第三章　内积空间与 Hilbert 空间

习题 3

1. 举出至少两个线性赋范空间 X, 使得在 X 上的范数不能由内积生成.
2. 设 $\{x_n\}$ 为内积空间 H 中点列. $\|x_n\| \to \|x\|$, 且 $(x_n, y) \to (x, y)$ $(y \in H)$ $(n \to \infty)$, 证明: $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.
3. 设 E_n 是 n 维线性空间, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 E_n 的一个基, $(\alpha_{ij})(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 是正定矩阵, 对 E_n 中的元素 $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ 及 $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, 定义
$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i y_j, \tag{3.0.1}$$
则 $(\cdot, \cdot)$ 是 E_n 上的一个内积. 反之, 设 $(\cdot, \cdot)$ 是 E_n 上的一个内积, 则必存在正定矩阵 (α_{ij}) 使得 (3.0.1) 成立.
4. 设 H 是内积空间, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 H 中的元素, 它们满足条件
$$(x_\mu, x_\gamma) = \begin{cases} 0, \text{ 当 } \mu \neq \gamma, \\ 1, \text{ 当 } \mu = \gamma. \end{cases}$$
证明 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是线性无关的.
5. 设 x, y 是复内积空间 X 中的两个非零元素, 则
(1) $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ 当且仅当 y 是 x 的正倍数;
(2) $\|x - y\| = |\|x\| - \|y\||$ 当且仅当 y 是 x 的正倍数;
(3) 给定 $z \in X$, $\|x - y\| = \|x - z\| + \|z - y\|$ 当且仅当存在 $\alpha \in [0, 1]$, 使得
$$z = \alpha x + (1 - \alpha) y.$$
6. 设 $e_i \in X$, $\|e_i\| = 1$ $(i \in N)$, $a^2 = \sum_{i \neq j} \left|(e_i, e_j)\right|^2 < \infty$, $x = \{\lambda_i\} \in l^2$, 则
$$(1 - a) \|x\|_2^2 \leq \| \sum \lambda_i e_i \|^2 \leq (1 + a) \|x\|_2^2 .$$
7. 设 X 为内积空间, $x, y \in X$, 假定 $\|\lambda x + (1 - \lambda) y\| = \|x\|, \forall \lambda (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. 证明 $x = y$. 若 X 是赋范空间但不是内积空间时, 情况又如何?
8. 设 H 是 Hilbert 空间, $\{x_n\} \subset H$, 满足 $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$. 证明 $\sum_{n=1}^\infty x_n$ 在 H 中收敛.
9. 设 $\{H_n\}(n = 1, 2, \cdots)$ 为一列内积空间. 令
$$H = \{\{x_n\} | x_n \in H_n, \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty\}.$$

对于 $\{x_n\},\{y_n\}\in H$. 定义

$$\alpha\{x_n\}+\beta\{y_n\}=\{\alpha x_n+\beta y_n\}\quad(\alpha,\beta\in K),$$
$$(\{x_n\},\{y_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,y_n).$$

证明 H 是内积空间, 并且当每一个 H_n 都是 Hilbert 空间时, H 是 Hilbert 空间.

10. 对于内积空间 H, 下述条件等价：
    (1) $x\perp y$;
    (2) $\|x+\alpha y\|\geqslant\|x\|,\quad\forall\alpha\in\mathbb{C}$;
    (3) $\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|,\quad\forall\alpha\in\mathbb{C}$.
11. 若内积空间 X 是实的, 则 $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$ 蕴含着 $x\perp y$, 但若 X 是复空间时, $x\perp y$ 未必成立. 举例说明之.
12. 设 $M=\{x|x=\{x_n\}\in l^2,\ x_{2n}=0,\ n=1,2,\cdots\}$, 证明 M 是 l^2 的闭子空间, 且求出 $M^\perp$.
13. 设 $X=\mathbb{R}^k$, $A=\{a\}$, 其中 $a=(a_1,\cdots,a_k)$, 证明

$$A^\perp=\{(x_1,\cdots,x_k)\in\mathbb{R}^k\big|\sum_{j=1}^{k}a_jx_j=0\}.$$

14. 设 X 是内积空间, $A\subset X$. 证明 $A^\perp=\bar{A}^\perp$.
15. 设 X 和 Y 是 Hilbert 空间 H 的线性子空间, 令 $X+Y=\{x+y|x\in X,\ y\in Y\}$. 证明 $(X+Y)^\perp=X^\perp\cap Y^\perp$.
16. 在 $L^2[a,b]$ 中, 令 $S=\{e^{2\pi inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$.
    (1) 若 $|b-a|\leq 1$. 求证 $S^\perp=\{0\}$;
    (2) 若 $\big|b-a\big|>1$. 求证 $S^\perp\neq\{0\}$.
17. 设 M,N 是内积空间 H 的子空间, $M\perp N$, $L=M\oplus N$, 证明 L 是闭子空间的充分必要条件是 M,N 均为闭子空间 (充分性部分假定 H 完备).
18. 在 $C[-1,1]=X$ 中. 令
    (1) $M_1=\{f\in X|f(x)=0,\ \forall x<0\}$;
    (2) $M_2=\{f\in X|f(0)=0\}$.
    计算 M_1,M_2 在 X 中关于内积 $(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$ 的正交补.
19. 若 H 是内积空间, $M,N\subset H$, 则
    (1) 若 $M\perp N$, 则 $M\subset N^\perp$, $N\subset M^\perp$;
    (2) $M^\perp=(\overline{M})^\perp$.
20. 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间.
    (1) 证明赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 是严格凸的, 当且仅当, 对任意 $x,y\in X$, $x\neq 0$, $y\neq 0$,

$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ 必有 $x=\alpha y \quad (\alpha>0)$.

