三导丛书

高　等　代　数

(北大·第三版)

导教·导学·导考

徐　仲　陆　全　张凯院
吕全义　陈　芳　袁志杰　编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书通过简明的理论介绍与方法总结,以及对大量有代表性的典型例题进行分析、求解和评注,揭示了高等代数的解题方法与技巧。另外,书中给出了北大《高等代数》(第三版)教材中各章习题及补充题的解答;书末附录中提供了四套(四个学期)考试真题及解答。编写本书的目的在于帮助读者把握教学、学习和考试要求,巩固和加深对基本概念的理解,增强运算能力,提高分析问题、解决问题和应试能力。

本书可作为大学生学习高等代数课程的指导书,可供报考硕士研究生的读者以及有关教师及科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数(北大·第三版)导教·导学·导考/徐仲等编.—西安:西北工业大学出版社,2004.3

ISBN 7-5612-1741-2

Ⅰ.高… Ⅱ.徐… Ⅲ.高等代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 008299 号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072 电话:029-88493844
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西向阳印务有限公司
开　　本:850 mm×1168 mm 1/32
印　　张:19.375
字　　数:704 千字
版　　次:2004 年 3 月第 1 版 2004 年 3 月第 1 次印刷
印　　数:1~8000 册
定　　价:24.00 元

前　　言

高等代数是数学专业的一门主干基础课程，它对学生的抽象思维能力、逻辑推理能力的培养，以及后继课程的学习起着非常重要的作用。但是，学生在学习这门课程时普遍感到抽象，抓不住概念的实质，解题更感困难，总结不出一般的思考方法。为帮助学生消化课堂讲授的内容，加深对基础概念、基本理论的理解，提高解题的技能与技巧，我们根据长期从事高等代数教学的经验，编写了本书。

本书依照北京大学数学系几何与代数教研室编《高等代数》(第三版) 的自然章编排，每章由以下六部分内容组成。

一、内容提要——将相应章节的内容进行了简明扼要的叙述、归纳和总结，部分内容列表直观地进行了说明，特别是给出了一些主要计算方法的描述，以加深读者对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

二、知识网络图——以框图的方式概括了本章的知识结构，体系完整，一目了然。

三、重点、难点解读——对本章的知识重点与难点进行了总结归纳。

四、典型例题解析——精选了高等代数中具有代表性的部分典型例题，通过对典型例题的解题分析，归纳出高等代数中一些问题的解决方法和技巧，使读者可以举一反三、触类旁通。对于那些需要了解更多典型题的读者，可参阅作者编写的《理、工科线性代数常见题型解析及模拟题》（西北工业大学出版社，2002）一书，其中按专题对大量典型题进行了分类求解，并给出了全部习题的简要解答或分析过程。

五、课后习题全解——给出了《高等代数》（北大·第三版）各章习题及补充题的全部解答。由于高等代数中解题方法的多样性，对于具有多种解法或答案的习题，一般只给出一种解法或答案。

六、学习效果检测题及答案——根据教学内容精选了适量的检测题，并附有答案和部分提示。读者可以通过这些测试题进一步掌握解题要领，巩固和加深对基本概念的理解，增强解题的能力，检验自己对所学知识的掌握程度。

为了帮助读者了解并适应课程考试，书末附录中提供了四套（四个学期）考试真题及解答。

本书由徐仲、陆全主编，参加编写的还有张凯院、吕全义、陈芳、袁志杰等。

由于作者水平所限，对于书中的不妥或疏漏之处，敬请读者指正。

编　者

2003 年 12 月

目　　录

第 1 章　多　项　式

多项式理论是高等代数的重要内容之一.虽然它在整个高等代数课程中是一个相对独立而自成体系的部分,但却为高等代数所讲述的基本内容提供了理论依据.多项式理论中的一些重要定理和方法,在进一步学习数学理论和解决实际问题时常要用到.在中学阶段,对多项式的讨论主要着重于多项式的运算,很少涉及多项式的其他理论.因此,在学习本章时,要正确地掌握概念,学会严谨地推导和计算.

一、内 容 提 要

1. 数域

(1) 设 P 是至少含有两个数(或包含 0 与 1) 的数集,如果 P 中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零) 仍是 P 中的数,则称 P 为一个数域.

(2) **定理**　任何数域都包含有理数域 Q.在有理数域 Q 与实数域 R 之间存在无穷多个数域;在实数域 R 与复数域 C 之间不存在其他的数域.

2. 一元多项式的概念和运算

(1) 形式表达式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

称为数域 P 上文字 x 的一元多项式,其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in P$, n 是非负整数.当 $a_n \neq 0$ 时,称多项式 $f(x)$ 的次数为 n,记为 $(f(x)) = n$(或 $\deg(f(x)) = n$),并称 $a_n x^n$ 为 $f(x)$ 的首项,a_n 为 $f(x)$ 的首项系数.$a_i x^i$ 称为 $f(x)$ 的 i 次项,a_i 称为 $f(x)$ 的 i 次项系数.当 $a_n = \cdots = a_1 = 0, a_0 \neq 0$ 时,称多项式 $f(x)$ 为零次多项式,即 $(f(x)) = 0$;当 $a_n = \cdots = a_1 = a_0 = 0$ 时,称 $f(x)$ 为零多项式,零多项式是惟一不定义次数的多项式.

(2) 多项式可以进行加、减、乘运算,并有与整数相类似的性质.

多项式的次数有下列性质(设多项式 $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$):

1) 当 $f(x) \pm g(x) \neq 0$ 时

$$(f(x) \pm g(x)) \leq \max\{\ (f(x)),\ (g(x))\}$$

2) $(f(x)g(x)) = (f(x)) + (g(x))$

3) 所有系数在数域 P 中的一元多项式的全体记为 $P[x]$,称为数域 P 上的一元多项式环;数域 P 上一切次数小于 n 的多项式,再添上零多项式的全体,记为 $P[x]_n$.

3. 多项式的带余除法及整除性

(1) 定理(带余除法)　设 $f(x), g(x) \in P[x], g(x) \neq 0$,则存在惟一的多项式 $q(x), r(x) \in P[x]$,使

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

其中 $r(x) = 0$ 或 $(r(x)) < (g(x))$.称上式中 $q(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商,$r(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式 .

(2) 设 $f(x), g(x) \in P[x]$,如果存在多项式 $h(x) \in P[x]$,使

$$f(x) = h(x)g(x)$$

则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$(或 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除),记为 $g(x) \mid f(x)$.此时称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因式,$f(x)$ 为 $g(x)$ 的倍式,商 $h(x)$ 也记为 $\frac{f(x)}{g(x)}$,即 $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.用 $g(x) 8\ f(x)$ 表示 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$,就是不存在 $h(x)$,使 $f(x) = h(x)g(x)$ 成立 .

注　$P[x]$ 中的多项式不能作除法,而整除性不是多项式的运算,它是 $P[x]$ 中元素间的一种关系,即任给 $P[x]$ 中两个多项式 $f(x), g(x)$,可以判断 $g(x)$ 整除 $f(x)$ 或 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$.

(3) 如果 $g(x) \neq 0$,则 $g(x) \mid f(x)$ 的充分必要条件是用 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的余式 $r(x) = 0$.

(4) 零多项式只能整除零多项式;任一多项式一定能整除它自身;任一多项式都可以整除零多项式;零次多项式(非零常数) 能整除任一多项式 .

(5) 多项式 $f(x)$ 与 $cf(x)$　$(c \neq 0)$ 有相同的因式和倍式 .

(6) 两个多项式之间的整除关系不因系数域的扩大而改变 .

(7) 整除有以下性质:

1) 如果 $g(x) \mid f(x)$,则 $kg(x) \mid lf(x)$,其中 k 为非零常数,l 为常数 .

2) 如果 $f(x) \mid g(x), g(x) \mid h(x)$,则 $f(x) \mid h(x)$.

3) 如果 $f(x) \mid g_i(x)$,又 $u_i(x)$ 为任意多项式, $i = 1,2,\cdots,m$,则

$$f(x) \mid [u_1(x)g_1(x) + u_2(x)g_2(x) + \cdots + u_m(x)g_m(x)]$$

4) 如果 $f(x) \mid g(x), g(x) \mid f(x)$,则 $f(x) = cg(x)$,其中 c 为非零常数.

(8) 带余除法的计算格式:

用多项式 $g(x) \neq 0$ 除多项式 $f(x)$ 所得的商 $q(x)$ 和余式 $r(x)$ 可以通过如下两种格式进行:

1) 普通除法或长除法

$$\begin{array}{r|l}
 & \text{商 } q(x) \\
\hline
\text{除式 } g(x) & \text{被除式 } f(x) \\
 & \underline{-)\ q(x)g(x)} \\
 & \text{余式 } r(x)
\end{array}$$

2) 竖式除法

$$\begin{array}{r|l|l}
\text{除式 } g(x) & \text{被除式 } f(x) & \text{商 } q(x) \\
 & -)\ q(x)g(x) & \\
\cline{2-2}
 & \text{余式 } \quad r(x) &
\end{array}
\quad \text{或} \quad
\begin{array}{r|l|l}
\text{商 } q(x) & \text{被除式 } f(x) & \text{除式 } g(x) \\
 & -)\ q(x)g(x) & \\
\cline{2-2}
 & \text{余式 } \quad r(x) &
\end{array}$$

注　1. 在利用以上两种格式进行计算时,要逐步利用除式 $g(x)$ 确定商 $q(x)$ 中由高次到低次的项来消去被除式的首项,以得到次数低于 $g(x)$ 的多项式或零多项式 $r(x)$.

2. 当利用辗转相除法求两个多项式的最大公因式时,用竖式除法较为方便.

(9) 综合除法:

设以 $g(x) = x - a$ 除 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 时,所得的商 $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ 及余式 $r(x) = c_0$,则比较 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 两端同次幂的系数得

$$b_{n-1} = a_n,\ b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1},\cdots,b_0 = a_1 + ab_1,\ c_0 = a_0 + ab_0$$

这种计算可以排成以下格式进行:

$$\begin{array}{c|cccccc}
a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
 & & +)\ ab_{n-1} & +)\ ab_{n-2} & \cdots & +)\ ab_1 & +)\ ab_0 \\
\hline
 & b_{n-1}(=a_n) & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & \multicolumn{1}{|c}{c_0}
\end{array}$$

用这种方法求商和余式(的系数)称为综合除法.

注 1. 用综合除法进行计算时,被除式中所缺的项必须补上 0,否则计算就错了.

2. 当除式为 $ax+b \quad (a \neq 0)$ 时,因为

$$f(x)=(ax+b)q(x)+r(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)[aq(x)]+r(x)$$

所以以 $ax+b$ 除 $f(x)$ 可以先以 $x-\left(-\frac{b}{a}\right)$ 除 $f(x)$,得到商的 a 倍和余式,再以 a 除商的 a 倍得到商.

3. 当除式为一次式时,用综合除法比用带余除法来得方便.特别是有些问题需要多次以一次多项式作为除式的运算,综合除法更显示出它的作用.

4. 多项式的最大公因式

(1) 设 $f(x), g(x) \in P[x]$,如果 $d(x) \in P[x]$ 满足 $d(x) \mid f(x)$, $d(x) \mid g(x)$,则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式;又如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公因式都能整除 $d(x)$,则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

(2) 最大公因式有以下性质:

1) $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一定有最大公因式.两个零多项式的最大公因式是零多项式,它是惟一确定的.两个不全为零的多项式的最大公因式总是非零多项式,它们之间只有常数因子的差别;这时,最高次项系数为 1 的最大公因式是惟一确定的.$f(x)$ 与 $g(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式记为 $(f(x), g(x))$.

2) 设 $f(x), g(x) \in P[x]$, $g(x) \neq 0$,如果有

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式一定是 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的最大公因式,而 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的最大公因式也一定是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.特别地,有

$$(f(x), g(x))=(g(x), r(x))$$

(这也是用辗转相除法求最大公因式的根据.)

3) 设 $f(x), g(x) \in P[x]$,如果 $d(x) \in P[x]$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式,则必有 $u(x), v(x) \in P[x]$,使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

注 如果 $f(x), g(x), d(x) \in P[x]$,且有等式 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$ 成立,但 $d(x)$ 不一定是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.如取 $f(x)=x$, $g(x)=x+1$, $u(x)=x+2$, $v(x)=x-1$, $d(x)=2x^2+2x-1$,则有 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$,但 $d(x)$ 显然不是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

4) **最大公因式不因数域 P 的扩大而改变.**

(3) **最大公因式可以用辗转相除法求得:**

如果 $f(x), g(x) \in P[x], g(x) \neq 0$, **且有** $q_i(x), r_i(x) \in P[x]$, **使**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= q_1(x) g(x) + r_1(x) \\
g(x) &= q_2(x) r_1(x) + r_2(x) \\
r_1(x) &= q_3(x) r_2(x) + r_3(x) \\
&\cdots\cdots \\
r_{s-2}(x) &= q_s(x) r_{s-1}(x) + r_s(x) \\
r_{s-1}(x) &= q_{s+1}(x) r_s(x) + 0
\end{aligned}
$$

其中 $\partial(r_i(x)) \geq 0$, **则** $r_s(x)$ **是** $f(x)$ **与** $g(x)$ **的一个最大公因式.**

5. 互素多项式

(1) **如果** $f(x), g(x) \in P[x]$ **的最大公因式为非零常数,或** $(f(x), g(x)) = 1$, **则称** $f(x)$ **与** $g(x)$ **互素或互质.**

(2) **互素的多项式具有以下性质:**

1) **设** $f(x), g(x) \in P[x]$, $f(x)$ **与** $g(x)$ **互素的充分必要条件是,存在** $u(x), v(x) \in P[x]$ **使**

$$u(x) f(x) + v(x) g(x) = 1$$

2) **如果** $(f(x), g(x)) = 1$ **且** $f(x) \mid [g(x) h(x)]$, **则** $f(x) \mid h(x)$.

3) **如果** $(f(x), g(x)) = 1$ **且** $f(x) \mid h(x), g(x) \mid h(x)$, **则** $[f(x) g(x)] \mid h(x)$.

4) **如果** $(f(x), g(x)) = 1, (f(x), h(x)) = 1$, **则** $(f(x), g(x) h(x)) = 1$.

6. 不可约多项式

(1) **如果数域 P 上次数大于零的多项式 $p(x)$ 不能表示成数域 P 上两个次数比它低的多项式的乘积,则称 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式.**

注　1. 零多项式与零次多项式既不能说是可约的,也不能说是不可约的.

2. 多项式的可约性与多项式所在的数域密切相关,如 $x^2 - 2$ 在有理数域 Q 上不可约,而在实数域 R 上可约,即 $x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$;又如 $x^2 + 2$ 在实数域 R 上不可约,而在复数域 C 上可约,即 $x^2 + 2 = (x + \sqrt{2}\mathrm{i})(x - \sqrt{2}\mathrm{i})$.一次多项式总是不可约的.

3. 互素多项式指的是 $P[x]$ 中两个多项式之间的一种关系,而不可约多项式是某个多

项式本身的一种特性,这是完全不同的两个概念 .但在讨论问题时, 互素多项式与不可约多项式的性质又是互相利用的,要学会灵活运用 .

(2) 不可约多项式有下列性质:

1) 如果 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式,则 $cp(x)$ 也是 P 上的不可约多项式,其中 c 是 P 中的非零数 .

2) 设 $p(x)$ 是数域 P 上的一个不可约多项式,则对 P 上任一多项式 $f(x)$,必有 $(p(x), f(x)) = 1$ 或者 $p(x) \mid f(x)$.

3) 设 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式, $f(x)$, $g(x)$ 是 P 上的任意两个多项式 如果 $p(x) \mid f(x) \cdot g(x)$,则必有 $p(x) \mid f(x)$ 或者 $p(x) \mid g(x)$.

4) 如果不可约多项式 $p(x)$ 整除 $f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$,其中 $s \geq 2$,则 $p(x)$ 至少可以整除这些多项式中的一个 .

7. 因式分解惟一性定理

(1) 数域 P 上任一次数大于零的多项式 $f(x)$ 都可以分解成数域 P 上的一些不可约多项式的乘积 如果

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$$

其中 $p_i(x)$ 与 $q_j(x)$ $(i = 1,2,\cdots,s;\ j = 1,2,\cdots,t)$ 都是 P 上的不可约多项式,则 $s = t$,并且适当调换 $q_j(x)$ 的次序后可使

$$q_i(x) = c_i p_i(x) \qquad (i = 1,2,\cdots,s)$$

这里 c_i 是 P 中的不为零的数,即如果不计零次因式的差别,多项式 $f(x)$ 分解成不可约因式乘积的分解式是惟一的 .

(2) 数域 P 上任一次数大于零的多项式 $f(x)$ 都有惟一的标准分解式

$$f(x) = ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$$

其中 a 为 $f(x)$ 的首项系数, $p_1(x),\cdots,p_s(x)$ 是 P 上首项系数为 1 的不可约多项式且两两互异,而 $r_1, r_2,\cdots,r_s$ 都是正整数 .

(3) 如果已知多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的标准分解式,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式就是那些同时在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的标准分解式中出现的不可约多项式方幂的乘积,所带的方幂的指数等于它在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中所带的方幂指数中较小的一个 .

8. 重因式

(1) 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in P[x]$,其中 x 是文字,称

多项式

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$$

为 $f(x)$ 的微商(或导数).当 $k>1$ 时,规定 $f^{(k)}(x)$ 为 $f(x)$ 的 $k-1$ 阶微商 $f^{(k-1)}(x)$ 的微商,即 $f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)}(x))'$.多项式的微商与数学分析中的微商有相同的运算性质.

(2) 设 $f(x) \in P[x]$, $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式, k 为非负整数.如果 $p^k(x) \mid f(x)$ 且 $p^{k+1}(x) \nmid f(x)$,则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式.当 $k=1$ 时,称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的单因式;当 $k \geq 2$ 时,称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的重因式.

注　由于重因式一定是不可约因式,所以 $f(x)$ 的重因式也和 $f(x)$ 所在的数域有关.

(3) 关于重因式有下列结论:

1) 如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k(\geq 1)$ 重因式,则它是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式.特别地, $f(x)$ 的单因式不是 $f'(x)$ 的因式.

2) 如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k(\geq 1)$ 重因式,则它是 $f(x)$, $f'(x)$, $\cdots$, $f^{(k-1)}(x)$ 的因式,但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式.

3) 不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式的充分必要条件是 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式,即 $p(x) \mid (f(x), f'(x))$.

注　由此可见 $f(x)$ 的重因式可以在 $(f(x), f'(x))$ 的因式中去找.

4) 多项式 $f(x)$ 没有重因式的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素,即 $(f(x), f'(x)) = 1$.

5) 设多项式 $f(x)$ 的次数 $\partial(f(x)) \geq 1$,则多项式 $\dfrac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 是一个没有重因式的多项式,但它与 $f(x)$ 有完全相同的不可约因式.即设 $f(x)$ 有标准分解式

$$f(x) = ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$$

则
$$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = ap_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$$

注　这是去掉多项式的因式重数的一个有效方法.

9. 多项式函数与多项式的根

(1) 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in P[x]$,其中 x 是文字,数 $\alpha \in P$,将 $f(x)$ 的表示式中的 x 用 α 代替得到 P 中的数

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0$$

称之为当 $x=\alpha$ 时 $f(x)$ 的值,记为 $f(\alpha)$,即 $f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0$.这样,对每个数 $\alpha\in P$,由多项式 $f(x)$ 确定 P 中惟一的数 $f(\alpha)$ 与之对应,称 $f(x)$ 为 P 上的一个多项式函数.

注　前面是用形式的观点来定义多项式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$,其中 x 是一个文字(其本身的意义有待实际应用时再机动地取定),而系数 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$ 在数域 P 中变化.在做多项式的加、减、乘等运算及研究多项式之间的整除关系,最大公因式等时都是这样理解的.当把一元多项式 $f(x)$ 中所含的文字 x 的意义看成一个可以在数域 P 中任意变动的变数符号时,则 $f(x)$ 就表示了一个随着 x 的变动而变化的多项式函数,此时系数 $a_i\in P$ 相对地取定,这即是用函数的观点来定义多项式.对于数域 P 上的一元多项式来说可以证明这两种观点是统一的,在证明过程中数域 P 包含无限多个元素这一性质是很起作用的.正因为对于数域 P 上的一元多项式来说这两种观点是统一的,才使得在讨论多项式时无论采用上述两种观点中的哪一种都是不会出问题的.

(2) 设 $f(x)\in P[x]$,数 $\alpha\in P$.如果 $f(\alpha)=0$,则称 α 为 $f(x)$ 的一个根或零点.如果 $x-\alpha$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式,则称 α 是 $f(x)$ 的 k 重根;当 $k=1$ 时,称 α 是 $f(x)$ 的单根;当 $k>1$ 时,称 α 是 $f(x)$ 的重根.

(3) 多项式函数具有下列一些性质:

1) 余数定理　设 $f(x)\in P[x]$,$\alpha\in P$,用一次多项式 $x-\alpha$ 去除 $f(x)$ 所得的余式是一个常数,这个常数等于函数值 $f(\alpha)$.

注　余数定理表明可以采用综合除法确定多项式 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 时的值 $f(\alpha)$ 或验证 α 是 $f(x)$ 的单根或重根.这比直接将 α 代入 $f(x)$ 计算要方便的多.

2) 因式定理　设 $f(x)\in P[x]$,$\alpha\in P$.$(x-\alpha)\mid f(x)$ 的充分必要条件是 $f(\alpha)=0$.

3) $P[x]$ 中 $n(\geq 0)$ 次多项式在数域 P 中的根不可能多于 n 个(重根按重数计).

4) 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,且 $f(x),g(x)$ 的次数都不超过 n.如果对 $n+1$ 个不同的数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$ 有 $f(\alpha_i)=g(\alpha_i)\quad(i=1,2,\cdots,n+1)$,则 $f(x)=g(x)$.

(4) 数域 P 上两个多项式相等的充分必要条件是它们所定义的数域 P 上的多项式函数相等.

注　$P[x]$ 中两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等是指它们有完全相同的项.由 P 上的多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 所确定的函数相等是指对任意 $\alpha\in P$ 都有 $f(\alpha)=g(\alpha)$,这是两个不同的概念.但因为数域 P 中有无穷多个数,所以由上面 4) 中的结论知,多项式的相等与多项式函数的相等实际上是一致的.换句话说,数域 P 上的多项式既可以作为形式表达式来处

理,也可以作为函数来处理.

10. 复数域上多项式的因式分解及根的性质

(1) **复系数多项式因式分解定理**　复系数 $n(\geq 1)$ 次多项式在复数域上都可惟一地分解成一次因式的乘积.换句话说,复数域上任一次数大于 1 的多项式都是可约的.

(2) **标准分解式**　复系数 $n(\geq 1)$ 次多项式 $f(x)$ 具有标准分解式

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_s)^{r_s}$$

其中 a_n 是 $f(x)$ 的首项系数,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是不同的复数,$r_1,r_2,\cdots,r_s$ 是正整数且 $r_1+r_2+\cdots+r_s=n$.

(3) **代数基本定理**　每个次数≥ 1的复系数多项式在复数域中至少有一根.

(4) n 次复系数多项式在复数域内恰有 n 个复根(重根按重数计算).

(5) **根与系数的关系(Vieta 定理)**　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一元 n 次多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\qquad(a_n\neq 0)$$

的 n 个根,则根与多项式的系数之间有关系:

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n}\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n=-\dfrac{a_{n-3}}{a_n}\\ \qquad\cdots\cdots\\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}+\cdots+\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n=(-1)^{n-1}\dfrac{a_1}{a_n}\\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}\end{cases}$$

11. 实数域上多项式的因式分解及根的性质

(1) **实系数多项式因式分解定理**　实系数 $n(\geq 1)$ 次多项式在实数域上都可以惟一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积.换句话说,实系数多项式 $f(x)$ 在实数域上不可约的充分必要条件是 $\partial(f(x))=1$ 或 $f(x)=ax^2+bx+c$ 且 $b^2-4ac<0$.

(2) **标准分解式**　实系数 $n(\geq 1)$ 次多项式 $f(x)$ 具有标准分解式

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{l_1}\cdots(x-\alpha_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{k_t}$$

其中 a_n **是** $f(x)$ **的首项系数,** $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ **是互异实数.** $p_i,q_i(i=1,2,\cdots,t)$ **是互异的实数对,且满足** $p_i^2-4q_i<0\ (i=1,2,\cdots,t)$. $l_1,\cdots,l_s,k_1,\cdots,k_t$ **都是正整数,且**

$$l_1+\cdots+l_s+2k_1+\cdots+2k_t=n$$

(3) **如果** α **是实系数多项式** $f(x)$ **的一个非实的复数根,则它的共轭数** $\bar{\alpha}$ **也是** $f(x)$ **的根,并且** α **与** $\bar{\alpha}$ **有同一重数.由此可知,奇数次实系数多项式必有实根.**

12. 有理数域上多项式的因式分解及根的性质

(1) **如果一个非零的整系数多项式** $f(x)$ **的系数互素,则称** $f(x)$ **是一个本原多项式.**

(2) **设** $f(x)$ **是任一有理系数多项式,则存在有理数** r **及本原多项式** $h(x)$**,使**

$$f(x)=rh(x)$$

且这种表示法除了差一个正负号是惟一的.也即,如果 $f(x)=rh(x)=sg(x)$**,其中** $h(x),g(x)$ **都是本原多项式,则必有** $r=\pm s,h(x)=\pm g(x)$.

注　上面结果表明有理系数多项式可以转化为整系数多项式来研究.

(3) **高斯(Gauss)引理　两个本原多项式的乘积还是本原多项式.**

(4) **如果一个非零整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积,则它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.**

(5) **设** $f(x)$ **是整系数多项式,** $g(x)$ **为本原多项式,如果** $f(x)=g(x)h(x)$**,其中** $h(x)$ **是有理系数多项式,则** $h(x)$ **一定是整系数多项式.**

(6) **艾森斯坦(Eisenstein)判别法　设**

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是一个整系数多项式,如果存在素数 p**,使**

$$① \ p\mid a_i(i=0,1,\cdots,n-1);\quad ② \ p\nmid a_n;\quad ③ \ p^2\nmid a_0$$

则 $f(x)$ **在有理数域上不可约.**

注　1. 艾氏判别条件仅是一个判别整系数多项式不可约的充分条件,也就是说,如果一个整系数多项式不满足艾氏判别条件,则它既可能是可约的,也可能是不可约的.

2. 有些整系数多项式 $f(x)$ **不能直接用艾氏判别法来判断其是否可约,此时可以考虑利用适当的文字代换** $x=ay+b\ (a,b$ **为整数且** $a\neq 0)$**,使** $f(ay+b)=g(y)$ **满足艾氏判**

别条件,从而来判定原多项式 $f(x)$ 不可约(其理由见下面之(7)) .这是一个较好的方法,但未必总是奏效 .

(7) 有理系数多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约的充分必要条件是,对任意有理数 $a\neq 0$ 和 b,多项式 $g(x) = f(ax+b)$ 在有理数域上不可约(见例 1 .18 的证明) .

(8) 在有理数域上存在任意次数的不可约多项式,如 $x^n + 2$ 在有理数域上不可约 .

(9) 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一个整系数多项式,而$\dfrac{r}{s}$是它的一个有理根,其中 r,s 互素,则必有 $s \mid a_n$, $r \mid a_0$.特别地,如果 $f(x)$ 的首项系数 $a_n = 1$,则 $f(x)$ 的有理根都是整数根,而且是 a_0 的因子 .

注　1. 由以上结果可以求整系数多项式 $f(x)$ 的有理根,即先求出常数项 a_0 与首项系数 a_n 的所有因数,再以 a_0 的因数作分母及 a_n 的因数作分子写出所有可能的既约分数 $\dfrac{r}{s}$,逐个检验是否有 $f\left(\dfrac{r}{s}\right) = 0$,若成立则$\dfrac{r}{s}$ 是 $f(x)$ 的有理根 .最后一步可通过用 $x - \dfrac{r}{s}$ 去除 $f(x)$(用综合除法) 的余数是否为零来检验 .

2. 当有理系数多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约,且 $(f(x)) > 1$ 时, $f(x)$ 没有有理根 .这里 $(f(x)) > 1$ 是必须的,如 $f(x) = 3x + 2$ 有有理根 $-\dfrac{2}{3}$,但 $(f(x)) = 1$ 且 $f(x)$ 不可约 .

3.“有理系数多项式 $f(x)$ 没有有理根,则 $f(x)$ 在有理数域上不可约 .”这一命题当 $2 \leq (f(x)) \leq 3$ 时是成立的,但当 $(f(x)) \geq 4$ 时,命题不再成立,如 $f(x) = (x^2+1)^2$ 没有有理根,但它在有理数域上可约 .

13. 多元多项式的概念

(1) 设 P 是一个数域, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个文字,称形如

$$a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \qquad (a \in P,\ k_1, k_2, \cdots, k_n \text{ 为非负整数})$$

的式子为数域 P 上的一个 n 元单项式,称 a 为这个单项式的系数 .当 $a \neq 0$ 时,称此单项式中各文字的指数之和 $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ 为这个单项式的次数 .如果两个单项式中相同文字的指数对应相等,则称这两个单项式为同类项 .有限个单项式的和

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{k_1, k_2, \cdots, k_n} a_{k_1, k_2, \cdots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$$

称为数域 P 上 n 个文字 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个多项式,简称 n 元多项式.当 $n \geq 2$ 时,n 元多项式统称为多元多项式.当一个多元多项式表成一些不同类的单项式的和之后,其中系数不为零的单项式的最高次数就称为这个多元多项式的次数.如果多元多项式 f 中所有单项式的次数都等于 k,则称 f 为一个 k 次齐次多项式.

注 虽然多元多项式也有次数,但由于不同类的单项式可能有相同的次数,所以我们无法将多元多项式按其中单项式的次数给出一个自然排列的顺序.根据不同问题讨论的方便,引入多元多项式的不同排列顺序,如字典排列法、齐次成分表示法及二元多项式按某一文字的降幂排列法等.

(2) 数域 P 上关于文字 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的全体 n 元多项式的集合记作 $P[x_1, x_2, \cdots, x_n]$,称为数域 P 上的 n 元多项式环.多元多项式也可定义相等的概念,及引入相加、相减、相乘等运算,并且也有与一元多项式同样的运算律及次数性质.显然,两个 k 次齐次多项式的和是零或 k 次齐次多项式;一个 k 次齐次多项式与一个 l 次齐次多项式的乘积是一个 $k+l$ 次齐次多项式.

(3) 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个 m 次 n 元多项式,则它可以惟一地表示成

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=0}^{m} f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

其中 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 i 次齐次多项式,称之为 f 的 i 次齐次成分,称上式为 f 的齐次成分表示法.如果 l 次 n 元多项式 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 也用齐次成分表示为

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{j=0}^{l} g_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

则乘积

$$h(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

的 k 次齐次成分为

$$h_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i+j=k} f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, g_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

特别地,$h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的最高次齐次成分为

$$h_{m+l}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, g_l(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

由此可知,对于多元多项式也有乘积的次数等于因子次数之和的性质.

(4) 设 $ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ 与 $bx_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n}$ 为某一个 n 元多项式的两项,当

$$k_1 = l_1, \cdots, k_{i-1} = l_{i-1}, \quad k_i > l_i \quad (i \leq n) \tag{*}$$

时,将 $ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ 排在 $bx_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n}$ 的前面.如果将两个单项式的指标组排成 n 元数组

$$(k_1, k_2, \cdots, k_n), \quad (l_1, l_2, \cdots, l_n)$$

当(＊)式成立时,则称前一个 n元数组先于后一个 n 元数组,记为

$$(k_1, k_2, \cdots, k_n) > (l_1, l_2, \cdots, l_n)$$

这样就确定了单项式之间的一个先后顺序,相应地给出了 n元数组的一个先后顺序.将 n 元多项式中各单项式按这种先后次序排列的方法称为字典排列法.按字典排列法写出来的第一个系数不为零的单项式称为 n 元多项式的首项.

注　首项不一定具有最高的次数,如 3 元多项式 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 + x_1^3$ 的次数为 5,按字典排列法写出来就是 $f = x_1^3 + x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2^2 x_3^2$,其首项 x_1^3 是 3 次的.

(5) 当 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$, $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$ 时,乘积

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

的首项等于 f 的首项与 g 的首项的乘积.

(6) 由多元多项式也可以引入多元多项式函数.设 f, g 为两个 n 元多项式,则 $f = g$的充分必要条件是,对任意数 $c_1, c_2, \cdots, c_n \in P$,有

$$f(c_1, c_2, \cdots, c_n) = g(c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

注　多元多项式是一元多项式的推广.一元多项式中的许多概念,如整除的概念、最大公因式的概念、不可约多项式与因式分解的概念等,都可以平行地移植到多元多项式中来.但由于文字的增多,一些对一元多项式成立的结论对多元多项式不再成立,如,在一元多项式中具有重要应用的带余除法定理与最大公因式的存在表示定理,在多元多项式中不再成立.

14. 对称多项式

(1) 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为数域 P上的n元多项式.如果任意交换两个文字,多项式均不变,即对任意 $i, j\ (1 \leq i < j \leq n)$ 都有

$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$$

则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为数域 P 上的一个 n 元对称多项式.下列 n个对称多项式

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n$$

$$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$\sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n$$

称为初等对称多项式.

(2) 对称多项式的和、乘积仍是对称多项式;对称多项式的多项式仍是对称

多项式.

(3) **对称多项式基本定理** 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为数域 P 上的一个 n 元对称多项式,则存在惟一的 n 元多项式 $\varphi(y_1, y_2, \cdots, y_n)$,使得

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$$

其中 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 为初等对称多项式.

(4) 将对称多项式表为初等对称多项式的多项式常采用以下方法:

方法一 —— 逐步消去首项法

这是推导对称多项式基本定理时给出的方法,其一般步骤是:

第一步 首先找出对称多项式 f 的首项 $a_0 x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$,则一定有

$$k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n$$

第二步 由 f 的首项写出 φ_1:

$$\varphi_1 = a_0 \sigma_1^{k_1 - k_2} \sigma_2^{k_2 - k_3} \cdots \sigma_{n-1}^{k_{n-1} - k_n} \sigma_n^{k_n}$$

第三步 作 $f_1 = f - \varphi_1$,并展开化简.

再对 f_1 按第一、二、三步进行,构造 $f_2 = f_1 - \varphi_2$ 如此反复进行,直至出现 $f_k = f_{k-1} - \varphi_k = 0$,则

$$f = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_k$$

方法二 —— 待定系数法

设 f 是 m 次齐次对称多项式,用待定系数法求解的一般步骤是:

第一步 根据 f 的首项指标组写出所有可能的指标组$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$,这些指标组应满足① $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n$;② $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = m$;③ 前面的指标组先于后面的指标组.

第二步 由指标组$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$写出对应的初等对称多项式的方幂的乘积

$$\sigma_1^{k_1 - k_2} \sigma_2^{k_2 - k_3} \cdots \sigma_{n-1}^{k_{n-1} - k_n} \sigma_n^{k_n}$$

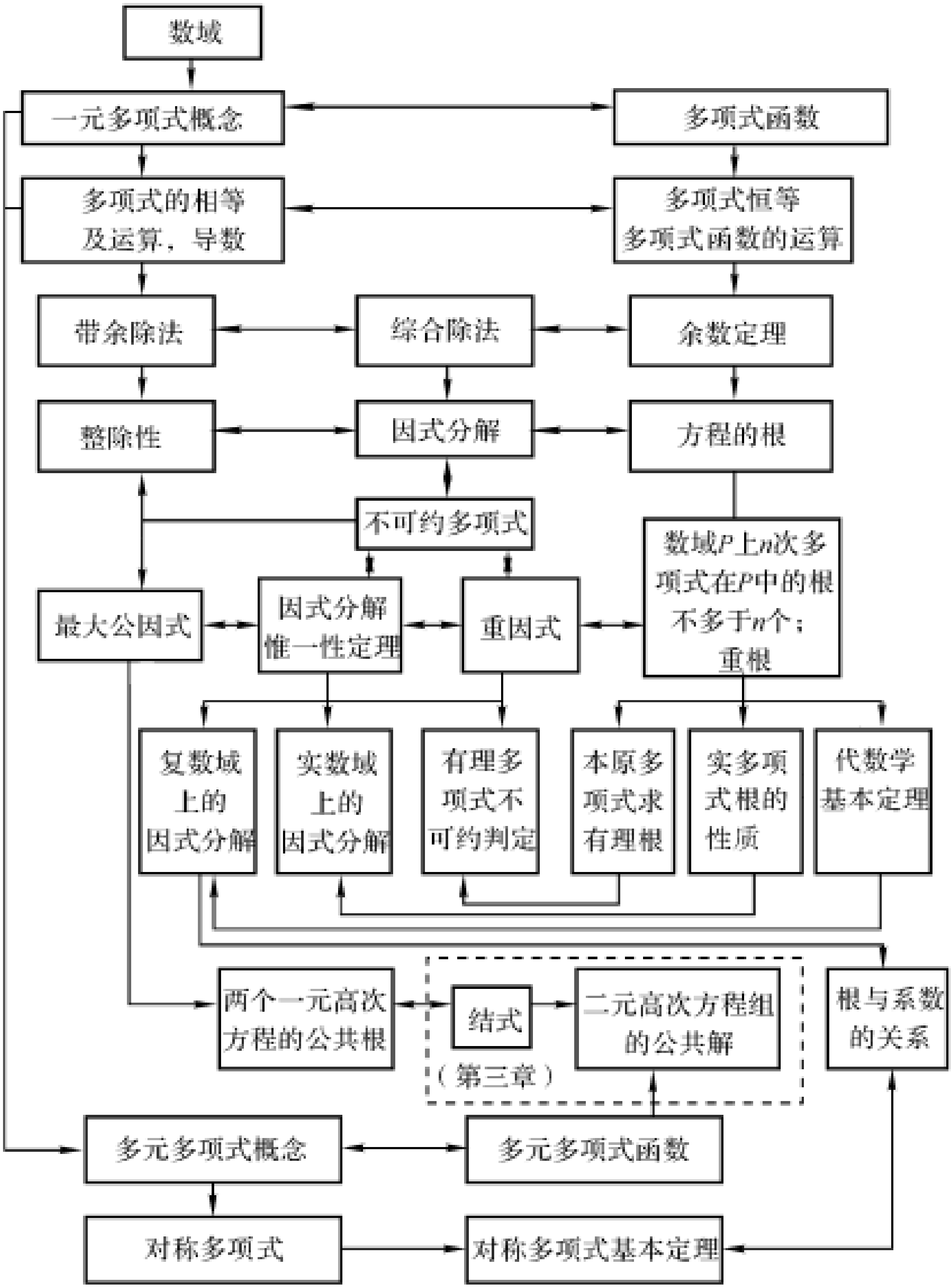
第三步 设出 f 由所有初等对称多项式的方幂乘积的线性表达式,其首项系数即为 f 的首项系数,其余各项系数分别用 $a, b, c, \cdots$ 代替.

第四步 分组选取适当的 $x_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的值,计算 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 及 f,代入第三步中设出的表达式得到关于 $a, b, c, \cdots$ 的线性方程组,解这个线性方程组求得 $a, b, c, \cdots$ 的值,最后写出所求的 f 的表达式.

注 1. 当 f 是非齐次对称多项式时,可以将它表成若干齐次对称多项式的和,把它的每一个齐次对称多项式表为初等对称多项式的多项式,再把所得到的各部分相加即可.

2. 待定系数法是深入研究对称多项式基本定理的证明过程而得出的简化方法,要求熟练掌握.

二、知识网络图


数域
一元多项式概念
多项式函数
多项式的相等
及运算，导数
多项式恒等
多项式函数的运算
带余除法
综合除法
余数定理
整除性
因式分解
方程的根
不可约多项式
数域P上n次多
项式在P中的根
不多于n个；
重根
最大公因式
因式分解
惟一性定理
重因式
复数域
上的
因式分解
实数域
上的
因式分解
有理多
项式不
可约判定
本原多
项式求
有理根
实多项
式根的
性质
代数学
基本定理
两个一元高次
方程的公共根
结式
（第三章）
二元高次方程组
的公共解
根与系数
的关系
多元多项式概念
多元多项式函数
对称多项式
对称多项式基本定理

三、重点、难点解读

本章对多项式理论作了较深入、系统、全面地论述,内容可分为一元多项式与多元多项式两大部分,以一元多项式为主 .

一元多项式可归纳为以下四个方面:

(1) 一般理论:包括一元多项式的概念, 运算, 导数及基本性质 .

(2) 整除理论:包括整除、最大公因式、互素的概念与性质 .

(3) 因式分解理论: 包括不可约多项式, 因式分解, 重因式, 实系数与复系数多项式的因式分解,有理系数多项式不可约的判定等 .

(4) 根的理论:包括多项式函数, 多项式的根, 代数学基本定理, 有理系数多项式的有理根求法,根与系数的关系等 .

一元多项式的内容十分丰富, 重点是整除与因式分解的理论, 最基本的结论是带余除法定理、最大公因式的存在表示定理、因式分解的惟一性定理 .在学习过程中, 如能把握这两个重点和三大基本定理, 就能整体上把握一元多项式的理论 .

对于多元多项式, 则要理解 n 元多项式、对称多项式等有关概念, 掌握对称多项式表成初等对称多项式的多项式的方法 .

四、典型例题解析

例 1.1 当 a, b, c 取何值时, 多项式 $f(x) = x - 5$ 与 $g(x) = a(x-2)^2 + b(x+1) + c(x^2 - x + 2)$ 相等 .

分析 可以利用多项式相等的定义, 即对应同次项的系数相等; 也可根据数域 P 上多项式相等与多项式恒等(即对应函数值相等) 一致的结论, 分别取一些特殊的 x 的值来确定参数 .

解 法 1 由于

$$g(x) = (a+c)x^2 + (-4a+b-c)x + (4a+b+2c)$$

根据多项式相等的定义, 得

$$a+c=0, \quad -4a+b-c=1, \quad 4a+b+2c=-5$$

解得 $a = -\dfrac{6}{5}$, $b = -\dfrac{13}{5}$, $c = \dfrac{6}{5}$.

法 2　**分别取** $x = 2, -1, 0$,**由对应函数值相等**,**得**

$$-3 = 3b + 4c, \quad -6 = 9a + 4c, \quad -5 = 4a + b + 2c$$

解得 $a = -\dfrac{6}{5}, \ b = -\dfrac{13}{5}, \ c = \dfrac{6}{5}$.

例 1 2　**设** $f(x), g(x)$ **与** $h(x)$ **均为实数域上的多项式 .证明**:**如果**

$$f^2(x) = xg^2(x) + xh^2(x)$$

则 $f(x) = g(x) = h(x) = 0$.

证　**反证 .若** $f(x) \neq 0$,**则** $f^2(x) \neq 0$.**由**

$$f^2(x) = xg^2(x) + xh^2(x) = x(g^2(x) + h^2(x))$$

知 $h^2(x) + g^2(x) \neq 0$.**因此**

$$(f^2(x)) = [x(g^2(x) + h^2(x))]$$

但 $(f^2(x))$ **为偶数**,**而** $[x(g^2(x) + h^2(x))]$ **为奇数**,**因此**, $f^2(x) \neq xg^2(x) + xh^2(x)$,**这与已知矛盾**,**故** $f(x) = 0$ **此时** $x(g^2(x) + h^2(x)) = 0$,**由** $x \neq 0$ **知**

$$g^2(x) + h^2(x) = 0$$

因为 $g(x), h(x)$ **均为实系数多项式**,**从而必有** $g(x) = h(x) = 0$.**于是** $f(x) = g(x) = h(x) = 0$.

例 1 .3　**设**

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x + 1, \quad g(x) = x^2 - x + 1$$

求 $g(x)$ **除** $f(x)$ **的商及余式** .

解　**法 1**　**进行带余除法**(**采用长除法或竖式除法**) .

$$
\begin{array}{rl}
 & \underline{2x^2 - x - 3\qquad\qquad\quad} = q(x) \\
g(x) = x^2 - x + 1 & 2x^4 - 3x^3 \qquad\quad + 4x + 1 = f(x) \\
 & \underline{2x^4 - 2x^3 + 2x^2\qquad\qquad} \\
 & \qquad -x^3 - 2x^2 + 4x + 1 \\
 & \qquad \underline{-x^3 + x^2 - x\qquad} \\
 & \qquad\qquad -3x^2 + 5x + 1 \\
 & \qquad\qquad \underline{-3x^2 + 3x - 3} \\
 & \qquad\qquad\qquad 2x + 4 = r(x)
\end{array}
$$

所以商及余式分别为

$$q(x) = 2x^2 - x - 3, \quad r(x) = 2x + 4$$

法 2　**待定系数法 .因为** $(f(x)) = 4, \ (g(x)) = 2$,**从而商** $q(x)$ **及余式** $r(x)$ **的次数分别为** $(q(x)) = 2, \ (r(x)) \leq 1$ **或** $r(x) = 0$.**注意到** $f(x)$ **的首项系数为** 2,**于是可设**

$$q(x) = 2x^2 + ax + b, \quad r(x) = cx + d$$

比较 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 两端同次项的系数,得

$$a - 2 = -3, \quad b - a + 2 = 0, \quad a - b + c = 4, \quad b + d = 1$$

解得 $a = -1$, $b = -3$, $c = 2$, $d = 4$.

故商及余式分别为

$$q(x) = 2x^2 - x - 3, \quad r(x) = 2x + 4$$

例 1 .4　将多项式 $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 7x - 4$ 按 $x - 1$ 的方幂展开 .

分析　对于 n 次多项式 $f(x)$,为将其按 $x - x_0$ 的方幂展开,可用 $x - x_0$ 除 $f(x)$,再用 $x - x_0$ 逐次除所得的商,即

$$\begin{aligned} f(x) &= q_1(x)(x - x_0) + c_0 \\ q_1(x) &= q_2(x)(x - x_0) + c_1 \\ &\cdots\cdots \\ q_{n-2}(x) &= q_{n-1}(x)(x - x_0) + c_{n-2} \\ q_{n-1}(x) &= c_n(x - x_0) + c_{n-1} \end{aligned}$$

将 $q_{n-1}(x), q_{n-2}(x), \cdots, q_2(x), q_1(x)$ 逐次代入前一式,得

$$f(x) = c_n(x - x_0)^n + c_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \cdots + c_1(x - x_0) + c_0$$

这一过程可以通过多次的综合除法来实现,注意$(x - x_0)^n$ 的系数就是 $f(x)$ 的首项系数 .

解　法 1　应用综合除法 .

$$\begin{array}{r|rrrrrl}
1 & 1 & -6 & 12 & -7 & -4 & \\
 & & 1 & -5 & 7 & 0 & \\
\hline
1 & 1 & -5 & 7 & 0 & -4 = c_0 & \\
 & & 1 & -4 & 3 & & \\
\hline
1 & 1 & -4 & 3 & 3 = c_1 & & \\
 & & 1 & -3 & & & \\
\hline
1 & 1 & -3 & 0 = c_2 & & & \\
 & & 1 & & & & \\
\hline
 & 1 & -2 = c_3 & & & &
\end{array}$$

于是　$$f(x) = (x - 1)^4 - 2(x - 1)^3 + 3(x - 1) - 4$$

法 2　应用泰勒公式 .

由泰勒公式,得

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2 +$$

$$\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$

而

$$f(x)=x^4-6x^3+12x^2-7x-4,\qquad f(1)=-4$$
$$f'(x)=4x^3-18x^2+24x-7,\qquad f'(1)=3$$
$$f''(x)=12x^2-36x+24,\qquad \frac{f''(1)}{2!}=0$$
$$f'''(x)=24x-36,\qquad \frac{f'''(1)}{3!}=-2$$
$$f^{(4)}(x)=24,\qquad \frac{f^{(4)}(1)}{4!}=1$$

从而
$$f(x)=-4+3(x-1)-2(x-1)^3+(x-1)^4$$

例 1.5　确定 m,p **的值,使** $x^2+3x+2\mid x^4+mx^2-px+2$.

解　法 1　应用长除法或竖式除法求得余式,再令余式为零,从而得到所求的条件.

$$\begin{array}{r|l|l}
x^2+3x+2 & x^4\qquad\qquad +mx^2-px+2 & x^2-3x+(m+7)=q(x) \\
 & x^4+3x^3+2x^2 & \\
\hline
 & \quad -3x^3+(m-2)x^2-px+2 & \\
 & \quad -3x^3-9x^2-6x & \\
\hline
 & \qquad\qquad (m+7)x^2-(p+6)x+2 & \\
 & \qquad\qquad (m+7)x^2+3(m+7)x+2(m+7) & \\
\hline
 & \quad r(x)=\qquad -(3m+p+15)x-(2m+12) &
\end{array}$$

即用 x^2+3x+2 **除** x^4+mx^2-px+2 **的余式为**
$$r(x)=-(3m+p+15)x-(2m+12)$$

令 $r(x)=0$ **可得**
$$-(3m+p+15)=0,\qquad -2(m+6)=0$$

解得 $m=-6,\ p=3$.

法 2　应用待定系数法.

如果 $x^2+3x+2\mid x^4+mx^2-px+2$,**则有** $q(x)=x^2+ax+b$ **使**
$$x^4+mx^2-px+2=(x^2+ax+b)(x^2+3x+2)$$

将上式右端展开,并比较两边同次项的系数,得
$$0=a+3,\quad m=2+3a+b,\quad -p=2a+3b,\quad 2=2b$$

解得 $a=-3,\ b=1,\ m=-6,\ p=3$.

例 1.6　证明 $x^2+x+1 \mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ (m,n,p 是三个任意的正整数).

分析　用带余除法及待定系数法不易证明时,可以考虑采用因式定理来证明,即 $(x-a) \mid f(x)$ 的充分必要条件是 $f(a)=0$.

证　可求得 $x^2+x+1=0$ 的根为 $\omega_1=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, $\omega_2=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$,所以 $x^2+x+1=(x-\omega_1)(x-\omega_2)$.又由

$$\omega_i^3-1=(\omega_i-1)(\omega_i^2+\omega_i+1)=0 \qquad (i=1,2)$$

知 $\omega_i^3=1$,从而 $\omega_i^{3m}=\omega_i^{3n}=\omega_i^{3p}$.设 $f(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$,则有

$$f(\omega_i)=\omega_i^{3m}+\omega_i^{3n+1}+\omega_i^{3p+2}=1+\omega_i+\omega_i^2=0 \qquad (i=1,2)$$

故由因式定理知 $(x-\omega_1) \mid f(x)$, $(x-\omega_2) \mid f(x)$.又因为 $x-\omega_1$ 与 $x-\omega_2$ 互素,从而

$$(x-\omega_1)(x-\omega_2) \mid f(x) \quad \text{即} \quad x^2+x+1 \mid f(x)$$

注　本例证明中,$(x-\omega_1)(x-\omega_2) \mid f(x)$ 是指在复数域 C 上,而命题本身可理解为在一般数域 P 上 $x^2+x+1 \mid f(x)$,这是因为整除的概念是在带余除法基础上定义的,而带余除法所得的商及余式不随系数域的扩大而改变,因此,上述多项式在 P 上与在 C 上整除是一致的.

例 1.7　证明:$x^d-1 \mid x^n-1$ 的充分必要条件是 $d \mid n$,其中 d,n 是非负整数.

分析　如能利用乘法公式在被除式中分解出除式作为因式,则也能证明整除性.

证　充分性　设 $d \mid n$,假定 $n=dt$,则有

$$x^n-1=(x^d)^t-1=(x^d-1)(x^{d(t-1)}+x^{d(t-2)}+\cdots+x^d+1)$$

从而 $x^d-1 \mid x^n-1$.

必要性　已知 $x^d-1 \mid x^n-1$,假定 $n=dt+r$, $0 \leq r < d$,则

$$x^n-1=x^{dt+r}-1=(x^{dt}-1)x^r+(x^r-1)$$

由充分性的证明知 $x^d-1 \mid x^{dt}-1$,从而由 $x^d-1 \mid x^n-1$ 得 $x^d-1 \mid x^r-1$.因为 $0 \leq r < d$,所以必有 $x^r-1=0$,即 $r=0$,故得 $d \mid n$.

例 1.8　设

$$f(x)=3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$$
$$g(x)=3x^4-4x^3-x^2-x-2$$

(1) 求 $(f(x), g(x))$;

(2) 求多项式 $u(x), v(x)$,使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x), g(x))$.

解　(1) **应用辗转相除法.**

$q_2(x)=-x+2$	$g(x)=3x^4-4x^3-x^2-x-2$ $3x^4+2x^3$	$f(x)=3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$ $3x^5-4x^4-x^3-x^2-2x$	$x+3=q_1(x)$
	$-6x^3-x^2-x-2$ $-6x^3-4x^2$	$9x^4-15x^3-5x^2-3x-6$ $9x^4-12x^3-3x^2-3x-6$	
$q_4(x)=-x+1$	$r_2(x)=3x^2-x-2$ $3x^2+2x$	$r_1(x)=-3x^3-2x^2$ $-3x^3+x^2+2x$	$-x-1=q_3(x)$
	$-3x-2$ $-3x-2$	$-3x^2-2x$ $-3x^2+x+2$	
	$r_4(x)=0$	$r_3(x)=-3x-2$	

所以
$$(f(x),\ g(x))=-\frac{1}{3}r_3(x)=x+\frac{2}{3}$$

(2) **由等式组**
$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$$
$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)$$
$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)+r_3(x)$$

得
$$\begin{aligned}
r_3(x)={}&r_1(x)-q_3(x)r_2(x)=\\
&r_1(x)-q_3(x)[g(x)-q_2(x)r_1(x)]=\\
&[1+q_2(x)q_3(x)]r_1(x)-q_3(x)g(x)=\\
&[1+q_2(x)q_3(x)][f(x)-q_1(x)g(x)]-q_3(x)g(x)=\\
&[1+q_2(x)q_3(x)]f(x)+\\
&[-q_1(x)-q_3(x)-q_1(x)q_2(x)q_3(x)]g(x)
\end{aligned}$$

故
$$(f(x),\ g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

其中
$$u(x)=-\frac{1}{3}[1+q_2(x)q_3(x)]=-\frac{1}{3}(x^2-x-1)$$
$$v(x)=\frac{1}{3}[q_1(x)+q_3(x)+q_1(x)q_2(x)q_3(x)]=\frac{1}{3}(x^3+2x^2-5x-4)$$

注　**如果能够对多项式进行因式分解,则用因式分解法求多项式的最大公因式要比用辗转相除法求最大公因式简便一些.如对多项式** $f(x)=3(x^2+1)^3(x+1)^2(x-1)x$ **与** $g(x)=9(x^2+1)^4(x+1)x$, **直接看出**
$$(f(x),\ g(x))=(x^2+1)^3(x+1)x$$
但遗憾的是,没有一个一般的方法对多项式进行因式分解.因此,因式分解法求最大公因式主要具有理论上的用处,它不能代替可以具体求出最大公因式的辗转相除法.

例 1.9　设 $f(x), g(x)$ 都是数域 P 上次数大于零的多项式,且 $(f(x), g(x)) = 1$.证明:存在 P 上惟一的多项式 $s(x), t(x)$,其中 $(s(x)) < (g(x))$, $(t(x)) < (f(x))$,使

$$s(x)f(x) + t(x)g(x) = 1$$

又取 $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$,用待定系数法求 $s(x)$, $t(x)$,使上式成立.

证　由最大公因式的性质知,存在 P 上多项式 $u(x), v(x)$,使

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1 \qquad (*)$$

从而根据多项式互素的充分必要条件知 $(u(x), g(x)) = 1$, $(v(x), f(x)) = 1$.由带余除法得

$$u(x) = q_1(x)g(x) + s(x), \quad v(x) = q_2(x)f(x) + t(x)$$

其中 $(s(x)) < (g(x))$, $(t(x)) < (f(x))$,代入(*)式并整理得

$$(q_1(x) + q_2(x))f(x)g(x) + s(x)f(x) + t(x)g(x) = 1$$

比较上式两端的次数,可知 $(q_1(x) + q_2(x))f(x)g(x) = 0$,于是有

$$s(x)f(x) + t(x)g(x) = 1$$

再证惟一性.设有多项式 $s_1(x)$, $t_1(x)$ 也满足

$$s_1(x)f(x) + t_1(x)g(x) = 0$$

且 $(s_1(x)) < (g(x))$, $(t_1(x)) < (f(x))$.上式与前一式相减得

$$(s_1(x) - s(x))f(x) + (t_1(x) - t(x))g(x) = 0$$

可见 $g(x) \mid [(s_1(x) - s(x))f(x)]$,但 $(f(x), g(x)) = 1$,从而 $g(x) \mid [s_1(x) - s(x)]$.由于 $s_1(x)$ 和 $s(x)$ 的次数都小于 $g(x)$ 的次数,故只有 $s_1(x) - s(x) = 0$,即 $s_1(x) = s(x)$.同理,可得 $t_1(x) = t(x)$.

当 $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$ 时,$(f(x), g(x)) = 1$,所以可设

$$s(x) = ax + b, \quad t(x) = cx^2 + dx + e$$

使

$$(ax + b)x^3 + (cx^2 + dx + e)(x^2 - 2x + 1) = 1$$

比较等式两端同次项系数,得

$$a + c = 0, \quad b - 2c + d = 0, \quad c - 2d + e = 0, \quad d - 2e = 0, \quad e = 1$$

解得 $a = -3$, $b = 4$, $c = 3$, $d = 2$, $e = 1$.

故
$$s(x) = -3x + 4, \quad t(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

例 1.10　已知 $f(x)$, $g(x)$ 是数域 P 上的多项式,证明:

(1) $(f(x), g(x)) = (f(x) \pm g(x)u(x), g(x))$,其中 $u(x)$ 为数域 P 上的任意多项式;

(2) **设** $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_0 \neq 0)$, $g(x) = x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1$,**则**$(f(x), g(x)) = 1$.

证　(1) **设**$(f(x), g(x)) = d(x)$, $(f(x) \pm g(x)u(x), g(x)) = d_1(x)$.

由于 $d(x) \mid f(x)$, $d(x) \mid g(x)$,**所以** $d(x) \mid [f(x) \pm g(x)u(x)]$,**于是** $d(x) \mid d_1(x)$.

另一方面, $d_1(x) \mid [f(x) \pm g(x)u(x)]$, $d_1(x) \mid g(x)$,**所以** $d_1(x) \mid f(x)$, **于是** $d_1(x) \mid d(x)$.**又** $d(x)$ **与** $d_1(x)$ **均为首一多项式**,**所以** $d(x) = d_1(x)$,**即**

$$(f(x), g(x)) = (f(x) \pm g(x)u(x), g(x))$$

(2) **由于** $f(x) + (-x)g(x) = a_0 \neq 0$,**利用本题**(1) **的结论得**

$$(f(x), g(x)) = (f(x) + (-x)g(x), g(x)) = (a_0, g(x)) = 1$$

例 1 .11　**证明**:**数域** P **上一个** $n(>0)$ **次多项式** $f(x)$ **能被它的导数** $f'(x)$ **整除的充分必要条件是** $f(x) = a(x-b)^n$,**其中** $a, b \in P$.

证　**充分性**　**因为** $f(x) = a(x-b)^n$, $f'(x) = na(x-b)^{n-1}$, **所以** $f'(x) \mid f(x)$.

必要性　**法** 1　**利用标准分解式**,**设** $f(x)$ **的标准分解式为**

$$f(x) = a p_1^{r_1}(x) p_2^{r_2}(x) \cdots p_s^{r_s}(x)$$

其中 $p_i(x)\ (i = 1, 2, \cdots, s)$ **是** P **上首项系数为** 1 **的不可约多项式**, a **是** $f(x)$ **的首项系数**, $r_i(i = 1, 2, \cdots, s)$ **是正整数且** $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n$.**则**

$$f'(x) = p_1^{r_1-1}(x) p_2^{r_2-1}(x) \cdots p_s^{r_s-1}(x) g(x)$$

此处 $g(x)$ **不能被任何** $p_i(x)\ (i = 1, 2, \cdots, s)$ **整除** .

因为 $f'(x) \mid f(x)$,**所以** $g(x) \mid p_1(x) p_2(x) \cdots p_s(x)$,**可见** $g(x)$ **可能的因式为非零常数及** $p_i(x)\ (i = 1, 2, \cdots, s)$, **但** $p_i(x) \nmid g(x)\ (i = 1, 2, \cdots, s)$, **故** $g(x) = c \neq 0$.

设 $(p_i(x)) = m_i(i = 1, 2, \cdots, s)$,**则有**

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 + \cdots + m_s r_s = (f(x)) = n$$

$$m_1(r_1 - 1) + m_2(r_2 - 1) + \cdots + m_s(r_s - 1) = (f'(x)) = n - 1$$

即得 $n - (m_1 + m_2 + \cdots + m_s) = n - 1$,**从而** $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = 1$.**这只有** $m_1 = 1$, $s = 1$,**且** $r_1 = n$,**于是** $f(x) = a p_1^n(x)$.**设** $p_1(x) = x - b$,**则有**

$$f(x) = a(x-b)^n$$

法 2　**待定系数法** .**设**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (a_i \in P,\ a_n \neq 0)$$

则

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$$

由 $f'(x) \mid f(x)$ 及 $(f(x)) = (f'(x)) + 1$ 知,存在多项式 $cx + d$ 使

$$f(x) = f'(x)(cx + d)$$

因而 $c = \dfrac{1}{n}$,此时

$$f(x) = f'(x)\left(\frac{1}{n}x + d\right) = \frac{1}{n}f'(x)(x + nd) = \frac{1}{n}f'(x)(x - b)$$

其中 $b = -\dfrac{1}{n}d$.于是 $(f(x), f'(x)) = \dfrac{1}{na_n}f'(x)$,即为首项系数为 1 的 $n-1$ 次多项式 .故

$$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = \frac{\frac{1}{n}f'(x)(x - b)}{\frac{1}{na_n}f'(x)} = a_n(x - b)$$

由于 $\dfrac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 包含了 $f(x)$ 的全部不可约因式,所以 $f(x)$ 的不可约因式只能是 $x - b$ 及它的非零常数倍 .考虑到 $f(x)$ 的次数是 n,所以 $f(x)$ 具有形式

$$f(x) = a(x - b)^n \qquad (a, b \in P)$$

例 1 .12 当 a, b 满足什么条件时,多项式 $f(x) = x^4 + 4ax + b$ 有重根?

解 法 1 $f'(x) = 4x^3 + 4a$.用 $f'(x)$ 除 $f(x)$ 得余式为 $r_1(x) = 3ax + b$,可见当 $a = b = 0$ 时, $f(x)$ 与 $f'(x)$ 有 3 次的最大公因式;当 $a \neq 0$ 时,用 $r_1(x)$ 除 $f'(x)$ 得余式

$$r_2(x) = \frac{4(27a^4 - b^3)}{27a^3}$$

可见 $27a^4 - b^3 = 0$ 时, $f(x)$ 与 $f'(x)$ 有 2 次的最大公因式 .综上可知,当 $27a^4 - b^3 = 0$ 时, $f(x)$ 与 $f'(x)$ 不互素, $f(x)$ 有重根 .

法 2 当 $a = 0$ 时,只有 $b = 0$, $f(x) = x^4$ 才有重根(重数是 3) .

当 $a \neq 0$ 时,设 α 是 $f(x)$ 的重根,则 α 也是 $f'(x)$ 的根,即有

$$f(\alpha) = \alpha^4 + 4a\alpha + b = 0, \quad f'(\alpha) = 4\alpha^3 + 4a = 0$$

整理得 $\alpha(\alpha^3 + 4a) = -b$, $\alpha^3 = -a$,解得 $\alpha = -\dfrac{b}{3a}$,于是

$$\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 = \alpha^3 = -a \quad 即 \quad 27a^4 - b^3 = 0$$

综上可知,当 $27a^4 - b^3 = 0$ 时, $f(x)$ 有重根 .

例 1.13　当正整数 n 取何值时，$f(x) = (x+1)^n - x^n - 1$ 有重因式．

分析　考虑重因式的问题，一般来说总是从求 $(f(x), f'(x))$ 入手，此时若 $f(x)$ 的次数不高，则利用辗转相除法确定 $(f(x), f'(x))$，或利用第三章的方法，考察 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的结式．当 $f(x)$ 的次数较高或不定时，也可通过 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 有公共根来讨论 $f(x)$ 的重因式．

解　$f'(x) = n(x+1)^{n-1} - nx^n$．由重因式判别定理知，$f(x)$ 有重因式的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 不互素，即 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 有公共根 α，于是

$$f(\alpha) = (\alpha+1)^n - \alpha^n - 1 = 0, \quad f'(\alpha) = n(\alpha+1)^{n-1} - n\alpha^{n-1} = 0$$

即 $(\alpha+1)^n = \alpha^n + 1$，$(\alpha+1)^{n-1} = \alpha^{n-1}$，从而

$$\alpha^n + 1 = (\alpha+1)^n = (\alpha+1)(\alpha+1)^{n-1} = (\alpha+1)\alpha^{n-1}$$

可得 $\alpha^{n-1} = 1$，$(\alpha+1)^{n-1} = 1$，这表明 α 与 $\alpha+1$ 都是 $n-1$ 次单位根．令 $\alpha = a+bi$，则 $\alpha+1 = (a+1)+bi$，由 $|\alpha| = |\alpha+1| = 1$ 得 $a^2+b^2 = (a+1)^2+b^2 = 1$，所以 $a = -\dfrac{1}{2}$，$b = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．于是 $\alpha = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，即 α 是 3 次单位根，故 $3 \mid (n-1)$．

例 1.14　已知 $1-\mathrm{i}$ 是方程 $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 2 = 0$ 的一个根，解此方程．

解　**法 1**　由于实系数方程的复根成对出现，$1-\mathrm{i}$ 是方程的根，从而 $1+\mathrm{i}$ 也是它的一个根．设 α, β 是它的另两个根，则由根与系数的关系知

$$\begin{cases} \alpha + \beta + (1-\mathrm{i}) + (1+\mathrm{i}) = 4 \\ \alpha\beta(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = -2 \end{cases}$$

解得 $\alpha = 1+\sqrt{2}$，$\beta = 1-\sqrt{2}$．故方程的四个根为

$$1+\mathrm{i}, \quad 1-\mathrm{i}, \quad 1+\sqrt{2}, \quad 1-\sqrt{2}$$

法 2　因为 $1\pm\mathrm{i}$ 是所给方程的根，故多项式

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 2$$

可被 $g(x) = [x-(1-\mathrm{i})][x+(1-\mathrm{i})] = x^2 - 2x + 2$ 整除．用 $g(x)$ 去除 $f(x)$，得商为 $x^2 - 2x - 1$，它的根为 $1\pm\sqrt{2}$．故原方程的四个根为

$$1+\mathrm{i}, \quad 1-\mathrm{i}, \quad 1+\sqrt{2}, \quad 1-\sqrt{2}$$

例 1.15　求 $f(x) = x^7 + 2x^6 - 6x^5 - 8x^4 + 17x^3 + 6x^2 - 20x + 8$ 的根．

解　**法 1**

$$f'(x) = 7x^6 + 12x^5 - 30x^4 - 32x^3 + 51x^2 + 12x - 20$$

用辗转相除法,得

$$(f(x),\ f'(x)) = x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4$$

于是

$$q(x) = \frac{f(x)}{(f(x),\ f'(x))} = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

由于 $f(x)$ 与 $q(x)$ 有完全相同的不可约因式 $x-1$, $x+2$,可见 $f(x)$ 有根 1, -2. 再用综合除法

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr}
1 & 1 & 2 & -6 & -8 & 17 & 6 & -20 & 8 \\
 & & 1 & 3 & -3 & -11 & 6 & 12 & -8 \\
\hline
1 & 1 & 3 & -3 & -11 & 6 & 12 & -8 & 0 \\
 & & 1 & 4 & 1 & -10 & -4 & 8 & \\
\hline
1 & 1 & 4 & 1 & -10 & -4 & 8 & 0 & \\
 & & 1 & 5 & 6 & -4 & -8 & & \\
\hline
1 & 1 & 5 & 6 & -4 & -8 & 0 & & \\
 & & 1 & 6 & 12 & 8 & & & \\
\hline
1 & 1 & 6 & 12 & 8 & 0 & & & \\
 & & 1 & 7 & 19 & & & & \\
\hline
 & 1 & 7 & 19 & 27 & & & &
\end{array}$$

可见 1 是 $f(x)$ 的四重根, -2 是 $f(x)$ 的三重根.

法2　$f(x)$ 为首项系数为 1 的整系数多项式,故它的有理根都是整数,且都是常数项的因子. 常数项 8 的因子为 ± 1, ± 2, ± 4, ± 8.

对 $x = 1$ 应用综合除法检验(同上),可见 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的四重根,且

$$f(x) = (x-1)^4(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)$$

而对 $g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$,有

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 6 & 12 & 8 \\
 & & -1 & -5 & -7 \\
\hline
 & 1 & 5 & 7 & 1 \neq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & 6 & 12 & 8 \\
 & & 2 & 16 & 56 \\
\hline
 & 1 & 8 & 28 & 64 \neq 0
\end{array}$$

所以 $x = -1$, $x = 2$ 不是 $g(x)$ 的有理根,从而不是 $f(x)$ 的有理根. 又有

$$\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & 6 & 12 & 8 \\
 & & -2 & -8 & -8 \\
\hline
-2 & 1 & 4 & 4 & 0 \\
 & & -2 & -4 & \\
\hline
-2 & 1 & 2 & 0 & \\
 & & -2 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & &
\end{array}$$

可见 $g(x)=(x+2)^3$，故 $f(x)=(x-1)^4(x+2)^3$，即 $x=1$ 为 $f(x)$ 的四重根，$x=-2$ 为 $f(x)$ 的三重根．

注　1. 当 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 不互素时，$f(x)$ 有重根，此时可以通过计算 $\dfrac{f(x)}{(f(x),\ f'(x))}$ 得到 $f(x)$ 的所有不可约因式，再用综合除法确定根的重数；也可以直接将 $(f(x),\ f'(x))$ 因式分解，从而得知 $f(x)$ 的重根重数．如对本题有

$$(f(x),\ f'(x))=(x-1)^3(x+2)^2$$

所以 1 是 $f(x)$ 的四重根，-2 是 $f(x)$ 的三重根．

2. 当分离出 $f(x)$ 的因子 $(x-1)^4$ 后，可不必再用原多项式 $f(x)$ 对 $x=-1$ 与 $x=2$ 等进行检验，只要对 $g(x)=x^3+6x^2+12x+8$ 进行综合除法即可．

例 1.16　λ 取何值时，方程 $x^3+x^2+2x+\lambda=0$ 的三个根成等比数列？

解　设方程的三个根为

$$a,\quad at,\quad at^2$$

则由根与系数的关系，得

$$a+at+at^2=-1,\quad a^2t+a^2t^2+a^2t^3=2,\quad a^3t^3=-\lambda$$

由第二个等式得 $at(a+at+at^2)=2$，将第一个等式代入得 $at=-2$．再代入第三个等式得 $\lambda=8$．从而当 $\lambda=8$ 时，方程的三个根成等比数列．

注　当 $\lambda=8$ 时，可求得方程的三个根为

$$\frac{1+\sqrt{15}\mathrm{i}}{2},\quad -2,\quad \frac{1-\sqrt{15}\mathrm{i}}{2}$$

这三个根成等比数列．

例 1.17　设多项式 $f(x)=x^3-12x^2+47x-k$ 的三个根均为正实数，且为一直角三角形的边长，求这三个根及 k 值．

解　设 $f(x)$ 的三个正实根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，则根据假设有

$$\alpha_3^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2 \qquad (*)$$

由根与系数的关系知

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=12,\quad \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=47,\quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3=k$$

第一个等式求平方并整理得

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+\alpha_3^2+2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)=144$$

将 (*) 式和第二个等式代入得 $2\alpha_3^2+2\times47=144$，即 $\alpha_3^2=25$，故 $\alpha_3=5$．于是由 (*) 式和第二个等式得 $\alpha_1^2+\alpha_2^2=25$，$\alpha_1+\alpha_2=7$，解得 $\alpha_1=3$，$\alpha_2=4$．故 $f(x)$ 的三个根为 3，4，5，且 $k=\alpha_1\alpha_2\alpha_3=60$．

注　讨论方程的根的有关结论时，可利用根与系数的关系得到一些等式，然后再从

这些等式导出所需的结论,但这往往要经过复杂的消元与变形,技巧性较高.

例 1.18　证明:有理系数多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约的充分必要条件是,对任意有理数 $a\neq 0$ 和 b,多项式 $g(x)=f(ax+b)$ 在有理数域上不可约.

证　必要性　已知 $f(x)$ 不可约.反证.若 $g(x)$ 在有理数域上可约,即

$$g(x)=f(ax+b)=g_1(x)g_2(x)$$

其中 $g_1(x)$, $g_2(x)$ 是有理系数多项式,且次数小于 $g(x)$ 的次数.在上式中用 $\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$ 代 x,所得各多项式仍为有理系数多项式,次数不变,且有

$$f(x)=g_1\left(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}\right)g_2\left(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}\right)$$

这说明 $f(x)$ 在有理数域上可约,矛盾.故 $g(x)$ 在有理数域上不可约.

充分性　已知 $g(x)=f(ax+b)$ 不可约.反证.若 $f(x)$ 可约,设

$$f(x)=f_1(x)f_2(x)$$

其中 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 为有理数域上次数小于 $f(x)$ 的次数的多项式,由此可得

$$g(x)=f(ax+b)=f_1(ax+b)f_2(ax+b)$$

这与 $g(x)$ 不可约矛盾.故 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

例 1.19　判别多项式 $f(x)=x^3+3x+1$ 在有理数域上是否可约?

解　法 1　令 $x=y-1$,则

$$g(y)=f(y-1)=y^3-3y^2+6y-3$$

取 $p=3$,由于 $3\nmid 1$, $3\mid -3$, $3\mid 6$, $3\mid -3$,但 $3^2\nmid -3$,故由艾森斯坦判别法知, $f(x)$ 在有理数域上不可约.

法 2　因为 $(f(x))=3$,如果 $f(x)$ 可约,则 $f(x)$ 必有一次因式,从而 $f(x)$ 必有有理根.由于 $f(x)$ 的常数项为 1,首项系数也是 1,故 $f(x)$ 的有理根(如果有的话)仅可能为 $x=\pm 1$,但 $f(1)=5\neq 0$, $f(-1)=-1\neq 0$,所以 $f(x)$ 无有理根,从而 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

注　1. 本例不能直接使用艾森斯坦判别法,但经过变换 $x=y-1$, $f(x)$ 可化为可应用艾森斯坦判别法的情形,这是判别整系数多项式不可约的一个常用的方法,其原因见例 1.18 的证明.

2. 如果次数 ≥ 2 的有理系数多项式有有理根,则它当然是可约的;但如果它没有有理根,则只能说它没有一次因式,它还可能有别的因式,所以我们一般不能据此就断定它不可约.只有当多项式的次数 ≤ 3 时,才能根据它没有有理根而断定它不可约.

例 1.20　求所有整数 m,使 $f(x)=x^5+mx+1$ 在有理数域上可约.

解　分两种情况讨论:

(1) 如果 $f(x)$ 有有理根,则 $f(1) = 0$ 或 $f(-1) = 0$.

当 $f(1) = 1 + m + 1 = 0$ 时,得 $m = -2$;

当 $f(-1) = -1 - m + 1 = 0$ 时,得 $m = 0$.

(2) 如果 $f(x)$ 无有理根,则 $f(x)$ 可以分解成一个 3 次多项式与一个 2 次多项式的乘积 . 设

$$f(x) = (x^3 + ax^2 + bx + 1)(x^2 + cx + 1) \tag{*}$$

或

$$f(x) = (x^3 + ax^2 + bx - 1)(x^2 + cx - 1) \tag{**}$$

其中 a, b, c 都是整数 . 将(*) 式右端展开,比较两端同次项系数,得

$$a + c = 0,\quad ac + b + 1 = 0,\quad a + bc + 1 = 0,\quad b + c = m$$

解得 $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$, $m = 1$. 将(* *) 式右端展开并比较两端同次项系数,得

$$a + c = 0,\quad ac + b - 1 = 0,\quad -a + bc - 1 = 0,\quad b + c = -m$$

求不出整数解 .

综上所述,当且仅当 $m = 0, 1, -2$ 时, $f(x)$ 在有理数域上可约 .

例 1 21　设 $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n) - 1$,其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是两两不同的整数 .证明: $f(x)$ 在有理数域上不可约 .

证　反证 . 如果 $f(x)$ 在有理数域上可约,则 $f(x)$ 可以分解成两个次数较低的整系数多项式之积,即

$$f(x) = g(x)h(x)$$

其中 $g(x)$, $h(x)$ 是整系数多项式,且 $(g(x)) < n$, $(h(x)) < n$. 由题设可得

$$f(a_i) = g(a_i)h(a_i) = -1 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

此时有 $g(a_i) = 1$, $h(a_i) = -1$ 或 $g(a_i) = -1$, $h(a_i) = 1$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$,即总有

$$g(a_i) + h(a_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

可见多项式 $g(x) + h(x)$ 有 n 个互异的根 . 但 $(g(x) + h(x)) < n$,这与多项式在任一数域中的根的个数不超过多项式的次数的性质相矛盾,所以 $f(x)$ 在有理数域上不可约 .

注　$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 两两互异这一条件是不可少的, 否则命题不成立 . 例如 $f(x) = (x - a)^2 - 1 = (x - a - 1)(x - a + 1)$,即 $f(x)$ 在有理数域上可约 .

例 1 22　证明:当 p 为素数时,

$$f(x) = 1 + 2x + \cdots + (p - 1)x^{p-2}$$

在有理数域上不可约.

分析　直接证明不容易,可对 $f(x)$ 进行变形及代换,化成便于使用艾森斯坦判别法的形式.

证　对 $f(x)$ 进行变换,利用导数的有关结果:

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^{p-1})'=\left(\frac{x^p-1}{x-1}\right)'=\frac{(p-1)x^p-px^{p-1}+1}{(x-1)^2}$$

令 $x=y+1$,得

$$g(y)=f(y+1)=\frac{(p-1)(y+1)^p-p(y+1)^{p-1}+1}{y^2}=$$

$$\frac{1}{y^2}\left[(p-1)\sum_{k=0}^{p}C_p^k y^k-p\sum_{k=0}^{p-1}C_{p-1}^k y^k+1\right]=$$

$$(p-1)\sum_{k=2}^{p}C_p^k y^{k-2}-p\sum_{k=2}^{p-1}C_{p-1}^k y^{k-2}=$$

$$\sum_{k=2}^{p-1}\left[(p-1)C_p^k-pC_{p-1}^k\right]y^{k-2}+(p-1)C_p^p y^p=$$

$$\sum_{k=2}^{p-1}(k-1)C_p^k y^{k-2}+(p-1)y^p$$

因为 $p\mid(k-1)C_p^k(k=2,3,\cdots,p-1)$, $p^2\nmid C_p^2$, $p^2\nmid(p-1)$,所以由艾森斯坦判别法知 $g(y)$ 在有理数域上不可约,故 $f(x)$ 在有理数域上也不可约.

例1.23　**按多元多项式的字典排列法改写以下多项式,并指出其乘积的首项:**

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=3x_2^6x_4^3-\frac{1}{2}x_1^3x_2x_3^2+5x_2^3x_4+$$

$$7x_3^2+2x_1^3x_2x_3^4-8+6x_2x_4^2$$

$$g(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_3^2x_4+x_3x_4^2+x_1^2x_2+x_1x_2^2$$

解　f 与 g 按字典排列法为

$$f=2x_1^3x_2x_3^4-\frac{1}{2}x_1^3x_2x_3^2+3x_2^6x_4^3+5x_2^3x_4+6x_2x_4^2+7x_3^2-8$$

$$g=x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_3^2x_4+x_3x_4^2$$

乘积 $f\cdot g$ 的首项等于 f 的首项与 g 的首项的乘积,即

$$(2x_1^3x_2x_3^4)(x_1^2x_2)=2x_1^5x_2^2x_3^4$$

例1.24　**化对称多项式**

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+$$

$$(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)$$

为初等对称多项式的多项式．

解　f 是两个齐次对称多项式

$$g = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

与
$$h = (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3)$$

的和，可分别化 g 及 h 为初等对称多项式的多项式．

法 1　由于

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)$$

所以

$$g = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

法 2　逐步消去首项法．g 的首项为 x_1^2，作 $\varphi_1 = \sigma_1^{2-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^{0-0}\sigma_4^0 = \sigma_1^2$，则

$$g_1 = g - \varphi_1 = -2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) = -2\sigma_2$$

从而

$$g = g_1 + \varphi_1 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

又 h 的首项为 $x_1^3x_2x_3x_4$，作 $\psi_1 = \sigma_1^{3-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^1 = \sigma_1^2\sigma_4$，则

$$\begin{aligned}h_1 = h - \psi_1 = {} & x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_4^2 + x_1^2x_3^2x_4^2 + x_2^2x_3^2x_4^2 - \\ & 2(x_1^2x_2^2x_3x_4 + x_1^2x_2x_3^2x_4 + x_1^2x_2x_3x_4^2 + x_1x_2^2x_3^2x_4 + \\ & x_1x_2^2x_3x_4^2 + x_1x_2x_3^2x_4^2)\end{aligned}$$

而 h_1 的首项为 $x_1^2x_2^2x_3^2$，作 $\psi_2 = \sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-2}\sigma_3^{2-0}\sigma_4^0 = \sigma_3^2$，则

$$\begin{aligned}h_2 = h_1 - \psi_2 = {} & -4(x_1^2x_2^2x_3x_4 + x_1^2x_2x_3^2x_4 + x_1^2x_2x_3x_4^2 + \\ & x_1x_2^2x_3^2x_4 + x_1x_2^2x_3x_4^2 + x_1x_2x_3^2x_4^2) = \\ & -4x_1x_2x_3x_4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) = \\ & -4\sigma_2\sigma_4\end{aligned}$$

从而
$$h = h_1 + \psi_1 = (h_2 + \psi_2) + \psi_1 = \sigma_1^2\sigma_4 + \sigma_3^2 - 4\sigma_2\sigma_4$$

法 3　待定系数法．g 的首项为 x_1^2，写出不先于首项的所有二次指数组及相应的初等对称多项式方幂的乘积如下表：

指数组	对 σ 的方幂乘积
2　0　0　0	$\sigma_1^{2-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^{0-0}\sigma_4^0 = \sigma_1^2$
1　1　0　0	$\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^{0-0}\sigma_4^0 = \sigma_2$

这样，g 可表成

$$g = \sigma_1^2 + a\sigma_2$$

这是一个恒等式,为了确定待定系数 a,取 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$,则 $g = 4$, $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 6$,代入上式得 $4 = 16 + 6a$,解得 $a = -2$,于是

$$g = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

又 h 的首项为 $x_1^3 x_2 x_3 x_4$,写出所有不先于首项的六次指数组及相应的初等对称多项式方幂的乘积如下表:

指数组	对应 σ_i 的方幂乘积
3 1 1 1	$\sigma_1^{3-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^{1} = \sigma_1^2\sigma_4$
2 2 2 0	$\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-2}\sigma_3^{2-0}\sigma_4^{0} = \sigma_3^2$
2 2 1 1	$\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^{1} = \sigma_2\sigma_4$

设
$$h = \sigma_1^2\sigma_4 + b\sigma_3^2 + c\sigma_2\sigma_4 \qquad (*)$$

取 x_1, x_2, x_3, x_4 等于一些特殊的数,经计算可得:

x_1	x_2	x_3	x_4	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	h
1	1	1	0	3	3	1	0	1
1	1	1	1	4	6	4	1	8

代入(*)式得 $\quad 1 = 0 + b + 0, \quad 8 = 16 + 16b + 6c$

解得 $b = 1$, $c = -4$. 于是 $h = \sigma_1^2\sigma_4 + \sigma_3^2 - 4\sigma_2\sigma_4$. 故

$$f = g + h = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 + \sigma_1^2\sigma_4 + \sigma_3^2 - 4\sigma_2\sigma_4$$

注　解法 1 是非常特殊的方法,往往要经过复杂的变形,技巧性较高;解法 2 是采用对称多项式基本定理证明过程中的方法,当对称多项式的次数较高时,计算比较麻烦,一般采用解法 3,即待定系数法. 采用待定系数法时应注意以下几点:① 该方法仅适用于齐次多项式,但我们总是能够把一个对称多项式看成若干个次数不等的齐次对称多项式之和,然后分别采用该方法即可;② 注意指数组应满足的条件,切勿漏掉指数组;③ 为了求待定系数,必须选取 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的数值,在选取时应尽可能使待定系数容易求出.

例 1 25　将 n 元对称多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum x_1^3 x_2 x_3 \qquad (n \geq 5)$$

表为初等对称多项式的多项式(其中 $\sum x_1^3 x_2 x_3$ 表示所有由 $x_1^3 x_2 x_3 x_4^0 \cdots x_n^0$ 经过对换得到的项的和).

解　对 n 元对称多项式,一般用待定系数法比较方便.

根据 f 的首项 $x_1^3x_2x_3$,写出所有不先于首项的五次指数组及相应的初等对称多项式的方幂的乘积如下表:

指数组	对应 σ_i 的方幂乘积
3 1 1 0 0 0 ⋯ 0	$\sigma_1^2\sigma_3$
2 2 1 0 0 0 ⋯ 0	$\sigma_2\sigma_3$
2 1 1 1 0 0 ⋯ 0	$\sigma_1\sigma_4$
1 1 1 1 1 0 ⋯ 0	σ_5

设
$$f = \sigma_1^2\sigma_3 + a\sigma_2\sigma_3 + b\sigma_1\sigma_4 + c\sigma_5 \tag{*}$$

取 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为一些特殊的值,经计算可得:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	⋯	x_n	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	f
1	1	1	0	0	⋯	0	3	3	1	0	0	3
1	1	1	1	0	⋯	0	4	6	4	1	0	12
1	1	1	1	1	⋯	0	5	10	10	5	1	30

代入(*)式得

$$3 = 9 + 3a,\quad 12 = 64 + 24a + 4b,\quad 30 = 250 + 100a + 25b + c$$

解得 $a = -2,\ b = -1,\ c = 5$.故

$$f = \sigma_1^2\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_4 + 5\sigma_5$$

例 1.26　设 x_1, x_2, x_3 为多项式

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 2$$

的根,求 $\phi = \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_3}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \dfrac{x_1}{x_3} + \dfrac{x_3}{x_1}$ 的值.

解　由根与系数的关系知

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{1}{2}$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{3}{2}$$

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 = -1$$

又整理得

$$\varphi=\frac{x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2}{x_1x_2x_3}=\frac{g}{\sigma_3}$$

其中

$$g=x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$$

由化对称多项式为初等对称多项式的多项式的方法可知

$$g=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)-3(-1)=\frac{15}{4}$$

故

$$\varphi=\frac{g}{\sigma_3}=-\frac{15}{4}$$

例 1 27 设 x_1, x_2, x_3 为多项式 $f(x)=x^3+px+q$ 的三个根,求以

$$y_1=(x_1-x_2)^2,\quad y_2=(x_1-x_3)^2,\quad y_3=(x_2-x_3)^2$$

为根的多项式 $g(y)$.

证 首先由根与系数的关系知

$$\sigma_1=x_1+x_2+x_3=0$$
$$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p$$
$$\sigma_3=x_1x_2x_3=-q$$

从而

$$\begin{aligned}y_1+y_2+y_3&=(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2=\\&2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=\\&2[(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)]-2\sigma_2=\\&2(\sigma_1^2-2\sigma_2)-2\sigma_2=2\sigma_1^2-6\sigma_2=-6p\end{aligned}$$

利用化对称多项式为初等对称多项式的多项式的待定系数法,得

$$\begin{aligned}y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3&=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2+(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2+\\&(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=\\&\sigma_1^4-6\sigma_1^2\sigma_2+9\sigma_2^2=9p^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1y_2y_3&=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=\\&\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_1^3\sigma_3-4\sigma_2^3+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2=\\&-4p^3-27q^2\end{aligned}$$

于是由根与系数的关系知,以 y_1, y_2, y_3 为根的多项式为

$$g(y)=y^3+6py^2+9p^2y+4p^3+27q^2$$

五、课后习题全解

(一) 第一章习题

1. 用 $g(x)$ 除 $f(x)$,求商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$, $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$;

2) $f(x) = x^4 - 2x + 5$, $g(x) = x^2 - x + 2$.

解　1) 法 1　用普通除法 .

$$
\begin{array}{rl}
 & \dfrac{1}{3}x - \dfrac{7}{9} \quad = q(x) \\
g(x) = 3x^2 - 2x + 1 \; \big) & x^3 - 3x^2 - x - 1 \quad = f(x) \\
 & x^3 - \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}x \\
\hline
 & -\dfrac{7}{3}x^2 - \dfrac{4}{3}x - 1 \\
 & -\dfrac{7}{3}x^2 + \dfrac{14}{9}x - \dfrac{7}{9} \\
\hline
 & -\dfrac{26}{9}x - \dfrac{2}{9} \quad = r(x)
\end{array}
$$

所以
$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{7}{9}\right)g(x) - \frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$$

$$q(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{9}, \quad r(x) = -\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$$

法 2　用待定系数法 .

由于 $f(x)$ 为首项系数为 1 的 3 次多项式,而 $g(x)$ 为首项系数为 3 的 2 次多项式,所以商 $q(x)$ 必为首项系数为 $\frac{1}{3}$ 的 1 次多项式,而余式的次数小于 2 .于是可设

$$q(x) = \frac{1}{3}x + a, \quad r(x) = bx + c$$

根据 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$,即

$$x^3 - 3x^2 - x - 1 = \left(\frac{1}{3}x + a\right)(3x^2 - 2x + 1) + bx + c$$

右端展开,合并同类项,再比较两端同次幂的系数,得

$$-3 = 3a - \frac{2}{3}, \quad -1 = -2a + \frac{1}{3} + b, \quad -1 = a + c$$

解得 $a = -\frac{7}{9}$, $b = -\frac{26}{9}$, $c = -\frac{2}{9}$. **故得**

$$q(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{9}, \quad r(x) = -\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$$

2) **法** 1　**用带余除法** .

$$\begin{array}{r|l|l}
g(x) = x^2 - x + 2 & f(x) = x^4 \qquad\qquad\qquad - 2x + 5 & x^2 + x - 1 = q(x) \\
 & \qquad\quad x^4 - x^3 + 2x^2 & \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad x^3 - 2x^2 - 2x + 5 & \\
 & \qquad\qquad\quad x^3 - x^2 + 2x & \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad -x^2 - 4x + 5 & \\
 & \qquad\qquad\qquad -x^2 + x - 2 & \\
\hline
 & \qquad\quad r(x) = \quad -5x + 7 &
\end{array}$$

所以

$$f(x) = (x^2 + x - 1)g(x) - 5x + 7$$

$$q(x) = x^2 + x - 1, \quad r(x) = -5x + 7$$

法 2　**用待定系数法** .

由于 $f(x)$ **是首项系数为** 1 **的** 4 **次多项式,而** $g(x)$ **是首项系数为** 1 **的** 2 **次多项式,故商** $q(x)$ **必为首项系数为** 1 **的** 2 **次多项式,而余式次数小于** 2 . **于是可设**

$$q(x) = x^2 + ax + b, \quad r(x) = cx + d$$

根据 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$,**即**

$$x^4 - 2x + 5 = (x^2 + ax + b)(x^2 - x + 2) + cx + d$$

右端展开,合并同类项,再比较两端同次幂的系数,得

$$0 = a - 1, \quad 0 = -a + b + 2, \quad -2 = 2a - b + c, \quad 5 = 2b + d$$

解得 $a = 1$, $b = -1$, $c = -5$, $d = 7$. **故得**

$$q(x) = x^2 + x - 1, \quad r(x) = -5x + 7$$

2. m, p, q **适合什么条件时,有**

1) $x^2 + mx - 1 \mid x^3 + px + q$;

2) $x^2 + mx + 1 \mid x^4 + px^2 + q$.

解　1) **用** $x^2 + mx - 1$ **去除** $x^3 + px + q$,**得**

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - m \\
\cline{2-2}
x^2 + mx - 1 & x^3 \qquad\qquad + px + q \\
 & \underline{x^3 + mx^2 - x} \\
 & \qquad -mx^2 + (p+1)x + q \\
 & \qquad \underline{-mx^2 - \qquad m^2 x + m} \\
 & \qquad\qquad (p + 1 + m^2)x + (q - m)
\end{array}
$$

即余式为 $$r(x) = (p + 1 + m^2)x + (q - m)$$

由于 $x^2 + mx - 1$ **能整除** $x^3 + px + q$ **的充分必要条件是** $r(x) = 0$,**故由上式得**

$$p + 1 + m^2 = 0, \quad q - m = 0$$

即当 $p = -m^2 - 1$, $q = m$ **时**, $x^2 + mx - 1 \mid x^3 + px + q$.

2) **用** $x^2 + mx + 1$ **去除** $x^4 + px^2 + q$,**得余式**

$$r(x) = m(2 - p - m^2)x + (1 + q - p - m^2)$$

令 $r(x) = 0$,**得**

$$m(2 - p - m^2) = 0, \quad 1 + q - p - m^2 = 0$$

于是,**当** $m = 0$ **时**, $1 + q - p = 0$,**即** $p = q + 1$;**当** $m \neq 0$ **时**,**得**

$$2 - p - m^2 = 0, \quad 1 + q - p - m^2 = 0$$

即 $p = 2 - m^2$, $q = 1$.**故** $x^2 + mx + 1$ **能整除** $x^4 + px^2 + 1$ **的条件是**

$$m = 0, \ p = q + 1 \quad \text{或} \quad p = 2 - m^2, \ q = 1$$

3. **求** $g(x)$ **除** $f(x)$ **的商** $q(x)$ **与余式** $r(x)$:

1) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$, $g(x) = x + 3$;

2) $f(x) = x^3 - x^2 - x$, $g(x) = x - 1 + 2\mathrm{i}$.

解　1) **用综合除法.写出** $f(x)$ **按降幂排列的系数**,**并注意缺项的系数为** 0:

$$
\begin{array}{r|rrrrr|r}
-3 & 2 & 0 & -5 & 0 & -8 & 0 \\
 & & -6 & 18 & -39 & 117 & -327 \\
\hline
 & 2 & -6 & 13 & -39 & 109 & -327
\end{array}
$$

故得

$$q(x) = 2x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 39x + 109, \quad r(x) = -327$$

2) **因为**

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
1 - 2\mathrm{i} & 1 & -1 & -1 & 0 \\
 & & 1 - 2\mathrm{i} & -4 - 2\mathrm{i} & -9 + 8\mathrm{i} \\
\hline
 & 1 & -2\mathrm{i} & -5 - 2\mathrm{i} & -9 + 8\mathrm{i}
\end{array}
$$

所以 $$q(x) = x^2 - 2\mathrm{i}x - 5 - 2\mathrm{i}, \quad r(x) = -9 + 8\mathrm{i}$$

4. **把** $f(x)$ **表成** $x - x_0$ **的方幂和,即表成**

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

的形式:

1) $f(x) = x^5,\ x_0 = 1$;

2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3,\ x_0 = -2$;

3) $f(x) = x^4 + 2\mathrm{i}x^3 - (1 + \mathrm{i})x^2 - 3x + 7 + \mathrm{i},\ x_0 = -\mathrm{i}$.

解　用 $x - x_0$ 除 $f(x)$ 得余数 c_0,再用 $x - x_0$ 逐次除所得的商得余数 c_i;这一过程可通过连续施行综合除法实现.

1) 因为

$$\begin{array}{r|cccccc l}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 = c_0 \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & & \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & 5 = c_1 \\
 & & 1 & 3 & 6 & & & \\
\hline
1 & 1 & 3 & 6 & & & & 10 = c_2 \\
 & & 1 & 4 & & & & \\
\hline
1 & 1 & 4 & & & & & 10 = c_3 \\
 & & 1 & & & & & \\
\hline
 & 1 & & & & & & 5 = c_4
\end{array}$$

所以

$$x^5 = 1 + 5(x - 1) + 10(x - 1)^2 + 10(x - 1)^3 + 5(x - 1)^4 + (x - 1)^5$$

2) 因为

$$\begin{array}{r|ccccc l}
-2 & 1 & 0 & -2 & 0 & 3 & \\
 & & -2 & 4 & -4 & 8 & \\
\hline
-2 & 1 & -2 & 2 & -4 & & 11 = c_0 \\
 & & -2 & 8 & -20 & & \\
\hline
-2 & 1 & -4 & 10 & & & -24 = c_1 \\
 & & -2 & 12 & & & \\
\hline
-2 & 1 & -6 & & & & 22 = c_2 \\
 & & -2 & & & & \\
\hline
 & 1 & & & & & -8 = c_3
\end{array}$$

所以

$$x^4 - 2x^2 + 3 = 11 - 24(x + 2) + 22(x + 2)^2 - 8(x + 2)^3 + (x + 2)^4$$

3) 因为

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-\mathrm{i} & 1 & 2\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} & -3 & 7+\mathrm{i} \\
 & & -\mathrm{i} & 1 & -1 & 4\mathrm{i} \\
\hline
-\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & -4 & 7+5\mathrm{i}=c_0 \\
 & & -\mathrm{i} & 0 & -1 & \\
\hline
-\mathrm{i} & 1 & 0 & -\mathrm{i} & -5=c_1 & \\
 & & -\mathrm{i} & -1 & & \\
\hline
-\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} & -1-\mathrm{i}=c_2 & & \\
 & & -\mathrm{i} & & & \\
\hline
 & 1 & -2\mathrm{i}=c_3 & & &
\end{array}
$$

所以

$$f(x) = 7+5\mathrm{i}-5(x+\mathrm{i})+(-1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})^2-2\mathrm{i}(x+\mathrm{i})^3+(x+\mathrm{i})^4$$

5. 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式:

1) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$, $g(x)=x^3+x^2-x-1$;

2) $f(x)=x^4-4x^3+1$, $g(x)=x^3-3x^2+1$;

3) $f(x)=x^4-10x^2+1$, $g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$.

解　1) 用辗转相除法,得

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
q_2(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} & \begin{array}{l} g(x)=x^3+x^2-x-1 \\ x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x \end{array} & \begin{array}{l} f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1 \\ x^4+x^3-x^2-x \end{array} & x=q_1(x) \\
\hline
 & \begin{array}{l} -\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1 \\ -\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4} \end{array} & \begin{array}{l} r_1(x)=-2x^2-3x-1 \\ -2x^2-2x \end{array} & \frac{8}{3}x+\frac{4}{3}=q_3(x) \\
\hline
 & r_2(x)=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4} & \begin{array}{l} -x-1 \\ -x-1 \end{array} & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}
$$

用等式写出来就是

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)=xg(x)+(-2x^2-3x-1)$$

$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)r_1(x)+\left(-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\right)$$

$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)=\left(\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}\right)r_2(x)$$

故

$$(f(x),\ g(x))=x+1$$

2) 用辗转相除法,得

$q_2(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{9}$	$g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ $x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x$	$f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ $x^4 - 3x^3 + x$	$x - 1 = q_1(x)$
	$-\frac{10}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$ $-\frac{10}{3}x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{20}{9}$	$-x^3 - x + 1$ $-x^3 + 3x^2 - 1$	
	$r_2(x) = \frac{16}{9}x - \frac{11}{9}$	$r_1(x) = -3x^2 - x + 2$ $-3x^2 + \frac{33}{16}x$	$-\frac{27}{16}x - \frac{441}{256} = q_3(x)$
		$-\frac{49}{16}x + 2$ $-\frac{49}{16}x + \frac{539}{256}$	
		$r_3(x) = -\frac{27}{256}$	

故
$$(f(x), g(x)) = 1$$

3) 用辗转相除法,得

$q_2(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}$	$g(x) = x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1$ $x^4 - 2\sqrt{2}x^3 - x^2$	$f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ $x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1$	$1 = q_1(x)$
	$-2\sqrt{2}x^3 + 7x^2 + 4\sqrt{2}x + 1$ $-2\sqrt{2}x^3 + 8x^2 + 2\sqrt{2}x$	$r_1(x) = 4\sqrt{2}x^3 - 16x^2 - 4\sqrt{2}x$ $4\sqrt{2}x^3 - 16x^2 - 4\sqrt{2}x$	$-4\sqrt{2}x = q_3(x)$
	$r_2(x) = -x^2 + 2\sqrt{2}x + 1$	0	

故
$$(f(x), g(x)) = x^2 - 2\sqrt{2}x - 1$$

6. 求 $u(x)$, $v(x)$ 使 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$.

1) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;

2) $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$, $g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$;

3) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$, $g(x) = x^2 - x - 1$.

解　1) 用辗转相除法,得

$q_2(x) = x + 1$	$g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$ $x^4 - 2x^2$	$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$ $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$	$1 = q_1(x)$
	$x^3 + x^2 - 2x - 2$ $x^3 - 2x$	$r_1(x) = x^3 - 2x$ $x^3 - 2x$	$x = q_3(x)$
	$r_2(x) = x^2 - 2$	0	

用等式写出来就是

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x) = g(x) + (x^3 - 2x)$$
$$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x) = (x + 1)r_1(x) + (x^2 - 2)$$
$$r_1(x) = q_3(x)r_2(x) = xr_2(x)$$

于是

$$
\begin{aligned}
(f(x),\ g(x)) = x^2 - 2 = r_2(x) = g(x) - q_2(x)r_1(x) &= \\
g(x) - q_2(x)[f(x) - q_1(x)g(x)] &= \\
-q_2(x)f(x) + [1 + q_2(x)q_1(x)]g(x)
\end{aligned}
$$

从而

$$u(x) = -q_2(x) = -x - 1$$

$$v(x) = 1 + q_2(x)q_1(x) = 1 + (x+1)\cdot 1 = x + 2$$

2) 用辗转相除法,得

$q_2(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$	$g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$ $2x^3 + x^2 - 3x$	$f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$ $4x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 8x$	$2x = q_1(x)$
	$-2x^2 - 2x + 4$ $-2x^2 - x + 3$	$r_1(x) = -6x^2 - 3x + 9$ $-6x^2 + 6x$	$6x + 9 = q_3(x)$
	$r_2(x) = -x + 1$	$-9x + 9$ $-9x + 9$	
		0	

用等式写出来即为

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x) = 2xg(x) + (-6x^2 - 3x + 9)$$

$$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x) = \left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)g(x) + (-x + 1)$$

$$r_1(x) = q_3(x)r_2(x) = (6x + 9)r_2(x)$$

于是

$$
\begin{aligned}
(f(x),\ g(x)) = x - 1 = -r_2(x) = q_2(x)r_1(x) - g(x) &= \\
q_2(x)[f(x) - q_1(x)g(x)] - g(x) &= \\
q_2(x)f(x) + [-q_2(x)q_1(x) - 1]g(x)
\end{aligned}
$$

故

$$u(x) = q_2(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$v(x) = -q_2(x)q_1(x) - 1 = -\left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)\cdot 2x - 1 = \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$$

3) 用辗转相除法,得

$q_2(x) = x + 1$	$g(x) = x^2 - x - 1$ $x^2 - 2x$	$f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ $x^4 - x^3 - x^2$	$x^2 - 3 = q_1(x)$
	$x - 1$ $x - 2$	$-3x^2 + 4x + 1$ $-3x^2 + 3x + 3$	
	$r_2(x) = 1$	$r_1(x) = x - 2$	

用等式写出来即为

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)=(x^2-3)g(x)+(x-2)$$
$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)=(x+1)r_1(x)+1$$

于是

$$(f(x),g(x))=1=r_2(x)=g(x)-q_2(x)r_1(x)=$$
$$g(x)-q_2(x)[f(x)-q_1(x)g(x)]=$$
$$-q_2(x)f(x)+[1+q_2(x)q_1(x)]g(x)$$

故

$$u(x)=-q_2(x)=-x-1$$
$$v(x)=1+q_2(x)q_1(x)=1+(x+1)(x^2-3)=x^3+x^2-3x-2$$

7. **设** $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u$, $g(x)=x^3+tx+u$**的最大公因式是一个二次多项式,求** t, u**的值.**

解 用辗转相除法,得

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)=1\cdot g(x)+[(1+t)x^2+(2-t)x+u]$$
$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)=$$
$$\left[\frac{1}{1+t}x+\frac{t-2}{(1+t)^2}\right]r_1(x)+$$
$$\left[\frac{(t^2+t-u)(1+t)+(t-2)^2}{(1+t)^2}x+\frac{u[(1+t)^2-(t-2)]}{(1+t)^2}\right]$$

由于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式是一个二次多项式,所以 $r_2(x)=0$,从而有

$$\frac{(t^2+t-u)(1+t)(t-2)^2}{(1+t)^2}=0,\quad \frac{u[(1+t)^2-(t-2)]}{(1+t)^2}=0$$

联立解得 $u=0$, $t=-4$.

注 本题还可求得其他的 t, u 值:

$$\begin{cases}u=0\\ t=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})\end{cases},\quad \begin{cases}u=0\\ t=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}\mathrm{i})\end{cases}$$

$$\begin{cases}t=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{11}\mathrm{i})\\ u=-7-\sqrt{11}\mathrm{i}\end{cases},\quad \begin{cases}t=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{11}\mathrm{i})\\ u=-7+\sqrt{11}\mathrm{i}\end{cases}$$

8. **证明:如果** $d(x)\mid f(x)$, $d(x)\mid g(x)$,**且** $d(x)$ **为** $f(x)$ **与** $g(x)$ **的一个组合,那么** $d(x)$ **是** $f(x)$ **与** $g(x)$ **的一个最大公因式.**

证 由 $d(x)\mid f(x)$ 和 $d(x)\mid g(x)$ 知, $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式.设 $h(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公因式,即 $h(x)\mid f(x)$, $h(x)\mid g(x)$.由

于 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合,即存在多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$,使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

从而 $h(x)\mid d(x)$,故 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

9. **证明**:$(f(x)h(x), g(x)h(x))=(f(x), g(x))h(x)$,($h(x)$ 的首项系数为 1).

证　因为存在多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$ 使

$$(f(x), g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

所以

$$(f(x), g(x))h(x)=u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)$$

这表明$(f(x), g(x))h(x)$ 是 $f(x)h(x)$ 与 $g(x)h(x)$ 的一个组合.又因为

$$(f(x), g(x))\mid f(x),\quad (f(x), g(x))\mid g(x)$$

从而

$$(f(x), g(x))h(x)\mid f(x)h(x),\quad (f(x), g(x))h(x)\mid g(x)h(x)$$

由上面第 8 题即知$(f(x), g(x))h(x)$ 是 $f(x)h(x)$ 与 $g(x)h(x)$ 的一个最大公因式.注意到$(f(x), g(x))h(x)$ 的首项系数为 1,故

$$(f(x)h(x), g(x)h(x))=(f(x), g(x))h(x)$$

10. 如果 $f(x)$, $g(x)$ 不全为零,证明:

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}, \frac{g(x)}{(f(x), g(x))}\right)=1$$

证　存在多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$ 使

$$(f(x), g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

因为 $f(x)$, $g(x)$ 不全为零,所以$(f(x), g(x))\neq 0$,故由上式得

$$u(x)\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x), g(x))}=1$$

根据互素的充分必要条件知

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}, \frac{g(x)}{(f(x), g(x))}\right)=1$$

11. **证明**:如果 $f(x)$, $g(x)$ 不全为零,且

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x), g(x))$$

那么$(u(x), v(x))=1$.

证　因为 $f(x)$, $g(x)$ 不全为零,故$(f(x), g(x))\neq 0$,从而由

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x), g(x))$$

可得

$$u(x)\frac{f(x)}{(f(x),\ g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),\ g(x))}=1$$

故由互素的充分必要条件知$(u(x),\ v(x))=1$.

12. **证明:如果**$(f(x),\ g(x))=1,\ (f(x),\ h(x))=1$,**那么**

$$(f(x),\ g(x)h(x))=1$$

证　法1　**由于**$(f(x),\ g(x))=1,\ (f(x),\ h(x))=1$,**所以存在多项式** $u_1(x),\ v_1(x),\ u_2(x),\ v_2(x)$,**使**

$$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=1,\quad u_2(x)f(x)+v_2(x)h(x)=1$$

两式相乘得

$$[u_1(x)u_2(x)f(x)+v_1(x)u_2(x)g(x)+u_1(x)v_2(x)h(x)]f(x)+$$
$$[v_1(x)v_2(x)]g(x)h(x)=1$$

从而,由互素的充分必要条件知

$$(f(x),\ g(x)h(x))=1$$

法2　**反证.若设**

$$(f(x),\ g(x)h(x))=d(x),\qquad \partial(d(x))>0$$

且 $p(x)$ **是** $d(x)$ **的一个不可约多项式,则**

$$p(x)\mid f(x),\quad p(x)\mid g(x)h(x)$$

但因$(f(x),\ g(x))=1$,**所以** $p(x)\nmid g(x)$,**从而** $p(x)\mid h(x)$,**这与**$(f(x),\ h(x))=1$**矛盾**.

13. **设** $f_1(x),\cdots,f_m(x),\ g_1(x),\cdots,g_n(x)$ **都是多项式,而且**

$$(f_i(x),\ g_j(x))=1\qquad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

求证:$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x),\ g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1$.

证　由于

$$(f_1(x),\ g_j(x))=1\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$

反复应用习题 12 **的结果,得**

$$(f_1(x),\ g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1$$

同理可证

$$(f_i(x),\ g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1\qquad(i=1,2,\cdots,m)$$

再反复应用习题 12 **的结果,得**

$$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x),\ g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1$$

14. **证明:如果**$(f(x),\ g(x))=1$,**那么**$(f(x)g(x),\ f(x)+g(x))=1$.

证　法1　**由于**$(f(x),\ g(x))=1$,**所以存在多项式** $u(x),\ v(x)$ **使**

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

由此可得

$$(u(x)-v(x))f(x)+v(x)(f(x)+g(x))=1$$

$$(v(x)-u(x))g(x)+u(x)(f(x)+g(x))=1$$

于是由互素的充分必要条件知

$$(f(x),f(x)+g(x))=1,\quad (g(x),f(x)+g(x))=1$$

再由习题 12 的结果即知

$$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$$

法 2　反证. 如果

$$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=d(x),\qquad \partial(d(x))>0$$

取 $d(x)$ 的一个不可约因式 $p(x)$,则

$$p(x)\mid f(x)g(x),\quad p(x)\mid (f(x)+g(x))$$

由第一式知 $p(x)$ 整除 $f(x)$ 或 $g(x)$,不妨设 $p(x)\mid f(x)$,则由上面第二式知 $p(x)\mid g(x)$,即 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式,这与 $(f(x),g(x))=1$ 矛盾. 故必有

$$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$$

15. 求下列多项式的公共根:

$$f(x)=x^3+2x^2+2x+1,\quad g(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$$

解　法 1　求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

用辗转相除法可求得

$$(f(x),g(x))=x^2+x+1$$

所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公共根为 $\frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

法 2　分解因式.

将 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别分解因式,得

$$f(x)=(x+1)(x^2+x+1),\quad g(x)=(x^2+1)(x^2+x+1)$$

所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公共根为 $\frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

16. 判别下列多项式有无重因式:

1) $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$;

2) $f(x)=x^4+4x^2-4x-3$.

解　1) 由于 $f'(x)=5x^4-20x^3+21x^2-4x+4$,用辗转相除法可求得

$$(f(x),\ f'(x)) = (x-2)^2$$

故 $f(x)$ 有重因式,且 $x-2$ 是它的一个 3 重因式 .

2) 由于 $f'(x) = 4x^3 + 8x - 4$,用辗转相除法可求得

$$(f(x),\ f'(x)) = 1$$

故 $f(x)$ 无重因式 .

17. 求 t 值使 $f(x) = x^3 - 3x^2 + tx - 1$ 有重根 .

解 $f(x)$ 有重根的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 不互素 . 由于

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + t$$

用辗转相除法,得

$q_2(x) = \frac{9}{2t-6}x - \frac{45}{2(2t-6)}$	$f'(x) = 3x^2 - 6x + t$ $3x^2 + \frac{3}{2}x$	$f(x) = x^3 - 3x^2 + tx - 1$ $x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}tx$	$\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = q_1(x)$
	$-\frac{15}{2}x + t$ $-\frac{15}{2}x - \frac{15}{4}$	$-x^2 + \frac{3}{2}tx - 1$ $-x^2 + 2x - \frac{1}{3}t$	
	$r_2(x) = t + \frac{15}{4}$	$r_1(x) = \frac{2t-6}{3}x + \frac{t-3}{3}$	

用等式写出来即为

$$f(x) = q_1(x)f'(x) + r_1(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)f'(x) + \frac{2(t-3)}{3}x + \frac{t-3}{3}$$

$$f'(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x) = \left[\frac{9}{2(t-3)}x - \frac{45}{4(t-3)}\right]r_1(x) + \left(t + \frac{15}{4}\right)$$

于是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 不互素的充分必要条件是: $r_1(x) = 0$ 或 $r_2(x) = 0$,也即 $t = 3$ 或 $t = -\frac{15}{4}$. 这也是 $f(x)$ 有重根的条件 .

18. 求多项式 $x^3 + px + q$ 有重根的条件 .

解 令 $f(x) = x^3 + px + q$,则有 $f'(x) = 3x^2 + p$. 用 $f'(x)$ 去除 $f(x)$ 得余式

$$r_1(x) = \frac{2}{3}px + q$$

于是当 $r_1(x) = 0$,即 $p = q = 0$ 时, $f(x)$ 有重根 .

当 $p \neq 0$ 时,用 $r_1(x)$ 去除 $f'(x)$ 得余式

$$r_2(x) = \frac{4p^3 + 27q^2}{4p^2}$$

当 $r_2(x) = 0$,即 $4p^3 + 27q^2 = 0$ 时, $f(x)$ 有重根 .

于是 $f(x)$ 有重根的充分必要条件是 $r_1(x)=0$ 或 $r_2(x)=0$,也即

$$4p^3+27q^2=0$$

19. 如果 $(x-1)^2 \mid Ax^4+Bx+1$,求 A,B.

解　法 1　用 $(x-1)^2$ 去除 $f(x)=Ax^4+Bx^2+1$,得余式为

$$r_1(x)=(4A+2B)x+1-3A-B$$

令 $r_1(x)=0$ 得

$$4A+2B=0,\quad 1-3A-B=0$$

解得 $A=1,\ B=-2$.

法 2　因为 $f(x)=Ax^4+Bx^2+1$ 被 $(x-1)^2$ 整除,故 1 必为 $f(x)$ 及 $f'(x)=4Ax^3+2Bx$ 的根,从而

$$f(1)=A+B+1=0,\quad f'(1)=4A+2B=0$$

联立解得 $A=1,\ B=-2$.

20. 证明:$1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ 不能有重根.

证　令 $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$,则

$$f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

可见

$$f(x)=f'(x)+\frac{x^n}{n!}$$

法 1　反证.若 $f(x)$ 有重根 α,则必有 $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$,从而由上式得 $\dfrac{\alpha^n}{n!}=0$,即 $\alpha=0$,也即 0 是 $f(x)$ 的根,这当然是不可能的.

法 2　由于 0 不是 $f'(x)$ 的根,所以 $(x^n,f'(x))=1$,从而

$$(f(x),f'(x))=\left(f'(x)+\frac{1}{n!}x^n,\ f'(x)\right)=\left(\frac{1}{n!}x^n,\ f'(x)\right)=1$$

故 $f(x)$ 没有重根.

21. 如果 a 是 $f(x)$ 的一个 k 重根,证明 a 是

$$g(x)=\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a)$$

的一个 $k+3$ 重根.

证　因为

$$g'(x)=\frac{x-a}{2}f''(x)-\frac{1}{2}[f'(x)-f'(a)],\quad g''(x)=\frac{x-a}{2}f'''(x)$$

由于 a 是 $f(x)$ 的 k 重根,从上式知 a 是 $g''(x)$ 的 $k+1$ 重根.又验算知

$$g(a)=0,\quad g'(a)=0$$

设 a 是 $g(x)$ 的 s 重根,则 a 是 $g'(x)$ 的 $s-1$ 重根,是 $g''(x)$ 的 $s-2$ 重根.由 $s-2=k+1$ 得 $s=k+3$,即 a 是 $g(x)$ 的 $k+3$ 重根.

22. 证明:x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$,而 $f^{(k)}(x_0)\neq 0$.

证 必要性 设 x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根,则 x_0 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重根,是 $f''(x)$ 的 $k-2$ 重根,…,是 $f^{(k-1)}(x)$ 的单根,而不是 $f^{(k)}(x)$ 的根,这就是

$$f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0,\quad f^{(k)}(x_0)\neq 0$$

充分性 由 $f^{(k-1)}(x_0)=0$, $f^{(k)}(x_0)\neq 0$,知 x_0 是 $f^{(k-1)}(x)$ 的单根;又由于 $f^{(k-2)}(x_0)=0$,知 x_0 是 $f^{(k-2)}(x)$ 的 2 重根,依次类推,可知 x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根.

23. 举例说明"如果 a 是 $f'(x)$ 的 m 重根,那么 a 是 $f(x)$ 的 $m+1$ 重根"是不对的.

解 例如,设 $f(x)=x^{m+1}-1$,则 $f'(x)=\dfrac{1}{m+1}x^m$ 以 0 为 m 重根,但 0 不是 $f(x)$ 的根.

可见,$f'(x)$ 的 m 重根并不一定是 $f(x)$ 的根.而当 $f'(x)$ 的 m 重根也是 $f(x)$ 的根时,它就是 $f(x)$ 的 $m+1$ 重根.

24. 证明:如果 $(x-1)\mid f(x^n)$,那么 $(x^n-1)\mid f(x^n)$.

证 因为 $(x-1)\mid f(x^n)$,所以 1 是 $f(x^n)$ 的根,于是 $f(1^n)=f(1)=0$,即 $(x-1)\mid f(x)$,故存在多项式 $g(x)$,使得 $f(x)=(x-1)g(x)$,从而有 $f(x^n)=(x^n-1)g(x^n)$,此即 $(x^n-1)\mid f(x^n)$.

25. 证明:如果 $(x^2+x+1)\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$,那么

$$(x-1)\mid f_1(x),\quad (x-1)\mid f_2(x)$$

证 设 x^2+x+1 的两个复根为 α,β(实则 $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, $\beta=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$).由于

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

所以 $\alpha^3=\beta^3=1$.因为 $x^2+x+1=(x-\alpha)(x-\beta)$ 且 $(x-\alpha)(x-\beta)\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$,故有

$$\begin{cases} f_1(\alpha^3)+\alpha f_2(\alpha^3)=0 \\ f_1(\beta^3)+\beta f_2(\beta^3)=0 \end{cases},\quad \text{即} \quad \begin{cases} f_1(1)+\alpha f_2(1)=0 \\ f_1(1)+\beta f_2(1)=0 \end{cases}$$

解得 $f_1(1)=f_2(1)=0$,从而$(x-1)\mid f_1(x)$, $(x-1)\mid f_2(x)$.

26. 求多项式 x^n-1 在复数范围内和在实数范围内的因式分解.

解　令

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\qquad(k=0,1,\cdots,n-1)$$

因为 x^n-1 在复数域内恰有 n 个根 $\varepsilon_k(k=0,1,\cdots,n-1)$,所以它在复数域上的因式分解为

$$x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{n-1})$$

再讨论它在实数域上的因式分解.由于 $\bar{\varepsilon}_k=\varepsilon_{n-k}$,所以

$$\varepsilon_k+\varepsilon_{n-k}=\varepsilon_k+\bar{\varepsilon}_k=2\cos\frac{2k\pi}{n}$$

是一个实数,且由于

$$(\varepsilon_k+\varepsilon_{n-k})^2-4=4\cos^2\frac{2k\pi}{n}-4<0\quad(k=1,\cdots,n-1)$$

故 $x^2-(\varepsilon_k+\varepsilon_{n-k})x+1$ 是实数域上的不可约多项式.从而当 n 为奇数时,有

$$\begin{aligned}x^n-1&=(x-1)[x^2-(\varepsilon_1+\varepsilon_{n-1})x+1][x^2-(\varepsilon_2+\varepsilon_{n-2})x+1]\cdots\times\\&\quad\left[x^2-\left(\varepsilon_{\frac{n-1}{2}}+\varepsilon_{\frac{n+1}{2}}\right)x+1\right]=\\&\quad(x-1)\left[x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right]\left[x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1\right]\cdots\times\\&\quad\left[x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1\right]=\\&\quad(x-1)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left[x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1\right]\end{aligned}$$

当 n 为偶数时,则为

$$\begin{aligned}x^n-1&=(x-1)(x+1)[x^2-(\varepsilon_1+\varepsilon_{n-1})x+1][x^2-(\varepsilon_2+\varepsilon_{n-2})x+1]\cdots\times\\&\quad\left[x^2-\left(\varepsilon_{\frac{n-2}{2}}+\varepsilon_{\frac{n+2}{2}}\right)x+1\right]=\\&\quad(x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\left[x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1\right]\end{aligned}$$

27. 求下列多项式的有理根:

1) $x^3-6x^2+15x-14$;

2) $4x^4-7x^2-5x-1$;

3) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$.

解　1) 令 $f(x)=x^3-6x^2+15x-14$. 由于 $f(x)$ 是首项系数为1的整系数多项式,如果有有理根,必为整数根,且为常数项 -14 的因数. 由于 -14 的因数为: $\pm1,\pm2,\pm7,\pm14$,经验证知

$$f(1)=-4,\quad f(-1)=-36,\quad f(2)=0,\quad f(-2)=-72$$

$$f(7)=140,\quad f(-7)=-756,\quad f(14)=1764,\quad f(-14)=-4144$$

故 2 是 $f(x)$ 的有理根. 又由综合除法,得

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 1 & -6 & 15 & -14 \\
 & & 2 & -8 & 14 \\
\hline
2 & 1 & -4 & 7 & \multicolumn{1}{|c}{0} \\
 & & 2 & -4 & \\
\hline
 & 1 & -2 & \multicolumn{1}{|c}{3} &
\end{array}$$

可见 2 是 $f(x)$ 的单根.

2) 令 $f(x)=4x^4-7x^2-5x-1$. 若 $f(x)$ 有有理根,则有理根化为既约分数后,其分母必为首项系数 4 的因数,而分子必为常数项 -1 的因数,故所有可能的有理根为

$$\pm1,\quad \pm\frac{1}{2},\quad \pm\frac{1}{4}$$

验证有

$$f(1)=-9,\quad f(-1)=1,\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=-5$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0,\quad f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{171}{64},\quad f\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{11}{64}$$

故 $-\frac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 的有理根. 又由综合除法,得

$$\begin{array}{c|ccccc}
-\frac{1}{2} & 4 & 0 & -7 & -5 & -1 \\
 & & -2 & 1 & 3 & 1 \\
\hline
-\frac{1}{2} & 4 & -2 & -6 & -2 & \multicolumn{1}{|c}{0} \\
 & & -2 & 2 & 2 & \\
\hline
-\frac{1}{2} & 4 & -4 & -4 & \multicolumn{1}{|c}{0} & \\
 & & -2 & 3 & & \\
\hline
 & 4 & -6 & \multicolumn{1}{|c}{-1} & &
\end{array}$$

可见 $-\frac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 的 2 重根.

3) 令 $f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$. 常数项 -3 的因数为 ± 1, ± 3, 经验证知 $f(1) = -28$, $f(-1) = 0$, $f(3) = 0$, $f(-3) = -96$, 故 -1, 3 是有理根. 又由综合除法, 得

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
-1 & 1 & 1 & -6 & -14 & -11 & -3 \\
 & & -1 & 0 & 6 & 8 & 3 \\
\hline
-1 & 1 & 0 & -6 & -8 & -3 & 0 \\
 & & -1 & 1 & 5 & 3 & \\
\hline
-1 & 1 & -1 & -5 & -3 & 0 & \\
 & & -1 & 2 & 3 & & \\
\hline
-1 & 1 & -2 & -3 & 0 & & \\
 & & -1 & 3 & & & \\
\hline
-1 & 1 & -3 & 0 & & & \\
 & & -1 & & & & \\
\hline
 & 1 & -4 & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
3 & 1 & 1 & -6 & -14 & -11 & -3 \\
 & & 3 & 12 & 18 & 12 & 3 \\
\hline
3 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\
 & & 3 & 21 & 81 & 255 & \\
\hline
 & 1 & 7 & 27 & 85 & 256 &
\end{array}
$$

可见 -1 是 $f(x)$ 的 4 重根, 而 3 是 $f(x)$ 的单根.

28. 下列多项式在有理数域上是否可约?

1) $x^2 + 1$;

2) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 2$;

3) $x^6 + x^3 + 1$;

4) $x^p + px + 1$, p 为奇素数;

5) $x^4 + 4kx + 1$, k 为整数.

解　1) 法 1　常数项 1 的因数为 ± 1, 因为 ± 1 都不是 $x^2 + 1$ 的根, 所以它在有理数域上不可约.

法 2　令 $x = y + 1$, 则有

$$g(y) = f(y + 1) = (y + 1)^2 + 1 = y^2 + 2y + 2$$

取素数 $p = 2$, 由于 28 1, $2 \mid 2$, $2 \mid 2$, 但是 2^2 8 2, 故由艾森斯坦判别法, $g(y)$ 在有理数域上不可约, 从而 $f(x) = x^2 + 1$ 在有理数域上也不可约.

2) 取素数 $p = 2$, 则 28 1, $2 \mid -8$, $2 \mid 12$, $2 \mid 2$, 但是 2^2 8 2, 故由艾森斯坦判

别法知,该多项式在有理数域上不可约.

3) **令** $x=y+1$,**代入** $f(x)=x^6+x^3+1$,**得**

$$g(y)=f(y+1)=y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+9y+3$$

取素数 $p=3$.**由于** $3\nmid 1,3\mid 6,3\mid 15,3\mid 21,3\mid 18,3\mid 9,3\mid 3$,**但是** $3^2\nmid 3$,**根据艾森斯坦判别法知**,$g(y)$ **在有理数域上不可约,从而** $f(x)$ **在有理数域上也不可约.**

4) **令** $x=y-1$,**代入** $f(x)=x^p+px+1$,**得**

$$g(y)=f(y-1)=$$
$$y^p-C_p^1y^{p-1}+C_p^2y^{p-2}-\cdots-C_p^{p-2}y^2+(C_p^{p-1}+p)y-p$$

由于 p **是素数,且** $p\nmid 1,p\mid C_p^i,i=1,2,\cdots,p-2,p\mid(C_p^{p-1}+p),p^2\nmid p$,**故由艾森斯坦判别法知**,$g(y)$ **在有理数域上不可约,从而** $f(x)$ **在有理数域上也不可约.**

5) **法1　令** $x=y+1$,**代入** $f(x)=x^4+4kx+1$,**得**

$$g(y)=f(y+1)=y^4+4y^3+6y^2+(4k+4)y+4k+2$$

取素数 $p=2$.**由于** $2\nmid 1$,**又** $2\mid 4,2\mid 6,2\mid(4k+4),2\mid(4k+2)$,**但** $2^2\nmid(4k+2)$,**故由艾森斯坦判别法知**,$g(y)$ **在有理数域上不可约,从而** $f(x)$ **在有理数域上也不可约.**

法2　反证.若 $f(x)=x^4+4kx+1$ **在有理数域上可约,则它只能分解成整系数的一次因式和三次因式相乘,或两个整系数二次因式相乘.但由于** k **为整数,故** $f(x)$ **没有有理根(若有有理根,只可能是±1,但显然±1不是它的根),从而** $f(x)$ **不可能分解成一次因式和三次因式相乘,故设**

$$f(x)=(x^2+ax+1)(x^2+bx+1)$$
$$f(x)=(x^2+ax-1)(x^2+bx-1)$$

其中 a,b **为整数.由上面第一式得**

$$x^4+4kx+1=x^4+(a+b)x^3+(ab+2)x^2+(a+b)x+1$$

于是有

$$a+b=0,\quad ab+2=0,\quad a+b=4k$$

解得 $a=\pm\sqrt{2}$,**这与** a **是整数相矛盾.同样,由第二式也引出矛盾,故** $f(x)$ **在有理数域上不可约.**

29. **用初等对称多项式表出下列对称多项式:**

1) $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$;

2) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$;

3) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$;

4) $x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2+x_2^2x_4^2+x_3^2x_4^2$;

5) $(x_1x_2+x_3)(x_2x_3+x_1)(x_3x_1+x_2)$;

6) $(x_1+x_2+x_1x_2)(x_2+x_3+x_2x_3)(x_1+x_3+x_1x_3)$.

解　1) **法 1**　**令** f **为所给的对称多项式,则** f **的首项为** $x_1^2x_2$,**它的指数组为**(2,1,0),**作** $\varphi_1=\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=\sigma_1\sigma_2$,**于是**

$$f_1=f-\varphi_1=(x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2)-$$
$$(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=$$
$$-3x_1x_2x_3=-3\sigma_3$$

故
$$f=f_1+\varphi_1=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$$

法 2　**待定系数法**.

f **的首项为** $x_1^2x_2$,**且** f **是一个三次齐次多项式**.**写出不先于首项的所有三次的指数组及其相应的初等对称多项式方幂的乘积如下表**:

指数组	对应的 σ_i 的方幂乘积
2　1　0	$\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=\sigma_1\sigma_2$
1　1　1	$\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1=\sigma_3$

设
$$f=\sigma_1\sigma_2+a\sigma_3$$
这是一个恒等式.**令** $x_1=x_2=x_3=1$,**则** $f=6$, $\sigma_1=3$, $\sigma_2=3$, $\sigma_3=1$,**代入上式得**

$$6=3\cdot3+a\cdot1,\quad \text{即}\quad a=-3$$

故
$$f=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$$

2) **法 1**　**令** f **为所给的对称多项式,则** f **的首项为** $x_1^2x_2$,**它的指数组为**(2,1,0),**作** $\varphi_1=\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=\sigma_1\sigma_2$,**于是**

$$f_1=f-\varphi_1=-x_1x_2x_3=-\sigma_3$$

故
$$f=f_1+\varphi_1=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$$

法 2　f **的首项为** $x_1^2x_2$,**且** f **是一个三次齐次多项式,作表如下**:

指数组	对应 σ_i 的方幂乘积
2　1　0	$\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=\sigma_1\sigma_2$
1　1　1	$\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1=\sigma_3$

设
$$f=\sigma_1\sigma_2+a\sigma_3$$

令 $x_1=2$, $x_2=x_3=-1$,则 $f=-2$, $\sigma_1=0$, $\sigma_2=-3$, $\sigma_3=2$,代入上式得

$$-2=0\cdot(-3)+a\cdot 2\quad 即\quad a=-1$$

故
$$f=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$$

3) 令 f 为所给的对称多项式,则 f 的首项为 $x_1^4x_2^2$,且 f 是一个六次齐次多项式.写出不先于首项的所有六次指数组及其相应的初等对称多项式方幂的乘积如下表:

指数组	对应 σ 的方幂乘积
4 2 0	$\sigma_1^{4-2}\sigma_2^{2-0}\sigma_3^0=\sigma_1^2\sigma_2^2$
4 1 1	$\sigma_1^{4-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1=\sigma_1^3\sigma_3$
3 3 0	$\sigma_1^{3-3}\sigma_2^{3-0}\sigma_3^0=\sigma_2^3$
3 2 1	$\sigma_1^{3-2}\sigma_2^{2-1}\sigma_3^1=\sigma_1\sigma_2\sigma_3$
2 2 2	$\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-2}\sigma_3^2=\sigma_3^2$

设
$$f=\sigma_1^2\sigma_2^2+a\sigma_1^3\sigma_3+b\sigma_2^3+c\sigma_1\sigma_2\sigma_3+d\sigma_3^2\qquad(*)$$

这是一个恒等式.取 x_1, x_2, x_3 等于一些特殊的数,经计算得下表:

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f
0	1	1	2	1	0	0
1	1	-1	1	-1	-1	0
1	1	-2	0	-3	-2	0
1	1	1	3	3	1	0

将诸值分别代入(*)式得

$$0=4+b,\quad 0=1-a-b+c+d$$
$$0=-27b+4d,\quad 0=81+27a+27b+9c+d$$

解得 $a=-4$, $b=-4$, $c=18$, $d=-27$,故

$$f=\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_1^3\sigma_3-4\sigma_2^3+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2$$

4) 令 f 是所给的对称多项式,则 f 的首项为 $x_1^2x_2^2$,且 f 是一个四次齐次多项式.写出不先于首项的所有四次指数组及其相应的初等对称多项式方幂的乘积如下表:

指数组	对应 σ 的方幂乘积
2　2　0　0	$\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0}\sigma_3^{0-0}\sigma_4^0=\sigma_2^2$
2　1　1　0	$\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-0}\sigma_4^0=\sigma_1\sigma_3$
1　1　1　1	$\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^1=\sigma_4$

设
$$f=\sigma_2^2+a\sigma_1\sigma_3+b\sigma_4$$
取 $x_1=x_2=x_3=1,\ x_4=0$,得 $\sigma_1=3,\ \sigma_2=3,\ \sigma_3=1,\ \sigma_4=0,\ f=3$;又取 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$,得 $\sigma_1=4,\ \sigma_2=6,\ \sigma_3=4,\ \sigma_4=1,\ f=6$;代入上式,得
$$3=9+3a,\quad 6=36+16a+b$$
解得 $a=-2,\ b=2$,故
$$f=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4$$

5) 令 f 是所给的对称多项式,将 f 展开得
$$\begin{aligned}f=&\ x_1^2x_2^2x_3^2+(x_1^3x_2x_3+x_1x_2^3x_3+x_1x_2x_3^3)+\\&(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2)+x_1x_2x_3=\\&\sigma_3^2+\sigma_3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2)+\sigma_3=\\&\sigma_3^2+\sigma_3f_1+f_2+\sigma_3\end{aligned}$$
其中
$$\begin{aligned}f_1=&\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=\\&(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=\\&\sigma_1^2-2\sigma_2\end{aligned}$$
而 $f_2=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_4^2$ 是首项为 $x_1^2x_2^2$ 的四次齐次多项式,作表如下:

指数组	对应 σ 的方幂乘积
2　2　0	$\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0}\sigma_3^0=\sigma_2^2$
2　1　1	$\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1=\sigma_1\sigma_3$

设
$$f_2=\sigma_1^2+a\sigma_1\sigma_3$$
取 $x_1=x_2=x_3=1$,得 $\sigma_1=3,\ \sigma_2=3,\ \sigma_3=1,\ f_2=3$,代入上式得 $3=9+3a$,解得 $a=-2$,从而 $f_2=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3$,故
$$f=\sigma_3^2+\sigma_3(\sigma_1^2-2\sigma_2)+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+\sigma_3$$

6) 令 f 为所给的对称多项式,将 f 展开得

$$\begin{aligned} f = {} & (x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2) + 2x_1x_2x_3 + \\ & (x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) + 3(x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2) + \\ & 2(x_1^2x_2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_3 + x_1x_2^2x_3^2) + x_1^2x_2^2x_3^2 = \\ & f_1 + 2\sigma_3 + f_2 + 3\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2 \end{aligned}$$

其中

$$f_1 = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$$

(**见本题** 1))

而

$$\begin{aligned} f_2 = {} & x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 = \\ & (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = \\ & \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} f = {} & (\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) + 2\sigma_3 + (\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3) + 3\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2 = \\ & \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2 \end{aligned}$$

30. **用初等对称多项式表出下列** n **元对称多项式**:

1) $\sum x_1^4$;

2) $\sum x_1^2x_2x_3$;

3) $\sum x_1^2x_2^2$;

4) $\sum x_1^2x_2^2x_3x_4$.

($\sum ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ **表示所有由** $ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ **经过对换得到的项的和**.)

解 **对这类对称多项式,一般用待定系数法比较简便**.

1) **根据** $f = \sum x_1^4$ **的首项** x_1^4,**写出不先于首项的所有四次指数组及其相应的初等对称多项式方幂的乘积如下表**:

指数组	**对应** σ_i **的方幂乘积**
4 0 0 0 $\cdots$ 0	$\sigma_1^{4-0}\sigma_2^{0-0}\cdots\sigma_n^0 = \sigma_1^4$
3 1 0 0 $\cdots$ 0	$\sigma_1^{3-1}\sigma_2^{1-0}\cdots\sigma_n^0 = \sigma_1^2\sigma_2$
2 2 0 0 $\cdots$ 0	$\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0}\cdots\sigma_n^0 = \sigma_2^2$
2 1 1 0 $\cdots$ 0	$\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-0}\cdots\sigma_n^0 = \sigma_1\sigma_3$
1 1 1 1 $\cdots$ 0	$\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^{1-0}\cdots\sigma_n^0 = \sigma_4$

设

$$f = \sigma_1^4 + a\sigma_1^2\sigma_2 + b\sigma_2^2 + c\sigma_1\sigma_3 + d\sigma_4 \qquad (*)$$

这是一个恒等式,取 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 等于一些特殊的值,计算 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4, f$ 如下:

$x_1=1, x_2=-1, x_3=x_4=\cdots=x_n=0, \sigma_1=0, \sigma_2=-1, \sigma_3=\sigma_4=0, f=2$;

$x_1=x_2=1, x_3=x_4=\cdots=x_n=0, \sigma_1=2, \sigma_2=1, \sigma_3=\sigma_4=0, f=2$;

$x_1=x_2=x_3=1, x_4=\cdots=x_n=0, \sigma_1=3, \sigma_2=3, \sigma_3=1, \sigma_4=0, f=3$;

$x_1=x_2=1, x_3=x_4=-1, x_5=\cdots=x_n=0, \sigma_1=0, \sigma_2=-2, \sigma_3=0, \sigma_4=1, f=4$.

