第八章 真空中的静电场

§8.1 电相互作用

一. 静电场的三个实验定律

1. 电荷守恒定律:

电荷量子化:

2. 库仑定律:

*点电荷理想模型:

*真空中两个静止点电荷之间的相互作用力——静电力:

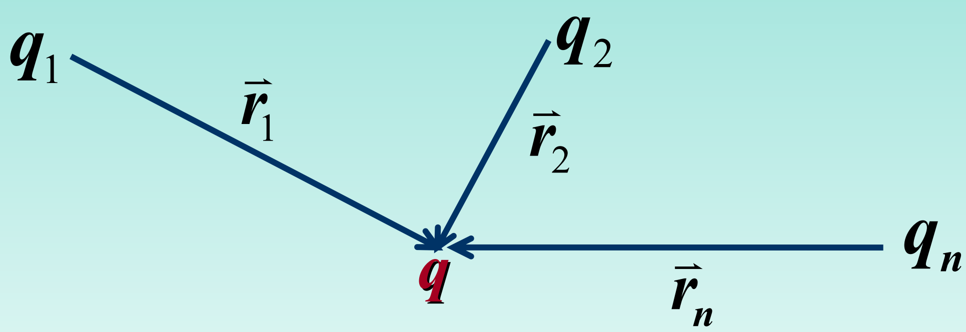
大小: $F_{12} = F_{21} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q_1 q_2}{r^2}$

$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} c^2 / N \cdot m^2 \rightarrow$ 真空介电常数

方向: 沿 q_1, q_2连线 ——同号相斥,异号相吸

3. 电力叠加原理:

当空间有多个静止点电荷存在时,某一点电荷 q 受力 $=$ 各点电荷单独存在时对 q 的作用力的矢量合

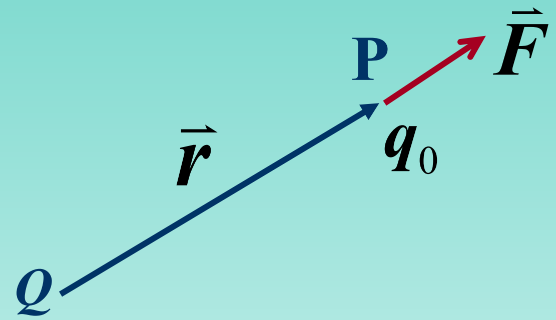


$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qq_1}{r_1^2}\cdot\vec{r}_{10}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qq_2}{r_2^2}\cdot\vec{r}_{20}+\ldots+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qq_n}{r_n^2}\cdot\vec{r}_{n0}$$

二. 电场　电场强度

1. 静电场 (electrostatic field):　电荷 $\longleftrightarrow$ 电场 $\longleftrightarrow$ 电荷

2. 电场强度(electric field strength): $\vec{E}$



检验电荷 q_0 $\begin{cases} \text{点电荷} \\ \text{正电(电量小)} \end{cases}$

定义： P点场强 $\boxed{\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0}}$ (N/C)

点电荷： $$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq_0}{r^2} \cdot \vec{r}_0 \Big/ q_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{r}_0$$

3. 场强叠加原理: ⟵ 电力叠加原理

$$\vec{E}_P = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n\right)}{q_0} = \frac{\vec{F}_1}{q_0} + \frac{\vec{F}_2}{q_0} + \ldots + \frac{\vec{F}_n}{q_0} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n$$

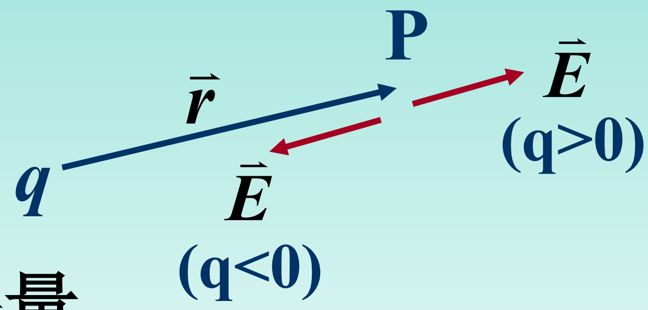
在多个点电荷产生的电场空间,某一点P的场强等于每个点电荷单独存在时在P点产生的场强的叠加(矢量合)

三. 场强的计算

1. 点电荷的场强:

场源电荷 q，距 q 为 r 处一点 P 的场强:

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\vec{r}_0$$



$\vec{r}_0$: 从场源电荷**q指向**P点的单位矢量

*点电荷电场以 q 为圆心，球面对称.

** $r\to 0, E\to\infty$? 库仑定律作用范围: $10^{-15}\sim 10^{7}\,m$

2. 点电荷系的场强:

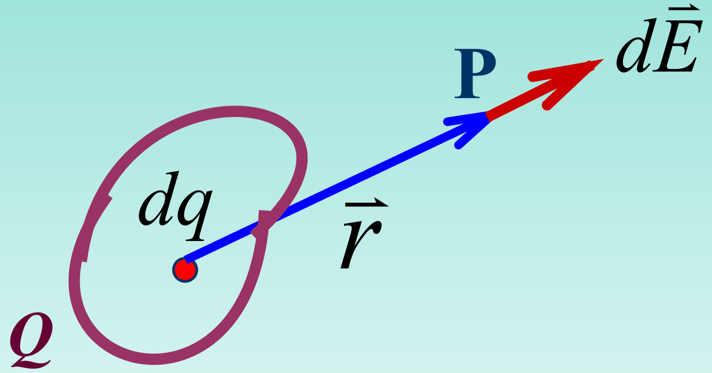
n个点电荷，空间P点场强： $\vec{E}_P=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\vec{r}_{i0}$

3. 任意带电体的场强分布:

求任意带电体 (电量为 Q, 连续分布)

在空间 P 点产生的场强

1).取电荷元 dq ⟶ 点电荷



P点场强: $$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{r}_0$$

2). 带电体 Q ⟶ 许多电荷元dq的集合 ⟶ 电荷连续分布

P点场强 ⟶ 许多电荷元dq在P点产生场强$d\vec{E}$的叠加 ⟶ $d\vec{E}$ 积分

P点总场强: $$\vec{E}_P = \int d\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\vec{r}_0$$

$\begin{cases}\text{矢量积分}\\ \text{多重积分}\end{cases}$

*具体计算：

电荷均匀分布

1）取 dq：

电荷体密度 $\rho_e = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} = \frac{q}{V}$ $\longrightarrow$ $\vec{E} = \iiint\limits_V \frac{\rho_e dV}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$

电荷面密度 $\sigma_e = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} = \frac{q}{s}$ $\longrightarrow$ $\vec{E} = \iint\limits_S \frac{\sigma_e dS}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$

