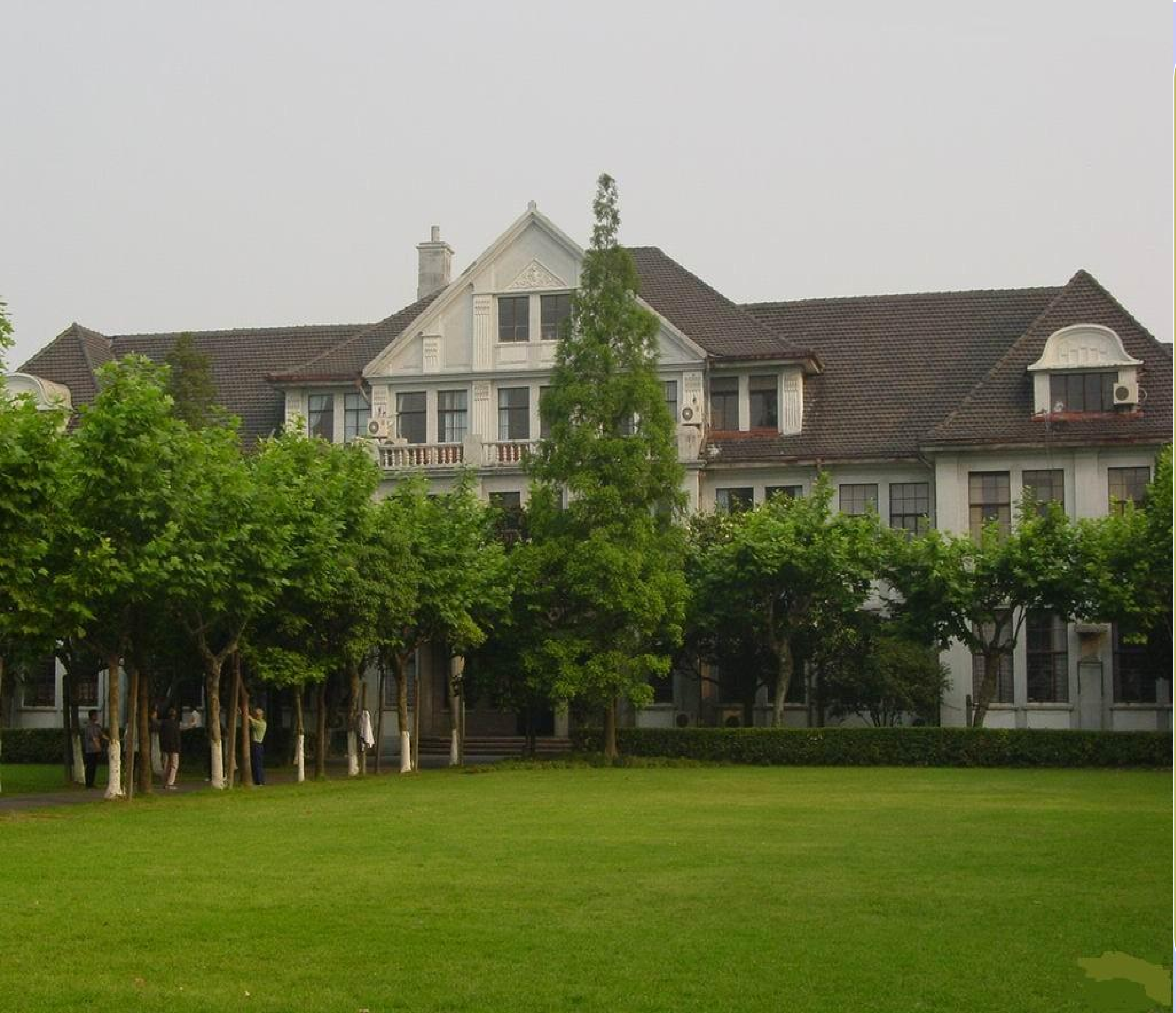

華東理工大學
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第三章　积分变换法

- 第二章主要介绍的是有界区域上的定解问题(初边值问题)的求解

第三章　积分变换法

- 第二章主要介绍的是有界区域上的定解问题(初边值问题)的求解
- 当空间变量是无界或者半无界区域(即没有边界条件，无法利用第二章的知识求解)时，如何构造出解的表达形式呢？

第三章　积分变换法

- 第二章主要介绍的是有界区域上的定解问题(初边值问题)的求解
- 当空间变量是无界或者半无界区域(即没有边界条件，无法利用第二章的知识求解)时，如何构造出解的表达形式呢？
- 第三章将利用积分变换来处理初值问题和半无界问题的方法——积分变换法。

第三章　积分变换法

- 第二章主要介绍的是有界区域上的定解问题(初边值问题)的求解
- 当空间变量是无界或者半无界区域(即没有边界条件，无法利用第二章的知识求解)时，如何构造出解的表达形式呢？
- 第三章将利用积分变换来处理初值问题和半无界问题的方法——积分变换法。
- 所谓积分变换就是通过积分计算，把一个函数变成另一个函数的变换

