1.1.3 Taylor级数法

设初值问题(1)的解$u(x)$具有$p+1$阶连续导数，利用Taylor公式有

$$u(x_{m+1}) = \sum_{j=0}^{p} \frac{h^j}{j!} u^{(j)}(x_m) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} u^{(p+1)}(\xi_m), \xi_m \in (x_m, x_{m+1}),$$

1.1.3 Taylor级数法

设初值问题(1)的解$u(x)$具有$p+1$阶连续导数，利用Taylor公式有

$$u(x_{m+1}) = \sum_{j=0}^{p} \frac{h^j}{j!} u^{(j)}(x_m) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} u^{(p+1)}(\xi_m), \xi_m \in (x_m, x_{m+1}),$$

记

$$\phi(x, u(x), h) = \sum_{j=1}^{p} \frac{h^{j-1}}{j!} \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} f(x, u(x)),$$

则

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + h\phi(x_m, u(x_m), h) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} u^{(p+1)}(\xi_m)$$

1.1.3 Taylor级数法

设初值问题(1)的解$u(x)$具有$p+1$阶连续导数，利用Taylor公式有

$$u(x_{m+1}) = \sum_{j=0}^{p} \frac{h^j}{j!} u^{(j)}(x_m) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} u^{(p+1)}(\xi_m), \xi_m \in (x_m, x_{m+1}),$$

记

$$\phi(x, u(x), h) = \sum_{j=1}^{p} \frac{h^{j-1}}{j!} \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} f(x, u(x)),$$

则

$$u(x_{m+1}) = u(x_m) + h\phi(x_m, u(x_m), h) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} u^{(p+1)}(\xi_m)$$

舍去最后一项，得到计算公式

$$u_{m+1} = u_m + h\phi(x_m, u_m, h), m = 0, 1, \cdots, \tag{17}$$

- 局部截断误差为$O(h^{p+1})$

- 局部截断误差为$O(h^{p+1})$
- 公式(17)称为p阶Taylor级数法。

- 局部截断误差为$O(h^{p+1})$
- 公式(17)称为p阶Taylor级数法。
- 当$p=1$时，是Euler法。

- 局部截断误差为$O(h^{p+1})$
- 公式(17)称为p阶Taylor级数法。
- 当$p=1$时，是Euler法。
- 由于

$$\frac{d}{dx}f(x,u(x))=f_x+ff_u.$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x,u(x))=f_{xx}+2ff_{xu}+f^2f_{uu}+f_u(f_x+ff_u)$$

- 局部截断误差为$O(h^{p+1})$
- 公式(17)称为p阶Taylor级数法。
- 当$p=1$时，是Euler法。
- 由于

$$\frac{d}{dx}f(x,u(x)) = f_x + ff_u.$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x,u(x)) = f_{xx} + 2ff_{xu} + f^2 f_{uu} + f_u(f_x + ff_u)$$

- 二阶Taylor级数法

$$u_{m+1} = u_m + hf_m + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_u)_m$$

其中$f_m = f(x_m, u_m), ()_m$指括号内的函数在(x_m, u_m)取值。

- 三阶Taylor级数法

$$u_{m+1} = u_m + hf_m + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_u)_m + \frac{h^3}{6}[f_{xx} + 2ff_{xu} + f^2 f_{uu} + f_u(f_x + ff_u)]_m$$

其中$f_m = f(x_m, u_m)$, $(\ )_m$指括号内的函数在(x_m, u_m)取值

- 三阶Taylor级数法

$$u_{m+1}=u_m+hf_m+\frac{h^2}{2}(f_x+ff_u)_m+\frac{h^3}{6}[f_{xx}+2ff_{xu}+f^2f_{uu}+f_u(f_x+ff_u)]_m$$

其中$f_m=f(x_m,u_m)$, $(\ )_m$指括号内的函数在(x_m,u_m)取值

- 理论上只要函数$u(x)$足够光滑，用Taylor级数法可以构造出任意阶的方法。

- 三阶Taylor级数法

$$u_{m+1}=u_m+hf_m+\frac{h^2}{2}(f_x+ff_u)_m+\frac{h^3}{6}[f_{xx}+2ff_{xu}+f^2f_{uu}+f_u(f_x+ff_u)]_m$$

其中$f_m=f(x_m,u_m)$, $(\ \ )_m$指括号内的函数在(x_m,u_m)取值

- 理论上只要函数$u(x)$足够光滑，用Taylor级数法可以构造出任意阶的方法。
- Taylor级数法中导数的计算比较复杂，它很少直接用来求初值问题的解。

- 三阶Taylor级数法

$$u_{m+1}=u_m+hf_m+\frac{h^2}{2}(f_x+ff_u)_m+\frac{h^3}{6}[f_{xx}+2ff_{xu}+f^2f_{uu}+f_u(f_x+ff_u)]_m$$

其中$f_m=f(x_m,u_m)$, $(\ )_m$指括号内的函数在(x_m,u_m)取值

- 理论上只要函数$u(x)$足够光滑，用Taylor级数法可以构造出任意阶的方法。
- Taylor级数法中导数的计算比较复杂，它很少直接用来求初值问题的解。
- Taylor级数法是显式的单步法，可以用它计算线性多步法。

