第五章 波动

5.1 机械波的产生和传播

一、产生机械波的条件

1. 波源：作机械振动的物体
2. 弹性媒质：能传播机械振动的媒质

二、弹性体的变形规律

1. 弹性：外力撤去后，形变可以完全恢复的性质
2. 弹性体: 具有弹性的物体(理想模型)

   各向同性均匀弹性体：各点弹性相同，各点弹性与方向无关。

3. 弹性形变遵循的规律

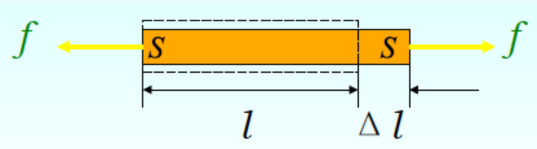
   胡克定律：应力 $=$ 模量 $\times$ 应变

5.1 机械波的产生和传播

4. 弹性形变常见类型：

(对固体的)拉压， (对固体的)剪切，(气液固体的)容变

拉压：应力 $\sigma = f/s$, 应变 $\varepsilon = \Delta l/l$,

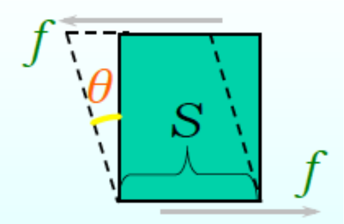


胡克定律：应力 $=$ 模量 $\times$ 应变，即 $\sigma = Y\varepsilon$

Y 杨氏弹性模量(度量材料抗拉压形变的能力)

5.1 机械波的产生和传播

剪切: 应力 $\tau = f/s$, 应变 θ

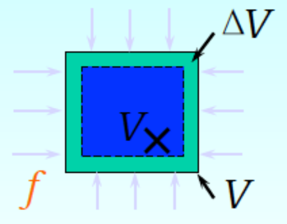


胡克定律: 应力 = 模量 × 应变, $\tau = G\theta$

G 切变弹性模量(度量材料抗剪切形变的能力)

5.1 机械波的产生和传播

容变: 应力 $\sigma = f/s$, (容)应变 $\Delta V/V$

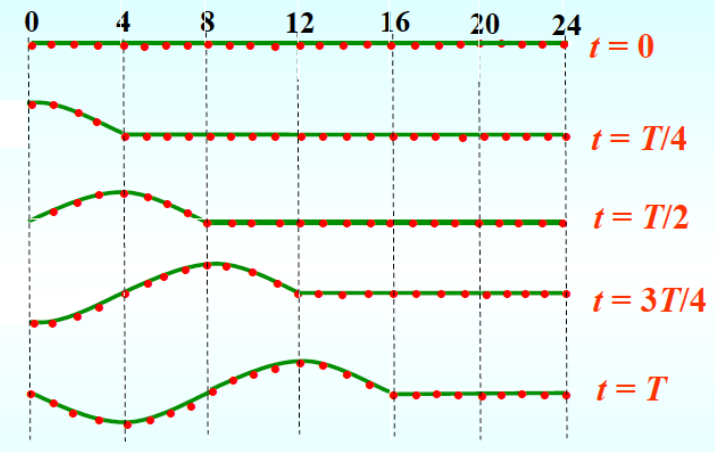


胡克定律: 应力 = 模量 × 应变, $f/s = -B\Delta V/V$

B 容变弹性模量 (度量材料抗容积形变的能力)

