

第二章 常微分方程边值问题



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 1 of 19

[Go Back](#)

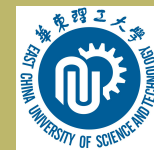
[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

第二章 常微分方程边值问题

- 对于初值问题只要方程的右端满足一定的光滑性条件，则存在惟一解。



Home Page

Title Page



Page 1 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

第二章 常微分方程边值问题

- 对于初值问题只要方程的右端满足一定的光滑性条件，则存在惟一解。
- 对于边值问题要复杂的多，它可能有惟一解，也可能有无穷多个解或无解。



Home Page

Title Page



Page 1 of 19

Go Back

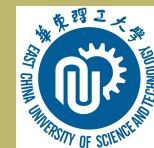
Full Screen

Close

Quit

第二章 常微分方程边值问题

- 对于初值问题只要方程的右端满足一定的光滑性条件，则存在惟一解。
- 对于边值问题要复杂的多，它可能有惟一解，也可能有无穷多个解或无解。
- 例如 $u'' + u = 0$ 的通解是 $u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$,其中 c_1, c_2 是任意常数。



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 19

Go Back

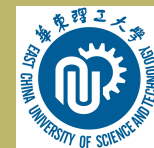
Full Screen

Close

Quit

第二章 常微分方程边值问题

- 对于初值问题只要方程的右端满足一定的光滑性条件, 则存在惟一解。
- 对于边值问题要复杂的多, 它可能有惟一解, 也可能有无穷多个解或无解。
- 例如 $u'' + u = 0$ 的通解是 $u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, 其中 c_1, c_2 是任意常数。
- 如果边界条件是 $u(0) = 2, u(\frac{\pi}{2}) = 1$, 则有唯一解



Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 1 of 19

Go Back

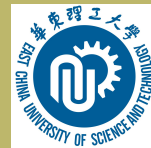
Full Screen

Close

Quit

第二章 常微分方程边值问题

- 对于初值问题只要方程的右端满足一定的光滑性条件，则存在惟一解。
- 对于边值问题要复杂的多，它可能有惟一解，也可能有无穷多个解或无解。
- 例如 $u'' + u = 0$ 的通解是 $u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$,其中 c_1, c_2 是任意常数。
- 如果边界条件是 $u(0) = 2, u(\frac{\pi}{2}) = 1$,则有唯一解
- 如果边界条件是 $u(0) = 2, u(\pi) = -2$,则有无穷多个解



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 19

Go Back

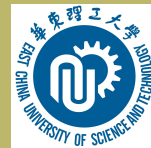
Full Screen

Close

Quit

第二章 常微分方程边值问题

- 对于初值问题只要方程的右端满足一定的光滑性条件, 则存在惟一解。
- 对于边值问题要复杂的多, 它可能有惟一解, 也可能有无穷多个解或无解。
- 例如 $u'' + u = 0$ 的通解是 $u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, 其中 c_1, c_2 是任意常数。
- 如果边界条件是 $u(0) = 2, u(\frac{\pi}{2}) = 1$, 则有唯一解
- 如果边界条件是 $u(0) = 2, u(\pi) = -2$, 则有无穷多个解
- 如果边界条件是 $u(0) = 2, u(\pi) = 1$, 则无解



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 1 of 19

[Go Back](#)

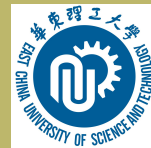
[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

第二章 常微分方程边值问题

- 对于初值问题只要方程的右端满足一定的光滑性条件, 则存在惟一解。
- 对于边值问题要复杂的多, 它可能有惟一解, 也可能有无穷多个解或无解。
- 例如 $u'' + u = 0$ 的通解是 $u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, 其中 c_1, c_2 是任意常数。
- 如果边界条件是 $u(0) = 2, u(\frac{\pi}{2}) = 1$, 则有唯一解
- 如果边界条件是 $u(0) = 2, u(\pi) = -2$, 则有无穷多个解
- 如果边界条件是 $u(0) = 2, u(\pi) = 1$, 则无解
- 假设以后所考虑的边值问题都有唯一解



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 1 of 19

[Go Back](#)

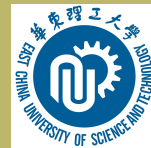
[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

第二章 常微分方程边值问题

- 对于初值问题只要方程的右端满足一定的光滑性条件，则存在惟一解。
- 对于边值问题要复杂的多，它可能有惟一解，也可能有无穷多个解或无解。
- 例如 $u'' + u = 0$ 的通解是 $u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$,其中 c_1, c_2 是任意常数。
- 如果边界条件是 $u(0) = 2, u(\frac{\pi}{2}) = 1$,则有唯一解
- 如果边界条件是 $u(0) = 2, u(\pi) = -2$,则有无穷多个解
- 如果边界条件是 $u(0) = 2, u(\pi) = 1$,则无解
- 假设以后所考虑的边值问题都有唯一解
- 本章讨论二阶常微分方程边值问题的数值解，主要介绍差分法和打靶法。



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 1 of 19

[Go Back](#)

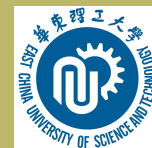
[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

第二章 常微分方程边值问题

- 对于初值问题只要方程的右端满足一定的光滑性条件, 则存在惟一解。
- 对于边值问题要复杂的多, 它可能有惟一解, 也可能有无穷多个解或无解。
- 例如 $u'' + u = 0$ 的通解是 $u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, 其中 c_1, c_2 是任意常数。
- 如果边界条件是 $u(0) = 2, u(\frac{\pi}{2}) = 1$, 则有唯一解
- 如果边界条件是 $u(0) = 2, u(\pi) = -2$, 则有无穷多个解
- 如果边界条件是 $u(0) = 2, u(\pi) = 1$, 则无解
- 假设以后所考虑的边值问题都有唯一解
- 本章讨论二阶常微分方程边值问题的数值解, 主要介绍差分法和打靶法。
- 差分法: 先将求解区间离散化, 在这些离散点上用差商近似地代替导数, 把微分方程化为差分方程。



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 19

Go Back

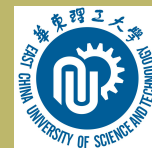
Full Screen

Close

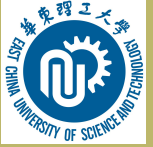
Quit

第二章 常微分方程边值问题

- 对于初值问题只要方程的右端满足一定的光滑性条件，则存在惟一解。
- 对于边值问题要复杂的多，它可能有惟一解，也可能有无穷多个解或无解。
- 例如 $u'' + u = 0$ 的通解是 $u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, 其中 c_1, c_2 是任意常数。
- 如果边界条件是 $u(0) = 2, u(\frac{\pi}{2}) = 1$, 则有唯一解
- 如果边界条件是 $u(0) = 2, u(\pi) = -2$, 则有无穷多个解
- 如果边界条件是 $u(0) = 2, u(\pi) = 1$, 则无解
- 假设以后所考虑的边值问题都有唯一解
- 本章讨论二阶常微分方程边值问题的数值解，主要介绍差分法和打靶法。
- 差分法: 先将求解区间离散化，在这些离散点上用差商近似地代替导数，把微分方程化为差分方程。
- 打靶法: 将边值问题化为初值问题，然后再解初值问题。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 1 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- ★2.1差分法
- ★2.1.1 差分方程的建立



Home Page

Title Page



Page 2 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

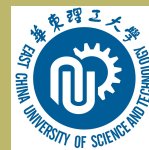
★2.1 差分法

★2.1.1 差分方程的建立

对于二阶边值问题

$$\begin{cases} Lu = -u'' + q(x)u = f(x), & a < x < b \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta \end{cases}, \quad (1)$$

其中 $q(x), f(x) \in C[a, b], q(x) \geq 0$.



