梁天一的实变复习

2019年6月19日　　16:33

定义举例 定理运用举例
计算
叙述（背概念）

写出理由 比证明差一点
写例子 也要写点理由
对于理由要不要写 举手
符号不清楚 举手

叙述部分

可数集

定义：（老师上课给出的简化概念）可列集或有限集

（书上定义）：|N|=ω 无限可数基数

满足|A|≤ω的集合A是可数集

例子：Q 代数数

证明：

可数集：|A|≤ω，称A为可数集

$f: A \to B$

f为单射，则B可数，A亦可数

f为满射，则A可数，B亦可数

① 可数个可数集之并 及② 有限个可数集之积 仍为可数集

1.3.8 定理　设 $I_n(n=1,2,\cdots)$ 是可数集，

$$A=\{x_{i_1i_2\cdots i_n}: i_k\in I_k, k=1,2,\cdots,n, n=1,2,\cdots\},$$

则 A 是可数集.

证　首先作分解 $A=\bigcup A_n$，其中

$$A_n=\{x_{i_1i_2\cdots i_n}: i_k\in I_k, k=1,2,\cdots,n\}, n=1,2,\cdots.$$

对每个 $n(n=1,2,\cdots)$，因 $I_1\times I_2\times\cdots\times I_n$ 可数(1.3.7)，而

$$f_n: \prod_{k=1}^{n} I_k \to A_n, (i_1,i_2,\cdots,i_n)\to x_{i_1i_2\cdots i_n}$$

为满射，故 A_n 可数(1.3.6)，从而 A 可数(1.3.7). □

⇒ 用于证明一个集合为可数集

sigma代数　可测空间，可测集；测度

σ-代数：

设X是一非空集，$\mathscr{A}\subset 2^X$.若A具有以下性质

$(\mathbf{P}_1)$ $\varnothing\in\mathscr{A}$；

$(\mathbf{P}_2)$ 若 $A_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup A_n\in\mathscr{A}$；

$(\mathbf{P}_3)$ 若 $A\in\mathscr{A}$，则 $A^c\in\mathscr{A}$，

则$\mathscr{A}$是X上的σ-代数。

(X,$\mathscr{A}$)是可测空间

称每个A∈$\mathscr{A}$为$\mathscr{A}$可测集，简称可测集
比如X=R
$\mathscr{A}=\{\Phi,R\}$
则可测集为Φ与R

Lebesgue可测集的几种等价描述

综合2.1.4与2.1.5得出结论：区间的测度就是其长度；开集的测度是其构成区间的长度之和；可测集的测度是包含该集的开集测度之下确界，而每个可测集是一F_σ型集与一零测度集之并，或者是一G_δ型集与一零测度集之差．这些结论表明，具有2.1.1中性质$(P_1)\sim(P_4)$与$(Q_1)\sim(Q_6)$的$\mathscr{L}$与m是唯一确定的．

命题2.1.5 （i）若$A\in\mathscr{L}$，则

$$mA=\inf\{mG: G\text{是开集且}G\supset A\}$$
$$=\sup\{mF: F\text{是闭集且}F\subset A\}$$
$$=\sup\{mC: C\text{是紧集且}C\subset A\}. \quad (1)$$

（ii）$A\in\mathscr{L}\Leftrightarrow$存在$F_\sigma$型集$F\subset A$使$m(A\setminus F)=0\Leftrightarrow$存在$G_\delta$型集$G\supset A$使$m(G\setminus A)=0\Leftrightarrow$存在$F_\sigma$型集$F$与$G_\delta$型集$G$，使$F\subset A\subset G$且$m(G\setminus F)=0$.

其中

任意个开集之并 及有限个开集之交 为开集

G_δ集：可数个开集之交
F_σ集：可数个闭集之并

可测函数的定义； Lebesgue可测函数的定义

(X,A,μ)是给定的完备测度空间

研究函数 f，通常需要按其函数值分解定义域 X 为 $\cup\{y_i < f \leq y_{i+1}\}$ $(i=0,1,\cdots)$，其中 $y_0 < y_1 < y_2 < \cdots$. 自然要求形如 $\{\alpha < f \leq \beta\}$ 的集均可测，而这又归于要求形如 $\{f > \alpha\}$ 的集可测. 于是就有以下定义.

定义 2.3.1 设 f 是 X 上的实函数. 若 $\forall \alpha \in \mathbf{R}$，集 $X(f>\alpha)$ 恒可测，则称 f 为 X 上的可测函数.

注意可测函数的定义完全不涉及测度 μ，仅依赖于 σ-代数 $\mathscr{A}$，在必要注明 $\mathscr{A}$ 时也称为"$\mathscr{A}$-可测". 不过，通常将测度空间 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 当作整体看待，提到 μ 时认定其定义域 $\mathscr{A}$ 已确定. 在这个意义上，也说 f 为 μ-可测. 若 $X \subset \mathbf{R}^n$（未加说明时，在 X 上总使用 n 维 Lebesgue 测度，今后一概如此），则称 X 上的可测函数为 Lebesgue 可测函数，通常就简称为可测函数.

约定以 $M(X)$ 记 X 上的可测函数之全体. 注意与容许 f 取值 $\pm\infty$ …… 不难验证，$f \in M(X) \Leftrightarrow$

(i) 定义设f是X上的实函数.若∀a ∈ R，集X（f>a）恒可测，则称f为X上的可测函数.

(ii) ∀a∈R：集X（f≤a）可测；

(iii) ∀a∈R：集X（f<a）可测；

(iv) ∀a∈R：集X（f≥a）可测；

(v) ∀a,β∈R：集X（a<f<β）与X（f=∞）可测；

(vi) 任给开集G⊂R：集f^{-1}（G）与X（f=∞）可测；

(vii) 任给闭集F⊂R：集f^{-1}（F）与X（f=∞）可测.