第三章　积分变换法

- 第二章主要介绍的是有界区域上的定解问题(初边值问题)的求解
- 当空间变量是无界或者半无界区域(即没有边界条件，无法利用第二章的知识求解)时，如何构造出解的表达形式呢？
- 第三章将利用积分变换来处理初值问题和半无界问题的方法——积分变换法。
- 所谓积分变换就是通过积分计算，把一个函数变成另一个函数的变换
- 一般是含有参变量α的积分

$$F(\alpha)=\int_a^b f(t)K(t,\alpha)dt$$

实质是把某函数类A中的函数$f(t)$通过积分变成另一个函数类B中的$F(\alpha)$

第三章　积分变换法

- 第二章主要介绍的是有界区域上的定解问题(初边值问题)的求解
- 当空间变量是无界或者半无界区域(即没有边界条件，无法利用第二章的知识求解)时，如何构造出解的表达形式呢？
- 第三章将利用积分变换来处理初值问题和半无界问题的方法——积分变换法。
- 所谓积分变换就是通过积分计算，把一个函数变成另一个函数的变换
- 一般是含有参变量α的积分

$$F(\alpha) = \int_a^b f(t)K(t,\alpha)dt$$

  实质是把某函数类A中的函数$f(t)$通过积分变成另一个函数类B中的$F(\alpha)$
- 本章中将介绍两个积分变换，分别是Fourier积分变换和Laplace积分变换，学习的过程中可以注意一下这两种变换中$a, b, K(t,\alpha)$的表达形式的不同

⋆3.1 Fourier变换

微积分中的Fourier积分及其相关结论

$\star$3.1 Fourier变换

微积分中的Fourier积分及其相关结论

定义3.1.1
如果广义积分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{R^1} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi$$

对所有的$x \in R^1 = (-\infty, \infty)$都收敛,就称该积分为$f$的Fourier积分，这里$\int_{R^1} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi$.

$\star$3.1 Fourier变换

微积分中的Fourier积分及其相关结论

定义3.1.1
如果广义积分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{R^1} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi$$

对所有的$x \in R^1 = (-\infty, \infty)$都收敛,就称该积分为$f$的Fourier积分，这里$\int_{R^1} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi$.

定理3.1.1 (Fourier积分定理)
设$f \in C(R^1)$, f分段光滑且$f \in L^1(R^1)$(绝对可积),则f的Fourier积分就是其自身，即

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{R^1} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi, x \in R^1$$

利用

$$\cos\lambda(x-\xi)=\frac{1}{2}(e^{i\lambda(x-\xi)}+e^{-i\lambda(x-\xi)})$$

利用

$$\cos\lambda(x-\xi) = \frac{1}{2}(e^{i\lambda(x-\xi)} + e^{-i\lambda(x-\xi)})$$

可得

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{R^1} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{R^1} f(\xi)(e^{i\lambda(x-\xi)}+e^{-i\lambda(x-\xi)})d\xi d\lambda$$

利用

$$\cos\lambda(x-\xi)=\frac{1}{2}(e^{i\lambda(x-\xi)}+e^{-i\lambda(x-\xi)})$$

可得

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{R^1}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{R^1}f(\xi)(e^{i\lambda(x-\xi)}+e^{-i\lambda(x-\xi)})d\xi d\lambda$$

其中

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{R^1}f(\xi)e^{-i\lambda(x-\xi)}d\xi d\lambda\overset{\lambda=-\lambda}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{R^1}f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi d\lambda$$

代入上式，化简可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{R^1}\int_{R^1}f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi d\lambda$$

把上式调整一下,与ξ有关的写在一起，就有

利用

$$\cos\lambda(x-\xi)=\frac{1}{2}(e^{i\lambda(x-\xi)}+e^{-i\lambda(x-\xi)})$$

可得

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{R^1}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{R^1}f(\xi)(e^{i\lambda(x-\xi)}+e^{-i\lambda(x-\xi)})d\xi d\lambda$$

其中

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{R^1}f(\xi)e^{-i\lambda(x-\xi)}d\xi d\lambda\overset{\lambda=-\lambda}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{R^1}f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi d\lambda$$

代入上式，化简可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{R^1}\int_{R^1}f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi d\lambda$$

把上式调整一下,与ξ有关的写在一起，就有

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{R^1}(\int_{R^1}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi)e^{i\lambda x}d\lambda,\qquad(3.1.1)$$

观察括号里的表达形式，它积分之后是关于λ的表达形式（即通过积分把关于ξ的函数转换成了关于λ的函数，由积分变换的定义），于是我们就有了

- **定 义3.1.2** 由积分$\int_{R^1} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi$确定的$\lambda$的函数称为$f$的Fourier变换，有时也称为$f$ 的像函数。通常记为$\mathscr{F}[f](\lambda)$,或$\mathscr{F}[f]$，或$\mathscr{F}[f(x)]$，或$\hat{f}(\lambda)$即

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{R^1} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi = \int_{R^1} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

- **定 义3.1.2** 由积分$\int_{R^1} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi$确定的$\lambda$的函数称为$f$的Fourier变换，有时也称为$f$ 的像函数。通常记为$\mathscr{F}[f](\lambda)$,或$\mathscr{F}[f]$，或$\mathscr{F}[f(x)]$，或$\hat{f}(\lambda)$即

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{R^1} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi = \int_{R^1} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

- 由等式(3.1.1),我们可以得到$\hat{f}(\lambda)$的Fourier逆变换

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{R^1} \hat{f}(\lambda)e^{ix\lambda}d\lambda, \qquad (3.1.2)$$

