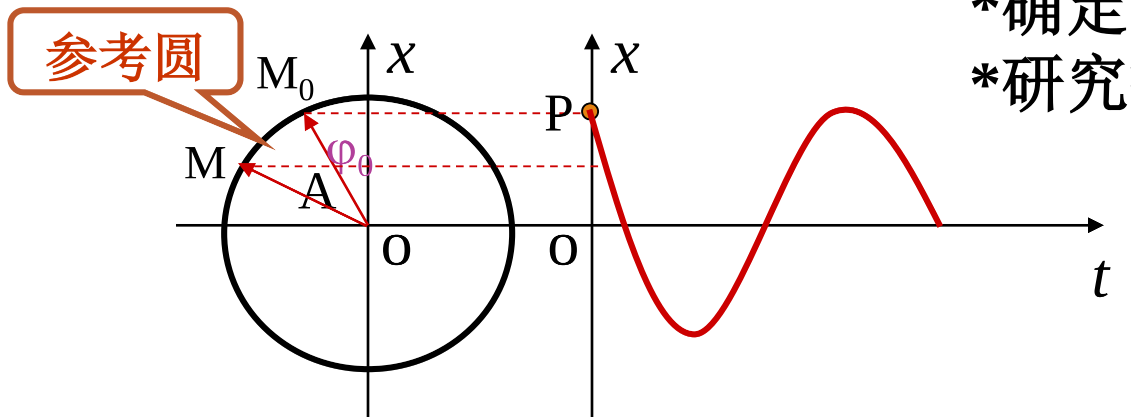
三、谐振动的旋转矢量表示法



*确定相位或初相；
*研究振动合成。

① $\vec{A}$ 的长度：振幅 A

② $\vec{A}$ 的旋转角速度：圆频率ω

③ $\vec{A}$ 的旋转的方向：逆时针向

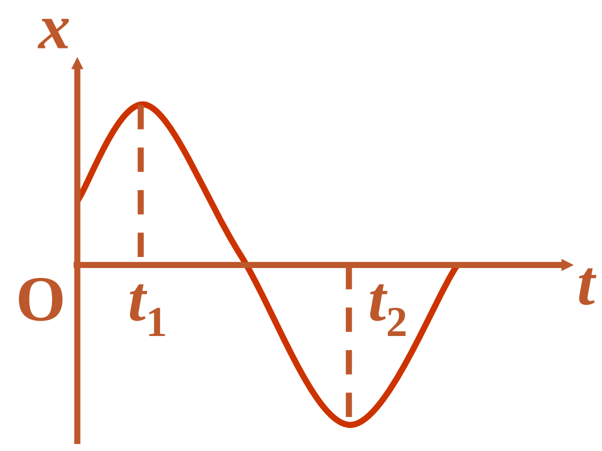
④ 旋转矢量 $\vec{A}$ 与参考方向 x 的夹角：相位 $(\omega t+\varphi)$

⑤ t=0时旋转矢量 $\vec{A}$ 与参考方向 x 的夹角：初相位 (φ)

