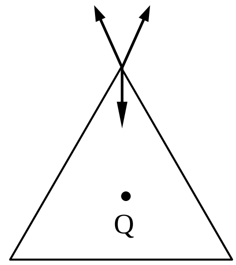
大学物理下 习题册一

1、三个电量为–q 的点电荷各放在边长为 r 的等边三角形的三个顶点上。电荷 Q（Q>0）放在三角形的重心上，为使每个负电荷受力为零，Q 之值应为多大？

解：利用矢量合成可得

$$\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(\frac{\sqrt{3}}{3}r)^2}=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos 30^\circ\times 2$$

所以 $Q=\frac{\sqrt{3}}{3}q$



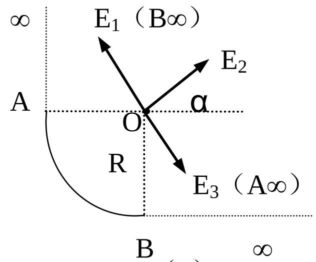
2、线电荷密度为λ的无限长均匀带电线，分别弯成如图 (a) 和 (b) 所示的两种形状，若圆半径为 R，试求(a)、(b) 图中 O 点的场强。

解：图（a）由两根半无限长带电直线和一段圆弧组成，方向如图所示。根据矢量合成

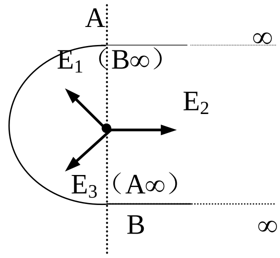
$$\vec{E}_O=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3=\vec{E}_2$$

$$E_O=E_2=\frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{E_y}{E_x}=1 \qquad \alpha=45^\circ$$ 即与水平成 45°



（a）



（b）

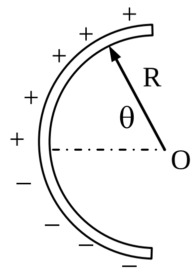
图（b）由两根半无限长带电直线和一段半圆弧组成，方向如图所示。根据矢量合成

$$E_{Ox}=E_2-2E_1\cos 45^0=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}-2\times\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}=0$$

$$E_{Oy}=E_1\sin 45^0-E_3\sin 45^0=0$$

$$E_O=0$$

3、有一细玻璃棒被弯成半径为 R 的半圆形，其上半部均匀分布有电荷+Q，下半部均匀分布有电荷–Q，如图所示．求半圆中心 O 处的场强。



解：由于对称性，dE_+、dE_-在 x 方向上的分量抵消 $E_x = 0$

$$dq = \lambda dl = \lambda R d\theta \qquad （\lambda = \frac{2Q}{\pi R}）$$

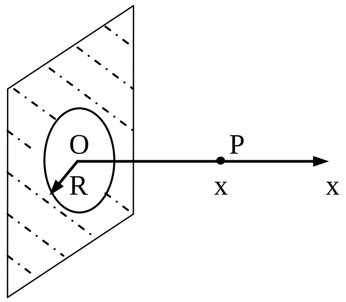
$$dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Rd\theta}{R^2} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$dE_y = dE\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta d\theta$$

$$E_y = 2\int dE\cos\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\theta}{R}\cos\theta = \frac{Q}{\varepsilon_0\pi^2 R^2}$$

方向沿–y 方向

4、一无限大的均匀带电平板，电荷密度为σ，在平板上挖去一个半径为 R 的圆孔，求通过圆孔中心并垂直于板的轴上一点 P 的场强。



解：取圆环元半径为ρ ， $dq = \sigma 2\pi\rho d\rho$

则圆环元在轴线上产生 dE 公式

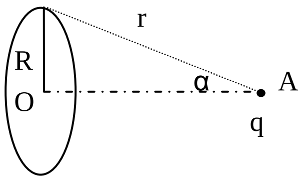
$$dE_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xdq}{(\rho^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_p = \int_R^\infty dE_p = \int_R^\infty \frac{2\pi\sigma x\rho d\rho}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

方向沿 x 轴方向

5、如图所示，在点电荷 q 的电场中，取半径为 R 的平面，q 在该平面的轴线上的 A 点处．求通过此圆平面的电通量。



解法一：以 A 为中心，r 为半径作一球面，则通过圆平面的电通量与通过以圆平面为底的球冠电通量相等。

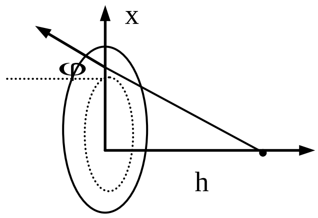
设球面积　$S_0 = 4\pi r^2$，　通量　$\Phi_0 = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

球冠面积　$S = 2\pi r(r - r\cos\alpha)$　通量　Φ

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{S}{S_0} = \frac{2\pi r^2(1-\cos\alpha)}{4\pi r^2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\therefore \quad \Phi = \Phi_0\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{(1-\cos\alpha)}{2}$$

解法二：



$$\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int E\cos\varphi ds = \int_0^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+h^2)}\cos\varphi 2\pi x dx$$

$$= \int_0^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(x^2+h^2)}\frac{h}{(x^2+h^2)^{1/2}}2\pi x dx$$

$$= \frac{q}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{h}{(R^2+h^2)^{1/2}}\right] = \frac{q}{2\varepsilon_0}(1-\cos\alpha)$$

6、无限长的两个共轴直圆筒，半径分别是 R_1 和 R_2，两圆筒面都均匀带电，沿轴线方向单位长度所带的电量分别是 λ_1 和 λ_2。

（1）求离轴线为 ***r*** 处的电场强度 E。

（2）当 $\lambda_2 = \lambda_1$ 时，各处的电场强度 E 如何？

解：（1）作高为 h 的同轴圆柱形高斯面，由高斯定理 $\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = E2\pi rh = \dfrac{\sum q}{\varepsilon_0}$

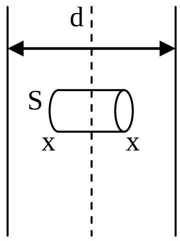
$r < R_1$　　$\sum q_1 = 0$　　$E_1 = 0$

$R_1 < r < R_2$　　$\sum q_2 = \lambda_1 h$　　$E_2 = \dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$

$r > R_2$　　$\sum q_3 = (\lambda_1 + \lambda_2)h$　　$E_3 = \dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$

（2）E_1 和 E_2 不变，$E_3 = 2E_2$

7、一厚度为 d 的无限大平板，均匀带电，体电荷密度为 ρ，求平板体内、外场强的分布，并以其对称面为坐标原点作出 E – x 的分布曲线。



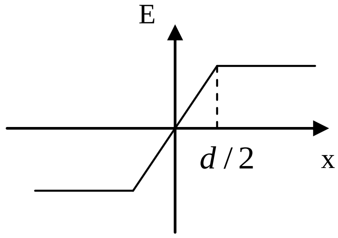
解：在平板内外取图示高斯面，由高斯定理 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\sum q}{\varepsilon_0}$

$-\frac{d}{2}<x<\frac{d}{2}$ $\qquad \oint \vec{E}_1\cdot d\vec{S}=2E_1S=\frac{\rho 2xS}{\varepsilon_0}$

$$E_1=\frac{\rho x}{\varepsilon_0}$$

$x>\frac{d}{2}$ or $x<-\frac{d}{2}$ $\qquad \oint \vec{E}_2\cdot d\vec{S}=2E_2S=\frac{\rho d\,S}{\varepsilon_0}$

$$E_2=\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$



8、半径为 R 的非金属球带有正电荷，电荷体密度随径向距离的变化满足 ρ=br，其中 b 为常数，r 为离球心的距离，求球内、外场强的分布。

解：由于 ρ 与 r 成线性关系，电场分布仍有球对称性，故可由高斯定理求解。

作同心球面为高斯面

$r<R$ $\qquad \oint \vec{E}_{内}\cdot d\vec{S}=E_{内}4\pi r^2=\frac{\sum q}{\varepsilon_0}$

又因 $\qquad \sum q=\int_0^r br4\pi r^2dr=\int_0^r 4b\pi r^3dr=b\pi r^4$

$$E_{内}=\frac{b\pi r^4}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{br^2}{4\varepsilon_0}$$

$r>R$ $\qquad \sum q=\int\rho dV=\int_0^R 4br\pi r^2dr=\int_0^R b4\pi r^3dr=b\pi R^4$

$$\oint \vec{E}_{外}\cdot d\vec{S}=E_{外}4\pi r^2=\frac{b\pi R^4}{\varepsilon_0}$$

$$E_{外}=\frac{bR^4}{4\varepsilon_0 r^2}$$

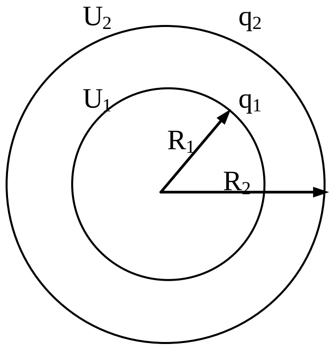
9、两个同心的均匀带电球面，半径分别为 R_1=5.0cm，R_2 =20.0cm，已知内球面的电势为 U_1=60V，外球面的电势 U_2= –30V．求：

(1) 内、外球面上所带电量；

(2) 在两个球面之间何处的电势为零。

解：（1） $\Delta U_{R_1R_2}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2})=60-(-30)=90V$

$$q_1=6.67\times10^{-10}C$$



又 $$U_{R_1}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=60V$$

$$q_2=-1.33\times10^{-9}C$$

（2）令 r 处 U（r）=0

即 $$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=0$$

所以 r=0.10m=10.0cm

10、电荷 Q 均匀地分布在半径为 R 的球体内，试证明离球心 r (r<R) 处的电动势为

$$U=\frac{Q\left(3R^2-r^2\right)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

解：先由高斯定理分别求出球内、球外 E

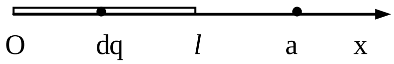
$$E=\begin{cases}\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & r<R\\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R\end{cases}$$

$$U=\int_r^\infty\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^R\vec{E}_1\cdot d\vec{l}+\int_R^\infty\vec{E}_2\cdot d\vec{l}=\frac{Q\left(3R^2-r^2\right)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

11、一均匀带电细杆，长为ℓ=15.0cm，电荷线密度 $\lambda = 2.0\times10^{-7}\,\mathrm{C/m}$ 求:

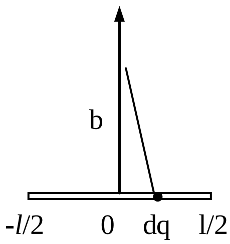
(1) 细杆延长线上与杆的一端相距 a=5.0cm 处的电势。

(2) 细杆中垂线上与细杆相距 b=5.0cm 处的电势。



解：（1） $dU = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0(l+a-x)} = \dfrac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(l+a-x)}$

$$U = \int_0^l \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(l+a-x)} = 2.5\times10^3\,\mathrm{V}$$



（2） $dU = \dfrac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+b^2}}$

$$U = \int_{-\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+b^2}} = 4.3\times10^3\,\mathrm{V}$$

12、半径为 R 的无限长圆柱体中，电荷按体密度ρ均匀分布，分别以 (1) 轴线处为零电势位置；(2) 圆柱体表面为零电势位置。求圆柱体内、外的电势。

解：场强分布

$r<R$ $\qquad \oint \vec{E}d\vec{s} = E\cdot 2\pi r l = \dfrac{\rho\pi r^2 l}{\varepsilon_0}$ $\qquad E = \dfrac{\rho\ r}{2\varepsilon_0}$

$r>R$ $\qquad E\cdot 2\pi r l = \dfrac{\rho\pi R^2 l}{\varepsilon_0}$ $\qquad E = \dfrac{R^2\rho}{2\varepsilon_0 r}$

（1） $r<R$ $\qquad U = \int_r^0 \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}dr = -\dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}r^2$

$r>R$ $\qquad U = \int_r^R \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_R^0 \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}(2\ln\dfrac{r}{R}+1)$

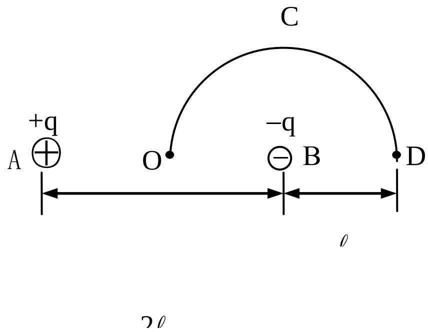
（2） $r<R$ $\qquad U = \int_r^R E\,dr = \dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}(R^2 - r^2)$

$r>R$ $\qquad U = \int_r^R E dr = -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R}$

13、如图所示，$\overline{AB}=2\ell$，弧 OCD 是以 B 为中心，ℓ为半径的半圆。A 点有点电荷+q，B 点有点电荷−q。

(1) 把单位正电荷从 O 点沿弧 OCD 移到 D 点，电场力作了多少功?

(2) 若把单位负电荷从 D 点沿 AB 的延长线移到无穷远处，电场力作功又为多少?



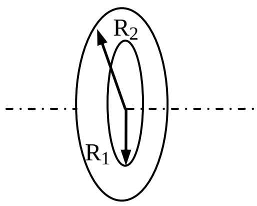
解：（1） $U_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 l}=0$

$$U_D=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 3l}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}=-\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

$$A_1=q(U_0-U_D)=U_0-U_D=\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

(2) $A_2=-(U_0-U_\infty)=\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$

14、在静电透镜实验装置中，有一均匀带电的圆环，内半径为 R_1，外半径为 R_2，其电荷面密度为 σ(负电)，现有一电子沿着轴线从无限远射向带负电的圆环，欲使电子能穿过圆环，它的初始动能至少要多大?



解：设电子在无穷远处初动能为 E_k，0 点电子动能 ≥ 0

$$A=e(U_0-U_\infty)=\Delta E_K=E_K$$

$$U_0=\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}=\int_{R_1}^{R_2}-\sigma\frac{2\pi r\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R_2-R_1)$$

$$E_K=-eU_0=\frac{\sigma e}{2\varepsilon_0}(R_2-R_1)$$

15、一电偶极子原来与均匀电场平行，将它转到与电场反平行时，外力作功为 A，则当此电偶极子与场强成 45°角时，此电偶极子所受的力矩为多少?

解：$\because A=\int M d\theta=\int_0^{\pi} PE\sin\theta d\theta=2PE$

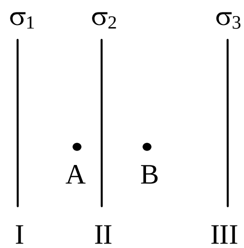
$$M=PE\sin 45^{\circ}=\frac{A}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}A}{4}$$

（ $A=P_eE-(-P_eE)=2P_eE$ ）

16、如图所示，三块互相平行的均匀带电大平面，电荷密度为 σ_1=1.2×10^{-4}C/m^2， σ_2=0.2×10^{-4}C/m^2，σ_3=1.1×10^{-4}C/m^2，A 点与平面 II 相距为 5.0cm，B 点与平面 II 相距 7.0cm，求:

(1) A、B 两点的电势差；

(2) 把电量 q_0= −1.0×10^{-8}C 的点电荷从 A 点移到 B 点，外力克服电场力作功多少?



