Chapter4 目标规划(Goal Programming)

本章主要内容：

- 目标规划问题及其数学模型
- 目标规划的图解法
- 目标规划的单纯形法
- 目标规划应用举例

目标规划问题及其数学模型

1、问题的提出:

- 目标规划是在线性规划的基础上，为适应经济管理多目标决策的需要而由线性规划逐步发展起来的一个分支。
- 由于现代化企业内专业分工越来越细，组织机构日益复杂，一个实际的规划问题可能有多个目标函数，这些目标函数可能是不一致的，甚至是冲突的，因此，在处理时不能指望它们都达到最优，而只是希望它们尽可能接近于事先给定的目标值，这就是目标规划问题。
- 目标规划是实行目标管理的有效工具，它根据企业制定的经营目标以及这些目标的轻重缓急次序，考虑现有资源情况，分析如何达到规定目标或从总体上离规定目标的差距为最小。

目标规划问题及其数学模型

例4.1 某企业计划生产甲，乙两种产品，这些产品分别要在A,B,C,D四种不同设备上加工。按工艺文件规定，如表所示。

	A	B	C	D	单件利润
甲	1	1	4	0	2
乙	2	2	0	4	3
最大负荷	12	8	16	12	

问该企业应如何安排计划，使得计划期内的总利润收入为最大?

目标规划问题及其数学模型

解：设甲、乙产品的产量分别为x_1，x_2，建立线性规划模型：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

其最优解为$x_1 = 4$，$x_2 = 2$，$z^* = 14$元

目标规划问题及其数学模型

但企业的经营目标不仅仅是利润，而且要考虑多个方面，如：

(1) 力求使利润指标不低于12元；

(2) 考虑到市场需求，甲、乙两种产品的生产量需保持1:1的比例；

(3) C和D为贵重设备，严格禁止超时使用；

(4) 设备B必要时可以加班，但加班时间要控制；设备A即要求充分利用，又尽可能不加班。

要考虑上述多方面的目标，需要借助目标规划的方法。

目标规划问题及其数学模型

线性规划模型存在的局限性:

1）要求问题的解必须满足全部约束条件，实际问题中并非所有约束都需要严格满足。

2）只能处理单目标的优化问题。实际问题中，目标和约束可以相互转化。

3）线性规划中各个约束条件都处于同等重要地位，但现实问题中，各目标的重要性即有层次上的差别，同一层次中又可以有权重上的区分。

4）线性规划寻求最优解，但很多实际问题中只需找出满意解就可以。

目标规划问题及其数学模型

目标规划怎样解决上述线性规划模型建模中的局限性?

1. 设置偏差变量，用来表明实际值同目标值之间的差异

偏差变量用下列符号表示:

　　d^+——超出目标的偏差，称正偏差变量

　　d^-——未达到目标的偏差，称负偏差变量

正负偏差变量两者必有一个为0。

- 当实际值超出目标值时: $d^+>0, d^-=0$;
- 当实际值未达到目标值时: $d^+=0, d^->0$;
- 当实际值同目标值恰好一致时: $d^+=0, d^-=0$;

故恒有$d^+\times d^-=0$

目标规划问题及其数学模型

2. 统一处理目标和约束

- 对有严格限制的资源使用建立系统约束，数学形式同线性规划中的约束条件。如C和D设备的使用限制。

$$4x_1 \le 16$$

$$4x_2 \le 12$$

- 对不严格限制的约束，连同原线性规划建模时的目标，均通过目标约束来表达。

1）例如要求甲、乙两种产品保持1:1的比例，系统约束表达为：$x_1=x_2$。由于这个比例允许有偏差，

当$x_1<x_2$时，出现负偏差d^-，即： $x_1+d^-=x_2$或$x_1-x_2+d^-=0$

当$x_1>x_2$时，出现正偏差d^+，即： $x_1-d^+=x_2$或$x_1-x_2-d^+=0$

目标规划问题及其数学模型

∵正负偏差不可能同时出现，故总有：

$$x_1-x_2+d^- - d^+ = 0$$

- 若希望甲的产量不低于乙的产量，即不希望$d^->0$,用目标约束可表为：

$$\begin{cases}\min\{d^-\} \\ x_1-x_2+d^- - d^+ = 0\end{cases}$$

- 若希望甲的产量低于乙的产量，即不希望$d^+>0$,用目标约束可表为：

$$\begin{cases}\min\{d^+\} \\ x_1-x_2+d^- - d^+ = 0\end{cases}$$

- 若希望甲的产量恰好等于乙的产量，即不希望$d^+>0$,也不希望$d^->0$用目标约束可表为：

$$\begin{cases}\min\{d^+ + d^-\} \\ x_1-x_2+d^- - d^+ = 0\end{cases}$$

目标规划问题及其数学模型

2）力求使利润指标不低于12元，目标约束表示为：

$$\begin{cases} \min\{d^-\} \\ 2x_1 + 3x_2 + d^- - d^+ = 12 \end{cases}$$

3）设备B必要时可加班及加班时间要控制，目标约束表示为：

$$\begin{cases} \min\{d^+\} \\ x_1 + 2x_2 + d^- - d^+ = 8 \end{cases}$$

4）设备A既要求充分利用，又尽可能不加班，目标约束表示为：

$$\begin{cases} \min\{d^- + d^+\} \\ 2x_1 + 2x_2 + d^- - d^+ = 12 \end{cases}$$

目标规划问题及其数学模型

3. 目标的优先级与权系数

在一个目标规划的模型中，为达到某一目标可牺牲其他一些目标，称这些目标是属于不同层次的优先级。优先级层次的高低可分别通过优先因子$P_1,P_2,\cdots$表示。对于同一层次优先级的不同目标，按其重要程度可分别乘上不同的权系数。权系数是一个个具体数字，乘上的权系数越大，表明该目标越重要。

现假定:

- 第1优先级P_1——企业利润;
- 第2优先级P_2——甲乙产品的产量保持1:1的比例
- 第3优先级P_3——设备A,B尽量不超负荷工作。其中设备A的重要性比设备B大三倍。