Home Page

Title Page



Page 2 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

★2.1 差分法

★2.1.1 差分方程的建立

对于二阶边值问题

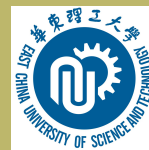
$$\begin{cases} Lu = -u'' + q(x)u = f(x), & a < x < b \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta \end{cases}, \quad (1)$$

其中 $q(x), f(x) \in C[a, b], q(x) \geq 0$.

- 区间剖分，离散化

$$x_m = a + mh, m = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{b - a}{N}$$

x_m 称为节点， h 称为步长。



Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

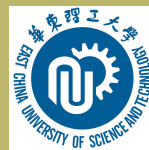
Page 2 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



★2.1 差分法

★2.1.1 差分方程的建立

对于二阶边值问题

$$\begin{cases} Lu = -u'' + q(x)u = f(x), & a < x < b \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta \end{cases}, \quad (1)$$

其中 $q(x), f(x) \in C[a, b], q(x) \geq 0$.

- 区间剖分，离散化

$$x_m = a + mh, m = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{b - a}{N}$$

x_m 称为节点， h 称为步长。

- 方程离散化，利用Taylor公式

$$\frac{1}{h^2}[u(x_{m+1}) - 2u(x_m) + u(x_{m-1}))] = u''(x_m) - R_m, \quad (2)$$

其中

$$R_m = -\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_m), \xi_m \in (x_{m-1}, x_{m+1}), \quad (3)$$

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 2 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 将(2)代入(1)的微分方程，有

$$L_h u(x_m) = -\frac{1}{h^2}[u(x_{m+1}) - 2u(x_m) + u(x_{m-1}))] + q(x_m)u(x_m) = f(x) + R_m, \quad (4)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 3 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 将(2)代入(1)的微分方程，有

$$L_h u(x_m) = -\frac{1}{h^2}[u(x_{m+1}) - 2u(x_m) + u(x_{m-1}))] + q(x_m)u(x_m) = f(x) + R_m, \quad (4)$$

- 略去余项 R_m , 使得式(1)中的微分方程在内部节点 x_m 的差分方程，再考虑式(1)的边界条件

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 3 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

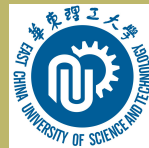
- 将(2)代入(1)的微分方程，有

$$L_h u(x_m) = -\frac{1}{h^2}[u(x_{m+1}) - 2u(x_m) + u(x_{m-1}))] + q(x_m)u(x_m) = f(x) + R_m, \quad (4)$$

- 略去余项 R_m , 使得式(1)中的微分方程在内部节点 x_m 的差分方程，再考虑式(1)的边界条件
- 可得边值问题(1)的差分方程

$$\begin{cases} L_h u_m = -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + q_m u_m = f_m, & m = 1, 2, \dots, N-1 \\ u_0 = \alpha, u_N = \beta \end{cases} \quad (5)$$

其中 $q_m = q(x_m)$, $f_m = f(x_m)$. 解线性代数方程组(5), 得 $u(x_m)$ 的近似值 u_m .



- 将(2)代入(1)的微分方程，有

$$L_h u(x_m) = -\frac{1}{h^2}[u(x_{m+1}) - 2u(x_m) + u(x_{m-1}))] + q(x_m)u(x_m) = f(x) + R_m, \quad (4)$$

- 略去余项 R_m , 使得式(1)中的微分方程在内部节点 x_m 的差分方程，再考虑式(1)的边界条件
- 可得边值问题(1)的差分方程

$$\begin{cases} L_h u_m = -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + q_m u_m = f_m, & m = 1, 2, \dots, N-1 \\ u_0 = \alpha, u_N = \beta \end{cases} \quad (5)$$

其中 $q_m = q(x_m)$, $f_m = f(x_m)$. 解线性代数方程组(5), 得 $u(x_m)$ 的近似值 u_m .

- u_0, u_1, \dots, u_N 称为边值问题(1)的差分解。

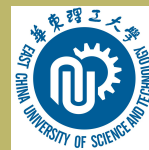
[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 3 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 方程组(5)可以写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} 2 + h^2 q_1 & -1 & & \\ -1 & 2 + h^2 + q_2 & -1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 + h^2 q_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f_1 + \alpha \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{N-2} \\ h^2 f_{N-1} + \beta \end{bmatrix}$$

其系数矩阵是对称的三对角矩阵。

- L : 微分算子, $Lu = -u'' + q(x)u = f(x)$ 微分方程



Home Page

Title Page



Page 4 of 19

Go Back

Full Screen

Close

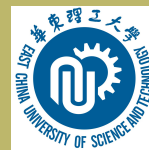
Quit

- 方程组(5)可以写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} 2 + h^2 q_1 & -1 & & \\ -1 & 2 + h^2 + q_2 & -1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 + h^2 q_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f_1 + \alpha \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{N-2} \\ h^2 f_{N-1} + \beta \end{bmatrix}$$

其系数矩阵是对称的三对角矩阵。

- L : 微分算子, $Lu = -u'' + q(x)u = f(x)$ 微分方程
- L_h : 差分算子, $L_h u_m = -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + q_m u_m = f_m$ 差分方程



Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 4 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

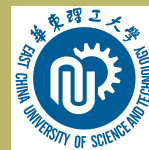
- 方程组(5)可以写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} 2 + h^2 q_1 & -1 & & \\ -1 & 2 + h^2 + q_2 & -1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 + h^2 q_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f_1 + \alpha \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{N-2} \\ h^2 f_{N-1} + \beta \end{bmatrix}$$

其系数矩阵是对称的三对角矩阵。

- L : 微分算子, $Lu = -u'' + q(x)u = f(x)$ 微分方程
- L_h : 差分算子, $L_h u_m = -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + q_m u_m = f_m$ 差分方程
- 建立差分方程的关键是 $u(x)$ 的二阶中心差商代替 $u''(x)$, 即

$$\frac{u(x_{m+1}) - 2u(x_m) + u(x_{m-1}))}{h^2} \approx u''(x)$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 方程组(5)可以写成矩阵形式:

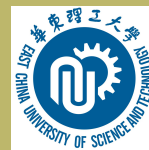
$$\begin{bmatrix} 2 + h^2 q_1 & -1 & & \\ -1 & 2 + h^2 + q_2 & -1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 + h^2 q_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f_1 + \alpha \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{N-2} \\ h^2 f_{N-1} + \beta \end{bmatrix}$$

其系数矩阵是对称的三对角矩阵。

- L : 微分算子, $Lu = -u'' + q(x)u = f(x)$ 微分方程
- L_h : 差分算子, $L_h u_m = -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + q_m u_m = f_m$ 差分方程
- 建立差分方程的关键是 $u(x)$ 的二阶中心差商代替 $u''(x)$, 即

$$\frac{u(x_{m+1}) - 2u(x_m) + u(x_{m-1}))}{h^2} \approx u''(x)$$

- 称 $R_m(u) = Lu(x_m) - L_h u(x_m)$ 是用差分算子 L_h 代替微分算子 L 所产生的阶段误差.