电荷线密度 $\lambda_e = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} = \frac{q}{l}$ $\longrightarrow$ $\vec{E} = \int\limits_l \frac{\lambda_e dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$

2）矢量积分⟶标量积分：

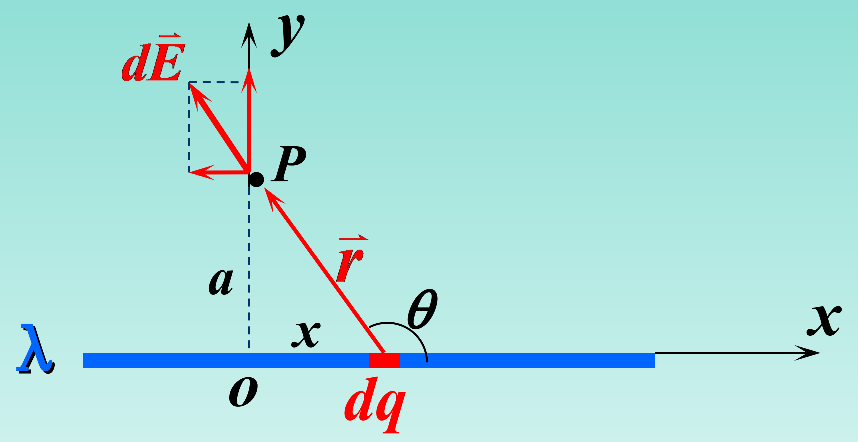
将$d\vec{E}$分解：$d\vec{E} = dE_x\vec{i} + dE_y\vec{j} + dE_z\vec{k}$

$$\begin{cases} E_x = \int dE_x \\ E_y = \int dE_y \\ E_z = \int dE_z \end{cases}$$

$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$

3）多重积分⟶单重积分：

例1：求均匀带电（λ）长直线的 场强分布



解：考察板面内任一点P
距离导线为a

1）取dq：$d\vec{E} = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{r}_o$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = ?$$

2）在P、λ平面建立xy坐标，分解$d\vec{E}$：

$$dq = \lambda\, dx$$

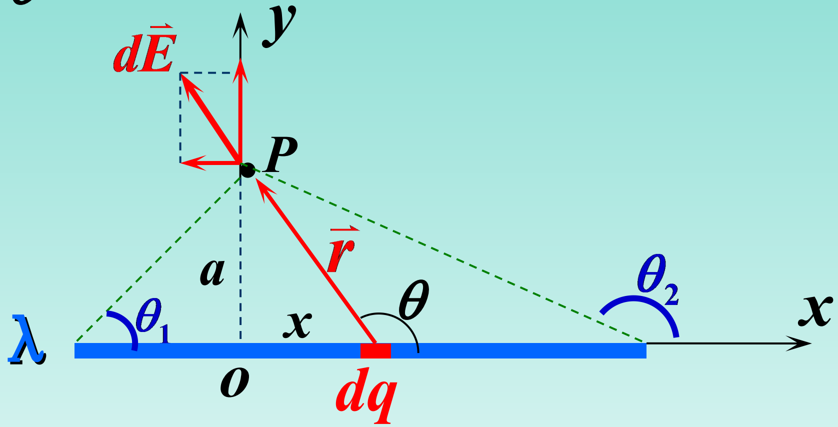
$$\begin{cases} dE_x = dE\cos\theta = \dfrac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_o r^2}\cos\theta \\ dE_y = dE\sin\theta = \dfrac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_o r^2}\sin\theta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} E_x = \int dE_x \\ E_y = \int dE_y \end{cases}$$

变量dx、r、θ

3）统一变量：$x = a\,ctg(\pi-\theta) = -a\,ctg\,\theta \rightarrow dx = a\csc^2\theta d\theta$

$$r^2 = a^2 + x^2 = a^2\csc^2\theta$$

$$\begin{cases} dE_x = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta d\theta \\ dE_y = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta d\theta \end{cases}$$

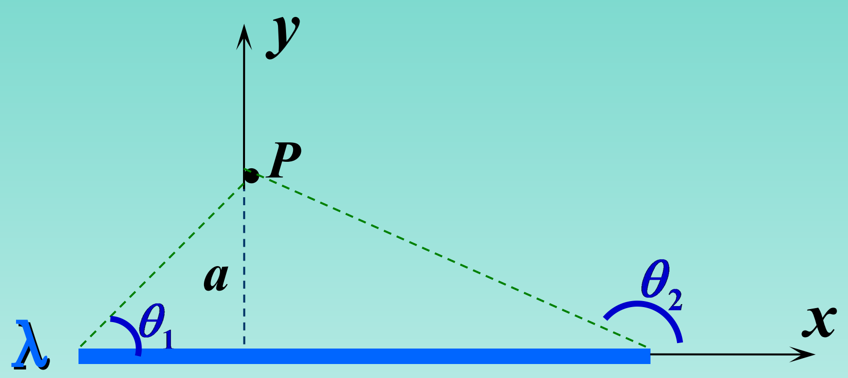


4）定积分限，并积分

$$\begin{cases} E_x = \int dE_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\dfrac{\lambda\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 a}d\theta = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \\ E_y = \int dE_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\dfrac{\lambda\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 a}d\theta = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \end{cases}$$

讨论：

$a<<L$：无限长带电直线
- P点在线中间：
- P点在线一端（半无限长）：



P点在直线一端（半无限长）： $\theta_1 \to 0$, $\theta_2 \to \dfrac{\pi}{2}$ $\longrightarrow$

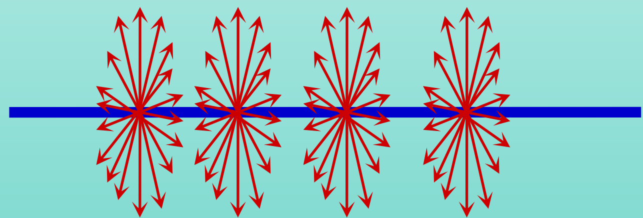
$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