积分三大定理：p.87~~ Levi引理（即书上的Levi定理、 Fatou定理、 控制收敛定理

大前提：fn是可测的

3.3.1 Levi 定理 若 $0 \leqslant f_n \uparrow f$，即 $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f_n(x) \to f(x)(x \in X, n \to \infty)$，则式(1)成立.

$$\int_X f = \lim_n \int_X f_n, \tag{1}$$

即

$$\int_X \lim_n f_n = \lim_n \int_X f_n.$$

几种收敛性的定义2.4.1， p/52几乎一致收敛， 依测度收敛

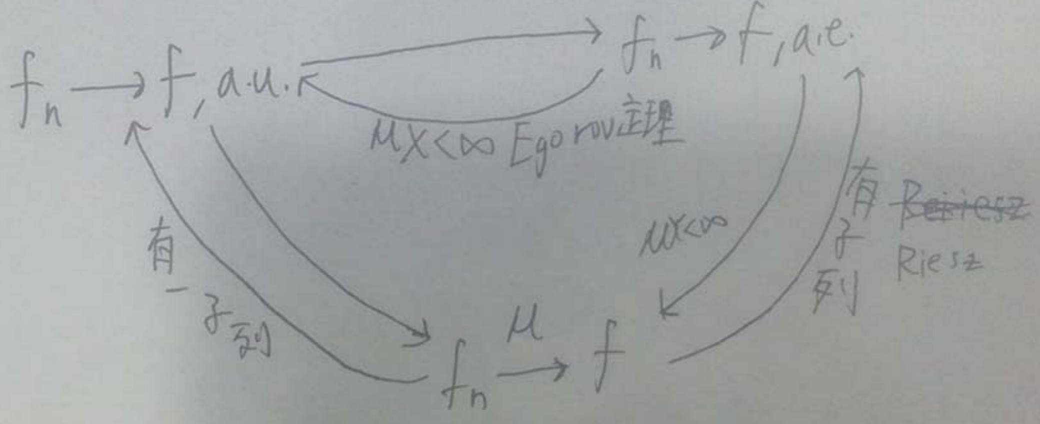
$f_n \rightrightarrows f$　$\forall \varepsilon>0\ \exists N\geq 1$ s.t. $\forall n>N$　$\forall x\in X$, 有 $|f_n-f|<\varepsilon$, 则说$\{f_n\}$在X上一致收敛于f

(ii) 若$\forall\delta>0$ $\exists X_\delta\subset X$ s.t. $\mu X_\delta^c<\delta$ 在X_δ上$f_n\rightrightarrows f$, 则说$\{f_n\}$在X上几乎一致收敛于f 记作 $f_n\to f$ a.u.

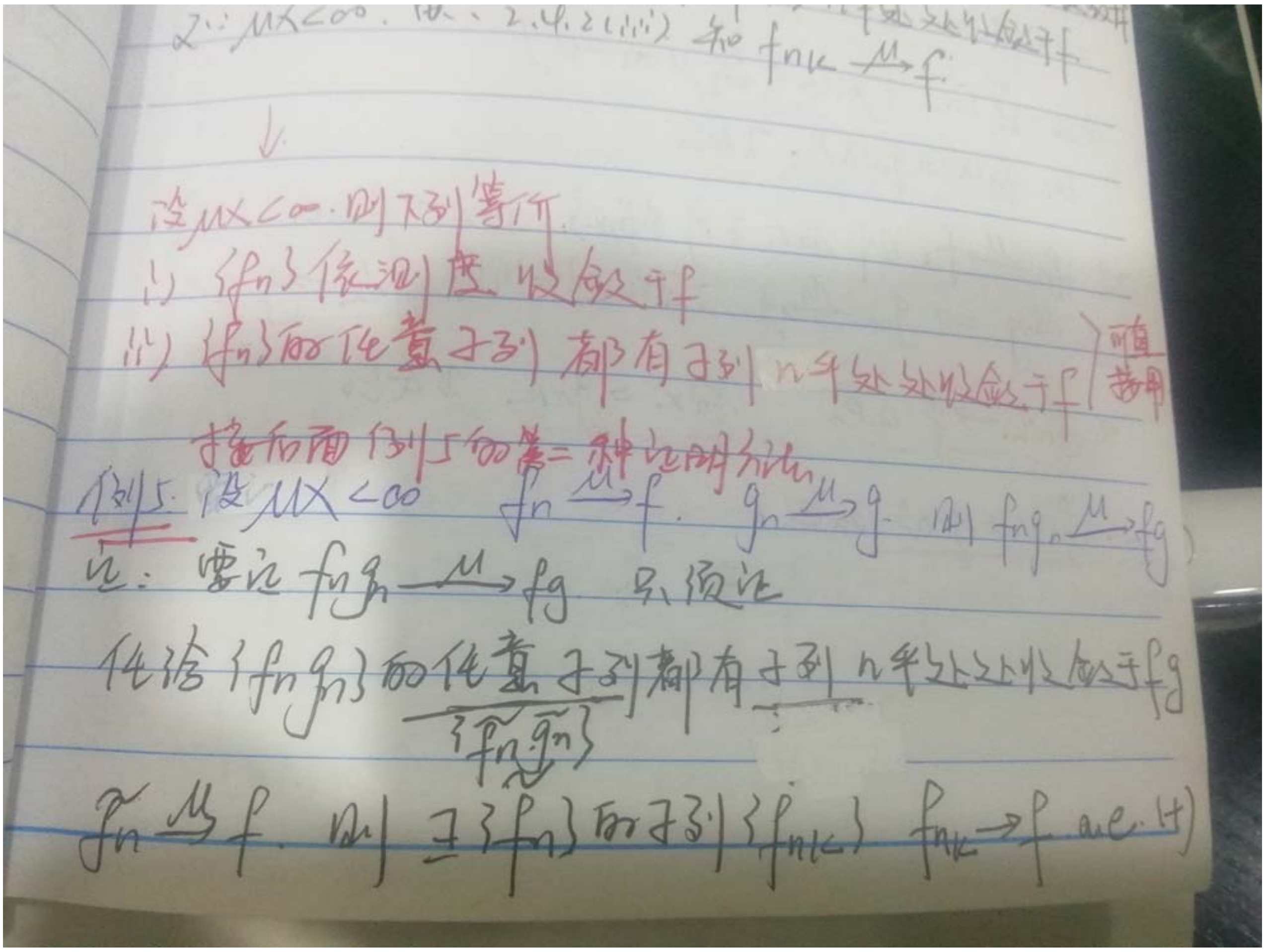
(iii) $\forall\sigma>0$ 有$\mu X(|f_n-f|\geq\sigma)\to 0\ (n\to\infty)$

则 $f_n\to f$ a.u.