(2) 证明在严格凸赋范空间中, 对于每个 $x\in X$, x 关于任意闭子空间 Y 的最佳逼近是唯一的.

21. 赋范线性空间 X 被称作是一致凸的, 若 X 中的任何满足 $\|x_n\|=\|y_n\|=1, \|x_n+y_n\|\to 2$ 的序列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 有 $\|x_n-y_n\|\to 0$.

(1) 证明任何内积空间都是一致凸的.

(2) $C[a,b]$ 不是一致凸的.

(3) $L^1[a,b]$ 不是一致凸的.

22. 设 $\{x_1,x_2,x_3\}$ 是内积空间 X 中的线性无关集, 假定 $\{x_1,x_2\}$ 满足 $(x_i,x_j)=\delta_{ij}, 1\leqslant i,j\leqslant 2$. 定义 $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{R}$ 如下:

$$f(\alpha_1,\alpha_2)=\|\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2-x_3\|.$$

证明当 $\alpha_i=(x_3,x_i)$, $i=1,2$ 时, f 取得最小值.

23. 设 $\{e_\alpha\}(\alpha\in I)$ 是内积空间 H 中的标准正交系. 证明对于每个 $x\in H$, x 关于这个标准正交系的 Fourier 系数 $\{(x,e_\alpha)|\alpha\in I\}$ 中最多有可数个不为零.

24. M 是 H 的闭线性子空间, $\{e_n\}$ 与 $\{e'_n\}$ 分别是 M 与 $M^\perp$ 的标准正交基, 证明 $\{e_n\}\cup\{e'_n\}$ 构成 H 的标准正交基.

25. 设 H 为 Hilbert 空间, 若 $E\subset H$ 是线性子空间并且对于任意的 $x\in H$, x 在 E 上的投影存在, 则 E 是闭的.

26. 设 $A=\{e_k\}$ 是内积空间 X 中的标准正交系. 证明对 $\forall x,y\in X$, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(x,e_k)(y,e_k)\right|\le\|x\|\ \|y\|.$$

27. 设 H 为 Hilbert 空间, $\{e_k\},\{e'_k\}$ 是 H 中的两个标准正交系, 并且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|e_k-e'_k\|^2<1$. 证明如果 $\{e_k\},\{e'_k\}$ 中之一是完备的, 则另一个也是完备的.

28. 举例说明内积空间中的完全标准正交系不一定是完备的.

29. 称 $H_n(t)=(-1)^n e^{t^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}e^{-t^2}$ 为 Hermite 多项式, 令

$$e_n(t)=(2^n n!\sqrt{\pi})^{-1/2}e^{-\frac{t^2}{2}}H_n(t),\qquad (n=1,2,3,\cdots),$$

证明 $\{e_n\}$ 组成 $L^2(-\infty,+\infty)$ 中的一个完备的标准正交系.

30. 令 $L_n(t)$ 为拉盖尔(Laguerre)函数 $e^t\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^n e^{-t})$, 证明 $\{\frac{1}{n!}e^{-t/2}L_n(t)\}(\ n=1,2,\cdots)$ 组成 $L^2(0,\infty)$ 中的一个完备的标准正交系.

31. 证明在可分的内积空间中, 任一标准正交系最多为一可数集.

第三章习题简答

1. 解 (1) l^p $(p \neq 2)$ 上的范数不能由内积生成. 事实上, 取

$$x = (1, 0, \cdots), y = (0, 1, 0, \cdots),$$

显然

$$\| x \| = \| y \| = 1.$$

又由

$$x + y = (1, 1, 0, \cdots), x - y = (1, -1, 0, \cdots),$$

得

$$\| x + y \| = \| x - y \| = 2^{\frac{1}{p}}.$$

当 $p \neq 2$ 时,有

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \times 2^{\frac{1}{p}} \neq 2(\| x \|^2 + \| y \|^2) = 4,$$

所以不满足平行四边行法则, 则 l^p $(p \neq 2)$ 上的范数不能由内积生成.
(2) $C[a, b]$ 上的范数不能由内积生成. 事实上, 取 $x(t) = 1$, $y(t) = \frac{t-a}{b-a}$, 则

$$\| x \| = \| y \| = 1,$$

$$x(t) + y(t) = 1 + \frac{t-a}{b-a}, x(t) - y(t) = 1 - \frac{t-a}{b-a},$$
$$\| x + y \| = 2, \| x - y \| = 1,$$

所以

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 5 \neq 2(\| x \|^2 + \| y \|^2) = 4,$$

故 $C[a, b]$ 上的范数不能由内积生成.

2. 证明 因为

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|^2 &= (x_n - x, x_n - x) \\ &= \|x_n\|^2 - (x_n, x) - (x, x_n) + \|x\|^2, \end{aligned} \tag{3.0.2}$$

已知 $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| \to \|x\|$, 由条件可知,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, x) \to (x, x), \quad \lim_{n\to\infty} (x, x_n) \to (x, x),$$

对(3.0.2) 式等号两边取极限, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 = \|x\|^2 - (x, x) - (x, x) + \|x\|^2 = 0,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

3. 证明 首先证明 $(\cdot,\cdot)$ 是 E_n 上的一个内积.

(1) 对 $\forall x \in E_n$, $(x,x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}x_ix_j$. 由于 (α_{ij}) 是正定方阵, 故 $(x,x) \geq 0$, 且当 $(x,x)=0$ 时推出 $x=0$.

(2)

$$\begin{aligned}(\beta_1 x+\beta_2 y, z) &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(\beta_1 x_i+\beta_2 y_i)z_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_1 x_i z_j + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_2 x_i z_j = \beta_1(x,z)+\beta_2(y,z).\end{aligned}$$

(3) 因为 (α_{ij}) 对称的, $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$, 故

$$(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}x_iy_j = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}x_iy_j = (y,x).$$

综上知, (x,y) 是 X 上的内积.

