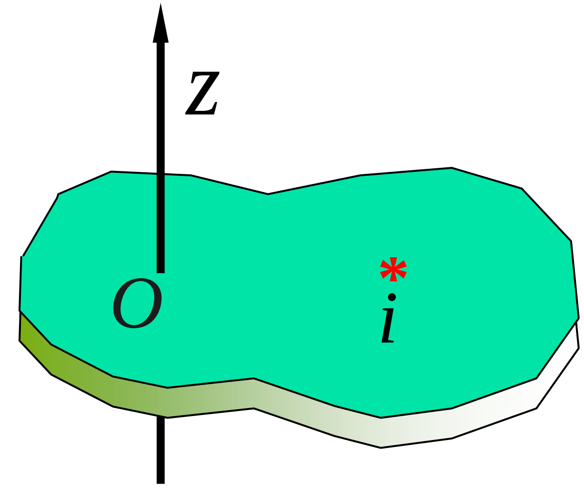
五、刚体的角动量和角动量守恒定律



1、刚体的角动量

质点： $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

刚体中的质点： $L_i = r_i m_i v_i$

刚体的角动量：

$$L = \sum m_i v_i r_i = \sum m_i (r_i \omega) r_i$$

$$= \sum m_i r_i^2 \omega = J\omega$$

2、冲量矩

$M dt$

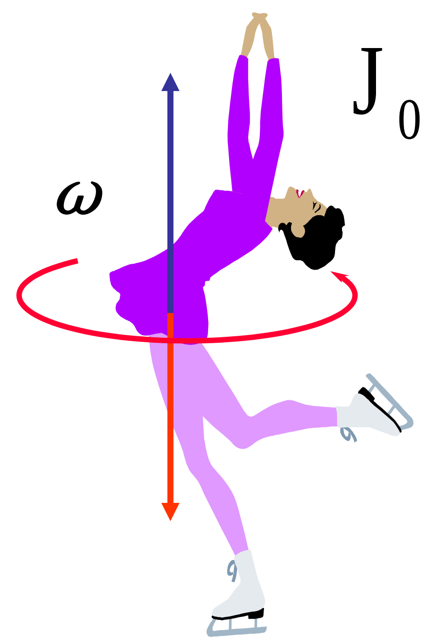
$$M = J\alpha = J\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow M dt = J d\omega = dL$$