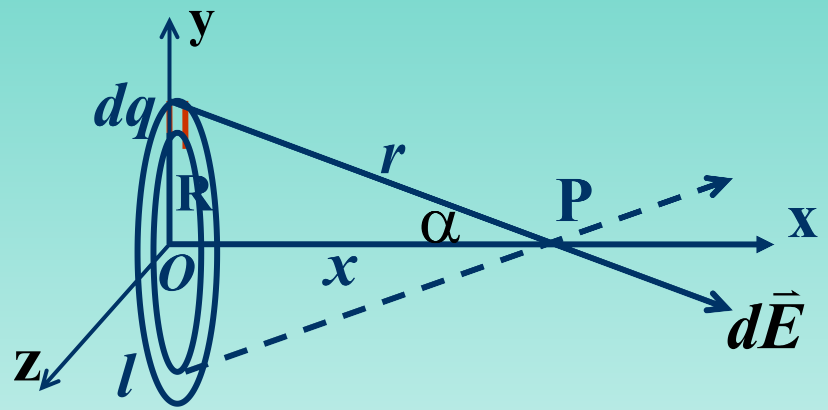
P点在直线之间： $\theta_1 \to 0$, $\theta_2 \to \pi$ $\longrightarrow$

$$E_{//} = 0$$

$$E_{\perp} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$



例2：求均匀带电圆环（R, q）轴线上一点场强



解：考察P点，距圆心为x

1）取电荷元dq $\rightarrow d\vec{E} = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)}\vec{r}_0$

2）建立坐标系x,y,z, 且圆环在yz平面上，分解$d\vec{E}$

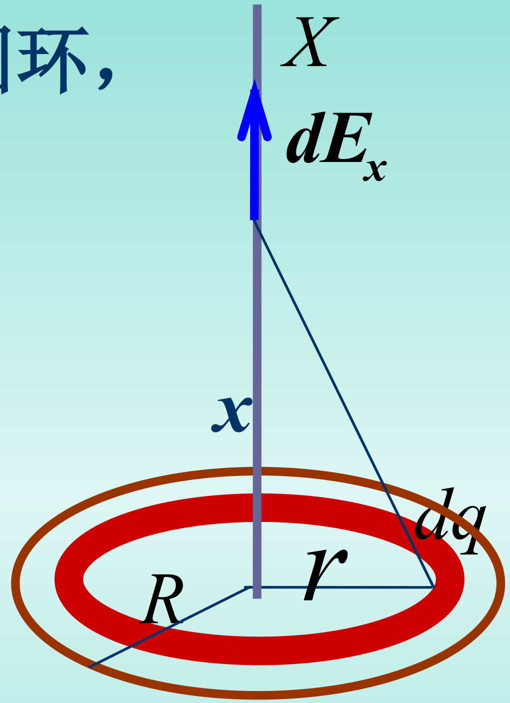
由对称性分析：$\int dE_y = \int dE_z = 0$

$$\therefore E = E_x = \int dE_x = \int dE\cos\alpha = \oint \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$= \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

例3： 求均匀带电圆盘 (R, σ) 轴线上一点的场强。

解：取电荷元为一半径r，宽度dr 的细圆环，带电量 $dq = \sigma 2\pi r \cdot dr$



圆环轴线上的场强公式中，代换：

$$q \to dq, R \to r, E \to dE$$

$$dE_x = \frac{dqx}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\therefore E_x(p) = \int dE_x = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{rdr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}}]$$

讨论： 1. 当$x << R \rightarrow \boldsymbol{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

圆盘可看作无限大带电平面，
附近电场可看成是均匀场，垂直于板面，
正负（方向）由电荷的符号决定

2. 当 $x >> R \rightarrow \boldsymbol{E} \approx \dfrac{\pi \boldsymbol{R}^2 \sigma}{4\pi\varepsilon_0 \boldsymbol{x}^2} = \dfrac{\boldsymbol{q}}{4\pi\varepsilon_0 \boldsymbol{x}^2}$

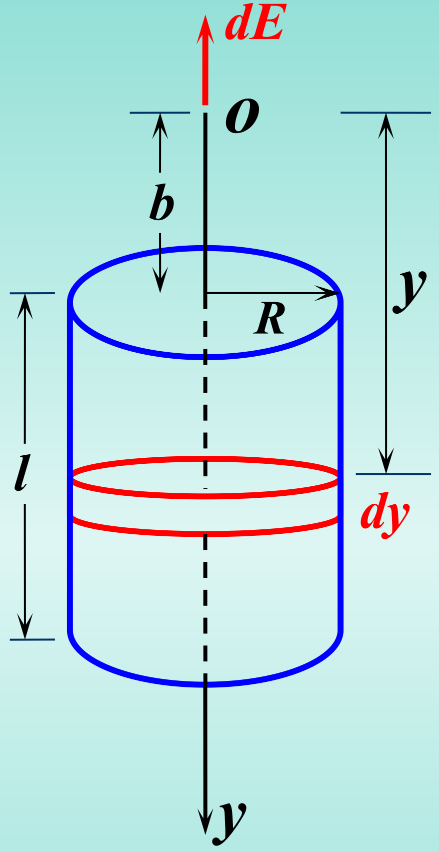
圆盘可看作点电荷

例4：半径R、长l、电荷体密度为ρ的圆柱体，

求：轴上距顶端b处的场强。

解：如图建立y轴

取电荷元dq为薄圆盘

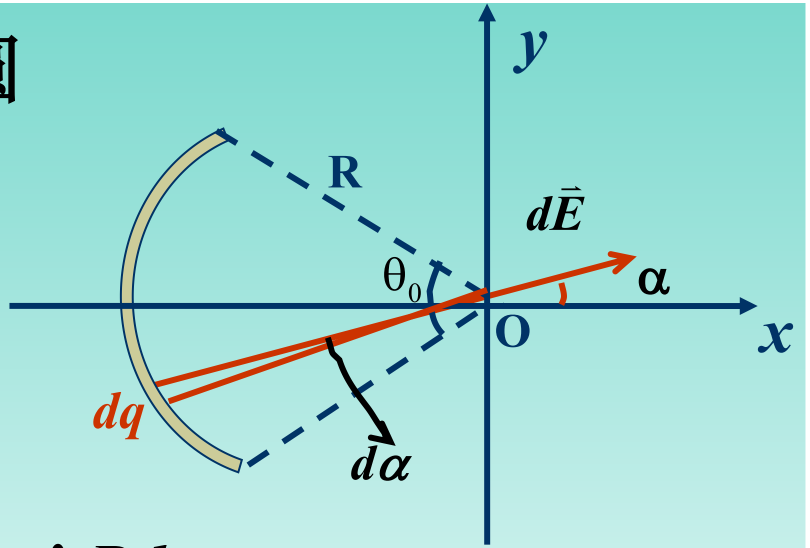


$$\sigma=\frac{\text{圆盘电量}}{\text{圆盘面积}}=\frac{\rho\pi R^2 dy}{\pi R^2}=\rho dy$$

$$dE=\frac{\rho dy}{2\varepsilon_o}[1-\frac{y}{\sqrt{y^2+R^2}}]$$ 沿y轴负向

$$\therefore E_y=\int_b^{b+l}dE=\frac{\rho}{2\varepsilon_o}[l-\sqrt{R^2+(b+l)^2}+\sqrt{R^2+b^2}]$$

