《微分几何》课程电子课件

教师：杨勤民

Tel: (021)64253147

Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程QQ群号：1045698545

微分几何(3学分)

微分几何的研究内容：$\boxed{\text{微分流形}}$的几何性质

$\boxed{\text{光滑曲线、曲面的一般化}}$

微分几何的主要工具：流形上的微积分

微分几何的重要性：

广义相对论的基础、力学、工程技术

不学好几何,很难在数学相关领域走得太远

—— 高斯

古典微分几何的奠基人：Euler, Monge, Gauss

1736年，瑞士数学家Euler引入了平面曲线的内蕴坐标，即以曲线弧长作为参数来表示曲线上的点的坐标，开始了曲线的内蕴几何学；

1807年，法国数学家Monge(蒙日)出版了《分析在几何学上的应用》，把微积分应用到曲线和曲面的研究之中；

1827年，德国数学家Gauss发表了《关于曲面的一般研究》，奠定了现代形式曲面论的基础，建立了曲面的内蕴几何学.

近代微分几何的创始人：Riemann

1854年，Riemann创立的黎曼几何学，成为近代微分几何的主要内容，并在广义相对论中起了重要作用。

近代微分几何的杰出贡献者：Cartan，陈省身

Cartan(嘉当)于20世纪二三十年代开创并发展了外微分形式与活动标架法，建立起李群与微分几何之间的联系；

陈省身开创并发展了整体微分几何、纤维丛微分几何、陈省身示性类等领域，被誉为微分几何之父，获得Wolf(沃尔夫)奖.

微分几何的局部理论与整体理论

局部微分几何研究三维欧氏空间中曲线和曲面在一点附近的性质，其中的一个主要问题是寻求几何不变量，并确定这些不变量能在多大程度上刻划曲线和曲面；

整体微分几何以局部性质为基础来研究图形的整体性质.

本课程的主要内容

三维欧氏空间中曲线和曲面的局部理论

§0 向量的运算(复习)

一、向量(矢量)的线性运算

二、向量的点积(内积)

三、向量的叉积(外积、向量积)

（Lagrange恒等式、双重叉积公式）

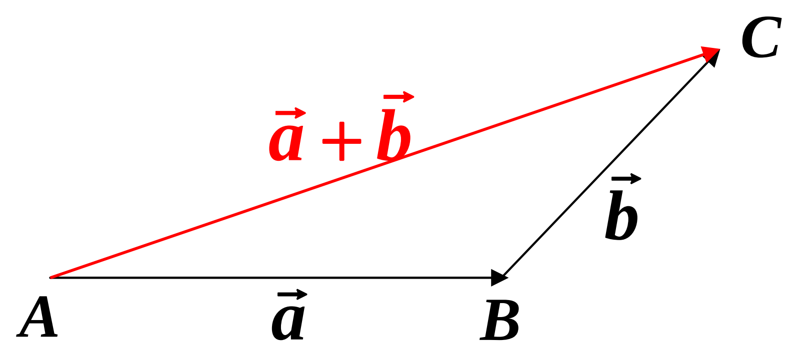
四、向量的混合积

五、向量垂直，平行，共面的条件

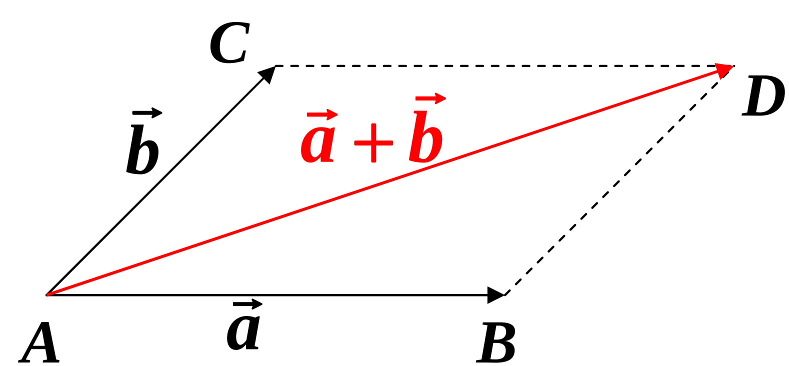
向量： 既有大小，又有方向的量.

向量加法的定义

三角形法则

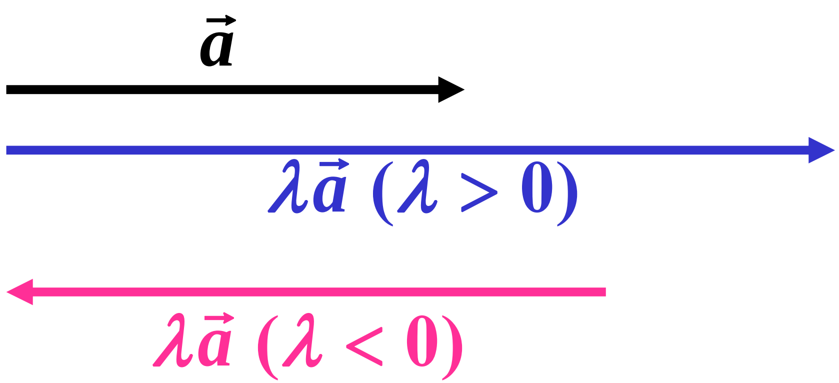


平行四边形法则



向量的数乘运算

数与向量的乘法：实数λ与向量$\vec{a}$的乘积$\lambda\vec{a}$是一个向量，它的长度是$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$；$\lambda\vec{a}$的方向：当$\lambda > 0$时与$\vec{a}$相同，当$\lambda < 0$时与$\vec{a}$相反. 约定 $0\vec{a} = \vec{0}$.



数与向量的乘法简称向量的数乘运算.

若$\vec{a} \neq \vec{0}$, 则$\vec{b} // \vec{a}$平行 $\Leftrightarrow$ 存在实数λ使得$\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

向量线性运算的运算规律:

(1) 交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(2) 结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

(3) $\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

(4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

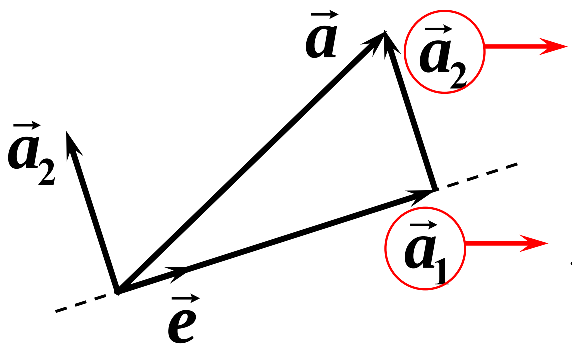
(5) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

(6) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

(7) $(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$

(8) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

向量的分解、射影和分量

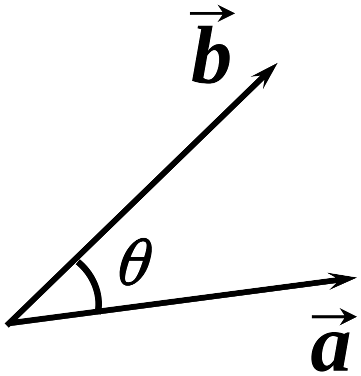


称为$\vec{a}$在方向$\vec{e}$上的外射影

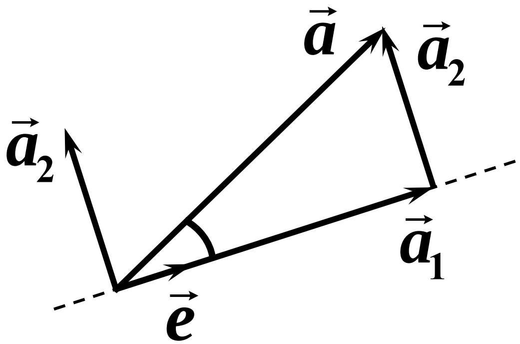
称为$\vec{a}$在方向$\vec{e}$上的内射影

给定单位向量$\vec{e}$, 则任一向量$\vec{a}$可分解为$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2$, 其中$\vec{a}_1 \parallel \vec{e}$, $\vec{a}_2 \perp \vec{e}$.

若$\vec{a}_1$是$\vec{a}$在方向$\vec{e}$上的内射影, 则存在唯一实数λ使得$\vec{a}_1=\lambda\vec{e}$, 称该实数λ为$\vec{a}$在$\vec{e}$上的分量, 记作$\Pi_{\vec{e}}\vec{a}$.

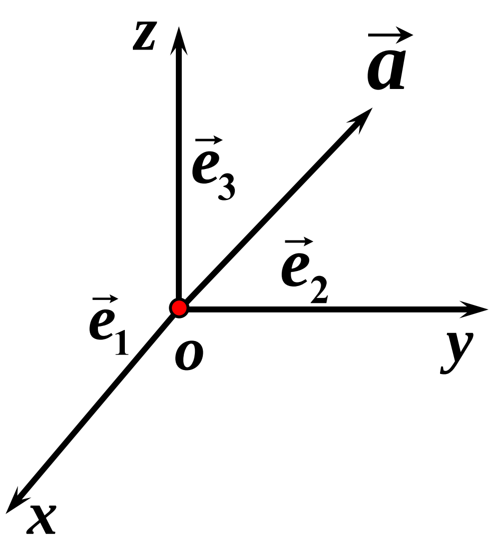


若$0\le\theta\le\pi$, 则称 θ为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角, 记为$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.



$$\vec{a}_1 = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{e}})\,\vec{e}$$ ($\vec{a}$在$\vec{e}$上的投影向量)

$$\Pi_{\vec{e}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{e}})$$ ($\vec{a}$在$\vec{e}$上的投影)

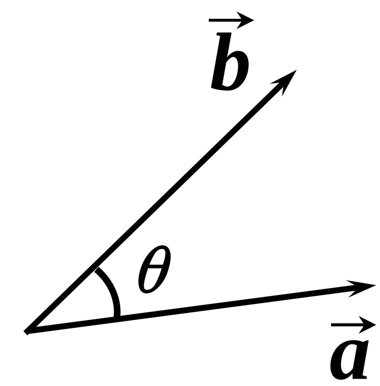


$\vec{a}$在直角坐标系$[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$下的坐标为

$$\left(\Pi_{\vec{e}_1}\vec{a},\Pi_{\vec{e}_2}\vec{a},\Pi_{\vec{e}_3}\vec{a}\right)$$

向量内积的定义和性质

两向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的内积(点积)



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\Pi_{\vec{b}^\circ}\vec{a})|\vec{b}|$$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\quad\Leftrightarrow\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

对于任意的向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$和实数λ,有

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}$

(3) $(\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{b}$

(4) 若$\vec{a}\neq\vec{0}$, 则$\vec{a}\cdot\vec{a}>0$

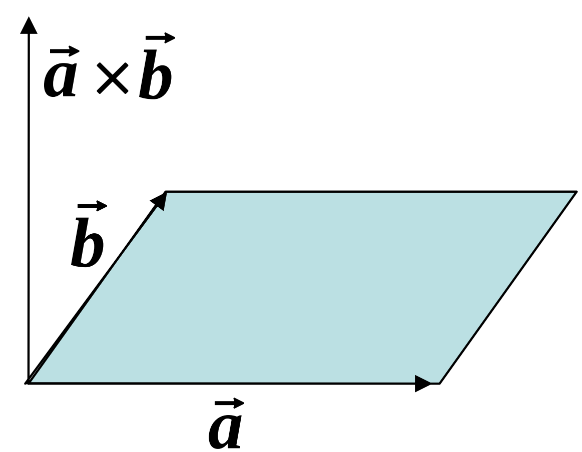
向量的外积与混合积

向量$\vec{a}$和向量$\vec{b}$的外积定义为一个向量$\vec{a}\times\vec{b}$：

其大小为$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$

(即以$\vec{a},\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积)

其方向垂直于$\vec{a}$和$\vec{b}$，且遵从右手法则.



向量的外积又称向量积或叉积.

$$\vec{a} // \vec{b} \iff \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$$

$$\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$$

外积的运算法则：

(1)反交换律 $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

(2)与数乘的结合律

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$$

(3)左分配律 $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

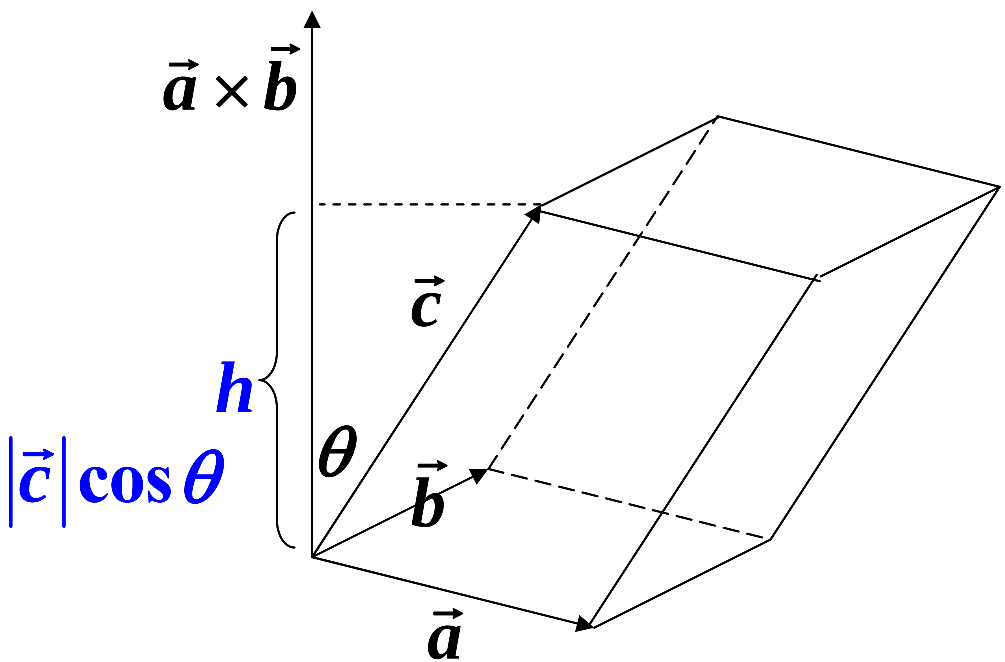
(4)右分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

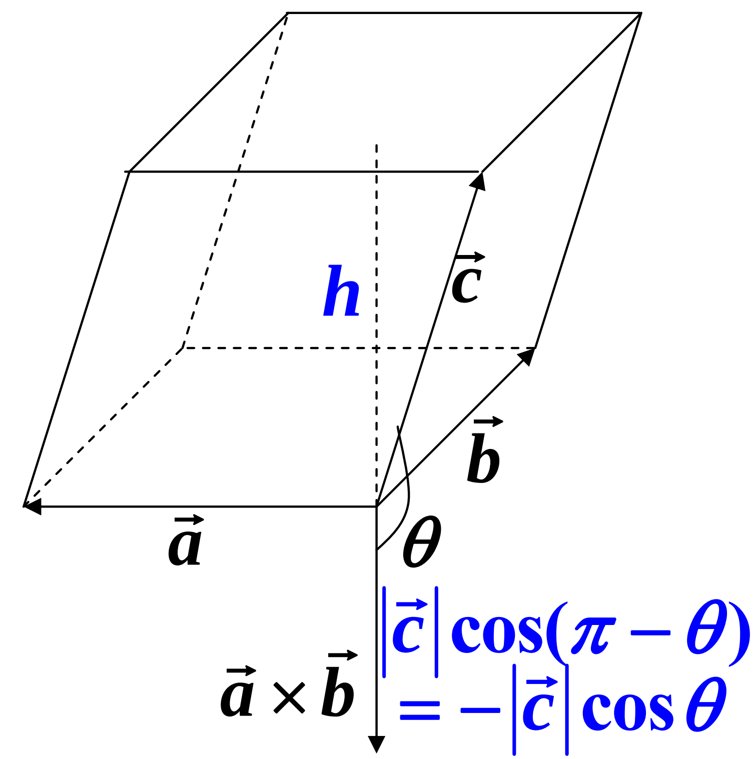
注：

外积不满足结合律，即$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\neq\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

称$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$为向量$\vec{a},\vec{b}$和$\vec{c}$的混合积,记为$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\theta$$





几何意义: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{cases} V, \text{当}\vec{a},\vec{b},\vec{c}\text{成右手系} \\ -V, \text{当}\vec{a},\vec{b},\vec{c}\text{成左手系} \end{cases}$

轮换不变性：$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})$

反交换律：$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=\cdots$

空间三向量共面的条件

① $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面 $\Leftrightarrow$ $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$

② 空间四点A, B, C, D共面 $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=0$

③ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面$\Leftrightarrow$存在不全为零的实数

k_1,k_2,k_3使得$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=\vec{0}.$

双重叉积公式

对任意向量$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 有

双重叉积公式

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c},$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}.$$

雅克比(Jacobi)等式

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0},$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=\vec{0}.$$

拉格朗日(Lagrane)恒等式

对任意向量$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, 有

拉格朗日恒等式

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix},$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2.$$

第一章 曲线论

§1.1 向量函数

一、向量函数的极限

二、向量函数的连续性

三、向量函数的微商

四、向量函数的Taylor公式

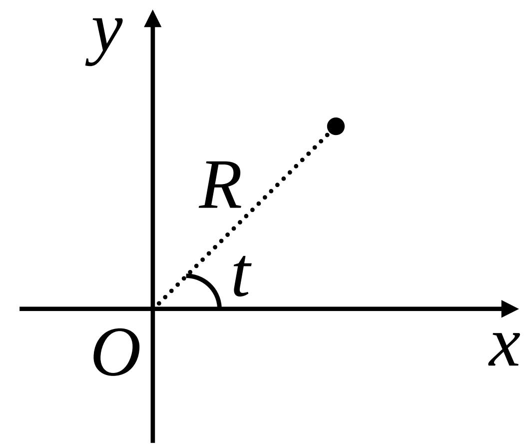
五、向量函数的积分

六、两个重要命题

向量函数引例

圆：

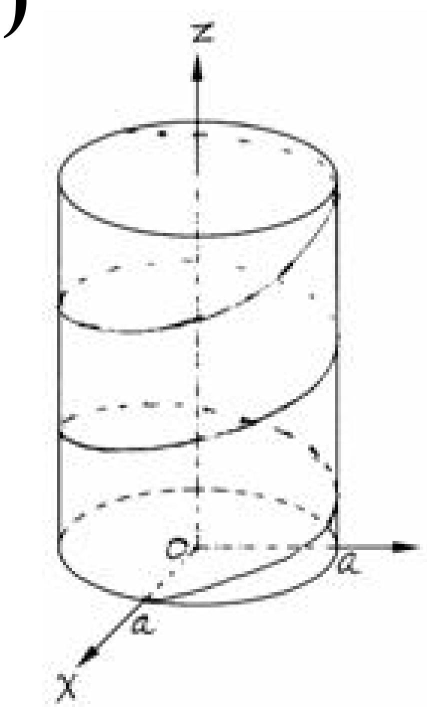
$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi)$$



改记为：$\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t), \quad t \in [0, 2\pi)$

圆柱螺线：

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z(t) = vt \end{cases}$$



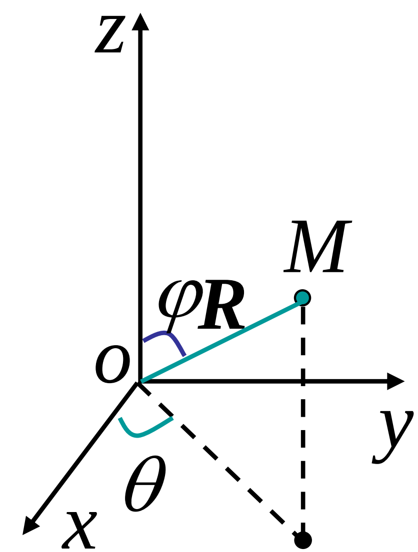
改记为： $\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, vt), \quad t \in \mathbb{R}$

向量函数引例(续)

球面：

$$\begin{cases} x(\varphi,\theta) = R\sin\varphi\cos\theta \\ y(\varphi,\theta) = R\sin\varphi\sin\theta \\ z(\varphi,\theta) = R\cos\varphi \end{cases}$$

$$0 \le \varphi \le \pi,\quad 0 \le \theta < 2\pi$$



改记为：

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = (R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi),$$

$$0 \le \varphi \le \pi,\quad 0 \le \theta < 2\pi$$

向量函数的概念(vector-valued functions):

取值为向量的函数

$\vec{r}:\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,\quad m$维向量$\mapsto n$维向量

向量函数的表示:

$$\vec{r}(t)=(f(t),g(t),h(t))=f(t)\vec{e}_1+g(t)\vec{e}_2+h(t)\vec{e}_3$$

其中 $f(t),g(t),h(t)$ 为数量函数,

$\vec{e}_1=(1,0,0),\ \ \vec{e}_2=(0,1,0),\ \ \vec{e}_3=(0,0,1)$ (自然基底)

$$\vec{r}(u,v)=$$

$$(f(u,v),g(u,v),h(u,v))=f(u,v)\vec{e}_1+g(u,v)\vec{e}_2+h(u,v)\vec{e}_3$$

一、向量函数的极限 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}$

设 $\vec{r}(t)$ 在 t_0 附近有定义，

它在 t_0 可能也有定义，但不是必须有定义，

$\vec{a}$ 是一个与 t 无关的常向量，

若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，使得

$$\forall t\in O(t_0,\delta)/\{t_0\}，有 \left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|<\varepsilon,$$

则称：当 t 趋近于 t_0 时 $\vec{r}(t)$ 趋近于 $\vec{a}$.

用符号表示为：$\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}\Leftrightarrow\forall i,\ \lim\limits_{t\to t_0}r_i(t)=a_i$

向量函数极限的性质

若$\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)$, $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{s}(t)$和$\lim\limits_{t\to t_0}\lambda(t)$都存在, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$,

则

(1)线性性质：$\lim\limits_{t\to t_0}[\alpha\vec{r}(t)+\beta\vec{s}(t)]=\alpha\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)+\beta\lim\limits_{t\to t_0}\vec{s}(t)$

(2)数量乘法：$\lim\limits_{t\to t_0}[\lambda(t)\vec{r}(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\lambda(t)\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)$

(3)点积：$\lim\limits_{t\to t_0}[\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\vec{s}(t)$

(4)叉积：$\lim\limits_{t\to t_0}[\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\vec{s}(t)$

二、向量函数的连续性

$\vec{r}(t)$在 t_0连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$

$\vec{r}(t)$在 (a,b) 连续

$\vec{r}(t)$在 $[a,b)$ 连续

线性运算、数乘、点积、叉积的连续性

三、向量函数的微商(导矢)(derivative)

$\vec{r}(t)$ 在 t_0的微商

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \triangleq \vec{r}'(t_0) \triangleq \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

$\vec{r}(t)$ 在 (a,b) 的微商 $\vec{r}'(t)$

若$\vec{r}(t)=(f(t),g(t),h(t))$, 则$\vec{r}'(t)=(f'(t),g'(t),h'(t))$.

向量函数微商的性质

(1)线性性质：$[\alpha\vec{r}(t)+\beta\vec{s}(t)]'=\alpha\vec{r}'(t)+\beta\vec{s}'(t)$

(2)数量乘法：$[\lambda(t)\vec{r}(t)]'=\lambda'(t)\vec{r}(t)+\lambda(t)\vec{r}'(t)$

(3)点积：$[\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)]'=\vec{r}'(t)\cdot\vec{s}(t)+\vec{r}(t)\cdot\vec{s}'(t)$

(4)叉积：$[\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)]'=\vec{r}'(t)\times\vec{s}(t)+\vec{r}(t)\times\vec{s}'(t)$

(5)混合积：

$$(\vec{r}(t),\vec{s}(t),\vec{u}(t))'$$

$$=(\vec{r}'(t),\vec{s}(t),\vec{u}(t))+(\vec{r}(t),\vec{s}'(t),\vec{u}(t))+(\vec{r}(t),\vec{s}(t),\vec{u}'(t))$$

向量函数的高阶微商

k 阶微商：

若 $\vec{r}^{(k-1)}(t)$ 可微，则称 $\vec{r}^{(k)}(t)$ 为 $\vec{r}(t)$ 的 **k 阶微商**

C^k 类函数(k 次连续可微函数):

使得 $r^{(k)}(t)$ 连续的函数 $r(t)$

C^0 类函数： 连续函数

C^∞ 类函数： 无限次可微函数

性质： $\vec{r}(t)$ 在 $[t_1,t_2]$ 上是 C^k 类函数 $\Leftrightarrow$

它的分量函数在 $[t_1,t_2]$ 上都是 C^k 类函数.

四、向量函数的Taylor公式

设 $\vec{r}(t)$ 在 t_0 附近是 C^{n+1} 类函数, 则它有Taylor展开式

$$\vec{r}(t_0+\Delta t)=\vec{r}(t_0)+\Delta t\vec{r}'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\vec{r}''(t_0)+\cdots$$

$$+\frac{(\Delta t)^n}{n!}\vec{r}^{(n)}(t_0)+\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!}(\vec{r}^{(n+1)}(t_0)+\vec{\varepsilon}(t_0,\Delta t))$$

设 $\vec{r}(t)$ 在 t_0附近是 C^{∞}类函数, 则它有Taylor级数

$$\vec{r}(t_0+\Delta t)\mapsto\vec{r}(t_0)+\Delta t\vec{r}'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\vec{r}''(t_0)+\cdots$$

五、向量函数的积分

$$\int_a^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t \triangleq \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{r}(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

若 $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, 则

$$\int_a^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t = \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t, \int_a^b g(t)\mathrm{d}t, \int_a^b h(t)\mathrm{d}t\right)$$

向量函数的积分的性质

(1)线性：$\int_a^b [\alpha\vec{r}(t)+\beta\vec{s}(t)]\mathrm{d}t=\alpha\int_a^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t+\beta\int_a^b \vec{s}(t)\mathrm{d}t$

(2)对积分区间的可加性：$\int_a^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t=\int_a^c \vec{r}(t)\mathrm{d}t+\int_c^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t$

(3)线性点积：$\int_a^b \vec{\lambda}\cdot\vec{r}(t)\mathrm{d}t=\vec{\lambda}\cdot\int_a^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t$

(4)线性叉积：$\int_a^b \vec{\lambda}\times\vec{r}(t)\mathrm{d}t=\vec{\lambda}\times\int_a^b \vec{r}(t)\mathrm{d}t$

(5)变上限积分的微商公式：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \vec{r}(t)\mathrm{d}t=\vec{r}(x)$

六、两个重要命题

P7 命题6 $|\vec{r}(t)|$为常数$\Leftrightarrow \forall t, \vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t)$.

证 ($\Rightarrow$) $|\vec{r}(t)|$为常数,即$\exists c, \forall t$ 有 $|\vec{r}(t)| = c$.

因此 $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t) = |\vec{r}(t)|^2 = c^2$.

两边关于t求微商得 $\vec{r}'(t)\cdot\vec{r}(t) + \vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t) = 0.$

即 $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t) = 0.$ 亦即 $\forall t$,有 $\vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t)$.

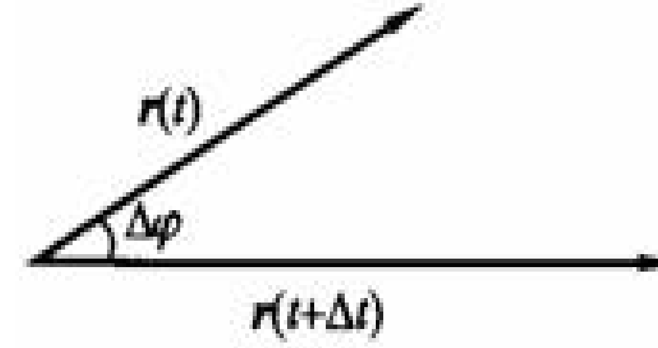
($\Leftarrow$) 设 $\forall t$,有 $\vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t)$,即 $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t) = 0.$

因此 $[|\vec{r}(t)|^2]' = [\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t)]' = \vec{r}'(t)\cdot\vec{r}(t) + \vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t) = 0.$

从而 $|\vec{r}(t)|^2$ 为常数,即 $|\vec{r}(t)|$为常数.

旋转速度

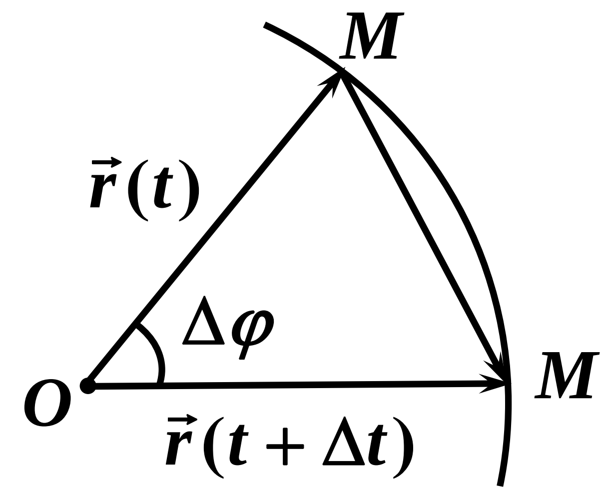
称 $\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|$ 为 $\vec r(t)$ 关于 t 的旋转速度.



P8 命题7

C^1 类单位向量函数 $\vec r(t)$(即 $|\vec r(t)|\equiv 1$)关于 t 的旋转速度 $=|\vec r'(t)|$.

证 $\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\overset{\frown}{MM'}|}{|\Delta t|}$



$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\overrightarrow{MM'}|}{|\Delta t|}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\overset{\frown}{MM'}|}{|\overrightarrow{MM'}|} = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\vec r(t+\Delta t)-\vec r(t)}{\Delta t}\right|\cdot 1 = |\vec r'(t)|$$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业！

1.1 证明 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\vec{r}(t)}{\rho(t)}\right)=\dfrac{\vec{r}'(t)\rho(t)-\vec{r}(t)\rho'(t)}{\rho^2(t)}$.

1.2 证明$\vec{r}(t)$具有固定方向的充要条件是$\vec{r}(t)\times\vec{r}'(t)=\vec{0}$.

1.3 证明$\vec{r}(t)$平行于固定平面的充要条件是

$$(\vec{r}(t),\vec{r}'(t),\vec{r}''(t))=0.$$

§1.2 曲线的概念

一、曲线的参数表示

二、光滑曲线、正则点、正则曲线

三、曲线的切线与法平面

四、曲线的弧长与自然参数

一、曲线的向量参数表示法

向量函数 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)) \quad t\in I$

可用于表示曲线

曲线的参数

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \quad t\in I \\ z=z(t) \end{cases}$$

将 $\vec{r}(t)$ 的起点固定于原点 O,

则 $\vec{r}(t)$ 的终点的轨迹就是这条曲线.

称这样的向量函数为曲线的向量参数表示.

二、光滑曲线、正则点、正则曲线

光滑曲线(C^1类曲线、一阶光滑曲线)

若曲线上每点都存在切线,并且切线连续变化.

C^k类曲线(k阶光滑曲线)

若曲线为$\vec{r}=\vec{r}(t), t\in I$,且$\vec{r}(t)$为$I$上的$C^k$类函数,

则称这样的曲线为C^k类曲线或k阶光滑曲线.

正则点

若对于曲线 $\vec{r}=\vec{r}(t)$ 上一点 $(t=t_0)$ 有 $\vec{r}'(t_0)\neq\vec{0}$,

则称该点为曲线的**正则点**.

否则称为曲线的**奇异点**.

本课程只研究曲线上的正则点.

正则曲线

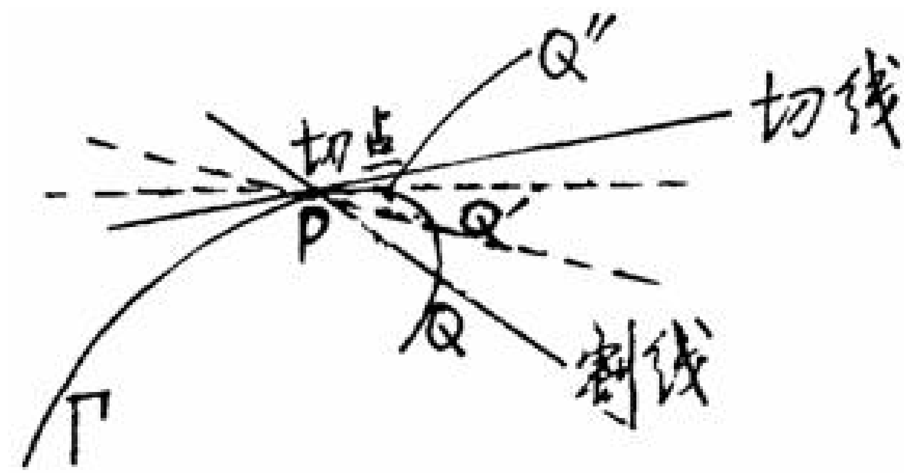
若某曲线上的每一点都是正则点,

则称该曲线为**正则曲线**.

三、曲线的切线和法平面

切线的定义 (割线的极限)

曲线$\Gamma \in C^1$：$\vec{r}=\vec{r}(t)$



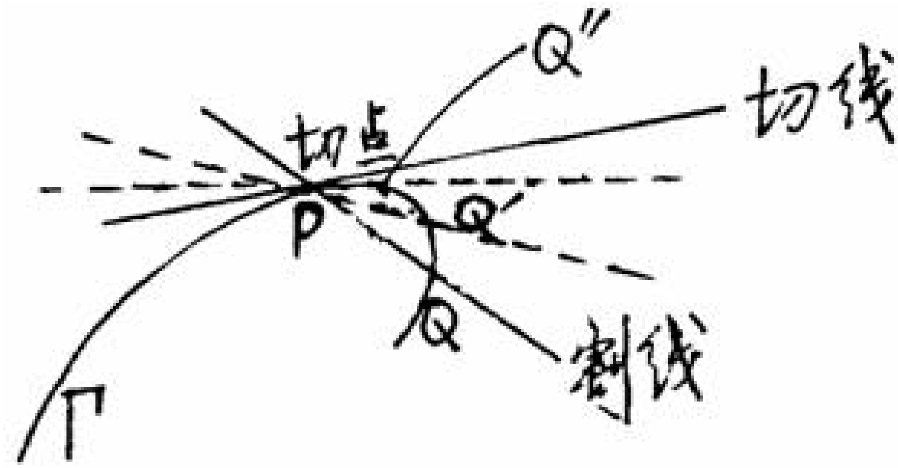
切点P：$\vec{r}(t_0)$

曲线上点P附近的一点Q：$\vec{r}(t_0+\Delta t)$

当$\Delta t \to 0$时，$Q \to P$，直线$PQ \to$ 曲线在点P处的切线.

切向量

$$\overrightarrow{PQ}=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)$$



割线方向: $\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta t} // \overrightarrow{PQ}$

割线方向的极限: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta t}=\vec{r}'(t_0)$

$\vec{r}'(t_0)$与切线方向一致,称$\vec{r}'(t_0)$为**曲线在 P 点的切向量**.

注 $\vec{r}'(t_0)$的正向与曲线的参数 t 的增加方向一致.

切线方程(切线的向量参数表示)

曲线$\Gamma \in C^1$: $\vec{r}=\vec{r}(t)$, 切点P: $\vec{r}(t_0)$

设$\vec{R}$为切线上任意一点的向径,

则 $[\vec{R}-\vec{r}(t_0)] // \vec{r}'(t_0)$

即 $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $s.t.$ $\vec{R}-\vec{r}(t_0)=\lambda \vec{r}'(t_0)$

所以切线方程为$\vec{R}=\vec{r}(t_0)+\lambda \vec{r}'(t_0)$, 其中$\lambda$为参数.

切线方程(切线的点向式方程)

设 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\quad \vec{R}=(X,Y,Z)$

代入切线方程 $\vec{R}=\vec{r}(t_0)+\lambda\vec{r}'(t_0)$ 得到切线的参数方程:

$$\begin{cases} X=x(t_0)+\lambda x'(t_0) \\ Y=y(t_0)+\lambda y'(t_0) \\ Z=z(t_0)+\lambda z'(t_0) \end{cases}$$

消去参数 λ 得到切线的点向式方程:

$$\frac{X-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{Y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{Z-z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

法平面方程(法平面的向量表示)

法平面: 过切点且与切线垂直的平面.

曲线 $\Gamma \in C^1$: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, 切点 P : $\vec{r}(t_0)$

设 $\vec{R}$ 为法平面上任意一点的向径,

则 $[\vec{R} - \vec{r}(t_0)] \perp \vec{r}'(t_0)$

即 $[\vec{R} - \vec{r}(t_0)] \cdot \vec{r}'(t_0) = 0$

所以法平面的方程为 $[\vec{R} - \vec{r}(t_0)] \cdot \vec{r}'(t_0) = 0.$

法平面方程(法平面的点法式方程)

设 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\quad \vec{R}=(X,Y,Z)$

代入法平面方程 $[\vec{R}-\vec{r}(t_0)]\cdot\vec{r}'(t_0)=0$ 得到

$$[X-x(t_0)]x'(t_0)+[Y-y(t_0)]y'(t_0)+[Z-z(t_0)]z'(t_0)=0$$

它就是法平面的点法式方程.

四、曲线的弧长与自然参数

设有光滑曲线Γ：$\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$，

则以$t=a$为起点，$t=t$为终点的曲线弧的**有向弧长**为

$$s(t)=\int_a^t \underbrace{\boxed{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t}}_{\text{弧长微元ds}}=\int_a^t \underbrace{\boxed{\left|\vec{r}'(t)\right|\mathrm{d}t}}_{\text{弧长微元ds}}$$

$s'(t)=\left|\vec{r}'(t)\right|>0 \;\Rightarrow\; s(t)$为关于$t$的严格单调递增函数

$\Rightarrow s(t)$存在反函数. 设其为$t=t(s)$，并代入曲线方程得

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=\vec{r}(t(s))=(x(t(s)),y(t(s)),z(t(s)))$$

它是一个以弧长s为参数的曲线方程.

称以弧长 s 为参数的曲线表示为曲线的自然参数表示.

称弧长参数 s 为曲线的自然参数.

命题 向径关于自然参数的微商的模等于1.

证 $$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\vec{r}'(t)\frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}\right|=\left|\vec{r}'(t)\frac{1}{|\vec{r}'(t)|}\right|=1.$$

采用自然参数 s 后,切向量变成单位切向量.

以后用"$\cdot$"代替"$'$"表示关于自然参数的微商,

即 $$\dot{\vec{r}}(s)\triangleq\vec{r}'(s)=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s},\quad \ddot{\vec{r}}(s)\triangleq\vec{r}''(s)=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2},\cdots$$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

1.4 求曲线$\vec{r}(t)=(at,bt^2,ct^3)$在点$t_0$的切线和法平面.

1.5 求圆柱螺线$x=3a\cos t, y=3a\sin t, z=4at\ (a>0)$从它与$xOy$面的交点到任意点$M(t)$的弧长.

1.6 将圆柱螺线$\vec{r}=(a\cos t, a\sin t, bt)\ (a>0)$化为自然参数表示.

1.7 求用极坐标方程$\rho=\rho(\theta)$给定的曲线的弧长表达式.

§1.3 空间曲线

一、空间曲线的密切平面

二、空间曲线的基本三棱形

三、曲率、挠率和Frenet公式

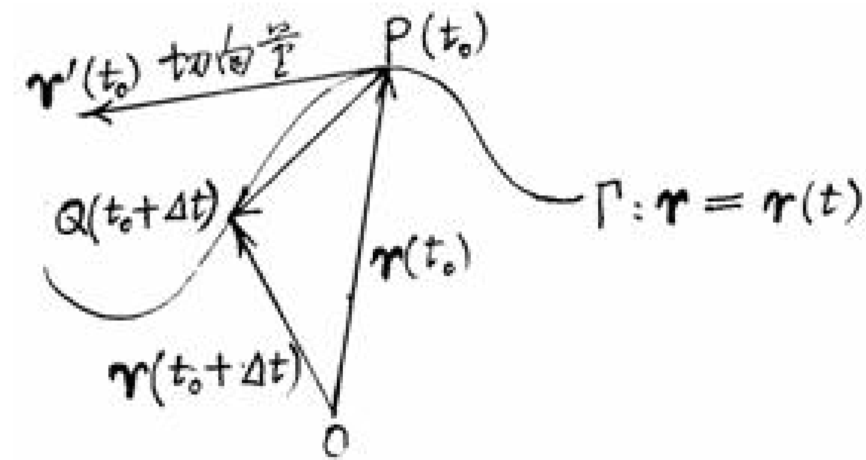
四、空间曲线在一点邻近的结构

五、空间曲线论的基本定理

六、一般螺线

一、空间曲线的密切平面(局部最贴近曲线的平面)

设曲线$\Gamma \in C^2$: $\vec{r}=\vec{r}(t)$,



切点P的向径为$\vec{r}(t_0)$.

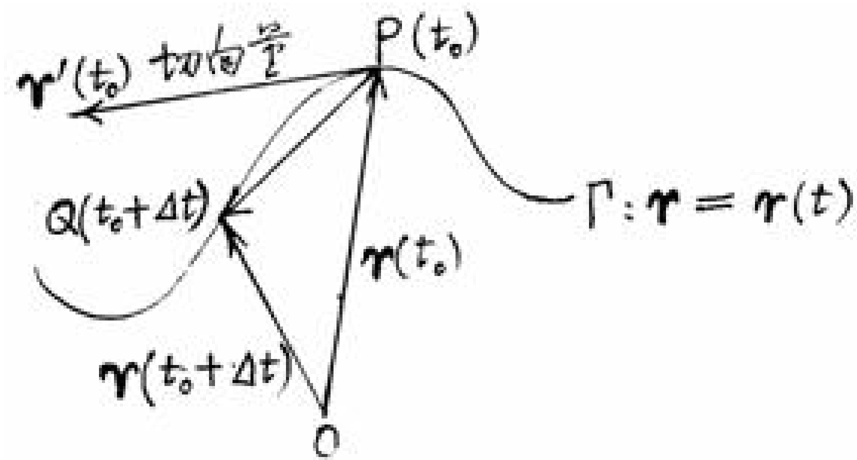
曲线上点P附近的一点Q, 设其向径为$\vec{r}(t_0+\Delta t)$.

$$\overrightarrow{PQ}=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)=\vec{r}'(t_0)\Delta t+\tfrac{1}{2}[\vec{r}''(t_0)+o(\vec{1})](\Delta t)^2$$

$$\Rightarrow \vec{r}''(t_0)+o(\vec{1})=\frac{2[\overrightarrow{PQ}-\vec{r}'(t_0)\Delta t]}{(\Delta t)^2}\subseteq \text{割平面}\,\sigma_Q$$

当$\Delta t\to 0$时, $Q\to P$, $\vec{r}''(t_0)+o(\vec{1})\to \vec{r}''(t_0)\subseteq$密切平面

密切平面的方程(向量形式)



当以 P 为起点时,

$\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0) \subseteq$ 密切平面.

假定 $\vec{r}'(t_0)$ 与 $\vec{r}''(t_0)$ 不平行 (注: 平行时称为逗留点).

设 $\vec{R}$ 是密切平面上的任意一点的向径,

则 $(\vec{R}-\vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)) = 0.$

它就是曲线在 P 点的密切平面的方程.

密切平面的方程(一般方程)

设 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\quad \vec{R}=(X,Y,Z)$

代入密切平面方程 $(\vec{R}-\vec{r}(t_0),\vec{r}'(t_0),\vec{r}''(t_0))=0$得到

$$\begin{vmatrix} X-x(t_0) & Y-y(t_0) & Z-z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}=0.$$

将上式展开化简就得到密切平面的一般方程.

注：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

命题 一条 C^2 类曲线为平面曲线的充要条件是其所有点处的密切平面都为同一个平面.

证 ($\Rightarrow$) 设 C^2 类平面曲线 $\vec{r}=\vec{r}(t)$ 所在平面为 π,

点 $P\in\pi$, 记 π 的法向量为 $\vec{n}$.

则 $\forall t$ 有 $\vec{n}\perp[\vec{r}(t)-\overrightarrow{OP}]$, 即 $\vec{n}\cdot\vec{r}(t)-\vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}=0$.

两边分别求一阶, 二阶导数得 $\vec{n}\cdot\vec{r}'(t)=0, \vec{n}\cdot\vec{r}''(t)=0$.

即 $\vec{n}\perp\vec{r}'(t), \vec{n}\perp\vec{r}''(t)$. 设 $\vec{r}(t)$ 处的密切平面为 σ_t, 则 $\vec{n}\perp\sigma_t$.

又因为 $\vec{n}\perp\pi$ 且 σ_t 经过 π 上的点($\vec{r}(t)$ 的终点), 所以 $\sigma_t=\pi$.

($\Leftarrow$) 设 C^2 类曲线 $\vec{r}=\vec{r}(t)$ 所有点处的密切平面为同一个平面 π,

则 $\forall t, \vec{r}(t)$ 的终点都在该点处的密切平面 π 上, 故为平面曲线.

例1 求圆柱螺线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt \ (a \neq 0)$ 在任意点处的密切平面方程.

解 记 $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$.

则 $\vec{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$, $\vec{r}''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$.

记 $\vec{R} = (X, Y, Z)$ 为点 t 处密切平面上任意一点的向径,

则 $(\vec{R} - \vec{r}(t), \vec{r}'(t), \vec{r}''(t)) = 0$,

即
$$\begin{vmatrix} X - a\cos t & Y - a\sin t & Z - bt \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

展开整理得到所求密切平面为 $X\sin t - Y\cos t + \frac{a}{b}Z - at = 0$.

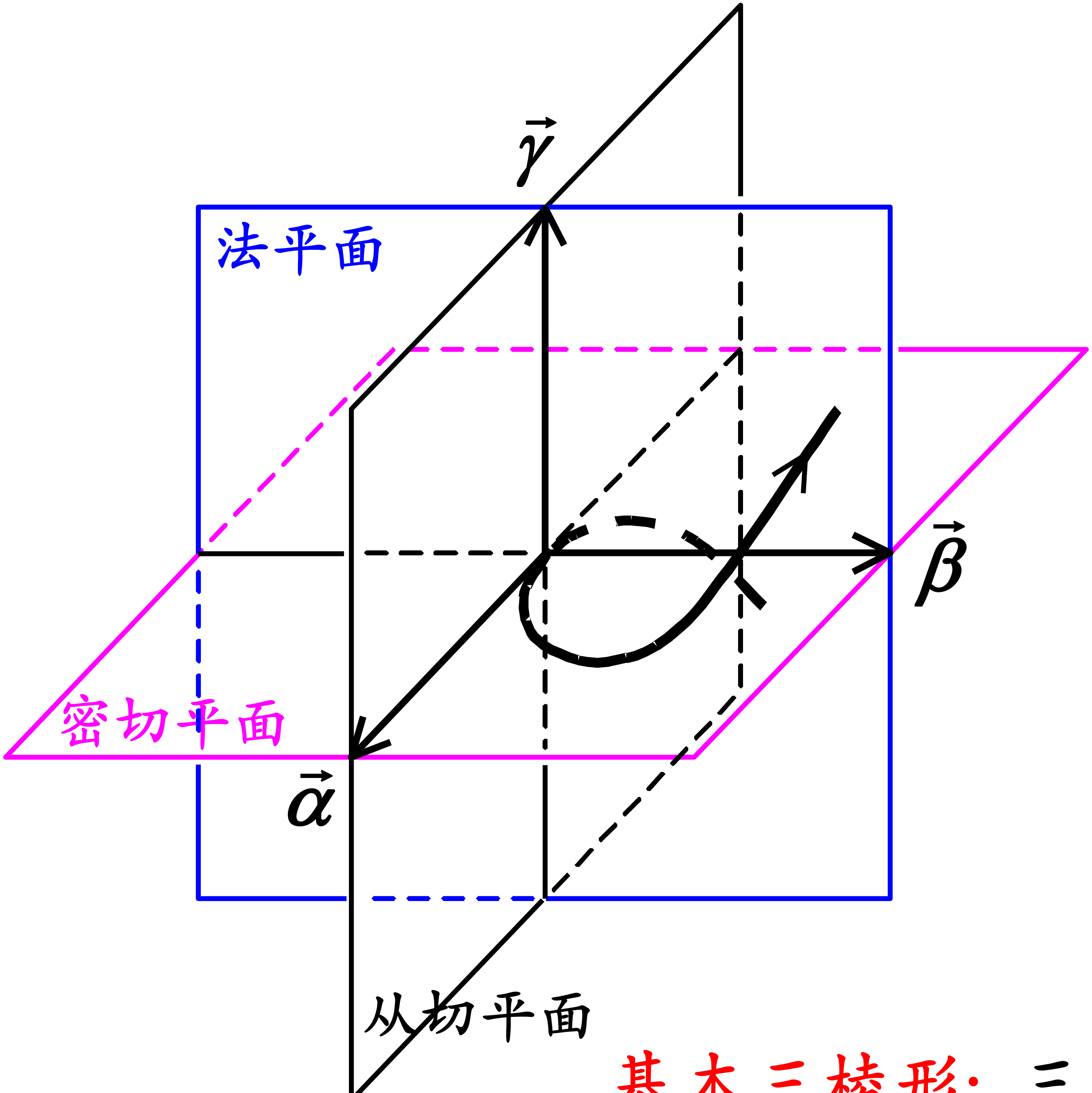
请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

1.8 证明球面曲线的法平面通过球的中心.

1.9 证明如果曲线的所有切线都经过一个定点, 则此曲线是直线.

1.10 证明如果曲线的所有密切平面都经过一个定点, 则此曲线是平面曲线.

二、空间曲线的基本三棱形



三个基本向量

单位切向量$\vec{\alpha}=\dot{\vec{r}}$

$$\left(\ |\vec{\alpha}|\equiv 1 \Rightarrow \dot{\vec{\alpha}}\perp\vec{\alpha}\ \right)$$

主法向量$\vec{\beta}=\dfrac{\dot{\vec{\alpha}}}{|\dot{\vec{\alpha}}|}=\dfrac{\ddot{\vec{r}}}{|\ddot{\vec{r}}|}$

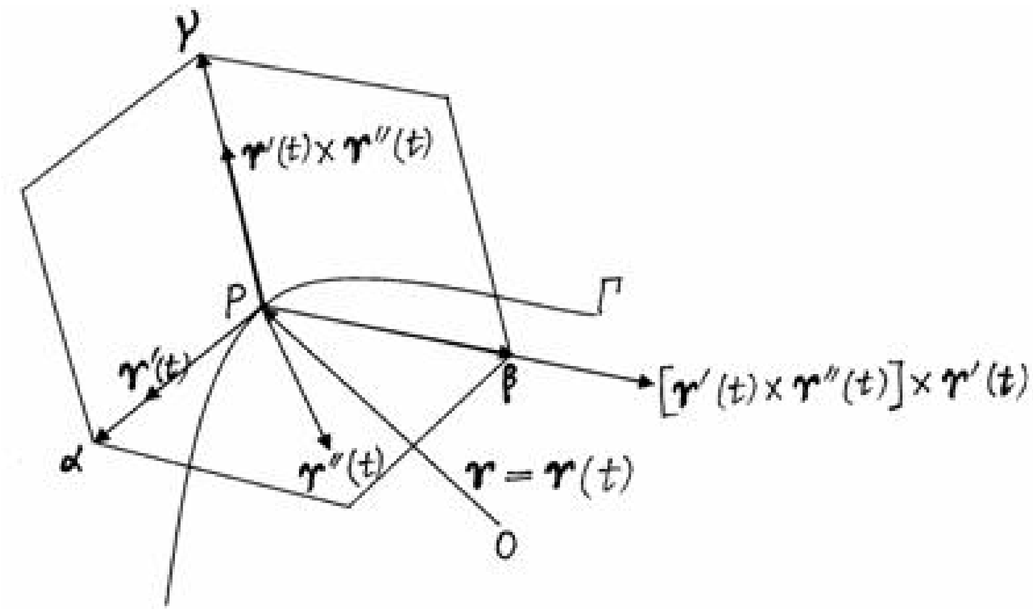
副法向量$\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$

Frenet标架$\begin{cases}\vec{\alpha}\\ \vec{\beta}\\ \vec{\gamma}\end{cases}$

基本三棱形：三个基本向量+坐标面

基本向量的一般参数表示

单位切向量$\vec{\alpha}=\dfrac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}$



副法向量$\vec{\gamma}=\dfrac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|}$

主法向量$\vec{\beta}=\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}=\dfrac{[\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)]\times\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|\left|\vec{r}'(t)\right|}$

特别注意：一般而言 $\vec{r}'(t)$与$\vec{r}''(t)$不垂直

思考

$\vec{r}'(t)$与$\vec{\alpha}$有何异同?

$\vec{r}''(t)$与$\vec{\beta}$有何异同?

三个向量$\vec{r}'(t)$, $\vec{r}''(t)$, $\vec{\beta}$之间有什么联系?

$\ddot{\vec{r}}(s)$与$\vec{\beta}$有何异同?

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

1.11 求曲线 $x = t\sin t,\ y = t\cos t,\ z = te^t$ 在原点的密切平面,法平面,从切平面,切线,主法线和副法线方程.

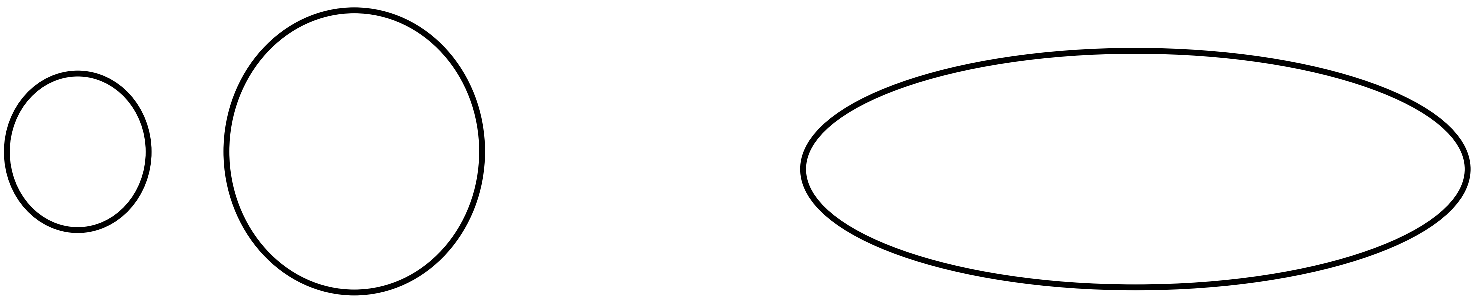
1.12 证明圆柱螺线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt\,(a > 0)$ 的主法线和z轴垂直相交.

1.13 在曲线 $x = \cos\alpha\cos t, y = \cos\alpha\sin t, z = t\sin\alpha$ (α 为锐角)的副法线的正向取单位长,求其端点组成的新曲线的密切平面.

1.14 证明过原点平行于圆柱螺线 $\vec{r} = (a\cos t, a\sin t, bt)$ $(a > 0)$ 的副法线的直线轨迹是锥面 $a^2(x^2 + y^2) = b^2z^2$.

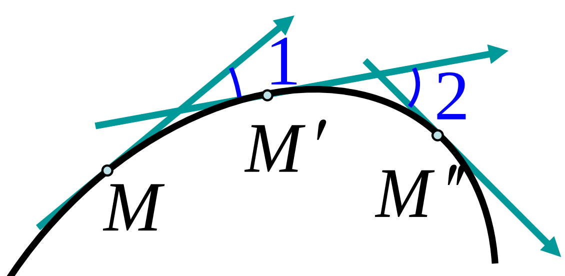
三、空间曲线的曲率、挠率和Frenet公式

1. 曲率(描述曲线的弯曲程度)

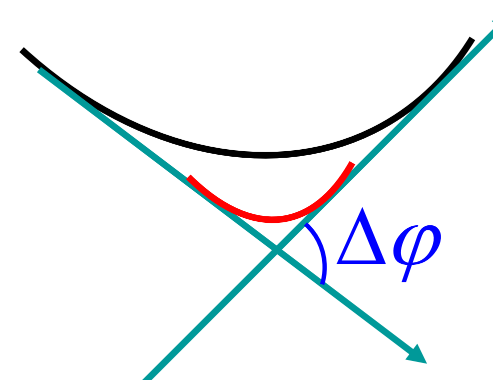


不同的曲线或者同一条曲线的不同点处，

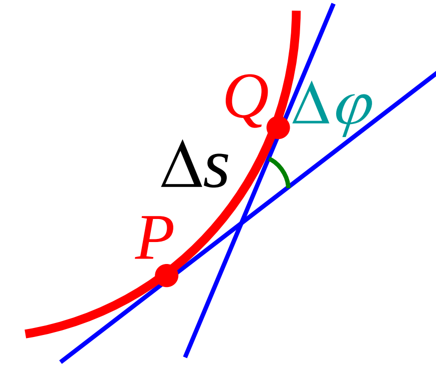
曲线的弯曲程度可能不同.



- 与切线的转角有关
- 与曲线的弧长有关



曲线的弯曲程度与曲线的切线转过的角度$\Delta\varphi$及曲线段的长度Δs有关.

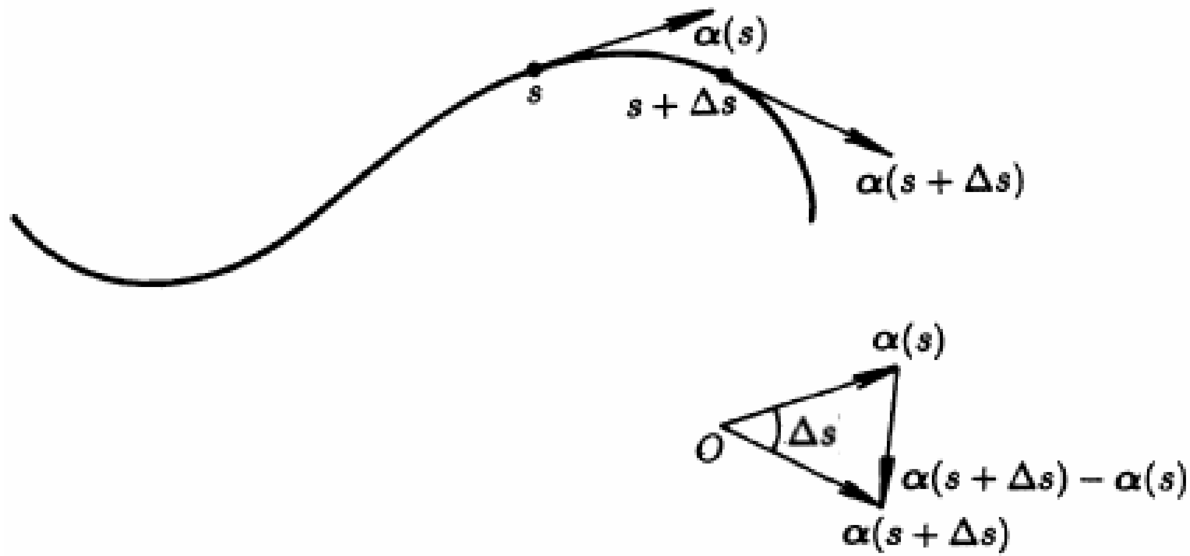


用比值$\left|\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$来表达曲线段$\overset{\frown}{PQ}$的平均弯曲程度.

称$\left|\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$为曲线段的平均曲率.

让点Q沿着曲线趋近于点P,得到平均曲率的极限$k(s)=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$,称之为曲线在点$P$处的曲率.

即:切向量函数关于自然参数的旋转速度.



设曲线$\Gamma \in C^3$的自然参数表示为$\vec{r} = \vec{r}(s)$,

则它在点s处的单位切向量为$\vec{\alpha}(s) = \dot{\vec{r}}(s)$.

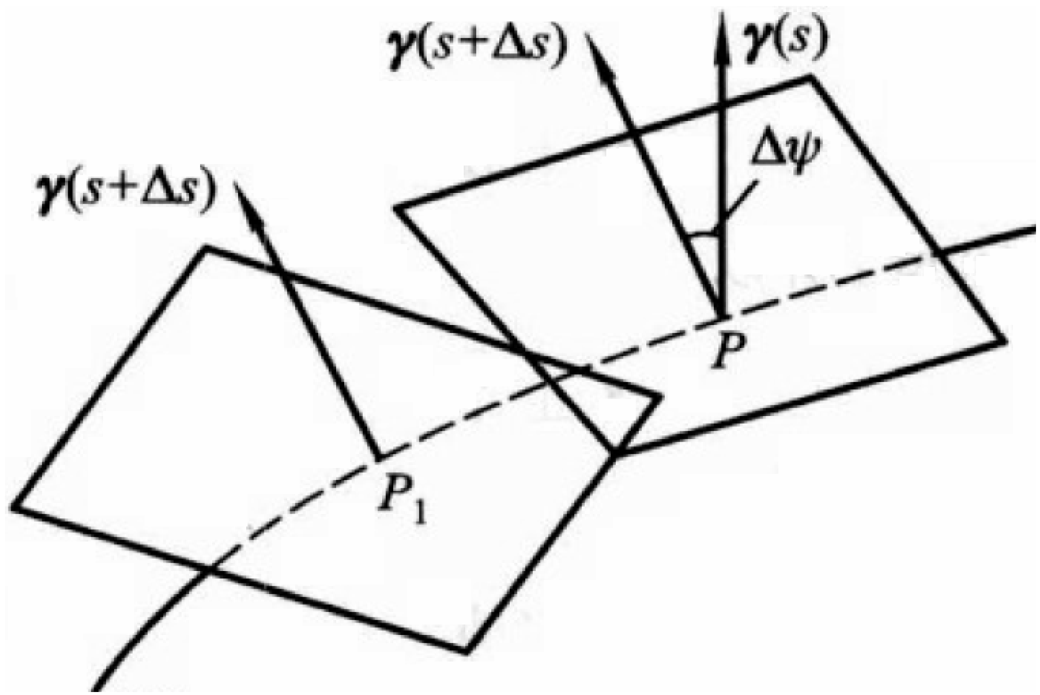
回忆P8命题7

(单位向量函数关于参数的旋转速度为其微商的模)

因此曲线Γ在点s处的曲率为$k(s) = \left|\dot{\vec{\alpha}}(s)\right| = \left|\ddot{\vec{r}}(s)\right|$.