反之, 若 (x,y) 为 X 上内积, 令 $\alpha_{ij}=(e_i,e_j)$, $\forall x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_ie_i$, 有

$$0 \leq (x,x) = (\sum_{i=1}^{n} x_ie_i, \sum_{i=1}^{n} x_je_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}x_ix_j,$$

且当 $x \neq 0$ 时, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}x_ix_j = (x,x) > 0$, 所以 (α_{ij}) 是正定方阵.

4. 证明 设

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n = 0,$$

则由

$$(x_\mu, x_\gamma) = \begin{cases} 0, \text{ 当 } \mu \neq \gamma, \\ 1, \text{ 当 } \mu = \gamma. \end{cases}$$

知, 对每个 $\gamma(1 \leq \gamma \leq n)$ 有

$$\alpha_\gamma = (\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n, x_\gamma) = 0,$$

所以 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 必线性无关.

5. 证明 (1) 充分性. 设存在 $\lambda > 0$ 使 $y=\lambda x$, 则

$$\| x+y \| = \| (1+\lambda)x \| = (1+\lambda) \| x \| = \| x \| + \| y \| .$$

必要性. 设 $\| x+y \| = \| x \| + \| y \|$, 则

$$\| x+y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2 \| x \| \cdot \| y \| .$$

另一方面

$$\| x+y \|^2 = (x+y, x+y) = \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2Re(x,y),$$

所以

$$Re(x,y)=\| x \| \cdot \| y \| .$$

从而有

$$\|y-\frac{\|y\|}{\|x\|}x\|^2=2\|y\|^2-2\frac{\|y\|}{\|x\|}Re(x,y)=0,$$

故 $y=\frac{\|y\|}{\|x\|}x$, 即 y 是 x 的正倍数.

(2) 充分性. 设存在 λ 使 $y=\lambda x$, 则

$$\| x-y \|=\| (1-\lambda)x \|=|1-\lambda| \, \| x \|=| \, \| x \|-\| y \| \, |.$$

必要性. 设 $\| x-y \|=| \, \| x \|-\| y \| \, |$, 则

$$\| x-y \|^2=(\| x \|-\| y \|)^2=\| x \|^2+\| y \|^2-2\| x \| \cdot \| y \|$$

又

$$\| x-y \|^2=(x-y,x-y)=\| x \|^2+\| y \|^2-2Re(x,y).$$

所以

$$Re(x,y)=\| x \| \cdot \| y \| .$$

从而有

$$\|y-\frac{\|y\|}{\|x\|}x\|^2=2\|y\|^2-2\frac{\|y\|}{\|x\|}Re(x,y)=0,$$

故 $y=\frac{\|y\|}{\|x\|}x$, 即 y 是 x 的正倍数.

(3) 当 $z\neq x,y$ 时, 由 (1) 知,

$$\|x-y\|=\|(x-z)+(z-y)\|=\|x-z\|+\|z-y\|$$

当且仅当存在 $\lambda>0$, 使得 $(z-y)=\lambda(x-z)$. 令 $\alpha=\frac{\lambda}{1+\lambda}\in(0,1)$, 则

$$z=\alpha x+(1-\alpha)y.$$

当 $z=x$, 或 $z=y$ 时, 取 $\alpha=0$, 或 $\alpha=1$ 便可.

6. 证明 要证的是以下不等式:

$$\begin{aligned}| \, \| \sum \lambda_i e_i \|^2-\| x \|_2^2 \, | &= |\sum \lambda_i\overline{\lambda}_j(e_i,e_j)-\sum|\lambda_i|^2| \\ &= |\sum_{i\neq j}\lambda_i\overline{\lambda}_j(e_i,e_j)|\leq a(\sum_{i\neq j}|\lambda_i\overline{\lambda_j}|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq a(\sum|\lambda_i|^2|\lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}}=a\| x \|_2^2 .\end{aligned}$$

7. 证明 由于对 $\forall\lambda\in[0,1]$ 有 $\|\lambda x+(1-\lambda)y\|=\|x\|$, 故 λ 分别取 0, $\frac{1}{2}$ 得

$$\|x\|=\|y\|, \text{ 且}\|x+y\|=2\|x\|.$$

因为 H 是内积空间, 由平行四边形法则得

$$\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)-\|x+y\|^2=0.$$

故 $x=y$. 若 X 是赋范空间但不是内积空间时, $x=y$ 不一定成立. 例如, 在 $C[0,1]$ 中, 令

$$x(t)\equiv 1,\ y(t)=t,$$

则对 $\forall\lambda\in[0,1]$ 有

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|=\max_{0\le t\le 1}|\lambda+(1-\lambda)t|=1=\|x\|.$$

但是

$$\|x-y\|=\max_{0\le t\le 1}|1-t|=1\ne 0,$$

即 $x\ne y$.

8. 证明 令 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n=M, s_k=\sum_{n=1}^{k}x_n$, 由

$$\| s_k-s_{k'} \|=\| \sum_{n=k'+1}^{k} x_n \|\le \sum_{n=k'+1}^{k} \| x_n \| \quad (k^{'}<k),$$

知$\{s_k\}$ 是基本列,而 H 完备,则存在 $x\in H$, 满足

$$x=\lim_{k\to\infty}s_k=\sum_{n=1}^{\infty}x_n,$$

且

$$\| x \|=\lim_{k\to\infty}\| s_k \|\le \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\| x_n \|=M.$$

9. 证明 对 $\{x_n\},\{y_n\}\in H$, 有

$$|\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,y_n)|\le\sum_{n=1}^{\infty}\| x_n \|\cdot\| y_n \|\le(\sum_{n=1}^{\infty}\| x_n \|^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\sum_{n=1}^{\infty}\| y_n \|^2)^{\frac{1}{2}},$$