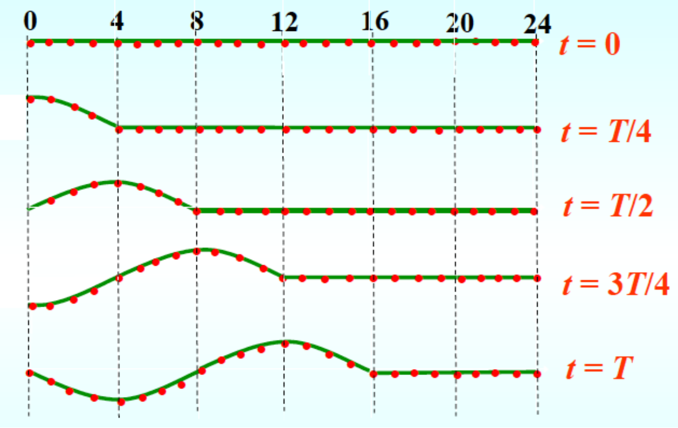
5.1 机械波的产生和传播

三、机械波的形成: 因媒质各部分间的弹性联系，会使振动传播开去，这就形成了波动 —机械波



5.1 机械波的产生和传播

上游的质元依次带动下游的质元振动，质元的振动状态将在 较晚时刻于“下游”出现；波动是振动状态的传播，不是媒质的传播.



5.2 波的基本概念

一、波的几何描述

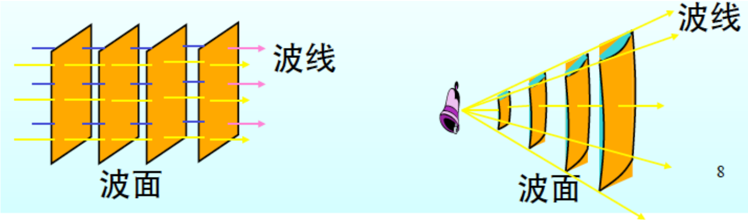
(1) 波面：由振动相位相同的点所组成的面

(2) 波前：最前面的波面

(3) 波线：表示波传播方向的直线

各向同性介质中波线⊥波面

平面波：波面为平面的波　　　球面波：波面为球面的波



5.2 波的基本概念

二、机械波的分类

按波线与振动方向关系：横波，纵波

按持续时间：连续波， 脉冲波

按波面形状：平面波，球面波，柱面波

按波形是否传播：行波，驻波

按复杂程度：简谐波，复波

5.2 波的基本概念

横波：质点的振动方向和波的传播方向垂直

传播媒质：具有剪切弹性或产生张力

机械横波只能在固体或柔软绳索中传播

纵波：质点的振动方向和波的传播方向平行

传播媒质：具有拉压弹性或容变弹性

机械纵波可在固体、液体或气体中传播

5.2 波的基本概念

5.2 波的基本概念

地震波主要包含纵波和横波

来自地下的纵波(P波)引起地面上下颠簸振动。

来自地下的横波(S波)能引起地面的水平晃动。

横波是地震时造成建筑物破坏的主要原因。

由于纵波在地球内部传播速度大于横波，所以地震时，纵波总是先到达地表。这样，发生地震时，一般人们先感到上下颠簸， 过数秒到十几秒后才感到有很强的水平晃动。这一点非常重要， 因为纵波给我们一个警告，告诉我们造成建筑物破坏的横波马上要到了， 快点作出防备。

5.2 波的基本概念

三、波的特征量

1. 波速u: 振动状态传播的速度

由媒质的性质决定与波源情况无关

弹性媒质中u: $\text{波速} = \sqrt{\dfrac{\text{模量}}{\text{密度}}}$

波速仅仅取决于媒质的弹性和惯性

横波: 固体, $u = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$; 柔绳, $u = \sqrt{\dfrac{T}{\lambda}}$

纵波: 固体, $u = \sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$; 液气: $u = \sqrt{\dfrac{B}{\rho}}$

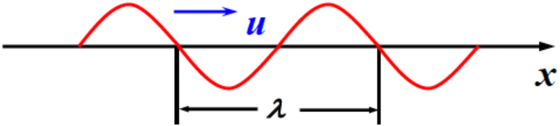
5.2 波的基本概念

2. **周期T**: 一个完整的波通过波线上的某点所需的时间. 由**波源**决定 (波源、观测者均不动时)

