第二章 随机过程的概念

- 随机过程的基本概念
- 随机过程的分布律和数字特征
- 复随机过程
- 几种重要的随机过程

2.1 随机过程的基本概念

例：1. 人一生中身高的变化

2. 股票在一天中价格变化

3. 某食堂一天中吃饭人数的变化

4. 某路段一天车流量变化

5. 上海一年降雨量的变量

青岛啤酒股票2018. 2. 28价格

方大集团股票2018. 2. 28价格

例 1．生物群体的增长问题

在描述群体的发展或演变过程中，以 X_t 表示在时刻 t 群体的个数，则对每一个 t，X_t 是一个随机变量。假设我们从 $t=\mathrm{o}$ 开始每隔 24 小时对群体个数观测一次，则 $\{X_t, t=0,1,2,\cdots\}$ 是随机过程。

例 2. 某电话交换台接到的呼唤次数

某电话交换台在时间段$[0, t]$内接到的呼唤次数是与t有关的随机变量$X(t)$，对于固定的t，$X(t)$是一个取非负整数的随机变量，故$\{X(t), t \in [0, \infty)\}$是随机过程。

这是概率论中的 **Poisson** 流，在一定条件下是 **Poisson** 过程.

例 3. 商场顾客的消费额

设 X_i 表示第 i 位顾客的消费额，则 $\{X_i, i=0,1,2,\cdots\}$是随机过程。

例 4. 海平面的垂直振动

在海浪分析中，需要观测某固定点处海平面的垂直振动。设 $X(t)$ 表示在时刻 t 该处的海平面相对于平均海平面的高度，则 $X(t)$ 是随机变量，而$\{X(t), t\in[0,\infty)\}$是随机过程。

随机过程是一族随机变量的集合，用于描述随时间变化的随机现象。

二．定义：

设（Ω，$\mathscr{F}$，P）是概率空间，T 是给定的参数集，若对每一个$t\in T$，有一个随机变量$X(t,\omega)$与之对应，则称随机变量族$\{X(t,\omega),t\in T\}$是（Ω，$\mathscr{F},P$）上的随机过程，简记为随机过程$\{X(t),t\in T\}$

T 称为参数集，通常表示时间。

例、例 1 中$T=\{0,1,2,\cdots\}$，例 2 中$T=[0,\infty)$，例 3 中

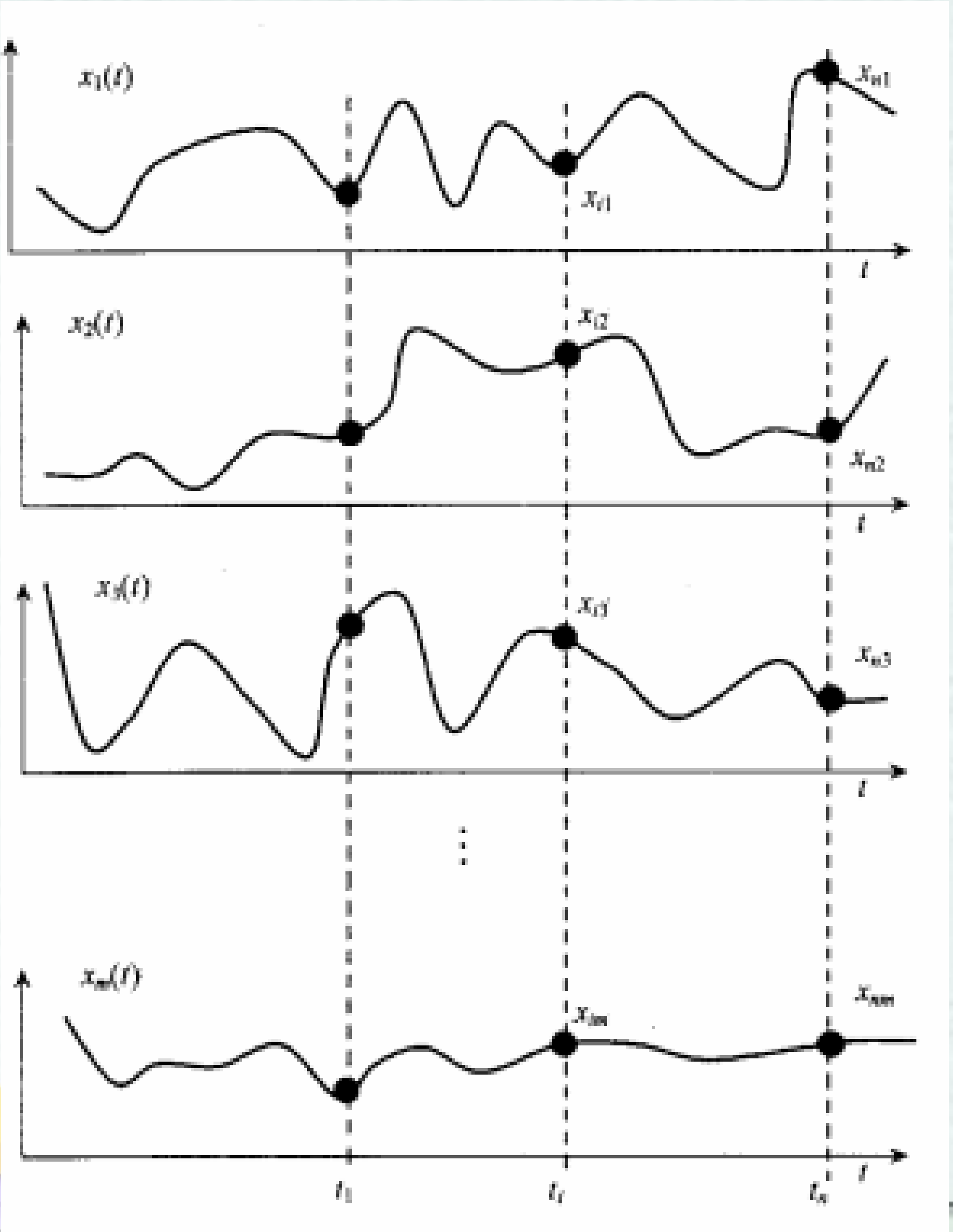
$T=\{0,1,2,\cdots\}$。

当 t 固定时，$X(t)$ 是一个随机变量，称为

$\{X(t,\omega),t\in T\}$在时刻t的状态；$X(t)$（t 固定，$t\in T$）所有可能的取值构成的集合，称为随机过程的**状态空间**，记为 S .

当 $\omega \in \Omega$ 固定时，$X(t)$ 是定义在 T 上的不具有随机性的普通函数，记为 $x(t)$，称为随机过程的一个样本函数（或轨道或实现），其图像称为随机过程的一条样本曲线.