所以 $(\{x_n\},\{y_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,y_n)$ 是有意义的,容易验证按这个内积的定义H是一个内积空间. 现设每个 H_n 是 Hilbert 空间,我们证明 H 也是 Hilbert 空间.设 $\{x^{(i)}\}$ 是 H 中的基本列,其中 $x^{(i)}=\{x_1^{(i)},x_2^{(i)},\cdots,x_n^{(i)},\cdots\}$ 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在 i_0, 使 $i,j\ge i_0$ 时

$$\| x^{(i)}-x^{(j)} \|<\varepsilon,$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\| x_n^{(i)}-x_n^{(j)} \|^2<\varepsilon^2,$$

从而对每一个 $n,\{x_n^{(i)}\}$ 是 H_n 中的基本列,设 $\lim_{i\to\infty}x_n^{(i)}=x_n^{(0)}(n=1,2,3,\cdots)$, 记

$$x=\{x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},\cdots\},$$

证明 $x\in H$, 且$\| x^{(i)}-x \|\to 0\ (i\to\infty)$. 因为对任意的自然数 k, 当 $i,j\ge i_0$ 时

$$\sum_{n=1}^{k}\| x_n^{(i)}-x_n^{(j)} \|^2<\varepsilon^2.$$

令 $j \to \infty$, 则当 $i \geq i_0$ 时

$$\sum_{n=1}^{k} \| x_n^{(i)} - x_n^{(0)} \|^2 < \varepsilon^2,$$

再令 $k \to \infty$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n^{(i)} - x_n^{(0)} \|^2 < \varepsilon^2, \quad (i \geq i_0).$$

于是 $x = x^{(i)} - (x^{(i)} - x) \in H$ 且 $\lim_{i\to\infty} \| x^{(i)} - x \| = 0$, 故 H 也 Hilbert 空间.

10. 证明 (1) $\Rightarrow$ (2), (1) $\Rightarrow$ (3) 显然成立.

(2) $\Rightarrow$ (1). 若 $\| x + \alpha y \| \geq \| x \|$, 且 $y \neq 0$, 则取 $\alpha = -\frac{(x,y)}{\|y\|^2}$, 可得

$$0 \leq (x + \alpha y, x + \alpha y) - \| x \|^2 = \overline{\alpha}(x,y) + \alpha(y,x) + |\alpha|^2 \| y \|^2 = -|(x,y)|^2 \| y \|^{-2} \leq 0$$

故必有 $x \perp y$.

(3) $\Rightarrow$ (1). 若 $\| x + \alpha y \| \geq \| x - \alpha y \|$, 则

$$(x + \alpha y, x + \alpha y) = (x - \alpha y, x - \alpha y),$$

展开得

$$Re\overline{\alpha}(x,y) = 0$$

分别取 $\alpha = 1, \alpha = i$, 得 (x,y) 的实部虚部均为 0, 即 $(x,y) = 0$.

11. 证明 在实内积空间内,

$$\| x + y \|^2 = (x + y, x + y) = \| x \|^2 + 2(x,y) + \| y \|^2,$$

故 $\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$ 当且仅当 $(x,y) = 0$, 即 $x \perp y$.

若是复内积空间, $x \perp y$ 不一定成立. 例如在 $\mathbb{C}$ 中取 $x = 1 + i, y = 1 - i$, 则

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2,$$

但 $(x,y) \neq 0$.

12. 证明 显然 M 是 l^2 的线性子空间. 下面证 $\overline{M} = M$. 易知 $M \subseteq \overline{M}$, 只需证 $\overline{M} \subseteq M$.

对 $\forall x = \{x_n\} \in \overline{M}$, $\exists \{x^k\} \subseteq M$ 使得 $x^k \to x$. 即

$$\|x^k - x\| = \{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^k - x_n|^2\}^{\frac{1}{2}} \to 0, \ k \to \infty.$$

从而对于 $\forall n$, $x_n^k \to x_n$ $(k \to \infty)$. 由 $x^k \in M$ 得, 对 $n = 2m$ $(m = 1, 2, \cdots)$ $x_{2m}^k = 0$, 因此 $x_{2m} = 0$. 这表明了 $x \in M$. 故 $\overline{M} \subseteq M$.则 M 是 l^2 的闭子空间.

令 $N = \{x | x = \{x_n\} \in l^2, \ x_{2n-1} = 0, \ n = 1, 2, \cdots\}$. 下面证明 $M^{\perp} = N$.

对于 $\forall x = \{x_n\} \in N$, $\forall y = \{y_n\} \in M$, 有

$$(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n = 0,$$

从而 $x \in M^{\perp}$, 即 $N \subseteq M^{\perp}$.

对于 $\forall x \in M^{\perp}$, 取 $\{y^k\} \subseteq M$, 满足

$$y_n^k = \begin{cases} 1, & n = 2k-1; \\ 0, & n \neq 2k-1, \end{cases}$$

则 $(x, y^k) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n^k = x_{2k-1} = 0,\ (k = 1, 2, \cdots)$. 因此 $x \in N$, 即 $M^{\perp} \subseteq N$. 故

$$M^{\perp} = \{x | x = \{x_n\} \in l^2,\ x_{2n-1} = 0,\ n = 1, 2, \cdots\}.$$

13. 证明 因为 $A^{\perp} = \{x = (x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k | (x, a) = 0\}$, 且 $(x, a) = \sum_{j=1}^{k} a_j x_j$, 所以得

$$A^{\perp} = \{(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k | \sum_{j=1}^{k} a_j x_j = 0\}.$$

14. 证明 因为 $A \subset \bar{A}$, 所以 $A^{\perp} \supset \bar{A}^{\perp}$. 反之, 任取 $x \in A^{\perp}$. 对任意的 $y \in \bar{A}$, 存在 $\{y_n\} \subset A$, 使得 $y_n \to y\ (n \to \infty)$. 因此

$$(x, y) = \lim_{n \to \infty} (x, y_n) = 0,$$

从而 $x \in (\bar{A})^{\perp}$. 故, $A^{\perp} \subset (\bar{A})^{\perp}$.

