第十七次作业

一．选择题

1. 棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理的叙述是：若 μ_n 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，p 是事件 A 在每次试验中发生的概率，$0<p<1$，则对任何 x，有（C）成立。

A、$\lim\limits_{n\to\infty} P\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\}=0$；

B、$\lim\limits_{n\to\infty} P\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\}=1$；

C、$\lim\limits_{n\to\infty} P\{\frac{\mu_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}<x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$；

D、$\lim\limits_{n\to\infty} P\{\mu_n<x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

2. 生产线上组装每件产品的时间服从指数分布，统计资料表明该生产线每件产品的平均组装时间为 10 分钟，各件产品组装时间相互独立，若要以概率 95%保证在 16 小时内最多可组装（ A ）件成品

A、81，　　B、82，　　C、83，　　D、84。

3. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$ 是两两不相关的随机变量序列，方差存在且有共同的上界，即 $D\xi_n\le C\ (n=1,2,\cdots)$，则 $\{\xi_n\}$ 服从切比雪夫大数定律，即对任何 $\varepsilon>0$，有（B）成立。

A、$\lim\limits_{n\to\infty} P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right|<\varepsilon\}=0$；

B、$\lim\limits_{n\to\infty} P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right|<\varepsilon\}=1$；

C、$\lim\limits_{n\to\infty} P\{\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\sum_{i=1}^{n}E\xi_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}D\xi_i}}<x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$；

D、$\lim\limits_{n\to\infty} P\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i<x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

4. 设 $\{\xi_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，其概率分布为：

$$P(\xi_n = \frac{2^k}{k^2}) = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

则利用（ D ）可知$\{\xi_n\}$服从大数定律。

A、马尔可夫大数定律，　　　B、切比雪夫大数定律，
C、伯努利大数定律，　　　　D、辛钦大数定律。

二．填空题

1. 一批产品的不合格率为 0.02，现从中任取 40 只进行检查，若发现两只或两只以上不合格品就拒收这批产品，分别用以下方法求拒收的概率：(1）用二项作精确计算拒收的概率为 <u>0.1905</u>；(2）若利用泊松分布作近似计算，得到拒收的概率为 <u>0.1912</u>;(3)若利用中心极限定理作近似计算,得到拒收的概率为 <u>0.0877</u>.

2. 已知一本 300 页的书中每页印刷错误的个数服从普阿松分布 $P(0.2)$，若直接利用普阿松分布的可加性来计算，则这本书印刷错误总数不多于 70 个的概率为 <u>0.9098</u>；若利用中心极限定理作近似计算，则这本书印刷错误总数不多于 70 个的概率为 <u>0.9015</u>.

3.检验员逐个检查产品，以$\frac{1}{2}$概率用 10 秒钟查一个产品，以$\frac{1}{2}$概率用 20 秒钟（重复两次）检查一个产品，为了利用中心极限定理近似计算在 8 小时内检验员所查产品多于 900 个的概率，可以将检验员检查一个产品的时间（秒）看作一个随机变量ξ_i，于是有ξ_i的概率分布为$\underline{P(\xi_i = 10) = \frac{1}{2}，P(\xi_i = 20) = \frac{1}{2}}$，故$\xi_i$的数学期望为 <u>15</u> 和方差为 <u>225</u>。利用林德贝格-列维中心极限定理可知在 8 小时内检验员所查产品多于 900 个的概率为 <u>0.9772</u>.

三．计算题

1. 作加法时，对每个加数四舍五入取整，各个加数的取整误差可以认为是相互独立的，都服从$(-0.5, 0.5)$上的均匀分布。现在有 1200 个数相加，问取整误差总和的绝对值超过 12 的概率是多少？

解：设各个加数的取整误差为ξ_i（$i = 1, 2, \cdots, 1200$）。因为 $\xi_i \sim U(-0.5, 0.5)$，所以 $\mu = E\xi_i = \frac{-0.5 + 0.5}{2} = 0$ ，$\sigma^2 = D\xi_i = \frac{(0.5 + 0.5)^2}{12} = \frac{1}{12}$ （$i = 1, 2, \cdots, 1200$）。

设取整误差的总和为 $\eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$，因为$n = 1200$数值很大，由定理知，这时近似有 $\eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$ ，其中，$n\mu = 1200 \times 0 = 0$，$n\sigma^2 = 1200 \times \frac{1}{12} = 100$ 。

