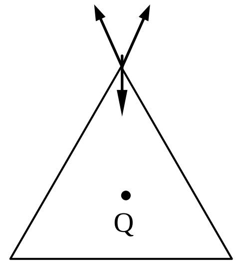
第八章 静电场 习题参考解答

1、三个电量为–q 的点电荷各放在边长为 r 的等边三角形的三个顶点上。电荷 Q（Q>0）放在三角形的重心上，为使每个负电荷受力为零，Q 之值应为多大？

解：利用矢量合成可得

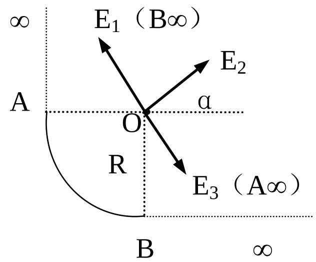
$$\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(\frac{\sqrt{3}}{3}r)^2}=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos 30^\circ\times 2$$



所以 $Q=\frac{\sqrt{3}}{3}q$

2、线电荷密度为λ的无限长均匀带电线，分别弯成如图 (*a*) 和 (*b*) 所示的两种形状，若圆半径为 R，试求(*a*)、(*b*) 图中 *O* 点的场强。

解：图（*a*）由两根半无限长带电直线和一段圆弧组成，方向如图所示。根据矢量合成



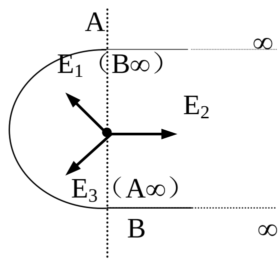
（*a*）

$$\vec{E}_O=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3=\vec{E}_2$$

$$E_O=E_2=\frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$tg\alpha=\frac{E_y}{E_x}=1$$ α= 45° 即与水平成 45°

图（*b*）由两根半无限长带电直线和一段半圆弧组成，方向如图所示。根据矢量合成



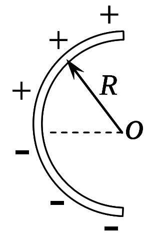
（*b*）

$$E_{Ox}=E_2-2E_1\cos 45^0=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}-2\times\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}=0$$

$$E_{Oy}=E_1\sin 45^0-E_3\sin 45^0=0$$

$$E_O=0$$

3、有一细玻璃棒被弯成半径为 R 的半圆形，其上半部均匀分布有电荷+Q，下半部均匀分布有电荷–Q，如图所示．求半圆中心 O 处的场强。



解：由于对称性，dE_+、dE_-在 x 方向上的分量抵消 $E_x = 0$

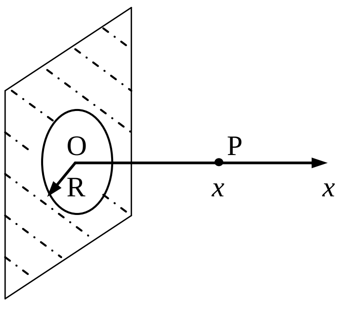
$$dq = \lambda dl = \lambda R d\theta \qquad (\lambda = \frac{2Q}{\pi R})$$

$$dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Rd\theta}{R^2} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$dE_y = dE\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta d\theta$$

$$E_y = 2\int dE\cos\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\theta}{R}\cos\theta = \frac{Q}{\varepsilon_0\pi^2R^2}$$ 方向沿–y 方向

4、一无限大的均匀带电平板，电荷密度为σ，在平板上挖去一个半径为 R 的圆孔，求通过圆孔中心并垂直于板的轴上一点 P 的场强。



解：取圆环元半径为ρ，$dq = \sigma 2\pi\rho d\rho$

则圆环元在轴线上产生 dE 公式

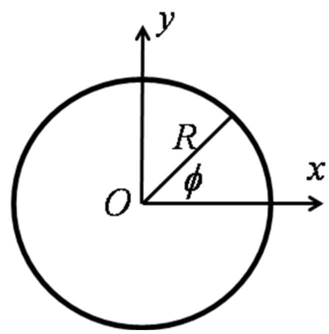
$$dE_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xdq}{(\rho^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_p = \int_R^\infty dE_p = \int_R^\infty \frac{2\pi\sigma x\rho d\rho}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