综上即得

$$A^{\perp} = (\bar{A})^{\perp}.$$

15. 证明 任取 $z \in (X+Y)^{\perp}$, 对 $\forall x + y \in X + Y$, 有 $(z, x+y) = 0$. 分别取 $y = 0, x = 0$, 得

$$(z, x) = 0\ \forall x \in X,\ (z, y) = 0\ \forall y \in Y,$$

故 $z \in X^{\perp} \cap Y^{\perp}$, 即 $(X+Y)^{\perp} \subset (X^{\perp} \cap Y^{\perp})$.

另一方面, 任取 $z \in X^{\perp} \cap Y^{\perp}$, 则对 $\forall x \in X,\ y \in Y$, 有 $(z, x) = 0,\ (z, y) = 0$. 故对 $\forall x + y \in X + Y$, 有 $(z, x+y) = 0$, 即 $z \in (X+Y)^{\perp}$. 所以 $(X^{\perp} \cap Y^{\perp}) \subset (X+Y)^{\perp}$. 综上所述,

$$(X+Y)^{\perp} = (X^{\perp} \cap Y^{\perp}).$$

16. 证明 对于 $\forall n,\ e^{2\pi i n x}$ 的周期是 1.

(1) 若 $|b-a| = 1$, $\{e^{2\pi i n x}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 是 $L^2[a, b]$ 上的一组正交基, 故 $S^{\perp} = \{0\}$.

若 $|b-a| < 1$, 对 $\forall u \in S^{\perp} \subset L^2[a, b]$, 令

$$\widetilde{u} = \begin{cases} u, & x \in [a, b] \\ 0, & x \in [b, a+1] \end{cases}$$

则由

$$\int_a^{a+1} \widetilde{u} e^{2\pi i n x} dx = 0$$

知 $\widetilde{u} = 0$ $(x \in [a, a+1])$, 即 $u = 0$ $(x \in [a, b])$. 故 $S^{\perp} = \{0\}$.
(2) 若 $|b-a| > 1$, 这时 $\{e^{2\pi inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 是 $L^2[b-1, b]$ 上的一组正交基. 因此 ,$L^2[b-1, b]$ 上的函数可以由它 Fourier 的系数决定. 则对 $\forall u \in L^2[a, b-1], u \neq 0$, 可将它扩充为 $L^2[a, b]$ 上的函数 $v(x) \in S^{\perp}$, 而 $v(x) \neq 0$. 事实上,令

$$v = \begin{cases} u(x), & x \in [a, b-1] \\ \widetilde{u}(x), & x \in [b-1, b] \end{cases}$$

其中 $(b-1, b]$上 的函数 $\widetilde{u}(x)$ 的傅里叶系数通过 $u(x)$ 在 $[a, b-1]$ 上的值来计算,即

$$\widetilde{u}_n = \int_{b-1}^{b} \widetilde{u} e^{2\pi inx} dx = -\int_{a}^{b-1} u e^{2\pi inx} dx,$$

于是

$$\widetilde{u} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{u}_n e^{2\pi inx} \in L^2[b-1, b],$$

并且

$$\int_a^b v e^{2\pi inx} dx = \int_a^{b-1} u e^{2\pi inx} dx + \int_{b-1}^{b} \widetilde{u} e^{2\pi inx} dx = 0.$$

即 $v(x) \in S^{\perp}$.

17. 证明 必要性. 设 L 为闭子空间, $\{x_n\} \subset M, x_n \to x (n \to \infty)$, 则 $x \in L$ 且对一切 $y \in N$ 有

$$(x, y) = \lim_{n \to \infty} (x_n, y) = 0,$$

所以 $x \in N^{\perp}$. 因为 $L = M \bigoplus N$ 且 $x \in L, x \in N^{\perp}$, 故 $x \in M$. 所以 M 为闭子空间.
同理可证 N 也为闭子空间.
充分性. 设 $\{x^{(n)}\} \subset L,\ x^{(n)} \to x \in H$ $(n \to \infty)$, 令

$$x^{(n)} = x_1^{(n)} + x_2^{(n)}, x_1^{(n)} \in M, x_2^{(n)} \in N,$$

对 x 作正交分解:

$$x = x_1 + x_2 \ (x_1 \in M, x_2 \in M^{\perp}).$$

因为

$$\| x_i^{(n)} - x_i \| \leq \| x^{(n)} - x \| \to 0 \quad (i = 1, 2)$$

由 M, N 闭可知 $x_1 \in M, x_2 \in N$, 故 $x \in L$ 即 L 是闭子空间.

