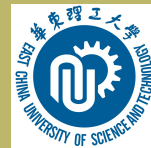


第四章 抛物型方程的差分法



Home Page

Title Page



Page 1 of 19

Go Back

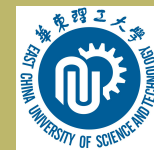
Full Screen

Close

Quit

第四章 抛物型方程的差分法

偏微分方程按是否与时间有关分成两类：



Home Page

Title Page



Page 1 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



第四章 抛物型方程的差分法

偏微分方程按是否与时间有关分成两类：

- 驻定问题：不随时间 t 改变，例如椭圆型方程

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 1 of 19

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



第四章 抛物型方程的差分法

偏微分方程按是否与时间有关分成两类：

- 驻定问题：不随时间 t 改变，例如椭圆型方程
- 非驻定方程：与时间 t 有关，例如：抛物型方程、双曲型方程。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



第四章 抛物型方程的差分法

偏微分方程按是否与时间有关分成两类：

- 驻定问题：不随时间 t 改变，例如椭圆型方程
- 非驻定方程：与时间 t 有关，例如：抛物型方程、双曲型方程。
- 本章主要讨论非驻定问题的差分法

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 1 of 19

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



第四章 抛物型方程的差分法

偏微分方程按是否与时间有关分成两类：

- 驻定问题：不随时间 t 改变，例如椭圆型方程
- 非驻定方程：与时间 t 有关，例如：抛物型方程、双曲型方程。
- 本章主要讨论非驻定问题的差分法

★4.1 一维抛物型方程的差分格式

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

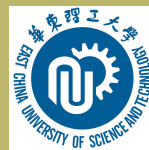
Page 1 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



第四章 抛物型方程的差分法

偏微分方程按是否与时间有关分成两类：

- 驻定问题：不随时间 t 改变，例如椭圆型方程
- 非驻定方程：与时间 t 有关，例如：抛物型方程、双曲型方程。
- 本章主要讨论非驻定问题的差分法

★4.1 一维抛物型方程的差分格式

最简单的抛物型方程是一维线性方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + d(x, t)u = f(x, t), (x, t) \in \Omega. \quad (1)$$

在 Ω 内，函数 a 恒正， $d \geq 0$ 。通常考虑下列两种定解问题：

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 初值问题(或称Cauchy (柯西) 问题) Ω 为带状区域 $\{(x, t) | -\infty < x < \infty, 0 < t < T\}$,求 $u(x, t)$ 满足方程(1)和初始条件

$$u(x, 0) = \phi(x), -\infty < x < \infty. \quad (2)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 初值问题(或称Cauchy (柯西) 问题) Ω 为带状区域 $\{(x, t) | -\infty < x < \infty, 0 < t < T\}$,求 $u(x, t)$ 满足方程(1)和初始条件

$$u(x, 0) = \phi(x), -\infty < x < \infty. \quad (2)$$

- 初边值问题(或称混合问题) Ω 为带状区域 $\{(x, t) | 0 < x < l, 0 < t < T\}$,求 $u(x, t)$ 满足方程(1)和初始条件

$$u(x, 0) = \phi(x), -\infty < x < \infty. \quad (3)$$

以及边界条件

$$\alpha_1(t) \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \alpha_0(t) u(0, t) = \alpha_2(t), \quad (4)$$

$$\beta_1(t) \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \beta_0(t) u(l, t) = \beta_2(t). \quad (5)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 2 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 随着系数 $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ 的改变可构成不同类型的边界条件，但必须满足条件

$$\alpha_0(t) \geq 0, \alpha_1(t) \leq 0, |\alpha_0| + |\alpha_1| > 0,$$

$$\beta_0(t) \geq 0, \beta_1(t) \leq 0, |\beta_0| + |\beta_1| > 0,$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 3 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 随着系数 $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ 的改变可构成不同类型的边界条件，但必须满足条件

$$\alpha_0(t) \geq 0, \alpha_1(t) \leq 0, |\alpha_0| + |\alpha_1| > 0,$$

$$\beta_0(t) \geq 0, \beta_1(t) \leq 0, |\beta_0| + |\beta_1| > 0,$$

- 当 $\alpha_1(t) = \beta_1(t) = 0$, 则成为第一边界条件

$$u(0, t) = \alpha(t), u(l, t) = \beta(t), 0 \leq t \leq T. \quad (6)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 3 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 随着系数 $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ 的改变可构成不同类型的边界条件，但必须满足条件

$$\alpha_0(t) \geq 0, \alpha_1(t) \leq 0, |\alpha_0| + |\alpha_1| > 0,$$

$$\beta_0(t) \geq 0, \beta_1(t) \leq 0, |\beta_0| + |\beta_1| > 0,$$

- 当 $\alpha_1(t) = \beta_1(t) = 0$, 则成为第一边界条件

$$u(0, t) = \alpha(t), u(l, t) = \beta(t), 0 \leq t \leq T. \quad (6)$$

- 假设 $\alpha(0) = \phi(0), \beta(0) = \phi(l)$, 设 f 和 ϕ 充分光滑，则上述问题有惟一充分光滑的解。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 3 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



★4.1.1 常系数热传导方程的差分格式

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 4 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



★4.1.1 常系数热传导方程的差分格式

在(1)中设 a 为正的常数, $d \equiv 0$, 则得到常系数的一维热传导方程

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, (x, t) \in \Omega. \quad (7)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 4 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



