$$f=-kx \qquad M=-mgl\theta$$

力(矩)的大小与(相对于平衡位置)位移成正比，方向始终指向平衡位置 ———— 线性恢复力(矩)

物体在线性恢复力(矩)作用下的运动——谐振动

弹簧振子 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{k}{m}x=0$ 谐振动动力学方程

单　摆 $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+\dfrac{g}{l}\theta=0$

复　摆 $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+\dfrac{mgl}{J}\theta=0$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0}$$

$$\left\{\begin{aligned}\omega&=\sqrt{\frac{k}{m}}\\ \omega&=\sqrt{\frac{g}{l}}\\ \omega&=\sqrt{\frac{mgl}{J}}\end{aligned}\right.$$

只与系统本身有关

谐振动的运动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0 \quad \Longrightarrow \quad x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$v=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$a=\frac{dv}{dt}=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)$$

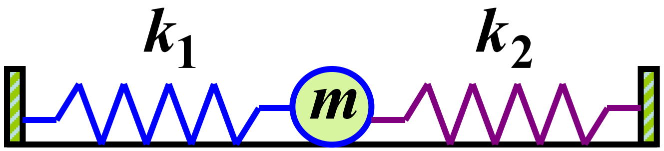
数学式

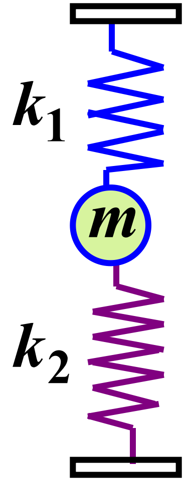
$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

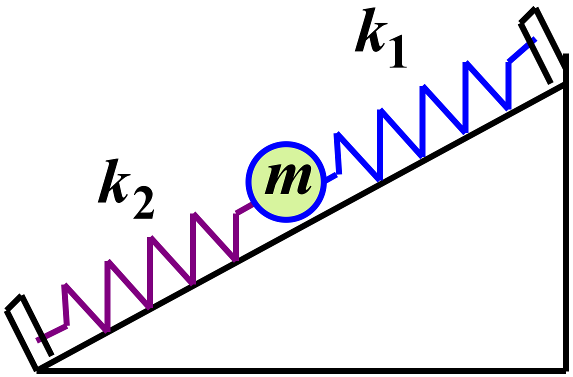
数学式：$\nu=1/T$

数学式：$\omega=2\pi\nu$

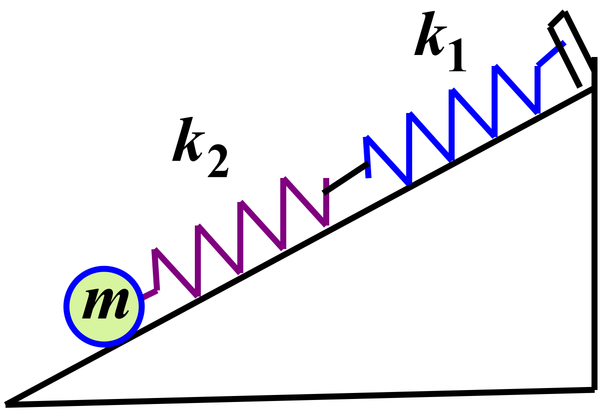
$$\begin{cases} A=\sqrt{x_0^2+v_0^2/\omega^2} \\ \varphi=tg^{-1}(-v_0/\omega x_0)=[-\pi,+\pi] \end{cases}$$





