

第二篇 热学

- 研究物体的热运动

研究方法:

分子动理论: 研究热现象的微观理论, 从物质的微观结构出发, 运用统计平均的方法揭示热现象的微观本质。

热力学: 研究热现象的宏观理论, 以观察和实验事实为依据, 分析研究物态变化中有关热功转换的关系和条件。

第六章：气体动理论

1. 分子热运动与统计规律性

一、气体分子运动理论的基本观点

分子观点：宏观物体是由大量不连续的微粒——分子(或原子)组成的. 标准状态下, 1 mol气体有 6.02×10^{23} 个分子.

分子运动观点：气体分子处于永不停息的无规则运动中, 空气分子在常温下 $\bar{v} = 500 \text{ m/s}$, 分子不停地碰撞, 标准状态下约 5×10^9 次/s.

反映了气体分子热运动的特征：**小，多，快，乱。**

统计观点：大量分子运动的综合作用决定体系的宏观性质. 反映了分子热运动和体系宏观性质的联系.

1. 分子热运动与统计规律性

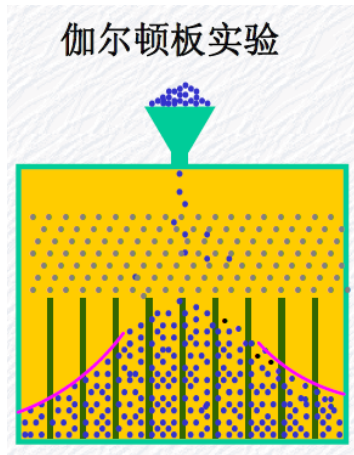
二、统计规律性：

某一小球落入其中那格是一个偶然事件。

大量小球在空间的分布服从统计规律。

人们把这种支配大量粒子综合性质和集体行为的规律性称为统计规律性。

热运动服从统计规律



2. 平衡态 理想气体状态方程

热力学系统

一、热力学系统(简称系统)

由大量微观粒子所组成的宏观客体。

二、系统的外界(简称外界/环境)

能够与所研究的热力学系统发生相互作用的其它物体。

开放系统: 系统与外界既有能量传递, 又有质量传递。

孤立系统: 系统与外界既没能量传递, 又没质量传递。

封闭系统: 系统与外界只有能量传递, 没有质量传递。

2. 平衡态 理想气体状态方程

系统状态的描述

一、宏观量(状态参量)

压强(P)、体积(V)、温度(T) (可直接测量)

二、微观量

分子的位置、速度、... (不可直接测量)

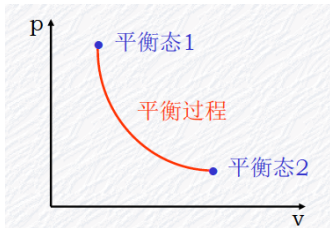
宏观量 \longleftrightarrow 微观量

2. 平衡态 理想气体状态方程

平衡态和平衡过程

一、平衡态：孤立的热力学系统经过很长时间后，宏观量(压强、温度、分子数密度)达到不随时间改变的稳定状态(热动平衡状态)。平衡态在 P - V 图上用一点来表示。

二、平衡过程：系统从一个平衡态变化到另一平衡态，所经历的一系列中间状态都无限接近平衡态的过程。平衡过程在 P - V 图上用一条曲线表示。



2. 平衡态 理想气体状态方程

理想气体的状态方程

一、气体的状态方程:反映平衡态下 P , V , T 间的关系。

二、理想气体:绝对遵循克拉伯龙方程的气体

$$PV = \frac{m}{M}RT, \quad \text{摩尔气体常数: } R = 8.31\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$$

理想气体的状态方程的另一种表达式

$$P = \frac{m}{M} \frac{RT}{V} = \frac{N\mu}{N_A\mu} \frac{RT}{V} = \frac{N}{V} \left(\frac{R}{N_A} \right) T = nkT$$

分子数密度: $n = \frac{N}{V}$;