★4.1.1 常系数热传导方程的差分格式

在(1)中设 a 为正的常数, $d \equiv 0$, 则得到常系数的一维热传导方程

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, (x, t) \in \Omega. \quad (7)$$

- 在研究分子扩散过程时会遇到类似的方程, 因此方程(7)也称为扩散方程。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

★4.1.1 常系数热传导方程的差分格式

在(1)中设 a 为正的常数, $d \equiv 0$, 则得到常系数的一维热传导方程

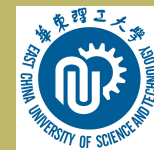
$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, (x, t) \in \Omega. \quad (7)$$

- 在研究分子扩散过程时会遇到类似的方程, 因此方程(7)也称为扩散方程。
- 当 $f = 0$ 时, 对初始条件(2), 此问题有解析解

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4at}\right] \phi(\xi) d\xi.$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 4 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

用差分方法求解上述问题



Home Page

Title Page



Page 5 of 19

Go Back

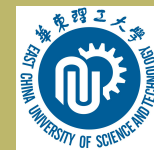
Full Screen

Close

Quit

用差分方法求解上述问题

- 先对区域进行离散：



Home Page

Title Page



Page 5 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



用差分方法求解上述问题

- 先对区域进行离散：

- 空间步长 $h = \frac{l}{N}$, 时间步长 $\tau, \tau < T$, 作两族平行直线

$$x = x_j = jh, j = 1, 2, \dots, N.$$

$$t = t_k = k\tau, k = 0, 1, 2, \dots, M = \left\lceil \frac{T}{\tau} \right\rceil$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 5 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



用差分方法求解上述问题

- 先对区域进行离散：

- 空间步长 $h = \frac{l}{N}$, 时间步长 $\tau, \tau < T$, 作两族平行直线

$$x = x_j = jh, j = 1, 2, \dots, N.$$

$$t = t_k = k\tau, k = 0, 1, 2, \dots, M = \left\lceil \frac{T}{\tau} \right\rceil$$

- 这两族直线将 Ω 分割成小矩形网格，交点 (x_j, t_k) 称为节点，记为 (j, k) .

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 5 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

用差分方法求解上述问题

- 先对区域进行离散:

- 空间步长 $h = \frac{l}{N}$, 时间步长 $\tau, \tau < T$, 作两族平行直线

$$x = x_j = jh, j = 1, 2, \dots, N.$$

$$t = t_k = k\tau, k = 0, 1, 2, \dots, M = \left[\frac{T}{\tau}\right]$$

- 这两族直线将 Ω 分割成小矩形网格, 交点 (x_j, t_k) 称为节点, 记为 (j, k) .
 - 在 $x = 0, x = l, t = 0$ 上的节点称为边界节点。

用差分方法求解上述问题

- 先对区域进行离散:

- 空间步长 $h = \frac{l}{N}$, 时间步长 $\tau, \tau < T$, 作两族平行直线

$$x = x_j = jh, j = 1, 2, \dots, N.$$

$$t = t_k = k\tau, k = 0, 1, 2, \dots, M = \left[\frac{T}{\tau}\right]$$

- 这两族直线将 Ω 分割成小矩形网格, 交点 (x_j, t_k) 称为节点, 记为 (j, k) .
 - 在 $x = 0, x = l, t = 0$ 上的节点称为边界节点.
 - 其余的称为内节点(简称内点)

用差分方法求解上述问题

- 先对区域进行离散:

- 空间步长 $h = \frac{l}{N}$, 时间步长 τ , $\tau < T$, 作两族平行直线

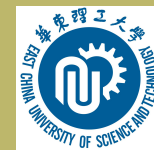
$$x = x_j = jh, j = 1, 2, \dots, N.$$

$$t = t_k = k\tau, k = 0, 1, 2, \dots, M = \left[\frac{T}{\tau}\right]$$

- 这两族直线将 Ω 分割成小矩形网格, 交点 (x_j, t_k) 称为节点, 记为 (j, k) .
 - 在 $x = 0, x = l, t = 0$ 上的节点称为边界节点.
 - 其余的称为内节点(简称内点)
 - 我们的目的: 求出方程定解问题的真解在 (j, k) 处的解 $u(x_j, t_k)$ 的近似值 u_j^k , 即定义在节点上的网函数 u_j^k .

对方程用直接差分法进行离散，用适当的差商代替方程中的偏微商，就可得到以下几种最简差分格式

- (1).古典显格式



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 6 of 19

Go Back

Full Screen

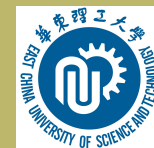
Close

Quit

对方程用直接差分法进行离散，用适当的差商代替方程中的偏微商，就可得到以下几种最简差分格式

- (1).古典显格式

- 在节点 (j, k) 上，用 $u(x_j, t_k)$ 在 t 方向的向前差商代替 $\frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial t}$,



Home Page

Title Page



Page 6 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

对方程用直接差分法进行离散，用适当的差商代替方程中的偏微商，就可得到以下几种最简差分格式

• (1). 古典显格式

- 在节点 (j, k) 上，用 $u(x_j, t_k)$ 在 t 方向的向前差商代替 $\frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial t}$,
- 用 $u(x_j, t_k)$ 在 x 方向的二阶中心差商代替 $\frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2}$ ，即得古典显格式

$$L_h^{(1)} u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} = f_j^k, \quad (8)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1, k = 0, 1, \dots, M-1.$$