2、冲量矩 $M\,dt = dL$

角动量定律： $\int M\,dt = \int dL = J\omega - J\omega_0$

角动量守恒：$\mathbf{M}_{合外力矩} = 0$ $\Rightarrow \sum J_i\omega_i = C$

（固定的同一转轴）



$J_0\omega_0 = J\omega$

例1、若人沿着半径为 r的圆周，顺时针匀速行走，相对圆盘的速率为 v，则圆盘的角速度为多少？

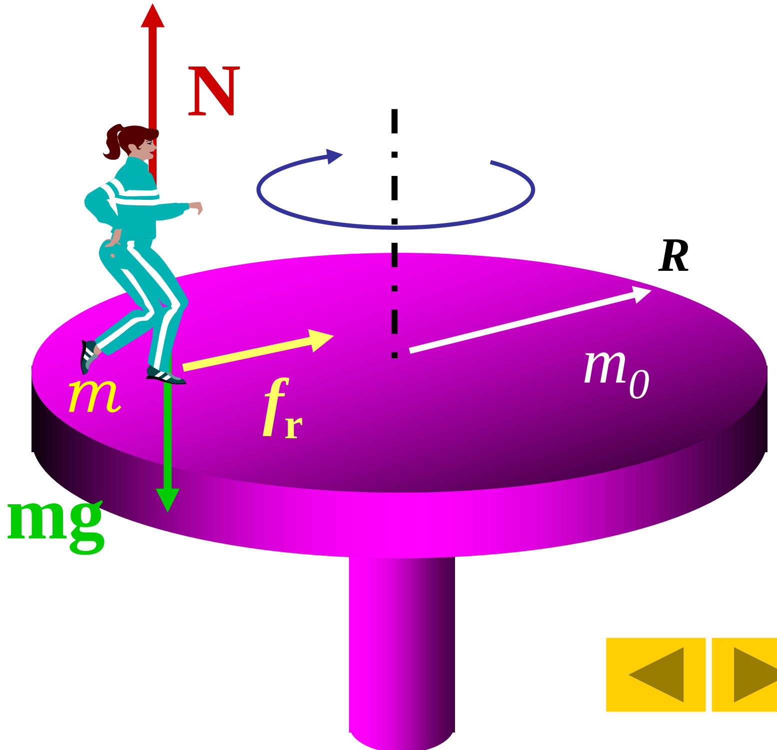
人与盘的系统对转轴 M=0 → L=C

$$0 = J\omega + m\ r\ v_{人地}$$

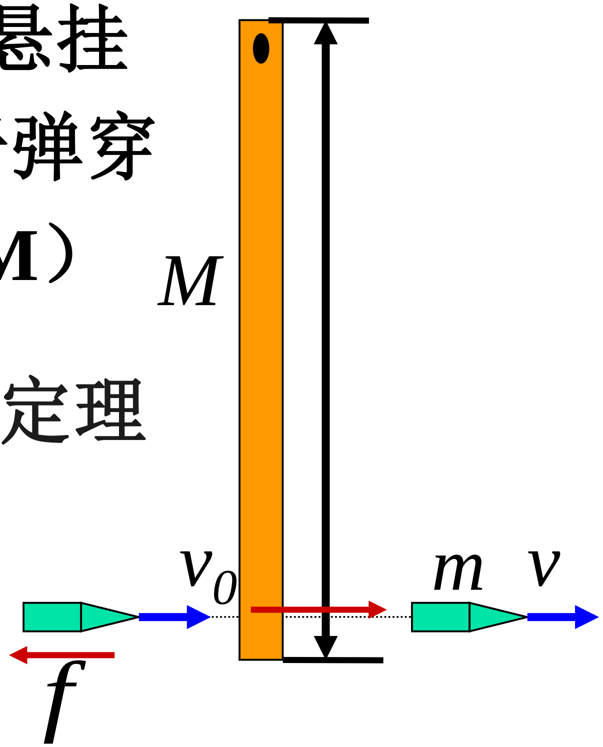
$$\vec{v}_{人地} = \vec{v}_{人盘} + \vec{v}_{盘地}$$

$$v_{人地} = -v + \omega r$$

$$\omega = \frac{mvr}{mr^2 + \frac{1}{2}m_0 R^2}$$



例2、子弹m以水平速度v_0射入一静止悬挂的长棒下端，穿出后速度损失3/4，求子弹穿出后棒的角速度ω（已知棒长l、质量M）



解1：棒对子弹的阻力 f，对子弹由动量定理

$$\int f\mathrm{d}t = m(v - v_0) = -\frac{3}{4}mv_0$$

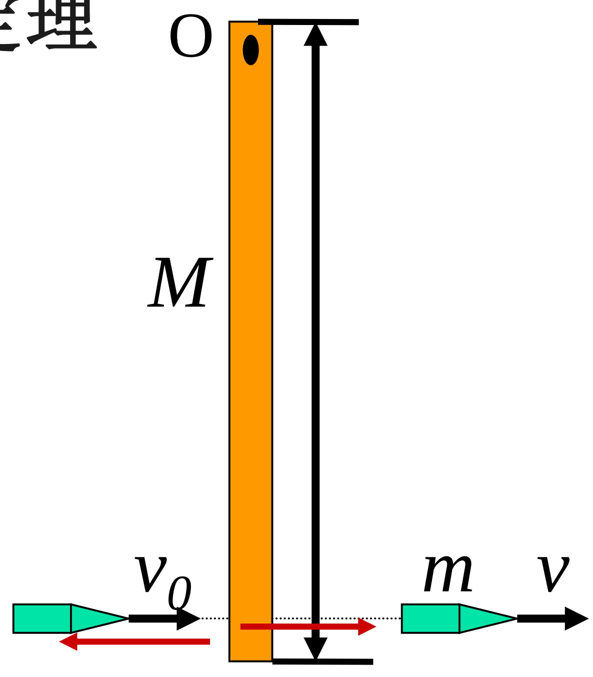
子弹对棒的反作用力冲量矩 $$\int f' l\,\mathrm{d}t = l\int f'\mathrm{d}t = J\omega$$