分别代入(*)式,得

$$2=b,\quad 2=16+4a+b,\quad 3=81+27a+96+3c,\quad 4=4b+d$$

解得 $a=-4, b=2, c=4, d=-4$,故

$$\sum x_1^4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4$$

2) 当 $n=3$ 时,有

$$\sum x_1^2x_2x_3=x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2=x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=\sigma_1\sigma_3$$

当 $n\geq 4$ 时,根据 $f=\sum x_1^2x_2x_3$ 的首项 $x_1^2x_2x_3$ 作表如下:

指数组	对应 σ_i 的方幂乘积
2　1　1　0　0　⋯　0	$\sigma_1\sigma_3$
1　1　1　1　0　⋯　0	σ_4

设

$$f=\sigma_1\sigma_3+a\sigma_4$$

取 $x_1=x_2=x_3=x_4=1, x_5=\cdots=x_n=0$,得 $\sigma_1=4, \sigma_2=6, \sigma_3=4, \sigma_4=1, f=12$,代入上式得 $12=16+a$,即 $a=-4$,故

$$f=\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4$$

3) 当 $n=2$ 时,$\sum x_1^2x_2^2=x_1^2x_2^2=\sigma_2^2$;当 $n=3$ 时,根据 $f=\sum x_1^2x_2^2$ 的首项 $x_1^2x_2^2$ 作表如下:

指数组	对应 σ_i 的方幂乘积
2　2　0	σ_2^2
2　1　1	$\sigma_1\sigma_3$

设

$$f = \sigma_2^2 + a\sigma_1\sigma_3$$

取 $x_1 = x_2 = x_3 = 1$,**得** $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$, $f = 3$;**代入上式得** $3 = 9 + 3a$,**即** $a = -2$,**故**

$$f = \sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_3$$

当 $n \geq 4$ **时,根据** $f = \sum x_1^2 x_2^2$ **的首项** $x_1^2 x_2^2$ **作表如下**:

指数组	对应 σ_i 的方幂乘积
2 2 0 0 … 0	σ_2^2
2 1 1 0 … 0	$\sigma_1\sigma_3$
1 1 1 1 … 0	σ_4

设

$$f = \sigma_2^2 + a\sigma_1\sigma_3 + b\sigma_4$$

取 $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = \cdots = x_n = 0$,**得** $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$, $\sigma_4 = 0$, $f = 3$;**又取** $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = \cdots = x_n = 0$,**得** $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 6$, $\sigma_3 = 4$, $\sigma_4 = 1$, $f = 6$.**分别代入上式得**

$$3 = 9 + 3a, \quad 6 = 36 + 16a + b$$

解得 $a = -2$, $b = 2$,**故**

$$f = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_4$$

4) **当** $n = 4$ **时,有**

$$f = \sum x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 = x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 + x_1^2 x_2 x_3^2 x_4 + x_1^2 x_2 x_3 x_4^2 + x_1 x_2^2 x_3^2 x_4 + x_1 x_2^2 x_3 x_4^2 + x_1 x_2 x_3^2 x_4^2 = \sigma_2\sigma_4$$

当 $n = 5$ **时,根据** $f = \sum x_1^2 x_2^2 x_3 x_4$ **的首项** $x_1^2 x_2^2 x_3 x_4$ **作表如下**:

指数组	对应 σ_i 的方幂乘积
2 2 1 1 0	$\sigma_2\sigma_4$
2 1 1 1 1	$\sigma_1\sigma_5$

设

$$f = \sigma_2\sigma_4 + a\sigma_1\sigma_5$$

取 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$,**得** $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = 10$, $\sigma_3 = 10$, $\sigma_4 = 5$, $\sigma_5 = 1$, $f = 30$;**代入上式得** $30 = 50 + 5a$,**即** $a = -4$,**故**

$$f = \sigma_2\sigma_4 - 4\sigma_1\sigma_5$$

当 $n \geq 6$ **时,根据** $f = \sum x_1^2 x_2^2 x_3 x_4$ **的首项** $x_1^2 x_2^2 x_3 x_4$ **作表如下**:

指数组	对应 σ_i 的方幂乘积
2　2　1　1　0　0　…　0	$\sigma_2\sigma_4$
2　1　1　1　1　0　…　0	$\sigma_1\sigma_5$
1　1　1　1　1　1　…　0	σ_6

设
$$f = \sigma_2\sigma_4 + a\sigma_1\sigma_5 + b\sigma_6 \qquad (*)$$
取 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$, $x_6 = \cdots = x_n = 0$,得 $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = 10$, $\sigma_3 = 10$, $\sigma_4 = 5$, $\sigma_5 = 1$, $\sigma_6 = 0$, $f = 30$; 又取 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 1$, $x_7 = \cdots = x_n = 0$,得 $\sigma_1 = 6$, $\sigma_2 = 15$, $\sigma_3 = 20$, $\sigma_4 = 15$, $\sigma_5 = 6$, $\sigma_6 = 1$, $f = 90$. 分别代入(*)式得
$$30 = 50 + 5a, \quad 90 = 225 + 36a + b$$
解得 $a = -4$, $b = 9$,故
$$f = \sigma_2\sigma_4 - 4\sigma_1\sigma_5 + 9\sigma_6$$

31. 设 α_1,α_2,α_3 是方程 $5x^3 - 6x^2 + 7x - 8 = 0$ 的三个根,计算
$$(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)(\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2)(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_3^2)$$

解　由根与系数的关系知
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{6}{5}, \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{7}{5}, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \frac{8}{5}$$
下面将对称多项式
$$f = (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)(x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2)$$
化为初等对称多项式的多项式. 根据 f 的首项 $x_1^4x_2^2$ 作表如下:

指数组	对应 σ 的方幂乘积
4　2　0	$\sigma_1^2\sigma_2^2$
4　1　1	$\sigma_1^3\sigma_3$
3　3　0	σ_2^3
3　2　1	$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$
2　2　2	σ_3^2

设
$$f = \sigma_1^2\sigma_2^2 + a\sigma_1^3\sigma_3 + b\sigma_2^3 + c\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + d\sigma_3^2 \qquad (*)$$
取 x_1, x_2, x_3 等于一些特殊的数,计算得下表:

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f
0	1	1	2	1	0	3
1	1	-1	1	-1	-1	3
1	1	-2	0	-3	-2	27
1	1	1	3	3	1	27

将诸值分别代入(*)式得

$$3 = 4 + b, \quad 3 = 1 - a - b + c + d$$

$$27 = -27b + 4d, \quad 27 = 81 + 27a + 27b + 9c + d$$

解得 $a = -1,\ b = -1,\ c = 0,\ d = 0$,**故**

$$f = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^3\sigma_3 - \sigma_2^3$$

取 $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ x_3 = \alpha_3$,**则** $\sigma_1 = \dfrac{6}{5},\ \sigma_2 = \dfrac{7}{5},\ \sigma_3 = \dfrac{8}{5}$,**此时**

$$(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)(\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2)(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_3^2) =$$

$$\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^3\sigma_3 - \sigma_2^3 =$$

$$\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{5}\right)^2 - \left(\frac{6}{5}\right)^3\cdot\frac{8}{5} - \left(\frac{7}{5}\right)^3 = -\frac{1679}{625}$$

32. **证明:三次方程** $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ **的三个根成等差数列的充分必要条件为**

$$2a_1^3 - 9a_1a_2 + 27a_3 = 0$$

证　法1　设方程的三个根为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,**则它们成等差数列的充分必要条件是**

$$(2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)(2\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3)(2\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2) = 0$$

令
$$f = (2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2)$$

这是首项为 $2x_1^3$ **的对称多项式,作表如下:**

指数组	对应σ的方幂乘积
3　0　0	σ_1^3
2　1　0	$\sigma_1\sigma_2$
1　1　1	σ_3

设
$$f = 2\sigma_1^3 + a\sigma_1\sigma_2 + b\sigma_3$$

取 $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$,得 $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0$, $f = -2$;又取 $x_1 = x_2 = x_3 = 1$,得 $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$, $f = 0$. 代入上式得

$$-2 = 16 + 2a, \quad 0 = 54 + 9a + b$$

解得 $a = -9$, $b = 27$,故

$$f = 2\sigma_1^3 - 9\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3$$

取 $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, $x_3 = \alpha_3$,则由根与系数的关系知

$$\sigma_1 = -a_1, \quad \sigma_2 = a_2, \quad \sigma_3 = -a_3$$

故方程的三个根成等差数列的充分必要条件为

$$f = 2(-a_1)^3 - 9(-a_1)a_2 + 27(-a_3) = -2a_1^3 + 9a_1a_2 - 27a_3 = 0$$

即

$$2a_1^3 - 9a_1a_2 + 27a_3 = 0$$

法 2 必要性. 已知方程的三个根构成等差数列,设为

$$\alpha_1 = \alpha - \delta, \quad \alpha_2 = \alpha, \quad \alpha_3 = \alpha + \delta$$

由根与系数的关系,得

$$-a_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3\alpha$$

即 $\alpha = -\dfrac{a_1}{3}$,将其代入方程得

$$\left(-\frac{a_1}{3}\right)^3 + a_1\left(-\frac{a_1}{3}\right)^2 + a_2\left(-\frac{a_1}{3}\right) + a_3 = 0$$

即

$$2a_1^3 - 9a_1a_2 + 27a_3 = 0$$

充分性. 已知 $2a_1^3 - 9a_1a_2 + 27a_3 = 0$,设方程的三个根为 α_1, α_2, α_3,因为

$$\left(-\frac{a_1}{3}\right)^3 + a_1\left(-\frac{a_1}{3}\right)^2 + a_2\left(-\frac{a_1}{3}\right) + a_3 = \frac{1}{27}(2a_1^3 - 9a_1a_2 + 27a_3) = 0$$

可见 $-\dfrac{a_1}{3}$ 是方程的根. 不妨设 $\alpha_1 = \left(-\dfrac{a_1}{3}\right)$,则由根与系数的关系,得

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -a_1 = 3\alpha_1 \quad \text{即} \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_3$$

故方程的三个根成等差数列.

(二) 第一章补充题

1. 设 $f_1(x) = af(x) + bg(x)$, $g_1(x) = cf(x) + dg(x)$,且 $ad - bc \neq 0$,证明:$(f(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x))$.

证 设 $d(x) = (f(x), g(x))$,下证 $d(x) = (f_1(x), g_1(x))$.

由于 $d(x) \mid f(x)$, $d(x) \mid g(x)$, 而 $f_1(x) = af(x) + bg(x)$, 所以 $d(x) \mid f_1(x)$;同样由 $g_1(x) = cf(x) + dg(x)$ 知, $d(x) \mid g_1(x)$.

其次,设 $h(x)$ 是 $f_1(x)$ 与 $g_1(x)$ 的任一公因式,只要证明 $h(x) \mid d(x)$ 即可 .可解得

$$f(x) = \frac{d}{ad - bc} f_1(x) - \frac{b}{ad - bc} g_1(x)$$

$$g(x) = \frac{-c}{ad - bc} f_1(x) + \frac{a}{ad - bc} g_1(x)$$

从而由 $h(x) \mid f_1(x)$ 和 $h(x) \mid g_1(x)$ 得 $h(x) \mid f(x)$, $h(x) \mid g(x)$, 于是 $h(x) \mid d(x)$,即 $d(x)$ 也是 $f_1(x)$ 和 $g_1(x)$ 的最大公因式,故

$$(f(x), g(x)) = (f_1(x), g(x))$$

2. 证明:只要 $\dfrac{f(x)}{(f(x), g(x))}$, $\dfrac{g(x)}{(f(x), g(x))}$ 的次数都大于零,就可以适当选择等式

$$u(x) f(x) + v(x) g(x) = (f(x), g(x))$$

的 $u(x)$ 与 $v(x)$,使

$$(u(x)) < \left(\frac{g(x)}{(f(x), g(x))}\right), \quad (v(x)) < \left(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}\right)$$

证　因为存在多项式 $s(x)$ 和 $t(x)$,使得

$$s(x) f(x) + t(x) g(x) = (f(x), g(x))$$

于是有

$$s(x) \frac{f(x)}{(f(x), g(x))} + t(x) \frac{g(x)}{(f(x), g(x))} = 1 \qquad (*)$$

这里不可能有 $\dfrac{g(x)}{(f(x), g(x))} \Bigg| s(x)$ 和 $\dfrac{f(x)}{(f(x), g(x))} \Bigg| t(x)$, 否则由上式知 $\dfrac{g(x)}{(f(x), g(x))} \Bigg| 1$, $\dfrac{f(x)}{(f(x), g(x))} \Bigg| 1$,即 $\dfrac{g(x)}{(f(x), g(x))}$ 与 $\dfrac{f(x)}{(f(x), g(x))}$ 均为零次多项式,与题设不符 .于是根据带余除法,有

$$s(x) = \frac{g(x)}{(f(x), g(x))} q_1(x) + u(x)$$

$$t(x) = \frac{f(x)}{(f(x), g(x))} q_2(x) + v(x)$$

且

$$(u(x)) < \left(\frac{g(x)}{(f(x), g(x))}\right), \quad (v(x)) < \left(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}\right) \qquad (**)$$

代入(*)式并整理得

$$u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}+$$
$$[q_1(x)+q_2(x)]\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\cdot\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1 \qquad (***)$$

但由(**)式知

$$\left[u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right]<\left[\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\cdot\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right]$$

故必有 $q_1(x)+q_2(x)=0$. 否则(***)式左端的次数大于零,与右端为零次不合. 从而由(***)式得

$$u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1$$

即
$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

3. 证明:如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素,那么 $f(x^m)$ 与 $g(x^m)$ $(m\geq 1)$ 也互素.

证　由于 $(f(x),g(x))=1$,所以存在多项式 $u(x),v(x)$,使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

从而

$$u(x^m)f(x^m)+v(x^m)g(x^m)=1$$

故由多项式互素的充分必要条件知 $(f(x^m),g(x^m))=1$.

4. 证明:如果 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x)$ 的最大公因式存在,那么 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x),f_s(x)$ 的最大公因式也存在,且当 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 全不为零时有

$$(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x),f_s(x))=((f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x)),f_s(x))$$

再利用上式证明,存在多项式 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_s(x)$,使

$$u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+\cdots+u_s(x)f_s(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x))$$

证　设 $(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x))=d_1(x)$, $(d_1(x),f_s(x))=d(x)$,则

$$d(x)\mid d_1(x),\ d(x)\mid f_s(x),\ d_1(x)\mid f_i(x)\quad (i=1,2,\cdots,s-1)$$

从而

$$d(x)\mid f_i(x)\qquad (i=1,2,\cdots,s)$$

即 $d(x)$ 是 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 的一个公因式.

其次,设 $h(x)$ 是 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, $f_s(x)$ 的任意一个公因式,则 $h(x)\mid d_1(x)$,这样 $h(x)$ 是 $d_1(x)$ 与 $f_s(x)$ 的一个公因式,从而有 $h(x)\mid d(x)$,故 $d(x)$ 是 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, $f_s(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式,即

$$(f_1(x),\cdots,f_{s-1}(x),f_s(x))=d(x)=((f_1(x),\cdots,f_{s-1}(x)),f_s(x))$$

最后,对 s 用归纳法证明本题的第二部分.

当 $s=2$ 时,结论显然成立.假设对 $s-1$ 个多项式结论成立,即存在多项式 $v_1(x)$, $v_2(x)$, $\cdots$, $v_{s-1}(x)$,使

$$v_1(x)f_1(x)+v_2(x)f_2(x)+\cdots+v_{s-1}(x)f_{s-1}(x)=$$
$$(f_1(x),\cdots,f_{s-1}(x))=d_1(x) \tag{*}$$

成立.再证对 s 个多项式结论也成立.

由于 $(d_1(x),f_s(x))=d(x)$,故存在 $u(x)$, $u_s(x)$,使

$$u(x)d_1(x)+u_s(x)f_s(x)=d(x)$$

把(*)式代入上式并整理得

$$u(x)v_1(x)f_1(x)+\cdots+u(x)v_{s-1}(x)f_{s-1}(x)+u_s(x)f_s(x)=d(x)$$

令 $u_i(x)=u(x)v_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,s-1)$,并利用本题第一部分的结果得

$$u_1(x)f_1(x)+\cdots+u_{s-1}(x)f_{s-1}(x)+u_s(x)f_s(x)=$$
$$(f_1(x),\cdots,f_{s-1}(x),f_s(x))$$

5. 多项式 $m(x)$ 称为多项式 $f(x)$, $g(x)$ 的一个最小公倍式,如果 1) $f(x)\mid m(x)$, $g(x)\mid m(x)$;2) $f(x)$, $g(x)$ 的任一个公倍式都是 $m(x)$ 的倍式.我们以 $[f(x),g(x)]$ 表示首项系数是 1 的那个最小公倍式.证明:如果 $f(x)$, $g(x)$ 的首项系数都是 1,那么

$$[f(x),g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}$$

证　令 $(f(x),g(x))=d(x)$,且

$$f(x)=f_1(x)d(x),\quad g(x)=g_1(x)d(x) \tag{*}$$

则

$$\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}=f(x)g_1(x)=g(x)f_1(x)$$

这表明 $\dfrac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公倍式.

其次,设 $h(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公倍式,即存在多项式 $s(x)$, $t(x)$,使

$$h(x)=f(x)s(x),\quad h(x)=g(x)t(x)$$

由(*)式及上式得

$$f_1(x)d(x)s(x)=g_1(x)d(x)t(x)$$

消去 $d(x)$,得

$$f_1(x)s(x) = g_1(x)t(x)$$

于是 $g_1(x) \mid f_1(x)s(x)$, $f_1(x) \mid g_1(x)t(x)$. 但 $(f_1(x), g_1(x)) = 1$,从而有 $g_1(x) \mid s(x)$,设 $s(x) = g_1(x)q(x)$,则有

$$h(x) = f(x)s(x) = f(x)g_1(x)q(x)$$

即 $h(x)$ 是 $f(x)g_1(x)$ 的倍式, 因此 $h(x)$ 是 $\dfrac{f(x)g(x)}{(f(x), g(x))}$ 的倍式, 故 $\dfrac{f(x)g(x)}{(f(x), g(x))}$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小公倍式,即

$$[f(x), g(x)] = \frac{f(x)g(x)}{(f(x), g(x))}$$

6. 证明定理 5 的逆,即:设 $p(x)$ 是次数大于零的多项式,如果对于任何多项式 $f(x)$, $g(x)$,由 $p(x) \mid f(x)g(x)$ 可以推出 $p(x) \mid f(x)$ 或者 $p(x) \mid g(x)$,那么 $p(x)$ 是不可约多项式 .

证　利用反证法 . 设 $p(x)$ 可约, 则存在次数小于 $(p(x))$ 的多项式 $f(x)$, $g(x)$ 使

$$p(x) = f(x)g(x)$$

此时 $p(x) \mid f(x)g(x)$,由题设 $p(x) \mid f(x)$ 或 $p(x) \mid g(x)$,但这是不可能的,因为 $(f(x)) < (p(x))$, $(g(x)) < (p(x))$. 故 $p(x)$ 必为不可约多项式 .

7. 证明:次数 > 0 且首项系数为 1 的多项式 $f(x)$ 是一个不可约多项式的方幂的充分必要条件为:对任意的多项式 $g(x)$ 必有 $(f(x), g(x)) = 1$,或者对某一正整数 m, $f(x) \mid g^m(x)$.

证　必要性 . 设 $f(x) = p^m(x)$,其中 $p(x)$ 是不可约多项式,则对任意多项式 $g(x)$,有

$$(p(x), g(x)) = 1 \quad 或 \quad p(x) \mid g(x)$$

当 $(p(x), g(x)) = 1$ 时, 有 $(f(x), g(x)) = 1$; 而当 $p(x) \mid g(x)$ 时, 有 $p^m(x) \mid g^m(x)$,即 $f(x) \mid g^m(x)$.

充分性 . 法 1　反证 . 如果 $f(x)$ 不是某个不可约多项式的方幂,则

$$f(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x) \qquad (s > 1)$$

其中 $p_i(x)$ 是不同的不可约多项式, r_1, …, r_s 是正整数 . 取 $g(x) = p_1(x)$,由题设 $(f(x), p_1(x)) = 1$ 或者 $f(x) \mid p_1^m(x)$,其中 m 为某一正整数,但这都是不可能的 . 故 $f(x)$ 是某一不可约多项式的方幂 .

法 2　设 $f(x) = p^k(x)q(x)$,其中 $k \geq 1$, $p(x)$ 不可约,且 $p(x)$ 8 $q(x)$,

$(q(x)) > 0$.取 $g(x) = q(x)$,则$(f(x), q(x)) = q(x) \neq 1$;且对任何正整数 m,有 $f(x) \nmid q^m(x)$,这是因为,若 $f(x) \mid q^m(x)$,则由 $p(x) \mid f(x)$ 得 $p(x) \mid q^m(x)$,又由 $p(x)$ 不可约得 $p(x) \mid q(x)$,与假设矛盾.故 $f(x)$ 必为一不可约多项式的方幂.

8. 证明:次数 > 0 且首项系数为1的多项式 $f(x)$ 是某一不可约多项式的方幂的充分必要条件是,对任意的多项式 $g(x)$, $h(x)$,由 $f(x) \mid g(x)h(x)$ 可以推出 $f(x) \mid g(x)$,或者对某一正整数 m, $f(x) \mid h^m(x)$.

证 必要性.设 $f(x) = p^k(x)$,其中 $p(x)$ 不可约.由补充题7知,对多项式 $h(x)$ 或存在正整数 m,使 $f(x) \mid h^m(x)$;或$(f(x), h(x)) = 1$,此时由 $f(x) \mid g(x)h(x)$ 得 $f(x) \mid g(x)$.

充分性.法1 对任意多项式 $g(x)$ 而言,有两种可能:

(1) $(f(x), g(x)) = 1$

(2) $(f(x), g(x)) = d(x) \neq 1$

当$(f(x), g(x)) = 1$ 时,由补充题7的充分性知,$f(x)$ 是一个不可约多项式的方幂;而当$(f(x), g(x)) = d(x) \neq 1$ 时,令 $f(x) = q(x)d(x)$,则 $f(x) \mid q(x)d(x)$,但 $f(x) \nmid q(x)$,由题设条件知 $f(x) \mid d^m(x)$,其中 m为某一正整数.由补充题7的充分性知,$f(x)$ 是一个不可约多项式的乘积.

法2 设 $f(x) = p^k(x)q(x)$,其中 $k \geq 1$, $p(x)$ 不可约,$p(x) \nmid q(x)$ 且 $(q(x)) > 0$.则有 $f(x) \mid p^k(x)q(x)$.但 $f(x) \nmid p^k(x)$,故由题设条件知,存在正整数 m,使 $f(x) \mid q^m(x)$,于是由 $p(x) \mid f(x)$ 得 $p(x) \mid q^m(x)$,但 $p(x)$ 不可约,故 $p(x) \mid q(x)$,这与假设矛盾.于是 $f(x)$ 必为某个不可约多项式的方幂.

9. 证明:$x^n + ax^{n-m} + b$不能有不为零的重数大于2的根.

证 令 $f(x) = x^n + ax^{n-m} + b$,则

$$f'(x) = nx^{n-1} + a(n-m)x^{n-m-1} = x^{n-m-1}[nx^m + a(n-m)]$$

法1 由于 $g(x) = nx^m + a(n-m)$ 的导数为 $g'(x) = nmx^{m-1}$,故 $g(x)$ 没有不等于零的重根,从而 $f(x)$ 没有不等于零的重数大于2的根.

法2 由于 $f'(x)$ 的非零根都是多项式 $nx^m + a(n-m)$ 的根,而后者的 m 个根都是单根,因而 $f'(x)$ 不能有不为零的重数等于2的根,故 $f(x)$ 不能有不为零的重数大于2的根.

10. 证明:如果 $f(x) \mid f(x^n)$,那么 $f(x)$ 的根只能是零或单位根.

证 设α是 $f(x)$ 的任意一个根,则由 $f(x) \mid f(x^n)$ 知,α也是 $f(x^n)$ 的根,即 $f(\alpha^n) = 0$,这表明 α^n 是 $f(x)$ 的根.依此类推,可知

$$\alpha,\ \alpha^{n},\ \alpha^{n^2},\ \cdots$$

都是 $f(x)$ 的根.

如果 $f(x)$ 是 m 次多项式,则它最多只可能有 m 个不同的根,这就是说存在正整数 $k > l$,使

$$\alpha^{n^k} = \alpha^{n^l} \quad 即 \quad \alpha^{n^l}(\alpha^{n^k - n^l} - 1) = 0$$

可见 α 或者为零,或者为单位根.

11. 如果 $f'(x) \mid f(x)$,证明: $f(x)$ 有 n 重根,其中 $n = \ (f(x))$.

证　法 1　设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是 $f'(x)$ 的所有互不相同的根,其重数分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_s$. 由于 $f'(x)$ 是 $n-1$ 次多项式,所以

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n - 1 \qquad (*)$$

又由 $f'(x) \mid f(x)$ 知, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 也是 $f(x)$ 的根且重数分别为 $m_1 + 1, m_2 + 1, \cdots, m_s + 1$. 于是

$$(m_1 + 1) + (m_2 + 1) + \cdots + (m_s + 1) = n$$

由 $(*)$ 式和上式得, $n - 1 + s = n$,即 $s = 1$. 这表明 $f'(x)$ 只有一个根 α_1,其重数为 $n-1$,从而 α_1 是 $f(x)$ 的 n 重根.

法 2　设 α 是 $f(x)$ 的 s 重根,则有

$$f(x) = (x - \alpha)^s g(x)$$

其中 $g(\alpha) \neq 0$,于是

$$f'(x) = (x - \alpha)^{s-1} g_1(x)$$

其中

$$g_1(x) = sg(x) + (x - \alpha) g'(x)$$

由于 $f'(x) \mid f(x)$,并注意到 $(x - \alpha) \nmid g_1(x)$(否则由上式可得 $(x-\alpha) \mid g(x)$,与 $g(\alpha) \neq 0$ 矛盾),有 $g_1(x) \mid g(x)$,从而 $g_1(x) \mid g'(x)$,这只有 $g(x)$ 为零次多项式(因为 $g_1(x)$ 同 $g(x)$ 的次数相等,都是 $n - s$),设为 c,故

$$f(x) = c(x - \alpha)^s$$

也即 $s = n$,这表明 α 是 $f(x)$ 的 n 重根.

法 3　因为 $f'(x) \mid f(x)$,故可设

$$nf(x) = (x - \alpha) f'(x)$$

两边对 x 逐次求导,并移项整理得

$$(n-1) f'(x) = (x - \alpha) f''(x)$$

$$(n-2) f''(x) = (x - \alpha) f'''(x)$$

$$\cdots\cdots$$

$$2 f^{(n-2)}(x) = (x - \alpha) f^{(n-1)}(x)$$

$$f^{(n-1)}(x) = (x - \alpha) f^{(n)}(x)$$

其中 $f^{(n)}(x) = n!a_n$,而 a_n 为 $f(x)$ 的首项系数.

以上诸式相乘,并从两边消去 $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$,得

$$n!f(x) = (x-\alpha)^n n!a_n$$

故得

$$f(x) = a_n(x-\alpha)^n$$

即 $f(x)$ 有 n 重根.

12. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个不同的数,而

$$F(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

证明:1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)} = 1$;

2) 任意多项式 $f(x)$ 用 $F(x)$ 除所得的余式为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}$$

证 1) 令

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}$$

由于

$$F'(x) = \sum_{k=1}^{n}(x-a_1)\cdots(x-a_{k-1})(x-a_{k+1})\cdots(x-a_n)$$

所以

$$F'(a_i) = (a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)$$

于是

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}$$

可见 $(g(x)) \leq n-1$,且

$$g(a_1) = g(a_2) = \cdots = g(a_n) = 1$$

故 $g(x) = 1$.

2) 对任意多项式 $f(x)$,设

$$r(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}$$

则有 $r(a_k) = f(a_k)\ (k=1,2,\cdots,n)$,即 $f(x)-r(x)$ 有根 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,从而

$$F(x) \mid (f(x)-r(x))$$

设 $f(x)-r(x) = q(x)F(x)$,即有

$$f(x) = q(x)F(x) + r(x)$$

其中 $r(x) = 0$ 或 $(r(x)) \leq n-1$,这表明 $r(x)$ 为 $f(x)$ 被 $F(x)$ 除所得的余式.

13. $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $F(x)$ 同上题, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是任意 n 个数, 显然

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i F(x)}{(x - a_i) F'(a_i)}$$

适合条件

$$L(a_i) = b_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

这称为拉格朗日(Lagrange) 插值公式.

利用上面的公式求:

(1) 一个次数 < 4 的多项式 $f(x)$, 它适合条件: $f(2) = 3$, $f(3) = -1$, $f(4) = 0$, $f(5) = 2$;

(2) 一个二次多项式 $f(x)$, 它在 $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 处与函数 $\sin x$ 有相同的值;

(3) 一个次数尽可能低的多项式 $f(x)$, 使 $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $f(3) = 10$.

解　(1) 在习题 12 中取 $n = 4$; $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 5$; $b_1 = 3$, $b_2 = -1$, $b_3 = 0$, $b_4 = 2$; $F(x) = (x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$. 于是所求多项式为

$$\begin{aligned} f(x) = L(x) = {} & \frac{3(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(x-2)(2-3)(2-4)(2-5)} + \\ & \frac{(-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(x-3)(3-2)(3-4)(3-5)} + \\ & \frac{0(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(x-4)(4-2)(4-3)(x-5)} + \\ & \frac{2(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(x-5)(5-2)(5-3)(5-4)} = \\ & -\frac{2}{3}x^3 + \frac{17}{2}x^2 - \frac{203}{6}x + 42 \end{aligned}$$

(2) 此时 $n = 3$; $a_1 = 0$, $a_1 = \frac{\pi}{2}$, $a_2 = \pi$; $b_1 = \sin 0 = 0$, $b_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $b_3 = \sin\pi = 0$; $F(x) = x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - \pi)$. 于是所求的多项式为

$$f(x) = L(x) = \frac{0 \cdot x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - \pi)}{x\left(0 - \frac{\pi}{2}\right)(0 - \pi)} +$$

$$\frac{1\cdot x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)}+$$

$$\frac{0\cdot x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)}{(x-\pi)(\pi-0)\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi)$$

(3) 此时 $n=4$;$a_1=0$,$a_2=1$,$a_3=2$,$a_4=3$;$b_1=1$,$b_2=2$,$b_3=5$,$b_4=10$;$F(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$.于是所求的多项式为

$$f(x)=L(x)=\frac{1\cdot x(x-1)(x-2)(x-3)}{x(0-1)(0-2)(0-3)}+$$

$$\frac{2\cdot x(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(1-0)(1-2)(1-3)}+$$

$$\frac{5\cdot x(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-2)(2-0)(2-1)(2-3)}+$$

$$\frac{10\cdot x(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-3)(3-0)(3-1)(3-2)}=x^2+1$$

这也是满足条件的最低次多项式,易知任何多项式 $g(x)=ax+b$都不能有

$$g(a_i)=b_i\qquad(i=1,2,3,4)$$

14. 设 $f(x)$ 是一个整系数多项式,试证:如果 $f(0)$ 与 $f(1)$ 都是奇数,那么 $f(x)$ 不能有整数根.

证 反证.设 $f(x)$ 有整数根 α,则 $x-\alpha$整除 $f(x)$,即

$$f(x)=(x-\alpha)q(x)\qquad(*)$$

其中商 $q(x)$ 也是一个整系数多项式(因为,若设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$,$g(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$,代入(*)式并比较两端同次幂系数,得

$$a_n=b_{n-1},\ a_{n-1}=b_{n-2}-\alpha b_{n-1},\ \cdots,\ a_1=b_0-\alpha b_1,\ a_0=-\alpha b_0$$

由于 $a_n,\cdots,a_1,a_0$ 及 α都是整数,故 $b_{n-1},\cdots,b_1,b_0$ 也都是整数).分别令 $x=0$ 及 $x=1$,代入(*)式,得

$$f(0)=-\alpha q(0),\quad f(1)=(1-\alpha)q(1)$$

由于 $f(0)$ 及 $f(1)$ 均为奇数,则由上式知,α与$\alpha-1$都必须是奇数,这是不可能的,故 $f(x)$ 不能有整数根.

15. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的根,证明:$x_2,\cdots,x_n$ 的对称多项式可以表成 x_1 与 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 的多项式.

证 设 $f(x_2,\cdots,x_n)$ 是关于 $x_2,\cdots,x_n$ 的任意一个对称多项式,则由对

称多项式基本定理知

$$f(x_2, \cdots, x_n) = g(\sigma_1', \cdots, \sigma_{n-1}') \qquad (*)$$

其中 $\sigma_1', \sigma_2', \cdots, \sigma_{n-1}'$ 是 $x_2, \cdots, x_n$ 的全部初等对称多项式.

由于 $\sigma_1', \sigma_2', \cdots, \sigma_{n-1}'$ 与关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的初等对称多项式 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 有关系

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1' &= \sigma_1 - x_1 \\ \sigma_2' &= \sigma_2 - x_1\sigma_1' \\ &\cdots\cdots \\ \sigma_{n-1}' &= \sigma_{n-1} - x_1\sigma_{n-2}' \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

又由于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是所给方程的根,故由根与系数的关系知

$$\sigma_1 = -a_1, \sigma_2 = a_2, \cdots, \sigma_{n-1} = (-1)^{n-1}a_{n-1}$$

代入$(**)$式可知 σ_i' 是 $x_1, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 的多项式,不妨记为

$$\sigma_i' = h_i(x_1, a_1, \cdots, a_{n-1}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

将其代入$(*)$式的右端,即知 $f(x_2, \cdots, x_n)$ 可表为 $x_1, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 的多项式.

16. $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n\sigma_n$. 令

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

(1) 证明:

$$x^{k+1} f'(x) = (s_0 x^k + s_1 x^{k-1} + \cdots + s_{k-1} x + s_k) f(x) + g(x)$$

其中 $g(x)$ 的次数 $< n$ 或 $g(x) = 0$.

(2) 由上式证明牛顿(Newton)公式:

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0, \quad 对 1 \le k \le n$$

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \cdots + (-1)^n\sigma_n s_{k-n} = 0, \quad 对于 k > n$$

证　(1) 由于

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x)}{x - x_i}$$

从而

$$x^{k+1} f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{k+1} f(x)}{x - x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x^{k+1} - x_i^{k+1} + x_i^{k+1}) f(x)}{x - x_i} =$$

$$f(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{k+1} - x_i^{k+1}}{x - x_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k+1} f(x)}{x - x_i} =$$

$$f(x) \sum_{i=1}^{n} (x^k + x_i x^{k-1} + \cdots + x_i^k) + g(x) =$$

$$f(x)\left[x^k\sum_{i=1}^n 1+x^{k-1}\sum_{i=1}^n x_i+\cdots+\sum_{i=1}^n x_i^k\right]+g(x)=$$
$$(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k)f(x)+g(x)$$

其中 $g(x)=\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{k+1}f(x)}{x-x_i}$ 的次数 $<n$ 或 $g(x)=0$.

(2) 由于 $f(x)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$,故

$$x^{k+1}f'(x)=x^{k+1}[nx^{n-1}-(n-1)\sigma_1x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}]=$$
$$nx^{n+k}-(n-1)\sigma_1x^{n+k-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x^{k+1}$$

将上式及 $f(x)$ 分别代入(1)中公式的两端,得

$$nx^{n+k}-(n-1)\sigma_1x^{n+k-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x^{k+1}=$$
$$(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k)(x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n)+g(x)$$

比较上式两端 x^n 的系数,得(注意 $\partial(g(x))<n$,故不含 x^n 的项):

当 $k\leq n$ 时,有(注意 $s_0=n$)

$$(-1)^k(n-k)\sigma_k=s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}-\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k\sigma_ks_0$$

即

$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}-\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^kk\sigma_k=0$$

当 $k>n$ 时,有

$$0=s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}s_{k-n+1}+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}$$

17. 根据牛顿公式用初等对称多项式表示 s_2, s_3, s_4, s_5, s_6.

解　对于 $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$,关于 k 与 n 的取值套用牛顿公式进行计算.

情形1　当 $n\geq 6$ 时,对 $1\leq k\leq 6$ 分别由牛顿公式得($k\leq n$):

$$s_1=\sigma_1$$
$$s_2-s_1\sigma_1+2\sigma_2=0$$
$$s_3-s_2\sigma_1+s_1\sigma_2-3\sigma_3=0$$
$$s_4-s_3\sigma_1+s_2\sigma_2-s_1\sigma_3+4\sigma_4=0$$
$$s_5-s_4\sigma_1+s_3\sigma_2-s_2\sigma_3+s_1\sigma_4-5\sigma_5=0$$
$$s_6-s_5\sigma_1+s_4\sigma_2-s_3\sigma_3+s_2\sigma_4-s_1\sigma_5+6\sigma_6=0$$

于是

$$s_2=s_1\sigma_1-2\sigma_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$$
$$s_3=s_2\sigma_1-s_1\sigma_2+3\sigma_3=(\sigma_1^2-2\sigma_2)\sigma_1-\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$$

同理得

$$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4$$

$$s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_1\sigma_2^2 - 5\sigma_1\sigma_4 - 5\sigma_2\sigma_3 + 5\sigma_5$$

$$s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 6\sigma_1^3\sigma_3 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 6\sigma_1^2\sigma_4 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 6\sigma_1\sigma_5 - 2\sigma_2^3 + 6\sigma_2\sigma_4 + 3\sigma_3^2 - 6\sigma_6$$

情形 2　当 $n = 5$ 时，s_2，s_3，s_4，s_5 同情形 1．对 $k = 6$ 由牛顿公式得

$$s_6 - s_5\sigma_1 + s_4\sigma_2 - s_3\sigma_3 + s_2\sigma_4 - s_1\sigma_5 = 0$$

于是

$$s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 6\sigma_1^3\sigma_3 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 6\sigma_1^2\sigma_4 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 6\sigma_1\sigma_5 - 2\sigma_2^3 + 6\sigma_2\sigma_4 + 3\sigma_3^2$$

情形 3　当 $n = 4$ 时，s_2，s_3，s_4 同情形 1．对 $k = 5$ 和 $k = 6$ 由牛顿公式得

$$s_5 - s_4\sigma_1 + s_3\sigma_2 - s_2\sigma_3 + s_1\sigma_4 = 0$$

$$s_6 - s_5\sigma_1 + s_4\sigma_2 - s_3\sigma_3 + s_2\sigma_4 = 0$$

于是

$$s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_1\sigma_2^2 - 5\sigma_1\sigma_4 - 5\sigma_2\sigma_3$$

$$s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 6\sigma_1^3\sigma_3 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 6\sigma_1^2\sigma_4 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_2^3 + 6\sigma_2\sigma_4 + 3\sigma_3^2$$

情形 4　当 $n = 3$ 时，s_2，s_3 同情形 1．对 $4 \leq k \leq 6$ 由牛顿公式得

$$s_4 - s_3\sigma_1 + s_2\sigma_2 - s_1\sigma_3 = 0$$

$$s_5 - s_4\sigma_1 + s_3\sigma_2 - s_2\sigma_3 = 0$$

$$s_6 - s_5\sigma_1 + s_4\sigma_2 - s_3\sigma_3 = 0$$

于是

$$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2$$

$$s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_1\sigma_2^2 - 5\sigma_2\sigma_3$$

$$s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 6\sigma_1^3\sigma_3 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_2^3 + 3\sigma_3^2$$

情形 5　当 $n = 2$ 时，s_2 同情形 1．对 $3 \leq k \leq 6$ 由牛顿公式得

$$s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 = 0$$

$$s_4 - s_3\sigma_1 + s_2\sigma_2 = 0$$

$$s_5 - s_4\sigma_1 + s_3\sigma_2 = 0$$

$$s_6 - s_5\sigma_1 + s_4\sigma_2 = 0$$

于是

$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$$

$$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$$

$$s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$$

$$s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3$$

18. 证明:如果对于某一个 6 次方程有 $s_1 = s_3 = 0$,那么

$$\frac{s_7}{7} = \frac{s_5}{5} \cdot \frac{s_2}{2}$$

证 这时 $n = 6$. 由牛顿公式,得

$$s_1 = \sigma_1$$
$$s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0$$
$$s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0$$
$$s_5 - s_4\sigma_1 + s_3\sigma_2 - s_2\sigma_3 + s_1\sigma_4 - 5\sigma_5 = 0 \qquad (*)$$
$$s_7 - s_6\sigma_1 + s_5\sigma_2 - s_4\sigma_3 + s_3\sigma_4 - s_2\sigma_5 + s_1\sigma_6 = 0 \qquad (**)$$

利用 $s_1 = s_3 = 0$,得

$$\sigma_1 = 0, \quad s_2 + 2\sigma_2 = 0, \quad -3\sigma_3 = 0$$

即 $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -\frac{s_2}{2}$, $\sigma_3 = 0$,代入$(*)$式得 $s_5 - 5\sigma_5 = 0$,即 $\sigma_5 = \frac{s_5}{5}$. 又由$(**)$式得 $s_7 + s_5\sigma_2 - s_2\sigma_5 = 0$,从而

$$\frac{s_7}{7} = \frac{1}{7}(s_2\sigma_5 - s_5\sigma_2) = \frac{1}{7}\left[s_2 \cdot \frac{s_5}{5} - s_5\left(-\frac{s_2}{2}\right)\right] = \frac{s_5}{5} \cdot \frac{s_2}{2}$$

19. 求一个 n 次方程使

$$s_1 = s_2 = \cdots = s_{n-1} = 0$$

解 设所求的方程为

$$x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n\sigma_n = 0$$

由于 $s_1 = s_2 = \cdots = s_{n-1} = 0$,故 $\sigma_1 = s_1 = 0$. 根据牛顿公式($k \leq n$的情形)可知 $s_2 - \sigma_1 s_1 + 2\sigma_2 = 0$,即 $\sigma_2 = 0$;又有 $s_3 - \sigma_1 s_2 + \sigma_2 s_1 - 3\sigma_3 = 0$,于是 $\sigma_3 = 0$;如此继续下去,可推得

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_{n-1} = 0$$

故所求的 n 次方程为 $x^n + (-1)^n\sigma_n = 0$,也即

$$x^n + a = 0$$

因为 σ_n 为任意数.

20. 求一个 n 次方程使

$$s_2 = s_3 = \cdots = s_n = 0$$

解 设所求的 n 次方程为

$$\sigma^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1} x + (-1)^n\sigma_n = 0$$

则由于 $s_2 = s_3 = \cdots = s_n = 0$,利用牛顿公式($k \leq n$ 的情形)

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-2}\sigma_{k-2}s_2 + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0$$

可得
$$(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k k\sigma_k=0$$
即
$$\sigma_k=\frac{\sigma_{k-1}s_1}{k}=\frac{\sigma_{k-1}\sigma_1}{k}\qquad(k=2,3,\cdots,n)$$
从而
$$\sigma_k=\frac{\sigma_1^k}{k!}\qquad(k=1,2,\cdots,n)$$
故所求的方程为
$$x^n-\sigma_1x^{n-1}+\frac{\sigma_1^2}{2!}x^{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{\sigma_1^{n-1}}{(n-1)!}x+(-1)^n\frac{\sigma_1^n}{n!}=0$$

六、学习效果检测题及答案

(一) 检测题

1. 设 $f(x)=x^2+x-1$, $g(x)=a(x+1)^2+b(x-1)(x+1)+c(x-1)^2$, 当 a,b,c 为何值时, $f(x)=g(x)$.

2. 设 $f(x)=1+x+\cdots+x^{n+1}$, $g(x)=1+x+\cdots+x^{n-1}$. 证明:
$$f(x)\cdot g(x)=(1+x+\cdots+x^n)^2-x^n$$

3. 证明:多项式
$$f(x)=(x^{50}-x^{49}+\cdots+x^2-x+1)(x^{50}+x^{49}+\cdots+x+1)$$
的展开式中不含奇数次项.

4. 用 $g(x)$ 除 $f(x)$,求商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$:

(1) $f(x)=x^4+4x^2-x+6$, $g(x)=x^2+x+1$;

(2) $f(x)=x^5-3x^2+x+1$, $g(x)=x^3-2x-1$.

5. 用综合除法求商及余式:

(1) $f(x)=x^4-2x^3+4x^2-6x+8$, $g(x)=x-2$;

(2) $f(x)=2x^5-5x^3-8x$, $g(x)=x+2$;

(3) $f(x)=2x^4+3x^3+4x^2+5x+1$, $g(x)=2x-1$.

6. 将 $f(x)$ 表成 $x-x_0$ 的方幂和:

(1) $f(x)=5x^4-6x^3+x^2+4$, $x_0=1$;

(2) $f(x)=2x^5+5x^4-x^3+10x-6$, $x_0=-2$.

7. 求作一个多项式,使它的各个根分别等于多项式 $f(x)=x^4-3x^2+7$ 的各个根减 1.

8. 将多项式 $f(x)=7x^4+x^3-8x^2+8x-9$ 表成

$$ax(x-1)(x-2)(x-3)+bx(x-1)(x-2)+cx(x-1)+dx+e$$

的形式.

9. 试求 $x^3-3px+2q$ 能被 $x^2+2ax+a^2$ 整除的条件.

10. 确定 a,b,使 $(x-1)^2\mid ax^4+bx^3+1$.

11. 设 a,b 为两个不相等的常数.证明:多项式 $f(x)$ 被 $(x-a)(x-b)$ 除所得的余式为

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x+\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$$

12. 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式,并求 $u(x),v(x)$ 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

(1) $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9,\ g(x)=2x^3-x^2-5x+4$;

(2) $f(x)=x^6-4x^5+11x^4-27x^3+37x^2-35x+35$,

$g(x)=x^5-3x^4+7x^3-20x^2+10x-25$;

(3) $f(x)=3x^4-5x^3+4x^2-2x+1,\ g(x)=3x^3-2x^2+x-1$.

13. 设 $f(x)=x^3+tx^2+x+u$ 与 $g(x)=x^3+(1+t)x^2+1$ 的最大公因式是一个二次多项式,求 t 及 u.

14. 设 $f(x)=x^4+x^2+lx+m,\ g(x)=x^2+x-2$,试求 l,m,使得

(1) $(f(x),g(x))=g(x)$;

(2) $(f(x),g(x))=x+2$;

(3) $(f(x),g(x))=x-1$.

15. 证明:如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素,则 $f(x^m)$ 与 $g(x^m)$ 互素.

16. 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,n 为正整数.证明:如果 $f^n(x)\mid g^n(x)$,则 $f(x)\mid g(x)$.

17. 判别下列多项式有无重因式:

(1) $f(x)=x^4-x^3-3x^2+5x-2$;

(2) $f(x)=x^4+x^2+1$;

(3) $f(x)=x^6-15x^4+8x^3+51x^2-72x+27$.

18. 求多项式 $f(x)=x^4+2x^2+9$ 与 $g(x)=x^4-4x^3+4x^2-9$ 的公共根.

19. 已知 $f(x)=x^5-10x^2+15x-6$ 有重根,试求它的所有根并确定重数.

20. 证明多项式 $x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$ 以 1 为 3 重根.

21. 求 t 的值,使 $f(x)=x^4+tx+3$ 有重根.

22. **已知多项式** $x^4-4x^3+2x^2+20x+3$ **有一根** $3+2i$, **求此多项式的全部根**.

23. **当** λ **为何值时**, **方程** $x^3-7x+\lambda=0$ **的一根是另一根的** 2 **倍**.

24. **求下列多项式的有理根**:

(1) $f(x)=x^4-5x^3+11x^2-16x+12$;

(2) $f(x)=3x^4+5x^3+x^2+5x-2$;

(3) $f(x)=x^5-x^4-\frac{5}{2}x^3+2x^2-\frac{1}{2}x-3$.

25. **下列多项式在有理数域上是否可约**:

(1) $f(x)=x^5-4x^3+16x^2+8x-6$;

(2) $f(x)=x^4-x^3+3x^2-7x+10$;

(3) $f(x)=5x^4-6x^3+12x+6$;

(4) $f(x)=x^p+px+2p-1$　(p **为素数**);

(5) $f(x)=x^4-10x^2+1$.

26. **用初等对称多项式表出下列对称多项式**:

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2+(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2+(x_3-x_1)^2(x_1-x_2)^2$;

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2$.

27. **用初等对称多项式表出下列** n **元对称多项式**:

(1) $\sum x_1^2x_2$　$(n\geq 3)$;

(2) $\sum x_1^3x_2^3$　$(n\geq 6)$;

(3) $\sum x_1^3x_2^2x_3$　$(n\geq 3)$;

(4) $\sum x_1^2x_2^2x_3$　$(n\geq 5)$.

28. **设** x_1,x_2,x_3 **是方程** $3x^3-5x+1=0$ **的三个根**. **计算**

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3x_2+x_1x_2^3+x_1^3x_3+x_1x_3^3+x_2^3x_3+x_2x_3^3$$

29. **求三次方程** $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ **的三个根成等比数列的条件**.

30. **设** $x+y+z=0$, **且** $xyz\neq 0$, **求**

$$\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{xy}$$

(二) 检测题答案

1. $a = \frac{1}{4}$, $b = 1$, $c = -\frac{1}{4}$.

2. 令 $h(x) = 1 + x + \cdots + x^n$,则 $f(x) = h(x) + x^{n+1}$, $g(x) = h(x) - x^n$,此时

$$f(x) \cdot g(x) = h^2(x) - x^n h(x) + x^{n+1} h(x) - x^{2n+1} = h^2(x) - x^n$$

3. 由于 $x^{51} + 1 = (x+1)(x^{50} - x^{49} + \cdots + x^2 - x + 1)$

$$x^{51} - 1 = (x-1)(x^{50} + x^{49} + \cdots + x + 1)$$

两式相乘得

$$x^{102} - 1 = (x^2 - 1) f(x)$$

而 $x^{102} - 1$ 与 $x^2 - 1$ 中都不含奇数次项,故 $f(x)$ 中也不含奇数次项.

4. (1) $q(x) = x^2 - x + 4$, $r(x) = -4x + 2$;

(2) $q(x) = x^2 + 2$, $r(x) = -2x^2 + 5x + 3$.

5. (1) $q(x) = x^3 + 4x + 2$, $r(x) = 12$;

(2) $q(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 6x + 4$, $r(x) = -8$;

(3) $q(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, $r(x) = 5$.

6. (1) $f(x) = 5(x-1)^4 + 14(x-1)^3 + 13(x-1)^2 + 4(x-1) + 4$;

(2) $f(x) = 2(x+2)^5 + (x+2)^4 - 3(x+2)^3 + 6(x+2)^2 - 2(x+2) - 2$.

7. 所求多项式为 $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x + 5$.(提示:将 $f(x)$ 表示成 $x-1$ 的方幂展开式.)

8. $f(x) = 7x(x-1)(x-2)(x-3) + 43x(x-1)(x-2) + 44x(x-1) + 8x - 9$.(提示:对 $f(x)$ 及其余式依次作综合除法,其除式分别为 x, $x-1$, $x-2$, $x-3$.)

9. 用带余除法求得余式为 $r(x) = 3(a^2 - p)x + 2(a^3 + q)$.由 $r(x) = 0$ 得 $p = a^2$, $q = -a^3$.

10. $a = 3$, $b = -4$.

11. 设 $f(x) = (x-a)(x-b)q(x) + cx + d$,分别将 $x = a$, $x = b$代入该式得

$$f(a) = ca + d, \quad f(b) = cb + d$$

解得 $c = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$, $d = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}$,即得所证.

12. (1) $(f(x), g(x)) = x-1$, $u(x) = -\frac{1}{3}(x-1)$, $v(x) = \frac{1}{3}(2x^2 - 2x-3)$;

(2) $(f(x), g(x)) = x^2+5$, $u(x) = -x+3$, $v(x) = x^2-4x+4$;

(3) $(f(x), g(x)) = 1$, $u(x) = 3x^2+x-1$, $v(x) = -3x^3+2x^2+x-2$.

13. **用辗转相除法**,**得**

$$f(x) = 1\cdot g(x) + (-x^2+x+u-1)$$

$$g(x) = [-x-(t+2)](-x^2+x+u-1) + (t+u+1)x+1+(t+2)(u-1)$$

由于 $f(x)$ **与** $g(x)$ **的最大公因式是一个二次多项式**,**所以有**

$$t+u+1 = 0,\quad 1+(t+2)(u-1) = 0$$

解之得 $\begin{cases} t=-1 \\ u=0 \end{cases}$ **或** $\begin{cases} t=-3 \\ u=2 \end{cases}$.

14. (1) **用** $g(x)$ **除** $f(x)$ **的余式为** $r(x) = (l-6)x+m+8$,**可见** $l=6$, $m=-8$ **时**, $r(x)=0$,**此时** $(f(x), g(x)) = g(x)$.

(2) **由于** $g(x) = (x+2)(x-1)$,**所以当** $l\neq 6$ **且** $\frac{m+8}{l-6} = -1$,**即** $l\neq 6$ **且** $m+l=-2$ **时**, $(f(x), g(x)) = x+2$.

(3) **同**(2) **知**,**当** $l\neq 6$ **且** $\frac{m+8}{l-6} = 2$,**即** $l\neq 6$ **且** $m=2l-20$ **时**, $(f(x), g(x)) = x-1$.

15. **存在** $u(x)$ **与** $v(x)$ **使** $u(x)f(x)+v(x)g(x) = 1$,**于是** $u(x^m)f(x^m) + v(x^m)g(x^m) = 1$,**故** $(f(x^m), g(x^m)) = 1$.

16. **应用多项式的标准分解式**,**设**

$$f(x) = ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),\quad a\in P,\ r_i\geq 0$$

$$g(x) = bp_1^{t_1}(x)p_2^{t_2}(x)\cdots p_s^{t_s}(x),\quad b\in P,\ t_i\geq 0$$

其中 a, b **分别为** $f(x)$ **与** $g(x)$ **的首项系数**, $p_1(x), \cdots, p_s(x)$ **为互不相同的首一不可约多项式**,**则有**

$$f^n(x) = a^n p_1^{r_1 n}(x)p_2^{r_2 n}(x)\cdots p_s^{r_s n}(x)$$

$$g^n(x) = b^n p_1^{t_1 n}(x)p_2^{t_2 n}(x)\cdots p_s^{t_s n}(x)$$

因为 $f^n(x) \mid g^n(x)$,所以 $r_i n \leq t_i n\ (i = 1,2,\cdots,s)$.于是 $r_i \leq t_i (i = 1,2,\cdots,s)$,故 $f(x) \mid g(x)$.

17.(1) 由于$(f(x), f'(x)) = (x-1)^2$,故 $f(x)$ 有重因式,且 $x-1$ 是 $f(x)$ 的一个 3 重因式;

(2) 由于$(f(x), f'(x)) = 1$,所以 $f(x)$ 无重因式;

(3) 由辗转相除法可得$(f(x), f'(x)) = x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x-1)^2(x+3)$,所以 $f(x)$ 有重因式,且 $x-1$ 为 3 重因式,$x+3$ 为 2 重因式.

18. 由辗转相除法得$(f(x), g(x)) = x^2 - 2x + 3$.求解 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 得 $x_1 = 1 + \sqrt{2}\mathrm{i}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}\mathrm{i}$,所以多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公共根为 $1 + \sqrt{2}\mathrm{i}$, $1 - \sqrt{2}\mathrm{i}$.

19. 可求得$(f(x), f'(x)) = (x-1)^2$,所以 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的 3 重根.又由综合除法得 $f(x) = (x-1)^3(x^2 + 3x + 6)$.解方程 $x^2 + 3x + 6 = 0$ 得 $x_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{15}\mathrm{i}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{15}\mathrm{i}}{2}$,故 $f(x)$ 的全部根为 1, 1, 1, $\dfrac{-3 + \sqrt{15}\mathrm{i}}{2}$, $\dfrac{-3 - \sqrt{15}\mathrm{i}}{2}$.

20. 令 $f(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$,则 $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$,但 $f\ (1) \neq 0$,所以 1 为 $f(x)$ 的 3 重根.

21. $t = \pm 4$, $t = \pm 4\mathrm{i}$.

22. $3 + 2\mathrm{i}$, $3 - 2\mathrm{i}$, -1, -1.

23. 设方程的三个根为 α, 2α, β,则由根与系数的关系,得

$$3\alpha + \beta = 0, \quad 2\alpha^2 + \alpha\beta + 2\alpha\beta = -7, \quad 2\alpha^2\beta = -\lambda$$

解得 $\alpha = \pm 1$, $\beta = \mp 3$,从而得 $\lambda = \pm 6$.

24.(1) 2 为 2 重根;

(2) -2 及 $\dfrac{1}{3}$ 都是单根;

(3) -1 和 2 都是单根(注:先化为整系数多项式).

25.(1) 不可约.取 $p = 2$ 用艾氏判别法.

(2) 不可约.令 $x = y + 1$,展开后取 $p = 3$ 用艾氏判别法.

(3) 不可约.取 $p = 3$ 用艾氏判别法.

(4) 不可约.分三种情况讨论:① 当 $p = 2$ 时, $f(x) = x^2 + 2x + 3$ 无有理根,故 $f(x)$ 不可约;② 当 $p = 3$ 时, $f(x) = x^3 + 3x + 5$,因为 $\pm 1, \pm 5$ 不是 $f(x)$

的有理根,从而 $f(x)$ **无有理根,故** $f(x)$ **不可约;③ 当** $p>3$ **时,令** $x=y+1$, **代入** $f(x)$ **得**

$$g(y)=f(y+1)=y^p+C_p^1y^{p-1}+\cdots+C_p^{p-2}y^2+(C_p^{p-1}+p)y+3p$$

由于 $p\nmid 1$,**但** $p\mid C_p^i(i=1,\cdots,p-1)$;**又** $p>3$,**故** $p^2\nmid 3p$,**从而由艾氏判别法知** $g(y)$ **不可约,于是** $f(x)$ **不可约.**

(5) **不可约.反证.若** $f(x)$ **在有理数域上不可约,因** $f(x)$ **无有理根,故只能分解成两个二次因式乘积,设**

$$f(x)=(x^2+ax+1)(x^2+bx+1)$$

$$f(x)=(x^2+ax-1)(x^2+bx-1)$$

其中 a,b **为整数.上面第一式展开并比较同次项系数得**

$$a+b=0,\quad ab+2=-10$$

解得 $a=\pm2\sqrt{3}$,**这与** a **是整数矛盾.对第二式可类似地推出矛盾,故** $f(x)$ **不可约.**

26. (1) $f=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2$;

(2) $f=\sigma_1^4-6\sigma_1^2\sigma_2+9\sigma_2^2$;

(3) $f=\sigma_1^2-2\sigma_2+4\sigma_1^2\sigma_2^2-16\sigma_1^3\sigma_3-16\sigma_2^3+72\sigma_1\sigma_2\sigma_3-108\sigma_3^2$.

27. (1) $\sum x_1^2x_2=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$;

(2) $\sum x_1^3x_2^3=\sigma_2^3-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3^2-8\sigma_1\sigma_5+3\sigma_6$;

(3) $\sum x_1^3x_2^2x_3=\sigma_1\sigma_2\sigma_3-3\sigma_3^2$;

(4) $\sum x_1^2x_2^2x_3=\sigma_2\sigma_3-3\sigma_1\sigma_4+5\sigma_5$.

28. **由根与系数的关系,得**

$$\sigma_1=x_1+x_2+x_3=0$$

$$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-\frac{5}{3}$$

$$\sigma_3=x_1x_2x_3=-\frac{1}{3}$$

又 f **是 4 次齐次对称多项式,经计算得**

$$f=\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3=0-2\left(-\frac{5}{3}\right)^2-0=-\frac{50}{9}$$

29. **设方程的三个根为** x_1,x_2,x_3,**则三个根成等比数列的充分必要条件是**

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2x_3)(x_2^2 - x_1x_3)(x_3^2 - x_1x_2) = 0$$

由根与系数的关系得 $\sigma_1 = -a_1$, $\sigma_2 = a_2$, $\sigma_3 = -a_3$,于是

$$f = \sigma_1^3\sigma_3 - \sigma_2^3 + 0\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 0\sigma_3^2 = (-a_1)^3(-a_3) - a_2^3 = a_1^3a_3 - a_2^3$$

从而,所求的充分必要条件为 $a_1^3a_3 - a_2^3 = 0$.

30. 令 $f = \dfrac{x^2}{yz} + \dfrac{y^2}{xz} + \dfrac{z^2}{xy} = \dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}$.将 $x^3 + y^3 + z^3$ 看作 x, y, z 的对称多项式,则有 $x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1^3 + a\sigma_1\sigma_2 + b\sigma_3$.注意到 $\sigma_1 = x + y + z = 0$,则有

$$f = \frac{\sigma_1^3 + a\sigma_1\sigma_2 + b\sigma_3}{\sigma_3} = b$$

即不管 x, y, z 取何值,只要 $x + y + z = 0, xyz \neq 0$, f 的值都相同 .取 $x = 2$, $y = z = -1$,则 $x + y + z = 0$, $xyz \neq 0$,由此得

$$f = \frac{2^2}{(-1)(-1)} + \frac{(-1)^2}{2\cdot(-1)} + \frac{(-1)^2}{2\cdot(-1)} = 3$$

第2章 行 列 式

行列式是高等代数中的一个基本概念,它不仅是讨论线性方程组理论的有力工具,而且在求逆矩阵、求矩阵的秩、判断向量组的线性相关性以及求矩阵的特征值、判断二次型的正定与负定等方面都要用到.

一、内 容 提 要

1. 排列及其性质

(1) 由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数构成的一个有序数组 $j_1\ j_2\ \cdots\ j_n$ 称为一个 n 级(或阶、或元)排列. 在一个排列中,如果一对数的前后位置与大小顺序相反,即前面的数大于后面的数,则称这两个数构成一个逆序. 一个 n 级排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 中逆序的总数称为这个排列的逆序数,记为 $\tau(j_1 j_2\cdots j_n)$. 逆序数为奇(偶)数的排列称为奇(偶)排列. 如果只交换排列中某两个数的位置而其余的数不动,就得到一个新的排列,这一变换称为对换.

(2) n 级排列共有 $n!$ 个,其中奇、偶排列的个数各占 $\dfrac{n!}{2}$.

(3) 对换改变排列的奇偶性,即偶(奇)排列经过一次对换变成奇(偶)排列.

(4) 任一 n 级排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 与标准排列 $1\quad 2\quad \cdots\quad n$ 都可以经过一系列对换互变,且所做对换次数与排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 有相同的奇偶性.

2. 行列式的定义

n 级行列式用符号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (*)$$

表示,它代表 $n!$项的代数和,这些项是一切可能的取自 D中不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,即当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶(奇)排列时该项的符号为正(负),也就是说

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

特别地,对于 2 级行列式与 3 级行列式,可以采用对角线法则来记它们代表的数:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\underline{a_{11}a_{22}}-\underline{a_{12}a_{21}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\underline{a_{11}a_{22}a_{33}}+\underline{a_{12}a_{23}a_{31}}+\underline{a_{13}a_{21}a_{32}}-\underline{a_{13}a_{22}a_{31}}-\underline{a_{12}a_{21}a_{33}}-\underline{a_{11}a_{23}a_{32}}$$

即实线上 2 个(3 个)元素的乘积取正号,虚线上 2 个(3 个)元素的乘积取负号,再求其代数和.

注 1. 计算 3 级以上的行列式时不能采用对角线法则.

2. (*)式的 n级行列式也简写为 $D=|a_{ij}|$.

3. 行列式的性质

性质 1 行与列互换,行列式的值不变.

性质 2 某行(列)的公因子可以提到行列式符号外.

性质 3 如果某行(列)的所有元素都可以写成两项的和,则该行列式可以写成两个行列式的和;这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个加数之一,其余各行(列)元素与原行列式相同.

性质 4 两行(列)对应元素相同,行列式的值为零.

性质 5 两行(列)对应元素成比例,行列式的值为零.

性质 6 某行(列)的倍数加到另一行(列),行列式的值不变.

性质 7 交换两行(列)的位置,行列式的值变号.

注 做题时为描述方便,引入下列记号:

1) $r_i\div k$(或 $c_i\div k$)表示第 i行(列)提出公因子 k;

2) $r_i + kr_j$(或 $c_i + kc_j$) 表示将第 j 行(列) 的 k 倍加到第 i 行(列);

3) $r_i \longleftrightarrow r_j$(或 $c_i \longleftrightarrow c_j$) 表示交换第 i 行(列) 与第 j 行(列) 的位置 .

4. 一些特殊行列式的值

(1) 上(下) 三角行列式等于其主对角线上元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

(2) 次三角行列式的值等于添加适当正、负号的次对角线元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \cdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

(3) 分块三角行列式可化为低级行列式的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ * & \cdots & * & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & * & \cdots & * \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & * & \cdots & * \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & * & \cdots & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & \cdots & * & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ * & \cdots & * & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{mn}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

(4) **奇数级反对称行列式的值为零,即**

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (n\text{ 为奇数})$$

(5) **范德蒙德**(Vandermonde) **行列式**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geq i>j\geq 1}(a_i - a_j) =$$

$$\begin{aligned}(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\cdot\\ (a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2)\cdot\\ \cdots\qquad\cdots\quad\cdot\\ (a_n-a_{n-1})\end{aligned}$$

即等于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ **这** n **个数的所有可能的差** $a_i - a_j(1\leq j < i\leq n)$ **的乘积**.

5. 矩阵及其初等变换

(1) **由** sn **个数排成的** s **行** n **列的表**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $s\times n$ **矩阵,简记为** $A=(a_{ij})_{s\times n}$.**数** a_{ij} **称为矩阵** A **的** i **行** j **列的元素,其中** i **称为行指标,** j **称为列指标.当** a_{ij} **均是数域** P **中的数时,称** A **为数域** P **上的矩阵.** $n\times n$ **矩阵也称为** n **级方阵,由** n **级方阵** $A=(a_{ij})_{n\times n}$ **定义的** n **级行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为矩阵 A 的行列式,记为 $|A|$.

注　当 $n>1$ 时,从外表看 n 级方阵与 n 级行列式在符号上有些类似,但两者是截然不同的概念.n 级方阵 A 是由 n^2 个数按一定顺序构成的数表,而 n 级行列式 $|A|$ 是由 n^2 个数按一定规则进行运算而得到的数.

(2) 对数域 P 上的矩阵进行的如下三种变换:

1) 以 P 中一个非零的数乘矩阵的某一行(列);

2) 把矩阵的某一行(列) 的 k 倍加到另一行(列),这里 $k\in P$;

3) 互换矩阵中两行(列) 的位置,

称为矩阵的初等行(列) 变换.初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换.当矩阵 A 经过初等变换变成矩阵 B 时,记为 $A\to B$.

注　一般说来,一个矩阵经过初等变换后就变成了另一个矩阵,这两个矩阵之间不能写等号" = "(矩阵相等的概念见第四章),只能写" → "号.

(3) 任意一个矩阵总可以经过一系列初等行变换化为阶梯形矩阵,该矩阵的任一行从第一个元素起至该行的第一个非零元素所在的下方全为零;如该行全为零,则它的下面的行也全为零.特别地,每个方阵 A 总可以经过一系列的初等行变换变成阶梯形方阵 J,此时 J 是一个上三角形的矩阵.

注　1. 当方阵 A 经过初等行变换化成阶梯形方阵 J 时,由行列式性质知

$$|A| = k|J| \qquad (k\neq 0)$$

而上三角行列式 $|J|$ 是容易计算的.这是计算数字行列式的主要方法之一.

2. 对矩阵进行一系列的初等列变换可以将其化为"列阶梯形矩阵".如果同时用初等行变换和初等列变换,可以将矩阵化为更简单的形式(见第四章).

6. 行列式按一行(列) 展开

(1) 在 n 级行列式中,将元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列的元素划去后剩下的元素按照原位置次序构成的 $n-1$ 级行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij},即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

注　元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式与 a_{ij} 的大小无关,只与该元素的位置有关.

(2) 行列式的值等于它的某一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

(3) n级行列式中某一行(列)的每个元素与另一行(列)相应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j)$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\quad(i\neq j)$$

7. 克拉默(Cramer)法则

(1) 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式

$$D=|A|\neq 0$$

则方程组有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad\cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中 D_j 是把矩阵 A 中第 j 列换成方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所成的矩阵的行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

(2) 含 n 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组如果有非零解,则其系数矩阵的行列式必等于零(由第三章知,反之也成立).

8. 拉普拉斯(Laplace)定理和行列式的乘法规则

(1) 位于 n 级行列式 D 的第 $i_1,\cdots,i_k$ 行及第 $j_1,\cdots,j_k$ 列 $(1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n;\ 1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n)$ 交叉位置上的 k^2 个元素按照原来相对位置所构成的 k 级行列式 M,称为行列式 D 的一个 k 级子式. 在 D 中划去这 k 行 k 列后余下的元素按照原来相对位置所构成的 $n-k$ 级行列式 M' 称为 k 级子式 M 的余子式,又称 $(-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)}M'$ 为 M 的代数余子式.

(2) **拉普拉斯定理**　任意取定 n 级行列式 D 的某 k 行(列) $(1\leq k<n)$,由这 k 行(列)元素所组成的一切 k 级子式(共有 C_n^k 个)与它们的代数余子式的乘积的和等于行列式 D.

(3) **行列式乘法规则**　设有两个 n 级行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}$$

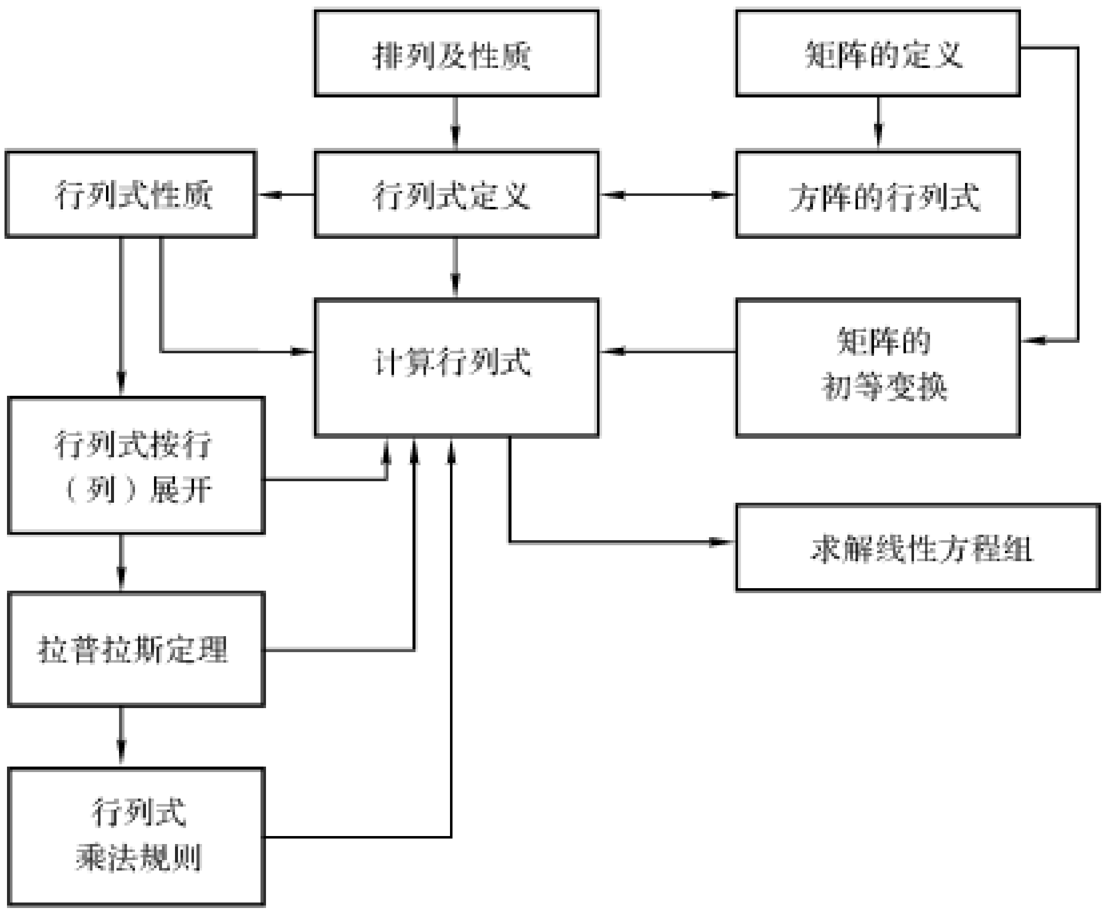
则

$$D_1\cdot D_2=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{vmatrix}$$

其中 c_{ij} 是 D_1 中的第 i 行元素分别与 D_2 中的第 j 列的对应元素乘积之和,即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

二、知识网络图



三、重点、难点解读

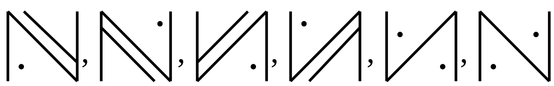
会应用行列式的性质和按行(列)展开定理计算行列式是本章的重点. 要求熟练正确地计算低级行列式,也要会计算一些特殊形式的 n级行列式.

掌握行列式的计算方法和技巧是本章的难点. 除了利用行列式的性质化为三角行列式和按行(列)展开公式使行列式降级这些常用的手法外,要根据行列式不同的特点采用特殊的方法,如递推法、数学归纳法、加边法(升级法),以及利用范德蒙德行列式的结论,等等.

四、典型例题解析

例 2.1　计算 n 级行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$

分析　对于形如  的所谓二条线的行列式,可直接展开降级,再利用三角或次三角行列式的结果直接计算.

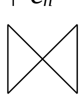
解　$D_n \xlongequal{\text{按 1 列展开}} a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & a_n \end{vmatrix}+$

$$b_n(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} b_1 & & & \\ a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}=$$

$$a_1a_2\cdots a_n+(-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n$$

例 2.2　计算 $2n$ 级行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & & & b_n \\ & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a_1 & b_1 & & & \\ & & & c_1 & d_1 & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} & \\ c_n & & & & & & & d_n \end{vmatrix}$$

分析　这是形如  的所谓两条线行列式,可直接展开得到递推公式.

解　法 1

$$D_{2n} \xlongequal{\text{按 1 行展开}} a_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a_1 & b_1 & & & \\ & & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} & \\ 0 & & & & & & d_n \end{vmatrix} +$$

$$b_n(-1)^{1+2n} \begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & c_1 & d_1 & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \\ c_n & & & & & & 0 \end{vmatrix} =$$

$$a_n d_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{vmatrix} -$$

$$b_n c_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{vmatrix} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)}$$

于是

$$\begin{aligned} D_{2n} &= (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)} = \\ &(a_n d_n - b_n c_n)(a_{n-1} d_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1}) D_{2(n-2)} = \cdots = \\ &(a_n d_n - b_n c_n)(a_{n-1} d_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1}) \cdots (a_1 d_1 - b_1 c_1) \end{aligned}$$

法 2　利用拉普拉斯定理计算 .

$$D_{2n} \xlongequal{\text{按 } 1, 2n \text{ 行展开}} \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} (-1)^{1+2n+1+2n} \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$(a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)}$$

例 2 .3　计算 n 级行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 1 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

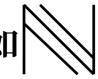
分析　对于形如 $\begin{vmatrix} \nwarrow \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \nearrow \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \swarrow \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \searrow \end{vmatrix}$ **的所谓箭形(或爪形) 行列式, 可直接利用行列式性质将其一条边化为零, 从而可根据三角或次三角行列式的结果求值 .**

解

$$D_n \xlongequal[\substack{\cdots \\ c_n - \frac{1}{n} c_1}]{c_n - \frac{1}{2} c_{n-1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 - \frac{1}{2} \cdots - \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n! \left(1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}\right)$$

例 2 .4　计算 n 级行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

分析　对于形如,的三对角或次三对角行列式,按其第1行(列)或第 n 行(列)展开得到两项的递推关系式,再利用变形递推的技巧求解.

解　$D_n \xlongequal{1\text{行展开}} 2D_{n-1} +$

$$(-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$2D_{n-1} - D_{n-2}$$

直接递推不易得到结果(较低级时可以),变形得

$$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = D_{n-2} - D_{n-3} = \cdots = D_2 - D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 = 1$$

于是

$$D_n = D_{n-1} + 1 = D_{n-2} + 2 = \cdots = D_1 + (n-1) = 2 + (n-1) = n+1$$

例2.5　计算 n 级行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

分析　该行列式具有各行(列)元素之和相等的特点.可将第2,3,…,n列(行)都加到第1列(行)(或第1,2,…,$n-1$列(行)加到第 n 列(行)),则第1(或 n)列(行)的元素相等,再进一步化简即可化为三角或次三角行列式.

解　$D_n \xlongequal[\substack{\cdots \\ c_1 + c_n}]{\substack{c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3}} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\cdots \\ r_n - r_1}]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1}}$

$$\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ & x-a & & \\ & & \ddots & \\ & & & x-a \end{vmatrix} =$$

$$[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

例 2.6　计算 n 级行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b & a_2 & b & \cdots & b \\ b & b & a_3 & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix}\qquad (b\neq a_i,\ i=1,2,\cdots,n)$$

分析　该行列式的各行(列)含有共同的元素 $b, b, \cdots, b$,可在保持原行列式值不变的情况下,增加一行一列(称为升级法或加边法),适当选择所增加行(或列)的元素,使得下一步化简后出现大量的零元素(一般变成箭形行列式).

解　$D_n \xlongequal{\text{升级}} \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_1 & b & \cdots & b \\ 0 & b & a_2 & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\cdots \\ r_{n+1}-r_1}]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}}$

$$\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ -1 & a_1-b & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\cdots \\ c_1+\frac{1}{a_n-b}c_{n+1}}]{\substack{c_1+\frac{1}{a_1-b}c_2 \\ c_1+\frac{1}{a_2-b}c_3}}$$

$$\begin{vmatrix} 1+\dfrac{b}{a_1-b}+\cdots+\dfrac{b}{a_n-b} & b & b & \cdots & b \\ & a_1-b & & & \\ & & a_2-b & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n-b \end{vmatrix}=$$

$$\left[1+b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i-b}\right](a_1-b)(a_2-b)\cdots(a_n-b)$$

例 2.7　计算 4 级行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.

分析 D不是范德蒙德行列式,但具有该行列式的特点,可考虑构造5级的范德蒙德行列式,再利用范德蒙德行列式的结果,间接地求出D的值.

解 构造5级范德蒙德行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\a&b&c&d&x\\a^2&b^2&c^2&d^2&x^2\\a^3&b^3&c^3&d^3&x^3\\a^4&b^4&c^4&d^4&x^4\end{vmatrix}$$

则 $$D\xlongequal{\text{按 5 列展开}}A_{15}+xA_{25}+x^2A_{35}+x^3A_{45}+x^4A_{55}$$

其中x^3的系数为

$$A_{45}=(-1)^{4+5}D=-D$$

又利用范德蒙德行列式的结果得

$$\begin{aligned}D=&(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)(c-b)(d-b)\times\\&(x-b)(d-c)(x-c)(x-d)=\\&(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)\times\\&[x^4-(a+b+c+d)x^3+\cdots]\end{aligned}$$

其中x^3的系数为

$$-(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$$

故

$$D=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$$

例2.8 已知 $D=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\a_2&a_2&a_4&a_5\\a_3&a_2&a_5&a_6\\a_4&a_2&a_6&a_7\end{vmatrix}$,计算$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$.

分析 直接求第3列元素的代数余子式$A_{i3}(i=1,2,3,4)$后再求和,要计算4个3级行列式,工作量较大.对于行列式的代数余子式的有关计算,通常要利用重要公式

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D_n, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$$

或 $$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D_n, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$$

解　法 1　注意到行列式 D 的第 2 列元素相同，则有

$$0 = a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{32}A_{33} + a_{42}A_{43} = a_2(A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43})$$

当 $a_2 \neq 0$ 时，$A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43} = 0$；

当 $a_2 = 0$ 时，$D = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_3 & a_4 \\ a_2 & 0 & a_4 & a_5 \\ a_3 & 0 & a_5 & a_6 \\ a_4 & 0 & a_6 & a_7 \end{vmatrix}$，显然，$A_{13} = A_{23} = A_{33} = A_{43} = 0$，于是 $A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43} = 0$.

法 2　将 $A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43}$ 改写成 $1 \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{23} + 1 \cdot A_{33} + 1 \cdot A_{43}$，理解成将行列式 D 的第 3 列元素全换成 1 后按第 3 列展开而得到的，于是

$$A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 & a_4 \\ a_2 & a_2 & 1 & a_5 \\ a_3 & a_2 & 1 & a_6 \\ a_4 & a_2 & 1 & a_7 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{两列成比例})$$

例 2.9　求方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$ 的根.

解　法 1　将左边行列式按第 4 行展开，就得一个 x 的三次多项式(如果能估计出多项式的次数，不必具体写出其展开式). 当取 $x = 1$，或 $x = 2$，或 $x = -2$ 时，总有两行相同，从而行列式为 0. 由于一元三次方程在复数域上总有 3 个根，从而 $1, 2, -2$ 是该方程的所有的根.

法 2　注意到左边的行列式是范德蒙德行列式的转置，其中

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = x$$

从而行列式的值为

$$\begin{aligned} D = &(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) = \\ &(2-1)(-2-1)(x-1)(-2-2)(x-2)(x+2) = \\ &12(x-1)(x-2)(x+2) \end{aligned}$$

从而得到方程的根为 $1, 2, -2$.

例 2.10　计算 n 级行列式 $D_n = |a_{ij}|$，其 $a_{ij} = |i - j|$.

分析　如果具体写出 D_n，可以发现该行列式具有相邻行元素差 1 的特点. 对这类行列式可采用前行(列)减去后行(列)(或后行(列)减去前行(列))的方

法处理,即可得到大量元素为 1 或 - 1 的行列式.

解 写出行列式得

$$D_n=\begin{vmatrix}0&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&0&1&\cdots&n-3&n-2\\2&1&0&\cdots&n-4&n-3\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots\\n-2&n-3&n-4&\cdots&0&1\\n-1&n-2&n-3&\cdots&1&0\end{vmatrix}\xrightarrow[i=1,2,\cdots,n-1]{r_i-r_{i+1}}$$

$$\begin{vmatrix}-1&1&1&\cdots&1&1\\-1&-1&1&\cdots&1&1\\-1&-1&-1&\cdots&1&1\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots\\-1&-1&-1&\cdots&-1&1\\n-1&n-2&n-3&\cdots&1&0\end{vmatrix}\xrightarrow[j=2,3,\cdots,n]{c_j+c_1}$$

$$\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0&0\\-1&-2&0&\cdots&0&0\\-1&-2&-2&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots\\-1&-2&-2&\cdots&-2&0\\n-1&2n-3&2n-4&\cdots&n&n-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1)$$

例 2.11 计算 4 级行列式 $D_4=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\-b&a&-d&c\\-c&d&a&-b\\-d&-c&b&a\end{vmatrix}$.

分析 直接计算较困难.所给行列式易于利用行列式乘法公式求得 $D_4^2=D_4D_4'$,再确定 D_4 的符号即可求出 D_4.

解 根据行列式乘法公式得

$$D_4^2=D_4D_4'=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\-b&a&-d&c\\-c&d&a&-b\\-d&-c&b&a\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a&-b&-c&-d\\b&a&d&-c\\c&-d&a&b\\d&c&-b&a\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix} =$$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

所以
$$D_4 = \pm (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

根据行列式定义可知,D_4 的展开式中有一项为
$$(-1)^{\tau(1234)} a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} = a^4$$

故得
$$D_4 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

五、课后习题全解

(一) 第二章习题

1. 决定以下 9 级排列的逆序数,从而决定它们的奇偶性 .

1) 1 3 4 7 8 2 6 9 5;

2) 2 1 7 9 8 6 3 5 4;

3) 9 8 7 6 5 4 3 2 1 .

解　1) 所给排列中,1 后面有 0 个比它小的数,3 后面有 1 个比它小的数,对于 4,7,8,2,6,9 和 5,分别统计后面比它小的数的个数,依次为 1,3,3,0,1,1,因此,逆序数

$$\tau(1\ 3\ 4\ 7\ 8\ 2\ 6\ 9\ 5) = 0+1+1+3+3+0+1+1 = 10$$

故 1 3 4 7 8 2 6 9 5 为偶排列 .

2) $\tau(2\ 1\ 7\ 9\ 8\ 6\ 3\ 5\ 4) = 1+0+4+5+4+3+0+1 = 18$,此排列为偶排列 .

3) $\tau(9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1) = 8+7+6+5+4+3+2+1 = \dfrac{8\times 9}{2} = 36$,此排列为偶排列 .

2. 选择 i 与 k 使

1) 1 2 7 4 i 5 6 k 6 成偶排列;

2) 1 i 2 5 k 4 8 9 7 成奇排列 .

解 1) 在排列 1 2 7 4 i 5 6 k 9 中缺数码 3,8,先取 $i=3,k=8$,得排列 1 2 7 4 3 5 6 8 9,其逆序数

$$\tau(1\ 2\ 7\ 4\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9)=0+0+4+1+0+0+0+0=5$$

此排列为奇排列.

由于对换改变排列的奇偶性,对以上排列 1 2 7 4 3 5 6 8 9 实施对换(3,8),即取 $i=8,k=3$,得偶排列 1 2 7 4 8 5 6 3 9.

2) 取 $i=3,k=6$,得排列 1 3 2 5 6 4 8 9 7,$\tau(1\ 3\ 2\ 5\ 6\ 4\ 8\ 9)=5$,故此排列为奇排列.

3. 写出排列 1 2 4 3 5 变成排列 2 5 3 4 1 的那些对换.

解 这种对换过程不惟一,如:

$$1\ 2\ 4\ 3\ 5 \xrightarrow{(1,\ 2)} 2\ 1\ 4\ 3\ 5 \xrightarrow{(1,\ 5)} 2\ 5\ 4\ 3\ 1 \xrightarrow{(4,\ 3)} 2\ 5\ 3\ 4\ 1$$

4. 决定排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数,并讨论它的奇偶性.

解 逆序数

$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

当 $n=4k,\ 4k+1$ 时,排列为偶排列;

当 $n=4k+2,\ 4k+3$ 时,排列为奇排列.

5. 如果排列 $x_1\ x_2\ \cdots\ x_{n-1}\ x_n$ 的逆序数为 k,排列 $x_n\ x_{n-1}\ \cdots\ x_2\ x_1$ 的逆序数是多少?

解 因为比 x_i 大的数有 $n-x_i$ 个,所以在两个排列中,由 x_i 与比它大的各数构成的逆序数的和为 $n-x_i$,于是,在两个排列中,由各 x_i 构成的逆序总数为

$$\sum_{x_i=1}^{n-1}(n-x_i)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

而排列 $x_1\ x_2\ \cdots\ x_{n-1}\ x_n$ 的逆序数为 k,故排列 $x_n\ x_{n-1}\ \cdots\ x_2\ x_1$ 的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}-k$.

6. 在 6 级行列式中,$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$;$a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 这两项应带有什么符号?

解 将所给两项分别改写成

$$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65} \quad \text{及} \quad a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}$$

其列标构成的排列分别为 4 3 1 2 6 5 及 4 5 2 3 1 6.逆序数分别为 6 与 8,均为偶排列,故所给两项在 6 级行列式的展开式中均带正号.

7. 写出 4 级行列式中所有带负号并且包含因子 a_{23} 的项 .

解　设所求项为 $-a_{1i}a_{23}a_{3j}a_{4k}$,则列标构成的排列 $i\,3\,j\,k$ 为奇排列,且 i, j, k 在 1,2,4 中取值 . 取 $i=1$, $j=2$, $k=4$ 时,排列 1 3 2 4 有一个逆序,是奇排列 . 由于"对换改变排列的奇偶性",可得排列 4 3 2 1 及 2 3 4 1 (3 在第二个位置) 也是奇数列 . 故所求项为

$$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44};\quad -a_{12}a_{23}a_{34}a_{41};\quad -a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

8. 按定义计算行列式:

1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$;　2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

解　1) 此行列式只含一个非零项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$,其列标构成的排列的逆序数为$\dfrac{n(n-1)}{2}$,故原行列式 $D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$.

2) 此行列式只含一个非零项 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$,所求行列式

$$D=(-1)^{\tau(2\ 3\ \cdots\ n\ 1)}n!=(-1)^{n-1}n!$$

3)　$D=(-1)^{\tau(n-1,\ n-2,\ \cdots,\ 1,\ n)}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$

9. 由行列式定义证明: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$.

解　此行列式的一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$,列标 j_3, j_4, j_5 取 1,2,3,4,5 中不同值,故 j_3, j_4, j_5 中至少有一个取 3,4,5 中某数,从而任一项至少包含一个零因子,故任一项必为零,即原行列式的值为零 .

10. 由行列式定义计算 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4 与 x^3 的系数,并说明理由.

解　x^4 的项只能由 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 组成,为 $2x^4$,故 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 2.类似地,x^3 的项只能由 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 组成,为

$$(-1)^{\tau(2134)}x\cdot 1\cdot x\cdot x=-x^3$$

故 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 -1.

11. 由 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=0$,证明:奇偶排列各半.

证　由题设知,行列式展开式中任一项 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的绝对值都等于 1,而行列式等于零,说明带正号及带负号的项数相同,项的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=\begin{cases} 1, & \text{当 } j_1j_2\cdots j_n \text{ 为偶排列时} \\ -1, & \text{当 } j_1j_2\cdots j_n \text{ 为奇排列时} \end{cases}$$

因此,奇偶排列各半.

12. 设 $P(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 是互不相同的数.

1) 由行列式定义,说明 $P(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式;

2) 由行列式性质,求 $P(x)$ 的根.

证　1) 将 $P(x)$ 按第一行展开知它是 x 的多项式,又 x^{n-1} 的系数为 $(-1)^{n+1}$ 乘以一个范德蒙德行列式,其值不为零(因 a_i 互异),故 $P(x)$ 为关于 x 的 $n-1$ 次多项式.

2) 取 $x=a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$,则行列式两行相同,其值为零,即有 $P(a_i)=0$,故 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 是 $P(x)$ 的全部根.

13. 计算下面的行列式:

1) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

解

1) $D \xRightarrow[c_1+c_3]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 1000 & 427 & 327 \\ 2000 & 543 & 443 \\ 1000 & 721 & 621 \end{vmatrix} \xRightarrow[\substack{c_1 \div 10^3 \\ c_2 \div 10^2}]{c_2-c_3} 10^3 \cdot 10^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 327 \\ 2 & 1 & 443 \\ 1 & 1 & 621 \end{vmatrix} \xRightarrow{c_1-c_2}$

$$10^5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 327 \\ 1 & 1 & 443 \\ 0 & 1 & 621 \end{vmatrix} = -10^5 \begin{vmatrix} 1 & 327 \\ 1 & 621 \end{vmatrix} = -294 \times 10^5$$

2) $D \xRightarrow[c_1+c_3]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 2(x+y) & y & x+y \\ 2(x+y) & x+y & y \\ 2(x+y) & x & y \end{vmatrix} \xRightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}$

$$\begin{vmatrix} 2(x+y) & y & x+y \\ 0 & x & -y \\ 0 & x-y & -x \end{vmatrix} = 2(x+y) \begin{vmatrix} x & -y \\ x-y & -x \end{vmatrix} =$$

$$-2(x^3+y^3)$$

3) $D \xRightarrow[\substack{c_1+c_3 \\ c_1+c_4}]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xRightarrow[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \times 2^3 = 48$

4) $D \xRightarrow[\substack{c_1+c_3\\ c_1+c_4}]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xRightarrow[\substack{r_3-r_1\\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$

$$10\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xRightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 160$$

5) $D \xRightarrow[r_3-r_4]{r_1-r_2} \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \xRightarrow[c_4-c_3]{c_2-c_1}$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -y \end{vmatrix} \xRightarrow{\text{4 列展开}} -y\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 0 & y \end{vmatrix} = x^2y^2$$

6) $D \xRightarrow[\substack{c_3-c_2\\ c_2-c_1}]{c_4-c_3} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix} \xRightarrow[c_3-c_2]{c_4-c_3}$

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

14. **证明** $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

证 左边 $\xRightarrow[\substack{c_1+c_3\\ c_1\div 2}]{c_1+c_2} 2\begin{vmatrix} a+b+c & c+a & a+b \\ a_1+b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ a_2+b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \xRightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1}$

$$2\begin{vmatrix} a+b+c & -b & -c \\ a_1+b_1+c_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2+b_2+c_2 & -b_2 & -c_2 \end{vmatrix} \xRightarrow[c_1+c_3]{c_1+c_2}$$

$$2\begin{vmatrix} a & -b & -c \\ a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & -b_2 & -c_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \text{右边}$$

15. **算出下列行列式的全部代数余子式**:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;　　2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

解

1) $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$, $A_{12} = 0$, $A_{13} = 0$, $A_{14} = 0$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -12$, $A_{22} = 6$, $A_{23} = 0$, $A_{24} = 0$

$A_{31} = 15$, $A_{32} = -6$, $A_{33} = -3$, $A_{34} = 0$

$A_{41} = 7$, $A_{42} = 0$, $A_{43} = 1$, $A_{44} = 2$

2) $A_{11} = 7$, $A_{12} = -12$, $A_{13} = 3$

$A_{21} = 6$, $A_{22} = 4$, $A_{23} = -1$

$A_{31} = -5$, $A_{32} = 5$, $A_{33} = 5$

16. **计算下面的行列式**:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;　　2) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$;　　4) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$.

解

1) $$D\xRightarrow{c_2-c_3}\begin{vmatrix}1&0&1&1\\2&0&1&-3\\1&0&2&5\\4&1&2&1\end{vmatrix}\xRightarrow{2\text{列展开}}$$

$$(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&-3\\1&2&5\end{vmatrix}\xRightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1}\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-1&-5\\1&1&4\end{vmatrix}=1$$

2) $$D\xRightarrow[c_4\div\frac{1}{2}]{c_1\div\frac{1}{3}\quad c_2\div\frac{1}{2}}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix}3&1&1&2\\-1&2&2&2\\1&2&-1&1\\-3&2&0&1\end{vmatrix}\xRightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}$$

$$\frac{1}{12}\begin{vmatrix}3&1&1&2\\-7&0&0&-2\\4&3&0&3\\-3&2&0&1\end{vmatrix}\xRightarrow{3\text{列展开}}$$

$$\frac{1}{12}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-7&0&-2\\4&3&3\\-3&2&1\end{vmatrix}\xRightarrow[r_2-3r_3]{r_1+2r_3}\frac{1}{12}\begin{vmatrix}-13&4&0\\13&-3&0\\-3&2&1\end{vmatrix}=-\frac{13}{12}$$

3) $$D\xRightarrow[c_4+c_2\quad c_4-4c_2]{c_3-2c_2}\begin{vmatrix}0&1&0&0&0\\2&0&1&2&1\\-1&3&-1&4&-10\\3&3&-5&5&-11\\2&1&-2&4&1\end{vmatrix}\xRightarrow{1\text{行展开}}$$

$$(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&1&2&1\\-1&-1&4&-10\\3&-5&5&-11\\2&-2&4&1\end{vmatrix}\xRightarrow[r_3+5r_1\quad r_4+2r_1]{r_2+r_1}$$

$$-\begin{vmatrix}2&1&2&1\\1&0&6&-9\\13&0&15&-6\\6&0&8&3\end{vmatrix}\xRightarrow{2\text{列展开}}-(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&6&-9\\13&15&-6\\6&8&3\end{vmatrix}\xRightarrow[r_2+2r_3]{r_1+3r_3}$$

$$\begin{vmatrix} 19 & 30 & 0 \\ 25 & 31 & 0 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 19 & 30 \\ 25 & 31 \end{vmatrix} = -483$$

4) $$D \xrightarrow[\substack{r_3 \div \frac{1}{2} \\ r_5 \div \frac{1}{2}}]{r_1 \div \frac{1}{2}} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_5+6r_2]{r_3+2r_2}$$

$$\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 10 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 16 & 2 & 0 & 6 & 13 \end{vmatrix} \xrightarrow{3\text{ 列展开}}$$

$$\frac{(-1)^{2+3}}{8}\cdot(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ 10 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 16 & 2 & 6 & 13 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3 - c_1 \\ c_4 - 2c_1}]{c_2 + c_1}$$

$$\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -6 \\ 10 & 14 & -7 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 18 & -10 & -19 \end{vmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行展开}}$$

$$\frac{1}{8}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 14 & -7 & -16 \\ 18 & -10 & -19 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+2c_1} \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 14 & -7 & 12 \\ 18 & -10 & 17 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{3}{8}$$

17. **计算下列 n 级行列式**:

1) $$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix};$$

2) $$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix};$$

3) $\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$.

解

1) $$D \xlongequal{1\text{列展开}} x\begin{vmatrix} x & y & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & y \\ & & & x \end{vmatrix} + y(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y & & & \\ x & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & y \end{vmatrix} =$$

$$x^n + (-1)^{n+1}y^n$$

2) 当 $n=1$ 时, $D=a_1-b_1$. 当 $n=2$ 时,

$$D=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 \end{vmatrix} = (a_1-a_2)(b_1-b_2)$$

以下讨论 $n\geq 3$ **情形**.

法 1 $$D \xlongequal{拆1列} \begin{vmatrix} a_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} -b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ -b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix} \xlongequal[②c_1\div(-b_1)]{\substack{①c_2-c_1\\ \cdots \\ c_n-c_1}}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & -b_2 & \cdots & -b_n \\ a_2 & -b_2 & \cdots & -b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n & -b_2 & \cdots & -b_n \end{vmatrix} +$$

$$(-b_1)\begin{vmatrix} 1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ 1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix} \xRightarrow[\substack{\cdots \\ c_n+b_nc_1}]{\substack{c_2+b_2c_1 \\ c_3+b_3c_1}}$$

$$0-b_1\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}=0$$

法 2　$D \xRightarrow{\text{升级}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix} \xRightarrow[\substack{\cdots \\ r_{n+1}-a_nr_1}]{\substack{r_2-a_1r_1 \\ r_3-a_2r_1}}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_n \end{vmatrix}=0$$

法 3　**利用行列式乘法规则,有**

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=0$$

法 4　$D \xRightarrow[\substack{\cdots \\ c_n-c_1}]{\substack{c_2-c_1 \\ c_3-c_1}} \begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-b_2 & \cdots & b_1-b_n \\ a_2-b_2 & b_1-b_2 & \cdots & b_1-b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n-b_n & b_1-b_2 & \cdots & b_1-b_n \end{vmatrix} \xRightarrow[\substack{\cdots \\ c_n\div(b_1-b_n)}]{c_2\div(b_1-b_2)}$

$$(b_1-b_2)\cdots(b_1-b_n)\begin{vmatrix} a_1-b_1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2-b_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n-b_n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=0$$

3) $D \xlongequal[\substack{\cdots \\ c_1 + c_n}]{\substack{c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3}} \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 & \cdots & x_n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix} \xlongequal[c_1 \div \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m \right)]{\substack{r_2 - r_1 \\ \cdots \\ r_n - r_1}}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m \right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} m^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m \right)$$

4) $D \xlongequal[\substack{\cdots \\ r_n - r_2}]{\substack{r_1 - r_2 \\ r_3 - r_2}} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} \xlongequal{1\text{ 行展开}}$

$$(-1) \begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n-2 \end{vmatrix} = (-2)(n-2)! \qquad (n \geq 2)$$

5) $D \xlongequal[\substack{\cdots \\ c_1 + c_n}]{\substack{c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3}} \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix} \xlongequal{1\text{ 列展开}}$

$$\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & & & \\ 2 & -2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & n-1 & 1-n \end{vmatrix} =$$

$$\frac{n(n+1)}{2} (-1)^{n-1} (n-1)! = \frac{(-1)^{n-1}}{2} (n+1)!$$

18. **证明**:

1)
$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right);$$

2)
$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix} = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0;$$

3)
$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta};$$

4)
$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha;$$

5)
$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right).$$

解 1)

$$D \xrightarrow[c_1-\frac{1}{a_n}c_{n+1}]{c_1-\frac{1}{a_1}c_2,\ \cdots} \begin{vmatrix} a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & & \\ 0 & & & \\ \cdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

2) $$D \xrightarrow[r_n+\frac{1}{x}r_{n-1}]{r_2+\frac{1}{x}r_1,\ \cdots} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1+\frac{a_0}{x} \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & a_2+\frac{a_1}{x}+\frac{a_0}{x^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^{n-2}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x+a_{n-1}+\frac{a_{n-2}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^{n-1}} \end{vmatrix} =$$

$$x^{n-1}\left(x+a_{n-1}+\frac{a_{n-2}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^{n-1}}\right) =$$

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

3) $D_1=\alpha+\beta=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}$; $D_2=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta=\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$. **当** $n\geq 3$ **时**

法1 $$D_n \xrightarrow{\text{1 列展开}} (\alpha+\beta)D_{n-1}-\begin{vmatrix} \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} =$$

$$(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$$

于是

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2})=\alpha^2(D_{n-2}-\beta D_{n-3})=\cdots=$$
$$\alpha^{n-2}(D_2-\beta D_1)=\alpha^n$$

故

$$D_n=\alpha^n+\beta D_{n-1}=\alpha^n+\beta(\alpha^{n-1}+\beta D_{n-2})=\cdots=$$
$$\alpha^n+\beta\alpha^{n-1}+\cdots+\beta^{n-2}D_2=\alpha^n+\beta\alpha^{n-1}+\cdots+\beta^{n-1}\alpha+\beta^n=$$
$$\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$

法 2
$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^n$$

同理
$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n$$

因此
$$D_n = \frac{\begin{vmatrix} \alpha^n & -\beta \\ \beta^n & -\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix}} = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$$

4) **第二数学归纳法**. $n = 2$ **时**,
$$D_2 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 \\ 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$$

结论成立. 假设对级数小于 n **的行列式,结论成立,则**
$$D_n \xlongequal{n\text{ 行展}} 2\cos\alpha D_{n-1} - D_{n-2}$$

由假设
$$D_{n-2} = \cos(n-2)\alpha = \cos[(n-1)\alpha - \alpha] =$$
$$\cos(n-1)\alpha\cos\alpha + \sin(n-1)\alpha\sin\alpha$$

代入前一式得
$$D_n = 2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha - [\cos(n-1)\alpha\cos\alpha + \sin(n-1)\alpha\sin\alpha] =$$
$$\cos(n-1)\alpha\cos\alpha - \sin(n-1)\alpha\sin\alpha = \cos n\alpha$$

故对一切自然数 n,**结论成立**.

5) **法 1**
$$D_n \xlongequal{\text{升级}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[r_{n+1} - r_1]{r_2 - r_1 \atop \cdots}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & & & \\ -1 & & a_2 & & \\ \cdots & & & \ddots & \\ -1 & & & & a_n \end{vmatrix} \xlongequal[c_1 + \frac{1}{a_n}c_{n+1}]{c_1 + \frac{1}{a_1}c_2 \atop \cdots}$$

$$\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & & & \\ 0 & & a_2 & & \\ \cdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

法 2 采用数学归纳法. 易验算 $n=2$ 时结论成立. 假设对 $n-1$ 结论成立, 则

$$D_n \xRightarrow{\text{拆 } n \text{ 列}} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xRightarrow[\text{②}n\text{ 列展开}]{\substack{\text{①}\ c_1-c_n \\ \cdots \\ c_{n-1}-c_n}}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_nD_{n-1} = a_1a_2\cdots a_{n-1} + a_nD_{n-1}$$

由归纳假设, $D_{n-1} = a_1a_2\cdots a_{n-1}\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}\right)$, 从而

$$D_n = a_1a_2\cdots a_{n-1} + a_n\left[a_1a_2\cdots a_{n-1}\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}\right)\right] =$$

$$a_1a_2\cdots a_n\left[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right]$$

19. 用克拉默法则解下列线性方程组:

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 - x_5 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -3 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_4 + 5x_5 = 1 \end{cases}$.

解　1) **方程组的系数行列式** D **以及** D_1, D_2, D_3, D_4 **为**

$$D=\begin{vmatrix}2&-1&3&2\\3&-3&3&2\\3&-1&-1&2\\3&-1&3&-1\end{vmatrix}=-70\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}6&-1&3&2\\5&-3&3&2\\3&-1&-1&2\\4&-1&3&-1\end{vmatrix}=-70,\quad D_2=\begin{vmatrix}2&6&3&2\\3&5&3&2\\3&3&-1&2\\3&4&3&-1\end{vmatrix}=-70$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&-1&6&2\\3&-3&5&2\\3&-1&3&2\\3&-1&4&-1\end{vmatrix}=-70,\quad D_4=\begin{vmatrix}2&-1&3&6\\2&-3&3&5\\3&-1&-1&3\\3&-1&3&4\end{vmatrix}=-70$$

故原方程组有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=1,\quad x_4=\frac{D_4}{D}=1$$

2) $D=324$, $D_1=324$, $D_2=648$, $D_3=-324$, $D_4=-648$,**故方程组的惟一解为**

$$x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=-1,\quad x_4=-2$$

3) $D=24$, $D_1=96$, $D_2=-336$, $D_3=-96$, $D_4=168$, $D_5=312$,**故方程组的惟一解为**

$$x_1=4,\quad x_2=-14,\quad x_3=-4,\quad x_4=7,\quad x_5=13$$

4) $D=665$, $D_1=1507$, $D_2=-1145$, $D_3=703$, $D_4=-395$, $D_5=212$,**故方程组的惟一解为**

$$x_1=\frac{1507}{665},\quad x_2=-\frac{229}{133},\quad x_3=\frac{37}{35},\quad x_4=-\frac{79}{133},\quad x_5=\frac{212}{665}$$

20. **设** $a_1, a_2, \cdots, a_n$ **是数域** P **中互不相同的数**, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ **是数域** P **中任一组给定的数,用克拉默法则证明:存在惟一的数域** P **上的多项式** $f(x)=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}$ **使**

$$f(a_i)=b_i\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

证 由 $f(a_i)=b_i$, $i=1,2,\cdots,n$,得

$$\begin{cases} c_0a_1^{n-1}+c_1a_1^{n-2}+\cdots+c_{n-1}=b_1 \\ c_0a_2^{n-1}+c_1a_2^{n-2}+\cdots+c_{n-1}=b_2 \\ \qquad\cdots\cdots \\ c_0a_n^{n-1}+c_1a_n^{n-2}+\cdots+c_{n-1}=b_n \end{cases}$$

将其视为 $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ 的线性方程组,系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \cdots & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

可经过有限次行(列)对换化为范德蒙德行列式.由题设条件,$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互不相同,故 $D\neq 0$,线性方程组有惟一解 $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$,故所求多项式惟一.

21. 设水银密度 h 与温度 t 的关系为

$$h=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$$

由实验测定得以下数据:

t	0℃	10℃	20℃	30℃
h	13.60	13.57	13.55	13.52

求 $t=15$℃, 40℃ 时水银密度(准确到小数两位).

解 将 t, h 的测量数据分别代入所给关系式,得

$$\begin{cases} a_0=13.60 \\ a_0+10a_1+100a_2+1000a_3=13.57 \\ a_0+20a_1+400a_2+8000a_3=13.55 \\ a_0+30a_1+900a_2+27000a_3=13.52 \end{cases}$$

整理得关于 a_1, a_2, a_3 的线性方程组

$$\begin{cases} a_1+10a_2+100a_3=-0.003 \\ 2a_1+40a_2+800a_3=-0.005 \\ 3a_1+90a_2+2700a_3=-0.008 \end{cases}$$

系数行列式 $D=12000$,又 $D_1=-50$, $D_2=1.8$, $D_3=-0.04$.根据克拉默法则得

$$a_1=-0.0042,\quad a_2=0.00015,\quad a_3=-0.0000033$$

故所求关系式为

$$h = 13.60 - 0.0042t + 0.00015t^2 - 0.0000033t^3$$

由此得

$$h(15) = 13.56,\quad h(40) = 13.46$$

即当 $t = 15$ ℃, 40 ℃ 时,水银密度分别为 13.56, 13.46 .

(二) 第二章补充题

1. 求 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix}$, 这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 是对所有 n 级排列求和 .

解　设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,则

$$\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} D$$

由于所有 n 级排列中,奇偶排列各半,从而 D 带正号与带负号的个数相等,故 $D = 0$.

2. 证明:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

证

右边 $= \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum\limits_{i_1 \cdots i_j \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_j \cdots i_n)} a_{i_1 1}(t) \cdots a_{i_j j}(t) \cdots a_{i_n n}(t) =$

$$\sum_{i_1\cdots i_j\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_j\cdots i_n)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_{i_1 1}(t)\cdots a_{i_j j}(t)\cdots a_{i_n n}(t))=$$

$$\sum_{i_1\cdots i_j\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_j\cdots i_n)}\sum_{j=1}^{n}a_{i_1 1}(t)\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{i_j j}(t)\cdots a_{i_n n}(t)=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i_1\cdots i_j\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_j\cdots i_n)}a_{i_1 1}(t)\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{i_j j}(t)\cdots a_{i_n n}(t)\right]=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t)\\ \cdots & & \cdots & & \cdots\\ a_{n1}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{vmatrix}=\text{右边}$$

3. **证明**:

1)
$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x\\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$$

其中 A_{ij} **是** a_{ij} **的代数余子式**;

2)
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1\\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1\\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots\\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1\end{vmatrix}.$$

证 1) **法** 1

$$\text{左边}\xlongequal{\text{拆 1 列}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x\\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x\\ x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{1 列展开}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n} A_{i1}$$

类似地,对上式中第一项拆第 2 列可得

$$左边 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n} A_{i2} + x\sum_{i=1}^{n} A_{i1} = \cdots =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n} A_{in} + \cdots + x\sum_{i=1}^{n} A_{i1} = 右边$$

法 2

$$左边 \xrightarrow{升级} \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x \\ 0 & a_{11}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & a_{n1}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} \xrightarrow[r_n - r_1]{r_2 - r_1 \atop \cdots} \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x \\ -1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -1 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{1 行展开}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} -1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{n+2} x \begin{vmatrix} -1 & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -1 & a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \xrightarrow{1 列展开}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n} A_{i1} + x\sum_{i=1}^{n} A_{i2} + \cdots + x\sum_{i=1}^{n} A_{in} = 右边$$

2) 在 1) 中令 $x = 1$,得

$$\begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12}+1 & \cdots & a_{1n}+1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}+1 & a_{n2}+1 & \cdots & a_{nn}+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \tag{*}$$

又

$$\begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12}+1 & \cdots & a_{1n}+1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}+1 & a_{n2}+1 & \cdots & a_{nn}+1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\cdots \\ c_{n-1}-c_n}]{\substack{c_1-c_2 \\ c_2-c_3}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & a_{1n}+1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & a_{nn}+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{拆 } n \text{ 列}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\cdots \\ c_1+c_2}]{\substack{c_{n-1}+c_n \\ c_{n-2}+c_{n-1}}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (**)$$

由(*)式和(**)式得

$$\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$$

4. **计算下面的 n 级行列式**:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$;　　2) $\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ b & \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x & a \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$;　4) $\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

解　1) $D \xRightarrow[\substack{\cdots \\ r_2 - r_1}]{\substack{r_n - r_{n-1} \\ r_{n-1} - r_{n-2}}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \xRightarrow[\substack{\cdots \\ c_1 + c_n}]{\substack{c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3}}$

$$\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \xRightarrow[\substack{r_2 - r_1 \\ \cdots \\ r_n - r_1}]{\text{1 列展开}}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & n \\ -n & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} \xRightarrow[\substack{\cdots \\ c_n + c_{n-1}}]{\substack{c_n + c_1 \\ c_n + c_2}}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{n(n+1)}{2}\cdot(-1)^{n-1}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n^{n-2} =$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n+1}{2}n^{n-1}$$

2) **法** 1 **当** $a\neq 0$ **且** $\alpha\neq\beta$**时**,

$$D\xRightarrow[r_n-\frac{\beta}{a}r_1]{\substack{r_2-\frac{\beta}{a}r_1 \\ \cdots}}\begin{vmatrix} \lambda & a & a & \cdots & a \\ b-\frac{\beta\lambda}{a} & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 \\ b-\frac{\beta\lambda}{a} & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ b-\frac{\beta\lambda}{a} & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta \end{vmatrix}\xRightarrow[i=2,\cdots,n]{c_1-\frac{ab-\lambda\beta}{a(\alpha-\beta)}c_i}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-\frac{(n-1)(ab-\lambda\beta)}{\alpha-\beta} & a & \cdots & a \\ 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta \end{vmatrix} =$$

$$\left[\lambda-\frac{(n-1)(ab-\lambda\beta)}{\alpha-\beta}\right](\alpha-\beta)^{n-1} =$$

$$(\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)ab]$$

可以验证 $a=0$ **或** $\alpha=\beta$**时上式也成立**.

法 2

$$D\xRightarrow[r_{n-1}-r_n]{\substack{r_2-r_n \\ r_3-r_n \\ \cdots}}\begin{vmatrix} \lambda & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ b & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix}\xRightarrow[c_n+c_{n-1}]{\substack{c_n+c_2 \\ c_n+c_3 \\ \cdots}}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & a & \cdots & a & (n-1)a \\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ b & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha+(n-2)\beta \end{vmatrix} \xrightarrow{1\text{列展开}}$$

$$\lambda \begin{vmatrix} \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0 \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha+(n-2)\beta \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} a & \cdots & a & (n-1)a \\ \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\lambda(\alpha-\beta)^{n-2}[\alpha+(n-2)\beta] + (-1)^{n+1}(-1)^n(n-1)a \cdot b(\alpha-\beta)^{n-2} =$$

$$(\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)ab]$$

3) $$D_n \xrightarrow{\text{拆 } n \text{ 行}} \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & a \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\cdots \\ c_{n-1}+c_n}]{\substack{①\, n\text{ 行展开} \\ ②\, c_1+c_n \\ c_2+c_n}}$$

$$(x-a)D_{n-1} + \begin{vmatrix} x+a & 2a & 2a & \cdots & 2a & a \\ 0 & x+a & 2a & \cdots & 2a & a \\ 0 & 0 & x+a & \cdots & 2a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} =$$

$$(x-a)D_{n-1} + a(x+a)^{n-1}$$

由于 $D_n^{\mathrm{T}} = D_n$,**即将** D_n **中** a **换成** $-a$ **行列式值不变,故**

$$D_n = (x+a)D_{n-1} - a(x-a)^{n-1}$$

两式联立解得

$$D_n = \frac{1}{2}[(x+a)^n + (x-a)^n]$$

4) **当** $y \neq z$ **时,同上题解法得**

$$\begin{cases} D_n = (x-z)D_{n-1} + z(x-y)^{n-1} \\ D_n = (x-y)D_{n-1} + y(x-z)^{n-1} \end{cases}$$

联立求解得

$$D_n = \frac{y(x-z)^n - z(x-y)^n}{y-z}$$

当 $y = z$ **时**,

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y \\ y & \ddots & \ddots & y \\ \cdots & \ddots & \ddots & \\ y & \cdots & y & x \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\cdots \\ c_1 + c_n}]{\substack{c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3}}$$

$$[x+(n-1)y] \begin{vmatrix} 1 & y & y & \cdots & y \\ 1 & x & y & \cdots & y \\ 1 & x & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & y & y & \cdots & x \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\cdots \\ r_n - r_1}]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1}}$$

$$[x+(n-1)y] \begin{vmatrix} 1 & y & y & \cdots & y \\ 0 & x-y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-y \end{vmatrix} =$$

$$[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$$

5) **考虑** $n+1$ **级范德蒙德行列式**

$$f(y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n}(y-x_i)\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i - x_j)$$

易知原行列式是多项式 $f(y)$ **的** y^{n-1} **项系数的反号,而由上式知** y^{n-1} **项系数为**

$$-\sum_{i=1}^{n} x_i \prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)$$

故所求行列式

$$D=\sum_{i=1}^{n} x_i \prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)$$

5. **计算** $f(x+1)-f(x)$,**其中**

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & x^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & x^n \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & x^{n+1} \end{vmatrix}$$

解　$f(x+1)=$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x+1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2+2x+1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & x^3+3x^2+3x+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & x^n+nx^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\cdots+1 \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & x^{n+1}+(n+1)x^n+\cdots+1 \end{vmatrix}$$

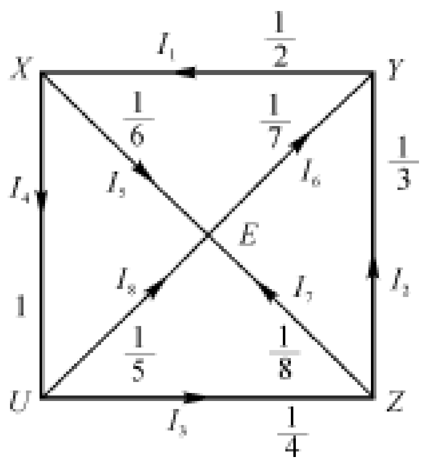
因此

$f(x+1)-f(x)=$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2x+1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 3x^2+3x+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & nx^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\cdots+1 \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & (n+1)x^n+\cdots+1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{c_{n+1}-x^2c_3 \\ \cdots \\ c_{n+1}-x^{n-1}c_n}]{\substack{c_{n+1}-c_1 \\ c_{n+1}-xc_2}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & 0 \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & (n+1)x^n \end{vmatrix} = (n+1)!x^n$$

6. **右图表示一电路网络,每条线上标出的数字是电阻,E点接地,由 X,Y,U,Z点通入的电流皆为 100 A(安培),求这四点的电位(用基尔霍夫定律).**



解 **设电流如图所示,由基尔霍夫定律**

$$\begin{cases} -I_1+I_4+I_5=100 \\ I_1-I_2+I_6=100 \\ I_2-I_3+I_7=100 \\ I_3-I_4+I_8=100 \end{cases} \qquad (*)$$

若 X,Y,U,Z**点的电位分别用** X_1,Y_1,U_1,Z_1 **表示,则由** $I=\dfrac{U}{R}$ **可得**

$$\begin{aligned} I_1&=2Y_1-2X_1 & I_5&=6X_1 \\ I_2&=3Z_1-3Y_1 & I_6&=7Y_1 \\ I_3&=4U_1-4Z_1 & I_7&=8Z_1 \\ I_4&=X_1-U_1 & I_8&=5U_1 \end{aligned}$$

代入(*)式得

$$\begin{cases} 9X_1-2Y_1-U_1=100 \\ -2X_1+12Y_1-3Z_1=100 \\ -3Y_1+15Z_1-4U_1=100 \\ -X_1-4Z_1+10U_1=100 \end{cases}$$

解得

$$X_1=\frac{210100}{12907}\,(\mathrm{V}),\qquad Y_1=\frac{188400}{12907}\,(\mathrm{V})$$

$$Z_1=\frac{183300}{12907}\,(\mathrm{V}),\qquad U_1=\frac{223400}{12907}\,(\mathrm{V})$$

六、学习效果检测题及答案

(一) 检测题

1. **计算下列行列式**:

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.

2. **计算下列 n 级行列式**:

(1) $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & x_2 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x_n \end{vmatrix}$;

(2) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$;　(3) $D_n = \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & b \\ a & a & \cdots & b & a \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a & b & \cdots & a & a \\ b & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}$;

(4) $D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}$;

(5) $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$;　(6) $D_n = \begin{vmatrix} 2a & a^2 & & & \\ 1 & 2a & a^2 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a^2 \\ & & & 1 & 2a \end{vmatrix}$.

3. (1) **设 4 级行列式** $D_4 = \begin{vmatrix} a & d & b & a \\ b & a & d & c \\ c & c & c & c \\ d & b & a & b \end{vmatrix}$, **求** $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}$;

(2) **设** n **级行列式** $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$, **求** $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$.

4. **证明**:**当** $\alpha \neq k\pi$ **时**,

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

5. **计算 $n+1$ 级行列式**

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

其中 $a_i\neq 0,\ b_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$.

6. **求方程** $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}=0$ **的根**.

7. **计算 4 级行列式**

$$D_4=\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^3 & (a_1+b_2)^3 & (a_1+b_3)^3 & (a_1+b_4)^3 \\ (a_2+b_1)^3 & (a_2+b_2)^3 & (a_2+b_3)^3 & (a_2+b_4)^3 \\ (a_3+b_1)^3 & (a_3+b_2)^3 & (a_3+b_3)^3 & (a_3+b_4)^3 \\ (a_4+b_1)^3 & (a_4+b_2)^3 & (a_4+b_3)^3 & (a_4+b_4)^3 \end{vmatrix}$$

(二) 检测题答案

1. (1) $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$;　　(**二条线行列式**)

   (2) 0;　　(**行和相等的行列式**)

   (3) x^4;　　(**行和相等的行列式**)

   (4) $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$.　　(**三对角行列式**)

2. (1) $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}[(-1)^{n+1}+x_1x_2\cdots x_n]$;　　(**二条线行列式**)

   (2) $n!\left(1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n}\right)$;　　(**箭形行列式**)

   (3) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(n-1)a+b](b-a)^{n-1}$;　　(**行和相等的行列式**)

   (4) $1+x_1^2+\cdots+x_n^2$;　　(**可采用升级法计算**)

   (5) $(-1)^{n-1}(n-1)$;　　(**行和相等的行列式**)

   (6) $(n+1)a^n$.　　(**三对角行列式**)

3. (1) 0;　　(2) $(x-a)^{n-1}$.

4. **三对角行列式** D_n **展开得** $D_n=2\cos\alpha D_{n-1}-D_{n-2}$,**再利用第二数学归纳法证明**.

5. $a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \prod_{1\leq j<i\leq n+1}\left(\frac{b_i}{a_i}-\frac{b_j}{a_j}\right)$.(第 i行提出 $a_i^n(i=1,2,\cdots,n+1)$ 后,即得 $n+1$ 级范德蒙德行列式的转置.)

6. 根为 0 和 1 .(可求得左边行列式的值为 $5x(x-1)$.)

7. $9\prod_{1\leq j<i\leq 4}(a_i-a_j)\prod_{1\leq j<i\leq 4}(b_i-b_j)$.(根据展开式$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 和行列式乘法公式计算.)

第 3 章　线性方程组

线性方程组的理论在数学各分支及其他许多领域被广泛应用着 . 关于线性方程组提出的基本问题得到了完满的解决 . 本章引入的概念和方法都是基本的, 从概念到结论、从内容到方法都要掌握并能熟练运用 .

一、内 容 提 要

1. 求解线性方程组的消元法

(1) 消元法是求解线性方程组的具体方法, 它通过对线性方程组施行三种初等变换:

1) 用一非零的数乘某一方程;

2) 把一个方程的倍数加到另一个方程;

3) 互换两个方程的位置 .

将原方程组中某方程的某个未知量的系数变为零 —— 消去这个元; 反复这样做, 得到一个化简的线性方程组, 这是个阶梯形方程组(系数及常数项均变为 0 的方程可去掉, 因而方程个数未必与原方程个数相等) 这样的阶梯形线性方程组容易判断是不是有解; 有解时, 容易得到所有的解, 这就是用消元法求解的过程 .

(2) 消元法解线性方程组的理论根据是: 线性方程组经初等变换得到同解线性方程组 .

(3) 使用消元法解线性方程组可以在线性方程组的增广矩阵(由方程组的系数与右端项构成的矩阵) 上进行, 即对增广矩阵的行施行矩阵的相应的初等行变换化为阶梯形矩阵, 此时就可以判别方程组有解还是无解, 在有解的情形, 回到阶梯形方程组去解 .

注　1. 将求解线性方程组的消元法转化为对方程组的增广矩阵施行初等行变换化为阶梯形矩阵, 这一过程不但简单明了(不用带着未知量进行运算), 而且由于强调了元素

和方程的相对位置,还可以消除计算混乱甚至循环推导这类错误 .

2. 在解线性方程组时,有时为了理论叙述的方便,才允许交换系数矩阵的列,这相当于将未知量重新编号;而对于系数矩阵的列的其他两种变换,在解线性方程组时是绝对不允许使用的,其原因是容易理解的 .

3. 在用消元法求解线性方程组时,最好将增广矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{array}\right)$$

用初等行变换化为如下形式的阶梯形矩阵(其中系数矩阵化为了行最简形):

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_s \end{array}\right)$$

(为叙述简单起见,在上面的系数矩阵部分取了较特殊的形式 .) 当 $d_{r+1},\cdots,d_s$ 中有不为零时,原方程组无解 . 当 $d_{r+1}=\cdots=d_s=0$ 时,原方程组有解,同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n \\ x_2 = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n \\ \quad\cdots\cdots \\ x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n \end{cases}$$

取自由未知量 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 为任意变化的参数 $t_1,\cdots,t_{n-r}$ 得方程组的一般解

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1,r+1}t_1 - \cdots - c_{1n}t_{n-r} \\ \quad\cdots\cdots \\ x_r = d_r - c_{r,r+1}t_1 - \cdots - c_{rn}t_{n-r} \\ x_{r+1} = t_1 \\ \quad\cdots\cdots \\ x_n = t_{n-r} \end{cases}$$

2. 向量空间

(1) 由数域 P 中 n 个数组成的有序数组

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \qquad (\text{或 } \alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix})$$

称为数域 P **上的一个** n **维行(或列)向量．称** a_i **为向量** α **的分量,分量全为** 0 **的向量称为零向量,记为** 0．

(2) **设** $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, $k \in P$,**规定**

1) **相等**:$\alpha = \beta \quad a_i = b_i (i = 1,2,\cdots, n)$;

2) **加法**:$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$;

3) **数乘**:$k\alpha = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$;

4) **负向量**:$-\alpha = (-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$．

规定的向量运算满足如下的运算律及性质:

1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

3) $\alpha + 0 = \alpha$;

4) $\alpha + (-\alpha) = 0$;

5) $k(l\alpha) = (kl)\alpha$;

6) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$;

7) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$;

8) $1\alpha = \alpha$;

9) $0\alpha = 0$;

10) $(-1)\alpha = -\alpha$．

(3) **设** V **是数域** P **上** n **维向量的非空集合,如果对任意** $\alpha, \beta \in V$ **和** $k \in P$ **有** $\alpha + \beta \in V$ **和** $k\alpha \in V$,**则称** V **为数域** P **上的向量空间**．

3. 向量组的线性相关性

设 V **是数域** P **上的向量空间,** $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta, \beta_1, \cdots, \beta_t \in V$．

(1) **如果存在数域** P **中一组数** $k_1, k_2, \cdots, k_s$,**使**

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$

则称向量 α **是向量组** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ **的线性组合,或称向量** α **可由向量组** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ **线性表出**．

在数域 P 上全体 n 维向量构成的向量空间 V 中,任一个 n 维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 都是向量组

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\ \varepsilon_2=(0,1,\cdots,0),\ \cdots,\ \varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$$

的一个线性组合,称向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 n 维单位坐标向量 .

n 维零向量是任一 n 维向量组的线性组合(取系数全为 0 即可) .

(2) 如果向量组(Ⅰ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中每个向量 α_i 都可由向量组(Ⅱ):$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出,则称向量组(Ⅰ) 可由向量组(Ⅱ) 线性表出 . 如果两个向量组可以互相线性表出,则称这两个向量组等价 .

向量组之间的等价有以下性质:

1) 反身性:每个向量组都与它自身等价;

2) 对称性:如果向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 等价,则向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 也与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 等价;

3) 传递性:如果向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 等价,$\beta_1,\cdots,\beta_t$ 与 $\gamma_1,\cdots,\gamma_p$ 等价,则向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 $\gamma_1,\cdots,\gamma_p$ 等价 .

(3) 如果存在数域 P 中不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 . 如果只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$ 时上式才成立,则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关 .

(4) 线性表出与线性相关的关系:

1) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\,(s\geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量可由其余 $s-1$ 个向量线性表出;

2) 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关,而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关,则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 惟一线性表示;

3) 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出,且 $s>t$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 必线性相关;

4) 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关,且它可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出,则 $s\leq t$ (这是 3) 的逆否命题);

5) 两个线性无关的等价的向量组,必含有相同个数的向量 .

(5) 线性相关与线性无关的判别:

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是一个 n 维向量组,当它是行向量组时,构造 $s\times n$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_s \end{pmatrix}$$

当它是列向量组时,构造 $n\times s$ 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$. 除了利用定义判断向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的线性相关性外,还可采用如下的结论:

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关	$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关
$s = 1$ 时, $\alpha_1 = 0$	$s = 1$ 时, $\alpha_1 \neq 0$
$s = 2$ 时, α_1 与 α_2 的对应分量成比例	$s = 2$ 时, α_1 与 α_2 的对应分量不成比例
$2 < s \leq n$ 时, A 的秩小于 s	$2 < s \leq n$ 时, A 的秩等于 s
$s = n$ 时, $\mid A \mid = 0$	$s = n$ 时, $\mid A \mid \neq 0$
$s > n$ 时,必线性相关	
部分向量组线性相关,则整个向量组线性相关	线性无关向量组的任一部分向量组线性无关
线性相关向量组减少对应位置分量后,得到的向量组仍线性相关	线性无关向量组在对应位置增加分量后,得到的向量组仍线性无关
	两两正交的非零向量组线性无关(第九章)
	矩阵的属于不同特征值的特征向量线性无关(第七章)

4. 向量组的秩与极大线性无关组

(1) 在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中,如果一个部分组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关,并且从向量组中任意添一个向量(如果还有的话),所得的部分组都线性相关,则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组 . 向量组的极大线性无关组所含向量的个数 r 称为这个向量组的秩,记为 $\mathrm{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$. 规定只含零向量的向量组的秩为零 .

(2) 向量组的秩与极大线性无关组的有关结论:

1) 向量组与它的任一个极大线性无关组等价;

2) 向量组的任意两个极大线性无关组等价;

3) 向量组的任意两个极大线性无关组所含向量的个数相同;

4) 如果向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表出,则向量组(Ⅰ)的秩不大于向量组(Ⅱ)的秩;

5) 等价的向量组有相同的秩.

(3) 矩阵的每一行构成一个行向量,则该行向量组的秩称为矩阵的行秩;矩阵的每一列构成一个列向量,该列向量组的秩称为矩阵的列秩.因为行秩等于列秩,所以统称为矩阵的秩,矩阵 A 的秩记为 $\operatorname{rank}A$.

(4) 在一个 $s\times n$ 矩阵 A 中任取 k 行 k 列 $(1\leq k\leq \min(s,n))$,位于这些选定的行和列交叉点上的 k^2 个元素按原来的次序构成的 k 级行列式称为 A 的一个 k 级子式,A 的 k 级子式共有 $C_s^k C_n^k$ 个.

(5) 矩阵的秩的有关结论:

1) $s\times n$ 矩阵 A 的秩不超过 $\min(s, n)$;

2) $n\times n$ 矩阵 A 的行列式为零的充分必要条件是 A 的秩小于 n;

3) 矩阵的秩为 r 的充分必要条件是矩阵中有一个 r 级子式不为零,而所有 $r+1$ 级子式(如果有的话)全为零;

4) 初等变换不改变矩阵的秩,即如果矩阵 A 与 B 等价,则 A 与 B 的秩相同.

注 利用以上的结论可以方便地求出矩阵的秩.特别是可以用初等行变换将矩阵化为阶梯形,这个阶梯形矩阵中非零行的个数就等于原矩阵的秩.

(6) 求向量组的秩与极大线性无关组的方法:

直接利用定义来求向量组的秩与极大线性无关组不方便,可采用下叙方法求之.

法1 将行(或列)向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 排成矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \cdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}\qquad (\text{或 } A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s))$$

求出 A 的秩 r 即知向量组的秩也是 r.在 A 中求一个 r 级非零子式 D,则包含 D 的 r 个行(或列)向量即为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组.

法2 将列(或行)向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 排成矩阵

$$A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)\quad (\text{或 } A=(\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_s'))$$

用初等行变换化 A 为阶梯形矩阵 J,若 J 中有 r 个非零行,则向量组的秩为 r;设 J 中第 i 个非零行的第1个非零元所在的列标号为 $j_i(i=1,2,\cdots,r)$,则 $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_r}$ 为向量组的一个极大线性无关组.

5. 线性方程组有解的判别

设线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

其系数矩阵 A 及增广矩阵 $\overline{A}$ 分别为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{array}\right)$$

又引入向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_s \end{pmatrix}$$

(1) 线性方程组有解的充分必要条件是系数矩阵 A 与增广矩阵 $\overline{A}$ 有相同的秩;

(2) 线性方程组有解的充分必要条件是 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出;

(3) 线性方程组有解的充分必要条件是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$ 等价 .

注　1. 当系数矩阵 A 的秩为 s 即等于其行数时,线性方程组必有解,这是因为 $\overline{A}$ 的秩也为 s .

2. 当系数矩阵 A 的秩为 n,即等于其行数时,线性方程组不一定有解 . 但如果有解,则解是惟一的 .

(4) 齐次线性方程组必有解 .

(5) 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是系数矩阵 A 的秩小于 n(未知量个数) .

(6) 当 $s < n$ 时,齐次线性方程组必有非零解 .

(7) 当 $s = n$ 时,齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是 $|A| = 0$.

6. 齐次线性方程组的解的结构

(1) 齐次线性方程组的两个解的和还是它的解;一个解的倍数还是它的解;解的线性组合还是它的解,即齐次线性方程组的解向量构成一个向量空间.

(2) 如果齐次线性方程组的一组解线性无关,且任一个解都能表示成这组解的线性组合,则称这组解是齐次线性方程组的一个基础解系.

(3) 在齐次线性方程组有非零解的情况下,它有基础解系,并且基础解系所含解的个数为 $n-r$,其中 n 是未知量的个数,r 是系数矩阵的秩.

(4) 求基础解系的方法:

设齐次线性方程组的系数矩阵 A 的秩为 r,用初等行变换化 A 为行最简形式,不妨设为

$$A\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&c_{1,r+1}&\cdots&c_{1n}\\0&1&\cdots&0&c_{2,r+1}&\cdots&c_{2n}\\\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots&&\cdots\\0&0&\cdots&1&c_{r,r+1}&\cdots&c_{rn}\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots&&\cdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

则同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-c_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n\\x_2=-c_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n\\\quad\cdots\cdots\\x_r=-c_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n\end{cases}$$

分别用 $n-r$ 组数

$$(1,0,\cdots,0),\quad(0,1,\cdots,0),\quad\cdots,\quad(0,0,\cdots,1)$$

来代自由未知量 $(x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n)$ 就得到 $n-r$ 个解

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-c_{1,r+1}\\\cdots\\-c_{r,r+1}\\1\\0\\\cdots\\0\end{pmatrix},\quad\eta_2=\begin{pmatrix}-c_{1,r+2}\\\cdots\\-c_{r,r+2}\\0\\1\\\cdots\\0\end{pmatrix},\quad\cdots,\quad\eta_{n-r}=\begin{pmatrix}-c_{1n}\\\cdots\\-c_{rn}\\0\\0\\\cdots\\1\end{pmatrix}$$

则 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 就是齐次线性方程组的一个基础解系 .

(5) 齐次线性方程组的解的结构:

齐次线性方程组的一般解(或通解) 为

$$\eta = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} \quad (k_1, k_2, \cdots, k_{n-r} \in P)$$

其中 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 是齐次线性方程组的一个基础解系 .

7. 非齐次线性方程组的解的结构

(1) 将非齐次线性方程组的常数项换成 0,就得到一个齐次线性方程组,称之为非齐次线性方程组的导出组 .

(2) 非齐次线性方程组的两个解的差是它的导出组的解 . 非齐次线性方程组的一个解与它的导出组的一个解之和还是非齐次方程组的一个解 .

注　非齐次线性方程组的两个解之和与一个解的倍数一般不再是该非齐次方程组的解 .

(3) 非齐次线性方程组的解的结构:

如果 γ_0 是非齐次线性方程组的一个特解, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 是其导出组的一个基础解系,则非齐次线性方程组的一般解为

$$\gamma = \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} \quad (k_1, k_2, \cdots, k_{n-r} \in P)$$

8. 结式与两个一元多项式的公因式

(1) 设有数域 P 上的两个多项式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$$

用它们的系数构造的 $m + n$ 级行列式

$$\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \\ \\ m\text{ 行} \\ \\ \end{array}\right\{ \\ \left.\begin{array}{r} \\ \\ n\text{ 行} \\ \\ \end{array}\right\{ \end{array} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m \end{vmatrix}$$

称为多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式,记为 $R(f, g)$.

(2) 设 $f(x)$, $g(x)$ 是数域 P 上的两个多项式,则 $R(f, g) = 0$ 的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有非常数公因式或它们的第一个系数 $a_0 = b_0 = 0$.

(3) 对复数域上两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$, $R(f, g) = 0$ 的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在复数域中有公共根或它们的第一个系数全为零 .

9. 二元高次方程组的求解

设 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 是两个复系数二元多项式 . 按 x 的降幂写出这两个多项式

$$f(x, y) = a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + \cdots + a_n(y)$$

$$g(x, y) = b_0(y)x^m + b_1(y)x^{m-1} + \cdots + b_m(y)$$

其中 $a_i(y)$, $b_j(y)$ $(i = 0, 1, \cdots, n;\ j = 0, 1, \cdots, m)$ 都是 y 的多项式,令

$$R_x(f, g) = \begin{vmatrix} a_0(y) & a_1(y) & \cdots & \cdots & a_n(y) & & & \\ & a_0(y) & a_1(y) & \cdots & \cdots & a_n(y) & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & a_0(y) & a_1(y) & \cdots & \cdots & a_n(y) \\ b_0(y) & b_1(y) & \cdots & \cdots & b_m(y) & & & \\ & b_0(y) & b_1(y) & \cdots & \cdots & b_m(y) & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & b_0(y) & b_1(y) & \cdots & \cdots & b_m(y) \end{vmatrix}$$

如果 (x_0, y_0) 是方程组 $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ 的解,则 y_0 是 $R_x(f, g)$ 的一个根;反之,如果 y_0 是 $R_x(f, g)$ 的一个根,则 $a_0(y_0) = b_0(y_0) = 0$ 或者存在复数 x_0 使 (x_0, y_0) 是方程组 $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ 的一个解 .

这样,求两个未知量的两个方程

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0$$

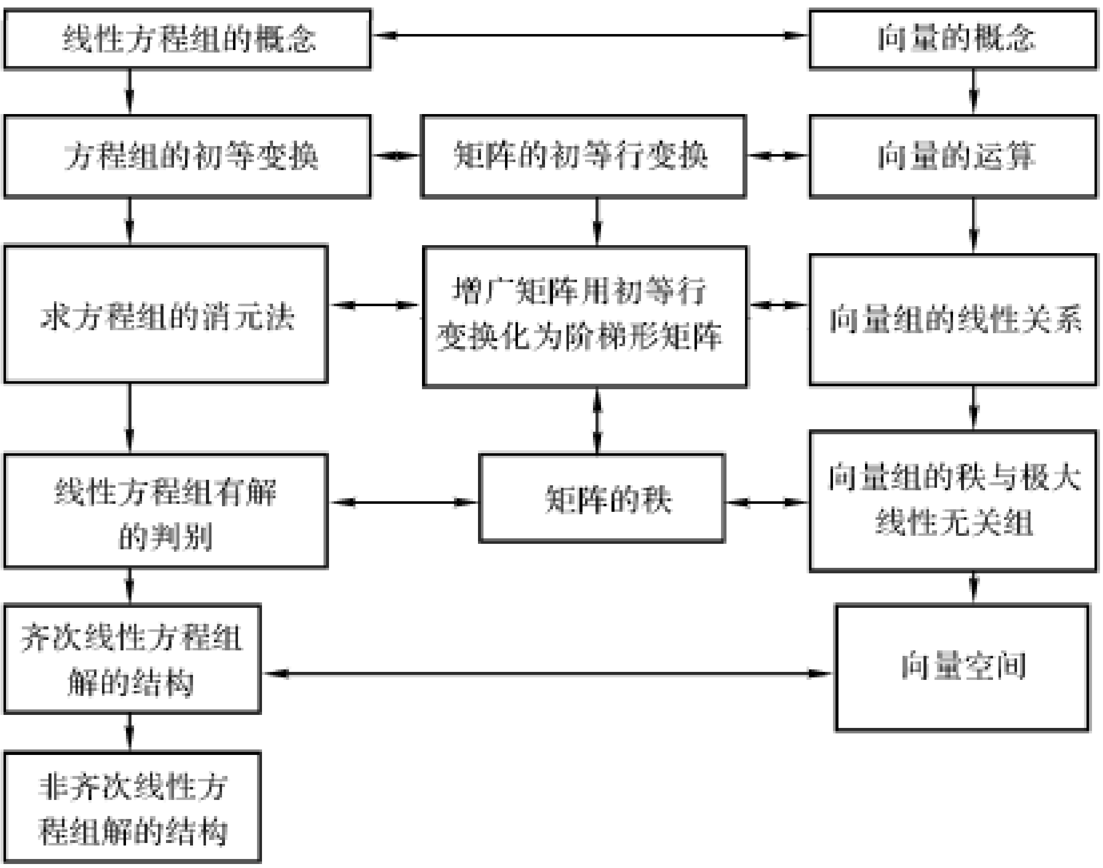
的公共解可以归结为求一个未知量的一个方程

$$R_x(f, g) = 0$$

的根 .

注　也可将二元多项式 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 按 y 的降幂排列得到结式 $R_y(f, g)$,此时求两个未知量两个方程 $f(x, y) = 0$ 与 $g(x, y) = 0$ 的公共解归结为求一个未知量的一个方程 $R_y(f, g) = 0$ 的根 .

二、知识网络图



三、重点、难点解读

本章是围绕线性方程组理论的三个中心问题展开讨论的.