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 方程组(5)可以写成矩阵形式:

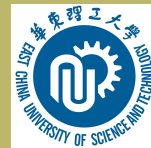
$$\begin{bmatrix} 2 + h^2 q_1 & -1 & & \\ -1 & 2 + h^2 q_2 & -1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 + h^2 q_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f_1 + \alpha \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{N-2} \\ h^2 f_{N-1} + \beta \end{bmatrix}$$

其系数矩阵是对称的三对角矩阵。

- L : 微分算子, $Lu = -u'' + q(x)u = f(x)$ 微分方程
- L_h : 差分算子, $L_h u_m = -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + q_m u_m = f_m$ 差分方程
- 建立差分方程的关键是 $u(x)$ 的二阶中心差商代替 $u''(x)$, 即

$$\frac{u(x_{m+1}) - 2u(x_m) + u(x_{m-1}))}{h^2} \approx u''(x)$$

- 称 $R_m(u) = Lu(x_m) - L_h u(x_m)$ 是用差分算子 L_h 代替微分算子 L 所产生的阶段误差.
- 称 $R_m = L_h(u(x_m) - u_m)$ 为差分方程(5)的截断误差。



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 方程组(5)可以写成矩阵形式:

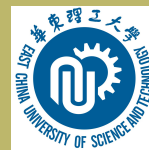
$$\begin{bmatrix} 2 + h^2 q_1 & -1 & & \\ -1 & 2 + h^2 + q_2 & -1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 + h^2 q_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f_1 + \alpha \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{N-2} \\ h^2 f_{N-1} + \beta \end{bmatrix}$$

其系数矩阵是对称的三对角矩阵。

- L : 微分算子, $Lu = -u'' + q(x)u = f(x)$ 微分方程
- L_h : 差分算子, $L_h u_m = -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + q_m u_m = f_m$ 差分方程
- 建立差分方程的关键是 $u(x)$ 的二阶中心差商代替 $u''(x)$, 即

$$\frac{u(x_{m+1}) - 2u(x_m) + u(x_{m-1}))}{h^2} \approx u''(x)$$

- 称 $R_m(u) = Lu(x_m) - L_h u(x_m)$ 是用差分算子 L_h 代替微分算子 L 所产生的阶段误差.
- 称 $R_m = L_h(u(x_m) - u_m)$ 为差分方程(5)的截断误差。
- (5)中 $R_m = -\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_m)$, $\xi_m \in (x_{m-1}, x_{m+1})$.



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

还可以先假设差分方程的形式，再用Taylor展开确定其中的系数，例如：



Home Page

Title Page



Page 5 of 19

Go Back

Full Screen

Close

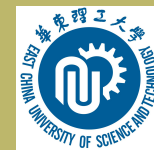
Quit

还可以先假设差分方程的形式，再用Taylor展开确定其中的系数，例如：

设式(1)中的微分方程在节点 x_m 的差分方程为

$$-\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + c_0(q_m u_m - f_m) + c_1(q_{m+1} u_{m+1} - f_{m+1}) \\ + c_2(q_{m-1} u_{m-1} + f_{m-1}) = 0$$

其中 c_0, c_1, c_2 是待定的数，利用Taylor展开



Home Page

Title Page



Page 5 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

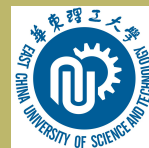
还可以先假设差分方程的形式，再用Taylor展开确定其中的系数，例如：

设式(1)中的微分方程在节点 x_m 的差分方程为

$$-\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + c_0(q_m u_m - f_m) + c_1(q_{m+1} u_{m+1} - f_{m+1}) \\ + c_2(q_{m-1} u_{m-1} - f_{m-1}) = 0$$

其中 c_0, c_1, c_2 是待定的数，利用Taylor展开

$$-\frac{1}{h^2}[u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)] + c_0[q(x)u(x) - f(x)] \\ + c_1[q(x+h)u(x+h) - f(x+h)] + c_2[q(x-h)u(x-h) - f(x-h)] \\ = -[u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x) + \frac{h^4}{360}u^{(6)}(x) + O(h^6)] \\ + c_0 u''(x) + c_1 u''(x+h) + c_2 u''(x-h) \\ = -[u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x) + \frac{h^4}{360}u^{(6)}(x)] + (c_0 + c_1 + c_2)u''(x) \\ + (c_1 - c_2)hu'''(x) + \frac{1}{2}(c_1 + c_2)h^2u^{(4)}(x) + \frac{1}{6}(c_1 - c_2)h^3u^{(5)}(x) \\ + \frac{1}{24}(c_1 + c_2)h^4u^{(6)}(x) + \frac{1}{120}(c_1 - c_2)h^5u^{(7)}(x) + O(h^6)$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 5 of 19

Go Back

Full Screen

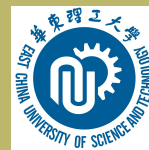
Close

Quit

令

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = 0 \\ \frac{1}{2}(c_1 + c_2) = \frac{1}{12} \end{cases}$$

其解是 $c_0 = \frac{5}{6}, c_1 = c_2 = \frac{1}{12}$



Home Page

Title Page



Page 6 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

令

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = 0 \\ \frac{1}{2}(c_1 + c_2) = \frac{1}{12} \end{cases}$$

其解是 $c_0 = \frac{5}{6}, c_1 = c_2 = \frac{1}{12}$ 可以得到以下形式的差分方程

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + \frac{1}{12}(q_{m+1}u_{m+1} + 10q_mu_m + q_{m-1}u_{m-1}) \\ = \frac{1}{12}(f_{m+1} + 10f_m + f_{m-1}), m = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_0 = \alpha, u_N = \beta \end{cases} \quad (8)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 6 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

令

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = 0 \\ \frac{1}{2}(c_1 + c_2) = \frac{1}{12} \end{cases}$$

其解是 $c_0 = \frac{5}{6}, c_1 = c_2 = \frac{1}{12}$ 可以得到以下形式的差分方程

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + \frac{1}{12}(q_{m+1}u_{m+1} + 10q_mu_m + q_{m-1}u_{m-1}) \\ = \frac{1}{12}(f_{m+1} + 10f_m + f_{m-1}), m = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_0 = \alpha, u_N = \beta \end{cases} \quad (8)$$

其截断误差为

$$R_m = \frac{h^4}{240}u^{(6)}(x_m) + O(h^6).$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 6 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

令

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = 0 \\ \frac{1}{2}(c_1 + c_2) = \frac{1}{12} \end{cases}$$

其解是 $c_0 = \frac{5}{6}, c_1 = c_2 = \frac{1}{12}$ 可以得到以下形式的差分方程

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + \frac{1}{12}(q_{m+1}u_{m+1} + 10q_mu_m + q_{m-1}u_{m-1}) \\ = \frac{1}{12}(f_{m+1} + 10f_m + f_{m-1}), m = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_0 = \alpha, u_N = \beta \end{cases} \quad (8)$$

其截断误差为

$$R_m = \frac{h^4}{240}u^{(6)}(x_m) + O(h^6).$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 6 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



差分方程(5)的截断误差是 $O(h^2)$,差分方程(8)比差分方程(5)的精度高。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 7 of 19

