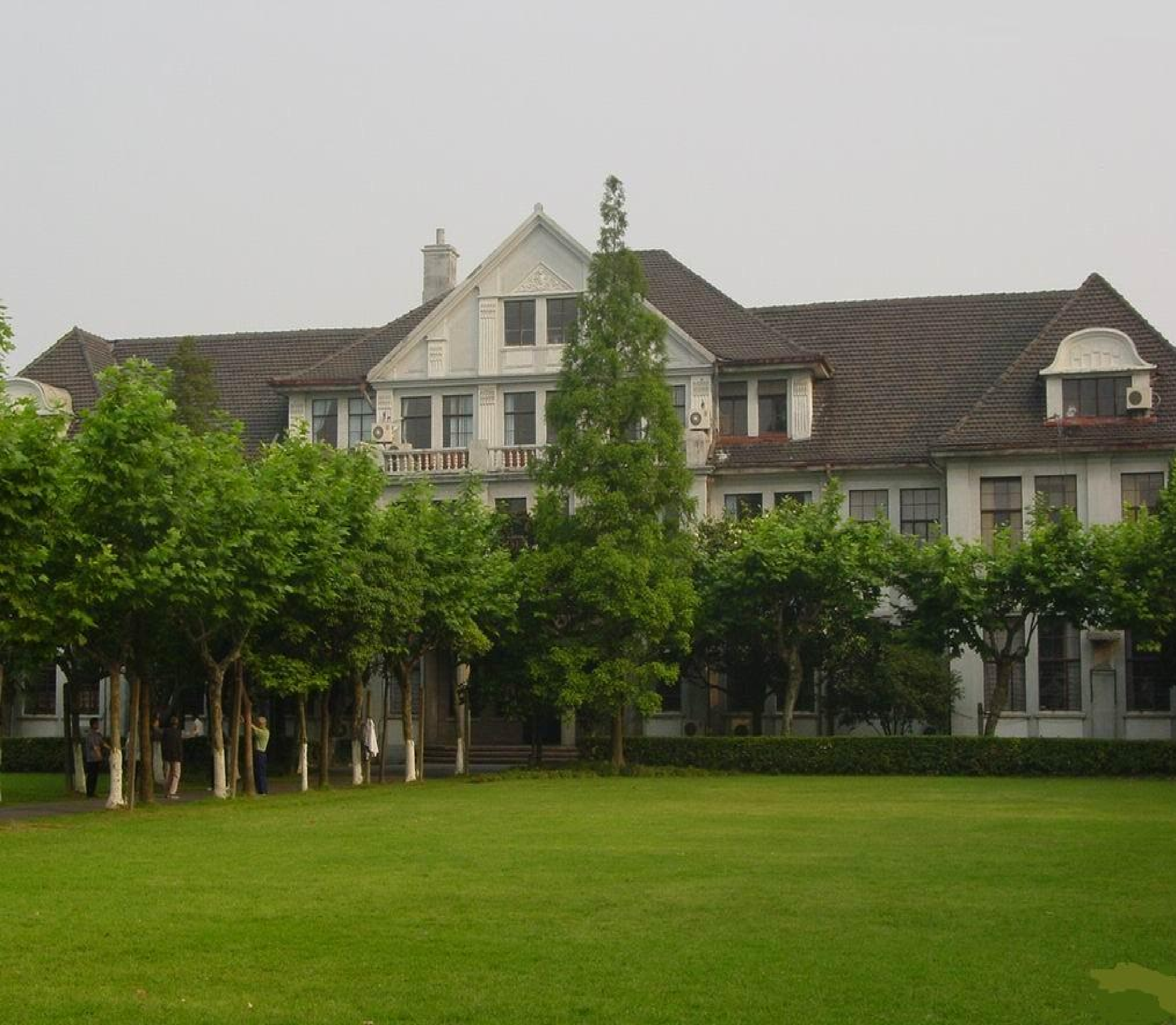

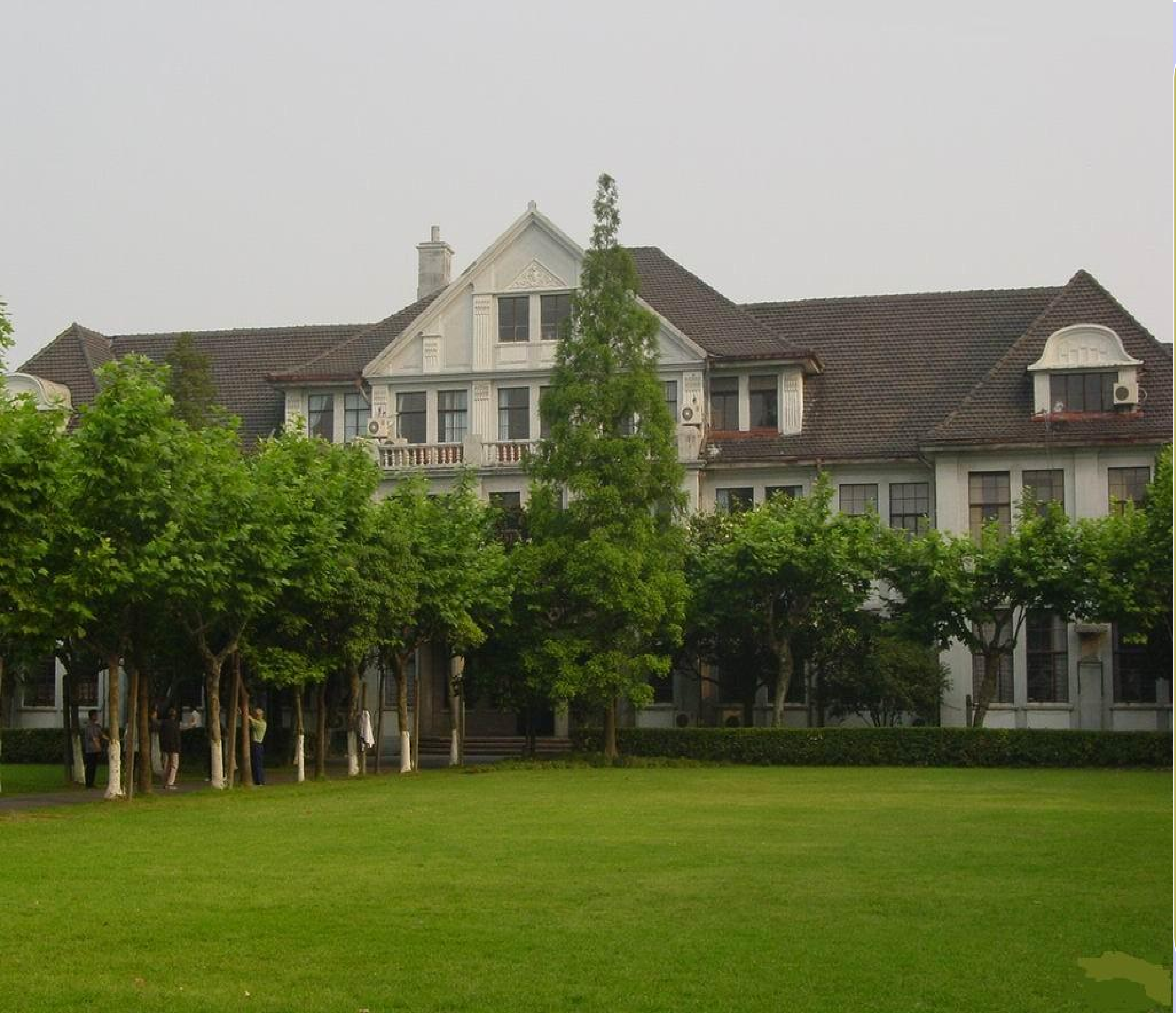

第二章 Fourier级数方法-特征展开法和分离变量法

第二章 Fourier级数方法-特征展开法和分离变量法

- Fourier级数法是求解有界区域上的线性偏微分方程定解问题的基本方法。

第二章 Fourier级数方法-特征展开法和分离变量法

- Fourier级数法是求解有界区域上的线性偏微分方程定解问题的基本方法。
- 数学分析中有幂级数、Fourier级数以及幂级数展开和Fourier级数展开.

