

质点的运动学

基本概念和基本原理

1. 位置，位移，速度，加速度

$$\vec{r}(t), \quad \Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1), \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

2. 路程，速率：

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}, \quad v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

3. 典型运动：抛体运动

$$a_x = 0, \quad a_y = -g; \quad v_x = v_0 \cos \theta, \quad v_y = v_0 \sin \theta;$$

$$x = x_0 + v_0 \cos \theta t, \quad y = y_0 + v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

4. 典型运动：圆周运动 $\theta, \omega, \alpha; s, v, a_n, a_t$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}, \omega = \frac{d\theta}{dt}; a_n = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}, a_t = \frac{dv}{dt} = \alpha r; v = \omega r, s = r\theta.$$

5. 相对运动

$$\vec{r}_{AO} = \vec{r}_{AO'} + \vec{r}_{O'O}, \quad \vec{v}_{AO} = \vec{v}_{AO'} + \vec{v}_{O'O}, \quad \vec{a}_{AO} = \vec{a}_{AO'} + \vec{a}_{O'O}$$

一. 选择题

1. 质点做曲线运动, \vec{r} 表示位置矢量, s 表示路程, a_t 表示切向加速度, 下列表达式中, 正确的为()

(A) $dv/dt = a$

(C) $ds/dt = v$

(B) $dr/dt = v$

(D) $|d\vec{v}/dt| = a_t$

答案: (C)

2. 一质点在某时刻的位置矢量为 $\vec{r}(x, y)$, 其加速度大小表达正确的为()

(A) d^2r/dt^2

(C) $d^2|\vec{r}|/dt^2$

(B) $d^2\vec{r}/dt^2$

(D) $\sqrt{(d^2x/dt^2)^2 + (d^2y/dt^2)^2}$

答案: (D)

3. 一质点在平面上运动, 已知质点位置矢量的表达式为 $\vec{r} = at^2\vec{i} + bt^2\vec{j}$ (其中 a, b 为常量), 则该质点作 ()

(A) 匀速直线运动

(C) 抛物线运动

(B) 变速直线运动

(D) 一般曲线运动

答案: (B)

4. 对于沿曲线运动的物体，以下几种说法中哪一种是正确的
()

(A) 切向加速度必不为零

(C) 若物体作匀速率运动，其
加速度必为零

(B) 法向加速度必不为零(拐点
处除外)

(D) 若物体的加速度 \vec{a} 为恒矢
量，它一定作匀变速率运
动

答案：(B)

5. 一质点在 xOy 平面内运动, 其运动方程为 $x = 3t$, $y = 5 + 4t^2$.
当质点的运动方向与 x 轴成 45° 角时, 它的速率为()

(A) 3

(C) 5

(B) $2\sqrt{2}$

(D) $3\sqrt{2}$

答案: (D)

6. 一质点从静止开始沿半径为3 m的圆周做匀变速圆周运动. 当切向加速度和法向加速度 大小相等时, 该质点走过的路程是()

(A) 3

(C) 3π

(B) 1.5

(D) 1.5π

答案: (B)

7. 两物体以相同的初速 v_0 作斜抛运动，物体1的抛角为 60° ，物体2的抛角为 45° ，这两抛物线最高点的曲率半径之比 $\rho_1 : \rho_2$ 应为 ()

(A) 1 : 2

(C) 2 : 1

(B) 1 : $\sqrt{2}$

(D) $\sqrt{2} : 1$

答案：(A)

8. 质点作直线运动，速度 $v = 3t^2 - 12$ (SI)，则质点在时间 1 s 到 3 s 内运动的路程为 ()

(A) 0

(C) 6 m

(B) 2

(D) 12 m

答案：(D)

9. 在相对地面静止的坐标系内, A, B 两船都以 $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率匀速行驶, A 船沿 x 轴正向行驶, B 船沿 y 轴正向行驶. 今在 B 船上设置与静止坐标系方向相同的坐标系(x, y 方向的单位矢量用 \vec{i}, \vec{j} 表示), 那么在 B 船上的坐标系中, A 船的速度(以 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 为单位)为()

(A) $\vec{i} + \vec{j}$

(C) $-\vec{i} - \vec{j}$

(B) $-\vec{i} + \vec{j}$

(D) $\vec{i} - \vec{j}$

答案: (D)

10. 某人骑自行车以速率 v 向西行驶，风以相同的速率从北偏东 30° 方向吹来，人感到风吹来的方向是 ()

(A) 北偏东 30°

(C) 西偏南 30°

(B) 北偏西 30°

(D) 南偏东 30°

答案：(B)

二、填空题

1. 一质点从 O 点出发, 以匀速率 v_0 做顺时针圆周运动, 圆半径为 R , 当它转过 θ 角度时位移大小为____, 这段时间内平均速度的大小为____, 在 P 点瞬时速度的大小为____。

答案: $2R \sin(\theta/2)$, $2v_0 \sin(\theta/2)/\theta$, v_0

2. 一物体作如图所示的斜抛运动，测得在轨道A点处速度的大小为 v ，其方向与水平方向成 θ 角。则物体在A点的切向加速度为 _____，法向加速度为 _____，轨道的曲率半径 ρ 为 _____。

