第 9 章（之 1） （总第 44 次）

教学内容: § 9.1 微分方程基本概念

*1． 微分方程 $2(y'')^3 - 9y'y''' = 5xy^7$ 的阶数是 （ ）

（A）3； （B）4； （C）6； （D）7．

答案（A）

解 微分方程的阶数是未知函数导数的最高阶的阶数．

*2． 下列函数中的 C、α、λ 及 k 都是任意常数，这些函数中是微分方程 $y'' + 4y = 0$ 的通解的函数是 （ ）

（A） $y = 3C\cos 2x + (12 - 29C)\sin 2x$； （B） $y = C\cos 2x(1 + \lambda\sin 2x)$；

（C） $y = kC\cos 2x + \sqrt{1 + k^2C^2}\sin 2x$； （D） $y = C\cos(2x + \alpha)$．

答案 （D）

解 二阶微分方程的通解中应该有两个独立的任意常数．

（A）中的函数只有一个任意常数 C；

（B）中的函数虽然有两个独立的任意常数，但经验算它不是方程的解；

（C）中的函数从表面上看来也有两个任意常数 C 及 k，但当令 $\overline{C} = kC$ 时，函数就变成了

$y = \overline{C}\cos 2x + \sqrt{1 + \overline{C}^2}\sin 2x$，实质上只有一个任意常数；

（D）中的函数确实有两个独立的任意常数，而且经验算它也确实是方程的解．

*3．在曲线族 $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ 中，求出与直线 $y = x$ 相切于坐标原点的曲线．

解 根据题意条件可归结出条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$，

由 $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$， $y' = c_1e^x - c_2e^{-x}$，可得 $c_1 + c_2 = 0, c_1 - c_2 = 1$，

故 $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -\frac{1}{2}$，这样就得到所求曲线为 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$，即 $y = \sinh x$．

*4．证明：函数 $y = \frac{2}{3}\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ 是初值问题 $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0 \\ y|_{x=0} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=0} = 1 \end{cases}$ 的解．

证明 $y' = -\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$，

$$y'' = -\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x - e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

代入方程得 $y'' + y' + y = 0$，　　此外 $y(0) = 0$，$y'(0) = 1$，

故 $y = \frac{2}{3}\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ 是初始值问题的解.

*5．验证 $y = e^x\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t + Ce^x$（其中 C 为任意常数）是方程 $y' - y = e^{x+x^2}$ 的通解.

证明　$y' = e^x\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t + e^x\cdot e^{x^2} + Ce^x = y + e^{x+x^2}$，即 $y' - y = e^{x+x^2}$，说明函数确实给定方程的解.

另一方面函数 $y = e^x\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t + Ce^x$ 含有一任意常数 C，所以它是方程的通解.

**6．求以下列函数为通解的微分方程：

（1）$y = \sqrt[3]{Cx+1}$；

解　将等式 $y = \sqrt[3]{Cx+1}$ 改写为 $y^3 = Cx + 1$，再在其两边同时对 x 求导，得 $3y^2y' = C$，代入上式，即可得到所求之微分方程为 $3xy^2y' = y^3 - 1$.

（2）$y = C_1x + \frac{C_2}{x}$.

解　因为给定通解的函数式中有两个独立的任意常数，所以所求方程一定是二阶方程，在方程等式两边同时对 x 求两次导数，得

$$y' = C_1 - \frac{C_2}{x^2},\quad y'' = \frac{2C_2}{x^3}.$$

从以上三个式子中消去任意常数 C_1 和 C_2，即可得到所求之微分方程为

$$x^2y'' + xy' - y = 0.$$

**7．建立共焦抛物线族 $y^2 = 4C(x+C)$（其中 C 为任意常数）所满足的微分方程［这里的共焦抛物线族是以 x 轴为对称轴，坐标原点为焦点的抛物线］.

解　在方程 $y^2 = 4C(x+C)$ 两边对 x 求导有 $2yy' = 4C$，从这两式中消去常数所求方程为 $y = y'(2x + yy')$.

**8．求微分方程，使它的积分曲线族中的每一条曲线 $y=y(x)$ 上任一点处的法线都经过坐标原点．

解 任取 $y=y(x)$ 上的点 (x,y)，曲线在该点处的切线斜率为 $y'=\dfrac{dy}{dx}$.

所以过点 (x,y) 的法线斜率为 $\dfrac{-1}{y'}$， 法线方程为 $Y-y=\dfrac{-1}{y'}(X-x)$，

因为法线过原点，所以 $0-y=\dfrac{-1}{y'}(0-x)$ 从而可得所求微分方程为 $x+yy'=0$.

第 9 章（之 2）（总第 45 次）

教学内容： §9.2 .1 可分离变量的方程； §9.2 .2 一阶线性方程

**1．求下列微分方程的通解：

（1）$y'=\dfrac{x(1-y)}{1+x^2}$；

解： 分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{1-y}=\dfrac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}$，两边积分 $\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}y}{1-y}=\int\dfrac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}$，

得 $-\ln(1-y)=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln C$，即 $y=1-\dfrac{C}{\sqrt{1+x^2}}$.

（2）$y'=\dfrac{x}{2y}e^{2x-y^2}$；

解： 分离变量 $2ye^{y^2}\mathrm{d}y=xe^{2x}\mathrm{d}x$，两边积分就得到了通解

$$e^{y^2}=\frac{1}{2}(xe^{2x}-\int e^{2x}\mathrm{d}x)=\frac{1}{2}(xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x})+c.$$

（3）$(2x+1)e^y y'+2e^y-4=0$.

解： $\dfrac{e^y\,\mathrm{d}\,y}{2e^y-4}=-\dfrac{\mathrm{d}\,x}{2x+1}$， $\dfrac{1}{2}\ln(e^y-2)=-\dfrac{1}{2}\ln(2x+1)+\dfrac{1}{2}\ln C$，

即 $(e^y-2)(2x+1)=C$.

**2．试用两种不同的解法求微分方程 $y'=1-x-y+xy$ 的通解.

解法一　（可分离变量方程的分离变量法）这是一个一阶可分离变量方程，同时也是一个一阶线性非齐次方程，这时一般作为可分离变量方程求解较为容易.

分离变量，$y'=(1-x)(1-y)$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{1-y}=(1-x)\mathrm{d}x$，并积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{1-y}=\int(1-x)\mathrm{d}x$

得 $-\ln(1-y)=x-\dfrac{1}{2}x^2+c$，所求通解为 $y=1+ce^{\frac{1}{2}x^2-x}$.

解法二　（线性方程的常数变易法）将原方程改写为 $y'+(1-x)y=1-x$，这是一个一阶线性非齐次方程.

对应的齐次方程为 $y'+(1-x)y=0$，其通解为① $y=\overline{C}e^{\frac{1}{2}x^2-x}$.

代入原非齐次方程得 $\overline{C}'e^{\frac{1}{2}x^2-x}=1-x$，解得② $\overline{C}=e^{x-\frac{1}{2}x^2}+C$，②代入①即可得原方程的通解

$$y=1+Ce^{\frac{1}{2}x^2-x}.$$

*3．求解下列初值问题：

（1）$y'=\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}$，$y(\dfrac{1}{2})=-e^{\frac{\pi}{6}}$.

解：$\because\ y'=\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}$，$\therefore\ \dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$　$(y\neq 0)$，　$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$，

$\therefore\ \ln y=\arcsin x+C$，　$\therefore\ \ y=Ce^{\arcsin x}$，

$\because\ y(\dfrac{1}{2})=-e^{\frac{6}{\pi}}$，$\therefore -e^{\frac{6}{\pi}}=Ce^{\arcsin\frac{1}{2}}$，$\therefore C=-1$，　$\therefore\ \ y=-e^{\arcsin x}$.

（2）$y'+2xy=e^{-x^2}$，$y(0)=1$；

解：　$\because\ y'+2xy=e^{-x^2}$，　　$\therefore\ p(x)=2x$，$q(x)=e^{-x^2}$，

$$\therefore y(x)=e^{-\int 2x\mathrm{d}x}\left[\int e^{-x^2}e^{\int 2x\mathrm{d}x}dx+C\right]=e^{-x^2}\left[\int e^{-x^2}e^{\int 2x\mathrm{d}x}dx+C\right]=xe^{-x^2}+Ce^{-x^2},$$

$\because\ \ y(0)=1$，　$\therefore 1=0+c\Rightarrow c=1$，　　$\therefore\ y=(x+1)e^{-x^2}$.

（3） $y'+y\cot x=e^{\cos x}$， $y(\frac{\pi}{2})=1$ ；

解： $\because$ $y'+y\cot x=e^{\cos x}$， $\therefore P(x)=\cot x$， $Q(x)=e^{\cos x}$.

$$\therefore \quad y=\mathrm{e}^{-\int\cot x\mathrm{d}x}\left[C+\int\mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{e}^{\int\cot x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]=\mathrm{e}^{-\ln\sin x}(C+\int\mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{e}^{\ln\sin x}\mathrm{d}x)$$

$$=\csc x(C+\int\mathrm{e}^{\cos x}\sin x\mathrm{d}x)=(C-\mathrm{e}^{\cos x})\csc x,$$

由 $y(\frac{\pi}{2})=1$， 可确定 $C=2$，所以 $y=(2-\mathrm{e}^{\cos x})\csc x$.

（4） $x^2\,\mathrm{d}\,y+(2xy-x+1)\,\mathrm{d}\,x=0$， $y\big|_{x=1}=0$.

解： 方程变形为 $y'+\frac{2}{x}y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$，是一阶线性非齐次方程，其通解为

$$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left[c+\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})e^{\int\frac{2}{x}dx}dx\right]$$

$$=\frac{1}{x^2}\left[c+\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})x^2dx\right]=\frac{1}{x^2}\left[c+\frac{1}{2}x^2-x\right]=\frac{c}{x^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{x}$$

由 $y(1)=0$， 得 $c=\frac{1}{2}$， 所以特解为： $y=\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{x}$.

**4．求微分方程 $y\ln y\,\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0$ 的通解（提示将 x 看作是 y 的函数）.

解：将 x 看作是 y 的函数，原方程可化为 $\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y\ln y}x=\frac{1}{y}$，这是一阶线性方程，将其中

$P(y)=\frac{1}{y\ln y}$， $Q(y)=\frac{1}{y}$ 代入一阶线性方程求解公式，得通解

$$x=e^{-\int\frac{1}{y\ln y}dy}\left[c+\int\frac{1}{y}e^{\int\frac{1}{y\ln y}dy}dy\right]=\mathrm{e}^{-\ln(\ln y)}\left[c+\int\frac{1}{y}e^{\ln(\ln y)}dy\right]$$

$$=\frac{1}{\ln y}\left[c+\int\frac{\ln y}{y}dy\right]=\frac{c}{\ln y}+\frac{1}{2}\ln y\,.$$

**5．求满足关系式$\int_{\sqrt{2}}^{x} uy(u)\,\mathrm{d}u = x^2 + y(x)$的可导函数$y(x)$.

解：这是一个积分方程，在方程等式两边同对x求导，可得微分方程$xy(x) = 2x + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，即

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy = -2x$，分离变量得$\dfrac{\mathrm{d}y}{y-2} = x\,\mathrm{d}x$，积分得$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 2$，

在原方程两边以$x = \sqrt{2}$代入，可得初试条件$y\big|_{x=\sqrt{2}} = -2$．据此可得$C = -4e^{-1}$，所以原方程的解为 $y = -4e^{\frac{x^2}{2}-1} + 2$.

**6．设降落伞自塔顶自由下落，已知阻力与速度成正比（比例系数为k），求降落伞的下落速度与时间的函数关系.

解：根据牛顿运动第二定理有$m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv$．这是一个可分离变量方程，分离变量并积分得

$$-\frac{1}{k}\ln(mg - kv) = \frac{t}{m} + C.$$

由初始条件$v(0) = 0$，得$C = -\dfrac{1}{k}\ln(mg)$，即得 $v = \dfrac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$.

**7．求一曲线，已知曲线过点$(0,1)$，且其上任一点(x, y)的法线在x轴上的截距为kx.

解：曲线在点(x, y)处的法线斜率为$-\dfrac{1}{y'}$，所以法线方程为$Y - y = -\dfrac{1}{y'}(X - x)$.

只要令$Y = 0$，就可以得到法线在x轴上的截距为 $X = x + yy'$.

据题意可得微分方程$x + yy' = kx$，即 $yy' = (k-1)x$．这是一个可分离变量方程，分离变量并积分得所求曲线$y^2 + (1-k)x^2 = C$，由于曲线过点$(0,1)$，所以$C = 1$，所以所求曲线方程为 $y^2 + (1-k)x^2 = 1$.

***8．求与抛物线族$y = Cx^2$（C是常数）中任一抛物线都正交的曲线（族）的方程.

解：在给定曲线$y = cx^2$上任意一点$(x\,,\,y)$处切线斜率为$k_0 = y' = 2cx$，从上面两式中消去c得$k_0 = y' = \dfrac{2y}{x}$，这样就得到了给定曲线族所满足的微分方程$y' = \dfrac{2y}{x}$.

设所求曲线方程为 $y = y(x)$，在同一点$(x\,,\,y)$处切线斜率为$k = y'$，则根据正交要

求有 $k_0 k=-1$，这样就得到了所求曲线族应该满足的微分方程 $y'=-\dfrac{x}{2y}$.

这是一个可分离变量方程，分离变量 $2ydy=-xdx$，积分得所求曲线族 $y^2=-\dfrac{1}{2}x^2+c$，即椭圆族 $y^2+\dfrac{1}{2}x^2=c$.

***9．作适当变换，求微分方程 $y'=4e^{-y}-\dfrac{2}{2x+1}$ 的通解.

解 原方程可化为 $e^y y'+\dfrac{2}{2x+1}e^y=4$，在换元 $z=e^y$ 下方程可化为 $z'+\dfrac{2z}{2x+1}=4$，这是一个一阶线性方程，其通解为

$$z=e^{-\int\frac{2\,\mathrm{d}x}{2x+1}}\left\{C+\int 4e^{\int\frac{2\,\mathrm{d}x}{2x+1}}\,\mathrm{d}x\right\}=\frac{1}{2x+1}\{C+4x+4x^2\}.$$

***10．作适当变换，求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{2x}+\dfrac{1}{2y}\tan\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$ 的通解.

解：令 $y^2=ux$，代入方程整理得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\tan u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得 $\sin u=Cx$，以 $u=\dfrac{y^2}{x}$ 代入上式，即得原方程的通解： $\sin\dfrac{y^2}{x}=Cx$.

第 9 章 （之 3） （总第 46 次）

教学内容： § 9.2 .3 齐次型方程；9.2.4 伯努利方程.

**1．求下列微分方程的通解：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$；

解： $\because$ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$， $\therefore$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}(1+\ln\dfrac{y}{x})$，这是一个一阶齐次型方程.

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=ux$，即 $y'=u+xu'$，于是原方程可化为 $xu'=u\ln u$. 这是一个可分离变量方程.

分离变量 $\dfrac{du}{u\ln u}=\dfrac{dx}{x}$ ，并积分 $\displaystyle\int\frac{du}{u\ln u}=\int\frac{dx}{x}$，得 $\ln\ln u=\ln x+\ln c$，即 $u=e^{cx}$.

以 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入，得所求的通解为 $y=xe^{cx}$.

（2）$(xy'-y)\arctan\dfrac{y}{x}=x$.

解：方程可化为 $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{\arctan\dfrac{y}{x}}$，这是一个一阶齐次型方程.

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=ux$，即 $y'=u+xu'$，于是原方程可化为 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\arctan u}$，这是一个可分离变量方程.

分离变量后积分得 $x\sqrt{1+u^2}=Ce^{u\arctan u}$.

以 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解：$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\frac{y}{x}\arctan\frac{y}{x}}$.

**2．求解下列初值问题：

（1）$xy\mathrm{d}x-(2x^2+y^2)\mathrm{d}y=0$ 满足初始条件 $y(2)=1$ 的特解.

解：$\because$ $xy\mathrm{d}x-(2x^2+y^2)\mathrm{d}y=0$，$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2x}{y}+\dfrac{y}{x}$，令 $u=\dfrac{x}{y}$，

则 $u+y\dfrac{du}{dy}=2u+\dfrac{1}{u}$，$\dfrac{du}{u+\frac{1}{u}}=\dfrac{dy}{y}$，$\therefore\int\dfrac{du}{u+\frac{1}{u}}=\int\dfrac{dy}{y}$，

$\therefore\dfrac{1}{2}\ln(u^2+1)=\ln y+\ln c$，$\therefore\sqrt{u^2+1}=cy$，即 $u^2+1=c^2y^2$，

代回即得 $\dfrac{x^2}{y^2}+1=c^2y^2$，$\because y(2)=1$，$\therefore c^2=5$，因此 $x^2+y^2=5y^4$.

（2）$\begin{cases}(x+y)\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}y=0,\\ y\big|_{x=0}=0.\end{cases}$

解：原方程可表为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y}{y-x}=\dfrac{1+\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}-1}$，令 $u=\dfrac{y}{x}$，$y'=u+xu'$，

代入方程，有 $u+xu'=\dfrac{1+u}{u-1}$，即 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1+2u-u^2}{u-1}$，

分离变量 $\dfrac{u-1}{1+2u-u^2}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$，积分得 $-\dfrac{1}{2}\ln(1+2u-u^2)=\ln x-\ln\sqrt{C}$

$\Rightarrow$通解 $x^2+2xy-y^2=C$，令 $x=0,y=0$，得 $C=0$.

所以初值问题的解为 $x^2+2xy-y^2=0$.

***3．试证明：当$a_1b_2 \neq a_2b_1$时，总能找到适当的常数h，k，使一阶微分方程

$$y' = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$$

在变换$s = y-k$，$t = x-h$之下，可化为一阶齐次型方程 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = f(\frac{a_1t+b_1s}{a_2t+b_2s})$．

并求方程 $(x+2y+1)\mathrm{d}x+(2x+3y)\mathrm{d}y = 0$ 的解.

证明：令$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 = a_1t+b_1s \\ a_2x+b_2y+c_2 = a_2t+b_2s \end{cases}$　　　$\because a_1b_2 \neq a_2b_1$，

$\therefore$可解得：$\begin{cases} s = y-\dfrac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1} \\ t = x-\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \end{cases}$　　因此可取：$\begin{cases} k = \dfrac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1} \\ h = \dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \end{cases}$

解：$\because (x+2y+1)dx+(2x+3y)dy = 0$，令$\begin{cases} s = y+2 \\ t = x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}s = \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{cases}$

$\therefore [t+3+2(s-2)+1]dt+[2(t+3)+3(s-2)]ds = 0$，$(t+2s)dt+(2t+3s)ds = 0$，

$\Rightarrow 1+\frac{2s}{t}+(2+\frac{3s}{t})\frac{ds}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{ds}{dt} = -\frac{1+\frac{2s}{t}}{2+\frac{3s}{t}}$，

令$u = \frac{s}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = u+t\frac{du}{dt}$，

$\therefore u+t\frac{du}{dt} = -\frac{1+2u}{2+3u} \qquad \Rightarrow \qquad t\frac{du}{dt} = -\frac{(3u+1)(u+1)}{3u+2}$，

$\Rightarrow \frac{(3u+2)}{(3u+1)(u+1)}du = -\frac{dt}{t}$，　$\therefore \int\left[\frac{1}{2(u+1)}+\frac{3}{2(3u+1)}\right]du = -\int\frac{dt}{t}$，

即　$\frac{1}{2}\ln(u+1)(3u+1) = -\ln t+\ln c$，

$\therefore \quad \sqrt{(u+1)(3u+1)}\cdot t = c \qquad \Rightarrow \qquad t\sqrt{(\frac{s}{t}+1)(\frac{3s}{t}+1)} = c$，

$\therefore \quad (x-3)\sqrt{(1+\frac{y+2}{x-3})(1+\frac{3y+6}{x-3})} = c \quad \Rightarrow 3y^2+x^2+4xy+2x = c$．

**4．求下列微分方程的通解

（1）$xy' - y + y^2 \ln x = 0$；

解： $\because xy' - y + y^2 \ln x = 0$ $\therefore y^{-2} y' - \frac{1}{x} y^{-1} = -\frac{\ln x}{x}$

令 $t = y^{-1} \Rightarrow \frac{dt}{dx} + \frac{1}{x} t = \frac{\ln x}{x}$， $\therefore P(x) = \frac{1}{x}, \mathrm{Q}(x) = \frac{\ln x}{x}$,

$$\therefore t(x) = e^{-\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x} \left[C + \int \frac{\ln x}{x} e^{\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x} \mathrm{d}x \right] = \frac{1}{x} \left[C + \int \frac{\ln x}{x} \cdot x dx \right]$$

$$= \mathrm{C}x^{-1} + x^{-x}(x \ln x - x) = \mathrm{C}x^{-1} + \ln x - 1,$$

$y^{-1} = \ln x - 1 + Cx^{-1}$.

（2）$(y - 2\sqrt{xy})\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0$.

解： $\because$ $(y - 2\sqrt{xy})\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0$， $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x} y = \frac{2}{\sqrt{x}} y^{\frac{1}{2}}$， $y^{-\frac{1}{2}} y' + \frac{1}{x} y^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$，

$u = y^{\frac{1}{2}}$， $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2x} u = \frac{1}{\sqrt{x}}$， $\therefore P(x) = \frac{1}{2x}$， $Q(x) \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$\therefore u(x) = e^{-\int \frac{1}{2x} \mathrm{d}x} \left[C + \int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\int \frac{1}{2x} \mathrm{d}x} \mathrm{d}x \right] = x^{-\frac{1}{2}} \left[C + \int \frac{1}{\sqrt{x}} x^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \right] = x^{-\frac{1}{2}} [C + x],$$

$\therefore$ $y^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} [C + x]$， $\therefore \sqrt{y} = \sqrt{x} + \frac{C}{\sqrt{x}}$.

（3）$y' = \frac{y^3}{2(xy^2 - x^2)}$

解一：令 $u = y^2$，原方程化为： $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\left(\frac{u}{x}\right)^2}{\left(\frac{u}{x}\right) - 1}$，解此方程得 $u = Ce^{\frac{u}{x}}$，

以 $u = y^2$ 代入上式，原方程通解为 $y^2 = Ce^{\frac{y^2}{x}}$.

解二：原方程写成 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{2}{y}x=-\dfrac{2}{y^3}x^2$，

令 $x^{-1}=z$，则方程化为：$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\dfrac{2}{y}z=\dfrac{2}{y^3}$，

则通解 $z=e^{-\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\left[C+\int\dfrac{2}{y^3}e^{\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right]=\dfrac{1}{y^2}[C+2\ln y]$，

故原方程通解：$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y^2}[C+2\ln y]$.

**5．求下列伯努力方程满足初始条件的特解：$y'=y-\dfrac{2x}{y}$，$y(0)=1$.

解：$\because y'=y-2xy^{-1}$，$\therefore yy'-y^2=-2x$，

令 $t=y^2\Rightarrow\dfrac{dt}{dx}-2t=-4x$，$\therefore P(x)=-2,\quad Q(x)=-4x$，

$$\therefore t(x)=e^{\int 2\mathrm{d}x}\left[C+\int(-4x)e^{-\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]=e^{2x}\left[C-4\int xe^{-2x}\mathrm{d}x\right]$$
$$=e^{2x}[C+2xe^{-2x}+e^{-2x})]=Ce^{2x}+2x+1$$
$$\therefore y^2=2x+1+Ce^{2x}$$
$$\because y(0)=1,\ \therefore 1=2\times 0+1+Ce^0\quad\Rightarrow C=0$$
$$\therefore y^2=2x+1$$

****6．作适当的变换求方程 $\sqrt{1+x^2}\sin 2y\cdot y'=2x\sin^2 y+e^{2\sqrt{1+x^2}}$ 的通解.

解：原方程化为：$\sqrt{1+x^2}\dfrac{\mathrm{d}\sin^2 y}{\mathrm{d}x}=2x\sin^2 y+e^{2\sqrt{1+x^2}}$，

令 $z=\sin^2 y$，得 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}z=e^{2\sqrt{1+x^2}}\Big/\sqrt{1+x^2}$，

故 $z=e^{\int\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x}\left\{C+\int\dfrac{e^{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}e^{-\int\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right\}$

$=Ce^{2\sqrt{1+x^2}}+e^{2\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

原方程的通解为 $\sin^2 y=Ce^{2\sqrt{1+x^2}}+e^{2\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

***7．已知 $2\int_0^x y(\xi)\sqrt{1+y'^2(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = 2x + y^2(x)$，求 $y(x)$．

解：两边关于 x 求导得　　$2yy' - y^2 = -1$，

解得　　　　　　　　$y^2 = Ce^x + 1$，

由 $y\big|_{x=0} = 0$，求得　　$C = -1$，

故原方程的解为：$y^2 = 1 - e^x$．

***8．曲线过点 $(1,1)$，其上任一点与原点的距离平方等于该点横坐标与该点的曲线的法线在 x 轴上的截距乘积的两倍，求曲线方程．

解：　　$x^2 + y^2 = 2x(x + yy'), y(1) = 1$，　$2yy' - \dfrac{1}{x}y^2 = -x$

令 $y^2 = z$，解得　　$z = y^2 = x(C - x)$

由 $y(1) = 1$，　得　$C = 2$，

曲线方程为：　$x^2 + y^2 = 2x$．

***9．根据托里斥利定律，液体从容器小孔中流出的速度为 $v = \alpha A\sqrt{2gh}$，其中 g 为重力加速度，h 为液面与底部孔口之间的距离，A 为孔口面积，α 为孔口收缩系数，实验确定其取值为 $\alpha = 0.62$．现有一直径为1m，高为 2m 的直立圆柱形容器，其中盛满的水从底部直径为 $d = 1$cm 的圆孔流出，要多长时间容器内的水才会完全流尽？

解：设在时刻 t 时，　容器中液面高度 $h(t)$，则经过 Δt 后液面高度为 $h(t+\Delta t)$，　于是有

$$\pi r^2(h(t) - h(t+\Delta t)) = \alpha A\sqrt{2gh(t)}\Delta t,$$

即　$$-\frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} = \frac{\alpha A\sqrt{2gh}}{\pi r^2},$$

令 $\Delta t \to 0$，　得

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\alpha A}{\pi r^2}\sqrt{2gh} \\ h(0) = 200 \end{cases}$$

解得　$$\sqrt{h} = \frac{\alpha A}{2\pi r^2}\sqrt{2g}t + \sqrt{200},$$

代入 $h = 0$，　$g = 980$，　$r = 50$，　$A = \dfrac{\pi}{4}$，　$\alpha = 0.62$，　得 $t = 10304$（秒）．

第 9 章 （之 4）（总第 47 次）

教学内容： §9.3 可降阶的高阶微分方程

**1．解下列问题：

（1）．微分方程 $y'+y''=xy''$ 满足条件 $y'(2)=1, y(2)=1$ 的解是 （ ）

（A） $y=(x-1)^2$ （B） $y=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{21}{4}$

（C） $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}$ （D） $y=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}$

解：（C）

（2）．微分方程 $y''-2yy'^3=0$ 满足条件 $y'(0)=-1, y(0)=1$ 的解是 （ ）

（A） $\frac{y^3}{3}=x+\frac{1}{3}$ （B） $\frac{x^3}{3}=y-1$

（C） $\frac{y^3}{3}=-x+\frac{1}{3}$ （D） $\frac{x^3}{3}=-y+1$

解：（C）

**2．求下列微分方程的通解．

（1） $xy''+y'=0$；

解： $\because$ $xy''+y'=0$ 是一不显含因变量 y 的二阶方程，

令 $p=y' \Rightarrow y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ $\therefore xp'+p=0$， $\Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$，

$$\Rightarrow \int\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \ln p=-\ln x+\ln C_1 \quad \Rightarrow p=\frac{C_1}{x},$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{C_1}{x}, \quad \mathrm{d}y=\frac{C_1}{x}\mathrm{d}x, \quad \int\mathrm{d}y=\int\frac{C_1}{x}\mathrm{d}x, \quad y=C_1\ln x+C_2 .$$

（2） $(1+x^2)y''+2xy'=1$；

解： $y''+\frac{2x}{1+x^2}y'=\frac{1}{1+x^2}$， $y'=\frac{1}{1+x^2}(x+C_1)$，

$$y=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1\arctan x+C_2 .$$

（3）$yy''+(y')^2=0$；

解：$\because\ yy''+(y')^2=0$，　令 $p=y'$，　则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入方程有

$$y\cdot p\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0,\quad \Rightarrow\quad p(y\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p)=0,$$

因为求通解，所以 p 满足　$y\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p=0$.

由 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{-\mathrm{d}y}{y}\ \Rightarrow\ \displaystyle\int\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\int\frac{\mathrm{d}y}{y}$，　$\Rightarrow \ln p=-\ln y+\ln C_1\Rightarrow p=\dfrac{C_1'}{y}$，

$$\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{C_1'}{y}\ \Rightarrow\ y\mathrm{d}y=C_1'\mathrm{d}x\ \Rightarrow\ \int y\mathrm{d}y=\int C_1'\mathrm{d}x\quad\Rightarrow y^2=C_1x+C_2.$$

$\therefore$ 通解：$y^2=C_1x+C_2$.

（4）$(1+y^2)y''=2yy'^2$

解：令：$y'=p(y),\ y''=pp'$，得　$(1+y^2)p\cdot p'=2p^2y$，

即 $\dfrac{\mathrm{d}\,p}{p}=\dfrac{2y}{1+y^2}\mathrm{d}\,y$，　得　$p=C_1(1+y^2)$，

所以 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{1+y^2}=C_1\,\mathrm{d}\,x$，通解为：$\arctan y=C_1x+C_2$.

第 9 章　（之 5）（总第 48 次）

教学内容：§9 .4 .1 二阶线性方程和解的存在性；§9 .4 .2 二阶线性方程解的结构

**1．若 y_1,y_2 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$ 的两个解，试证 y_2-y_1 必是其对应齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的解.

证明：因为 y_1,y_2 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$ 的解.

所以成立下式：

$$y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1=R(x)\qquad(1)$$
$$y_2''+P(x)y_2'+Q(x)y_2=R(x)\qquad(2)$$

将 (1)、(2) 两式相减，得

$$(y_1''-y_2'')+P(x)(y_1'-y_2')+Q(x)(y_1-y_2)=0 \qquad (3)$$

(2) 式可写为

$$(y_1-y_2)''+P(x)(y_1-y_2)'+Q(x)(y_1-y_2)=0,$$

所以 y_1-y_2 是齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的解.

***2. 已知 $y_1=1, y_2=1+x, y_3=1+x^2$ 是方程 $y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=\frac{2}{x^2}$ 的三个特解，问能否求出该方程得通解？若能则求出通解来.

解：按（1）证明可知 $y_2-y_1=x,\quad y_3-y_1=x^2$ 分别是其对应齐次方程 $y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=0$ 的解，并且线性无关，所以 $C_1x+C_2x^2$ 为齐次方程的通解.

所以原方程的通解可以表示为：$y=C_1x+C_2x^2+1$.

*3. 验证：e^{t^2}, e^{-t^2} 是微分方程 $x''-\frac{1}{t}x'-4t^2x=0$ 的两个线性无关特解，并求此方程的通解.

证明：因为

$$\left(e^{t^2}\right)''-\frac{1}{t}\left(e^{t^2}\right)'-4t^2e^{t^2}=2e^{t^2}+4t^2e^{t^2}-\frac{1}{t}\times 2te^{t^2}-4t^2e^{t^2}=0,$$

$$\left(e^{-t^2}\right)''-\frac{1}{t}\left(e^{-t^2}\right)'-4t^2e^{-t^2}=-2e^{-t^2}+4t^2e^{t^2}-\frac{1}{t}\times(-2te^{-t^2})-4t^2e^{t^2}=0,$$

故 e^{t^2}, e^{-t^2} 是方程的解，且 $\frac{e^{t^2}}{e^{-t^2}}=e^{2t^2}\neq$ 常数.

于是 e^{t^2}, e^{-t^2} 是方程线性无关的解（构成基本解组），故方程的通解为

$$x=C_1e^{t^2}+C_2e^{-t^2},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

*4. 已知函数 $y_1=e^x, y_2=x$ 是方程 $(1-x)y''+xy'-y=0$ 的两解，试求该方程满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 的特解.

