

文章编号: 1008- 9497(2001)01- 0042- 04

# 物理摆的多吸引子混沌状态实现与理论模拟

周能 锋, 骆 军 委, 蔡 阳 键  
(浙江大学 物理学系, 浙江 杭州 310028)

**摘 要:** 本文首先利用一个物理摆实现了多吸引子混沌现象, 并对产生混沌的关键因素及相图进行了分析. 然后从力学原理出发用计算机对该系统进行了模拟, 得到了与实验相图符合得很好的理论模拟相图, 并在模拟相图中验证了混沌对初始状态的敏感性.

**关 键 词:** 混沌; 计算机模拟; 物理摆

中图分类号: O545

文献标识码: A

ZHOU Neng-feng, LUO Jun-wei, CAI Yang-jian (Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310028, China)

**Implementation and simulation of chaotic behavior of multiple-attractor generated by a physical pendulum.** Journal of Zhejiang University (Science Edition), 2001, 28(1): 42- 45

**Abstract** An experiment about chaotic behavior of multiple-attractor generated by a physical pendulum was described and the experimental phase chart and the important parameters to generate chaotic behavior were analyzed. Then based on Newton's equation of motion the theoretical phase chart with computer simulation is accordant with the experimental one very well. The susceptibility for final state to its initial condition was also analyzed in the simulative phase chart.

**Key words** chaos; computer simulation; physical pendulum

## 1 引 言

自从法国数学家、物理学家 H. Poincare 第一次发现混沌现象以来, 混沌一直是人们研究和关注的焦点. 混沌在自然界中广泛存在, 有些混沌现象也出现在我们周围, 但是我们却很难直观地区分混沌现象和准周期现象, 往往要利用相空间中的奇异吸引子来描述. 本文利用美国 PASCO 公司生产的转动运动实验装置对一个物理摆的相空间轨道进行了实时的监测, 并利用计算机接口实时记录了混沌产生过程中相空间中的角位移和角速度变化. 为了进一步了解混沌的机理, 分析了该装置的力学原理, 得到了物理摆的运动方程, 并对物理摆的相空间轨道进行计算机模拟. 最后, 将理论分析与计算机模拟得出的结果和实验结果进行了比较讨论.

## 2 实 验

**实验装置如图 1, 2 所示, 该装置主要由下面几部分组成:** 物理摆 (Physical pendulum)、机械振

收稿日期: 2000-04-27

基金项目: 浙江省自然科学基金资助项目 (199031).

作者简介: 周能锋 (1978- ), 男, 现为中科院高能物理研究所研究生.

©1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

动器 (Mechanical oscillator) 弦和弹簧 (String and springs). 物理摆由金属圆盘、偏心小铜柱及滑轮组成,小铜柱固定在金属圆盘的小孔上,弦可以带着滑轮和金属圆盘一起绕轴转动. 机械振动器是一个直流电机,作用是产生周期性的驱动力. 实验中,使用光电传感器来自动监测物理摆的角位移随时间的变化,并用计算机把数据记录下来,以相图 (图 3)的形式输出. 从图中可以看出物理摆的运动是混沌的,它具有奇异吸引子.

这套实验装置的主要参数有: 两根弹簧的弹性系数 物理摆的转动惯量、振动器的频率、摆的阻尼系数、振动器的振动力幅度、偏心小铜柱的力矩等,其中部分参数可调. 改变小铜柱离轴的距离可以改变物理摆的转动惯量及小铜柱的力矩;振动器频率可由输入电压来改变;图 1 中的磁性阻尼装置用来改变阻尼系数;振动力幅度可由直流电机的转动半径 (如图 4 中  $ab$  的长度) 来改变.

