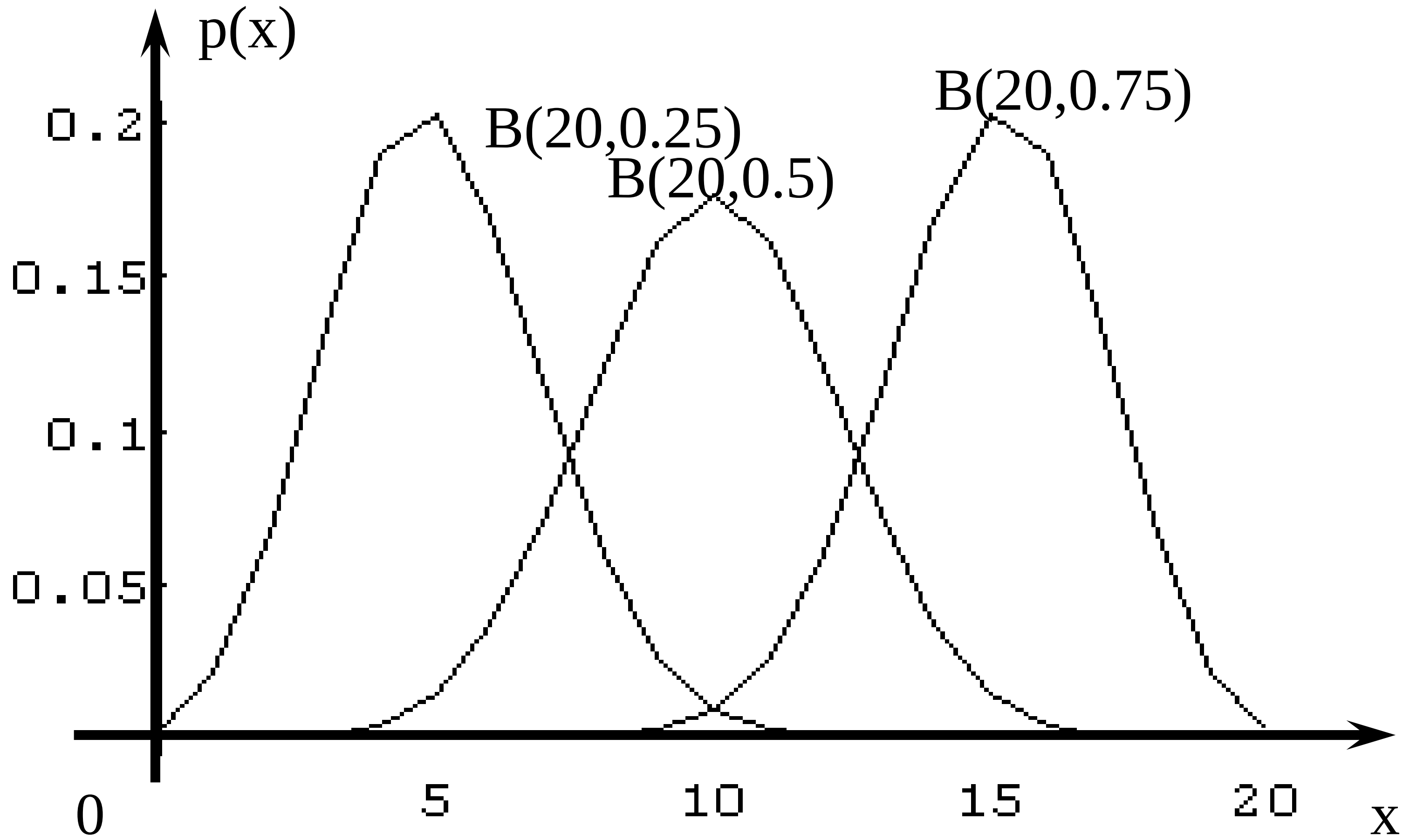
§4　二项分布与泊松分布

一、二项分布的性质及计算

（n次伯努利试验中A成功k次的概率）

$$b(k;n,p)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k},\quad k=0,1,2\cdots,\cdots n$$

$$b(k;n,p)=b(n-k;\ n,1-p)$$


p(x)
0.2
0.15
0.1
0.05
B(20,0.25)
B(20,0.5)
B(20,0.75)
0
5
10
15
20
x

二项分布的图形：

1）$p=0.5$时是对称的，p离0.5越远，分布越不对称，但n越大，不对称性越不明显。

2）图像是先升后降的，有极大值点。

3）当$(n+1)p$是整数时，$(n+1)p-1$和$(n+1)p$同时取得最大值；

当$(n+1)p$不是整数时，$[(n+1)p]$取得最大值。

P98 例 3

设某种疾病的发病率为 0.01，问在 500 人的社区中进行普查最可能的发病人数是多少？并求其概率.

