第二章　线性常微分方程组

一、一阶微分方程组初值问题解的存在唯一性

二、线性微分方程组解的结构

三、常系数线性微分方程组

四、微分方程组和高阶微分方程之间的互化

五、二阶变系数线性微分方程

一、一阶微分方程组初值问题解的存在唯一性

一阶线性常微分方程组

$$\begin{cases} y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ y_i(x_0) = y_{i0} \quad i = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

$$D = \left\{ \left| x - x_0 \right| \le a, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i0})^2} \le b \right\}$$

是$n+1$维空间中的有界闭区域,

上页 下页 返回

如果存在$L>0$，对

$\forall(x,y_1,\cdots,y_n),(x,\tilde{y}_1,\cdots,\tilde{y}_n)\in D$成立

$$\left|f_i(x,y_1,\cdots,y_n)-f_i(x,\tilde{y}_1,\cdots,\tilde{y}_n)\right|\le L\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(y_j-\tilde{y}_j)^2},$$

$$i=1,2,\cdots,n$$

则称 f_i 在 D 上关于 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 满足 Lipschitz 条件，

定理 1：对上述一阶线性常微分方程组，假定

（1） $f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 在 D 上连续

（2） f_i 在 D 上关于 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 满足 Lipschitz 条件，

则初值问题在区间$\left|x-x_0\right|\le h$上有唯一解

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{\sqrt{nM}}\right\}\quad M=\max_{i,D}\left|f_i(x,y_1,\cdots,y_n)\right|。$$

上页 下页 返回

二、线性微分方程组解的结构

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j + f_i(x), \quad i = 1,2,\cdots,n \qquad (2.1)$$

假定$a_{ij}(x), f_i(x)$在某区间(a,b)内连续。

当$f_i(x) \equiv 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$时，方程组（2.1）称为齐次的；否则它称为非齐次的

记

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

上页 下页 返回

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \underline{f}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

方程组（2.1）可以写成矩阵的形式

$$\underline{y}' = A(x)\underline{y} + \underline{f}(x) \qquad (2.2)$$

其相应的齐次方程组

$$\underline{y}' = A(x)\underline{y} \qquad (2.3)$$

上页 下页 返回

定理 2：设 $\underline{z_1}(x)$ 和 $\underline{z_2}(x)$ 是齐次方程组（2.3）的解，则对任意常数 c_1, c_2，

$$\underline{y} = c_1 \underline{z_1} + c_2 \underline{z_2}$$

也是方程组（2.3）的解。　　迭加原理

记

$$\underline{z_j}(x) = \begin{bmatrix} z_{1j}(x) \\ z_{2j}(x) \\ \vdots \\ z_{nj}(x) \end{bmatrix} \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

上页 下页 返回

假设

$$\underline{z_1}(x), \underline{z_2}(x), \cdots, \underline{z_n}(x) \qquad (2.4)$$

是齐次方程组（2.3）的 n 个解向量.

行列式

$$W(x) = \begin{vmatrix} z_{11}(x) & z_{12}(x) & \cdots & z_{1n}(x) \\ z_{21}(x) & z_{22}(x) & \cdots & z_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{n1}(x) & z_{n2}(x) & \cdots & z_{nn}(x) \end{vmatrix} \qquad (2.5)$$

称为解组（2.4）的 Wronsky 行列式

定理 3：解组（2.4）的 Wronsky 行列式满足

$$W(x)=W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} trA(x)dx}$$ 。（2.6）

其中 $x_0\in(a,b)$，$trA(x)$ 是矩阵 $A(x)$ 的迹，即

$$trA(x)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(x)$$

Liouville公式

证明：$z_{ik}^{/}(x)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}z_{jk}(x)$

$$\frac{dW}{dx}=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{i1}^{/} & z_{i2}^{/} & \cdots & z_{2n}^{/} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_{j1} & \sum_{j=1}^{nn} a_{ij} z_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} W = (trA(x))W
$$

从中解出 W 即得 $W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} trA(x)dx}$

如果 $W(x_0) = 0$，则对 (a,b) 中的一切 x， $W(x) = 0$；

如果 $W(x_0) \neq 0$，则对 (a,b) 中的一切 x， $W(x) \neq 0$

定义：对 $\underline{z_1}(x), \underline{z_2}(x), \cdots, \underline{z_n}(x)$ 若存在不全为零的常数 $c_1, \cdots, c_n$，使得 $\sum_{i=1}^{n} c_i \underline{z_i}(x) = 0$，则称 $\underline{z_1}(x), \underline{z_2}(x), \cdots, \underline{z_n}(x)$ 线性相关，否则称为线性无关.