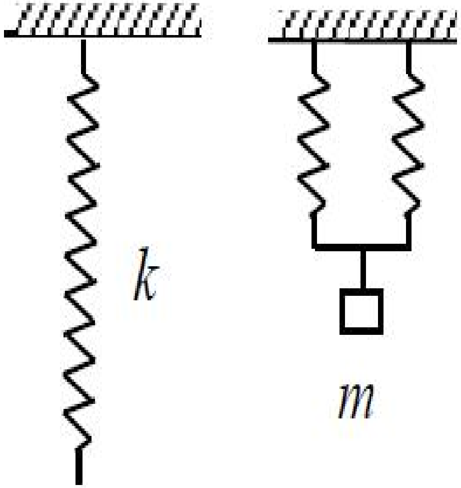


$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$$

一劲度系数为 k 的轻弹簧截成三等份，取出其中的两根，将它们并联，下面挂一质量为 m 的物体，如图所示。则振动系统的频率为

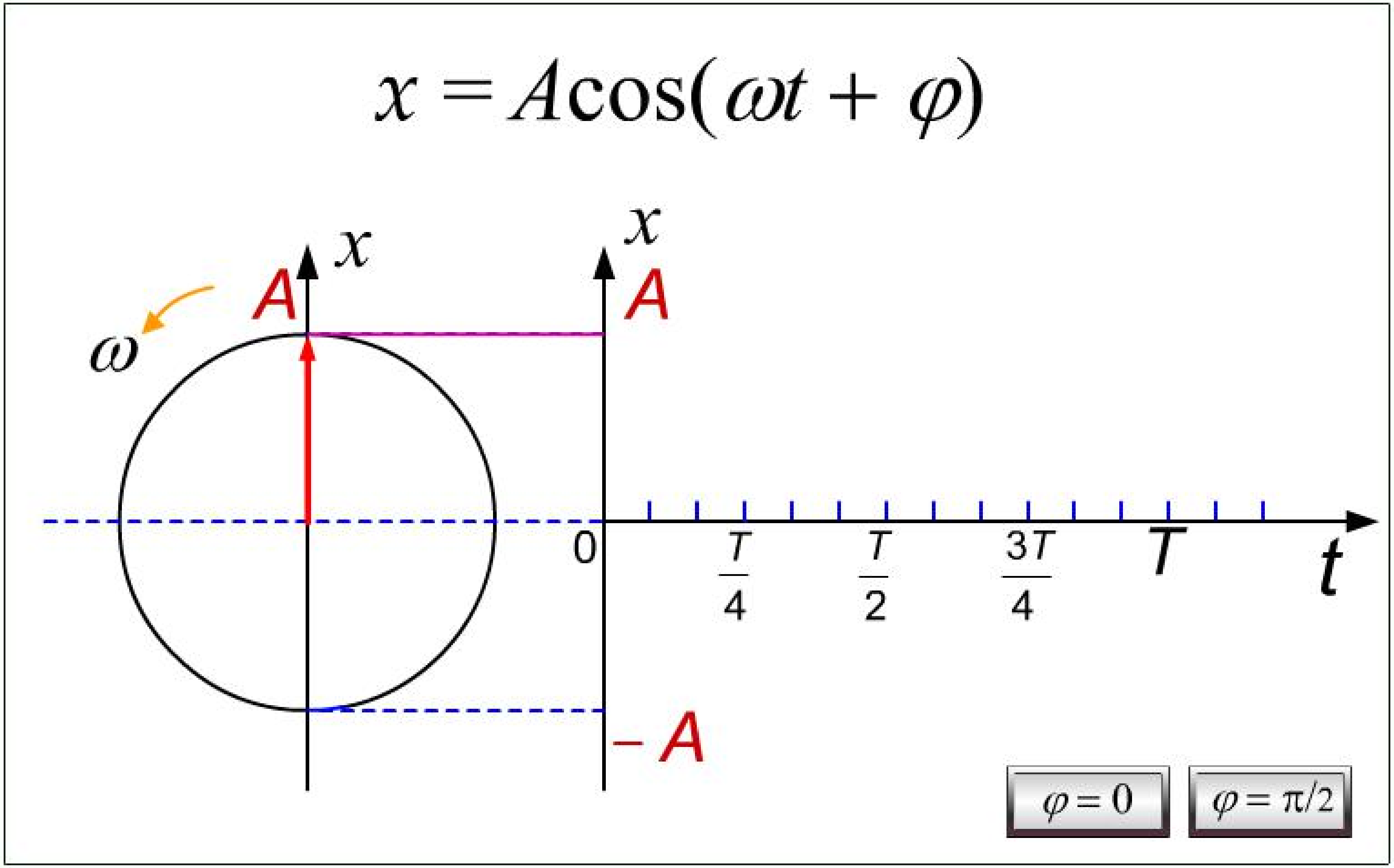


(A) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{3m}}$.　　(B) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

(C) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{3k}{m}}$.　　(D) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{6k}{m}}$.　　[　　]

答案：D

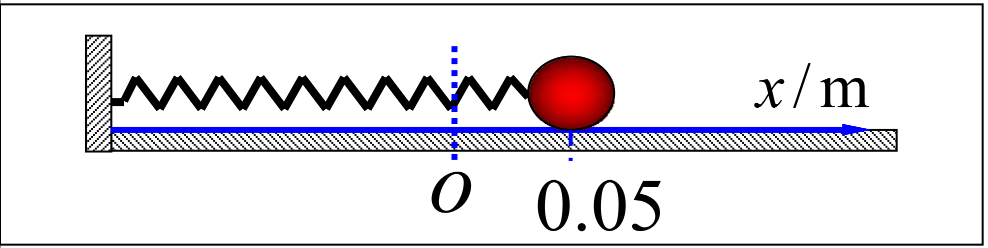
用旋转矢量图画简谐运动的 $x-t$ 图

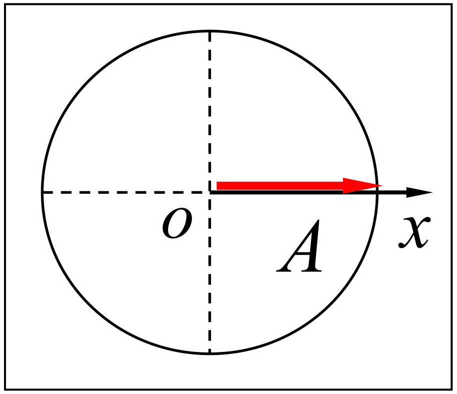


$T = 2\pi/\omega$（旋转矢量旋转一周所需的时间）

例5 如图所示，一轻弹簧的右端连着一物体，弹簧的劲度系数 $k = 0.72\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ ，物体的质量 $m = 20\mathrm{g}$.

（1）把物体从平衡位置向右拉到 $x = 0.05\mathrm{m}$ 处停下后再释放，求简谐运动方程；





解：由图形可知：A，

$t = 0$:　　$x_0 = 0.05m$，$v_0 = 0, a_0 < 0$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{0.72\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}}{0.02\mathrm{kg}}} = 6.0\mathrm{s}^{-1}$$

由旋转矢量图可知　$\varphi = 0$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = x_0 = 0.05\mathrm{m}$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= (0.05\mathrm{m})\cos[(6.0\mathrm{s}^{-1})t]$$