样本轨道就是对过程的一次具体观察的结果



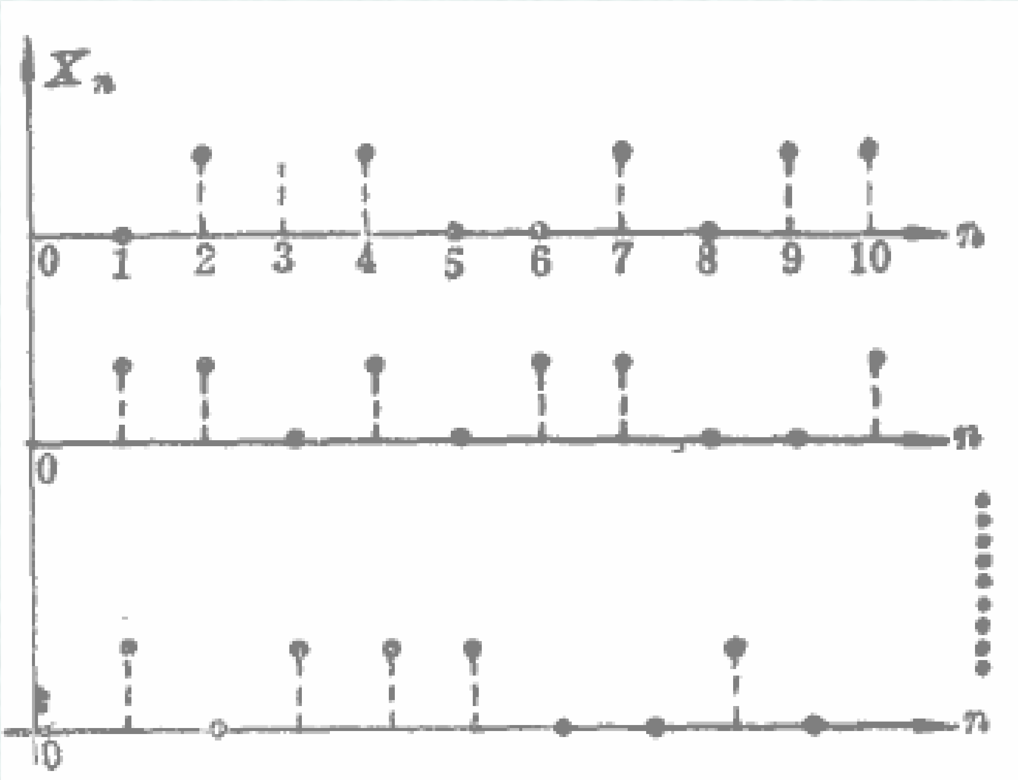
$\mathbf{x_k}$ **(t)为样本函数**

$k = 1,2,\cdots,m$

样本函数空间

$\{x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t)\}$

随机过程 $X(t)$在 t_i 时刻的状态体现为随机变量 $X(t_i)$



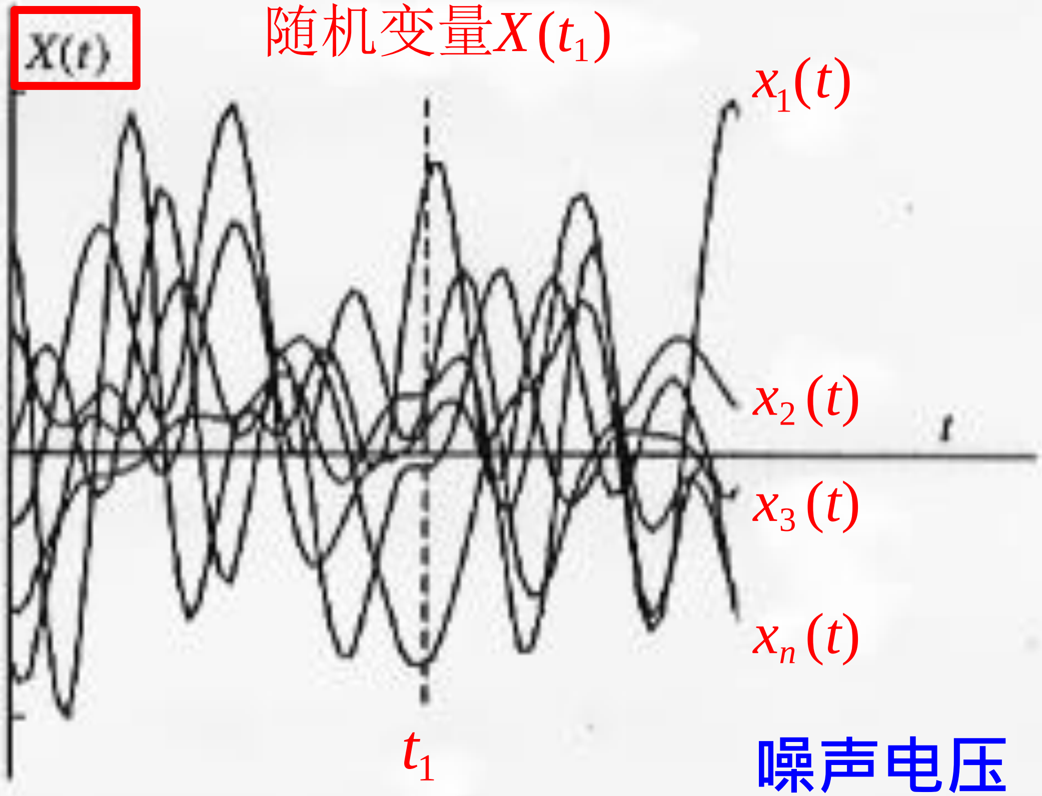
$x_k(n)$为样本函数

$k = 1, 2, \cdots, m$

样本函数空间

$\{x_1(n), x_2(n), \cdots, x_m(n)\}$

随机序列 $X(n)$ 在 i 时刻的状态体现为离散随机变量 $X(i)$



随机序列

$x_i(t)$为样本函数

每一个样本函数都是一个确定的时间函数

随机过程在任意时刻的状态是一随机变量

随机过程是一族时间函数的集合

三．分类

1）按状态空间和参数集是否可列分类

状态空间 S \ 参数集 T	可列	非可列
可列	例 1． $S=\{0,1,2,\cdots\}$ $T=\{0,1,2,\cdots\}$	例 2． $S=\{0,1,2,\cdots\}$ $T=[0,\infty)$
非可列	例 3． $S=[0,\infty)$ $T=\{0,1,2,\cdots\}$	例 5． $S=[-1,1]$ $T=(-\infty,\infty)$

