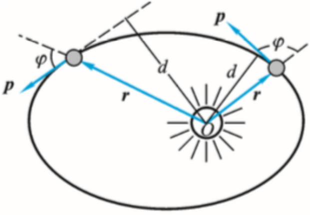
2.3 质点的角动量定理和角动量守恒定律

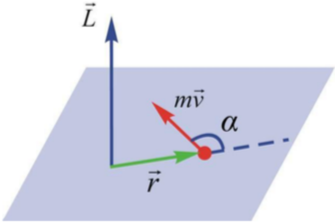
一、角动量(动量矩)

自然界中行星围绕太阳公转



质点对参考点O的角动量

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$$



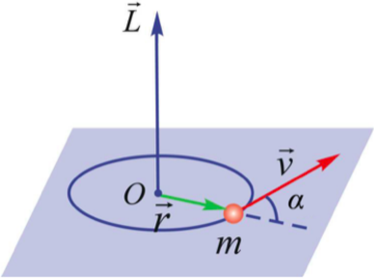
大小：$L = rmv\sin\alpha$

方向：右手螺旋定则

2.3 质点的角动量定理和角动量守恒定律

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(m\vec{v})$$

特例: 质点做匀速圆周运动时，由于$\vec{r}\perp\vec{v}$, 质点对圆心的角动量大小为$L=rmv$， 大小不变，方向也不变。质点对圆心O的角动量为常矢量.



2.3 质点的角动量定理和角动量守恒定律

例2.3-1 按经典原子理论:氢原子中的电子在圆形轨道 上绕核运动。电子与氢原子核之间的静电力$F=k\frac{e^2}{r^2}$因为电子的角动量具有量子化的特征，所以电子绕核运动的角动量只能等于$\frac{h}{2\pi}$的整数(n)倍。问电子运动的容许轨道半径等于多少?

解: 由牛顿第二定律得 $F=k\frac{e^2}{r^2}=ma_n=m\frac{v^2}{r}$

由于电子绕核运动时，角动量有量子化的特征

$$L=mvr=n\frac{h}{2\pi},\quad n=1,2,3,\ldots$$

联合解得 $r=\dfrac{n^2h^2}{4\pi^2kme^2}$,即电子绕核运动的轨道半径只能与$n$的平方成正比，轨道半径是不连续的。

2.3 质点的角动量定理和角动量守恒定律

二、质点的角动量定理

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}\Rightarrow\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\because\quad \frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v},\ \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}=\vec{v}\times(m\vec{v})=0$$

$$\therefore\quad \frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$$

定义合力$\vec{F}$对参考点O的力矩: $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

上式可写为 $\vec{M}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$

2.3 质点的角动量定理和角动量守恒定律

质点的角动量定理:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

质点所受合外力矩等于它对同一参考点的角动量的时间变化率

质点系的角动量定理:

由于一对内力对于同一参考点的合力矩为零，所以质点系的角动量定理可写成同样形式。

$\vec{M}$是质点系所受合外力矩，$\vec{L}$是质点系的总角动量.

2.3 质点的角动量定理和角动量守恒定律

三、质点的角动量守恒定律

由 $$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$$

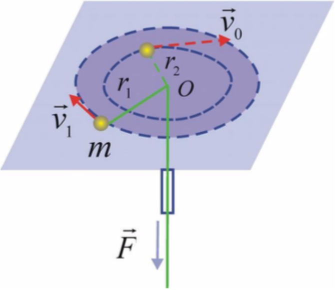
若 $\vec{M}=0$，则 $\dfrac{d\vec{L}}{dt}=0$，$\vec{L}=\vec{L}_0$(常矢量)

角动量守恒定律:

如果作用在质点上的外力对某给定点的力矩为零，则质点对该点的角动量在运动过程中保持不变。

2.3 质点的角动量定理和角动量守恒定律

实验演示: 质量为m的小球系在轻绳的一端,绳穿过一竖直的管子,一手握管,另一手执绳。用力向下拉 绳,实验发现:



$$v_2 r_2 = v_1 r_1$$

即 $$m v_2 r_2 = m v_1 r_1$$

表明小球对圆心的角动量保持不变。

解释: 作用在小球上的有心力对力心的力矩为零,故小球的角动量守恒。

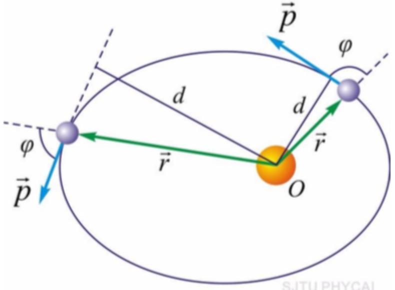
2.3 质点的角动量定理和角动量守恒定律

行星绕太阳的运动:

作用在行星上的万有引力(有心力)对太阳(力心)的力矩为零，因此，行星在运动过程中，对太阳的角动量保持不变。

$$\vec{r}\times\vec{p} = \text{常矢量}$$

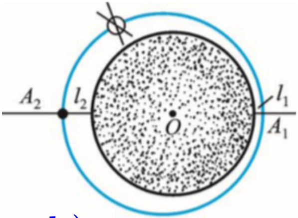
$$pd = \text{常量}$$



在有心力场中,对于力心的角动量守恒。可以推得开普勒第二定理。

2.3 质点的角动量定理和角动量守恒定律

例2.3-2 我国第一颗人造卫星绕地球沿椭圆轨道运动，地球的中心O为该椭圆的一个焦点。已知地球半径 $R=6378\text{km}$，人造地球卫星距地面最近距离$l_1=439\text{km}$，最远距离$l_2=2384\text{km}$，若人造地球卫星在近地点A_1的速度$v_1=8.10\text{km/s}$，求人造地球卫星在远地点A_2的速度。



解：在近地点A_1 、 A_2的角动量

$$L_1=mv_1(R+l_1)$$
$$L_2=mv_2(R+l_2)$$

角动量守恒：$mv_1(R+l_1)=mv_2(R+l_2)$

$$\Rightarrow v_2=v_1\frac{R+l_1}{R+l_2}=6.30\ \text{km/s}$$