频率: $\nu = \frac{1}{T}$ **角频率**: $\omega = 2\pi\nu$

T, ν, ω 反映了波的**时间周期**

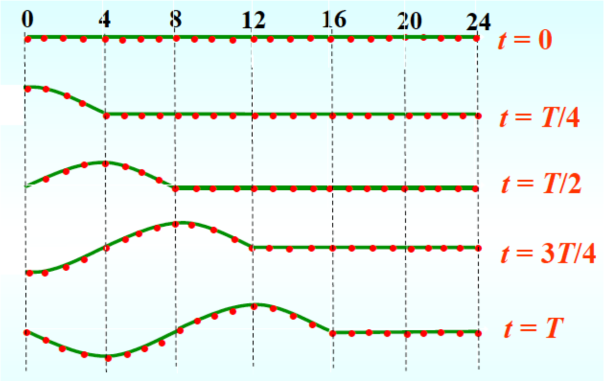
3. **波长λ**: 波线上相邻的振动状态相同的两质元间的距离



$\lambda = uT$, 有**波源**和**媒质**共同决定. 波长反映波的**空间周期**.

5.2 波的基本概念

四、波动的传播特征： 各质元振动的周期(T)与波源相同，各质元的振动状态不同(即相位不同)，沿 波的传播方向，各质元相位依次落后.
$$\frac{\Delta x}{\lambda}=\frac{\Delta\phi}{2\pi}=\frac{\Delta t}{T}$$

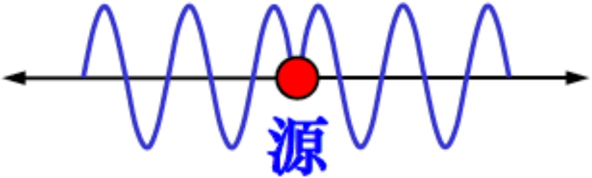


5.3 平面简谐波

一、平面简谐波：所有质点作谐振动且波面为平面的波

二、平面简谐波的波动方程：$y = f(x, t)$

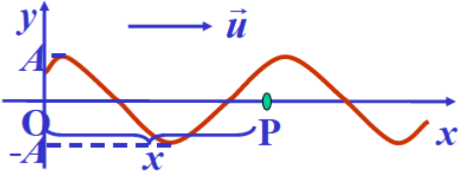
描述媒质中各质点位移y随各点平衡位置x和时间t变化的函数关系



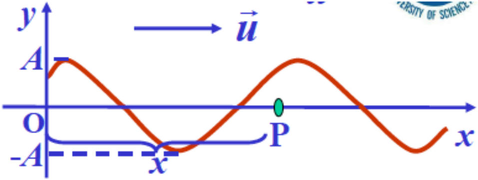
5.3 平面简谐波

以原点O为参考点：O点处质点的振动方程为

$$y_o = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$



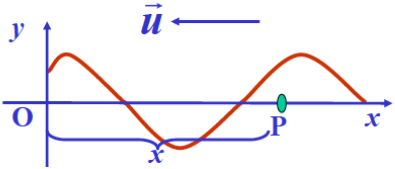
O点的任一振动状态传到P点，需要时间$\Delta t = \dfrac{x}{u}$,



正向波波函数：$y = A\cos[\omega(t - \dfrac{x}{u}) + \varphi_0]$

5.3 平面简谐波

P点比O点超前时间$\Delta t = \frac{x}{u}$, $y_P(x,t) = y_0(0, t + \frac{x}{u})$

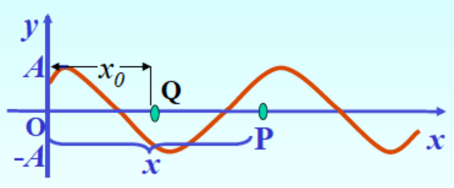


反向波波函数: $y = A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) + \varphi_0]$