玻尔兹曼常数: $k = R/N_A = 1.38 \cdot 10^{-23}\text{J/K}$

2. 平衡态 理想气体状态方程

例题6-1： 容积为 $11.2 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ 的真空系统

在 $t_1 = 27^\circ\text{C}$ 时 $P_1 = 1.0 \times 10^{-5}$ 托, 为提高真空度, 将系统放在 $t_2 = 300^\circ\text{C}$ 的烘箱内烘烤, 使吸附在器壁上的分子释放出来, 若烘烤后压强增为 $P_2 = 1.0 \times 10^{-2}$ 托。
问: 升温后释放出多少个分子。

1 大气压(atm) = 760mmHg = $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$

1 托 = 1mmHg = $1.33 \times 10^2 \text{ Pa}$

解: $\Delta N = (n_2 - n_1)V$

$$P_1 = n_1 k T_1, n_1 = \frac{P_1}{k T_1}; \quad P_2 = n_2 k T_2, n_2 = \frac{P_2}{k T_2}$$

$$\Delta N = \left(\frac{P_2}{T_2} - \frac{P_1}{T_1} \right) \frac{V}{k} = 1.89 \times 10^{18} \text{ 个}$$

2. 平衡态 理想气体状态方程

例题6-2: 试求 (1) 气体分子间的平均距离 \bar{l} 与压强 P 、温度 T 的关系。 (2) 求压强为1 atm, 温度为0°C的情况下气体分子间的 平均距离。

解: (1) $P = nkT$

$$n = \frac{N}{V}, \frac{1}{n} = \frac{V}{N} = \bar{l}^3, \quad \bar{l} = \left(\frac{kT}{P} \right)^{1/3}$$

$$(2) \bar{l} = \left(\frac{kT}{P} \right)^{1/3} = \left(\frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{1.013 \cdot 10^5} \right)^{1/3} = 3.34 \cdot 10^{-9} \text{m}$$

(约为分子直径的10倍)

3. 压强和温度的微观解释

理想气体压强公式

一、基本假设

理想气体分子微观模型假设:

- 分子当作质点，不占体积；
- 除碰撞外不计分子之间，分子和器壁之间的相互作用，除需特别考虑外不计分子的重力；
- 弹性碰撞(能量守恒、动量守恒)；
- 分子运动服从牛顿力学。

理想气体分子像一个个极小的彼此间无相互作用的遵守牛顿力学规律的弹性质点。

3. 压强和温度的微观解释

统计假设:

- 若忽略重力影响, 达到平衡态时分子按位置的分布是均匀的, 即分子数密度到处一样。
- 平衡态时, 分子速度沿各方向分量的各种平均值相等。

$$\overline{v_x} = \overline{v_y} = \overline{v_z}$$

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{\overline{v^2}}{3}$$

3. 压强和温度的微观解释

二、压强公式的推导

容器中有 N 个质量均为 μ 的分子

i 分子与器壁 A 碰撞一次

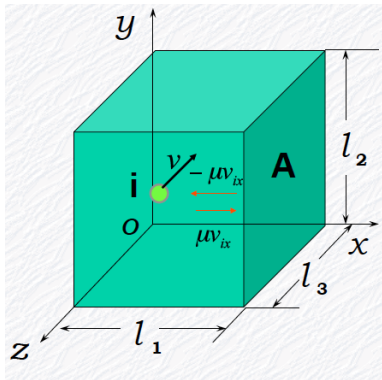
获得的动量增量:

$$-\mu v_{ix} - \mu v_{ix} = -2\mu v_{ix}$$

给予器壁的冲量:

$$2\mu v_{ix}$$

1秒种内 i 分子与器壁 A 的碰撞次数: $\frac{v_{ix}}{2l_1}$



3. 压强和温度的微观解释

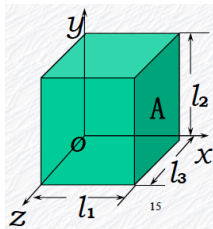
$\bar{F} = \frac{I}{\Delta t}$, 1秒钟给予器壁的冲量 = i 分子给器壁的平均冲力

i 分子给器壁的平均冲力: $\frac{v_{ix}}{2l_1} \cdot 2\mu v_{ix} = \frac{\mu v_{ix}^2}{l_1}$

N 个分子的平均冲力: $\bar{F} = \sum_{i=1}^N \frac{\mu v_{ix}^2}{l_1}$

N 个分子给予器壁的压强:

$$P = \frac{\bar{F}}{S} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\mu v_{ix}^2}{l_1}}{l_2 l_3} = \frac{N\mu}{l_1 l_2 l_3} \sum_{i=1}^N \frac{v_{ix}^2}{N} = n\mu \overline{v_x^2}$$