⑥ M 点在x 轴上投影点P 的运动规律：$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

* 相位差

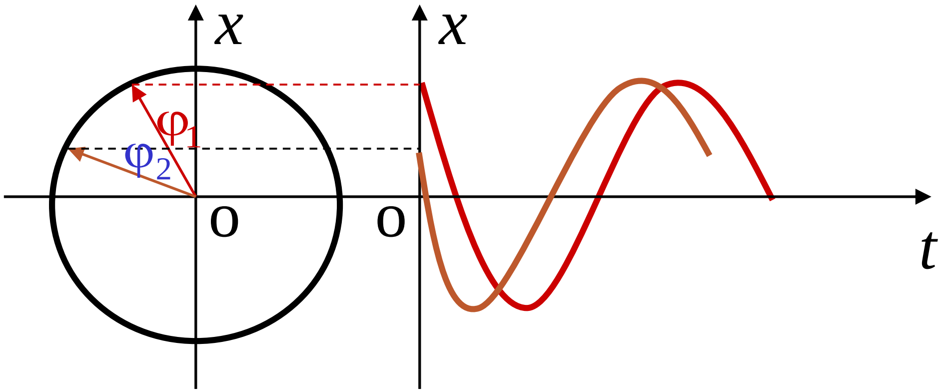
1). 对同一谐振动的两个不同时刻的态的比较



$$\Delta\varphi = (\omega t_2 + \varphi) - (\omega t_1 + \varphi)$$

$$= \omega(t_2 - t_1)$$

2). 对同一时刻两同频率的谐振动的比较



$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1$$ 初相差

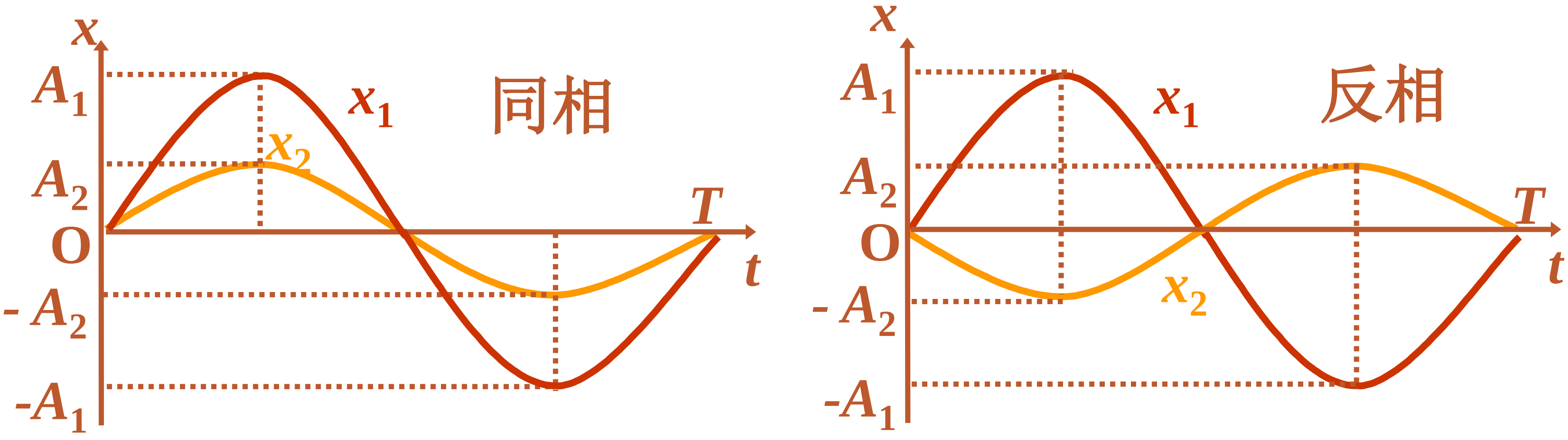
可用于比较两个谐振动的步调。

a 同相　两振动步调相同。

条件：$\Delta\varphi = \pm 2k\pi, \quad k = 0,1,2,\cdots$

b 反相　两振动步调相反。

条件：$\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi, \quad k = 0,1,2,\cdots$