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



差分方程(5)的截断误差是 $O(h^2)$,差分方程(8)比差分方程(5)的精度高。

整理后方程组(8)可以写成

$$\begin{cases} -(1 - \frac{h^2}{12}q_{m-1})u_{m-1} + (2 + \frac{5}{6}h^2q_m)u_m - (1 - \frac{h^2}{12}q_{m+1})u_{m+1} \\ = \frac{h^2}{12}(f_{m-1} + 10f_m + f_{m+1}), m = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_0 = \alpha, u_N = \beta. \end{cases} \quad (10)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 7 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



差分方程(5)的截断误差是 $O(h^2)$,差分方程(8)比差分方程(5)的精度高。

整理后方程组(8)可以写成

$$\begin{cases} -(1 - \frac{h^2}{12}q_{m-1})u_{m-1} + (2 + \frac{5}{6}h^2q_m)u_m - (1 - \frac{h^2}{12}q_{m+1})u_{m+1} \\ = \frac{h^2}{12}(f_{m-1} + 10f_m + f_{m+1}), m = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_0 = \alpha, u_N = \beta. \end{cases} \quad (10)$$

- 系数是三对角阵

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 7 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



差分方程(5)的截断误差是 $O(h^2)$,差分方程(8)比差分方程(5)的精度高。

整理后方程组(8)可以写成

$$\begin{cases} -(1 - \frac{h^2}{12}q_{m-1})u_{m-1} + (2 + \frac{5}{6}h^2q_m)u_m - (1 - \frac{h^2}{12}q_{m+1})u_{m+1} \\ = \frac{h^2}{12}(f_{m-1} + 10f_m + f_{m+1}), m = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_0 = \alpha, u_N = \beta. \end{cases} \quad (10)$$

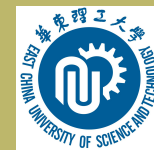
- 系数是三对角阵
- $q(x)$ 不是常数时, 它不是对称矩阵。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 7 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

现在考虑一般的二阶边值问题

$$\begin{cases} -u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \\ \alpha_1 u'(\alpha) + \alpha_2 u(\alpha) = \alpha, \\ \beta_1 u'(b) + \beta_2 u(b) = \beta, \end{cases} \quad (11)$$

其中 $p(x), q(x), f(x) \in C[a, b], \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

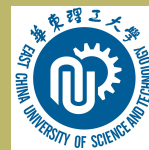
[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

现在考虑一般的二阶边值问题

$$\begin{cases} -u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \\ \alpha_1 u'(\alpha) + \alpha_2 u(\alpha) = \alpha, \\ \beta_1 u'(b) + \beta_2 u(b) = \beta, \end{cases} \quad (11)$$

其中 $p(x), q(x), f(x) \in C[a, b]$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

- 由于微分方程出现了一阶导数，它也要用差商代替，因为二阶中心差商代替二阶导数产生的误差为 $O(h^2)$ ，希望一阶导数用差商代替所产生的误差也是 $O(h^2)$ ，

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 8 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

现在考虑一般的二阶边值问题

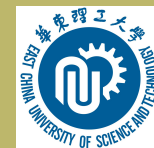
$$\begin{cases} -u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \\ \alpha_1 u'(\alpha) + \alpha_2 u(\alpha) = \alpha, \\ \beta_1 u'(b) + \beta_2 u(b) = \beta, \end{cases} \quad (11)$$

其中 $p(x), q(x), f(x) \in C[a, b]$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

- 由于微分方程出现了一阶导数，它也要用差商代替，因为二阶中心差商代替二阶导数产生的误差为 $O(h^2)$ ，希望一阶导数用差商代替所产生的误差也是 $O(h^2)$ ，
- 由于

$$\frac{1}{2h}[u(x_{m+1}) - u(x_{m-1})] = u'(x_m) + \frac{h^2}{6}u'''(\eta_m), \eta_m \in (x_{m-1}, x_{m+1}),$$

上式左边是 $u(x)$ 在点 x_m 的一阶中心差商，再利用(2)式的结论，于是

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

现在考虑一般的二阶边值问题

$$\begin{cases} -u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \\ \alpha_1 u'(\alpha) + \alpha_2 u(\alpha) = \alpha, \\ \beta_1 u'(b) + \beta_2 u(b) = \beta, \end{cases} \quad (11)$$

其中 $p(x), q(x), f(x) \in C[a, b]$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

- 由于微分方程出现了一阶导数，它也要用差商代替，因为二阶中心差商代替二阶导数产生的误差为 $O(h^2)$ ，希望一阶导数用差商代替所产生的误差也是 $O(h^2)$ ，

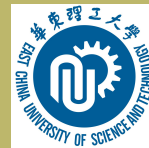
- 由于

$$\frac{1}{2h}[u(x_{m+1}) - u(x_{m-1})] = u'(x_m) + \frac{h^2}{6}u'''(\eta_m), \eta_m \in (x_{m-1}, x_{m+1}),$$

上式左边是 $u(x)$ 在点 x_m 的一阶中心差商，再利用(2)式的结论，于是

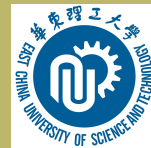
-

$$\begin{aligned} u''(x_m) + p(x_m)u'(x_m) &= -\frac{1}{h^2}[u(x_{m+1}) - 2u(x_m) + u(x_{m-1}))] \\ &\quad + \frac{p(x_m)}{2h}[u(x_{m+1}) - u(x_{m-1}))] + O(h^2). \end{aligned}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 略去余项 $O(h^2)$,得边值问题(11)中的微分方程在节点 x_m 的差分方程

$$-\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + \frac{p_m}{2h}(u_{m+1} - u_{m-1}) + q_m u_m = f_m, \quad (12)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 9 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 略去余项 $O(h^2)$,得边值问题(11)中的微分方程在节点 x_m 的差分方程

$$-\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + \frac{p_m}{2h}(u_{m+1} - u_{m-1}) + q_m u_m = f_m, \quad (12)$$

- 由于边界条件出现 u 的一阶导数, 也要把一阶导数用函数在节点的值表示

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 9 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 略去余项 $O(h^2)$,得边值问题(11)中的微分方程在节点 x_m 的差分方程

$$-\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + \frac{p_m}{2h}(u_{m+1} - u_{m-1}) + q_m u_m = f_m, \quad (12)$$

- 由于边界条件出现 u 的一阶导数, 也要把一阶导数用函数在节点的值表示
- 在点 b , 用 $u(x)$ 在点 b 的一阶向后差商代替 $u'(b)$, 则

$$\frac{1}{h}[u(x_N) - u(x_{N-1})] = u'(b) - \frac{h}{2}u''(\eta), \eta \in (x_{N-1}, x_N)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 9 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 略去余项 $O(h^2)$,得边值问题(11)中的微分方程在节点 x_m 的差分方程

$$-\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + \frac{p_m}{2h}(u_{m+1} - u_{m-1}) + q_m u_m = f_m, \quad (12)$$

- 由于边界条件出现 u 的一阶导数, 也要把一阶导数用函数在节点的值表示
- 在点 b , 用 $u(x)$ 在点 b 的一阶向后差商代替 $u'(b)$, 则

$$\frac{1}{h}[u(x_N) - u(x_{N-1})] = u'(b) - \frac{h}{2}u''(\eta), \eta \in (x_{N-1}, x_N)$$