$$\because\ f = -f' \quad J = \frac{1}{3}Ml^2$$

$$\therefore\ \omega = \frac{9mv_0}{4Ml}$$

解1：棒对子弹的阻力f，对子弹由动量定理

$$\int f\mathrm{d}t = \mathrm{m}(\mathrm{v}-\mathrm{v}_0) = -\frac{3}{4}\mathrm{m}\mathrm{v}_0$$



子弹对棒的反作用力冲量矩

$$\int f' l\,\mathrm{d}t = l\int f'\mathrm{d}t = \mathrm{J}\omega$$

$$\because\ f = -f' \quad \mathrm{J} = \frac{1}{3}\mathrm{M}l^2 \Rightarrow \omega = \frac{9\mathrm{m}\mathrm{v}_0}{4\mathrm{M}l}$$

解2：子弹、棒为系统，对O点 M=0 系统的角动量守恒

$$\mathrm{m}\mathrm{v}_0 l = (1-\frac{3}{4})\mathrm{m}\mathrm{v}_0 l + \frac{1}{3}\mathrm{M}l^2\omega$$

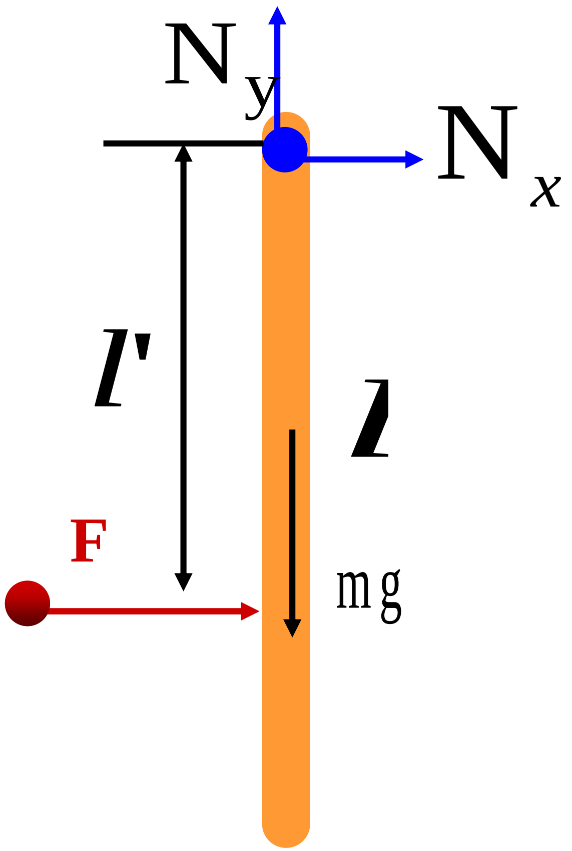
问题：系统的动量守恒？

质心运动定律

