Real Analysis 3.2

Hansong Huang

ECUST

At ECUST

2019.03

Lebesgue积分的初等性质

如无特别说明，以下提到函数都为可测函数.

定理3.2.1

(L1). $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 且 $f, g \in L^1$ 则

$$\int \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

$\alpha, \beta \geq 0$, 且 $f, g \geq 0$. 则

$$\int \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

(L2). σ-可加性$A_n \subseteq X$, 两两不交且可测，$X = \bigsqcup_n A_n$, 且$\int_X f$有定义，则

$$\int_X f d\mu = \sum \int_{A_n} f d\mu.$$

(L2') σ-可加性$A_n \subseteq X$, 两两不交且可测，$X = \bigsqcup_n A_n$, 且$\int_X f$有定义，则

$$\int_X f d\mu = \sum \int_{A_n} f d\mu.$$

思考：(L2) $\Rightarrow$(L2')

(L2). σ-可加性$A_n \subseteq X$, 两两不交且可测，$X = \bigsqcup_n A_n$, 且$\int_X f$有定义，则

$$\int_X f d\mu = \sum \int_{A_n} f d\mu.$$

(L2') σ-可加性$A_n \subseteq X$, 两两不交且可测，$\int_X f$有定义，则

$$\int_{\cup_n A_n} f d\mu = \sum \int_{A_n} f d\mu.$$

思考：(L2) $\Rightarrow$(L2')

$A = \cup_n A_n$,

$\widetilde{f}(x) = f(x), x \in A; \widetilde{f}(x) = 0, x \in A^c.$

$$X = A^c \cup A = A^c \bigsqcup A_0 \bigsqcup A_1 \bigsqcup \cdots$$

(L3) 单调性. 若$f \leq g$, 且$\int f$ 与$\int g$均存在，则$\int f \leq \int g$.

(L3) 单调性. 若$f \le g$, 且$\int f$ 与$\int g$均存在，则$\int f \le \int g$.

(L4) $A \subseteq X$, $\mu A = 0$, 则$\int_A f = 0$.

证明：(L4)

例1 绝对收敛级数的各项可以任意重排。

引理 （Chebyshev不等式）对任意$\sigma > 0$, σ
$\mu\{|\sigma| \geq \sigma\} \leq \int_X |f|$.

命题3.2.3 1. f可测，则$f \in L^1 \Leftrightarrow |f| \in L^1$.

2. 若$f \in L$,,1. 则f几乎处处有限,且$\{f \neq 0\}$有σ-有限测度.

命题3.2.3 1. f可测，则$f \in L^1 \Leftrightarrow |f| \in L^1$.

2. 若$f \in L$,,1. 则f几乎处处有限,且$\{f \neq 0\}$有σ-有限测度.

3. 如果存在$g \in L^1$, $|f| \leq g$, 则$|f| \in L^1$ (此时$f \in L^1$).

命题3.2.3 1. f可测，则$f \in L^1 \Leftrightarrow |f| \in L^1$.

2. 若$f \in L$,,1. 则f几乎处处有限,且$\{f \neq 0\}$有$\underline{\sigma\text{-有限测度}}$.

3. 如果存在$g \in L^1$, $|f| \leq g$, 则$|f| \in L^1$ (此时$f \in L^1$).

例：f有界，且$\mu X < +\infty$, 则$f \in L^1$.

比较

对可测函数而言，可积等价于绝对可积.

$$(R)\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

收敛(A-D判别法)

但

$$(L)\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

不存在.

注： $(L)\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$即$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dm(x)$

练习: $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx=+\infty$

例 $\int_0^1 x^a dx, \, (-2 < a < 1)$以及$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$的Riemann可积性与Lebesgue可积性.

例 $\int_0^1 x^a dx, \ (-2 < a < 1)$以及$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$ 的Riemann可积性与Lebesgue可积性.

(Sic.

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx = \int_0^\infty \frac{1}{t} |\sin t| dt = \infty.$$

命题3.2.4 若$f = g$ a.e., $\int_X f$存在，则g存在,且$\int_X f d\mu = \int_X g$.

什么样的测度μ, 完备测度.

在完备测度下，$f = g$ a.e., 则f可测等价于g可测.

分析：Step 1: 证明f可积则g可积.
Step 2. $g = f + (g - f)$
$g - f = 0$ a.e., 证明$\int (g - f) = 0$.
$\int g = \int f$.

反例：对于不完备的测度，上面命题3.2.4 未必成立！！

反例：对于不完备的测度，上面命题3.2.4 未必成立！！

$$X = \{1,2,3,4,5\}, \mathcal{A} = \{A_0, A_1, \emptyset, X\}, A_0 = \{2,4\}, A_1 =$$

$$\mu A_i = i, i = 0, 1; \quad \mu X = 1, \mu\emptyset = 0,$$

证明：μ是测度.

反例：对于不完备的测度，上面命题3.2.4 未必成立！！

$X = \{1,2,3,4,5\}, \mathcal{A} = \{A_0, A_1, \emptyset, X\}, A_0 = \{2,4\}, A_1 =$

$$\mu A_i = i, i = 0,1; \quad \mu X = 1, \mu\emptyset = 0,$$

证明：μ是σ-代数$\mathcal{A}$上的测度.
$\{4\}$是不可测集.

反例：对于不完备的测度，上面命题3.2.4 未必成立！！

$$X = \{1,2,3,4,5\}, \mathcal{A} = \{A_0, A_1, \emptyset, X\}, A_0 = \{2,4\}, A_1 =$$

$$\mu A_i = i, i = 0,1; \quad \mu X = 1, \mu\emptyset = 0,$$

证明：μ是σ-代数$\mathcal{A}$上的测度.