方向沿 x 轴方向

5、半径为 R 的带电细圆环，其电荷线密度为 $\lambda=\lambda_0\sin\phi$，式中 λ_0 为一常数，ϕ 为半径 R 与 x 轴所成的夹角，如图所示。求环心 O 处的电场强度。



解：
$$dE=\frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0R^2}=\frac{\lambda_0\sin\phi d\phi}{4\pi\varepsilon_0R}$$

$$dE_x=-dE\cos\phi \quad dE_y=-dE\sin\phi$$

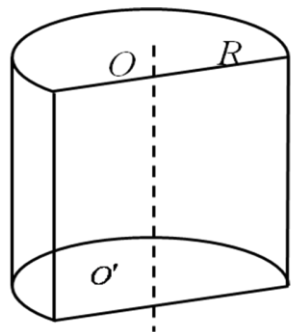
$$E_x=-\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0R}\int_0^{2\pi}\sin\phi\cos\phi d\phi=0$$

$$E_y=-\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0R}\int_0^{2\pi}\cos^2\phi d\phi=-\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0R}$$

$$E=E_y=-\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0R}$$

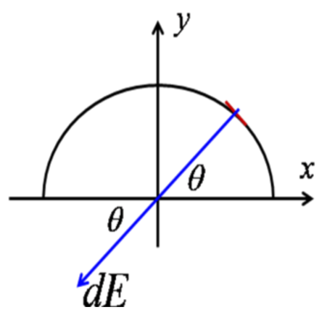
方向：沿 y 轴负方向。

6、“无限长”均匀带电的半圆柱面，半径为 R，设半圆柱面沿轴线 OO' 单位长度上的电荷为 λ，求轴线上一点的电场强度。



解：
$$d\lambda=\frac{\lambda}{\pi R}dl=\frac{\lambda}{\pi}d\theta$$

$$dE=\frac{d\lambda}{2\pi\varepsilon_0R}=\frac{\lambda}{2\pi^2\varepsilon_0R}d\theta$$



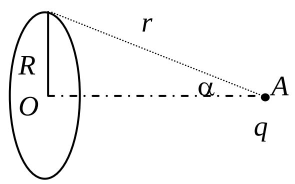
$$dE_x=-dE\cos\theta \quad dE_y=-dE\sin\theta$$

$$E_x=0 \qquad E_y=\int_0^{\pi}dE_y=-\frac{\lambda}{\pi^2\varepsilon_0R}$$

$$E=E_y=-\frac{\lambda}{\pi^2\varepsilon_0R}$$

方向：沿 y 轴负方向。

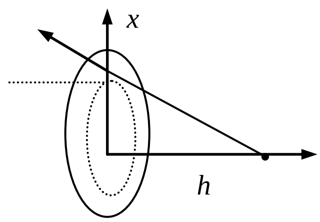
7、如图所示，在点电荷 q 的电场中，取半径为 R 的平面，q 在该平面的轴线上的 A 点处．求通过此圆平面的电通量。



解法一：以 A 为中心，r 为半径作一球面，则通过圆平面的电通量与通过以圆平面为底的球冠电通量相等。

设球面积　$S_0 = 4\pi r^2$，　通量　$\Phi_0 = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

球冠面积　$S = 2\pi r(r - r\cos\alpha)$　通量　Φ



$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{S}{S_0} = \frac{2\pi r^2(1-\cos\alpha)}{4\pi r^2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\therefore \quad \Phi = \Phi_0\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{(1-\cos\alpha)}{2}$$

解法二：

φ

$$\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int E\cos\varphi ds = \int_0^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+h^2)}\cos\varphi 2\pi x\, dx$$

$$= \int_0^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(x^2+h^2)}\frac{h}{(x^2+h^2)^{1/2}} 2\pi x\, d.$$

$$= \frac{q}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{h}{(R^2+h^2)^{1/2}}\right] = \frac{q}{2\varepsilon_0}(1-\cos\alpha)$$

8、无限长的两个共轴直圆筒，半径分别是 R_1 和 R_2，两圆筒面都均匀带电，沿轴线方向单位长度所带的电量分别是 λ_1 和 λ_2 。

（1）求离轴线为 **r** 处的电场强度 E。

（2）当 $\lambda_2 = -\lambda_1$ 时，各处的电场强度 E 如何?

