第十六章 狭义相对论基础

§16.1 狭义相对论的基本假设

（爱因斯坦相对性原理和光速不变原理）

一、伽利略变换和经典力学的相对性原理

二、伽利略变换的失效　光速不变的结论

三、爱因斯坦的基本假设

假设1：物理定律在一切惯性系中都具有相同的数学形式，
或所有惯性系都是等价的——狭义相对性原理

假设2：任何惯性系中，光的真空速率都相等。
——光速不变原理

§16.2 洛仑兹变换 (*Lorentz transformation*)（288-295）

一、洛仑兹坐标变换（P288~293）

惯性系K, K'：三个坐标轴平行，沿x方向有匀速相对运动

K'相对K：v

某一时刻，P点发生一事件，其时空位置：K系：（x, y, z, t）

K'系：（x', y', z', t'）

$y = y'$，$z = z'$

需确定x, t与x', t'之间的变换关系:

*这一变换关系必须满足

- 相对性原理——变换是线性的
- 光速不变原理
- 当v<<c 时，退化为伽利略变换 ↓ 对应原理

*推测变换关系

*取特殊事件确定系数

同一事件时空坐标变换：

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y=y'$$

$$z=z'$$

$$t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y'=y$$

$$z'=z$$

$$t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

不同事件发生的时间间隔、空间间隔坐标变换：

$$\Delta x=\frac{\Delta x'+v\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta y=\Delta y'$$

$$\Delta z=\Delta z'$$

$$\Delta t=\frac{\Delta t'+\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta x'=\frac{\Delta x-v\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta y'=\Delta y$$

$$\Delta z'=\Delta z$$

$$\Delta t'=\frac{\Delta t-\frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

时间与空间均是v的函数，不再相互独立。

$v<<c$： 则$\frac{v^2}{c^2}\to 0$ 洛变换退化为伽变换

$v>c$： 洛仑兹变换无意义

例1：在K系中观察两事件相距9×10^8m，发生的时间间隔$5s$，K'相对K沿x匀速直线运动，在K'系看两事件同地发生，则K'系看时间间隔是多少

解：$\Delta x = 9\times10^8 m$

$\Delta t = 5s$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0 \quad \rightarrow v = 0.6c$$

$$\therefore \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 4s$$

例2：K系中测得两事件相距600km，同时发生。在相对K运动的 K'系中测得两事件相距1200km。

问：K' 系中看，两事件是否同时发生？间隔多少？

解：K系：$\Delta x = 600km, \Delta t = 0$

K'系：$\Delta x' = 1200km, \Delta t' = ?$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \rightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{600\sqrt{3}}{c}$$

*时间间隔、空间间隔都是相对的。

在一个参照系看同地发生的事，在另一参照系看不一定同地发生。

在一个参照系看同时发生的事，在另一参照系看不一定同时发生。

*在一个参照系中同时同地发生的事件，在另一参照系中一定也是同时、同地。

二、洛仑兹速度变换（P293~295)

$$S: u_x = \frac{dx}{dt}, u_y = \frac{dy}{dt}, u_z = \frac{dz}{dt}$$

$$S': u'_x = \frac{dx'}{dt}, u'_y = \frac{dy'}{dt}, u'_z = \frac{dz'}{dt}$$

S'相对S沿x方向：v

对洛仑兹变换取微分，得

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \qquad u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \qquad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}$$

$$u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \qquad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}$$

当$v, u << c$：$\begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases}$

惯性系相对运动的方向上，
速度分量改变

垂直于相对运动的方向上，
速度分量也改变

当 $u'_x = c \rightarrow u_x = c$

$u_x = c \rightarrow u'_x = c$

光速不变原理

例3：实验室测出，电子A: $u_{Ax}=2.9\times10^{8}m/s$, 向右运动；电子$B$: $u_{Ax}=2.7\times10^{8}m/s$, 向左运动。求: A相对B的速度。