~~(i) $f_n\to f$ a.u. 则 $f_n\to f$, a.e.~~



秘籍:



2∵ $\mu X<\infty$. 由 2.4.2(iii) 知 $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$

设 $\mu X<\infty$. 则下列等价

i) $\{f_n\}$ 依测度收敛于f

ii) $\{f_n\}$ 的任意子列都有子列几乎处处收敛于f 可直接用

接后面例5的第二种证明方法

例5. 设 $\mu X<\infty$ $f_n \xrightarrow{\mu} f$. $g_n \xrightarrow{\mu} g$ 则 $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$

证：要证 $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$ 只须证

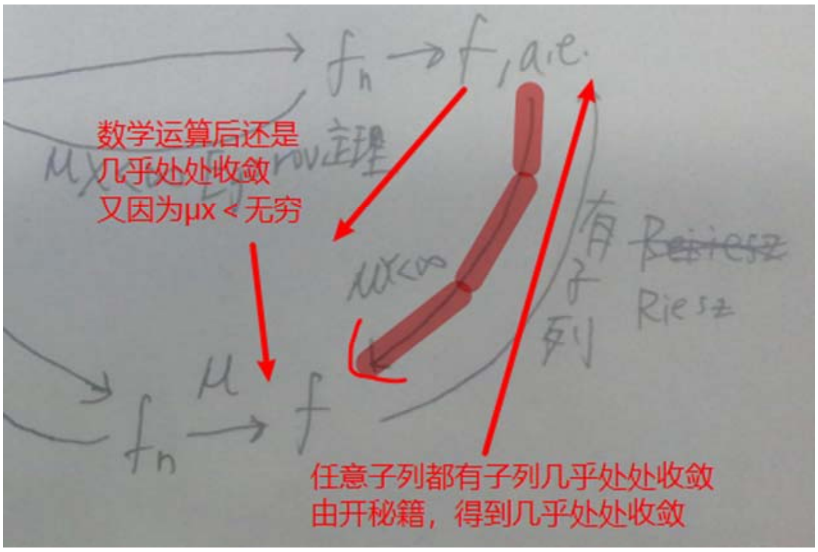
任给 $\{f_n g_n\}$ 的任意子列都有子列几乎处处收敛于fg

$\{f_n g_n\}$

$f_n \xrightarrow{\mu} f$. 则 ∃ $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$ $f_{n_k} \to f$ a.e. (4)

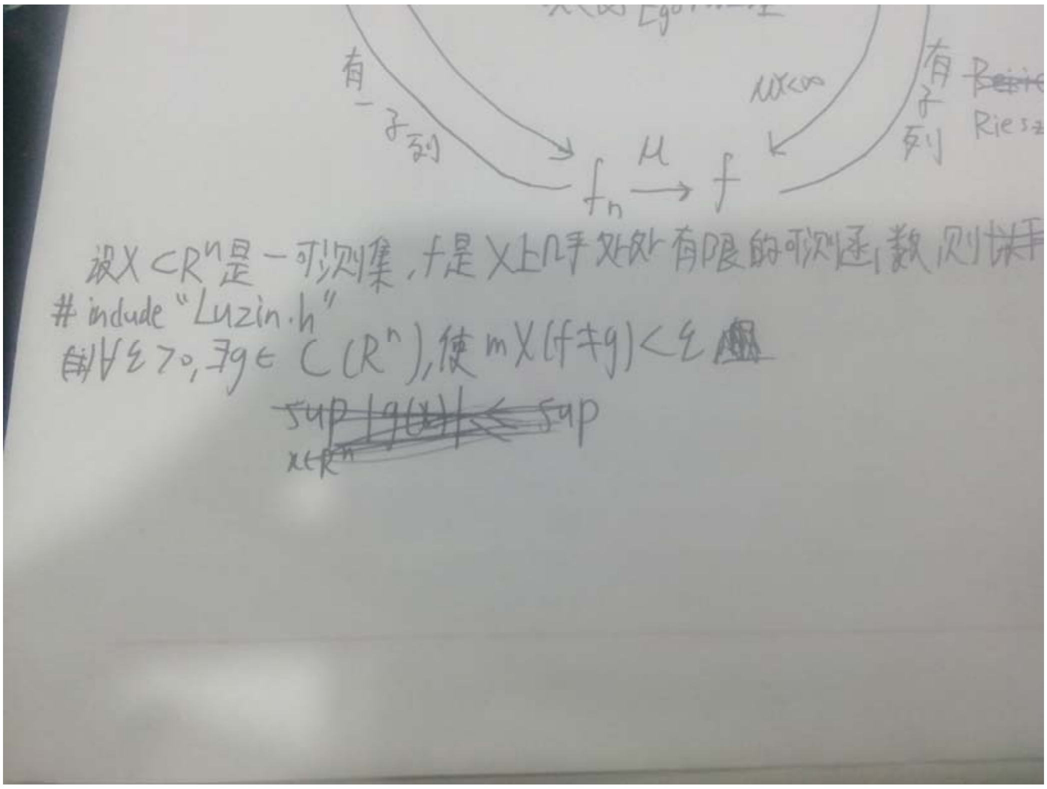
秘籍的运用

由依测度收敛 证明 经过套绝对值等数学运算后 依然依测度收敛



尤其是Egorov定理、 Riesz定理，要有应用

Luzin定理2.4.4的 压缩版本 应用。（i）的一半



应用：

40．设 $X \subset \mathbf{R}^n$ 可测，f 是 X 上几乎处处有限的可测函数，则存在序列 $\{f_k\} \subset C(\mathbf{R}^n)$，使得在 X 上 $f_k \xrightarrow{m} f(k \to \infty)$．

证　由 *Luzin* 定理知：$\forall \frac{1}{k}(k \in N), \exists f_k \in C(\mathbf{R}^n)$ 使 $mX(f_k \neq f) < \frac{1}{k}$，