- 于是得到在点 b 的一个差分方程

$$\frac{\beta_1}{h}(u_N - u_{N-1}) + \beta_2 u_N = \beta. \quad (13)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 9 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 略去余项 $O(h^2)$,得边值问题(11)中的微分方程在节点 x_m 的差分方程

$$-\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + \frac{p_m}{2h}(u_{m+1} - u_{m-1}) + q_m u_m = f_m, \quad (12)$$

- 由于边界条件出现 u 的一阶导数, 也要把一阶导数用函数在节点的值表示
- 在点 b , 用 $u(x)$ 在点 b 的一阶向后差商代替 $u'(b)$, 则

$$\frac{1}{h}[u(x_N) - u(x_{N-1})] = u'(b) - \frac{h}{2}u''(\eta), \eta \in (x_{N-1}, x_N)$$

- 于是得到在点 b 的一个差分方程

$$\frac{\beta_1}{h}(u_N - u_{N-1}) + \beta_2 u_N = \beta. \quad (13)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 9 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 在点 a , 类似建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{h}(u_1 - u_0) + \alpha_2 u_0 = \alpha. \quad (14)$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 10 of 19

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

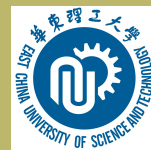
[Quit](#)

- 在点 a ，类似建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{h}(u_1 - u_0) + \alpha_2 u_0 = \alpha. \quad (14)$$

式(12-14)组成了一个以 u_0, u_1, \dots, u_N 为未知数的方程组

$$\begin{cases} -(1 + \frac{h}{2}p_m)u_{m-1} + (2 + h^2q_m)u_m - (1 - \frac{h}{2}p_m)u_{m+1} = h^2f_m, m = 1, 2, \dots, N-1 \\ (-\alpha_1 + h\alpha_2)u_0 + \alpha_1u_1 = h\alpha \\ -\beta_1u_{N-1} + (\beta_1 + h\beta_2)u_N = h\beta \end{cases} \quad (15)$$



Home Page

Title Page



Page 10 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

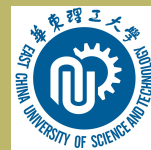
- 在点 a , 类似建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{h}(u_1 - u_0) + \alpha_2 u_0 = \alpha. \quad (14)$$

式(12-14)组成了一个以 u_0, u_1, \dots, u_N 为未知数的方程组

$$\begin{cases} -(1 + \frac{h}{2}p_m)u_{m-1} + (2 + h^2q_m)u_m - (1 - \frac{h}{2}p_m)u_{m+1} = h^2f_m, m = 1, 2, \dots, N-1 \\ (-\alpha_1 + h\alpha_2)u_0 + \alpha_1 u_1 = h\alpha \\ -\beta_1 u_{N-1} + (\beta_1 + h\beta_2)u_N = h\beta \end{cases} \quad (15)$$

- 系数矩阵是三对角阵



Home Page

Title Page



Page 10 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

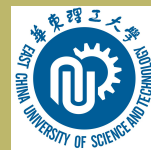
- 在点 a , 类似建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{h}(u_1 - u_0) + \alpha_2 u_0 = \alpha. \quad (14)$$

式(12-14)组成了一个以 u_0, u_1, \dots, u_N 为未知数的方程组

$$\begin{cases} -(1 + \frac{h}{2}p_m)u_{m-1} + (2 + h^2q_m)u_m - (1 - \frac{h}{2}p_m)u_{m+1} = h^2f_m, m = 1, 2, \dots, N-1 \\ (-\alpha_1 + h\alpha_2)u_0 + \alpha_1 u_1 = h\alpha \\ -\beta_1 u_{N-1} + (\beta_1 + h\beta_2)u_N = h\beta \end{cases} \quad (15)$$

- 系数矩阵是三对角阵
- 在端点 b, a 的差分方程的截断误差是 $O(h)$, 比内点差分方程的截断误差低一阶


[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Page 10 of 19

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

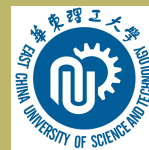
- 在点 a ，类似建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{h}(u_1 - u_0) + \alpha_2 u_0 = \alpha. \quad (14)$$

式(12-14)组成了一个以 u_0, u_1, \dots, u_N 为未知数的方程组

$$\begin{cases} -(1 + \frac{h}{2}p_m)u_{m-1} + (2 + h^2q_m)u_m - (1 - \frac{h}{2}p_m)u_{m+1} = h^2f_m, m = 1, 2, \dots, N-1 \\ (-\alpha_1 + h\alpha_2)u_0 + \alpha_1 u_1 = h\alpha \\ -\beta_1 u_{N-1} + (\beta_1 + h\beta_2)u_N = h\beta \end{cases} \quad (15)$$

- 系数矩阵是三对角阵
- 在端点 b, a 的差分方程的截断误差是 $O(h)$ ，比内点差分方程的截断误差低一阶
- 为了在端点获得截断误差为 $O(h^2)$ 的差分方程，必须要用三个点上的函数值表示 u 的一阶导数


[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Page 10 of 19

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

- 在点 a ，类似建立一个差分方程

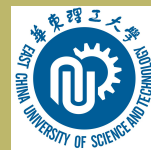
$$\frac{\alpha_1}{h}(u_1 - u_0) + \alpha_2 u_0 = \alpha. \quad (14)$$

式(12-14)组成了一个以 u_0, u_1, \dots, u_N 为未知数的方程组

$$\begin{cases} -(1 + \frac{h}{2}p_m)u_{m-1} + (2 + h^2q_m)u_m - (1 - \frac{h}{2}p_m)u_{m+1} = h^2f_m, m = 1, 2, \dots, N-1 \\ (-\alpha_1 + h\alpha_2)u_0 + \alpha_1 u_1 = h\alpha \\ -\beta_1 u_{N-1} + (\beta_1 + h\beta_2)u_N = h\beta \end{cases} \quad (15)$$

- 系数矩阵是三对角阵
- 在端点 b, a 的差分方程的截断误差是 $O(h)$ ，比内点差分方程的截断误差低一阶
- 为了在端点获得截断误差为 $O(h^2)$ 的差分方程，必须要用三个点上的函数值表示 u 的一阶导数
- 例如在点 b ，利用Taylor展开

$$\begin{aligned} & u'(x_N) - [au(x_N) + bu(x_{N-1}) + cu(x_{N-2})] \\ &= -(a+b+c)u(x_N) + [1+(b+2c)h]u'(x_N) - \frac{1}{2}(b+4c)h^2u''(x_N) + \frac{1}{6}(b+8c)h^3u'''(x_N) + \dots \end{aligned}$$

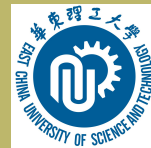

[Home Page](#)
[Title Page](#)
[«](#) [»](#)
[◀](#) [▶](#)

Page 10 of 19

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

- 要使余项的阶尽可能高, a, b, c 必须满足

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 1 + (b + 2c)h = 0 \\ b + 4c = 0 \end{cases}$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 11 of 19

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

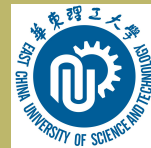
[Quit](#)

- 要使余项的阶尽可能高, a, b, c 必须满足

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 1 + (b + 2c)h = 0 \\ b + 4c = 0 \end{cases}$$

