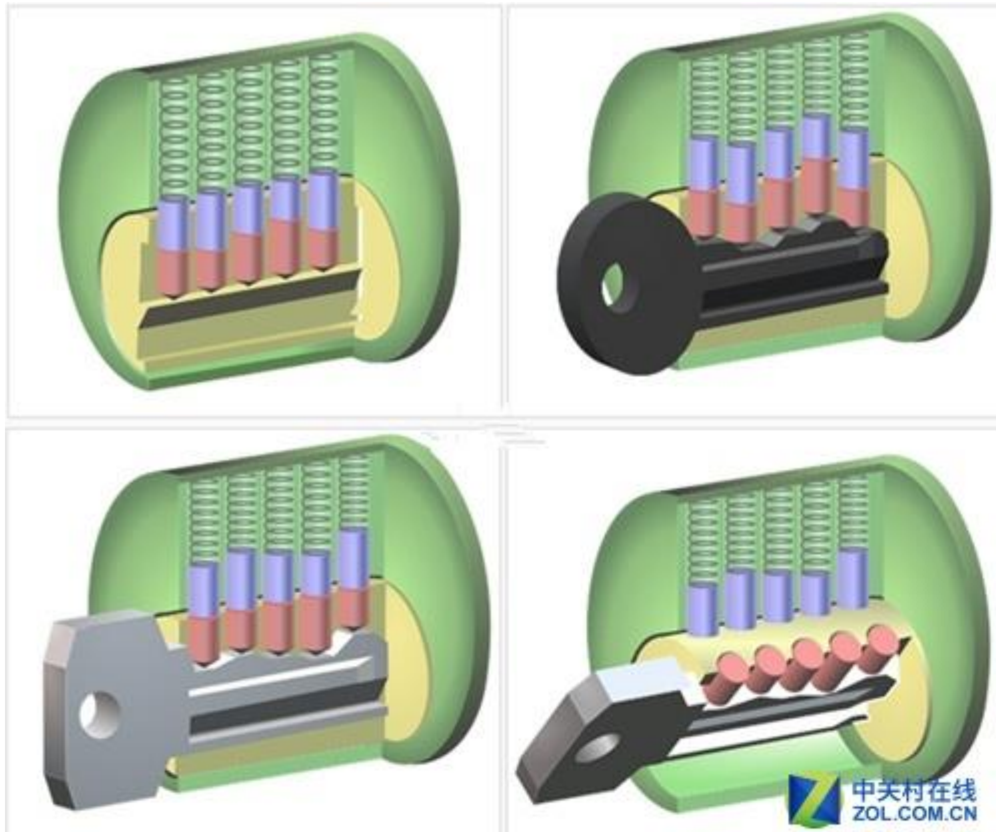
弹子锁具个数

主讲人：　窦本年


中关村在线
ZOL.COM.CN

问题：某厂生产一种弹子锁具，每个锁具的钥匙有5个槽，每个槽的高度从{1，2，3，4，5，6}中任取一数．由于工艺及其它原因，制造锁具时对5个槽的高度有两个限制：

(1)至少有3个不同的数；

(2)相邻两槽的高度之差不能为5．

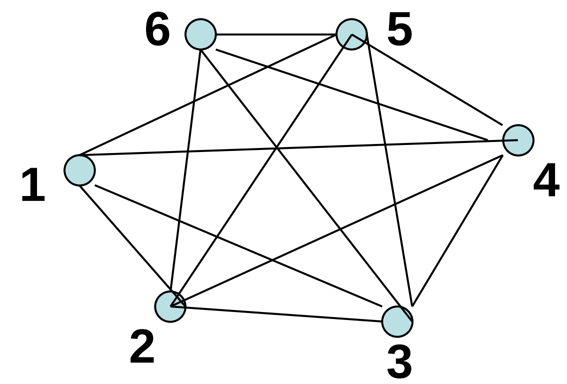
满足以上条件制造出来的所有互不相同的锁具称为一批．我们的问题是如何确定每一批锁具的个数?

该问题用图论中的邻接矩阵解决较为简单

易见， x=t-s，其中，t代表相邻两槽高度之差不为5的锁具数，即：满足限制条件(2)的锁具数，s代表相邻两槽高度之差不为5且槽高仅有1个或2个的锁具数，即：满足限制条件(2)但不满足限制条件(1)的锁具数.

我们用图论方法计算t和s.

构造无向图



$$G=(V，E), V=\{1,2,3,4,5,6\}, E=\{ij \mid i, j\in V\text{且}|i-j|\neq 5\}$$

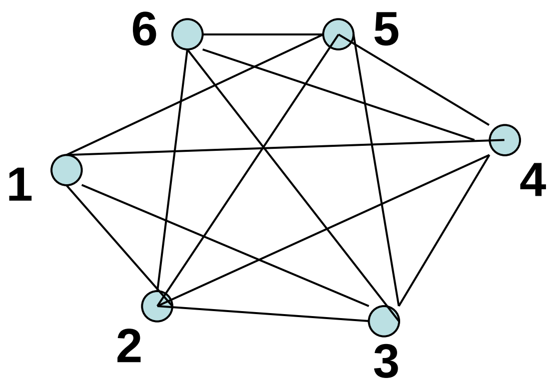
在G中每一条长度为4的道路对应于一个相邻两槽高度之差不超过5的锁具，即满足限制条件（2）的锁具，反之亦然，于是可以通过G的邻接矩阵A来计算t的值.

定理： $A=(a_{ij})_{n\times n}$（n为结点数）**是图**$G=(V, E)$**的邻接矩阵，则A 的幂**$A^l=(a^l_{ij})_{n\times n}$中的元素$a^l_{ij}$等于图$G$的第$i$个顶点到第$j$个顶点且长为$l$的道路的个数。

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1&1\end{bmatrix}\quad A^2=\begin{bmatrix}5&5&5&5&5&4\\5&5&5&5&5&5\\5&5&5&5&5&5\\5&5&5&5&5&5\\5&5&5&5&5&5\\4&5&5&5&5&5\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}141&165&165&165&165&140\\165&194&194&194&194&165\\165&194&194&194&194&165\\165&194&194&194&194&165\\165&194&194&194&194&165\\140&165&165&165&165&141\end{bmatrix}$$

因此，

$$t=\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}a^{(4)}{}_{ij}=6306.$$



又令 $s = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6$,

其中y_i表示满足限制条件(2)但不满足限制条件(1)且首位为i的锁具数,（i=1,2,3,4,5,6),显然$y_1=y_6$, $y_2=y_4=y_3=y_5$,于是我们只需要计算y_1和y_2.

计算y_1可分别考虑槽高只有1，12，13，14，15的情形．若只有1，这样的锁具数只有1个，

若只有1和i(i=2,3,4,5)，这样的锁具数=G中以1和i为顶点，长度为3的道路数，此数可通过A的子矩阵A_{1i}计算得到.

事实上，因为

$$A_{1i}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\ A_{1i}^{2}=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix},\ A_{1i}^{3}=\begin{bmatrix}4&4\\4&4\end{bmatrix}$$

其中i=2, 3, 4, 5, 显然$y_1=1+(4+4+4+4-1)4=61$.

同理，计算y_2时应考虑槽高只有2, 21, 23, 24, 25, 26时的情形，类似计算可得

$$y_2=1+(4+4+4+4-1)\times 5=76.$$

于是，$s=61\times 2+76\times 4=426$，$x=6306-426=5880$.

该算法既易理解又易操作并且又可扩展.