2）按概率关系分类：独立增量过程，马尔可夫过程，平稳过程等。

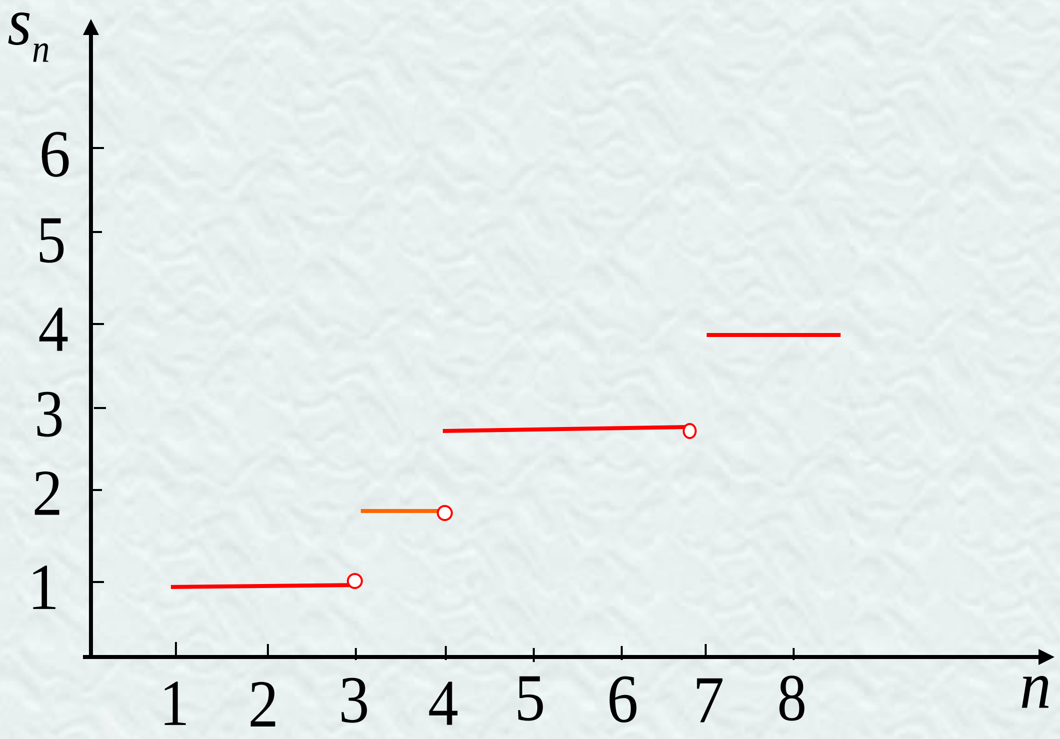
例1: （二项过程）

某人在打靶，每次的命中率为 p,并且各次的结果相互独立。用S_n表示前n次命中的次数。

则$\{S_n; n=1,2,\cdots\}$是一个离散时间离散状态的随机过程。状态空间$E=\{0,1,2,\cdots\}$.

所有样本函数为：

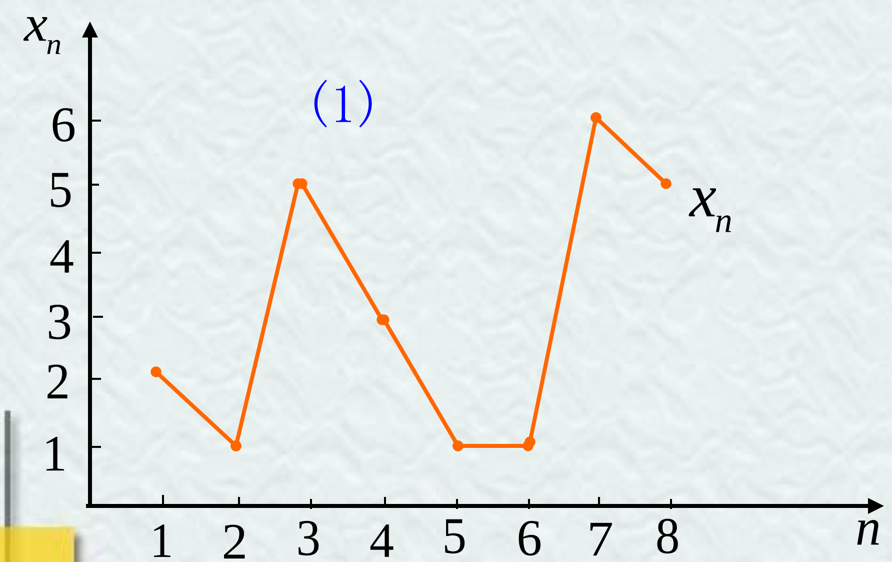
$$\left\{(s_1, s_2, s_{3,}\ldots)\text{：}\quad s_1 = 0\text{或}s_1 = 1,\quad s_{i+1} = s_i\text{或}s_{i+1} = s_i + 1\right\}$$

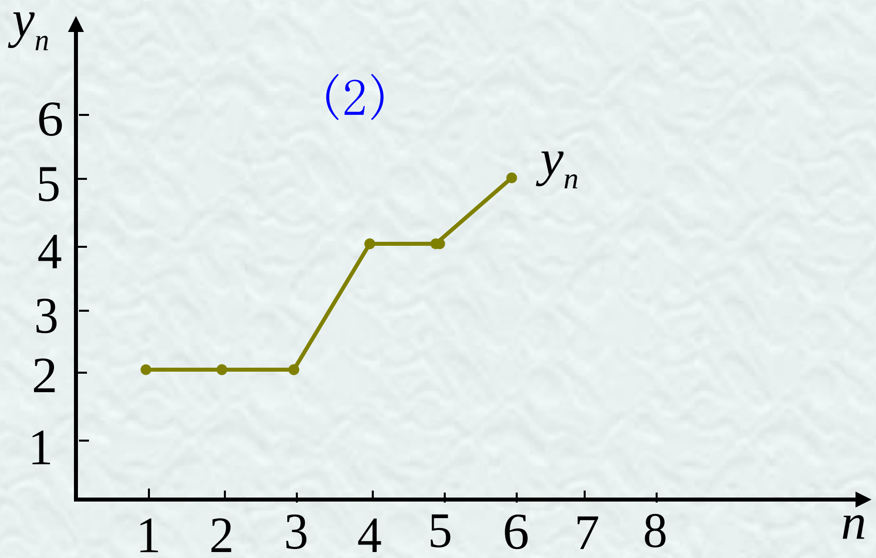


例2：考虑抛掷一颗骰子的试验：

(1) 设 X_n 是第 n 次 $(n\geq 1)$ 抛掷的点数，$\{X_n, n\geq 1\}$ 的状态空间为 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(2) 设 Y_n 是前 n 次出现的最大点数, $\{Y_n, n\geq 1\}$ 的状态空间是 $\{1,2,3,4,5,6\}$