3. 压强和温度的微观解释

由统计假设: $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$

$$\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = \overline{v^2}$$

$$\overline{v_x^2} = \frac{\overline{v^2}}{3}$$

$$P = n\mu\overline{v_x^2} = n\mu\frac{\overline{v^2}}{3} = \frac{2}{3}n\left(\frac{1}{2}\mu\overline{v^2}\right)$$

$$\overline{\epsilon_k} = \frac{1}{2}\mu\overline{v^2} \quad \text{分子热运动平均平动动能}$$

$$\text{压强公式 } P = \frac{2}{3}n\overline{\epsilon_k}$$

3. 压强和温度的微观解释

三、讨论:

推导压强公式的依据:

- (1) 体系处于平衡态
- (2) 理想气体的微观模型
- (3) 两个统计假设

推导压强公式的思想方法:

对个别分子运用力学定律, 对大量分子整体运用统计规律.

压强公式的意义:

反映了宏观量 P 与分子热运动的微观量($n, \bar{\epsilon}_k$)的统计平均值之间的联系, 说明了压强的微观本质.

3. 压强和温度的微观解释

四、温度的微观解释:

理想气体的状态方程 $P = nkT$

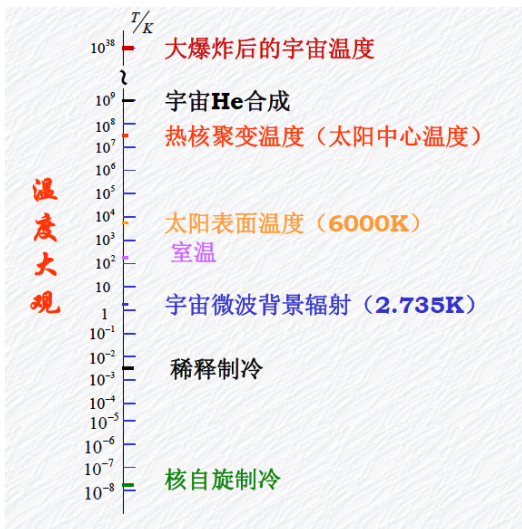
压强公式
$$P = \frac{2}{3}n\bar{\epsilon}_k$$

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2}kT$$

温度的统计意义:

温度标志物体内部分子热运动剧烈的程度，是分子热运动平均平动动能大小的量度，亦是大量分子热运动的统计平均结果。

3. 压强和温度的微观解释



3. 压强和温度的微观解释

例题：由压强公式和温度公式导出道尔顿定律

证明：设有 N 种相互不反应的不同气体，数密度分别为 n_1, n_2, n_3, \dots ，则混合气体的数密度 $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots$

混合气体的压强为：

$$P = \frac{2}{3}n\left(\frac{1}{2}\mu\overline{v^2}\right) = \frac{2}{3}(n_1 + n_2 + \dots) \times \left(\frac{1}{2}\mu\overline{v^2}\right)$$

$\frac{1}{2}\mu\overline{v^2}$ — 混合气体的平均平动动能

混合气体的温度相同：

$$\frac{1}{2}\mu_1\overline{v_1^2} = \frac{1}{2}\mu_2\overline{v_2^2} = \dots = \frac{1}{2}\mu\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT$$

$$P = \frac{2}{3}n_1 \cdot \frac{1}{2}\mu_1\overline{v_1^2} + \frac{2}{3}n_2 \cdot \frac{1}{2}\mu_2\overline{v_2^2} + \dots = P_1 + P_2 + \dots$$

4. 能量均分定理, 理想气体的内能

自由度 (i) : 确定一物体在空间位置所需的独立坐标数

一、单原子分子的自由度(如He)

同质点, 具有3个平动自由度, 用 $t = 3$ 表示.