$\forall \sigma > 0$，有 $X(|f_k - f| \geq \sigma) \subseteq X(f_k \neq f)$

$\therefore mX(|f_k - f| \geq \sigma) \leq mX(f_k \neq f) < \frac{1}{k} \to 0(k \to \infty)$

$\therefore f_k \xrightarrow{m} f$．

3.3.3 Fatou 定理　若 $f_n \in M^+(X)(n=1,2,\cdots)$，则

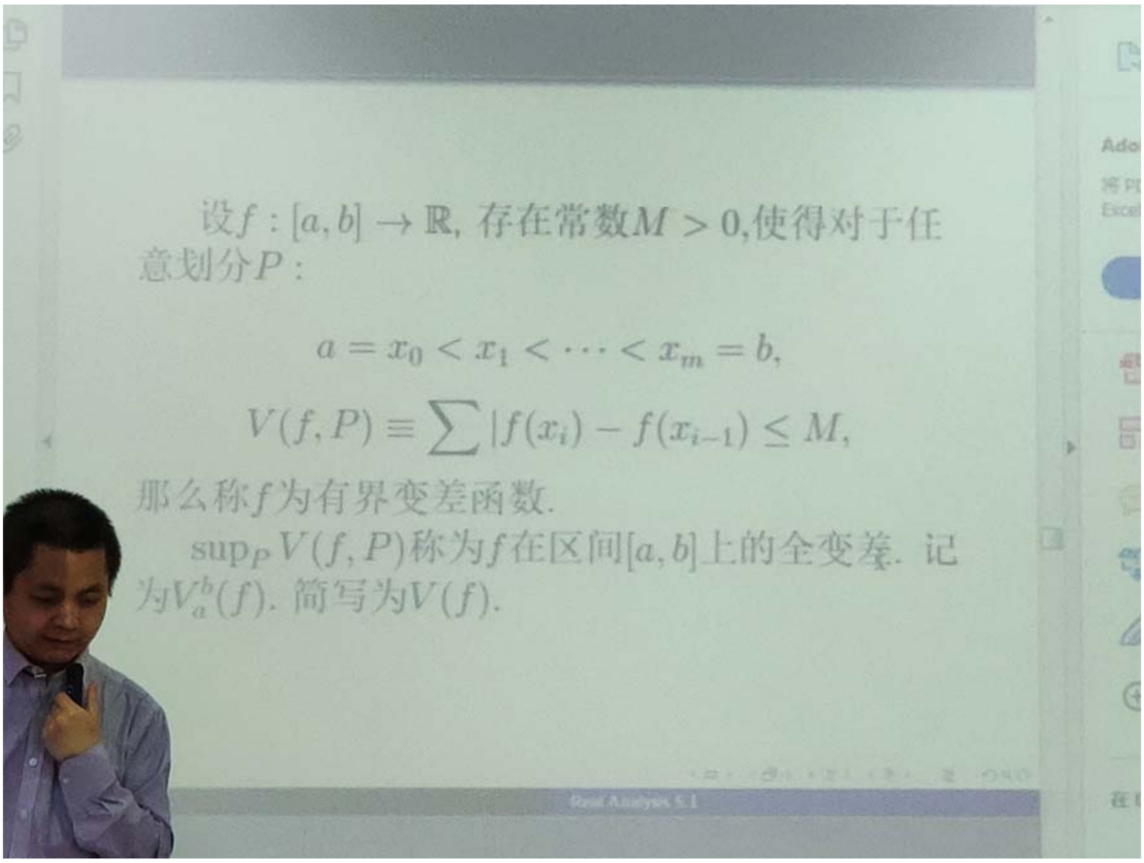
$$\int_X \varliminf_n f_n \leqslant \varliminf_n \int_X f_n. \tag{4}$$

3.3.4 控制收敛定理　设 $f_n \to f$，a.e. 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f(n \to \infty)$．若存在 $g \in L^1$ 使 $|f_n| \leqslant g(n=1,2,\cdots)$，则 $f \in L^1$，

$$\lim_n \int_X |f_n - f| = 0, \tag{5}$$

且式(1)成立．

有界变差函数定义



绝对连续函数定义

AC的定义: (Absolutely continous)

$f:[a,b]\longrightarrow R$, 若$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta$, 当(a_k,b_k)为$[a,b]$中有限个互不相交的区间且$\Sigma(b_k-a_k)<\delta$, 恒有$\sum_k|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$

则f在$[a,b]$上绝对连续

以上都叙述
以下技术操作

证明

会证明一个函数是绝对连续函数。

所有计算的例子见ppt复习Levi引理的应用和Lebesgue控制收敛定理的应用

会证明一个函数不是有界变差函数。

----

2. 看例子-----理解定义，定理，定理条件去掉后的反例（书上例子）

定理条件去掉注意事项：可测的条件去掉不考

书上有levi去掉条件的反例：

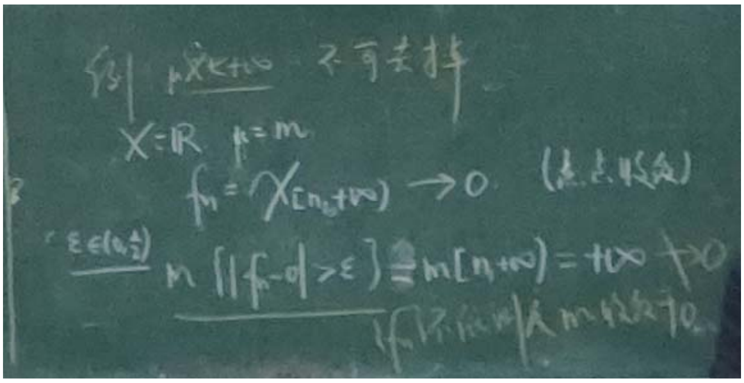
例 1 令 $f_n(x) = -\frac{1}{x}\chi_{[0,1/n]}(x)$，$g_n = \chi_{[n,n+1]}$ $(n=1,2,\cdots)$，则 $f_n \uparrow 0$，$0 \leqslant g_n \to 0 (n \to \infty)$. 但

$$\int_0^1 f_n \mathrm{d}m = -\infty, \quad \int_0^\infty g_n \mathrm{d}m = 1,$$

二者都不能从积分号下取极限得到.