解：方程的通解为 $y = c_1 e^x + c_2 x$，将初始条件代入，有：

$$y(0) = c_1 = 1,$$
$$y'(0) = c_1 e^x + c_2 = c_1 + c_2 = 0,$$

解得c_1, c_2为： $c_1 = 1, c_2 = -1$，

所以特解为： $y = e^x - x$.

**5．设 $x_1(t)$ 是非齐次线性方程

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_2(t)x(t) = f_1(t) \qquad (1)$$

的解． $x_2(t)$ 是方程

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_2(t)x(t) = f_2(t) \qquad (2)$$

的解．试证明 $x = x_1(t) + x_2(t)$

是方程

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_2(t)x(t) = f_1(t) + f_2(t) \qquad (3)$$

的解．

解：因为$x_1(t), x_2(t)$分别为方程（1）和方程（2）的解，所以

$$x_1''(t) + a_1(t)x_1'(t) + a_2(t)x_1(t) \equiv f_1(t) \qquad (1)'$$

$$x_2''(t) + a_1(t)x_2'(t) + a_2(t)x_2(t) \equiv f_2(t) \qquad (2)'$$

$(1)' + (2)'$ 得：

$$\left(x_1(t) + x_2(t)\right)'' + a_1(t)\left(x_1(t) + x_2(t)\right)' + a_2(t)\left(x_1(t) + x_2(t)\right)' = f_1(t) + f_2(t)$$

即 $x = x_1(t) + x_2(t)$ 是方程（3）的解．

第 9 章 （之 6）（总第 49 次）

教学内容：§9 .4 .3 二阶线性常系数方程的解法

**1．解下列问题：

（1）方程 $y'' + 8y = 0$ 的通解为 $y =$______________.

解：$y = c_1 \cos 2\sqrt{2}x + c_2 \sin 2\sqrt{2}x$.

（2）方程 $y''+6y'+25y=0$ 的通解为 $y=$______________.

解：$y = e^{-3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$.

（3）方程 $y''-8y'+15y=0$ 的通解为 $y=$______________.

解：$y = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 \mathrm{e}^{5x}$.

（4）方程 $5y''+2\sqrt{15}y'+3y=0$ 的通解为 $y=$______________.

解：$y = e^{-\frac{\sqrt{15}}{5}x}(C_1 x + C_2)$.

（3）方程 $y''+6\,y'+py=0$ 的通解为 $y=\mathrm{e}^{kx}(C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x)$，则 $p=$___，$k=$_____.

解：11，-3 .

**2．求解下列初值问题：

（1）$y''-8y'+16y=0,\quad y(1)=e^4,\quad y'(1)=0$；

解：$\because \lambda^2-8\lambda+16=(\lambda-4)^2=0$，　　　$\therefore \lambda_{1,2}=4$，

通解为：$y=(c_1+c_2x)e^{4x}$.

将初始条件代入，有　$y(1)=(c_1+c_2)e^4=e^4$，

$$y'(1)=c_2e^{4x}+4(c_1+c_2x)e^{4x}=c_2e^4+4(c_1+c_2)e^4=c_2e^4+4e^4=0$$

得到：$c_1=5\quad c_2=-4$，　　　　所以特解为：$y=(5-4x)e^{4x}$.

（2）$y''+4y'+29y=0,\qquad y(\frac{\pi}{2})=1,\ \ y'(\frac{\pi}{2})=3$；

解：$\lambda^2+4\lambda+29=0$，　$\lambda=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-116}}{2}=\dfrac{-4\pm10i}{2}=-2\pm5i$，

通解为：$y=e^{-2x}(c_1\cos5x+c_2\sin5x)$.

代入初始条件有： $y(\frac{\pi}{2}) = e^{-\pi}(0 + c_2) = 1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = e^{\pi}$，

$$y'(\frac{\pi}{2}) = -2e^{-2x}(c_1\cos 5x + c_2\sin 5x) + e^{-2x}(-5c_1\sin 5x + 5c_2\cos 5x),$$

得：$c_1 = -e^{\pi}$． 特解为：$y = e^{\pi-2x}(-\cos 5x + \sin 5x)$．

（3）$y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 10$；

解： $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$， $(\lambda+1)(\lambda+3) = 0$，

所以通解为 $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x}$．

代入初始条件有：

$$y(0) = c_1 + c_2 = 6,$$

$$y'(0) = -c_1e^{-x} - 3c_2e^{-3x} = -c_1 - 3c_2 = 10,$$

特解为：$y = 14e^{-x} - 8e^{-3x}$．

**3．求解初值问题

$$\begin{cases} y' + 2y + \int_0^x y\,\mathrm{d}x = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \ge 0$$

解：将原方程对 x 求导得 $y'' + 2y' + y = 0 \qquad (1)$

且有 $y'(0) = 1 - 2y(0) = -1$

微分方程（1）的通解为： $y = e^{-x}(C_1x + C_2)$，

代入初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = -1$，得 $C_1 = 0, C_2 = 1$，

故所求问题的解为：$y = e^{-x}$．

***4．设函数 $\varphi(x)$ 二阶连续可微，且满足方程 $\varphi(x) = 1 + \int_0^x (x-u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u$，求函数 $\varphi(x)$．

解：原方程关于 x 求导得

$$\varphi'(x) = \int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u + x\varphi(x) - x\varphi(x) = \int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u,\ \varphi'(0) = 0,$$

再求导得： $\varphi''(x) = \varphi(x)$， 且由原方程还有：$\varphi(0) = 1$，

微分方程的通解为： $\varphi(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$，

代入条件 $\varphi(0)=1, \varphi'(0)=0$，得 $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$，

故所求函数为： $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\operatorname{ch} x$.

***5．长为 100cm 的链条从桌面上由静止状态开始无摩擦地沿桌子边缘下滑．设运动开始时，链条已有 20cm 垂于桌面下，试求链条全部从桌子边缘滑下需多少时间．

解：设链条单位长度的质量为 ρ，则链条的质量为 100ρ．再设当时刻 t 时，链条的下端距桌面的距离为 $x(t)$，则根据牛顿第二定律有：

$$100\rho\frac{d^2x}{dt^2}=\rho g x, \qquad \text{即} \qquad \frac{d^2x}{dt^2}-\frac{g}{100}x=0.$$

又据题意知：$x(0)=20$， $x'(0)=0$，所以 $x(t)$ 满足下列初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}-\dfrac{g}{100}x=0\\ x(0)=20, \quad x'(0)=0\end{cases}$$

解得方程的通解为：$x=c_1e^{\frac{\sqrt{g}}{10}t}+c_2e^{-\frac{\sqrt{g}}{10}t}$.

又因为有初始条件： $\begin{cases}x(0)=20\\ x^{'}(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=10\\ c_2=10\end{cases}$

所以 $x=10e^{\frac{\sqrt{g}}{10}t}+10e^{-\frac{\sqrt{g}}{10}t}$.

又当链条全部从桌子边缘滑下时，$x=100$，求解 t，得：$100=10e^{\frac{\sqrt{g}}{10}t}+10e^{-\frac{\sqrt{g}}{10}t}$，

即： $ch\dfrac{\sqrt{g}}{10}t=5$， $t=\dfrac{10}{\sqrt{g}}arch5$.

***6．设弹簧的上端固定，下端挂一个质量为 2 千克的物体，使弹簧伸长 2 厘米达到平衡，现将物体稍下拉，然后放手使弹簧由静止开始运动，试求由此所产生的振动的周期．

解：取物体的平衡位置为坐标原点，x 轴竖直向下， 设 t 时刻物体 m 位于 $x(t)$ 处，由牛顿第二定律： $2\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=2g-g(x+2)=-gx$，

其中 $g=980$ 厘米/秒 ^{2} 其解为： $x=C_1\cos\sqrt{\dfrac{g}{2}}t+C_2\sin\sqrt{\dfrac{g}{2}}t$，

振动周期为 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{2}{g}}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{490}}\approx 0.28$.

第 9 章 （之 7）（总第 50 次）

教学内容： §9.4.3 二阶线性常系数方程的解法； §9.4.4 高阶线性常系数微分方程

**1．微分方程 $y''+y=x\sin x$ 的一个特解应具有形式 （ ）

（A） $(Ax+B)\sin x$

（B） $x(Ax+B)\sin x+x(Cx+D)\cos x$

（C） $x(Ax+B)(\cos x+\sin x)$

（D） $x(Ax+B)(C\sin x+D\cos x)$

解：（B）

**2．设 A,B,C,D 是待定常数，则微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的一个特解应具有形式

（ ）

（A） $Ax+B+C\cos x$

（B） $Ax+B+C\cos x+D\sin x$

（C） $Ax+B+x(C\cos x+D\sin x)$

（D） $Ax+B+Cx\cos x$

答：（C）

**3．求下列非齐次方程的一个解

（1） $y''-y'-2y=2x+1$；

解：$\because$ $\lambda^2-\lambda-2=0$， $\therefore \lambda_{1,2}=2,-1$， $\because$ 0 不是特征根.

设 $y_p=b_1x+b_0$， 代入原方程，得：$-b_1-2b_1x-2b_0=2x+1$，

有：$b_0=0,b_1-1$， 特解为： $y=-x$.

（2） $y''+2y'+y=e^{-x}$.

解： $\because$ -1 是二重特征根，

$\therefore$ 设 $y_p=x^2e^{-x}b_0$， $y'_p=2xe^{-x}b_0-x^2e^{-x}b_0$，

$$y''_p=2e^{-x}b_0-x^2e^{-x}b_0-2xe^{-x}b_0+x^2e^{-x}b_0,$$

代入 $y''+2y'+y=e^{-x}$， 解得：$b_0=\dfrac{1}{2}$，

特解为： $y=\dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$.

**4．求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^x$ 满足条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解.

解：特征方程 $r^2-3r+2=0$ 的根为 $r_1=1,r_2=2$，相应齐次方程的通解为

$$y_h=C_1e^x+C_2e^{2x},$$

设特解为 $y_p=x(Ax+B)e^x$，代入方程得： $A=-\frac{1}{2},B=-1$.

故方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)e^x,$$

代入条件 $y(0)=y'(0)=0$，得 $C_1=-1,C_2=1$，因此所求特解为

$$y=e^{2x}-\left(\frac{x^2}{2}+x+1\right)e^x.$$

**5． 求下列非齐次方程的通解： $y''+2y'=f(x)$

$1)\ f(x)=4x+1,\quad 2)\ f(x)=e^{2x},\quad 3)\ f(x)=\cos x$；

解：特征方程： $\lambda^2+2\lambda=0$， 特征根： $\lambda_1=0,\quad \lambda_2=-2$，

所以方程 $y''+2y'=0$ 的通解为 $y_h=c_1+c_2e^{-2x}$.

1）对于方程 $y''+2y'=4x+1$， 由于 0 是特征方程的单根，故设其特解为：

$$y_p=(b_0x+b_1)x,$$

代入方程有：$2b_0+4b_0x+2b_1=4x+1$，解得 $b_0=1\quad b_1=-\frac{1}{2}$，

所以特解为： $y_p=x^2-\frac{1}{2}x$.

所以方程的通解为： $y=y_h+y_p=c_1+c_2e^{-2x}+x^2-\frac{1}{2}x$.

2）对于方程 $y'''+2y'=e^{2x}$，由于 2 不是特征方程的根，故设其特解为： $y_p=e^{2x}b_0$，

代入方程有： $b_0=\frac{1}{8}$， $y_p=\frac{1}{8}e^{2x}$，

所以方程的通解为： $y=y_h+y_p=c_1+c_2e^{-2x}+\frac{1}{8}e^{2x}$.

3）对于方程：$y''' + 2y' = \cos x$，由于$\pm i$不是特征方程的根，故设其特解为：

$$y_p = b_0 \cos x + b_1 \sin x,$$

代入方程有：$y_p' = -b_0 \sin x + b_1 \cos x$，

$$y_p'' = -b_0 \cos x - b_1 \sin x,$$

$$-b_0 \cos x - b_1 \sin x - 2b_0 \sin x + b_1 \cos x = \cos x,$$

得：$b_0 = -\dfrac{1}{5} \quad b_2 = \dfrac{2}{5}$，

$$y_p = -\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x,$$

所以方程的通解为：$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{-2x} - \dfrac{1}{5}\cos x + \dfrac{2}{5}\sin x$.

**6．求微分方程$y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$的通解.

解：特征方程$r^2 - 6r + 9 = 0$的根为$r_{1,2} = 3$，相应齐次方程的通解为

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$$

设特解为$y_p = e^x (A\cos x + B\sin x)$，代入方程得：$A = 4, \qquad B = 3$

故方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + e^x (4\cos x + 3\sin x)$$

***7．已知曲线$y = y(x)(x \geq 0)$过原点，位于x轴上方，且曲线上任一点$M = (x_0, y_0)$处切线斜率数值上等于此曲线与x轴，直线$x = x_0$所围成的面积与该点横坐标的和，求此曲线方程.

解：由已知$y(0) = 0$，且$y' = \int_0^x y \,\mathrm{d}\,x + x, y'(0) = 0$，将此方程关于$x$求导得

$$y'' = y + 1$$

其通解为：$\quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 1$，

代入初始条件$y(0) = 0, y'(0) = 0$，得 $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$，

故所求曲线方程为：$y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1 = \mathrm{ch}\, x - 1$.

***8．设一物体质量为m，以初速v_0从一斜面滑下，若斜　面与水平面成θ角，斜面摩擦系数为$\mu(0<\mu<\tan\theta)$，试求物体滑下的距离与时间的关系．

解：设t时刻物体滑过的距离为S，由牛顿第二定律

$$m\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2}=mg\sin\theta-\mu mg\cos\theta$$

且　$S(0)=0,S'(0)=v_0$

方程的通解为

$$S=\frac{1}{2}gt^2(\sin\theta-\mu\cos\theta)+C_1t+C_2$$

代入初始条件得$C_1=v_0,C_2=0$，故物体滑下的距离与时间的关系为

$$S=\frac{1}{2}gt^2(\sin\theta-\mu\cos\theta)+v_0t$$

***9．设弹簧的上端固定，下端挂一质量为m的物体，开始时用手托住重物，使弹簧既不伸长也不缩短，然后突然放手使物体开始运动，弹簧的弹性系数为k，求物体的运动规律．

解：取物体未发生运动时的位置为坐标原点，x轴垂直向下，设t时刻物体位于$x(t)$处，由牛顿第二定律：　$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+kx=mg$，　且　　$x(0)=0，x'(0)=0$．

方程的通解为：　$x=C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{m}{k}g$，

代入初始条件得$C_1=-\frac{m}{k}g,C_2=0$，故物体的运动规律为

$$x=\frac{mg}{k}\left(1-\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

***10．　求下列方程的通解：

（1）$y^{(4)}-2y'''+y''=0$；

解：　$\lambda^4-2\lambda^3+\lambda^2=0$，　$\lambda^2(\lambda^2-2\lambda+1)=0$，　$\lambda^2(\lambda-1)^2=0$，

所以通解为　　$y=c_1+c_2x+(c_3+c_4x)e^x$．

（2） $y^{(4)}+5y''-36y=0$.

解：$\lambda^4+5\lambda^2-36=0$，　$(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda^2+9)=0$，

所以通解为　$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3\cos 3x+c_4\sin 3x$.

****11*　试证明，当以 $t=\ln x$ 为新的自变量时，变系数线性方程（其中 a,b,c 为常数，这是欧拉方程） $ax^2y''+bxy'+cy=f(x)$ 可化为常系数线性方程 $a\dfrac{d^2y}{dt^2}+(b-a)\dfrac{dy}{dt}+cy=f(e^t)$ 并求下列方程通解：

（1） $x^2y''-2y=0$；　　（2） $x^2y''-xy'+2y=x\ln x$.

证明：令 $t=\ln x$，　$x=e^t$，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

将 y',y'' 代入方程有：

$$ax^2y''+bxy'+cy=a\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+b\frac{dy}{dt}+cy=a\frac{d^2y}{dt^2}+(b-a)\frac{dy}{dt}+cy=f\left(e^t\right),$$

得证.

（1）令 $t=\ln x$，　$x=e^t$，

原方程化为：　$\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}-2y=0$.

其通解为　$y=c_1e^{2t}+c_2e^{-t}$.

将 x 代入，得：$y=c_1x^2+\dfrac{c_2}{x}$.

（2） 令 $t=\ln x$，　$x=e^t$，

原方程化为：　$\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+2y=te^t$，

上述方程的相应其次方程的通解为：　$y_h=e^t\left(c_1\cos t+c_2\sin t\right)$.

令上述方程一个特解为： $y_p = e^t(b_0 t + b_1)$，

代入方程得：$b_0 = 1, b_1 = 0$，　　即：$y_p = e^t t$.

原方程得通解为： $y = e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t + t)$，

即：$y = x[c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x) + \ln x]$.

***12．一质量为 m 的潜水艇在水面从静止状态开始下降，所受阻力与下降速度成正比（比例系数为 $k>0$），浮力为常数 B，求潜水艇下降深度 x 与时间 t 之间的函数关系．

解： $F_{重} - F_{阻} - B = ma$，　　a 为加速度，

$mg - kv - B = ma$，　　v 为下降速度，

因为 $v = \dfrac{dx}{dt}$，$a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$，　所以 $mg - k\dfrac{dx}{dt} - B = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$，即

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dx}{dt} = g - \frac{B}{m},$$

其特征方程为： $\lambda^2 + \dfrac{k}{m}\lambda = 0$，　解得特征根为 $\lambda_1 = 0,\quad \lambda_2 = -\dfrac{k}{m}$.

所以对应的齐次方程的通解为：$x_h = c_1 e^{-\frac{k}{m}t} + c_2$.

由于 0 是特征方程的单根，故设其特解为：$x_1 = b_0 t$，

代入方程有：$\dfrac{k}{m}b_0 = g - \dfrac{B}{m}$，　得 $b_0 = \dfrac{mg - B}{k}$.

所以微分方程的通解为：$x = c_1 e^{-\frac{k}{m}t} + c_2 + \dfrac{mg - B}{k}t$，

因为初始位置为 0，初始速度为 0，所以有初始条件 $x(0) = 0,\quad x'(0) = 0$，

代入微分方程有：
$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 0 = 0 \\ -\dfrac{k}{m}c_1 + \dfrac{mg - B}{k} = 0 \end{cases}$$

求得： $c_1 = \dfrac{m^2 g - Bm}{k^2}$，$c_2 = \dfrac{Bm - m^2 g}{k^2}$，

所以 x 与 t 的关系可表示为： $x = \dfrac{Bm - m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + \dfrac{mg - B}{k}t$.

***13．证明：若有方程 $f'(x)=f(1-x)$，则必有 $f''(x)+f(x)=0$，并求解此方程．

证明：由于 $f'(x)=f(1-x)$，两边关于 x 求导得

$$f''(x)=-f'(1-x)=-f[1-(1-x)]=-f(x)$$

故得

$$f''(x)+f(x)=0 \qquad (1)$$

解方程（1）得通解为

$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x \qquad (2)$$

$$f'(x)=-C_1\sin x+C_2\cos x \qquad (3)$$

$f'(0)=f(1), f'(1)=f(0)$，将此代入(2),(3)得

$$\begin{cases} C_1\cos1+C_2\sin1=C_2 \\ -C_1\sin1+C_2\cos1=C_1 \end{cases}$$

解得：$C_2=\dfrac{1+\sin1}{\cos1}C_1$

所以原方程的解为：

$$f(x)=C_1\left(\cos x+\frac{1+\sin1}{\cos1}\sin x\right).$$

第 9 章 （之 8） （总第 51 次）

教学内容：§9.6 微分方程应用举例 **（机动）**

第 9 章 （之 9） （总第 52 次）

教学内容：§9. 7 差分方程

1. 已知 $y_t=3e^t$ 是二阶差分方程 $y_{t+1}+ay_{t-1}=e^t$ 的一个特解，求 a .

解： $a=\dfrac{e}{3}(1-3e)$.

2. 求下列差分方程的一般解：

(1) $2y_t+7y_{t-1}=0$；

解：$y_t=C(-\dfrac{7}{2})^t$

(2) $y_t - 3y_{t-1} = -4$；

解：$y_t = C3^t + 2$

(3) $2y_{t+1} + 10y_t - 5t = 0$；

解：$y_t = C(-5)^t + \dfrac{5}{12}(t - \dfrac{1}{6})$

(4) $y_{t+1} - 4y_t = 2^{2t}$；

解：$y_t = C4^t + t4^{t-1}$

(5) $y_{t+1} - y_t = t \cdot 2^t$.

解：$y_t = C + (t-2)\,2^t$

3. 写出下列差分方程的一个特解形式：

(1) $y_{t+1} - y_t = \sin t$；

解：$Y_t = B_1 \sin t + B_2 \cos t$

(2) $y_{t+1} + y_t = -3\cos \pi t$.

解：$Y_t = t(B_1 \cos \pi t + B_2 \sin \pi t)$

4. 设 y_t 为第 t 期国民收入，C_t 为第 t 期消费，I 为每期投资（I 为常数）. 已知 y_t，C_t，I 之间有关系 $y_t = C_t + I$，$C_t = \alpha\, y_{t-1} + \beta$，其中 $0 < \alpha < 1$，$\beta > 0$，试求 y_t，C_t .

解：y_t 满足：$y_t - \alpha\, y_{t-1} = I + \beta$，

解得 $$y_t = C\alpha^t + \frac{\beta + I}{1-\alpha}，$$ 从而 $$C_t = y_t - I = C\alpha^t + \frac{\beta + \alpha I}{1-\alpha}.$$

5. 已知差分方程 $(a + by_t)y_{t+1} = cy_t$，其中 a，b，c 为正的常数. 设初始条件 $y(0) = y_0 > 0$，证明：

(1) 对任意 $t = 1, 2, \cdots$，有 $y_t > 0$；

(2) 在变换 $u_t = \dfrac{1}{y_t}$ 之下，原差分方程可化为有关 u_t 的线性差分方程，写出该线性差分

方程并求其一般解；

(3) 求方程 $(1+2y_t)y_{t+1}=y_t$ 的满足初始条件 $y_0=2$ 的解.

解：（1）归纳法证明.

（2）令 $u_t=\dfrac{1}{y_t}$，即 $y_t=\dfrac{1}{u_t}$，$y_{t+1}=\dfrac{1}{u_{t+1}}$，

则原方程化为线性差分方程

$$cu_{t+1}-au_t=b,$$

其一般解为 $c\neq a$ 时，$u_t=C(\dfrac{a}{c})^t+\dfrac{b}{c-a}$ ； $c=a$ 时，$u_t=C+b$.

（3）令 $u_t=\dfrac{1}{y_t}$，原方程化为 $u_{t+1}-u_t=2$，一般解为 $u_t=C+2$，

所以原方程的一般解为 $y_t=\dfrac{1}{u_t}=\dfrac{1}{C+2}$，代入 $y_0=2$，得 $C=-\dfrac{3}{2}$，

所以 特解为 $y_t=2$.

第 10 章 （之 1）（总第 53 次）

教学内容： §10. 1 向量及其运算

* 1. 设 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=2\sqrt{3},|\vec{a}+\vec{b}|=2$，则 $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$ =______________.

答：$\dfrac{5\pi}{6}$.

** 2. 设向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不平行，$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$，则 $(\vec{a},\hat{\ }\vec{c})=(\vec{b},\hat{\ }\vec{c})$ 的充分必要条件为____________.

答：$|\bar{a}|=|\bar{b}|$.

** 3. 设直线 L 经过点 P_0 且平行于向量 $\boldsymbol{a}$, 点 P_0 的径向量为 $\boldsymbol{r}_0$，设 P 是直线 L 的任意一点，

试用向量 $\boldsymbol{r}_0$，$\boldsymbol{a}$ 表示点 P 的径向量 r .

解：$\because \overrightarrow{P_0P}\parallel\vec{a}$， $\therefore \overrightarrow{P_0P}=t\vec{a}$， 而 $\vec{r}=\vec{r}_0+\overrightarrow{P_0P}$，

$\therefore \vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{a}$

∴P 点的径向量为 $\vec{r}_0+t\vec{a}$.

** 4．设 $a=2, b=3$，a 与 b 的夹角等于 $\frac{2}{3}\pi$，求：

（1）$a\cdot b$；　　（2）$(3a-2b)\cdot(a+2b)$；

（3）$(a)_b$；　　（4）$|3a-2b|$．

解：（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle \ =2\times3\times\cos\frac{2}{3}\pi=-3$．

（2）$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=3|\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2+4\vec{a}\vec{b}$

$$=3\times2^2-4\times3^2+4\times(-3)=-36.$$

（3）$(\vec{a})_{\vec{b}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{-3}{3}=-1$．

（4）$|3\vec{a}-2\vec{b}|^2=(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})=9|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2-12\vec{a}\vec{b}$

$=9\times2^2+4\times3^2-12\times(-3)=108$，

$|3\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$．

** 5．设 $a=4, b=5$，a 与 b 的夹角等于 $\frac{1}{3}\pi$，求：

（1）$(a+b)_{a-b}$；

（2）$5a+2b$ 与 $a-b$ 的夹角．

解：（1）$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\vec{b}=4^2+5^2-2\times4\times5\cos\frac{\pi}{3}=21,$$

$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{21}$，

$$(\vec{a}+\vec{b})_{\vec{a}-\vec{b}}=\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}-\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2}{\sqrt{21}}=\frac{4^2-5^2}{\sqrt{21}}=-\frac{3\sqrt{21}}{7}.$$

（2）$(5\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=5|\vec{a}|^2-2|\vec{b}|^2-3\vec{a}\vec{b}$

$$=5\times4^2-2\times5^2-3\times4\times5\cos\frac{\pi}{3}=0,$$

$\therefore$ 向量 $5\vec{a}+2\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}$ 垂直．

** 6．若 a，b 为非零向量，且 $|a+b|=|a-b|$，试证 $a\perp b$．

解：$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，　　　$\therefore$ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2$，

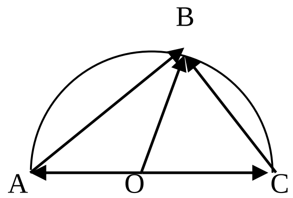
$\therefore \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，

$\therefore \left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\vec{b}$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0$，　　　$\therefore \vec{a}\perp\vec{b}$．

***7．用向量的方法证明半圆的圆周角必是直角．

解：如图所示，AC 为直径，B 为圆周上任一点，



$\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$，　$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OC}|$，

则有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})=|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2=0$，

$\therefore$　　半圆的圆周角必为直角．

第 10 章（之 2）（总第 54 次）

教学内容： §10.2 空间直角坐标系与向量代数

1. 填空题

*(1) 点 A（2，－3，－1）关于点 M（3，1，－2）的对称点是______．

答：$(4,5,-3)$

**(2) 设平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点为 $A(2,-3,1), B(-2,4,3), C(3,-1,-3)$，则 D 点为______．

答：（$7,-8,-5$）

**(3) 已知 $\vec{a}=\{4,-5,3\}, \vec{b}=\{1,-4,z\}$，且 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，则 $z=$______．

答：-8

**2. A,B 两点的坐标分别为 $(-2,5,p),(q,-3,1)$，线段 AB 与 y 轴相交且被 y 轴平分，求 p,q 之值及交点坐标．

解：令 AB 与 y 轴相交于 C 点，即 C 为 AB 的中点，则 C 点的坐标为 $(\frac{-2+q}{2},\frac{5-3}{2},\frac{p+1}{2})$，

又 C 点在 y 轴上，所以 $\frac{-2+q}{2}=0,\quad \frac{p+1}{2}=0$，即 $q=2, p=-1$，

故 C 点的坐标为 $(0,1,0)$，即交点的坐标为 $(0,1,0)$.

**3. 设 A, B 两点的坐标分别为 $(0,2,-1),(1,0,1)$. 求

（1）向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模；（2）向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦；

（3）使 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ 的 C 点坐标.

解：（1）$\overrightarrow{AB}=\{1,-2,2\}$，则 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$，

所以 $\overrightarrow{AB}$ 的模为 3.

（2）$\cos\alpha=\frac{1}{3},\quad \cos\beta=-\frac{2}{3},\quad \cos r=\frac{2}{3}$.

（3） 设 C 的坐标为（x,y,z），由 $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{CB}$ 则

$$x=\frac{0+1\times(-2)}{1+(-2)}=2,\qquad y=\frac{2+0\times(-2)}{1+(-2)}=-2,\qquad z=\frac{(-1)+1\times(-2)}{1+(-2)}=3,$$

所以 C 点的坐标为 $(2,-2,3)$.

**4. 求 p,q 的值，使向量 $\{2,p,-4\}$ 与 $\{-1,0,q\}$ 平行，再求一组使此两向量垂直的 p,q 值.

解：向量 $\vec{u}=\{2,p,-4\}$ 与 $\vec{v}=\{-1,0,q\}$ 平行，即：$\vec{u}=\lambda\vec{v}$，

$\therefore \frac{2}{-1}=\frac{p}{0}=\frac{-4}{q}$，$\therefore p=0, q=2$，

向量 $\vec{u}$ 与 $\vec{v}$ 垂直时，$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$，

$\therefore 2\times(-1)+p\times 0+(-4)\times q=0$.

$\therefore q=-\frac{1}{2}$，$p$ 为任意值.

**5. 求作用于某点三个力 $\boldsymbol{F}_1=\{1,2,3\},\boldsymbol{F}_2=\{-2,3,-4\},\boldsymbol{F}_3=\{3,-4,5\}$ 之合力的大小及方向.

解：$\vec{F}_{合}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\{1,2,3\}+\{-2,3,-4\}+\{3,-4,5\}=\{2,1,4\}$，

合力的大小 $|\vec{F}_{合}|=\sqrt{2^2+1^2+4^2}=\sqrt{21}$，

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{21}},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{21}},\quad \cos\gamma=\frac{4}{\sqrt{21}},$$

其中α,β,γ分别为$\vec{F}_{合}$与x轴，y轴，z轴的夹角.

** 6. 试在xy平面上求一与 $a=\{1,1,1\}$成正交的向量.

解：设所求向量为 $\vec{b}=\{x,y,z\}$，　$\because$ 在xy平面上，

$\therefore z=0$， 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

即：$\{x,y,0\}\cdot\{1,1,1\}=0$，

$\therefore x+y=0$，　　$x=-y$，

取 $x=1,y=-1$，　$\therefore$ 向量 $\vec{b}=\{1,-1,0\}$与 $\vec{a}=\{1,1,1\}$正交.

** 7.设$\boldsymbol{a}=\{1,-2,2\}$，$\boldsymbol{b}=\{3,0,-4\}$，求：

（1）$\vec{a}\cdot\vec{j}$；　　　　（2）$\vec{b}\times\vec{k}$；

（3）$(2a+b)\cdot(a-b)$；　　　　（4）$(a+b)\times(3a-b)$.

解：（1）$\vec{a}\cdot\vec{j}=(\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k})\cdot\vec{j}=-2$.

（2）$\vec{b}\times\vec{k}=(3\vec{i}-4\vec{k})\times\vec{k}=3\vec{i}\times\vec{k}=-3\vec{j}$.

（3）$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\{2\times1+3,2\times(-2),2\times2-4\}\cdot\{1-3,-2,2-(-4)\}$

$$=\{5,-4,0\}\cdot\{-2,-2,6\}=5\times(-2)+(-4)\times(-2)+0\times6=-2.$$

（4）$(\vec{a}+\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})=\{4,-2,-2\}\times\{0,-6,10\}=\{-32,-40,-24\}$.

** 8. 设$a=\{0,1,-1\}$，$b=\{\sqrt{2},-1,1\}$，求：

（1）$(a)_b,(b)_a$；　　　　（2）a与b的夹角.

解：（1）$(\vec{a})_{\vec{b}}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}}=\dfrac{\{0,1,-1\}\cdot\{\sqrt{2},-1,1\}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-1)^2+1}}=-1$；

$$\left(\vec{b}\right)_{\vec{a}}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\left\{\sqrt{2},-1,1\right\}\cdot\left\{0,1,-1\right\}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=-\sqrt{2};$$

（2）$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\theta$， 即 $-2=\sqrt{2}\times2\times\cos\theta$， 则 $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $0\le\theta\le\pi$，所以 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$，即 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{3\pi}{4}$.

** 9. 在 yz 平面内求模为 10 的向量 b，使它和向量 $a=8i-4j+3k$ 垂直.

解：∵ 向量 $\vec{b}$ 在 yz 平面内， ∴ 可设坐标为 $\{0,y,z\}$，

∵ $\vec{b}\perp\vec{a}$， ∴ $\vec{b}\cdot\vec{a}=0$，

即：$\{0,y,z\}\cdot\{8,-4,3\}=0$， ∴ $-4y+3z=0$，

又 $|\vec{b}|=\sqrt{y^2+z^2}=10$， ∴ $z=8,y=6$， 或 $z=-8,y=-6$，

∴向量 $\vec{b}$ 的坐标为：$\{0,6,8\}$ 或 $\{0,-6,-8\}$.