所以，取整误差总和的绝对值超过 12 的概率为

$$P\{|\eta|>12\}=1-P\{-12\le\eta\le12\}\approx1-\left[\Phi(\frac{12-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}})-\Phi(\frac{-12-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}})\right]$$

$$=1-\left[\Phi(\frac{12-0}{\sqrt{100}})-\Phi(\frac{-12-0}{\sqrt{100}})\right]=1-\Phi(1.2)+\Phi(-1.2)$$

$$=2[1-\Phi(1.2)]=2\times(1-0.8849)=0.2302$$ 。

2. 设有 30 个相互独立的电子器件 $D_1,D_2,\cdots,D_{30}$，它们的使用情况如下：D_1 损坏，D_2 立即使用；D_2 损坏，D_3 立即使用，…。设器件 D_i $(i=1,2,\cdots,30)$ 的寿命服从参数为 $\lambda=0.1$（1/小时）的指数分布，令 T 为 30 个器件使用的总计时间。问 T 超过 350 小时的概率是多少？

解：设 ξ_i 是第 i 个电子器件的寿命，已知 $\xi_i\sim E(0.1)$，$i=1,2,\cdots,30$，它们独立同分布，$E\xi_i=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0.1}=10$，$D\xi_i=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{0.1^2}=100$，$i=1,2,\cdots,30$。

根据独立同分布中心极限定理，可认为 $T=\sum_{i=1}^{30}\xi_i$ 近似服从正态分布 $N(n\mu,n\sigma^2)$，其中 $n\mu=nE\xi_i=30\times10=300$，$n\sigma^2=nD\xi_i=30\times100=3000$。

所以

$$P\{T>350\}=1-P\{T\le350\}\approx1-\Phi(\frac{350-300}{\sqrt{3000}})=1-\Phi(\frac{50}{\sqrt{3000}})$$

$$\approx1-\Phi(0.913)\approx1-0.8186=0.1814$$ 。

3. 某种福利彩票的奖金额 ξ 由摇奖决定，其分布列为

ξ（万元）	5	10	20	30	40	50	100
P	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1

若一年中要开出 300 个奖，问需要准备多少奖金总额，才有 95%的把握，保证能够发放奖金？

解：设需要资金总额为 b, 设 ξ_i 表示第 i 个奖金额, 其中 $i=1,2,\cdots,300$, 其期望和方差分别为 $E\xi_i=29,D\xi_i=764$，利用独立分布中心极限定理近似，得

$P(\sum_{i=1}^{300}\xi_i \le b)=0.95$ ， $\Phi\left(\frac{b-300\times 29}{\sqrt{300\times 764}}\right)=0.95$ ，查表得 $\frac{b-300\times 29}{\sqrt{300\times 764}}=1.6449$ ，即 $b\approx 9487.5$.

4. 一复杂系统，由多个相互独立作用的部件组成，在运行期间，每个部件损坏的概率都是0.1，为了使整个系统可靠地工作，必须至少有 88%的部件起作用。

（1）已知系统中共有 900 个部件，求整个系统的可靠性（即整个系统能可靠地工作的概率）。

（2)为了使整个系统的可靠性达到0.99，整个系统至少需要由多少个部件组成？

解：设ξ是起作用的部件数 ，$\xi \sim b(n,p)$，当n比较大时，近似有$\xi \sim N(np,npq)$。

（1） $n=900$， $p=0.9$， $q=1-p=0.1$, $np=810$， $npq=81$。

整个系统要能可靠地工作，至少要有 $n\times 88\%=900\times 88\%=792$ 个部件起作用，所以，这时系统能可靠地工作的概率等于

$$P\{792\le\xi\le 900\}\approx \Phi(\frac{900-810}{\sqrt{81}})-\Phi(\frac{792-810}{\sqrt{81}})=\Phi(10)-\Phi(-2) \approx 0.9772 .$$

（2）设至少需要n个部件， $np=0.9n$， $npq=0.09n$。

这时系统能可靠地工作的概率等于

$$P\{0.88n\le\xi\le n\}\approx\Phi(\frac{n-0.9n}{\sqrt{0.09n}})-\Phi(\frac{0.88n-0.9n}{\sqrt{0.09n}})=\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3})-\Phi(-\frac{\sqrt{n}}{15})$$

$$\approx 1-\Phi(-\frac{\sqrt{n}}{15})=\Phi(\frac{\sqrt{n}}{15})$$

（ 因为本题中n很大，$\frac{\sqrt{n}}{3}$的值远远超过了4，所以可以认为 $\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3})\approx 1$ ） 。

要$\Phi(\frac{\sqrt{n}}{15})\ge 0.99$ ，查表可得$\frac{\sqrt{n}}{15}\ge 2.3263$，即$n\ge(2.3263\times 15)^2\approx 1218$ ，

