

$$2.19、(2) \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A \cosh x, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = k, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

解：令 $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$, 为了使 $v(x, t)$ 满足齐次方程齐次边界条件, $w(x)$ 满足

$$\begin{cases} a^2 w''(x) + a \cosh x = 0 \\ w(0) = 0, w(l) = k \end{cases}$$

可求出

$$w(x) = -\frac{A}{a^2} \cosh x + c_1 x + c_2, c_1 = (k - \frac{A}{a^2} + \frac{A}{a^2} \cosh l)/l, c_2 = \frac{A}{a^2}$$

$v(x, t)$ 满足以下定解问题

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 \\ v(0, t) = v(l, t) = 0 \\ v(x, 0) = -w(x), v_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

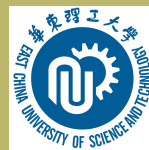
Page 1 of 100

Go Back

Full Screen

Close

Quit



利用特征展开法, 特征函数为 $\{\sin \frac{n\pi}{l}x\}_1^\infty$, 将 $v(x, t), w(x)$ 按特征函数展开

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin \frac{n\pi}{l}x, w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin \frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{2}{l} \int_0^l w(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx \\ &= \frac{2c_2}{n\pi} [1 - (-1)^n] - \frac{2c_1 l}{n\pi} (-1)^n - \frac{A}{a^2} \frac{2n\pi}{[(n\pi)^2 + l^2]} [1 - (-1)^n \cosh l] \end{aligned}$$

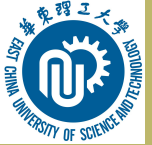
带入方程和初始条件

$$v_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 v_n(t) = 0, v_n(0) = -w_n$$

解出 $v_n(t) = -w_n \cos \frac{an\pi}{l}t$, 所以原定解问题的解

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} -w_n \cos \frac{an\pi}{l}t \sin \frac{n\pi}{l}x$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 2 of 100](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



这次作业：

- 对于非齐次边界条件的处理方法一般是通过函数变换，转换为齐次边界条件
- 对于变换，做作业的时候可以参考书上或者ppt上的结论，但是考试的时候这些结论是不会给出的，希望大家还是记住思路，稍微推导一下即可
- 对于方程右端的非齐次项和边界条件都与 t 无关时，可新选择适当的变换把方程和边界条件同时齐次化，这时可转化为齐次方程齐次边界条件的定解问题，不仅可以利用分离变量法还可以利用特征展开法进行求解，在利用特征展开法时求解时，求解的是齐次常微分方程，比较容易求解
- 这次的作业题是属于我们介绍的特殊情况，好多同学，直接利用书上的结论，直接给出了 $w(x)$ 的表达形式，然后利用特征展开法求解齐次边界条件定解问题。也可以试试我们上面介绍的，把方程和边界条件同时齐次化

Home Page

Title Page

« »

◀ ▶

Page 3 of 100

Go Back

Full Screen

Close

Quit