*** 10. 试证明

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3}a_i^{\ 2}}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{3}b_i^{\ 2}}\ge\left|\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\right|.$$

其中 a_1,a_2,a_3 及 b_1,b_2,b_3 为任意实数.

解：设 $\vec{a},\vec{b}$ 的坐标分别为 $\{a_1,a_2,a_3\},\{b_1,b_2,b_3\}$，

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=\left||\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\right|\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|,$$

即：$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\le\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}\cdot\sqrt{b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}+b_3^{\ 2}}$，

∴ $\sqrt{\sum_{i=1}^{3}a_i^{\ 2}}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{3}b_i^{\ 2}}\ge\left|\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\right|$.

第 10 章（之 3）（总第 55 次）

教学内容：§10.3 平面与直线[10.3.1]

**1. 解下列各题

(1) 平行于 x 轴，且过点 $P=(3,-1,2)$ 及 $Q=(0,1,0)$ 的平面方程是______ .

答：$y+z=1$

(2) 与 xOy 坐标平面垂直的平面的一般方程为______ .

答：$Ax+By+d=0 \qquad (A^2+B^2\neq 0)$

(3) 过点 $P=(1,2,1)$ 与向量 $\overrightarrow{S_1}=\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k},\overrightarrow{S_2}=-\vec{j}-\vec{k}$ 平行的平面方程为_____ .

答：$x-y+z=0$

(4) 点 $M_0=(6,2,-1)$ 到平面 $x-2y+2z+6=0$ 的距离为 $d=$__________.

解： $d=\dfrac{|6-2\times 2+2\times(-1)+6|}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}}=2$.

（5）平面 $3x-3y-6=0$ 是 （ ）

（A）平行于 xOy 平面 （B）平行于 z 轴，但不通过 z 轴

（C）垂直于 y 轴 （D）通过 z 轴

答：B

**2. 填表讨论一般方程 $Ax+Bx+Cz+D=0$ 中，系数 A,B,C,D 中有一个或数个等于零的特殊情况，与图象的特征的对应关系.

系 数 情 况	图 像 特 征
$C=0$， $ABD\neq 0$	
$A=D=0$， $BC\neq 0$	
	平面 Π 过 z 轴
	平面 Π 垂直于 y 轴

解：$Ax+By+Cz+D=0$，

（1） $C=0, ABD\neq 0$ 平行于 z 轴（不包括过 z 轴）的平面.

（2） $A=D=0,\ B\cdot C\neq 0$ 过 x 轴的平面（不包括过 y 轴、z 轴的平面）.

（3） $C=D=0,\ A^2+B^2\neq 0,(A\cdot B\neq 0)$ 过 z 轴的平面.

（4） $B\neq 0, A=C=0$ 平面垂直于 y 轴.

3．在下列各题中，求出满足给定条件的平面方程：

**（1）过点 $P=(-1,3,-2)$ 及 $Q=(0,2,-1)$ 且平行于向量 $\vec{l}=\{2,-1,-1\}$；

解：所求平面的法向量 $\vec{n}$ 垂直于向量 $\vec{l}=\{2,-1,-1\}$ 与由点 $P=(-1,3,-2)$ 与点 $Q=(0,2,-1)$ 构

成的向量$\overrightarrow{PQ}=\{1,-1,1\}$，故取$\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\times\vec{l}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=\{2,3,1\}$.

故可得所求平面方程为 $2(x+1)+3(y-3)+(z+2)=0$，

即 $2x+3y+z-5=0$.

**（2）过 z 轴且垂直于平面$3x-2y-z+7=0$；

解：平面$3x-2y-z+7=0$的法向量 $\overrightarrow{n^0}=\{3,-2,-1\}$，

故所求平面法向量$\vec{n}$与$\overrightarrow{n^0}$垂直，与 z 轴正交，故可取

$$\vec{n}=\overrightarrow{n^0}\times\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\{-2,-3,0\},$$

所求平面过 z 轴，故此平面必经过原点$(0,0,0)$，

故可得所求平面方程为 $-2x-3y+0z=0$，

即 $2x+3y=0$.

**（3）垂直于 yz 坐标面，且过点$P=(4,0,-2)$和$Q=(15,1,7)$；

解：由题意可知$P=(4,0,-2)$、$Q=(15,1,7)$，所以$\overrightarrow{PQ}=\{1,1,9\}$. 又由题意可知所求平面法向量 $\vec{n}$ 即与x轴垂直，又与向量$\overrightarrow{PQ}$垂直，故可取

$$\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 9\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\{0,9,-1\},$$

故可得所求平面方程为：$9(y-0)+(-1)(z+2)=0$，

即： $9y-z-2=0$.

***4. 自点$P_0=(2,3,-5)$分别向各坐标面作垂线，求过三个垂足的平面方程.

解：垂足分别为：$A=(2,3,0)$、$B=(0,3,-5)$和$C=(2,0,-5)$，所以

$\overrightarrow{AB}=\{-2,0,-5\}$, $\overrightarrow{AC}=\{0,-3,-5\}$

平面法向量为

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 0 & -5\\ 0 & -3 & -5\end{vmatrix}=\{-15,-10,6\}$$

故平面方程为：$15x+10y-6z-60=0$.

*** 5．过两点 $M=(0,4,-3)$ 和 $N=(6,-4,3)$ 作平面，使之不过原点，且使其在坐标轴上截距之和等于零，求此平面方程.

解：设平面方程为：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{a+b}=1$，由于它过 M,N 两点，则

$$\begin{cases}\dfrac{4}{b}+\dfrac{3}{a+b}=1\\ \dfrac{6}{a}-\dfrac{4}{b}-\dfrac{3}{a+b}=1\end{cases}$$

解得：$a=3,\qquad b=-2,6$，

故平面方程为：　$2x-3y-6z=6$ 或 $6x+3y-2z=18$.

**6．判断下列各组平面相对位置，是平行，垂直还是相交，重合.

（1）$\pi_1{:}x-y+2z-1=0,\pi_2{:}2x-2y+4z-3=0$

（2）$\pi_1{:}2x-2y-z-1=0,\pi_2{:}x+2y-2z=0$

解：（1）π_1,π_2 法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=\{1,-1,2\},\overrightarrow{n_2}=\{2,-2,4\}\overrightarrow{n_2}=2\overrightarrow{n_1}$

取 π_1 上一点 $(1,0,0)$，显然不在 π_2 上，故 π_1,π_2 平行，不重合.

（2）π_1,π_2 法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=\{2,-2,-1\},\overrightarrow{n_2}=\{1,2,-2\},\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{n_1}=0$

故 $\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_1}$ 垂直，从而 π_1,π_2 垂直.

第 10 章（之 4）（总第 56 次）

教学内容：§10.3 平面与直线[10.3.2，10.3.3]

**1．解下列各题：

（1） 过点 $M_1(3,-2,1), M_2(-1,0,2)$ 的直线方程为________________ .

答：$\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$

（2） 直线 $\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ 2x+y-2z+6=0 \end{cases}$ 在 xOz 坐标面上的交点为 $P=$____________，并利用该点的坐标，写出此直线的对称式方程和参数方程.

答： $P=(0,0,3)$．对称式方程为 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-3}{5}$，参数方程为 $\begin{cases} x=3t \\ y=4t \\ z=5t+3 \end{cases}$

（3）直线 $x+a=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{k}$ 在平面 $x+y-z=3$ 上的充要条件是 $a=$______，$k=$_____.

答：$a=-2$，$k=3$．因为点 $P=(-a,1,0)$ 在平面上，直线的方向向量 $\vec{l}=\{1,2,k\}$ 与平面的法向量 $\vec{n}=\{1,1,-1\}$ 必须垂直.

**2．求经过点 $A=(-3,0,2)$ 且与两个平面 $x+z=1$ 及 $x+y+z=1$ 同时平行的直线方程.

解：所求直线 L 的方向向量 $\vec{l}\perp\vec{n}_1=\{1,0,1\}$，且 $\vec{l}\perp\vec{n}_2=\{1,1,1\}$，

$$\therefore \text{ 可取 } \vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\{-1,0,1\},$$

$$\therefore \text{ 所求直线方程为： } \frac{x+3}{-1}=\frac{y}{0}=z-2.$$

**3．求经过点 $A=(2,-1,0)$ 且与两条直线 $x=y=z$ 及 $\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$ 同时垂直的直线方程.

解：所求直线 L 的方向向量 $\vec{l}\perp\vec{l}_1=\{1,1,1\}$，且 $\vec{l}\perp\vec{l}_2=\{0,1,-1\}$，

$\therefore$可取 $\vec{l}=\vec{l}_1\times\vec{l}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\{-2,1,1\}$， $\therefore$所求直线方程为：$\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=z$.

**4. 求出过点 $A=(-1,-4,3)$ 且与下列两条直线

$$L_1:\begin{cases}2x-4y+z=1\\x+3y=-5\end{cases}\qquad L_2:\begin{cases}x=2+4t\\y=-1-t\\z=-3+2t\end{cases}$$

均垂直的直线方程.

解：$L_1:\begin{cases}2x-4y+z=1\\x+3y=-5\end{cases}$，$\vec{l}_1\perp\vec{n}_1=\{2,-4,1\}$，$\vec{l}_1\perp\vec{n}_2=\{1,3,0\}$

$\therefore$ 可取 $\vec{l}_1=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{-3,1,10\}$，

$$L_2:\begin{cases}x=2+4t\\y=-1-t\\z=-3+2t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x-2}{4}=t\\\dfrac{y+1}{-1}=t\\\dfrac{z+3}{2}=t\end{cases}\Rightarrow\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{2},$$

$\therefore$ 可取 $\vec{l}_2=\{4,-1,2\}$，$\vec{l}\perp\vec{l}_1$，且$\vec{l}\perp\vec{l}_2$.

$\therefore$ 可取 $\vec{l}=\vec{l}_1\times\vec{l}_2=\{12,46,-1\}$，

$\therefore$所求直线方程为$\dfrac{x+1}{12}=\dfrac{y+4}{46}=\dfrac{z-3}{-1}$.

**5. 求通过点$M_0=(2,1,-5)$且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$相交并垂直的直线方程.

解法一：直线$L_1:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$上取一点$M_1=(-1,1,0)$，

过点M_0与直线L_1的平面π的法向量$\vec{n}$，则$\vec{n}\perp\vec{l}_1$ 且 $\vec{n}\perp\overrightarrow{M_0M_1}$，

$\therefore\vec{l}_1\times\overrightarrow{M_0M_1}=\{3,2,-1\}\times\{-3,0,5\}=\{10,-12,6\}$，故$\vec{n}$可取为 $\vec{n}=\{5,-6,3\}$.

因所求直线 L 过点M_0点且与L_1相交，故 L 亦在平面π上，

故 $\vec{l}\perp\vec{n}$, $\vec{l}_1\times\vec{n}=\{0,-14,-28\}$， 故可取 $\vec{l}=\{0,1,2\}$.

故所求直线方程为 $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+5}{2}$.

解法二：过点M_0作垂直于直线L_1的平面π：

$3(x-2)+2(y-1)-(z+5)=0$，即$3x+2y-z-13=0$

直线L_1与平面π的交点M的坐标满足：$\begin{cases}3x+2y-z-13=0\\\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=1\\x=2\\y=3\\z=-1\end{cases}$

$\therefore M$ 点坐标为 $(2,3,-1)$，$\therefore \overrightarrow{M_0M}=\{0,2,4\}$，

$\therefore$所求直线方程为：$\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+5}{2}$.

**6．试求 k 值，使两条直线 $L_1:\dfrac{x-1}{k}=\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z-3}{-3}, L_2:\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-9}{-4}=\dfrac{z+14}{7}$ 相交.

解：将第二条直线的参数方程 $\begin{cases}x=3t-3\\ y=-4t+9\\ z=7t-14\end{cases}$ 代入第一条直线方程，有

$$\frac{3t-4}{k}=\frac{-4t+13}{5}=\frac{7t-17}{-3}$$

解得 $k=2$

**7．求直线 $l_1\!:x-1=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{0}$ 与 $l_2\!:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-3}{2}$ 之间的夹角.

解：l_1，l_2 方向向量分别为 $\overrightarrow{S_1}=\{1,-1,0\},\overrightarrow{S_2}=\{-1,0,2\}$，

$\cos(\overrightarrow{S_1},\hat{\ }\overrightarrow{S_2})=\dfrac{\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}}{|\overrightarrow{S_1}||\overrightarrow{S_2}|}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，故 l_1，l_2 之间的夹角为 $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

**8．已知直线 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{p}=\dfrac{z}{-1}$ 和平面 $qx-6y+2z=1$ 垂直,求常数 p,q 之值.

解：$\vec{l}=\{2,p,-1\}//\vec{n}=\{q,-6,2\}$，$\therefore \dfrac{2}{q}=\dfrac{p}{-6}=\dfrac{-1}{2}\Rightarrow q=-4, p=3$.

**9．求过直线 $\begin{cases}2x+7y-5z-7=0\\ 2x-y+z-4=0\end{cases}$ 且在 x 轴和 y 轴上的截距相等的平面方程.

解：过直线 $\begin{cases}2x+7y-5z-7=0\\ 2x-y+z-4=0\end{cases}$ 的平面束方程可设为

$$u(2x+7y-5z-7)+v(2x-y+z-4)=0 \qquad (*)$$

令 $y=z=0$，求得在 x 轴截距 $x=\dfrac{7u+4v}{2u+2v}$，

令 $x=z=0$，求得在 y 轴截距 $y=\dfrac{7u+4v}{7u-v}$.

$\because x=y \qquad \therefore \dfrac{7u+4v}{2u+2v}=\dfrac{7u+4v}{7u-v}$，

$\therefore 7u+4v=0$或$2u+2v=7u-v$，

即:$\dfrac{u}{v}=-\dfrac{4}{7}$或$\dfrac{u}{v}=\dfrac{3}{5}$,代入（*）式，可得满足条件的平面有两个

（1）$-\dfrac{4}{7}(2x+7y-5z-7)+(2x-y+z-4)=0$，即：$6x-35y+27z=0$；

（2）$\dfrac{3}{5}(2x+7y-5z-7)+(2x-y+z-4)=0$，即：$16x+16y-10z=41$.

***10. 求直线$x=y=z$在平面$x+5y-3z=1$上的投影直线.

解：直线L的方向向量 $\vec{l}=\{1,1,1\}$. 在直线L上取一点$A=(0,0,0)$，显然不满足方程

$x+5y-3z=1$, $\therefore A$不在该平面上.

设过A做与平面$\pi_0: x+5y-3z=1$的垂直的平面π.

则平面π的法向量可取为 $\vec{n}=\vec{l}\times\vec{n}_0=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & -3\end{vmatrix}=-4\{2,-1,-1\}$，

这就得到了π的方程为$2x-y-z=0$. 从而得到投影直线方程为

$$\begin{cases}x+5y-3z=1\\ 2x-y-z=0\end{cases}.$$

第 10 章（之 5）（总第 57 次）

教学内容：§10.4 空间曲面

1. 选择题

*(1) 曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 是 （　　）

（A） zox平面上曲线$z=x$绕z轴旋转而成的旋转曲面

（B） zoy平面上曲线$z=|y|$绕z轴旋转而成的旋转曲面

（C） zox平面上曲线$z=x$绕x轴旋转而成的旋转曲面

（D） zoy平面上曲线$z=|y|$绕y轴旋转而成的旋转曲面

答：B

** (2) 方程$x^2+z^2=1$在空间表示 （　　）

（A） z轴　（B）球面　（C）母线平行y轴的柱面 （D）锥面

答：C

*(3) 方程$x^2+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{25}=-1$是 （　　）

(A) 单叶双曲面　(B) 双叶双曲面

(C) 椭球面　(D) 双曲抛物面

答：B

*(4) 双曲面$x^2-\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=1$与$yoz$平面 （　　）

(A) 交于一双曲线　(B) 交于一对相交直线

(C) 不交　(D) 交于一椭圆

答：C

*2. 求以$M_1=(1,4,5),M_2=(1,1,1)$为直径的两个端点的球面的方程.

解： M_1,M_2中点为$M_0=(1,\dfrac{5}{2},3)$， $|M_1M_2|=5$.

即直径为 5，半径为 5/2.

故球面方程为　$(x-1)^2+(y-\dfrac{5}{2})^2+(z-3)^2=(\dfrac{5}{2})^2$.

即$x^2+y^2+z^2-2x-5y-6z+10=0$.

**3. 动点M到两定点$P_1=(a,0,0),P_2=(4a,0,0)$的两个距离之比等于 1：2，求动点M的轨迹方程.

解：设动点$M=(x,y,z)$

$|P_1M|:|P_2M|=1:2$　即　$4[(x-a)^2+y^2+z^2]=(x-4a)^2+y^2+z^2$,

即 $x^2+y^2+z^2=(2a)^2$.

**4. 动点$M=(x,y,z)$到点$A=(0,0,2)$的距离和它到 xy 平面的距离相等,求动点 M 的轨迹方程.

解：动点$M=(x,y,z)$到点$A=(0,0,2)$的距离为 $d_1=\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}$，

动点M到xOy平面的距离为 $d_2=|z|$ $d_1=d_2$，

∴动点 M 的轨迹方程为 $x^2+y^2+(z-2)^2=z^2$，

整理得：$x^2+y^2=4z-4$ 是旋转抛物面.

**5. 求yOz平面上曲线$y^2-z^2=1$分别绕y轴，z轴而成的旋转曲面的方程.

解：绕y轴 $-x^2+y^2-z^2=1$； 绕z轴 $x^2+y^2-z^2=1$.

6. 把下列方程化为标准形式，从而指出方程所表示曲面的名称并画出图形.

**（1）$x^2+2y^2-z^2+2x+4y-1=0$；

解：$x^2+2y^2-z^2+2x+4y-1=0$， $(x^2+2x)+(2y^2+4y)-z^2=1$，

$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{2}-\frac{z^2}{4}=1$，是一个单叶双曲面， 中心为$M_0=(-1,-1,0)$.

**（2）$x^2-4y^2-z^2+8y-2z-9=0$.

解：$x^2-4y^2-z^2+8y-2z-9=0$， $x^2-4(y^2-2y)-(z^2+2z)=9$，

$x^2-4(y-1)^2-(z+1)^2=4$，

$\frac{x^2}{4}-(y-1)^2-\frac{(z+1)^2}{4}=1$，是一个双叶双曲面，中心为$M_0=(0,1,-1)$.

第 10 章（之 6）（总第 58 次）

教学内容：§10.5 向量函数 空间曲线基本知识

**1. 求曲线$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1 \\ x-2z+3=0 \end{cases}$在 xoy 平面上的投影柱面方程.

解：消去 z，得 $x^2+20y^2-24x-116=0$，

即为所求投影柱面方程.

**2．求以曲线$\begin{cases} x^2+y^2+2z^2=1 \\ x^2-y^2+z^2=1 \end{cases}$为准线，母线平行于 z 轴的柱面方程.

解：$\begin{cases} x^2+y^2+2z^2=1 \\ x^2-y^2+z^2=1 \end{cases} \overset{\text{消z}}{\Rightarrow} \quad x^2-3y^2=1$

故所求柱面方程为 $x^2-3y^2=1$.

**3. 求曲线$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$在各坐标平面上的投影曲线方程.

解：消去 z，得 $x^2+y^2+x+y=1$

故在 xoy 平面上，投影曲线为 $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=1 \\ z=0 \end{cases}$

消去 x，得 $z=(1-y-z)^2+y^2$

故在 yoz 平面上，投影曲线为 $\begin{cases} z=(1-y-z)^2+y^2 \\ x=0 \end{cases}$

消去 y，得 $z=x^2+(1-x-z)^2$

故在 xoz 平面上，投影曲线为 $\begin{cases} z=x^2+(1-x-z)^2 \\ y=0 \end{cases}$

** 4．把曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和 $x+y=1$ 的交线改写为母线分别平行于 x 轴与 y 轴的两个柱面的交线.

解： $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ (1)

由（1）消去 x $\Rightarrow (y-1)^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow 2y^2-2y+z^2=0$，

由（1）消去 y $\Rightarrow (x-1)^2+x^2+z^2=1 \Rightarrow 2x^2-2x+z^2=0$，

交线可写为 $\begin{cases} 2y^2+z^2-2y=0 \\ 2x^2+z^2-2x=0 \end{cases}$.

**5. 求由曲面 $3x^2+y^2=z$ 和 $z=1-y^2$ 所围成的立体在 xOy 平面上的投影区域.

解：投影区域由交线 $\begin{cases} 3x^2+y^2=z \\ z=1-y^2 \end{cases}$ 在 xOy 平面上投影曲线所围成

投影曲线为 $\begin{cases} 3x^2+y^2=1-y^2 \\ z=0 \end{cases}$， 故投影区域为 $\begin{cases} 3x^2+2y^2\le 1 \\ z=0 \end{cases}$.

**6. 试求曲线 $\vec{r}(t)=t\vec{i}+e^t\vec{j}+e^{-t}\vec{k}$ 对应于 $t=0$ 点出的切线方程.

解：$\vec{r}(\theta)=t\vec{i}+e^t\vec{j}+e^{-t}\vec{k}$，

$\therefore$ 此空间曲线的参数方程为 $\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=e^t \\ z(t)=e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t)=1 \\ y'(t)=e^t \\ z'(t)=-e^{-t} \end{cases}$.

$\therefore$ 在对应于 $t=0$ 时，$\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-e^0}{e^0}=\dfrac{z-e^0}{-e^0}$，

即：$x=y-1=\dfrac{z-1}{-1}$.

**7. 试求曲线 $r(t)=2(\cos 3t)\vec{i}+2(\sin 3t)\vec{j}+t^2\vec{k}$ 从 $t=0$ 到 $t=4$ 这一段的弧长.

解：空间曲线的参数方程为 $\begin{cases} x(t)=2(\cos 3t) \\ y(t)=2(\sin 3t) \\ z(t)=t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t)=-6\sin 3t \\ y'(t)=6\cos 3t \\ z'(t)=2t \end{cases}$.

$\therefore$ 弧长 $s=\int_0^4\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt \quad =\int_0^4\sqrt{36\sin^2 3t+36\cos^2 3t+4t^2}\,dt$

$=\int_0^4 2\sqrt{9+t^2}\,dt=20+9\ln 3$.

第 11 章（之 1）（总第 59 次）

教材内容： §11.1 多元函数

1．解下列各题：

**（1）．函数 $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$ 连续区域是 ______ ．

答：$x^2+y^2>1$

**（2）．函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，则（ ）

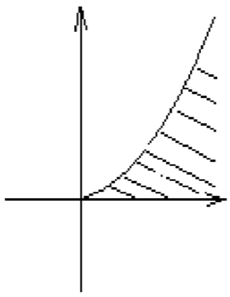
(A) 处处连续　　(B) 处处有极限，但不连续

(C) 仅在（0,0）点连续　　(D) 除（0,0）点外处处连续

答：（A）

**2. 画出下列二元函数的定义域：

（1）$u=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；



解：定义域为：$\{(x,y)\,|\,\sqrt{y}\le x\}$，见图示阴影部分：

（2）$f(x,y)=\ln(1+xy)$；

解：$\{(x,y)\,|\,xy>-1\}$，第二象限双曲线 $xy=-1$ 的上方，第四象限双曲线 $xy=-1$ 的下方（不包括边界，双曲线 $xy=-1$ 用虚线表示）.

（3）$z=\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$.

解：$\dfrac{x-y}{x+y}\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)(x+y)\ge 0\\ x+y\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\ge|y|\\ x\neq -y\end{cases}$.

***3. 求出满足 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$ 的函数 $f(x,y)$.

解：令$\begin{cases} s = x + y \\ t = \dfrac{y}{x} \end{cases}$，　　$\therefore \begin{cases} x = \dfrac{s}{1+t} \\ y = \dfrac{st}{1+t} \end{cases}$

$\therefore f(s,t) = \dfrac{s^2 - s^2t^2}{(1+t)^2} = \dfrac{s^2(1-t)}{1+t}$，　即　$f(x,y) = \dfrac{x^2(1-y)}{1+y}$.

***4. 求极限：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解：$0 \le \left|\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \dfrac{|xy|}{\left(\sqrt{1+xy}+1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)} \le \dfrac{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}{\left(\sqrt{1+xy}+1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}$

$= \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2\left(\sqrt{1+xy}+1\right)} \to 0$　（$(x,y)\to(0,0)$）

$\therefore$　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

**5. 说明极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$不存在.

解：我们证明(x,y)沿不同的路径趋于$(0,0)$时，极限不同.

首先，$x=0$时，极限为$\lim\limits_{\substack{x=0\\(x,y)\to(0,0)}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$，

其次，$y=0$时，极限为$\lim\limits_{\substack{y=0\\(x,y)\to(0,0)}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2}{x^2} = 1$，

故极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$不存在.

**6. 设$f(x,y) = \dfrac{y\sin 2x}{\sqrt{xy+1}-1}$，试问极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$是否存在？为什么？

解：不存在，因为不符合极限存在的前提，在$(0,0)$点的任一去心邻域内函数$f(x,y) = \dfrac{y\sin 2x}{\sqrt{xy+1}-1}$并不总有定义的，$x$轴与$y$轴上的点处函数$f(x,y)$就没有定义.

***7. 试讨论函数$z = \arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$的连续性.

解：由于$\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$是初等函数，所以除$xy=1$以外的点都连续，但在$xy=1$上的点处不连续.

**8. 试求函数$f(x,y)=\dfrac{xy}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$的间断点.

解：显然当$(x,y)=(m,n)\quad m,n\in Z$时，$f(x,y)$没定义，故不连续.

又$f(x,y)=\dfrac{xy}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$是初等函数.

所以除点(m,n)（其中$m,n\in Z$）以外处处连续.

第 11 章（之 2）（总第 60 次）

教材内容： §11.2 偏导数［§11.2.1］

**1. 解下列各题：

（1）函数$f(x,y)=\sqrt{x^2+|y|^3}$在$(0,0)$点处　　　　（　　）

（A）$f_x'(0,0)$和$f_y'(0,0)$都存在；　　（B）$f_x'(0,0)$和$f_y'(0,0)$都不存在；

（C）$f_x'(0,0)$存在，但$f_y'(0,0)$不存在；　　（D）$f_x'(0,0)$不存在，但$f_y'(0,0)$存在.

答：(D).

（2） 设$z=x+(y-2)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，那么$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(!,2)}=$　　　　（　　）

(A) 0 ；　　(B) 1；　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$；　　(D) $\dfrac{\pi}{4}$.

答：(D).

（3）设$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，则$f_x'(0,0)=$______，$f_y'(0,0)=$_________.

解：由于$f(x,0)=0$，$\therefore\quad f_x'(0,0)=0$，同理$f_y'(0,0)=0$.

**2. 设$z=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3e^{xy}$，求$z_x,z_y$.

解：$z_x=1+\dfrac{x}{x^2+y^2}+3ye^{xy}$，　　　　$z_y=-2+\dfrac{y}{x^2+y^2}+3xe^{xy}$.

**3. 求函数 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$ 对各自变量的偏导数.

解：$z_x=-\dfrac{y}{x^2+y^2}, z_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

**4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2\ln(x^2+y^2) & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f_x(0,0), f_y(0,0)$.

解：$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\ln x^2}{x}=0$，　$f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0-0}{y}=0$.

***5. 求曲线 $\begin{cases}z=x^2-xy+y^2\\ x=1\end{cases}$ 在 $(1,1,1)$ 点处切线与 y 轴的夹角.

解：由于曲线在平面 $x=1$ 内，故由　$z_y\big|_{(1,1)}=(-x+2y)\big|_{(1,1)}=1$，

得切线与 y 轴的夹角为 $\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$. [也可求出切向量为 $\{0,1,1\}$]

$\therefore$ 夹角= $\arccos\dfrac{\{0,1,1\}\{0,1,0\}}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{12}}=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$.

***6. 设函数 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续，已知函数 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 偏导数 $f_x'(0,0)$ 存在，

（1）证明 $\varphi(0,0)=0$；　（2）证明 $f_y'(0,0)$ 也一定存在.

解：（1）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}$，

因为 $f_x'(0,0)$ 存在，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta x\cdot\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{-\Delta x\cdot\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}$

即　$\varphi(0,0)=-\varphi(0,0)$，　故　$\varphi(0,0)=0$.

（2）由于 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续，且 $\varphi(0,0)=0$，所以 $\Delta y\to 0$ 时，$\varphi(0,\Delta y)$ 是无穷小量，

而$\dfrac{|\Delta y|}{\Delta y}$是有界量，所以$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta y|\varphi(0,\Delta y)}{\Delta y}=0$，即 $f_y'(0,0)=0$.

第 11 章（之 3）（总第 61 次）

教材内容： §11.2 偏导数［§11.2.2 ~ 11.2.4］

**1. 求函数 $f(x,y,z)=x\mathrm{ch}z-y\mathrm{sh}x$ 的全微分，并求出其在点 $P=(0,1,\ln 2)$处的梯度向量.

解：$df(x,y,z)=d(x\mathrm{ch}z)-d(y\mathrm{sh}x)$

$$\begin{aligned}&=\mathrm{ch}z\,dx+x\mathrm{sh}z\,dz-\mathrm{sh}x\,dy-y\mathrm{ch}x\,dx\\&=(\mathrm{ch}z-y\mathrm{ch}x)dx-\mathrm{sh}x\,dy+x\mathrm{sh}z\,dz\end{aligned}$$

$$\therefore\ df(x,y,z)\big|_{(0,1,\ln 2)}=\frac{1}{4}dx,\qquad \nabla f(x,y,z)\big|_{(0,1,\ln 2)}=\left\{\frac{1}{4},0,0\right\}.$$

**2. 求函数 $z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$ 的全微分：

解：$dz=d\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}\ \ =d(\arctan x+\arctan y)$

$$=d(\arctan x)+d(\arctan y)=\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}$$

**3. 设 $z=\dfrac{\sec^2(xy)}{\ln(xy-1)}$，求 $\mathrm{d}z$.

解：$\mathrm{d}z=\dfrac{[\ln(xy-1)]\mathrm{d}[\sec^2(xy)]-\sec^2(xy)\,\mathrm{d}[\ln(xy-1)]}{[\ln(xy-1)]^2}$

$$=\frac{1}{[\ln(xy-1)]^2}[\ln(xy-1)2\sec^2(xy)\tan(xy)(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)-\frac{\sec^2(xy)}{xy-1}(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)]$$

$$=\frac{[2\ln(xy-1)\tan(xy)(xy-1)-1](y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)}{(xy-1)\cos^2(xy)\ln^2(xy-1)}.$$

**4. 利用 $\Delta f\approx df$，可推出近似公式：$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+df(x,y)$,

并利用上式计算 $\sqrt{(2.98)^2+(4.03)^2}$ 的近似值.

解：由于 $f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+df(x,y)$，

设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ ， $x=3,y=4,\Delta x=-0.02,\Delta y=0.03$，

于是 $df(x,y)=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x\Delta x+y\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+\frac{x\Delta x+y\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\therefore \sqrt{(2.98)^2+(4.03)^2}\approx\sqrt{3^2+4^2}+\frac{3(-0.02)+4(0.03)}{\sqrt{3^2+4^2}}=5.012.$$

***5. 已知圆扇形的中心角为 $\alpha=60^\circ$，半径为 $r=20cm$，如果 α 增加了 1°，r 减少了 1cm，试用全微分计算面积改变量的近似值.

解：$S=\frac{1}{2}r^2\frac{\pi\alpha}{180}$，

$$dS=\frac{\pi}{360}(2(\alpha dr+r^2d\alpha)),$$

$$\therefore\ \Delta S\approx dS=\pi\left(\frac{2\times20\times60\times(-1)}{360}+\frac{(20)^2\times1}{360}\right)=-17.4533(cm^2).$$

***6. 计算函数 $f(x,y,z)=\ln(x+2y+3z)$ 在点 $P=(1,2,0)$ 处沿给定方向 $\vec{l}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ 的方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}\right|_P$.