解：（1） $E_A=E_1-E_2-E_3=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}=\frac{-10^{-3}}{2\varepsilon_0}$

$$E_B=E_1+E_2-E_3=\frac{3\times10^{-3}}{2\varepsilon_0}$$

$$U_A-U_B=E_Ad_1+E_Bd_2=\frac{-10^{-3}}{2\varepsilon_0}\times5\times10^{-2}+\frac{3\times10^{-3}}{2\varepsilon_0}\times7\times10^{-2}$$

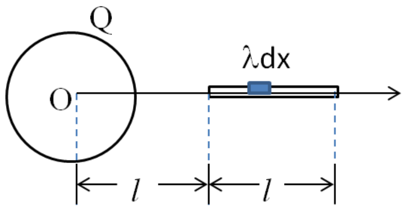
$$=\frac{16\times10^{-7}}{2\varepsilon_0}=\frac{16\times10^{-7}}{2\times8.85\times10^{-12}}=9.1\times10^{4}\,V$$

（2） $A_{外}+A_{静}=0$

$$A_{外}=-A_{静}=\Delta W=q_0(U_B-U_A)$$

$$=1.0\times10^{-2}\times9.1\times10^{4}=9.1\times10^{-4}\,J$$

17、半径为 R 的均匀带电球面，带电量为 Q，沿半径方向上有一均匀带电细线，线电荷密度为λ，长度为 *l*, 细线近端离球心的距离为 *l*, 如图所示。设球和细线上的电荷分布固定，求细线在电场中的电势能。



解：$dW = \lambda\, dx \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}$

$$W = \int_l^{2l} \lambda\, dx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln 2$$

18、有一半径为 R，电荷密度为 σ 的均匀带电的圆盘，求:

(1) 圆盘轴线上任意一点的电势；

(2) 利用场强和电势梯度的关系求该点场强。

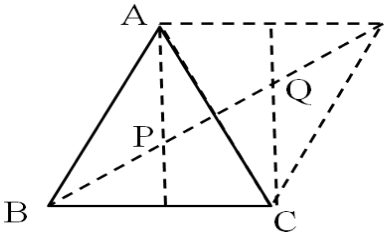
解：取 $dq = 2\pi r dr$

$$U = \int_0^R \frac{\sigma\, 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{x^2 + R^2} - x)$$

$$E = -\frac{dU}{dx} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + R^2}} - 1\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)$$

拓展题

1、如图所示，三根等长的带电绝缘细棒连成正三角形，每根棒上均匀分布等量同号电荷，测得图中 P、Q 两点(均为相应正三角形的中心)的电势分别为 U_P 和 U_Q。若将棒 BC 取走，试求此时 P 点和 Q 点的电势。



解：设三棒对 P 点及 AC 对 Q 点的电势为 U_1，AB、BC 棒对 Q 点的电势为 U_2，则

$$U_P = 3U_1, \quad U_Q = U_1 + 2U_2$$

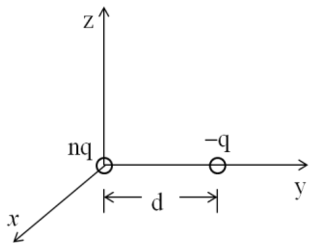
解得：$U_1 = \frac{1}{3}U_P, \quad U_2 = \frac{1}{2}U_Q - \frac{1}{6}U_P$

抽去 BC 棒后：$U'_P = U_P - U_1 = \frac{2}{3}U_P$

$$U'_Q = U_Q - U_2 = \frac{1}{2}U_Q + \frac{1}{6}U_P$$

2、有两个点电荷带电量为 nq 和–q（n >1），相距为 d，如图所示。试证电势为零的等势面为一个球面，并求出球面半径及球心坐标（设无限远处为电势零点）。

解：任意 P 点的电势为



$$U_P = \frac{nq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+(y-d)^2+z^2}}$$

令 $U_P = 0$

得 $x^2 + (y - \frac{n^2 d}{n^2-1})^2 + z^2 = (\frac{nd}{n^2-1})$ ——圆方程

大学物理下习题册二

1、一导体球半径为 R_1，其外同心地罩以内、外半径分别为 R_2 和 R_3 的厚导体壳，此系统带电后内球电势为 U，外球所带电量为 Q，求此系统各处的电势和电场分布。

解：设内球带电量为 $q_{内}$,依据题意可知电场分布 $$E=\begin{cases}0 & r<R_1\\ \dfrac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1<r<R_2\\ 0 & R_2<r<R_3\\ \dfrac{q_{内}+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R_3\end{cases}$$

$$U=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr+\int_{R_3}^{\infty}\frac{q_{内}+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{q_{内}+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$q_{内}=\frac{U4\pi\varepsilon_0 R_1R_2R_3-R_1R_2Q}{R_2R_3-R_1R_3+R_1R_2}$$

$$\therefore\quad U=\begin{cases}U & r<R_1\\ \dfrac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{-q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\dfrac{q_{内}+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} & R_1<r<R_2\\ \dfrac{q_{内}+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} & R_2<r<R_3\\ \dfrac{q_{内}+Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r>R_3\end{cases}$$

注上式采用带电球壳的电势叠加，也可用 $u=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 获得

2、半径为 R_1 和 R_2 ($R_1<R_2$)的相互绝缘的两同心导体球壳，现使内球壳带上+q 电量时求: (1) 外球的电荷与电势；(2) 若把外球接地后再重新绝缘，外球的电势与电荷；

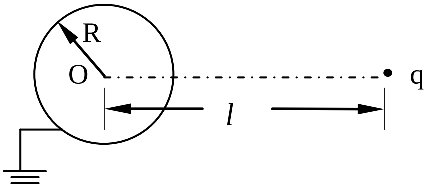
(3) 然后把内球壳再接地，这时内球的电荷为多少？这时外球的电势又为多少?

解：(1) $q_{外}=0\quad U_{外}=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{R_2}^{\infty}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

(2) $q_{外}=-q\quad U=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}=0\quad(\because \vec{E}_{外}=0)$

(3) $U_{内}=\dfrac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=0\Rightarrow q_{内}=\dfrac{R_1}{R_2}q$

$$U_{外}=\frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=\frac{\frac{R_1}{R_2}q-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2{}^2}=\frac{q(R_1-R_2)}{4\pi\varepsilon_0 R_2{}^2}$$



3、如图所示，一个接地导体球半径为 R，有一个电量为 q 的点电荷，点电荷距球心的距离为l，求导体球表面的感应电荷 Q。

解：设接地导体上的感应电荷为 Q，分布在导体球的表面， 因导体球接地，球上各点电势均为零，即球心 O 点处电势 U_0 为零。U_0 由点电荷 q 和球面上感应电荷共同产生

$$U_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} = 0$$

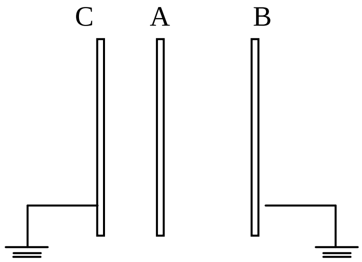
$$Q = -\frac{R}{l} q$$

4、A、B、C 是三块平行金属板，面积均为 200cm^2，A、B 相距 4.0mm，A、C 相距 2.0mm，B、C 两板均接地，现使 A 板带正电 3.0×10^{-7}C 不计边缘效应，求：

(1) B 板和 C 板上的感应电荷；

(2) A 板的电势。

解：（1）设 B 板感应电荷为-q_1，C 板的感应电荷为-q_2



$$q_1 + q_2 = q \qquad (1)$$

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{q_1}{\varepsilon_0 s}$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{q_2}{\varepsilon_0 s}$$

得 $$\frac{E_1}{E_2} = \frac{q_1}{q_2} \qquad (2)$$

根据题意 $$U_A - U_B = U_A - U_C$$

$$E_1 d_1 = E_2 d_2$$

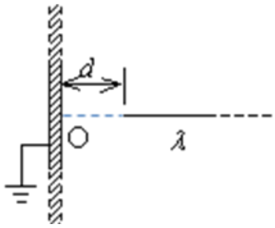
得 $$\frac{E_1}{E_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{2} \qquad (3)$$

由（1）、（2）、（3）式可得 $q_1 = 1.0\times10^{-7}\,\mathrm{C}$， $q_2 = 2.0\times10^{-7}\,\mathrm{C}$ 。

（2） $$U_A = E_1 d_1 = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S} d_1$$

$$= \frac{1.0\times10^{-7}\times4.0\times10^{-3}}{8.85\times10^{-12}\times0.2} = 2.3\times10^{3}\,\mathrm{V}$$

5、一接地的无限大厚导体板的一侧有一半无限长的均匀带电直线垂直于导体板放置，带电直线的一端与板相距 d（如图），已知带电直线的线电荷密度为λ，求板面上垂足点 O 处的感应电荷面密度。



解：取坐标如图所示，O 为原点，x 轴沿带电直线，

设点 O 处的感应电荷面密度为σ_0，导体板内与 O

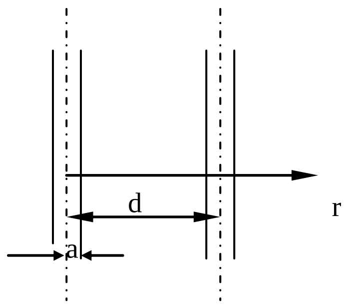
相靠近的点O'（图中黑点处）的场强$E_0{}' = 0$，

由场强叠加原理

$$E_0{}' = E_\lambda + E_{\sigma_0} = \int_d^\infty \frac{-\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2} + \frac{-\sigma_0}{2\varepsilon_0} = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{-\sigma_0}{2\varepsilon_0} = 0$$

上式中假设λ、σ_0 均为正，因此由感应电荷和带电直线对O'点产生的场强才均指向 x 轴负方向，解得 $\sigma_0 = -\dfrac{\lambda}{2\pi d}$，式中负号表示$\sigma_0$ 和直线所带电荷异号。

6、半径均为 a 的两根平行长直导线，相距为 d (d>>a)，求单位长度上的电容。



解：设两导线间任意 P 点，距导线中心为 r，则 P 点 E 为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (d-r)}$$

两导线间的电势差 U_A-U_B

$$U_A - U_B = \int \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int Edr = \int_a^{d-a}\left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (d-r)}\right]dr$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{d-a}$$

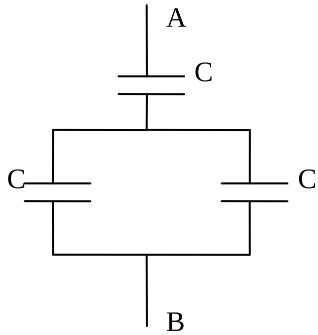
$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a}$$

$$C = \frac{q/l}{U_A - U_B} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{d-a}{a}}$$

7、如图，连接三个电容器，$C_1 = 50\mu F, C_2 = 30\mu F, C_3 = 20\mu F,$

（1）求该连接的总电容；

（2）当在 AB 两端加 100V 的电压后，各电容器上的电压和电量各是多少？



解:（1）设总电容为 C, 则 $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3}$

$$C = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} = 25\mu F$$

（2）设 AB 两端的电压为 U

$$Q_1 = CU = 25\times10^{-6}\times100 = 2.5\times10^{-3}C$$

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{2.5\times10^{-3}}{50\times10^{-6}} = 50V \qquad U_2 = U_3 = U - U_1 = 100 - 50 = 50V$$

$$Q_2 = C_2U_2 = 30\times10^{-6}\times50 = 1.5\times10^{-3}C \qquad Q_3 = C_3U_3 = 20\times10^{-6}\times50 = 1.0\times10^{-3}C$$

8、一空气平行板电容器，极板面积 S=0.2m^2，间距 d=1.0cm，充电使其两板电势差 U_0=3×10^{3}V，然后断开电源再在两极板间充满介质，最后两板间电压降至 1×10^{3}V，试计算: (1) 原空气电容器电容 C_0； (2) 每一极板上所带电量 Q；

(3) 两板间原电场强度 E_0； (4) 放入介质后的电容和两板间场强 E；

(5) 介质极化后每一面上的极化电荷 Q'； (6) 介质的相对介电常数ε_r；

解: (1) $$C_0 = \frac{\varepsilon_0 s}{d} = \frac{8.85\times10^{-12}\times0.2}{1.0\times10^{-2}} = 1.77\times10^{-10}F$$

(2) $$Q_0 = C_0U_0 = 1.77\times10^{-10}\times3\times10^3 = 5.31\times10^{-7}C$$

(3) $$E_0 = \frac{U_0}{d} = \frac{3\times10^3}{1.0\times10^{-2}} = 3\times10^5\ V/m$$

(4) $$C = \frac{Q}{U} = \frac{5.31\times10^{-7}}{1\times10^3} = 5.31\times10^{-10}F$$

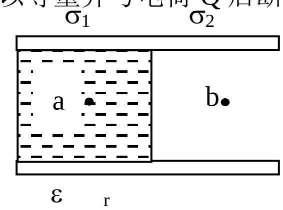
$$E = \frac{U}{d} = \frac{1000}{1\times10^{-2}} = 10^5\ V/m$$

(5) $$Q' = \sigma' s = (E_0 - E_1)\varepsilon_0 s$$

$$= (3\times10^5 - 10^5)\times8.85\times10^{-12}\times0.2 = 3.54\times10^{-7}C$$

(6) $$\varepsilon_r = \frac{C}{C_0} = \frac{5.31\times10^{-10}}{1.77\times10^{-10}} = 3$$

9、平行板电容器极板面积为 S，两板间距离为 d，当极板上充以等量异号电荷 Q 后断开电源，然后在电容器的左半面插入相对介电常数为 $\varepsilon_r=3$ 的陶瓷介质板(忽略边缘效应)，求： (1) 极板上的自由电荷面密度分布σ_1、σ_2； (2) 两极板之间 a、b 两点电场强度 E、电位移矢量 D 和极化强度 P； (3) 陶瓷板插入前、后两极板电势差变化多少?



解：（1）左右两边电势差相等 $E_1 d=E_2 d$ $\qquad \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}d=\dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r}d\rightarrow\dfrac{\sigma_1}{3\varepsilon_0}=\dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$ (1)

且 $\sigma_1\dfrac{S}{2}+\sigma_2\dfrac{S}{2}=Q$ (2)

由（1)、（2）解得 $\sigma_1=\dfrac{3Q}{2S},\qquad \sigma_2=\dfrac{Q}{2S}$

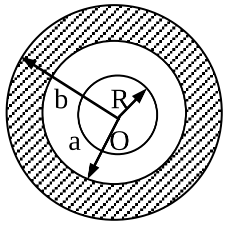
（2）此组合可看作两电容器的并联，电势差相等，距离相等

$$\therefore E_a=E_b=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\qquad D_a=\sigma_1=\frac{3Q}{2S},\qquad D_b=\sigma_2=\frac{Q}{2S}$$

$$P_a=x_e\varepsilon_0E_a=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0E_a=\frac{Q}{S}\qquad P_a=0\ (\text{真空}\varepsilon_r=1)$$

(3) $$\Delta U=U-U'=\frac{Qd}{\varepsilon_0S}-\frac{Qd}{2\varepsilon_0S}=\frac{Q}{2\varepsilon_0S}d$$

10、半径为 R 的导体球，带有电荷 Q，球外有一均匀电介质的同心球壳，球壳内、外半径分别为 a 和 b，相对介电常数为 ε_r，如图所示，试求： (1) 介质内、外的电位移矢量 D 和电场强度 E ； (2) 介质内的电极化强度 **P** 和介质两表面上的极化电荷面密度σ’； (3) 画出电场线和电位移线，加以比较。



解：（1）由题可知场的分布是球对称，应用高斯定理为半径 r 的同心球面

$$\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q\qquad D=\frac{q}{4\pi r}\qquad E=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$r<R \qquad D_1=0 \qquad E_1=0$

$R<r<a \qquad D_2=\dfrac{Q}{4\pi r^2},E_2=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

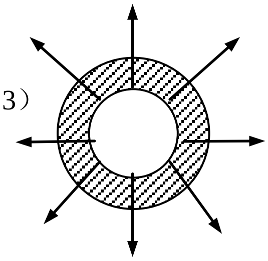
$a<r<b \qquad D_3=\dfrac{Q}{4\pi r^2},E_3=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$

$r>b \qquad D_4=\dfrac{Q}{4\pi r^2},E_4=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ （ E, D方向均为径向 ）

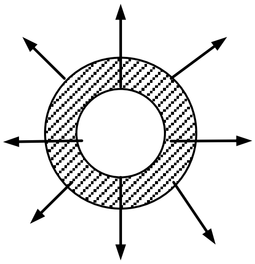
（2）介质内的极化强度 $P=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)E_3=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}=(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r})\dfrac{Q}{4\pi r^2}$

$$\sigma_a'=P_a\cos\pi=-(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{Q}{4\pi a^2};\quad \sigma_b'=P_b\cos 0^0=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{Q}{4\pi b^2}$$

（3）



电位移线



电场线

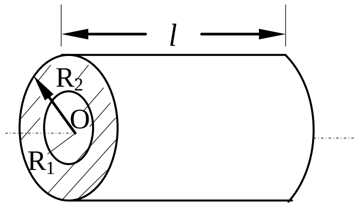


图 9-9

11、圆柱形的电容器由半径为 R_1 的导线和与它同轴的导体圆筒构成， 圆筒的半径为 R_2，长为 l，其间充满相对介电常数为ε_r的溶液。设沿轴线单位长度导线上的电荷为 λ，单位长度圆筒上的电荷为–λ。 略去边缘效应，试求:

(1) 介质中电位移矢量 D、电场强度 **E** 和极化强度 **P** ；

(2) 两极的电势差；(3) 介质表面的极化电荷。

解：(1) 应用有介质时高斯定理 $\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = D2\pi r l = \lambda l$

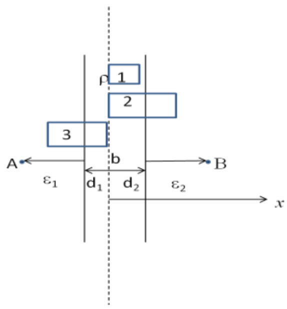
$$D = \frac{\lambda}{2\pi r} \qquad E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} \qquad P = \varepsilon_0 x_e E = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$$

方向： R_1 指向 R_2

(2) $U_1 - U_2 = \int_{R2}^{R1} E\cdot dr = \int_{R2}^{R1} \frac{\lambda\cdot dr}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}$

(3) $\sigma_1{}' = P\cos\pi = -(\varepsilon_r - 1)\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r R_1}$； $\sigma_2{}' = P\cos 0 = (\varepsilon_r - 1)\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r R_2}$

12、厚度为 b 的无限大平板内分布有均匀电荷密度（ρ>0）的自由电荷，在板外两侧分别充有介电常数为 ε_1、ε_2 的电介质，如图所示。求（1）板内外的电场分布；（2）板外的 A 点与 B 点分别距左右两板壁为 l，求电势差 U_{AB}



解：板内存在一平面 E 为零，以此面为原点建立图示坐标，设 d_1、d_2，$d_1+d_2=b$，作高斯面 1、2、3，见图示

板内 $\oint_1 \vec{D}\cdot d\vec{S} = D\cdot\Delta S = \rho\, x\Delta S \Rightarrow D = \rho\, x \qquad E = \frac{\rho\, x}{\varepsilon_0}$

板外 $\oint_2 \vec{D}_2\cdot d\vec{S} = D_2\cdot\Delta S = \rho\, d_2\Delta S \Rightarrow D_2 = \rho\, d_2 \qquad E = \frac{\rho\, d_2}{\varepsilon_2}$

$$\oint_3 \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = D_1 \cdot \Delta S = \rho\, d_1 \Delta S \Rightarrow D_1 = \rho\, d_1 \qquad E = \frac{\rho\, d_1}{\varepsilon_2}$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{d_1}{\varepsilon_1} = \frac{d_2}{\varepsilon_2} \qquad （1） \qquad d_1 + d_2 = b \qquad （2）$$

由（1）（2）得 $d_1 = \dfrac{e_1 b}{e_1 + e_2}$， $d_2 = \dfrac{e_2 b}{e_1 + e_2}$

板外 $\vec{E} = \begin{cases} -\dfrac{r\, b}{e_2 + e_1}\vec{i} & x < -d_1 \\ \dfrac{r\, b}{e_2 + e_1}\vec{i} & x > d_2 \end{cases}$

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{-d_1}^{d_2} E dx = \int_{-d_1}^{d_2} \frac{\rho x}{\varepsilon_0} dx = \frac{\rho b^2}{2\varepsilon_0}\left[\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right]$$

$$(\int_A^{-d_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{d_2}^{B_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0)$$

13、一单芯同轴电缆，中心为一半径 R_1=0.5cm 的金属导线，它外围包一层 ε_r=5 的固体介质，最外面是金属包皮。当在此电缆上加上电压后，介质内紧靠内表面处的场强 E_1 为紧靠外表面处的场强 E_2 的 2.5 倍。若介质的击穿场强 E_m=40kV/cm，求此电缆能受的最大电压是多少？

解：设内外圆筒单位长度带电量±λ，则介质中的场强 $E_1 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$

介质内外表面的场强 $E_1 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1}$ $\qquad E_2 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_2}$

根据题意 $E_1 = 2.5E_2$ 可解得 $R_2 = 2.5R_1 = 2.5 \times 0.5 = 1.25\text{cm}$

又 E_1 的场强最大，故电压升高后，该处先击穿。令 $E_1 = E_M$，则有

$$\lambda = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 E_M$$

电缆能承受的最大电压

$$U_M = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} dr = R_1 E_M \ln\frac{R_2}{R_1} = 18.3\text{kV}$$

11、半径均为 a 的两根平行长直导线，相距为 d (d>>a)，
求单位长度上的电容。

解：设两导线间任意 P 点，距导线中心为 r，则 P 点 E 为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-r)}$$

两导线间的电势差 U_A-U_B

$$U_A-U_B=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int Edr=\int_a^{d-a}\left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-r)}\right]dr$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a}-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{d-a}$$

$$=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a}$$

$$C=\frac{q/l}{U_A-U_B}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{d-a}{a}}$$

14、一空气平板电容器的电容 C=1.0 pF，充电到电量为 $Q=1.0\times10^{-6}$C 后将电源切断

(1) 求两极板间的电位差和电场能量；

(2) 将两极板拉到原距离的两倍，试计算拉开前后电场能量的变化；

解：(1) $$U=\frac{Q}{C}=\frac{1.0\times10^{-6}}{1.0\times10^{-12}}=1.0\times10^{6}\,V$$

$$W_e=\frac{Q^2}{2C}=\frac{\left(1.0\times10^{-6}\right)^2}{2\times1.0\times10^{-12}}=0.5J$$

(2) $$C'=\frac{\varepsilon_0 S}{2d}=\frac{1}{2}C$$

$$W'_e=\frac{Q^2}{2C'}=2W_e$$

$$\Delta W_e=W'_e-W_e=W_e=0.5J$$

15、电量为 Q_0，半径为 R_0 导体球，置于相对介电常数为ε_r的介质球壳中，如果介质的内半径为 R_0，外半径为 R，求:

(1) 介质中的电场能量密度；

(2) 贮存在介质球壳内的电场能量。

解：(1)能量密度 $\omega=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2$

由于场分布为球对称，应用高斯定理得

$$D=\frac{Q_0}{4\pi r^2} \qquad E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{Q_0}{4\pi r^2\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

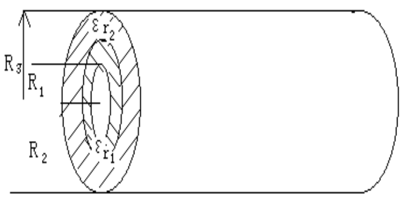
$$\omega=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\left[\frac{Q_0}{4\pi r^2\varepsilon_0\varepsilon_r}\right]^2=\frac{Q_0^{\ 2}}{32\pi^2 r^4\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

（2） $W=\int\omega_e dV=\int_{R_0}^{R}\frac{Q_0^{\ 2}}{32\pi^2 r^4\varepsilon_0\varepsilon_r}4\pi r^2 dr=\frac{Q_0^{\ 2}}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R})$

16、两层相对介电常数分别为ε_{r1}和ε_{r2}的介质，充满圆柱形电容器两极板之间 (如图)，电容器内、外两极圆筒在单位长度上的带电量分别为 λ 和–λ。求:

(1) 单位长度上的电容；

（2）此电容器系统单位长度上的电场的能量。



解：（1）设介质 1 中电场强度为 E_1,介质 2 中的电场强度为 E_2，由于在两介质中电场分布为轴对称，由高斯定理得

$$D=\frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$\therefore\quad E_1=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}r},\qquad E_2=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}r}$$

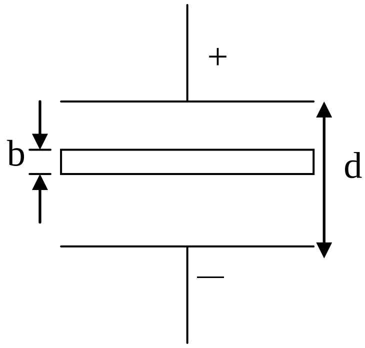
$$U_1-U_2=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}r}dr+\int_{R_2}^{R_3}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}r}dr$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}}\ln\frac{R_3}{R_2}$$

$$C=\frac{Q}{U_1-U_3}=\frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}}\ln\frac{R_3}{R_2}}$$

$$C_0=\frac{C}{l}=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_2}\ln\frac{R_2}{R_1}+\varepsilon_{r_1}\ln\frac{R_3}{R_2}}$$

（2） $$W_0=\frac{Q^2}{2C_0}=\frac{\lambda^2(\varepsilon_{r_2}\ln\frac{R_2}{R_1}+\varepsilon_{r_1}\ln\frac{R_3}{R_2})}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}}$$



拓展题：

1、一个平行板电容器，板面积为 S，板间距为 d，如图：

（1）充电后保持其电量 Q 不变，将一块厚为 b 的金属板平行于两极板插入，与金属板插入前相比，电容器储能增加多少？

（2）导体板进入时，外力（非电力）对它做功多少？是被吸入还是需要推入?

(3) 如果充电后保持电容器的电压 U 不变，则（1）（2）两问结果又如何？

解：（1）金属板插入前，电容器电容为$C_1=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

充电后，电容器能量为$W_1=\dfrac{Q^2}{2C_1}=\dfrac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$

金属板插入后，整个电容器可以看成两个电容器的串联组合，一个电容器两极板间距为 x，另一个电容器两极板间距为$d-(b+x)$，则整个电容器的电容为

$$C_2=\frac{C_{21}C_{22}}{C_{21}+C_{22}}=\frac{\frac{\varepsilon_0 S}{x}\bullet\frac{\varepsilon_0 S}{d-(b+x)}}{\frac{\varepsilon_0 S}{x}+\frac{\varepsilon_0 S}{d-(b+x)}}=\frac{\varepsilon_0 S}{d-b}$$

电量仍为 Q，则其能量为 $W_2=\dfrac{Q^2}{2C_2}=\dfrac{Q^2(d-b)}{2\varepsilon_0 S}$

金属板插入前后，电容器能量增量为 $W_2-W_1=\dfrac{Q^2(d-b)}{2\varepsilon_0 S}-\dfrac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S}=-\dfrac{Q^2 b}{2\varepsilon_0 S}$

（2）外力做功等于电容器能量增量，即 $A=W_2-W_1=-\dfrac{Q^2 b}{2\varepsilon_0 S}$

因为 $A<0$，所以金属板是被吸入的。

（3）$W_2-W_1=\ldots=\dfrac{\varepsilon_0 SbU^2}{2d(d-b)}$

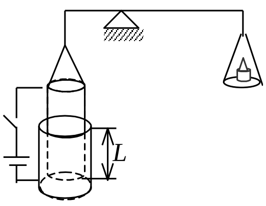
电容器电压不变，说明电容器与电源没有断开，此时，插金属板时，除了外力做功外，电源也会做功。设插入金属板前后，电容器电量分别为 Q_1 和 Q_2

$Q_1=C_1U\quad Q_2=C_2U$，插入金属板时，电源做功为 $A_1=(Q_2-Q_1)U=(C_2-C_1)U^2$

设外力做功为 A_1 则 $A_1+A_2=W_2-W_1$

由此可解得 $A_2=-\dfrac{1}{2}(C_2-C_1)U^2=-\dfrac{\varepsilon_0 SbU^2}{2d(d-b)}$ 金属板仍然是被吸入的。

2、如图所示，一电容器由内、外半径分别为 a 和 b 的两个同轴圆筒组成，其轴线处于竖直方向．外筒固定，内筒悬挂在天平的一端．天平平衡时，内筒只有长度为 L 的一部分置于外筒中．当接上电源使两筒之间的电势差为 U 时，为了使天平保持平衡，右边称盘中需加多大质量的砝码？



解：未接电源时，电容为 $C=\dfrac{2pe_0 L}{\ln\left(b/a\right)}$

接电源后，由于异号电荷的相互吸引力，天平失去平衡，内筒将下移，设其位移为 dL，

电容的增量为 $dC=\dfrac{2pe_0 dL}{\ln\left(b/a\right)}$

在电压 U 不变下，电容器的能量增量为 $dW=\dfrac{1}{2}U^2dC=\dfrac{pe_0U^2}{\ln\left(b/a\right)}dL$

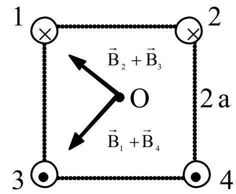
且 $$F=\frac{dW}{dL}=\frac{pe_0U^2}{\ln\left(b/a\right)}$$

为使天平保持平衡，增加砝码的质量

$$F=mg\ ?\quad m\quad\frac{pe_0U^2}{g\ln\left(b/a\right)}$$

大学物理下习题册三

1、四条相互平行的无限长直载流导线，电流强度均为 I，如图放置，若正方形每边长为 2a，求正方形中心 O 点的磁感应强度的大小和方向。



解：$\vec{B}_0=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3+\vec{B}_4$

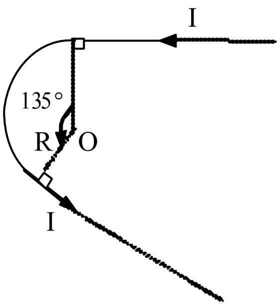
无限长载流直导线产生的磁感应强度 $B=\dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I}{r}$

由图中的矢量分析可得

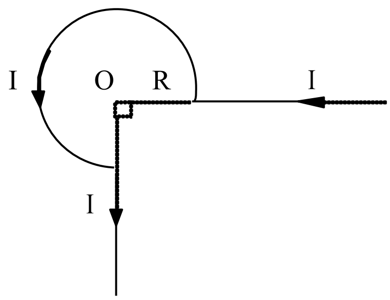
$$B_2+B_4=2\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\sqrt{2}a}=\frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{2}a}$$

$$B_0=2\frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{2}a}\cdot\cos 45^0=\frac{\mu_0}{\pi}\frac{I}{a}$$ 方向水平向左

2、把一根无限长直导线弯成图 (a)、(b) 所示形状，通以电流 I，分别求出 O 点的磁感应强度 **B** 的大小和方向。



（a）



（b）

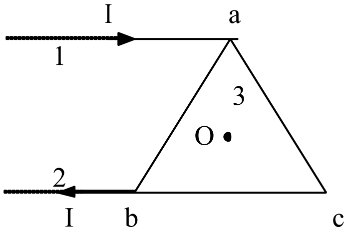
解：（a）（b）均可看成由两个半无限长载流直导线 1、3 和圆弧 2 组成，且磁感应强度在 O 点的方向相同

（a）$B_0=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}+\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}+\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}\cdot\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{\mu_0 I}{16\pi R}(8+3\pi)$ 方向垂直纸面向外。

（b）由于 O 点在电流 1、3 的延长线上，所以 $\vec{B}_1=\vec{B}_3=0$

$$B_0=B_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\cdot\frac{3\pi}{2}=\frac{3\mu_0 I}{8R}$$ 方向垂直纸面向外。

3、真空中有一边长为ℓ的正三角形导体框架，另有互相平行并与三角形的bc边平行的长直导线1和2分别在a点和b点与三角形导体框架相连（如图）。已知直导线中的电流为I，求正三角形中心点O处的磁感应强度**B**。



解：三角形高为 $h = l\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}l$

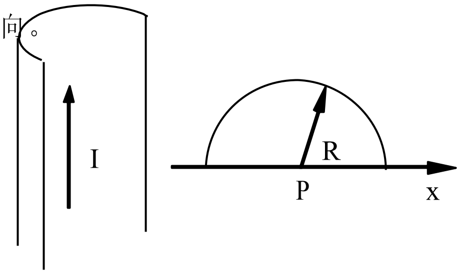
$$\vec{B}_3 = 0$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{2}{3}h} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}l} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi l}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{1}{3}h}(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 60^\circ) = \frac{\mu_0 I}{4\pi l}(2\sqrt{3}-3)$$

$$B_0 = B_1 + B_2 = \frac{3\mu_0 I}{4\pi l}(\sqrt{3}-1)$$

4、在半径为R=1.0cm的“无限长”半圆柱形金属片中，自下而上通以电流I=5.0A，如图所示。试求圆柱轴线任一点P处磁感应强度**B**的大小和方向。

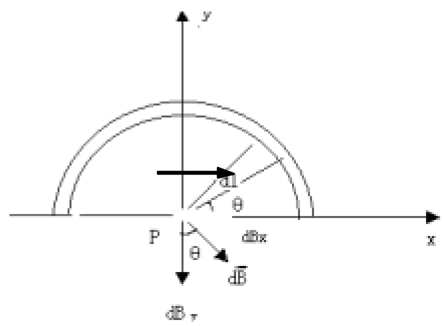


解：该金属薄片可看作由无数无限长直导线元叠加而成，对应于dl窄条的无限长直导线的电流为

$$dI = \frac{I}{\pi R}dl = \frac{I}{\pi R}Rd\theta = \frac{I}{\pi}d\theta$$

它在P点产生的磁感应强度dB

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{R} = \frac{\mu_0}{2\pi R}\frac{I}{\pi}d\theta = \frac{\mu_0}{2\pi^2}\frac{I}{R}d\theta \quad \text{方向如图}$$



$$dB_x = dB\sin\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\sin\theta d\theta$$