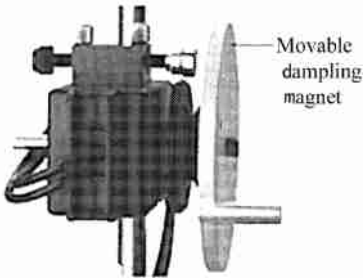


图 1 物理摆的磁性阻尼装置  
Fig. 1 Magnetic damping equipment of physical pendulum

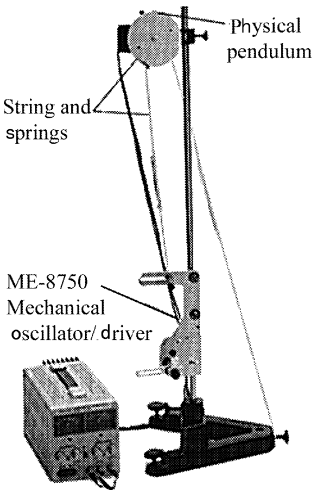


图 2 混沌试验装置  
Fig. 2 Chaos test equipment

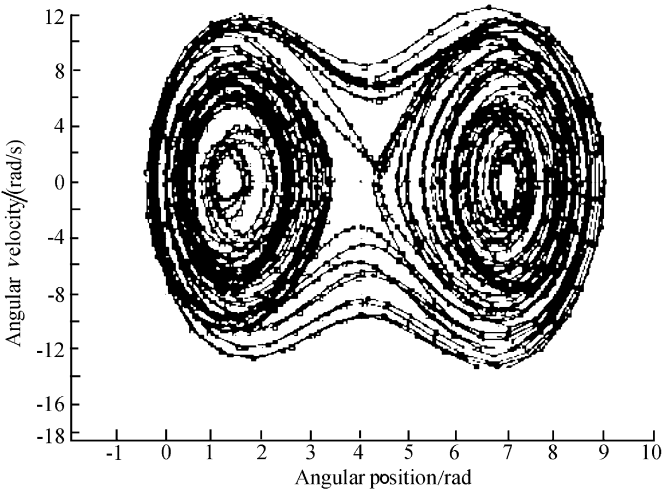


图 3 实验相图  
Fig. 3 Experimental phase diagram

实验装置中两根弹簧的倔强系数  $k_1 = k_2 = 2.029\text{N/m}$ ,物理摆的转动惯量  $I = 1.70 \times 10^{-4}\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ,偏心小铜柱的力矩  $M_{\text{Cu}} = 6.996\text{N}\cdot\text{m}$ ,振动器的频率  $k = 5.414\text{s}^{-1}$ .

3 理论分析与计算机模拟

图 4 中同心的大圆和小圆分别表示金属圆盘和滑轮. 物理摆受到 4 个力矩的作用: 2 个是弹簧的力矩  $M_1, M_2$ ; 一个是小铜柱的力矩  $M_{\text{Cu}}$ ,还有一个是摩擦力的力矩  $M_f$ . 图中的杆  $ab$  绕  $a$  点以角速度  $k$  匀速转动. 设弹簧  $T_1, T_2$  的弹性系数分别为  $k_1, k_2$ ,原长分别为  $L_{10}, L_{20}$ . 可以求出 4 个力矩的表达式如下:

$$M_1 = k_1 R_{og} (L_1 - L_{10} - R_{og}\theta) + k_1 R_{og} (L_{bc} - L_{bc0}), \tag{1}$$

$$M_2 = -k_2 R_{og} (L_2 - L_{20} + R_{og}\theta), \tag{2}$$

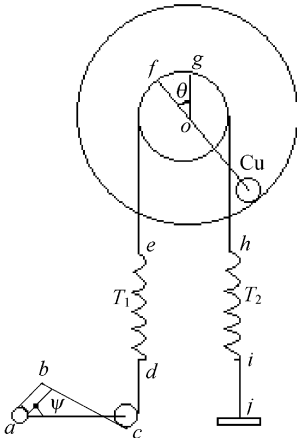


图 4 原理示意图  
Fig. 4 Principle sketch map

$$M_{Cu} = -M_{Cu0} \sin \theta, \quad (3)$$

$$M_f = -\ddot{\theta}, \quad (4)$$

其中,  $R_{og}$  为滑轮半径  $og$  的长度, 式 (1) 中  $L_1$  为弹簧  $T_1$  在  $\theta = 0, \dot{j} = 0$  时的长度,  $L_{bc}$  为线  $bc$  的长度. 显然