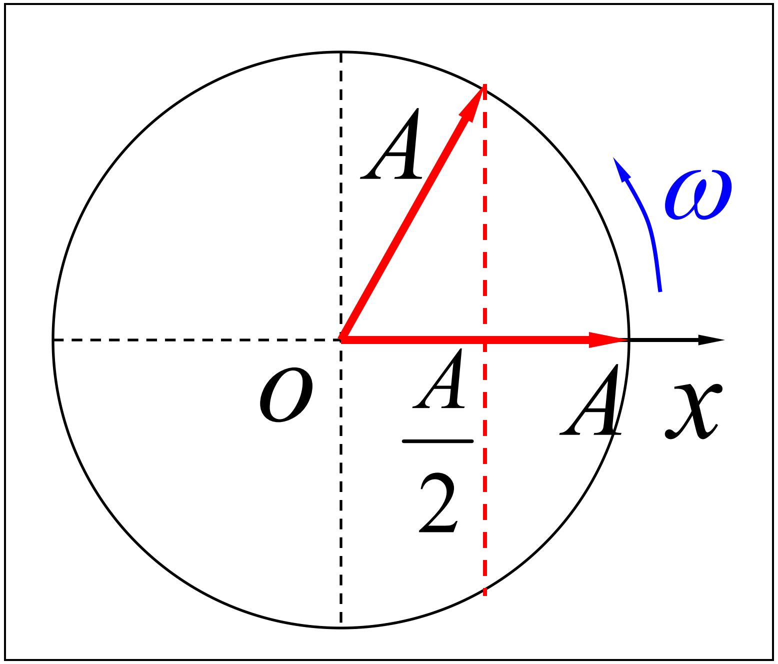
$$\tan\varphi = \frac{-v_0}{\omega x_0} = 0 \qquad \varphi = 0 \text{ 或 } \pi$$

（2）求物体从初位置运动到第一次经过 $\dfrac{A}{2}$ 处时的速度；

解 $$x = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos(\omega t)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{x}{A} = \frac{1}{2}$$

$$\omega t = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{5\pi}{3}$$



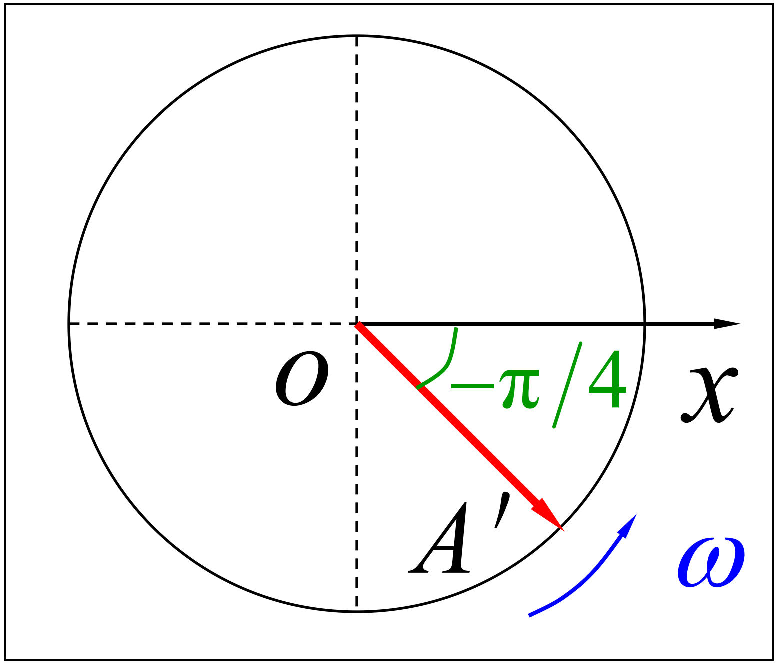
由旋转矢量图可知 $\omega t = \dfrac{\pi}{3}$

$$v = -A\omega\sin\omega t$$

$$= -0.26\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$（负号表示速度沿 Ox 轴负方向）

（3）如果物体在 $x=0.05\mathrm{m}$ 处时速度不等于零，而是具有向右的初速度 $v_0=0.30\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，求其运动方程.

