内容：第二型曲线积分与格林公式

1.第二型曲线积分

计算　化为定积分

$L: x = x(t),\ y = y(t)$

L 的起点对应 $t = \alpha$, 终点对应 $t = \beta$,

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P[x(t), y(t)]\cdot x'(t) + Q[x(t), y(t)]\cdot y'(t)\}dt$$

练习三十四/四

计算曲线积分$\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$,

其中L为折线$y=1-|1-x|$, $(0\le x\le 2)$,

积分沿x增加的方向.

解： $L: y=1-|1-x|$

$$=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \end{cases}$$

$$\int_L (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)dy$$

$$=\int_0^1 [(x^2+x^2)+(x^2-x^2)\cdot 1]dx+$$

$$+\int_1^2 \{[x^2+(2-x)^2]+[x^2-(2-x)^2]\cdot(-1)\}dx$$

$$=\int_0^1 2x^2dx+\int_1^2 2(2-x)^2dx$$

$$=\frac{4}{3}$$

上页 下页 返回

练习三十四/五 计算曲线积分$\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$,

其中积分曲线为$L: \rho = \rho(\theta), \theta_1 \le \theta \le \theta_2$,

$\rho(\theta) > 0$且$\rho'(\theta)$连续,积分沿θ增加的方向.

解：$x = \rho(\theta)\cos\theta, y = \rho(\theta)\sin\theta$,

$$xdy - ydx = \rho^2(\theta)d\theta, \quad x^2 + y^2 = \rho^2(\theta),$$

$$\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\rho^2(\theta)d\theta}{\rho^2(\theta)} = \theta_2 - \theta_1$$

练习三十四/六

计算空间曲线积分$\int_C \{z, x, -2y\} \cdot d\vec{s}$,其中

C是由$A=(3,2,-1)$到$B=(2,3,0)$的有向直线段.

解：C的方程$\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{1}=t$

参数方程 $x=-t+3,\ y=t+2,\ z=t-1,$

$$\text{原式}=\int_C zdx+xdy-2ydz$$

$$=\int_0^1[(t-1)(-1)+(-t+3)-2(t+2)]dt$$

$$=\int_0^1(-4t)dt=-2$$

练习三十四/七

在变力$\vec{F}=xyz\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\}$ $(a,b,c>0)$作用下,

质点从坐标原点出发,沿直线运动到平面

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$上第一卦限中某点$P=(\xi,\eta,\zeta)$,

变力$\vec{F}$所作的功为W,求点P使W最大.

解：OP方程 $\dfrac{x}{\xi}=\dfrac{y}{\eta}=\dfrac{z}{\zeta}=t,\ x=\xi t,\ y=\eta t,\ z=\zeta t,$

$$W=\int_C \frac{xyz}{a}dx+\frac{xyz}{b}dy+\frac{xyz}{c}dz$$

$$=\int_0^1\left(\frac{\xi}{a}+\frac{\eta}{b}+\frac{\zeta}{c}\right)\xi\eta\zeta t^3dt\ =\frac{1}{4}\xi\eta\zeta$$

上页 下页 返回

求$W=\dfrac{1}{4}\xi\eta\zeta$在条件$\dfrac{\xi}{a}+\dfrac{\eta}{b}+\dfrac{\zeta}{c}=1$下的最大值.

令$L(\xi,\eta,\zeta,\lambda)=\dfrac{1}{4}\xi\eta\zeta+\lambda(\dfrac{\xi}{a}+\dfrac{\eta}{b}+\dfrac{\zeta}{c}-1)$

则由$L_\xi=0, L_\eta=0, L_\zeta=0, L_\lambda=0$,

解得$\xi=\dfrac{a}{3}, \eta=\dfrac{b}{3}, \zeta=\dfrac{c}{3}$,

所求点$P=(\dfrac{a}{3},\dfrac{b}{3},\dfrac{c}{3})$，$W_{\max}=\dfrac{abc}{108}$

格林公式: $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$

计算平面面积

取 $P = -y,\ Q = x$, 得 $2\iint_D dxdy = \oint_L xdy - ydx$

闭区域 D 的面积 $A = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx.$

取 $P = 0,\ Q = x$, 得 $A = \oint_L xdy$

取 $P = -y,\ Q = 0$, 得 $A = \oint_L - ydx$

上页 下页 返回

练习三十五/三

设$f \in C^1$, L是从点$A=(3,\frac{2}{3})$到点$B=(1,2)$的直线段,

求$\int_L \frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]dx + \frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]dy$.