$$F + N_x = ma_{Cx} = m\alpha\frac{l}{2}$$

$$Fl' = J\alpha = \frac{1}{3}ml^2\alpha$$

$$N_x = \left(\frac{3l'}{2l} - 1\right)F \neq 0$$

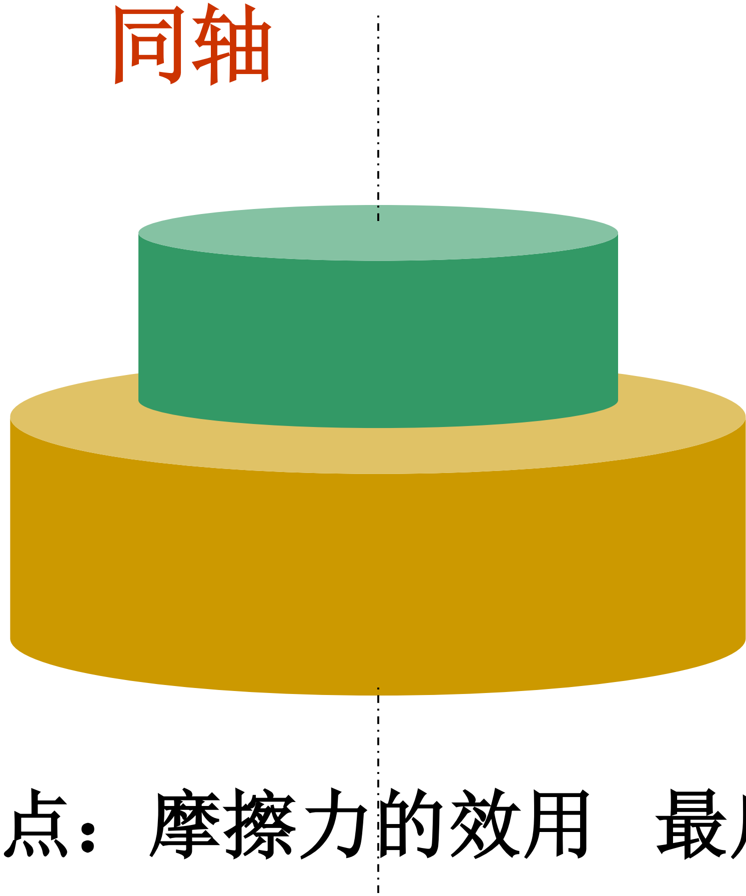


$$l' = \frac{2}{3}l \Rightarrow N_x = 0$$

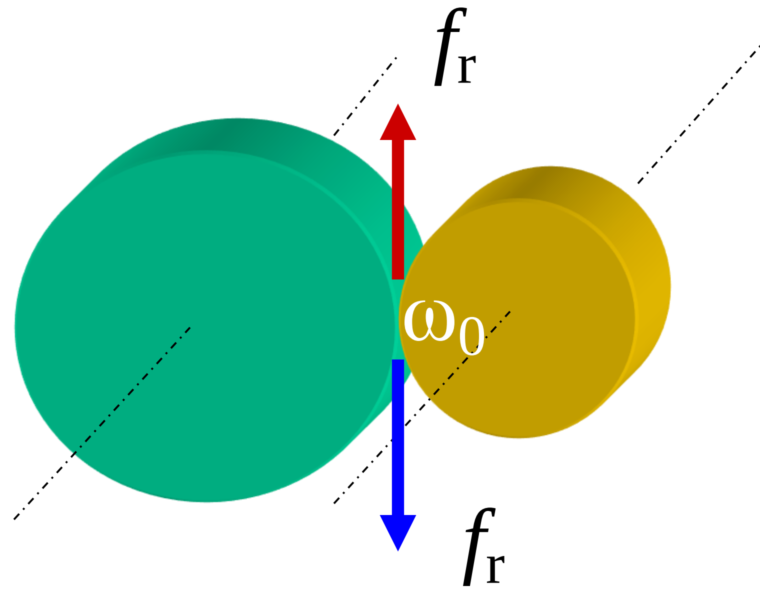
此F的作用点称为打击中心

六、转动圆盘的齿合问题：

同轴



异轴

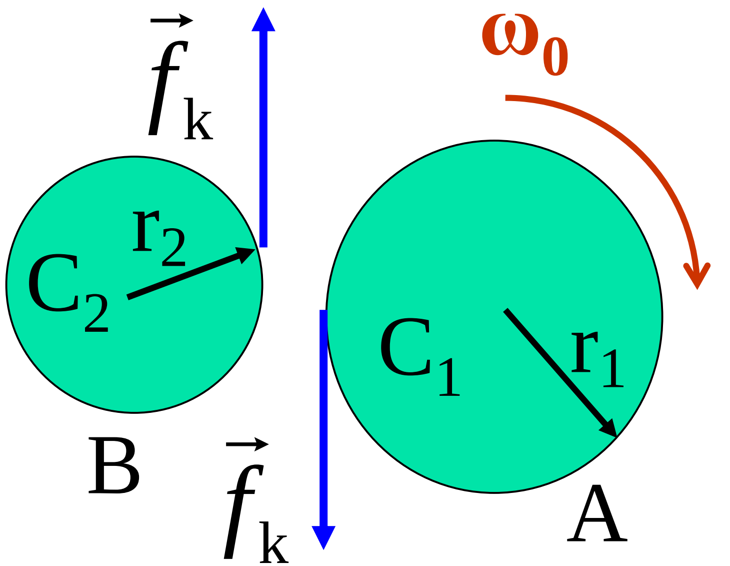


特点：摩擦力的效用　最后达到稳定状态

同轴　$M=0$　角动量守恒　$J_1\omega_{10}+J_2\omega_{20}=(J_1+J_2)\,\omega$

异轴　滑动摩擦力矩的作用，达到稳定态时$v_1=v_2$

例5、如图所示，半径为r_1和r_2的圆柱体A和B（转动惯量分别为J_1和J_2）可以无摩擦地绕自身的轴C_1和C_2转动。最初A的角速度为ω_0，B不转动。现移动B的轴，使B的边缘与A发生接触。由于A、B之间的摩擦力，B也被带着转动起来，最后达到一个稳定的状态（即两者的转动速度不变的状态）。试求此稳定状态下，两圆柱的角速度。