记为$\mathscr{F}^{-1}[\hat{f}](x)$,或$\mathscr{F}^{-1}[\hat{f}]$,或$\mathscr{F}^{-1}[\hat{f}(\lambda)]$,有时也称$f$为$\hat{f}$ 的像原函数或原函数

- **定义3.1.2** 由积分$\int_{R^1} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi$确定的$\lambda$的函数称为$f$的Fourier变换，有时也称为$f$的像函数。通常记为$\mathscr{F}[f](\lambda)$,或$\mathscr{F}[f]$，或$\mathscr{F}[f(x)]$，或$\hat{f}(\lambda)$即

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{R^1} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi = \int_{R^1} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

- 由等式(3.1.1),我们可以得到$\hat{f}(\lambda)$的Fourier逆变换

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{R^1} \hat{f}(\lambda)e^{ix\lambda}d\lambda, \tag{3.1.2}$$

  记为$\mathscr{F}^{-1}[\hat{f}](x)$,或$\mathscr{F}^{-1}[\hat{f}]$,或$\mathscr{F}^{-1}[\hat{f}(\lambda)]$,有时也称$f$为$\hat{f}$的像原函数或原函数

- 注意由等式(3.1.1)给出了Fourier变换和Fourier逆变换表达形式，在一些参考书里，把$\frac{1}{2\pi}$的系数平分在Fourier变换和逆变换中，即每个的积分前面系数是$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

- **定理3.1.2** 设$f \in L^1(R^1)$,并且f在R^1上连续，分段光滑，则f的Fourier变换存在，逆变换也存在，同时，(3.1.2)式成立，(3.1.2)式称为反演公式.

例1：求$e^{-|x|}$的Fourier变换

例1：求$e^{-|x|}$的Fourier变换

解：由定义

$$\mathscr{F}[e^{-|x|}] = \int_R e^{-|x|} e^{-i\lambda x} dx$$

例1：求$e^{-|x|}$的Fourier变换
解：由定义

$$\mathscr{F}[e^{-|x|}] = \int_R e^{-|x|} e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{0} e^x e^{-i\lambda x} dx + \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-i\lambda x} dx$$

Home Page
Title Page
Page 6 of 20
Go Back
Full Screen
Close
Quit

例1：求$e^{-|x|}$的Fourier变换
解：由定义

$$\mathscr{F}[e^{-|x|}] = \int_R e^{-|x|}e^{-i\lambda x}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-i\lambda x}dx + \int_0^{\infty} e^{-x}e^{-i\lambda x}dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x}e^{i\lambda x}dx + \int_0^{\infty} e^{-x}e^{-i\lambda x}dx = \int_0^{\infty} e^{-x}(e^{i\lambda x}+e^{-i\lambda x})dx$$

例1：求$e^{-|x|}$的Fourier变换

解：由定义

$$\mathscr{F}[e^{-|x|}] = \int_R e^{-|x|}e^{-i\lambda x}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-i\lambda x}dx + \int_0^{\infty} e^{-x}e^{-i\lambda x}dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x}e^{i\lambda x}dx + \int_0^{\infty} e^{-x}e^{-i\lambda x}dx = \int_0^{\infty} e^{-x}(e^{i\lambda x} + e^{-i\lambda x})dx$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-x}\cos\lambda x dx = \frac{2}{1+\lambda^2}$$(分部积分两次即可得结果)

例2：求函数$\frac{\sin ax}{x}$的Fourier变换，其中a为正常数

例2：求函数$\frac{\sin ax}{x}$的Fourier变换，其中a为正常数

解：由定义

$$\mathscr{F}[\frac{\sin ax}{x}] = \int_R \frac{\sin ax}{x} e^{-i\lambda x} dx = \int_R \frac{\sin ax}{x} (\cos \lambda x - i \sin \lambda x) dx$$

例2：求函数$\frac{\sin ax}{x}$的Fourier变换，其中a为正常数

解：由定义

$$\mathscr{F}[\frac{\sin ax}{x}] = \int_R \frac{\sin ax}{x} e^{-i\lambda x} dx = \int_R \frac{\sin ax}{x} (\cos \lambda x - i \sin \lambda x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos \lambda x dx - \int_{-\infty}^{\infty} i \frac{\sin ax}{x} \sin \lambda x dx$$

例2：求函数$\frac{\sin ax}{x}$的Fourier变换，其中a为正常数
解：由定义

$$\mathscr{F}[\frac{\sin ax}{x}] = \int_R \frac{\sin ax}{x} e^{-i\lambda x} dx = \int_R \frac{\sin ax}{x}(\cos \lambda x - i \sin \lambda x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos \lambda x dx - \int_{-\infty}^{\infty} i \frac{\sin ax}{x} \sin \lambda x dx$$

第一项是偶函数在对称区间的积分，利用积化和差，第二项是奇函数在对称区间的积分

例2：求函数$\frac{\sin ax}{x}$的Fourier变换，其中a为正常数
解：由定义

$$\mathscr{F}[\frac{\sin ax}{x}] = \int_R \frac{\sin ax}{x} e^{-i\lambda x} dx = \int_R \frac{\sin ax}{x} (\cos \lambda x - i \sin \lambda x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos \lambda x dx - \int_{-\infty}^{\infty} i \frac{\sin ax}{x} \sin \lambda x dx$$