1.1.4 Runge-Kutta 法

- Taylor级数法可以构造高阶单步法，但是增量函数$\phi(x,u,h)$是用f的各阶导数表示，通常不易计算

1.1.4 Runge-Kutta 法

- Taylor级数法可以构造高阶单步法，但是增量函数$\phi(x,u,h)$是用f的各阶导数表示，通常不易计算
- 函数的一阶导数可以用该点附近若干点的函数值近似表示，所以Taylor级数法中的增量函数ϕ改为f在一些点上函数值的组合，然后利用Taylor展开确定待定的系数，使方法达到一定的阶，这就是Runge-Kutta 法的基本思想

1.1.4 Runge-Kutta 法

- Taylor级数法可以构造高阶单步法，但是增量函数$\phi(x,u,h)$是用f的各阶导数表示，通常不易计算
- 函数的一阶导数可以用该点附近若干点的函数值近似表示，所以Taylor级数法中的增量函数ϕ改为f在一些点上函数值的组合，然后利用Taylor展开确定待定的系数，使方法达到一定的阶，这就是Runge-Kutta 法的基本思想
- N级Runge-Kutta 法的一般公式为

$$u_{m+1} = u_m + h\sum_{i=1}^{N} c_i K_i, \tag{18}$$

其中

$$K_1 = f(x_m, u_m), K_i = f(x_m + a_i h, u_m + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j), i = 2, \cdots, N,$$

c_i, a_i, b_{ij} 为待定常数，

1.1.4 Runge-Kutta 法

- Taylor级数法可以构造高阶单步法，但是增量函数$\phi(x,u,h)$是用f的各阶导数表示，通常不易计算
- 函数的一阶导数可以用该点附近若干点的函数值近似表示，所以Taylor级数法中的增量函数ϕ改为f在一些点上函数值的组合，然后利用Taylor展开确定待定的系数，使方法达到一定的阶，这就是Runge-Kutta 法的基本思想
- N级Runge-Kutta 法的一般公式为

$$u_{m+1} = u_m + h\sum_{i=1}^{N} c_i K_i, \tag{18}$$

其中

$$K_1 = f(x_m, u_m), K_i = f(x_m + a_i h, u_m + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j), i = 2, \cdots, N,$$

c_i, a_i, b_{ij} 为待定常数，

- 将K_i在(x_m, u_m)处作Taylor展开，并使局部截断误差的阶尽量的高，从而就确定处这些待定常数应满足的方程。

- $N = 1$,可定出$c_1 = 1$，此时式(18)就是Euler公式

- $N=1$,可定出$c_1=1$，此时式(18)就是Euler公式
- $N=2$，将K_2在(x_m,u_m)处展开，则

$$K_2=f(x_m+a_2h,u_m+hb_{21}K_1)$$

$$=[f+h(a_2f_x+b_{21}K_1f_u)+\frac{h^2}{2}(a_2^2f_{xx}+2a_2b_{21}K_1f_{xu}+b_{21}^2K_1^2f_{uu})]_m+O(h^3)$$

$$=[f+h(a_2f_x+b_{21}ff_u)+\frac{h^2}{2}(a_2^2f_{xx}+2a_2b_{21}ff_{xu}+b_{21}^2f^2f_{uu})]_m+O(h^3)$$

- $N=1$,可定出$c_1=1$，此时式(18)就是Euler公式
- $N=2$，将K_2在(x_m,u_m)处展开，则

$$K_2 = f(x_m + a_2 h, u_m + h b_{21} K_1)$$

$$= [f+h(a_2 f_x+b_{21}K_1 f_u)+\frac{h^2}{2}(a_2^2 f_{xx}+2a_2 b_{21}K_1 f_{xu}+b_{21}^2 K_1^2 f_{uu})]_m+O(h^3)$$

$$= [f+h(a_2 f_x+b_{21} f f_u)+\frac{h^2}{2}(a_2^2 f_{xx}+2a_2 b_{21} f f_{xu}+b_{21}^2 f^2 f_{uu})]_m+O(h^3)$$

- 把上式代入式(18)的右端，

$$u_m + h(c_1 K_1 + c_2 K_2) = u_m + h(c_1 + c_2) f_m$$

$$+h^2 c_2(a_2 f_x+b_{21} f f_u)_m+\frac{h^3}{2}c_2(a_2^2 f_{xx}+2a_2 b_{21} f f_{xu}+b_{21}^2 f^2 f_{uu})_m+O(h^4), \tag{20}$$

- $N=1$,可定出$c_1=1$，此时式(18)就是Euler公式
- $N=2$，将K_2在(x_m,u_m)处展开，则

$$K_2 = f(x_m + a_2 h, u_m + h b_{21} K_1)$$

$$= [f+h(a_2 f_x+b_{21}K_1 f_u)+\frac{h^2}{2}(a_2^2 f_{xx}+2a_2 b_{21}K_1 f_{xu}+b_{21}^2 K_1^2 f_{uu})]_m+O(h^3)$$

$$= [f+h(a_2 f_x+b_{21}f f_u)+\frac{h^2}{2}(a_2^2 f_{xx}+2a_2 b_{21}f f_{xu}+b_{21}^2 f^2 f_{uu})]_m+O(h^3)$$