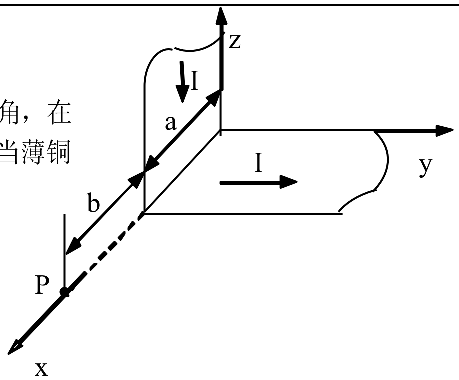
$$dB_y = -dB\cos\theta = -\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\cos\theta d\theta$$

$$B_x = \int dB_x = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

$$B_y = \int dB_y = \int_0^{\pi} -\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\cos\theta d\theta = 0$$

$$\therefore \quad B_P = B_x = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} = \frac{4\pi\times 10^{-7}\times 5.0}{\pi^2\times 1.0\times 10^{-2}} = 6.37\times 10^{-5}\,(T)$$

方向为 x 轴正方向。



5、如图所示，长直薄铜片的宽度 a ，弯成一直角，在角延长线上离铜片一条边距离 b 处有一 P 点。求当薄铜片均匀流过电流 I 时，P 处的磁感应强度 。

解：两块半无限长通电薄铜片 1、2，可看成由无数半无限长直导线元叠加而成，导线元电流

$$dI = \frac{I}{a}dx$$

$$dB_1 = \frac{\mu_0 dI}{4\pi(a+b-x)} = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi a(a+b-x)}$$

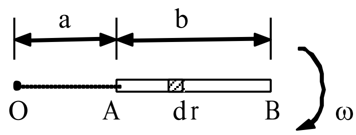
$$B_1 = \int_0^a \frac{\mu_0 I dx}{4\pi a(a+b-x)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\ln\frac{a+b}{a} \qquad \text{方向} -y$$

同理 $B_2 = B_1$ 方向 $-z$

$$B_p = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{2}B_1 = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi a}\ln\frac{a+b}{a}$$

方向 yz平面内与 y方向成 225^0 角。

或 $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\ln\frac{a+b}{a}(-\hat{j}-\hat{k})$



6、如图所示，均匀带电刚性细杆 AB，电荷线密度为λ，绕通过 O 点垂直于纸平面的轴以ω角速度匀速转动，(O 点在细杆 AB 延长线上)，求 O 点的磁感应强度 。

解：方法一：运动电荷的叠加，根据公式 $\vec{B} = \frac{\mu_0 q\,\vec{v}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi r^2}$

$$dB_0 = \frac{\mu_0 dq\, v}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 \lambda\, dr\, r\omega}{4\pi r^2}$$

$$B_0 = \int_a^{a+b}\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi r}dr = \frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

方法二：等效载流圆环在圆心的叠加，等效电流 $dI = \frac{\omega}{2\pi}\lambda\, dr$

$$dB_0 = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi r}dr$$

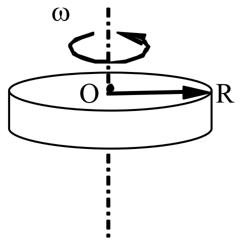
$$B_0 = \int_a^{a+b}\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi r}dr = \frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

7、一塑料圆盘，半径为 R，可通过中心垂直于盘面的轴转动，设角速度为 ω，

(1) 当有电量为 +q 的电荷均匀分布于圆盘表面时，求圆盘中心 O 点的磁感应强度 **B**;

(2) 此时圆盘的磁距；

(3) 若圆盘表面一半带电 +q/2，另一半带电 -q/2，求此时 O 点的磁感应强度 **B**。



解：（1）盘的电荷密度为 $\sigma=\dfrac{q}{\pi R^2}$，取半径为 r、宽度为 dr 的圆环元，带电量为 $dq=\sigma 2\pi r dr$，等效电流为

$$dI=\frac{\omega}{2\pi}dq=\sigma\omega\, r\, dr$$

在圆心处产生的磁感应强度为

$$dB=\frac{\mu_0 dI}{2r}=\frac{\mu_0}{2r}\sigma\omega\, r dr=\frac{1}{2}\mu_0\omega\sigma\, dr$$

$$B_0=\int dB=\int_0^R\frac{1}{2}\mu_0\omega\sigma dr=\frac{1}{2}\mu_0\omega\sigma R=\frac{\mu_0\omega q}{2\pi R}$$ 方向垂直圆盘向上

（2）上述细环的磁矩 $dP_m=SdI=\pi r^2 dI=\dfrac{\omega q}{R^2}r^3 dr$

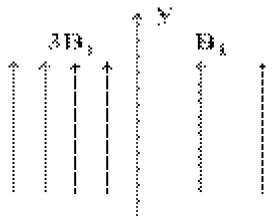
则圆盘的总磁矩 $P_m=\int dP_m=\int_0^R\dfrac{\omega q}{R^2}r^3 dr=\dfrac{1}{4}q\omega R^2$

（3）由于盘一半带正电，一半带负电，当圆盘旋转时，相当于两个方向相反的电流，所以在盘心处合磁场为零。

8、一无限大均匀载流平面置于外场中，左侧磁感应强度量值为 B_1，右侧磁感应强度量值为 $3B_1$，方向如图所示。试求:

(1) 载流平面上的面电流密度 $\vec{i}$；

(2) 外场的磁感应强度 B。



解：

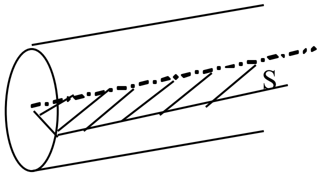
$$B_1=B_0-\frac{1}{2}\mu_0 i$$

$$3B_1=B_0+\frac{i}{2}\mu_0$$

$$2B_1=\mu_0 i\Rightarrow i=\frac{2B_1}{\mu_0}$$

$$B_1=B_0-\frac{1}{2}\mu_0 i=B_0-B_1\Rightarrow B_0=2B_1$$

9、一根很长的铜线均匀通以电流 I＝10A，在导线内部作一平面，如图所示。求通过平面 S 单位长度上的磁通量。



解： 由安培环路定律可求得圆柱内任意一点的 B

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$B\,2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2}\cdot \pi r^2$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Ir}{R^2}$$

在距圆柱轴线为 r 与 r+dr 处取一面积元 dS，通量为

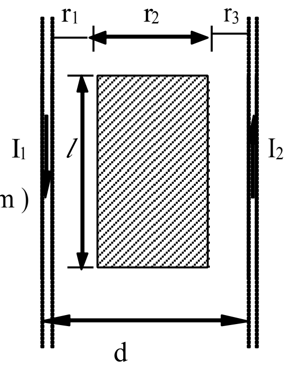
$$d\Phi = \vec{B}\cdot d\vec{S} = BdS$$

$$\Phi = \int BdS = \int_0^R \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Ir}{R^2}dr = \frac{\mu_0 I}{4\pi} = 10^{-6}(Wb)$$

10、两平行长直导线相距 d＝40cm，每根导线载有电流 $I_1＝I_2$=20A，如图所示。求:

(1) 两导线所在平面内任意一点的磁感应强度 **B** ；

(2) 通过图中斜线所示面积的磁通量 （$r_1 = r_3$=10cm ，l=25cm）



解（1）两导线产生的磁场在 P 点的方向相同，设 P 点离 I_1 为 x

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-x)}$$

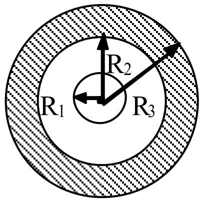
（2）取面积元 $dS = l dx$

$$d\Phi = \vec{B}\cdot d\vec{S} = BdS = [\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-x)}]\, l dx$$

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{r_1}^{r_1+r_2}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} l dx + \int_{r_1}^{r_1+r_2}\frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-x)} l dx = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi}\ln\frac{r_1+r_2}{r_1} + \frac{\mu_0 I_2 l}{2\pi}\ln\frac{d-r_1}{d-r_1-r_2}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 l}{\pi}\ln\frac{d-r_1}{r_1} = 2.2\times 10^{-6}\ \text{韦伯}$$

11、一根很长的同轴电缆，由一导体圆柱（半径为 R_1）和同一轴的导体圆管（内、外半径分别为 R_2 和 R_3）构成，使用时使电流 I 从导体圆柱流出，从导体圆管流回。设电流都是均匀地分布在导体的横截面上，求磁感应强度的分布。



解：由于电流分布具有轴对称性，可用安培环路定律求解

$r < R_1 \qquad B\cdot 2\pi r = \mu_0 \dfrac{I\pi r^2}{\pi R_1^2} = \dfrac{\mu_0 I r^2}{R_1^2} \qquad \therefore B_1 = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$

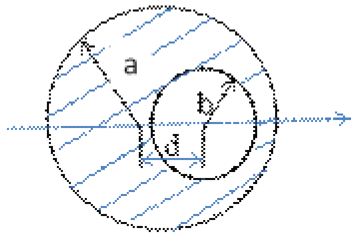
$R_1 < r < R_2 \qquad B 2\pi r = \mu_0 I \qquad B_2 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$R_2 < r < R_3 \qquad B\cdot 2\pi r = \mu_0 (I - \dfrac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} I)$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2})$$

$r > R_3 \qquad \oint_{(4)} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I = \mu_0 (I - I) = 0 \qquad B_4 = 0$

12、如图所示，在半径为 a 的圆柱形长直导线中挖有一半径为 b 的圆柱形空管（a.>2b）,空管轴线与柱体轴线平行，相距为 d ，当电流仍均匀分布在横截面上且电流为 I 时，求空管内磁感应强度 B 的分布。



解：空管的存在使电流分布失去对称性，采用"填补法"将空管部分等效为同时存在电流密度为 j 和-j 的电流，其中 $j = \dfrac{I}{\pi(a^2 - b^2)}$ 这样，空间任一点的磁场 B 可以看成由半径为 a、电流密度为 j 的长圆柱形导体产生的磁场 B_1 和半径为 b、电流密度为 -j 的长圆柱形导体产生的磁场 B_2 的矢量和，

设 P 点到大圆柱和小圆柱轴线的距离分别为 R 和 r，由安培环路定理得

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2} Rj \qquad B_2 = \frac{\mu_0}{2} rj$$

其中 $\vec{B}_1$ 与 $\vec{R}$ 垂直，$\vec{B}_2$ 与 $\vec{r}$ 垂直，如图（b）所示，由余弦定理得

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos\alpha = \frac{\mu_0^2 R^2 j^2}{4} + \frac{\mu_0^2 r^2 j^2}{4} - \frac{2\mu_0^2 j^2 Rr}{4}\cdot\frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr}$$

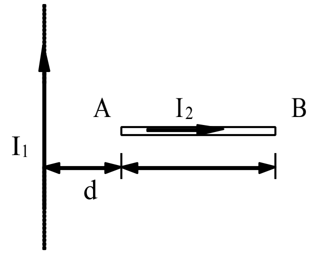
由此得空管内 P 点点磁感应强度为 $B = \dfrac{\mu_0 dj}{2} = \dfrac{\mu_0 d}{2}\cdot\dfrac{I}{\pi(a^2 - b^2)}$

方向与两轴线连线相垂直。

13、无限长直导线通过电流 I_1，在其旁边放一导线 AB，长为 l，与 I_1 共面并相互垂直，通以电流 I_2，试求:

(1) AB 导线受到的力的大小与方向;

(2) 当棒 A 端固定，则导线 AB 对 A 点的磁力距等于多少?



解:（1）在 I_2 上取 I_2dx，其受力方向垂直 AB 向上

$$dF = I_2 dx B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx,$$

$$F = \int dF = \int_d^{d+l} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{d+l}{d}$$

（2）I_2dx 受到的磁力矩为

$$dM = (x-d)\, dF = (x-d) \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx$$

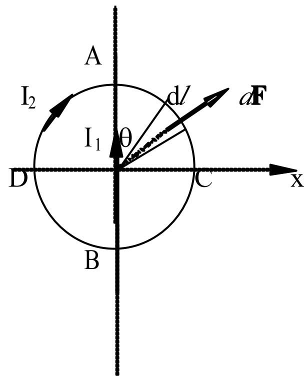
$$M = \int dM = \int_d^{l+d} (x-d) \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} (1 - d \ln \frac{d+l}{d})$$

14、有一无限长载流直导线，通以电流 I_1。另有一半径为 R 的圆形电流 I_2，其直径 AB 与电流 I_1 重合，在相交处绝缘，求:

(1) 半圆 ACB 受力大小和方向

(2) 整个圆形电流 I_2 所受合力大小和方向

(3) 线圈所受磁力矩 。



解:（1）在半圆上取一圆弧 dl，受力为

$$dF = I_2 dl B_1 \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} I_2 dl$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R \sin\theta} \cdot R d\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \sin\theta} d\theta$$

$$dF_x = dF \sin\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \sin\theta} d\theta \sin\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\theta} d\theta$$

$dF_y = dF\cos\theta$　　由于对称性分析 $\int dF_y = 0$

所以　$F_{ACB} = \int dF_x = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} d\theta = \frac{1}{2}\mu_0 I_1 I_2$　　方向沿x轴的正方向。

（2）同理可求 BDA 半圆受力

$F_{BDA} = \frac{1}{2}\mu_0 I_1 I_2$　　方向沿x正方向。

$$F = F_{ACB} + F_{BDA} = 2F_x = \mu_0 I_1 I_2$$

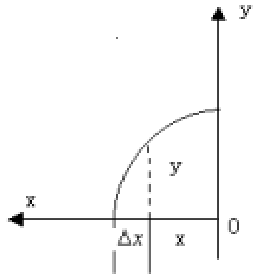
(3) $dM_m = x\, dF_y$　　由对称性分析可知　M=0

15 设电视显像管射出的电子束沿水平方向由南向北运动，电子能量为 12 000eV，地球磁场的垂直分量向下，大小为 B =5.5×10^{-5}Wb/m^2，问:

(1) 电子束将偏向什么方向？

(2) 电子的加速度为多少？

(3) 电子束在显象管内在南北方向上通过 20cm 时将偏转多远？



解：(1) 由洛仑兹力的方向判断电子束向东偏转

（2）由电子的动能可求其速度

$$V=\sqrt{\frac{2E}{m}}=\sqrt{\frac{2\times12000\times1.6\times10^{-19}}{9.11\times10^{-31}}}=6.48\times10^{7}\ \mathrm{m/s}$$

电子在磁场中受洛仑兹力的作用而作圆周运动，向心加速度为

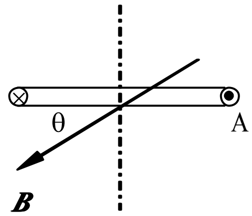
$$a_n=\frac{F}{m}=\frac{BeV}{m}=\frac{5.5\times10^{-5}\times1.6\times10^{-19}\times6.48\times10^{7}}{9.11\times10^{-31}}=6.2\times10^{14}\ \mathrm{m/s^2}$$

（3）电子运动的轨迹为圆，半径为 R

$$R=\frac{mV}{eB}=\frac{9.11\times10^{-31}\times6.48\times10^{7}}{1.6\times10^{-19}\times5.5\times10^{-3}}=6.4(\mathrm{m})$$

由图可知当电子在南北方向前进 y 时，它将偏转 Δx

$$\Delta x=R-\sqrt{R^2-y^2}=6.4-\sqrt{(6.4)^2-(0.2)^2}=2.98\mathrm{mm}$$



16、水平桌面上放置一个绕有 N 匝的圆线圈，其半径为 R，质量为 m，通有电流 I，由上往下看，电流为顺时针方向。若已知该处地磁场的磁感应强度为 B，其方向为向北且偏向下，与水平方向成一倾角θ （如图所示）。问当电流 I 超过多大时，线圈可从桌面上翘起？翘起的是哪一侧?