目标规划问题及其数学模型

上述目标规划模型可以表示为:

$$\min z = P_1 d_1^- + P_2(d_2^+ + d_2^-) + +3P_3(d_3^+ + d_3^-) + P_3 d_4^+$$

$$s.t.\begin{cases} 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 12 \\ x_1 - x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + d_3^- - d_3^+ = 12 \\ x_1 + 2x_2 + d_4^- - d_4^+ = 8 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0 \ \ (i = 1,\ldots,4) \end{cases}$$

目标规划问题及其数学模型

4. 满意解

对于这种解来说，前面的目标可以保证实现或部分实现，而后面的目标就不一定能保证实现或部分实现，有些可能就不能实现。

5. 目标规划的目标函数

由各目标约束的正、负偏差变量及相应的优先因子和权系数构成。从决策者的要求来分析，总希望得到的结果与规定的指标值之间的偏差量愈小愈好。由此可构造一个使总偏差量为最小化的目标函数，$\min\ Z=f(d^+, d^-)$

其基本形式有三种：

目标规划问题及其数学模型

（1） 要求恰好达到目标值，即正、负偏差变量都要尽可能地小 。构造的目标函数是

$$\min\ Z = f(d^+ + d^-)$$

（2） 要求不超过目标值，但允许达不到目标值，即只有使正偏差量要尽可能地小（实现最少或为零）

$$\min\ Z = f(d^+)$$

（3） 要求超过目标值，即超过量不限。要求超额完成规定目标，要实现负偏差量为零或为最小

$$\min\ Z = f(d^-)$$

目标规划问题及其数学模型

建模的步骤

1、根据要研究的问题所提出的各目标与条件，确定目标值，列出目标约束与绝对约束；

2、可根据决策者的需要，将某些或全部绝对约束转化为目标约束。这时只需要给绝对约束加上负偏差变量和减去正偏差变量即可。

3、给各目标赋予相应的优先因子 P_i（$i=1.2\cdots L$）。

4、对同一优先等级中的各偏差变量，若需要可按其重要程度的不同，赋予相应的权系数 W_{kl}^{+} 和 W_{kl}^{-} 。

目标规划问题及其数学模型

目标规划数学模型的一般形式

达成函数

$$\min\ Z = \sum_{l=1}^{L} P_l \left(\sum_{k=1}^{K} \omega_{lk}^{-} d_k^{-} + \omega_{lk}^{+} d_k^{+} \right)$$

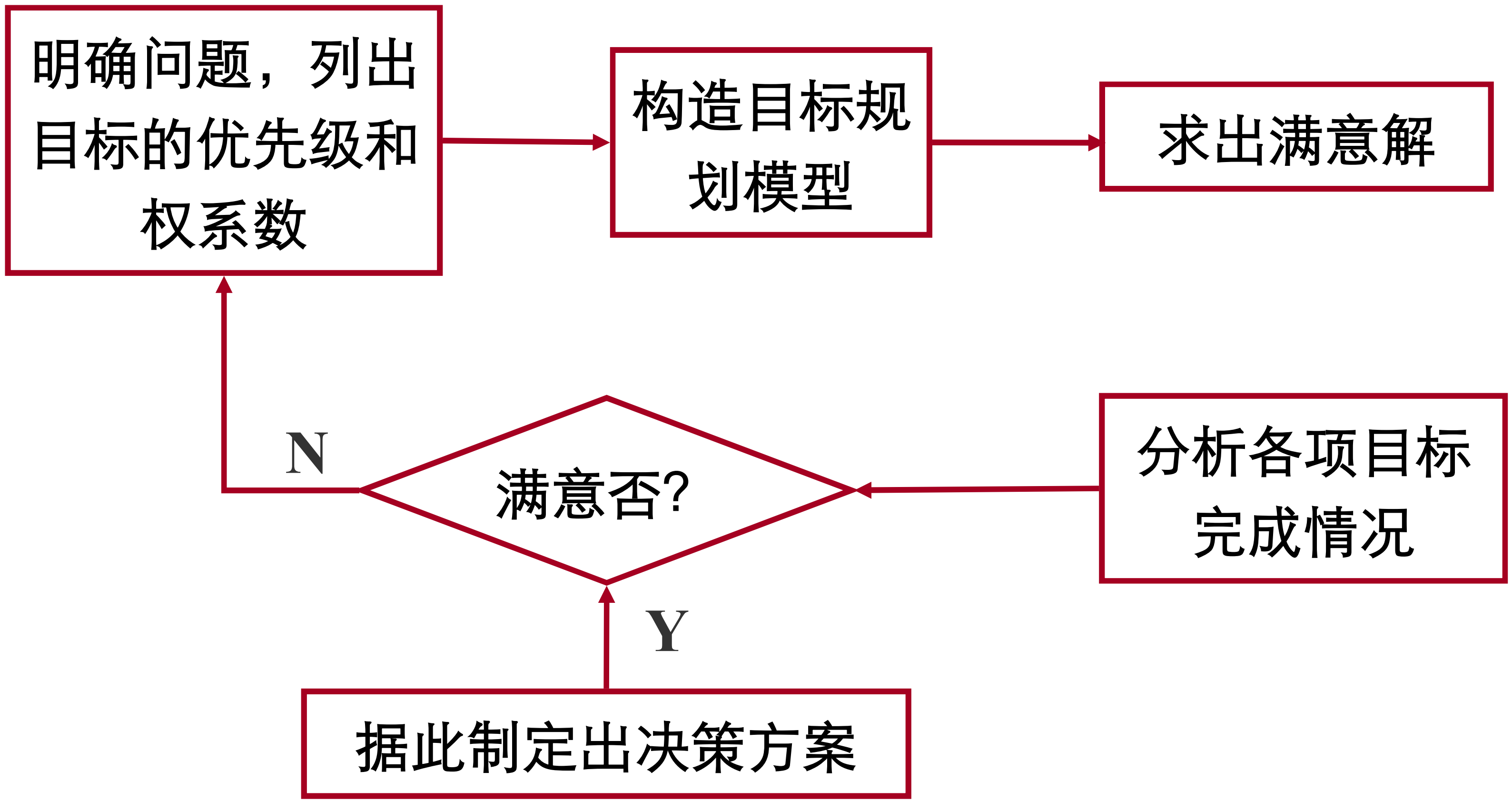
目标约束

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j + d_k^{-} - d_k^{+} = g_k \quad (k = 1.2 \cdots K) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq (= . \geq) b_i \qquad (i = 1.2 \cdots m) \\ x_j \geq 0 \qquad (\mathrm{j} = 1.2 \cdots \mathrm{n}) \\ d_k^{+} . d_k^{-} \geq 0 \quad (k = 1.2 \cdots K) \end{cases}$$