- 把上式代入式(18)的右端，

$$u_m + h(c_1 K_1 + c_2 K_2) = u_m + h(c_1 + c_2) f_m$$

$$+h^2 c_2(a_2 f_x+b_{21}f f_u)_m+\frac{h^3}{2}c_2(a_2^2 f_{xx}+2a_2 b_{21}f f_{xu}+b_{21}^2 f^2 f_{uu})_m+O(h^4), \tag{20}$$

- 另一方面

$$u(x_{m+1}) = u(x_m)+hu'(x_m)+\frac{h^2}{2}u''(x_m)+\frac{h^3}{6}u'''(x_m)+O(h^4), \quad (21)$$

$$u' = f, u'' = f_x + f f_u, u''' = f_{xx} + 2f f_{xu} + f^2 f_{uu} + (f_x + f f_u) f_u$$

- 根据局部截断误差的定义，为了使误差的阶尽可能高，比较(20)和(21)式中h同次幂项的系数，得可以定出

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ b_{21} = a_2, \\ c_2 a_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

该方程组有无穷多组解，它的任何一组解都对应一个二级Runge-Kutta法，局部截断误差为$O(h^3)$，从而是二阶方法，又称为二阶Runge-Kutta法

- 根据局部截断误差的定义，为了使误差的阶尽可能高，比较(20)和(21)式中h同次幂项的系数，得可以定出

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ b_{21} = a_2, \\ c_2 a_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

该方程组有无穷多组解，它的任何一组解都对应一个二级Runge-Kutta法，局部截断误差为$O(h^3)$，从而是二阶方法，又称为二阶Runge-Kutta法

- 若取$c_1 = c_2 = \frac{1}{2}, b_{21} = a_2 = 1$，则

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{2}(K_1 + K_2), \tag{22}$$

$$K_1 = f(x_m, u_m), K_2 = f(x_m + h, u_m + hK_1)$$

是改进的Euler法。

- 若取$c_1 = 0, c_2 = 1, b_{21} = a_2 = \frac{1}{2}$,则

$$u_{m+1} = u_m + hK_2, K_1 = f(x_m, u_m), K_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, u_m + \frac{h}{2}K_1)$$

称为修正的Euler法

- 若取$c_1=0,c_2=1,b_{21}=a_2=\frac{1}{2}$,则

$$u_{m+1}=u_m+hK_2,K_1=f(x_m,u_m),K_2=f(x_m+\frac{h}{2},u_m+\frac{h}{2}K_1)$$

  称为修正的Euler法

- 比较(20),(21)式，由于(20)中不含$h^3(f_x+ff_u)f_u$，因此二级Runge-Kutta法最多是二阶的
- 要想得到更高阶的方法，即取较大的N,计算更加复杂，三阶Heun方法、三阶Kutta方法、四阶Runge-Kutta方法

- 若取$c_1=0, c_2=1, b_{21}=a_2=\frac{1}{2}$,则

$$u_{m+1}=u_m+hK_2, K_1=f(x_m,u_m), K_2=f(x_m+\frac{h}{2},u_m+\frac{h}{2}K_1)$$

称为修正的Euler法

- 比较(20),(21)式， 由于(20)中不含$h^3(f_x+ff_u)f_u$，因此二级Runge-Kutta法最多是二阶的
- 要想得到更高阶的方法，即取较大的N,计算更加复杂，三阶Heun方法、三阶Kutta方法、四阶Runge-Kutta方法
- Runge-Kutta法是通过函数的Taylor展开构造的，因此高阶高阶Runge-Kutta法要求方程的解具有高阶导数，若解的光滑性较差，不可能得到高精度的数值解

- 若取$c_1 = 0, c_2 = 1, b_{21} = a_2 = \frac{1}{2}$,则

$$u_{m+1} = u_m + hK_2, K_1 = f(x_m, u_m), K_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, u_m + \frac{h}{2}K_1)$$

称为修正的Euler法

- 比较(20),(21)式，由于(20)中不含$h^3(f_x + ff_u)f_u$，因此二级Runge-Kutta法最多是二阶的
- 要想得到更高阶的方法，即取较大的N,计算更加复杂，三阶Heun方法、三阶Kutta方法、四阶Runge-Kutta方法
- Runge-Kutta法是通过函数的Taylor展开构造的，因此高阶高阶Runge-Kutta法要求方程的解具有高阶导数，若解的光滑性较差，不可能得到高精度的数值解
- 记$p^*(N)$是N级Runge-Kutta法所能达到的最高的阶数，已经有人得到下面的结果

$$p^*(N) = \begin{cases} N, & \text{当} N = 1,2,3,4\text{时} \\ N-1, & \text{当} N = 5,6,7\text{时} \\ N-2, & \text{当} N = 8,9\text{时} \end{cases}$$

- 若取$c_1=0, c_2=1, b_{21}=a_2=\frac{1}{2}$,则

$$u_{m+1}=u_m+hK_2, K_1=f(x_m,u_m), K_2=f(x_m+\frac{h}{2},u_m+\frac{h}{2}K_1)$$

称为修正的Euler法

- 比较(20),(21)式， 由于(20)中不含$h^3(f_x+ff_u)f_u$，因此二级Runge-Kutta法最多是二阶的
- 要想得到更高阶的方法，即取较大的N,计算更加复杂，三阶Heun方法、三阶Kutta方法、四阶Runge-Kutta方法
- Runge-Kutta法是通过函数的Taylor展开构造的，因此高阶高阶Runge-Kutta法要求方程的解具有高阶导数，若解的光滑性较差，不可能得到高精度的数值解
- 记$p^*(N)$是N级Runge-Kutta法所能达到的最高的阶数，已经有人得到下面的结果

$$p^*(N)=\begin{cases} N, & \text{当}N=1,2,3,4\text{时} \\ N-1, & \text{当}N=5,6,7\text{时} \\ N-2, & \text{当}N=8,9\text{时} \end{cases}$$