解：通电线圈受到的磁力矩

$$M=P_mB\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=NI\pi R^2\cos\theta B$$

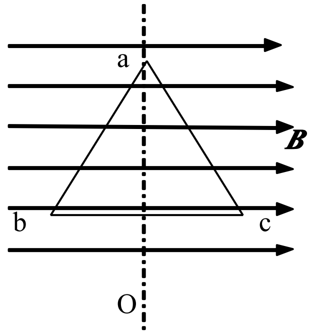
此力矩使线圈绕 A 点转动

线圈对 A 点的重力矩　　$M'=mgR$

线圈能翘起，应满足　　$M\ge M'$

所以　　$$I_{min}=\frac{mg}{BN\pi R\cos\theta}$$

17、边长为 ℓ=0.1m 的正三角形线圈放在磁感应强度 B=1T 的均匀磁场中，如图所示。使线圈通以电流 I=10A，求:



(1) 每边所受的力　　　(2) 磁力矩大小

(3) 从所在位置转到线圈平面与磁场垂直时磁力所作的功 。

解：(1) 根据安培力公式 $d\vec{F}=Id\vec{l}\times\vec{B}$

$$ac: F_{ac}=IlB\sin 60^0=10\times0.1\times1\times0.866=0.866(\mathrm{N})$$

方向垂直纸面向外

$ba: F_{ba}=IlB\sin 60^0=0.866(\mathrm{N})$　　　方向垂直纸面向里

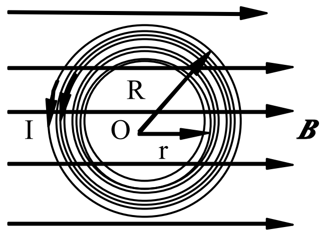
$$cb: F_{cb}=IlB\sin\pi=0$$

(2)　$\vec{M}=\vec{P}\times\vec{B}$　　　$M=ISB\sin(\vec{n},\vec{B})=10\times\frac{1}{2}\times0.1\times0.1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin 90^0=4.33\times10^{-2}$(牛·米)

(3) $A=I\Delta\Phi=I(\Phi-\Phi_0)=I(BS\cos0^0-BS\cos\frac{\pi}{2})=IB\frac{1}{2}l\cdot l\sin60^0$

$$=10\times1\times\frac{1}{2}\times0.1\times0.1\times0.866=4.33\times10^{-2}(\mathrm{J})$$

18、总匝数为 N 的均匀密绕平面螺旋线圈，半径由 r 绕至 R，通有电流 I，放在磁感应强度为 B 的均匀磁场中，磁场方向与线圈平面平行，如图所示。试求：



(1) 平面线圈的磁矩；

(2) 线圈在该位置所受到的磁力矩；

(3) 线圈在磁力矩作用下转到平衡位置过程中，磁力矩所做的功。

解：(1) 在距中心距离 ρ 处，取宽度为 $d\rho$ 的细圆环线圈的匝数　　$dN=\frac{N}{R-r}d\rho$

其磁矩为　　$dP_m=IdN\pi\rho^2=\frac{N}{R-r}I\pi\rho^2d\rho$

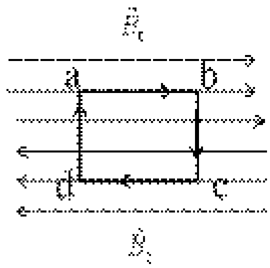
整个线圈的磁矩　　$P_m=\int dP_m=\int_r^R\frac{N}{R-r}I\pi\rho^2d\rho=\frac{1}{3}NI\pi(R^2+Rr+r^2)$

(2) 磁力矩　　$M=P_mB\sin90^0=\frac{1}{3}NI\pi B(R^2+Rr+r^2)$

(3) 任何位置的磁力矩　　$M=P_mB\sin\varphi$

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}Md\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}P_mB\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)d\theta=\frac{1}{3}\pi NIB\left(R^2+Rr+r^2\right)$$

拓展题：



1、 如图所示在磁场中某一区域有一组平行的 $\vec{B}$, 上半部为 $\vec{B}_1$，下半部为 $\vec{B}_2$， $\left|\vec{B}_1\right|=\left|\vec{B}_2\right|$，且 $\vec{B}_1$ 与 $\vec{B}_2$ 方向相反，而该区域内又无电流存在，试问：能存在这样的磁场吗？如何证明你的结论？

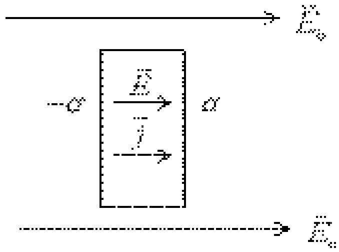
证明：取回路 abcda，根据安培环路定理 $\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$

即 $\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{ab}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{bc}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{cd}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{da}\vec{B}\cdot d\vec{l} = B_1\cdot\overline{ab} + B_2\cdot\overline{cd} \neq 0$

违背安培环路定理，表明这样的磁场不存在，若磁感应线为平行线，必均匀场。

2、导体内存在电场时就会有传导电流，电流密度 $\vec{j}$ 与电场强度 $\vec{E}$ 之间的关系为 $\vec{j}=\vec{E}/\rho$,其中 ρ 为导体电阻率。取一块电阻率为常量 ρ 的长方形导体块，静止放置，开始时处处无净电荷。

（1）$t=0$ 开始，沿导体块长度方向建立匀强电场 $\vec{E}_0$，导体内即产生传导电流，左、右两端面便会积累电荷，电荷面密度分别记为 $-\sigma$、σ，如右图所示。试求 σ 随 t 变化的关系和图示方向电流密度 $\vec{j}$ 随 t 变化的关系。



（2）将（1）中的电场 $\vec{E}_0$ 改取为沿导体长度方向的交变电场 $\vec{E}_0\cos\omega t$，其中 ω 为正的常量。试求 $\sigma\sim t$ 和 $\vec{j}\sim t$；

数学知识：

(a) 微分方程 $y'(x)+P(x)y(x)=Q(x)$ 的通解 $y(x)=e^{-\int Pdx}\left(\int Qe^{\int Pdx}dx+C\right)$

(b)不定积分公式 $\int \cos Ax\, e^{Bx}dx=\dfrac{B}{A^2+B^2}\left(\cos Ax+\dfrac{A}{B}\sin Ax\right)e^{Bx}+C$

解：（1）导体内 $E=E_0-E'=E_0-\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\frac{d\sigma}{dt}=j=\frac{E}{\rho}=\frac{1}{\rho\varepsilon_0}(\varepsilon_0E_0-\sigma)\Rightarrow\int_0^{\sigma}\frac{d\sigma}{\varepsilon_0E_0-\sigma}=\int_0^{t}\frac{dt}{\rho\varepsilon_0}$$

$$\sigma = \varepsilon_0 E(1 - e^{-t/\rho\varepsilon_0}) \qquad j = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{E}{\rho} e^{-t/\rho\varepsilon_0}$$

(2) $$\frac{d\sigma}{dt} = j = \frac{E}{\rho} = \frac{1}{\rho\varepsilon_0}(\varepsilon_0 E_0 \cos\omega t - \sigma)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\rho\varepsilon_0} = \frac{E_0 \cos\omega t}{\rho}$$

利用给出数学知识 (a) 得

$$\sigma = e^{-dt/\rho\varepsilon_0}\left(\frac{E}{\rho} \cos\omega t e^{dt/\rho\varepsilon_0} dt + C_1\right) = e^{-t/\rho\varepsilon_0}\left(\frac{E}{\rho} \cos\omega t e^{t/\rho\varepsilon_0} dt + C_1\right)$$

利用给出数学知识 (b) 得

$$\sigma = e^{-t/\rho\varepsilon_0}\left(\frac{\varepsilon_0 E_0(\cos\omega t + \rho\varepsilon_0\omega\sin\omega t)}{1+\rho^2\varepsilon_0^2\omega^2} e^{t/\rho\varepsilon_0} + C\right)$$

其中 $C = C_1 + \dfrac{E_0}{\rho}$

由 $t = 0$, $\sigma = 0$ 得：$C = \dfrac{-\varepsilon_0 E_0}{1+\rho^2\varepsilon_0^2\omega^2}$

$$\therefore \quad \sigma = \frac{\varepsilon_0 E_0}{1+\rho^2\varepsilon_0^2\omega^2}(\cos\omega t + \rho\varepsilon_0\omega\sin\omega t) - e^{-t/\rho\varepsilon_0}$$

$$j = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\varepsilon_0 E_0 \omega}{1+\rho^2\varepsilon_0^2\omega^2}(\rho\varepsilon_0\omega\cos\omega t - \sin\omega t) + \frac{1}{\rho\varepsilon_0\omega} e^{-t/\rho\varepsilon_0}$$

大学物理下习题册四

1、在螺绕环的导线内通有电流 I_0=20A，螺绕环共有线圈 400 匝，环的平均周长是 40cm，利用冲击电流计测得环内磁感应强度 1.0T，试计算环截面中心处下列各值。
(1) 磁场强度； (2)磁化强度；(3)磁化率和相对磁导率；(4) 磁化面电流；

解：(1) $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = Hl = NI$

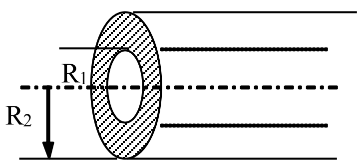
$$H = \frac{NI}{l} = \frac{400\times 20}{0.40} = 2.0\times 10^4\ A/m$$

(2) $M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{1.0}{4\pi\times 10^{-7}} - 2.0\times 10^4\ A/m = 7.76\times 10^5\ A/m$

(3) $\chi_m = \frac{M}{H} = \frac{7.76\times 10^5}{2.0\times 10^4} = 38.8$

$\mu_r = 1 + \chi_m = 39.8$

(4) $I_s = j_s l = Ml = 7.76\times 10^5 \times 0.4 = 3.10\times 10^5\ A$



2、无限长圆柱形的导体半径 R_1，通以电流 I，(均匀分布在其截面上)，导体外是一层均匀的顺磁质，磁导率为μ，介质的外半径为 R_2，求:
(1) 介质内、外磁场强度 H 和磁感应强度 B 的分布；
(2) 介质内、外表面的磁化电流密度 j_s

解：（1）由安培环路定理及 B 和 H 关系可得

$r < R_1$　　$H 2\pi r = \frac{I}{\pi R_1^2}\pi r^2$，　$H = \frac{Ir}{2\pi R_1^2}$　　$B = \mu H = \mu_0 H = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R_1^2}$

$R_1 < r < R_2$　　$H 2\pi r = I$　　$H = \frac{I}{2\pi r}$　　$B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r}$

$r > R_2$　　$H 2\pi r = I$　　$H = \frac{I}{2\pi r}$　　$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

(2) $j_s|_{R_1} = (\mu_r - 1)H = (\frac{\mu}{\mu_0} - 1)\frac{I}{2\pi R_1}$

$j_s|_{R_2} = (\mu_r - 1)H = (\frac{\mu}{\mu_0} - 1)\frac{I}{2\pi R_2}$

3、一“无限长”直螺线管，单位长度上的匝数为 n，螺线管内充满相对磁导率 μ_r 的均匀磁介质，今在导线内通以电流 I_0，求:

(1) 管内磁感应强度 **B**；

(2) 磁介质表面的磁化面电流密度 i_s 。

解：(1) 螺线管外的 B=0，螺线管内的磁场均匀分布

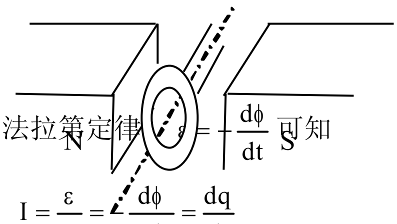
$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = Hl = nI_0 l$$

$$H = nI_0$$

$$B = \mu H = \mu_0\mu_r nI_0$$

（2）$i_s = (\mu_r - 1)H = (\mu_r - 1)nI_0$

4、图为用冲击电流计测量磁极间磁场的装置。小线圈与冲击电流计相接，线圈面积为 A，匝数为 N，电阻为 R，其法向 ***n*** 与该处磁场方向相同，将小线圈迅速取出磁场时，冲击电流计测得感应电量为 q，试求小线圈所在位置的磁感应强度。



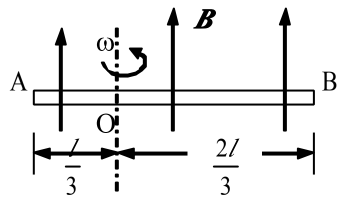
解：由法拉第定律 $\varepsilon = -\dfrac{d\phi}{dt}$ 可知

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{d\phi}{Rdt} = \frac{dq}{dt}$$

$$dq = \frac{\varepsilon}{R}dt = -\frac{1}{R}d\phi$$

$$q = \frac{1}{R}\int_{\phi}^{0} - d\phi = \frac{1}{R}NBA$$

$$\therefore \quad B = \frac{qR}{NA}$$



5、有一段导线 AB，长为ℓ，能绕过其点 O(点 O 距 A 端$\ell/3$)且垂直于 AB 的轴转动。若它在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{B}$的方向平行于轴竖直向上)中，从上向下看作逆时针转动时，如图所示，求:

(1) 导线 AB 两端的电势差

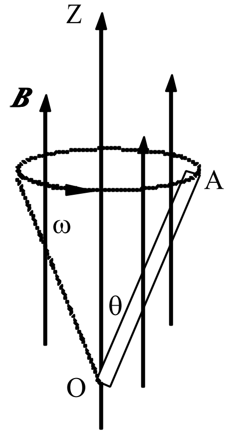
(2) 讨论 A、B 两点电势的高低

解：（1） $\varepsilon_{OB}=\int(\vec{v}\times\vec{B}).d\vec{l}=\int vBdx=\int_0^{\frac{2l}{3}}B\omega xdx=\frac{2}{9}B\omega l^2$　　方向由 O 指向 B

$\varepsilon_{OA}=\int(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=\frac{1}{18}B\omega l^2$　　方向由 O 指向 A

$\therefore\quad \varepsilon_{AB}=\varepsilon_{Ao}+\varepsilon_{oB}=-\varepsilon_{OA}+\varepsilon_{oB}=\frac{1}{6}B\omega l^2$　　方向由 A 指向 B

(2) $U_B>U_A$



6、如图所示，金属棒 OA 长为l，处在均匀磁场 **B** 中，绕通过 O 点的竖直轴 OZ 旋转，角速度ω为，磁场方向沿轴 OZ，棒 OA 和轴 OZ 夹角为θ=30°，求：

(1) 棒 OA 中的动生电动势的大小；

(2) 棒 OA 两端那一端电势高?