即如果整个系统可靠性要达到0.99，它至少需要由1218个部件组成。

5. 分别用切比雪夫不等式和德莫哇佛-拉普拉斯极限定理确定：当掷一枚硬币时，需要掷多少次，才能保证出现正面的概率在$0.4\sim 0.6$之间的概率不少于 90%。

解 设要掷n次硬币，ξ是掷出的正面数，$\xi\sim b(n,p)$，$p=0.5$ ，$q=1-p=0.5$，

$E\xi=np=0.5n$， $D\xi=npq=0.5n\times 0.5=0.25n$ 。

（1）用切比雪夫不等式估计。

$$P\{0.4 \le \frac{\xi}{n} \le 0.6\} = P\left\{ \left| \frac{\xi}{n} - 0.5 \right| \le 0.1 \right\} = P\{ \left| \xi - 0.5n \right| \le 0.1n \}$$

$$= P\{ \left| \xi - E\xi \right| \le 0.1n \} \ge 1 - \frac{D\xi}{(0.1n)^2} = 1 - \frac{0.25n}{0.01n^2} = 1 - \frac{25}{n} \quad 。$$

现在要 $P\{0.4 \le \frac{\xi}{n} \le 0.6\} = 1 - \frac{25}{n} \ge 0.9$，即要有 $n \ge \frac{25}{1-0.9} = 250$ 。用切比雪夫不等式估计，需要掷250次。

（2）用德莫哇佛-拉普拉斯定理估计。

因为$\xi \sim b(n,p)$，近似有$\xi \sim N(np, npq)$， $np = 0.5n$， $npq = 0.25n$ 。

$$P\{0.4 \le \frac{\xi}{n} \le 0.6\} = P\{0.4n \le \xi \le 0.6n\} \approx \Phi(\frac{0.6n-0.5n}{\sqrt{0.25n}}) - \Phi(\frac{0.4n-0.5n}{\sqrt{0.25n}})$$

$$= \Phi(0.2\sqrt{n}) - \Phi(-0.2\sqrt{n}) = 2\Phi(0.2\sqrt{n}) - 1 \quad 。$$

现在要 $P\{0.4 \le \frac{\xi}{n} \le 0.6\} = 2\Phi(0.2\sqrt{n}) - 1 \ge 0.9$，即要有$\Phi(0.2\sqrt{n}) \ge 0.95$，查表可得 $0.2\sqrt{n} \ge 1.6449$，即有 $n \ge (\frac{1.6449}{0.2})^2 = 67.6424$。大于67.6424的最小整数是68，用德莫哇佛-拉普拉斯定理估计，只要掷68次就可以了。

6. 设$\{\xi_n\}$为独立同分布随机变量序列，其概率分布律为

$$P(\xi_n = \pm \log k) = \frac{1}{2} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

k为大于零的常数，试证$\{\xi_n\}$服从大数定律。

解： $\{\xi_n\}$是独立同分布随机变量序列，$E\xi_n = \frac{1}{2}\log k + \frac{1}{2}(-\log k) = 0$，数学期望有限，满足辛钦大数定律的条件，服从辛钦大数定律。

7*. 随机变量序列$\{\xi_k\}$各以$\frac{1}{2}$的概率取值k^s和$-k^s$，当s为何值时，大数定理可应用于独立随机变量序列 $\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots$，的算术平均值。

解： $E\xi_k = \frac{1}{2}k^s + \frac{1}{2}(-k^s) = 0$，$E(\xi_k^2) = \frac{1}{2}(k^s)^2 + \frac{1}{2}(-k^s)^2 = k^{2s}$，

$$D\xi_k = E(\xi_k^2) - (E\xi_k)^2 = k^{2s} - 0^2 = k^{2s}。$$

当$s < \frac{1}{2}$时，

$$\frac{1}{n^2}D(\sum_{k=1}^{n}\xi_k)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^{2s}\le\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}n^{2s}=\frac{1}{n^2}n\cdot n^{2s}=n^{-2(\frac{1}{2}-s)},$$

因为 $\lim_{n\to\infty}n^{-2(\frac{1}{2}-s)}=0$，所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D(\sum_{k=1}^{n}\xi_k)=0$ ；

当 $s\ge\frac{1}{2}$ 时，

$$\frac{1}{n^2}D(\sum_{k=1}^{n}\xi_k)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^{2s}>\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}>2,$$

这时，显然不可能有 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D(\sum_{k=1}^{n}\xi_k)=0$ 。