$f \equiv 1,\ g = 1 - \chi_{\{4\}},$

$g = f$, a.e. g不可测；f可测.

例：K, Cantor集. 计算

$$\int_0^1 \sin t \chi_K(t) dt.$$

例：K, Cantor集. 计算

$$\int_0^1 \sin t \chi_K(t) dt.$$

因为$mK = 0$, $\sin t \chi_K(t) = 0$, a.e.

$$\int_0^1 \sin t \chi_K(t) dt = \int_0^1 0 dt = 0.$$

思考: 回顾K^c为K的补集，计算

$$\int_0^1 \sin t \chi_{K^c}(t) dt.$$

练习3.2.5利用单调性证明：

(i) 若$\alpha \le f \le \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mu X < \infty$.则

$$\alpha \mu X \le \int_X f \le \beta \mu X$$

(ii)若$f \in L^1$, 则$|\int_X f| \le \int_X |f|$

思考：对于$f \in C[0,1]$, 证明

$$(R)\int_0^1 f(x)dx = (L)\int_0^1 f(x)dx.$$

思考：对于$f \in C[0,1]$, 证明

$$(R)\int_0^1 f(x)dx = (L)\int_0^1 f(x)dx.$$

提示：先对阶梯函数证明.

练习3.2.5利用单调性证明：

(i) 若$\alpha \le f \le \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mu X < \infty$.则

$$\alpha\mu X \le \int_X f \le \beta\mu X$$

(ii)若$f \in L^1$, 则$|\int_X f| \le \int_X |f|$

证明：$f \in L^1$,所以$|f| \in L^1$. 由

$$-|f| \le f \le |f|,$$

得

$$\int_X -|f| \le \int_X f \le \int_X |f|.$$

练习3.2.5(iii) 若$f, g \in L^1$, $f \le g$. a.e. 且$\int f = \int g$. 则$f = g$, a.e.

练习3.2.5(iii) 若$f, g \in L^1$, $f \leq g$. a.e. 且$\int f = \int g$. 则$f = g$, a.e.

(iii') 若$g \in L^1$, $g \geq 0$ a.e. 且$\int g = 0$ 则$g = 0$, a.e.

练习3.2.6设$f \in M^+(X)$, 那么$\upsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$, $A \to \int_A f$.定义了$\mathcal{A}$上的测度.

练习3.2.6设$f \in M^{+}(X)$, 那么$\upsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^{+}$, $A \to \int_A f$.定义了$\mathcal{A}$上的测度.

注：如果$f \in L^1$, 那么由$f = f^{+} - f^{-}$.可推出υ定义了$\mathcal{A}$上的<u>广义测度</u>.

练习3.2.6设$f \in M^+(X)$, 那么$\upsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$, $A \to \int_A f$.定义了$\mathcal{A}$上的测度.

注：如果$f \in L^1$, 那么由$f = f^+ - f^-$.可推出υ定义了$\mathcal{A}$上的<u>广义测度</u>.

例子: $X = [0,1]$，$\mathcal{A} = \mathcal{L}$, 对$f = -1$ 以及$f(x) = x - \frac{1}{2}$分别讨论$\upsilon A = \int_A f$.

练习：$f \geq 0$, $f \in L^1(X)$, 证明：存在简单函数$\{h_n\}$使得$0 \leq h_n \leq f$.

$$\int |f - h_n| \to 0.$$

练习：$f \geq 0$, $f \in L^1(X)$, 证明：存在简单函数$\{h_n\}$使得$0 \leq h_n \leq f$.

$$\int |f - h_n| \to 0.$$

什么时候h_n可以替换为阶梯函数?

练习3.2.7 $A_n \subseteq X$可测，(i) 下连续性. $\{A_n\}$为升列，$A = \cup_n A_n$. $f \in M^+(X)$ 则

$$\int_{A_n} f \to \int_A f.$$

(i') 下连续性. $\{A_n\}$为升列，$A = \cup_n A_n$. $f \in L^1(X)$ 则

$$\int_{A_n} f \to \int_A f.$$

练习3.2.7 $A_n \subseteq X$可测，(i) 下连续性. $\{A_n\}$为升列，$A = \cup_n A_n$. $f \in M^+(X)$ 则

$$\int_{A_n} f \to \int_A f.$$

(i') 下连续性. $\{A_n\}$为升列，$A = \cup_n A_n$. $f \in L^1(X)$ 则

$$\int_{A_n} f \to \int_A f.$$

(ii)下连续性. $\{A_n\}$为降列，$A = \cap_n A_n$. $f \in L^1(X)$ 则

$$\int_{A_n} f \to \int_A f.$$

(ii)下连续性. $\{A_n\}$为降列，$A=\cap_n A_n$. $f\in L^1(X)$ 则

$$\int_{A_n} f \to \int_A f.$$

条件$f\in L^1(X)$能否改为$f\in M^+(X)$?

理由？（证明你的结论或给出反例）

积分的绝对连续性

若$f \in L^1$, 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 对任意可测集e, $\mu e < \delta$, 那么成立$|\int_e f| < \varepsilon$.

积分的绝对连续性

若$f \in L^1$, 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 对任意可测集e, $\mu e < \delta$, 那么成立$|\int_e f| < \varepsilon$.

若$|f| \in L^1$, 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 对任意可测集e, $\mu e < \delta$, 那么成立$\int_e |f| < \varepsilon$.

证明：Step 1. 先对有界函数f给出证明.

Step 2. ??

Thank you!