式中 $f_j^k = f(x_j, t_k)$

对方程用直接差分法进行离散，用适当的差商代替方程中的偏微商，就可得到以下几种最简差分格式

• (1). 古典显格式

- 在节点 (j, k) 上，用 $u(x_j, t_k)$ 在 t 方向的向前差商代替 $\frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial t}$,
- 用 $u(x_j, t_k)$ 在 x 方向的二阶中心差商代替 $\frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2}$ ，即得古典显格式

$$L_h^{(1)} u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} = f_j^k, \quad (8)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1, k = 0, 1, \dots, M-1.$$

式中 $f_j^k = f(x_j, t_k)$

- $r = \frac{a\tau}{h^2}$ 称为网比，差分方程(8)又可以写成以下便于计算的格式

$$u_j^{k+1} = ru_{j+1}^k + (1 - 2r)u_j^k + ru_{j-1}^k + \tau f_j^k. \quad (9)$$

对方程用直接差分法进行离散，用适当的差商代替方程中的偏微商，就可得到以下几种最简差分格式

• (1). 古典显格式

- 在节点 (j, k) 上，用 $u(x_j, t_k)$ 在 t 方向的向前差商代替 $\frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial t}$,
- 用 $u(x_j, t_k)$ 在 x 方向的二阶中心差商代替 $\frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2}$ ，即得古典显格式

$$L_h^{(1)} u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} = f_j^k, \quad (8)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1, k = 0, 1, \dots, M-1.$$

式中 $f_j^k = f(x_j, t_k)$

- $r = \frac{a\tau}{h^2}$ 称为网比，差分方程(8)又可以写成以下便于计算的格式

$$u_j^{k+1} = ru_{j+1}^k + (1 - 2r)u_j^k + ru_{j-1}^k + \tau f_j^k. \quad (9)$$

- 第 $k+1$ 层的值由第 k 层的值明显表示出来，无需解方程组，如此的差分格式成为显格式。

对方程用直接差分法进行离散，用适当的差商代替方程中的偏微商，就可得到以下几种最简差分格式

• (1). 古典显格式

- 在节点 (j, k) 上，用 $u(x_j, t_k)$ 在 t 方向的向前差商代替 $\frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial t}$,
- 用 $u(x_j, t_k)$ 在 x 方向的二阶中心差商代替 $\frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2}$ ，即得古典显格式

$$L_h^{(1)} u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} = f_j^k, \quad (8)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1, k = 0, 1, \dots, M-1.$$

式中 $f_j^k = f(x_j, t_k)$

- $r = \frac{a\tau}{h^2}$ 称为网比，差分方程(8)又可以写成以下便于计算的格式

$$u_j^{k+1} = ru_{j+1}^k + (1 - 2r)u_j^k + ru_{j-1}^k + \tau f_j^k. \quad (9)$$

- 第 $k+1$ 层的值由第 k 层的值明显表示出来，无需解方程组，如此的差分格式成为显格式。



- 由Taylor展开，可知截断误差

$$R_j^k(u) = L_h^{(1)} u(x_j, t_k) - [Lu]_j^k = -\tau \left[\frac{1}{12r} - \frac{1}{2} \right] \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \right)_j^k + O(\tau^2) \quad (10)$$
$$= O(\tau + h^2). \quad (10')$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 7 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 由Taylor展开，可知截断误差

$$\begin{aligned} R_j^k(u) &= L_h^{(1)} u(x_j, t_k) - [Lu]_j^k = -\tau \left[\frac{1}{12r} - \frac{1}{2} \right] \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \right)_j^k + O(\tau^2) \quad (10) \\ &= O(\tau + h^2). \quad (10') \end{aligned}$$

- 其中 $\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \right)_j^k$ 是 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 在矩形 $\{x_{j-1} < x < x_{j+1}, t_k < t < t_{k+1}\}$ 中某点的值。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 7 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 由Taylor展开, 可知截断误差

$$\begin{aligned} R_j^k(u) &= L_h^{(1)} u(x_j, t_k) - [Lu]_j^k = -\tau \left[\frac{1}{12r} - \frac{1}{2} \right] \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \right)_j^k + O(\tau^2) \quad (10) \\ &= O(\tau + h^2). \quad (10') \end{aligned}$$

- 其中 $\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \right)_j^k$ 是 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 在矩形 $\{x_{j-1} < x < x_{j+1}, t_k < t < t_{k+1}\}$ 中某点的值。
- 当 u 具有对 x 的四阶连续导数时, 式(10)'总成立

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 7 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

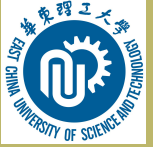
- 由Taylor展开, 可知截断误差

$$\begin{aligned} R_j^k(u) &= L_h^{(1)} u(x_j, t_k) - [Lu]_j^k = -\tau \left[\frac{1}{12r} - \frac{1}{2} \right] \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \right)_j^k + O(\tau^2) \quad (10) \\ &= O(\tau + h^2). \quad (10') \end{aligned}$$