解：(1) $\varepsilon_i=\int(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=\int vB\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)dl$

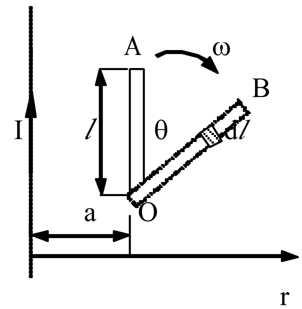
$=\int_0^l\omega B\sin^2\theta\, l dl=\frac{1}{2}\omega B\sin^2\theta\, l^2=\frac{1}{8}\omega B l^2$

(2) $U_A>U_0$

7、长为l的金属杆置于一无限长直电流 I 的磁场中，设金属杆与长直电流共面，并在此平面内绕其一端 O 匀角速度ω旋转，O 端距直导线为 a，如图所示，试求杆转至下述两种位置时的感应电动势：

(1) 转至 OA 位置，即θ=0 时；

(2) 转至 OB 位置，即任意角度时。



解：(1) $d\varepsilon=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=\omega lBdl=\omega\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}ldl$

$$\varepsilon=\int_0^l d\varepsilon=\frac{\mu_0 I\omega}{4\pi a}l^2 \qquad 方向\quad O\to A$$

$$(2)\quad d\varepsilon=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=\omega\frac{\mu_0 I}{2\pi r}ldl=\frac{\mu_0 I\omega}{2\pi r}\frac{(r-a)}{\sin^2\theta}dr$$

$$\varepsilon=\int_a^{a+l\sin\theta}\frac{\mu_0 I\omega}{2\pi\sin^2\theta}(1-\frac{a}{r})dr=\frac{\mu_0 I\omega}{2\pi\sin^2\theta}[l\sin\theta-a\ln\frac{a+l\sin\theta}{a}]$$

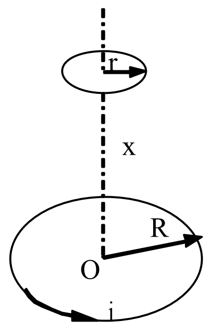
方向　O→B

8、如图所示，有相同轴线的两个导体回路，小的回路在大的回路上两者相距 x，x 远大于回路的半径 R（x>>R），因此当大回路有电流 i 按图示方向流过时，小回路所围面积之内的磁场几乎是均匀的，现假定 x 以 $v=\dfrac{dx}{dt}$ 匀速而变化

(1) 试确定穿过小回路的磁通量φ 和 x 之间的关系；

(2) 当 x=NR 时(N 为整数)，求小回路内的感应电动势；

(3) 如果 v>0，试确定小回路内感应电流的方向。



解：（1）通电圆线圈在轴线上的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0}{2}\frac{iR^2}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

由于 x>>R,磁感应强度 B 可近似为 $B\approx\dfrac{\mu_0}{2}\dfrac{iR^2}{x^3}$

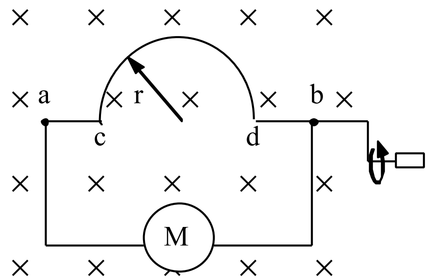
又 r>>R，小线圈内的 B 可看作均匀

$$\Phi=BS=\frac{\mu_0}{2}\frac{iR^2}{x^3}\pi r^2=\frac{\mu_0 i\pi r^2R^2}{2x^3}$$

（2）当 x =NR 时　$\varepsilon_1=-\dfrac{d\phi}{dt}=\dfrac{3\mu_0 i\pi R^2r^2}{2(NR)^4}v=\dfrac{3\mu_0 i\pi r^2}{2N^4R^2}v$

（3）当 v>0 时，小回路中的磁通量减少，所以感应电流方向与大回路相同

9、一导线ab弯成如图的形状，(其中 cd 是一半圆，半径r=0.10m，ac 和 db 两段的长度均为 ℓ=0.1m，在均匀磁场(B=0.50T)中绕轴线 ab 转动，转速 n=60r/s，设电路的总电阻(包括电表 M 的内阻)为 1000Ω，求



(1)任意时刻导线中的感应电动势和感应电流；
(2)感应电动势和感应电流的最大值。

解：（1）当线圈平面与图示平面的夹角为θ=ωt 时，通过线圈的磁通量为

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cos\theta = B\frac{\pi r^2}{2}\cos\omega t$$

导线中的感应电动势

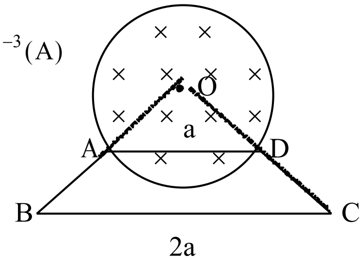
$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{B\pi r^2\omega}{2}\sin\omega t = \frac{B\pi r^2\omega}{2}\sin 2\pi nt$$

$$= \frac{0.5\times 3.14\times(0.10)^2\times 2\times 3.14\times 60}{2}\times\sin 120\times 3.14t = 2.96\sin 377t$$

$$i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{2.96}{10^3}\sin 377t = 2.96\times 10^{-3}\sin 377t$$

（2） $\varepsilon_{max} = 2.96\ (V)$， $i_{max} = \frac{\varepsilon_{max}}{R} = 2.96\times 10^{-3}(A)$

10、半径为 a 的长直螺线管中，有 $\frac{dB}{dt} > 0$ 的磁场。一直导线弯成等腰梯形的闭合回路 ABCDA，总电阻为 R，上底为 a，下底为 2a，如图放置，求：



(1) AD 段和 BC 段感应电动势；
(2) 闭合回路中总电动势。

解：（1）作辅助线 AO 及 DO 则回路 OADO 中的电动势

$$\varepsilon_{AD} = \left|-\frac{d\Phi}{dt}\right| = S_1\frac{dB}{dt} = \frac{3}{4}a^2\frac{dB}{dt} \qquad 方向\quad A\to D$$

对于回路 OBCO 因磁场局限在圆柱内，在磁场中的面积

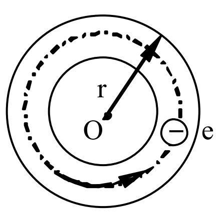
$$S_2 = 扇形面积 = \frac{\pi}{6}a^2$$

$$\varepsilon_{BC} = \left|-\frac{d\Phi}{dt}\right| = S_2\frac{dB}{dt} = \frac{\pi a^2}{6}\frac{dB}{dt} \qquad 方向\quad B\to C$$

（2）闭合回路 ABCDA 中的感应电动势为

$$\varepsilon = \varepsilon_{BC} - \varepsilon_{AD} = (\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4})a^2\frac{dB}{dt} \qquad 方向\quad A\to B\to C\to D\to A$$

11、一电子在电子感应加速器中加速，从上向下看时，电子沿逆时针方向旋转，如图所示。试问磁场的方向如何？磁场随时间如何变化？如电子沿半径为 r=1.0m 的轨道作圆周运动，每转一周动能增加 700eV，试求轨道内磁感应强度的变化率。



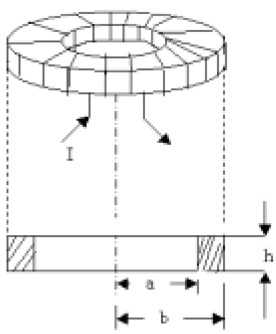
解：磁场方向由纸面穿出，且磁感应强度随时间增加。

感应电动势 $\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{dB}{dt}\pi r^2$

电子增加的动能 $\Delta E_k = e\varepsilon = e\frac{dB}{dt}\pi r^2 (= e\oint E_k \cdot d\vec{l})$

$$\therefore \quad \frac{dB}{dt} = \frac{\Delta E_k}{e\pi r^2} = \frac{700}{\pi \times (1.0)^2} = 223\ (T/s)$$

12、一矩形截面的螺绕环，如图所示，共有 N 匝，试求此螺绕环的自感系数。



解：由安培环路定律$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$求得

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI \qquad B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

通过矩形截面的磁通量为

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \frac{\mu_0 NIh}{2\pi\ r} dr = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h \ln\frac{b}{a}$$

通过整个螺绕环磁通量为 $N\Phi$

$$\therefore \quad L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\frac{b}{a}$$

13、一圆形线圈 C_1 由 50 匝表面绝缘的细导线绕成，圆面积为 $S=4.0cm^2$，将此线圈放在另一个半径为 R=20cm 的圆形大线圈 C_2 的中心，两者同轴，大线圈由 100 匝表面绝缘的导线绕成。

(1)求这两线圈的互感系数 M;

(2)当大线圈中 C_2 的电流以 50A/s 的变化率减小时，求小线圈 C_1 中的感应电动势ε。

解：（1）由于 r<< R，可近似认为小线圈所在处的 B 为

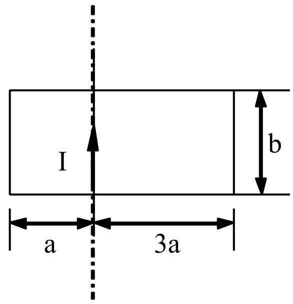
$$B_2 = N_2\frac{\mu_0 I_2}{2R}$$

通过C_1处的磁通量链数φ_{12} $\qquad \phi_{12} = N_1B_2S_1 = \dfrac{N_1N_2\mu_0I_2S_1}{2R}$

两线圈的互感系数M

$$M = \frac{\varphi_{12}}{I_2} = \frac{N_1N_2\mu_0S_1}{2R} = \frac{50\times100\times4\times3.14\times10^{-7}\times4.0\times10^{-4}}{2\times20\times10^{-2}} = 6.28\times10^{-6}(H)$$

（2） $\varepsilon = -M\dfrac{dI}{dt} = 6.28\times10^{-6}\times50 = 3.14\times10^{-4}(V)$



14、一根无限长直导线与一矩形导线框在同一平面内，彼此绝缘，如图所示，试求

(1) 直导线和线框的互感系数；

(2) 若直导线中通有 I=At 的电流，线框中的感生电动势。

解：(1) 考虑磁通量的正负可知，通过线圈的磁通量为

$$\varphi = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_a^{3a}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}bdr = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln 3$$

$$M = \frac{\varphi}{I} = \frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln 3$$

(2) $\quad \varepsilon = -M\dfrac{dI}{dt} = -\dfrac{\mu_0 b}{2\pi}A\ln 3$

15、半径为 a 的无限长密绕螺线管，单位长度上的匝数为 n，通以交变电流 $i=I_m\sin\omega t$，则围在管环的同轴圆形回路(半径为 r>a)上的感生电动势为多大?

解：螺线管内的磁感应强度为 $B=\mu_0 ni$

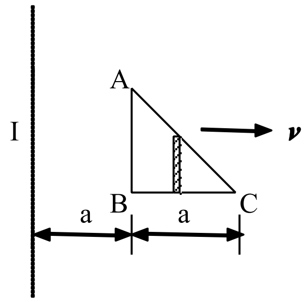
通过圆形回路的磁通量为 $\varphi=\vec{B}\cdot\vec{S}=\mu_0 ni\cdot\pi a^2$

$$\varepsilon=-\frac{d\varphi}{dt}=-\mu_0 n\pi a^2 I_m\omega\cos\omega t$$

16、在一无限长直导线旁放一等腰直角三角形线圈，线圈与直导线在同一平面内，它的一条直角边与导线平行，导线中通以电流 I，求:

(1) 在图示位置它们间的互感系数；

(2) 如果线圈以水平速度 v 向右匀速运动,当线圈达到图示位置时，线圈中的感应电动势。



解：（1）通过ΔABC 中的磁通量

$$\Phi=\int_a^{2a}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}(2a-x)dx=\frac{\mu_0}{2\pi}Ia\ (2\ln 2-1)$$

$$M=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ (2\ln 2-1)$$

（2）总的电动势可看作 AC、AB 切割磁力线产生感应电动势的代数和

$$\varepsilon_{BA}=\int\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{l}=vBa=v\frac{\mu_0 I}{2\pi a}a=\frac{v\mu_0 I}{2\pi}\qquad 方向B\rightarrow A$$

$$\varepsilon_{AC}=\int\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{l}=-\int v\frac{\mu_0 I}{2\pi x}dl\cos\alpha=-\int_a^{2a}\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\frac{dx}{x}=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln 2\qquad 方向\ C\rightarrow A$$

总感应电动势

$$\varepsilon=\varepsilon_{BA}+\varepsilon_{AC}=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}(1-\ln 2)\qquad 方向\ B\rightarrow A\rightarrow C\rightarrow B$$

17、一无限长直粗导线，其截面各处的电流密度相等，总电流 I，试求每单位长度导线所储藏的磁能。

解：由安培环路定律可求出导线内的 B

$$B\,2\pi r=\mu_0\frac{I}{\pi R^2}\pi r^2 \qquad B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Ir}{R^2}$$

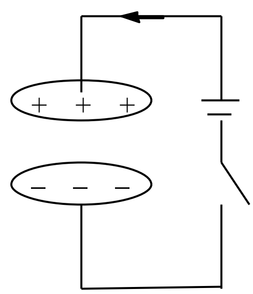
磁能密度 $\omega=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}=\frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R^4}$

取体积元 $dV=2\pi r l dr$

$$W=\int\omega dV=\int_0^R\frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R^4}2\pi r l dr=\frac{\mu_0}{16\pi}\frac{I^2 l}{R^4}R^4=\frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}$$

单位长度的磁能为 $W_0=\frac{W}{l}=\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$

18、真空中，半径 R=0.10m 的两块圆板构成一平板电容。如图所示，在电容器充电时，两极板间电场的变化率 $\frac{dE}{dt}=1.0\times10^{13}V/m\cdot s$，求:



(1) 两极板间的位移电流强度;

（2）对电容器充电的电流强度。

解：（1）位移电流密度 $j_d=\frac{dD}{dt}=\varepsilon_0\frac{dE}{dt}$

极板间位移电流

$$I_d=i_d\cdot\pi R^2=8.85\times10^{-12}\times1.0\times10^{13}\times3.14\times(0.1)^2=2.78\ A$$

（2）电流的连续性可得 $I=I_d=2.78A$

拓展题：

1、如图所示，一金质圆环以其边缘为支点直立在两磁极间，环的底部受两个固定档的限制，使其不能滑动。现环受一扰动偏离竖直面 0.1 弧度，并开始倒下. 已知 B=0.5T，环半径 r_1=4cm，环截面半径 r_2=1mm，金的电导率σ=4.0×10^7（Ωm）$^{-1}$. 设环重 F=0.075N，并可以认为环倒下的过程中重力矩时时都与磁力矩平衡，求环倒下所需的时间.

S

θ

N

解：在环倒下的过程中，通过环面的磁通量

$$\varphi(\theta)=\pi r_1^2 B\cos\theta$$

引起的感应电动势 $\varepsilon=-\dfrac{d\varphi}{dt}=\pi r_1^2 B\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}$

圆环的电阻为 $R=\dfrac{2\pi r_1}{\sigma\pi r_2^2}=\dfrac{2r_1}{\sigma r_2^2}$

环中的感应电流为 $i=\dfrac{\varepsilon}{R}=\dfrac{\sigma\pi r_1 r_2^2 B\cos\theta}{2}\dfrac{d\theta}{dt}$

磁力矩的大小 $M=\left|\vec{P}_m\times\vec{B}\right| \quad iSB\cos\theta=\dfrac{\sigma\pi^2 r_1^3 r_2^2 B\cos\theta}{2}\dfrac{d\theta}{dt}$

倒下时，重力矩时时等于磁力矩 $Fr_1\sin\theta=\dfrac{\sigma\pi^2 r_1^3 r_2^2 B^2\cos^2\theta}{2}\dfrac{d\theta}{dt}$

$$t=\int_{0.1}^{\pi/2}\frac{\sigma\pi^2 r_1^2 r_2^2 B^2\cos^2\theta}{2F\sin\theta}d\theta=2.11s$$

2、如图，将一块导体薄片放在电磁铁上方与轴线垂直的平面上。

（1）如果磁铁中的电流突然发生变化，在 P_0 点附近并不能立即检测出磁场 B 的全部变化，为什么？

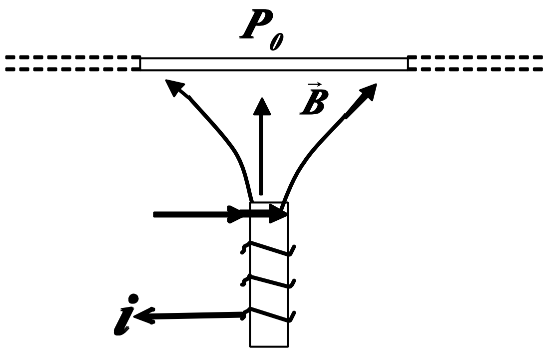
（2）若电磁铁通过高频的交变电流，使 B 作高频的周期性变化，并且导体薄片是由低电阻率的材料制成，则 P_0 点附近的区域几乎全为该导体片所屏蔽，而不受到 B 的变化影响，试说明这是为什么？

（3）这样的导体薄片能否屏蔽稳恒电流的磁场，为什么？

答：（1）当磁铁中的电流突然发生变化时，在导体薄片上有感应电动势和感应电流产生，感应电流的方向是反抗原磁场的变化，因而抵消了一部分磁场，在 P_0 点附近不能立即测出磁铁产生的磁场的全部变化。

（2）由于 $\dfrac{d\Phi}{dt}$ 大，而导体的电阻小，故电流 $I=\dfrac{d\Phi}{Rdt}$ 很大，产生的磁场也很大，所以几乎可以抵消原磁场的变化。

（3）导体薄片不能屏蔽稳恒电流的磁场，因为恒定的磁场不能产生感应电动势。



大学物理下习题册五

1、一束单色光射在两个相距为 d=0.2mm 的狭缝上。在狭缝后 D=1.0m 处的屏上，从第一条明条纹到同侧第四条明条纹的间距l=7.5mm，求此单色光的波长。