$$L_{bc} = \sqrt{L_{ac}^2 + L_{ab}^2 - 2L_{ac}L_{ab}\cos j}, \quad (5)$$

其中,  $L_{ab}, L_{ac}$  是  $ab, ac$  长度, 不随时间变化,  $\dot{j} = \dot{j}_0 + k_1 t, \dot{j}_0$  是  $j$  的初始值,  $t$  是时间变量;  $L_{bc0}$  为线  $bc$  在  $j = 0$  时的长度. 式 (2) 中  $L_2$  为弹簧  $T_2$  在  $\theta = 0$  时的长度. 式 (3) 中  $M_{Cu0}$  为  $\theta = \pi/2$  时铜柱的力矩. 式 (4) 中  $\ddot{\theta}$  是一个摩擦系数.

设圆盘的转动惯量为  $I$ , 则有下面的方程:

$$I\ddot{\theta} = M_1 + M_2 + M_{Cu} + M_f. \quad (6)$$

把式 (1) ~ (4) 代入式 (6) 中得:

$$I\ddot{\theta} + \ddot{\theta} + M_{Cu0} \sin \theta + C(\theta - \theta_0) = F(t). \quad (7)$$

式 (7) 中的参数及表达式如下:

$$C = (k_1 + k_2) R_{og}^2, \quad (8)$$

$$\theta_0 = R_{og} [k_1 (L_1 - L_{10}) - k_2 (L_2 - L_{20})] / C, \quad (9)$$

$$F(t) = k_1 R_{og} (L_{bc} - L_{bc0}) = k_1 R_{og} \sqrt{L_{ac}^2 + L_{ab}^2 - 2L_{ac}L_{ab}\cos(\dot{j}_0 + k_1 t)} - L_{bc0}, \quad (10)$$

其中,  $\theta_0$  的物理意义是  $\dot{j} = 0, M_{Cu0} = 0$  时物理摆的平衡角度.

我们建立了一个程序来模拟该实验, 程序框图如图 5 所示. 当初值为  $x_0 = 0, y_0 = 0, z = 0.2$  时, 程序画出的相图如图 6 所示. 模拟中没有考虑摩擦力的作用, 即假设  $\ddot{\theta} = 0$ . 比较模拟图与实验的相图可以发现, 两者符合得很好. 这就表明模拟中的公式是正确的. 模拟图中的小圆圈是不同初始值经过 500s 后的位置, 这些初始值两两之间的角距离之差不超过 0.0001 rad, 角速度之差不超过 0.0001 rad/s. 从中可以发现, 微小的误差经过一段时间后可能会放大很多, 以致于即使知道了对象的变化规律和初时状态, 也不一定能预言它在长时间后的状态.

我们还进一步研究了变量的灵敏度. 我们在程序中改变一个变量的值, 保持其他变量不变, 观察相图的变化. 每次改变变量初值的 5%, 直到混沌相图消失为止. 表 1 给出了变量的允许变化范围, 误差是 5%. 从表中可以看出, 有些变量的变化范围很大, 如  $k_2, k_1, R_{og}$ , 这说明物理摆对这些变量不灵