其解为

$$a = \frac{3}{2h}, b = -\frac{2}{h}, c = \frac{1}{2h}$$



Home Page

Title Page



Page 11 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 要使余项的阶尽可能高, a, b, c 必须满足

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 1 + (b + 2c)h = 0 \\ b + 4c = 0 \end{cases}$$

其解为

$$a = \frac{3}{2h}, b = -\frac{2}{h}, c = \frac{1}{2h}$$

- 于是

$$u'(x_N) = \frac{1}{2h}[3u(x_N) - 4u(x_{N-1}) + u(x_{N-2})] + \frac{h^2}{3}u'''(x_N) + \dots$$

略去上式中的余项便得到一个在点 b 的差分方程

$$\frac{\beta_1}{2h}(u_{N-2} - 4u_{N-1} + 3u_N) + \beta_2 u_N = \beta. \quad (16)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 要使余项的阶尽可能高, a, b, c 必须满足

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 1 + (b + 2c)h = 0 \\ b + 4c = 0 \end{cases}$$

其解为

$$a = \frac{3}{2h}, b = -\frac{2}{h}, c = \frac{1}{2h}$$

- 于是

$$u'(x_N) = \frac{1}{2h}[3u(x_N) - 4u(x_{N-1}) + u(x_{N-2})] + \frac{h^2}{3}u'''(x_N) + \dots$$

略去上式中的余项便得到一个在点 b 的差分方程

$$\frac{\beta_1}{2h}(u_{N-2} - 4u_{N-1} + 3u_N) + \beta_2 u_N = \beta. \quad (16)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 19

Go Back

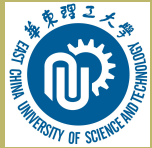
Full Screen

Close

Quit

- 类似地，在点 a 建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{2h}(-3u_0 + 4u_1 - u_2) + \alpha_2 u_0 = \alpha. \quad (17)$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 12 of 19

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 类似地，在点 a 建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{2h}(-3u_0 + 4u_1 - u_2) + \alpha_2 u_0 = \alpha. \quad (17)$$

- 差分方程(16),(17)的截断误差为 $O(h^2)$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 12 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 类似地，在点 a 建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{2h}(-3u_0 + 4u_1 - u_2) + \alpha_2 u_0 = \alpha. \quad (17)$$

- 差分方程(16),(17)的截断误差为 $O(h^2)$
- 与差分方程(12)相结合得到线性方程组

$$\begin{cases} -(1 + \frac{h}{2}p_m)u_{m-1} + (2 + h^2q_m)u_m - (1 - \frac{h}{2}p_m)u_{m+1} = h^2f_m, \\ m = 1, 2, \dots, N-1. \\ (-\frac{3}{2}\alpha_1 + h\alpha_2)u_0 + 2\alpha_1u_1 - \frac{1}{2}\alpha_1u_2 = h\alpha, \\ \frac{1}{2}\beta_1u_{N-2} - 2\beta_2u_{N-1} + (\frac{3}{2}\beta_1 + h\beta_2)u_N = h\beta \end{cases} \quad (18)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 12 of 19

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 类似地，在点 a 建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{2h}(-3u_0 + 4u_1 - u_2) + \alpha_2 u_0 = \alpha. \quad (17)$$

- 差分方程(16),(17)的截断误差为 $O(h^2)$
- 与差分方程(12)相结合得到线性方程组

$$\begin{cases} -(1 + \frac{h}{2}p_m)u_{m-1} + (2 + h^2q_m)u_m - (1 - \frac{h}{2}p_m)u_{m+1} = h^2f_m, \\ m = 1, 2, \dots, N-1. \\ (-\frac{3}{2}\alpha_1 + h\alpha_2)u_0 + 2\alpha_1u_1 - \frac{1}{2}\alpha_1u_2 = h\alpha, \\ \frac{1}{2}\beta_1u_{N-2} - 2\beta_2u_{N-1} + (\frac{3}{2}\beta_1 + h\beta_2)u_N = h\beta \end{cases} \quad (18)$$

- 系数矩阵不是三对角阵。

- 类似地，在点 a 建立一个差分方程

$$\frac{\alpha_1}{2h}(-3u_0 + 4u_1 - u_2) + \alpha_2 u_0 = \alpha. \quad (17)$$

- 差分方程(16),(17)的截断误差为 $O(h^2)$
- 与差分方程(12)相结合得到线性方程组

$$\begin{cases} -(1 + \frac{h}{2}p_m)u_{m-1} + (2 + h^2q_m)u_m - (1 - \frac{h}{2}p_m)u_{m+1} = h^2f_m, \\ m = 1, 2, \dots, N-1. \\ (-\frac{3}{2}\alpha_1 + h\alpha_2)u_0 + 2\alpha_1u_1 - \frac{1}{2}\alpha_1u_2 = h\alpha, \\ \frac{1}{2}\beta_1u_{N-2} - 2\beta_2u_{N-1} + (\frac{3}{2}\beta_1 + h\beta_2)u_N = h\beta \end{cases} \quad (18)$$

- 系数矩阵不是三对角阵。



- 既要使在端点建立的差分方程的截断误差是 $O(h^2)$,又要使差分方程组的系数矩阵是三对角阵, 可以采用下面的差分格式

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 13 of 19

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 既要使在端点建立的差分方程的截断误差是 $O(h^2)$,又要使差分方程组的系数矩阵是三对角阵, 可以采用下面的差分格式
- 设函数 $u(x)$ 能光滑地延拓到区间 $[a, b]$ 之外, 记节点为

$$x_m = a + (m - \frac{1}{2})h, m = 0, 1, \dots, N$$

其中步长 $h = \frac{b-a}{N-1}$.

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 13 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 既要使在端点建立的差分方程的截断误差是 $O(h^2)$,又要使差分方程组的系数矩阵是三对角阵, 可以采用下面的差分格式
- 设函数 $u(x)$ 能光滑地延拓到区间 $[a, b]$ 之外, 记节点为

$$x_m = a + (m - \frac{1}{2})h, m = 0, 1, \dots, N$$

其中步长 $h = \frac{b-a}{N-1}$.

- 此时 $x_0 = a - \frac{h}{2}, x_N = b + \frac{h}{2}$ 在 $[a, b]$ 之外

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 13 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 既要使在端点建立的差分方程的截断误差是 $O(h^2)$,又要使差分方程组的系数矩阵是三对角阵,可以采用下面的差分格式
- 设函数 $u(x)$ 能光滑地延拓到区间 $[a, b]$ 之外,记节点为

$$x_m = a + (m - \frac{1}{2})h, m = 0, 1, \dots, N$$

其中步长 $h = \frac{b-a}{N-1}$.

