《微分几何》课程电子课件

教师：杨勤民

Tel: (021)64253147

Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程QQ群号：1045698545

五、曲面的主方向和曲率线

1. 主方向

如果曲面上点P处的两个切方向既正交又共轭，则称这两个切方向为曲面在P点的两个主方向.

主方向的方程

$$[(EM-FL)\mathrm{d}u^2+(EN-GL)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+(FN-GM)\mathrm{d}v^2]\Big|_P=0$$

或写为
$$\begin{vmatrix} \boxed{\mathrm{d}v^2 & -\mathrm{d}u\mathrm{d}v & \mathrm{d}u^2} \\ E_P & F_P & G_P \\ L_P & M_P & N_P \end{vmatrix}=0$$

证

由正交得 $E_P \mathrm{d}u\delta u + F_P(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + G_P \mathrm{d}v\delta v = 0.$

由共轭得 $L_P \mathrm{d}u\delta u + M_P(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + N_P \mathrm{d}v\delta v = 0.$

即 $\begin{cases} (E_P \mathrm{d}u + F_P \mathrm{d}v)\delta u + (F_P \mathrm{d}u + G_P \mathrm{d}v)\delta v = 0 \\ (L_P \mathrm{d}u + M_P \mathrm{d}v)\delta u + (M_P \mathrm{d}u + N_P \mathrm{d}v)\delta v = 0 \end{cases}$

关于δu和δv的线性方程组有非零解, 因此

$$\begin{vmatrix} E_P \mathrm{d}u + F_P \mathrm{d}v & F_P \mathrm{d}u + G_P \mathrm{d}v \\ L_P \mathrm{d}u + M_P \mathrm{d}v & M_P \mathrm{d}u + N_P \mathrm{d}v \end{vmatrix} = 0$$

展开, 并关于$\mathrm{d}u^2, \mathrm{d}u\mathrm{d}v, \mathrm{d}v^2$合并同类项即证.

$$[(EM-FL)\mathrm{d}u^2+(EN-GL)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+(FN-GM)\mathrm{d}v^2]\big|_P=0$$

$$\Delta_P=[(EN-GL)^2-4(EM-FL)(FN-GM)]\big|_P$$

$$=\left\{\left[(EN-GL)-\frac{2F}{E}(EM-FL)\right]^2+\frac{4(EG-F^2)}{E^2}(EM-FL)^2\right\}\Bigg|_P$$

当$\Delta_P>0$时，在P点处有两个主方向.

当$\Delta_P=0$(即$\dfrac{E}{L}=\dfrac{F}{M}=\dfrac{G}{N}$)时，称$P$点为脐点.

此时主方向方程恒成立，每个切方向都是主方向.

称使得L_P,M_P,N_P同时为零的脐点P为平点.

称使得L_P,M_P,N_P不同时为零的脐点P为圆点.

2. 主方向判别定理(Rodrigues(罗德里格斯)定理)

$(\mathrm{d})=(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$是主方向的充要条件是$\exists\lambda$使$\mathrm{d}\vec{n}=\lambda\mathrm{d}\vec{r}$;

在上述条件下有$\lambda=-k_n$, 其中k_n为沿方向(d)的法曲率.

证 (必要性)

设(d)是主方向, (δ)是与之正交且共轭的另一主方向.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}^2(u,v)\equiv 1 \Rightarrow \vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{n}=0 \Rightarrow \mathrm{d}\vec{n}\text{为一个切向量}\\ \mathrm{d}\vec{r}\text{与}\delta\vec{r}\text{垂直, 因此它们为不平行的两个切向量}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ 存在λ和μ使得$\mathrm{d}\vec{n}=\lambda\,\mathrm{d}\vec{r}+\mu\,\delta\vec{r}$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{两边点乘}\,\delta\vec{r}\text{ 得 }\mathrm{d}\vec{n}\cdot\delta\vec{r}=\lambda\,\mathrm{d}\vec{r}\cdot\delta\vec{r}+\mu\,\delta\vec{r}^2\\ \qquad(\mathrm{d})\text{与}(\delta)\text{共轭}\Rightarrow \mathrm{d}\vec{n}\cdot\delta\vec{r}=0\\ \qquad(\mathrm{d})\text{与}(\delta)\text{正交}\Rightarrow \mathrm{d}\vec{r}\cdot\delta\vec{r}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \mu=0$$

因此$\mathrm{d}\vec{n}=\lambda\,\mathrm{d}\vec{r}$.

(充分性)

记(δ)是与(d)正交的另一切方向.

则 $d\vec{n}\cdot\delta\vec{r}=\lambda\, d\vec{r}\cdot\delta\vec{r}=0\Rightarrow$ (d)与(δ) 共轭.

(d)与(δ) 既正交又共轭,因此为主方向.

(下证上述$\lambda=-k_n$)

由$d\vec{n}=\lambda\, d\vec{r}$两边点乘$d\vec{r}$得 $d\vec{n}\cdot d\vec{r}=\lambda\, d\vec{r}^{\,2}$.