其中：g_k为第k个目标约束的预期目标值，ω_{lk}^{-}和ω_{lk}^{+}为p_l优先因子对应各目标的权系数。

目标规划问题及其数学模型

用目标规划求解问题的过程:



目标规划问题及其数学模型

例4.2　某厂生产Ⅰ、Ⅱ两种产品，有关数据如表所示。试求获利最大的生产方案？

	I	II	拥有量
原材料	2	1	11
设备(台时)	1	2	10
单件利润	8	10	

在此基础上考虑：

1、产品Ⅱ的产量不低于产品I的产量；

2、充分利用设备有效台时，不加班；

3、利润不小于 56 元。

解：分析

第一目标P_1：　$P_1 d_1^+$

第二目标P_2：　$P_2(d_2^+ + d_2^-)$

第三目标P_3：　$P_3 d_3^-$

目标规划问题及其数学模型

	I	II	拥有量
原材料	2	1	11
设备(台时)	1	2	10
单件利润	8	10	

1、产品II的产量不低于产品I的产量；
2、充分利用设备有效台时，不加班；
3、利润不小于 56 元。

$2x_1 + x_2 \leq 11$ （在绝对约束基础上进行目标规划）

$x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0$（要求：$d_1^+$ 尽可能小，最好是0才能满足≤）

$x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10$（要求：$d_2^-$ 和 d_2^+ 都尽可能小，最好等于0）

$8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56$ (要求：d_3^-尽可能小，最好是0才能满足≥)

$x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0$

目标规划问题及其数学模型

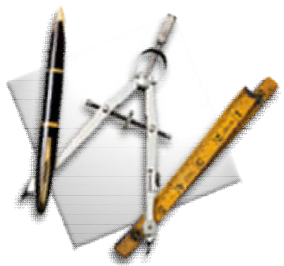
规划模型：

$$\min \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{d}_1^+ + \boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{d}_2^+ + \boldsymbol{d}_2^-) + \boldsymbol{P}_3\boldsymbol{d}_3^-$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{d}_1^- - \boldsymbol{d}_1^+ = 0 \\ \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{d}_2^- - \boldsymbol{d}_2^+ = 10 \\ 8\boldsymbol{x}_1 + 10\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{d}_3^- - \boldsymbol{d}_3^+ = 56 \\ 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \le 11 \\ \boldsymbol{x}_{1-2} \ge 0, \boldsymbol{d}_j^+ . \boldsymbol{d}_j^- \ge 0 \ \ (\boldsymbol{j} = 1.2.3) \end{cases}$$

目标规划的图解法

目标规划的图解法:



适用两个变量的目标规划问题，但其操作简单，原理一目了然。同时，也有助于理解一般目标规划的求解原理和过程。

图解法解题步骤:

1. 将所有约束条件（包括目标约束和绝对约束，暂不考虑正负偏差变量）的直线方程分别标示于坐标平面上。

2. 确定系统约束的可行域。

3. 在目标约束所代表的边界线上，用箭头标出正、负偏差变量值增大的方向

目标规划的图解法

3. 求满足最高优先等级目标的解

4. 转到下一个优先等级的目标，再不破坏所有较高优先等级目标的前提下，求出该优先等级目标的解

5. 重复4，直到所有优先等级的目标都已审查完毕为止

6. 确定最优解和满意解。

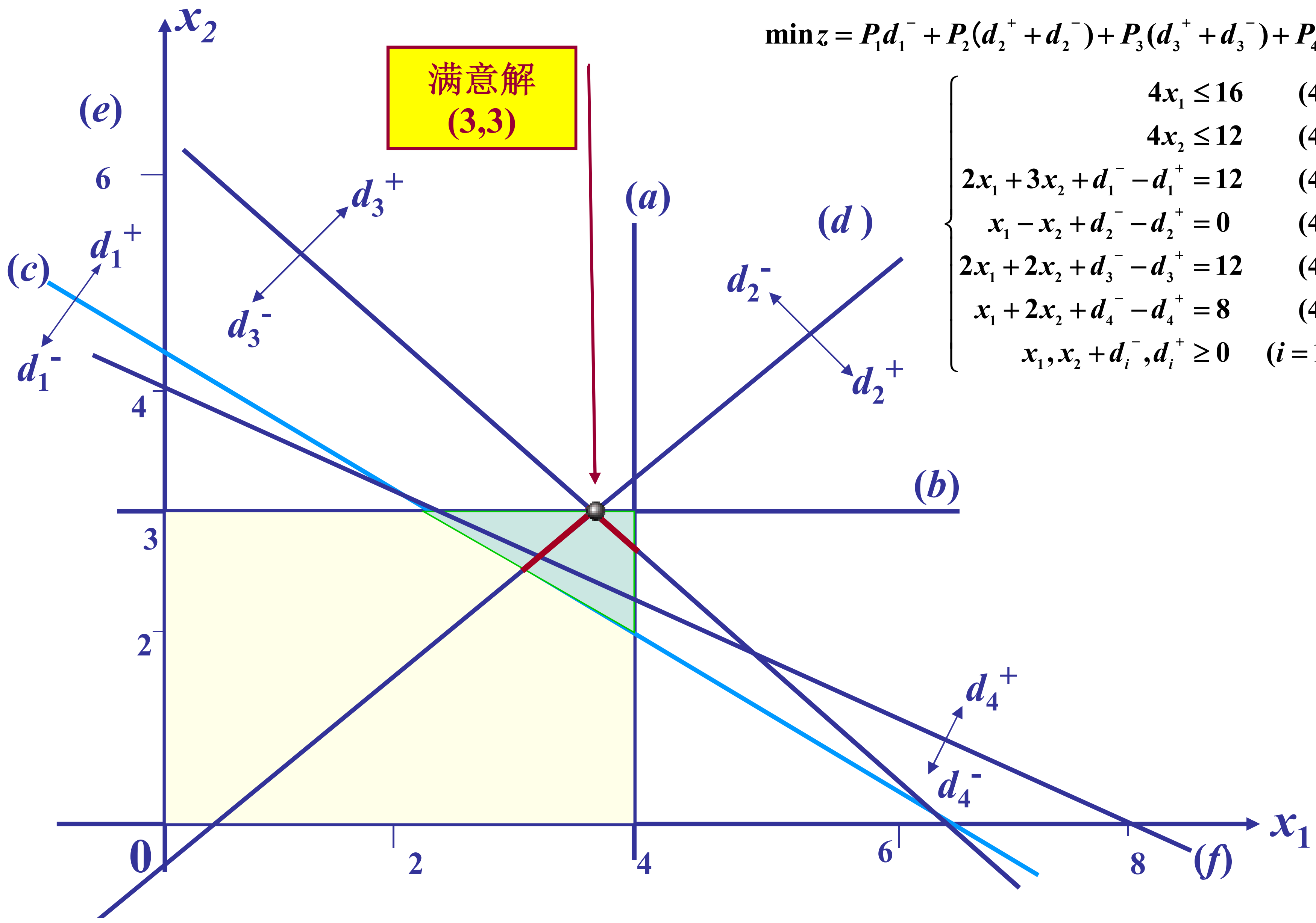
目标规划的图解分析法

例4.3 用图解法求解下列目标规划问题

$$\min z = P_1 d_1^- + P_2(d_2^+ + d_2^-) + 3P_3(d_3^+ + d_3^-) + P_4 d_4^+$$

$$\begin{cases} 4x_1 \le 16 & (4.1a) \\ 4x_2 \le 12 & (4.1b) \\ 2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 12 & (4.1c) \\ x_1 - x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0 & (4.1d) \\ 2x_1 + 2x_2 + d_3^- - d_3^+ = 12 & (4.1e) \\ x_1 + 2x_2 + d_4^- - d_4^+ = 8 & (4.1f) \\ x_1, x_2 + d_i^-, d_i^+ \ge 0 & (i = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$

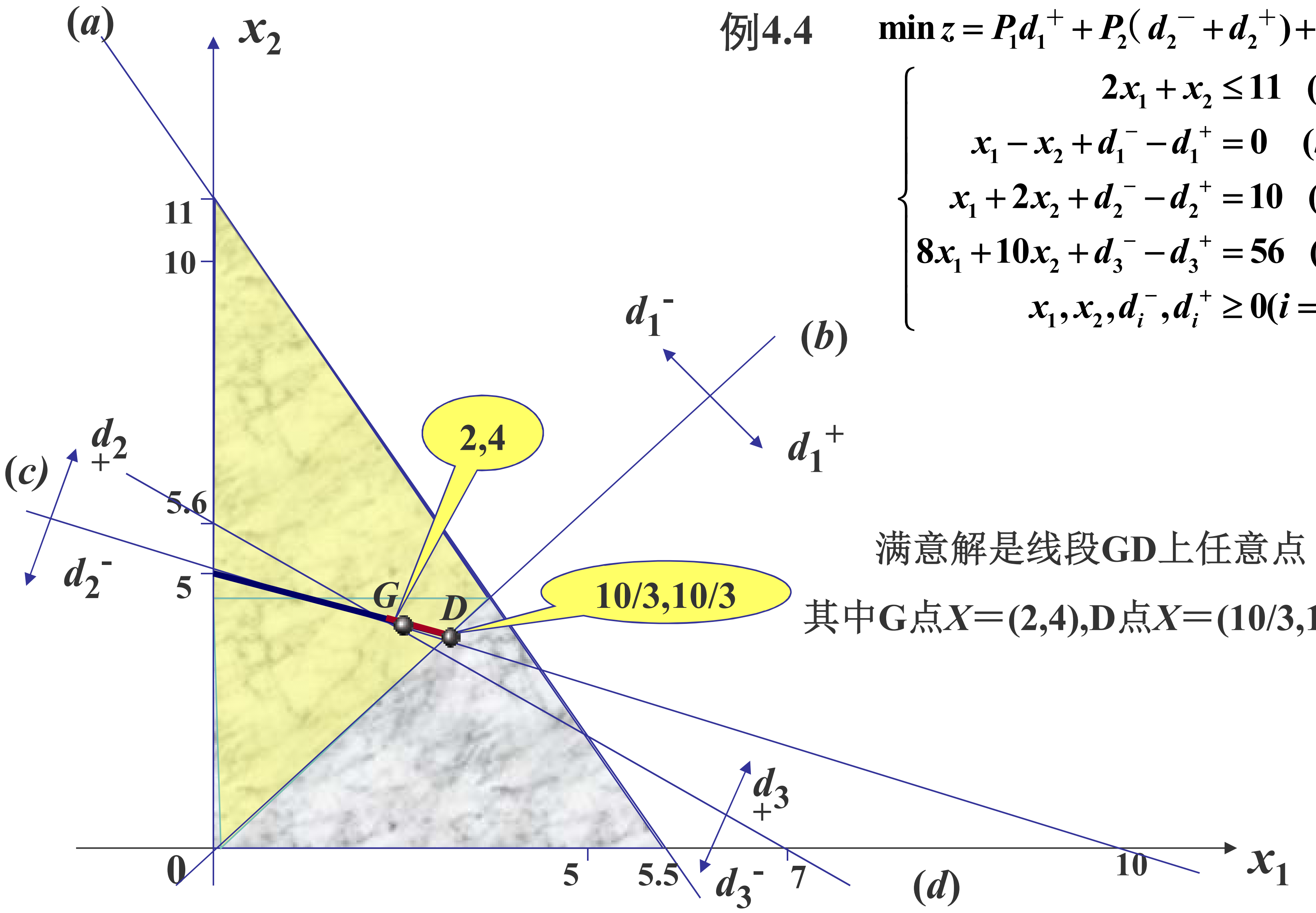
目标规划的图解分析法



$$\min z = P_1 d_1^- + P_2(d_2^+ + d_2^-) + P_3(d_3^+ + d_3^-) + P_4 d_4^+$$

$$\begin{cases} 4x_1 \le 16 & (4.1a) \\ 4x_2 \le 12 & (4.1b) \\ 2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 12 & (4.1c) \\ x_1 - x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0 & (4.1d) \\ 2x_1 + 2x_2 + d_3^- - d_3^+ = 12 & (4.1e) \\ x_1 + 2x_2 + d_4^- - d_4^+ = 8 & (4.1f) \\ x_1, x_2 + d_i^-, d_i^+ \ge 0 & (i = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$