答案： $-g \sin \theta, g \cos \theta, v^2 / g \cos \theta$

3. 在半径为2 m的圆周上运动的质点，其速率与时间的关系为 $v = 3t^2$ ，则 t 从0 s到2 s时质点走过的路程 $s(t) = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $t = 1$ s时刻质点的切向加速度 $a_t = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $t = 1$ s时刻质点的法向加速度 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案：8 m, 6 m/s², 4.5 m/s²

4. 在 xOy 平面内有一运动的质点，其运动方程

为 $\vec{r} = 10 \cos 5t \vec{i} + 10 \sin 5t \vec{j}(\text{SI})$ ，则 t 时刻其速度 $\vec{v} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；其切向加速度的大小 $a_t = \underline{\hspace{2cm}}$ ；该质点运动的轨迹是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案： $-50 \sin 5t \vec{i} + 50 \cos 5t \vec{j}$, 0 , $x^2 + y^2 = 100$

5. 一质点以 π (m/s)的匀速率作半径为5 m的圆周运动，该质点在5 s内的平均速度的大小为____，平均加速度的大小____。

答案：2 m/s, $2\pi/5$ m/s²

6. 距河岸(看成直线)500 m处有一艘静止的船, 船上的探照灯以转速为 $n = 1 \text{ r/min}$ 转动, 当光速与岸边成 60° 角时, 光束沿岸边移动的速度 $v = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案: 69.8 m/s

7. 当一列车以 10 m/s 的速度向东行驶时，若相对于地面竖直下落的雨滴在列车上形成的雨迹偏离竖直方向 30° ，则雨滴相对于地面的速率是____，相对于列车的速率是____。

答案： 17.3 m/s , 20 m/s

三、计算题

1. 一质点在 xOy 平面上运动, 已知 $t = 0$ 时, $x_0 = 5 \text{ m}$,
 $v_x = 3 \text{ m/s}$, $y = \frac{1}{2}t^2 + 3t - 4$ (以 m 为单位). (1)写出该质点运动方程的矢量表示式; (2) 质点的运动轨迹; (3)求质点在 $t = 1 \text{ s}$ 和 $t = 2 \text{ s}$ 时的位置矢量和这 1 s 内的位移; (4)求 $t = 4 \text{ s}$ 时的速度和加速度.

答案: (1): $\vec{r} = (3t + 5)\vec{i} + (\frac{1}{2}t^2 + 3t - 4)\vec{j}$, (2):
 $y = \frac{1}{18}(x^2 + 8x - 137)$, (3): $\vec{r}_1 = 8\vec{i} - 0.5\vec{j}$, $\vec{r}_2 = 11\vec{i} + 4\vec{j}$,
 $\Delta\vec{r} = 3\vec{i} + 4.5\vec{j}$, (4): 7.6 m/s , 与 x 轴夹角为 66.8° ; 1 m/s^2 , 沿 Oy 轴正方向。

2. 一质点从静止出发，沿半径 $R = 3 \text{ m}$ 的圆周运动，切向加速度 $a_t = 3 \text{ m/s}$ ，当总加速度与半径成 45° 时，所经过的时间为多少？在上述时间内质点经过的路程为多少？

答案：1 s, 1.5 m

质点运动的动力学

基本概念和基本原理

1. 力: 重力, 弹性力, 摩擦力, 万有引力, 支持力
3. 牛顿三定律: 惯性定律; $\vec{F} = m\vec{a}$; 作用力与反作用力定律;
4. 隔离法
 - (1) 选取研究对象
 - (2) 研究对象的受力分析
 - (3) 建立坐标系, 建立牛顿方程组
 - (4) 求解牛顿方程组
5. 非惯性参照系, 惯性力

选择题

1. 平面上放一个质量为 m 的物体, 已知物体与地面的滑动摩擦因数为 μ , 在力 \vec{F} 的作用下, 物体向右运动, 欲使物体有最大的加速度, 则力与水平方向夹角 α 应满足()

(A) $\tan \alpha = \mu$

(C) $\cos \alpha = \mu$

(B) $\sin \alpha = \mu$

(D) $\cot \alpha = \mu$

答案: (A)

2. 质量为 m 的小球，放在光滑的木板和光滑的墙壁之间，并保持平衡，设木板和墙壁之间的夹角为 α ，当 α 增大时，小球对木板的压力将()

(A) 增大

(C) 不变

(B) 减少

(D) 先是增加，后又减少，压力增减的分界角 $\alpha = 45^\circ$

答案：(B)

3. 竖立的圆筒形转笼，半径为 R ，绕中心轴 OO' 转动，物块 A 紧靠在圆筒的内壁上，物块与圆筒间的摩擦因数为 μ ，要使物块 A 不下落，圆筒转动的角速度 ω 至少应为()

(A) $\sqrt{\frac{\mu g}{R}}$

(C) $\sqrt{\frac{g}{\mu R}}$

(B) $\sqrt{\mu g}$

(D) $\sqrt{\frac{g}{R}}$

答案：(C)

4. 一弹簧秤下挂一滑轮，滑轮两边挂有两个物块 m_1 和 m_2 ，若 $m_1 \neq m_2$ ，则弹簧秤的读数为()