解：$f_x=\frac{1}{x+2y+3z}$，　$f_y=\frac{2}{x+2y+3z}$，　$f_z=\frac{3}{x+2y+3z}$，

$$\vec{e}_l=\left\{\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6}\right\},$$

$$\therefore\ \left.\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}\right|_P=\nabla f\cdot\vec{e}_l=\left\{\frac15,\frac25,\frac35\right\}\cdot\left\{\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6}\right\}=\frac{1}{5\sqrt6}.$$

***7. 函数 $z=\arctan\frac{1+x}{1+y}$ 在（0，0）点处沿哪个方向的方向导数最大，并求此方向导数

的值.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1+y}\right)^2}\cdot\frac{1}{1+y}\Big|_{(0,0)}=\frac{1}{2}$，

$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1+y}\right)^2}\cdot\left[-\frac{1+x}{(1+y)^2}\right]\Big|_{(0,0)}=-\frac{1}{2}$，

$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{1}{2}\cos\alpha+(-\frac{1}{2})\sin\alpha=\frac{1}{2}\{1,-1\}\cdot\{\cos\alpha,\sin\alpha\}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi$，

其中 φ 为 $\bar{l}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$ 与 $\bar{g}=\left\{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\}$ 的夹角，

所以 $\varphi=0$ 时，即 $\bar{l}$ 与 $\bar{g}$ 同向时，方向导数取最大值 $\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**8. 对函数 $f(x,y,z)=e^{xyz}$ 求出 $\nabla f(x,y,z)$ 以及 $\nabla f(1,2,3)$.

解： $\nabla f=\{yze^{xyz},xze^{xyz},xye^{xyz}\}$，$\nabla f(1,2,3)=e^6\{6,3,2\}$.

**9. 求函数 $f(x,y,z)=(x+y)^{\frac{1}{z}}$ 在点 $P=(\frac{e+1}{2},\frac{e-1}{2},\frac{1}{2})$ 处的梯度.

解：$\nabla f=\left\{\frac{1}{z}(x+y)^{\frac{1}{z}-1},\frac{1}{z}(x+y)^{\frac{1}{z}-1},-\frac{(x+y)^{\frac{1}{z}}}{z^2}\ln(x+y)\right\}$，

$\nabla f(\frac{e+1}{2},\frac{e-1}{2},\frac{1}{2})=\{2e,2e,-4e^2\}$.

***10. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点（0，0）处的连续性，可导性和可微性.

解：因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$，

所以 $f(x,y)$ 在点（0，0）连续.

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}$，

极限不存在，$f(x,y)$ 在（0，0）处不可导，从而在（0，0）处不可微.

第 11 章（之 4）（总第 62 次）

教材内容：§11.3 复合函数微分法；§11.4 隐函数微分法

**1. 解下列各题：

（1） 若函数 $f(u,v)$ 可微，且有 $f(x,x^2)=x^4+2x^3+x$ 及 $f'_u\ (x,x^2)=2x^2-2x+1$，则

$f'_v\ (x,x^2)$= （ ）

(A) $2x^2+2x+1$ (B) $2x^2+3x+\dfrac{1}{2x}$

(C) $2x^2-2x+1$ (D) $2x^2+3x+1$

答：(A)

（2）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xy^2z=x+y+z$ 所确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ =________.

答： $\dfrac{2xyz-1}{1-xy^2}$.

（3）方程 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3\dfrac{\partial z}{\partial y}$，在变量代换 $u=x+3y$，$v=3x+y$ 下，可得新方程为_______.

答：$\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$.

**2. 设 $u=x^2+y^2+z^2, x=r\cos\theta\sin\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\varphi$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial r},\dfrac{\partial u}{\partial \theta},\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$.

解：$\dfrac{\partial u}{\partial r}=2x(\cos\theta\sin\varphi)+2y\sin\theta\sin\varphi+2z\cos\varphi=2r$，

$\dfrac{\partial u}{\partial \theta}=2x[r(-\sin\varphi)\sin\theta]+2y(r\cos\theta\sin\varphi)=0$，

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=2x(r\cos\theta\cos\varphi)+2y(r\sin\theta\cos\varphi)-2zr\sin\varphi=0.$$

**3. 一直圆锥的底半径以 3 cm/s 的速率增加，高 h 以 5 cm/s 的速率增加，试求 r=15 cm，h=25 cm 时其体积的增加速率.

解：$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$，

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt}+\frac{\partial V}{\partial h}\cdot\frac{dh}{dt}=\frac{2\pi}{3}rh\frac{dr}{dt}+\frac{1}{3}\pi r^2\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\substack{r=15\\h=25}}=1125\pi cm^3/s$$

*4. 设 $z=e^x-\sqrt[3]{y}$, 而 $x=\sin t, y=t^4$，求 $\frac{dz}{dt}$.

解：$\frac{dz}{dt}=z_x\frac{dx}{dt}+z_y\frac{dy}{dt}=e^x\cos t-\frac{4t^3}{3y^{\frac{2}{3}}}$.

**5. 若 $z=\frac{xy}{f(x^2-y^2)}$，证明：$xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+x^2y\frac{\partial z}{\partial y}=x^2z+y^2z$.

解：$z_x=\frac{yf-2x^2yf'}{f^2}, z_y=\frac{xf+2xy^2f'}{f^2}$，

则 $xy^2z_x+x^2yz_y=\frac{xy(x^2+y^2)}{f}=x^2z+y^2z$.

**6. 设 $u=f(xe^y, ye^x, xy\cos^2 x)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},du$.

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=e^y f_1+ye^x f_2+(y\cos^2 x-xy\sin 2x)f_3$ ，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=xe^y f_1+e^x f_2+x\cos^2 xf_3,$$

$$du=\left[e^y f_1+ye^x f_2+(y\cos^2 x-xy\sin 2x)f_3\right]dx+\left[xe^y f_1+e^x f_2+x\cos^2 xf_3\right]dy.$$

**7. 求由方程 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：$z_x=-\dfrac{Fx}{Fz}=-\dfrac{\frac{1}{z}}{-\frac{x}{z^2}-\frac{y}{yz}}=\dfrac{z}{x+z}$， $z_y=-\dfrac{Fy}{Fz}=-\dfrac{\frac{1}{y}}{-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z}}=\dfrac{z^2}{xy+yz}$.

**8. 设 $F(xy,y+z,xz)=0,$ 试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},dz$.

解：$F(xy,y+z,xz)=0,$ 两边对 x 求导，得 $yF_1+z_xF_2+F_3(z+xz_x)=0$，

解得 $z_x=-\dfrac{yF_1+zF_3}{F_2+xF_3}$，

两边对 y 求导，得 $xF_1+F_2(1+z_y)+F_3xz_y=0$.

解得 $z_y=-\dfrac{xF_1+F_2}{F_2+xF_3}$ ，所以 $dz=-\dfrac{yF_1+zF_3}{F_2+xF_3}dx-\dfrac{xF_1+F_2}{F_2+xF_3}dy$.

***9. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x,x+y+z,z+xy)=1$ 所确定，其中 F 具有连续一阶偏导数，$F_2+F_3\neq 0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：$F_1\,\mathrm{d}x+(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)F_2+(\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)F_3=0$，

$$\mathrm{d}z=-\frac{(F_1+F_2+yF_3)\,\mathrm{d}x+(F_2+xF_3)\,\mathrm{d}y}{F_2+F_3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1+F_2+yF_3}{F_2+F_3},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_2+xF_3}{F_2+F_3}.$$

***10. 求由方程 $z^3-3xyz=a^3\quad(a\neq 0)$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在坐标原点处沿由向量 $\vec{a}=\{-1,-2\}$ 所确定的方向的方向导数.

解：当 $x=0,y=0$ 时，$z_0=a\neq 0$.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0.0)}=\left.\frac{yz}{z^2-xy}\right|_{(0,0)}=0,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0.0)}=\left.\frac{xz}{z^2-xy}\right|_{(0,0)}=0,\quad \therefore \frac{\partial z}{\partial a}=0.$$

***11. 设 $xu-yv=0,yu+xv=1,(x^2+y^2\neq 0)$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解：$\begin{cases} u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ v+y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{xv-yu}{x^2+y^2} \end{cases}$

类似地 $\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial y}-v-y\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ u+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+x\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{yu-xv}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2} \end{cases}$

第 11 章 （之 5）（总第 63 次）

教材内容：§11.5　多元函数微分法在几何上的应用

**1. 曲面 $x^2-2y^2+z^2-xyz-4x+2z=6$ 在点 $A=(0,1,2)$ 处的切平面方程为 （　　）

（A） $3(x-1)+2(y-2)-3z+11=0$　　（B） $3x+2y-3z=4$

（C） $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y-1}{2}+\dfrac{z-2}{-3}=0$　　（D） $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$

答：(A).

**2. 设函数 $F(x,y,z)$ 可微，曲面 $F(x,y,z)=0$ 过点 $M=(2,-1,0)$，且 $F_x(2,-1,0)=5, F_y(2,-1,0)=-\sqrt{2}, F_z(2,-1,0)=-3$. 过点 M 作曲面的一个法向量 $\vec{n}$，已知 $\vec{n}$ 与 x 轴正向的夹角为钝角，则 $\vec{n}$ 与 z 轴正向的夹角 $\gamma=$______ .

答：$\dfrac{\pi}{3}$.

***3. 设曲线 $x=2t+1, y=3t^2-1, z=t^3+2$ 在 $t=-1$ 对应点处的法平面为 S，则点 $P=(-2,4,1)$ 到 S 的距离 $d=$______ .

答：2.

**4. 求曲线 $L: x=a\cos t, y=b\sin t, z=ct$ 在点 $M_0=(a,0,2\pi c)$ 处的切线和法平面方程.

解：$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=-a\sin t\Big|_{t=0}=0,$

$\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=-b\cos t\Big|_{t=0}=b,\qquad \frac{dz}{dt}\Big|_{t=0}=c$.

$\therefore$切线方程为：$\frac{x-a}{0}=\frac{y-0}{b}=\frac{z-2\pi c}{c}\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\\ \frac{y}{b}=\frac{z-2\pi c}{c}\end{cases}$，

法平面方程为：$by+c(z-2\pi c)=0$.

***5. 求曲线$L: xy+yz+zx=11,\quad xyz=6$在点$M_0=(1,2,3)$处的切线和法平面方程.

解：设 $F(x,y,z)=xy+yz+zx-11$，$G(x,y,z)=xyz-6$，

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}y+z & x+z\\ yz & xz\end{vmatrix}=xz(y+z)-yz(x+z)=z^2(-y+x),$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}x+z & y+x\\ zx & xy\end{vmatrix}=xy(x+z)-xz(x+y)=x^2(y-z),$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix}x+y & y+z\\ xy & zy\end{vmatrix}=zy(x+y)-xy(y+z)=y^2(z-x).$$

$\therefore \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\Big|_{M_0}=-9,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\Big|_{M_0}=-1,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\Big|_{M_0}=8$，

$\therefore$切线方程为 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{8}=\frac{z-3}{-9}$，

法平面方程为 $(x-1)(-1)+(y-2)8+(z-4)(-9)=0$，

即 $x-8y+9z-12=0$.

***6. 求曲面$4x^2+y^2+4z^2=16$在点$P=(1,2\sqrt{2},-1)$处的法线在yOz平面上投影方程.

解：曲面在点$P=(1,2\sqrt{2},-1$处的法线方向向量

$\vec{n}=\{8,4\sqrt{2},-8\}=4\{2,\sqrt{2},-2\}$,

法线方程为：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{z+1}{-2}$.

法线在 yOz 平面上投影方程为 $\frac{x}{0}=\frac{y-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{z+1}{-2}$.

***7. 求曲线 $x=t^3, y=2t^2, z=3t$ 上的点，使曲线在该点处的切线平行于平面 $x+2y-z=1$.

解：设所求的点对应于 $t=t_0$，则对应的切线方向向量为： $\vec{s}=\{3t_0^2, 4t_0, 3\}$.

因为 $\vec{s}$ 垂直于平面法向量 $\vec{n}=\{1,2,-1\}$，所以 $\vec{s}\cdot\vec{n}=3t_0^2+8t_0-3=0$，

解得：$t_0=\frac{1}{3}$ 和 $t_0=-3$．所求点为：$\left(\frac{1}{27},\frac{2}{9},1\right)$ 和 $(-27,18,-9)$.

**8．求曲面 $z=\frac{6}{xy}$ 上平行于平面 $6x-3y-2z+6=0$.的切平面方程.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{6}{xy}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{6}{xy^2}$,

$$\therefore \text{由条件，得：}\left.\begin{aligned}&-\frac{6}{x^2y}=6k\\&-\frac{6}{y^2x}=-3k\\&-1=-2k\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2\\z=-3\end{cases}$$

∴切平面方程为：$6(x-1)-3(y+2)-2(z+3)=0,$

即　$6x-3y-2z-18=0$.

***9. 求函数 $z=e^{x^2+y^2}$ 在点 $M_0=(x_0,y_0)$ 沿过该点的等值线的外法线方向的方向导数.

解：等值线方程为 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$，

在 $M_0=(x_0,y_0)$ 处的法线斜率为 $k=\frac{y_0}{x_0}$，即法线方向向量为 $\vec{n}=\{1,\frac{y_0}{x_0}\}$ 或 $\{x_0,y_0\}$，

方向余弦为：$\cos\alpha=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$　　$\cos\beta=\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$，

$$\frac{\partial z}{\partial n}=e^{x_0^2+y_0^2}\cdot 2x_0\cdot\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}+e^{x_0^2+y_0^2}\cdot 2y_0\cdot\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\qquad =2e^{x_0^2+y_0^2}\cdot\sqrt{x_0^2+y_0^2}\ .$$

***10. 求函数 $z=\sqrt{y+\sin x}$ 在 $P=\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 点沿 $\bar{a}$ 方向的方向导数，其中 $\bar{a}$ 为曲线 $x=2\sin t$， $y=\pi\cos 2t$ 在 $t=\frac{\pi}{6}$ 处的切向量（指向 t 增大的方向）.

解：$\tan\alpha=\left.\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{-2\pi\sin 2t}{2\cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}=-\pi$,

$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{\pi^2+1}}$， $\sin\alpha=\frac{-\pi}{\sqrt{\pi^2+1}}$,

$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},1\right)}=\left.\frac{\cos x}{2\sqrt{y+\sin x}}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},1\right)}=0$， $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},1\right)}=\left.\frac{1}{2\sqrt{y+\sin x}}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},1\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$,

所以 $\frac{\partial z}{\partial a}=0\times(\frac{1}{\sqrt{\pi^2+1}})+\frac{1}{2\sqrt{2}}\times(-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+1}})=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi^2+1}}$.

***11. 设 $f(y,z),g(z)$ 都是可微函数，求曲线 $\begin{cases}x=f(y,z)\\ y=g(z)\end{cases}$ 在对应于 $z=z_0$ 点处的切线方程和法平面方程.

解：$z=z_0$ 对应点 $\left(f[g(z_0),z_0],g(z_0),z_0\right)$， 对应的切线方向向量：

$$\vec{S}=\left\{f_y[g(z_0),z_0]g'(z_0)+f_z[g(z_0),z_0],g'(z_0),1\right\}.$$

切线方程： $\frac{x-f[g(z_0),z_0]}{f_y[g(z_0),z_0]g'(z_0)+f_z[g(z_0),z_0]}=\frac{y-g(z_0)}{g'(z_0)}=z-z_0$,

法平面方程： $\left\{f_y[g(z_0),z_0]g'(z_0)+f_z[g(z_0),z_0]\right\}\left\{x-f[g(z_0),z_0]\right\}$

$+g'(z_0)[y-g(z_0)]+(z-z_0)=0$.

****12. 在函数 $u=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的等值线中哪些曲线与椭圆 $x^2+8y^2=16$ 相切？

解：对等值线 $u_0=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 两边微分得 $-\frac{dx}{x^2}-\frac{dy}{y^2}=0$， 即 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2}{x^2}$,

同样对 $x^2+8y^2=16$ 两边微分，有 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{8y}$，

令 $-\dfrac{y^2}{x^2}=-\dfrac{x}{8y}$，得 $x=2y$，

代入 $x^2+8y^2=16$，得 $x=\pm\dfrac{4}{\sqrt{3}}$， $y=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，

∴ $u_0=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

***13. 试证明曲面 $xyz=a^3$ 上任一点处的切平面在三个坐标轴上截距之积为定值.

解：由 $xyz=a^3$， 得 $z=\dfrac{a^3}{xy}$，

∴在点 (x_0,y_0,z_0) 处法向量为：$-\left\{\dfrac{a^3}{{x_0}^2y_0},\dfrac{a^3}{{y_0}^2x_0},1\right\}$，

∴切平面为：

$$\frac{a^3}{{x_0}^2y_0}(x-x_0)+\frac{a^3}{x_0{y_0}^2}(y-y_0)+z-z_0=0,$$

又 ∵ $x_0y_0z_0=a^3$，

∴ 切平面方程化为：$\dfrac{x}{3x_0}+\dfrac{y}{3y_0}+\dfrac{z}{3z_0}=1$，

∴ 截距之积为： $27x_0y_0z_0=27a^3$（定值）.

***14. 证明曲面 $F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$ 的所有切平面都通过一个定点，这里 $F(u,v)$ 具有一阶连续偏导数.

解：曲面上点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面法向量：

$$\vec{n}=\left\{\frac{F_1}{z_0-c},\frac{F_2}{z_0-c},-\frac{1}{(z_0-c)^2}\left[(x_0-a)F_1+(y_0-b)F_2\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{(z_0-c)^2}\left\{(z_0-c)F_1,(z_0-c)F_2,-\left[(x_0-a)F_1+(y_0-b)F_2\right]\right\} .$$

切平面方程为： $(z_0-c)F_1(x-x_0)+(z_0-c)F_2(y-y_0)$

$$-\left[(x_0-a)F_1+(y_0-b)F_2\right](z-z_0)=0\,.$$

易知 $x=a,y=b,z=c$ 满足上述方程，即曲面的所有切平面都通过定点 (a,b,c) .

第 11 章 （之 6）（总第 64 次）

教学内容：§11.6 泰勒展开

1．填空：

*（1）设 $u=xy+\dfrac{y}{x}$，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$=________ .

答： $\dfrac{2y}{x^3}$.

*（2）设 $u=x\ln xy$，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$= ________.

答： $\dfrac{1}{y}$.

*（3）设 $u=x^2\sin y+y^2\cos x$，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$= ________ .

答： $2x\cos y-2y\sin x$.

*（4）设 $u=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$=_______ .

答：0 .

**（5）设 $z=e^x\sin y+e^{-x}\cos y$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$= ________.

答：0.

**2．设 $z=f(x,u)$ 具有连续的二阶偏导数，而 $u=xy$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解: $z_x=f_x+yf_u$， $z_{xx}=f_{xx}+2yf_{xu}+y^2f_{uu}$.

**3．设 $z = x\ln(xy)$，求 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

解一： $z_y = \dfrac{x}{y}$， $z_{yx} = \dfrac{1}{y}$， $z_{yx^2} = 0$.

解二： $z_x = \ln(xy) + 1$， $z_{x^2} = \dfrac{1}{x}$， $z_{yx^2} = 0$.

**4．设 $z = y^2 f(xy^2) + xf(x^3y^4)$， 求 $z_{xy}(\dfrac{1}{2},2)$.

解：$z_x = y^4 f'(xy^2) + f(x^3y^4) + 3x^3y^4 f(x^3y^4)$，

$$
\begin{aligned}
z_{xy} &= 4y^3 f'(xy^2) + y^4 f''(xy^2)\cdot 2yx + f'(x^3y^4)\cdot 4y^3x^3 \\
&\quad + 12x^3y^3 f'(x^3y^4) + 3x^3y^4 f''(x^3y^4)\cdot 4x^3y^3 \quad ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore z_{xy}(\frac{1}{2},2) &= 32f'(2) + 32f''(2) + 4f'(2) + 12f'(2) + 24f''(2) \\
&= 48f'(2) + 56f''(2) .
\end{aligned}
$$

**5．函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^2 + 2xy - y^2 = 1$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2}$.

解：$\dfrac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} = -\dfrac{2x+2y}{2x-2y} = \dfrac{x+y}{y-x}$，

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2} &= \frac{(1+y')(y-x) - (y'-1)(x+y)}{(y-x)^2} \\
&= \frac{-2(x^2+2xy-y^2)}{(y-x)^3} = \frac{2}{(x-y)^3} .
\end{aligned}
$$

***6．求方程 $x + z = e^{y+z}$ 所确定的函数 $z = z(x,y)$ z=z(x, y)的所有的二阶偏导数.

解：$1 + \dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{y+z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\therefore \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{e^{y+z}-1}$.

$$
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-e^{y+z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(e^{y+z}-1)^2} = -\frac{e^{y+z}}{(e^{y+z}-1)^3} ,
$$

因为 $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{y+z}(1+\frac{\partial z}{\partial y})$， $\therefore \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^{y+z}}{1-e^{y+z}}=-1+\frac{1}{1-e^{y+z}}$.

则 $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{e^{y+z}(\frac{\partial z}{\partial y}+1)}{(1-e^{y+z})^2}=\frac{e^{y+z}}{(1-e^{y+z})^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-e^{y+z}(\frac{\partial z}{\partial y}+1)}{(1-e^{y+z})^2}=\frac{-e^{y+z}}{(1-e^{y+z})^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{e^{y+z}\frac{\partial z}{\partial x}}{(1-e^{y+z})^2}=\frac{e^{y+z}}{(e^{y+z}-1)^3}.$$

***7．对于由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数 $z=(x,y)$，试求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解：由公式 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$ 两边对 x 求偏导数，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=-\frac{(F_{xx}+F_{xz}\frac{\partial z}{\partial x})F_z-F_x(F_{zx}+F_{zz}\frac{\partial z}{\partial x})}{F_z^{\ 2}}\\&=\frac{F_x(F_{zx}+F_{zz}\frac{-F_x}{F_z})-(F_{xx}+F_{xz}\frac{-F_x}{F_z})F_z}{F_z^{\ 2}}\\&=\frac{F_xF_zF_{zx}-F_{zz}(F_x)^2-(F_z)^2F_{xx}+F_{xz}F_xF_z}{F_z^{\ 3}}\\&=\frac{2F_xF_zF_{xz}-(F_x)^2F_{zz}-(F_z)^2F_{xx}}{F_z^{\ 3}}(一般约定F_{xz}=F_{zx})\text{。}\end{aligned}$$

***8．设 $u=\varphi(x+at)+\psi(x-at)$, 验证 $u_{tt}=a^2u_{xx}$.

解：$u_x=\varphi'(x+at)+\psi'(x-at)$,

$$\begin{aligned}u_{xx}&=\varphi''(x+at)+\psi''(x-at)\\u_t&=\varphi'(x+at)\cdot a+\psi'(x-at)(-a)\\u_{tt}&=\varphi''(x+at)\cdot a^2+\psi'(x-at)(-a)^2\\&=[\varphi''(x+at)+\psi'(x-at)]a^2\end{aligned}$$

$\therefore\ u_{tt}=a^2u_{xx}$.

第 11 章 （之 7）（总第 65 次）

教学内容： §11.7.1 多元函数的极值

1．选择题：

*(1) 设函数$z=1-\sqrt{x^2+y^2}$，则点$(0,0)$是函数z的 （　　）

（A）极大值点但非最大值点；（B）极大值点且是最大值点；

（C）极小值点但非最小值点；（D）极小值点且是最小值点.

答：(B)

**(2) 设函数$z=f(x,y)$具有二阶连续偏导数，在点$P_0=(x_0,y_0)$处，有

$$f_x(P_0)=0,f_y(P_0)=0,f_{xx}(P_0)=f_{yy}(P_0)=0,f_{xy}(P_0)=f_{yx}(P_0)=2$$，则（　　）

（A）点P_0是函数z的极大值点；（B）点P_0是函数z的极小值点；

（C）点P_0非函数z的极值点；（D）条件不够，无法判定.

答：(C)

**（3）“$f(x_0,y_0)$同时是一元函数$f(x,y_0)$与$f(x_0,y)$的极大值”是“$f(x_0,y_0)$是二元函数$f(x,y)$的极大值”的 （　　）

（A）充分条件，非必要条件；（B）必要条件，非充分条件；

（C）充分必要条件；（D）既非必要条件，又非充分条件.

解：（B）

**2. 设函数$z=z(x,y)$由方程$\dfrac{1}{2}x^2+3xy-y^2-5x+5y+e^z+2z=4$确定，则函数$z$的驻点是 ________ .

答：（$-\dfrac{5}{11}$，$\dfrac{20}{11}$）

**3. 求函数$z=2x^2-3xy+2y^2+4x-3y+1$的极值.

答：由$\begin{cases} z_x=4x-3y+4=0 \\ z_y=-3x+4y-3=0 \end{cases}$，得驻点 $(-1\,,\,0)$.

$$D=\begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=7>0,$$

$$z_{xx}(-1,0)=4>0.$$

所以函数在点$(-1\,,\,0)$处取极小值$z(-1,0)=-1$.

***4. 求函数 $f(x,y)=4xy-2x^2y+2xy^2-x^2y^2$ 的极值.

解：$\dfrac{\partial f}{\partial x}=4y-4xy+2y^2-2xy^2$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=4x-2x^2+4xy-2x^2y$，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-4y-2y^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4-4x+4y-4xy,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4x-2x^2.$$

令$\begin{cases} 4y-4xy+2y^2-2xy^2=0 \\ 4x-2x^2+4xy-2x^2y=0 \end{cases}$，解得驻点：$(1,-1),(0,0),(2,0),(0,-2),(2,-2)$.

$H\big|_{(1,-1)}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4>0, A=2>0$，$\therefore (1,-1)$为极小值点，$f(1,-1)=-1$.

类似可求其他各点处的H值：

$$H\big|_{(0,0)}=-16<0,\ H\big|_{(2,0)}=-16<0,\quad H\big|_{(0,-2)}=-16<0,\ H\big|_{(2,-2)}=-16<0。$$

$\therefore$ $(0,0),(2,0),(0,-2),(2,-2)$ 为鞍点.

**5．求方程 $x^2+y^2+z^2+2x-6z-6=0$ 所确定的函数$z=f(x,y)$的极值：

解：两边对x、y求偏导：$2x+2zz_x+2-6z_x=0$ (1)

$$2y+2zz_y-6z_y=0 \qquad (2)$$

$$\begin{cases} z_x = \dfrac{x+1}{3-z} = 0 \\ z_y = \dfrac{y}{3-z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

代入原式得 $z = 7, z = -1$.

将（1）对 x 求偏导： $2 + 2z_x^2 + 2zz_{xx} - 6z_{xx} = 0$，

将（2）对 y 求偏导： $2 + 2z_y^2 + 2zz_{yy} - 6z_{yy} = 0$，

将（2）对 x 求偏导： $2z_x z_y + 2zz_{xy} - 6z_{xy} = 0$，

$\therefore \ z_{xx} = \dfrac{1+z_x^2}{3-z}$， $z_{yy} = \dfrac{1+z_y^2}{3-z}$， $z_{xy} = \dfrac{z_x z_y}{3-z}$.

当 $x = -1, y = 0$ 时，$z_{xx} = \dfrac{1}{3-z} < 0, z_{yy} = \dfrac{1}{3-z}, z_{xy} = 0$

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3-z} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{3-z} \end{vmatrix} > 0,$$

故 $z = 7$ 时，$z_{xx} = \dfrac{1}{3-7} < 0$，函数有极大值 7，

故 $z = -1$ 时，$z_{xx} = \dfrac{1}{3+1} > 0$，函数有极小值 -1.

***6. 试证函数 $z = \left(1 + e^y\right)\cos x - ye^y$ 有无穷多个极大点而没有极小点.

解： $z_x = -(1+e^y)\sin x = 0 \quad \Rightarrow x = k\pi$，

$$z_y = e^y \cos x - e^y - ye^y = 0 \ \Rightarrow y = \begin{cases} 0, & x = 2k\pi \\ -2, & x = (2k+1)\pi \end{cases}.$$

$z_{xx} = -(1+e^y)\cos x$， $z_{xy} = -e^y \sin x = 0$， $z_{yy} = e^y(\cos x - 1) - e^y - ye^y$，

$x = 2k\pi$ 时

$$H = \begin{vmatrix} -(1+e^y) & 0 \\ 0 & -e^y(1+y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} > 0，\ z_{xx} = -2 < 0，$$

$x = (2k+1)\pi$ 时

$$H = \begin{vmatrix} 1+e^y & 0 \\ 0 & -e^y(3+y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+e^{-2} & 0 \\ 0 & -e^{-2} \end{vmatrix} < 0，$$

所以函数有无穷多个极大值点$(2k\pi,0)$， 无极小值点.

第 11 章（之 8）（总第 66 次）

教学内容：§11.7［§11.7.2-§11.7.3］最值，条件极值，拉格朗日乘子法

**1. 函数 $f(x,y,z)=z-2$ 在 $4x^2+2y^2+z^2=1$ 条件下的极大值是 （ ）

(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) -2

答：(C).

**2. 求函数 $u=x-2y+2z$ 在指定约束条件 $x^2+y^2+z^2=9$ 下的极值.

解：$L(x,y,z,\lambda)=x-2y+2z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-9\right)$,

令 $\dfrac{\partial L}{\partial x}=1+2\lambda x=0$， $\dfrac{\partial L}{\partial y}=-2+2\lambda y=0$，

$\dfrac{\partial L}{\partial z}=2+2\lambda y=0$， $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2-9=0$，

$\therefore x=-\dfrac{1}{2\lambda}, y=\dfrac{1}{\lambda}, z=\dfrac{-1}{\lambda}$.

代入 $x^2+y^2+z^2-9=0$， 得 $\lambda=\pm\dfrac{1}{2}$，$(x,y,z)=\pm(-1,2,-2)$.

$\therefore u(-1,2,-2)=-9$ 为极小值， $u(1,-2,2)=9$ 为极大值.

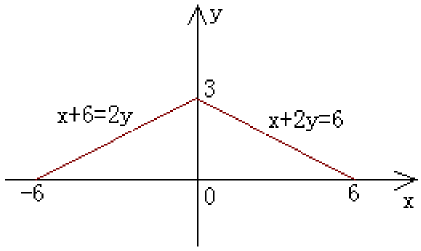
***3. 求函数 $f(x,y)=x^2+y^2-2x-4y+5$ 在区域

$D=\{(x,y)|2y-6\le x\le 6-2y,0\le y\le 3\}$

上的最小值，最大值.

解：$\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-2$ ， $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y-4$，

∴ 临界点为（1，2），　$f(1,2)=0$.



以下求边界上的最值

（1）$x+6=2y$，$0\le y\le 3$：

$$\begin{aligned} f(x,y)&=(2y-6)^2+y^2-2(2y-6)-4y+5\\ &=5y^2-32y+53 \end{aligned}$$

由 $\dfrac{d}{dy}(5y^2-32y+53)=10y-32<0$ 可知：

当 $y=0$，取最大值　$f(-6,0)=53$，当 $y=3$，取最小值　$f(0,3)=2$.

（2）$x=6-2y,\quad 0\le y\le 3$：

$$\begin{aligned} f(x,y)&=(-2y+6)^2+y^2-2(-2y+6)-4y+5\\ &=5y^2-24y+29 \end{aligned}$$

当 $y=0$，取最大值　$f(6,0)=41$，

当 $y=\dfrac{24}{10}$，取最小值 $f(\dfrac{6}{5},\dfrac{12}{5})=\dfrac{1}{5}$.

(3) 当 $y=0$，$-6\le x\le 6$：　$f(x,y)=x^2-2x+5=(x-1)^2+4$.

当 $x=-6$，取最大值　$f(-6,0)=53$，　当 $x=1$，取最小值　$f(1,0)=4$.

综合得：当 $x=1, y=2$ 时取最小值 $f(1,2)=0$，

当 $x=-6, y=0$ 时取最大值 $f(-6,0)=53$.

**4. 求函数 $z=x^2-2y^2+2x+2$ 在闭域 $D: x^2+4y^2\le 4$ 上的最大值和最小值.

答：由 $\begin{cases} z_x=2x+2=0\\ z_y=-4y=0 \end{cases}$ 得 D 内驻点 $(-1,0)$，且 $z(-1,0)=1$.