例6：张角为θ_0的一段均匀带电圆弧（λ、R），求圆心O处场强



解：*取电荷元 dq

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{r}_0$$

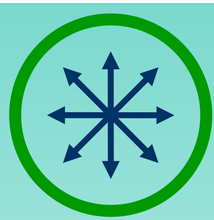
*建立坐标系 $x,y,$ $\rightarrow dq = \lambda dl = \lambda R d\alpha$

$$\begin{cases} dE_x = dE\cos\alpha = \dfrac{\lambda R d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\alpha \\ dE_y = dE\sin\alpha = \dfrac{\lambda R d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\alpha \end{cases}$$

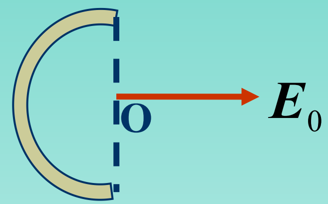
*对称性分析：$E_y = \int dE_y = 0$

*积分：$E_0 = E_x = \int dE_x = \int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_0}{2}} \frac{\lambda R\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R^2} d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\sin\frac{\theta_0}{2}$

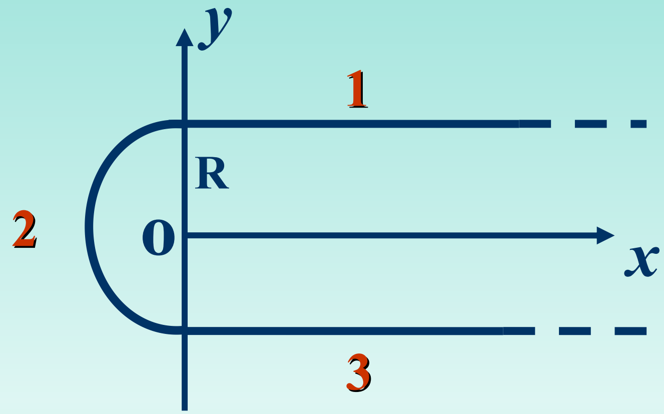
讨论： 1）若 $\theta_0 = 2\pi \rightarrow E_0 = 0$



2）若 $\theta_0 = \pi \rightarrow E_0 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$



提问： 电荷密度 λ 的长直线弯成图示形状，求O点场强？



解：o点场强等于三段带电体独自在o点产生场强的矢量和

1、3半无限长直线：
$$\vec{E}_{10} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\vec{i} - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\vec{j}$$
$$\vec{E}_{30} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\vec{i} + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\vec{j}$$

2为半圆弧：
$$\vec{E}_{20} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{i}$$

$$\therefore \vec{E}_0 = \vec{E}_{10} + \vec{E}_{20} + \vec{E}_{30} = 0$$

§8.2 静电场的高斯定理

一、电力线和电通量

通过电场中某一面积的电力线数， 称为该面积的电通量

dS上的电通量：$d\Phi_e = EdS_{\perp} = EdS\cos\theta = \vec{E}\cdot d\vec{S}$

S上的电通量：$\Phi_e = \int d\Phi_e = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_S E\cos\theta dS$

二、高斯定理

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

高斯定理的物理意义：

1）是静电场基本定律之一。对任何静电场、任何闭合曲面均成立。

2）静电场是有源场。电力线发自+q（源），止于-q（闾）

3）静电场中任一闭合曲面上的电通量 Φ_e 仅由面内电荷决定，与电荷位置、曲面形状无关。

曲面上各点场强 $\vec{E}$ 由面内、外电荷共同决定。

4）对平方反比的有心力场，高斯定理均适用。

三、高斯定理的应用——利用高斯定理求场强

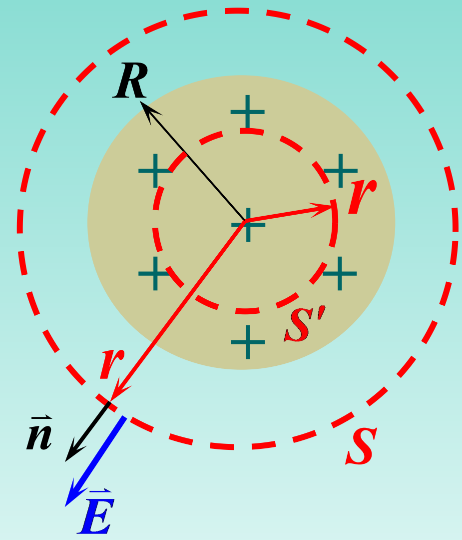
由 $\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot\vec{S} = \dfrac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$

步骤： 对称性分析、作高斯面 $\longrightarrow$ 求 $\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$，求 q $\longrightarrow$ $\Phi_e = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$ $\longrightarrow$ $\vec{E}$

适用范围： $\vec{E}$ 具有特殊对称性 $\begin{cases}\text{球对称}\\ \text{轴对称}\\ \text{面对称}\end{cases}$

例1：求均匀带电球体(q，R)内、外的场强分布

解：电荷球对称分布



场强$\vec{E}$具有球对称分布 $\begin{cases} \vec{E}\text{沿径向} \\ r\text{相同处，}E\text{相同} \end{cases}$

过考察点（距球心r）作同心闭合球面

$r>R$：

$$\left.\begin{aligned} \Phi_e &= \oint_S \vec{E}_{外} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS = E\oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2 \\ \Phi_e &= \frac{q}{\varepsilon_0} \end{aligned}\right\} E_{外} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

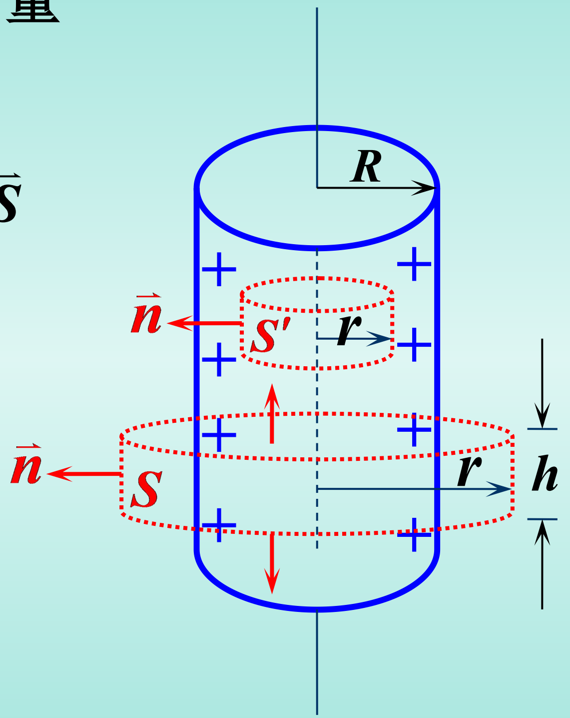
$r<R$：

$$\left.\begin{aligned} \Phi_e &= \oint_{S'} \vec{E}_{内} \cdot d\vec{S} = E\oint_{S'} dS = E \cdot 4\pi r^2 \\ \Phi_e &= \frac{q'}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4\pi r^2}{3\varepsilon_0} \end{aligned}\right\} E_{内} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \propto r$$