解: $\because \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} + f + xyf'$

当$y>0$时成立,

$\therefore$曲线积分在$y>0$时与路径无关.

上页 下页 返回

设$L_1: xy=2$或$y=\dfrac{2}{x}$，从点A到点B.

$$原式=\int_{L_1}[\frac{1}{y}+yf(2)]dx+[xf(2)-\frac{x}{y^2}]dy$$

$$=\int_3^1\{[\frac{x}{2}+\frac{2}{x}f(2)]+[xf(2)-\frac{x^3}{4}]\cdot\frac{-2}{x^2}\}dx$$

$$=\int_3^1 x\,dx$$

$$=-4$$

上页 下页 返回

练习三十五/四

求 $\int_L \dfrac{(3y-x)dx-(3x-y)dy}{(x+y)^3}$,

其中 L 是自点 $A=(1,0)$ 到点 $B=(0,1)$ 的

有向曲线 $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=1$.

解：$\because \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{6(x-y)}{(x+y)^4} \quad (x+y\neq 0)$

$\therefore$ 曲线积分在半平面 $x+y>0$ 内与路径无关.

设 $L_1: x+y=1$, 从点 A 到点 B.

原式 $= \int_{L_1} (3y-x)\,dx-(3x-y)\,dy$

(分别取 $y=1-x$ 与 $x=1-y$)

$$= \int_1^0 (3-4x)\,dx+\int_0^1 -(3-4y)\,dy$$

$$= -2\int_0^1 (3-4x)\,dx$$

$$= -2$$

上页 下页 返回

练习三十五/五

计算$\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$,其中$L:(x-1)^2+y^2=R^2$

$(R>0, R\neq 1)$,积分沿反时针方向进行.

解: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}$, $((x,y)\neq(0,0))$

(1). 当$0<R<1$时,

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=0$$

上页 下页 返回

(2). 当 $R>1$ 时,

设 $L_1: 4x^2+y^2=\varepsilon^2$,逆时针方向.

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_{L_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$$

(令 $x=\frac{1}{2}\varepsilon\cos t, y=\varepsilon\sin t$)

$$=\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2}\cos^2 t+\frac{1}{2}\sin^2 t)dt=\pi$$

练习三十五/七

求满足条件$f(x)\in C^1, f(1)=2$的函数$f(x)$,使

微分方程$(y+\frac{1}{y})f(xy)dx+[xf(xy)+1]dy=0$

是全微分方程,并求此全微分方程的通解.

解：由$\frac{\partial}{\partial y}[(y+\frac{1}{y})f(xy)]=\frac{\partial}{\partial x}[xf(xy)+1]$

得$(1-\frac{1}{y^2})f+(y+\frac{1}{y})f'\cdot x=f+xf'\cdot y$

即$-f(xy)+xyf'(xy)=0$

上页 下页 返回

f 满足 $xf'(x) - f(x) = 0, \quad f(x) = Cx,$

$f(1) = 2 = C, \qquad \therefore f(x) = 2x$

代入 $f(xy) = 2xy$

$$(2xy^2 + 2x)\,dx + (2x^2y + 1)\,dy = 0$$

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} = \int_{(0,0)}^{(x,0)} + \int_{(x,0)}^{(x,y)}$$

$$= \int_0^x 2x\,dx + \int_0^y (2x^2y + 1)\,dy = x^2 + x^2y^2 + y$$

全微分方程的通解 $x^2 + x^2y^2 + y = C$

练习三十五/八

设$A=(1,2), B=(3,4)$,质点P受力$\vec{F}$的作用,沿以AB为直径的半圆周按反时针方向自A点运动到B点,已知$\vec{F}$的大小等于线段OP之长,方向与OP垂直且与y轴夹锐角,求变力$\vec{F}$作的功.