在边界 $x^2+4y^2=4$ 上，　$z_1=\dfrac{3}{2}x^2+2x\quad(-2\le x\le 2)$，

$z_1'=3x+2=0$，得驻点 $x=-\dfrac{2}{3}$，

$z_1(-2)=2\qquad z_1(2)=10\qquad z_1(-\dfrac{2}{3})=-\dfrac{2}{3}$，

$x=\pm 2$ 时　$y=0,\ x=-\dfrac{2}{3}$ 时 $y=\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$，

比较后可知, 函数 z 在点 $(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\sqrt{2}),(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\sqrt{2})$ 取最小值

$$z(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\sqrt{2})=(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\sqrt{2})=-\frac{2}{3},$$

在点 $(2,0)$ 取最大值 $z(2,0)=10$.

**5. 求表面积为 S，而体积为最大的圆柱体的体积.

解：设圆柱体的底圆半径为 r，高为 h. 则圆柱体的体积

$$V=\pi r^2 h,\quad 且\quad 2\pi r^2+2\pi rh=S.$$

令 $L=\pi r^2 h+\lambda\left(2\pi r^2+2\pi rh-S\right)$,

由 $\begin{cases} L_r=2\pi rh+4\lambda\pi r+2\lambda\pi h=0 \\ L_h=\pi r^2+2\lambda\pi r=0 \\ L_\lambda=2\pi r^2+2\pi rh-S=0 \end{cases}$,

得 $r=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ $,h=2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

$$V\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}},2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right)=2\pi\left(\frac{S}{6\pi}\right)^{3/2}$$

由于实际问题必定存在最大值，因此当圆柱体的底圆半径与高分别取 $\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$, $2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ 时，

有最大体积 $V_{\max}=2\pi\left(\frac{S}{6\pi}\right)^{3/2}$.

**6. 周长为 6p 的长方形，绕其一边旋转得一旋转体，试证明其体积不超过 $4\pi p^3$.

证：设长方形的长为 a，宽为 b，

$$\begin{aligned} &\max . V=\pi a^2 b \\ &s.t.\quad 2(a+b)=6p \end{aligned}$$

令 $L=\pi a^2 b+\lambda$（$a+b-3p$），

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial a}=2\pi ab+\lambda=0 \\ \frac{\partial L}{\partial b}=\pi a^2+\lambda=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow a=2b=2p,$$

$$\therefore\quad V\max=\pi(2p)^2 p=4\pi p^3.$$

**7. 在椭球体$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$位于第一卦限的部分内，作各侧面平行于坐标面的内接长方体，问长方体的尺寸如何，方能使其体积为最大？（$a>0,b>0,c>0$）

解：设长方体的长、宽、高分别为x,y,z，则长方体与椭球的交点为 (x,y,z)，

所以长方体的体积 $V=xyz$， 且$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

令 $L=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$

由$\begin{cases} L_x=yz+\frac{2\lambda}{a^2}x=0 \\ L_y=xz+\frac{2\lambda}{b^2}y=0 \\ L_z=xy+\frac{2\lambda}{c^2}z=0 \\ L_\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$

得 $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$，于是 $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{b}{\sqrt{3}}$, $z=\frac{c}{\sqrt{3}}$，

由于实际问题的最大值必定存在，因此当内接长方体的长、宽、高分别取

$\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}$时，其体积最大.

**8. 在抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y+z=4$ 的交线上，求出到原点距离最大和最小的点.

解：目标函数：$u=x^2+y^2+z^2$，

$$s.t.\ \begin{array}{l} x^2+y^2-z=0 \\ x+y+z-4=0 \end{array}.$$

令$L(x,y.z,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x^2+y^2-z)+\lambda_2(x+y+z-4)$，

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+2x\lambda_1+\lambda_2=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=2y+2y\lambda_1+\lambda_2=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=2z-\lambda_1+\lambda_2=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=x^2+y^2-z=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}=x+y+z-4=0 \tag{5}$$

由（1）（2）可得 $\lambda_1=-1$ 或 $x=y$，

当$\lambda_1=-1$时，由（1）（3）可得 $\lambda_2=0$或$z=\frac{-1}{2}$代入（4）可见无解.

当$\lambda_1\neq-1$时，由$x=y$可得 $(x,y,z)=(1,1,2)$或$(-2,-2,8)$，

容易验证 $u_{\max}=u(-2,-2,8)=72,\quad u_{\min}=u(1,1,2)=6$，

∴距离最大的点为（－2，－2，8），距离为 $6\sqrt{2}$，

距离最小的点为（1，1，2），距离为$\sqrt{6}$.

***9. 试证明n个正数$x_1,x_2,\cdots x_n$的算术平均值不小于它们的几何平均值，即

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\ .$$

证：$\forall a>0$，我们求在满足条件$x_1+x_2+\cdots+x_n=na\quad(x_i>0)$时，$u=x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n$的极大值.

令$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=x_1x_2\cdots x_n+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-na)$，

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=x_2\cdots x_n+\lambda x_1=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=x_1x_3\cdots x_n+\lambda x_2=0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_n}=x_1\cdots x_{n-1}+\lambda x_n=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x_1+x_2+\cdots+x_n-na=0$$

解得：$x_1=x_2=\cdots=x_n=a$. 容易验证此时，$x_1,x_2,\cdots x_n$取极大值，

即 $$x_1x_2\cdots x_n \le a^n = (\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})^n,$$

∴ $$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

第 12 章 （之 1）（总第 67 次）

教学内容: §12．1 二重积分概念与性质

**1．解下列各题：

(1) 若 D 是以 $O=(0,0), A=(1,0), B=(0,1)$ 为顶点的三角形区域，利用二重积分的几何意义可得到 $\iint\limits_D (1-x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ =___________.

答：$\frac{1}{6}$

(2) 设 $f(t)$为连续函数，则由平面 z=0，柱面 $x^2+y^2=1$ 和曲面 $z=f^2(xy)$ 所围立体的体积可用二重积分表示为____.

答：$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f^2(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(3) 设 $I=\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+\cos^2 x+\sin^2 y}$ 则 I 满足 （　　）

(A) $\frac{2}{3}\le I\le 2$ 　　(B) $2\le I\le 3$

(C) $D\le I\le\frac{1}{2}$ 　　(D) $-1\le I\le 0$

答：(A).

(4) 设 $I_1=\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$ 及 $I_3=\iint\limits_D (x+y)d\sigma$ 其中 D 是由直线 x=0，y=0，$x+y=\frac{1}{2}$ 及 $x+y=1$ 所围成的区域，则 I_1，I_2，I_3 的大小顺序为 （　　）

(A) $I_3<I_2<I_1$；　(B) $I_1<I_2<I_3$；　(C) $I_1<I_3<I_2$；　(D) $I_3<I_1<I_2$.

答：（B）.

(5) 设$D: x^2+y^2 \le a^2 (a>0)$, 当$a=$________时，$\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy=\pi$.

（A） 1； (B) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$； (C) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$； (D) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

答：（B）.

**2．解下列问题：

(1) 利用二重积分性质，比较二重积分的大小：$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其 中，D 为任一有界闭区间.

解：令 $u=x^2+y^2$，且 $f(u)=e^u-(1+u)$，则有 $f'(u)=e^u-1$.

$\because u\ge 0$， $\therefore$ $e^u-1\ge 0$, 即 $f'(u)\ge 0$， $f(u)$ 是增函数.

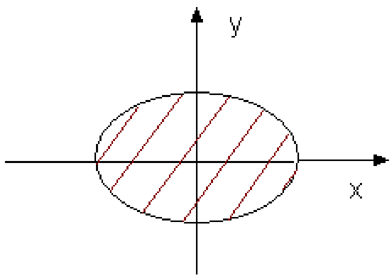
$\because$ $f(0)=e^0-1=0$， $\therefore$ $f(u)-f(0)\ge 0$ 即 $e^u-(1+u)\ge 0$，

$\therefore e^{x^2+y^2}\ge 1+x^2+y^2$， 因此 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}d\sigma \ge \iint\limits_D (1+x^2+y^2)d\sigma$.

(2) 利用二重积分性质，估计二重积分的值：

$\iint\limits_D (1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，$D=\{(x,y)|9x^2+16y^2\le 144\}$.

解：先求出目标函数 $f(x,y)=x^2+y^2+1$ 在区域



$D=\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\le 1\right.\right\}$上的最小值和最大值，

由于区域 D 上的点到坐标原点$O=(0,0)$的距离为 $\sqrt{x^2+y^2}$，

$\therefore 0\le\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{4^2+0}=4$，

$\therefore 1\le f(x,y)\le 17$，

又因为该区域的面积为 $D=\pi\times 3\times 4=12\pi$，

$\therefore$ $12\pi\le\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\le 17\times 12\pi=204\pi$.

***3．试利用积分值与积分变量名称无关，解下列问题：

(1) $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt[3]{\sin(x-y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

解：因为$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt[3]{\sin(x-y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{y^2+x^2\le 1}\sqrt[3]{\sin(y-x)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=-I$，所以$I=0$.

(2) $\iint\limits_{x^2\le 1,y^2\le 1}\dfrac{a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：$I=\iint\limits_{x^2\le 1,y^2\le 1}\dfrac{a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{y^2\le 1,x^2\le 1}\dfrac{a\mathrm{e}^y+b\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$，

$$I=\frac{1}{2}\left[\iint\limits_{x^2\le 1,y^2\le 1}\frac{a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{y^2\le 1,x^2\le 1}\frac{a\mathrm{e}^y+b\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2\le 1,y^2\le 1}\frac{(a+b)\mathrm{e}^x+(a+b)\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a+b}{2}\iint\limits_{x^2\le 1,y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2(a+b).$$

***4. 设$f(x,y)$是连续函数，试利用积分中值定理求极限

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

解：积分区域 $D:x^2+y^2\le r^2$ 为有界区域，且 $f(x,y)$ 连续，

$\therefore$ 由积分中值定理可知：存在点$(\xi,\eta)\in D$，使得$\iint\limits_{D}f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)S_D$，

即：$\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2}f(x,y)d\sigma=\pi r^2f(\xi,\eta)$，

又 $\because$ 当$r\to 0$时，$(\xi,\eta)\to(0,0)$，且$f(x,y)$在$(0,0)$连续.

$\therefore$ $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2}f(x,y)d\sigma=f(0,0)$.

第 12 章 （之 2）（总第 68 次）

教学内容： §12．2．1 二重积分在直角坐标系下的计算方法

1．解下列各题：

**（1）设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a}{2}}^{a}dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}y\ (a>0)$

可交换积分次序得____________________________.

答：原式=$\int_0^a \mathrm{d}x\int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

**（2）设 $f(x,y)$ 是连续函数，则二次积分 $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{x+1}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$ （　　）

（A）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-1}^{y-1} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_{-1}^{\sqrt{y^2-1}} f(x,y)\mathrm{d}x$；　（B）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-1}^{y-1} f(x,y)\mathrm{d}x$；

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-1}^{y-1} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}y\int_{-1}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)\mathrm{d}x$；　(D) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{-1}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

答：(C)

**（3）设 $f(x,y)$ 是连续函数，交换二次积分 $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$ 的积分次序的结果为

（　　）

（A）$\int_1^e dy\int_0^{\ln x} f(x,y)dx$；　(B) $\int_1^e dy\int_0^{\ln x} f(x,y)dx$；

(C) $\int_1^e dy\int_0^{\ln x} f(x,y)dx$；　(D) $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$.

答：(D)

**（4）设 $f(x,y)$ 是连续函数，则积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$ 可交换积分次序为 （　　）

（A）$\int_0^1 dy\int_0^{y} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx$；

（B）$\int_0^1 dy\int_0^{x^2} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-x} f(x,y)dx$；

（C）$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx$；

（D）$\int_0^1 dy\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dx$.

答： (C)

**（5）设函数 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上连续，使 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)dxdy=4\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

成立的充分条件是 （　　）

（A） $f(-x,y)=f(x,y)$，　$f(x,-y)=-f(x,y)$；

（B） $f(-x,y)=-f(x,y)$， $f(x,-y)=f(x,y)$；

（C） $f(-x,y)=-f(x,y)$， $f(x,-y)=-f(x,y)$；

（D） $f(-x,y)=f(x,y)$， $f(x,-y)=f(x,y)$.

答：（D）.

2．画出下列各题中给出的区域 D，并将二重积分化成两种不同顺序的二次积分（假定在区域上连续）.

**（1）D 由曲线 $xy=1, y=x, x=2$ 围成；

解：$I=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1} dy\int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$

**（2） $D=\{(x,y)|\max(1-x,x-1)\le y\le 1\}$

解：$I=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{1} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_{x-1}^{1} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{1-y}^{1+y} f(x,y)dx$

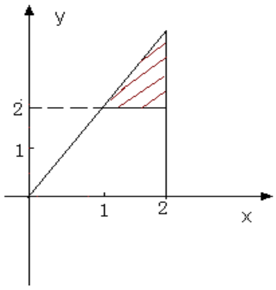
**（3） D：$x+y\le 1$， $x-y\le 1$， $x\ge 0$.

解：原式$=\int_0^1 dx\int_{x-1}^{1-x} f(x,y)dy=\int_{-1}^{0} dy\int_0^{y+1} f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y)dx$.

3．计算二次积分：

**(1) $\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2} e^{x^2-2x}dx$.

解：$D:2\le y\le 4,\frac{y}{2}\le x\le 2$， 变换积分次序得 $D^*:1\le x\le 2,\quad 2\le y\le 2x$，



原式$=\int_1^2 e^{x^2-2x}dx\int_2^{2x}dy=\int_1^2 e^{x^2-2x}(2x-2)dx$

$=\int_1^2 e^{x^2-2x}\mathrm{d}(x^2-2x)=e^{x^2-2x}\Big|_1^2=1-\frac{1}{e}$.

**(2) $\int_{-1}^{1} dx\int_{-1}^{x} x\sqrt{1-x^2+y^2}dy$.

解：原式$=\int_{-1}^{1} dy\int_{y}^{1} x\sqrt{1-x^2+y^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{3}(1-|y|^3)dy=\frac{1}{2}$.

4．计算下列二重积分

**(1) $\iint\limits_D \frac{d\sigma}{\sqrt{2-y}}$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2y\}$；

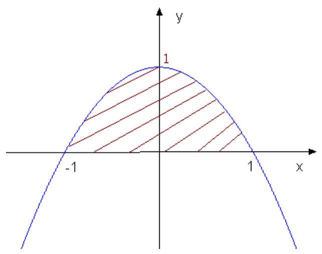
解：原式$=2\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}\frac{dx}{\sqrt{2-y}}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

**(2) 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是第一象限中由 $y=x$ 和 $y=x^3$ 所围成的区域.

解：原式$=\int_0^1 e^{x^2}dx\int_{x^3}^{x}dy=\int_0^1(xe^{x^2}-x^3e^{x^2})dx=\frac{1}{2}e-1$.

**(3) 计算二重积分 $\iint\limits_D x^2\sqrt{1-y}\,d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|\ 0\le y\le 1-x^2\}$.

解：$D=\{(x,y)|0\le y\le 1-x^2\}\Rightarrow D:0\le y\le 1$，



$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\int_0^1\sqrt{1-y}\,dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}x^2dx\\
&=\int_0^1\sqrt{1-y}\,dy\,\frac{1}{3}x^3\Big|_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}\\
&=\frac{1}{3}\int_0^1\sqrt{1-y}\left[(1-y)\sqrt{1-y}+(1-y)\sqrt{1-y}\right]dy\\
&=\frac{2}{3}\int_0^1(1-y)^2dy=-\frac{2}{3}\int_0^1(1-y)^2d(1-y)\\
&=-\frac{2}{9}(1-y)^3\Big|_0^1=\frac{2}{9}
\end{aligned}
$$

**(4) 计算二重积分 $\iint\limits_D|x-y|\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 2\}$.

解：直线 $y=x$ 把区域 D 分成 D_1（上）、D_2（下）两个部分，

$$\iint\limits_D|x-y|\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}(y-x)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}(x-y)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^2(y-x)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x-y)\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{2}(y-x)^2\Big|_x^2\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{1}{2}(x-y)^2\Big|_0^x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(x^2-2x+2)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x\Big|_0^1=\frac{4}{3}.$$

**(5) 计算二重积分 $\iint\limits_D x\sin(x+y)d\sigma$，其中 D 由直线 $x=\sqrt{\pi}$ 、抛物线 $y=x^2-x$ 及其在

（0，0）点的切线围成.

解：抛物线 $y=x^2-x$ 在（0，0）处切线斜率 $y'(0)=-1$，此切线方程为 $y=-x$，

区域 D: $0\le x\le\sqrt{\pi}$， $-x\le y\le x^2-x$，

$$\iint_D x\sin(x+y)d\sigma$$

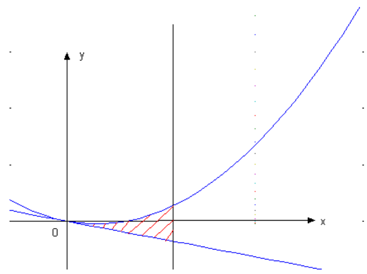
$$=\int_0^{\sqrt{\pi}}dx\int_{-x}^{x^2-x}x\sin(x+y)dy$$

$$=\int_0^{\sqrt{\pi}}dx\int_{-x}^{x^2-x}x\sin(x+y)d(x+y)$$

$$=-\int_0^{\sqrt{\pi}}dx[x\cos(x+y)]\Big|_{y=-x}^{y=x^2-x}$$

$$=\int_0^{\sqrt{\pi}}x(\cos 0-\cos x^2)dx=\int_0^{\sqrt{\pi}}x(1-\cos x^2)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{2}\sin x^2\Big|_0^{\sqrt{\pi}}=\frac{\pi}{2}.$$



6．试利用积分区域的对称性和被积函数（关于某个单变量）的奇偶性，计算二重积分：

**(1) $\iint_D(ax+by+c)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$，$a,b,c$ 为常数.

解：$\iint_D(ax+by+c)d\sigma=\iint_D axd\sigma+\iint_D byd\sigma+\iint_D cd\sigma$，

$\because D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$，既关于 y 轴对称，又关于 x 轴对称.

又 $\because$ $f(x)=ax$ 为奇函数，$g(y)=by$ 也为奇函数.

$\therefore$ 由积分区域对称性及被积函数的奇偶性可知：$\iint_D axd\sigma=0,\quad \iint_D byd\sigma=0$.

**(2) $\iint_D\frac{x^2(1+x^5\sqrt{1+y})}{1+x^6}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\|x|\le 1,0\le y\le 2\}$.

解：$\iint_D\frac{x^2(1+x^5\sqrt{1+y})}{1+x^6}dxdy=\iint_D\frac{x^2}{1+x^6}dxdy+\iint_D\frac{x^7\sqrt{1+y}}{1+x^6}dxdy$，

$\because D=\{(x,y)\|x|\le 1,0\le y\le 2\}$，关于 y 轴对称，

又 $u(x,y)=\frac{x^7\sqrt{1+y}}{1+x^6}$，关于 x 为奇函数， $\therefore\iint_D\frac{x^7\sqrt{1+y}}{1+x^6}dxdy=0$，

$$\therefore\ \iint\limits_D \frac{x^2\left(1+x^5\sqrt{1+y}\right)}{1+x^6}dxdy=\iint\limits_D \frac{x^2}{1+x^6}dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_0^2\frac{x^2}{1+x^6}dy$$

$$=2\int_0^1\frac{2x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\int_0^1\frac{1}{1+\left(x^3\right)^2}\mathrm{d}x^3=\frac{4}{3}\arctan x^3\Big|_0^1=\frac{\pi}{3}.$$

第 12 章（之 3）（总第 69 次）

教学内容： §12．2．2 二重积分在极坐标系下的计算方法

1． 填空与选择

**(1) 设 D：$0\le\rho\le1, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，根据二重积分的几何意义，则

$$\iint\limits_{D}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

答：$\frac{1}{6}\pi$.

**(2) 设区域 D 是 $x^2+y^2\leqslant1$ 与 $x^2+y^2\leqslant2x$ 的公共部分，试写出 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 在极坐标系下先对 ρ 积分的累次积分________________.

解：记 $F(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho$，则

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho+\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{1}F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho.$$

**（3）若区域 D 为 $(x-1)^2+y^2\leqslant1$，设 $F(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho$，

则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化成累次积分为 （ ）

(A) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho$ ； (B) $\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho$；

(C) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho$； (D) $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho$.

答：（C）.

** (4)若区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant 2x$，则二重积分 $\iint\limits_D (x+y)\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ 化成累次积分为（　　）

(A) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} (\cos\theta+\sin\theta)\sqrt{2\rho\cos\theta}\rho\mathrm{d}\rho$；

(B) $\int_0^{\pi} (\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^3\mathrm{d}\rho$；

(C) $2\int_0^{\pi} (\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^3\mathrm{d}\rho$；

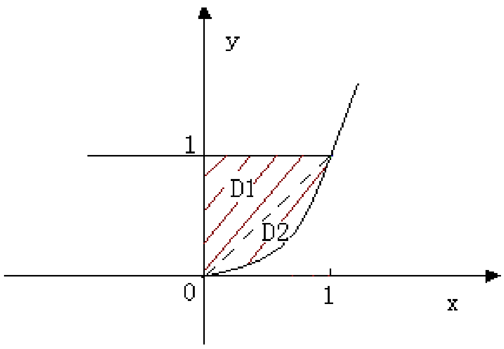
(D) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^3\mathrm{d}\rho$.

答：（D）.

2．化下列二重积分为极坐标下的二次积分

**(1) $\iint\limits_D f(xy)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\big|\ 0\le x\le 1, x^2\le y\le 1\}$.

解：令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$



在区域 D1 上 $\rho\sin\theta=(\rho\cos\theta)^2$ 即

$$\rho=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\quad (0\le\theta\le\frac{\pi}{2}),$$

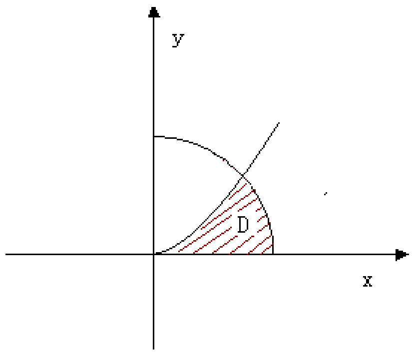
在区域 D2 上 $\rho\sin\theta=1$ 即

$$\rho=\frac{1}{\sin\theta}\quad (0\le\theta\le\frac{\pi}{2}),$$

$$\iint\limits_D f(xy)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} f(\rho^2\sin\theta\cos\theta)\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} f(\rho^2\sin\theta\cos\theta)\rho d\rho .$$

**(2). $\iint\limits_D f(x+y)d\sigma$，其中

$D=\{(x,y)\big|\ \sqrt{y}\le x\le\sqrt{2-y^2}, 0\le y\le 1\}$.



解：令 $x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta$，由

$$y=x^2\Rightarrow \rho\sin\theta=(\rho\cos\theta)^2\Rightarrow \rho=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta},$$

由 $x^2+y^2=2\Rightarrow\rho=\sqrt{2}$，

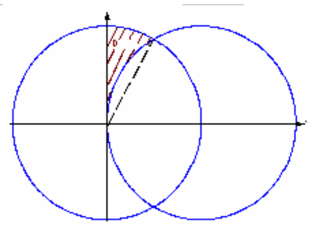
$$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=\sqrt{2}\Rightarrow\sin\theta=\sqrt{2}\cos^2\theta,$$

$1-\cos^2\theta=2\cos^4\theta$，解得：$\cos^2\theta=\frac{1}{2}$， $\theta=\frac{\pi}{4}$，

$$\iint\limits_D f(x+y)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^{\sqrt{2}}f(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta)\rho\,d\rho.$$

3． 用极坐标计算下列积分

**(1) $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy$；



解：将二次积分 $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy$ 看作二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 化来，

$D:0\le x\le 1$，$\sqrt{4x-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}$，

令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，则： $4\cos\theta\le\rho\le 2$，

如图，两圆交点 $(x,y)=(1,\sqrt{3})$，即 $(\rho,\theta)=(2,\frac{\pi}{3})$，所以

$$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{4\cos\theta}^{2}\rho\cdot\rho\,d\rho$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{3}\rho^3)\Big|_{4\cos\theta}^{2}d\theta=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{8}{3}-\frac{64}{3}\cos^3\theta)d\theta=\frac{8}{3}\times\frac{\pi}{6}-\frac{64}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta$$

$$=\frac{4}{9}\pi-\frac{64}{3}(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{3})+\frac{64}{3}\cdot\frac{1}{3}[(\sin\frac{\pi}{2})^3-(\sin\frac{\pi}{3})^3]$$

$$=\frac{4}{9}\pi-\frac{128}{9}+8\sqrt{3}.$$

**(2) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}\arctan\frac{y}{x}dx$.

解：$D=\left\{(x,y)\middle|y\le x\le\sqrt{1-y^2},0\le y\le\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}=\left\{(\rho,\theta)\middle|0\le\rho\le 1,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$，

$$\therefore\ \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}\arctan\frac{y}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=\frac{\pi^2}{64}.$$

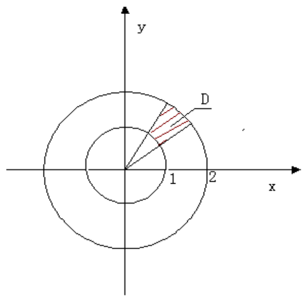
**4．设 $f(x,y)$ 是连续函数，将二次积分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^a f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho \mathrm{d}\rho + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^a f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho，\quad (a>0)$$

化为在直角坐标系下先对 y 后对 x 的二次积分.

解：原式= $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{0} dx \int_{-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy + \int_0^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$.

5．计算下列二重积分



***(1) $\displaystyle\iint_D \frac{e^{\arctan\frac{y}{x}}}{\sqrt{x^2+y^2}} d\sigma$，其中

$D = \{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4, x \le y \le \sqrt{3}x\}$.

解：在极坐标变换 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$ 下，

$x \le y \le \sqrt{3}x$，有 $1 \le \tan\theta \le \sqrt{3}$，即 $\dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}$，

又 $\because$ $1 \le x^2+y^2 \le 4$， 则 $1 \le \rho^2 \le 4$，即 $1 \le \rho \le 2$，所以

$$\iint_D \frac{e^{\arctan\frac{y}{x}}}{\sqrt{x^2+y^2}} d\sigma = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^2 \frac{e^{\arctan(\tan\theta)}}{\rho} d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} e^{\theta} d\theta = e^{\theta}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = e^{\frac{\pi}{3}} - e^{\frac{\pi}{4}} .$$

***(2) $\displaystyle\iint_D e^{xy} dxdy$，其中 $D = \{(x,y) | 1 \le xy \le 2, x \le y \le 2x\}$.

解：$I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\theta \int_{\sqrt{\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{\cos\theta\sin\theta}}} e^{\rho^2\sin\theta\cos\theta} \rho d\rho$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\cos\theta\sin\theta} e^{\rho^2\cos\theta\sin\theta} \Bigg|_{\sqrt{\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{\cos\theta\sin\theta}}} \right] d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \frac{1}{2} \frac{1}{\cos\theta\sin\theta} (e^2-1) d\theta = \frac{e^2-e}{2} \ln 2$$

6．计算下列平面区域的面积：

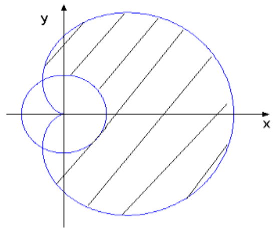
*(1) 计算由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x+2$ 围成区域的面积.

解： ∵$x^2=x+2$ 即 $x=-1$， $x=2$.

∴交点为$(-1,1)$与$(2，4)$

$$A=\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}dy=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx=4\frac{1}{2}.$$

**(2) $D=\{(\rho\cos\varphi,\rho\cos\varphi\}\mid\frac{1}{2}\le\rho\le 1+\cos\varphi\}$.



解：$A=\iint\limits_{D}d\sigma$

$$=2\left(\int_0^{\frac{2}{3}\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\rho d\rho-\int_0^{\frac{2}{3}\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{2}}\rho d\rho\right)$$

$$=\frac{5}{6}\pi+\frac{7}{8}\sqrt{3}\text{。}$$

7． 计算下列立体体积

**(1) 利用二重积分计算由下列曲面 $z=x^2+y^2,y=1,z=0,y=x^2$ 所围成的曲顶柱体的体积.

解： $$v=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2)dy$$

$$=2\int_0^1(x^2(1-x^2)+\frac{1}{3}(1-x^6))dx=\frac{88}{105}.$$

**(2) $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2\le z\le 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$.

解：$$V=\iint\limits_{D}\left(1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)d\sigma-\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2\right)d\sigma$$

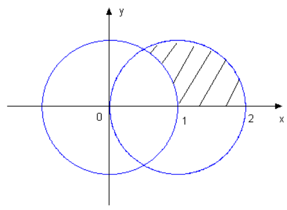
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(1+\sqrt{1-\rho^2}\right)\rho d\rho-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\cdot\rho d\rho$$

$$=2\pi\left(\int_0^1\left(1+\sqrt{1-\rho^2}\right)\rho d\rho-\frac{1}{4}\right)$$

$$=2\pi\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{6}\pi\text{。}$$

8． 计算下列二重积分

***(1) $\iint\limits_D xy\,d\sigma$， 其中 $D=\{(x,y)|y\ge 0, x^2+y^2\ge 1, x^2+y^2-2x\le 0\}$.



解：$I=\int_0^{\frac{1}{3}\pi}d\theta\int_1^{2\cos\theta}\rho^2\sin\theta\cos\theta d\rho$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{3}\pi}\sin\theta\cos\theta\cdot\left[16(\cos\theta)^4-1\right]d\theta$$

$$=-\frac{2}{3}\cos^6\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{8}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{9}{16}.$$

***(2) 计算二重积分 $\iint\limits_{\substack{1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 2\\ x\ge 0,y\ge 0}}|y-x|dxdy$.

解：因为 $|y-x|=\begin{cases} y-x, \text{当} 1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 2, y\ge x \text{确定的区域} \\ x-y, \text{当} 1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 2, 0\le y\le x \text{确定的区域}\end{cases}$.

原式$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta-\cos\theta)d\theta\int_1^2 r^2dr+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)d\theta\int_1^2 r^2dr$

$$=\frac{7}{3}\{[-\cos\theta-\sin\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+[\sin\theta+\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}\}=\frac{7}{3}(-1+\sqrt{2}+\sqrt{2}-1)=\frac{14}{3}(\sqrt{2}-1).$$

***(3) 设 $F(t)=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(x,y)=\begin{cases}1, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, \text{其他}\end{cases}$，而 D 是平面区域 $x+y\le t$. 求 $F(t)$.

解： 设 $D^*: 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1$.
由题意易知 $F(\mathrm{t})$ 即为 $D\cap D^*$的面积，所以

$$F(t)=\begin{cases}0, t\le 0\\ \frac{1}{2}t^2, 0<t\le 1\\ -\frac{t^2}{2}+2t-1, 1<t\le 2\\ 1, t>2\end{cases}.$$

****9．设 $f(t)$ 是连续函数，证明 $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}f(x+y)dxdy=\int_{-1}^{1}f(u)du$.

证明： $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} f(x+y)dxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-1-x}^{1+x}f(x+y)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x-1}^{1-x}f(x+y)dy$.

令 $x+y=u$， 则

$$\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} f(x+y)dxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-1}^{1+2x}f(u)du+\int_{0}^{1}dx\int_{2x-1}^{1}f(u)du$$

$$=\int_{-1}^{1}f(u)du\int_{\frac{u-1}{2}}^{\frac{u+1}{2}}dx=\int_{-1}^{1}f(u)du$$

第 12 章 （之 4）（总第 70 次）

教学内容： §12．3 三重积分的概念与性质；§12．4．1 直角坐标系下三重积分的计算

1． 选择题

*(1) 设

$$I_1=\iiint\limits_{\Omega}e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}v,\ I_2=\iiint\limits_{\Omega}(1+x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v,\ I_3=\iiint\limits_{\Omega}(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}v,$$

Ω是由 $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 所确定的区域，则用不等号表达 I_1,I_2,I_3 三者大小关系是 （ ）

（A）$I_1>I_2>I_3$； （B）$I_1>I_3>I_2$； （C）$I_2>I_1>I_3$； （D）$I_3>I_2>I_1$。

答：（B）

**(2) 设 Ω_1： $x^2+y^2+z^2\le R^2$， $z\ge 0$； Ω_2： $x^2+y^2+z^2\le R^2$， $x\ge 0$， $y\ge 0$， $z\ge 0$． 则 （ ）

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1}z^{99}\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}x^{99}\mathrm{d}V$. (B) $\iiint\limits_{\Omega_1}y^{99}\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}z^{99}\mathrm{d}V$.