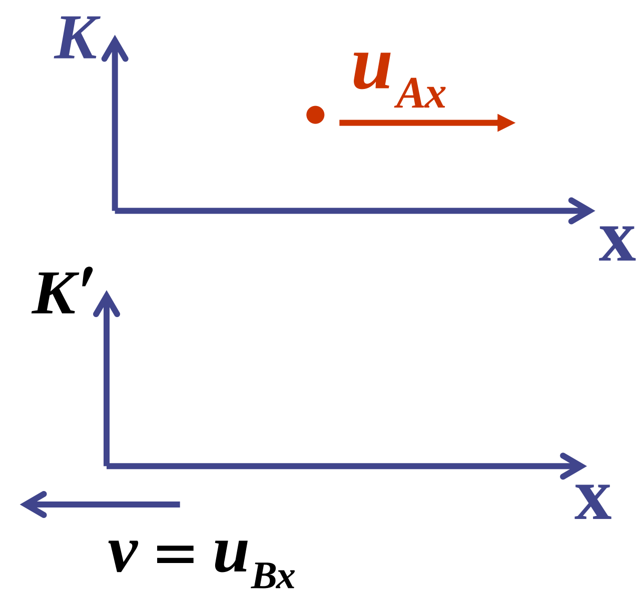
解：以实验室为K系，电子B为 K'系

~考察电子A的速度

K系：$u_{Ax}=2.9\times10^{8}m/s$沿$x$正向

K'系相对K：$\text{v}=-2.7\times10^{8}m/s$

$$\therefore K'系：u'_{Ax}=\frac{u_{Ax}-v}{1-\dfrac{u_{Ax}v}{c^{2}}}=2.99\times10^{8}m/s$$



§16.3 狭义相对论的时空观（282~288）

一、高速运动物体的测量

观察者与物体相对静止时所在的参照系——本征参照系

测得物理量——本征物理量

与物体有相对速度的参照系——运动参照系

测得物理量——运动测量量

↓

相对速度u的函数

二、运动物体的长度缩短(P284-286)

一把尺相对地面以 v 作高速运动，在尺上建立 S'系，

测得尺长：$\Delta x' = L_0$ ——固有长度（原长）(*proper length*)

$\Delta t' \neq 0$

地面参照系 S 中，测得尺长：$\Delta x = L$

前提：S系中同时测量尺的两端读数 $\rightarrow \Delta t = 0$

$$\Delta x' = L_0 = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{L}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\therefore L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < L_0$$ —— 运动物体的长度缩短

小结 1）原长一定是物体相对某参照系静止时两端的空间间隔——原长最长

2）与物体有相对运动的观察者测出的长度总是比相对物体静止的观察者测出的长度要短

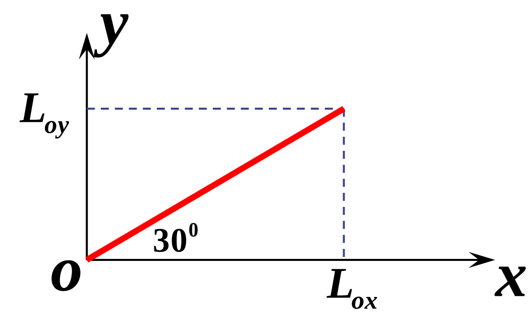
3）当 $v << c \rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1 \rightarrow L \approx L_0$

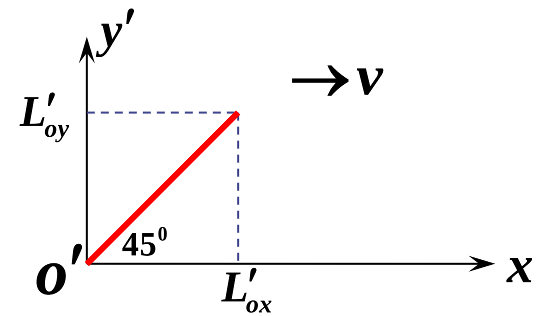
4）长度缩短只在运动方向上

例1：一米尺静止在K参照系中，与ox轴成30^0角。在另一个与K在x方向上有相对运动的K'系看，尺与$o'x'$轴成45^0角。

求：1）K相对K'的速度；

2）在K'中测得尺长是多少？





解：1）K系中：$L_o = 1m$，$\theta = 30^0$

$$\therefore L_{ox} = L_o \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2} L_o$$

$$L_{oy} = L_o \sin 30^o = \frac{1}{2} L_o$$

K'系中，x方向长度缩短，y方向不变

$$\therefore L'_x = L_{ox}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} L_o \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$L'_y = L_{0y} = \frac{1}{2} L_o$$

由题意：$L'_x = L'_y \to v = \sqrt{\frac{2}{3}}c$ $\quad L' = \sqrt{L'^2_x + L'^2_y} = \frac{\sqrt{2}}{2} L_o$

例2：一宇宙飞船的固有长度为 $L_0 = 60m$ ，相对地面以 u=0.99c 的速度在一观察站的上空飞过，求：

（1）观察站测得飞船船身通过观察站的时间间隔；

（2）宇航员测得船身通过观察站的时间间隔。

解：（1）观察站测得飞船船身的长度为

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = 60\times\sqrt{1-\frac{(0.99c)^2}{c^2}} = 8.46m$$