第一项是偶函数在对称区间的积分，利用积化和差，第二项是奇函数在对称区间的积分

$$= \int_0^{\infty} \frac{\sin(a+\lambda)x + \sin(a-\lambda)x}{x} dx$$

例2：求函数$\frac{\sin ax}{x}$的Fourier变换，其中a为正常数

解：由定义

$$\mathscr{F}[\frac{\sin ax}{x}] = \int_R \frac{\sin ax}{x} e^{-i\lambda x} dx = \int_R \frac{\sin ax}{x} (\cos \lambda x - i \sin \lambda x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos \lambda x dx - \int_{-\infty}^{\infty} i \frac{\sin ax}{x} \sin \lambda x dx$$

第一项是偶函数在对称区间的积分，利用积化和差，第二项是奇函数在对称区间的积分

$$= \int_0^{\infty} \frac{\sin(a+\lambda)x + \sin(a-\lambda)x}{x} dx$$

利用$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} sgn\ a$可得

$$\mathscr{F}[\frac{\sin ax}{x}] = \begin{cases} \pi, & -a < \lambda < a \\ \frac{\pi}{2}, & \lambda = \pm a \\ 0, & \lambda < -a, \text{或} \lambda > a \end{cases}$$

类似地，可以定义多元函数的Fourier变换，设$f \in L^1(R^n)$,且f连续、分块光滑.如果令

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{R^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\lambda\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

类似地，可以定义多元函数的Fourier变换，设$f \in L^1(R^n)$,且f连续、分块光滑.如果令

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{R^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\lambda\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

利用多元函数的Fourier积分定理知，对所有的$\mathbf{x} \in R^n$,成立

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \hat{f}(\lambda) e^{i\mathbf{x}\cdot\lambda} d\lambda$$

类似地，可以定义多元函数的Fourier变换，设$f \in L^1(R^n)$,且f连续、分块光滑.如果令

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{R^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\lambda\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

利用多元函数的Fourier积分定理知，对所有的$\mathbf{x} \in R^n$,成立

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \hat{f}(\lambda) e^{i\mathbf{x}\cdot\lambda} d\lambda$$

其中

$$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in R^n, \mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n$$

$$\lambda \cdot \mathbf{x} = x_1\lambda_1 + \cdots + x_n\lambda_n$$

类似地，可以定义多元函数的Fourier变换，设$f \in L^1(R^n)$,且f连续、分块光滑.如果令

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{R^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\lambda\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

利用多元函数的Fourier积分定理知，对所有的$\mathbf{x} \in R^n$,成立

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \hat{f}(\lambda) e^{i\mathbf{x}\cdot\lambda} d\lambda$$

其中

$$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in R^n, \mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n$$

$$\lambda \cdot \mathbf{x} = x_1\lambda_1 + \cdots + x_n\lambda_n$$

函数$\hat{f}(\lambda)$称为f的n维Fourier变换，$f(\mathbf{x})$称为$\hat{f}(\lambda)$的Fourier逆变换，记为$\mathscr{F}^{-1}[\hat{f}](\mathbf{x})$,或$\mathscr{F}^{-1}[\hat{f}]$

Fourier变换及其逆变换的基本性质(一维情形),假设所讨论的函数的Fourier变换(逆变换)存在

Fourier变换及其逆变换的基本性质(一维情形),假设所讨论的函数的Fourier变换(逆变换)存在

性质1(线性性质) Fourier变换及其逆变换都是线性变换，即对任意的函数f, g与常数α, β,成立

$$\mathscr{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathscr{F}[f] + \beta \mathscr{F}[g] = \alpha \hat{f}(\lambda) + \beta \hat{g}(\lambda)$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha \hat{f} + \beta \hat{g}] = \alpha \mathscr{F}^{-1}[\hat{f}] + \beta \mathscr{F}^{-1}[\hat{g}] = \alpha f + \beta g$$

（由定义即可证）

Fourier变换及其逆变换的基本性质(一维情形),假设所讨论的函数的Fourier变换(逆变换)存在

性质1(线性性质) Fourier变换及其逆变换都是线性变换，即对任意的函数f, g与常数α, β,成立

$$\mathscr{F}[\alpha f+\beta g]=\alpha \mathscr{F}[f]+\beta \mathscr{F}[g]=\alpha \hat{f}(\lambda)+\beta \hat{g}(\lambda)$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha \hat{f}+\beta \hat{g}]=\alpha \mathscr{F}^{-1}[\hat{f}]+\beta \mathscr{F}^{-1}[\hat{g}]=\alpha f+\beta g$$

（由定义即可证）

性质2(位移性质) 对于任意的函数f及常数b,成立

$$\mathscr{F}[f(x-b)] = e^{-ib\lambda}\mathscr{F}[f(x)], \quad \mathscr{F}[f(x)e^{ibx}] = \hat{f}(\lambda - b)$$

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

性质2(位移性质) 对于任意的函数f及常数b,成立

$$\mathscr{F}[f(x-b)] = e^{-ib\lambda}\mathscr{F}[f(x)], \quad \mathscr{F}[f(x)e^{ibx}] = \hat{f}(\lambda - b)$$

