第十三次作业

一．　填空题：

1．已知二维随机变量(ξ,η)的联合概率分布为

$\xi \backslash \eta$	0	1
0	0.1	0.15
1	0.25	0.2
2	0.15	0.15

则

$E\xi=\underline{\quad 1.05 \quad}$, $E\eta=\underline{0.5\quad}$, $E\left(\sin\frac{\pi}{2}(\xi+\eta)\right)=\underline{\quad 0.25 \quad}$, $E(\max(\xi,\eta))=\underline{\quad 1.2 \quad\quad}$,

$D(\max(\xi,\eta))=\underline{\quad 0.36 \quad}$ 。

2. 设随机变量ξ_1,ξ_2,ξ_3相互独立，$\xi_1\sim U(0,6)$，$\xi_2\sim N(0,4)$，$\xi_3\sim E(3)$，则：

$E(\xi_1-2\xi_2+3\xi_3)=\underline{\quad 12 \quad}$，$D(\xi_1-2\xi_2+3\xi_3)=\underline{\quad 46 \quad}$。

3．已知$X\sim N(-2,0.4^2)$，则$E(X+3)^2=\underline{1.16}$ 。

二．选择题：

1) 设$\xi\sim N(0,1)$，$\eta\sim N(0,4)$，$\varsigma=\xi+\eta$，下列说法正确的是（　B　）。

A. $\varsigma\sim N(0,5)$　　B. $E\varsigma=0$　　C. $D\varsigma=5$　　D. $\sqrt{D\varsigma}=3$

2）设X_1,X_2,X_3相互独立同服从参数$\lambda=3$的泊松分布，令$Y=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$，则$E(Y^2)=$（　C　）

A. 1.　　B. 9.　　C. 10.　　D. 6.

3）设$X\sim P(\lambda)$，且$E[(X-1)(X-2)]=1$，则$\lambda=$　(　　A　)

A. 1，　　B. 2，　　C. 3，　　D. 0

二． 计算题：

1. 设二维随机变量(ξ,η)的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(x+y) & 0<x<2, 0<y<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

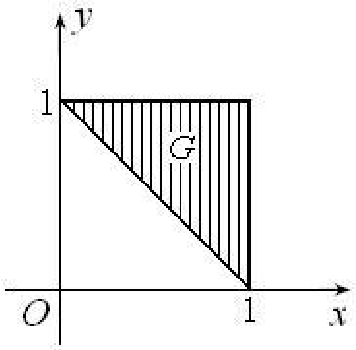
求$E\xi, E\eta, E(\xi\eta)$。

解：$E\xi=\iint\limits_D xp(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\dfrac{1}{8}\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2 x(x+y)\,\mathrm{d}y=\dfrac{7}{6}=E\eta$

$$E(\xi\eta)=\iint\limits_D xyp(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{8}\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2 xy(x+y)\,\mathrm{d}y=\frac{4}{3}$$

2. 二维随机变量(ξ,η)服从以点(0, 1)，(1, 0)，(1, 1)为顶点的三角形区域上的均匀分布，试求$E(\xi+\eta)$和$D(\xi+\eta)$。

解:



$$(\xi,\eta)\sim p(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\notin G,\end{cases}$$

$$E(\xi+\eta)=\int_0^1 dy\int_{1-y}^1 2(x+y)dx=\frac{4}{3},$$

$$E(\xi+\eta)^2=\int_0^1 dy\int_{1-y}^1 2(x+y)^2dx=\frac{11}{6},$$

$$D(\xi+\eta)=E(\xi+\eta)^2-[E(\xi+\eta)]^2=\frac{11}{6}-\frac{16}{9}=\frac{1}{18}$$

3. 有 10 个人同乘一辆长途汽车，沿途有 20 个车站，每到一个车站时，如果没有人下车，则不停车。设每位乘客在各站下车是等可能的，且各乘客是否下车是

相互独立的，求停车次数的数学期望。

解：设$\xi_i=\begin{cases}1, & 第i站有人下车,\\ 0, & 第i站没人下车,\end{cases}$

则 $P\{\xi_i=0\}=P\{10个人在第\,i\,站都不下车\}=\left(1-\frac{1}{20}\right)^{10}$，

从而 $P\{\xi_i=1\}=1-\left(1-\frac{1}{20}\right)^{10}$

于是 $E\xi_i=0\times P\{\xi_i=0\}+1\times P\{\xi_i=1\}=1-\left(1-\frac{1}{20}\right)^{10}$，