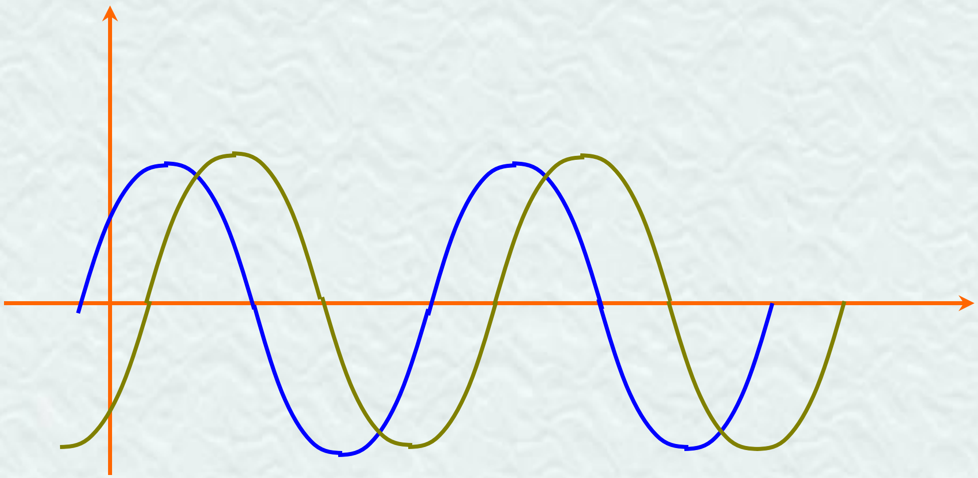


例3：（随机相位余弦波）$X(t)=\alpha\cos(\omega t+\Theta)$，$t\in(-\infty,+\infty)$，$\alpha$和$\omega$是正常数，$\Theta\sim U(0,2\pi)$。$\{X(t);t\in(-\infty,+\infty)\}$是连续时间连续状态的随机过程。

状态空间是$[-\alpha,\alpha]$.

在$(0,2\pi)$内任取一数θ, 相应的就得到一个样本函数 $\quad x(t)=\alpha\cos(\omega t+\theta)$,

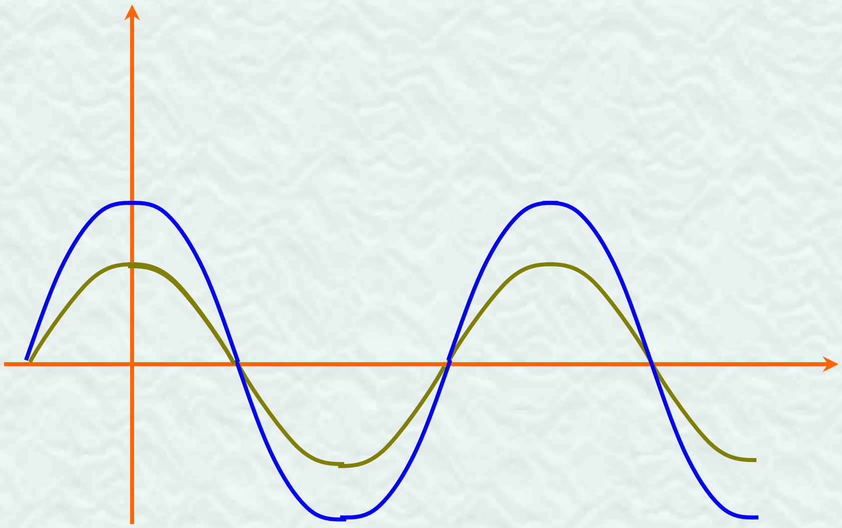
这族样本函数的差异在于相位θ 的不同.



例4：设$X(t)=V\cos\omega t \quad t\in(-\infty,+\infty)$，$\omega$是正常数，$V\sim U[0,1]$。则$\{X(t)\}$是连续时间连续状态随机过程。

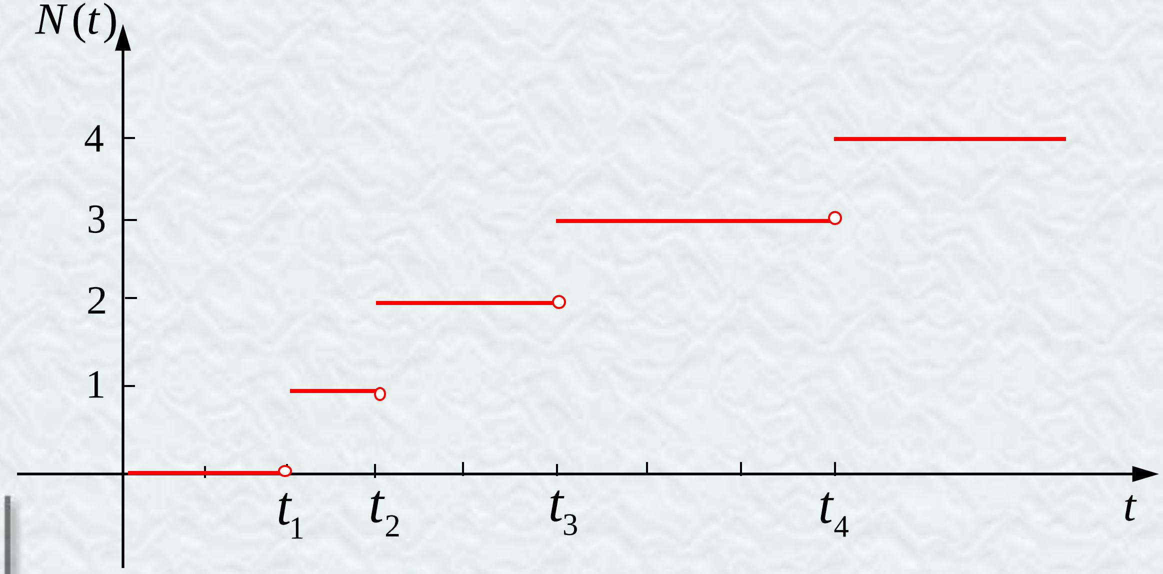
状态空间是$[-1, 1]$.

所有样本函数是:$\{x(t)=v\cos\omega t : v\in[0, 1]\}$



例5：以$N(t)$表示$(0,t]$内到某保险公司理赔的人数。则$\{N(t),t\geq 0\}$是连续时间离散状态的随机过程，状态空间是$\{0,1,2,\cdots\}$.

假设不会有两人或两人以上同时理赔, 设第 i 人理赔的时间为 t_i，则 $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$, 对应的样本函数为:



例、设 $X(t)=V\cos\omega t$，$-\infty<t<+\infty$，其中 ω 为常数，V 服从区间[0，1]上的均匀分布.

（1）求出 $V=0,\frac{2}{3},1$ 时，$\{X(t),\ -\infty<t<+\infty\}$ 的几个样本函数;

（2）求 $t=0,\frac{\pi}{4\omega}$ 时随机变量 $X(t)$ 的概率密度函数;

（3）求 $t=\frac{\pi}{2\omega}$ 时 $X(t)$ 的分布函数.