(A) 大于 $(m_1 + m_2)g$

(C) 小于 $(m_1 + m_2)g$

(B) 等于 $(m_1 + m_2)g$

(D) 不能确定

答案：(C)

二、填空题

1. 一质量为 m 的质点以初速 v_0 做直线运动，所受阻力的大小与其速率成正比，比例系数为 k ，则质点速率减为其初速的一半所需的时间为____，在这段时间内质点前进的距离为____，其前进的最大距离为____。

答案： $m \ln 2/k$, $mv_0/2k$, mv_0/k

2. 质量 $m = 40 \text{ kg}$ 的箱子放在卡车的车厢底板上，已知箱子与底板之间的静摩擦系数为 $\mu_s = 0.40$ ，滑动摩擦系数为 $\mu_k = 0.25$ ，试分别写出在下列情况下，作用在箱子上的摩擦力的大小和方向
- (1) 卡车以 $a = 2 \text{ m/s}^2$ 的加速度行驶， $f = \underline{\hspace{2cm}}$ ，方向 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；
 - (2) 卡车以 $a = -5 \text{ m/s}^2$ 的加速度急刹车， $f = \underline{\hspace{2cm}}$ ，方向 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

答案：80 N，与车行的方向相同；98 N，与车行方向相反

3. 一细绳长为 l ，一端固定，另一端悬挂一质量为 m 的重物，重物在竖直平面内左右摆动，其最大偏角为 α ，则物体在最大偏角时的切向加速度为____，物体回到偏角为零的位置时绳子的张力为_____.

答案： $g \sin \alpha$, $3mg - 2mg \cos \alpha$

4. 一质量为 m 的质点沿 x 轴正向运动, 假设该质点通过坐标为 x 时的速度大小为 kx (k 为正常量), 则此时作用于该质点上的力 $F = \underline{\hspace{2cm}}$, 该质点从 $x = x_0$ 点出发运动到 $x = x_1$ 处所经历的时间 $\Delta t = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: $mk^2x, \frac{1}{k} \ln \frac{x_1}{x_0}$

三、计算题

1. 如图所示，有一轻滑轮 A ，两边分别挂着质量为 m_1 和 m_2 的两个物体，当滑轮 A 在外力作用下以加速度 a_0 上升时，求两物体相对地面的加速度 a_1 和 a_2 （设 $m_2 > m_1$ ）。

答案：
$$a_1 = \frac{2m_2}{m_1+m_2}a_0 - \frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2}, \quad a_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}a_0 + \frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2}$$

2. 如图所示，用两根长为 a 的绳子连住一质量为 m 的小球，两绳的另一端分别固定在相距为 a 的竖直棒的两点上。今使小球在水平面内作匀速圆周运动，当转速为 ω 时，下面一根绳子刚刚伸直，求转速为 2ω 时，上下绳子中的拉力各为多大？

答案： $T'_1 = 5mg$, $T'_2 = 3mg$

3. 如图所示，在光滑水平桌面上平放一固定的圆环，其半径为 R ，物体与环内侧的摩擦系数为 μ 。当 $t_0 = 0$ 时，物体的速率为 v_0 。求：
- (1) t 时刻物体的速率；
 - (2) 时间 t 内物体经过的路程。

答案： $v = \frac{v_0}{1 + \mu v_0 t / R}$, $s = \frac{R}{\mu} \ln(1 + \frac{\mu v_0 t}{R})$

4. 图示为一力学装置，滑块 B 的质量为 m_B ，悬块 A 的质量为 m_A ，两者用无伸长的细绳相连，所有接触面皆为光滑。试求：滑块 B 和滑块 A 的加速度各为多少？（提示定滑轮 O 与滑块 B 是一起运动的一个整体，另外两滑轮与墙固定。）

答案： $\vec{a}_A = \frac{2m_A g}{5m_A + m_B} \vec{i} + \frac{4m_A g}{5m_A + m_B} \vec{j}$, $\vec{a}_B = \frac{2m_A g}{5m_A + m_B} \vec{i}$

功，动能，势能；动量，冲量；
角动量，力矩，冲量矩

基本概念和基本原理

- 功，动能，势能

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}; \quad E_k = \frac{1}{2}mv^2; \quad E_p(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{F}_c \cdot d\vec{r}$$

- 动能定理，机械能守恒定律

$$E_k(\vec{r}_2) - E_k(\vec{r}_1) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$E_k(\vec{r}_1) + E_p(\vec{r}_1) = E_k(\vec{r}_2) + E_p(\vec{r}_2)$$

- 动量，冲量

- 动量定理，动量守恒定律

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt, \quad \vec{p}(t_2) = \vec{p}(t_1)$$

基本概念和基本原理

- 质心:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_j m_j}$$

- 质心运动定律

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_{\text{net}}, \quad m\vec{v}_c = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

- 角动量，力矩，冲量矩

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \vec{J} = \int \vec{M} dt$$

基本概念和基本原理

- 角动量定理，角动量守恒定律

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}; \quad \vec{M} = 0, \quad \vec{L}(t_2) = \vec{L}(t_1)$$

一、选择题

1. 质点受力为 $F = F_0 e^{-kx}$ ，若质点在 $x = 0$ 处的速度为零，此质点所能达到的最大动能为[].