长途汽车停车次数 $\xi=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{20}$，故

$$E\xi=E\xi_1+E\xi_2+\cdots+E\xi_{20}=20\left(1-\left(\frac{19}{20}\right)^{10}\right)$$

4. 某厂生产一种化工产品，这种产品每月的市场需求量 ξ（单位：吨）服从 $[0,5]$ 上的均匀分布。这种产品生产出来后，在市场上每售出 1 吨可获利 6 万元。如果产量大于需求量，则每多生产 1 吨要亏损 4 万元。如果产量小于需求量，则不亏损，但只有生产出来的那一部分产品能获利。问：为了使每月的平均利润达到最大，这种产品的月产量 a 应该定为多少吨？这时，平均每月利润是多少元？

解：因为$\xi\sim U(0,5)$,所以ξ 的概率密度为$\varphi_\xi(x)=\begin{cases}1/5 & 0\le x\le 5\\ 0 & 其他\end{cases}$。

设月产量为 a（$0\le a\le 5$），每月的利润为 η，则

$$\eta=f(\xi)=\begin{cases}6\xi-4(a-\xi)=10\xi-4a & 当\,\xi\le a\,时\\ 6a & 当\,\xi>a\,时\end{cases}。$$

该厂平均每月利润为 $E\eta=Ef(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)dx$

$$=\int_0^a\frac{10x-4a}{5}\mathrm{d}x+\int_a^5\frac{6a}{5}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{5}+6a-\frac{6a^2}{5}=6a-a^2\quad。$$

由 $\frac{\mathrm{d}E\eta}{\mathrm{d}a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(6a-a^2)=6-2a=0$ 可解得 $a=3$（吨）。

可见，要使得每月的平均利润达到最大，这种产品的月产量应该定为 3 吨。这时，平均每月利润是 $E\xi=6a-a^2=6\times3-3^2=9$（万元）。

5. 设随机变量 X,Y 独立同分布，且 $X \sim N(0,1/2)$，求 $D|X-Y|$

解：$Z = X - Y \sim N(0,1)$

$$E|Z| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}; E|Z|^2 = EZ^2 = DZ = 1$$

而

$$D|X-Y| = 1 - \frac{2}{\pi}$$

第十四次作业

一. 选择题：

1. 已知随机变量 X 与 Y 独立同分布，记 $U = X + Y$，$V = X - Y$，则 U 与 V 必 （ D ）

A. 独立　　B. 不独立　　C. 相关　　D.不相关

2. 设随机变量 ξ 与 η 的方差存在且不等于 0，则 $D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta$ 是 ξ 与 η

（ C ）

A. 独立的充要条件　　　　　B. 独立的充分条件，但不是必要条件
C. 不相关的充要条件　　　　D. 不相关的充分条件，但不是必要条件

3. 对于任意两个随机变量X和Y，若$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$，则 （B　）

A）$D(XY)=D(X)\cdot D(Y)$　　　　B）$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

C）X和Y独立　　　　D）X和Y不独立

二. 填空题：

1. 已知$D\xi=4, D\eta=9$，则当$D(\xi-\eta)=12$时，$\rho_{\xi\eta}=$ $\underline{\frac{1}{12}}$；当$\rho_{\xi\eta}=0.4$时，

$D(\xi+\eta)=$ $\underline{17.8}$ 。

2. 设$D(X)=25, D(Y)=36, \rho_{xy}=0.4$，则$D(X+Y)=$ $\underline{85}$。

3. 设二维随机变量$(\xi,\eta)\sim N(1,\ 4;\ 1,\ 4;\ 0.5)$，$\zeta=\xi-\eta$，则$\mathrm{cov}(\xi,\zeta)=$ $\underline{2}$.