- 当$N\geq 5$时，$p^*(N)<N$，从而四阶Runge-Kutta法是最受欢迎的方法

1.1.5 单步法的收敛性与稳定性

1.1.5 单步法的收敛性与稳定性

- 计算值u_m只是准确值$u(x_m)$的一个近似，差$u(x_m) - u_m$是不是随着步长h的减小而减小，这就是收敛问题。

1.1.5 单步法的收敛性与稳定性

- 计算值u_m只是准确值$u(x_m)$的一个近似，差$u(x_m)-u_m$是不是随着步长h的减小而减小，这就是收敛问题。
- 定义1.3 如果一个单步法满足：对$(x_0,b]$中任意一个固定的点a成立

$$\lim_{h\to 0, x_0+mh=a} u_m = u(a),$$

则称该方法是收敛的。

1.1.5 单步法的收敛性与稳定性

- 计算值u_m只是准确值$u(x_m)$的一个近似，差$u(x_m)-u_m$是不是随着步长h的减小而减小，这就是收敛问题。
- 定义1.3 如果一个单步法满足：对$(x_0,b]$中任意一个固定的点a成立
$$\lim_{h\to 0, x_0+mh=a} u_m = u(a),$$
则称该方法是收敛的。
- 由于$x_0+mh=a$,当$h\to 0$时，$m\to\infty$,也即当步长h减小时，从x_0计算到点a的步数增大，关于收敛性有如下定理

- 定理1.6　若单步法(7)是p阶方法($p > 0$)，且增量函数$\phi(x,u,h)$关于u满足Lipschitz条件，则该方法收敛

- 定理1.6 若单步法(7)是p阶方法($p > 0$)，且增量函数$\phi(x, u, h)$关于u满足Lipschitz条件，则该方法收敛
  - 证：因为方法是p阶的，从而局部截断误差$R_m = O(h^{p+1})$,于是存在正的常数c,使得

$$|R_m| \leq ch^{p+1}$$

- 定理1.6 若单步法(7)是p阶方法($p > 0$)，且增量函数$\phi(x,u,h)$关于u满足Lipschitz条件，则该方法收敛
  - 证：因为方法是p阶的，从而局部截断误差$R_m = O(h^{p+1})$,于是存在正的常数c,使得

$$|R_m| \leq ch^{p+1}$$

  - 设a是$(x_0, b]$中任意一个固定的点，$x_0 + mh = a$,由定理1.2可知整体截断误差满足

$$|u(a) - u_m| \leq \frac{e^{L(a-x_0)} - 1}{L} ch^p \leq \frac{e^{L(b-x_0)} - 1}{L} ch^p$$

- 定理1.6 若单步法(7)是p阶方法($p > 0$)，且增量函数$\phi(x,u,h)$关于u满足Lipschitz条件，则该方法收敛
  - 证：因为方法是p阶的，从而局部截断误差$R_m = O(h^{p+1})$,于是存在正的常数c,使得

$$|R_m| \le ch^{p+1}$$

  - 设a是$(x_0,b]$中任意一个固定的点，$x_0+mh=a$,由定理1.2可知整体截断误差满足

$$|u(a)-u_m| \le \frac{e^{L(a-x_0)}-1}{L}ch^p \le \frac{e^{L(b-x_0)}-1}{L}ch^p$$

  - 其中L是ϕ关于u的Lipschitz常数，于是

$$\lim_{h\to 0, x_0+mh=a} u_m = u(a)$$

  即方法收敛

对N级Runge-Kutta法(18),增量函数为

$$\phi(x,u,h)=\sum_{i=1}^{N}c_iK_i$$

其中

$$K_1=f(x,u),K_i=f(x+a_ih,u+h\sum_{j=1}^{i-1}b_{ij}K_j),i=2,\cdots,N$$

对N级Runge-Kutta法(18),增量函数为

$$\phi(x,u,h)=\sum_{i=1}^{N}c_iK_i$$

其中

$$K_1=f(x,u),K_i=f(x+a_ih,u+h\sum_{j=1}^{i-1}b_{ij}K_j),i=2,\cdots,N$$

- 当函数$f(x,u)$关于u满足Lipschitz条件，用数学归纳法可以证明所有的K_i关于u都满足Lipschitz条件，从而$\phi(x,u,h)$关于u也满足Lipschitz条件

对N级Runge-Kutta法(18),增量函数为

$$\phi(x,u,h)=\sum_{i=1}^{N}c_iK_i$$

其中

$$K_1=f(x,u),K_i=f(x+a_ih,u+h\sum_{j=1}^{i-1}b_{ij}K_j),i=2,\cdots,N$$

- 当函数$f(x,u)$关于u满足Lipschitz条件，用数学归纳法可以证明所有的K_i关于u都满足Lipschitz条件，从而$\phi(x,u,h)$关于u也满足Lipschitz条件
- 由定理1.6可知Runge-Kutta法收敛，Euler法和改进的Euler法收敛。