解 $$A'=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=0.0707\mathrm{m}$$



$$\tan\varphi'=\frac{-v_0}{\omega x_0}=-1$$

$$\varphi'=-\frac{\pi}{4} \text{ 或 } \frac{3\pi}{4}$$

因为 $v_0>0$，由旋转矢量图可知 $\varphi'=-\pi/4$

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)=(0.0707\mathrm{m})\cos[(6.0\mathrm{s}^{-1})t-\frac{\pi}{4}]$$

四. 谐振动的能量

◆ 以弹簧振子为例

$$F=-kx\quad\begin{cases}x=A\cos(\omega t+\varphi)\\ v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)\end{cases}$$

$$\begin{cases}E_{\mathrm{k}}=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)\\[2ex] E_{\mathrm{p}}=\dfrac{1}{2}kx^2=\dfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)\end{cases}$$

$$\omega^2=k/m$$

$$E=E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kA^2\propto A^2$$（振幅的动力学意义）

线性回复力是保守力，作简谐运动的系统机械能守恒

例6 质量为 $0.10\mathrm{kg}$ 的物体，以振幅 $1.0\times10^{-2}\mathrm{m}$ 作简谐运动，其最大加速为 $4.0\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，**求：**

（1）振动的周期；

$$a_{\max}=A\omega^2 \qquad \omega=\sqrt{\frac{a_{\max}}{A}} \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=0.314\mathrm{s}$$

（2）通过平衡位置的动能；

$$E_{\mathrm{k,max}}=\frac{1}{2}mv_{\max}^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

（3）总能量；

$$E=E_{\mathrm{k,max}}=2.0\times10^{-3}\mathrm{J}$$

（4）物体在何处其动能和势能相等？

$$E_{\mathrm{k}}=E_{\mathrm{p}} \qquad \text{由}\ E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \qquad x^2=\frac{2E_{\mathrm{p}}}{m\omega^2}$$