第二章　Fourier级数方法-特征展开法和分离变量法

- Fourier级数法是求解有界区域上的线性偏微分方程定解问题的基本方法。
- 数学分析中有幂级数、Fourier级数以及幂级数展开和Fourier级数展开.
- 常微分方程中有幂级数解.

第二章 Fourier级数方法-特征展开法和分离变量法

- Fourier级数法是求解有界区域上的线性偏微分方程定解问题的基本方法。
- 数学分析中有幂级数、Fourier级数以及幂级数展开和Fourier级数展开.
- 常微分方程中有幂级数解.
- 在适当条件下，一个函数可以按照某个函数空间中的函数系（一组基）展开

第二章　Fourier级数方法-特征展开法和分离变量法

- Fourier级数法是求解有界区域上的线性偏微分方程定解问题的基本方法。
- 数学分析中有幂级数、Fourier级数以及幂级数展开和Fourier级数展开.
- 常微分方程中有幂级数解.
- 在适当条件下，一个函数可以按照某个函数空间中的函数系（一组基）展开
- 幂级数展开是按函数系$\{1, x, x^2, x^3, \cdots\}$展开.

第二章　Fourier级数方法-特征展开法和分离变量法

- Fourier级数法是求解有界区域上的线性偏微分方程定解问题的基本方法。
- 数学分析中有幂级数、Fourier级数以及幂级数展开和Fourier级数展开.
- 常微分方程中有幂级数解.
- 在适当条件下，一个函数可以按照某个函数空间中的函数系（一组基）展开
- 幂级数展开是按函数系$\{1, x, x^2, x^3, \cdots\}$展开.
- Fourier级数展开是按函数系$\{\cos n\pi x, \sin n\pi x\}$展开。

第二章　Fourier级数方法-特征展开法和分离变量法

- Fourier级数法是求解有界区域上的线性偏微分方程定解问题的基本方法。
- 数学分析中有幂级数、Fourier级数以及幂级数展开和Fourier级数展开.
- 常微分方程中有幂级数解.
- 在适当条件下，一个函数可以按照某个函数空间中的函数系（一组基）展开
- 幂级数展开是按函数系$\{1, x, x^2, x^3, \cdots\}$展开.
- Fourier级数展开是按函数系$\{\cos n\pi x, \sin n\pi x\}$展开。

- 给定一个二元函数$u(x,t)$,如果对于$t=t_1$, $u(x,t_1)$关于x展开成Fourier级数

$$u(x,t_1)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n(t_1)\cos n\pi x+b_n(t_1)\sin n\pi x)$$

- 给定一个二元函数$u(x,t)$,如果对于$t=t_1, u(x,t_1)$关于x展开成Fourier级数

$$u(x,t_1)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n(t_1)\cos n\pi x+b_n(t_1)\sin n\pi x)$$

- 如果对于任意的$t, u(x,t)$都可以关于x展开成Fourier级数，比如说余弦函数

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t)\cos n\pi x,$$

- 给定一个二元函数$u(x,t)$,如果对于$t=t_1, u(x,t_1)$关于x展开成Fourier级数

$$u(x,t_1)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n(t_1)\cos n\pi x+b_n(t_1)\sin n\pi x)$$

- 如果对于任意的$t, u(x,t)$都可以关于x展开成Fourier级数，比如说余弦函数

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t)\cos n\pi x,$$

- 实际上函数系$\{\cos n\pi x\}_{n=0}^{\infty}$是某个特征值问题的特征函数系，上式是函数$u(x,t)$按照特征函数系$\{\cos n\pi x\}_{n=0}^{\infty}$的展开式

常微分方程的幂级数解法

常微分方程的幂级数解法

- 对于常微分方程的初值问题$\begin{cases} y'' + y' + by = f(x) \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1 \end{cases}$

