Theta_0\bigcap\Theta_1=\varnothing$. 对参数$\theta$的检验问题：$H_0$: $\theta\in\Theta_0$, H_1: $\theta\in\Theta_1$, 令

$$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}L(\theta)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta}L(\theta)}$$

其中，$L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}p(x_i,\theta)$参数$\theta$的似然函数. 称$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为上述对应检验问题的广义似然比，称$\lambda(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为对应检验问题的广义似然比统计量.

需要说明的是，$\lambda(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是一个关于样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的函数，并且与参数$\theta$无关，因此，它是一个统计量．而$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是统计量$\lambda(X_1,X_2,\cdots,X_n)$在对应样本观测值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$上的取值．为叙述方便起见，有时$\lambda(X_1,X_2,\cdots,X_n)$和$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)$不加区分，统称为广义似然比，简称似然比．

其次，$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的分子是似然函数$L(\theta)$在原假设$H_0$：$\theta\in\Theta_0$上的极大值，即把参数$\theta$在参数子空间$\Theta_0$上的极大似然估计$\hat{\theta}$代入似然函数$L(\theta)$的结果，$\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}L(\theta)=L(\hat{\theta})$．而似然比$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的分母是似然函数$L(\theta)$在整个参数空间$\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1$上的极大值．因此，$0<\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)\le 1$．

我们知道，参数θ的极大似然估计是使似然函数$L(\theta)$取极大值的解,而似然函数$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i,\theta)$在一定程度上表示样本观测值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$出现的可能性(见3.2节)．因此，似然比$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)$越大,即分子$\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} L(\theta)$也相对越大,这说明在原假设$H_0$：$\theta\in\Theta_0$为真时，样本观测值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$出现的可能性越大．反之似然比$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)$越小，说明分子$\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} L(\theta)$相对于分母$\sup\limits_{\theta\in\Theta} L(\theta)$越小，即$H_0$：$\theta\in\Theta_0$为真时样本观测值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$出现的可能性越小．因此,当似然比$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)$取值较大时应该接受$H_0$：$\theta\in\Theta_0$，而当$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)$取值较小时应该拒绝$H_0$：$\theta\in\Theta_0$.

于是，对于给定的显著性水平α，可确定临界值λ_α，使得

$$P_\theta\{\lambda(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\lambda_\alpha\}\le\alpha \qquad (\forall\theta\in\Theta_0).$$

当统计量的观测值$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)$小于临界值$\lambda_\alpha$时,拒绝原假设$H_0$：$\theta\in\Theta_0$.反之则接受原假设$H_0$：$\theta\in\Theta_0$. 这种在给定显著性水平下根据似然比统计量来确定拒绝域的检验方法称为水平为α的广义似然比检验. 即在广义似然比检验中，原假设H_0：$\theta\in\Theta_0$的拒绝域为$W_1=(0,\ \lambda_\alpha)$,接受域为$W_0=[\lambda_\alpha,\ 1]$.

例1． 设总体 $\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 σ^2 已知，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为取自总体 ξ 的样本．在显著性水平 α 下，检验 H_0：$\mu=\mu_0$， H_1：$\mu\neq\mu_0$．

解：（1） 提出假设

$$H_0:\mu=\mu_0;\quad H_1:\mu\neq\mu_0$$

其中，$\Theta=R$，$\Theta_0=\{\mu_0\}$，$\Theta_1=R-\{\mu_0\}$

2） 构造似然比

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\mu)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu)^2]\right\}$$

因在参数空间Θ上μ 的极大似然估计为 $\bar{x}$，故似然比的分母为:

$$\sup_{\mu\in\Theta} L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\mu)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2]\right\}.$$

而似然比的分子为：

$$\sup_{\mu\in\Theta_0} L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\mu)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu_0)^2]\right\}$$

于是,似然比统计量为：

$$\lambda(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} L(\theta)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta} L(\theta)}=\exp(-\frac{n(\bar{X}-\mu_0)^2}{2\sigma^2})$$