二、刚性双原子分子的自由度(如 H_2)

质心平动自由度: $t = 3$

绕通过质心的转轴转动的自由度: $r = 2$

刚性双原子分子总自由度数: $i = t + r = 3 + 2 = 5$

4. 能量均分定理, 理想气体的内能

三、刚性三原子分子的自由度(如 H_2O)

质心平动自由度: $t = 3$

绕通过质心的转轴转动的自由度: $r = 3$

刚性三原子分子总自由度数: $i = t + r = 3 + 3 = 6$

四、刚性多原子(三个以上)组成的分子的总自由度数同刚性三原子分子: $i = 6$

4. 能量均分定理, 理想气体的内能

刚性分子的自由度*i*

	自由度	转动	平动
单原子分子	3	0	3
双原子分子	5	2	3
三原子(多原子)分子	6	3	3

4. 能量均分定理, 理想气体的内能

能量均分定理

一、推导

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2}\mu\bar{v}^2 = \frac{1}{2}\mu(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2) = \frac{3}{2}kT,$$

$$\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2$$

$$\frac{1}{2}\mu\bar{v}_x^2 = \frac{1}{2}\mu\bar{v}_y^2 = \frac{1}{2}\mu\bar{v}_z^2 = \frac{1}{2}kT$$

即分子在每个平动自由度上均分能量为 $\frac{1}{2}kT$

二、能量按自由度均分原理:

处于平衡态的气体分子每一自由度(平动, 转动) 所占有的能量都为 $\frac{1}{2}kT$

4. 能量均分定理, 理想气体的内能

三、理想气体内能

分子热运动的平均动能: $\bar{\epsilon}_k = \frac{i}{2}kT$

理想气体内能: 系统中所有分子热运动动能之总和 (不包括分子间相互作用的能量)

1 mol 理想气体的内能: $E_{\text{mol}} = N_A \frac{i}{2}kT = \frac{i}{2}RT$

m kg 理想气体的内能: $E = \frac{m}{M} \frac{i}{2}RT$

4. 能量均分定理, 理想气体的内能

例题: 一容器内装有理想气体, 其密度 $1.24 \times 10^{-2} \text{ kg/m}^3$, 当温度为 273 K , 压强为 $1.013 \times 10^3 \text{ Pa}$ 时, 试求: (1) 气体的摩尔质量, 并确定它是什么气体? (2) 气体分子平均平动动能和转动动能各是多少? (3) 单位体积内分子的平动动能是多少? (4) 若该气体是 0.3 mol , 其内能是多少?

解: (1) 根据状态方程得

$$M = \frac{m}{V} \frac{RT}{P} = \rho \frac{RT}{P} = 1.24 \times 10^{-2} \times \frac{8.31 \times 273}{1.013 \times 10^3} = 28 \times 10^{-3} \text{ (kg/mol)}$$

N_2 和 CO 的摩尔质量均为 $28 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$, 该气体是 N_2 或 CO 。

4. 能量均分定理, 理想气体的内能

(2) 气体平均平动动能和转动动能各是多少?

由于 N_2 和 CO 均是双原子分子气体, 它们的自由度为

$$i = 5, (t = 3, r = 2),$$

$$\bar{\epsilon}_{k\text{平动}} = \frac{3}{2}kT = 5.6 \times 10^{-21} \text{ (J)}$$

$$\bar{\epsilon}_{k\text{转动}} = \frac{2}{2}kT = 3.7 \times 10^{-21} \text{ (J)}$$

(3) 单位体积内分子的平动动能是多少?

单位体积内分子的总平动动能为:

$$n \cdot \frac{3}{2}kT, n = \frac{P}{kT},$$

$$\bar{\epsilon}_{\text{平动}} = \frac{3}{2}P = \frac{3}{2} \times 1.013 \times 10^3 = 1.5 \times 10^3 \text{ (J)}$$

4. 能量均分定理, 理想气体的内能

(4) 若该气体是0.3 mol, 其内能是多少?

根据内能公式得:

$$E = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT = 1.7 \times 10^3 \text{ (J)}$$

4. 能量均分定理, 理想气体的内能

例题: 有两瓶不同的气体, 一瓶是氦气, 一瓶是氮气, 它们压强相同, 但容积不同, 则单位容积内的气体内能是否相同?