首先介绍了古老但仍被广泛使用的求解线性方程组的消元法,主要通过线性方程组的初等变换求同解的线性方程组,即对方程组对应的增广矩阵用初等行变换化为阶梯形矩阵求解.其次是对线性方程组的解的情况的讨论,引入了向量的线性相关性、秩与极大线性无关组、矩阵的秩等概念,给出了线性方程组有解的充分必要条件.最后利用向量空间的概念研究了线性方程组的解的结构.

向量组的线性相关性是线性代数中的一个重点也是一个难点,对逻辑推理有较高的要求,相对比较抽象.在学习本部分内容时,无论是判断、证明或计

算,关键在于要深刻理解基本概念,搞清其相互之间的关联,要学会用定义来推导论证,注意推导过程中逻辑的正确性.

含有参数的线性方程组求解要熟练掌握,因为它综合考查矩阵的秩的确定、线性方程组解的情况判定、求解方法及解的结构.

四、典型例题解析

例3.1 已知 $\alpha_1=(1,-1,1)$, $\alpha_2=(1,t,-1)$, $\alpha_3=(t,1,2)$, $\beta=(4,t^2,-4)$,若β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出且表示法不惟一,求$t$及$\beta$的表达式.

分析 为判断一个向量β能否由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出,首先根据定义令$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s$,由向量相等的关系,将其写为以$x_1,x_2,\cdots,x_s$为未知数的非齐次线性方程组,并求解该方程组;如果方程组无解,则β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出;如果方程组有解,则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出,且当解惟一时,其表达式惟一.

解 设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$,即$\begin{cases}x_1+x_2+tx_3=4\\-x_1+tx_2+x_3=t^2\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$.由于增广矩阵

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&t&4\\-1&t&1&t^2\\1&-1&2&-4\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}0&2&t-2&8\\0&t-1&3&t^2-4\\1&-1&2&-4\end{array}\right)\xrightarrow[r_1\longleftrightarrow r_2]{r_2\longleftrightarrow r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-4\\0&2&t-2&8\\0&t-1&3&t^2-4\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-\frac{t-1}{2}r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-4\\0&2&t-2&8\\0&0&-\frac{1}{2}(t+1)(t-4)&t(t-4)\end{array}\right)$$

当$t=-1$时,$\operatorname{rank}A=2$,$\operatorname{rank}B=3$,方程组无解;当$t=4$时,$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B=2<3$,方程组有无穷多解.此时

$$B\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-4\\0&2&2&8\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{r_1+\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = 4 - x_3 \end{cases}$，通解为 $\begin{cases} x_1 = -3c \\ x_2 = 4 - c \quad (c\text{任意}) \\ x_3 = c \end{cases}$

故 $t = 4$，且 $\beta = -3c\alpha_1 + (4 - c)\alpha_2 + c\alpha_3$，$c$ 任意 .

例 3.2　已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，问：

(1) α_1 能否由 α_2, α_3 线性表出？证明你的结论 .

(2) α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出？证明你的结论 .

分析　对于抽象的向量组，判断向量能否由向量组线性表出时，常采用线性表出与线性相关的关系，以及极大线性无关组的有关性质等 .

解　(1) 能 . 因为 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，所以 α_2, α_3 线性无关 . 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，而 α_2, α_3 线性无关，故 α_1 可以由 α_2, α_3 线性表出 .

(2) 不能 . 法 1　设 $\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$，由(1) 知 α_1 能由 α_2, α_3 线性表出，设为 $\alpha_1 = l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3$，于是 $\alpha_4 = k_1(l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3) + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = (k_1l_2 + k_2)\alpha_2 + (k_1l_3 + k_3)\alpha_3$，这与已知 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关矛盾 . 从而 α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出 .

法 2　由于 α_2, α_3 线性无关，而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，从而 α_2, α_3 是该向量组的一个极大线性无关组 . 若 α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出，则由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 α_2, α_3 线性表出知，α_4 可由 α_2, α_3 线性表出，这与 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关矛盾 . 故 α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出 .

法 3　因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，所以 $\mathrm{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \leq 2$. 又因为 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，所以 $\mathrm{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \geq 3$，从而 $\mathrm{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \neq \mathrm{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$，即方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \alpha_4$ 无解，也即 α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出 .

例 3.3　已知向量组 $\alpha_1 = (1,0,2,3)$，$\alpha_2 = (1,1,3,5)$，$\alpha_3 = (1, -1, t+2, 1)$，$\alpha_4 = (1, 2, 4, t+9)$ 线性相关，试求 t 的值 .

分析　对于具体给出的向量组，判断其线性相关与线性无关常采用以下方法：

(1) 先由定义写出 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$，再根据向量相等写出齐次线性方程组；若该齐次方程组有非零解(即无穷多解)，则向量组线性相关；若该齐次方程组只有零解，则向量组线性无关 .

(2) 排成矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$(列向量时) 或 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\cdots\\\alpha_s\end{pmatrix}$(行向量时),求 A的秩;若 $\operatorname{rank}A<s$时,向量组线性相关;若 $\operatorname{rank}A=s$时,向量组线性无关.

(3) 对于 n个 n维向量,可同上将其排成矩阵 A,用 $|A|=0$是否成立来判断 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是否线性相关.

(4) 利用线性相关的有关结论,如"部分相关,则整体相关"等来判定.

解　$t=-1$ 或 $t=-2$.

法 1

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\1&1&3&5\\1&-1&t+2&1\\1&2&4&t+9\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}]{r_2-r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&1&2\\0&-1&t&-2\\0&2&2&t+6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&1&2\\0&0&t+1&0\\0&0&0&t+2\end{pmatrix}$$

$t=-1$ 或 $t=-2$ 时 $\operatorname{rank}A=3<4$,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

法 2

$$\begin{vmatrix}1&0&2&3\\1&1&3&5\\1&-1&t+2&1\\1&2&4&t+9\end{vmatrix}=(t+1)(t+2)$$

$t=-1$ 或 $t=-2$ 时行列式为 0.

例 3.4　对任意实数 a,b,c,线性无关的向量组是________.

(A) $(a,1,2),(2,b,3),(0,0,0)$;

(B) $(b,1,1),(1,a,3),(2,3,c),(a,0,c)$;

(C) $(1,a,1,1),(1,b,1,0),(1,c,0,0)$;

(D) $(1,1,1,a)$, $(2,2,2,b)$, $(0,0,0,c)$.

分析　应填(C).

(A) 中有零向量,必线性相关;(B) 为 4个 3 维向量,必线性相关. 对(C) 中向量,有 $A=\begin{pmatrix}1&a&1&1\\1&b&1&0\\1&c&0&0\end{pmatrix}$,而 A中有一个 3 级子式 $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-1\neq0$,即

$\operatorname{rank}A=3$,从而向量组线性无关;或者由向量组$(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)$ 线性无关,则增添第 2 个分量后所得的向量组$(1,a,1,1),(1,b,1,0),(1,c,0,0)$ 也线性无关. 对(D) 中向量,有

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&a\\2&2&2&b\\0&0&0&c\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&a\\0&0&0&b-2a\\0&0&0&c\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-\frac{b-2a}{c}r_3]{\text{当 }c\neq 0\text{ 时}}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&a\\0&0&0&0\\0&0&0&c\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&a\\0&0&0&c\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

即 $\operatorname{rank}A=2$;当 $c=0$ 时,$\operatorname{rank}A\leq 2$,从而向量组线性相关. 故选(C).

例 3.5　向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,则下列线性无关的向量组是________.

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$;

(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$;

(C) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$;

(D) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$.

分析　对于抽象给出的向量组,判断或证明其线性相关与线性无关常采用以下方法:

(1) 定义法. 先设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$,然后对其作恒等变形,即用某个矩阵同乘该式,或对该式拆项重新组合等,究竟用什么方法应当从已知条件去寻找信息. 通过一次或多次恒等变形来分析 $k_1,k_2,\cdots,k_s$能够不全为 0 还是必须全是 0,从而得知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是线性相关还是线性无关.

(2) 利用矩阵的秩. 要论证 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关或线性无关,可将其构造成矩阵 A,利用 $\operatorname{rank}A<s$或 $\operatorname{rank}A=s$来说明.

(3) 利用有关结论,特别是等价向量组有相同秩的结论.

(4) 反证法.

解　应填(B).

法1　观察可知$(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4)-(\alpha_4+\alpha_1)=0$,(A) 线性相关;

$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_4)+(\alpha_4-\alpha_1)=0$,(C) 线性相关;

$(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_4)+(\alpha_4-\alpha_1)=0$,(D) 线性相关.

由排除法可知应选(B).

法2 对(B),设 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_4)+k_4(\alpha_4-\alpha_1)=0$,拆项重组为

$$(k_1-k_4)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3+(k_3+k_4)\alpha_4=0$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关知 $\begin{cases} k_1 \qquad\qquad - k_4 = 0 \\ k_1+k_2 \qquad\qquad = 0 \\ \qquad k_2+k_3 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad k_3+k_4 = 0 \end{cases}$,由于系数行列式

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2$,所以方程组只有零解 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$,从而(B)线性无关.用此法可知(A),(C),(D)均线性相关.

例3.6 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,向量 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,而向量 β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,则对任意常数 k,必有________.

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性无关;

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性相关;

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性无关;

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性相关.

分析 应填(A).

由于 β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$ 线性无关(否则,若线性相关,则由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关知 β_2 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示).设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4(k\beta_1+\beta_2)=0$$

由假设知 $\beta_1=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$,代入上式并整理得

$$(k_1+k_4l_1k)\alpha_1+(k_2+k_4l_2k)\alpha_2+(k_3+k_4l_3k)\alpha_3+k_4\beta_2=0$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$ 线性无关,得

$$k_1+k_4l_1k=0,\quad k_2+k_4l_2k=0,\quad k_3+k_4l_3k=0,\quad k_4=0$$

这只有 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$. 故(A)成立.(B)不成立.可以证明:向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 当 $k=0$ 时线性相关;而当 $k\neq0$ 时线性无关.

例3.7 设有向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)$,$\alpha_2=(0,3,1,2)$,$\alpha_3=(3,0,7,14)$,$\alpha_4=(1,-1,2,0)$,$\alpha_5=(2,1,5,6)$,求极大线性无关组.

解 法1

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2&4\\0&3&1&2\\3&0&7&14\\1&-1&2&0\\2&1&5&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4-r_1\\ r_5-2r_1}]{r_3-3r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2&4\\0&3&1&2\\0&3&1&2\\0&0&0&-4\\0&3&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_5-r_4]{\substack{r_3-r_2\\ r_5-r_2}}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&4\\0&3&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\backslash r_3}\begin{pmatrix}1&-1&2&4\\0&3&1&2\\0&0&0&-4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank}A=3$，又 A 中有一个 3 级子式 $\begin{vmatrix}1&-1&4\\0&3&2\\1&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&4\\0&3&2\\0&0&-4\end{vmatrix}=-12\neq 0$，

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是一个极大线性无关组(或 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$；$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$；$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$ 均可作为极大线性无关组).

法 2

$$A=(\alpha_1',\ \alpha_2',\ \alpha_3',\ \alpha_4',\ \alpha_5')=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3-2r_1}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&0&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\longleftrightarrow r_3\\ r_3\longleftrightarrow r_4}]{\substack{r_2-3r_3\\ r_4-2r_3}}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是一个极大线性无关组.

注　对于具体的向量组,求秩与极大线性无关组的方法见本章一 4(6).

例 3.8　已知向量组(Ⅰ)：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩 3，向量组(Ⅱ)：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 3，向量组(Ⅲ)：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 的秩为 4. 证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 的秩为 4.

证　由 rank(Ⅰ) = rank(Ⅱ) = 3 知，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，从而 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，设为 $\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$.

法 1　反证. 如果 $\operatorname{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4\}<4$，则 $\alpha_5-\alpha_4=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+$

$l_3\alpha_3$,从而

$$\alpha_5 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 + \alpha_4 = (l_1 + k_1)\alpha_1 + (l_2 + k_2)\alpha_2 + (l_3 + k_3)\alpha_3$$

即 α_5 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出,这与 rank(Ⅲ) = 4 矛盾. 故 $\mathrm{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\} = 4$.

法 2 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4(\alpha_5 - \alpha_4) = 0$,把 $\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$ 代入得

$$(x_1 - k_1x_4)\alpha_1 + (x_2 - k_2x_4)\alpha_2 + (x_3 - k_3x_4)\alpha_3 + x_4\alpha_5 = 0$$

由 rank(Ⅲ) = 4 知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性无关,所以 $\begin{cases} x_1 - k_1x_4 = 0 \\ x_2 - k_2x_4 = 0 \\ x_3 - k_3x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$,这只有 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$,故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关,即 $\mathrm{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5 - \alpha_4\} = 4$.

例 3.9 求下列齐次线性方程组的基础解系.

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$.

解 (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{r_2 - r_1 \atop r_3 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_2]{r_1 - 2r_2 \atop r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}A = 2$,基础解含 $3 - 2 = 1$ 个解向量. 同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -19x_3 \\ x_2 = 7x_3 \end{cases}$.

法 1 取 $x_3 = 1$ 得 $x_1 = -19$, $x_2 = 7$,基础解系为 $\xi = (-19,7,1)'$.

法 2 通解为 $\begin{cases} x_1 = -19t \\ x_2 = 7t \\ x_3 = t \end{cases}$ (t 任意),即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -19 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$,故基础解系为 $\xi = (-19,7,1)'$.

(2) $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\1&-1&1&-3\\1&-1&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\0&0&2&-4\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{\substack{r_1+\frac{1}{2}r_2\\ r_3+\frac{1}{2}r_2}}$

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank}A=2$,基础解系含 $4-2=2$ 个解向量. 同解方程组为$\begin{cases}x_1=x_2+x_4\\x_3=2x_4\end{cases}$.

法 1　取 $x_2=1,x_4=0$ 得 $x_1=1,x_3=0$;又取 $x_2=0,x_4=1$ 得 $x_1=1$, $x_3=2$. 故基础解系为 $\xi_1=(1,1,0,0)'$, $\xi_2=(1,0,2,1)'$.

法 2　通解为$\begin{cases}x_1=t_1+t_2\\x_2=t_1\\x_3=2t_2\\x_4=t_2\end{cases}$　(t_1, t_2 任意),即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}\quad(t_1,t_2\in\mathbf{R})$$

故基础解系为 $\xi_1=(1,1,0,0)'$, $\xi_2=(1,0,2,1)'$.

例 3.10　λ 取何值时,线性方程组

$$\begin{cases}(2\lambda+1)x_1-\lambda x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda-1\\(\lambda-2)x_1+(\lambda-1)x_2+(\lambda-2)x_3=\lambda\\(2\lambda-1)x_1+(\lambda-1)x_2+(2\lambda-1)x_3=\lambda\end{cases}$$

有惟一解、无解、无穷多解?在有无穷多解时,求通解.

分析　系数矩阵和(或)右端项含有一个(或多个)参数的线性方程组称为含参数线性方程组. 求解含参数线性方程组时,常采用以下方法:

(1) 对方程组的增广矩阵 B 通过初等行变换化为阶梯形矩阵,然后根据 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B$ 是否成立,讨论参数在什么情况下有解?无解?有解时再求出一般解.

(2) 当方程的个数与未知数的个数相同时,可利用克拉默法则,即计算系数

行列式 $|A|$,**对于使得** $|A|\neq 0$ **的参数值,方程组有惟一解,且可用克拉默法则求出惟一解(当方程的级数** n **不高时);而对于使得** $|A| = 0$ **的参数值,分别列出增广矩阵** B **用消元法求解**.

解 法 1

$$|A| = \begin{vmatrix} 2\lambda+1 & -\lambda & \lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda-2 \\ 2\lambda-1 & \lambda-1 & 2\lambda-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 - c_3} \begin{vmatrix} \lambda & -\lambda & \lambda+1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-2 \\ 0 & \lambda-1 & 2\lambda-1 \end{vmatrix} =$$

$$\lambda\begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-2 \\ \lambda-1 & 2\lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$$

(1) **当** $\lambda\neq 0$ **且** $\lambda\neq\pm 1$ **时,有惟一解**.

(2) **当** $\lambda = 0$ **时,增广矩阵**

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 + r_1]{r_2 + 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\text{rank}\,B = 3$, $\text{rank}\,A = 2$,**无解**.

(3) **当** $\lambda = 1$ **时,增广矩阵**

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 - 3r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1 \backslash r_2]{r_2 \backslash r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$\text{rank}\,B = 3$, $\text{rank}\,A = 2$,**无解**.

(4) **当** $\lambda = -1$ **时,增广矩阵**

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2 - 3r_1 \\ r_1 \times (-1)}]{r_3 - r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \times (-\frac{1}{5})]{r_1 - \frac{1}{5} r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 2 < 3$,有无穷多解. 同解方程组为$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{3}{5} x_3 \\ x_2 = -1 - \frac{3}{5} x_3 \end{cases}$,通解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{5} t \\ x_2 = -1 - \frac{3}{5} t \\ x_3 = t \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t\text{任意})$$

法 2

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2\lambda+1 & -\lambda & \lambda+1 & \lambda-1 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda-2 & \lambda \\ 2\lambda-1 & \lambda-1 & 2\lambda-1 & \lambda \end{array}\right) \longrightarrow \cdots \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1-2\lambda & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -5 & -4\lambda^2-\lambda & 8\lambda^2+2\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda+1) & -(\lambda+1)(2\lambda^2-2\lambda+1) \end{array}\right)$$

(1) 当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq \pm 1$ 时,$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 3$,有惟一解.

(2) 当 $\lambda = 0$ 时,$\operatorname{rank} A = 2$, $\operatorname{rank} B = 3$,无解.

(3) 当 $\lambda = 1$ 时,$\operatorname{rank} A = 2$, $\operatorname{rank} A = 3$,无解.

(4) 当 $\lambda = -1$ 时,$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 2 < 3$,有无穷多解,且

$$B \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),\text{其余同前}.$$

注　如果方程的个数与未知数的个数相同,最好采用方法 2 求解. 因为求含参数的系数矩阵 A 的行列式,比只用初等行变换化含参数的增广矩阵 B 为阶梯形矩阵要容易. 另外,如果直接对 B 进行初等行变换化简,可能会产生讨论不全的错误.

例 3.11　设 n 级方阵 A 的各行元素之和均为零,且 $\operatorname{rank} A = n-1$,则线性

方程组 $Ax=0$ 的通解为________.

分析 应填 $k(1,\cdots,1)'(k\in\mathbf{R})$.

从 $\operatorname{rank}A=n-1$ 知,$Ax=0$ 的基础解系含有 $n-(n-1)=1$ 个解向量.由于 $A\begin{pmatrix}1\\ \cdots\\ 1\end{pmatrix}=0$,所以 $(1,\cdots,1)'$ 是 $Ax=0$ 的非零解,从而是基础解系.故 $Ax=0$ 的通解为 $k(1,\cdots,1)'(k\in\mathbf{R})$.

例 3.12 已知 β_1,β_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解,α_1,α_2 是对应齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系,k_1,k_2 为任意常数,则 $Ax=b$ 的通解是________.

(A) $\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}+k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)$;

(B) $\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}+k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)$;

(C) $\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}+k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)$;

(D) $\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}+k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)$.

分析 应填(B).

$\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$ 不是 $Ax=b$ 的解,从解的结构来看应排除(A)和(C).在(D)中,虽然 $\alpha_1,\beta_1-\beta_2$ 都是 $Ax=0$ 的解,但它们是否线性无关不能保证,即能否成为基础解系不明确,(D)应排除.由 α_1,α_2 是基础解系可以证明 $\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2$ 是基础解系,而 $\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$ 是 $Ax=b$ 的解,故(B)正确.

例 3.13 已知四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的秩为 3,又 η_1,η_2,η_3 是它的三个解向量,其中

$$\eta_1+\eta_2=(1,1,0,2)',\quad \eta_2+\eta_3=(1,0,1,3)'$$

试求 $Ax=b$ 的通解.

分析 关键是找出对应齐次方程组的基础解系和非齐次方程组的一个特解,这可以由方程组解的性质得到.

解 由于四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的秩为 3,故 $Ax=0$ 的基础解系含 $4-3=1$ 个解向量.由解的性质知

$$\eta_3-\eta_1=(\eta_2+\eta_3)-(\eta_1+\eta_2)=$$
$$(1,0,1,3)'-(1,1,0,2)'=(0,-1,1,1)'$$

是 $Ax=0$ 的非零解向量,可以当作基础解系. 又

$$\eta^*=\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1\right)'$$

是 $Ax=b$ 的特解,故通解为

$$x=\eta^*+k(\eta_3-\eta_1)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1\right)'+k(0,-1,1,1)'\quad(k\text{ 任意})$$

例 3.14　设 $\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$ 是 $Ax=b\ (b\neq 0)$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解向量,$\operatorname{rank}A=r$. 证明 $\eta_1-\eta_0,\eta_2-\eta_0,\cdots,\eta_{n-r}-\eta_0$ 是 $Ax=0$ 的基础解系.

分析　要证 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 是 $Ax=0$ 的基础解系,应证明三点:(1) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 是 $Ax=0$ 的解;(2) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 线性无关;(3) $t=n-\operatorname{rank}A$ 或 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 可以表示 $Ax=0$ 的任一解.

证　所给向量组含 $n-r$ 个向量. 因为 $A\eta_i=b\ (i=0,1,\cdots,n-r)$,所以

$$A(\eta_i-\eta_0)=A\eta_i-A\eta_0=b-b=0\quad(i=1,2,\cdots,n-r)$$

即 $\eta_i-\eta_0\ (i=1,2,\cdots,n-r)$ 是 $Ax=0$ 的解向量. 下证它们线性无关. 设

$$k_1(\eta_1-\eta_0)+k_2(\eta_2-\eta_0)+\cdots+k_{n-r}(\eta_{n-r}-\eta_0)=0$$

即
$$(-k_1-k_2-\cdots-k_{n-r})\eta_0+k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}=0$$

因为 $\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性无关,故有 $k_1=\cdots=k_{n-r}=0$,即 $\eta_1-\eta_0,\eta_2-\eta_0,\cdots,\eta_{n-r}-\eta_0$ 线性无关,从而它为 $Ax=0$ 的一个基础解系.

例 3.15　已知 4 级方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量,其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$. 如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$,求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

解　**法 1**　令 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)'$,则由 $Ax=\beta$ 得

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$$

将 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ 代入上式并整理得

$$(2x_1+x_2-3)\alpha_2+(-x_1+x_3)\alpha_3+(x_4-1)\alpha_4=0$$

由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,知

$$\begin{cases}2x_1+x_2-3=0\\-x_1+x_3=0\\x_4-1=0\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}2x_1+x_2=3\\-x_1+x_3=0\\x_4=1\end{cases}$$

解此方程组得通解

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}\quad(k\text{任意})$$

法2 由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关和 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3+0\alpha_4$ 知 A 的秩为3,所以 $Ax=0$ 的基础解系只含一个解向量. 又由 $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+0\alpha_4=0$ 知 $(1,-2,1,0)'$是 $Ax=0$ 的非零解,从而它是 $Ax=0$ 的基础解系. 再由

$$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

知$(1,1,1,1)'$是 $Ax=\beta$的一个特解. 故 $Ax=\beta$的通解为

$$x=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}\quad(k\text{任意})$$

例3.16 设四元齐次线性方程组(Ⅰ):$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$,又已知某齐次线性方程组(Ⅱ)的基础解系为$\xi_1=(0,1,1,0)'$, $\xi_2=(-1,2,2,1)'$. 求(Ⅰ)与(Ⅱ)的公共解.

分析 两个线性方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的公共解就是同时满足两个方程组的解. 关于公共解,有以下几种处理方法:

(1) 如果给出线性方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的一般式,则可以将它们联立求解.

(2) 如果知道线性方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的通解,令其相等求得通解中参数所满足的关系而得到公共解.

(3) 如果知道线性方程组(Ⅰ)的一般式,又知道线性方程组(Ⅱ)的通解,将(Ⅱ)的通解代入(Ⅰ)中,确定通解中参数所满足的关系而求得公共解.

解 **法1** 方程组(Ⅱ)的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2=(-k_2,k_1+2k_2,k_1+2k_2,k_2)'$$

即 $x_1=-k_2$, $x_2=k_1+2k_2$, $x_3=k_1+2k_2$, $x_4=k_2$. 代入(Ⅰ)得$\begin{cases}k_1+k_2=0\\k_1+k_2=0\end{cases}$,

同解方程组为 $k_1=-k_2$,通解为$\begin{cases}k_1=-t\\k_2=t\end{cases}$ (t任意),故公共解为

$$-t\xi_1+t\xi_2=t(-1,1,1,1)'\quad(t\text{任意})$$

法 2　先求(Ⅰ)的基础解系. 由于$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$,

同解方程组为$\begin{cases}x_1=0x_3-x_4\\x_2=0x_3+x_4\end{cases}$,基础解系为

$$\eta_1=(0,0,1,0)',\quad\eta_2=(-1,1,0,1)'$$

由(Ⅰ)与(Ⅱ)的通解相等,得

$$x_1\xi_1+x_2\xi_2=y_1\eta_1+y_2\eta_2\quad\text{或}\quad x_1\xi_1+x_2\xi_2-y_1\eta_1-y_2\eta_2=0$$

即$\begin{cases}-x_2+y_2=0\\x_1+2x_2-y_2=0\\x_1+2x_2-y_1=0\\x_2-y_2=0\end{cases}$,它的系数矩阵

$$\begin{pmatrix}0&-1&0&1\\1&2&0&-1\\1&2&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

通解为　$x_1=-t,\quad x_2=t,\quad y_1=t,\quad y_2=t\quad(t\text{任意})$

公共解为

$$t\eta_1+t\eta_2=t(\eta_1+\eta_2)=t(-1,1,1,1)'\quad(t\text{任意})$$

例 3.17　已知空间三个平面 $a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0(i=1,2,3)$ 的三条交线互相平行,则线性方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\\a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0\end{cases}$的系数矩阵 A 和增广矩阵 B 的秩分别为 $\operatorname{rank}A=$ ________, $\operatorname{rank}B=$ ________.

分析　应填 2 和 3.

首先方程组无解(由交线平行得到). 又无解时只有 $\operatorname{rank}A=1$, $\operatorname{rank}B=2$ 和 $\operatorname{rank}A=2$, $\operatorname{rank}B=3$ 两种情形,而在情形一时,三平面无交线(互相平行),故 $\operatorname{rank}A=2$, $\operatorname{rank}B=3$.

例 3.18 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, 则三条直线 $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 = 0 \end{cases}$ (其中 $a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i = 1,2,3$) 交于一点的充分必要条件是________.

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关;

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(C) $\operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2\}$;

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关;α_1, α_2 线性无关.

分析 应填(D).

三条直线交于一点,方程组有惟一解,从而 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 2$,其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2)$, $B = (\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3)$. 由 $\operatorname{rank} A = 2$ 知 α_1, α_2 线性无关,由 $\operatorname{rank} B = 2$ 知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

例 3.19 设矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 满秩,则直线 $\dfrac{x - a_3}{a_1 - a_2} = \dfrac{y - b_3}{b_1 - b_2} = \dfrac{z - c_3}{c_1 - c_2}$ 与直线 $\dfrac{x - a_1}{a_2 - a_3} = \dfrac{y - b_1}{b_2 - b_3} = \dfrac{z - c_1}{c_2 - c_3}$ 的位置是________.

(A) 相交于一点; (B) 重合;

(C) 平行但不重合; (D) 异面.

分析 应填(A).

由于 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$,且初等变换不改变矩阵的秩,从而后一矩阵仍满秩,所以其行向量组线性无关. 于是两条直线的方向向量 $v_1 = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$, $v_2 = (a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3)$ 不共线,从而排除(B)和(C). 又因这两条直线分别过点 $P_1(a_3, b_3, c_3)$ 和 $P_2(a_1, b_1, c_1)$,构造向量 $v_3 = \overline{P_2 P_1} = (a_3 - a_1, b_3 - b_1, c_3 - c_1)$.

法 1 由于 $v_1 + v_2 + v_3 = 0$,即 $v_3 = -v_1 - v_2$,也即 $\overline{P_2 P_1}$ 在 v_1 和 v_2 张成的平面上,故两直线共面,即它们交于一点,故选(A).

法 2　$v_1 \times v_2 \cdot v_3 = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \end{vmatrix} = 0$，故 v_1, v_2, v_3 共面，从而两直线共面．故选（A）．

例 3.20　λ 为何值时，多项式 $f(x) = x^3 - \lambda x + 4$ 与 $g(x) = 2x^2 + (1-\lambda)x + 2$ 有公共根？

分析　判断两个多项式是否有公共根可以通过它们是否有非零次的最大公因式或它们的结式是否为零来判定．

解　$f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式为

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1-\lambda & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{1 列展开}]{r_3 - 2r_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 4 \\ 1-\lambda & 2+2\lambda & -8 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{4 列展开}]{r_1 - 2r_4}$$

$$2\begin{vmatrix} 1 & -4 & \lambda - 2 \\ 1-\lambda & 2+2\lambda & -8 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - (1-\lambda)r_1}$$

$$2\begin{vmatrix} 1 & -4 & \lambda - 2 \\ 0 & 6-2\lambda & \lambda^2 - 3\lambda - 6 \\ 0 & 9-\lambda & 6-2\lambda \end{vmatrix} =$$

$$2(\lambda^3 - 8\lambda^2 - 3\lambda + 90) = 2(\lambda + 3)(\lambda - 5)(\lambda - 6)$$

要求 $R(f, g) = 0$ 得 $\lambda = -3$ 或 $\lambda = 5$ 或 $\lambda = 6$．因此，当 $\lambda = -3$ 或 $\lambda = 5$ 或 $\lambda = 6$ 时，多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有公共根．

例 3.21　k 取何值时，多项式 $f(x) = x^4 - 4x + k$ 有重根？

分析　多项式 $f(x)$ 有重根的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 有非零次的最大公因式或 $R(f, f') = 0$．

解　由于 $f'(x) = 4x^3 - 4$，所以

$$R(f,f')=\begin{vmatrix}1&0&0&-4&k&0&0\\0&1&0&0&-4&k&0\\0&0&1&0&0&-4&k\\4&0&0&-4&0&0&0\\0&4&0&0&-4&0&0\\0&0&4&0&0&-4&0\\0&0&0&4&0&0&-4\end{vmatrix}=256(k^3-27)$$

由 $R(f,f')=0$ 解得

$$k=3,\quad k=\frac{-3+3\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\quad k=\frac{-3-3\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$$

所以,当 $k=3$ 或 $k=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ 时,$f(x)$ 有重根.

例3 22　**解方程组** $\begin{cases}x^2-y^2-3=0\\x^2-4xy+3y^2+1=0\end{cases}$.

解　**法1**　**令**

$$f(x,y)=x^2-y^2-3=x^2+(-y^2-3)$$
$$g(x,y)=x^2-4xy+3y^2+1=x^2+(-4y)x+(3y^2+1)$$

则

$$R_x(f,g)=\begin{vmatrix}1&0&-y^2-3&0\\0&1&0&-y^2-3\\1&-4y&3y^2+1&0\\0&1&-4y&3y^2+1\end{vmatrix}=16(1-y^2)$$

令 $R_x(f,g)=0$ **得** $y=\pm1$.**将** $y=1$ **和** $y=-1$ **分别代入原方程组,得**

$$\begin{cases}x^2-4=0\\x^2-4x+4=0\end{cases}\quad\text{和}\quad\begin{cases}x^2-4=0\\x^2+4x+4=0\end{cases}$$

这两个方程组的解分别是 $x=2$ **和** $x=-2$,**故原方程组的解为**

$$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases},\quad\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$$

法2　**令**

$$f(x,y)=x^2-y^2-3=(-1)y^2+(x^2-3)$$
$$g(x,y)=x^2-4xy+3y^2+1=3y^2+(-4x)y+(x^2+1)$$

于是

$$R_y(f,g)=\begin{vmatrix}-1 & 0 & x^2-3 & 0\\ 0 & -1 & 0 & x^2-3\\ 3 & -4x & x^2+1 & 0\\ 0 & 3 & -4x & x^2+1\end{vmatrix}=16(4-x^2)$$

令 $R_y(f,g)=0$ 得 $x=\pm 2$. 将 $x=2$ 和 $x=-2$ 分别代入原方程组,得

$$\begin{cases}-y^2+1=0\\ 3y^2-8y+5=0\end{cases},\quad \begin{cases}-y^2+1=0\\ 3y^2+8y+5=0\end{cases}$$

这两个方程组的解分别是 $y=1$ 和 $y=-1$,故原方程组的解为

$$\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases},\quad \begin{cases}x=-2\\ y=-1\end{cases}$$

五、课后习题全解

(一) 第三章习题

1. 用消元法解下列线性方程组.

1) $\begin{cases}x_1+3x_2+5x_3-4x_4=1\\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1\\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3\\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3\\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1\end{cases}$;

2) $\begin{cases}x_1+2x_2-3x_4+2x_5=1\\ x_1-x_2-3x_3+x_4-3x_5=2\\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4+2x_5=7\\ 9x_1-9x_2+6x_3-16x_4+2x_5=25\end{cases}$;

3) $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4\\ x_2-x_3+x_4=-3\\ x_1+3x_2+x_4=1\\ -7x_2+3x_3+x_4=-3\end{cases}$;

4) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0 \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2 \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1 \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4 \end{cases}$;

6) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1 \\ 5x_1+5x_2+2x_3=2 \end{cases}$.

解 1)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[i=2,\cdots,5]{r_i-r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_5-r_2]{\substack{r_3+r_2 \\ r_4+r_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -7 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-5r_5 \\ r_4-7r_5}]{r_1+3r_5}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2 + 3r_3 \\ r_5 + r_3}]{\substack{r_3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ r_1 - 2r_3}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_5 - r_2 \\ r_5 \times (-1)}]{\substack{r_2 \times \frac{1}{2} \\ r_1 + r_2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \longleftrightarrow r_5]{r_2 \longleftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{x_5}{2} \\ x_2 = -\dfrac{x_5}{2} - 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -\dfrac{x_5}{2} - 1 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$，**通解为** $\begin{cases} x_1 = k \\ x_2 = k - 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = k - 1 \\ x_5 = -2k \end{cases}$ （k **任意**）.

2）$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 2 & 7 \\ 9 & -9 & 6 & -16 & 2 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 9r_1}]{r_2 - r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & -7 & 4 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -27 & 6 & 11 & -16 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 9r_2]{r_3 - \frac{7}{3}r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -\frac{25}{3} & \frac{29}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 33 & -25 & 29 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 - 3r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -\frac{25}{3} & \frac{29}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank}\overline{A} = 4 > \operatorname{rank}A = 3$,**故原方程组无解**.

3)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4 + 7r_2]{\substack{r_1 + 2r_2 \\ r_3 - 5r_2}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_4 + 2r_3 \\ r_3 \times \frac{1}{2}}]{\substack{r_1 - \frac{1}{2}r_3 \\ r_2 + \frac{1}{2}r_3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - r_4]{\substack{r_4 \times \frac{1}{8} \\ r_1 + 2r_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank}\overline{A} = \operatorname{rank}A = 4$,**故原方程组有惟一解** $x_1 = -8$, $x_2 = 3$, $x_3 = 6$, $x_4 = 0$.

$$4)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3 - 4r_1 \\ r_4 - 7r_1}]{r_2 - 2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & -51 & 57 & -60 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1 + \frac{7}{17}r_2 \\ r_2 \times \left(-\frac{1}{17}\right)}]{\substack{r_3 - r_2 \\ r_4 - 3r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{17} & \frac{13}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{19}{17} & \frac{20}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故方程组的通解为 $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{17}k_1 - \frac{13}{17}k_2 \\ x_2 = \frac{19}{17}k_1 - \frac{20}{17}k_2 \\ x_3 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases}$ (k_1, k_2 **为任意常数**).

5) $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 - r_1 \\ r_4 + r_1}]{r_2 + 2r_1}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4 - 2r_2]{r_3 + r_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 + r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank}\overline{A} = 4 > \operatorname{rank}A = 3$, **故原方程组无解** .

6) $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_4 - 2r_1 \\ r_5 - 5r_1}]{\substack{r_2 - 3r_1 \\ r_3 - 2r_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -13 & 5 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_5 - 5r_3 \\ r_2 \longleftrightarrow r_3 \\ r_2 \times (-1)}]{\substack{r_1 + 2r_3 \\ r_2 - 4r_3 \\ r_4 - 2r_3}}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -10 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 \longleftrightarrow r_4 \\ r_3 \times \frac{1}{6}}]{\substack{r_5 - r_3 \\ r_3 - 2r_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - 5r_3]{r_1 + 7r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

故方程组通解为 $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{6} + 5k \\ x_2 = \frac{1}{6} - 7k \\ x_3 = \frac{1}{6} + 5k \\ x_4 = 6k \end{cases}$ (k**为任意常数**).

2. **把向量 β 表成向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合**:

1) $\beta = (1,2,1,1)$, $\alpha_1 = (1,1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,1,-1,-1)$, $\alpha_3 = (1,-1,1,-1)$, $\alpha_4 = (1,-1,-1,1)$;

2) $\beta = (0,0,0,1)$, $\alpha_1 = (1,1,0,1)$, $\alpha_2 = (2,1,3,1)$, $\alpha_3 = (1,1,0,0)$, $\alpha_4 = (0,1,-1,-1)$.

解 1) **设** $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4$,**比较对应分量得**

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 1 \\ k_1 + k_2 - k_3 - k_4 = 2 \\ k_1 - k_2 + k_3 - k_4 = 1 \\ k_1 - k_2 - k_3 + k_4 = 1 \end{cases}$$

解此线性方程组

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&0&-2&-2&1\\0&-2&0&-2&0\\0&-2&-2&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\r_2\longleftrightarrow r_3}]{\substack{r_1+\frac{1}{2}r_3\\r_4-r_3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&-2&-2&1\\0&0&-2&2&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3\times\left(-\frac{1}{2}\right)]{\substack{r_4-r_3\\r_1+\frac{1}{2}r_3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&1&0\\0&0&1&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&4&-1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3-\frac{1}{4}r_4\\r_4\times\frac{1}{4}}]{\substack{r_1+\frac{1}{4}r_4\\r_2-\frac{1}{4}r_4}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&\frac{5}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{array}\right)$$

得 $k_1=\frac{5}{4}$，$k_2=\frac{1}{4}$，$k_3=-\frac{1}{4}$，$k_4=-\frac{1}{4}$．故 $\beta=\frac{1}{4}(5\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)$．

2）设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4$，比较对应分量得

$$\begin{cases}k_1+2k_2+k_3=0\\k_1+k_2+k_3+k_4=0\\3k_2-k_4=0\\k_1+k_2-k_4=1\end{cases}$$

解得 $k_1=1$，$k_2=0$，$k_3=-1$，$k_4=0$，故 $\beta=\alpha_1-\alpha_3$．

3．证明：如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，则向量 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示．

证　由题设，存在不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_{r+1}$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\beta=0 \qquad (*)$$

这里 $k_{r+1}\neq 0$．否则，若 $k_{r+1}=0$，则 $k_1,\cdots,k_r$ 不全为零使（*）式成立，这与 α_1，

$\alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关的条件矛盾.由(*)得

$$\beta = -\sum_{i=1}^{r} \frac{k_i}{k_{r+1}} \alpha_i$$

4. $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), i = 1,2,\cdots,n$.证明:如果 $|a_{ij}| \neq 0$,那么 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

证 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$,得到线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \cdots + a_{n1}k_n = 0 \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{n2}k_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \cdots + a_{nn}k_n = 0 \end{cases}$$

由于系数行列式的转置行列式 $|a_{ij}| \neq 0$,故齐次线性方程组只有零解,从而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

5. 设 $t_1, t_2, \cdots, t_r$ 是互不相同的数,$r \leq n$.证明:$\alpha_i = (1, t_i, \cdots, t_i^{n-1})$, $i = 1,2,\cdots,r$,是线性无关的.

证 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$,比较对应分量得

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \cdots + k_r = 0 \\ t_1k_1 + t_2k_2 + \cdots + t_rk_r = 0 \\ \cdots\cdots \\ t_1^{n-1}k_1 + t_2^{n-1}k_2 + \cdots + t_r^{n-1}k_r = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

1) 当 $r = n$ 时,方程组(*)的系数行列式为范德蒙德行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ t_1^2 & t_2^2 & \cdots & t_n^2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \cdots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (t_i - t_j) \neq 0$$

故方程组(*)只有零解,从而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

2) 当 $r < n$ 时,令

$$\beta_1 = (1, t_1, t_1^2, \cdots, t_1^{r-1}), \cdots, \beta_r = (1, t_r, t_r^2, \cdots, t_r^{r-1})$$

由 1) 可知 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性无关.而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是原 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 的延长向量组,因此,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 也线性无关.

6. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,证明:$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也线性无关.

证 设 $k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_1) = 0$,整理得

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$$

由题设,α_1,α_2,α_3 线性无关,有

$$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$$

解得惟一零解 $k_1=k_2=k_3=0$,故 $\alpha_1+\alpha_2$,$\alpha_2+\alpha_3$,$\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

7. 已知 α_1,α_2,$\cdots$,α_s 的秩为 r,证明:α_1,α_2,$\cdots$,α_s 中任意 r 个线性无关的向量都构成它的一极大线性无关组.

证　设 α_{i_1},α_{i_2},$\cdots$,α_{i_r} 是 α_1,α_2,$\cdots$,α_s 中任意 r 个线性无关的向量组,下证任意 $\alpha_j(j=1,2,\cdots,s)$ 都可由 α_{i_1},α_{i_2},$\cdots$,α_{i_r} 线性表示,即证得结论.

向量组 α_{i_1},α_{i_2},$\cdots$,α_{i_r},α_j 是线性相关的(否则原向量组的秩就超过 r 了),而 α_{i_1},α_{i_2},$\cdots$,α_{i_r} 是线性无关的,故 α_j 可由 α_{i_1},α_{i_2},$\cdots$,α_{i_r} 线性表示.由 α_j 的任意性,结论得证.

8. 设 α_1,α_2,$\cdots$,α_s 的秩为 r,α_{i_1},α_{i_2},$\cdots$,α_{i_r} 是 α_1,α_2,$\cdots$,α_s 中的 r 个向量,使得 α_1,α_2,$\cdots$,α_s 中每个向量都可被它们线性表出,证明:α_{i_1},α_{i_2},$\cdots$,α_{i_r} 是 α_1,α_2,$\cdots$,α_s 的一极大线性无关组.

证　由题设知,向量组 α_{i_1},α_{i_2},$\cdots$,α_{i_r} 与 α_1,α_2,$\cdots$,α_s 等价,从而秩同为 r.由此知向量组 α_{i_1},α_{i_2},$\cdots$,α_{i_r} 线性无关,故它是 α_1,α_2,$\cdots$,α_s 的一个极大线性无关组.

9. 证明:一个向量组的任何一个线性无关组都可以扩充成一极大线性无关组.

证　法1　设(Ⅰ):α_{i_1},α_{i_2},$\cdots$,α_{i_s} 是向量组(Ⅱ):α_1,α_2,$\cdots$,α_m 的一个线性无关部分组,而(Ⅲ):β_1,β_2,$\cdots$,β_r 是(Ⅱ)的任一极大无关组,则(Ⅰ)可由(Ⅲ)线性表示.于是,(Ⅲ)中存在 s 个向量(例如前 s 个)用(Ⅰ)代替后得(Ⅳ)α_{i_1},α_{i_2},$\cdots$,α_{i_s},β_{s+1},$\cdots$,β_r 与(Ⅲ)等价,从而(Ⅳ)也是原向量组(Ⅱ)的极大无关组,即线性无关组(Ⅰ)可扩充为(Ⅱ)的一极大线性无关组.

法2　设(Ⅰ)是向量组(Ⅱ)的一个线性无关部分组.

1) 若(Ⅱ)中每个向量都可由(Ⅰ)线性表示,则(Ⅰ)已为(Ⅱ)的一极大线性无关组;

2) 若(Ⅱ)中有向量 α_{j_1} 不能由(Ⅰ)线性表示,则(Ⅴ):α_{i_1},α_{i_2},$\cdots$,α_{i_s},α_{j_1} 也是(Ⅱ)的一个线性无关组.

若 $s+1=r$,则(Ⅴ)已是(Ⅱ)的一极大线性无关组.

若 $s+1<r$,则(Ⅱ)中必有 α_{j_2} 不能由(Ⅴ)线性表示,则 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_s}, \alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}$ 必线性无关.

继续以上过程,总可得到一个包含(Ⅰ)在内的线性无关组,使(Ⅱ)中每个向量都可由它线性表示,即它是(Ⅱ)的一个包含(Ⅰ)的线性无关部分组,亦即每个线性无关部分组均可扩充为一极大线性无关组.

10. 设 $\alpha_1=(1,-1,2,4)$, $\alpha_2=(0,3,1,2)$, $\alpha_3=(3,0,7,14)$, $\alpha_4=(1,-1,2,0)$, $\alpha_5=(2,1,5,6)$.

1) 证明:α_1, α_2 线性无关;

2) 把 α_1, α_2 扩充成一极大线性无关组.

解 1) $\alpha_1 \neq \lambda\alpha_2$,故 α_1 与 α_2 线性无关.

2) 由 $\alpha_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$,得

$$\begin{cases} k_1 = 3 \\ -k_1+3k_2=0 \\ 2k_1+k_2=7 \\ 4k_1+2k_2=14 \end{cases}$$

解得 $k_1=3$, $k_2=1$. 即 α_3 可由 α_1, α_2 线性表示.

由 $\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$,得

$$\begin{cases} k_1 = 1 \\ -k_1+3k_2=-1 \\ 2k_1+k_2=2 \\ 4k_1+2k_2=0 \end{cases}$$

该方程组无解,即 α_4 不能由 α_1, α_2 线性表示,于是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关.

由 $\alpha_5=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4$,得

$$\begin{cases} k_1+k_3 = 2 \\ -k_1+3k_2-k_3=1 \\ 2k_1+k_2+2k_3=5 \\ 4k_1+2k_2=6 \end{cases}$$

解得 $k_1=2$, $k_2=1$, $k_3=0$,即 α_5 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性表示.

故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 中任一向量均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性表示,且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关,故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是由 α_1, α_2 扩充的一极大线性无关组.

11. 用消元法求下列向量组的极大线性无关组与秩:

1) $\alpha_1=(6,4,1,-1,2)$, $\alpha_2=(1,0,2,3,-4)$, $\alpha_3=(1,4,-9,-16,22)$,

$\alpha_4=(7,1,0,-1,3)$;

2) $\alpha_1=(1,-1,2,4)$, $\alpha_2=(0,3,1,2)$, $\alpha_3=(3,0,7,14)$, $\alpha_4=(1,-1,2,0)$, $\alpha_5=(2,1,5,6)$.

解

$$1)\ (\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3',\alpha_4')=\begin{pmatrix}6&1&1&7\\4&0&4&1\\1&2&-9&0\\-1&3&-16&-1\\2&-4&22&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4+r_3\\r_5-2r_3\\r_1\leftrightarrow r_3}]{\substack{r_1-6r_3\\r_2-4r_3}}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&-9&0\\0&-8&40&1\\0&-11&55&7\\0&5&-25&-1\\0&-8&40&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_5-r_2\\r_3+2r_4}}\begin{pmatrix}1&2&-9&0\\0&-8&40&1\\0&-1&5&5\\0&5&-25&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4+5r_3\\r_2\leftrightarrow r_3}]{r_2-8r_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&-9&0\\0&-1&5&5\\0&0&0&-39\\0&0&0&24\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_3\times\left(-\frac{1}{39}\right)\\r_4-24r_3}}\begin{pmatrix}1&2&-9&0\\0&-1&5&5\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ **的秩为** 3, **且** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ (**或** $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$) **为极大线性无关组**.

$$2)\ (\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3',\alpha_4',\alpha_5')=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4-4r_1}]{r_2+r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&0&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\leftrightarrow r_3\\r_3\leftrightarrow r_4}]{\substack{r_2-3r_3\\r_4-2r_3}}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所给向量组的秩为 3, **极大线性无关组为** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ (**或** $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$, **或** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$, **或** $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$).

12. 证明:如果向量组(Ⅰ)可以由向量组(Ⅱ)线性表示,那么(Ⅰ)的秩不超过(Ⅱ)的秩.

证　由假设,(Ⅰ)的极大线性无关组也可由(Ⅱ)的极大线性无关组线性表示,由教材定理1的推论1即可得证 rank(Ⅰ) ≤ rank(Ⅱ).

13. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是一组 n 维向量,已知单位坐标向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 可被它们线性表出,证明:$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

证　法1　(反证法)若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关,则至少有一 α_i 可由其他 α_j 线性表示(不妨设 α_n 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性表示).由题设,$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示,从而可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性表示,而任一 n 维向量均可由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性表示,因而也可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性表示.由此得全体 n 维向量构成的向量集合 R^n 的秩小于 n,这与 R^n 的秩等于 n 矛盾,故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

法2　设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的秩为 r,则 $r \leq n$,而 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 的秩为 n.由题设,$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出,据上题,$n \leq r$,故 $r = n$.

14. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是一组 n 维向量,证明:$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是任一 n 维向量都可被它们线性表出.

证　充分性.设任意 n 维向量均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示,则单位坐标向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出,由上题知,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

必要性.法1　设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关,则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 R^n 的极大线性无关组,因此,任意 n 维向量均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示.

法2　设 α 是任意 n 维向量,则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \alpha$ 是 $n+1$ 个 n 维向量,必线性相关,而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关,故 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示.

15. 证明:方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

对任何 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都有解的充分必要条件是系数行列式 $|a_{ij}| \neq 0$.

证　充分性.法1　设 $|a_{ij}| \neq 0$,则系数矩阵 A 的秩与增广矩阵 $\overline{A}$ 的秩均为 n,方程组总有解.

法2　设 $|a_{ij}| \neq 0$,则由克拉默法则知,对任意的 $b_1, b_2, \cdots, b_n$,方程组总

有解.

必要性.设方程组 $Ax = b$ 对任何 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 总有解,记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$,则方程组可改写成

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$$

这表示任意 n 维向量 b 总可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示.由上题知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关,即 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$ 只有零解,故 $|a_{ij}| \neq 0$.

16. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$ 有相同秩,证明:$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$ 等价.

证　由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$ 线性表示,只需证 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示,即 $\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的极大线性无关组为 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_l}$ $(l \leq r)$,由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$ 的秩相同,从而,$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_l}$ 也是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$ 的极大线性无关组,故 $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_s$ 可由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_l}$ 线性表示,从而可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示.

17. 设 $\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_r$,$\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_r$,$\cdots$,$\beta_r = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{r-1}$,证明:$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 有相同的秩.

证　只需证两向量组等价.由于 β_i 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性表示,下证 α_i 可由 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性表示.由题设

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r = (r-1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r)$$

于是　$$\alpha_i + \beta_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = \frac{1}{r-1}(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r)$$

即　$$\alpha_i = -\beta_i + \frac{1}{r-1}(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r) \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

可见 α_i 可由 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性表示,故 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 等价,从而秩相同.

18. 计算下列矩阵的秩:

1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$;　　2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{bmatrix}$;

5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

解 1) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3 + r_2 \\ r_1 \longleftrightarrow r_4}]{\substack{r_2 \times \frac{1}{2} \\ r_1 - r_2}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{rank} A = 4$.

2) $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_3 - 2r_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{rank} A = 3$.

3) $$\begin{bmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 - 5r_3]{r_1 - 2r_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 104 & 21 & 7 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{rank} A = 2$.

4) $\operatorname{rank} A = 3$.

5) $\operatorname{rank} A = 5$.

19. **讨论** λ, a, b **取什么值时下列方程组有解,并求解:**

1) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} (\lambda + 3) x_1 + x_2 + 2 x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + (\lambda - 1) x_2 + x_3 = 2\lambda \\ 3(\lambda + 1) x_1 + \lambda x_2 + (\lambda + 3) x_3 = 3 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} a x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + b x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2b x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$.

解　1) $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$

当 $\lambda \neq -2$ **且** $\lambda \neq 1$ **时,方程组有惟一解 . 利用克拉默法则,得**

$$x_1 = \frac{-(\lambda + 1)}{\lambda + 2}, \quad x_2 = \frac{1}{\lambda + 2}, \quad x_3 = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda + 2}$$

当 $\lambda = -2$ **时**,

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 + 2r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank} A = 3 > \operatorname{rank} A = 2$,**故方程组无解 .**

当 $\lambda = 1$ **时**,

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为 $x_1 = -x_2 - x_3 + 1$,**通解为**

$$\begin{cases} x_1 = 1 - k_1 - k_2 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = k_2 \end{cases} \quad (k_1,\ k_2\ \text{为任意常数})$$

2) $D = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_2]{r_1 - r_2} \begin{vmatrix} 3 & 2-\lambda & 1 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3 & 3-2\lambda & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2-\lambda & 1 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_3} \begin{vmatrix} 3 & 2-\lambda & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} =$$

$$\lambda(\lambda-1)\begin{vmatrix} 3 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)$$

1°. **当** $\lambda \neq 0$ **且** $\lambda \neq 1$ **时,方程组有惟一解,由于**

$$D_1 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 2\lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3 & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 15\lambda + 9$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \lambda+3 & \lambda & 2 \\ \lambda & 2\lambda & 1 \\ 3(\lambda+1) & 3 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 12\lambda - 9$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix} = 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 12\lambda - 9$$

由克拉默法则,方程组的惟一解为

$$x_1 = \frac{\lambda^3 + 3\lambda^2 - 15\lambda + 9}{\lambda^2(\lambda-1)}, \quad x_2 = \frac{\lambda^3 + 12\lambda - 9}{\lambda^2(\lambda-1)}, \quad x_3 = \frac{4\lambda^3 - 3\lambda^2 - 12\lambda + 9}{\lambda^2(\lambda-1)}$$

2°. **当** $\lambda = 0$ **时,**

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank}\overline{A} = 3 > \operatorname{rank}A = 2$,**故方程组无解**.

3°. **当** $\lambda = 1$ **时**,$\operatorname{rank}\overline{A} = 3 > \operatorname{rank}A = 2$,**故方程组无解**.

3) $D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix} = -b(a-1)$

1°. 当 $a \neq 1$ 且 $b \neq 0$ 时,方程组有惟一解(由克拉默法则)

$$x_1 = \frac{2b-1}{b(a-1)},\quad x_2 = \frac{1}{b},\quad x_3 = \frac{1+2ab-4b}{b(a-1)}$$

2°. 当 $b = 0$ 时,

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank}\overline{A} = 3 > \operatorname{rank}A = 2$,故方程组无解 .

3°. 当 $a = 1$ 时,

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

当 $b = \frac{1}{2}$ 时,

$$\overline{A} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

方程组通解为

$$\begin{cases} x_1 = 2 - k \\ x_2 = 2 \\ x_3 = k \end{cases} \quad (k\text{为任意常数})$$

当 $b \neq \frac{1}{2}$ 时,

$$\overline{A} \xrightarrow{r_3 \times \frac{1}{2b-1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \longleftrightarrow r_3]{r_2 + (1-b)r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank}\overline{A} = 3 > \operatorname{rank}A = 2$,故方程组无解 .

20. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系,并用它表出全部解:

1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4-x_5=0 \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0 \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0 \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \end{cases}$.

解 1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-5r_1]{r_2-3r_1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1=x_3+x_4+5x_5 \\ x_2=-2x_3-2x_4-6x_5 \end{cases}$

通解为 $\begin{cases} x_1=k_1+k_2+5k_3 \\ x_2=-2k_1-2k_2-6k_3 \\ x_3=k_1 \\ x_4=k_2 \\ x_5=k_3 \end{cases}$ (k_1, k_2, k_3 **为任意常数**)

基础解系为

$$(1,-2,1,0,0)',\quad (1,-2,0,1,0)',\quad (5,-6,0,0,1)'$$

2) $$A=\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1\\1&-1&2&-1&0\\4&-2&6&3&-4\\2&4&-2&4&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-4r_1}}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&-2&2&2&1\\0&-6&6&15&0\\0&2&-2&10&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1+\frac{1}{2}r_2\\r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}]{\substack{r_3-3r_2\\r_4+r_2}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&-2&-\frac{1}{2}\\0&1&-1&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&9&-3\\0&0&0&12&-4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0&-\frac{7}{6}\\0&1&-1&0&-\frac{5}{6}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

同解方程组为
$$\begin{cases}x_1=-x_3+\frac{7}{6}x_5\\x_2=x_3+\frac{5}{6}x_5\\x_4=\frac{1}{3}x_5\end{cases}$$

取 $x_3=1$, $x_5=0$ **得** $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_4=0$; **又取** $x_3=0$, $x_5=1$ **得** $x_1=\frac{7}{6}$, $x_2=\frac{5}{6}$, $x_4=\frac{1}{3}$,**故**

$$\xi_1=(-1,1,1,0,0)',\quad \xi_2=\left(\frac{7}{6},\frac{5}{6},0,\frac{1}{3},1\right)'$$

3)

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1&1&-1\\2&1&-1&-1&-1\\1&7&-5&-5&5\\3&-1&-2&1&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-2&1&1&-1\\0&5&-3&-3&1\\0&9&-6&-6&6\\0&5&-5&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_3-2r_2\\r_4-r_2}}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&1&1&-1\\0&5&-3&-3&1\\0&-1&0&0&4\\0&0&-2&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&1&-9\\0&1&0&0&-4\\0&0&-3&-3&21\\0&0&-2&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1-r_3\\r_3+2r_4}]{r_3\times\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&-2\\0&1&0&0&-4\\0&0&1&1&-7\\0&0&0&3&-13\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&-2\\0&1&0&0&-4\\0&0&1&0&-\frac{8}{3}\\0&0&0&1&-\frac{13}{3}\end{pmatrix}$$

同解方程组为

$$x_1=2x_5,\quad x_2=4x_5,\quad x_3=\frac{8}{3}x_5,\quad x_4=\frac{13}{3}x_5$$

取 $x_5=3$ **得** $x_1=6$，$x_2=12$，$x_3=8$，$x_4=13$.**故基础解系为**

$$\boldsymbol{\xi}=(6,12,8,13,3)'$$

4)

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1\\2&1&-1&2&-3\\3&-2&-1&1&-2\\2&-5&1&-2&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1\\0&5&-3&4&-5\\0&4&-4&4&-5\\0&-1&-1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+4r_4\\r_2\longleftrightarrow r_4\\r_2\times(-1)}]{\substack{r_1-2r_4\\r_2+5r_4}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&3&-1&1\\0&1&1&0&0\\0&0&-8&4&-5\\0&0&-8&4&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3\times\left(-\frac{1}{8}\right)\\r_1-3r_3\\r_2-r_3}]{r_4-r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{7}{8}\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{5}{8}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{5}{8}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_4+\frac{7}{8}x_5\\x_2=-\frac{1}{2}x_4+\frac{5}{8}x_5\\x_3=\frac{1}{2}x_4-\frac{5}{8}x_5\end{cases}$$

取 $x_4=2$，$x_5=0$ **得** $x_1=-1$，$x_2=-1$，$x_3=1$；**又取** $x_4=0$，$x_5=8$ **得** $x_1=7$，$x_2=5$，$x_3=-5$.**故基础解系为**

$$\xi_1 = (-1, -1, 1, 2, 0)', \quad \xi_2 = (7, 5, -5, 0, 8)'$$

21. 用导出组的基础解系表出第 1 题(1),(4),(6) 题中线性方程组的全部解 .

解　(1) 基础解系为 $\xi = (1, 1, 0, 1, -2)'$,全部解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (k\text{为任意常数})$$

(4) 基础解系为 $\xi_1 = (3, 19, 17, 0)'$, $\xi_2 = (13, 20, 0, -17)'$,全部解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 19 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 13 \\ 20 \\ 0 \\ -17 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数})$$

(6) 基础解系为 $\xi = (5, -7, 5, 6)'$,全部解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (k\text{为任意常数})$$

22. a, b 取什么值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}$$

有解 ?在有解的情形,求一般解 .

解　$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_4 - 5r_1]{r_2 - 3r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & a-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & b-5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_4 + r_3 \\ r_2 \longleftrightarrow r_3}]{\substack{r_1 - r_3 \\ r_2 + r_3}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}$$

当 $a \neq 0$ 或 $b \neq 2$ 时,$\mathrm{rank}\overline{A} = 3$, $\mathrm{rank}A = 2$,方程组无解.

当 $a = 0$ 且 $b = 2$ 时,$\mathrm{rank}\overline{A} = \mathrm{rank}A = 2 < 5$,方程组有无穷多解.

同解方程组为
$$\begin{cases} x_1 = -2 + x_3 + x_4 + 5x_5 \\ x_2 = 3 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases}$$

一般解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(k_1, k_2, k_3 为任意常数)

23. 设 $x_1 - x_2 = a_1$, $x_2 - x_3 = a_2$, $x_3 - x_4 = a_3$, $x_4 - x_5 = a_4$, $x_5 - x_1 = a_5$.证明:这方程组有解的充分必要条件为

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = 0$$

在有解的情况,求出它的一般解.

证
$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{pmatrix} \xrightarrow[i = 1,2,3,4]{r_5 + r_i}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^{5} a_i \end{pmatrix}$$

可见 $\mathrm{rank}A = 4$,而 $\mathrm{rank}\overline{A} = 4$ 的充分必要条件是 $\sum_{i=1}^{5} a_i = 0$,故原方程组有解的充分必要条件是 $\sum_{i=1}^{5} a_i = 0$.

当 $\sum_{i=1}^{5} a_i = 0$ 时,原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \end{cases}$$

一般解为

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + k \\ x_2 = a_2 + a_3 + a_4 + k \\ x_3 = a_3 + a_4 + k \\ x_4 = a_4 + k \\ x_5 = k \end{cases} \quad (k\text{ 为任意常数})$$

24. 证明:与基础解系等价的线性无关向量组也是基础解系.

证　由于等价的线性无关向量组含有向量的个数相等.设(Ⅰ):$\xi_1, \cdots, \xi_k$ 是齐次线性方程组的一个基础解系,又(Ⅱ):$\eta_1, \cdots, \eta_k$ 是与(Ⅰ)等价的线性无关向量组,那么(Ⅱ)可由(Ⅰ)线性表出,从而 $\eta_1, \cdots, \eta_k$ 是齐次线性方程组的线性无关解.

齐次线性方程组的任意一个解 β 都可由(Ⅰ)线性表出,从而可由(Ⅱ)线性表出(因(Ⅰ)与(Ⅱ)等价).即证得(Ⅱ):$\eta_1, \cdots, \eta_k$ 也是基础解系.

25. 设齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵的秩为 r,证明:方程组的任意 $n-r$ 个线性无关的解都是它的一个基础解系.

证　设(Ⅰ):$\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 为方程组的一个基础解系.(Ⅱ):$\eta_1, \cdots, \eta_{n-r}$ 是方程组的任意 $n-r$ 个线性无关的解向量,那么,向量组(Ⅲ):$\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$,

$\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$ 的秩仍为 $n-r$. 由本章习题 7 知,(Ⅱ) 与(Ⅰ) 都是向量组(Ⅲ) 的极大线性无关组,所以(Ⅰ) 与(Ⅱ) 等价,再由上题知,(Ⅱ):$\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$ 也是方程组的基础解系.

26. 证明:如果 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是一线性方程组的解,那么 $u_1\eta_1+u_2\eta_2+\cdots+u_t\eta_t$(其中 $u_1+u_2+\cdots+u_t=1$) 也是一个解.

证　法 1　设线性方程组 $Ax=b$ 的一般解为

$$x=\alpha_0+(k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r})$$

其中 α_0 是 $Ax=b$ 的一个特解,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为其导出组的一个基础解系.

由题设,$\eta_1,\cdots,\eta_t$ 是 $Ax=b$ 的解,那么

$$\eta_i=\alpha_0+(k_{i1}\xi_1+\cdots+k_{i,n-r}\xi_{n-r})\qquad(i=1,2,\cdots,t)$$

利用 $u_1+u_2+\cdots+u_t=1$,有

$$\begin{aligned}u_1\eta_1+u_2\eta_2+\cdots+u_t\eta_t&=(u_1+\cdots+u_t)\alpha_0+\left(\sum_{i=1}^{t}u_ik_{i1}\right)\xi_1+\cdots+\\&\left(\sum_{i=1}^{t}u_ik_{i,n-r}\right)\xi_{n-r}=\\&\alpha_0+(k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r})\end{aligned}$$

其中 $$k_j=u_1k_{1j}+\cdots+u_tk_{tj}\quad(j=1,\cdots,n-r)$$

因此 $u_1\eta_1+\cdots+u_t\eta_t$ 也是 $Ax=b$ 的解.

法 2　因为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是 $Ax=b$ 的解,所以

$$\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1,\cdots,\eta_t-\eta_1$$

是其导出组 $Ax=0$ 的解. 利用 $u_1+u_2+\cdots+u_t=1$,有

$$\begin{aligned}u_1\eta_1+u_2\eta_2+\cdots+u_t\eta_t&=(1-u_2-\cdots-u_t)\eta_1+u_2\eta_2+\cdots+u_t\eta_t=\\&\eta_1+u_2(\eta_2-\eta_1)+\cdots+u_t(\eta_t-\eta_1)\end{aligned}$$

即 $u_1\eta_1+\cdots+u_t\eta_t$ 也是 $Ax=b$ 的解.

法 3　由题设 $A\eta_i=b\ (i=1,2,\cdots,t)$,则

$$\begin{aligned}A(u_1\eta_1+u_2\eta_2+\cdots+u_t\eta_t)&=u_1(A\eta_1)+u_2(A\eta_2)+\cdots+u_t(A\eta_t)=\\&u_1b+u_2b+\cdots+u_tb=\\&(u_1+u_2+\cdots+u_t)b=b\end{aligned}$$

即 $u_1\eta_1+u_2\eta_2+\cdots+u_t\eta_t$ 也是 $Ax=b$ 的解.

27. 多项式 $2x^3-3x^2+\lambda x+2$ 与 $x^4+\lambda x^2-3x-1$ 在 λ 取什么值时,有公共根?

解　设 $f(x)=2x^3-3x^2+\lambda x+2$, $g(x)=x^4+\lambda x^2-3x-1$,则它们的

结式

$$
R(f,\ g)=\begin{vmatrix}
2 & -3 & \lambda & 2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 2 & -3 & \lambda & 2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2 & -3 & \lambda & 2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 2 & -3 & \lambda & 2\\
1 & 0 & \lambda & -3 & -1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & \lambda & -3 & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & \lambda & -3 & -1
\end{vmatrix}
\xRightarrow{r_1-2r_5}
\begin{vmatrix}
0 & -3 & -\lambda & 8 & 2 & 0 & 0\\
0 & 2 & -3 & \lambda & 2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2 & -3 & \lambda & 2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 2 & -3 & \lambda & 2\\
1 & 0 & \lambda & -3 & -1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & \lambda & -3 & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & \lambda & -3 & -1
\end{vmatrix}
\xRightarrow[r_2-2r_6]{r_1+3r_6}
$$

$$
\begin{vmatrix}
0 & 0 & -\lambda & 8+3\lambda & -7 & -3 & 0\\
0 & 0 & -3 & -\lambda & 8 & 2 & 0\\
0 & 0 & 2 & -3 & \lambda & 2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 2 & -3 & \lambda & 2\\
1 & 0 & \lambda & -3 & -1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & \lambda & -3 & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & \lambda & -3 & -1
\end{vmatrix}
\xRightarrow[\text{(两次)}]{\text{1 列展开}}
\begin{vmatrix}
-\lambda & 8+3\lambda & -7 & -3 & 0\\
-3 & -\lambda & 8 & 2 & 0\\
2 & -3 & \lambda & 2 & 0\\
0 & 2 & -3 & \lambda & 2\\
1 & 0 & \lambda & -3 & -1
\end{vmatrix}
\xRightarrow[\substack{r_2+3r_5\\ r_3-2r_5}]{r_1+\lambda r_5}
$$

$$
\begin{vmatrix}
0 & 8+3\lambda & \lambda^2-7 & -3-3\lambda & -\lambda\\
0 & -\lambda & 3\lambda+8 & -7 & -3\\
0 & -3 & -\lambda & 8 & 2\\
0 & 2 & -3 & \lambda & 2\\
1 & 0 & \lambda & -3 & -1
\end{vmatrix}
\xRightarrow[\substack{r_1-\lambda r_2\\ r_4+2r_2}]{\substack{\text{1 列展开}\\ r_3-r_4\\ r_2+r_4}}
$$

$$\begin{vmatrix} \lambda^2+\lambda+8 & -2\lambda^2-5\lambda-7 & -\lambda^2+4\lambda-3 & 0 \\ 2-\lambda & 3\lambda+5 & \lambda-7 & -1 \\ -5 & 3-\lambda & 8-\lambda & 0 \\ 6-2\lambda & 6\lambda+7 & 3\lambda-14 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-(\lambda^4-\lambda^3-40\lambda^2-241\lambda-471)$$

方程 $\lambda^4-\lambda^3-40\lambda^2-241\lambda-471=0$ 的每个根 λ,都可使所给两个多项式有公共根 .

28. 解下列联立方程:

1) $\begin{cases} 5y^2-6xy+5x^2-16=0 \\ y^2-xy+2x^2-y-x-4=0 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x^2+y^2+4x-2y+3=0 \\ x^2+4xy-y^2+10y-9=0 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} y^2+(x-4)y+x^2-2x+3=0 \\ y^3-5y^2+(x+7)y+x^3-x^2-5x-3=0 \end{cases}$.

解　1) 令

$$f(x,y)=5y^2-6xy+5x^2-16$$
$$g(x,y)=y^2-xy+2x^2-y-x-4$$

利用结式消去 y

$$R_y(f,g)=\begin{vmatrix} 5 & -6x & 5x^2-16 & \\ & 5 & -6x & 5x^2-16 \\ 1 & -x-1 & 2x^2-x-4 & \\ & 1 & -x-1 & 2x^2-x-4 \end{vmatrix}=$$

$$32(x^4-3x^3+x^2+3x-2)=32(x+1)(x-1)^2(x-2)$$

$R_y(f,g)=0$ 有根 $x=-1$, $x=1$(2 重), $x=2$,分别代入原方程得

当 $x=1$ 时,$\begin{cases} 5y^2-6y-11=0 \\ y^2-2y-3=0 \end{cases}$, 解得 $y=-1$;

当 $x=-1$ 时,$\begin{cases} 5y^2+6y-11=0 \\ y^2-1=0 \end{cases}$, 解得 $y=1$;

当 $x=2$ 时,$\begin{cases} 5y^2-12y+4=0 \\ y^2-3y+2=0 \end{cases}$, 解得 $y=2$.

故原方程组有 4 个公共解

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 = -1 \\ y_3 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_4 = 2 \\ y_4 = 2 \end{cases}$$

2)(方法同1)题)

$$R_y(f, g) = 4(x+1)(x+3)\left[x + \frac{10+3\sqrt{5}}{5}\right]\left[x + \frac{10-3\sqrt{5}}{5}\right]$$

可得4个公共解

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 = -\dfrac{10+3\sqrt{5}}{5} \\ y_3 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{5} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_4 = -\dfrac{10-3\sqrt{5}}{5} \\ y_4 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

3) $R_y(f, g) = 4x^2(x+1)^2(x-2)^2$, 可得6个公共解

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 = -1 \\ y_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = -1 \\ y_4 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_5 = 2 \\ y_5 = 1+\sqrt{2}\mathrm{i} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_6 = 2 \\ y_6 = 1-\sqrt{2}\mathrm{i} \end{cases}$$

(二) 第三章补充题

1. 假设向量 β 可以经向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表出,证明:表示法是惟一的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

证 必要性.设 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$ 且表法惟一.

(反证法)假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关,那么,存在不全为零的数 $l_1, l_2, \cdots, l_r$ 使

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_r\alpha_r = 0$$

两式相加,得

$$\beta = (k_1 + l_1)\alpha_1 + (k_2 + l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_r + l_r)\alpha_r$$

由 $l_1, l_2, \cdots, l_r$ 不全为零知,β 有两种不同的表示法,这与题设矛盾,故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

充分性.设 β 有两种表示法

$$\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r, \quad \beta = l_1\alpha_1 + \cdots + l_r\alpha_r$$

两式相减得

$$(k_1 - l_1)\alpha_1 + \cdots + (k_r - l_r)\alpha_r = 0$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关,得 $k_1 - l_1 = 0, \cdots, k_r - l_r = 0$,即 $k_1 = l_1, \cdots,$

$k_r = l_r$,故表示法惟一.

2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是一组线性无关的向量,$\beta_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\alpha_j$, $i = 1,2,\cdots,r$,证明:$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性无关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (*)$$

解 设 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_r\beta_r = 0$,则

$$\sum_{i=1}^{r} k_i\beta_i = \sum_{i=1}^{r} k_i\Big(\sum_{j=1}^{r} a_{ij}\alpha_j\Big) = \sum_{j=1}^{r}\Big(\sum_{i=1}^{r} k_i a_{ij}\Big)\alpha_j = 0$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关知

$$\sum_{i=1}^{r} k_i a_{ij} = 0 \qquad (j = 1,2,\cdots,r)$$

此关于 k_i 的齐次线性方程组只有零解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1r} & a_{2r} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

故 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性无关的充分必要条件是(*)式成立.

3. 证明:$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$(其中 $\alpha_1 \neq 0$)线性相关的充分必要条件是至少有一 α_i $(1 < i \leq s)$ 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性表出.

证 充分性显然,下证必要性.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关,则存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$,使

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_i\alpha_i \cdots + k_s\alpha_s = 0 \qquad (*)$$

设 k_i 是不全为零的 k_j 中下标最大者,即有 $k_i \neq 0$, $k_{i+1} = k_{i+2} = \cdots = k_s = 0$,由(*)得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_i\alpha_i = 0$$

又由 $\alpha_1 \neq 0$ 知 $i > 1$,有 $1 < i \leq s$,使

$$\alpha_i = -\frac{k_1}{k_i}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1}$$

故 α_i 可被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性表出.

4. **已知两向量组有相同的秩,且其中之一可被另一个线性表出,证明:这两个向量组等价.**

证　**法 1**　设向量组(Ⅰ):$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$与(Ⅱ):$\beta_1,\cdots,\beta_t$的秩同为r,且$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表出.下证$\beta_1,\cdots,\beta_t$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表出,从而(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

记(Ⅰ)及(Ⅱ)的极大线性无关组分别为$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$及$\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_r}$,由于$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表出,那么,$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$也可由$\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_r}$线性表出,$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$可由$\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_r}$线性表出.从而,向量组(Ⅲ):$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$,$\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_r}$可由$\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_r}$线性表出,由习题12知,$\mathrm{rank}(\text{Ⅲ})\leq\mathrm{rank}\{\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_r}\}=r$,再由(Ⅲ)中有$r$个线性无关的向量$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$知,$\mathrm{rank}(\text{Ⅲ})\geq r$,故$\mathrm{rank}(\text{Ⅲ})=r$.

那么,(Ⅲ)中任意r个线性无关的向量都是(Ⅲ)的极大线性无关组,如$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$是(Ⅲ)的一个极大线性无关组,从而,$\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_r}$可由$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$线性表出,于是$\beta_1,\cdots,\beta_t$可由$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$线性表出,也可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表出.

法 2　设此两向量组为(Ⅰ)和(Ⅱ),它们的极大线性无关组分别为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$,并设(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表出,那么$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$可由线性无关的$\beta_1,\cdots,\beta_r$线性表出.

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{r}a_{ij}\beta_j\qquad(i=1,2,\cdots,r)\tag{*}$$

由本章补充题2知,$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关的充分必要条件是$|a_{ij}|\neq0$,可由(*)式解出$\beta_j(j=1,\cdots,r)$,即$\beta_1,\cdots,\beta_r$也可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性表出,从而它们等价.再由它们分别同向量组(Ⅰ)和(Ⅱ)等价,所以(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

5. **设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩为$r$,在其中任取$m$个向量$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m}$,证明:此向量组的秩$\geq r+m-s$.**

证　设向量组$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}$的秩为$t$,现从$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}$的极大无关组(含$t$个向量)扩充成$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的极大无关组(含$r$个向量),因此,扩充向量的个数$r-t$,但$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$中除$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}$外,向量个数为$s-m$,故$r-t\leq s-m$,即$t\geq r+m-s$.

6. **设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$;$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$;$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$**

的秩分别为 r_1, r_2, r_3,证明:

$$\max\{r_1, r_2\} \leq r_3 \leq r_1 + r_2$$

证　设这三向量组分别为(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ),显然(Ⅰ)及(Ⅱ)均可由(Ⅲ)线性表出,则 $r_1 \leq r_3$,且 $r_2 \leq r_3$,即有 $\max\{r_1, r_2\} \leq r_3$.

下证 $r_3 \leq r_1 + r_2$.设向量组(Ⅰ),(Ⅱ)的极大线性无关组分别为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{r_1}$;$\beta_1, \cdots, \beta_{r_2}$.(反证法)假设 $r_3 > r_1 + r_2$,那么,(Ⅲ)中必有某向量 α_{i_0}(或 β_{i_0})不能用 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{r_1}, \beta_1, \cdots, \beta_{r_2}$ 线性表出,这与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{r_1}$(或 $\beta_1, \cdots, \beta_{r_2}$)是向量组(Ⅰ)(或(Ⅱ))的极大线性无关组矛盾,故 $r_3 \leq r_1 + r_2$.

7. 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \cdots + a_{n-1,n}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

设 M_i 是矩阵 A 中划去第 i 列剩下的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵的行列式.

1) 证明: $(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$ 是方程组的一个解;

2) 如果 A 的秩为 $n-1$,那么方程组的解全是 $(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$ 的倍数.

解　1) 作 n 级行列式 D,它是 A 的第 i 行元素与 A 的各行依次排成的行列式,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

由于 D 有两行相同,所以 $D = 0$.将 D 按第一行展开,得

$$D = a_{i1}M_1 - a_{i2}M_2 + \cdots + (-1)^{n-1}a_{in}M_n = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

即 $\eta = (M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$ 是方程组 $Ax = 0$ 的解.

2) 由 $\operatorname{rank}A = n - 1$ 知,η 为非零解,且方程组 $Ax = 0$ 的基础解系含有 $n - r = n - (n-1) = 1$ 个向量,其通解为 $x = k\eta$.

8. 设 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$, $i = 1,2,\cdots,s$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$. 证明:如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

的解全是方程 $b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0$ 的解,那么 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出.

证　用(Ⅰ)表示原方程组,用(Ⅱ)表示新方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0 \end{cases}$$

由题设知,方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)同解,它们的基础解系都含有 $n - r$ 个解向量,故(Ⅰ),(Ⅱ)的系数阵的秩相同,即向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta$ 的秩相等,由本章习题 16 知,它们等价,故 β 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出.

9. 设 η_0 是线性方程组的一个解,$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 是它的导出组的一个基础解系,令

$$\gamma_1 = \eta_0,\ \gamma_2 = \eta_1 + \eta_0,\ \cdots,\ \gamma_{t+1} = \eta_t + \eta_0$$

证明:线性方程组的任一个解 γ,都可表成

$$\gamma = u_1\gamma_1 + u_2\gamma_2 + \cdots + u_{t+1}\gamma_{t+1}$$

其中 $u_1 + u_2 + \cdots + u_{t+1} = 1$.

证　由题设,方程组的任一解 γ 可表成

$$\gamma = \eta_0 + u_2\eta_1 + \cdots + u_{t+1}\eta_t \qquad (u_2, \cdots, u_{t+1} \text{ 为常数})$$

令 $u_1 = 1 - u_2 - \cdots - u_{t+1}$,则

$$\gamma = (u_1 + \cdots + u_{t+1})\eta_0 + u_2\eta_1 + \cdots + u_{t+1}\eta_t =$$
$$u_1\eta_0 + u_2(\eta_1 + \eta_0) + \cdots + u_{t+1}(\eta_t + \eta_0) =$$
$$u_1\gamma_1 + u_2\gamma_2 + \cdots + u_{t+1}\gamma_{t+1}$$

10. 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 为一实数域上的矩阵 .证明:

1) 如果 $|a_{ii}| > \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}|$, $i = 1,2,\cdots,n$,那么 $|A| \neq 0$;

2) 如果 $a_{ii} > \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}|$, $i = 1,2,\cdots,n$,那么 $|A| > 0$.

证 1)(反证法) 由于线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解的充分必要条件是 $|A| \neq 0$.假设 $Ax = 0$ 有非零解 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$, 记 $|x_{i_0}| = \max\limits_i |x_i| > 0$,方程组 $Ax = 0$ 的第 i_0 个方程为

$$a_{i_0 1}x_1 + \cdots + a_{i_0 n}x_n = 0$$

整理得

$$-a_{i_0 i_0}x_{i_0} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^n a_{i_0 j}x_j$$

于是

$$|a_{i_0 i_0}||x_{i_0}| = \left|\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^n a_{i_0 j}x_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^n |a_{i_0 j}||x_j|$$

从而

$$|a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^n |a_{i_0 j}| \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^n |a_{i_0 j}|$$

与 1) 条件矛盾 .故 $Ax = 0$ 只有零解,即 $|A| \neq 0$.

2) 构造矩阵

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}t & \cdots & a_{1n}t \\ a_{21}t & a_{22} & \cdots & a_{2n}t \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}t & a_{n2}t & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

那么, $A(t)$ 显然满足 1) 的条件,故 $|A(t)| \neq 0$.

注意到 $|A(t)|$ 展开后是 t 的连续函数,且 $|A(0)| = \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} =$ $a_{11}\cdots a_{nn} > 0$, $|A(1)| = |A|$. 以下用反证法证明 $|A| > 0$.

假设 $|A| < 0$,则有 $|A(t)| < 0$,但 $|A(0)| > 0$,由零点定理,存在 $t_0 \in (0,1)$,使 $|A(t_0)| = 0$ 矛盾. 故 $|A| = |A(1)| > 0$.

11. 求出通过点 $M_1(1,0,0)$, $M_2(1,1,0)$, $M_3(1,1,1)$, $M_4(0,1,1)$ 的球面的方程.

解　设球面方程为

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

将 M_1, M_2, M_3, M_4 坐标代入上式,得四个方程,解得

$$a = b = c = \frac{1}{2},\quad R^2 = \frac{3}{4}$$

故球面方程为

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

12. 求出通过点 $M_1(0,0)$, $M_2(1,0)$, $M_3(2,1)$, $M_4(1,1)$, $M_5(1,4)$ 的二次曲线的方程.

解　设方程为 $x^2 + Axy + By^2 + Cx + Dy + E = 0$,分别将点 $M_i(i = 1,\cdots,5)$ 坐标代入方程,得

$$\begin{cases} E = 0,\quad 1 + C + E = 0 \\ 4 + 2A + B + 2C + D + E = 0 \\ 1 + A + B + C + D + E = 0 \\ 1 + 4A + 16B + C + 4D + E = 0 \end{cases}$$

解得 $A = -2$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 2$, $E = 0$,所求方程为

$$x^2 - 2xy - x + 2y = 0$$

13. 求下列曲线的直角坐标方程:

1) $x = t^2 - t + 1$, $y = 2t^2 + t - 3$;

2) $x = \dfrac{2t+1}{t^2+1}$, $y = \dfrac{t^2+2t-1}{t^2+1}$.

解　1) 联立方程 $\begin{cases} t^2 - t + (1-x) = 0 \\ 2t^2 + t - (3+y) = 0 \end{cases}$,只要将 t 消去即得曲线的直角坐标方程. 这可看成两个方程有公共解 t. 由于结式

$$R_t(f,g)=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1-x & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1-x\\ 2 & 1 & -3-y & 0\\ 0 & 2 & 1 & -3-y\end{vmatrix}=$$

$$4x^2-4xy+y^2-23x+7y+19$$

故所求曲线的直角坐标方程为

$$4x^2-4xy+y^2-23x+7y+19=0$$

2) **联立方程** $\begin{cases}xt^2-2t+(x-1)=0\\(y-1)t^2-2t+(y+1)=0\end{cases}$，**可求得结式**

$$R_t(f,g)=\begin{vmatrix}x & -2 & x-1 & 0\\ 0 & x & -2 & x-1\\ y-1 & -2 & y+1 & 0\\ 0 & y-1 & -2 & y+1\end{vmatrix}=$$

$$8x^2-4xy+5y^2-8x+2y-7$$

故所求曲线的直角坐标方程为

$$8x^2-4xy+5y^2-8x+2y-7=0$$

14. **求结式**:

1) $\dfrac{x^5-1}{x-1}$ **与** $\dfrac{x^7-1}{x-1}$;

2) x^n+x+1 **与** x^2-3x+2;

3) x^n+1 **与** $(x-1)^n$.

解　1)

$$f(x)=\frac{x^5-1}{x-1}=x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$g(x)=\frac{x^7-1}{x-1}=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$R(f,g)=\begin{vmatrix}1 & \cdots & \cdots & 1 & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & 1\\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & 1\end{vmatrix}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}6\\ \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}4\end{array}=1$$

2)

$$
R(f,g)=\left|\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1\\
1 & -3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -3 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & \ddots & -3 & 2 & 0 & 0\\
 & & & & & 1 & -3 & 2 & 0\\
 & & & & & 0 & 1 & -3 & 2
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right\}2\\
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}n
\end{array}
\xrightarrow[\substack{i=2,\cdots,n+2\\ c_1\div 3\\ c_{n+1}-c_1}]{c_1+c_i}
$$

$$
3\left|\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1\\
0 & -3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -3 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & \ddots & -3 & 2 & 0 & 0\\
 & & & & & 1 & -3 & 2 & 0\\
 & & & & & 0 & 1 & -3 & 2
\end{array}\right|_{n+2}
\xrightarrow[\text{1 列展开}]{r_2-r_1}
$$

$$
3\left|\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1\\
-3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & -3 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & \ddots & -3 & 2 & 0 & 0\\
 & & & & 1 & -3 & 2 & 0\\
 & & & & 0 & 1 & -3 & 2
\end{array}\right|_{n+1}
\xrightarrow[\substack{\cdots\\ c_1+c_2}]{c_n+c_{n+1}}
$$

$$3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & -1 & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & -1 & 2 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n+1} \xlongequal{1\text{ 列展开}}$$

$$3\begin{vmatrix} 2 & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 \end{vmatrix}_n + 3\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & \\ & & & & -1 & 2 \end{vmatrix}_n \xlongequal[1\text{ 行展开}]{c_{n-1} - c_n}$$

$$3 \cdot 2^n + 3(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 \\ & & & & -3 \end{vmatrix}_{n-1} =$$

$$3 \cdot 2^n + 3 \cdot (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} \cdot 3 = 3(2^n + 3)$$

3) 设 $f_n(x) = (x-1)^n$, $g_n(x) = x^n + 1$. 下面证明

$$R(f_n, g_n) = 2^n \tag{*}$$

(采用数学归纳法). 当 $n = 1$ 时, $R(f_1, g_1) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, (*) 式成立.

假设当 $n-1$ 时成立, 即 $R(f_{n-1}, g_{n-1}) = 2^{n-1}$, 下证 n 时, (*) 式成立.

$R(f_n, g_n) =$

$$\begin{vmatrix} 1 & -C_n^1 & C_n^2 & \cdots & (-1)^{n-1}C_n^{n-1} & (-1)^n C_n^n & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -C_n^1 & C_n^2 & \cdots & (-1)^{n-1}C_n^{n-1} & (-1)^n C_n^n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n \end{matrix} \xlongequal[\substack{\cdots \\ c_{2n} + c_{2n-1}}]{\substack{c_2 + c_1 \\ c_3 + c_2}}$$

(利用公式 $C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k}=C_{n}^{k}$)

$$
\begin{vmatrix}
1 & -C_{n-1}^{1} & C_{n-1}^{2} & \cdots & (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1} & 0 & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\
 & & & 1 & -C_{n-1}^{1} & C_{n-1}^{2} & \cdots & (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1} & 0 & \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \cdots & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \cdots & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 &
\end{vmatrix}
\xrightarrow[r_{2n-1}-r_{2n}]{\substack{r_{n+1}-r_{n+2}\\ \cdots}}
$$

$$
\begin{vmatrix}
1 & -C_{n-1}^{1} & \cdots & (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1} & 0 & & & \\
 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\
 & & & 1 & -C_{n-1}^{1} & \cdots & (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1} & 0 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & \\
 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\
 & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
 & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2
\end{vmatrix}
\xrightarrow{2n\text{ 列展开}}
$$

$$
2R(f_{n-1},\ g_{n-1})\xrightarrow{\text{归纳假设}}2\cdot 2^{n-1}=2^{n}
$$

六、学习效果检测题及答案

(一) 检测题

1. 向量 $\beta=(-2,1,1)$, $\gamma=(3,-1,3)$ 能否由向量组 $\alpha_1=(2,-1,1)$, $\alpha_2=(-1,1,1)$, $\alpha_3=(-3,2,0)$, $\alpha_4=(-4,3,1)$ 线性表出 . 若可以, 试写出其表示式 .

2. 已知 $\alpha_1=(1,4,0,2)$, $\alpha_2=(2,7,1,3)$, $\alpha_3=(0,1,-1,a)$, $\beta=(3,10,b,4)$, 问:

(1) a,b 取何值时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?

(2) a,b 取何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示 ?并写出此表示式 .

3. **设向量组** $\alpha_1=(1,1,1,3)$, $\alpha_2=(-1,-3,5,1)$, $\alpha_3=(3,2,-1,p)$, $\alpha_4=(-2,-6,10,p)$. **问**:

(1) p **为何值时,该向量组线性无关?并在此时将向量** $\alpha=(4,1,6,10)$ **用** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ **线性表出**;

(2) p **为何值时,该向量组线性相关?并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组**.

4. **已知向量组** $\beta_1=(0,1,-1)'$, $\beta_2=(a,2,1)'$, $\beta_3=(b,1,0)'$ **与向量组** $\alpha_1=(1,2,-3)'$, $\alpha_2=(3,0,1)'$, $\alpha_3=(9,6,-7)'$ **具有相同的秩,且** β_3 **可由** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **线性表出,求** a,b **的值**.

5. **设向量组** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **线性无关. 问** l,m **取何值时向量组** $l\alpha_2-\alpha_1$, $m\alpha_3-\alpha_2$, $\alpha_1-\alpha_3$ **也线性无关**.

6. **设向量组** $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ **线性无关,又设**

$$\beta_1=\alpha_1+\lambda_1\alpha_s,\ \beta_2=\alpha_2+\lambda_2\alpha_s,\ \cdots,\ \beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+\lambda_{s-1}\alpha_s$$

证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{s-1}$ **也线性无关**.

7. **求下列齐次线性方程组的基础解系**:

(1) $\begin{cases}2x_1+x_2-2x_3+x_4=0\\x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0\\3x_1-x_2+2x_3-4x_4=0\end{cases}$;

(2) $\begin{cases}x_1+x_3-x_4-3x_5=0\\2x_1-x_2+4x_3-3x_4-4x_5=0\\3x_1+x_2+x_3+x_5=0\\7x_1+7x_3-3x_4+3x_5=0\end{cases}$.

8. λ**为何值时,线性方程组**

$$\begin{cases}x_1+x_2+\lambda x_3=2\\x_1+\lambda x_2+x_3=1\\x_1+x_2+2x_3=\lambda\end{cases}$$

有惟一解、无解、无穷多解?有解时,求出相应的解.

9. a,b **取何值时,线性方程组**

$$\begin{cases}x_1+ax_2+x_3=3\\x_1+x_2+bx_3=2\\x_1+x_2+2bx_3=3\end{cases}$$

有惟一解、无解、无穷多解?有解时,求出相应的解.

10. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 = a_1^3 \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 x_3 = a_2^3 \\ x_1 + a_3 x_2 + a_3^2 x_3 = a_3^3 \\ x_1 + a_4 x_2 + a_4^2 x_3 = a_4^3 \end{cases}$$

(1) 如果 a_1, a_2, a_3, a_4 互不相等,证明方程组无解;

(2) 如果 $a_1 = a_3 = k,\ a_2 = a_4 = -k\ (k \neq 0)$,则方程组有解,并求其通解.

11. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + \cdots + bx_n = 0 \\ bx_1 + ax_2 + \cdots + bx_n = 0 \\ \qquad\cdots\cdots \\ bx_1 + bx_2 + \cdots + ax_n = 0 \end{cases}$$

试讨论 a, b 为何值时,方程仅有零解、有无穷多解?在有无穷多解时,求通解.

12. 设三元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为1,已知 η_1, η_2, η_3 是它的三个解向量,且

$$\eta_1 + \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\quad \eta_2 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \eta_3 + \eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

求该方程组的通解.

13. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 为齐次线性方程组的一个基础解系,$\beta_1 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2$,$\beta_2 = t_1\alpha_2 + t_2\alpha_3, \cdots, \beta_s = t_1\alpha_s + t_2\alpha_1$,其中 t_1, t_2 为实常数.试问 t_1, t_2 满足什么关系时,$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 也为该齐次方程组的一个基础解系.

14. 设四元齐次线性方程组(Ⅰ)为 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$,又已知另一四元齐次线性方程组(Ⅱ)的一个基础解系为

$$\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)',\quad \alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)'$$

(1) 求方程组(Ⅰ)的一个基础解系;

(2) 当 a 为何值时,方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解?在有非零公共解时,求出全部非零公共解.

15. 已知空间不互相平行的三个平面 $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0\ (i = 1,2,3)$ 都过直线 l,则线性方程组

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵 A 与增广矩阵 B 的秩分别为 $\mathrm{rank}\,A =$ ________, $\mathrm{rank}\,B =$ ________.

16. 试用结式判断下列多项式有无公共根:

(1) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 3$, $g(x) = 3x^3 - x^2 + 4$;

(2) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6$, $g(x) = 9x^3 + 2x + 4$.

17. 判断多项式 $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$ 有无重根.

18. λ 取何值时,多项式 $f(x) = x^3 - 3x + \lambda$ 有重根.

19. 解下列方程组:

(1) $\begin{cases} x^2 y + 3xy + 2y + 3 = 0 \\ 2xy - 2x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} 5y^2 - 6xy + 5x^2 - 16 = 0 \\ y^2 - xy + 2x^2 - y - x - 4 = 0 \end{cases}$.

(二) 检测题答案

1. β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出,γ 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出,且 $\gamma = (2 + k_1 + k_2)\alpha_1 + (1 - k_1 - 2k_2)\alpha_2 + k_1\alpha_3 + k_2\alpha_4$ (k_1, k_2 任意)

2. 当 $b \neq 2$ 时,β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示;当 $b = 2$ 且 $a \neq 1$ 时,β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 惟一线性表示,且表示为 $\beta = -\alpha_1 + 2\alpha_2$;当 $b = 2$ 且 $a = 1$ 时,β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示,且表示式为

$$\beta = -(2k + 1)\alpha_1 + (k + 2)\alpha_2 + k\alpha_3 \quad (k\text{ 为任意常数})$$

3. (1) $p \neq 2$ 时,向量组线性无关,且 $\alpha = 2\alpha_1 + \frac{3p - 4}{p - 2}\alpha_2 + \alpha_3 + \frac{1 - p}{p - 2}\alpha_4$.

(2) $p = 2$ 时,向量组线性相关,此时向量组的秩为 3,且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (或 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$) 为一个极大线性无关组.

4. $a = 15$, $b = 5$.(向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2,且 α_1, α_2 是一个极大线性无关组,于是向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的秩为 2;又 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出,从而可由 α_1, α_2 线性表出,即 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3$ 线性相关,故 $|(\beta_1, \beta_2, \beta_3)| = 0$, $|(\alpha_1, \alpha_2, \beta_3)| = 0$,联立求解得 $a = 15$, $b = 5$.)

5. $ml \neq 1$ 时,向量组线性无关.

7. (1) 基础解系为 $\xi = (0, 2, 1, 0)'$;

(2) 基础解系为 $\xi_1 = (-1,2,1,0,0)'$, $\xi_2 = (-3,8,0,-6,1)'$.

8. (1) $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 2$ 时,有惟一解

$$x_1 = \frac{2-2\lambda-\lambda^2}{1-\lambda}, \quad x_2 = \frac{\lambda}{1-\lambda}, \quad x_3 = -1$$

(2) $\lambda = 1$ 时,无解;

(3) $\lambda = 2$ 时,有无穷多解,通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t\text{任意})$$

9. (1) $a \neq 1$ 且 $b \neq 0$ 时,有惟一解

$$x_1 = \frac{3b-ab-1}{b(1-a)}, \quad x_2 = \frac{1-2b}{b(1-a)}, \quad x_3 = \frac{1}{b}$$

(2) $b = 0$ 或 $a = 1$ 且 $b \neq \frac{1}{2}$ 时,无解;

(3) $a = 1$ 且 $b = \frac{1}{2}$ 时,有无穷多解,通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t\text{任意})$$

10. (1) 系数矩阵 A 是 4×3 矩阵,从而 $\operatorname{rank}A \leq 3$,而增广矩阵 B 的行列式 $|B|$ 是 4 级范德蒙德行列式,由假设条件知 $|B| \neq 0$,于是 $\operatorname{rank}A \neq \operatorname{rank}B = 4$,故方程组无解.

(2) 通解为
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k^2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -k^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t\text{任意})$$

11. (1) 当 $a \neq b$ 且 $a \neq (1-n)b$ 时,仅有零解;

(2) 当 $a = b$ 时,有无穷多解,通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + t_{n-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_i\text{ 任意})$$

(3) 当 $a = (1-n)b$ 时,有无穷多解,通解为

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)' = t(1,1,\cdots,1)' \quad (t\text{任意})$$

12. 通解为

$$x = \frac{\eta_1+\eta_2}{2} + t_1[(\eta_1+\eta_2)-(\eta_2+\eta_3)] + t_2[(\eta_1+\eta_2)-(\eta_3-\eta_1)] =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (t_1, t_2\text{ 任意})$$

13. $t_1^s + (-1)^{s+1} t_2^s \neq 0$ (或当 s为偶数时,$t_1 \neq \pm t_2$;当 s为奇数,$t_1 \neq -t_2$).(因为 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 已是齐次方程组的解,所以只要证明它们线性无关即构成基础解系.)

14. (1) 方程组(Ⅰ)的一个基础解系为

$$\beta_1 = (5, -3, 1, 0)', \quad \beta_2 = (-3, 2, 0, 1)'$$

(2) 当 $a = -1$,方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解,且非零公共解为

$$x = t_1(2, -1, 1, 1)' + t_2(-1, 2, 4, 7)' \quad (t_1, t_2\text{ 任意})$$

15. 应填:2,2.(因为三个平面都过直线 l,所以相应的方程组有解;又因为三个平面互不平行,故 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 2$.)

16. (1) $R(f, g) = 4854 \neq 0$,所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 无公共根;

(2) $R(f, g) = 0$,所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有公共根.

17. $R(f, f') = 832 \neq 0$,所以 $f(x)$ 无重根.

18. $R(f, f') = 27(\lambda^2 - 4)$,所以当 $\lambda = -2$ 或 $\lambda = 2$ 时,$f(x)$ 有重根.

19. (1) 有两组解 $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -4 \end{cases}$,$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$;

(2) 有三组解 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$,$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$,$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$.

第 4 章　矩　　阵

矩阵理论是高等代数的主要内容之一,也是数学及许多科学领域中的重要工具,它有着广泛的应用.

一、内 容 提 要

1. 矩阵的线性运算

(1) **矩阵相等**　矩阵 A 与 B 有相同的行数和列数,并且对应位置上的元素都相等,则 $A = B$.

(2) **矩阵加法**　设 $A = (a_{ij})_{s\times n}$, $B = (b_{ij})_{s\times n}$ 是数域 P 上的两个矩阵,定义其和为

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{s\times n}$$

(3) **数乘矩阵**　设 $k\in P$, $A = (a_{ij})_{s\times n}$ 是 P 上的矩阵,k 与 A 的乘积定义为

$$kA = Ak = (ka_{ij})_{s\times n}$$

矩阵的加法与数乘称为矩阵的线性运算.运算律和性质如下:

1) 交换律　$A + B = B + A$;

2) 结合律　$(A + B) + C = A + (B + C)$;

3) 分配律　$k(A + B) = kA + kB$, $(k + l)A = kA + lA$;

4) 数乘结合律　$k(lA) = (kl)A$;

5) 当 A 是 n 级方阵时,有 $|kA| = k^n |A|$.

2. 矩阵的乘法

(1) 设 $A = (a_{ij})_{m\times s}$, $B = (b_{ij})_{s\times n}$, A 与 B 的乘积 $AB = (c_{ij})_{m\times n}$,其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} \quad (i = 1,\cdots,m;\ j = 1,\cdots,n)$$

注　两个矩阵只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时才能相乘.

(2) 矩阵乘法满足的运算律和性质:

1) **结合律**　$(AB)C = A(BC)$;

2) **分配律**　$A(B+C) = AB+AC$, $(A+B)C = AC+BC$;

3) **数与乘法的结合律**　$(kA)B = A(kB) = k(AB)$;

4) **当** A, B **均为** n **级方阵时,有** $|AB| = |A||B|$;

5) $\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}A, \text{rank}B)$.

3. 方阵的幂

(1) **设** A **是一个** n **级方阵**, m **是正整数,则**

$$A^m = \underbrace{A A \cdots A}_{m\text{个}}$$

称为 A **的** m **次幂**.

(2) **方阵的幂的运算律**

$$A^k A^l = A^{k+l}, \quad (A^k)^l = A^{kl}, \quad (\lambda A)^k = \lambda^k A^k, \quad |A^k| = |A|^k$$

4. 转置矩阵

(1) **将矩阵** $A = (a_{ij})_{s\times n}$ **的行列互换,所得到的矩阵称为** A **的转置,记为** A', **即** $A' = (a_{ji})_{n\times s}$.

(2) **矩阵的转置有以下的性质**:

1) $(A')' = A$;

2) $(A+B)' = A'+B'$;

3) $(kA)' = kA'$;

4) $(AB)' = B'A'$;

5) **当** A **是** n **级方阵时**, $|A'| = |A|$.

5. 几类特殊矩阵

(1) **零矩阵**　**元素都是零的矩阵,记为** $O_{s\times n}$, **不致混淆时简记为** O. **显然有**

$$0A = O, \quad O_{s\times n}A_{n\times m} = O_{s\times m}, \quad A_{s\times n}O_{n\times m} = O_{s\times m}$$

$$A + O = A, \quad A + (-A) = O$$

(2) **单位矩阵**　**主对角线上元素全是** 1, **其余元素全是** 0 **的** $n\times n$ **矩阵**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为 n 级单位矩阵,记为 E_n. 不致混淆时简记为 E. 显然有

$$A_{s\times n}E_n = A_{s\times n},\quad E_sA_{s\times n} = A_{s\times n}$$

(3) **数量矩阵**　矩阵

$$kE = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

称为数量矩阵.

(4) **对角矩阵**　如下形式的 $n\times n$ 矩阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

称为对角矩阵. 简记为 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

(5) **对称矩阵**　如果矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $A' = A$,即

$$a_{ji} = a_{ij}\quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

则称 A 为对称矩阵.

(6) **反对称矩阵**　如果矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $A' = -A$,即

$$a_{ji} = -a_{ij}\quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

则称 A 为反对称矩阵.

注　反对称矩阵 A 的主对角元素全为零.

(7) **上三角矩阵**　如果矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ij} = 0\ (i > j)$,即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称 A 为上三角矩阵.

(8) **下三角矩阵**　如果矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ij} = 0\ (i < j)$,即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称 A 为下三角矩阵.

(9) **非奇异矩阵**　设 A 是 n 级方阵,如果 $|A|\neq 0$,则称 A 为非奇异矩阵;如果 $|A|=0$,则称 A 为奇异矩阵.

(10) **满秩矩阵**　设 A 是 $s\times n$ 矩阵,如果 A 的秩为 s,则称 A 为行满秩矩阵;如果 A 的秩为 n,则称 A 为列满秩矩阵.如果 n 级方阵 A 的秩为 n,则称 A 为满秩矩阵;如果 A 的秩小于 n,则称 A 为降秩矩阵.

(11) **伴随矩阵**　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,由元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 构成的矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的伴随矩阵,记为 A^*.伴随矩阵具有如下重要性质:

$$AA^*=A^*A=|A|E$$

注　1. 伴随矩阵中的元素 A_{ij} 是按转置的顺序排列的.

2. 对于 2 级方阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,可求得 $A^*=\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$,即 2 级方阵的伴随矩阵具有"主对角元互换,副对角元变号"的规律.

(12) **初等矩阵**　由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵,共 3 类:

1) $P(i,j)$——交换 E 的第 i 行与第 j 行(或第 i 列与第 j 列)得到的初等矩阵,即

$$P(i,j)=\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 &&&&&&&&&& \\ &\ddots &&&&&&&&& \\ &&1&&&&&&&& \\ &&&0&&&&1&&& \\ &&&&1&&&&&& \\ &&&&&\ddots&&&&& \\ &&&&&&1&&&& \\ &&&1&&&&0&&& \\ &&&&&&&&1&& \\ &&&&&&&&&\ddots& \\ &&&&&&&&&&1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccccc} &&&i&&&&j&&& \end{array}\end{array}$$

2) $P(i(k))$——用数域 P 中的非零数 k 乘 E 的第 i 行(或第 i 列)得到的初

等矩阵,即

$$P(i(k)) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} \end{array}$$

3) $P(i, j(k))$—— 把 E 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行(或第 i 列的 k 倍加到第 j 列) 得到的初等矩阵,即

$$P(i, j(k)) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & k & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} & & i & & j & \end{array} \end{array}$$

初等矩阵具有如下的重要性质:

性质 1　初等矩阵都是可逆的,且它们的逆矩阵仍是同类的初等矩阵,即

$$|P(i, j)| = -1, \quad |P(i(k))| = k \neq 0, \quad |P(i, j(k))| = 1$$

$$P(i, j)^{-1} = P(i, j), \quad P(i(k))^{-1} = P(i(k^{-1}))$$

$$P(i, j(k))^{-1} = P(i, j(-k))$$

性质 2　对一个 $s \times n$ 矩阵 A 作一初等行变换就相当于在 A 的左边乘上相应的 $s \times s$ 初等矩阵;对 A 作一初等列变换就相当于在 A 的右边乘上相应的 $n \times n$ 初等矩阵,即

$$A \xrightarrow{r_i \longleftrightarrow r_j} P(i, j)A, \qquad A \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} AP(i, j)$$

$$A \xrightarrow{r_i \times k} P(i(k))A, \qquad A \xrightarrow{c_i \times k} AP(i(k))$$

$$A \xrightarrow{r_i + kr_j} P(i, j(k))A, \qquad A \xrightarrow{c_j + kc_i} AP(i, j(k))$$

注　用 $P(i, j(k))$ 左乘 A 或右乘 A 相应于对 A 所作的初等行变换和初等列变换是有差别的 .

6. 逆矩阵

(1) 设 A 是数域 P 上的一个 n 级方阵,如果存在 P 上的 n 级方阵 B,使得

$$AB = BA = E$$

则称 A 是可逆的,又称 B 为 A 的逆矩阵 . 当矩阵 A 可逆时,逆矩阵由 A 惟一确定,记为 A^{-1} .

(2) 逆矩阵具有如下一些性质(设 A, B 是 n 级可逆矩阵):

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) 若 $k \neq 0$,则 kA 可逆,且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;

3) AB 可逆,且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

4) A' 可逆,且 $(A')^{-1} = (A^{-1})'$;

5) A^k 可逆,且 $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$;

6) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$;

7) 如果 A 是 $s \times n$ 矩阵, P 是 s 级可逆矩阵, Q 是 n 级可逆矩阵,则

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(PA) = \mathrm{rank}(AQ) = \mathrm{rank}(PAQ)$$

(3) 矩阵可逆的条件

1) n 级方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$ (也即 $\mathrm{rank}(A) = n$);

2) n 级方阵 A 可逆的充分必要条件是 A 可以通过初等变换(特别是只通过初等行(列) 变换) 化为 n 级单位矩阵;

3) n 级方阵 A 可逆的充分必要条件是 A 可以写成一些初等矩阵的乘积;

4) 对于 n 级方阵 A,若存在 n 级方阵 B 使得 $AB = E$ (或 $BA = E$) ,则 A 可逆,且 $A^{-1} = B$;

5) n 级方阵 A 可逆的充分必要条件是 A 的 n 个特征值不为零(见第七章) .

(4) 求逆矩阵的方法

1) 利用伴随矩阵

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

2) 利用初等变换

$$(A, E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E, A^{-1}) \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

7. 等价矩阵

(1) 如果矩阵 A 可以经过一系列初等变换变成 B,则称 A 与 B 等价,记为 $A\cong B$.

(2) 等价具有反身性,对称性与传递性,即 A 与 A 等价;若 A 与 B 等价,则 B 与 A 等价;若 A 与 B 等价,B 与 C 等价,则 A 与 C 等价.

(3) 秩为 r 的 $s\times n$ 矩阵 A 等价于形如

$$\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

的 $s\times n$ 矩阵,称之为 A 的等价标准形,它是由 A 惟一确定的.

(4) 等价的充分必要条件

1) 两个 $s\times n$ 矩阵等价的充分必要条件是它们有相同的秩.

2) $s\times n$ 矩阵 A 与 B 等价的充分必要条件是存在 s 级可逆矩阵 P 和 n 级可逆矩阵 Q,使得 $PAQ = B$.

8. 分块矩阵

(1) 将矩阵用横线和纵线分成若干小块后所得的矩阵称为分块矩阵.

(2) 只要进行运算的矩阵的分块适当,分块矩阵有类似于普通矩阵的运算法则:

1) 加法　将 $A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{s\times n}$ 用同样的分法分块为 $A=(A_{ij})_{t\times l}$, $B=(B_{ij})_{t\times l}$,其中 A_{ij} 与 B_{ij} 的级数相同,则

$$A+B=(A_{ij}+B_{ij})_{t\times l}$$

2) 数乘　$kA=(kA_{ij})_{t\times l}$

3) 乘法　将 $A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times m}$ 分块为 $A=(A_{ij})_{t\times l}$, $B=(B_{ij})_{l\times r}$,其中 A_{ij} 是 $s_i\times n_j$ 矩阵,B_{ij} 是 $n_i\times m_j$ 矩阵,则

$$AB=(C_{ij})_{t\times r}$$

其中

$$C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{il}B_{lj}\quad(i=1,\cdots,t;\ j=1,\cdots,r)$$

4) 转置　设 $A=(A_{ij})_{t\times l}$,则 $A'=(A_{ji}')_{l\times t}$.

(3) 准对角矩阵

1) 如下形式的分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_l\end{pmatrix},\quad A_i\text{ 为 }n_i\times n_i\text{ 矩阵}(i=1,2,\cdots,l)$$

称为准对角矩阵.

2) 对于两个有相同分块的准对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_l\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_1&&&\\&B_2&&\\&&\ddots&\\&&&B_l\end{pmatrix}\quad(A_i\text{ 与 }B_i\text{ 同级})$$

有

$$A+B=\begin{pmatrix}A_1+B_1&&&\\&A_2+B_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_l+B_l\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}A_1B_1&&&\\&A_2B_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_lB_l\end{pmatrix}$$

$$A^k=\begin{pmatrix}A_1^k&&&\\&A_2^k&&\\&&\ddots&\\&&&A_l^k\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&&&\\&A_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&A_l^{-1}\end{pmatrix}\quad(A_i\text{ 均可逆})$$

$$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_l|$$

注　对于形如

$$A=\begin{pmatrix}&&&A_1\\&&A_2&\\&\iddots&&\\A_l&&&\end{pmatrix}\quad(A_i\text{ 均为 }n_i\times n_i\text{ 可逆矩阵})$$

的分块矩阵,其逆矩阵为

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}&&&A_l^{-1}\\&&A_2^{-1}&\\&\iddots&&\\A_1^{-1}&&&\end{pmatrix}$$

(4) **四分块三角矩阵**

1) **如下形式的分块矩阵**

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix},\ \text{其中 } A,\ D \text{ 均为方阵}$$

称为四分块上(或下)三角矩阵.

2) **当 A 与 D 均可逆时,四分块三角矩阵的逆矩阵为**

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

(5) **分块初等矩阵**

1) **将 $m+n$ 级单位矩阵分块为**

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

对它进行两行(列)互换得

$$\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix}$$

或某一行(列)乘可逆矩阵 P 得

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & P \end{pmatrix}$$

或一行(列)加上另一行(列)的 P(矩阵)倍数得

$$\begin{pmatrix} E_m & P \\ O & E_n \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}$$

称这些矩阵为分块初等矩阵.

2) **分块初等矩阵均是可逆矩阵,即**

$$\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & E_m \\ E_n & O \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & O \\ O & E_n \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & P \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & P^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_m & P \\ O & E_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E_m & -P \\ O & E_n \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E_m & O \\ -P & E_n \end{pmatrix}$$

3) **用分块初等矩阵左(右)乘** $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ **(要可乘,可加)相当于对其作相应的分块初等行(列)变换(只列出左乘的结果):**

$$\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ PC & PD \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_m & P \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+PC & B+PD \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C+PA & D+PB \end{pmatrix}$$

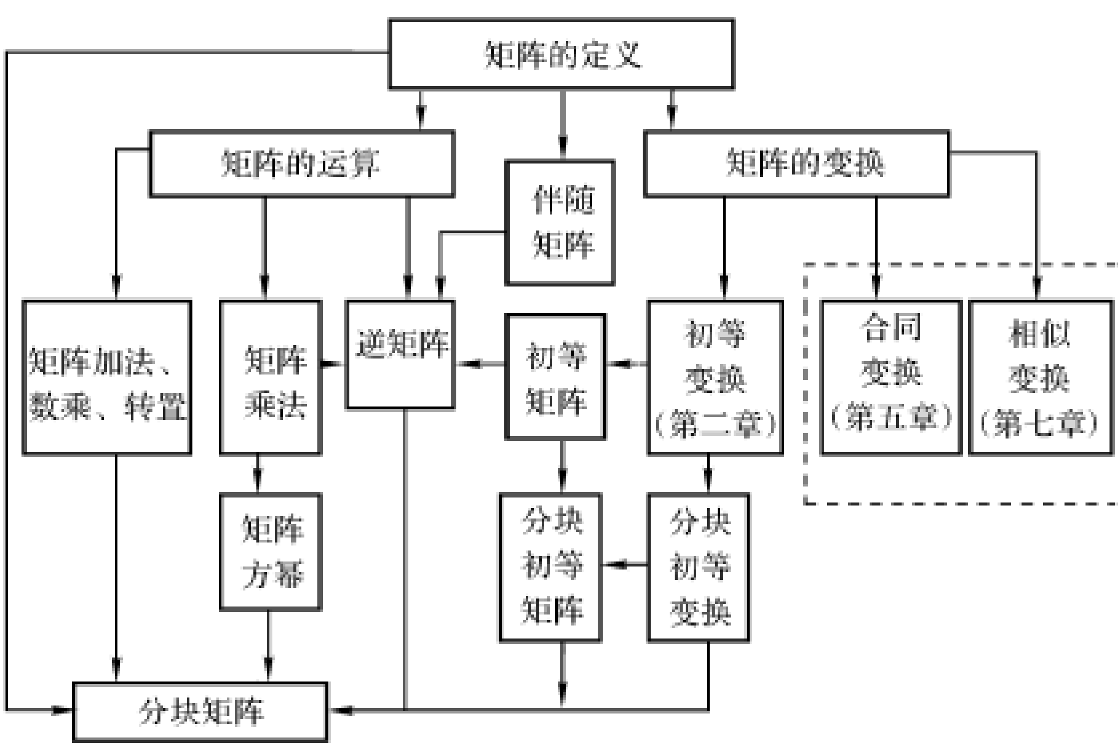
9. 矩阵运算中可能不成立的结论

可能不成立的结论	原因或例	成立条件
$AB \neq BA$	① AB 有意义, BA 无意义; ② AB 与 BA 有意义, 级数不等; ③ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = BA$	
$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$	$AB \neq BA$	$AB = BA$
$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$	$AB \neq BA$	$AB = BA$
$(AB)^k \neq A^k B^k$	$AB \neq BA$	$AB = BA$
$(A+B)^k \neq A^k + \mathrm{C}_k^1 A^{k-1}B + \cdots$ $+ \mathrm{C}_k^{k-1} AB^{k-1} + B^k$	$AB \neq BA$	$AB = BA$
$AB = O \Rightarrow A = O$ 或 $B = O$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq O$ 但 $AB = O$	A 可逆时, $B = O$ B 可逆时, $A = O$
$AB = AC$ 且 $A \neq O \Rightarrow B = C$ $BA = CA$ 且 $A \neq O \Rightarrow B = C$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B \neq C$ 但 $AB = O = AC$	A 可逆

续　表

可能不成立的结论	原因或例	成立条件
$A^2 = A \backslash A = O$ 或 $A = E$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 满足 $A^2 = A$，但 $A \neq O, A \neq E$	A 可逆时，$A = E$ $A - E$ 可逆时，$A = O$
$A^2 = E \backslash A = \pm E$	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 满足 $A^2 = E$，但 $A \neq \pm E$	
$A^2 = O \backslash A = O$	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$，但 $A^2 = O$	A 为实对称阵
$\lvert A + B \rvert \neq \lvert A \rvert + \lvert B \rvert$	矩阵加法与行列式性质的区别	
$(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$	A, B 可逆时，$A + B$ 不一定可逆；即使 $A, B, A + B$ 都可逆，也不一定相等	

二、知识网络图



三、重点、难点解读

本章的重点是掌握矩阵的运算以及它们的运算规律.由于矩阵运算和熟知的数的运算规律有些是相同的,但也有许多不同之处,这些不同之处正是易犯错误的地方.

伴随矩阵 A^* 是为计算逆矩阵而引入的,但在具体求逆矩阵时,只对低级矩阵(特别是 2 级矩阵)采用伴随矩阵法进行计算,对 2 级以上的矩阵利用初等变换法求逆矩阵更方便.在涉及伴随矩阵的有关计算及证明时,往往利用伴随矩阵的基本公式 $AA^* = A^*A = |A|E$ 或 $A^* = |A|A^{-1}$(当 $|A|\neq 0$ 时)来推证及化简.

利用初等矩阵及分块初等矩阵可以将对矩阵的初等变换和分块矩阵的分块初等变换转化成矩阵的乘法运算,对于解决一些涉及矩阵的理论和计算题很有用,但推证过程有一定的技巧.

有关矩阵的秩的等式或不等式的证明,常常和向量组的秩、线性方程组的解等相联系,推证有一定的难度.熟记关于矩阵的秩的一些结论,对有关问题的论证会有很大的帮助.

四、典型例题解析

例 4.1 设 A 是 3 级方阵,$|A| = -2$,把 A 按行分块 $A = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$,其中 $\alpha_j\,(j = 1,2,3)$ 是 A 的第 j 行,则 $\left|\begin{pmatrix}\alpha_3-2\alpha_1\\ 3\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix}\right| =$ ________.

分析 应填 6. 计算抽象矩阵的行列式时,主要是利用行列式的性质及行列式的计算公式.

$$\left|\begin{pmatrix}\alpha_3-2\alpha_1\\ 3\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}\alpha_3\\ 3\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix}-2\alpha_1\\ 3\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix}\right| = 3\left|\begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix}\right| + 0 =$$

$$-3\left|\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\right| = -3|A| = 6$$

例 4 2　设 4 级方阵 $A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，$B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，其中 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为 4 维列向量，且 $|A|=4$，$|B|=1$，则 $|A+B|=$ ________ .

分析　应填 40.

$$|A+B| = |(\alpha+\beta,2\gamma_2,2\gamma_3,2\gamma_4)| =$$
$$2^3|(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)| + 2^3|(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)| =$$
$$8(|A|+|B|) = 8\times 5 = 40$$

例 4 3　设 A,B 均为 n 级方阵，$|A|=2$，$|B|=-3$，则 $|A^{-1}B^{*}-A^{*}B^{-1}|=$ ________ .

分析　应填 $(-1)^{n-1}\dfrac{5^n}{6}$. 当矩阵 A 可逆时，常利用 $A^{*}=|A|A^{-1}$ 来表示 A 的伴随矩阵 .

$$|A^{-1}B^{*}-A^{*}B^{-1}| = |A^{-1}|B|B^{-1}-|A|A^{-1}B^{-1}| =$$
$$|-3A^{-1}B^{-1}-2A^{-1}B^{-1}| = |-5A^{-1}B^{-1}| =$$
$$(-5)^n|A^{-1}||B^{-1}| = (-5)^n\frac{1}{|A||B|} =$$
$$\frac{(-5)^n}{-6} = (-1)^{n-1}\frac{5^n}{6}$$

例 4 4　设 A 为 n 级方阵，且 $AA'=E$，$|A|<0$，则 $|A+E|=$ ________ .

分析　应填 0.

$$|A+E| = |A+AA'| = |A(E+A')| = |A||E+A'| =$$
$$|A||(A+E)'| = |A||A+E|$$

即 $|A+E|(1-|A|)=0$.由 $|A|<0$ 知 $1-|A|>0$，于是 $|A+E|=0$.

注　此处 A 是正交矩阵，且 $|A|=-1$.

例 4 5　已知实矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 满足 $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3)$，其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，且 $a_{11}\neq 0$，计算行列式 $|A|$.

分析　A 的伴随矩阵 A^{*} 与元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 有关，而对于伴随矩阵又可以利用重要公式 $AA^{*}=|A|E$.

解　由于 $a_{ij}=A_{ij}$，所以

$$A^{*} = \begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix} = A'$$

于是 $AA' = AA^* = |A|E$. 取行列式得 $|A||A'| = |A|^3$,即 $|A|^2 = |A|^3$ 或 $|A|^2(|A|-1) = 0$. 由于

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0$$

故 $|A| = 1$.

例 4.6 已知方阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = O$,则 $A^{-1} =$ ________, $(A+2E)^{-1}$ = ________.

分析 应填 $\frac{1}{2}(A-E)$ 和 $\frac{1}{4}(3E-A)$.

找矩阵 B,使得 $AB = E$(或 $BA = E$). 由 $A^2 - A - 2E = O$ 得 $A(A-E) = 2E$,即 $A\left[\frac{1}{2}(A-E)\right] = E$,故 A 可逆,且 $A^{-1} = \frac{1}{2}(A-E)$.

为求 $(A+2E)^{-1}$,找矩阵 B,使得 $(A+2E)B = E$,则 $A^{-1} = B$. 由于 $(A+2E)(A-3E) = -4E$,即 $(A+2E)\left[-\frac{1}{4}(A-3E)\right] = E$,故 $(A+2E)^{-1} = \frac{1}{4}(3E-A)$.

注 为找到矩阵 B,使得 $(A+2E)B = E$,根据 $A^2 - A - 2E = O$,可设 $(A+2E)(A+aE) = bE$,即 $A^2 + (a+2)A + (2a-b)E = O$,从而 $\begin{cases} a+2 = -1 \\ 2a-b = -2 \end{cases}$,解得 $\begin{cases} a = -3 \\ b = -4 \end{cases}$,即 $(A+2E)(A-3E) = -4E$.

例 4.7 设 $A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 级可逆矩阵,则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1} =$ ________.

(A) $A^{-1}+B^{-1}$; (B) $A+B$; (C) $A(A+B)^{-1}B$; (D) $(A+B)^{-1}$.

分析 应填(C).

法 1 验证所给出的四个矩阵中,哪个与 $(A^{-1}+B^{-1})$ 相乘为单位矩阵 E. 一般说来,矩阵和的逆并不是逆的和. 答案(C)最有可能正确. 检验知

$$\begin{aligned}(A^{-1}+B^{-1})[A(A+B)^{-1}B] &= (A+B)^{-1}B + B^{-1}A(A+B)^{-1}B = \\ &B^{-1}[B(A+B)^{-1}B + A(A+B)^{-1}B] = \\ &B^{-1}[B+A](A+B)^{-1}B = B^{-1}B = E\end{aligned}$$

故选(C)

法 2
$$\begin{aligned}(A^{-1}+B^{-1})^{-1} &= [B^{-1}(BA^{-1}+E)]^{-1} = \\ &[B^{-1}(B+A)A^{-1}]^{-1} = A(A+B)^{-1}B\end{aligned}$$

例 4.8　设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&\frac{5}{2}\end{pmatrix}$,则 $(A^*)^{-1}=$ ________ .

分析　在遇到 A^* 的有关计算时,一般不直接由定义去求 A^*,而是利用 A^* 的重要公式. 如此题,由 $A^*A=|A|E$ 得 $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$, 而 $|A|=\frac{5}{4}-\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}$,于是

$$(A^*)^{-1}=\frac{1}{-\frac{1}{4}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&\frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-2&-6\\0&-4&-10\end{pmatrix}$$

例 4.9　设 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$, 且 $A^*X\left(\frac{1}{2}A^*\right)^*=8A^{-1}X+E$, 求矩阵 X.

分析　这是求解矩阵方程的问题. 求解矩阵方程时,要先作恒等变形将方程化简,再代入已知条件求解. 不要一起步就代入已知数据,那样往往使运算复杂化,费时易错. 化简时要正确把握矩阵的重要公式、性质,先将给出的关系式变为 $AX=C$,或 $XB=C$,或 $AXB=C$的形式,再通过左乘或右乘可逆矩阵求出 $X=A^{-1}C$,或 $X=CB^{-1}$,或 $X=A^{-1}CB^{-1}$.

解　可求得 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}\xRightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\2&0&0\end{vmatrix}=4$. 于是

$$A^*=|A|A^{-1}=4A^{-1}$$

而

$$\left(\frac{1}{2}A^*\right)^*=(2A^{-1})^*=|2A^{-1}|(2A^{-1})^{-1}=2^3|A|^{-1}\frac{1}{2}A=A$$

代入矩阵方程得　$$4A^{-1}XA=8A^{-1}X+E$$

左乘矩阵 A 得　$$4XA=8X+A$$

即 $4X(A-2E)=A$,故 $X=\frac{1}{4}A(A-2E)^{-1}$.由于

$$(A-2E \mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3+r_1 \\ r_1\times(-1)}]{r_2-r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2+r_3 \\ r_3\times\left(\frac{1}{2}\right)}]{r_1+\frac{1}{2}r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)]{r_1-\frac{1}{2}r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

从而

$$(A-2E)^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 4.10 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$,且 $AXA^{-1}=XA^{-1}+3E$,求 X.

解 法 1 由 $AXA^{-1}=XA^{-1}+3E$ 得 $(A-E)XA^{-1}=3E$,于是 $X=3(A-E)^{-1}A$.

由于 $|A^*|=8$，**由** $AA^*=|A|E$ **得** $|A||A^*|=|A|^4$，**即** $|A|^3=|A^*|=8$，**从而** $|A|=2$，**故**

$$A=|A|(A^*)^{-1}=2(A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\-2&0&2&0\\0&\frac{3}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

又可求得

$$(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&\frac{3}{4}&0&-\frac{3}{4}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&1&0&-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

故
$$X=3(A-E)^{-1}A=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}$$

法 2　**由** $AXA^{-1}=XA^{-1}+3E$ **得** $XA^{-1}=A^{-1}XA^{-1}+3A^{-1}$，**即** $XA^*=\frac{1}{|A|}A^*XA^*+3A^*$. **同上可求得** $|A|=2$，**于是有**

$$XA^*=\frac{1}{2}A^*XA^*+3A^*,\quad \text{即 } 2XA^*=A^*XA^*+6A^*$$

故
$$(2E-A^*)XA^*=6A^*,\quad \text{即 } X=6(2E-A^*)^{-1}$$

(**或由法** 1，$X=3(A-E)^{-1}A=3(A-E)^{-1}(A^{-1})^{-1}=3[A^{-1}(A-E)]^{-1}=3(E-A^{-1})^{-1}=3\left(E-\frac{1}{|A|}A^*\right)^{-1}=3\left(E-\frac{1}{2}A^*\right)^{-1}=6(2E-A^*)^{-1}$.)

可求得

$$(2E-A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

故
$$X = 6(2E - A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

注　法2比法1少求一次逆矩阵,少一次矩阵乘法,计算量小些.

例4.11　已知 $AB - B = A$,其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,求$(A - E)^{-1}$.

解　**法1**　因为 $A(B - E) = B$,所以
$$A = B(B - E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

从而
$$(A - E)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

法2　由于 $AB - A - B = O$,即 $A(B - E) - (B - E) = E$,也即
$$(A - E)(B - E) = E$$

故
$$(A - E)^{-1} = B - E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(也可根据 $AB - A - B = O$,设$(A - E)(B + aE) = bE$,即 $AB + aA - B - (a + b)E = O$.比较得$\begin{cases} a = -1 \\ a + b = 0 \end{cases}$,于是 $a = -1, b = 1$,故$(A - E)(B - E) = E$.)

例4.12　已知 $\alpha = (1, 2, 3)$,$\beta = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$,设 $A = \alpha'\beta$,则 $A^n =$ ________.

分析　不要先求出 $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$,而是利用矩阵乘法结合律,得

$$A^n=(\alpha'\beta)^n=(\alpha'\beta)(\alpha'\beta)\cdots(\alpha'\beta)=\alpha'(\beta\alpha')\cdots(\beta\alpha')\beta=$$
$$\alpha'(\beta\alpha')^{n-1}\beta=3^{n-1}\alpha'\beta=3^{n-1}A$$

例 4.13　已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$,求 A^n.

解　**法 1**　可求得 $A^2=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\0 & 4 & 0\\2 & 0 & 2\end{pmatrix}=2A$, $A^3=2A^2=2^2A$. 设 $A^k=2^{k-1}A$,则

$$A^{k+1}=A^kA=2^{k-1}A^2=2^kA$$

故
$$A^n=2^{n-1}A=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\\0 & 2^n & 0\\2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\end{pmatrix}$$

法 2　$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}=B+C$, 其中 $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}(1\quad 0\quad 1)$, $C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,且有 $BC=CB=O$.从而

$$A^n=(B+C)^n=B^n+C^n=2^{n-1}B+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 2^n & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\\0 & 2^n & 0\\2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\end{pmatrix}$$

法 3　利用相似对角化(见第七章). 可求得矩阵

$$P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad 使\ P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

故

$$A^n=\left[P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}P^{-1}\right]^n=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}^nP^{-1}=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}P^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&2^n&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}$$

例 4.14　设 A 是 $m\times n$ 矩阵，C 与 n 级单位矩阵等价，$B=AC$，若 $\operatorname{rank}A=r$，$\operatorname{rank}B=r_1$，则________.

(A) $r>r_1$;　　　　(B) $r<r_1$;

(C) $r=r_1$;　　　　(D) r 与 r_1 的关系依 C 而定.

分析　应填(C).

因为 $C\cong E$，所以 $\operatorname{rank}C=n$，即 C 可逆，从而

$$\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}(AC)=\operatorname{rank}A$$

或直接推导

$$\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}(AC)\leq\operatorname{rank}A$$

$$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}(ACC^{-1})=\operatorname{rank}(BC^{-1})\leq\operatorname{rank}B$$

故 $\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}A$，即 $r=r_1$.

例 4.15　设 A 是 $n\times m$ 矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，且 $m>n$. 若 $AB=E$，证明 B 的列向量组线性无关.

证　法 1　只要证 $\operatorname{rank}B=n$. 因为 $\operatorname{rank}B\leq n$，又

$$n=\operatorname{rank}E=\operatorname{rank}(AB)\leq\operatorname{rank}B$$

故 $\operatorname{rank}B=n$，从而 B 的列向量组线性无关.

法 2　由线性无关的定义. 设 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，又设

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n=0\text{，即}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\cdots\\k_n\end{pmatrix}=0\text{ 或 }B\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\cdots\\k_n\end{pmatrix}=0$$

两边左乘 A 得 $AB\begin{pmatrix}k_1\\\cdots\\k_n\end{pmatrix}=0$，即 $E\begin{pmatrix}k_1\\\cdots\\k_n\end{pmatrix}=0$，故 $k_1=\cdots=k_n=0$，即 $\beta_1,\beta_2,\cdots,$

β_n 线性无关.

例 4.16 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵,证明 $\mathrm{rank}(A'A)=\mathrm{rank}A$.

证 构造两个 n 元齐次方程组

$$(\mathrm{I})\quad Ax=0,\qquad (\mathrm{II})\quad A'Ax=0$$

若 η 是(Ⅰ)的解,即 $A\eta=0$,则有 $A'A\eta=A'0=0$,即 η 是(Ⅱ)的解. 反之,若 η 是(Ⅱ)的解,即 $A'A\eta=0$,则

$$(A\eta)'(A\eta)=\eta'A'A\eta=\eta'0=0$$

记 $A\eta=(b_1,b_2,\cdots,b_m)'$. 由于 A 是实矩阵,η 是实数解,所以 b_i 全是实数,从而 $(A\eta)'(A\eta)=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2=0$,这表明 $b_i=0(i=1,2,\cdots,m)$,即 $A\eta=0$,也即(Ⅱ)的解都是(Ⅰ)的解. 故(Ⅰ)与(Ⅱ)同解,从而它们的基础解系含有相同个数的线性无关解向量,即 $n-\mathrm{rank}A=n-\mathrm{rank}(A'A)$,故 $\mathrm{rank}(A'A)=\mathrm{rank}A$.

注 由上面诸例可见,矩阵秩的问题是综合性很强的题目,可以从矩阵、向量、线性方程组等多方面入手.

例 4.17 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13}\end{pmatrix}$,

$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 则必有________.

(A) $AP_1P_2=B$;　　(B) $AP_2P_1=B$;

(C) $P_1P_2A=B$;　　(D) $P_2P_1A=B$.

分析 应填(C).

B 由 A 作初等行变换得到,故只可能选(C)或(D). 又 $A\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{r_3+r_1}B$,故应选(C). 而 $A\xrightarrow[r_3+r_1]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31}+a_{21} & a_{32}+a_{22} & a_{33}+a_{23}\end{pmatrix}\neq B$,故(D)不对.

例 4.18 已知 A, B 均是 3 级方阵,将 A 中第 3 行的 -2 倍加到第 2 行得到矩阵 A_1,将 B 的第 2 列加到第 1 列得到矩阵 B_1,又知 $A_1B_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$,

求 AB.

解 由 $A\xrightarrow{r_2-2r_3}A_1$, $B\xrightarrow{c_1+c_2}B_1$,得

$$A_1=P(2,3(-2))A,\qquad B_1=BP(2,1(1))$$

其中

$$P(2,3(-2))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix},\quad P(2,1(1))=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

从而 $A_1B_1=P(2,3(-2))ABP(2,1(1))$,故

$$\begin{aligned}AB&=P(2,3(-2))^{-1}A_1B_1P(2,1(1))^{-1}=\\&P(2,3(2))A_1B_1P(2,1(-1))=\\&\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\-2&2&8\\0&0&3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

例 4.19 设 A 是 n 级可逆矩阵,互换 A 中第 i 行和第 j 行得到矩阵 B,求 AB^{-1}.

解 因为 $B=P(i,j)A$,所以

$$AB^{-1}=A(P(i,j)A)^{-1}=AA^{-1}P(i,j)^{-1}=P(i,j)$$

例 4.20 设分块矩阵 $M=\begin{pmatrix}O&B\\C&D\end{pmatrix}$,其中 B,C 都是 n 级可逆矩阵,试求 M^{-1}.

解 法 1 因为

$$\begin{pmatrix}E&O\\-DB^{-1}&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&B\\C&D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O&B\\C&O\end{pmatrix}\quad\left(\text{或}\begin{pmatrix}O&B\\C&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&-C^{-1}D\\O&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O&B\\C&O\end{pmatrix}\right)$$

两边求逆得

$$\begin{pmatrix}O&B\\C&D\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}E&O\\-DB^{-1}&E\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O&B\\C&O\end{pmatrix}^{-1}$$

故

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}O&C^{-1}\\B^{-1}&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&O\\-DB^{-1}&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-C^{-1}DB^{-1}&C^{-1}\\B^{-1}&O\end{pmatrix}$$

法 2 设 $M^{-1}=\begin{pmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{pmatrix}$,其中 X_i 均为 n 级方阵,由

$$MM^{-1}=\begin{pmatrix}O&B\\C&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&O\\O&E\end{pmatrix}$$

得　$BX_3 = E,\quad BX_4 = O,\quad CX_1 + DX_3 = O,\quad CX_2 + DX_4 = E$

解得　$X_3 = B^{-1},\quad X_4 = O,\quad X_1 = -C^{-1}DB^{-1},\quad X_2 = C^{-1}$

故
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$$

例 4 21　设 A, B 均为 n 级方阵,证明 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$.

证　因为 $\begin{pmatrix} E & E \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -E \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{pmatrix}$,所以
$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$$

例 4 22　设 A 为 n 级非奇异矩阵,α 为 n 维列向量,b 为常数. 记分块矩阵
$$P = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha' A^* & |A| \end{pmatrix},\quad Q = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha' & b \end{pmatrix}$$

(1) 计算并化简 PQ;

(2) 证明:矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $\alpha' A^{-1}\alpha \neq b$.

解　(1)
$$PQ = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha' A^* & |A| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha' & b \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ |A|\alpha' - \alpha' A^* A & |A| b - \alpha' A^* \alpha \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ |A|\alpha' - \alpha' |A| E & |A| b - \alpha' |A| A^{-1}\alpha \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0' & |A|(b - \alpha' A^{-1}\alpha) \end{pmatrix}$$

(2) 由(1)得 $|PQ| = |A|^2(b - \alpha' A^{-1}\alpha)$, 而 $|PQ| = |P||Q|$, 且 $|P| = |A| \neq 0$,故有
$$|Q| = |A|(b - \alpha' A^{-1}\alpha)$$
可见 $|Q| \neq 0$ 的充分必要条件是 $b - \alpha' A^{-1}\alpha \neq 0$,即 $\alpha' A^{-1}\alpha \neq b$.

例 4 23　设 A, B 为 n 级矩阵,A^*,B^* 分别为 A, B 对应的伴随矩阵. 分块矩阵 $C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$,则 C 的伴随矩阵 $C^* =$ ________.

(A) $\begin{pmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{pmatrix}$;

(C) $\begin{pmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$.

分析 应填(D).

不妨假设 A,B 均可逆,则 C 可逆,且

$$C^* = |C|C^{1} = |A||B|\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} |B||A|A^{-1} & O \\ O & |A||B|B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$$

故选(D). 也可利用 $CC^* = |C|E = |A||B|E$,逐一验证(A),(B),(C),(D)的四个矩阵是否满足该式.

例 4.24 设 A,B 均为 n 级对称矩阵,且 $|A|\neq 0$. 当 $E+AB$ 可逆时,试证 $(E+AB)^{-1}A$ 为对称矩阵.

证 法 1

$$[(E+AB)^{-1}A]' = A'[(E+AB)']^{-1} = A(E+B'A')^{-1} =$$
$$(A^{-1})^{-1}(E+BA)^{-1} = [(E+BA)A^{-1}]^{-1} =$$
$$(A^{-1}+B)^{-1} = [A^{-1}(E+AB)]^{-1} = (E+AB)^{-1}A$$

法 2 因为 $(E+AB)^{-1}A = [A^{-1}(E+AB)]^{-1} = (A^{-1}+B)^{-1}$,所以

$$[(E+AB)^{-1}A]' = [(A^{-1}+B)^{-1}]' = [(A^{-1}+B)']^{-1} =$$
$$(A^{-1}+B)^{-1} = (E+AB)^{-1}A$$

故 $(E+AB)^{-1}$ 为对称矩阵.

五、课后习题全解

(一) 第四章习题

1. 设

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$.

计算 $AB, AB-BA$.