例2：无限长均匀带电圆柱面（R、σ）场强分布？

解：电荷轴对称分布

场强轴对称分布 $\begin{cases} r\text{相同处，} \quad E\text{相同} \\ \vec{E}\text{沿径向，无轴向分量} \end{cases}$



$r>R$：

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\text{底}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{\text{顶}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{\text{侧}} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

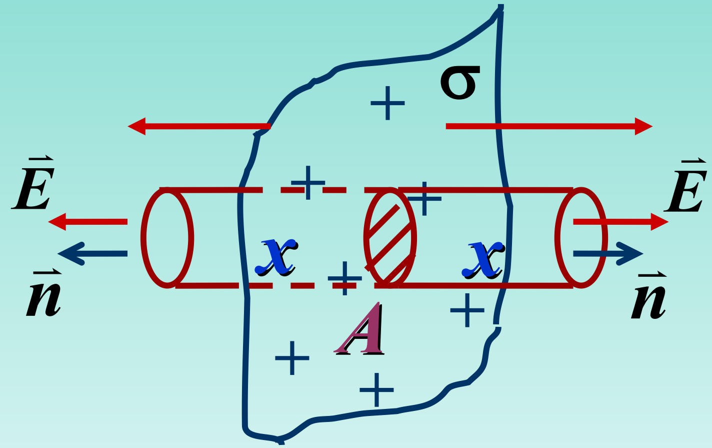
$$= \int_{\text{侧}} EdS = E\int_{\text{侧}} dS = E\cdot 2\pi rh$$

$$\Phi_e = \frac{q}{\varepsilon_o} = \frac{\sigma\cdot 2\pi Rh}{\varepsilon_o} \qquad \Rightarrow E_{\text{外}} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_o r}$$

$r<R$：$\Phi_e = \oint_{S'} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\text{侧}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 2\pi rh$

$$q = \frac{q}{\varepsilon_o} = 0 \qquad \Rightarrow E_{\text{内}} = 0$$

例3：无限大均匀带电平面 (σ)的场强分布

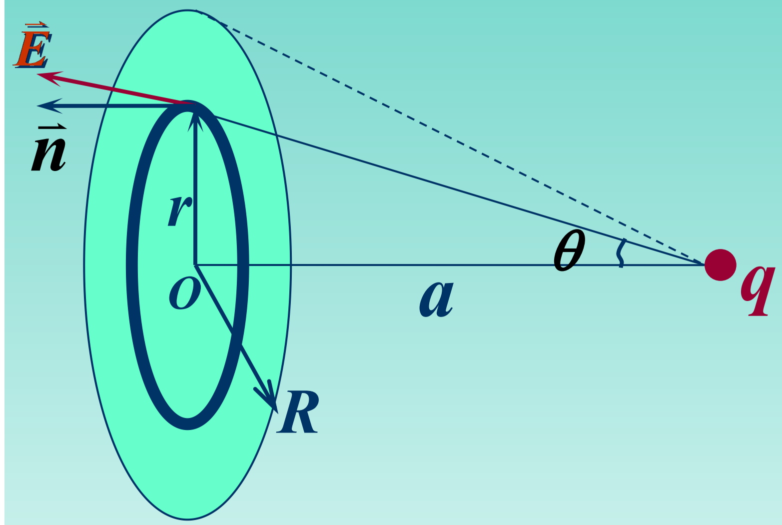


解：**对称性分析：** $\vec{E}$ ——面对称

作高斯面：

$\left.\begin{array}{l}\text{以平面为对称面(底面积}A\text{)}\\ \text{轴垂直于平面(长}2x\text{)}\end{array}\right\}$圆柱面

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} \\ = \int_{S侧} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S左} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S右} \vec{E}\cdot d\vec{S} \\ = ES + ES = 2EA \\ q = \sigma A\end{array}\right\} \quad \Phi_e = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



求圆心o距q为a，半径为R的圆平面上的电通量？

取半径r、宽度dr的圆环为dS

$$d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cos\theta 2\pi r dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a^2+r^2)}\cdot\frac{a}{(a^2+r^2)^{1/2}}\cdot 2\pi r dr$$

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_0^R \frac{r dr}{(a^2+r^2)^{3/2}} = \frac{qa}{2\varepsilon_0}(1-\cos\alpha)$$

§8.3 静电场的环路定律和电势

一、静电场力的功

1) q_0 从 a$\longrightarrow$b，电场力做功 A_{ab}只与a、b两点位置$\left(r_a, r_b\right)$有关,与a到b的路径无关。

2) q_0绕闭合回路一周,静电力做功为0。$A=\oint_L q_0 \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$

静电场的环路定律 $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$

二、电势

1. 静电势能W ——W是空间位置的函数

2. 电势

*定义： $$U_a = \frac{W_a}{q_0} = \frac{\int_a^{\infty} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}}{q_0} = \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

*物理意义： U_a 就是单位正电荷在 a点的 W_a

或把单位正电荷从a点（沿任意路径）移到零势能点,电场力所做的功

1). U是描述电场自身特性的物理量，只与 有关，与该点有无电荷无关。

2). $\vec{E}$ 是矢量，U是标量。

3). 某点电势 U_a 是相对的，相对0势点而言。

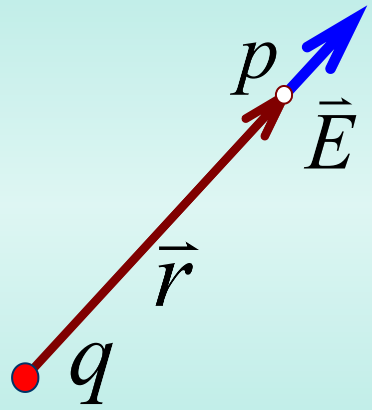
有限带电体：取 $U_\infty = 0 \rightarrow U_a = \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$

