第三章　随机向量及其函数的概率分布

内容提要

（一）基本概念

1．设$\{\xi_i(\omega)\}\quad i=1,2,\cdots,n$是定义在同一个概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的$n$个随机变量，则称

$\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\cdots,\xi_n(\omega))$为$n$维**随机向量**或$n$维**随机变量**

2．对任意实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，称函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{\xi_1\le x_1,\xi_2\le x_2,\cdots,\xi_n\le x_n\}$$

为随机向量ξ的**（联合）分布函数**

（二）二维随机向量

1．离散型随机向量

联合概率分布　　$p_{ij}=P\{\xi=x_i,\eta=y_j\}$，$i,\ j=1,2,\cdots$

或表格形式

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$					

性质：(1)非负性：$p_{ij}\ge 0$；

(2)规范性：$\sum_{i,\ j=1}^{+\infty}p_{ij}=1$。

2. 连续型随机向量

联合概率密度函数　　$p(x,y)$

性质：(1)非负性：$p(x,y)\ge 0$；

(2)规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(u,v)dudv=1$

（三）边际分布

1．离散型随机向量

$$P(\xi=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}\ ,\qquad P(\eta=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}$$

2. 连续型随机向量

$$F_{\xi}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,v)dv\ ,\quad F_{\eta}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(u,y)du$$

3. 联合分布函数 $F\ (x, y)$，则其边际分布函数为：

$$F_{\xi}(x)==F(x,+\infty),\qquad F_{\eta}(y)=F(+\infty,y)$$

（四）条件分布

1. 离散型随机向量

在事件$(\xi=x_i)$ 发生条件下，事件（η=y_j)发生的条件概率分布为

$$P(\eta=y_j\mid\xi=x_i)=\frac{P(\xi=x_i,\eta=y_j)}{P(\xi=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}\qquad,\quad j=1,2,\cdots$$

2. 连续型随机向量

在事件$(\xi=x_i)$ 发生条件下，事件（η=y_j)发生的条件概率密度为

$$p_{\eta|\xi}(y\mid x)=\frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_{\xi}(x)}\qquad\qquad (p_{\xi}(x)\neq 0)$$

（五）随机向量的独立性

设$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$为$n$维随机向量，若对任意的实数$x_1, x_2$，，$x_n$成立

$$F_{\xi_1\cdots\xi_n}(x_1,x_2,\cdots x_n)=F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2)\cdots F_{\xi_n}(x_n)=\prod_{i-1}^{n}F_{\xi_I}(x_i)$$

则称$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$间是相互独立的。

1. 离散型随机向量

$$P\{\xi_1=x_1,\xi_2=x_2\}=P(\xi_1=x_1)P(\xi_2=x_2)$$

或者

$$P\{\xi_1=x_1\mid\xi_2=x_2\}=P(\xi_1=x_1)$$

2. 连续型随机向量

$p(x,y)=p(x)p(y)$；

或者

$$p_{\xi|\eta}(x,y)=p_{\xi}(x),\quad p_{\eta|\xi}(y,x)=p_{\eta}(y).$$

（五）分布函数的性质

1. 固定 y（或 x）后，对于 x（或 y），函数 $F(x, y)$ 是一维的非降函数。

2. 固定 y（或 x）后，对于 x（或 y），函数 $F(x, y)$ 是一维的右连续函数。

3. 对任意的 x 或 y，函数 $F(x, y)$ 具有如下的“0－1”性：

$$F(-\infty, y)=\lim_{x\to-\infty}F(x, y)=0,$$

$$F(x, -\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x, y)=0,$$

$$F(-\infty, +\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x, y)=1。$$

4.联合分布和边际分布的关系

(1) 联合分布决定边际分布；边际分布不一定能决定联合分布;

(2) 边际分布加上条件分布或独立性等可决定联合分布.

（六）多维随机向量的数字特征

1. 二维随机向量的期望与方差

（1）离散型

设 (ξ,η) 的联合概率分布为 $p(x_i,y_j)$，则

$$E\xi=\sum_i\sum_j x_i p(x_i,y_j)=\sum_i x_i p_{\xi}(x_i)$$

$$E\eta=\sum_i\sum_j y_j p(x_i,y_j)=\sum_j y_j p_{\eta}(y_j)$$

$$D\xi=\sum_i\sum_j (x_i-E\xi)^2 p(x_i,y_j)=\sum_i (x_i-E\xi)^2 p_{\xi}(x_i)$$

$$D\eta=\sum_i\sum_j (y_j-E\eta)^2 p(x_i,y_j)=\sum_j (y_j-E\eta)^2 p_{\eta}(y_j)$$