三. 计算题

1. 已知随机变量ξ、η的概率分布分别为

ξ	-1	0	1
$P\{\xi=x_i\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

η	0	1
$P\{\eta=y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

而且$P\{\xi\eta=0\}=1$。

(1)求ξ、η的联合概率分布；(2)问ξ、η是否独立？

(3)求$\zeta=\max(\xi,\eta)$的概率分布。

解: 由于$P(\xi\eta=0)=1$,可以得到$P(\xi=-1,\eta=1)=P(\xi=1,\eta=1)=0$,从而

$P(\xi=0,\eta=1)=P(\eta=1)=\frac{1}{2},\quad P(\xi=-1,\eta=0)=P(\xi=-1)=\frac{1}{4},$

$P(\xi=1,\eta=0)=P(\xi=1)=\frac{1}{4},\quad P(\xi=0,\eta=0)=P(\xi=0)-P(\xi=0,\eta=1)=0$,

汇总到联合分布列,即

$\xi \backslash \eta$	0	1
-1	$\frac{1}{4}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0

(2)由于 $P(\xi=i,\eta=j)\neq P(\xi=i)\cdot P(\eta=j)$,故 ξ,η 不独立.

(3) $P(\zeta=0)=P(\xi=-1,\eta=0)+P(\xi=0,\eta=0)=\frac{1}{4}$,

$$P(\zeta=1)=P(\xi=-1,\eta=1)+P(\xi=0,\eta=1)+P(\xi=1,\eta=0)+P(\xi=1,\eta=1)=\frac{3}{4}$$

2．已知二维随机变量 (ξ,η) 的联合概率分布为

$\xi \backslash \eta$	0	1	2	3
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

(1)求 $\rho_{\xi\eta}$；(2) ξ 与 η 是否独立？说明理由。

解: (1)边际分布

ξ	1	3
$P(\xi=i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

η	0	1	2	3
$P(\eta=j)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

于是,

$E\xi = 1\times\frac{3}{4}+3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$, $\quad$ $E\eta = 0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$,

再由联合分布得 $E\xi\eta = 1\times1\times\frac{3}{8}+1\times2\times\frac{3}{8}+3\times3\times\frac{1}{8}=\frac{9}{4}$,

从而 $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\frac{9}{4}-\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=0$, $\quad$ 故 $\rho_{\xi\eta}=0$

(2)由于 $P(\xi=1)\cdot P(\eta=0)=\frac{3}{32}$, 而 $P(\xi=1,\eta=0)=0$, 故 ξ,η 不独立.

3. 设二维随机变量 (ξ,η) 的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}3x & 0<y<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 ξ 与 η 的相关系数。

解: 先分别求出

$E\xi\eta=\int_0^1 dy\int_y^1 3x^2y\,dx=\frac{3}{10}$, $E\xi=\int_0^1 dy\int_y^1 3x^2dx=\frac{3}{4}$, $E\eta=\int_0^1 dy\int_y^1 3xy\,dx=\frac{3}{8}$,

$E\xi^2=\int_0^1 dy\int_y^1 3x^3dx=\frac{3}{5}$, $\quad E\eta^2=\int_0^1 dy\int_y^1 3xy^2dx=\frac{1}{5}$,

$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\frac{3}{10}-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{160}$, $\quad D\xi=\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{80}$, $\quad D\eta=\frac{1}{5}-\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{19}{320}$,

故 $\quad \rho_{\xi\eta}=\frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)}\cdot\sqrt{D(\eta)}}=\frac{3/160}{\sqrt{3/80}\cdot\sqrt{19/320}}=\frac{3}{\sqrt{57}}$.

4. 设两个随机变量 ξ,η , $E\xi=-2, E\eta=4, D\xi=4, D\eta=9, \rho_{\xi\eta}=-0.5$,求

$E(3\xi^2-2\xi\eta+\eta^2-3)$ 。

解

$$\begin{aligned}&E(3\xi^2-2\xi\eta+\eta^2-3)\\&=3E(\xi^2)-2E(\xi\eta)+E(\eta^2)-3\\&=3\left(D\xi+(E\xi)^2\right)-2\left(\mathrm{cov}(\xi,\eta)+E\xi E\eta\right)+\left(D\eta+(E\eta)^2\right)-3\\&=68\end{aligned}$$

5. 设二维随机变量(X,Y)的相关系数为ρ_{XY}，而$\xi = aX + b, \eta = cY + d$，其中$a, b, c, d$为常量，并且已知$ac > 0$，试证$\rho_{\xi\eta} = \rho_{XY}$。

证明：$\rho_{\xi\eta} = \dfrac{\operatorname{cov}(aX + b, cY + d)}{\sqrt{D(aX + b) \cdot D(cY + d)}} = \dfrac{ac\operatorname{cov}(X,Y)}{ac\sqrt{DX \cdot DY}} = \rho_{XY}$