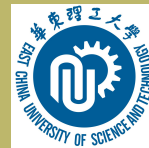
- 此时 $x_0 = a - \frac{h}{2}, x_N = b + \frac{h}{2}$ 在 $[a, b]$ 之外
- 仍旧用差分方程(12)作为在节点 x_1, x_2, \dots, x_{N-1} 的差分方程

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 13 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

由于

$$\frac{1}{h}[u(x_N) - u(x_{N-1})] = u'(b) + \frac{h^2}{24}u'''(\xi), \xi \in (x_{N-1}, x_N)$$

$$\frac{1}{2}[u(x_N) + u(x_{N-1})] = u(b) + \frac{h^2}{8}u''(\eta), \eta \in (x_{N-1}, x_N)$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 14 of 19

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

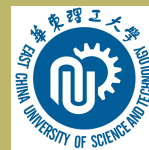
由于

$$\frac{1}{h}[u(x_N) - u(x_{N-1})] = u'(b) + \frac{h^2}{24}u'''(\xi), \xi \in (x_{N-1}, x_N)$$

$$\frac{1}{2}[u(x_N) + u(x_{N-1})] = u(b) + \frac{h^2}{8}u''(\eta), \eta \in (x_{N-1}, x_N)$$

于是得到一个在点 b 的差分方程

$$\frac{\beta_1}{h}(u_N - u_{N-1}) + \frac{\beta_2}{2}(u_N + u_{N-1}) = \beta, \quad (19)$$



Home Page

Title Page



Page 14 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

由于

$$\frac{1}{h}[u(x_N) - u(x_{N-1})] = u'(b) + \frac{h^2}{24}u'''(\xi), \xi \in (x_{N-1}, x_N)$$

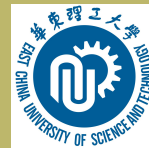
$$\frac{1}{2}[u(x_N) + u(x_{N-1})] = u(b) + \frac{h^2}{8}u''(\eta), \eta \in (x_{N-1}, x_N)$$

于是得到一个在点 b 的差分方程

$$\frac{\beta_1}{h}(u_N - u_{N-1}) + \frac{\beta_2}{2}(u_N + u_{N-1}) = \beta, \quad (19)$$

同样在点 a 也可以建立一个类似的差分方程

$$\frac{\alpha_1}{h}(u_1 - u_0) + \frac{\alpha_2}{2}(u_1 + u_0) = \alpha, \quad (20)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 14 of 19

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

由于

$$\frac{1}{h}[u(x_N) - u(x_{N-1})] = u'(b) + \frac{h^2}{24}u'''(\xi), \xi \in (x_{N-1}, x_N)$$

$$\frac{1}{2}[u(x_N) + u(x_{N-1})] = u(b) + \frac{h^2}{8}u''(\eta), \eta \in (x_{N-1}, x_N)$$

于是得到一个在点 b 的差分方程

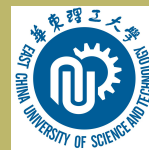
$$\frac{\beta_1}{h}(u_N - u_{N-1}) + \frac{\beta_2}{2}(u_N + u_{N-1}) = \beta, \quad (19)$$

同样在点 a 也可以建立一个类似的差分方程

$$\frac{\alpha_1}{h}(u_1 - u_0) + \frac{\alpha_2}{2}(u_1 + u_0) = \alpha, \quad (20)$$

方程(19),(20)的截断误差都是 $O(h^2)$,将(12),(19),(20)组成一个方程组

$$\begin{cases} -(1 + \frac{h}{2}p_m)u_{m-1} + (2 + h^2q_m)u_m - (1 - \frac{h}{2}p_m)u_{m+1} = h^2f_m, \\ m = 1, 2, \dots, N-1. \\ (-\alpha_1 + \frac{h}{2}\alpha_2)u_0 + (\alpha_1 + \frac{h}{2}\alpha_2)u_1 = h\alpha, \\ (-\beta_1 + \frac{h}{2}\beta_2)u_{N-1} + (\beta_1 + \frac{h}{2}\beta_2)u_N = h\beta \end{cases}, \quad (21)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 14 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

由于

$$\frac{1}{h}[u(x_N) - u(x_{N-1})] = u'(b) + \frac{h^2}{24}u'''(\xi), \xi \in (x_{N-1}, x_N)$$

$$\frac{1}{2}[u(x_N) + u(x_{N-1})] = u(b) + \frac{h^2}{8}u''(\eta), \eta \in (x_{N-1}, x_N)$$

于是得到一个在点 b 的差分方程

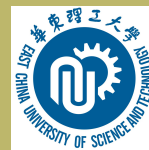
$$\frac{\beta_1}{h}(u_N - u_{N-1}) + \frac{\beta_2}{2}(u_N + u_{N-1}) = \beta, \quad (19)$$

同样在点 a 也可以建立一个类似的差分方程

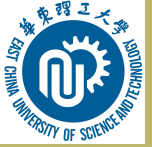
$$\frac{\alpha_1}{h}(u_1 - u_0) + \frac{\alpha_2}{2}(u_1 + u_0) = \alpha, \quad (20)$$

方程(19),(20)的截断误差都是 $O(h^2)$,将(12),(19),(20)组成一个方程组

$$\begin{cases} -(1 + \frac{h}{2}p_m)u_{m-1} + (2 + h^2q_m)u_m - (1 - \frac{h}{2}p_m)u_{m+1} = h^2f_m, \\ m = 1, 2, \dots, N-1. \\ (-\alpha_1 + \frac{h}{2}\alpha_2)u_0 + (\alpha_1 + \frac{h}{2}\alpha_2)u_1 = h\alpha, \\ (-\beta_1 + \frac{h}{2}\beta_2)u_{N-1} + (\beta_1 + \frac{h}{2}\beta_2)u_N = h\beta \end{cases}, \quad (21)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 14 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 方程组(15,18,21)都是对应于边值问题(11)的差分方程。



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 15 of 19

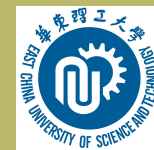
[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

- 方程组(15,18,21)都是对应于边值问题(11)的差分方程。
- 方程组(15)和(21)的系数矩阵是三对角阵，方程组(18)却不是三对角阵；



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 15 of 19

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 方程组(15,18,21)都是对应于边值问题(11)的差分方程。
- 方程组(15)和(21)的系数矩阵是三对角阵，方程组(18)却不是三对角阵；
- 方程组(18)和(21)中每个方程的截断误差都是 $O(h^2)$

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 15 of 19

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 方程组(15,18,21)都是对应于边值问题(11)的差分方程。
- 方程组(15)和(21)的系数矩阵是三对角阵，方程组(18)却不是三对角阵；
- 方程组(18)和(21)中每个方程的截断误差都是 $O(h^2)$
- 方程组(15)中端点处差分方程的截断误差只有 $O(h)$

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 15 of 19

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 方程组(15,18,21)都是对应于边值问题(11)的差分方程。
- 方程组(15)和(21)的系数矩阵是三对角阵，方程组(18)却不是三对角阵；
- 方程组(18)和(21)中每个方程的截断误差都是 $O(h^2)$
- 方程组(15)中端点处差分方程的截断误差只有 $O(h)$
- 式(11)中出现的一阶导数项可以通过适当的自变量变换而消掉，记

$$\phi(x) = \int e^{\int p(x)dx} dx,$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 15 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 方程组(15,18,21)都是对应于边值问题(11)的差分方程。
- 方程组(15)和(21)的系数矩阵是三对角阵，方程组(18)却不是三对角阵；
- 方程组(18)和(21)中每个方程的截断误差都是 $O(h^2)$
- 方程组(15)中端点处差分方程的截断误差只有 $O(h)$
- 式(11)中出现的一阶导数项可以通过适当的自变量变换而消掉，记

$$\phi(x) = \int e^{\int p(x)dx} dx,$$

- 则

$$\phi'(x) = e^{\int p(x)dx} > 0,$$

因此函数 ϕ 是严格单调函数，它存在反函数 ϕ^{-1} ，令

$$t = \phi(x)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 15 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 则式(11)中的微分方程化为

$$-\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{q(x)}{(\phi'(x))^2}u = \frac{f(x)}{(\phi'(x))^2}.$$