(A) $\frac{F_0}{k}$

(C) $F_0 k$

(B) $\frac{F_0}{e^k}$

(D) $F_0 k e^k$

答案：(A)

2. 在下面四个实例中，你认为哪一个实例中的物体和地球构成的系统机械能不守恒？ [].

(A) 物体作圆锥摆运动

(C) 物体在拉力作用下沿光滑斜面匀速上升

(B) 抛出的铁饼作斜抛运动(不计空气阻力)

(D) 物体在光滑斜面上自由下滑

答案：(C)

3. 速度为 \vec{v} 的子弹，打穿一块木板后速度变为零，设木板对子弹的阻力是恒定的，那么当子弹射入木板的深度等于其厚度的一半时，子弹的速度是[].

(A) $\frac{\vec{v}}{2}$

(C) $\frac{\vec{v}}{3}$

(B) $\frac{\vec{v}}{4}$

(D) $\frac{\vec{v}}{\sqrt{2}}$

答案：(D)

4. 一力学系统由两个质点组成，它们之间只有引力作用，若两个质点所受外力的矢量和为零，则此系统[].

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| (A) 动量守恒，但机械能和角动量是否守恒不能断定 | (C) 动量和角动量守恒，但机械能是否守恒不能断定 |
| (B) 动量，机械能守恒，当角动量是否守恒不能断定 | (D) 动量、机械能以及对一轴的角动量守恒 |

答案：(A)

5. 一船浮于静水中，船长 L ，质量为 m ，一个质量也为 m 的人从船尾走到船头，不计水和空气的阻力，则在此过程中船将[].

(A) 不动

(B) 后退 L

(C) 后退 $\frac{L}{2}$

(D) 后退 $\frac{L}{3}$

答案：(C)

6. 在半径为 R 的半球形容器中有一质量为 m 的质点从 P 点由静止下滑, 如图所示, 质点在最低点 Q 时, 测得它对容器的压力为 F , 那么质点从 P 到 Q 的过程中, 摩擦力所做的功为[].

(A) $\frac{1}{2}(mg - F)R$

(C) $\frac{1}{2}(F - 3mg)R$

(B) $\frac{1}{2}(F - mg)R$

(D) $\frac{1}{2}(2mg - F)R$

答案: (C)

7. 人造地球卫星绕地球作椭圆轨道运动，卫星轨道近地点和远地点分别为 A 、 B 。用 L 和 E_k 分别表示卫星对地心的角动量及其动能的瞬时值，则有[]。

(A) $L_A > L_B, E_{kA} > E_{kB}$

(C) $L_A = L_B, E_{kA} < E_{kB}$

(B) $L_A = L_B, E_{kA} > E_{kB}$

(D) $L_A < L_B, E_{kA} < E_{kB}$

答案：(B)

8. 如图所示，砂子从 $h = 0.8 \text{ m}$ 高处下落到以 3 m/s 的速率水平向右运动的传送带上，取重力加速度 $g = 10 \text{ m/s}^2$ ，传送带给予砂子的作用力的方向[].

(A) 与水平夹角 53° 向下

(C) 与水平夹角 37° 向上

(B) 与水平夹角 53° 向上

(D) 与水平夹角 37° 向下

答案：(B)

9. 质量分别为 m_1 、 m_2 的两球作对心碰撞，设球1原来静止，两球作对心碰撞后，球2变为静止，则恢复系数为[].

(A) $\frac{m_2}{m_1}$

(C) $\frac{m_1}{m_1 + m_2}$

(B) $\frac{m_1}{m_2}$

(D) $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$

答案：(A)

10. 今有一倔强系数为 k 的轻弹簧，竖直放置，下端悬一质量为 m 的小球，如图所示，开始时使弹簧为原长而小球恰好与地接触，今将弹簧上端缓慢地提起，直到小球刚能脱离地面为止，在此过程中外力做功为[].

(A) $\frac{m^2 g^2}{4k}$

(C) $\frac{m^2 g^2}{2k}$

(B) $\frac{m^2 g^2}{3k}$

(D) $\frac{2m^2 g^2}{k}$

答案：(C)

二、填充题

1. 如图所示，质量为 m 的小球系于绳的一端，绳的另一端固定在 O 点，绳长为 l ，今将小球拉到水平位置 A 处，然后放手，小球经圆弧运动到位置 B 时的速度为____，加速度为____，如绳子承受的最大张力为 $2.5mg$ ，小球落到 $\theta =$ ____的位置时，绳子被拉断。

答案： $\sqrt{2gl \sin \theta}$, $g\sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta}$, $\sin^{-1} \frac{5}{6}$

2. 以铁锤将一铁钉打入木板，设木板对钉子的阻力与铁钉进入之深度成正比，在铁锤击第一次时，能将铁钉击入深度 d ，则第二次时能击入的深度为____. (假定铁锤二次打击铁钉时的速度相同).

答案： $(\sqrt{2} - 1)d$

3. 如图所示，一质量为 m 的小球沿光滑轨道由静止开始下滑，要使小球沿半径为 R 的球形轨道运动一周而不脱离轨道，小球最低应从 H 为 _____ 高处滑下，如小球由 $H = 2R$ 处滑下，则它能沿环形轨道上升到离地面的高度 $h =$ _____ 处.