2. 挠率(描述空间曲线的扭转程度)

平面曲线完全位于它的密切平面上, 无扭转;



如果一条曲线上不含任何平面曲线段,

则它的密切平面会随着切点的变化而变化(扭动).

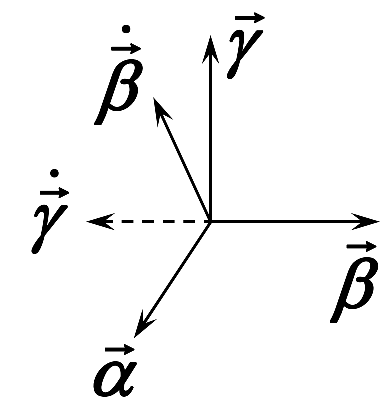
挠率: 密切平面的法向关于自然参数的有向旋转速度.

曲线Γ：$\vec{r}=\vec{r}(s)$在点 s 处的副法向量为$\vec{\gamma}(s)=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$.

回忆P8命题7

(单位向量函数关于参数的旋转速度为其微商的模)

$$\dot{\vec{\gamma}}=(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})^{\cdot}=\dot{\vec{\alpha}}\times\vec{\beta}+\vec{\alpha}\times\dot{\vec{\beta}}=\vec{\alpha}\times\dot{\vec{\beta}}.$$



由 $\vec{\beta}\perp\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}\perp\dot{\vec{\beta}}$ 知 $\vec{\beta}\,/\!/\,\vec{\alpha}\times\dot{\vec{\beta}}$.

因此 $\dot{\vec{\gamma}}\,/\!/\,\vec{\beta}$.

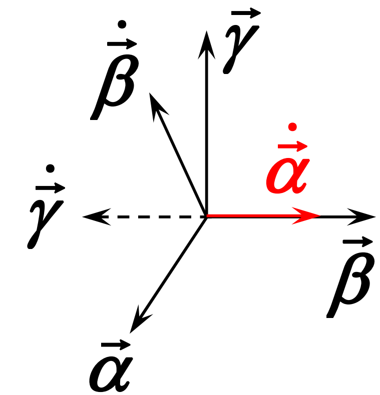
定义**Γ在点 s 处的挠率**为 $\tau(s)=\begin{cases}\left|\dot{\vec{\gamma}}\right| & \text{当}\dot{\vec{\gamma}}\text{与}\vec{\beta}\text{异向时}\\ -\left|\dot{\vec{\gamma}}\right| & \text{当}\dot{\vec{\gamma}}\text{与}\vec{\beta}\text{同向时}\end{cases}$

可见 $\boxed{\dot{\vec{\gamma}}(s)=-\tau(s)\vec{\beta}(s)}$, $\boxed{\tau(s)=-\dot{\vec{\gamma}}(s)\vec{\beta}(s)}$.

3. Frenet公式 (空间曲线论的基本公式)

问题：如何用基本向量表示基本向量的微商?

$$\begin{cases} \dot{\vec{\alpha}}(s) = k(s)\vec{\beta}(s) \\ \dot{\vec{\beta}}(s) = -k(s)\vec{\alpha}(s) + \tau(s)\vec{\gamma}(s), \\ \dot{\vec{\gamma}}(s) = -\tau(s)\vec{\beta}(s) \end{cases}$$



也可写为 $$\begin{bmatrix} \dot{\vec{\alpha}}(s) \\ \dot{\vec{\beta}}(s) \\ \dot{\vec{\gamma}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\alpha}(s) \\ \vec{\beta}(s) \\ \vec{\gamma}(s) \end{bmatrix}.$$

Frenet公式的证明

$$\begin{cases}\dot{\vec{\alpha}}(s)=k(s)\vec{\beta}(s)\\ \dot{\vec{\beta}}(s)=-k(s)\vec{\alpha}(s)+\tau(s)\vec{\gamma}(s)\\ \dot{\vec{\gamma}}(s)=-\tau(s)\vec{\beta}(s)\end{cases}$$

由τ的定义知第三式成立,

下证前2个式子:

$$\dot{\vec{\alpha}}(s)=\left|\dot{\vec{\alpha}}(s)\right|\frac{\dot{\vec{\alpha}}(s)}{\left|\dot{\vec{\alpha}}(s)\right|}=k(s)\vec{\beta}(s).$$

$$\because\ \vec{\beta}(s)=\vec{\gamma}(s)\times\vec{\alpha}(s)$$

$$\therefore\ \dot{\vec{\beta}}(s)=\dot{\vec{\gamma}}(s)\times\vec{\alpha}(s)+\vec{\gamma}(s)\times\dot{\vec{\alpha}}(s)$$

$$=[-\tau(s)\vec{\beta}(s)]\times\vec{\alpha}(s)+\vec{\gamma}(s)\times[k(s)\vec{\beta}(s)]$$

$$=-\tau(s)[-\vec{\gamma}(s)]+k(s)[-\vec{\alpha}(s)]$$

$$=-k(s)\vec{\alpha}(s)+\tau(s)\gamma(s).$$

4. 曲率和挠率的一般参数表示

设有C^3类空间曲线$\Gamma:\vec{r}=\vec{r}(t)$, 则

$$k(t)=\frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3},$$

$$\tau(t)=\frac{(\vec{r}'(t),\vec{r}''(t),\vec{r}'''(t))}{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|^2}.$$

公式 $k(t)=\dfrac{\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|^3}$ 的证明

$$k=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\left(\vec{r}'/\left|\vec{r}'\right|\right)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\frac{\vec{r}''\left|\vec{r}'\right|-\vec{r}'\left(\sqrt{\vec{r}'\cdot\vec{r}'}\right)'}{\left|\vec{r}'\right|^2}\cdot\frac{1}{\left|\vec{r}'\right|}\right|$$

$$=\left|\frac{\vec{r}''\left|\vec{r}'\right|-\vec{r}'\left[\left(\vec{r}''\cdot\vec{r}'+\vec{r}'\cdot\vec{r}''\right)/\left(2\left|\vec{r}'\right|\right)\right]}{\left|\vec{r}'\right|^3}\right|$$

$$=\left|\frac{(\vec{r}'\cdot\vec{r}')\vec{r}''-(\vec{r}'\cdot\vec{r}'')\vec{r}'}{\left|\vec{r}'\right|^4}\right|=\left|\frac{(\vec{r}'\times\vec{r}'')\times\vec{r}'}{\left|\vec{r}'\right|^4}\right|$$

$$=\frac{\left|\vec{r}'\times\vec{r}''\right|\left|\vec{r}'\right|\cdot\sin\frac{\pi}{2}}{\left|\vec{r}'\right|^4}=\frac{\left|\vec{r}'\times\vec{r}''\right|}{\left|\vec{r}'\right|^3}.$$

公式 $\tau(t)=\dfrac{(\vec{r}'(t),\vec{r}''(t),\vec{r}'''(t))}{\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|^2}$ 的证明

$\tau=-\dot{\vec{\gamma}}\cdot\vec{\beta}$, 其中

$$\dot{\vec{\gamma}}=\frac{\mathrm{d}\dfrac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\dfrac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$$

$$=\frac{(\vec{r}'\times\vec{r}'')'\left|\vec{r}'\times\vec{r}''\right|-(\vec{r}'\times\vec{r}'')[\sqrt{(\vec{r}'\times\vec{r}'')\cdot(\vec{r}'\times\vec{r}'')}]'}{\left|\vec{r}'\times\vec{r}''\right|^2}\cdot\frac{1}{\left|\vec{r}'\right|}$$

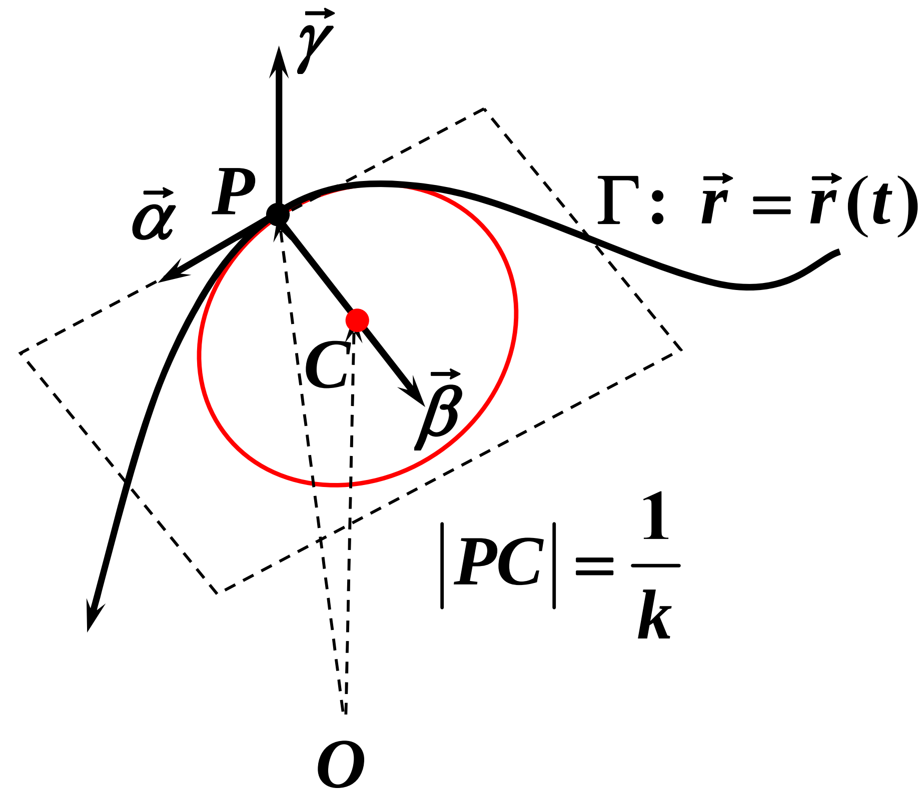
$$= \frac{(\vec{r}' \times \vec{r}''')\left|\vec{r}' \times \vec{r}''\right| - (\vec{r}' \times \vec{r}'')\dfrac{2(\vec{r}' \times \vec{r}'') \cdot (\vec{r}' \times \vec{r}''')}{2\left|\vec{r}' \times \vec{r}''\right|}}{\left|\vec{r}' \times \vec{r}''\right|^2 \left|\vec{r}'\right|}$$

$$= \frac{\left|\vec{r}' \times \vec{r}''\right|^2 (\vec{r}' \times \vec{r}''') - [(\vec{r}' \times \vec{r}'') \cdot (\vec{r}' \times \vec{r}''')](\vec{r}' \times \vec{r}'')}{\left|\vec{r}' \times \vec{r}''\right|^3 \left|\vec{r}'\right|},$$

$$\vec{\beta} = \frac{(\vec{r}' \times \vec{r}'') \times \vec{r}'}{\left|\vec{r}' \times \vec{r}''\right|\left|\vec{r}'\right|} = \frac{(\vec{r}' \cdot \vec{r}')\vec{r}'' - (\vec{r}' \cdot \vec{r}'')\vec{r}'}{\left|\vec{r}' \times \vec{r}''\right|\left|\vec{r}'\right|}.$$

$$故\ \tau = -\frac{\left|\vec{r}' \times \vec{r}''\right|^2 (\vec{r}' \times \vec{r}''') \cdot (\left|\vec{r}'\right|^2 \vec{r}'')}{\left|\vec{r}' \times \vec{r}''\right|^4 \left|\vec{r}'\right|^2} = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{\left|\vec{r}' \times \vec{r}''\right|^2}.$$

5. 密切圆(曲率圆)和曲率半径



曲率半径: $\dfrac{1}{k(t)}$

曲率中心: $\vec{r}(t)+\dfrac{1}{k(t)}\vec{\beta}(t)$

密切圆的特点:

密切圆在切点处与曲线具有相同的密切平面和曲率.

例2 求曲线$\vec{r}(t)=(\cosh t,\sinh t,t)$的曲率和挠率.

解 $\vec{r}'=(\sinh t,\cosh t,1),\quad \vec{r}''=(\cosh t,\sinh t,0).$

$\vec{r}'\times\vec{r}''=(-\sinh t,\cosh t,-1).$

$|\vec{r}'|=\sqrt{2}\cosh t,\quad |\vec{r}'\times\vec{r}''|=\sqrt{2}\cosh t.$

$$k=\frac{|\vec{r}'\times\vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}=\frac{1}{2\cosh^2 t}.$$

$\vec{r}'''=(\sinh t,\cosh t,0),\quad (\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')=1.$

$$\tau=\frac{(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')}{|\vec{r}'\times\vec{r}''|^2}=\frac{1}{2\cosh^2 t}.$$

例3 证明曲率恒等于零的曲线是直线.

证 设曲线 $\vec{r}=\vec{r}(s)$ 的曲率恒为零, 其中 s 是弧长参数.

则 $\forall s,\ 0=k(s)=\left|\dot{\vec{\alpha}}(s)\right|=\left|\ddot{\vec{r}}(s)\right|$.

则 $\ddot{\vec{r}}(s)=\vec{0}$.

两边积分得 $\dot{\vec{r}}(s)=\vec{a}$ 为常向量.

两边再积分得 $\vec{r}(s)=\vec{a}\,s+\vec{b}$, 其中 $\vec{b}$ 为常向量.

此方程为直线方程, 故该曲线一定为直线.

例4 证明挠率恒等于零的曲线是平面曲线.

证 设曲线$\vec{r}=\vec{r}(s)$的挠率恒为零, 其中s是弧长参数.

则$\forall s, 0=|\tau(s)|=|\dot{\vec{\gamma}}(s)|$. 即$\dot{\vec{\gamma}}(s)=\vec{0}$.

两边积分得$\vec{\gamma}(s)=\vec{n}$, 其中$\vec{n}$为常向量.

因为$\dot{\vec{r}}(s)\perp\vec{\gamma}(s)$, 所以$\dot{\vec{r}}(s)\cdot\vec{n}=0$.

两边积分得$\vec{r}(s)\cdot\vec{n}=D$, 其中D为常数.

$\therefore$曲线在平面$Ax+By+Cz=D$上, 其中$(A,B,C)=\vec{n}$.

(注：称挠率不恒等于零的曲线为挠曲线)

显然挠曲线一定不是平面曲线.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

1.15 求曲线$\vec{r}(t)=(a(3t-t^3),3at^2,a(3t+t^3))\ (a>0)$的曲率和挠率.

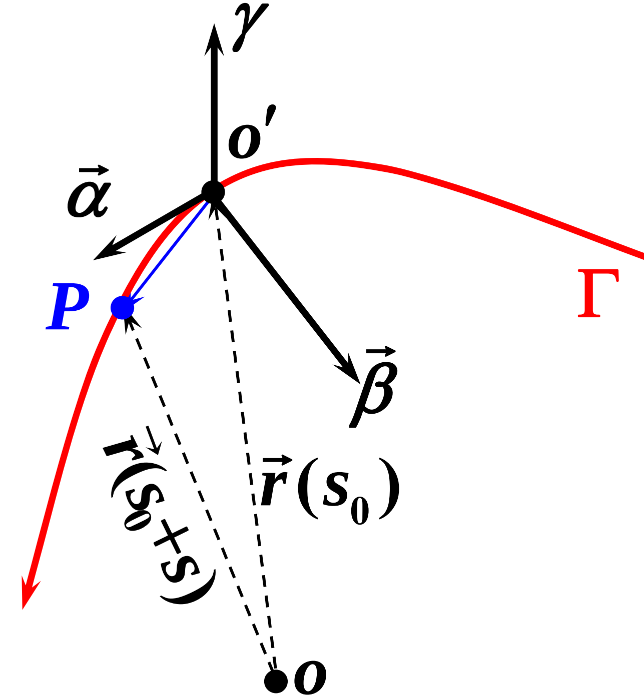
1.16 证明曲率为常数的空间曲线的曲率中心的轨迹仍是曲率等于常数的曲线.

四、空间曲线在一点邻近的结构

在切点s_0附近, C^3类曲线$\vec{r}=\vec{r}(s_0+s)$在局部坐标系

$[\vec{r}(s_0);\vec{\alpha}(s_0),\vec{\beta}(s_0),\vec{\gamma}(s_0)]$中的方程为

$$\begin{cases}\xi = s-\frac{1}{6}k^2(s_0)s^3+o(s^3)\\ \eta=\frac{1}{2}k(s_0)s^2+\frac{1}{6}k'(s_0)s^3+o(s^3),\\ \zeta=\frac{1}{6}k(s_0)\tau(s_0)s^3+o(s^3)\end{cases}$$



其中$o(s^3)$为$s\to 0$时s^3的高阶无穷小.

该公式称为Bouquet公式或曲线在邻域内的局部规范式.

证 (考虑向量$\vec{r}(s_0+s)-\vec{r}(s_0)$的新坐标)

将$\vec{r}(s_0+s)-\vec{r}(s_0)$写成$\vec{\alpha}(s_0),\vec{\beta}(s_0),\vec{\gamma}(s_0)$的线性组合.

由Taylor公式,

$$\vec{r}(s_0+s)-\vec{r}(s_0)=\dot{\vec{r}}(s_0)s+\tfrac{1}{2!}\ddot{\vec{r}}(s_0)s^2+\tfrac{1}{3!}[\dddot{\vec{r}}(s_0)+o(\vec{1})]s^3$$

其中$\dot{\vec{r}}(s_0)=\vec{\alpha}(s_0)$, $\ddot{\vec{r}}(s_0)=k(s_0)\vec{\beta}(s_0)$,

$$\dddot{\vec{r}}(s_0)=\dot{k}(s_0)\vec{\beta}(s_0)+k(s_0)\dot{\vec{\beta}}(s_0)$$

$$=\dot{k}(s_0)\vec{\beta}(s_0)+k(s_0)[-k(s_0)\vec{\alpha}(s_0)+\tau(s_0)\vec{\gamma}(s_0)]$$

$$=-k^2(s_0)\vec{\alpha}(s_0)+\dot{k}(s_0)\vec{\beta}(s_0)+k(s_0)\tau(s_0)\vec{\gamma}(s_0)$$

以下记上述$o(\vec{1})=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, 并省掉$(s_0)$, 则

$$\vec{r}(s_0+s)-\vec{r}=$$

$$[s+\tfrac{1}{6}(\varepsilon_1-k^2)s^3]\vec{\alpha}+[\tfrac{1}{2}ks^2+\tfrac{1}{6}(\dot{k}+\varepsilon_2)s^3]\vec{\beta}+\tfrac{1}{6}(k\tau+\varepsilon_3)s^3\vec{\gamma}$$

以$[\vec{r}(s_0);\vec{\alpha}(s_0),\vec{\beta}(s_0),\vec{\gamma}(s_0)]$为新坐标系,则有

$$\begin{cases}\xi=s-\frac{1}{6}k^2(s_0)s^3+o(s^3)\\ \eta=\frac{1}{2}k(s_0)s^2+\frac{1}{6}k'(s_0)s^3+o(s^3)\\ \zeta=\frac{1}{6}k(s_0)\tau(s_0)s^3+o(s^3)\end{cases}\xrightarrow{\text{近似}}\begin{cases}x=s\\ y=\frac{1}{2}k(s_0)s^2\\ z=\frac{1}{6}k(s_0)\tau(s_0)s^3\end{cases}$$

只保留各分量中的最低阶无穷小,则得到一近似曲线.

该近似曲线能刻画曲线在这一点邻近的近似形状,

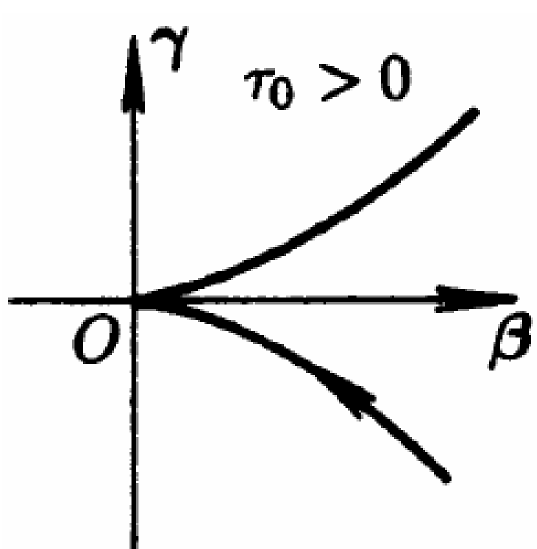
它为多项式曲线,且完全由该点的曲率和挠率决定.

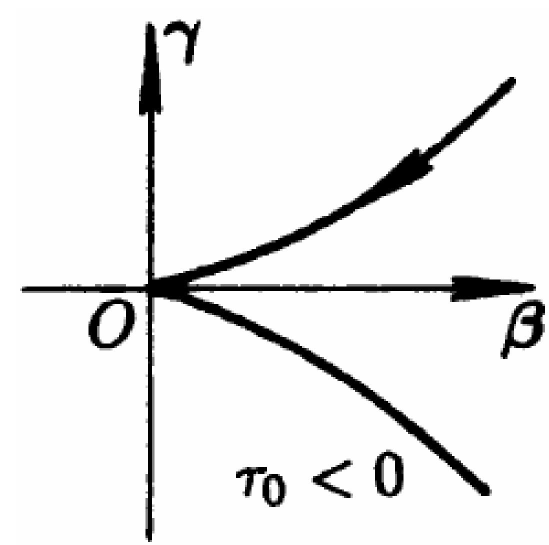
该近似曲线在法平面 $x=0$ 上的投影为

$$(x=0),\ \ y=\tfrac{1}{2}k(s_0)s^2,\ \ z=\tfrac{1}{6}k(s_0)\tau(s_0)s^3$$

从中消去参数 s 得到 $(x=0), z^2=\dfrac{2\tau^2(s_0)}{9k(s_0)}y^3$

它是半立方抛物线.



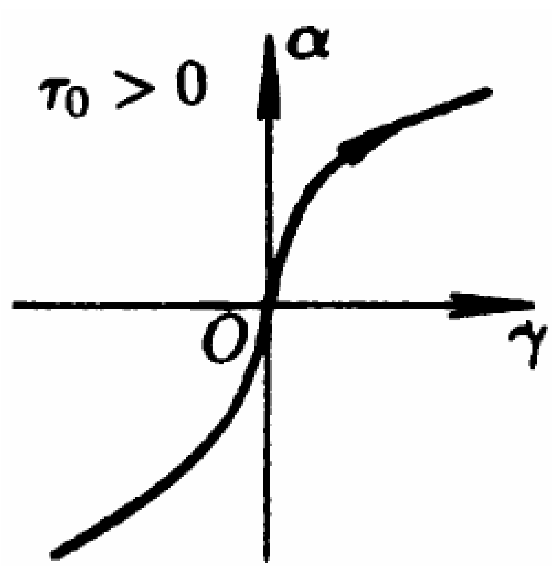


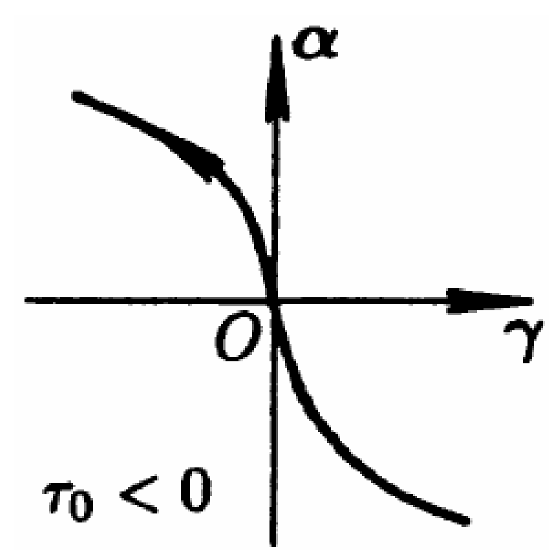
该近似曲线在从切平面 $y=0$ 上的投影为

$$(y=0),\ \ x=s,\ \ z=\tfrac{1}{6}k(s_0)\tau(s_0)s^3$$

从中消去参数 s 得到 $(y=0), z=\tfrac{1}{6}k(s_0)\tau(s_0)x^3$

它是立方抛物线.



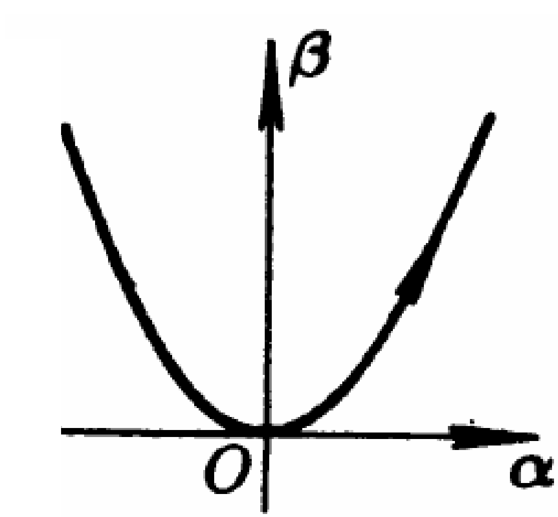


该近似曲线在密切平面 $z=0$ 上的投影为

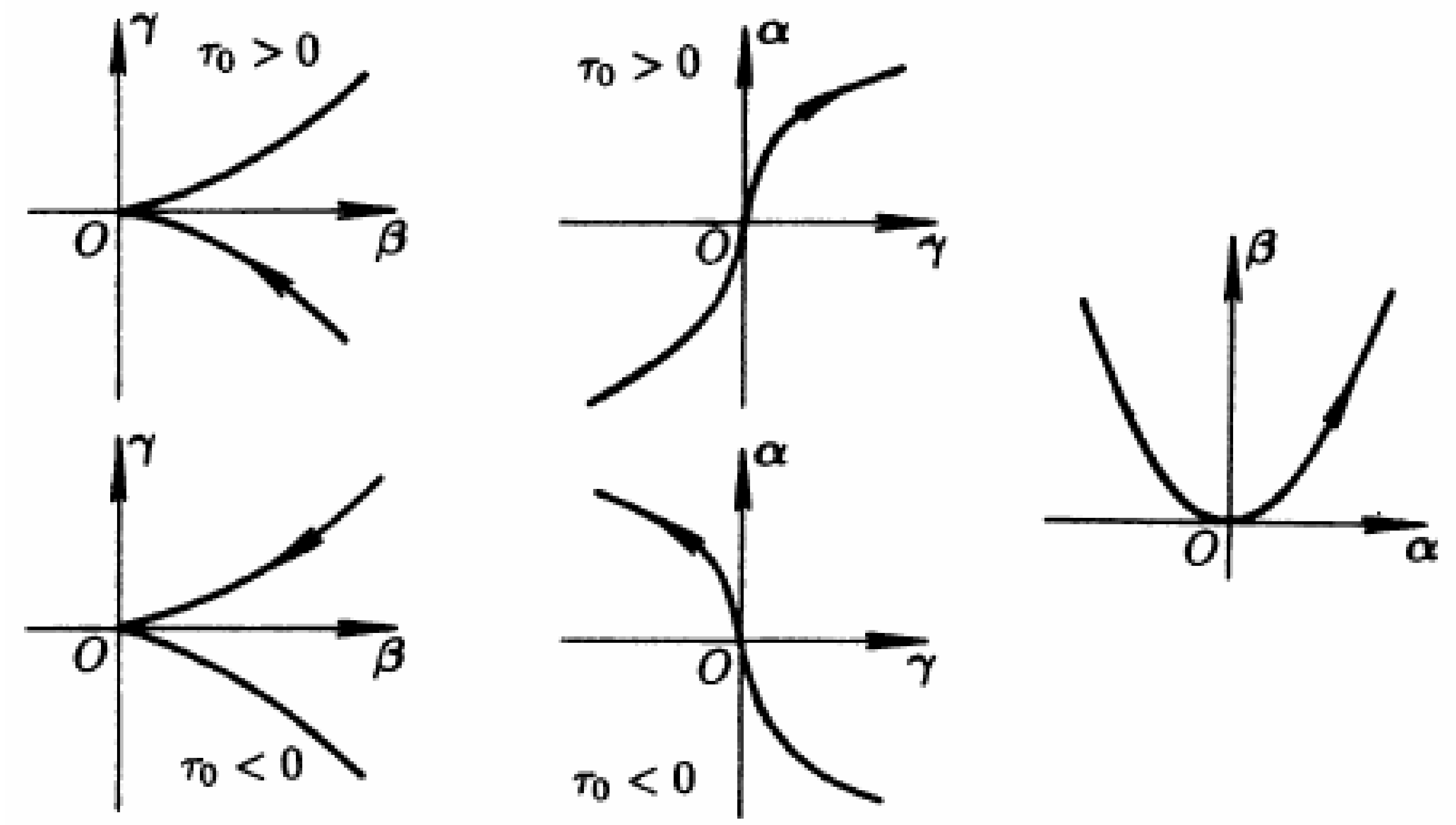
$$(z=0),\ \ x=s,\ \ y=\tfrac{1}{2}k(s_0)s^2$$

从中消去参数 s 得到 $(z=0),\ y=\tfrac{1}{2}k(s_0)x^2$

它是抛物线.



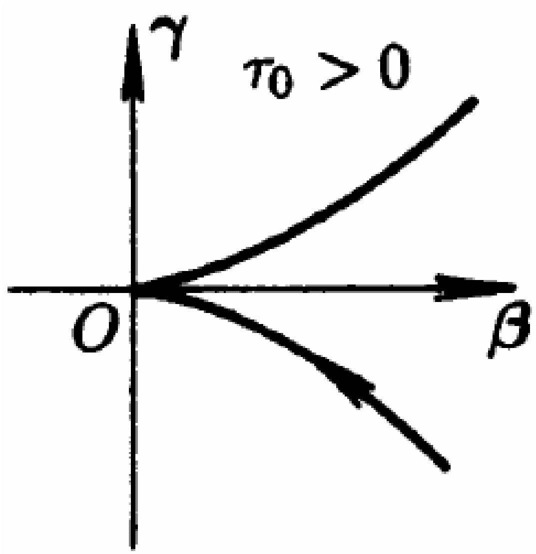
局部曲线图形特点

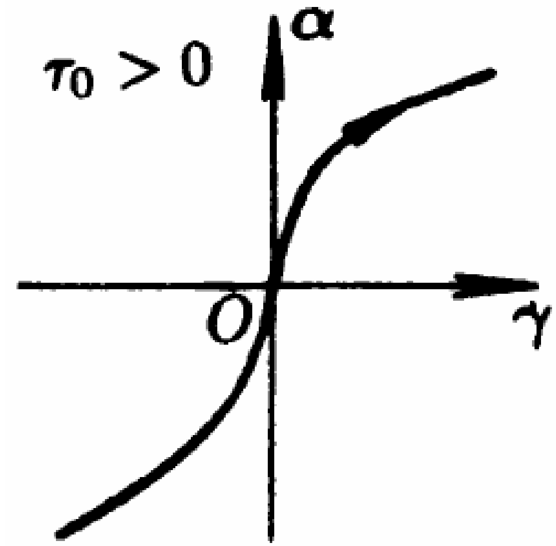


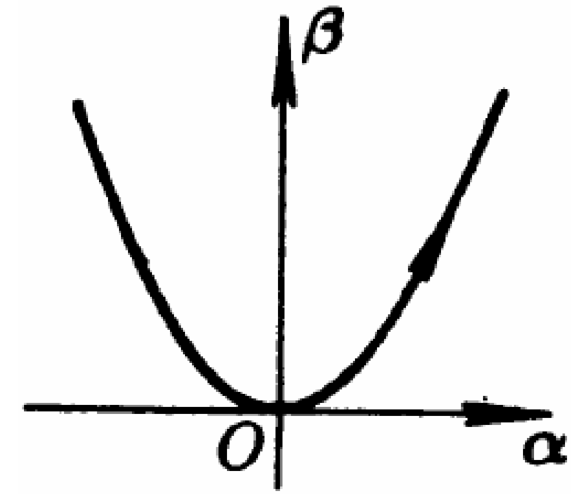
1. 曲线穿过法平面和密切平面，但不穿过从切平面；

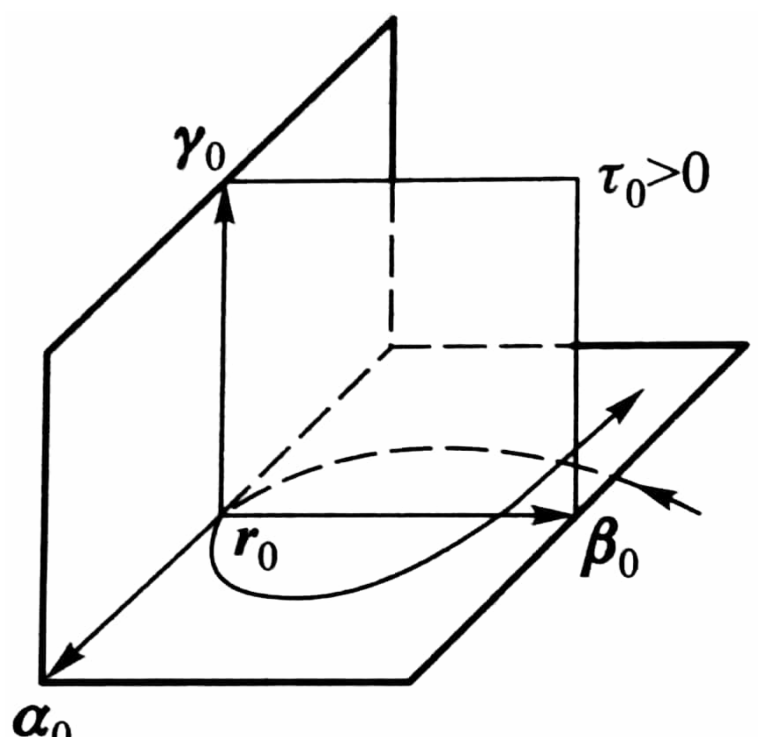
2. 主法向量总是指向曲线开口的方向；

3. 挠率的符号对曲线的影响:





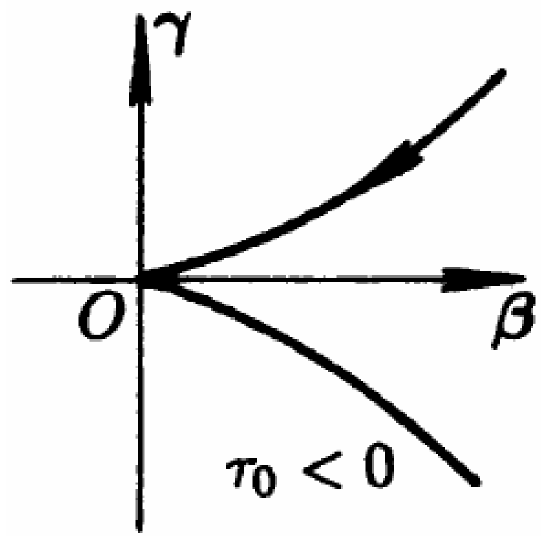


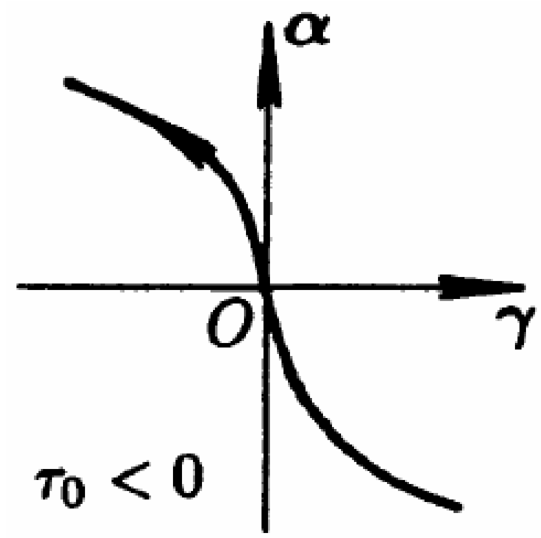


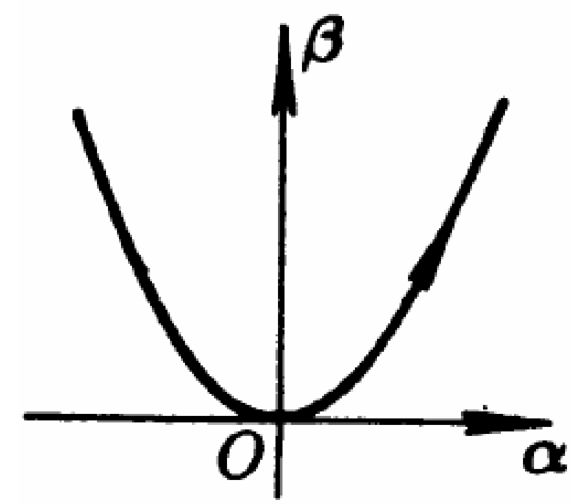
$\tau(s_0)>0$时,

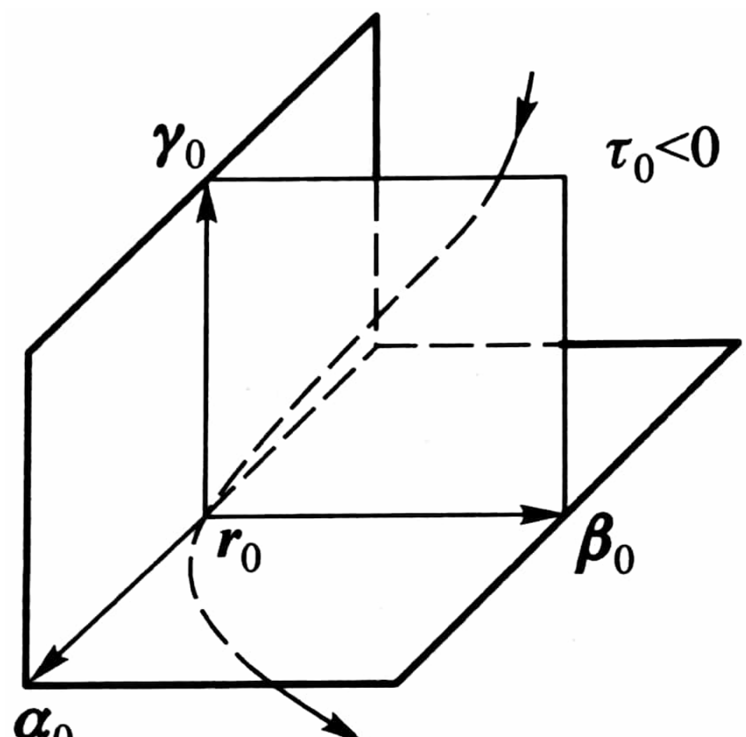
曲线从第六卦限经过

$\vec{r}(s_0)$进入第一卦限;









$\tau(s_0) < 0$时,

曲线从第二卦限经过

$\vec{r}(s_0)$进入第五卦限.

五、空间曲线论的基本定理

设有闭区间$[s_0, s_1]$上的两个连续函数$k(s)>0$和$\tau(s)$, 则除了空间的位置差别外, 唯一的存在一条空间曲线, 使得参数s是该曲线的自然参数, 并且$k(s)$和$\tau(s)$分别是该曲线在s点处的曲率和挠率.

由基本定理知: $\begin{cases} k = k(s) \\ \tau = \tau(s) \end{cases}$完全确定了曲线的形状, 并且与曲线在空间中所处的位置和方向无关.

称$\begin{cases} k = k(s) \\ \tau = \tau(s) \end{cases}$为空间曲线的自然方程.

证明思路

Step1. 增加条件使曲线的位置和方向固定;

Step2. 由 $k(s), \tau(s)$ 和增加的条件确定三个向量函数(后面会证明它们为曲线的三个基本向量);

Step3. 由增加的条件和第一个向量函数解出曲线的方程 $\vec{r}(s)$;

Step4. 证明 s 是该曲线的自然参数;

Step5. 证明该曲线的曲率是 $k(s)$, 挠率是 $\tau(s)$.

证 (增加条件使曲线的位置和方向固定)

任取空间中的一点P_0作为空间曲线$\vec{r}=\vec{r}(s)$在

$s=s_0$时的对应点, 记$\vec{r}_0=\overrightarrow{OP_0}$.

设$\vec{\alpha}_0,\vec{\beta}_0,\vec{\gamma}_0$为两两垂直且服从右手法则的单位向量.

(由$k(s),\tau(s)$和增加的条件确定三个向量函数)

设有三个光滑的向量函数$\vec{\alpha}(s),\vec{\beta}(s),\vec{\gamma}(s)$满足

$$\begin{cases}\vec{\alpha}'(s)=k(s)\vec{\beta}(s)\\ \vec{\beta}'(s)=-k(s)\vec{\alpha}(s)+\tau(s)\vec{\gamma}(s)\\ \vec{\gamma}'(s)=-\tau(s)\vec{\beta}(s)\end{cases}\qquad(1)$$

和初值条件: $\vec{\alpha}(s_0)=\vec{\alpha}_0,\vec{\beta}(s_0)=\vec{\beta}_0,\vec{\gamma}(s_0)=\vec{\gamma}_0$.

由微分方程的理论知,该初值问题存在唯一一组解

$$\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(s),\ \vec{\beta}=\vec{\beta}(s),\ \vec{\gamma}=\vec{\gamma}(s).$$

(由增加的条件和第一个向量函数解出曲线方程$\vec{r}(s)$)

令$\begin{cases}\vec{r}'(s)=\vec{\alpha}(s)\\ \vec{r}(s_0)=\vec{r}_0\end{cases}$, 则可积分得到$\vec{r}(s)=\vec{r}_0+\int_{s_0}^{s}\vec{\alpha}(s)\mathrm{d}s.$

(证明s是该曲线的自然参数)

先证$\vec{\alpha}(s),\vec{\beta}(s),\vec{\gamma}(s)$是两两垂直且服从右手法则的的单位向量.

记
$$\left.\begin{aligned}&\vec{\alpha}^*(s)=\vec{\beta}(s)\times\vec{\gamma}(s),\ \vec{\beta}^*(s)=\vec{\gamma}(s)\times\vec{\alpha}(s),\\ &\vec{\gamma}^*(s)=\vec{\alpha}(s)\times\vec{\beta}(s).\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

则 $\vec{\alpha}^{*\prime}(s)=\vec{\beta}'(s)\times\vec{\gamma}(s)+\vec{\beta}(s)\times\vec{\gamma}'(s)$

$$=[-k(s)\vec{\alpha}(s)+\tau(s)\vec{\gamma}(s)]\times\vec{\gamma}(s)+\vec{\beta}(s)\times[-\tau(s)\vec{\beta}(s)]$$

$$=-k(s)\vec{\alpha}(s)\times\vec{\gamma}(s)=k(s)\vec{\beta}^{*}(s),$$

$$\vec{\beta}^{*\prime}(s)=\vec{\gamma}'(s)\times\vec{\alpha}(s)+\vec{\gamma}(s)\times\vec{\alpha}'(s)$$

$$=[-\tau(s)\vec{\beta}(s)]\times\vec{\alpha}(s)+\vec{\gamma}(s)\times[k(s)\vec{\beta}(s)]$$

$$=-\tau(s)(-\vec{\gamma}^{*}(s))-k(s)\vec{\alpha}^{*}(s)=-k(s)\vec{\alpha}^{*}(s)+\tau(s)\vec{\gamma}^{*}(s),$$

$$\vec{\gamma}^{*\prime}(s)=\vec{\alpha}'(s)\times\vec{\beta}(s)+\vec{\alpha}(s)\times\vec{\beta}'(s)$$

$$=[k(s)\vec{\beta}(s)]\times\vec{\beta}(s)+\vec{\alpha}(s)\times[-k\vec{\alpha}(s)+\tau(s)\vec{\gamma}(s)]$$

$$=\tau(s)\vec{\alpha}(s)\times\vec{\gamma}(s)=-\tau(s)\vec{\beta}^{*}(s).$$

由此可见$\vec{\alpha}^*(s),\vec{\beta}^*(s),\vec{\gamma}^*(s)$满足方程组(1),

且满足$\vec{\alpha}^*(s_0)=\vec{\beta}_0\times\vec{\gamma}_0=\vec{\alpha}_0,\vec{\beta}^*(s_0)=\vec{\beta}_0,\vec{\gamma}^*(s_0)=\vec{\gamma}_0$.

所以$\vec{\alpha}^*(s),\vec{\beta}^*(s),\vec{\gamma}^*(s)$也是上述初值问题的解,

这个初值问题的解是唯一的,故

$$\vec{\alpha}^*(s)=\vec{\alpha}(s),\ \vec{\beta}^*(s)=\vec{\beta}(s),\ \vec{\gamma}^*(s)=\vec{\gamma}(s).$$

代入(2)得$\vec{\alpha}(s)=\vec{\beta}(s)\times\vec{\gamma}(s),\vec{\beta}(s)=\vec{\gamma}(s)\times\vec{\alpha}(s)$,

$$\vec{\gamma}(s)=\vec{\alpha}(s)\times\vec{\beta}(s).$$

于是$\vec{\alpha}(s),\vec{\beta}(s),\vec{\gamma}(s)$要么全为零向量,要么是两两垂直且服从右手法则的单位向量.

而当$s=s_0$时，它们都是单位向量，故由连续性知它们只能是两两垂直且服从右手法则的单位向量.

由$\left|\vec{r}'(s)\right|=\left|\vec{\alpha}(s)\right|=1$知$s$是弧长参数.

(证明该曲线的曲率是$k(s)$，挠率是$\tau(s)$)

由$\dot{\vec{r}}(s)=\vec{\alpha}(s)$知$\vec{\alpha}(s)$是曲线$\vec{r}=\vec{r}(s)$的单位切向量. (3)

由$\left|\dot{\vec{\alpha}}(s)\right|=\left|k(s)\vec{\beta}(s)\right|=k(s)$知$k(s)$是该曲线的曲率. (4)

由(3)和(4)及(1)的第一式知$\vec{\beta}(s)$是该曲线的主法向量.(5)

而$\vec{\gamma}(s)=\vec{\alpha}(s)\times\vec{\beta}(s)$，故$\vec{\gamma}(s)$是该曲线的副法向量. (6)

由(5)和(6)及(1)的第三式知$\tau(s)$是该曲线的挠率.

六、一般螺线

曲率函数和挠率函数完全确定了曲线的形状和大小.

当曲率函数和挠率函数之间满足特定关系时,

就会得到特定类型的曲线.

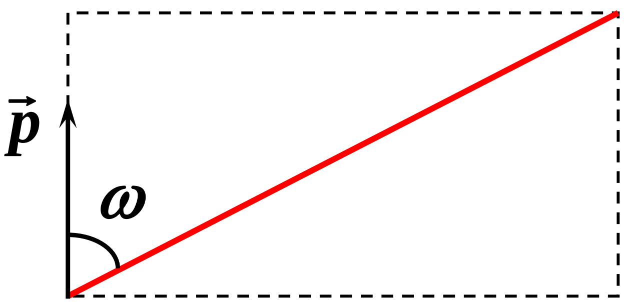
例如当$k(s)\equiv 0$时得到直线(见P28例4),

当$\tau(s)\equiv 0$时得到平面曲线(见P28例5),

当$k(s)$和$\tau(s)$都是常数时得到圆柱螺线.

特别地,当$\dfrac{k(s)}{\tau(s)}$为常数时得到一般螺线.

一般螺线的定义



将左图卷在圆柱面上得到圆柱螺线;

将其卷在一般柱面上得到一般螺线.

称切线始终和某固定方向成固定角的曲线为螺线.

等价定义1 主法向量始终和某个固定方向垂直的曲线.

等价定义2 副法向量始终和某固定方向成固定角的曲线.

等价定义3 使得 $\dfrac{k(s)}{\tau(s)}$ 为常数的曲线.

等价定义1 主法向量始终和某个固定方向垂直的曲线.

证 ($\Rightarrow$)

设曲线的单位切向量$\vec{\alpha}(s)$与某个固定的单位向量$\vec{\mathbf{p}}$

成固定角ω, 则$\forall s, \vec{\alpha}(s)\cdot\vec{\mathbf{p}} = \cos\omega$.

两边求导得$\dot{\vec{\alpha}}(s)\cdot\vec{\mathbf{p}} = 0$. 即$\forall s$, 主法向量$\vec{\beta}(s)\perp\vec{\mathbf{p}}$.

($\Leftarrow$)

设$\forall s$, 主法向量$\vec{\beta}(s)\perp\vec{\mathbf{p}}$, 其中$\vec{\mathbf{p}}$为某个固定的单位向量,

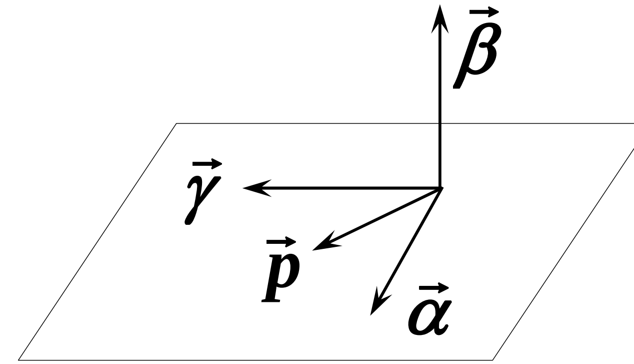
则$\dot{\vec{\alpha}}(s)\cdot\vec{\mathbf{p}} = 0$. 两边积分得$\vec{\alpha}(s)\cdot\vec{\mathbf{p}} = c$为常数.

因此$\forall s, \vec{\alpha}(s)$与固定方向$\vec{\mathbf{p}}$成固定角$\arccos c$.

等价定义2 副法向量始终和某固定方向成固定角的曲线.

证 **($\Rightarrow$)** 由等价定义1, $\exists$单位向量$\vec{p}$使得$\forall s$, $\vec{\beta}(s)\perp\vec{p}$.

又$\because\ \vec{\beta}(s)\perp\vec{\alpha}(s)$, $\vec{\beta}(s)\perp\vec{\gamma}(s)$,



$\therefore$ 三个向量$\vec{\alpha}(s)$, $\vec{\gamma}(s)$, $\vec{p}$共面.

$$\left.\begin{array}{r}\vec{\alpha}(s)\text{与}\vec{p}\text{成固定角}\\ \vec{\alpha}(s)\perp\vec{\gamma}(s)\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{\gamma}(s)\text{与}\vec{p}\text{成固定角.}$$

($\Leftarrow$) 设$\exists$单位向量$\vec{p}$使得$\forall s$, $\vec{\gamma}(s)$与$\vec{p}$成固定角θ.

则$\vec{\gamma}(s)\cdot\vec{p}=\cos\theta$. 两边求导得$\dot{\vec{\gamma}}(s)\cdot\vec{p}=0$. 即$\dot{\vec{\gamma}}(s)\perp\vec{p}$.

由挠率的定义知$\dot{\vec{\gamma}}(s)\,/\!/\,\vec{\beta}(s)$. 因此$\vec{\beta}(s)\perp\vec{p}$.

结合等价定义1知该曲线为一般螺线.

等价定义3 使得$\dfrac{k(s)}{\tau(s)}$为常数的曲线.

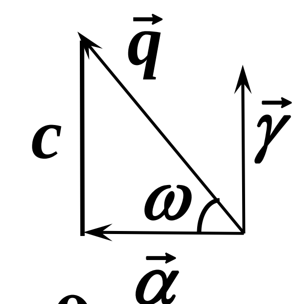
证 ($\Rightarrow$) 设$\forall s, \vec{\alpha}(s)$与某固定的单位向量$\vec{p}$成固定角$\omega$,

由$\vec{\beta}(s)\cdot\vec{p}=0$得$\dot{\vec{\beta}}(s)\cdot\vec{p}=0 \Rightarrow [\tau(s)\vec{\gamma}(s)-k(s)\vec{\alpha}(s)]\cdot\vec{p}=0.$

将$\vec{\gamma}(s)\cdot\vec{p}=\pm\sin\omega$和$\vec{\alpha}(s)\cdot\vec{p}=\cos\omega,$

代入解得$\dfrac{k(s)}{\tau(s)}=\dfrac{\vec{\gamma}(s)\cdot\vec{p}}{\vec{\alpha}(s)\cdot\vec{p}}=\pm\tan\omega$为常数.

($\Leftarrow$) 设$\dfrac{k(s)}{\tau(s)}=c,\ \vec{q}(s)=\vec{\alpha}(s)+c\vec{\gamma}(s).$

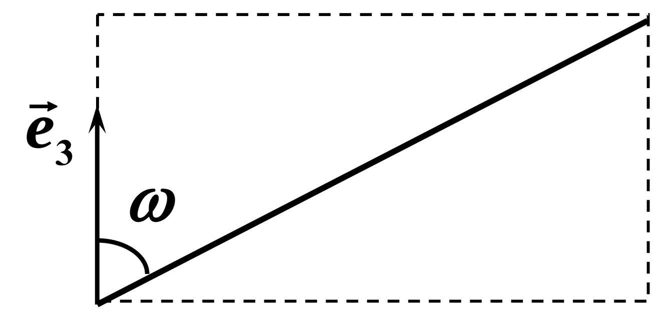


则$\dot{\vec{q}}(s)=\dot{\vec{\alpha}}(s)+c\dot{\vec{\gamma}}(s)=k(s)\vec{\beta}(s)+c[-\tau(s)\vec{\beta}(s)]=0.$

即$\vec{q}(s)$与s无关. 而$\vec{\alpha}(s)\cdot\vec{q}=\vec{\alpha}(s)\cdot\vec{\alpha}(s)+c\vec{\alpha}(s)\cdot\vec{\gamma}(s)=1$

为常数. 故$\vec{\alpha}(s)$与常向量$\vec{q}$夹固定角.

一般螺线的标准方程



设有螺线$\vec{r}(s)=(x(s),y(s),z(s))$,

螺线所在柱面的母线平行于

$\vec{e}_3=(0,0,1)$, 切线与$\vec{e}_3$夹固定角ω, s为自然参数.

由$|\vec{r}'(s)|=1$得$x'^2(s)+y'^2(s)+z'^2(s)=1$. (*)

由$\vec{r}'(s)\cdot\vec{e}_3=\cos\omega$得$z'(s)=\cos\omega \Rightarrow z(s)=s\cos\omega+c$.

为使方程简单, 取$c=0$, 则有$z(s)=s\cos\omega$.

代入(*)式得$x'^2(s)+y'^2(s)=\sin^2\omega$.

故螺线方程为$\vec{r}=(x(s),y(s),s\cos\omega)$,

其中$x(s),y(s)$满足$x'^2(s)+y'^2(s)=\sin^2\omega$.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

1.17 证明一条曲线$\vec{r}=\vec{r}(s)$(其中s为弧长参数)为一般螺线的充要条件是$(\ddot{\vec{r}},\dddot{\vec{r}},\ddddot{\vec{r}})=0$.

第二章 曲面论

§2.1 曲面的概念

§2.2 曲面的第一基本形式

§2.3 曲面的第二基本形式

§2.4 直纹面和可展曲面

§2.5 曲面论的基本定理

§2.6 曲面上的测地线

§2.7 常高斯曲率的曲面(不讲)

§2.1 曲面的概念

一、曲面的(向量)参数表示

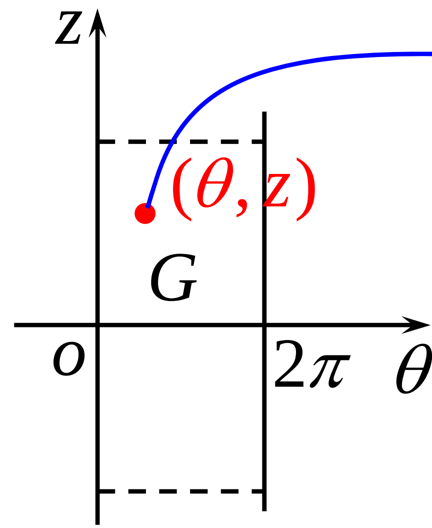
二、曲面的切平面和法线

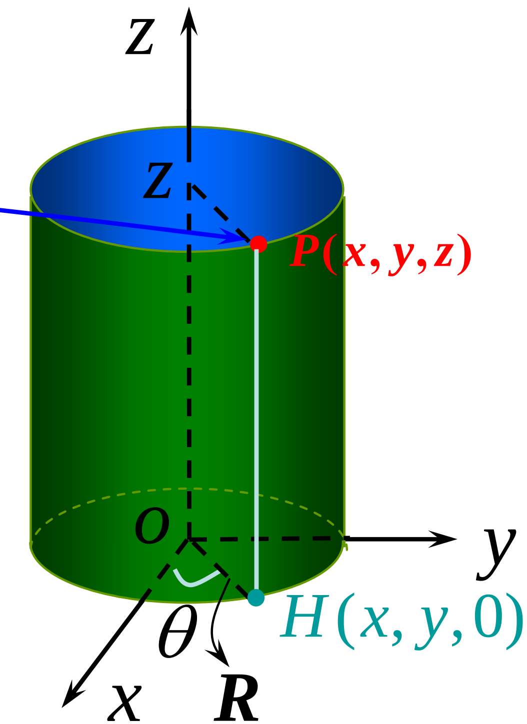
三、曲面上的曲线族和曲线网

一、曲面的(向量)参数表示

圆柱面的参数方程

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$





参数 $\theta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}$.

写成向量函数形式

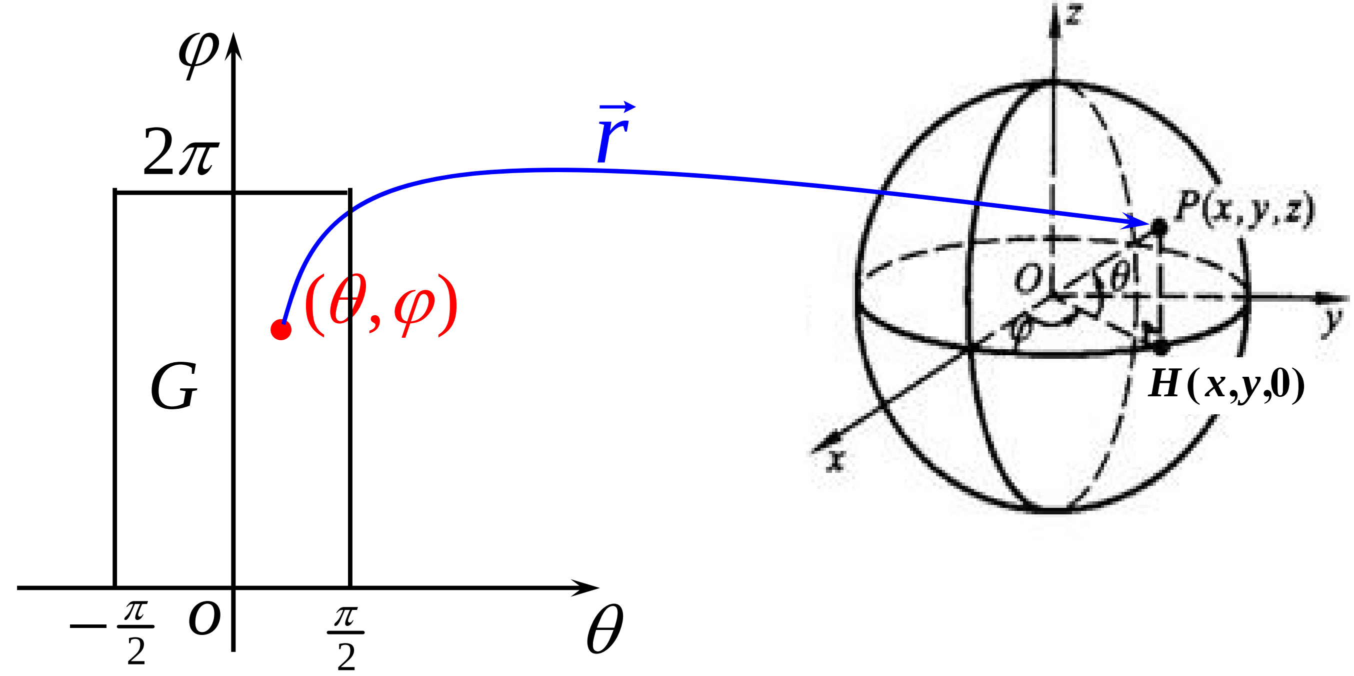
$$\vec{r}(\theta, z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$$

其中 $(\theta, z) \in G = \{(\theta, z) \mid 0 \le \theta < 2\pi\}$.

曲纹坐标: 在参数平面中的坐标.