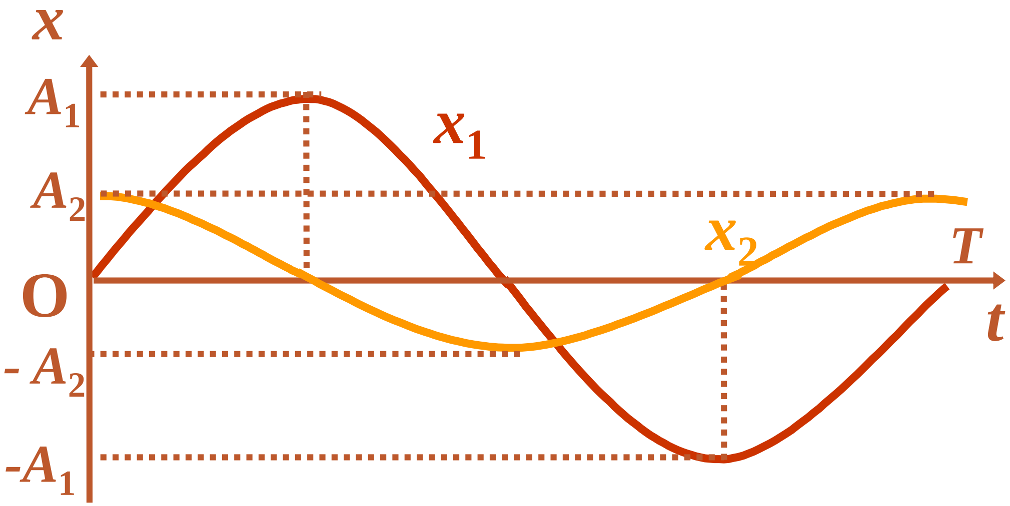
c 超前和落后

当 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \neq \pm k\pi$，　$k = 0,1,2,\cdots$

$$\begin{cases} \Delta\varphi > 0，x_2\text{超前}x_1\text{振动}\Delta\varphi。\\ \Delta\varphi < 0，x_2\text{落后}x_1\text{振动}|\Delta\varphi|。\end{cases}$$

约定：△φ∈(-π，π]

$$\Delta\varphi = -\frac{3}{2}\pi \longrightarrow \Delta\varphi = -\frac{3}{2}\pi + 2\pi = \frac{1}{2}\pi$$



x_2超前x_1振动 $\dfrac{\pi}{2}$。

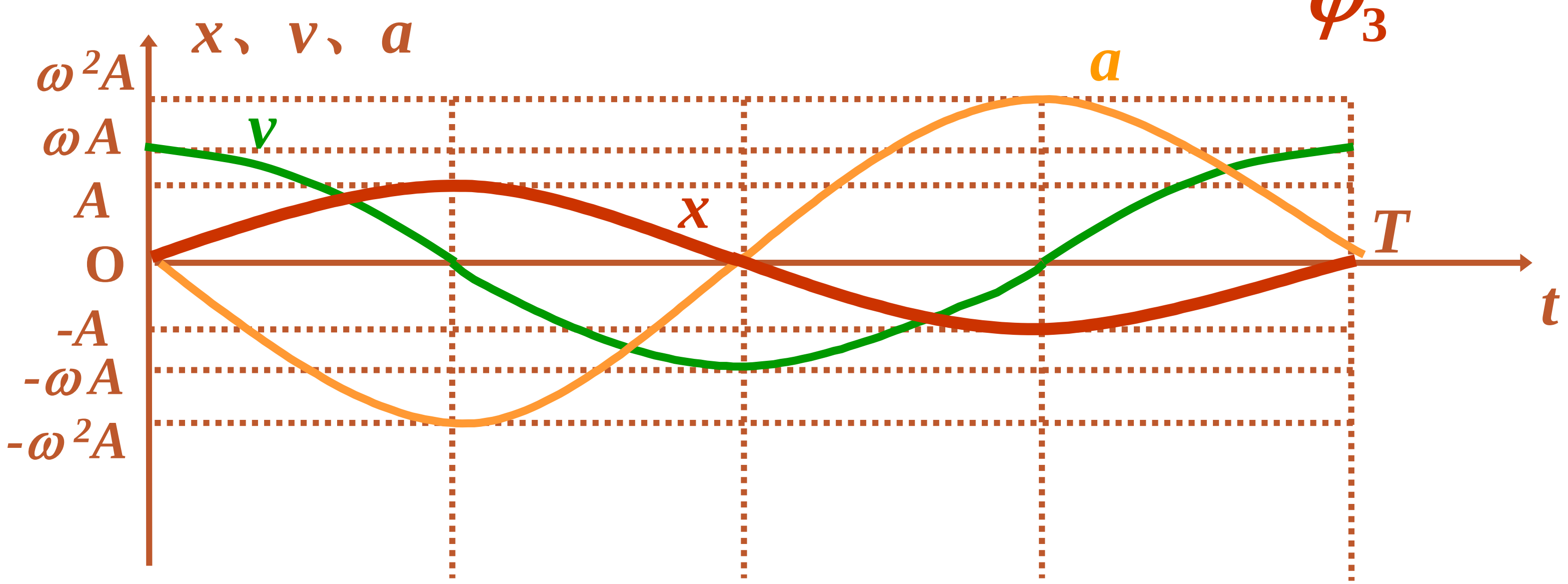
$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 0 - (-\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\pi$$