解：（1）$V=0$时，样本函数为$x(t)=0$；

$V=\frac{2}{3}$时，样本函数为$x(t)=\frac{2}{3}\cos\omega t$；

$V=1$时，样本函数为$x(t)=\cos\omega t$。

（2）$X(0)=V\sim U[0,1]$，概率密度函数为 $f_1(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1)\\ 0, & x\notin(0,1)\end{cases}$；

$X(\frac{\pi}{4\omega})=\frac{\sqrt{2}}{2}V$，概率密度函数为 $f_2(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, & x\in(0,1/\sqrt{2})\\ 0, & x\notin(0,1/\sqrt{2})\end{cases}$

（3）$X(\frac{\pi}{2\omega})\equiv 0$（服从退化分布），其分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$

2.2 随机过程的分布律和数字特征

一. 有限维分布族

定义： 设 $X_T=\{X(t),t\in T\}$ 是随机过程，对任意的 $n\geq 1$ 和 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，随机向量 $(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$ 的联合分布函数为

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2\cdots,x_n)=P\{X(t_1)\leq x_1,X(t_2)\leq x_2,\cdots,X(t_n)\leq x_n\}$$

这些分布函数的全体

$$F=\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2\cdots,x_n),\quad t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,\quad n\geq 1\}$$

称为随机过程 $X_T=\{X(t),t\in T\}$ 的有限维分布函数族

有限维分布函数族满足：

(1) 横向相容：对$(1,2,...,n)$的任何置换τ,

$$F_{t_{\tau(1)},...,t_{\tau(n)}}(x_{\tau(1)},...,x_{\tau(n)})=F_{t_1,...,t_n}(x_1,...,x_n)$$

(2) 纵向相容：

$$\lim_{x_{n+1}\to\infty}F_{t_1,...,t_n,t_{n+1}}(x_1,...,x_n,x_{n+1})=F_{t_1,...,t_n}(x_1,...,x_n)$$

定理:(kolmogorov)给定分布函数族

$\left\{ F_{t_1,t_2,\cdots t_n}(x_1, x_2, \cdots x_n), n = 1, 2, \cdots \;,\; t_i \in T \right\}$，即对任何

$t_1, t_2, \cdots t_n \in T$，$F_{t_1,t_2,\cdots t_n}(x_1, x_2, \cdots x_n)$都是$n$维分布函数，

如果这组分布函数族满足横向相容性和纵向相容性，

那么一定存在一个概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$以及其上的随

机过程$X(t), t \in T$使得对所有n，所有$t_1, ... t_n \in T$,

$$P(X(t_1) \le x_1, ..., X(t_n) \le x_n) = F_{t_1,t_2,\cdots t_n}(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

注1： 随机过程在不同的时间点的随机变量不一定独立，它们的联合分布要根据具体过程的性质加以计算，而不能直接把它们当成独立处理。

注2： 构造的概率空间和随机过程不唯一；

有些维特征函数族

$$\Phi=\left\{g_{t_1,t_2,\cdots t_n}\left(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_n\right):t_1,t_2,\cdots t_n\in T,n\geq 1\right\}$$

其中

$$g_{t_1,t_2,\cdots t_n}\left(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_n\right)=E\left[\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k X(t_k)\right\}\right]$$

注 3：有限维分布函数族完整描述了随机过程的概率特征；换句话讲， 有限维特征函数族也完整描述了随机过程的概率特征。

例 6. 令 $X(t)=A\cos t,\ -\infty<t<+\infty$，其中 A 是随机变量，其分布律为 $P(A=i)=\frac{1}{3}, i=1,2,3$，试求：

（1）随机过程 $\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$ 的一维分布函数 $F_{\frac{\pi}{4}}(x)$；

（2）随机过程 $\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$ 的二维分布函数 $F_{0,\frac{\pi}{3}}(x_1, x_2)$.

解：（1） $X(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}A$，其分布律为

$X(\frac{\pi}{4})$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}/2$
P	1/3	1/3	1/3

$$F_{\frac{\pi}{4}}(x)=\begin{cases} 0, & x<\sqrt{2}/2 \\ 1/3, & \sqrt{2}/2\le x<\sqrt{2} \\ 2/3, & \sqrt{2}\le x<3\sqrt{2}/2 \\ 1, & x\ge 3\sqrt{2}/2 \end{cases}$$

（2） $X(0)=A$， $X(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}A$

$$F_{0,\frac{\pi}{3}}(x_1, x_2)=P\{A\le x_1,\frac{A}{2}\le x_2\}=P\{A\le x_1, A\le 2x_2\}$$

$$=\begin{cases} P\{A\le x_1\}, & x_1\le 2x_2 \\ P\{A\le 2x_2\}, & x_1>2x_2 \end{cases}$$

（要比较 x_1 和 $2x_2$ 的大小）

$$=\begin{cases} P\{\varnothing\}, & x_1\le 2x_2, x_1<1 \text{ 或 } x_1>2x_2, x_2<1/2 \\ P\{A=1\}, & x_1\le 2x_2, 1\le x_1<2 \text{ 或 } x_1>2x_2, 1/2\le x_2<1 \\ P\{A=1\}+P\{A=2\}, & x_1\le 2x_2, 2\le x_1<3 \text{ 或 } x_1>2x_2, 1\le x_2<3/2 \\ P\{\Omega\}, & x_1\le 2x_2, x_1\ge 3 \text{ 或 } x_1>2x_2, x_2\ge 3/2 \end{cases}$$

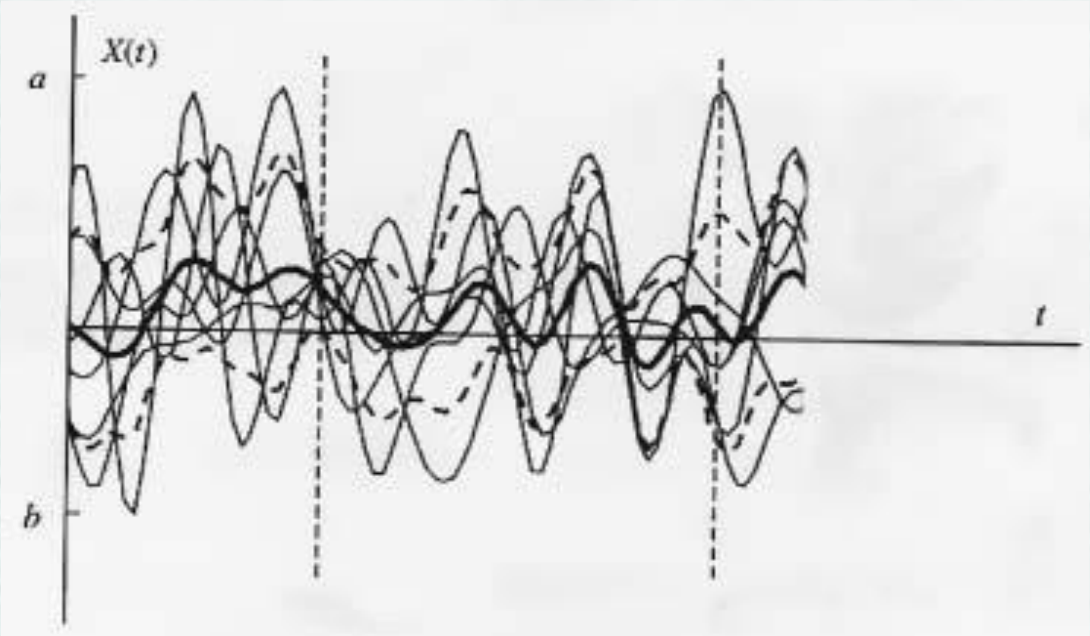
$$=\begin{cases} 0, & x_1\le 2x_2, x_1<1 \text{ 或 } x_1>2x_2, x_2<1/2 \\ 1/3, & x_1\le 2x_2, 1\le x_1<2 \text{ 或 } x_1>2x_2, 1/2\le x_2<1 \\ 2/3, & x_1\le 2x_2, 2\le x_1<3 \text{ 或 } x_1>2x_2, 1\le x_2<3/2 \\ 1, & x_1\le 2x_2, x_1\ge 3 \text{ 或 } x_1>2x_2, x_2\ge 3/2 \end{cases}$$