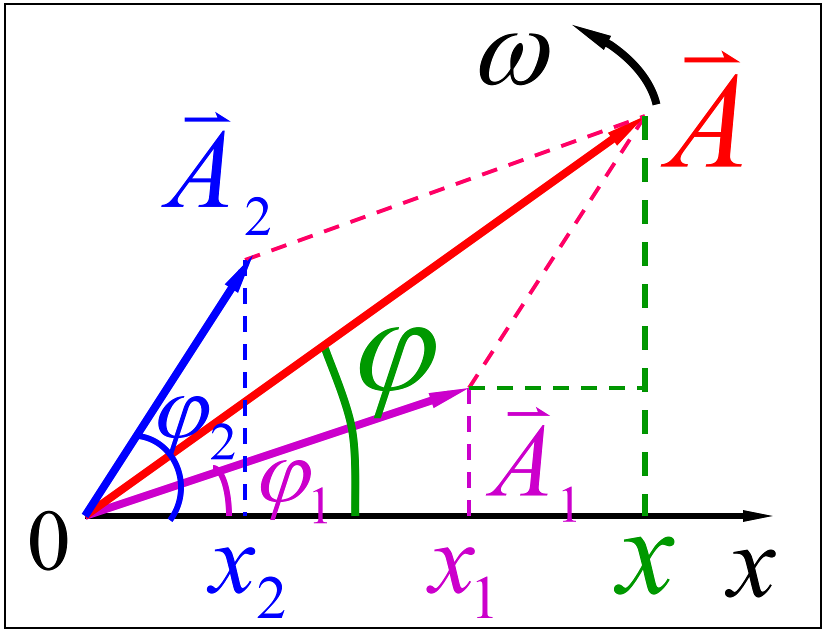
4.2 谐振动的合成

一. 1. 两个同方向同频率简谐运动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$$

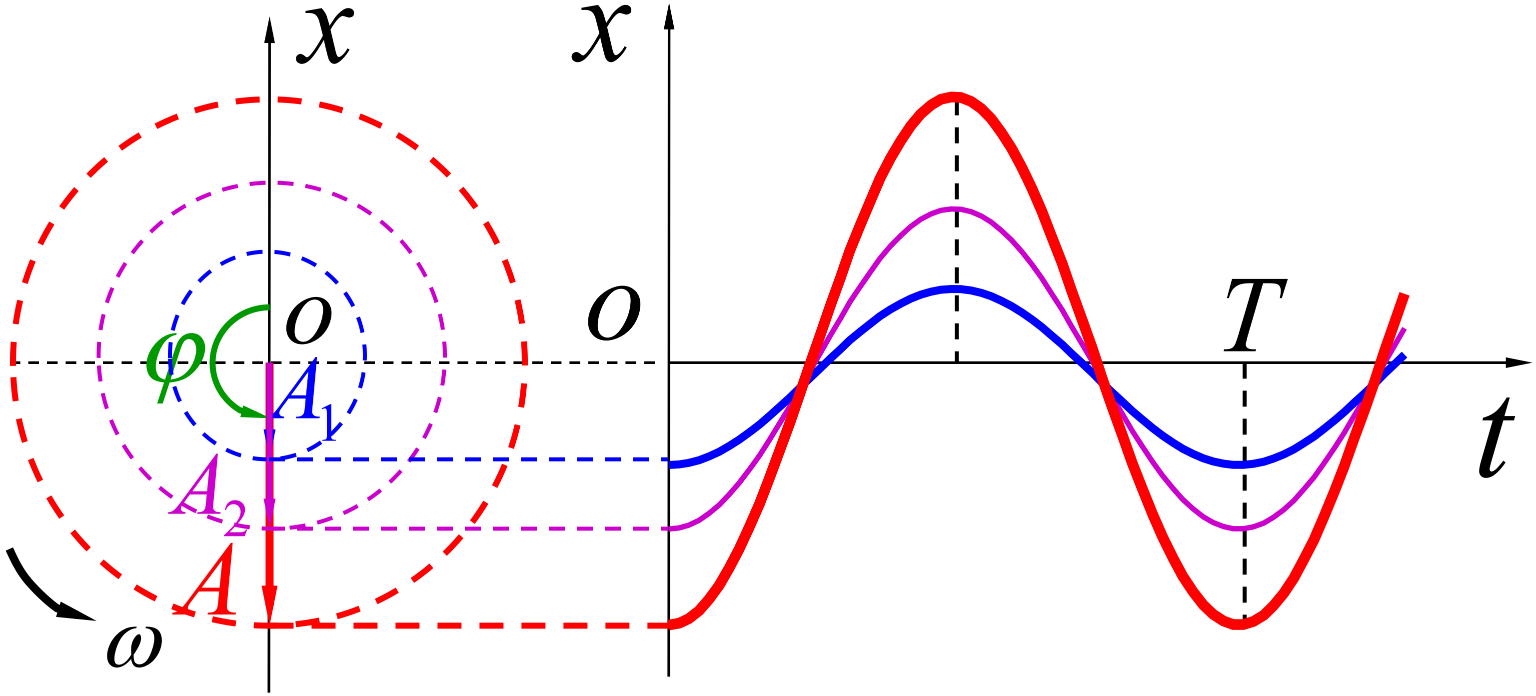


$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \\ \tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$