解：（1）作高为 h 的同轴圆柱形高斯面，由高斯定理 $\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = E2\pi rh = \dfrac{\sum q}{\varepsilon_0}$

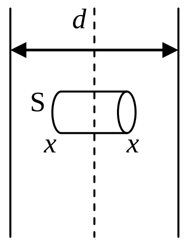
$$r < R_1 \qquad \sum q_1 = 0 \qquad E_1 = 0$$

$$R_1 < r < R_2 \qquad \sum q_2 = \lambda_1 h \qquad E_2 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$r > R_2 \qquad \sum q_3 = (\lambda_1 + \lambda_2)h \qquad E_3 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

（2）E_1 和 E_2 不变，$E_3 = 0$

9、一厚度为 d 的无限大平板，均匀带电，体电荷密度为 ρ，求平板体内、外场强的分布，并以其对称面为坐标原点作出 $E-x$ 的分布曲线。



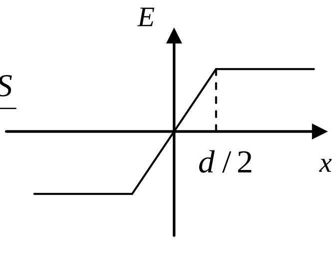
解：在平板内外取图示高斯面，由高斯定理 $\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{\sum q}{\varepsilon_0}$

$$-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \qquad \oint \vec{E}_1\cdot d\vec{S} = 2E_1 S = \frac{\rho 2xS}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$$

$$x > \frac{d}{2} \quad \text{or} \quad x < -\frac{d}{2} \qquad \oint \vec{E}_2\cdot d\vec{S} = 2E_2 S = \frac{\rho d\, S}{\varepsilon_0}$$

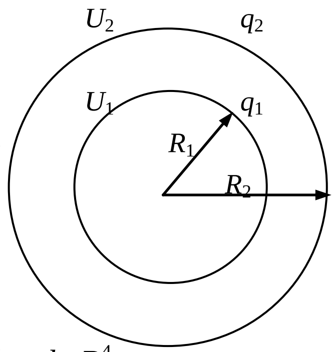
$$E_2 = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$



10、半径为 R 的非金属球带有正电荷，电荷体密度随径向距离的变化满足 $\rho=br$，其中 b 为常数，r 为离球心的距离，求球内、外场强的分布。

解：由于 ρ 与 r 成线性关系，电场分布仍有球对称性，故可由高斯定理求解。

作同心球面为高斯面



$r<R$ $\quad\int \vec{E}_{内}\cdot d\vec{S}=E_{内}4\pi r^2=\frac{\sum q}{\varepsilon_0}$

又因 $\quad\sum q=\int_0^r br4\pi r^2dr=\int_0^r 4b\pi r^3dr=b\pi r^4$

$$E_{内}=\frac{b\pi r^4}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{br^2}{4\varepsilon_0}$$

r > R $\quad\sum q=\int \rho dV=\int_0^R 4br\pi r^2dr=\int_0^R b4\pi r^3dr=b\pi R^4$

$$\int \vec{E}_{外}\cdot d\vec{S}=E_{外}4\pi r^2=\frac{b\pi R^4}{\varepsilon_0}$$

$$E_{外}=\frac{bR^4}{4\varepsilon_0 r^2}$$

11、两个同心的均匀带电球面，半径分别为 R_1=5.0cm，R_2 =20.0cm，已知内球面的电势为 U_1=60V，外球面的电势 U_2= –30V．求：

(1) 内、外球面上所带电量；

(2) 在两个球面之间何处的电势为零。

解：（1）$\Delta U_{R_1R_2}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2})=60-(-30)=90V$

$$q_1=6.67\times10^{-10}C$$

又 $\quad U_{R_1}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0R_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0R_2}=60V \qquad q_2=-1.33\times10^{-9}C$