解

1) $$AB=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB-BA=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

2) $$AB=\begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} ac+a+c & ab+b+c & a^2+2c \\ bc+a+b & b^2+2b & ab+b+c \\ c^2+2a & bc+a+b & ac+a+c \end{pmatrix}$$

$AB-BA=$

$$\begin{pmatrix} b-ac & a^2+b^2+c^2-ab-b-c & b^2+2ac-a^2-ac \\ c-bc & 2ac-2b & a^2+b^2+c^2-ab-b-c \\ 3-c^2-2a & c-bc & b-ab \end{pmatrix}$$

2. **计算** .

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$;　　2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$;　　3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$;

4) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$;　　5) $(2,3,-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}(2,3,-1)$;

6) $(x,y,1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^n$;

8) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

解 1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$;

3) **用数学归纳法证明** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

当 $n=1$ **时成立,假定** $n=k$ **时成立,即** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,**则** $n=k+1$ **时**,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) **用数学归纳法证明** $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$.

当 $n=2$ **时**,

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi - \sin^2\varphi & -2\cos\varphi\sin\varphi \\ 2\cos\varphi\sin\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}$$

假设

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\varphi & -\sin(n-1)\varphi \\ \sin(n-1)\varphi & \cos(n-1)\varphi \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\cos(n-1)\varphi & -\sin(n-1)\varphi\\ \sin(n-1)\varphi & \cos(n-1)\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}>$$

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$$

其中 $x_1=\cos(n-1)\varphi\cos\varphi-\sin(n-1)\varphi\sin\varphi=\cos n\varphi$

类似地 $x_2=-\sin n\varphi,\ x_3=\sin n\varphi,\ x_4=\cos n\varphi$,故

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\varphi & -\sin n\varphi\\ \sin n\varphi & \cos n\varphi\end{pmatrix}$$

5) $(2,3,-1)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=0,\quad \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}(2,3,-1)=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & -3 & 1\\ -2 & -3 & 1\end{pmatrix}$;

6) $(x,y,1)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{12} & a_{22} & b_2\\ b_1 & b_2 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=$

$$(a_{11}x+a_{12}y+b_1,\ a_{12}x+a_{22}y+b_2,\ b_1x+b_2y+c)\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=$$

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c$$

7) 1°. 记 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$,则 $A^2=\begin{pmatrix}4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 4\end{pmatrix}=4E$.

2°. 当 $n=2k$ 时,

$$A^n=A^{2k}=(A^2)^k=(4E)^k=2^{2k}E=2^nE$$

当 $n=2k+1$ 时,

$$A^n=A^{2k+1}=(A^2)^kA=2^{2k}EA=2^{n-1}A$$

8) 用数学归纳法证明

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ & & \lambda^n\end{pmatrix}\qquad (*)$$

当 $n=2$ 时，$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ & \lambda^2 & 2\lambda\\ & & \lambda^2\end{pmatrix}$，(*)式成立．假设 $n-1$ 时成立，即

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}^{n-1}=\begin{pmatrix}\lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} & \frac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda^{n-3}\\ & \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2}\\ & & \lambda^{n-1}\end{pmatrix}$$

当为 n 时，

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}^{n}=\begin{pmatrix}\lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} & \frac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda^{n-3}\\ & \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2}\\ & & \lambda^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\lambda^{n} & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^{n} & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^{n}\end{pmatrix}$$

3. 设 $f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_m$，$A$ 是一个 $n\times n$ 矩阵，定义 $f(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots+a_mE$．

1) $f(\lambda)=\lambda^2-\lambda-1$，$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$；

2) $f(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+3$，$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$．

试求 $f(A)$．

解 1) $f(A)=A^2-A-E=$

$$\begin{pmatrix}8 & 2 & 4\\ 11 & 2 & 5\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}5 & 1 & 3\\ 8 & 0 & 3\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

2) $f(A) = A^2 - 5A + 3E =$

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -15 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -15 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & \\ & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. **如果** $AB = BA$,**矩阵** B **就称为与** A **可交换. 设**

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;　　2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;　　3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

求所有与 A **可交换的矩阵.**

解　1) **法** 1　**设与** A **可交换的方阵** $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,**则由**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

得

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

比较对应元素得 $c = 0$, $a = d$. **故与** A **可交换的矩阵为**

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

其中 a, b **为任意数.**

法 2　$A = E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **设** $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **与** A **可交换,即**

$$\left[E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left[E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得 $c = 0$, $a = d$. **故** $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

2) $A = E + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, **设** $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ **与** A **可交换,即**

$$\left[E + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}\left[E + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

得
$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\3&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\3&1&1\end{pmatrix}$$

即
$$\begin{pmatrix}0&0&0\\2a_2&2b_2&2c_2\\3a+a_1+a_2&3b+b_1+b_2&3c+c_1+c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3c&c&2b+c\\3c_1&c_1&2b_1+c_1\\3c_2&c_2&2b_2+c_2\end{pmatrix}$$

比较对应元素,解得

$$a=b_1-\frac{a_1}{3},\quad b=0,\quad c=0$$

$$a_2=\frac{3}{2}c_1,\quad b_2=\frac{c_1}{2},\quad c_2=b_1+\frac{c_1}{2}$$

故
$$B=\begin{pmatrix}b_1-\frac{a_1}{3}&0&0\\a_1&b_1&c_1\\\frac{3}{2}c_1&\frac{1}{2}c_1&b_1+\frac{c_1}{2}\end{pmatrix}\quad(a_1,\ b_1,\ c_1\text{ 任意})$$

3) 设 $B=\begin{pmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}$ 与 A 可交换,即

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得
$$\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&a_1&b_1\\0&a_2&b_2\end{pmatrix}$$

比较对应元素,得

$$a_1=a_2=b_2=0,\quad b_1=a,\quad c_2=a,\quad c_1=b$$

故
$$B=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}\quad(a,\ b,\ c\text{ 任意})$$

5. 设 $A=\begin{pmatrix}a_1&0&\cdots&0\\0&a_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&&\cdots\\0&0&\cdots&a_n\end{pmatrix}$,其中 $a_i\neq a_j$ 当 $i\neq j$ $(i,\ j=1,2,\cdots,n)$.证

明:与 A 可交换的矩阵只能是对角矩阵 .

证　设 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ 与 A 可交换,即

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

得

$$\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1n} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_2b_{12} & \cdots & a_nb_{1n} \\ a_1b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_nb_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_1b_{n1} & a_2b_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix}$$

由于 $a_1,\cdots,a_n$ 互异,比较非对角线元素得 $a_ib_{ij}=a_jb_{ij}$,即$(a_i-a_j)b_{ij}=0$,于是 $b_{ij}=0\ (i\neq j)$. 故与 A 可交换的矩阵 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$ 为对角矩阵 .

6. 设 $A=\begin{pmatrix} a_1E_1 & & & \\ & a_2E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_rE_r \end{pmatrix}$,其中 $a_i\neq a_j$ 当 $i\neq j\ (i,j=1,2,\cdots,r)$,$E_i$ 是 n_i 级单位矩阵,$\sum_{i=1}^{r}n_i=n$. 证明:与 A 可交换的矩阵只能是准对角矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$$

其中 A_i 是 n_i 级矩阵 $(i=1,\cdots,r)$.

证　设 $B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rr} \end{pmatrix}$ 与 A 可交换,其中 B 与 A 分块方式相同,

则

$$\begin{pmatrix} a_1E_1 & & & \\ & a_2E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_rE_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rr} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1E_1 & & & \\ & a_2E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_rE_r \end{pmatrix}$$

即
$$\begin{pmatrix} a_1B_{11} & a_1B_{12} & \cdots & a_1B_{1r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_rB_{r1} & a_rB_{r2} & \cdots & a_rB_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1B_{11} & a_2B_{12} & \cdots & a_rB_{1r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_1B_{r1} & a_2B_{r2} & \cdots & a_rB_{rr} \end{pmatrix}$$

由于 $a_1,\cdots,a_r$ 互异,比较非对角块元素得 $a_iB_{ij}=a_jB_{ij}$,即 $(a_i-a_j)B_{ij}=O$,于是 $B_{ij}=O\ (i\neq j)$.因此与 A 可交换的矩阵 $B=\begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{rr} \end{pmatrix}$ 是准对角阵.

7. 用 E_{ij} 表示 i 行 j 列的元素为 1,而其余元素全为零的 $n\times n$ 矩阵,而 $A=(a_{ij})_{n\times n}$.证明:

1) 如果 $AE_{12}=E_{12}A$,那么当 $k\neq 1$ 时 $a_{k1}=0$,当 $k\neq 2$ 时 $a_{2k}=0$;

2) 如果 $AE_{ij}=E_{ij}A$,那么当 $k\neq i$ 时 $a_{ki}=0$,当 $k\neq j$ 时 $a_{jk}=0$,且 $a_{ii}=a_{jj}$;

3) 如果 A 与所有的 n 级矩阵可交换,那么 A 一定是数量矩阵,即 $A=aE$.

证 1) 由 $AE_{12}=E_{12}A$,即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

得
$$\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

故 $a_{k1}=0\ (k\neq 1)$,$a_{2k}=0\ (k\neq 2)$,且 $a_{11}=a_{22}$.

2) 由 $AE_{ij} = E_{ij}A$,即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & & \end{pmatrix} \end{array} i = i \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} \cdots \\ 1 \\ \cdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

得

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2i} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

故 $a_{kj} = 0\ (k \neq i)$, $a_{ik} = 0\ (k \neq j)$,且 $a_{ii} = a_{jj}$.

3) 法 1　数量矩阵 kE_n 显然与任意 n 级方阵可交换;

反之,若 A 与任意 n 级方阵可交换,则也与每个 E_{ij} 可交换 . 由 2) 知, A 是一个数量矩阵 .

法 2　充分性显然 . 下证必要性 .

设 A 与任意 n 级方阵可交换,则与对角阵 $\mathrm{diag}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ $(b_i \neq b_j)$ 也可交换 . 由本章习题 5 知 A 为对角阵 $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$. 再由 A 与

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

可交换,得

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & & & \\ & 0 & a_{22} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1,n-1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{22} & & & \\ & 0 & a_{33} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{nn} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

故 $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{11}, \cdots, a_{11})$ 为数量矩阵 .

8. 如果 $AB = BA$, $AC = CA$, 证明: $A(B + C) = (B + C)A$; $A(BC) = (BC)A$.

证
$$A(B+C) = AB + AC = BA + CA = (B+C)A$$
$$A(BC) = (AB)C = (BA)C = B(AC) = B(CA) = (BC)A$$

9. **如果** $A=\frac{1}{2}(B+E)$**,证明:**$A^2=A$**当且仅当** $B^2=E$.

证　设 $A^2=A$, $A=\frac{1}{2}(B+E)$,则 $B=2A-E$,于是

$$B^2=(2A-E)^2=4A^2-4A+E=4A-4A+E=E$$

即 $B^2=E$.

设 $B^2=E$, $A=\frac{1}{2}(B+E)$,则

$$A^2=\frac{1}{4}(B+E)^2=\frac{1}{4}(B^2+2B+E)=$$

$$\frac{1}{4}(E+2B+E)=\frac{1}{2}(B+E)=A$$

即 $A^2=A$.

10. **矩阵** A **称为对称的,如果** $A'=A$. **证明:如果** A **是实对称矩阵且** $A^2=O$**,那么** $A=O$.

证　设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. 由题设,$A=A'$,那么

$$O=A^2=AA'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2 & * & \cdots & * \\ * & a_{21}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{2n}^2 & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ * & * & \cdots & a_{n1}^2+a_{n2}^2+\cdots+a_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

从而 $a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=0\ (i=1,2,\cdots,n)$. 于是 $a_{ij}=0\ (i, j=1,2,\cdots,n)$,故 $A=O$.

11. **设** A, B **都是** $n\times n$ **的对称矩阵,证明:**AB **也对称当且仅当** A, B **可交换**.

证　由题设,$A=A'$, $B=B'$.

设 AB 对称,即 $AB=(AB)'$,而 $(AB)'=B'A'=BA$,故 $AB=BA$,即 AB 可交换.

设 AB 可交换,即有 $AB = BA$.又$(AB)' = B'A' = BA$,故 $AB = (AB)'$,即 AB 对称.

12. 矩阵 A 称为反对称的,如果 $A' = -A$.证明:任一 $n\times n$ 矩阵都可表为一对称矩阵与一反对称矩阵之和.

证　设 B 为任意 $n\times n$ 矩阵,则

$$B = \frac{B+B'}{2} + \frac{B-B'}{2}$$

其中 $\frac{B+B'}{2}$ 为对称阵,$\frac{B-B'}{2}$ 为反对称矩阵.

13. 设 $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$, $k = 0,1,2,\cdots$; $a_{ij} = s_{i+j-2}$, $i, j = 1,2,\cdots, n$.证明:$|a_{ij}| = \prod_{i<j}(x_i - x_j)^2$.

证

$$|a_{ij}| = |s_{i+j-2}| = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-1} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} n & x_1 + \cdots + x_n & \cdots & x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \cdots + x_n^{n-1} \\ x_1 + \cdots + x_n & x_1^2 + \cdots + x_n^2 & \cdots & x_1^n + \cdots + x_n^n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_1^{n-1} + \cdots + x_n^{n-1} & x_1^n + \cdots + x_n^n & \cdots & x_1^{2n-2} + \cdots + x_n^{2n-2} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$\prod_{i<j}(x_j - x_i)\prod_{i<j}(x_j - x_i) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)^2$$

14. 设 A 是 $n\times n$ 矩阵,证明:存在一个 $n\times n$ 非零矩阵 B,使 $AB = O$ 的充分必要条件是 $|A| = 0$.

证　必要性.设 $B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$,其中 b_j 是 B 的第 j 列.由 $B\neq O$,有 i_0,使 $b_{i_0}\neq 0$.又 $AB = O$,即 $A(b_1, \cdots, b_n) = (0,0,\cdots,0)$,也即 $Ab_i = 0$,于是 $Ax = 0$ 有非零解 b_{i_0},故 $|A| = 0$.

充分性.设 $|A| = 0$,则线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解 b_1,作 $B = (b_1, b_2,$

$\cdots, b_n) \neq O$, 其中 $b_2, \cdots, b_n$ 均为零向量, 则 $Ab_j = 0$, $j = 1, \cdots, n$, 于是 $AB = O$.

15. 设 A 是 $n \times n$ 矩阵, 如果对任一 n 维向量 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 都有 $Ax = 0$, 那么 $A = O$.

证 法 1 分别取 x 为

$$e_i = (0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0)' \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

由 $Ae_i = 0$, 得 $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \cdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $(i = 1, \cdots, n)$, 故 $A = O$.

法 2 由于线性方程组 $Ax = 0$ 有 n 个线性无关的解 $e_1, \cdots, e_n$, 其基础解系含 n 个向量, 故 $\operatorname{rank} A = 0$, 即 $A = O$.

16. 设 B 为一 $r \times r$ 矩阵, C 为一 $r \times n$ 矩阵, 且 $\operatorname{rank} C = r$. 证明:

1) 如果 $BC = O$, 那么 $B = O$;

2) 如果 $BC = C$, 那么 $B = E$.

证 1) 由于 $\operatorname{rank} C = r$, C 中必有一 r 级子式不为零(不妨设由 C 的前 r 列构成 C_1, $|C_1| \neq 0$). 利用本章习题 14, 使 $BC_1 = O$, 只有 $B = O$.

2) 由 $BC = C$ 得 $(B - E)C = O$, 利用 1) 得 $B - E = O$, 即 $B = E$.

17. 证明 $\operatorname{rank}(A + B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.

证 设 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $B = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$, 则

$$A + B = (\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_n + \beta_n)$$

不妨设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{r_1}$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_{r_2}$ 分别是 A 与 B 之列向量组的极大线性无关组, 则有

$$\alpha_i = k_{i1}\alpha_1 + \cdots + k_{ir_1}\alpha_{r_1}, \quad \beta_i = l_{i1}\beta_1 + \cdots + l_{ir_2}\beta_{r_2} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

从而

$$\alpha_i + \beta_i = k_{i1}\alpha_1 + \cdots + k_{ir_1}\alpha_{r_1} + l_{i1}\beta_1 + \cdots + l_{ir_2}\beta_{r_2} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

即 $A + B$ 的列向量组可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{r_1}, \beta_1, \cdots, \beta_{r_1}$ 线性表示. 故

$$\operatorname{rank}(A + B) \leq r_1 + r_2 = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

18. **设** A, B **为** $n\times n$ **矩阵．证明：如果** $AB = O$，**那么**

$$\operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B \leq n$$

证　记 $B = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$，由 $AB = O$，得

$$A(\beta_1, \cdots, \beta_n) = (0, \cdots, 0)，\text{即 } A\beta_i = 0 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

也即 β_i 是线性方程组 $Ax = 0$ 的解向量，故

$$\operatorname{rank}B \leq n - \operatorname{rank}A, \quad \text{即} \quad \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B \leq n$$

19. **证明：如果** $A^k = O$，**那么**

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

证

$$(E + A + \cdots + A^{k-1})(E - A) = E + A + \cdots + A^{k-1} - (A + A^2 + \cdots + A^k) = E - A^k = E$$

故 $(E - A)^{-1} = E + A + \cdots + A^{k-1}$．

20. **求** A^{-1}，**设**

1) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$ad - bc = 1$；　　2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$；

3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$；　　4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$；

5) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$；　　6) $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$；

7) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；　　8) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 8 \\ -1 & -3 & -1 & -6 \end{bmatrix}$；

9) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$；　　10) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$．

解 1) $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}=\dfrac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a\end{bmatrix}}{ad-bc}=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a\end{bmatrix}$

2) $$(A \vdots E)=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{r_3-2r_2\\ r_2\times(-1)}]{r_1+r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{r_2-\frac{2}{3}r_3\\ r_3\times\left(-\frac{1}{3}\right)}]{r_1+\frac{1}{3}r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{array}\right]=(E \vdots A^{-1})$$

故
$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

3) $$(A \vdots E)=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1-2r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{r_1\longleftrightarrow r_2\\ r_2\longleftrightarrow r_3}]{\substack{r_2+r_3\\ r_1-4r_3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{r_2+r_3\\ r_3\times(-1)}]{r_1+r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) = (E \mid A^{-1})$$

故
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

4) $(A \mid E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_4 - r_1 \\ r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_1 \leftrightarrow r_3}]{\substack{r_1 - r_3 \\ r_2 - 2r_3 \\ r_4 - r_3}}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4 + r_2]{\substack{r_1 - r_2 \\ r_3 - r_2}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -6 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 - 3r_4 \\ r_4 \times (-1) \\ r_3 \leftrightarrow r_4}]{\substack{r_1 - r_4 \\ r_2 + 2r_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -6 & -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4 \times (-1)]{\substack{r_1 - 6r_4 \\ r_2 + 5r_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 22 & -6 & -26 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right) = (E \mid A^{-1})$$

故
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

5) $(A \mid E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4 - r_1]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1}}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2 \longleftrightarrow r_3 \\ r_i \times \left(-\frac{1}{2}\right) \ (i = 2,3,4)}]{\substack{r_4 - r_3 \\ r_1 + \frac{1}{2} r_3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{r_1 - r_3 \\ r_4 - r_3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 + \frac{1}{2} r_4 \\ r_4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}]{\substack{r_1 - \frac{1}{2} r_4 \\ r_2 + \frac{1}{2} r_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right) = (E \mid A^{-1})$$

故
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

6) $(A \vdots E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}3&3&-4&-3&1&0&0&0\\0&6&1&1&0&1&0&0\\5&4&2&1&0&0&1&0\\2&3&3&2&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-7&5&12&-19\\0&1&0&0&3&-2&-5&8\\0&0&1&0&41&-30&-69&111\\0&0&0&1&-59&43&99&-159\end{array}\right)=(E \vdots A^{-1})$$

故
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-7&5&12&-19\\3&-2&-5&8\\41&-30&-69&111\\-59&43&99&-159\end{pmatrix}$$

7) **法** 1　$|A|=1$，$A^{-1}=A^{*}=\begin{pmatrix}1&-3&11&-38\\&1&-2&7\\&&1&-2\\&&&1\end{pmatrix}$

法 2　$(A \vdots E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&3&-5&7&1&0&0&0\\0&1&2&-3&0&1&0&0\\0&0&1&2&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-3r_2}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&-11&16&1&-3&0&0\\0&1&2&-3&0&1&0&0\\0&0&1&2&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+11r_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&38&1&-3&11&0\\0&1&0&-7&0&1&-2&0\\0&0&1&2&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_4]{\substack{r_1-38r_4\\r_2+7r_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-3&11&-38\\0&1&0&0&0&1&-2&7\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)=(E\,\vdots\,A^{-1})$$

故
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3&11&-38\\&1&-2&7\\&&1&-2\\&&&1\end{pmatrix}$$

8) **法** 1 $(A\,\vdots\,E)\xrightarrow{\text{行变换}}(E\,\vdots\,A^{-1})$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-3&2&0&0\\-5&7&-3&-4\\2&-2&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

法 2 **记** $A=\begin{pmatrix}A_{11}&O\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$,**利用教材** P194 **例** 1 **结果**,**即**

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11}^{-1}&O\\-A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}&A_{22}^{-1}\end{pmatrix}$$

而

$$A_{11}^{-1}=\frac{A_{11}^*}{|A_{11}|}=A_{11}^*=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix},\quad A_{22}^{-1}=\frac{A_{22}^*}{|A_{22}|}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-6&-8\\1&1\end{pmatrix}$$

$$-A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-6&-8\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&7\\-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&7\\2&-2\end{pmatrix}$$

故
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-3&2&0&0\\-5&7&-3&-4\\2&-2&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

9) $(A \vdots E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行变换}}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{6} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) = (E \vdots A^{-1})$$

故
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{6} & \frac{10}{3} \\ -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & -\frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

10)
$$(A \vdots E) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行变换}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{32} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) = (E \vdots A^{-1})$$

故
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{8}&-\frac{1}{16}&\frac{1}{32}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{8}&-\frac{1}{16}\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\\0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

21. 设 $X=\begin{pmatrix}O&A\\C&O\end{pmatrix}$,已知 A^{-1}, C^{-1} 存在,求 X^{-1} .

解　设 $X^{-1}=\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}$,由$\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&A\\C&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&O\\O&E\end{pmatrix}$得
$$\begin{pmatrix}X_{12}C&X_{11}A\\X_{22}C&X_{21}A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&O\\O&E\end{pmatrix}$$
即
$$X_{12}C=E,\quad X_{11}A=O,\quad X_{22}C=O,\quad X_{21}A=E$$
解得 $X_{11}=O$, $X_{12}=C^{1}$, $X_{21}=A^{-1}$, $X_{22}=O$. 故
$$\begin{pmatrix}O&A\\C&O\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O&C^{1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$$

22. 设 $X=\begin{pmatrix}0&a_1&0&\cdots&0&0\\0&0&a_2&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&a_{n-1}\\a_n&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$, 其中 $a_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$,
求 X^{-1} .

解　法 1

$$(A\,\vdots\,E)=\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}0&a_1&0&\cdots&0&0&1&0&0&\cdots&0&0\\0&0&a_2&\cdots&0&0&0&1&0&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&a_{n-1}&0&0&0&\cdots&1&0\\a_n&0&0&\cdots&0&0&0&0&0&\cdots&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[i=n-1,n-2,\cdots,1]{r_i\longleftrightarrow r_{i+1}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc} a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_i \times \frac{1}{a_{i-1}} \\ (i = 2, \cdots, n)}]{r_1 \times \frac{1}{a_n}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{array}\right)$$

故
$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

法 2　设 $X^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$，由 $XX^{-1} = E$，即

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

得
$$\begin{pmatrix} a_1 x_{21} & a_1 x_{22} & \cdots & a_1 x_{2n} \\ a_2 x_{31} & a_2 x_{32} & \cdots & a_2 x_{3n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n-1} x_{n1} & a_{n-1} x_{n2} & \cdots & a_{n-1} x_{nn} \\ a_n x_{11} & a_n x_{12} & \cdots & a_n x_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

解得 $x_{21}=\dfrac{1}{a_1}$, $x_{32}=\dfrac{1}{a_2}$, $\cdots$, $x_{n,n-1}=\dfrac{1}{a_{n-1}}$, $x_{1n}=\dfrac{1}{a_n}$,**其他** $x_{ij}=0$. **故**

$$X^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{a_n} \\ \dfrac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

法 3　**记** $X=\begin{pmatrix} & A \\ a_n & \end{pmatrix}$,**则由本章习题** 21 **得**

$$X^{-1}=\begin{pmatrix} & \dfrac{1}{a_n} \\ A^{-1} & \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} & & & \dfrac{1}{a_n} \\ \hline \dfrac{1}{a_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \dfrac{1}{a_{n-1}} & \end{array}\right)$$

23. **求矩阵** X. **设**

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_n X=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}_n$;

4) $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

解　1) **记** $AX = B$,**则** $X = A^{-1}B$. **可求得**

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

故

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

2) **记** $AX = B$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$,**故**

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{6} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3)

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \xlongequal{2)\text{题}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

24. 证明:

1) 如果 A 可逆对称(反对称),那么 A^{-1} 也对称(反对称);

2) 不存在奇数级的可逆反对称矩阵 .

证　1) 设 A 对称(反对称),即 $A = A'$ ($A = -A'$),则

$$(A^{-1})' = (A')^{-1} = A^{-1} \quad ((A^{-1})' = (A')^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1})$$

故 A^{-1} 也对称(A^{-1} 为反对称阵) .

2) 设 A 反对称,有 $A = -A'$, 则

$$|A| = |-A'| = (-1)^n |A'| = (-1)^n |A|$$

当 n 为奇数时, $|A| = -|A|$,故 $|A| = 0$,即 A 不可逆 .

25. 矩阵 $A = (a_{ij})$ 称为上(下)三角形矩阵,如果 $i > j$ ($i < j$) 时有 $a_{ij} = 0$. 证明:

1) 两个上(下)三角形矩阵的乘积仍是上(下)三角形矩阵;

2) 可逆的上(下)三角形矩阵的逆仍是上(下)三角形矩阵 .

证　1) 设 $A = (a_{ij})$ 及 $B = (b_{ij})$ 均为上三角形矩阵,设 $C = AB = (c_{ij})$,则

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{i,i-1}b_{i-1,j} + a_{ii}b_{ij} + a_{i,i+1}b_{i+1,j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

当 $i > j$ 时, $a_{ij} = b_{ij} = 0$,显然 c_{ij} 中各项有因子为零,故 $c_{ij} = 0$ ($i > j$),故 AB 也为上三角形矩阵 .

2) 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$, $B = (b_{ij})$ 是 A 的逆矩阵,即有 $AB = E$,比较 E 和 AB 的第一列元素 .

$$\begin{cases} 1 = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ 0 = \qquad\qquad a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} \\ \quad \cdots\cdots \\ 0 = \qquad\qquad\qquad a_{n-1,n-1}b_{n-1,1} + a_{n-1,n}b_{n1} \\ 0 = \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}b_{n1} \end{cases}$$

由 $|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$ 知, $a_{ii} \neq 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$,故由上式解得

$$b_{n1} = b_{n-1,1} = \cdots = b_{21} = 0$$

类似地,比较第 2 至 n 列可得, $i > j$ 时, $b_{ij} = 0$,故 $B = A^{-1}$ 为上三角形矩阵 .

同理可证 A 为下三角形矩阵的情形 .

26. 证明:

$$|A^*| = |A|^{n-1}$$

其中 A 是 $n\times n$ 矩阵($n \geq 2$) .

证　由 $AA^* = |A|E$ 得

$$|A||A^*| = |AA^*| = ||A|E| = |A|^n \cdot |E| = |A|^n$$

当 $|A| \neq 0$ 时, $|A^*| = \dfrac{|A|^n}{|A|} = |A|^{n-1}$;

当 $|A| = 0$ 时,

1°. $A = O$ 时, $A^* = O$,于是 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

2°. $\operatorname{rank}A > 0$ 时, $AA^* = |A|E = O$. 由本章习题 18 知 $\operatorname{rank}A + \operatorname{rank}A^* \leq n$,故 $\operatorname{rank}A^* < n$,即 $|A^*| = 0$,也有 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

27. 证明:如果 A 是 $n\times n$ 矩阵($n \geq 2$),那么

$$\operatorname{rank}A^* = \begin{cases} n, & \text{当} \operatorname{rank}A = n \\ 1, & \text{当} \operatorname{rank}A = n-1 \\ 0, & \text{当} \operatorname{rank}A < n-1 \end{cases}$$

证　1) 当 $\operatorname{rank}A = n$ 时, $A^* = |A|A^{-1}$ 可逆,故 $\operatorname{rank}A^* = n$.

2) 当 $\operatorname{rank}A = n-1$ 时, $AA^* = |A|E = O$. 由本章习题 18 知

$$\operatorname{rank}A + \operatorname{rank}A^* \leq n, \quad \text{即} \quad \operatorname{rank}A^* \leq n - \operatorname{rank}A = 1$$

若 $\operatorname{rank}A^* = 0$,则 $A^* = (A_{ji}) = O$,于是 $A_{ij} = 0$,即 A 的所有 $n-1$ 阶子式均为零,与 $\operatorname{rank}A = n-1$ 矛盾,故 $\operatorname{rank}A^* = 1$.

3°. 当 $\operatorname{rank}A < n-1$ 时, A 的所有 $n-1$ 阶子式均为零,由伴随矩阵 $A^* = (A_{ji})$ 的定义知 $A^* = O$,即 $\operatorname{rank}A^* = 0$.

28. 用两种方法求 $A=\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\\hline 1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{array}\right)$ 的逆矩阵.

(1) 用初等变换;

(2) 按 A 中的划分,利用分块乘法的初等变换.(注意各小块矩阵的特点.)

解

(1) $(A\,\vdots\,E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\1&-1&1&-1&0&1&0&0\\1&1&-1&-1&0&0&1&0\\1&-1&-1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[(i=2,3,4)]{r_i-r_1}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&-2&0&-2&-1&1&0&0\\0&0&-2&-2&-1&0&1&0\\0&-2&-2&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)]{\substack{r_1+\frac{1}{2}r_2\\ r_4-r_2}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&-2&-2&-1&0&1&0\\0&0&-2&2&0&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_4-r_3\\ r_3\times\left(-\frac{1}{2}\right)}]{r_1+\frac{1}{2}r_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&-1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&1&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&4&1&-1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3-\frac{1}{4}r_4\\ r_4\times\frac{1}{4}}]{\substack{r_1+\frac{1}{4}r_4\\ r_2-\frac{1}{4}r_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{array}\right)=(E\,\vdots\,A^{-1})$$

故
$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}A$$

(2) 记 $A=\begin{pmatrix}B&B\\B&-B\end{pmatrix}$,其中 $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$,则 $B^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}B$. 利用教材 P195 例 2 结果,有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}B&B\\B&-B\end{pmatrix}^{-1}=$$
$$\begin{pmatrix}(B-B(-B)^{-1}B)^{-1} & -(B-B(-B)^{-1}B)^{-1}B(-B)^{-1}\\ -(-B)^{-1}B(B-B(-B)^{-1}B)^{-1} & (-B)^{-1}B(B-B(-B)^{-1}B)^{-1}B(-B)^{-1}+(-B)^{-1}\end{pmatrix}$$

其中$(B-B(-B)^{-1}B)^{-1}=(B+B)^{-1}=(2B)^{-1}=\frac{1}{2}B^{-1}$. 于是

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}B^{-1}&\frac{1}{2}B^{-1}\\\frac{1}{2}B^{-1}&-\frac{1}{2}B^{-1}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}B^{-1}&B^{-1}\\B^{-1}&B^{-1}\end{pmatrix}=$$
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}B&\frac{1}{2}B\\\frac{1}{2}B&-\frac{1}{2}B\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}B&B\\B&-B\end{pmatrix}=\frac{1}{4}A$$

29. A, B 分别是 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵,证明
$$\begin{vmatrix}E_m&B\\A&E_n\end{vmatrix}=|E_n-AB|=|E_m-BA|$$

解　由于$\begin{pmatrix}E_m&O\\-A&E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_m&B\\A&E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_m&B\\O&E_n-AB\end{pmatrix}$,所以
$$\begin{vmatrix}E_m&B\\A&E_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}E_m&O\\-A&E_n\end{vmatrix}\begin{vmatrix}E_m&B\\A&E_n\end{vmatrix}=$$
$$\begin{vmatrix}E_m&B\\O&E_n-AB\end{vmatrix}=|E_m||E_n-AB|=|E_n-AB|$$

又由$\begin{pmatrix}E_m&B\\A&E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_m&O\\-A&E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_m-BA&B\\O&E_n\end{pmatrix}$,得

$$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} E_m - BA & B \\ O & E_n \end{vmatrix} = |E_m - BA||E_n| = |E_m - BA|$$

30\. A, B 如上题,$\lambda \neq 0$,证明

$$|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m}|\lambda E_m - BA|$$

证 由 $\begin{pmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E_m & B \\ O & \lambda E_n - AB \end{pmatrix}$,得

$$\begin{vmatrix} \lambda E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda E_m & B \\ O & \lambda E_n - AB \end{vmatrix} = |\lambda E_m||\lambda E_n - AB| = \lambda^m |\lambda E_n - AB|$$

又由 $\begin{pmatrix} \lambda E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E_m - BA & B \\ O & \lambda E_n \end{pmatrix}$,得

$$\begin{vmatrix} \lambda E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda E_m - BA & B \\ O & \lambda E_n \end{vmatrix} = |\lambda E_m - BA||\lambda E_n| = \lambda^n |\lambda E_m - BA|$$

于是
$$\lambda^m |\lambda E_n - AB| = \lambda^n |\lambda E_m - BA|$$

故
$$|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m}|\lambda E_m - BA|$$

(二) 第四章补充题

1\. **设** A **是一个** $n \times n$ **矩阵**,$\operatorname{rank} A = 1$,**证明**:

1) $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$;

2) $A^2 = kA$.

证 1) 由 $\operatorname{rank} A = 1$ 知,有 $A = (a_{ij})$ 的某元素 $a_{i_0 j_0} \neq 0$,且 A 的每两列都

成比例. 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,则有 $\alpha_i=b_i\beta_1$, $\beta=\begin{pmatrix}a_1\\ \cdots\\ a_n\end{pmatrix}$ 为非零列向量,于是

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(b_1\beta_1,b_2\beta_1,\cdots,b_n\beta_1)=$$

$$\begin{pmatrix}b_1a_1 & b_2a_1 & \cdots & b_na_1\\ b_1a_2 & b_2a_2 & \cdots & b_na_2\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ b_1a_n & b_2a_n & \cdots & b_na_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \cdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

2) 由 1)

$$A^2=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \cdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \cdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=$$

$$k\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \cdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=kA$$

其中数 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \cdots\\ a_n\end{pmatrix}=\sum\limits_{i=1}^{n}b_ia_i$.

2. 设 A 为 2×2 矩阵,证明:如果 $A^l=O, l\geq2$,那么 $A^2=O$.

证　由 $A^l=O$,得 $0=|A^l|=|A|^l$, 即 $|A|=0$,那么 $\mathrm{rank}A=1$ 或 0 . 若 $\mathrm{rank}A=0$,则 $A=O$, 此时 $A^2=O$. 若 $\mathrm{rank}A=1$,由上题, $A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}(b_1,b_2)$,从而

$$A^2=kA,\quad A^l=k^{l-1}A\quad(l\geq2)$$

因为 $A\neq O$,由 $A^l=k^{l-1}A=O$,得 $k=0$,故 $A^2=kA=O$.

3. 设 A 为 $n\times n$ 矩阵,证明:如果 $A^2=E$,那么

$$\mathrm{rank}(A+E)+\mathrm{rank}(A-E)=n$$

证　由 $A^2 = E$,得

$$(A+E)(A-E) = A^2 - E = O$$

利用本章习题 18 **得** $\operatorname{rank}(A+E)+\operatorname{rank}(A-E)\leq n$. **又** $2E=(E+A)+(E-A)$, **利用本章习题** 17,**有**

$$\begin{aligned} n = \operatorname{rank}(2E) = \operatorname{rank}[(E+A)+(E-A)] \leq \\ \operatorname{rank}(E+A)+\operatorname{rank}(E-A) = \\ \operatorname{rank}(A+E)+\operatorname{rank}(A-E) \end{aligned}$$

故 $\operatorname{rank}(A+E)+\operatorname{rank}(A-E)=n$.

4. **设** A **为** $n\times n$ **矩阵**,**且** $A^2 = A$. **证明**:

$$\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}(A-E)=n$$

证　由 $A^2 = A$,得

$$(A-E)A = O$$

利用本章习题 18 **得** $\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}(A-E)\leq n$. **利用本章习题** 17,**有**

$$\begin{aligned} n = \operatorname{rank}E = \operatorname{rank}[(E-A)+A] \leq \operatorname{rank}(E-A)+\operatorname{rank}A = \\ \operatorname{rank}(A-E)+\operatorname{rank}A \end{aligned}$$

故 $\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}(A-E)=n$.

5. **证明**:

$$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$$

其中 A **是** $n\times n$ **矩阵**$(n>2)$.

证　**利用**　$AA^* = A^*A = |A|E$

1) **当** $|A|\neq 0$ **时**,$A^* = |A|A^{-1}$. **于是**

$$\begin{aligned} (A^*)^* = (|A|A^{-1})^* = ||A|A^{-1}|(|A|A^{-1})^{-1} = \\ |A|^n|A^{-1}|\frac{1}{|A|}(A^{-1})^{-1} = \\ |A|^n|A|^{-1}\frac{1}{|A|}A = |A|^{n-2}A \end{aligned}$$

2) **当** $|A|=0$ **时**,**由本章习题** 27 **知**,$\operatorname{rank}A^*\leq 1$.

当 $n>2$ **时**,$\operatorname{rank}(A^*)^*=0$, $(A^*)^*=O$, **从而** $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

6. **设** A,B,C,D **都是** $n\times n$ **矩阵**,**且** $|A|\neq 0$, $AC=CA$. **证明**:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|$$

证　**因为** $\begin{pmatrix} E_n & O \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$,**所以**

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_n & O \\ -CA^{-1} & E_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{vmatrix} =$$

$$|A||D-CA^{-1}B| = |AD-ACA^{-1}B| =$$

$$|AD-CAA^{-1}B| = |AD-CB|$$

7. **设** A **是一** $n\times n$ **矩阵,且** $\operatorname{rank}A = r$. **证明:存在一** $n\times n$ **可逆矩阵** P **使** PAP^{-1} **的后** $n-r$ **行全为零**.

证　由 $\operatorname{rank}A = r$ 知,存在可逆阵 P, Q,使

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix},\ \text{即}\quad PAP^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1}P^{-1}$$

记 $Q^{-1}P^{-1} = \begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix}$,有

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ O & O \end{pmatrix}$$

即 PAP^{-1} 的后 $n-r$ 行全为零.

8. 1) **把矩阵** $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ **表成形式为**

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{与} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

的矩阵的乘积;

2) **设** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **为一复数矩阵**, $|A| = 1$, **证明:** A **可以表成形式为**(1) **的矩阵的乘积**.

解　1) 对 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ 作行(或列)的倍加变换(相当于左(或右)乘形如 $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ 的矩阵),化为形如 $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ 的矩阵.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2+\frac{1}{a}c_1} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+(1-a^{-1})r_1}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1+(1-a)c_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

从而

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注意到$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,故

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a^{-1} & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^{-1}-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(注:此表示法不惟一)

2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-\frac{c}{a}r_1}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ad-cb}{a} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\xrightarrow{c_2-\frac{b}{a}c_1}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$

从而

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

故

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

再利用1),有

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^{-1}-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. 设 A 是一 $n\times n$ 矩阵,$|A|=1$,证明:A 可以表成 $P(i,\ j(k))$ 这一类初等矩阵的乘积.

证　用数学归纳法.当 $n=2$ 时,由上题2)知成立.

假设 $n-1$ 成立,下证对 n 成立.

1) 当 $a_{11}\neq 0$ 时,对 A 施以一系列行(列)倍加变换

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+\frac{1-a_{21}}{a_{11}}r_1}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & \cdots & a_{2n}' \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+(1-a_{11})r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & a_{1n}' \\ 1 & \cdots & a_{2n}' \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行(列)倍加变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \xlongequal{\text{def}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} > B$$

因而 $|A| = |B| = |B_1| = 1$,由归纳假设

$$B_1 = P_1(i_1, j_1(k_1))\cdots P_s(i_s, j_s(k_s))$$

于是

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & P_1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 1 & \\ & P_s \end{pmatrix} > Q_1\cdots Q_s$$

其中 $Q_1, \cdots, Q_s$ 为 n 级倍加变换阵 .

由于 A 可经一系列行(列) 倍加变换化为 B,于是

$$A = R_1\cdots R_t B T_1\cdots T_r$$

其中 $R_i\ (i = 1,\cdots,t)$, $T_j\ (j = 1,\cdots,r)$ 均为 n 级倍加变换阵 . 故 $A = R_1\cdots R_t Q_1\cdots Q_s T_1\cdots T_r$,得证 .

2) 当 $a_{11} = 0$ 时, A 的第一列至少有一个 $a_{i1} \neq 0$,不妨设 $a_{21} \neq 0$,则

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{r}_1 + \frac{(1 - a_{11})}{a_{21}}\mathrm{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & a_{1n}' \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

已化为情形 1),故情形 2) 也成立 .

10. 设 $A = (a_{ij})_{sn}$, $B = (b_{ij})_{nm}$. 证明:

$$\mathrm{rank}(AB) \geq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B - n$$

证　设 $\mathrm{rank}A = r_1$, $\mathrm{rank}B = r_2$, $\mathrm{rank}(AB) = r$,则存在可逆矩阵 P, Q,使

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

记 $Q^{-1}B = \begin{pmatrix} B_{r_1\times m} \\ B_{(n-r_1)\times m} \end{pmatrix}$,有 $r = \mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(PAQQ^{-1}B)$,而

$$PAQQ^{-1}B = \begin{pmatrix} E_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{r_1\times m} \\ B_{(n-r_1)\times m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{r_1\times m} \\ O \end{pmatrix}$$

于是,$\operatorname{rank}(B_{r_1\times m})=\operatorname{rank}(AB)=r$,但 $\operatorname{rank}(Q^{-1}B)=r_2$,说明在 $B_{(n-r_1)\times m}$ 中线性无关的行数为 r_2-r,而总行数为 $n-r_1$,故 $r_2-r\leq n-r_1$,即 $r\geq r_1+r_2-n$.

11. 矩阵的列(行)向量组如果是线性无关的,就称该矩阵为列(行)满秩的.设 A 是 $m\times r$ 矩阵,则 A 是列满秩的充分必要条件为存在 m 级可逆阵 P 使

$$A=P\begin{pmatrix}E_r\\O\end{pmatrix}$$

同样地,A 为行满秩的充分必要条件为存在 r 级可逆矩阵 Q 使

$$A=(E_m\quad O)Q$$

证　1) 设 $A=P\begin{pmatrix}E_r\\O\end{pmatrix}$,其中 P 可逆.则 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}\left[P\begin{pmatrix}E_r\\O\end{pmatrix}\right]=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}E_r\\O\end{pmatrix}=r$,即 A 列满秩.

反之,设 A 列满秩,即 $\operatorname{rank}A=r$,那么 A 有某 r 级子式 $\boldsymbol{\Delta}_r\neq 0$,不妨设由前 r 行构成(否则可通过初等行变换将其调至前 r 行),即

$$\boldsymbol{\Delta}_r=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1r}\\\cdots&&\cdots\\a_{r1}&\cdots&a_{rr}\end{vmatrix}\neq 0$$

1°. $a_{11}\neq 0$ 时,(若 $a_{11}=0$,可将 a_{21} 至 a_{r1} 中某非零元通过行变换调至1行1列位置)通过行变换,用 a_{11} 将 $a_{i1}(i=2,\cdots,m)$ 化为0

$$A\xrightarrow[i=2,\cdots,m]{\mathrm{r}_i-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\mathrm{r}_1}\begin{pmatrix}1&a_{12}'&\cdots&a_{1r}'\\0&a_{22}'&\cdots&a_{2r}'\\\cdots&\cdots&&\cdots\\0&a_{m2}'&\cdots&a_{mr}'\end{pmatrix}$$

2°. $a_{22}'\neq 0$ 时,(若 $a_{22}'=0$,可将 a_{32}' 至 a_{r2}' 中某非零元通过行变换调至2行2列位置)

$$A\xrightarrow[i=1,3,\cdots,m]{\mathrm{r}_i-\frac{a_{i2}'}{a_{22}'}\mathrm{r}_2}\begin{pmatrix}1&0&a_{13}''&\cdots&a_{1r}''\\0&1&a_{23}''&\cdots&a_{2r}''\\0&0&a_{33}''&\cdots&a_{3r}''\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots\\0&0&a_{m3}''&\cdots&a_{mr}''\end{pmatrix}$$

将此过程共做 r 次,则 $A \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} E_r \\ O \end{bmatrix}$,即存在可逆阵 P,使

$$PA = \begin{bmatrix} E_r \\ O \end{bmatrix}$$

2) 对 A'利用 1) 即可 .

12. $m \times n$矩阵 A 的秩为 r,则有 $m \times r$ 的列满秩矩阵 P 和 $r \times m$ 的行满秩矩阵 Q,使 $A = PQ$.

证　由 $\mathrm{rank} A = r$,存在 $m \times m$ 可逆阵 P, $n \times n$ 可逆阵 Q,使

$$PAQ = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}, \text{ 即 } \quad A = P^{-1} \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q^{-1}$$

记 $P^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$,其中 P_{11}, Q_{11} 均为 r级方阵,则

$$A = P^{-1} \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & O \\ P_{21} & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} Q_{11} & P_{11} Q_{12} \\ P_{21} Q_{11} & P_{21} Q_{12} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{bmatrix} (Q_{11}, Q_{12}) > FG$$

其中 $F = \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{bmatrix}$为非奇异阵 P的前 r 列构成的列满秩阵, $G = (Q_{11}, Q_{12})$ 为非奇异阵 Q的前 r 行构成的行满秩阵 .

六、学习效果检测题及答案

(一) 检测题

1. 设 3 级方阵 A 按列分块为 $A = (A_1, A_2, A_3)$, 且 $|A| = 5$, 又设 $B = (A_1 + 2A_2, 3A_1 + 4A_3, 5A_2)$,则 $|B| =$ ________ .

2. 设 A 是 n 级方阵, $|A| = 5$,则 $\left| A^* - \left(\frac{1}{10} A\right)^{-1} \right| =$ ________ .

3. 设4级方阵 $A=(2\gamma_1,3\gamma_2,4\gamma_3,\alpha)$,$B=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\beta)$,其中 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\alpha$,$\beta$均为四维列向量,且$|A|=8$,$|B|=1$,则$|A-B|=$ ________ .

4. 设 A 是 n 级方阵,则 $||A^*|A|=$ ________ .

5. 设 A 是 m 级方阵,B 是 n 级方阵,则 $\left|-3\begin{pmatrix} A' & O \\ O & B^{-1}\end{pmatrix}^{-1}\right|=$ ________ .

6. 已知 A,B,C 都是行列式值为 2 的 3 级方阵,则 $\begin{vmatrix} O & -A \\ \left(\frac{2}{3}B\right)^{-1} & C\end{vmatrix}=$ ________ .

7. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7\end{pmatrix}$,$B=(E+A)^{-1}(E-A)$,则$(E+B)^{-1}=$ ________ .

8. 设方阵 A满足 $A^3-A^2+3A-2E=O$,则 $A^{-1}=$ ________,$(E-A)^{-1}=$ ________ .

9. 如 $A^3=O$,则$(E+A+A^2)^{-1}=$ ________ .

10. 设 A 为4 级方阵,

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

且$(2E-C^{1}B)A'=C^{-1}$,求 A.

11. 设 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$,则$(A^*)^{-1}=$ ________ .

12. 证明:如果 $E-AB$ 可逆,则 $E-BA$ 也可逆,并且

$$(E-BA)^{-1}=E+B(E-AB)^{-1}A$$

13. 设有 n 级方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & & \cdots \\ 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$,$B=E+\lambda A$,其中 λ为一个数.

(1) 问 λ为何值时,有 $B^2=B$成立;

(2) 证明对(1)中所得的非零数 λ, B 不可逆.

14. 已知 $A=\begin{pmatrix}2&4&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&4\\0&0&0&2\end{pmatrix}$,求 A^n.

15. 设 $\alpha=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$, $\beta=(1,2,3,4)$, $A=\alpha\beta$, 则 $A^n=$ ________.

16. 设 A 为方阵,且 $A^2=A$,证明:$(A+E)^k=E+(2^k-1)A$.

17. 设 A 为 n 级非奇异矩阵,则 $(A^*)^*=$ ________.

(A) $|A|^{n-1}A$;　(B) $|A|^{n+1}A$;　(C) $|A|^{n-2}A$;　(D) $|A|^{n+2}A$.

18. 若 A,A^* 均为 n 级非零矩阵,且 $AA^*=O$,则必有 $\operatorname{rank}A^*=$ ________.

(A) 1;　(B) 2;　(C) $n-1$;　(D) n.

19. 设 3 级方阵 A,B 满足关系式 $A^{-1}BA=6A+BA$, 且 $A=\begin{pmatrix}1/3&0&0\\0&1/4&0\\0&0&1/7\end{pmatrix}$,求 B.

20. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$,且矩阵 X 满足 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$,求 X.

21. 已知 A,B 为 3 级矩阵,且满足 $2A^{-1}B=B-4E$,其中 E 是 3 级单位矩阵.

(1) 证明:矩阵 $A-2E$ 可逆;

(2) 若 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,求矩阵 A.

22. 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{12}\\2a_{21}&2a_{23}&2a_{22}\\a_{31}&a_{33}&a_{32}\end{pmatrix}$, $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 则 $B=$ ________.

(A) P_1P_2A;　(B) AP_2P_1;　(C) P_1AP_2;　(D) P_2AP_1.

23. 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a_{13}&a_{12}&a_{11}+a_{12}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}+a_{22}\\a_{33}&a_{32}&a_{31}+a_{32}\end{pmatrix}$, $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $P_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, 则 $B=$ ________.

(A) P_2AP_3;　(B) AP_1P_3;　(C) AP_3P_1;　(D) AP_2P_3.

24. 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{32}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{pmatrix}$, $P_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, 其中 A 可逆, 则 $B^{1}=$ ________.

(A) $A^{-1}P_1P_2$;　(B) $P_1A^{-1}P_2$;　(C) $P_1P_2A^{-1}$;　(D) $P_2A^{-1}P_1$.

(二) 检测题答案

1. **应填**: -100.

$$|B|=|(A_1,3A_1+4A_3,5A_2)|+|(2A_2,3A_1+4A_3,5A_2)|=$$
$$|(A_1,3A_1,5A_2)|+|(A_1,4A_3,5A_2)|+0=$$
$$0+20|(A_1,A_3,A_2)|=-20|A|=-100$$

2. **应填**: $(-1)^n5^{n-1}$.

$$\left|A^*-\left(\frac{1}{10}A\right)^{-1}\right|=\left||A|A^{-1}-10A^{-1}\right|=|-5A^{-1}|=$$
$$(-5)^n|A^{-1}|=\frac{(-5)^n}{5}=(-1)^n5^{n-1}$$

3. **应填**: -4.

$$|A-B|=|(\gamma_1,2\gamma_2,3\gamma_3,\alpha-\beta)|=$$

$$|(\gamma_1, 2\gamma_2, 3\gamma_3, \alpha)| + |(\gamma_1, 2\gamma_2, 3\gamma_3, -\beta)| =$$

$$\frac{6}{24}|(2\gamma_1, 3\gamma_2, 4\gamma_3, \alpha)| - 6|(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \beta)| =$$

$$\frac{1}{4}|A| - 6|B| = -4$$

4. **应填**: $|A|^{n^2-n+1}$.

因为 $AA^* = |A|E$,**所以** $|A||A^*| = |A|^n$,**即** $|A^*| = |A|^{n-1}$,**从而**

$$||A^*|A| = |A^*|^n|A| = (|A|^{n-1})^n|A| = |A|^{n^2-n+1}$$

5. **应填**: $(-3)^{m+n}|A||B|^{-1}$.

6. **应填**: $\frac{27}{8}$.

原式 $= (-1)^{3\times3}|-A|\left|\left(\frac{2}{3}B\right)^{-1}\right| = -(-1)^3|A|\left|\frac{3}{2}B^{-1}\right| =$

$$2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3|B|^{-1} = \frac{27}{8}$$

7. **应填**: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

由

$$B + E = (E + A)^{-1}(E - A) + E =$$
$$(E + A)^{-1}[(E - A) + (E + A)] = 2(E + A)^{-1}$$

得

$$(B + E)^{-1} = \frac{1}{2}(E + A)$$

8. **应填**: $\frac{1}{2}(A^2 - A + 3E)$ **和** $A^2 + 3E$.

9. **应填**: $E - A$.

10. **由** $(2E - C^{-1}B)A' = C^{-1}$,**整理得** $C(2E - C^{-1}B)A' = E$,**即** $(2C - B)A' = E$,**于是**

$$A = [(2C - B)^{-1}]' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right]' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

11. **应填**: $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

由 $AA^* = |A|E$ 得 $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A = |A^{-1}|A$,而

$$|A^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

故
$$(A^*)^{-1} = |A^{-1}|A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. 因为

$$\begin{aligned} &(E - BA)[E + B(E - AB)^{-1}A] = \\ &\quad E + B(E - AB)^{-1}A - BA - BAB(E - AB)^{-1}A = \\ &\quad E + B(E - AB)(E - AB)^{-1}A - BA = \\ &\quad E + BA - BA = E \end{aligned}$$

故 $E - BA$ 可逆,且 $(E - BA)^{-1} = E + B(E - AB)^{-1}A$.

13. (1) $B^2 = (E + \lambda A)(E + \lambda A) = E + 2\lambda A + \lambda^2 A^2$,可见若 $B^2 = B$,便有 $E + 2\lambda A + \lambda^2 A^2 = E + \lambda A$,即 $\lambda^2 A^2 + \lambda A = O$. 但

$$\lambda^2 A^2 + \lambda A = \lambda^2 \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \cdots & & \cdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\lambda^2 + \lambda & \cdots & n\lambda^2 + \lambda \\ \cdots & & \cdots \\ n\lambda^2 + \lambda & \cdots & n\lambda^2 + \lambda \end{pmatrix}$$

从而 $n\lambda^2 + \lambda = 0$,即得 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = -\frac{1}{n}$.

(2) 当 $\lambda = -\frac{1}{n}$ 时,

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1 - \frac{1}{n} \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\cdots \\ c_1 + c_n}]{\substack{c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ 0 & 1-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \end{vmatrix} = 0$$

故 B 不可逆.

14. A 是分块对角矩阵, $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 于是 $A^n = \begin{pmatrix} B^n & O \\ O & C^n \end{pmatrix}$. 下面求 B^n 和 C^n.

由于 $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}(1 \quad 2)$, 所以 $B^n = 4^{n-1}B = \begin{pmatrix} 2\cdot 4^{n-1} & 4^n \\ 4^{n-1} & 2\cdot 4^{n-1} \end{pmatrix}$.

由于 $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2E + H$, 其中 $H = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 且 $H^2 = O$, $(2E)H = H(2E)$, 从而

$$C^n = (2E + H)^n = 2^n E + n2^{n-1}H = \begin{pmatrix} 2^n & 4n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

故
$$B^n = \begin{pmatrix} 2\cdot 4^{n-1} & 4^n & 0 & 0 \\ 4^{n-1} & 2\cdot 4^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 4n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

15. $A^n = 4^{n-1}A = 4^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$.

16. 采用数学归纳法证明.

17. 应填: (C).

$$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = ||A|A^{-1}|(|A|A^{-1})^{-1} =$$

$$|A|^n|A^{-1}|\frac{1}{|A|}A=|A|^{n-2}A$$

18. 应填:(A).

因为 A,A^* 非零,从而 $\operatorname{rank}A\geq 1,\operatorname{rank}A^*\geq 1$. 由 $AA^*=O$ 知 $|A|=0$(否则可推出 $A^*=O$ 矛盾),从而 $\operatorname{rank}A<n$. 若 $\operatorname{rank}A<n-1$,则 $\operatorname{rank}A^*=0$,即 $A^*=O$ 矛盾;若 $\operatorname{rank}A=n-1$,则 $\operatorname{rank}A^*=1$,故应填(A).

19. 由 $A^{-1}BA=6A+BA$,得 $(A^{-1}-E)BA=6A$,于是

$$B=6(A^{-1}-E)^{-1}$$

又 $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{pmatrix}$,从而 $A^{-1}-E=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}$, $(A^{-1}-E)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$,

故 $B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

20. 由题设关系式得 $AX(A-B)+BX(B-A)=E$,即 $(A-B)X(A-B)=E$.

由于 $|A-B|=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$,所以 $A-B$ 可逆,且 $(A-B)^{-1}=$ $\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,故

$$X=[(A-B)^{-1}]^2=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

21. (1) 由 $2A^{-1}B=B-4E$ 得 $AB-2B-4A=O$,从而

$$(A-2E)(B-4E)=8E,\quad 即\quad (A-2E)\cdot\frac{1}{8}(B-4E)=E$$

故 $A-2E$ 可逆,且 $(A-2E)^{-1}=\frac{1}{8}(B-4E)$.

(2) 由 $AB-2B-4A=O$ 得 $A(B-4E)=2B$,于是

$$A=2B(B-4E)^{-1}=2B\begin{pmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

22. **应填**:(D). **因为** $A\xrightarrow[c_2\backslash c_3]{r_2\times 2}B$,**所以** $B=P_2AP_1$.

23. **应填**:(B). **因为** $A\xrightarrow[c_3+c_2]{c_1\backslash c_3}B$ **或** $A\xrightarrow[c_1\backslash c_3]{c_1+c_2}B$,**故应填**(B).

24. **应填**:(C). **因为** $P_1=P(1,4)$, $P_2=P(2,3)$, $A\xrightarrow[c_2\backslash c_3]{c_1\backslash c_4}B$**或** $A\xrightarrow[c_1\backslash c_4]{c_2\backslash c_3}B$,**从而** $B=AP_1P_2$ **或** $B=AP_2P_1$. **注意到** $P_1^{-1}=P_1$, $P_2^{-1}=P_2$,**故有** $B^{-1}=P_2P_1A^{-1}$ **或** $B=P_1P_2A^{-1}$. **故选**(C).

第 5 章　二 次 型

二次型的理论起源于解析几何中化二次曲线和二次曲面方程为标准形式的问题. 现在二次型的理论不仅在几何而且在数学的其他分支及物理、力学、工程技术中也常常用到.

一、内 容 提 要

1. 二次型及其矩阵表示

(1) 设 P 是一个数域, $a_{ij}\in P$, n 个文字 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 &+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ &+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ &+ \cdots\cdots \\ &+ a_{nn}x_n^2 = \\ &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij} = a_{ji},\ i, j = 1,2,\cdots,n) \end{aligned}$$

称为数域 P 上的一个 n 元二次型,简称二次型. 当 a_{ij} 为实数时,称 f 为实二次型. 当 a_{ij} 为复数时,称 f 为复二次型. 如果二次型中只含有文字的平方项,即

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$$

称 f 为标准形.

(2) 二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可惟一的表示成

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x'Ax$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$, $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为对称矩阵,称上式为二次型的矩阵形式,称 A 为二次型的矩阵(都是对称矩阵),称 A 的秩为二次型 f 的秩.

(3) 设 P 是一个数域, $c_{ij}\in P$,两组文字 $x_1, \cdots, x_n$; $y_1, \cdots, y_n$ 的关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \cdots + c_{1n} y_n \\ x_2 = c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + \cdots + c_{2n} y_n \\ \quad\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1} y + c_{n2} y_2 + \cdots + c_{nn} y_n \end{cases}$$

称为由 $x_1, \cdots, x_n$ 到 $y_1, \cdots, y_n$ 的一个线性替换．用矩阵形式可写为

$$x = Cy$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$, $C = (c_{ij})_{n\times n}$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$. 当 $|C| \neq 0$ 时,称线性替换是非退化的(或可逆的,或满秩的)．

(4) 线性替换将二次型变成二次型．

2. 合同矩阵

(1) 设 A, B 是数域 P 上的 $n\times n$ 矩阵,如果存在数域 P 上的可逆 $n\times n$ 矩阵 C,使

$$B = C'AC$$

则称 A 与 B 合同．

(2) 合同矩阵具有如下性质:

1) 反身性: A 与 A 合同;

2) 对称性:若 A 与 B 合同,则 B 与 A 合同;

3) 传递性:若 A 与 B 合同, B 与 C 合同,则 A 与 C 合同;

4) 若 A 与 B 合同,则 A 的秩与 B 的秩相等．

(3) 经过非退化的线性替换 $x = Cy$,新二次型 $f = y'By$ 的矩阵与原二次型 $f = x'Ax$ 的矩阵是合同的,即 $B = C'AC$．

3. 二次型的标准形与规范形

(1) 数域 P 上的秩为 r 的任意二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x'Ax$ 都可经过 P 上的非退化线性替换 $x = Cy$ 化成标准形

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

其中 $d_i \in P\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 中有 r 个元素非零．

(2) 数域 P 上秩为 r 的任意一个 n 级对称矩阵 A 都合同于一个秩为 r 的对角矩阵 D,即存在可逆矩阵 C,使

$$C'AC = D$$

这里 D 的对角元素中有 r 个非零.

注 二次型的标准形一般不是惟一的,与对称矩阵合同的对角矩阵一般不是惟一的.

(3) 秩为 r 的复二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x'Ax$ 都可以经过复的非退化线性替换 $x = Cy$ 化为惟一的规范形

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2$$

(4) 秩为 r 的任意 n 级复对称矩阵 A 在复数域上合同于惟一的 n 级对角矩阵

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即存在 n 级复可逆矩阵 C,使

$$C'AC = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

(5) 两个 n 元复二次型可通过复的非退化线性替换互化的充分必要条件是,二者有相同的秩.

(6) 两个 n 级复对称矩阵在复数域上合同的充分必要条件是,二者有相同的秩.

(7) 惯性定理 秩为 r 的实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x'Ax$ 都可经过实的非退化线性替换 $x = Cy$ 化为惟一的规范形

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

其中正项个数 p 及负项个数 $q = r - p$ 是确定的,分别称为 f 的正惯性指数和负惯性指数;二者的差 $p - q$ 称为 f 的符号差.

(8) 秩为 r 的 n 级实对称矩阵 A 在实数域上合同于惟一的 n 级对角矩阵

$$\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

即存在 n 级实可逆矩阵 C,使

$$C'AC = \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

(9) 两个 n 元实二次型可通过实的非退化线性替换互化的充分必要条件是,二者有相同的秩与符号差.

(10) 两个 n 级实对称矩阵在实数域上合同的充分必要条件是,二者有相同

的秩与符号差(实对称矩阵 A 的符号差即指二次型 $x'Ax$ 的符号差) .

4. 化二次型为标准形的方法

(1) 配方法:用配方法化二次型为标准形的关键是消去交叉项,分如下两种情形处理:

情形 1　如果二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 含某文字例如 x_1 的平方项,而 $a_{11} \neq 0$,则集中二次型中含 x_1 的所有交叉项,然后与 x_1^2 配方,并作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ y_2 = \qquad\qquad x_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ y_n = \qquad\qquad\qquad\qquad x_n \end{cases} \qquad (c_{1j} \in P)$$

得 $f = d_1 y_1^2 + g(y_2, \cdots, y_n)$,其中 $g(y_2, \cdots, y_n)$ 是 $y_2, \cdots, y_n$ 的二次型 .对 $g(y_2, y_3, \cdots, y_n)$ 重复上述方法直到化二次型 f 为标准形为止 .

情形 2　如果二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 不含平方项,即 $a_{ii} = 0\ (i = 1,2,\cdots,n)$,但含某一个 $a_{ij} \neq 0\ (i \neq j)$,则可先作非退化线性替换

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_j \\ x_j = y_i - y_j \\ x_k = y_k \qquad (k = 1,2,\cdots,n;\ k \neq i, j) \end{cases}$$

把 f 化为一个含平方项 y_i^2 的二次型,再用情形 1 的方法化为标准形 .

注　1. 为了写出化二次型为标准形所用的非退化线性替换,对情形 1 中的线性替换应写出它的逆变换(即用 y_i 表示出 x_i),再将化简过程中每一步的线性替换进行复合得到总的线性替换 .

2. 将配方法过程的每一步用矩阵写出来,相当于对二次型的矩阵 A 逐步采用合同变换进行化简,最终化为对角阵 .书上对这一方法进行了描述,但具体化二次型为标准形时,如下的方法是比较方便的 .

(2) 初等变换法:用非退化线性替换 $x = Cy$ 化二次型 $f = x'Ax$ 为标准形,相当于对于对称矩阵 A 找一个可逆矩阵 C,使 $C'AC = D$ 为对角矩阵 .由于可逆矩阵 C 可以写成若干初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 的乘积,即 $C = P_1 P_2 \cdots P_s$,从而有

$$P_s' \cdots P_2' P_1' A P_1 P_2 \cdots P_s = D, \quad E P_1 P_2 \cdots P_s = C$$

根据初等矩阵的有关性质(用初等矩阵左(右) 乘矩阵 A 相当于对 A 作一次初等行(列) 变换),由上式可得到用初等变换法化二次型为标准形的步骤如下:

第一步 写出二次型 f 的矩阵 A,并构造 $2n\times n$ 矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$;

第二步 对 A 进行初等行变换和同样的初等列变换,把 A 化为对角矩阵 D,并对 E 施行与 A 相同的初等列变换化为矩阵 C,此时 $C'AC=D$;

第三步 写出非退化线性替换 $x=Cy$ 化二次型为标准形 $f=y'Dy$.

这个方法可示意如下:

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{对 } E \text{ 只进行其中的初等列变换}]{\text{对 } A \text{ 进行同样的初等行变换和初等列变换}} \begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix}$$

(3) 正交变换法(见第九章).

5. 正、负定二次型

(1) 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x'Ax$ 是 n 元实二次型(A 为实对称矩阵),如果对任意不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0$,则称 f 为正定二次型,A 为正定矩阵;如果 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\geq 0$,则称 f 为半正定二次型,A 为半正定矩阵;如果 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)<0$,则称 f 为负定二次型,A 为负定矩阵;如果 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\leq 0$,则称 f 为半负定二次型,A 称为半负定矩阵;既不是半正定又不是半负定的实二次型 f 称为不定的二次型,称 A 为不定矩阵.

(2) 正定二次型与正定矩阵的判定:

1) n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x'Ax$ 是正定的充分必要条件是它的标准形的系数全为正,即它的正惯性指数为 n.

2) n 级实对称矩阵 A 是正定的充分必要条件是 A 与单位矩阵 E 合同.

3) n 级实对称矩阵 A 是正定的充分必要条件是,存在 n 级实可逆矩阵 C,使 $A=C'C$.

4) n 级实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是正定的充分必要条件是 A 的顺序主子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

都大于零.

5) n 级实对称矩阵 A 是正定的充分必要条件是 A 的特征值都大于零(第七章).

(3) 负定二次型与负定矩阵的判定:

1) n元实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x'Ax$ 是负定的充分必要条件是它的标准形的系数全为负,即它的负惯性指数为 n.

2) n级实对称矩阵 A 是负定的充分必要条件是 A 与 $-E$ 合同.

3) n级实对称矩阵 A 是负定的充分必要条件是,存在 n级实可逆矩阵 C,使 $A = -C'C$.

4) n级实对称矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是负定的充分必要条件是

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad (k = 1,2,\cdots,n)$$

即奇数级顺序主子式小于零,偶数级顺序主子式大于零.

5) n级实对称矩阵 A 是负定的充分必要条件是 A 的特征值全小于零(见第七章).

(4) 半正定二次型与半正定矩阵的判定:

1) n元实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x'Ax$ 是半正定的充分必要条件是它的正惯性指数与秩相等.

2) n级实对称矩阵 A 是半正定的充分必要条件是它与矩阵

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

合同.

3) n级实对称矩阵 A 是半正定的充分必要条件是,存在 n级实矩阵 C 使 $A = C'C$.

4) n级实对称矩阵 A 是半正定的充分必要条件是 A 的特征值都非负(见第七章).

注　仅有顺序主子式都非负不能保证实对称矩阵 A 是半正定的.

(5) 半负定二次型与半负定矩阵的判定:

1) n元实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x'Ax$ 是半负定的充分必要条件是它的负惯性指数与秩相等.

2) n级实对称矩阵 A 是半负定的充分必要条件是它与矩阵

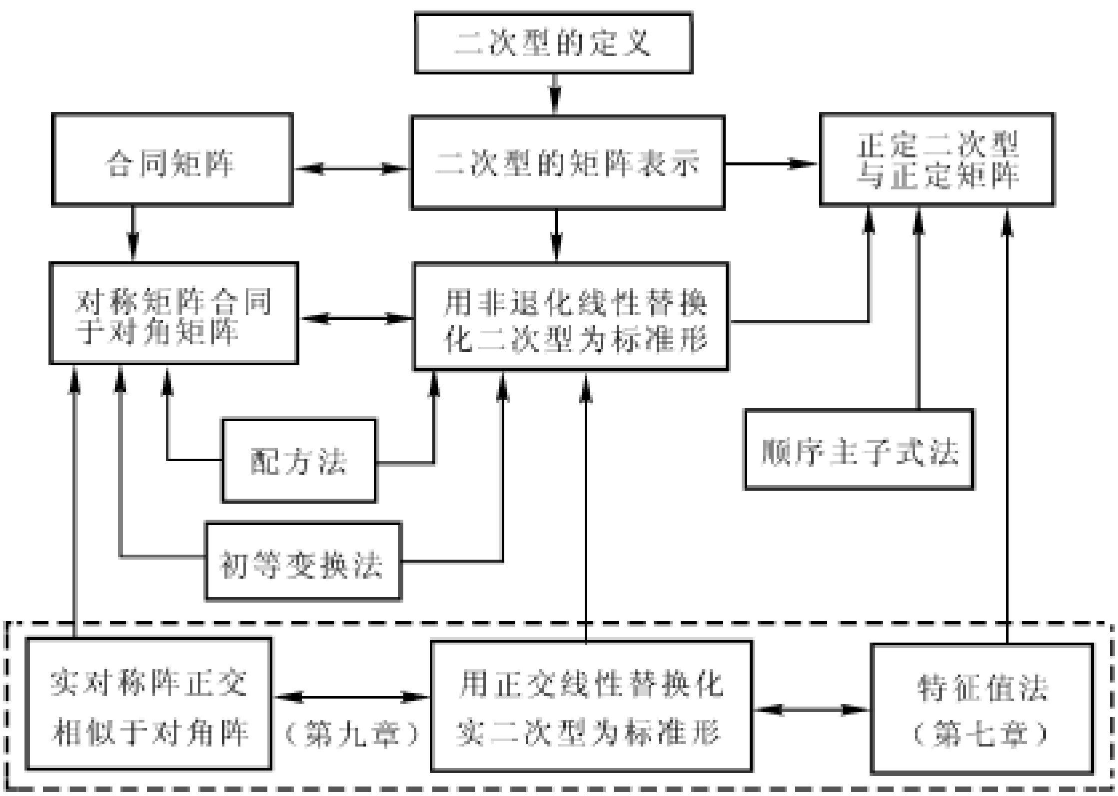
$$\begin{pmatrix} -E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

合同.

3) n级实对称矩阵A是半负定的充分必要条件是,存在n级实矩阵C使$A=-C'C$.

4) n级实对称矩阵A是半负定的充分必要条件是A的特征值都非正(见第七章).

二、知识网络图



三、重点、难点解读

本章通过矩阵乘法将二次型与对称矩阵联系起来,从而一方面使得二次型的问题可以用矩阵的理论和方法来研究,另一方面也可将对称矩阵的问题转化为用二次型的方法来解决,故正确写出二次型的矩阵是研究二次型的基础,应熟练掌握.

本章重点之一是化二次型为标准形或对称矩阵合同于对角矩阵.应掌握配方法(初等变换法在教材未介绍).第九章介绍的用正交线性替换化实二次

型为标准形的方法更应熟练掌握.

正定二次型与正定矩阵的判定与证明是本章的另一个重点.对于具体的实二次型或实对称矩阵,一般采用全部顺序主子式大于零的充分必要条件来判定;而对于抽象的实二次型或实对称矩阵,往往采用定义及特征值等判定其正定性.

四、典型例题解析

例 5.1　写出下列二次型的矩阵:

(1) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+3x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\\7&8&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

分析　正确写出二次型的矩阵是化简二次型的基础.对于含变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,可按如下方法写出二次型 f 的矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$.

A 的主对角线上的元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 为 $x_1^2,x_2^2,\cdots,x_n^2$ 的系数,而 $a_{ij}(i<j)$ 是交叉项 $x_ix_j(i<j)$ 的系数的一半.再取 $a_{ji}=a_{ij}(i<j)$ 即得到对称矩阵 A.

解　(1) f 是一个 4 元二次型,其矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&3&-\frac{3}{2}&0\\1&-\frac{3}{2}&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(2) 由于

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2+7x_3,3x_1+4x_2+8x_3,5x_1+6x_2+5x_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=$$

$$x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+5x_1x_2+12x_1x_3+14x_2x_3$$

所以二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5/2 & 6\\ 5/2 & 4 & 7\\ 6 & 7 & 5\end{pmatrix}$$

注 1. **即使** n **元二次型中某些变元不出现(如上例**(1) **中** x_4 **不出现),但在写二次型的矩阵时,仍要考虑这些变元.**

2. **有时二次型已表示成** $f=x'Ax$ **的形式,但当** A **不是对称矩阵时,** A **仍不是二次型的矩阵(如上例中**(2))**;此时应将** $x'Ax$ **展开,再重新写出二次型的矩阵.**

例5 2 **用配方法化下列二次型为标准形,并写出所用的非退化线性替换:**

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

解 (1) **法**1 **用配方法.**

$$\begin{aligned}f&=x_1^2+2x_1(x_2+2x_3)+3x_3^2+2x_2x_3=\\&[x_1+(x_2+2x_3)]^2-(x_2+2x_3)^2+3x_3^2+2x_3x_3=\\&(x_1+x_2+2x_3)^2-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2+2x_3\\ y_2=x_2\\ y_3=x_3\end{cases}$, **即** $\begin{cases}x_1=y_1-y_2-2y_3\\ x_2=y_2\\ x_3=y_3\end{cases}$, **得**

$$f=y_1^2-y_2^2-2y_2y_3-y_3^2=y_1^2-(y_2+y_3)^2$$

令 $\begin{cases}z_1=y_1\\ z_2=y_2+y_3\\ z_3=y_3\end{cases}$, **即** $\begin{cases}y_1=z_1\\ y_2=z_2-z_3\\ y_3=z_3\end{cases}$, **得**

$$f=z_1^2-z_2^2$$

所用的非退化线性替换为

$$\begin{cases}x_1=z_1-(z_2-z_3)-2z_3=z_1-z_2-z_3\\ x_2=z_2-z_3\\ x_3=z_3\end{cases}$$

法2 **用初等变换法.**

二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, **于是**

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1}]{\substack{c_2 - c_1 \\ c_3 - 2c_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{c_3 - c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故非退化线性替换$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$化二次型为 $f = y_1^2 - y_2^2$.

(2) 法 1　用配方法 .

由于所给二次型没有平方项,故令$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$,得

$$f = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)y_3 + (y_1 + y_2)y_3 =$$
$$y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2$$

令$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$, 即$\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$, 得

$$f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$$

所用的非退化线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = (z_1 - z_3) - z_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_2 = (z_1 - z_3) + z_2 = z_1 + z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

法 2　用初等变换法 .

二次型的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$,于是

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 + r_2]{c_1 + c_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2 - \frac{1}{2}r_1 \\ r_3 - r_1}]{\substack{c_2 - \frac{1}{2}c_1 \\ c_3 - c_1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2\times 2]{c_2\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故非退化线性替换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,化二次型为 $f = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

注 1. 化二次型为标准形时,所作的非退化线性替换不惟一,标准形也不惟一. 如上例(2)中取非退化线性替换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, 则化二次型为 $f = y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 - y_3^2$.

2. 化实二次型为标准形的另一重要方法是采用正交线性替换,这一方法将在第九章介绍 .

例5.3 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,求可逆矩阵 P,使$(AP)'(AP)$为对角矩阵 .

分析 由于$(AP)'(AP) = P'A'AP = P'A^2P$,可见为使$(AP)'(AP)$为对角矩阵,实质是使实对称矩阵 A^2 合同于对角矩阵 .

解 可求得 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

法1 根据二次型化简与矩阵合同的关系,转化为二次型求解 . 构造二次型并配方得

$$f = x'Ax = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_3x_4 + 5x_4^2 =$$

$$x_1^2 + x_2^2 + 5\left(x_3 + \frac{4}{5}x_4\right)^2 - 5\left(\frac{4}{5}x_4\right)^2 + 5x_4^2 =$$

$$x_1^2 + x_2^2 + 5\left(x_3 + \frac{4}{5}x_4\right)^2 + \frac{9}{5}x_4^2$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 + \dfrac{4}{5}x_4 \\ y_4 = x_4 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 - \dfrac{4}{5}y_4 \\ x_4 = y_4 \end{cases}$ 或

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

则有
$$f = y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2 + \frac{9}{5}y_4^2$$

故取 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，有 $(AP)'(AP) = P'A^2P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{9}{5} \end{pmatrix}$.

法 2　用初等变换法.

$$\begin{pmatrix} A^2 \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4 - \frac{4}{5}c_3]{r_4 - \frac{4}{5}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{9}{5} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故可逆矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，使得 $(AP)'(AP) = P'A^2P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{9}{5} \end{pmatrix}$.

注　可逆矩阵 P 不惟一,且对角矩阵也不惟一.还可采用第九章的方法,求得正交矩阵 P,使 $P'A^2P = P^{-1}A^2P$ 为对角矩阵.

例5.4　与矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 合同的矩阵是________.

(A) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$;　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$;

(C) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$;　　(D) $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

分析　应选(B).A 是实对称矩阵,为确定与 A 合同的矩阵,需先求出 A 的秩及正惯性指数.

解　法1　由 A 构成二次型,并用配方法得

$$f = x'Ax = x_1^2 - x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2 =$$
$$x_1^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + 6x_3^2 = y_1^2 - y_2^2 + 6y_3^2$$

可见 A 的秩为3,且正惯性指数为2,与(B)中矩阵的秩与正惯性指数相同,故选(B).

法2　用初等变换法化 A 为对角矩阵(因不需求合同变换矩阵 P,故对 A 直接做对称的初等行、列变换化为对角阵.)

$$A \xrightarrow[c_3+2c_2]{r_3+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

故 A 的秩为3,且正惯性指数为2.

法3　可求得 A 的特征值为1,3,-2,从而 A 的秩为3且正惯性指数为2.(见第九章)

例5.5　若实对称矩阵 A 与矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 合同,则二次型 $x'Ax$ 的规范形为________.

分析　应填:$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

因为 A 与 B 合同,所以 A 与 B 的秩和正惯性指数相同.

法 1　**由于**

$$x'Bx = x_1^2 + 4x_2x_3 = y_1^2 + 4(y_2 + y_3)(y_2 - y_3) = y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2$$

所以 B **的秩为** 3, **且正惯性指数为** 2 .

法 2　**由于**

$$B \xrightarrow[c_2 + c_3]{r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 - \frac{1}{2}c_2]{r_3 - \frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

所以 B **的秩为** 3, **且正惯性指数为** 2 . **故** $x'Ax$ **的规范形为** $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

例 5 .6　**若二次型** $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ **是正定的**, **则** t **应满足**________ .

分析　**应填**: $-2 < t < 1$.

二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. **要使** f **为正定二次型**, **其充分必要条件是** A **的各阶顺序主子式均大于零**, **即**

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2 + tr_3]{r_1 + r_3} \begin{vmatrix} 0 & t+2 & 3 \\ 0 & 4+2t & 2+4t \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$-4(t+2)(t-1) > 0$$

由 $\Delta_2 > 0$ **解得** $-2 < t < 2$; **由** $\Delta_3 > 0$ **解得** $-2 < t < 1$; **故当** $-2 < t < 1$ **时**, **二次型** f **正定** .

例 5 .7　**已知二次型** $f(x_1, x_2, x_3) = tx_1^2 + tx_2^2 + tx_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, **则** t **满足**________**时**, **二次型是负定的**; **当** t **满足**________**时**, **二次型是正定的** .

分析　**应填**: $t < -4$ **和** $t > 2$.

二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} t & -2 & -2 \\ -2 & t & 2 \\ -2 & 2 & t \end{pmatrix}$, A **的顺序主子式为**

$$\Delta_1 = t, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} t & -2 \\ -2 & t \end{vmatrix} = t^2 - 4$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} t & -2 & -2\\ -2 & t & 2\\ -2 & 2 & t\end{vmatrix}\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{vmatrix} t & -2 & -2\\ 0 & t-2 & 2-t\\ -2 & 2 & t\end{vmatrix}=(t-2)^2(t+4)$$

f 负定的充分必要条件是 $\Delta_1=t<0,\Delta_2=t^2-4>0,\Delta_3=(t-2)^2(t+4)<0$;解之得 $t<-4$. 而 f 正定的充分必要条件是 $\Delta_1=t>0$, $\Delta_2=t^2-4>0$, $\Delta_3=(t-2)^2(t+4)>0$,解之得 $t>2$.

例 5.8 设 A 为 n 级正定矩阵,B 为 n 级实反对称矩阵,证明 $A-B^2$ 为正定矩阵.

分析 对于抽象给出的矩阵 A,通常采用定义,即对任意 $x\neq 0$ 恒有 $x'Ax>0$,则 A 为正定矩阵;如果 A 的特征值易知,则当 A 的所有特征值大于零时,A 正定.

证 因为 A 是正定矩阵,所以 $A'=A$. 又 $B'=-B$,从而

$$(A-B^2)'=A'-(B')^2=A-(-B)^2=A-B^2$$

即 $A-B^2$ 是实对称矩阵. 对任意 $x\neq 0$,有

$$x'(A-B^2)x=x'(A+B'B)x=x'Ax+(Bx)'(Bx)>0$$

故 $A-B^2$ 是正定矩阵.

注 正定矩阵必须是实对称矩阵,因此在论证之前应注意 A 是否为实对称矩阵,若不是实对称矩阵,根本谈不上正定性.

例 5.9 设 A,B 分别是 m 级、n 级正定矩阵,证明 $C=\begin{pmatrix} A & O\\ O & B\end{pmatrix}$ 是正定矩阵.

证 因为 $C'=\begin{pmatrix} A' & O\\ O & B'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O\\ O & B\end{pmatrix}=C$,所以 C 是实对称矩阵.

法 1 设 $z=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$ 为 $m+n$ 维列向量,其中 x,y 分别是 m 维和 n 维列向量. 当 $z\neq 0$ 时,x,y 不同时为零向量,于是

$$z'Cz=(x',\ y')\begin{pmatrix} A & O\\ O & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=x'Ax+y'By>0$$

故 C 为正定矩阵.

法 2 设 A 的各阶顺序主子式为 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_{m-1},\Delta_m=|A|$,而 B 的各阶顺序主子式为 $\tilde{\Delta}_1,\tilde{\Delta}_2,\cdots,\tilde{\Delta}_{n-1},\tilde{\Delta}_n=|B|$. 由 A,B 正定知 $\Delta_i>0$, $\tilde{\Delta}_j>0$. 由于 C

的各阶顺序主子式 $\bar{\Delta}_i\ (i = 1, 2, \cdots, m + n)$ 满足

$$\bar{\Delta}_1 = \Delta_1 > 0, \cdots, \bar{\Delta}_m = \Delta_m > 0$$

$$\bar{\Delta}_{m+1} = |A|\tilde{\Delta}_1 > 0, \cdots, \bar{\Delta}_{m+n} = |A|\tilde{\Delta}_n > 0$$

故 C 为正定矩阵.

法 3　由 A, B 是正定矩阵知, 存在 m 级可逆矩阵 P 和 n 级可逆矩阵 Q, 使得 $P'AP = E_m$, $Q'BQ = E_n$. 令 $M = \begin{pmatrix} P & O \\ O & Q \end{pmatrix}$, 则 M 是 $m + n$ 级可逆矩阵, 且

$$M'CM = \begin{pmatrix} P' & O \\ O & Q' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & O \\ O & Q \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} P'AP & O \\ O & Q'BQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix} = E_{m+n}$$

故 C 是正定矩阵.

法 4　设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, B 的特征值为 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$, 则由

$$|C - \lambda E_{m+n}| = \begin{vmatrix} A - \lambda E_m & O \\ O & B - \lambda E_n \end{vmatrix} = |A - \lambda E_m||B - \lambda E_n| = 0$$

知 C 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$. 由于 A, B 均为正定矩阵, 从而 $\lambda_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, m)$, $\mu_j > 0\ (j = 1, 2, \cdots, n)$, 即 C 的特征值全大于零, 故 C 为正定矩阵(见第九章).

例 5.10　设 A 为 m 级实对称矩阵且正定, B 为 $m \times n$ 实矩阵. 试证: $B'AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $\operatorname{rank} B = n$.

证　充分性. 因为 $(B'AB)' = B'A'(B')' = B'AB$, 所以 $B'AB$ 为实对称矩阵. 由于 $\operatorname{rank} B = n$, 则齐次线性方程组 $Bx = 0$ 只有零解, 从而对任意实 n 维列向量 $x \neq 0$ 有 $Bx \neq 0$. 又 A 为正定矩阵, 对于 $Bx \neq 0$ 有 $(Bx)'A(Bx) > 0$. 于是, 对任意 $x \neq 0$, 有

$$x'(B'AB)x = (x'B')A(Bx) = (Bx)'A(Bx) > 0$$

故 $B'AB$ 为正定矩阵.

必要性. 已知 $B'AB$ 为正定矩阵, 则对任意实 n 维列向量 $x \neq 0$, 有 $x'(B'AB)x > 0$, 即 $(Bx)'A(Bx) > 0$. 由 A 正定知 $Bx \neq 0$, 因此 $Bx = 0$ 只有零解, 从而 $\operatorname{rank} B = n$.

五、课后习题全解

(一) 第五章习题

1. (Ⅰ) 用非退化线性替换化下列二次型为标准形,并利用矩阵验算所得结果:

1) $-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

2) $x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$;

3) $x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$;

4) $8x_1x_4+2x_3x_4+2x_2x_3+8x_2x_4$;

5) $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$;

6) $x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$;

7) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4$.

(Ⅱ) 把上述二次型进一步化为规范形,分实系数、复系数两种情况;并写出所作的非退化线性替换.

解 (Ⅰ) 1) 令

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases} \qquad (*)$$

则二次型 $f=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=$

$$-4y_1^2+4y_2^2+4y_1y_3=-(2y_1-y_3)^2+y_3^2+4y_2^2$$

再令$\begin{cases} z_1=2y_1-y_3 \\ z_2=y_2 \\ z_3=y_3 \end{cases}$, 即$\begin{cases} y_1=\frac{1}{2}z_1+\frac{1}{2}z_3 \\ y_2=z_2 \\ y_3=z_3 \end{cases}$ $(**)$

得二次型的标准形

$$f=-z_1^2+4z_2^2+z_3^2$$

将$(**)$式代入$(*)$式得非退化线性替换

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{2}z_1+z_2+\frac{1}{2}z_3 \\ x_2=\frac{1}{2}z_1-z_2+\frac{1}{2}z_3 \\ x_3=z_3 \end{cases}, \quad \text{及变换矩阵 } T=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

验算得

$$T'AT=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\1&-1&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&1\\-2&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&&\\&4&\\&&1\end{pmatrix}$$

2) $f=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2=(x_1+x_2)^2+(x_2+2x_3)^2$

令
$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2\\y_2=\phantom{x_1+{}}x_2+2x_3\\y_3=x_3\end{cases}\qquad(*)$$

得二次型的标准形　$f=y_1^2+y_2^2$

由(*)式得非退化线性替换

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_2+2y_3\\x_2=\phantom{y_1-{}}y_2-2y_3\\x_3=y_3\end{cases},\quad \text{及变换矩阵 } T=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

验算得

$$T'AT=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

3) $f=x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3=$

$[x_1^2-2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-(x_2-x_3)^2-3x_2^2-6x_2x_3=$

$(x_1-x_2+x_3)^2-(2x_2+x_3)^2$

令
$$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3\\y_2=\phantom{x_1-{}}2x_2+x_3\\y_3=\phantom{x_1-2x_2+{}}x_3\end{cases}\qquad(**)$$

得二次型的标准形　$f=y_1^2-y_2^2$

由(**)式得非退化线性替换

$$\begin{cases}x_1=y_1+\frac{1}{2}y_2-\frac{3}{2}y_3\\x_2=\phantom{y_1+{}}\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{2}y_3\\x_3=\phantom{y_1+\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{2}}y_3\end{cases},\quad \text{和变换矩阵 } T=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

验算得

$$T'AT=\begin{bmatrix}1&0&0\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\ -\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&-3&-3\\1&-3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}$$

4) 令

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_4\\x_2=y_2+y_3\\x_3=y_2-y_3\\x_4=y_1-y_4\end{cases}\qquad(*)$$

则

$$\begin{aligned}f&=8x_1x_4+2x_3x_4+2x_2x_4+8x_2x_4=\\&8y_1^2-8y_4^2+10y_1y_2-10y_2y_4+6y_1y_3-6y_3y_4+2y_2^2-2y_3^2=\\&8\left[y_1^2+\frac{10}{8}y_1y_2+\frac{6}{8}y_1y_3\right]-8\left[y_4^2+\frac{10}{8}y_2y_4+\frac{6}{8}y_3y_4\right]+2y_2^2-2y_3^2=\\&8\left(y_1+\frac{5}{8}y_2+\frac{3}{8}y_3\right)^2-8\left(y_4+\frac{5}{8}y_2+\frac{3}{8}y_3\right)^2+2y_2^2-2y_3^2\end{aligned}$$

再令 $\begin{cases}z_1=y_1+\frac{5}{8}y_2+\frac{3}{8}y_3\\z_2=y_2\\z_3=y_3\\z_4=\frac{5}{8}y_2+\frac{3}{8}y_3+y_4\end{cases}$,即 $\begin{cases}y_1=z_1-\frac{5}{8}z_2-\frac{3}{8}z_3\\y_2=z_2\\y_3=z_3\\y_4=-\frac{5}{8}z_2-\frac{3}{8}z_3+z_4\end{cases}\qquad(**)$

得二次型的标准形

$$f=8z_1^2+2z_2^2-2z_3^2-8z_4^2$$

将(**)式代入(*)式得非退化线性替换

$$\begin{cases}x_1=z_1-\frac{5}{4}z_2-\frac{3}{4}z_3+z_4\\x_2=z_2+z_3\\x_3=z_2-z_3\\x_4=z_1-z_4\end{cases}$$

和变换矩阵

$$T=\begin{bmatrix}1&-\frac{5}{4}&-\frac{3}{4}&1\\0&1&1&0\\0&1&-1&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}$$

验算得

$$T'AT=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\-\frac{5}{4}&1&1&0\\-\frac{3}{4}&1&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&4\\0&0&1&4\\0&1&0&1\\4&4&1&0\end{pmatrix}\times$$

$$\begin{pmatrix}1&-\frac{5}{4}&-\frac{3}{4}&1\\0&1&1&0\\0&1&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&&&\\&2&&\\&&-2&\\&&&-8\end{pmatrix}$$

5) 令
$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3+y_4\\x_4=y_3-y_4\end{cases}\qquad (*)$$

则二次型

$$\begin{aligned}f&=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\\&y_1^2-y_2^2+4y_1y_3+y_3^2-y_4^2=\\&(y_1+2y_3)^2-y_2^2-3y_3^2-y_4^2\end{aligned}$$

再令$\begin{cases}z_1=y_1+2y_3\\z_2=y_2\\z_3=y_3\\z_4=y_4\end{cases}$，即$\begin{cases}y_1=z_1-2z_3\\y_2=z_2\\y_3=z_3\\y_4=z_4\end{cases}\qquad (**)$

则二次型的标准形为

$$f=z_1^2-z_2^2-3z_3^2-z_4^2$$

将(**)式代入(*)式得非退化线性替换

$$\begin{cases}x_1=z_1+z_2-2z_3\\x_2=z_1-z_2-2z_3\\x_3=z_3+z_4\\x_4=z_3-z_4\end{cases}$$

和变换矩阵
$$T=\begin{pmatrix}1&1&-2&0\\1&-1&-2&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

验算得

$$T'AT=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\-2&-2&1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\times$$
$$\begin{pmatrix}1&1&-2&0\\1&-1&-2&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-3&\\&&&-1\end{pmatrix}$$

6) $f=x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4=$
$[x_1^2+2x_1(2x_2+2x_3+x_4)+(2x_2+2x_3+x_4)^2]-$
$(2x_2+2x_3+x_4)^2+2x_2^2+x_4^2+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4=$
$(x_1+2x_2+2x_3+x_4)^2-2\left(x_2+\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4\right)^2+\frac{1}{2}(x_3+x_4)^2$

令$\begin{cases}y_1=x_1+2x_2+2x_3+x_4\\y_2=x_2+\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4\\y_3=x_3+x_4\\y_4=x_4\end{cases}$ 即$\begin{cases}x_1=y_1-2y_2+y_3-y_4\\x_2=y_2-\frac{3}{2}y_3+y_4\\x_3=y_3-y_4\\x_4=y_4\end{cases}$

则二次型的标准形为
$$f=y_1^2-2y_2^2+\frac{1}{2}y_3^2$$

变换矩阵
$$T=\begin{pmatrix}1&-2&1&-1\\0&1&-\frac{3}{2}&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

验算得

$$T'AT=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-\frac{3}{2}&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&2&1&1\\2&1&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\times$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&1&-1\\0&1&-\frac{3}{2}&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

7) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4=$

$[x_2^2+2x_2(x_1+x_3)+(x_1+x_3)^2]-2x_1x_3+2x_3x_4+x_4^2=$

$(x_1+x_2+x_3)^2+(x_3+x_4)^2-2x_1x_3-x_3^2=$

$x_1^2+(x_1+x_2+x_3)^2+(x_3+x_4)^2-(x_1+x_3)^2$

令 $\begin{cases}y_1=x_1\\y_2=x_1+x_2+x_3\\y_3=x_3+x_4\\y_4=x_1+x_3\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=y_1\\x_2=y_2-y_4\\x_3=-y_1+y_4\\x_4=y_1+y_3-y_4\end{cases}$

则二次型的标准形为

$$f=y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$$

变换矩阵为 $$T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\-1&0&0&1\\1&0&1&-1\end{pmatrix}$$

验算得

$$T'AT=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\-1&0&0&1\\1&0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix}$$

(Ⅱ) 1) 令$\begin{cases} z_1 = t_3 \\ z_2 = \dfrac{t_2}{2} \\ z_3 = t_1 \end{cases}$，有$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}t_1 + \dfrac{1}{2}t_2 + \dfrac{1}{2}t_3 \\ x_2 = \dfrac{1}{2}t_1 - \dfrac{1}{2}t_2 + \dfrac{1}{2}t_3 \\ x_3 = t_1 \end{cases}$

则实二次型的规范形为

$$f = t_1^2 + t_2^2 - t_3^2$$

再令$\begin{cases} t_1 = w_1 \\ t_2 = w_2 \\ t_3 = \mathrm{i}\,w_3 \end{cases}$，有$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}w_1 + \dfrac{1}{2}w_2 + \dfrac{\mathrm{i}}{2}w_3 \\ x_2 = \dfrac{1}{2}w_1 - \dfrac{1}{2}w_2 + \dfrac{\mathrm{i}}{2}w_3 \\ x_3 = w_1 \end{cases}$

则复二次型的规范形为

$$f = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$$

2) (Ⅰ) 中二次型的标准形 $f = y_1^2 + y_2^2$ 已是实(复)二次型的规范形.

3) (Ⅰ) 中二次型的标准形 $f = y_1^2 - y_2^2$ 已是实二次型的规范形.

再令$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = \mathrm{i}\,z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$,有$\begin{cases} x_1 = z_1 + \dfrac{\mathrm{i}}{2}z_2 - \dfrac{3}{2}z_3 \\ x_2 = \dfrac{\mathrm{i}}{2}z_2 - \dfrac{1}{2}z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$

则复二次型的规范形为

$$f = z_1^2 + z_2^2$$

4) 令$\begin{cases} z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}w_1 \\ z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}w_2 \\ z_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}w_3 \\ z_4 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}w_4 \end{cases}$，有$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}w_1 - \dfrac{5\sqrt{2}}{8}w_2 - \dfrac{3\sqrt{2}}{8}w_3 + \dfrac{\sqrt{2}}{4}w_4 \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}w_2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}w_3 \\ x_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}w_2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}w_3 \\ x_4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}w_1 - \dfrac{\sqrt{2}}{4}w_4 \end{cases}$

则实二次型的规范形为

$$f = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2 - w_4^2$$

再令 $\begin{cases} w_1 = u_1 \\ w_2 = u_2 \\ w_3 = \mathrm{i}u_3 \\ w_4 = \mathrm{i}u_4 \end{cases}$，有 $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}u_1 - \dfrac{5\sqrt{2}}{8}u_2 - \dfrac{3\sqrt{2}\mathrm{i}}{8}u_3 - \dfrac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{4}u_4 \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}u_2 + \dfrac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{2}u_3 \\ x_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}u_2 - \dfrac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{2}u_3 \\ x_4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}u_1 - \dfrac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{4}u_4 \end{cases}$

则复二次型的规范形为

$$f = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$

5）令 $\begin{cases} z_1 = t_1 \\ z_2 = t_2 \\ z_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}t_3 \\ z_4 = t_4 \end{cases}$，有 $\begin{cases} x_1 = t_1 + t_2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}t_3 \\ x_2 = t_1 - t_2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}t_3 \\ x_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}t_3 + t_4 \\ x_4 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}t_3 - t_4 \end{cases}$

则实二次型的规范形为

$$f = t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 - t_4^2$$

再令 $\begin{cases} t_1 = w_1 \\ t_2 = \mathrm{i}w_2 \\ t_3 = \mathrm{i}w_3 \\ t_4 = \mathrm{i}w_4 \end{cases}$，有 $\begin{cases} x_1 = w_1 + \mathrm{i}w_2 - \dfrac{2\sqrt{3}\mathrm{i}}{3}w_3 \\ x_2 = w_1 - \mathrm{i}w_2 - \dfrac{2\sqrt{3}\mathrm{i}}{3}w_3 \\ x_3 = \dfrac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{3}w_3 + \mathrm{i}w_4 \\ x_4 = \dfrac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{3}w_3 - \mathrm{i}w_4 \end{cases}$

则复二次型的规范形为

$$f = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2$$

6) 令 $\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} z_3 \\ y_3 = \sqrt{2} z_2 \\ y_4 = z_4 \end{cases}$，有 $\begin{cases} x_1 = z_1 + \sqrt{2} z_2 - \sqrt{2} z_3 - z_4 \\ x_2 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{4} z_2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} z_3 + z_4 \\ x_3 = \sqrt{2} z_2 - z_4 \\ x_4 = z_4 \end{cases}$

则实二次型的规范形为

$$f = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$$

再令 $\begin{cases} z_1 = t_1 \\ z_2 = t_2 \\ z_3 = \mathrm{i} t_3 \\ z_4 = t_4 \end{cases}$，有 $\begin{cases} x_1 = t_1 + \sqrt{2} t_2 - \sqrt{2}\mathrm{i} t_3 - t_4 \\ x_2 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{4} t_2 + \dfrac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{2} t_3 + t_4 \\ x_3 = \sqrt{2} t_2 - t_4 \\ x_4 = t_4 \end{cases}$

则复二次型的规范形为

$$f = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$$

7) (Ⅰ) 中二次型的标准形已为实二次型的规范形．

令 $\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \\ y_4 = \mathrm{i} z_4 \end{cases}$，有 $\begin{cases} x_1 = z_1 \\ x_2 = z_2 - \mathrm{i} z_4 \\ x_3 = -z_1 + \mathrm{i} z_4 \\ x_4 = z_1 + z_3 - \mathrm{i} z_4 \end{cases}$

则复二次型的规范形为

$$f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$$

2. 证明：秩等于 r 的对称矩阵可以表成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和．

证　设 A 是秩为 r 的对称阵，由于对称阵总可合同于一对角阵，即存在可逆阵 C，使

$$C'AC = D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & d_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} =$$

$$D_1 + \cdots + D_r$$

于是

$$A = (C')^{-1} D C^{-1} = (C')^{-1} [D_1 + \cdots + D_r] C^{-1} =$$

$$(C')^{-1} D_1 C^{-1} + \cdots + (C')^{-1} D_r C^{-1} \xlongequal{\text{def}} B_1 + \cdots + B_r$$

其中 $B_i = (C')^{-1} D_i C^{-1}$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ **是秩为 1 的对称矩阵**.

3. **证明**:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$$

合同,其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ **是** $1, 2, \cdots, n$ **的一个排列**.

证　设这两矩阵分别为 A **与** B,**它们相应的二次型分别为**

$$f_A = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

$$f_B = \lambda_{i_1} y_1^2 + \lambda_{i_2} y_2^2 + \cdots + \lambda_{i_n} y_n^2$$

作线性变换 $\begin{cases} y_1 = x_{i_1} \\ \quad \cdots\cdots \\ y_n = x_{i_n} \end{cases}$,**则** f_B **可化为** f_A,**故** A **与** B **合同**.

4. **设** A **是一个** n **级矩阵,证明**:

1) A **是反对称矩阵当且仅当对任一个** n **维向量** x,**有** $x'Ax = 0$;

2) **如果** A **是对称矩阵,且对任一个** n **维向量** x,**有** $x'Ax = 0$,**那么** $A = O$.

证　1) **必要性**. **设** A **为反对称矩阵**,$A = -A'$,**则对任意** n **维向量** x,**数** $x'Ax$ **满足**:$(x'Ax)' = x'A'x = -x'Ax$,**故数** $x'Ax = 0$.

充分性. **设** $x'Ax = 0$,**要证** A **为反对称矩阵,即** $A = -A'$,**也即证** $a_{ij} = -a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$.

取 $x = e_i = (0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0)'$　$(i = 1, 2, \cdots, n)$,**则有**

$$e_i'Ae_i=(0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0)\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\cdots\\a_{ni}\end{pmatrix}=a_{ii}=0$$

再取 $x=(1,1,0,\cdots,0)'$,则有

$$x'Ax=(1,1,0,\cdots,0)\begin{pmatrix}a_{11}+a_{12}\\a_{21}+a_{22}\\*\\\cdots\\*\end{pmatrix}=a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}=a_{12}+a_{21}=0$$

类似地,取 $x=(0,\cdots,\overset{i}{1},0,\cdots,0,\overset{j}{1},0,\cdots,0)'$,可得 $a_{ij}+a_{ji}=0\ (i\neq j)$,故 $a_{ij}=-a_{ji}$,即 $A=-A'$.

2) 由假设 $A'=A$, $x'Ax=0$. 取 $x=e_i(i=1,2,\cdots,n)$,可得

$$e_i'Ae_i=(0,\cdots,\overset{i}{1},0,\cdots,0)\begin{pmatrix}a_{1i}\\\cdots\\a_{ii}\\\cdots\\a_{ni}\end{pmatrix}=a_{ii}=0$$

再取 $x=e_i+e_j$,则有

$$x'Ax=(0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0,\overset{j}{1},0,\cdots,0)\begin{pmatrix}a_{1i}+a_{1j}\\\cdots\\a_{ni}+a_{nj}\end{pmatrix}=$$

$$a_{ii}+a_{ij}+a_{ji}+a_{jj}=a_{ij}+a_{ji}=2a_{ij}=0\quad(i\neq j)$$

故 $A=O$.

5. 如果把实 n 级对称矩阵按合同分类,即两个实 n 级对称矩阵属于同一类当且仅当它们合同,问共有几类?

解　共有$\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$类.

这是由于实对称矩阵 A 与 B 合同时,有

$$P'AP = C'BC = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (d_i \neq 0,\ i = 1, \cdots, r)$$

考虑相应二次型的情形,按 d_i 取值的正负可分为

r **个正**,0 **个负**;$r-1$ **个正**,1 **个负**;…;

1 **个正**,$r-1$ **个负**;0 **个正**,r **个负**,**共** $r+1$ **类**

又秩 r **又可分别取** $0, 1, 2, \cdots, n-1, n$,**故共有类数**

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

6. **证明:一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充分必要条件是,它的秩等于** 2 **和符号差等于** 0,**或者秩等于** 1 .

证　必要性 . 设

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)(b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n)$$

1) **若两个一次多项式的系数成比例,即** $b_i = ka_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$. **不妨设** $a_1 \neq 0$,**令**

$$\begin{cases} y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \\ y_2 = x_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = ky_1^2$,**即二次型** $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ **的秩为** 1 .

2) **若两个一次多项式系数不成比例 . 不妨设** $\dfrac{a_1}{b_1} \neq \dfrac{a_2}{b_2}$,**令**

$$\begin{cases} y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \\ y_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n \\ y_3 = x_3 \\ \quad \cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = y_1 y_2$. **再令**

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + z_2 \\ y_2 = z_1 - z_2 \\ y_3 = z_3 \\ \cdots\cdots \\ y_n = z_n \end{cases}$$

则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = y_1 y_2 = z_1^2 - z_2^2$,故二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的秩为 2,符号差为零.

充分性.1) 若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的秩为 1,则可经非退化线性替换使 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = ky_1^2$,其中 $y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$.故

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = k(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)^2$$

2) 若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的秩为 2,符号差为零,则可经非退化线性替换使

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = y_1^2 - y_2^2 = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2)$$

其中,y_1,y_2 均为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一次齐次多项式,即

$$y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

$$y_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n$$

故 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可表成两个一次齐次多项式的乘积.

7. 判别下列二次型是否正定:

1) $99x_1^2 - 12x_1 x_2 + 48x_1 x_3 + 130x_2^2 - 60x_2 x_3 + 71x_3^2$;

2) $10x_1^2 + 8x_1 x_2 + 24x_1 x_3 + 2x_2^2 - 28x_2 x_3 + x_3^2$;

3) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$;

4) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$.

解 1) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 99 & -6 & 24 \\ -6 & 130 & -30 \\ 24 & -30 & 71 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

因为 $\Delta_1 = 99 > 0$,$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 99 & -6 \\ -6 & 130 \end{vmatrix} > 0$,$\Delta_3 = |A| > 0$,故 f 为正定二次型.

2) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 10 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & -14 \\ 12 & -14 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

因为 $|A| = -2908 < 0$,故二次型 f 非正定.

$$3)\ f = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = x'Ax$$

利用《高等代数》(北大·第 3 版) 66 页例 1 结果得 A 的 k 级顺序主子式

$$\Delta_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(1 + \frac{k-1}{2}\right) > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

故 f 为正定二次型 .

$$4)\ f = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ & & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = x'Ax$$

A 的 k 级顺序主子式为

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & \frac{1}{2} \\ & & & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}_k$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3 - \frac{2}{3} r_2 \\ \cdots \\ r_k - \frac{k-1}{k} r_{k-1}}]{r_2 - \frac{1}{2} r_1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{k}{k-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{k+1}{k} \end{vmatrix}_k =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k(k+1)>0 \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

故 f 为正定二次型.

8. t取什么值时,下列二次型是正定的:

1) $x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$;

2) $x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$.

解 1) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$

由 $\Delta_1=1>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 1\end{vmatrix}=1-t^2>0$, $\Delta_3=|A|=-t(4+5t)>0$,

解得 $-\frac{4}{5}<t<0$.

2) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & t & 5\\ t & 4 & 3\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$

由 $\Delta_1=1>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 4\end{vmatrix}=4-t^2>0$, $\Delta_3=|A|=-t^2+30t-105=$

$120-(t-15)^2>0$,所得的不等式组$\begin{cases}4-t^2>0\\ 120-(t-15)^2>0\end{cases}$无解,即不存在 t 值,使原二次型为正定的.

9. 证明:如果 A 是正定矩阵,那么 A 的主子式全大于零,所谓主子式就是行指标与列指标相同的子式.

证 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正定矩阵,其任一 m 级主子式为

$$|A^{(m)}|=\begin{vmatrix}a_{i_1i_1} & \cdots & a_{i_1i_m}\\ \cdots & & \cdots\\ a_{i_mi_1} & \cdots & a_{i_mi_m}\end{vmatrix}$$

对任意 $y_0=(b_{i_1},\cdots,b_{i_m})'\neq 0$,作 $x_0=(c_1,\cdots,c_n)'$,其中

$$c_i=\begin{cases}b_i, & \text{当 } i=i_1,i_2,\cdots,i_m \text{ 时}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由于 $x'Ax$ 正定,有 $x_0'Ax_0>0$,从而 $x_0'Ax_0=y_0'A^{(m)}y_0>0$,由 y_0 的任意性知 $y_0'A^{(m)}y_0$ 为正定二次型,故 $|A^{(m)}|>0$.

10. 设 A 是实对称矩阵. 证明:当实数 t 充分大之后, $tE+A$ 是正定矩阵.

证　法 1　由 A 为实对称矩阵知 $tE+A$ 亦然. 矩阵

$$tE+A=\begin{pmatrix} t+a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & t+a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & t+a_{nn} \end{pmatrix}$$

的顺序主子式为

$$\Delta_k(t)=\begin{vmatrix} t+a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & t+a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & t+a_{kk} \end{vmatrix}$$

当 t 充分大时,可使

$$t+a_{ii}>\sum_{j\neq i}|a_{ij}| \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

根据第三章补充题 10, 2) 知 $\Delta_k(t)>0$, 故 $tE+A$ 为正定矩阵.

法 2　由于实对称阵总可相似于对角矩阵,即存在可逆矩阵 P,使

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 λ_i 为实数,那么 $A=P\Lambda P^{-1}$. 易知 $tE+A$ 为实对称阵. 取 $t>\max\limits_i \lambda_i$,则

$$P^{-1}(tE+A)P=tE+P^{-1}AP=tE+\Lambda=\begin{pmatrix} t+\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t+\lambda_n \end{pmatrix}$$

矩阵 $tE+A$ 的任一特征值 $t+\lambda_i>0$, 故 $tE+A$ 当 $t>\max\limits_i \lambda_i$ 时为正定矩阵.

11. 证明:如果 A 是正定矩阵,那么 A^{-1} 也是正定矩阵.

证　法 1　由 A 为正定矩阵知, $x'Ax$ 为正定二次型,令 $x=A^{-1}y$,有

$$x'Ax=(A^{-1}y)'A(A^{-1}y)=y'(A^{-1})'y=y'(A')^{-1}y=y'A^{-1}y$$

从而 $y'A^{-1}y$ 为正定二次型, 故 A^{-1} 为正定矩阵.

法 2　因 A 为正定矩阵, 故存在实可逆矩阵 C, 使 $A=C'C$, 那么, $A^{-1}=C^{-1}(C^{-1})'$,从而 A^{-1} 正定.

12. 设 A 为一个 n 级实对称矩阵,且 $|A|<0$,证明:必存在实 n 维列向量 $x\neq 0$,使 $x'Ax<0$.

证　**法 1**　因 A 为 n 级实对称矩阵,且 $|A|<0$,故二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=x'Ax$ 的秩为 n,且不是正定的,故负惯性指数至少是 1,从而 f 可经实的非退化线性替换 $x=Cy$ 化成

$$f=x'Ax=y'C'ACy=y'\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{pmatrix}y=$$

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_n^2\qquad(1\leq p<n)$$

取 $y_0=(0,\cdots,0,1)'$,则

$$f=x'Ax=y_0'\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{pmatrix}y_0=-1<0$$

法 2　反证法. 假设对任一 n 维列向量 $x\neq 0$,都有 $x'Ax\geq 0$,则 A 半正定,故 A 的秩与其正惯性指数相等,均小于 n,即 $\operatorname{rank}A<n$,于是 $|A|=0$,这与 $|A|<0$ 矛盾.

13. 如果 A,B 都是 n 级正定矩阵,证明:$A+B$ 也是正定矩阵.

证　由 A,B 均为正定矩阵知,对任一 n 维列向量 $x\neq 0$,都有 $x'Ax>0$,$x'Bx>0$,故 $x'(A+B)x=x'Ax+x'Bx>0$,即 $A+B$ 为正定矩阵.

14. 证明:二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是半正定的充分必要条件是它的正惯性指数与秩相等.

证　充分性. 设 f 的秩 r 与正惯性指数 p 相等,则负惯性指数为零,那么 f 可经实的非退化线性替换 $x=Cy$ 化为

$$f(x_1,\cdots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_r^2\geq 0$$

即 f 为半正定的.

必要性. 设 f 为半正定的,则 f 的负惯性指数必为零. 否则,f 可经实的非退化线性替换 $x=Cy$ 化为

$$f(x_1,\cdots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2\quad(p<r)$$

取 $y = e_r$，由 $x = Cy$ 可得相应值 $x_1, \cdots, x_n$，使

$$f(x_1, \cdots, x_n) = -1 < 0$$

这与 f 是半正定的相矛盾，故 f 的秩与正惯性指数相同 .

15. 证明：$n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$ 是半正定的 .

证　由于 $(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{1\le i<j\le n}(x_i^2 + x_j^2)$，从而

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_n) &= n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \\ &(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{1\le i<j\le n} 2x_i x_j = \\ &\sum_{1\le i<j\le n}(x_i^2 + x_j^2) - \sum_{1\le i<j\le n} 2x_i x_j = \\ &\sum_{1\le i<j\le n}(x_i^2 + x_j^2 - 2x_i x_j) = \sum_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)^2 \ge 0 \end{aligned}$$

即 f 为半正定的 .

16. 设 $f(x_1, \cdots, x_n) = x'Ax$ 是一实二次型，若有实 n 维向量 x_1, x_2，使

$$x_1'Ax_1 > 0, \quad x_2'Ax_2 < 0$$

证明：必存在实 n 维向量 $x_0 \neq 0$ 使 $x_0'Ax_0 = 0$.

证　设 A 的秩为 r，可作实的非退化线性替换 $x = Cy$，将 f 化为规范形

$$f = x'Ax = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2 \quad (r = p + q)$$

由于存在两个向量 x_1, x_2，使 $x_1'Ax_1 > 0$，$x_2'Ax_2 < 0$，那么 $p > 0$，$q > 0$，就 p，q 的取值分三种情况讨论：

$$p = q, \quad p > q, \quad p < q$$

当 $p > q$ 时，取 $y_0 = (1, \cdots, \overset{q}{1}, 0, \cdots, \overset{p}{0}, 1, \cdots, \overset{p+q}{1}, 0, \cdots, 0)'$，则由 $x_0 = Cy_0$ 可得非零向量 x_0，使

$$f = x_0'Ax_0 = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2 = 0$$

另两情形类似可证 .

17. A 是一个实矩阵 . 证明 $\operatorname{rank}(A'A) = \operatorname{rank}A$.

证　法 1　设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，只要证线性方程组 $A'Ax = 0$ 与 $Ax = 0$ 同解，便可得基础解系含向量个数相等，即 $n - \operatorname{rank}(A'A) = n - \operatorname{rank}A$，从而 $\operatorname{rank}(A'A) = \operatorname{rank}A$.

设 x 是 $A'Ax = 0$ 的解，左乘 x' 得

$$0 = x'A'Ax \xlongequal{\text{令 } y = Ax} y'y = y_1^2 + \cdots + y_m^2$$

故 $y = 0$,即 x 是 $Ax = 0$ 的解.

反之,设 x 是 $Ax = 0$ 的解,左乘 A' 得 $A'Ax = 0$,即 x 是 $A'Ax = 0$ 的解,故 $A'Ax = 0$ 与 $Ax = 0$ 同解.

法 2　设 $\operatorname{rank} A = r$,下证 $\operatorname{rank}(A'A) = r$.由于 $\operatorname{rank} A' = \operatorname{rank} A$,故存在非奇异阵 P, Q,使

$$PA'Q = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \text{即} \quad PA' = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1}$$

从而 $AP' = (PA')' = (Q^{-1})' \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$,故

$$PA'AP' = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1} (Q^{-1})' \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \qquad (*)$$

设 $y = (Q^{-1})'x$,则 $x'Q^{-1}(Q^{-1})'x = y'y = y_1^2 + \cdots + y_m^2$ 是正定二次型.令 $Q^{-1}(Q^{-1})' = \begin{pmatrix} B_r & C \\ D & M \end{pmatrix}$,代入$(*)$式右端,有

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_r & C \\ D & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

由于 $Q^{-1}(Q^{-1})'$ 是正定的,所以 $|B_r| > 0$,这说明$(*)$式右端的秩为 r,从而 $A'A$ 的秩也是 r.

(二) 第五章补充题

1. 用非退化线性替换化下列二次型为标准型,并用矩阵验算所得结果.

1) $x_1 x_{2n} + x_2 x_{2n-1} + \cdots + x_n x_{n+1}$;

2) $x_1 x_2 + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n$;

3) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$;

4) $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$,其中 $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

解　1) 令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_{2n} \\ x_2 = y_2 + y_{2n-1} \\ \quad\cdots\cdots \\ x_n = y_n + y_{n+1} \\ x_{n+1} = y_n - y_{n+1} \\ \quad\cdots\cdots \\ x_{2n-1} = y_2 - y_{2n-1} \\ x_{2n} = y_1 - y_{2n} \end{cases}$，$C = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 1 & & & & & -1 \end{pmatrix}$

则二次型化为

$$f(x_1, \cdots, x_{2n}) = y_1^2 + \cdots + y_n^2 - y_{n+1}^2 - \cdots - y_{2n}^2$$

验算得

$$C'AC = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 1 & & & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & & & \frac{1}{2} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 0 & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{2} & 0 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ \frac{1}{2} & & & & & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & 1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 1 & & & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n\text{个} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n\text{个} \end{matrix}$$

2) **若令** $y_1 = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{2}$，$y_2 = \dfrac{x_1 - x_2 + x_3}{2}$，**则**

$$y_1^2 - y_2^2 = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = x_1 x_2 + x_2 x_3$$

① **当** n **为奇数时，作变换**

$$\begin{cases} y_i = \dfrac{x_i + x_{i+1} + x_{i+2}}{2} \\ y_{i+1} = \dfrac{x_i - x_{i+1} + x_{i+2}}{2} \qquad (i = 1, 3, 5, \cdots, n-2) \\ y_n = x_n \end{cases}$$

则

$$f = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + \cdots + y_{n-2}^2 - y_{n-1}^2$$

当 $n = 4k + 1$ 和 $n = 4k + 3$ 时,线性替换的矩阵分别为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ & & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & 1 & -1 & 0 \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 & 1 \\ & & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & 1 & -1 & 0 \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

在这两种情况下,总有

$$C'AC = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & -1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

② n **为偶数时,作变换**

$$\begin{cases} y_i = \dfrac{x_i + x_{i+1} + x_{i+2}}{2} \\ y_{i+1} = \dfrac{x_i - x_{i+1} + x_{i+2}}{2} \\ y_{n-1} = \dfrac{x_{n-1} + x_n}{2} \\ y_n = \dfrac{x_{n-1} - x_n}{2} \end{cases} \qquad (i = 1,3,5,\cdots,n-3)$$

则

$$f = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + \cdots + y_{n-1}^2 - y_n^2$$

当 $n = 4k$ 和 $n = 4k+2$ 时,线性替换的矩阵分别为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & \cdots & \cdots \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ & & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & \cdots & \cdots \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

在此两种情况下,总有

$$C'AC = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & -1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

3) 配方得

$$f=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j=$$

$$\left(x_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}x_j\right)^2+\frac{3}{4}\left(x_2+\frac{1}{3}\sum_{j=3}^{n}x_j\right)^2+\cdots+$$

$$\frac{n}{2(n-1)}\left(x_{n-1}+\frac{1}{n}x_n\right)^2+\frac{n+1}{2n}x_n^2$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=2}^{n}x_j \\ y_2=x_2+\dfrac{1}{3}\sum\limits_{j=3}^{n}x_j \\ \cdots\cdots \\ y_{n-1}=x_{n-1}+\dfrac{1}{n}x_n \\ y_n=x_n \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1=y_1-\dfrac{1}{2}y_2-\dfrac{1}{3}y_3-\cdots-\dfrac{1}{n}y_n \\ x_2=y_2-\dfrac{1}{3}y_3-\cdots-\dfrac{1}{n}y_n \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1}=y_{n-1}-\dfrac{1}{n}y_n \\ x_n=y_n \end{cases}$

则 $f=y_1^2+\dfrac{3}{4}y_2^2+\cdots+\dfrac{n}{2(n-1)}y_{n-1}^2+\dfrac{n+1}{2n}y_n^2$. 线性替换的矩阵为

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \cdots & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \cdots & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

而二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

且有

$$C'AC=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \frac{3}{4} & & & & \\ & & \frac{4}{6} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \frac{n}{2(n-1)} & \\ & & & & & \frac{n+1}{2n}\end{pmatrix}$$

4) 作变换

$$\begin{cases}y_1=x_1-\bar{x}\\ y_2=x_2-\bar{x}\\ \quad\cdots\cdots\\ y_{n-1}=x_{n-1}-\bar{x}\\ y_n=x_n\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}x_1=2y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n\\ x_2=y_1+2y_2+y_3+\cdots+y_n\\ \quad\cdots\cdots\\ x_{n-1}=y_1+\cdots+y_{n-2}+2y_{n-1}+y_n\\ x_n=\qquad\qquad\qquad\qquad y_n\end{cases}$$

利用 $\sum_{i=1}^{n}y_i=\sum_{i=1}^{n}x_i-(n-1)\bar{x}=\bar{x}$,则二次型

$$f=\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2+\left(y_n-\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2+\left(\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right)^2=$$

$$2\left(\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2+\sum_{1\le i<j\le n-1}y_iy_j\right)\xRightarrow{3)}$$

$$2\left(z_1^2+\frac{3}{4}z_2^2+\cdots+\frac{n}{2(n-1)}z_{n-1}^2\right)$$

其中所作的线性替换为(利用本题 3) 的结果)

$$\begin{cases}y_1=z_1-\frac{1}{2}z_2-\frac{1}{3}z_3-\cdots-\frac{1}{n-1}z_{n-1}\\ y_2=\qquad\quad z_2-\frac{1}{3}z_3-\cdots-\frac{1}{n-1}z_{n-1}\\ \quad\cdots\cdots\\ y_{n-1}=\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z_{n-1}\\ y_n=\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad z_n\end{cases}$$

于是,总线性替换矩阵为

$$C=C_1C_2=$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \cdots & -\frac{1}{n-1} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \cdots & -\frac{1}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -\frac{1}{n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{n}{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

又由 $f = (x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \cdots, x_n - \bar{x})(x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \cdots, x_n - \bar{x})'$

可求得二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \ddots & \ddots & \cdots \\ \cdots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} \end{pmatrix}$$

验证得 $$C'AC = \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ & \frac{3}{2} & & & & \\ & & \frac{4}{3} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \frac{n}{n-1} & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

2. 设实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{s}(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)^2$，证明：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的秩等于矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

的秩.

证　记 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，其中 a_i 为 A 的第 i 列. 又记 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$. 则有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{s}(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{s}\left[(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}\right]^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{s}\left[(x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \cdots \\ a_{in} \end{pmatrix}(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}\right] =$$

$$x'\left[\sum_{i=1}^{s}\begin{pmatrix} a_{i1}^2 & a_{i1}a_{i2} & \cdots & a_{i1}a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{in}a_{i1} & a_{in}a_{i2} & \cdots & a_{in}^2 \end{pmatrix}\right]x =$$

$$x'\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{s}a_{i1}^2 & \sum_{i=1}^{s}a_{i1}a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{s}a_{i1}a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \sum_{i=1}^{s}a_{in}a_{i1} & \sum_{i=1}^{s}a_{in}a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{s}a_{in}^2 \end{pmatrix}x =$$

$$x'\begin{pmatrix} a_1'a_1 & a_1'a_2 & \cdots & a_1'a_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n'a_1 & a_n'a_2 & \cdots & a_n'a_n \end{pmatrix}x = x'(A'A)x$$

其中

$$A'A=\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \alpha_2'\\ \cdots\\ \alpha_n'\end{pmatrix}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1'\alpha_1 & \alpha_1'\alpha_2 & \cdots & \alpha_1'\alpha_n\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ \alpha_n'\alpha_1 & \alpha_n'\alpha_2 & \cdots & \alpha_n'\alpha_n\end{pmatrix}$$

因此,二次型的秩等于 $\operatorname{rank}(A'A) \xRightarrow{17\text{ 题}} \operatorname{rank}A$.

3. 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=l_1^2+l_2^2+\cdots+l_p^2-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2$,其中 l_i $(i=1,2,\cdots,p+q)$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一次齐次式.证明:$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的正惯性指数 $\leq p$,负惯性指数 $\leq q$.

证 设 $l_i=b_{i1}x_1+b_{i2}x_2+\cdots+b_{in}x_n(i=1,2,\cdots,p+1)$, $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的正惯性指数为 s,秩为 r,故存在非退化线性替换

$$y_i=c_{i1}x_1+c_{i2}x_2+\cdots+c_{in}x_n \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (*)$$

使

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, \cdots, x_n)&=l_1^2+l_2^2+\cdots+l_p^2-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2=\\ &y_1^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2-\cdots-y_r^2 \qquad (**)\end{aligned}$$

下证 $s\leq p$.反证法.假设 $s>p$,考虑下面的齐次线性方程组

$$\begin{cases}b_{11}x_1+\cdots+b_{1n}x_n=0\\ \quad\cdots\cdots\\ b_{p1}x_1+\cdots+b_{pn}x_n=0\\ c_{s+1,1}x_1+\cdots+c_{s+1,n}x_n=0\\ \quad\cdots\cdots\\ c_{n1}x_1+\cdots+c_{nn}x_n=0\end{cases}$$

此方程组含方程的个数为 $p+n-s$ 个,小于未知量的个数 n,故有非零解,设某非零解为 $x_0=(a_1, a_2, \cdots, a_n)'$.代入$(**)$式得

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n)=-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2=y_1^2+\cdots+y_s^2$$

此式成立,必有 $l_{p+1}=\cdots=l_{p+q}=0$, $y_1=\cdots=y_s=0$,即非零向量 x_0 对应的 y_0 为零向量,这与$(*)$式 $y=Cx$ 为非退化线性替换矛盾,故 $s\leq p$.同理可证,负惯性指数 $\leq q$.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$ 是一对称矩阵,且 $|A_{11}|\neq 0$,证明:存在

$T = \begin{pmatrix} E & X \\ O & E \end{pmatrix}$ 使

$$T'AT = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & * \end{pmatrix}$$

其中 * 表示一个级数与 A_{22} 相同的矩阵 .

证　欲将 A 左下角子块 A_{21} 化为 O, 需左乘分块初等矩阵 $T' = \begin{pmatrix} E & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{pmatrix}$, 则得

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

由 A 为对称阵知, $A_{11}' = A_{11}$, $A_{21}' = A_{12}$, 从而

$$(-A_{21}A_{11}^{-1})' = -(A_{11}^{-1})'A_{21}' = -A_{11}^{-1}A_{12}$$

此时　$T = \begin{pmatrix} E & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} E & -(A_{21}A_{11}^{-1})' \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & E \end{pmatrix}$

故

$$T'AT = \begin{pmatrix} E & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & E \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & E \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

5. 设 A 是反对称矩阵, 证明: A 合同于矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & & & -1 & 0 & & & & \\ & & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

证　对反对称矩阵 A 的级数 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时, $A=(0)$ 合同于 (0), 结论成立.

当 $n=2$ 时, $A=\begin{pmatrix}0 & a_{12}\\ -a_{12} & 0\end{pmatrix}$. 若 $a_{12}=0$, 则 A 合同于零矩阵, 结论成立; 若 $a_{12}\neq 0$, 对 A 的第一行及第一列均乘 a_{12}^{-1}, 得 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, 即对 A 作合同变换得

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{a_{12}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a_{12}\\ -a_{12} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{a_{12}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

假设对 $n\leq k$ 时结论成立, 下证 $n=k+1$ 时结论成立.

$$A=\begin{pmatrix}0 & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1}\\ \cdots & & \cdots & \cdots\\ -a_{1k} & \cdots & 0 & a_{k,k+1}\\ -a_{1,k+1} & \cdots & -a_{k,k+1} & 0\end{pmatrix}$$

若最后一行元素全为零, 则由归纳假设结论已成立. 不然经过行列同样的对换可使 $a_{k,k+1}\neq 0$, 将最后一行和最后一列都乘以 $\frac{1}{a_{k,k+1}}$, 则 A 化成

$$\begin{pmatrix}0 & \cdots & a_{1k} & b_1\\ \cdots & & \cdots & \cdots\\ -a_{1k} & \cdots & 0 & 1\\ -b_1 & \cdots & -1 & 0\end{pmatrix}$$

再利用 1, -1 将最后两行两列的其他非零元化成零, (只需对矩阵做一系列行, 列相同的初等变换) 使 A 又化成

$$\begin{pmatrix}0 & \cdots & b_{1,k-1} & 0 & 0\\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots\\ -b_{1,k-1} & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

由归纳假设知 $\begin{pmatrix}0 & \cdots & b_{1,k-1}\\ \cdots & & \cdots\\ -b_{1,k-1} & \cdots & 0\end{pmatrix}$ 与形如 $\begin{pmatrix}0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0\end{pmatrix}$ 的

矩阵合同,从而 A 合同于矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & & \\ & & & & 0 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

再将最后两行和两列交换到前面,便知结论对 $k+1$ 阶矩阵也成立,从而对于任意的反对称矩阵结论成立 .

注　以上对 A 做的变换均为对行、列做相同的初等变换,故相当于对 A 做(有限次)合同变换 .

6. 设 A 是 n 级实对称矩阵,证明:存在一正实数 c,使对任一个实 n 维向量 x 都有

$$|x'Ax| \leq cx'x$$

证
$$|x'Ax| = \left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j\right| \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}||x_i||x_j|$$

记 $a = \max\limits_{i,j}|a_{ij}|$,并利用 $|x_i||x_j| \leq \dfrac{x_i^2 + x_j^2}{2}$,得

$$|x'Ax| \leq \sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}||x_i||x_j| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a|x_i||x_j| \leq$$
$$a\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i^2 + x_j^2}{2} = \frac{a}{2}\left[n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + n\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right] =$$
$$an\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = cx'x \qquad (\text{其中 } c = an)$$

7. 主对角线上全是 1 的上三角矩阵称为特殊上三角矩阵 .

1) 设 A 是一对称矩阵,T 为特殊上三角矩阵,而 $B = T'AT$,证明:A 与 B 的对应顺序主子式有相同的值;

2) 证明:如果对称矩阵 A 的顺序主子式全不为 0,那么一定有一特殊上三角矩阵 T 使 $T'AT$ 成对角形;

3) 利用以上结果证明定理 7 的充分性 .

证　1) **法1　归纳法**. 当 $n=2$ 时, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$B=T'AT=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

显然 B 的一级顺序主子式 a_{11} 与 A 的相同, 而 B 的二级顺序主子式

$$|B|=|T'||A||T|=|A|$$

即 $n=2$ 时结论成立.

假设结论对 $n-1$ 级矩阵成立. 下证对 n 级矩阵成立. 将 A, T, B 写成分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & * \\ * & a_{nn} \end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix} T_{n-1} & * \\ 0' & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{n-1} & * \\ * & b_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 T_{n-1} 为特殊上三角矩阵, 则

$$B=\begin{pmatrix} T_{n-1}' & 0 \\ *' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} & * \\ * & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_{n-1} & * \\ 0' & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T_{n-1}'AT_{n-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

由归纳假设, B 的一切 $\leq n-1$ 级顺序主子式, 即 B_{n-1} 的顺序主子式与 $T_{n-1}'A_{n-1}T_{n-1}$ 的顺序主子式有相同的值, 而 B 的 n 级顺序主子式

$$|B|=|T'||A||T|=|A|$$

与 A 的 n 级顺序主子式相等, 故命题得证.

法2　设 $|A_i|$, $|T_i|$ 分别为 A, T 的第 i 个顺序主子式, 则 $B=T'AT=\begin{pmatrix} T_i'A_iT_i & * \\ * & * \end{pmatrix}$ 的第 i 个顺序主子式 $|T_i'A_iT_i|=|A_i|$.

2) 设 $|A_i|$ 为 A 的第 i 个顺序主子式, 由本章补充题4及1)知, 当 $|A_{n-1}|\neq 0$ 时, 存在特殊上三角阵 T_1, 使 $T_1'AT_1=\begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0' & d_1 \end{pmatrix}$; 又当 $|A_{n-2}|\neq 0$ 时, 存在 $n-1$ 级特殊上三角阵 T_2, 使 $T_2'A_{n-1}T_2'=\begin{pmatrix} A_{n-2} & 0 \\ 0' & d_2 \end{pmatrix}$. 取 $T_2=\begin{pmatrix} T_2 & 0 \\ 0' & 1 \end{pmatrix}$; …;

最后, 当 $|A_2|\neq 0$ 时, 存在2级特殊上三角阵 T_{n-1}, 使 $T_{n-1}'A_2T_{n-1}=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & d_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_n & 0 \\ 0 & d_{n-1} \end{pmatrix}$. 取 $T_{n-1}=\begin{pmatrix} T_{n-1} & 0 \\ 0' & E \end{pmatrix}_{n\times n}$, 则

$$T_{n-1}'\cdots T_1'AT_1\cdots T_{n-1}=\begin{pmatrix} d_n & & \\ & \ddots & \\ & & d_1\end{pmatrix}$$

3) 由 2) 知,存在特殊上三角矩阵 T,使 $T'AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=B$. 再由 1) 知,$B$ 的所有顺序主子式与 A 的顺序主子式有相同的值,故

$$\lambda_1=a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0,\ 有\ \lambda_2>0,\ \cdots$$

$$\begin{vmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1i}\\ \cdots & & \cdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{ii}\end{vmatrix}>0,\ 有\ \lambda_i>0,\ (i=1,2,\cdots,n)$$

因为 $x=Ty$ 是非退化线性替换,且

$$x'Ax=y'T'ATy=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

由于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都大于零,故 $x'Ax$ 是正定的.

8. 证明:1) 如果 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ (a_{ij}=a_{ji})$ 是正定二次型,那么

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2\\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n\\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0\end{vmatrix}$$

是负定二次型;

2) 如果 A 是正定矩阵,那么 $|A|\le a_{nn}P_{n-1}$,这里 P_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 级顺序主子式;

3) 如果 A 是正定矩阵,那么 $|A|\le a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$;

4) 如果 $T=(t_{ij})$ 是 n 级实可逆矩阵,那么

$$|T|^2\le\prod_{i=1}^{n}(t_{1i}^2+\cdots+t_{ni}^2)$$

证　1) 作变换 $y=Az$,即

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

则

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{11}z_1 + \cdots + a_{1n}z_n \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n1}z_1 + \cdots + a_{nn}z_n \\ y_1 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[(i=1,2,\cdots,n-1)]{c_n - z_i c_i}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ y_1 & \cdots & y_n & -(y_1z_1 + \cdots + y_nz_n) \end{vmatrix} =$$

$$-|A|(y_1z_1 + \cdots + y_nz_n) =$$

$$-|A|y'z = -|A|z'Az = -|A|z'Az$$

由 A 为正定矩阵知，$f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为负定二次型．

2) 由 1)，得

$$f_{n-1}(y_1, \cdots, y_{n-1}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & y_1 \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & y_{n-1} \\ y_1 & \cdots & y_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

为负定二次型．又有

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{拆\ n\ 列}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$f_{n-1}(a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{n-1,n}) + a_{nn}|A_{n-1}|$$

由 A 为正定矩阵知，A 中左上角的 $n-1$ 级矩阵 A_{n-1} 也是正定矩阵，所以当 $(a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{n-1,n}) \neq (0,0,\cdots,0)$ 时，$f_{n-1}(a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{n-1,n}) < 0$，则 $|A| < a_{nn}|A_{n-1}| = a_{nn}P_{n-1}$.

当 $a_{1n} = a_{2n} = \cdots = a_{n-1,n} = 0$ 时，$|A| = a_{nn}P_{n-1}$，故总有 $|A| \leq a_{nn}P_{n-1}$.

3) A 正定时，由 2)，有

$$|A| \leq a_{nn}P_{n-1} \leq a_{nn}a_{n-1,n-1}P_{n-2} \leq \cdots \leq a_{nn}a_{n-1,n-1}\cdots a_{11}$$

4) 作变换 $x = Ty$，则 $x'x = y'T'Ty$ 为正定二次型，故 $T'T$ 是正定矩阵．又有

$$T'T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{n1} \\ \cdots & & \cdots \\ t_{1n} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} t_{i1}^2 & & & * \\ & \sum_{i=1}^{n} t_{i2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \sum_{i=1}^{n} t_{in}^2 \end{pmatrix}$$

由 3)，有

$$|T^2| = |T'T| \leq \prod_{j=1}^{n}(t_{1j}^2 + t_{2j}^2 + \cdots + t_{nj}^2)$$

9. 证明：实对称矩阵 A 是半正定的充分必要条件是 A 的一切主子式全大于或等于零（所谓 k 级主子式是指形为

$$\begin{pmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{pmatrix}$$

的 k 级子式，其中 $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$）.

证　必要性．设 A 半正定，令 $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\ (k = 1, \cdots, n)$，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} a_{i_1i_1} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{i_ki_1} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{pmatrix}$$

设矩阵 A 与 A_k 的二次型分别为 $y'Ay$ 和 $x'A_kx$.

对任意 $x_0=(b_{i_1},\cdots,b_{i_m})'\neq 0$,存在 $y_0=(c_1,\cdots,c_n)'\neq 0$,其中

$$c_k=\begin{cases} b_k, & \text{当 } k=i_1,i_2,\cdots,i_m \text{ 时} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由 A 半正定,$y_0'Ay_0\geq 0$,得 $x_0'A_kx_0\geq 0$,即 $x'A_kx$ 是半正定的,故存在实满秩矩阵 T_k,使

$$T_k'A_kT_k=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_i\geq 0\ (i=1,2,\cdots,k)$,从而

$$|T_k'A_kT_k|=|A_k||T_k|^2=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k\geq 0$$

又 $|T_k|^2>0$,故 $|A_k|\geq 0$.

充分性. 设 A 的主子式均大于或等于零. 取 A 的第 m 个顺序主子式对应的矩阵

$$B_m=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}\quad (m=1,2,\cdots,n)$$

则

$$|\lambda E_m+B_m|=\begin{vmatrix} \lambda+a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \lambda+a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \lambda+a_{mm} \end{vmatrix}=$$

$$\lambda^m+p_1\lambda^{m-1}+\cdots+p_{m-1}\lambda+p_m$$

其中 p_i 为 B_m 中一切 i 级主子式的和. 由题设,A 的一切主子式均大于或等于零,故 $p_i\geq 0$.

于是,当 $\lambda>0$ 时,$|\lambda E_m+B_m|>0$,即当 $\lambda>0$ 时,$\lambda E+A$ 总是正定矩阵.

如果 A 不是半正定矩阵,则有非零向量 $x_0=(b_1,\cdots,b_n)'$,使

$$x_0'Ax_0=-c<0$$

那么,令
$$\lambda = \frac{c}{x_0'x_0} = \frac{c}{b_1^2 + \cdots + b_n^2} > 0$$
则有
$$x_0'(\lambda E + A)x_0 = x_0'\lambda E x_0 + x_0'Ax_0 = c - c = 0$$
这与 $\lambda > 0$ 时,$\lambda E + A$ 为正定矩阵,即 $x_0'(\lambda E + A)x_0 > 0$ 相矛盾,故 A 为半正定矩阵.

六、学习效果检测题及答案

(一) 检测题

1. 写出下列二次型的矩阵形式,并求二次型的秩:

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

2. 化下列二次型为标准形,并写出所用的非退化线性替换:

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$.