两个同方向同频率简谐运动合成后仍为简谐运动

讨论 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$

1）相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$



$$\begin{cases} A=A_1+A_2 \\ \varphi=\varphi_2=\varphi_1+2k\pi \end{cases}$$

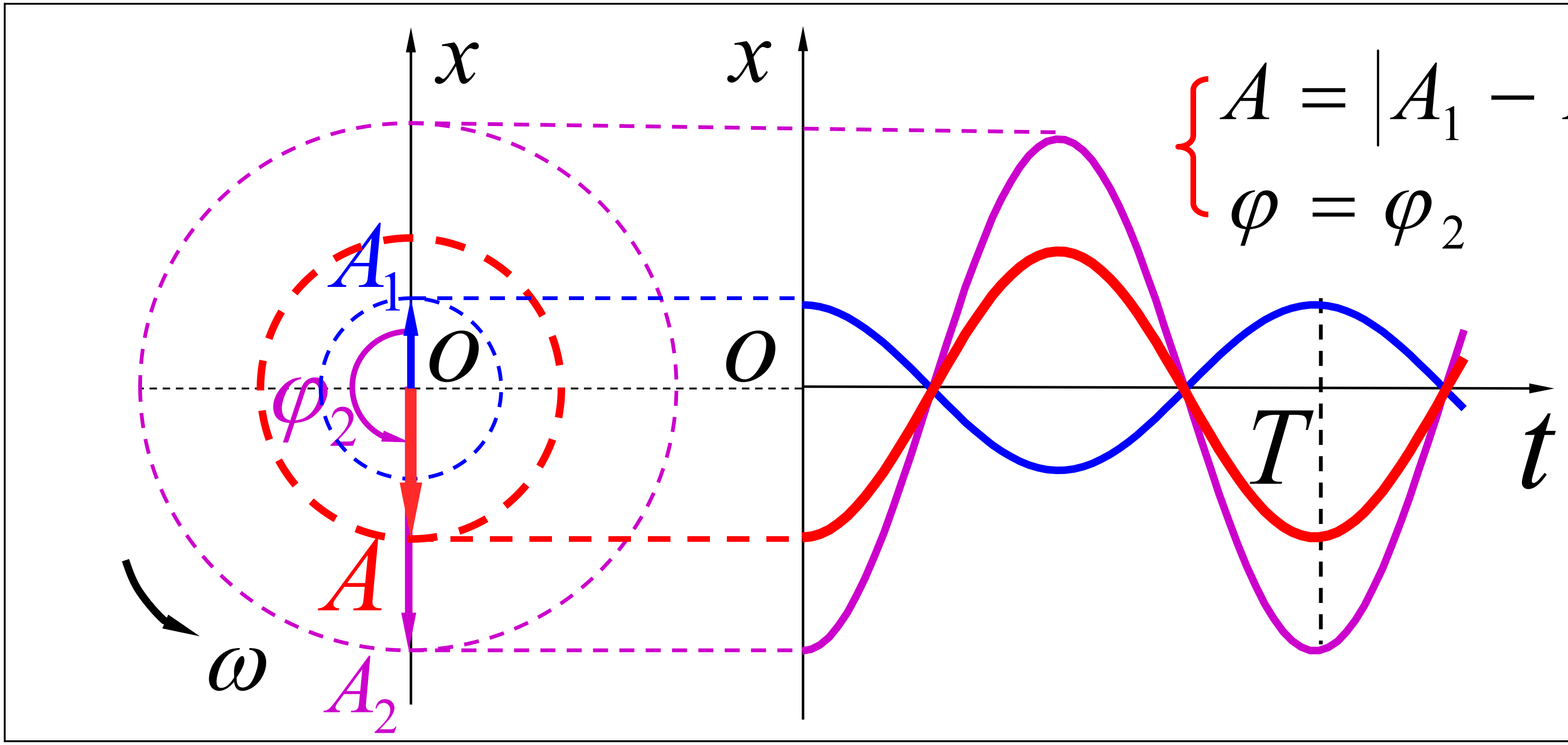
$$\boxed{x=(A_1+A_2)\cos(\omega t+\varphi)}$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

2）相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi \quad (k=0\,,\pm 1,\cdots)$

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos\omega t \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\pi) \end{cases}$$