（2）令 r 处 U（r）=0

即 $\quad\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0R_2}=0$ $\quad$ 所以 $\quad r$=0.10m=10.0cm

12、电荷 Q 均匀地分布在半径为 R 的球体内，试证明离球心 r (r<R) 处的电动势为

$$U=\frac{Q\left(3R^2-r^2\right)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

解：先由高斯定理分别求出球内、球外 E

$$E=\begin{cases}\dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & r<R\\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R\end{cases}$$

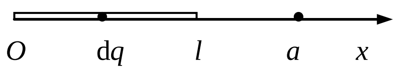
$$U=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{R}\vec{E}_1\cdot d\vec{l}+\int_R^{\infty}\vec{E}_2\cdot d\vec{l}=\frac{Q\left(3R^2-r^2\right)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

13、一均匀带电细杆，长为ℓ =15.0cm，电荷线密度 $\lambda=2.0\times10^{-7}\,\mathrm{C/m}$ 求:

(1) 细杆延长线上与杆的一端相距 a=5.0cm 处的电势。

(2) 细杆中垂线上与细杆相距 b=5.0cm 处的电势。

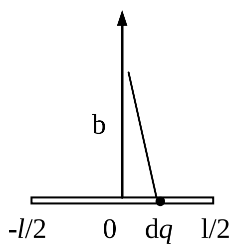
解：（1）$dU=\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0(l+a-x)}=\dfrac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(l+a-x)}$



$$U=\int_0^l\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(l+a-x)}=2.5\times10^3V$$

（2）$dU=\dfrac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+b^2}}$

$$U=\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+b^2}}=4.3\times10^3V$$



14、半径为 R 的无限长圆柱体中，电荷按体密度ρ均匀分布，分别以 (1) 轴线处为零电势位置；(2) 圆柱体表面为零电势位置。求圆柱体内、外的电势。

解：场强分布

$$r<R \qquad \oint \vec{E} d\vec{s} = E\cdot 2\pi r l = \frac{\rho \pi r^2 l}{\varepsilon_0} \qquad E=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

$$r>R \qquad E\cdot 2\pi r l = \frac{\rho \pi R^2 l}{\varepsilon_0} \qquad E=\frac{R^2\rho}{2\varepsilon_0 r}$$

（1） $r<R \qquad U=\int_r^0 \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2$

$$r>R \qquad U=\int_r^R \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_R^0 \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}\left(2\ln\frac{r}{R}+1\right)$$

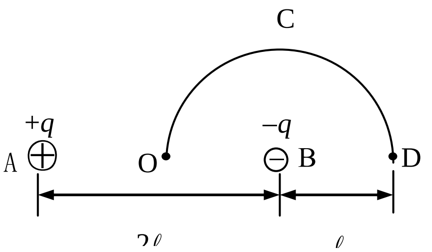
（2）$r<R \qquad U=\int_r^R E\, dr = \frac{\rho}{4\varepsilon_0}(R^2-r^2)$

$$r>R \qquad U=\int_r^R E\, dr = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R}$$

15、如图所示，$\overline{AB}=2\ell$，弧 OCD 是以 B 为中心，ℓ为半径的半圆。A 点有点电荷+q，B 点有点电荷−q。

(1) 把单位正电荷从 O 点沿弧 OCD 移到 D 点，电场力作了多少功?

(2) 若把单位负电荷从 D 点沿 AB 的延长线移到无穷远处，电场力作功又为多少?

