考虑常系数二阶线性非齐次常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} y'' + by' + cy = f, \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1. \end{cases} \tag{1}$$

- 问题(1)是非齐次方程，非齐次初始条件
- 将问题（1）分解为以下两个问题

$$\begin{cases} x'' + bx' + cx = 0, \\ x(0) = y_0, x'(0) = y_1. \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} z'' + bz' + cz = f, \\ z(0) = z'(0) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

- 问题（2）是齐次方程，利用特征方程根的情况，再利用初始条件，可确定出（2）的解
- 问题(3)是非齐次方程，齐次初始条件的定解问题，利用齐次化原理可构造出其解
- 问题（2）的解加上问题（3）的解就可得问题（1）的解

对于问题（3）的求解：

- 先求出

$$\begin{cases} w'' + bw' + cw = 0, \\ w(0,\tau) = 0, w'(0,\tau) = f(\tau) \end{cases} \tag{4}$$

  的解$w(t,\tau)$的表达形式

- 问题（4）是齐次方程，可利用问题（2）的解题方法得出其解，注意问题（4）中$f(\tau)$就是问题（3）右端$f(t)$中把t换成τ的表达形式，

- 求出问题(4)的解$w(t,\tau)$的表达形式之后，利用以下积分就可得问题（3）的解

$$z(t) = \int_0^t w(t-\tau;\tau)d\tau$$

例如求解

$$\begin{cases} u_2''(t) + (\frac{2\pi}{l})^2 u_2(t) = \sin\frac{2\pi}{l}t \\ u_2(0) = u_2'(0) = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

分析：此定解问题类似于前面的问题(3),非齐次方程+齐次初始条件，所以可以利用齐次化原理求解
过程如下：先求$w(t,\tau)$的表达形式

$$\begin{cases} w'' + (\frac{2\pi}{l})^2 w = 0, \\ w(0,\tau) = 0, w'(0,\tau) = \sin\frac{2\pi}{l}\tau \end{cases} (1.2) \Rightarrow w(t,\tau) = c_1\cos\frac{2\pi}{l}t + c_2\sin\frac{2\pi}{l}t$$

由初始条件$\Rightarrow$ $c_1 = 0, c_2 = \frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{l}\tau$,所以$w(t,\tau) = \frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{l}\tau\sin\frac{2\pi}{l}t$,利用齐次化原理可得（1.1）的解

$$u_t(t) = \int_0^t w(t-\tau,\tau)d\tau = \int_0^t \frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{l}\tau\sin\frac{2\pi}{l}(t-\tau)d\tau \tag{1.3}$$

再利用三角函数的积化和差，求出积分

$$u_2(t) = -\frac{l}{4\pi}t\cos\frac{2\pi t}{l} + \frac{l^2}{8\pi^2}\sin\frac{2\pi}{l}t$$

- 注意在后面的学习和教材中，一般不会详细写过程了，一般就一句话：问题（1.1）利用齐次化原理可得解为（1.3）

类似的，考虑常系数一阶线性非齐次常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} y' + by = f, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

处理方法和二阶类似

- 问题（1）可分解为

$$\begin{cases} x' + bx = 0, \\ x(0) = y_0. \end{cases} (2), \begin{cases} z' + bz = f, \\ z(0) = 0. \end{cases} (3)$$

- 对于问题（3），可以先求出

$$\begin{cases} w'' + bw = 0, \\ w(0, \tau) = f(\tau) \end{cases} \tag{4}$$

  的解$w(t, \tau)$
- 问题（3）的解为

$$z(t) = \int_0^t w(t - \tau; \tau) d\tau$$

在第二章中，我们经常会用到的正交函数系有

$\{\sin\frac{n\pi}{l}x\}_{n=1}^{\infty}$,

$\{\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\}_{n=1}^{\infty}$,

$\{\cos\frac{n\pi}{l}x\}_{n=1}^{\infty}$,

$\{\cos\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\}_{n=1}^{\infty}, (0 < x < l)$

（证明过程类似思考题1）

思考练习：

1、$\int_0^l \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\begin{cases}\underline{\qquad\qquad} & m=n\\ \underline{\qquad\qquad} & m\neq n\end{cases}$

解：当$m\neq n$时，利用积化和差，

$$\int_0^l \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=-\frac{1}{2}\int_0^l[\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}-\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}]dx$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{l}{m+n}\sin\frac{(m+n)\pi x}{l}\Big|_0^l+\frac{1}{2}\frac{l}{m-n}\sin\frac{(m-n)\pi x}{l}\Big|_0^l=0$$

当$m=n$时，利用倍角公式

$$\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_0^l(1-\cos\frac{2n\pi x}{l})dx=\frac{l}{2}$$

2、方程的解

$$\begin{cases} u''(t)+\alpha^2 u(t)=f, \ \ t>0 \\ u(0)=c, u'(0)=d, \end{cases} \quad (1)$$

为_______

解：定解问题(1)可以分为以下定解问题

$$\begin{cases} u_1''(t)+\alpha^2 u_1(t)=0, \quad t>0 \\ u_1(0)=c, u_1'(0)=d, \end{cases} (2), \begin{cases} u_2''(t)+\alpha^2 u_2(t)=f, \quad t>0 \\ u_2(0)=0, u_2'(0)=0, \end{cases} (3)$$

定解问题(2)是齐次方程的定解问题，利用齐次线性方程的求解可得$u_1(t)=c\cos\alpha t+\frac{d}{\alpha}\sin\alpha t$

定解问题(3)是非齐次方程的定解问题，利用齐次化原理可得$u_2=\frac{1}{\alpha}\int_0^t t(\tau)\sin(t-\tau)d\tau$

所以原定解问题的解为

$$u=u_1+u_2=c\cos\alpha t+\frac{d}{\alpha}\sin\alpha t+\frac{1}{\alpha}\int_0^t t(\tau)\sin(t-\tau)d\tau$$

3、一阶常系数方程

$$\begin{cases} u'(t) + \beta^2 u(t) = f(t), & t > 0 \\ u(0) = c \end{cases}$$

的解为________

解：可以类似二阶非齐次方程的处理方法，原定解问题可以分解为

$$\begin{cases} u_1'(t) + \beta^2 u_1(t) = 0, \\ u_1(0) = c \end{cases} (1) \quad \begin{cases} u_2'(t) + \beta^2 u_2(t) = f, \\ u_2(0) = 0 \end{cases} (2)$$

问题（1）的解为$u_1 = ce^{-\beta^2 t}$

问题(2)类似于齐次化原理可得$u_2 = \int_0^t e^{-\beta^2(t-\tau)} f(\tau) d\tau$

所以原定解问题的解为

$$u = ce^{-\beta^2 t} + \int_0^t e^{-\beta^2(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$