（2）连续型

设 (ξ,η) 的联合概率密度为 $p(x,y)$，则

$$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} xp_{\xi}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$E\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yp(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} yp_{\eta}(y)\,\mathrm{d}y$$

$$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-E\xi)^2 p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-E\xi)^2 p_{\xi}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$D\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(y-E\eta)^2 p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}(y-E\eta)^2 p_\eta(y)\,\mathrm{d}y$$

2. 二维随机向量函数的数学期望

离散型 $Ef(\xi,\eta)=\sum_i\sum_j f(x_i,y_j)p(x_i,y_j)$

连续型 $Ef(\xi,\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

3. 多维随机向量的期望与方差的性质

（1）$E\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{n}c_iE\xi_i$，其中$c_1,c_2,\cdots,c_n$为常数。

（2）当ξ与η独立时，有

$$E(\xi\eta)=E\xi E\eta,$$
$$E\left[f(\xi)g(\eta)\right]=Ef(\xi)Eg(\eta)$$

一般地当$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$独立时，有$E\left(\prod_{i=1}^{n}\xi_i\right)=\prod_{i=1}^{n}E\xi_i$

（3）当ξ与η独立时，有

$$D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta,$$
$$D(\xi\eta)=D\xi D\eta+(E\eta)^2D\xi+(E\xi)^2D\eta$$

一般地当$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$独立时，有$D\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{n}c_i^{\,2}D\xi_i$

（七） 矩与相关系数

1. ξ的原点矩与中心矩

ξ的k阶原点矩：$\mu_k=E\xi^k$

ξ的k阶中心矩：$\nu_k=E(\xi-E\xi)^k$

显然，$E\xi$是ξ的一阶原点矩，$D\xi$是ξ的二阶中心矩。

2. ξ与η的协方差（相关矩）

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)=E(\xi\eta)-E\xi E\eta$$

显然，$\mathrm{cov}(\xi,\xi)=D\xi,\mathrm{cov}(\eta,\eta)=D\eta$。

称$\begin{bmatrix}D\xi & \mathrm{cov}(\xi,\eta)\\ \mathrm{cov}(\eta,\xi) & D\eta\end{bmatrix}$为$\xi$与$\eta$的协方差矩阵。

3. ξ与η的相关系数

$$\rho_{\xi\eta}=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}=\frac{E(\xi\eta)-E\xi E\eta}{\sqrt{D\xi D\eta}}$$

当$\rho_{\xi\eta}=0$时，称ξ与η不相关。

4. 协方差的性质

（1）$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\operatorname{cov}(\eta,\xi)$

（2）$\operatorname{cov}(a\xi+b,c\eta+d)=ac\operatorname{cov}(\xi,\eta)$

（3）$\operatorname{cov}(\xi+\eta,\zeta)=\operatorname{cov}(\xi,\zeta)+\operatorname{cov}(\eta,\zeta)$

（4）$E(\xi\eta)=E\xi E\eta+\operatorname{cov}(\xi,\eta)$

（5）$D(\xi\pm\eta)=D\xi+D\eta\pm 2\operatorname{cov}(\xi,\eta)$

5. 相关系数的性质

（1）$|\rho_{\xi\eta}|\le 1$

（2）$|\rho_{\xi\eta}|=1\Leftrightarrow P\{a\xi+b\}=1,\ a,b$为常数，$a\ne 0$，且$\rho_{\xi\eta}=\begin{cases}1 & a>0\\ -1 & a<0\end{cases}$

（3）ξ与η不相关$\Leftrightarrow \operatorname{cov}(\xi,\eta)=0\Leftrightarrow E(\xi\eta)=E\xi E\eta\Leftrightarrow D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$

（4）当ξ与η独立时，必有$\rho_{\xi\eta}=0$即ξ与η不相关。但反之不然。

仅当(ξ,η)服从二维正态分布时，ξ与η独立和ξ与η不相关等价。

（八）随机变量函数的分布

1.一维随机变量函数的分布

（1）离散型随机变量的函数的分布

设随机变量ξ的概率分布为$P\{\xi=x_i\}=p_i,i=1,2,\cdots$。若$\eta=f(\xi)$，$\eta$的取值为$y_j,j=1,2,\cdots$，则$\eta$的概率分布$P\{\eta=y_j\}=\sum\limits_{f(x_i)=y_j}P\{\xi=x_i\}$。

（2）连续型随机变量的函数的分布

设ξ是连续型随机变量，它的概率密度为$p(x)$，若$f(x)$是连续可导函数，则$\eta=f(\xi)$仍是连续型随机变量，求η的分布的通常步骤为：

①求出η的值域；

②求出η的分布函数

$$F_\eta(y)=P\{\eta\le y\}=P\{f(\xi)\le y\}=P\{\xi\in B_y\}=\int_{B_y}p(x)\,\mathrm{d}\,x$$