解：

$$(n+1)p = 5.01, \left[(n+1)p\right] = 5$$

$$b(5;500,0.01) = C_5^{500}\left(0.01\right)^5\left(0.99\right)^{495} = 0.1764$$

P00 例 4 （保险业务）据生命表统计这类人员每年死亡率为 5‰，今有 10000 名同一类型的人参加保险公司的人寿保险，试求

（1）40 人死亡的概率；

（2）死亡人数不超过 70 人的概率.

解： 设ξ为一年内的死亡人数，则$\xi \sim b(k;10000, 0.005)$，

$$b(40,10000,0,005) = C_{10000}^{40}(0.005)^{40}(0.995)^{9960}$$

$$P(\xi \le 70) = \sum_{k=0}^{70} b(k,10000,0,005)$$

$$= \sum_{k=0}^{70} C_{10000}^{k}(0.005)^{k}(0.995)^{10000-k}$$

P00 例 5（机票超售）某航线订座旅客有 5%不来登机，问一架 200 座飞机应出售多少座位？.

解： 假设超售 m 个位置，则共售出 200+m 个位置.

设 ξ 为登机的旅客数，则 $\xi \sim b(k;200+m,0.95)$，

$$P(\xi > 200) = \sum_{k>200} b(k;200+m,0.95)$$

例 6、某车间有 200 台独立工作的车床，各台车床开工的概率都是 0.6，开工时每台车床耗电 1 kw，问供电所至少要供给此车间多少电力（kw），才能以 99.9%的概率保证车间不会因供电不足而影响生产.

解： 设ξ为实际开工的车床数，则$\xi \sim b(k;200,0.6)$，

令 x（kw）为供电局的供电数

$$P(\xi \leq x)\sum_{k=0}^{x} b(k;200,0.6) \geq 99.9\%$$

二、二项分布的泊松逼近

定理 2.4.1 在独立实验中，以 p_n 表示 n 次试验中事件 A 发生的概率，如果当 $n\to\infty$ 时，$np_n\to\lambda$，则有

$$b(k;n,p_n)\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

证：对固定的 k $(k=0,1,2,\cdots,n)$，记 $np_n=\lambda_n$，则

$$\binom{n}{k}p_n^{\ k}(1-p_n)^{n-k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{\lambda_n^{\ k}}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{\lambda_n{}^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

当 $n\to\infty$ 时，k 是固定的， $\lambda_n\to\lambda$，故

$$\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}\to e^{-\lambda}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\to 1$$

$$\lim_{n\leftarrow\infty}\binom{n}{k}p_n{}^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