球面的参数方程

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\cos\varphi \\ y = R\cos\theta\sin\varphi \\ z = R\sin\theta \end{cases}$$



参数$\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

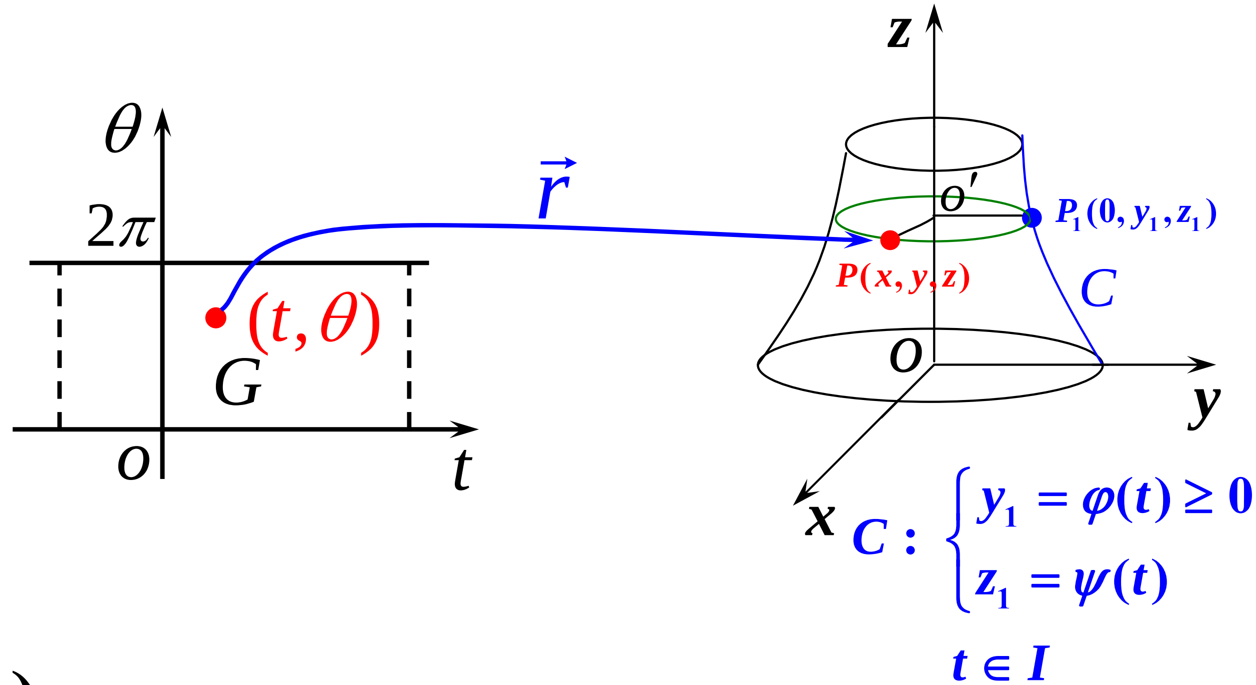
写成向量函数形式

$$\vec{r}(\theta,\varphi) = (R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta)$$

其中 $(\theta,\varphi) \in G = \{(\theta,\varphi) \mid \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, 2\pi)\}$.

旋转面的参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t)\cos\theta \\ y = \varphi(t)\sin\theta \\ z = \psi(t) \end{cases}$$



参数 $t \in I, \theta \in [0, 2\pi)$.

写成向量函数形式

$$\vec{r}(t,\theta) = (\varphi(t)\cos\theta, \varphi(t)\sin\theta, \psi(t))$$

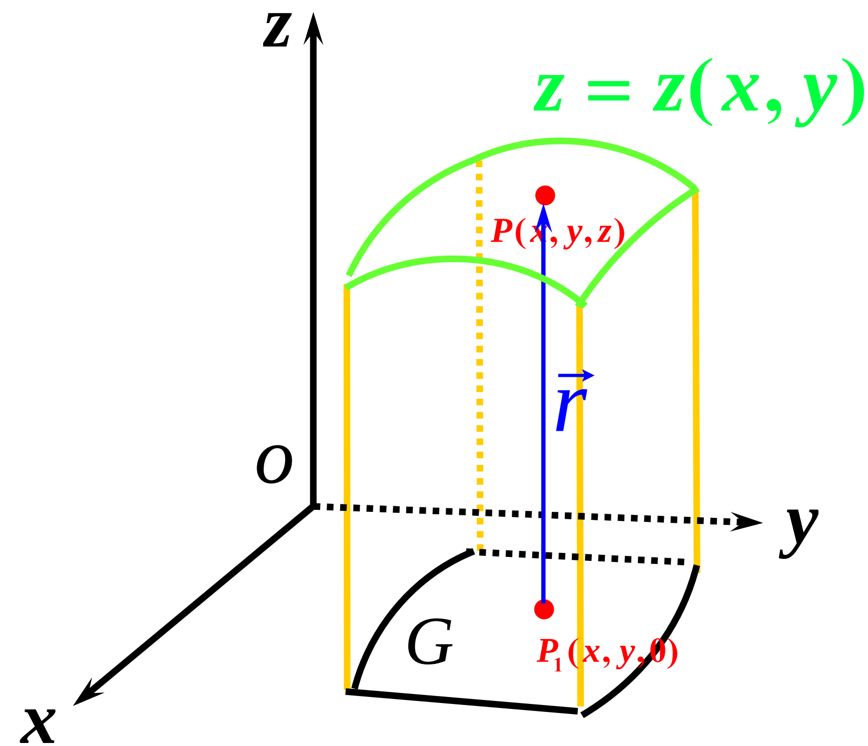
其中 $(t,\theta) \in G = \{(\theta,\varphi) \mid t \in I, \theta \in [0, 2\pi)\}$.

显式曲面

显式表示： $z = z(x, y)$

参数方程:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z(x, y) \end{cases}$$



其中参数 x, y 满足 $(x, y) \in G$.

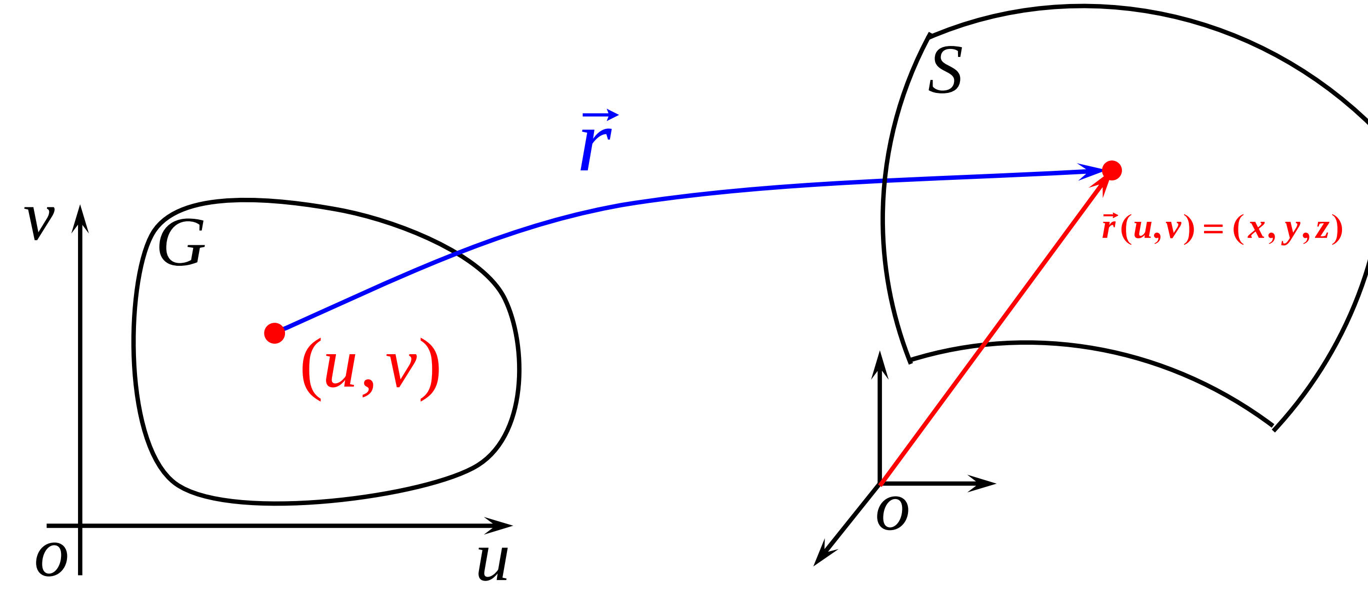
写成向量函数形式

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, z(x, y)),$$

其中 $(x, y) \in G$.

曲面的参数表示

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$



其中参数u,v满足$(u,v)\in G$.

写成向量函数形式

$\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$, 其中$(u,v)\in G$.

称u,v为曲面的参数或曲纹坐标.

注：曲面$\vec{r}(u,v)$上的点(u_0,v_0)是指曲纹坐标为(u_0,v_0)的点.

参数曲面的一些相关概念

曲面 $\vec{r}(u,v)$

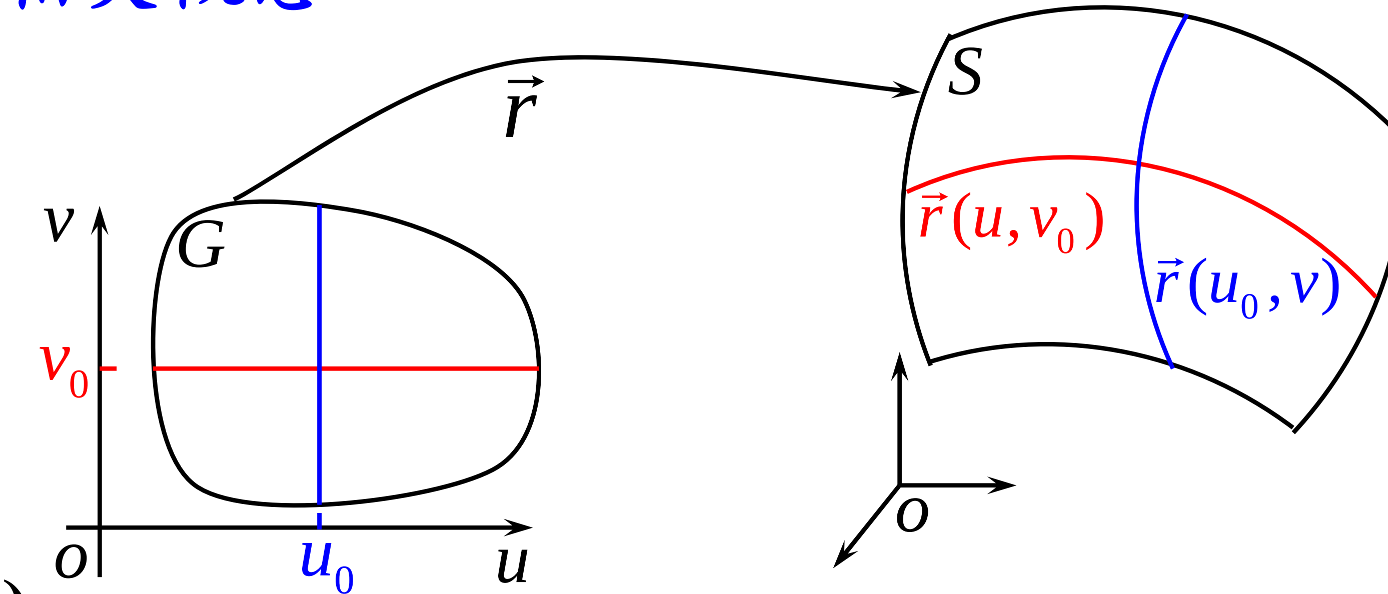
坐标曲线:

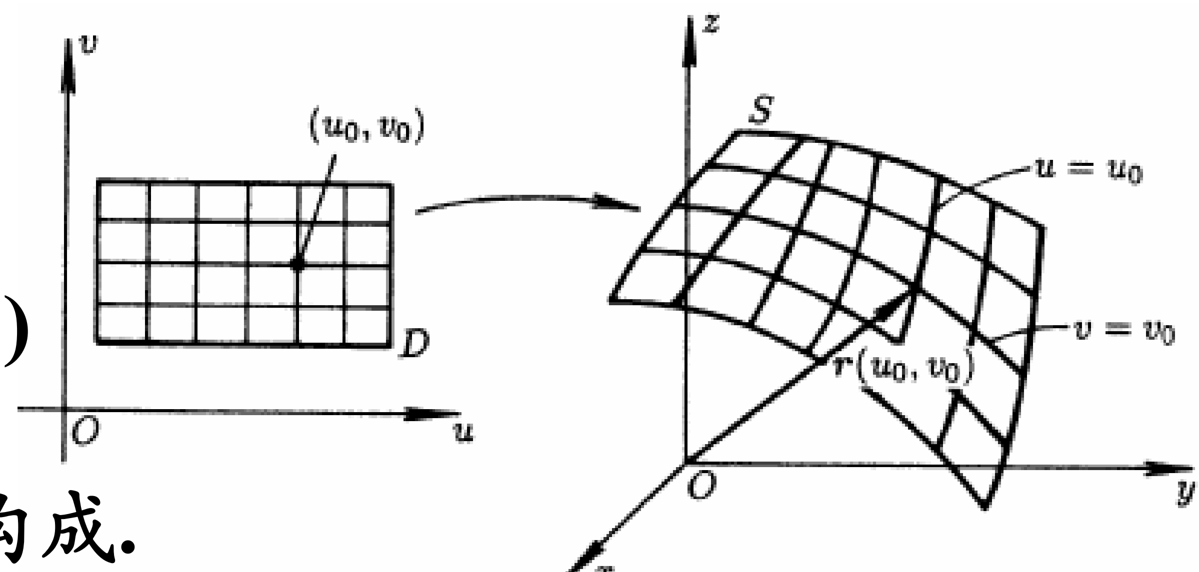
$\vec{r}(u,v_0)$ (u-曲线)

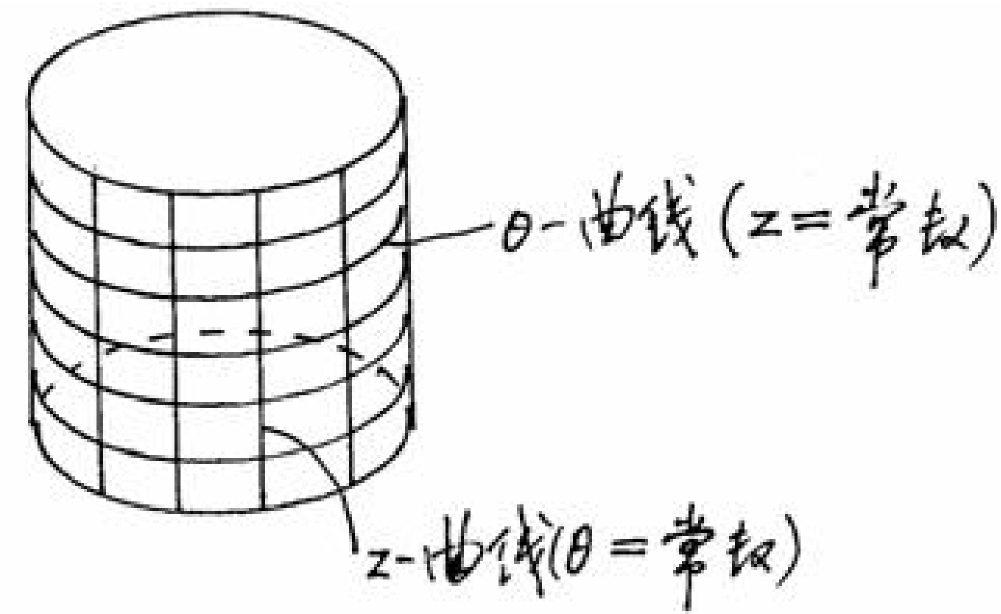
$\vec{r}(u_0,v)$ (v-曲线)

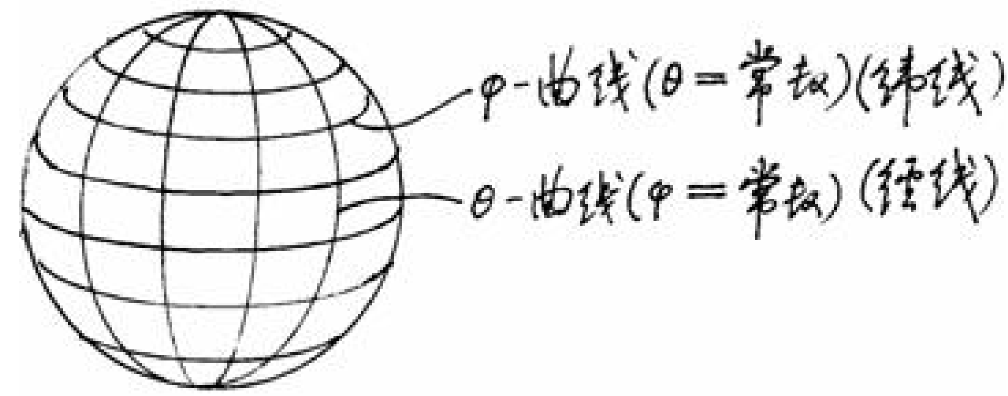
曲纹坐标网(坐标曲线网)

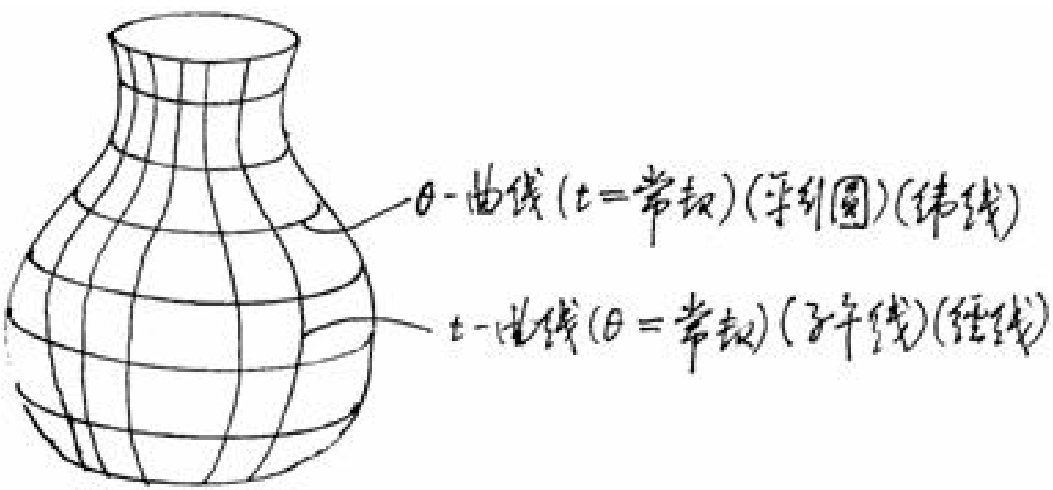
由u-曲线族和v-曲线族构成.

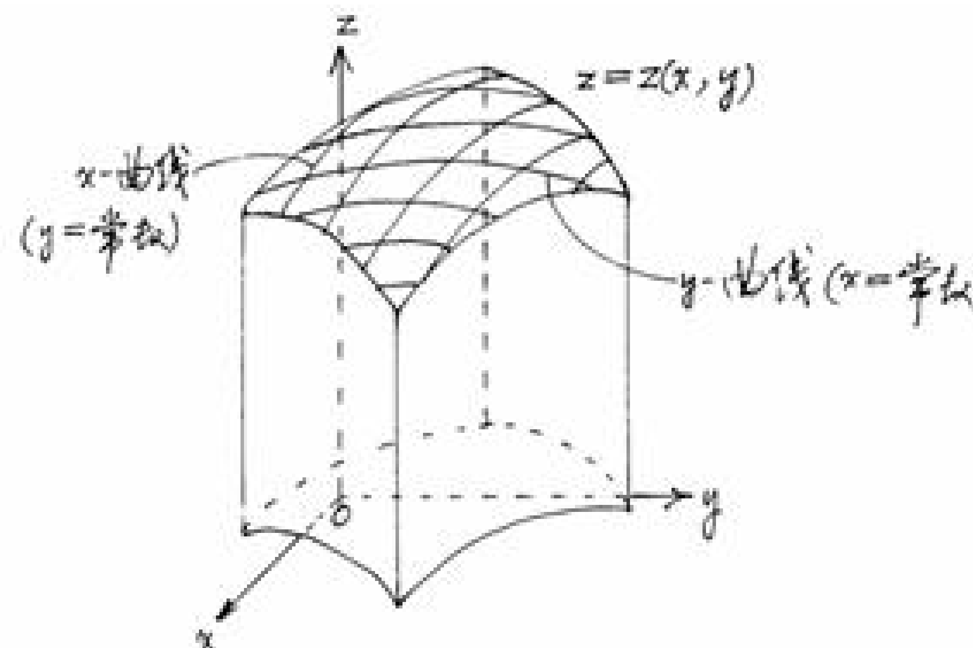





θ-曲线(z=常数)
z-曲线(θ=常数)


φ-曲线(θ=常数)(纬线)
θ-曲线(φ=常数)(经线)


θ-曲线(t=常数)(平行圆)(纬线)
t-曲线(θ=常数)(子午线)(经线)


z
z=z(x,y)
x-曲线
(y=常数)
y-曲线(x=常数)
O
y
x

二、曲面的切平面和法线

1. 一些概念

C^k类曲面$(k \in \mathbb{N})$

若 $\vec{r}(u,v)$ 为 G 上的 C^k 类函数,

则称这样的曲面为 C^k 类曲面.

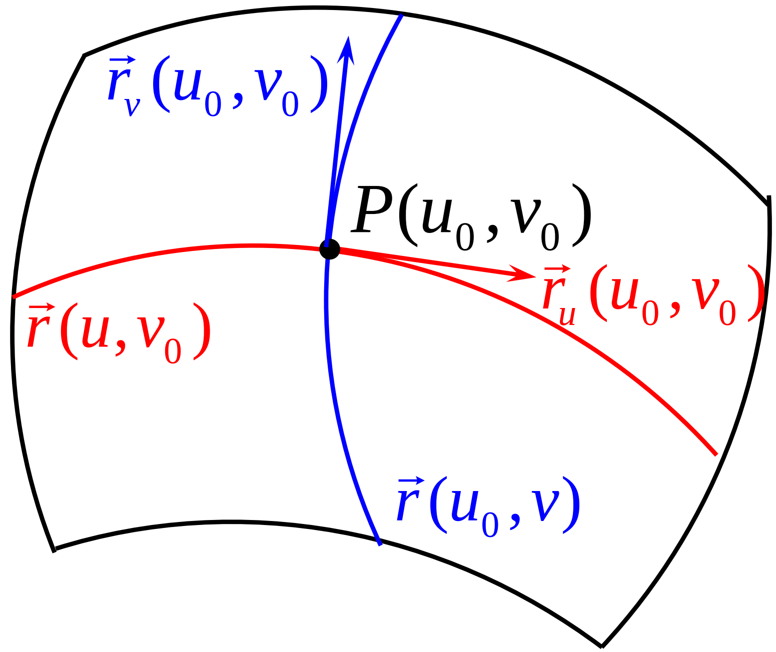
光滑曲面 (C^1类曲面) ($\vec{r}_u(u,v)$和$\vec{r}_v(u,v)$都连续的曲面)

特点:曲面上每一点都存在切平面,并且切平面连续变化

本课程以后只讨论光滑曲面.

曲面的正则点

曲面S: $\vec{r}(u,v)$



即曲面上使得$\vec{r}_u \times \vec{r}_v\big|_{(u_0,v_0)} \neq \vec{0}$的点$(u_0,v_0)$.

经过该点的两条坐标曲线的切向量不平行.

本课程以后只讨论曲面上的正则点.

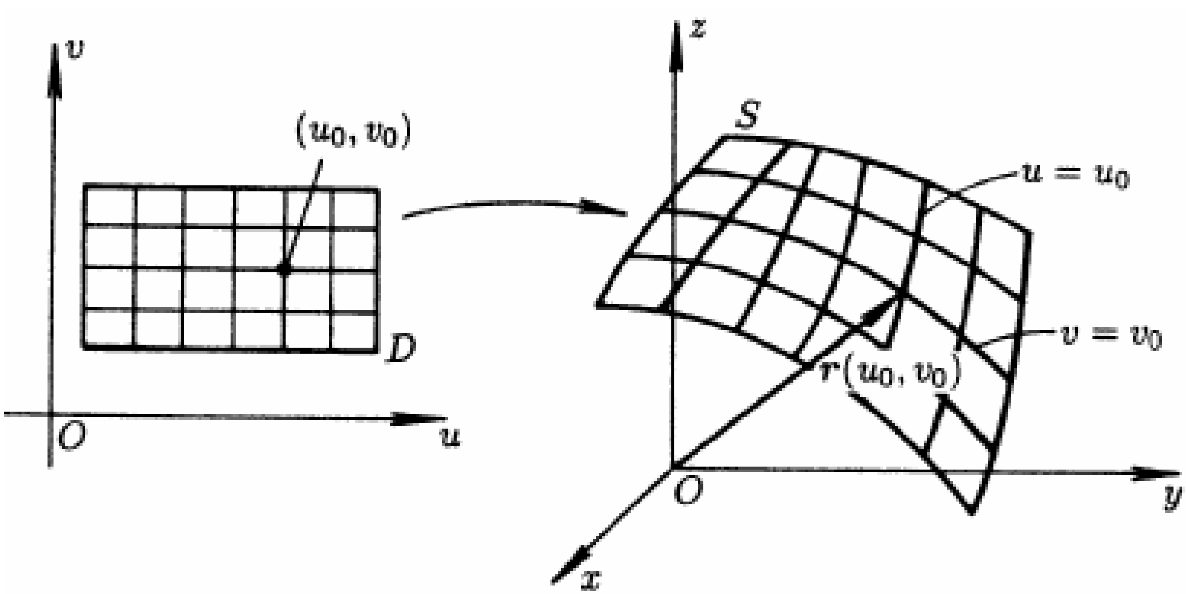
若曲面上的点都是正则点，则称该曲面为正则的.

特点 经过正则曲面上的每一点有唯一一条 u-曲线和唯一一条v-曲线，这两族曲线彼此不相切.

不相切.

交点处的切向量不平行

两族曲线形成网状结构



称正则曲面的曲纹坐标网为正规坐标网.

P40命题1 光滑曲面在正则点的某个邻域内总可以有

$z=z(x,y)$或$y=y(z,x)$或$x=x(y,z)$形式的参数表示.

证 设$P(u_0,v_0)$为光滑曲面$\boxed{\vec{r}(u,v)}$上的一个正则点,

$\boxed{(x(u,v),y(u,v),z(u,v))}$

即$\vec{r}_u\times\vec{r}_v\big|_P\neq\vec{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{pmatrix}\Bigg|_P$ 的秩为2.

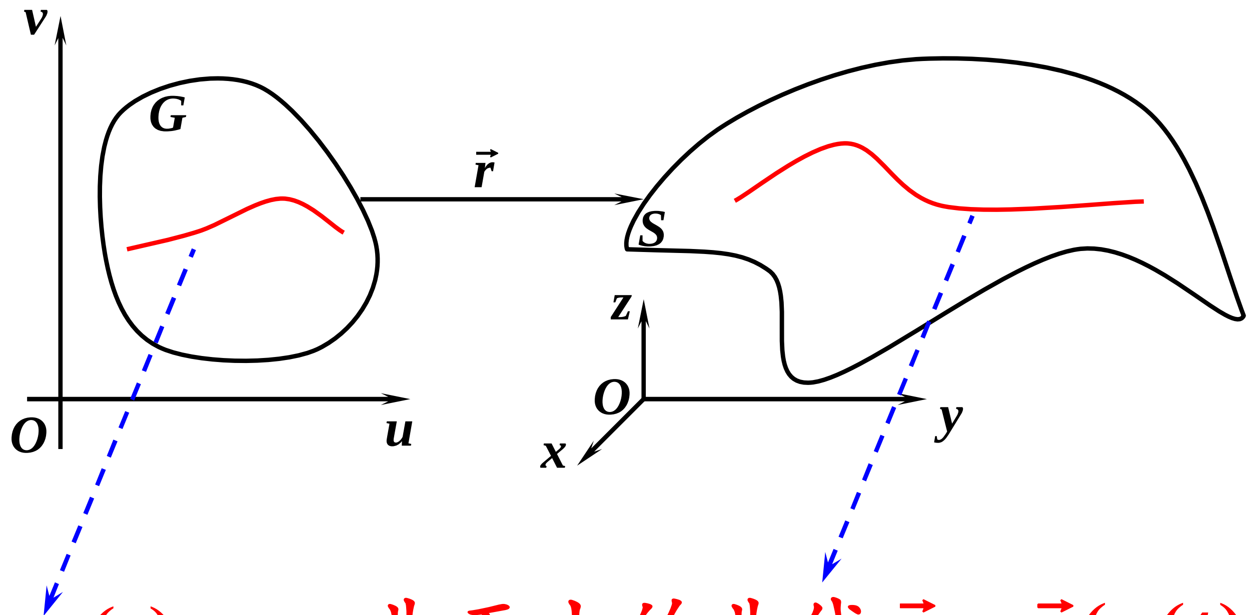
$\therefore$它至少有一个二阶子式不为零,不妨设$\begin{vmatrix}x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix}_P\neq 0.$

由隐函数存在定理,函数组$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$在$P$的某个邻域

U内存在唯一一组隐函数$\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}.$

则$z=z(u,v)=z(u(x,y),v(x,y))$,它是以$x,y$为参数的曲面.

曲面上的曲线



$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

曲面上的曲线 $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$

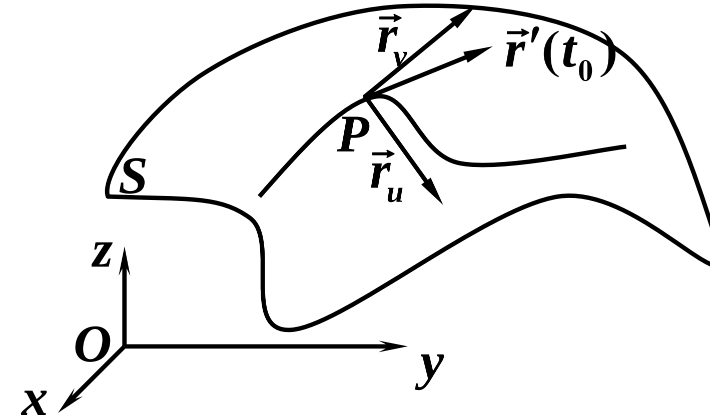
$\vec{r}$将参数平面内的平面曲线映射成曲面上的空间曲线.

我们经常会说曲面$\vec{r}(u,v)$上的曲线$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$,

实际上是指以$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$为曲纹坐标的曲线$\vec{r}(u(t), v(t))$.

2. 切向量(切方向)和切平面

曲面上的曲线 $\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))$



切向量 $\vec{r}'(t_0)=\vec{r}'(u(t_0),v(t_0))$

$$=\left(\vec{r}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\vec{r}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\Bigg|_{t=t_0}$$

三个向量 $\vec{r}'(t_0)$ 与 $\vec{r}_u\big|_{t=t_0}$, $\vec{r}_v\big|_{t=t_0}$ 共面.

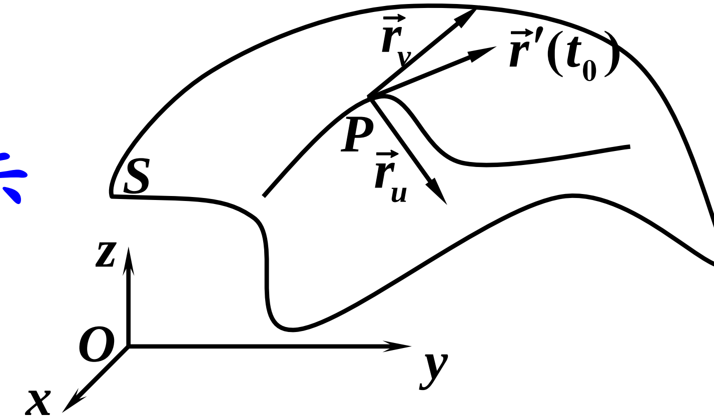
P40命题2 若P为曲面的正则点, 则该曲面上过点P的任意曲线在点P处的切向量都在过该点的两条坐标曲线的切向量 $\vec{r}_u$ 和 $\vec{r}_v$ 所决定的平面上.

称此平面为曲面在这一点(切点P)的切平面.

曲面的切向量：与切平面平行的向量.

切方向：切向量的方向.

曲面$\vec{r}(u,v)$上某点处的切方向的表示



对于曲面上的曲线 $\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))$

有 $\vec{r}'(t_0)=\left.\left(\vec{r}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\vec{r}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\right|_{t=t_0}=\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}+\vec{r}_v\right)\right|_{t=t_0}$

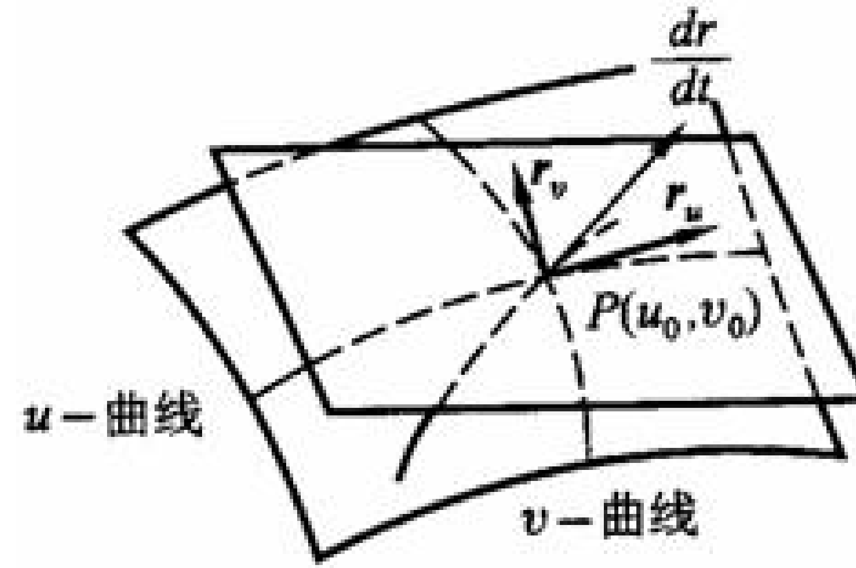
$\Rightarrow \vec{r}'(t_0)$所决定的曲面的切方向完全依赖于$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$

因此$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$(或$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$)给出了曲面上某点处的一个切方向.

切方向的表示方法：① $\vec{r}'(t)$, ② $(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$, ③ $\mathrm{d}\vec{r}(t)$, $\cdots$

切平面的方程(向量表示)

曲面 $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, 切点 (u_0,v_0),



$\vec{R}$ 为切平面上任一点的向径.

则 $\vec{R}-\vec{r}(u_0,v_0)$ 为一个切方向,

因此, 三个向量 $\vec{R}-\vec{r}(u_0,v_0), \vec{r}_u(u_0,v_0), \vec{r}_v(u_0,v_0)$ 共面.

切平面方程为 $(\vec{R}-\vec{r}(u_0,v_0), \vec{r}_u(u_0,v_0), \vec{r}_v(u_0,v_0))=0$.

切平面的方程(一般方程)

设曲面$\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$, 切点$(u_0,v_0)$,

$\vec{R}=(X,Y,Z)$为切平面上任一点的向径,

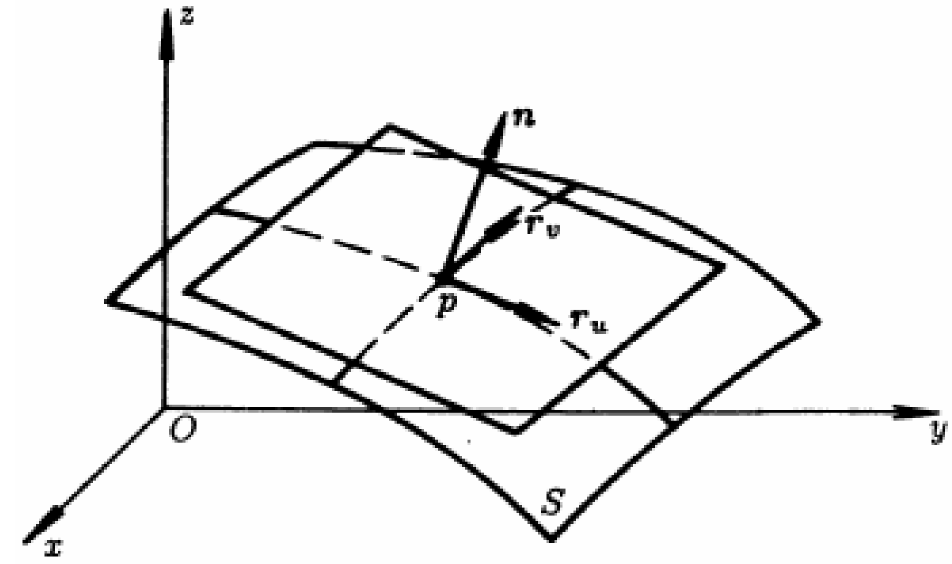
代入方程$(\vec{R}-\vec{r}(u_0,v_0),\vec{r}_u(u_0,v_0),\vec{r}_v(u_0,v_0))=0$得

$$\begin{vmatrix} X-x(u_0,v_0) & Y-y(u_0,v_0) & Z-z(u_0,v_0) \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}=0.$$

3. 法向量(法方向)和法线

曲面 $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$，切点 (u_0,v_0)，

$\vec{R}$ 为法线上任一点的向径.



则 $\vec{R}-\vec{r}(u_0,v_0)$与法线平行, 而法向量为$(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\big|_{(u_0,v_0)}$,

所以 $\vec{R}-\vec{r}(u_0,v_0)=\lambda(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\big|_{(u_0,v_0)}$,

即 $\vec{R}=\vec{r}(u_0,v_0)+\lambda(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\big|_{(u_0,v_0)}$.

此即为法线的向量式参数方程, 其中λ为参数.

法线的参数方程与点向式方程

设 $\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),\quad \vec{R}=(X,Y,Z)$

代入法线方程 $\vec{R}=\vec{r}(u_0,v_0)+\lambda(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\big|_{(u_0,v_0)}$ 得到

$$\begin{cases} X=[x+\lambda(y_uz_v-z_uy_v)]\big|_{(u_0,v_0)} \\ Y=[y+\lambda(z_ux_v-x_uz_v)]\big|_{(u_0,v_0)} \\ Z=[z+\lambda(x_uy_v-y_ux_v)]\big|_{(u_0,v_0)} \end{cases}$$

消去参数 λ 得到法线的点向式方程:

$$\frac{X-x(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}}=\frac{Y-y(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}}=\frac{Z-z(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}}.$$

三、曲面上的曲线族和曲线网

一族曲线(一个曲线族):

满足一定关系的一类曲线, 其表达式中只含一个独立参数.

例如曲面$\vec{r}(u,v)$上所有的u-曲线构成一族曲线.

曲面上的曲线的表达形式

曲面$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$上的曲线有如下常见的表达形式:

(1) $\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))$

(2) $u=u(t),\ v=v(t)$

(3) $u=\varphi(v)$ 或 $v=\varphi(u)$

(4) $f(u,v)=0$

线性微分方程 $A(u,v)\mathrm{d}u+B(u,v)\mathrm{d}v=0\ (A^2+B^2\neq 0)$ 表示曲面上的一族曲线.

(1) 当 $A=0$ 时

代入微分方程得 $B(u,v)\mathrm{d}v=0\Rightarrow \mathrm{d}v=0\Rightarrow v=c$ 为常数.

它表示曲线族 $v=c$, 即 u-曲线族.

(2) 当 $A\neq 0$ 时

由所给微分方程得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=-\dfrac{B(u,v)}{A(u,v)}\Rightarrow u=\varphi(v,c)$.

它表示曲线族 $u=\varphi(v,c)$.

二阶微分方程

$$A(u,v)\mathrm{d}u^2 + 2B(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + C\mathrm{d}v^2 = 0\ (B^2 - AC > 0)$$

表示曲面上的两族曲线.

证①当$\begin{cases} A=0 \\ C=0 \end{cases}$时, 方程变为$\mathrm{d}u\mathrm{d}v=0 \Rightarrow \mathrm{d}u=0$或$\mathrm{d}v=0$.

它表示曲线族 $u=c_1$ 和 $v=c_2$, 即曲纹坐标网;

②当$\begin{cases} A=0 \\ C\neq 0 \end{cases}$时, 原方程变为$\mathrm{d}v(2B\mathrm{d}u+C\mathrm{d}v)=0$.

它表示曲线族 $\mathrm{d}v=0$ 和 $2B\mathrm{d}u+C\mathrm{d}v=0$;

③当 $A\neq 0$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\dfrac{-B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A}$.

也表示两族曲线.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.1 求椭圆柱面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$在任意点的切平面方程,并证明沿每一条直母线,此曲面只有一个切平面.

2.2 证明:一个正则参数曲面是球面的一部分的充分必要条件是它的所有法线都经过一个固定点.

§2.2 曲面的第一基本形式

一、曲面上的曲线的弧长

二、曲面上两方向的交角

三、正交曲线族和正交轨线

四、曲面域的面积

五、等距对应

六、保角对应

一、曲面上的曲线的弧长

曲面 S: $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, S上的曲线Γ: $\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))$,

$$\mathrm{d}s=\left|\vec{r}'(t)\right|\mathrm{d}t=\sqrt{\left(\vec{r}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\vec{r}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+2\vec{r}_u\vec{r}_v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\vec{r}_v^{\,2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{记为}}{=}\sqrt{E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

其中 $E(u,v)=\vec{r}_u^{\,2}(u,v)$, $F(u,v)=\vec{r}_u(u,v)\cdot\vec{r}_v(u,v)$,

$G(u,v)=\vec{r}_v^{\,2}(u,v)$

设 t_0,t_1 为 Γ 上的两点, 则这两点间的弧长为:

$$l=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}s^2=\left[E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\mathrm{d}t^2$$

$$=E\,\mathrm{d}u^2+2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+G\,\mathrm{d}v^2$$

(约定微分算子d的优先级高于幂次, 例如 $\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}s)^2,\cdots$)

称 $\mathrm{I}=\mathrm{d}s^2=E(u,v)\mathrm{d}u^2+2F(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G(u,v)\mathrm{d}v^2$

为曲面 S 的第一基本形式. (即弧长微元的平方)

称系数 $E(u,v)$, $F(u,v)$, $G(u,v)$ 为曲面 S 的第一类基本量.

例1 求双曲抛物面$\vec{r}(u,v)=(a(u+v),b(u-v),2uv)$的第一基本形式.

解 $\vec{r}_u(u,v)=(a,b,2v),\quad \vec{r}_v(u,v)=(a,-b,2u).$

$$E(u,v)=\vec{r}_u^{\,2}(u,v)=a^2+b^2+4v^2,$$

$$F(u,v)=\vec{r}_u(u,v)\cdot\vec{r}_v(u,v)=a^2-b^2+4uv,$$

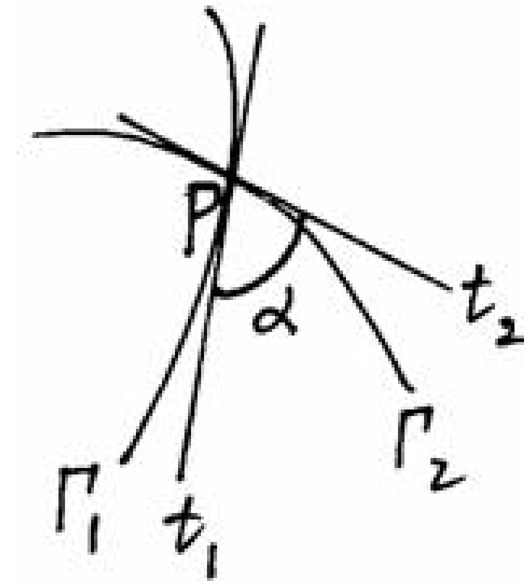
$$G(u,v)=\vec{r}_v^{\,2}(u,v)=a^2+b^2+4u^2.$$

$$\mathrm{I}(u,v)=E(u,v)\mathrm{d}u^2+2F(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G(u,v)\mathrm{d}v^2$$

$$=(a^2+b^2+4v^2)\mathrm{d}u^2+2(a^2-b^2+4uv)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$+(a^2+b^2+4u^2)\mathrm{d}v^2$$

二、曲面上两方向的交角



曲面 S: $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$,

$$\mathrm{d}\vec{r}(u,v)=\vec{r}_u(u,v)\mathrm{d}u+\vec{r}_v(u,v)\mathrm{d}v,$$

设曲面上有两个切方向 $(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$ 和 $(\delta u:\delta v)$,

(注：此处δ也是微分算子,换一个符号是为了区别于d)

$$\mathrm{d}\vec{r}=\vec{r}_u\mathrm{d}u+\vec{r}_v\mathrm{d}v,\quad \delta\vec{r}=\vec{r}_u\,\delta u+\vec{r}_v\,\delta v,$$

设交角为α，则 $\mathrm{d}\vec{r}\cdot\delta\vec{r}=\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cdot\left|\delta\vec{r}\right|\cdot\cos\alpha$,

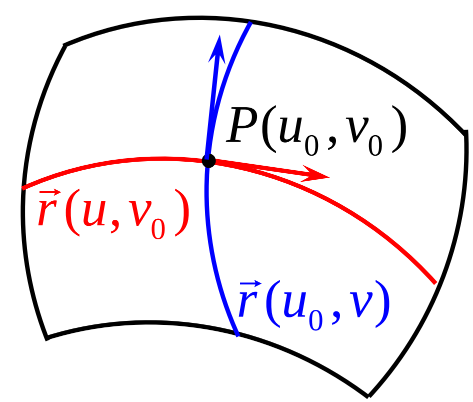
$$\alpha=\arccos\frac{E\mathrm{d}u\delta u+F(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}}$$

$$\alpha = \arccos \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}$$

定理 两个切方向$(du:dv)$和$(\delta u:\delta v)$垂直的充要条件是$Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v = 0.$

命题 曲纹坐标网为正交网的充要条件是$F(u,v) \equiv 0.$

任意一条u-曲线和任意一条v-曲线都正交



曲纹坐标网:

u-曲线族切方向$(du:dv) = (1:0)$

v-曲线族切方向$(\delta u:\delta v) = (0:1)$

例2 设曲面的第一基本形式为 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+(u^2+a^2)\mathrm{d}v^2$，求它上面两条曲线 $u+v=0$ 和 $u-v=0$ 的交角.

解 由 $u+v=0,\ u-v=0$ 联立解得交点 $(u_0,v_0)=(0,0)$.

由 $\mathrm{d}s^2$ 的表达式知 $E(u,v)=1,\ F(u,v)=0,\ G(u,v)=u^2+a^2$,

特别是 $E(0,0)=1,\ F(0,0)=0,\ G(0,0)=a^2$.

$$u+v=0\Rightarrow \mathrm{d}u+\mathrm{d}v=0\ \Rightarrow(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)=\pm(1:-1);$$

$$u-v=0\Rightarrow \delta u-\delta v=0\ \Rightarrow(\delta u:\delta v)=\pm(1:1).$$

$$\arccos\left.\frac{E\mathrm{d}u\delta u+F(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}}\right|_{(0,0)}$$

$$=\arccos\frac{1-a^2}{1+a^2}\ 或\ \pi-\arccos\frac{1-a^2}{1+a^2}.$$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.3 求正螺面$\vec{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,bv)$的第一基本形式,并证明坐标曲线互相垂直.

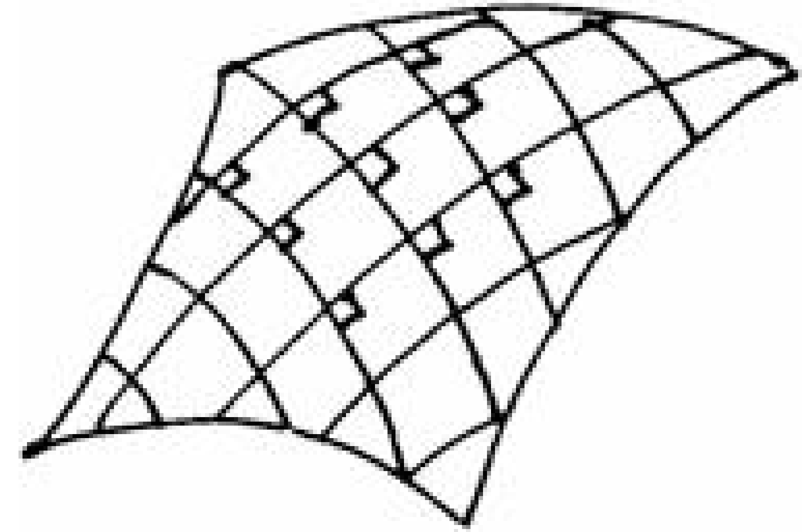
2.4 在曲面上一点,含$\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$的二次方程

$$P\mathrm{d}u^2+2Q\mathrm{d}u\mathrm{d}v+R\mathrm{d}v^2=0$$

确定两个切方向$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$和$(\delta u:\delta v)$.证明这两个方向互相垂直的充要条件是

$$ER-2FQ+GP=0.$$

三、正交曲线族和正交轨线



命题 两曲线族 $A\mathrm{d}u + B\mathrm{d}v = 0$ 和 $C\delta u + D\delta v = 0$ 正交的充要条件是

$$EBD - F(AD + BC) + GAC \equiv 0.$$

证 由 $A\mathrm{d}u + B\mathrm{d}v = 0$ 得 $(\mathrm{d}u : \mathrm{d}v) = (-B : A)$

由 $C\delta u + D\delta v = 0$ 得 $(\delta u : \delta v) = (-D : C)$

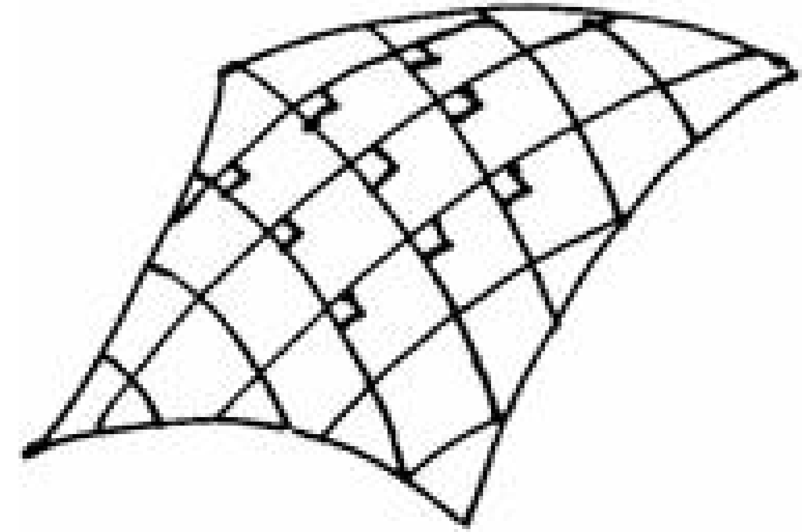
正交的充要条件是 $E\mathrm{d}u\delta u + F(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + G\mathrm{d}v\delta v \equiv 0.$

即 $E(-B)(-D) + F[(-B)C + A(-D)] + GAC \equiv 0.$

即 $EBD - F(AD + BC) + GAC \equiv 0.$

命题 曲线族 $A\mathrm{d}u + B\mathrm{d}v = 0$ 的正交轨线族为

$$(BE - AF)\delta u + (BF - AG)\delta v = 0.$$



证

设 $A\mathrm{d}u + B\mathrm{d}v = 0$ 的正交轨线族为 $C\delta u + D\delta v = 0$

则 $EBD - F(AD + BC) + GAC \equiv 0.$

即 $(AG - BF)C + (BE - AF)D \equiv 0.$

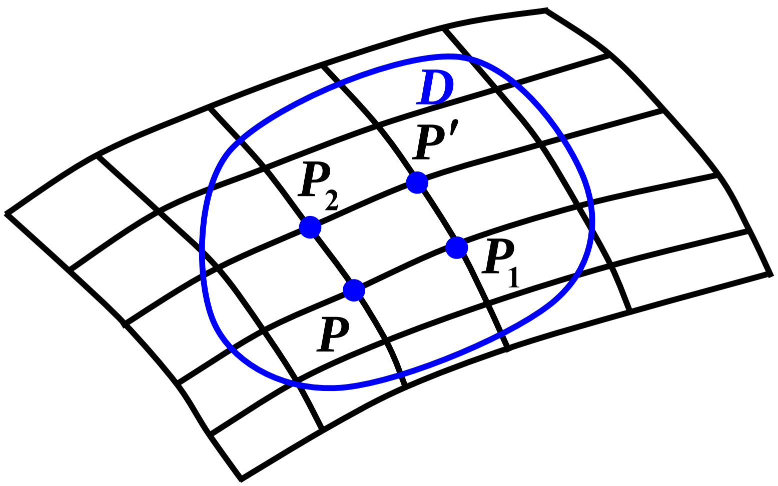
即 $(C : D) \equiv (BE - AF) : (BF - AG)$

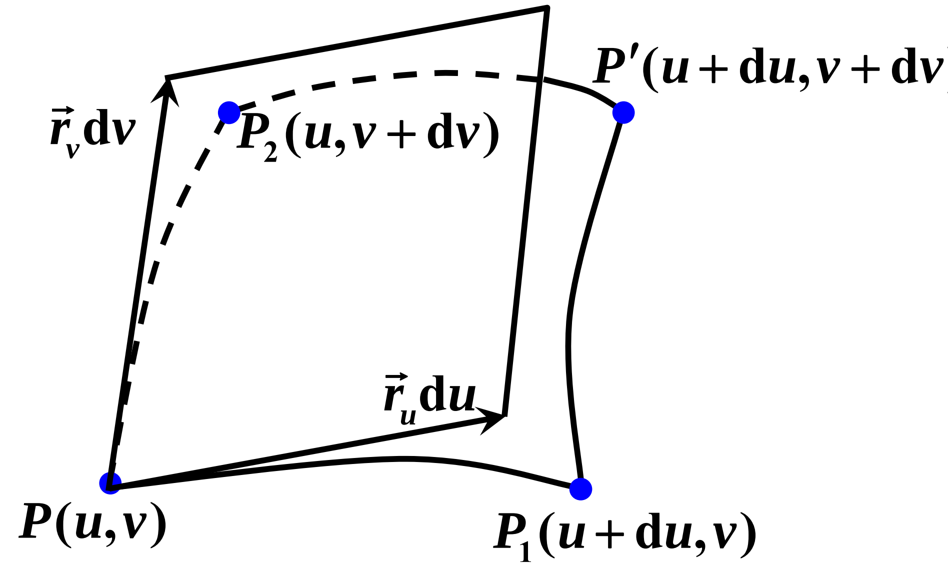
因此 $C\delta u + D\delta v = 0$ 等价于

$$(BE - AF)\delta u + (BF - AG)\delta v = 0.$$

四、曲面域的面积

设有曲面 S: $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, 曲面域 $D\subseteq S$, 求 D 的面积 σ_D.





$$P(u,v),\quad P_1(u+\mathrm{d}u,v),\quad P_2(u,v+\mathrm{d}v),\quad P'(u+\mathrm{d}u,v+\mathrm{d}v)$$

$$\left|\overset{\frown}{PP_1}\right|\approx\left|\overrightarrow{PP_1}\right|\approx\left|\vec{r}_u\mathrm{d}u\right|,\quad \left|\overset{\frown}{PP_2}\right|\approx\left|\overrightarrow{PP_2}\right|\approx\left|\vec{r}_v\mathrm{d}v\right|,$$

面积微元 $\mathrm{d}S=\left|(\vec{r}_u\mathrm{d}u)\times(\vec{r}_v\mathrm{d}v)\right|=\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$$\mathrm{d}S=\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\sqrt{(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2}-(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\ (\text{由Lagrange恒等式})$$

$$=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\quad(\text{此公式即为面积微元公式})$$

$$\sigma_D=\iint\limits_{D'}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D'}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中D'为曲面域D的曲纹坐标域.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.5 改写曲面 $\vec{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, u+v)$ 的参数方程,使得它的曲纹坐标网成为正交网.

2.6 已知曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=\cos^2 u\,\mathrm{d}u^2+\sin^2 v\,\mathrm{d}v^2,$$

它上面的三条曲线

$$u+v=0,\ \ u-v=0,\ \ v=1$$

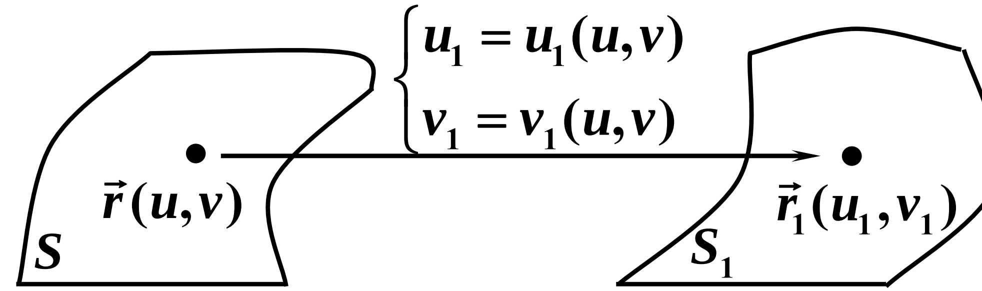
围成一个曲边三角形,求

(1)该曲边三角形所围曲面域的面积;

(2)该曲边三角形的三个内角;

(3)该曲边三角形的三条曲边的长度.

五、等距对应(保长对应)



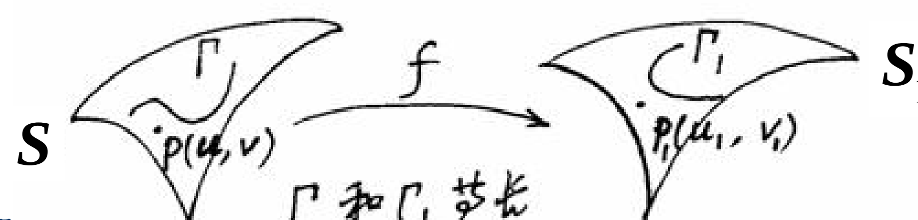
设曲面 S: $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ 和曲面 S_1: $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(u_1,v_1)$之间存在一个双射关系,对应的点的参数之间有关系式:

$$\begin{cases} u_1 = u_1(u,v) \\ v_1 = v_1(u,v) \end{cases}$$

且$u_1(u,v), v_1(u,v)$有连续的偏导数, $\dfrac{\partial(u_1,v_1)}{\partial(u,v)} \neq 0.$

称这种双射为 S 到 S_1 的一个对应.

称曲面之间保持曲面上任意曲线的长度不变的对应为等距对应(保长对应).



可将 S_1 用与 S 相同的参数 u 和 v 来表示：

$$\vec{r}_1=\vec{r}_1(u_1,v_1)=\vec{r}_1(u_1(u,v),v_1(u,v))\overset{\text{记为}}{=}\vec{r}_2(u,v)$$

则 S 上的点(u,v)映射到S_1：$\vec{r}_2=\vec{r}_2(u,v)$ 上相同参数的点.

S 上的曲线 $\begin{cases}u=u(t)\\v=v(t)\end{cases}(t\in I)$ 映射到S_1：$\vec{r}_2=\vec{r}_2(u,v)$ 上的

曲线 $\begin{cases}u=u(t)\\v=v(t)\end{cases}(t\in I)$.

这样会使得对应曲线在参数平面中具有相同的方程.

定理 两个曲面之间的一个对应是等距对应的充要条件是

适当选择参数后它们具有相同的第一基本形式.

证 (充分性)

设选择参数后, 两个曲面S_1和S_2具有相同的第一基本形式, 作它们之间的一个对应, 使相同参数的点为映射的对应点.

设在该参数表示下, S_1和S_2的方程分别为$\vec{r}_1(u,v)$和$\vec{r}_2(u,v)$.

在参数域内任取一条曲线段 l: $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$ $(t \in [a,b])$.

上述对应把S_1上的曲线$\vec{r}_1(l)$映射到S_2上的曲线$\vec{r}_2(l)$.

由曲面上曲线弧长的公式,

$$\vec{r}_1(l)\text{的长度为}\int_a^b \sqrt{E_1\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+2F_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+G_1\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b \sqrt{E_2\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+2F_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+G_2\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\vec{r}_2(l)\text{的长度}$$

由曲线 l 的任意性知, 该对应为S_1与S_2之间的等距对应.

(必要性)

设两个曲面S_1和S_2之间存在一个等距对应,

选取参数使得映射的对应点具有相同的参数,

设在该参数表示下, S_1和S_2的方程分别为$\vec{r}_1(u,v)$和$\vec{r}_2(u,v)$.

在参数域内任取一条曲线段 l: $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$ $(t \in [a,b])$.

则 $\forall t \in [a,b]$, 曲线 $\vec{r}_1(l)$ 和 $\vec{r}_2(l)$ 上在 $[a,t]$ 这一段的弧长

$$\int_a^t \sqrt{E_1(\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t})^2 + 2F_1\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + G_1(\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t})^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^t \sqrt{E_2(\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t})^2 + 2F_2\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + G_2(\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t})^2}\,\mathrm{d}t,$$

两边对 t 求导得

$$\sqrt{E_1(\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t})^2 + 2F_1\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + G_1(\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t})^2} = \sqrt{E_2(\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t})^2 + 2F_2\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + G_2(\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t})^2}.$$

即 $E_1\mathrm{d}u^2 + 2F_1\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G_1\mathrm{d}v^2 = E_2\mathrm{d}u^2 + 2F_2\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G_2\mathrm{d}v^2$,

再由 l 的任意性知, 对任意的 u, v, $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$ 有 $\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2$.