常微分方程的幂级数解法

- 对于常微分方程的初值问题$\begin{cases} y'' + y' + by = f(x) \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1 \end{cases}$
- 假设$f(x)$可展成幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n,$$

令

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

其中a_n是待定的常数。

常微分方程的幂级数解法

- 对于常微分方程的初值问题$\begin{cases} y'' + y' + by = f(x) \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1 \end{cases}$
- 假设$f(x)$可展成幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n,$$

令

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

其中a_n是待定的常数。

- 将$f(x), y(x)$代入方程，并利用初值条件$a_0 = y_0, a_1 = y_1$，以及

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}+ba_n]x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

- 将$f(x), y(x)$代入方程，并利用初值条件$a_0 = y_0, a_1 = y_1$，以及

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}+ba_n]x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

- 比较x^n的系数

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}+ba_n = f_n, n = 0, 1, 2, \cdots.$$

依次可定出$a_2, a_3, \cdots$

- 对于一个给定的线性偏微分方程的定解问题（齐次边界条件），是否能够找到一个对应的特征函数系$\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$把待求的解$u(x,t)$按照该函数系展开

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x), \tag{2.1.1}$$

- 对于一个给定的线性偏微分方程的定解问题（齐次边界条件），是否能够找到一个对应的特征函数系$\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$把待求的解$u(x,t)$按照该函数系展开

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \qquad (2.1.1)$$

- 然后利用初始条件确定出系数函数$T_n(t)$

- 对于一个给定的线性偏微分方程的定解问题（齐次边界条件），是否能够找到一个对应的特征函数系$\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$把待求的解$u(x,t)$按照该函数系展开

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \tag{2.1.1}$$

- 然后利用初始条件确定出系数函数$T_n(t)$
- 这种求解方法称为特征展开法，或者特征函数展开法

- 对于一个给定的线性偏微分方程的定解问题（齐次边界条件），是否能够找到一个对应的特征函数系$\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$把待求的解$u(x,t)$按照该函数系展开

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x), \tag{2.1.1}$$

- 然后利用初始条件确定出系数函数$T_n(t)$
- 这种求解方法称为特征展开法，或者特征函数展开法

- (2.1.1)实际是一些变量分离形式的函数$T_n(t)X_n(x)$的和

Home Page
Title Page
Page 8 of 19
Go Back
Full Screen
Close
Quit

- (2.1.1)实际是一些变量分离形式的函数$T_n(t)X_n(x)$的和
- 所以我们可以设法求出定解问题(齐次方程和齐次边界条件)的一列具有变量分离形式的特解$X_n(x)T_n(t)$，而后做叠加，再利用初始条件确定出叠加系数，这种方法称为分离变量法

- (2.1.1)实际是一些变量分离形式的函数$T_n(t)X_n(x)$的和
- 所以我们可以设法求出定解问题(齐次方程和齐次边界条件)的一列具有变量分离形式的特解$X_n(x)T_n(t)$，而后做叠加，再利用初始条件确定出叠加系数，这种方法称为分离变量法
- 特征展开法和分离变量法实质上是一回事，通常称他们为Fourier级数方法

- (2.1.1)实际是一些变量分离形式的函数$T_n(t)X_n(x)$的和
- 所以我们可以设法求出定解问题(齐次方程和齐次边界条件)的一列具有变量分离形式的特解$X_n(x)T_n(t)$，而后做叠加，再利用初始条件确定出叠加系数，这种方法称为分离变量法
- 特征展开法和分离变量法实质上是一回事，通常称他们为Fourier级数方法
- Fourier级数方法的理论依据是线性方程的叠加原理和Sturm-Liouville特征原理理论，其基本思想是把偏微分方程的求解问题转化为常微分方程的求解问题

微分方程的解

- **古典解:**如果一个函数具有某偏微分方程中所有需要的各阶连续偏导数，并且代入该方程中能使它变成恒等式，则此函数称为该方程的解，即古典解。

微分方程的解

- **古典解:**如果一个函数具有某偏微分方程中所有需要的各阶连续偏导数，并且代入该方程中能使它变成恒等式，则此函数称为该方程的解，即古典解。
- **通解：** 该偏微分方程所有解的集合.