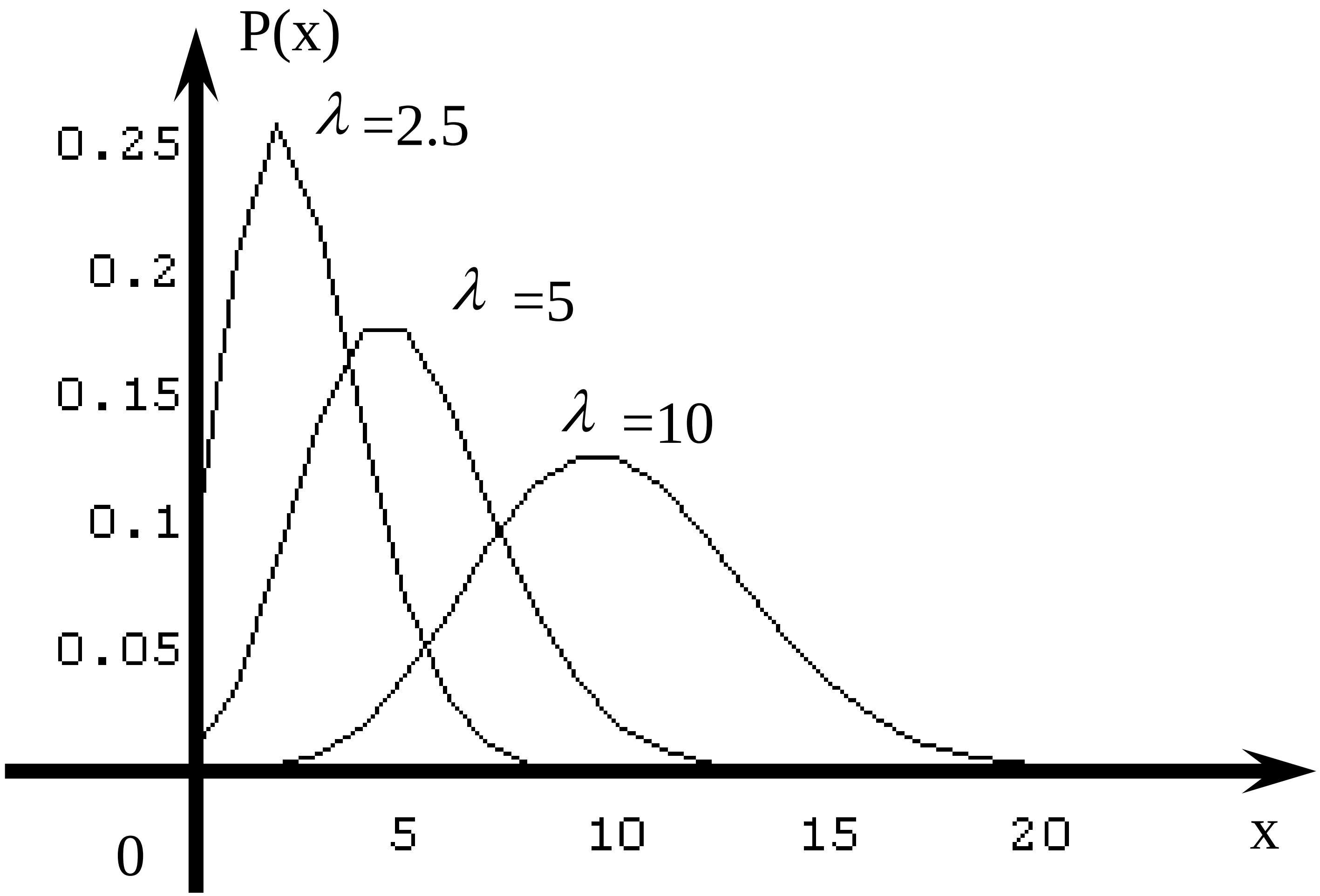
三、泊松分布(Poisson Distribution)

单位时间内，电话呼唤次数，公共汽车站的乘客人数，机场降落的飞机数等.

分布律：

$$P(m,\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\ldots$$

其中 $\lambda>0$



注意：泊松分布是非对称的，但是，λ越大，非对称性越不明显。

例、现有 80 台同类型的设备，各台工作相互独立，发生故障率都是 0.01，且一机一人修理，考虑两种方案：

（1）配备 4 名工人，每人修理 20 台设备；

（2）配备 3 名工人，共同负责 80 台设备。

试比较两种方案在设备发生故障时不能及时修理的概率.

解： (1)一人负责的 20 台设备中同时有 m 台机器发生故障的概率为 $b(m;20,0.01)$；

A_i 表示第 i 人负责的 20 台设备中发生故障不能及时修理，

A 表示设备发生故障时不能及时修理，$A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$

$\because A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\supset A_1$，

$\therefore P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)\geq P(A_1)$

$$P(A_1)=\sum_{m=2}^{20} b(m;20,0.01)$$

$\therefore$用参数为 $\lambda=np=0.2$ 的泊松分布近似计算

$$\therefore P(A_1)\approx\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(0.2)^k}{k!}e^{-0.2}=1-\frac{(0.2)^0}{0!}e^{-0.2}-\frac{(0.2)^1}{1!}e^{-0.}$$

$$=1-0.8187-0.1638=0.0175$$

(2) 设备中同时有 **m** 台机器发生故障的概率为 $\boldsymbol{b(m;80,0.01)}$，且 $p=0.01$ 很小，

$\therefore$用参数为 $\lambda = np = 0.8$ 的泊松分布近似计算。

当 $m \ge 4$ 时，就是设备发生故障而不能及时修理。

$$P(m \ge 4) \approx \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(0.8)^k}{k!} e^{-0.8}$$

$$= 1 - \frac{(0.8)^0}{0!} e^{-0.8} - \frac{(0.8)^1}{1!} e^{-0.8} - \frac{(0.8)^2}{2!} e^{-0.8} - \frac{(0.8)^3}{3!} e^{-0.8}$$