- 其中 $\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \right)_j^k$ 是 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 在矩形 $\{x_{j-1} < x < x_{j+1}, t_k < t < t_{k+1}\}$ 中某点的值。
- 当 u 具有对 x 的四阶连续导数时, 式(10)'总成立
- 式(10)的导出需假定 f 与 t 无关, 这在后面几种格式的截断误差的导出中也同样。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 7 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 把显格式写成矩阵形式



Home Page

Title Page



Page 8 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 把显格式写成矩阵形式
- 记

$$U^k = [u_1^k, u_2^k, \dots, u_{N-1}^k]^T,$$

$$F^k = [f_1^k, f_2^k, \dots, f_{N-1}^k]^T,$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 U^k 和 F^k 是 $N - 1$ 维向量， C 是 $N - 1$ 阶矩阵。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 把显格式写成矩阵形式
- 记

$$U^k = [u_1^k, u_2^k, \dots, u_{N-1}^k]^T,$$

$$F^k = [f_1^k, f_2^k, \dots, f_{N-1}^k]^T,$$

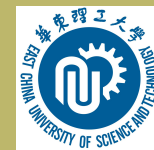
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 U^k 和 F^k 是 $N - 1$ 维向量， C 是 $N - 1$ 阶矩阵。

- 设边界条件为齐次的，即 $\alpha(t) = \beta(t) = 0$ ，则式(9)可写成矩阵形式：

$$U^{k+1} = [(1 - 2r)I + rC]U^k + \tau F^k, \quad (11)$$

- 古典隱格式



Home Page

Title Page



Page 9 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 古典隐格式

- 在节点 $(j, k + 1)$ 上，用 $u(x_j, t_{k+1})$ 在 t 方向用向后差商代替 $\frac{\partial u(x_j, t_{k+1})}{\partial t}$.



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 古典隐格式

- 在节点 $(j, k + 1)$ 上，用 $u(x_j, t_{k+1})$ 在 t 方向用向后差商代替 $\frac{\partial u(x_j, t_{k+1})}{\partial t}$.
- 在节点 $(j, k + 1)$ 上，用 $u(x_j, t_{k+1})$ 在 x 方向用二阶中心差商代替 $\frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+1})}{\partial x^2}$.



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

• 古典隐格式

- 在节点 $(j, k + 1)$ 上，用 $u(x_j, t_{k+1})$ 在 t 方向用向后差商代替 $\frac{\partial u(x_j, t_{k+1})}{\partial t}$.
- 在节点 $(j, k + 1)$ 上，用 $u(x_j, t_{k+1})$ 在 x 方向用二阶中心差商代替 $\frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+1})}{\partial x^2}$.
- 古典差分格式

$$L_h^{(2)} u_j^{k+1} = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} = f_j^{k+1}. \quad (12)$$

$$j = 1, 2, \dots, N - 1, k = 0, 1, \dots, M - 1.$$

- 引进网比可进一步写成

$$-ru_{j+1}^{k+1} + (1 + 2r)u_j^{k+1} - ru_{j-1}^{k+1} = u_j^k + \tau f_j^{k+1}. \quad (13)$$

● 古典隐格式

- 在节点 $(j, k + 1)$ 上，用 $u(x_j, t_{k+1})$ 在 t 方向用向后差商代替 $\frac{\partial u(x_j, t_{k+1})}{\partial t}$.
- 在节点 $(j, k + 1)$ 上，用 $u(x_j, t_{k+1})$ 在 x 方向用二阶中心差商代替 $\frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+1})}{\partial x^2}$.
- 古典差分格式

$$L_h^{(2)} u_j^{k+1} = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} = f_j^{k+1}. \quad (12)$$

$$j = 1, 2, \dots, N - 1, k = 0, 1, \dots, M - 1.$$

- 引进网比可进一步写成

$$-ru_{j+1}^{k+1} + (1 + 2r)u_j^{k+1} - ru_{j-1}^{k+1} = u_j^k + \tau f_j^{k+1}. \quad (13)$$

- 第 $k + 1$ 层的值不能用第 k 层的值明显表示，而是要通过解一个三对角的代数方程组得到，如此的差分格式称为隐格式

● 古典隐格式

- 在节点 $(j, k + 1)$ 上，用 $u(x_j, t_{k+1})$ 在 t 方向用向后差商代替 $\frac{\partial u(x_j, t_{k+1})}{\partial t}$.
- 在节点 $(j, k + 1)$ 上，用 $u(x_j, t_{k+1})$ 在 x 方向用二阶中心差商代替 $\frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+1})}{\partial x^2}$.
- 古典差分格式

$$L_h^{(2)} u_j^{k+1} = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} = f_j^{k+1}. \quad (12)$$

$$j = 1, 2, \dots, N - 1, k = 0, 1, \dots, M - 1.$$

- 引进网比可进一步写成

$$-ru_{j+1}^{k+1} + (1 + 2r)u_j^{k+1} - ru_{j-1}^{k+1} = u_j^k + \tau f_j^{k+1}. \quad (13)$$