d) 谐振动的x、v、a的相位关系

$$x = A\cos\underbrace{(\omega t + \varphi)}_{\varphi_1}$$

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) = \omega A\cos\underbrace{(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}_{\varphi_2}$$

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 A\cos\underbrace{(\omega t + \varphi + \pi)}_{\varphi_3}$$



v超前x $\pi/2$　　a超前v $\pi/2$　　a和x反相

四、谐振动的能量

1、谐振动能量表达式

以弹簧振子为例

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k[A\cos(\omega t+\varphi)]^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[-\omega A\sin(\omega t+\varphi)]^2$$

$$E = E_k + E_p \overset{m\omega^2=k}{=} \frac{1}{2}kA^2$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

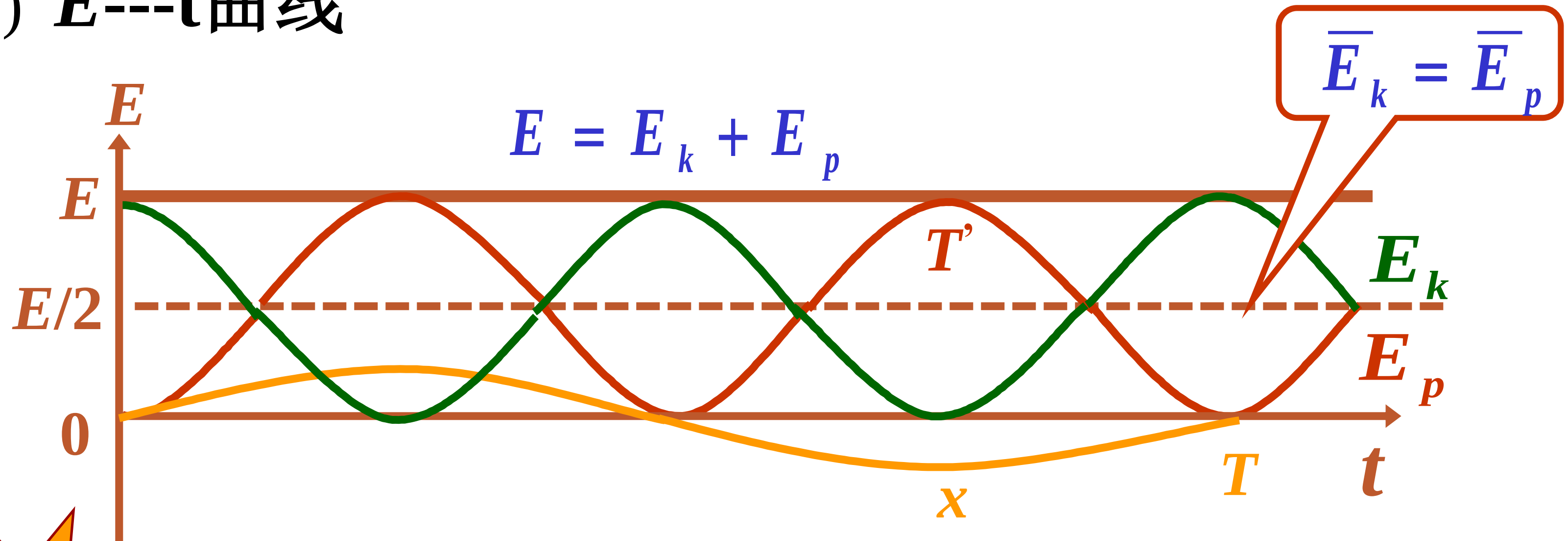
谐振动总能量与振幅平方成正比

说明:该结论对任一谐振系统均成立

2、谐振子能量变化规律及曲线

(1) 变化规律: **系统E_K、E_P亦随时间作周期性变化,其频率是系统固有频率2倍,尽管它们之间相互转化,但任一时刻总能量守恒**

(2) *E*---t曲线



$T' = (1/2)T$

说明

1. 系统只有保守内力作功，系统机械能守恒。

2. 动能、势能随时间作周期性变化，并不断相互转化
   - 平衡位置处，$E_p=0$，E_k最大
   - 最大位移处，$E_k=0$，E_p最大

3. 由起始能量求振幅 $A = \sqrt{\dfrac{2E}{k}} = \sqrt{\dfrac{2E_0}{k}}$ $\left(E = \dfrac{1}{2}kA^2\right)$

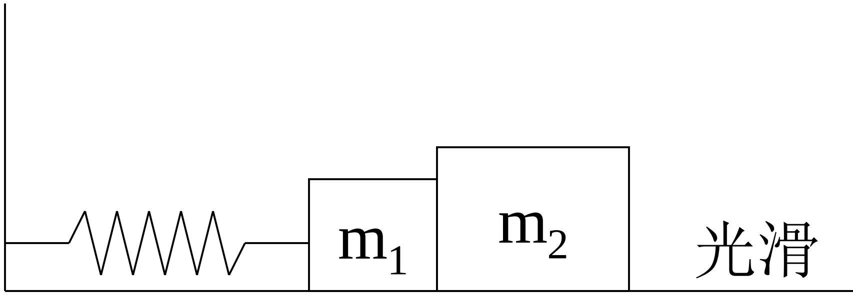
[例] 已知：$m_1 = 1.0kg$（与弹簧固接）$m_2 = 3.0kg, k = 25\,N/m$，

现将弹簧压缩$b = 0.20m$后由静止释放。

求（1）m_2与m_1分离后，m_1作谐振动的振幅A,

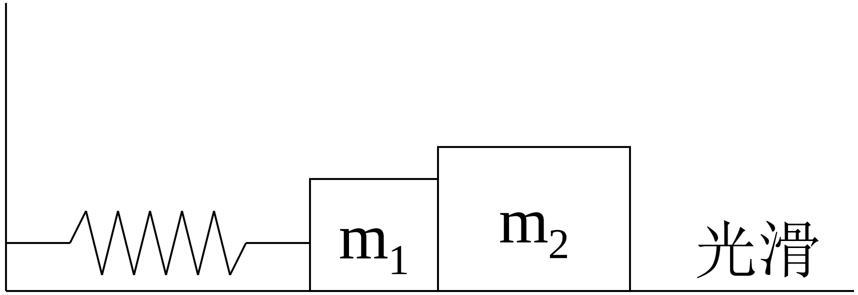
（2）m_1从释放后到再一次将弹簧压缩到最大时所需的时间.