答案： $\frac{5}{2}R, \frac{5}{3}R$

4. 如图所示，一质点在几个力作用下沿半径 $R = 20 \text{ m}$ 的圆作圆周运动，其中有一恒力 $\vec{F} = 0.6\vec{i} \text{ (N)}$ ，在质点从 A 开始逆时针方向经 $\frac{3}{4}$ 圆周到达 B 的过程中，力 \vec{F} 所做的功为 ____。

答案：-12 J

5. 如图所示，质量为 m 的子弹以水平速度 \vec{v}_0 射入静止的木块并陷入木块内，设子弹入射过程中木块不反弹，则墙壁对木块的冲量 $\vec{I} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案： $-m\vec{v}_0$

6. 一质量为5 kg的物体沿 x 轴运动，其所受的作用力随时间变化的关系如图所示，设物体从静止开始运动，则20 s末时物体的速度为 $v = \underline{\hspace{2cm}}$ ，在0 ~ 20 s内质点所做的功 $A = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案：5 m/s, 62.5 J

7. 一个原来静止在光滑水平面上的物体，突然分裂成三块，以相同的速率沿三个方向在水平面上运动，各方向之间的夹角如图所示，则三块物体的质量比 $m_1 : m_2 : m_3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案： $1 : \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 质量为20 g的子弹，以400 m/s的速率沿图所示方向射入原来静止的质量为980 g的摆球，摆线长度不可伸缩，子弹射入后与摆球一起运动的速率为_____.

答案：4 m/s

9. 如图所示, x 轴沿水平方向, y 轴向下, 在 $t = 0$ 时刻将质量为 m 的质点由 a 处静止释放, 让它自由下落, 则在任意时刻 t , 质点所受的对原点 O 的力矩 $M = \underline{\hspace{2cm}}$; 在任意时刻 t , 质点对原点的角动量 $\vec{L} = \underline{\hspace{2cm}}$..

答案: $mgb\vec{k}$, $mgbt\vec{k}$

10. 两木块的质量分别为 m_1 、 m_2 ，由一倔强系数为 k 的轻弹簧连接，并静止于光滑水平面上，现将两木块压紧弹簧，其压缩量为 x_0 ，然后由静止释放，当弹簧伸长到原长时，质量 m_1 木块的速度 $v_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ ，质量 m_2 木块的速度 $v_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案：
$$v_1 = \sqrt{\frac{m_2 k}{m_1(m_1 + m_2)}}, v_2 = \sqrt{\frac{m_1 k}{m_2(m_1 + m_2)}}$$

三、计算题

1. 一个人从10 m深的井中提水，起始桶中装有10 kg的水，由于水桶漏水，每升高1 m要漏去0.20 kg的水，水桶被匀速地从井中提到井口，求人所做的功.

答案：882 J

2. 质量 M 的滑块正沿着光滑水平地面向右滑动, 一质量为 m 的小球水平向右飞行, 以速度 v_1 (相对于地面)与滑块斜面相碰, 碰后速度为 v_2 (相对于地面), 如图所示, 若碰撞时间为 Δt , 试计算此过程中滑块对地面的平均作用力和滑块速度的增量.

答案: $Mg + \frac{mv_2}{\Delta t}, \Delta v = \frac{m}{M}v_1$

3. 在一辆小车上固定装有光滑弧形轨道，轨道下端水平，小车质量为 m ，静止放在光滑水平面上，今有一质量也为 m ，速度为 v 的铁球，沿轨道下端水平射入并沿弧形轨道上升某一高度，如图所示，然后下降离开小车.
- (1) 求球离开小车时相对地面的速度为多少?
 - (2) 球沿弧面上升的最大高度 h 是多少?

答案：0, $h = \frac{v^2}{4g}$

4. 地球可看作是半径 $R = 6400 \text{ km}$ 的球体，一颗人造地球卫星在地面上空 $h = 800 \text{ km}$ 的圆形轨道上，以 7.5 km/s 的速度绕地球运动，在卫星的外侧发生一次爆炸，其冲量不影响卫星当时的绕切向速度，但给予卫星一个指向地心的径向速度 $v_n = 0.2 \text{ km/s}$ ，求这次爆炸后使卫星轨道的最低点和最高点位于地面上空多少公里？

答案：997 km, 613 km

5. 如图所示，将一块长为 L 、质量为 M 的平板 AB 放在倔强系数为 k 的弹簧上，现有一质量为 m 的小球放在一光滑的桌面上，桌面与平板 AB 的垂直高度为 h ，现给小球以水平初速 v_0 ，不计所有摩擦力和弹簧质量，已知 $M > m$ ，小球与平板的碰撞为弹性碰撞，求：

(1) 弹簧的最大压缩量是多少？

(2) 如果要使小球与 AB 板有一次而且只有一次碰撞，则 v_0 应在什么范围内.