- 第 $k + 1$ 层的值不能用第 k 层的值明显表示，而是要通过解一个三对角的代数方程组得到，如此的差分格式称为隐格式



- 假设边界条件齐次，可写成矩阵形式

$$[(1 + 2r)I - rC]U^{k+1} = U^k + \tau F^{k+1}. \quad (14)$$

这里系数矩阵是严格对角占优的，因此方程组有唯一解,一般可用追赶法求解

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 假设边界条件齐次，可写成矩阵形式

$$[(1 + 2r)I - rC]U^{k+1} = U^k + \tau F^{k+1}. \quad (14)$$

这里系数矩阵是严格对角占优的，因此方程组有唯一解，一般可用追赶法求解

- 它的截断误差为

$$\begin{aligned} R_j^k(u) &= L_h^{(2)}u(x_j, t_k) - [Lu]_j^k = -\tau\left[\frac{1}{12r} + \frac{1}{2}\right]\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}\right)_j^k + O(\tau^2) \quad (15) \\ &= (\tau + h^2), \quad (15)' \end{aligned}$$

其中 $\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}\right)_j^k$ 是 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 在矩形 $\{x_{j-1} < x < x_{j+1}, t_k < t < t_{k+1}\}$ 中某点的值。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 10 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 六点对称格式(Crank-Nicolson格式):



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 11 of 19

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

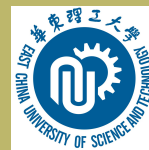
[Close](#)

[Quit](#)

- 六点对称格式(Crank-Nicolson格式):

- 将古典显格式和古典隐格式作算术平均, 即得六点对称格式

$$L_h^{(3)} u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - \frac{a}{2} \left[\frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} \right] + \frac{1}{2} [f_j^k + f_j^{k+1}]. \quad (16)$$



Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 11 of 19

Go Back

Full Screen

Close

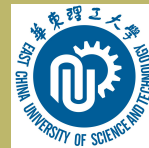
Quit

- 六点对称格式(Crank-Nicolson格式):

- 将古典显格式和古典隐格式作算术平均, 即得六点对称格式

$$L_h^{(3)} u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - \frac{a}{2} \left[\frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} \right] + \frac{1}{2} [f_j^k + f_j^{k+1}]. \quad (16)$$

- 它可以看作在节点 $(j, k + \frac{1}{2})$ 上在 t 方向用中心差商代替 $\frac{\partial u(x_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial t}$.

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 11 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 六点对称格式(Crank-Nicolson格式):

- 将古典显格式和古典隐格式作算术平均, 即得六点对称格式

$$L_h^{(3)} u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - \frac{a}{2} \left[\frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} \right] + \frac{1}{2} [f_j^k + f_j^{k+1}]. \quad (16)$$

- 它可以看作在节点 $(j, k + \frac{1}{2})$ 上在 t 方向用中心差商代替 $\frac{\partial u(x_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial t}$.
- 在 x 方向用 k 层和 $k + 1$ 层的二阶中心差商的算术平均代替 $\frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial x^2}$

• 六点对称格式(Crank-Nicolson格式):

- 将古典显格式和古典隐格式作算术平均, 即得六点对称格式

$$L_h^{(3)} u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - \frac{a}{2} \left[\frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} \right] + \frac{1}{2} [f_j^k + f_j^{k+1}]. \quad (16)$$

- 它可以看作在节点 $(j, k + \frac{1}{2})$ 上在 t 方向用中心差商代替 $\frac{\partial u(x_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial t}$.
- 在 x 方向用 k 层和 $k + 1$ 层的二阶中心差商的算术平均代替 $\frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial x^2}$.
- 引用网比的记号, 格式(16)可写成

$$-\frac{r}{2} u_{j+1}^{k+1} + (1+r) u_j^{k+1} - \frac{r}{2} u_{j-1}^{k+1} = \frac{r}{2} u_{j+1}^k + (1-r) u_j^k + \frac{r}{2} u_{j-1}^k + \frac{\tau}{2} (f_j^k + f_j^{k+1}). \quad (17)$$

• 六点对称格式(Crank-Nicolson格式):

- 将古典显格式和古典隐格式作算术平均, 即得六点对称格式

$$L_h^{(3)} u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - \frac{a}{2} \left[\frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} \right] + \frac{1}{2} [f_j^k + f_j^{k+1}]. \quad (16)$$

- 它可以看作在节点 $(j, k + \frac{1}{2})$ 上在 t 方向用中心差商代替 $\frac{\partial u(x_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial t}$.
- 在 x 方向用 k 层和 $k + 1$ 层的二阶中心差商的算术平均代替 $\frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial x^2}$.
- 引用网比的记号, 格式(16)可写成

$$-\frac{r}{2} u_{j+1}^{k+1} + (1+r) u_j^{k+1} - \frac{r}{2} u_{j-1}^{k+1} = \frac{r}{2} u_{j+1}^k + (1-r) u_j^k + \frac{r}{2} u_{j-1}^k + \frac{\tau}{2} (f_j^k + f_j^{k+1}). \quad (17)$$



- 可以通过解一个三对角的线性方程组，可由第 k 层的值计算出第 $k + 1$ 层的值。方程组的系数矩阵也是严格对角占优的，故方程组唯一可解

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 12 of 19

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 可以通过解一个三对角的线性方程组，可由第 k 层的值计算出第 $k + 1$ 层的值。方程组的系数矩阵也是严格对角占优的，故方程组唯一可解
- 矩阵形式

$$[(1 + r)I - \frac{r}{2}C]U^{k+1} = [(1 - r)I + \frac{r}{2}C]U^k + \frac{\tau}{2}[F^{k+1} + F^k], \quad (18)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 12 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 可以通过解一个三对角的线性方程组，可由第 k 层的值计算出第 $k+1$ 层的值。方程组的系数矩阵也是严格对角占优的，故方程组唯一可解
- 矩阵形式

$$[(1+r)I - \frac{r}{2}C]U^{k+1} = [(1-r)I + \frac{r}{2}C]U^k + \frac{\tau}{2}[F^{k+1} + F^k], \quad (18)$$