解：根据双缝干涉明条纹关系$\delta = d\sin\theta = d\dfrac{x}{D} = k\lambda$ 可得

$$x = \frac{k\lambda D}{d}$$

$$x_4 - x_1 = \frac{\lambda D}{d}(4-1)$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{\Delta x d}{3D} = \frac{7.5\times10^{-3}\times0.2\times10^{-3}}{3\times1.0} = 500\ (\text{nm})$$

2、在双缝实验中，两缝相距 5.0mm，缝距离屏 1.0m，在屏上可见到两个干涉花样。一个是由 480nm 的光产生，另一个由 600nm 的光产生。问在屏上两个不同花样的第三级干涉明条纹之间的距离是多少？

解：双缝干涉明条纹中心位置 $x = k\dfrac{D}{d}\lambda$，所以同级而不同波长的光在屏上的间距为

$$\Delta x = x_2 - x_1 = k\frac{D}{d}(\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$= 3\frac{1}{5.0\times10^{-3}}(6000-4800)\times10^{-10}$$

$$= 7.2\times10^{-5}(\text{m})$$

3、已知杨氏实验中 d = 0.40mm，D=50cm ，λ = 640nm。求：

（1）第一级明条纹与中央明条纹的间距；

（2）如 P 点离中央明条纹为 0.2mm，问两束光在 P 点的位相差；

（3）P 点的光强和中央明条纹的强度比。

解： (1) $\Delta x = \dfrac{\lambda D}{d} = \dfrac{6.4\times10^{-5}\times50}{0.4\times10^{-1}} = 8\times10^{-2}\,\text{cm}$

(2) $\delta = d\dfrac{x}{D} = \dfrac{0.04\times0.02}{50} = 1.6\times10^{-5}\,\text{cm}$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = 2\pi\frac{1.6\times10^{-5}}{6.4\times10^{-5}} = \frac{\pi}{2}$$

(3) $\dfrac{I}{I_{中}} = \dfrac{4I_0\cos^2\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{4I_0} = (\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1:2$

4、在双缝实验中，用一很薄的云母片（n=1.58）覆盖其中的一条狭缝，这时屏幕上的零级明条纹恰好移到屏幕原来第七级明条纹的位置上，如果入射光波长为 550nm，试问此云母片的厚度是多少？

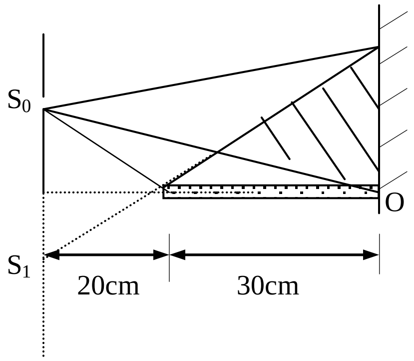
解：原来第七级明纹的光程差为 $r_2 - r_1 = 7\lambda$，放入云母片后第七级明纹变为中央明纹，其光程差为

$$r_2 - (r_1 - d + nd) = 0$$

$$r_2 - r_1 = d(n-1) = 7\lambda$$

$$\therefore\ d = \frac{7\lambda}{n-1} = \frac{7\times7.5\times10^{-4}}{1.58-1} = 6.6\times10^{-3}(\text{mm})$$

5、在洛埃镜装置中，狭缝光源 S_0 和它的虚像 S_1 在离镜左边 20cm 的平面内，如图所示。镜长 30cm，在镜的右面边缘处放置一毛玻璃光屏。如 S_0 到镜面的垂直距离为 2.0mm，使用波长为 720nm 的红光，试计算平面镜右边边缘到第一条明条纹之间的距离。



解：洛埃镜的反射光有半波损失，故干涉明纹条件为

$$\delta = (2d)\frac{x}{D} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

$$x\big|_{k=1} = \frac{D}{(2d)}(k - \frac{1}{2})\lambda \quad = \frac{(20+30)}{0.4}\frac{7.2\times10^{-5}}{2} = 4.5\times10^{-3}\,\text{cm}$$

6、在玻璃上涂上折射率为 1.33 的塑料薄膜。当我们的观察方向与膜面的法线方向成 30^0 角时，可看到反射光呈绿色光（λ =500nm）。已知玻璃的折射率为 1.50，试问：

（1）油膜的最小厚度为多少？

（2）如果从膜面的法线方向观察，则反射光呈什么颜色。

解：（1）$\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} = k\lambda$ （最小厚度 k=1）

$$e_{min} = \frac{\lambda}{2\sqrt{n_2^2 - \sin^2 30^0}} = \frac{5.0\times10^{-5}}{2\sqrt{1.33^2 - (0.5)^2}} = 2.03\times10^{-5}\,\text{cm}$$

（2）从法线方向观察 i=0，$2n_2 e_{min} = k\lambda$ 可得 $\lambda = \frac{2ne_{min}}{k}$

k=1 $\lambda_1 = 2ne_{min} = 2\times1.33\times2029 = 539.7\text{nm}$ 绿色

k=2 $\lambda_2 = \frac{2n_2 e_{min}}{2} = 269.8\text{nm}$ 不在可见光范围

所以反射光为绿色。

7、在棱镜（n_1=1.52）表面，涂一层增透膜（n_2=1.30），为使此增透膜适用于 550nm 波长的光，求膜的最小厚度应多大？

解：增透膜即反射相消，又两反射均有半波损失而无附加光程差，所以反射相消满足下列条件

$$\delta = 2n_2 e = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

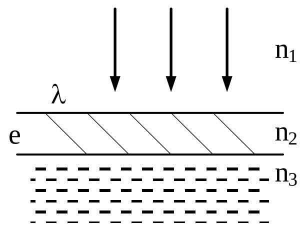
$$e = (2k+1)\frac{\lambda}{4n_2}$$

$$e_{min}(k=0) = \frac{550}{4\times 1.30} = 105.8\,(nm)$$

8、一厚度为 625nm、折射率为 n_2=1.40 的煤油膜浮于水面（水的折射率 n_3=1.33），一波长为 500nm 的单色光从空气（n_1=1.00）中垂直入射在油膜上（如图所示），求：

（1）反射光的光程差、相位差，并说明其干涉结果；

（2）透射光的光程差、相位差，并说明其干涉结果



解：（1）垂直入射 i =0，有半波损失

光程差 $\delta = 2n_2 e + \frac{\lambda}{2} = 2\times 1.40\times 625 + \frac{500}{2} = 2000(nm)$

相位差 $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{500}\times 2000 = 8\pi$

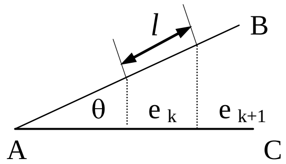
干涉极大

（2）光程差 $\delta = 2n_2 e = 2\times 1.40\times 625 = 1750(nm)$

相位差 $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{500}\times 1750 = 7\pi$

干涉极小

9、利用等厚干涉可以测量微小的角度。如图所示，折射率 n=1.4 的劈尖状板，在某单色光的垂直照射下测出两相邻明条纹间距 l=0.25cm，已知单色光在空气中的波长为 700nm，求劈尖顶角θ。



解：$\sin\theta \approx \theta = \dfrac{\Delta e}{l} = \dfrac{\frac{\lambda}{2n}}{l} = \dfrac{\frac{700}{2\times1.4}}{0.25\times10^{7}} = 1\times10^{-4}\,\text{rad}$

10、使用单色光观察牛顿环，测得某一明环的直径为 3.00mm，在它的外面的第五个明环直径为 4.60mm，已知平凸透镜的曲率半径为 1.03m，求此单色光的波长。

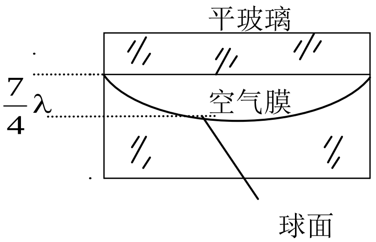
解：根据牛顿环的明纹关系可得

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = 2\frac{r_k^2}{2R} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

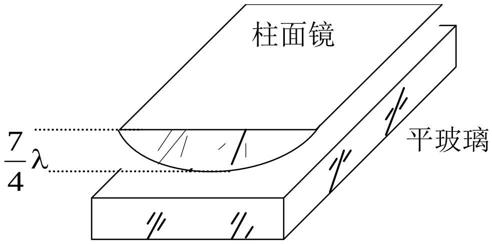
$$\frac{D_k^2}{4R} = (k - \frac{1}{2})\lambda \Rightarrow \frac{1}{4R}(D_{k+5}^2 - D_k^2) = 5\lambda$$

$$\lambda = \frac{1}{20R}(D_{k+5}^2 - D_k^2) = 590\text{nm}$$

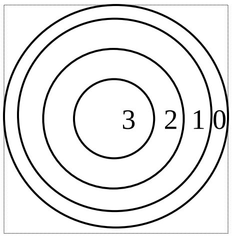
11、使平行光垂直入射图（a）和（b）所示装置的上表面来观察等厚干涉。试画出反射光的干涉条纹（只画暗条纹），并标出条纹级次。

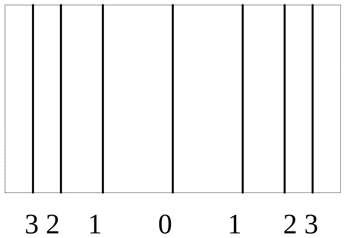


（a）



（b）





根据 $\delta_{max}=\frac{7}{4}\lambda=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ 得

$k=3.5$

12、以钠光灯作为光源（λ =589.3nm），在迈克耳逊干涉仪的一支光路上，放置一个长度为 d=140mm 的玻璃容器，当以 NH_3 注入容器时，测得干涉条纹移动Δ N=180 条，求 NH_3 的折射率。

解：迈克耳逊干涉仪每移过一条条纹光程差改变λ

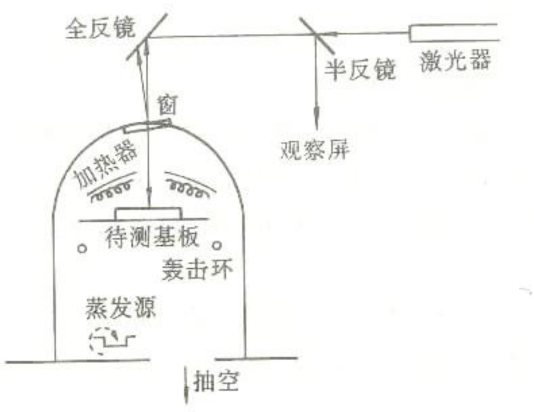
$\therefore \quad 2(n-1)d=180\lambda$

$$n=\frac{90\lambda}{d}+1=1.00038$$

拓展题：

1. 传统测温方法都需要加入测温元件（温度计、热电偶或其它传感器等），使待测元件的温度与测温元件达到热平衡，然后从测温元件获得待测元件的温度。但是在某些情况下（如高真空系统），这种热平衡难以建立，甚至有时测温元件的加入会破坏原来的温度分布。

利用激光干涉的原理，对于透明平行平板的温度测量可以不必加入任何测温元件，测量结果准确可靠。如图所示是真空镀膜室中，采用激光干涉法测量离子轰击下透明基板温度变化的原理图。由于激光有足够长的相干长度，因而任何厚度的基板都可以测量。设激光输出波长 λ，待测透明基板折射率为 n，厚度为 d，且基板材料折射率的温度系数以及线胀系数都是已知的，试设计激光干涉法测温，写出基板温度变化的表示式。



解：基板上、下表面反射光的光程差: $\Delta = 2nd$

光程差随温度的变化率：$\dfrac{\delta\Delta}{\delta T} = \dfrac{\delta(2nd)}{\delta T} = 2d\dfrac{\delta n}{\delta T} + 2n\dfrac{\delta d}{\delta T} = 2d(\beta + n\alpha_l)$

其中 $\dfrac{\delta n}{\delta T} = \beta$ 是折射率的温度系数，$\dfrac{\delta d}{d\delta T} = \alpha_l$ 是线胀系数

由此，从观察屏上测量条纹移动情况，可以获得基板温度变化。

条纹移动 m 条对应的温度变化为：$T - T_o = \dfrac{m\lambda}{2d(\beta + n\alpha_l)}$

2、假设照明迈克耳逊干涉仪的光源发出两种波长为 λ_1 和 λ_2 的单色光，这样当平面镜 M_1 平移时，条纹将周期性地消失和再现。

（1）若以 Δh 表示条纹相继两次清晰时 M_1 平移的距离，试利用两单色光的波长差 $\Delta\lambda(=|\lambda_1-\lambda_2|)$、波长 λ_1 和 λ_2 写出 Δh 的表示式；

（2）如果把钠光包含的 $\lambda_1=589.6nm$ 和 $\lambda_2=589.0nm$ 两个光波视为单色的，问以钠光作为光源时 Δh 是多少？

解：（1）当 λ_1 亮条纹与 λ_2 的亮条纹重叠时，条纹可见度最高；当 λ_1 亮条纹与 λ_2 的暗条纹重合时，条纹可见度最低。

∴ 当光程差 $\Delta=2h=m_1\lambda_1=m_2\lambda_2$ 时，条纹最清晰，有

$$m_1=\frac{2h}{\lambda_1},m_2=\frac{2h}{\lambda_2}，\quad \Delta m=m_1-m_2=\frac{2h\Delta\lambda}{\lambda_1\lambda_2}$$

当增加到 $h+\Delta h$ 时，Δm 增加 1，即出现下一个最清晰条纹，此时

$$\Delta m+1=\frac{2(h+\Delta h)\Delta\lambda}{\lambda_1\lambda_2}$$

$$\therefore\ \frac{2(h+\Delta h)\Delta\lambda}{\lambda_1\lambda_2}=\frac{2h\Delta\lambda}{\lambda_1\lambda_2}+1，\quad \Delta h=\frac{\lambda_1\lambda_2}{2\Delta\lambda}$$

（2）$\Delta h=\dfrac{589.0nm\times589.6nm}{2\times0.6nm}=0.2894mm$

大学物理下习题册六

1、以波长λ =500nm 的平行光，垂直照射到宽度 a=0.25mm 的单缝上，在缝后放置一个焦距 f=25cm 的凸透镜，则透镜焦平面处的屏幕上出现衍射条纹，试求：
（1）中央明条纹的宽度；
（2）中央明条纹两侧第三级暗条纹之间的距离。
解：(1)中央明条纹的宽度为左右第一条暗条纹之间的宽度

$$\Delta x_0 = 2\frac{f}{a}\lambda = \frac{2\times 250\times 500\times 10^{-6}}{0.25} = 1mm$$

（2）根据衍射暗纹条件，且考虑两侧宽度

$$\Delta x_3 = 2x_3 = 2\times 3\frac{f}{a}\lambda = \frac{2\times 3\times 250\times 500\times 10^{-6}}{0.25} = 3mm$$

2、一波长λ =600nm 的单色光垂直射到缝宽 a=0.4mm 的单缝上，缝后有一焦距为 f=1m 会聚透镜，求：
（1）单缝上、下端光线到屏上的相位差恰为 4π的 P 点距离中点 O 的距离；
（2）屏上中央明纹的半角宽度。

解：（1） $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\times a\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda}\times a\frac{x}{f} = 4\pi$

$$x = \frac{2f\lambda}{a} = \frac{2\times 1\times 600\times 10^{-9}}{0.4\times 10^{-3}} = 3\times 10^{-3}\,m$$

（2）由 $a\sin\theta = \pm k\lambda \quad (k=1)$ 得

$$\theta \approx \sin\theta = \frac{\lambda}{a} = 1.5\times 10^{-3}\,ra$$

3、在白色平行光垂直射向单缝而产生的衍射条纹中，某波长光的第三级明纹和红色光（630nm）的第二级明纹相重合。求该光波的波长。

解：根据衍射明纹条件 $a\sin\theta=(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$

则 $(2k_2+1)\dfrac{\lambda_{红}}{2}=(2k_3+1)\dfrac{\lambda}{2}$

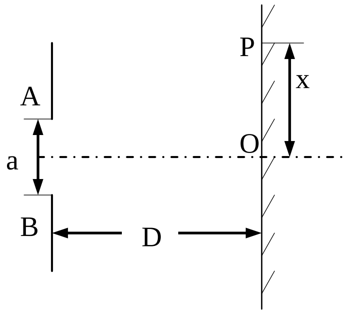
∴ $\lambda=\dfrac{(2k_2+1)\lambda_{红}}{2k_3+1}=\dfrac{(2\times2+1)\times630}{2\times3+1}=450\text{nm}$