答案：
$$\frac{Mg}{k} + \frac{2m}{m+M} \sqrt{\frac{2Mgh}{k}}, \sqrt{\frac{g}{2h}} \frac{M+m}{(3M-m)} L < v_0 \leq \sqrt{\frac{g}{2h}} L$$

6. 有一质量为 M ，半径为 R 的半圆形的光滑槽，放在光滑桌面上，一个质量为 m 的小物体，可以在槽内滑动，开始时半圆槽静止，小物体静止于 A 处，如图所示，试求
- (1) 当小物体滑到 C 点处时，小物体 m 相对槽的速度 v' ，槽相对于地的速度 V ；
 - (2) 当小物体滑到最低点 B 时，槽移动的距离

答案：
$$v' = \sqrt{\frac{(M+m)2gR \sin \theta}{(M+m) - m \sin^2 \theta}}$$

$$V = \frac{m \sin \theta}{M+m} \sqrt{\frac{(M+m)2gR \sin \theta}{(M+m) - m \sin^2 \theta}},$$

$$s = \frac{m}{M+m} R$$

7. 在地球表面上垂直向上以第二宇宙速度 $v_2 = \sqrt{2gR}$ 发射一物体， R 为地球半径， g 为重力加速度，试求此物体到达与地心相距为 nR 时所需的时间。

答案: $\frac{2}{3} \frac{R}{v_2} (n^{\frac{3}{2}} - 1)$

刚体的转动

基本概念和基本原理

1. 角位置，角位移，角速度，角加速度
2. 力矩，转动惯量
3. 刚体转动定律
4. 转动动能，刚体的势能
5. 动能定理，机械能守恒
6. 刚体的角动量
7. 角动量定理，角动量守恒

一、选择题

1. 有两个力作用在一个有固定转轴的刚体上()

- (1) 这两个力都平行于轴作用时，它们对轴的合力矩一定是零
- (2) 这两个力都垂直于轴作用时，它们对轴的合力矩可能是零
- (3) 当这两个力的合力为零时，它们对轴的合力矩也一定是零
- (4) 当这两个力对轴的合力矩为零时，它们的合力也一定是零

在上述说法中，

(A) 只有(1)是正确的

(C) (1)、(2)、(3)正确，只有(4)错误

(B) (1)、(2)正确，(3)、(4)错误

(D) (1)、(2)、(3)、(4)都正确

答案：(B)

2. 一刚体以每分钟60转绕 z 轴作匀速转动(ω 沿 z 轴正方向), 设某时刻刚体上一点 P 的位置矢量为 $\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, 其单位为“ 10^{-2} m ”, 若以“ $10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ”为速度单位, 则该时刻 P 点的速度为()

(A) $\vec{v} = 94.2\vec{i} + 125.6\vec{j} + 157.0\vec{k}$ (C) $\vec{v} = -25.1\vec{i} - 18.8\vec{j}$

(B) $\vec{v} = -25.1\vec{i} + 18.8\vec{j}$ (D) $\vec{v} = 31.4\vec{k}$

答案: (B)

3. 一飞轮从静止开始作匀加速转动，飞轮边上一点的法向加速度 a_n 和切向加速度 a_t 值的变化为()

(A) a_n 不变， a_t 为零

(C) a_n 增大， a_t 为零

(B) a_n 不变， a_t 不变

(D) a_n 增大， a_t 不变

答案：(D)

4. 两个匀质圆盘A和B的密度分别为 ρ_A 和 ρ_B ，若 $\rho_A > \rho_B$ ，但两圆盘的质量和厚度相同，两圆盘对通过盘心垂直于盘面轴的转动惯量各为 J_A 和 J_B ，则()

(A) $J_A > J_B$

(C) $J_A = J_B$

(B) $J_A < J_B$

(D) J_A, J_B 哪个大，不能确定

答案：(B)

5. 将细绳绕在一个具有水平光滑轴的飞轮边缘上，如果在绳端挂一质量为 m 的重物，飞轮的角加速度为 $\vec{\alpha}_1$ ，如果以拉力 $2mg$ 代替重物拉绳时，飞轮的角加速度将()

(A) 小于 $\vec{\alpha}_1$

(C) 大于 $2\vec{\alpha}_1$

(B) 大于 $\vec{\alpha}_1$ ，小于 $2\vec{\alpha}_1$

(D) 等于 $2\vec{\alpha}_1$

答案：(C)

6. 如图所示，一均匀细杆，质量为 m ，长度为 l ，一端固定，由水平位置自由下落，则在水平位置时其质心 C 的加速度为()

(A) g

(C) $\frac{3}{4}g$

(B) 0

(D) $\frac{g}{2}$

答案：(C)

7. 一花样滑冰者，开始自转时，其动能为 $E_0 = \frac{1}{2} J_0 \omega_0^2$ ，然后她将手臂收回，转动惯量减少至原来的 $\frac{1}{3}$ ，此时她的角速度变为 ω ，动能变为 E ，则有关系()

(A) $\omega = 3\omega_0, E = E_0$

(C) $\omega = \sqrt{3}\omega_0, E = E_0$

(B) $\omega = \frac{\omega_0}{3}, E = 3E_0$

(D) $\omega = 3\omega_0, E = 3E_0$

答案：(D)