18. 解 (1)

$$\begin{aligned} M_1^{\perp} &= \{g \in X | \int_{-1}^{1} f\overline{g} dx = 0,\ \forall f \in M_1\} \\ &= \{g \in X | \int_{-1}^{0} f\overline{g} dx + \int_{0}^{1} f\overline{g} dx = 0,\ \forall f \in M_1\} \\ &= \{g \in X | \int_{0}^{1} f\overline{g} dx = 0,\ \forall f \in M_1\} = \{g \in X | g(x) = 0,\ 1 \geq x > 0\} \end{aligned}$$

(2)

$$M_2^{\perp} = \{g \in X | \int_{-1}^{1} f\overline{g}\mathbf{d}x = 0,\ \forall f \in M_2\}$$

即对任意的 $f(x) \in X$ 且 $f(0)=0$, 都有

$$\int_{-1}^{1} f\overline{g}\mathrm{d}x = 0.$$

任取 $f(x) \in X$, 且 $f(x)=0, -1 \le x \le 0$, 由 (1) 可推知 $g(x)=0, 0 \le x \le 1$. 同理, 任取$f(x) \in X$, 且 $f(x)=0, 0 \le x \le 1$,n 类似于 (1), 经计算可得 $g(x)=0, -1 \le x \le 0$. 综上可得

$$M_2^{\perp} = \{g(x) \equiv 0, x \in [-1,1]\}.$$

19. 证明 (1) 因为

$$M^{\perp} = \{x : (x,y)=0, \forall y \in M\},\ N^{\perp} = \{x : (x,y)=0, \forall y \in N\},\ N \perp M,$$

所以 $N \subset M^{\perp}, M \subset N^{\perp}$.
(2) 因为 $M \subset \overline{M}$, 所以 $\overline{M}^{\perp} \subset M^{\perp}$. 反之,对 $\forall z \in \overline{M}$ 存在 $\{x_n\} \subset M$ 使得

$$x_n \to z\ (n \to \infty).$$

从而对 $\forall y \in M^{\perp}$, 有

$$(y,z) = (y, \lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty}(y, x_n) = 0.$$

故 $y \in (\overline{M})^{\perp}$, 即 $M^{\perp} \subset (\overline{M})^{\perp}$. 则 $M^{\perp} = (\overline{M})^{\perp}$.

20. 证明 (1) 对 $\forall x, y \in X,\ x \neq y$ 并且 $\| x \| = \| y \| = 1$, 有

$$\|\alpha x + \beta y\| \le 1,\ \forall \alpha,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1.$$

若 $\|\alpha x + \beta y\| = 1$, 则存在 $\widetilde{\alpha} > 0$ 使得 $\alpha x = \widetilde{\alpha}\beta y$, 于是

$$1 = \| x \| = \frac{\widetilde{\alpha}\beta}{\alpha} \| y \| = \frac{\widetilde{\alpha}\beta}{\alpha},$$

从而得 $x = y$, 矛盾. 故赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 是严格凸的.
反过来,设 x, y 是 X 中非零元使得 $\| x+y \| = \| x \| + \| y \|$. 再设

$$a = \| x \|, b = \| y \|, x_1 = \frac{x}{a}, y_1 = \frac{y}{b},$$

则 $a > 0, b > 0$, $\| x_1 \| = \| y_1 \| = 1$, 且

$$\| \frac{a}{a+b}x_1 + \frac{b}{a+b}y_1 \| = 1,$$

由于赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 是严格凸的, 故 $x_1 = y_1$, 即 $x = \alpha y$, 其中 $\alpha = \frac{a}{b}$.
(2) 假设 x_0, y_0 都是 x 关于 Y 的最佳逼近, 则

$$d \xlongequal{\Delta} \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \|x - x_0\| = \|x - y_0\|.$$

由 $x_0, y_0 \in Y$ 知 $\frac{x_0+y_0}{2} \in Y$, 从而 $\|x - \frac{x_0+y_0}{2}\| \geq d$. 另一方面, 由于赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 是严格凸的, 故

$$\|x - \frac{x_0+y_0}{2}\| = d\|\frac{x-x_0}{2d} + \frac{x-y_0}{2d}\| < d,$$

矛盾, 则 $x_0 = y_0$.

21. 证明 (1) 设 $\{x_n\} \subset X, \{y_n\} \subset X$, 满足

$$\|x_n\| = \|y_n\| = 1, \|x_n + y_n\| \to 2.$$

由平行四边形法则可知

$$\|x_n - y_n\|^2 = 2(\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2) - \|x_n + y_n\|^2 = 4 - \|x_n + y_n\|^2,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} (4 - \|x_n + y_n\|^2)^{\frac{1}{2}} = 0$. 则内积空间是一致凸的.

(2) 在 $C[a,b]$中,取 $x_n(t) = 1, y_n(t) = \frac{t-a}{b-a}$, 则

$$\| x_n \| = \| y_n \| = \frac{\| x_n + y_n \|}{2} = \| x_n - y_n \| = 1.$$

显然, $\|x_n + y_n\| \to 2$ $(n \to \infty)$, 但是 $\|x_n - y_n\| = 1 \nrightarrow 0$ $(n \to \infty)$. 故 $C[a,b]$ 不是一致凸的.

(3) 在 $L[a,b]$ 中, 取 $x_n(t) = \frac{1}{b-a}, y_n(t) = \frac{2(t-a)}{(b-a)^2}$, 则

$$\begin{aligned}
&\| x_n \| = \| y_n \| = \frac{\| x_n + y_n \|}{2} = 1,\\
&\| x_n - y_n \| = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

显然, $\|x_n + y_n\| \to 2$ $(n \to \infty)$, 但是 $\|x_n - y_n\| = \frac{1}{2} \nrightarrow 0$ $(n \to \infty)$. 故 $L[a,b]$ 不是一致凸的.

22. 证明

$$\begin{aligned}
f(\alpha_1, \alpha_2) &= \| \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - x_3 \|\\
&= \| (x_3, x_1)x_1 + (x_3, x_2)x_2 - x_3 + (\alpha_1 - (x_3, x_1))x_1 + (\alpha_2 - (x_3, x_2))x_2 \|
\end{aligned}$$

因为

$$((x_3, x_1)x_1 + (x_3, x_2)x_2 - x_3, (\alpha_1 - (x_3, x_1))x_1 + (\alpha_2 - (x_3, x_2))x_2) = 0$$

所以

$$((x_3, x_1)x_1 + (x_3, x_2)x_2 - x_3) \perp ((\alpha_1 - (x_3, x_1))x_1 + (\alpha_2 - (x_3, x_2))x_2))$$

所以

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \| \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - x_3 \| + \| (\alpha_1 - (x_3, x_1))x_1 + (\alpha_2 - (x_3, x_2))x_2 \|$$

又因为 $x_1 \perp x_2$ 故

$$f(\alpha_1,\alpha_2) = \| \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - x_3 \| + |\alpha_1 - (x_3,x_1)| \| x_1 \| + |\alpha_2 - (x_3,x_2)| \| x_2 \|$$

所以,当 $\alpha_1 = (x_3,x_1), \alpha_2 = (x_3,x_2)$ 时, f 取最小值.