代入 $P_\theta\{\lambda(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\lambda_\alpha\}\le\alpha$，得：

$$P_{\mu_0}\{\exp(-\frac{n(\bar{X}-\mu_0)^2}{2\sigma^2})<\lambda_\alpha\}\le\alpha$$

$$\Leftrightarrow\ P_{\mu_0}\{|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}|>\sqrt{-2\ln(\lambda_\alpha)}\}\le\alpha \qquad （\ln(\lambda_\alpha)\le 0,因0<\lambda_\alpha\le 1）$$

注意到当 H_0：$\mu=\mu_0$为真时，$\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，

故有 $\sqrt{-2\ln(\lambda_\alpha)}=\mu_{1-\frac{\alpha}{2}}$，解之得 $\lambda_\alpha=\exp(-\frac{1}{2}\mu^2_{1-\frac{\alpha}{2}})$.

即原假设 H_0：$\mu=\mu_0$的拒绝域为 $W_1=(0,\ \exp(-\frac{1}{2}\mu^2_{1-\frac{\alpha}{2}}))$

本例中，不难看出 $\lambda(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \exp(-\frac{1}{2}\mu^2_{1-\frac{\alpha}{2}})$ 与 $|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}| > \mu_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 等价.

因此,这个广义似然比检验的结果与 4.1 节中给出的检验结果完全相同. 事实上，可以证明，4.2 节中关于正态总体均值的检验，都可以用广义似然比检验的方法，并且检验的结果也完全一致.

例2. 设总体 ξ 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\exp\text{-}(x-\mu) & x\geq\mu\\ 0 & x<\mu\end{cases}$$ 其中 $-\infty<\mu<+\infty$ 为未知参数

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为取自总体 ξ 的样本．在显著性水平 α 下，检验

H_0: $\mu=0$, H_1: $\mu\neq 0$.

解：易知，参数 μ 在整个参数空间（$-\infty<\mu<+\infty$）的极大似然估计为最小次序统计量 $X_{(1)}$．于是，广义似然比统计量为

$$\lambda(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\frac{\sup\limits_{\mu=0}L(\mu)}{\sup\limits_{-\infty<\mu<+\infty}L(\mu)}=\frac{\exp(-\sum X_i)}{\exp[-\sum(X_i\text{-}X_{(1)})]}=\exp(-nX_{(1)})$$

代入 $P_\theta\{\lambda(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\lambda_\alpha\}\le\alpha$，得：

$$P_{\mu=0}\{\exp(-nX_{(1)})<\lambda_\alpha\}\le\alpha$$

$$\Leftrightarrow P_{\mu=0}\{X_{(1)}>-\frac{1}{n}ln(\lambda_\alpha)\}\le\alpha$$

$$\Leftrightarrow P_{\mu=0}\{X_{(1)}\le-\frac{1}{n}ln(\lambda_\alpha)\}\ge 1-\alpha$$

根据 1.2 节的例 11，最小次序统计量 $X_{(1)}$ 的分布函数为 $F_{min}(x)=1-[1-F(x)]^n$，

于是，在 H_0： $\mu=0$为真时， $X_{(1)}$ 的密度函数为

$$p_{min}(x)=[F_{min}(x)]'=\begin{cases} n\exp(-nx) & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

即 $X_{(1)}\sim E(n)$. 再根据习题 2.11 的结果，得： $-\frac{1}{n}ln(\lambda_\alpha)=-\frac{1}{n}ln(\alpha)$，即 $\lambda_\alpha=\alpha$.

综上可见，广义似然比检验给出了构造检验统计量的一般方法，所以应用非常广泛，不仅适用于对参数的检验，也可用于非参数的检验, 比如下一节将要介绍的总体分布的检验. 此外, 广义似然比检验一个更大的优势还在于,一定条件下,似然比统计量有统一的渐进分布,即在样本容量*n*充分大时 $-2Ln(\lambda(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 近似服从卡方分布.