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1}x^{99}\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}y^{99}\mathrm{d}V$. (D) $\iiint\limits_{\Omega_1}(xyz)^{99}\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}(xyz)^{99}\mathrm{d}V$.

答：(A)

2． 填空题

**（1） $I=\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ -1\le z\le 1}}[x^3e^z\ln(1+x^2)+ye^{y^2}+2]\mathrm{d}v$ =____________________.

答：　$I=4\pi$　.

***（2）设Ω为空间有界闭区域，其上各点的体密度为该点到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离，则Ω关于直线 $\dfrac{x-x_0}{0}=\dfrac{y-y_0}{0}=z$ 的转动惯量的三重积分公式为

____.

答：$I=\iiint\limits_{\Omega}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\cdot\dfrac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}dv$

3．***（1）试将积分 $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz$ 化成先对 x，再对 y，最后对 z 积分的三次积分式.

解：

$$\int_0^1 dz\int_{-z}^{z}dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)dx$$

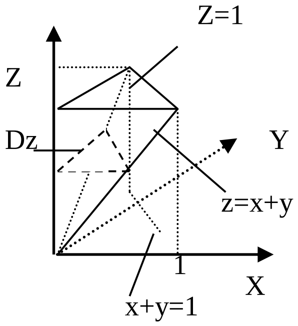
***（2）把下列给定区域Ω上的三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 化为三次积分：Ω由曲面 $z=2x^2+y^2-1$ 和 $z=1-y^2$ 围成.

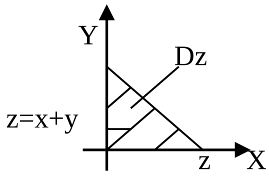
解：$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left\{\int_{2x^2+y^2-1}^{1-y^2}f(x,y,z)dv\right\}dxdy$$
$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{2x^2+y^2-1}^{1-y^2}f(x,y,z)dz\,.$$

***（3）将下列三次积分看作由三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 化来，试画出其积分区域Ω，并将其改写成先 x 后 y 再 z 的三次积分：$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_{x+y}^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

解：Ω由平面 $z=x+y$ 、$z=1$ 及坐标面 yoz 、 xoz 　所围而成.

原积分 $=\int_0^1 dz\iint\limits_{Dz} f(x,y,z)dxdy=\int_0^1 dz\int_0^z dy\int_0^{z-y} f(x,y,z)dx$.





**4．计算 $\iiint\limits_{\Omega} x\sin(y+z)dv$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le\sqrt{y},\ 0\le z\le\dfrac{\pi}{2}-y\right\}$.

解：Ω 由柱面 $y=x^2$、平面 $y+z=\dfrac{\pi}{2}$ 及坐标面 xoy、yoz 所围而成.

$$\iiint\limits_{\Omega} x\sin(y+z)dv=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_0^{\frac{\pi}{2}-y} x\sin(y+z)dz=\iint\limits_{D_{xy}} x\cos ydxdy$$

$$=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} xdx\int_{x^2}^{\frac{\pi}{2}}\cos ydy=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x(1-\sin x^2)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cos x^2\right)_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

这里 $D_{xy}=\left\{(x,y)\middle|\,0\le x\le\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\quad x^2\le y\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$

***5．计算 $\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^y\sin(\pi-z)^3\mathrm{d}z$.

解：

$$I=\int_0^{\pi}\mathrm{d}z\int_z^{\pi}\mathrm{d}y\int_y^{\pi}\sin(\pi-z)^3\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}\sin(\pi-z)^3\mathrm{d}z\int_z^{\pi}(\pi-y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\pi-z)^2\sin(\pi-z)^3\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{6}(1-\cos\pi^3)$$

***6．试利用积分区域 Ω 表达式对变量名称轮换的不变性，及被积函数的对称关系，并根据积分与积分变量名称无关的性质计算三重积分

$$\iiint\limits_{\Omega}[(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z]dv,$$

其中 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le R^2,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0\}$.

解：由积分值与积分变量无关，并且积分区域对 x 、 y 、 z 具有轮换不变性，从而

$$\iiint_\Omega xdv=\iiint_\Omega ydv=\iiint_\Omega zdv,$$

故 $\displaystyle\iiint_\Omega [(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z]dv$

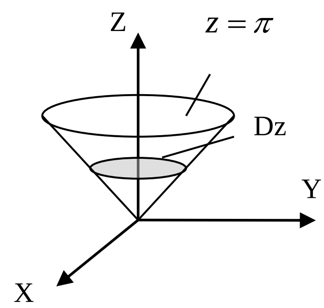
$$=(b-c)\iiint_\Omega xdv+(c-a)\iiint_\Omega ydv+(a-b)\iiint_\Omega zdv$$

$$=(b-c)\iiint_\Omega xdv+(c-a)\iiint_\Omega xdv+(a-b)\iiint_\Omega xdv \quad =0.$$

**7．用先重后单方法计算三重积分 $\displaystyle\iiint_\Omega \sin z\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面

$z=\pi$ 围成.

解：$\displaystyle\iiint_\Omega \sin zdv=\int_0^\pi dz\iint_{D_z}\sin zdxdy$



$$=\int_0^\pi \pi\ z^2\sin zdz=\pi^3-4\pi,$$

这里 $D_z=\{(x,y)|0\le x^2+y^2\le z^2\}$.

***8．设 $f(z)$ 在 $[-1,1]$ 上有连续的导函数，试证：

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f'(z)\mathrm{d}v=2\pi\int_{-1}^{1} zf(z)\mathrm{d}z$$

解：

$$I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\iint_{D(z)} f'(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}\pi(1-z^2)f'(z)\mathrm{d}z$$

$$=\pi f(z)(1-z^2)\Big|_{-1}^{1}+2\pi\int_{-1}^{1} zf(z)\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1} zf(z)\mathrm{d}z$$

第 12 章 （之 5）（总第 71 次）

教学内容： §12.4.2 ~ §12.4.3 用柱面坐标，球面坐标计算三重积分

1．**（1）设 Ω 是由 $0\le z\le\sqrt{3(x^2+y^2)}$，$x^2+y^2-y\le 0$ 所确定的闭区域，试将

$\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$化成柱面坐标下的三次积分式.

解： $I=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta} r\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{3}r} f(r^2+z^2)\mathrm{d}z$

***（2）设Ω是由$x^2+y^2\le 2z$，$1\le z\le 2$所确定的闭区域，试将$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$化成柱面坐标下的三次积分式.

解： $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r\mathrm{d}r\int_1^2 f(r^2+z^2)\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{2}}^{2} r\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^{2} f(r^2+z^2)\mathrm{d}z$

或 $I=\int_1^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}} f(r^2+z^2)r\,\mathrm{d}r$。

2．**（1）设Ω是由$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}$，$0\le x\le y\le\sqrt{3}x$所确定的立体，试将$\iiint_{\Omega} f(y,z)\mathrm{d}v$化成球面坐标下的三次积分式.

解： $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$

**（2）Ω是由$x^2+y^2+z^2\le 2Rz$（$R>0$）所确定的立体，试将$\iiint\limits_{\Omega} f(x\cdot y)\mathrm{d}v$化成球面坐标下的三次积分式.

解： $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} f(r^2\sin\theta\cdot\cos\theta\sin^2\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$

**（3）试将柱面坐标下的三次积分$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a} r\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\mathrm{d}z$化成球面坐标下的三次积分式.

解： $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{a} f[\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi]\rho^2\mathrm{d}\rho$

3．**（1）将下列三次积分看作是由三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$化来，试说明，$\Omega$是由哪些曲面围成，并将它们化成柱面坐标和球面坐标的三次积分：

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z\ .$$

解：Ω 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=1$ 围成，

柱面坐标： $\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 d\rho\int_\rho^1 f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho dz$ ，

球面坐标： $\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sec\theta}f(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)r^2\sin\theta dr$.

**（2）设 Ω 是由 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 及 $z=0$ 所围的闭区域，试将 $\iiint\limits_\Omega f(x^2+y^2)\mathrm{d}v$ 分别化成球面、柱面坐标下的三次积分式.

解：

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(r^2\sin^2\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{1-r^2}}f(r^2)\mathrm{d}z$$

***（3）设 Ω 是由 $x^2+y^2+z^2\le a^2$, $x^2+y^2\leqslant\frac{a^2}{2}$ （$a>0$）及 $z\ge 0$ 所确定的有界闭区域．试将 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 分别化成柱面及球面坐标下的三次积分式.

解：

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{a}{\sqrt2}}r\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a f(r\cos\theta\sin\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r+$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a}{\sqrt2\sin\varphi}}f(r\cos\theta\sin\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

4．**（1）计算 $\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}v$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2\le 2,\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}\right\}$.

解：$\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}}\rho\, z^2\mathrm{d}z$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^1\left[\rho(2-p^2)^{\frac{3}{2}}-\rho^4\right]d\rho=\frac{\pi}{15}(8\sqrt2-4)\ ,$$

这里 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\sqrt{x^2+y^2}\le Z\le\sqrt{2-x^2-y^2}\right\}$

$$=\left\{(\rho,\varphi,z)\middle|0\le\varphi\le 2\pi,0\le\rho\le 1,\rho\le z\le\sqrt{2-\rho^2}\right\}.$$

***（2）设 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2ax$，$x^2+y^2=2az$ （$a>0$）以及 $z=-1$ 所围的有界闭区域，试计算 $\iiint\limits_{\Omega}(xy+1)\mathrm{d}v$

解：由对称性 $\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}v=0$

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\mathrm{d}r\int_{-1}^{\frac{r^2}{2a}}\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\left(\frac{r^2}{2a}+1\right)\mathrm{d}r$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos^4\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi a^2}{4}(3a+4)$$

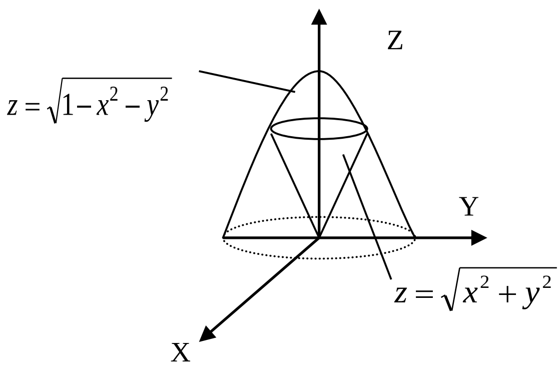
5. **（1）计算 $\iiint\limits_{\Omega}e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dv$，其中 Ω 是单位球 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 内满足 $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ 的部分.

解：用球面坐标

$$\iiint\limits_{\Omega}e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 e^r r^2\sin\theta dr$$

$$=\pi(2-\sqrt{2})(e-2)$$



***（2）计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln[1+(x^2+y^2+z^2)^2]}{1+(x^2+y^2+z^2)^2}\mathrm{d}v$，其中 Ω 是上半单位球体 $0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解：$\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{z\ln[1+(x^2+y^2+z^2)^2]}{1+(x^2+y^2+z^2)^2}\mathrm{d}v$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1\frac{r^3\ln(1+r^4)}{1+r^4}\sin\varphi\cos\varphi dr$$

$$=(\int_0^{2\pi}d\theta)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi)(\int_0^1\frac{r^3\ln(1+r^4)}{1+r^4}dr)=\frac{\pi\ln^2 2}{8}.$$

***（3）试将$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2\mathrm{d}z$化成球面坐标下的三次积分式，并由此计算上面的积分值.

解：

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^4\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{5}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$$

亦可用柱面坐标解出如下：

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{2-r^2}}z^2\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\pi}{6}\int_0^1[r(2-z^2)^{3/2}-r^4]\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{30}\left[-(2-r^2)^{5/2}\Big|_0^1-r^5\Big|_0^1\right]=\frac{\pi}{30}(4\sqrt{2}-2)=\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$$

***6．设 Ω是半径为 R 的球体：$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，试求积分$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}v$.

解：由对称性$\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}zx\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}yz\mathrm{d}v=0$，故

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^4\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{5}\pi R^5$$

***7．设 $F(t)=\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant t^2\\0\leqslant z\leqslant t}} z^2 f(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，求 $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{F(t)}{t^5}$．

解：

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t r\mathrm{d}r\int_0^t z^2 f\ (r^2)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2\pi}{3}t^3\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r$$

$$\lim_{t\to+0}\frac{F(t)}{t^5}=\frac{\pi}{3}f(0)$$

****8．（选做题）利用三重积分, 计算下列立体 Ω 的体积：Ω 由曲面

$(x^2+y^2+z^2)^2=R^2(x^2+y^2)$ （$R>0$）围成.

解：由对称性知 Ω 关于各坐标面对称，记 Ω 在第一象限的立体为 V_1．

在球面坐标系下，曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=R^2(x^2+y^2)$ 的方程为 $r=R\sin\theta$，

所以 Ω 的体积:

$$V=8V_1=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{R\sin\theta}r^2\sin\theta\,dr$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{R\sin\theta}d\theta=\frac{4\pi R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta$$

$$=\frac{4\pi R^3}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}\pi^2R^3$$

第 12 章 （之 6）（总第 72 次）

教学内容： §12．5 重积分的应用

1．计算下列曲面面积

**(1) 试求半球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 被抛物面 $x^2+y^2=z$ 所截而适合 $z\geq x^2+y^2$ 的一部分曲面 Σ 的面积 S.

解：$S=\oiint\limits_{\Sigma}dS$，而 Σ 在 xoy 面上的投影域为 D：$x^2+y^2\leqslant 1$.

面积元素为 $dS=\sqrt{1+\left(\dfrac{-x}{2-x^2-y^2}\right)^2+\left(\dfrac{-y}{2-x^2-y^2}\right)^2}\,dxdy=\dfrac{\sqrt{2}dxdy}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$.

$$\therefore \quad S=\sqrt{2}\oiint_{D}\frac{dxdy}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^1\frac{rdr}{\sqrt{2-r^2}}=\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\pi\text{ 。}$$

**(2) 平面$2x+2y-z=4$上被圆柱面$x^2+y^2-2x=0$截下的那一部分.

解：平面$2x+2y-z=4$被圆柱面$x^2+y^2-2x=0$截下的那一部分向 xoy 面的投影线为：

$$\begin{cases}z=0\\ x^2+y^2-2x=0\end{cases}.$$

$$z=2x+2y-4,\quad z_x=2,\quad z_y=2,$$

$$\therefore\ S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\,dxdy=\iint_{D_{xy}}3dxdy=3\pi\ .$$

**(3) 锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$上被柱面$z^2=2y$截下的那一部分.

解：锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2y$ 在 xoy 面投影曲面为

$$\begin{cases}z=0\\ x^2+y^2=2y\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}z=0\\ x^2+(y-1)^2=1\end{cases}.$$

$$\therefore S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\,dxdy=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy$$

$$=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}dxdy=\sqrt{2}\pi\ .$$

**(4) Ω由柱面$x^2+y^2=9$、平面$4y+3z=12$和$4y-3z=12$围成.

解：平面 $4y+3z=12$和$4y-3z=12$ 截下的柱面 $x^2+y^2=9$ 在 yoz 面的投影

$$D_1=\left\{(y,z)\middle|y\ge 1,z\le 4-\frac{4}{3}y,z\ge\frac{4}{3}y-4\right\},$$

平面 $4y+3z=12$和$4y-3z=12$ 与 $x^2+y^2=9$ 相交部分在 xoy 面投影是

$$D_2:x^2+y^2\le 9\,.$$

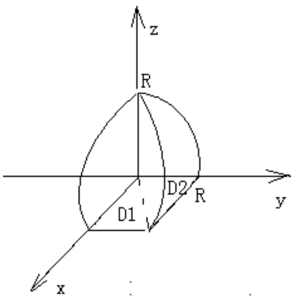
$$A=\iint_{D_1}\sqrt{1+{x_y}^2+{x_z}^2}dydz+\iint_{D_2}\sqrt{1+{z_y}^2+{z_x}^2}dxdy\ ,$$

由对称性得

$$A=4\int_{-3}^{3}dy\int_{0}^{4-\frac{4}{3}y}\sqrt{1+\frac{y^2}{9-y^2}}dz+2\iint_{x^2+y^2\le 9}\sqrt{1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}dxdy$$

$$=48\pi+30\pi=78\pi\ .$$

**(5) $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+z^2\le R^2,y^2+z^2\le R^2\right\}$.



解：解法一　$z^2=R^2-x^2$，　　$\therefore z=\sqrt{R^2-x^2}$ ，

$$A_1=\iint_{D_1}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dxdy$$

$$=\int_0^R dx\int_0^x\sqrt{\frac{x^2}{R^2-x^2}}dy$$

$$=\int_0^R x\sqrt{\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx$$

$$\overset{x=R\sin\theta}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\sin\theta\frac{R}{R\cos\theta}R\cos\theta d\theta=R^2$$

$z=\sqrt{R^2-y^2}$ ，$A_2=\iint_{D_2}\sqrt{1+\frac{y^2}{R^2-y^2}}dxdy=\int_0^R dy\int_0^y\sqrt{\frac{R^2}{R^2-y^2}}dx=R^2$.

$\therefore\quad S=16R^2$

解法二

$y^2+z^2=R^2$，　　$\therefore y=\sqrt{R^2-z^2}$ ，

$$\frac{S}{16}=\iint_{D_{zx}}\frac{R}{\sqrt{R^2-z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=R\int_0^R\frac{1}{\sqrt{R^2-z^2}}\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\mathrm{d}x=R^2$$

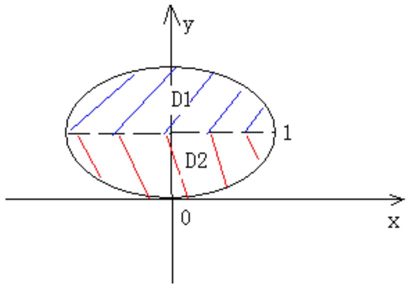
$\therefore\quad S=16R^2$。

**2．求下列平面薄板 D 的质量：

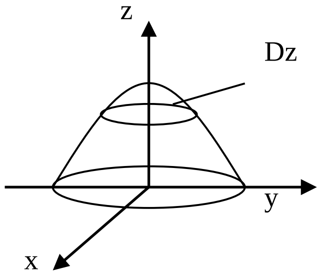
$$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+(y-1)^2\le 1\right\},\quad \mu=y+|y-1|\ ;$$

解：

$$m=\iint_D \mu d\sigma=\iint_{D_1}\mu d\sigma+\iint_{D_2}\mu d\sigma$$
$$=\iint_{D_1}(2y-1)d\sigma+\iint_{D_2}1d\sigma$$
$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2}}(2y-1)dy+\frac{1}{2}\pi$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi=\frac{4}{3}+\pi$$



**3．计算立体 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 1-(x^2+y^2)\}$ 的形心坐标.



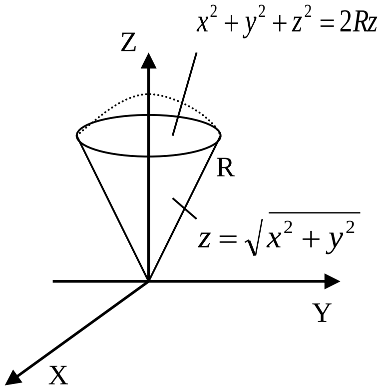
解：由对称性可知 $\bar{x}=\bar{y}=0$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} zdv}{\iiint\limits_{\Omega} dv}=\frac{\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z} zdxdy}{\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z} dxdy}=\frac{\int_0^1 \pi z(1-z)dz}{\int_0^1 \pi(1-z)dz}=\frac{1}{3}$$

这里 $D_z=\{(x,y)\,|\,0\le x^2+y^2\le 1-z\}$.

*** 4．设Ω是球体$x^2+y^2+z^2\le 2Rz$（$R>0$）在锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上方的部分，试求Ω的形心坐标.

解：由对称性可知 $\bar{x}=\bar{y}=0$.



用球面坐标，有

$$M_{xy}=\iiint\limits_{\Omega} zdv=\iiint\limits_{\Omega} r^3\sin\theta\cos\theta drd\theta d\varphi$$
$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2R\cos\theta}r^3\sin\theta\cos\theta dr$$
$$=8\pi R^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos^5\theta d\theta=\frac{7}{6}\pi R^4,$$
$$V=\iiint\limits_{\Omega} dv=\iiint\limits_{\Omega} r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$
$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2R\cos\theta}r^2\sin\theta dr$$
$$=\frac{16}{3}\pi R^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos^3\theta d\theta=\pi R^3,$$

这里$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\sqrt{x^2+y^2}\le Z\le R+\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}$

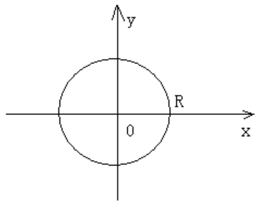
$$=\left\{(r,\theta,\varphi)\middle|0\le r\le 2R\cos\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4},0\le\varphi<2\pi\right\},$$

故 $\overline{Z}=\frac{M_{xy}}{V}=\frac{7}{6}R$.

**5．求半径为 R 质量为 M 的均匀圆盘（$\mu=$常数）关于下列各点的转动惯量：

（1）圆心；　　　　　　　　　（2）圆周上一点.

解：（1）建立如图示的直角坐标系.

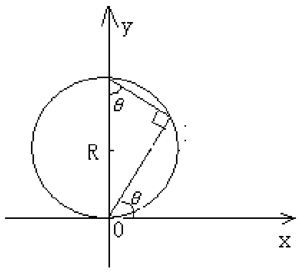


$$I_0=\iint_D\left(x^2+y^2\right)\mu d\sigma=\mu\iint_D\left(x^2+y^2\right)d\sigma\text{。}$$

$$D=\mu\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\rho^2\cdot\rho d\rho=\frac{1}{2}\mu\pi R^4=\frac{1}{2}\pi R^2\mu R^2=\frac{MR^2}{2}\text{。}$$

（2）建立如图示的直角坐标系.

极坐标方程 $\rho=2R\sin\theta$，



$$I_0=\iint_D\left(x^2+y^2\right)\mu d\sigma$$

$$=\mu\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2R\sin\theta}\rho^2\cdot\rho d\rho$$

$$=\mu\int_0^{\pi}4R^4\sin^4\theta d\theta$$

$$\overset{\phi=\theta-\frac{\pi}{2}}{=}\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4R^4\sin^4\left(\phi+\frac{\pi}{2}\right)d\phi$$

$$=2\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}4R^4\cos^4\phi d\phi=8R^4\mu\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\pi=\frac{3}{2}\mu\pi R^4=\frac{3}{2}MR^2.$$

***6．质量为 M 的匀质圆锥体Ω，由锥面$Rz=H\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面$z=H$围成，试求：

（1）质心坐标；　　　　　　　　（2）关于中心轴的转动惯量；

（3）关于底直径的转动惯量.

解：设Ω的密度为μ，则$\mu=\frac{M}{V}$. 由于 $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$，知 $\mu=\frac{3M}{\pi R^2H}$，

（1）由对称性可知 $\overline{x}=\overline{y}=0$，

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z dv}{M}=\frac{\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R d\rho\int_{\frac{H}{R}\rho}^{H} z\rho dz}{M}=\frac{\frac{1}{4}\pi R^2H^2}{\frac{1}{3}\pi R^2 H}=\frac{3}{4}H\ .$$

（2）$I_z=\mu\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\mu\iiint\limits_{\Omega}\rho^3 d\rho d\varphi dz=\mu\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R d\rho\int_{\frac{H}{R}\rho}^{H}\rho^3 dz$

$$=\frac{\mu}{10}\pi HR^4=\frac{3}{10}R^2M\ .$$

（3） 由x、y的对称性，不妨假定底直径L平行于x轴．则

$I_L=\mu\iiint\limits_{\Omega}\left[y^2+(z-H)^2\right]dv$（$\Omega$中点(x, y, z）到 L 的距离平方为$y^2+(z-H)^2$）

$$=\mu\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R d\rho\int_{\frac{H}{R}\rho}^{H}\rho\left[\rho^2\sin^2\varphi+(z-H)^2\right]dz$$

$$=\mu(\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi\int_0^R\rho^3\int_{\frac{H}{R}\rho}^{H}dz+\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho\int_{\frac{H}{R}\rho}^{H}(z-H)^2dz)$$

$$=\mu(\frac{\pi}{20}R^4H+\frac{\pi}{30}R^2H^3)=\frac{M}{20}(3R^2+2H^2)\ .$$

***7.（选做题） 在半径为$2a$，质量为M的均匀球体内，挖去两个内切于大球又互相外切的半径为a的小球，求剩余部分关于它们的公共直径的转动惯量.

解：由题意，设大球的方程为 $x^2+y^2+z^2=4a^2$，两小球的方程为

$x^2+y^2+(z\pm a)^2=a^2$．由x、y的对称性，可知

$$I_Z=8\iiint\limits_{\Omega_1}\left[x^2+y^2\right]dv$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2a\cos\theta}^{2a}r^2\sin^2\theta\cdot r^2\sin\theta dr$$

$$=16\pi a^5=\frac{3}{2}a^2M\ ,$$

这里

$$\Omega_1=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+(z-a)^2\ge a^2,x^2+y^2+z^2\le 4a^2,x>0,y>0,z>0\right\}$$

$$=\left\{(r,\theta,\varphi)\middle|2a\cos\theta\le r\le 2a,0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\varphi<\frac{\pi}{2}\right\}.$$

第 13 章 （之 1） （总第 73 次）

教学内容： §13.1 第一型曲线积分

**1. 解下列各题：

（1）设 L 为 $y=x^2$ 上从点 $O=(0,0)$ 到 $A=(1,1)$ 的一段弧．则 $I=\int_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s=$ （ ）

（A）$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$ （B）$\int_0^1 \sqrt{y}\sqrt{1+y}\,\mathrm{d}y$

（C）$\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$ （D）$\int_0^1 \sqrt{y}\sqrt{1+\frac{1}{y}}\,\mathrm{d}y$

答： (C)

（2） 设 L 是 xoy 面上圆周 $x^2+y^2=1$ 的顺时针方向，则 $I_1=\oint_L x^3\,\mathrm{d}s$ 与 $I_2=\oint_L y^5\,\mathrm{d}s$ 的大小关系是___________________.

答：$\underline{I_1=I_2}$（都等于 0）.

（3）若已知椭圆 $L:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的周长为 l，则 $\oint_L (b^2x^2+a^2y^2)\mathrm{d}s=$____________.

答：a^2b^2l． $\oint_L (b^2x^2+a^2y^2)\mathrm{d}s=a^2b^2\oint_L(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2})\mathrm{d}s=a^2b^2\oint_L \mathrm{d}s$.

2．计算下列曲线积分：

**（1） 计算 $\int_L x\,\mathrm{d}s$，其中 L 是星形线 $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$ 经点 A(2，0)，C(0，2)，B$(-2,0)$ 的 ACB 弧段.

解 $\int_L x\,ds$

$= \int_0^{\pi} 2\cos^3 t\ \sqrt{(6\sin t\cos t)^2}\,dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^3 t \cdot 6\sin t\cos t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^3 t(-6\sin t\cos t)\,dt$

$=0.$

**(2) $\int_L \sqrt{x+y}\,ds$，其中 L 为直线段 $y=\pi x, (0\le x\le 1)$.

解：

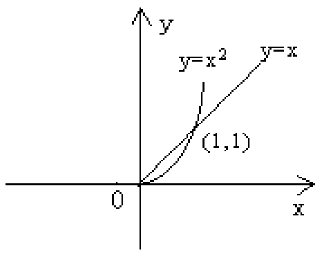
$$\int_L \sqrt{x+y}\,ds$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x+\pi x}\cdot\sqrt{1+\pi^2}\,dx = \sqrt{1+\pi}\sqrt{1+\pi^2}\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$

$$= \sqrt{1+\pi}\sqrt{1+\pi^2}\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{1+\pi}\sqrt{1+\pi^2}}{3}.$$

**(3) $\int_L x\,ds$，其中 L 为区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le x\}$的整个边界曲线.

解：$\int_L x\,ds = \int_0^1 x\cdot\sqrt{1+(2x)^2}\,dx + \int_0^1 x\cdot\sqrt{2}\,dx$



$$= \frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**4．若已知双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta\ \ (-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4})$，其上任一点处的密度，等于该点到原点的距离，求：该双纽线关于极轴的转动惯量.

解：双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta(-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4})$，其上任一点密度为 $\mu(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

该双纽线关于极轴的转动惯量为：

$$I_x=\int_L y^2\sqrt{x^2+y^2}\,ds=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta\sin^2\theta\sqrt{a^2\cos 2\theta}\sqrt{\frac{a^2}{\cos 2\theta}}\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^4\cos 2\theta\sin^2\theta\,d\theta = 2a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 4\theta)\,d\theta=\frac{a^4}{8}(4-\pi)。$$

***5.　已知摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(0\le t\le 2\pi)$ 上任一点 (x,y) 处密度等于该点的纵坐标，试求：

（1）该摆线弧的质量；
（2）该摆线弧的质心坐标；
（3）该摆线弧关于 x 轴的转动惯量.

解：摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(0\le t\le 2\pi)$ 其上任一点 (x,y) 处密度 $u(x,y)=y$.

（1）质量：$m=\int_L u(x,y)ds=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot\sqrt{[x'(t)^2]+[y'(t)]^2}dt$

$$=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot\sqrt{2}a\cdot\sqrt{1-\cos t}dt=\sqrt{2}a^2\int_0^{2\pi}2\sqrt{2}\sin^3\frac{t}{2}dt$$

$$=8a^2\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta=16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta=16a^2\cdot\frac{2!!}{3!!}=\frac{32}{3}a^2$$

（2）由对称性可知 $\bar{x}=\pi a$，

$$m_x=\int_L yu(x,y)ds=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot\sqrt{2}a^2(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}a^3(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}dt=\frac{256}{15}a^3$$

$$\bar{y}=\frac{m_x}{m}=\frac{8}{5}a,$$

∴　质心坐标为 $(\pi a,\frac{8}{5}a)$.

（3）该摆线弧关于 x 轴的转动惯量

$$I_x=\int_L y^2u(x,y)ds=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\cdot\sqrt{2}a^2(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}dt$$

$$=\sqrt{2}a^4\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{7}{2}}d\theta=\frac{1024}{35}a^4$$

**6. 计算曲线积分：$\int_C\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$，其中 C 为曲线 $x=e^t\cos t$，$y=e^t\sin t$，$z=e^t$（$0\le t\le 2\pi$）.

解：$x'(t)=e^t(\cos t-\sin t)$，$y'(t)=e^t(\cos t+\sin t)$，$z'(t)=e^t$，

$$ds=\sqrt{e^{2t}(1+1+1)}dt=\sqrt{3}e^{t}dt\text{，}$$

$$\int_C\sqrt{x^2+y^2+z^2}ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{e^{2t}+e^{2t}}\sqrt{3}e^{t}dt$$

$$=\sqrt{6}\int_0^{2\pi}e^{2t}dt=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(e^{4\pi}-1\right).$$

**7．设圆柱面螺旋线 $\boldsymbol{r}\ (t)=\cos t\ \boldsymbol{i}+\sin t\ \boldsymbol{j}+t\ \boldsymbol{k}$ 上，任一点 $P=(x,y,z)$ 处的线密度为 $\mu(x,y,z)=z$，试表达并求出在点 $A=(1,0,0)$ 与点 $B=(0,1,\frac{\pi}{2})$ 之间这段曲线的弧长和质量.

解：弧长 $s=\int_L ds$，质量 $m=\int_L zds$.

$$\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=t\end{cases}\quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\qquad ds=\sqrt{1+1}dt=\sqrt{2}dt\ .$$

$$\therefore\quad s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\text{，}\quad m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cdot tdt=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2\ .$$

第 13 章 （之 2）（总第 74 次）

教学内容：§13.2 第一型曲面积分

1.解下列各题：

**(1) 设 Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS=$ (　　)

(A) $4\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{3(1-\frac{x}{2})}dy$　　(B) $\frac{\sqrt{61}}{3}4\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{3(1-\frac{x}{2})}dy$

(C) $\frac{\sqrt{61}}{3}4\int\limits_0^{2(\frac{y}{3}-1)}dx\int\limits_0^3 dy$　　(D) $\frac{\sqrt{61}}{3}4\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^3 dy$

答：(B).