3. 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 化为标准形和规范形,并写出所用的非退化线性替换.

4. 已知实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,求一可逆矩阵 P,使得 $P'AP$ 为对角矩阵.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}$.证明:如果 A_1 与 B_1 合同,A_2 与 B_2 合同,则 A 与 B 合同.

6. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$,则 t 满足________时,二次型是正定的.

7. t满足________时,二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + (1-t)x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$ 是正定的.

8. 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i x_{n-i+1}$,其中 n 为偶数,a, b 为实数.问 a, b 满足什么条件时,二次型 f 正定.

9. 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是正定矩阵,$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是任意 n 个非零实数.证明矩阵 $B = (a_{ij}b_ib_j)_{n\times n}$ 也是正定矩阵.

10. 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵,且 $m < n$.证明 AA'为正定矩阵的充分必要条件是 $\operatorname{rank}A = m$.

11. 如果二次型 $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ 是正定的,则二次型

$$g(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} a & b & x_1 \\ b & c & x_2 \\ x_1 & x_2 & 0 \end{vmatrix}$$

是________.

(A) 正定的; (B) 半正定的; (C) 不定的; (D) 负定的.

(二) 检测题答案

1. (1) $f = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, f 的秩为 2;

(2) $f = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, f 的秩为 3;

(3) $f = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, f 的秩为 3.

2. (1) 非退化线性替换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 化二次型为 $f = y_1^2 - 4y_2^2$;

(2) 非退化线性替换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 化二次型为 $f = y_1^2 - 2y_2^2 + \frac{5}{2} y_3^2$;

(3) 非退化线性替换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 化二次型为 $f = 2y_1^2 + \frac{3}{2} y_2^2$.

注　如果直接令 $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = -x_1 + x_3 \end{cases}$ 化二次型为 $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ 是错误的,因为所作的线性替换不是非退化的 .

3. 非退化线性替换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 化二次型为 $f = 2y_1^2 - \frac{1}{2} y_2^2 + 6y_3^2$;

非退化线性替换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ 化二次型为 $f = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$.

4. 可逆矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,使得 $P'AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. 由于 A_1 与 B_1 合同, A_2 与 B_2 合同,故存在可逆矩阵 P_1 及 P_2 ,使

$$B_1 = P_1'A_1 P_1, \quad B_2 = P_2'A_2 P_2$$

于是令 $P=\begin{pmatrix}P_1 & O\\ O & P_2\end{pmatrix}$,则有 $P'AP=B$,即 A 与 B 合同.

6. 当 $-\frac{4}{5}<t<0$ 时,二次型 f 正定.

7. 当 $-1<t<0$ 时,二次型 f 正定.

8. 当 $a>0$ 且 $a^2>b^2$ 时,二次型 f 正定.

9. 易知 B 是实对称矩阵.设 A 的顺序主子式为 $\Delta_k(k=1,2,\cdots,n)$,B 的顺序主子式为 $\bar{\Delta}_k(k=1,2,\cdots,n)$,可求得 $\bar{\Delta}_k=b_1^2b_2^2\cdots b_k^2\Delta_k(k=1,2,\cdots,n)$,故由 A 正定知 B 正定.

10. 仿例 5.10 证明.

11. 应选(D).因为 f 是正定二次型,它的矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ 是正定矩阵,于是 $a>0$,$ac-b^2>0$,从而 $c>0$.又二次型 $g(x_1,x_2)=-cx_1^2+2bx_1x_2-ax_2^2$,它的矩阵为 $B=\begin{pmatrix}-c & b\\ b & -a\end{pmatrix}$,由于 $\Delta_1=-c<0$,$\Delta_2=ac-b^2>0$,所以 B 是负定矩阵,故 g 是负定二次型.

第 6 章　线性空间

线性空间是 2 维、3 维几何空间及 n 维向量空间的推广 .线性空间是在不考虑集合的对象,抽去它们的具体内容来研究规定了加法与数乘的集合的公共性质 .因此,线性空间具有高度的抽象性和应用的广泛性 .学习本章要注意深入理解各个基本概念及其相互之间的联系,养成从定义出发进行严格推理的习惯 .

一、内 容 提 要

1. 集合

(1) 集合是表示一组事物的整体 .组成集合的事物称为这个集合的元素 .一个集合是给定的或已知的,是指可以确定哪些元素属于这个集合,哪些元素不属于这个集合,用 $a \in M$ 表示元素 a 是集合 M 的元素,用 $a \notin M$ 表示元素 a 不是集合 M 的元素 .集合有以下常用的表示法:

1) 列举法 —— 列出集合的所有元素(包括用一定规律列出无限多个元素);

2) 描述法 —— 用描述集合的元素所具有的共同特性来表示这个集合 .

(2) 不包含任何元素的集合称为空集合 .如果集合 M 的元素都是集合 N 的元素,即由 $a \in M$ 可以推出 $a \in N$,则称 M 为 N 的子集合,记为 $M \subset N$ 或 $N \supset M$.如果两个集合 M 与 N 含有完全相同的元素,则称它们相等,记为 $M = N$.显然 $M = N$ 的充分必要条件是 $M \subset N$ 且 $N \subset M$.

(3) 设 M, N 是两个集合,由 M 与 N 的公共元素组成的集合称为 M 与 N 的交,记为 $M \cap N$,即

$$M \cap N = \{a \mid a \in M \text{且} a \in N\}$$

由 M 的所有元素及 N 的所有元素组成的集合称为 M 与 N 的并,记为 $M \cup N$,即

$$M \cup N = \{a \mid a \in M \text{或} a \in N\}$$

显然有 $M \cap N \quad M$, $M \cap N \quad N$, $M \quad M \cup N$, $N \quad M \cup N$.

2. 映射

(1) 设 M 与 M' 是两个非空集合,如果对 M 中每一个元素 a,按照某一法则 σ 都有 M' 中一个确定的元素 a' 与之对应,则称 σ 为集合 M 到 M' 的一个映射.如果 M 中的元素 a 通过映射 σ 与 M' 中的元素 a' 对应,就记为 $\sigma(a) = a'$,此时称 a' 为 a 在映射 σ 下的像,称 a 为 a' 在映射 σ 下的原像.

(2) 由集合 M 到 M 自身的映射称为 M 上的一个变换.

(3) 记 σ 是集合 M 到 M' 的一个映射,用 $\sigma(M)$ 表示 M 在映射 σ 下像的全体,称为 M 在映射 σ 下的像集合,显然 $\sigma(M) \quad M'$.如果 $\sigma(M) = M'$,则称映射 σ 为映上的或满射.如果在映射 σ 下,M 中不同元素的像也一定不同,即由 $a_1 \neq a_2$ 一定有 $\sigma(a_1) \neq \sigma(a_2)$,则称映射 σ 为 1 - 1 的或单射.如果一个映射既是单射又是满射,就称为 1 - 1 对应或双射.

(4) 设 σ, τ 都是集合 M 到 M' 的映射,如果对每个 $a \in M$ 都有 $\sigma(a) = \tau(a)$,则称 σ 与 τ 相等,记为 $\sigma = \tau$.

(5) 设 σ 是集合 M 上的一个变换,如果对每个 $a \in M$ 都有 $\sigma(a) = a$,则称 σ 为 M 的恒等变换或单位变换,记为 1_M.

(6) 设 σ 是集合 M 到 M' 的映射,τ 是集合 M' 到 M'' 的映射,乘积 $\tau\sigma$ 定义为

$$(\tau\sigma)(a) = \tau(\sigma(a)), \qquad " a \in M$$

$\tau\sigma$ 是 M 到 M'' 的一个映射.映射的乘法一般不满足交换律,但满足结合律,即若 σ, τ, ψ 分别是集合 M 到 M', M' 到 M'', M'' 到 M 的映射,则有

$$(\psi\tau)\sigma = \psi(\tau\sigma)$$

(7) 设 σ 是集合 M 到 M' 的一个映射,如果存在 M' 到 M 的映射 τ,使

$$\tau\sigma = 1_M, \qquad \sigma\tau = 1_{M'}$$

则称 σ 是可逆映射,τ 是 σ 的逆映射,记为 σ^{1}.由集合 M 到 M' 的映射 σ 是可逆映射的充分必要条件是 σ 为双射.

3. 线性空间的定义与性质

(1) 设 V 是一个非空集合,P 是一个数域.在集合 V 的元素之间定义了称为加法的运算,在数域 P 与 V 的元素之间定义了称为数乘的运算.如果对于任意

$\alpha,\beta\in V$ 都有 $\alpha+\beta\in V$,又对任意 $k\in P$ 和 $\alpha\in V$ 都有 $k\alpha\in V$,且加法与数乘运算满足如下八条规则(对任意 $\alpha,\beta,\gamma\in V$ 和 $k, l\in P$):

1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

3) 存在零元素 $0\in V$,使 $\alpha+0=\alpha$;

4) 存在 α 的负元素 $\beta\in V$,使 $\alpha+\beta=0$;

5) $1\alpha=\alpha$;

6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$,

则称 V 为数域 P 上的线性空间.线性空间的元素也称为向量.

注　1. 线性空间具有一般性,其中的元素不一定是通常意义下的向量,可以是数、矩阵、多项式、函数等,但都可以简称为向量.

2. 线性空间具有抽象性,这主要体现在两个运算上,其中的加法与数乘未必就是我们所熟悉的向量、矩阵、函数、多项式等的加法与数乘运算,之所以这样称呼,是因为所规定的这两种运算满足通常的加法与数乘运算所具有的运算规律.当然在同一个非空集合 V 和数域 P 上按不同的规则来定义这两种运算,所构成的线性空间是不同的.

3. 线性空间定义中涉及到数域 P,当取不同的数域时,线性空间的定义形式上没有改变,但该线性空间中的一些性质,如线性相关性、维数等,一般要改变.

(2) 线性空间有以下简单性质:

1) 零元素是惟一的;

2) 任一元素的负元素是惟一的;记 α 的负元素为 $-\alpha$;

3) $0\alpha=0$, $k0=0$, $(-1)\alpha=-\alpha$;

4) 如果 $k\alpha=0$,则 $k=0$ 或 $\alpha=0$.

(3) 一些常用的线性空间:

1) P^n:数域 P 上 n 维行(或列)向量的全体,按通常的向量加法和数与向量的乘法,构成的数域 P 上的线性空间;

2) $P^{m\times n}$:数域 P 上 $m\times n$ 矩阵的全体,按通常矩阵的加法和数与矩阵的乘法,构成的数域 P 上的线性空间;

3) $P[x]$:数域 P 上一元多项式的全体,按通常的多项式的加法和数与多项式的乘法,构成的数域 P 上的线性空间;

4) $P[x]_n$:数域 P 上次数小于 n 的多项式全体,再添上零多项式,按通常的

多项式的加法和数与多项式的乘法,构成的数域 P 上的线性空间;

5) 数域 P 按数的加法与乘法构成数域 P 上的线性空间.复数域 $\mathbf{C}$ 按数的加法与乘法构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间,也构成复数域 $\mathbf{C}$ 上的线性空间.

4. 线性相关性及有关结论

(1) 设 V 是数域 P 上的线性空间,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha$ 是 V 中一组元素,如果存在 P 中一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$,使

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$

则称 α 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的线性组合或 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出.又设有 V 中的两个元素组

$$(\mathrm{I}): \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s; \qquad (\mathrm{II}): \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$$

如果(Ⅰ)中每个元素都可以由(Ⅱ)线性表出,则称元素组(Ⅰ)可由元素组(Ⅱ)线性表出.如果(Ⅰ)与(Ⅱ)可以互相线性表出,则称元素组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

(2) 设 V 是数域 P 上的线性空间,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是 V 中一组元素,如果存在 P 中一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$,使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关.如果仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$ 时上式才成立,则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

(3) 元素组的线性相关性有以下一些结论:

1) 单个元素 α 线性相关的充分必要条件是 $\alpha = 0$;

2) 如果元素组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中有一部分元素线性相关,则整个元素组也线性相关;

3) 元素组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是其中至少有一个元素是其余元素的线性组合;

4) 如果元素组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关,但元素组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$ 线性相关,则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 惟一线性表出;

5) 如果元素组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关,且可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表出,则 $s \leq t$;

6) 两个等价的线性无关的元素组必含有相同个数的元素.

5. 秩与极大线性无关组

(1) 设 V 是数域 P 上的线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是 V 中一组元素, 如果该元素组中有 r 个元素 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关, 且每个 $\alpha_j\ (j = 1, 2, \cdots, s)$ 都可由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表出, 则称 r 为这个元素组的秩, 又称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是这个元素组的一个极大线性无关组.

(2) 秩与极大线性无关组有以下一些结论:

1) 每一个不全由零元素组成的元素组都有极大线性无关组;

2) 元素组与它的任一极大线性无关组等价; 一个元素组的任意两个极大线性无关组等价;

3) 如果元素组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表出, 则前一元素组的秩不超过后一元素组的秩;

4) 等价的元素组有相同的秩.

6. 线性空间的基与维数

(1) 设 V 是数域 P 上的线性空间. 如果 V 中有 n 个元素 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关, 但 V 中没有更多数目的线性无关的元素, 则称 V 是 n 维线性空间, V 的维数记为 $\dim V$, 又称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一组基. 设 $\alpha \in V$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \alpha$ 线性相关, 于是 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 惟一线性表出

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$$

称系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标, 记为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)'$. 如果在 V 中可以找到任意多个线性无关的元素, 则称 V 为无限维线性空间.

(2) 一些常见的线性空间的基与维数:

1) $P^n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in P\ (i = 1, 2, \cdots, n)\}$ 是 n 维的线性空间, 且 $\varepsilon_1 = (1, 0, \cdots, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \varepsilon_n = (0, 0, \cdots, 1)$ 是 P^n 的一组基;

2) $P^{m\times n} = \{A = (a_{ij})_{m\times n} \mid a_{ij} \in P\ (i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, n)\}$ 是 mn 维的线性空间, 且

$$E_{ij}=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & & \cdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & & & 0 & & & \\ & & & \cdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{array}\right] i\\ \quad\quad j\end{array}\qquad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

是 $P^{m\times n}$ 的一组基;

3) $P[x]_n=\{a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\mid a_i\in P(i=0,1,\cdots,n-1)\}$ 是 n 维的线性空间,且 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 是 $P[x]_n$ 的一组基;

4) 数域 P 上一元多项式的全体 $P[x]$ 是无限维线性空间,因为对任意自然数 N,$P[x]$ 中的元素组 $1,x,x^2,\cdots,x^N$ 都是线性无关的.

7. 基变换与坐标变换公式

(1) 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 V 的两组基,它们之间的关系式

$$\begin{cases}\beta_1=c_{11}\alpha_1+c_{21}\alpha_2+\cdots+c_{n1}\alpha_n\\ \beta_2=c_{12}\alpha_1+c_{22}\alpha_2+\cdots+c_{n2}\alpha_n\\ \quad\cdots\cdots\\ \beta_n=c_{1n}\alpha_1+c_{2n}\alpha_2+\cdots+c_{nn}\alpha_n\end{cases}$$

称为基变换公式.基变换公式可形式地写为

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C$$

其中 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 称为由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵.

(2) 过渡矩阵都是可逆的.如果由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为 C,则由基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 到 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的过渡矩阵是 C^{-1}.

(3) 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间,C 是由 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵,则 V 中元素 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 和在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$ 满足关系式

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\cdots\\y_n\end{pmatrix}\quad 或\quad \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\cdots\\y_n\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}$$

称之为坐标变换公式.

8. 线性子空间

(1) 设 V 是数域 P 上的线性空间,W 是 V 的一个非空子集合,如果 W 对于 V 的两种运算也构成数域 P 上的线性空间,则称 W 为 V 的一个线性子空间,简称子空间.V 本身与$\{0\}$都是 V 的子空间,称之为 V 的平凡子空间,而 V 的其他子空间称为非平凡子空间.由 V 的一组元素 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的所有可能的线性组合构成的集合

$$\{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s \mid k_1, k_2, \cdots, k_s \in P\}$$

构成 V 的一个子空间,称之为由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 生成的子空间,记为

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$$

(2) 线性子空间的有关结果如下:

1) 如果数域 P 上线性空间 V 的非空子集合 W 对于 V 的两种运算封闭,即对任意 $\alpha,\beta \in W$ 有 $\alpha+\beta \in W$,又对任意 $k \in P,\alpha \in W$ 有 $k\alpha \in W$,则 W 是 V 的子空间;

2) 设(Ⅰ):$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和(Ⅱ):$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 是线性空间 V 中两组元素,如果元素组(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表出,则

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \quad L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$$

而 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$ 的充分必要条件是元素组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价;

3) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是线性空间 V 中一组元素,则

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \text{ 的维数} = \text{元素组 } \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \text{ 的秩}$$

且元素组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的任一极大线性无关组都是 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 的基;

4) 设 W 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个 m 维子空间,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 W 的一组基,则这组元素必可扩充成 V 的一组基,即在 V 中必可找到 $n-m$ 个元素 $\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n$,使得 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一组基;

5) 设 W_1 与 W_2 是线性空间 V 的两个子空间,则它们的交 $W_1 \cap W_2$ 也是 V 的子空间.

注　两个子空间的并一般未必是子空间.

9. 子空间的和与直和

(1) 设 W_1 与 W_2 是线性空间 V 的两个子空间,集合

$$\{\alpha_1+\alpha_2 \mid \alpha_1 \in W_1,\ \alpha_2 \in W_2\}$$

称为 W_1 与 W_2 的和,记为 W_1+W_2 .如果 W_1+W_2 中每个元素 α的分解式是惟一的,则称这个和为直和,记为 $W_1 \oplus W_2$.

(2) 子空间的和有如下结论:

1) 设 W_1 与 W_2 是线性空间 V 的两个子空间,则 W_1+W_2 也是 V 的子空间;

2) 设 W_1, W_2, W_3 是线性空间 V 的子空间,则

$$W_1+W_2=W_2+W_1,\quad (W_1+W_2)+W_3=W_1+(W_2+W_3)$$

3) 设 W_1 与 W_2 是线性空间 V 的两个子空间,则

$$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)$$

4) 如果 n维线性空间 V的两个子空间 W_1 与 W_2 的维数之和大于 n,则 W_1, W_2 必含有非零的公共元素 .

(3) 直和的充分必要条件:

设 V 是数域 P 上的线性空间, W_1 与 W_2 是 V 的子空间,则下列条件等价:

1) W_1+W_2 是直和;

2) 零元素的分解式是惟一的,即若

$$0=\alpha_1+\alpha_2,\quad \alpha_1\in W_1,\quad \alpha_2\in W_2$$

则只有 $\alpha_1=\alpha_2=0$;

3) $W_1\cap W_2=\{0\}$;

(4) 设 U 是线性空间 V 的一个子空间,则必存在 V 的子空间 W,使

$$V=U\oplus W$$

10. 线性空间的同构

(1) 设 V 与 V'是数域 P 上的两个线性空间,如果可以建立由 V 到 V'的一个双射 σ,且对任意 $\alpha,\beta\in V$ 和 $k\in P$ 有

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),\quad \sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$$

则称 σ为同构映射,而称线性空间 V 与 V'同构 .

(2) 同构映射具有如下的一些结论:

设 σ 是数域 P 上线性空间 V 到 V' 的同构映射, $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha\in V$, $k_1,k_2,\cdots,k_s\in P$,则:

1) $\sigma(0)=0'$($0'$是 V'的零元素), $\sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$;

2) $\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_s\sigma(\alpha_s)$;

3) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关的充分必要条件是 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_s)$ 线

性相关;

4) 如果 W 是 V 的子空间,则 $\sigma(W)=\{\sigma(\alpha)\mid\alpha\in W\}$ 是 $\sigma(V)$ 的子空间,且 W 与 $\sigma(W)$ 的维数相等;

5) 同构映射的逆映射及两个同构映射的乘积还是同构映射.

(3) 同构线性空间的有关结论:

1) 同构的线性空间具有反身性、对称性与传递性;

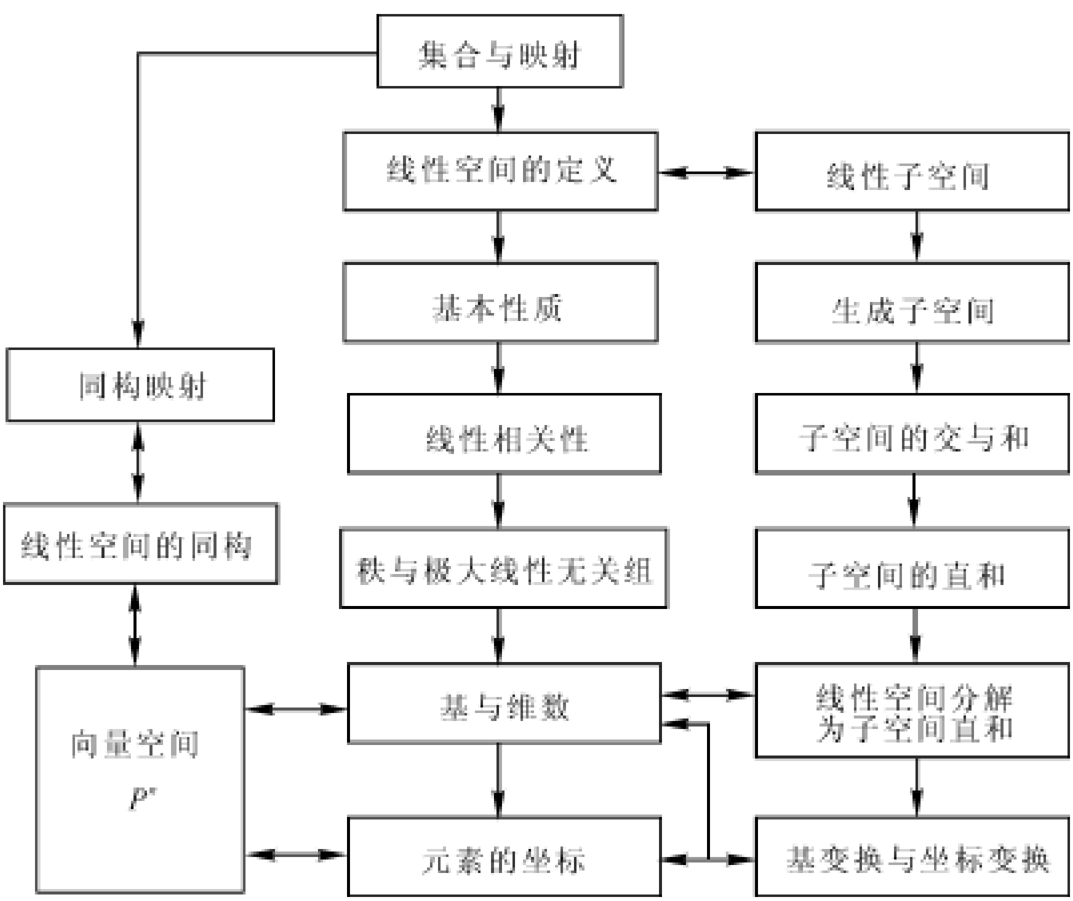
2) 数域 P 上任一 n 维线性空间 V 都与 P^n 同构.取定 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 后,对任意 $\alpha\in V$ 有 $\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n$,则

$$\sigma(\alpha)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

就是 V 到 P^n 的一个同构映射;

3) 数域 P 上两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们有相同的维数.

二、知识网络图



三、重点、难点解读

在本章中采用公理化方法,将一个具有加法与数乘运算且这些运算具有与向量一样的基本性质的集合定义为线性空间.这是第一次用公理化的方法来定义一个数学结构,因此在数学思想方法上是一次新的飞跃.有了这一概念,我们就可以用统一的方法来处理许多数学对象.

本章的重点之一是线性空间的基与维数.因为在确定了有限维线性空间的基之后,一方面明晰了线性空间的结构(由基生成整个线性空间),另一方面将线性空间中抽象的元素及规定的运算与 P^n 中具体的向量及向量的运算相对应,因此可归结为对 P^n 中向量的讨论,即它们具有相同的代数结构.

本章的另一个重点与难点是子空间的和与直和.如果能够将一个线性空间分解为若干个子空间的直和,则整个线性空间的研究就归结为若干个较为简单的子空间的研究.应掌握直和的概念和等价条件.

四、典型例题分析

例 6.1　检验以下集合对于指定的线性运算是否构成相应数域上的线性空间:

1) 起点在原点,终点在一条直线上的空间向量的全体作成的集合 V,按通常几何向量的加法及数乘运算;

2) $V_1 = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, x_i \in P\}$

$V_2 = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, x_i \in P\}$

按通常数域 P 上 n 维向量的加法及数乘运算;

3) $V_3 = \{X \mid \mathrm{Tr}(X) = 0, X \in P^{n\times n}\}$

$V_4 = \{$数域 P 上 n 级对称与反对称矩阵的全体$\}$

按通常数域 P 上矩阵的加法及数乘运算;

4) $V_5 = \{a_1 x + a_3 x^3 + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1} \mid a_i \in P\}$

$V_6 = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} \mid a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = -1, a_i \in P\}$

按通常数域 P 上多项式的加法及数乘运算;

5) 全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 按通常数的加法与乘法运算是否构成复数域 $\mathbf{C}$ 上线

性空间?全体复数的集合 C 按通常数的加法与乘法运算是否构成实数域 R 上线性空间?

6) 数域 P 上 n 级方阵的全体,按通常数与矩阵的乘法,但加法定义为

$$A \quad B = AB - BA$$

解　1) 如果这条直线通过原点,则 V 构成线性空间;如果这条直线不通过原点,则 V 不是线性空间,因为它对加法不封闭(或对数乘不封闭,或不含零向量).

2) V_1 不构成线性空间.因为它不含零向量;或对加法不封闭.因为取 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in V_1$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in V_1$,则

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$$

且
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = 2$$

即 $\alpha + \beta \notin V_1$.

V_2 构成线性空间.因为如果 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in V_2$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in V_2$, $k \in P$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = 0 + 0 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(ka_i) = k\sum_{i=1}^{n} a_i = k0 = 0$$

即 $\alpha + \beta \in V_2$, $k\alpha \in V_2$,且满足线性空间定义中诸条件.

3) V_3 构成线性空间.因为如果 $A = (a_{ij}) \in V_3$, $B = (b_{ij}) \in V_3$, $k \in P$,则有

$$\mathrm{Tr}(A + B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{i} = 0 + 0 = 0$$

$$\mathrm{Tr}(kA) = \sum_{i=1}^{n}(ka_{ii}) = k\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = k0 = 0$$

即 $A + B \in V_3$, $kA \in V_3$,且满足线性空间定义中诸条件.

V_4 不构成线性空间.因为取 A 是对称矩阵,B 是反对称矩阵,且都不是零矩阵,则

$$(A + B)' = A' + B' = A - B$$

即 $A + B$ 既不是对称矩阵,也不是反对称矩阵,从而不在 V_4 内.

4) V_5 构成数域 P 上的线性空间;V_6 不构成线性空间.因为取 $f(x) =$

$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} \in V_6$,则

$$\sum_{i=0}^{n-1} (2a_i) = 2\sum_{i=0}^{n-1} a_i = 2(-1) = -2$$

即 $2f(x) \notin V_6$.

5) R不构成复数域C上的线性空间,因为它对数乘运算不封闭;C构成实数域R上的线性空间.

6) 不构成线性空间,因为它对加法不满足交换律,即 $A \quad B = B \quad A$ 一般不成立.

注　要验证一个非空集合是线性空间,除了要检验其元素对所规定的加法与数乘运算封闭外,还需逐一验证八条运算律满足.由于上例中所指定的线性运算是我们所熟悉的,因此对八条运算律未逐一验证.但要否定一个集合是线性空间,只要说明对加法与数乘运算的封闭性及八条运算律中有一条不成立即可,而且可取一些特殊的元素来说明.

例6 2　线性空间的下列子集合是否构成子空间?为什么?

1) 在 $P^{m\times n}$ 中

$$W_1 = \left\{ A = (a_{ij})_{m\times n} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0 \right\}$$

$$W_2 = \left\{ A = (a_{ij})_{m\times n} \,\middle|\, a_{11} + 2a_{1n} - 3a_{nn} = 0 \right\}$$

2) 在 $P^{2\times 2}$ 中

$$W_3 = \{A \mid |A| = 0,\ A \in P^{2\times 2}\}$$

$$W_4 = \{A \mid A^2 = A,\ A \in P^{2\times 2}\}$$

3) 在全体二维实向量集合 V 按如下规定的加法与数乘运算

$$(a, b) \quad (c, d) = (a + c,\ b + d + ac), \quad k \quad (a, b) = \left(ka,\ kb + \frac{k(k-1)}{2} a^2 \right)$$

构成的线性空间中

$$W_5 = \{\alpha = (a, a) \mid \alpha \in V\}$$

$$W_6 = \left\{ \alpha = \left(a, \frac{a(a+1)}{2} \right) \,\middle|\, \alpha \in V \right\}$$

解　1) W_1 构成子空间.因为 $O \in W_1$,所以 W_1 非空.设 $A = (a_{ij}) \in W_1$,$B = (b_j) \in W_1$,$k \in P$,则有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 0 + 0 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (ka_{ij}) = k\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = k0 = 0$$

即 $A+B\in W_1$, $kA\in W_1$,**故** W_1 **是** $P^{m\times n}$ **的子空间**.

W_2 **构成子空间**.**因为** $O\in W_2$,**所以** W_2 **非空**.**设** $A=(a_{ij})\in W_2$, $B=(b_{ij})\in W_2$, $k\in P$,**则有**

$$(a_{11}+b_{11})+2(a_{1n}+b_{1n})-3(a_{nn}+b_{nn})=$$
$$(a_{11}+2a_{1n}-3a_{nn})+(b_{11}+2b_{1n}-3b_{nn})=0$$
$$(ka_{11})+2(ka_{1n})-3(ka_{nn})=k(a_{11}+2a_{1n}-3a_{nn})=k0=0$$

即 $A+B\in W_2$, $kA\in W_2$,**故** W_2 **是** $P^{m\times n}$ **的子空间**.

2) W_3 **不构成子空间**.**取** $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$,**则** $|A|=|B|=0$,**即** $A,B\in W_3$,**但** $|A+B|=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$,**即** $A+B\notin W_3$,**故** W_3 **不是子空间**.

W_4 **不构成子空间**.**取** $A=E$,**则** $A^2=E^2=E=A$,**即** $A\in W_4$,**但**

$$(2A)^2=(2E)^2=4E\neq 2E=2A$$

即 $2A\notin W_4$,**故** W_4 **不构成子空间**.

3) W_5 **不构成子空间**.**因为取** $\alpha=\beta=(1,1)\in W_5$,**则有**

$$\alpha\quad\beta=(1+1,1+1+1\cdot 1)=(2,3)\notin W_5$$

故 W_5 **不构成子空间**.

W_6 **构成子空间**.**因为** $(0,0)=\left(0,\dfrac{0(0+1)}{2}\right)\in W_6$,**所以** W_6 **非空**.**任取**

$$\alpha=\left(a,\frac{a(a+1)}{2}\right)\in W_6,\quad \beta=\left(b,\frac{b(b+1)}{2}\right)\in W_6,\quad k\in \mathrm{R}$$

则有

$$\alpha\quad\beta=\left(a+b,\frac{a(a+1)}{2}+\frac{b(b+1)}{2}+ab\right)=$$
$$\left(a+b,\frac{(a+b)(a+b+1)}{2}\right)\in W_6$$
$$k\quad\alpha=\left(ka,k\frac{a(a+1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}a^2\right)=\left(ka,\frac{ka(ka+1)}{2}\right)\in W_6$$

故 W_6 **构成** V **的子空间**.

注　检验线性空间 V 的子集合 W 是否构成子空间,只要验证 W 的非空性及对于 V 的两种运算的封闭性即可.

例 6.3　**讨论** $P^{2\times 2}$ **中的矩阵组**

$$G_1=\begin{pmatrix}a&1\\1&1\end{pmatrix},\quad G_2=\begin{pmatrix}1&a\\1&1\end{pmatrix},\quad G_3=\begin{pmatrix}1&1\\a&1\end{pmatrix},\quad G_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&a\end{pmatrix}$$

的线性相关性 .

解　设有数域 P 中的数 k_1, k_2, k_3, k_4 使得 $k_1 G_1 + k_2 G_2 + k_3 G_3 + k_4 G_4 = O$. 比较分量得

$$\begin{cases} ak_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ k_1 + ak_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_2 + ak_3 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 + ak_4 = 0 \end{cases}$$

该齐次线性方程组的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3$.

当 $a \neq -3$ 且 $a \neq 1$ 时, $D \neq 0$. 该方程组只有零解,从而 G_1, G_2, G_3, G_4 线性无关;

当 $a = 1$ 或 $a = -3$ 时, $D = 0$, 该方程组有非零解,从而 G_1, G_2, G_3, G_4 线性相关 .

例 6 .4　设 V 是实数域 R 上所有实函数构成的线性空间,讨论 V 中函数组 e^{2t}, t^2, t 的线性相关性 .

解　设实数 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1 e^{2t} + k_2 t^2 + k_3 t = 0 \qquad (*)$$

法 1　式$(*)$对 t 求 1 阶和 2 阶导数,并与原式联立得

$$\begin{cases} k_1 e^{2t} + k_2 t^2 + k_3 t = 0 \\ 2k_1 e^{2t} + 2k_2 t + k_3 = 0 \\ 4k_1 e^{2t} + 2k_2 = 0 \end{cases}$$

该齐次线性方程组的系数行列式为 $\begin{vmatrix} e^{2t} & t^2 & t \\ 2e^{2t} & 2t & 1 \\ 4e^{2t} & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2e^{2t}(-2t^2 + 2t - 1)$ á 0, 故它只有零解,从而 e^{2t}, t^2, t 线性无关 .

法 2　在$(*)$式中分别取 $t = 0, t = 1$ 和 $t = 2$ 得

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_1 e^2 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 e^4 + 4k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases}$$

该齐次线性方程组的系数行列式为$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e^2 & 1 & 1 \\ e^4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$,故它只有零解,从而 e^{2t}, t^2, t 线性无关 .

注　1. 一般地,若讨论函数组 $f_1(t), \cdots, f_s(t)$ 的线性相关性,可对诸函数分别求 1 阶,2 阶,$\cdots$,$s-1$ 阶导数(要求 $f_i(t)$ 对 t 有 $s-1$ 阶导数),若行列式

$$D(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \cdots & f_s(t) \\ f'_1(t) & f'_2(t) & \cdots & f'_s(t) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ f_1^{(s-1)}(t) & f_2^{(s-1)}(t) & \cdots & f_s^{(s-1)}(t) \end{vmatrix} \not\equiv 0$$

则 $f_1(t), \cdots, f_s(t)$ 线性无关 .若 $D(t) = 0$,则 $f_1(t), \cdots, f_s(t)$ 线性相关 .

2. 在法 2 里,通过取 t 的三个特殊的值列方程组,求得只有 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$,从而得到 e^{2t}, t^2, t 线性无关的结论 . 这是因为,(*) 式对于取定的三个 t 的值只有当 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 时才成立,则对任何 t 的值(包括三个特定的 t 值)(*) 式仅当 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 时成立,故 e^{2t}, t^2, t 线性无关 . 这种方法具有一定的试探性,若对三个取定的 t 值,齐次线性方程组有非零解,则还不能确定三个函数是否线性相关,应另取三个互异的值,或采用其他方法判定之 .

例 6.5　讨论 $P[t]_{N+1}$ 的元素组 $1, t, t^2, \cdots, t^N$ 的线性相关性,其中 N 为取定的自然数 .

解　设有数域 P 中一组数 $k_0, k_1, \cdots, k_N$,使得

$$k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + \cdots + k_N t^N = 0 \qquad (*)$$

法 1　对(*)式分别求 1 阶,2 阶,$\cdots$,N 阶导数,并与原式联立得

$$\begin{cases} k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + \cdots + k_N t^N = 0 \\ \qquad k_1 + 2k_2 t + \cdots + N k_N t^{N-1} = 0 \\ \qquad\qquad 2!k_2 + \cdots + N(N-1) k_N t^{N-2} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad N!k_N = 0 \end{cases}$$

该方程组的系数行列式 $D = 1 \cdot 1! \cdot 2! \cdots N! \neq 0$,所以它只有零解,故 $1, t, t^2, \cdots, t^N$ 线性无关 .

法 2　在(*)式中,分别取 $t = a_1, a_2, \cdots, a_{N+1}$,其中 $a_1, a_2, \cdots, a_{N+1}$ 是数域 P 中 $N+1$ 个互异的数,则得

$$\begin{cases} k_0 + k_1 a_1 + k_2 a_1^2 + \cdots + k_N a_1^N = 0 \\ k_0 + k_1 a_2 + k_2 a_2^2 + \cdots + k_N a_2^N = 0 \\ \quad\cdots\cdots \\ k_0 + k_1 a_{N+1} + k_2 a_{N+1}^2 + \cdots + k_N a_{N+1}^N = 0 \end{cases}$$

该方程组的系数行列式 D 是 $N+1$ 阶范德蒙德行列式的转置,由于 $a_1, a_2, \cdots, a_{N+1}$ 互异,所以 $D \neq 0$,故它只有零解 . 从而 $1, t, t^2, \cdots, t^N$ 线性无关 .

法3 (*)式右端是一零多项式,即所有系数均为零的多项式,从而其左端也是一个零多项式,因此所有系数都应当为零,即 $k_0 = k_1 = \cdots = k_N = 0$. 故 $1, t, t^2, \cdots, t^N$ 线性无关 .

例6 .6 在全体二维实向量集合 V 按如下规定的加法与数乘运算

$$(a, b) \quad (c, d) = (a + c, b + d + ac), \quad k \quad (a, b) = \left(ka, kb + \frac{k(k-1)}{2} a^2\right)$$

构成的线性空间中,试讨论向量组 $\alpha_1 = (1, 1), \alpha_2 = (s, t)$ 的线性相关性 .

解 设实数 k_1, k_2,使得 $k_1 \quad \alpha_1 \quad k_2 \quad \alpha_2 = 0$,即

$$\left(k_1, k_1 + \frac{k_1(k_1-1)}{2}\right) \quad \left(k_2 s, k_2 t + \frac{k_2(k_2-1)}{2} s^2\right) = (0, 0)$$

也即

$$\left(k_1 + k_2 s, k_1 + \frac{k_1(k_1-1)}{2} + k_2 t + \frac{k_2(k_2-1)}{2} s^2 + k_1 k_2 s\right) = (0, 0)$$

从而有

$$k_1 + k_2 s = 0, \qquad k_1 + \frac{k_1(k_1-1)}{2} + k_2 t + \frac{k_2(k_2-1)}{2} s^2 + k_1 k_2 s = 0$$

由第1个方程解出 $k_1 = -k_2 s$,代入第2个方程并整理得 $\left[t - \frac{s(s+1)}{2}\right] k_2 = 0$.可见,当 $t \neq \frac{s(s+1)}{2}$ 时,必有 $k_2 = 0$, $k_1 = 0$,从而 α_1, α_2 线性无关;当 $t = \frac{s(s+1)}{2}$ 时,取 $k_2 = 1$, $k_1 = -s$ 不全为零,有 $(-s) \quad \alpha_1 \quad 1 \quad \alpha_2 = 0$,故 α_1, α_2 线性相关 .

注 按照本题结论,向量组 $\alpha_1 = (1, 1), \alpha_2 = (2, 2)$ 是线性无关的,因为取 $s = 2, t = 2$ 时, $t \neq \frac{s(s+1)}{2}$;而向量组 $\alpha_1 = (1, 1), \alpha_2 = (2, 3)$ 是线性相关的,因为取 $s = 2$, $t = 3$ 时, $t = \frac{s(s+2)}{2}$. 而在通常的线性空间 R^2 中,其结论正好相反 .

例6 .7 求 $P[t]_4$ 中多项式组 $f_1(t) = 1 + 4t - 2t^2 + t^3$, $f_2(t) = -1 +$

$9t-3t^2+2t^3$, $f_3(t)=-5+6t+t^3$, $f_4(t)=5+7t-5t^2+2t^3$ **的秩和一个极大线性无关组**.

解　**取** $P[t]_4$ **的基** $1,t,t^2,t^3$,**以** $f_1(t),f_2(t),f_3(t),f_4(t)$ **在这组基下的坐标为列向量构造矩阵** A,**并对** A **作初等行变换**

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-5&5\\4&9&6&7\\-2&-3&0&-5\\1&2&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-4r_1\\r_3+2r_1}}\begin{pmatrix}1&-1&-5&5\\0&13&26&-13\\0&-5&-10&5\\0&3&6&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+5r_2\\r_4-3r_2}]{r_2\times\frac{1}{13}}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-5&5\\0&1&2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可知 $\operatorname{rank}A=2$,**且** A **的第** 1,2 **个列向量是** A **的列向量组的一个极大线性无关组,故多项式组** $f_1(t),f_2(t),f_3(t),f_4(t)$ **的秩为** 2,**且** $f_1(t),f_2(t)$ **是一个极大线性无关组**.

例 6.8　**求** $\mathbf{R}^{2\times2}$ **中矩阵组** $A_1=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0&3\\0&-1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&3\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}0&-2\\1&-2\end{pmatrix}$, $A_5=\begin{pmatrix}0&5\\-2&6\end{pmatrix}$ **的秩和一个极大线性无关组**.

解　**取** $\mathbf{R}^{2\times2}$ **的基** $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$,**以** A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 **在这组基下的坐标为列向量构造矩阵** B,**并对** B **作初等行变换**:

$$B=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&3&0&-2&5\\-1&0&1&1&-2\\-1&-1&3&-2&6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_3]{\substack{r_2+r_3\\r_4-r_3}}$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&1&1&-2\\0&3&1&-1&3\\0&0&0&0&0\\0&-1&2&-3&8\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\leftrightarrow r_4\\r_3\leftrightarrow r_4}]{r_2+3r_4}\begin{pmatrix}-1&0&1&1&-2\\0&-1&2&-3&8\\0&0&7&-10&27\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 $\operatorname{rank} B = 3$,且 B 的第 1,2,3 个列向量是 B 的列向量组的一个极大线性无关组.故矩阵组 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 的秩为 3,且 A_1, A_2, A_3 是一个极大线性无关组.

注 直接利用定义来求线性空间中一组元素的秩与极大线性无关组是比较困难的.对于有限维(不妨设为 n 维)线性空间 V 中的一组元素 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$,求其秩和极大线性无关组通常采用如下方法:先选取 V 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$(一般取 V 中结构最简单的一组基),然后求 γ_i 在该基下的坐标 $\beta_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})'(i = 1, 2, \cdots, m)$.利用同构映射的结论知元素组 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 有相同的线性相关性,从而有相同的秩和对应的极大线性无关组.这样就将求线性空间中元素组的秩和极大线性无关组的问题转化为求向量组的秩和极大线性无关组的问题,而后者在第三章中已有叙述.

例 6.9 求 $\mathbf{R}^{2\times 3}$ 的子空间

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, a + b + d = 0, a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}$$

的基与维数.

解 法 1 通过观察取 W 中的矩阵 $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,则对 W 中的任一矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$,有 $A = bA_1 + cA_2 + dA_3$ 易证 A_1, A_2, A_3 线性无关,故 W 是 3 维的,且 A_1, A_2, A_3 是 W 的一组基.

法 2 W 中任一矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$ 的元素 a, b, c, d 满足齐次线性方程组

$$a + b + 0c + d = 0$$

该方程组的通解为

$$a = -k_1 - k_3, \quad b = k_1, \quad c = k_2, \quad d = k_3 \quad (k_1, k_2, k_3 \text{ 任意})$$

从而(A_1, A_2, A_3 同上)

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 - k_3 & k_1 & 0 \\ k_2 & 0 & k_3 \end{pmatrix} = k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3$$

即 A 可由 A_1, A_2, A_3 线性表示,易证 A_1, A_2, A_3 线性无关,故 W 是 3 维的,且 A_1, A_2, A_3 是 W 的一组基.

例 6.10 求 $P[t]_4$ 的子空间

$$W = \{ f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \mid a_0 + a_1 + a_2 = 0, \ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \}$$

的基与维数.

解 W 中任一多项式 $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ 的系数 a_0, a_1, a_2, a_3 满

足齐次线性方程组$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 \quad\quad = 0 \\ \quad\quad a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$,可求得该方程组的通解为

$$a_0 = k_2,\quad a_1 = -k_1 - k_2,\quad a_3 = k_1,\quad a_4 = k_2 \quad (k_1, k_2 \text{ 任意})$$

于是

$$f(t) = k_2 + (-k_1 - k_2)t + k_1 t^2 + k_2 t^3 = k_1(-t + t^2) + k_2(1 - t + t^3)$$

令 $f_1(t) = -t + t^2$, $f_2(t) = 1 - t + t^3$,则 $f_1(t), f_2(t) \in W$,且易证 $f_1(t), f_2(t)$ 线性无关 .故 $f_1(t), f_2(t)$ 是 W 的一组基,且 W 是 2 维的 .

例 6 .11　设 $\mathrm{R}^{2\times2}$ 的两个子空间为

$$W_1 = \left\{A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \middle| \ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\}$$

$$W_2 = L(B_1, B_2),\quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求 $W_1 + W_2$ 与 $W_1 \cap W_2$ 的基与维数 .

解　齐次线性方程组 $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ 的通解为

$$x_1 = t_1 - t_2 + t_3,\quad x_2 = t_1,\quad x_3 = t_2,\quad x_4 = t_3 \quad (t_1, t_2, t_3 \text{ 任意})$$

于是 $A \in W_1$ 可表示为

$$A = \begin{pmatrix} t_1 - t_2 + t_3 & t_1 \\ t_2 & t_3 \end{pmatrix} = t_1 A_1 + t_2 A_2 + t_3 A_3$$

其中

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

从而 $W_1 = L(A_1, A_2, A_3)$,且 $W_1 + W_2 = L(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2)$.

取 $\mathrm{R}^{2\times2}$ 的基 $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,以 A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 在该基下的坐标为列向量构造矩阵 A,并对 A 作初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_4]{\substack{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2 \\ \mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可见 $\mathrm{rank}\,A = 4$,**且** A**的第**1,2,3,5**列是** A**的列向量组的一个极大线性无关组**.**从而** $W_1 + W_2$ **的维数为**4,**且** A_1, A_2, A_3, B_2 **为它的一组基**.

设 $A \in W_1 \cap W_2$,**则存在数组** k_1, k_2, k_3 **和** l_1, l_2,**使得**

$$A = k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 = l_1 B_1 + l_2 B_2$$

即

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 - l_2 B_1 - l_2 B_2 = O$$

比较等式两边的对应元素得

$$\begin{cases} k_1 - k_2 + k_3 - l_1 - l_2 = 0 \\ k_1 + l_2 = 0 \\ k_2 - 2l_1 = 0 \\ k_3 - 3l_1 - l_2 = 0 \end{cases}$$

求得其通解为

$$k_1 = 0,\quad k_2 = 2t,\quad k_3 = 3t,\quad l_1 = t,\quad l_2 = 0 \quad (t\text{任意})$$

于是

$$A = l_1 B_1 + l_2 B_2 = tB_1 \quad (t\text{任意})$$

故 $W_1 \cap W_2$ **是**1**维的**,**且** B_1 **是它的基**.

例6.12 **设** $P^{2\times 2}$ **的两组基为**

$$(\text{I}):\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\text{II}):\ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) **求由基**(Ⅰ)**到基**(Ⅱ)**的过渡矩阵**;

(2) **求在基**(Ⅰ)**与基**(Ⅱ)**下有相同坐标的矩阵**.

解 (1) **取** $P^{2\times 2}$ **的基** $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$,**则有**

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) C_1$$

$$(B_1, B_2, B_3, B_4) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) C_2$$

其中

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是

$$(B_1, B_2, B_3, B_4) = (A_1, A_2, A_3, A_4) C_1^{-1} C_2 = (A_1, A_2, A_3, A_4) C$$

即由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵为

$$C = C_1^{-1} C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 设 $A \in P^{2\times 2}$ 在基(Ⅰ)与基(Ⅱ)下的坐标均为 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)'$,则由坐标变换公式得 $x = Cx$,即$(E - C)x = 0$,可求得该齐次线性方程组的通解为

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = k, \quad x_4 = 0 \quad (k\text{ 任意})$$

于是在基(Ⅰ)与基(Ⅱ)下有相同坐标的矩阵为

$$A = 0A_1 + 0A_2 + kA_3 + 0A_4 = kA_3 = k\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (k\text{ 任意})$$

例 6.13　设$(x_1, x_2, x_3, x_4)'$是 $P[t]_4$ 中多项式 $f(t)$ 在基

$$f_1(t) = t^3 + 3t^2 + 4t + 4, \qquad f_2(t) = 2t^3 + 5t^2 + 7t + 7$$

$$f_3(t) = -3t^3 - 3t^2 - 5 + 2, \qquad f_4(t) = 5t^3 + 5t^2 + 8t - 3$$

下的坐标,$(y_1, y_2, y_3, y_4)'$是 $f(t)$ 在基 $g_1(t), g_2(t), g_3(t), g_4(t)$ 下的坐标,且

$$y_1 = 3x_1 + 5x_2, \qquad y_2 = x_1 + 2x_2$$

$$y_3 = 2x_3 - 3x_4, \qquad y_4 = -5x_3 + 8x_4$$

(1) 求由基 $g_1(t), g_2(t), g_3(t), g_4(t)$ 到基 $f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)$ 的过渡矩阵;

(2) 求基 $g_1(t), g_2(t), g_3(t), g_4(t)$;

(3) 求多项式 $g(t) = t^3 - t^2 + t - 1$ 在基 $g_1(t), g_2(t), g_3(t), g_4(t)$ 下的坐标.

解　(1) 根据坐标之间的关系,写出坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

从而基变换公式为

$$(f_1, f_2, f_3, f_4) = (g_1, g_2, g_3, g_4) C$$

其中 $C=\begin{pmatrix}3&5&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&-3\\0&0&-5&8\end{pmatrix}$ 为由基 g_1,g_2,g_3,g_4 到 f_1,f_2,f_3,f_4 的过渡矩阵.

(2) 由 $(g_1,g_2,g_3,g_4)=(f_1,f_2,f_3,f_4)C^{-1}=(f_1,f_2,f_3,f_4)\begin{pmatrix}2&-5&0&0\\-1&3&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{pmatrix}$,

得

$$g_1(t)=2f_1(t)-f_2(t)=t^2+t+1$$
$$g_2(t)=-5f_1(t)+3f_2(t)=t^3+t+1$$
$$g_3(t)=8f_3(t)+5f_4(t)=t^3+t^2+1$$
$$g_4(t)=3f_3(t)+2f_4(t)=t^3+t^2+t$$

(3) 设 $g(t)=x_1g_1(t)+x_2g_2(t)+x_3g_3(t)+x_4g_4(t)$,比较两边同次幂的系数得

$$\begin{cases}x_2+x_3+x_4=1\\x_1+x_3+x_4=-1\\x_1+x_2+x_4=1\\x_1+x_2+x_3=-1\end{cases}\quad 解得\quad\begin{cases}x_1=-1\\x_2=1\\x_3=-1\\x_4=1\end{cases}$$

故 $g(t)$ 在基 $g_1(t),g_2(t),g_3(t),g_4(t)$ 下的坐标为 $(-1,1,-1,1)'$.

例 6.14　若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基, $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$, $\cdots$, $\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 也是 V 的一组基,又若 $\alpha\in V$ 在前一组基下的坐标为 $(n,n-1,\cdots,2,1)'$,求 α 在后一组基下的坐标.

解　法1　由于 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C$,其中

$$C=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\&1&\cdots&1\\&&\ddots&\vdots\\&&&1\end{pmatrix},\quad 且\ C^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&&\\&1&\ddots&\\&&\ddots&-1\\&&&1\end{pmatrix}$$

设 α 在后一基下的坐标为 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$,则由坐标变换公式得

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}n\\n-1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

即 α 在后一组基下的坐标为 $(1,1,\cdots,1)'$.

法 2　设 $\alpha = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_n\beta_n$,整理得

$$\alpha = (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)\alpha_1 + (y_2 + \cdots + y_n)\alpha_2 + \cdots + y_n\alpha_n$$

由题设 $\alpha = n\alpha_1 + (n-1)\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n$,比较对应坐标得

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + \cdots + y_n = n \\ \qquad y_2 + \cdots + y_n = n-1 \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad y_n = 1 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 1 \\ \quad\cdots \\ y_n = 1 \end{cases}$$

故 α 在后一组基下的坐标为 $(1,1,\cdots,1)'$.

例 6.15　已知 $P^{n\times n}$ 的两个子空间

$$S_1 = \{A \mid A' = A,\ A \in P^{n\times n}\},\quad S_2 = \{A \mid A' = -A,\ A \in P^{n\times n}\}$$

证明:$P^{n\times n} = S_1 \quad S_2$.

证　对任意 $A \in P^{n\times n}$,有

$$A = \frac{A + A'}{2} + \frac{A - A'}{2} = B + C$$

其中 $B = \dfrac{A + A'}{2}$, $C = \dfrac{A - A'}{2}$.容易验证 $B' = B$, $C' = -C$,所以 $B \in S_1$, $C \in S_2$,即有 $P^{n\times n} = S_1 + S_2$.

若 $D \in S_1 \cap S_2$,则 $D' = D$, $D' = -D$,所以 $D = O$. 即 $S_1 \cap S_2 = \{O\}$,故 $P^{n\times n} = S_1 \quad S_2$.

例 6.16　设 n 级方阵 A, B, C, D 两两可交换,且满足 $AC + BD = E$. 记 $ABx = 0$ 的解空间为 W, $Bx = 0$ 的解空间为 W_1, $Ax = 0$ 的解空间为 W_2. 证明:$W = W_1 \quad W_2$.

证　对任意 $\alpha \in W$,有 $AB\alpha = 0$,且

$$\alpha = E\alpha = (AC + BD)\alpha = AC\alpha + BD\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

其中 $\alpha_1 = AC\alpha$, $\alpha_2 = BD\alpha$. 注意到 A, B, C, D 两两可交换,从而

$$B\alpha_1 = B(AC\alpha) = C(AB\alpha) = 0,\quad A\alpha_2 = A(BD\alpha) = D(AB\alpha) = 0$$

可见 $\alpha_1 \in W_1$, $\alpha_2 \in W_2$,故 $W = W_1 + W_2$. 再证 $W_1 + W_2$ 是直和.

任取 $\beta \in W_1 \cap W_2$,即有 $\beta \in W_1$ 且 $\beta \in W_2$,也即 $B\beta = A\beta = 0$,则

$$\beta = E\beta = (AC + BD)\beta = AC\beta + BD\beta = C(A\beta) + D(B\beta) = 0$$

可见 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. 故 $W = W_1 \quad W_2$.

五、课后习题全解

(一) 第六章习题

1. **设** $M \quad N$,**证明**:$M \cap N = M$, $M \cup N = N$.

证 任取 $a \in M$,由 $M \quad N$ 得 $a \in N$,从而 $a \in M \cap N$,即有 $M \quad M \cap N$.又因为 $M \cap N \quad M$,所以 $M \cap N = M$.

再取 $a \in M \cup N$,则 $a \in M$ 或 $a \in N$,但是 $M \quad N$,因此无论哪一种情况都有 $a \in N$,这表明 $M \cup N \quad N$.但 $N \quad M \cup N$,故 $M \cup N = N$.

2. **证明**:$M \cap (N \cup L) = (M \cap N) \cup (M \cap L)$

$$M \cup (N \cap L) = (M \cup N) \cap (M \cup L)$$

证 对任意 $x \in M \cap (N \cup L)$,有 $x \in M$ 且 $x \in N \cup L$,在后一情形有 $x \in N$ 或 $x \in L$,于是 $x \in M \cap N$ 或 $x \in M \cap L$,即 $x \in (M \cup N) \cap (M \cup L)$,由此得

$$M \cap (N \cup L) \quad (M \cap N) \cup (M \cap L)$$

反之,若 $x \in (M \cap N) \cup (M \cap L)$,则 $x \in M \cap N$ 或 $x \in M \cap L$.

对前一情形有 $x \in M$ 且 $x \in N$,因此 $x \in N \cup L$,故得 $x \in M \cap (N \cup L)$.对后一情形有 $x \in M$ 且 $x \in L$,因而 $x \in N \cup L$,也得 $x \in M \cap (N \cup L)$,从而

$$(M \cap N) \cup (M \cap L) \quad M \cap (N \cup L)$$

故
$$M \cap (N \cup L) = (M \cap N) \cup (M \cap L)$$

下证第二个等式.

若 $x \in M \cup (N \cap L)$,则 $x \in M$ 或 $x \in N \cap L$.

对前一情形有 $x \in M \cup N$,且 $x \in M \cup L$,因而 $x \in (M \cup N) \cap (M \cup L)$.

对后一情形有 $x \in N$ 且 $x \in L$,因而 $x \in M \cup N$ 且 $x \in M \cup L$,仍有 $x \in (M \cup N) \cap (M \cup L)$,故

$$M \cup (N \cap L) \quad (M \cup N) \cap (M \cup L)$$

反之,若 $x \in (M \cup N) \cap (M \cup L)$,则 $x \in M \cup N$ 且 $x \in M \cup L$.

若 x ú M,则必有 $x \in N$ 且 $x \in L$,因此 $x \in M \cup (N \cap L)$;若 $x \in M$,则

$x \in M \cup (N \cap L)$ 也成立,故

$$(M \cup N) \cap (M \cup L) \quad M \cup (N \cap L)$$

结合上述两式即得

$$M \cup (N \cap L) = (M \cup N) \cap (M \cup L)$$

3. 检验以下集合对于所指的线性运算是否构成实数域上的线性空间:

1) 次数等于 $n\ (n \geq 1)$ 的实系数多项式的全体,对于多项式的加法和数量乘法;

2) 设 A 是一个 $n \times n$ 实矩阵,A 的实系数多项式 $f(A)$ 的全体,对于矩阵的加法和数量乘法;

3) 全体实对称(反对称、上三角) 矩阵,对于矩阵的加法和数量乘法;

4) 平面上不平行某一向量的全部向量所成的集合,对于向量的加法和数量乘法;

5) 全体实数的二元数列,对于下面定义的运算:

$$(a_1, b_1) \quad (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1 a_2)$$

$$k \quad (a_1, b_1) = \left(ka_1, kb_1 + \frac{k(k-1)}{2} a_1^2 \right)$$

6) 平面上全体向量对于通常的加法和如下定义的数量乘法:$k \quad \alpha = 0$;

7) 集合与加法同 6),数量乘法定义为:$k \quad \alpha = \alpha$;

8) 全体正实数 $\mathbf{R}^+$,加法与数量乘法定义为:$a \quad b = ab,\ k \quad a = a^k$.

解　1) 否. 因为两个 n 次多项式相加不一定是 n 次多项式.

2) 令　$V = \{ f(A) \mid f(x)$ 是实系数多项式,A 为 $n \times n$ 矩阵$\}$

由矩阵加法与数乘运算知 $f(A) + g(A) = h(A),\ kf(A) = d(A)$,其中 k 为实数,$h(x),\ d(x)$ 是实系数多项式. V 中含有 A 的零多项式,为 V 的零元. 以 $f(x)$ 的各项系数的相反数为系数的多项式应为 $-f(x)$,则 $f(A)$ 有负元 $-f(A)$. 由于矩阵加法与数乘运算满足其他各条,故 V 关于矩阵加法与数乘运算构成实数域上的线性空间.

3) 仅对反对称矩阵进行证明.

令 $V = \{A \mid A' = -A,\ A$ 为 $n \times n$ 实矩阵$\}$,因为

$$(A + B)' = A' + B' = -A - B = -(A + B)$$

$$(kA)' = kA' = k(-A) = -(kA) \qquad k \text{为实数}$$

所以 $A + B,\ kA$ 都是反对称矩阵,可见 V 对于加法与数乘运算封闭.

又因为零矩阵是反对称矩阵,为 V 的零元;当 $k = -1$ 时 $-A$ 是反对称矩

阵,为 A 的负元,即 V 中每一个元都有负元 . 矩阵加法与数乘运算满足其他各条,故 V 构成一个实数域上的线性空间 .

全体对称矩阵,全体上三角矩阵的情形可类似地证明 .

4) 否 . 例如以那个已知向量为对角线的任意两个向量,它们的和不属于这个集合 .

5) 显然所给集合对于定义的加法与数量乘法封闭 . 不难验证对加法交换律、结合律满足;$(0, 0)$ 是零元,任意 (a, b) 的负元是 $(-a, a^2 - b)$,对于数乘有

$$1 \quad (a, b) = \left(1a, 1b + \frac{1(1-1)}{2}a^2\right) = (a, b)$$

$$k \quad (l \quad (a, b)) = k \quad \left(la, lb + \frac{l(l-1)}{2}a^2\right) =$$

$$\left(kla, k\left[lb + \frac{l(l-1)}{2}a^2\right] + \frac{k(k-1)}{2}(la)^2\right) =$$

$$\left(kla, \frac{kl(kl-1)}{2}a^2 + klb\right) =$$

$$(kl) \quad (a, b)$$

$$(k+l) \quad (a, b) = \left[(k+l)a, \frac{(k+l)(k+l-1)}{2}a^2 + (k+l)b\right]$$

$$k \quad (a, b) \qquad l \quad (a, b) =$$

$$\left(ka, kb + \frac{k(k-1)}{2}a^2\right) \qquad \left(la, lb + \frac{l(l-1)}{2}a^2\right) =$$

$$\left(ka + la, kb + lb + \frac{k(k-1)}{2}a^2 + \frac{l(l-1)}{2}a^2 + k(a^2)\right) =$$

$$\left[(k+l)a, \frac{(k+l)(k+l-1)}{2}a^2 + (k+l)b\right]$$

故

$$(k+l) \quad (a, b) = k \quad (a, b) \qquad l \quad (a, b)$$

$$k \quad [(a_1, b_1) \qquad (a_2, b_2)] =$$

$$\left[k(a_1 + a_2), k(b_1 + b_2 + a_1a_2) + \frac{k(k-1)}{2}(a_1 + a_2)^2\right]$$

$$k \quad (a_1, b_1) \qquad k \quad (a_2, b_2) =$$

$$\left(ka_1, kb_1 + \frac{k(k-1)}{2}a_1^2\right) \qquad \left(ka_2, kb_2 + \frac{k(k-1)}{2}a_2^2\right) =$$

$$\left(ka_1 + ka_2, kb_1 + \frac{k(k-1)}{2}a_1^2 + kb_2 + \frac{k(k-1)}{2}a_2^2 + k^2a_1a_2\right) =$$

$$\left(k(a_1 + a_2), k(b_1 + b_2 + a_1a_2) + \frac{k(k-1)}{2}a_1^2 + \right.$$

$$\frac{k(k-1)}{2}a_2^2 + k^2 a_1 a_2 - k a_1 a_2\Big] =$$

$$\Big[\ k(a_1+a_2),\ k(b_1+b_2+a_1 a_2)+\frac{k(k-1)}{2}(a_1+a_2)^2\Big]$$

所以

$$k\quad[(a_1,b_1)\quad(a_2,b_2)] = k\quad(a_1,b_1)\quad k\quad(a_2,b_2)$$

故构成一个实数域上的线性空间 .

6) 否 . 因为 $1\quad \alpha = 0$.

7) 否 . 因为 $(k+l)\quad\alpha=\alpha$, 而 $k\quad\alpha+l\quad\alpha=\alpha+\alpha=2\alpha$, 可见

$$(k+l)\quad\alpha\neq k\quad\alpha+l\quad\alpha$$

8) 显然所给集合对定义的加法与数量乘法封闭, 且满足

i) $a\quad b = ab = ba = b\quad a$

ii) $(a\quad b)\quad c = (ab)\quad c = abc = a\quad(bc) = a\quad(b\quad c)$

iii) 1 是零元: $a\quad 1 = a\cdot 1 = a$

iv) a 的负元是 $\frac{1}{a}$: $a\quad\frac{1}{a} = a\cdot\frac{1}{a} = 1$

v) $1\quad a = a^1 = a$

vi) $k\quad(l\quad a) = k\quad(a^l) = (a^l)^k = a^{lk} = a^{kl} = (kl)\quad a$

vii) $(k+l)\quad a = a^{k+l} = a^k a^l = (k\quad a)\quad(l\quad a)$

viii) $k\quad(a\quad b) = k\quad(ab) = (ab)^k = a^k b^k = k\quad a\quad k\quad b$

故 R^+ 按所规定的加法与数量乘法构成实数域上的线性空间 .

4. 在线性空间中, 证明:

1) $k0 = 0$;

2) $k(\alpha-\beta) = k\alpha - k\beta$.

证　1) $k0 = k(\alpha+(-\alpha)) = k\alpha + k(-\alpha) = k\alpha + k(-1)\alpha =$

$$[k+(-k)]\alpha = 0\alpha = 0$$

2) 因为 $k(\alpha-\beta)+k\beta = k(\alpha-\beta+\beta) = k\alpha$, 所以 $k(\alpha-\beta) = k\alpha - k\beta$.

5. 证明: 实函数空间中, $1, \cos^2 t, \cos 2t$ 是线性相关的 .

证　因为 $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$, 所以 $1, \cos^2 t, \cos 2t$ 线性相关 .

6. 如果 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ 是线性空间 $P[x]$ 中三个互素的多项式, 但其中任意两个都不互素, 那么它们线性无关 .

证　设 k_1, k_2, k_3 不全为 0, 使

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + k_3 f_3(x) = 0$$

不妨设 $k_1\neq 0$,则 $f_1(x)=-\frac{k_2}{k_1}f_2(x)-\frac{k_3}{k_1}f_3(x)$,此式说明 $f_2(x)$, $f_3(x)$ 的公因式就是 $f_1(x)$ 的因式,与三者互素矛盾,因而 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ 线性无关.

7. 在 P^4 中求向量 ξ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标,设

1) $\varepsilon_1=(1,1,1,1)$, $\varepsilon_2=(1,1,-1,-1)$, $\varepsilon_3=(1,-1,1,-1)$, $\varepsilon_4=(1,-1,-1,1)$, $\xi=(1,2,1,1)$;

2) $\varepsilon_1=(1,1,0,1)$, $\varepsilon_2=(2,1,3,1)$, $\varepsilon_3=(1,1,0,0)$, $\varepsilon_4=(0,1,-1,-1)$, $\xi=(0,0,0,1)$.

解 1) 令 $\xi=a\varepsilon_1+b\varepsilon_2+c\varepsilon_3+d\varepsilon_4$,比较分量得

$$\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ a+b-c-d=2 \\ a-b+c-d=1 \\ a-b-c+d=1 \end{cases}$$

解得 $a=\frac{5}{4}$, $b=\frac{1}{4}$, $c=-\frac{1}{4}$, $d=-\frac{1}{4}$,故 ξ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标为 $\left(\frac{5}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)'$.

2) 令 $\xi=a\varepsilon_1+b\varepsilon_2+c\varepsilon_3+d\varepsilon_4$,同理可解得 $a=1$, $b=0$, $c=-1$, $d=0$,故 ξ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标为 $(1,0,-1,0)'$.

8. 求下列线性空间的维数与一组基:

1) 数域 P 上的空间 $P^{n\times n}$;

2) $P^{n\times n}$ 中全体对称(反对称、上三角)矩阵作成的数域 P 上的空间;

3) 第3题8)中的空间;

4) 实数域上由矩阵 A 的全体实系数多项式组成的空间,其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\omega^2\end{pmatrix} \qquad \omega=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$$

解 1) 令 E_{ij} 是第 i 行 j 列的元素为1而其余元素全为0的 n 级方阵,易证 $E_{ij}(i, j=1,\cdots,n)$ 线性无关,且对任意 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in P^{n\times n}$ 有 $A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$.故 $E_{ij}(i, j=1,2,\cdots,n)$ 是一组基,且 $P^{n\times n}$ 是 n^2 维的.

2)① 令 $F_{ij}=\begin{cases}E_{ii}, & i=j\\ E_{ij}+E_{ji}, & i\neq j\end{cases}$,则 F_{ij} 是对称矩阵,易证 $F_{11},\cdots,F_{1n}$, $F_{22},\cdots,F_{2n},\cdots,F_{nn}$ 线性无关,且对任意 n级对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 其中 $a_{ji}=a_{ij}$,有 $A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_{ij}F_{ij}$,故 $F_{11},\cdots,F_{1n},F_{22},\cdots,F_{2n},\cdots,F_{nn}$ 是 $P^{n\times n}$ 中全体对称矩阵所成空间的一组基,该线性空间是$\frac{n(n+1)}{2}$维的 .

② 令 $G_{ij}=E_{ij}-E_{ji}(i<j)$,则 G_{ij} 是反对称矩阵,易证 $G_{12},\cdots,G_{1n},G_{23},\cdots,G_{2n},\cdots,G_{n-1,n}$ 线性无关,且对任意 n 级反对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,其中 $a_{ji}=-a_{ij}$,有 $A=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}G_{ij}$. 故 $G_{12},\cdots,G_{1n},G_{23},\cdots,G_{2n},\cdots,G_{n-1,n}$ 是 $P^{n\times n}$ 中全体反对称矩阵所成空间的一组基,该线性空间是$\frac{n(n-1)}{2}$维的 .

③ 对任意上三角矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,其中 $a_{ij}=0\ (i>j)$,有 $A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_{ij}E_{ij}$,又 $E_{11},\cdots,E_{1n},E_{22},\cdots,E_{2n},\cdots,E_{nn}$ 均为上三角矩阵且线性无关,故它们是 $P^{n\times n}$ 中全体上三角矩阵构成的线性空间的一组基,该线性空间是$\frac{n(n+1)}{2}$维的 .

3)数 1 是零元,于是非零元 2 是线性无关的,且对于任一正实数 a,如果 $a=k\circ 2=2^k$,则有 $k=\log_2 a$,即 $a=(\log_2 a)\circ 2$,这表明 a 可由 2 线性表出,所以此空间为一维的,2 是一组基 . 事实上,任意非 1 的正数都可作为 $\mathbf{R}^+$ 的基 .

4)因为 $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, $\omega^3=1$,所以

$$\omega^n=\begin{cases}1, & n=3m\\ \omega, & n=3m+1\\ \omega^2, & n=3m+2\end{cases}$$

于是 $$A^2=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \omega^2 & \\ & & \omega\end{pmatrix},\quad A^3=E,\quad A^n=\begin{cases}E, & n=3m\\ A, & n=3m+1\\ A^2, & n=3m+2\end{cases}$$

从而,任意 $f(A)$ 可以表示成 E,A,A^2 的线性组合 .

下证 E,A,A^2 线性无关 . 设

$$k_1E+k_2A+k_3A^2=O$$

则 $\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2\omega + k_3\omega^2 = 0 \\ k_1 + k_2\omega^2 + k_3\omega = 0 \end{cases}$,其系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} = 3\omega(\omega - 1) \neq 0$,该齐次线性方程组只有零解,于是 E, A, A^2 线性无关,故该空间是三维的,且 E, A, A^2 是一组基.

9. 在 P^4 中,求由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵,并求向量 ξ 在所指基下的坐标,设

1) $\begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0) \\ \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0) \\ \varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0) \\ \varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1) \end{cases}$　　$\begin{cases} \eta_1 = (2, 1, -1, 1) \\ \eta_2 = (0, 3, 1, 0) \\ \eta_3 = (5, 3, 2, 1) \\ \eta_4 = (6, 6, 1, 3) \end{cases}$

$\xi = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 在 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标;

2) $\begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 2, -1, 0) \\ \varepsilon_2 = (1, -1, 1, 1) \\ \varepsilon_3 = (-1, 2, 1, 1) \\ \varepsilon_4 = (-1, -1, 0, 1) \end{cases}$　　$\begin{cases} \eta_1 = (2, 1, 0, 1) \\ \eta_2 = (0, 1, 2, 2) \\ \eta_3 = (-2, 1, 1, 2) \\ \eta_4 = (1, 3, 1, 2) \end{cases}$

$\xi = (1, 0, 0, 0)$ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标;

3) $\begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 1, 1, 1) \\ \varepsilon_2 = (1, 1, -1, -1) \\ \varepsilon_3 = (1, -1, 1, -1) \\ \varepsilon_4 = (1, -1, -1, 1) \end{cases}$　　$\begin{cases} \eta_1 = (1, 1, 0, 1) \\ \eta_2 = (2, 1, 3, 1) \\ \eta_3 = (1, 1, 0, 0) \\ \eta_4 = (0, 1, -1, -1) \end{cases}$

$\xi = (1, 0, 0, -1)$ 在 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标.

解　1) 因为 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)A$$

其中 A 为由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵,右乘 A^{-1},得

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)A^{-1}$$

于是
$$\xi=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

故 ξ 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标为 $A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$,其中

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{9}&\frac{1}{3}&-1&-\frac{11}{9}\\ \frac{1}{27}&\frac{4}{9}&-\frac{1}{3}&-\frac{23}{27}\\ -\frac{1}{3}&0&0&-\frac{2}{3}\\ -\frac{7}{27}&-\frac{1}{9}&\frac{1}{3}&\frac{26}{27}\end{pmatrix}$$

2) 取中间基 $e_1=(1,0,0,0)$, $e_2=(0,1,0,0)$, $e_3=(0,0,1,0)$, $e_4=(0,0,0,1)$, 则

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)A$$
$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)B$$

其中
$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}$$

将 $(e_1,e_2,e_3,e_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)A^{-1}$ 代入 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)B$ 中得

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)A^{-1}B$$

其中
$$A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

即为由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵,于是

$$\xi=(1,0,0,0)=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=$$

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)A^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}\frac{3}{13}\\\frac{5}{13}\\-\frac{2}{13}\\-\frac{3}{13}\end{pmatrix}$$

故 ξ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标为 $\left(\frac{3}{13},\frac{5}{13},-\frac{2}{13},-\frac{3}{13}\right)'$.

3) **仿上题,有**

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\\0&3&0&-1\\1&1&0&-1\end{pmatrix}$$

过渡矩阵

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{7}{4}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&0&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&0&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

令 $\xi=x_1\eta_1+x_2\eta_2+x_3\eta_3+x_4\eta_4$,**比较分量得**

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=1\\x_1+x_2+x_3+x_4=0\\3x_2-x_4=0\\x_1+x_2-x_4=-1\end{cases}$$

解得 $x_1=-2,\ x_2=-\frac{1}{2},\ x_3=4,\ x_4=-\frac{3}{2}$,**故 ξ 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐**

标为$\left(-2, -\dfrac{1}{2}, 4, -\dfrac{3}{2}\right)'$.

10. 继第 9 题 1), 求一非零向量 ξ, 它在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 与 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下有相同的坐标 .

解　设 ξ 在两组基下的坐标均为 $(x_1, x_2, x_3, x_4)'$, 即

$$\xi = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

又有

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)A$$

代入 $(*)$ 式得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \text{即 } (A - E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \text{ 也即 } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

求解该齐次线性方程组得通解

$$x_1 = c, \quad x_2 = c, \quad x_3 = c, \quad x_4 = c \quad (c \text{ 任意})$$

故

$$\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3 + x_4\varepsilon_4 = (c, c, c, c) \quad (c \neq 0)$$

11. 证明:实数域作为它自身上的线性空间与第 3 题 8) 中的空间同构 .

证　法 1　因为它们都是实数域上的一维线性空间, 故同构 .

法 2　作实空间 R 到正实空间 R^+ 的映射

$$x \longrightarrow 2^x$$

下证该映射是一同构映射 .

当 $x \neq y$ 时, $2^x \neq 2^y$; 任取 $b \in R^+$, 有 $b = 2^x$, 其中 $x = \log_2 b \in R$, 即 $\log_2 b \to b$, 所以该映射为双射 . 又因为

$$x + y \to 2^{x+y} = 2^x 2^y = 2^x \quad 2^y$$

$$kx \to 2^{kx} = (2^x)^k = k \quad 2^x$$

故 R 与 R^+ 同构 .

12. 设 V_1 , V_2 都是线性空间 V 的子空间,且 $V_1 \quad V_2$. 证明:如果 V_1 的维数与 V_2 的维数相等,则 $V_1 = V_2$.

证 设 $\dim V_1 = r$,一组基为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$.

因为 $V_1 \quad V_2$,且它们的维数相等,所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 也是 V_2 的一组基,故 $V_1 = V_2$.

13. 设 $A \in P^{n\times n}$:

1) 证明:全体与 A 可交换的矩阵组成 $P^{n\times n}$ 的一个子空间,记为 $C(A)$;

2) 当 $A = E$ 时,求 $C(A)$;

3) 当 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$ 时,求 $C(A)$ 的维数和一组基 .

证 1) 由于 $E \in C(A)$,所以 $C(A)$ 非空 . 又对任意 $B, D \in C(A)$ 和任意 $k \in P$,有

$$A(B + D) = AB + AD = (B + D)A$$

$$A(kB) = k(AB) = k(BA) = (kB)A$$

此即 $B + D \in C(A)$, $kB \in C(A)$,故 $C(A)$ 构成 $P^{n\times n}$ 的子空间 .

2) 当 $A = E$ 时, $C(A) = P^{n\times n}$.

3) 设与 A 可交换的矩阵为 $B = (b_{ij})$,则由第四章习题 5 知 B 只能是对角阵,同时所有对角阵与 A 可交换,故 $C(A)$ 维数为 n,且 $E_{11}, E_{22}, \cdots, E_{nn}$ 为一组基 .

14. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,求 $P^{3\times 3}$ 中全体与 A 可交换的矩阵所成子空间的维数和一组基 .

解 将 A 分解为 $A = E + S$,其中 $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 设

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

与 A 可交换,即 $AB=BA$,则有 $(E+S)B=B(E+S)$,于是得 $SB=BS$. 由于

$$SB=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\3a+a_1+a_2&3b+b_1+b_2&3c+c_1+c_2\end{pmatrix},\quad BS=\begin{pmatrix}3c&c&c\\3c_1&c_1&c_1\\3c_2&c_2&c_2\end{pmatrix}$$

比较 SB 与 BS 的元素,得

$$\begin{cases}c=0\\c_1=0\\3a+a_1+a_2=3c_2\\3b+b_1+b_2=c_2\\3c+c_1+c_2=c_2\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}3a+a_1+a_2-3c_2=0\\3b+b_1+b_2-c_2=0\end{cases}$$

解此含 7 个未知量 a,b,a_1,b_1,a_2,b_2,c_2 的齐次线性方程组得通解

$$a=-\frac{1}{3}t_1-\frac{1}{3}t_3+t_5,\quad b=-\frac{1}{3}t_2-\frac{1}{3}t_4+\frac{1}{3}t_5$$

$$a_1=t_1,\quad b_1=t_2,\quad a_2=t_3,\quad b_2=t_4,\quad c_2=t_5$$

$$(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5\ 任意)$$

于是

$$B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}t_1-\frac{1}{3}t_3+t_5&-\frac{1}{3}t_2-\frac{1}{3}t_4+\frac{1}{3}t_5&0\\t_1&t_2&0\\t_3&t_4&t_5\end{pmatrix}=$$

$$t_1B_1+t_2B_2+t_3B_3+t_4B_4+t_5B_5$$

其中

$$B_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{3}&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad B_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$B_4=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{3}&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad B_5=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

故 B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 是 $C(A)$ 的一组基,$C(A)$ 的维数等于 5 .

15. 如果 $c_1\alpha+c_2\beta+c_3\gamma=0$,且 $c_1c_3\neq0$.证明 $L(\alpha,\beta)=L(\beta,\gamma)$.

证 由 $c_1c_3\neq0$ 知 $c_1\neq0$,所以 α 可由 β,γ 线性表出,从而 α,β 可由 β,γ 线性表出.同理 β,γ 可由 α,β 线性表出,故 $L(\alpha,\beta)=L(\beta,\gamma)$.

16. 在 P^4 中,求由向量 $\alpha_i(i=1,2,3,4)$ 生成的子空间的维数与基.设

1) $\begin{cases}\alpha_1=(2,1,3,1)\\ \alpha_2=(1,2,0,1)\\ \alpha_3=(-1,1,-3,0)\\ \alpha_4=(1,1,1,1)\end{cases}$; 2) $\begin{cases}\alpha_1=(2,1,3,-1)\\ \alpha_2=(-1,1,-3,1)\\ \alpha_3=(4,5,3,-1)\\ \alpha_4=(1,5,-3,1)\end{cases}$.

解 1) 可求得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$,故 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的一组基为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$,其维数为 3.

2) 可求得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组为 α_1,α_2,故 α_1,α_2 是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的一组基,其维数为 2.

17. 在 P^4 中,求由齐次线性方程组

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=9\\ 3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0\\ 3x_1+5x_2-13x_3+11x_4=0\end{cases}$$

确定的解空间的基与维数.

解 方程组的系数矩阵

$$\begin{pmatrix}3&2&-5&4\\3&-1&3&-3\\3&5&-13&11\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}3&2&-5&4\\0&-3&8&-7\\0&3&-8&7\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1-2r_2\\ r_1\times\frac{1}{3}}]{\substack{r_3+r_2\\ r_2\times\left(-\frac{1}{3}\right)}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}\\0&1&-\frac{8}{3}&\frac{7}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以解空间的维数为 2,且一组基为

$$\alpha_1=\left(-\frac{1}{9},\frac{8}{3},1,0\right)',\quad \alpha_2=\left(\frac{2}{9},-\frac{7}{3},0,1\right)'$$

18. 求由向量 α_i 生成的子空间与由向量 β_i 生成的子空间的交的基与维数.设

1) $\begin{cases}\alpha_1 = (1,2,1,0)\\ \alpha_2 = (-1,1,1,1)\end{cases}$, $\begin{cases}\beta_1 = (2,-1,0,1)\\ \beta_2 = (1,-1,3,7)\end{cases}$;

2) $\begin{cases}\alpha_1 = (1,1,0,0)\\ \alpha_2 = (1,0,1,1)\end{cases}$, $\begin{cases}\beta_1 = (0,0,1,1)\\ \beta_2 = (0,1,1,0)\end{cases}$;

3) $\begin{cases}\alpha_1 = (1,2,-1,-2)\\ \alpha_2 = (3,1,1,1)\\ \alpha_2 = (-1,0,1,-1)\end{cases}$, $\begin{cases}\beta_1 = (2,5,-6,-5)\\ \beta_2 = (-1,2,-7,3)\end{cases}$.

解　1) **设交的向量** $\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = l_1\beta_1 + l_2\beta_2$,**则**

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2 = 0$$

比较分量得

$$\begin{cases} k_1 - k_2 - 2l_1 - l_2 = 0\\ 2k_1 + k_2 + l_1 + l_2 = 0\\ k_1 + k_2 - 3l_2 = 0\\ k_2 - l_1 - 7l_2 = 0\end{cases}$$

该方程组的通解为

$$k_1 = -t,\quad k_2 = 4t,\quad l_1 = -3t,\quad l_2 = t\quad (t\text{任意})$$

于是　$\gamma = (-t)\alpha_1 + 4t\alpha_2 = t(-5,2,3,4)\quad (t\text{任意})$

故交是一维的,**且**$(-5,2,3,4)$ **是一组基**.

2) **设交的向量** $\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = l_1\beta_1 + l_2\beta_2$,**则有**

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2 = 0$$

即

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0\\ k_1 - l_2 = 0\\ k_2 - l_1 - l_2 = 0\\ k_2 - l_1 = 0\end{cases}$$

该方程组只有零解,**故交的维数为** 0.

3) **设交的向量为** $\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = l_1\beta_1 + l_2\beta_2$,**则有**

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2 = 0$$

即

$$\begin{cases} k_1 + 3k_2 - k_3 - 2l_1 + l_2 = 0\\ 2k_1 + k_2 - 5l_1 - 2l_2 = 0\\ -k_1 + k_2 + k_3 + 6l_1 + 7l_2 = 0\\ -2k_1 + k_2 - k_3 + 5l_1 - 3l_2 = 0\end{cases}$$

求得其通解为

$$k_1 = 3t,\quad k_2 = -t,\quad k_3 = -2t,\quad l_1 = t,\quad l_2 = 0\quad (t\text{任意})$$

于是 $\gamma = t\beta_1$ (t任意). 故交是一维的, 且 β_1 是它的一组基.

19. 设 V_1 与 V_2 分别是齐次方程组 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 与 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = x_n$ 的解空间. 证明: $P^n = V_1 \quad V_2$.

证 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 的解空间是 $n-1$ 维的, 基为 $\alpha_1 = (-1, 1, 0, \cdots, 0)'$, $\alpha_2 = (-1, 0, 1, \cdots, 0)'$, $\cdots$, $\alpha_{n-1} = (-1, 0, 0, \cdots, 1)'$, 由 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, 即

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1} - x_n = 0 \end{cases}$$

得解空间的一个基础解系为 $\beta = (1, 1, 1, \cdots, 1)'$.

因为由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, \beta$ 构成的矩阵 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, \beta)$ 满足

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} n \neq 0$$

所以 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, \beta$ 是 P^n 的一组基, 从而 P^n 中的任意向量可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \beta$ 线性表出, 故 $P^n = V_1 + V_2$. 又因为

$$\dim P^n = n = \dim V_1 + \dim V_2$$

所以 $P^n = V_1 \quad V_2$.

20. 证明: 如果 $V = V_1 \quad V_2$, $V_1 = V_{11} \quad V_{12}$, 那么 $V = V_{11} \quad V_{12} \quad V_2$.

证 显然 $V = V_{11} + V_{12} + V_2$. 由 $V = V_1 \quad V_2$ 知

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$$

同理
$$\dim V_1 = \dim V_{11} + \dim V_{12}$$

所以
$$\dim V = \dim V_{11} + \dim V_{12} + \dim V_2$$

故 $V = V_{11} \quad V_{12} \quad V_2$.

21. 证明: 每一个 n 维线性空间都可以表示成 n 个一维子空间的直和.

证 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维线性空间的一组基.

显然 $L(\alpha_i)$ 都是一维子空间, 且

$$L(\alpha_1) + L(\alpha_2) + \cdots + L(\alpha_n) = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = V$$

又有 $$\dim L(\alpha_1)+\dim L(\alpha_2)+\cdots+\dim L(\alpha_n)=n=\dim V$$
故 $$V=L(\alpha_1)\quad L(\alpha_2)\quad\cdots\quad L(\alpha_n)$$

22. 证明:和 $\sum\limits_{i=1}^{s}V_i$ 是直和的充分必要条件是

$$V_i\cap\sum_{j=1}^{i-1}V_j=\{0\}\quad(i=2,\cdots,s)$$

证　必要性. 因为

$$V_i\cap\sum_{j=1}^{i-1}V_j\quad V_i\cap\sum_{j\neq i}V_i=\{0\}$$

所以 $$V_i\cap\sum_{j=1}^{i-1}V_j=\{0\}$$

充分性. 设 $\sum\limits_{i=1}^{s}V_i$ 不是直和,则零向量还有一个分解式

$$0=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s\quad\alpha_i\in V_i(i=1,2,\cdots,s)\text{ 且 }\alpha_i\text{ 不全为 }0$$

设最后一个不为 0 的向量为 $\alpha_k(k\leq s)$,则

$$0=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k\quad\alpha_k\neq0,\ \alpha_j\in V_j(j=1,2,\cdots,k)$$

这时 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k-1}=-\alpha_k$,因此 $\alpha_k\in\sum\limits_{j=1}^{k-1}V_j$,又有 $\alpha_k\in V_k$,所以 $\alpha_k\in V_k\cap\sum\limits_{j=1}^{k-1}V_j$,这与 $V_k\cap\sum\limits_{j=1}^{k-1}V_j=\{0\}$ 矛盾,故 $\sum\limits_{j=1}^{s}V_j$ 是直和.

23. 在给定了空间直角坐标系的三维空间中,所有自原点引出的向量添上零向量构成了一个三维线性空间 R^3.

1) 问所有终点都在一个平面上的向量是否为子空间;

2) 设有过原点的三条直线,这三条直线上的全部向量分别成为三个子空间 L_1,L_2,L_3. 问 L_1+L_2, $L_1+L_2+L_3$ 能构成哪些类型的子空间,试全部列举出来;

3) 就用几何空间的例子来说明:若 U,V,X,Y 是子空间,满足 $U+V=X$, $X\quad Y$,是否一定有 $Y=Y\cap U+Y\cap V$.

解　1) 终点所在的平面是过原点的平面,那么所有这些向量构成二维子空间. 终点在不过原点的平面上的向量不构成子空间,因为加法不封闭.

2) L_1+L_2:

① 若直线 l_1, l_2 重合, L_1+L_2 是一维子空间;

② l_1, l_2 不重合时, $L_1 + L_2$ 是二维子空间.

$L_1 + L_2 + L_3$:

① l_1, l_2, l_3 重合时, $L_1 + L_2 + L_3$ 构成一维子空间;

② l_1, l_2, l_3 在同一平面上,但三条直线不全重合, $L_1 + L_2 + L_3$ 构成二维子空间;

③ l_1, l_2, l_3 不在同一平面上时, $L_1 + L_2 + L_3$ 构成三维子空间.

3) 令过原点两条不同的直线 l_1, l_2 分别构成一维子空间 U 和 V,则 $X = U + V$ 是二维子空间.在 l_1, l_2 决定的平面上,过原点的另一条不与 l_1, l_2 相同的直线 l_3 构成一维子空间 Y,显然 $Y \quad X$.但 $Y \cap U = \{0\}$, $Y \cap U = \{0\}$,因此 $Y \cap U + Y \cap V = \{0\}$.可见 $Y = Y \cap U + Y \cap V$ 并不成立.

(二) 第六章补充题

1. 1) 证明:在 $P[x]_n$ 中,多项式

$$f_i = (x - a_1)\cdots(x - a_{i-1})(x - a_{i+1})\cdots(x - a_n) \quad (i = 1, \cdots, n)$$

是一组基,其中 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 是互不相同的数.

2) 在 1) 中,取 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 是全体 n 次单位根,求由基 1, x, $\cdots$, x^{n-1} 到基 f_1, f_2, $\cdots$, f_n 的过渡矩阵.

证　1) 设 $k_1 f_1 + k_2 f_2 + \cdots + k_n f_n = 0$.

令 $x = a_1$,代入上式并注意 $f_2(a_1) = \cdots = f_n(a_1) = 0$,而 $f_1(a_1) \neq 0$,得 $k_1 = 0$.同理,将 $x = a_2$, $\cdots$, $x = a_n$ 分别代入前一式可得 $k_2 = k_3 = \cdots = k_n = 0$,故 f_1, $\cdots$, f_n 线性无关.而 $P[x]_n$ 是 n 维的,于是 f_1, f_2, $\cdots$, f_n 是一组基.

2) 取 $a_1 = 1$, $a_2 = \varepsilon$, $\cdots$, $a_n = \varepsilon^{n-1}$,其中 $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$,则有

$$f_1 = \frac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

$$f_2 = \frac{x^n - 1}{x - \varepsilon} = \varepsilon^{n-1} + \varepsilon^{n-2}x + \varepsilon^{n-3}x^2 + \cdots + \varepsilon x^{n-2} + x^{n-1}$$

$$f_3 = \frac{x^n - 1}{x - \varepsilon^2} = \varepsilon^{n-2} + \varepsilon^{n-4}x + \varepsilon^{n-6}x^2 + \cdots + \varepsilon^2 x^{n-2} + x^{n-1}$$

……

$$f_n = \frac{x^n - 1}{x - \varepsilon^{n-1}} = \varepsilon + \varepsilon^2 x + \varepsilon^3 x^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1}x^{n-2} + x^{n-1}$$

故由基 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ **到基** $f_1, f_2, \cdots, f_n$ **的过渡矩阵为**

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{n-2} & \cdots & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon^{n-2} & \varepsilon^{n-4} & \cdots & \varepsilon^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2. **设** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ **是** n **维线性空间的一组基**，A **是一** $n \times s$ **矩阵**，

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) A$$

证明：$L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$ **的维数等于** A **的秩**.

证　令 $\operatorname{rank} A = r$. 不失一般性，设 A 的前 r 列线性无关，并将这 r 列构成的矩阵记为 A_1，其余 $s-r$ 列构成的矩阵记为 A_2，则 $A = (A_1, A_2)$，且 $\operatorname{rank} A_1 = \operatorname{rank} A = r$. 因为 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) A$，所以

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) A_1$$

设 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_r\beta_r = 0$，即 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_r \end{pmatrix} = 0$，于是 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) A_1 \begin{pmatrix} k_1 \\ \cdots \\ k_r \end{pmatrix} = 0$，从而 $A_1 \begin{pmatrix} k_1 \\ \cdots \\ k_r \end{pmatrix} = 0$，由 $\operatorname{rank} A_1 = r$ 知，该方程组只有零解，故 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性无关.

任取 $\beta_j (j = 1, 2, \cdots, s)$，将 A 的第 j 列添在 A_1 的右边，构成的矩阵记为 B_j，则有

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r, \beta_j) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) B_j$$

设 $l_1\beta_1 + \cdots + l_r\beta_r + l_{r+1}\beta_j = 0$，即 $(\beta_1, \cdots, \beta_r, \beta_j)\begin{pmatrix} l_1 \\ \cdots \\ l_r \\ l_{r+1} \end{pmatrix} = 0$，于是 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) B_j \begin{pmatrix} l_1 \\ \cdots \\ l_r \\ l_{r+1} \end{pmatrix} = 0$，从而 $B_j \begin{pmatrix} l_1 \\ \cdots \\ l_r \\ l_{r+1} \end{pmatrix} = 0$，由 $\operatorname{rank} B_j = r$ 知该方程组有非零解，故

$\beta_1,\cdots,\beta_r,\beta_j\ (j=1,\cdots,s)$ 线性相关．这表明 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 的极大线性无关组为 $\beta_1,\cdots,\beta_r$．于是

$$\dim L(\beta_1,\cdots,\beta_s)=r=\operatorname{rank}A$$

3. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个秩为 n 的二次型．证明：存在 $\mathbf{R}^n$ 的一个 $\frac{1}{2}(n-|s|)$ 维子空间 V_1（其中 s 为符号差数），使对任一 $(x_1,\cdots,x_n)\in V_1$，有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$$

证　设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的正惯性指数为 p，负惯性指数为 q，则 $|p-q|=s$，$p+q=n$，且存在可逆阵 C，$y=Cx$ 使

$$f(x_1,\cdots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2$$

则有
$$\frac{1}{2}(n-|s|)=\frac{1}{2}(n-|p-q|)=\begin{cases}p & p<q\\ q & p\geq q\end{cases}$$

不妨对 $p<q$ 的情形证明．$p\geq q$ 时证法类似．令

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\cdots\\0\\1\\0\\\cdots\\0\end{pmatrix}\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\\cdots\\0\end{matrix}}\right\}p\\\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\\cdots\\0\end{matrix}}\right\}q\end{matrix},\quad \varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\cdots\\0\\0\\1\\\cdots\\0\end{pmatrix}\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\1\\0\\\cdots\\0\end{matrix}}\right\}p\\\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\1\\\cdots\\0\end{matrix}}\right\}q\end{matrix},\quad\cdots,\quad \varepsilon_p=\begin{pmatrix}0\\0\\\cdots\\1\\0\\\cdots\\1\\\cdots\\0\end{pmatrix}\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\\cdots\\1\end{matrix}}\right\}p\\\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\\cdots\\1\\\cdots\\0\end{matrix}}\right\}q\end{matrix}$$

显然 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_p$ 线性无关．

作方程组 $Cx=\varepsilon_i\ (i=1,2,\cdots,p)$，因为 C 是可逆矩阵，由这 p 个方程组可以分别求出解 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$，即

$$C\alpha_1=\varepsilon_1,\quad\cdots,\quad C\alpha_p=\varepsilon_p$$

作线性组合
$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_p\alpha_p=0$$

两边左乘 C 得

$$l_1(C\alpha_1)+l_2(C\alpha_2)+\cdots+l_p(C\alpha_p)=0$$

即
$$l_1\varepsilon_1+l_2\varepsilon_2+\cdots+l_p\varepsilon_p=0$$

因为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_p$ 线性无关，所以 $l_1=l_2=\cdots=l_p=0$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 线性无关．

下面证明 p 维子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p)$ 就是所要求的 V_1 . 任取 $x_0 \in L(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$, 有 $x_0 = k_1\alpha_1 + \cdots + k_p\alpha_p$, 代入 $y = Cx$ 得

$$y_0 = Cx_0 = k_1 C\alpha_1 + \cdots + k_p C\alpha_p = k_1\varepsilon_1 + \cdots + k_p\varepsilon_p = \begin{pmatrix} k_1 \\ \cdots \\ k_p \\ k_1 \\ \cdots \\ k_p \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

故 $f = x_0' A x_0 = 0$.

4. 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个非平凡子空间 . 证明:在 V 中存在 α, 使 $\alpha \notin V_1$, $\alpha \notin V_2$ 同时成立 .

证　因为 V_1, V_2 为非平凡子空间, 所以存在 $\alpha \notin V_1$. 如果 $\alpha \notin V_2$, 则命题已证 . 设 $\alpha \in V_2$, 另外存在 $\beta \notin V_2$, 如果 $\beta \notin V_1$, 也得证 . 设 $\beta \in V_1$, 即有 $\alpha \notin V_1$, $\alpha \in V_2$ 及 $\beta \in V_1$, $\beta \notin V_2$. 下面证明 $\alpha + \beta \notin V_1$ 且 $\alpha + \beta \notin V_2$.

若 $\alpha + \beta \in V_1$, 由 $\beta \in V_1$ 推知 $\alpha \in V_1$ 矛盾, 所以 $\alpha + \beta \notin V_1$, 同理 $\alpha + \beta \notin V_2$.

5. 设 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 是线性空间 V 的 s 个非平凡子空间, 证明: V 中至少有一个向量不属于 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 中任何一个 .

证　$s = 2$ 时, 由 4 题知结论成立 .

假设 $s = k$ 时成立, 对于 $s = k + 1$, 有 V 的 $k + 1$ 个非平凡子空间 $V_1, \cdots, V_k, V_{k+1}$, 由假设至少有一个向量 α 不属于 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 中任何一个 .

如果 $\alpha \notin V_{k+1}$, 则结论成立 . 如果 $\alpha \in V_{k+1}$, 取 $\beta \notin V_{k+1}$, 考虑以下 $k + 1$ 个向量的向量组

$$\alpha + \beta, \quad 2\alpha + \beta, \quad \cdots, \quad (k + 1)\alpha + \beta \qquad (*)$$

其中必有一个向量不属于 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 这 k 个子空间中的任何一个 . 否则一定有两个向量同属于某一个 V_j $(1 \leq j \leq k)$, 从而这两个向量的差 $m\alpha$ $(0 < |m| \leq k)$ 也属于 V_j, 这与 $\alpha \notin V_j$ 矛盾 . 于是 $(*)$ 中有向量, 不妨设为 $\gamma = l\alpha + \beta$ 不属于 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 中任何一个 .

又由 $\alpha \in V_{k+1}$, $\beta \notin V_{k+1}$, 知 $\gamma \notin V_{k+1}$, 命题得证 .

六、学习效果检测题及答案

(一) 检测题

1. 全体 2 维实向量所组成的集合 V,关于通常向量的加法及如下定义的数乘运算

$$k \quad (a,b) = (ka,0)$$

是否构成线性空间?为什么?

2. 全体 2 维实向量所组成的集合 V,对于如下定义的加法运算

$$(a,b) \quad (c,d) = (a+c+1,b+d+1)$$

和通常的数乘运算是否构成线性空间?为什么?

3. $C[0,1]$([0,1] 上所有连续实函数构成的 R 上的线性空间)的下列子集是否构成子空间:

(1) $W_1 = \{f(x) \mid f(x) = 0, f(x) \in C[0,1]\}$;

(2) $W_2 = \{f(x) \mid f(x) = f(1-x), f(x) \in C[0,1]\}$;

(3) $W_3 = \{f(x) \mid 2f(0) = f(1), f(x) \in C[0,1]\}$;

(4) $W_4 = \{f(x) \mid f(x) > 0, f(x) \in C[0,1]\}$.

4. 下列集合是否构成 P^n 的子空间?为什么?若是子空间,求它的基与维数:

(1) $V_1 = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_1+x_2+\cdots+x_n = 0, x_i \in \mathrm{R}\}$;

(2) $V_2 = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_1+x_2+\cdots+x_n = -1, x_i \in \mathrm{R}\}$.

5. 求 $\mathrm{P}[t]_n$ 的子空间

$$W = \{f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \mid f(1) = 0, f(t) \in \mathrm{P}[t]_n\}$$

的基与维数.

6. $\mathrm{P}[t]_2$ 的多项式组 $f_1(t) = t-1$, $f_2(t) = t+2$, $f_3(t) = (t-1)(t+2)$ 是否是它的基?

7. 所有 n 级复方阵的集合对矩阵的加法与数乘运算构成实数域 R 上的线性空间 $M_n(C)$,求 $M_n(C)$ 的基与维数.

8. 求下列生成子空间的基与维数:

(1) 在 P^4 中由向量 $\alpha_1 = (2,1,3,-1)$, $\alpha_2 = (4,5,3,-1)$, $\alpha_3 = (-1,1,-3,1)$, $\alpha_4 = (1,5,-3,1)$ 生成的子空间;

(2) 在 $P^{2\times 2}$ 中由矩阵 $A_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}1&1\\-3&3\end{pmatrix}$ 生成的子空间.

9. 设有 P^4 的两个子空间

$$W_1=L(\alpha_1,\alpha_2), \text{其中 } \alpha_1=(1,-1,0,1),\ \alpha_2=(1,0,2,3)$$

$$W_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1+2x_2-x_4=0\}$$

求 W_1+W_2 与 $W_1\cap W_2$ 的基与维数.

10. 已知 3 维向量空间的两组基

$$(\text{I}):\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};$$

$$(\text{II}):\ \beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\ \beta_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}.$$

(1) 求由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵;

(2) 求在两组基下坐标互为相反数的向量 γ.

11. 设 $P[t]_4$ 的两组基为

$$(\text{I})\begin{cases}f_1(t)=1+t+t^2+t^3\\ f_2(t)=-t+t^2\\ f_3(t)=1-t\\ f_4(t)=1\end{cases}\qquad (\text{II})\begin{cases}g_1(t)=t+t^2+t^3\\ g_2(t)=1+t^2+t^3\\ g_3(t)=1+t+t^3\\ g_4(t)=1+t+t^2\end{cases}$$

(1) 求由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵 C;

(2) 求在两组基下有相同坐标的多项式 $f(t)$.

12. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维线性空间的一组基,向量组 β_1,β_2,β_3 满足

$$\beta_1+\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\quad \beta_1+\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\quad \beta_2+\beta_3=\alpha_1+\alpha_3$$

(1) 证明 β_1,β_2,β_3 是一组基;

(2) 求由基 β_1,β_2,β_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵;

(3) 求向量 $\alpha=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

13. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 是 3 维向量空间的两组基,若向量 γ 在这两组基下的坐标分别为 $(x_1,x_2,x_3)'$ 与 $(y_1,y_2,y_3)'$,且

$$y_1=x_1,\quad y_2=x_1+x_2,\quad y_3=x_1+x_2+x_3$$

求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵. 又若 $\alpha_1=(1,2,3)',\alpha_2=(2,3,1)',\alpha_3=(3,1,2)'$,试求 β_1,β_2,β_3.

14. 设三维线性空间 V 的两组基为(Ⅰ):$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$;(Ⅱ):$\beta_1,\beta_2,\beta_3$,并且已知 V 中三个元素在基(Ⅰ)下的坐标依次为 $(1,2,1)',(2,1,3)',(3,2,4)'$,而在基(Ⅱ)下的坐标依次为 $(1,1,0)',(1,0,1)',(0,1,1)'$. 试求:

(1) 由基(Ⅱ)到基(Ⅰ)的过渡矩阵;

(2) $\alpha=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$ 在基(Ⅱ)下的坐标.

15. 设方阵 A 满足 $A^2=A$, W_1 为 $Ax=0$ 的解空间, W_2 为 $(A-E)x=0$ 的解空间,证明: $P^n=W_1\oplus W_2$.

16. 设 V 是定义在实数域 R 上的函数所组成的线性空间. 令

$$W_1=\{f(t)\mid f(t)=f(-t),f(t)\in V\}$$

$$W_2=\{f(t)\mid f(t)=-f(-t),f(t)\in V\}$$

证明: W_1,W_2 均是 V 的子空间,且 $V=W_1\oplus W_2$.

17. 设 σ 是数域 P 上线性空间 V 到 $\overline{V}$ 的一个同构映射, W 是 V 的一个子空间,证明: $\sigma(W)$ 是 $\overline{V}$ 的子空间.

18. 设 $W=\{(a,a+b,a-b)\mid a,b\in \mathrm{R}\}$. 证明:

(1) W 是 R^3 的子空间;

(2) W 与 R^2 同构.

19. 设 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$. 证明:由 A 的全体实系数多项式集合 V 关于矩阵的加法与数乘运算构成的 R 上的线性空间与复数域 C 作为 R 上的线性空间同构.

(二) 检测题答案

1. 不构成. 因为数乘运算不满足 $1\circ\alpha=\alpha$,如: $1\circ(1,2)=(1,0)\neq(1,2)$.

2. 不构成. 因为不满足运算律 $k(\alpha\oplus\beta)=(k\alpha)\oplus(k\beta)$,如

$$2\circ[(1,1)\oplus(1,2)]=2(3,4)=(6,8)$$

$$[2\circ(1,1)]\oplus[2\circ(1,2)]=(2,2)\oplus(2,4)=(5,7)$$

于是

$$2\circ[(1,1)\oplus(1,2)]\neq[2\circ(1,1)]\oplus[2\circ(1,2)]$$

3. (1) 构成. 因为 $0\in W_1$,所以 W_1 非空. 对任意 $f(x),g(x)\in W_1$ 有 $f(x)=g(x)=0$,从而 $f(x)+g(x)=0$,即 $f(x)+g(x)\in W_1$;又对任意 $k\in \mathrm{R}$ 有 $kf(x)=0$,即 $kf(x)\in W_1$,故 W_1 是子空间.

(2) 构成. 因为 $0\in W_2$,所以 W_2 非空. 对任意 $f(x),g(x)\in W_2$ 有

$f(x)=f(1-x)$, $g(x)=g(1-x)$. 令 $h(x)=f(x)+g(x)$,则

$$h(1-x)=f(1-x)+g(1-x)=f(x)+g(x)=h(x)$$

所以 $h(x)\in W_2$,又令 $l(x)=kf(x)$, $k\in\mathbf{R}$,则

$$l(1-x)=kf(1-x)=kf(x)=l(x)$$

即 $l(x)\in W_2$,故 W_2 是子空间.

(3) 构成. 因为 $0\in W_3$,所以 W_3 非空. 对任意 $f(x), g(x)\in W_3$ 有 $2f(0)=f(1)$, $2g(0)=g(1)$. 令 $h(x)=f(x)+g(x)$, $l(x)=kf(x)$, $k\in\mathbf{R}$,则

$$2h(0)=2(f(0)+g(0))=f(1)+g(1)=h(1)$$

所以 $h(x)\in W_3$,而

$$2l(0)=2kf(0)=kf(1)=l(1)$$

即 $l(x)\in W_3$,故 W_3 是子空间.

(4) 不构成. 因为对 $f(x)\in W_4$, 即 $f(x)>0$ 有 $-2f(x)<0$, 即 $-2f(x)\notin W_4$,所以 W_4 对数乘运算不封闭,故 W_4 不构成子空间.

4. (1) V_1 是子空间,维数为 $n-1$,基为 $\alpha_1=(1,-1,0,\cdots,0)$, $\alpha_2=(1,0,-1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $\alpha_{n-1}=(1,0,\cdots,0,-1)$.

(2) V_2 不是子空间.

5. 由 $f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_n=0$ 得 $a_0=-a_1-a_2-\cdots-a_n$,因而

$$f(t)=a_1(t-1)+a_2(t^2-1)+\cdots+a_n(t^n-1)$$

由此知 W 中任一多项式均可写成 $t-1, t^2-1,\cdots, t^n-1$ 的线性组合,易知 $t-1, t^2-1,\cdots,t^n-1$ 线性无关,故为 W 的一组基,且 W 为 $n-1$ 维的.

6. 在 $P[t]_3$ 的基 $1, t, t^2$ 下,有

$$(f_1(t), f_2(t), f_3(t))=(1,t,t^2)\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

因为上式右边的 3 级矩阵可逆,所以 $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ 线性无关,因此它是 $P[t]_3$ 的基.

7. 任一 n 级复方阵 A 可写成 $A=B+\mathrm{i}C$,其中 B 和 C 均为 n 级实方阵,而 B 可由 $E_{jk}(j,k=1,2,\cdots,n)$ 线性表示,$\mathrm{i}C$ 可由 $\mathrm{i}E_{jk}(j,k=1,2,\cdots,n)$ 线性表示,因此 A 可由 $2n^2$ 个线性无关的矩阵 E_{jk}, $\mathrm{i}E_{jk}(j,k=1,2,\cdots,n)$ 线性表示,从而 $M_n(\mathbf{C})$ 是 $2n^2$ 维的,且 E_{jk}, $\mathrm{i}E_{jk}(j,k=1,2,\cdots,n)$ 是 $M_n(\mathbf{C})$ 的一组基.

8. (1) 可求得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 2,且 α_1, α_2 是它的一个极大线性无关组,故 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数为 2,且 α_1,α_2 是一组基.

(2) 取 $P^{2\times 2}$ 的基 $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$,以 A_1,A_2,A_3,A_4 在这组基下的坐标为列向量构造矩阵 A,并对 A 作初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3&1\\1&0&1&1\\-1&2&1&-3\\3&0&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4-3r_2\\ r_1\leftrightarrow r_2}]{\substack{r_1-2r_2\\ r_3+r_2}}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&-1\\0&2&2&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 $\operatorname{rank}A=2$,且 A 的第 1,2 列是 A 的列向量组的一个极大线性无关组,从而 A_1,A_2,A_3,A_4 的秩为 2,且 A_1,A_2 是它的一个极大线性无关组,故 $L(A_1,A_2,A_3,A_4)$ 的维数为 2,且 A_1,A_2 是它的一组基.

9. 可求得 $W_2=L(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,其中

$$\beta_1=(-2,1,0,0),\quad \beta_2=(0,0,1,0),\quad \beta_3=(1,0,0,1)$$

由于 $W_1+W_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,可求得向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 的秩为 4,且 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 是一个极大线性无关组,从而 $\dim(W_1+W_2)=4$,且 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 是它的一组基.

设 $\alpha\in W_1\cap W_2$,即 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=l_1\beta_1+l_2\beta_2+l_3\beta_3$,也即

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2-l_1\beta_1-l_2\beta_2-l_3\beta_3=0$$

比较分量得
$$\begin{cases}k_1+k_2+2l_1-l_3=0\\ -k_1-l_1=0\\ 2k_2-l_2=0\\ k_1+3k_2-l_3=0\end{cases}$$

求得通解为

$$k_1=-t,\quad k_2=t,\quad l_1=t,\quad l_2=2t,\quad l_3=2t\qquad (t\text{任意})$$

于是
$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=t(0,1,2,2)\qquad (t\text{任意})$$

故 $\dim(W_1\cap W_2)=1$,且(0,1,2,2) 是它的一组基.

10. (1) 取 3 维向量空间的基 $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$,则

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(e_1,e_2,e_3)A,\quad (\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(e_1,e_2,e_3)B$$

其中 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{bmatrix}$. 可求得 $A^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\ \frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$,

于是

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{-1}B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}$$

即由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵为 $C=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}$.

(2) 法 1　设 $\gamma=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=-x_1\beta_1-x_2\beta_2-x_3\beta_3$,则

$$x_1(\alpha_1+\beta_1)+x_2(\alpha_2+\beta_2)+x_3(\alpha_3+\beta_3)=0$$

即 $\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3=0\\3x_1+3x_2+4x_3=0\\2x_1+3x_2+4x_3=0\end{cases}$, 而 $\begin{bmatrix}2&3&4\\3&3&4\\2&3&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}2&3&4\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{3}]{\substack{r_1-2r_2\\ r_1\leftrightarrow r_2}}$

$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{4}{3}\\0&0&0\end{bmatrix}$,同解方程组为$\begin{cases}x_1=0\\x_2=-\frac{4}{3}x_3\end{cases}$, 通解为$\begin{cases}x_1=0\\x_2=-4t\\x_3=3t\end{cases}$ (t 任意),故

$$\gamma=0\alpha_1-4t\alpha_2+3t\alpha_3=t\begin{bmatrix}-1\\0\\7\end{bmatrix}\qquad (t\text{ 任意})$$

法 2　由坐标变换公式$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}-x_1\\-x_2\\-x_3\end{bmatrix}$,得$(E+C)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$,而

$$E+C=\begin{pmatrix}3&3&4\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\leftrightarrow r_3\\ r_1\leftrightarrow r_2}]{\substack{r_1+3r_3\\ r_3\times(-1)}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&4\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{4}{3}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

其余求解过程同上.

11. 取 $P[t]_4$ 的基 $1,t,t^2,t^3$,则有

$$(f_1,f_2,f_3,f_4)=(1,t,t^2,t^3)C_1,\quad (g_1,g_2,g_3,g_4)=(1,t,t^2,t^3)C_2$$

其中
$$C_1=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&-1&-1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\qquad C_2=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

于是
$$(g_1,g_2,g_3,g_4)=(f_1,f_2,f_3,f_4)C_1^{-1}C_2=(f_1,f_2,f_3,f_4)C$$

即由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵为

$$C=C_1^{-1}C_2=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&1&1&-2\\-1&-1&-1&3\end{pmatrix}$$

(2) 设 $f(t)$ 在两组基下的坐标均为 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)'$,由坐标变换公式得 $x=Cx$,即$(E-C)x=0$. 可求得该齐次线性方程组只有零解 $x_1=x_2=x_3=x_4=0$,故在两组基下有相同的坐标的多项式只有

$$f(t)=0\cdot 1+0\cdot t+0\cdot t^2+0\cdot t^3=0$$

12. (1) 将向量之间的关系用形式记法表示

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

于是

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$$

可见 β_1,β_2,β_3 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价,从而 β_1,β_2,β_3 的秩为 3 且线性无关,是一组基.

(2)　(1) 中已求得由基 β_1,β_2,β_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$$

(3)　$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)C\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$$

即 α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为$(2,-5,1)'$.

13. 由已知的坐标关系式,有

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\text{即}\quad\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

从而基变换公式为

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

即由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$. 可求得

$$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix},\quad\beta_2=\alpha_2-\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix},\quad\beta_3=\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$$

14. (1) 设$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)C$,则由坐标变换公式得

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$$

即 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,所以

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2)\quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)C\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

故 α 在基(Ⅱ)下的坐标为 $(11, -3, 2)'$.

15. 任取 $\alpha \in P^n$,则有

$$\alpha = (E - A)\alpha + A\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

其中 $\alpha_1 = (E - A)\alpha$, $\alpha_2 = A\alpha$,由于

$$A\alpha_1 = A(E - A)\alpha = 0, \quad (A - E)\alpha_2 = (A - E)A\alpha = 0$$

可见 $\alpha_1 \in W_1$, $\alpha_2 \in W_2$,故 $P^n = W_1 + W_2$. 又若 $\beta \in W_1 \cap W_2$,则有 $A\beta = 0$, $(A - E)\beta = 0$,从而

$$\beta = -(A - E)\beta + A\beta = 0$$

即 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$,故 $P^n = W_1 \oplus W_2$.

16. 易证 W_1, W_2 为 V 的子空间. 对任意 $f(t) \in V$,有

$$f(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)) + \frac{1}{2}(f(t) - f(-t)) = f_1(t) + f_2(t)$$

其中 $\quad f_1(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)), \qquad f_2(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(-t))$

显然 $f_1(t) = f_1(-t)$, $f_2(t) = -f_2(-t)$,即 $f_1(t) \in W_1$, $f_2(t) \in W_2$,因此 $V = W_1 + W_2$. 若 $g(t) \in W_1 \cap W_2$,则有 $g(t) = g(-t) = -g(t)$,从而 $g(t) = 0$,故 $V = W_1 \oplus W_2$.

17. 因为 $0 = \sigma(0) \in \sigma(W)$,所 $\sigma(W)$ 非空. 对任意 $\alpha, \beta \in \sigma(W)$ 和 $k \in P$,由于 σ 是 W 到 $\sigma(W)$ 的满射,因此存在 $\alpha, \beta \in W$,使 $\sigma(\alpha) = \alpha$, $\sigma(\beta) = \beta$,于是

$$\alpha + \beta = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta) = \sigma(\alpha + \beta) \in \sigma(W)$$

$$k\alpha = k\sigma(\alpha) = \sigma(k\alpha) \in \sigma(W)$$

故 $\sigma(W)$ 是 V 的一个子空间.

18. (1) 因为$(0,0,0)\in W$,所以 W 非空. 设$\alpha=(a_1,a_1+b_1,a_1-b_1)$, $\beta=(a_2,a_2+b_2,a_2-b_2)\in W$, $k\in \mathrm{R}$,则

$$\alpha+\beta=(a_1+a_2,(a_1+a_2)+(b_1+b_2),(a_1+a_2)-(b_1+b_2))\in W$$

$$k\alpha=(ka_1,ka_1+kb_1,ka_1-kb_1)\in W$$

故 W 是 R^3 的子空间. 取 $a=1,b=0$ 和 $a=0,b=1$ 得 W 中向量 $\alpha_1=(1,1,1)$, $\alpha_2=(0,1,-1)$,它们线性无关,且任意向量 $\alpha=(a,a+b,a-b)\in W$ 可表示为 $\alpha=a\alpha_1+b\alpha_2$,故 $\dim W=2=\dim \mathrm{R}^2$,从而 W 与 R^2 同构.

19. 复数域 C 作为 R 上的线性空间是 2 维的,且 1, i 是一组基. 由于 $A^2=-E$, $A^3=-A$, $A^4=E$,所以 V 中任一元素都可由 A, E 线性表示,且 A, E 线性无关,是 V 的一组基,所以 $\dim \mathrm{V}=2$,故它们同构.

第 7 章　线性变换

线性变换反映了线性空间中元素之间的一种最基本的联系,它是线性函数的推广 . 本章主要讨论有限维线性空间的线性变换及其运算,线性变换的矩阵表示及线性变换的特征值与特征向量等 . 通过学习要认识到线性变换和矩阵是同一事物的两种表现形式,进一步体会矩阵的重要性 .

一、内 容 提 要

1. 线性变换及基本性质

(1) 设 V 是数域 P 上的线性空间, A 是 V 上的一个变换,如果对任意 $\alpha, \beta \in V$ 和 $k \in P$ 都有

$$A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta), \quad A(k\alpha) = kA(\alpha)$$

则称 A 为 V 的一个线性变换 . 如下两种变换

$$E(\alpha) = \alpha, \quad O(\alpha) = 0, \quad \forall \alpha \in V$$

分别称为 V 中的恒等变换(或单位变换) 及零变换,它们都是 V 的线性变换 .

注　A 是线性变换的充分必要条件是

$$A(k\alpha + l\beta) = kA(\alpha) + lA(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V, \ k, l \in P$$

(2) 线性变换的基本性质:

设 V 是数域 P 上的线性空间, A 是 V 的线性变换:

1) $A(0) = 0, \quad A(-\alpha) = -A(\alpha)$;

2) 线性变换保持线性组合与线性关系式不变,即若

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$

则
$$A(\beta) = k_1A(\alpha_1) + k_2A(\alpha_2) + \cdots + k_sA(\alpha_s)$$

又若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 之间有一线性关系 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$,则它们的象之间也有同样的关系

$$k_1A(\alpha_1) + k_2A(\alpha_2) + \cdots + k_sA(\alpha_s) = 0$$

3) 线性变换把线性相关的元素组变成线性相关的元素组 .

注　1. 利用 $A(0) \neq 0$ 可知 A 不是线性变换 .

2. 线性变换可能把线性无关的元素组变成线性相关的元素组, 如零变换就是这样 . 但如果线性变换是一个单射, 则它把线性无关的元素组变成线性无关的元素组 .

2. 线性变换的运算

设 V 是数域 P 上的线性空间, A, B 是 V 的两个线性变换 .

(1) 线性运算:

1) A 与 B 的和定义为

$$(A+B)(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha) \qquad (\alpha \in V)$$

2) P 中的数 k 与 A 的数量乘法定义为

$$(kA)(\alpha) = kA(\alpha) \qquad (\alpha \in V)$$

3) A 的负变换 $-A$ 定义为

$$(-A)(\alpha) = -A(\alpha) \qquad (\alpha \in V)$$

4) 线性空间 V 上线性变换的全体, 对于如上定义的加法与数乘运算构成数域 P 上的线性空间, 即

① $A+B$ 仍是线性变换;

② kA 仍是线性变换;

③ $A+B = B+A$;

④ $(A+B)+C = A+(B+C)$;

⑤ $A+O = A$;

⑥ $A+(-A) = O$;

⑦ $1A = A$;

⑧ $k(lA) = (kl)A$;

⑨ $(k+l)A = kA + lA$;

⑩ $k(A+B) = kA + kB$,

又有 $(-1)A = -A$.

(2) 乘法:

1) A 与 B 的乘积 AB 定义为

$$(AB)(\alpha) = A(B(\alpha)) \qquad (\alpha \in V)$$

2) 线性变换的乘法满足如下性质及运算律:

① AB 仍是线性变换;

② $(AB)C = A(BC)$;

③ $A(B+C) = AB+AC$, $(B+C)A = BA+CA$;

④ $k(AB) = (kA)B = A(kB)$;

⑤ $EA = AE = A$.

注 乘法交换律一般不成立,即一般地 $AB \neq BA$.

(3) **逆变换**:

1) **对线性变换 A,如果存在 V 的变换 C 使得**

$$AC = CA = E$$

则称 A 是可逆,并称 C 是 A 的逆变换,记为 A^{-1}.

2) **如果线性变换 A 可逆,则 A^{-1} 也是线性变换.**

3) **线性变换 A 可逆的充分必要条件是 A 为双射.**

(4) **多项式**:

1) **n 个(n 是正整数)线性变换 A 的乘积称为 A 的 n 次幂,记为 A^n,即**

$$A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n个}$$

规定 $A^0 = E$. 当线性变换 A 可逆时,规定

$$A^{-n} = (A^{-1})^n$$

2) **设 $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \in P[x]$,定义**

$$f(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

称之为线性变换 A 的多项式.

3) **方幂运算有如下的运算律**:

① $A^m A^n = A^{m+n}$, $(A^m)^n = A^{mn}$, (m, n **是整数**);

② **一般说来**, $(AB)^n \neq A^n B^n$.

4) **如果 $f(x)$, $g(x) \in P[x]$,且**

$$h(x) = f(x) + g(x), \quad p(x) = f(x)g(x)$$

则
$$h(A) = f(A) + g(A), \quad p(A) = f(A)g(A)$$

特别地
$$f(A)g(A) = g(A)f(A)$$

3. 线性变换的矩阵

设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间, α_1, α_2, $\cdots$, α_n 是 V 的一组基.

(1) **如果 V 的线性变换 A 与 B 在基 α_1, α_2, $\cdots$, α_n 上的作用相同,即**

$$A(\alpha_i) = B(\alpha_i) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

则 $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

(2) 对 V 中任意一组元素 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$，存在惟一的线性变换 $\mathcal{A}$ 使

$$\mathcal{A}(\alpha_i) = \beta_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

(3) 设 $\mathcal{A}$ 是 V 的线性变换，基的像可以被基线性表出

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\alpha_1) = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n \\ \mathcal{A}(\alpha_2) = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n \\ \quad \cdots\cdots \\ \mathcal{A}(\alpha_n) = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

用矩阵乘法形式表示为

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \cdots, \mathcal{A}(\alpha_n)) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

矩阵 A 称为 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵 .

(4) 设 V 的线性变换 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵分别是 A 与 B，则：

1) $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵为 $A + B$;

2) $k\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵为 $kA\ (k \in P)$;

3) $\mathcal{A}\mathcal{B}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵为 AB;

4) $\mathcal{A}$ 可逆的充分必要条件是 A 可逆，且 $\mathcal{A}^{-1}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵为 A^{-1};

5) 设 $\alpha \in V$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)'$，则 $\mathcal{A}(\alpha)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)'$ 满足

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(5) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是数域 P 上线性空间 V 的两组基，且由基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 X；又设 V 的线性变换 $\mathcal{A}$ 在这两组基下的矩阵分别为 A 和 B，则

$$B = X^{-1}AX$$

4. 相似矩阵

(1) 设 A, B 为数域 P 上两个 n 级矩阵,如果存在数域 P 上的 n 级可逆矩阵 X,使得 $B = X^{-1}AX$,则称 A 相似于 B,记为 $A \sim B$;并称由 A 变到 B 的变换为相似变换,称 X 为相似变换矩阵.

(2) 设 n 级矩阵 A 与 B 相似,则

1) $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$;

2) $|A| = |B|$;

3) $|\lambda E - A| = |\lambda E - B| \quad (\lambda \in P)$;

4) A' 与 B' 相似,A^k 与 B^k 相似,A^{-1} 与 B^{-1} 相似(如果 A 可逆的话);

5) 若 $f(x)$ 是数域 P 上任一多项式,则 $f(A) \sim f(B)$;

6) $A \sim A$; 若 $A \sim B$,则 $B \sim A$;若 $A \sim B, B \sim C$,则 $A \sim C$.

(3) 线性变换在不同基下的矩阵是相似的,且相似变换矩阵是两组基之间的过渡矩阵.

5. 矩阵的特征值与特征向量

(1) 设 A 是数域 P 上的一个 n 级矩阵,如果存在数 λ 和数域 P 上的 n 维非零列向量 x,使得

$$Ax = \lambda x$$

则称 λ 为 A 的特征值,x 为 A 的对应特征值 λ 的特征向量.称 $\lambda E - A$ 为 A 的特征矩阵;称 $|\lambda E - A|$ 为 A 的特征多项式,这是数域 P 上的一个 n 次多项式;称 $|\lambda E - A| = 0$ 为 A 的特征方程.

注　矩阵的特征向量必是非零的列向量,这一点在推导论证过程中要用到.

(2) 求 n 级矩阵 A 的特征值与特征向量的步骤如下:

第一步　由特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 求得 A 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$;

第二步　求解齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)x = 0$,其非零解向量就是 A 对应于特征值 λ_i 的特征向量.

(3) 矩阵的特征值与特征向量具有如下一些性质:

1) 若 λ_i 是矩阵 A 的 r_i 重特征值,A 对应特征值 λ_i 有 s_i 个线性无关的特征向量,则 $1 \leq s_i \leq r_i$.

2) 如果 x, y 都是矩阵 A 的对应特征值 λ_0 的特征向量,则当 $kx + ly \neq 0$ 时,

$kx + ly$ 仍是 A 的对应特征值 λ_0 的特征向量 .

3) 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,则

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|$$

4) 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是矩阵 A 的互异特征值,其对应的特征向量分别是 $x_1, x_2, \cdots, x_s$,则 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 线性无关 .

5) 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是矩阵 A 的互异特征值,λ_i 对应的线性无关特征向量为 $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{ir_i}$,则向量组

$$x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1r_1}, x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2r_2}, \cdots, x_{s1}, x_{s2}, \cdots, x_{sr_s}$$

线性无关 .

6) 设 $B = X^{-1}AX$,即矩阵 A 与 B 相似 . 如果 λ_i 是 A 的特征值,x_i 是 A 对应特征值 λ_i 的特征向量,则 λ_i 是 B 的特征值,且 B 对应特征值 λ_i 的特征向量是 $X^{-1}x_i$.

(4) 矩阵运算的特征值与特征向量见下表:

矩阵	A	lA	A^k	$f(A) = \sum_{i=0}^{m} a_i A^i$	A^{-1}	A^*	A'
特征值	λ	$l\lambda$	λ^k	$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} a_i\lambda^i$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lvert A\rvert}{\lambda}$	λ
特征向量	x	x	x	x	x	x	

6. 线性变换的特征值与特征向量

(1) 设 A 是数域 P 上线性空间 V 的一个线性变换,如果存在 P 中一个数 λ 和 V 中非零元素 α,使得

$$A(\alpha) = \lambda\alpha$$

则称 λ 为 A 的一个特征值,而称 α 为 A 的属于特征值 λ 的一个特征向量 . 由 A 的属于特征值 λ 的全部特征向量,再添上零元素构成的集合

$$V_\lambda = \{\alpha \mid A(\alpha) = \lambda\alpha, \quad \alpha \in V\}$$

构成 V 的一个子空间,称为 A 的一个特征子空间 .

(2) 有限维线性空间上求线性变换的特征值与特征向量:

设 V 是数域 P 上 n 维线性空间,A 是 V 中的线性变换,求 A 的特征值与特征向量的步骤如下:

第一步 取 V 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,求 $\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵 A;

第二步 求矩阵 A 在数域 P 中的特征值 λ 及相应的特征向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$;

第三步 A 的特征值 λ 就是 $\mathscr{A}$ 的特征值,而 $\mathscr{A}$ 对应特征值 λ 的特征向量为 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$.

(3) $\mathscr{A}$ 的特征子空间 V_λ 的维数等于 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ 的线性无关特征向量的最大个数.

7. 哈密顿-凯莱(Hamilton-Caylay)定理

(1) 设 A 是数域 P 上一个 n 级矩阵,$f(\lambda) = |\lambda E - A|$ 是 A 的特征多项式,则 $f(A) = O$.

(2) 设 $\mathscr{A}$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换,且 $\mathscr{A}$ 在 V 的一组基下的矩阵为 A,$f(\lambda) = |\lambda E - A|$ 是 A 的特征多项式(也称为 $\mathscr{A}$ 的特征多项式),则 $f(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$.

8. 相似对角化

(1) 如果数域 P 上的 n 级矩阵 A 可相似于对角矩阵,则称 A 可对角化.

(2) 数域 P 上 n 级矩阵 A 可对角化的条件如下:

1) (充分必要条件) A 有 n 个线性无关的特征向量;

2) (充分条件) A 有 n 个互异的特征值;

3) (充分必要条件) A 的所有重特征值对应的线性无关特征向量的个数等于其重数.

(3) n 级矩阵 A 相似于对角矩阵的计算:

第一步 求 A 的特征值和对应的线性无关特征向量.设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 为 A 的所有互异特征值,其重数分别为 $r_1, r_2, \cdots, r_s$,且 $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n$.又设对应特征值 λ_i 的 r_i 个线性无关的特征向量为 $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{ir_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$.

第二步 构造相似变换矩阵

$$X = (x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1r_1}, x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2r_2}, \cdots, x_{s1}, x_{s2}, \cdots, x_{sr_s})$$

则有
$$X^{-1}AX=\begin{pmatrix}\lambda_1 E_{r_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_{r_s}\end{pmatrix}$$

(4) 设 A 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换,A 的矩阵可以在某一组基下为对角矩阵有下列条件:

1) (充分必要条件)A 有 n 个线性无关的特征向量;

2) (充分条件)A 在数域 P 中有 n 个不同的特征值;

3) (充分必要条件) 设 A 的全部互异的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$,则 A 的特征子空间 $V_{\lambda_1},V_{\lambda_2},\cdots,V_{\lambda_s}$ 的维数之和等于 n.

(5) 求一组基使线性变换在该基下的矩阵为对角矩阵的计算:

第一步　取 n 维线性空间 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,求线性变换 A 在该基下的矩阵 A;

第二步　求 n 级可逆矩阵 X,使 $X^{-1}AX=\Lambda$ 为对角矩阵;

第三步　由 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X$ 求出 V 的另一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,则 A 在该基下的矩阵为对角矩阵 Λ.

9. 线性变换的值域与核

(1) 设 V 是数域 P 上的线性空间,A 是 V 的线性变换,由 A 的全体像组成的集合称为 A 的值域,记为 $A(V)$,即

$$A(V)=\{A(\alpha)\mid \alpha\in V\}$$

所有被 A 变成零元素的元素组成的集合称为 A 的核,记为 $A^{-1}(0)$,即

$$A^{-1}(0)=\{\alpha\mid A(\alpha)=0,\quad \alpha\in V\}$$

$A(V)$ 与 $A^{-1}(0)$ 都是 V 的子空间,称 $A(V)$ 的维数为 A 的秩,称 $A^{-1}(0)$ 的维数为 A 的零度.

(2) 线性变换的值域与核有下列结果:

设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间,A 是 V 的一个线性变换.

1) 取 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,则

$$A(V)=L(A(\alpha_1),A(\alpha_2),\cdots,A(\alpha_n))$$

2) 若 A 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A,则

$$A\text{ 的秩}=A\text{ 的秩}$$

3) A 的秩 + A 的零度 $= n$.

(3) 线性变换的值域与核的求法:

设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间,A 是 V 的线性变换,求 $A(V)$ 与 $A^{-1}(0)$ 常采用如下两种方法:

法1　取 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$,由于 $A(V) = L(A(\varepsilon_1), A(\varepsilon_2), \cdots, A(\varepsilon_n))$,所以只要求得基象组 $A(\varepsilon_1), A(\varepsilon_2), \cdots, A(\varepsilon_n)$,再求其秩与一个极大线性无关组,即得到 $A(V)$ 的维数和基;设 $\alpha \in A^{-1}(0)$,根据 $A(\alpha) = 0$ 来确定 $A^{-1}(0)$ 的维数和基.

法2　求 A 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵 A,则 A 的秩就等于 A 的秩,且由于 $A(\varepsilon_i)$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标恰为 A 的第 i 个列向量,利用同构知,A 的列向量组的极大线性无关组对应 $A(\varepsilon_1), A(\varepsilon_2), \cdots, A(\varepsilon_n)$ 的极大无关组,从而可确定 $A(V)$ 的基.又设 $\alpha \in A^{-1}(0)$,则由 $A(\alpha) = 0$ 知,α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$ 恰为齐次方程组 $Ax = 0$ 的解向量,从而 $A^{-1}(0)$ 的维数等于 $n - \operatorname{rank} A$,且 $Ax = 0$ 的基础解系就是 $A^{-1}(0)$ 的基在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标.

10. 不变子空间

(1) 设 A 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换,W 是 V 的子空间.如果对任意 $\alpha \in W$ 都有 $A(\alpha) \in W$,则称 W 是 A 的不变子空间,简称为 A-子空间.

(2) 一些常用的不变子空间:

设 A 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换,则:

1) V 与 $\{0\}$ 是 A 的不变子空间;

2) $A(V)$ 与 $A^{-1}(0)$ 是 A 的不变子空间;

3) A 的特征子空间 $V_\lambda = \{\alpha \mid A(\alpha) = \lambda\alpha, \alpha \in V\}$ 是 A 的不变子空间;

4) A 的不变子空间的交与和还是 A 的不变子空间.

11. 不变子空间与线性变换的矩阵的化简

(1) 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间,A 是 V 的线性变换,W 是 V 的子空间且是 A 的不变子空间.取 W 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$,并把它扩充成 V 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n$,则 A 在该基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}$$

其中 k 级矩阵 A_1 是将 A 看成 W 上的线性变换时在 W 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 下的矩阵 .

(2) 如果 n 维线性空间 V 可以分解成若干个线性变换 A 的不变子空间的直和 $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$，取 W_i 的基

$$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

把它们合起来构成 V 的一组基

$$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1r_1}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \cdots, \alpha_{2r_2}, \cdots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \cdots, \alpha_{sr_s}$$

则 A 在该基下的矩阵为准对角矩阵

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$$

其中 r_i 级矩阵 A_i 是将 A 看成 W_i 的线性变换时在 W_i 的基 $\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{ir_i}$ 下的矩阵 .

(3) 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，A 是 V 的线性变换 . 如果 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 可分解为一次因式的乘积，即

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{r_s}$$

则 V 可以按特征值分解成不变子空间的直和

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$$

其中

$$W_i = \{\alpha \mid (A - \lambda_i E)^{r_i}\alpha = 0, \ \alpha \in V\} \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

12. 若尔当(Jordan) 标准形

(1) 如下形式的准对角矩阵

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

其中

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}_{k_i \times k_i}, \quad \lambda_i \in \mathbf{C}$$

称为若尔当形矩阵,称 J_i 为 k_i 级若尔当块,其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 可以有相等的.

(2) 每个 n 级复矩阵 A 都与一个若尔当形矩阵相似.

(3) 设 $\mathscr{A}$ 是复数域上 n 维线性空间 V 的一个线性变换,则必存在 V 的一组基,使 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵是若尔当形矩阵.

13. 最小多项式

(1) 设 A 是数域 P 上的 n 级矩阵,如果数域 P 上的多项式 $f(x)$ 使得 $f(A) = O$,则称 $f(x)$ 以 A 为根.在以 A 为根的多项式中,次数最低且首项系数为 1 的多项式称为 A 的最小多项式.

(2) 最小多项式有如下一些结论:

设 A 是数域 P 上的 n 级矩阵,则

1) 矩阵 A 的最小多项式是惟一的;

2) 矩阵 A 的最小多项式整除以 A 为根的任一多项式.从而,A 的最小多项式是 A 的特征多项式的因式;

3) 相似矩阵有相同的最小多项式;

4) 若 A 是准对角矩阵,即 $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$,则 A 的最小多项式是 A_1 的最小多项式与 A_2 的最小多项式的最小公倍式;

5) k_i 级若尔当块

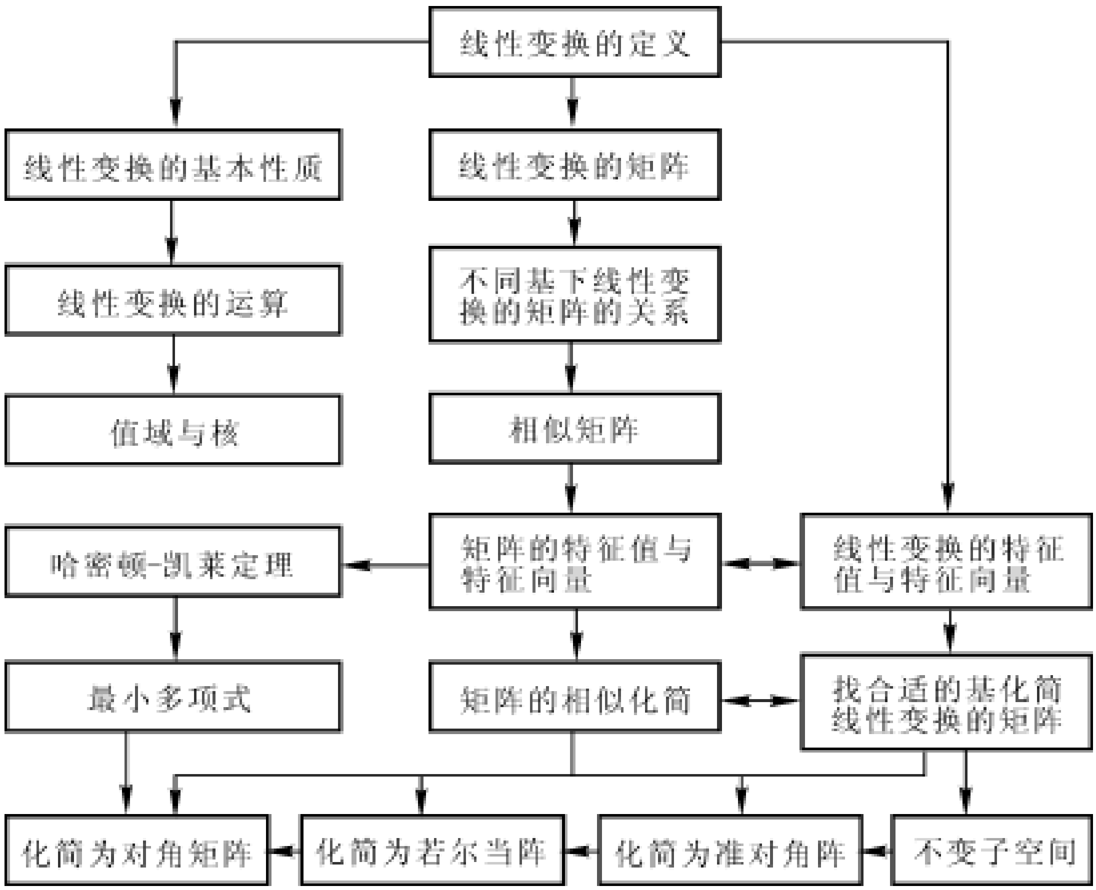
$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{k_i \times k_i}$$

的最小多项式为 $(x - \lambda_i)^{k_i}$;

6) 数域 P 上 n 级矩阵 A 与对角矩阵相似的充分必要条件是,A 的最小多项式是 P 上互素的一次因式的乘积;

7) n 级复矩阵 A 与对角矩阵相似的充分必要条件是 A 的最小多项式无重根.