解:



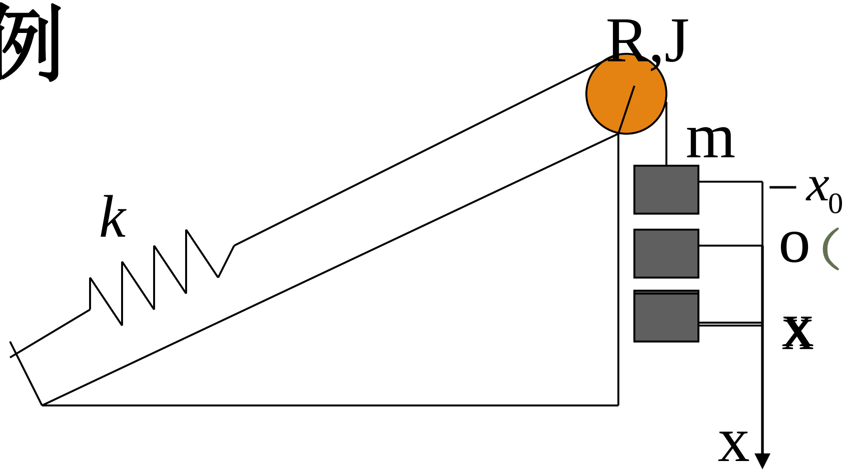
（1）分析：平衡位置处$v=v_m$，且是m_1、m_2分离处

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}kb^2 &= \frac{1}{2}(m_1+m_2){v_m}^2\\ \frac{1}{2}m_1{v_m}^2 &= \frac{1}{2}kA^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow A = 0.1m$$



$$\left.\begin{aligned}
t &= \frac{1}{4}T_1 + \frac{3}{4}T_2 \\
T_1 &= \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{m_1 + m_2}}} = \frac{4}{5}\pi \\
T_2 &= \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{m_1}}} = \frac{2}{5}\pi
\end{aligned}\right\} \Rightarrow t = 1.57\,s$$

例



已知：初态时弹簧处于原长

试证明：物块作谐振动.

$\{m、J、k、\text{地面}\}$ E守恒

任意位置(X)处

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2+\frac{1}{2}k(x+x_0)^2-mg(x+x_0)=\text{常量}$$

$$\frac{1}{2}(m+\frac{J}{R^2})v^2+\frac{1}{2}kx^2+\cancel{kxx_0}+\frac{1}{2}kx_0^2-\cancel{mgx}-mgx_0=\text{常量}$$

$$\because kx_0=mg$$

两边对时间求导得：$(m+\frac{J}{R^2})v\frac{dv}{dt}+kx\frac{dx}{dt}=0$

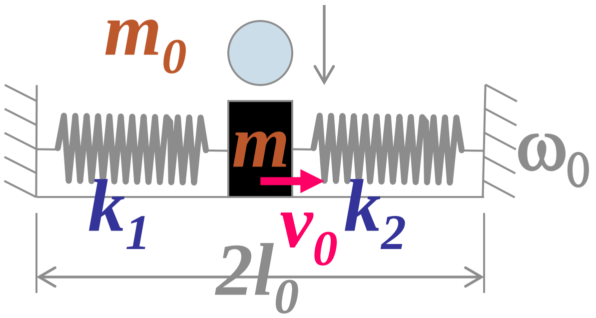
$$(m+\frac{J}{R^2})\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{kR^2}{mR^2+J}x=0$$

——谐振动

其中：$\omega=R\sqrt{\frac{k}{J+mR^2}}$

[例题4-3]两根弹簧(弹性系数分别为k_1,k_2自然长度均为l_0)与物体m连接后作A_0的谐振.当m运动到两弹簧处于自然长度时,水平速度为0的质点m_0轻粘在m上,求：m_0粘上后振动系统周期和振幅