解:

$$\frac{E}{V} = \frac{m}{MV} \frac{i}{2} RT = \frac{\mu N}{\mu N_A V} \frac{i}{2} RT = \frac{n}{N_A} \frac{i}{2} RT = \frac{i}{2} nkT$$

$$P = nkT, \frac{E}{V} = \frac{i}{2} P, i_{\text{He}} = 3, i_{\text{N}_2} = 5$$

$$\frac{E_{\text{He}}}{V_{\text{He}}} \neq \frac{E_{\text{N}_2}}{V_{\text{N}_2}}$$

4. 能量均分定理, 理想气体的内能

问答题: (1) 当盛有理想气体的密封容器相对某惯性系匀速运动时, 能否说容器内分子的热运动速度相对这参照系也增大了, 从而气体的温度也因此升高了, 为什么?

答:

(1) 公式 $\frac{1}{2}\mu\bar{v^2} = \frac{3}{2}kT$

揭示了温度的微观本质, 即温度仅是分子热运动的平均平动动能的量度, 与是否有定向运动无关, 所以当容器发生定向运动时, 虽然每个分子在此时原有的热运动上迭加了定向运动, 但不会因此而改变分子的热运动状态, 所以气体温度不会升高。

4. 能量均分定理, 理想气体的内能

问答题: (2) 假如该容器突然停止运动, 容器内气体的压强、温度是否变化, 为什么?

答: 容器突然停止运动时, 分子的定向运动动能经过分子与容器壁的碰撞及分子间的相互碰撞, 从而发生能量的转化, 定向运动的机械能转化为分子热运动动能, 气体的内能增加了, 所以气体的温度升高了; 由于容积不变, 所以气体的压强也增大了。

4. 能量均分定理, 理想气体的内能

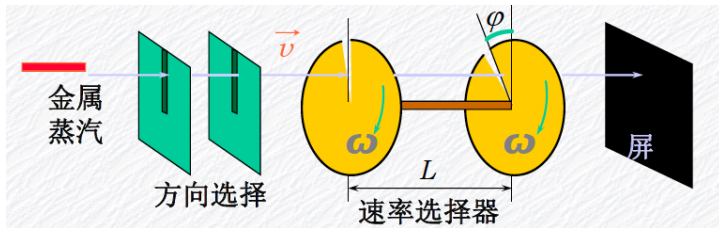
- 理想气体压强公式: $P = \frac{2}{3}n\bar{\epsilon}_k$

$\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2}\mu\bar{v}^2$: 分子热运动平均 平动动能

- 理想气体温度公式: $\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2}kT$
- 分子在每个自由度上均分能量为: $\frac{1}{2}kT$
- 理想气体的内能: $E = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT$

5. 麦克斯韦分子速率分布定律

一、分子速率分布的测定—斯特恩实验



$$t_1 = \frac{L}{v}, t_2 = \frac{\varphi}{\omega}, \text{ 令 } t_1 = t_2, \text{ 得: } v = \frac{L}{\varphi} \omega$$

只有满足此条件的分子才能同时通过两缝。

通过改变 ω 可获得不同速率区间的分子。

5. 麦克斯韦分子速率分布定律

二、速率分布函数

ΔN : $v \rightarrow v + \Delta v$ 的分子数

$\frac{\Delta N}{N}$: $v \rightarrow v + \Delta v$ 的分子数占总分子数的百分比

$$\frac{\Delta N}{N \Delta v} = f(v)$$

当 $\Delta v \rightarrow 0$ 时

$$\Rightarrow f(v) = \frac{dN}{N dv}$$

速率分布函数(概率密度)

分子速率分布的实验数据

速率区间(m/s)	百分数
< 100	1.4%
100 ~ 200	8.1%
200 ~ 300	16.5%
300 ~ 400	21.4%
400 ~ 500	20.6%
500 ~ 600	15.1%
600 ~ 700	9.2%
700 ~ 800	4.8%
800 ~ 900	2.0%
> 900	0.9%