5.3 平面简谐波

以x_0为参考点：Q点处质点的振动方程为

$y_{x_0} = A\cos(\omega t + \varphi_{x_0})$



Q点的任一振动状态传到P点，需要时间$\Delta t = \dfrac{x - x_0}{u}$，

则波动方程：

$$y = A\cos[\omega(t \pm \frac{x - x_0}{u}) + \varphi_{x_0}]$$

$\dfrac{x - x_0}{u}$：表示x处质元的振动落后(或超前)x_0处质元振动的时间。

5.3 平面简谐波

波动方程: $y = A\cos[\omega(t \pm \frac{x - x_0}{u}) + \varphi_{x_0}]$

波动方程其它形式: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$, $\lambda = uT$

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} \pm \frac{x - x_0}{\lambda}) + \varphi_{x_0}]$$

$$y = A\cos[2\pi(\nu t \pm \frac{x - x_0}{\lambda}) + \varphi_{x_0}]$$

$$y = A\cos\{\frac{2\pi}{\lambda}[ut \pm (x - x_0)] + \varphi_{x_0}\}$$

确定波动方程的二个条件:

1. 已知$\vec{u}$;
2. 波线上一点的振动方程.

5.3 平面简谐波

三、波动方程的物理意义(正向传播波为例)

1. 在空间某位置$x = x_1$, 有

$$y = A\cos\left[\omega(t - \frac{x_1}{u}) + \varphi_0\right] = A\cos\left[\omega t + (\varphi_0 - \frac{\omega x_1}{u})\right]$$

表示$x = x_1$处的振动函数，其中$\varphi_0 - \dfrac{\omega x_1}{u}$为初相.

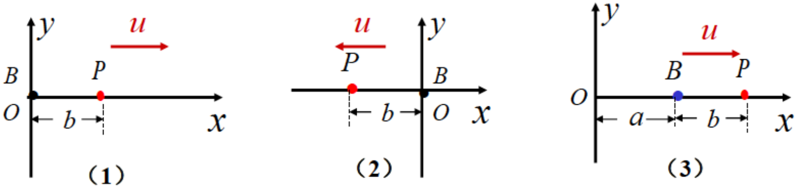
2. 在某时刻$t = t_1$, 有

$$y = A\cos\left[\omega(t_1 - \frac{x}{u}) + \varphi_0\right]$$

表示$t = t_1$时刻的波形。

5.3 平面简谐波

例1：已知波线上B点的振动规律为$y = A\cos(\omega t+\varphi)$，就下面三种坐标取法，分别列出波动表达式及$P$点的振动方程



解：(1) $x=b,\ y=A\cos[\omega(t-\dfrac{x}{u})+\varphi]$

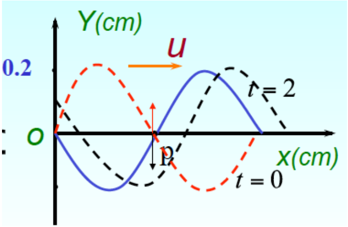
(2) $x=-b,\ y=A\cos[\omega(t+\dfrac{x}{u})+\varphi]$

(3) $x=a+b,\ y=A\cos[\omega(t-\dfrac{x-a}{u})+\varphi]$

$$y_P = A\cos[\omega(t-\frac{b}{u})+\varphi]$$

5.3 平面简谐波

例2：已知：$T = 4\ \mathrm{s}$，求 P点的振动方程



解：$y_P = A\cos(\omega t + \varphi_P)$

方法一：$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}$，

$\varphi_p = -\dfrac{\pi}{2}$

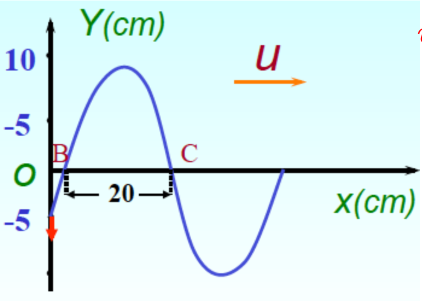
方法二：由$t = 0$波形图可知：$\varphi_p = -\dfrac{\pi}{2}$，

$$y_P = 0.2\cos(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2})\ (\mathrm{cm})$$

5.3 平面简谐波

例 3: 已知波动 $T=2$ s, $t=0$时刻波形如图所示 求:

(1) 波动方程; (2) $\overline{OB}$长度.