证明：

$$\mathscr{F}[f(x-b)] = \int_{R^1} f(x-b)e^{-i\lambda x}dx$$

性质2(位移性质) 对于任意的函数f及常数b,成立

$$\mathscr{F}[f(x-b)] = e^{-ib\lambda}\mathscr{F}[f(x)],\ \ \mathscr{F}[f(x)e^{ibx}] = \hat{f}(\lambda - b)$$

证明：

$$\mathscr{F}[f(x-b)] = \int_{R^1} f(x-b)e^{-i\lambda x}dx$$

$$(\text{令} x-b=t) = \int_{R^1} f(t)e^{-i\lambda(b+t)}dt = e^{-ib\lambda}\int_{R^1} f(t)e^{-i\lambda t}dt = e^{-ib\lambda}\mathscr{F}[f(x)].$$

性质2(位移性质) 对于任意的函数f及常数b,成立

$$\mathscr{F}[f(x-b)] = e^{-ib\lambda}\mathscr{F}[f(x)],\ \ \mathscr{F}[f(x)e^{ibx}] = \hat{f}(\lambda-b)$$

证明：

$$\mathscr{F}[f(x-b)] = \int_{R^1} f(x-b)e^{-i\lambda x}dx$$

$$(令 x-b=t) = \int_{R^1} f(t)e^{-i\lambda(b+t)}dt = e^{-ib\lambda}\int_{R^1} f(t)e^{-i\lambda t}dt = e^{-ib\lambda}\mathscr{F}[f(x)].$$

$$\mathscr{F}[f(x)e^{ibx}] = \int_{R^1} f(x)e^{ibx}e^{-i\lambda x}dx$$

性质2(位移性质) 对于任意的函数f及常数b,成立

$$\mathscr{F}[f(x-b)] = e^{-ib\lambda}\mathscr{F}[f(x)],\quad \mathscr{F}[f(x)e^{ibx}] = \hat{f}(\lambda-b)$$

证明:

$$\mathscr{F}[f(x-b)] = \int_{R^1} f(x-b)e^{-i\lambda x}dx$$

$$(\text{令}x-b=t) = \int_{R^1} f(t)e^{-i\lambda(b+t)}dt = e^{-ib\lambda}\int_{R^1} f(t)e^{-i\lambda t}dt = e^{-ib\lambda}\mathscr{F}[f(x)].$$

$$\mathscr{F}[f(x)e^{ibx}] = \int_{R^1} f(x)e^{ibx}e^{-i\lambda x}dx = \int_{R^1} f(x)e^{-i(\lambda-b)x}dx$$

性质2(位移性质) 对于任意的函数f及常数b,成立

$$\mathscr{F}[f(x-b)] = e^{-ib\lambda}\mathscr{F}[f(x)],\ \ \mathscr{F}[f(x)e^{ibx}] = \hat{f}(\lambda-b)$$

证明：

$$\mathscr{F}[f(x-b)] = \int_{R^1} f(x-b)e^{-i\lambda x}dx$$

$$(令x-b=t) = \int_{R^1} f(t)e^{-i\lambda(b+t)}dt = e^{-ib\lambda}\int_{R^1} f(t)e^{-i\lambda t}dt = e^{-ib\lambda}\mathscr{F}[f(x)].$$

$$\mathscr{F}[f(x)e^{ibx}] = \int_{R^1} f(x)e^{ibx}e^{-i\lambda x}dx = \int_{R^1} f(x)e^{-i(\lambda-b)x}dx$$

$$= \hat{f}(\lambda-b)$$

性质3(相似性质) 对于任意的函数f及常数$a \neq 0, \mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\lambda}{a})$成立.

性质3(相似性质) 对于任意的函数f及常数$a \neq 0, \mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\lambda}{a})$成立.

证明：由定义知

$$\mathscr{F}[f(ax)] = \int_{R^1} f(ax)e^{-i\lambda x}dx$$

性质3(相似性质) 对于任意的函数f及常数$a \neq 0, \mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\lambda}{a})$成立.

证明：由定义知

$$\mathscr{F}[f(ax)] = \int_{R^1} f(ax)e^{-i\lambda x}dx$$

当$a > 0$时，有

$$\mathscr{F}[f(ax)] = \int_{R^1} f(t)e^{-i\lambda t/a}\frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\int_{R^1} f(t)e^{-i(\lambda/a)t}dt$$

$$= \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\lambda}{a}).$$

性质3(相似性质) 对于任意的函数f及常数$a \neq 0, \mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\lambda}{a})$成立.