二、知识网络图



三、重点、难点解读

本章首先对线性变换进行了初步的讨论,其次考虑的是基的变换对于线性变换的矩阵的影响,从而引出了矩阵相似的概念.由此自然会想到如何选择一个基使线性变换在该基下的矩阵具有尽可能简单的形式.这一问题的解决依赖于线性变换及矩阵的特征值和特征向量的概念与计算.如果一个线性变换具有足够多的线性无关的特征向量,就可以有一个由特征向量组成的基,而线性变换在这一基下的矩阵就是对角矩阵.可惜的是并非所有的线性变换具有这一性质.对于一般的线性变换只能化为准对角矩阵的形式,且与空间的分解密切相关.不变子空间的引入正是为讨论空间的分解服务的.

线性变换与矩阵的特征值与特征向量的概念及计算是本章的重点,其计算涉及行列式计算、多项式求根、解齐次方程组等,综合性很强;对其性质的了解和掌握对于证明各种类型的结论是很有帮助的.

可对角化的矩阵和线性变换是一类较特殊的也是重要的矩阵与变换,要掌握它的判别条件,并能够找到相似变换阵及合适的基将其对角化,但这一过程本质上还是求特征值及特征向量.

四、典型例题解析

例 7.1　判别下面所定义的变换,哪些是线性的,哪些不是?

(1) 在 P^2 中,$A(a,b)=(a^2,a-b)$, $\forall (a,b)\in P^2$;

(2) 在 P^3 中,$A(a,b,c)=(a+1,a+b,c)$, $\forall (a,b,c)\in P^3$;

(3) 在 $P^{n\times n}$ 中,$A(X)=AX-XB$, $\forall X\in P^{n\times n}$,而 $A,B\in P^{n\times n}$ 取定;

(4) 在 $P^{m\times n}$ 中,$A(X)=AXB+C$, $\forall X\in P^{m\times n}$,而 A,B,C 分别是取定的 m 级方阵,n 级方阵和 $m\times n$ 矩阵;

(5) 在 $P[t]$ 中,$A(f(t))=tf^3(t)$, $\forall f(t)\in P[t]$;

(6) 在 $P[t]$ 中,$A(f(t))=\int_0^t f(\tau)\sin\tau\mathrm{d}\tau$, $\forall f(t)\in P[t]$.

解　(1) 不是. 因为取 $\alpha_0=(1,1)$,则

$$A(2\alpha_0)=A(2,2)=(4,0),\quad 2A(\alpha_0)=2(1,0)=(2,0)$$

可见 $A(2\alpha_0)\neq 2A(\alpha_0)$,所以 A 不是线性变换.

(2) 不是. 因为 $A(0,0,0)=(1,0,0)$,可见 A 将 P^3 的零向量成了非零向量,故 A 不是线性变换. (也可取 $\alpha_0=(1,1,1)$,则 $A(2\alpha_0)=(3,4,2)\neq 2A(\alpha_0)=(4,4,2)$).

(3) 是. 因为对任意 $X,Y\in P^{n\times n}$ 和 $k\in P$,有

$$A(X+Y)=A(X+Y)-(X+Y)B=(AX-XB)+(AY-YB)=A(X)+A(Y)$$

$$A(kX)=A(kX)-(kX)B=k(AX-XB)=kA(X)$$

(4) 当 $C\neq O$ 时,A 不是线性变换,因为 $A(O)=C\neq O$;而当 $C=O$ 时,A 是线性变换,因为对任意 $X,Y\in P^{m\times n}$ 和 $k\in P$,有

$$A(X+Y)=A(X+Y)B=AXB+AYB=A(X)+A(Y)$$

$$A(kX)=A(kX)B=k(AXB)=kA(X)$$

(5) 不是. 因为,若取 $f_0(t) = t$,则 $A(2f_0(t)) = t(2f_0(t))^3 = 8t^4$,而 $2A(f_0(t)) = 2t^4$,可见 $A(2f_0(t)) \neq 2A(f_0(t))$,故 A 不是线性变换.

(6) 是. 因为对任意 $f(t), g(t) \in P[t], k \in P$,有

$$A(f(t) + g(t)) = \int_0^t (f(\tau) + g(\tau))\sin\tau d\tau =$$

$$\int_0^t f(\tau)\sin\tau d\tau + \int_0^t g(\tau)\sin\tau d\tau = A(f(t)) + A(g(t))$$

$$A(kf(t)) = \int_0^t (kf(\tau))\sin\tau d\tau = k\int_0^t f(\tau)\sin\tau d\tau = kA(f(t))$$

例 7.2　设 W_1 与 W_2 是数域 P 上线性空间 V 的子空间,且 $V = W_1 \oplus W_2$,对任意 $\alpha \in V$ 有惟一的分解式 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2$. 定义 V 的变换 $A: A(\alpha) = \alpha_2$,证明 A 是 V 的一个线性变换.

证　设任意 $\alpha, \beta \in V$,且 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$, $\alpha_1, \beta_1 \in W_1, \alpha_2, \beta_2 \in W_2$,又 $k \in P$,则有

$$A(\alpha + \beta) = A((\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2)) = \alpha_2 + \beta_2 = A(\alpha) + A(\beta)$$

$$A(k\alpha) = A(k\alpha_1 + k\alpha_2) = k\alpha_2 = kA(\alpha)$$

故 A 是 V 的线性变换.

例 7.3　已知 P^3 的线性变换

$$A(a, b, c) = (2b + c, a - 4b, 3a) \quad (\forall (a, b, c) \in P^3)$$

求 A 在基 $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,1,0)$, $\alpha_3 = (1,0,0)$ 下的矩阵.

解　法 1　求出 $A(\alpha_1)$, $A(\alpha_2)$, $A(\alpha_3)$,再将其用基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示,有

$$\begin{cases} A(\alpha_1) = (3, -3, 3) = 3\alpha_1 - 6\alpha_2 + 6\alpha_3 \\ A(\alpha_2) = (2, -3, 3) = 3\alpha_1 - 6\alpha_2 + 5\alpha_3 \\ A(\alpha_3) = (0, 1, 3) = 3\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 \end{cases}$$

从而 A 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

法 2　取 P^3 的基 $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$,可求得

$$A(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3)A, \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (e_1, e_2, e_3)P$$

其中
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵 B 为

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

例 7.4　已知 $P^{2\times 2}$ 的线性变换

$$\mathscr{A}(X) = MX - XM \qquad \left(\forall X \in P^{2\times 2},\ M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵.

解　因为

$$\mathscr{A}(E_{11}) = ME_{11} - E_{11}M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -2E_{12} + 3E_{21}$$

$$\mathscr{A}(E_{12}) = ME_{12} - E_{12}M = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = -3E_{11} + E_{12} + 3E_{22}$$

$$\mathscr{A}(E_{21}) = ME_{21} - E_{21}M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 2E_{11} - E_{21} - 2E_{22}$$

$$\mathscr{A}(E_{22}) = ME_{22} - E_{22}M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{12} - 3E_{21}$$

所以 $\mathscr{A}$ 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

例 7.5　设 $\mathscr{A}$ 是 4 维线性空间 V 的线性变换,$\mathscr{A}$ 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

求 $\mathscr{A}$ 在 V 的基 $\beta_1 = \alpha_1,\ \beta_2 = -\alpha_1 + \alpha_2,\ \beta_3 = -\alpha_2 + \alpha_3,\ \beta_4 = -\alpha_3 + \alpha_4$ 下的矩阵.

解　法 1　由于 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)P$ 其中

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad 且\ P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

从而 A **在基** $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ **下的矩阵** B **为**

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\2&4&0&0\\0&0&1&3\\0&0&2&4\end{pmatrix}\tag{*}$$

法 2　**由** $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A$ **得**

$$A(\alpha_1)=-\alpha_1+2\alpha_2$$
$$A(\alpha_2)=-2\alpha_1+6\alpha_2$$
$$A(\alpha_3)=-2\alpha_1+5\alpha_2-\alpha_3+2\alpha_4$$
$$A(\alpha_4)=-2\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3+6\alpha_4$$

于是

$$\begin{cases}A(\beta_1)=A(\alpha_1)=-\alpha_1+2\alpha_2=\beta_1+2\beta_2\\A(\beta_2)=-A(\alpha_1)+A(\alpha_2)=-\alpha_1+4\alpha_2=3\beta_1+4\beta_2\\A(\beta_3)=-A(\alpha_2)+A(\alpha_3)=-\alpha_2-\alpha_3+2\alpha_4=\beta_3+2\beta_4\\A(\beta_4)=-A(\alpha_3)+A(\alpha_4)=-3\alpha_2-\alpha_3+4\alpha_4=3\beta_3+4\beta_4\end{cases}$$

从而 A **在基** $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ **下的矩阵为**(*) **式**.

例 7.6　**已知** $P[t]_3$ **的两组基**

(Ⅰ): $f_1(t)=1+2t^2$,　$f_2(t)=t+2t^2$,　$f_3(t)=1+2t+5t^2$

(Ⅱ): $g_1(t)=1-t$,　$g_2(t)=1+t^2$,　$g_3(t)=t+2t^2$

又 $P[t]_3$ **的线性变换** A **满足**

$$A(f_1(t))=2+t^2,\quad A(f_2(t))=t,\quad A(f_3(t))=1+t+t^2$$

(1) **求** A **在基**(Ⅱ) **下的矩阵**;

(2) **设** $f(t)=1+2t+3t^2$,**求** $A(f(t))$.

解　(1) **取** $P[t]_3$ **的基** $1,t,t^2$,**则有**

$$(f_1,f_2,f_3)=(1,t,t^2)A$$
$$(g_1,g_2,g_3)=(1,t,t^2)B$$
$$A(f_1,f_2,f_3)=(1,t,t^2)C$$

其中
$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\2&2&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

于是
$$(g_1,g_2,g_3)=(f_1,f_2,f_3)A^{-1}B$$

利用以上关系得
$$\mathcal{A}(g_1,g_2,g_3)=\mathcal{A}((f_1,f_2,f_3)A^{-1}B)=\mathcal{A}(f_1,f_2,f_3)A^{-1}B=$$
$$(1,t,t^2)CA^{-1}B=(g_1,g_2,g_3)B^{-1}CA^{-1}B$$

故 $\mathcal{A}$ 在基(Ⅱ)下的矩阵 D 为
$$D=B^{-1}CA^{-1}B=\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&-1&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

(2) 由于
$$f(t)=1+2t+3t^2=(1,t,t^2)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(f_1,f_2,f_3)A^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

所以
$$\mathcal{A}(f(t))=\mathcal{A}\left((f_1,f_2,f_3)A^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)=\mathcal{A}(f_1,f_2,f_3)A^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=$$
$$(1,t,t^2)CA^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(1,t,t^2)\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=-1-t+t^2$$

例 7.7 已知 3 维线性空间 V 的基(Ⅰ):$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和基(Ⅱ):
$$\beta_1=\alpha_1-\alpha_3,\quad \beta_2=-\alpha_2,\quad \beta_3=\alpha_1+\alpha_3$$
又 V 的线性变换 $\mathcal{A}$ 满足
$$\mathcal{A}(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3)=\beta_1+\beta_2$$
$$\mathcal{A}(2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)=\beta_1+\beta_3$$
$$\mathcal{A}(\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3)=\beta_2+\beta_3$$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 在基(Ⅱ)下的矩阵;

(2) 求 $\mathcal{A}(\beta_1)$ 在基(Ⅰ)下的坐标.

解 将已知条件写成形式记法,有
$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P,\quad (\mathcal{A}(\alpha_1),\mathcal{A}(\alpha_2),\mathcal{A}(\alpha_3))A=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)B$$

其中
$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&3\\3&2&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

于是
$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)C$$

其中
$$C=BA^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-1&-5&4\\2&5&-4\end{pmatrix}$$

从而
$$\mathscr{A}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\mathscr{A}((\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P)=\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)CP$$

即 $\mathscr{A}$ 在基(Ⅱ)下的矩阵为
$$D=CP=\begin{pmatrix}-3&2&1\\-5&5&3\\6&-5&-2\end{pmatrix}$$

(2) 因为
$$\mathscr{A}(\beta_1)=\mathscr{A}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)D\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=$$
$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)PD\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}3\\5\\9\end{pmatrix}$$

所以 $\mathscr{A}(\beta_1)$ 在基(Ⅰ)下的坐标为 $(3,5,9)'$.

例 7.8　在 P^3 中定义两个线性变换:
$$\mathscr{A}(a,b,c)=(2a-b,b+c,a),\quad \mathscr{B}(a,b,c)=(-c,b,-a)$$
$$(\forall (a,b,c)\in P^3)$$

求 $\mathscr{A}+\mathscr{B},\mathscr{AB},\mathscr{BA},\mathscr{A}^2,\mathscr{B}^2,\mathscr{A}^2\mathscr{B}^2,(\mathscr{AB})^2,\mathscr{A}^{-1},\mathscr{B}^{-1}$.

解

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}+\mathscr{B})(a,b,c)&=\mathscr{A}(a,b,c)+\mathscr{B}(a,b,c)=\\&(2a-b,b+c,a)+(-c,b,-a)=\\&(2a-b-c,2b+c,0)\end{aligned}$$

$$(\mathscr{AB})(a,b,c)=\mathscr{A}[\mathscr{B}(a,b,c)]=\mathscr{A}(-c,b,-a)=(-b-2c,-a+b,-c)$$

$$\begin{aligned}(\mathscr{BA})(a,b,c)&=\mathscr{B}[\mathscr{A}(a,b,c)]=\mathscr{B}(2a-b,b+c,a)=\\&(-a,b+c,-2a+b)\end{aligned}$$

$$A^2(a,b,c)=A[A(a,b,c)]=A(2a-b,b+c,a)=$$
$$(4a-3b-c,a+b+c,2a-b)$$
$$B^2(a,b,c)=B[B(a,b,c)]=B(-c,b,-a)=(a,b,c)$$
(可见 B^2 是恒等变换)
$$(A^2B^2)(a,b,c)=A^2[B^2(a,b,c)]=A^2(a,b,c)=$$
$$(4a-3b-c,a+b+c,2a-b)$$
$$(AB)^2(a,b,c)=(AB)[(AB)(a,b,c)]=(AB)(-b-2c,-a+b,-c)=$$
$$(a-b+2c,-a+2b+2c,c)$$

设 $A^{-1}(a,b,c)=(a,b,c)$,则 $A(a,b,c)=(a,b,c)=(2a-b,b+c,a)$,故
$$2a-b=a,\quad b+c=b,\quad a=c$$
解得 $a=c,\ b=-a+2c,\ c=a+b-2c$,故
$$A^{-1}(a,b,c)=(c,-a+2c,a+b-2c)$$
又由 $B^2=E$ 可得 $B^{-1}=B$.

例7.9 已知 $P^{2\times 2}$ 的两个线性变换:
$$A(X)=XN,\quad B(X)=MX$$
$$\left(\forall X\in P^{2\times 2},\ M=\begin{pmatrix}1&0\\-2&0\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\right)$$

(1) 求 $A+B$,AB 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵;

(2) A 与 B 是否可逆?若可逆,求其逆变换.

解 (1) 可求得 A,B 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵分别为
$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&0&0\\0&-2&0&0\end{pmatrix}$$
故 $A+B$ 及 AB 在该基下的矩阵分别为
$$A+B=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&0&0&0\\-2&0&1&1\\0&-2&1&-1\end{pmatrix},\qquad AB=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\-2&-2&0&0\\-2&2&0&0\end{pmatrix}$$

(2) 由于 $|A|=4$,$|B|=0$,所以线性变换 A 可逆,而 B 不可逆.

法1 可求得 A^{-1} 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵为

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

任取 $X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\in P^{2\times 2}$,则

$$A^{-1}(X)=A^{-1}\left[(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\right]=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2)E_{11}+\frac{1}{2}(x_1-x_2)E_{12}+$$

$$\frac{1}{2}(x_3+x_4)E_{21}+\frac{1}{2}(x_3-x_4)E_{22}=$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1+x_2 & x_1-x_2\\ x_3+x_4 & x_3-x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=XN^{-1}$$

法 2 令 $A(X)=XN^{-1}$, " $X\in\mathbb{R}^{2\times 2}$,则

$$(AA)(X)=A[A(X)]=A(XN^{-1})=(XN^{-1})N=X$$

同理$(AA)(X)=X$,从而 A 可逆,且 $A^{-1}=A$.

例 7.10 已知 P^3 的线性变换

$$A(a,b,c)=(a+2b-c,b+c,a+b-2c)$$

求 AP^3 与 $A^{-1}(0)$ 的基与维数.

解 取 P^3 的基 $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$.

法 1 因为 $A(e_1)=(1,0,1)$, $A(e_2)=(2,1,1)$, $A(e_3)=(-1,1,-2)$,可求得该向量组的秩为 2, 且 $(1,0,1)$, $(2,1,1)$ 是一个极大线性无关组, 故 $\dim AP^3=2$,且 $A(e_1)=(1,0,1)$,$A(e_2)=(2,1,1)$ 是 AP^3 的一组基.

设$(a,b,c)\in A^{-1}(0)$,则由

$$A(a,b,c)=(a+2b-c,b+c,a+b-2c)=(0,0,0)$$

得

$$\begin{cases}a+2b-c=0\\ b+c=0\\ a+b-2c=0\end{cases}$$

可求得该方程组的通解为

$$a = 3k, \quad b = -k, \quad c = k \qquad (k\text{任意})$$

所以
$$(a, b, c) = k(3, -1, 1) \qquad (k\text{任意})$$

故 $\dim A^{-1}(0) = 1$,且$(3, -1, 1)$ 是 $A^{-1}(0)$ 的基.

法2 A 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

可求得 $\operatorname{rank} A = 2$,且$(1, 0, 1)'$,$(2, 1, 1)'$是 A 的列向量组的极大线性无关组.故 $\dim AP^3 = 2$,且 $A(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 = (1, 0, 1)$,$A(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (2, 1, 1)$是 AP^3 的一组基.

求解 $Ax = 0$ 得基础解系$(3, -1, 1)'$,故 $\dim A^{-1}(0) = 1$,且 $3\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (3, -1, 1)$ 是 $A^{-1}(0)$ 的基.

例 7.11 已知 $P^{2\times 2}$ 的线性变换

$$A(X) = MX - XM \quad \left(\forall X \in P^{2\times 2},\ M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$$

求 $AP^{2\times 2}$ 与 $A^{-1}(0)$ 的基与维数.

解 取 $P^{2\times 2}$ 的基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$.

法1 因为

$$A(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(E_{21}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

观察知该矩阵组的秩为 2,且$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$是一个极大线性无关组,故 $\dim AP^{2\times 2} = 2$,且 $A(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,$A(E_{21}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$是 $AP^{2\times 2}$ 的一组基.

设 $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in A^{-1}(0)$,则由

$$A(X) = MX - XM = \begin{pmatrix} 2x_3 & -2x_1 - 2x_2 + 2x_4 \\ 2x_3 & -2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得
$$\begin{cases} 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{cases}$$

可求得该方程组的通解为

$$x_1 = -k_1 + k_2,\quad x_2 = k_1,\quad x_3 = 0,\quad x_4 = k_2\quad (k_1, k_2 \text{ 任意})$$

所以

$$X = \begin{pmatrix} -k_1 + k_2 & k_1 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\qquad (k_1, k_2 \text{ 任意})$$

故 $\dim A^{-1}(0) = 2$,且$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$是 $A^{-1}(0)$ 的一组基.

法 2　A 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

可求得 $\operatorname{rank} A = 2$,且$(0, -2, 0, 0)'$,$(2, 0, 2, -2)'$是 A 的列向量组的一个极大线性无关组,故 $\dim A P^{2\times 2} = 2$,且

$$A(E_{11}) = -2E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(E_{21}) = 2E_{11} + 2E_{21} - 2E_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

是 $AP^{2\times 2}$ 的一组基.

求解 $Ax = 0$ 得基础解系$(-1, 1, 0, 0)'$,$(1, 0, 0, 1)'$. 故 $\dim A^{-1}(0) = 2$,且

$$-E_{11} + E_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad E_{11} + E_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

是 $A^{-1}(0)$ 的一组基.

例 7.12　已知 $P[t]_4$ 的线性变换

$$A(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) = (a_0 - a_2) + (a_1 - a_3)t + (a_2 - a_0)t^2 + (a_3 - a_1)t^3$$

求 $AP^{2\times 2}$ 与 $A^{-1}(0)$ 的基与维数.

解　取 $P[t]_4$ 的基 $1, t, t^2, t^3$,因为

$T(1) = 1 - t^2,\quad T(t) = t - t^3,\quad T(t^2) = -1 + t^2,\quad T(t^3) = -t + t^3$

所以 A 在基 $1, t, t^2, t^3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可求得 $\operatorname{rank} A = 2$,且$(1,0,-1,0)'$,$(0,1,0,-1)'$是 A 的列向量组的一个极大线性无关组. 故 $\dim AP^{2\times 2} = 2$,且 $A(1) = 1 - t^2$,$A(t) = t - t^3$ 是 $AP^{2\times 2}$ 的一组基.

求解 $Ax = 0$ 得基础解系$(1,0,1,0)'$,$(0,1,0,1)'$. 故 $\dim A^{-1}(0) = 2$,且 $f_1(t) = 1 + t^2$,$f_2(t) = t + t^3$ 为 $A^{-1}(0)$ 的一组基.

例 7.13 已知 $P^{2\times 2}$ 的线性变换

$$A(X) = MXN \quad (\forall X \in P^{2\times 2},\quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix})$$

求 A 的特征值与特征向量.

解 取 $P^{2\times 2}$ 的基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$,可求得线性变换 A 在该基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

因为 $|\lambda E - A| = \lambda^2(\lambda - 2)^2$,所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$,$\lambda_3 = \lambda_4 = 2$. 可求得 A 对应 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 的特征向量为$(1,1,0,0)'$,$(0,0,1,1)'$;而对应 $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$ 的特征向量为$(0,0,-1,1)'$. 故线性变换 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$,$\lambda_3 = \lambda_4 = 2$;对应特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 的线性无关特征向量为

$$X_1 = E_{11} + E_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad X_2 = E_{21} + E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

而全部特征向量为

$$k_1X_1 + k_2X_2 \qquad (k_1, k_2 \text{ 不全为零})$$

对应特征值 $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$ 的线性无关特征向量为 $X_3 = -E_{21} + E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,全部特征向量为 $kX_3\ (k \neq 0)$.

例 7.14 已知 $P[t]_3$ 的线性变换

$$A(a+bt+ct^2)=(4a+6b)+(-3a-5b)t+(-3a-6b+c)t^2$$

求 A 的特征值与特征向量.

解　取 $P[t]_3$ 的基 $1,t,t^2$,可求得 A 在该基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$$

因为 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$,所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-2$. 可求得 A 对应特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $(-2,1,0)'$,$(0,0,1)'$;而对应特征值 $\lambda_3=-2$ 的特征向量为 $(-1,1,1)'$. 故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-2$; 对应特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的线性无关特征向量为 $f_1(t)=-2+t$, $f_2(t)=t^2$,全部特征向量为 $k_1f_1(t)+k_2f_2(t)$(k_1,k_2 不全为零);A 对应特征值 -2 的线性无关特征向量为 $f_3(t)=-1+t+t^2$,全部特征向量为 $kf_3(t)(k\neq 0)$.

例 7.15　设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$,$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$,且 $a_1b_1\neq 0$, $\alpha\beta=0$. 设 $A=\alpha\beta'$,求

(1) A^2;

(2) A 的特征值与特征向量.

解　(1) 由 $A=\alpha\beta'$ 和 $\beta'\alpha=0$ 得

$$A^2=(\alpha\beta')(\alpha\beta')=\alpha(\beta'\alpha)\beta'=O$$

(2) **法 1**　设 $Ax=\lambda x$,即 λ 是 A 的特征值,x 是对应的特征向量,则

$$A^2x=A(Ax)=\lambda Ax=\lambda^2x$$

因为 $A^2=O$,所以 $\lambda^2x=0$. 由 $x\neq 0$ 知 $\lambda=0$,即 A 的特征值全为 0.

法 2

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}a_1b_1-\lambda&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2-\lambda&\cdots&a_2b_n\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\text{升级}}$$

$$\begin{vmatrix}1&b_1&b_2&\cdots&b_n\\0&a_1b_1-\lambda&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\0&a_2b_1&a_2b_2-\lambda&\cdots&a_2b_n\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots\\0&a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{\cdots\\ r_{n+1}-a_nr_1}]{\substack{r_2-a_1r_1\\ r_3-a_2r_1}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ -a_1 & -\lambda & & & \\ -a_2 & & -\lambda & & \\ \cdots & & & \ddots & \\ -a_n & & & & -\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[c_1 - \frac{a_n}{\lambda}c_{n+1}]{c_1 - \frac{a_1}{\lambda}c_2 \atop \cdots} \begin{vmatrix} 1-\frac{\alpha\beta}{\lambda} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ & -\lambda & & & \\ & & -\lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)^n\lambda^n$$

于是 A 的特征值为 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. 由于

$$A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2 - a_2r_1 \\ \cdots \\ r_n - a_nr_1}]{r_1 \times \frac{1}{a_1}} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \times \frac{1}{b_1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b_2}{b_1} & \cdots & \frac{b_n}{b_1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $x_1 = -\frac{b_2}{b_1}x_2 - \cdots - \frac{b_n}{b_1}x_n$,基础解系为

$$p_1 = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} -b_3 \\ 0 \\ b_1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad p_{n-1} = \begin{pmatrix} -b_n \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

故 A 对应特征值 0 的特征向量为

$$k_1p_1 + k_2p_2 + \cdots + k_{n-1}p_{n-1} \qquad (k_1, k_2, \cdots, k_{n-1} \text{ 不全为 } 0)$$

例 7.16 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ 5 & b & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 有特征值 ± 1,问 A 能否对角化?说明

理由.

解　由于 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$ 是 A 的特征值,将其代入特征方程,有

$$|A-E|=\begin{vmatrix}1&a&2\\5&b-1&3\\-1&1&-2\end{vmatrix}\xrightarrow{c_3-2c_1}\begin{vmatrix}1&a&0\\5&b-1&-7\\-1&1&0\end{vmatrix}=$$

$$7\begin{vmatrix}1&a\\-1&1\end{vmatrix}=7(1+a)=0$$

$$|A+E|=\begin{vmatrix}3&a&2\\5&b+1&3\\-1&1&0\end{vmatrix}\xrightarrow{c_1+c_2}\begin{vmatrix}a+3&a&2\\b+6&b+1&3\\0&1&0\end{vmatrix}=$$

$$-\begin{vmatrix}a+3&2\\b+6&3\end{vmatrix}=-(3a-2b-3)=0$$

解得 $a=-1,b=-3$,所以 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&1&-1\end{pmatrix}$.

根据 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}$ 得 $1+(-1)+\lambda_3=2+(-3)+(-1)$,即 $\lambda_3=-2$. 由于 A 的 3 个特征值互异,所以 A 可对角化.

例 7.17　已知 3 级方阵 A 的特征值为 $1,-1,0$,对应的特征向量分别为

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix},\quad p_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

求矩阵 A.

分析　这是已知全部特征值和特征向量反求矩阵的问题. 由于已知 A 的 3 个线性无关的特征向量,故 A 可相似于对角矩阵,利用这一关系可求出 A.

解　令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&3&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}$,则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

从而

$$A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}-5&4&-6\\3&-3&3\\7&-6&8\end{pmatrix}$$

例 7.18 已知向量 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量,试求 k.

分析 本题中给出了特征向量,用定义式 $Ax=\lambda x$ 求解.

解 由条件 $A^{-1}\alpha=\lambda\alpha$,即 $\alpha=\lambda A\alpha$,也即 $\lambda\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$.于是,有

$$\begin{cases}\lambda(3+k)=1\\\lambda(2+2k)=k,\\\lambda(3+k)=1\end{cases}\quad \text{其解为}\begin{cases}k_1=-2\\\lambda_1=1\end{cases},\quad\begin{cases}k_2=1\\\lambda_2=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

可见当 $k=-2$ 时,α是 A^{-1} 对应特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量;当 $k=1$ 时,α是 A^{-1} 对应特征值 $\lambda_2=\dfrac{1}{4}$ 的特征向量.

例 7.19 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&a&3\\6&-6&b\end{pmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=4$,试求参数 a,b 的值.

分析 本题只给出特征值而没有给出特征向量,一般用特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 求解.

解 因为 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=4$ 均为 A 的特征值,所以 $|A+2E|=0$, $|A-4E|=0$. 但

$$|A+2E|=\begin{vmatrix}3&-3&3\\3&a+2&3\\6&-6&b+2\end{vmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}3&-3&3\\0&a+5&0\\0&0&b-4\end{vmatrix}=$$

$$3(a+5)(b-4)=0$$

$$|A-4E|=\begin{vmatrix}-3&-3&3\\3&a-4&3\\6&-6&b-4\end{vmatrix}\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}-3&-3&3\\0&a-7&6\\0&-12&b+2\end{vmatrix}=$$

$$-3[(a-7)(b+2)+72]=0$$

联立解得 $a=-5$, $b=4$.

例 7 20　设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$,行列式 $|A|=-1$. 又 A^* 有一个特征值 λ_0,属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)'$,求 a,b,c 及 λ_0 的值 .

解　据已知有 $AA^*=|A|E=-E$,且 $A^*\alpha=\lambda_0\alpha$ 用 A 左乘并利用前一式得 $AA^*\alpha=\lambda_0 A\alpha$,即 $\lambda_0 A\alpha=-\alpha$,也即

$$\lambda_0\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

由此可得

$$\begin{cases} \lambda_0(-a+1+c)=1 & (1) \\ \lambda_0(-5-b+3)=1 & (2) \\ \lambda_0(-1+c-a)=-1 & (3) \end{cases}$$

(1) 式 - (3) 式得 $\lambda_0=1$, 代入(2) 式和(1) 式得 $b=-3$, $a=c$.由 $|A|=-1$ 和 $a=c$,有

$$-1=|A|=\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix}\xrightarrow{r_2-3r_1}\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5-3a & 0 & 3-3a \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} 5-3a & 3-3a \\ 1-a & -a \end{vmatrix}=a-3$$

故 $a=c=2$, $b=-3$, $\lambda_0=1$.

例 7 21　已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 相似,求 a 和 b.

分析　若 $A\sim B$, 则由 A 与 B 的特征多项式相同, 即 $|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$,可以确定矩阵中的参数 . 也可利用 $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$ 等结论 .

解　法 1　因为 $A\sim B$. 所以 $|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$. 利用对角线法则求行列式得

$$-\lambda^3+(a+2)\lambda^2+(1+b^2-2a)\lambda+2b-1-b^2=-\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda$$

比较两边同次幂的系数得$\begin{cases} a+2=5 \\ 1+b^2-2a=-4 \\ 2b-1-b^2=0 \end{cases}$,解得$\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$.

法2　因为 $A\sim B$,而 B 是对角矩阵,故知 A 有特征值 0,1,4,可求得

$$|A-\lambda E|=-\lambda^3+(a+2)\lambda^2+(1+b^2-2a)\lambda+2b-1-b^2$$

分别令 $\lambda=0,\lambda=1,\lambda=4$ 得

$$\begin{cases} 2b-1-b^2=0 \\ -1+(a+2)+(1+b^2-2a)+2b-1-b^2=0 \\ -64+16(a+2)+4(1+b^2-2a)+2b-1-b^2=0 \end{cases}$$

解得 $a=3$, $b=1$.

法3　利用$\begin{cases} a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \\ |A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{cases}$,并注意 A 的特征值为 0,1,4,得

$\begin{cases} 1+a+1=0+1+4 \\ |A|=-(b-1)^2=0\times 1\times 4 \end{cases}$,解得$\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$.

例7 22　设 A,B 均是 n 级方阵,证明 AB 与 BA 有相同的特征值.

证　法1　设 $ABx=\lambda x$,即 λ 是 AB 的特征值,x 是对应 λ 的特征向量.用 B 左乘之得 $BA(Bx)=\lambda(Bx)$.

(1) 若 $\lambda\neq 0$,则 $Bx\neq 0$. 否则,若 $Bx=0$,则 $0=ABx=\lambda x$,这与 $\lambda\neq 0$ 和 $x\neq 0$ 矛盾.可见 λ 也是 BA 的特征值(此时,对应的特征向量是 Bx).

(2) 若 $\lambda=0$,即 BA 有零特征值,则

$$0=|AB-0E|=|A||B|=|B||A|=|BA|=|BA-0E|$$

即 0 也是 BA 的特征值.

综合(1)与(2)得证 AB 与 BA 有相同的特征值.

法2　对分块矩阵$\begin{pmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{pmatrix}(\lambda\neq 0)$分别作分块初等变换:

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -\lambda^{-1}A & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda E & B \\ O & E-\lambda^{-1}AB \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & -B \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda E-BA & O \\ A & E \end{pmatrix}$$

分别取行列式得

$$\begin{vmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{vmatrix} = |\lambda E||E - \lambda^{-1}AB| = \lambda^n |\lambda^{-1}(\lambda E - AB)| = |\lambda E - AB|$$

$$\begin{vmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{vmatrix} = |\lambda E - BA||E| = |\lambda E - BA|$$

即 $|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$ 或 $|AB - \lambda E| = |BA - \lambda E|$. 这表明 AB 与 BA 有相同的非零特征值. 当 $\lambda = 0$ 时, 同法 1 类似的证明.

例 7.23　已知 $P[t]_3$ 的线性变换

$$\mathcal{A}(a + bt + ct^2) = (4a + 6b) + (-3a - 5b)t + (-3a - 6b + c)t^2$$

求 $P[t]_3$ 的一组基, 使 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为对角矩阵.

解　取 $P[t]_3$ 的基 $1, t, t^2$, 可求得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

因为 $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$, 所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. 可求得 A 对应特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量为 $p_1 = (-2, 1, 0)'$, $p_2 = (0, 0, 1)'$, 而对应特征值 $\lambda_3 = -2$ 的特征向量为 $p_3 = (-1, 1, 1)'$, 从而

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{使得} \quad P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

由 $(g_1(t), g_2(t), g_3(t)) = (1, t, t^2)P$ 可求得 $P[t]_3$ 的基

$$g_1(t) = -2 + t, \quad g_2(t) = t^2, \quad g_3(t) = -1 + t + t^2$$

$\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为 Λ.

注　此例中, 所求的基 $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$ 即是线性变换 $\mathcal{A}$ 的线性无关的特征向量. 一般地, n 维线性空间 V 的线性变换 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵为对角矩阵的充分必要条件是, $\mathcal{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

例 7.24　设 3 维线性空间 V 的线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

求证: $W = L(-\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_3)$ 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

证　由 $\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$ 得

$$A(\alpha_1)=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$$
$$A(\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$$
$$A(\alpha_3)=2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$$

任取 $\beta\in W$,则有

$$\beta=k_1(-\alpha_1+\alpha_2)+k_2(-\alpha_1+\alpha_3)$$

而

$$\begin{aligned}A(\beta)=&k_1(-A(\alpha_1)+A(\alpha_2))+k_2(-A(\alpha_1)+A(\alpha_3))=\\&k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_1-\alpha_3)=\\&-k_1(-\alpha_1+\alpha_2)-k_2(-\alpha_1+\alpha_3)\in W\end{aligned}$$

故 W 是 A 的不变子空间.

例 7.25 设线性空间 V 的两个线性变换 A 与 B 是可交换的,即 $AB=BA$. 证明:

(1) B 的值域 $B(V)$ 与核 $B^{-1}(0)$ 都是 A 的不变子空间;

(2) 如果 λ_0 是 A 的一个特征值,则 A 的特征子空间 V_{λ_0} 也是 B 的不变子空间.

证 (1) 任取 $\beta\in B(V)$,则存在 $\alpha\in V$,使得 $\beta=B(\alpha)$,于是

$$A(\beta)=A(B(\alpha))=(AB)(\alpha)=(BA)(\alpha)=B(A(\alpha))\in B(V)$$

所以 $B(V)$ 是 A 的不变子空间.

任取 $\alpha\in B^{-1}(0)$,则 $B(\alpha)=0$,于是

$$B(A(\alpha))=(BA)(\alpha)=(AB)(\alpha)=A(B(\alpha))=A(0)=0$$

故由 $A(\alpha)\in B^{-1}(0)$ 知 $B^{-1}(0)$ 是 A 的不变子空间.

(2) 任取 $\alpha\in V_{\lambda_0}$,则有 $A(\alpha)=\lambda_0\alpha$,于是

$$A(B(\alpha))=(AB)(\alpha)=(BA)(\alpha)=B(A(\alpha))=B(\lambda_0\alpha)=\lambda_0B(\alpha)$$

可见 $B(\alpha)$ 也是 A 对应特征值 λ_0 的特征向量或零向量,即 $B(\alpha)\in V_{\lambda_0}$,故 V_{λ_0} 是 B 的不变子空间.

例 7.26 设 A 是 n 维线性空间 V 的可逆线性变换,V 的子空间 W 是 A 的不变子空间,证明 W 也是 A^{-1} 的不变子空间.

证 取 W 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$,并扩充成 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$,则 A 在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}A_1&B\\O&A_2\end{pmatrix}$$

其中 A_1 是 r 级方阵,A_2 是 $n-r$ 级方阵,B 是 $r\times(n-r)$ 矩阵. 由于 A^{-1} 在这

组基下的矩阵为

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1 & B\\ O & A_2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & -A_1^{-1}BA_2^{-1}\\ O & A_2^{-1}\end{pmatrix}$$

因此 W 是 A^{-1} 的不变子空间.

例 7 27 已知 $P^{2\times 2}$ 的子空间

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}\middle|\ x_{11}+x_{22}=0,\ x_{ij}\in P\right\}$$

和线性变换

$$A(X)=B'X-X'B\qquad \forall X\in P^{2\times 2},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(1) 求 W 的一组基;

(2) 证明 W 是 A 的不变子空间;

(3) 将 A 看成 W 上的线性变换,求 W 的一组基,使 A 在该基下的矩阵为对角矩阵.

解 (1) W 的一组基为 $C_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $C_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $C_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

(2) 任取 $X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}\in W$,由于

$$A(X)=B'X-X'B=\begin{pmatrix}0 & x_{12}-x_{11}-x_{21}\\ x_{11}+x_{21}-x_{12} & 0\end{pmatrix}\in W$$

所以 W 是 A 的不变子空间.

(3) 由于

$$A(C_1)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=-C_2+C_3$$

$$A(C_2)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=C_2-C_3$$

$$A(C_3)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=-C_2+C_3$$

所以

$$A(C_1,C_2,C_3)=(C_1,C_2,C_3)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=(C_1,C_2,C_3)A$$

可求得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=2$.对应 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的线性无关特征向量为 $p_1=(1,1,0)'$, $p_2=(-1,0,1)'$,而对应 $\lambda_3=2$ 的特征向量为 $p_3=(0,-1,1)'$.令 $P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$,则有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\Lambda$.

由 $(D_1,D_2,D_3)=(C_1,C_2,C_3)P$ 求得 W 的一组基

$$D_1=C_1+C_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$D_2=-C_1+C_3=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$D_3=-C_2+C_3=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

则 A 在该基下的矩阵为对角矩阵 Λ.

五、课后习题全解

(一) 第七章习题

1. **判别下面所定义的变换,哪些是线性的,哪些不是?**

1) **在线性空间 V 中,$A\xi=\xi+\alpha$,其中 $\alpha\in V$ 是一固定的向量;**

2) **在线性空间 V 中,$A\xi=\alpha$,其中 $\alpha\in V$ 是一固定的向量;**

3) **在 P^3 中,$A(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2+x_3,x_3^2)$;**

4) **在 P^3 中,$A(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$;**

5) **在 $P[x]$ 中,$Af(x)=f(x+1)$;**

6) **在 $P[x]$ 中,$Af(x)=f(x_0)$,其中 $x_0\in P$,是一固定的数;**

7) **把复数域看作复数域上的线性空间,$A\xi=\overline{\xi}$;**

8) **在 $P^{n\times n}$ 中,$A(X)=BXC$,其中 $B,C\in P^{n\times n}$ 是两个固定的矩阵.**

解 1) $A(\xi)=\xi+\alpha,\quad A(\eta)=\eta+\alpha$

$$A(\xi+\eta)=\xi+\eta+\alpha,\quad A(k\xi)=k\xi+\alpha$$

若 $A(\xi)+A(\eta)=A(\xi+\eta)$,则有 $\alpha=0$,同时 $kA(\xi)=A(k\xi)$.故当 $\alpha=0$ 时,A 是线性变换;$\alpha\neq0$ 时,A 不是线性变换.

2) 同上题,若 $A(\xi)+A(\eta)=A(\xi+\eta)$,则有 $\alpha=0$,同时 $kA(\xi)=A(k\xi)$. 故当 $\alpha=0$ 时,A 是线性变换,$\alpha\neq 0$ 时,A 不是线性变换.

3) 不是. 例如当 $\xi=(1,0,0)$, $k=2$ 时,$kA(\xi)=(2,0,0)$,而 $A(k\xi)=(4,0,0)$,可见 $A(k\xi)\neq kA(\xi)$.

4) 是. 取 $\xi=(x_1, x_2, x_3)$, $\eta=(y_1, y_2, y_3)$,则

$$
\begin{aligned}
A(\xi+\eta)=A(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)= \\
(2x_1+2y_1-x_2-y_2, x_2+y_2+x_3+y_3, x_1+y_1)= \\
(2x_1-x_2, x_2+x_3, x_1)+(2y_1-y_2, y_2+y_3, y_1)= \\
A(\xi)+A(\eta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A(k\xi)=A(kx_1, kx_2, kx_3)=(2kx_1-kx_2, kx_2+kx_3, kx_1)= \\
k(2x_1-x_2, x_2+x_3, x_1)=kA\xi
\end{aligned}
$$

5) 是. 任取 $f(x)\in P[x]$, $g(x)\in P[x]$. 令 $u(x)=f(x)+g(x)$,则

$$
\begin{aligned}
A(f(x)+g(x))=A(u(x))=u(x+1)=f(x+1)+g(x+1)= \\
Af(x)+Ag(x)
\end{aligned}
$$

再令 $v(x)=kf(x)$,则

$$
A(kf(x))=A(v(x))=v(x+1)=kf(x+1)=kA(f(x))
$$

6) 是. 任取 $f(x)\in P[x]$, $g(x)\in P[x]$,有

$$
A(f(x)+g(x))=f(x_0)+g(x_0)=A(f(x))+A(g(x))
$$

$$
A(kf(x))=kf(x_0)=kA(f(x))
$$

7) 不是. 例如取 $a=1$, $k=\mathrm{i}$,则

$$
A(ka)=-\mathrm{i},\quad kA(a)=\mathrm{i},\quad A(ka)\neq kA(a)
$$

8) 是. 任取矩阵 $X, Y\in P^{n\times n}$,有

$$
A(X+Y)=B(X+Y)C=BXC+BYC=A(X)+A(Y)
$$

$$
A(kX)=B(kX)C=kBXC=kA(X)
$$

2. 在几何空间中,取正交坐标系 $Oxyz$. 以 A 表示将空间绕 Ox 轴由 Oy 向 Oz 方向旋转 90°的变换,以 B 表示绕 Oy 轴由 Oz 向 Ox 方向旋转 90°的变换,以 C 表示绕 Oz 轴由 Ox 向 Oy 方向旋转 90°的变换. 证明:

$$
A^4=B^4=C^4=E,\quad AB\neq BA, \text{但 } A^2B^2=B^2A^2
$$

并检验 $(AB)=A^2B^2$ 是否成立.

解　任取一向量 $\alpha=(x, y, z)$,则有

1) $A\alpha=(x, -z, y)$, $A^2\alpha=(x, -y, -z)$, $A^3\alpha=(x, z, -y)$,
$A^4\alpha=(x, y, z)$;

$B\alpha=(z,y,-x)$, $B^2\alpha=(-x,y,-z)$, $B^3\alpha=(-z,y,x)$,

$B^4\alpha=(x,y,z)$;

$C\alpha=(-y,x,z)$, $C^2\alpha=(-x,-y,z)$, $C^3\alpha=(y,-x,z)$,

$C^4\alpha=(x,y,z)$,

所以
$$A^4=B^4=C^4=E$$

2) $AB(\alpha)=A(z,y,-x)=(z,x,y)$

$BA(\alpha)=B(x,-z,y)=(y,-z,-x)$

所以
$$AB\neq BA$$

3) $A^2B^2(\alpha)=A^2(-x,y,-z)=(-x,-y,z)$

$B^2A^2(\alpha)=B^2(x,-y,-z)=(-x,-y,z)$

所以
$$A^2B^2=B^2A^2$$

4) $(AB)^2\alpha=(AB)(AB\alpha)=AB(z,x,y)=(y,z,x)$

$A^2B^2\alpha=(-x,-y,z)$

从而
$$(AB)^2\neq A^2B^2$$

3. **在 $P[x]$ 中**, $Af(x)=f'(x)$, $Bf(x)=xf(x)$. **证明**:
$$AB-BA=E$$

证 **任取** $f(x)\in P[x]$, **则有**

$$(AB-BA)f(x)=ABf(x)-BAf(x)=A(xf(x))-B(f'(x))=$$
$$f(x)+xf'(x)-xf'(x)=f(x)$$

故
$$AB-BA=E$$

4. **设** A,B **是线性变换**, **如果** $AB-BA=E$, **证明**:
$$A^kB-BA^k=kA^{k-1}\quad(k>1)$$

证 **用数学归纳法**. **当** $k=2$ **时**,

$$A^2B-BA^2=(A^2B-ABA)+(ABA-BA^2)=$$
$$A(AB-BA)+(AB-BA)A=AE+EA=2A$$

结论成立.

假设 $k=m$ **时结论成立**, **即** $A^mB-BA^m=mA^{m-1}$, **则**

$$A^{m+1}B-BA^{m+1}=(A^{m+1}B-A^mBA)+(A^mBA-BA^{m+1})=$$
$$A^m(AB-BA)+(A^mB-BA^m)A=$$
$$A^mE+mA^{m-1}A=(m+1)A^m$$

即 $k=m+1$ **时结论成立**. **故对一切** $k>1$ **结论成立**.

5. **证明**: **可逆变换是双射**.

证　设 A 为可逆变换,它的逆变换为 A^{-1}.

若 $\xi\neq\eta$,则必有 $A\xi\neq A\eta$.不然,设 $A\xi=A\eta$,两边左乘 A^{-1},有 $\xi=\eta$,这与条件矛盾.其次对任一向量 η,必有 ξ 使 $A\xi=\eta$,事实上,令 $A^{-1}\eta=\xi$ 即可.

因此 A 是为 1 - 1 的和映上的,所以是双射.

6. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基,A 是 V 上的线性变换,证明 A 可逆当且仅当 $A\varepsilon_1,A\varepsilon_2,\cdots,A\varepsilon_n$ 线性无关.

证　设 $A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(A\varepsilon_1,A\varepsilon_2,\cdots,A\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$.

由定理 2 知,线性变换 A 可逆的充分必要条件是矩阵 A 可逆,而矩阵 A 可逆的充分必要条件是 $A\varepsilon_1,A\varepsilon_2,\cdots,A\varepsilon_n$ 线性无关,故 A 可逆的充分必要条件是 $A\varepsilon_1,A\varepsilon_2,\cdots,A\varepsilon_n$ 线性无关.

7. 求下列线性变换在所指定基下的矩阵:

1) 第 1 题 4) 中变换 A 在基 $\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$ 下的矩阵;

2) $[O;\varepsilon_1,\varepsilon_2]$ 是平面上一直角坐标系,A 是平面上的向量对第一和第三象限角的平分线的垂直投影,B 是平面上的向量对 ε_2 的垂直投影,求 A,B,AB 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的矩阵;

3) 在空间 $P[x]_n$ 中,设变换 A 为 $f(x)\rightarrow f(x+1)-f(x)$,$A$ 在基

$$\varepsilon_0=1,\quad \varepsilon_i=\frac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}\qquad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

下的矩阵;

4) 六个函数

$$\varepsilon_1=e^{ax}\cos bx,\quad \varepsilon_2=e^{ax}\sin bx,\quad \varepsilon_3=xe^{ax}\cos bx,$$

$$\varepsilon_4=xe^{ax}\sin bx,\quad \varepsilon_5=\frac{1}{2}x^2e^{ax}\cos bx,\quad \varepsilon_6=\frac{1}{2}x^2e^{ax}\sin bx$$

的所有实系数线性组合构成实数域上一个六维线性空间.求微分变换 D 在基 ε_i $(i=1,2,\cdots,6)$ 下的矩阵;

5) 已知 P^3 中线性变换 A 在基 $\eta_1=(-1,1,1),\eta_2=(1,0,-1),\eta_3=(0,1,1)$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

求 A 在基 $\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$ 下的矩阵;

6) 在 P^3 中,$\mathscr{A}$ 定义如下

$$\begin{cases} \mathscr{A}\eta_1 = (-5,0,3) \\ \mathscr{A}\eta_2 = (0,-1,6) \\ \mathscr{A}\eta_3 = (-5,-1,9) \end{cases} \quad \text{其中} \quad \begin{cases} \eta_1 = (-1,0,2) \\ \eta_2 = (0,1,1) \\ \eta_3 = (3,-1,0) \end{cases}$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1 = (1,0,0)$, $\varepsilon_2 = (0,1,0)$, $\varepsilon_3 = (0,0,1)$ 下的矩阵;

7) 同上 . 求 $\mathscr{A}$ 在 η_1, η_2, η_3 下的矩阵 .

解 1)
$$\mathscr{A}\varepsilon_1 = (2,0,1) = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_3$$
$$\mathscr{A}\varepsilon_2 = (-1,1,0) = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2$$
$$\mathscr{A}\varepsilon_3 = (0,1,0) = \varepsilon_2$$

所以 $\mathscr{A}$ 在基 ε_1, ε_2, ε_3 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) 取 $\varepsilon_1 = (1,0)$, $\varepsilon_2 = (0,1)$,则

$$\mathscr{A}\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2, \quad \mathscr{A}\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2$$

所以 $\mathscr{A}$ 在基 ε_1, ε_2 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

另外 $\mathscr{B}\varepsilon_1 = 0$, $\mathscr{B}\varepsilon_2 = \varepsilon_2$,从而 $\mathscr{B}$ 在基 ε_1, ε_2 下的矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 在基 ε_1, ε_2 下的矩阵为

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3) 因为
$$\mathscr{A}\varepsilon_0 = 1 - 1 = 0$$
$$\mathscr{A}\varepsilon_1 = (x+1) - x = \varepsilon_0$$
$$\cdots\cdots$$

$$A\varepsilon_{n-1} = \frac{(x+1)x\cdots[x-(n-3)]}{(n-1)!} - \frac{x(x-1)\cdots[x-(n-2)]}{(n-1)!} =$$

$$\frac{x(x-1)\cdots[x-(n-3)]}{(n-1)!}\{(x+1)-[x-(n-2)]\} = \varepsilon_{n-2}$$

所以 A **在基** $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}$ **下的矩阵为**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

4) **因为**

$$D\varepsilon_1 = a\varepsilon_1 - b\varepsilon_2 \qquad D\varepsilon_2 = b\varepsilon_1 + a\varepsilon_2$$

$$D\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + a\varepsilon_3 - b\varepsilon_4 \qquad D\varepsilon_4 = \varepsilon_2 + b\varepsilon_3 + a\varepsilon_4$$

$$D\varepsilon_5 = \varepsilon_3 + a\varepsilon_5 - b\varepsilon_6 \qquad D\varepsilon_6 = \varepsilon_4 + b\varepsilon_5 + a\varepsilon_6$$

所以 D **在基** $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ **下的矩阵为**

$$D = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

5) **记** A **在基** η_1, η_2, η_3 **下的矩阵为** A,**由于**

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)X$$

所以

$$A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = A[(\eta_1, \eta_2, \eta_3)X^{-1}] = A(\eta_1, \eta_2, \eta_3)X^{-1} =$$

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3)AX^{-1} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)XAX^{-1}$$

故 A **在** $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ **下的矩阵为**

$$B = XAX^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6) **因为**
$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以
$$A(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

但已知
$$A(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

故

$$A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = A(\eta_1, \eta_2, \eta_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{20}{7} & -\frac{20}{7} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{27}{7} & \frac{18}{7} & \frac{24}{7} \end{pmatrix}$$

7) **因为**
$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

所以

$$A(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. 在 $P^{2\times 2}$ 中定义线性变换

$$A_1(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X$$

$$A_2(X) = X\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A_3(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

求 A_1, A_2, A_3 在 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵 .

解　可求得

$$A_1E_{11} = aE_{11} + cE_{21}, \quad A_1E_{12} = aE_{12} + cE_{22}$$

$$A_1E_{21} = bE_{11} + dE_{21}, \quad A_1E_{22} = bE_{12} + dE_{22}$$

故 A_1 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵是

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

又有

$$A_2E_{11} = aE_{11} + bE_{12}, \quad A_2E_{12} = cE_{11} + dE_{12}$$

$$A_2E_{21} = aE_{21} + bE_{22}, \quad A_2E_{22} = cE_{21} + dE_{22}$$

故 A_2 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵是

$$A_2 = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$$

由于

$$A_3E_{11} = a^2E_{11} + abE_{12} + acE_{21} + bcE_{22}$$

$$A_3E_{12} = acE_{11} + adE_{12} + c^2E_{21} + cdE_{22}$$

$$A_3E_{21} = abE_{11} + b^2E_{12} + adE_{21} + bdE_{22}$$

$$A_3E_{22} = bcE_{11} + bdE_{12} + cdE_{21} + d^2E_{22}$$

故 A_3 在基 E_{11}，E_{12}，E_{21}，E_{22} 下的矩阵是

$$A_3=\begin{pmatrix} a^2 & ac & ab & bc \\ ab & ad & b^2 & bd \\ ac & c^2 & ad & cd \\ bc & cd & bd & d^2 \end{pmatrix}$$

9. 设三维线性空间 V 上的线性变换 A 在基 ε_1，ε_2，ε_3 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1) 求 A 在基 ε_3，ε_2，ε_1 下的矩阵；

2) 求 A 在基 ε_1，$k\varepsilon_2$，ε_3 下的矩阵，其中 $k\in P$ 且 $k\neq 0$；

3) 求 A 在基 $\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$\varepsilon_2$，$\varepsilon_3$ 下的矩阵．

解　1) 因为

$$\begin{aligned} A\varepsilon_3 &= a_{33}\varepsilon_3+a_{23}\varepsilon_2+a_{13}\varepsilon_1 \\ A\varepsilon_2 &= a_{32}\varepsilon_3+a_{22}\varepsilon_2+a_{12}\varepsilon_1 \\ A\varepsilon_1 &= a_{31}\varepsilon_3+a_{21}\varepsilon_2+a_{11}\varepsilon_1 \end{aligned}$$

故 A 在基 ε_3，ε_2，ε_1 下的矩阵是

$$B_1=\begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

2) 由于

$$\begin{aligned} A\varepsilon_1 &= a_{11}\varepsilon_1+\frac{a_{12}}{k}(k\varepsilon_2)+a_{31}\varepsilon_3 \\ A(k\varepsilon_2) &= ka_{12}\varepsilon_1+a_{22}(k\varepsilon_2)+ka_{32}\varepsilon_3 \\ A\varepsilon_3 &= a_{13}\varepsilon_1+\frac{a_{23}}{k}(k\varepsilon_2)+a_{33}\varepsilon_3 \end{aligned}$$

故 A 在基 ε_1，$k\varepsilon_2$，ε_3 下的矩阵是

$$B_2=\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ \dfrac{a_{21}}{k} & a_{22} & \dfrac{a_{23}}{k} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

3) 可求得

$$\begin{aligned} A(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = {} & (a_{11}+a_{12})(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+ \\ & (a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12})\varepsilon_2+(a_{31}+a_{32})\varepsilon_3 \end{aligned}$$

$$A\varepsilon_2 = a_{12}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (a_{22} - a_{12})\varepsilon_2 + a_{32}\varepsilon_3$$
$$A\varepsilon_3 = a_{13}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (a_{23} - a_{13})\varepsilon_2 + a_{33}\varepsilon_3$$

故 A **在基** $\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ **下的矩阵是**

$$B_3 = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a_{22} - a_{11} - a_{12} & a_{22} - a_{12} & a_{23} - a_{13} \\ a_{31} + a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

10. **设** A **是线性空间** V **上的线性变换,如果** $A^{k-1}\xi \neq 0$**,但** $A^k\xi = 0$**,求证** $\xi, A\xi, \cdots, A^{k-1}\xi\ (k > 0)$ **线性无关.**

证　**假设存在一组数** $a_1, a_2, \cdots, a_k$**,使**

$$a_1\xi + a_2A\xi + \cdots + a_kA^{k-1}\xi = 0$$

用 A^{k-1} **作用于等式两边,因为当** $n \geq k$ **时,**$A^n\xi = 0$**,得** $a_1A^{k-1}\xi = 0$**.又因为** $A^{k-1}\xi \neq 0$**,所以** $a_1 = 0$**,于是有**

$$a_2A\xi + a_3A^2\xi + \cdots + a_kA^{k-1}\xi = 0$$

再用 A^{k-2} **作用于等式两边,得** $a_2A^{k-1}\xi = 0$**,因此推得** $a_2 = 0$**.同理继续作下去,得**

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$$

故 $\xi, A\xi, \cdots, A^{k-1}\xi\ (k > 0)$ **线性无关.**

11. **在** n **维线性空间中,设有线性变换** A **与向量** ξ**,使得** $A^{n-1}\xi \neq 0$**,但** $A^n\xi = 0$**.求证** A **在某组基下的矩阵是**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

证　**由上题知** $\xi, A\xi, \cdots, A^{n-1}\xi$**线性无关,故组成线性空间** V **的基.因为**

$$A\xi = 0\cdot\xi + 1\cdot A\xi + 0\cdot A^2\xi + \cdots + 0\cdot A^{n-1}\xi$$
$$A(A\xi) = 0\cdot\xi + 0\cdot A\xi + 1\cdot A^2\xi + \cdots + 0\cdot A^{n-1}\xi$$
$$\cdots\cdots$$
$$A(A^{n-1}\xi) = 0\cdot\xi + 0\cdot A\xi + 0\cdot A^2\xi + \cdots + 0\cdot A^{n-1}\xi$$

故 A **在这组基下的矩阵为**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12. 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间 . 证明: V 的与全体线性变换可以交换的线性变换是数乘变换 .

证　因为在某组确定的基下,线性变换与 n 级方阵的对应是 1 - 1 对应的,又因为与一切 n 级方阵可交换的方阵必是数量矩阵 kE,从而与一切线性变换可交换的线性变换必是数乘变换 kE .

13. $\mathscr{A}$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换 . 证明:如果 $\mathscr{A}$ 在任意一组基下的矩阵都相同,那么 $\mathscr{A}$ 是数乘变换 .

证　设 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 $A = (a_{ij})_{n\times n}$,只要证明 A 为数量矩阵即可 . 设 X 为任一非退化方阵,$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)X$,则 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 也是一组基,$\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵是 $X^{-1}AX$,从而有 $A = X^{-1}AX$,即 $XA = AX$. 这说明 A 与一切非退化矩阵可交换 .

若取 $X_1 = \mathrm{diag}(1, 2, \cdots, n)$,则由 $AX_1 = X_1A$ 知 $a_{ij} = 0\ (i \neq j)$,所以

$$A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$$

再取

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

由 $AX_2 = X_2A$ 知 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$,故 A 为数量矩阵,从而 $\mathscr{A}$ 为数乘变换 .

14. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是四维线性空间 V 的一组基,已知线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\eta_1 = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_4, \eta_2 = 3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \eta_3 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4, \eta_4 = 2\varepsilon_4$ 下的矩阵;

2) 求 $\mathscr{A}$ 的核与值域;

3) 在 $\mathscr{A}$ 的核中选一组基,把它扩充成 V 的一组基,并求 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵;

4) 在 $\mathscr{A}$ 的值域中选一组基,把它扩充成 V 的一组基,并求 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵.

解　记 $\mathscr{A}$ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的矩阵为 A.

1) 因为 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)X$, 故 $\mathscr{A}$ 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的矩阵为

$$B = X^{-1}AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{8}{3} & -\frac{16}{3} & \frac{40}{3} & \frac{40}{3} \\ 0 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

2) 先求 $\mathscr{A}^{-1}(0)$. 设 $\xi \in \mathscr{A}^{-1}(0)$, 它在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标为 $(x_1, x_2, x_3, x_4)'$, $\mathscr{A}\xi$ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标为 $(0,0,0,0)'$, 于是

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

该方程组的通解为

$$x_1 = -2t_1 - t_2, \quad x_2 = -\frac{3}{2}t_1 - 2t_2, \quad x_3 = t_1, \quad x_4 = t_2 \quad (t_1, t_2 \text{ 任意})$$

于是

$$\xi = (-2t_1 - t_2)\varepsilon_1 + \left(-\frac{3}{2}t_1 - 2t_2\right)\varepsilon_2 + t_1\varepsilon_3 + t_2\varepsilon_4 =$$

$$t_1\left(-2\varepsilon_1+\frac{3}{2}\varepsilon_2+\varepsilon_3\right)+t_2(-\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_4)\quad(t_1,t_2\text{ 任意})$$

故 $\alpha_1=-2\xi_1-\frac{3}{2}\xi_2+\xi_3$, $\alpha_2=-\xi_1-2\xi_2+\xi_4$ 是 $A^{-1}(0)$ 的一组基,且 $A^{-1}(0)=L(\alpha_1,\alpha_2)$.

由于 $\operatorname{rank}A=2$,且 A 的第 1,2 列构成列向量组的一个极大线性无关组,所以 $A\xi_1, A\xi_2, A\xi_3, A\xi_4$ 的秩为 2,且 $A\xi_1, A\xi_2$ 是一个极大线性无关组 .从而

$$A(V)=L(A\varepsilon_1,A\varepsilon_2,A\varepsilon_3,A\varepsilon_4)=L(A\varepsilon_1,A\varepsilon_2)$$

其中 $$A\varepsilon_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+2\varepsilon_4,\quad A\varepsilon_2=2\varepsilon_2+2\varepsilon_3-2\varepsilon_4$$

是 $A(V)$ 的基 .

3) 由 2) 知 α_1,α_2 是 $A^{-1}(0)$ 的一组基,易知 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\alpha_1,\alpha_2$ 是 V 的一组基 .因为

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\alpha_1,\alpha_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)D$$

其中 $$D=\begin{pmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&-\frac{3}{2}&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

故 A 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\alpha_1,\alpha_2$ 下的矩阵为

$$B=D^{-1}AD=\begin{pmatrix}5&2&0&0\\\frac{9}{2}&1&0&0\\1&2&0&0\\2&-2&0&0\end{pmatrix}$$

4) 由 2) 知 $A\varepsilon_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+2\varepsilon_4$, $A\varepsilon_2=2\varepsilon_2+2\varepsilon_3-2\varepsilon_4$ 是 $A(V)$ 的一组基,又易知 $A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是 V 的一组基 .由于

$$(A\varepsilon_1,A\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)D_1$$

其中 $$D_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\1&2&1&0\\2&-2&0&1\end{pmatrix}$$

故 A 在基 $A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的矩阵为

$$C = D_1^{-1} A D_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ \frac{9}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

15. **给定 P^3 的两组基**

$$\varepsilon_1 = (1,0,1) \qquad \eta_1 = (1,2,-1)$$
$$\varepsilon_2 = (2,1,0) \qquad \eta_2 = (2,2,-1)$$
$$\varepsilon_3 = (1,1,1) \qquad \eta_3 = (2,-1,-1)$$

定义线性变换 A:

$$A\varepsilon_i = \eta_i, \qquad i = 1,2,3$$

1) **写出由基** $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ **到基** η_1, η_2, η_3 **的过渡矩阵**;

2) **写出** A **在基** $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ **下的矩阵**;

3) **写出** A **在基** η_1, η_2, η_3 **下的矩阵**.

解　1) **取** P^3 **的基** $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, **则有**

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (e_1, e_2, e_3)A, \quad (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (e_1, e_2, e_3)B$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

于是$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)A^{-1}B$,**即由基** $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ **到基** η_1, η_2, η_3 **的过渡矩阵为**

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

2) **由于**　$A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)X$

所以 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为 X.

3) 又有

$$\mathscr{A}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \mathscr{A}[(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)X] = \mathscr{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)X = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)X$$

即 $\mathscr{A}$ 在基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵仍为 X.

16. 证明:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$$

相似,其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

证 设

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

则
$$\mathscr{A}(\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \cdots, \varepsilon_{i_n}) = (\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \cdots, \varepsilon_{i_n})\begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$$

因为$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$是线性变换 $\mathscr{A}$ 在不同基下的矩阵,故它们相似.

17. 如果 A 可逆,证明:AB 与 BA 相似.

证 因为 A 可逆,故存在 A^{-1},从而

$$A^{-1}(AB)A = (A^{-1}A)(BA) = BA$$

所以 AB 与 BA 相似.

18. 如果 A 与 B 相似,C 与 D 相似,证明 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}$ 相似.

证　因为 $B = X^{-1}AX, D = Y^{-1}CY$,所以

$$\begin{pmatrix} X & O \\ O & Y \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & O \\ O & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{-1}AX & O \\ O & Y^{-1}CY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}$$

故$\begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}$相似.

19. 求复数域上线性空间 V 的线性变换 A 的特征值与特征向量,已知 A 在一组基下的矩阵为:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;　　2) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;　　4) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;　　6) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$;

7) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$.

解　1) 设 A 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 下的矩阵为 A.因为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -4 \\ -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 7)(\lambda + 2)$$

所以特征值为 $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = -2$.

当 $\lambda_1 = 7$ 时,解方程组

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

求得它的基础解系是$(1, 1)'$.因此,对应 $\lambda_1 = 7$ 的特征向量为 $\xi_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

当 $\lambda_2 = -2$ 时,解方程组

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

求得它的基础解系是$(4, -5)'$.因此,对应 $\lambda_2 = -2$的特征向量为 $\xi_2 = 4\varepsilon_1 - 5\varepsilon_2$.

综上可知 A 的特征值为 $7, -2$ 对应的特征向量为 ξ_1, ξ_2.

2) 设 $\mathcal{A}$ 在基 ε_1, ε_2 下的矩阵为 A. 因为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -a \\ a & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a^2$$

当 $a = 0$ 时,特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. 解方程组

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

它的基础解系是$(1, 0)'$, $(0, 1)'$. 因此对应$\lambda_1 = 0$的两个线性无关的特征向量为 $\xi_1 = \varepsilon_1$, $\xi_2 = \varepsilon_2$.

当 $a \neq 0$ 时,特征值为 $\lambda_1 = a\mathrm{i}$, $\lambda_2 = -a\mathrm{i}$.

当 $\lambda_1 = a\mathrm{i}$ 时,解方程组

$$\begin{cases} a\mathrm{i}x_1 - ax_2 = 0 \\ ax_1 + a\mathrm{i}x_2 = 0 \end{cases}$$

它的基础解系是$(-\mathrm{i}, 1)'$. 因此对应的特征向量为 $\eta_1 = -\mathrm{i}\varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

当 $\lambda_2 = -a\mathrm{i}$ 时,解方程组

$$\begin{cases} -a\mathrm{i}x_1 - ax_2 = 0 \\ ax_1 - a\mathrm{i}x_2 = 0 \end{cases}$$

它的基础解系是$(\mathrm{i}, 1)'$. 因此对应的特征向量为 $\eta_2 = \mathrm{i}\varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

综上可知,当 $a = 0$ 时 $\mathcal{A}$ 的特征值为 0, 对应的线性无关的特征向量为 ξ_1, ξ_2. 当 $a \neq 0$ 时,$\mathcal{A}$ 的特征值为 $a\mathrm{i}$, $-a\mathrm{i}$,对应的特征向量分别为 η_1, η_2.

3) 设 $\mathcal{A}$ 在基 ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 下的矩阵为 A. 因为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3(\lambda + 2)$$

所以特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -2$.

当 $\lambda_1 = 2$ 时,解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

它的基础解系是$(1, 1, 0, 0)'$, $(1, 0, 1, 0)'$, $(1, 0, 0, 1)'$. 因此对应特征值 2 的三个线性无关的特征向量为 $\xi_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\xi_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$, $\xi_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_4$.

当 $\lambda_4 = -2$ 时,解方程组

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

它的基础解系为 $(1, -1, -1, -1)'$. 因此对应特征值 -2 的线性无关的特征向量为 $\xi_4 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4$.

综上, A 的特征值为 2(三重), -2, 对应的特征向量分别为 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$.

4) 设 A 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为 A. 因为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda + 4 = (\lambda - 2)(\lambda - 1 - \sqrt{3})(\lambda - 1 + \sqrt{3})$$

所以特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1 + \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 1 - \sqrt{3}$.

对应 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量为 $\xi_1 = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2$.

对应 $\lambda_2 = 1 + \sqrt{3}$ 的特征向量为 $\xi_2 = 3\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + (2 - \sqrt{3})\varepsilon_3$.

对应 $\lambda_3 = 1 - \sqrt{3}$ 的特征向量为 $\xi_3 = 3\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + (2 + \sqrt{3})\varepsilon_3$.

综上, A 的特征值为 $2, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}$, 对应的特征向量分别为 ξ_1, ξ_2, ξ_3.

5) 设 A 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为 A. 因为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

所以特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.

对应 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$, $\xi_2 = \varepsilon_2$.

对应 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量为 $\xi_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$.

6) 设 A 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为 A. 因为

$$|\lambda E - A| = \lambda(\lambda - \sqrt{14}\mathrm{i})(\lambda + \sqrt{14}\mathrm{i})$$

所以特征值为 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{14}\mathrm{i}$, $\lambda_3 = -\sqrt{14}\mathrm{i}$.

对应 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量为 $\xi_1 = 3\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$.

对应 $\lambda_2 = \sqrt{14}\mathrm{i}$ 的特征向量为 $\xi_2 = (6 + \sqrt{14}\mathrm{i})\varepsilon_1 + (-2 + 3\sqrt{14}\mathrm{i})\varepsilon_2 - 10\varepsilon_3$.

对应$\lambda_3 = -\sqrt{14}\mathrm{i}$的特征向量为$\xi_3 = (6-\sqrt{14}\mathrm{i})\varepsilon_1 + (-2-3\sqrt{14}\mathrm{i})\varepsilon_2 - 10\varepsilon_3$.

7) 设$\mathcal{A}$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下的矩阵为$A$.因为

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

所以特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$.

对应特征值1的线性无关特征向量为$\xi_1 = 3\varepsilon_1 - 6\varepsilon_2 + 20\varepsilon_3$.

对应特征值-2的线性无关特征向量为$\xi_2 = \varepsilon_3$.

20. 在上题中哪些变换的矩阵可以在适当的基下变成对角形?在可以化成对角形的情况,写出相应的基变换的过渡矩阵T,并验算$T^{-1}AT$.

解　线性变换的矩阵在某一组基下的对角形的充分必要条件是有n个线性无关的向量,从而上题中1)～6)可以化为对角形,而7)不能.下面分别求过渡矩阵T.

1) $(\xi_1, \xi_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$,即过渡矩阵为$T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$,且有

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2) 当$a = 0$时,已是对角形.

当$a \neq 0$时,$(\xi_1, \xi_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,过渡矩阵为$T = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,且有

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\mathrm{i}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -a\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

3) $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)T$,其中

过渡矩阵 $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 且 $T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

验算得
$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

4) $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)T$, **其中**

过渡矩阵 $T=\begin{pmatrix}2&3&3\\-1&-1&-1\\0&2-\sqrt{3}&2+\sqrt{3}\end{pmatrix}$ **且** $T^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-3&0\\\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}&1+\frac{2\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{3}}{6}\\\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}&1-\frac{2\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{6}\end{pmatrix}$

验算得
$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1+\sqrt{3}&0\\0&0&1-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

5) $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)T$, **其中**

过渡矩阵 $T=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$, **且** $T^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

验算得
$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

6) $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_2)T$, **其中**

过渡矩阵 $T=\begin{pmatrix}3&6+\sqrt{14}\mathrm{i}&6-\sqrt{14}\mathrm{i}\\-1&-2+3\sqrt{14}\mathrm{i}&-2-3\sqrt{14}\mathrm{i}\\2&-10&-10\end{pmatrix}$ **且**

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}60&-20&40\\6-\sqrt{14}\mathrm{i}&-2-3\sqrt{14}\mathrm{i}&-10\\6+\sqrt{14}\mathrm{i}&-2+3\sqrt{14}\mathrm{i}&-10\end{pmatrix}$$

验算得
$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\sqrt{14}\mathrm{i}&0\\0&0&-\sqrt{14}\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

21. 在 $P[x]_n$ 中($n>1$),求微分变换 D 的特征多项式,并证明,D 在任何一组基下的矩阵都不可能是对角矩阵.

解　取基 $1, x, \frac{x^2}{2!}, \cdots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$,则 D 在此基下的矩阵为

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

从而

$$|\lambda E-D|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^n$$

故 D 的特征值为 $\lambda=0$(n 重),解方程组

$$-Dx=0$$

它的基础解系为 $(1, 0, \cdots, 0)'$. 故对应特征值 0 的线性无关特征向量为

$$\xi=1\cdot 1+0\cdot x+0\cdot\frac{x^2}{2!}+\cdots+0\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=1$$

由于 D 对应 n 重特征值 0 只有一个线性无关的特征向量,故 D 在任一组基下的矩阵都不可能为对角形.

22. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,求 A^k.

解　因为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 & -2 \\ 0 & \lambda+3 & -4 \\ 0 & -4 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+5)$$

所以矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=5, \lambda_3=-5$.

可求得 A 对应特征值 1,5, -5 的特征向量分别为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

令 $T=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}$,则 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&-5\end{pmatrix}=B$,于是 $A=TBT^{-1}$,故

$$A^k=(TBT^{-1})^k=\underbrace{(TBT^{-1})(TBT^{-1})\cdots(TBT^{-1})}_{k个}=$$

$$TB^kT^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5^k&0\\0&0&(-5)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\0&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1&2\cdot5^{k-1}[1+(-1)^{k+1}]&5^{k-1}[4+(-1)^k]-1\\0&5^{k-1}[1+4(-1)^k]&2\cdot5^{k-1}[1+(-1)^{k+1}]\\0&2\cdot5^{k-1}[1+(-1)^{k+1}]&5^{k-1}[4+(-1)^k]\end{pmatrix}$$

23. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是四维线性空间 V 的一组基,线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}5&-2&-4&3\\3&-1&-3&2\\-3&\frac{1}{2}&\frac{9}{2}&-\frac{5}{2}\\-10&3&11&-7\end{pmatrix}$$

1) 求 $\mathscr{A}$ 在基

$$\begin{aligned}\eta_1&=\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4\\\eta_2&=2\varepsilon_1+3\varepsilon_2+\varepsilon_3\\\eta_3&=\varepsilon_3\\\eta_4&=\varepsilon_4\end{aligned}$$

下的矩阵;

2) 求 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量;

3) 求一可逆矩阵 T,使 $T^{-1}AT$ 成对角形.

解　1) 因为

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&3&0&0\\1&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)X$$

而

$$X^{-1}AX=\begin{pmatrix}-3&2&0&0\\2&-1&0&0\\1&-1&1&0\\3&-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-2&-4&3\\3&-1&-3&2\\3&\frac{1}{2}&\frac{9}{2}&-\frac{5}{2}\\-10&3&11&-7\end{pmatrix}\times$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&3&0&0\\1&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&6&-5\\0&0&-5&4\\0&0&\frac{7}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&5&-2\end{pmatrix}$$

故 A 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}0&0&6&-5\\0&0&-5&4\\0&0&\frac{7}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&5&-2\end{pmatrix}$$

2) 因为相似矩阵有相同的特征多项式,所以

$$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-6&5\\0&\lambda&5&-4\\0&0&\lambda-\frac{7}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&-5&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)$$

即特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=1,\lambda_4=\frac{1}{2}$.

对应特征值 0 的两个线性无关的特征向量为

$$\xi_1=2\varepsilon_1+3\varepsilon_2+\varepsilon_3,\quad \xi_2=-\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_4$$

对应特征值 1 的特征向量为 $\xi_3=3\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-2\varepsilon_4$.

对应特征值 $\frac{1}{2}$ 的特征向量为 $\xi_4=-4\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3+6\varepsilon_4$.

3) 由 $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)T$ 得

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad 且\ T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

24. 1) 设 λ_1, λ_2 是线性变换 A 的两个不同特征值,$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量,证明:$\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 不是 A 的特征向量;

2) 证明:如果线性空间 V 的线性变换 A 以 V 中每个非零向量作为它的特征向量,那么 A 是数乘变换 .

证　1) 因为 $A\varepsilon_1 = \lambda_1\varepsilon_1$, $A\varepsilon_2 = \lambda_2\varepsilon_2$,且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$,所以

$$A(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = A\varepsilon_1 + A\varepsilon_2 = \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2$$

反证 . 若 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 是 A 的特征向量,即

$$A(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

则 $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$,即 $(\lambda_1 - \lambda)\varepsilon_1 + (\lambda_2 - \lambda)\varepsilon_2 = 0$.

由于 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 线性无关,故有 $\lambda_1 - \lambda = 0$, $\lambda_2 - \lambda = 0$,即 $\lambda_1 = \lambda_2$ 与题设矛盾 . 故 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 不可能是 A 的特征向量 .

2) 取 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$,并设 $A\varepsilon_i = \lambda_i\varepsilon_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$.

由 1) 知 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = k$ (因为若当 $i \neq j$ 时,$\lambda_i \neq \lambda_j$,则 $\varepsilon_i + \varepsilon_j$ 也不是特征向量,与题设矛盾) . 从而对任何向量 α 都有 $A\alpha = \lambda\alpha$,故 A 为数乘变换 .

25. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间,A, B 是 V 的线性变换,且 $AB = BA$. 证明:

1) 如果 λ_0 是 A 的一特征值,那么 V_{λ_0} 是 B 的不变子空间;

2) A, B 至少有一个公共的特征向量 .

证　1) 设 $\xi \in V_{\lambda_0}$,则有 $A\xi = \lambda_0\xi$,从而

$$A(B\xi) = (AB)\xi = (BA)\xi = B(A\xi) = B(\lambda_0\xi) = \lambda_0(B\xi)$$

即有 $B\xi \in V_{\lambda_0}$,故 V_{λ_0} 是 B 的不变子空间 .

2) 由于 V_{λ_0} 是 B 的不变子空间,记 $B|V_{\lambda_0} = B_0$,在复数域上,B_0 必有特征值 μ,并存在非零向量 $\alpha \in V_{\lambda_0}$,使 $B_0\alpha = \mu\alpha$,故 $B\alpha = B_0\alpha = \mu\alpha$.

又 $A\alpha = \lambda_0\alpha$,所以 α 是 A 与 B 的公共特征向量 .

26. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间,而线性变换 A 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵是一若尔当块 . 证明:

1) V 中包含 ε_1 的 A-子空间只有 V 自身;

2) V 中任一非零 A-子空间都包含 ε_n;

3) V 不能分解成两个非平凡的 A-子空间的直和.

证 1) 根据题设

$$A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

即 $A\varepsilon_1 = \lambda\varepsilon_1 + \varepsilon_2, A\varepsilon_2 = \lambda\varepsilon_2 + \varepsilon_3, \cdots, A\varepsilon_{n-1} = \lambda\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n, A\varepsilon_n = \lambda\varepsilon_n$

或 $\varepsilon_2 = A\varepsilon_1 - \lambda\varepsilon_1, \varepsilon_3 = A\varepsilon_2 - \lambda\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n = A\varepsilon_{n-1} - \lambda\varepsilon_{n-1}, A\varepsilon_n = \lambda\varepsilon_n$

令 W 是 V 的包含 ε_1 的 A-子空间,则 $A\varepsilon_1, \lambda\varepsilon_1 \in W$,因而 $\varepsilon_2 \in W$. 同理有 $A\varepsilon_2, \lambda\varepsilon_2 \in W$,故 $\varepsilon_3 \in W$. 依此类推可得 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n \in W$,因而 $W = V$.

2) 设 V_0 是任一非零的不变子空间,$\alpha \in V_0$, $\alpha \neq 0$. 设 $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$. 不失一般性,设 $a_1 \neq 0$,则

$$\begin{aligned} A\alpha = & a_1A\varepsilon_1 + a_2A\varepsilon_2 + \cdots + a_nA\varepsilon_n = \\ & a_1(\lambda\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + a_2(\lambda\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \cdots + a_n(\lambda\varepsilon_n) = \\ & \lambda\alpha + a_1\varepsilon_2 + a_2\varepsilon_3 + \cdots + a_{n-1}\varepsilon_n \end{aligned}$$

令 $\beta = a_1\varepsilon_2 + a_2\varepsilon_3 + \cdots + a_{n-1}\varepsilon_n$,由 $A\alpha, \lambda\alpha \in V_0$ 知 $\beta \in V_0$. 再求 $A\beta$,可推得 $a_1\varepsilon_3 + a_2\varepsilon_4 + \cdots + a_{n-2}\varepsilon_n \in V_0$, $\cdots$, 继续作下去,最后得 $a_1\varepsilon_n \in V_0$,故 $\varepsilon_n \in V_0$.

3) 设 V_1, V_2 是任意两个非平凡的不变子空间. 由 2) 知 $\varepsilon_n \in V_1$,且 $\varepsilon_n \in V_2$,则 $V_1 \cap V_2$ 至少包含基向量 $\varepsilon_n \neq 0$,故 V 不能分解成两个非平凡的子空间的直和.

27. 求下列矩阵的最小多项式.

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

解 1) 可求得 A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

由于 A的最小多项式为$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$的因式,计算得 $A - E \neq O$, $A + E \neq O$,而$(A - E)(A + E) = O$.因此 A的最小多项式为$(\lambda - 1)(\lambda + 1)$.

2) 可求得 A的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & \lambda - 3 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & \lambda + 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^4$$

由于 A的最小多项式为λ^4 的因式,计算得 $A \neq O$, $A^2 = O$.因此 A的最小多项式为 λ^2 .

(二) 第七章补充题

1. 设 A, B 是线性变换,$A^2 = A$, $B^2 = B$.证明:

1) 如果$(A + B)^2 = A + B$,那么 $AB = O$;

2) 如果 $AB = BA$,那么$(A + B - AB)^2 = A + B - AB$.

证　1) 由假设 $A^2 = A$, $B^2 = B$, $(A + B)^2 = A + B$,从而

$$A + B = (A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A + BA + AB + B$$

于是 $AB + BA = O$.

又有

$$2AB = AB + AB = AB - BA = A^2B - BA^2 =$$
$$A^2B + ABA = A(AB + BA) = AO = O$$

故 $AB = O$.

2) 由假设 $A^2 = A$, $B^2 = B$, $AB = BA$,从而

$$(A + B - AB)^2 = (A + B - AB)(A + B - BA) =$$
$$A + BA - ABA + AB + B - AB - ABA - BA + ABA =$$
$$A - AAB + B = A + B - AB$$

2. 设 V是数域 P 上 n维线性空间 .证明:由 V的全体线性变换组成的线性空间是 n^2 维的 .

证　因为 V的全体线性变换组成的线性空间与 $P^{n\times n}$ 同构,而 $P^{n\times n}$ 是 n^2 维的,故 V的全体线性变换组成的线性空间也是 n^2 维的 .

3. 设 $\mathscr{A}$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换. 证明:

1) 在 $P[x]$ 中有一次数 $\leq n^2$ 的多项式 $f(x)$,使 $f(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$;

2) 如果 $f(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$, $g(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$,那么 $d(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$,这里 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式;

3) $\mathscr{A}$ 可逆的充分必要条件是,有一常数项不为零的多项式 $f(x)$ 使 $f(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$.

证　1) 因为 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换组成的线性空间是 n^2 维的,所以 n^2+1 个线性变换 $\mathscr{A}^{n^2}, \mathscr{A}^{n^2-1}, \cdots, \mathscr{A}, \mathscr{E}$ 一定线性相关,即存在不全为零的数 $a_{n^2}, a_{n^2-1}, \cdots, a_1, a_0$,使

$$a_{n^2}\mathscr{A}^{n^2} + a_{n^2-1}\mathscr{A}^{n^2-1} + \cdots + a_1\mathscr{A} + a_0\mathscr{E} = \mathscr{O}$$

令
$$f(x) = a_{n^2}x^{n^2} + a_{n^2-1}x^{n^2-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

由于 $a_{n^2}, a_{n^2-1}, \cdots, a_1, a_0$ 不全为零,所以 $(f(x)) \leq n^2$. 也就是说在 $P[x]$ 中有一次数 $\leq n^2$ 的多项式 $f(x)$,使 $f(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$.

2) 由题设知存在 $u(x)$, $v(x)$ 使

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$$

因为 $f(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$, $g(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$,所以

$$d(\mathscr{A}) = u(\mathscr{A})f(\mathscr{A}) + v(\mathscr{A})g(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$$

3) 必要性. 由 1) 知在 $P[x]$ 中存在一次数 $\leq n^2$ 的多项式 $f(x)$,使 $f(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$,即

$$a_{n^2}\mathscr{A}^{n^2} + a_{n^2-1}\mathscr{A}^{n^2-1} + \cdots + a_1\mathscr{A} + a_0\mathscr{E} = \mathscr{O}$$

若 $a_0 \neq 0$,则 $f(x) = a_{n^2}x^{n^2} + a_{n^2-1}x^{n^2-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 即为所求;

若 $a_0 = 0$,因为 $a_i(i = 0,1,\cdots,n^2)$ 不全为零,令 a_j 是不为零的系数中下标最小的那一个,则

$$a_{n^2}\mathscr{A}^{n^2} + a_{n^2-1}\mathscr{A}^{n^2-1} + \cdots + a_j\mathscr{A}^j = \mathscr{O}$$

因为 $\mathscr{A}$ 可逆,用 $(\mathscr{A}^j)^{-1}$ 右乘上式两边,便得

$$a_{n^2}\mathscr{A}^{n^2-j} + a_{n^2-1}\mathscr{A}^{n^2-j-1} + \cdots + a_j\mathscr{E} = \mathscr{O}$$

令 $f(x) = a_{n^2}x^{n^2-j} + a_{n^2-1}x^{n^2-j-1} + \cdots + a_j$,则 $f(x)$ 即为所求.

充分性. 设有一常数项不为零的多项式 $f(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0$ $(a_0 \neq 0)$,使 $f(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$,即

$$a_m\mathscr{A}^m + a_{n-1}\mathscr{A}^{m-1} + \cdots + a_1\mathscr{A} + a_0\mathscr{E} = \mathscr{O}$$

则有
$$a_m\mathscr{A}^m + a_{n-1}\mathscr{A}^{m-1} + \cdots + a_1\mathscr{A} = -a_0\mathscr{E}$$

即
$$\frac{-1}{a_0}(a_m\mathscr{A}^{m-1} + \cdots + a_1\mathscr{E})\cdot\mathscr{A} = \mathscr{E}$$

故 A 可逆.

4. 设 A 是线性空间 V 上的可逆线性变换.

1) 证明: A 的特征值一定不为 0;

2) 证明:如果 λ 是 A 的特征值,那么 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.

证　1) 设可逆线性变换 A 对应的矩阵是 A, A 的所有特征值的积等于 $|A| \neq 0$,故 A 的特征值一定不为零.

2) 设 λ 是 A 的特征值, ξ 是 A 的特征值 λ 对应的特征向量,即 $A\xi = \lambda\xi$. 用 A^{-1} 作用,得 $\xi = \lambda(A^{-1})\xi$,由 1) 知, $\lambda \neq 0$,所以 $A^{-1}\xi = \frac{1}{\lambda}\xi$,即 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.

5. 设 A 是线性空间 V 上的线性变换,证明: A 的行列式为零的充分必要条件是 A 以零作为一个特征值.

证　设线性变换 A 的矩阵为 A,则 A 的特征值之积为 $|A|$. 令 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的所有特征值,则 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|$,于是

$$|A| = 0 \quad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = 0 \quad \text{至少有一个 } \lambda_i = 0$$

即 A 以零作为一个特征值.

6. 设 A 是一 n 级下三角矩阵,证明:

1) 如果 $a_{ii} \neq a_{jj}$ 当 $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \cdots, n$),那么 A 相似于一对角矩阵;

2) 如果 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$,而至少有一 $a_{i_0 j_0} \neq 0$ ($i_0 > j_0$),那么 A 不与对角矩阵相似.

证　1) 因为 A 是下三角矩阵,所以

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn})$$

又由 $a_{ii} \neq a_{jj}$ ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, \cdots, n$) 知 A 有 n 个不同的特征值,故矩阵 A 相似于对角矩阵.

2) 假定 A 与对角阵

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

相似,则它们有相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 因为 A 的特征多项式 $f(\lambda) = (\lambda - a_{11})^n$,所以 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = a_{11}$,从而

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{11} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{11} \end{pmatrix} = a_{11}E$$

对任意非退化矩阵 X,都有

$$X^{-1}BX = X^{-1}a_{11}EX = a_{11}X^{-1}EX = a_{11}E = B \neq A$$

故 A 不可能与对角矩阵相似.

7. 证明:对任一 $n\times n$ 复系数矩阵 A,存在可逆矩阵 T,使 $T^{-1}AT$ 是上三角矩阵.

证 由教材第七章的定理 14 知,每一个 $n\times n$ 复系数矩阵 A 都与一个若尔当矩阵 J 相似,即存在 n 级可逆矩阵 P,使得

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_3 \end{pmatrix},\ \text{其中}\ J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_i\times r_i} \quad (i = 1,2,\cdots,s)$$

构造 n 级矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix},\ \text{其中}\ B_i = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}_{r_i\times r_i} \quad (i = 1,2,\cdots,s)$$

容易验证

$$Q^{-1} = Q,\ \text{且}\ Q^{-1}JQ = J' = \begin{pmatrix} J_1' & & & \\ & J_2' & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s' \end{pmatrix}$$

其中 J_i' 为 J_i 的转置矩阵.令 $T = PQ$,则 $T^{-1}AT = J'$ 为一上三角矩阵.

8. 如果 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 是线性空间 V 的 s 个两两不同的线性变换,那么在 V 中必存在向量 α,使 $A_1\alpha, A_2\alpha, \cdots, A_s\alpha$ 也两两不同.

证 令 $V_{ij} = \{\alpha \mid \alpha\in V, A_i\alpha = A_j\alpha\}\ (i, j = 1,2,\cdots,s)$.

因为 $A_i0 = A_j0 = 0$,即 $0\in V_{ij}$,故 V_{ij} 非空.又因为 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 两两不同,所以对于每两个 A_i, A_j 而言,总存在一向量 β,使 $A_i\beta \neq A_j\beta$ (否则若对任一 $\beta\in V$ 都有 $A_i\beta = A_j\beta$,则 $A_i = A_j$,这与题设矛盾).所以 V_{ij} 是 V 的真子集.

设 $\alpha,\beta\in V_{ij}$,即 $A_i\alpha=A_j\alpha$, $A_i\beta=A_j\beta$,则有

$$A_i(\alpha+\beta)=A_j(\alpha+\beta),\quad 即\quad \alpha+\beta\in V_{ij}$$

$$A_i(k\alpha)=kA_i\alpha=kA_j\alpha=A_j(k\alpha),\quad 即\quad k\alpha\in V_{ij}$$

故 V_{ij} 是 V 的真子空间 .

1) 如果 V_{ij} 都是 V 的非平凡子空间,由第六章补充题 5 知,在 V 中至少有一向量不属于所有的 V_{ij} . 设 $\alpha\notin V_{ij}(i,j=1,2,\cdots,s)$,则

$$A_i\alpha\neq A_j\alpha\quad(i,j=1,2,\cdots,s)$$

也就是说存在向量 α,使 $A_1\alpha$, $A_2\alpha$, $\cdots$, $A_s\alpha$ 两两不同 .

2) 如果$\{V_{ij}\}$中有 V 的平凡子空间 $V_{i_0j_0}$,则 $V_{i_0j_0}$ 只能是零空间,对于这种 $V_{i_0j_0}$,只要 $\alpha\neq 0$ 就有 $A_i\alpha\neq A_j\alpha$,故这样的 $V_{i_0j_0}$ 可以去掉,考察其余的非平凡子空间,问题归于 1),即可知存在向量 α,使 $A_1\alpha$, $A_2\alpha$, $\cdots$, $A_s\alpha$ 两两不同 .

9. 设 A 是有限维线性空间 V 的线性变换, W 是 V 的子空间, AW 表示由 W 中向量的像组成的子空间 . 证明:

$$维(AW)+维(A^{-1}(0)\cap W)=维(W)$$

证　设 $\dim W=m$, $\dim(A^{-1}(0)\cap W)=r$,任取 $A^{-1}(0)\cap W$ 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$,再扩充为 W 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_m$.

因为 $\varepsilon_i\in A^{-1}(0)\ (i=1,2,\cdots,r)$,所以 $A\varepsilon_i=0\ (i=1,2,\cdots,r)$. 从而

$$AW=L(A\varepsilon_1,\cdots,A\varepsilon_r,A\varepsilon_{r+1},\cdots,A\varepsilon_m)=L(A\varepsilon_{r+1},\cdots,A\varepsilon_m)$$

设 $l_{r+1}A\varepsilon_{r+1}+l_{r+2}A\varepsilon_{r+2}+\cdots+l_mA\varepsilon_m=0$,则

$$A(l_{r+1}\varepsilon_{r+1}+l_{r+2}\varepsilon_{r+2}+\cdots+l_m\varepsilon_m)=0$$

于是 $l_{r+1}\varepsilon_{r+1}+l_{r+2}\varepsilon_{r+2}+\cdots+l_m\varepsilon_m\in A^{-1}(0)\cap W$,从而

$$l_{r+1}\varepsilon_{r+1}+l_{r+2}\varepsilon_{r+2}+\cdots+l_m\varepsilon_m=l_1\varepsilon_1+\cdots+l_r\varepsilon_r$$

由 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_m$ 线性无关知

$$l_{r+1}=l_{r+2}=\cdots=l_n=0$$

故 $A\varepsilon_{r+1},A\varepsilon_{r+2},\cdots,A\varepsilon_m$ 线性无关,于是 $\dim(AW)=m-r$,从而

$$\dim(AW)+\dim(A^{-1}(0)\cap W)=\dim W$$

10. 设 A,B 是 n 维线性空间 V 的两个线性变换 . 证明:

$$AB\ 的秩\geq A\ 的秩+B\ 的秩-n$$

证　在 V 中取一组基,设在这组基下,线性变换 A,B 对应的矩阵分别为 A, B,则线性变换 AB 对应的矩阵为 AB .

因为线性变换 A,B,AB 的秩分别等于矩阵 A,B,AB 的秩,对于矩阵 A,B, AB 有

$$\operatorname{rank}(AB) \geq \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B - n$$

故对于线性变换 A, B, AB 有

$$AB \text{的秩} \geq A \text{的秩} + B \text{的秩} - n$$

11. 设 $A^2 = A$, $B^2 = B$. 证明:

1) A 与 B 有相同值域的充分必要条件是 $AB = B$, $BA = A$;

2) A 与 B 有相同的核的充分必要条件是 $AB = A$, $BA = B$.

证　1) 必要性. 若 $AV = BV$. 任取 $\alpha \in V$, 则 $B\alpha \in BV = AV$, 故存在向量 $\beta \in V$, 使 $B\alpha = A\beta$. 于是

$$AB\alpha = A^2\beta = A\beta = B\alpha$$

由 α 的任意性, 故有 $AB = B$. 同理可证 $BA = A$.

充分性. 若 $AB = B$, $BA = A$. 任取 $A\alpha \in AV \quad V$, 则有

$$A\alpha = BA\alpha = B(A\alpha) \in BV, \quad \text{即} \quad AV \quad BV$$

同理可证 $BV \quad AV$, 故 $AV = BV$.

2) 必要性. 若 $A^{-1}(0) = B^{-1}(0)$. 对于任意 $\beta \in V$, 作向量 $\beta - A\beta$. 因为

$$A(\beta - A\beta) = A\beta - A^2\beta = A\beta - A\beta = 0$$

所以 $\beta - A\beta \in A^{-1}(0) = B^{-1}(0)$. 从而

$$B(\beta - A\beta) = B\beta - BA\beta = 0, \quad \text{即} \quad B\beta = BA\beta$$

由 β 的任意性, 故有 $B = BA$. 作向量 $\beta - B\beta$, 类似的方法可以证明 $A = AB$.

充分性. 若 $A = AB$, $B = BA$. 任取 $\alpha \in A^{-1}(0)$, 由于

$$B\alpha = (BA)\alpha = B(A\alpha) = B(0) = 0$$

所以 $\alpha \in B^{-1}(0)$, 从而 $A^{-1}(0) \quad B^{-1}(0)$.

类似的方法可证 $B^{-1}(0) \quad A^{-1}(0)$, 因而有

$$A^{-1}(0) = B^{-1}(0)$$

六、学习效果检测题及答案

(一) 检测题

1. 判断下列变换是否为线性变换:

(1) 在 $P[t]_n$ 中, $A(f(t)) = a_m t^m$, " $f(t) \in P[t]_n$, $a_m t^m$ 是 $f(t)$ 的最高次数;

(2) 复数域 C 作为 C 上的线性空间, $\mathcal{A}(\alpha)=\bar{\alpha},\ \forall\ \alpha\in \mathbf{C}$;

(3) 复数域 C 作为 R 上的线性空间, $\mathcal{A}(\alpha)=\bar{\alpha},\ \forall\ \alpha\in \mathbf{C}$.

2. 在 $P^{n\times n}$ 中定义变换

$$\mathcal{A}(X)=AXB+CX+XD\quad (\forall\ X\in P^{n\times n};\ A,B,C,D\in P^{n\times n}\ 取定)$$

(1) 证明 $\mathcal{A}$ 是线性变换;

(2) 证明:当 $C=D=O$ 时, $\mathcal{A}$ 是可逆变换的充分必要条件是 A,B 都是可逆矩阵.

3. 已知 P^3 的线性变换

$$\mathcal{A}(a,b,c)=(a+b,a-c,c)\quad (\forall\ (a,b,c)\in P^3)$$

求 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,1,1)$ 下的矩阵.

4. 已知 3 维线性空间 V 的基(Ⅰ): $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和基(Ⅱ):

$$\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3,\quad \beta_2=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3,\quad \beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$$

又 V 的线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}5 & 7 & -5\\ 0 & 4 & -1\\ 2 & 8 & 3\end{pmatrix}$$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 在基(Ⅱ)下的矩阵;

(2) 求元素 $\alpha=4\alpha_1-5\alpha_2-\alpha_3$ 在基(Ⅱ)下的坐标.

5. 已知 $P[t]_3$ 的基 $f_1(t)=-1+2t^2,\ f_2(t)=t+t^2,\ f_3(t)=3-t$, 且线性变换 $\mathcal{A}$ 满足

$$\mathcal{A}(f_1(t))=-5+3t^2,\quad \mathcal{A}(f_2(t))=-t+6t^2,\quad \mathcal{A}(f_3(t))=-5-t+9t^2$$

求 $\mathcal{A}$ 在基 $f_1(t),f_2(t),f_3(t)$ 下的矩阵.

6. 已知 $P[t]_4$ 的线性变换

$$\mathcal{A}(a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3)=(a_0+a_1)+(a_0-a_1)t+(a_2+a_3)t^2+(a_2-a_3)t^3$$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $1,t,t^2,t^3$ 下的矩阵;

(2) 判断 $\mathcal{A}$ 是否可逆,若可逆,求出 $\mathcal{A}^{-1}$.

7. 已知 P^4 的线性变换

$$\mathcal{A}(a,b,c,d)=(a+b-3c-d,3a-b-3c+4d,0,0)$$

求 $\mathcal{A}P^4$ 与 $\mathcal{A}^{-1}(0)$ 的基与维数.

8. 已知 $P[t]_3$ 的线性变换

$$\mathcal{A}(a_2t^2+a_1t+a_0)=(a_2-a_0)t^2+(a_0+a_1)t+(a_1+a_0)$$

求 $AP[t]_3$ 与 $A^{-1}(0)$ 的基与维数.

9. 求下列矩阵的特征值和特征向量,并判断矩阵可否对角化?若可以对角化,试求相似变换矩阵和相应的对角矩阵:

(1) $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$;　　(2) $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\4&-2&-8\\-4&0&-1\end{pmatrix}$.

10. 设 4 级实方阵 A 满足条件 $|A+\sqrt{3}E|=0$,且 $|A|=9$,求

(1) A^* 的一个特征值;　　(2) $|A|^2A^{-1}$ 的一个特征值.

11. 已知 0 是方阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&a\end{pmatrix}$ 的特征值,求 a 和方阵 A 的其他特征值.

12. 设 n 级方阵 A 的每行元素之和为 $a(a\neq0)$,且 $|A|=2a$,则 $(A^*)^*+2A^*-4E$ 的一个特征值为________.

13. 设 $A=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}$,求

(1) A 的特征值;　　(2) 再用之求方阵 $E+A^{-1}$ 的特征值.

14. 已知 $\lambda=0$ 是 $A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&1&k\\4&k&-3\end{pmatrix}$ 的特征值,判断 A 能否对角化,并说明理由.

15. 已知 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) 试确定参数 a,b 及特征向量 α 所对应的特征值;

(2) 问 A 能否相似于对角矩阵?说明理由.

16. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\a&-a&a\\3&-6&5\end{pmatrix}$, λ_0 是 A 的三重特征值,求 a 及 λ_0.

17. 已知 $A=\begin{pmatrix}0&-2&a\\1&3&5\\0&0&2\end{pmatrix}$,且 A 与对角矩阵相似,求 a.

18. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x 和 y 的值;　　(2) 求可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP = B$.

19. 设 3 级方阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$,与其对应的特征向量依次为 $\alpha_1 = (1,1,1)'$, $\alpha_2 = (1,2,4)'$, $\alpha_3 = (1,3,9)'$,且 $\beta = (1,1,3)'$.

(1) 将 β 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示;　　(2) 求 $A^n\beta$(n 为自然数).

20. 已知 3 级矩阵 A 与 3 维列向量 x,使得向量组 x, Ax, A^2x 线性无关,且满足 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$.

(1) 记 $P = (x, Ax, A^2x)$,求 3 级矩阵 B,使 $A = PBP^{-1}$;

(2) 计算行列式 $|A + E|$.

21. 设 A 是 n 级实对称矩阵,P 是 n 级可逆矩阵,已知 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量,则矩阵 $(P^{-1}AP)'$ 属于特征值 λ 的特征向量是________.

(A) $P^{-1}\alpha$;　　(B) $P'\alpha$;　　(C) $P\alpha$;　　(D) $(P^{-1})'\alpha$.

22. 已知 P^3 的线性变换

$$\mathcal{A}(a, b, c) = (3a + b, -a + b, -a - b + 2c)$$

求 $\mathcal{A}$ 的特征值与特征向量.

23. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 的线性变换,且 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}$(称之为对合变换). 证明:

(1) $\mathcal{A}$ 的特征值为 ± 1;　　(2) $V = V_1 \oplus V_{-1}$.

24. 已知 P^3 的线性变换

$$\mathcal{A}(a, b, c) = (-2b - 2c, -2a + 3b - c, -2a - b + 3c)$$

求 P^3 的一组基,使 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为对角矩阵.

25. 已知 $P[t]_4$ 的线性变换

$$\mathcal{A}(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a - c) + (b - d)t + (c - a)t^2 + (d - b)t^3$$

求 $P[t]_4$ 的一组基,使 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为对角矩阵.

26. 已知 $P^{2\times 2}$ 的线性变换

$$\mathcal{A}(X) = MX - XM \quad \left(\forall X \in P^{2\times 2}, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

及子空间

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \middle| \ x_2 + x_3 = 0, x_i \in P \right\}$$

(1) 证明 W 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间;

(2) 将 A 看成 W 上的线性变换,求 W 的一组基,使 A 在该基下的矩阵为对角矩阵.

(二) 检测题答案

1. (1) 不是. 因为若取 $f_0(t) = t^2 + 2t + 1$, $g_0(t) = t^3 \in P[t]_3$, 则 $A(f_0(t) + g(t_0)) = t^3$, 而 $A(f_0(t)) + T(g_0(t)) = t^2 + t^3$, 可见 $A(f_0(t) + g_0(t)) \neq A(f_0(t)) + A(g_0(t))$.

(2) 不是. 因为取 $k = \mathrm{i}, a = 1$ 时,有 $A(ka) = \overline{ka} = -\mathrm{i}$,而 $kA(a) = k\bar{a} = \mathrm{i}$, 可见 $A(ka) \neq kA(a)$.

(3) 是. 因为对任意 $a, b \in \mathrm{C}$ 和 $k \in \mathrm{R}$,有

$$A(a + b) = \overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b} = A(a) + A(b)$$

$$A(ka) = \overline{ka} = k\bar{a} = kA(a)$$

2. (1) 设 $X, Y \in P^{n\times n}$, $k, l \in P$,则

$$\begin{aligned}A(kX + lY) &= A(kX + lY)B + C(kX + lY) + (kX + lY)D = \\ &k(AXB + CX + XD) + l(AYB + CY + YD) = \\ &kA(X) + lA(Y)\end{aligned}$$

故 A 是线性变换.

(2) 当 $C = D = O$ 时,若 A, B 都是可逆矩阵,则对任意 $X \in P^{n\times n}$,有 $A^{-1}XB^{-1} \in P^{n\times n}$,使

$$A(A^{-1}XB^{-1}) = A(A^{-1}XB^{-1})B = X$$

即 A 是一个满射. 又当 $X, Y \in P^{n\times n}$, 且 $X \neq Y$ 时,有 $AXB \neq AYB$, 即 $A(X) \neq A(Y)$,因此 A 为双射,故 A 可逆.

反之,若 A 可逆. 反证. 若 A 不可逆,则存在非零矩阵 $X \in P^{n\times n}$,使 $AX = O$,于是 $A(X) = AXB = O$,即 A 不是单射,这与 A 可逆矛盾. 同理可证 B 也可逆.

3. 因为 $A(\alpha_1) = (1,1,0) = \alpha_2$, $A(\alpha_2) = (2,1,0) = \alpha_1 + \alpha_2$, $A(\alpha_3) = (2,0,1) = 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$,所以 A 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. (1) 因为$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$，其中 $P=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\3&2&1\end{pmatrix}$，所以 A 在基(Ⅱ)下的矩阵为

$$C=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&4\\18&14&2\\-18&-12&-3\end{pmatrix}$$

(2) $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}4\\-5\\-1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)P^{-1}\begin{pmatrix}4\\-5\\-1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}9\\-14\\0\end{pmatrix}$

从而 α 在基(Ⅱ)下的坐标为$(9,-14,0)'$.

5. 取 $P[t]_3$ 的基 $1,t,t^2$，则有

$$(f_1,f_2,f_3)=(1,t,t^2)P,\quad A(f_1,f_2,f_3)=(1,t,t^2)A$$

其中
$$P=\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&1&-1\\2&1&0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}-5&0&-5\\0&-1&-1\\3&6&9\end{pmatrix}$$

于是 $A(f_1,f_2,f_3)=(f_1,f_2,f_3)P^{-1}A$，即 A 在基 $f_1(t),f_2(t),f_3(t)$ 下的矩阵为

$$B=P^{-1}A=\begin{pmatrix}2&3&5\\-1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

6. (1) 由于 $A(1)=1+t$, $A(t)=1-t$, $A(t^2)=t^2+t^3$, $A(t^3)=t^2-t^3$，所以 A 在基 $1,t,t^2,t^3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

(2) 由于 $|A|=4$，所以 A 可逆. 又 A^{-1} 在基 $1,t,t^2,t^3$ 下的矩阵为

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

任取 $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\in P[t]_4$,则

$$A^{-1}(f(t))=A^{-1}\left[(1,t,t^2,t^3)\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right]=(1,t,t^2,t^3)A^{-1}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{2}(a_0+a_1)+\frac{1}{2}(a_0-a_1)t+\frac{1}{2}(a_2+a_3)t^2+\frac{1}{2}(a_2-a_3)t^3$$

7. 取 P^4 的基 e_1,e_2,e_3,e_4,可求得 A 在该基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1\\3&-1&-3&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由于 $\operatorname{rank}A=2$,且 $(1,3,0,0)',(1,-1,0,0)'$ 是 A 的列向量组的一个极大线性无关组,所以 $\dim AP^4=2$,且 $e_1+3e_2=(1,3,0,0),e_1-e_2=(1,-1,0,0)$ 是 AP^4 的一组基.

求解 $Ax=0$ 得基础解系 $(3,3,2,0)',(-3,7,0,4)'$,故 $\dim A^{-1}(0)=2$,且 $3e_1+3e_2+2e_3=(3,3,2,0),-3e_1+7e_2+4e_4=(-3,7,0,4)$ 是 $A^{-1}(0)$ 的一组基.

8. 取 $P[t]_3$ 的基 $t^2,t,1$,则 A 在该基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

可求得 $\operatorname{rank}A=2$,且 $(1,0,0)',(0,1,1)'$ 是 A 的列向量的一个极大线性无关组,所以 $\dim AP[t]_3=2$,且 $A(1)=t^2,A(t)=t+1$ 是 $AP[t]_3$ 的一组基.

求解 $Ax=0$ 得基础解系 $(1,-1,1)'$,故 $\dim A^{-1}(0)=1$,且 t^2-t+1 是 $A^{-1}(0)$ 的基.

9. (1) A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-7$.对应 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的两个线性无关的特征向量为 $(-2,1,0)',(2,0,1)'$;对应 $\lambda_3=-7$ 的线性无关特征向量为 $(-1,-2,2)'$.

A 可对角化,可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix}-2&2&-1\\1&0&-2\\0&1&2\end{pmatrix}$ 使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-7\end{pmatrix}$.

(2) A的特征值为$\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.对应$\lambda_1=-2$的线性无关特征向量为$(0,1,0)'$;对应$\lambda_2=\lambda_3=1$只有一个线性无关的特征向量$(-3,-20,6)'$. A不可对角化.

10. (1) 因为$|A+\sqrt{3}E|=|A-(-\sqrt{3}E)|=0$,所以, $-\sqrt{3}$是A的一个特征值,于是$\dfrac{|A|}{-\sqrt{3}}=-3\sqrt{3}$是$A^*$的一个特征值.

(2) 由于$-\sqrt{3}$是A的一个特征值,所以$\dfrac{1}{-\sqrt{3}}$是A^{-1}的一个特征值,从而$\dfrac{|A|^2}{-\sqrt{3}}=\dfrac{81}{-\sqrt{3}}=-27\sqrt{3}$是$|A|^2A^{-1}$的一个特征值.

11. 因为0是A的特征值,所以$|A-0E|=|A|=0$,但$|A|=2(a-1)$,故$a=1$. 又由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-2)^2$$

知A的其他特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$.

12. 应填$2^{n-2}a^{n-1}$. 由A的每行元素之和为a得

$$A\begin{pmatrix}1\\ \cdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ \cdots\\ a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\ \cdots\\ 1\end{pmatrix}$$

即a是A的一个特征值. 又由$|A|=2a\neq 0$知A可逆,从而$A^*=|A|A^{-1}=2aA^{-1}$,于是

$$(A^*)^*=(2aA^{-1})^*=|2aA^{-1}|(2aA^{-1})^{-1}=$$

$$(2a)^n|A|^{-1}\frac{1}{2a}A=(2a)^{n-2}A$$

从而
$$(A^*)^*+2A^*-4E=(2a)^{n-2}A+4aA^{-1}-4E$$

故它的一个特征值为$(2a)^{n-2}a+4a\dfrac{1}{a}-4=2^{n-2}a^{n-1}$.

13. (1) 由于$|A-\lambda E|=-(\lambda-1)^2(\lambda+5)$,所以$A$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-5$.

(2) 设$Ax=\lambda x$,则$A^{-1}x=\dfrac{1}{\lambda}x$,故有$(E+A^{-1})x=x+\dfrac{1}{\lambda}x=\left(1+\dfrac{1}{\lambda}\right)x$,即$1+\dfrac{1}{\lambda}$是$E+A^{-1}$的特征值. 将$\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-5$代入得$E+A^{-1}$的特

征值为 2, 2, $\frac{4}{5}$.

14. 因为 0 是 A 的特征值,所以 $|A-0E|=|A|=0$,但 $|A|=-(k-1)^2$,所以 $k=1$. 此时求得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=1$. 由于对应 2 重特征值 0 只有一个线性无关的特征向量,所以 A 不可对角化.

15. (1) 由 $A\alpha=\lambda\alpha$,即

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{得} \begin{cases} 2-1-2=\lambda \\ 5+a-3=\lambda \\ -1+b+2=-\lambda \end{cases}$$

解得 $a=-3$, $b=0$, $\lambda=-1$.

(2) 由于 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=$ $-(\lambda+1)^3$,所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$. 可求得 $\operatorname{rank}(A+E)=2$,从而 A 对应三重特征值 -1 只有一个线性无关的特征向量,故 A 不可对角化.

16. 法 1 利用 $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33} \\ |A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 3\lambda_0=3-a+5 \\ \lambda_0^3=|A|=4a \end{cases}$,即

$\begin{cases} a=8-3\lambda_0 \\ a=\dfrac{\lambda_0^3}{4} \end{cases}$,从而 $\lambda_0^3+12\lambda_0-32=0$,整理得 $\lambda_0^3-2^3+12(\lambda_0-2)=0$,即 $(\lambda_0-2)(\lambda_0^2+2\lambda_0+16)=0$,求得 $\lambda_0=2$, $a=2$.

法 2 可求得 $|\lambda E-A|=(\lambda-2)[\lambda^2+(a-6)\lambda+2a]$.

因为 λ_0 是 A 的三重特征值,所以 $\lambda_0=2$. 又由 $\lambda^2+(a-6)\lambda+2a=(\lambda-2)^2$,解得 $a=2$.

17. $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & a \\ 1 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda-2)^2$,所以 A 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=2$. 由于 A 相似于对角矩阵,从而 A 对应 2 重特征值 2 应有 2 个线性无关的特征向量,也即 $\operatorname{rank}(A-2E)=1$,而

$$A-2E=\begin{pmatrix} -2 & -2 & a \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & a+10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故 $a=-10$.

18. (1) 因为 $A\sim B$,所以 $|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$,展开得

$$(-2-\lambda)[\lambda^2-(x+1)\lambda+x-2]=(-1-\lambda)(2-\lambda)(y-\lambda) \qquad (*)$$

即

$$-\lambda^3+(x-1)\lambda^2+(x+4)\lambda+4-2x=-\lambda^3+(y+1)\lambda^2+(2-y)\lambda-2y$$

比较两边同次幂系数得 $\begin{cases} x-1=y+1 \\ x+4=2-y \\ 4-2x=-2y \end{cases}$,解得 $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$ (或在($*$)式中令 $\lambda=0$ 得 $2(x-2)=2y$;令 $\lambda=-1$ 得 $0=4(-2-y)$,联立解得 $y=-2$, $x=0$).

(2) 由(1)知 $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. 可求得 A 对应特征值 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-2$ 的特征向量分别为

$$p_1=(0,-2,1)', \quad p_2=(0,1,1)', \quad p_3=(-1,0,1)'$$

故可逆矩阵 $P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,使得 $P^{-1}AP=B$.

19. (1) 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$,即 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2+3x_3=1 \\ x_1+4x_2+9x_3=3 \end{cases}$,由于

$$B=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-3r_2]{r_1-r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_2-2r_3 \\ r_1+r_3}]{r_3\times\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

所以 $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=1$,即 $\beta=2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$.

(2)

$$A^n\beta=2A^n\alpha_1-2A^n\alpha_2+A^n\alpha_3=2\alpha_1-2^{n+1}\alpha_2+3^n\alpha_3=\begin{bmatrix} 2-2^{n+1}+3^n \\ 2-2^{n+2}+3^{n+1} \\ 2-2^{n+3}+3^{n+2} \end{bmatrix}$$

注　也可以先求出 A^n,再求 $A^n\beta$,但这样做较麻烦.

20. (1) B 应满足 $AP = PB$. 由于

$$AP = A(x, Ax, A^2x) = (Ax, A^2x, A^3x) =$$

$$(Ax, A^2x, 3Ax - 2A^2x) = (x, Ax, A^2x)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

故

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$|A + E| = |PBP^{-1} + PP^{-1}| = |P||B + E||P^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

21. 应填(B). 由 $A\alpha = \lambda\alpha$ 得 $P'A(P')^{-1}P'\alpha = \lambda(P'\alpha)$, 即 $(P^{-1}AP)'(P'\alpha) = \lambda(P'\alpha)$, 故选(B).

22. 取 P^3 的基 $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, A 在该基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

由于 $|\lambda E - A| = (\lambda - 2)^3$, 所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, 可求得对应的线性无关特征向量为 $(-1,1,0)'$, $(0,0,1)'$. 故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. 对应的线性无关特征向量为 $-e_1 + e_2 = (-1,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, 全部特征向量为

$$k_1(-1,1,0) + k_2(0,0,1) \quad (k_1, k_2 \text{ 不全为零})$$

23. (1) 设 λ 是 A 的特征值, α 是对应的特征向量, 即 $A(\alpha) = \lambda\alpha$. 由 $A^2 = E$ 得

$$\lambda^2\alpha = A^2(\alpha) = E(\alpha) = \alpha$$

由 $\alpha \neq 0$ 知 $\lambda^2 = 1$, 即 $\lambda = \pm 1$.

(2) 对 $\forall \alpha \in V$, 有

$$\alpha = \frac{1}{2}(E + A)(\alpha) + \frac{1}{2}(E - A)(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2$$

其中 $\alpha_1 = \frac{1}{2}(E + A)(\alpha)$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}(E - A)(\alpha)$, 且由于

$$A(\alpha_1) = A\left[\frac{1}{2}(E + A)(\alpha)\right] = \frac{1}{2}(A + A^2)(\alpha) = \frac{1}{2}(A + E)(\alpha) = \alpha_1$$

$$A(\alpha_2) = A\left[\frac{1}{2}(E - A)(\alpha)\right] = \frac{1}{2}(A - A^2)(\alpha) = \frac{1}{2}(A - E)(\alpha) = -\alpha_2$$

所以 $\alpha_1 \in V_1$, $\alpha_2 \in V_{-1}$,**可见** $V = V_1 + V_{-1}$. **又对** $\forall \alpha \in V_1 \cap V_{-1}$,**有** $\alpha \in V_1$ **且** $\alpha \in V_{-1}$,**即有** $\alpha = A(\alpha) = -\alpha$,**于是** $\alpha = 0$,**从而** $V_1 \cap V_{-1} = \{0\}$,**故** $V = V_1 \oplus V_{-1}$.

24. **取** P^3 **的基** e_1, e_2, e_3,**可求得** A **在该基下的矩阵为**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

又有 $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,**使得** $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,**由** $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (e_1, e_2, e_3)P$ **得** P^3 **的基**

$$\alpha_1 = -e_1 + 2e_2 = (-1, 2, 0)$$
$$\alpha_2 = -e_1 + 2e_3 = (-1, 0, 2)$$
$$\alpha_3 = 2e_1 + e_2 + e_3 = (2, 1, 1)$$

A **在该基下的矩阵为** Λ

25. **取** $P[t]_4$ **的基** $1, t, t^2, t^3$,**则** A **在该基下的矩阵为**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可求得 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,**使得** $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

由 $(f_1, f_2, f_3, f_4) = (1, t, t^2, t^3)P$ **求得** $P[t]_4$ **的基**

$$f_1(t) = 1 + t^2,\quad f_2(t) = t + t^3,\quad f_3(t) = 1 - t^2,\quad f_4(t) = t - t^3$$

A **在该基下的矩阵为** Λ

26. (1) **对** $\forall X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in W$,**有**

$$A(X)=MX-XM=\begin{pmatrix}x_1-x_2 & x_4-x_1\\ x_1-x_4 & x_2-x_3\end{pmatrix}\in W$$

可见 W **是** A **的不变子空间**.

(2) **取** W **的基** $X_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$,**则有**

$$A(X_1)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=X_2$$

$$A(X_2)=\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}=2X_1-2X_3$$

$$A(X_3)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}=-X_2$$

可见 A **在基** X_1,X_2,X_3 **下的矩阵为**

$$A=\begin{pmatrix}0&2&0\\1&0&-1\\0&-2&0\end{pmatrix}$$

可求得 $P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$,**使得** $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

由$(Y_1,Y_2,Y_3)=(X_1,X_2,X_3)P$ **求得** $P^{2\times2}$ **的基**

$$Y_1=X_1+X_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$Y_2=-X_1-X_2+X_3=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$Y_3=-X_1+X_2+X_3=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

且 A **在该基下的矩阵为** Λ.

第 8 章 λ- 矩 阵

引入 λ-矩阵的目的,主要是为了研究矩阵在相似变换下的化简问题 . 直接处理矩阵的相似关系是比较困难的,本章将相似关系转化为等价关系来处理,即将矩阵 A 与 B 的相似转化为它们的特征矩阵 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 等价,而等价关系可以使用初等变换来研究,这样问题就变得比较具体了 .

一、内 容 提 要

1. λ-矩阵的概念

(1) 设 P 是一个数域, $a_{ij}(\lambda)$ $(i = 1,2,\cdots,s;\ j = 1,2,\cdots,n)$ 为数域 P 上的多项式,称形如

$$A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))_{s\times n} = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{s1}(\lambda) & a_{s2}(\lambda) & \cdots & a_{sn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

的矩阵为数域 P 上的一个 $s\times n$ 多项式矩阵,简称 λ-矩阵 . 当 $s = n$ 时,称 $A(\lambda)$ 为 n 级 λ-矩阵 .

(2) λ-矩阵可以进行加、减、乘及多项式乘以矩阵的运算,其运算法则与数字矩阵的相应运算法则相同,并有类似的运算性质 . λ-矩阵也有子式的概念,并且 n 级 λ-矩阵还可以有行列式、余子式、代数余子式及伴随矩阵等 .

(3) 如果 λ-矩阵中有一个 r 级子式不为零,而所有 $r+1$ 级子式(如果有的话) 全为零,则称 λ-矩阵的秩为 r . 如果 $s\times n$ 的 λ-矩阵的秩为 s,则称它是行满秩的;如果秩为 n,则称它为列满秩的;如果 n 级 λ-矩阵的秩为 n,则称它是满秩的 .

注 1. λ-矩阵的子式是 λ 的多项式 . 一个 λ 的多项式等于零是指任意数都是它的根,即它的系数都是零,这时常说它恒为零 . 任意 n 次多项式只能有 n 个根,所以它不为零,即

它不恒等于零.

2. 对于 n级矩阵 A,由于 $|\lambda E - A|$ 是 λ的 n次多项式,所以 A 的特征矩阵 $\lambda E - A$的秩为 n,也就是说不论 A 是否非退化,$\lambda E - A$ 总是满秩的.

(4) 设 $A(\lambda)$ 是 n级λ-矩阵,如果存在 n级λ-矩阵 $B(\lambda)$,使得

$$A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = E$$

则称 $A(\lambda)$ 是可逆的,又称 $B(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的逆矩阵.可逆λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的逆矩阵是惟一的,记为 $A^{-1}(\lambda)$.

(5) n级λ-矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充分必要条件是 $|A(\lambda)|$ 是一个非零的数.当 $A(\lambda)$ 可逆时,其逆矩阵为

$$A^{-1}(\lambda) = \frac{1}{|A(\lambda)|}A^*(\lambda)$$

其中 $A^*(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的伴随矩阵.

注　在数字矩阵中,n级矩阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$ (或 A 满秩).当λ-矩阵$A(\lambda)$ 可逆时,必有 $|A(\lambda)| \neq 0$,即 $A(\lambda)$ 是满秩的.但满秩的λ-矩阵不一定是可逆的,因为满秩λ-矩阵的行列式可以是不恒为零的λ的多项式;只有当它的行列式为非零的数(即零次多项式)时,才是可逆的.

2. λ-矩阵的等价

(1) 对λ-矩阵进行的以下三种变换分别称为λ-矩阵的初等行(列)变换:

1) 交换两行(列);

2) 以非零常数 k乘某一行(列),其中 $k \in P$;

3) 某一行(列)加另一行(列)的 $\varphi(\lambda)$ 倍,其中 $\varphi(\lambda)$ 是λ的多项式.

注　由于在λ-矩阵的第二类初等变换中,不允许用非常数的多项式乘或除某一行(列),这导致了λ-矩阵的初等变换与数字矩阵的初等变换在性质上很不相同(如标准形),应充分注意.

(2) 由 n级单位矩阵 E经过一次λ-矩阵的初等变换得到的矩阵称为初等λ-矩阵,共三类:

1) $P(i,j)$——交换 E的 i,j两行(列)所得的初等λ-矩阵;

2) $P(i(k))$——用 $k \neq 0$ 乘 E 的第 i行(列)所得的初等λ-矩阵;

3) $P(i, j(\varphi(\lambda)))$——将 E的第i行加上第j行的$\varphi(\lambda)$倍(或第 j列加上第i列的 $\varphi(\lambda)$ 倍)所得的初等λ-矩阵.

(3) 初等λ-矩阵具有如下性质:

1) 初等λ-矩阵都是可逆,且其逆矩阵仍是同类的初等λ-矩阵,即

$$|P(i,j)|=-1,\quad |P(i(k))|=k\neq 0,\quad |P(i,j(\varphi(\lambda)))|=1$$

$$P(i,j)^{-1}=P(i,j),\quad P(i(k))^{-1}=P\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$P(i,j(\varphi(\lambda)))^{-1}=P(i,j(-\varphi(\lambda)))$$

2）对一个 $s\times n$ 的λ－矩阵 $A(\lambda)$ 作一次初等行变换就相当于在 $A(\lambda)$ 的左边乘上相应的 s 级初等λ－矩阵；对 $A(\lambda)$ 作一次初等列变换就相当于在 $A(\lambda)$ 的右边乘上相应的 n 级初等λ－矩阵．

（4）如果λ－矩阵 $A(\lambda)$ 可以经过一系列的λ－矩阵的初等变换化成 $B(\lambda)$，则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价．

等价是λ－矩阵之间的一种关系．这个关系具有下列三个性质：

1）反身性：每一个λ－矩阵与自己等价；

2）对称性：若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价，则 $B(\lambda)$ 与 $A(\lambda)$ 等价；

3）传递性：若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价，$B(\lambda)$ 与 $C(\lambda)$ 等价，则 $A(\lambda)$ 与 $C(\lambda)$ 等价．

（5）λ－矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充分必要条件（之一）：

1）存在一系列初等λ－矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s,Q_1,Q_2,\cdots,Q_t$，使

$$P_1P_2\cdots P_sA(\lambda)Q_1Q_2\cdots Q_t=B(\lambda)$$

2）存在可逆λ－矩阵 $P(\lambda)$ 和 $Q(\lambda)$，使

$$B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$$

3. λ－矩阵在初等变换下的标准形、不变因子与行列式因式

（1）秩为 $r(\geq 1)$ 的 $s\times n$ 的λ－矩阵 $A(\lambda)$ 都等价于（通过λ－矩阵的初等变换）下列形式的矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc|c} d_1(\lambda) & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & O \\ & & \ddots & & \\ & & & d_r(\lambda) & \\ \hline & & O & & O \end{array}\right)$$

其中 $d_i(\lambda)\ (i=1,2,\cdots,r)$ 是首项系数为 1 的多项式，且

$$d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)\qquad (i=1,2,\cdots,r-1)$$

称这个矩阵为 $A(\lambda)$ 的标准形，又称 $d_i(\lambda)\ (i=1,2,\cdots,r)$ 为 $A(\lambda)$ 的不变因子．

（2）设λ－矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为 r，对于正整数 $k\ (1\leq k\leq r)$，$A(\lambda)$ 中所有 k 级子式的首项系数为 1 的最大公因式 $D_k(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 k 级行列式因子．

(3) 等价的 λ-矩阵具有相同的秩与相同的各级行列式因子.

(4) 行列式因子与不变因子的关系:

设 $A(\lambda)$ 是秩为 r 的 $s\times n$ 的 λ-矩阵, $D_i(\lambda)$ $(i=1,2,\cdots,r)$ 是 $A(\lambda)$ 的行列式因子,而 $d_i(\lambda)$ $(i=1,2,\cdots,r)$ 是 $A(\lambda)$ 的不变因子,则

$$D_i(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_i(\lambda)\qquad(i=1,2,\cdots,r)$$

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda),\quad d_i(\lambda)=\frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)}\qquad(i=2,\cdots,r)$$

即它们是相互确定的.

(5) λ-矩阵的标准形是惟一的.

(6) λ-矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充分必要条件(之二):

1) $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的行列式因子;

2) $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的不变因子.

(7) λ-矩阵可逆的充分必要条件是它可表成一系列初等 λ-矩阵的乘积.

4. λ-矩阵的初等因子

(1) 将 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的所有不变因子在数域 P 上分解为标准分解式,则在标准分解式中出现的全部不可约因式的方幂(相同的按出现的次数计算)称为 $A(\lambda)$ 的初等因子.特别地,在复数域上, $A(\lambda)$ 的初等因子都是一次因式的方幂.

(2) λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的初等因子可以不必通过不变因子求出:

设 $A(\lambda)$ 经过初等变换化为对角形式(不必是标准形)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} g_1(\lambda) & & & & \\ & g_2(\lambda) & & & O \\ & & \ddots & & \\ & & & g_r(\lambda) & \\ \hline & & O & & O \end{array}\right)$$

将 $g_i(\lambda)$ $(i=1,2,\cdots,r)$ 在数域 P 上分解为标准分解式,则在标准分解式中出现的全体不可约因式的方幂就是 $A(\lambda)$ 的全部初等因子.

(3) 如果 $A(\lambda)$ 是分块对角 λ-矩阵,即

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} A_1(\lambda) & & & \\ & A_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s(\lambda) \end{pmatrix}$$

则求出每个 $A_i(\lambda)$ $(i=1,2,\cdots,s)$ 的初等因子后，其全体就是 $A(\lambda)$ 的全部初等因子．

(4) λ-矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充分必要条件(之三)：

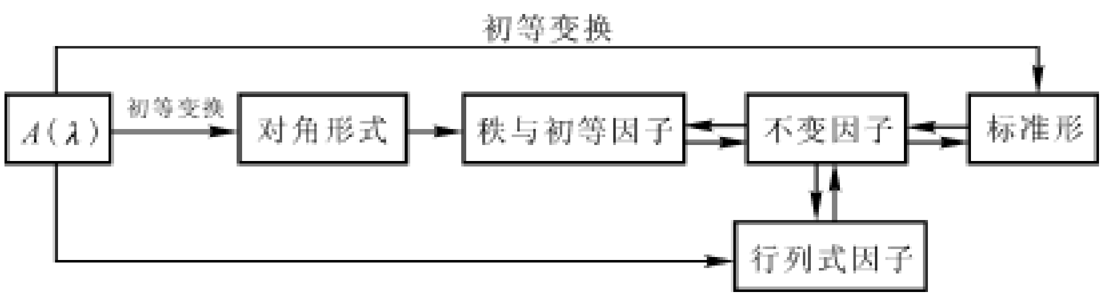
$A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的秩与初等因子．

注　1. 两个同级的 λ-矩阵仅初等因子相同时，不能保证它们等价．如 λ-矩阵 $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda+1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\lambda(\lambda+1) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 的初等因子都是 λ 和 $\lambda+1$．但它们不等价，因为前者的秩为 2，而后者的秩为 1．

2. 教材上未介绍一般 λ-矩阵初等因子的概念，只是在复数域上对特殊的 λ-矩阵 $\lambda E-A$ 引入了初等因子．

5. 求 λ-矩阵的标准形的方法

求 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的标准形可以通过初等变换、行列式因子、不变因子、秩与初等因子等求出．在计算过程中，应根据具体情况采用适当的步骤进行．见下图：



6. 矩阵相似的充分必要条件

(1) 设 A 是数域 P 上的 n 级矩阵，称 λ-矩阵 $\lambda E-A$ 的行列式因子、不变因子、初等因子分别为 A 的行列式因子、不变因子、初等因子．

(2) 设 A,B 是数域 P 上的 n 级矩阵，则 A 与 B 相似的充分必要条件是：

1) $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 等价；

2) A 与 B 的行列式因子相同；

3) A 与 B 的不变因子相同；

4) A 与 B 的初等因子相同．

注　由于 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 的秩为 n，所以只要初等因子相同即保证它们等价．

7. 若尔当标准形

(1) 若尔当块

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$$

的初等因子为$(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$.

(2) n级若尔当形矩阵

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}, \text{其中 } J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

的全部初等因子为

$$(\lambda - \lambda_1)^{n_1}, \ (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \ \cdots, \ (\lambda - \lambda_s)^{n_s} \quad (n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n)$$

(3) 复数域上的每个n级矩阵A都与一个若尔当形矩阵J相似,这个若尔当形矩阵J除去其中若尔当块的排列次序外是被矩阵A惟一确定的,称J为A的若尔当标准形 .

(4) 设A是复数域上n维线性空间V的线性变换,则必存在V的一组基,使A在这组基下的矩阵是若尔当形矩阵,并且这个若尔当形矩阵除去若尔当块的排列次序外是被A惟一确定的 .

注　矩阵A的若尔当标准形是根据A的一次因式方幂的初等因子写出来的,在复数域上,A的初等因子都是一次因式的方幂,故若尔当标准形在复数域上肯定存在 .

(5) 复数矩阵A与对角矩阵相似的充分必要条件是,A的初等因子都是一次的 .

(6) n级矩阵A的最小多项式就是A的第n个不变因子$d_n(\lambda)$.

(7) 复数矩阵A与对角矩阵相似的充分必要条件是,A的不变因子都没有重根,或A的最小多项式没有重根 .

8. 有理标准形

(1) 给定数域P上的多项式

$$d(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

称 n 级矩阵

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

为多项式 $d(\lambda)$ 的伴侣阵 . 伴侣阵 F 的不变因子为

$$\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n-1\text{个}}, d(\lambda)$$

(2) 下列准对角矩阵

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_s \end{bmatrix}$$

其中

$$F_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_{in_i} \\ 1 & \cdots & 0 & -a_{i,n_i-1} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{i1} \end{bmatrix} \quad (i = 1,2,\cdots,s)$$

这里 F_i 分别是数域 P 上多项式

$$d_i(\lambda) = \lambda^{n_i} + a_{i1}\lambda^{n_i-1} + \cdots + a_{i,n_i-1}\lambda + a_{in_i} \quad (i = 1,2,\cdots,s)$$

的伴侣阵, 且满足 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$ $(i = 1,2,\cdots,s-1)$, 则 F 的全部不变因子为

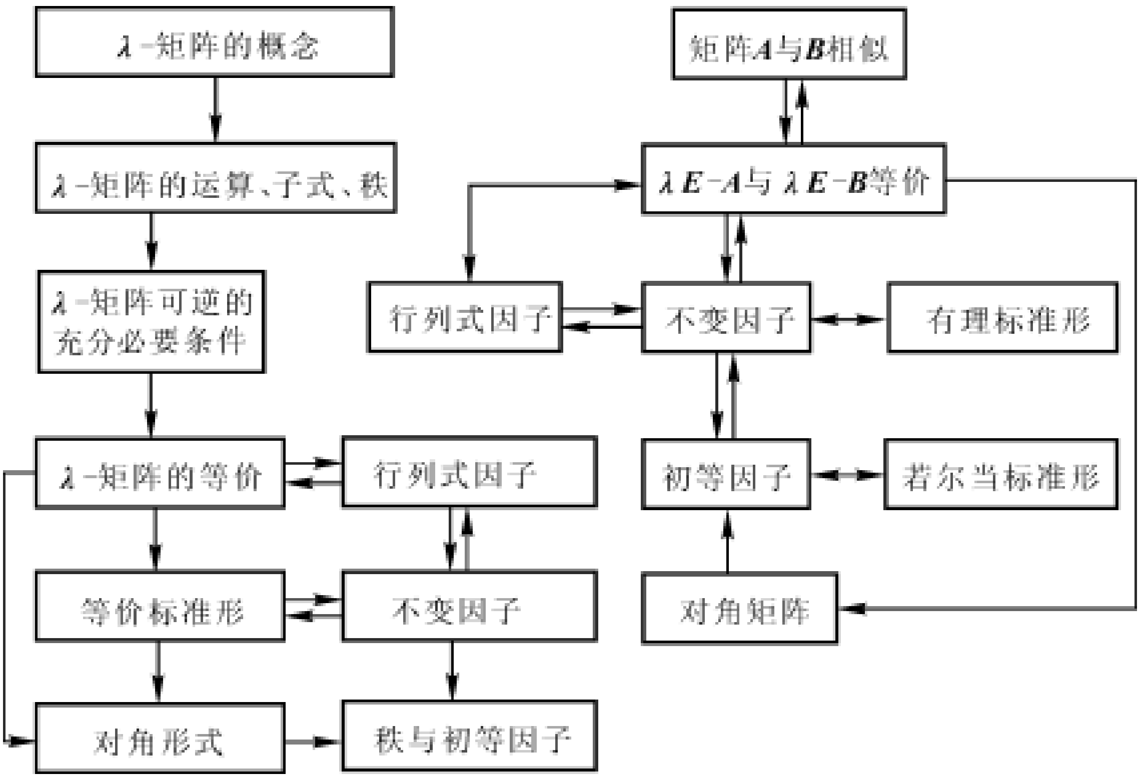
$$\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n-s\text{个}}, d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_s(\lambda)$$

称 F 为 P 上的一个有理标准形矩阵 .

(3) 数域 P 上的 n 级矩阵 A 在 P 上相似于惟一的一个有理标准形矩阵 F, 称 F 为 A 的有理标准形 .

(4) 设 A 是数域 P 上 n 维线性空间的线性变换, 则在 V 中存在一组基, 使 A 在该基下的矩阵是有理标准形, 并且这个有理标准形由 A 惟一确定, 称为 A 的有理标准形 .

二、知识网络图



三、重点、难点解读

本章由两部分组成 . 第一部分讨论 λ-矩阵的标准形理论, 第二部分讨论矩阵的相似标准形 . 第一部分为第二部分作理论准备, 第二部分是本章的主要目的 .

本章的重点是以下三点:

(1) 求 λ-矩阵在初等变换下的标准形;

(2) 了解 λ-矩阵的不变因子、行列式因子及初等因子这三个重要概念, 掌握它们的性质、相互之间的关系以及它们的求法;

(3) 掌握矩阵的若尔当标准形及有理标准形的求法 .

本章内容几乎涉及高等代数的各个部分, 学好本章内容有助于从整体上把握高等代数的体系 .