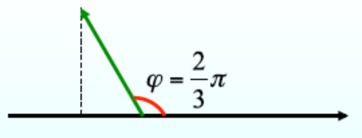


解: (1) $T=2,\ \lambda=40,$

$$u=\frac{\lambda}{T}=20,$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi,\quad A=10,$$

$t=0$时: $y_0=-5,\ v_0<0$



$$\varphi_0=\frac{2}{3}\pi,\quad y_0=10\cos[\pi t+\frac{2}{3}\pi]$$

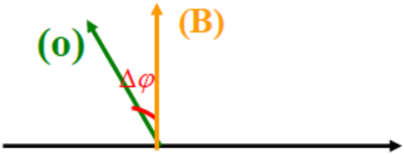
波动方程: $y=10\cos[\pi(t-\frac{x}{20})+\frac{2}{3}\pi]$

(2) $\overline{OB}$长度

解: $\overline{OB} = (\varphi_O - \varphi_B)\dfrac{\lambda}{2\pi}$

$t = 0$时: $y_B = 0,\ v_B < 0,\ \varphi_B = \dfrac{\pi}{2}$

$$\overline{OB} = (\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{2}) \cdot \frac{40}{2\pi} = 3.33\ (\mathrm{cm})$$



5.4 机械波的能量

一、能量和能量密度

(1) 动能:

$$\begin{aligned}\Delta W_k &= \frac{1}{2}\Delta m v^2 = \frac{1}{2}(\rho\Delta v)(\frac{\partial y}{\partial t})^2 \\ &= \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2 \sin^2\omega(t-\frac{x}{u})\end{aligned}$$

(2) 势能:

$$\Delta W_p = \frac{1}{2}\rho u^2 \Delta V(\frac{\partial y}{\partial x})^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u}) = \Delta W_k$$

(3) 总能量:

$$\Delta W = \Delta W_k + \Delta W_p = \rho\Delta V A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

5.4 机械波的能量

(4) $W_{波}$与$E_{振}$的比较

波动(质元)	振动(系统)
(非孤立系统) $W_{波}$随t变化，不守恒 质元在不断接受或放出能量	(孤立系统) $E_{振}$不随t变化，守恒
$W_{k波}$、$W_{p波}$同步变化	$E_{k振}$、$E_{p振}$此消彼长

(5) 能量密度：单位体积内的能量

$$\varepsilon = \Delta W/\Delta V = \rho A^2\omega^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u})$$

(6) 平均能量密度：能量密度在一个周期内的平均值

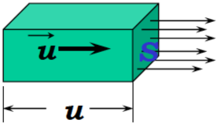
$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &= \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon dt = \rho A^2\omega^2 \left\{[\int_0^T \sin^2 \omega(t - x/u)dt]/T\right\} \\ &= \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\end{aligned}$$

5.4 机械波的能量

二、波的强度

1. 能流P: 单位时间内通过某一面积的波能

$P = Su\varepsilon.$



2. 平均能流$\bar{P}$(焦耳/秒): 能流在一个周期内的平均值。

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P dt = \frac{Su}{T}\int_0^T \varepsilon dt = \bar{\varepsilon} Su, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

3. 波的强度I (平均能流密度): 通过垂直于波的传播方向的单位面积的平均能流。

$$I = \frac{\bar{P}}{S} = \bar{\varepsilon} u = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u, \quad \text{单位: 焦耳/秒米}^2$$

5.4 机械波的能量

例题1：波在无吸收的，均匀无限大介质中传播，试证

1. 平面波：A保持不变。
2. 球面波：A与r成反比。

证明：

1. 无吸收，　$\bar{P}_1 = \bar{P}_2$

$$\bar{P}_1 = \bar{\varepsilon} u S = \frac{1}{2}\rho A_1^2 \omega^2 u S, \quad \bar{P}_2 = \bar{\varepsilon} u S = \frac{1}{2}\rho A_2^2 \omega^2 u S$$

$$A_1 = A_2$$

2. 无吸收，　$\bar{P}_1 = \bar{P}_2$

$$\frac{1}{2}\rho A_1^2 \omega^2 u (4\pi r_1^2) = \frac{1}{2}\rho A_2^2 \omega^2 u (4\pi r_2^2), \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