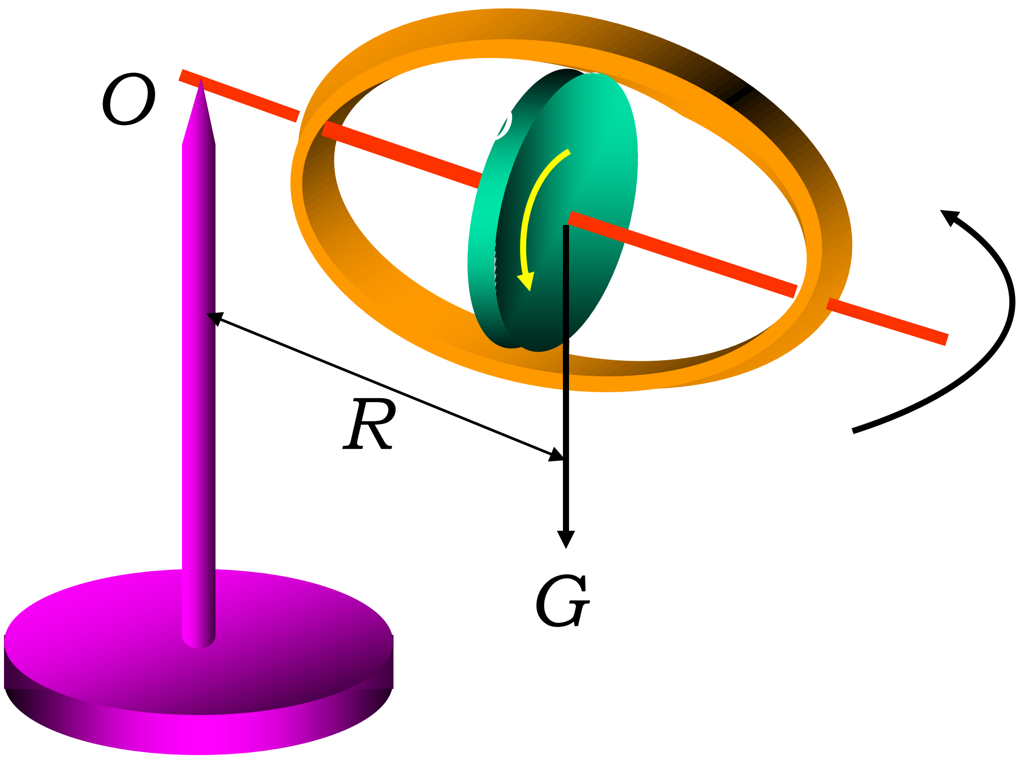


解：达到稳定状态$v_1 = v_2$

$$\omega_A r_1 = \omega_B r_2$$

$$-f_k r_1 \Delta t = J_1 \omega_A - J_1 \omega_0$$

$$f_k r_2 \Delta t = J_2 \omega_B - 0$$



旋进

第四章 振 动

机械振动

—物体围绕某一中心位置作来回往返的运动。

特点： 有平衡点，且具有重复性。

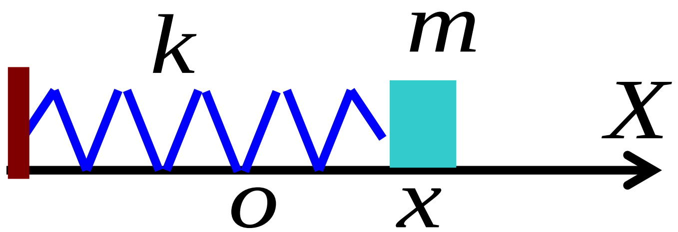
ZD_0

一、简谐振动动力学规律

1、简谐振动的运动方程：

简谐振动 (simple harmonic vibration)

——凡是能以时间的正弦或余弦函数表示的运动都是简谐振动。



$$x(t) = A\cos(\omega \cdot t + \alpha)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega \cdot t + \alpha)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x \propto -x$$