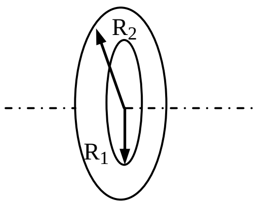


解：（1） $U_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 l}=0 \qquad U_D=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 3l}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}=-\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$

$$A_1=q(U_0-U_D)=U_0-U_D=\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

(2) $$A_2=-(U_0-U_\infty)=\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

16、在静电透镜实验装置中，有一均匀带电的圆环，内半径为 R_1，外半径为 R_2，其电荷面密度为 σ (负电)，现有一电子沿着轴线从无限远射向带负电的圆环，欲使电子能穿过圆环，它的初始动能至少要多大?



解：设电子在无穷远处初动能为 E_k ,0 点电子动能 ≥ 0

$$A=e(U_0-U_\infty)=\Delta E_K=E_K$$

$$U_0=\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}=\int_{R_1}^{R_2}-\sigma\frac{2\pi rdr}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R_2-R_1)$$

$$E_K=-eU_0=\frac{\sigma e}{2\varepsilon_0}(R_2-R_1)$$

17、一电偶极子原来与均匀电场平行，将它转到与电场反平行时，外力作功为 A，则当此电偶极子与场强成 45°角时，此电偶极子所受的力矩为多少?

解：$\because A=\int Md\theta=\int_0^\pi PE\sin\theta d\theta=2PE$

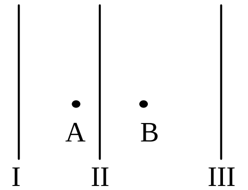
$$M=PE\sin 45°=\frac{A}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}A}{4}$$

$$(\ A=P_eE-(-P_eE)=2P_eE\ )$$

18、如图所示，三块互相平行的均匀带电大平面，电荷密度为 $\sigma_1=1.2\times10^{-4}$C/m², $\sigma_2=0.2\times10^{-4}$C/m², $\sigma_3=1.1\times10^{-4}$C/m², A 点与平面 II 相距为 5.0cm，B 点与平面 II 相距 7.0cm，求:

(1) A、B 两点的电势差;

(2) 把电量 $q_0=-1.0\times10^{-8}$C 的点电荷从 A 点移到 B 点，外力克服电场力作功多少?



解：（1）$E_A = E_1 - E_2 - E_3 = \dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \dfrac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = \dfrac{-10^{-3}}{2\varepsilon_0}$

$$E_B = E_1 + E_2 - E_3 = \frac{3\times 10^{-3}}{2\varepsilon_0}$$

$$U_A - U_B = E_A d_1 + E_B d_2 = \frac{-10^{-3}}{2\varepsilon_0}\times 5\times 10^{-2} + \frac{3\times 10^{-3}}{2\varepsilon_0}\times 7\times 10^{-2}$$

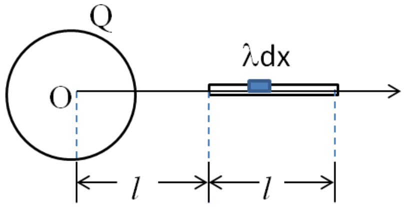
$$= \frac{16\times 10^{-7}}{2\varepsilon_0} = \frac{16\times 10^{-7}}{2\times 8.85\times 10^{-12}} = 9.1\times 10^{4} V$$

（2）$A_{外} + A_{静} = 0$

$$A_{外} = -A_{静} = \Delta W = q_0 (U_B - U_A)$$

$$= 1.0\times 10^{-2} \times 9.1\times 10^{4} = 9.1\times 10^{-4} J$$

19、半径为 R 的均匀带电球面，带电量为 Q，沿半径方向上有一均匀带电细线，线电荷密度为λ，长度为 l，细线近端离球心的距离为 l，如图所示。设球和细线上的电荷分布固定，求细线在电场中的电势能。



解：$dW = \lambda dx \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}$

$$W = \int_{l}^{2l} \lambda dx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln 2$$

20、有一半径为 R，电荷密度为 σ 的均匀带电的圆盘，求:

(1) 圆盘轴线上任意一点的电势；

(2) 利用场强和电势梯度的关系求该点场强。

解：取 $dq = 2\pi r dr$

$$U = \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{x^2 + R^2} - x)$$

$$E=-\frac{dU}{dx}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+R^2}}-1)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}})$$