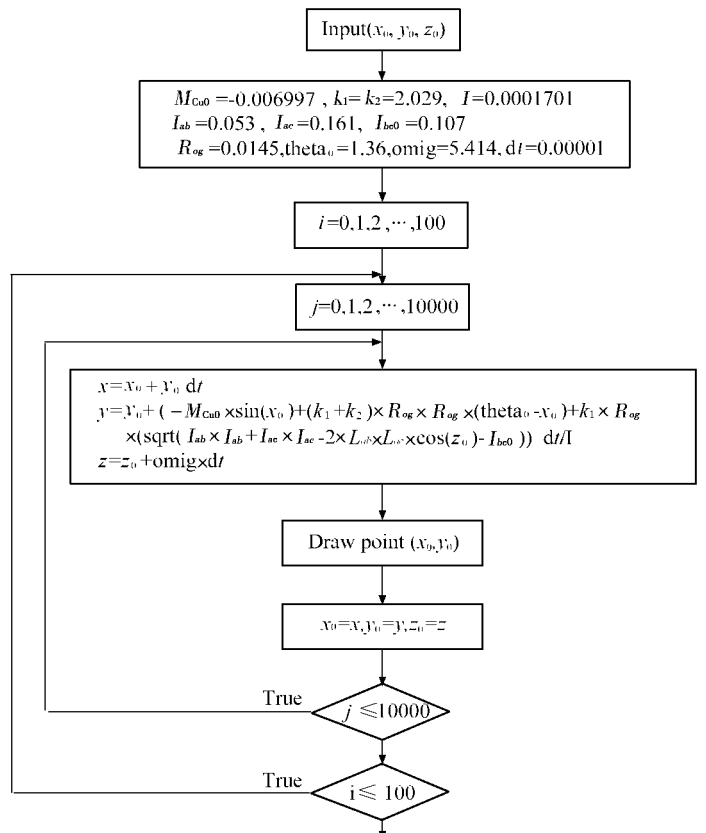


图 5 计算机模拟程序框图

Fig. 5 Computer simulation flow chart

敏.相反,物理摆对变量  $k$ 很灵敏,这与实验是一致的,实验中的  $k$ 比较难调节.

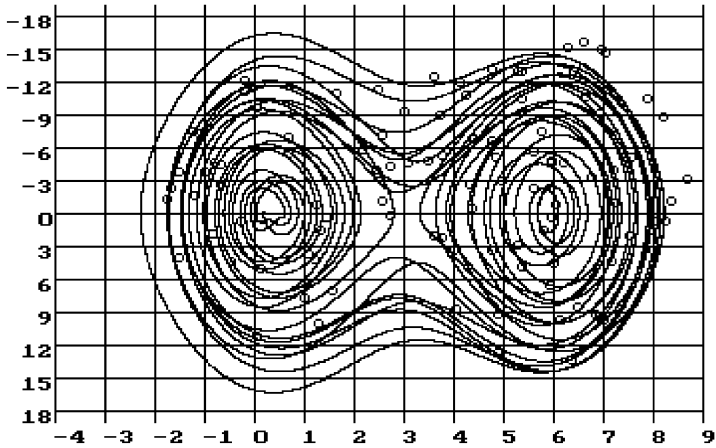


图 6 计算机模拟相图  
Fig. 6 Computer simulation phase diagram

表 1 物理量的允许变化范围  
Table 1 Allowance variation range  
of physical quantity

Variable	Lower limit %	Upper limit %
$M_{Cu0}$	50	105
$k_1$	75	185
$k_1$	60	275
$R_{eg}$	85	190
$I$	90	155
$k$	95	125

## 4 结 论

本文介绍了一个由物理摆实现的混沌实验和对该实验的理论分析及计算机模拟,并比较了计算机模拟得出的结果和实验结果,发现此混沌现象对初始状态(物理摆的角位移及角速度)非常敏感.

此混沌产生装置有助于人们进一步理解和探索自然界中混沌现象的奥秘,同时,也可以作为一种实验设备应用于课堂.

本文是在盛正卯教授悉心指导下完成的,作者对此表示衷心的感谢,同时也对实验室各位老师的帮助表示感谢.

### 参考文献:

[1] 吴祥兴,陈 忠.混沌学导论[M].上海:上海科学技术文献出版社,1996.  
WU Xiang-xing, CHEN Zhong. Chaos Introduction [M]. Shanghai Shanghai Science and Technology Literature Press,1996

[2] 郝柏林.分叉、混沌、奇异吸引子、湍流及其它[J].物理学进展,1983,3(3): 335.  
HE Bo-lin. Fork, chaos, strange multiple-attractor turbulence and so on[J]. Physics Development,1983, 3 (3): 335.

[3] Jackson E A. The entrainment and migration controls of multiple-attractor systems[J]. Phys Lett, 1990, A151: 478.

[4] Anastasios A. Tsonis. From theory to application[M]. New York: Plenum Press, 1992.

(责任编辑 石国华)