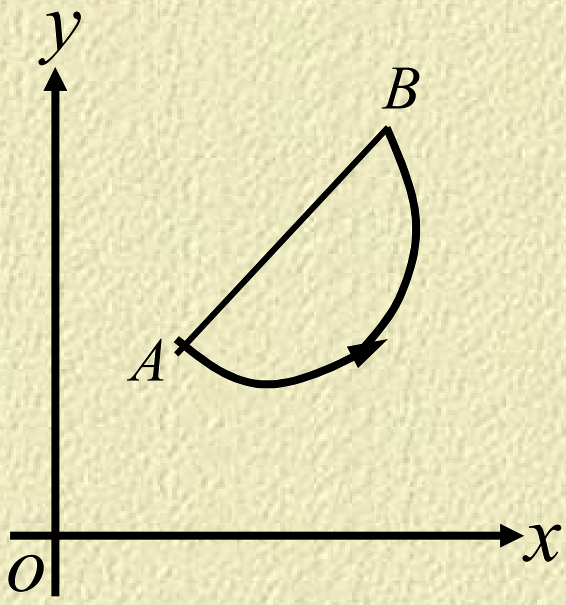
解:以AB为直径的圆方程 $(x-2)^2+(y-3)^2=2$

其参数方程为 $x=2+\sqrt{2}\cos t,\ y=3+\sqrt{2}\sin t,$

$$(-\frac{3\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{4})$$

$$\overrightarrow{OP}=\{x,y\}$$

$\vec{F}$的方向为$\{-y,x\}$或$\{y,-x\}$



$$\vec{F}=\frac{\{-y,x\}}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=-y\vec{i}+x\vec{j}$$

$$W=\int_L\vec{F}\cdot d\vec{s}=\int_L -ydx+xdy$$

$$=\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(3\sqrt{2}\sin t+2\sqrt{2}\cos t+2)dt=2\pi-2$$

例：若曲线$L(y=f(x), -a \le x \le a)$关于$y$轴对称,

函数$Q(x,y)$关于x是偶函数,

$Q(x,y)$在L上连续, $f'(x)$在$[-a,a]$上连续,

证明$\int_L Q(x,y)dy = 0$.

证：$f(x)$是x的偶函数

$\Rightarrow f'(x)$是x的奇函数

上页 下页 返回

$$\int_L Q(x,y)dy = \int_{-a}^{a} Q[x, f(x)]\cdot f'(x)\,dx$$

(若起点为$(a, f(a))$,则差一负号)

$$\overset{\text{令}u=-x}{=\!=\!=\!=\!=\!=} -\int_{a}^{-a} Q[-u, f(-u)]\cdot f'(-u)\,du$$

$$= \int_{-a}^{a} Q[u, f(u)]\cdot[-f'(u)]du$$

$$= -\int_{-a}^{a} Q[x, f(x)]\cdot f'(x)\,dx = 0$$

2. 格林公式

$$\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma$$

条件： $P, Q \in C^1$， ∂D正向.

添线

奇点的处理

计算面积 $A = \dfrac{1}{2}\oint_{\partial D} xdy - ydx$

例: 设C为对称于坐标轴的光滑曲线,

且每一平行于坐标轴的直线与C的

交点不超过两个, 证明:

$$\oint_C (x^3 y + e^y)dx + (xy^3 + xe^y - 2y)dy = 0$$

证: 设曲线C围成的闭区域为D,

利用格林公式

上页 下页 返回

$$\oint_C (x^3 y + e^y)dx + (xy^3 + xe^y - 2y)dy$$

$$= \iint_D [(y^3 + e^y) - (x^3 + e^y)]d\sigma = \iint_D y^3 d\sigma - \iint_D x^3 d\sigma$$

由已知得, D关于x轴, y轴均对称,

y^3是y的奇函数, x^3是x的奇函数,

故 $\iint_D y^3 d\sigma = 0,\ \iint_D x^3 d\sigma = 0,$

$$\therefore \oint_C (x^3 y + e^y)dx + (xy^3 + xe^y - 2y)dy = 0$$

上页 下页 返回

例:设函数 $P(x,y),Q(x,y),u(x,y)$

有一阶连续偏导数,

证明: $$\iint_D (P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y})d\sigma$$

$$=\oint_{\partial D} Pudy-Qudx-\iint_D u(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})d\sigma$$