所以，当且仅当 $s<\frac{1}{2}$ 时，满足马尔可夫大数定理的条件，可应用马尔可夫大数定理。

第十八次作业

一．填空题：

1．设 121， 128， 130， 109， 115， 122， 110， 120 为总体 X 的一组样本观察值，则

样本均值 $\overline{X}$=__119.375__； 样本方差 S_{n-1}^2=__58.839___；

样本标准差 S_{n-1}=_7.671___； 样本二阶原点矩 $\overline{X^2}$=_14301.88_。

2．设总体 $X\sim N(0,1)$， X_1，$X_2,\cdots$，X_n 为样本，则

(1) $X_1^2+X_2^2+X_3^2\sim\underline{\chi^2(3)}$； (2) $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}\sim\underline{t(2)}$；

(3) $\dfrac{(\frac{n}{3}-1)\sum_{i=1}^{3}X_i^2}{\sum_{i=4}^{n}X_i^2}\sim\underline{F(3,n-3)}$。

二． 选择题：

1．设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为总体 X 的一个样本，若样本观测值分别为

(-2, -1, 0, 0, 1, 2)，则下述选项错误的是（ D ）。

A. 样本均值为0 ；　　　　　　　　B. 样本中位数为0；

C 样本方差为2.4；　　　　　　　　D. 样本极差为2。

2． 已知总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中μ已知而σ^2未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体X的一个样本。则下列的(C) 不是统计量，其中$\overline{X}$为样本均值

A. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X-\overline{X})$；　　　　B. $X_1+2\mu$；

C. $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$；　　　　D. $\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$。

3．设随机变量$X \sim N(1, 2^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{100}$是$X$的样本，$\overline{X}$为样本均值，已知$Y = a\overline{X}+b \sim N(0, 1)$，则有(A)。

A. $a=-5, b=5$；　B. $a=5, b=5$；　C. $a=\frac{1}{5}, b=-\frac{1}{5}$；　D. $a=-\frac{1}{5}, b=\frac{1}{5}$.

4．设总体$X \sim N(0,1)$，$X_1, X_2, \cdots, X_6$为样本，又设

$Y=(X_1+X_3+X_5)^2+(X_2+X_4+X_6)^2$，且$\boldsymbol{CY \sim \chi^2(2)}$分布，则 C=(C)。

A.1；　　B.$\frac{1}{2}$；　　C. $\frac{1}{3}$；　　D.$\frac{1}{6}$。

三．计算题：

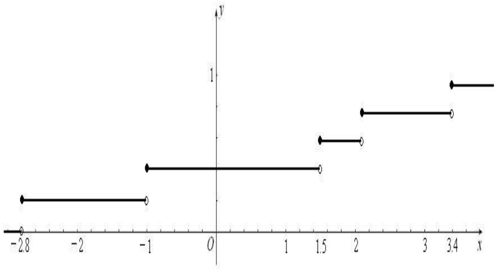
1. 设从总体ξ中取得一个容量为 5 的样本，样本观测值为

-2.8，　-1，　1.5，　2.1，　3.4

试求此样本的经验分布函数$F_5(x)$，并做出其图形。

解：$$F_5(x)=\begin{cases} 0 & x<-2.8 \\ 0.2 & -2.8 \le x < -1 \\ 0.4 & -1 \le x < -1.5 \\ 0.6 & 1.5 \le x < 2.1 \\ 0.8 & 2.1 \le x < 3.4 \\ 1 & x \ge 3.4 \end{cases}$$

其图像如下图所示.



2. 设($X_1, X_2, \cdots, X_n$)，（ $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ ）是两个样本，它们之间有下列关系：

$$Y_i = \frac{X_i - a}{b} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

其中 $a, b \neq 0$ 是常数，求

（1）它们的样本均值 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 与 $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ 之间的关系；

（2）它们的样本方差 $S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 与 $S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$ 之间的关系。

解：(1) $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i - a}{b} = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right) = \frac{\overline{X} - a}{b}$,

(2) $S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - a}{b} - \frac{\overline{X} - a}{b}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i - \overline{X})^2}{b^2} = \frac{S_x^2}{b^2}.$

3. 设总体 $\xi \sim N(\mu, 10^2)$，问抽取的样本容量 n 多大时，才能使概率 $P(\ \mu - 5 < \overline{X} < \mu + 5) = 0.954$ ？

解：利用样本的分布知，$\overline{X} \sim N(0, \frac{10^2}{n})$, 注意到

$$0.954 = P(\mu - 5 < \overline{X} < \mu + 5) = P(\left|\overline{X} - \mu\right| < 5) = 2\Phi\left(\frac{5}{10}\sqrt{n}\right) - 1,$$