证明：由定义知

$$\mathscr{F}[f(ax)] = \int_{R^1} f(ax)e^{-i\lambda x}dx$$

当$a > 0$时，有

$$\mathscr{F}[f(ax)] = \int_{R^1} f(t)e^{-i\lambda t/a}\frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\int_{R^1} f(t)e^{-i(\lambda/a)t}dt$$

$$= \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\lambda}{a}).$$

当$a < 0$

$$\mathscr{F}[f(ax)] = \int_{\infty}^{-\infty} f(t)e^{-i\lambda t/a}\frac{dt}{a} = -\frac{1}{a}\int_{R^1} f(t)e^{-i(\lambda/a)t}dt$$

$$= \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\lambda}{a}).$$

性质4(微分性质) 设$f, f^{'} \in L^1(R^1)\bigcap C(R^1)$,则

$$\mathscr{F}[f^{'}(x)] = i\lambda\hat{f}(\lambda).$$

性质4(微分性质) 设$f, f^{'} \in L^1(R^1) \bigcap C(R^1)$,则

$$\mathscr{F}[f^{'}(x)] = i\lambda \hat{f}(\lambda).$$

证明：由$f, f' \in L^1(R) \Rightarrow \lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$,于是

$$\mathscr{F}[f'(x)] = \int_{R^1} f'(x) e^{-i\lambda x} dx = e^{-i\lambda x} f(x)|_{-\infty}^{\infty} + i\lambda \int_R f(x) e^{-i\lambda x} dx = i\lambda \hat{f}(\lambda)$$

性质4(微分性质) 设$f, f' \in L^1(R^1)\bigcap C(R^1)$,则

$$\mathscr{F}[f'(x)] = i\lambda\hat{f}(\lambda).$$

证明：由$f, f' \in L^1(R) \Rightarrow \lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$,于是

$$\mathscr{F}[f'(x)] = \int_{R^1} f'(x)e^{-i\lambda x}dx = e^{-i\lambda x}f(x)|_{-\infty}^{\infty} + i\lambda\int_R f(x)e^{-i\lambda x}dx = i\lambda\hat{f}(\lambda)$$

一般地，若$f, f', \cdots, f^{(n)} \in L^1(R^1)\cap C(R^1)$,则有

$$\mathscr{F}[f^{(n)}(x)] = (i\lambda)^n\hat{f}(\lambda).$$

性质4(微分性质) 设$f, f^{'} \in L^1(R^1) \bigcap C(R^1)$,则

$$\mathscr{F}[f^{'}(x)] = i\lambda \hat{f}(\lambda).$$

证明：由$f, f' \in L^1(R) \Rightarrow \lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$,于是

$$\mathscr{F}[f'(x)] = \int_{R^1} f'(x)e^{-i\lambda x}dx = e^{-i\lambda x}f(x)|_{-\infty}^{\infty} + i\lambda \int_R f(x)e^{-i\lambda x}dx = i\lambda \hat{f}(\lambda)$$

一般地，若$f, f^{'}, \cdots, f^{(n)} \in L^1(R^1) \cap C(R^1)$,则有

$$\mathscr{F}[f^{(n)}(x)] = (i\lambda)^n \hat{f}(\lambda).$$

注意：利用F-变换的微分性质，可把一个常微分方程转化成代数方程，把一个偏微分方程转化成常微分方程。

性质5 (乘多项式性质)设$f(x), xf(x) \in L^1(R^1)$,则有

$$\mathscr{F}[xf(x)] = i\frac{d}{d\lambda}\hat{f}(\lambda).$$

性质5 (乘多项式性质)设$f(x), xf(x) \in L^1(R^1)$,则有

$$\mathscr{F}[xf(x)] = i\frac{d}{d\lambda}\hat{f}(\lambda).$$

证明：由定义

$$\mathscr{F}[xf(x)] = \int_R xf(x)e^{-i\lambda x}dx = i\frac{d}{d\lambda}\int_R f(x)e^{-i\lambda x}dx = i\frac{d}{d\lambda}\hat{f}(\lambda)$$

性质5 (乘多项式性质)设$f(x), xf(x) \in L^1(R^1)$,则有

$$\mathscr{F}[xf(x)] = i\frac{d}{d\lambda}\hat{f}(\lambda).$$

证明：由定义

$$\mathscr{F}[xf(x)] = \int_R xf(x)e^{-i\lambda x}dx = i\frac{d}{d\lambda}\int_R f(x)e^{-i\lambda x}dx = i\frac{d}{d\lambda}\hat{f}(\lambda)$$

一般地，若$f(x), xf(x), \cdots, x^k f(x) \in L^1(R^1) \cap C(R^1)$,则有

$$\mathscr{F}[x^k f(x)] = i^k\frac{d^k}{d\lambda^k}\hat{f}(\lambda).$$

- 性质6 (对称性质)若$f(x) \in L^1(R^1)$,则

$$\mathscr{F}^{-1}[(f(x)] = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(-\lambda)$$

- 性质6 (对称性质)若$f(x) \in L^1(R^1)$,则

$$\mathscr{F}^{-1}[(f(x)] = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(-\lambda)$$

- 性质7 (积分性质)

$$\mathscr{F}[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi] = -\frac{i}{\lambda}\hat{f}(\lambda)$$

- 性质6 (对称性质)若$f(x)\in L^1(R^1)$,则

$$\mathscr{F}^{-1}[(f(x)] = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(-\lambda)$$

- 性质7 (积分性质)

$$\mathscr{F}[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi] = -\frac{i}{\lambda}\hat{f}(\lambda)$$

证明：因为

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi = f(x)$$

- 性质6 (对称性质)若$f(x) \in L^1(R^1)$,则

$$\mathscr{F}^{-1}[(f(x)] = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(-\lambda)$$

- 性质7 (积分性质)

$$\mathscr{F}[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi] = -\frac{i}{\lambda}\hat{f}(\lambda)$$

证明：因为

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi = f(x)$$

左右两边关于x施行Fourier变换,左边利用微分性质

- 性质6 (对称性质)若$f(x) \in L^1(R^1)$,则

$$\mathscr{F}^{-1}[(f(x)] = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(-\lambda)$$

- 性质7 (积分性质)

$$\mathscr{F}[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi] = -\frac{i}{\lambda}\hat{f}(\lambda)$$

证明：因为

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi = f(x)$$

左右两边关于x施行Fourier变换,左边利用微分性质

$$\mathscr{F}[\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi] = i\lambda\mathscr{F}[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi]$$

右边由定义

$$\mathscr{F}[f(x)] = \hat{f}(\lambda)$$

所以结论成立

例3：求函数$g(x) = e^{-a|x|}$的Fourier变换，其中a是正常数

例3：求函数$g(x) = e^{-a|x|}$的Fourier变换，其中a是正常数

解：记$f(x) = e^{-|x|}$,则$g(x) = f(ax)$,由性质3相似性质，以及例1的结果，所以

$$\mathscr{F}[g(x)] = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\lambda}{a}) = \frac{1}{a}\frac{2}{1+(\lambda/a)^2} = \frac{2a}{a^2+\lambda^2}$$

例3：求函数$g(x) = e^{-a|x|}$的Fourier变换，其中a是正常数

解：记$f(x) = e^{-|x|}$,则$g(x) = f(ax)$,由性质3相似性质，以及例1的结果，所以

$$\mathscr{F}[g(x)] = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\lambda}{a}) = \frac{1}{a}\frac{2}{1+(\lambda/a)^2} = \frac{2a}{a^2+\lambda^2}$$

例5：求函数$f(x)=e^{-x^2}$的Fourier变换

例5：求函数$f(x)=e^{-x^2}$的Fourier变换
解：由定义和乘多项式性质，可得

$$\hat{f}(\lambda)=\int_R e^{-x^2}e^{-i\lambda x}dx=-\frac{1}{i\lambda}e^{-x^2}e^{-i\lambda x}|_{-\infty}^{\infty}+\frac{2i}{\lambda}\int_R xe^{-x^2}e^{-i\lambda x}dx$$

$$=\frac{2i}{\lambda}\mathscr{F}[xf(x)]=-\frac{2}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\hat{f}(\lambda)$$

例5：求函数$f(x)=e^{-x^2}$的Fourier变换
解：由定义和乘多项式性质，可得

$$\hat{f}(\lambda)=\int_R e^{-x^2}e^{-i\lambda x}dx=-\frac{1}{i\lambda}e^{-x^2}e^{-i\lambda x}|_{-\infty}^{\infty}+\frac{2i}{\lambda}\int_R xe^{-x^2}e^{-i\lambda x}dx$$

$$=\frac{2i}{\lambda}\mathscr{F}[xf(x)]=-\frac{2}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\hat{f}(\lambda)$$

由概率积分知

$$\hat{f}(0)=\int_R e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

例5：求函数$f(x)=e^{-x^2}$的Fourier变换
解：由定义和乘多项式性质，可得

$$\hat{f}(\lambda)=\int_R e^{-x^2}e^{-i\lambda x}dx=-\frac{1}{i\lambda}e^{-x^2}e^{-i\lambda x}|_{-\infty}^{\infty}+\frac{2i}{\lambda}\int_R xe^{-x^2}e^{-i\lambda x}dx$$

$$=\frac{2i}{\lambda}\mathscr{F}[xf(x)]=-\frac{2}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\hat{f}(\lambda)$$

由概率积分知

$$\hat{f}(0)=\int_R e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

$\hat{f}(\lambda)$ 满足以下常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\frac{d}{d\lambda}\hat{f}(\lambda)+\frac{\lambda}{2}\hat{f}(\lambda)=0,\\ \hat{f}(0)=\sqrt{\pi}\end{cases}$$

解得

$$\hat{f}(\lambda)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}},$$

由例5可知$\mathscr{F}[e^{-x^2}] = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$

- 对任意的正常数A, (利用相似性质) 有

$$\mathscr{F}[e^{-Ax^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{A}}e^{-\frac{\lambda^2}{4A}}$$

由例5可知$\mathscr{F}[e^{-x^2}] = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$

- 对任意的正常数A, (利用相似性质) 有

$$\mathscr{F}[e^{-Ax^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{A}}e^{-\frac{\lambda^2}{4A}}$$

- 特别地，对于$a > 0, t > 0$,取$A = (4a^2t)^{-1}$,得

$$\mathscr{F}[e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}] = 2a\sqrt{\pi t}e^{-(a\lambda)^2t}$$

由例5可知$\mathscr{F}[e^{-x^2}] = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$

- 对任意的正常数A, (利用相似性质) 有

$$\mathscr{F}[e^{-Ax^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{A}}e^{-\frac{\lambda^2}{4A}}$$

- 特别地，对于$a > 0, t > 0$,取$A = (4a^2t)^{-1}$,得

$$\mathscr{F}[e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}] = 2a\sqrt{\pi t}e^{-(a\lambda)^2t}$$

- $$\mathscr{F}^{-1}[e^{-(a\lambda)^2t}] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}exp(-\frac{x^2}{4a^2t}), \qquad (3.1.3)$$