$$x(t) = A\cos(\omega \cdot t + \alpha)$$

——平衡位置的位移

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

取 $\alpha = 0$

$$x(t) = A\cos(\omega \cdot t)$$

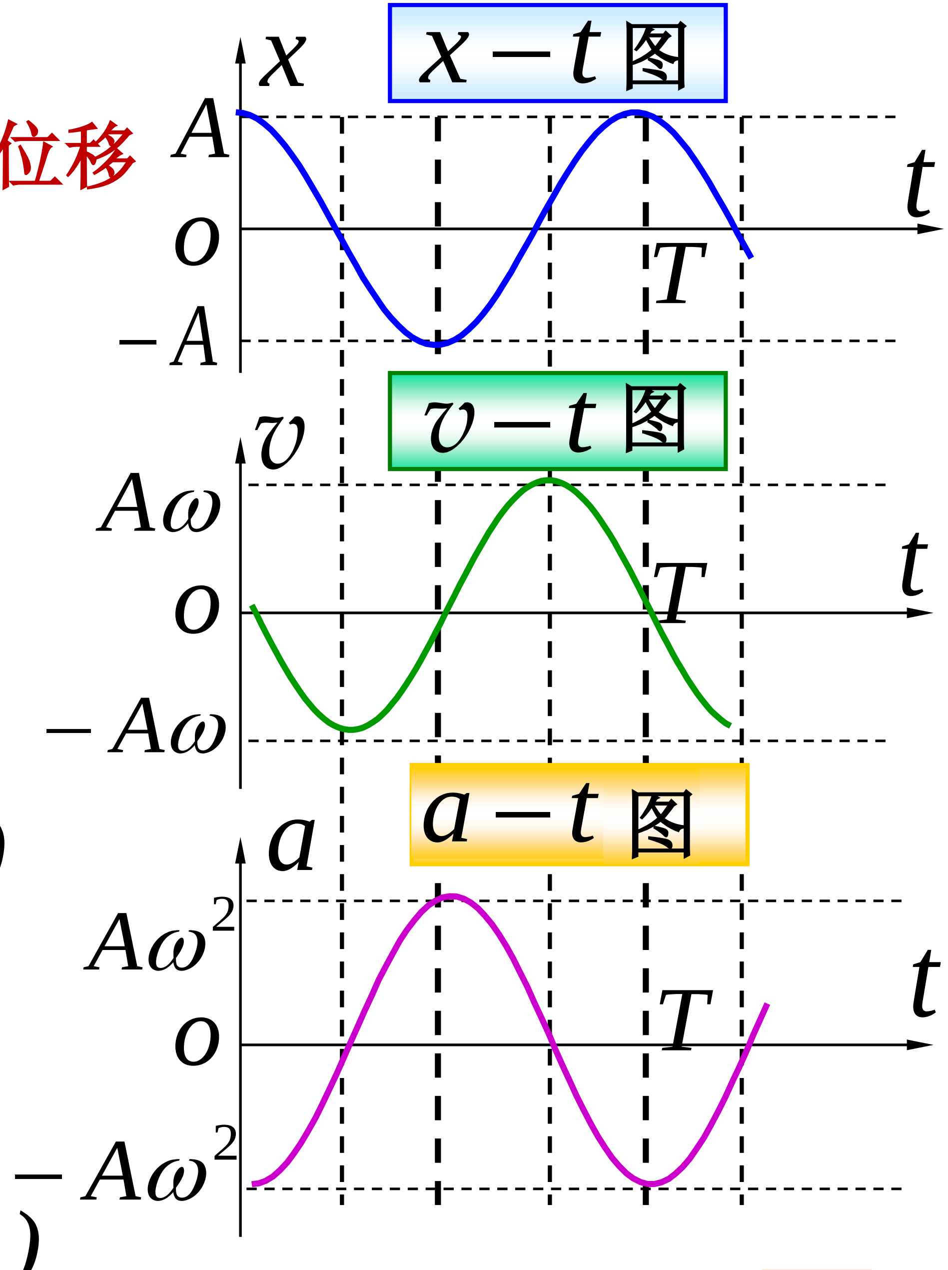
$$v = -A\omega\sin(\omega t)$$

$$= \boxed{A\omega}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

最大值

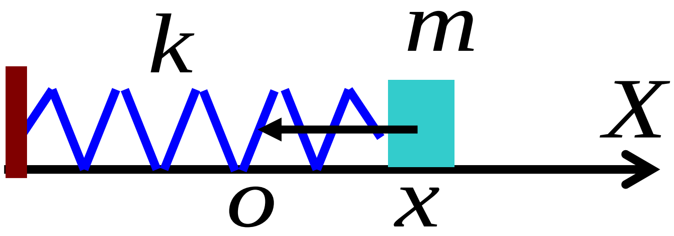
$$a = -A\omega^2\cos(\omega t)$$

$$= \boxed{A\omega^2}\cos(\omega t + \pi)$$



2、动力学规律(常见的简谐振动的装置）：

（1）弹簧振子：



$$-kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

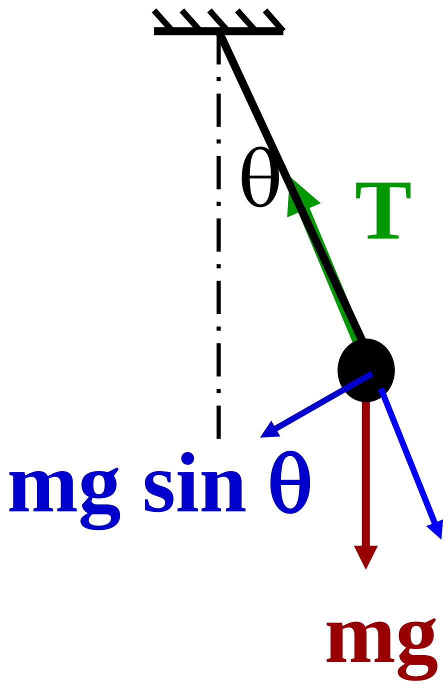
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad 令 \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

——二阶线性齐次的微分方程

通解： $x = A\cos(\omega t + \alpha)$

（2）单摆：



$$-mg\sin\theta = ma_t$$

$$= ml\alpha = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\approx -mg\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (\omega^2 = \frac{g}{l})$$

$$\theta = \theta_m \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha\right)$$

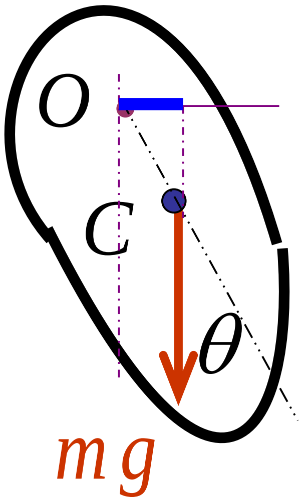
(3)复摆：$(\overline{OC} = b)$

$$-mgb\sin\theta = J\alpha = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\approx -mgb\,\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \boxed{\frac{mgb}{J}}\theta = 0$$

$$\theta = \theta_m \cos\left(\sqrt{\frac{mgb}{J}}t + \alpha\right)$$



总结:

(a) $F \propto -x \ (\theta)$

(b) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \underline{\omega}^2 x = 0$

(c) $x = \underline{A}\cos\underline{(\omega t + \alpha)}$

（1）如何来实现这种证明?