23. 证明 $\forall x \in X$, 不妨设 $x \neq 0$, 令

$$\begin{aligned} F &= \{e_\alpha | (x,e_\alpha) \neq 0, \alpha \in I\} \\ &= \{e_\alpha || (x,e_\alpha)| > 0, \alpha \in I\} \end{aligned}$$

进一步我们有

$$F = \cup_{n=1}^{\infty} \{e_\alpha || (x,e_\alpha)| > \frac{1}{n}, \alpha \in I\}$$

记$F_n = \{e_\alpha || (x,e_\alpha)| > \frac{1}{n}, \alpha \in I\}$, 显然 F_n 的个数不会超过 $N = n^2[\| x \|^2 + 1]$($[\cdot]$ 表示一个数的整数部分), 即 F_n 的个数有限, 假若不然, 有 $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_N}$ 满足 $|(x,e_{i_k})| > \frac{1}{n}$, $k = 1,2,\cdots,N$, 则

$$\sum_{k=1}^{N} |(x,e_{i_k})|^2 > N \cdot \frac{1}{n^2} \geq \|x\|^2,$$

与贝塞尔不等式

$$\sum_{k=1}^{N} |(x,e_{i_k})|^2 \leq \|x\|^2,$$

矛盾. 由于可数个至多可数集合的并集是可数的, 知$F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ 是可数集.

24. 证明 对 $\forall x \in H$, 由正交分解定理,

$$x = y + z, \ y \in M, \ z \in M^{\perp}.$$

依照题意,

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (y,e_n), \ z = \sum_{n=1}^{\infty} (z,e_n').$$

故对 $\forall x \in H$ 有

$$x = y + z = \sum_{n=1}^{\infty} (y,e_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (z,e_n').$$

由此可见, $\{e_n\} \cup \{e_n'\}$ 构成 H 的标准正交基.

25. 证明 取 $\{x_n\} \subset E$, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. 因为 x 在 E 上的投影存在, 故存在 $x_0 \in E$, $x_1 \perp E$ 使得 $x = x_0 + x_1$. 因为 $x_n \in E$, 所以 $(x_n,x_1) = 0$, 从而

$$0 = \lim_{n\to\infty} (x_n,x_1) = (x,x_1) = (x_0+x_1,x_1) = (x_1,x_1)$$

故 $x_1 = 0$, 即 $x = x_0 \in M$, 则 E 是闭.

26. 证明 由于 $A=\{e_k\}$ 是内积空间 X 中的标准正交系. 故结合 Hölder 不等式和 Bessel 不等式得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)(y,e_n)|\le[\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2]^{\frac{1}{2}}[\sum_{n=1}^{\infty}|(y,e_n)|^2]^{\frac{1}{2}}\le\|x\|\,\|y\|.$$

27. 证明 设 $\{e_k\}$ 完备, 我们证明 $\{e_k'\}$ 也完备.假若 $\{e_k'\}$ 不完备, 则必存在非零元素 $x_0\in H$, 使得 $x_0\perp e_k'$, $k=1,2,\cdots$.

又由 $\{e_k\}$ 是完备的, 得

$$\|x_0\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(x_0,e_k)|^2.$$

于是

$$\begin{aligned}\|x_0\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(x_0,e_k)|^2&=\sum_{k=1}^{\infty}|(x_0,e_k)-(x_0,e_k')|^2\\&=\sum_{k=1}^{\infty}|(x_0,e_k-e_k')|^2\le\|x_0\|^2\sum_{k=1}^{\infty}\|e_k-e_k'\|^2<\|x_0\|^2,\end{aligned}$$

导出矛盾, 故 $\{e_k'\}$ 也完备.

28. 解 在 l^2 中, 记 $\mathcal{F}=\{e_2,e_3,\cdots,e_n,\cdots\}$, 其中 $e_n=\{\overbrace{0,0,\cdots,0,1}^{n\text{位}},0,\cdots\}$, 令

$$f_1=e_1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}e_k,$$

则 $f_1\in l^2$,再令 U 是由 $\mathcal{F}\cup\{f_1\}$ 所张成的线性子空间, 即

$$U=\{\alpha_1f_1+\sum_{k=2}^{n}\alpha_ke_k|n\text{为任一自然数},\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\ \text{为任意实数}\},$$

按照 l^2 的线性运算及内积, U 为内积空间, $\mathcal{F}$ 显然是 U 中的标准正交系且可证明 $\mathcal{F}$ 在 U 中是完全的. 事实上, 若 $x\in U$, $x\perp\mathcal{F}$, 则根据 U 的定义, 存在 $\alpha_k(k=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$x=\alpha_1f_1+\sum_{k=2}^{n}\alpha_ke_k.$$

取 $m>n$, 得到 $0=(x,e_m)=\frac{\alpha_1}{m}$, 因此

$$x=\sum_{k=2}^{n}\alpha_ke_k.$$

同样, 对于 $m\le n$, 有 $0=(x,e_m)=\alpha_m$, 故 $x=0$, 即 f 在 U 中完全. 但是

$$\|f_1\|^2=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2},\ \sum_{k=2}^{\infty}|(f_1,e_k)|^2=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

则

$$\|f_1\|^2 \neq \sum_{k=2}^{\infty} |(f_1, e_k)|^2,$$

即 Parseval 等式不成立, 故 $\mathcal{F}$ 在 U 中不是完备的.