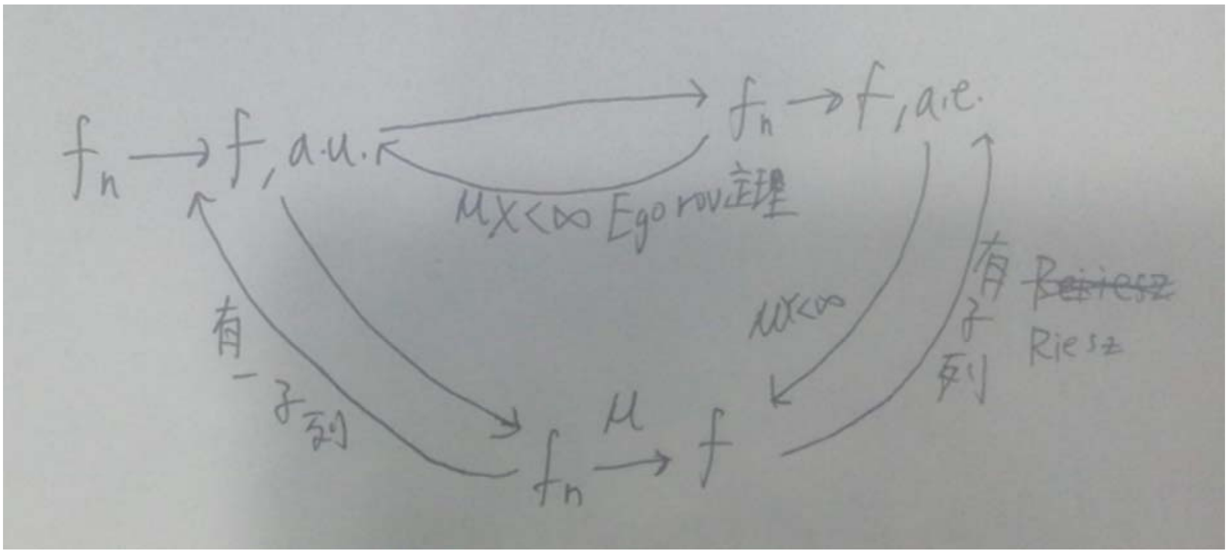
以上例子表明，3.3.1 中的条件"$f_n \geqslant 0$"与"f_n 对 n 单调增加"都是重要的.

2.4.2的几乎处处收敛+μx＜无穷堆到依测度收敛 中μx<+∞，fn(x)->f(x) a.e.不能去之反例



- [ ] 还差几个去掉条件

三种收敛的转化



了解：

几乎处处的定义

积分的上、下极限p97 3.2.7（levi 控制收敛定理可以推一下来加深理解）

3会运用：

Fubini定理 三部曲 画图

所有计算的例子见ppt复习Levi引理的应用和Lebesgue控制收敛定理的应用

计算（Levi引理）

计算（控制收敛定理）

考一个函数的积分（F和G几乎处处相等，那么转化为R积分）

除了有名字的定理之外的重要定理

Page 92 L4;
如果X不可测会怎么样
命题3.2.3 I. ii,
第一条很重要
; 3.2.5 iii; 3.2.4; 2.3.2 ; 2.3.4, 5.1.4;
4. 布置的习题或参考习题
**不要管
*一定要会（开覆盖考试证明题）
没*练练手

page30~~
6， 20， 30,43**， 53， 58,62**,68**，

page82~~ 73， 74，77， 80， 87*， 88，90，102*， 103*，104**， 109， 110，

page126， 141*， 142*， 144， 145*， 148**， 152， 155， 156， 157， 159， 160，
163， 164， 165-169*， 180, 182, 183, 184*, 185*, 204, 208, 207**, 209**, 210**

87*

17. 设 f^2 与集 $X(f>0)$ 可测，则 f 可测.

证 1，当取 $\alpha=0$，则由已知 $X(f>0)$ 是可测集；

2，当取 $\alpha>0$，则 $X(f>\alpha)=X(f>0)\bigcap X(f^2>\alpha^2)$，由已知条件，左侧集合可表为右边两个可测集的交，故可测；

3，当取 $\alpha<0$，则 $X(f>\alpha)=X(f>0)\bigcup X(f^2<\alpha^2)$，由已知条件，左边集表为右边两个可测集之并，故可测；

综上，对 $\forall\alpha\in\mathbf{R}$，$X(f>\alpha)$ 都是可测集，命题成立.

102* 103*

32. 设 $\mu X<\infty, f_n \xrightarrow{\mu} f, p>0$，则 $|f_n|^p \xrightarrow{\mu} |f|^p$.

证 （反证法）若结论不真，则有 $\sigma,\varepsilon>0, n_1<n_2<\cdots$，

使得 $\mu X\left(\left||f_{n_k}|^p-|f|^p\right|\geq\sigma\right)\geq\varepsilon, k=1,2,\cdots$. (1)

由 $f_{n_k}\xrightarrow{\mu} f(k\to\infty)$，有子列 $f_{n_{k_i}}\to f$ a. e. $(i\to\infty)$.

从而 $\left|f_{n_{k_i}}\right|^p\to|f|^p$,a. e.，又 $\mu X<\infty$，由 Th 2. 4. 2(iii)有

$\left|f_{n_{k_i}}\right|^p \xrightarrow{\mu} |f|^p (i\to\infty)$. 这与（1）矛盾，故假设不成立.

33. 设 $\mu X<\infty, f_n \xrightarrow{\mu} f, g\in C(R)$，$|f_n|,|f|<\infty$,则 $g\circ f_n \xrightarrow{\mu} g\circ f$.

证 （反证法）若结论不真，则有 $\sigma,\varepsilon>0, n_1<n_2<\cdots$，

使得 $\mu X\left(\left|g\circ f_{n_k}-g\circ f\right|\geq\sigma\right)\geq\varepsilon$， $k=1,2,\cdots$. (1)

由 $f_{n_k}\xrightarrow{\mu} f(k\to\infty)$，则有子列 $f_{n_{k_i}}\to f$，a. e..

