与考试无关

一. 单选题(每小题 3 分,共 42 分)

1. 关于标准正态分布的分位数 u_α $(0<\alpha<1)$ 正确的选项是 （ ）

（A） $\Phi(u_\alpha)=\alpha$ （B） $u_\alpha+u_{1-\alpha}=1$

（C） $\Phi(u_\alpha)=1-\alpha$ （D） $0\le u_\alpha\le 1$

2．关于自由度为 n 的 t-分布的分位数 $t_\alpha(n)$ $(0<\alpha<1)$ 错误的选项是（ ）

（A） $t_{0.5}(n)\equiv 0$ （B）若 X~t(n), 则 $P\{X\le t_\alpha(n)\}=\alpha$

（C） $t_\alpha(n)+t_{1-\alpha}(n)\equiv 0$ （D）若 X~t(n), 则 $P\{X\ge t_\alpha(n)\}=\alpha$

3．设 $F\sim F(m,n)$, $0<\alpha<1$, 则关于 F 分布的分位数错误的选项是 ( ).

（A） $F_\alpha(m,n)\ge 0$ (B) $F_\alpha(m,n)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}$

(C) $F_\alpha(m,n)=-F_{1-\alpha}(m,n)$ (D) $P\{F>F_\alpha(m,n)\}=1-\alpha$

4．设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是总体 ξ 的样本,总体的各阶矩存在, 则错误的是（ ）

(A） 样本均值 $\overline{\boldsymbol{X}}$ 是总体期望的无偏估计

(B） X_i $(\mathrm{i}=1,2,...,n)$ 均是总体期望的无偏估计

（C） 样本方差是总体方差的无偏估计

（D） $\frac{n}{n-1}S^2$ 是总体方差的无偏估计

5．设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是总体 ξ 的样本, $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 σ^2 未知, 参数 μ 的置信水平为 1-α 的置信区间的长度记为 L, 则（ ）

（A） 样本方差越大, L 越大 （B）样本容量越小, L 越大

（C） L 大小与样本均值无关 （D）以上选项全对

6．设总体 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 ξ 的样本，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是 ξ 的样本均值，总体方差 σ^2 的无偏估计是（ ）

(A) $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2$ (B) $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\dfrac{n-1}{n}\overline{X}^2$

(C) $\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2$ (D) $\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\dfrac{n}{n-1}\overline{X}^2$

7. 设$\xi\sim N(\mu,1)$, (X_1,X_2)为ξ的样本。参数μ的无偏估计:

$$\hat{\mu}_1=\frac{X_1+X_2}{2},\hat{\mu}_2=\frac{X_1+2X_2}{3},\hat{\mu}_3=\frac{X_1+3X_2}{4},\hat{\mu}_4=\frac{X_1+4X_2}{5},$$

中最有效的是（　　　　）

(A) $\hat{\mu}_1$ (B) $\hat{\mu}_2$

(C) $\hat{\mu}_3$ (D) $\hat{\mu}_4$

8. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是总体ξ的样本, 且总体的各阶矩存在, 则 (　　　)

(A） 样本二阶矩$\overline{X^2}$是总体二阶矩$E\xi^2$的无偏估计

(B） 样本均值的平方$(\overline{X})^2$是总体期望的平方$(E\xi)^2$的无偏估计

（C） 修正样本方差S^{*2}是总体方差的矩法估计

（D） 修正样本标准差S^*是总体标准差的的无偏点估计

9. 设($X_1,X_2,...,X_m$)为总体$\xi\sim N(\mu_1,\sigma^2)$的样本,$(Y_1,Y_2,...,Y_n)$为总体$\eta\sim N(\mu_2,\sigma^2)$的样本,且两个样本相互独立. $\overline{X}$与$\overline{Y}$分别为两个样本的样本均值,$S_X{}^{*2}$与$S_Y{}^{*2}$分别为两个样本的修正样本方差, $S_W=\sqrt{\dfrac{(m-1)S_X{}^{*2}+(n-1)S_Y{}^{*2}}{m+n-2}}$

关于 $\mu_1-\mu_2$的置信水平为1-α的置信区间, 有 (　　　).

(A) 置信区间一定包含参数$\mu_1-\mu_2$ （B）置信区间的中点是 $\overline{X}$ - $\overline{Y}$

（C）置信区间的中点是$\mu_1-\mu_2$ （D）S_w越大,置信区间长度越小

10. 对原假设H_0双侧检验中，α表示给定的显著性水平，则α含义为（　　）.

（A）$P\{拒绝H_0\mid H_0为真\}$ （B）$P\{拒绝H_0\mid H_0不真\}$

（C）$P\{接受H_0\mid H_0为真\}$ （D）$P\{接受H_0\mid H_0不真\}$

11. 假设检验中若显著性水平α=0.05情况下接受原假设H_0，那么在显著性水平α=0.01情况下对H_0的检验, 有（　　　）

（A）拒绝 H_0　　　　　　　　（B）接受 H_0

（C）不能确定是否接受 H_0　　　　（D）犯第一类错误的概率更大了

12. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 ξ 的样本，$\xi \sim N(\mu, {\sigma_0}^2)$，其中 ${\sigma_0}^2$ 已知，参数 μ 的置信水平为 1-α 的置信区间 L 包含 μ_0，则显著性水平 α 下，对原假设 $H_0 : \mu = \mu_0$ 的检验（　　）

（A）不能确定是否接受 H_0　　　　（B）拒绝 H_0

（C）接受 H_0　　　　（D）犯第二类错误的概率为 1-α

13. 设灯管寿命服从正态分布，按规定寿命不低于 2000 小时的灯管才算合格，要检验某厂灯管是否合格，则原假设 H_0 应选为(　　)

(A)　$\mu = \mu_0$　　　　(B)　$\mu > \mu_0$

(C)　$\mu \ge \mu_0$　　　　(D)　$\mu \le \mu_0$

14. 设($X_1, X_2, ..., X_n$)为总体 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^* 为样本修正标准差，则（　　）.