目标规划的图解分析法



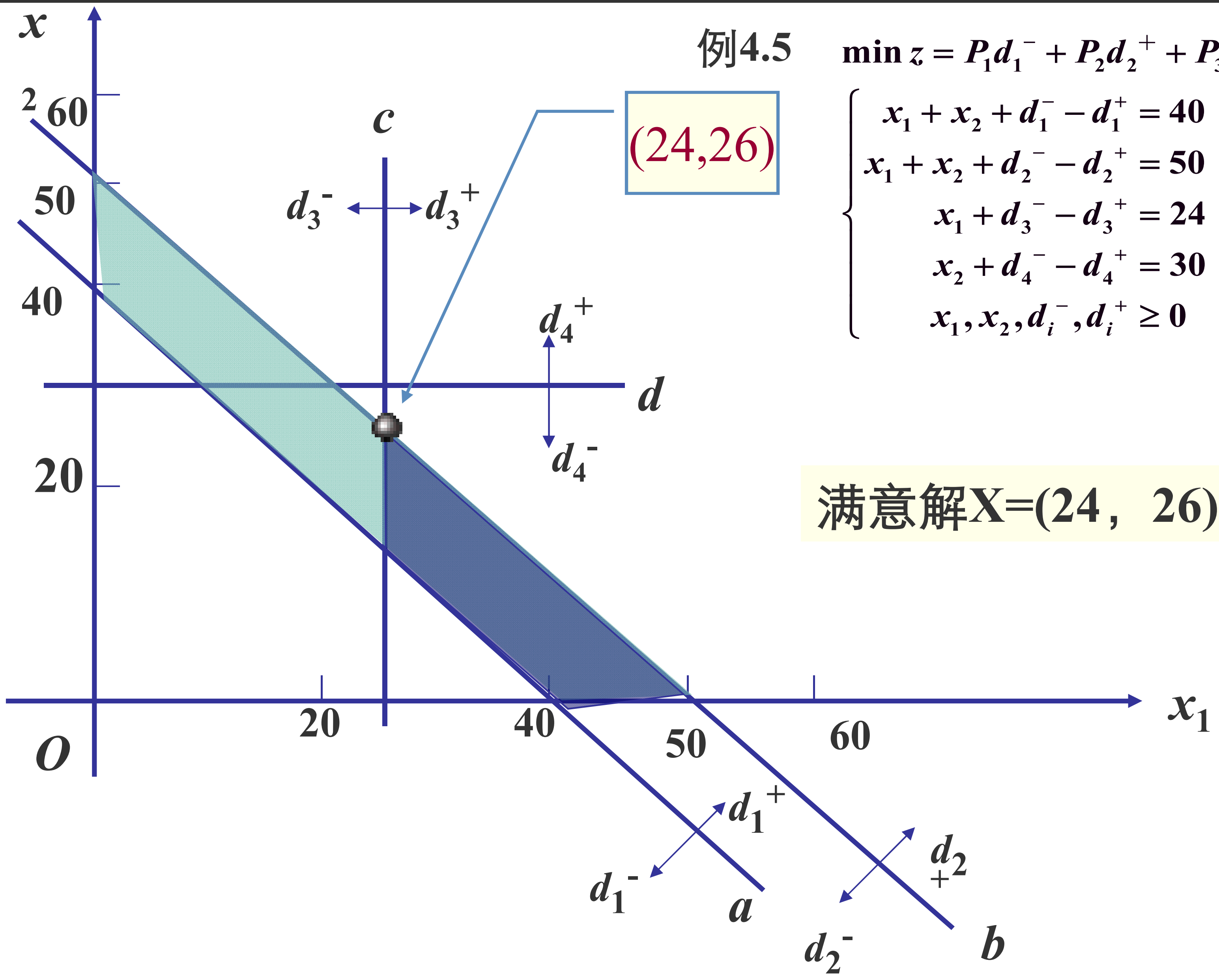
例4.4 $\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 & (a) \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & (b) \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 & (c) \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 & (d) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0 (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

满意解是线段GD上任意点

其中G点X=(2,4),D点X=(10/3,10/3)

目标规划的图解分析法



例4.5

$$\min z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3(2d_3^- + d_4^-)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40 & (a) \\ x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 50 & (b) \\ x_1 + d_3^- - d_3^+ = 24 & (c) \\ x_2 + d_4^- - d_4^+ = 30 & (d) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 & (i = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$

满意解X=(24，26)

目标规划的单纯形法

（一）、一般形式：

C_j			c_1	c_2	$\cdots$	c_{n+2m}
C_B	X_B	b	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n+2m}
c_{j1}	x_{j1}	b_{o1}	e_{11}	e_{12}	$\cdots$	e_{1n+2m}
c_{j2}	x_{j2}	b_{o2}	e_{21}	e_{22}	$\cdots$	e_{2n+2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
c_{jm}	x_{jm}	b_{om}	e_{m1}	e_{m2}	$\cdots$	e_{mn+2m}
σ_{kj}	P_1	α_1	σ_{11}	σ_{12}	$\cdots$	σ_{1n+2m}
	P_2	α_2	σ_{21}	σ_{22}	$\cdots$	σ_{2n+2m}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
	P_K	α_K	σ_{m1}	σ_{m2}	$\cdots$	σ_{mn+2m}