单步法的稳定性：
初值一个很小的改变是否引起数值解也只有很小的改变，这就是方法的稳定性问题，更确切的说是数值解关于初值的连续依赖性问题。

单步法的稳定性：
初值一个很小的改变是否引起数值解也只有很小的改变，这就是方法的稳定性问题，更确切的说是数值解关于初值的连续依赖性问题。

- 定义1.4　若一个单步法满足：存在正常数c和h_0使得用任意步长$h \in (0, h_0]$以及任意两个初值u_0和v_0计算得到的两组数值$u_1, u_2, \cdots, u_n$和$v_1, v_2, \cdots, v_n$成立$\max\limits_{1\leq m\leq n} |u_m - v_n| \leq c|u_0 - v_0|$则称该方法是稳定的，其中$n = [\frac{b-x_0}{h}]$.

Home Page

Title Page

Go Back

Full Screen

Close

Quit

单步法的稳定性：
初值一个很小的改变是否引起数值解也只有很小的改变，这就是方法的稳定性问题，更确切的说是数值解关于初值的连续依赖性问题。

- 定义1.4 若一个单步法满足：存在正常数c和h_0使得用任意步长$h \in (0, h_0]$以及任意两个初值u_0和v_0计算得到的两组数值$u_1, u_2, \cdots, u_n$和$v_1, v_2, \cdots, v_n$成立$\max\limits_{1\leq m\leq n} |u_m - v_n| \leq c|u_0 - v_0|$ 则称该方法是稳定的，其中$n = [\frac{b-x_0}{h}]$.
- 定理1.7 若增量函数$\phi(x, u, h)$是关于u满足Lipschitz条件，则单步法(7)是稳定的。

单步法的稳定性：
初值一个很小的改变是否引起数值解也只有很小的改变，这就是方法的稳定性问题，更确切的说是数值解关于初值的连续依赖性问题。

- 定义1.4 若一个单步法满足：存在正常数c和h_0使得用任意步长$h \in (0, h_0]$以及任意两个初值u_0和v_0计算得到的两组数值$u_1, u_2, \cdots, u_n$和$v_1, v_2, \cdots, v_n$成立$\max\limits_{1 \le m \le n} |u_m - v_n| \le c|u_0 - v_0|$ 则称该方法是稳定的，其中$n = [\frac{b-x_0}{h}]$.
- 定理1.7 若增量函数$\phi(x, u, h)$是关于u满足Lipschitz条件，则单步法(7)是稳定的。
  - 证明：设u_0, v_0是两个不同的初值，由(7)计算得到的数值分别记为u_m, v_m,则

$$u_m = u_{m-1} + h\phi(x_{m-1}, u_{m-1}, h)$$
$$v_m = v_{m-1} + h\phi(x_{m-1}, v_{m-1}, h)$$

单步法的稳定性：
初值一个很小的改变是否引起数值解也只有很小的改变，这就是方法的稳定性问题，更确切的说是数值解关于初值的连续依赖性问题。

- 定义1.4 若一个单步法满足：存在正常数c和h_0使得用任意步长$h \in (0, h_0]$以及任意两个初值u_0和v_0计算得到的两组数值$u_1, u_2, \cdots, u_n$和$v_1, v_2, \cdots, v_n$成立$\max\limits_{1\leq m\leq n} |u_m - v_n| \leq c|u_0 - v_0|$ 则称该方法是稳定的，其中$n = [\frac{b-x_0}{h}]$.
- 定理1.7 若增量函数$\phi(x, u, h)$是关于u满足Lipschitz条件，则单步法(7)是稳定的。
  - 证明：设u_0, v_0是两个不同的初值，由(7)计算得到的数值分别记为u_m, v_m,则

$$u_m = u_{m-1} + h\phi(x_{m-1}, u_{m-1}, h)$$
$$v_m = v_{m-1} + h\phi(x_{m-1}, v_{m-1}, h)$$

  - 记$e_m = u_m - v_m$,则

$$|e_m| \leq (1+hL)|e_{m-1}| \leq (1+hL)^m|e_0| \leq e^{mhL}|e_0| \leq e^{L(b-x_0)}|e_0|$$

由定义1.4可知方法是稳定的

单步法的稳定性：
初值一个很小的改变是否引起数值解也只有很小的改变，这就是方法的稳定性问题，更确切的说是数值解关于初值的连续依赖性问题。

- 定义1.4 若一个单步法满足：存在正常数c和h_0使得用任意步长$h \in (0, h_0]$以及任意两个初值u_0和v_0计算得到的两组数值$u_1, u_2, \cdots, u_n$和$v_1, v_2, \cdots, v_n$成立$\max\limits_{1\le m\le n} |u_m - v_n| \le c|u_0 - v_0|$ 则称该方法是稳定的，其中$n = [\frac{b-x_0}{h}]$.
- 定理1.7 若增量函数$\phi(x, u, h)$是关于u满足Lipschitz条件，则单步法(7)是稳定的。
  - 证明：设u_0, v_0是两个不同的初值，由(7)计算得到的数值分别记为u_m, v_m,则

$$u_m = u_{m-1} + h\phi(x_{m-1}, u_{m-1}, h)$$
$$v_m = v_{m-1} + h\phi(x_{m-1}, v_{m-1}, h)$$