5.5: 惠更斯原理

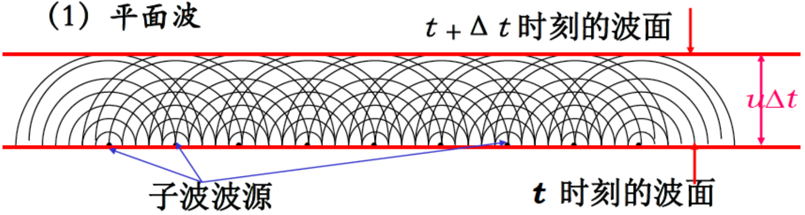
一、原理

波动所到达的媒质中各点均可作为发射子波的波源，其后任一时刻这些子波的包迹 就是新的波阵面。

二、应用

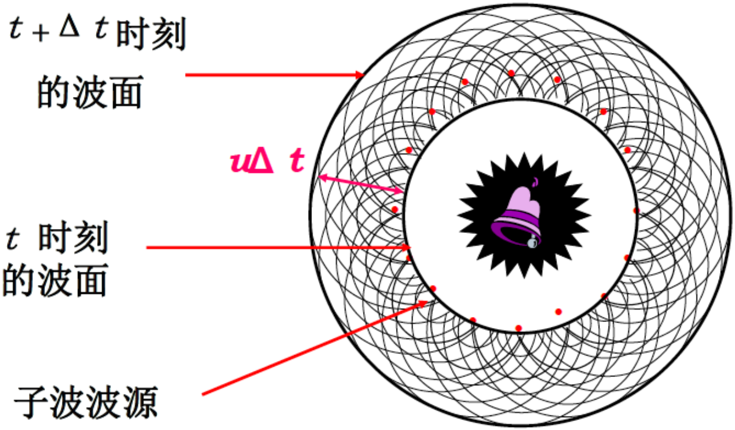
1. 用惠更斯原理确定下一时刻波的波前

(1) 平面波



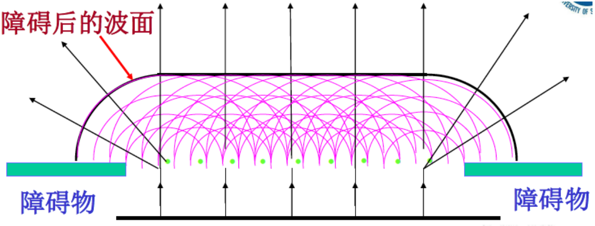
5.5: 惠更斯原理

(2). 球面波

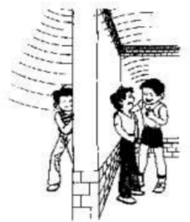


5.5: 惠更斯原理

2. 用惠更斯原理解释衍射现象



声波的衍射



5.6 波的叠加和干涉

一、波的叠加

1. **波的独立传播原理:**

几列同时在媒质中传播的波，它们的传播特性(波长、频率、波速、波形) 不会因其它波的存在而发生变化。

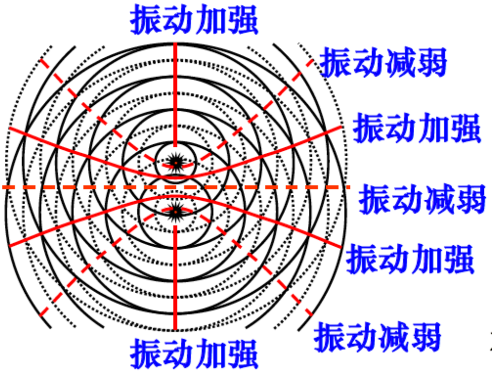
2. **波的叠加原理:**

在相遇区域内任一点的振动，为各列波单独存在时在该点所引起的振动位移和矢量和: $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$

5.6 波的叠加和干涉

二、波的干涉

1. 干涉的条件: 相干波源: 振动方向相同, 频率相同, 位相差恒定



2. 干涉的基本特征: 两列波在空间迭加区域, 形成某些点振动始终加强, 某些点振动始终减弱的稳定分布.