29. 证明 首先证明 $\{e_n(t)\}$ 彼此正交. 因为

$$\begin{aligned} H_n(t) &= n! \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \frac{2^{n-2j}}{j!(n-2j)!} t^{n-2j} \\ &= \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!} n(n-1)\cdots(n-2j+1)(2t)^{n-2j}, \end{aligned}$$

其中

$$N = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{当n为偶数时} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{当n为奇数时} \end{cases}$$

所以

$$H_n^{'}(t) = 2n \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^j}{j!} n-1(n-2)\cdots(n-2j)(2t)^{n-1-2j} = 2nH_{n-1}(t),$$

其中

$$M = \begin{cases} \frac{n-2}{2}, & \text{当n为偶数时} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{当n为奇数时} \end{cases}$$

令$v(t) = e^{-t^2}$,则

$$\int_{-\infty}^{\infty} e_m(t)e_n(t)dt = [(2^n n!\sqrt{\pi})(2^m m!\sqrt{\pi})]^{-\frac{1}{2}} \times (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)v^{(n)}(t)dt.$$

又因为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)v^{(n)}(t)dt &= H_m v^{(n-1)}(t) \mid_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} 2mH_{m-1}(t)v^{(n-1)}(t)dt \\ &= -2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(t)v^{(n-1)}(t)dt = \cdots \\ &= (-1)^m 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} H_0(t)v^{(n-m)}(t)dt \\ &= (-1)^m 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} v^{(n-m)}(t)dt \end{aligned}$$

故当时 $n = m$ 时,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e_n(t)e_m(t)dt = 1.$$

$n \neq m$ 时,不妨设 $m < n$, 由于

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)v^{(n)}(t)dt &= (-1)^m 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} v^{(n-m)}(t)dt \\ &= (-1)^m 2^m m! v^{(n-m-1)}(t) \mid_{-\infty}^{\infty} = 0 \end{aligned}$$

故

$$\int_{-\infty}^{\infty} e_n(t)e_m(t)dt = 0 \qquad (n \neq m)$$

这就证明了 $\{e_n(t)\}$ 是 $L^{2(-\infty,\infty)}$ 中的标准正交系. 又因为 $\{t^k e^{-\frac{t^2}{2}}\}_{k=0}^{\infty}$ 在 $L^2(-\infty,\infty)$ 中完全的, 由此可知 $\{P(t)e^{-\frac{t^2}{2}} : P(t)\text{为任一多项式}\}$ 在 $L^2(-\infty,\infty)$ 中稠密,故 $\{e_n(t)\}$ 是 $L^2(-\infty,\infty)$ 的完备标准正交系.

30. 证明 L_n 是 n 次多项式.当 $n > k$ 时,有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-t}t^k L_n(t)dt &= \int_0^{\infty} t^k \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})dt \\ &= -k\int_0^{\infty} t^{k-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^n e^{-t})dt = \cdots \\ &= (-1)^k k!\int_0^{\infty} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}(t^n e^{-t})dt = 0.\end{aligned}$$

因此,当 $n > m$ 时,有

$$\int_0^{\infty} e^{-t}L_n(t)L_m(t)dt = 0,$$

当 $m = n$ 时,有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-t}L_n^2(t)dt &= (-1)^n t^n \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})dt \\ &= n!\int_0^{\infty} t^n e^{-t}dt = (n!)^2.\end{aligned}$$

从而知 $\{\frac{1}{n!}e^{-\frac{t}{2}}L_n(t)\}$ 是标准正交系. 下面证明 $\{\frac{1}{n!}e^{-\frac{t}{2}}L_n(t)\}$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ 的完备性.因为多项式全体在 $L^2[0,N]$ 中稠密,其中 N 是任一给定的自然数.因此可以证明

$$\{\frac{1}{n!}e^{-\frac{t}{2}}L_n(t)\} \;\; (n = 1,2,3,\cdots)$$

张成的空间在 $L^2[0,N]$ 中稠密,将 $L^2[0,N]$ 中函数延拓到 $[0,\infty)$ 上,使之在 $[0,N]$ 之外处处为零,于是 $L^2[0,N]$ 便成了 $L^2[0,\infty)$ 的子空间. 而 $L = \cup_{N=1}^{\infty}L^2[0,N]$ 在 $L^2[0,\infty)$ 中稠密, 从而

$$\{\frac{1}{n!}e^{-\frac{t}{2}}L_n(t)\} \;\; (n = 1,2,3,\cdots)$$

张成的空间在 $L^2[0,\infty)$ 中稠密, 从而可证

$$\{\frac{1}{n!}e^{-\frac{t}{2}}L_n(t)\} \;\; (n = 1,2,3,\cdots)$$

是完备的标准正交系.

31. 证明 设 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 H 中的标准正交系,则

$$(e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ 1, & \alpha = \beta \end{cases}$$

且 $\alpha \neq \beta, \| e_\alpha - e_\beta \| = \sqrt{2}$. 因为 H 可分,设 $\{x_n\}$ 为 H 的可数稠密子集,则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, \frac{1}{2}) \supset H,$$

其中 $B(x_n, \frac{1}{2}) = \{x :\| x - x_n \|< \frac{1}{2}\}$, 若 $\{e_\alpha\}$ 不可数,则至少有两个不同的元素 e_α, e_β 同属于某一个开球 $B(x_n, \frac{1}{2})$, 于是

$$\sqrt{2} = \| e_\alpha - e_\beta \| \le \| e_\alpha - x_n \| + \| x_n - e_\beta \| < 1$$

矛盾,故 $\{e_\alpha\}$ 为一可数集.