微分方程的解

- **古典解:**如果一个函数具有某偏微分方程中所有需要的各阶连续偏导数，并且代入该方程中能使它变成恒等式，则此函数称为该方程的解，即古典解。
- **通解：** 该偏微分方程所有解的集合.
- **形式解：**未经过验证的解为形式解.

⋆2.2 预备知识

常系数二阶线性常微分方程地通解

⋆2.2 预备知识

常系数二阶线性常微分方程地通解

给定一个常系数二阶线性常微分方程

$$ay'' + by' + cy = 0$$

⋆2.2 预备知识

常系数二阶线性常微分方程地通解

给定一个常系数二阶线性常微分方程

$$ay'' + by' + cy = 0$$

对应的特征方程$ak^2 + bk + c = 0$有两个根k_1, k_2,根据k_1, k_2的不同情况，有以下结论：

⋆2.2 预备知识

常系数二阶线性常微分方程地通解

给定一个常系数二阶线性常微分方程

$$ay'' + by' + cy = 0$$

对应的特征方程$ak^2 + bk + c = 0$有两个根k_1, k_2,根据k_1, k_2的不同情况，有以下结论：

- (1) 当k_1, k_2为实数且$k_1 \neq k_2$时

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

⋆2.2 预备知识

常系数二阶线性常微分方程地通解

给定一个常系数二阶线性常微分方程

$$ay'' + by' + cy = 0$$

对应的特征方程$ak^2 + bk + c = 0$有两个根k_1, k_2,根据k_1, k_2的不同情况，有以下结论：

- (1) 当k_1, k_2为实数且$k_1 \neq k_2$时

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

- (2)当$k_1 = k_2 = k$为实数时

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{kx};$$

$\star$2.2 预备知识

常系数二阶线性常微分方程地通解

给定一个常系数二阶线性常微分方程

$$ay'' + by' + cy = 0$$

对应的特征方程$ak^2 + bk + c = 0$有两个根k_1, k_2,根据k_1, k_2的不同情况，有以下结论：

- (1) 当k_1, k_2为实数且$k_1 \neq k_2$时

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

- (2)当$k_1 = k_2 = k$为实数时

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{kx};$$

- (3)当$k_1 = \mu + i\nu, k_2 = \mu - i\nu$时

$$y(x) = e^{\mu x}(C_1 \cos \nu x + C_2 \sin \nu x)$$

⋆常数变易法（齐次化原理）

考虑常系数二阶线性非齐次常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} y'' + by' + cy = f, \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1. \end{cases} \tag{1}$$

⋆常数变易法（齐次化原理）

考虑常系数二阶线性非齐次常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} y'' + by' + cy = f, \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1. \end{cases} \tag{1}$$

把它分解成初值问题

$$\begin{cases} x'' + bx' + cx = 0, \\ x(0) = y_0, x'(0) = y_1. \end{cases} \tag{2}$$

和

$$\begin{cases} z'' + bz' + cz = f, \\ z(0) = z'(0) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

⋆常数变易法（齐次化原理）
考虑常系数二阶线性非齐次常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} y'' + by' + cy = f, \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1. \end{cases} \tag{1}$$

把它分解成初值问题

$$\begin{cases} x'' + bx' + cx = 0, \\ x(0) = y_0, x'(0) = y_1. \end{cases} \tag{2}$$

和

$$\begin{cases} z'' + bz' + cz = f, \\ z(0) = z'(0) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

- $y(t)=x(t)+z(t)$就是问题(1)的解。

- $y(t)=x(t)+z(t)$就是问题(1)的解。

- 方程(2)是一个齐次方程的初值问题，可通过齐次方程的通解求出。

- $y(t) = x(t) + z(t)$就是问题(1)的解。

- 方程(2)是一个齐次方程的初值问题，可通过齐次方程的通解求出。

- 对于方程(3)可利用下面的齐次化原理(常数变易法)求出。

定理2.2.1：如果$w(t;\tau)$是齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} w'' + bw' + cw = 0, \\ w(0,\tau) = 0, w'(0,\tau) = f(\tau) \end{cases} \tag{4}$$

