第四章　课后作业

4.1 试写出三维图形几何变换的一般表达式，并说明其中各个子矩阵的变换功能。

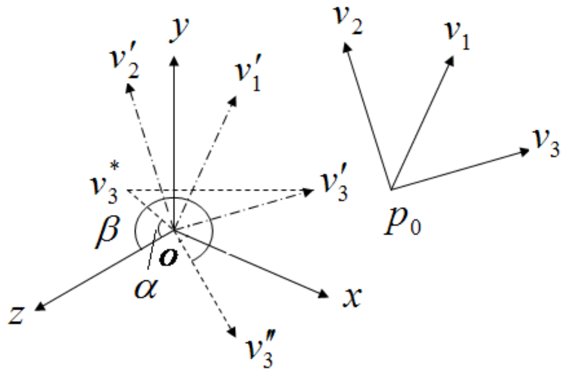
答：令$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$,$[B]=\begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$,$[C]=\begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$[D]=[a_{44}]$

则三维图形几何变换的一般表达式为：

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \bullet T_{3D},$$

其中$T_{3D}=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$,$[A]$产生缩放、旋转变换，$[B]$产生投影变换，$[C]$产生平移变换，$[D]$产生整体比例变换。

4.2 利用基本几何变换，推导出视变换的变换矩阵。



答：设世界坐标系：$Oxyz$，视坐标系：$P_0v_1v_2v_3$，视坐标系的原点P_0在世界坐标系中的坐标为(x_0, y_0, z_0)。

1、　平移点P_0到原点O，变换矩阵为：$T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；如图

2、　过v_3'向 zoy 面做垂线，垂足为v_3^*，设α为v_3^*O与 z 轴的夹角，

着$v_3'O$绕 x 轴旋转α角得到$v_3''O$，然后$v_3''O$绕 y 轴旋转β角与 z 轴重合，最后，$v_1'O$绕 z 轴旋转γ角使之与 x 轴重合；

$$R_x(\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad R_y(\beta)=\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R_z(\gamma)=\begin{bmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad \text{令 } R=R_z(\gamma)R_y(\beta)R_x(\alpha)$$

3、 进行缩放变换的变换矩阵为

$$S=\begin{bmatrix}S_x & 0 & 0 & 0\\ 0 & S_y & 0 & 0\\ 0 & 0 & S_z & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

所以得到视变换矩阵为：$T_{视}=SRT$。

4.3 写出空间一点对任意平面的对称点的组合变换矩阵。

答：设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，关于任意平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的对称点为 $P(x,y,z)$，其中 A,B,C 至少有一个不为零，不妨设 $C\neq0$，则平面与 Z 轴的交点为 $(0,0,-\frac{D}{C})$，平面法向量为 $n=(A,B,C)$

1、 平移变换：变换矩阵为 $T_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{D}{C}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

2、 旋转变换：设过原点平面的单位法向量为 $n'=(a,b,c)$，且 $a+b+c=1$，对 n' 沿 x 轴做旋转变换使之落入 xOz 面：

$$R_x(\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{c}{d} & -\frac{b}{d} & 0\\ 0 & \frac{b}{d} & \frac{c}{d} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}，\text{其中}\, d=\sqrt{b^2+c^2}$$

接着在沿 y 轴做旋转变换，使得 n' 与 z 轴重合

$$R_y(\beta)=\begin{bmatrix}d & 0 & -a & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ a & 0 & d & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}，\text{令}\, R=R_y(\beta)\,R_x(\alpha)$$

3、　对 xOy 平面进行平行投影，得到变换矩阵为：

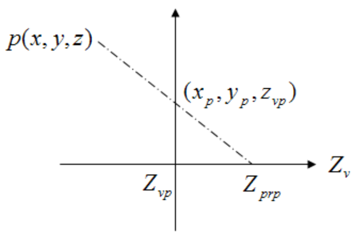
$$T_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

4、　做逆变换　$R_y(-\beta)$，$R_x(-\alpha)$，T_1^{-1}

5、　得到复合矩阵为　$M=T_1^{-1}\,R_x(-\alpha)\,R_y(-\beta)\,T_2\,R_y(\beta)\,R_x(\alpha)\,T_1$

4.4　推导出透视投影和平行投影的变换矩阵

答：　（1）透视投影



假设投影中心在 Z_v 轴上 Z_{prp} 处，视平面与 Z_v 轴垂直，并且在 Z_{vp} 处。

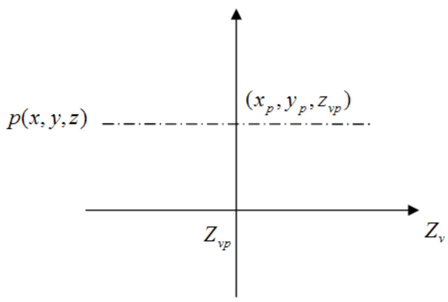
透视投影线上任意一点的参数坐标为：

$$\begin{cases}x'=x-xu\\ y'=y-yu\\ z'=z-(z-Z_{prp})u\end{cases},0\le u\le 1,\text{令}\, z'=Z_{vp}\,\text{带入得}\quad u=\frac{Z_{vp}-z}{Z_{prp}-z}$$

即有：$\begin{cases} x_p = x(\dfrac{Z_{prp}-Z_{vp}}{Z_{prp}-z}) = x(\dfrac{d_p}{Z_{prp}-z}) \\ y_p = y(\dfrac{Z_{prp}-Z_{vp}}{Z_{prp}-z}) = y(\dfrac{d_p}{Z_{prp}-z}) \\ z_p = Z_{vp} \end{cases}$，其中 $d_p = Z_{prp} - Z_{vp}$ 为视平面到投影中心的距离。

所以有 $\begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{Z_{vp}}{d_p} & Z_{vp}(\dfrac{Z_{prp}}{d_p}) \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{d_p} & \dfrac{Z_{prp}}{d_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$，其中 $h = \dfrac{Z_{prp}-z}{d_p}$，$x_p = \dfrac{x_h}{h}$，$y_p = \dfrac{y_h}{h}$，即透视投影矩阵为 $M_{透视} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{Z_{vp}}{d_p} & Z_{vp}(\dfrac{Z_{prp}}{d_p}) \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{d_p} & \dfrac{Z_{prp}}{d_p} \end{bmatrix}$

（2）平行投影变换矩阵



投影面垂直于 Z_v 轴，且位于 Z_{vp} 处，那么在视坐标系中任一点 $p(x,y,z)$ 的投影过该点的投影线与投影面的交点

$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = Z_{vp} \end{cases}$ 得到 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{Z_{vp}}{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$，如果 Z_{vp}=0，我们得到，投影

矩阵为$M_{平行} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$