  - 记$e_m = u_m - v_m$,则

$$|e_m| \le (1+hL)|e_{m-1}| \le (1+hL)^m|e_0| \le e^{mhL}|e_0| \le e^{L(b-x_0)}|e_0|$$

由定义1.4可知方法是稳定的

- Euler法、改进的Euler法和Runge-Kutta法都是稳定的

- Euler法、改进的Euler法和Runge-Kutta法都是稳定的
- 在稳定性定义中没有考虑计算过程中的舍入误差。

- Euler法、改进的Euler法和Runge-Kutta法都是稳定的
- 在稳定性定义中没有考虑计算过程中的舍入误差。
- 如果每一步产生的舍入误差在以后的过程中不断传播放大，那么最后得到的结果可能很差。

- Euler法、改进的Euler法和Runge-Kutta法都是稳定的
- 在稳定性定义中没有考虑计算过程中的舍入误差。
- 如果每一步产生的舍入误差在以后的过程中不断传播放大，那么最后得到的结果可能很差。
- 我们希望任何一步产生的误差(包括初值的误差)在以后过程中逐渐减少，这种方法称为绝对稳定。

- Euler法、改进的Euler法和Runge-Kutta法都是稳定的
- 在稳定性定义中没有考虑计算过程中的舍入误差。
- 如果每一步产生的舍入误差在以后的过程中不断传播放大，那么最后得到的结果可能很差。
- 我们希望任何一步产生的误差(包括初值的误差)在以后过程中逐渐减少，这种方法称为绝对稳定。
- 绝对稳定不仅与函数f有关，还与步长h有关

- Euler法、改进的Euler法和Runge-Kutta法都是稳定的
- 在稳定性定义中没有考虑计算过程中的舍入误差。
- 如果每一步产生的舍入误差在以后的过程中不断传播放大，那么最后得到的结果可能很差。
- 我们希望任何一步产生的误差(包括初值的误差)在以后过程中逐渐减少，这种方法称为绝对稳定。
- 绝对稳定不仅与函数f有关，还与步长h有关
- 我们讨论方法的稳定性时仅考虑下面的模型问题

- Euler法、改进的Euler法和Runge-Kutta法都是稳定的
- 在稳定性定义中没有考虑计算过程中的舍入误差。
- 如果每一步产生的舍入误差在以后的过程中不断传播放大，那么最后得到的结果可能很差。
- 我们希望任何一步产生的误差(包括初值的误差)在以后过程中逐渐减少，这种方法称为绝对稳定。
- 绝对稳定不仅与函数f有关，还与步长h有关
- 我们讨论方法的稳定性时仅考虑下面的模型问题

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \mu u, \qquad x_0 < x \le b \\ u(x_0) = u_0, \end{cases} \tag{29}$$

- Euler法、改进的Euler法和Runge-Kutta法都是稳定的
- 在稳定性定义中没有考虑计算过程中的舍入误差。
- 如果每一步产生的舍入误差在以后的过程中不断传播放大，那么最后得到的结果可能很差。
- 我们希望任何一步产生的误差(包括初值的误差)在以后过程中逐渐减少，这种方法称为绝对稳定。
- 绝对稳定不仅与函数f有关，还与步长h有关
- 我们讨论方法的稳定性时仅考虑下面的模型问题

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \mu u, & x_0 < x \leq b \\ u(x_0) = u_0, \end{cases} \tag{29}$$

- 定义1.5 对初值问题(29)记$\bar{h} = \mu h$,若一个数值方法在某一步由计算产生的误差在以后各步中逐渐减少，则称该方法关于$\bar{h}$是绝对稳定的。

- Euler法、改进的Euler法和Runge-Kutta法都是稳定的
- 在稳定性定义中没有考虑计算过程中的舍入误差。
- 如果每一步产生的舍入误差在以后的过程中不断传播放大，那么最后得到的结果可能很差。
- 我们希望任何一步产生的误差(包括初值的误差)在以后过程中逐渐减少，这种方法称为绝对稳定。
- 绝对稳定不仅与函数f有关，还与步长h有关
- 我们讨论方法的稳定性时仅考虑下面的模型问题

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \mu u, & x_0 < x \leq b \\ u(x_0) = u_0, \end{cases} \tag{29}$$

- 定义1.5 对初值问题(29)记$\bar{h} = \mu h$,若一个数值方法在某一步由计算产生的误差在以后各步中逐渐减少，则称该方法关于$\bar{h}$是绝对稳定的。
- 复平面上所有这样的$\bar{h}$组成的区域称为该方法的绝对稳定区域，

- Euler法、改进的Euler法和Runge-Kutta法都是稳定的
- 在稳定性定义中没有考虑计算过程中的舍入误差。
- 如果每一步产生的舍入误差在以后的过程中不断传播放大，那么最后得到的结果可能很差。
- 我们希望任何一步产生的误差(包括初值的误差)在以后过程中逐渐减少，这种方法称为绝对稳定。
- 绝对稳定不仅与函数f有关，还与步长h有关
- 我们讨论方法的稳定性时仅考虑下面的模型问题

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \mu u, & x_0 < x \le b \\ u(x_0) = u_0, \end{cases} \tag{29}$$