8. 两飞轮A和B用皮带连在一起，飞轮转动时，轮与皮带之间没有滑动，已知 $r_B = 2r_A$ ， $m_B = 4m_A$ ，飞轮A、B均可看作匀质圆盘，则下列几种说法哪个是正确的？
(J 、 ω 、 α 、 E_k 、 L 分别表示飞轮的转动惯量、角速度、角加速度、转动动能、角动量)()

(A) $J_A : J_B = 1 : 16$,
 $\omega_A : \omega_B = 1 : 1$

(C) $E_{kA} : E_{kB} = 1 : 4$,
 $L_A : L_B = 1 : 8$

(B) $\alpha_A : \alpha_B = 2 : 1$,
 $\omega_A : \omega_B = 1 : 2$

(D) $L_A : L_B = 1 : 16$,
 $\alpha_A : \alpha_B = 1 : 1$

答案：(C)

9. 一根长 l 、质量 m 的均匀细直棒在地上竖立着，如果让其以下端与地的接触处为轴自由倒下，当上端到达地面时，上端的速率为()

(A) $\sqrt{6gl}$

(C) $\sqrt{2gl}$

(B) $\sqrt{3gl}$

(D) $\sqrt{\frac{3g}{2l}}$

答案：(B)

10. 一质量为 m 、长为 l 的棒能绕通过 O 点的水平轴自由转动，一质量为 m 、速度为 v_0 的子弹从与水平方向成 φ 角处飞来，击中棒的中点且留在棒内，则棒的中点 C 的速度为()

(A) $\frac{v_0}{2}$

(C) $\frac{3}{7}v_0 \sin \varphi$

(B) $\frac{3}{7}v_0 \cos \varphi$

(D) $\frac{3}{4}v_0 \cos \varphi$

答案：(B)

二、填充题

1. 在质量为 m_1 ，长为 $\frac{l}{2}$ 的细棒与质量为 m_2 、长为 $\frac{l}{2}$ 的细棒中间，嵌有一质量为 m 的小球，则该系统对棒的端点 O 的转动惯量 $J = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案: $\frac{1}{12}m_1l^2 + \frac{7}{12}m_2l^2 + \frac{1}{4}ml^2$

2. 以 $20 \text{ N} \cdot \text{m}$ 的恒力矩作用在有固定轴的转轮上，在 10 s 内该轮的转速由零增大到 100 r/min ，此时移去该力矩，转轮因摩擦力矩的作用经 100 s 而停止，则此转轮对其固定轴的转动惯量_____。

答案： $17.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

3. 质量为 m_0 、半径为 R 的匀质圆盘可绕垂直于盘的光滑轴 O 在铅直平面内转动，盘点 A 固定着质量为 m 的质点，先使 OA 处于水平位置，然后释放，盘由静止开始转动。当 OA 转过 30° ，质点 m 的法向加速度 a_n ____，切向加速度 $a_t =$ ____。

答案： $\frac{2mg}{2m + m_0}$ ； $\frac{\sqrt{3}mg}{2m + m_0}$

4. 一转动惯量为 J 的圆盘绕一固定轴转动，起初角速度为 ω_0 ，设它所受阻力矩与转动角速度的平方成正比，比例系数为 k (k 为正的常数)，当 $\omega = \frac{1}{3}\omega_0$ 时圆盘的角加速度 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
从开始制动到 $\omega = \frac{1}{3}\omega_0$ 所经过的时间 $t = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案： $-\frac{k\omega_0^2}{9J}; \frac{2J}{k\omega_0}$

5. 如图所示，若弹簧的弹性系数为 k 、定滑轮的转动惯量为 J 、半径为 R 、物体的质量为 m 。开始时系统静止而弹簧无伸长。当物体下落距离 $h = \underline{\hspace{2cm}}$ 时，滑轮的角速度最大，当物体下落距离 $h' = \underline{\hspace{2cm}}$ 时，滑轮的角速度为零。

答案： $\frac{mg}{k}$ ； $\frac{2mg}{k}$

6. 一飞轮以角速度 ω_0 绕轴旋转，飞轮对轴的转动惯量为 J_1 ，另一静止飞轮突然被啮合到同一个轴上，该飞轮对轴的转动惯量为前者的两倍，啮合后这个系统的角速度 $\omega = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案： $\frac{1}{3}\omega_0$

7. 两个质量都为100 kg的人，站在一质量为200 kg、半径为3 m的水平转台的直径两端，初始时，转台没5 s转一圈，当这两个以相同的快慢走到转台的中心时，转台的角速度 $\omega = \underline{\hspace{1cm}}$ 。(已知转台的转动惯量 $J = \frac{1}{2}MR^2$ ，计算时忽略转台在转轴处的摩擦)

答案：3.77 rad/s

8. 一质量为 M ，长为 l 的匀质细杆，在一光滑的水平面上以速度 v 运动，与一固定在桌面上的钉子相碰撞，碰后细杆绕 O 点转动，则碰后细杆绕 O 轴的角速度 $\omega = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案： $\frac{12v}{7l}$