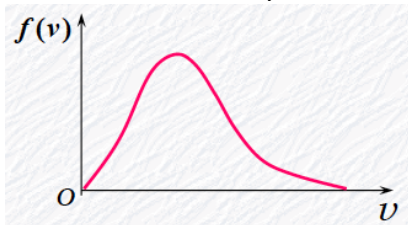
速率在 v 附近，单位速率区间的分子数占总分子数的比率。

5. 麦克斯韦分子速率分布定律

三、麦克斯韦分子速率分布律

(理想气体处于平衡态时，速率分布函数的数学形式)

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} v^2$$

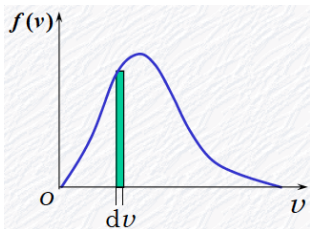


讨论:

图中小矩形面积

$$f(v)dv = \frac{dN}{Ndv} \cdot dv = \frac{dN}{N}$$

表示在 $v \rightarrow v + dv$ 的速率区间的分子数占 总分子数的百分比。



5. 麦克斯韦分子速率分布定律

$$\int_{v_1}^{v_2} f(v) dv = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dN}{N}$$

$v_1 \rightarrow v_2$ 区间内的分子数占
总分子数的百分比。

$$N \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv = \int_{v_1}^{v_2} dN$$

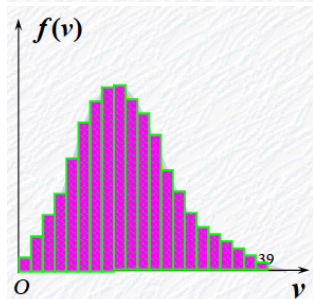
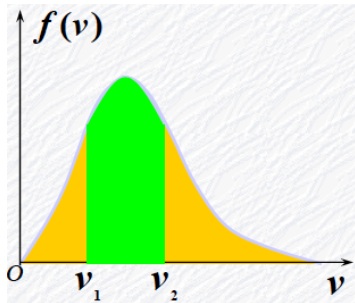
$v_1 \rightarrow v_2$ 区间内的总分子。

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$$

归一化条件：

曲线下的总面积

其物理意义是所有速率区间
内分子数百分比之和



5. 麦克斯韦分子速率分布定律

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} v^2$$

同种气体的分布函数和温度关系

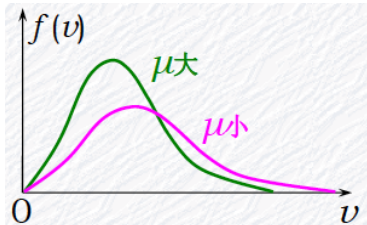
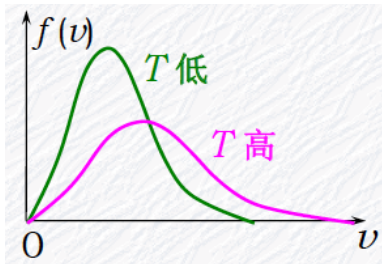
$$\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}\mu\bar{v}^2$$

$$T \uparrow \rightarrow \bar{v}^2 \uparrow$$

相同温度下分布函数和分子质量的关系

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}\mu\bar{v}^2, \quad \text{且与 } T \text{ 相同}$$

$$\mu \uparrow \rightarrow \bar{v}^2 \downarrow$$



5. 麦克斯韦分子速率分布定律

四、麦克斯韦速率分布律的应用

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} v^2$$

平均速率

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{\int_0^\infty v dN}{N} = \int_0^\infty v \frac{dN}{N dv} dv = \int_0^\infty v f(v) dv \\ &= \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi \mu}}\end{aligned}$$

5. 麦克斯韦分子速率分布定律

方均根速率

$$\begin{aligned}\bar{v^2} &= \frac{\int_0^\infty v^2 dN}{N} = \int_0^\infty v^2 f(v) dv = \frac{3RT}{M} \\ \sqrt{\bar{v^2}} &= \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{\mu}}\end{aligned}$$