解组 $\underline{z_1}(x), \underline{z_2}(x), \cdots, \underline{z_n}(x)$ 线性无关的充分必要条件是它们的 Wronsky 行列式 $W(x) \neq 0 \quad x \in (a,b)$.

齐次方程组（2.3）在区间 (a,b) 上一定存在 n 个线性无关的解向量 $\underline{z_1}(x), \underline{z_2}(x), \cdots, \underline{z_n}(x)$,其通解为

$$\underline{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{z_i}(x),$$

基本解组

其中 $c_1, \cdots, c_n$ 是任意常数。

上页 下页 返回

定理 4：设 $B(x)$ 是齐次方程组（2.3）的一个基本解矩阵，则

$$\underline{y}=B(x)(\underline{c}+\int B^{-1}(x)\underline{f}(x)dx)$$ （2.7） 常数变易公式

是非齐次方程组（2.2）的通解，这里 $\underline{c}$ 是 n 维任意常数向量。

证明： $B(x)\underline{c}$ 是齐次方程组（2.3）的通解。

用常数变易法可以求非齐次方程组（2.2）的解。

将 $\underline{y}=B(x)\underline{c}(x)$ 代入方程（2.2），有

$$B'(x)\underline{c}(x)+B(x)\underline{c}'(x)=A(x)B(x)\underline{c}(x)+\underline{f}(x)$$

$B'(x)=A(x)B(x)$ 并且 $B^{-1}(x)$ 存在，于是

$$\underline{c}'(x)=B^{-1}(x)\underline{f}(x)$$

$$\underline{c}(x)=\underline{c}+\int B^{-1}(x)\underline{f}(x)dx$$

特解 $\underline{y_p}(x)=B(x)\int B^{-1}(x)f(x)dx$

例 1：求微分方程组

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = (-\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x} - 1)y_1 + (\dfrac{2}{x} - 1)y_2 \end{cases}$$

的基本解矩阵和通解。

解：将第一个方程 $y_2 = y_1' - y_1$ 代入第二个方程，得

$$x^2 y_1'' - 2xy_1' + 2y_1 = 0$$

令 $x = e^{\tau}$，于是方程化为 $\dfrac{d^2 y_1}{d\tau^2} - 3\dfrac{dy_1}{d\tau} + 2y_1 = 0$

上页 下页 返回

特征方程为：$\lambda^2-3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=1$

得解 $y_1=c_1e^{2\tau}+c_2e^{\tau}=c_1x^2+c_2x$

代入 $y_2=y_1'-y_1$，得 $y_2=c_1(2x-x^2)+c_2(1-x)$

从而方程的基本解矩阵是：$\begin{bmatrix} x^2 & x \\ 2x-x^2 & 1-x \end{bmatrix}$

通解是：$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix} x^2 \\ 2x-x^2 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}$

例 2：解非齐次方程组初值问题

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{2x}{1+x^2} y_1 \\ y_2' = -\dfrac{1}{x} y_2 + y_1 + x \\ y_1(1) = 0, y_2(1) = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

解：由第一个方程解得： $y_1 = c_1(1+x^2)$，

由初始条件 $c_1 = 0$ 即 $y_1 = 0$

上页 下页 返回

代入第二个方程，有 $y_2' = -\frac{1}{x} y_2 + x$

解得： $y_2 = \frac{c_2}{x} + \frac{1}{3} x^2$

由初始条件得$c_2 = 1$

解为：$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{3} x^2 \end{cases}$

例 3：解非齐次方程组初值问题

$$\begin{cases} y_1' = -\dfrac{2}{x} y_1 + 1 \\ y_2' = (1+\dfrac{2}{x}) y_1 + y_2 - 1 \\ y_1(1) = \dfrac{1}{3}, y_2(1) = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

解：先求齐次方程组的基本解矩阵

$$\begin{cases} y_1' = -\dfrac{2}{x} y_1 \\ y_2' = (1+\dfrac{2}{x}) y_1 + y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = \dfrac{1}{x^2} c_1, \\ y_2 = -\dfrac{1}{x^2} c_1 + c_2 e^x \end{array}$$

上页 下页 返回

基本解矩阵：

$$B(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^2} & 0\\ -\frac{1}{x^2} & e^x\end{bmatrix}\qquad B^{-1}(x)=\begin{bmatrix}x^2 & 0\\ e^{-x} & e^{-x}\end{bmatrix}$$

故方程组的通解是：

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^2} & 0\\ -\frac{1}{x^2} & e^x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{3}x\\ -\frac{1}{3}x\end{bmatrix}$$

从初始条件确定出 $c_1=c_2=0$，于是初值问题的解是：

$$y_1=\frac{1}{3}x,\quad y_2=-\frac{1}{3}x。$$

上页 下页 返回