$\because g\in C(R)$ $\therefore g\circ f_{n_{k_i}}\to g\circ f$，a. e. $(i\to\infty)$

由 Th 2. 4. 2(iii)，因为 $\mu X<\infty$，则可推出 $g\circ f_{n_{k_i}} \xrightarrow{\mu} g\circ f,(i\to\infty)$，

这与(1)矛盾，假设不成立.

141*

141. 设 $f, g\in L^1$，则 $\sqrt{f^2+g^2}\in L^1$

解：$\because f^2+g^2\leq(|f|+|g|)^2$

$\therefore \sqrt{f^2+g^2}\leq|f|+|g|$

又 $\because f,g\in L^1$ $\therefore |f|,|g|\in L^1$， $|f|+|g|\in L^1$

$\therefore \sqrt{f^2+g^2}\in L^1$

142*355

142. 设 $\mu X<\infty$, $f\in M^+(X)$, $f\ln(1+f)\in L^1$, 则 $f\in L^1$

解: $\mu X<+\infty$, $f\ln(1+f)\in L^1$,

∵ $f\in M^+(X)$ 且 $f\ln(1+f)\in L^1$

可以验证 $0\le f\le f\ln(1+f)+e$

∵ $\mu X<\infty$, $\int_X e\,d\mu=e\mu X<+\infty$

$e\in L^1$ ∴ $f\ln(1+f)+e\in L^1$

∴ $f\in L^1$

145*

145. 设 $f,g\in L^1(X)$, 则 $f=g$, a.e ⇔ 对每个可测集 $A\subset X$ 有 $\int_A f\,d\mu=\int_A g\,d\mu$

证 ⇒ 在X上, $f=g$. a.e.

对可测集A, 在A上, $f=g$. a.e

即 $\int_A f\,d\mu=\int_A g\,d\mu$.

⇐, 作 $h=g-f$, 取 $A_1=\{h>0\}$

$\int_{A_1}|h|=\int_{A_1}(g-f)=\int_{A_1}g-\int_{A_1}f=0$ $\int_A$

$\int_{A_1^c}|h|=\int_{A_1^c}(f-g)=\int_{A_1^c}f-\int_{A_1^c}g=0$

~~∴ $\int_{A_1^c}|h|=0$~~

$\int_X|h|=\int_{A_1}|h|+\int_{A_1^c}|h|=0$ ∴ $|h|=0$. a.e

即 $|g-f|=0$. a.e ⇒ $g=f$ a.e

145. 设 $f,g\in L^1(X)$, 则 $f=g$, a.e ⇔ 对每个可测集 $A\subset X$ 有 $\int_A f\,d\mu=\int_A g\,d\mu$

证: ⇒: 在X上, $f=g$. a.e

对可测集A, 在A上, $f=g$. a.e 由书上命题得 $\int_A f=\int_A g$

⇐: 作 $h=g-f$, 取 $A_1=\{h>0\}$ $\int_{A_1}(g-f)=\int_{A_1}g-\int_{A_1}f=0$

$\int_{A_1^c}|h|=\int_{A_1^c}(g-f)=\int_{A_1^c}g-\int_{A_1^c}f=0$

∴ $\int_{A_1^c}|h|=0$

$\int_X|h|=\int_{A_1}|h|+\int_{A_1^c}|h|=0+0=0$

∴ $|h|=0$, a.e. 即 $|g-f|=0$. a.e 即 $g=f$ a.e

165-169*

*用控制收敛定理计算积分（例）

周

25. 求 $\lim\limits_n \int_0^\infty \dfrac{\sin(\frac{x}{n})}{\left[1+(\frac{x}{n})\right]^n}dx$.

解 令 $f_n(x)=\dfrac{\sin(\frac{x}{n})}{\left[1+(\frac{x}{n})\right]^n}$，在 $(0,1)$ 上，$|f_n(x)|\le \dfrac{1}{\left[1+(\frac{x}{n})\right]^n}\le 1$，

(0,1) 上找一 constant

在 $(1,+\infty)$ 上 $|f_n(x)|\le \dfrac{1}{C_n^2\cdot(\frac{x}{n})^2}=\dfrac{1}{\frac{n(n-1)}{2}\cdot(\frac{x}{n})^2}=\dfrac{1}{\frac{(n-1)x^2}{2n}}$

$(1,+\infty)$ 上找一 $\frac{n}{x^\alpha}$, $\alpha \geq 2$

使用前几项的二项展开来估计

$\le \dfrac{1}{\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2n}}\le \dfrac{1}{\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{4}}=\dfrac{4}{x^2}\ (n\ge 2)$

取 $g(x)=\begin{cases}1, x\in(0,1)\\ \dfrac{4}{x^2}, x\in(1,+\infty)\end{cases}$，则 $g(x)\in L^1(0,+\infty)$.

又 $f_n(x)\to 0, a.e(n\to\infty)$，由控制收敛定理 $\lim\limits_n \int_0^\infty f_n(x)=\int_0^\infty 0=0$.

166. $\lim\limits_n \int \dfrac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}dx$

$f_n(x)=\dfrac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}$

$|f_n(x)|\le \dfrac{1+nx^2}{1+C_n^1(x^2)^1+C_n^2\cdot(x^2)^2}$

$0\le x\le 1$ 时，$|f_n(x)|\le 1$

$1<x<+\infty$ 时，$|f_n(x)|\le \dfrac{1+nx^2}{1+\frac{n(n-1)}{2}x^4}\le \dfrac{1}{1+\frac{n(n-1)}{2}x^4}+\dfrac{nx^2}{1+\frac{n(n-1)}{2}x^4}$

16/. 求 $\lim\limits_{n}\int_0^{+\infty}\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\,dx$

设 $f_n(x)=\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}$　$f_n(x)\to 0$

$x\in(0,1]$ 时，

$$|f_n(x)|=\left|\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\right|\le\left|\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\right|\le\left|\frac{n\sqrt{x}}{2nx}\right|\le\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int_0^1\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}dx<+\infty$$

$x\in(1,+\infty)$ 时，

$$|f_n(x)|\le\frac{n\sqrt{x}}{n^2x^2}=\frac{\sqrt{x}}{nx^2}\le\frac{\sqrt{x}}{x^2}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx<+\infty$$

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}, & x\in(0,1]\\ \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} & x\in(1,+\infty)\end{cases}$$　由控制收敛定理，

$$\lim_n\int_0^{+\infty}\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\,dx=\int_0^{+\infty}\lim_n\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\,dx=\int_0^{+\infty}0\,dx=0$$

28. 求 $\lim\limits_{n}\int_0^{\infty}(1+\frac{x^2}{n})^{-n}dx$.