最可几速率: 与 $f(v)$ 极大值对应的速率。

$$\frac{\partial f(v)}{\partial v} = 0 \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2kT}{\mu}}$$

物理意义: 若把整个速率范围划分为许多相等的小区间, 则分布在 v_p 所在区间的分子数比率最大。

5. 麦克斯韦分子速率分布定律

讨论： 1. v_p , \bar{v} , $\sqrt{v^2}$ 均与 \sqrt{T} 成正比, 与 \sqrt{M} 成反比

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2kT}{\mu}}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}},$$
$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{\mu}}$$

5. 麦克斯韦分子速率分布定律

2. 三种速率应用于不同的问题

v_p : 用于表示理想气体的速率分布函数

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} v^2,$$

$$v_p = \left(\frac{2kT}{\mu} \right)^{1/2}, \quad f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi} v_p} \frac{v^2}{v_p^2} e^{-\frac{v^2}{v_p^2}}$$

$\sqrt{v^2}$: 计算分子的平均平动动能

\bar{v} : 计算分子运动走过的平均路程

5. 麦克斯韦分子速率分布定律

例题：设 H_2 的温度为 300°C ，求速率在 3000 m/s 到 3010 m/s 之间的分子数 占总分子数的百分比。

解：

$$\frac{\Delta N}{N} = f(v)\Delta v, \quad f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}v_p} \frac{v^2}{v_p^2} e^{-\frac{v^2}{v_p^2}}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = 2182 \text{ m/s}, \quad v = 3000 \text{ m/s}, \quad \Delta v = 10 \text{ m/s}$$

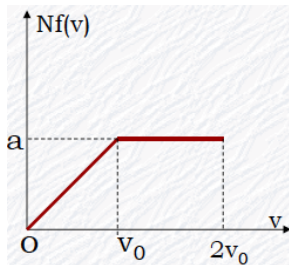
$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{3000^2}{2182^2}} \cdot \frac{3000^2}{2182^2} \cdot \frac{10}{2182} = 0.29\%$$

5. 麦克斯韦分子速率分布定律

例题：有 N 个假想的气体分子，其速率分布如图所示。

试求：

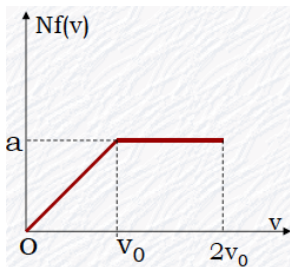
- (1) 纵坐标的物理意义，并由 N 和 v_0 求 a ；
- (2) 速率在 $1.5v_0 \sim 2.0v_0$ 之间的分子数；
- (3) 分子的平均速率。



解：(1) $Nf(v) = N \frac{dN}{Ndv} = \frac{dN}{dv},$

$Nf(v)$ 表示某一速率附近单位速率区间内的分子数

5. 麦克斯韦分子速率分布定律



$$Nf(v) = \frac{a}{v_0}v, \quad (0 < v < v_0);$$

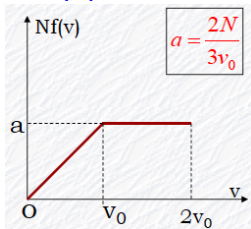
$$Nf(v) = a, \quad (v_0 \leq v \leq 2v_0);$$

$$Nf(v) = 0, \quad (v > 2v_0)$$

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = \int_0^{v_0} \frac{a}{Nv_0}v dv + \int_{v_0}^{2v_0} \frac{a}{N} dv = 1, \text{ 得: } a = \frac{2N}{3v_0}$$

5. 麦克斯韦分子速率分布定律

(2) 速率在 $1.5v_0 \sim 2.0v_0$ 之间的分子数;



$$\begin{aligned}\Delta N &= \int_{1.5v_0}^{2.0v_0} dN = \int_{1.5v_0}^{2.0v_0} N f(v) dv \\ &= \int_{1.5v_0}^{2.0v_0} a dv = \frac{a}{2} v_0 = \frac{N}{3}\end{aligned}$$