四、典型例题解析

例 8.1　已知 λ-矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 2\lambda+1 & 1\\ 1 & \lambda+1 & \lambda^2+1\\ \lambda-1 & \lambda & -\lambda^2\end{bmatrix};\qquad B(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & \lambda-1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda^2\end{bmatrix};$$

$$C(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & \lambda & 0\\ 2 & \lambda & 1\\ \lambda^2+1 & 2 & \lambda^2+1\end{bmatrix};\qquad D(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^3-1 & \lambda & \lambda & 0\\ \lambda^2 & 1 & 0 & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda^3-1 & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2 & 1\end{bmatrix}.$$

(1) 试求上述 λ-矩阵的秩,并指出哪些是满秩的?

(2) 上述 λ-矩阵哪个是可逆的?求出其逆矩阵.

解　(1) 因为

$$|A(\lambda)|=\begin{vmatrix}\lambda & 2\lambda+1 & 1\\ 1 & \lambda+1 & \lambda^2+1\\ \lambda-1 & \lambda & -\lambda^2\end{vmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}$$

$$\begin{vmatrix}\lambda & 2\lambda+1 & 1\\ 1 & \lambda+1 & \lambda^2+1\\ -1 & -\lambda-1 & -1-\lambda^2\end{vmatrix}=0$$

但 $A(\lambda)$ 的 2 级子式 $\begin{vmatrix}\lambda & 2\lambda+1\\ 1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-1\neq 0$,所以 $\operatorname{rank}A(\lambda)=2$, $A(\lambda)$ 不满秩;

又因为

$$|B(\lambda)|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & \lambda-1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda^2\end{vmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & \lambda-1 & \lambda\\ 0 & 1 & \lambda^2-1\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}\lambda-1 & \lambda\\ 1 & \lambda^2-1\end{vmatrix}=\lambda^3-\lambda^2-2\lambda+1\neq 0$$

所以 $\operatorname{rank}B(\lambda)=3$, $B(\lambda)$ 是满秩的;

可求得

$$|C(\lambda)| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 2 & \lambda & 1 \\ \lambda^2+1 & 2 & \lambda^2+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 - \lambda c_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ \lambda^2+1 & -\lambda^3-\lambda+2 & \lambda^2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\lambda^3-\lambda+2 & \lambda^2+1 \end{vmatrix} = -2$$

从而 $\operatorname{rank} C(\lambda) = 3$，$C(\lambda)$ **是满秩的**；

由于

$$|D(\lambda)| = \begin{vmatrix} \lambda^3-1 & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda^2 & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3-1 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda^3-1 & \lambda \\ \lambda^2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda^3-1 & \lambda \\ \lambda^2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

所以 $\operatorname{rank} D(\lambda) = 4$，$D(\lambda)$ **是满秩的**．

(2) $C(\lambda)$ **与** $D(\lambda)$ **是可逆的**．**由于**

$$(C(\lambda), E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda^2+1 & 2 & \lambda^2+1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - (\lambda^2+1)r_1]{r_2 - 2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda^3-\lambda+2 & \lambda^2+1 & -\lambda^2-1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \setminus r_3]{r_3 - (\lambda^2+1)r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \lambda^2+1 & -\lambda^2-1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \times \frac{1}{2}]{\substack{r_1 - \frac{\lambda}{2}r_2 \\ r_3 + \frac{\lambda}{2}r_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{\lambda^3}{2}-\frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda^3}{2}+\frac{\lambda}{2} & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda^2}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{\lambda^2}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda^3}{2}+\frac{\lambda}{2}-2 & 1-\frac{\lambda^3}{2}-\frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} \end{array}\right)$$

故

$$C^{-1}(\lambda) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\lambda^3-\lambda+2 & \lambda^3+\lambda & -\lambda \\ \lambda^2+1 & -\lambda^2-1 & 1 \\ \lambda^3+\lambda-4 & -\lambda^3-\lambda+2 & \lambda \end{pmatrix}$$

令 $P(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^3-1 & \lambda\\ \lambda^2 & 1\end{pmatrix}$, $Q(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$, 则 $D(\lambda)=\begin{pmatrix}P(\lambda) & Q(\lambda)\\ O & P(\lambda)\end{pmatrix}$. 可求得

$$P^{-1}(\lambda)=\frac{1}{|P(\lambda)|}P^*(\lambda)=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1 & -\lambda\\ -\lambda^2 & \lambda^3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & \lambda\\ \lambda^2 & 1-\lambda^3\end{pmatrix}.$$

$$P^{-1}(\lambda)Q(\lambda)P^{-1}(\lambda)=\begin{pmatrix}-\lambda^4-\lambda & \lambda^5\\ \lambda^6 & -\lambda^7+\lambda^4-\lambda\end{pmatrix}$$

由分块三角矩阵求逆公式,有

$$D^{-1}(\lambda)=\begin{pmatrix}P^{-1}(\lambda) & -P^{-1}(\lambda)Q(\lambda)P^{-1}(\lambda)\\ O & P^{-1}(\lambda)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-1 & \lambda & -\lambda^4-\lambda & \lambda^5\\ \lambda^2 & 1-\lambda^3 & \lambda^6 & -\lambda^7+\lambda^4-\lambda\\ 0 & 0 & -1 & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2 & 1-\lambda^3\end{pmatrix}$$

注　1. 本例中由于所给 λ-矩阵均是方阵,所以均采用了子式的方法来求秩. 读者也可采用初等变换化 λ-矩阵为阶梯形矩阵的方法求秩.

2. 对于可逆的 λ-方阵,如同数字矩阵一样,可以采用公式法(即伴随阵法)、初等变换法和分块矩阵的有关结果求逆矩阵.

例 8 2　**求下列 λ-矩阵的各级行列式因子.**

(1) $\begin{pmatrix}2\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda(\lambda+2) & -3\\ 0 & 0 & \lambda^2-1\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0 & 5\\ -1 & \lambda & 0 & 4\\ 0 & -1 & \lambda & 3\\ 0 & 0 & -1 & \lambda+2\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}\lambda+1 & 2 & 1 & 0\\ -2 & \lambda+1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \lambda+1 & 2\\ 0 & 0 & -2 & \lambda+1\end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix}\lambda-2 & -2 & -1 & 0\\ 1 & \lambda-2 & -2 & 0\\ -1 & 1 & \lambda+1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & \lambda-3\end{pmatrix}$.

解　(1) 由于 $\begin{vmatrix}2\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda(\lambda+2) & -1\\ 0 & 0 & \lambda^2-1\end{vmatrix}=-2\lambda^2(\lambda+2)(\lambda^2-1)$, 所以 $D_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda+2)(\lambda^2-1)$. 又其中有一个 2 级子式 $\begin{vmatrix}1 & 0\\ -\lambda(\lambda+2) & -3\end{vmatrix}=-3$,

故 $D_2(\lambda)=1$,从而 $D_1(\lambda)=1$.

(2) 由于

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 5 \\ -1 & \lambda & 0 & 4 \\ 0 & -1 & \lambda & 3 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_1+\lambda r_2]{\substack{r_3+\lambda r_4 \\ r_2+\lambda r_3}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+5 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda^2+2\lambda+3 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+5$$

所以
$$D_4(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+5$$

又其中有一个 3 级子式 $\begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-1$,故 $D_3(\lambda)=1$,于是 $D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$.

(3) 显然

$$D_4(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=[(\lambda+1)^2+4]^2$$

又有 3 级子式
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \lambda+1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 2 \end{vmatrix}=-4(\lambda+1)$$

由于 $D_3(\lambda)\mid\lambda+1$ 且 $D_3(\lambda)\mid D_4(\lambda)$,可见 $D_3(\lambda)=1$. 于是 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1$.

(4) 可求得

$$D_4(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda+1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda-3)$$

由于 3 级子式

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -2 \\ -1 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(2\lambda-5)$$

它们互素,从而 $D_3(\lambda)=1$,**于是** $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1$.

例 8.3 化下列 λ-矩阵为标准形:

(1) $\begin{pmatrix} 2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda(\lambda+2) & -3 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} \lambda^3+\lambda-1 & -\lambda^2 & 1+\lambda^2 \\ \lambda^2 & -\lambda & \lambda \\ 2\lambda-1 & \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda+2 \end{pmatrix}$.

解 (1) **法 1 利用行列式因子.例 8.2 中已求出该 λ-矩阵的行列式因子为**

$$D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1,\quad D_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda+2)(\lambda^2-1)$$

所以不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1,\quad d_3(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=\lambda^2(\lambda+2)(\lambda^2-1)$$

故标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \lambda^2(\lambda+2)(\lambda^2-1) \end{pmatrix}$

法 2 利用初等变换,设所给 λ-矩阵为 $A(\lambda)$,**则**

$$A(\lambda)\xrightarrow[r_2+\lambda(\lambda+2)r_1]{c_1-2\lambda c_2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2\lambda^2(\lambda+2) & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 \end{pmatrix}\xrightarrow[c_1+\frac{2}{3}\lambda^2(\lambda+2)c_3]{r_3+\frac{1}{3}(\lambda^2-1)r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ \frac{2}{3}\lambda^2(\lambda+2)(\lambda^2-1) & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3\times\frac{3}{2} \\ c_1\setminus c_2 \\ c_2\setminus c_3}]{r_2\times\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda+2)(\lambda^2-1) \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} \lambda^3+\lambda-1 & -\lambda^2 & 1+\lambda^2 \\ \lambda^2 & -\lambda & \lambda \\ 2\lambda-1 & \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[c_1 \backslash c_3]{c_3+c_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda^2 & \lambda^3+\lambda-1 \\ 0 & -\lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 2\lambda-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_2+\lambda^2 c_1 \\ c_3-(\lambda^3+\lambda-1)c_1}]{r_3-r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & -\lambda^3+\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2\times(-1)]{\substack{c_3+\lambda c_2 \\ r_3+(\lambda+1)r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{pmatrix}$$

(3) **法** 1

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \backslash r_2} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_1 \backslash c_3]{c_3-c_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ -\lambda+2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-\lambda c_1]{r_3-(-\lambda+2)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2) \end{pmatrix}$$

已是对角形,但还不是标准形.此时 λ-矩阵的秩为 3,**且全部初等因子为**

$$\lambda,\quad \lambda-1,\quad \lambda,\quad \lambda-2$$

于是 λ-矩阵的不变因子为

$$1,\quad \lambda,\quad \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

故标准形为 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$$

法 2　**对上面的对角形继续化简**:

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda+2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2) \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & \lambda(\lambda-2) \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2) \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 \backslash c_3]{c_3-c_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & \lambda(\lambda-1)\\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_3+(\lambda-1)c_2\\ r_2\times(-1)}]{r_3+(\lambda-2)r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\end{pmatrix}$$

例 8.4　设 $A(\lambda)$ 为一个 5 级方阵,其秩为 4,初等因子是

$$\lambda,\quad \lambda^2,\quad \lambda^2,\quad \lambda-1,\quad \lambda-1,\quad \lambda+1,\quad (\lambda+1)^3$$

试求 $A(\lambda)$ 的标准形.

解　由题设知 $A(\lambda)$ 的不变因子为

$$d_1(\lambda)=1,\quad d_2(\lambda)=\lambda,$$

$$d_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1),\quad d_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)^3$$

因此 $A(\lambda)$ 的标准形为

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)^3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

例 8.5　判断下列 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 是否等价:

(1) $A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$,　$B(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}$;

(2) $A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda(\lambda+1) & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{pmatrix}$,　$B(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \lambda+1\\ 0 & 2\lambda & 0\\ \lambda(\lambda+1)^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

解　(1) **可求得 $A(\lambda)$ 的行列式因子为 $D_1(\lambda)=1$, $D_2(\lambda)=\lambda^2$;而 $B(\lambda)$ 的行列式因子为 $\bar{D}_1(\lambda)=1$, $\bar{D}_2(\lambda)=\lambda$ 它们的行列式因子不同,从而 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 不等价.**

(2) $A(\lambda)$ **的秩为 3,且初等因子为 λ, $\lambda+1$, λ, $(\lambda+1)^2$.**

由于 $B(\lambda)\xrightarrow[c_1\backslash c_3]{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2\end{pmatrix}$,**所以 $B(\lambda)$ 的秩为 3,且初等因子为 $\lambda+1$, λ, λ, $(\lambda+1)^2$,可见 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 的秩相同且初等因子相同,故它们等价.**

例 8.6　证明:若多项式 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 互素,则下列 λ-矩阵彼此等价.

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda)\end{pmatrix},\quad B(\lambda)=\begin{pmatrix} g(\lambda) & 0 \\ 0 & f(\lambda)\end{pmatrix},\quad C(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\lambda)g(\lambda)\end{pmatrix}$$

证 由于 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 互素,所以 $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ 和 $C(\lambda)$ 的 1 级行列式因子都为 1,而它们的 2 级行列式都为 $f(\lambda)g(\lambda)$,从而它们有相同的 2 级行列式因子,故 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 和 $C(\lambda)$ 等价.

例 8.7 **下列矩阵哪些相似?哪些不相似?**

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

解 因为

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+(\lambda-3)r_1]{c_1+(\lambda+1)c_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_1\leftrightarrow c_2\\ r_2\leftrightarrow r_3}]{r_1\times(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_3+(\lambda-2)c_2\\ r_2\times(-1)}]{r_3+(\lambda-1)^2r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2\end{pmatrix}$$

所以 A 的不变因子为 $1,1,(\lambda-2)(\lambda-1)^2$. 同理可求得 B 的不变因子为 $1,\lambda+1,(\lambda+1)^2$; C 的不变因子为 $1,1,(\lambda-2)(\lambda-1)^2$. 故 A 与 C 相似,而 A 与 B, B 与 C 都不相似.

例 8.8 **求下列矩阵的有理标准形和若尔当标准形:**

(1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3\end{pmatrix}$; (2) $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

(3) $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

解

(1)
$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda-3 & -7 & 3 \\ 2 & \lambda+5 & -2 \\ 4 & 10 & \lambda-3 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_3 + c_1]{c_2 - \frac{1}{2}(\lambda+5)c_1}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda-3 & -\frac{1}{2}(\lambda^2+2\lambda-1) & \lambda \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & -2\lambda & \lambda+1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3 - 2r_2 \\ r_2 \times \frac{1}{2} \\ r_1 \leftrightarrow r_2}]{r_1 - \frac{1}{2}(\lambda-3)r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\lambda^2+2\lambda-1) & \lambda \\ 0 & -2\lambda & \lambda+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\lambda^2+2\lambda-1) & \lambda \\ 0 & \frac{1}{2}(\lambda^2-2\lambda-1) & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_2 - \frac{1}{2}(\lambda^2-2\lambda-1)c_3]{r_2 - \lambda r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\lambda-1)(\lambda^2+1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2 \leftrightarrow r_3 \\ c_2 \leftrightarrow c_3}]{r_2 \times (-2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+1) \end{bmatrix}$$

于是 A 的不变因子为

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = 1, \quad d_3(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+1) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$$

而 A 的初等因子为

$$\lambda-1, \quad \lambda-\mathrm{i}, \quad \lambda+\mathrm{i}$$

故 A 的有理标准形和若尔当标准形分别为

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

(2) $$\lambda E - B = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4 - (\lambda - 1)c_1]{c_2 + c_1}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda - 1 & 1 & -\lambda^2 + \lambda - 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 & -\lambda \\ 1 & 0 & \lambda - 1 & -\lambda + 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3 - r_4 \\ r_1 \leftrightarrow r_4}]{\substack{r_1 - \lambda r_4 \\ r_2 - r_4}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & -\lambda + 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 & -\lambda^2 + \lambda - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_2]{\substack{c_4 + c_3 \\ c_4 + c_2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda - 1)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - (\lambda - 1)r_2]{c_2 - (\lambda - 1)c_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -(\lambda - 1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda - 1)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 \times (-1)]{\substack{c_2 \leftrightarrow c_3 \\ r_3 \times (-1)}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - 1)^2 \end{pmatrix}$$

于是 B 的不变因子为

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = 1, \quad d_3(\lambda) = d_4(\lambda) = (\lambda - 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

而 B 的初等因子为

$$(\lambda - 1)^2, \quad (\lambda - 1)^2$$

故 B 的有理标准形和若尔当标准形分别为

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 由于 $\lambda E - C$ 中有两个 3 级子式

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ 2 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)[(\lambda - 1)^2 + 4]$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - (\lambda - 1)^2$$

互素，所以 $D_3(\lambda) = 1$，从而 $D_1(\lambda) = D_2(\lambda) = 1$. 又有 $D_4(\lambda) = |\lambda E - C| = [(\lambda - 1)^2 + 4]^2$. 于是 C 的不变因子为

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = d_3(\lambda) = 1$$

$$d_4(\lambda) = [(\lambda - 1)^2 + 4]^2 = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 14\lambda^2 - 20\lambda + 25$$

而 C 的初等因子为

$$(\lambda - 1 - 2\mathrm{i})^2, \quad (\lambda - 1 + 2\mathrm{i})^2$$

故 C 的有理标准形和若尔当标准形分别为

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -25 \\ 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 + 2\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 + 2\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 - 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

例 8.9　证明：n 级方阵 A 是数量矩阵的充分必要条件是，A 的不变因子都不是常数.

证　必要性. 若 $A = aE$ 是数量矩阵. 显然 A 的初等因子为 $\lambda - a, \lambda - a, \cdots, \lambda - a$，因而 A 的不变因子为

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \cdots = d_n(\lambda) = \lambda - a$$

即 A 的不变因子都不是常数.

充分性. 若 A 的不变因子都不是常数，则由 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)\ (i = 1, 2, \cdots, n - 1)$ 及 $D_n(\lambda) = |\lambda E - A| = d_1(\lambda) d_2(\lambda) \cdots d_n(\lambda)$ 知 $d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \cdots = d_n(\lambda) = \lambda - a$. 于是 A 的若尔当标准形为 $J = aE$，因此

$$A = PJP^{-1} = P(aE)P^{-1} = aE$$

即 A 为数量矩阵.

例 8.10　设 A 是 n 级方阵，若有自然数 m，使 $A^m = E$，证明 A 与对角矩阵相似.

证　设 A 的若尔当标准形为

$$J=\begin{pmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_s\end{pmatrix}$$

其中 $J_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是若尔当块,则 $J=P^{-1}AP$,于是

$$J^m=(P^{-1}AP)^m=P^{-1}A^mP=P^{-1}EP=E$$

从而 $J_i^m=E(i=1,2,\cdots,s)$,因此 J_i 都是 1 级的,即 J 为对角矩阵.

例 8.11　证明:任一复方阵 A 都可以表示成两个对称矩阵的乘积,并且其中一个是可逆的.

证　设 A 的若尔当标准形为

$$J=\begin{pmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_s\end{pmatrix}$$

其中 $J_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是 r_i 级若尔当块,则 $J=P^{-1}AP$. 由于

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i&&&\\1&\lambda_i&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&\lambda_i\end{pmatrix}_{r_i\times r_i}=\begin{pmatrix}&&&\lambda_i\\&&\lambda_i&1\\&\iddots&\iddots&\\\lambda_i&1&&\end{pmatrix}_{r_i\times r_i}\begin{pmatrix}&&&1\\&&1&\\&\iddots&&\\1&&&\end{pmatrix}_{r_i\times r_i}=C_iD_i$$

所以

$$J=\begin{pmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1&&&\\&C_2&&\\&&\ddots&\\&&&C_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_1&&&\\&D_2&&\\&&\ddots&\\&&&D_s\end{pmatrix}=CD$$

故

$$A=PJP^{-1}=PCDP^{-1}=(PCP')[(P^{-1})'DP^{-1}]$$

其中 PCP' 与 $(P^{-1})'DP^{-1}$ 都是对称矩阵,且后者是可逆的.

例 8.12　求 $2n$ 级方阵 A 的最小多项式,其中

$$A=\begin{pmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{pmatrix}$$

解　可求得 $|\lambda E - A| = [(\lambda - a)^2 - b^2]^n$. 当 $b = 0$ 时,由于 $A - aE = O$,所以 $m_A(\lambda) = \lambda - a$.当 $b \neq 0$ 时,由于 $(A - aE)^2 - b^2 E = O$,所以 $m_A(\lambda) = (\lambda - a)^2 - b^2$.

例 8.13　设 n 级方阵 A 的所有元素都是 1,求 A 的最小多项式.

解　可求得 $|\lambda E - A| = (\lambda - n)\lambda^{n-1}$,而 $(A - nE)A = O$,所以 A 的最小多项式为 $m_A(\lambda) = (\lambda - n)\lambda$.

例 8.14　对于 n 级方阵 A,如果使 $A^m = O$ 成立的最小正整数为 m,则称 A 是 m 次幂零矩阵.证明所有 n 级 $n - 1$ 次幂零矩阵彼此相似,并求其若尔当标准形.

证　假如 n 级方阵 A 满足 $A^{n-1} = O$, $A^k \neq O (1 \leq k \leq n - 2)$,则 A 的最小多项式为 $m_A(\lambda) = \lambda^{n-1}$,从而 A 的第 n 个不变因子 $d_n(\lambda) = \lambda^{n-1}$. 由于

$$d_1(\lambda) d_2(\lambda) \cdots d_n(\lambda) = |\lambda E - A|$$

是 n 次多项式,且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda) (i = 1, 2, \cdots, n - 1)$,所以

$$d_1(\lambda) = \cdots = d_{n-2}(\lambda) = 1, \quad d_{n-1}(\lambda) = \lambda, \quad d_n(\lambda) = \lambda^{n-1}$$

故所有 n 级 $n - 1$ 次幂零矩阵彼此相似,其初等因子为 λ, λ^{n-1},从而若尔当标准形为

$$J=\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

五、课后习题全解

(一) 第八章习题

1. **化下列 λ-矩阵成标准形:**

1) $\begin{bmatrix} \lambda^3-\lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda \end{bmatrix}$;　2) $\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$;　4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ \lambda^2-\lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

5) $\begin{bmatrix} 3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \end{bmatrix}$;

6) $\begin{bmatrix} 2\lambda & 3 & 0 & 1 & \lambda \\ 4\lambda & 3\lambda+6 & 0 & \lambda+2 & 2\lambda \\ 0 & 6\lambda & \lambda & 2\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 3\lambda-3 & 1-\lambda & 2\lambda-2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

解

1) $$\begin{bmatrix} \lambda^3-\lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 \backslash r_2]{c_1 \backslash c_2} \begin{bmatrix} 3\lambda & \lambda^2+5\lambda \\ 2\lambda^2 & -\lambda^3-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \times 3]{r_2-\frac{2}{3}\lambda r_1}$$

$$\begin{bmatrix} 3\lambda & \lambda^2+5\lambda \\ 0 & \lambda^3-10\lambda^2-3\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[c_1 \times \frac{1}{3}]{c_2-\frac{1}{3}(\lambda+5)c_1} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda^2-10\lambda-3) \end{bmatrix}$$

2) $$\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_1+c_3]{} \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+1) \end{bmatrix} \xrightarrow[c_3 - \lambda c_1]{c_2 - \lambda^2 c_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+1) \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \times (-1)]{c_3 + c_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

3) **矩阵的行列式因子为**

$$D_3(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)^3, \quad D_2(\lambda) = \lambda(\lambda+1), \quad D_1(\lambda) = 1$$

从而不变因子为

$$d_1(\lambda) = 1, \quad d_2(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)} = \lambda(\lambda+1), \quad d_3(\lambda) = \frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)} = \lambda(\lambda+1)^2$$

故标准形为
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda+1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$$

4) **矩阵的行列式因子为**

$$D_4(\lambda) = \lambda^4(\lambda-1)^4, \quad D_3(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)^2, \quad D_2(\lambda) = \lambda(\lambda-1), \quad D_1 = 1$$

从而不变因子为

$$d_1(\lambda) = 1, \quad d_2(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)} = \lambda(\lambda-1)$$

$$d_3(\lambda) = \frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)} = \lambda(\lambda-1), \quad d_4(\lambda) = \frac{D_4(\lambda)}{D_3(\lambda)} = \lambda^2(\lambda-1)^2$$

故标准形为
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

5) $$\begin{bmatrix} 3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{c_1 - c_2 \\ c_3 - c_2}}$$

$$\begin{bmatrix} 3\lambda^2-2 & 2\lambda-1 & \lambda^2-2 \\ 4\lambda^2-3 & 3\lambda-2 & \lambda^2-2 \\ \lambda^2-2 & \lambda-2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 - (\lambda^2-2)r_3]{r_2 - r_1}$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda^4+7\lambda^2-6 & -\lambda^3+2\lambda^2+4\lambda-5 & 0 \\ \lambda^2-1 & \lambda-1 & 0 \\ \lambda^2-2 & \lambda-2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_2-(\lambda-2)c_3]{c_1-(\lambda^2-2)c_3}$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda^4+7\lambda^2-6 & -\lambda^3+2\lambda^2+4\lambda-5 & 0 \\ \lambda^2-1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1-(\lambda+1)c_2}$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^3+2\lambda^2+4\lambda-5 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1\times(-1)]{r_1+(\lambda^2-\lambda-5)r_2}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_1\backslash c_3]{r_1\backslash r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

6) $$\begin{bmatrix} 2\lambda & 3 & 0 & 1 & \lambda \\ 4\lambda & 3\lambda+6 & 0 & \lambda+2 & 2\lambda \\ 0 & 6\lambda & \lambda & 2\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 3\lambda-3 & 1-\lambda & 2\lambda-2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_2-3c_3]{c_1-2c_5}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 2\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 3\lambda-3 & 1-\lambda & 2\lambda-2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_3+2c_2]{c_1+3c_2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 2\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{r_2-2r_1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 2\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{c_4-2c_3 \\ c_5-\lambda c_4}]{r_2-\lambda r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 \backslash c_5]{c_1 \backslash c_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

在最后的形式中,可求得行列式因子

$$D_5(\lambda) = \lambda^3(\lambda-1)^2, \quad D_4(\lambda) = \lambda(\lambda-1), \quad D_3(\lambda) = D_2(\lambda) = D_1(\lambda) = 1$$

于是不变因子为

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = d_3(\lambda) = 1$$

$$d_4(\lambda) = \frac{D_4(\lambda)}{D_3(\lambda)} = \lambda(\lambda-1), \quad d_5(\lambda) = \frac{D_5(\lambda)}{D_4(\lambda)} = \lambda^2(\lambda-1)$$

故标准形为
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1) \end{pmatrix}$$

2. 求下列 λ-矩阵的不变因子:

1) $\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$;　　2) $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 5 & 4 & 3 & \lambda+2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} \lambda+\alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha \end{pmatrix}$;　4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda+2 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$.

解　1) λ-矩阵中右上角的 2 级子式为 1,所以

$$D_1(\lambda) = D_2(\lambda) = 1, \quad \text{而} \quad D_3(\lambda) = (\lambda-2)^3$$

故该 λ-矩阵的不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1,\quad d_3(\lambda)=(\lambda-2)^2$$

2) λ-矩阵中右上角3级子式为 -1,所以

$$D_4(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+5,\quad D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=D_3(\lambda)=1$$

故该λ-矩阵的不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1,\quad d_4(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+5$$

3) 1°. 当 $\beta\neq 0$ 时,

$$D_4(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda+\alpha & \beta\\ -\beta & \lambda+\alpha\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda+\alpha & \beta\\ -\beta & \lambda+\alpha\end{vmatrix}=[(\lambda+\alpha)^2+\beta^2]$$

在λ-矩阵中有一个3级子式 $\begin{vmatrix}\beta & 1 & 0\\ \lambda+\alpha & 0 & 1\\ 0 & \lambda+\alpha & \beta\end{vmatrix}=-2\beta(\lambda+\alpha)$. 由于 $(2\beta(\lambda+\alpha),D_4(\lambda))=1$,所以 $D_3(\lambda)=1$,从而 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1$,故该λ-矩阵的不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1,\quad d_4(\lambda)=[(\lambda+\alpha)^2+\beta^2]^2$$

2°. 当 $\beta=0$ 时,由于

$$D_4(\lambda)=(\lambda+\alpha)^4,\quad D_3(\lambda)=(\lambda+\alpha)^2,\quad D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$$

所以不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1,\quad d_3(\lambda)=(\lambda+\alpha)^2,\quad d_4(\lambda)=(\lambda+\alpha)^2$$

4) 可求得

$$D_4(\lambda)=(\lambda+2)^4,\quad D_3(\lambda)=D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$$

故不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1,\quad d_4(\lambda)=(\lambda+2)^4$$

5) 可求得

$$D_4(\lambda)=(\lambda^2-1)(\lambda^2-4),\quad D_3(\lambda)=D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$$

故不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1,\quad d_4(\lambda)=(\lambda^2-1)(\lambda^2-4)$$

3. 证明:

$$\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n\\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}\\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_1\end{bmatrix}$$

的不变因子是$\overbrace{1, 1, \cdots, 1}^{n-1\text{个}}$, $f(\lambda)$,其中 $f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$.

证　记原矩阵的行列式为 D_n. 按最后一列展开此行列式得

$$D_n = (\lambda + a_1)\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n =$$

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = f(\lambda)$$

因为 λ-矩阵左下角的 $n-1$ 级子式为 $(-1)^{n-1}$,所以行列式因子 $D_{n-1}(\lambda) = 1$,从而 $D_{n-2}(\lambda) = \cdots = D_2(\lambda) = D_1(\lambda) = 1$,故其不变因子是

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \cdots = d_{n-1}(\lambda) = 1$$

$$d_n(\lambda) = f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

4. 设 A 是数域 P 上一个 $n\times n$ 矩阵,证明 A 与 A' 相似.

证　$\lambda E - A$ 与 $\lambda E - A'$ 对应的 k 级子式互为转置,因而对应的 k 级子式相等,这样 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - A'$ 有相同的各级行列式因子,从而有相同的不变因子,故 A 与 A' 相似.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, 求 A^k.

解　由第四章 2 题 8) 可知

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}^k = \left[\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}'\right]^k = \left[\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^k\right]' =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & 0 \\ k\lambda^{k-1} & \lambda^k & 0 \\ \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} & k\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix}$$

6. 求下列复系数矩阵的若尔当标准形:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;　　2) $\begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$;　　4) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$;　　6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;　　8) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$;　　10) $\begin{pmatrix} 8 & 30 & -14 \\ -6 & -19 & 9 \\ -6 & -23 & 11 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;　　12) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & 6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;　　14) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

解　1) **设原矩阵为** A,**那么**

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 2 & 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$$

行列式因子 $D_3(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$,**又** $\lambda E - A$ **中有两个** 2 **级子式**

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \quad \begin{vmatrix} 0 & \lambda - 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2(\lambda - 2)$$

它们互素,所以 $D_2(\lambda) = 1$,**从而** $D_1(\lambda) = 1$.**于是不变因子为**

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = 1, \quad d_3(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

A**的初等因子是** $\lambda + 1$, $\lambda - 1$, $\lambda - 2$,**故** A **的若尔当标准形为**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) **设原矩阵为** A,**则**

$$\lambda E - A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)^2(\lambda + 3) \end{pmatrix}$$

故 A **的初等因子是** $(\lambda - 1)^2(\lambda + 3)$，**从而** A **的若尔当标准形为**

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3) **设原矩阵为** A，**则**

$$\lambda E - A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 1)^2 \end{pmatrix}$$

故 A **的初等因子是** $(\lambda + 1)$，$(\lambda + 1)^2$，**从而** A **的若尔当标准形为**

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4) **设原矩阵为** A，**则**

$$\lambda E - A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)^3 \end{pmatrix}$$

故 A **的初等因子是** $(\lambda - 1)^3$，**从而** A **的若尔当标准形为**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5) **设原矩阵为** A，**则**

$$\lambda E - A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) \end{pmatrix}$$

故 A **的初等因子是** $\lambda - 1$，$\lambda + \mathrm{i}$，$\lambda - \mathrm{i}$，**从而** A **的若尔当标准形为**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

6) **设原矩阵为** A，**则**

$$\lambda E - A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda - 2) \end{bmatrix}$$

故 A 的初等因子是 $\lambda, \lambda, \lambda - 2$,从而 A 的若尔当标准形为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7) 设原矩阵为 A,那么

$$\lambda E - A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

故 A 的初等因子是 λ, λ^2,从而 A 的若尔当标准形为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

8) 设原矩阵为 A,那么

$$\lambda E - A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 2)^3 \end{bmatrix}$$

故 A 的初等因子是 $(\lambda - 2)^3$,从而 A 的若尔当标准形为

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

9) 设原矩阵为 A,那么

$$\lambda E - A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda + 1)^2 \end{bmatrix}$$

故 A 的初等因子是 $\lambda, (\lambda + 1)^2$,从而 A 的若尔当标准形为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

10) 设原矩阵为 A,那么

$$\lambda E - A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 + 30\lambda - 8 \end{pmatrix}$$

令 $\lambda^3 + 30\lambda - 8 = 0$,用“卡当”公式解得该方程的根为

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{4 + \sqrt{1016}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{1016}}$$

$$\lambda_2 = \omega\sqrt[3]{4 + \sqrt{1016}} + \omega^2\sqrt[3]{4 - \sqrt{1016}}$$

$$\lambda_3 = \omega^2\sqrt[3]{4 + \sqrt{1016}} + \omega^3\sqrt[3]{4 - \sqrt{1016}}$$

其中 $\omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$,则 A 的初等因子是 $(\lambda - \lambda_1)$, $(\lambda - \lambda_2)$, $(\lambda - \lambda_3)$,故 A 的若尔当标准形为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

11) 设原矩阵为 A,则

$$\lambda E - A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - 1)^4 \end{pmatrix}$$

故 A 的初等因子为 $(\lambda - 1)^4$,从而 A 的若尔当标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

12) 设原矩阵为 A,则

$$\lambda E - A \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & \lambda - 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

从而 $D_4(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda - 1)^4$. 又 $\lambda E - A$ 中有一个 3 级子式

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ \lambda - 1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda - 1 & -2 \end{vmatrix} = -4\lambda(\lambda - 1)$$

由于 $D_3(\lambda) \mid D_4(\lambda)$ 且 $D_3(\lambda) \mid -4\lambda(\lambda+1)$,所以 $D_3(\lambda)=1$,从而 $D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$. 于是 A 的不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1,\quad d_4(\lambda)=(\lambda-1)^4$$

A 的初等因子为 $(\lambda-1)^4$

A 的若尔当标准形为
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

13) 设原矩阵为 A,则

$$\lambda E - A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2-14\lambda+19) \end{pmatrix}$$

故 A 的初等因子是 $\lambda-1,\ \lambda-1,\ \lambda-7+\sqrt{30},\ \lambda-7-\sqrt{30}$,从而 A 的若尔当标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 7-\sqrt{30} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 7+\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

14) 设原矩阵为 A,则

$$\lambda E - A \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda E - A$ 右上角有一个 $n-1$ 级子式的值为 $(-1)^{n-1}$,所以 $D_{n-1}(\lambda)=1$,从而 $D_1(\lambda)=\cdots=D_{n-1}(\lambda)=1$. 又

$$D_n(\lambda)=|\lambda E - A| = \lambda^n - 1 = (\lambda-1)(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)\cdots(\lambda-a_{n-1})$$

其中 $1, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 是 n 个 n 次单位根,所以 A 的初等因子为 $(\lambda-1)$, $(\lambda-a_1)$, $\cdots$, $(\lambda-a_{n-1})$,故 A 的若尔当标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

7. **把 6 题中各矩阵看成是有理数域上矩阵,试写出它们的有理标准形 .**

1) **由 6 题知,它的非常数不变因子为**

$$d_3(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$$

故它的有理标准形为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2) **由 6 题知,它的非常数不变因子为**

$$d_3(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+3) = \lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda + 3$$

故它的有理标准形为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3) **由 6 题知,它的非常数不变因子为**

$$d_2(\lambda) = \lambda + 1, \quad d_3(\lambda) = (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

故它的有理标准形为 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

4) **由 6 题知,它的非常数不变因子为**

$$d_3(\lambda) = (\lambda-1)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$$

故它的有理标准形为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

5) **由 6 题知,它的非常数不变因子为**

$$d_3(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+1) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$$

故它的有理标准形为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6) **由 6 题知,它的非常数不变因子为**

$$d_2(\lambda)=\lambda,\quad d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-2)=\lambda^2-2\lambda$$

故它的有理标准形为 $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&2\end{pmatrix}$

7) **由 6 题知,它的非常数不变因子是** $\lambda,\ \lambda^2$**,故它的有理标准形为**

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

8) **由 6 题知,它的非常数不变因子为**

$$d_3(\lambda)=(\lambda-2)^3=\lambda^3-6\lambda+12\lambda-8$$

故它的有理标准形为 $\begin{pmatrix}0&0&8\\1&0&-12\\0&1&6\end{pmatrix}$

9) **由 6 题知,它的非常数不变因子为**

$$d_3(\lambda)=\lambda(\lambda+1)^2=\lambda^3+2\lambda^2+\lambda$$

故它的有理标准形为 $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\0&1&-2\end{pmatrix}$

10) **由 6 题知,它的非常数不变因子是** $d_3(\lambda)=\lambda^3+30\lambda-8$**,故它的有理标准形为**

$$\begin{pmatrix}0&0&8\\1&0&-30\\0&1&0\end{pmatrix}$$

11) **由 6 题知,它的非常数不变因子为**

$$d_4(\lambda)=(\lambda-1)^4=\lambda^4-4\lambda^3+6\lambda^2-4\lambda+1$$

故它的有理标准形为 $\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\1&0&0&4\\0&1&0&-6\\0&0&1&4\end{pmatrix}$

12) **由 6 题知,它的非常数不变因子为** $d_4(\lambda)=(\lambda-1)^4$**,同 11) 题,故它的有理标准形为**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

13) 由 6 题知,它的非常数不变因子为

$d_3(\lambda) = \lambda - 1$,　$d_4(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 14\lambda + 19) = \lambda^3 - 15\lambda^2 + 33\lambda - 19$

故它的有理标准形为
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -33 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

14) 由6题知,它的非常数不变因子为 $d_n(\lambda) = \lambda^n - 1$,故它的有理标准形为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(二) 第八章补充题

1. A 是 n 维线性空间 V 上的线性变换 .

(1) 若 A 在 V 的某基下矩阵 A 是某多项式 $d(\lambda)$ 的伴侣阵,则 A 的最小多项式是 $d(\lambda)$;

(2) 设 A 的最高次的不变因子是 $d(\lambda)$,则 A 的最小多项式是 $d(\lambda)$.

证　(1) 由题意,设

$$d(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

$n-1$个

由习题3 可知 A 的不变因子为1, 1, …, 1, $d(\lambda)$. 将 $d(\lambda)$ 分解为

$$d(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{r_s}$$

$$(r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n \text{ 且 } \lambda_i \neq \lambda_j,\ i \neq j)$$

则 A 的初等因子为 $(\lambda-\lambda_1)^{r_1}$, $(\lambda-\lambda_2)^{r_2}$, …, $(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$,于是 A 的若尔当标准形为

$$\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}, \text{其中 } J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}_{r_i \times r_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

由于相似矩阵有相同的最小多项式,由第 7 章 §9 引理 3 和引理 4 知, A 的最小多项式为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s} = d(\lambda)$$

从而 A 的最小多项式为 $d(\lambda)$.

(2) A 的最高次的不变因子就是 A 的第 n 个不变因子 $d_n(\lambda)$. 于是 $d(\lambda) = d_n(\lambda)$. 由不变因子的性质可知 $d_i(\lambda) \mid d_n(\lambda)$ $(i = 1, \cdots, n-1)$,又根据非常数不变因子可以得到 A 在 V 的某基下的有理标准形,由(1)的结果和第 7 章 §9 引理 3 知 A 的最小多项式为 $d_n(\lambda)$. 故 A 的最高次的不变因子 $d(\lambda)$ 就是 A 的最小多项式.

六、学习效果检测题及答案

(一) 检测题

1. 下列 λ-矩阵中,哪些是满秩的?哪些是可逆的?若可逆试求其逆,若不可逆求出它的秩:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad B(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda+1 & \lambda^2+\lambda+2 \end{bmatrix}$$

$$C(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 2\lambda+1 & 1 \\ \lambda-1 & \lambda & -\lambda^2 \\ 1 & \lambda+1 & \lambda^2+1 \end{bmatrix}$$

2. 求下列 λ-矩阵的标准形:

(1) $\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-\lambda \\ (\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. 设 7 级 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为 5,其初等因子为

$$\lambda,\ \lambda,\ \lambda^3,\ \lambda-2,\ (\lambda-2)^4,\ (\lambda-2)^4$$

试求 $A(\lambda)$ 的各级行列式因子.

4. 求下列矩阵的若尔当标准形:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. 求下列矩阵的有理标准形和若尔当标准形:

(1) $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$;　　(2) $B=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -5 & 4 \\ -4 & -10 & 7 \end{pmatrix}$.

6. 已知 $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$,求 A 的最小多项式.

7. 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & -1 \end{pmatrix}$.

(1) 求出 A 的一切可能的若尔当标准形;

(2) 给出 A 可对角化的一个充分必要条件.

8. 设 A 是一个 6 级方阵,具有特征多项式 $\varphi(\lambda)=(\lambda+2)^2(\lambda-1)^4$ 和最小多项式 $m_A(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-1)^3$,求出 A 的若尔当标准形. 如果 $m_A(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$,$A$ 的若尔当标准形有几种可能的形式?

9. 设 n 级方阵 A 满足 $A^2=A$,证明 A 可对角化,并且存在可逆矩阵 P,使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}$$

(二) 检测题答案

1. 因为 $|A(\lambda)|=\lambda^3-2\lambda^2$,所以 $\operatorname{rank}A(\lambda)=2$; $A(\lambda)$ 满秩但不可逆 . 又因为 $|B(\lambda)|=2$,所以 $\operatorname{rank}B(\lambda)=2$; $B(\lambda)$ 满秩且可逆 . 又

$$B^{-1}(\lambda)=\frac{1}{|B(\lambda)|}B^*(\lambda)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda^2+\lambda+2&-\lambda\\-(\lambda+1)&1\end{pmatrix}$$

由于

$$|C(\lambda)|=\begin{vmatrix}\lambda&2\lambda+1&1\\\lambda-1&\lambda&-\lambda^2\\1&\lambda+1&\lambda^2+1\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_3}\begin{vmatrix}\lambda&2\lambda+1&1\\\lambda&2\lambda+1&1\\1&\lambda+1&\lambda^2+1\end{vmatrix}=0$$

且 $C(\lambda)$ 中 2 级子式 $\begin{vmatrix}\lambda&2\lambda+1\\\lambda-1&\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2+\lambda+1\neq0$,所以 $\operatorname{rank}C(\lambda)=2$; $C(\lambda)$ 既不满秩也不可逆 .

2. (1) 显然 $D_3(\lambda)=(\lambda-2)^3$,又 λ-矩阵中有一个 2 级子式 $\begin{vmatrix}-1&0\\\lambda-2&-1\end{vmatrix}=1$,所以 $D_2(\lambda)=1$,从而 $D_1(\lambda)=1$. 故不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1,\quad d_3(\lambda)=D_3(\lambda)=(\lambda-2)^3$$

从而标准形为
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-2)^2\end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix}1-\lambda&\lambda^2&\lambda\\\lambda&\lambda&-\lambda\\1+\lambda^2&\lambda^2&-\lambda^2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_3]{r_3-\lambda r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\\lambda&\lambda&-\lambda\\1-\lambda&\lambda^2&\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_2-\lambda r_1\\r_3-(1-\lambda)r_1}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&-\lambda\\0&\lambda^2&\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-\lambda r_2]{c_3+c_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda(\lambda+1)\end{pmatrix}$$

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-\lambda \\ (\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_2 \backslash c_4]{c_1 \backslash c_3}$

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) \end{bmatrix}$$

此 λ⁻矩阵的秩为 4,且初等因子为

$$\lambda^2,\ \lambda,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda,\ \lambda-1$$

于是其不变因子为

$$1,\ \lambda(\lambda-1),\ \lambda(\lambda-1),\ \lambda^2(\lambda-1)^2$$

从而标准形为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$

3. $A(\lambda)$ **的不变因子为**

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = 1,\quad d_3(\lambda) = \lambda(\lambda-2)$$

$$d_4(\lambda) = \lambda(\lambda-2)^4,\quad d_5(\lambda) = \lambda^3(\lambda-2)^4$$

故 $A(\lambda)$ **的各级行列式因子为**

$$D_1(\lambda) = D_2(\lambda) = 1,\quad D_3(\lambda) = \lambda(\lambda-2)$$

$$D_4(\lambda) = \lambda^2(\lambda-2)^5,\quad D_5(\lambda) = \lambda^5(\lambda-2)^9$$

4. $\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda+3 & -3 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$

A **的初等因子为** λ, λ^2 **,从而** A **的若尔当标准形为**

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由于 $\lambda E - B = \begin{bmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ -7 & -1 & \lambda-2 & -1 \\ 7 & 6 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$ **,可求得**

$$D_4(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ 4 & \lambda+1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^4$$

但 $\lambda E-B$ 有两个 3 级子式

$$\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & 0\\ 4 & \lambda+1 & 0\\ -7 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

$$\begin{vmatrix}4 & \lambda+1 & 0\\ -7 & -1 & \lambda-2\\ 7 & 6 & 1\end{vmatrix}=7\lambda^2-24\lambda+37$$

互素，从而 $D_3(\lambda)=1$. **于是** $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1$. **故** B **的不变因子为**

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1,\quad d_4(\lambda)=(\lambda-1)^4$$

B **的初等因子为** $(\lambda-1)^4$，**其若尔当标准形为**

$$J=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

由 $\lambda E-C=\begin{pmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 1 & \lambda & 0\\ 1 & -1 & \lambda-2\end{pmatrix}$，**可求得**

$$D_3(\lambda)=|\lambda E-C|=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

由于 $\lambda E-C$ **中有一个 2 级子式** $\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-(\lambda+1)$ **与** $D_3(\lambda)$ **互素，所以** $D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$，**故** C **的不变因子为**

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1,\quad d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

C **的初等因子为** $\lambda-2$, $(\lambda-1)^2$，**于是** C **的若尔当标准形为**

$$J=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

5. (1) $\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda & -3 & -3\\ 1 & \lambda-8 & -6\\ -2 & 14 & \lambda+10\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2\end{pmatrix}$

A **的不变因子为**

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1,\quad d_3(\lambda)=\lambda(\lambda+1)^2=\lambda^3+2\lambda^2+\lambda$$

A **的初等因子为** $\qquad\lambda,\quad(\lambda+1)^2$

故 A **的有理标准形与若尔当标准形分别为**

$$F=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\0&-1&-2\end{pmatrix},\qquad J=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$(2)\ \lambda E-B=\begin{pmatrix}\lambda+1&3&-1\\2&\lambda+5&-4\\4&10&\lambda-7\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-1)(\lambda^2+1)\end{pmatrix}$$

B **的不变因子为**

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1,\quad d_3(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda^2+1)=\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1$$

B **的初等因子为** $\qquad\lambda-1,\quad\lambda-\mathrm{i},\quad\lambda+\mathrm{i}$

故 B **的有理标准形和若尔当标准形分别为**

$$F=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix},\qquad J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\mathrm{i}&0\\0&0&-\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

6. **可求得** $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^3$,**容易验证**

$$A-E\neq O,\quad(A-E)^2=O$$

故 $m_A(\lambda)=(\lambda-1)^2$.

7. (1) **可求得** $\qquad|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$

法 1　由于 $\qquad 2E-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\-a&0&0\\-b&-c&3\end{pmatrix}$

当 $a\neq0$ **时**,$\operatorname{rank}(2E-A)=2$,**对应 2 重特征值 2 只有 1 个线性无关的特征向量,所以** A **的若尔当标准形为**

$$J=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad(*)$$

当 $a=0$ **时**,$\operatorname{rank}(2E-A)=1$,**对应 2 重特征值 2 有 2 个线性无关的特征向量,所以** A **的若尔当标准形为**

$$J=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad(**)$$

法2　当 $a\neq 0$ 时可验算 $(A-2E)(A+E)\neq O$,所以 A 的最小多项式为 $(\lambda-2)^2(\lambda+1)$,故 A 的若尔当标准形如(*)式. 当 $a=0$ 时,A 的最小多项式是 $(\lambda-2)(\lambda+1)$,故 A 的若尔当标准形如(* *)式.

(2) A 可对角化的充分必要条件是 A 的最小多项式无重根,即 A 的最小多项式为 $(\lambda-2)(\lambda+1)$,而后者成立的充分必要条件是 $a=0$.

8. 由 $\varphi(\lambda)=(\lambda+2)^2(\lambda-1)^4$ 知 A 的若尔当标准形中以 -2 为对角元的若尔当块的级数之和为 2; 以 1 为对角元的若尔当块的级数之和为 4. 又由 $m_A(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-1)^3$ 知,A 的若尔当标准形中,以 -2 为对角元的若尔当块都是 1 级的,而以 1 为对角元的若尔当块最大级数为 3,于是 A 的若尔当标准形为

$$J=\begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ & -2 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

当 $m_A(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$ 时,A 的可能的若尔当标准形为

$$J=\begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ & -2 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 或 \quad J=\begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ & -2 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9. 设 $g(\lambda)=\lambda^2-\lambda$,则 $g(A)=O$,所以 $m_A(\lambda)\mid g(\lambda)$. 由于 $g(\lambda)$ 无重根,所以 $m_A(\lambda)$ 无重根,故 A 可对角化. 又设 A 的特征值为 λ,对应的特征向量是 x,即 $Ax=\lambda x$,则有

$$\lambda^2x=A^2x=Ax=\lambda x$$

因而 $\lambda=0$ 或 1,故存在可逆矩阵 P 使结论成立.

第 9 章　欧几里得空间

在线性空间中,元素之间的基本运算只有加法与数量乘法 . 作为几何空间的一种推广,可以发现几何向量的度量性质,如长度、夹角等,在线性空间的理论中没有得到反映 . 但是元素的度量性质在许多问题(包括几何问题) 中有着特殊的地位 . 因此,有必要在线性空间中引入度量的概念,使其更接近于几何空间,并有更丰富的内容与方法 .

一、内容提要

1. 内积和欧几里得空间

(1) 设 V 是实数域 R 上的线性空间 . 如果对 V 中任意两个元素 α, β 有一个确定的实数 (α, β) 与它们对应,且满足:

1) $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$;

2) $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$, $k \in \mathbf{R}$;

3) $(\alpha+\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$, $\gamma \in V$;

4) $(\alpha, \alpha) \geq 0$,当有仅当 $\alpha = 0$ 时 $(\alpha, \alpha) = 0$,

则称 (α, β) 为 α 与 β 的内积,定义了内积的线性空间 V 称为欧几里得空间,简称为欧氏空间 .

(2) 一些常见的欧氏空间:

1) $\mathbf{R}^n$—— 对于实向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$,内积为

$$(\alpha, \beta) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \alpha\beta'$$

2) $\mathbf{R}^{s\times n}$—— 对于实矩阵 $A = (a_{ij})_{s\times n}$, $B = (b_{ij})_{s\times n}$,内积为

$$(A, B) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$$

3) $P[x]$—— 对于实系数多项式 $f(x)$, $g(x)$,内积为

$$(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

或 $$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

(3) **内积具有如下性质**:

设 V **是欧氏空间**, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_i, \beta_j \in V, k, k_i, l_i \in \mathrm{R}$,**则**

1) $(\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta)$;

2) $(\alpha, \beta+\gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$;

3) $(\alpha, 0) = (0, \beta) = 0$;

4) $\left(\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i, \sum_{j=1}^{n} l_j\beta_j\right) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} k_i l_j(\alpha_i, \beta_j)$;

5) $(\alpha, \beta)^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$,**当且仅当** α, β **线性相关时**,**等号才成立**.(**柯西-布涅柯夫斯基不等式**)

2. 长度、夹角与正交

(1) **设** V **是欧氏空间**,**对任意** $\alpha \in V$,**非负实数** $\sqrt{(\alpha, \alpha)}$ **称为元素** α **的长度**,**记为** $|\alpha|$,**即** $|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$.**长度为** 1 **的元素称为单位元素**.**如果** $\alpha \neq 0$,**则** $\frac{1}{|\alpha|}\alpha$ **是单位元素**,**称为将** α **单位化**.

(2) **非零元素** $\alpha, \beta \in V$ **的夹角** $\langle\alpha, \beta\rangle$ **规定为**

$$\langle\alpha, \beta\rangle = \arccos\frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}, \quad 0 \leq \langle\alpha, \beta\rangle \leq \pi$$

(3) **如果元素** $\alpha, \beta \in V$ **的内积为零**,**即** $(\alpha, \beta) = 0$,**则称** α **与** β **正交或垂直**,**记为** $\alpha \perp \beta$.

(4) **长度具有如下性质**(**设** V **是欧氏空间**, $\alpha, \beta \in V, k \in \mathrm{R}$):

1)(**非负性**) $|\alpha| \geq 0$,**当且仅当** $\alpha = 0$ **时** $|\alpha| = 0$;

2)(**齐次性**) $|k\alpha| = |k||\alpha|$;

3)(**三角不等式**) $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

(5) **正交元素组的性质**(**设** V **是欧氏空间**, $\alpha, \beta, \alpha_i \in V$):

1) **当** $\alpha \perp \beta$ **时**, $|\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$;

2) **如果** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ **两两正交**,**则**

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_s|^2$$

3) **两两正交的非零元素组是线性无关的**.

3. 度量矩阵

(1) 设 V 是 n 维欧氏空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一组基, 称矩阵

$$\begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_n) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & (\alpha_n, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{pmatrix}$$

为基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的度量矩阵.

(2) 度量矩阵有如下性质:

1) 设 $\alpha, \beta \in V$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标分别为

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)', \quad y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$$

则

$$(\alpha, \beta) = x'Ay$$

其中 $A = ((\alpha_i, \alpha_j))_{n\times n}$ 是基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的度量矩阵, 这表明任意两个元素的内积可以通过坐标和度量矩阵的乘积表示出来, 即度量矩阵完全确定了内积;

2) 度量矩阵是对称正定的;

3) 设 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是 V 的另一组基, 且由基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 C, 则基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的度量矩阵 A 和基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的度量矩阵 B 满足 $B = C'AC$. 即不同基的度量矩阵是合同的, 且合同变换矩阵是两组基之间的过渡矩阵.

4. 标准正交基

(1) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一组基, 如果它们两两正交, 则称之为 V 的正交基; 由单位元素组成的正交基称为标准正交基.

(2) n 维欧氏空间 V 必存在正交基与标准正交基. 对 n 维欧氏空间 V 的任一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 都可以用施密特(Schmidt) 正交化过程化为正交基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$. 施密特正交化过程如下:

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

……

$$\beta_n = \alpha_n - \frac{(\alpha_n, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_n, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_n, \beta_{n-1})}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})}\beta_{n-1}$$

如果再把每个 β_i 单位化,即得到 V 的一组标准正交基.

(3) 标准正交基的有关结果如下:

设 V 是 n 维欧氏空间,$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组标准正交基,则

1) 标准正交基的度量矩阵是单位矩阵;

2) 设 $\alpha, \beta \in V$,且 α, β 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标分别为

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)', \quad y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$$

则
$$(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = x'y$$

3) V 中任一元素 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标为

$$((\alpha, \varepsilon_1), (\alpha, \varepsilon_2), \cdots, (\alpha, \varepsilon_n))'$$

4) 由标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵(即满足 $A'A = E$ 的 n级实矩阵).又若两组基之间的过渡矩阵是正交矩阵,且其中一组基是标准正交基,则另一组基也是标准正交基.

5. 正交矩阵

(1) 如果 n级实矩阵 A 满足 $A'A = E$(或 $AA' = E$,或 $A^{-1} = A'$),则称为 A 为正交矩阵.

(2) 正交矩阵具有如下性质:

1) 如果 A 是正交矩阵,则 $|A| = \pm 1$;

2) 如果 A 是正交矩阵,则 A', A^{-1}, A^*, A^k 均是正交矩阵;而 lA 是正交矩阵的充分必要条件是 $l = \pm 1$;

3) 如果 A, B 是 n 级正交矩阵,则 AB 也是正交矩阵;

4) n级实矩阵 A 是正交矩阵的充分必要条件是,A 的 n 个列(或行)向量是两两正交的单位向量.

6. 欧氏空间的同构

(1) 设 V 与 V' 是两个欧氏空间,如果存在由 V 到 V' 的双射 σ,且对任意 $\alpha, \beta \in V$, $k \in \mathrm{R}$,有

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),\quad \sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha),\quad (\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$$

则称 σ是 V 到 V'的同构映射,此时称 V 与 V'同构 .

(2) 同构欧氏空间的有关结论如下:

1) 同构的欧氏空间具有反身性、对称性和传递性;

2) 任一 n维欧氏空间都与 R^n 同构;

3) 两个有限维欧氏空间同构的充分必要条件是它们有相同的维数 .

7. 正交变换

(1) 设 A 是欧氏空间 V的线性变换,如果 A 保持内积不变,即对任意 $\alpha, \beta \in V$ 都有$(A(\alpha), A(\beta)) = (\alpha, \beta)$,则称 A 是 V的正交变换 .

(2) A 是欧氏空间 V 的正交变换的充分必要条件如下:

1) $|A(\alpha)| = |\alpha|$, " $\alpha \in V$;

2) 若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V的标准正交基,则 $A(\varepsilon_1), A(\varepsilon_2), \cdots, A(\varepsilon_n)$ 也是标准正交基;

3) A 在 V 的任一标准正交基下的矩阵为正交矩阵 .

8. 正交子空间与正交补

(1) 设 W_1, W_2 是欧氏空间 V的两个子空间,如果 $\alpha \in V$,且对任意 $\beta \in W_1$ 恒有$(\alpha, \beta) = 0$,则称α与子空间 W_1 正交,记为 $\alpha \perp W_1$;如果对任意 $\alpha \in W_1$ 和任意 $\beta \in W_2$ 都有$(\alpha, \beta) = 0$,则称 W_1 与 W_2 正交,记为 $W_1 \perp W_2$;如果 $W_1 \perp W_2$,且 $V = W_1 + W_2$,则称 W_2 为 W_1 的正交补,记为 $W_1^{\perp}$.

(2) 正交子空间有下列结果:

1) 设 V 是欧氏空间,$\alpha, \alpha_i, \beta_j \in V$,则

$$\alpha \perp L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t) \quad \alpha \perp \beta_j \quad (j = 1,2,\cdots,t)$$

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \perp L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t) \quad \alpha_i \perp \beta_j$$

$$(i = 1,2,\cdots,s;\ j = 1,2,\cdots,t)$$

2) 如果欧氏空间 V 的子空间 $W_1, W_2, \cdots, W_s$ 两两正交,则 $W_1 + W_2 + \cdots + W_s$ 是直和 .

3) 有限维欧氏空间 V的每一个子空间 W 都有惟一的正交补,且 $W^{\perp}$ 恰由所

有与 W 正交的元素组成.

4) 在 n 维欧氏空间 V 的子空间 W 中取一组正交基(或标准正交基)$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r (0 < r < n)$,将其扩充成 V 的正交基(或标准正交基)$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_n$,则 $W^{\perp} = L(\varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_n)$.

5) 设 W 是欧氏空间 V 的子空间,则

$$维(V) = 维(W) + 维(W^{\perp})$$

9. 实对称矩阵的标准形

(1) 实对称矩阵的特征值皆为实数.

(2) 实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量必正交.

(3) 对于任意一个 n 级实对称矩阵 A,都存在一个 n 级正交矩阵 Q,使 $Q'AQ = Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

(4) 实对称矩阵正交相似于对角矩阵的计算:

第一步　求实对称矩阵 A 的特征值和对应的线性无关特征向量. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是 A 的全部互异特征值,其重数分别为 $r_1, r_2, \cdots, r_s$,且 $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n$. 又设对应特征值 λ_i 的 r_i 个线性无关的特征向量为 $p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{ir_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$.

第二步　如果 $r_i > 1$,将对应 λ_i 的特征向量 $p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{ir_i}$ 用施密特正交化过程正交化,再单位化得 $q_{i1}, q_{i2}, \cdots, q_{ir_i}$;如果 $r_i = 1$,直接将 p_{i1} 单位化得 q_{i1}.

第三步　构造正交矩阵

$$Q = (q_{11}, q_{12}, \cdots, q_{1r_1}, q_{21}, q_{22}, \cdots, q_{2r_2}, \cdots, q_{s1}, q_{s2}, \cdots, q_{sr_s})$$

则

$$Q'AQ = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_{r_s} \end{pmatrix}$$

10. 对称变换

(1) 设 V 是欧氏空间,$\mathscr{A}$ 为 V 的线性变换,如果对任意 $\alpha, \beta \in V$ 有

$$(A(\alpha), \beta) = (\alpha, A(\beta))$$

则称 A 为 V 的对称变换 .

(2) 对称变换具有如下性质:

1) 对称变换的特征值都是实数,属于不同的特征值的特征向量正交;

2) 若欧氏空间 V 的子空间 W 是对称变换 A 的不变子空间,则 $W^{\perp}$ 也是 A 的不变子空间;

3) 欧氏空间 V 的线性变换 A 是对称变换的充分必要条件是,A 在 V 的任一标准正交基下的矩阵为实对称矩阵;

4) 设 A 是欧氏空间 V 的对称变换,则存在 V 的一组标准正交基,使 A 在该基下的矩阵为对角矩阵 .

11. 主轴定理

(1)(主轴定理) 任意一个 n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x'Ax$ 都可以经过正交线性替换 $x = Qy$ 化为标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值,正交矩阵 Q 的列向量是对应特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的两两正交的单位特征向量 .

(2) 用正交线性替换化二次型为标准形的计算:

第一步　写出 n 元实二次型 f 的矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$;

第二步　求 n 级正交矩阵 Q,使得

$$Q'AQ = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

第三步　正交线性替换 $x = Qy$ 化二次型为

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

12. 元素到子空间的距离

(1) 设 V 是欧氏空间,$\alpha, \beta \in V$,称长度 $|\alpha - \beta|$ 为元素 α 与 β 的距离,记为

$d(\alpha,\beta)$;又设 W 是 V 的子空间,取定 $\gamma\in V$,则称 $\min\limits_{\alpha\in W}|\gamma-\alpha|$ 为元素 γ 到子空间 W 的距离. $\gamma\in V$ 可惟一分解为 $\gamma=\alpha+\beta$,其中 $\alpha\in W$, $\beta\in W^{\perp}$,称 α 为 γ 在子空间 W 上的内射影,又称 $\gamma-\alpha$ 为 γ 到子空间 W 的垂线.

(2) 距离的基本性质:

设 V 是欧氏空间,$\alpha,\beta,\gamma\in V$,而 W 是 V 的子空间,则有:

1) 对称性: $d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)$;

2) 非负性: $d(\alpha,\beta)\geq 0$,当且仅当 $\alpha=\beta$ 时等号成立;

3) 三角不等式: $d(\alpha,\beta)\leq d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta)$;

4) γ 到子空间 W 的距离等于 γ 到 W 的垂线长.

13. 最小二乘法

(1) 设 $A\in\mathbf{R}^{n\times s}$, $b\in\mathbf{R}^{n}$,对于线性方程组 $Ax=b$,使得 $|b-Ax|$ 为最小的向量 $x^{(0)}$ 称为方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解.这种问题称为最小二乘解问题.

(2) 最小二乘解的有关结果如下:

记 $R(A)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$,其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是矩阵 A 的列向量,则

1) $x^{(0)}$ 是 $Ax=b$ 的最小二乘解的充分必要条件是 $(b-Ax^{(0)})\perp R(A)$;

2) $x^{(0)}$ 是 $Ax=b$ 的最小二乘解的充分必要条件是,$x^{(0)}$ 是相容方程组 $A'Ax=A'b$ 的解.

14. 酉空间

(1) 设 V 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的线性空间,如果对于任意 $\alpha,\beta\in V$ 都有一复数 (α,β) 与之对应,且满足:

1) $(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$;

2) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$, $k\in\mathbf{C}$;

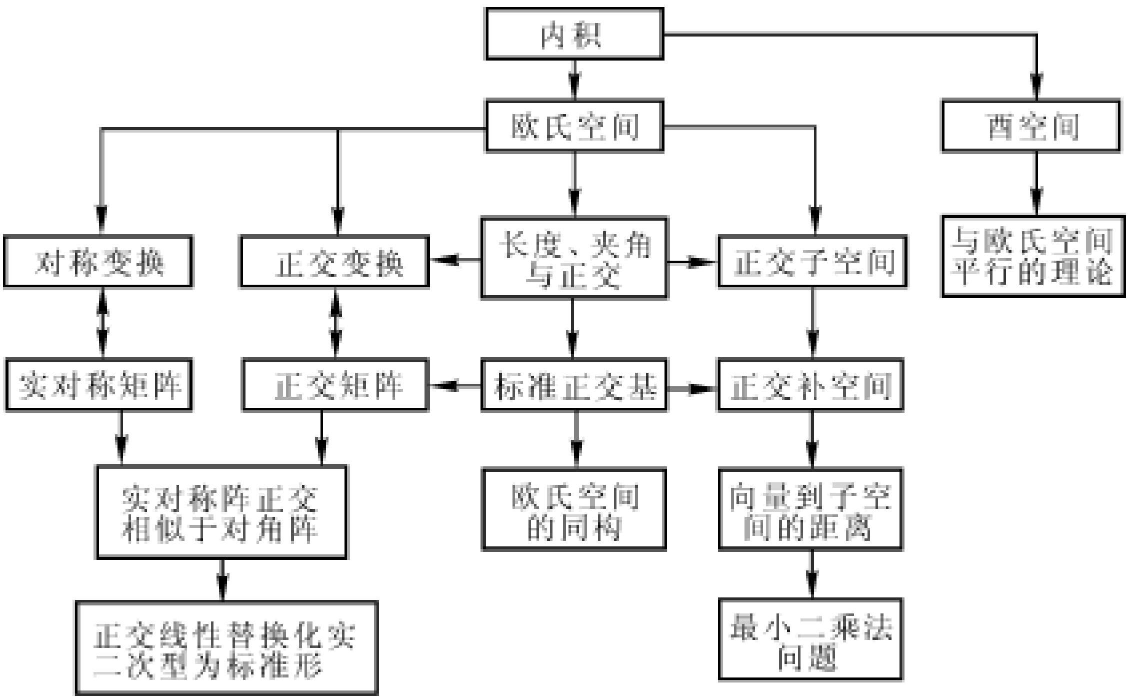
3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$, $\gamma\in V$;

4) $(\alpha,\alpha)\geq 0$,当且仅当 $\alpha=0$ 时 $(\alpha,\alpha)=0$,

则称 (α,β) 为元素 α 与 β 的内积,规定了内积的复线性空间 V 称为酉空间.

(2) 酉空间与欧氏空间的讨论相似,有一套平行的理论.

二、知识网络图



三、重点、难点解读

本章通过在实数域上的线性空间中引入内积的概念得到欧氏空间，进而讨论了长度、夹角及正交等度量概念，特别是引入了欧氏空间的标准正交基这一结构特征．利用标准正交基的特性，可以使许多问题变得非常简单，这是引入标准正交基的好处．要求准确理解和掌握标准正交基的概念及基本性质，能熟练运用施密特正交化方法由一组基求出标准正交基．

欧氏空间中与内积有关的正交变换与对称变换在现实生活中有着广泛而重要的应用，这两种变换在标准正交基下分别对应着正交矩阵及实对称矩阵这两种具有特殊性质的矩阵．要求掌握正交变换与对称变换的概念及性质，能够运用它们与对应特殊矩阵之间的关系解题．对实对称矩阵 A，要求能熟练地找到正交矩阵 Q，使 $Q'AQ$ 为对角阵，以及以另一种形式出现的同一个问题，即用正交线性替换化实二次型为标准形．

将线性空间关于某个子空间进行的直和分解是不惟一的,但是将欧氏空间关于某个子空间及其正交补空间的直和分解是惟一的.欧氏空间的这种分解是很重要的,要求掌握子空间的正交补的概念及基本性质,会求某些子空间的正交补.

四、典型例题解析

例9.1　在 R^n 中,设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,如下定义的二元实函数是否构成内积:

(1) $(\alpha,\beta)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2b_i^2}$;　　(2) $(\alpha,\beta)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n}b_j\right)$;

(3) $(\alpha,\beta)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_ia_ib_i$,其中 $k_i>0(i=1,2,\cdots,n)$.

解　(1) 取 $\alpha=(1,0,\cdots,0)=\beta$,有

$$(-2\alpha,\beta)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(-2a_i)^2b_i^2}=\sqrt{4}=2\neq-2(\alpha,\beta)$$

所以(α,β)不是 R^n 的内积.

(2) 取 $\alpha=(1,-1,0,\cdots,0)\neq0$,有$(\alpha,\alpha)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2=0$,所以$(\alpha,\beta)$不是 R^n 的内积.

(3) 设 $\gamma=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in\mathrm{R}^n$, $k\in\mathrm{R}$,有

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}k_ia_ib_i=\sum_{i=1}^{n}k_ib_ia_i=(\beta,\alpha)$$

$$(\alpha,\beta+\gamma)=\sum_{i=1}^{n}k_ia_i(b_i+c_i)=\sum_{i=1}^{n}k_ia_ib_i+\sum_{i=1}^{n}k_ia_ic_i=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$$

$$(k\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}k_i(ka_i)b_i=k\sum_{i=1}^{n}k_ia_ib_i=k(\alpha,\beta)$$

当 $\alpha=0$ 时,$(\alpha,\alpha)=0$;当 $\alpha\neq0$ 时,存在 i_0 使得 $a_{i_0}\neq0$,从而有

$$(\alpha,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}k_ia_i^2\geq k_{i_0}a_{i_0}^2>0$$

故(α,β)是 R^n 的内积.

例9.2　在实多项式空间 $P[t]_{n+1}$ 中,定义二元实函数

$$(f(t),g(t))=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)g\left(\frac{i}{n}\right)\quad(\forall f(t),g(t)\in P[t]_{n+1})$$

(1) 证明$(f(t),g(t))$是$P[t]_{n+1}$的内积;

(2) 当$n=1$时,取$f(t)=t$, $g(t)=t+a$,问a为何值时,$f(t)$与$g(t)$正交?

解 (1) 设$h(t)\in P[t]_{n+1}$, $k\in\mathbf{R}$,则有

$$(f,g)=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)g\left(\frac{i}{n}\right)=\sum_{i=0}^{n}g\left(\frac{i}{n}\right)f\left(\frac{i}{n}\right)=(g,f)$$

$$(f,g+h)=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\left[g\left(\frac{i}{n}\right)+h\left(\frac{i}{n}\right)\right]=$$

$$\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)g\left(\frac{i}{n}\right)+\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)h\left(\frac{i}{n}\right)=(f,g)+(f,h)$$

$$(kf,g)=\sum_{i=0}^{n}kf\left(\frac{i}{n}\right)g\left(\frac{i}{n}\right)=k\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)g\left(\frac{i}{n}\right)=k(f,g)$$

当$f(t)=0$时,$(f,f)=0$;当$f(t)\neq 0$时,因为$f(t)$最多有n个零点,所以$f\left(\frac{0}{n}\right),f\left(\frac{1}{n}\right),\cdots,f\left(\frac{n}{n}\right)$中至少有一个不为零,从而$(f,f)=\sum_{i=0}^{n}f^2\left(\frac{i}{n}\right)>0$. 因此$(f,g)$是$P[t]_{n+1}$的内积.

(2) 当$n=1$时,由

$$(f,g)=f\left(\frac{0}{1}\right)g\left(\frac{0}{1}\right)+f\left(\frac{1}{1}\right)g\left(\frac{1}{1}\right)=0\times(0+a)+1\times(1+a)=0$$

得$a=-1$,即$a=-1$时,$f(t)$与$g(t)$正交.

例 9.3 设α是欧氏空间V的一个非零元素,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in V$满足条件

$$(\alpha_i,\alpha)>0\ (i=1,2,\cdots,n),\quad(\alpha_i,\alpha_j)\leq 0\ (i,j=1,2,\cdots,n;i\neq j)$$

证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关.

证 设存在实数$k_1,k_2,\cdots,k_n$,使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$,且假定

$$k_1,\cdots,k_r\geq 0,\quad k_{r+1},\cdots,k_n\leq 0\quad(1\leq r\leq n)$$

(否则可重新编号,使之成立). 令

$$\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=-k_{r+1}\alpha_{r+1}-\cdots-k_n\alpha_n$$

则

$$(\beta,\beta)=(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r,\ -k_{r+1}\alpha_{r+1}-\cdots-k_n\alpha_n)=$$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}k_i(-k_j)(\alpha_i,\alpha_j)$$

由已知条件和假定条件知,上式右端非正,即$(\beta,\beta)\leq 0$,但由内积的定义知

$(\beta,\beta)\geq 0$,故$(\beta,\beta)=0$,从而$\beta=0$,即有

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=0,\quad k_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+k_n\alpha_n=0$$

于是

$$0=(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r,\alpha)=k_1(\alpha_1,\alpha)+\cdots+k_r(\alpha_r,\alpha)$$

$$0=(k_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+k_n\alpha_r,\alpha)=k_{r+1}(\alpha_{r+1},\alpha)+\cdots+k_n(\alpha_n,\alpha)$$

由已知条件和假定条件知

$$k_i(\alpha_i,\alpha)\geq 0\ (1\leq i\leq r),\quad k_j(\alpha_j,\alpha)\leq 0\ (r+1\leq j\leq n)$$

结合上面两式得

$$k_i(\alpha_i,\alpha)=0\ (1\leq i\leq r),\quad k_j(\alpha_j,\alpha)=0\ (r+1\leq j\leq n)$$

从而 $k_i=0\ (i=1,2,\cdots,n)$. 故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

例 9.4　设在向量空间 $\mathbf{R}^4$ 中规定内积(不一定是标准内积)后得到欧氏空间 V,且 V 的基 $\alpha_1=(1,-1,0,0)$, $\alpha_2=(-1,2,0,0)$, $\alpha_3=(0,1,2,1)$, $\alpha_4=(1,0,1,1)$ 的度量矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&-3&0&1\\-3&6&0&-1\\0&0&13&9\\1&-1&9&7\end{pmatrix}$$

(1) 求基 $e_1=(1,0,0,0)$, $e_2=(0,1,0,0)$, $e_3=(0,0,1,0)$, $e_4=(0,0,0,1)$ 的度量矩阵.

(2) 求与向量 $\beta_1=(1,1,-1,1)$, $\beta_2=(1,-1,-1,1)$, $\beta_3=(2,1,1,3)$ 都正交的单位向量.

解　(1) 由于 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)B$,其中

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\-1&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\quad 且有\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&1&-3\\1&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}=C$$

从而由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 e_1,e_2,e_3,e_4 的过渡矩阵为 C,故基 e_1,e_2,e_3,e_4 的度量矩阵为

$$D=C'AC=\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\1&2&-1&0\\0&-1&2&1\\-1&0&1&3\end{pmatrix}$$

(2) 设 $\beta = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 与向量 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都正交,则有

$$(\beta, \beta_1) = (x_1, x_2, x_3, x_4) D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$

$$(\beta, \beta_2) = (x_1, x_2, x_3, x_4) D \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_4 = 0$$

$$(\beta, \beta_3) = (x_1, x_2, x_3, x_4) D \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 0$$

解由它们构成的齐次线性方程组得

$$x_1 = -11k, \quad x_2 = 6k, \quad x_3 = k, \quad x_4 = 0 \quad (k\text{任意})$$

于是可取 $\beta = (-11, 6, 1, 0)$. 又有

$$(\beta, \beta) = (-11, 6, 1, 0) D \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 172$$

故 $\gamma = \dfrac{1}{|\beta|}\beta = \pm \dfrac{1}{\sqrt{172}}(-11, 6, 1, 0)$ 是与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都正交的单位向量.

例9.5　设有 $n+1$ 个列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta \in \mathrm{R}^n$, A 是一个 n 级正定矩阵,如果满足:

(1) $\alpha_j \neq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$;

(2) $\alpha_i' A \alpha_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n$ 且 $i \neq j)$;

(3) β 与每一个 α_j 都正交.

证明 $\beta = 0$.

证　设有实数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$,使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$,则对任意 α_i 有

$$0 = \alpha_i' A(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n) = k_i \alpha_i' A \alpha_i$$

由于 $\alpha_i \neq 0$,且 A 是正定矩阵,所以 $\alpha_i' A \alpha_i > 0$,从而 $k_i = 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$,即

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,它们构成 $\mathbf{R}^n$ 的一组基. 设 $\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_n\alpha_n$,则

$$(\beta,\beta) = (\beta, l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_n\alpha_n) = l_1(\beta,\alpha_1) + l_2(\beta,\alpha_2) + \cdots + l_n(\beta,\alpha_n) = 0$$

故 $\beta = 0$.

例 9.6 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维欧氏空间 V 的一组基,这组基的度量矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

求 V 的一组标准正交基.

解 法 1 采用初等变换法. 由于

$$\begin{pmatrix} A \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2 + r_1 \\ r_3 - r_1}]{\substack{c_2 + c_1 \\ c_3 - c_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{c_3 - c_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{\sqrt{2}}]{c_3 \times \frac{1}{\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

令 $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$,则 $C'AC = E_3$. 又令 $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)C$,即

$$\gamma_1 = \alpha_1, \quad \gamma_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)$$

则 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 是 V 的一组标准正交基.

法 2　采用正交化方法. 因为 A 是基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的度量矩阵,所以

$$(\alpha_1,\alpha_1)=1,\quad(\alpha_1,\alpha_2)=-1,\quad(\alpha_1,\alpha_3)=1$$

$$(\alpha_2,\alpha_2)=2,\quad(\alpha_2,\alpha_3)=0,\quad(\alpha_3,\alpha_3)=4$$

正交化得

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=$$

$$\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1-\frac{(\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2)}{(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2)}(\alpha_1+\alpha_2)=$$

$$\alpha_3-\alpha_1-\frac{(\alpha_3,\alpha_1)+(\alpha_3,\alpha_2)}{(\alpha_1,\alpha_1)+2(\alpha_1,\alpha_2)+(\alpha_2,\alpha_2)}(\alpha_1+\alpha_2)=$$

$$-2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$$

再单位化得 V 的标准正交基

$$\gamma_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{(\alpha_1,\alpha_1)}}\alpha_1=\alpha_1$$

$$\gamma_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2)}}(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2$$

$$\gamma_3=\frac{1}{|\beta_3|}\beta_3=\frac{1}{\sqrt{(-2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,-2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)}}\beta_3=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)$$

例 9.7　设 V 为 4 维欧氏空间,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 为 V 的一个标准正交基,子空间 $W=L(\alpha_1,\alpha_2)$,其中 $\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3$,求 $W^{\perp}$.

解　设 $\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3+x_4\varepsilon_4\in W^{\perp}$,则有

$$\begin{cases}(\alpha,\alpha_1)=x_1+x_2=0\\(\alpha,\alpha_2)=x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$$

解方程组得基础解系

$$(-1,1,0,0)',\quad(0,0,0,1)'$$

所以 $W^{\perp}=L(\alpha_3,\alpha_4)$,其中

$$\alpha_3=-\varepsilon_1+\varepsilon_2,\quad\alpha_4=\varepsilon_4$$

例 9.8　已知 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的子空间 $W = L(A_1, A_2)$,其中

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

求 $W^{\perp}$ 的一组标准正交基.

解　设 $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in W^{\perp}$,则有

$$\begin{cases} (A, A_1) = x_1 + x_2 = 0 \\ (A, A_2) = x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

解方程组得基础解系

$$(1, -1, 1, 0)', \quad (1, -1, 0, 1)'$$

从而 $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是 $W^{\perp}$ 的一组基.正交化得

$$C_1 = B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = B_2 - \frac{(B_2, C_1)}{(C_1, C_1)} C_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

再单位化即得 $W^{\perp}$ 的一组标准正交基

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

例 9.9　证明:在 n 维欧氏空间 V 中,两两夹角成钝角的元素不多于 $n+1$ 个.

分析　此题即为证明,在 V 中,最多有 $n+1$ 个元素 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}$ 满足 $(\alpha_i, \alpha_j) < 0$.

证　对 n 作归纳法.当 $n = 1$ 时,1 维欧氏空间的任意三个元素中,必有两个元素的夹角为 0,故结论成立.

现假设命题对 $n-1$ 维欧氏空间成立,下面来证对 n 维欧氏空间 V 也成立.反证.若在 V 中存在 $n+2$ 个元素 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+2}$,其两两夹角为钝角,即 $(\alpha_i, \alpha_j) < 0 (i, j = 1, 2, \cdots, n+2; i \neq j)$.记 $W = L(\alpha_1)$,且将 V 分解为 $V = W \oplus W^{\perp}$,则 $\dim W^{\perp} = n-1$,此时

$$\alpha_i = k_i \alpha_1 + \beta_i \quad (\beta_i \in W^{\perp}; i = 2, 3, \cdots, n+2)$$

由

$$0 > (\alpha_i, \alpha_1) = (k_i \alpha_1 + \beta_i, \alpha_1) = k_i (\alpha_1, \alpha_1) + (\beta_i, \alpha_1) = k_i (\alpha_1, \alpha_1)$$

得 $k_i < 0 (i = 2, 3, \cdots, n+2)$.又对 $i, j = 2, 3, \cdots, n+2$ 且 $i \neq j$,有

$$0 > (\alpha_i, \alpha_j) = (k_i\alpha_1 + \beta_i, k_j\alpha_1 + \beta_j) = k_ik_j(\alpha_1, \alpha_1) + (\beta_i, \beta_j)$$

从而

$$(\beta_i, \beta_j) = -k_ik_j(\alpha_1, \alpha_1) < 0 \quad (i, j = 2, 3, \cdots, n+2; i \neq j)$$

这表明在 $n-1$ 维欧氏空间 $W^{\perp}$ 中存在 $n+1$ 个两两夹角为钝角的元素,与归纳假设矛盾.故在 n 维欧氏空间中两两夹角成钝角的元素不多于 $n+1$ 个.

例 9.10　设 $A \in \mathrm{R}^{m \times n}$. 证明:$R^{\perp}(A) = N(A')$.

证　将矩阵 A 按列分块为 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$,则

$$\begin{aligned} x \in R^{\perp}(A) \quad & x \perp R(A) = L(a_1, a_2, \cdots, a_n) \\ & x \perp a_j\ (j = 1, 2, \cdots, n) \\ & a_j'x = 0\ (j = 1, 2, \cdots, n) \quad A'x = 0 \quad x \in N(A') \end{aligned}$$

例 9.11　设 α 为 n 维非零列向量,证明 $A = E - \dfrac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha'$ 为正交矩阵.

证　因为 $A' = \left(E - \dfrac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha'\right)' = E' - \dfrac{2}{\alpha'\alpha}(\alpha\alpha')' = E - \dfrac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha' = A$

所以

$$\begin{aligned} A'A = & \left(E - \frac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha'\right)\left(E - \frac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha'\right) = \\ & E - \frac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha' - \frac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha' + \left(\frac{2}{\alpha'\alpha}\right)^2\alpha(\alpha'\alpha)\alpha' = \\ & E - \frac{4}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha' + \frac{4}{(\alpha'\alpha)^2}(\alpha'\alpha)\alpha\alpha' = E \end{aligned}$$

故 A 是正交矩阵.

例 9.12　设 A 为 n 级实对称矩阵,且满足 $A^2 - 4A + 3E = O$,证明 $A - 2E$ 为正交矩阵.

证　A 满足 $A' = A$. 因为

$$\begin{aligned} (A-2E)'(A-2E) = (A' - (2E)')(A-2E) = (A-2E)(A-2E) = \\ A^2 - 4A + 4E = (A^2 - 4A + 3E) + E = E \end{aligned}$$

故 $A - 2E$ 为正交矩阵.

例 9.13　设 A, B 为 n 级正交矩阵,且 $|A| \neq |B|$. 证明 $A + B$ 为不可逆矩阵.

证　因为 A, B 为正交矩阵,所以 $AA' = B'B = E$,且 $|A| = \pm 1$, $|B| = \pm 1$. 由于 $|A| \neq |B|$,所以 $|A| = -|B|$. 故有

$$|A + B| = |AA'||A + B||B'B| = |A||A'||A+B||B'||B| =$$

$$-|A|^2\ |A'(A+B)B'|=-|B'+A'|=$$
$$-|(A+B)'|=-|A+B|$$

即 $2|A+B|=0$,从而 $|A+B|=0$.

例9.14 设 A,B为 n级正交矩阵,n为奇数,证明 $|(A-B)(A+B)|=0$.

证 由于 A,B是正交矩阵,所以 $A'A=BB'=E$. 注意方阵与其转置矩阵的行列式相等,有

$$\begin{aligned}|(A-B)(A+B)|=|A-B||A+B|&=|(A-B)'||A+B|=\\&|(A'-B')(A+B)|=\\&|A'A+A'B-B'A-B'B|=|A'B-B'A|\end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned}|(A-B)(A+B)|=|A-B||A+B|&=|(A+B)'||A-B|=\\&|(A'+B')(A-B)|=\\&|A'A-A'B+B'A-B'B|=|-A'B+B'A|=\\&(-1)^n\ |A'B-B'A|=-|A'B-B'A|\end{aligned}$$

于是 $|(A-B)(A+B)|=-|(A-B)(A+B)|$,故 $|(A-B)(A+B)|=0$.

例9.15 已知3级实对称矩阵 A的特征值为 $1,-1,0$,其中 $\lambda_1=1$与 $\lambda_3=0$的特征向量分别是 $p_1=(1,a,1)'$及 $p_3=(a,a+1,1)'$,求矩阵 A.

分析 这是已知全部特征值与部分特征向量,反求另一部分特征向量及矩阵 A的问题. 一般都是对实对称矩阵而讨论的,主要利用实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量正交的性质.

解 由于 A是实对称矩阵,所以 A的属于不同特征值的特征向量正交,于是由 $(p_1,p_3)=a+a(a+1)+1=0$,解得 $a=-1$. 又设 $p_2=(x_1,x_2,x_3)'$是 A对应特征值 $\lambda_2=-1$的特征向量,它与 p_1和 p_3都正交,于是

$$\begin{cases}(p_2,p_1)=x_1-x_2+x_3=0\\(p_2,p_3)=-x_1+x_3=0\end{cases}$$

由于 $\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\end{pmatrix}$,同解方程组为 $\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=2x_3\end{cases}$,基础解系为 $p_2=(1,2,1)'$,它即是 A对应 $\lambda_2=-1$的特征向量.

令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}$,则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,故

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

例 9.16　证明:若 A 是正定矩阵,则 A^* 也是正定矩阵.

证　法 1　由于 A 正定,所以 $|A| > 0$,且对任意 $x \neq 0$ 有 $x'Ax > 0$. 又 $A^* = |A| A^{-1}$,从而对任意 $x \neq 0$,有(注意到 $A' = A$,且当 $x \neq 0$ 时,$A^{-1}x \neq 0$)

$$x'A^* x = x'|A| A^{-1} x = |A| x'A^{-1}AA^{-1}x =$$

$$|A|(A^{-1}x)'A(A^{-1}x) > 0$$

又 $(A^*)' = (|A| A^{-1})' = |A|(A')^{-1} = |A| A^{-1} = A^*$,故 A^* 是正定矩阵.

法 2　同上可证 A^* 是实对称矩阵. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值,由 A 正定知 $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$. 而 A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda_1}, \frac{|A|}{\lambda_2}, \cdots, \frac{|A|}{\lambda_n}$, 且 $\frac{|A|}{\lambda_i} > 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$,故 A^* 是正定矩阵.

例 9.17　设 A 是 n 级实对称矩阵,且满足 $A^3 - 3A^2 + 5A - 3E = O$,证明 A 是正定矩阵.

分析　证明 A 的特征值全大于零即可.

证　设 $Ax = \lambda x$,即 λ 是 A 的特征值,x 是 A 对应 λ 的特征向量,则有

$$0 = (A^3 - 3A^2 + 5A - 3E)x = (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3)x$$

也即 λ 满足

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0$$

解得 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}\mathrm{i}$. 因为 A 为实对称矩阵,其特征值为实数,故只有 $\lambda = 1$,即 A 的全部特征值就是 $\lambda = 1 > 0$,所以 A 为正定矩阵.

例 9.18　试求正交的相似变换矩阵,化下列实对称矩阵为对角矩阵:

(1) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$;　　(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

解

(1) $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xRightarrow{r_2 + r_1}$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 3 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1-c_2} \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 6 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(4-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$$

A的特征值为$\lambda_1=0$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=9$. 可求得对应的特征向量分别为

$$p_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad p_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

它们已两两正交,单位化得

$$q_1=\frac{p_1}{|p_1|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)',$$

$$q_2=\frac{p_2}{|p_2|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)',$$

$$q_3=\frac{p_3}{|p_3|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)',$$

故正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$,使得 $Q^{-1}AQ=Q'AQ=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

(2) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[c_1+c_3]{c_1+c_2}$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 4-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 4-\lambda & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=4$. 可求得对应的特征向量分别为

$$p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

将 p_1, p_2 正交化得

$$\alpha_1=p_1=(-1,1,0)',\quad \alpha_2=p_2-\frac{(p_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)'$$

再单位化

$$q_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix},\quad q_2=\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix},\quad q_3=\frac{p_3}{|p_3|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$$

故正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$,使得 $Q^{-1}AQ=Q'AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.

例 9.19　设 A 是 n 级实对称矩阵,且满足 $A^2+2A=O$, $\operatorname{rank}A=k$,试求 $|A+3E|$.

解　设 $Ax=\lambda x, x\neq0$,则由 $(A^2+2A)x=(\lambda^2+2\lambda)x=0$ 得 $\lambda(\lambda+2)=0$,即 A 的特征值可能是 0 或 -2. 由于 A 是实对称矩阵,所以 A 可相似于对角矩阵 Λ,且由 $\operatorname{rank}\Lambda=\operatorname{rank}A=k$ 知, -2 是 A 的 k 重特征值,即

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-2E_k&O\\O&O\end{pmatrix}$$

故

$$|A+3E|=|P\Lambda P^{-1}+3E|=|P(\Lambda+3E)P^{-1}|=$$
$$|\Lambda+3E|=\begin{vmatrix}E_k&O\\O&3E_{n-k}\end{vmatrix}=3^{n-k}$$

例 9.20　设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,则 A 与 B_________.

(A) 合同且相似;　　(B) 合同但不相似;

(C) 不合同但相似;　　(D) 不合同且不相似.

分析　应填(A).

A是实对称矩阵,可求得 $|A-\lambda E|=-(\lambda-4)\lambda^3$,即 A的特征值为$\lambda_1=4$, $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$. 由于实对称矩阵 A可正交相似于对角矩阵 B,所以 A与 B既合同又相似.

例 9.21　设 A是 n级正定矩阵,证明 $|A+E|>1$.

证　法 1　因为 A是正定矩阵,所以存在正交矩阵 Q,使得

$$Q^{-1}AQ=Q'AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}\quad(\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n)$$

于是

$$|A+E|=\left|Q\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}Q^{-1}+QQ^{-1}\right|=$$

$$\left|Q\begin{pmatrix}\lambda_1+1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n+1\end{pmatrix}Q^{-1}\right|=$$

$$|Q|(\lambda_1+1)\cdots(\lambda_n+1)|Q^{-1}|=(\lambda_1+1)\cdots(\lambda_n+1)>1$$

法 2　设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是 A的特征值,由 A正定知$\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$. 又 $A+E$的特征值为$\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$,从而

$$|A+E|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1$$

例 9.22　求一正交线性替换,将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$$

化为标准形,并指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$表示何种二次曲面.

解　二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$. 可求得 $|A-\lambda E|=-(\lambda-2)^2(\lambda+7)$,于是 A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=-7$. 可求得对应$\lambda_1=\lambda_2=2$的特征向量为 $p_1=(-2,1,0)'$, $p_2=(2,0,1)'$,将其正交化 $\alpha_1=p_1=(-2,1,0)'$, $\alpha_2=p_2-\frac{(p_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right)'$, 再单位化 $q_1=$

$\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)'$, $q_2=\left(\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)'$. 又对应 $\lambda_3=-7$ 的特征向量为 $p_3=(-1,-2,2)'$,单位化得 $q_3=\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)'$,故正交线性替换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$ 化二次型为 $f=2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$

可知 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示旋转单叶双曲面.

例 9.23　设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+4bx_2x_3$ 通过正交变换化为标准形 $f=y_2^2+2y_3^2$,求参数 a,b 及所用的正交变换.

解　根据假设条件,变换前后二次型的矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & 2b\\ 1 & 2b & 1\end{pmatrix},\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

它们是(正交)相似的,于是 $|A-\lambda E|=|\Lambda-\lambda E|$. 将其展开得

$$-\lambda^3+3\lambda^2+(a^2+4b^2-2)\lambda+4ab-a^2-4b^2=-\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda$$

比较 λ 的同次幂系数得 $\begin{cases}a^2+4b^2-2=-2\\ 4ab-a^2-4b^2=0\end{cases}$,解得 $a=b=0$.

由于 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,可求得 A 对应特征值 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=2$ 的特征向量分别为

$$p_1=(-1,0,1)',\quad p_2=(0,1,0)',\quad p_3=(1,0,1)'$$

单位化得

$$q_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)',\quad q_2=(0,1,0)',\quad q_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)'$$

故所求的正交线性替换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

例 9.24 **已知二次型** $f = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ **的秩为** 2.

(1) **求参数** c;

(2) **求一正交线性替换化二次型为标准形**;

(3) $f = 1$ **表示何种二次曲面**?

解 (1) **二次型的矩阵为** $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix}$,**由于二次型的秩为** 2,**所以** $\operatorname{rank}A = 2$.

法 1 **由** $|A| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 + c_2} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & c \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - r_1}$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & -3 & c \end{vmatrix} = 24(c - 3) = 0$$

得 $c = 3$.

法 2 $A \xrightarrow[r_3 + 3r_2]{r_1 + 5r_2} \begin{pmatrix} 0 & 24 & -12 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & 12 & c - 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \backslash r_2]{r_1 \times \frac{1}{12}}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 12 & c - 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 6r_2} \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & c - 3 \end{pmatrix}$$

由 $\operatorname{rank}A = 2$ **知** $c = 3$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. **可求得**

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2}$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 3 \\ 4-\lambda & 5-\lambda & -3 \\ 0 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 3 \\ 0 & 6-\lambda & -6 \\ 0 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$$

A的特征值为$\lambda_1=0$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=9$. 对应的特征向量分别为

$$p_1=(-1,1,2)', \quad p_2=(1,1,0)', \quad p_3=(1,-1,1)'$$

单位化得

$$q_1=\left(-\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6}\right)', \quad q_2=\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0\right)', \quad q_3=\left(\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)'$$

故正交线性替换$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{2}{\sqrt6} & 0 & \frac{1}{\sqrt3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,化二次型为 $f=4y_2^2+9y_3^2$.

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 是椭圆柱面.

例9 25　已知 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的线性变换

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2+x_3-x_4 & x_1-x_3+x_4 \\ x_1-x_2+x_4 & -x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times2}$$

(1) 证明 $\mathcal{A}$ 是对称变换;

(2) 求 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的一组标准正交基,使 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为对角矩阵.

解　(1) 取 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的标准正交基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$,可求得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

由于 A 是实对称矩阵,所以 $\mathcal{A}$ 是对称变换.

(2) 因为 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^3(\lambda+3)$,所以 A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=$

1, $\lambda_4=-3$,可求得对应$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$的特征向量为

$$p_1=(1,1,0,0)',\quad p_2=(1,0,1,0)',\quad p_3=(-1,0,0,1)'$$

正交化及单位化得

$$q_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)',\quad q_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0\right)'$$

$$q_3=\left(\frac{-1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{3}{2\sqrt{3}}\right)'$$

又可求得对应$\lambda_4=-3$的特征向量为$p_4=(1,-1,-1,1)'$,单位化得$q_4=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)'$. 故正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\text{使得 } Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3\end{pmatrix}$$

由$(X_1,X_2,X_3,X_4)=(E_{11},E_{12},E_{13},E_{14})Q$求得$\mathbf{R}^{2\times 2}$的标准正交基

$$X_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\end{pmatrix}$$

$$X_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}}\\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix},\quad X_4=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

A在该基下的矩阵为Λ

例9.26 对于$\mathbf{R}^n$的线性变换

$$\mathcal{A}(x)=Ax\quad(\forall x\in\mathbf{R}^n,\ A\in\mathbf{R}^{n\times n}\text{ 取定})$$

证明:(1) 若A是正交矩阵,则$\mathcal{A}$是正交变换;

(2) 若A是对称矩阵,则$\mathcal{A}$是对称变换.

证 对任意$x,y\in\mathbf{R}^n$,当A是正交矩阵时,有

$$(\mathcal{A}(x),\mathcal{A}(y))=(Ax,Ay)=(Ax)'(Ay)=x'(A'A)y=x'y=(x,y)$$

可见 $\mathcal{A}$ 是正交变换. 而当 A 是对称矩阵时,有

$$(\mathcal{A}(x),y)=(Ax,y)=(Ax)'y=x'A'y=x'Ay=(x,Ay)=(x,\mathcal{A}(y))$$

故 $\mathcal{A}$ 是对称变换.

例 9.27　设 n 维欧氏空间 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵为 G, V 的线性变换 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为 A,证明:

(1) 若 $\mathcal{A}$ 是正交变换,则 $A'GA=G$;

(2) 若 $\mathcal{A}$ 是对称变换,则 $A'G=GA$.

证　由题设知

$$\mathcal{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A,\quad G=((\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n}$$

如果设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $G=(g_{ij})_{n\times n}$,则有 $g_{ij}=(\alpha_i,\alpha_j)$ 和

$$\mathcal{A}(\alpha_i)=a_{1i}\alpha_1+a_{2i}\alpha_2+\cdots+a_{ni}\alpha_n\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

(1) 法 1　由于 $\mathcal{A}$ 是正交变换,所以

$$g_{ij}=(\alpha_i,\alpha_j)=(\mathcal{A}(\alpha_i),\mathcal{A}(\alpha_j))=\left(\sum_{s=1}^{n}a_{si}\alpha_s,\sum_{t=1}^{n}a_{tj}\alpha_t\right)=$$

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}a_{si}a_{tj}(\alpha_s,\alpha_t)=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})G\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\cdots\\a_{nj}\end{pmatrix}$$

故有 $G=A'GA$.

法 2　由 $\mathcal{A}$ 是正交变换知 $\mathcal{A}$ 可逆,所以 $\mathcal{A}(\alpha_1),\mathcal{A}(\alpha_2),\cdots,\mathcal{A}(\alpha_n)$ 也是 V 的一组基. 再由 $(\mathcal{A}(\alpha_i),\mathcal{A}(\alpha_j))=(\alpha_i,\alpha_j)$ 知,基 $\mathcal{A}(\alpha_1),\mathcal{A}(\alpha_2),\cdots,\mathcal{A}(\alpha_n)$ 的度量矩阵也是 G. 又从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\mathcal{A}(\alpha_1),\mathcal{A}(\alpha_2),\cdots,\mathcal{A}(\alpha_n)$ 的过渡矩阵为 A,因此就有 $A'GA=G$.

(2) 由于 $\mathcal{A}$ 是对称变换,所以 $(\mathcal{A}(\alpha_i),\alpha_j)=(\alpha_i,\mathcal{A}(\alpha_j))$,即

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\alpha_k,\alpha_j\right)=\left(\alpha_i,\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\alpha_k\right)$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}(\alpha_k,\alpha_j)=\sum_{k=1}^{n}(\alpha_i,\alpha_k)a_{kj},\text{即}\quad\sum_{k=1}^{n}a_{ki}g_{kj}=\sum_{k=1}^{n}g_{ik}a_{kj}$$

也即

$$(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})(g_{1j},g_{2j},\cdots,g_{nj})'=(g_{i1},g_{i2},\cdots,g_{in})(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})'$$

故有 $A'G=GA$.

注　本例中未指明 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是标准正交基,因此正交变换(或对称变换) $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵 A 不一定是正交矩阵(或实对称矩阵).

五、课后习题全解

(一) 第九章习题

1. 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 n 级正定矩阵,而 $\alpha=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\beta=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$,在 $\mathbf{R}^n$ 中定义内积(α, β)为$(\alpha, \beta)=\alpha A\beta'$.

1) 证明在这个定义之下,$\mathbf{R}^n$ 成一欧氏空间;

2) 求单位向量 $\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $\varepsilon_n=(0,\cdots,0,1)$ 的度量矩阵;

3) 具体写出这个空间中的柯西-布涅柯夫斯基不等式.

解　1)

i) $(\alpha, \beta)=\alpha A\beta'=\beta A'\alpha'=\beta A\alpha'=(\beta, \alpha)$

ii) $(k\alpha, \beta)=(k\alpha)A\beta'=k(\alpha A\beta')=k(\alpha, \beta)$

iii) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha+\beta)A\gamma'=\alpha A\gamma'+\beta A\gamma'=(\alpha, \gamma)+(\beta, \gamma)$

iv) $(\alpha,\alpha)=\alpha A\alpha'=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$

由于 A 是正定矩阵,所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\geq 0$,当且仅当 $\alpha=0$ 时,$(\alpha, \alpha)=0$,故 $\mathbf{R}^n$ 成一欧氏空间.

2) 设所求度量矩阵为 $B=(b_{ij})_{n\times n}$,则

$$b_{ij}=(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=\varepsilon_i A\varepsilon_j'=a_{ij}$$

从而 $B=A$.

3)
$$(\alpha, \beta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

$$|\alpha|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j},\qquad |\beta|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j}$$

故柯西-布涅柯夫斯基不等式为

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j\right|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j}$$

2. 在 R^4 中求 α,β 之间的夹角 $\langle\alpha,\beta\rangle$(内积按通常定义),设

1) $\alpha=(2,1,3,2)$, $\beta=(1,2,-2,1)$;

2) $\alpha=(1,2,2,3)$, $\beta=(3,1,5,1)$;

3) $\alpha=(1,1,1,2)$, $\beta=(3,1,-1,0)$.

解　1) $(\alpha,\beta)=2\times1+1\times2+3(-2)+2\times1=0$,所以 $\langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{\pi}{2}$;

2) $(\alpha,\beta)=18$, $(\alpha,\alpha)=18$, $(\beta,\beta)=36$,于是 $\cos\langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,故 $\langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{\pi}{4}$;

3) $(\alpha,\beta)=3$, $(\alpha,\alpha)=7$, $(\beta,\beta)=11$,于是 $\cos\langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{3}{\sqrt{77}}$,故 $\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\dfrac{3}{\sqrt{77}}$.

3. $d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$ 通常称为 α 与 β 的距离,证明:

$$d(\alpha,\gamma)\leq d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma)$$

证　由三角不等式,得

$$\begin{aligned}d(\alpha,\gamma)&=|\alpha-\gamma|=|(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)|\leq\\&|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|=d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma)\end{aligned}$$

4. 在 R^4 中求一单位向量与 $(1,1,-1,1)$, $(1,-1,-1,1)$, $(2,1,1,3)$ 正交.

解　设 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 与已知的三向量正交,得

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=0\\x_1-x_2-x_3+x_4=0\\2x_1+x_2+x_3+3x_4=0\end{cases}$$

解方程组得通解

$$x_1=-\frac{4}{3}t,\quad x_2=0,\quad x_3=-\frac{1}{3}t,\quad x_4=t\quad(t\text{任意})$$

取 $t=-3$ 得 $\alpha=(4,0,1,-3)$,单位化得

$$\eta=\frac{1}{|\alpha|}\alpha=\left(\frac{4}{\sqrt{26}},0,\frac{1}{\sqrt{26}},-\frac{3}{\sqrt{26}}\right)$$

η 即为所求.

5. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是欧氏空间 V 的一组基,证明:

1) 如果 $\gamma \in V$ 使$(\gamma, \alpha_i) = 0\ (i = 1,2,\cdots,n)$,那么 $\gamma = 0$;

2) 如果 $\gamma_1, \gamma_2 \in V$ 使对任一 $\alpha \in V$ 有$(\gamma_1, \alpha) = (\gamma_2, \alpha)$,那么 $\gamma_1 = \gamma_2$.

证　1) 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一组基,所以 γ 可表为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的线性组合,即 $\gamma = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n$.由$(\gamma, \alpha_i) = 0$ 知

$$(\gamma, \gamma) = (\gamma, k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n) = k_1(\gamma, \alpha_1) + \cdots + k_n(\gamma, \alpha_n) = 0$$

故 $\gamma = 0$.

2) 由题设,特别对基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,有$(\gamma_1, \alpha_i) = (\gamma_2, \alpha_i)\ (i = 1,2,\cdots,n)$,即

$$(\gamma_1 - \gamma_2, \alpha_i) = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

由 1) 知 $\gamma_1 - \gamma_2 = 0$,即 $\gamma_1 = \gamma_2$.

6. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是三维欧氏空间的一组标准正交基,证明:

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}(2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{3}(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3)$$

也是一组标准正交基.

证　
$$(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{9}(2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3, 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3) =$$

$$\frac{1}{9}[(2\varepsilon_1, 2\varepsilon_1) + (2\varepsilon_2, -\varepsilon_2) + (-\varepsilon_3, 2\varepsilon_3)] =$$

$$\frac{1}{9}[4 + (-2) + (-2)] = 0$$

同理$(\alpha_1, \alpha_3) = (\alpha_2, \alpha_3) = 0$.又有

$$(\alpha_1, \alpha_1) = \frac{1}{9}(2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3, 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3) = 1$$

同理$(\alpha_2, \alpha_2) = (\alpha_3, \alpha_3) = 1$,故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是一组标准正交基.

7. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ 是 5 维欧氏空间 V 的一组标准正交基,$V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,其中

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_5,\quad \alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4,\quad \alpha_3 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

求 V_1 的一组标准正交基.

解　首先不难证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的.将它们正交化得

$$\beta_1 = \alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_5$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \frac{1}{2}\varepsilon_5$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_5$$

单位化得

$$\eta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_5),\quad \eta_2 = \frac{\sqrt{10}}{10}(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_4 - \varepsilon_5)$$

$$\eta_3 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_5)$$

则 η_1, η_2, η_3 **就是** V_1 **的一组标准正交基**.

8. **求齐次线性方程组**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

的解空间(作为 $\mathbf{R}^5$ **的子空间)的一组标准正交基**.

解　**求解** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$ **得同解方程组** $\begin{cases} x_1 = -x_4 + 4x_5 \\ x_2 = x_3 + x_4 - 5x_5 \end{cases}$,

于是基础解系为

$$\alpha_1 = (0,1,1,0,0),\quad \alpha_2 = (-1,1,0,1,0),\quad \alpha_3 = (4,-5,0,0,1)$$

将 α_2, α_2, α_3 **正交化得**

$$\beta_1 = \alpha_1 = (0,1,1,0,0)$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 = \left(\frac{7}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{13}{5}, 1\right)$$

单位化得

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0,0),\quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2,1,-1,2,0)$$

$$\eta_3 = \frac{1}{3\sqrt{35}}(7,-6,6,13,5)$$

则 η_1, η_2, η_3 **就是解空间的一组标准正交基**.

9. **在** $\mathbf{R}[x]_4$ **中定义内积为** $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$, **求** $\mathbf{R}[x]_4$ **的一组标准正交基(由基** $1, x, x^2, x^3$ **出发作正交化)**.

解 取 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = x, \alpha_3 = x^2, \alpha_4 = x^3$. 将它们正交化得

$$\beta_1 = \alpha_1 = 1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = x - \frac{\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x} \cdot 1 = x$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 =$$

$$x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x} \cdot 1 - \frac{\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x} \cdot x = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\beta_4 = \alpha_4 - \frac{(\alpha_4, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_4, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \frac{(\alpha_4, \beta_3)}{(\beta_3, \beta_3)}\beta_3 =$$

$$x^3 - \frac{\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x} \cdot 1 - \frac{\int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x} \cdot x - \frac{\int_{-1}^{1} x^3\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2\mathrm{d}x}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$x^3 - \frac{3}{5}x$$

单位化得

$$\eta_1 = \frac{1}{|\beta_1|}\beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \eta_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}x$$

$$\eta_3 = \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1), \quad \eta_4 = \frac{\sqrt{14}}{4}(5x^3 - 3x)$$

则 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 为一组标准正交基.

10. 设 V 是一 n 维欧氏空间, $\alpha \neq 0$ 是 V 中一固定向量.

1) 证明: $V_1 = \{x \mid (x, \alpha) = 0, x \in V\}$ 是 V 的一个子空间;

2) 证明: V_1 的维数等于 $n - 1$.

证 1) 由于 $0 \in V_1$, 所以 V_1 非空. 对任意 $x_1, x_2 \in V_1$, $k \in \mathbf{R}$, 有

$$(x_1 + x_2, \alpha) = (x_1, \alpha) + (x_2, \alpha) = 0, \quad (kx_1, \alpha) = k(x_1, \alpha) = 0$$

从而 $x_1 + x_2 \in V_1$, $kx_1 \in V_1$, 故 V_1 是 V 的一个子空间.

2) 由于 $\alpha \neq 0$ 是线性无关的, 将它扩充为 V 的一组正交基 $\alpha, \eta_2, \cdots, \eta_n$. 这时, 因为

$$(\eta_i, \alpha) = 0 \qquad (i = 2, 3, \cdots, n)$$

所以 $\eta_i \in V_1$ $(i = 2, \cdots, n)$.

对任意 $\beta\in V_1$,有 $\beta = k_1\alpha + k_2\eta_2 + \cdots + k_n\eta_n$,由于

$$0 = (\beta, \alpha) = k_1(\alpha, \alpha) + k_2(\eta_2, \alpha) + \cdots + k_n(\eta_n, \alpha) = k_1(\alpha, \alpha)$$

由$(\alpha, \alpha) \neq 0$得 $k_1 = 0$,即 β 可由 $\eta_2, \cdots, \eta_n$ 线性表出,从而 $\eta_2, \cdots, \eta_n$ 是 V_1 的一组基,其维数为 $n-1$.

11. 1) 证明:欧氏空间中不同基的度量矩阵是合同的;

2) 利用上述结果证明:任一欧氏空间都存在标准正交基.

证　1) 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 是 V 的两组不同基,其度量矩阵分别为 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$. 另外,设由基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 到 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 $C = (c_{ij})_{n\times n}$. 则

$$b_{ij} = (\beta_i, \beta_j) = (c_{1i}\alpha_1 + \cdots + c_{ni}\alpha_n, c_{1j}\alpha_1 + \cdots + c_{nj}\alpha_n) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ki}(\alpha_k, c_{1j}\alpha_1 + \cdots + c_{nj}\alpha_n) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} c_{ki}c_{sj}(\alpha_k, \alpha_s) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} c_{ki}c_{sj}a_{ks}$$

另一方面,令 $D = C'A = (d_{ij})_{n\times n}$, $C'AC = DC = (e_{ij})_{n\times n}$,那么 D 的元素

$$d_{is} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}a_{ks} \quad (i, s = 1, 2, \cdots, n)$$

$C'AC$ 的元素

$$e_{ij} = \sum_{s=1}^{n} d_{is}c_{sj} = \sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} c_{ki}a_{ks}c_{sj}\right) \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

故 $C'AC = B$. 再由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 是基,所以 C 非退化,从而上式表明 B 与 A 合同.

2) 在欧氏空间 V 中,任取一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,它的度量矩阵为 $A = (a_{ij})_{n\times n}$,其中 $a_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$. 因为 A 正定,所以存在可逆阵 C,使得 $E = C'AC$. 令

$$(\beta_1, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)C$$

则由 1) 知,$\beta_1, \cdots, \beta_n$ 的度量矩阵为 E,故 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 即为所求的标准正交基.

12. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 n 维欧氏空间 V 的一组向量,而

$$\Delta = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_m) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_m) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ (\alpha_m, \alpha_1) & (\alpha_m, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_m, \alpha_m) \end{pmatrix}$$

证明当且仅当 $|\Delta| \neq 0$ 时,$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

证　设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$,两边与 α_i 取内积得

$$k_1(\alpha_i, \alpha_1) + k_2(\alpha_i, \alpha_2) + \cdots + k_m(\alpha_i, \alpha_m) = 0$$

从而$(k_1, k_2, \cdots, k_m)'$是 $\Delta x = 0$ 的解.又当且仅当 $|\Delta| \neq 0$ 时,该方程组只有零解,即 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

13. 证明:上三角的正交矩阵必为对角矩阵,且对角线上元素为 1 或 -1.

证　设 A 是正交矩阵,且 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$ 则 $A' = A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & b_{nn} \end{pmatrix}$ 也是上三角矩阵,从而

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

于是 $a_{ij} = 0\ (i \neq j)$.故 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$ 为对角阵,又由 $A'A = E$ 得 $a_{ii}^2 = 1$,此即 $a_{ii} = 1$ 或 -1.

14. 1) 设 A 是一个 n 级实矩阵,且 $|A| \neq 0$,证明 A 可以分解成 QT:

$$A = QT$$

其中 Q 是正交矩阵,T 是一上三角矩阵

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{nn} \end{pmatrix}$$

且 $t_{ii} > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$,并证明这个分解是惟一的.

2) 设 A 是 n 级正定矩阵,证明存在一上三角形矩阵 T,使 $A = T'T$.

证　1) 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,它的 n 个列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,由于 $|A| \neq 0$,所以 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关,从而是 R^n 的一组基.利用施密特正交化

过程,由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 可得正交基

$$\beta_1 = \alpha_1$$
$$\beta_2 = \alpha_2 - (\alpha_2, \eta_1)\eta_1$$
$$\cdots\cdots$$
$$\beta_n = \alpha_n - (\alpha_n, \eta_1)\eta_1 - \cdots - (\alpha_n, \eta_{n-1})\eta_{n-1}$$

其中 $\eta_i = \dfrac{\beta_i}{|\beta_i|}(i = 1,2,\cdots,n-1)$. 再将 $\beta_i = |\beta_i|\eta_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 代入各等式左边,移项整理可得

$$\begin{cases} \alpha_1 = t_{11}\eta_1 \\ \alpha_2 = t_{12}\eta_1 + t_{22}\eta_2 \\ \cdots\cdots \\ \alpha_n = t_{1n}\eta_1 + t_{2n}\eta_2 + \cdots + t_{nn}\eta_n \end{cases}$$

其中 $t_{ii} = |\beta_i| > 0\ (i = 1,2,\cdots,n)$,即

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & t_{nn} \end{pmatrix}$$

令 $T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ & \ddots & \cdots \\ & & t_{nn} \end{pmatrix}$,则 T 是上三角阵,且主对角线上的元素 $t_{ii} > 0$.

η_i 为 n 维列向量,以 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 为列构成矩阵 Q,即 $Q = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$. 因为 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 是标准正交基,所以 Q 是正交阵, 且

$$A = (\eta_1, \cdots, \eta_n)T = QT$$

若还有 Q_1, T_1,使 $A = Q_1T_1$ 是 A 的另一种分解,则 $Q_1T_1 = QT$,于是

$$Q_1^{-1}Q = T_1T^{-1}$$

因为 Q, Q_1 为正交阵,所以 $Q_1^{-1}Q$ 也是正交阵,从而 T_1T^{-1} 也是正交阵. 另一方面, T_1T^{-1} 是上三角阵,由 13 题知 T_1T^{-1} 为主对角线元素为 1 或 -1 的对角阵,而 T_1, T 的主对角线元素都为正,故 $T_1T^{-1} = E$,即 $T_1 = T$,从而 $Q_1 = Q$.

2) 因为 A 正定,所以存在可逆阵 C 使 $A = C'EC = C'C$,由 1) 知 $C = QT$,故

$$A = T'Q'QT = T'T$$

15. 设 η 是欧氏空间中一单位向量,定义 $A\alpha = \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta$. 证明:

1) A 是正交变换,这样的正交变换称为镜面反射;

2) $\mathcal{A}$ 是第二类的;

3) 如果 n 维欧氏空间中,正交变换 $\mathcal{A}$ 以 1 作为一个特征值,且属于特征值 1 的特征子空间 V_1 的维数为 $n-1$,则 $\mathcal{A}$ 是镜面反射.

证 1) 对欧氏空间中任意元素 α,β 和实数 k_1,k_2,有

$$\mathcal{A}(k_1\alpha+k_2\beta)=k_1\alpha+k_2\beta-2(\eta,k_1\alpha+k_2\beta)\eta=k_1\mathcal{A}\alpha+k_2\mathcal{A}\beta$$

所以 $\mathcal{A}$ 是线性的.又有

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)=&(\alpha-2(\eta,\alpha)\eta,\beta-2(\eta,\beta)\eta)=\\&(\alpha,\beta)-2(\eta,\beta)(\eta,\alpha)-2(\eta,\alpha)(\eta,\beta)+\\&4(\eta,\alpha)(\eta,\beta)(\eta,\eta)\end{aligned}$$

因为$(\eta,\eta)=1$,所以$(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)=(\alpha,\beta)$,故 $\mathcal{A}$ 为正交变换.

2) 由于 η 是单位向量,将它扩充为空间的一组标准正交基 $\eta,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,则有

$$\mathcal{A}\eta=\eta-2(\eta,\eta)\eta=-\eta,\quad \mathcal{A}\varepsilon_i=\varepsilon_i-2(\eta,\varepsilon_i)\eta=\varepsilon_i$$
$$(i=2,\cdots,n)$$

这样 $$(\mathcal{A}\eta,\mathcal{A}\varepsilon_2,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n)=(\eta,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}$$

可见在基 $\eta,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵 A 的行列式等于 -1,所以 $\mathcal{A}$ 是第二类正交变换.

3) $\mathcal{A}$ 的特征值有 n 个,现已有 $n-1$ 个为 1,另一个也要为实数.不妨设为 λ_0,则存在一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$,有

$$\mathcal{A}\varepsilon_1=\lambda_0\varepsilon_1,\quad \mathcal{A}\varepsilon_i=\varepsilon_i\quad(i=2,\cdots,n)$$

由于 $\mathcal{A}$ 是正交变换,所以

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_1)=(\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_1)=\lambda_0^2(\varepsilon_1,\varepsilon_1)$$

所以 $\lambda_0^2=1$.但 V_1 是 $n-1$ 维的,所以 $\lambda_0=-1$,从而

$$\mathcal{A}\varepsilon_1=-\varepsilon_1,\quad \mathcal{A}\varepsilon_i=\varepsilon_i\quad(i=2,3,\cdots,n)$$

因为 A 为实对称矩阵,那么属于它的不同特征值的特征向量必正交,所以 $(\varepsilon_1,\varepsilon_i)=0\ (i=2,3,\cdots,n)$.令 $\eta=\dfrac{1}{|\varepsilon_1|}\varepsilon_1$,则 η 是与 $\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_n$ 正交的单位向量,并且 $\eta,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 组成一组基,又有

$$\mathcal{A}\eta=\mathcal{A}\left(\frac{1}{|\varepsilon_1|}\varepsilon_1\right)=\frac{1}{|\varepsilon_1|}\mathcal{A}\varepsilon_1=\frac{1}{|\varepsilon_1|}(-\varepsilon_1)=-\eta$$

任取 $\alpha = k_1\eta + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n \in V$,有

$$(\alpha, \eta) = (k_1\eta + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n, \eta) = k_1$$

故

$$A\alpha = k_1 A\eta + k_2 A\varepsilon_2 + \cdots + k_n A\varepsilon_n = -k_1\eta + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n =$$
$$k_1\eta + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n - 2k_1\eta = \alpha - 2(\alpha, \eta)\eta$$

可见 A 为镜面反射 .

16. 证明:反对称实数矩阵的特征值是零或纯虚数 .

证　设 A 是反对称实矩阵,λ 是 A 的一个特征值,ξ 为相应的特征向量,即 $A\xi = \lambda\xi$,则

$$\bar{\xi}'A\xi = \bar{\xi}'(-A')\xi = -\bar{\xi}'A'\xi = -(A\bar{\xi})'\xi = -(\overline{A\xi})'\xi$$

即有 $\lambda\bar{\xi}'\xi = -\bar{\lambda}\bar{\xi}'\xi$,从而 $\lambda = -\bar{\lambda}$.

令 $\lambda = a + \mathrm{i}b$,代入上式得 $a + \mathrm{i}b = -(a - \mathrm{i}b)$,即有 $a = 0$.故 λ 是 0 或纯虚数 .

17. 求正交矩阵 T,使 $T'AT$ 成对角形,其中 A 为

1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;　　2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;　　4) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

解　1) $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2$.可求得对应的特征向量为

$$\alpha_1 = (-2, -1, 2)', \quad \alpha_2 = (2, -2, 1)', \quad \alpha_3 = (1, 2, 2)'$$

单位化得

$$\eta_1 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)', \quad \eta_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)'$$
$$\eta_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)'$$

故正交矩阵 $T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&2&1\\-1&-2&2\\2&1&2\end{pmatrix}$,满足 $T'AT=\begin{pmatrix}1&&\\&4&\\&&-2\end{pmatrix}$.

2) 正交矩阵 $T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}\\\frac{2}{3}&0&\frac{5}{3\sqrt5}\end{pmatrix}$,使 $T'AT=\begin{pmatrix}10&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$.

3) 正交矩阵 $T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\1&1&1&-1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&1&1\end{pmatrix}$,使 $T'AT=\begin{pmatrix}5&&&\\&-5&&\\&&3&\\&&&-3\end{pmatrix}$.

4) 正交矩阵 $T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{2\sqrt3}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{2\sqrt3}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{2\sqrt3}\\\frac{1}{2}&0&0&\frac{3}{2\sqrt3}\end{pmatrix}$,使 $T'AT=\begin{pmatrix}8&&&\\&-4&&\\&&-4&\\&&&-4\end{pmatrix}$.

5) 正交矩阵 $T=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{\sqrt3}{6}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{\sqrt3}{6}\\\frac{1}{2}&0&\sqrt{\frac{2}{3}}&-\frac{\sqrt3}{6}\\\frac{1}{2}&0&0&\frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}$,使 $T'AT=\begin{pmatrix}4&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}$.

18. **用正交线性替换化下列二次型为标准形**:

1) $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$;

2) $x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$;

3) $2x_1x_2+2x_3x_4$;

4) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+6x_1x_3-4x_1x_4-4x_2x_3+6x_2x_4-2x_3x_4$.

解　1) 二次型的矩阵为　$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$

可求得 $|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-5)$. A 的特征值为

$$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=-1,\quad \lambda_3=5$$

相应的特征向量为

$$\alpha_1=(2,-1,-2)',\quad \alpha_2=(2,2,1)',\quad \alpha_3=(1,-2,2)'$$

单位化得

$$\eta_1=\frac{1}{3}(2,-1,-2)',\quad \eta_2=\frac{1}{3}(2,2,1)',\quad \eta_3=\frac{1}{3}(1,-2,2)'$$

令 $x=Ty$,其中 $T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&2&-2\\-2&1&2\end{pmatrix}$,则有 $x'Ax=2y_1^2-y_2^2+5y_3^2$.

2) 二次型的矩阵为　$A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$

可求得 $|\lambda E-A|=(\lambda+7)(\lambda-2)^2$. A 的特征值为

$$\lambda_1=-7,\quad \lambda_2=\lambda_3=2$$

对应于 $\lambda_1=-7$ 的特征向量为 $\alpha_1=(-1,-2,2)'$,单位化得

$$\eta_1=\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)'$$

对应于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的线性无关特征向量为

$$\alpha_2=(-2,1,0)',\quad \alpha_3=(2,0,1)'$$

正交化

$$\beta_2=\alpha_2=(-2,1,0)'$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(2,0,1)'-\frac{-4}{5}(-2,1,0)'=\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right)'$$

单位化得

$$\eta_2=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)',\quad \eta_3=\left(\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)'$$

令 $x = Ty$,其中 $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$,则有 $x'Ax = -7y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$.

3) 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

可求得 $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2$. A 的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -1$$

相应的特征向量为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

它们已正交,单位化得

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

令 $x = Ty$,其中 $T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,则有 $x'Ax = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$.

4) 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

可求得 $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 7)(\lambda + 1)(\lambda + 3)$. A 的特征值为

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 7, \quad \lambda_3 = -1, \quad \lambda_4 = -3$$

对应的特征向量为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

单位化得

$$\eta_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \eta_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \eta_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \eta_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

令 $x=Ty$,其中 $T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$,则有 $x'Ax=y_1^2+7y_2^2-y_3^2-3y_4^2$.

19. 设 A是 n级实对称矩阵 .证明:A正定的充分必要条件是 A的特征多项式的根全大于零 .

证　设二次型 $x'Ax$ 经过正交线性替换 $x=Ty$ 化为

$$x'Ax=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征根 .由于 A正定的充分必要条件是 $\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$ 正定,而后者正定的充分必要条件是 $\lambda_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

20. 设 A是 n级实矩阵 .证明:存在正交矩阵 T使 $T^{-1}AT$为三角矩阵的充分必要条件是 A的特征多项式的根全是实的 .

证　为确定起见,这里三角矩阵不妨设为上三角矩阵 .

必要性 . 设 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\&\ddots&\vdots\\&&b_{nn}\end{pmatrix}$,其中 T,A均为实矩阵,从而 b_{ij} 都是实数 .由于

$$|\lambda E-A|=|\lambda E-T^{-1}AT|=\begin{vmatrix}\lambda-b_{11}&\cdots&*\\&\ddots&\vdots\\&&\lambda-b_{nn}\end{vmatrix}=(\lambda-b_{11})\cdots(\lambda-b_{nn})$$

从而 A的 n个特征根 $b_{11},b_{22},\cdots,b_{nn}$ 均为实数 .

充分性 . 设 A的所有特征值都是实的,则存在可逆实矩阵 P,使 $P^{-1}AP=J$,

其中 $J=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$ 是若尔当标准形,而

$$J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}\quad (i=1,2,\cdots,s)$$

由于 λ_i 都是实数,所以 J 为上三角实矩阵.由习题 14 知,矩阵 P 可以分解为 $P=TS$,其中 T 为正交阵,S 为上三角矩阵,则有

$$P^{-1}AP=S^{-1}T^{-1}ATS=J$$

即 $T^{-1}AT=SJS^{-1}$.其中 SJS^{-1} 是上三角阵,故结论成立.

21. 设 A,B 都是实对称矩阵.证明:存在正交矩阵 T,使 $T^{-1}AT=B$ 的充分必要条件是 A,B 的特征多项式的根全部相同.

证　必要性.若 $T^{-1}AT=B$,则 A,B 的特征多项式相同,所以它们的特征根相同.

充分性.设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A,B 的特征根,则存在正交阵 X 和 Y,使

$$X^{-1}AX=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}=Y^{-1}BY$$

于是

$$YX^{-1}AXY^{-1}=B$$

令 $T=XY^{-1}$,因为正交矩阵的乘积仍是正交矩阵,所以 T 是正交矩阵,且 $T^{-1}AT=B$.

22. 设 A 是 n 级实对称矩阵,且 $A^2=A$.证明:存在正交矩阵 T,使得

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

证　设 λ 是 A 的任一特征值,ξ 是属于 λ 的特征向量,那么 $A\xi=\lambda\xi$,$A^2\xi=\lambda^2\xi$.由于 $A^2=A$,所以有 $\lambda^2\xi=A^2\xi=A\xi=\lambda\xi$,即 $(\lambda^2-\lambda)\xi=0$.由 $\xi\neq 0$ 知 $\lambda^2-\lambda=0$,从而 $\lambda=0$ 或 1.故存在正交矩阵 T,使

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

23. 证明:如果 A 是正交变换,那么 A 的不变子空间的正交补也是 A 的不变子空间 .

证　设 W 是 A 的任意一个不变子空间,取 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ 为 W 的一组标准正交基,把它扩充成 V 的一组标准正交基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_n$. 那么

$$W = L(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m), \quad W^{\perp} = L(\varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_n)$$

因为 A 为正交变换,所以 $A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \cdots, A\varepsilon_n$ 也是标准正交基 . 又由于 W 是 A 的不变子空间,所以 $A\varepsilon_1, \cdots, A\varepsilon_m$ 是 W 的一组标准正交基,而 $A\varepsilon_{m+1}, \cdots, A\varepsilon_n \in W^{\perp}$. 任取 $\alpha = a_{m+1}\varepsilon_{m+1} + \cdots + a_n\varepsilon_n \in W^{\perp}$,那么

$$A\alpha = a_{m+1}A\varepsilon_{m+1} + \cdots + a_nA\varepsilon_n \in W^{\perp}$$

故 $W^{\perp}$ 是 A 的不变子空间 .

24. 欧氏空间 V 中的线性变换 A 称为反对称的,如果对任意 $\alpha, \beta \in V$, $(A\alpha, \beta) = -(\alpha, A\beta)$,证明:

1) A 为反对称的充分必要条件是 A 在一组标准正交基下的矩阵为反对称的;

2) 如果 V_1 是反对称线性变换的不变子空间,则 $V_1^{\perp}$ 也是 .

证　1) 必要性 . 设 A 是反对称线性变换, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组标准正交基 . 又设 A 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 $K = (k_{ij})_{n\times n}$,则有

$$A\varepsilon_i = k_{1i}\varepsilon_1 + k_{2i}\varepsilon_2 + \cdots + k_{ni}\varepsilon_n \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

于是

$$(A\varepsilon_i, \varepsilon_j) = k_{ji}, \quad (\varepsilon_i, A\varepsilon_j) = k_{ij}$$

由于 A 是反对称线性变换,所以

$$k_{ji} = (A\varepsilon_i, \varepsilon_j) = -(\varepsilon_i, A\varepsilon_j) = -k_{ij}$$

即

$$k_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ -k_{ji}, & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

故 A 在标准正交基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵是一个反对称矩阵 .

充分性 . 设 A 在标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵是反对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$(A\varepsilon_i,\ \varepsilon_j) = a_{ji} = -a_{ij} = -(\varepsilon_i,\ A\varepsilon_j)$$

对任意 $\alpha, \beta \in V$**，有** $\alpha = a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n,\ \beta = b_1\varepsilon_1 + \cdots + b_n\varepsilon_n$**．于是**

$$(A\alpha, \beta) = (a_1A\varepsilon_1 + \cdots + a_nA\varepsilon_n,\ b_1\varepsilon_1 + \cdots + b_n\varepsilon_n) =$$

$$\sum_{i,j} a_ib_j(A\varepsilon_i,\ \varepsilon_j) = -\sum_{i,j} a_ib_j(\varepsilon_i,\ A\varepsilon_j) =$$

$$-(a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n,\ b_1A\varepsilon_1 + \cdots + b_nA\varepsilon_n) = -(\alpha, A\beta)$$

故 A **为反对称线性变换．**

2)**任取** $\alpha \in V_1^{\perp}$**，又任取** $\beta \in V_1$**．因为** V_1 **是** A **的不变子空间，所以** $A\beta \in V_1$**，于是由** A **是反对称的，得**

$$(A\alpha, \beta) = -(\alpha, A\beta) = 0$$

由 β **的任意性知** $A\alpha \in V_1^{\perp}$**，从而** $V_1^{\perp}$ **是** A **的不变子空间．**

25．**证明：向量** $\beta \in V_1$ **是向量** α **在子空间** V_1 **上的内射影的充分必要条件是：对** $\forall \xi \in V_1$**，** $|\alpha - \beta| \leq |\alpha - \xi|$**．**

证　必要性．设 $\beta \in V_1$ **是** α **在** V_1 **上的内射影，即**

$$\alpha = \beta + \gamma, \quad \gamma \in V_1^{\perp}$$

则 $\alpha - \beta \in V_1^{\perp}$ **即** $\alpha - \beta \perp V_1$**．因为向量到子空间各向量间的距离以垂线最短，所以，对任意** $\xi \in V_1$ **有** $|\alpha - \beta| \leq |\alpha - \xi|$**．**

充分性．设 $\alpha = \beta_1 + \gamma,\ \beta_1 \in V_1,\ \gamma \in V_1^{\perp}$**，即** β_1 **是** α **在** V_1 **上的内射影．**

对于 $\beta \in V_1$**，因为"垂线最短"，所以** $|\alpha - \beta_1| \leq |\alpha - \beta|$**．另外由题设条件，** $|\alpha - \beta| \leq |\alpha - \beta_1|$**，所以**

$$|\alpha - \beta| = |\alpha - \beta_1| \quad \text{即} \quad (\alpha - \beta_1,\ \alpha - \beta) = (\alpha - \beta_1,\ \alpha - \beta_1)$$

又因为 $\alpha - \beta = \beta_1 + \gamma - \beta = (\beta_1 - \beta) + \gamma$**，于是**

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta, \alpha - \beta) &= ((\beta_1 - \beta) + \gamma, (\beta_1 - \beta) + \gamma) = \\ &(\beta_1 - \beta, \beta_1 - \beta) + (\gamma, \gamma) = \\ &(\beta_1 - \beta, \beta_1 - \beta) + (\alpha - \beta_1, \alpha - \beta_1) = \\ &(\beta_1 - \beta, \beta_1 - \beta) + (\alpha - \beta, \alpha - \beta)\end{aligned}$$

故有 $(\beta_1 - \beta, \beta_1 - \beta) = 0$**，即** $\beta_1 = \beta$**，可见** β **是** α **在** V_1 **上的内射影．**

26．**证明：设** V_1, V_2 **是欧氏空间** V **的两个子空间，证明：**

$$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp},\quad (V_2\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$$

证　设 $\alpha\in(V_1+V_2)^{\perp}$，即 $\alpha\perp V_1+V_2$．任取 $\beta\in V_1\quad V_1+V_2$，有 $\alpha\perp\beta$，从而 $\alpha\perp V_1$ 即 $\alpha\in V_1^{\perp}$．同理可证 $\alpha\in V_2^{\perp}$，从而 $\alpha\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$，此即

$$(V_1+V_2)^{\perp}\quad V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$$

设 $\alpha\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$，则 $\alpha\in V_1^{\perp}$ 且 $\alpha\in V_2^{\perp}$，即 $\alpha\perp V_1$，且 $\alpha\perp V_2$．任取 $\beta\in V_1+V_2$，有 $\beta=\beta_1+\beta_2(\beta_1\in V_1,\beta_2\in V_2)$，于是

$$(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta_1+\beta_2)=(\alpha,\beta_1)+(\alpha,\beta_2)=0$$

所以 $\alpha\perp\beta$．由 β 的任意性知 $\alpha\perp V_1+V_2$，即 $\alpha\in(V_1+V_2)^{\perp}$，于是

$$V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}\quad (V_1+V_2)^{\perp}$$

故得
$$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$$

以 $V_1^{\perp}$ 换 V_1，$V_2^{\perp}$ 换 V_2 代入上式得

$$(V_1^{\perp}+V_2^{\perp})^{\perp}=(V_1^{\perp})^{\perp}\cap(V_2^{\perp})^{\perp}=V_1\cap V_2$$

故
$$V_1^{\perp}+V_2^{\perp}=(V_1\cap V_2)^{\perp}$$

27. 求下列方程的最小二乘解：

$$\begin{cases}0.39x-1.89y=1\\0.61x-1.80y=1\\0.93x-1.68y=1\\1.35x-1.50y=1\end{cases}$$

用“到子空间距离最短的线是垂线”的语言表达出上面方程的最小二乘解的几何意义，由此列出方程并求解(用三位有效数字计算)．

解　令
$$A=\begin{pmatrix}0.39&-1.89\\0.61&-1.80\\0.93&-1.68\\1.35&-1.50\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2),\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$Y=\alpha_1x+\alpha_2y=\begin{pmatrix}0.39x-1.89y\\0.61x-1.80y\\0.93x-1.68y\\1.35x-1.50y\end{pmatrix}$$

那么“到子空间距离最短的线是垂线”的意思就是 $|Y-B|^2$ 的值最小，因而最小二乘解的几何意义是在 $L(\alpha_1,\alpha_2)$ 中求 B 的内射影 Y．

求解 $A'AX=A'B$，其中

$$A'A=\begin{pmatrix}0.39 & 0.61 & 0.93 & 1.35\\ -1.89 & -1.80 & -1.68 & -1.50\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.39 & -1.89\\ 0.61 & -1.80\\ 0.93 & -1.68\\ 1.35 & -1.50\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}3.2116 & -5.4225\\ -5.4225 & 11.8845\end{pmatrix}$$

$$A'B=\begin{pmatrix}0.39 & 0.61 & 0.93 & 1.35\\ -1.89 & -1.80 & -1.68 & -1.50\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.28\\ -6.87\end{pmatrix}$$

于是得$\begin{cases}3.2116x-5.4225y=3.28\\ -5.4225x+11.8845y=-6.87\end{cases}$,解得$\begin{cases}x=0.197\\ y=-0.488\end{cases}$.

(二) 第九章补充题

1. **证明:正交矩阵的实特征值为±1.**

证 设A为正交矩阵,λ为A的实特征值,ξ为对应的特征向量,即$A\xi=\lambda\xi$,取共轭转置得$\bar{\xi}'A'=\lambda\bar{\xi}'$,再右乘$A\xi$,有

$$\bar{\xi}'A'A\xi=\lambda^2\bar{\xi}\xi$$

利用$A'A=E$得$\lambda^2\bar{\xi}\xi=\bar{\xi}\xi$,由于$\bar{\xi}\xi>0$,所以$\lambda^2=1$,故有$\lambda=\pm1$.

2. **证明:奇数维欧氏空间中的旋转一定以1作为它的一个特征值.**

证 设旋转对应的正交矩阵为A,那么

$$|E-A|=|A'A-A|=(-1)^n|A||E-A'|$$

由于n为奇数,且$|A|=1$,于是

$$|E-A|=-|(E-A)'|=-|E-A|$$

故$|E-A|=0$,即1为A的一个特征值.

3. **证明:第二类正交变换一定以-1作为它的一个特征值.**

证 设A是一个第二类正交变换对应的矩阵,则$|A|=-1$,由于

$$|(-1)E-A|=|A||-A'-E|=-|(-E-A)'|=-|-E-A|$$

所以$|-E-A|=0$,即-1是A的一个特征值.

4. **设A是欧氏空间V的一个变换,证明:如果A保持内积不变,即对于$\alpha,\beta\in V$,$(A\alpha,A\beta)=(\alpha,\beta)$,那么它一定是线性的,因而它是正交变换.**

证 先证$A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta$.因为

$$(A(\alpha+\beta)-A\alpha-A\beta,\ A(\alpha+\beta)-A\alpha-A\beta)=$$
$$(A(\alpha+\beta),A(\alpha+\beta))-2(A(\alpha+\beta),A\alpha)-$$
$$2(A(\alpha+\beta),A\beta)+(A\alpha,A\alpha)+(A\beta,A\beta)+2(A\alpha,A\beta)=$$
$$(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-2(\alpha+\beta,\alpha)-2(\alpha+\beta,\beta)+$$
$$(\alpha,\alpha)+(\beta,\beta)+2(\alpha,\beta)=0$$

所以 $A(\alpha+\beta)-A\alpha-A\beta=0$,即 $A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta$.

再证 $A(k\alpha)=kA(\alpha)$,由于

$$(A(k\alpha)-kA\alpha,\ A(k\alpha)-kA\alpha)=$$
$$(A(k\alpha),A(k\alpha))-2(A(k\alpha),kA\alpha)+(kA\alpha,kA\alpha)=$$
$$k^2(\alpha,\alpha)-2k^2(\alpha,\alpha)+k^2(\alpha,\alpha)=0$$

所以 $A(k\alpha)=kA\alpha$.故 A 是正交变换.

5. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是 n 维欧氏空间中两个向量组.证明存在一正交变换 A,使 $A\alpha_i=\beta_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的充分必要条件为 $(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)\ (i,j=1,2,\cdots,m)$.

证　必要性.设 A 为正交变换,且 $A\alpha_i=\beta_i(i=1,2,\cdots,m)$ 则

$$(\beta_i,\beta_j)=(A\alpha_i,A\alpha_j)=(\alpha_i,\alpha_j)\quad(i,j=1,2,\cdots,m)$$

充分性.不失一般性,设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的极大线性无关组,由条件 $(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)\ (i,j=1,2,\cdots,m)$ 及习题 12 知 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 是线性无关的.