5.6 波的叠加和干涉

3. 干涉加强减弱的条件:

相干波源: $y_{s1} = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$

$y_{s2} = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

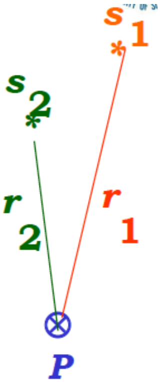
相干波: $y_1 = A_1 \cos[\omega(t - \frac{r}{u}) + \varphi_1]$

$y_2 = A_2 \cos[\omega(t - \frac{r}{u}) + \varphi_2]$

P 点: $y_{p1} = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1 - 2\pi r_1/\lambda)$

$y_{p2} = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2 - 2\pi r_2/\lambda)$

$y_p = y_{p1} + y_{p2} = A \cos(\omega t + \varphi)$



5.6 波的叠加和干涉

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\Phi}$$

$$\Delta\Phi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda$$

$\Delta\Phi = \pm 2k\pi, \quad A = A_1 + A_2,$ 干涉加强

$\Delta\Phi = \pm(2k+1)\pi, \quad A = |A_1 - A_2|,$ 干涉减弱

若 $\varphi_1 = \varphi_2, \qquad \Delta r = r_2 - r_1$ 波程差

$\Delta r = \pm k\lambda, \quad A = A_1 + A_2,$ 干涉加强

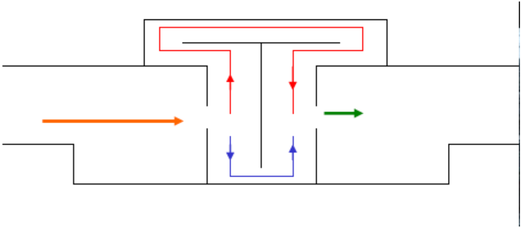
$\Delta r = \pm(2k+1)\lambda/2, \quad A = |A_1 - A_2|,$ 干涉减弱

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{A_1\sin(\varphi_1 - 2\pi r_1/\lambda) + A_2\sin(\varphi_2 - 2\pi r_2/\lambda)}{A_1\cos(\varphi_1 - 2\pi r_1/\lambda) + A_2\cos(\varphi_2 - 2\pi r_2/\lambda)}$$

5.6 波的叠加和干涉

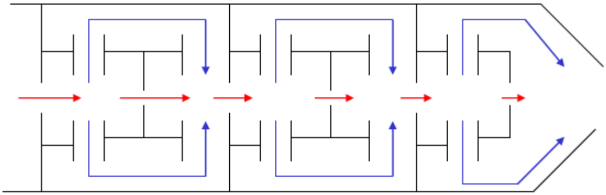
利用声波干涉控制噪声

1. 干涉型消声器的结构原理图



5.6 波的叠加和干涉

2. 摩托车的排气系统中干涉型消声器



波的反射

- 反射点是自由端：反射波引起反射点的振动的位相和入射波引起的振动位相相同。
- 反射点是固定端：反射波引起反射点的振动的位相和入射波引起的振动位相相反。

5.7 驻波

一、驻波

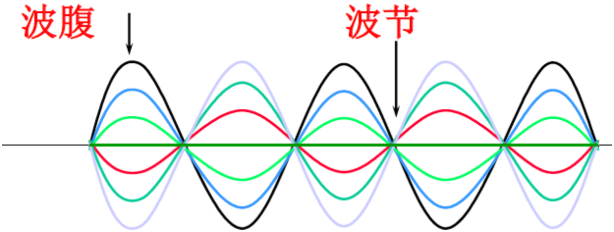
1. **概念:** 一对振幅相同、在同一条直线上沿反向传播的相干波叠加而形成的波

2. **驻波方程:**

$$y_1 = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x), \quad y_2 = A\cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x)$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\omega t\cos\frac{2\pi}{\lambda}x$$

5.7 驻波



$$y = 2A \cdot \cos \omega t \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} x$$