9. 在一水平放置的质量为 m 、长度为 l 的均匀细杆上，套着一质量也为 m 的套管 B (可看作质点)，套管用细线拉住，它到竖直的光滑固定轴 OO' 的距离为 $\frac{1}{2}l$ ，杆和套管所组成的系统以角速度 ω_0 绕 OO' 轴转动，如图所示，若在转动过程中细线被拉断，套管将沿着杆滑动，在套管滑动过程中，该系统转动的角速度 ω 与套管离轴的距离 x 的函数关系为____。(已知杆本身对 OO' 轴的转动惯量为 $\frac{1}{3}ml^2$)

答案：
$$\frac{7l^2\omega_0}{4(l^2 + 3x^2)}$$

10. 质量为 m 、半径为 R 的圆柱形的轮子，可绕固定轴 O 自由转动，光滑台面上有一质量为 m_0 、长度为 l 的薄板与轮边缘保持良好的接触，不产生相对滑动，若用恒力 F 作用在板上，板从静止开始通过轮子，如图所示，则板刚与轮子脱离接触时的速度 $v = \underline{\hspace{2cm}}$ ，板通过轮子的时间 $\Delta t = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案： $\sqrt{\frac{4Fl}{m + 2m_0}}$ ； $\sqrt{\frac{l(m + 2m_0)}{F}}$

三、计算题

1. 一轴承光滑的定滑轮，质量为 $M = 2.00 \text{ kg}$ ，半径为 $R = 0.100 \text{ m}$ ，一根不能伸长的轻绳，一端固定在定滑轮上，另一端系有一质量为 $m = 5.00 \text{ kg}$ 的物体，如图所示，已知定滑轮的转动惯量为 $J = \frac{1}{2}MR^2$ ，其初角速度 $\omega_0 = 10.0 \text{ rad/s}$ ，方向垂直纸面向里，求：
- (1) 定滑轮的角加速度；
 - (2) 定滑轮的角速度变化到 $\omega = 0$ 时，物体上升的高度；
 - (3) 当物体回到原来位置时，定滑轮的角速度。

答案： 81.7 rad/s^2 ; $6.12 \times 10^{-2} \text{ m}$, 10.0 rad/s

2. 均质细棒长 l ，质量为 m ，可绕通过 O 点水平轴在竖直平面内转动，如图所示，在棒的 A 端作用一水平恒力 F ，棒在 F 力的作用下，由静止转过角度 $\theta(\theta = 30^\circ)$ ，求：
- (1) F 力所做的功；
 - (2) 若此时撤去 F 力，则细棒回到平衡位置时的角速度。

答案： $\frac{1}{6}Fl; \sqrt{\frac{6g}{l}}$

3. 长为 l 、质量为 m_0 的细棒可绕垂直于一端的水平轴自由转动，棒原来处于平衡状态，现有一质量为 m 的小球沿光滑水平面飞来，正好与棒的下端相碰撞(设碰撞为完全弹性碰撞)，使棒向上摆到 60° 处，求：
- (1) 小球的初速度；
 - (2) 棒在这一碰撞中所受到的冲量为多少？

答案： $v_0 = \frac{m_0 + 3m}{12m} \sqrt{6gl}$; $I = \frac{m_0}{3} \sqrt{\frac{3}{2}gl}$

4. 一质量均匀分布的圆盘，质量为 M ，半径为 R ，放在一粗糙水平面上，圆盘可绕通过其中心 O 的竖直固定光滑轴转动。开始时，圆盘静止，一质量为 m 的子弹以水平速度 v_0 垂直于圆盘半径打入圆盘边缘并嵌在盘边上，求

(1) 子弹击中圆盘后，盘所获得的角速度；

(2) 经过多少时间后，圆盘停止转动。

(圆盘绕通过 O 的竖直轴的转动惯量为 $\frac{1}{2}MR^2$ ，忽略子弹重力造成的摩擦阻力矩；圆盘和桌面的摩擦因数为 μ)

$$\text{答案: } \omega = \frac{mv_0}{(\frac{1}{2}M + m)R}; \Delta t = \frac{3mv_0}{2\mu Mg}$$

5. 两个质量分别为 m 与 M 的小球，位于一固定的、半径为 R 的水平光滑圆形沟槽内，一轻弹簧被压缩在两球间(未与球连接)，用线将两球缚紧，并使之静止

- (1) 今把线烧断，两球被弹开后沿相反方向在沟槽内运动，问此后 M 转过多大角度就要与 m 相碰。
- (2) 设原来储存在被压缩的弹簧中的势能为 U_0 ，问线断后两球经过多长时间发生碰撞？

答案： $\frac{2\pi m}{M+m}; \left(\frac{2\pi^2 m M R^2}{(m+M)U_0} \right)^{\frac{1}{2}}$

6. 质量很小、长度为 l 的均匀细杆，可绕过其中心 O 并与纸面垂直的轴在竖直平面内转动，当细杆静止于水平位置时，有一只小虫以速率 v_0 垂直落在距点 O $l/4$ 处，并背离点 O 向细杆的端点 A 爬行。设小虫与细杆的质量均为 m ，问：欲使细杆以恒定的角速度转动，小虫应以多大速率向细杆端点爬行？

答案：
$$\frac{dr}{dt} = \frac{g}{2\omega} \cos \omega t = \frac{7lg}{24v_0} \cos \left(\frac{12v_0}{7l} t \right)$$