目标规划的单纯形法

一、特点

1．目标函数：**min**

2．最优性判断：$\sigma_j \geq 0$ 时为最优

3．非基变量检验数的特殊性：

含有不同等级的优先因子 $P_1, P_2, \ldots, P_k$；又因 $P_1 >> P_2 >> P_3 >> \ldots >> P_k$，所以检验数的正负首先取决于$P_1$的系数的正负，若$P_1$ 的系数为0，再由P_2的系数的正负决定检验数的正负，然后依次类推。

目标规划的单纯形法

解目标规划问题的单纯形法的计算步骤

(1) 建立初始单纯形表．在表中将检验数行按优先因子个数分别列成K行。初始的检验数需根据初始可行解计算出来，方法同基本单纯形法。当不含绝对约束时，d_i^-（$i=1,2,\ldots,K$）构成了一组基本可行解，这时只需利用相应单位向量把各级目标行中对应d_i^-（$i=1,2,\ldots,K$）的量消成0即可得到初始单纯形表。置$k=1$；

(2) 检查当前第k行中是否存在大于0，且对应的前k-1行的同列检验数为零的检验数。若有取其中最大者对应的变量为换入变量，转(3)。若无这样的检验数，则转(5)；

目标规划的单纯形法

(3) 按单纯形法中的最小比值规则确定换出变量，当存在两个和两个以上相同的最小比值时，选取具有较高优先级别的变量为换出变量，转（**4**）；

(4) 按单纯形法进行基变换运算，建立新的单纯形表，（注意：要对所有的行进行转轴运算）返回**(2)**;

(5) 当$k = K$时，计算结束。表中的解即为满意解。否则置$k = k+1$，返回（**2**）。

目标规划的单纯形法

例**4.6**：用单纯形法求解下列目标规划问题

$$\min \quad Z = P_1 d_1^+ + P_2 (d_2^+ + d_2^-) + P_3 d_3^-$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_{1-2} \geq 0, d_j^+ . d_j^- \geq 0 \quad (j = 1.2.3) \end{cases}$$

解：将上述目标规划问题化为标准型：

目标规划的单纯形法

$$\min Z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^+ + d_2^-) + P_3 d_3^-$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_{1-3} \geq 0, d_j^+ . d_j^- \geq 0 \quad (j = 1.2.3) \end{cases}$$

建立初始单纯形表:

目标规划的单纯形法

C_j			0	0	0	P_1	P_2	P_2	P_3	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	x_3
0	d_1^-	0	1	−1	1	−1	0	0	0	0	0
P_2	d_2^-	10	1	2	0	0	1	−1	0	0	0
P_3	d_3^-	56	8	10	0	0	0	0	1	−1	0
0	x_3	11	2	1	0	0	0	0	0	0	1
		P_1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
		P_2	0	0	0	0	1	1	0	0	0
		P_3	0	0	0	0	0	0	1	0	0
检验数 σ_j		P_1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
		P_2	-1	-2	0	0	0	2	0	0	0
		P_3	-8	-10	0	0	0	0	0	1	0

目标规划的单纯形法

C_j			0	0	0	P_1	P_2	P_2	P_3	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	x_3
0	d_1^-	0	1	–1	1	–1	0	0	0	0	0
P_2	d_2^-	10	1	2	0	0	1	–1	0	0	0
P_3	d_3^-	56	8	10	0	0	0	0	1	–1	0
0	x_3	11	2	1	0	0	0	0	0	0	1
σ_j		P_1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
		P_2	–1	–2	0	0	0	2	0	0	0
		P_3	–8	–10	0	0	0	0	0	1	0

$\theta = \min\{—, 10/2, 56/10, 11/1\} = 5$

进基变量x_2　　换出变量d_2^-

目标规划的单纯形法

C_j			0	0	0	P_1	P_2	P_2	P_3	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	x_3
0	d_1^-	5	3/2	0	1	– 1	1/2	-1/2	0	0	0
0	x_2	5	1/2	1	0	0	1/2	-1/2	0	0	0
P_3	d_3^-	6	3	0	0	0	-5	5	1	– 1	0
0	x_3	6	3/2	0	0	0	-1/2	1/2	0	0	1
σ_j		P_1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
		P_2	0	0	0	0	1	$\boxed{1}$	0	0	0
		P_3	– 3	0	0	0	5	-5	0	1	0

θ= min｛10/3,10,6/3,12/3｝= 2,

进基变量x_1　　　换出变量d_3^-

目标规划的单纯形法

C_j			0	0	0	P_1	P_2	P_2	P_3	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	x_3
0	d_1^-	2	0	0	1	– 1	3	-3	-1/2	1/2	0
0	x_2	4	0	1	0	0	4/3	-4/3	-1/6	1/6	0
0	x_1	2	1	0	0	0	-5/3	5/3	1/3	-1/3	0
0	x_3	3	0	0	0	0	2	-2	-1/2	1/2	1
σ_j		P_1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
		P_2	0	0	0	0	1	1	0	0	0
		P_3	0	0	0	0	0	0	1	0	0

最优解为$x_1 = 2$， $x_2 = 4$。

但非基变量d_3^+的检验数为零，故此题有无穷多最优解。

目标规划的单纯形法

C_j			0	0	0	P_1	P_2	P_2	P_3	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	x_3
0	d_1^-	2	0	0	1	– 1	3	-3	-1/2	1/2	0
0	x_2	4	0	1	0	0	4/3	-4/3	-1/6	1/6	0
0	x_1	2	1	0	0	0	-5/3	5/3	1/3	-1/3	0
0	x_3	3	0	0	0	0	2	-2	-1/2	1/2	1
σ_j		P_1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
		P_2	0	0	0	0	1	1	0	0	0
		P_3	0	0	0	0	0	0	1	0↑	0

$\theta = \min \{4, 24, -, 6\} = 4$

进基变量d_3^+　　　换出变量d_1^-

目标规划的单纯形法

C_j			0	0	0	P_1	P_2	P_2	P_3	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	x_3
0	d_1^-	4	0	0	2	-2	6	-6	-1	1	0
0	x_2	10/3	0	1	-1/3	1/3	1/3	-1/3	0	0	0
0	x_1	10/3	1	0	2/3	-2/3	1/3	-1/3	0	0	0
0	x_3	1	0	0	-1	−1	-1	1	0	0	1
σ_j		P_1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
		P_2	0	0	0	0	1	1	0	0	0
		P_3	0	0	0	0	0	0	1	0	0

最优解为$x_1 = 10/3$，$x_2 = 10/3$。

目标规划的单纯形法

例4.7、用单纯形法求解下列目标规划问题

$$\min\ Z = P_1 d_1^- + 2.5 P_2 d_3^+ + P_2 d_4^+ + P_3 d_2^+$$

$$\begin{cases} 30x_1 + 12x_2 + d_1^- - d_1^+ = 2500 \\ 2x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 140 \\ x_1 + d_3^- - d_3^+ = 60 \\ x_2 + d_4^- - d_4^+ = 100 \\ x_{1-2} \geq 0, d_l^+, d_l^- \geq 0 \quad (l = 1.2.3.4) \end{cases}$$

目标规划的单纯形法

C_j			0	0	P_1	0	0	P_3	0	$2.5P_2$	0	P_2
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+
P_1	d_1^-	2500	30	12	1	−1	0	0	0	0	0	0
0	d_2^-	140	2	1	0	0	1	−1	0	0	0	0
0	d_3^-	60	1	0	0	0	0	0	1	−1	0	0
0	d_4^-	100	0	1	0	0	0	0	0	0	1	−1
σ_j		P_1	−30	−12	0	1	0	0	0	0	0	0
		P_2	0	0	0	0	0	0	0	2.5	0	1
		P_3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

$\theta = \min\{2500/30, 140/2, 60/1, -\} = 60,$

进基变量x_1　　　换出变量d_3^-

目标规划的单纯形法

C_j			0	0	P_1	0	0	P_3	0	$2.5P_2$	0	P_2
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+
P_1	d_1^-	700	0	12	1	–1	0	0	–30	30	0	0
0	d_2^-	20	0	1	0	0	1	–1	–2	2	0	0
0	x_1	60	1	0	0	0	0	0	1	–1	0	0
0	d_4^-	100	0	1	0	0	0	0	0	0	1	–1
σ_j		P_1	0	–12	0	1	0	0	30	–30	0	0
		P_2	0	0	0	0	0	0	0	2.5	0	1
		P_3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

$\theta = \min\{700/30, 20/2, —, —\} = 10$

进基变量 d_3^+　　换出变量 d_2^-

目标规划的单纯形法

C_j			0	0	P_1	0	0	P_3	0	$2.5P_2$	0	P_2
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+
P_1	d_1^-	400	0	-3	1	-1	-15	15	0	0	0	0
$2.5P_2$	d_3^+	10	0	1/2	0	0	1/2	-1/2	-1	1	0	0
0	x_1	70	1	1/2	0	0	1/2	-1/2	0	0	0	0
0	d_4^-	100	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1
σ_j		P_1	0	3	0	1	15	-15	0	0	0	0
		P_2	0	-5/4	0	0	-5/4	5/4	5/2	0	0	1
		P_3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

$\theta = \min\{400/15, -, -, -\} = 10$

进基变量d_2^+　　换出变量d_1^-

目标规划的单纯形法

C_j			0	0	P_1	0	0	P_3	0	$2.5P_2$	0	P_2
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+
P_3	d_2^+	80/3	0	-1/5	1/15	-1/15	-1	1	0	0	0	0
$2.5P_2$	d_3^+	70/3	0	2/5	1/30	-1/30	0	0	-1	1	0	0
0	x_1	250/3	1	2/5	1/30	-1/30	0	0	0	0	0	0
0	d_4^-	100	0	1	0	0	0	0	0	0	1	−1
σ_j		P_1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
		P_2	0	-1	-1/12	1/12	0	0	2/5	0	0	1
		P_3	0	1/5	-1/15	1/15	1	0	0	0	0	0

θ= min｛—,350/6,1250/6,100/1｝=75

进基变量x_2　　　换出变量d_3^+

目标规划的单纯形法

C_j			0	0	P_1	0	0	P_3	0	$2.5P_2$	0	P_2
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+
P_3	d_2^+	115/3	0	0	1/12	-1/12	-1	1	-1/2	1/2	0	0
0	x_2	175/3	0	1	1/12	-1/12	0	0	-5/2	5/2	0	0
0	x_1	60	1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0
0	d_4^-	125/3	0	0	-1/12	1/12	0	0	5/2	-5/2	1	− 1
σ_j		P_1	0	0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0	0	0
		P_2	0	0	0	0	0	0	0	$\boxed{5/2}$	0	1
		P_3	0	0	-1/12	1/12	1	0	1/2	-1/2	0	0

P_3优先等级目标没有实现，但已无法改进，得到满意解

$x_1 = 60$， $x_2 = 175/3$， $d_2^+ = 115/3$， $d_4^- = 125/3$

目标规划应用举例

例4.8 已知一个生产计划的线性规划模型如下，其中目标函数为总利润，x_1, x_2 为产品A、B产量。

$$\max \quad Z = 30x_1 + 12x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 140 & (\text{甲资源}) \\ x_1 \le 60 & (\text{乙资源}) \\ x_2 \le 100 & (\text{丙资源}) \\ x_{1-2} \ge 0 \end{cases}$$

现有下列目标:

1. 要求总利润尽量超过 2500 元;

2. 考虑产品受市场影响，为避免积压，A、B的生产量不超过 60 件和 100 件;

