

考虑常系数二阶线性非齐次常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} y'' + by' + cy = f, \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1. \end{cases} \quad (1)$$

- 问题(1)是非齐次方程，非齐次初始条件
- 将问题（1）分解为以下两个问题

$$\begin{cases} x'' + bx' + cx = 0, \\ x(0) = y_0, x'(0) = y_1. \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} z'' + bz' + cz = f, \\ z(0) = z'(0) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

- 问题（2）是齐次方程，利用特征方程根的情况，再利用初始条件，可确定出（2）的解
- 问题(3)是非齐次方程，齐次初始条件的定解问题，利用齐次化原理可构造出其解
- 问题（2）的解加上问题（3）的解就可得问题（1）的解

Home Page

Title Page



Page 1 of 8

Go Back

Full Screen

Close

Quit

对于问题（3）的求解：

- 先求出

$$\begin{cases} w'' + bw' + cw = 0, \\ w(0, \tau) = 0, w'(0, \tau) = f(\tau) \end{cases} \quad (4)$$

的解 $w(t, \tau)$ 的表达形式

- 问题（4）是齐次方程，可利用问题（2）的解题方法得出其解，注意问题（4）中 $f(\tau)$ 就是问题（3）右端 $f(t)$ 中把 $t$ 换成 $\tau$ 的表达形式，
- 求出问题(4)的解 $w(t, \tau)$ 的表达形式之后，利用以下积分就可得问题（3）的解

$$z(t) = \int_0^t w(t - \tau; \tau) d\tau$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 2 of 8](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

例如求解

$$\begin{cases} u_2''(t) + \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 u_2(t) = \sin \frac{2\pi}{l} t \\ u_2(0) = u_2'(0) = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

分析：此定解问题类似于前面的问题(3),非齐次方程+齐次初始条件,所以可以利用齐次化原理求解

过程如下：先求 $w(t, \tau)$ 的表达形式

$$\begin{cases} w'' + \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 w = 0, \\ w(0, \tau) = 0, w'(0, \tau) = \sin \frac{2\pi}{l} \tau \end{cases} \quad (1.2) \Rightarrow w(t, \tau) = c_1 \cos \frac{2\pi}{l} t + c_2 \sin \frac{2\pi}{l} t$$

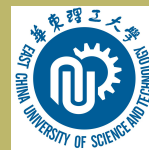
由初始条件 $\Rightarrow c_1 = 0, c_2 = \frac{l}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{l} \tau$ ,所以 $w(t, \tau) = \frac{l}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{l} \tau \sin \frac{2\pi}{l} t$ ,利用齐次化原理可得(1.1)的解

$$u_2(t) = \int_0^t w(t - \tau, \tau) d\tau = \int_0^t \frac{l}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{l} \tau \sin \frac{2\pi}{l} (t - \tau) d\tau \quad (1.3)$$

再利用三角函数的积化和差, 求出积分

$$u_2(t) = -\frac{l}{4\pi} t \cos \frac{2\pi t}{l} + \frac{l^2}{8\pi^2} \sin \frac{2\pi}{l} t$$

- 注意在后面的学习和教材中, 一般不会详细写过程了, 一般就一句话: 问题(1.1)利用齐次化原理可得解为(1.3)



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

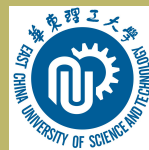
Page 3 of 8

Go Back

Full Screen

Close

Quit



类似的，考虑常系数一阶线性非齐次常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} y' + by = f, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

处理方法和二阶类似

- 问题（1）可分解为

$$\begin{cases} x' + bx = 0, \\ x(0) = y_0. \end{cases} \quad (2), \quad \begin{cases} z' + bz = f, \\ z(0) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

- 对于问题（3），可以先求出

$$\begin{cases} w'' + bw = 0, \\ w(0, \tau) = f(\tau) \end{cases} \quad (4)$$

的解 $w(t, \tau)$

- 问题（3）的解为

$$z(t) = \int_0^t w(t - \tau; \tau) d\tau$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 8

Go Back

Full Screen

Close

Quit



在第二章中，我们经常会用到的正交函数系有

$$\left\{ \sin \frac{n\pi}{l} x \right\}_{n=1}^{\infty},$$

$$\left\{ \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l} x \right\}_{n=1}^{\infty},$$

$$\left\{ \cos \frac{n\pi}{l} x \right\}_{n=1}^{\infty},$$

$$\left\{ \cos \frac{(2n-1)\pi}{2l} x \right\}_{n=1}^{\infty}, (0 < x < l)$$

(证明过程类似思考题1)

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#)

[▶](#)

[◀](#)

[▶](#)

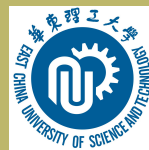
Page 5 of 8

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



思考练习:

$$1、 \int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} & m = n \\ \underline{\hspace{2cm}} & m \neq n \end{cases}$$

解: 当  $m \neq n$  时, 利用积化和差,

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx &= -\frac{1}{2} \int_0^l \left[ \cos \frac{(m+n)\pi x}{l} - \cos \frac{(m-n)\pi x}{l} \right] dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{l}{m+n} \sin \frac{(m+n)\pi x}{l} \Big|_0^l + \frac{1}{2} \frac{l}{m-n} \sin \frac{(m-n)\pi x}{l} \Big|_0^l = 0 \end{aligned}$$

当  $m = n$  时, 利用倍角公式

$$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left( 1 - \cos \frac{2n\pi x}{l} \right) dx = \frac{l}{2}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 6 of 8

Go Back

Full Screen

Close

Quit

## 2、方程的解

$$\begin{cases} u''(t) + \alpha^2 u(t) = f, & t > 0 \\ u(0) = c, u'(0) = d, \end{cases} \quad (1)$$

为\_\_\_\_\_

解：定解问题(1)可以分为以下定解问题

$$\begin{cases} u_1''(t) + \alpha^2 u_1(t) = 0, & t > 0 \\ u_1(0) = c, u_1'(0) = d, \end{cases} \quad (2), \quad \begin{cases} u_2''(t) + \alpha^2 u_2(t) = f, & t > 0 \\ u_2(0) = 0, u_2'(0) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

定解问题(2)是齐次方程的定解问题，利用齐次线性方程的求解可得  $u_1(t) = c \cos \alpha t + \frac{d}{\alpha} \sin \alpha t$

定解问题(3)是非齐次方程的定解问题，利用齐次化原理可得  $u_2 = \frac{1}{\alpha} \int_0^t t(\tau) \sin(t - \tau) d\tau$

所以原定解问题的解为

$$u = u_1 + u_2 = c \cos \alpha t + \frac{d}{\alpha} \sin \alpha t + \frac{1}{\alpha} \int_0^t t(\tau) \sin(t - \tau) d\tau$$

### 3、一阶常系数方程

$$\begin{cases} u'(t) + \beta^2 u(t) = f(t), & t > 0 \\ u(0) = c \end{cases}$$

的解为\_\_\_\_\_

解：可以类似二阶非齐次方程的处理方法，原定解问题可以分解为

$$\begin{cases} u_1'(t) + \beta^2 u_1(t) = 0, \\ u_1(0) = c \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} u_2'(t) + \beta^2 u_2(t) = f, \\ u_2(0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

问题（1）的解为  $u_1 = ce^{-\beta^2 t}$

问题(2)类似于齐次化原理可得  $u_2 = \int_0^t e^{-\beta^2(t-\tau)} f(\tau) d\tau$

所以原定解问题的解为

$$u = ce^{-\beta^2 t} + \int_0^t e^{-\beta^2(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 8 of 8](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)