即 $\Phi\left(\frac{5}{10}\sqrt{n}\right) = 0.977$，查表得到 $\frac{5}{10}\sqrt{n} = 1.9954$，于是有 $n \approx 16$。

4．设总体 $\boldsymbol{X \sim N(12, 2^2)}$， $\boldsymbol{X_1}$，$\boldsymbol{X_2}$，$\cdots$，$\boldsymbol{X_5}$ 是样本，求：（1） $\boldsymbol{P(|\,X - 12\,| < 1)}$；

（2） $P(|\overline{X}-12|<1)$；（3） $P\{\min\limits_{1\le i\le 5}X_i>10\}$；（4） $P\{\max\limits_{1\le i\le 5}X_i>15\}$。

解：（1）由 $X\sim N(12,2^2)$ 知：

$$P(|X-12|<1)=P(\frac{|X-12|}{2}<\frac{1}{2})=\Phi(\frac{1}{2})-\Phi(-\frac{1}{2})=2\Phi(\frac{1}{2})-1=0.3830;$$

（2）由定理知： $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，而 $\sigma=2$， $n=5$，故 $\frac{\overline{X}-12}{2/\sqrt{5}}\sim N(0,1)$，

$$P(|\overline{X}-12|<1)=P\{\left|\frac{\overline{X}-12}{2/\sqrt{5}}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2}\}=\Phi(\frac{\sqrt{5}}{2})-\Phi(-\frac{\sqrt{5}}{2})=2\Phi(\frac{\sqrt{5}}{2})-1=0.7364;$$

（3） $P\{\min\limits_{1\le i\le 5}X_i>10\}=[P\{X_1>10\}]^5=[1-P\{X_1\le 10\}]^5=\left[1-\Phi(\frac{10-12}{2})\right]^5$

$$=0.8413^5=0.4215;$$

（4） $P\{\max\limits_{1\le i\le 5}X_i>15\}=1-P\{\max\limits_{1\le i\le 5}X_i\le 15\}=1-[P\{X_i\le 15\}]^5=1-\Phi(\frac{15-12}{2})^5$

$$=1-0.9332^5\approx 0.2923。$$

5．设总体 $\xi\sim N(50,6^2)$，总体 $\eta\sim N(46,4^2)$，且 ξ，η 相互独立，从总体 ξ 中抽取容量为 10 的样本，从总体 η 中抽取容量为 8 的样本，且 $\overline{X}$，$\overline{Y}$ 分别为 ξ，η 的样本均值，S_x^2，S_y^2 分别为 ξ，η 的样本方差。求下列概率：

(1) $P(50<\overline{X}<51.8974，13.3<s_x^2<67.676)$；(2) $P(\frac{\overline{Y}-46}{S_y}>0.8360)$；

(3) $P(\frac{S_x^2}{S_y^2}<8.28)$，

解: (1) $P(50<\overline{X}<51.8974，13.3<s_x^2<67.676)$

$=P(50<\overline{X}<51.8974)P(13.3<s_x^2<67.676)$

$=P(0<\overline{X}-50<1.8974)P(3.325<9s_x^2/6^2<16.919)$

$=P(0<\frac{\overline{X}-50}{6/\sqrt{10}}<1)P(3.325<9s_x^2/6^2<16.919)=(\Phi(1)-\Phi(0))(0.95-0.05)$

$=$（**0.8413-0.5**）（0.95-0.05)=0.30717 ；

(2)对于从总体η中抽取容量为 8 的样本，样本均值$\overline{Y}$的分布为$N\left(46,\dfrac{4^2}{8}\right)$,

并且$\overline{Y}$与S_y^2互相独立，则$\boldsymbol{\dfrac{\overline{Y}-46}{S_y}\sqrt{8}\sim t(7)}$,所以

$$\boldsymbol{P(\frac{\overline{Y}-46}{S_y}>0.8360)=1-P(\frac{\overline{Y}-46}{S_y}\le 0.8360)-1-P(\frac{\overline{Y}-46}{S_y}\sqrt{8}\le 2.3646)}$$

$$\boldsymbol{=1-0.975=0.025}\text{；}$$

(3) 根据定理 5.4.3,可知$\dfrac{S_x^2/6^2}{S_y^2/4^2}\sim F(9,7)$，所以

$$P\left(\frac{S_x^2}{S_y^2}<8.28\right)=P\left(\frac{S_x^2/6^2}{S_y^2/4^2}<3.68\right)=0.95\ .$$