的解，其中$\tau > 0$是参数，那么函数

$$z(t) = \int_0^t w(t-\tau;\tau)d\tau$$

是初值问题(3)的解。

定理2.2.1：如果$w(t;\tau)$是齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} w'' + bw' + cw = 0, \\ w(0,\tau) = 0, w'(0,\tau) = f(\tau) \end{cases} \tag{4}$$

的解，其中$\tau > 0$是参数，那么函数

$$z(t) = \int_0^t w(t-\tau;\tau)d\tau$$

是初值问题(3)的解。
证明：直接计算(利用变上限积分求导)

$$z'(t) = w(0;t) + \int_0^t w'(t-\tau;\tau)d\tau = \int_0^t w'(t-\tau;\tau)d\tau$$

$$\begin{aligned} z''(t) &= w'(t-\tau;\tau)|_{\tau=t} + \int_0^t w''(t-\tau;\tau)d\tau \\ &= f(t) + \int_0^t w''(t-\tau;\tau)d\tau \end{aligned}$$

由此得$z(0) = z'(0) = 0$,并且

$$z'' + bz' + cz = f(t) + \int_0^t [w''(t-\tau;\tau) + bw'(t-\tau;\tau) + cw(t-\tau;\tau)]d\tau = f(t)$$

定理得证。

- 如果齐次方程$z'' + bz' + cz = 0$的基本解组是$z_1(t), z_2(t)$,那么问题(4)的解可以写成

$$w(t,\tau) = \frac{z_1(0)z_2(t) - z_2(0)z_1(t)}{z_1(0)z_2'(0) - z_2(0)z_1'(0)} f(\tau).$$

- 如果齐次方程$z'' + bz' + cz = 0$的基本解组是$z_1(t), z_2(t)$,那么问题(4)的解可以写成

$$w(t,\tau) = \frac{z_1(0)z_2(t) - z_2(0)z_1(t)}{z_1(0)z_2'(0) - z_2(0)z_1'(0)} f(\tau).$$

- 从而问题(3)的解可以表示成

$$z(t) = \int_0^t \frac{z_1(0)z_2(t-\tau) - z_2(0)z_1(t-\tau)}{z_1(0)z_2'(0) - z_2(0)z_1'(0)} f(\tau)d\tau$$

. 此公式成为常微分方程的常数变易公式。

⋆2.2.2线性方程的叠加原理

多个因素同时引起的效果等于各个因素分别引起的效果之和，对于线性偏微分方程的定解问题，有以下结论。

⋆2.2.2线性方程的叠加原理

多个因素同时引起的效果等于各个因素分别引起的效果之和，对于线性偏微分方程的定解问题，有以下结论。

定理2.2.2(叠加原理): 设u_i满足线性问题

$$Lu_i = f_i, Bu_i = g_i, i = 1, 2, \cdots$$

其中L, B分别是线性偏微分算子和线性定解条件算子，若级数$\sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$收敛且逐项微分，同时级数$\sum_{i=1}^{\infty} C_i f_i$和$\sum_{i=1}^{\infty} C_i g_i$都收敛，则$u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$是定解问题

$$Lu = \sum_{i=1}^{\infty} C_i f_i, \ \ Bu = \sum_{i=1}^{\infty} C_i g_i$$

的解。

⋆2.2.3正交函数系

定义2.2.1 一列函数$\phi_n(x)$构成的函数系称为在[a,b]上正交，如果

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx \begin{cases} = 0, & n \neq m, \\ \neq 0, & n = m \end{cases}$$

⋆2.2.3正交函数系

定义2.2.1 一列函数$\phi_n(x)$构成的函数系称为在[a,b]上正交，如果

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx \begin{cases} = 0, & n \neq m, \\ \neq 0, & n = m \end{cases}$$

- 一个函数ϕ,若积分$\int_a^b \phi^2(x)dx$存在，则称ϕ平方可积，记为$\phi \in L^2([a,b])$

$\star$2.2.3正交函数系

定义2.2.1 一列函数$\phi_n(x)$构成的函数系称为在[a,b]上正交，如果

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx \begin{cases} = 0, & n \neq m, \\ \neq 0, & n = m \end{cases}$$

- 一个函数ϕ,若积分$\int_a^b \phi^2(x)dx$存在，则称ϕ平方可积，记为$\phi \in L^2([a,b])$
- 数$\|\phi\|_2 = (\int_a^b \phi^2(x)dx)^{1/2}$称为$\phi$在$L^2([a,b])$中的范数.