$$= 1 - 0.4493 - 0.3595 - 0.1438 - 0.0383 = 0.0091$$

即：在第二种方案下，设备发生故障而不能及时修理的概率仅为 **0.0091**。

比较结果：第二种方案比第一种方案好

柯西方程

$$f(x)+f(y)=f(x+y)\Rightarrow f(x)=ax$$

$$f(x)f(y)=f(x+y)\Rightarrow f(x)=b^{x}$$

$$f(x)+f(y)=f(xy)\Rightarrow f(x)=\log_{c}^{x}\quad c>0$$

$$f(x)f(y)=f(x+y)\Rightarrow f(x)=x^{\alpha}$$

引理 2.4.1（柯西）

若 $f(x)$ 是连续（或单调函数），且对一切 x, y （或一切 $x \geq 0, y \geq 0$ ）成立

$$f(x)f(y) = f(x+y)$$

则

$$f(x) = a^x$$

其中 $a \geq 0$，是某一常数.

泊松分布的性质

考虑来到某交换装置的电话呼叫数

(1) 平稳性

在 $[t_0, t_0 + t)$ 中来到的呼叫数只与时间间隔长度 t 有关而与时间起点 t_0 无关.

（2）独立增量性 （无后效性）

在 $[t_0, t_0 + t)$ 内来到 k 个呼叫这一事件与时刻 t_0 以前发生的事件独立.

（3）普通性 在充分小的时间间隔中，最多来到一个呼叫.

记 $P_k(t)$ 为在长度 t 的时间区间中来到 k 个呼叫的概率

记 $\psi(t)=\sum_{k=2}^{\infty}P_k(t)=1-P_0(t)-P_1(t)$

$\psi(t)=o(t)$，即 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\psi(t)}{t}=0$

对 $\Delta t>0$，考虑 $[t_0,t_0+t+\Delta t)$ 中来到 k 个呼叫的概率 $P_k(t+\Delta t)$

$$P_k(t+\Delta t)=P_k(t)P_0(\Delta t)+P_{k-1}(t)P_1(\Delta t)+\cdots+P_0(t)P_k(\Delta t),k\geq 0$$

特别地 $P_0(t+\Delta t)=P_0(t)P_0(\Delta t)$ $\quad\quad$ $P_0(t)=a^t$

若 $a=0$，则 $P_0(t)\equiv 0$，

因 $P_0(t)$ 是概率，故应有 $a\le 1$，而当 $a=1$ 时，$P_0(t)\equiv 1$ 这表明永不来呼叫，所以应有 $0<a<1$，从而存在 $\lambda>0$，使

$$P_0(t)=e^{-\lambda t}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，$P_0(\Delta t)=e^{-\lambda\Delta t}=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$

$$P_1(\Delta t)=1-P_0(\Delta t)-\psi(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\sum_{l=2}^{\infty}P_{k-l}(t)P_l(\Delta t)\le\sum_{l=2}^{\infty}P_l(\Delta t)=\psi(\Delta t)=o(\Delta t)$$

$$P_k(t+\Delta t)=P_k(t)(1-\lambda\Delta t)+P_{k-1}(t)\times\lambda\Delta t+o(\Delta t)\quad k\geq 1$$

$$\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=\lambda\left[P_{k-1}(t)-P_k(t)\right]+o(1)$$

令 $\Delta t\to 0$，得 $P_k^{'}(t)=\lambda\left[P_{k-1}(t)-P_k(t)\right],k\geq 1$

已知 $P_0(t)=e^{-\lambda t}$，故有 $P_1^{'}(t)=\lambda\left[e^{-\lambda t}-P_1(t)\right]$，可解得

$P_1(t)=\lambda te^{-\lambda t}$

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},k=0,1,2,\cdots$$

例 2.5.2 设厂家生产的仪器，每台以概率 0.70 可直接出厂，以概率 0.30 需暂时留下作进一步调试，经调试后以概率 0.80 可以出厂，以概率 0.20 定为不合格品不能出厂，现该厂生产了共 n 台仪器 $(n \geq 2)$，为方便计又设各台仪器间的质量互相独立。试求全厂仪器能出厂的概率 α 以及其中恰有 2 件不能出厂的概率 β

解： 令 A ={仪器可以出厂}， B={仪器需要调试}

$$P(\overline{B})=0.70\,,\quad P(B)=0.30\,,$$

$$P(A|B)=0.80\,,\quad P(A|\overline{B})=1\,,$$

$$\therefore\ p=P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$

$$=0.3\times0.8+0.7\times1=0.94$$

$$\alpha=P(\xi=n)=p^n=0.94^n$$

$$\beta=P(\xi=n-2)=\binom{n}{n-2}p^{n-2}q^2=\binom{n}{2}\times0.94^{n-2}\times0.06^2$$

习题二：

39，40，43，44