- 截断误差的推导需将函数在 $(x_j, t_{k+\frac{1}{2}})$ ($t_{k+\frac{1}{2}} = (k + \frac{1}{2})\tau$)处展开，得

$$R_j^k(u) = L_h^{(3)}u(x_j, t_k) - [Lu]_j^k = O(\tau^2 + h^2), \quad (19)$$



- 双层加权平均格式

Home Page

Title Page



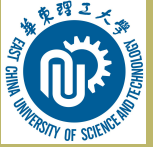
Page 13 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 双层加权平均格式
 - 把六点对称格式的推导方法进一步的推广。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 13 of 19

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

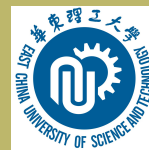
- 双层加权平均格式

- 把六点对称格式的推导方法进一步的推广。
- 将差分格式建立在 (j, k) 和 $(j, k + 1)$ 连线的任意点 $(j, k + \theta)$ 上，其中 θ 为参数， $0 \leq \theta \leq 1$ ，在 x 方向上用第 k 层和第 $k + 1$ 层上的二阶中心差商的加权平均代替二阶偏导，即可得加权格式

$$L_h^{(4)} u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - [a\theta \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + a(1 - \theta) \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}] = \tau[\theta f_j^{k+1} + (1 - \theta)f_j^k], \quad (20)$$
$$j = 1, \dots, N - 1, k = 0, 1, \dots, M - 1, 0 \leq \theta \leq 1.$$

- 引进网比记号，格式(20)又可写成

$$\begin{aligned} & (1 + 2\theta)u_j^{k+1} - \theta r(u_{j+1}^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}), \\ & = [1 - 2(1 - \theta)r]u_j^k + (1 - \theta)r(u_{j+1}^k + u_{j-1}^k) + \tau[\theta f_j^{k+1} + (1 - \theta)f_j^k]. \end{aligned} \quad (21)$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 14 of 19

Go Back

Full Screen

Close

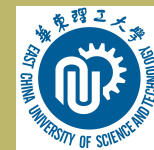
Quit

- 引进网比记号，格式(20)又可写成

$$\begin{aligned}
 & (1 + 2\theta)u_j^{k+1} - \theta r(u_{j+1}^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}), \\
 & = [1 - 2(1 - \theta)r]u_j^k + (1 - \theta)r(u_{j+1}^k + u_{j-1}^k) + \tau[\theta f_j^{k+1} + (1 - \theta)f_j^k].
 \end{aligned} \tag{21}$$

- 矩阵形式

$$\begin{aligned}
 & [(1 + 2\theta r)I - \theta rC]U^{k+1} \\
 & = [(1 - 2(1 - \theta)r)I + (1 - \theta)rC]U^k + \tau[\theta F^{k+1} + (1 - \theta)F^k]. \tag{22}
 \end{aligned}$$


[Home Page](#)
[Title Page](#)


Page 14 of 19

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

- 引进网比记号, 格式(20)又可写成

$$\begin{aligned} & (1 + 2\theta)u_j^{k+1} - \theta r(u_{j+1}^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}), \\ & = [1 - 2(1 - \theta)r]u_j^k + (1 - \theta)r(u_{j+1}^k + u_{j-1}^k) + \tau[\theta f_j^{k+1} + (1 - \theta)f_j^k]. \end{aligned} \quad (21)$$

- 矩阵形式

$$\begin{aligned} & [(1 + 2\theta r)I - \theta rC]U^{k+1} \\ & = [(1 - 2(1 - \theta)r)I + (1 - \theta)rC]U^k + \tau[\theta F^{k+1} + (1 - \theta)F^k]. \end{aligned} \quad (22)$$

- 当 $\theta = 0$ 时, 它化为古典显格式; 当 $\theta = 1$ 时, 它是古典隐格式; 当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时得到六点对称格式。

- 引进网比记号，格式(20)又可写成

$$\begin{aligned} & (1 + 2\theta)u_j^{k+1} - \theta r(u_{j+1}^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}), \\ & = [1 - 2(1 - \theta)r]u_j^k + (1 - \theta)r(u_{j+1}^k + u_{j-1}^k) + \tau[\theta f_j^{k+1} + (1 - \theta)f_j^k]. \end{aligned} \quad (21)$$

- 矩阵形式

$$\begin{aligned} & [(1 + 2\theta r)I - \theta rC]U^{k+1} \\ & = [(1 - 2(1 - \theta)r)I + (1 - \theta)rC]U^k + \tau[\theta F^{k+1} + (1 - \theta)F^k]. \end{aligned} \quad (22)$$

- 当 $\theta = 0$ 时，它化为古典显格式；当 $\theta = 1$ 时，它是古典隐格式；当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时得到六点对称格式。
- 下面推导截断误差。在下面的截断误差的表达式中，令 θ 取不同的值即可得不同格式的截断误差