船身通过观察站的时间间隔为

$$\Delta t_1 = \frac{L}{u} = \frac{8.46}{0.99\times 3\times 10^8} = 2.85\times 10^{-8}s$$

（2）宇航员测得飞船船身的长度 $L_0 = 60m$

船身通过观察站的时间间隔为 $\Delta t_2 = \dfrac{L_0}{u} = 2.02\times 10^{-7}s$

三、“同时”的相对性（ P282、290）

同时的相对性： $\Delta t = 0 \rightarrow \Delta t' \neq 0 \sim \Delta t, \Delta x$

*在一个参照系看不同地点同时发生的两事件，在另一参照系看不同时发生。

*在S'系观察到不同时发生的两事件，在S系观察到同时发生，则S'相对S的速率为

$$u = \left| \frac{c^2 (t_2' - t_1')}{-(x_2' - x_1')} \right|$$ ——同时性条件

同地的相对性： $\Delta x = 0 \rightarrow \Delta x' \neq 0 \sim \Delta x, \Delta t$

在一个参照系看同时同地发生的两事件，在另一参照系看一定也是同时、同地发生。

四、运动的钟“变慢”——时间延长（P283-284）

S系中：某一点前后发生两事件，时间间隔 Δt

前提：S 系中的同一点 $\rightarrow \Delta x = 0$

(*proper time*)

事件相对 S 静止，Δt ——固有时间（原时）

本征时间

S'系中：$\Delta x' \neq 0$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} > \Delta t$$ ——时间延长（膨胀）

例3（习题5）：静止的μ子，平均寿命为 $2.2\times10^{-6}s$。今在 $8km$ 高空的宇宙射线中产生了一个速度为 $0.9c$ 的μ子。问：此μ子能否到达地面？经过的平均距离？

解：平均寿命——静止寿命：

在μ子上建立参照系，测得的固有时间 Δt

μ子相对地面高速运动，

地面观察：$\Delta t'=\dfrac{\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=5.0\times10^{-6}s$

寿命延长

$$\overline{S}=v\Delta t'=0.9c\times\Delta t=1.35km<8km$$

小结

1）原时一定是在某参照系中同一地点发生的两个事件之间的时间间隔——原时最短

2）与发生事件有相对运动的观察者测出的时间总是比相对事件静止的观察者测出的时间要长

五、因果关系的绝对性

若两事件不相关，则在不同参照惯性系观察，时序有可能颠倒。

若两事件互为因果关系，则在任何惯性系观察，时序都不可能发生颠倒（P291讨论）。

六、相对论的时空观

（1）时间、空间是相互联系、无法分割的时空整体。

（2）时间、空间的测量值都是“相对的”，与物体的相对运动密切相关

例4：一宇宙飞船相对地球以0.8c的速度飞行。一光脉冲从船尾传到船头，飞船上的观察者测得飞船长为90m，地球上测得光脉冲从船尾发出和到达船头两事件的空间间隔为多少？

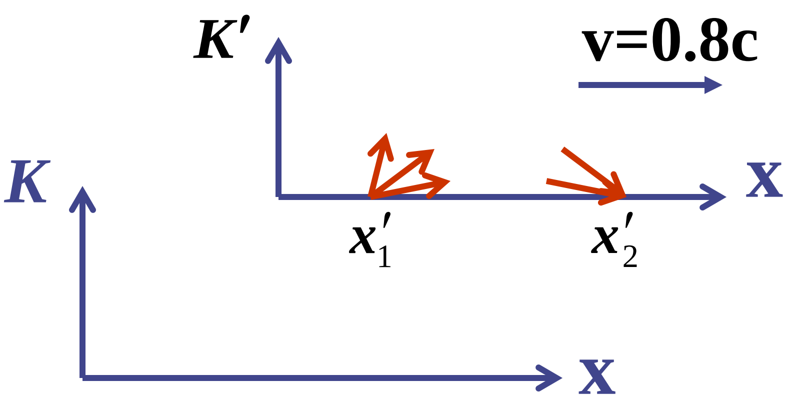
解：

两事件	船尾发光	船头接收光
飞船 K'	t'_1	t'_2
	x'_1	x'_2
地面 K	t_1	t_2
	x_1	x_2

$$\Delta x' = 90m, \Delta t' = \frac{90}{c}$$

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 270m$$

$$\Delta t = ?$$



§16-4 相对论动力学

一、相对论与动力学

经典力学： m=恒量 $P = mv \propto v$

$$F = \frac{dP}{dt} = m\frac{dv}{dt} = ma: \quad F \neq 0 \to a \neq 0 \to v\uparrow \to \infty$$