随机过程的数字特征

一、均值函数

在任意时刻 t_1, 随机过程是一个一维随 机变 量$X(t_1)$, 随机变量 $X(t_1)$的数学期望 $E[X(t_1)]$ 就是t_1时刻随机过程的数学期 望. 对于不同 的时刻 t, 随机过程的均值过程是一个确定 的时间函数 , 记为$E[X(t)]$或$m_X(t)$.则有 :

$$E[X(t)] = m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x, t) dx$$



$m_X(t)$表示噪声电压的瞬时统计平均值

噪声电压

细实线是样本函数; 粗实线是数学期望

随机过程的数学期望是随机过程在某时刻t的统计平均，每个样本函数都在它的上下摆动。

2. 若对任意的 $t \in T$，$E[X(t)]^2 < +\infty$，则称 X_T 为二阶矩过程，

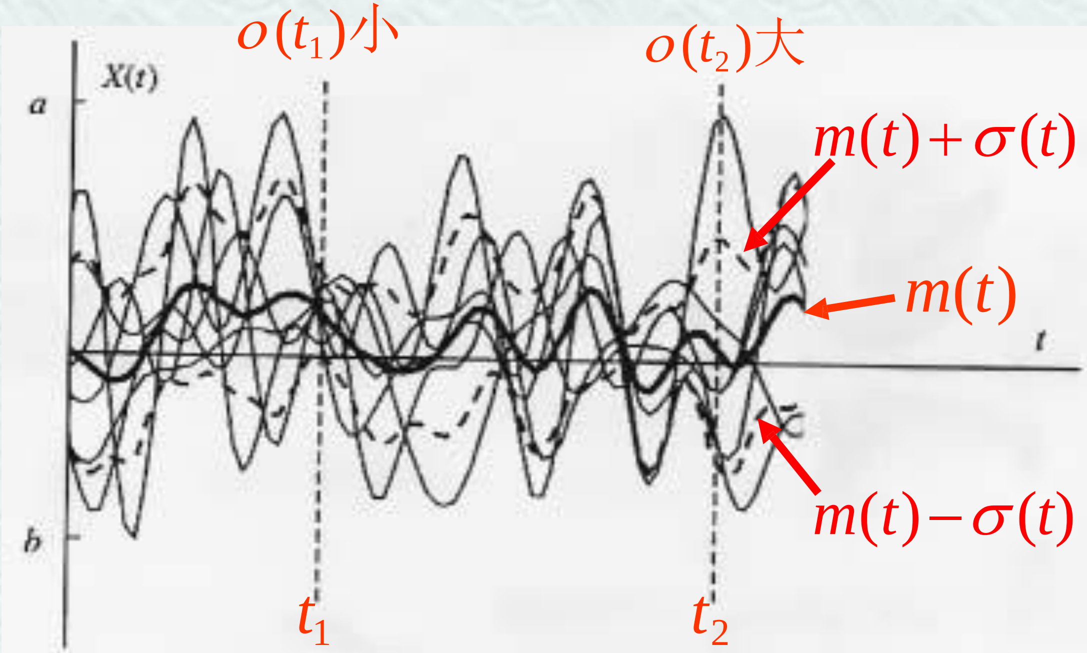
协方差函数： $B_X(s,t) = E[(X(s) - m_X(s))(X(t) - m_X(t))], \quad s,t \in T$

方差函数： $D_X(t) = B_X(t,t) = E[(X(t) - m_X(t))]^2, t \in T$

相关函数： $R_X(s,t) = E[X(s)X(t)], s,t \in T$ 为 X_T

表征了随机过程在任意两个时刻之间的关联程度

说明： $B_X(s,t) = R_X(s,t) - m_X(s)m_X(t)$



$\sigma_X(t)$也称为随机过程的均方差或标准差

方差描述的是随机过程所有的样本函数相对于数学期望的离散程度。

如果$X(t)$是噪声电压，$m(t)$就是电压的瞬时统计平均值，而方差$\sigma^2(t)$就表征消耗在单位电阻上的瞬时交流功率的统计平均值。

例 7. 设随机过程 $X(t)=Y\cos(\theta t)+Z\sin(\theta t), t>0$，其中，$Y,Z$ 是相互独立的随机变量，且 $EY=EZ=0$，$DY=DZ=\sigma^2$，求 $\{X(t),t>0\}$ 的均值函数 $m_X(t)$ 和协方差函数 $B_X(s,t)$.

解：$m_X(t)=E[X(t)]=\cos(\theta t)EY+\sin(\theta t)EZ=0,\ t>0$，

$$B_X(s,t)=R_X(s,t)-m_X(s)m_X(t)=E[X(s)X(t)]$$

$$=E[Y^2\cos(\theta t)\cos(\theta s)+YZ\sin(\theta t)\cos(\theta s)$$

$$+YZ\sin(\theta s)\cos(\theta t)+Z^2\sin(\theta t)\sin(\theta s)]$$

$$=\cos(\theta t)\cos(\theta s)E[Y^2]+\sin(\theta t)\sin(\theta s)E[Z^2]$$

$$=\cos(\theta t)\cos(\theta s)DY+\sin(\theta t)\sin(\theta s)DZ$$

$$=\sigma^2\cos\theta(t-s)$$

例 8. 设随机过程 $X(t)=Y+Zt, t>0$，其中，Y, Z 是相互独立的 $N(0,1)$ 随机变量，求 $\{X(t), t>0\}$ 的一、二维分布.

解：（1） $\forall t>0, X(t)=Y+Zt \sim N(0,1+t^2)$

（2） $X(s)=Y+Zs, X(t)=Y+Zt$，即 $(X(s),X(t))=(Y,Z)\begin{pmatrix}1 & 1\\ s & t\end{pmatrix}$，

Y, Z 是相互独立的 $N(0,1)$ 随机变量，故 (Y, Z) 服从二维正态分布，从而 $(X(s),X(t))$ 服从二维正态分布。

$$E(X(s),X(t))^T=(0,0)^T, \quad D[X(s)]=1+s^2, D[X(t)]=1+t^2$$

$$Cov(X(s),X(t))=R(X(s)X(t))=E(Y+sZ)(Y+Zt)=1+st$$

$(X(s),X(t))$ 的协方差矩阵为 $B=\begin{bmatrix}1+s^2 & 1+st\\ 1+st & 1+t^2\end{bmatrix}$,