- 引进网比记号，格式(20)又可写成

$$\begin{aligned} & (1 + 2\theta)u_j^{k+1} - \theta r(u_{j+1}^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}), \\ & = [1 - 2(1 - \theta)r]u_j^k + (1 - \theta)r(u_{j+1}^k + u_{j-1}^k) + \tau[\theta f_j^{k+1} + (1 - \theta)f_j^k]. \end{aligned} \quad (21)$$

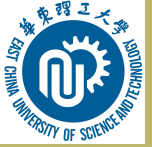
- 矩阵形式

$$\begin{aligned} & [(1 + 2\theta r)I - \theta rC]U^{k+1} \\ & = [(1 - 2(1 - \theta)r)I + (1 - \theta)rC]U^k + \tau[\theta F^{k+1} + (1 - \theta)F^k]. \end{aligned} \quad (22)$$

- 当 $\theta = 0$ 时，它化为古典显格式；当 $\theta = 1$ 时，它是古典隐格式；当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时得到六点对称格式。
- 下面推导截断误差。在下面的截断误差的表达式中，令 θ 取不同的值即可得不同格式的截断误差
- 利用Taylor展开及利用 $u(x, t)$ 是微分方程的解，并假设 f 与 t 无关，则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4},$$

$$\begin{aligned}
 \frac{u(x_j, t_{k+1}) - u(x_j, t_k)}{\tau} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(x_j, t_k) + O(\tau^2) \\
 &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k) + \frac{a^2 \tau}{2} \frac{\partial^4}{\partial x^4}(x_j, t_k) + O(\tau^2),
 \end{aligned} \tag{23}$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 15 of 19

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\begin{aligned}
\frac{u(x_j, t_{k+1}) - u(x_j, t_k)}{\tau} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(x_j, t_k) + O(\tau^2) \\
&= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k) + \frac{a^2 \tau}{2} \frac{\partial^4}{\partial x^4}(x_j, t_k) + O(\tau^2),
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{u(x_{j+1}, t_{k+1}) - 2u(x_j, t_{k+1}) + u(x_{j-1}, t_{k+1}))}{h^2} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{k+1}) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_{k+1}) + O(h^4) \\
&= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{k+1}) + \tau \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_{k+1}) + O(\tau^2) \right] \\
&\quad + \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + \tau \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + O(\tau^2) \right] + O(h^4) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) + \left(\frac{h^2}{12} + a\tau \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + O(\tau^2) + O(\tau h^2) + O(h^4). \tag{24}
\end{aligned}$$


[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀](#)
[▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Page 15 of 19

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)



$$\begin{aligned}\frac{u(x_j, t_{k+1}) - u(x_j, t_k)}{\tau} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(x_j, t_k) + O(\tau^2) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k) + \frac{a^2 \tau}{2} \frac{\partial^4}{\partial x^4}(x_j, t_k) + O(\tau^2),\end{aligned}\quad (23)$$

$$\begin{aligned}\frac{u(x_{j+1}, t_{k+1}) - 2u(x_j, t_{k+1}) + u(x_{j-1}, t_{k+1}))}{h^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{k+1}) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_{k+1}) + O(h^4) \\ &= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{k+1}) + \tau \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_{k+1}) + O(\tau^2) \right] \\ &\quad + \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + \tau \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + O(\tau^2) \right] + O(h^4) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) + \left(\frac{h^2}{12} + a\tau \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + O(\tau^2) + O(\tau h^2) + O(h^4).\end{aligned}\quad (24)$$

$$\begin{aligned}\frac{u(x_{j+1}, t_k) - 2u(x_j, t_k) + u(x_{j-1}, t_k))}{h^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + O(h^4),\end{aligned}\quad (25)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 15 of 19

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 将式(24)乘以 $(-a\theta)$,将(25)乘以 $(-a(1 - \theta))$, 并将它们与式(23)相加, 由于截断误差与 θ 有关, 故这一点的局部截断误差为 $R_j^k(\theta)$



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 16 of 19

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 将式(24)乘以 $(-a\theta)$,将(25)乘以 $(-a(1 - \theta))$,并将它们与式(23)相加,由于截断误差与 θ 有关,故这一点的局部截断误差为 $R_j^k(\theta)$
- 截断误差为

$$R_j^k(\theta) = a[a\tau(\frac{1}{2} - \theta) - \frac{h^2}{12}]\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + O(\tau^2) + O(\tau h^2) + O(h^4). \quad (26)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 16 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 将式(24)乘以 $(-a\theta)$,将(25)乘以 $(-a(1-\theta))$,并将它们与式(23)相加,由于截断误差与 θ 有关,故这一点的局部截断误差为 $R_j^k(\theta)$
- 截断误差为

$$R_j^k(\theta) = a[a\tau(\frac{1}{2} - \theta) - \frac{h^2}{12}]\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + O(\tau^2) + O(\tau h^2) + O(h^4). \quad (26)$$

- 当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时,可知六点对称格式的截断误差阶为 $O(\tau^2 + h^2)$,看起来优于古典显格式和古典隐格式的 $O(\tau + h^2)$

- 将式(24)乘以 $(-a\theta)$,将(25)乘以 $(-a(1 - \theta))$, 并将它们与式(23)相加, 由于截断误差与 θ 有关, 故这一点的局部截断误差为 $R_j^k(\theta)$
- 截断误差为