无限带电体：取 $U_c = 0 \rightarrow U_a = \int_a^C \vec{E} \cdot d\vec{l}$

三、电势的计算：

1). 点电荷q电场中任一点P的电势：

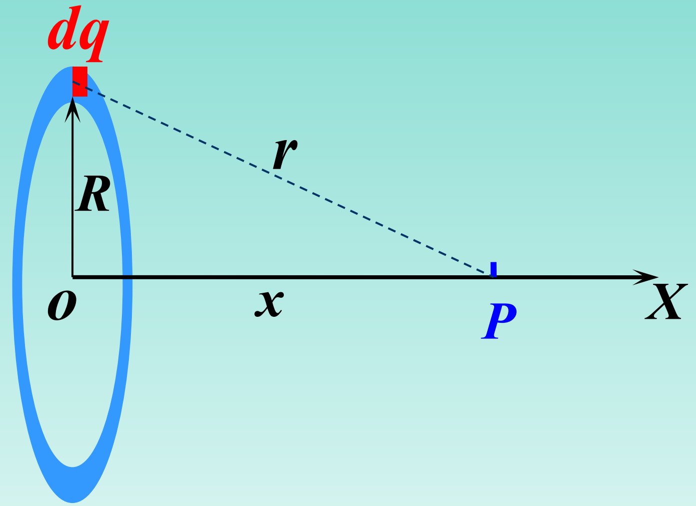
$$U_P = \frac{W_a}{q_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



2). 点电荷系：$U = \sum_{i=1}^{n} U_{Pi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$

2). 任意带电体：$\rightarrow U = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} \rightarrow$ 标量积分

例1：求均匀带电圆环（R, q）轴线上的电势分布



解（1）：取$dq=\lambda dl$

$$dU_P=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_o r}=\frac{\frac{q}{2\pi R}dl}{4\pi\varepsilon_o r}$$

$$U_P=\int_q dU_P=\frac{\frac{q}{2\pi R}}{4\pi\varepsilon_o r}\oint dl=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o(x^2+R^2)^{1/2}}$$

解（2）：已知圆环轴线上场强分布 $E_x=\dfrac{qx}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$

由电势定义：$U_P=\int_P^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_x^\infty E_x dx=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o(x^2+R^2)^{1/2}}$

例2: 求均匀带电球面 (R, q) 内外的电势分布。

叠加法: $U=\int dU$ $\quad dU\begin{cases}\text{取点电荷元——二重积分}\\ \text{取圆环为电荷元——一重积分}\end{cases}$

定义法: $E=\begin{cases}0 & (r<R)\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r>R)\end{cases}$，沿半径方向

$r>R$: $\quad U=\int_r^{\infty}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$r<R$: $\quad U(r)=\int_r^{\infty}E\,dr=\int_r^{R}E_{内}\,dr+\int_R^{\infty}E_{外}\,dr$

$$=\int_r^{R}0\,dr+\int_R^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

*在 $P\to\infty$ 的积分路径上, $\vec{E}$ 表示形式不同时，要分段积分

* 带电体场强 $\vec{E}$由积分法求出

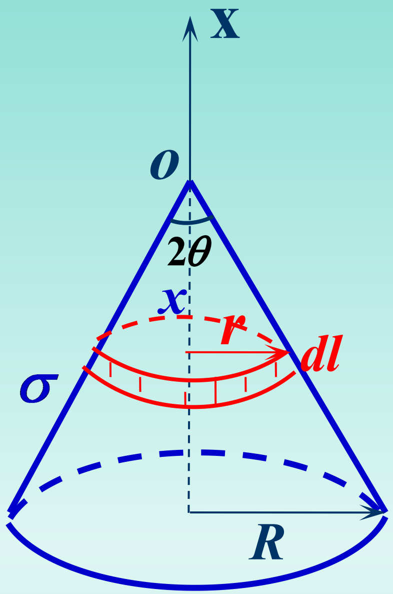
——求U 用叠加法方便：$U_P = \int dU$

* 带电体场强 $\vec{E}$分布有特殊对称性，可由高斯定理求出

——求U用定义法方便：$U_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

例3：求均匀带电圆锥面（R、2θ、 σ ）顶点o的电势。

解：定义法：$U_o = \int_o^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_o^{\infty} E_x dx$



带电圆锥面轴线上的场强分布 E_x=?

叠加法：取dq为圆环

$$dq = \sigma dS = 2\pi r dl$$

$$dU_o = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o (x^2+r^2)^{1/2}} = \frac{\sigma 2\pi r dl}{4\pi\varepsilon_o l} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} dr$$

$$l\sin\theta = r$$

$$dl\cdot\sin\theta = dr$$

整个圆锥面在o点的电势：$U_o = \int_q dU_o = \int_0^R \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} dr = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_o}$

例4：一均匀电场，场强 $\vec{E}=(400\vec{i}+600\vec{j})v/m$，

则点 a (3, 2) 和点 b (1, 0) 之间的电势差 $V_{ab}=?$

（x,y 坐标单位：m）

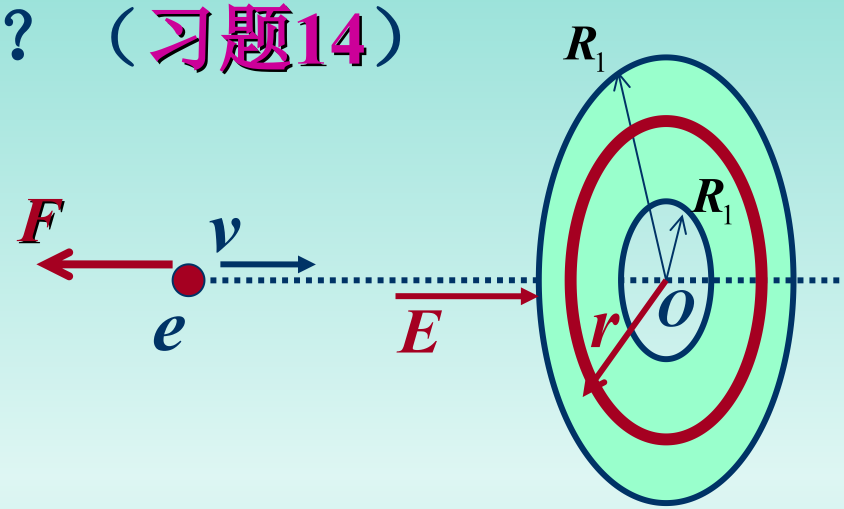
解：
$$U_{ab}=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$=\int_a^b\left(400\vec{i}+600\vec{j}\right)\cdot\left(dx\vec{i}+dy\vec{j}\right)$$

$$=\int_a^b\left(400dx+600dy\right)$$

$$=\int_3^1 400\,dx+\int_2^0 600\,dy=-2000\left(V\right)$$

例5：均匀带负电的圆环，内外半径分别为R_1, R_2，面密度为σ。一电子从无穷远处沿轴线射向圆环，欲使电子能穿过圆环，其初始动能至少多大？（习题14）



解：

$$A = e\left(V_\infty - V_0\right) \quad \begin{cases} V_\infty = 0 \\ V_0 = ? \end{cases}$$