称仅由曲面的第一基本形式出发所能建立的几何性质为曲面的内在性质(内蕴性质).

称仅用曲面的第一类基本量表示出来的几何量为曲面的内蕴量.

曲面曲线的弧长, 曲面上两方向的交角, 曲面区域的面积都是曲面的内蕴量.

内蕴性质和内蕴量在等距对应下保持不变.

六、保角对应(保形对应, 共形对应)

曲面之间保持曲面曲线的交角不变的对应.

定理

两个曲面之间的一个对应是保角对应的充要条件是适当选择参数后它们的第一基本形式成比例, 即

即 $\mathrm{I}_1(u,v,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)=\lambda^2(u,v)\mathrm{I}_2(u,v,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\ (\lambda\neq 0)$ 或写为

$$E_1(u,v):E_2(u,v)=F_1(u,v):F_2(u,v)=G_1(u,v):G_2(u,v).$$

每一个等距对应都是保角对应,

但保角对应一般不是等距对应.

(保角对应的条件比保长对应的条件弱)

证 (充分性)

设选择参数后, 两个曲面S_1和S_2的第一基本形式成比例,

作它们之间的一个对应, 使相同参数的点为映射的对应点.

任选两个切方向$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$和$(\delta u:\delta v)$,

则它们在S_1上的交角θ_1

$$=\arccos\frac{E_1\mathrm{d}u\delta u+F_1(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G_1\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E_1\mathrm{d}u^2+2F_1\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G_1\mathrm{d}v^2}\sqrt{E_1\delta u^2+2F_1\delta u\delta v+G_1\delta v^2}}$$

$$=\arccos\frac{\lambda^2E_2\mathrm{d}u\delta u+\lambda^2F_2(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+\lambda^2G_2\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{\lambda^2E_2\mathrm{d}u^2+\cdots}\sqrt{\lambda^2E_2\delta u^2+\cdots}}$$

$$= \arccos \frac{E_2 \mathrm{d}u\delta u + F_2(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + G_2 \mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E_2 \mathrm{d}u^2 + 2F_2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v + G_2 \mathrm{d}v^2}\sqrt{E_2 \delta u^2 + 2F_2 \delta u\delta v + G_2 \delta v^2}}$$

$=$ 它们在S_2上的交角θ_2

由所选切向的任意性知, 该对应为S_1与S_2之间的保角对应.

(必要性)

设两个曲面S_1和S_2之间存在一个保角对应,

选取参数使得映射的对应点具有相同的参数,

任选S_1上两个正交的切方向$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$和$(\delta u:\delta v)$,

由保角的定义知它们在S_2上也正交.

因此 $\begin{cases} E_1 \mathrm{d}u\delta u + F_1(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + G_1 \mathrm{d}v\delta v = 0 \\ E_2 \mathrm{d}u\delta u + F_2(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + G_2 \mathrm{d}v\delta v = 0 \end{cases}$.

即 $\begin{cases} (E_1 \mathrm{d}u + F_1 \mathrm{d}v)\delta u + (F_1 \mathrm{d}u + G_1 \mathrm{d}v)\delta v = 0 \\ (E_2 \mathrm{d}u + F_2 \mathrm{d}v)\delta u + (F_2 \mathrm{d}u + G_2 \mathrm{d}v)\delta v = 0 \end{cases}$.

δu与δv不同时为零,因此 $\dfrac{E_1 \mathrm{d}u + F_1 \mathrm{d}v}{E_2 \mathrm{d}u + F_2 \mathrm{d}v} = \dfrac{F_1 \mathrm{d}u + G_1 \mathrm{d}v}{F_2 \mathrm{d}u + G_2 \mathrm{d}v}$.

取 $\begin{cases} \mathrm{d}u = 1 \\ \mathrm{d}v = 0 \end{cases}$ 代入得 $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{F_1}{F_2}$, 取 $\begin{cases} \mathrm{d}u = 0 \\ \mathrm{d}v = 1 \end{cases}$ 代入得 $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{G_1}{G_2}$.

故有 $\dfrac{E_1(u,v)}{E_2(u,v)} = \dfrac{F_1(u,v)}{F_2(u,v)} = \dfrac{G_1(u,v)}{G_2(u,v)}$.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.7 证明螺面$\vec{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,u+v)$与旋转面$\vec{R}(t,\theta)=(t\cos\theta,t\sin\theta,\sqrt{t^2-1})$之间的一个等距

对应为$\begin{cases} t=\sqrt{u^2+1}, \\ \theta=\arctan u+v. \end{cases}$

2.8 请在球面$\vec{S}(\varphi,\theta)=(\cos\varphi\cos\theta,\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi)$与圆柱面$\vec{C}(u,v)=(\cos u,\sin u,v)$之间设计一个保角对应.

§2.3 曲面的第二基本形式

一、曲面的第二基本形式

二、曲面曲线的曲率

三、迪潘 (Dupin)指标线

四、曲面的渐近方向和共轭方向

五、曲面的主方向和曲率线

六、曲面的主曲率、高斯曲率和平均曲率

七、曲面在一点邻近的结构

八、高斯(Gauss)映射

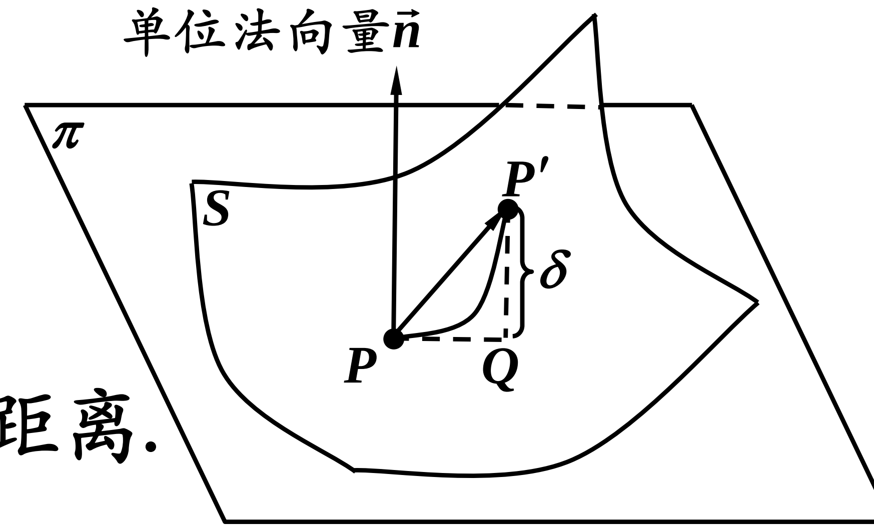
一、曲面的第二基本形式

曲面 S：$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$，S上的曲线Γ: $\vec{r}=\vec{r}(u(s),v(s))$,

切点 $P(u(s),v(s))$,

另一点$P'(u(s+\mathrm{d}s),v(s+\mathrm{d}s))$,

记δ为过P的切平面π到P'的有向距离.



$$\delta=\overrightarrow{PP'}\cdot\vec{n}=[\vec{r}(u(s+\mathrm{d}s),v(s+\mathrm{d}s))-\vec{r}(u(s),v(s))]\cdot\vec{n}$$

$$=[\dot{\vec{r}}(u(s),v(s))\mathrm{d}s+\tfrac{1}{2}(\ddot{\vec{r}}(u(s),v(s))+o(\vec{1}))\mathrm{d}s^2]\cdot\vec{n}$$

$$=\tfrac{1}{2}\vec{n}\cdot\ddot{\vec{r}}\,\mathrm{d}s^2+\vec{n}\cdot o(\vec{1})\mathrm{d}s^2\approx\tfrac{1}{2}\vec{n}\cdot\ddot{\vec{r}}\,\mathrm{d}s^2$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_u \dot{u} + \vec{r}_v \dot{v}$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\vec{r}_{uu}\dot{u} + \vec{r}_{uv}\dot{v})\dot{u} + \vec{r}_u \ddot{u} + (\vec{r}_{vu}\dot{u} + \vec{r}_{vv}\dot{v})\dot{v} + \vec{r}_v \ddot{v}$$

$$= \vec{r}_{uu}\dot{u}^2 + 2\vec{r}_{uv}\dot{u}\dot{v} + \vec{r}_{vv}\dot{v}^2 + \vec{r}_u \ddot{u} + \vec{r}_v \ddot{v}$$

$$2\delta \approx \vec{n} \cdot \boxed{\ddot{\vec{r}}\,\mathrm{d}s^2} \rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2}\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}^2\vec{r}}$$

$$= (\vec{n}\cdot\vec{r}_{uu}\dot{u}^2 + 2\vec{n}\cdot\vec{r}_{uv}\dot{u}\dot{v} + \vec{n}\cdot\vec{r}_{vv}\dot{v}^2 + \vec{n}\cdot\vec{r}_u\ddot{u} + \vec{n}\cdot\vec{r}_v\ddot{v})\mathrm{d}s^2$$

$$= \boxed{\vec{n}\cdot\vec{r}_{uu}}\mathrm{d}u^2 + 2\boxed{\vec{n}\cdot\vec{r}_{uv}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \boxed{\vec{n}\cdot\vec{r}_{vv}}\mathrm{d}v^2$$

$$\overset{\text{记为}}{=} L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2 = \vec{n}\cdot\mathrm{d}^2\vec{r} \overset{\text{记为}}{=} \mathrm{II}$$

称 II 为曲面的第二基本形式,

称 $L(u,v), M(u,v), N(u,v)$ 为曲面的第二类基本量.

$$L(u,v)=\vec{r}_{uu}(u,v)\cdot\vec{n}(u,v),\qquad M=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n},\qquad N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}.$$

第二类基本量和第二基本形式的其他表达式

(1) $$L=\frac{(\vec{r}_{uu},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}},\quad M=\frac{(\vec{r}_{uv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}},\quad N=\frac{(\vec{r}_{vv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

(2) $$L=-\vec{r}_u\cdot\vec{n}_u,\quad M=-\vec{r}_u\cdot\vec{n}_v=-\vec{r}_v\cdot\vec{n}_u,\quad N=-\vec{r}_v\cdot\vec{n}_v$$

$$\vec{r}_u\cdot\vec{n}=0\ \Rightarrow\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}+\vec{r}_u\cdot\vec{n}_u=0\ \Rightarrow\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}=-\vec{r}_u\cdot\vec{n}_u;$$

$$\vec{r}_u\cdot\vec{n}=0\ \Rightarrow\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}+\vec{r}_u\cdot\vec{n}_v=0\ \Rightarrow\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}=-\vec{r}_u\cdot\vec{n}_v.$$

(3) $$\mathrm{II}=-\mathrm{d}\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0\Rightarrow\mathrm{d}\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\vec{n}\mathrm{d}^2\vec{r}=0\Rightarrow\mathrm{II}=\vec{n}\mathrm{d}^2\vec{r}=-\mathrm{d}\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{r}.$$

例1 计算抛物面$2x_3 = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$在原点的第一、第二基本形式.

解 $\vec{r}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \frac{5}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2).$

$\vec{r}_{x_1}(x_1, x_2) = (1, 0, 5x_1 + 2x_2),\qquad \vec{r}_{x_1}(0,0) = (1,0,0).$

$\vec{r}_{x_2}(x_1, x_2) = (0, 1, 2x_1 + 2x_2),\qquad \vec{r}_{x_2}(0,0) = (0,1,0).$

$\vec{r}_{x_1x_1}(x_1, x_2) = (0,0,5),\qquad \vec{r}_{x_1x_1}(0,0) = (0,0,5).$

$\vec{r}_{x_1x_2}(x_1, x_2) = (0,0,2),\qquad \vec{r}_{x_1x_2}(0,0) = (0,0,2).$

$\vec{r}_{x_2x_2}(x_1, x_2) = (0,0,2),\qquad \vec{r}_{x_2x_2}(0,0) = (0,0,2).$

$\vec{r}_{x_1}(0,0) \times \vec{r}_{x_2}(0,0) = (0,0,1).$

$$E(0,0)=\vec{r}_{x_1}^{\,2}(0,0)=1,\qquad F(0,0)=\vec{r}_{x_1}(0,0)\cdot\vec{r}_{x_2}(0,0)=0,$$

$$G(0,0)=\vec{r}_{x_2}^{\,2}(0,0)=1.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(0,0)&=E(0,0)\mathrm{d}x_1^2+2F(0,0)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+G(0,0)\mathrm{d}x_2^2\\&=\mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2.\end{aligned}$$

$$\vec{n}(0,0)=\frac{\vec{r}_{x_1}(0,0)\times\vec{r}_{x_2}(0,0)}{\left|\vec{r}_{x_1}(0,0)\times\vec{r}_{x_2}(0,0)\right|}=(0,0,1).$$

$$L(0,0)=\vec{r}_{x_1x_1}(0,0)\cdot\vec{n}(0,0)=5,$$

$$M(0,0)=\vec{r}_{x_1x_2}(0,0)\cdot\vec{n}(0,0)=2,$$

$$N(0,0)=\vec{r}_{x_2x_2}(0,0)\cdot\vec{n}(0,0)=2.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{II}(0,0)&=L(0,0)\mathrm{d}x_1^2+2M(0,0)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+N(0,0)\mathrm{d}x_2^2\\&=5\mathrm{d}x_1^2+4\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+2\mathrm{d}x_2^2.\end{aligned}$$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

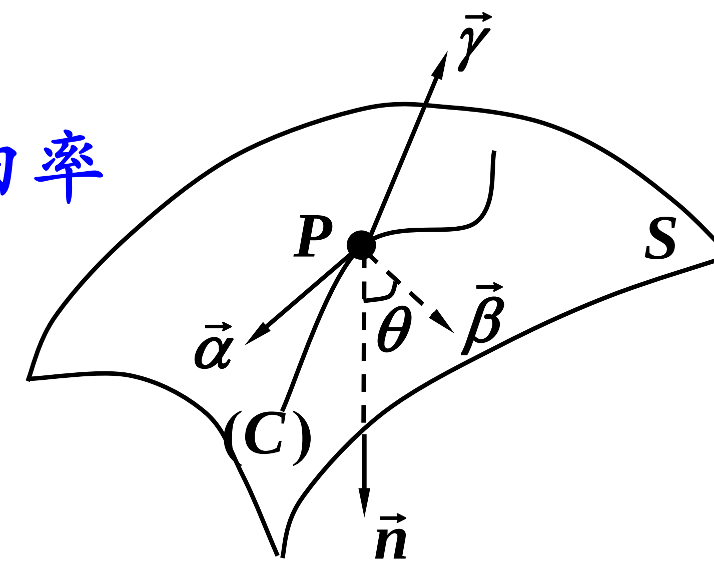
2.9 证明对于正螺面$\vec{r}=(u\cos v, u\sin v, bv)$处处有

$$EN-2FM+GL=0.$$

2.10 求曲面$\vec{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, \sin 2v)$的第一基本形式和第二基本形式.

二、曲面上曲线的曲率

1. 化曲面曲线的曲率为平面截线的曲率



曲面上的曲线$(C):\vec{r}=\vec{r}(u(s),v(s))$,

记θ为$\vec{\beta}$与$\vec{n}$的夹角,

则$\mathrm{II}=\vec{n}\cdot \mathrm{d}^2\vec{r}=\vec{n}\cdot\ddot{\vec{r}}\,\mathrm{d}s^2=\vec{n}\cdot\dot{\vec{\alpha}}\cdot\mathrm{I}=k\,\vec{n}\cdot\vec{\beta}\cdot\mathrm{I}=k\cos\theta\cdot\mathrm{I}$

因此 $k\cos\theta=\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\dfrac{L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}$

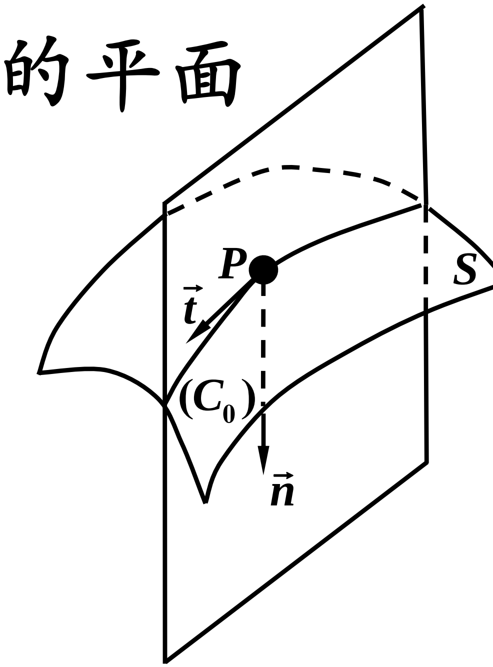
(C)在P点的曲率由$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$和$\vec{\beta}$的方向确定

$=$该点的密切平面与S的交线在该点的曲率

2. 法曲率(法截线的有向曲率)

法截面：切方向$\vec{t}$与曲面的法线$\vec{n}$所确定的平面

法截线：法截面与曲面的交线



设法截线的曲率为k_0,其主法向为$\vec{\beta}_0$

则$\vec{\beta}_0 // \vec{n}$

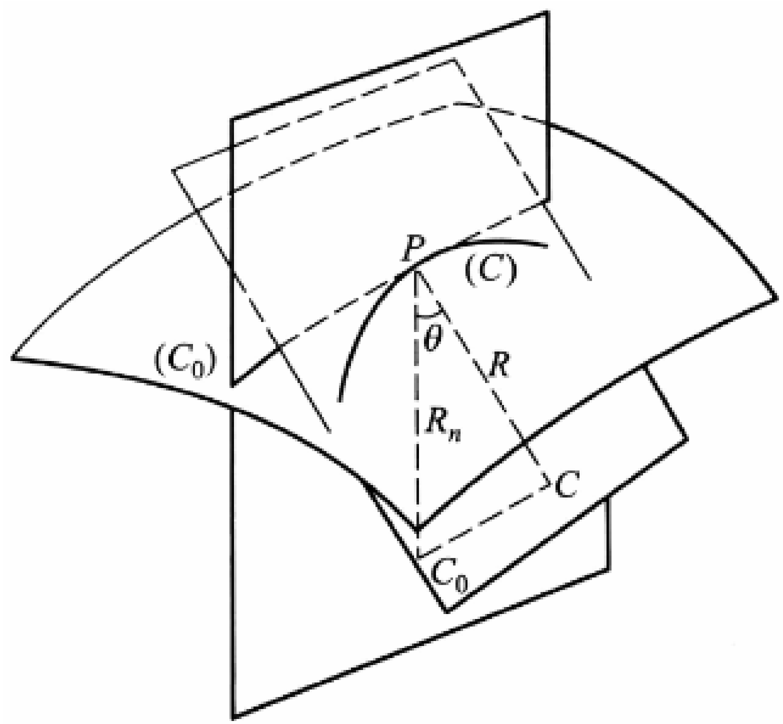
$\vec{\beta}_0$与$\vec{n}$同向时,法截线向$\vec{n}$的正侧弯曲,$k_0=\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$

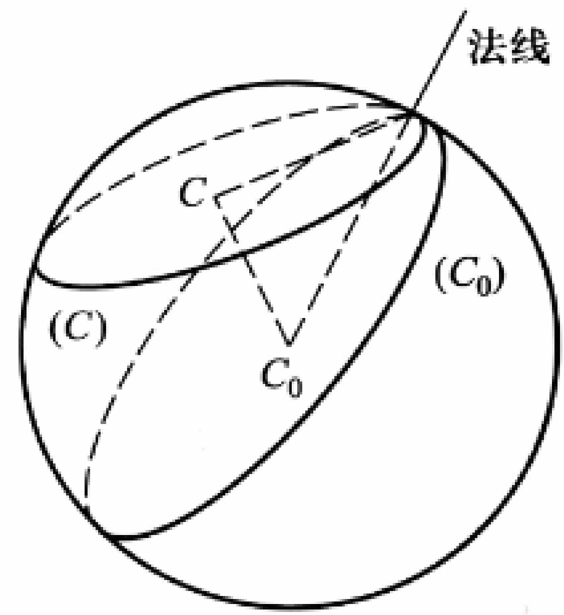
$\vec{\beta}_0$与$\vec{n}$反向时,法截线向$\vec{n}$的反侧弯曲,$k_0=-\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$

曲面在点(u,v)处沿方向$(du:dv)$的法曲率k_n定义为$k_n=\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$

3. Meusnier(梅尼埃)定理

曲面曲线(C)在给定点P的曲率中心C就是与曲线(C)具有共同切线的法截线(C_0)上同一个点P的曲率中心C_0在曲线 (C)的密切平面上的投影.





Meusnier定理揭示了平面截线与法截线之间的联系.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

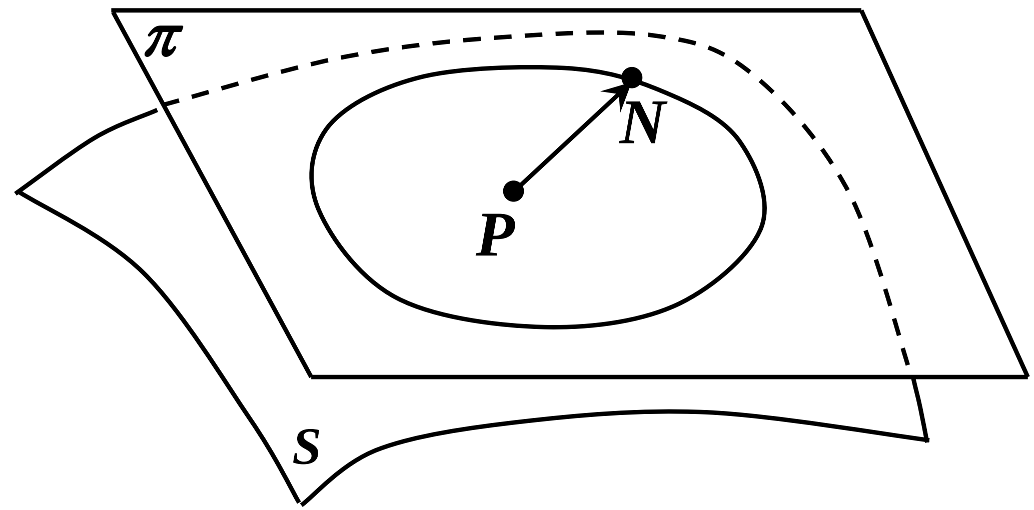
2.11 求抛物面$z=\frac{1}{2}(ax^2+by^2)$在点$(0,0)$处沿方向$(\mathrm{d}x:\mathrm{d}y)$的法曲率

2.12 求C^3类曲线$\vec{r}(u)$的切线面$\vec{R}(u,v)=\vec{r}(u)+v\vec{r}'(u)$上的点$(u,v)(v>0)$处沿曲线$u+v=c$ (c为常数)的的切方向的法曲率.

三、Dupin(迪潘)指标线

1. 定义

取$\left|PN\right| = \sqrt{\dfrac{1}{\left|k_n\right|}}$



2. 几何意义

$\left|PN\right|$越短，沿$\overrightarrow{PN}$方向的法截线的弯曲程度越大；

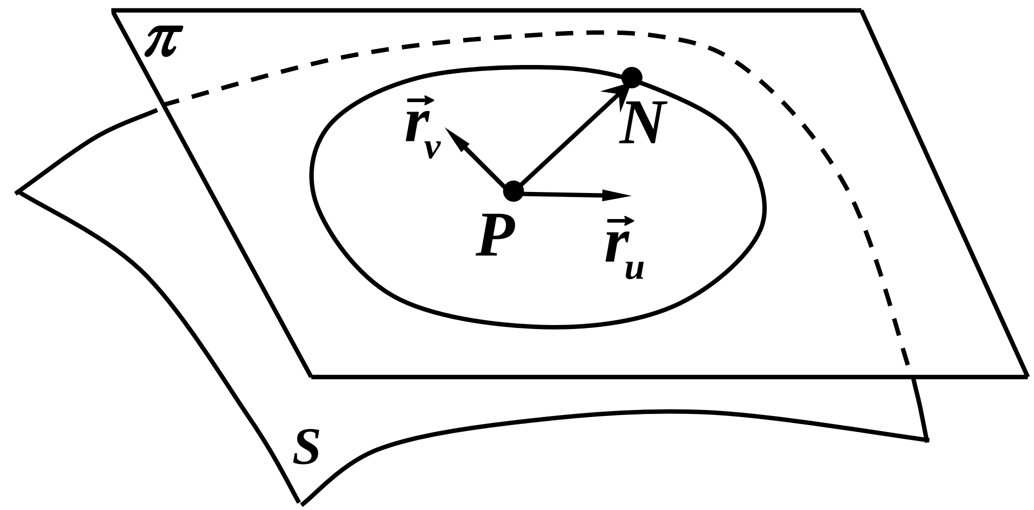
当$\left|PN\right| \to +\infty$时，沿$\overrightarrow{PN}$方向的法曲率趋于零.

3. 方程

设$N=(x,y)$,

则 $\overrightarrow{PN}=x\vec{r}_u+y\vec{r}_v$,

由$\left|\overrightarrow{PN}\right|=\sqrt{\dfrac{\mathrm{I}}{|\mathrm{II}|}}$得



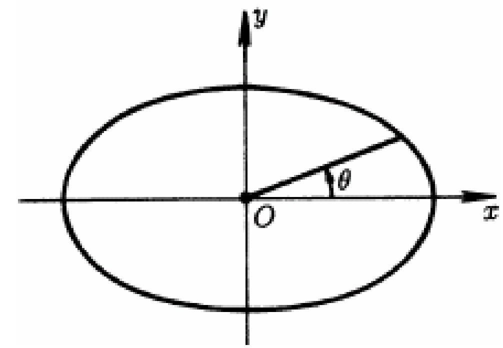
$$Ex^2+2Fxy+Gy^2=\frac{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}{\left|L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2\right|}$$

将切方向 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v=x:y$ 代入上式得到**指标线方程**:

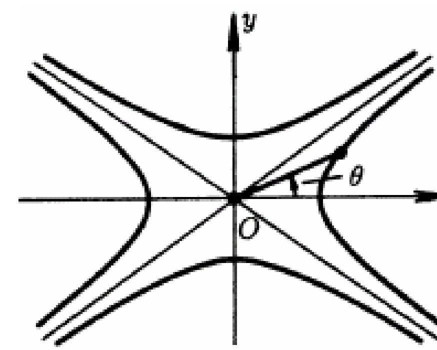
$$Lx^2+2Mxy+Ny^2=\pm1.$$

4. 根据Dupin指标线的形状对切点进行分类

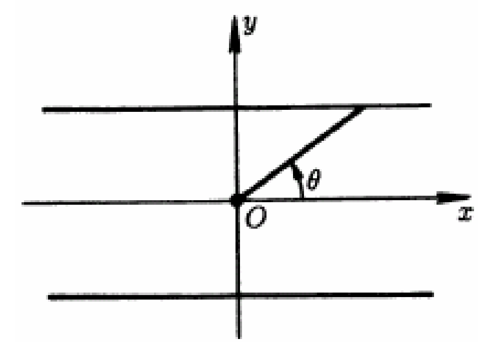
$$\left(x+\frac{M}{L}y\right)^2+\frac{LN-M^2}{L^2}y^2=\pm 1$$



(1) 椭圆点 $LN-M^2>0$



(2) 双曲点 $LN-M^2<0$



(3) 抛物点 $\begin{cases} LN-M^2=0 \\ L,M,N\text{不同时为}0 \end{cases}$

(4) 平点 $L=M=N=0$ Dupin指标线不存在

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.13 在xOz平面上取圆周

$$y=0,(x-b)^2+z^2=a^2(b>a>0),$$

并令其绕z轴旋转得圆环面.圆环面的参数方程是

$$\vec{r}(\varphi,\theta)=((b+a\cos\varphi)\cos\theta,(b+a\cos\varphi)\sin\theta,a\sin\varphi)$$

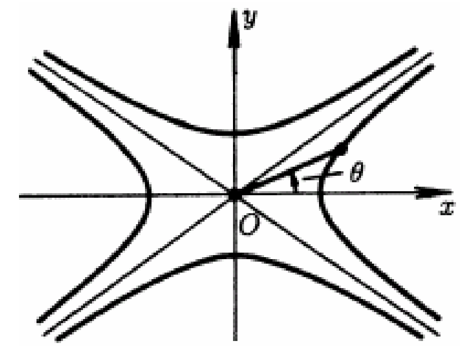
$(0\le\varphi<2\pi,0\le\theta<2\pi)$,求圆环面上的椭圆点、双曲点和抛物点.

2.14 求曲面$\vec{r}(u,v)=(u,v,u^2+v^3)$上的抛物点、椭圆点和双曲点的集合.

四、曲面的渐近方向和共轭方向

1. 渐近方向

当点P是曲面的双曲点时,它的Dupin指标线是一对共轭双曲线,这对双曲线有一对渐近线,把沿着这些渐近线的切方向称为曲面在P点的渐近方向.

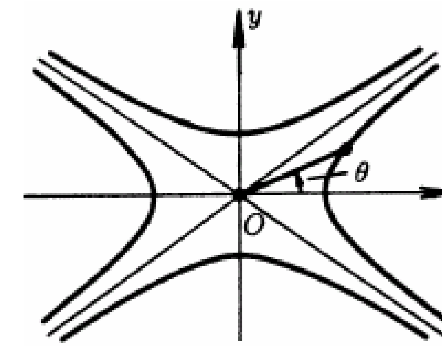


回忆:

直线$y = kx + b$是曲线$y = f(x)$在$x \to +\infty$时的斜渐近线的充要条件是$k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$且$b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx]$.

由Dupin指标线方程 $L_p x^2 + 2M_p xy + N_p y^2 = \pm 1$ 得

$$L_p + 2M_p \frac{y}{x} + N_p \frac{y^2}{x^2} = \frac{\pm 1}{x^2}$$



令 $x \to \infty$ 得 $L_p + 2M_p k + N_p k^2 = 0,$

将渐近线的斜率 $k = (\mathrm{d}v:\mathrm{d}u)$ 代入得到

渐近方向$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$的方程

$$L_P \mathrm{d}u^2 + 2M_P \mathrm{d}u\mathrm{d}v + N_P \mathrm{d}v^2 = 0$$

或写为: $\mathrm{II}_P = 0$, 或写为: $k_n\big|_P = 0.$

即渐近方向就是法曲率为零的切方向.

2. 渐近曲线

每一点的曲线切方向都是曲面渐近方向的曲面曲线.

渐近曲线的微分方程

$$L(u,v)\mathrm{d}u^2+2M(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N(u,v)\mathrm{d}v^2=0$$

P61 命题1

如果曲面上有直线, 则它一定是曲面的渐近曲线.

证 直线的曲率$k=0$.

曲面在直线上每点沿该直线方向的法曲率$k_n=k\cos\theta=0$.

即$L(u,v)\mathrm{d}u^2+2M(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N(u,v)\mathrm{d}v^2=0.$

因此曲面上的直线一定是该曲面的渐近曲线.

P61 命题2 曲面在渐近曲线上一点处的切平面一定是渐近曲线的密切平面.

证 沿渐近曲线有 $k_n=0$,

即 $k\cos\theta=0$, 因此有 $k=0$ 或 $\theta=\frac{\pi}{2}$.

(1)当 $k=0$ 时, 该渐近曲线为曲面上的一条直线,

该直线在曲面过直线上的点的切平面上,

而直线所在的任何平面均可作为其密切平面,

因此这个切平面为渐近曲线的密切平面.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\text{(2)当}k\neq 0\text{时},\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\vec{\beta}\perp\vec{n}\\ \vec{\alpha}\text{为切向量}\Rightarrow\vec{\alpha}\perp\vec{n}\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \vec{\gamma}\,//\,\vec{n}\\ \vec{n}\text{为切平面的法向量},\ \vec{\gamma}\text{为密切平面的法向量}\end{array}\right\}\Rightarrow\text{重合}$$

3. 渐近网

如果曲面上的点都是双曲点,则每个点处都有两个不相切的渐近方向,在曲面上会有两族渐近曲线,称这两族曲线为曲面上的渐近网.

此时渐近曲线的微分方程就是渐近网的微分方程.

$$L(u,v)\mathrm{d}u^2+2M(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N(u,v)\mathrm{d}v^2=0.$$

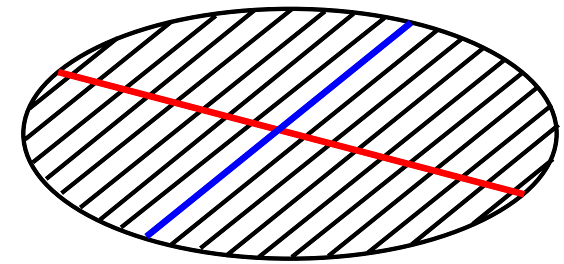
P61 命题3

曲纹坐标网为渐近网的充要条件是$L\equiv N\equiv 0$.

(注:曲纹坐标网的微分方程为$\mathrm{d}u\mathrm{d}v=0$)

4. 共轭方向

直径　一族平行弦的中点的轨迹.



直径AB的共轭直径

平行于AB的弦的中点的轨迹.

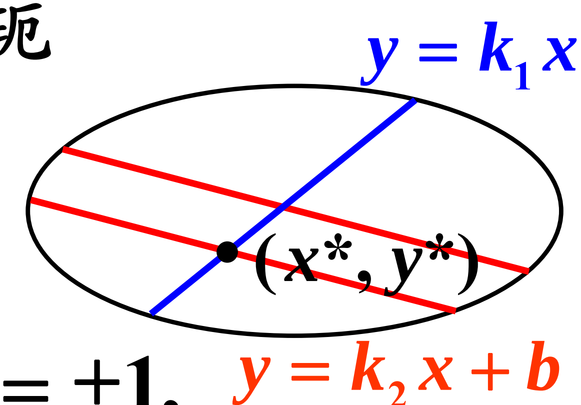
设曲面上点P处的某两个切方向所在的某直线段是P点处Dupin指标线的共轭直径, 则称这两个切方向互相共轭, 并称这两个方向为曲面的一对共轭方向.

共轭方向的等价定义

曲面上点P处的两个切方向$(\mathrm{d})=\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$和$(\delta)=\delta u:\delta v$为**曲面的共轭方向**当且仅当

$$L_P\mathrm{d}u\delta u+M_P(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+N_P\mathrm{d}v\delta v=0.$$

证 设$L_P x^2+2M_P xy+N_P y^2=\pm 1$的两共轭直径所在直线为$y=k_1x$和$y=k_2x$.



令$L_P x^2+2M_P x(k_2x+b)+N_P(k_2x+b)^2=\pm 1$,

即$(L_P+2M_Pk_2+N_Pk_2^2)x^2+2b(M_P+N_Pk_2)x+N_Pb^2\mp 1=0.$

则 $x^*=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{b(M_p+N_pk_2)}{L_p+2M_pk_2+N_pk_2^2}$,

由$y^*=k_1x^*$和$y^*=k_2x^*+b$得$k_1x^*=k_2x^*+b$, 即

$$-\frac{b_1k_1(M_P+N_Pk_2)}{L_P+2M_Pk_2+N_Pk_2^2}=-\frac{b_1k_2(M_P+N_Pk_2)}{L_P+2M_Pk_2+N_Pk_2^2}+b$$

化简得$L_P+M_P(k_1+k_2)+N_Pk_1k_2=0.$

将$k_1=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}, k_2=\dfrac{\delta v}{\delta u}$ 代入得

$$L_P\mathrm{d}u\delta u+M_P(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+N_P\mathrm{d}v\delta v=0.$$

其他等价定义

共轭 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{d}\vec{n}\cdot\delta\vec{r}=0$ $\Leftrightarrow$ $\delta\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0$

证 $-\mathrm{d}\vec{n}\cdot\delta\vec{r}=-(\vec{n}_u\mathrm{d}u+\vec{n}_v\mathrm{d}v)\cdot(\vec{r}_u\delta u+\vec{r}_v\delta v)=\cdots$

渐近方向为自共轭方向.

5. 共轭网

如果曲面上的两族曲线使得过曲面上的每一点,
此两族曲线的两条曲线的切方向都是共轭方向,
则称这两族曲线为曲面的共轭网.

共轭网的微分方程(已知一族曲线, 求它的共轭曲线族)

$$L(u,v)\mathrm{d}u\delta u + M(u,v)(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + N(u,v)\mathrm{d}v\delta v = 0.$$

P62 命题4

曲纹坐标网为共轭网的充要条件是 $M(u,v) \equiv 0.$

(注 : 曲纹坐标网中的两族曲线为 $\mathrm{d}u = 0$ 和 $\delta v = 0$)

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业！

2.15 证明在曲面 $z = f(x) + g(y)$ 上，曲线族 $x =$ 常数和曲线族 $y =$ 常数构成共轭网.

2.16 求曲面 $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ 上的渐近曲线.

五、曲面的主方向和曲率线

1. 主方向

如果曲面上点P处的两个切方向既正交又共轭，则称这两个切方向为**曲面在P点的两个主方向**.

主方向的方程

$$[(EM-FL)\mathrm{d}u^2+(EN-GL)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+(FN-GM)\mathrm{d}v^2]\big|_P=0$$

或写为
$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}v^2 & -\mathrm{d}u\mathrm{d}v & \mathrm{d}u^2 \\ E_P & F_P & G_P \\ L_P & M_P & N_P \end{vmatrix}=0$$

证

由正交得 $E_P\mathrm{d}u\delta u+F_P(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G_P\mathrm{d}v\delta v=0.$

由共轭得 $L_P\mathrm{d}u\delta u+M_P(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+N_P\mathrm{d}v\delta v=0.$

即 $\begin{cases}(E_P\mathrm{d}u+F_P\mathrm{d}v)\delta u+(F_P\mathrm{d}u+G_P\mathrm{d}v)\delta v=0\\(L_P\mathrm{d}u+M_P\mathrm{d}v)\delta u+(M_P\mathrm{d}u+N_P\mathrm{d}v)\delta v=0\end{cases}$

关于δu和δv的线性方程组有非零解, 因此

$$\begin{vmatrix}E_P\mathrm{d}u+F_P\mathrm{d}v & F_P\mathrm{d}u+G_P\mathrm{d}v\\ L_P\mathrm{d}u+M_P\mathrm{d}v & M_P\mathrm{d}u+N_P\mathrm{d}v\end{vmatrix}=0$$

展开, 并关于$\mathrm{d}u^2, \mathrm{d}u\mathrm{d}v, \mathrm{d}v^2$合并同类项即证.

$$[(EM-FL)\mathrm{d}u^2+(EN-GL)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+(FN-GM)\mathrm{d}v^2]\Big|_P=0$$

$$\Delta_P=[(EN-GL)^2-4(EM-FL)(FN-GM)]\Big|_P$$

$$=\left\{[(EN-GL)-\frac{2F}{E}(EM-FL)]^2+\frac{4(EG-F^2)}{E^2}(EM-FL)^2\right\}\Bigg|_P$$

当$\Delta_P>0$时，在P点处有两个主方向.

当$\Delta_P=0$(即$\dfrac{E}{L}=\dfrac{F}{M}=\dfrac{G}{N}$)时，称$P$点为脐点.

此时主方向方程恒成立，每个切方向都是主方向.

称使得L_P, M_P, N_P同时为零的脐点P为平点.

称使得L_P, M_P, N_P不同时为零的脐点P为圆点.

2. 主方向判别定理(Rodrigues(罗德里格斯)定理)

$(\mathrm{d}) = (\mathrm{d}u : \mathrm{d}v)$是主方向的充要条件是$\exists\lambda$使$\mathrm{d}\vec{n} = \lambda\mathrm{d}\vec{r}$;

在上述条件下有$\lambda = -k_n$, 其中k_n为沿方向(d)的法曲率.

证 (必要性)

设(d)是主方向, (δ)是与之正交且共轭的另一主方向.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}^2(u,v) \equiv 1 \Rightarrow \vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{n} = 0 \Rightarrow \mathrm{d}\vec{n}\text{为一个切向量} \\ \mathrm{d}\vec{r}\text{与}\delta\vec{r}\text{垂直,因此它们为不平行的两个切向量}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ 存在λ和μ使得$\mathrm{d}\vec{n} = \lambda\,\mathrm{d}\vec{r} + \mu\,\delta\vec{r}$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{两边点乘}\delta\vec{r}\text{得 } \mathrm{d}\vec{n}\cdot\delta\vec{r} = \lambda\,\mathrm{d}\vec{r}\cdot\delta\vec{r} + \mu\,\delta\vec{r}^2 \\ (\mathrm{d})\text{与}(\delta)\text{共轭} \Rightarrow \mathrm{d}\vec{n}\cdot\delta\vec{r} = 0 \\ (\mathrm{d})\text{与}(\delta)\text{正交} \Rightarrow \mathrm{d}\vec{r}\cdot\delta\vec{r} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \mu = 0$$

因此$\mathrm{d}\vec{n} = \lambda\,\mathrm{d}\vec{r}$.

(充分性)

记(δ)是与(d)正交的另一切方向.

则 $\mathrm{d}\vec{n}\cdot\delta\vec{r}=\lambda\,\mathrm{d}\vec{r}\cdot\delta\vec{r}=0 \Rightarrow (\mathrm{d})$与$(\delta)$ 共轭.

(d)与(δ)既正交又共轭,因此为主方向.

(下证上述$\lambda=-k_n$)

由$\mathrm{d}\vec{n}=\lambda\,\mathrm{d}\vec{r}$两边点乘$\mathrm{d}\vec{r}$得 $\mathrm{d}\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\lambda\,\mathrm{d}\vec{r}^{\,2}$.

将 $\mathrm{d}\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-\mathrm{II}$, $\mathrm{d}\vec{r}^{\,2}=(\dot{\vec{r}}\,\mathrm{d}s)^2=\vec{\alpha}^2\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}s^2=\mathrm{I}$ 代入得

$$\lambda=-\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=-k_n.$$

3. 曲率线

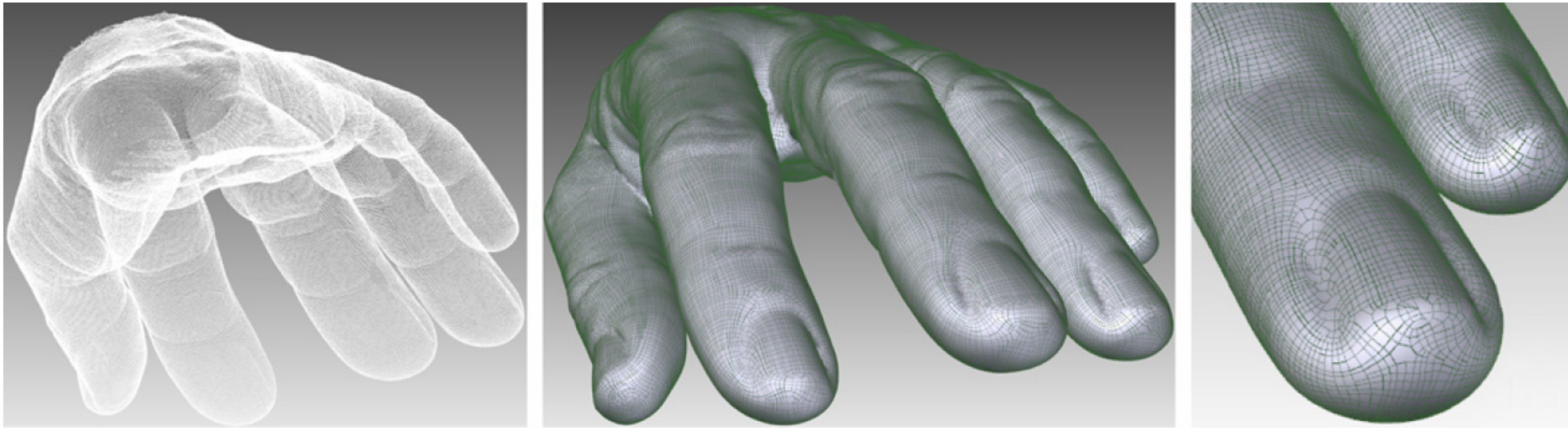
若曲面上一光滑曲线上的每一点的切方向都是主方向,则称该曲线为**曲面的曲率线**.

曲率线的**微分**方程

$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}v^2 & -\mathrm{d}u\mathrm{d}v & \mathrm{d}u^2 \\ E(u,v) & F(u,v) & G(u,v) \\ L(u,v) & M(u,v) & N(u,v) \end{vmatrix} = 0$$

该方程确定了曲面上两族曲线,称之为**曲面的曲率线网**.

曲率线网及其应用



(Ref: Extractin

DeepFake

对于曲面上任意两族不相切的曲线族,都可以通过参数选择,使其成为曲纹坐标网.

证 设两族曲线为$A_i(u,v)\mathrm{d}u+B_i(u,v)\mathrm{d}v=0(i=1,2)$.

则存在积分因子$\lambda_i(u,v)$使得

$$\lambda_i(u,v)A_i(u,v)\mathrm{d}u+\lambda_i(u,v)B_i(u,v)\mathrm{d}v$$

为全微分.

设$\lambda_i(u,v)A_i(u,v)\mathrm{d}u+\lambda_i(u,v)B_i(u,v)\mathrm{d}v=\mathrm{d}\bar{u}_i(u,v)$,

则以$(\bar{u}_1(u,v),\bar{u}_2(u,v))$为新参数即可.

特别地,在不含脐点的曲面上,可以经过参数选择,使曲率线网成为曲纹坐标网.

P65 命题5

曲面上的曲纹坐标网是曲率线网的充要条件是

$F(u,v) \equiv M(u,v) \equiv 0.$

注

曲面上的曲纹坐标网是正交网的充要条件是$F \equiv 0$;

曲面上的曲纹坐标网是共轭网的充要条件是$M \equiv 0$.

曲率线网 $\Leftrightarrow$ 正交网&共轭网

例如 在旋转面$\vec{r}(t,\theta)=(\varphi(t)\cos\theta, \varphi(t)\sin\theta,\ \psi(t))$中,

$F \equiv M \equiv 0$, 它的曲纹坐标网就是曲率线网.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.17 求曲面 $\vec{r}(u,v)=(\frac{a}{2}(u-v),\frac{b}{2}(u+v),\frac{uv}{2})$上的曲率线的方程(写成关于$u$和$v$的隐函数).

2.18 求曲面$xyz=1$上的脐点.

六、曲面的主曲率、Gauss曲率和平均曲率

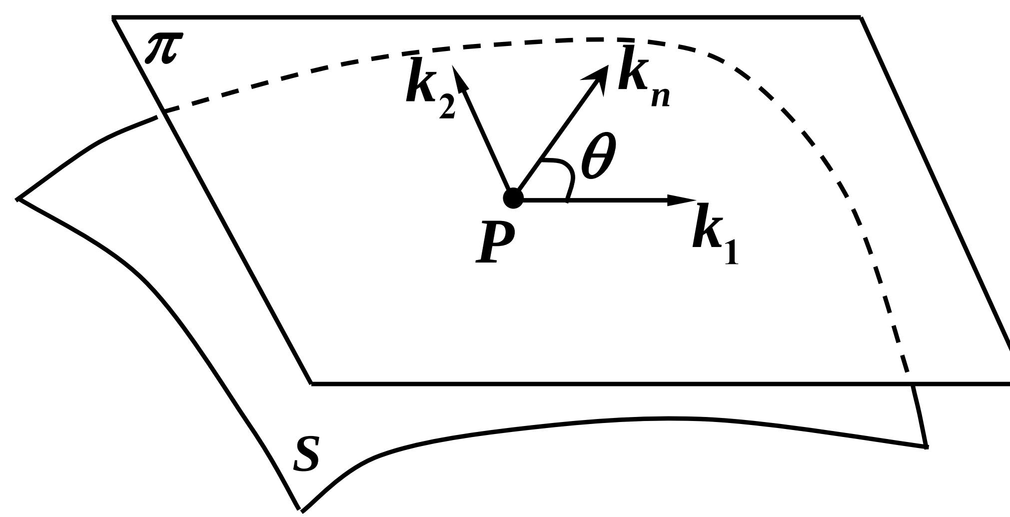
1. 主曲率

曲面上一点处主方向上的法曲率.

即：曲面上一点处沿曲率线方向的法曲率.

2. Euler公式 (反映法曲率随着切方向变化的规律)

$$k_n = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$$



其中k_1, k_2为主曲率,

k_n为沿与k_1所在方向夹θ角的切方向的法曲率.

证 当切点为脐点时, $k_1 = k_2 = k_n$, 公式成立;

当切点不为脐点时, 由于法曲率是法截线的有向曲率,

由曲线的弯曲程度决定, 与参数的选择无关,

不妨选取适当的参数, 使曲率线网成为曲纹坐标网,

即使得 $F \equiv M \equiv 0$.

则 $k_n = \dfrac{L\mathrm{d}u^2 + N\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2}$.

设k_1为u-曲线切方向$(\delta) = (1:0)$上的法曲率, 则

$$k_1 = \frac{L \cdot 1^2 + N \cdot 0^2}{E \cdot 1^2 + G \cdot 0^2} = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{L \cdot 0^2 + N \cdot 1^2}{E \cdot 0^2 + G \cdot 1^2} = \frac{N}{G}.$$

θ为切方向(d)与k_1所在切方向$(\delta)=(1:0)$之间的夹角,

$$\cos\theta=\frac{E\mathrm{d}u\delta u+G\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2}\sqrt{E\delta u^2+G\delta v^2}}=\frac{\sqrt{E}\mathrm{d}u}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2}},$$

$$\cos^2\theta=\frac{E\mathrm{d}u^2}{E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2},\ \sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\frac{G\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2}.$$

则 $$k_n=\frac{L\mathrm{d}u^2+N\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2}=\frac{L}{E}\frac{E\mathrm{d}u^2}{E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2}+\frac{N}{G}\frac{G\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2}$$

$$=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta.$$

P66 命题6 曲面上一点(非脐点)的主曲率是曲面在该点所有切方向的法曲率的最大值和最小值.

证 $$k_n = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta$$

$$= k_1\frac{1+\cos 2\theta}{2} + k_2\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$= \frac{k_1+k_2}{2} + \frac{k_1-k_2}{2}\cos 2\theta.$$

$$\min\{k_1, k_2\} = \frac{k_1+k_2}{2} - \left|\frac{k_1-k_2}{2}\right| \le k_n$$

$$\le \frac{k_1+k_2}{2} + \left|\frac{k_1-k_2}{2}\right| = \max\{k_1, k_2\}.$$

3. 主曲率的计算

曲面上点P处的主曲率K_N满足方程：

$$[(EG-F^2)K_N^2-(LG-2MF+NE)K_N+(LN-M^2)]\Big|_P=0$$

即： $$\begin{vmatrix} L_P-K_NE_P & M_P-K_NF_P \\ M_P-K_NF_P & N_P-K_NG_P \end{vmatrix}=0$$

证 由主方向判别定理，沿主方向(d)有$\mathrm{d}\vec{n}=-k_N\mathrm{d}\vec{r}$.

即 $\vec{n}_u\mathrm{d}u+\vec{n}_v\mathrm{d}v=-k_N(\vec{r}_u\mathrm{d}u+\vec{r}_v\mathrm{d}v)$.

两边分别点乘$\vec{r}_u$和$\vec{r}_v$，分别得到

$$\begin{cases}\vec{n}_u\cdot\vec{r}_u\mathrm{d}u+\vec{n}_v\cdot\vec{r}_u\mathrm{d}v=-k_N(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u\mathrm{d}u+\vec{r}_v\cdot\vec{r}_u\mathrm{d}v),\\ \vec{n}_u\cdot\vec{r}_v\mathrm{d}u+\vec{n}_v\cdot\vec{r}_v\mathrm{d}v=-k_N(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v\mathrm{d}u+\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v\mathrm{d}v).\end{cases}$$

即$\begin{cases}(-L_P)\mathrm{d}u+(-M_P)\mathrm{d}v=-k_N(E_P\mathrm{d}u+F_P\mathrm{d}v),\\ (-M_P)\mathrm{d}u+(-N_P)\mathrm{d}v=-k_N(F_P\mathrm{d}u+G_P\mathrm{d}v).\end{cases}$

即$\begin{cases}(L_P-k_NE_P)\mathrm{d}u+(M_P-k_NF_P)\mathrm{d}v=0,\\ (M_P-k_NF_P)\mathrm{d}u+(N_P-k_NG_P)\mathrm{d}v=0.\end{cases}$

上述关于du和dv的线性方程组有非零解，由克莱姆法则

$$\begin{vmatrix}L_P-K_NE_P & M_P-K_NF_P\\ M_P-K_NF_P & N_P-K_NG_P\end{vmatrix}=0.$$

4. Gauss曲率和平均曲率

平均曲率 $$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}\bigg|_P$$

Gauss曲率 $$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}\bigg|_P$$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.19 证明在曲面上的给定点处,沿相互成为直角的方向的法曲率之和为常数.

2.20 求双曲抛物面$xy = 2z$的两个主曲率之比.

2.21 求螺旋面$\vec{r} = (u\cos v, u\sin v, u + v)$的Gauss曲率$K$、平均曲率$H$和主曲率$k_1, k_2$.

2.22 证明:如果曲面S上的渐近曲线网的夹角是常数,则曲面S的Gauss曲率K和平均曲率H的平方成比例.

七、曲面在一点邻近的结构

通过法截线在一点P邻近的形状来分析

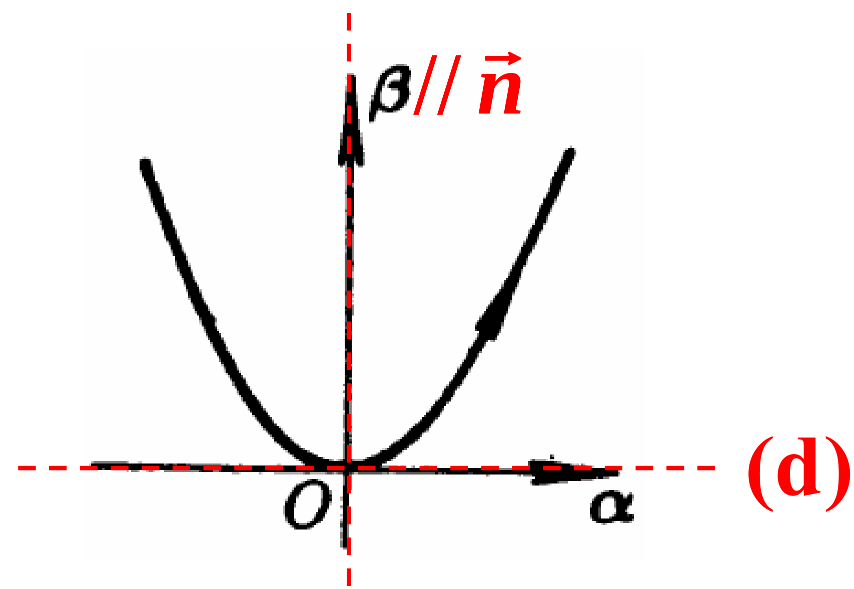
$$\vec{r}(s_0+s)-\vec{r}=$$

$$[s+\tfrac{1}{6}(\varepsilon_1-k^2)s^3]\vec{\alpha}+[\tfrac{1}{2}ks^2+\tfrac{1}{6}(\dot{k}+\varepsilon_2)s^3]\vec{\beta}+\tfrac{1}{6}(k\tau+\varepsilon_3)s^3\vec{\gamma}$$

若为法截线，则近似方程为

$k\neq 0$时 $y=\frac{1}{2}kx^2$;

$k=0$时 $y=\frac{1}{6}\dot{k}x^3$.



考虑与曲面上一点P邻近的曲面形状.

由Euler公式,沿方向(d)的法曲率$k_n = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta$.

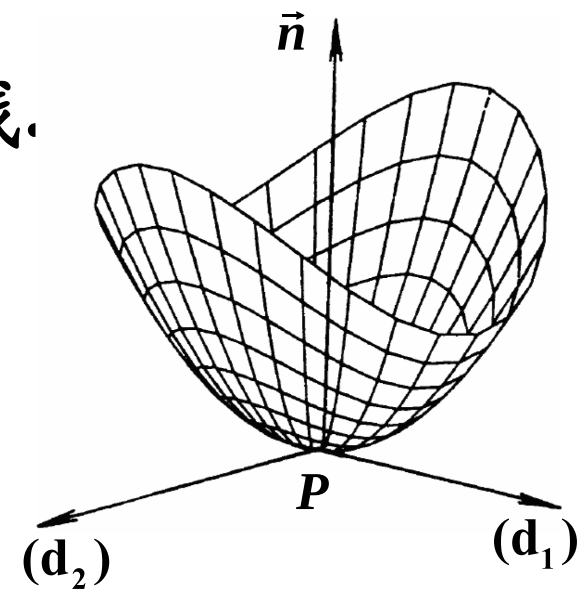
1. 当$K = k_1 k_2 > 0$时，$LN - M^2 = K(EG - F^2) > 0$,

P为椭圆点.

法截线的近似为$y = \dfrac{k_n}{2}x^2$,为一抛物线.

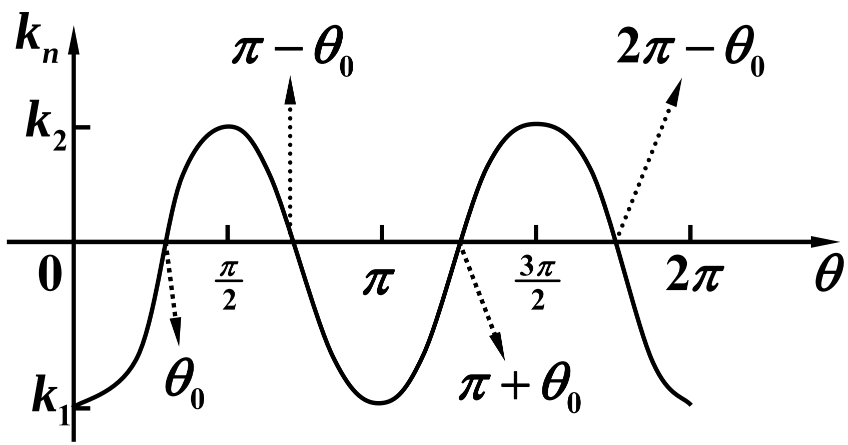
k_n的符号不变,抛物线开口方向不变.

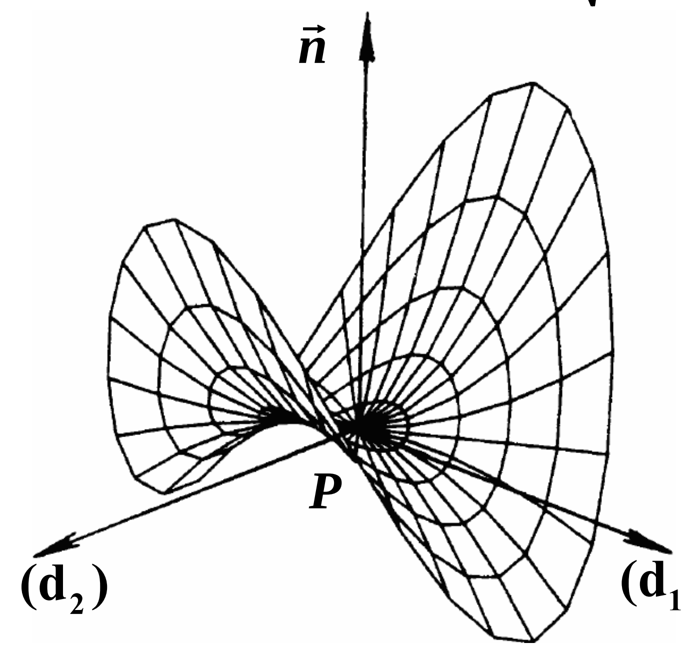
邻近曲面近似于椭圆抛物面.



2. 当$K=k_1k_2<0$时，$LN-M^2<0$，P为**双曲点**.

选取法向$\vec{n}$的方向使$k_1<0, k_2>0$，令$\theta_0=\arctan\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$.





θ	$[0,\theta_0)$	$(\theta_0,\pi-\theta_0)$	$(\pi-\theta_0,\pi+\theta_0)$	$(\pi+\theta_0,2\pi-\theta_0)$	$(2\pi-\theta_0,2\pi]$
法截线形状	开口向下的抛物线	开口向上的抛物线	开口向下的抛物线	开口向上的抛物线	开口向下的抛物线

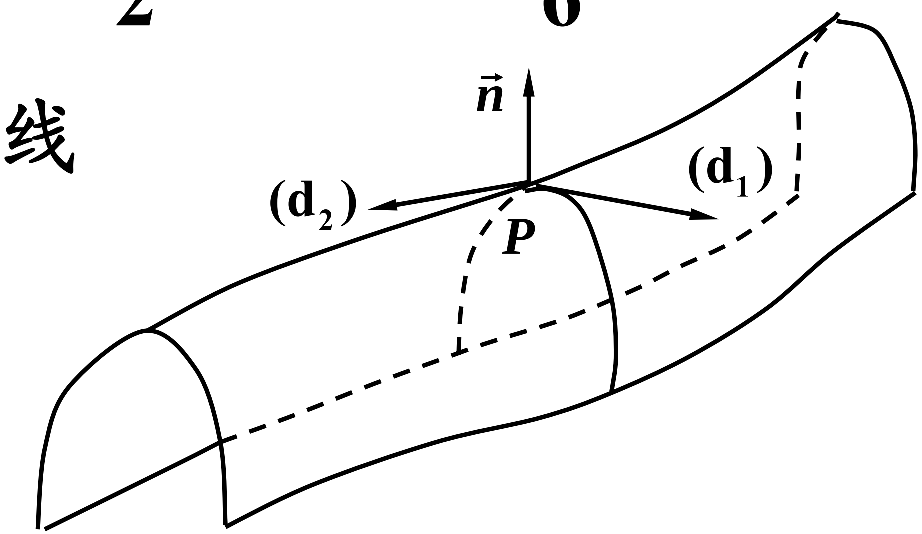
3. 当$K=k_1k_2=0$时，$LN-M^2=0$， P为抛物点或平点.