**(2) 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在 $z\geqslant h$ 部分，$0<h<a$，则 $\iint\limits_{\Sigma}zdS=$ (　　)

(A) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a^2-h^2} \sqrt{a^2-r^2}\, r\, d$ (B) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \sqrt{a^2-r^2}\, rdr$

(C) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\sqrt{a^2-h^2}}^{\sqrt{a^2-h^2}} a\, rdr$ (D) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} a\, rdr$

答：(D).

**(3) 已知椭球面$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2=1$的面积为$A$，则曲面积分

$$\oiint_{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2=1}(3x+2y-6z+1)^2\mathrm{d}S=\underline{\qquad\qquad}.$$

解：$37A$．可根据积分区域的对称性和被积函数（关于某个变量的）奇偶性来解.

$$\oiint_{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2=1}(3x+2y-6z+1)^2\mathrm{d}S$$

$$=\oiint_{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2=1}(9x^2+4y^2+36z^2+1-24yz-36zx+12xy+6x+4y-12z)\mathrm{d}S$$

$$=36\oiint_{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2=1}(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2)\mathrm{d}S+\oiint_{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2=1}\mathrm{d}S=37\oiint_{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2=1}\mathrm{d}S=37A.$$

2．计算下列曲面积分

**(1) $\iint_S xyz\, dS$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在第一卦限的部分.

解 ： $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,

$$z_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad z_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

$$\therefore \iint_s xyzds=\iint_{Dxy} xy\sqrt{R^2-x^2-y}\cdot\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\, dxdy$$

$$=R\iint_{Dxy} xydxdy=R\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} xydxdy=\frac{1}{8}R^5.$$

**(2) $\oiint_S (x^2+y^2)dS$，其中 S 为锥面$x^2+y^2=z^2$及平面$z=1$所围成区域的边界曲面.

解：$\oiint_S (x^2+y^2)dS=\iint_{S_1}(x^2+y^2)dS+\iint_{S_2}(x^2+y^2)dS$，

S_1 是 $\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2 \le 1 \end{cases}$ 围成的平面区域,

$$\iint_{S_1}(x^2+y^2)dS=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy=\frac{\pi}{2}$$

S_2 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ 夹在平面 $z=1$ 与 $z=0$ 之间的部分，

$$\iint_{S_2}(x^2+y^2)\ ds=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2dxdy}$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

原式 $=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\pi$.

**(3) 计算 $\iint_{\Sigma}\dfrac{z}{\sqrt{9+4x^2+4y^2}}dS$ 其中 Σ 是曲面 z= $\dfrac{1}{3}(x^2+y^2)$ 中介于 z=0 及 z=2 之间的部分曲面.

解：Σ 在 xoy 面上的投影域为 D：$x^2+y^2\leqslant 6$，

面积元素：$dS=\dfrac{1}{3}\sqrt{9+4x^2+4y^2}dxdy$.

$$\therefore \iint_{\Sigma}=\frac{1}{9}\iint_{D}(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{9}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{6}}r^3dr$$

$$=\frac{1}{9}*2\pi*\frac{(\sqrt{6})^4}{4}=2\pi\ .$$

**(4) 计算 $\oiint_{\Sigma}(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{4})dS$ 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, a 为正数.

解：由对称性以及积分与变量名称的无关性知：

$$\oiint_{\Sigma}x^2dS=\oiint_{\Sigma}y^2dS=\oiint z^2dS=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\frac{a^2}{3}\oiint_{\Sigma}dS=\frac{4\pi}{3}a^4\ .$$

$$\therefore \oiint_{\Sigma}(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4})dS=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})\frac{4\pi}{3}a^4=\frac{13}{12}\frac{4\pi}{3}a^4=\frac{13\pi}{9}a^4\ .$$

**3. 试求带均匀密度 μ 的圆柱面 $S:x^2+y^2=R^2,-h\le z\le h$ 对各坐标轴的转动惯量

I_x,I_y,I_z .

解：由对称性知：$I_x = I_y$，

$$I_x = \mu\iint_S \left(y^2+z^2\right)ds = \mu\iint_{S_{前}} \left(y^2+z^2\right)ds + \mu\iint_{S_{后}} \left(y^2+z^2\right)ds$$

$$= 2\mu\iint_{D_{yz}} \left(y^2+z^2\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz$$

$$= 2\mu\int_{-h}^{h}\int_{-R}^{R}\left(y^2+z^2\right)\sqrt{\frac{R^2}{R^2-y^2}}\,dydz$$

$$= 2\mu\left(\int_{-h}^{h}\int_{-R}^{R} y^2\sqrt{\frac{R^2}{R^2-y^2}}\,dydz + \int_{-h}^{h} z^2dz\int_{-R}^{R}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-y^2}}\,dy\right)$$

$$\overset{y=R\sin\theta}{=} 2\mu(2h\times 2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin^2\theta\sqrt{\frac{R^2}{R^2\sin^2\theta}}R\cos\theta d\theta$$

$$+\frac{2}{3}h^3\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{R^2}{R^2\cos^2\theta}}R\cos\theta d\theta$$

$$= 2\mu\left(4h\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3\sin^2\theta d\theta + \frac{4}{3}h^3R\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 4\pi\mu Rh\left(\frac{R^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right) = M\left(\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{3}h^2\right)。$$

$$I_z = \mu\iint_S \left(x^2+y^2\right)ds = \mu\iint_S R^2ds = \mu R^2\iint_S ds$$

$$= \mu R^2\cdot 4\pi hR = 4\pi\mu Rh\cdot R^2 = MR^2 。$$

** 4. 求单叶双曲面壳 $x^2+y^2-z^2=1\left(|z|\le 1\right)$关于 z 轴的转动惯量．已知其密度为

$$\mu = \frac{|z|}{x^2+y^2} .$$

解：$I_z = \iint_S (x^2+y^2)\mu ds = \iint_S (x^2+y^2)\frac{|z|}{x^2+y^2}ds$

$$= 2\iint_{S上}(x^2+y^2)\frac{z}{x^2+y^2}ds$$

$$=2\iint_D (x^2+y^2)\frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{x^2+y^2}\sqrt{\frac{2x^2+2y^2-1}{x^2+y^2-1}}dxdy$$
$$=2\iint_{1\le x^2+y^2\le 2}\sqrt{2x^2+2y^2-1}dxdy$$
$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2\rho^2-1}\rho d\rho=\frac{2}{3}\pi(3\sqrt{3}-1)$$

**5．设锥面壳 $z=\sqrt{x^2+y^2}\left(0\le z\le 1\right)$ 上点 $\left(x,y,z\right)$ 处的密度为 $\mu=z$，

求：（1） 锥面壳的质量；

（2） 锥面壳的质心坐标；

（3）锥面壳关于 z 轴的转动惯量.

解：（1）$m=\iint_S zdS=\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{2}r^2dr=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$.

（2）$Dxy: x^2+y^2\le 1$，

$$\bar{x}=\frac{\iint_s x\mu ds}{\iint_s \mu ds}=\frac{\iint_s xzds}{\iint_s zds}=\frac{\iint_{Dxy}x\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}dxdy}{\iint_{Dxy}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}dxdy}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\iint_{Dxy}x\sqrt{x^2+y^2}dxdy}{\sqrt{2}\iint_{Dxy}\sqrt{x^2+y^2}dxdy}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cos\theta\cdot rdrd\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2drd\theta}=0\text{。}$$

同理 $\bar{y}=0$，

$$\bar{z}=\frac{\iint_S z\mu ds}{\iint_S \mu ds}=\frac{\iint_S z^2ds}{\iint_S zds}=\frac{\sqrt{2}\iint_{Dxy}x^2+y^2dxdy}{\iint_{Dxy}\sqrt{x^2+y^2}dxdy}$$
$$=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2dr}=\frac{3}{4}\text{。}$$

所以质心坐标（$0,0,\frac{3}{4}$）.

（3）$I_z=\iint\limits_S\left(x^2+y^2\right)zds=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{2}r^4dr=\frac{2\sqrt{2}}{5}\pi$.

第 14 章 （之 1）（总第 75 次）

教学内容：§14.1 第二型曲线积分

**1．设 $L:\begin{cases}x=\sqrt{\cos x},\\ y=\sqrt{\sin t},\end{cases}0\le t\le\frac{\pi}{2}$,则 $\int_L x^2y\mathrm{d}y-y^2x\mathrm{d}x=$ （　）

（A）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos t\sqrt{\sin t}-\sin t\sqrt{\cos t}\right]\mathrm{d}t$；　　（B）$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos^2 t+\sin^2 t\right]\mathrm{d}t$；

（C）$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos t-\sin t\right]\mathrm{d}t$；　　（D）$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos^2 t-\sin^2 t\right]\mathrm{d}t$.

答：(B).

2．计算下列曲线积分：

**（1）计算 $\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2(a>0)$ 的逆时针方向.

解：令 $x=a\cos t,y=a\sin t,$ 则：　$\oint_L\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}dt=2\pi$.

**（2） 计算 $\int_L(2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$ ，其中 L 是曲线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(0\le t\le 2\pi)$ 的一段弧.

解： **原式** $=\int_0^{2\pi}[(a+a\cos t)a(1-\cos t)+a(t-\sin t)a\sin t]\mathrm{d}t$

$=a^2\int_0^{2\pi}t\sin t\mathrm{d}t$

$=-2\pi a^2.$

**(3)计算 $\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 是从 $O(0，0)$沿曲线 $x=\begin{cases}\sqrt{y},0\leqslant y\leqslant 1,\\ 2-y,1<y\leqslant 2\end{cases}$，到 $B(0，2)$.

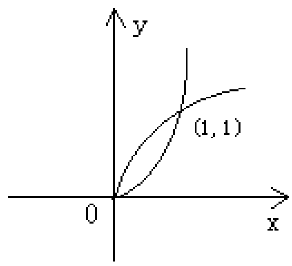
解： L_1： $x=\sqrt{y}$， $0\leqslant y\leqslant 1$；

L_2： $x=2-y$， $1\leqslant y\leqslant 2$；

$$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}y=\int_{L1}+\int_{L2}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1 (y+y^2)\mathrm{d}y+\int_1^2[(2-y)^2+y^2]\mathrm{d}y$$
$$=\frac{5}{6}+\frac{8}{3}$$
$$=\frac{7}{2}.$$

**(4) $\oint_L \frac{x}{x+1}dx+2xydy$，其中 L 是由 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=x^2$ 构成的简单闭曲线.

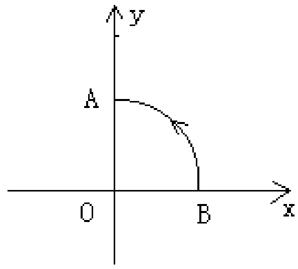
解：$\oint_L \frac{x}{x+1}dx+2xydy$



$$=\int_0^1 (\frac{x}{x+1}+4x^4)dx+\int_1^0 (\frac{x}{x+1}+x)dx$$
$$=\int_0^1 (4x^4-x)dx=(\frac{4}{5}x^5-\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1=\frac{3}{10}$$

**(5) $\int_L \frac{x^2y^{\frac{3}{2}}dy-xy^{\frac{5}{2}}dx}{(x^2+y^2)^3}$，其中 L 是圆 $x^2+y^2=R^2$ 在第一象限中自点 $B=(R,0)$ 到点 $A=(0,R)$ 的弧段 $(R>0)$.

解：



$$\int_L \frac{x^2y^{\frac{3}{2}}dy-xy^{\frac{5}{2}}dx}{(x^2+y^2)^3}\underset{\substack{y=R\sin\theta\\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}}}{\overset{x=R\cos\theta}{=}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^{\frac{9}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}\theta\cos\theta}{R^6}d\theta$$
$$=\frac{1}{R^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}\theta\, d\sin\theta=\frac{2}{5R\sqrt{R}}.$$

**3. 分别计算质点在力 $\vec{f}=y^2\,\vec{i}+2xy\,\vec{j}$ 作用下，沿下列各种路径自点 $A=(0,0)$ 移动到 $B=(1,1)$ 时，f 所作的功：

（1） $y=x^\alpha(\alpha>0)$；（2） $x=\frac{e^y-1}{e-1}$； (3) $y=\tan\frac{\pi x}{4}$.

解：力 $\vec{f}=y^2\cdot\vec{i}+2xy\vec{j}.\quad A=(0,0),\quad B=(1,1)$，

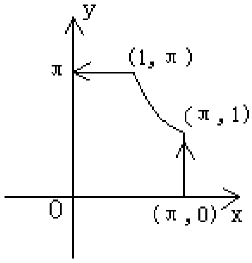
（1）$W_1=\int_{L_1}y^2dx+2xydy=\int_0^1\left[x^{2\alpha}+2x\cdot x^\alpha\cdot\alpha\cdot x^{\alpha-1}\right]dx=\int_0^1(1+2\alpha)x^{2\alpha}dx=1$.

（2）$W_2=\int_{L_2} y^2dx+2xydy=\int_0^1\left[y^2\cdot\frac{e}{e-1}+2\cdot\frac{e^y-1}{e-1}\cdot y\right]dy=\frac{1}{e-1}y^2(e^y-1)\Big|_0^1=1$.

(3) $W_3=\int_{L_3} y^2dx+2xydy=\int_0^1\left(\tan^2\frac{\pi}{4}x+2x\tan\frac{\pi}{4}x\cdot\sec^2\frac{\pi}{4}x\cdot\frac{\pi}{4}\right)dx$

$$=\left[\frac{4}{\pi}\tan\frac{\pi}{4}x-x+x\tan^2\frac{\pi x}{4}-\frac{4}{\pi}\tan\frac{\pi}{4}x+x\right]\Bigg|_0^1=1.$$

**4. 计算曲线积分 $\int_L y\cos xydx+x\sin xydy$，其中 L 自点 $A=(\pi,0)$ 沿直线到点 $B=(\pi,1)$，在沿双曲线 $xy=\pi$ 到点 $C=(1,\pi)$，又沿直线到点 $D=(0,\pi)$.



解：$\int_L y\cos xydx+x\sin xydy$

$$=\int_0^1\pi\sin\pi y dy+\int_\pi^1\left[\frac{\pi}{x}\cos\pi+x\sin\pi(-\frac{\pi}{x^2})\right]dx+\int_1^0\pi\cos\pi x dx$$

$$=(-\cos\pi y)\Big|_0^1+(-\pi\ln x)\Big|_\pi^1+\sin\pi x\Big|_1^0=2+\pi\ln\pi.$$

***5. 质点在力场 f 的作用下，从点 $A=(a,0)$ 沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限内运动到点 $B=(0,b)$，试求力场 f 所作的功. 假定在任一点 $P=(x,y)$ 处 f 的大小等于 $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 而方向指向原点.

解：$\vec{f}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i}+\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j})=\frac{-x\vec{i}-y\vec{j}}{x^2+y^2}$

$$w=\int_L\vec{f}d\vec{s}=\int_L\frac{-x}{x^2+y^2}dx+\frac{-y}{x^2+y^2}dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-a\cos t(-a\sin t)-b\sin t(b\cos t)}{a^2\cos^2t+b^2\sin^2t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(a^2-b^2)\sin t\cos t}{a^2\cos^2t+b^2\sin^2t}dt=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(b^2-a^2)d\sin^2t}{a^2+(b^2-a^2)\sin^2t}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left[a^2+(b^2-a^2)\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}(\ln b^2-\ln a^2)=\ln\frac{a}{b}.$$

**6．计算曲线积分 $\boldsymbol{I}=\int_C \boldsymbol{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，其中 C 是曲线 $\boldsymbol{r}\,(t)=t\,\boldsymbol{i}+t^2\,\boldsymbol{j}+t^3\,\boldsymbol{k}$ 自点 $(0,0,0)$ 到点

$(1,1,1)$，而向量场 f 为：$\boldsymbol{f}\,(x,y,z)=2xz\,\boldsymbol{i}-xy\,\boldsymbol{j}+yz^2\,\boldsymbol{k}$.

解：
$$\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases} \quad t:0\to 1$$

$$I=\int_0^1\left(2t\cdot t^3-t\cdot t^2\cdot 2t+t^2\cdot t^6\cdot 3t^2\right)dt$$
$$=\int_0^1\left(2t^4-2t^4+3t^{10}\right)dt=\frac{3}{11}.$$

**7．计算曲线积分：$\int_C \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 C 为曲线 $x=t\cos t$，$y=t\sin t$，$z=t$

（$\pi\le t\le 2\pi$）.

解：原式$=\int_\pi^{2\pi}\frac{t\cos t(\cos t-t\sin t)+t\sin t(\sin t+\cos t)}{\sqrt{t^2+t^2}}dt=\int_\pi^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}dt=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

第 14 章（之 2）（总第 76 次）

教学内容：§14.2 格林公式

1.选择

*(1) 设 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$ （a>0)负向一周，则曲线积分 （ ）

$$\oint_L (x^3-x^2y)\mathrm{d}x+(xy^2-y^3)\mathrm{d}y=$$

（A）$-\frac{\pi a^4}{2}$ （B）$-\pi a^4$

（C）πa^4 （D）$\frac{2\pi a^3}{3}$

答：(A)

**(2) 设 L 是 $|y|=1-x^2$ 表示的围线的正向，则 $\oint_L \frac{2x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{2x^2+y^2}=$ （　　）

(A) 0.　　(B) 2π.　　(C) -2π.　　(D) $4\ln 2$.

答：(A)

2．求下列曲线积分：

*(1)计算曲线积分 $\oint_L y^2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$，式中 L 是由 $x^2+y^2\leqslant x, x^2+y^2\leqslant y$ 所确定的公共闭区域的正向边界.

解： 记 $O(0,0)$.　　$A(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

记 L_1 为从 $O(0,0)$沿 $x^2+y^2=y$ （$x\geqslant 0$）至 $A(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

记 L_2 为从 $A(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$沿 $x^2+y^2=x$（$x\leqslant\frac{1}{2}$）至 $O(0,0)$.

$$原式=\int_{L1}+\int_{L2}y^2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}y^2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^0(x-x^2)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{48}+(-\frac{2}{48})$$
$$=-\frac{1}{48}.$$

*(2) 计算曲线积分 $\oint_L(y^2-x^2)(\mathrm{d}y-2x\mathrm{d}x)$，式中 L 是由 $y=|x|$ 及 $y=x^2-2$ 所围成的有界闭区域的正向边界.

解： 在 $y=|x|$上，$y^2-x^2=0$.

在 $y=x^2-2$ 上，$dy=2x\mathrm{d}x$

即 $dy-2x\mathrm{d}x=0$.

$$故\ 原式=\int_{y=|x|}+\int_{y=x^2-2}(y^2-x^2)(\mathrm{d}y-2x\mathrm{d}x)$$
$$=0+0$$
$$=0.$$

**(3) 计算曲线积分 $\oint_L|y|\mathrm{d}x+|x|\mathrm{d}y$，其中 L 是以 $A(1,0)$，$B(0,1)$及 E $(-1,0)$为顶点的三角形正向周界.

解：$L_1: ABOA$　　$L_2: OBEO$

$$原式=\oint_{L_1}(ydx+xdy)+\oint_{L_{21}}(ydx-xdy)$$

$$=\iint_{D_1}0d\sigma+\iint_{D_2}(-2)d\sigma=0+(-2)\times\frac{1}{2}=-1$$

3．利用曲线积分计算下列曲线所围成平面图形的面积：

**（1）用曲线积分计算由闭曲线L所围成的图形的面积，其中$L:\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$.

解：$A=\dfrac{1}{2}\oint_L xdy-ydx=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos^3 t\cdot 3b\sin^2 t\cos t+b\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t)dt$

$=\dfrac{3ab}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 tdt=\dfrac{3}{8}\pi ab$.

***（2）笛卡尔叶形线 $x=\dfrac{at}{1+t^3},y=\dfrac{at^2}{1+t^3}(0\le t\le +\infty)$.

解：面积

$$A=\frac{1}{2}\oint_{\partial D}xdy-ydx=\frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{2t^2-t^5}{(1+t^3)^3}-\frac{t^2-2t^5}{(1+t^3)^3}\right]dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2+t^5}{(1+t^3)^3}dt$$

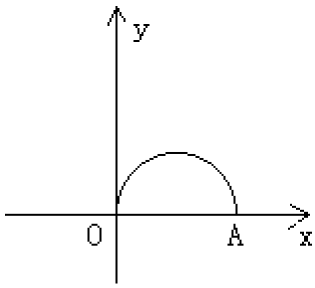
$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt=-\frac{a^2}{6}\frac{1}{(1+t^3)}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{a^2}{6}$$

4．在下列各题中适当补上一条曲线，使积分路径成闭曲线，再考虑用格林公式：

**（1）$\int\limits_L(xy-\sin x\sin y)dx+(x^2+\cos x\cos y)dy$，其中$L$自$O(0,0)$点出发，沿曲线

$y=x-x^2$至点$A(1,0)$；

解：补上直线 AO：从点A（1，0）沿x轴到点O（0，0），



于是

$$\int_L+\int_{AO}=\oint_{L+AO}=-\iint_D xd\delta=-\int_0^1 xdx\int_0^{x-x^2}dy$$

$$=-\int_0^1(x^2-x^3)dx=-(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})=-\frac{1}{12}$$

而$\int_{AO}=\int_1^0 0dx=0$，

$\therefore\int_L=\oint_{L+AO}-\int_{AO}=-\dfrac{1}{12}$.

***（2） 计算曲线积分 $\int_L xy^2\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$ ，式中L是从$O=(0,0)$沿曲线$y=\tan x$到

$A=(\dfrac{\pi}{4},1)$的有向弧段.

解： $\mathrm{d}y = sec^2 x\mathrm{d}x$，

$$\textbf{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}[x(sec^2x - 1) - x\cdot sec^2x]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} - x\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\pi^2}{32}.$$

***5. 计算曲线积分 $\int_L \frac{y\mathrm{d}x + (a\pi - x)\mathrm{d}y}{(x-\pi a)^2 + \pi^2 y^2}$ ，式中 L 是从原点 $O=(0,0)$ 沿摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1-\cos t)\end{cases}$ 到达 $A=(2\pi a,0)$ 的一拱有向弧段(a>0).

解：$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x-\pi a)^2 - \pi^2 y^2}{[(x-\pi a)^2 + \pi^2 y^2]^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，点 $(\pi a, 0)$ 除外.

故在不包括点 $(\pi a, 0)$ 的单连通区域内积分与路径无关.

取 L_1 为曲线 $\begin{cases} x = \pi(a + a\cos t) \\ y = a\sin t\end{cases}$ t 从 π 到 0.

则 $\int_L = \int_{L_1} = \int_\pi^0 \frac{a\sin t(-a\pi\sin t) - (a\pi\cos t\cdot a\cos t)}{a^2\pi^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi}\int_\pi^0 \mathrm{d}t = 1.$

***6. 把第二型（对坐标的）曲线积分 $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 化为第一型（对弧长的）曲线积分 ，式中 L 是从 $O=(0,0)$ 沿上半 圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到 $A=(1,1)$ 的有向弧段.

解： $y' = \frac{1-x}{y}$，

$\mathrm{d}s = \frac{1}{y}\mathrm{d}x$，

$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = y = \sqrt{2x - x^2}$，

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1 - 2x + x^2} = |1-x| = 1-x$，

$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$

$= \int_L [P(x,y)\sqrt{2x - x^2} + Q(x,y)(1-x)]\mathrm{d}s$.

第 14 章 （之 3）（总第 77 次）

教学内容： §14.2 格林公式（续）

1． 选择题

**（1） 曲线积分$\int_L (4x^3+2y^3)\mathrm{d}x+6xy^2\mathrm{d}y$的值 （ ）

(A) 与曲线 L 及起点、终点均有关；
(B) 与曲线 L 无关，仅与其起点及终点有关；
(C) 与曲线 L 及起点无关，仅与终点无关；
(D) 与曲线 L 及起点终点都无关.

答：（B）

$$(\because \frac{\partial(4x^3+2y^3)}{\partial y}=6y^2=\frac{\partial(6xy^2)}{\partial x})$$

**（2） 设 C 是从 $A(1，1)$到 $B(2，3)$的直线，则$\int_C (x+3y)\,\mathrm{d}\,x+(y+3x)\,\mathrm{d}\,y=$（ ）

(A) $\int_1^2[(x+2x-1)+(2x-1+3x)]\mathrm{d}x$；
(B) $\int_1^2(x+2x+1)\mathrm{d}x+\int_1^3(y+3\cdot\frac{y+1}{2})\mathrm{d}y$；
(C) $\int_1^2[(x+6x)+(2x+3x)]\mathrm{d}x$；
(D) $\int_1^2(x+3)\mathrm{d}x+\int_1^3(y+6)\mathrm{d}y$.

答：（D）.

（3）若可微函数$u(x,y)$的全微分为

$\mathrm{d}u(x,y)=(x^2+pxy-y^2)\mathrm{d}x+(3x^2+qxy+y^2)\mathrm{d}y$，则 （ ）

（A） $p=6,q=-2$； （B） $p=3,q=-1$；

（C） $p=-6,q=2$； （D） $p=-3,q=1$.

答：（A）.

**2．验证下列曲线积分的积分路径无关性，并据此而另取一特殊路径L'以计算其值：

$\int_L \frac{(1-y)dx+xdy}{(x+y-1)^2}$，其中$L$是圆周$x^2+y^2=4$在第一象限自$A=(2,0)$至$B=(0,2)$的一段圆弧.

解：$P=\frac{1-y}{(x+y-1)^2}$， $Q=\frac{x}{(x+y-1)^2}$，

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-x+y-1}{(x+y-1)^3}$， $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-x+y-1}{(x+y-1)^3}$，

则$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以积分在区域$x+y>1$或$x+y<1$内与路径无关.

$$\int_L \frac{(1-y)dx+xdy}{(x+y-1)^2}=\int_{(2,0)}^{(2,2)}+\int_{(2,2)}^{(0,2)}=\int_0^2\frac{2dy}{(y+1)^2}+\int_2^0\frac{-dx}{(x+1)^2}=2.$$

**3. 验证：存在$u(x,y)$使$(2xe^y+y)\mathrm{d}x+(x^2e^y+x-2y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)$，并求$u(x,y)$。

解： $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x\mathrm{e}^y+1=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,

故要存在 $u=u(x,y)$. **使** $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$,

这里 $P=2x\mathrm{e}^y+y$. $Q=x^2\mathrm{e}^y+x-2y$.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=(2x\mathrm{e}^y+y)\mathrm{d}x+(x^2\mathrm{e}^y+x-2y)\mathrm{d}y\\&=\mathrm{e}^y(2x\mathrm{d}x)+x^2(\mathrm{e}^y\mathrm{d}y)+y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}y\\&=\mathrm{d}(x^2\cdot\mathrm{e}^y)+\mathrm{d}(xy)-\mathrm{d}y^2\\&=\mathrm{d}(x^2\mathrm{e}^y+xy-y^2)\end{aligned}$$

故 $u(x,y)=x^2\mathrm{e}^y+xy-y^2+C$ （C **为任意常数**）

**4．试用求原函数增量$u(B)-u(A)$的方法，计算下述与路径无关的曲线积分：

$$\int_{(1,1)}^{(1,2)}(3x^2-4xy+y^2)dx-(2x^2-2xy+9y^2)dy.$$

解：$\displaystyle\int_{(1,1)}^{(1,2)}(3x^2-4xy+y^2)dx-(2x^2-2xy+9y^2)dy$

$$=(x^3-2x^2y+xy^2-3y^3)\Big|_{(1,1)}^{(1,2)}=(-23)-(-3)=-20.$$

5．求下列全微分方程得通解

**（1） $(\cos y-y\sin x)dx+(\cos x-x\sin y)dy=0$；

解：$\displaystyle\varphi(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(\cos y-y\sin x)dx+(\cos x-x\sin y)dy$

$$=\int_0^x dx+\int_0^y(\cos x-x\sin y)dy=x+y\cos x+x\cos y-x=y\cos x+x\cos y,$$

故通解为 $y\cos x+x\cos y=C$.

**（2） $(e^y-ye^{-x}-1)dx+(e^{-x}+xe^y+1)dy=0$.

解：$\displaystyle\varphi(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(e^y-ye^{-x}-1)dx+(e^{-x}+xe^y+1)dy$

$$=\int_0^x(1-1)dx+\int_0^y(e^{-x}+xe^y+1)dy=ye^{-x}+xe^y-x+y,$$

故通解为 $ye^{-x}+xe^y-x+y=C$.

**6. 试确定λ的值，使得 $\int_c \frac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda \mathrm{d}x-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda \mathrm{d}y$ 的值与路径无关，其中 C 为与 X 轴不相交(或不相接触)；并计算

$$I=\int_{(1,1)}^{(0,2)} \frac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda \mathrm{d}x-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda \mathrm{d}y.$$

解：$P=\frac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda$，$Q=-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda-1}[2\lambda y^2-(x^2+y^2)]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda-1}[-2\lambda x^2-2(x^2+y^2)]$$

由 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，推出 $2\lambda y^2-(x^2+y^2)=-2\lambda x^2-2(x^2+y^2)$，即 $\lambda=-\frac{1}{2}$

即当 $\lambda=-\frac{1}{2}$ 时，曲线积分与路径无关.

$$I=\int_{(1,1)}^{(0,2)} \frac{x}{y}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^0 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x-\int_1^2 \frac{0^2}{y^2}(0^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y=\sqrt{1+x^2}\Big|_1^0=1-\sqrt{2}\ .$$

**7. 试检验下列向量场

$$\vec{f}(x,y)=(x-y\cos x)\vec{i}-\sin x\vec{j}$$

是否为梯度场？若是，则求出函数 $\varphi(x,y)$，使 $\mathrm{grad}\,\varphi=\boldsymbol{f}$.

解：$\vec{f}(x,y)=(x-y\cos x)\vec{i}-\sin x\vec{j}$，

$$\because \frac{\partial}{\partial y}(x-y\cos x)=-\cos x=\frac{\partial}{\partial x}(-\sin x),$$

∴是梯度场．而且

$$\varphi(x,y)=C+\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x-y\cos x)dx-\sin x dy$$

$$=C+\int_0^x xdx+\int_0^y -\sin x dy=\frac{1}{2}x^2-y\sin x+C\ .$$

第 14 章 （之 4）（总第 78 次）

教学内容： § 14.3 第二型曲面积分

**1．设Σ为柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=0$及$z=3$所截得的第一卦限部分的前侧，则

$$\iint_{\Sigma} zdxdy+xdydz+ydxdz= \qquad\qquad (\quad)$$

（A）$3\iint_{D_{xy}}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3\int_0^3\mathrm{d}y\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$；

（B）$2\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=2\int_0^3\mathrm{d}z\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y$；

（C）$3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$；　　　（D）$3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos\theta\,\mathrm{d}r$．

答：（B）

**2．计算曲面积分：$\iint_S (x+y-z-1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$为马鞍面$z=xy$上

$(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$部分，积分沿S的上侧．

解：$\iint_S (x+y-z-1)^2dxdy$

$$=\iint_D (x+y-xy-1)^2dxdy\text{，其中}D:(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$$

$$=\iint_D (x-1)^2(y-1)^2dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^5\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\rho$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\varphi}{8}d\varphi=\frac{1}{8}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{24}.$$

**3．计算曲面积分：$\iint_S z(x^2+y^2)(\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\mathrm{d}z)$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$

在第一、四卦限（$x\ge 0$，$z\ge 0$）的部分，积分沿S的上侧；

解：S的单位正法向为

$$\vec{n}^0=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}=\frac{1}{R}\{x,y,z\}.$$

$$\therefore \iint_S z(x^2+y^2)(dydz+dxdz)=\frac{1}{R}\iint_S\{z(x^2+y^2),z(x^2+y^2),0\}\{x,y,z\}dS$$

$$=\frac{1}{R}\iint_S z(x^2+y^2)(x+y)dS.$$

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\text{，}\quad z_x=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\text{，}\quad z_y=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

$$\therefore dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy\ .$$

$$\therefore \text{原式}=\frac{1}{R}\iint_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\cdot\sqrt{R^2-x^2-y^2}\left(x^2+y^2\right)(x+y)dxdy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R\rho^3\cdot\rho(\cos\theta+\sin\theta)d\rho=\frac{2R^5}{5}\ .$$

**4．若 $v=a\,i+b\,j+c\,k$，其中 a，b，c 为常数，S 为单位闭球面. 试证 $\oiint\limits_S\vec{v}\cdot d\vec{s}=0$.

证：利用第一型与第二型曲面积分的联系及 S 的方程 $x^2+y^2+z^2=1$，S 的单位正法为

$$\vec{n}^0=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}=\{x,y,z\}\ .$$

可得 $\oiint\limits_S\vec{v}\cdot d\vec{s}=\oiint\limits_S\{a,b,c\}\cdot\vec{n}^0\,ds=\oiint\limits_S(ax+by+cz)ds$.