- 定义1.5 对初值问题(29)记$\bar{h} = \mu h$,若一个数值方法在某一步由计算产生的误差在以后各步中逐渐减少，则称该方法关于$\bar{h}$是绝对稳定的。
- 复平面上所有这样的$\bar{h}$组成的区域称为该方法的绝对稳定区域，
- 下面只讨论μ是实数的情况，并称绝对稳定区域为绝对稳定区间。

考虑Euler法的绝对稳定区域，对于模型(29)，Euler法的计算公式是

$$u_{m+1} = u_m + h\mu u_m = (1 + \bar{h})u_m, \tag{31}$$

考虑Euler法的绝对稳定区域，对于模型(29)，Euler法的计算公式是

$$u_{m+1} = u_m + h\mu u_m = (1+\bar{h})u_m, \tag{31}$$

从u_{m-1}出发，假设在第m步按公式(31)计算得到的值记为$\bar{u}_m$(已考虑舍入误差),在此基础上下一步的值$\bar{u}_{m+1}$(该步及以后不考虑舍入误差)满足

$$\bar{u}_{m+1} = (1+\bar{h})\bar{u}_m, \tag{32}$$

考虑Euler法的绝对稳定区域，对于模型(29)，Euler法的计算公式是

$$u_{m+1} = u_m + h\mu u_m = (1+\bar{h})u_m, \tag{31}$$

从u_{m-1}出发，假设在第m步按公式(31)计算得到的值记为$\bar{u}_m$(已考虑舍入误差),在此基础上下一步的值$\bar{u}_{m+1}$(该步及以后不考虑舍入误差)满足

$$\bar{u}_{m+1} = (1+\bar{h})\bar{u}_m, \tag{32}$$

记$e_k = u_k - \bar{u}_k, k \geq m$. 两式相减得

$$e_{m+1} = (1+\bar{h})e_m, \tag{33}$$

考虑Euler法的绝对稳定区域，对于模型(29)，Euler法的计算公式是

$$u_{m+1} = u_m + h\mu u_m = (1+\bar{h})u_m, \tag{31}$$

从u_{m-1}出发，假设在第m步按公式(31)计算得到的值记为$\bar{u}_m$(已考虑舍入误差),在此基础上下一步的值$\bar{u}_{m+1}$(该步及以后不考虑舍入误差)满足

$$\bar{u}_{m+1} = (1+\bar{h})\bar{u}_m, \tag{32}$$

记$e_k = u_k - \bar{u}_k, k \geq m$. 两式相减得

$$e_{m+1} = (1+\bar{h})e_m, \tag{33}$$

递推下去有

$$e_{m+n} = (1+\bar{h})^n e_m, n = 1, 2, \cdots .$$

考虑Euler法的绝对稳定区域，对于模型(29)，Euler法的计算公式是

$$u_{m+1} = u_m + h\mu u_m = (1+\bar{h})u_m, \tag{31}$$

从u_{m-1}出发，假设在第m步按公式(31)计算得到的值记为$\bar{u}_m$(已考虑舍入误差),在此基础上下一步的值$\bar{u}_{m+1}$(该步及以后不考虑舍入误差)满足

$$\bar{u}_{m+1} = (1+\bar{h})\bar{u}_m, \tag{32}$$

记$e_k = u_k - \bar{u}_k, k \geq m$. 两式相减得

$$e_{m+1} = (1+\bar{h})e_m, \tag{33}$$

递推下去有

$$e_{m+n} = (1+\bar{h})^n e_m, n = 1, 2, \cdots .$$

由此可见，当且仅当

$$|1+\bar{h}| < 1$$

时，第m步由计算产生的误差$|e_m|$在以后各步中逐渐减少，从而得到Euler法的绝对稳定区间$(-2, 0)$.

- 比较式(33)和式(31),误差e_m所满足的等式与方法的计算公式相同, 这个结论对其他方法也适用

- 比较式(33)和式(31),误差e_m所满足的等式与方法的计算公式相同, 这个结论对其他方法也适用
- 向后的Euler法

$$u_{m+1} = u_m + h\mu u_{m+1}$$

于是

$$u_{m+1} = \frac{1}{1-\bar{h}} u_m, e_{m+1} = \frac{1}{1-\bar{h}} e_m$$

当且仅当

$$|1-\bar{h}| > 1$$

时， 向后Euler法是绝对稳定的。所以它的绝对稳定区间$(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

- 比较式(33)和式(31),误差e_m所满足的等式与方法的计算公式相同, 这个结论对其他方法也适用
- 向后的Euler法

$$u_{m+1} = u_m + h\mu u_{m+1}$$

于是

$$u_{m+1} = \frac{1}{1-\bar{h}} u_m, e_{m+1} = \frac{1}{1-\bar{h}} e_m$$

当且仅当

$$|1-\bar{h}| > 1$$

时， 向后Euler法是绝对稳定的。所以它的绝对稳定区间$(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

- 类似地，可得梯形法的绝对稳定区间$(-\infty, 0)$

- 比较式(33)和式(31),误差e_m所满足的等式与方法的计算公式相同, 这个结论对其他方法也适用
- 向后的Euler法

$$u_{m+1} = u_m + h\mu u_{m+1}$$

于是

$$u_{m+1} = \frac{1}{1-\bar{h}} u_m, e_{m+1} = \frac{1}{1-\bar{h}} e_m$$

当且仅当

$$|1-\bar{h}| > 1$$

时，向后Euler法是绝对稳定的。所以它的绝对稳定区间$(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