若为抛物点，选取法向$\vec{n}$的方向使$k_1<0, k_2=0$.

主方向上的法截线近似为$y=\dfrac{k_1}{2}x^2$和$y=\dfrac{\dot{k}_2}{6}x^3$，

分别为朝$\vec{n}$反向弯曲的抛物线

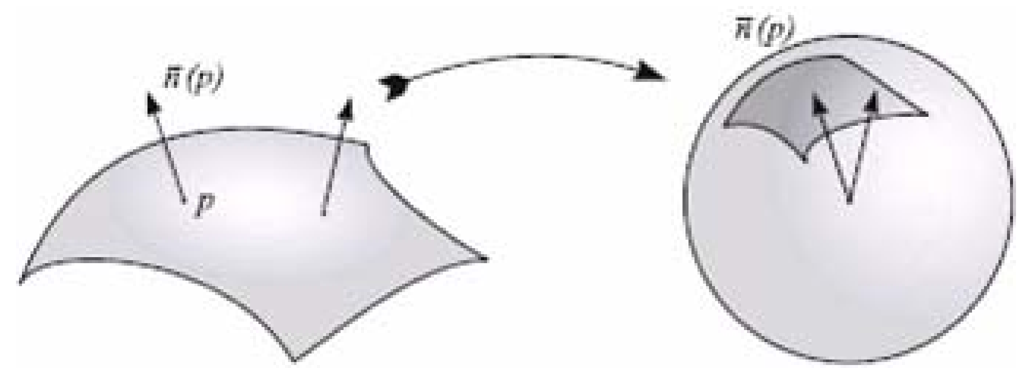
和立方抛物线.



若为平点，$k_1=k_2=0$，两条主法截线近似为

$y=\dfrac{\dot{k}_1}{6}x^3$和$y=\dfrac{\dot{k}_2}{6}x^3$， 为两条立方抛物线.

八、Gauss曲率的几何意义



1. Gauss映射

$$\vec{r}(u,v) \xrightarrow{\text{Gauss映射}} \vec{n}(u,v) = \frac{\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)}{|\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)|}$$

称$\vec{n}(u,v)$为曲面$\vec{r}(u,v)$的球面表示.

称球面表示$\vec{n}(u,v)$的第一基本形式为原曲面$\vec{r}(u,v)$的第三基本形式. 记作

$\mathrm{III} = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$, 其中 $e = \vec{n}_u^2,\ f = \vec{n}_u\vec{n}_v,\ g = \vec{n}_v^2$.

称 e, f, g 为曲面$\vec{r}(u,v)$的第三类基本量.

2. 曲面的第一、二、三类基本形式之间的联系

$$\mathrm{III}-2H\,\mathrm{II}+K\,\mathrm{I}=0$$

证 等式中涉及的量 I, II, III, K和 H都是表示长度和弯曲程度的量, 与曲面参数的选择无关, 因此不妨选取曲率线网为曲纹坐标网.

于是可设曲面方程为$\vec{r}(u,v)$, 且它的$F(u,v)\equiv M(u,v)\equiv 0$.

则曲面的第一、二基本形式为

$$\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2,\ \mathrm{II}=L\mathrm{d}u^2+N\mathrm{d}v^2.$$

设k_1, k_2分别为u-曲线和v-曲线方向的主曲率,

(下面先把其他基本量都用E, G, k_1和k_2表示)

由主方向判别定理 $\vec{n}_u = -k_1\vec{r}_u, \vec{n}_v = -k_2\vec{r}_v$.

$$L = -\vec{n}_u \cdot \vec{r}_u = k_1\vec{r}_u^{\,2} = k_1 E,\quad N = -\vec{n}_v \cdot \vec{r}_v = k_2\vec{r}_v^{\,2} = k_2 G,$$

$$\mathrm{II} = L\mathrm{d}u^2 + N\mathrm{d}v^2 = k_1 E\mathrm{d}u^2 + k_2 G\mathrm{d}v^2.$$

$$e = \vec{n}_u^{\,2} = (-k_1\vec{r}_u)^2 = k_1^2 E,$$

$$f = \vec{n}_u \cdot \vec{n}_v = (-k_1\vec{r}_u)(-k_2\vec{r}_v) = k_1 k_2 F = 0,$$

$$g = \vec{n}_v^{\,2} = (-k_2\vec{r}_v)^2 = k_2^2 G,$$

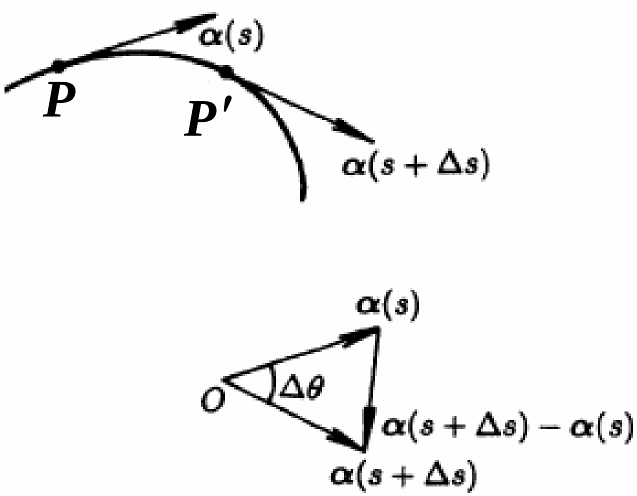
$$\mathrm{III} = e\mathrm{d}u^2 + 2f\mathrm{d}u\mathrm{d}v + g\mathrm{d}v^2 = k_1^2 E\mathrm{d}u^2 + k_2^2 G\mathrm{d}v^2.$$

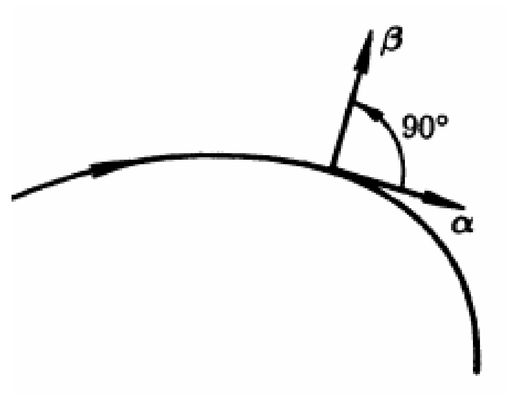
$$\mathrm{III} - 2H\,\mathrm{II} + K\,\mathrm{I} = k_1^2 E\mathrm{d}u^2 + k_2^2 G\mathrm{d}v^2$$

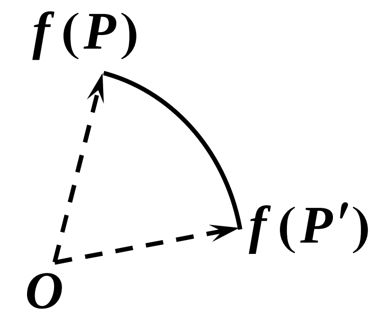
$$-(k_1 + k_2)(k_1 E\mathrm{d}u^2 + k_2 G\mathrm{d}v^2) + k_1 k_2 (E\mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2) = 0.$$

3. Gauss曲率的几何意义 ——曲线曲率的推广

设 f 是Gauss映射, 则

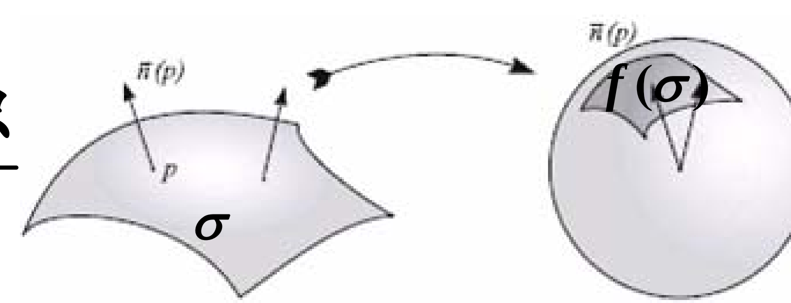




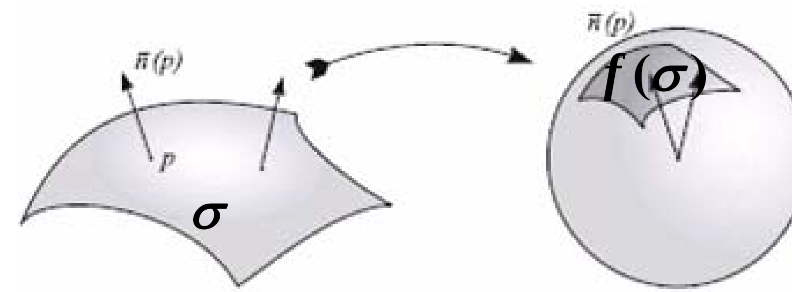


$$曲线曲率 = \lim_{P'\to P}\frac{f(P)与f(P')之间单位圆的弧长}{P与P'之间曲线的弧长}$$

$$\left|\text{Gauss}曲率\right| = |K| = \lim_{\sigma\to P}\frac{f(\sigma)的面积}{\sigma的面积}$$



证 设σ在参数域中对应的区域是$D(\sigma)$,



点P的曲纹坐标为(u_0,v_0).

则$A(\sigma)=\iint\limits_{D(\sigma)}\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$,

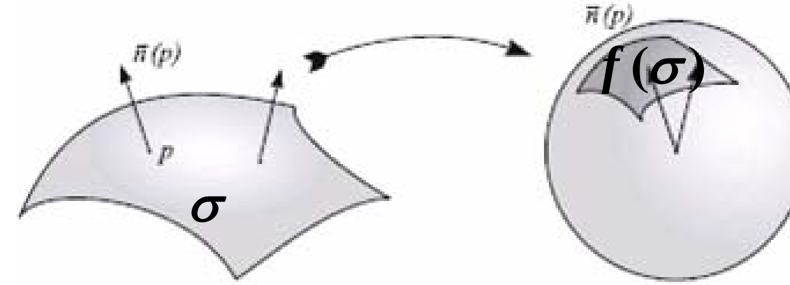
$$A(f(\sigma))=\iint\limits_{D(\sigma)}\left|\vec{n}_u\times\vec{n}_v\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

$\vec{n}_u\times\vec{n}_v\,//\,\vec{r}_u\times\vec{r}_v$，设 $\vec{n}_u\times\vec{n}_v=\lambda(u,v)\vec{r}_u\times\vec{r}_v$.

两边点乘$\vec{r}_u\times\vec{r}_v$得$(\vec{n}_u\times\vec{n}_v)\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)=\lambda(u,v)(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)^2$.

即 $\begin{vmatrix}\vec{n}_u\cdot\vec{r}_u & \vec{n}_u\cdot\vec{r}_v\\ \vec{n}_v\cdot\vec{r}_u & \vec{n}_v\cdot\vec{r}_v\end{vmatrix}=\lambda(u,v)\begin{vmatrix}\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_u\cdot\vec{r}_v\\ \vec{r}_v\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_v\end{vmatrix}$.

即 $\begin{vmatrix} -L & -M \\ -M & -N \end{vmatrix} = \lambda(u,v)\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}$.



即 $\lambda(u,v) = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} = K(u,v)$.

$$A(f(\sigma)) = \iint_{D(\sigma)} |\lambda(u,v)||\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \iint_{D(\sigma)} |K(u,v)||\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = |K(\xi,\eta)| \iint_{D(\sigma)} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

因此 $|K(\xi,\eta)| = \dfrac{A(f(\sigma))}{A(\sigma)}$, 其中 $(\xi,\eta) \in D(\sigma)$.

令 $\sigma \to P$ 即得 $|K| = \lim\limits_{\sigma \to P} \dfrac{A(f(\sigma))}{A(\sigma)}$.

§2.4 直纹面和可展曲面

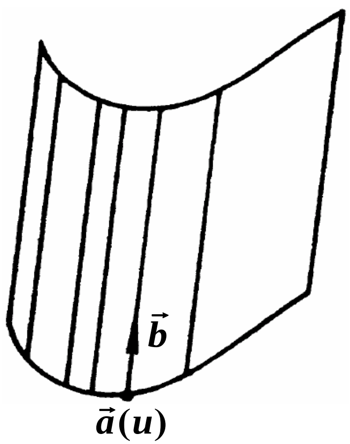
一、直纹面

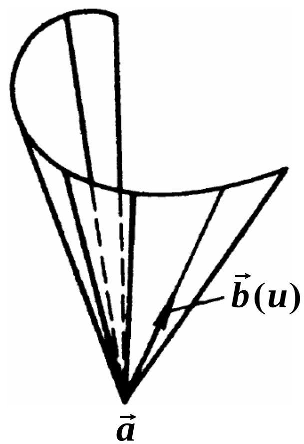
二、可展曲面

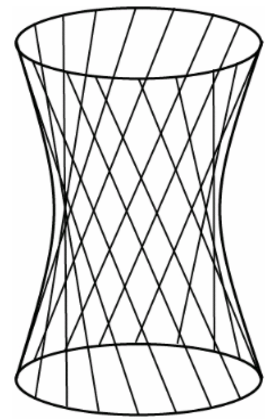
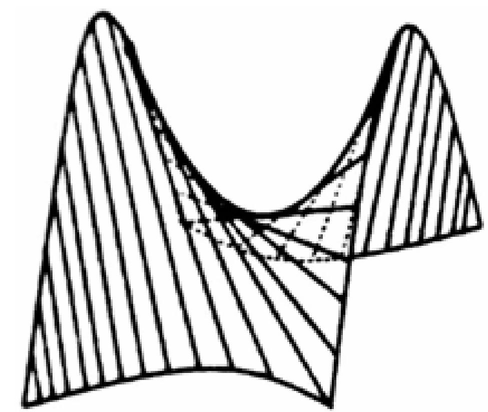
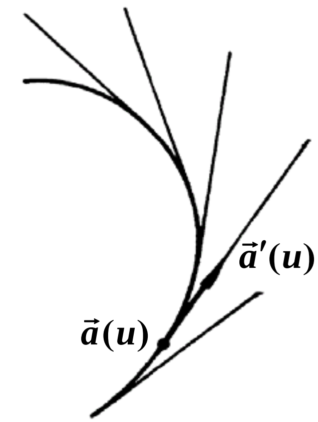
三、线汇(不讲)

一、直纹面

1. 概念 称由直线的运动轨迹构成的曲面为直纹面.



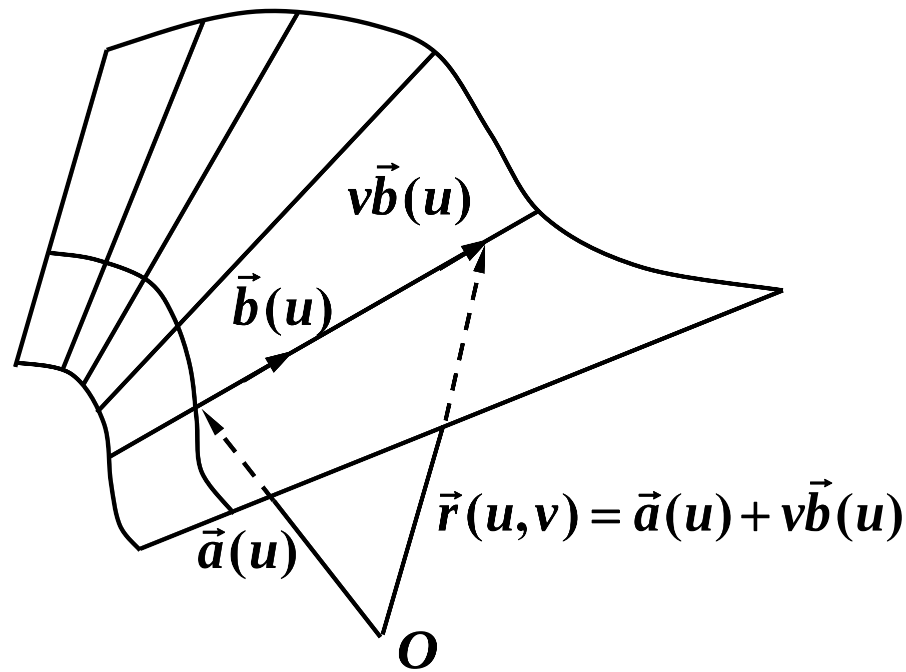


称组成直纹面的直线为直纹面的直母线.

称直纹面上和所有直母线都相交且只相交一次的曲线为直纹面的导线.

2. 直纹面的参数表示

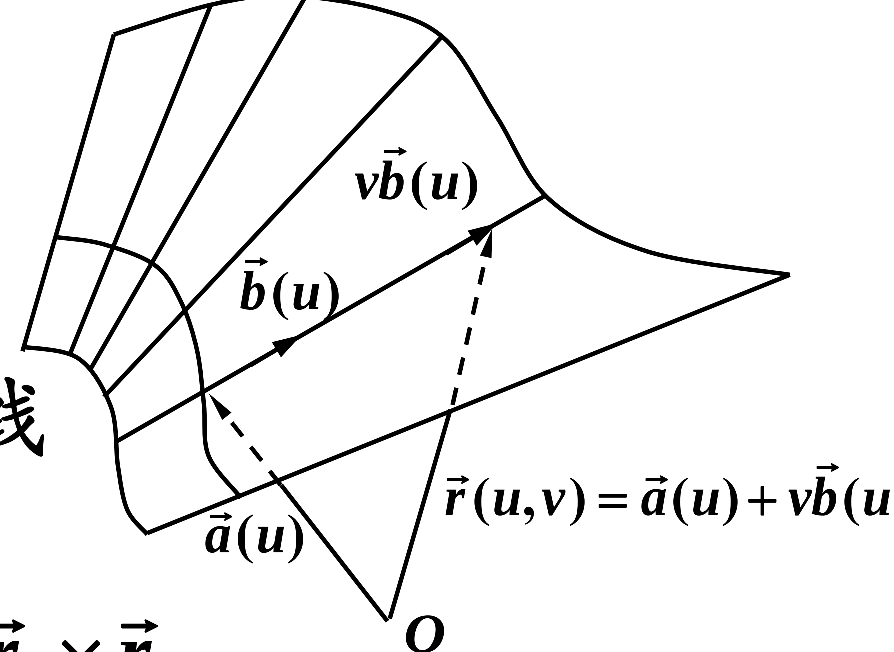


设曲线$\vec{a}=\vec{a}(u)$是一条导线,

过导线上的点$\vec{a}(u)$的直母线方向的单位向量为$\vec{b}(u)$,

则直纹面的方程为$\vec{r}(u,v)=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$.

3. 直母线上的法向量



$$\vec{r}(u,v)=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$$

u-曲线是导线, v-曲线是直母线

$$\vec{r}_u=\vec{a}'(u)+v\vec{b}'(u),\quad \vec{r}_v=\vec{b}(u).$$

$$\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\vec{a}'\times\vec{b}+v\vec{b}'\times\vec{b},\qquad \vec{n}=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}.$$

考虑当点P在直母线上移动时, P点处法向量的变化:

(1) 当$\vec{a}'\times\vec{b}\,//\,\vec{b}'\times\vec{b}$, 即$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=0$时, $\vec{n}$的方向保持不变.

此时在同一条直母线的点有相同的切平面.

(2) 当$\vec{a}'\times\vec{b}$与$\vec{b}'\times\vec{b}$不平行, 即$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')\neq 0$时,

此时, 点P在同一条直母线变化时, $\vec{n}$也有变化.

4. 直纹面上的Gauss曲率 $K \leqslant 0$

$$\vec{r}(u,v)=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u) \;\Rightarrow\; \vec{r}_u=\vec{a}'+v\vec{b}',\ \vec{r}_v=\vec{b}.$$

$$\Rightarrow\; \vec{r}_{uv}=\vec{b}',\ \ \vec{r}_{vv}=\vec{0}.\qquad N=\frac{(\vec{r}_{vv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=0,$$

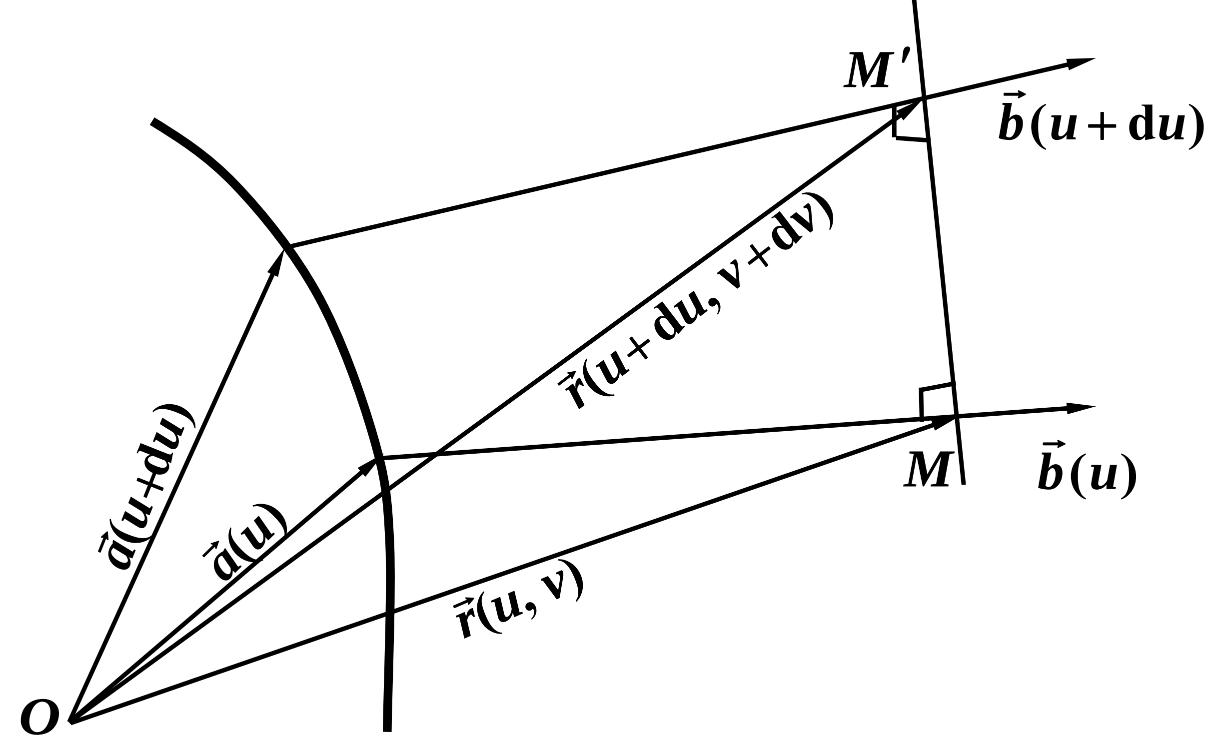
$$M=\frac{(\vec{r}_{uv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{(\vec{b}',\vec{a}'+v\vec{b}',\vec{b})}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{(\vec{b}',\vec{a}',\vec{b})}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

因此 $K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=-\dfrac{(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')^2}{(EG-F^2)^2}\leq 0.$

当$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')\neq 0$时, $K<0$;

当$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=0$时, $K=0$. (—— 可展曲面)

5. 腰点和腰曲线



腰点：邻近的两直母线的公垂线的垂足的极限位置.

腰曲线：腰点的轨迹.

腰曲线的方程：$\vec{r}(u)=\vec{a}(u)-\dfrac{\vec{a}'(u)\vec{b}'(u)}{[\vec{b}'(u)]^2}\vec{b}(u)$(当$\vec{b}'\neq\vec{0}$).

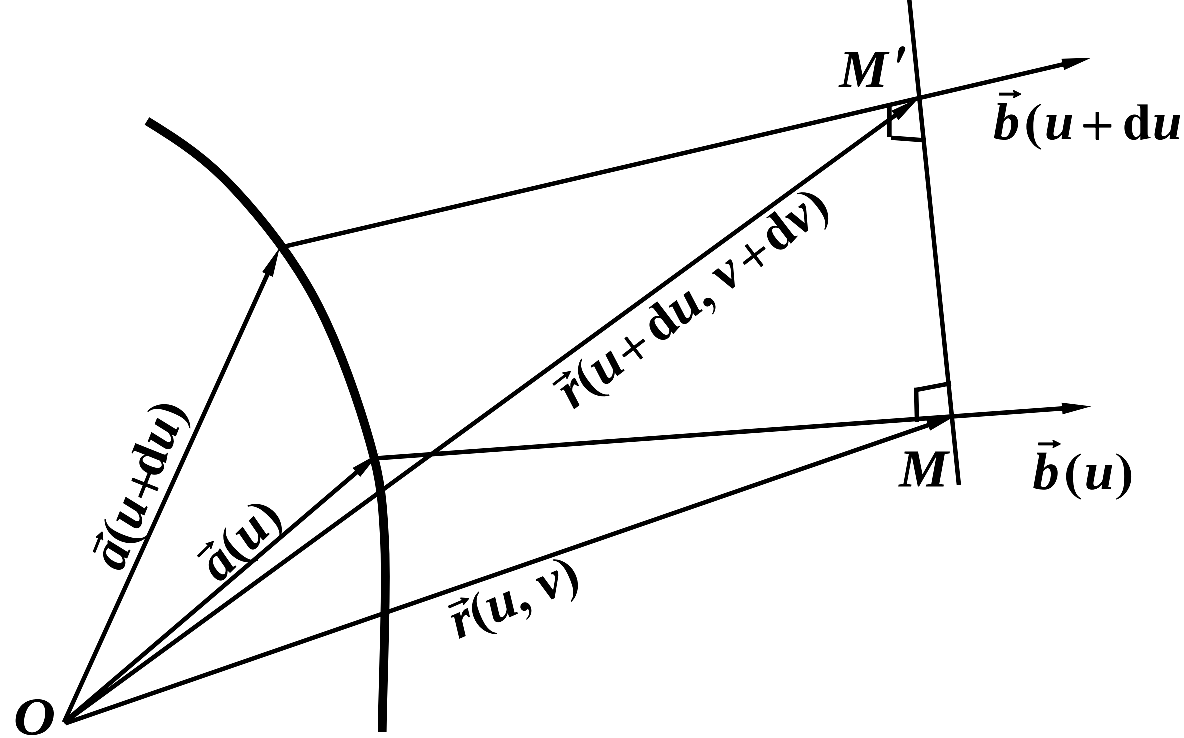
当$\vec{b}'(u)\neq\vec{0}$时导线为腰曲线的充要条件是$\vec{a}'(u)\vec{b}'(u)=0$.

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}(u) + v\vec{b}(u),$$

$$\overrightarrow{OM'} = \vec{a}(u + \Delta u)$$

$$+(v + \Delta v)\vec{b}(u + \Delta u),$$

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$$



$= \Delta\vec{a} + v\Delta\vec{b} + \Delta v[\vec{b}(u) + \Delta\vec{b}]$ (为俩直母线的公垂线方向)

其中 $\Delta\vec{a} = \vec{a}(u + \Delta u) - \vec{a}(u)$, $\Delta\vec{b} = \vec{b}(u + \Delta u) - \vec{b}(u)$.

由$\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{b}(u) = 0$和$\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{b}(u + \Delta u) = 0$得$\overrightarrow{MM'} \cdot \Delta\vec{b} = 0$.

即 $\Delta\vec{a} \cdot \Delta\vec{b} + v\Delta\vec{b}^2 + \Delta v\vec{b}(u) \cdot \Delta\vec{b} + \Delta v\Delta\vec{b}^2 = 0$.

两边同除以Δu^2得

$$\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta\vec{b}}{\Delta u}+v\left(\frac{\Delta\vec{b}}{\Delta u}\right)^2+\frac{\Delta v}{\Delta u}\vec{b}(u)\cdot\frac{\Delta\vec{b}}{\Delta u}+\frac{\Delta v}{\Delta u}\frac{\Delta\vec{b}}{\Delta u}\Delta\vec{b}=0.$$

令$\Delta u\to 0$得$\vec{a}'(u)\cdot\vec{b}'(u)+v\vec{b}'^2(u)+L\vec{b}(u)\cdot\vec{b}'(u)=0,\quad(*)$

其中$L=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta u}=-\dfrac{\vec{a}'(u)\cdot\vec{b}(u)}{\vec{b}^2(u)}$在后面会给出证明.

$\vec{b}(u)$恒为单位向量,因此$\vec{b}(u)\cdot\vec{b}'(u)=0$, 代入(*)式得到

直母线上腰点的参数应满足$v=-\dfrac{\vec{a}'(u)\cdot\vec{b}'(u)}{\vec{b}'^2(u)}$.

即腰曲线方程为$\vec{r}(u)=\vec{a}(u)-\dfrac{\vec{a}'(u)\vec{b}'(u)}{[\vec{b}'(u)]^2}\vec{b}(u)$.

$$\overrightarrow{MM'} = \Delta\vec{a} + v\Delta\vec{b} + \Delta v[\vec{b}(u) + \Delta\vec{b}],$$

由$\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{b}(u) = 0$得

$$\Delta\vec{a} \cdot \vec{b}(u) + v\Delta\vec{b} \cdot \vec{b}(u) + \Delta v[\vec{b}(u) + \Delta\vec{b}] \cdot \vec{b}(u) = 0.$$

两边同除以Δu得

$$\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta u} \cdot \vec{b}(u) + v\frac{\Delta\vec{b}}{\Delta u} \cdot \vec{b}(u) + \frac{\Delta v}{\Delta u}[\vec{b}(u) + \Delta\vec{b}] \cdot \vec{b}(u) = 0.$$

于是$\dfrac{\Delta v}{\Delta u} = -\dfrac{\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta u} \cdot \vec{b}(u) + v\frac{\Delta\vec{b}}{\Delta u} \cdot \vec{b}(u)}{[\vec{b}(u) + \Delta\vec{b}] \cdot \vec{b}(u)}$.　　令$\Delta u \to 0$得

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta u} = -\frac{\vec{a}'(u) \cdot \vec{b}(u) + v\vec{b}'(u) \cdot \vec{b}(u)}{\vec{b}^2(u)} = -\frac{\vec{a}'(u) \cdot \vec{b}(u)}{\vec{b}^2(u)}.$$

二、可展曲面

设 S 是直纹面,如果 S 的切平面沿每一条直母线是不变的,则称S是可展曲面.

即 $\vec{r}(u,v)=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$, 且 $(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=0.$

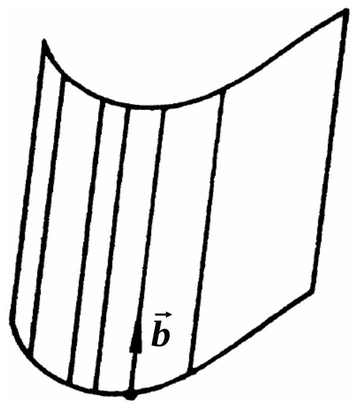
$\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\vec{a}'\times\vec{b}+v\vec{b}'\times\vec{b},$

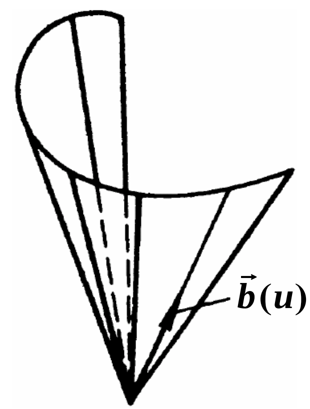
$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=0 \ \Leftrightarrow\ \vec{a}'\times\vec{b} // \vec{b}'\times\vec{b},\ \vec{n}$ 的方向保持不变.

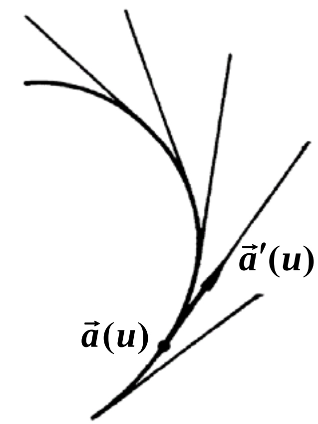
此时在同一条直母线的点有相同的切平面.

$\vec{b}(u)$为单位向量这一条件可以弱化为$\vec{b}(u)$为非零向量.

P78 命题1 每一可展曲面或是柱面或是锥面或是一条曲线的切线曲面. 反之亦然.







证 取腰曲线为导线, 设可展曲面为 $\vec{r}(u,v)=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$,

其中 $|\vec{b}(u)|=1, (\vec{a}'(u),\vec{b}(u),\vec{b}'(u))=0,\ \vec{a}'(u)\cdot\vec{b}'(u)=0.$

(1) 当 $\vec{a}'(u)=0$ 时, $\vec{a}(u)$ 为常向量.

腰曲线退化为一点, 各条直母线都经过这个公共的腰点,

此时曲面是以该公共腰点为顶点的锥面.

(2) 当 $\vec{a}'(u) \neq 0, \vec{b}'(u) \neq 0$ 时,

由 $|\vec{b}(u)| = 1$ 知 $\vec{b}'(u) \perp \vec{b}(u)$.

由 $\vec{a}'(u) \cdot \vec{b}'(u) = 0$ 知 $\vec{b}'(u) \perp \vec{a}'(u)$.

由$(\vec{a}'(u), \vec{b}(u), \vec{b}'(u)) = 0$知三向量$\vec{a}'(u), \vec{b}(u), \vec{b}'(u)$共面.

因此 $\vec{b}(u) // \vec{a}'(u)$.

以v为参数的直线$\vec{a}(u) + v\vec{b}(u)$是曲线$\vec{a}(u)$在u点的切线.

此时该曲面是腰曲线的切线曲面.

(3) 当 $\vec{a}'(u) \neq 0, \vec{b}'(u) = 0$ 时, $\vec{b}(u)$为常向量.

此时该曲面是腰曲线为准线, 该常向量为母线方向的柱面.

综合(1), (2), (3)知, 可展曲面要么是锥面, 要么是切线曲面,

要么是柱面. 反之可用可展曲面的定义证明, 略.

单参数曲面族的包络

设$\{S_\alpha\}: F(x,y,z,\alpha)=0$是一族曲面,$\alpha$是参数,$F$有一阶连续偏导数. 若有一曲面$S$满足:

(1) 它的每个点是$\{S_\alpha\}$中某个曲面上的点,且这两个曲面在该公共点处有相同的切平面;

(2) 对于$\{S_\alpha\}$中的每一个曲面S_α,在S上存在一点$P_\alpha \in S_\alpha$,且S与S_α在P_α处有相同的切平面,

则称S为单参数曲面族$\{S_\alpha\}$的包络.

对于包络S上的每一点(x,y,z)有$\begin{cases} F(x,y,z,\alpha)=0 \\ F_\alpha(x,y,z,\alpha)=0 \end{cases}$

从中消去α得到一个方程$\varphi(x,y,z)=0.$

称该方程所表示的曲面S^*为曲面族的判别曲面.

当曲面上的点和包络上的点都是正常点时$S^*=S.$

证 (1) 先证 $S\subseteq S^*$. $\forall$点$P\in S$, 在S上取一条过点P的曲线Γ, 设其方程为$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, 且$\overrightarrow{OP}=\vec{r}(t_0)$.

对于曲线Γ上的任意一点$(x(t),y(t),z(t))$,

设它在曲面族中以$\alpha(t)$为参数值的曲面上,即

$$F(x(t),y(t),z(t),\alpha(t))=0. \qquad ①$$

两边对 t 求导得 $F_x x'(t)+F_y y'(t)+F_z z'(t)+F_\alpha \alpha'(t)=0$. ②

$(F_x,F_y,F_z)\big|_{t=t_0}$ 为曲面 $S_{\alpha(t_0)}$ 在点 P 处的法向量,

$\vec{r}'(t_0)$ 为曲线 Γ 的切向量 $\Rightarrow \vec{r}'(t_0)$ 为 S 的一个切向量.

由包络的定义, S 与 $S_{\alpha(t_0)}$ 在点 P 相切, 有公共的法向.

因此 $(F_x,F_y,F_z)\big|_{t=t_0}\perp \vec{r}'(t_0)$, 即

$$[F_x x'(t)+F_y y'(t)+F_z z'(t)]\big|_{t=t_0}=0. \qquad ③$$

由②和③得 $F_\alpha\big|_{t=t_0}\alpha'(t_0)=0$. 由 Γ 的任意性知 $F_\alpha\big|_{t=t_0}=0$.

结合①知, 点 P 的坐标满足 $\begin{cases} F(x,y,z,\alpha)=0 \\ F_\alpha(x,y,z,\alpha)=0 \end{cases}$, 即 $P\in S^*$.

(2) 下证 $S^* \subseteq S$. $\forall (x,y,z) \in S^*$，$\exists \alpha(x,y,z)$使得

$$F(x,y,z,\alpha(x,y,z))=0, \quad F_\alpha(x,y,z,\alpha(x,y,z))=0.$$

$\forall$点$P \in S^*$, 在S^*上任取一条过点P的曲线Γ,

设其方程为$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$,

则$F(x(t),y(t),z(t),\alpha(x(t),y(t),z(t)))=0.$

两边对t求导得$F_x x'(t)+F_y y'(t)+F_z z'(t)+\overset{0}{\boxed{F_\alpha}}\alpha'(t)=0.$

即$F_x x'(t)+F_y y'(t)+F_z z'(t)=0.$

即在点P处, ($S_{\alpha(P)}$的法向)$\perp$(Γ的切向$(x'(t),y'(t),z'(t))$).

由Γ的任意性知, $S_{\alpha(P)}$与S^*在点P处相切. 因此$P \in S$.

对于包络S上的每一点(x,y,z)有$\begin{cases} F(x,y,z,\alpha)=0 \\ F_\alpha(x,y,z,\alpha)=0 \end{cases}$

从中消去α得到一个方程$\varphi(x,y,z)=0$.

称该方程所表示的曲面S^*为曲面族的判别曲面.

当曲面上的点和包络上的点都是正常点时$S^*=S$.

称包络S与族中的曲面S_α相切的曲线为特征线.

每个α对应一条特征线$\begin{cases} F(x,y,z,\alpha)=0 \\ F_\alpha(x,y,z,\alpha)=0 \end{cases}$.

特征线的轨迹就是包络.

曲面族中的每一曲面沿特征线与包络相切.

例1 求单参数平面族 $x\cos\alpha + y\sin\alpha - z\sin\alpha = 1$ 的包络.

解 设 $F(x,y,z,\alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha - z\sin\alpha - 1$,

则 $F_\alpha(x,y,z,\alpha) = -x\sin\alpha + y\cos\alpha - z\cos\alpha$.

由 $\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha - z\sin\alpha - 1 = 0 \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha - z\cos\alpha = 0 \end{cases}$ 得

$$\sin\alpha = \frac{y-z}{x^2+(y-z)^2}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{x^2+(y-z)^2}.$$

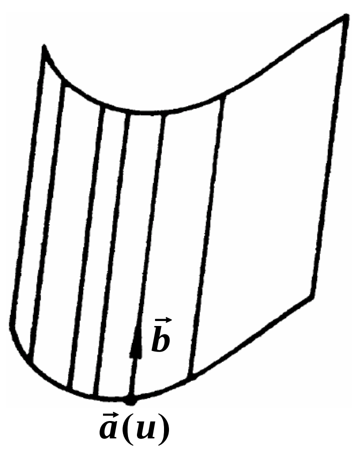
代入 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 得到包络 $x^2 + (y-z)^2 = 1$.

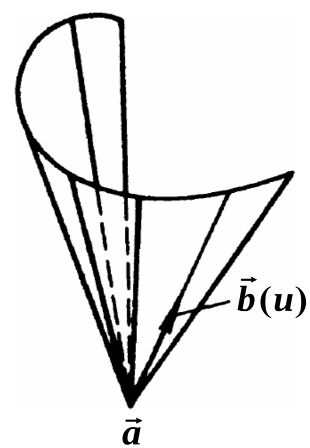
P81命题2 一个曲面为可展曲面的充要条件是

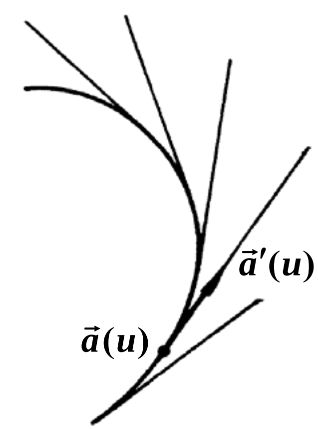
此曲面为单参数平面族的包络.

沿着直母线的公共切平面

包络面的特征线







① 包络的特征线 = 可展曲面的直母线

② 平面族中的平面 = 可展曲面沿着一条直母线的切平面

证 (充分性)

设单参数平面族为$A(\alpha)x+B(\alpha)y+C(\alpha)z+D(\alpha)=0.$

则特征线为 S_α: $\begin{cases} A(\alpha)x+B(\alpha)y+C(\alpha)z+D(\alpha)=0 \\ A'(\alpha)x+B'(\alpha)y+C'(\alpha)z+D'(\alpha)=0 \end{cases}.$

该特征线为两个平面的交线, 因此是直线.

包络是这些特征线(直线)的轨迹, 因此是直纹面.

由包络的定义, 平面族中的平面

$$A(\alpha)x+B(\alpha)y+C(\alpha)z+D(\alpha)=0 \qquad (*)$$

与包络相切于特征线S_α.

即包络沿每一条直母线S_α有相同的切平面(*).

故这个包络是可展曲面.

(必要性)

设一可展曲面为 $\vec{r}(u,v)=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$,

其中 $(\vec{a}'(u),\vec{b}(u),\vec{b}'(u))=0$.

则沿直母线$\vec{\rho}(v)=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$的切平面就是点$(u,0)$处

的切平面 $(\vec{R}-\vec{a}(u),\vec{a}'(u),\vec{b}(u))=0$ (与 v 无关).

当以u为参数时, 它表示一个单参数平面族.

该平面族中的每个平面与上述可展曲面在公共点处相切,

由包络的定义, 该平面族的包络就是上述可展曲面.

P81命题3 一个曲面为可展曲面的充要条件是

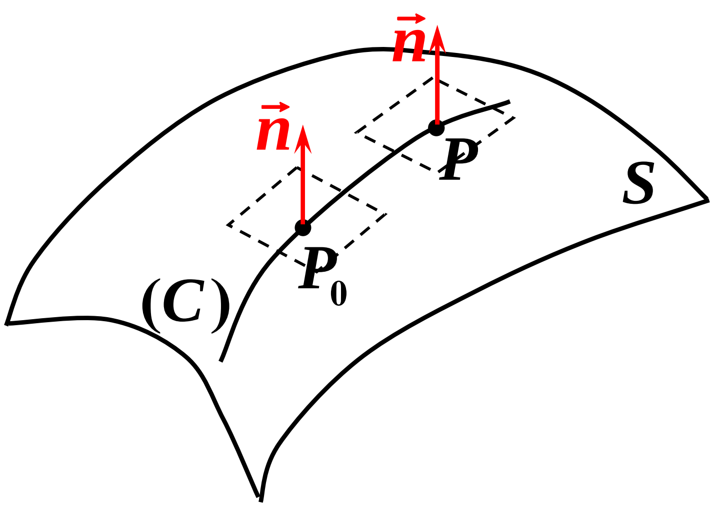
它的$\boxed{\text{Gauss曲率恒等于零}}$.

$\boxed{\text{有一族曲率线为}\boxed{\text{渐近曲线}}}$

?

$\boxed{\text{直母线}}$

沿着$k_N=0$的曲率线(C)有 $\mathrm{d}\vec{n}=-k_N\mathrm{d}\vec{r}=0\Rightarrow\vec{n}$为常向量



$$\boxed{P_0\text{处切平面}:(\vec{R}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0}$$

$\parallel$?

$$\boxed{P\text{处切平面}:(\vec{R}-\vec{r})\cdot\vec{n}=0}$$

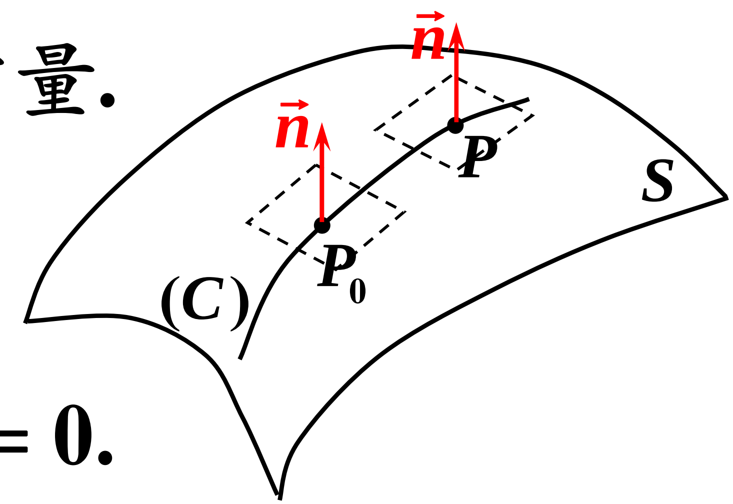
$$\Leftarrow\ (\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0\Leftarrow\ \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{n}=0\ \surd$$

证（充分性） 设在曲面S上，$K=k_1k_2\equiv 0$, 不妨设$k_2=0$.

由主方向判别定理, 沿着k_2所在主方向有$\mathrm{d}\vec{n}=-k_2\mathrm{d}\vec{r}=0$.

因此在这样的曲率线(C)上, 单位法向量为常向量.

$\vec{n}$与$\mathrm{d}\vec{r}$垂直$\Rightarrow \vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0\Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{r}$为常量.



$\forall$点$P_0\in(C)$, 记$\vec{r}_0=\overrightarrow{OP_0}$, 则

沿着(C)有$\vec{r}\cdot\vec{n}=\vec{r}_0\cdot\vec{n}$, 即$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0$.

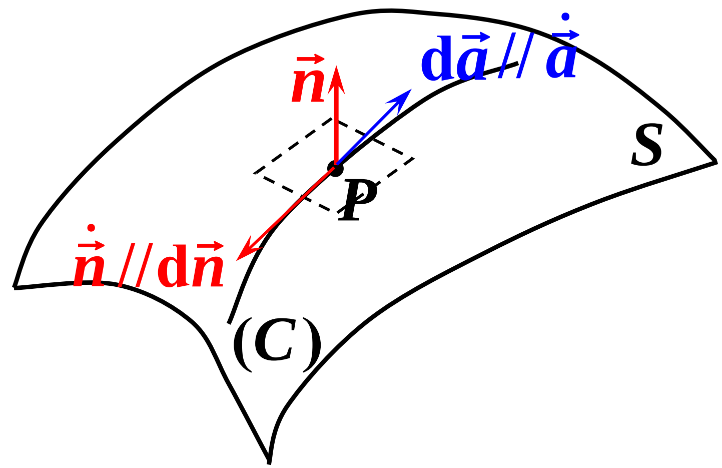
即(C)上每点都在过P_0的切平面$(\vec{R}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0$上.

由点P_0在(C)上的任意性知, (C)上点享有相同的切平面.

所有这样的切平面形成一个单参数平面族, S为它的包络...

P82命题4 曲面上的曲线是曲率线的充要条件是沿此曲线上的点处的曲面法线组成一可展曲面.

(该命题用可展曲面刻画了曲率线的特征)



法线曲面方程 $\vec{r}(s,t)=\vec{a}(s)+t\,\vec{n}(s)$

$(\dot{\vec{a}},\vec{n},\dot{\vec{n}})=0 \Leftrightarrow \dot{\vec{a}},\vec{n},\dot{\vec{n}}$共面

$\Leftrightarrow \dot{\vec{n}}\,//\,\dot{\vec{a}} \Leftrightarrow \mathrm{d}\vec{n}\,//\,\mathrm{d}\vec{a} \Leftrightarrow (\mathrm{d})$为主方向

证 (必要性) 设曲面上的曲线$\vec{a}(s)$是曲率线,

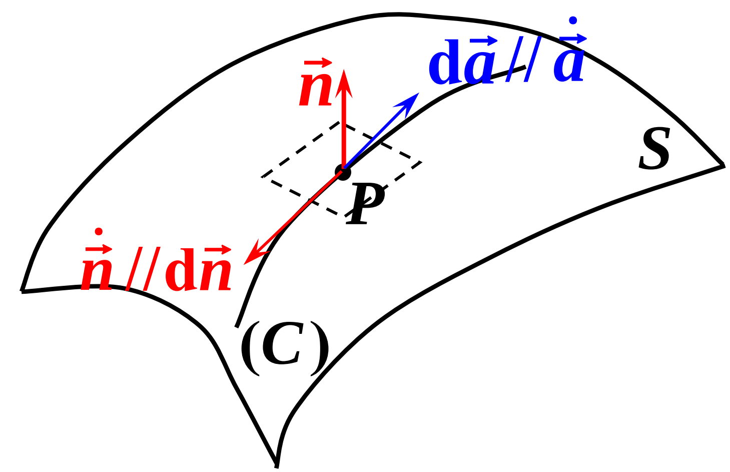
由主方向判别定理, $d\vec{n} // d\vec{a}$, 即$\dot{\vec{n}} // \dot{\vec{a}} \;\Rightarrow\; (\dot{\vec{a}}, \vec{n}, \dot{\vec{n}}) = 0.$

$\therefore$ 沿$\vec{a}(s)$的曲面法线组成的曲面$\vec{a}(s) + t\,\vec{n}(s)$为可展曲面.

(充分性) 设$\vec{a}(s)$是曲面上的一条曲线,

沿$\vec{a}(s)$的曲面法线组成的曲面$\vec{a}(s) + t\,\vec{n}(s)$为可展曲面,

$$\left.\begin{array}{l} \text{则其中}\dot{\vec{a}}, \vec{n}, \dot{\vec{n}}\text{共面} \\ |\vec{n}(s)| \equiv 1 \Rightarrow \vec{n} \perp \dot{\vec{n}} \\ \text{曲面的法向}\vec{n} \perp \dot{\vec{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{\vec{n}} // \dot{\vec{a}}$$



$\Rightarrow d\vec{n} // d\vec{a} \Rightarrow (d)$为主方向

$\vec{a}(s)$每点处的切向都是主方向$\Rightarrow \vec{a}(s)$为曲面的曲率线.

P83命题5 可展曲面可以与平面成等距对应.

现象：柱面, 锥面和切线曲面"可以展开"成一个平面.

如何证明：选取适当的参数表示, 使得可展曲面和平面

具有相同的第一基本形式.

证 (1) 当所给可展曲面是柱面时,

设柱面方程为$\vec{r}(s,v)=\vec{a}(s)+v\vec{b}$,

其中s为曲线$\vec{a}(s)$的弧长参数, $|\vec{b}|=1$, 且$\dot{\vec{a}}(s)\cdot\vec{b}=0$.

则$\vec{r}_s=\dot{\vec{a}}(s)$, $\vec{r}_v=\vec{b}$,

$$E=\vec{r}_s^{\,2}=\dot{\vec{a}}^2(s)=1,\ F=\vec{r}_s\cdot\vec{r}_v=\dot{\vec{a}}(s)\cdot\vec{b}=0,\ G=\vec{r}_v^{\,2}=\vec{b}^2=1.$$

$$\mathrm{I}_{柱}=E\mathrm{d}s^2+2F\mathrm{d}s\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2=\mathrm{d}s^2+\mathrm{d}v^2.$$

设平面方程为$\vec{r}^*(s,v)=(s,v,0)$,

则$\vec{r}_s^{\,*}=(1,0,0),\quad \vec{r}_v^{\,*}=(0,1,0),\quad E^*=1,\quad F^*=0,\quad G^*=1.$

$\mathrm{I}_{平}=E^*\mathrm{d}s^2+2F^*\mathrm{d}s\mathrm{d}v+G^*\mathrm{d}v^2=\mathrm{d}s^2+\mathrm{d}v^2=\mathrm{I}_{柱}.$

(2) 当所给可展曲面是锥面时,

设锥面方程为$\vec{r}(v,s)=\vec{a}+v\vec{b}(s)$, 其中$|\vec{b}(s)|=1$, s为弧长.

则$\vec{r}_v=\vec{b}(s),\quad \vec{r}_s=v\dot{\vec{b}}(s)$,

$E=\vec{r}_v^{\,2}=1,\quad F=\vec{r}_v\cdot\vec{r}_s=v\vec{b}\cdot\dot{\vec{b}}=0,\quad G=\vec{r}_s^{\,2}=v^2.$

$\mathrm{I}_{锥}=E\mathrm{d}v^2+2F\mathrm{d}v\mathrm{d}s+G\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}v^2+v^2\mathrm{d}s^2.$

设平面方程为$\vec{r}^*(v,s)=(v\cos s,v\sin s,0)$,

则$\vec{r}_v^{\,*}=(\cos s,\sin s,0),\quad \vec{r}_s^{\,*}=(-v\sin s,v\cos s,0)$,

$$E^* = \vec{r}_v^{*2} = 1,\ F^* = \vec{r}_v^{\,*} \cdot \vec{r}_s^{\,*} = 0,\quad G^* = \vec{r}_v^{*2} = v^2.$$

$$\mathrm{I}_{平} = E^* \mathrm{d}v^2 + 2F^* \mathrm{d}v\mathrm{d}s + G^* \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}v^2 + v^2 \mathrm{d}s^2 = \mathrm{I}_{锥}.$$

(3) 当所给可展曲面是切线曲面时,

设切线曲面方程为 $\vec{r}(s,v) = \vec{a}(s) + v\dot{\vec{a}}(s)$, 其中 s 为弧长.

则 $\vec{r}_s = \dot{\vec{a}} + v\ddot{\vec{a}}(s) = \vec{\alpha}(s) + vk(s)\vec{\beta}(s),\quad \vec{r}_v = \dot{\vec{a}} = \vec{\alpha},$

$$E = \vec{r}_s^{\,2} = 1 + v^2 k^2,\quad F = \vec{r}_s \cdot \vec{r}_v = 1,\quad G = \vec{r}_v^{\,2} = 1.$$

$$\mathrm{I}_{切} = E\mathrm{d}s^2 + 2F\mathrm{d}s\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2 = (1 + v^2k^2)\mathrm{d}s^2 + 2\mathrm{d}s\mathrm{d}v + \mathrm{d}v^2.$$

设平面曲线 $\vec{b}(s)$ 在 s 处与 $\vec{a}(s)$ 有相同的曲率,

构造平面方程 $\vec{r}^{\,*}(s,v) = \vec{b}(s) + v\dot{\vec{b}}(s)$,

则 $\mathrm{I}_{平} = (1 + v^2k^2)\mathrm{d}s^2 + 2\mathrm{d}s\mathrm{d}v + \mathrm{d}v^2 = \mathrm{I}_{切}.$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.23 证明挠曲线的主法线曲面与副法线曲面都不是可展曲面.

2.24 判断下列曲面是不是可展曲面,并给出理由.

(1) $\vec{r}(u,v)=(u+v,u-v,2uv)$;

(2) $xy=(z-1)^2$.

2.25 求单参数曲面族 $x^2+(y-\alpha)^2+(z-2\alpha)^2=1$ 的包络.

2.26 求双曲抛物面 $z=xy$ 沿着它与柱面 $x^2=y$ 的交线的切平面构成的单参数平面族的包络.

§2.5 曲面论的基本定理

一、曲面的基本方程和Christoffel符号

二、曲面的Riemann曲率张量和基本公式

三、曲面论的基本定理

张量记号系统

Gauss记号	u	v	$\vec{r}_u$	$\vec{r}_v$	E	F	G	L	M	N
张量记号	u^1	u^2	$\vec{r}_1$	$\vec{r}_2$	g_{11}	g_{12}	g_{22}	L_{11}	L_{12}	L_{22}
						g_{21}			L_{21}	

上标为 i 的符号表示第 i 个分量

下标 i 表示对第 i 个分量求偏微商

第一类基本量 $g_{ij}=\vec{r}_i\cdot\vec{r}_j$ 第二类基本量 $L_{ij}=\vec{r}_{ij}\cdot\vec{n}=-\vec{r}_i\cdot\vec{n}_j$

曲面的度量矩阵 $(g_{ij})_{2\times 2}$ 正定，记 $g=\det(g_{ij})=EG-F^2$，

$$(g^{ij})_{2\times 2}=(g_{ij})^{-1},\quad g^{11}=\frac{g_{22}}{g},\quad g^{12}=g^{21}=-\frac{g_{12}}{g},\quad g^{22}=\frac{g_{11}}{g}.$$

本书和式约定

$$\sum_i \triangleq \sum_{i=1}^{2}, \quad \sum_{i,j} \triangleq \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}, \quad \sum_{\alpha} a^{\alpha} b_{\alpha} = \sum_{\beta} a^{\beta} b_{\beta}, \quad \sum_{\alpha,\beta} a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma,\delta} a^{\gamma\delta} b_{\gamma\delta}$$

注意：(1)上、下指标使用哪个字母不影响求和；

(2)只对上、下标相同的指标求和.

Einstein的和式约定

如果在一个单项式中, 同一个指标出现两次,

一次作为上指标, 一次作为下指标, 则该项是关于这

个指标在规定范围内的求和式, 和号认为是省略的.

例如：$a^{\alpha} b_{\alpha} \triangleq \sum_{\alpha} a^{\alpha} b_{\alpha}$，$a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \triangleq \sum_{\alpha,\beta} a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}$

一、曲面的基本方程和Christoffel(克里斯托费尔)符号

在局部坐标系$[\vec{r};\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{n}]$中将基底的偏微商表示出来

得到曲面的基本方程:

$$\begin{cases} \vec{r}_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \vec{r}_k + L_{ij}\vec{n} & \text{——————— Gauss方程} \\ \vec{n}_i = -\sum_{j,k} L_{ik} g^{kj} \vec{r}_j & \text{——————— Weingarten方程} \end{cases}$$

其中 $\Gamma_{ij}^k \triangleq \sum_l g^{kl}[ij,l]$, —— 第二类Christoffel符号

$[ij,l] \triangleq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)$ —— 第一类Christoffel符号

证 采用待定系数法

$$\text{设}\begin{cases}\vec{r}_{ij}=\sum_k \Gamma_{ij}^k \vec{r}_k+\lambda_{ij}\vec{n} & ① \\ \vec{n}_i=-\sum_j \mu_i^j \vec{r}_j & ②\end{cases}$$

将①式两端点乘$\vec{n}$，并注意到$\vec{r}_k\cdot\vec{n}=0$得$\lambda_{ij}=L_{ij}$.

将$g_{ij}=\vec{r}_i\cdot\vec{r}_j$两端关于变量$u^l$求偏导得$\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}=\boxed{\vec{r}_{il}\cdot\vec{r}_j}+\boxed{\vec{r}_i\cdot\vec{r}_{jl}}$

交换指标得$\dfrac{\partial g_{il}}{\partial u^j}=\underline{\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_l}+\boxed{\vec{r}_i\cdot\vec{r}_{lj}}$，$\dfrac{\partial g_{lj}}{\partial u^i}=\boxed{\vec{r}_{li}\cdot\vec{r}_j}+\underline{\vec{r}_l\cdot\vec{r}_{ji}}$.

因此$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{il}}{\partial u^j}+\dfrac{\partial g_{lj}}{\partial u^i}-\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)=\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_l$. 即$[ij,l]=\sum_k \Gamma_{ij}^k g_{kl}$.

整理成关于Γ_{ij}^k的线性方程组$\begin{cases} g_{11}\Gamma_{ij}^1 + g_{21}\Gamma_{ij}^2 = [ij,1] \\ g_{12}\Gamma_{ij}^1 + g_{22}\Gamma_{ij}^2 = [ij,2] \end{cases}$.

解之得 $\Gamma_{ij}^k = \sum_l g^{kl}[ij,l]$.

将第②式$\vec{n}_i = -\sum_j \mu_i^j \vec{r}_j$两边点乘$\vec{r}_k$得$\vec{n}_i \cdot \vec{r}_k = -\sum_j \mu_i^j \vec{r}_j \cdot \vec{r}_k$.

即$-L_{ik} = -\sum_j \mu_i^j g_{jk}$，亦$\begin{cases} g_{11}\mu_i^1 + g_{21}\mu_i^2 = L_{i1} \\ g_{12}\mu_i^1 + g_{22}\mu_i^2 = L_{i2} \end{cases}$.

解之得 $\mu_i^j = \sum_k g^{jk} L_{ik}$.

$$\Gamma_{ij}^{k}=\sum_{l}g^{kl}[ij,l]=\frac{1}{2}\sum_{l}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^{j}}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^{i}}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{l}}\right)$$

为曲面的内蕴量.