进行受力分析，列出牛顿运动方程或转动定律。

拍皮球是简谐振动吗?

（2）ω（T）是由振动系统所决定的

A 、α 是由初始状态所决定的

$$x = A\cos(\omega t + \alpha)$$

已知 $t = 0$ $\quad x_0 = A\cos\alpha$

$$v_0 = -\omega A\sin\alpha$$

由此可得出：$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$

$$\mathrm{tg}\alpha = -\frac{v_0}{x_0\omega}$$

3、简谐振动的三个基本物理量：

（1）振幅（Amplitude)

—— 振动中最大位移量 **A**

（2） 简谐振动的周期(period)和频率(frequency)

周期T ——完成一次振 动所需的时间

振动频率ν —— 单位时间内振动的次数。 $\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$

$$A\cos(\omega t+\alpha) = A\cos(\omega(t+T)+\alpha)$$

$$= A\cos[\omega t+\omega T+\alpha] = A\cos[\omega t+\alpha+2\pi]$$

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

角频率（或圆频率）ω —单位时间内相位的变化值

（3）简谐振动的相位（phase)

初相位

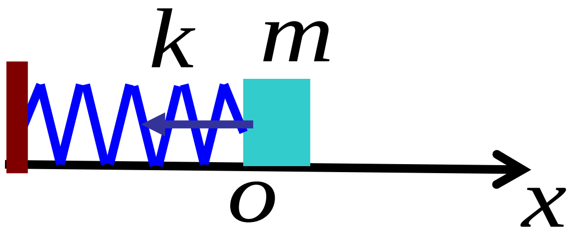
$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega t+\alpha) \\ v(t) = -\omega A\sin(\omega t+\boxed{\alpha}) \end{cases}$$

相位： $\varphi(t) = \omega t+\alpha$ ——决定物体的运动状态

例：物体经过平衡位置

$$x(t)=0 \Rightarrow \cos(\omega t+\alpha)=0$$

$$\omega t+\alpha = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \Rightarrow \quad v=-\omega A \\ \dfrac{3\pi}{2} & \Rightarrow \quad v=\omega A \end{cases}$$



相位在 $0 \sim 2\pi$ 内变化，质点无相同的运动状态；

相差 $2n\pi$ (n为整数)质点运动状态全同.（周期性）

例1、一质点沿x轴作简谐振动，A=0.12m，T=2s。当t=0时，x_0=0.06m，$v_0 > 0$，求：

（1）此简谐振动的表达式；

（2）t=T/4时，质点的位置、速度、加速度；

（3）从初始时刻开始第一次通过平衡位置的时间。

解：(1) $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$

$$x_0 = A\cos\alpha \Rightarrow 0.06 = 0.12\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{3}$$

$$\because v_0 = -A\omega\sin\alpha > 0 \Rightarrow \sin\alpha < 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore x = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})\ (\mathrm{SI})$$

（2） $x\left(\frac{T}{4}\right) = A\cos(\omega t + \varphi) = 0.104\ (\mathrm{m})$

$$v\left(\frac{T}{4}\right) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) = -0.188\ (\mathrm{m/s})$$

$$a\left(\frac{T}{4}\right) = -\omega^2 x = -1.03\ (\mathrm{m/s^2})$$

（3） $x = 0 \Rightarrow 0 = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$

$$\pi t - \frac{\pi}{3} = (2k-1)\frac{\pi}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

$\Rightarrow t = k - \frac{1}{6}$ 第一次通过 $k = 1 \Rightarrow t = \frac{5}{6}\mathrm{s}$