任取 β_s,由 $\alpha_s=\sum\limits_{i=1}^{r}k_{is}\alpha_i(s=1,2,\cdots,m)$ 及 $(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)\ (i,j=1,2,\cdots,m)$ 知

$$\left(\beta_s-\sum_{i=1}^{r}k_{is}\beta_i,\ \beta_s-\sum_{i=1}^{r}k_{is}\beta_i\right)=0$$

所以 $\beta_s=\sum\limits_{i=1}^{r}k_{is}\beta_i$,这表明 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 为 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 的一个极大线性无关组.

将 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 正交单位化,得

$$(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)T\quad 其中\quad T=\begin{pmatrix}t_{11}&\cdots&t_{1r}\\&\ddots&\cdots\\&&t_{rr}\end{pmatrix}$$

令 $(\eta_1,\cdots,\eta_r)=(\beta_1,\cdots,\beta_r)T$,可以验证 $\eta_1,\cdots,\eta_r$ 也是一个标准正交向量组.

分别将 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ 和 $\eta_1, \cdots, \eta_r$ 扩充为 V 的两组标准正交基

$$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_n \quad \text{和} \quad \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r, \eta_{r+1}, \cdots, \eta_n$$

定义变换 $A\varepsilon_i = \eta_i (i = 1,2,\cdots,n)$,则 A 是一个正交变换,由前面诸式可得

$$(\beta_1, \cdots, \beta_r) T = (\eta_1, \cdots, \eta_r) = (A\varepsilon_1, \cdots, A\varepsilon_r) = (A\alpha_1, \cdots, A\alpha_r) T$$

从而 $A\alpha_i = \beta_i (i = 1,\cdots,r)$.又有

$$A\alpha_s = \sum_{i=1}^{r} k_{is} A\alpha_i = \sum_{i=1}^{r} k_{is}\beta_i = \beta_s \quad (s = 1,2,\cdots,m)$$

6. 设 A 是 n 级实对称矩阵,且 $A^2 = E$.证明:存在正交矩阵 T,使得

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & -E_{n-r} \end{pmatrix}$$

证　设 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$,对应的特征向量为 $\xi_1, \cdots, \xi_n$,即 $A\xi_i = \lambda_i\xi_i (i = 1,2,\cdots,n)$.由于 $A^2 = E$,所以有

$$\lambda_i^2\xi_i = A^2\xi_i = E\xi_i = \xi_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

即 $\lambda_i^2 = 1$,故 $\lambda_i = \pm 1 \ (i = 1,2,\cdots,n)$.

设特征值 1 的重数为 r,则 -1 的重数为 $n-r$,于是存在正交阵 T,使

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & -E_{n-r} \end{pmatrix}$$

7. 设 $f(x_1, \cdots, x_n) = x'Ax$ 是一实二次型,$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征多项式的根,且 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.证明对任一 $x \in \mathbf{R}^n$,有

$$\lambda_1 x'x \leq x'Ax \leq \lambda_n x'x$$

证　因为存在正交阵 T,使 $T'AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$,令 $x = Ty$,则

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = y'\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

又有
$$\lambda_1 y'y \leq \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \leq \lambda_n y'y$$

而 $x'x = (Ty)'Ty = y'y$,故 $\lambda_1 x'x \leq x'Ax \leq \lambda_n x'x$.

8. 设二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的矩阵为 A,λ 是 A 的特征多项式的根 .证明存在 $\mathbf{R}^n$ 中的非零向量$(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_n)'$,使得

$$f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_n) = \lambda(\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 + \cdots + \overline{x}_n^2)$$

证　设 λ是 A 的特征根,则存在属于 λ的特征向量 $\xi=\begin{pmatrix}\overline{x_1}\\ \cdots\\ \overline{x_n}\end{pmatrix}$,即 $A\xi=\lambda\xi$,左乘 ξ',得

$$\xi' A\xi=\xi\lambda\xi=\lambda\xi\xi$$

即
$$f(\overline{x_1},\overline{x_2},\cdots,\overline{x_n})=\lambda(\overline{x_1}^2+\overline{x_2}^2+\cdots+\overline{x_n}^2)$$

9. 1) 设 α,β是欧氏空间中两个不同的单位向量 . 证明存在一镜面反射 A,使 $A(\alpha)=\beta$.

2) 证明: n 维欧氏空间中任一正交变换都可表成一系列镜面反射的乘积 .

证　1) 镜面反射的定义为

$$A\gamma=\gamma-2(\eta,\gamma)\eta\quad(\gamma\in V)$$

其中 η为某一单位向量,下面就是要确定单位向量 η,使 $A(\alpha)=\beta$.

由于 $A\alpha=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta'$, 令 $\alpha-2(\eta,\alpha)\eta=\beta$,那么 $\alpha-\beta=2(\eta,\alpha)\eta$. 因为 $\alpha\neq\beta$,所以 $(\eta,\alpha)\neq 0$,于是 $\eta=\dfrac{\alpha-\beta}{2(\eta,\alpha)}$. 又有

$$(\eta,\alpha)=\left(\frac{\alpha-\beta}{2(\eta,\alpha)},\alpha\right)=\frac{1}{2(\eta,\alpha)}(\alpha-\beta,\alpha)=$$
$$\frac{1}{2(\eta,\alpha)}[(\alpha,\alpha)-(\alpha,\beta)]$$

从而 $(\eta,\alpha)^2=\dfrac{1}{2}[1-(\alpha,\beta)]$.

因为 α,β为两个不同的单位向量,所以 $|(\alpha,\beta)|<1$,由上式得

$$(\eta,\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-(\alpha,\beta)}$$

于是
$$\eta=\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2[1-(\alpha,\beta)]}}$$

不难验证 $(\eta,\eta)=1$,由这个 η确定的镜面反射 A 即满足 $A(\alpha)=\beta$.

2) 设 A 是正交变换,$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是一组标准正交基,$A\varepsilon_i=\eta_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 由于 A 是正交变换,$\eta_1,\cdots,\eta_n$ 也是一组标准正交基 . 这时, 若 $\varepsilon_i=\eta_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 令 $A_1\gamma=\gamma-2(\varepsilon_1,\gamma)\varepsilon_1$ $(\gamma\in V)$,则有

$$A_1\varepsilon_1=-\varepsilon_1,\quad A_1\varepsilon_i=\varepsilon_i\quad(i=2,\cdots,n)$$

可见 A_1 是镜面反射,且 $A=A_1A_1$,得证 .

下面假设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 不尽相同,不妨设 $\varepsilon_1\neq\eta_1$,那么由上面 1)

的证明,存在镜面反射 $\mathcal{A}_1$ 使

$$\mathcal{A}_1\varepsilon_1=\eta_1,\quad \mathcal{A}_1\varepsilon_i=\varepsilon_i\quad(i=2,\cdots,n)$$

即

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\xrightarrow{\mathcal{A}_1}\eta_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$$

这里若 $\varepsilon_i=\eta_i(i=2,\cdots,n)$,那么 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1$,问题得证,否则可以假设 $\xi_2\neq\eta_2$.由 1),令镜面反射

$$\mathcal{A}_2\alpha=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta,\ \text{其中}\ \eta=\frac{\xi_2-\eta_2}{\sqrt{2(1-(\xi_2,\eta_2))}},\ \text{使}\ \mathcal{A}\xi_2=\eta_2$$

因为$(\eta_1,\eta_2)=0$,$(\xi_2,\eta_1)=0$,所以

$$(\eta,\eta_1)=\left(\frac{\xi_2-\eta_2}{\sqrt{2(1-(\xi_2,\eta_2))}},\eta_1\right)=0$$

故

$$\mathcal{A}_2\eta_1=\eta_1-2(\eta,\eta_1)\eta=\eta_1,\quad \mathcal{A}_2\xi_i=\xi_i\quad(i=3,\cdots,n)$$

依此类推下去

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\xrightarrow{\mathcal{A}_1}\eta_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\xrightarrow{\mathcal{A}_2}\eta_1,\eta_2,\xi_3,\cdots,\xi_n\longrightarrow\cdots\xrightarrow{\mathcal{A}_s}$$
$$\eta_1,\cdots,\eta_n\quad(s\leq n)$$

故 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_s\mathcal{A}_{s-1}\cdots\mathcal{A}_1$,其中 $\mathcal{A}_i$ 都是镜面反射.

10. 设 A,B 是两个 $n\times n$ 实对称矩阵,且 B 是正定矩阵.证明存在一 $n\times n$ 实可逆矩阵 T,使 $T'AT$, $T'BT$ 同时为对角形.

证 由于 B 是正定阵,所以存在可逆阵 C,使 $C'BC=E$.又由于 $C'AC$ 仍为对称阵,所以存在正交阵 D,使

$$D'(C'AC)D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

令 $T=CD$,则 T 为可逆阵,且

$$T'AT=(CD)'A(CD)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$T'BT=D'C'BCD=D'ED=E$$

11. 证明酉空间中两组标准正交基的过渡矩阵是酉矩阵.

证 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 是酉空间 V 中的两组标准正交基.它们之间的过渡矩阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,即$(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$,于是

$$\eta_i=a_{1i}\varepsilon_1+a_{2i}\varepsilon_2+\cdots+a_{ni}\varepsilon_n$$

由于 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 与 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 均是标准正交基,所以

$$(\eta_i, \eta_j) = (a_{1i}\varepsilon_1 + a_{2i}\varepsilon_2 + \cdots + a_{ni}\varepsilon_n, a_{1j}\varepsilon_1 + a_{2j}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nj}\varepsilon_n) =$$

$$a_{1i}\overline{a_{1j}} + a_{2i}\overline{a_{2j}} + \cdots + a_{ni}\overline{a_{nj}} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

即 $\overline{A}A' = E$,故 A 是酉矩阵 .

12. 求证:酉矩阵的特征值的模为 1 .

证　设 λ 为酉矩阵 A 的一个特征值,ξ 为相应的特征向量,即 $A\xi = \lambda\xi$. 取共轭转置得 $\overline{\xi}'\overline{A}' = \overline{\lambda}\overline{\xi}'$,右乘 $A\xi$ 得

$$\overline{\xi}'\overline{A}'A\xi = \overline{\lambda}\lambda\overline{\xi}'\xi$$

而 $\overline{A}'A = E$,故有

$$\overline{\lambda}\lambda\overline{\xi}'\xi = \overline{\xi}'\xi$$

又 $\overline{\xi}'\xi \neq 0$,从而 $\overline{\lambda}\lambda = 1$. 即 $|\lambda| = 1$.

13. 设 A 是一个 n 级可逆复矩阵 . 证明 A 可以分解成 $A = UT$,其中 U 为酉矩阵,T 是一个上三角矩阵

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

其中对角线元素 $t_{ii}\ (i = 1,2,\cdots,n)$ 都是正实数,并证明这个分解是惟一的 .

证　由于施密特正交化过程对线性无关的复向量组也成立,故可用类似 14 题的方法找到 U 和 T,其中 U 为酉矩阵,T 为上三角矩阵,且 $t_{ii} > 0$. 也可以用 14 题证明惟一的方法证分解惟一 .

14. 证明厄米特矩阵的特征值是实数,并且它的属于不同特征值的特征向量相互正交 .

证　设 λ 为厄米特矩阵 A 的一个特征值,ξ 是属于 λ 的特征向量,根据 $A = \overline{A}'$, $A\xi = \lambda\xi$ 有

$$\overline{\xi}'A\xi = \overline{\xi}'\overline{A}'\xi = (\overline{A\xi})'\xi = (\overline{\lambda}\overline{\xi})'\xi = \overline{\lambda}\overline{\xi}'\xi$$

又 $\overline{\xi}'A\xi = \overline{\xi}'\lambda\xi = \lambda\overline{\xi}'\xi$,所以 $\overline{\lambda}\overline{\xi}'\xi = \lambda\overline{\xi}'\xi$. 由 $\overline{\xi}'\xi \neq 0$ 得 $\overline{\lambda} = \lambda$,即 λ 为实数 .

设厄米特矩阵 A 在酉空间 C^n 中与对称变换 $\mathcal{A}$ 对应,λ, μ 是 A 的两个不同特征值,α,β 是分别属于 λ,μ 的特征向量,即

$$\mathcal{A}\alpha = \lambda\alpha, \quad \mathcal{A}\beta = \mu\beta$$

因为$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}\beta)$,且

$$(A\alpha,\ \beta) = (\lambda\alpha,\ \beta) = \lambda(\alpha,\ \beta)$$
$$(\alpha,\ A\beta) = (\alpha,\ \mu\beta) = \bar{\mu}(\alpha,\ \beta) = \mu(\alpha,\ \beta)$$

所以$\lambda(\alpha,\ \beta) = \mu(\alpha,\ \beta)$,但$\lambda \neq \mu$,从而$(\alpha,\ \beta) = 0$,命题得证.

六、学习效果检测题及答案

(一) 检测题

1. 在R^2中,设$\alpha = (x_1, x_2)$, $\beta = (y_1, y_2)$,定义实数

$$(\alpha,\beta) = x_1 y_1 + (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$$

判断(α,β)是否为R^2的内积.

2. 设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$是3维欧氏空间$V$的一组标准正交基,$\alpha = 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3$, $\beta = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2$.

(1) 求与α,β都正交的全部元素;

(2) 求与α,β都正交的全部单位元素.

3. 在$R^{2\times2}$按内积

$$(A, B) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij} b_{ij} \quad (A = (a_{ij})_{2\times2},\ B = (b_{ij})_{2\times2})$$

构成的欧氏空间中,利用基

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

构造一组标准正交基.

4. 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是3维欧氏空间V的一组基,这组基的度量矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

(1) 令$\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2$,证明$\gamma_1$是一个单位元素;

(2) 求参数k,使$\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + k\alpha_3$与$\gamma_1$正交;

(3) 把β_2单位化,并记作γ_2;

(4) 扩充γ_1, γ_2为V的一组标准正交基.

5. 在向量空间R^2按某种内积构成的欧氏空间V中,已知基$\alpha_1 = (1,0)$,

$\alpha_2=(0,1)$ 的度量矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$, 试求 V 的一组标准正交基.

6. 在向量空间 R^2 按某种内积构成的欧氏空间 V 中,已知其两组基为

(Ⅰ): $\alpha_1=(1,1)$, $\alpha_2=(1,-1)$;

(Ⅱ): $\beta_1=(0,2)$, $\beta_2=(6,12)$.

且　$(\alpha_1,\beta_1)=1$, $(\alpha_1,\beta_2)=15$, $(\alpha_2,\beta_1)=-1$, $(\alpha_2,\beta_2)=3$

(1) 分别求基(Ⅰ)与基(Ⅱ)的度量矩阵;

(2) 求 V 的一组标准正交基.

7. 欧氏空间 $P[t]_3$ 的内积为

$$(f(t),g(t))=\int_{-1}^{1}f(t)g(t)\mathrm{d}t\quad(\forall\ f(t),g(t)\in P[t]_3)$$

已知子空间 $W=L(f_1(t))$,其中 $f_1(t)=t$,求 $W^{\perp}$ 的一组标准正交基.

8. 已知 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&a&0\\0&0&1\\b&c&0\end{pmatrix}$, a,b,c取何值时,A是正交矩阵.

9. 若 A是正交矩阵,证明 A^* 为正交矩阵.

10. 已知 A是 $2k+1$ 级正交矩阵,且 $|A|=1$,试求 $|A-E|$.

11. 求一正交相似变换矩阵,将下列矩阵化为对角矩阵:

(1) $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&2\\0&2&3\end{pmatrix}$;　　(2) $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&0\\2&0&1\end{pmatrix}$.

12. 已知3级实对称矩阵 A的特征值为$\lambda_1=8$, $\lambda_2=\lambda_3=2$,对应$\lambda_1=8$的特征向量为 $p_1=(1,k,1)'$, 对应 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的一个特征向量为 $p_2=(-1,1,0)'$,试求参数 k,以及 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的另一个特征向量 p_3 和矩阵 A.

13. 已知二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2tx_2x_3\ (t>0)$,通过正交线性替换化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$,求参数 t及所用的正交线性替换.

14. 已知二次型 $f=x'Ax=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$ 的秩为2,且$(0,1,0)'$是 A的特征向量,求正交线性替换 $x=Qy$ 化二次型为标准形.

15. 设二次曲面 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$,可经正交线性替换 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$化为椭圆柱面方程$v^2+4w^2=4$, 求 a,b的值及正交矩阵 Q.

16. 已知 A 和 $A-E$ 都是 n 级正定矩阵,证明 $E-A^{-1}$ 是正定矩阵.

17. 设 A 是 n 级正定矩阵,证明 $|A+2E|>2^n$.

18. 设 A 是 n 级正定矩阵,证明:存在 n 级正定矩阵 B,使得 $A=B^2$.

(二) 检测题答案

1. 法1 因为

$$(\alpha,\beta)=2x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

且$\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$是正定矩阵,故$(\alpha,\beta)$ 是 R^2 的内积.

法2 由内积的定义逐条验证.

2. 设 $\gamma=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3$ 与 α,β都正交,则

$$\begin{cases}(\gamma,\alpha)=3x_1+2x_2+4x_3=0\\(\gamma,\beta)=x_1-2x_2=0\end{cases}$$

解这个齐次线性方程组得

$$x_1=-2k,\quad x_2=-k,\quad x_3=2k\quad(k\text{为任意实数})$$

故 V 中与 α,β都正交的全部向量为 $k(-2\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3)$ (k 为任意实数). 把 $-2\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3$ 单位化得$-\frac{2}{3}\varepsilon_1-\frac{1}{3}\varepsilon_2+\frac{2}{3}\varepsilon_3$,因此 V 中与 α,β都正交的全部单位向量为$\pm\left(-\frac{2}{3}\varepsilon_1-\frac{1}{3}\varepsilon_2+\frac{2}{3}\varepsilon_3\right)$.

3. 先正交化

$$B_1=A_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\quad B_2=A_2-\frac{(A_2,B_1)}{(B_1,B_1)}B_1=\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$B_3=A_3-\frac{(A_3,B_1)}{(B_1,B_1)}B_1-\frac{(A_3,B_2)}{(B_2,B_2)}B_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{3}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$B_4=A_4-\frac{(A_4,B_1)}{(B_1,B_1)}B_1-\frac{(A_4,B_2)}{(B_2,B_2)}B_2-\frac{(A_4,B_3)}{(B_3,B_3)}B_3=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}&\frac{3}{7}\\\frac{3}{7}&-\frac{6}{7}\end{pmatrix}$$

再单位化得 $\mathrm{R}^{2\times 2}$ 的一组标准正交基

$$G_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\quad G_2=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}3&-2\\1&1\end{pmatrix}$$

$$G_3=\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}3&3\\-4&1\end{pmatrix},\quad G_4=\frac{1}{\sqrt{63}}\begin{pmatrix}3&3\\3&-6\end{pmatrix}$$

4. (1) 因为 γ_1 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为$(1,1,0)'$,所以

$$(\gamma_1,\gamma_1)=(1,1,0)A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=1$$

可见 γ_1 是单位向量.

(2) 由 $0=(\beta_2,\gamma_1)=(1,1,k)A(1,1,0)'=k+1$,得 $k=-1$ 时 β_2 与 γ_1 正交.

(3) 因为$(\beta_2,\beta_2)=(1,1,-1)A(1,1,-1)'=5$,所以

$$\gamma_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)$$

(4) 设 $\beta_3=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$ 与 γ_1,β_2 都正交,则

$$\begin{cases}0=(\beta_3,\gamma_1)=(x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=x_2+x_3\\ 0=(\beta_3,\beta_2)=(x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=-2x_1+2x_2-5x_3\end{cases}$$

解这个齐次线性方程组得基础解系$(-7,-2,2)'$,从而可取 $\beta_3=-7\alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_3$.又

$$(\beta_3,\beta_3)=(-7,-2,2)A(-7,-2,2)'=5$$

令
$$\gamma_3=\frac{1}{|\beta_3|}\beta_3=\frac{1}{\sqrt{5}}(-7\alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_3)$$

则 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 是 V 的一组标准正交基.

5. 首先将 α_1,α_2 正交化,得

$$\beta_1=\alpha_1=(1,0)$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=(0,1)-\frac{1}{1}(1,0)=(-1,1)$$

又由 $(\beta_1,\beta_1)=(\alpha_1,\alpha_1)=1,\quad (\beta_2,\beta_2)=(-1,1)A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=1$

可知 β_1,β_2 即是 V 的一个标准正交基.

6. (1) 可求得

$$\alpha_1=-\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{6}\beta_2,\qquad \alpha_2=-\frac{3}{2}\beta_1+\frac{1}{6}\beta_2$$

于是

$$(\alpha_1,\alpha_1)=\left(\alpha_1,-\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{6}\beta_2\right)=2$$

$$(\alpha_1,\alpha_2)=\left(\alpha_1,-\frac{3}{2}\beta_1+\frac{1}{6}\beta_2\right)=1$$

$$(\alpha_2,\alpha_2)=\left(\alpha_2,-\frac{3}{2}\beta_1+\frac{1}{6}\beta_2\right)=2$$

从而基(Ⅰ)的度量矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$. 又由

$$(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1&9\\-1&-3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2)C$$

得基(Ⅱ)的度量矩阵为

$$B=C'AC=\begin{pmatrix}2&12\\12&126\end{pmatrix}$$

(2) 正交化得

$$\gamma_1=\alpha_1=(1,1)$$

$$\gamma_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\gamma_1)}{(\gamma_1,\gamma_1)}\gamma_1=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_1=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$$

而

$$(\gamma_1,\gamma_1)=(\alpha_1,\alpha_1)=2$$

$$(\gamma_2,\gamma_2)=(\alpha_2,\alpha_2)-(\alpha_1,\alpha_2)+\frac{1}{4}(\alpha_1,\alpha_1)=\frac{3}{2}$$

故 V 的一个标准正交基为

$$\varepsilon_1=\frac{1}{|\gamma_1|}\gamma_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \varepsilon_2=\frac{1}{|\gamma_2|}\gamma_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{3}{\sqrt{6}}\right)$$

7. 设 $g(t)=k_0+k_1t+k_2t^2\in W^{\perp}$,则有

$$(f_1(t),g(t))=\int_{-1}^{1}f_1(t)g(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}t(k_0+k_1t+k_2t^2)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}k_1=0$$

于是可得

$$W^{\perp}=\{g(t)=k_0+k_2t^2\mid k_0,k_2\in\mathbf{R}\}$$

取 $W^{\perp}$ 的基 $1,t^2$,并正交化得

$$g_1(t)=1$$

$$g_2(t)=t^2-\frac{(t^2,g_1(t))}{(g_1(t),g_1(t))}g_1(t)=t^2-\frac{\int_{-1}^{1}t^2\,\mathrm{d}t}{\int_{-1}^{1}1\,\mathrm{d}t}\cdot 1=t^2-\frac{1}{3}$$

又$(g_1(t),g_1(t))=\int_{-1}^{1}g_1^2(t)\mathrm{d}t=2$, $(g_2(t),g_2(t))=\int_{-1}^{1}\left[t^2-\frac{1}{3}\right]^2\mathrm{d}t=\frac{8}{45}$,故 $W^{\perp}$ 的一个标准正交基为

$$h_1(t)=\frac{1}{|g_1(t)|}g_1(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$h_2(t)=\frac{1}{|g_2(t)|}g_2(t)=\frac{\sqrt{10}}{4}(3t^2-1)$$

8. 由 A 的列向量组是两两正交的单位向量,得

$$\frac{1}{2}+b^2=1,\quad a^2+c^2=1,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}a+bc=0$$

解得 $b=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\begin{cases}a^2+c^2=1\\ a\pm c=0\end{cases}$;于是 $a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $c=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$. 即 $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$时, $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $c=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $c=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $b=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $a=c=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $a=c=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

9. 因为 $A'A=E$,所以 $|A|^2=1$. 又

$$(A^*)'A^*=(|A|A^{-1})'(|A|A^{-1})=|A|^2(A')^{-1}A^{-1}=(AA')^{-1}=E^{-1}=E$$

故 A^* 是正交矩阵.

10. 因为

$$\begin{aligned}|A-E|&=|A-A'A|=|(E-A')A|=|E-A'||A|=\\&|(E-A)'|=|E-A|=(-1)^{2k+1}|A-E|=\\&-|A-E|\end{aligned}$$

所以 $|A-E|=0$.

11. (1) $|A-\lambda E|=-(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$, A 的特征值为 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=5$. 对应的特征向量分别为

$$p_1=(2,-2,1)',\quad p_2=(-2,-1,2)',\quad p_3=(1,2,2)'$$

单位化得

$$q_1=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)',\quad q_2=\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)',\quad q_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)'$$

故正交矩阵 $Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-2&1\\-2&-1&2\\1&2&2\end{pmatrix}$,使得 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.

(2) $|A-\lambda E|=-(\lambda-3)^2(\lambda+1)$, A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=3$, $\lambda_3=-1$. 对应的特征向量分别为

$$p_1=(0,1,0)',\quad p_2=(1,0,1)',\quad p_3=(-1,0,1)'$$

p_1,p_2 已正交,单位化得

$$q_1=(0,1,0)',\quad q_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)',\quad q_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)'$$

故正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$,使得 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

12. 由$(p_1,p_2)=-1+k=0$得 $k=1$. 设 $p_3=(x_1,x_2,x_3)'$,则$(p_1,p_3)=0$. 而为了保证 p_1,p_3 线性无关,可进一步要求$(p_1,p_3)=0$,这样就有

$$\begin{cases}(p_1,p_3)=x_1+x_2+x_3=0\\(p_2,p_3)=-x_1+x_2=0\end{cases}$$

由于 $\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

同解方程组为$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3\\x_2=-\frac{1}{2}x_3\end{cases}$,基础解系为 $p_3=(-1,-1,2)'$.

令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}$,则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 于是

$$A=P\begin{pmatrix}8&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\times$$

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

13. **由假设知变换前后二次型的矩阵为**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & t \\ 0 & t & 3 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

法 1　**由于** A **与** Λ (**正交**) **相似,所以** $|A-\lambda E| = |\Lambda - \lambda E|$,**展开得**

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 9 - t^2) = (1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda)$$

比较两边 λ **的同次幂系数得** $\begin{cases} 18 - 2t^2 = 10 \\ t^2 - 21 = -17 \end{cases}$,**解得** $t = \pm 2$. **由于** $t > 0$,**所以** $t = 2$.

法 2　**可求得** $|A-\lambda E| = (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 9 - t^2)$. **将** $\lambda = 1$(**或** $\lambda = 5$) **代入得** $t^2 - 4 = 0$,**即** $t = \pm 2$,**故取** $t = 2$.

法 3　$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & t \\ 0 & t & 3 \end{vmatrix} = 2(9 - t^2)$. **由于** A **的特征值为** 1,2,5,**所以有** $2(9-t^2) = 1\times 2\times 5$,**解得** $t = 2$.

由于 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,**可求得对应** $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$ **的特征向量分别为**

$$p_1 = (0, -1, 1)', \quad p_2 = (1, 0, 0)', \quad p_3 = (0, 1, 1)'$$

单位化得

$$q_1 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)', \quad q_2 = (1, 0, 0)', \quad q_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)'$$

故所求正交变换为
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

14. 二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}$. 由二次型的秩为2知 $\operatorname{rank}A=2$,于是 $|A|=0$. 但

$$|A|=\begin{vmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{vmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{vmatrix}1&a&1\\a&1&b\\0&b-a&0\end{vmatrix}=-(b-a)\begin{vmatrix}1&1\\a&b\end{vmatrix}=-(b-a)^2$$

于是由 $|A|=0$ 知 $a=b$. 设特征向量$(0,1,0)'$属于特征值 λ_1,由定义有

$$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&a\\1&a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\text{即}\quad\begin{cases}a=0\\1=\lambda_1\\a=0\end{cases}$$

从而 $a=b=0$, $\lambda_1=1$. 由 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$ 知 $\lambda_2=0$ 是 A 的特征值. 又由

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}=3$$

得 $\lambda_3=2$. 此时 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,可求得 A 对应 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=2$ 的特征向量分别为

$$p_1=(0,1,0)',\quad p_2=(-1,0,1)',\quad p_3=(1,0,1)'$$

单位化得

$$q_1=(0,1,0)',\quad q_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)',\quad q_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)'$$

故正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,化二次型为 $f=y_1^2+2y_3^2$.

15. 设二次型 $f(x,y,z)=x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz$,则 f 的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. 因为二次曲面 $f(x,y,z)=4$ 经正交线性替换化为椭圆柱面方程 $v^2+4w^2=4$,所以 v^2+4w^2 是二次型 $f(x,y,z)$ 的标准形,而标准形的

矩阵为 $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,从而 A 与 Λ(正交)相似,故 $|A - \lambda E| = |\Lambda - \lambda E|$,展开得

$$-\lambda^3 + (a+2)\lambda^2 + (b^2 - 2a + 1)\lambda - 1 + 2b - b^2 = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda$$

比较同次幂系数得 $\begin{cases} a + 2 = 5 \\ b^2 - 2a + 1 = -4 \\ -1 + 2b - b^2 = 0 \end{cases}$,解得 $a = 3, b = 1$. 因此 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,可求得 A 对应特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$ 的特征向量分别为

$$p_1 = (-1, 0, 1)', \quad p_2 = (1, -1, 1)', \quad p_3 = (1, 2, 1)'$$

单位化得

$$q_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)', \quad q_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)', \quad q_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)'$$

故所用的正交线性替换的矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

16. 因为 $(E - A^{-1})' = E' - (A^{-1})' = E - (A')^{-1} = E - A^{-1}$,所以 $E - A^{-1}$ 是实对称矩阵. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值,则 $A - E$ 与 $E - A^{-1}$ 的特征值分别是 $\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \cdots, \lambda_n - 1$ 与 $1 - \frac{1}{\lambda_1}, 1 - \frac{1}{\lambda_2}, \cdots, 1 - \frac{1}{\lambda_n}$.

由 A 正定知 $\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$,由 $A - E$ 正定知 $\lambda_i - 1 > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$,从而 $\frac{1}{\lambda_i} < 1$,故 $E - A^{-1}$ 的特征值全大于 0,即 $E - A^{-1}$ 是正定矩阵.

17. 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值,由 A 正定知 $\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 又 $A + 2E$ 的特征值为 $\lambda_1 + 2, \lambda_2 + 2, \cdots, \lambda_n + 2$,于是

$$|A + 2E| = (\lambda_1 + 2)(\lambda_2 + 2)\cdots(\lambda_n + 2) > 2^n$$

18. 存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{-1}AQ = Q'AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, 其中 $\lambda_i > 0$ $(i = 1,2,\cdots,n)$, 于是

$$A = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}Q' = Q\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}Q'Q\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}Q' = B^2$$

其中 $B = Q\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}Q'$ 是正定矩阵, 因为其特征值 $\sqrt{\lambda_i} > 0$ $(i = 1,2,\cdots,n)$.

第 10 章　双线性函数与辛空间

在线性空间上引入线性函数和双线性函数的概念,可以使得二次型、欧氏空间等内容统一到双线性函数的概念之下来讨论,从而丰富了线性代数的内容．本章主要学习线性函数、对偶空间、双线性函数和对称双线性函数等．学习本章要注意掌握基本要领和方法,并注意与二次型、欧氏空间、酉空间的内容进行比较．

一、内 容 提 要

1. 线性函数

(1) 设 V 是数域 P 上的线性空间,f 是 V 到 P 的一个映射,如果对任意 $\alpha, \beta \in V$ 和 $k \in P$,有

$$f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta), \quad f(k\alpha) = kf(\alpha)$$

则称 f 为 V 上的一个线性函数．

(2) 设 f 是 V 上的线性函数,且 $\alpha, \beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_s \in V$, $k_1, \cdots, k_s \in P$,则

1) $f(0) = 0$, $f(-\alpha) = -f(\alpha)$

2) 如果 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$,有

$$f(\beta) = k_1 f(\alpha_1) + k_2 f(\alpha_2) + \cdots + k_s f(\alpha_s)$$

(3) 线性函数的存在惟一性及表达式:

设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间,$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基．则

1) 对于 P 中任意 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,存在 V 上惟一的线性函数 f,使

$$f(\varepsilon_i) = a_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

2) 对于 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n \in V$,满足上述条件的线性函数为

$$f(\alpha) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

2. 对偶空间

(1) 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间,$L(V, P)$ 是 V 上全体线性函数组成

的集合,在 $L(V, P)$ 中定义加法和数乘运算:

$$(f+g)(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha),\quad (kf)(\alpha)=kf(\alpha)\quad \forall\alpha\in V$$

其中 $f, g\in L(V, P)$, $k\in P$,则 $L(V, P)$ 构成数域 P 上的线性空间,称之为 V 的对偶空间,记为 V^*.

(2) 取定 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$,如果 V 上的 n 个线性函数 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 满足

$$f_i(\varepsilon_j)=\begin{cases}1, & j=i\\ 0, & j\neq i\end{cases}\quad (i, j=1,2,\cdots,n)$$

则 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是对偶空间 V^* 的基,称之为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 的对偶基.

(3) 对偶空间的有关结果:

设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间,则

1) V 的对偶空间 V^* 也是 n 维的;

2) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是它的对偶基,则对任意 $\alpha\in V$,有

$$\alpha=f_1(\alpha)\varepsilon_1+f_2(\alpha)\varepsilon_2+\cdots+f_n(\alpha)\varepsilon_n$$

即 $f_i(\alpha)$ 是 α 的第 i 个坐标的值,而对 V 上任意线性函数 f,有

$$f=f(\varepsilon_1)f_1+f(\varepsilon_2)f_2+\cdots+f(\varepsilon_n)f_n$$

3) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 及 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是 V 的两个基,它们的对偶基分别是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 及 $g_1, g_2, \cdots, g_n$. 又设由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 的过渡矩阵为 A,则由 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 到 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 的过渡矩阵为 $(A')^{-1}$;

4) 记 V^{**} 是 V 的对偶空间 V^* 的对偶空间,则 V 与 V^{**} 同构.

3. 双线性函数

(1) 设 V 是数域 P 上的线性空间,如果对任意 $\alpha, \beta\in V$ 都对应 P 中一个数 $f(\alpha, \beta)$,且对任意 $\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\in V$ 和 $k_1, k_2\in P$,有

$$f(\alpha, k_1\beta_1+k_2\beta_2)=k_1f(\alpha, \beta_1)+k_2f(\alpha, \beta_2)$$

$$f(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2, \beta)=k_1f(\alpha_1, \beta)+k_2f(\alpha_2, \beta)$$

则称 $f(\alpha, \beta)$ 为 V 上的一个双线性函数.

(2) 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, $f(\alpha, \beta)$ 是 V 上的一个双线性函数,则矩阵

$$A=\begin{pmatrix} f(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_1,\varepsilon_n) \\ f(\varepsilon_2,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_2,\varepsilon_n) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ f(\varepsilon_n,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_n,\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

称为 $f(\alpha,\beta)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量矩阵．又称 A 的秩为 $f(\alpha,\beta)$ 的秩．

(3) 设 V 是数域 P 上的线性空间，$f(\alpha,\beta)$ 是 V 上的一个双线性函数．如果对任意 $\beta\in V$，从 $f(\alpha,\beta)=0$ 可推出 $\alpha=0$，则称 $f(\alpha,\beta)$ 是非退化的双线性函数．

(4) 双线性函数的度量矩阵的有关结果：

设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基，$f(\alpha,\beta)$ 是 V 上的一个双线性函数．

1) 对任意 $\alpha,\beta\in V$，如果 α,β 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标分别为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$，则

$$f(\alpha,\beta)=x'Ay$$

其中 A 是 $f(\alpha,\beta)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量矩阵．

2) 如果 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 V 的另一组基，且由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵为 C，则 $f(\alpha,\beta)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量矩阵 A 和在基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的度量矩阵 B 满足

$$B=C'AC$$

即双线性函数在不同基下的度量矩阵是合同的．

3) $f(\alpha,\beta)$ 是非退化的充分必要条件是其度量矩阵 A 是可逆的．

4. 对称双线性函数

(1) 设 V 是数域 P 上的线性空间，$f(\alpha,\beta)$ 是 V 上的一个双线性函数．如果对任意 $\alpha,\beta\in V$ 都有

$$f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$$

则称为 $f(\alpha,\beta)$ 为对称双线性函数．

(2) 对称双线性函数的有关结果：

1) 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，$f(\alpha,\beta)$ 是 V 上的双线性函数，则 $f(\alpha,\beta)$ 是对称的充分必要条件是它在任一组基下的度量矩阵 A 是对称矩阵；

2) 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，$f(\alpha,\beta)$ 是 V 上的对称双线性函数，且 $f(\alpha,\beta)$ 的秩为 r，则存在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，使 $f(\alpha,\beta)$ 在该基下的度量

矩阵为对角矩阵

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (0 \neq d_i \in P,\ i = 1,2,\cdots,r)$$

也即对任意 $\alpha, \beta \in V$,且 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$, $\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n$,有

$$f(\alpha, \beta) = d_1x_1y_1 + d_2x_2y_2 + \cdots + d_rx_ry_r$$

3) 设 V 是复数域 C 上的 n 维线性空间, $f(\alpha, \beta)$ 是 V 上的对称双线性函数,且 $f(\alpha, \beta)$ 的秩为 r,则存在 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$,使 $f(\alpha, \beta)$ 在该基下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

也即对任意 $\alpha, \beta \in V$,且 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$, $\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n$,有

$$f(\alpha, \beta) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ry_r$$

称之为复数域上对称双线性函数的规范形;

4) 设 V 是实数域 R 上的 n 维线性空间, $f(\alpha, \beta)$ 是 V 上的对称双线性函数,且 $f(\alpha, \beta)$ 的秩为 r,则存在 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$,使 $f(\alpha, \beta)$ 在该基下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} \quad (0 \leq p \leq r \leq n)$$

也即对任意 $\alpha, \beta \in V$,且 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$, $\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n$,有

$$f(\alpha, \beta) = x_1y_1 + \cdots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \cdots - x_ry_r$$

5. 线性空间上的二次齐次函数

(1) 设 V 是数域 P 上的线性空间, $f(\alpha, \beta)$ 是 V 上的一个双线性函数,则称

$f(\alpha,\alpha)$ 为与 $f(\alpha,\beta)$ 对应的二次齐次函数.

(2) 对称二次齐次函数的有关结果:

设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间, $f(\alpha,\beta)$ 是 V 上的一个对称双线性函数,且 $f(\alpha,\beta)$ 的秩为 r,则

1) 存在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,使对任意 $\alpha\in V$ 且 $\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$,有

$$f(\alpha,\alpha)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_rx_r^2\quad(0\neq d_i\in P,\ i=1,2,\cdots,r)$$

2) 当 $P=\mathbf{C}$ 时,存在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,使对任意 $\alpha\in V$ 且 $\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$,有

$$f(\alpha,\alpha)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_r^2$$

3) 当 $P=\mathbf{R}$ 时,存在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,使对任意 $\alpha\in V$ 且 $\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$,有

$$f(\alpha,\alpha)=x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_r^2\quad(0\leq p\leq r\leq n)$$

6. 反对称双线性函数

(1) 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间, $f(\alpha,\beta)$ 是 V 上的一个双线性函数,如果对任意 $\alpha,\beta\in V$ 都有

$$f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$$

则称 $f(\alpha,\beta)$ 为反对称双线性函数.

(2) 反对称双线性函数的有关结果:

1) 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间, $f(\alpha,\beta)$ 是 V 上的双线性函数,则 $f(\alpha,\beta)$ 是反对称的充分必要条件是它在任一组基下的度量矩阵 A 是反对称矩阵;

2) 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间, $f(\alpha,\beta)$ 是 V 上的一个反对称双线性函数,且 $f(\alpha,\beta)$ 的秩为 $2r$,则存在 V 的一组基

$$\varepsilon_1,\varepsilon_{-1},\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{-r},\eta_1,\cdots,\eta_s$$

使

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_{-i})=1\quad(i=1,2,\cdots,r)$$

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0\quad(i+j\neq0)$$

$$f(\alpha,\beta_k)=0\quad(\alpha\in V,\ k=1,2,\cdots,s)$$

即 $f(\alpha,\beta)$ 在该基下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{matrix}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{matrix}} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

也即对任意 $\alpha, \beta \in V$,且

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_{-1} + \cdots + x_{2r-1}\varepsilon_r + x_{2r}\varepsilon_{-r} + x_{2r+1}\eta_1 + \cdots + x_n\eta_s$$

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_{-1} + \cdots + y_{2r-1}\varepsilon_r + y_{2r}\varepsilon_{-r} + y_{2r+1}\eta_1 + \cdots + y_n\eta_s$$

有

$$f(\alpha, \beta) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + \cdots + x_{2r-1}y_{2r} - x_{2r}y_{2r-1}$$

(3) 具有非退化反对称双线性函数的线性空间一定是偶数维的.

7. 双线性度量空间、准欧氏空间、辛空间

(1) 设 V 是数域 P 上的线性空间,如果在 V 上定义了一个非退化的双线性函数 $f(\alpha, \beta)$,则称 V 是一个双线性度量空间,记作 (V, f).当 f 是非退化的对称双线性函数时,称 V 为 P 上的正交空间.

(2) 设 V 是 n 维实线性空间,如果在 V 上定义了一个非退化对称双线性函数,则称 V 为准欧氏空间.

(3) 设 V 是 n 维实线性空间,如果在 V 上定义了一个非退化反对称双线性函数,则称 V 为辛空间.辛空间一定是偶数维的.

(4) 在数域 P 上的正交空间 V 中,如果有一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 满足

$$f(\varepsilon_i, \varepsilon_i) \neq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n), \quad f(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \ (i \neq j)$$

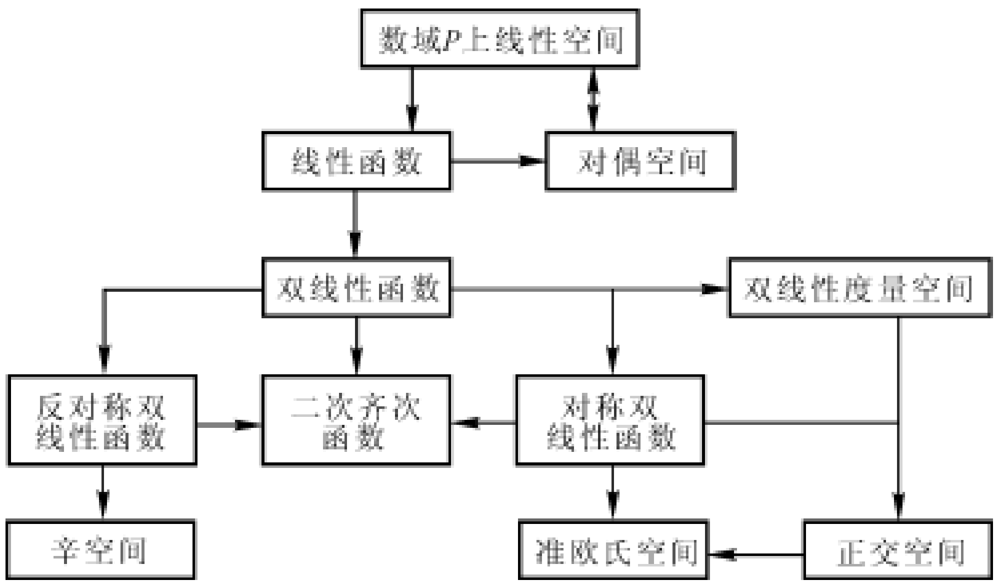
则称该基为 V 的对于 $f(\alpha, \beta)$ 的正交基.定理 5 保证了正交基的存在.

(5) 在 $2n$ 维辛空间 V 中,如果有一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_{-2}, \cdots, \varepsilon_{-n}$ 满足

$$f(\varepsilon_i, \varepsilon_{-i}) = 1 \ (1 \leq i \leq n), \quad f(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \ (-n \leq i, j \leq n, \ i + j \neq 0)$$

则称该基为 V 的对于 $f(\alpha, \beta)$ 的辛正交基.定理 6 保证了辛正交基的存在.

二、知识网络图



三、重点、难点解读

本章主要介绍线性空间上的线性函数与双线性函数,这些概念的引入使得以前学过的二次型、欧氏空间等内容可以统一到双线性函数的概念下来讨论.又在选定基后,双线性函数与其度量矩阵一一对应,因此,有关双线性函数的概念和结论与矩阵的相关概念和结论又有机地联系在一起.本章的重点是对称双线性函数,在学习时要将对称双线性函数的理论、二次型的理论及对称矩阵的理论统一起来研究,它们之间有许多平行的理论,特别是在有关的规范形式上.

四、典型例题解析

例 10.1　设 $V = P^{n\times n}$, $A \in P^{n\times n}$,定义由 V 到 P 的映射

$$f(X) = \mathrm{Tr}(AX) \qquad \forall X \in P^{n\times n}$$

问 f 是否是 V 上的线性函数?为什么?

解　对任意的 $X, Y \in P^{n\times n}$, $k \in P$,有

$$f(X+Y)=\mathrm{Tr}(A(X+Y))=\mathrm{Tr}(AX+AY)=$$
$$\mathrm{Tr}(AX)+\mathrm{Tr}(AY)=f(X)+f(Y)$$
$$f(kX)=\mathrm{Tr}(A(kX))=\mathrm{Tr}(k(AX))=k\mathrm{Tr}(AX)=kf(X)$$

所以 f 是 V 上的线性函数.

例 10.2 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是数域 P 上线性空间 V 的一组基,f 是 V 上的一个线性函数,且

$$f(\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3)=4,\quad f(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=4,\quad f(-\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)=-2$$

求 $f(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3)$.

解 法 1 由 f 是线性函数得

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1)-2f(\varepsilon_2)+f(\varepsilon_3)=4 \\ f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_3)=4 \\ -f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_2)+f(\varepsilon_3)=-2 \end{cases}$$

解得 $f(\varepsilon_1)=3$, $f(\varepsilon_2)=0$, $f(\varepsilon_3)=1$. 从而

$$f(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3)=x_1f(\varepsilon_1)+x_2f(\varepsilon_2)+x_3f(\varepsilon_3)=3x_1+x_3$$

法 2 设 $\alpha_1=\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3$, $\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_3$, $\alpha_3=-\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$,则

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)T$$

其中
$$T=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\quad 且\quad T^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&-2&1\\3&2&1\\-2&0&2\end{pmatrix}$$

于是

$$f(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3)=f\left[(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]=$$
$$f\left[(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)T^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]=f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)T^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=$$
$$(4,4,-2)\times\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&-2&1\\3&2&1\\-2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=3x_1+x_3$$

注 上题的方法 2 对于一般的 n 维线性空间 V 上的线性函数 f 同样适用.

例 10.3 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间,f 是 V 上的一个非零线性函数. 证明:

$$f^{-1}(0) = \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0\}$$

是 V 的一个 $n-1$ 维子空间 .

证　取 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$,且设

$$f(\varepsilon_1) = a_1,\ f(\varepsilon_2) = a_2,\ \cdots,\ f(\varepsilon_n) = a_n$$

则对任意 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n \in V$,有

$$f(\alpha) = x_1 f(\varepsilon_1) + x_2 f(\varepsilon_2) + \cdots + x_n f(\varepsilon_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

因此 $\alpha \in f^{-1}(0)$ 的充分必要条件是 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)'$ 是齐次线性方程组

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$$

的解向量,从而 V 的子集 $f^{-1}(0)$ 是一个子空间 . 又由 f 非零可知 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的秩为 1,从而解空间的维数为 $n-1$,故 $f^{-1}(0)$ 是 $n-1$ 维的 .

例 10 .4　在 P^3 中给出两组基

$$\varepsilon_1 = (1,0,0),\quad \varepsilon_2 = (0,1,0),\quad \varepsilon_3 = (0,0,1)$$

及
$$\eta_1 = (1,1,-1),\quad \eta_2 = (1,1,0),\quad \eta_3 = (1,,0,0)$$

试求这两组基各自的对偶基作用在 P^3 中任意向量 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 上的表达式 .

解　设 f_1, f_2, f_3 是 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的对偶基,而 g_1, g_2, g_3 是 η_1, η_2, η_3 的对偶基,则由定义,有

$$f_i(\varepsilon_j) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases} \quad (i = 1,2,3)$$

注意到 $x = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3$,得

$$f_1(x) = x_1 f_1(\varepsilon_1) + x_2 f_1(\varepsilon_2) + x_3 f_1(\varepsilon_3) = x_1$$
$$f_2(x) = x_1 f_2(\varepsilon_1) + x_2 f_2(\varepsilon_2) + x_3 f_2(\varepsilon_3) = x_2$$
$$f_3(x) = x_1 f_3(\varepsilon_1) + x_2 f_3(\varepsilon_2) + x_3 f_3(\varepsilon_3) = x_3$$

由于
$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)A$$

其中
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 且有 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$(g_1, g_2, g_3) = (f_1, f_2, f_3)(A^{-1})' = (f_1, f_2, f_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

即
$$g_1 = -f_3, \quad g_2 = f_2 + f_3, \quad g_3 = f_1 - f_2$$

故

$$g_1(x) = -f_3(x) = -x_3$$
$$g_2(x) = f_2(x) + f_3(x) = x_2 + x_3$$
$$g_3(x) = f_1(x) - f_2(x) = x_1 - x_2$$

例 10.5　证明: $P^{n\times n}$ **上的双线性函数**

$$f(X, Y) = \mathrm{Tr}(XY) \qquad \forall X, Y \in P^{n\times n}$$

是非退化的.

证　法 1　直接由定义来证. **设** $X = (x_{ij})_{n\times n} \in P^{n\times n}$, **使得对任意** $Y \in P^{n\times n}$ **都有** $f(X,Y) = 0$. **下证** $X = O$.

取 $Y = E_{kl}$, **注意到** $X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}E_{ij}$, **且**

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il}, & j = k \\ O, & j \neq k \end{cases} \qquad (*)$$

则有
$$XY = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}E_{il}\right)E_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}E_{ij}E_{kl} = \sum_{i=1}^{n} x_{ik}E_{il}$$

于是

$$0 = f(X, Y) = \mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ik}E_{il}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_{ik}\mathrm{Tr}(E_{il}) = x_{lk}$$
$$(l, k = 1, 2, \cdots, n)$$

故 $X = O$, **即** f **非退化**.

法 2　利用 f **在某一组基下的度量矩阵可逆**.

设 f **在** $P^{n\times n}$ **的基** $E_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ **下的度量矩阵为** A. **考虑** A **的任一行的元素**

$$f(E_{ij}, E_{11}), \cdots, f(E_{ij}, E_{1n}), \cdots, f(E_{ij}, E_{n1}), \cdots, f(E_{ij}, E_{nn})$$

利用(*)**式的结果知**

$$f(E_{ij}, E_{kl}) = \mathrm{Tr}(E_{ij}, E_{kl}) = \begin{cases} \mathrm{Tr}(E_{il}), & j = k \\ \mathrm{Tr}(O), & j \neq k \end{cases} = \begin{cases} 1, & i = l \\ 0, & i \neq l \end{cases}$$

即 A **的这一行中除** $f(E_{ij}, E_{ji}) = \mathrm{Tr}(E_{ii}) = 1$ **外其余均为** 0. **同理**, **考察** A **的列**

发现,A的每一列也都只有一个元素为 1,其余均为 0 .这表明 A是这样的矩阵,其每行每列只有一个元素为 1,其余均为 0 .因此,由行列式的性质知 $|A| = \pm 1 \neq 0$,于是 f 是非退化的 .

例 10 .6　设 $V = P[x]_n$,定义 V 上的二元函数如下:

$$\varphi(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x, \quad \forall f(x), g(x) \in P[x]_n$$

(1) 证明 φ是 V 上的一个双线性函数;

(2) 当 $n = 4$ 时,求 φ在基 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 下的度量矩阵;

(3) 证明 φ是非退化的 .

证　(1) 对任意 $f_1(x), f_2(x), f(x), g_1(x), g_2(x) \in P[x]_n, k, l \in P$,有

$$\begin{aligned}\varphi(f(x), kg_1(x) + lg_2(x)) &= \int_{-1}^{1} f(x)[kg_1(x) + lg_2(x)]\mathrm{d}x = \\ &k\int_{-1}^{1} f(x)g_1(x)\mathrm{d}x + l\int_{-1}^{1} f(x)g_2(x)\mathrm{d}x = \\ &k\varphi(f(x), g_1(x)) + l\varphi(f(x), g_2(x))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(kf_1(x) + lf_2(x), g(x)) &= \int_{-1}^{1} [kf_1(x) + lf_2(x)]g(x)\mathrm{d}x = \\ &k\int_{-1}^{1} f_1(x)g(x)\mathrm{d}x + l\int_{-1}^{1} f_2(x)g(x)\mathrm{d}x = \\ &k\varphi(f_1(x), g(x)) + l\varphi(f_2(x), g(x))\end{aligned}$$

所以 φ是 V 上的一个双线性函数 .

(2) 由于

$$\varphi(x^i, x^j) = \int_{-1}^{1} x^i x^j \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{2}{i+j+1}, & i+j \text{ 为偶数} \\ 0, & i+j \text{ 为奇数} \end{cases}$$

所以 $n = 4$ 时,φ在基 $1, x, x^2, x^3$ 下的度量矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

(3) 若对任意 $g(x) \in P[x]_n$ 有 $\varphi(f(x), g(x)) = 0$,取 $g(x) = f(x)$ 则有

$$0 = \varphi(f(x), f(x)) = \int_{-1}^{1} [f(x)]^2 \mathrm{d}x$$

由于 $f(x) \in P[x]_n$,故 $[f(x)]^2$ 仍为多项式,它在 $[-1, 1]$ 上连续,因此 $[f(x)]^2 = 0$,即 $f(x) = 0$,从而 φ是非退化的 .

例 10 .7 设 V是数域 P上的 n 维线性空间,则 V上的一个对称双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ 由与它对应的二次齐次函数 $q(\alpha)$ 完全确定,但非对称双线性函数不能由它对应的二次齐次函数惟一确定 .

证 设 $\alpha, \beta \in V$,则利用 $f(\alpha, \beta)$ 是对称双线性函数,有

$$\begin{aligned} q(\alpha + \beta) = f(\alpha + \beta, \alpha + \beta) &= \\ f(\alpha, \alpha) + f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha) + f(\beta, \beta) &= \\ f(\alpha, \alpha) + 2f(\alpha, \beta) + f(\beta, \beta) \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} q(\alpha - \beta) = f(\alpha - \beta, \alpha - \beta) &= \\ f(\alpha, \alpha) - f(\alpha, \beta) - f(\beta, \alpha) + f(\beta, \beta) &= \\ f(\alpha, \alpha) - 2f(\alpha, \beta) + f(\beta, \beta) \end{aligned}$$

两式相减,得
$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} q(\alpha + \beta) - \frac{1}{4} q(\alpha - \beta)$$

可见 $f(\alpha, \beta)$ 可由它对应的二次齐次函数完全确定 .

在向量空间 P^2 中任取两个向量 $\alpha = (x_1, x_2)$ 和 $\beta = (y_1, y_2)$,规定

$$f_1(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + x_2 y_2$$
$$f_2(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$$

容易验证,f_1, f_2 都是 P^2 上的双线性函数,与它们对应的二次齐次函数都是

$$q(\alpha) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2$$

但 $f_1 \neq f_2$.

例 10 .8 设 $V = \mathrm{R}^{2\times 2}$,定义 V上的双线性函数

$$f(A, B) = a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_3 b_4 - a_4 b_3$$

其中 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$.

(1) 证明 f是 V上的一个对称双线性函数;

(2) 求 f在 $\mathrm{R}^{2\times 2}$ 的基

$$C_1=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&-1\end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix},\quad C_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix},\quad C_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

下的度量矩阵;

(3) **求** $\mathbf{R}^{2\times 2}$ **的一组基,使** f **在该基下为规范形**.

解　(1) **取** $\mathbf{R}^{2\times 2}$ **的基**

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

可求得 f **在该基下的度量矩阵为**

$$F=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$$

由于 F **是对称矩阵,所以** f **是对称双线性函数**.

(2) **由于** $(C_1,C_2,C_3,C_4)=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})T$, **其中**

$$T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&-1&1&0\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

于是 f **在基** C_1,C_2,C_3,C_4 **下的度量矩阵为**

$$G=T'FT=\begin{pmatrix}-4&-1&0&1\\-1&-2&0&1\\0&0&2&-1\\1&1&-1&0\end{pmatrix}$$

(3) **因为**

$$\begin{pmatrix}F\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_1+c_2\\c_3+c_4}]{\substack{r_1+r_2\\r_3+r_4}}\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-2&-1\\0&0&-1&0\\\hline 1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_2-\frac{1}{2}c_1\\c_4-\frac{1}{2}c_3}]{\substack{r_2-\frac{1}{2}r_1\\r_4-\frac{1}{2}r_3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[c_1 \times \frac{1}{\sqrt{2}},\ c_2 \times \sqrt{2},\ c_3 \times \frac{1}{\sqrt{2}},\ c_4 \times \sqrt{2}]{r_1 \times \frac{1}{\sqrt{2}},\ r_2 \times \sqrt{2},\ r_3 \times \frac{1}{\sqrt{2}},\ r_4 \times \sqrt{2}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right) \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_4]{r_2 \leftrightarrow r_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{使得 } S'FS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

所求的基 D_1, D_2, D_3, D_4 **满足**

$$(D_1, D_2, D_3, D_4) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})S$$

即
$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$D_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对 $\mathrm{R}^{2\times 2}$ 中任意矩阵 A, B,且
$$A = x_1 D_1 + x_2 D_2 + x_3 D_3 + x_4 D_4$$
$$B = y_1 D_1 + y_2 D_2 + y_3 D_3 + y_4 D_4$$
有
$$f(A, B) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4$$

例 10.9　证明:如果数域 P 上 n 维线性空间 V 上的对称双线性函数 f 能分解为两个线性函数之积:
$$f(\alpha, \beta) = f_1(\alpha) f_2(\beta) \qquad \forall\, \alpha, \beta \in V$$
则存在非零数 k 及线性函数 g,使
$$f(\alpha, \beta) = kg(\alpha) g(\beta)$$

证　设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基,对任意 $\alpha, \beta \in V$ 有
$$\alpha = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \cdots + x_n \varepsilon_n$$
$$\beta = y_1 \varepsilon_1 + y_2 \varepsilon_2 + \cdots + y_n \varepsilon_n$$
又设
$$f_1(\alpha) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n, \quad f_2(\beta) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_n y_n$$
这里 $a_i, b_i \in P\ (i = 1, 2, \cdots, n)$,则
$$f(\alpha, \beta) = (a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)(b_1 y_1 + \cdots + b_n y_n)$$
由于 f 是对称的,所以
$$(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)(b_1 y_1 + \cdots + b_n y_n) = $$
$$(a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n)(b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n)$$
因为 $x_1, \cdots, x_n$ 及 $y_1, \cdots, y_n$ 可以独立地自由取值,考虑上式两边 $x_i y_j$ 的系数,得
$$a_i b_j = a_j b_i \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$
这说明$(a_1, \cdots, a_n)$与$(b_1, \cdots, b_n)$成比例 . 设 $f_1 \neq 0$,令 $g = f_1$,则存在 $k \in P$,使 $f_2 = kg$. 于是
$$f(\alpha, \beta) = kg(\alpha) g(\beta)$$

五、课后习题全解

(一) 第十章习题

1. V 是数域 P 上一个 3 维线性空间，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是它的一组基，f 是 V 上一个线性函数，已知

$$f(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 1, \quad f(\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3) = -1, \quad f(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -3$$

求 $f(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3)$.

解 由 f 是线性函数，得

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_3) = 1 \\ f(\varepsilon_2) - 2f(\varepsilon_3) = -1 \\ f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_2) = -3 \end{cases}$$

解得 $f(\varepsilon_1) = 4$，$f(\varepsilon_2) = -7$，$f(\varepsilon_3) = -3$. 于是

$$f(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3) = x_1 f(\varepsilon_1) + x_2 f(\varepsilon_2) + x_3 f(\varepsilon_3) = 4x_1 - 7x_2 - 3x_3$$

2. 设 V 及 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 同上题，试找出一个线性函数 f，使

$$f(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) = f(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_3) = 0, \quad f(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) = 1$$

解 由 f 是线性函数得

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_3) = 0 \\ f(\varepsilon_1) - 2f(\varepsilon_3) = 0 \\ f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_2) = 1 \end{cases}$$

解得 $f(\varepsilon_1) = 0$，$f(\varepsilon_2) = 1$，$f(\varepsilon_3) = 0$. 从而对任意 $\alpha \in V$，如果

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3$$

则所求线性函数为

$$f(\alpha) = f(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3) = x_2$$

3. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是线性空间 V 的一组基，f_1, f_2, f_3 是它的对偶基

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \quad \alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad \alpha_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

试证 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 V 的一组基并求它的对偶基(用 f_1, f_2, f_3 表出).

解 用矩阵形式表出两组元素之间的关系

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)A$$

其中
$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

因为 $|A|=-1\neq 0$,所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 V 的一组基.此时 A 是由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵.

设 g_1,g_2,g_3 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的对偶基,则根据两组基的对偶基之间的关系,得
$$(g_1,g_2,g_3)=(f_1,f_2,f_3)(A')^{-1}\qquad(*)$$

可求得
$$(A')^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-1&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

代入(*)式得基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的对偶基为
$$g_1=f_2-f_3,\quad g_2=f_1-f_2+f_3,\quad g_3=-f_1+2f_2-f_3$$

4. 设 V 是一个线性空间,$f_1,f_2,\cdots,f_s$ 是 V^* 中非零向量,试证存在 $\alpha\in V$,使
$$f_i(\alpha)\neq 0\qquad(i=1,2,\cdots,s)$$

证 法 1 对 s 用数学归纳法.

当 $s=1$ 时,$f_1\neq 0$,所以存在 $\alpha\in V$,使 $f_1(\alpha)\neq 0$,即当 $s=1$ 时,命题成立.

假定当 $s=k$ 时命题成立,即存在 $\alpha\in V$,使
$$f_i(\alpha)=a_i\neq 0\qquad(i=1,2,\cdots,k)$$
下证 $s=k+1$ 时命题成立.

如果 $f_{k+1}(\alpha)\neq 0$,则命题得证.如果 $f_{k+1}(\alpha)=0$,则由 $f_{k+1}\neq 0$ 知存在 $\beta\in V$,使 $f_{k+1}(\beta)=b\neq 0$.设
$$f_i(\beta)=d_i\qquad(i=1,2,\cdots,k)$$
总可取数 $c\neq 0$,使
$$a_i+cd_i\neq 0\qquad(i=1,2,\cdots,k)$$
令 $\gamma=\alpha+c\beta$,则 $\gamma\in V$,且
$$f_i(\gamma)=f_i(\alpha)+cf_i(\beta)=a_i+cd_i\neq 0\quad(i=1,2,\cdots,k)$$
$$f_{k+1}(\gamma)=f_{k+1}(\alpha)+cf_{k+1}(\beta)=0+cb\neq 0$$
由归纳假设知命题成立.

法 2 对于每一个 $f_i(i=1,2,\cdots,s)$ 构造 V 的子空间
$$W_i=\{\alpha\mid f_i(\alpha)=0,\ \forall\alpha\in V\}\qquad(i=1,2,\cdots,s)$$

由 $f_i \neq 0\ (i = 1,2,\cdots,s)$ 知 W_i 是 V 的非平凡子空间 . 根据第六章补充题 5 知, 存在 $\alpha \in V$ 且 $\alpha \notin W_i\,(i = 1,2,\cdots,s)$, 此 α 即满足

$$f_i(\alpha) \neq 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,s)$$

5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是线性空间 V 中非零向量, 证明有 $f \in V^*$ 使

$$f(\alpha_i) \neq 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,s)$$

证　由于线性空间 V 与其对偶空间 V^* 的对偶空间 V^{**} 同构, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是 V 中的非零向量, 所以 $\alpha_1^{**}, \alpha_2^{**}, \cdots, \alpha_s^{**}$ 是 V^* 的对偶空间 $V^{**} = (V^*)^*$ 中的非零向量 . 由上题的结果知, 存在 $f \in V^*$, 使 $\alpha_i^{**}(f) \neq 0\ (i = 1, 2,\cdots,s)$, 即 $f(\alpha_i) \neq 0\ (i = 1,2,\cdots,s)$.

6. $V = P[x]_3$, 对 $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \in V$, 定义

$$f_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x, \quad f_2(p(x)) = \int_0^2 p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$f_3(p(x)) = \int_0^{-1} p(x)\,\mathrm{d}x$$

试证 f_1, f_2, f_3 都是 V 上的线性函数, 并找出 V 的一组基 $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ 使 f_1, f_2, f_3 是它的对偶基 .

证　对任意 $p(x), q(x) \in P[x]_3$ 和 $k, l \in P$, 根据定积分性质有

$$\begin{aligned} f_1(kp(x) + lq(x)) &= \int_0^1 (kp(x) + lq(x))\,\mathrm{d}x = \\ &k\int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x + l\int_0^1 q(x)\,\mathrm{d}x = \\ &kf_1(p(x)) + lf_1(q(x)) \end{aligned}$$

即 f_1 是 $P[x]_3$ 上的线性函数 . 同理可证 f_2, f_3 也是 $P[x]_3$ 上的线性函数 .

设 $P[x]_3$ 的一组基为

$$p_i(x) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)} x + a_2^{(i)} x^2 \quad (i = 1,2,3)$$

为使 f_1, f_2, f_3 是它的对偶基, 则 f_1, f_2, f_3 应是它的标准基, 即

$$f_i(p_j(x)) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases} \quad (i = 1,2,3)$$

也即

$$\int_0^1 (a_0^{(j)} + a_1^{(j)} x + a_2^{(j)} x^2)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & j = 1 \\ 0, & j \neq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^2 (a_0^{(j)} + a_1^{(j)} x + a_2^{(j)} x^2)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & j = 2 \\ 0, & j \neq 2 \end{cases}$$

$$\int_0^{-1}(a_0^{(j)} + a_1^{(j)}x + a_2^{(j)}x^2)\,\mathrm{d}x = \begin{cases}1, & j = 3\\ 0, & j \neq 3\end{cases}$$

计算得

$$a_0^{(j)} + \frac{1}{2}a_1^{(j)} + \frac{1}{3}a_2^{(j)} = \begin{cases}1, & j = 1\\ 0, & j \neq 1\end{cases}$$

$$2a_0^{(j)} + 2a_1^{(j)} + \frac{8}{3}a_2^{(j)} = \begin{cases}1, & j = 2\\ 0, & j \neq 2\end{cases}$$

$$-a_0^{(j)} + \frac{1}{2}a_1^{(j)} - \frac{1}{3}a_2^{(j)} = \begin{cases}1, & j = 3\\ 0, & j \neq 3\end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 2 & \frac{8}{3}\\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0^{(1)} & a_0^{(2)} & a_0^{(3)}\\ a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & a_1^{(3)}\\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & a_2^{(3)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{pmatrix}a_0^{(1)} & a_0^{(2)} & a_0^{(3)}\\ a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & a_1^{(3)}\\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & a_2^{(3)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 2 & \frac{8}{3}\\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\ 1 & 0 & 1\\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

故得 $P[x]_3$ **的基**

$$p_1(x) = 1 + x - \frac{3}{2}x^2, \quad p_2(x) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}x^2$$

$$p_3(x) = -\frac{1}{3} + x - \frac{1}{2}x^2$$

而 f_1, f_2, f_3 **恰为它的对偶基** .

7. **设** V **是一个** n **维欧氏空间,它的内积为**(α, β),**对** V **中确定的向量** α,**定义** V **上一个函数** α^*

$$\alpha^*(\beta) = (\alpha, \beta)$$

1) **证明** α^* **是** V **上的线性函数**;

2) **证明** V **到** V^* **的映射**

$$\alpha \longrightarrow \alpha^*$$

是 V 到 V^* 的一个同构映射(在这个同构下,欧氏空间可看成自身的对偶空间).

证　1) 对任意 $\beta, \gamma \in V$ 和 $k \in \mathbf{R}$,有

$$\alpha^*(\beta + \gamma) = (\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma) = \alpha^*(\beta) + \alpha^*(\gamma)$$

$$\alpha^*(k\beta) = (\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta) = k\alpha^*(\beta)$$

故 α^* 是 V 上的线性函数.

2) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一组标准正交基,且

$$\alpha_i \longrightarrow \alpha_i^* \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

因为
$$\alpha_i^*(\alpha_j) = (\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

所以 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots, \alpha_n^*$ 就是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的对偶基,而线性空间 V 与 V^* 的两组基之间的一一对应必为同构对应,故 V 到 V^* 的映射

$$\alpha \longrightarrow \alpha^* \qquad \forall \alpha \in V$$

是一个同构映射.

8. 设 A 是 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换.

1) 证明:对 V 上的线性函数 f, fA 仍是 V 上的线性函数;

2) 定义 V^* 到自身的映射 A^* 为

$$f \longrightarrow fA$$

证明 A^* 是 V^* 上的线性变换.

3) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是它的对偶基,并设 A 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 A. 证明: A^* 在 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 下的矩阵为 A'.(因此 A^* 称做 A 的转置映射.)

证　1) 对任意 $\alpha, \beta \in V$, $k \in P$,有

$$(fA)(\alpha + \beta) = f[A(\alpha + \beta)] = f(A(\alpha) + A(\beta)) =$$
$$f(A(\alpha)) + f(A(\beta)) = (fA)(\alpha) + (fA)(\beta)$$

$$(fA)(k\alpha) = f[A(k\alpha)] = f[kA(\alpha)] = kf[A(\alpha)] = k(fA)(\alpha)$$

故 fA 是 V 上的线性变换.

2) 对任意 $f, g \in V^*$, $l \in P$,有

$$A^*(f + g) = (f + g)A = fA + gA = A^*(f) + A^*(g)$$

$$A^*(kf) = (kf)A = k(fA) = kA^*(f)$$

所以 A^* 是 V^* 上的线性变换.

3) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,由题设知

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

于是
$$\mathcal{A}(\varepsilon_i)=a_{1i}\varepsilon_1+a_{2i}\varepsilon_2+\cdots+a_{ni}\varepsilon_n\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

由于 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的对偶基,即 $f_j(\varepsilon_i)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$,从而

$$\begin{aligned}(f_j\mathcal{A})(\varepsilon_i)=f_j(\mathcal{A}(\varepsilon_i))=&\\ a_{1i}f_j(\varepsilon_1)+a_{2i}f_j(\varepsilon_2)+\cdots+a_{ni}f_j(\varepsilon_n)&=a_{ji}\\ (i,j=1,2,\cdots,n)&\quad(*)\end{aligned}$$

又设
$$\mathcal{A}^*(f_1,f_2,\cdots,f_n)=(f_1,f_2,\cdots,f_n)B$$

其中 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是 $\mathcal{A}^*$ 在 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 下的矩阵,则有

$$\mathcal{A}^*(f_j)=b_{1j}f_1+b_{2j}f_2+\cdots+b_{nj}f_n$$

从而

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^*(f_j)(\varepsilon_i)=(b_{1j}f_1+b_{2j}f_2+\cdots+b_{nj}f_n)(\varepsilon_i)=&\\ b_{1j}f_1(\varepsilon_i)+b_{2j}f_2(\varepsilon_i)+\cdots+b_{nj}f_n(\varepsilon_i)&=b_{ij}\end{aligned}$$

但 $\mathcal{A}^*(f_j)=f_j\mathcal{A}$,故由$(*)$式及上式得

$$b_{ij}=\mathcal{A}^*(f_j)(\varepsilon_i)=(f_j\mathcal{A})(\varepsilon_i)=a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

即 $B=A'$.

9. 设 V 是数域 P 上一个线性空间,$f_1,\cdots,f_k$ 是 V 上 k 个线性函数.

1) 证明下列集合

$$W=\{\alpha\in V\mid f_i(\alpha)=0,\ 1\leq i\leq k\}$$

是 V 的一个子空间,W 称为线性函数 $f_1,\cdots,f_k$ 的零化子空间.

2) 证明:V 的任一个子空间皆为某些线性函数的零化子空间.

证　1) 因为 $f_1,\cdots,f_k$ 都是线性函数,所以 $f_i(0)=0,\ 1\leq i\leq k$,故 $0\in W$,即 W 非空.对任意 $\alpha,\beta\in W,\ k\in P$,有

$$f_i(\alpha+\beta)=f_i(\alpha)+f_i(\beta)=0,\quad f_i(k\alpha)=kf_i(\alpha)=0\quad(1\leq i\leq k)$$

从而 $\alpha+\beta\in W,\ k\alpha\in W$,即 W 是 V 的一个子空间.

2) 设 W 是 V 的任一子空间.如果 $W=V$,取 f 为 V 的零函数,即 $f(\alpha)=0$ $(\alpha\in V)$,则

$$W=V=\{\alpha\in V\mid f(\alpha)=0\}$$

即 W 是 f 的零化子空间.如果 $W=\{0\}$,取 f 为 V 上任意线性函数,有 $f(0)=0$,从而 W 是 f 的零化子空间.下设 W 是 V 的 k 维非平凡子空间,取 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 是

W 的一组基,将其扩充成 V 的一组基

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n$$

然后取这组基的对偶基 $f_1, \cdots, f_k, f_{k+1}, \cdots, f_n$,再取对偶基中后 $n-k$ 个元素 $f_{k+1}, \cdots, f_n$,则它们都是 V 上的线性函数,且有

$$f_i(\alpha_j) = 0 \qquad (i = k+1, \cdots, n;\ j = 1,2,\cdots,k)$$

任取 $\beta \in W$,则有 $\beta = l_1\alpha_1 + \cdots + l_k\alpha_k$,于是

$$f_i(\beta) = l_1 f_i(\alpha_1) + \cdots + l_k f_i(\alpha_k) = 0 \quad (i = k+1, \cdots, n)$$

从而 $\beta \in \{\alpha \in V \mid f_i(\alpha) = 0, k+1 \leq i \leq n\}$.

反之,任取 $\gamma \in \{\alpha \in V \mid f_i(\alpha) = 0, k+1 \leq i \leq n\}$,因为 $\gamma \in V$,所以

$$\gamma = l_1\alpha_1 + \cdots + l_k\alpha_k + l_{k+1}\alpha_{k+1} + \cdots + l_n\alpha_n$$

此时

$$f_i(\gamma) = l_1 f_i(\alpha_1) + \cdots + l_k f_i(\alpha_k) + l_{k+1} f_i(\alpha_{k+1}) + \cdots + l_n f_i(\alpha_n) = \\ l_{k+1} f_i(\alpha_{k+1}) + \cdots + l_n f_i(\alpha_n) \quad (i = k+1, \cdots, n)$$

注意到 $f_i(\gamma) = 0\ (k+1 \leq i \leq n)$ 及 $f_i(\alpha_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$,由上式得

$$l_{k+1} = \cdots = l_n = 0$$

于是 $\gamma = l_1\alpha_1 + \cdots + l_k\alpha_k \in W$.故

$$W = \{\alpha \in V \mid f_i(\alpha) = 0, k+1 \leq i \leq n\}$$

即确实存在 V 上线性函数 $f_{k+1}, \cdots, f_n$,使 W 恰为它们的零化子空间.

10. 设 A 是 P 上一个 m 级矩阵,定义 $P^{m\times n}$ 上一个二元函数

$$f(X, Y) = \mathrm{Tr}(X'AY) \qquad X, Y \in P^{m\times n}$$

1) 证明 $f(X, Y)$ 是 $P^{m\times n}$ 上的双线性函数;

2) 求 $f(X, Y)$ 在基

$$E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \cdots, E_{2n}, \cdots, E_{m1}, E_{m2}, \cdots, E_{mn}$$

下的度量矩阵.(E_{ij} 表示 i 行 j 列的元素为1,而其余元素全为零的 $m\times n$ 矩阵.)

证 1) 任取 $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in P^{m\times n}$, $k_1, l_1, k_2, l_2 \in P$,有

$$\begin{aligned} f(k_1X_1 + l_1X_2, Y) &= \mathrm{Tr}[(k_1X_1 + l_1X_2)'AY] = \\ &k_1\mathrm{Tr}(X_1'AY) + l_1\mathrm{Tr}(X_2'AY) = \\ &k_1 f(X_1, Y) + l_1 f(X_2, Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(X, k_2Y_1 + l_2Y_2) &= \mathrm{Tr}[X'A(k_2Y_1 + l_2Y_2)] = \\ &k_2\mathrm{Tr}(X'AY_1) + l_2\mathrm{Tr}(X'AY_2) = \\ &k_2 f(X, Y_1) + l_2 f(X, Y_2) \end{aligned}$$

故它是 $P^{m\times n}$ 上的双线性函数.

2) 设 $A=(a_{ij})_{m\times m}$,直接计算得

$$E_{is}'AE_{jt}=a_{ij}E_{st}$$

其中 E_{st} 表示 s 行 t 列的元素为 1,而其余元素全为零的 n 级矩阵.于是

$$f(E_{is},E_{jt})=\mathrm{Tr}(E_{is}'AE_{jt})=\begin{cases}a_{ij}, & s=t\\ 0, & s\neq t\end{cases}$$

因为 $\dim P^{m\times n}=mn$,所以基的度量矩阵是 $mn\times mn$ 的矩阵,也即 m^2 个 n级矩阵块组成,它的第 i行 j 列位置的 n 级块是

$$\begin{pmatrix}f(E_{i1},E_{j1}) & \cdots & f(E_{i1},E_{jn})\\ \cdots & & \cdots\\ f(E_{in},E_{j1}) & \cdots & f(E_{in},E_{jn})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{ij} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{ij}\end{pmatrix}=a_{ij}E_n$$

故所求度量矩阵的分块形式是

$$\begin{pmatrix}a_{11}E_n & a_{12}E_n & \cdots & a_{1m}E_n\\ a_{21}E_n & a_{22}E_n & \cdots & a_{2m}E_n\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{m1}E_n & a_{m2}E_n & \cdots & a_{mm}E_n\end{pmatrix}$$

11. 在 P^4 中定义一个双线性函数 $f(x,y)$,对 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$, $f(x,y)=3x_1y_2-5x_2y_1+x_3y_4-4x_4y_3$

1) 给定 P^4 的一组基

$$\varepsilon_1=(1,-2,-1,0),\quad \varepsilon_2=(1,-1,1,0)$$
$$\varepsilon_3=(-1,2,1,1),\quad \varepsilon_4=(-1,-1,0,1)$$

求 $f(x,y)$ 在这组基下的度量矩阵;

2) 另取一组基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$:

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)T$$

其中
$$T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

求 $f(x,y)$ 在 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的度量矩阵.

解　1) 设 f 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的度量矩阵为 $A=(a_{ij})_{4\times4}$,其中 $a_{ij}=f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$,则

$$A=\begin{pmatrix}4&7&-5&-14\\-1&2&2&-7\\0&-11&1&14\\15&4&-15&-2\end{pmatrix}$$

2) 设 f 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的度量矩阵为 B,则

$$B=T'AT=\begin{pmatrix}-6&46&8&24\\-18&26&16&-72\\-2&-38&0&0\\-6&86&0&0\end{pmatrix}$$

12. 设 V 是复数域上线性空间,其维数 $n\geq 2$, $f(\alpha,\beta)$ 是 V 上一个对称双线性函数.

1) 证明 V 中有非零向量 ξ 使

$$f(\xi,\xi)=0$$

2) 如果 $f(\alpha,\beta)$ 是非退化的,则必有线性无关的向量 ξ,η 满足

$$f(\xi,\eta)=1,\quad f(\xi,\xi)=f(\eta,\eta)=0$$

证　1) 因为 V 的维数 $n\geq 2$,能取到线性无关的向量 α,β.设

$$f(\alpha,\alpha)=a,\quad f(\beta,\beta)=b,\quad f(\alpha,\beta)=c$$

如果 a,b 有一个为零,则取 $\xi=\alpha$ 或 $\xi=\beta$ 时结论成立.如果 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$,则令 $\xi=\alpha+t\beta$,此时因为 α,β 线性无关,所以 $\xi\neq 0$,并且由

$$f(\xi,\xi)=f(\alpha,\alpha)+2tf(\alpha,\beta)+t^2f(\beta,\beta)$$

可知,当 t 为 $bx^2+2cx+a$ 的根时,就使 $f(\xi,\xi)=0$,所以只要取复数

$$t=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-ab}}{b}$$

即可.

2) 由 1) 知,存在 $\xi\neq 0$ 使 $f(\xi,\xi)=0$.因为 $f(\alpha,\beta)$ 是非退化的,所以存在向量 ω,使 $f(\xi,\omega)=b\neq 0$.取 $\delta=\frac{1}{b}\omega$,则 $f(\xi,\delta)=1$,此时,如果 $f(\delta,\delta)=0$,则 $\eta=\delta$ 即为所求;如果 $f(\delta,\delta)=a\neq 0$,则令 $\eta=\delta-\frac{a}{2}\xi$,于是

$$f(\eta,\eta)=f(\delta,\delta)-af(\xi,\delta)+\frac{a^2}{4}f(\xi,\xi)=a-a+0=0$$

并且　　$f(\xi,\eta)=f\left(\xi,\delta-\frac{a}{2}\xi\right)=f(\xi,\delta)-\frac{a}{2}f(\xi,\xi)=1$

13. 试证:线性空间 V 上双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ 为反对称的充分必要条件是:对任意 $\alpha\in V$ 都有 $f(\alpha, \alpha)=0$.

证　必要性. 因为 f 是反对称的,即对任意 $\alpha, \beta\in V$ 有

$$f(\alpha, \beta)=-f(\beta, \alpha)$$

取 $\beta=\alpha$ 得 $f(\alpha, \alpha)=-f(\alpha, \alpha)$,即 $2f(\alpha, \alpha)=0$,故 $f(\alpha, \alpha)=0$.

充分性. 若对任意 $\alpha\in V$ 有 $f(\alpha, \alpha)=0$,则对任意 $\alpha, \beta\in V$,有

$$\begin{aligned}0&=f(\alpha+\beta, \alpha+\beta)=f(\alpha,\alpha)+f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)+f(\beta,\beta)=\\&f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)\end{aligned}$$

即 $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$,故 $f(\alpha,\beta)$ 是反对称双线性函数.

14. 设 $f(\alpha,\beta)$ 是 V 上对称的或反对称的双线性函数,α,β 是 V 中两个向量.如果 $f(\alpha,\beta)=0$,则称 α,β 正交.再设 K 是 V 的一个真子空间,证明:对 $\xi\notin K$,必有 $0\neq\eta\in K+L(\xi)$ 使

$$f(\eta, \alpha)=0$$

对所有 $\alpha\in K$ 都成立.

证　先证 f 是对称双线性函数的情形.这时,f 也是 K 上的对称双线性函数.如果 f 限制在 K 上是退化的,则存在 K 中向量 $\beta\neq 0$,使对所有 $\alpha\in K$ 有 $f(\beta,\alpha)=0$,于是取 $\eta=\beta$ 即满足要求.

如果 f 限制在 K 上是非退化时,则由定理 5 知存在 K 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$,使 $f(\alpha,\beta)$ 在此基下满足

$$f(\alpha_i, \alpha_i)=d_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,m),\quad f(\alpha_i, \alpha_j)=0\ (i\neq j)$$

由于 $\xi\notin K$,所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \xi$ 线性无关,它可作为 $K+L(\xi)$ 的一个基.取

$$\eta=-\frac{f(\xi,\alpha_1)}{d_1}\alpha_1-\cdots-\frac{f(\xi, \alpha_m)}{d_m}\alpha_m+\xi$$

则 $\eta\neq 0$, $\eta\in K+L(\xi)$,且对任意 $\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m\in K$,有

$$\begin{aligned}f(\eta,\alpha)&=f\left(-\sum_{i=1}^{m}\frac{f(\xi, \alpha_i)}{d_i}\alpha_i+\xi, \sum_{j=1}^{m}k_j\alpha_j\right)=\\&-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{f(\xi,\alpha_i)}{d_i}k_j f(\alpha_i, \alpha_j)+\sum_{j=1}^{m}k_j f(\xi, \alpha_j)=\\&-\sum_{j=1}^{m}k_j f(\xi, \alpha_j)+\sum_{j=1}^{m}k_j f(\xi, \alpha_j)=0\end{aligned}$$

再证 f 是反对称双线性函数的情形.这时,f 也是 K 上的反对称双线性函

数.如果 f 限制在 K 上是退化的,则存在 K 中向量 $\beta \neq 0$,使对所有 $\alpha \in K$ 有 $f(\beta,\alpha) = 0$,于是取 $\eta = \beta$ 即满足要求.

如果 f 限制在 K 上是非退化时,则 K 必是偶数维的.由 ξú K 知,$K + L(\xi)$ 的维数是奇数,因此 f 限制在 $K + L(\xi)$ 上为退化的,于是必存在 $\eta \in K + L(\xi)$,使对所有 αú $K + L(\xi)$ 有 $f(\eta,\alpha) = 0$,自然对所有 $\alpha \in K$ 也有 $f(\eta,\alpha) = 0$.

15. 设 V 与 $f(\alpha,\beta)$ 同上题,K 是 V 的一个子空间.令

$$K^{\perp} = \{\alpha \in V \mid f(\alpha,\beta), \ " \beta \in K\}$$

1) 试证 $K^{\perp}$ 是 V 的子空间;($K^{\perp}$ 称为 K 的正交补)

2) 试证,如果 $K \cap K^{\perp} = \{0\}$,则 $V = K + K^{\perp}$.

证 1) 对任意 $\gamma \in K$,有

$$f(0, \gamma) = f(0\alpha, \gamma) = 0 f(\alpha, \gamma) = 0 \quad (\alpha \in V)$$

即 $0 \in K^{\perp}$,所以 $K^{\perp}$ 非空.

任取 $\alpha,\beta \in K^{\perp}$, $k \in P$, $\gamma \in K$,有

$$f(\alpha + \beta, \gamma) = f(\alpha,\gamma) + f(\beta,\gamma) = 0$$

$$f(k\alpha,\gamma) = kf(\alpha,\gamma) = 0$$

故 $\alpha + \beta \in K^{\perp}$, $k\alpha \in K^{\perp}$,从而 $K^{\perp}$ 是 V 的子空间.

2) 如果 K 是 V 的假子空间,则结论成立.下设 K 是 V 的真子空间.

$K + K^{\perp} \quad V$ 是显然的.反之,任取 $\xi \in V$,如果 $\xi \in K$,则 $\xi \in K + K^{\perp}$.如果 $\xi \in K$,则由 14 题知存在非零的 $\eta \in K + L(\xi)$,使对任意 $\alpha \in K$,有 $f(\eta,\alpha) = 0$,此即 $\eta \in K^{\perp}$.又由 $\eta \in K + L(\xi)$ 知

$$\eta = \beta + k\xi \qquad (\beta \in K, \ k \in P)$$

可知 $k \neq 0$,否则有 $\eta = \beta \in K \cap K^{\perp} = \{0\}$,即 $\eta = \beta = 0$,矛盾.从而由上式得

$$\xi = -\frac{1}{k}\beta + \frac{1}{k}\eta \in K + K^{\perp}$$

所以 $V \quad K + K^{\perp}$,故有 $V = K + K^{\perp}$.

16. 设 V, $f(\alpha,\beta)$, K 同上题,并设 $f(\alpha,\beta)$ 限制在 K 上是非退化的,试证:$V = K + K^{\perp}$ 的充分必要条件是 $f(\alpha,\beta)$ 在 V 上为非退化的.

证 必要性.已知 $V = K + K^{\perp}$,设

$$f(\alpha,\beta) = 0 \qquad (" \beta \in V) \qquad (*)$$

下证 $\alpha = 0$.设 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 \in K$, $\alpha_2 \in K^{\perp}$,则对任意 $\beta \in K$,有

$$0 = f(\alpha,\beta) = f(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = f(\alpha_1, \beta) + f(\alpha_2,\beta) = f(\alpha_1, \beta)$$

由 $f(\alpha,\beta)$ 在 K 上是非退化的,故 $\alpha_1 = 0$,从而 $\alpha = \alpha_2 \in K^{\perp}$.又对任意 $\gamma \in K^{\perp}$,

由(*)式知 $f(\alpha,\gamma)=0$,从而 $\alpha\in(K^{\perp})^{\perp}=K$,故 $\alpha\in K\cap K^{\perp}=\{0\}$,即 $\alpha=0$.可见 $f(\alpha,\beta)$ 在 V 上为非退化的.

充分性.已知 $f(\alpha,\beta)$ 在 V 上为非退化的,由15题知,只要证明 $K\cap K^{\perp}=\{0\}$ 即可.

设 $\alpha_1\in K\cap K^{\perp}$,如果 $\alpha_1\neq 0$,则将 α_1 扩充成 K 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$(假定 $\dim K=m$).由于 $\alpha_1\in K^{\perp}$,所以

$$f(\alpha_1,\alpha_j)=0\qquad(j=1,2,\cdots,m)$$

即 f 在 K 上关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的度量矩阵第一行的元素全为0,因而 f 在 K 上是退化的,这与 f 在 K 上非退化矛盾,故 $\alpha_1=0$,即 $K\cap K^{\perp}=\{0\}$.

17. 设 $f(\alpha,\beta)$ 是 n 维线性空间 V 上的非退化对称双线性函数,对 V 中一个元素 α,定义 V^* 中一个元素 α^*:

$$\alpha^*(\beta)=f(\alpha,\beta)\qquad(\beta\in V)$$

试证:1) V 到 V^* 的映射

$$\alpha\longrightarrow\alpha^*$$

是一个同构映射;

2) 对 V 的每组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$,有 V 的惟一的一组基 $\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_n'$ 使

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j')=\delta_{ij}$$

3) 如果 V 是复数域上的 n 维线性空间,则有一组基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$,使

$$\eta_i=\eta_i'\qquad(i=1,\cdots,n)$$

证　1) 由定理5知,存在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,使

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_i)=d_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n),\quad f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0\ (i\neq j)$$

根据 $\varepsilon_i^*(\beta)=f(\varepsilon_i,\beta)$ ($\forall\beta\in V$) 作出相应的 $\varepsilon_1^*,\varepsilon_2^*,\cdots,\varepsilon_n^*\in V^*$,考虑

$$k_1\varepsilon_1^*+k_2\varepsilon_2^*+\cdots+k_n\varepsilon_n^*=0$$

则有

$$\begin{aligned}0&=(k_1\varepsilon_1^*+k_2\varepsilon_2^*+\cdots+k_n\varepsilon_n^*)(\varepsilon_i)=\\&k_1\varepsilon_1^*(\varepsilon_i)+k_2\varepsilon_2^*(\varepsilon_i)+\cdots+k_n\varepsilon_n^*(\varepsilon_i)=\\&k_1f(\varepsilon_1,\varepsilon_i)+k_2f(\varepsilon_2,\varepsilon_i)+\cdots+k_nf(\varepsilon_n,\varepsilon_i)=k_id_i\end{aligned}$$

由 $d_i\neq 0$ 得 $k_i=0\ (i=1,2,\cdots,n)$,即 $\varepsilon_1^*,\varepsilon_2^*,\cdots,\varepsilon_n^*$ 线性无关,因而是 V^* 的一组基,这表明映射 $\alpha\to\alpha^*$ 将基映射为基,进一步易知该映射为双射.

又对任意 $\alpha,\beta,\gamma\in V$, $k\in P$,有

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^*(\gamma)&=f(\alpha+\beta,\gamma)=f(\alpha,\gamma)+f(\beta,\gamma)=\\&\alpha^*(\gamma)+\beta^*(\gamma)=(\alpha^*+\beta^*)(\gamma)\end{aligned}$$

$$(k\alpha)^*(\gamma) = f(k\alpha, \gamma) = kf(\alpha, \gamma) = k\alpha^*(\gamma) = (k\alpha^*)(\gamma)$$

这表明映射 $\alpha \to \alpha^*$ 是线性映射,故它是一个同构映射.

2) 对 V 中的基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$,设其在 V^* 中的对偶基为 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots, \alpha_n^*$,由 1) 知 V 中存在惟一的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与之对应,即

$$\alpha_i \longrightarrow \alpha_i^* \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

于是
$$f(\alpha_i, \varepsilon_j) = \alpha_i^*(\varepsilon_j) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

设
$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

则有

$$0 = f(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n, \varepsilon_i) =$$
$$k_1 f(\alpha_1, \varepsilon_i) + k_2 f(\alpha_2, \varepsilon_i) + \cdots + k_n f(\alpha_n, \varepsilon_i) = k_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

即 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关,因而是 V 的一组基.令

$$\varepsilon_1' = \alpha_1, \varepsilon_2' = \alpha_2, \cdots, \varepsilon_n' = \alpha_n$$

即可.

3) 如果 V 是复数域上 n 维线性空间,则必存在 V 中一组基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 使 $f(\alpha, \beta)$ 在该基上的度量矩阵为单位矩阵 E_n.此时取 $\eta_1' = \eta_1, \eta_2' = \eta_2, \cdots, \eta_n' = \eta_n$,便有

$$f(\eta_i, \eta_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

18. 设 V 是对于非退化对称双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ 的 n 维准欧氏空间,V 的一组基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 如果满足

$$f(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$
$$f(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = -1 \quad (i = p + 1, \cdots, n)$$
$$f(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

则称为 V 的一组正交基.如果 V 上的线性变换 A 满足

$$f(A\alpha, A\beta) = f(\alpha, \beta) \quad (\alpha, \beta \in V)$$

则称 A 为 V 的一个准正交变换,试证:

1) 准正交变换是可逆的,且逆变换也是准正交变换;

2) 准正交变换的乘积仍是准正交变换;

3) 准正交变换的特征值等于 1 或 -1;

4) 准正交变换在正交基下的矩阵 T 满足

$$T'\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{pmatrix}T=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{pmatrix}$$

证　1) 如果 $0\neq\alpha\in V$,由 f 是非退化对称双线性函数知,存在 $\beta\in V$ 使 $f(\alpha,\beta)\neq 0$. 设 A 是准正交变换,则有

$$f(A\alpha,A\beta)=f(\alpha,\beta)\neq 0$$

从而 $A\alpha\neq 0$,这表明 A 是单射. 注意到 V 是有限维的,从而 A 也是满射,故 A 是可逆变换.

设 A 的逆变换为 A^{-1},则 A^{-1} 仍是线性变换,且对任意 $\alpha,\beta\in V$,有

$$\begin{aligned}f(A^{-1}\alpha,A^{-1}\beta)&=f(A(A^{-1}\alpha),A(A^{-1}\beta))=\\&\quad f((AA^{-1})\alpha,(AA^{-1})\beta)=f(\alpha,\beta)\end{aligned}$$

故 A^{-1} 为准正交变换.

2) 设 A,B 是 V 的两个准正交变换,则 AB 仍为 V 的线性变换,且对任意 $\alpha,\beta\in V$,有

$$f((AB)\alpha,(AB)\beta)=f(A(B\alpha),A(B\beta))=f(B\alpha,B\beta)=f(\alpha,\beta)$$

即 AB 是准正交变换.

3) 由于 f 是非退化对称双线性函数,由定理 5 知存在 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,使

$$f(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}d_i\neq 0, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

设 λ 为 A 的任一特征值,$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n\neq 0$ 为其相应的特征向量,则

$$f(\alpha,\alpha)=f(A\alpha,A\alpha)=f(\lambda\alpha,\lambda\alpha)=\lambda^2f(\alpha,\alpha)$$

但 $f(\alpha,\alpha)=k_1^2d_1^2+\cdots+k_n^2d_n^2\neq 0$,故由上式得 $\lambda^2=1$,即 $\lambda=\pm 1$.

4) 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的正交基,则

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}1, & i=j=1,2,\cdots,p\\ -1, & i=j=p+1,\cdots,n\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

由假设　$$A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)T$$

设 $T=(t_{ij})_{n\times n}$,则由上式得

$$A\varepsilon_i = t_{1i}\varepsilon_1 + t_{2i}\varepsilon_2 + \cdots + t_{ni}\varepsilon_n$$

于是

$$f(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = f(A\varepsilon_i, A\varepsilon_j) = f\left(\sum_{k=1}^{n} t_{ki}\varepsilon_k, \sum_{l=1}^{n} t_{lj}\varepsilon_l\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} t_{ki}t_{lj} f(\varepsilon_k, \varepsilon_l) =$$

$$t_{1i}t_{1j} + \cdots + t_{pi}t_{pj} - t_{p+1,i}t_{p+1,j} - \cdots - t_{ni}t_{nj}$$

即有

$$\begin{cases} t_{1i}^2 + \cdots + t_{pi}^2 - t_{p+1,i}^2 - \cdots - t_{ni}^2 = 1, & i = 1,2,\cdots,p \\ t_{1i}^2 + \cdots + t_{pi}^2 - t_{p+1,i}^2 - \cdots - t_{ni}^2 = -1, & i = p+1,\cdots,n \\ t_{1i}t_{1j} + \cdots + t_{pi}t_{pj} - t_{p+1,i}t_{p+1,j} - \cdots - t_{ni}t_{nj} = 0, & i \neq j \end{cases}$$

用矩阵写出上式即为

$$T'\begin{pmatrix} E_p & \\ & -E_{n-p} \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} E_p & \\ & -E_{n-p} \end{pmatrix}$$

六、学习效果检测题及答案

(一) 检测题

1. 设 V 是数域 P 上的线性空间,取定数 $a \in P$,问映射

$$f(\alpha) = a \qquad (\forall \alpha \in V)$$

是否为线性函数?为什么?

2. 在指定线性空间上定义的以下映射是否为线性函数?为什么?

1) 对 P^n 中的任一向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,定义

$$f_1(x) = 3x_1 + 5x_2$$

$$f_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

2) 对 $P^{n\times n}$ 中的任一矩阵 $X = (x_{ij})_{n\times n}$,定义

$$f_1(X) = |X|$$

$$f_2(X) = \mathrm{Tr}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_{ii}$$

$$f_3(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

3) 对 $P[x]_n$ 中任一多项式 $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$,定义

$$f_1(\varphi(x)) = \max\{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}\}$$

$$f_2(\varphi(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

$$f_3(\varphi(x)) = a_0$$

$$f_4(\varphi(x)) = \int_0^1 p(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{取定 } p(x) \in P[x]_n$$

3. 在 P^3 中,取 $\alpha_1 = (1,2,0)$, $\alpha_2 = (1,0,1)$, $\alpha_3 = (2,2,1)$,问是否存在 P^3 上线性函数 f,使 $f(\alpha_1) = 1$, $f(\alpha_2) = 2$, $f(\alpha_3) = 5$?

4. 设 V 是数域 P 上的 3 维线性空间, η_1, η_2, η_3 是它的一组基, f 是 V 上的一个线性函数,且

$$f(2\eta_1 - \eta_2) = 1$$
$$f(-\eta_1 + 2\eta_2 - 2\eta_3) = 2$$
$$f(-\eta_2 + 2\eta_3) = 1$$

求 $f(x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3)$.

5. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是数域 P 上线性空间 V 的一组基, f_1, f_2, f_3 是 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的对偶基.令

$$\eta_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad \eta_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_1, \quad \eta_3 = \varepsilon_3$$

(1) 证明 η_1, η_2, η_3 是 V 的基;

(2) 求 η_1, η_2, η_3 的对偶基 g_1, g_2, g_3;

(3) 用 f_1, f_2, f_3 表示 η_1, η_2, η_3 的对偶基.

6. 设 $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ 都是线性空间 V 上的线性函数.令

$$f(\alpha, \beta) = f_1(\alpha) f_2(\beta) \qquad (\forall \alpha, \beta \in V)$$

证明 $f(\alpha, \beta)$ 是 V 上的一个双线性函数.

7. 在 $P^{2\times 2}$ 中定义一个双线性函数

$$f(X, Y) = 3x_1 y_2 - 5x_2 y_1 + 3x_3 y_4 - 4x_4 x_3$$

其中
$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \in P^{2\times 2}$$

(1) 求 f 在基

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

下的度量矩阵;

(2) 另取 $P^{2\times 2}$ 的基 B_1, B_2, B_3, B_4:

$$(B_1, B_2, B_3, B_4) = (A_1, A_2, A_3, A_4)T$$

其中
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

求 f 在 B_1, B_2, B_3, B_4 下的度量矩阵.

8. 证明:任意一个双线性函数都可惟一表为一个对称双线性函数和一个反对称双线性函数之和.

9. 已知 P^3 上的双线性函数

$$f(x, y) = -x_1y_1 + 3x_1y_2 + 5x_1y_3 + 3x_2y_1 + x_2y_2 - 5x_2y_3 + 5x_3y_1 - 5x_3y_2 - 6x_3y_3$$

其中 $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in P^3$.

(1) 证明 $f(x, y)$ 是对称双线性函数;

(2) 求 P^3 的一组基,使 $f(x, y)$ 在该基下的度量矩阵为对角矩阵.

(二) 检测题答案

1. $a = 0$ 时, f 是线性函数; $a \neq 0$ 时, f 不是线性函数.

2. 1) f_1 是线性函数. f_2 不是线性函数,因为 $f_2(2x) = 4f_2(x) \neq 2f_2(x)$.

2) f_1 不是线性函数,因为 $|X+Y| \neq |X| + |Y|$. f_2 和 f_3 都是线性函数.

3) f_1 不是线性函数,因为 $f_1(5x+1) + f_1(-5x+3) = 8$,而 $f_1((5x+1)+(-5x+3)) = 4$. f_2, f_3, f_4 都是线性函数.

3. 找不到线性函数 f. 因为 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$,所以若线性函数 $f(\alpha_1) = 1$, $f(\alpha_2) = 2$,则必须 $f(\alpha_3) = f(\alpha_1) + f(\alpha_2) = 3$,与所给条件 $f(\alpha_3) = 5$ 不合.

4. $f(x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3) = 4x_1 + 7x_2 + 4x_3$

5. (1) $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)A$,其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 因为 $|A| = 1 \neq 0$,所以 η_1, η_2, η_3 是 V 的基.

(2) 由对偶基满足 $g_i(\eta_j) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$ 知,对任意 $\beta \in V$ 且 $\beta = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3$,有

$$g_1(\beta) = x_1, \quad g_2(\beta) = x_2, \quad g_3(\beta) = x_3$$

(3) 由$(g_1, g_2, g_3) = (f_1, f_2, f_3)(A')^{-1}$得

$$g_1 = f_1, \quad g_2 = f_2 - f_1, \quad g_3 = f_3 - f_2$$

7. (1) f 在基 A_1, A_2, A_3, A_4 下的度量矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 24 & 0 & 3 \\ -30 & 3 & -12 & -3 \\ 3 & 3 & 0 & 24 \\ -12 & 0 & -27 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) f 在基 B_1, B_2, B_3, B_4 下的度量矩阵为

$$D = T'CT = \begin{pmatrix} -27 & 3 & -135 & -9 \\ -9 & 9 & -9 & -87 \\ 135 & -3 & 27 & 9 \\ -3 & 63 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

8. 设 $f(\alpha, \beta)$ 是 V 上的一个双线性函数,令

$$g(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}[f(\alpha,\beta) + f(\beta,\alpha)]$$

$$h(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}[f(\alpha,\beta) - f(\beta,\alpha)]$$

则 $g(\alpha, \beta)$ 和 $h(\alpha, \beta)$ 分别是 V 上的对称和反对称的双线性函数,且

$$f(\alpha,\beta) = g(\alpha,\beta) + h(\alpha,\beta)$$

如果另有 $f = g_1 + h_1$,其中 g_1 和 h_1 分别是对称和反对称的双线性函数,则有 $g - g_1 = h_1 - h$,其左边是对称双线性函数,右边是反对称双线性函数,所以

$$\begin{aligned} g(\alpha,\beta) - g_1(\alpha,\beta) = h_1(\alpha,\beta) - h(\alpha,\beta) &= -h_1(\beta,\alpha) + h(\beta,\alpha) = \\ &-(h_1(\beta,\alpha) - h(\beta,\alpha)) = -(g(\beta,\alpha) - g_1(\beta,\alpha)) = \\ &-(g(\alpha,\beta) - g_1(\alpha,\beta)) \end{aligned}$$

即 $2[g(\alpha,\beta) - g_1(\alpha,\beta)] = 0$,故 $g = g_1$,从而 $h = h_1$,即表示法惟一 .

9. (1) $f(x, y)$ 在基 $\varepsilon_1 = (1,0,0)$, $\varepsilon_2 = (0,1,0)$, $\varepsilon_3 = (0,0,1)$ 下的度量矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -5 \\ 5 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

由于 A 是对称矩阵,所以 $f(x, y)$ 是对称双线性函数 .

(2) 又因为 $C=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 使得 $C'AC=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&10&9\\0&0&9\end{pmatrix}=D$

由$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)C$得 P^3 的基

$$\eta_1=(1,0,0),\quad \eta_2=(3,1,0),\quad \eta_3=(2,-1,1)$$

f 在该基下的度量矩阵为对角矩阵 D.

附　　录

高等代数考试真题及解答

一、考试真题

A 卷(Ⅰ)

一、填空(共 20 分,每小题 4 分)

1. $\lambda =$ ________ 时,多项式 $f(x) = x^2 + \lambda x$ 与 $g(x) = x^2 + 4x + \lambda$ 有公共根.

2. 对称多项式 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2$ 可用初等对称多项式的多项式表为 $f(x_1, x_2, x_3) =$ ________.

3. $\lambda =$ ________ 时,齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \lambda x_4 = 0 \end{cases}$ 有非零解.

4. 设 A 是 n 级方阵,且 $|A| = 2$,则 $\left| \left(-\dfrac{1}{4} A \right)^{-1} + A^* \right| =$ ________.

5. $\lambda =$ ________ 时,二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1 x_2 - 4x_1 x_3 - 2\lambda x_2 x_3$ 的秩为 2.

二、(10 分) 计算 n 级行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & y & y & \cdots & y \\ y & a_2 & y & \cdots & y \\ y & y & a_3 & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ y & y & y & \cdots & a_n \end{vmatrix} \qquad (y \neq a_i,\ i = 1, 2, \cdots, n)$$

三、(15 分)λ**取何值时,线性方程组**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 4 \\ -x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

有惟一解、无解、无穷多解?在有无穷多解时,求通解(用向量形式表示).

四、(10 分)**设矩阵** A **的伴随矩阵** $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$,**且** $AXA^{-1} = XA^{-1} + 8E$,**试求矩阵** X.

五、(15 分)**已知二次型**

$$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

(1) t **为何值时**, f **是正定的**;

(2) **取** $t = 1$,**试用非退化线性替换化二次型为标准形,并写出所用的线性替换.**

六、(**共** 12 **分,每小题** 6 **分**)

(1) **多项式** $f(x) = 5x^4 - 6x^3 + 12x + 6$ **在有理数域上是否可约?为什么?**

(2) **若实对称矩阵** A **与** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **合同,求二次型** $x'Ax$ **的规范型.**

七、(**共** 18 **分,每小题** 6 **分**)

(1) **设** $f(x)$ **和** $g(x)$ **是数域** P **上的一元多项式,且** $(f(x), g(x)) = 1$,**证明**

$$(f(x), f(x) + g(x)) = 1$$

(2) **已知** η^* **是非齐次线性方程组** $Ax = b$ **的解向量,而** $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ **是对应齐次线性方程组的基础解系,证明:** $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ **线性无关.**

(3) **设** A, B, C, D **都是** n **级方阵,且** $|D| \neq 0$, $CD = DC$,**证明**

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - BC|$$

A 卷(Ⅱ)

一、填空(共 20 分,每小题 4 分)

1. 向量空间 P^n 的子空间

$$W = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 0) \mid x_1 + x_2 = 0,\ x_k \in P\}$$

的维数为________,它的一组基为____________________.

2. 已知 3 级方阵 A 的特征值为 $1, -1, 2$,则矩阵 $B = A^3 - 2A^2$ 的特征值为________,行列式 $|B| =$ ________.

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似,则 $x =$ ________,$y =$ ________.

4. 如果矩阵 A 的全部初等因子为 $\lambda - 1, (\lambda - 1)^2, (\lambda + 2)^2$,则 A 的不变因子为____________________.

5. 设由 n 维线性空间 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 A,则由相应的对偶基 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 到对偶基 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 的过渡矩阵为________.

二、(15 分) 已知 $P^{2\times 2}$ 的变换

$$\mathcal{A}(X) = AXB, \quad \forall X \in P^{2\times 2}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 证明 $\mathcal{A}$ 是线性变换;

(2) 求 $\mathcal{A}$ 在 $P^{2\times 2}$ 的基

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

下的矩阵;

(3) 问 $\mathcal{A}$ 是否可在 $P^{2\times 2}$ 的某组基下的矩阵为对角阵?若可以,试求出这组基和相应的对角矩阵.

三、(10 分) 已知 P^3 的线性变换

$$\mathcal{A}(a, b, c) = (a + 2b - c,\ b + c,\ a + b - 2c)$$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 的值域 $\mathcal{A}(P^3)$ 的维数和一组基;

(2) 求 $\mathcal{A}$ 的核 $\mathcal{A}^{-1}(0)$ 的维数和一组基.

四、(12 分) **求矩阵** $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{pmatrix}$ **的不变因子、初等因子及若尔当标准形**.

五、(15 分) **求一正交线性替换,将二次型**

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

化为标准形.

六、(10 分) **已知** P^3 **的基** $\alpha_1 = (1,0,-1)$, $\alpha_3 = (-1,1,0)$, $\alpha_3 = (0,0,1)$, **求对偶基** f_1, f_2, f_3.

七、(**共** 18 **分**,**每小题** 6 **分**)

(1) **设** V **是数域** P **上所有** n **级方阵的集合**,V **对于通常的矩阵加法和如下定义的数量乘法**

$$k \circ A = A, \qquad \forall A \in V, k \in P$$

是否构成线性空间?为什么?

(2) **若** λ **是正交矩阵** A **的特征值,证明** $\frac{1}{\lambda}$ **也是** A **的特征值**.

(3) **试证线性空间** V **上双线性函数** $f(\alpha,\beta)$ **为反对称函数的充分必要条件是:对任意** $\alpha \in V$ **都有** $f(\alpha,\alpha) = 0$.

B 卷(Ⅰ)

一、填空(**共** 24 **分**,**每小题** 4 **分**)

1. **当** m, n **满足**________**时**,$x^2 + mx + 1 \mid x^3 + nx^2 + 5x + 2$.

2. **已知** x_1, x_2, x_3 **是方程** $x^3 + ax + b = 0$ **的根,则 3 级行列式**

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

3. **设 4 级方阵** $A = (\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $B = (\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$,**其中** $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ **均为 4 维列向量,已知行列式** $|A| = 4$, $|B| = 1$,**则** $|A + B| =$ ________.

4. **已知方阵** A **满足** $A^3 - A^2 - 4A + 5E = O$,**则** $(A - 2E)^{-1} =$ ________.

5. **四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3,已知** η_1, η_2, η_3 **是它的三个解向量,且**

$$\eta_1 + \eta_2 = (1,1,0,0)', \quad \eta_3 = (0,0,1,1)'$$

则该方程组的通解为________.

6. k满足________时,二次型

$$f=-x_1^2-2x_2^2+(k-1)x_3^2-2kx_1x_2-2x_1x_3$$

是负定的.

二、(10 分) 已知对称多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3-2x_1^2x_2-2x_1x_2^2-2x_1^2x_3-2x_1x_3^2-2x_2^2x_3-2x_2x_3^2$$

(1) 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 表示为初等对称多项式的多项式;

(2) 若 x_1,x_2,x_3 是方程 $x^3-2x^2-1=0$ 的三个根,试求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的值.

三、(10 分) 计算 $n+1$ 级行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & x \end{vmatrix}$$

四、(15 分) 已知向量组 $\alpha_1=(-2,1,1)'$, $\alpha_2=(1,-2,1)'$, $\alpha_3=(1,1,-2)'$, $\beta=(-2,\lambda,\lambda^2)'$,问 λ 取何值时,β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出,并写出表达式.

五、(10 分) 设 A,B,C 均为 n 级方阵,且 A 和 B 是可逆的,证明矩阵 $M=\begin{bmatrix} A & A \\ C-B & C \end{bmatrix}$ 可逆,并求 M^{-1}.

六、(10 分) 化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$$

为标准形,并写出所用的非退化线性替换.

七、(共 21 分,每小题 7 分)

(1) 设 p 是一个素数,多项式

$$f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$$

证明: $f(x)$ 在有理数域上不可约.

(2) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times m$ 矩阵,E 是 n 级单位矩阵,且 $m>n$. 已知 $BA=E$,试判断矩阵 A 的列向量组是否线性相关?为什么?

(3) 已知 A 是实反对称矩阵,试证 $E-A^2$ 为正定矩阵,其中 E 是单位矩阵.

B 卷(Ⅱ)

一、填空(共 20 分,每小题 4 分)

1. 已知数域 P 上线性空间 V 中线性无关的元素组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$,令

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\quad \beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\quad \beta_3=\alpha_3+\alpha_4,\quad \beta_4=\alpha_4+\alpha_1$$

则子空间 $W=\{k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4\mid k_i\in P\}$ 的维数是________,它的一组基为________.

2. 已知 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量,则 $a=$ ________, $b=$ ________,特征向量 α 对应的特征值 $\lambda_0=$ ________.

3. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix}$ 的若尔当标准形为 $J=$ ________.

4. 已知 A 是 3 维线性空间 V 的线性变换,A 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

则 A 在 V 的基 $\beta_1=\alpha_3,\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_3=2\alpha_1$ 下的矩阵为________.

5. 以 P^3 上的三个线性函数

$$f_1(x,y,z)=-z,\quad f_2(x,y,z)=y+z,\quad f_3(x,y,z)=x-y$$

为对偶基的 P^3 的基为 $\alpha_1=$ ________, $\alpha_2=$ ________, $\alpha_3=$ ________.

二、(10 分) 已知 3 维线性空间 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,设

$$\beta_1=-\alpha_1+\alpha_3,\quad \beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\quad \beta_3=-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$$

(1) 证明 β_1,β_2,β_3 也是 V 的一组基;

(2) 求由基 β_1,β_2,β_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵;

(3) 求向量 $\alpha=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

三、(12 分) 已知 $P[x]_3$ 的线性变换

$$A(a_0+a_1x+a_2x^2)=(4a_0+6a_1)+(-3a_0-5a_1)x+(-3a_0-6a_1+a_2)x^2$$

选择 $P[x]_3$ 的一组基,使 A 在该基下的矩阵是对角矩阵.

四、(15 分) **已知二次型**

$$f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+4x_2^2+ax_3^2-2x_1x_2-2bx_1x_3-2x_2x_3$$

经正交线性替换化为标准形 $f=2y_1^2+5y_2^2+5y_3^2$,**试求参数** a,b**及所用的正交线性替换**.

五、(10 分) **设** $\mathrm{R}^{2\times 2}$ **是** 2 **级实方阵构成的欧氏空间,其内积为**

$$(A,B)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}b_{ij},\quad \forall A=(a_{ij})_{2\times 2},\ B=(b_{ij})_{2\times 2}\in \mathrm{R}^{2\times 2}$$

又设 $A_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$,**求由** A_1, A_2 **生成的子空间** $W=L(A_1,A_2)$ **的正交补空间** $W^{\perp}$ **的一组标准正交基**.

六、(12 分) **已知** P^3 **的双线性函数**

$$f(x,y)=2x_2y_1+3x_3y_1-2x_1y_2-x_3y_2-3x_1y_3+x_2y_3$$

$$\forall x=(x_1,x_2,x_3),\quad y=(y_1,y_2,y_3)\in P^3$$

(1) **问** $f(x,y)$ **是对称的还是反对称的?为什么?**

(2) **求** P^3 **的一组基,使** $f(x,y)$ **在该基下为规范形式**.

七、(**共** 21 **分,每小题** 7 **分**)

(1) **设** A **是** $2n+1$ **级正交矩阵,且** $|A|=1$,**证明** 1 **是** A **的一个特征值**;

(2) **若** $\mathcal{A},\mathcal{B}$ **均是线性空间** V **的线性变换,且** $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$,**试证** $\mathcal{A}$ **的核** $\mathcal{A}^{-1}(0)$ **是** $\mathcal{B}$ **的不变子空间**;

(3) **设** $\mathcal{A}$ **是欧氏空间** V **的线性变换,若对任意** $\alpha\in V$ **有**

$$(\mathcal{A}(\alpha),\mathcal{A}(\alpha))=(\alpha,\alpha)$$

证明 $\mathcal{A}$ **是正交变换**.

二、考试真题解答

A 卷(Ⅰ)解答

一、1. $\lambda=0$ 或 $\lambda=5$;　　2. $f=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3$;　　3. $\lambda=-2$ 或 $\lambda=2$;

4. $(-1)^n2^{n-1}$;　　5. $\lambda=2\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$

二、$D_n \overset{\text{升级}}{\Longrightarrow} \begin{vmatrix} 1 & y & y & \cdots & y \\ 0 & a_1 & y & \cdots & y \\ 0 & y & a_2 & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & y & y & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\cdots \\ r_{n+1}-r_1}]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}}$

$$\begin{vmatrix} 1 & y & y & \cdots & y \\ -1 & a_1-y & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2-y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-y \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\cdots \\ c_1+\frac{1}{a_n-y}c_{n+1}}]{\substack{c_1+\frac{1}{a_1-y}c_2 \\ c_1+\frac{1}{a_2-y}c_3}}$$

$$\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{y}{a_i-y} & y & y & \cdots & y \\ 0 & a_1-y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2-y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n-y \end{vmatrix} =$$

$$(a_1-y)\cdots(a_n-y)\left[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{y}{a_i-y}\right]$$

三、$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ -1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-4)$

(1) **当 $\lambda \neq -1$ 且 $\lambda \neq 4$ 时,方程组有惟一解**;

(2) **当 $\lambda = -1$ 时,增广矩阵**

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$\mathrm{rank}\,\overline{A} = 3$, $\mathrm{rank}\,A = 2$,**方程组无解**;

(3) **当 $\lambda = 4$ 时,增广矩阵**

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&4&4\\-1&4&1&16\\1&-1&2&-4\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&4&4\\0&5&5&20\\0&-2&-2&-8\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+2r_2]{r_2\times\frac{1}{5}\quad r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$\mathrm{rank}\overline{A}=\mathrm{rank}A=2<3$,方程组有无穷多解,此时同解方程组为$\begin{cases}x_1=-3x_3\\x_2=4-x_3\end{cases}$,

通解为

$$\begin{cases}x_1=-3t\\x_2=4-t\\x_3=t\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}\quad (t\text{任意})$$

四、可求得$|A^*|=-27$.由$AA^*=|A|E$得$|A||A^*|=|A|^4$,即$|A|^3=|A^*|=-27$,于是$|A|=-3$.

用A^{-1}左乘$AXA^{-1}=XA^{-1}+8E$得$XA^{-1}=A^{-1}XA^{-1}+8A^{-1}$,再右乘$A$得$X=A^{-1}X+8E$,即$(E-A^{-1})X=8E$,从而

$$X=8(E-A^{-1})^{-1}=8\left(E-\frac{1}{|A|}A^*\right)^{-1}=$$

$$24(3E+A^*)^{-1}=24\begin{pmatrix}7&3&0&0\\-1&3&0&0\\0&0&6&-6\\0&0&-3&6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&-3&0&0\\1&7&0&0\\0&0&8&8\\0&0&4&8\end{pmatrix}$$

五、(1) 二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}t&1&1\\1&t&-1\\1&-1&t\end{pmatrix}$,选取$t$使得

$$\Delta_1=t>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}t&1\\1&t\end{vmatrix}=t^2-1>0$$

$$\Delta_3=|A|=(t+1)^2(t-2)>0$$

故当$t>2$时,二次型f正定.

(2) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3=$

$$[x_1^2+2x_1(x_2+x_3)]+x_2^2+x_3^2-2x_2x_3=(x_1+x_2+x_3)^2-4x_2x_3$$

令$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ 即$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$,得 $f = y_1^2 - 4y_2y_3$

再令$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_2 - z_3 \end{cases}$,得标准形为 $f = z_1^2 - 4z_2^2 + 4z_3^2$

所用的非退化线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - 2z_2 \\ x_2 = z_2 + z_3 \\ x_3 = z_2 - z_3 \end{cases}$$

六、(1) 不可约.取素数 $p = 3$,则 $p \nmid 5$,但 $p \mid -6$, $p \mid 12$, $p \mid 6$,而 $p^2 \nmid 6$,由艾森斯坦判别法知 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

(2) 由于 $x'Bx = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3 =$

$$x_1^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + 6x_3^2 = y_1^2 - y_2^2 + 6y_3^2$$

所以 B 的秩为 3 且正惯性指数为 2.因为 A 与 B 合同,所以 A 的秩也为 3,且正惯性指数为 2,故 $x'Ax$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

七、(1) 因为$(f(x), g(x)) = 1$,所以存在多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$,使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

于是,有 $$(u(x) - v(x))f(x) + v(x)(f(x) + g(x)) = 1$$

故 $$(f(x), f(x) + g(x)) = 1$$

(2) 法 1 反证.若 $\eta^*, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性相关,则 η^* 可由 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性表出,从而有 $A\eta^* = 0$,这与 η^* 是 $Ax = b$ 的解向量矛盾,故 $\eta^*, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性无关.

法 2 设 $k\eta^* + k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$,左乘矩阵 A 得

$$kA\eta^* + k_1A\xi_1 + \cdots + k_{n-r}A\xi_{n-r} = 0$$

即 $kb = 0$.由 $b \neq 0$ 得 $k = 0$,从而有 $k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$,但 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性无关,故只有 $k_1 = \cdots = k_{n-r} = 0$,于是 $\eta^*, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性无关.

(3) 因为$\begin{pmatrix} E & -BD^{-1} \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}$,取行列式得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A - BD^{-1}C & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A - BD^{-1}C||D| =$$

$$|AD - BD^{-1}CD| = |AD - BC|$$

A 卷(Ⅱ)解答

一、1. $\dim W = n-2$,一组基为 $\alpha_1 = (1, -1, 0, \cdots, 0)$, $\alpha_2 = (0, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $\alpha_{n-2} = (0, \cdots, 0, 1, 0)$;

2. B 的特征值为 $-1, -3, 0$, $|B| = 0$;

3. $x = 0$, $y = -2$;

4. A 的不变因子为 $1, 1, 1, \lambda - 1, (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)^2$;

5. 过渡矩阵为 $(A')^{-1}$.

二、(1) 对任意 $X, Y \in P^{2\times 2}$ 和任意 $k, l \in P$,有

$$\mathcal{A}(kX + lY) = A(kX + lY)B = kAXB + lAYB = k\mathcal{A}(X) + l\mathcal{A}(Y)$$

所以 $\mathcal{A}$ 是线性变换 .

(2) 可求得 $\mathcal{A}(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{A}(E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{A}(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{A}(E_{22}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,所以 $\mathcal{A}$ 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) 可求得 $|\lambda E - A| = \lambda^2(\lambda - 2)(\lambda + 2)$,所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -2$,对应的特征向量分别为

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

从而所求的基 G_1, G_2, G_3, G_4 满足

$$(G_1, G_2, G_3, G_4) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

即

$$G_1=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\quad G_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\quad G_3=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix},\quad G_4=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

且 A 在该基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&2&\\&&&-2\end{pmatrix}$$

三、(1) 取 P^3 的基 $\varepsilon_1=(1,0,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0)$, $\varepsilon_3=(0,0,1)$, 则 $A(P^3)=L(A(\varepsilon_1),A(\varepsilon_2),A(\varepsilon_3))$. 可求得向量组

$$A(\varepsilon_1)=(1,0,1),\quad A(\varepsilon_2)=(2,1,1),\quad A(\varepsilon_3)=(-1,1,-2)$$

的秩为2,且 $A(\varepsilon_1)$, $A(\varepsilon_2)$ 是一个极大线性无关组,故 $\dim A(P^3)=2$,且它的一组基为 $A(\varepsilon_1)=(1,0,1)$, $A(\varepsilon_2)=(2,1,1)$.

(2) 设 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)\in A^{-1}(0)$,即

$$A(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2-x_3,\ x_2+x_3,\ x_1+x_2-2x_3)=(0,0,0)$$

求解齐次方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=0\\x_2+x_3=0\\x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$ 得通解 $\begin{cases}x_1=3t\\x_2=-t\\x_3=t\end{cases}$ (t 任意), 从而 $\alpha=t(3,-1,1)$,可见 $\dim A^{-1}(0)=1$,且$(3,-1,1)$ 是它的一组基.

四、可求得

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda+1&-1&-1\\5&\lambda-21&-17\\-6&26&\lambda+21\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda^2(\lambda+1)\end{pmatrix}$$

所以 A 的不变因子为 $1,\quad 1,\quad \lambda^2(\lambda+1)$

初等因子为 $\lambda^2,\quad \lambda+1$

若尔当标准形为 $J=\left(\begin{array}{cc|c}0&0&0\\1&0&0\\\hline 0&0&-1\end{array}\right)$

五、二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$

可求得 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$,所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda_3=5$. 又对应 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 的特征向量为

$$p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

正交化得

$$\alpha_1=p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=p_2-\frac{(p_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

再单位化
$$q_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\quad q_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

而对应 $\lambda_3=5$ 的特征向量为 $p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,单位化得 $q_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.故正交线性替换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_2\end{pmatrix}$$

化二次型为 $f=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$.

六、设 $f_i(\alpha)=a_ix+b_iy+c_iz\ (i=1,2,3)$,其中 $\alpha=(x,y,z)$,则由

$$\begin{cases}f_1(\alpha_1)=a_1-c_1=1\\f_1(\alpha_2)=-a_1+b_1=0\\f_1(\alpha_3)=c_1=0\end{cases}\quad 解得\quad\begin{cases}a_1=1\\b_1=1,即\ f_1=x+y\\c_1=0\end{cases}$$

而由

$$\begin{cases} f_2(\alpha_1) = a_2 - c_2 = 0 \\ f_2(\alpha_2) = -a_2 + b_2 = 1 \\ f_2(\alpha_3) = c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a_2 = 0 \\ b_2 = 1, \text{即 } f_2 = y \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

最后,由

$$\begin{cases} f_3(\alpha_1) = a_3 - c_3 = 0 \\ f_3(\alpha_2) = -a_3 + b_3 = 0 \\ f_3(\alpha_3) = c_3 = 1 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a_3 = 1 \\ b_3 = 1, \text{即 } f_3 = x + y + z \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

七、(1) 不构成.因为$(k+l)\quad A = A \neq 2A = k\quad A + l\quad A$.

(2) 设 x 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量,即 $Ax = \lambda x$,两边左乘 A' 得 $A'Ax = \lambda A'x$,即 $x = \lambda A'x$,也即 $A'x = \frac{1}{\lambda}x$,可见$\frac{1}{\lambda}$是 A'的特征值.由于 A 与 A'有相同的特征值,所以$\frac{1}{\lambda}$是 A 的特征值.

(3) 若 f 是反对称的,即对任意 $\alpha,\beta \in V$ 有 $f(\alpha,\beta) = -f(\beta,\alpha)$.取 $\beta = \alpha$ 得 $f(\alpha,\alpha) = -f(\alpha,\alpha)$,即有 $f(\alpha,\alpha) = 0$.

反之,若对任意 $\alpha \in V$ 有 $f(\alpha,\alpha) = 0$,则

$$0 = f(\alpha+\beta, \alpha+\beta) = f(\alpha, \alpha) + f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha) + f(\beta, \beta) = f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha)$$

故 $f(\alpha,\beta) = -f(\beta, \alpha)$,即 f 是反对称双线性函数.

B 卷(Ⅰ)解答

一、1. $m = 2, n = 4$; 2. 行列式的值为 0; 3. $|A + B| = 40$;

4. $(A - 2E)^{-1} = -A^2 - A + 2E$;

5. $(0,0,1,1)' + k(1,1,-2,-2)'$ (k任意);

6. $-1 < k < 0$.

二、(1) f 的首项为 x_1^3,其方幂对应的有序数组为$(3,0,0)$,令

$$\varphi_1 = \sigma_1^{3-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^0 = \sigma_1^3$$

则 $\quad f_1 = f - \varphi_1 = f - (x_1 + x_2 + x_3)^3$

$$-5x_1^2x_2 - 5x_1x_2^2 - 5x_1^2x_3 - 5x_1x_3^2 - 5x_2^2x_3 - 5x_2x_3^2 - 6x_1x_2x_3$$

又 f_1 的首项为 $-5x_1^2x_2$,其方幂对应的有序数组为$(2,1,0)$,令

$$\varphi_2 = -5\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0 = -5\sigma_1\sigma_2$$

则 $\quad f_2 = f_1 - \varphi_2 = f_1 + 5(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) =$

$$9x_1x_2x_3 = 9\sigma_3$$

故
$$f = f_1 + \varphi_1 = f_2 + \varphi_2 + \varphi_1 = \sigma_1^3 - 5\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3$$

(2) **可求得** $\sigma_1 = 2,\ \sigma_2 = 0,\ \sigma_3 = 1$,**所以** $f = 2^3 - 5\cdot 2\cdot 0 + 9\cdot 1 = 17$.

三、该行列式具有行和相等的特点.

$$D_{n+1} \xrightarrow[\substack{\cdots \\ c_1 + c_{n+1}}]{\substack{c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3}} \begin{vmatrix} x + \sum_{i=1}^{n} a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x + \sum_{i=1}^{n} a_i & x & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ x + \sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\cdots \\ r_{n+1} - r_1}]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1}}$$

$$\begin{vmatrix} x + \sum_{i=1}^{n} a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x - a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 - a_1 & x - a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_2 & \cdots & x - a_n \end{vmatrix} =$$

$$\left[x + \sum_{i=1}^{n} a_i\right](x - a_1)\cdots(x - a_n)$$

四、设 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$,**比较分量得**

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

对方程组的增广矩阵进行初等行变换,得

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1 + 2r_2]{\substack{r_3 + r_1 \\ r_3 + r_2}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & 2\lambda - 2 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 + \lambda - 2 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{\substack{r_1 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \\ r_2 + 2r_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \dfrac{4 - \lambda}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{2(1 - \lambda)}{3} \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda + 2) \end{array}\right]$$

可见,当 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$ 时,$\operatorname{rank}\overline{A}=\operatorname{rank}A=2<3$,方程组有无穷多解,故 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

当 $\lambda=1$ 时,同解方程组为 $\begin{cases} x_1=1+x_3 \\ x_2=x_3 \end{cases}$,通解为 $\begin{cases} x_1=1+t \\ x_2=t \\ x_3=t \end{cases}$ (t 任意),

此时
$$\beta=(1+t)\alpha_1+t\alpha_2+t\alpha_3 \quad (t\text{ 任意})$$

当 $\lambda=-2$ 时,同解方程组为 $\begin{cases} x_1=2+x_3 \\ x_2=2+x_3 \end{cases}$,通解为 $\begin{cases} x_1=2+t \\ x_2=2+t \\ x_3=t \end{cases}$ (t 任意),

此时
$$\beta=(2+t)\alpha_1+(2+t)\alpha_2+t\alpha_3 \quad (t\text{ 任意})$$

五、因为
$$\begin{pmatrix} E & O \\ -(C-B)A^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & A \\ C-B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -E \\ O & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \qquad (*)$$

取行列式得
$$|M|=\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=|A||B|\neq 0$$

所以矩阵 M 可逆.又对(*)式两边求逆得
$$\begin{pmatrix} E & -E \\ O & E \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A & A \\ C-B & C \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} E & O \\ -(C-B)A^{-1} & E \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}$$

即
$$M^{-1}=\begin{pmatrix} E & -E \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ -(C-B)A^{-1} & E \end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} B^{-1}CA^{-1} & -B^{-1} \\ A^{-1}-B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

六、令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$,得
$$f=(y_1+y_2)(y_1-y_2)+(y_1+y_2)y_3+(y_1-y_2)y_3=$$
$$y_1^2-y_2^2+2y_1y_3=(y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2$$

再令 $\begin{cases} z_1=y_1+y_3 \\ z_2=y_2 \\ z_3=y_3 \end{cases}$,即 $\begin{cases} y_1=z_1-z_3 \\ y_2=z_2 \\ y_3=z_3 \end{cases}$,得标准形

$$f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$$

所用的非退化线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_3 = \qquad\qquad z_3 \end{cases}$$

七、(1) **因为** $f(x) = \dfrac{x^p - 1}{x - 1}$,**令** $x = y + 1$ **得**

$$f(y+1) = \frac{(y+1)^p - 1}{y} = \sum_{k=1}^{p} C_p^k y^{k-1}$$

取素数 p,**则** $p \mid C_p^k (k = 1, 2, \cdots, p-1)$,**但** $p \nmid 1$, $p^2 \nmid C_p^1$,**从而由艾森斯坦判别法知**,$f(y+1)$ **在有理数域上不可约**,**从而** $f(x)$ **在有理数域上不可约**.

(2) A **的列向量组线性无关**.

法1　**设** $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$,**又设** $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$,**即**

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0 \quad \text{或} \quad A\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0$$

用 B **左乘上式并利用** $BA = E$ **得** $(k_1, k_2, \cdots, k_n)' = 0$,**即** $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$,**故** A **的列向量组线性无关**.

法2　**由于**

$$n = \operatorname{rank} E = \operatorname{rank}(BA) \leq \operatorname{rank} A \leq n$$

所以 $\operatorname{rank} A = n$,**故** A **的列向量组线性无关**.

(3) **因为**

$$(E - A^2)' = E' - (A^2)' = E - (A')^2 = E - (-A)^2 = E - A^2$$

所以 $E - A^2$ **是对称矩阵**.**又对任意** $x \neq 0$,**有**

$$x'(E - A^2)x = x'(E + A'A)x = x'x + (Ax)'(Ax) > 0$$

故 $E - A^2$ **是正定矩阵**.

B 卷(Ⅱ)解答*

一、1. $\dim W = 3$,**一组基为** $\beta_1, \beta_2, \beta_3$;

2. $a = -3$, $b = 0$, $\lambda_0 = -1$;

3. $J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$;　　4. $\begin{pmatrix}a_{13}&a_{11}+a_{12}&2a_{11}\\a_{23}&a_{21}+a_{22}&2a_{21}\\a_{33}&a_{31}+a_{32}&2a_{31}\end{pmatrix}$;

5. $\alpha_1=(1,1,-1)$,　$\alpha_2=(1,1,0)$,　$\alpha_3=(1,0,0)$.

二、(1) **设** $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$,**整理得**

$$(-k_1+k_2-k_3)\alpha_1+(k_2-k_3)\alpha_2+(k_1+k_3)\alpha_3=0$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **是基,于是有**

$$\begin{cases}-k_1+k_2-k_3=0\\ \qquad\quad k_2-k_3=0\\ k_1\qquad\quad +k_3=0\end{cases}$$

该方程组只有零解 $k_1=k_2=k_3=0$,**故** β_1,β_2,β_3 **线性无关,从而是基**.

(2) **由于**$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$,**其中**

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

于是$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)A^{-1}$,**故由基** β_1,β_2,β_3 **到** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **的过渡矩阵为**

$$C=A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

(3) $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)C\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$

即 α **在基** β_1,β_2,β_3 **下的坐标为**$(1,4,2)'$.

三、$\mathscr{A}$ **在** $P[x]_3$ **的基** $1,x,x^2$ **下的矩阵为**

$$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$$

可求得 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$,**即** A **的特征值为** $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-2$. **又求得对应的特征向量分别为**

$$p_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad p_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

所求的基 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ 应满足

$$(f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)) = (1,\ x,\ x^2)\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

即 $$f_1(x) = x - 2,\quad f_2(x) = x^2,\quad f_3(x) = x^2 + x - 1$$

A 在该基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$.

四、二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -b \\ -1 & 4 & -1 \\ -b & -1 & a \end{pmatrix}$ 正交相似于 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$，比较 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$ 的同次幂系数可解得 $a = 4,\ b = 1$.

可求得 A 对应 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量为 $p_1 = (1,1,1)'$，单位化得 $q_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)'$；而对应 $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$ 的特征向量为

$$p_2 = (-1,1,0)',\qquad p_3 = (-1,0,1)'$$

正交化得

$$\alpha_2 = p_2 = (-1,1,0)',\quad \alpha_3 = p_3 - \frac{(p_3,\ \alpha_2)}{(\alpha_2,\ \alpha_2)}\alpha_2 = \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1\right)'$$

单位化得

$$q_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)',\qquad q_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right)'$$

故所用的正交线性替换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

五、设 $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in W^{\perp}$，则由 $\begin{cases} (A_1,\ X) = x_1 + x_2 = 0 \\ (A_2,\ X) = x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

解得基础解系

$$(1,\ -1,1,0)',\quad (1,\ -1,0,1)'$$

故 $X_1=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$是 $W^{\perp}$ 的一组基.将其正交化

$$Y_1=X_1=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad Y_2=X_2-\frac{(X_2,Y_1)}{(Y_1,Y_1)}Y_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}$$

再单位化即得 $W^{\perp}$ 的标准正交基

$$Z_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0\end{pmatrix},\qquad Z_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{15}}&-\frac{1}{\sqrt{15}}\\-\frac{2}{\sqrt{15}}&\frac{3}{\sqrt{15}}\end{pmatrix}$$

六、(1) 取 P^3 的基 $\varepsilon_1=(1,0,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0)$, $\varepsilon_3=(0,0,1)$,可求得 f 在该基下的度量矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&-2&-3\\2&0&1\\3&-1&0\end{pmatrix}$$

这是反对称矩阵,从而 f 是反对称双线性函数.

(2) 可求得

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&-3\\2&0&1\\3&-1&0\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-\frac{3}{2}r_2\\c_3-\frac{3}{2}c_2\\r_3+r_1\\c_3+c_1}]{\substack{r_1\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\c_1\times\left(-\frac{1}{2}\right)}}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\\\hline -\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{3}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

于是

$$C'AC=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\text{其中}\quad C=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{3}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

所求的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 满足$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)C$,即

$$\alpha_1=\left(-\frac{1}{2},0,0\right),\quad \alpha_2=(0,1,0),\quad \alpha_3=\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},1\right)$$

且对于任意 $x, y\in P^3$,若 x, y 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标分别为 $(u_1, u_2, u_3)'$ 和 $(v_1, v_2, v_3)'$,则 f 在该基下的规范形式为

$$f(x, y)=u_1v_2-u_2v_1$$

七、(1) 因为

$$|E-A|=|A'A-A|=|A'-E||A|=|(A-E)'||A|=$$
$$|A-E|=(-1)^{2n+1}|E-A|=-|E-A|$$

所以 $|E-A|=0$,即 1 是 A 的一个特征值.

(2) 对任意 $\alpha\in A^{-1}(0)$ 有 $A(\alpha)=0$,而

$$A(B(\alpha))=(AB)(\alpha)=(BA)(\alpha)=B(A(\alpha))=B(0)=0$$

从而 $B(\alpha)\in A^{-1}(0)$,故 $A^{-1}(0)$ 是 B 的不变子空间.

(3) 因为对任意 $\alpha,\beta\in V$,有

$$(A(\alpha+\beta), A(\alpha+\beta))=(\alpha+\beta, \alpha+\beta)\qquad (*)$$

又有

$$(A(\alpha+\beta), A(\alpha+\beta))=(A(\alpha)+A(\beta), A(\alpha)+A(\beta))=$$
$$(A(\alpha), A(\alpha))+2(A(\alpha), A(\beta))+(A(\beta), A(\beta))$$
$$(\alpha, \alpha)+2(A(\alpha), A(\beta))+(\beta, \beta)$$

$$(\alpha+\beta, \alpha+\beta)=(\alpha, \alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)$$

代入(*)式得　$(A(\alpha), A(\beta))=(\alpha, \beta)$

故 A 是正交变换.