由于 ax 关于 x 为奇函数，且 S 关于 yz 坐标面对称，故 $\oiint\limits_s axds=0$． 同理

$\oiint\limits_S byds=\oiint\limits_S czds=0$． 从而有 $\oiint\limits_S\vec{v}\cdot d\vec{s}=0$.

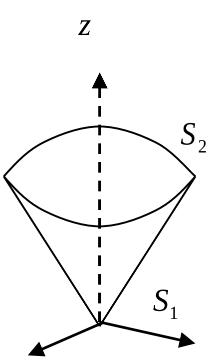
***5．计算下列闭曲面上的曲面积分（积分沿区域 Ω 之边界曲面 $\partial\Omega$ 的外侧）：

$\oiint\limits_{\partial\Omega}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{dxdy}$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le1\right\}$；

解：$\iint\limits_{S_1}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{e^\rho}{\rho}\rho d\rho=-(e-1)2\pi$.

$\iint\limits_{S_2}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{e}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{e}{\rho}\rho\,d\rho=e2\pi$.

$\therefore\oiint\limits_{2\Omega}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=2\pi$.



x y

***6．用两种方法（按 14.3.3 中的公式化为二重积分，或先化为第一型曲面积分后再计算）计算下列曲面积分：$\iint\limits_{S} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为双叶双曲面 $z^2-x^2-y^2=1$（$z\ge1$）上 $x^2+y^2\le 2ax$ 部分，积分沿 S 的下侧．

解法一：$\iint\limits_{S} z^2dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}\left(1+x^2+y^2\right)dxdy$

$$=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\left(1+\rho^2\right)\cdot\rho d\rho=-\left(a^2+\frac{3}{2}a^4\right)\pi\ .$$

解法二：S 的单位正法向为

$$\vec{n}^0=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},-\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}$$

$\therefore$ 原式 $=\iint\limits_{S}\dfrac{-z^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS$.

$$z=\sqrt{1+x^2+y^2}\ ,\quad z_x=-\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\ ,\quad z_y=\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\ ,$$

$$dS=\sqrt{1+z_z^2+z_y^2}dxdy=\frac{\sqrt{1+2x^2+2y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy\ .$$

$\therefore$ 原式 $=-\iint\limits_{D_{xy}}\dfrac{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+2x^2+2y^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{1+2x^2+2y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}\left(1+x^2+y^2\right)dxdy=-\left(a^2+\frac{3}{2}a^4\right)\pi\ .$$

***7．计算下列闭曲面上的曲面积分（积分沿区域 Ω 之边界曲面 $\partial\Omega$ 的外侧）：

$\oiint\limits_{\partial\Omega} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^3+y^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^3-y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le1,\quad x\ge0,\quad y\ge0,\quad 0\le z\le1\right\};$$

解：在曲面$\partial\Omega$上$x=0,y=0,z=0$及$z=1$部分的S上$\iint\limits_{S} xzdydz=0$，所以

$$\oiint\limits_{\partial\Omega} xzdydz=\iint\limits_{D_{yz}} z\sqrt{1-y^2}dydz=\int_0^1 zdz\int_0^1\sqrt{1-y^2}dy=\frac{\pi}{8}.$$

在曲面$\partial\Omega$上$x=0,z=0$及$z=1$部分的S上$\iint\limits_{S}\left(x^3+z^3\right)dzdx=0$，所以

$$\oiint\limits_{\partial\Omega}\left(x^3+y^3\right)dzdx=-\iint\limits_{D_{xz}} x^3dzdx+\iint\limits_{D_{xz}}\left[x^3+\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]dzdx=\frac{3\pi}{16}.$$

在曲面$\partial\Omega$上$x=0,y=0$及$x^2+y^2=1$部分的S上$\iint\limits_{S}\left(x^3-y^3\right)dxdy=0$，所以

$$\oiint\limits_{\partial\Omega}\left(x^3-y^3\right)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^3-y^3\right)dxdy-\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^3-y^3\right)dxdy=0,$$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{5\pi}{16}$.

第 14 章 （之 5）（总第 79 次）

教学内容： §14.4 奥-高公式

1． 解下列各题：

*（1）．向量场 $\boldsymbol{f}=\sin(x+y)\,\boldsymbol{i}+e^{yz}\,\boldsymbol{j}+zx\,\boldsymbol{k}$ 的散度$\nabla\cdot\boldsymbol{f}$ =______________.

解：$\dfrac{\partial[\sin(x+y)]}{\partial x}=\cos(x+y)$，$\dfrac{\partial\left(e^{yz}\right)}{\partial y}=ze^{yz}$，$\dfrac{\partial(zx)}{\partial z}=x$

$$\therefore\ div\,\vec{f}=\cos(x+y)+ze^{yz}+x.$$

**（2）．设 $A=\{4xy,3yz,2zx\}$, $B=\{x,y,z\}$, 则 div（$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$）=______________.

解：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\4xy&3yz&2zx\\x&y&z\end{vmatrix}$$

$$=\{3yz^2-2xyz,\ 2x^2z-4xyz,\ 4xy^2-3xyz\}.$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=-2yz-4xz-3xy.$$

**（3）．设函数$f(u,v,w)$对各变元具有二阶连续偏导数，则 div[grad$f(x,xy,z)$]=_________.

答：$f_{11}+2yf_{12}+(x^2+y^2)f_{22}+f_{33}$

**2. 计算曲面积分，$\oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega} x(y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中$\Omega$由圆柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面$z=\pm1$围成，而$\partial\Omega$ 为立体 Ω 的边界曲面，积分沿$\partial\Omega$的外侧.

解：由奥高公式，原式$=\iiint_{\Omega}\left(y^2+z^2+z^2+x^2\right)dV$

$$=\int_{-1}^{1}dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(2z^2+\rho^2\right)\rho d\rho=\frac{7}{3}\pi\ .$$

**3. 计算$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x^3z-xz^3)dydz+y^3zdxdz+z^4dxdy$，其中$\Sigma$是球体$\Omega$：$x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$的表面的外侧.

解：由高斯公式

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}=\iiint_{\Omega}[(3x^2z-z^3)+3y^2z+4z^3]\mathrm{d}v=3\iiint_{\Omega}z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^5\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\pi\cdot2^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=8\pi.$$

**4. 计算$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(y+z)dxdy+(x-z)dydz$，其中$\Sigma$是平面 $x+z=1$ 曲面 $y=\sqrt{x}$ 及坐标面 $y=0$, $z=0$ 所围成立体Ω的外表面.

解：由高斯公式

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}=\iiint_{\Omega}(1+0+1)\mathrm{d}v=2\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v$$

$$=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y\int_0^{1-x}\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}(1-x)\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1\sqrt{x}(1-x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{8}{15}.$$

**5. 计算$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\sqrt{x^2+z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是由 $x^2+y^2+z^2\geqslant a^2$，$x^2+y^2+z^2\leqslant 4a^2$ 及 $y\geq\sqrt{x^2+z^2}$ 所确定的立体Ω的表面的外侧，a为正数.

解：

$$\oiint_{\Sigma} = \iiint_{\Omega} (2y+\sqrt{x^2+z^2})\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_a^{2a}(2\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi)\rho^2\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\sin\varphi\cos\varphi+\sin^2\varphi)\mathrm{d}\varphi\cdot\int_a^{2a}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\cdot\frac{\pi+2}{8}\cdot\frac{15}{4}a^4=\frac{15}{16}(\pi+2)a^4.$$

***6. 计算曲面积分：$\iint\limits_S (x^3+e^y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - z(x^2y+\sin z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - x^2(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S

为曲面 $z=1-x^2-y^2$ 在 $z\ge 0$ 的部分，积分沿 S 的上侧.

解：记 $S':\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2\le 1\end{cases}$ 方向取下侧，则

$$\oiint_{S+S'} = \iiint_V \left(3x^2-zx^2-2zx^2\right)dV$$

$$=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{1-z}}\left(3\rho^2\cos^2\varphi-3z\rho^2\cos^2\varphi\right)\rho d\rho=\frac{3}{16}\pi\ .$$

$$\iint_{S_1} = -\iint_{D_{xy}}\left(-x^2y^2\right)dxdy=\frac{\pi}{24}\ .$$

$$\therefore \iint_S ` = \frac{3\pi}{16}-\frac{\pi}{24}=\frac{7\pi}{48}.$$

***7. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 满足

$z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ 的那部分曲面的上侧.

解：补平面块 Σ_1：$z=1$, $x^2+y^2\leqslant 1$，下侧.

$$\iint_{\Sigma_1} = \iint_{\Sigma_1} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\pi,$$

Σ 和 Σ_1 围成半球体 Ω，由高斯公式

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} = 2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v = 2\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v$$

$$=2\int_1^2 z\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le 2z-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad =2\int_1^2 z\cdot\pi(2z-z^2)\mathrm{d}z=\frac{11}{6}\pi$$

$$\therefore \iint_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = \frac{11}{6}\pi - (-\pi) = \frac{17}{6}\pi$$

**8. 计算通量：$\Phi = \oiint_S \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，其中 $\boldsymbol{S}$ 为半径等于 4 的球面，$\boldsymbol{r}$ 为曲面 S 上点 (x,y,z) 的径向量.

解：$\Phi = \oiint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$= \oiint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{4} = \frac{1}{4}\oiiint_V 3dV = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 4^3 = 64\pi .$$

***9. 求流速为 $\boldsymbol{v} = x^2\,\boldsymbol{i} + y^2\,\boldsymbol{j} + z^2\,\boldsymbol{k}$ 的不可压缩流体（流体密度 $\mu(x,y,z)\equiv$常数）在单位时间内，流经上半单位球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 上侧的流量.

解：$\Phi = \iint_S \mu\,\vec{f}\cdot d\,\vec{s}$. 记 $S_1:\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2\le 1\end{cases}$ 方向取下侧，则

$$\oiint_{S+S_1} \mu\,\vec{f}\cdot d\,\vec{s} = \mu\iiint_V (2x+2y+2z)dV = 2\mu\iiint_V zdV$$

$$= 2\mu\int_0^1 zdz \iint_{x^2+y^2\le 1-z^2} d\sigma = 2\mu\int_0^1 \pi(1-z^2)zdz = \frac{\pi}{2}\mu .$$

$$\iint_{S_1} \mu\,\vec{f}\cdot d\,\vec{s} = -\mu\iint_{x^2+y^2\le 1} 0dxdy = 0 .$$

$$\therefore \quad \iint_S \mu\,\vec{f}\cdot d\,\vec{s} = \frac{\pi\mu}{2} .$$

其中 Ω 为 Σ 所围的立体区域.

第 14 章 （之 6）（总第 80 次）

教学内容： §14.5 斯托克斯公式

1. 解下列各题：

*（1）设 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，则下列表达式中有意义的是 （　）

（A）$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, r)$；　　（B）$\mathrm{grad}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{r})$；

（C）div(div $\boldsymbol{r}$)；　　　　　　　　（D）rot(div $\boldsymbol{r}$).

答：（A）.

＊（2）向量场 $\boldsymbol{f}=(x+y+z)(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$ 的旋度为________________.

解：$$\mathrm{rot}\vec{f}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2+xy+xz & xy+y^2+yz & xz+yz+z^2\end{vmatrix}=\{z-y,x-z,y-x\}.$$

＊（3）设向量场 $\boldsymbol{F}=[x^2+ln(1+y^2)]\boldsymbol{i}-z\sin x\boldsymbol{j}+(e^{xy}-2xz)\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{G}=(z^2+x\cos x^2)\boldsymbol{i}+y^2e^y\boldsymbol{j}++(2xz+\mathrm{arctg}z)\boldsymbol{k}$, 则　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

(A) $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ 都是无旋场.　　　　　　　(B) $\boldsymbol{F}$ 是无旋场，$\boldsymbol{G}$ 是无源场.

(C) $\boldsymbol{F}$ 是无源场，$\boldsymbol{G}$ 是无旋场.　　　　(D) $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}$ 都是无源场.

答：(C)

＊＊（4）设函数 $f(u,v,w)$ 具有二阶连续偏导数，则 $\mathrm{rot}[\mathrm{grad}f(x,xy,xyz)]=$_________.

答：$\vec{0}$.

＊＊2．验证曲线积分 $I=\int_{(2,1,2)}^{(-1,0,4)}(yz+2)\mathrm{d}x+(xz-3)\mathrm{d}y+(xy+5)\mathrm{d}z$ 满足与路径无关的条件，求出其值.

解：　$P=yz+2$，$Q=xz-3$，$R=xy+5$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=z=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=y=\frac{\partial P}{\partial z},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=x=\frac{\partial R}{\partial y},$$

且 P,Q,R 都是 C^1 类函数.

$\therefore$ 曲线积分与积分路径无关.

$$\therefore\quad I=\int_2^{-1}(2+2)dx+\int_1^0(-2-3)dy+\int_2^4 5dz=3.$$

＊＊3．向量场 $\boldsymbol{f}=e^x[\cos(y-z)\boldsymbol{i}-\sin(y-z)\boldsymbol{j}+\sin(y-z)\boldsymbol{k}]$ 是否为无旋场？为什么？

解：因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$、$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$、$\dfrac{\partial R}{\partial x}$、$\dfrac{\partial P}{\partial z}$、$\dfrac{\partial Q}{\partial z}$、$\dfrac{\partial R}{\partial y}$ 连续且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-e^x\sin(y-z)=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=e^x\sin(y-z)=\frac{\partial P}{\partial z},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=-e^x\cos(y-z)=\frac{\partial R}{\partial y}.$$

所以给定向量场是无旋场.

**4．验证向量场 $\boldsymbol{A}=\left\{4x^3+2xyz+y^2z, x^2z+2xyz, x^2y+xy^2+4z^3\right\}$为无旋场．并求 $u(x,y,z)$，使（1）$u(0,0,0)=1$，（2）$\mathrm{d}u=\boldsymbol{A}\cdot\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$.

解：因为$\dfrac{\partial P}{\partial y}$、$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$、$\dfrac{\partial R}{\partial x}$、$\dfrac{\partial P}{\partial z}$、$\dfrac{\partial Q}{\partial z}$、$\dfrac{\partial R}{\partial y}$连续且

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 4x^3+2xyz+y^2z & x^2z+2xyz & x^2y+xy^2+4z^3\end{vmatrix}=\vec{0},$$

所以 A 为无旋场.

$$u(x,y,z)$$

$$=u(0,0,0)+\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}\left\{4x^3+2xyz+y^2z, x^2z+2xyz, x^2y+xy^2+4z^3\right\}\cdot\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$$

$$=1+\int_0^x 4x^3\mathrm{d}x+\int_0^y 0\mathrm{d}y+\int_0^x(x^2y+xy^2+4z^3)\mathrm{d}z=1+x^4+x^2yz+xy^2z+z^4.$$

**5. 计算$\displaystyle\int_\Gamma yz(2x+y+z)dx+zx(x+2y+z)dy+xy(x+y+2z)dz$，其中 Γ为从原点出发的在圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 上的任意一条到点 $A=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1)$ 的有向光滑曲线.

解：$P=yz(2x+y+z)$，$Q=zx(x+2y+z)$，$R=xy(x+y+2z)$，

$$\because\quad \frac{\partial R}{\partial y}=x^2+2xy+2xz=\frac{\partial Q}{\partial z},$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=2xy+y^2+2yz=\frac{\partial R}{\partial x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2zx+2yz+z^2=\frac{\partial P}{\partial y}$$

∴　曲线积分与路径无关.

$$\therefore\quad \int_\Gamma=\int_{(0,0,0)}^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}0\cdot 0\cdot(2x+0+0)\,\mathrm{d}\,x+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2}+2y+0)\,\mathrm{d}\,y$$

$$+\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+2z)\,\mathrm{d}\,z$$

$$=\int_0^1\left(\sqrt{2}+2z\right)\mathrm{d}\,z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

***6．计算 $\oint_{\Gamma}(y^2-z^2)\,\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\,\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\,\mathrm{d}z$，其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧的位于 $x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0$ 部分Σ的正向边界，$a>0$.

解：$P=y^2-z^2$, $Q=z^2-x^2$, $R=x^2-y^2$，取Σ为：$x^2+y^2+z^2=a^2$, $x\geqslant0$, $y\geqslant0$, $z\geqslant0$. 上侧．由斯托克斯公式

$$\oint_{\Gamma}=-2\iint_{\Sigma}(y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由对称性， $\iint_{\Sigma}y\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\therefore\quad\oint_{\Gamma}=-12\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因Σ在 xoy 面上的投影域为 D：$x^2+y^2\leqslant a^2$, $x\geqslant0$, $y\geqslant0$.

$$\therefore\quad\oint_{\Gamma}=-12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\mathrm{d}r$$
$$=-12\cdot1\cdot\frac{a^3}{3}=-4a^3.$$

***7．试证：$\oint_{C}(z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z)=\pi\sqrt{3}$．其中 C 是平面曲线 $x+y+z=0$，$x^2+y^2+z^2=1$，其正向使确定出所在平面的正法向指向上.

解：
$$\oint_C zdx+xdy+ydz=\iint_S\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & x & y\end{vmatrix}$$

$$=\iint_S dydz+dzdx+dxdy=\iint_S\{1,1,1\}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}ds=\sqrt{3}\iint_S ds=\pi\sqrt{3}.$$

***8．计算 $\oint_{\Gamma}x^2yz\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y+(x+y+1)\mathrm{d}z$，其中 Γ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=5,z=x^2+y^2+1$ 的交线，对着 z 轴正向看 Γ 的方向为顺时针方向.

解：Γ 所围的平面块Σ为 $z=2$, $x^2+y^2\leqslant1$, 方向向下．∵ $P=x^2yz$, $Q=x^2+y^2$, $R=x+y+1$.

$$\therefore\quad\oint_{\Gamma}=-\iint_{\Sigma}(1-0)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+(x^2y-1)\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x+(2x-x^2z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

由于Σ在 yoz 面及 zox 面上均无投影域，故

$$\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,\ \iint_{\Sigma}(x^2y-1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0.$$

而Σ在 xoy 面上的投影域为 D：$x^2+y^2\leqslant1$.

$$\therefore \oint_{\Gamma} = -\iint_{\Sigma} (2x - x^2 z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_{D} (2x - x^2 z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3 \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}.$$

第 15 章 （之 1） （总第 81 次）

教学内容： § 15.1 引言， § 15.2 周期函数的傅立叶级数展开（周期为 2π）

**1．已知以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 的傅里叶系数为 a_n, b_n，并设 $g(x) = -f(-x)$，则函数 $g(x)$ 的傅里叶系数 α_n， β_n 必满足关系式 （　　）

(A) $\alpha_n = a_n$， $\beta_n = b_n$； (B) $\alpha_n = -a_n$， $\beta_n = -b_n$；

(C) $\alpha_n = a_n$， $\beta_n = -b_n$； (D) $\alpha_n = -a_n$， $\beta_n = b_n$.

答案 （D）.

解 因为 $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$，所以 $g(x) = -f(-x)$

$$= -\frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(-nx) + b_n \sin(-nx)] = -\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

可知正确的选项为（D）.

**2．设函数 $f(x)$ 的周期为 2π，在区间 $[-\pi, \pi]$ 上表达式为 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ \sin 2x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

则其傅立叶级数 $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 中的系数 $b_n =$ ______________ .

答案 $b_2 = \dfrac{1}{2}$， $b_n = 0 (n \ne 2)$.

解 $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 2x \sin nx \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\cos(n-2)x - \cos(n+2)x]\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-2)x}{n-2} - \frac{\sin(n+2)x}{n+2}\right]_0^{\pi} = 0，\ n \ne 2，$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x \sin 2x \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1 - \cos 4x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

注 本来傅立叶系数有统一的公式，不用一个一个系数分别计算，但这里在使用统一公式计算 b_n 时，遇到了分母为 $n-2$ 的情况，所以 b_2 必须得另行计算.

**3．若区间 $[a,b]$ 上的正交函数系中每个函数之平方在区间 $[a,b]$ 上的积分值均为1，就称之为 $[a,b]$ 上的标准（或规范）正交函数系．试证：

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}},\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi}{l}x,\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi}{l}x,\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{2\pi}{l}x,\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{2\pi}{l}x,\cdots,\right.$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi}{l}x,\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x,\cdots\right\}$$

是区间 $[-l,l]$ 上的标准正交函数系.

证：
$$\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k\pi}{l}xdx=\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot\frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{l}x\bigg|_{-l}^{l}=0,$$

$$\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi}{l}xdx=\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot(-\frac{l}{k\pi})\cos\frac{k\pi}{l}x\bigg|_{-l}^{l}=0,$$

$$\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{m\pi}{l}xdx=\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}[\sin\frac{m+n}{l}\pi x+\sin\frac{n-m}{l}\pi x]dx=0,$$

当 $n\neq m$ 时

$$\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi}{l}x\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{m}{l}\pi xdx=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\left[\cos\frac{n+m}{l}\pi x+\cos\frac{n-m}{l}\pi x\right]dx=0$$

$$\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{m\pi}{l}xdx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}[\cos\frac{n-m}{l}\pi x-\cos\frac{n+m}{l}\pi x]dx=0$$

∴ 此函数系是正交函数系.

又
$$\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2l}}dx=1,$$

$$\int_{-l}^{l}\left[\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot\cos\frac{n\pi}{l}x\right]^2=\int_{-l}^{l}\frac{1}{l}\cos^2\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\frac{1+\cos\frac{2n}{l}\pi x}{2}dx=1+\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\frac{l}{2n\pi}\cos\frac{2n}{l}\pi xd(\frac{2n\pi}{l}x)=1$$

$$\int_{-l}^{l}\left[\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x\right]^2 dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\sin^2\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\frac{1-\cos\frac{2n\pi}{l}x}{2}dx=1$$

$\therefore$　此正交函数系是标准正交函数系.

**4. $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，根据它在一个周期 $(0,2\pi]$ 上的定义式

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le\pi,\\ 0, & \pi<x\le 2\pi,\end{cases}$$

将它展开成 Fourier 级数.

解　由 Fourier 级数系数的计算公式，可得

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x=1$，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=0$，

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos nx}{n\pi}\bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\cdots,\\ \dfrac{2}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots,\end{cases}$$

所以 $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots\right),\ 0<x<\pi,\pi<x<2\pi$.

**5. $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，根据它在一个周期 $[-\pi,\pi]$ 上的定义式

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ \sin x, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$$

将它展开成 Fourier 级数.

解：由 Fourier 级数系数的计算公式，$a_1=0$ ，当 $n=0,2,3,4,5,\cdots$ 时，有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]\mathrm{d}x\overset{n\ne1}{=\!=}\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(n-1)x}{n-1}-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}\right]_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n-1}-1}{\pi(n^2-1)},$$

所以，$a_{2n-1}=0$，$a_{2n}=\frac{-2}{\pi(4n^2-1)}$.

又　　$b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin nx\,\mathrm{d}\,x=0,\quad n=2,3,\cdots$$

由 $f\left(x\right)$ 满足 Fourier 级数收敛于 $f\left(x\right)$ 的条件，故对 $x\in\left[-\pi,\pi\right]$,

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\pi}+\frac{\sin x}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$$

***6．已知以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的表达式是 $f(x)=\cos ax$，试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数[必须分两种情况来进行讨论：（1）a 是整数；（2）a 不是整数]．

解：（1）若 a 是整数，则其傅里叶级数就是 $f(x)=\cos|a|x \qquad (-\pi\le x\le\pi)$.

（2）若 a 不是整数，则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos axdx=\frac{1}{a\pi}\sin ax\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\sin a\pi}{a\pi},$$

$n\neq 0$ 时，$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ax\cos nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos(a+n)x+\cos(a-n)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(a+n)x}{a+n}+\frac{\sin(a-n)x}{a-n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}2a\sin a\pi}{(n^2-a^2)\pi},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ax\sin nxdx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sin(n+a)x+\sin(n-ax)\right]dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(n+a)x}{n+a}-\frac{\cos(n-a)x}{n-a}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)2a\sin a\pi}{n^2-a^2}\cos nx,$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)2a\sin a\pi}{n^2-a^2}\cos nx,x\in\left[-\pi,\pi\right].$$

**7．试将周期为 2π 的函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上的表达式是 $f(x)=x-\pi$.

解：$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)dx\xlongequal{x-\pi=u}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}udu=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-\pi)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nxdx-\int_0^{2\pi}\cos nxdx=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin xdx-\int_0^{2\pi}\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nxdx=-\frac{1}{n\pi}\left[x\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos nxdx\right]=-\frac{2}{n}$$

$$\therefore\ f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}\sin nx,\quad x\in(0\,,2\pi)$$

**8．试将周期为 2π 的函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上的表达式是：

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{3\pi}{2},\\ 2\pi, & \dfrac{3\pi}{2}\le x<2\pi.\end{cases}$$

解： $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)dx=\dfrac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\pi}{2}dx+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}(2\pi-x)dx\right]=\dfrac{3}{4}\pi$，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\pi}{2}\cos nxdx+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}(2\pi-x)\cos nxdx\right]$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}(\cos\frac{n}{2}\pi+\cos\frac{3n}{2}\pi-2)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\pi}{2}\sin nxdx+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}(2\pi-x)\sin nxdx\right]=0$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{3}{8}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi}\left(\cos\frac{n}{2}\pi+\cos\frac{3}{2}n\pi-2\right)\cos nx,\quad x\in(0,2\pi)$$

第 15 章 （之 2） （总第 82 次）

教学内容：15.2.3 周期 2L 的函数；15.3 有限区间上函数的傅立叶级数展开

**1． 下列各函数 $f(x)$ 都是定义在区间 $(0,2\pi)$ 上函数，则与它们对应的傅立叶级数的形式的特点为 （ ）

（A）函数 $f(x)=2\pi x$ 的傅立叶级数一定是一个正弦级数；

（B）函数 $f(x)=x^2$ 的傅立叶级数一定是一个余弦级数；

（C）函数 $f(x)=2\pi x-x^2$ 的傅立叶级数，既不是正弦级数，也不是余弦级数；

（D）函数 $f(x)=\pi-x$ 的傅立叶级数一定是一个正弦级数.

答案　（D）

解　只要分别作出各给定函数 $f(x)$ 的周期延拓，研究所得到新函数 $f^*(x)$，容易看出：

（A）中的 $f^*(x)$ 不是奇函数；（B）中的 $f^*(x)$ 不是偶函数；

（C）中的 $f^*(x)$ 是偶函数；（D）中的 $f^*(x)$ 是奇函数.

**2．利用函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\,(-\pi<x<\pi)$ 的傅立叶级数

$$\frac{\sinh\pi}{\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx-n\sin nx)\right],$$

可得常数项级数的求和公式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=$ _________ .（注函数记号 $\sinh x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ ）

答案　$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\tanh\pi}-1\right)$.

解　记

$$S(x)=\frac{\sinh\pi}{\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx-n\sin nx)\right],$$

在上式中取 $x=\pi$，得 $S(\pi)=\frac{\sinh\pi}{\pi}\left[1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}\right]$，另一方面，根据狄利克莱定理有

$$S(\pi)=\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\pi}+\mathrm{e}^{\pi})=\cosh\pi,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\tanh\pi}-1\right).$$

***3．设 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le-\frac{\pi}{2}\\ x-\frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2}<x<0\end{cases}$，已知 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 2π 为周期的正弦级数展开式的和函数，则 $S\left(\frac{9\pi}{4}\right)=$______ .

答：$\dfrac{3\pi}{4}$．$\left[S\left(\dfrac{9\pi}{4}\right)=S\left(\dfrac{9\pi}{4}-2\pi\right)=S\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-S\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$.

**4．设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ x-1, & 1\le x<2\end{cases}$ 又设$S(x)$是 $f(x)$的以 4 为周期的正弦级数展开式的和函数，则 $S(7)=$______________.

答：$S(7)=-\dfrac{1}{2}$，$\left(S(7)=S(7-8)=S(-1)=-S(1)=-\dfrac{1}{2}\left[f(1-0)+f(1+0)\right]\right)$.

**5． 将函数 $f(x)=a+bx$（$0<x<P$）(为周期函数在一周期长区间上的表达式）展开成傅里叶级数.

解：(1) $x\in(0,p),\quad T=p,\quad l=\dfrac{p}{2}$,

$$a_0=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx=2a+bp$$

$n=1,2,\cdots$

$$a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{2n\pi}{p}xdx=\frac{2}{p}\int_0^p(a+bx)\cos\frac{2n\pi}{p}xdx=0$$

$$b_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{2n\pi}{p}xdx=\frac{2}{p}\int_0^p(a+bx)\sin\frac{2n\pi}{p}xdx=-\frac{bp}{n\pi}$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{2a+bp}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{bp}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{p}x,\quad(-\infty<x<\infty,\quad x\ne 0,\pm p,\pm 2p,\cdots).$$

**6． 将函数 $f(x)=\sin x$，($0\le x\le\pi$)（周期函数在一周期长区间上的表达式）展开成傅里叶级数.

解 ：$a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin xdx=\dfrac{4}{\pi}$,

$n=1,2,\cdots$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos\frac{2n\pi}{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos 2nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x\right]dx=\frac{-4}{\pi(4n^2-1)},$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin 2nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos(2n-1)x-\cos(2n+1)x\right]dx=0.$$

$\therefore \quad f(x)=\dfrac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{-4}{\pi(4n^2-1)}\cos 2nx$ ， $(-\infty<x<\infty)$.

**7. 将函数 $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le h,\\ 0 & h<x\le\pi,\end{cases}$ （$h>0$）；分别展开成（1）余弦级数；（2）正弦级数.

解：（1） $a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\dfrac{2}{\pi}\left[\int_0^h dx+\int_h^{\pi}0dx\right]=\dfrac{2h}{\pi}$ ，

$n=1,2,\cdots$时， $a_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^h\cos nxdx=\dfrac{2}{n\pi}\sin nh,$

所以余弦级数为 $f(x)=\dfrac{h}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n\pi}\sin nh\cdot\cos nx, x\in[0,h)\cup(h,\pi].$

（2） $b_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^h\sin nxdx=\dfrac{2}{n\pi}(1-\cos nh),$

所以正弦函数为 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n\pi}(1-\cos nh)\sin nx,\quad x\in(0,h)\cup(h,\pi]$.

**8．将函数 $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ \pi-x & \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi.\end{cases}$ 分别展开成（1）余弦级数；（2）正弦级数.

解：（1）$n=0$ 时，$a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(x)dx=\dfrac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)dx\right]=\dfrac{\pi}{2}$ ，

$n\ne 0$时，$a_n=\dfrac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\cos nxdx\right]=\dfrac{2}{n^2\pi}(2\cos\dfrac{n\pi}{2}-\cos n\pi-1),$

所以余弦级数为 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^2\pi}(2\cos\dfrac{n\pi}{2}-\cos n\pi-1)\cos nx, x\in[0,\pi],$

（2）$b_n=\dfrac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin nxdx\right]=\dfrac{4}{n^2\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2},$

所以正弦级数为 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n^2\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2}\sin nx,\quad x\in[0,\pi].$

***9．将函数展开为正弦级数：$f(x)=\dfrac{1}{2}(\pi-x)$，$x\in[0,\pi]$．

解：构造奇函数 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\pi-x), x\in(0,\pi]\\ \dfrac{1}{2}(-\pi-x), x\in[-\pi,0)\end{cases}$，间断点 $x=0$，

$a_n=0,\qquad (n=0,1,2,\cdots)$，

$n=1, 2, \cdots,$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)\sin nxdx=\frac{1}{n},$$

$$\therefore\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,\quad x\in(0,\pi].$$

***10．将下列函数展开为余弦级数：$f(x)=x-1$，$x\in[0,2]$，并求出常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和．

解：构造偶函数 $g(x)=\begin{cases}x-1, x\in[0,2]\\ -x-1, x\in(-2,0)\end{cases}$，

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}g(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2(x-1)dx+\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-x-1)dx=0,$$

$n=1, 2, \cdots,$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}g(x)\cos\frac{n\pi}{2}xdx=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi}{2}xdx=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1],$$

$$f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)}{2}\pi x,\quad x\in[0,2],$$

当$x=2,\quad f(2)=2-1=1,$

$$f(2)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}(-1)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},\qquad \therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad \therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2},$$

即 $(1-\dfrac{1}{4})\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$，$\quad\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{8}\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{\pi^2}{6}$．