解　令 $f_n(x)=(1+\frac{x^2}{n})^{-n}$，在 $(0,1)$ 上，$|f_n(x)|\le 1$，

在 $(1,+\infty)$ 上，$|f_n(x)|=\frac{1}{(1+\frac{x^2}{n})^n}\le\frac{1}{1+n\cdot\frac{x^2}{n}}\le\frac{1}{x^2}$，

取 $g(x)=\begin{cases}1, x\in(0,1)\\ \frac{1}{x^2}, x\in(1,+\infty)\end{cases}$，则 $g(x)\in L^1(0,+\infty)$.

又∵ $\lim\limits_{n}f_n(x)=\lim\limits_{n}\frac{1}{\left[(1+\frac{x^2}{n})^{\frac{n}{x^2}}\right]^{x^2}}=e^{-x^2}$

169. 求 $\lim_n \int_0^{\infty} \frac{1}{(nx+\frac{1}{x})^n} dx$

记 $f_n(x) = \frac{1}{(nx+\frac{1}{x})^n}$ 一定要写 $f_n(x) \to 0$

$0 \le x \le 1$ 时，

$(nx+\frac{1}{x})^n \ge (x+\frac{1}{x})^n \ge 2$

$\therefore 0 \le f_n(x) \le \frac{1}{(x+\frac{1}{x})^n} \le \frac{1}{x+\frac{1}{x}} \le \frac{1}{2}$

取 $g(x) = \frac{1}{2} \in L^1$

$x > 1$ 时， $(nx+\frac{1}{x})^n \ge (nx)^n \ge x^n \ge x^2$

$0 \le f_n(x) \le \frac{1}{(nx+\frac{1}{x})^n} \le \frac{1}{x^n} \le \frac{1}{x^2}$ $(n \ge 2)$

取 $g(x) = \frac{1}{x^2} \in L^1$ 由控制收敛定理

$\therefore \lim_n \int_0^{\infty} \frac{1}{(nx+\frac{1}{x})^n} dx = 0$

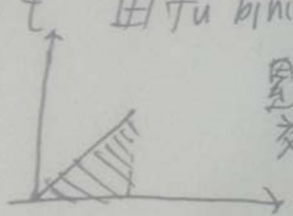
184*

$\therefore \varphi_n$ 为 有限函数

$\therefore f$ 可积

$\because f \in L^1[0,a]$ $\therefore \int_0^a dt \int_0^t \frac{f(t)}{t} dx = \int_0^a |f| dt < +\infty$

由 fubini 定理 $\int_0^a g\,dm = \int_0^a dx \int_x^a \frac{f(t)}{t} dt$



累次积分交换顺序 $= \int_0^a dt \int_0^t \frac{f(t)}{t} dx$

$= \int_0^a t \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^a f(t) dt$

185*

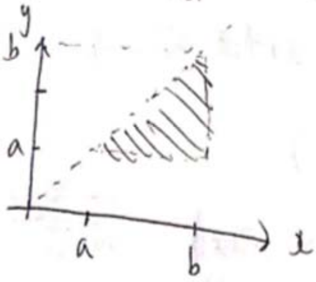
18. 设 $f\in L^1[a,b]$，~~则 $\int_a^b \frac{f(t)}{t}$~~

则 $\int_a^b f(x)\,dx\int_a^x f(y)\,dy=\frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2$

空三行 ∵ $f\in L^1[a,b]$，则 $\int_a^b dx\int_a^x f(y)f(x)\,dy<+\infty$

由fubini定理 #include <Fubini> #include "Fubini.h"

$$I=\int_a^b f(x)\,dx\int_a^x f(y)\,dy=\int_a^b dx\int_a^x f(y)f(x)\,dy$$



$$=\int_a^b dy\int_y^b f(y)f(x)\,dx$$

现指鹿为马 令 $x'=y$，$y'=x$

则原式 $=\int_a^b dx\int_x^b f(x)f(y)\,dy$

$$\therefore I+I=\int_a^b dx\int_a^b f(x)f(y)\,dy$$

$$=\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b f(y)\,dy=\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2$$

$$\therefore I=\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b f(y)\,dy=\frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2$$

期中考试题目

$$= -\frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{z-i}{2i}\right)^{n-3}.$$

一、（15分）(1) 整数集Z的所有有限子集全体$\mathcal{A}$是否可数？证明你的结论.

(3) 整数集Z的所有子集全体$\mathcal{A}$是否可数？

(1) 可数. 记 $X_n = \{ j \in \mathbb{Z} : |j| \le n \}$.

$P_n = \{A : A \subseteq X_n\}$ 显然.

$\forall$ $\mathbb{Z}$ 的任一有限子集E, $\exists n$. 使 $E \in P_n$.

$\therefore \mathcal{A} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$

但注意到 P_n 为有限集. $(\forall n)$

$\therefore \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ 可数

$\therefore \mathcal{A}$ 可数.

(2) 不可数.

五、（10分）

四、（25分）(1) 可列集是否是Lebesgue可测集？如果是，计算其Lebesgue测度m.
(2) 叙述零测集的定义（可以是等价定义）. Cantor集是否是可数集？(3)构造[0,1]上的类Cantor集，使得其测度等于1/3.

(1) 是. 对于单点集 $\{p\}$. $m(\{p\})=0$.

对一般可列集. $E = \{x_i : i\in\mathbb{N}\} = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{x_i\}$

$$mE = \sum_i m(\{x_i\}) = \sum_i 0 = 0.$$

(2) 一般测度 μ 对应的零测集：

如果 H 可测且 $\mu H = 0$ 则

H 称为 μ-零集.

特别，若 H 是 Lebesgue 可测的，且 $mH=0$，则

H 为 Lebesgue 零测集.

