《微分几何》课程电子课件

教师：杨勤民

Tel: (021)64253147

Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程QQ群号：1045698545

六、曲面的主曲率、Gauss曲率和平均曲率

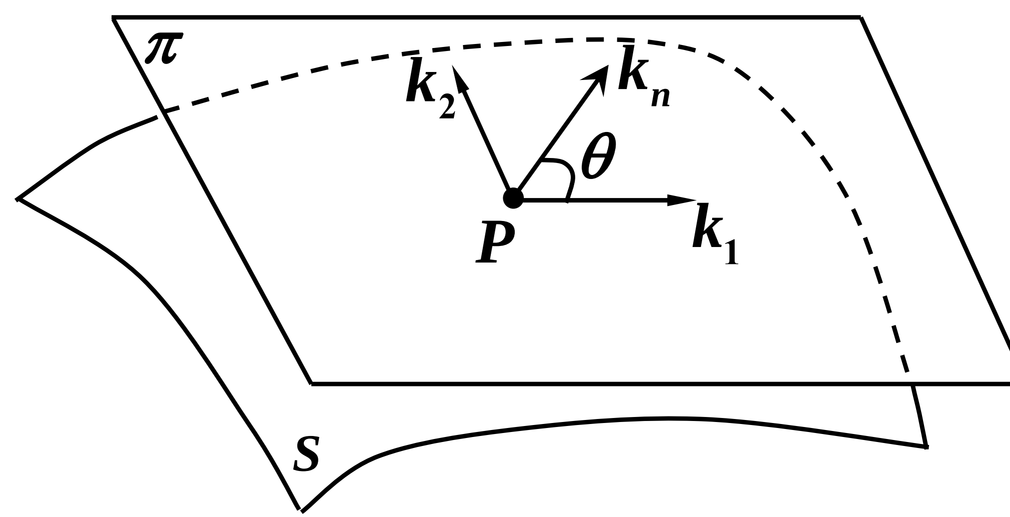
1. 主曲率

曲面上一点处主方向上的法曲率.

即：曲面上一点处沿曲率线方向的法曲率.

2. Euler公式 (反映法曲率随着切方向变化的规律)

$$k_n = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$$



其中k_1, k_2为主曲率,

k_n为沿与k_1所在方向夹θ角的切方向的法曲率.

证 当切点为脐点时, $k_1 = k_2 = k_n$, 公式成立;

当切点不为脐点时, 由于法曲率是法截线的有向曲率,

由曲线的弯曲程度决定, 与参数的选择无关,

不妨选取适当的参数, 使曲率线网成为曲纹坐标网,

即使得 $F \equiv M \equiv 0$.

则 $k_n = \dfrac{L du^2 + N dv^2}{E du^2 + G dv^2}$.

设k_1为u-曲线切方向 $(\delta) = (1:0)$上的法曲率, 则

$$k_1 = \frac{L \cdot 1^2 + N \cdot 0^2}{E \cdot 1^2 + G \cdot 0^2} = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{L \cdot 0^2 + N \cdot 1^2}{E \cdot 0^2 + G \cdot 1^2} = \frac{N}{G}.$$

θ为切方向(d)与k_1所在切方向$(\delta)=(1:0)$之间的夹角,

$$\cos\theta=\frac{E\mathrm{d}u\delta u+G\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2}\sqrt{E\delta u^2+G\delta v^2}}=\frac{\sqrt{E}\mathrm{d}u}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2}},$$

$$\cos^2\theta=\frac{E\mathrm{d}u^2}{E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2},\ \sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\frac{G\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2}.$$

则 $$k_n=\frac{L\mathrm{d}u^2+N\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2}=\frac{L}{E}\frac{E\mathrm{d}u^2}{E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2}+\frac{N}{G}\frac{G\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2}$$

$$=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta.$$

P66 命题6 曲面上一点(非脐点)的主曲率是曲面在该点所有切方向的法曲率的最大值和最小值.

证
$$k_n = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$$

$$= k_1 \frac{1+\cos 2\theta}{2} + k_2 \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$= \frac{k_1+k_2}{2} + \frac{k_1-k_2}{2}\cos 2\theta.$$

$$\min\{k_1, k_2\} = \frac{k_1+k_2}{2} - \left|\frac{k_1-k_2}{2}\right| \le k_n$$

$$\le \frac{k_1+k_2}{2} + \left|\frac{k_1-k_2}{2}\right| = \max\{k_1, k_2\}.$$

3. 主曲率的计算

曲面上点P处的主曲率K_N满足方程：

$$[(EG-F^2)K_N^2-(LG-2MF+NE)K_N+(LN-M^2)]\Big|_P=0$$

即：$$\begin{vmatrix} L_P-K_N E_P & M_P-K_N F_P \\ M_P-K_N F_P & N_P-K_N G_P \end{vmatrix}=0$$

证 由主方向判别定理，沿主方向(d)有$\mathrm{d}\vec{n}=-k_N\mathrm{d}\vec{r}$.

即 $\vec{n}_u\mathrm{d}u+\vec{n}_v\mathrm{d}v=-k_N(\vec{r}_u\mathrm{d}u+\vec{r}_v\mathrm{d}v)$.

两边分别点乘$\vec{r}_u$和$\vec{r}_v$，分别得到

$$\begin{cases} \vec{n}_u \cdot \vec{r}_u \mathrm{d}u + \vec{n}_v \cdot \vec{r}_u \mathrm{d}v = -k_N(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u \mathrm{d}u + \vec{r}_v \cdot \vec{r}_u \mathrm{d}v), \\ \vec{n}_u \cdot \vec{r}_v \mathrm{d}u + \vec{n}_v \cdot \vec{r}_v \mathrm{d}v = -k_N(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \mathrm{d}u + \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v \mathrm{d}v). \end{cases}$$

即$\begin{cases} (-L_P)\mathrm{d}u + (-M_P)\mathrm{d}v = -k_N(E_P \mathrm{d}u + F_P \mathrm{d}v), \\ (-M_P)\mathrm{d}u + (-N_P)\mathrm{d}v = -k_N(F_P \mathrm{d}u + G_P \mathrm{d}v). \end{cases}$

即$\begin{cases} (L_P - k_N E_P)\mathrm{d}u + (M_P - k_N F_P)\mathrm{d}v = 0, \\ (M_P - k_N F_P)\mathrm{d}u + (N_P - k_N G_P)\mathrm{d}v = 0. \end{cases}$

上述关于du和dv的线性方程组有非零解，由克莱姆法则

$$\begin{vmatrix} L_P - K_N E_P & M_P - K_N F_P \\ M_P - K_N F_P & N_P - K_N G_P \end{vmatrix} = 0.$$

4. Gauss曲率和平均曲率

平均曲率 $$H=\frac{k_1+k_2}{2}=\left.\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}\right|_P$$

Gauss曲率 $$K=k_1k_2=\left.\frac{LN-M^2}{EG-F^2}\right|_P$$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.19 证明在曲面上的给定点处,沿相互成为直角的方向的法曲率之和为常数.

2.20 求双曲抛物面 $xy = 2z$ 的两个主曲率之比.

2.21 求螺旋面 $\vec{r} = (u\cos v, u\sin v, u + v)$ 的Gauss曲率 K、平均曲率 H 和主曲率 k_1, k_2.

2.22 证明：如果曲面 S 上的渐近曲线网的夹角是常数,则曲面 S 的Gauss曲率 K 和平均曲率 H 的平方成比例.