3. 由于甲资源供应比较紧张，不要超过现有量140。

试建立目标规划模型，并用图解法求解。

目标规划应用举例

解：以产品 **A,B** 的单件利润比 **2.5 :1** 为权系数，模型如下：

$$\min Z = P_1 d_1^- + 2.5 P_2 d_3^+ + P_2 d_4^+ + P_3 d_2^+$$

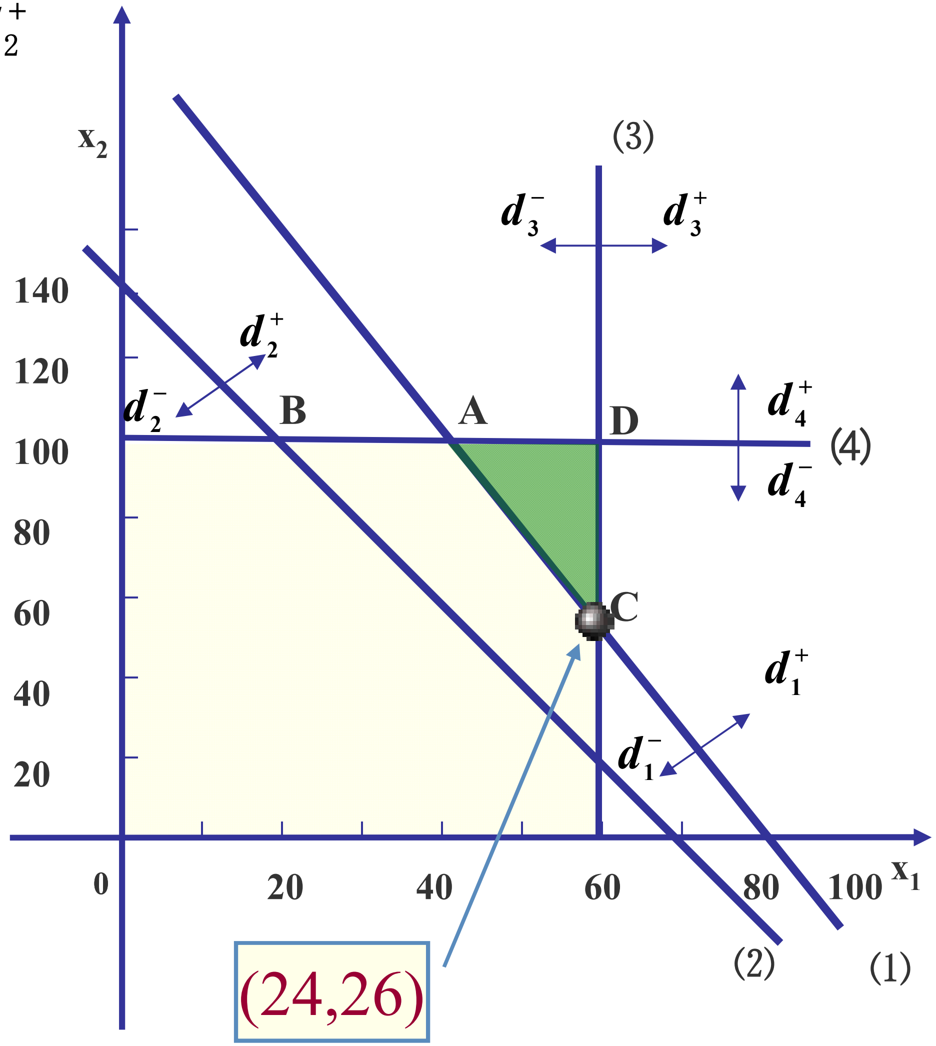
$$\begin{cases} 30x_1 + 12x_2 + d_1^- - d_1^+ = 2500 \\ 2x_1 + \quad x_2 + d_2^- - d_2^+ = 140 \\ x_1 \qquad\qquad + d_3^- - d_3^+ = 60 \\ \qquad\qquad x_2 + d_4^- - d_4^+ = 100 \\ x_{1-2} \geq 0, d_l^+, d_l^- \geq 0 \qquad (l = 1.2.3.4) \end{cases}$$

目标规划应用举例

$$\min Z = P_1 d_1^- + 2.5 P_2 d_3^+ + P_2 d_4^+ + P_3 d_2^+$$

$$\begin{cases} 30x_1 + 12x_2 + d_1^- - d_1^+ = 2500 \\ 2x_1 + \quad x_2 + d_2^- - d_2^+ = 140 \\ x_1 \qquad + d_3^- - d_3^+ = 60 \\ \qquad x_2 + d_4^- - d_4^+ = 100 \\ x_{1-2} \geq 0, d_l^+, d_l^- \geq 0 \qquad (l = 1.2.3.4) \end{cases}$$

C(60 ,58.3)为所求的满意解。



目标规划应用举例

例4.9 已知某工厂生成AB两种型号的机械，条件如表所示

工序	型号		每周最大加工能力
	A	B	
I（小时/台）	4	6	150
II（小时/台）	3	2	70
利润（元/台）	300	450	

如果工厂经营目标的期望值和优先等级如下：

p_1：每周总利润不得低于10000元；

p_2：因合同要求，A型机每周至少生产10台，B型机每周至少生产15台；

p_3：希望工序 I 的每周生产时间正好为150小时，工序 II 的生产时间最好用足，甚至可适当加班。

目标规划应用举例

这个问题的目标规划模型为:

$$\min \quad f = p_1 d_1^+ + p_2(d_2^- + d_3^-) + p_3(d_4^- + d_4^+ + d_5^-)$$

$$\begin{cases} 300x_1 + 450x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10000 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ x_2 + d_3^- - d_3^+ = 15 \\ 4x_1 + 6x_2 + d_4^- - d_4^+ = 150 \\ 3x_1 + 2x_2 + d_5^- - d_5^+ = 70 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

目标规划问题及其数学模型

小结

	线性规划LP	目标规划GP
目标函数	**min** ， **max** 系数可正负	**min** ，偏差变量 系数≥0
变量	$x_{i,}\ \ x_s\ \ x_a$	$x_i\ \ x_s\ \ x_a\ \ d$
约束条件	绝对约束	目标约束、绝对约束
解	最优	最满意

目标规划应用举例

例4.9 某厂生产A、B、C三种产品，装配工作在同一生产线上完成，三种产品时的工时消耗分别为6、8、10小时，生产线每月正常工作时间为200小时；三种产品销售后，每台可获利分别为500、650和800元；每月销售量预计为12、10和6台。

该厂经营目标如下：

1、利润指标为每月16000元，争取超额完成；

2、充分利用现有生产能力；

3、可以适当加班，但加班时间不得超过24小时；

4、产量以预计销售量为准。试建立目标规划模型。