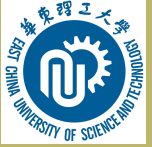
$$R_j^k(\theta) = a[a\tau(\frac{1}{2} - \theta) - \frac{h^2}{12}]\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + O(\tau^2) + O(\tau h^2) + O(h^4). \quad (26)$$

- 当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时, 可知六点对称格式的截断误差阶为 $O(\tau^2 + h^2)$,看起来优于古典显格式和古典隐格式的 $O(\tau + h^2)$
- 由于 $r = \frac{a\tau}{h^2}$ 为常数, 因此 $O(\tau)$ 与 $O(h^2)$ 同阶, 因此实际上前者的截断误差阶并没有被提高

- 将式(24)乘以 $(-a\theta)$,将(25)乘以 $(-a(1 - \theta))$, 并将它们与式(23)相加, 由于截断误差与 θ 有关, 故这一点的局部截断误差为 $R_j^k(\theta)$
- 截断误差为

$$R_j^k(\theta) = a[a\tau(\frac{1}{2} - \theta) - \frac{h^2}{12}]\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + O(\tau^2) + O(\tau h^2) + O(h^4). \quad (26)$$

- 当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时, 可知六点对称格式的截断误差阶为 $O(\tau^2 + h^2)$,看起来优于古典显格式和古典隐格式的 $O(\tau + h^2)$
- 由于 $r = \frac{a\tau}{h^2}$ 为常数, 因此 $O(\tau)$ 与 $O(h^2)$ 同阶, 因此实际上前者的截断误差阶并没有被提高
- 当 $r = \frac{a\tau}{h^2}$ 为常数时, 取 $\theta_{opt} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12r}$, 截断误差为 $R_j^k(\theta_{opt}) = O(\tau^2 + h^2)$



- Richardson格式

Home Page

Title Page



Page 17 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- Richardson格式

– 对 $u(x_j, t_k)$ 用 (j, k) 点的中心差商来代替 $\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k)$.得Richardson格式:

$$L_h^{(s)} u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} - \frac{a(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k)}{h^2} = f_j^k. \quad (27)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1; k = 0, 1, \dots, M-1, 0 \leq \theta \leq 1.$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 17 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- Richardson格式

- 对 $u(x_j, t_k)$ 用 (j, k) 点的中心差商来代替 $\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k)$.得Richardson格式:

$$L_h^{(s)} u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} - \frac{a(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k)}{h^2} = f_j^k. \quad (27)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1; k = 0, 1, \dots, M-1, 0 \leq \theta \leq 1.$$

- 它与双层格式不同的是, 在求第 $k+1$ 层上的值时, 要用到前两层上的值,

- Richardson格式

- 对 $u(x_j, t_k)$ 用 (j, k) 点的中心差商来代替 $\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k)$.得Richardson格式:

$$L_h^{(s)} u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} - \frac{a(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k)}{h^2} = f_j^k. \quad (27)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1; k = 0, 1, \dots, M-1, 0 \leq \theta \leq 1.$$

- 它与双层格式不同的是, 在求第 $k+1$ 层上的值时, 要用到前两层上的值,
- 截断误差为 $O(\tau^2 + h^2)$.

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 17 of 19

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- Richardson格式

- 对 $u(x_j, t_k)$ 用 (j, k) 点的中心差商来代替 $\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k)$.得Richardson格式:

$$L_h^{(s)} u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} - \frac{a(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k)}{h^2} = f_j^k. \quad (27)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1; k = 0, 1, \dots, M-1, 0 \leq \theta \leq 1.$$

- 它与双层格式不同的是, 在求第 $k+1$ 层上的值时, 要用到前两层上的值,
- 截断误差为 $O(\tau^2 + h^2)$.

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 17 of 19

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 引进网比记号，此格式又可写为

$$u_j^{k+1} = 2r(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + u_j^{k-1} + 2\tau f_j^k, \quad (28)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 18 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 引进网比记号，此格式又可写为

$$u_j^{k+1} = 2r(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + u_j^{k-1} + 2\tau f_j^k, \quad (28)$$

- 矩阵的形式为

$$U^{k+1} = 2r(C - 2I)U^k + U^{k-1} + 2\tau F^k. \quad (29)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 18 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 引进网比记号，此格式又可写为

$$u_j^{k+1} = 2r(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + u_j^{k-1} + 2\tau f_j^k, \quad (28)$$

- 矩阵的形式为

$$U^{k+1} = 2r(C - 2I)U^k + U^{k-1} + 2\tau F^k. \quad (29)$$

- 从计算格式来看他是显格式，但一开始要先用其他双层格式，由 $k = 0$ 的初值条件计算出第1层上的值，然后才能利用此格式进行计算。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 18 of 19

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



作业:

3. 对于扩散方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a > 0$

(1) 试求 Du Fort-Frankel 格式

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} = a \frac{u_{j+1}^k - u_j^{k+1} - u_j^{k-1} + u_{j-1}^k}{h^2}$$

的截断误差

(2) 试求加权三层差分格式

$$(1 + \theta) \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - \theta \frac{u_j^k - u_j^{k-1}}{\tau} = \frac{a}{h^2} \delta_x^2 u_j^{k+1}$$

的截断误差, 并证明当 $\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{12r}$ 时, 截断误差的阶最高 ($O(\tau^2 + h^4)$)

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 19 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit