《微分几何》课程电子课件

教师：杨勤民

Tel: (021)64253147

Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程QQ群号：1045698545

§2.3 曲面的第二基本形式

一、曲面的第二基本形式

二、曲面曲线的曲率

三、迪潘 (Dupin)指标线

四、曲面的渐近方向和共轭方向

五、曲面的主方向和曲率线

六、曲面的主曲率、高斯曲率和平均曲率

七、曲面在一点邻近的结构

八、高斯(Gauss)映射

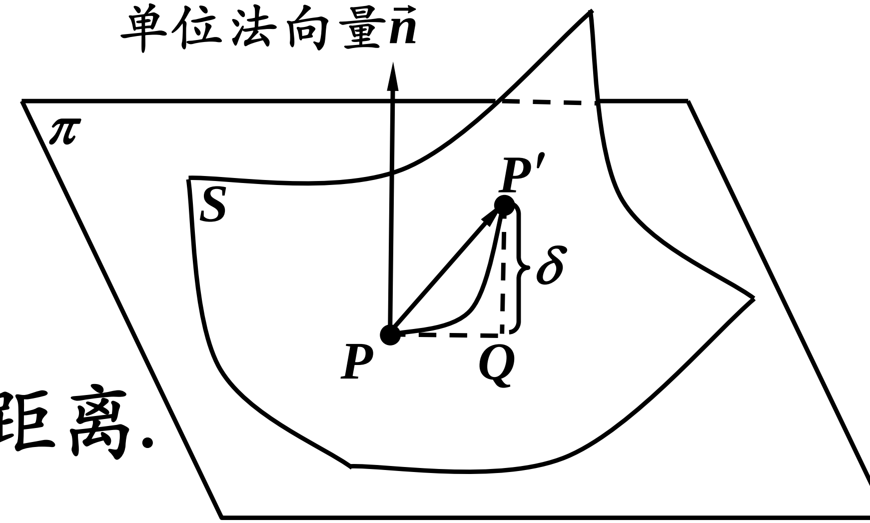
一、曲面的第二基本形式

曲面 $S:\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, S上的曲线Γ: $\vec{r}=\vec{r}(u(s),v(s))$,

切点 $P(u(s),v(s))$,

另一点$P'(u(s+\mathrm{d}s),v(s+\mathrm{d}s))$,

记δ为过P的切平面π到P'的有向距离.



$$\delta=\overrightarrow{PP'}\cdot\vec{n}=[\vec{r}(u(s+\mathrm{d}s),v(s+\mathrm{d}s))-\vec{r}(u(s),v(s))]\cdot\vec{n}$$

$$=[\dot{\vec{r}}(u(s),v(s))\mathrm{d}s+\tfrac{1}{2}(\ddot{\vec{r}}(u(s),v(s))+o(\vec{1}))\mathrm{d}s^2]\cdot\vec{n}$$

$$=\tfrac{1}{2}\vec{n}\cdot\ddot{\vec{r}}\,\mathrm{d}s^2+\vec{n}\cdot o(\vec{1})\mathrm{d}s^2\approx\tfrac{1}{2}\vec{n}\cdot\ddot{\vec{r}}\,\mathrm{d}s^2$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_u \dot{u} + \vec{r}_v \dot{v}$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\vec{r}_{uu}\dot{u} + \vec{r}_{uv}\dot{v})\dot{u} + \vec{r}_u \ddot{u} + (\vec{r}_{vu}\dot{u} + \vec{r}_{vv}\dot{v})\dot{v} + \vec{r}_v \ddot{v}$$

$$= \vec{r}_{uu}\dot{u}^2 + 2\vec{r}_{uv}\dot{u}\dot{v} + \vec{r}_{vv}\dot{v}^2 + \vec{r}_u \ddot{u} + \vec{r}_v \ddot{v}$$

$$2\delta \approx \vec{n} \cdot \boxed{\ddot{\vec{r}}\,\mathrm{d}s^2} \longrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2}\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}^2\vec{r}}$$

$$= (\vec{n}\cdot\vec{r}_{uu}\dot{u}^2 + 2\vec{n}\cdot\vec{r}_{uv}\dot{u}\dot{v} + \vec{n}\cdot\vec{r}_{vv}\dot{v}^2 + \vec{n}\cdot\vec{r}_u\ddot{u} + \vec{n}\cdot\vec{r}_v\ddot{v})\mathrm{d}s^2$$

$$= \boxed{\vec{n}\cdot\vec{r}_{uu}}\mathrm{d}u^2 + 2\boxed{\vec{n}\cdot\vec{r}_{uv}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \boxed{\vec{n}\cdot\vec{r}_{vv}}\mathrm{d}v^2$$

$$\overset{\text{记为}}{=} L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2 = \vec{n}\cdot\mathrm{d}^2\vec{r} \overset{\text{记为}}{=} \mathrm{II}$$

称 II 为**曲面的第二基本形式**,

称 $L(u,v), M(u,v), N(u,v)$ 为**曲面的第二类基本量**.

$$L(u,v)=\vec{r}_{uu}(u,v)\cdot\vec{n}(u,v),\qquad M=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n},\qquad N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}.$$

第二类基本量和第二基本形式的其他表达式

(1) $$L=\frac{(\vec{r}_{uu},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}},\quad M=\frac{(\vec{r}_{uv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}},\quad N=\frac{(\vec{r}_{vv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

(2) $$L=-\vec{r}_u\cdot\vec{n}_u,\quad M=-\vec{r}_u\cdot\vec{n}_v=-\vec{r}_v\cdot\vec{n}_u,\quad N=-\vec{r}_v\cdot\vec{n}_v$$

$$\vec{r}_u\cdot\vec{n}=0\ \Rightarrow\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}+\vec{r}_u\cdot\vec{n}_u=0\ \Rightarrow\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}=-\vec{r}_u\cdot\vec{n}_u;$$

$$\vec{r}_u\cdot\vec{n}=0\ \Rightarrow\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}+\vec{r}_u\cdot\vec{n}_v=0\ \Rightarrow\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}=-\vec{r}_u\cdot\vec{n}_v.$$

(3) $$\mathrm{II}=-\,\mathrm{d}\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0\ \Rightarrow\mathrm{d}\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\vec{n}\mathrm{d}^2\vec{r}=0\ \Rightarrow\mathrm{II}=\vec{n}\mathrm{d}^2\vec{r}=-\,\mathrm{d}\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{r}.$$

例1 计算抛物面$2x_3 = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$在原点的第一、第二基本形式.

解 $\vec{r}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \frac{5}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2).$

$\vec{r}_{x_1}(x_1, x_2) = (1, 0, 5x_1 + 2x_2),\qquad \vec{r}_{x_1}(0,0) = (1,0,0).$

$\vec{r}_{x_2}(x_1, x_2) = (0, 1, 2x_1 + 2x_2),\qquad \vec{r}_{x_2}(0,0) = (0,1,0).$

$\vec{r}_{x_1x_1}(x_1, x_2) = (0, 0, 5),\qquad \vec{r}_{x_1x_1}(0,0) = (0,0,5).$

$\vec{r}_{x_1x_2}(x_1, x_2) = (0, 0, 2),\qquad \vec{r}_{x_1x_2}(0,0) = (0,0,2).$

$\vec{r}_{x_2x_2}(x_1, x_2) = (0, 0, 2),\qquad \vec{r}_{x_2x_2}(0,0) = (0,0,2).$

$\vec{r}_{x_1}(0,0) \times \vec{r}_{x_2}(0,0) = (0,0,1).$

$$E(0,0)=\vec{r}_{x_1}^{\,2}(0,0)=1,\qquad F(0,0)=\vec{r}_{x_1}(0,0)\cdot\vec{r}_{x_2}(0,0)=0,$$

$$G(0,0)=\vec{r}_{x_2}^{\,2}(0,0)=1.$$

$$\mathrm{I}(0,0)=E(0,0)\mathrm{d}x_1^2+2F(0,0)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+G(0,0)\mathrm{d}x_2^2$$

$$=\mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2.$$

$$\vec{n}(0,0)=\frac{\vec{r}_{x_1}(0,0)\times\vec{r}_{x_2}(0,0)}{\left|\vec{r}_{x_1}(0,0)\times\vec{r}_{x_2}(0,0)\right|}=(0,0,1).$$

$$L(0,0)=\vec{r}_{x_1x_1}(0,0)\cdot\vec{n}(0,0)=5,$$

$$M(0,0)=\vec{r}_{x_1x_2}(0,0)\cdot\vec{n}(0,0)=2,$$

$$N(0,0)=\vec{r}_{x_2x_2}(0,0)\cdot\vec{n}(0,0)=2.$$

$$\mathrm{II}(0,0)=L(0,0)\mathrm{d}x_1^2+2M(0,0)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+N(0,0)\mathrm{d}x_2^2$$

$$=5\mathrm{d}x_1^2+4\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+2\mathrm{d}x_2^2.$$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业！

2.9 证明对于正螺面$\vec{r}=(u\cos v, u\sin v, bv)$处处有

$$EN-2FM+GL=0.$$

2.10 求曲面$\vec{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, \sin 2v)$的第一基本形式和第二基本形式.