(3) 分子的平均速率

$$\begin{aligned}Nf(v) &= \frac{a}{v_0} v, \\ (0 < v < v_0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Nf(v) &= a, \\ (v_0 \leq v \leq 2v_0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Nf(v) &= 0, \\ (v > 2v_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \int_0^{\infty} \frac{v dN}{N} = \int_0^{\infty} v f(v) dv \\ &= \int_0^{v_0} \frac{a}{v_0 N} v^2 dv + \int_{v_0}^{2v_0} \frac{a}{N} v dv \\ &= \frac{11a}{6N} v_0^2 = \frac{11}{9} v_0\end{aligned}$$

5. 麦克斯韦分子速率分布定律

例题：写出速率 $v > v_0$ 的分子的平均速率表达式

解：

$$\bar{v} = \frac{\int_{v_0}^{\infty} v dN}{N} = \frac{\int_{v_0}^{\infty} v f(v) N dv}{N} = \int_{v_0}^{\infty} v f(v) dv, \quad (\text{错})$$

$$\bar{v} = \frac{\int_{v_0}^{\infty} v dN}{N'} = \frac{\int_{v_0}^{\infty} v dN}{\int_{v_0}^{\infty} dN} = \frac{\int_{v_0}^{\infty} v f(v) N dv}{\int_{v_0}^{\infty} N f(v) dv} = \frac{\int_{v_0}^{\infty} v f(v) dv}{\int_{v_0}^{\infty} f(v) dv}$$

7. 分子碰撞及自由程

自由程 λ : 分子连续两次碰撞之间所自由走过的路程。

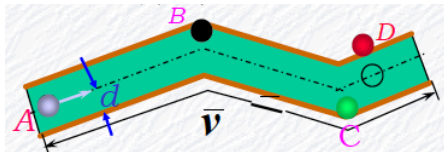
平均自由程 $\bar{\lambda}$: 自由路程的平均值。

平均碰撞次数 \bar{Z} : 一秒钟内一个分子与其它分子碰撞的平均次数

一、平均碰撞次数:

设分子的有效直径为 d

设 A 分子以相对平均速率 \bar{u} 运动，其它分子都不动



以 A 分子运动路径(折线)为轴线，作一半径为 d ，总长度为 \bar{u} 的圆管。凡分子中心位于管内的分子(如 B , C 分子)都将在一秒内与 A 分子进行碰撞。

7. 分子碰撞及自由程

一秒钟内分子将与分子中心位于管内的所有分子进行碰撞

则平均碰撞次数为: $\bar{Z} = n\bar{u}\pi d^2$

考虑其它分子都运动, $\bar{u} = \sqrt{2}\bar{v}$, 则: $\bar{Z} = \sqrt{2}n\bar{v}\pi d^2$

二、平均自由程

$$\bar{Z} = \sqrt{2}n\bar{v}\pi d^2, \quad \bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$$

$$P = nkT, \quad \bar{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 \frac{P}{kT} \bar{v}, \quad \bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}$$

7. 分子碰撞及自由程

讨论:

$$\bar{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 n \bar{v} = \sqrt{2}\pi d^2 \frac{P}{kT} \bar{v},$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi \mu}}$$

$$\bar{Z} \propto \frac{P}{RT} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$

$$\bar{Z} \propto \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}$$

1. 当 T 一定, $P \uparrow$, 则: $\bar{Z} \uparrow \bar{\lambda} \downarrow$

2. 当 n 一定, $T \uparrow$, 则: $\bar{Z} \uparrow \bar{\lambda}$ 不变

3. 当 P 一定, $T \uparrow$, 则: $\bar{Z} \downarrow \bar{\lambda} \uparrow$

7. 分子碰撞及自由程

例题：一定质量的某种理想气体，先经过等容过程使其热力学温度增高为原来的4倍，再经过等温过程使其体积膨胀为原来的2倍，则经此过程后：

(1) 分子的平均碰撞的频率变为原来的几倍？

解：

$$\bar{Z} = \sqrt{2}\pi n d^2 \bar{v}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{M\pi}}$$
$$T_2 = 4T_1, n_2 = \frac{1}{2}n_1, \quad \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} = 1$$

(2) 分子的平均自由程变为原来的几倍？

解：

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \quad n_2 = \frac{1}{2}n_1, \quad \frac{\bar{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_1} = 2$$