$\star$2.2.3正交函数系

定义2.2.1 一列函数$\phi_n(x)$构成的函数系称为在[a,b]上正交，如果

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx \begin{cases} =0, & n \neq m, \\ \neq 0, & n = m \end{cases}$$

- 一个函数ϕ,若积分$\int_a^b \phi^2(x)dx$存在，则称ϕ平方可积，记为$\phi \in L^2([a,b])$
- 数$\|\phi\|_2 = (\int_a^b \phi^2(x)dx)^{1/2}$称为$\phi$在$L^2([a,b])$中的范数.
- 一个正交函数系$\{\phi_n\}$,若满足$\|\phi_n\|_2 = 1, n = 1, 2\cdots$,则称$\{\phi\}$为标准正交系.所有的正交系都可以标准化.

$\star$2.2.3正交函数系

定义2.2.1 一列函数$\phi_n(x)$构成的函数系称为在[a,b]上正交，如果

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx \begin{cases} = 0, & n \neq m, \\ \neq 0, & n = m \end{cases}$$

- 一个函数ϕ,若积分$\int_a^b \phi^2(x)dx$存在，则称ϕ平方可积，记为$\phi \in L^2([a,b])$
- 数$\|\phi\|_2 = (\int_a^b \phi^2(x)dx)^{1/2}$称为$\phi$在$L^2([a,b])$中的范数.
- 一个正交函数系$\{\phi_n\}$,若满足$\|\phi_n\|_2 = 1, n = 1, 2\cdots$,则称$\{\phi\}$为标准正交系.所有的正交系都可以标准化.

- 函数系$\{\phi_n\}$在(a,b)上称为带权函数$r(x)$正交，如果

$$\int_a^b r(x)\phi_n(x)\phi_m(x)dx \begin{cases} =0, & n\neq m, \\ \neq 0, & n=m \end{cases}$$

- 函数系$\{\phi_n\}$在(a,b)上称为带权函数$r(x)$正交，如果

$$\int_a^b r(x)\phi_n(x)\phi_m(x)dx \begin{cases} = 0, & n \neq m, \\ \neq 0, & n = m \end{cases}$$

- 正交函数系$\{\phi_n\}$称为完备的,如果对每一个$f \in L^2[a,b]$,由

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx = 0, n = 1, 2, \cdots$$

可推出$f = 0 (f \equiv 0)$

定理2.2.3如果正交函数系$\{\phi_n\}$是完备的，那么对每一个$f \in L^2([a,b])$,有展开式

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n \phi_n(x),$$

定理2.2.3如果正交函数系$\{\phi_n\}$是完备的，那么对每一个$f \in L^2([a,b])$,有展开式

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n \phi_n(x),$$

其中

$$C_n = \frac{1}{\|\phi_n\|_2^2} \int_a^b f(x)\phi_n(x)dx, n = 1, 2, \cdots$$

同时还成立

定理2.2.3如果正交函数系$\{\phi_n\}$是完备的，那么对每一个$f \in L^2([a,b])$,有展开式

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n \phi_n(x),$$

其中

$$C_n = \frac{1}{\|\phi_n\|_2^2} \int_a^b f(x)\phi_n(x)dx, n = 1, 2, \cdots$$

同时还成立

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \|\phi_n\|_2^2,$$

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b |f(x) - \sum_{n=1}^{m} C_n\phi_n(x)|^2 dx = 0$$

C_n称为f的Fourier系数.如果$\{\phi_n\}$是完备的标准正交系，则成立Parseval等式

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2$$