故 $(X(s),X(t))\sim N(\vec{0},B), s,t>0$

三．描述两个随机过程之间的线性关系

设 $\{X(t), t \in T\}$，$\{Y(t), t \in T\}$ 是两个二阶矩过程，则

互协方差函数：$B_{XY}(s,t) = E[(X(s) - m_X(s))(Y(t) - m_Y(t)]$

互相关函数：称 $R_{XY}(s,t) = E[X(s)Y(t)],\ s,t \in T$

说明： $B_{XY}(s,t) = R_{XY}(s,t) - m_X(s)m_Y(t)$

例 9. 设有两个随机过程 $X(t)=g_1(t+\varepsilon)$ 和 $Y(t)=g_2(t+\varepsilon)$，其中 $g_1(t), g_2(t)$ 都是周期为 L 的周期方波，ε 服从 $(0,L)$ 上的均匀分布，求互相关函数 $R_{XY}(t,t+\tau)$ 的表达式。

解：$R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]=E[g_1(t+\varepsilon)g_2(t+\tau+\varepsilon)]$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g_1(t+x)g_2(t+\tau+x)f_\varepsilon(x)dx=\frac{1}{L}\int_0^L g_1(t+x)g_2(t+\tau+x)dx$$

$$\overset{v=t+x}{=}\frac{1}{L}\int_t^{t+L}g_1(v)g_2(v+\tau)dv\overset{\text{周期为L}}{=}\frac{1}{L}\int_0^L g_1(v)g_2(v+\tau)dv$$

例 10. 设 $X(t)$ 为信号过程，$Y(t)$ 为噪声过程。令 $W(t)=X(t)+Y(t)$，求 $W(t)$ 的均值函数和相关函数.

解：$m_W(t)=m_X(t)+m_Y(t)$，

$$R_W(s,t)=EW(s)W(t)=E[X(s)+Y(s)][X(t)+Y(t)]$$

$$=R_X(s,t)+R_{XY}(s,t)+R_{XY}(t,s)+R_Y(s,t)$$

2.3 复随机过程

一．定义：设$\{X_t,t\in T\}$，$\{Y_t,t\in T\}$是取实数值的两个随机过程，若对任意$t\in T$，$Z_t=X_t+iY_t$，其中$i=\sqrt{-1}$则称$\{Z_t,t\in T\}$为复随机过程.

二．数字特征：当$\{X_t,t\in T\}$和$\{Y_t,t\in T\}$是二阶矩过程时，$\{Z_t,t\in T\}$的

均值函数：$m_Z(t)=EZ_t=EX_t+iEY_t$

相关函数：$R_Z(s,t)=E[Z_s\bar{Z}_t]$,

协方差函数：$B_Z(s,t)=E[(Z_s-m_Z(s))\overline{(Z_t-m_Z(t))}]=R_Z(s,t)-m_Z(s)\overline{m_Z(t)}$

方差函数：$D_Z(t)=E[|Z_t-m_Z(t)|]^2$

结论：（1）对称性　$B_Z(s,t)=\overline{B_Z(t,s)}$；

（2）非负定性 $\sum_{i,j=1}^{n}B_Z(t_i,t_j)a_i\bar{a}_j\geq 0$，其中$a_i,a_j$是复数

- 互相关函数：$R_{XY}(s,t)=E[X_s\bar{Y}_t]$,
- 互协方差函数：$B_{XY}(s,t)=E[X_S-m_X(s)]\overline{[Y_t-m_Y(t)]}$

例 11. 设复随机过程 $Z_t=\sum_{k=1}^{n}X_k e^{i\omega_k t}$， $t\geq 0$，其中 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立的，且服从 $N(0,\sigma_k^2)$ 的随机变量，$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 是常数，求 $\{Z_t,t\geq 0\}$ 的均值函数 $m(t)$ 和相关函数 $R(s,t)$.

解： $m(t)=EZ_t=E\sum_{k=1}^{n}X_k e^{i\omega_k t}=\sum_{k=1}^{n}EX_k e^{i\omega_k t}=\sum_{k=1}^{n}e^{i\omega_k t}EX_k=\sum_{k=1}^{n}e^{i\omega_k t}\cdot 0=0$

$$R(s,t)=EZ_s\overline{Z}_t=E[\sum_{k=1}^{n}X_k e^{i\omega_k s}\cdot\overline{\sum_{l=1}^{n}X_l e^{i\omega_l t}}]=E[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}X_l e^{-i\omega_l t}X_k e^{i\omega_k s}]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}e^{i(\omega_k s-\omega_l t)}EX_l X_k=\sum_{k=1}^{n}e^{i\omega_k(s-t)}\sigma_k^2$$

(注意： $k\neq l$ 时， $EX_k X_l=EX_k EX_l=0$ ）

2.4 几种重要的随机过程

定义：设随机过程$X=\{X(t);t\in T\}$的均值函数为$\mu_X(t)=0$,对$s\neq t$，$R_X(s,t)=0$,则称X为白噪声.

2.4 几种重要的随机过程

一. 正交增量过程

1. 定义：设$\{X(t),t\in T\}$是零均值的二阶矩过程，若对任意的 $t_1<t_2\le t_3<t_4\in T$，有 $E[X(t_2)-X(t_1)][\overline{X(t_4)-X(t_3)}]=0$，则称 $\{X(t),t\in T\}$为正交增量过程。

不妨设 $T=[a,b]$ 为有限区间，且规定 $X(a)=0$

2. 结论：正交增量过程的协方差函数由方差确定，即

$$B_X(s,t)=R_X(s,t)=\sigma_X^2(\min(s,t))$$

证：当 $a<s<t<b$ 时，有

$$B_X(s,t)=R_X(s,t)-m_X(s)\overline{m_X(t)}=R_X(s,t)$$

$$=EX(s)\overline{X(t)}=E[X(s)(\overline{X(t)-X(s))+X(s)}]$$

$$=E[X(s)(\overline{X(t)-X(s))}]+E[X(s)\overline{X(s)}]\quad=0+\sigma_X^2(s)=\sigma_X^2(s)$$

$$E[X(s)\overline{X(t)-X(s)}]=E[X(s)-X(a)][\overline{X(t)-X(s)}]=0$$

同理，当$a<t<s<b$时，

$$B_X(s,t)=R_X(s,t)=E[X(s)-X(t)+X(t)]\overline{(X(t)-X(a))}$$

$$=E[X(s)-X(t)]\overline{(X(t)-X(a))}+E[X(t)\overline{(X(t)}]=0+\sigma_X^2(t)$$

$$=\sigma_X^2(t)$$

即 $B_X(s,t)=R_X(s,t)=\sigma_X^2(\min(s,t))$

二. 独立增量过程

1. 独立增量过程： 设$\{X(t), t \in T\}$是随机过程，若对任意的正整数n和$t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T$，随机变量$X(t_2) - X(t_1)$，$X(t_3) - X(t_2)$，$\cdots, X(t_n) - X(t_{n-1})$是相互独立的，则称$\{X(t), t \in T\}$是独立增量过程，又称可加过程。

