§2.5 曲面论的基本定理

一、曲面的基本方程和Christoffel符号

二、曲面的Riemann曲率张量和基本公式

三、曲面论的基本定理

张量记号系统

Gauss记号	u	v	$\vec{r}_u$	$\vec{r}_v$	E	F	G	L	M	N
张量记号	u^1	u^2	$\vec{r}_1$	$\vec{r}_2$	g_{11}	g_{12}	g_{22}	L_{11}	L_{12}	L_{22}

g_{21}　　　L_{21}

规律：用带上标为i的符号表示第i个分量，

用下标表示对哪个分量求偏微商.

$$g_{ij}=\vec{r}_i\cdot\vec{r}_j,\qquad L_{ij}=\vec{r}_{ij}\cdot\vec{n}=-\vec{r}_i\cdot\vec{n}_j,$$

曲面的度量矩阵$(g_{ij})_{2\times 2}$正定，　记 $g=\det(g_{ij})=EG-F^2$,

$$g^{11}=\frac{g_{22}}{g},\quad g^{12}=g^{21}=-\frac{g_{12}}{g},\quad g^{22}=\frac{g_{11}}{g},\quad (g^{ij})_{2\times 2}=(g_{ij})^{-1}$$

本书和式约定

$$\sum_{i} \triangleq \sum_{i=1}^{2},\ \sum_{i,j} \triangleq \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2},\ \sum_{\alpha} a^{\alpha} b_{\alpha} = \sum_{\beta} a^{\beta} b_{\beta},\quad \sum_{\alpha,\beta} a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma,\delta} a^{\gamma\delta} b_{\gamma\delta}$$

注意：(1)上、下指标使用哪个字母不影响求和；

(2)只对上、下标相同的指标求和.

Einstein的和式约定

如果在一个单项表达式中，同一个指标出现两次，一次作为上指标，一次作为下指标，则该项是关于这个指标在规定范围内的求和式，和号认为是省略的. 例如：

$$a^{\alpha} b_{\alpha} \triangleq \sum_{\alpha} a^{\alpha} b_{\alpha},\quad a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \triangleq \sum_{\alpha,\beta} a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}$$

一、曲面的基本方程和Christoffel符号

在局部坐标系$[\vec{r};\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{n}]$中将基底的偏微商表示出来

得到曲面的基本方程:

$$\begin{cases} \vec{r}_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k}\vec{r}_k + L_{ij}\vec{n} & \text{—— Gauss方程} \\ \vec{n}_i = -\sum_{j,k=1}^{2} L_{ik}g^{kj}\vec{r}_j & \text{—— Weingarten方程} \end{cases} \quad i,j=1,2$$

其中 $\Gamma_{ij}^{k} = \sum_{l=1}^{2} g^{kl}[ij,l]$, —— 第二类Christoffel符号

$$[ij,l] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)$$ —— 第一类Christoffel符号

若采用过去的符号，则有

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{GE_u-F(2F_u-E_v)}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma_{11}^{2}=\frac{E(2F_u-E_v)-FE_u}{2(EG-F^2)},$$

$$\Gamma_{12}^{1}=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma_{12}^{2}=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)},$$

$$\Gamma_{22}^{1}=\frac{G(2F_v-G_u)-FG_v}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma_{22}^{2}=\frac{EG_v-F(2F_v-G_u)}{2(EG-F^2)};$$

可见 $\Gamma_{ij}^{k}\ (i,j,k=1,2)$ 为曲面的内蕴量，

它们在保长变换下保持不变.

特别地，对于正交曲纹坐标网有$F=0$，则

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{E_u}{2E},\qquad \Gamma_{11}^{2}=-\frac{E_v}{2G},\qquad \Gamma_{12}^{1}=\frac{E_v}{2E},$$

$$\Gamma_{12}^{2}=\frac{G_u}{2G},\qquad \Gamma_{22}^{1}=-\frac{G_u}{2E},\qquad \Gamma_{22}^{2}=\frac{G_v}{2G};$$

二、Gauss公式和Codazzi-Mainardi公式

定义**Riemann曲率张量**　设 $m,i,j,k=1,2,$

$$R_{mijk} \triangleq \sum_{l=1}^{2} g_{ml}\left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^{l}}{\partial u^{k}}-\frac{\partial \Gamma_{ik}^{l}}{\partial u^{j}}+\sum_{p=1}^{2}\left(\Gamma_{ij}^{p}\Gamma_{pk}^{l}-\Gamma_{ik}^{p}\Gamma_{pj}^{l}\right)\right]$$

则有**Gauss公式** $R_{mijk}=L_{ij}L_{mk}-L_{ik}L_{mj}$

注：Gauss公式中只有一个独立：$R_{1212}=L_{21}L_{12}-L_{22}L_{11}$

Codazzi-Mainardi公式

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^{k}}-\frac{\partial L_{ik}}{\partial u^{j}}=\sum_{l=1}^{2}(\Gamma_{ik}^{l}L_{lj}-\Gamma_{ij}^{l}L_{lk})\quad (i,j,k=1,2)$$

注：Codazzi-Mainardi公式中只有二个独立.

再谈Gauss曲率

由Gauss公式得到Gauss曲率 $K=-\dfrac{R_{1212}}{g}$

$$K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{\begin{vmatrix} F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}\right\}$$

当$F=0$时, $K=\dfrac{-1}{\sqrt{EG}}\left[\left(\dfrac{\left(\sqrt{G}\right)_u}{\sqrt{E}}\right)_u+\left(\dfrac{\left(\sqrt{E}\right)_v}{\sqrt{G}}\right)_v\right]$

Gauss’s Egregium Theorem

曲面的Gauss曲率是内蕴量.

Gauss绝妙定理是微分几何学发展过程中的里程碑

(1) 此定理说明曲面的度量本身蕴含着一定的弯曲性质, 并由此产生了曲面的内蕴几何学.
(以给定第一基本形式的抽象曲面作为研究对象)

(2) Riemann将其推广到高维内蕴几何学, 即 **Riemann**几何.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业！

P145：7，10

三、曲面论的基本定理

设 $\mathrm{I} = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$,

$$\mathrm{II} = L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2 = \sum_{i,j=1}^{2} L_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$$

是给定的两个二次形式, 其中I是正定的.

若I和II的系数g_{ij}和L_{ij}对称,

且满足Gauss公式和Codazzi-Mainardi公式,

则除了空间中的位置差别外, 唯一地存在一个曲面,

使得I和II分别为此曲面的第一和第二基本形式.

证明思路

Step1. 增加条件固定曲面的空间位置;

Step2. 将系数 g_{ij}, L_{ij}代入曲面的基本方程, 得到一个关于$\vec{r}(u^1,u^2)$的偏微分方程组, 它的可积条件正好是Gauss公式和Codazzi-Mainardi公式, 在第一步给出的条件下存在唯一一组解$\vec{r}(u^1,u^2)$;

Step3. 证明在曲面$\vec{r}(u^1,u^2)$上任一点, $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}$构成一个右手标架, 且$g_{ij}=\vec{r}_i\vec{r}_j$, $\vec{n}\vec{r}_i=0$, $\vec{n}^2=1$;

Step4. 证明给定的I和II分别是此曲面的第一、二基本形式.