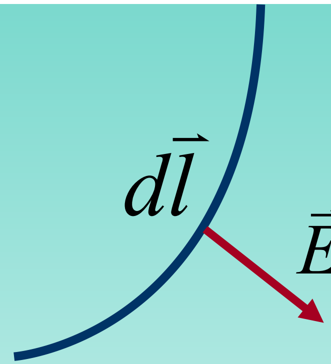
$$dV_0 = \frac{\sigma \cdot 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0 r} \rightarrow V_0 = \int_{R_1}^{R_2} dV_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(R_2 - R_1\right)$$

$$A = -\frac{e\sigma}{2\varepsilon_0}\left(R_2 - R_1\right) = E_{K2} - E_{K1} = 0 - E_{K1} = -E_{K1}$$

$$\therefore E_{K1} = \frac{e\sigma}{2\varepsilon_0}\left(R_2 - R_1\right)$$

§8.4 场强与电势梯度的关系

一、等势面



1. 定义：静电场中电势相等的点连成的曲面

2. 性质：

a) 在等势面上移动电荷，电场力做功为0。

$$dA = qdU = q\vec{E}\cdot d\vec{l} = qEdl\cos\theta = 0$$

b) 电力线总是垂直于等势面，并指向电势降低的方向。

c) 两个不同的等势面不可能相交。

d) 等势面的密与疏，反映电场的强或弱。

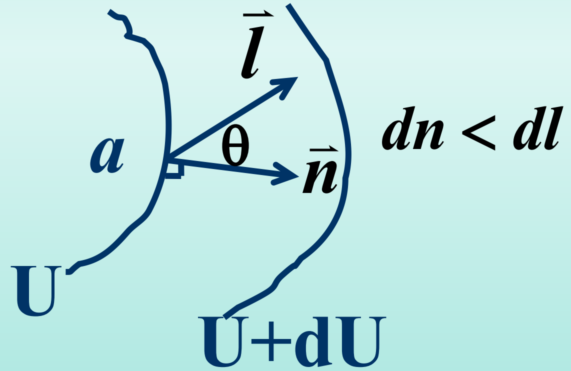
二、场强与电势梯度

1. 梯度（ *gradient*）:某物理量的空间最大变化率

2. 电势梯度：电势沿等势面面法线方向的变化率

规定——等势面的面法线方向

总是指向电势增加方向



$$dn = dl \cdot \cos\theta \rightarrow \frac{dU}{dl} = \frac{dU}{dn}\cos\theta \rightarrow \frac{dU}{dl} < \frac{dU}{dn}$$

电势沿等势面法线方向的变化率最大

电势梯度： $gradU = \dfrac{dU}{dn}\vec{n}_0 = \nabla U$

3. $\vec{E}$与电势梯度的关系：

q_0从$U \to U + dU$：

$$dA = q_0\left[U - (U + dU)\right] = -q_0 dU$$

$$dA = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 E\cos\theta dl = q_0 E dn$$

$$\Rightarrow E = -\frac{dU}{dn}$$

$$\therefore \vec{E} = -gradU = -\frac{dU}{dn}\vec{n}_0$$

$\vec{E}$ 指向电势降低的方向

***场强在任一方向的分量 = 电势在该方向的变化率**

$$E_l = E\cos\theta = -\frac{dU}{dn}\cos\theta = -\frac{dU}{dl}$$

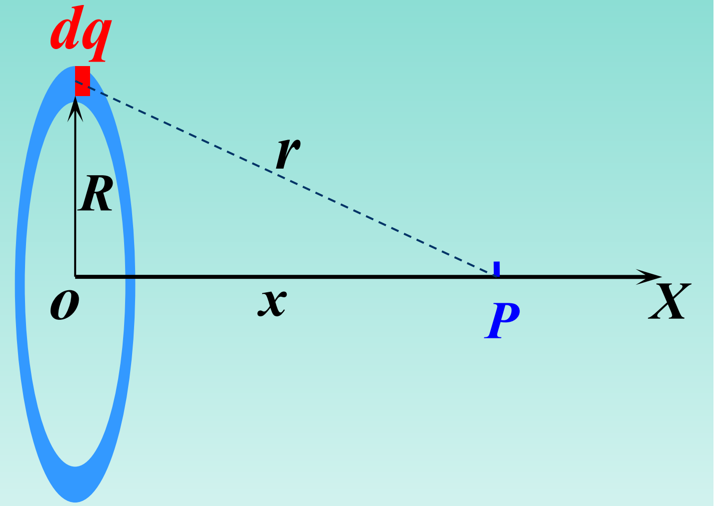
$$U = U\left(x, y, z\right)$$

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, E_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{E} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

例1：求均匀带电圆环（R, q）轴线上的场强与电势

解：取$dq = \lambda dl$



$$dU = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o r} = \frac{\frac{q}{2\pi R}dl}{4\pi\varepsilon_o r}$$

$$U = \int dU_P = \frac{\frac{q}{2\pi R}}{4\pi\varepsilon_o r}\oint dl = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o(x^2+R^2)^{1/2}}$$

$$E_x = -\frac{dU}{dx} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

总结：

已知电荷分布求场强 $\vec{E}$

1) 迭加法： $\vec{E} = \int_Q d\vec{E} \rightarrow$ 矢量分解 $\rightarrow E_x$、E_y、E_z

2) 高斯定理： $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = ES = \frac{q_{内}}{\varepsilon_o} \rightarrow E$

3) 电势梯度： $\vec{E} = -gradU$， $E_l = -\frac{dU}{dl}$

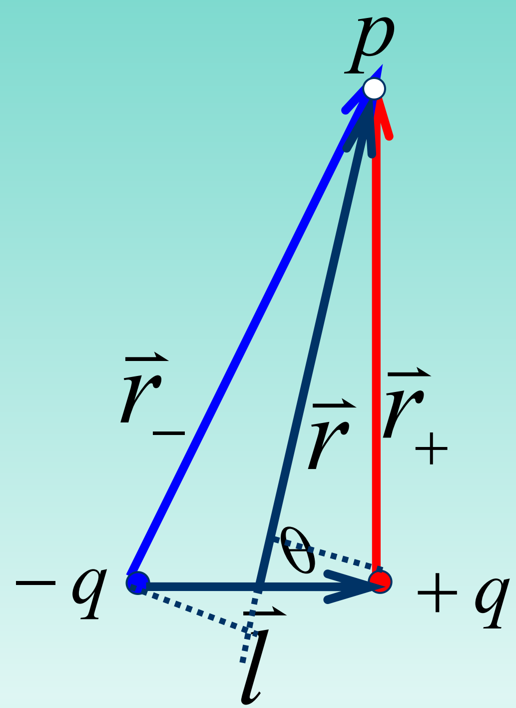
§8.5 带电粒子在电场中的运动

一、单个带电粒子:

二、电偶极子 (eletric dipole) :

$\vec{l}:-q \to +q$

$\vec{P}_e = q\vec{l}$ ——电矩（电偶极矩）



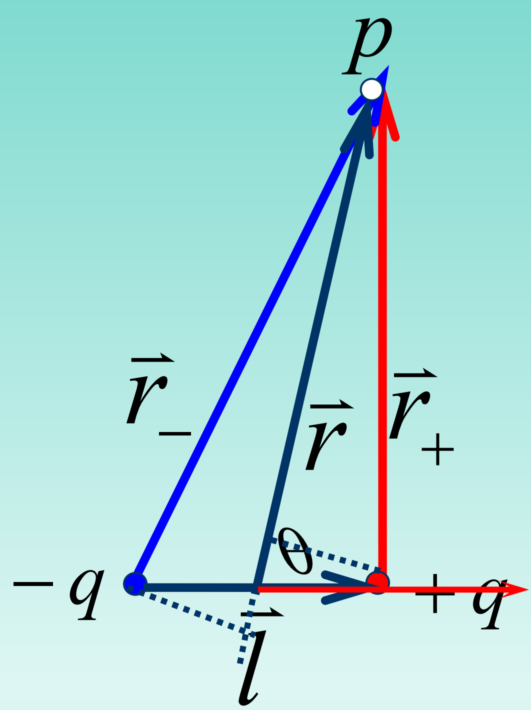
1. 电偶极子的电势分布和场强分布:

1）电势：$U_P = U_+ + U_-$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r_+} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r_-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}$$

$$\because r >> l \to \therefore \begin{cases} r_+ \approx r - \dfrac{l}{2}\cos\theta \\ r_- \approx r + \dfrac{l}{2}\cos\theta \end{cases} \to \begin{cases} r_+ \cdot r_- \approx r^2 \\ r_- - r_+ \approx l\cos\theta \end{cases}$$

$$\therefore U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{l\cos\theta}{r^2}=\frac{P_e\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\vec{P}_e\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$



2）场强：

$$\begin{cases} E_r=-\dfrac{\partial V}{\partial r}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{2P\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta=-\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial r}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{P\sin\theta}{r^3} \\ E_\varphi=-\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial\varphi}=0 \end{cases}$$

偶极子延长线上

$$\theta=0\text{：}\quad E_\theta=0,\quad E=E_r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2P}{r^3}$$

偶极子中垂线上

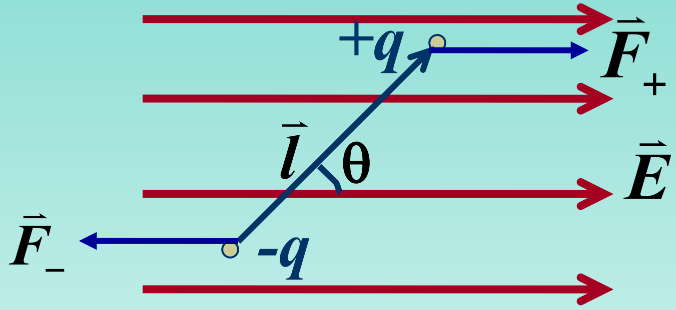
$$\theta=\frac{\pi}{2}\text{：}\quad E_r=0,\quad E=E_\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{P}{r^3}$$

2. 电偶极子在匀强电场中受力:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\vec{E} - q\vec{E} = 0$$

$$M = Fl\sin\theta = qEl\sin\theta = P_e E\sin\theta$$

$$\vec{M} = \vec{P}_e \times \vec{E}$$ ——方向? ⊗



3. 电偶极子在匀强电场中的电势能:

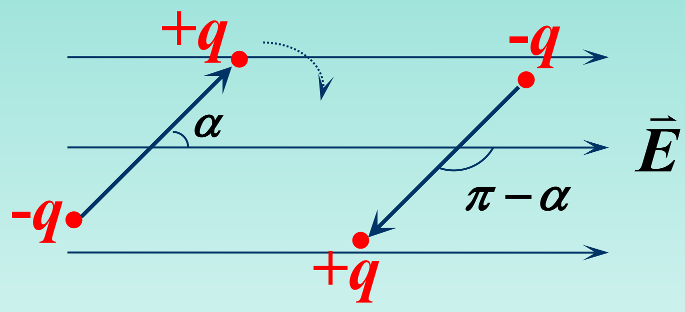
$$W = W_+ + W_- = qV_P + (-qV_{P'}) = q\int_P^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l} - q\int_{P'}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= q\int_P^{P'} \vec{E}\cdot d\vec{l} = q\int_P^{P'} E\cos\theta dl = -qEl\cos\theta = -P_e E\cos\theta$$

$$W = -\vec{P}_e\cdot\vec{E} \begin{cases} \theta = 0 : W = -P_e E \rightarrow \text{稳定平衡} \\ \theta = \pi : W = P_e E \rightarrow \text{不稳定平衡} \end{cases} \vec{M} = 0$$

例：一电偶极子 $\vec{P}_e$，与匀强电场 $\vec{E}$ 成 α 角，现绕垂直于 $\vec{P}_e$、$\vec{E}$ 平面的中心轴转过180⁰。求：电场力作功？

解：电力矩做功 $A=\int M d\theta$



$$A=W_{初}-W_{末}$$

$$W_{初}=-\vec{P}_e\cdot\vec{E}=-P_eE\cos\alpha$$

$$W_{末}=-\vec{P}_e'\cdot\vec{E}=-P_eE\cos(\pi-\alpha)$$

$$\therefore A=-2P_eE\cos\alpha$$

第八章 小结

1. 求$\vec{E}$的三种方法

1)叠加法： $d\vec{E} = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}$ $\left\{\begin{array}{l} E_x = \int dE_x \\ E_y = \int dE_y \\ E_z = \int dE_z \end{array}\right\}$ $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$

2)高斯定理：

3)电势梯度： $\vec{E} = -gradV = -\nabla V$

2 . 求 V 的两种方法：

1)定义法： $V_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

2)叠加法： $V = \int_q dV = \int \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$

3. 几种常用公式：

均匀带电球面：
$$\begin{cases} E_{内} = 0 \\ E_{外} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{内} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ V_{外} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{cases}$$

圆环轴线上：
$$E_x = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2 + R^2\right)^{3/2}}, \quad V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2 + R^2\right)^{1/2}}$$

圆盘轴线上：
$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right], \quad V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{x^2 + R^2} - x\right]$$

无限长直线：$E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

无限大平板：$E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} V_P = \int_P^C \vec{E} \cdot d\vec{l} \leftarrow V_C = 0$$