证：利用格林公式

上页 下页 返回

$$\oint_{\partial D} Pudy - Qudx$$

$$= \iint_D [\frac{\partial}{\partial x}(Pu) - \frac{\partial}{\partial y}(-Qu)]d\sigma$$

$$= \iint_D (u\frac{\partial P}{\partial x} + P\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial Q}{\partial y} + Q\frac{\partial u}{\partial y})d\sigma$$

$$= \iint_D (P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y})d\sigma + \iint_D u(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y})d\sigma$$

移项则得结论

例：

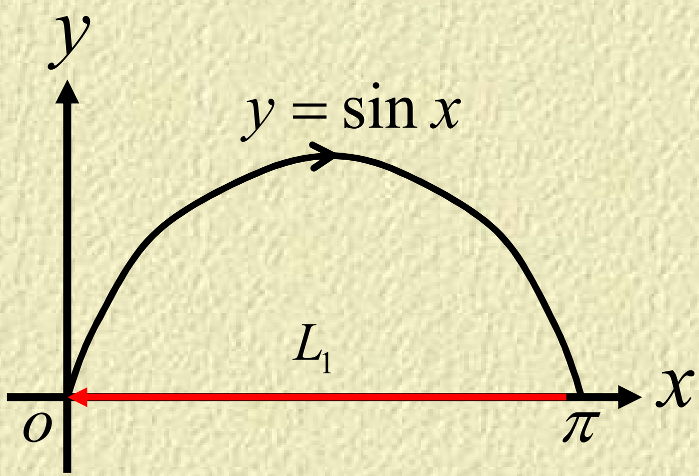
计算$\int_L (ye^x + \frac{y^2}{1+x^2} + 1)dx + (x^2 + e^x + 2y\arctan x)dy$,

其中L为从点o到点$A=(\pi,0)$的曲线段$y=\sin x$.

解：设 $L_1: y=0$, 从A到o

L与L_1构成闭曲线,

顺时针方向



上页 下页 返回

$$\int_L (ye^x + \frac{y^2}{1+x^2} + 1)dx + (x^2 + e^x + 2y\arctan x)dy,$$

$$= \oint_{L+L_1} \cdots - \int_{L_1} \cdots$$

$$= -\iint_D 2x d\sigma - \int_{L_1} dx$$

$$= -2\int_0^{\pi} x dx \int_0^{\sin x} dy - \int_{\pi}^{0} dx$$

$$= -2\pi + \pi = -\pi$$

例：计算 $\oint_L \frac{ydx - xdy}{2x^2 + y^2}$，其中$L$为：

(1).圆周$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$的正向；

(2). 正方形边界$|x| + |y| = 1$的正向.

解：$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{2x^2 + y^2}\right) = \frac{2x^2 - y^2}{(2x^2 + y^2)^2}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{2x^2 + y^2}\right) = \frac{2x^2 - y^2}{(2x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad ((x, y) \neq (0,0))$$

上页　下页　返回

(1). L所围区域D内不含点$(0,0)$,

由格林公式 $\oint_L \frac{ydx - xdy}{2x^2 + y^2} = \iint_D 0 d\sigma = 0$

(2). 设$L_1 : 2x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, 逆时针方向.

取正数ε充分小, 使L_1含于L所围区域内,

记L与L_1之间的区域为D_1.

利用格林公式

上页 下页 返回

$$\oint_L \frac{ydx - xdy}{2x^2 + y^2} + \oint_{L_1^-} \frac{ydx - xdy}{2x^2 + y^2} = \oint_{L+L_1^-} \frac{ydx - xdy}{2x^2 + y^2}$$

$$= \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = 0$$

$$\oint_L \frac{ydx - xdy}{2x^2 + y^2} = -\oint_{L_1^-} \frac{ydx - xdy}{2x^2 + y^2} = \oint_{L_1} \frac{ydx - xdy}{2x^2 + y^2}$$

$$(\text{令}\, x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \cos t,\ y = \varepsilon \sin t\,)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{2\pi} \frac{-\varepsilon^2}{\sqrt{2}} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -\sqrt{2}\pi$$