$$\boxed{x=(A_2-A_1)\cos(\omega t+\pi)}$$



$$\begin{cases} A=\left|A_1-A_2\right| \\ \varphi=\varphi_2 \end{cases}$$

相位差 $\varphi_2-\varphi_1=2k\pi \qquad (k=0,\pm 1,\cdots)$

$$A=A_1+A_2$$

相互加强

相位差 $\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm 1,\cdots)$

$$A=\left|A_1-A_2\right|$$

相互削弱

一般情况

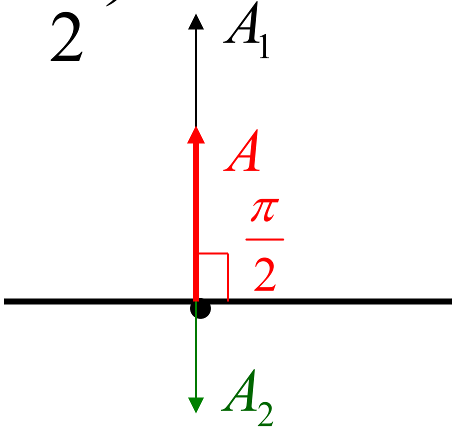
$$A_1+A_2>A>\left|A_1-A_2\right|$$

[例1]两个同方向同频率的简谐振动，其振动表达式分别为：$x_1 = 0.06\cos(5t + \frac{1}{2}\pi)\ m$ ，

$x_2 = 0.02\sin(\pi - 5t)\ m$,求：它们合振动的振动方程。

解：$x_2 = 0.02\sin[\frac{\pi}{2} - (5t - \frac{\pi}{2})] = 0.02\cos(5t - \frac{\pi}{2})$

$$= 0.02\cos(5t - \frac{\pi}{2})$$



$$\therefore x = x_1 + x_2 = 0.04\cos(5t + \frac{\pi}{2})m$$

[例2]

已知：同方向谐振动x_1=0.05cos(10t+3π/4)，

x_2=0.06cos(10t+π/4)，x_3=0.07cos(10t+φ_3)

求：(1) x_1、x_2合振动的A、φ

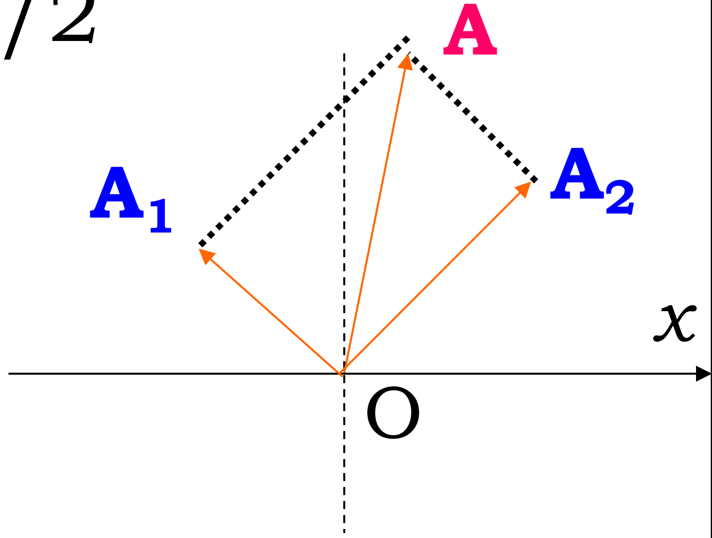
(2) φ_3为何值，x_1+x_3振幅最大？

(3) φ_3为何值，x_2+x_3振幅最小？

解：(1) $\angle A_1OA_2 = \varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$

$\therefore\ A=\sqrt{A_1^2+A_2^2} = 0.078$

$\varphi = \pi/4 + tg^{-1}(A_1/A_2)$



（2）$\Delta\phi_{13}=（\omega t+\varphi_1)-(\omega t+\varphi_3) = 2k\pi$

$(k=0,\pm 1,\pm 2\ldots)$

$\therefore \varphi_3=\varphi_1-2k\pi=3\pi/4-2k\pi\in[-\pi,\pi]\Rightarrow \varphi_3=3\pi/4$

（3）$\Delta\phi_{23}=(\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_3) =(2k+1)\pi$

$(k=0,\pm 1, \pm 2\ldots)$

$\therefore \varphi_3=\varphi_2-(2k+1)\pi=\pi/4-(2k+1)\pi\in[-\pi,\pi]\Rightarrow \varphi_3=-3\pi/4$