(注意：表达式(3.1.3)的结论一定一定记住，在后面的热传导方程的求解时，要用到此结论）

- 性质8 (乘积定理)

$$\int_R f_1(x)f_2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_R \hat{f}_1(\lambda)\hat{f}_2(-\lambda)d\lambda,$$

$$\int_R \hat{f}_1(x)f_2(x)dx = \int_R f_1(\lambda)\hat{f}_2(\lambda)d\lambda$$

- 性质8 (乘积定理)

$$\int_R f_1(x)f_2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_R \hat{f}_1(\lambda)\hat{f}_2(-\lambda)d\lambda,$$

$$\int_R \hat{f}_1(x)f_2(x)dx = \int_R f_1(\lambda)\hat{f}_2(\lambda)d\lambda$$

- 性质9 (能量积分定理，Parseval等式)

$$\int_R |f(x)|^2dx = \frac{1}{2\pi}\int_R |\hat{f}(\lambda)|^2d\lambda$$

定义3.1.3(卷积) 设函数f,g在R^1上有定义，如果积分$\int_{R^1} f(x-t)g(t)dt$对所有的$x \in R^1$都收敛，就称该积分为f与g的卷积,记为

$$(f * g)(x) = \int_{R^1} f(x-t)g(t)dt$$

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定义3.1.3(卷积) 设函数f,g在R^1上有定义，如果积分$\int_{R^1} f(x-t)g(t)dt$对所有的$x\in R^1$都收敛，就称该积分为f与g的卷积,记为

$$(f*g)(x)=\int_{R^1} f(x-t)g(t)dt$$

多元函数的卷积:设函数f,g在R^n上有定义，若积分$\int_{R^n} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})d\mathbf{y}$对所有的$\mathbf{x}\in R^n$ 都收敛，则称该积分为f与g的卷积，记为

$$(f*g)(\mathbf{x})=\int_{R^1} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

定义3.1.3(卷积) 设函数f,g在R^1上有定义，如果积分$\int_{R^1} f(x-t)g(t)dt$对所有的$x \in R^1$都收敛，就称该积分为f与g的卷积,记为

$$(f*g)(x) = \int_{R^1} f(x-t)g(t)dt$$

多元函数的卷积:设函数f,g在R^n上有定义，若积分$\int_{R^n} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})d\mathbf{y}$对所有的$\mathbf{x} \in R^n$都收敛，则称该积分为$f$与$g$的卷积，记为

$$(f*g)(\mathbf{x}) = \int_{R^1} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

卷积有如下性质：

卷积有如下性质：

- (1)交换律：$f * g = g * f$

卷积有如下性质：

- (1)交换律：$f * g = g * f$
- (2)结合律: $f * (g * h) = (f * g) * h$;

卷积有如下性质：

- (1)交换律：$f * g = g * f$
- (2)结合律: $f * (g * h) = (f * g) * h;$
- (3)分配律: $f * (g + h) = f * g + f * h$

卷积有如下性质：

- (1)交换律： $f * g = g * f$
- (2)结合律: $f * (g * h) = (f * g) * h$;
- (3)分配律: $f * (g + h) = f * g + f * h$

性质10(卷积定理):设$f(x), g(x) \in L^1(R^1) \bigcap C(R^1)$.则

$$\mathscr{F}[f * g] = \hat{f}\hat{g}, \mathscr{F}[fg] = \frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}, \mathscr{F}^{-1}[\hat{f}\hat{g}] = f * g.$$

卷积有如下性质：

- (1)交换律：$f * g = g * f$
- (2)结合律: $f * (g * h) = (f * g) * h;$
- (3)分配律: $f * (g + h) = f * g + f * h$

性质10(卷积定理):设$f(x), g(x) \in L^1(R^1) \bigcap C(R^1)$.则

$$\mathscr{F}[f * g] = \hat{f}\hat{g}, \mathscr{F}[fg] = \frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}, \mathscr{F}^{-1}[\hat{f}\hat{g}] = f * g.$$

证明：

$$\mathscr{F}[f*g] = \int_R (\int_R f(t)g(x-t)dt)e^{-i\lambda x}dx = \int_R (f(t)e^{-i\lambda t}\int_R g(x-t)e^{-i\lambda(x-t)}dx)dt$$

卷积有如下性质：

- (1)交换律：$f*g=g*f$
- (2)结合律: $f*(g*h)=(f*g)*h$;
- (3)分配律: $f*(g+h)=f*g+f*h$

性质10(卷积定理):设$f(x),g(x)\in L^1(R^1)\bigcap C(R^1)$.则

$$\mathscr{F}[f*g]=\hat{f}\hat{g},\mathscr{F}[fg]=\frac{1}{2\pi}\hat{f}*\hat{g},\mathscr{F}^{-1}[\hat{f}\hat{g}]=f*g.$$

证明：

$$\mathscr{F}[f*g]=\int_R(\int_R f(t)g(x-t)dt)e^{-i\lambda x}dx=\int_R(f(t)e^{-i\lambda t}\int_R g(x-t)e^{-i\lambda(x-t)}dx)dt$$

$$=\int_R f(t)e^{-i\lambda t}\hat{g}(\lambda)dt=\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)$$

注意：性质10中的第三个等式在Fourier的应用中经常会用到