内容：格林公式的应用

1. 格林公式的应用

在单连通区域及$P,Q \in C^1$的前提下,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \oint_L P dx + Q dy = 0$$

上页 下页 返回

$\Leftrightarrow \int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关 (取折线)

$\Leftrightarrow Pdx + Qdy$ 是全微分 (求原函数)

$\Leftrightarrow Pdx + Qdy = 0$ 是全微分方程 (求通解)

$\Leftrightarrow \vec{f} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ 是有势场 (求势函数)

例：计算$I=\int_L (1-2xy-y^2)dx-(x+y)^2dy$,

其中L是曲线$y=\sin x$上从点$(\frac{\pi}{2},1)$

到点(0,0)的一段有向弧.

解：$\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x-2y$

$\therefore$曲线积分与路径无关

上页 下页 返回

法一：$I=\int_{(\frac{\pi}{2},1)}^{(0,0)}\cdots=\int_{(\frac{\pi}{2},1)}^{(\frac{\pi}{2},0)}\cdots+\int_{(\frac{\pi}{2},0)}^{(0,0)}\cdots$

$$=\int_{1}^{0}-(\frac{\pi}{2}+y)^{2}dy+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}dx=\frac{\pi^{2}}{4}+\frac{1}{3}$$

法二：$Pdx+Qdy$的原函数

$$\varphi(x,y)=x-x^{2}y-xy^{2}-\frac{1}{3}y^{3}+C$$

$$I=(x-x^{2}y-xy^{2}-\frac{1}{3}y^{3})\Big|_{(\frac{\pi}{2},1)}^{(0,0)}=\frac{\pi^{2}}{4}+\frac{1}{3}$$

上页 下页 返回

例：求常数a与b的值,使

$$[(x+y+1)e^x + ae^y]dx + [be^x - (x+y+1)e^y]dy$$

为全微分,并求全微分的原函数.

解：$\dfrac{\partial P}{\partial y} = e^x + ae^y$　　　$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = be^x - e^y$

由$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$，得$a=-1, b=1$

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} \cdots = \int_{(0,0)}^{(x,0)} \cdots + \int_{(x,0)}^{(x,y)} \cdots$$

$$= \int_0^x [(x+1)e^x - 1]dx + \int_0^y [e^x - (x+y+1)e^y]dy$$

$$= (x+y)(e^x - e^y)$$

原函数 $\varphi(x,y) = (x+y)(e^x - e^y) + C$

例：设L是椭圆$x^2+4y^2=8$的正向，

$$I=\oint_L e^{xy}\sin(x+y)\,dx+e^{xy}\cos(x+y)\,dy,$$

证明：$|I|\le e^2 s$，其中s是椭圆的周长.

证：令$\vec{f}(x,y)=e^{xy}\sin(x+y)\vec{i}+e^{xy}\cos(x+y)\vec{j}$

则$|I|=|\oint_L \vec{f}(x,y)\cdot d\vec{s}|$

$=|\oint_L \vec{f}(x,y)\cdot \vec{t^0}ds|$ （$\vec{t^0}$是L的单位正切向量）

$$|I| \le \oint_L |\vec{f}(x,y)\cdot\vec{t^0}|\,ds \le \oint_L e^{xy}ds$$

求$g(x,y)=e^{xy}$在条件$x^2+4y^2=8$下的最大值

令$L(x,y,\lambda)=e^{xy}+\lambda(x^2+4y^2-8)$

$$\text{则由}\begin{cases} L_x = ye^{xy}+2\lambda x=0 \\ L_y = xe^{xy}+8\lambda y=0 \\ L_\lambda = x^2+4y^2-8=0 \end{cases}$$

得 $P_1=(2,1)$， $P_2=(-2,-1)$,

$P_3=(2,-1)$， $P_4=(-2,1)$

有 $g(P_1)=g(P_2)=e^2$， $g(P_3)=g(P_4)=e^{-2}$

函数 $g(x,y)$ 在条件 $x^2+4y^2=8$ 下的最大值 e^2

$$|I|\le\oint_L e^{xy}ds\le\oint_L e^2 ds=e^2 s$$

上页 下页 返回