若采用过去的符号，则有

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{GE_{u}-F(2F_{u}-E_{v})}{2(EG-F^{2})},\quad \Gamma_{11}^{2}=\frac{E(2F_{u}-E_{v})-FE_{u}}{2(EG-F^{2})},$$

$$\Gamma_{12}^{1}=\frac{GE_{v}-FG_{u}}{2(EG-F^{2})},\quad \Gamma_{12}^{2}=\frac{EG_{u}-FE_{v}}{2(EG-F^{2})},$$

$$\Gamma_{22}^{1}=\frac{G(2F_{v}-G_{u})-FG_{v}}{2(EG-F^{2})},\quad \Gamma_{22}^{2}=\frac{EG_{v}-F(2F_{v}-G_{u})}{2(EG-F^{2})}.$$

特别地，对于正交的曲纹坐标网有$F=0$，则

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{E_u}{2E},\qquad \Gamma_{11}^{2}=-\frac{E_v}{2G},\qquad \Gamma_{12}^{1}=\frac{E_v}{2E},$$

$$\Gamma_{12}^{2}=\frac{G_u}{2G},\qquad \Gamma_{22}^{1}=-\frac{G_u}{2E},\qquad \Gamma_{22}^{2}=\frac{G_v}{2G}.$$

二、Gauss公式和Codazzi-Mainardi公式

定义 **Riemann曲率张量**　设 $m,i,j,k\in\{1,2\}$,

$$R_{mijk}\triangleq\sum_l g_{ml}\left[\frac{\partial\Gamma_{ij}^l}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma_{ik}^l}{\partial u^j}+\sum_p\left(\Gamma_{ij}^p\Gamma_{pk}^l-\Gamma_{ik}^p\Gamma_{pj}^l\right)\right]$$

则对于C^3类曲面有**Gauss公式**: $R_{mijk}=L_{ij}L_{mk}-L_{ik}L_{mj}$

(注:Gauss公式中只有一个独立: $R_{1212}=L_{21}L_{12}-L_{22}L_{11}$)

和 **Codazzi-Mainardi**(科达奇-迈因纳尔迪)**公式**:

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k}-\frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j}=\sum_l\left(\Gamma_{ik}^l L_{lj}-\Gamma_{ij}^l L_{lk}\right)$$

(注: Codazzi-Mainardi公式中只有二个独立)

证 由Gauss方程$\vec{r}_{ij}=\sum_l \Gamma_{ij}^l \vec{r}_l + L_{ij}\vec{n}$两边对$u^k$求偏导得

$$\vec{r}_{ijk}=\sum_l \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k}\vec{r}_l + \Gamma_{ij}^l \vec{r}_{lk} \right) + \frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k}\vec{n} + L_{ij}\vec{n}_k$$

将$\vec{r}_{lk}=\sum_m \Gamma_{lk}^m \vec{r}_m + L_{lk}\vec{n},\ \vec{n}_k=-\sum_{l,m} L_{km} g^{ml}\vec{r}_l$代入得

$$\vec{r}_{ijk}=\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k}\vec{n}+\sum_l \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k}\vec{r}_l + \Gamma_{ij}^l L_{lk}\vec{n}\right)+\sum_{l,m}\left(\Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m \vec{r}_m - L_{ij}L_{km}g^{ml}\vec{r}_l\right)$$

互换指标j和k得

$$\vec{r}_{ikj}=\frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j}\vec{n}+\sum_l \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j}\vec{r}_l + \Gamma_{ik}^l L_{lj}\vec{n}\right)+\sum_{l,m}\left(\Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m \vec{r}_m - L_{ik}L_{jm}g^{ml}\vec{r}_l\right)$$

$\vec{r} \in C^3 \Rightarrow$ 混合偏导 $\vec{r}_{ijk} = \vec{r}_{ikj}$.

比较 $\vec{r}_l$ 的系数得

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^{l}}{\partial u^{k}} + \sum_{p} \Gamma_{ij}^{p} \Gamma_{pk}^{l} - \sum_{m} L_{ij} L_{km} g^{ml}$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{ik}^{l}}{\partial u^{j}} + \sum_{p} \Gamma_{ik}^{p} \Gamma_{pj}^{l} - \sum_{m} L_{ik} L_{jm} g^{ml}$$

即 $\sum_{m} g^{ml} (L_{ij} L_{km} - L_{ik} L_{jm}) = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{l}}{\partial u^{k}} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{l}}{\partial u^{j}} + \sum_{p} (\Gamma_{ij}^{p} \Gamma_{pk}^{l} - \Gamma_{ik}^{p} \Gamma_{pj}^{l})$

即

$$\sum_{l} g_{ml} \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^{l}}{\partial u^{k}} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{l}}{\partial u^{j}} + \sum_{p} \left(\Gamma_{ij}^{p} \Gamma_{pk}^{l} - \Gamma_{ik}^{p} \Gamma_{pj}^{l} \right) \right] = L_{ij} L_{mk} - L_{ik} L_{mj}$$

$\vec{r} \in C^3 \Rightarrow$ 混合偏导 $\vec{r}_{ijk} = \vec{r}_{ikj}$.

比较 $\vec{r}_l$ 的系数，并解关于 $L_{ij}L_{mk} - L_{ik}L_{mj}$ 的线性方程组得到

$$\sum_l g_{ml}\left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} + \sum_p \left(\Gamma_{ij}^p \Gamma_{pk}^l - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{pj}^l\right)\right] = L_{ij}L_{mk} - L_{ik}L_{mj}$$

比较 $\vec{n}$ 的系数得到 $\dfrac{\partial L_{ij}}{\partial u^k} - \dfrac{\partial L_{ik}}{\partial u^j} = \sum_l (\Gamma_{ik}^l L_{lj} - \Gamma_{ij}^l L_{lk})$

上述两式分别就是**Gauss**公式 和 **Codazzi-Mainardi**公式.

再谈Gauss曲率

由Gauss公式$R_{mijk}=L_{ij}L_{mk}-L_{ik}L_{mj}$得到Gauss曲率 $K=-\dfrac{R_{1212}}{g}$

即 $$K=-\frac{\sum\limits_{l} g_{1l}\left[\dfrac{\partial\Gamma_{21}^{l}}{\partial u^{2}}-\dfrac{\partial\Gamma_{22}^{l}}{\partial u^{1}}+\sum\limits_{p}\left(\Gamma_{21}^{p}\Gamma_{p2}^{l}-\Gamma_{22}^{p}\Gamma_{p1}^{l}\right)\right]}{g}$$

$\Gamma_{ij}^{k}, g_{ij}, g^{ij}, g$ 都是曲面的内蕴量,因此有

Gauss's Egregium Theorem

曲面的Gauss曲率是内蕴量.

Gauss绝妙定理是微分几何学发展过程中的里程碑

(1) 此定理说明曲面的度量本身蕴含着一定的弯曲性质,并由此产生了曲面的内蕴几何学.(以给定第一基本形式的抽象曲面作为研究对象)

(2) Riemann将其推广到高维内蕴几何学,即Riemann几何.

用原来的符号表示Gauss曲率

$$K=\frac{\begin{vmatrix} F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}}{(EG-F^2)^2}$$

当$F=0$时, $K=\dfrac{-1}{\sqrt{EG}}\left[\left(\dfrac{\left(\sqrt{G}\right)_u}{\sqrt{E}}\right)_u+\left(\dfrac{\left(\sqrt{E}\right)_v}{\sqrt{G}}\right)_v\right]$

证

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[\boxed{(r_{uu},r_u,r_v)}\boxed{(r_{vv},r_u,r_v)}-(r_{uv},r_u,r_v)^2\right]$$

$$\left|\begin{bmatrix}\vec{r}_{uu}'\\ \vec{r}_u'\\ \vec{r}_v'\end{bmatrix}\right|\left|\begin{bmatrix}\vec{r}_{vv} & \vec{r}_u & \vec{r}_v\end{bmatrix}\right|$$

$$\parallel$$

$$\left|\begin{bmatrix}\vec{r}_{uu}'\\ \vec{r}_u'\\ \vec{r}_v'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{r}_{vv} & \vec{r}_u & \vec{r}_v\end{bmatrix}\right|$$

$$\parallel$$

$$\begin{vmatrix} r_{uu}\cdot r_{vv} & r_{uu}\cdot r_u & r_{uu}\cdot r_v\\ r_u\cdot r_{vv} & r_u\cdot r_u & r_u\cdot r_v\\ r_v\cdot r_{vv} & r_v\cdot r_u & r_v\cdot r_v\end{vmatrix}$$

证

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[(r_{uu},r_u,r_v)(r_{vv},r_u,r_v)-(r_{uv},r_u,r_v)^2\right]$$

$$=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[\begin{vmatrix} r_{uu}\cdot r_{vv} & r_{uu}\cdot r_u & r_{uu}\cdot r_v \\ r_u\cdot r_{vv} & r_u\cdot r_u & r_u\cdot r_v \\ r_v\cdot r_{vv} & r_v\cdot r_u & r_v\cdot r_v \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} r_{uv}\cdot r_{uv} & r_{uv}\cdot r_u & r_{uv}\cdot r_v \\ r_u\cdot r_{uv} & r_u\cdot r_u & r_u\cdot r_v \\ r_v\cdot r_{uv} & r_v\cdot r_u & r_v\cdot r_v \end{vmatrix}\right]$$

$$\begin{vmatrix} \vec{r}_{uu}\cdot\vec{r}_{vv}-\vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_{uv} & \vec{r}_{uu}\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_{uu}\cdot\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\cdot\vec{r}_{vv} & E & F \\ \vec{r}_v\cdot\vec{r}_{vv} & F & G \end{vmatrix}+\boxed{\begin{vmatrix} \vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_{uv} & \vec{r}_{uu}\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_{uu}\cdot\vec{r}_v \\ 0 & E & F \\ 0 & F & G \end{vmatrix}}$$

$$\|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\cdot\vec{r}_{uv} & E & F \\ \vec{r}_v\cdot\vec{r}_{uv} & F & G \end{vmatrix}+\boxed{\begin{vmatrix} \vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_{uv} & \vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_v \\ 0 & E & F \\ 0 & F & G \end{vmatrix}}$$

证

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[(\boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)-(\boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)^2\right]$$

$$=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_v\\ \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v\\ \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_v\\ \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v\\ \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v\end{vmatrix}\right]$$

$$E=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u\Rightarrow E_u=2\vec{r}_u\cdot\vec{r}_{uu}$$

$$=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[\begin{vmatrix}\underbrace{\boxed{\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}-\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}}}_{F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu}} & \boxed{\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_u} & \boxed{\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_v}=F_u-\frac{1}{2}E_v\\ \boxed{\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{vv}}=F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F\\ \boxed{\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{vv}}=\frac{1}{2}G_v & F & G\end{vmatrix}\right.$$

$$\left.-\begin{vmatrix}0 & \boxed{\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_u} & \boxed{\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_v}\\ \boxed{\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uv}}=\frac{1}{2}E_v & E & F\\ \boxed{\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{uv}}=\frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}\right]$$

三、曲面论的基本定理

设 $\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2=\sum_{i,j}g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$,

$$\mathrm{II}=L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2=\sum_{i,j}L_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$$

是给定的两个二次型, 其中 I 是正定的,

g_{ij}, L_{ij}都是关于u和v的C^2类函数,

且满足Gauss公式和Codazzi-Mainardi公式,

则除了空间中的位置差别外, 唯一地存在一个曲面,

使得 I 和 II 分别为此曲面的第一和第二基本形式.

证明思路

Step1. 增加条件固定曲面的空间位置;

Step2. 将系数 g_{ij}, L_{ij} 代入曲面的基本方程, 得到一个关于 $\vec{r}(u^1,u^2)$ 的偏微分方程组, 它的可积条件正好是Gauss公式和Codazzi-Mainardi公式, 在第一步给出的条件下存在唯一一组解 $\vec{r}(u^1,u^2)$;

Step3. 证明在曲面 $\vec{r}(u^1,u^2)$ 上任一点, $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}$ 构成一个右手标架, 且 $g_{ij}=\vec{r}_i\cdot\vec{r}_j,\ \vec{n}\cdot\vec{r}_i=0,\ \vec{n}^2=1$;

Step4. 证明给定的 Ⅰ 和 Ⅱ 分别是此曲面的第一、二基本形式.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.27 如果曲面的第一基本形式是$\mathrm{d}s^2=\dfrac{\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2}{(u^2+v^2+C)^2}$,

试计算该曲面的第二类克里斯托费尔符号.

2.28 证明不存在曲面, 使得

$$E=G=1,\quad F=0,\quad L=1,\quad M=0,\quad N=-1.$$

§6 曲面上的测地线

一、曲面曲线的测地曲率

二、曲面上的测地线

三、曲面上的半测地坐标网

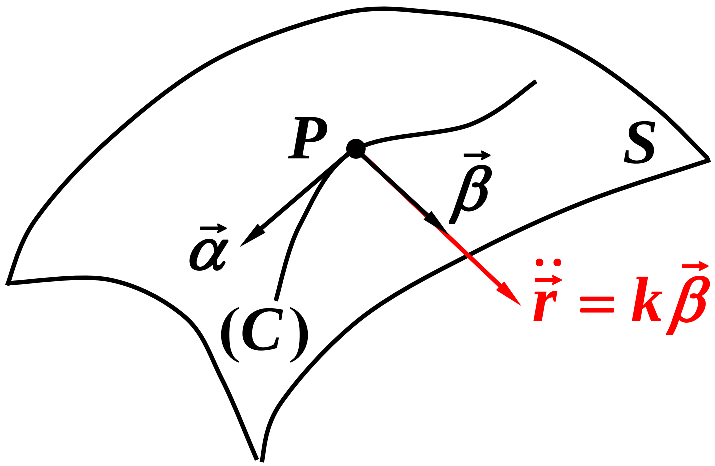
四、曲面上测地线的短程性

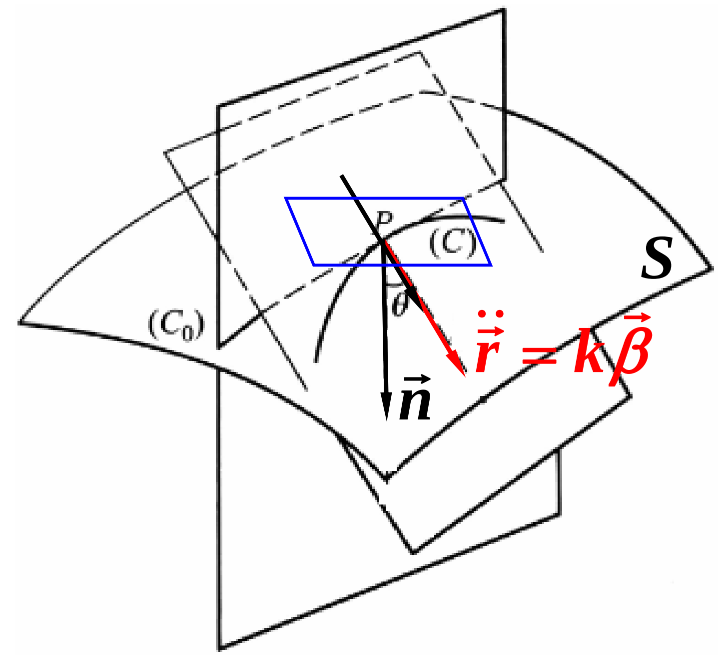
五、Gauss(高斯)-Bonnet(波涅)公式

六、曲面上向量的平行移动

七、极小曲面(了解一下即可)

回忆曲线的曲率和曲面曲线的曲率

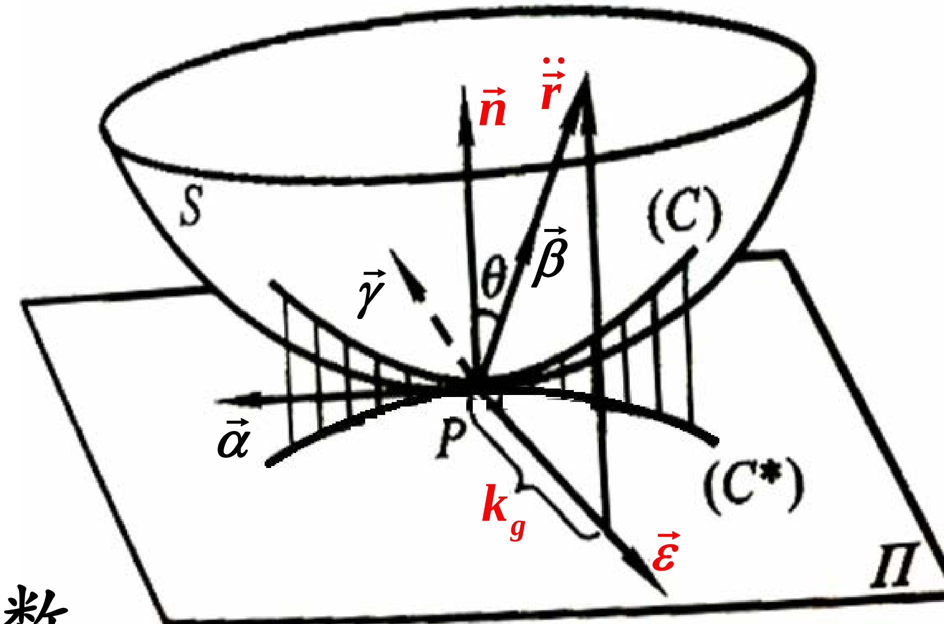




法曲率$k_n = k\cos\theta$

测地曲率$k_g = \pm k\sin\theta$

一、曲面曲线的测地曲率



曲面 S：$\vec{r}=\vec{r}(u^1,u^2)$

S上的曲线(C): $u^\alpha=u^\alpha(s)$

其中$\alpha=1,2$; s为(C)的自然参数.

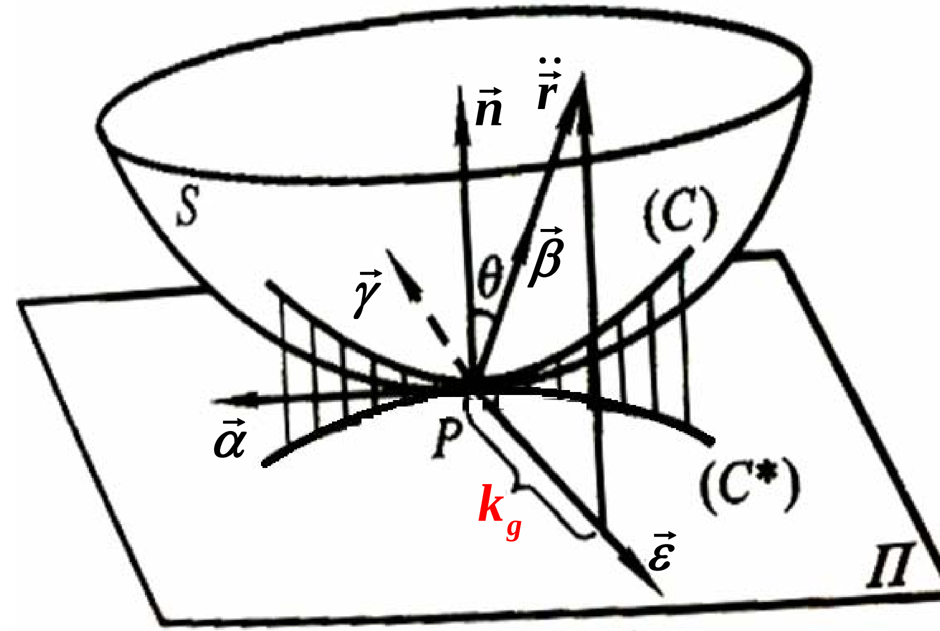
设点P对应参数值s, (C)在点P处的基本向量为$\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$.

$\vec{n}$为S在点P的单位法向量, θ为$\vec{\beta}$与$\vec{n}$之间的夹角.

称$\ddot{\vec{r}}=\dot{\vec{\alpha}}=k\vec{\beta}$为$(C)$在点$P$的曲率向量. 记$\vec{\varepsilon}=\vec{n}\times\vec{\alpha}$.

称曲率向量在$\vec{\varepsilon}$上的投影k_g为(C)在P点的测地曲率.

测地曲率的性质



$$k_g = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{\varepsilon} = k\vec{\beta} \cdot \vec{\varepsilon}$$

$$= k\vec{\beta} \cdot (\vec{n} \times \vec{\alpha}) = k(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{n})$$

$$= k(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{n} \ = k\,\vec{\gamma} \cdot \vec{n}$$

$$= \pm k \sin\theta.$$

注意到法曲率$k_n = k\cos\theta$,因此

P96命题1 $\quad k^2 = k_g^2 + k_n^2.$

P96命题2 曲面S上的曲线(C)在点P的测地曲率的绝对值等于(C)在点P的切平面π上的正投影曲线(C^*)的曲率.

测地曲率的计算

它也可作为k_g的定义

$$k_g = k(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{n}) = (\vec{\alpha},k\vec{\beta},\vec{n}) = \boxed{(\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}},\vec{n})}.$$

$$\vec{r} = \vec{r}(u^1(s),u^2(s)), \qquad \dot{\vec{r}} = \sum_i \dot{u}^i \vec{r}_i,$$

$$\ddot{\vec{r}} = \sum_i [\ddot{u}^i \vec{r}_i + \dot{u}^i (\sum_j \vec{r}_{ij} \dot{u}^j)] = \sum_{i,j} \dot{u}^i \dot{u}^j \vec{r}_{ij} + \sum_i \ddot{u}^i \vec{r}_i$$

$$= \sum_{i,j} \dot{u}^i \dot{u}^j (\sum_k \Gamma_{ij}^k \vec{r}_k + L_{ij}\vec{n}) + \sum_i \ddot{u}^i \vec{r}_i$$

$$= \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j \vec{r}_k + \sum_{i,j} L_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j \vec{n} + \sum_k \ddot{u}^k \vec{r}_k$$

$$= \sum_k (\ddot{u}^k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j) \vec{r}_k + \sum_{i,j} L_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j \vec{n}.$$

测地曲率的计算

$$k_g = k(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{n}) = (\vec{\alpha},k\vec{\beta},\vec{n}) = (\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}},\vec{n}).$$

$$= (\sum_i \dot{u}^i \vec{r}_i,\ \sum_k (\ddot{u}^k + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j)\vec{r}_k + \sum_{i,j} L_{ij}\dot{u}^i \dot{u}^j \vec{n},\ \vec{n})$$

$$= (\dot{u}^1 \vec{r}_1,\ (\ddot{u}^2 + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^2 \dot{u}^i \dot{u}^j)\vec{r}_2,\ \vec{n})$$

$$+ (\dot{u}^2 \vec{r}_2,\ (\ddot{u}^1 + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^1 \dot{u}^i \dot{u}^j)\vec{r}_1,\ \vec{n})$$

$$= \dot{u}^1(\ddot{u}^2 + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^2 \dot{u}^i \dot{u}^j)(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{n}) - \dot{u}^2(\ddot{u}^1 + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^1 \dot{u}^i \dot{u}^j)(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{n})$$

$$= \sqrt{g}[\dot{u}^1(\ddot{u}^2 + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^2 \dot{u}^i \dot{u}^j) - \dot{u}^2(\ddot{u}^1 + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^1 \dot{u}^i \dot{u}^j)]$$

测地曲率的计算

$$k_g = \sqrt{g}\begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s} & \dfrac{\mathrm{d}^2u^1}{\mathrm{d}s^2} + \sum\limits_{i,j}\Gamma_{ij}^1 \dfrac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s} \\ \dfrac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s} & \dfrac{\mathrm{d}^2u^2}{\mathrm{d}s^2} + \sum\limits_{i,j}\Gamma_{ij}^2 \dfrac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s} \end{vmatrix} \quad \text{(为曲面的内蕴量)}$$

当曲纹坐标网为正交网,即$F \equiv 0$时,

$$k_g = \sqrt{g}[\dot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\dot{v} + \frac{G_u}{2E}(\dot{v})^3 - \frac{E_v}{2G}(\dot{u})^3$$

$$+ (\frac{G_u}{G} - \frac{E_u}{2E})(\dot{u})^2\dot{v} + (\frac{G_v}{2G} - \frac{E_v}{E})\dot{u}(\dot{v})^2]$$

Liouville(刘维尔)公式

设曲面S的曲纹坐标网为正交网，因而曲面的的第一基本形式是$I = E\,\mathrm{d}u^2 + G\,\mathrm{d}v^2$．设$(C)$：$u = u(s), v = v(s)$是曲面$S$上的一条曲线，其中$s$是弧长参数．假定$(C)$与$u$-曲线的交角是$\theta(s)$，则曲线$(C)$的测地曲率是

$$k_g = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \boxed{-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}} \cos\theta + \boxed{\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u}} \sin\theta$$

还可写为 $k_g = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + k_{g_u}\cos\theta + k_{g_v}\sin\theta$

其中 k_{g_u} 和 k_{g_v} 分别为u-曲线和v-曲线的测地曲率.

证 $$\left.\begin{aligned}\dot{\vec{r}}&=\frac{\vec{r}_u}{\sqrt{E}}\cos\theta+\frac{\vec{r}_v}{\sqrt{G}}\sin\theta\\ \dot{\vec{r}}&=\vec{r}_u\dot{u}+\vec{r}_v\dot{v}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\dot{u}=\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{E}}\\ \dot{v}=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{G}}\end{cases}$$

$$\ddot{u}=\frac{-\sin\theta}{\sqrt{E}}\dot{\theta}-\frac{\sqrt{E}\cos\theta}{E^2}\left(E_u\frac{\cos\theta}{\sqrt{E}}+E_v\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}\right)$$

$$\ddot{v}=\frac{\cos\theta}{\sqrt{G}}-\frac{\sqrt{G}\sin\theta}{G^2}\left(G_u\frac{\cos\theta}{\sqrt{E}}+G_v\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}\right)$$

$$k_g=\sqrt{g}\Big[\dot{u}\ddot{v}-\ddot{u}\dot{v}+\frac{G_u}{2E}(\dot{v})^3-\frac{E_v}{2G}(\dot{u})^3$$

$$+\left(\frac{G_u}{G}-\frac{E_u}{2E}\right)(\dot{u})^2\dot{v}+\left(\frac{G_v}{2G}-\frac{E_v}{E}\right)\dot{u}(\dot{v})^2\Big]$$

$$=\dot{\theta}-\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}\cos\theta+\frac{G_u}{2G\sqrt{E}}\sin\theta$$

$$=\dot{\theta}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta.$$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.29 求半径为 R 的球面上半径为 a 的圆的测地曲率.

2.30 求位于正螺面$x=u\cos v, y=u\sin v, z=av$上的圆柱螺线 $x=u_0\cos v, y=u_0\sin v, z=av$ (u_0为常数)的测地曲率.

2.31 设曲面S上的曲率线(C)上的点P不是S的抛物点. 证明:(C)在点P的测地曲率的绝对值等于在S的球面映射下(C)的像在对应点的测地曲率与S在点P沿(C)的切向的法曲率之积的绝对值.

二、曲面上的测地线

平面上的直线 $\longrightarrow$ 曲面上的测地线

平面上的直线:① 任一点的切向量平行; ②曲率为零;

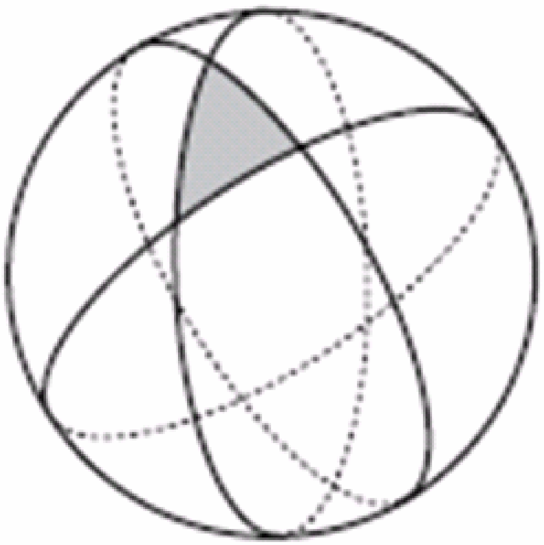
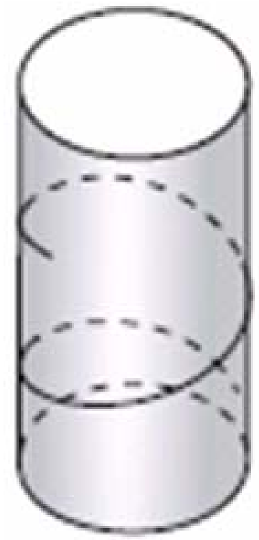
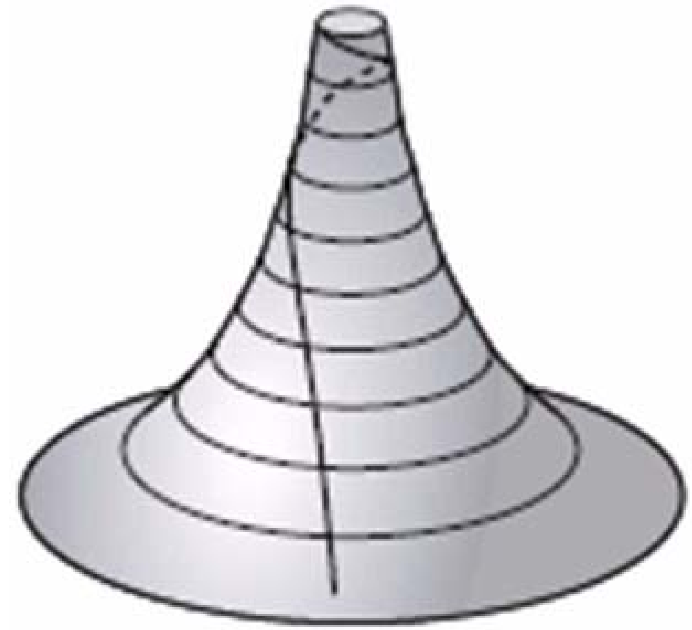
③ 直线段是连接点与点之间的最短线段.

曲面上测地曲率恒等于零的曲线称为该曲面的**测地线**.

例 曲面上的直线一定是该曲面的测地线.

P98命题3 曲面上非直线的曲线是测地线的充要条件是除了曲率为零的点外, **曲线的主法线重合于曲面的法线**.

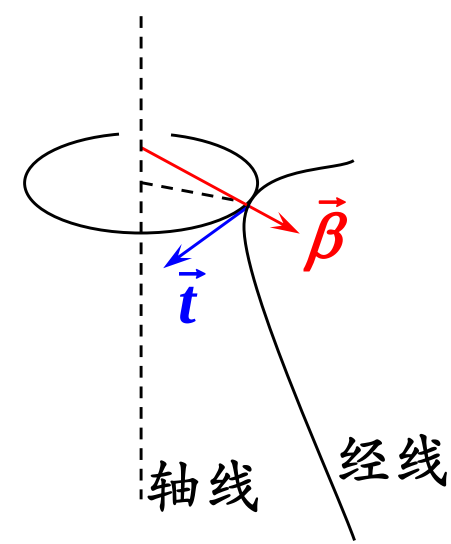
P98推论 如果两曲面沿一条曲线相切,并且此曲线是其中一个曲面的测地线,那么它也是另一个曲面的测地线.

例 旋转曲面S上的经线(子午线)是该曲面S的测地线.

证 设经线,轴线,主法线共面于平面π.

$$\left.\begin{array}{r}\text{则平行圆的切向量}\ \vec{t}\perp\pi \\ \vec{\beta}\perp\text{经线的切向}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{\beta}\,//\,\vec{n}$$



$\Rightarrow$ 经线的主法线重合于曲面的法线,

因此经线是旋转面上的测地线.

例 如果在曲面S上运动的质点P只受到将它约束在S上的力的作用,则点P的轨迹(C)是S上的测地线.

证 设P的轨迹(C)的方程为$\vec{r}(t)$,约束力为$\vec{F}(t)$.

由牛顿第二运动定律,$\vec{F}(t)=m\vec{r}''(t)$ (m为质点的质量).

由题目条件,$\vec{F}(t)\perp\vec{r}'(t)$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{于是 } \vec{r}''(t)\perp\vec{r}'(t) \Rightarrow \vec{r}''(t)\,//\,\vec{\beta}(t) \\ \qquad\qquad \vec{r}''(t)\,//\,\vec{F}(t)\,//\,\vec{n}(t)\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{\beta}(t)\,//\,\vec{n}(t).$$

(C)的主法线重合于曲面的法线,因此(C)是S上的测地线.

测地线的微分方程

测地线$\vec{r}=\vec{r}(u^1(s),u^2(s))$上的点满足$\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{r}_l=0\ (l=1,2)$

$$\ddot{\vec{r}}=\sum_k\left(\frac{\mathrm{d}^2u^k}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\right)\vec{r}_k+\sum_{i,j}L_{ij}\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\vec{n}$$

从而$\displaystyle\sum_k g_{kl}\left(\frac{\mathrm{d}^2u^k}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\right)=0\quad(l=1,2)$

又$\because g\neq 0,\therefore$得到测地线的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2u^k}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}=0\quad(k=1,2)$$

P99定理 过曲面上任一点,给定曲面的一个切方向,则存在唯一一条测地线切于此方向.

证明 满足方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2u^k}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\dfrac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}=0\ \ (k=1,2)$

的曲线都是测地线(各点的测地曲率为零).

给出曲面上的一个点和该点处的一个切方向,

相当于给出了初始条件: $u^k(s_0)=u_0^k,\dfrac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}s}(s_0)=t_0^k.$

由常微分方程的理论知该初值问题有且仅有唯一解,

即有且仅有一条过给定点且切于给定切方向的测地线.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.32 求正螺面$\vec{r}(u,v)=\{u\cos v, u\sin v, av\}$上的测地线.

2.33 利用刘维尔公式证明:

(1)平面上的测地线为直线;

(2)圆柱面上的测地线为圆柱螺线.

2.34 证明: 若曲面上非直线的所有测地线均为平面曲线, 则这样的测地线必为曲率线.

三、曲面上的半测地坐标网

如果曲面上的曲纹坐标网是正交网, 且其中一族曲线是测地线, 则称这个坐标网为**半测地坐标网**.

P100命题4 给出曲面上一条曲线, 则总存在一个半测地坐标网, 使得它的非测地坐标曲线族中包含给定的这条曲线.

证 过曲面上给定的曲线(C)的每一点, 沿着(C),

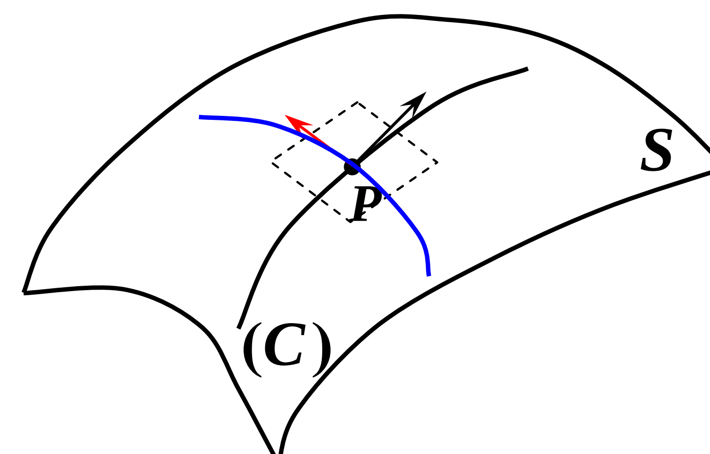
在切平面上对于垂直于(C)的切线方向,

存在曲面的唯一一条测地线,

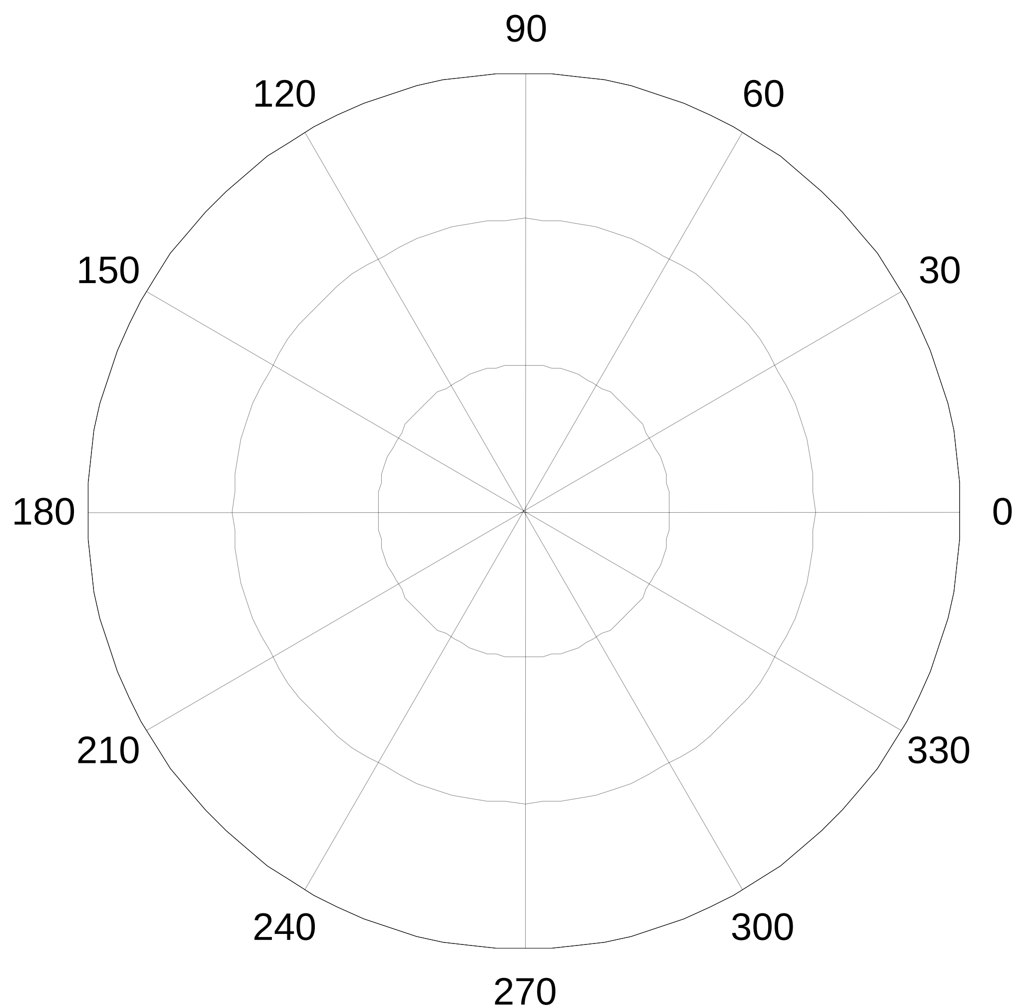
于是得到与(C)正交的测地线族.

再作这一族测地线的正交轨线,

它必定包含了给定的曲线(C).



半测地坐标网是平面上的极坐标网在曲面上的推广.



半测地坐标网条件下的曲面第一基本形式

取曲面上的一条测地线(C)为v-曲线：$u=u_0$，再取与(C)正交的测地线族为u-曲线族，另取该测地线族的正交轨线族为v-曲线族，则得一半测地坐标网. 对于这个坐标网而言，曲面的第一基本形式可以简化为$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2$，其中$G(u,v)$满足条件$G(u_0,v)=1, G_u(u_0,v)=0$.

并且这里的参数u,v具有如下几何意义：

u-曲线上介于$u=c_1$和$u=c_2$之间的弧长为$|c_2-c_1|$；

在曲线$u=u_0$上介于$v=d_1$和$v=d_2$之间的弧长为$|d_2-d_1|$.

证 设u-曲线是测地线, 则$u^2=c$应满足测地线的微分方程

$$\ddot{u}^2+\sum_{j,k}\Gamma_{jk}^2\dot{u}^j\dot{u}^k=0.$$

将$\dot{u}^2=0,\ \ddot{u}^2=0$代入得$\Gamma_{11}^2\dot{u}^1\dot{u}^1=0$, 即$\boxed{\Gamma_{11}^2}\ \overset{-\frac{E_v}{2G}}{}=0\Rightarrow E_v=0.$

则可设 $E=\varphi(u)$.　引入新参数$\bar{u}$使得$\mathrm{d}\bar{u}=\sqrt{\varphi(u)}\mathrm{d}u$,

则第一基本形式$\mathrm{d}s^2=E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2=\mathrm{d}\bar{u}^2+\bar{G}(\bar{u},v)\mathrm{d}v^2$.

参数$\bar{u}$的几何意义: 在测地线$v=$常数上, 两条正交轨线

$\bar{u}=c_1$和$\bar{u}=c_2$之间测地线的长度为$\left|\int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}\bar{u}\right|=|c_2-c_1|$.

设确定半测地坐标网的曲线(C)的参数表示为$\bar{u}=u_0$,

引入新参数$\bar{v}$使得$\mathrm{d}\bar{v}=\sqrt{\bar{G}(u_0,v)}\,\mathrm{d}v$.

则 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\bar{u}^2+\bar{G}(\bar{u},v)\mathrm{d}v^2=\mathrm{d}\bar{u}^2+\bar{\bar{G}}(\bar{u},\bar{v})\mathrm{d}\bar{v}^2$.

参数$\bar{v}$的几何意义: 在曲线$(C)(\bar{u}=u_0)$上, $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\bar{v}^2$,

(C)上介于$\bar{v}=d_1$和$\bar{v}=d_2$之间的弧长为$\left|\int_{d_1}^{d_2}\mathrm{d}\bar{v}\right|=|d_2-d_1|$.

进一步选(C)是一条测地线$\bar{u}=u_0$,

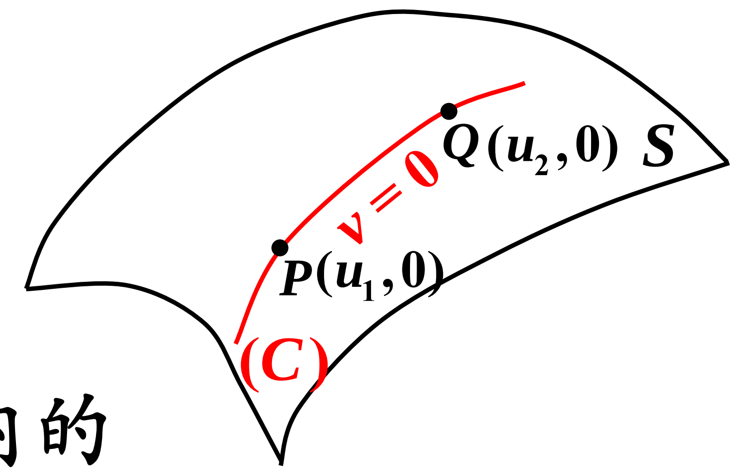
$-\dfrac{G_u}{2E}$

代入测地线的微分方程$\ddot{u}^1+\sum_{j,k}\Gamma^1_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k=0$ 得$\boxed{\Gamma^1_{22}}\Big|_{u=u_0}=0$.

因此 $\bar{\bar{G}}_u(u_0,\bar{v})=0$.

四、曲面上测地线的短程性

P101定理 若给出曲面上充分小邻域内的两点P和Q，则过P,Q两点在小邻域内的测地线段是连接P,Q两点的曲面上的曲线中弧长最短的曲线.



证 如右图所示，设(C)是曲面上小邻内连接P,Q两点的测地线.

选取半测地坐标网，使得包含(C)在内的一族测地线为u-曲线族，它的正交轨线族为v-曲线族.

则曲面的第一基本形式可以为$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+G(u,v)\mathrm{d}v^2$.

不妨设(C)的曲纹坐标方程为$v=0$，

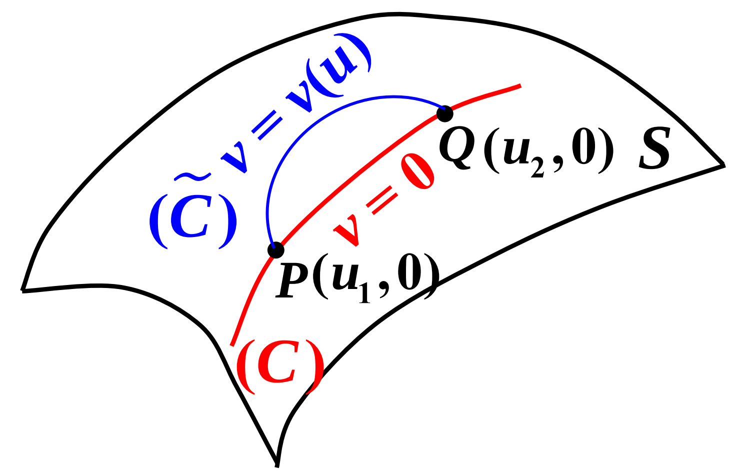
P和Q的曲纹坐标为$(u_1,0)$和$(u_2,0)$，且$u_1<u_2$.

则测地线(C)在P,Q之间的这一段弧长为$s_0=u_2-u_1$.

设$(\widetilde{C})$为该曲面上连接P,Q两点的任意一条曲线,

它的曲纹坐标方程为$v=v(u)$.

则$(\widetilde{C})$在P,Q之间的这一段弧长为



$$s=\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{1+G(u,v(u))v'^2(u)}\mathrm{d}u$$

$$\geq\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{1+0}\mathrm{d}u=s_0$$

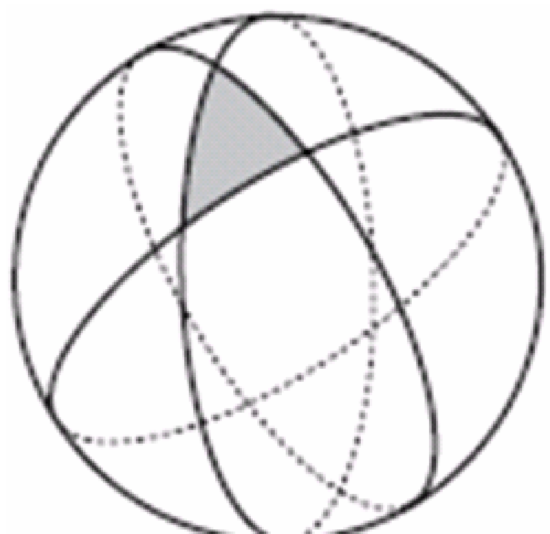
只有当$v'(u)\equiv 0$时等号成立,此时$(\widetilde{C})$与(C)重合.

因此(C)是在这个小邻域内连接P,Q两点的最短曲面曲线.

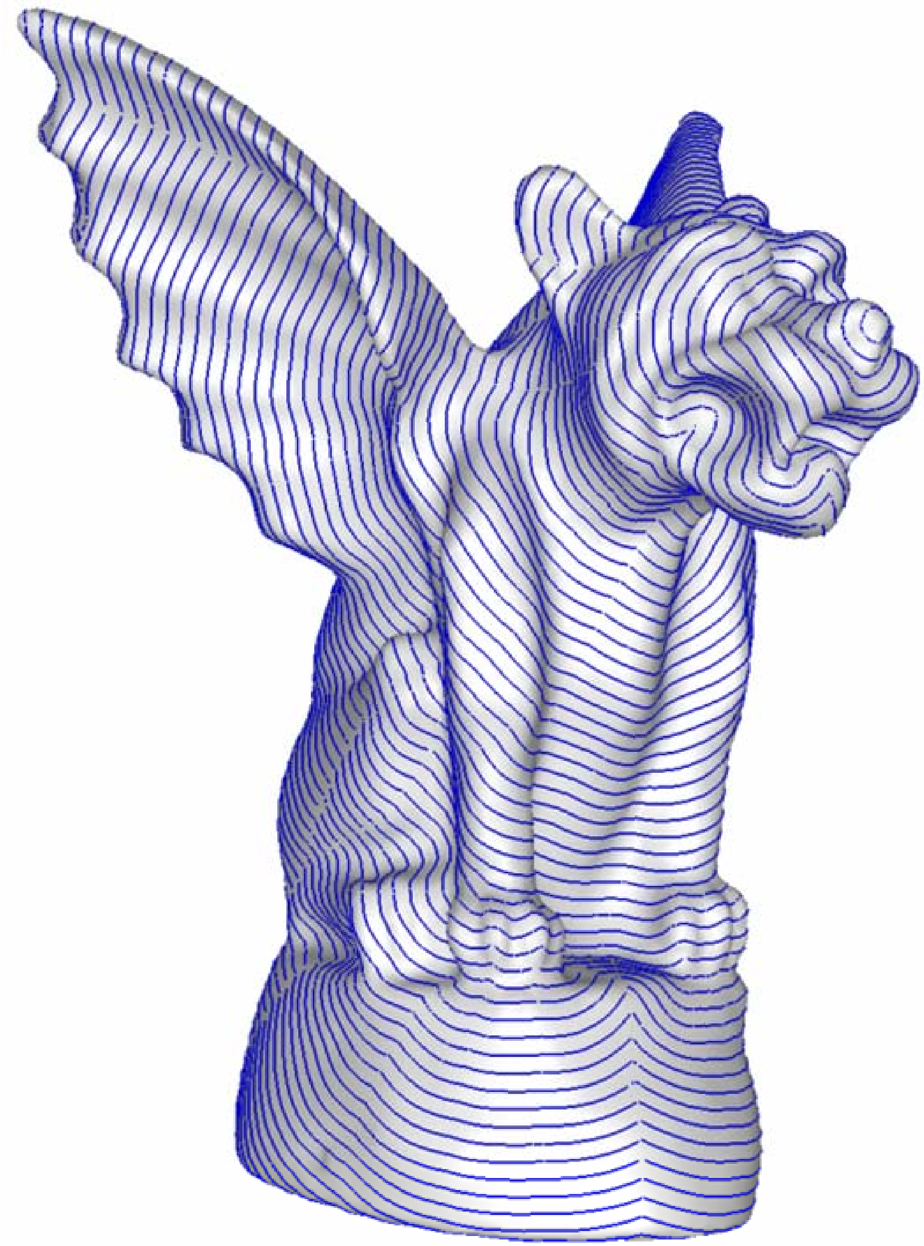
注

在不是充分小的邻域内, 该定理不一定成立.

例如球面上的大圆是测地线, 所以球面上不是直径两端的两点, 连结它们的大圆弧有两段, 显然长的不是连结它们两点的最短线, 而短的是.

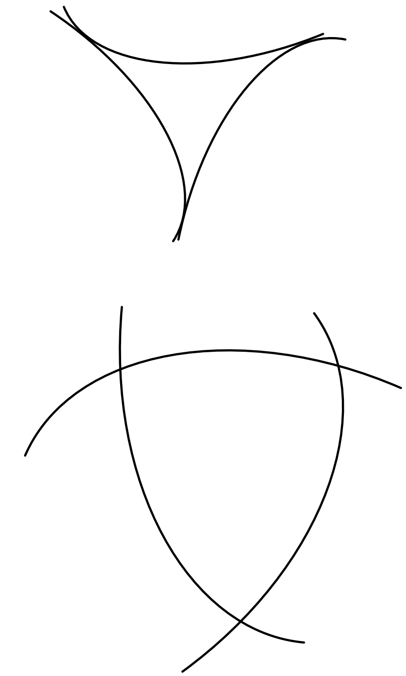


测地线族与它的正交轨线族示例



Ref: Fast Exact and Approximate Geodesics on Meshes

五、Gauss-Bonnet(高斯-波涅)公式



在平面上,三角形的内角和等于π,但在曲面上的情形可能不大一样,如图.这一节就是把平面上的结果推广到曲面上去.

在曲面S上给出一个由l条光滑曲线段所围成的曲边多边形∂G,它围成了一个单连通曲面域G.设S的高斯曲率和∂G的测地曲率分别为K和k_g,曲面的面积元素和弧长元素分别为$\mathrm{d}S$和$\mathrm{d}s$,则有

$$\iint_G K\mathrm{d}S+\oint_{\partial G} k_g\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{l}(\pi-\alpha_i)=2\pi \qquad \text{(Gauss-Bonnet公式)}$$

其中α_i是∂G的第i个内角的弧度数.

P111习题13 若$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2$, 则

$$k_g\mathrm{d}s=\mathrm{d}\left[\arctan\left(\sqrt{G}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)\right]+(\sqrt{G})_u\mathrm{d}v$$

证明: 由于坐标网正交, $F=0$, 由Liouville公式

$$k_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta,$$

和$E=1$知 $k_g\mathrm{d}s=\mathrm{d}\theta+\dfrac{G_u}{2G}\sin\theta\mathrm{d}s=\mathrm{d}\theta+(\sqrt{G})_u\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{G}}\mathrm{d}s$

由$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{E}}=\cos\theta$ 和$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{G}}$ (P97)

知 $\theta=\arctan\left(\sqrt{G}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)$. 代入即得结论.

Gauss-Bonnet公式的证明

在曲面上引进半测地坐标网,使得$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2$,

由刚证的结论知 $k_g\mathrm{d}s=\mathrm{d}\left[\arctan\left(\sqrt{G}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)\right]+(\sqrt{G})_u\mathrm{d}v$

两边沿边缘∂G积分得到

$$\oint_{\partial G}k_g\mathrm{d}s+\oint_{\partial G}-(\sqrt{G})_u\mathrm{d}v=\oint_{\partial G}\mathrm{d}\left[\arctan(\sqrt{G}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u})\right]\qquad(*)$$

对第二个积分应用Green公式得到

$$\oint_{\partial G}-(\sqrt{G})_u\mathrm{d}v=\iint_G-(\sqrt{G})_{uu}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

由P91中Gauss曲率的表达式知$K=-\dfrac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}$

$\Rightarrow-(\sqrt{G})_{uu}=K\sqrt{G}$ 而$\mathrm{d}S=\sqrt{g}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, $g=G$

因此$\oint_{\partial G} -(\sqrt{G})_u \mathrm{d}v = \iint_G -(\sqrt{G})_{uu} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_G K\mathrm{d}S$

设∂G的$\vec{\alpha}$和u-曲线所成的角为θ

由$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{E}} = \cos\theta$知$\cos\theta = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}$　　(P97)

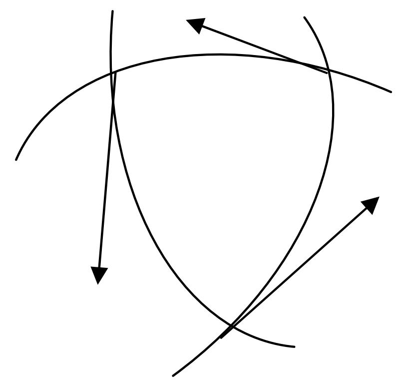
由$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{G}}$知$\sin\theta = \sqrt{G}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$

因此$\tan\theta = \sqrt{G}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\sqrt{G}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)$

(*)式中的第三个积分$\oint_{\partial G} \mathrm{d}\left[\arctan(\sqrt{G}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u})\right] = \oint_{\partial G} \mathrm{d}\theta$

(*)式变为 $\oint\limits_{\partial G} k_g \mathrm{d}s + \iint\limits_G K \mathrm{d}S = \oint\limits_{\partial G} \mathrm{d}\theta$

绕∂G一周,θ的增量是2π,即边界曲线的切向量转了2π,



这个2π等于分段曲线所转过的角度之和加上所有外角

即 $\oint\limits_{\partial G} \mathrm{d}\theta + (\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + \cdots + (\pi - \alpha_l) = 2\pi$

故(*)式变成 $\oint\limits_{\partial G} k_g \mathrm{d}s + \iint\limits_G K \mathrm{d}S + \sum_{i=1}^{l} (\pi - \alpha_i) = 2\pi.$

推论1 如果∂G为一条光滑曲线,则外角为零,有

$$\oint_{\partial G} k_g \mathrm{d}s + \iint_G K \mathrm{d}S = 2\pi$$

推论2 如果∂G为一个测地三角形,即它的三条边由三条测地线组成,则有

$$\iint_G K \mathrm{d}S = 2\pi - (\pi - \alpha_1) - (\pi - \alpha_2) - (\pi - \alpha_3)$$

$$= 2\pi - 3\pi + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \sigma(\Delta) - \pi,$$

其中$\sigma(\Delta)$表示测地三角形的内角和.

可见 $K > 0 \Rightarrow \sigma(\Delta) > \pi$

$K = 0 \Rightarrow \sigma(\Delta) = \pi$

$K < 0 \Rightarrow \sigma(\Delta) < \pi$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.35 求半径为R的曲面上测地三角形三内角之和.

2.36 利用高斯-波涅公式证明: 若曲面上存在两族夹角为定角的测地线, 则它的高斯曲率处处为零.

2.37 若曲面的高斯曲率处处小于零, 则该曲面上不存在围成单连通区域的光滑的闭测地线.

六、曲面上向量的平行移动

曲面上的测地线相当于平面上的直线, 简单对比:

平面直线	曲面上的测地线
①曲率为零;	①测地曲率为零;
②两点间最短距离是直线段的长度;	②两点间(小范围)最短距离是测地线的长度;
③给定一个方向和一点决定一条直线.	③给定一个方向和一点决定一条测地线.

直线上任一点处的切向量都是平行的, 该性质是否也可以推广到曲面的测地线上? 另一个问题是: 平面中的向量平移具有两条基本的性质: 保持线性关系和保持内积. 曲面上的平移至少要保持这两个性质.

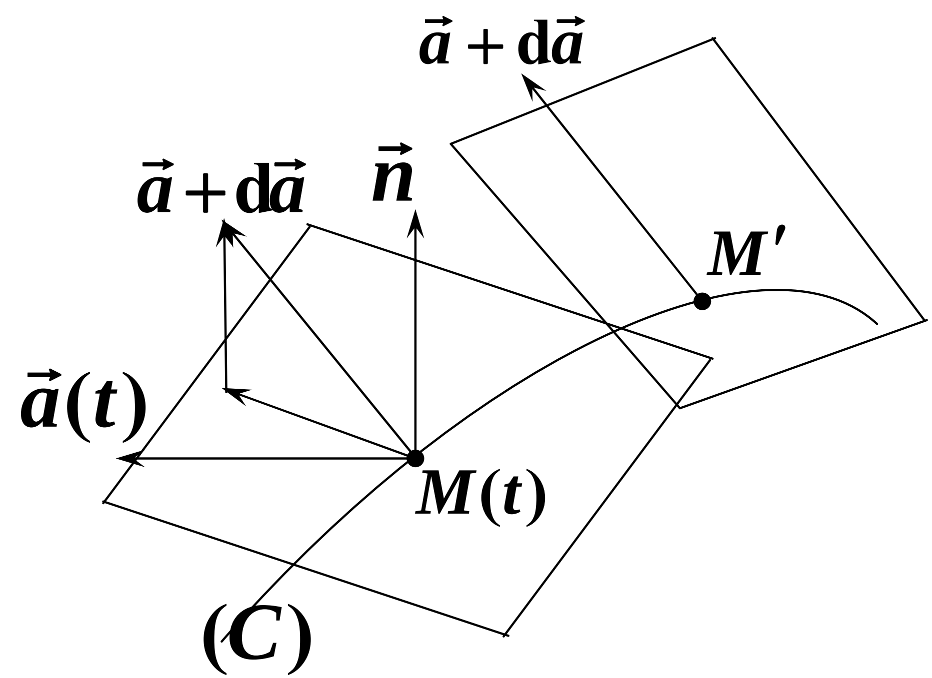
1. 曲面上切向量的平行移动

A. 绝对微分与 Levi-Civita (列维-奇维塔)平移

曲面S上的曲线$(C): u^i = u^i(t), (i=1,2)$

$\forall t$, 给出曲面在(C)上的点$M(t)$处的一个切向量$\vec{a}(t)$.

当把点M在(C)上的邻近点M'处的切向量$\vec{a}(t)+\mathrm{d}\vec{a}(t)$平移至点$M$处时, 这个向量一般来说不在点$M$的切平面上. 现将$\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a}$分解为在切平面上的和沿曲面法向$\vec{n}$方向的两个分量.



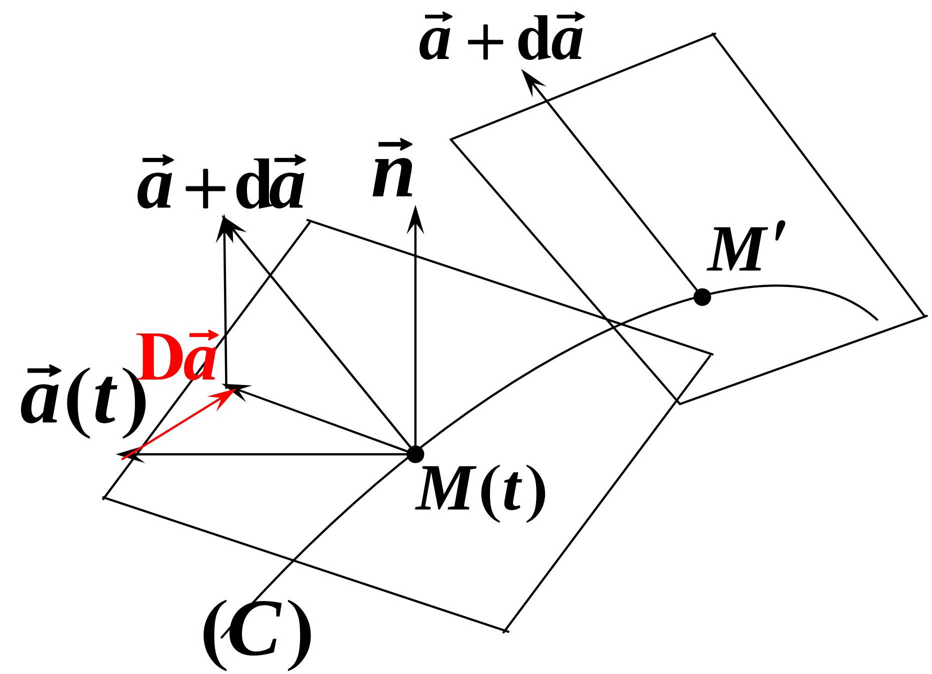
沿法线方向的分量为$[(\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a})\cdot\vec{n}]\vec{n}=(\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{a})\vec{n}$

沿切平面的分量为$(\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a})_t=\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a}-(\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{a})\vec{n}$

定义$\vec{a}(t)$从点M沿曲线(C)移动到点M'的绝对微分为

$$\mathrm{D}\vec{a}\triangleq(\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a})_t-\vec{a}=\mathrm{d}\vec{a}-(\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{a})\vec{n}.$$

当$\mathrm{D}\vec{a}=\vec{0}$时，把向量$\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a}$投影到点$M$的切平面上时得到向量$\vec{a}$. 这时称向量$\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a}$是向量$\vec{a}$从点$M$沿$(C)$的方向到邻近点$M'$经过平行移动而得到的向量. 此时称$\vec{a}$与$\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a}$为沿$(C)$在Levi-Civita意义下的平行向量.