(A)　$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S^*}\sqrt{n} \sim t(n-1)$　　　　（B）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

（C）$\overline{X}$ 与 S^* 相互独立　　　　（D） 以上选项全对

二. 填空题 (每空 2 分,共 38 分)

1. 设($X_1, X_2, ..., X_n$)为总体 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，令

$$Y = \frac{(X_1-\mu)^2 + (X_2-\mu)^2 + ... + (X_n-\mu)^2}{\sigma^2}$$，则 Y ~ ____________________;

2. 设 $X \sim \chi^2(3)$, $Y \sim \chi^2(7)$, 且 X 与 Y 相互独立,用分位数表示有 P{X+Y<________}=0.95

3. 设 $X \sim \chi^2(3)$, $Y \sim \chi^2(7)$, 且 X 与 Y 相互独立，令 F=$\dfrac{X/3}{Y/7}$，则 $\dfrac{1}{F}$ ~_______.

4. 设 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(9)$, 且 X 与 Y 相互独立，令 T=$\dfrac{3X}{\sqrt{Y}}$，则 T ~______; E(T) = ____.

5. 设($X_1, X_2, \ldots, X_n$)为总体$\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^* 为样本修正标准差，则 P{$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S^*}\sqrt{n} \le 0$} = ________； P{ $(\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n})^2 \ge \chi^2_{0.95}(1)$ } = ________.

6. 设（$X_1, X_2, \ldots, X_m$）为总体 $\xi \sim N(\mu_1, {\sigma_1}^2)$ 的样本，（$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$）为总体 $\eta \sim N(\mu_2, {\sigma_2}^2)$ 的样本,且两个样本相互独立. $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 分别为两个样本的样本均值, ${S_X}^{*2}$ 与□分别为两个样本的修正样本方差，则 $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \sim$__________；

$\dfrac{(m-1){S_X}^{*2}}{\sigma_1^2}+\dfrac{(n-1){S_Y}^{*2}}{\sigma_2^2} \sim$______________； $\dfrac{{S_X}^{*2}/\sigma_1^2}{{S_Y}^{*2}/\sigma_2^2} \sim$________________.

7. 设($X_1, X_2, \ldots, X_n$)为总体$\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本，则:

参数μ的矩法估计是 _____________； σ^2 的矩法估计是 _____________；

参数μ的极大似然估计是 _____________； σ^2 的极大似然估计是 _____________.

8. 设($X_1, X_2, \ldots, X_n$)为总体$\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本，总体期望和方差未知，则:

参数μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间是 __________________________；

参数σ^2的置信水平为$1-\alpha$的置信区间是 __________________________.

9. 设总体$\xi \sim N(\mu, 4)$，样本均值$\overline{\boldsymbol{X}}$，要使总体均值$\mu$ 的置信水平为 95% 的置信区间为[$\overline{\boldsymbol{X}}$-0.55，$\overline{\boldsymbol{X}}$+0.55]，样本容量（观测次数）n 至少为 ____________.

(注: $\Phi(1.645)=0.95$; $\Phi(1.96)=0.975$)

10. 设 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， $\boldsymbol{\sigma^2}$ 未知时， 显著性水平 α 下 检验H_0: $\mu=\mu_{0,}$ ；

选用统计量 ___________________， $\boldsymbol{H_0}$ 的拒绝域为 ________________.

三. (10 分) 设总体 X 服从正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$， $\overline{X}$ 和 $S_n^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 分别为样本

$(X_1, X_2, ..., X_n)$的样本均值与样本方差，又$X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$，且$X_{n+1}$与$X_1, X_2, ..., X_n$相互独立。试求统计量$\dfrac{X_{n+1}-\bar{X}}{S_n}\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$的分布

$$\frac{(X_{n+1}-\bar{X})-E(X_{n+1}-\bar{X})}{\sqrt{D(X_{n+1}-\bar{X})}} = \frac{(X_{n+1}-\bar{X})-0}{\sqrt{\sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

S_n^2与$\bar{X}$，X_{n+1}相互独立

$$\frac{\dfrac{(X_{n+1}-\bar{X})-0}{\sqrt{\sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{\frac{nS_n^2}{\sigma^2}}{n-1}}} = \frac{X_{n+1}-\bar{X}}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \sim t(n-1)$$

四. (10 分) 已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)(x-5)^{\theta} & 5<x<6 \\ 0 & \text{其他}\end{cases} \quad (\theta>0)$$

其中θ均为未知参数，求θ的矩估计量与极大似然估计量.

四. 解: $EX=\int_5^6 x(\theta+1)(x-5)^{\theta}dx=\int_5^6 xd(x-5)^{\theta+1}=6-\int_5^6(x-5)^{\theta+1}dx=6-\frac{1}{\theta+2}$

故 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{1}{6-\bar{X}}-2$

似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}(x_i-5)^{\theta}$，故

$$\ln L(\theta)=n\ln(1+\theta)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-5)$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{1+\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-5)=0$$

θ的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i-5)}-1$