将 $d\vec{n}\cdot d\vec{r}=-\mathrm{II}$, $d\vec{r}^{\,2}=(\dot{\vec{r}}\,ds)^2=\vec{\alpha}^{\,2}ds^2=ds^2=\mathrm{I}$ 代入得

$$\lambda=-\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=-k_n.$$

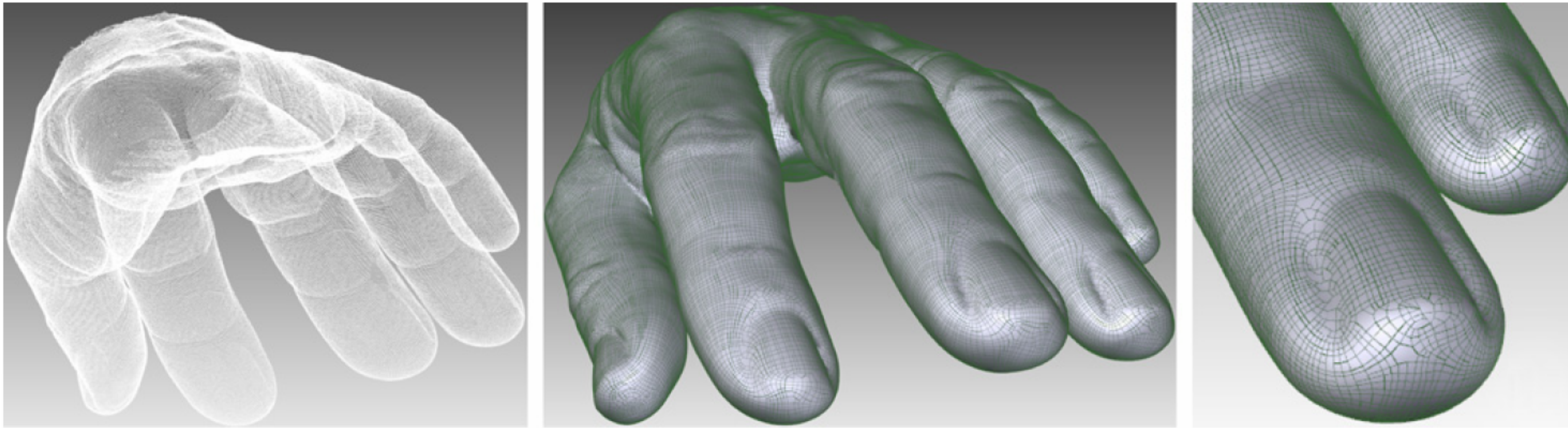
3. 曲率线

若曲面上一光滑曲线上的每一点的切方向都是主方向，则称该曲线为**曲面的曲率线**.

曲率线的微分方程
$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}v^2 & -\mathrm{d}u\mathrm{d}v & \mathrm{d}u^2 \\ E(u,v) & F(u,v) & G(u,v) \\ L(u,v) & M(u,v) & N(u,v) \end{vmatrix} = 0$$

该方程确定了曲面上两族曲线，称之为**曲面的曲率线网**.

曲率线网及其应用



(Ref: Extracting

DeepFake

对于曲面上任意两族不相切的曲线族,都可以通过参数选择,使其成为曲纹坐标网.

证 设两族曲线为$A_i(u,v)\mathrm{d}u + B_i(u,v)\mathrm{d}v = 0 (i = 1,2)$.

则存在积分因子$\lambda_i(u,v)$使得

$$\lambda_i(u,v)A_i(u,v)\mathrm{d}u + \lambda_i(u,v)B_i(u,v)\mathrm{d}v$$

为全微分.

设$\lambda_i(u,v)A_i(u,v)\mathrm{d}u + \lambda_i(u,v)B_i(u,v)\mathrm{d}v = \mathrm{d}\bar{u}_i(u,v)$,

则以$(\bar{u}_1(u,v), \bar{u}_2(u,v))$为新参数即可.

特别地,在不含脐点的曲面上,可以经过参数选择,使曲率线网成为曲纹坐标网.

P65 命题5

曲面上的曲纹坐标网是曲率线网的充要条件是

$F(u,v)\equiv M(u,v)\equiv 0.$

注

曲面上的曲纹坐标网是正交网的充要条件是$F\equiv 0;$

曲面上的曲纹坐标网是共轭网的充要条件是$M\equiv 0.$

曲率线网 $\Leftrightarrow$ 正交网&共轭网

例如 在旋转面$\vec{r}(t,\theta)=(\varphi(t)\cos\theta,\varphi(t)\sin\theta,\ \psi(t))$中，

$F\equiv M\equiv 0,$ 它的曲纹坐标网就是曲率线网.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.17 求曲面 $\vec{r}(u,v)=(\frac{a}{2}(u-v),\frac{b}{2}(u+v),\frac{uv}{2})$上的曲率线的方程(写成关于$u$和$v$的隐函数).

2.18 求曲面$xyz=1$上的脐点.