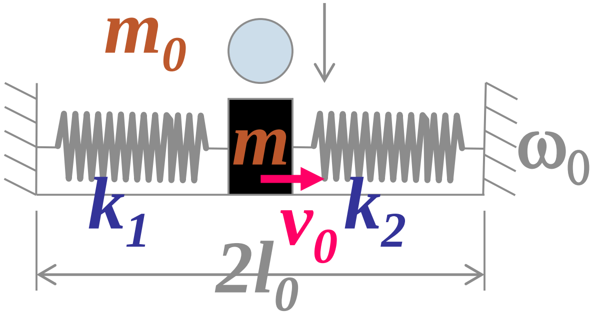


解：设m_0与m一起偏离平衡位置x

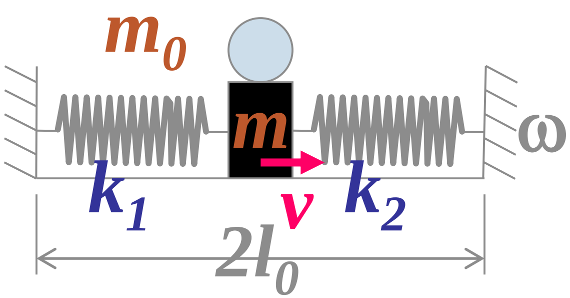
$$-(k_1+k_2)x=(m+m_0)\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-(\frac{k_1+k_2}{m+m_0})x=-\frac{K}{M}x$$

$\therefore K = k_1 + k_2 \quad M = m + m_0$ 则：$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_0+m}{k_1+k_2}}$



粘接过程

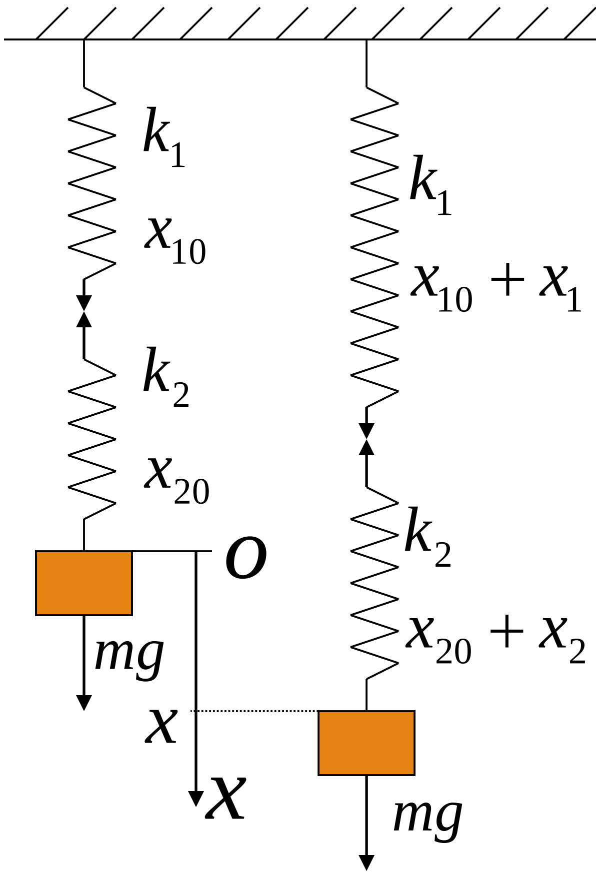


$$\left.\begin{aligned} v_0 &= A_0\omega_0 = A_0\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} \\ v &= A\omega = A\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m+m_0}} \\ mv_0 &= (m+m_0)v \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{m+m_0}}A_0$$

由谐振能量求解

$$\left.\begin{aligned} &\text{粘接前}\quad E_0 = \frac{1}{2}(k_1+k_2)A_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &\text{粘接后}\quad E = \frac{1}{2}(k_1+k_2)A^2 = \frac{1}{2}(m+m_0)v^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{m+m_0}}A_0$$

[例]求证：串联弹簧的$K=\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$



证明： **平衡位置处**

$$mg=k_1x_{10}=k_2x_{20}\cdots\cdots(1)$$

$$x=x_1+x_2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$k_1(x_{10}+x_1)=k_2(x_{20}+x_2)\cdots(3)$$

由（1）（3）得：$k_1x_1=k_2x_2\cdots(4)$

由（2）（4）得：$x_2=\dfrac{k_1}{k_1+k_2}x$

$\{m\}$：$F_{合}=mg-k_2(x_{20}+x_2)=-k_2x_2$

$$F_{合}=-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x=-Kx$$

$$\therefore K=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$