其中$B_y=\{x: f(x)\le y\}$是ξ的值域上一集合，通常为区间或若干区间之并，而$F_\eta(y)$通常是分段函数。

③求出η的概率密度$p_\eta(y)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}F_\eta(y)$。

特别当$y=f(x)$是严格单调的可微函数时，若ξ的概率密度在（a，b）内取$p_\xi(x)$，在其他点处（若有的话）取 0，则$\eta=f(\xi)$的概率密度为

$$p_\eta(y)=\begin{cases} p_\xi[f^{-1}(y)]\left|\left[f^{-1}(y)\right]'\right| & \alpha<y<\beta \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中$\alpha=\min\{f(a),f(b)\},\beta=\max\{f(a),f(b)\}$。

注（正态随机变量线性函数的分布）若$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$\eta=a\xi+b(a\ne 0)$ $\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$。特别地$\eta=\dfrac{\xi-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$。

2. 多维随机变量函数的分布

（1） 一般方法（连续型）：

设二维连续型随机变量（ξ,η）有联合概率密度$p(x,y)$，当$f(x,y)$可微时，$\zeta=f(\xi,\eta)$仍是连续型随机变量，求ζ的分布的通常步骤为：

①求出ζ的取值范围；

②求出ζ的分布函数

$$F_\zeta(z)=P\{\zeta\le z\}=P\{f(\xi,\eta)\le z\}=P\{(\xi,\eta)\in D_z\}=\iint\limits_{D_z}p(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

其中$D_z=\{(x,y)\big|f(x,y)\le z\}$。

③求出ζ的概率密度$p_\zeta(z)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}F_\zeta(z)$。

（2）和$\zeta=\xi+\eta$的分布：

①（ξ,η）是离散型随机变量，其概率分布为$P\{\xi=x_i,\eta=y_j\}=p_{ij}$，

(i，j=1,2,⋯)，则ζ的概率分布$P\{\zeta=z_k\}=P\{\xi+\eta=z_k\}=\sum\limits_{x_i+y_j=z_k}p_{ij}$，（$k$=1，2，⋯）。

②（ξ,η）是连续型随机变量，其概率密度为 $p(x,y)$，则 ζ 的概率密度

$$p_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)\,\mathrm{d}\,x=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z-y,y)\,\mathrm{d}\,y \qquad \text{（卷积公式）}$$

当 ξ 与 η 相互独立时有

$$p_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_\xi(x)p_\eta(z-x)\,\mathrm{d}\,x=\int_{-\infty}^{+\infty}p_\xi(z-y)p_\eta(y)\,\mathrm{d}\,y$$

③常用结论：

当 ξ 与 η 相互独立时，则下列结论成立

若 $\xi\sim b(n_1,p),\eta\sim b(n_2,p)$，则 $\zeta=\xi+\eta\sim b(n_1+n_2,p)$；

若 $\xi\sim P(\lambda_1),\eta\sim P(\lambda_2)$，则 $\zeta=\xi+\eta\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$；

若 $\xi\sim N(\mu_1,{\sigma_1}^2),\eta\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $\zeta=\xi+\eta\sim N(\mu_1+\mu_2,{\sigma_1}^2+\sigma_2^2)$；

更一般地，若 $\xi_i\sim N(\mu_i,{\sigma_i}^2),(i=1,2,\cdots,n)$ 且相互独立， $c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是常数，则

$$\sum_{i=1}^{n}c_i\xi_i\sim N(\sum_{i=1}^{n}c_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n}{c_i}^2{\sigma_i}^2)$$

也就是说，服从正态分布的独立随机变量的线性组合仍服从正态分布。

(3)$U=\max\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\},V=\min\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ 的分布：

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立，则随机变量 U，V 的分布函数分别为

$$F_U(x)=\prod_{i=1}^{n}F_{\xi_i}(x),F_V(x)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_{\xi_i}(x))$$

特别地，如果连续型随机变量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 独立同分布， ξ_i 的分布函数和概率密度分别设为 $F(x)$ 和 $p(x)$，则

$$F_U(x)=\left[F(x)\right]^n,F_V(x)=1-\left[1-F(x)\right]^n$$

$$p_U(x)=n\left[F(x)\right]^{n-1}p(x),p_V(x)=n\left[1-F(x)\right]^{n-1}p(x)$$

(4)商 $\zeta=\dfrac{\xi}{\eta}$ 的分布：

若（ξ,η）是连续型随机变量，其概率密度为 $p(x,y)$，则 ζ 的概率密度为

$$p_{\zeta}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|p(yz,y)dy$$

当ξ与η相互独立时 $p_{\zeta}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|p_{\xi}(yz)p_{\eta}(y)dy$。