B. 绝对微分与平行移动的分析表达式

设$\vec{a}(t)=a^1(t)\vec{r}_1(t)+a^2(t)\vec{r}_2(t)=\sum_i a^i\vec{r}_i$

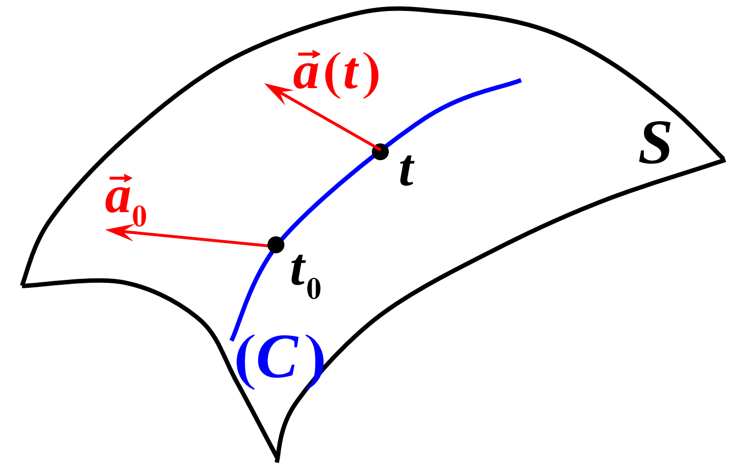
则$$\mathrm{d}\vec{a}=\sum_i(\mathrm{d}a^i\vec{r}_i+a^i\mathrm{d}\vec{r}_i)=\sum_i(\mathrm{d}a^i\vec{r}_i+a^i\sum_j\vec{r}_{ij}\mathrm{d}u^j)$$
$$=\sum_i\left[\mathrm{d}a^i\vec{r}_i+a^i\sum_j\left(\sum_k\Gamma_{ij}^k\vec{r}_k+L_{ij}\vec{n}\right)\mathrm{d}u^j\right]$$
$$=\sum_i\left(\mathrm{d}a^i+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^i a^\alpha\mathrm{d}u^\beta\right)\vec{r}_i+(\cdots\cdots)\vec{n}$$

$$\therefore \mathrm{D}\vec{a}=\sum_i\left(\mathrm{d}a^i+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^i a^\alpha\mathrm{d}u^\beta\right)\vec{r}_i.$$

当$\mathrm{D}\vec{a}=\vec{0}$时, $\mathrm{d}a^i=-\sum_{\alpha,\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^i a^\alpha\mathrm{d}u^\beta\quad(i=1,2)$

沿着已知的曲面曲线(C)的平行移动总可以唯一地实现

曲面S上的曲线(C): $u^i = u^i(t)$.



在$t = t_0$处, 给定曲面的一切向量$\vec{a}_0$,

初值问题$\begin{cases} \mathrm{d}a^i = -\sum\limits_{\alpha,\beta} \Gamma^i_{\alpha\beta} a^\alpha \mathrm{d}u^\beta \quad (i = 1, 2) \\ \vec{a}(t_0) = \vec{a}_0 \end{cases}$存在唯一解$\vec{a}(t)$.

即存在(C)上唯一的向量场$\vec{a}(t)$,

在(C)上的每点处都满足平行移动的条件.

C. 绝对微分的运算性质

P112习题19 设$\vec{a}(t),\vec{b}(t)$是定义在曲面上某曲线(C)上的切于曲面的向量场，$f(t)$是定义在(C)上的数量场，则

(1) $\mathrm{D}(\vec{a}+\vec{b})=\mathrm{D}\vec{a}+\mathrm{D}\vec{b}$

(2) $\mathrm{D}(f\vec{a})=(\mathrm{d}f)\vec{a}+f\,\mathrm{D}\vec{a}$

(3) $\mathrm{d}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\mathrm{D}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\mathrm{D}\vec{b}$

由公式 $\mathrm{D}\vec{a}=\sum_{i}\left(\mathrm{d}a^{i}+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^{i}_{\alpha\beta}a^{\alpha}\mathrm{d}u^{\beta}\right)\vec{r}_{i}$ 可直接验证上述运算，下面只证(3).

证明: $\mathrm{D}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\mathrm{D}\vec{b}$

$$=\sum_i(\mathrm{d}a^i+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}a^\alpha\mathrm{d}u^\beta)\vec{r}_i\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\sum_i(\mathrm{d}b^i+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}b^\alpha\mathrm{d}u^\beta)\vec{r}_i$$

$$=\sum_i(\mathrm{d}a^i+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}a^\alpha\mathrm{d}u^\beta)\vec{r}_i\cdot\sum_j b^j\vec{r}_j$$

$$+\sum_i a^i\vec{r}_i\cdot\sum_j(\mathrm{d}b^j+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^j_{\alpha\beta}b^\alpha\mathrm{d}u^\beta)\vec{r}_j$$

$$=\sum_{i,j}\mathrm{d}a^i\cdot b^j g_{ij}+\sum_{i,j}a^i\mathrm{d}b^j g_{ij}+\sum_{i,j}\sum_{\alpha,\beta}a^\alpha b^j g_{ij}\Gamma^i_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\beta$$

$$+\sum_{i,j}\sum_{\alpha,\beta}a^i b^\alpha g_{ij}\Gamma^j_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\beta$$

$$=\sum_{i,j}g_{ij}\mathrm{d}a^i\cdot b^j+\sum_{i,j}g_{ij}a^i\cdot\mathrm{d}b^j+\sum_{i,j,\alpha,\beta}(\Gamma^\alpha_{i\beta}g_{\alpha j}+\Gamma^\alpha_{j\beta}g_{\alpha i})a^i b^j\mathrm{d}u^\beta$$

$$(i\leftrightarrow\alpha)\quad(\alpha\leftrightarrow j)$$

$$= \sum_{i,j} g_{ij} \mathrm{d}a^i \cdot b^j + \sum_{i,j} g_{ij} a^i \cdot \mathrm{d}b^j$$

$$+ \sum_{i,j,\beta} ([i\beta, j] + [j\beta, i]) a^i b^j \mathrm{d}u^\beta$$

$$= \sum_{i,j} g_{ij} \mathrm{d}a^i \cdot b^j + \sum_{i,j} g_{ij} a^i \cdot \mathrm{d}b^j + \sum_{i,j,\beta} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\beta} \mathrm{d}u^\beta a^i b^j$$

$$= \sum_{i,j} g_{ij} \mathrm{d}a^i \cdot b^j + \sum_{i,j} g_{ij} a^i \cdot \mathrm{d}b^j + \sum_{i,j} \mathrm{d}g_{ij} a^i b^j$$

$$= \mathrm{d}(\sum_{i,j} g_{ij} a^i b^j) = \mathrm{d}(\sum_i a^i \vec{r}_i \cdot \sum_j b^j \vec{r}_j) = \mathrm{d}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

2. 平行移动的性质

对于平面上的平行移动, 它

①保持向量的长度和角度不变;

②直线上的切向量都是平行的.

曲面上的平移也具有这两个性质:

若在曲面曲线(C)上一点处给出曲面的多个切向量,

然后让这些向量都沿着曲线(C)平行移动,

则这些向量的长度及其它们之间的夹角始终保持不变.

P112习题20 Levi-Civita平移保持两个向量的内积不变, 因而保持向量的长度和夹角不变.

证 设$\vec{a}(t), \vec{b}(t)$是曲面S上沿曲线(C)的Levi-Civita

意义下的两个平行向量场, 则 $\mathrm{D}\vec{a} \equiv \vec{0}$, $\mathrm{D}\vec{b} \equiv \vec{0}$.

$$\mathrm{d}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \mathrm{D}\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \mathrm{D}\vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \text{常数}$$

这说明Levi-Civita平移保持内积不变.

由于向量的长度与夹角都是由内积所定义的,

故也保持向量的长度和夹角不变.

定理 曲面曲线(C)为曲面的测地线的充要条件是它的切向量在Levi-Civita平行移动的意义下沿(C)是相互平行的.

证 设(C)为$u^i = u^i(s), i=1,2, s$为自然参数, 它的切向量沿(C)作平行移动.

以$\dfrac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} = a^i$代入平移表达式$\mathrm{d}a^i = -\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}a^\alpha \mathrm{d}u^\beta$

并除以ds得到$\dfrac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}}{\mathrm{d}s} = -\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}\dfrac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}$

即 $\dfrac{\mathrm{d}^2u^i}{\mathrm{d}s^2} + \sum_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}\dfrac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s} = 0.$

这刚好是测地线的微分方程, 因此证明了充分性.

反之逆推可知必要性成立.

平行移动的作图法

沿曲面S上的曲线(C)作出S的切平面, 形成一切平面族,

则其包络为一个可展曲面S_1.

若在(C)上各个点作S的切向量$\vec{a}(t)$,

则$\vec{a}(t)$也是S_1沿着(C)上的点处的切向量.

向量沿着曲面曲线的平行移动仅与沿着该曲线上的点处

曲面的切平面有关, S与S_1沿着(C)具有相同的切平面,

因此, 若$\vec{a}(t)$是S上沿着(C)的平行移动,

则$\vec{a}(t)$也是S_1上沿着(C)的平行移动.

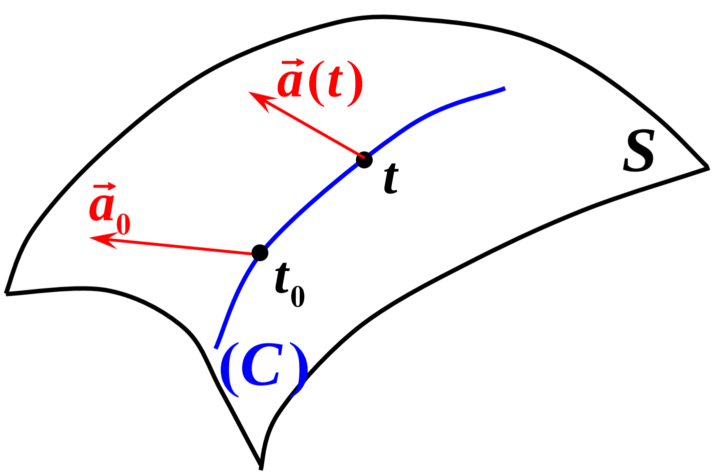
把S_1展开为平面时, (C)变为平面曲线(C_0),

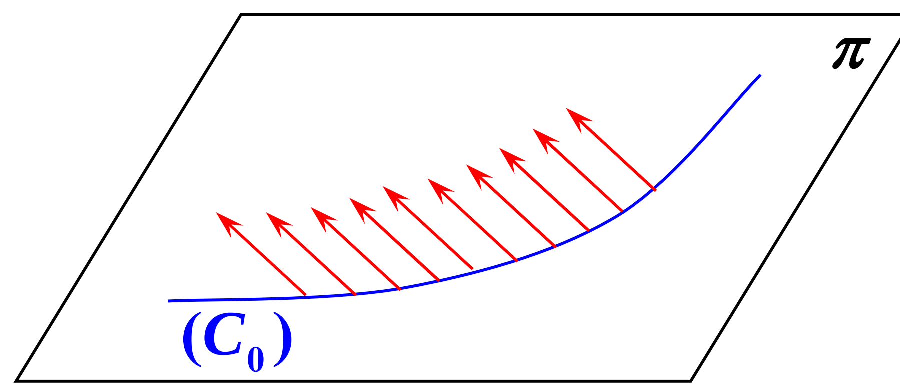
$\vec{a}(t)$变为该平面上的向量$\vec{a}_0(t)$.

$\vec{a}(t)$为S_1(或S)上的平行移动$\Leftrightarrow$ $\vec{a}_0(t)$为平面上的平行移动.

定理 向量沿曲面上一条已知曲线作平行移动的充要条件是沿此曲线所作的切平面的包络所得可展曲面展开在平面上时, 所得的向量在平面上为平行移动.

由这个定理可得沿曲线平行移动的向量的作图法:





*七、极小曲面

对于过空间光滑闭曲线(C)的光滑曲面S来说，

如果(C)所包围的曲面面积最小,

则曲面S的平均曲率恒等于零.

即, 极小曲面的平均曲率恒为零.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.38 证明在曲面 S 上存在一个非零的、与路径无关的平行切向量场的充要条件是曲面 S 为可展曲面.

2.39 设S是一个单位球面, 曲线(C)是S上的一个半径为r的圆$(0<r<1)$, 求 S上的一个切向量$\vec{t}$沿圆(C)平行移动一周后回到原处时, 与原来的切向量$\vec{t}$所夹的角度.

第三章　外微分形式和活动标架

§3.1 外微分形式

一、格拉斯曼(Grassmann)代数

二、外微分形式

三、弗罗贝尼乌斯(Frobenius)定理

一、格拉斯曼(Grassmann)代数

古典微积分的弊端1:

微积分的基本定理没有维数不变性

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\int_{\partial V} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\int_{\partial S} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z =$$

$$\int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

共同点：将某一几何图形上的积分用该图形的边界上的积分来表示.

这些公式彼此不同, 各自冠以著名数学家的名字, 不是普通的推广.

三维空间有两个公式(2维 $\leftrightarrow$ 1维, 3维 $\leftrightarrow$ 2维)

四维空间应该有三个公式

n 维空间应该有 $n-1$ 个公式

$$\int_{\partial G} \omega = \int_G \mathrm{d}\omega$$

古典微积分的弊端2:
被积表达式没有坐标不变性

在$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$中通常将$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$理解为$\mathrm{d}x$乘以$\mathrm{d}y$

若采用极坐标,则该积分变为$\iint_{\Omega_1} F(\rho,\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$

若令$x = x(u,v), y = y(u,v)$,则该积分变为

$$\iint_{\Omega_2} F(u,v)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

根源:未考虑$\mathrm{d}x$和$\mathrm{d}y$的方向.

为了使"$\mathrm{d}x$乘以$\mathrm{d}y$"能与坐标的选取无关,就要对乘积赋以新的意义.

外乘 $\wedge$ (wedge)

若将 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 理解为“$\mathrm{d}x\times\mathrm{d}y$”,则表示以 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 为边的平行四边形的有向面积,具有坐标不变性.

定义一种新的乘法,叫作外乘,记为 $\wedge$,使得

$\vec{a}_1\wedge\vec{a}_2$ 刻画以 $\vec{a}_1$ 与 $\vec{a}_2$ 为边的平行四边形的有向面积;

$\vec{a}_1\wedge\vec{a}_2\wedge\vec{a}_3$ 刻画以 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 为边的平行六面体的有向体积; ……

问题:如何定义外乘 $\wedge$?

思路:特殊 $\Rightarrow$ 一般

考虑$\mathbb{R}^3$中的三元外乘运算

给定三个向量$\vec{a}_i = a_{i1}\vec{e}_1 + a_{i2}\vec{e}_2 + a_{i3}\vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3, (i = 1,2,3)$

则以$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$为棱边的平行六面体为

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3, 0 \le \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \le 1\}$$

其有向体积(体积空间中的一个向量)为

$$\vec{a}_1\wedge\vec{a}_2\wedge\vec{a}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \vec{e}_1\wedge\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3$$

其中$\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3$为以单位体积为模长的一个体积基底.

$$\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$$

受行列式启发,可认为运算$\wedge$应服从以下法则:

① **重线性**: 设$\vec{b},\vec{c} \in \mathbb{R}^3, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, 则

$$\vec{a}_1 \wedge (\beta \vec{b} + \gamma \vec{c}) \wedge \vec{a}_3 = \beta \vec{a}_1 \wedge \vec{b} \wedge \vec{a}_3 + \gamma \vec{a}_1 \wedge \vec{c} \wedge \vec{a}_3$$

(对参与运算的每个向量满足分配律和数乘运算)

② **反交换律**:

在$\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3$中任何两个向量交换之后符号相反,即

$$\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3 = -\vec{a}_2 \wedge \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_3 = -\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_3 \wedge \vec{a}_2 = -\vec{a}_3 \wedge \vec{a}_2 \wedge \vec{a}_1$$

考虑$\mathbb{R}^3$中的二元外乘运算

给定两个向量$\vec{a}_i = a_{i1}\vec{e}_1 + a_{i2}\vec{e}_2 + a_{i3}\vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3, (i = 1,2)$

以$\vec{a}_1, \vec{a}_2$为相邻边的平行四边形为

$$A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2, 0 \le \lambda_1, \lambda_2 \le 1\}$$

引入外积$\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2$，使其满足重线性和反交换律，则

$$\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 = (a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3) \wedge (a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}$刚好为$A$在各个坐标面上的投影的有向面积.　　(注意与叉积的异同)

由三维向量空间$\mathbb{R}^3$引申出来的一些空间

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$构成$V^1(=\mathbb{R}^3)$的基底 (长度空间)

$\{\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2, \vec{e}_1\wedge\vec{e}_3, \vec{e}_2\wedge\vec{e}_3\}$构成某个向量空间$V^2$的基底

(面积空间)

$\{\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3\}$构成某个向量空间$V^3$的基底(体积空间)

$\{1\}$构成$V^0(=\mathbb{R})$的基底 (数域)

向量空间$G(\mathbb{R}^3)=V^0\oplus V^1\oplus V^2\oplus V^3$的基底为

$$\{1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1\wedge\vec{e}_2, \vec{e}_1\wedge\vec{e}_3, \vec{e}_2\wedge\vec{e}_3, \vec{e}_1\wedge\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3\}$$

外乘和外积(外乘的运算结果)的定义

设V是实数域$\mathbb{R}$上的n维向量空间,它的一组基底是$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n$.

对于$p=0,1,\cdots,n$,构造$\mathbb{R}$上新的向量空间V^p如下:

$V^0 \triangleq \mathbb{R}$ (基底为1)　　　　$V^1 \triangleq V$ (基底为$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n$)

$V^2 \triangleq \left\{\vec{u}\wedge\vec{v} \mid \vec{u},\vec{v}\in V\right\}$

要求其中的外乘运算“$\wedge$”满足重线性和反交换律.

称$\vec{u}\wedge\vec{v}$为$\vec{u}$与$\vec{v}$的外积.

对基底的作用： $\vec{e}_i\wedge\vec{e}_j=-\vec{e}_j\wedge\vec{e}_i$, $\vec{e}_i\wedge\vec{e}_i=\vec{0}$.

若$\vec{u}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{e}_i$, $\vec{v}=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\vec{e}_j$, 则

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\sum_{i,j=1}^{n}(\alpha_i\vec{e}_i)\wedge(\beta_j\vec{e}_j)=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\beta_j\vec{e}_i\wedge\vec{e}_j$$

$$=\sum_{1\le i<j\le n}\alpha_i\beta_j\vec{e}_i\wedge\vec{e}_j+\sum_{1\le i<j\le n}\alpha_j\beta_i\vec{e}_j\wedge\vec{e}_i$$

$$=\sum_{1\le i<j\le n}(\alpha_i\beta_j-\alpha_j\beta_i)\vec{e}_i\wedge\vec{e}_j.$$

可见 $V^2=\left\{\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}\vec{e}_i\wedge\vec{e}_j\,\middle|\,a_{ij}\in\mathbb{R}\right\}.$

它是以$\vec{e}_i\wedge\vec{e}_j(1\le i<j\le n)$为基底的$C_n^2$维的向量空间,

称它的元素为2次外形式(2次形式, 2-形式).

相仿地可给出$V^p (1 \le p \le n)$的定义,

$$V^p \triangleq \left\{ \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{u}_p \mid \vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p \in V \right\}$$

要求其中的外乘运算"$\wedge$"满足重线性和反交换律.

称$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{u}_p$为$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p$的外积.

$$V^p = \left\{ \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n} a_{i_1 i_2 \cdots i_p} \vec{e}_{i_1} \wedge \vec{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \vec{e}_{i_p} \,\middle|\, a_{i_1 i_2 \cdots i_p} \in \mathbb{R} \right\}$$

它以$\vec{e}_{i_1} \wedge \vec{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \vec{e}_{i_p} (1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n)$为基底.

称它的元素为p次外形式(p次形式, p-形式).

V^p与V^q的元素之间的外乘运算$\wedge$

设$p \geq 1, q \geq 1, p+q \leq n, \vec{x} \in V^p, \vec{y} \in V^q$,

定义$\vec{x} \wedge \vec{y}$为将$\vec{x}$和$\vec{y}$各自用基底表示后再作$\wedge$运算.

即规定基底的外乘运算满足结合律.

例1 设 $\vec{x} = A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}_3$,

$$\vec{y} = P\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 + Q\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 + R\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2,$$

则 $\vec{x} \wedge \vec{y} = (AP + BQ + CR)\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$.

显然$\vec{x} \wedge \vec{y} \in V^{p+q}$.

规定V^0与V^p的元素之间的外乘运算$\wedge$就是数乘运算

$\forall \alpha \in V^0 = \mathbb{R}, \forall \vec{\omega} \in V^p$,定义$\alpha \wedge \vec{\omega} = \vec{\omega} \wedge \alpha = \alpha\vec{\omega}$.

P123 命题1(外乘的交换性质)

设 $\vec{x}\in V^p,\ \vec{y}\in V^q$, 则$\vec{x}\wedge\vec{y}=(-1)^{pq}\,\vec{y}\wedge\vec{x}$.

证 由线性运算性质,只需证明

$\vec{x}=\vec{e}_{i_1}\wedge\vec{e}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\vec{e}_{i_p},\ \vec{y}=\vec{e}_{j_1}\wedge\vec{e}_{j_2}\wedge\cdots\wedge\vec{e}_{j_q}$时的情形.

此时 $\vec{x}\wedge\vec{y}=\vec{e}_{i_1}\wedge\vec{e}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boxed{\vec{e}_{i_p}\wedge\vec{e}_{j_1}}\wedge\vec{e}_{j_2}\wedge\cdots\wedge\vec{e}_{j_q}$

$$=-\,\vec{e}_{i_1}\wedge\vec{e}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\vec{e}_{i_{p-1}}\wedge\boxed{\vec{e}_{j_1}\wedge\vec{e}_{i_p}}\wedge\vec{e}_{j_2}\wedge\cdots\wedge\vec{e}_{j_q}$$

$$=(-1)^p\,\vec{e}_{j_1}\wedge\vec{x}\wedge\vec{e}_{j_2}\wedge\cdots\wedge\vec{e}_{j_q}$$

$$=(-1)^{2p}\,\vec{e}_{j_1}\wedge\vec{e}_{j_2}\wedge\vec{x}\wedge\vec{e}_{j_3}\wedge\cdots\wedge\vec{e}_{j_q}$$

$$=(-1)^{qp}\,\vec{e}_{j_1}\wedge\vec{e}_{j_2}\wedge\vec{e}_{j_3}\cdots\wedge\vec{e}_{j_q}\wedge\vec{x}\ =(-1)^{pq}\,\vec{y}\wedge\vec{x}.$$

P124 命题2 (外积的坐标表示)

设 $\vec{y}_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\vec{e}_j,\ i=1,2,\cdots,p$, 则

$$\vec{y}_1\wedge\vec{y}_2\wedge\cdots\wedge\vec{y}_p=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_p\le n}\begin{vmatrix}a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_p}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{pi_1} & \cdots & a_{pi_p}\end{vmatrix}\vec{e}_{i_1}\wedge\vec{e}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\vec{e}_{i_p}.$$

特别地, 若 $p=n$, 则

$$\vec{y}_1\wedge\vec{y}_2\wedge\cdots\wedge\vec{y}_n=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2\wedge\cdots\wedge\vec{e}_n.$$

当 $p=2, n=3$ 时证明如下:

$$\vec{y}_1=a_{11}\vec{e}_1+a_{12}\vec{e}_2+a_{13}\vec{e}_3,\quad \vec{y}_2=a_{21}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+a_{23}\vec{e}_3,$$

$$\vec{y}_1\wedge\vec{y}_2=(a_{11}\vec{e}_1+a_{12}\vec{e}_2+a_{13}\vec{e}_3)\wedge(a_{21}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+a_{23}\vec{e}_3)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{3}(a_{1i}\vec{e}_i)\wedge(a_{2j}\vec{e}_j)=\sum_{i,j=1}^{3}a_{1i}a_{2j}\vec{e}_i\wedge\vec{e}_j$$

$$=\sum_{1\le i<j\le 3}a_{1i}a_{2j}\vec{e}_i\wedge\vec{e}_j+\sum_{1\le j<i\le 3}a_{1i}a_{2j}\vec{e}_i\wedge\vec{e}_j$$

$$=\sum_{1\le i<j\le 3}a_{1i}a_{2j}\vec{e}_i\wedge\vec{e}_j-\sum_{1\le i<j\le 3}a_{1j}a_{2i}\vec{e}_i\wedge\vec{e}_j$$

$$=\sum_{1\le i<j\le 3}(a_{1i}a_{2j}-a_{1j}a_{2i})\vec{e}_i\wedge\vec{e}_j=\sum_{1\le i<j\le 3}\begin{vmatrix}a_{1i} & a_{1j}\\ a_{2i} & a_{2j}\end{vmatrix}\vec{e}_i\wedge\vec{e}_j.$$

对于原命题的证明

$$\vec{y}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_j \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

$$\vec{y}_1 \wedge \vec{y}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{y}_p = \sum_{i_1, i_2, \cdots i_p = 1}^{n} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{pi_p} \vec{e}_{i_1} \wedge \vec{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \vec{e}_{i_p}$$

表示排列$A(i_1, i_2, \cdots, i_p)$的反序数

$$= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n} \Big(\boxed{\sum_{A(i_1, i_2, \cdots, i_p)}} (-1)^{\boxed{[A(i_1, i_2, \cdots, i_p)]}} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{pi_p} \Big) \vec{e}_{i_1} \wedge \vec{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \vec{e}_{i_p}$$

表示对于$i_1, i_2, \cdots, i_p$的任意排列求和

$$= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n} \begin{vmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{pi_1} & \cdots & a_{pi_p} \end{vmatrix} \vec{e}_{i_1} \wedge \vec{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \vec{e}_{i_p}.$$

例 设2-形式 $\vec{f}=a\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3+b\vec{e}_3\wedge\vec{e}_1+c\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2$，$a,b,c\in\mathbb{R}$，$a\neq 0$. 试把 $\vec{f}$ 表示为两个1-形式的外积.

解 令 $\vec{f}=(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3)\wedge(y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+y_3\vec{e}_3)$

$$=(x_2y_3-x_3y_2)\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3+(x_3y_1-x_1y_3)\vec{e}_3\wedge\vec{e}_1+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2$$

则 $x_2y_3-x_3y_2=a$，$x_3y_1-x_1y_3=b$，$x_1y_2-x_2y_1=c$.

即(x_1,x_2,x_3)和(y_1,y_2,y_3)满足方程$ax+by+cz=0$.

它的两个线性无关的解为$(-\frac{b}{a},1,0)$和$(-\frac{c}{a},0,1)$.

而 $(-\frac{b}{a}\vec{e}_1+\vec{e}_2)\wedge(-\frac{c}{a}\vec{e}_1+\vec{e}_3)=\frac{1}{a}\vec{f}$，

故 $\vec{f}=a(-\frac{b}{a}\vec{e}_1+\vec{e}_2)\wedge(-\frac{c}{a}\vec{e}_1+\vec{e}_3)$.

格拉斯曼(Grassmann)代数

在$V^p(p=0,1,\cdots,n)$的基础上构造一个更大的

向量空间$G(V)=V^0\oplus V^1\oplus\cdots\oplus V^n$.

即$G(V)$的每一个元素$\vec{\omega}$都可表示为

$$\vec{\omega}=\vec{\omega}_0+\vec{\omega}_1+\cdots+\vec{\omega}_n \ (\text{其中}\ \vec{\omega}_i\in V^i)$$

并且这一表示是唯一的. (以后省掉向量符号上的箭头)

在$G(V)$内不仅具有向量空间的代数结构,而且还

带有外乘,称$G(V)$是由V生成的Grassmann代数.

$G(V)$的基底为……

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

3.1 设$\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$是某个向量空间的基,计算外积:

(1) $(x\mathrm{d}x+7z^2\mathrm{d}y)\wedge(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+6\mathrm{d}z)$;

(2) $(6\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+27\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z)\wedge(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$.

3.2 设V是n维实向量空间,$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是它的一组基,命$\alpha=e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_p$ $(0<p<n)$. 设V中一个向量v满足$v\wedge\alpha=0$. 求证:v是$e_1,e_2,\cdots,e_p$的线性组合.

3.3 设V是n维实向量空间,$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是它的一组基,命$\alpha=e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4+\cdots+e_{2r-1}\wedge e_{2r}$, $2r\le n$.

求证: $\alpha^r\triangleq\underbrace{\alpha\wedge\cdots\wedge\alpha}_{r个\alpha}\ne 0$, $\alpha^{r+1}=0$.

二、外微分形式

$$\int_{\partial G}\omega=\int_G \mathrm{d}\omega$$

前面定义Grassmann代数$G(V)$时,V是实数域$\mathbb{R}$

上的n维向量空间,它的一组基底是$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n$.

称这里的实数域$\mathbb{R}$为系数域,称V为模(module).

为了推广微分的定义,

将系数域$\mathbb{R}$换为定义在空间$\mathbb{R}^n$(以$x^1,\cdots,x^n$为自变量)

的某开集U上的全体C^∞类的数量函数的集合.

将模V取为以$\mathrm{d}x^1,\mathrm{d}x^2,\cdots,\mathrm{d}x^n$为基底的$n$维向量空间.

称以前定义的p-形式为U上的p次外微分形式(p-形式).

特别地,称U上的1-形式为U上的Pfaff(普法夫)形式.

例 (1)当$n=1$时, 设数量函数的自变量为x, 则

0-形式是 $\omega_0 = f(x)$;

1-形式是 $\omega_1 = \varphi(x)\mathrm{d}x$. (定积分的被积表达式)

(2)当$n=2$时, 设数量函数的自变量为(x,y), 则

0-形式是 $\omega_0 = f(x,y)$;

1-形式是 $\omega_1 = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$;

(平面第二类曲线积分的被积表达式)

2-形式是 $\omega_2 = \varphi(x,y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

(二重积分的被积表达式)

(3)当$n = 3$时，设数量函数的自变量为(x, y, z)，则

0-形式是 $\omega_0 = f(x, y, z)$;

1-形式是 $\omega_1 = P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y$

$+ R(x, y, z)\mathrm{d}z$;

(空间第二类曲线积分的被积表达式)

2-形式是 $\omega_2 = P(x, y, z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q(x, y, z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$

$+ R(x, y, z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$;

(第二类曲面积分的被积表达式)

3-形式是 $\omega_3 = \varphi(x, y, z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.

(三重积分的被积表达式)

设U是$\mathbb{R}^n$中的一个开集，

则U上的每一个Pfaff形式

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{d}x^i = a_1 \mathrm{d}x^1 + a_2 \mathrm{d}x^2 + \cdots + a_n \mathrm{d}x^n$$

(其中a_i是定义域为U的n元C^∞类数量函数$(i = 1, 2, \cdots n)$)

都对应于U上的一个n元n维的向量场$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

给出一组Pfaff形式 $f_1, f_2, \cdots, f_p (1 \leq p \leq n)$,

若它们对应的向量场在U中的每一点都是线性无关的，

则称这组Pfaff形式是线性无关的.

P126命题3(Cartan(嘉当)引理)

给出U上 p 个线性无关的Pfaff形式

$$f_1, f_2, \cdots, f_p (1 \le p \le n).$$

如果另有U上的 p 个Pfaff形式$g_1, g_2, \cdots, g_p$,使得

$$f_1 \wedge g_1 + f_2 \wedge g_2 + \cdots + f_p \wedge g_p = 0,$$

则存在U上的C^∞类的函数组$a_{ij} (i, j = 1, 2, \cdots, p)$使得

$$g_i = a_{i1} f_1 + a_{i2} f_2 + \cdots + a_{ip} f_p \ (i = 1, 2, \cdots, p),$$

并且$a_{ij} = a_{ji}$.

证 逐点证明. 对于U上的一固定点来说，当$p=n$时，

因$f_1, f_2, \cdots, f_n$线性无关，所以可以选作空间V的基底.

$g_i (i=1,\cdots,n)$作为V中的向量，存在a_{ij}使得$g_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j$.

将等式两端都在左边外乘f_i得$f_i \wedge g_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_i \wedge f_j$.

代入引理的条件得$0 = \sum_{i=1}^{n} f_i \wedge g_i = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} f_i \wedge f_j$

$$= \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} f_i \wedge f_j - \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ji} f_i \wedge f_j = \sum_{1 \le i < j \le n} (a_{ij} - a_{ji}) f_i \wedge f_j.$$

而$f_i \wedge f_j (1 \le i < j \le n)$是$V^2$的基底，所以$a_{ij} = a_{ji}$.

当$p<n$时，因$f_1, f_2, \cdots, f_p$线性无关，

所以可以补充$f_{p+1}, \cdots, f_n$，使其作为空间V的基底.

令$g_{p+1}=g_{p+2}=\cdots=g_n=0$，

则$\sum_{i=1}^{n} f_i \wedge g_i=\sum_{i=1}^{p} f_i \wedge g_i+\sum_{i=p+1}^{n} f_i \wedge 0=0.$

根据$p=n$时的结论，存在a_{ij}使得$g_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j$，且$a_{ij}=a_{ji}$.

因为当$i>p$时$g_i=0$，所以$a_{ij}=0=a_{ji}\ (\forall i>p)$.

从而$g_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j=\sum_{j=1}^{p} a_{ij} f_j+\sum_{j=p+1}^{n} 0 f_j=\sum_{j=1}^{p} a_{ij} f_j$.

多元微积分的基本公式(Stokes公式)：$\int_{\partial G}\omega=\int_G \mathrm{d}\omega$

$$f(x)\Big|_a^b=\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{\partial\Omega}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$\int_{\partial\Omega}P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

$$\int_{\partial S}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=$$

$$\int_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

外微分的引入

对于$\omega = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$,

若定义$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}P(x,y)\wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}Q(x,y)\wedge \mathrm{d}y$,则有

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge \mathrm{d}y$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y$$

Green公式

$$\int_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y \text{ 变为 } \int_{\partial\Omega}\omega = \int_{\Omega}\mathrm{d}\omega.$$

外微分的引入(续)

对于$\omega = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$,

若定义$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}P\wedge\mathrm{d}x + \mathrm{d}Q\wedge\mathrm{d}y + \mathrm{d}R\wedge\mathrm{d}z$,

则有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}x \\
&\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}y \\
&\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x \\
&\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Stokes公式变为$\int_{\partial\Omega}\omega = \int_{\Omega}\mathrm{d}\omega$.

外微分的引入(续)

对于$\omega = P\,\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y$,

若定义$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}P\wedge \mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}Q\wedge \mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}R\wedge \mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y$,

则有 $$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z,$$

Gauss公式变为$\int_{\partial\Omega}\omega = \int_{\Omega}\mathrm{d}\omega.$

教材P129有Stokes公式的严格叙述.

What happens on the outside is purely a function of the change within.

外微分的定义

设$\omega \in V^p$，即$\omega = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n} a_{i_1 i_2 \cdots i_p} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$.

定义$\mathrm{d}\omega$(称d为外微分算子)为

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n} \mathrm{d}a_{i_1 i_2 \cdots i_p} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$$

$$= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1 i_2 \cdots i_p}}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$$

显然当$0 \le p < n$时$\mathrm{d}\omega \in V^{p+1}$；当$\omega \in V^n$时$\mathrm{d}\omega = 0$.

设$\omega_1 \in V^p, \omega_2 \in V^q$，定义$\mathrm{d}(\omega_1 + \omega_2) = \mathrm{d}\omega_1 + \mathrm{d}\omega_2$.

外微分的运算规则

①外微分是普通微分的推广

若$\omega \in V^0$,则外微分 $\mathrm{d}\omega$就是ω的普通微分.

②线性运算性质

若λ和μ是常数,$\omega, \theta \in V^p$,则$\mathrm{d}(\lambda\omega + \mu\theta) = \lambda \mathrm{d}\omega + \mu \mathrm{d}\theta$.

例 若 $\omega = (x^2 - z^2)\mathrm{d}x + (2xy + z)\mathrm{d}z$,

则
$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}(x^2 - z^2)\wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}(2xy + z)\wedge \mathrm{d}z \\
&= (2x\mathrm{d}x - 2z\mathrm{d}z)\wedge \mathrm{d}x + (2y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y + \mathrm{d}z)\wedge \mathrm{d}z \\
&= -2z\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}z + 2x\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z \\
&= 2(y + z)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}z + 2x\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

③乘积法则(P130命题5)

设$\omega\in V^p,\theta\in V^q$，则$\mathrm{d}(\omega\wedge\theta)=\mathrm{d}\omega\wedge\theta+(-1)^p\omega\wedge\mathrm{d}\theta$.

证 由外微分的线性运算性质，

只需证明ω,θ为单项式的情形.

设$\omega=a(x^1,\cdots,x^n)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}$,

$\theta=b(x^1,\cdots,x^n)\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_q}$, 则

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\theta)=\mathrm{d}(ab\,\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_q})$$

$$=\mathrm{d}(ab)\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_q}$$

$$=(b\mathrm{d}a+a\mathrm{d}b)\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_q}$$

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\theta)=\cdots$$

$$=(b\,\mathrm{d}a+a\,\mathrm{d}b)\wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_p}\wedge \mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{j_q}$$

$$=b\,\mathrm{d}a\wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_p}\wedge \mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{j_q}$$
$$+a\,\mathrm{d}b\wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_p}\wedge \mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{j_q}$$

$$=(\mathrm{d}a\wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_p})\wedge(b\,\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{j_q})$$
$$+\mathrm{d}b\wedge(a\,\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_p})\wedge \mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{j_q}$$

$$=\mathrm{d}\omega\wedge\theta+(-1)^p(a\,\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p})\wedge(\mathrm{d}b\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_q})$$

$$=\mathrm{d}\omega\wedge\theta+(-1)^p\,\omega\wedge\mathrm{d}\theta$$

④Poincaré(庞加莱)引理(P130命题4)

设$\omega \in G(V)$, 则$\mathrm{dd}\omega \triangleq \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0.$

证 由外微分的线性运算性质,只需证明ω为单项式的情形.

设$\omega = f(x^1,\cdots,x^n)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_p}$, 则

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_p},$$

$$\mathrm{dd}\omega = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}\mathrm{d}x^j\wedge \mathrm{d}x^i\wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_p}$$

$$= \sum_{0\le j<i\le n}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\mathrm{d}x^j\wedge \mathrm{d}x^i\wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_p} = 0.$$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

3.4 设 $\omega = \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$, $a_{ij}+a_{ji}=0$. 求证:

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1\le i<j<k\le n} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}\right)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k.$$

3.5 设 $\varphi = yz\mathrm{d}x+\mathrm{d}z$, $\xi = \sin z\mathrm{d}x+\cos z\mathrm{d}y$,

$\eta = \mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$, 计算

(1) $\varphi\wedge\xi, \xi\wedge\eta, \eta\wedge\varphi$; (2) $\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}\xi, \mathrm{d}\eta$.

3.6 设 f 和 g 是两个光滑函数, d为外微分算子, 计算

(1) $\mathrm{d}(f\mathrm{d}g+g\mathrm{d}f)$; (2) $\mathrm{d}[(f-g)(\mathrm{d}f+\mathrm{d}g)]$;

(3) $\mathrm{d}[(f\mathrm{d}g)\wedge(g\mathrm{d}f)]$; (4) $\mathrm{d}(g\mathrm{d}f)+\mathrm{d}(f\mathrm{d}g)$.

三、Frobenius(弗罗贝尼乌斯)定理

先看一个例子

考虑$\mathbb{R}^3$中的一个Pfaff方程

$$\omega = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z = 0$$

由一阶偏微分方程的理论(略),它的完全可积条件为

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0 \quad (*)$$

注: 完全可积是指存在$\mathbb{R}^3$中的曲面 $f(x,y,z)=$常数,使得$\mathrm{d}f=0$与$\omega=0$等价,即$\exists\lambda(x,y,z)$使得 $\mathrm{d}f=\lambda\omega$.

命题 条件(*) $\Leftrightarrow$ 存在Pfaff形式θ使 $\mathrm{d}\omega=\theta\wedge\omega$.

证（必要性）

若P,Q,R都为零，则命题显然成立．不妨设$R\neq 0$，则

由$\omega = P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$得$\mathrm{d}z=\frac{1}{R}(\omega-P\mathrm{d}x-Q\mathrm{d}y)$.

将$\omega = P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$求外微分得

$$\mathrm{d}\omega=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\wedge\frac{1}{R}(\omega-P\mathrm{d}x-Q\mathrm{d}y)$$

$$+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\frac{1}{R}(\omega-P\mathrm{d}x-Q\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

记为θ

$$=[\boxed{\frac{1}{R}(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z})\mathrm{d}x+\frac{1}{R}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y}]\wedge\omega$$

(*)式左边

$$+\frac{1}{R}[\boxed{P(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})+Q(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})+R(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})}]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

因此 $\mathrm{d}\omega=\theta\wedge\omega$, 其中 $\theta=\frac{1}{R}(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z})\mathrm{d}x+\frac{1}{R}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y$.

(充分性) 存在Pfaff形式θ使$\mathrm{d}\omega=\theta\wedge\omega$,

设$\theta=a(x,y,z)\mathrm{d}x+b(x,y,z)\mathrm{d}y+c(x,y,z)\mathrm{d}z$.

$$\mathrm{d}\omega=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

$$\theta\wedge\omega=(bR-cQ)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(cP-aR)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(aQ-bP)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

而$\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$为$V^2$的基底, 线性无关, 因此

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=bR-cQ,\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=cP-aR,\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=aQ-bP.$$

从中消去a,b,c得到

$$P(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})+Q(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})+R(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})=0.$$

推广到高维情形

设$\mathbb{R}^{n+p}$中的坐标是$(x^1,x^2,\cdots,x^n,y^1,y^2,\cdots,y^p)$,

简记为(x,y),

U是$\mathbb{R}^{n+p}$中的一个开集,

$$\omega^l \equiv \sum_{i=1}^{n}\psi_i^l(x,y)\mathrm{d}x^i+\sum_{k=1}^{p}\psi_{n+k}^l(x,y)\mathrm{d}y^k \ (l=1,2,\cdots,p)$$

是U上的p个线性无关($\det(\psi_{n+k}^l)\neq 0$)的Pfaff形式,

它们确定了U上的**Pfaff方程组**

$$\omega^l=0,\ l=1,\cdots,p.$$

如果存在U中的某个p维空间中的n维曲面S(n元函数)

$$y^k = y^k(x^1, x^2, \cdots, x^n), k = 1, 2, \cdots, p$$

使得将$y^k(x)$代入$\omega^l(l = 1, 2, \cdots, p)$以后有$\omega^l \equiv 0$,即

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i^l(x, y(x))\mathrm{d}x^i + \sum_{k=1}^{p} \psi_{n+k}^l(x, y(x))\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\right) \equiv 0$$

则称曲面S为Pfaff方程组$\omega^l = 0(l = 1, 2, \cdots, p)$的

积分曲面,称$y = y(x)$为Pfaff方程组的解.

如果过U中任一点只存在唯一的积分曲面,则称该

Pfaff方程组是完全可积的.

定义

设有U上的p个Pfaff形式$\omega^l\,(l=1,2,\cdots,p)$,

如果存在U上的Pfaff形式$f_k^l\,(k,l=1,2,\cdots,p)$使得

$$\mathrm{d}\omega^l \equiv \sum_{k=1}^{p} f_k^l \wedge \omega^k,\ \ l=1,2,\cdots,p,$$

则称$\omega^l\,(l=1,2,\cdots,p)$满足**Frobenius条件**.

Frobenius定理

设$\mathbb{R}^{n+p}$的坐标是$(x^1, x^2, \cdots, x^n, y^1, y^2, \cdots, y^p)$, U是$\mathbb{R}^{n+p}$中的一个开集, $\omega^l\ (l=1,2,\cdots,p)$是$U$上的$p$个Pfaff形式,则Pfaff方程组

$$\omega^l \equiv \sum_{i=1}^{n} \psi_i^l(x,y)\mathrm{d}x^i + \sum_{k=1}^{p} \psi_{n+k}^l(x,y)\mathrm{d}y^k = 0$$

(其中$l=1,2,\cdots,p$, $\det(\psi_{n+k}^l) \neq 0$)

完全可积的充要条件是ω^l满足Frobenius条件.

§3.2 活动标架

一、合同变换群

二、活动标架

三、活动标架法

一、合同变换群

空间合同变换: $\mathbb{R}^3$中保持空间距离不变的变换

例: $\mathbb{R}^3$中的平移、旋转、对某一平面的反射.

每一个空间合同变换T由它对直角坐标系$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$的作用效果所确定的:

即如果 ① $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$为另一直角坐标系;

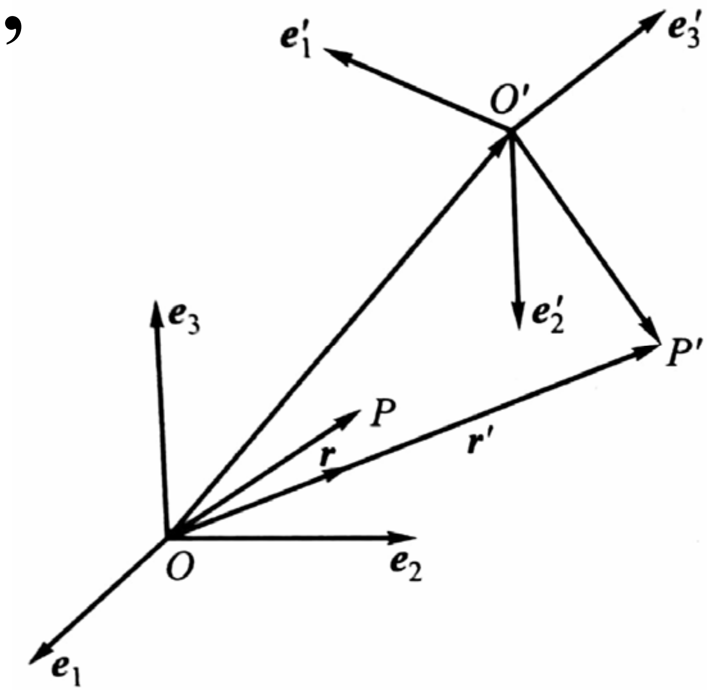
② $T(O)=O'=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$;

③ $T(\vec{e}_i)=\vec{e}_i'=(a_{1i},a_{2i},a_{3i})^{\mathrm{T}}\ (i=1,2,3)$,

则T的变换公式为 $x_i'=\sum\limits_{j=1}^{3}a_{ij}x_j+a_i\ (i=1,2,3)$,

且(a_{ij})为正交阵.

证 在空间中任取一点$P(x_1, x_2, x_3)$,



设 $P' = T(P)$, 坐标为(x_1', x_2', x_3').

则$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'}$

$$= [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + [\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3']\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

即$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

因此 $x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j + a_i \ (i = 1, 2, 3).$

矩阵$(a_{ij}) = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$,

$\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$为两两正交的单位向量,

即矩阵(a_{ij})的列向量为两两正交的单位向量,

因此矩阵(a_{ij})为正交矩阵.

称$\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$为$\mathbb{R}^3$中的一个单位正交标架(简称标架).

选定坐标系后,空间合同变换和$\mathbb{R}^3$中的标架一一对应.

P143命题7 $\mathbb{R}^3$中全体合同变换构成一个群.

回忆群的概念： ①封闭性;

②结合律;

③存在单位元;

④存在逆元.

称空间合同变换构成的群为空间合同变换群.

空间合同变换群可看成是$\mathbb{R}^3$中全体标架的集合.

二、活动标架

$\mathbb{R}^3$中的标架可以看成是空间合同变换群的元素的具体表示.

设标架$\{\vec{r};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$是变动的,光滑地依赖于$p$个参数

$$u^1,u^2,\cdots,u^p,$$

即向量$\vec{r},\vec{e}_i$是 p个参数$u^1,u^2,\cdots,u^p$的C^∞-函数:

$$\vec{r}=\vec{r}(u^1,u^2,\cdots,u^p),\ \vec{e}_i=\vec{e}_i(u^1,u^2,\cdots,u^p),\quad i=1,2,3.$$

则称$\{\vec{r};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$为 p 参数的活动标架.

$\mathbb{R}^3$中标架的自由度为6, 因此 $p\le 6$. p参数的活动标架的全体构成合同变换群的 p 维子空间.

活动标架法的主要思想(Cartan)

通过活动标架这个桥梁,把微分几何中所研究的图形嵌入到空间合同变换群G中,也就是把该图形看成G的子空间的元素,然后G的性质自然地传递到它的子空间上,从而得到所要研究的图形的性质.

活动标架法是克莱因(F. Klein)的埃尔朗根(Erlangen)纲领的精神在微分几何中的体现.

克莱因的变换群观点:把各种不同的几何看成是各种变换群的不变量与不变性的理论.

实例：将空间曲线嵌入到合同变换群

给出一条空间曲线$(C): \vec{r}=\vec{r}(s)$, 设s为自然参数.

曲线上每一点$\vec{r}(s)$对应有一Frenet标架:

$$\vec{e}_1(s)=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s},\quad \vec{e}_2(s)=\frac{\mathrm{d}\vec{e}_1}{\mathrm{d}s}\Big/\left|\frac{\mathrm{d}\vec{e}_1}{\mathrm{d}s}\right|,\quad \vec{e}_3(s)=\vec{e}_1(s)\times\vec{e}_2(s).$$

于是$\{\vec{r}(s);\vec{e}_1(s),\vec{e}_2(s),\vec{e}_3(s)\}$构成单参数活动标架.

注：把一个几何图形嵌入到合同变换群中的方法不唯一.

实例：将空间曲面嵌入到空间合同变换群

给出一个曲面(S):$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$,设其曲纹坐标网正交,

则曲面(S)上任一点$\vec{r}(u,v)$处存在三个有序的两两正

交的单位向量：

$$\vec{e}_1(u,v)=\vec{r}_u\big/\left|\vec{r}_u\right|,\quad \vec{e}_2(u,v)=\vec{r}_v\big/\left|\vec{r}_v\right|,\ \vec{e}_3(u,v)=\vec{n}(u,v).$$

则$\{\vec{r}(u,v);\vec{e}_1(u,v),\vec{e}_2(u,v),\vec{e}_3(u,v)\}$

构成一个双参数活动标架.

活动标架的无穷小位移

p参数活动标架

$$\{\vec{r}(u^1,u^2,\cdots,u^p);\vec{e}_i(u^1,u^2,\cdots,u^p)\ (i=1,2,3)\}$$

的无穷小位移是指它们的微分的坐标表达式：

$$\begin{cases} \mathrm{d}\vec{r}=\sum_{i=1}^{3}\omega^i(u^1,u^2,\cdots,u^p,\mathrm{d}u^1,\mathrm{d}u^2,\cdots,\mathrm{d}u^p)\vec{e}_i \\ \mathrm{d}\vec{e}_i=\sum_{j=1}^{3}\omega_i^j(u^1,u^2,\cdots,u^p,\mathrm{d}u^1,\mathrm{d}u^2,\cdots,\mathrm{d}u^p)\vec{e}_j \end{cases}$$

$$(\ i=1,2,3)$$

其中的ω^i和ω_i^j是系数为关于$(u^1,u^2,\cdots,u^p)$的C^∞-函数的$\mathrm{d}u^1,\mathrm{d}u^2,\cdots,\mathrm{d}u^p$的Pfaff形式，$i,j=1,2,3.$

活动标架的相对分量

ω^i和ω_i^j刻画了活动标架的无穷小位移,

称它们为活动标架$\{\vec{r};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$的相对分量.

由$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$的正交性知$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}, i,j=1,2,3.$

将上式微分得到 $\mathrm{d}\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j+\vec{e}_i\cdot\mathrm{d}\vec{e}_j=0.$

即 $\sum_{k=1}^{3}\omega_i^k\vec{e}_k\cdot\vec{e}_j+\vec{e}_i\cdot\sum_{k=1}^{3}\omega_j^k\vec{e}_k=0.$

即 $\omega_i^j+\omega_j^i=0$, 其中$i,j=1,2,3.$

即 $\omega_1^1=\omega_2^2=\omega_3^3=0,$

$$\omega_1^2=-\omega_2^1,\ \omega_2^3=-\omega_3^2,\ \omega_3^1=-\omega_1^3.$$

实例：双参数活动标架的相对分量

考虑双参数活动标架

$$\{\boldsymbol{r}(u,v);\ \boldsymbol{e}_1(u,v),\ \boldsymbol{e}_2(u,v),\ \boldsymbol{e}_3(u,v)\},$$

其中 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 是曲面(S)的方程，其上已选取正交坐标网.

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{r}_u}{|\boldsymbol{r}_u|}=\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_v|}=\frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}},\quad \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{n},$$

注意，由于坐标网正交，所以 $F=0$.

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v=(\sqrt{E}\,\mathrm{d}u)\boldsymbol{e}_1+(\sqrt{G}\,\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_2,$$

因而 $\omega^1=\sqrt{E}\,\mathrm{d}u,\quad \omega^2=\sqrt{G}\,\mathrm{d}v,\quad \omega^3=0,$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1=\mathrm{d}\left(\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}}\right)=\frac{\boldsymbol{r}_{uu}\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_{uv}\mathrm{d}v}{\sqrt{E}}-\frac{(E_u\mathrm{d}u+E_v\mathrm{d}v)\boldsymbol{r}_u}{2E^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E}}[(\Gamma_{11}^{1}\boldsymbol{r}_u + \Gamma_{11}^{2}\boldsymbol{r}_v + L\boldsymbol{n})\mathrm{d}u + (\Gamma_{12}^{1}\boldsymbol{r}_u + \Gamma_{12}^{2}\boldsymbol{r}_v + M\boldsymbol{n})\mathrm{d}v] -$$

$$\frac{1}{2E}(E_u\mathrm{d}u + E_v\mathrm{d}v) \cdot \frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}}$$

$$= \left(\Gamma_{11}^{1}\mathrm{d}u + \Gamma_{12}^{1}\mathrm{d}v - \frac{E_u\mathrm{d}u + E_v\mathrm{d}v}{2E}\right)\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}} +$$

$$(\Gamma_{11}^{2}\mathrm{d}u + \Gamma_{12}^{2}\mathrm{d}v)\frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{E}} + \frac{1}{\sqrt{E}}(L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v)\boldsymbol{n}$$

$$= \left(\Gamma_{11}^{1}\mathrm{d}u + \Gamma_{12}^{1}\mathrm{d}v - \frac{E_u\mathrm{d}u + E_v\mathrm{d}v}{2E}\right)\boldsymbol{e}_1 +$$

$$\sqrt{\frac{G}{E}}(\Gamma_{11}^{2}\mathrm{d}u + \Gamma_{12}^{2}\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{E}}(L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_3.$$

同理 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2 = \mathrm{d}\left(\dfrac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}}\right) = \sqrt{\dfrac{E}{G}}(\Gamma_{12}^1\mathrm{d}u + \Gamma_{22}^1\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_1 +$

$$\left(\Gamma_{12}^2\mathrm{d}u + \Gamma_{22}^2\mathrm{d}v - \frac{G_u\mathrm{d}u + G_v\mathrm{d}v}{2G}\right)\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{G}}(M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_3.$$

但是对于正交坐标网来说

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E},\quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G},\quad \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E},\quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G},\quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E},\quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G},$$

因此 $\omega_1^1 = 0,\quad \omega_2^2 = 0,\quad \omega_1^3 = \dfrac{1}{\sqrt{E}}(L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v),$

$$\omega_2^3 = \frac{1}{\sqrt{G}}(M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}v),\quad \omega_1^2 = -\omega_2^1 = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}(E_v\mathrm{d}u - G_u\mathrm{d}v),$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3 = \mathrm{d}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_u\mathrm{d}u + \boldsymbol{n}_v\mathrm{d}v$$

$$= (\mu_1^1\boldsymbol{r}_u + \mu_1^2\boldsymbol{r}_v)\mathrm{d}u + (\mu_2^1\boldsymbol{r}_u + \mu_2^2\boldsymbol{r}_v)\mathrm{d}v$$

对于正交坐标网来说

$\mu_1^1 = -\frac{L}{E}$, $\mu_1^2 = -\frac{M}{G}$, $\mu_2^1 = -\frac{M}{E}$, $\mu_2^2 = -\frac{N}{G}$, 因此

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3 = -\frac{1}{E}(L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v)\boldsymbol{r}_u - \frac{1}{G}(M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}v)\boldsymbol{r}_v$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{E}}(L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{G}}(M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_2.$$

所以 $\omega_3^1 = -\frac{1}{\sqrt{E}}(L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v) = -\omega_1^3$,

$$\omega_3^2 = -\frac{1}{\sqrt{G}}(M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}v) = -\omega_2^3.$$

双参数活动标架的相对分量小结

曲面(S)：$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$，设其坐标网正交，$F=0$.

$$\vec{e}_1=\vec{r}_u/|\vec{r}_u|=\frac{\vec{r}_u}{\sqrt{E}},\quad \vec{e}_2=\vec{r}_v/|\vec{r}_v|=\frac{\vec{r}_v}{\sqrt{G}},\quad \vec{e}_3=\vec{n}.$$

$$\omega^1=\sqrt{E}\,\mathrm{d}u,\quad \omega^2=\sqrt{G}\,\mathrm{d}v,\quad \omega^3=0;$$

$$\omega_1^1=0,\quad \omega_1^2=-\frac{E_v\,\mathrm{d}u-G_u\,\mathrm{d}v}{2\sqrt{EG}},\quad \omega_1^3=\frac{L\,\mathrm{d}u+M\,\mathrm{d}v}{\sqrt{E}};$$

$$\omega_2^1=-\omega_1^2,\quad \omega_2^2=0,\quad \omega_2^3=\frac{M\,\mathrm{d}u+N\,\mathrm{d}v}{\sqrt{G}};$$

$$\omega_3^1=-\omega_1^3,\quad \omega_3^2=-\omega_2^3,\quad \omega_3^3=0.$$

活动标架的结构方程

活动标架$\{\vec{r};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$的相对分量$\omega^i$和$\omega_i^j$应满足

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega^i = \sum_{j=1}^{3}\omega^j \wedge \omega_j^i & (\text{由}\,\mathrm{d}\mathrm{d}\vec{r}=0\text{得到}) \\ \mathrm{d}\omega_i^j = \sum_{k=1}^{3}\omega_i^k \wedge \omega_k^j & (\text{由}\,\mathrm{d}\mathrm{d}\vec{e}_i=0\text{得到}) \\ \omega_i^j + \omega_j^i = 0 & (\text{由}\,\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}\text{得到}) \\ \text{其中}\ i,j=1,2,3. & \end{cases}$$

称上式为活动标架$\{\vec{r};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$的**结构方程**.

证 $d\vec{r}=\sum_{i=1}^{3}\omega^i\vec{e}_i.$

$$dd\vec{r}=\sum_{i=1}^{3}d(\overset{1\text{-形式}}{\boxed{\omega^i}}\,\overset{0\text{-形式}}{\boxed{\vec{e}_i}})=\sum_{i=1}^{3}(d\omega^i\vec{e}_i-\omega^i\wedge d\vec{e}_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}d\omega^i\vec{e}_i-\sum_{i=1}^{3}\omega^i\wedge(\sum_{j=1}^{3}\omega_i^j\vec{e}_j)=\sum_{i=1}^{3}d\omega^i\vec{e}_i-\sum_{i,j=1}^{3}\omega^i\wedge\omega_i^j\vec{e}_j$$

$$=\sum_{i=1}^{3}(d\omega^i-\omega^j\wedge\omega_j^i)\vec{e}_i\quad=0\quad(\text{由Poincaré引理}dd\vec{r}=0).$$

所以 $d\omega^i=\sum_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega_j^i\quad(i=1,2,3).$

类似地，由 $dd\vec{e}_i=0$ 得到 $d\omega_i^j=\sum_{k=1}^{3}\omega_i^k\wedge\omega_k^j\quad(i,j=1,2,3).$

实例：双参数活动标架结构方程的具体化

①由$\omega^3=0$得$\mathrm{d}\omega^3=\sum_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega_j^3=\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3=0$,

因此由Cartan引理得存在函数$a(u,v),b(u,v),c(u,v)$使

$$\omega_1^3=a\omega^1+b\omega^2,\ \omega_2^3=b\omega^1+c\omega^2.$$

②设$\omega_1^2=g_1(u,v)\mathrm{d}u+g_2(u,v)\mathrm{d}v$,

则$\omega_1^2=\dfrac{g_1}{\sqrt{E}}\sqrt{E}\mathrm{d}u+\dfrac{g_2}{\sqrt{G}}\sqrt{G}\mathrm{d}v=\dfrac{g_1}{\sqrt{E}}\omega^1+\dfrac{g_2}{\sqrt{G}}\omega^2$.

$$\mathrm{d}\omega^1=\sum_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega_j^1=\omega^2\wedge\omega_2^1$$

$$=\omega^2\wedge\left(-\frac{g_1}{\sqrt{E}}\omega^1-\frac{g_2}{\sqrt{G}}\omega^2\right)=\frac{g_1}{\sqrt{E}}\omega^1\wedge\omega^2.$$

$$d\omega^2=\sum_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega_j^2=\omega^1\wedge\omega_1^2$$

$$=\omega^1\wedge\left(\frac{g_1}{\sqrt{E}}\omega^1+\frac{g_2}{\sqrt{G}}\omega^2\right)=\frac{g_2}{\sqrt{G}}\omega^1\wedge\omega^2.$$

在形式上记 $\dfrac{d\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2}\triangleq\dfrac{g_1}{\sqrt{E}},\quad\dfrac{d\omega^2}{\omega^1\wedge\omega^2}\triangleq\dfrac{g_2}{\sqrt{G}},$

则 $\omega_1^2=\left(\dfrac{d\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2}\right)\omega^1+\left(\dfrac{d\omega^2}{\omega^1\wedge\omega^2}\right)\omega^2.$

③ $d\omega_3^1=\omega_3^2\wedge\omega_2^1$和 $d\omega_3^2=\omega_3^1\wedge\omega_1^2$ $(\Leftrightarrow d d\vec{e}_3=0)$

相当于曲面论中的Codazzi-Mainardi公式;

④ $d\omega_1^2=\omega_1^3\wedge\omega_3^2$ 相当于曲面论中的Gauss公式.