相对论动力学：$v \sim c \to m \neq$ 常数 $P = mv \not\propto v$

二、相对论中的质量、动量和动力学基本方程

1. 质速关系（P296）

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

m_0: 静止质量 (*rest mass*)

m: 相对论质量 (*relativistic mass*)

m是v的函数：$v\uparrow m\uparrow$

$v << c: m = m_0$

$v = c \to m_0 = 0$: 光子、中微子等

2. 相对论动量 $\vec{P} = m\vec{v} = \dfrac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ 满足动量守恒

3. 相对论动力学基本方程

(牛顿力学是相对论力学在低速情况下的近似)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\cdot\vec{v}\right]$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

$$\begin{cases} v << c : F = m_0\dfrac{dv}{dt} = m_0 a \\ v \sim c : v\uparrow, m\uparrow, a \to 0 \end{cases}$$

（v的极限为c）

三、相对论中的质量能量关系

经典力学：$E_k = \int_0^v \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^v m\dfrac{dv}{dt}\cdot dS = \dfrac{1}{2}mv^2$

相对论：$E_k = \int_0^v \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^v \dfrac{d(mv)}{dt}dS = \int_0^v v\,d(mv) = (m-m_0)c^2$

以速率v运动的粒子的总能量：

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}c^2 = E_k + m_0c^2$$

E_k：粒子动能

m_0c^2：粒子静能 (*rest energy*)

结论

1）质能关系：$E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2$

一定质量对应一定能量，质、能不可分

2）相对论中：E_k、E_0、m_0不守恒；E、m守恒

3）当$v \to c$时，$E \to \infty$

4）核反应：由 $m_{01}c^2 + E_{K1} = m_{02}c^2 + E_{K2}$

（质量过剩）

$$\Delta E_k = \Delta m_0 c^2 \begin{cases} B = \Delta m_0 = \sum_i m_{0i} - m_0 \\ E_B = Bc^2 \end{cases}$$

质量亏损(mass defect)

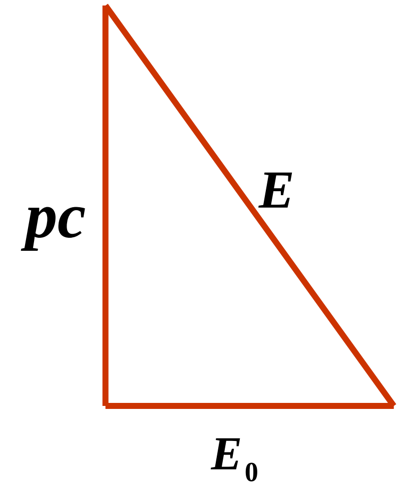
原子核结合能(binding energy)

三、动量和能量的关系

$$E=mc^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$P=mv=\frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{E=\sqrt{P^2c^2+m_0^2c^4}}$$



存在“无质量”粒子

***光子：** $v=c$，静质量$m_0=0$，静能$E_0=0$

***中微子?**

能量：$E=h\nu$

质量：$m=\dfrac{E}{c^2}$

动量：$p=\dfrac{E}{c}=\dfrac{h\nu}{c}=\dfrac{h}{\lambda}$

例1：

1）一个粒子的动能等于它的静止能量时，它的速率 v =?

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 = m_0c^2 \rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

2）一个粒子的动量是非相对论动量的2倍，它的速率 v = ?

$$\frac{P}{P_{非}} = \frac{mv}{m_0v} = \frac{\dfrac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}{m_0v} = 2 \rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

3）参照系K中，静止质量为m_0 的粒子A、B，分别以v 沿同一直线相向运动，碰撞后合成为一个粒子，这个粒子的静止质量M_0为：

$A)\ 2m_0$ $\quad B)\ 2m_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ $\quad C)\ \frac{m_0}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ $\quad D)\ 2m_0 \Big/ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

3) 解：K系，碰前：$\underset{m_0}{\xrightarrow{A,\ v}}$ $\underset{m_0}{\xleftarrow{v,\ B}}$ 碰后：$M,\ u$

能量守恒：
$$\left.\begin{aligned} & m_A c^2 + m_B c^2 = M c^2 \\ & m_A = m_B = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}\right\} M = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

动量守恒：
$$m_A v - m_B v = 0 = Mu \rightarrow u = 0 \rightarrow M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = M_0$$

$$\therefore M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$