（其等价定义为 $\forall \varepsilon>0$. $\exists$ 开集 $U \supseteq H$. 使 U 的长度 $mU < \varepsilon$. 则 H 称为 Lebesgue 零测集）

六、（10分）
详细理由.

解：

1°

(3) 取 $p \in (0, \frac{1}{3})$ 待定.

在 $[0,1]$ 区间上取中心位置. 挖去长为 p 的一开区间.

在剩下的两个闭区间中. 在中心位置分别挖去长为 p^2 的两开区间. 由此剩下四个闭区间.

在每个闭区间的中心处挖去长为 p^3 的一个开区间.

最后. 所有这些挖去开区间记为 $\{\Delta_n\}$

记 $K_p = [0,1] \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right)$ 则

七、（10分）

$mK_p = 1 - m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_n\right) =$

$1 - p - 2p^2 - 2^2p^3 - \cdots = 1 - \frac{p}{1-2p}$ 令 $mK_p = \frac{1}{3}$.

二、（15分）(1) 写出$f: X \to \mathbb{R}$可测的定义.

(2) 对于可测函数f,给定$\mathbb{R}$中任意开集U, $f^{-1}(U)$是否可测？证明你的结论.

(1) ~~$\forall a$~~ $\forall a \in \mathbb{R}$. $\{f>a\}$ 可测

(2). 是.

i) 对开区间 (a,b). $f^{-1}(a,b) = \{a<f<b\} = \{f>a\} \cap \{f<b\}$

由可测函数性质. $\{f<b\}$ 可测 $\therefore f^{-1}(a,b)$ 可测

ii) 对非空开集U, $\exists$ 可数开区间. Δ_i 使

$$U = \bigcup_{i \geq 1} \Delta_i$$

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(\bigcup_{i \geq 1} \Delta_i) = \bigcup_{i \geq 1} f^{-1}(\Delta_i)$$

$f^{-1}(U)$为可数个可测集之并 $\therefore f^{-1}(U)$ 可测

对 $U = \phi$. $f^{-1}(\phi) = \phi$ 可测

三、（15分）(1)写出σ-代数的定义.

(2) 给定$\mathbb{R}$上的σ-代数$\mathcal{A}$, $f(x) = \sin x$是否$\mathcal{A}$可测？举例说明.

(1) X为全集. $2^X = \{A: A \subseteq X\}$.

设 $\mathcal{A} \subseteq 2^X$. 满足:

a). $\phi \in \mathcal{A}$.

b) $\forall A \in \mathcal{A}$. $A^c \in \mathcal{A}$.

c). 若 $A_n \in \mathcal{A}$. $n \geq 1$. 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

则 $\mathcal{A}$ 称为 σ-代数.

(2) 未必. (写"否"是不对的)

① 如取 $\mathcal{A}_1 = 2^{\mathbb{R}}$. 则 f ~~可测~~ 是 $\mathcal{A}_1$-可测函数

② 若取 $\mathcal{A}_2 = \{\phi, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$. 可证 $\mathcal{A}_2$ 为 σ-代数.

$\{f > \frac{1}{2}\} \notin \mathcal{A}_2$ $\therefore f$ 不是 $\mathcal{A}_2$-可测函数

五、（10分）证明$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

略.

六、（10分）设f_n, f是$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$的函数. $f_n\to f$. 用形如$(f_n<b)$的集合表示$\{f\le\beta\}$. 写出详细理由.

解：~~f~~ 断言：

$$\{f\le\beta\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n\ge m}\{f_n<\beta+\tfrac{1}{k}\} \quad (\circledast)$$

1° 为此，先证：

$$\{f\le\beta\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\{x:\exists m\in\mathbb{N}, m\ge1, 使 f_n(x)<\beta+\tfrac{1}{k}\ \forall n\ge m\} \quad (*)$$

若 $x\in$ 右边，则 $\exists m\ge1$，使

$f_n(x)<\beta+\frac{1}{k}$，$n\ge m$

$f_n(x)\le\beta+\frac{1}{k}$，令 $n\to\infty$

$f(x)\le\beta+\frac{1}{k}$.

再令 $k\to\infty$ 得 $f(x)\le\beta$.

$\therefore x\in$ 左边.

反之，$x\in$ 左边

$f(x)=\lim\limits_n f_n(x)\le\beta$. 固定 $\forall k\ge1$，$\exists m\ge1$，使

$\forall n\ge m$，$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{k}\Rightarrow f_n(x)<f(x)+\frac{1}{k}$

$\therefore f_n(x)<\beta+\frac{1}{k}$，$n\ge m$.

$\therefore x\in$ 右边.

$(*)$ 得证.

2° 由 $(*)$ 不难得知 $\circledast$ 成立

七、（10分）写出绝对连续函数的定义并给出例子.

略.

去年卷子

一.(10+10+5=25分)

(1)给出函数 $f: X\to R$ 可测的3种等价定义

(2)设 f 是有限L-可测函数, $g: R\to R$ 单调. 证明: $g\circ f$ 是L-可测的

(3)在上述(2)的条件下, $f\circ g$ 是否可测? 说明理由. (L-可测即Lebesgue可测)

二.(12分)

$f_n, f: [0,1]\to R$. $\{f_n\}$ 依Lebesgue测度 m 收敛于 f. 且 g 是 R 上的实值连续函数

证明: $\{g\circ f_n\}$ 依Lebesgue测度 m 收敛于 $g\circ f$

三.(15分)

叙述几乎一致收敛的定义.

叙述Lusin定理并给出一个应用

四.(12分)

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{(1+\frac{x}{n})^n}dx$. 写出过程.

五.(10分)

设 f 为 X 上的可测函数. 且 $\int_X f d\mu$ 存在. 对任意可测集 A. 成立 $\int_A f d\mu=0$.

证明: $f=0$, a.e.

六.(12分)

叙述Riesz定理和Egorov定理

七.(14分)

(1)叙述绝对连续函数的定义

(2)定义 $f(x)=x^2\exp(\sin\frac{1}{x})$, $0\le x\le 1$. f 是否属于 $AC[0,1]$? 证明你的结论.

解析:

(1)