活动标架的基本定理(P149-P150)

给出六个p参数$u^1,u^2,\cdots,u^p\,(p\le 6)$的Pfaff形式

$$\omega^1(u,\mathrm{d}u),\ \omega^2(u,\mathrm{d}u),\ \omega^3(u,\mathrm{d}u),$$

$$\omega_1^2(u,\mathrm{d}u),\ \omega_2^3(u,\mathrm{d}u),\ \omega_3^1(u,\mathrm{d}u),$$

如果它们满足结构方程(设$i,j=1,2,3$):

$$\mathrm{d}\omega^i=\sum_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega_j^i,\ \mathrm{d}\omega_i^j=\sum_{k=1}^{3}\omega_i^k\wedge\omega_k^j,\ \omega_i^j+\omega_j^i=0,$$

则存在 p 参数活动标架

$$\{\vec{r}(u^1,u^2,\cdots,u^p);\vec{e}_i(u^1,u^2,\cdots,u^p)\,(i=1,2,3)\}$$

使得它们的相对分量就是给定的ω^i和ω_i^j,并且同一结构方程的不同p参数活动标架之间只差一空间位置.

证明：

Step1. 构造以$\vec{r}(u),\vec{e}_1(u),\vec{e}_2(u),\vec{e}_3(u)$为未知函数的Pfaff方程组；

$$\begin{cases} \pi = \mathrm{d}\vec{r} - \omega^1\vec{e}_1 - \omega^2\vec{e}_2 - \omega^3\vec{e}_3 = 0 \\ \pi_i = \mathrm{d}\vec{e}_i - \omega_i^1\vec{e}_1 - \omega_i^2\vec{e}_2 - \omega_i^3\vec{e}_3 = 0\ (i = 1,2,3) \end{cases}$$

Step2. 证明该Pfaff方程组完全可积(即证明该方程组满足Frobenius条件)；

$$\mathrm{d}\pi = \sum_{i=1}^{3}\left(-\mathrm{d}\omega^i + \sum_{j=1}^{3}\omega^j \wedge \omega_j^i\right)\vec{e}_i + \sum_{i=1}^{3}\omega^i \wedge \pi_i$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\omega^i \wedge \pi_i$$

$$\mathrm{d}\pi_i = \sum_{j=1}^{3}\left(-\mathrm{d}\omega_i^j + \sum_{k=1}^{3}\omega_i^k \wedge \omega_k^j\right)\vec{e}_j + \sum_{j=1}^{3}\omega_i^j \wedge \pi_j$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\omega_i^j \wedge \pi_j$$

Step3. 叙述结论.

由完全可积的定义知在给出初始条件时上述Pfaff方程组存在唯一解.

条件$\omega_i^j + \omega_j^i = 0$保证了$\vec{e}_1(u),\vec{e}_2(u),\vec{e}_3(u)$两两正交,

该组解构成一个p参数活动标架.

不同初始条件下的解只相差一个空间合同变换.

故…….

三、活动标架法

Step1. 设法找到一族活动标架,使所研究的图形与这族活动标架一一对应起来;

Step2. 把活动标架微分一次得到活动标架的相对分量;

Step3. 把得到的相对分量外微分一次,得到它们应满足的结构方程;

Step4. 利用相对分量去描述图形的几何特点.

实例：用活动标架法研究空间曲线

空间曲线(C)：$\vec{r}=\vec{r}(s)$，s为自然参数.

Step1. 构建活动标架：$\{\vec{r}(s);\vec{e}_1(s),\vec{e}_2(s),\vec{e}_3(s)\}$

$$\text{其中 } \vec{e}_1=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s},\ \vec{e}_2=\frac{\mathrm{d}\vec{e}_1}{\mathrm{d}s}\Bigg/\left|\frac{\mathrm{d}\vec{e}_1}{\mathrm{d}s}\right|,\quad \vec{e}_3=\vec{e}_1\times\vec{e}_2.$$

Step2. 计算相对分量:

$$\mathrm{d}\vec{r}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=\mathrm{d}s\vec{e}_1+0\vec{e}_2+0\vec{e}_3,$$

因此$\omega^1=\mathrm{d}s,\quad \omega^2=0,\quad \omega^3=0;$

$$\mathrm{d}\vec{e}_1 = 0\vec{e}_1 + \omega_1^2\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 \Rightarrow \omega_1^1 = \omega_1^3 = 0 = -\omega_3^1.$$

记$\omega_1^2 = k(s)\mathrm{d}s$, 则$\omega_2^1 = -k(s)\mathrm{d}s$.

$$\mathrm{d}\vec{e}_2 = \omega_2^1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \omega_2^3\vec{e}_3 = -k(s)\mathrm{d}s\vec{e}_1 + \omega_2^3\vec{e}_3 \Rightarrow \omega_2^2 = 0.$$

记$\omega_2^3 = \tau(s)\mathrm{d}s$,

则$\omega_3^2 = -\tau(s)\mathrm{d}s$, $\quad \mathrm{d}\vec{e}_2 = -k(s)\mathrm{d}s\vec{e}_1 + \tau(s)\mathrm{d}s\vec{e}_3$.

$$\mathrm{d}\vec{e}_3 = \omega_3^1\vec{e}_1 + \omega_3^2\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = 0\vec{e}_1 - \tau(s)\mathrm{d}s\vec{e}_2 = -\tau(s)\mathrm{d}s\vec{e}_2.$$

无穷小位移为:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}s\vec{e}_1 \\ \mathrm{d}\vec{e}_1 = k(s)\mathrm{d}s\vec{e}_2 \\ \mathrm{d}\vec{e}_2 = -k(s)\mathrm{d}s\vec{e}_1 + \tau(s)\mathrm{d}s\vec{e}_3 \\ \mathrm{d}\vec{e}_3 = -\tau(s)\mathrm{d}s\vec{e}_2 \end{cases}$$

Step3. 计算结构方程:

$\because$ 单参数Pfaff形式的外微分为零,

$\therefore$ 无结构方程,

即无需可积条件就能确定曲线方程.

Step4. 应用……

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

3.7 设 $f(x,y,z)$ 是定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的一个 C^∞ 类的函数，令 $\vec{r}=(x,y,z)$，$\vec{e}_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin f,1,-\cos f)$，

$\vec{e}_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin f,-1,-\cos f)$，$\vec{e}_3=(-\cos f,0,-\sin f)$

验证 $\{\vec{r};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个单位正交标架场，并求它的相对分量.

3.8 在旋转曲面 $\vec{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,g(u))$ 上建立一个单位正交标架场，并计算它的相对分量.

§3.3 用活动标架法研究曲面

一、曲面论的基本定理

二、曲面的第一和第二基本形式

三、曲面上的曲率、法曲率、测地曲率和测地挠率

四、曲面的主曲率、欧拉公式、高斯曲率和平均曲率

五、曲面上向量的平行移动

六、闭曲面上的高斯-波涅公式

一、曲面论的基本定理

给出一个曲面(S): $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, 设其曲纹坐标网正交,

则曲面(S)上任一点$\vec{r}(u,v)$处存在三个有序的两两正交的单位向量:

$$\vec{e}_1(u,v)=\vec{r}_u\big/\sqrt{E}\,,\ \vec{e}_2(u,v)=\vec{r}_v\big/\sqrt{G}\,,\ \vec{e}_3(u,v)=\vec{n}(u,v).$$

无穷小位移
$$\begin{cases} \mathrm{d}\vec{r}=\omega^1\vec{e}_1+\omega^2\vec{e}_2,\ \omega^3=0, \\ \mathrm{d}\vec{e}_1=\omega_1^2\vec{e}_2+\omega_1^3\vec{e}_3, \\ \mathrm{d}\vec{e}_2=\omega_2^1\vec{e}_1+\omega_2^3\vec{e}_3, \\ \mathrm{d}\vec{e}_3=\omega_3^1\vec{e}_1+\omega_3^2\vec{e}_2, \end{cases}$$

其中$\omega_i^j+\omega_j^i=0\ \ (i,j=1,2,3)$.

双参数活动标架的结构方程

$$\mathrm{d}\omega^1=\omega^2\wedge\omega_2^1,\ \mathrm{d}\omega^2=\omega^1\wedge\omega_1^2,$$

$$\mathrm{d}\omega^3=\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3=0$$

$$\mathrm{d}\omega_1^2=\omega_1^3\wedge\omega_3^2$$

(曲面论中对于正交坐标网的Gauss公式)

$\mathrm{d}\omega_3^1=\omega_3^2\wedge\omega_2^1$和 $\mathrm{d}\omega_3^2=\omega_3^1\wedge\omega_1^2$

(曲面论中的Codazzi-Mainardi公式)

活动标架语言表达的曲面论的基本定理

给出六个双参数u,v的Pfaff形式

$$\omega^1(u,v,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v),\ \omega^2(u,v,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v),\ \omega^3(u,v,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v),$$

$$\omega_1^2(u,v,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v),\ \omega_2^3(u,v,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v),\ \omega_3^1(u,v,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v),$$

如果它们满足结构方程,且$\omega_i^j+\omega_j^i=0(i,j=1,2,3)$,

则差一空间合同变换确定一个双参数活动标架

$$\{\vec{r}(u,v);\ \vec{e}_1(u,v),\vec{e}_2(u,v),\vec{e}_3(u,v)\}$$

使得它的相对分量就是给定的ω^i和ω_i^j.活动标架的原点$\vec{r}(u,v)$的轨迹是一曲面,$\vec{e}_1(u,v)$和$\vec{e}_2(u,v)$正好是曲面的坐标网的单位切向量,$\vec{e}_3(u,v)$是曲面的单位法向量.

二、曲面的第一和第二基本形式

曲面(S)：$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$，设其曲纹坐标网正交.

$\mathrm{d}\vec{r}=\omega^1\vec{e}_1+\omega^2\vec{e}_2$，其中$\omega^1=\sqrt{E}\,\mathrm{d}u$，$\omega^2=\sqrt{G}\,\mathrm{d}v$.

第一基本形式 $\mathrm{I}=\mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2$.

称曲面(S)的只与ω^1和ω^2有关的量为曲面的内蕴量.

面积元素 $\mathrm{d}A=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=\omega^1\wedge\omega^2$.

$$\omega_1^2=\left(\frac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2}\right)\omega^1+\left(\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1\wedge\omega^2}\right)\omega^2.$$

第二基本形式

$$\mathrm{II} = -\mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{e}_3 = -(\omega^1\vec{e}_1+\omega^2\vec{e}_2)\cdot(\omega_3^1\vec{e}_1+\omega_3^2\vec{e}_2)$$

$$= -\omega^1\omega_3^1-\omega^2\omega_3^2 = \omega^1\omega_1^3+\omega^2\omega_2^3.$$

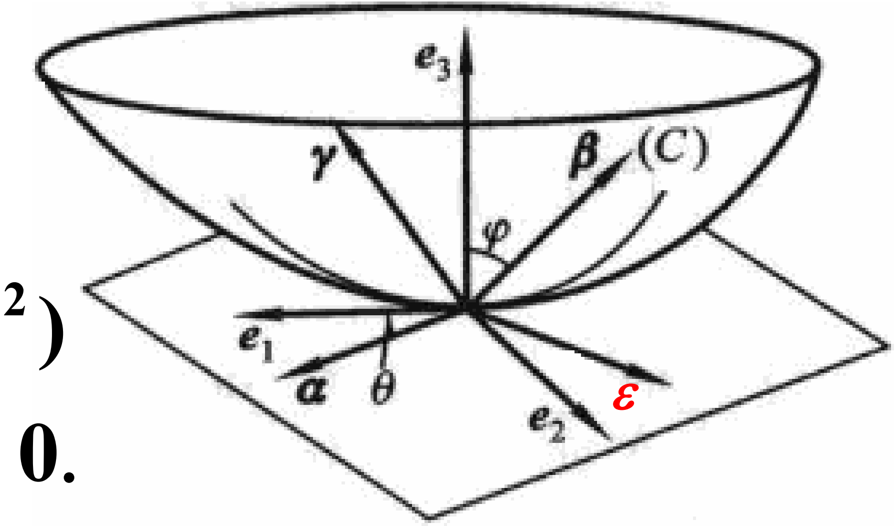
将 $\omega_1^3 = a\omega^1+b\omega^2,\ \omega_2^3 = b\omega^1+c\omega^2$ 代入得

$$\mathrm{II} = a(\omega^1)^2+2b\omega^1\omega^2+c(\omega^2)^2$$

$$= aE\mathrm{d}u^2+2b\sqrt{EG}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+cG\mathrm{d}v^2,$$

因此 $a=\dfrac{L}{E},\ b=\dfrac{M}{\sqrt{EG}},\ c=\dfrac{N}{G}.$

三、曲面上的曲线的法曲率、测地曲率和测地挠率



设曲面(S): $\vec{r}=\vec{r}(u,v)=\vec{r}(u^1,u^2)$的曲纹坐标网为正交网，即$F\equiv 0$.

(S)上的曲线(C): $u=u(s), v=v(s)$，其中s为弧长参数.

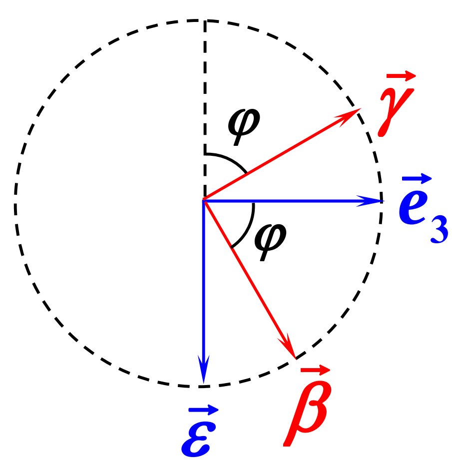
如图所示，$\vec{\varepsilon}=\vec{e}_3\times\vec{\alpha}$，它为切平面上的一个向量.

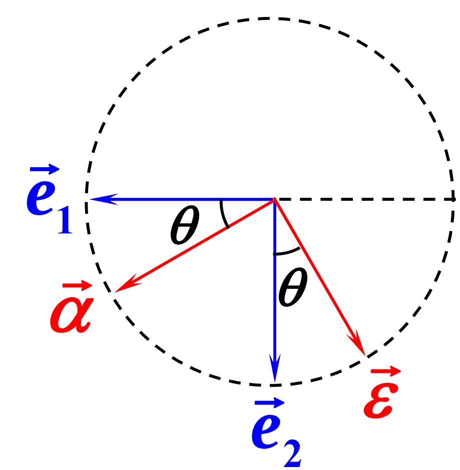
$$\vec{\alpha}=\vec{e}_1\cos\theta+\vec{e}_2\sin\theta$$

$$\vec{\varepsilon}=-\vec{e}_1\sin\theta+\vec{e}_2\cos\theta$$

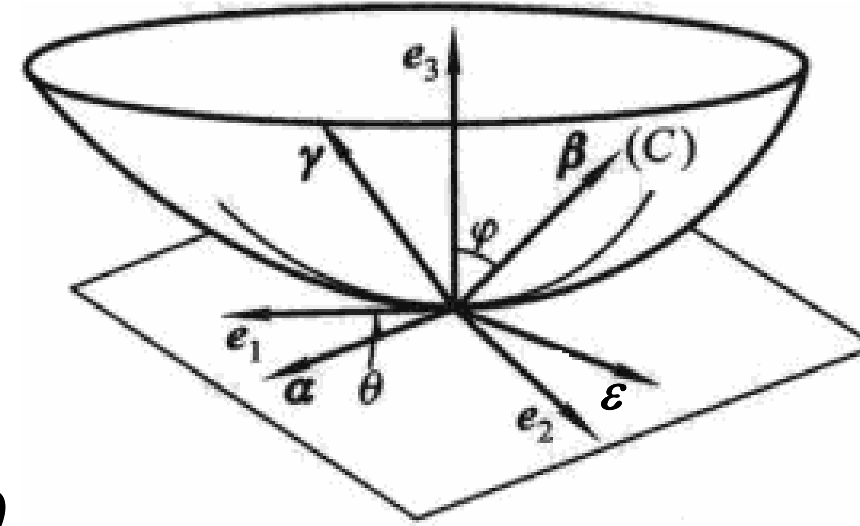
$$\vec{\beta}=\vec{\varepsilon}\sin\varphi+\vec{e}_3\cos\varphi$$

$$\vec{\gamma}=-\vec{\varepsilon}\cos\varphi+\vec{e}_3\sin\varphi$$





测地曲率与法曲率



曲率向量$k\vec{\beta}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\alpha}}{\mathrm{d}s}$,

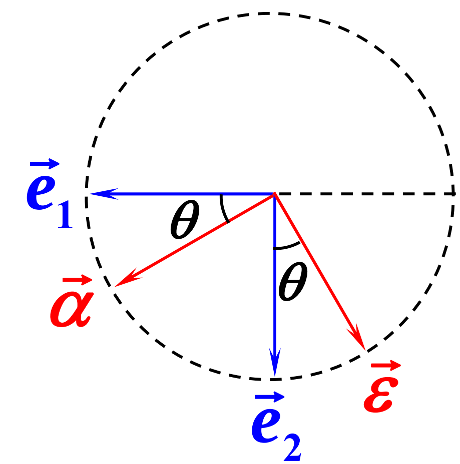
而$\mathrm{d}\vec{\alpha}=\mathrm{d}(\vec{e}_1\cos\theta+\vec{e}_2\sin\theta)$

$$=(\omega_1^2\vec{e}_2+\omega_1^3\vec{e}_3)\cos\theta-\vec{e}_1\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$+(\omega_2^1\vec{e}_1+\omega_2^3\vec{e}_3)\sin\theta+\vec{e}_2\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=(\mathrm{d}\theta+\omega_1^2)(-\vec{e}_1\sin\theta+\vec{e}_2\cos\theta)+(\omega_1^3\cos\theta+\omega_2^3\sin\theta)\vec{e}_3$$

$$=(\mathrm{d}\theta+\omega_1^2)\vec{\varepsilon}+(\omega_1^3\cos\theta+\omega_2^3\sin\theta)\vec{e}_3.$$



测地曲率$k_g=k\vec{\beta}\cdot\vec{\varepsilon}=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}+\dfrac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}$.

法曲率$k_n=k\vec{\beta}\cdot\vec{e}_3=\dfrac{\omega_1^3\cos\theta+\omega_2^3\sin\theta}{\mathrm{d}s}$.

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{\alpha}\mathrm{d}s = (\cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2)\mathrm{d}s = \cos\theta\mathrm{d}s\vec{e}_1 + \sin\theta\mathrm{d}s\vec{e}_2,$$

而由无穷小位移公式 $\mathrm{d}\vec{r} = \omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2$,

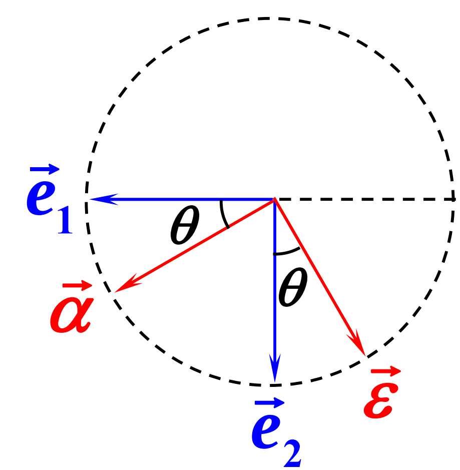
因此 $\omega^1 = \cos\theta\,\mathrm{d}s$, $\omega^2 = \sin\theta\,\mathrm{d}s$.

于是 $$k_n = \frac{\omega_1^3\cos\theta + \omega_2^3\sin\theta}{\mathrm{d}s}$$

$$= \frac{\cos\theta\mathrm{d}s\omega_1^3 + \sin\theta\mathrm{d}s\omega_2^3}{\mathrm{d}s^2}$$

$$= \frac{\omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3}{\mathrm{d}s^2}$$

$$= \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}.$$



例1 设曲面的第一基本形式是 $\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2$, 证明曲面上的曲线$(C)$的测地曲率$k_g$的Liouville公式:

$$k_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{1}{2\sqrt{G}}(\ln E)_v\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}(\ln G)_u\sin\theta,$$

其中s是(C)的弧长参数, θ是(C)与u-曲线的夹角.

证 由刚才得到的公式知 $k_g=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}+\dfrac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}$.

由 $\mathrm{I}=(\sqrt{E}\mathrm{d}u)^2+(\sqrt{G}\mathrm{d}v)^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2$ 知

可取 $\omega^1=\sqrt{E}\mathrm{d}u,\quad \omega^2=\sqrt{G}\mathrm{d}v,$

则 $\mathrm{d}\omega^1=-(\sqrt{E})_v\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v,\quad \mathrm{d}\omega^2=(\sqrt{G})_u\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v,$

$$\omega^1\wedge\omega^2=\sqrt{EG}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.$$

$$\omega_1^2 = \frac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2}\omega^1 + \frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2}\omega^2$$

$$= \frac{-(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}\sqrt{E}\mathrm{d}u + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}\sqrt{G}\mathrm{d}v$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{G}}(\ln E)_v\sqrt{E}\mathrm{d}u + \frac{1}{2\sqrt{E}}(\ln G)_u\sqrt{G}\mathrm{d}v.$$

$$\omega^1 = \sqrt{E}\mathrm{d}u = \cos\theta\mathrm{d}s, \qquad \omega^2 = \sqrt{G}\mathrm{d}v = \sin\theta\mathrm{d}s.$$

$$k_g = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} - \frac{1}{2\sqrt{G}}(\ln E)_v\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}(\ln G)_u\sin\theta.$$

例2 设曲面的第一基本形式是 $\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + 2\cos\varphi \mathrm{d}u\mathrm{d}v + \mathrm{d}v^2$，

其中 $\varphi(u,v)$ 是 (u,v) 处的 u-曲线和 v-曲线之间的夹角.

求 u-曲线和 v-曲线的二等分角轨线的测地曲率.

解 $\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + 2\cos\varphi \mathrm{d}u\mathrm{d}v + \mathrm{d}v^2$

$$= (\mathrm{d}u + \cos\varphi \mathrm{d}v)^2 + (\sin\varphi \mathrm{d}v)^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2.$$

取 $\omega^1 = \mathrm{d}u + \cos\varphi \mathrm{d}v, \quad \omega^2 = \sin\varphi \mathrm{d}v.$

则 $\mathrm{d}\omega^1 = -\varphi_u \sin\varphi \, \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v, \quad \mathrm{d}\omega^2 = \varphi_u \cos\varphi \, \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v,$

$\omega^1 \wedge \omega^2 = \sin\varphi \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$

$$\omega_1^2 = \frac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2}\omega^1 + \frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2}\omega^2$$

$$=\frac{-\varphi_u\sin\varphi}{\sin\varphi}(\mathrm{d}u+\cos\varphi\mathrm{d}v)+\frac{\varphi_u\cos\varphi}{\sin\varphi}\sin\varphi\mathrm{d}v=-\varphi_u\mathrm{d}u.$$

(1) 当 $\theta=\frac{1}{2}\varphi$ 时，结合 $\begin{cases}\omega^1=\mathrm{d}u+\cos\varphi\mathrm{d}v=\cos\theta\mathrm{d}s\\ \omega^2=\sin\varphi\mathrm{d}v=\sin\theta\mathrm{d}s\end{cases}$

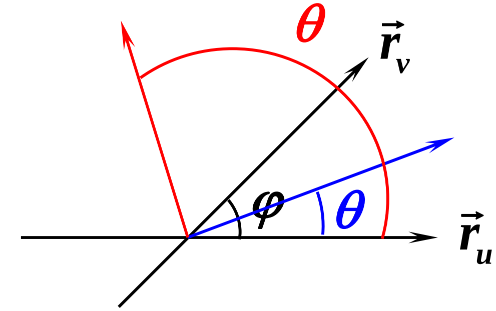
得 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}}$， $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}}$.

$$k_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}+\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\frac{\varphi}{2}}{\mathrm{d}s}-\varphi_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{2}(\varphi_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}+\varphi_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s})-\varphi_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}$$

$$=\frac{1}{2}(\varphi_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}-\varphi_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s})=\frac{\varphi_v-\varphi_u}{4\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

(2) 当$\theta = \dfrac{\pi+\varphi}{2}$时, 结合$\begin{cases} \omega^1 = \mathrm{d}u + \cos\varphi\mathrm{d}v = \cos\theta\mathrm{d}s \\ \omega^2 = \sin\varphi\mathrm{d}v = \sin\theta\mathrm{d}s \end{cases}$

得$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}, \quad \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$.

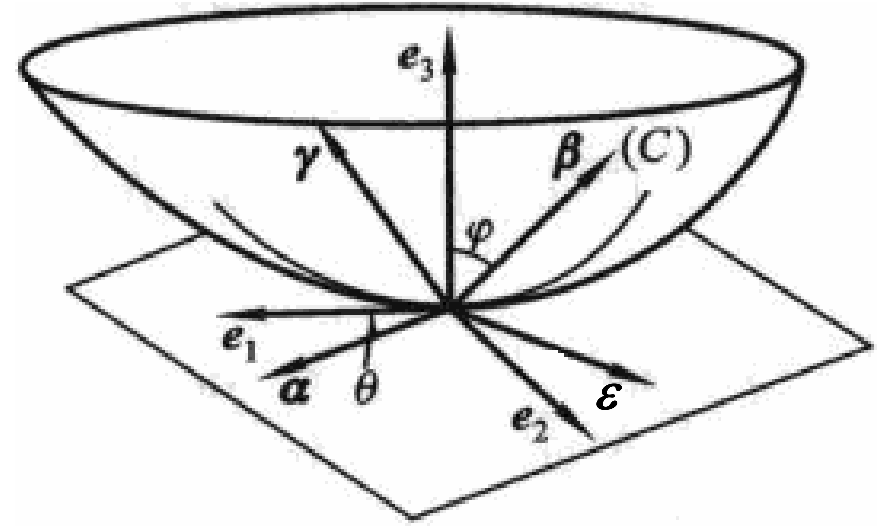


$$k_g = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}(\frac{\varphi+\pi}{2})}{\mathrm{d}s} - \varphi_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}$$

$$= \frac{1}{2}(\varphi_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + \varphi_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}) - \varphi_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{2}(\varphi_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} - \varphi_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}) = \frac{\varphi_u + \varphi_v}{4\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

综上, 所求测地曲率为$\pm\dfrac{\varphi_v - \varphi_u}{4\cos\frac{\varphi}{2}}$或$\pm\dfrac{\varphi_u + \varphi_v}{4\sin\frac{\varphi}{2}}$.

测地挠率τ_g



考虑标架场$\{\vec{r};\vec{\alpha},\vec{\varepsilon},\vec{e}_3\}$的无穷小位移:

$$\mathrm{d}\vec{r}=\vec{\alpha}\mathrm{d}s=\mathrm{d}s\vec{\alpha}+0\vec{\varepsilon}+0\vec{e}_3$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{d}\vec{\alpha}=0\vec{\alpha}+?\vec{\varepsilon}+?\vec{e}_3\\&\dot{\vec{\alpha}}=k\vec{\beta}=k_g\vec{\varepsilon}+k_n\vec{e}_3\end{aligned}\right\}\Rightarrow \mathrm{d}\vec{\alpha}=0\vec{\alpha}+k_g\mathrm{d}s\vec{\varepsilon}+k_n\mathrm{d}s\vec{e}_3$$

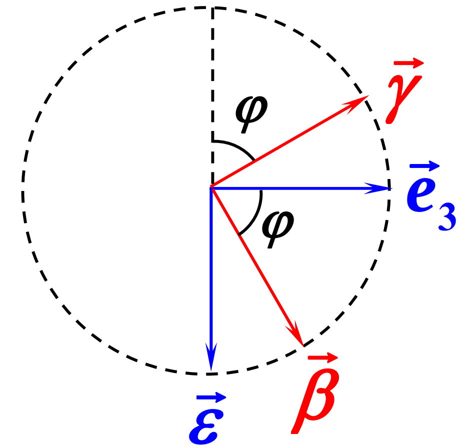
$$\mathrm{d}\vec{\varepsilon}=?\vec{\alpha}+0\vec{\varepsilon}+?\vec{e}_3=-k_g\mathrm{d}s\vec{\alpha}+0\vec{\varepsilon}+?\vec{e}_3$$

$$\triangleq -k_g\mathrm{d}s\vec{\alpha}+0\vec{\varepsilon}+\boxed{\tau_g}\mathrm{d}s\vec{e}_3$$

$\tau_g \rightarrow$ 测地挠率

$$\mathrm{d}\vec{e}_3=?\vec{\alpha}+?\vec{\varepsilon}+0\vec{e}_3=-k_n\mathrm{d}s\vec{\alpha}-\tau_g\mathrm{d}s\vec{\varepsilon}+0\vec{e}_3$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{\alpha}} = 0\vec{\alpha} + k_g\vec{\varepsilon} + k_n\vec{e}_3 \\ \dot{\vec{\varepsilon}} = -k_g\vec{\alpha} + 0\vec{\varepsilon} + \tau_g\vec{e}_3 \\ \dot{\vec{e}}_3 = -k_n\vec{\alpha} - \tau_g\vec{\varepsilon} + 0\vec{e}_3 \end{cases}$$



$$\tau_g \triangleq \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{e}_3 = -\vec{\varepsilon} \cdot \dot{\vec{e}}_3 = -\vec{\varepsilon} \cdot \mathrm{d}(\vec{\beta}\cos\varphi + \vec{\gamma}\sin\varphi)/\mathrm{d}s$$

$$= -\vec{\varepsilon} \cdot (\dot{\vec{\beta}}\cos\varphi - \vec{\beta}\sin\varphi\dot{\varphi} + \dot{\vec{\gamma}}\sin\varphi + \vec{\gamma}\cos\varphi\dot{\varphi})$$

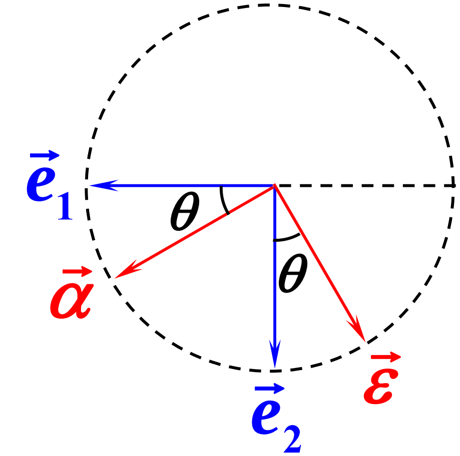
$$= -\vec{\varepsilon} \cdot [(-k\vec{\alpha} + \tau\vec{\gamma})\cos\varphi - \vec{\beta}\sin\varphi\dot{\varphi} - \tau\vec{\beta}\sin\varphi + \vec{\gamma}\cos\varphi\dot{\varphi}]$$

$$= \tau\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\dot{\varphi} + \tau\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\dot{\varphi}$$

$$= \tau + \dot{\varphi}.$$

当φ为常数时, $\tau_g = \tau$.　(如渐近曲线, 测地线)

$$\tau_g = -\vec{\varepsilon}\cdot\dot{\vec{e}}_3 = -\vec{\varepsilon}\cdot\frac{d\vec{e}_3}{ds}$$



$$= -(-\vec{e}_1\sin\theta + \vec{e}_2\cos\theta)\cdot\frac{\omega_3^1\vec{e}_1 + \omega_3^2\vec{e}_2}{ds}$$

$$= \frac{\sin\theta\omega_3^1 - \cos\theta\omega_3^2}{ds} = \frac{\sin\theta ds\omega_3^1 - \cos\theta ds\omega_3^2}{ds^2}$$

$$= \frac{\omega^2\omega_3^1 - \omega^1\omega_3^2}{ds^2} \triangleq \frac{\mathrm{III}}{\mathrm{I}},$$

注：$d\vec{r} = \omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2$

$= \vec{\alpha}ds$

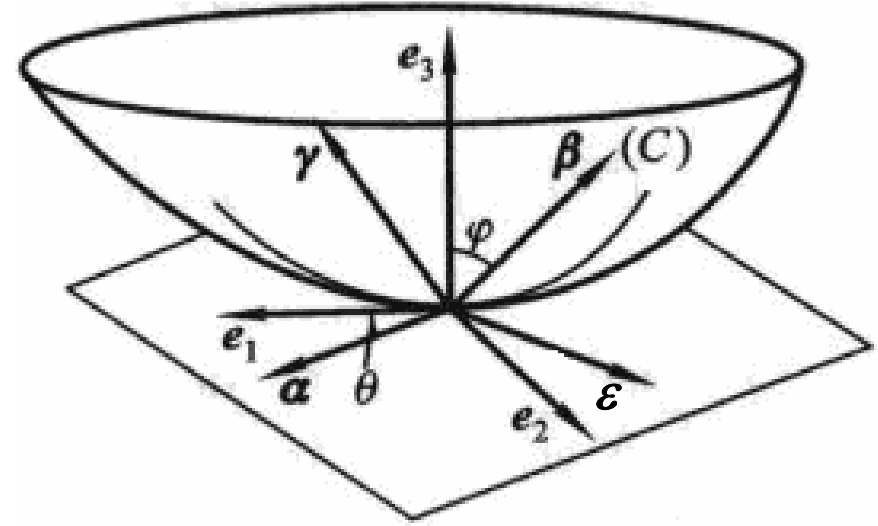
$= (\cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2)ds$

其中 $\mathrm{III} = \omega^1\omega_2^3 - \omega^2\omega_1^3$

注：$\mathrm{II} = \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3$

(Cartan 称 III 为曲面的第三基本形式).

曲率线和曲率线网



$$\tau_g = -\vec{\varepsilon}\cdot\dot{\vec{e}}_3 = \frac{\mathrm{III}}{\mathrm{I}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } \mathrm{III}=0 \text{ 时，} \ \tau_g = 0 \ \Rightarrow \vec{\varepsilon} \perp \mathrm{d}\vec{e}_3 \\ \left|\vec{e}_3\right| = 1 \Rightarrow \vec{e}_3 \perp \mathrm{d}\vec{e}_3\end{array}\right\} \Rightarrow \ \mathrm{d}\vec{e}_3 \ /\!/ \ \vec{\alpha}$$

主方向判别定理

$\Rightarrow$ 曲线(C)是曲率线.

曲面上曲率线网的微分方程为 $\mathrm{III} = \omega^1\omega_2^3 - \omega^2\omega_1^3 = 0$.

四、曲面的主曲率、Euler公式、Gauss曲率和平均曲率

$$k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2}$$

$$= \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\cos 2\theta + b\sin 2\theta$$

注：$\omega^1 = \sqrt{E}\,\mathrm{d}u = \cos\theta\,\mathrm{d}s,$

$\omega^2 = \sqrt{G}\,\mathrm{d}v = \sin\theta\,\mathrm{d}s$

为了求k_n的最值，令$\dfrac{\mathrm{d}k_n}{\mathrm{d}\theta} = 0$得 $\tan 2\theta_0 = \dfrac{2b}{a-c}$

因此 $(\cos 2\theta_0, \sin 2\theta_0) = \pm (a-c, 2b)\Big/\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}$

主曲率 $k_{1,2} = \dfrac{a+c}{2} \pm \dfrac{\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$

平均曲率 $H=\dfrac{k_1+k_2}{2}=\dfrac{a+c}{2}$.

Gauss曲率 $K=k_1k_2=ac-b^2$.

主曲率方程 $(a-k)(c-k)-b^2=0$.

$$\mathrm{d}\omega_1^2=\omega_1^3\wedge\omega_3^2=(a\omega^1+b\omega^2)\wedge(-b\omega^1-c\omega^2)$$

$$=(b^2-ac)\omega^1\wedge\omega^2$$

$$K=ac-b^2=\frac{-\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}$$ (用相对分量表示的高斯曲率)

因ω^1,ω^2和ω_1^2都是内蕴量,所以Gauss曲率是内蕴量.

例3 设曲面的第一基本形式是$ds^2=\frac{du^2+dv^2}{v^2}$，

计算一组相对分量$\omega^1,\omega^2,\omega_1^2$，并求高斯曲率$K$.

解 $$ds^2=\frac{du^2+dv^2}{v^2}=\left(\frac{du}{v}\right)^2+\left(\frac{dv}{v}\right)^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2,$$

取 $\omega^1=\frac{du}{v},\omega^2=\frac{dv}{v}$.

$$d\omega^1=-\frac{1}{v^2}dv\wedge du=\frac{1}{v^2}du\wedge dv,\quad d\omega^2=0.$$

$$\omega^1\wedge\omega^2=\frac{du}{v}\wedge\frac{dv}{v}=\frac{1}{v^2}du\wedge dv.$$

$$\omega_1^2=\frac{d\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2}\omega^1+\frac{d\omega^2}{\omega^1\wedge\omega^2}\omega^2=\omega^1=\frac{du}{v}.$$

$$d\omega_1^2=\frac{1}{v^2}du\wedge dv,\quad K=\frac{-d\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}=-1.$$

主方向　即,主曲率所在的切方向.

主方向与$\vec{e}_1$的夹角θ_0满足$\tan 2\theta_0 = \dfrac{2b}{a-c}$.

当$\vec{e}_1$和$\vec{e}_2$是主方向时(即$\theta_0 = 0$时)

$$b = 0,\quad a = k_1,\quad c = k_2,\quad \omega_1^3 = k_1\omega^1,\quad \omega_2^3 = k_2\omega^2.$$

注: $a = \dfrac{L}{E},\ b = \dfrac{M}{\sqrt{EG}},\ c = \dfrac{N}{G},\ \omega^1 = \sqrt{E}\mathrm{du},\ \omega^2 = \sqrt{G}\mathrm{dv}$

$$\mathrm{II} = a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\cdot\omega^2 + c(\omega^2)^2 = k_1(\omega^1)^2 + k_2(\omega^2)^2.$$

$$\mathrm{III} = \omega^1\omega_2^3 - \omega^2\omega_1^3 = (k_2 - k_1)\omega^1\omega^2.$$

令θ是曲面曲线(C)的切方向与$\vec{e}_1$的夹角,则

$$\omega^1 = \cos\theta \mathrm{d}s,\ \ \omega^2 = \sin\theta \mathrm{d}s.$$

代入$\mathrm{II} = k_1(\omega^1)^2 + k_2(\omega^2)^2$得到

$$k_n = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta \ \ (\text{Euler公式}).$$

代入$\mathrm{III} = (k_2 - k_1)\omega^1\omega^2$得到

$$\tau_g = \frac{\mathrm{III}}{\mathrm{I}} = (k_2 - k_1)\sin\theta\cos\theta.$$

当曲线(C)为坐标曲线$\theta=0$时

$$\omega^1=\mathrm{d}s,\qquad \omega^2=0,\qquad \omega_1^3=a\,\mathrm{d}s,\qquad \omega_2^3=b\,\mathrm{d}s$$

$$k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=a$$

$$k_g\,\mathrm{d}s=\mathrm{d}\theta+\omega_1^2=\omega_1^2$$

$$\tau_g=\frac{\mathrm{III}}{\mathrm{I}}=b$$

当曲线(C)为渐近曲线时

$$\mathrm{II}=0,$$

$$\varphi\equiv\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad\tau_g=\tau+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}=\tau$$

若再取渐近曲线(C)的切方向为$\vec{e}_1$(即坐标曲线的方向),

则$a=0,\ \tau_g=b,$

$$K=ac-b^2=-b^2=-\tau_g^2=-\tau^2,$$

于是$\tau=\pm\sqrt{-K}.$

Enneper(恩内佩尔)定理:

对于渐近曲线有$\tau=\pm\sqrt{-K}.$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

3.9 设曲面的第一基本形式是

$$\mathrm{d}s^2 = [U(u)+V(v)](\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2),$$

计算一组相对分量$\omega^1,\omega^2,\omega_1^2$,并求高斯曲率$K$.

3.10 设曲面的第一基本形式是

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}u^2 - 4v\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v + 4u\,\mathrm{d}v^2}{4(u-v^2)}\quad (u>v^2),$$

计算一组相对分量$\omega^1,\omega^2,\omega_1^2$,并求高斯曲率$K$.

五、曲面上向量的平行移动

设$\vec{v}(u^1,u^2)$是曲面S：$\vec{r}=\vec{r}(u^1,u^2)$上的(切)向量场，

称$\mathrm{d}\vec{v}$在S的切平面上的投影$\mathrm{D}\vec{v}$为$\vec{v}$的绝对微分.

$$\mathrm{d}\vec{e}_\alpha=\sum_{j=1}^{3}\omega_\alpha^j\vec{e}_j,\quad \mathrm{D}\vec{e}_\alpha=\sum_{\beta=1}^{2}\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta.\qquad \text{设}\vec{v}=\sum_{\beta=1}^{2}v^\beta\vec{e}_\beta,$$

$$\text{则}\mathrm{d}\vec{v}=\sum_{\beta=1}^{2}(\mathrm{d}v^\beta\vec{e}_\beta+v^\beta\mathrm{d}\vec{e}_\beta)=\sum_{\beta=1}^{2}\mathrm{d}v^\beta\vec{e}_\beta+\sum_{\alpha=1}^{2}v^\alpha\mathrm{d}\vec{e}_\alpha$$

$$=\sum_{\beta=1}^{2}\mathrm{d}v^\beta\vec{e}_\beta+\sum_{\alpha=1}^{2}v^\alpha\sum_{j=1}^{3}\omega_\alpha^j\vec{e}_j=\sum_{\beta=1}^{2}\mathrm{d}v^\beta\vec{e}_\beta+\sum_{j=1}^{3}\sum_{\alpha=1}^{2}v^\alpha\omega_\alpha^j\vec{e}_j.$$

$$\mathrm{D}\vec{v}=\sum_{\beta=1}^{2}(\mathrm{d}v^\beta+\sum_{\alpha=1}^{2}v^\alpha\omega_\alpha^\beta)\vec{e}_\beta\triangleq\sum_{\beta=1}^{2}\mathrm{D}v^\beta\vec{e}_\beta.$$

Levi-Civita(列维-奇维塔)平行移动

给出曲面S上的一条曲线(C): $u^\alpha = u^\alpha(s), \alpha = 1, 2,$

注：即曲线(C)的方程为$\vec{r} = \vec{r}(u^1(s), u^2(s))$

曲面上沿曲线(C)的向量场$\vec{v}(u^1(s), u^2(s)) \triangleq v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2,$

如果$\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{d}s} = \vec{0}$, 即$\dfrac{\mathrm{d}v^\beta}{\mathrm{d}s} + \sum_{\alpha=1}^{2} v^\alpha \dfrac{\omega_\alpha^\beta}{\mathrm{d}s} = 0 \ (\beta = 1, 2),$

亦即$\dfrac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}s} + v^2 \dfrac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s} = 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}s} + v^1 \dfrac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s} = 0,$

注：$\omega_l^l = 0$

则称$\vec{v}(u^1(s), u^2(s))$沿(C)在Levi-Civita意义下是平行的.

若设$\omega_\alpha^\beta=\sum_{\gamma=1}^{2}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta}\mathrm{d}u^\gamma$，则得到平行向量场$\vec{v}=\sum_{\beta=1}^{2}v^\beta\vec{e}_\beta$应满足的微分方程组：

$$\frac{\mathrm{d}v^\beta}{\mathrm{d}s}+\sum_{\alpha=1}^{2}v^\alpha\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta}\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s}=0\quad(\beta=1,2).$$

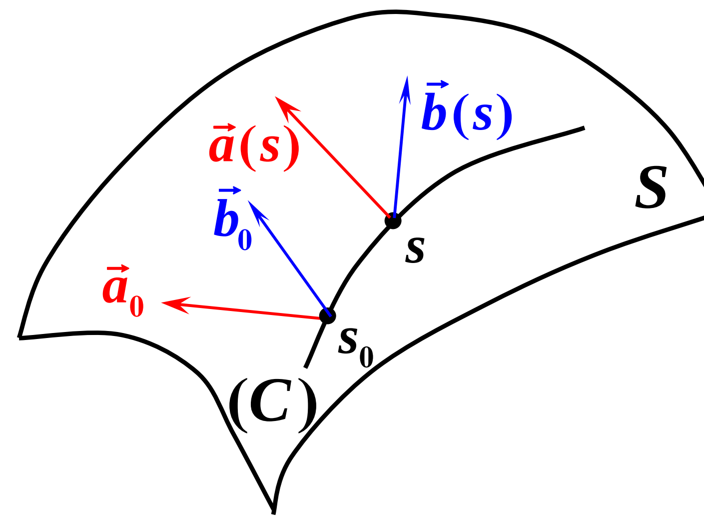
如果在曲线(C)的一点$\vec{r}(u^1(s_0),u^2(s_0))$处给出曲面的一个切向量$\vec{v}_0=\sum_{\beta=1}^{2}v_0^\beta\vec{e}_\beta$，则上述方程组对于初始条件：$s=s_0$时$v^\beta=v_0^\beta$，存在唯一解$v^\beta=v^\beta(s)$，沿曲线$(C)$的向量场$\vec{v}=\sum_{\beta=1}^{2}v^\beta\vec{e}_\beta$平行于给定的向量$\vec{v}_0$，称该向量场为向量$\vec{v}_0$沿曲线$(C)$的**平行移动**.

P158命题1 向量沿曲面上一条曲线平行移动时，保持向量的内积不变.

证 设曲面S沿它上面的曲线(C)有两个平行的向量场 $\vec{a}(s)$和$\vec{b}(s)$， $\vec{e}_1(s)$与$\vec{e}_2(s)$是正交的单位切向量，

$$\vec{a}(s)=a^1(s)\vec{e}_1(s)+a^2(s)\vec{e}_2(s),$$

$$\vec{b}(s)=b^1(s)\vec{e}_1(s)+b^2(s)\vec{e}_2(s).$$



则由平行移动的定义，

$$\frac{\mathrm{d}a^1}{\mathrm{d}s}+a^2\frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s}=0,\quad \frac{\mathrm{d}a^2}{\mathrm{d}s}+a^1\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}b^1}{\mathrm{d}s}+b^2\frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s}=0,\quad \frac{\mathrm{d}b^2}{\mathrm{d}s}+b^1\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}=0.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\vec{a}(s)\cdot\vec{b}(s)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[a^1(s)b^1(s)+a^2(s)b^2(s)]$$

$$=\frac{\mathrm{d}a^1}{\mathrm{d}s}b^1+a^1\frac{\mathrm{d}b^1}{\mathrm{d}s}+\frac{\mathrm{d}a^2}{\mathrm{d}s}b^2+a^2\frac{\mathrm{d}b^2}{\mathrm{d}s}$$

$$=(-a^2\frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s})b^1+a^1(-b^2\frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s})+(-a^1\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s})b^2+a^2(-b^1\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s})$$

$$=(a^2b^1+a^1b^2-a^1b^2-a^2b^1)\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}=0.$$

即$\vec{a}(s)\cdot\vec{b}(s)$与$s$无关,保持不变.

P158推论 沿曲面上一条曲线平行移动时,保持向量的长度不变,也保持两方向的夹角不变.

设有方向场$\vec{v}(s)=\cos\theta(s)\vec{e}_1(s)+\sin\theta(s)\vec{e}_2(s)$,

其中$\theta(s)$为$\vec{v}(s)$与$\vec{e}_1(s)$的夹角.

则平行移动的定义中的条件简化成$\mathrm{d}\theta+\omega_1^2=0$.

证 $\vec{v}(s)=v^1\vec{e}_1+v^2\vec{e}_2$是曲面上的平行移动场的条件为

$$\frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}s}+v^2\frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s}=0,\quad \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}s}+v^1\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}=0,$$

即 $$\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}s}+\sin\theta\frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s}=0,\quad \frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}s}+\cos\theta\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}=0.$$

即 $$-\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}+\sin\theta\frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s}=0,\quad \cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}+\cos\theta\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}=0.$$

即$\mathrm{d}\theta+\omega_1^2=0$.

P158命题2 如果曲面的平行移动与路径无关，

则该曲面一定是可展曲面.

证 设方向场 $\vec{v}=\cos\theta(u,v)\vec{e}_1(u,v)+\sin\theta(u,v)\vec{e}_2(u,v)$

沿曲面上的任意曲线(C): $\vec{r}=\vec{r}(u(s),v(s))$都是平行的.

由刚才得到的简化的平行移动条件有

$$\mathrm{d}\theta(u(s),v(s))+\omega_1^2(u(s),v(s))=0.$$

结合曲线(C)的任意性有$\mathrm{d}\theta(u,v)+\omega_1^2(u,v)=0.$

于是对于任意(u,v)有$\omega_1^2(u,v)=-\mathrm{d}\theta(u,v)$,

$\mathrm{d}\omega_1^2(u,v)=-\mathrm{d}\mathrm{d}\theta(u,v)=0.$ 注: 由Poincaré引理

$$K(u,v)=\frac{-\mathrm{d}\omega_1^2(u,v)}{\omega^1(u,v)\wedge\omega^2(u,v)}=0.$$ 因此曲面可展.

P159命题3 测地线是它的切线沿它自身平行的曲线，即测地线是自平行曲线.

证 设测地线的切线方向与$\vec{e}_1(s)$所夹的角为$\theta(s)$,

由测地曲率的计算公式知$k_g(s)=\dfrac{\mathrm{d}\theta(s)}{\mathrm{d}s}+\dfrac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}$.

对于测地线上任意一点有$k_g=0$,

代入上式得$\mathrm{d}\theta(s)+\omega_1^2=0$.

因此方向场$\cos\theta(s)\vec{e}_1(s)+\sin\theta(s)\vec{e}_2(s)$是平行场.

即测地线上各切线在列维-奇维塔意义下是平行的.

P159命题4 当向量$\vec{v}$沿测地线平移时，

它与测地线的夹角保持不变.

证 设$\vec{v}(s)$与$\vec{e}_1(s)$所夹的角为$\theta(s)$，则$\mathrm{d}\theta(s)+\omega_1^2=0$.

设测地线的切方向与$\vec{e}_1(s)$所夹的角为$\varphi(s)$，

则由测地线的自平行性质知$\mathrm{d}\varphi(s)+\omega_1^2=0$.

两式相减得$\mathrm{d}[\theta(s)-\varphi(s)]=0$.

即夹角$\theta(s)-\varphi(s)$与s无关，保持不变.

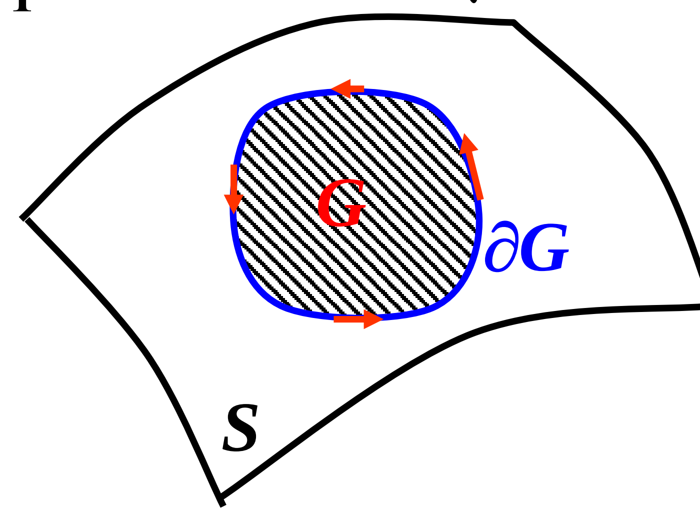
注: 也可由P158推论直接得到结论

六、曲面的Gauss-Bonnet(高斯-波涅)公式

设G是曲面S上一个单连通区域，假定它的正向边界∂G是一条光滑的闭曲线.

将测地曲率的公式 $k_g \mathrm{d}s = \mathrm{d}\theta + \omega_1^2$ 沿∂G积分得

$$\int_{\partial G} k_g \mathrm{d}s = \int_{\partial G} \mathrm{d}\theta + \int_{\partial G} \omega_1^2$$

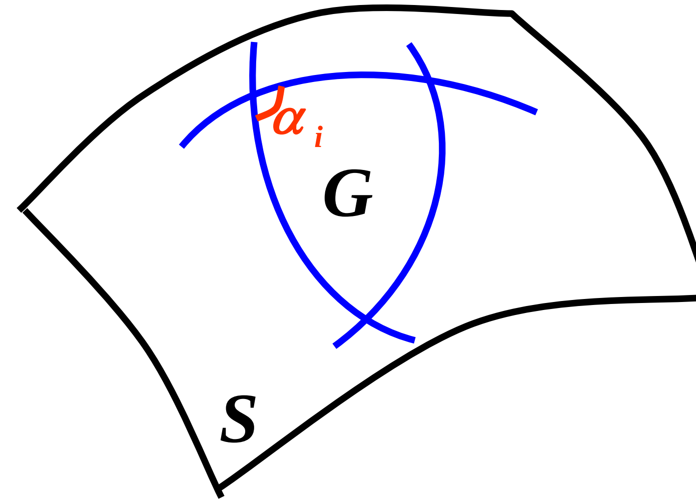


而 $\int_{\partial G} \mathrm{d}\theta = 2\pi$

由Stokes公式 $\int_{\partial G} \omega_1^2 = \int_G \mathrm{d}\omega_1^2 = -\int_G K\omega^1 \wedge \omega^2 = -\int_G K \mathrm{d}S$

因此 $\int_G K \mathrm{d}S + \int_{\partial G} k_g \mathrm{d}s = 2\pi$. (Gauss-Bonnet公式)

若G的边界∂G分段光滑,设它在非光滑点处的内角分别为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,则



$$\int_{\partial G} \mathrm{d}\theta = 2\pi - \sum_{i=1}^{n}(\pi - \alpha_i)$$

取代刚才证明过程中的$\int_{\partial G} \mathrm{d}\theta = 2\pi$得到

$$\int_G K\mathrm{d}S + \int_{\partial G} k_g \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n}(\pi - \alpha_i) = 2\pi.$$

(这是曲面上沿着分段光滑闭曲线的Gauss-Bonnet公式)

沿闭曲线作平行移动的角差计算公式

例4 假定曲面 S 上的一块单连通区域 G 的正向边界 ∂G 是一条光滑闭曲线. 证明：当单位切向量 $\vec{t}$ 沿 ∂G 平行移动一周后再回到出发点时与初始单位切向量 $\vec{t}$ 所夹的角度恰好是高斯曲率 K 在 G 上的曲面积分.

证 建立 S 上的活动标架场 $\{\vec{r};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 使 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 与 S 相切.

设 $\vec{t}$ 与 $\vec{e}_1$ 的夹角为 $\varphi(s)$,

则由平行移动的条件知

$$\mathrm{d}\varphi+\omega_1^2=0,$$

因此 $\omega_1^2=-\mathrm{d}\varphi$.

设∂G的切方向与$\vec{e}_1$的夹角为$\theta(s)$,

$$k_g \mathrm{d}s = \mathrm{d}\theta + \omega_1^2 = \mathrm{d}\theta - \mathrm{d}\varphi.$$

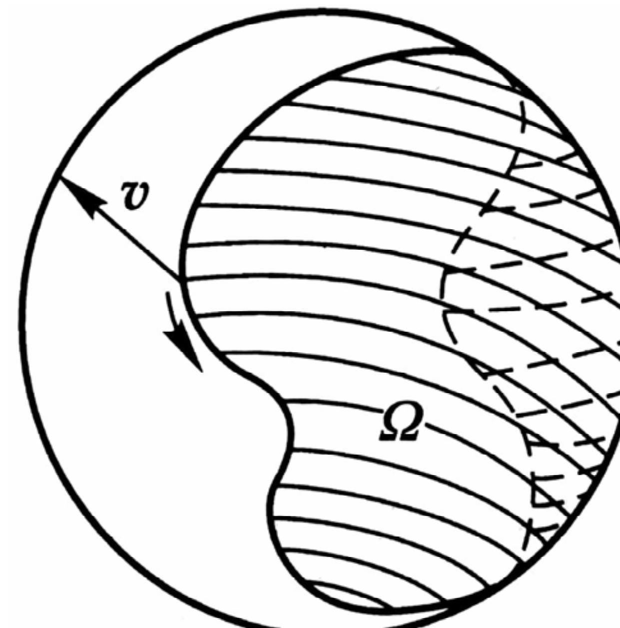
代入Gauss-Bonnet公式$\int_G K\mathrm{d}S + \int_{\partial G} k_g \mathrm{d}s = 2\pi$

得$\int_G K\mathrm{d}S + \int_{\partial G} (\mathrm{d}\theta - \mathrm{d}\varphi) = 2\pi.$

因此角差$\int_{\partial G} \mathrm{d}\varphi = \int_G K\mathrm{d}S + \int_{\partial G} \mathrm{d}\theta - 2\pi = \int_G K\mathrm{d}S.$

例5 设(C)是球面上的简单正则闭曲线. 证明: 曲线(C)平分所在球面面积的充要条件是球面在(C)上的任何切向量沿(C)平行移动一周后回到原来位置.

证 假设(C)围成一个单连通区域Ω, 如图.



则球面上的任何一个切向量沿(C)平行移动一周后产生的角差

$$\Delta\omega=\int_{\Omega}K\mathrm{d}S=\frac{1}{R^2}A(\Omega),$$

其中R是球面的半径, $A(\Omega)$是Ω的面积.

(充分性) 切向量沿(C)平行移动一周后回到原来位置,

因此存在$l \in \mathbb{Z}$使$\Delta\omega = 2l\pi$，即$\dfrac{1}{R^2}A(\Omega) = 2l\pi$.

由$0 < A(\Omega) < 4\pi R^2$知$l = 1$.

因此$A(\Omega) = 2\pi R^2$,刚好为球面面积的一半.

(必要性) 若(C)平分球面面积,则$A(\Omega) = 2\pi R^2$,

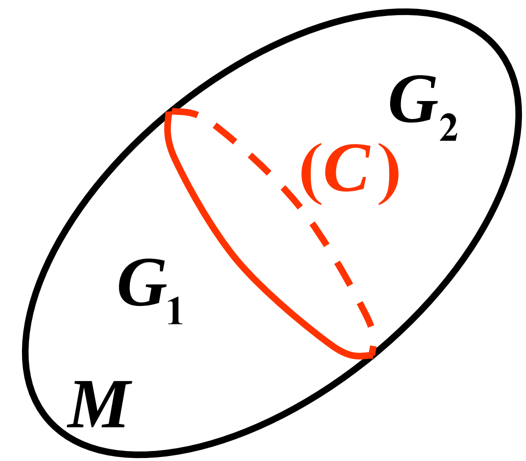
$$角差\Delta\omega = \int_{\Omega} K\mathrm{d}S = \frac{1}{R^2}A(\Omega) = 2\pi.$$

即切向量沿(C)平行移动一周后回到原来位置.

如果某个闭曲面M能被一条光滑闭曲线(C)分割成两个单连通区域G_1和G_2，则

$$\int_{G_1} K\mathrm{d}S + \int_{\partial G_1} k_g \mathrm{d}s = 2\pi$$

$$\int_{G_2} K\mathrm{d}S + \int_{\partial G_2} k_g \mathrm{d}s = 2\pi$$



∂G_1与∂G_2只是定向相反，$\int_{\partial G_1} k_g \mathrm{d}s = -\int_{\partial G_2} k_g \mathrm{d}s$

因此 $\int_M K\mathrm{d}S = 4\pi$. (闭曲面的Gauss-Bonnet公式)

例6 设S是椭球面$x^2+4y^2+9z^2=36$，曲面上的高斯曲率为K，求$\int_S K\mathrm{d}S$.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业！

3.11 设有定了向的闭曲面S能被剖分成若干个曲边四边形，且每个四边形的每个顶点都刚好是四个四边形的公共顶点，K为高斯曲率，证明$\int_S K\mathrm{d}S = 0$.

3.12 在高斯曲率非正的单连通曲面上，试用高斯-波涅公式证明不能有两条测地线交于相异两点P和Q.

3.13 证明在高斯曲率恒为正的单连通封闭曲面上，任何两条闭测地线至少有一个交点.

3.14 若在单位球面上的两个大圆相交，交点处的内角为α，试求这两个大圆在该球面上所围区域的面积.