说明：正交增量过程与独立增量过程有交集，如

二阶矩存在且零均值的独立增量过程是正交增量过程。

[即：对任意的 $t_1 < t_2 \le t_3 < t_4 \in T$，有

$$E[X(t_2)-X(t_1)]\overline{[X(t_4)-X(t_3)]} = E[X(t_2)-X(t_1)]E\overline{[X(t_4)-X(t_3)]} = 0$$]

2. 平稳独立增量过程： 设$\{X(t),t\in T\}$是独立增量随机过程，若对任意的$s<t$，随机变量$X(t)-X(s)$的分布仅依赖于$t-s$，则称$\{X(t),t\in T\}$是平稳独立增量过程。

例 12. 某损耗性设备的寿命为X，使用时坏掉一个换一个，X_k表示第k个的使用寿命。设$N(t)$表示$[0,t]$内更换的个数，则$\{N(t),t\ge 0\}$是随机过程；对任意的$0\le t_1<t_2<\cdots<t_n$，$N(t_1),N(t_2)-N(t_1),\cdots N(t_n)-N(t_{n-1})$分别表示在时间段$[0,t_1],[t_1,t_2],\cdots[t_n,t_{n-1}]$更换的个数，可以认为它们是相互独立的随机变量，即$\{N(t),t\ge 0\}$是独立增量过程。对任意的$s<t$，随机变量$N(t)-N(s)$的分布仅依赖于$t-s$，即$\{N(t),t\ge 0\}$是平稳独立增量过程。

三. 马尔可夫过程

1. 定义： 设$\{X(t), t\in T\}$是随机过程，若对任意的正整数n和$t_1<t_2<\cdots<t_n\in T$，$P(X(t_1)=x_1,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1})>0$，且其条件分布

$$P\{(X(t_n)\le x_n \mid X(t_1)=x_1,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}=P\{(X(t_n)\le x_n \mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\},$$

则称$\{X(t), t\in T\}$为马尔可夫过程。

马尔可夫性——无后效性。（系统在已知现在所处状态的条件下，未来的状态与过去所处的状态无关）

2. 结论：独立增量过程是马尔可夫过程。

证明：（参见华中科技大学出版社《随机过程内容、方法与技巧》23 页疑难解析 2。）

四．正态过程和维纳过程

1.正态过程：设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程，若对任意的正整数n和$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$是$n$维正态随机变量，则称$\{X(t),t\in T\}$为正态过程或高斯过程。

2. 维纳过程：设$\{W(t),t\geq 0\}$是随机过程，若

（1）$W(0)=0$；

（2）$\{W(t),t\geq 0\}$是平稳的独立增量过程；

（3）对任意的$0\leq s<t$，$W(t)-W(s)\sim N(0,\sigma^2(t-s)),\sigma^2>0$，

则称$\{W(t),t\geq 0\}$为维纳过程，也称为布朗运动过程。

（如：通信中的电流热噪声）

3. 结论：设$\{W(t),t\geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程，则

（1）对任意$t\geq 0$，$W(t)\sim N(0,\sigma^2 t)$；

（2）对任意$s,t>a\geq 0$，

$$E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(a))]=\sigma^2\min(s-a,t-a)$$

特别，$R_W(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$（上式中，取$a=0$）

证明：(1) 由定义显然.

(2). 不妨设$s\leq t$，

$$\begin{aligned}
&E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(a))]\\
&=E(W(s)-W(a))[(W(t)-W(s))+(W(s)-W(a))]\\
&=E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(s))]+E[W(s)-W(a)]^2\\
&=E(W(s)-W(a))\cdot E(W(t)-W(s))+E[W(s)-W(a)]^2 \quad \text{（独立增量）}\\
&=0\cdot 0+E[W(s)-W(a)]^2=E[W(s)-W(a)]^2\\
&=E[W(s)-W(a)]^2-[E(W(s)-W(a))]^2\\
&=D[W(s)-W(a)]=\sigma^2(s-a)
\end{aligned}$$

（由定义条件（3））

（3）维纳过程是正态过程

证明：设$\{W(t),t\geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程，则对任意的正整数n和$0\leq t_1<t_2<\cdots<t_n$，$W(t_1),\ W(t_2)-W(t_1)\ \cdots,W(t_n)-W(t_{n-1})$相互独立，且

$$W(t_k)-W(t_{k-1})\sim N(0,\sigma^2(t_k-t_{k-1})),k=1,2,\cdots,n,\quad W(t_0)\overset{def}{=}W(0)=0,$$

所以$(W(t_1),W(t_2)-W(t_1),\cdots,W(t_n)-W(t_{n-1}))$是$n$维正态随机变量，又

$$(W(t_1),W(t_2)\ \cdots,W(t_n))$$

$$=(W(t_1),W(t_2)-W(t_1),\cdots,W(t_n)-W(t_{n-1}))\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\0&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix},$$

故$(W(t_1),W(t_2)\ \cdots,W(t_n))$是$n$维正态随机变量，所以$\{W(t),t\geq 0\}$是正态过程。

五．平稳过程

1. 严平稳过程：设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程，若对任意的常数τ和正整数n，$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，$t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau\in T$，$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$与$(X(t_1+\tau),X(t_2+\tau),\cdots,X(t_n+\tau))$有相同的联合分布，则称$\{X(t),t\in T\}$为严平稳过程，也称狭义平稳过程。

2.宽平稳过程： 设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程，如果

（1）$\{X(t),t\in T\}$是二阶矩过程；

（2）对任意 $t\in T$， $m_X(t)=EX(t)=$常数；

（3）对任意 $s,t\in T$， $R_X(s,t)=E[X(t)X(s)]=R_X(s-t)$

（只与$s-t$有关），则称$\{X(t),t\in T\}$为宽平稳过程，也称广义平稳过程。**简称**为平稳过程.

3. 结论： 宽平稳过程不一定是严平稳过程；

只有当二阶矩存在时，严平稳过程是宽平稳过程；

对正态过程来说，二者是一样的.

例 13. 设是随机过程 $X(t)=Y\cos(\theta t)+Z\sin(\theta t), t>0$，

其中，Y, Z 是相互独立的随机变量，且 $EY=EZ=0$，

$DY=DZ=\sigma^2$，证明：$\{X(t), t\in T\}$为广义平稳过程.

证明：$\forall t>0,\ m_X(t)=E[X(t)]=\cos(\theta t)EY+\sin(\theta t)EZ=0,$

$$R_X(s,t)=E[X(t)X(s)]=E[Y\cos(\theta t)+Z\sin(\theta t)][Y\cos(\theta s)+Z\sin(\theta s)$$

$$=E[Y^2\cos(\theta t)\cos(\theta s)+YZ(\cos(\theta t)\sin(\theta s)+\sin(\theta t)\cos(\theta s))$$

$$+Z^2\sin(\theta t)\sin(\theta s)]$$

$$=\cos(\theta t)\cos(\theta s)E(Y^2)+0+\sin(\theta t)\sin(\theta s)E(Z^2)$$

$$=\sigma^2\cos[(t-s)\theta]$$

故$\{X(t), t\in T\}$为广义平稳过程。