3.驻波特征分析

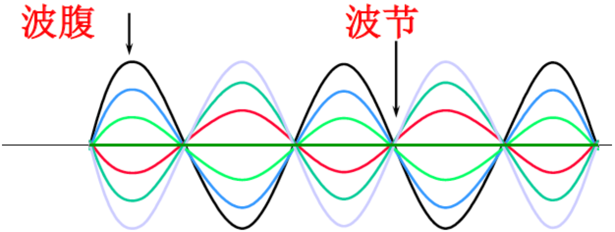
(1) 各点振幅 $A' = |2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}|$ 随x作周期性变化

波腹($A' = 2A$)位置: $x = \pm 2k\frac{\lambda}{4}$ ($k = 0, 1, 2, ...$)

波节($A' = 0$)位置: $x = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4}$($k = 0, 1, 2, ...$)

相邻波节(或波腹)的距离: $x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{2}$

5.7 驻波



$$y = 2A \cdot \cos\omega t \cdot \cos\frac{2\pi}{\lambda}x$$

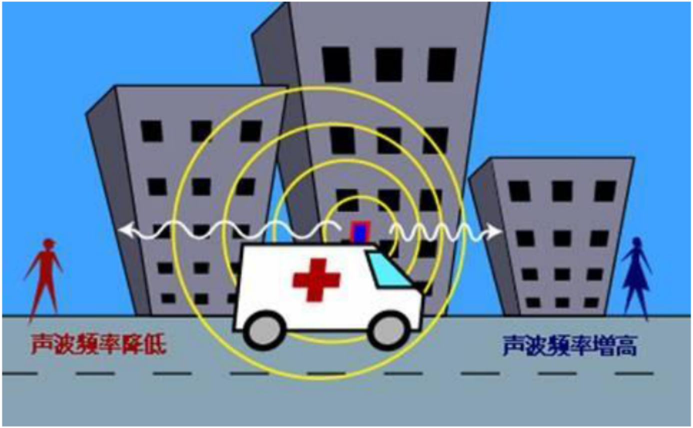
(2) 相邻两波节之间的质点振动相位相同,波节两侧质点的振动相位相反。

(3) 能量只在两波节间的波腹与波节转移,而无能量的定向传播。

(4) 形式象波,本质却是介质的一种特殊振动状态。

5.8 多普勒效应

人耳听到的声音的频率与声源的频率相同吗?



5.8 多普勒效应

- v_B: 观察者相对于媒质的运动速度
- v_s: 波源相对于媒质的运动速度
- ν_s: 波源的频率
- ν: 观察者接受到的频率
- u: 波速; λ: 波长; $\nu_s = \dfrac{u}{\lambda}$

(1) 波源和观察者都不动的情况

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \nu_s \quad \text{频率不变}$$

5.8 多普勒效应

(2) 波源不动，观察者以速度v_B向着波源运动

$$\nu = \frac{u + v_B}{\lambda} = \frac{u + v_B}{u/\nu_s} = \frac{u + v_B}{u}\nu_s$$

$$\nu = \frac{u + v_B}{u}\nu_s, \quad 频率升高$$

若观察者以速度v_B离开波源运动

$$\nu = \frac{u - v_B}{u}\nu_s, \quad 频率降低$$

$$u = v_B, \quad \nu = 0$$

5.8 多普勒效应

(3) 观察者不动，波源以速度v_s向着观察者运动

$$\lambda' = \lambda - v_s T = (u - v_s)T$$

波源趋近观察者:

$$\nu = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{(u - v_s)T} = \frac{u}{u - v_s}\nu_s$$

波源远离观察者:

$$\nu = \frac{u}{u + v_s}\nu_s$$

5.8 多普勒效应

(4) 相对于媒质波源和观察者同时运动

当波源和观察者彼此趋近时:

$$\nu = \frac{u + v_B}{\lambda} = \frac{u + v_B}{u - v_s}\nu_s$$

当波源和观察者彼此离开时:

$$\nu = \frac{u - v_B}{u + v_s}\nu_s$$

当 $v_s > u$ 时， 多普勒公式失效