其中 $x = \phi^{-1}(t)$,从而方程中不含一阶导数项,形式上与式(1)中的微分方程相同。

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 16 of 19

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 则式(11)中的微分方程化为

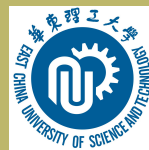
$$-\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{q(x)}{(\phi'(x))^2}u = \frac{f(x)}{(\phi'(x))^2}.$$

其中 $x = \phi^{-1}(t)$,从而方程中不含一阶导数项,形式上与式(1)中的微分方程相同。

- 前面讨论的二阶边值问题都是线性的,导出的差分方程组都是线性方程组,但是对于非线性边值问题

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u'), a < x < b, \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta, \end{cases}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 16 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 则式(11)中的微分方程化为

$$-\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{q(x)}{(\phi'(x))^2}u = \frac{f(x)}{(\phi'(x))^2}.$$

其中 $x = \phi^{-1}(t)$,从而方程中不含一阶导数项,形式上与式(1)中的微分方程相同。

- 前面讨论的二阶边值问题都是线性的,导出的差分方程组都是线性方程组,但是对于非线性边值问题

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u'), a < x < b, \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta, \end{cases}$$

- 他的差分方程

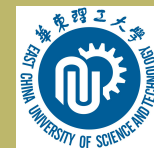
$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + f(x_m, u_m, \frac{u_{m+1}-u_{m-1}}{2h}) = 0, m = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_0 = \alpha, u_N = \beta \end{cases}$$

是非线性方程组,解非线性方程组比解线性方程组要困难得多。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 16 of 19](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

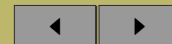
例1. 取步长 $h = \frac{1}{2}$,用差分方程解边值问题

$$\begin{cases} -u'' + \frac{2}{(x+2)^2}u = 0, & -1 < x < 1 \\ u(-1) = 1, u(1) = \frac{1}{3} \end{cases}$$



Home Page

Title Page



Page 17 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



例1. 取步长 $h = \frac{1}{2}$,用差分方程解边值问题

$$\begin{cases} -u'' + \frac{2}{(x+2)^2}u = 0, & -1 < x < 1 \\ u(-1) = 1, u(1) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

解：用两种格式计算

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 17 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



例1. 取步长 $h = \frac{1}{2}$,用差分方程解边值问题

$$\begin{cases} -u'' + \frac{2}{(x+2)^2}u = 0, & -1 < x < 1 \\ u(-1) = 1, u(1) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

解：用两种格式计算

(1)对应于差分方程(5),我们得到差分方程组

$$\begin{cases} \frac{20}{9}u_1 - u_2 = 1 \\ -u_1 + \frac{17}{8}u_2 - u_3 = 0, \\ -u_2 + \frac{52}{25}u_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 17 of 19

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



例1. 取步长 $h = \frac{1}{2}$,用差分方程解边值问题

$$\begin{cases} -u'' + \frac{2}{(x+2)^2}u = 0, & -1 < x < 1 \\ u(-1) = 1, u(1) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

解：用两种格式计算

(1)对应于差分方程(5),我们得到差分方程组

$$\begin{cases} \frac{20}{9}u_1 - u_2 = 1 \\ -u_1 + \frac{17}{8}u_2 - u_3 = 0, \\ -u_2 + \frac{52}{25}u_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

由第1个和第3个方程，得

$$u_1 = \frac{9}{20}(u_2 + 1), u_3 = \frac{25}{52}(u_2 + \frac{1}{3})$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

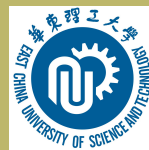
Page 17 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



例1. 取步长 $h = \frac{1}{2}$,用差分方程解边值问题

$$\begin{cases} -u'' + \frac{2}{(x+2)^2}u = 0, & -1 < x < 1 \\ u(-1) = 1, u(1) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

解：用两种格式计算

(1)对应于差分方程(5),我们得到差分方程组

$$\begin{cases} \frac{20}{9}u_1 - u_2 = 1 \\ -u_1 + \frac{17}{8}u_2 - u_3 = 0, \\ -u_2 + \frac{52}{25}u_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

由第1个和第3个方程，得

$$u_1 = \frac{9}{20}(u_2 + 1), u_3 = \frac{25}{52}(u_2 + \frac{1}{3})$$

代入第2个方程，解得

$$u_1 = \frac{563}{828} = 0.679952, u_2 = \frac{952}{1863} = 0.511004, u_3 = \frac{3025}{7452} = 0.405931$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 17 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



(2)对应于差分方程(10),我们得到差分方程组

$$\begin{cases} \frac{59}{27}u_1 - \frac{95}{96}u_2 = \frac{23}{24} \\ -\frac{53}{54}u_1 + \frac{101}{48}u_2 - \frac{149}{150}u_3 = 0 \\ -\frac{95}{96}u_1 + \frac{31}{15}u_3 = \frac{215}{648} \end{cases}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 18 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit



(2)对应于差分方程(10),我们得到差分方程组

$$\begin{cases} \frac{59}{27}u_1 - \frac{95}{96}u_2 = \frac{23}{24} \\ -\frac{53}{54}u_1 + \frac{101}{48}u_2 - \frac{149}{150}u_3 = 0 \\ -\frac{95}{96}u_1 + \frac{31}{15}u_3 = \frac{215}{648} \end{cases}$$

其解

$$u_1 = 0.664180, u_2 = 0.498213, u_3 = 0.399103$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 18 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit

(2)对应于差分方程(10),我们得到差分方程组

$$\begin{cases} \frac{59}{27}u_1 - \frac{95}{96}u_2 = \frac{23}{24} \\ -\frac{53}{54}u_1 + \frac{101}{48}u_2 - \frac{149}{150}u_3 = 0 \\ -\frac{95}{96}u_1 + \frac{31}{15}u_3 = \frac{215}{648} \end{cases}$$

其解

$$u_1 = 0.664180, u_2 = 0.498213, u_3 = 0.399103$$

该边值问题的真解 $u(x) = \frac{1}{x+2}$, 于是

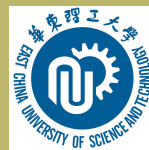
$$u(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}, u(0) = \frac{1}{2}, u(\frac{1}{2}) = \frac{2}{5}$$

经过比较, 用差分方程(10)计算的结果比差分方程(5)好得多

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 18 of 19

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



作业:

1、对给定的步长 $h = \frac{1}{4}$,用差分法解下列边值问题

$$\begin{cases} u'' + u = 0 \\ u(0) = 1, u(1) = 1 \end{cases}$$

5、对边值问题

$$\begin{cases} -(p(x)u')' + r(x)u' + q(x)u = f(x), \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta \end{cases}$$

设 $p'(x), q(x), r(x), f(x) \in C[a, b], p(x) > 0, q(x) \geq 0$, 证明: 差分方程

$$\begin{aligned} L_h u_m \equiv & -\frac{1}{h^2} [p_{m+\frac{1}{2}}(u_{m+1} - u_m) - p_{m-\frac{1}{2}}(u_m - u_{m-1})] \\ & + r_m \frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2h} + q_m u_m = f_m \end{aligned}$$

的截断误差为 $O(h^2)$

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 19 of 19

Go Back

Full Screen

Close

Quit