- 类似地，可得梯形法的绝对稳定区间$(-\infty, 0)$

- 对于p阶Taylor级数法，从式(16)和式(29)可知增量函数为

$$\phi(x,u,h) = \mu\sum_{j=1}^{p}\frac{\bar{h}^{j-1}}{j!}u$$

于是计算公式是

$$u_{m+1} = (\sum_{j=0}^{p}\frac{\bar{h}^{j}}{j!})u_m$$

当且仅当

$$|\sum_{j=0}^{p}\frac{\bar{h}^{j}}{j!}| < 1$$

时，p阶Taylor级数法是绝对稳定的

- 对于p阶Taylor级数法，从式(16)和式(29)可知增量函数为

$$\phi(x,u,h)=\mu\sum_{j=1}^{p}\frac{\bar{h}^{j-1}}{j!}u$$

于是计算公式是

$$u_{m+1}=(\sum_{j=0}^{p}\frac{\bar{h}^{j}}{j!})u_m$$

当且仅当

$$|\sum_{j=0}^{p}\frac{\bar{h}^{j}}{j!}|<1$$

时，p阶Taylor级数法是绝对稳定的

- 二阶Runge-Kutta法的绝对稳定区间$(-2,0)$,三阶Runge-Kutta$(-2.513,0)$,四阶Runge-Kutta$(-2.785,0)$

-

方法	绝对稳定区间	方法	绝对稳定区间
Eulre方法	$(-2,0)$	二阶Runge-Kutta法	$(-2,0)$
三阶Runge-Kutta法	$(-2.513,0)$	四阶Runge-Kutta法	$(-2.785,0)$
向后的Euler法	$(-\infty,0)\cup(2,\infty)$	梯形法	$(-\infty,0)$

- 若一个方法的绝对稳定区域比较大，则该方法的绝对稳定性较好。

-

方法	绝对稳定区间	方法	绝对稳定区间
Eulre方法	$(-2,0)$	二阶Runge-Kutta法	$(-2,0)$
三阶Runge-Kutta法	$(-2.513,0)$	四阶Runge-Kutta法	$(-2.785,0)$
向后的Euler法	$(-\infty,0)\cup(2,\infty)$	梯形法	$(-\infty,0)$

- 若一个方法的绝对稳定区域比较大，则该方法的绝对稳定性较好。
- 隐式方法的绝对稳定性比显式方法好

-

方法	绝对稳定区间	方法	绝对稳定区间
Eulre方法	$(-2,0)$	二阶Runge-Kutta法	$(-2,0)$
三阶Runge-Kutta法	$(-2.513,0)$	四阶Runge-Kutta法	$(-2.785,0)$
向后的Euler法	$(-\infty,0)\cup(2,\infty)$	梯形法	$(-\infty,0)$

- 若一个方法的绝对稳定区域比较大，则该方法的绝对稳定性较好。
- 隐式方法的绝对稳定性比显式方法好
- 对Runge-Kutta法，阶越高绝对稳定性越好

•

方法	绝对稳定区间	方法	绝对稳定区间
Eulre方法	$(-2,0)$	二阶Runge-Kutta法	$(-2,0)$
三阶Runge-Kutta法	$(-2.513,0)$	四阶Runge-Kutta法	$(-2.785,0)$
向后的Euler法	$(-\infty,0)\cup(2,\infty)$	梯形法	$(-\infty,0)$

- 若一个方法的绝对稳定区域比较大，则该方法的绝对稳定性较好。
- 隐式方法的绝对稳定性比显式方法好
- 对Runge-Kutta法，阶越高绝对稳定性越好
- 绝对稳定区间都位于负实轴部分(向后Euler法除外)

-

方法	绝对稳定区间	方法	绝对稳定区间
Eulre方法	$(-2,0)$	二阶Runge-Kutta法	$(-2,0)$
三阶Runge-Kutta法	$(-2.513,0)$	四阶Runge-Kutta法	$(-2.785,0)$
向后的Euler法	$(-\infty,0)\cup(2,\infty)$	梯形法	$(-\infty,0)$

- 若一个方法的绝对稳定区域比较大，则该方法的绝对稳定性较好。
- 隐式方法的绝对稳定性比显式方法好
- 对Runge-Kutta法，阶越高绝对稳定性越好
- 绝对稳定区间都位于负实轴部分(向后Euler法除外)
- 当$\mu > 0$时，这些方法不是绝对稳定，这时模型问题(29)的解$u = u_0 e^{\mu(x-x_0)}$随着x的增加而迅速增大，问题本身是不稳定的，但也不能认为这种问题就无法可解了。由于方法是收敛的，因此数值解也必然随着x的增加而快速增大，只要误差增长的速度低于解的增长速度，数值解的相对误差就不会大，因而结果仍旧可以用。

作业：

7、证明改进的Euler法的绝对稳定区间是(-2,0)

9、用Taylor展开确定下面多步法中的系数，使其阶尽可能高，并求出局部截断误差的主项

(1)$u_{m+1} = \alpha_1 u_m + \alpha_2 u_{m-1} + h\beta_0 f_{m+1}$

11、求公式

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{4}[f(x_m, u_m) + 3f(x_m + \frac{2}{3}h, u_m + \frac{2}{3}hf(x_m, u_m))]$$

的阶和局部截断误差