4、在宽度 a=0.6mm 的狭缝后 D=40cm 处有一与狭缝平行的屏，如图所示。如以平行单色光自左垂直照射狭缝，在屏上形成衍射条纹，若在离 O 点为 x=1.4mm 的 P 点看到的是明条纹，试求：

（1）该入射光的波长；

（2）P 点条纹的级数；

（3）从 P 点来看，该光波在狭缝处的波阵面可作几个半波带？



4、解：由明条纹 $a\sin\varphi=a\dfrac{x}{D}=(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$ 得

$$\lambda=\frac{2ax}{D(2k+1)}=\frac{2\times0.6\times1.4}{40\times10}\frac{1}{2k+1}=4.2\times10^{-3}\frac{1}{2k+1}(\text{mm})$$

k=1　$\lambda_1=1400\text{nm}$

k=2　$\lambda_2=840\text{nm}$

k=3　$\lambda_3=600\text{nm}$

k=4　$\lambda_4=466.7\text{nm}$

k=5　$\lambda_5=381.8\text{nm}$

在可见光 $400\text{nm}\sim760\text{nm}$ 范围取 k=3 或 k=4

当 k=3，　$\lambda_3=600\text{nm}$，对应半波带为 2k+1=7 个

当 k=4，　$\lambda_4=466.7\text{nm}$，对应半波带为 2k+1=9 个

5、已知人眼的瞳孔直径为 3mm，可见光波长 λ =550nm。一迎面开来的汽车，其两车灯相距为 1m，试求车离人多远时，这两个车灯刚能被人眼分辨？

解：根据瑞利判据 $\delta_\theta=1.22\dfrac{\lambda}{D}$ 可得

$1.22\dfrac{\lambda}{D}\approx\dfrac{l}{S}$（S 为人车的距离）

$$S=\frac{l}{1.22\dfrac{\lambda}{D}}=\frac{lD}{1.22\lambda}=\frac{1\times3\times10^{-3}}{1.22\times550\times10^{-9}}=4.47\times10^{3}\text{m}$$

6、两束波长分别为 450nm 和 750nm 的单色光，垂直照射在光栅上，它们的谱线落在焦距为 1.50m 的透镜的焦平面上，它们第一级谱线之间的距离为 6×10^{-2}m，试求此光栅的光栅常数。

解：设两光波长为λ_1、λ_2，由光栅方程$d\sin\theta = d\dfrac{x}{f} = k\lambda$

得 $$x_2 - x_1 = (\lambda_2 - \lambda_1)\frac{f}{d}$$

$$d = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{x_2 - x_1} f = \frac{(750-450)\times10^{-9}\times1.5}{6\times10^{-2}} = 7.5\times10^{-6}\,\mathrm{m}$$

7、用 1mm 内有 500 条刻痕的平面透射光栅观察钠光谱（λ =589nm），问：

（1）光线垂直入射时，最多能看到第几级光谱；

（2）光线以入射角 30^0 入射时，最多能看到第几级光谱。

解：（1） $d = \dfrac{1}{500} = 2\times10^{-3}\,\mathrm{mm}$

由$d\sin\theta = k\lambda$及最多能看到的谱线时 $\sin\theta$ ~1 可得

$$k_{max} \le \frac{d}{\lambda} = \frac{2\times10^{-3}}{589\times10^{-6}} = 3.4$$

所以最多能看到第 3 级谱线。

（2） $d(\sin\theta \pm \sin30^0) = k\lambda$

$$k_{1\max} \le \frac{d\left(1+\sin30^0\right)}{\lambda} = \frac{2\times10^{-3}(1+\frac{1}{2})}{589\times10^{-6}} = 5.1$$

$$k_{2\max} \le \frac{d\left(1-\sin30^0\right)}{\lambda} = \frac{2\times10^{-3}(1-\frac{1}{2})}{589\times10^{-6}} = 1.7$$

所以一侧为第 5 级，另一侧为第 1 级。

8、波长λ =600nm 的单色光垂直入射到光栅上，已知第二级主极大出现在θ =30^0处，第三级缺级。求：

（1）光栅常数 a+b；

（2）光栅每个缝的宽度 a；

（3）光屏上可以看到的明条纹数 N。

解：（1）（a+b）$\sin\theta$ =2λ

$$d = a + b = \frac{2\lambda}{\sin\theta} = \frac{2\times600}{\sin30^0} = 2400\,\mathrm{nm}$$

（2）由第三级缺级可知 $\dfrac{a+b}{a} = 3$

$\therefore a = 800\,\mathrm{nm}$

（3）最多能看到的谱线级数 $\sin\theta$ ~1

$$k < \frac{d}{\lambda} = \frac{2400}{600} = 4$$

∴ k=0, ±1, ±2 共 5 条谱线

9、一双缝，缝间距 d=0.1mm，缝宽 a=0.02mm，用波长λ =480nm 的平行单色光垂直入射双缝，双缝后放一焦距为 50cm 的透镜，试求：
（1）透镜焦平面上，干涉条纹的间距；
（2）单缝衍射中央亮纹的宽度；
（3）单缝衍射的中央包线内有多少条干涉的主极大？

解：（1）由双缝干涉明条纹条件 $d\sin\theta = d\frac{x}{f} = k\lambda$ 得

$$x = k\frac{f}{d}\lambda$$

相邻两明条纹间距离

$$\Delta x = (k+1)\frac{f}{d}\lambda - k\frac{f}{d}\lambda = \frac{f}{d}\lambda = \frac{500\times480\times10^{-6}}{0.1} = 2.4\text{mm}$$

（2）单缝衍射中央明纹的宽度为左右第一级暗纹之间距离

由单缝衍射暗纹条件 $a\sin\theta = a\frac{x}{f} = k'\lambda$ 得

中央明条纹的宽度

$$\Delta x_0 = 2x_1 = 2\frac{f}{a}\lambda = \frac{2\times500\times480\times10^{-6}}{0.02} = 24\text{mm}$$

（3）由缺级条件 $k = \frac{a+b}{a}k'$ 得

第 5 级第一次缺级（N=2×4+1），所以在单缝衍射的中央包线内有 9 条干涉主极大。

10、一台光谱设备一般备有多种光栅。设有同样大小的 A、B、C 三块光栅，刻纹密度：A:1200 条/mm； B:600 条/mm； C:90 条/mm；如果要测定 700-1000nm 波段的红外线波长，应如何选择光栅？（看到第一级完整的光谱即可）

解: 三块光栅的光栅常数：

$$(a+b)_A = \frac{1\times10^{-3}}{1200} = 8.3\times10^{-7}(m) \quad (a+b)_B = \frac{1\times10^{-3}}{600} = 1.7\times10^{-6}(m) \quad (a+b)_C = \frac{1\times10^{-3}}{90} = 1.1\times10^{-5}(m)$$

由光栅方程分别计算一级衍射条纹对应的衍射角，以及光谱的分开程度

$$\theta = \sin^{-1}\frac{\lambda}{a+b} \qquad \Delta\theta = \sin^{-1}\frac{\lambda_{\max}}{a+b} - \sin^{-1}\frac{\lambda_{\min}}{a+b}$$

对光栅A： $\theta_{\max} = \ldots = 90^0$ $\theta_{\min} = \ldots = 57^0$

对光栅B： $\theta_{\max} = \ldots = 36^0$ $\theta_{\min} = \ldots = 24^0$

对光栅C： $\theta_{\max} = \ldots = 5.2^0$ $\theta_{\min} = \ldots = 3.7^0$ 光栅B最佳

11、使自然光通过两个偏振化方向成 60^0 的偏振片，透射光强度为 I_1，今在两个偏振片之间再插入另一偏振片，它的偏振化方向与前、后两个偏振片均成 30^0 角，问此时透射光强度为 I_1 的几倍？

解：设入射自然光强度为 I_0, 通过 A、B 两偏振片的光强

$$I_1=\frac{I_0}{2}COS^2 60^0=\frac{I_0}{2}(\frac{1}{2})^2=\frac{I_0}{8}$$

$$I_0=8I_1$$

今在 A、B 之间插入偏振片 C，设通过 A、C、B 的光强为

$$I_A=\frac{I_0}{2}=\frac{8I_1}{2}=4I_1$$

$$I_C=I_A COS^2 30^0=4I_1(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=3I_1$$

$$I_B=I_C COS^2 30^0=3I_1(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{9}{4}I_1=2.25I_1$$

12、一束自然光，入射到由 4 片偏振片构成的偏振片组上。每一片偏振片的偏振化方向相对于前面一片的偏振化方向沿顺时针方向转过 30^0 角。问通过偏振片组后的光强是入射光强的百分之几？

解：设入射光强为 I_0，通过偏振片的光强为 I_1、I_2、I_3、I_4

$$I_1=\frac{1}{2}I_0$$

$$I_2=I_1COS^2 30^0$$

$$I_3=I_2COS^2 30^0$$

$$I_4=I_3COS^2 30^0=\frac{1}{2}I_0COS^6 30^0$$

所以 $\frac{I_4}{I_0}=\frac{1}{2}COS^6 30^0=21.1\%$

13、自然光射到叠放在一起的两偏振片上（1）如透射光的最大强度为最大透射光强度的 $\frac{1}{3}$，则两偏振片的偏振方向的夹角为多少？（2）如果透射光的强度为入射光强度的 $\frac{1}{3}$，则两偏振片的偏振化方向的夹角又为多少？

解：设入射光为 I_0，通过偏振片的光强为 I_1、I_2

（1）透射光最大 即 $I_2=I_1$

据题意任一角度时可得：$\frac{I_2}{I_1}=COS^2\alpha=\frac{1}{3}$

$$\alpha=54.74^0$$

（2）$I_1=\frac{1}{2}I_0$

$$I_2=I_1COS^2\alpha=\frac{1}{2}I_0COS^2\alpha$$

$$\frac{I_2}{I_0}=\frac{1}{2}COS^2\alpha=\frac{1}{3}\Rightarrow\alpha=35.26^0$$

14、通过偏振片观察一束自然光和线偏振光混合光线，当偏振片转到某一位置时看到光强最大，如再转过 60^0 时，看到的光强减为最大值的一半，求这束光中自然光和线偏振光的强度比。

解: 设入射光中自然光为 I_0，线偏振光为 I_1

则 $I_{max}=\frac{1}{2}I_0+I_1$

$$I_{60^0}=\frac{1}{2}I_0+I_1COS^2 60^0=\frac{1}{2}I_{max}$$

由上两式可得 $I_0=I_1$

所以 $\frac{I_0}{I_1}=1:1$

15、利用布儒斯定律，可以测定不透明介质的折射率。今测得某一电介质的起偏角为 57^0，试求这一电介质的折射率。

解: 根据布儒斯特定律 $tgi_b=\frac{n_2}{n_1}$

其中空气折射率 n_1，电介质折射率 n_2

$$n_2=n_1 tgi_b=tg57^0=1.54$$

16、一束太阳光，以某一入射角入射到平面玻璃上，这时反射光为完全偏振光，透射光的折射角为 32^0，试求：

（1）太阳光的入射角是多少？

（2）玻璃的折射率是多少？

解: （1）反射光为全偏振光时 $i_b+\gamma=\frac{\pi}{2}$

$$\therefore i_b=\frac{\pi}{2}-\gamma=90^0-32^0=58^0$$

（2） 由布儒斯特定律

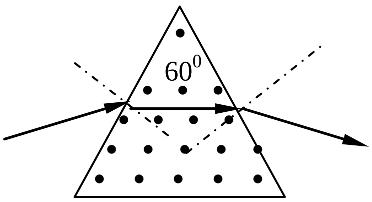
$$tgi_b=\frac{n_2}{n_1}=n_2$$

$$n_2=tg58^0=1.6$$

17、用方解石割成一个 60^0 的正三角形棱镜，光轴垂直于棱镜的正三角形截面。设非偏振光的入射角为 i，而 e 光在棱镜内折射光线与棱镜底面平行，（如图所示），试求：

（1）入射角 i；（n_e=1.49，n_o=1.66）

（2）o 光的折射角，画出 o 光的光路图。

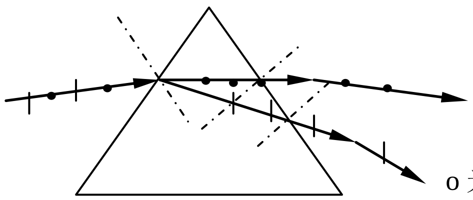


解: 对 e 光 由折射定律 $\sin i = n_e \sin\gamma_e = 1.49\sin 30^\circ$ 得

$i = 48^0 10'$

对 O 光线 $\sin i = n_0 \sin\gamma_0 = 1.66\sin 48^0 10'$

$\gamma_0 = 26^0 40'$

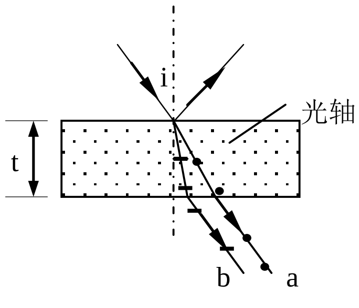


光 路 图

18、如图所示，一束自然光入射到方解石晶体上，其光轴垂直于纸面，已知方解石对 O 光的折射率 n_0=1.658，对 e 光的折射率 n_e=1.486。

（1）在图中标出哪一束是 O 光？哪一束是 e 光？并画出光矢量的振动方向。

（2）若方解石晶体的厚度 t=1.0cm，自然光入射角 i = 45^0，求 a、b 两束光的折射角。



解：（1）由 $\sin i = n_0 \sin\gamma_0 = n_e \sin\gamma_e$ 可得

a 为 e 光　　b 为 o 光

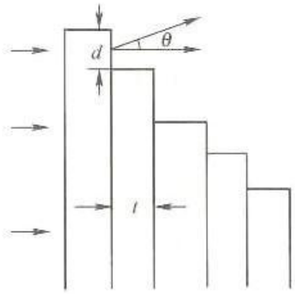
（2）$\sin i = n_0 \sin\gamma_0$

$$\gamma_0 = \arc\frac{\sin 45^0}{1.658} = 25.25^0$$

$$\gamma_e = \arc\frac{\sin 45^0}{1.486} = 28.41^0$$

拓展题：

1、一透射式阶梯光栅由 20 块等厚平行玻璃板叠成，如图所示，板厚 t =1cm，玻璃折射率 n=1.5，每个阶梯高度 d=0.1cm。现以波长 $\lambda = 500nm$ 的平行单色光垂直照射，试计算入射光方向上干涉主极大的级数。



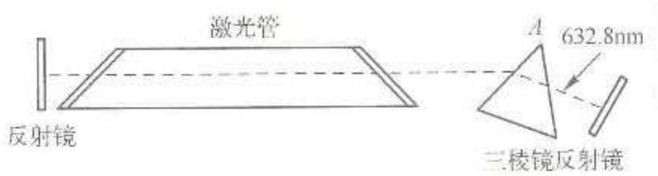
解：因光栅单级阶梯高度 $d >> \lambda$，所以衍射角 θ 很小，相邻两阶梯的光程差为

$$\Delta = d\sin\theta + (n-\cos\theta)t \approx d\theta + (n-1)t$$

干涉主极大满足 $d\theta + (n-1)t = k\lambda$

在入射光方向上，$\theta = 0$，$\therefore k_o = \dfrac{(n-1)t}{\lambda} = 10^4$

2、如图所示是激光技术中用以选择输出波长的方法之一，它是利用布儒斯特角使一定波长的光能以最低损耗通过三棱镜而在腔内产生振荡，其余波长的光则因损耗大而被抑制，从而达到选择输出波长的目的。现欲使波长为 632.8nm 的单色线偏振光通过三棱镜而没有反射损失，则棱镜顶角 A 应为多大？棱镜应如何放置？设棱镜材料的折射率 n=1.457。



解：在入射面内振动的线偏振光，在三棱镜表面的入射角等于布儒斯特角 θ_B 时，光全部透射，无反射损失，$\theta_B = \arctan(\dfrac{1.457}{1}) = 55^o32'$

故应使从激光管出来的光束与棱镜表面面法线夹角为 $55^o32'$

$$1\times\sin 55^o32' = 1.457\times\sin\theta_2\,,\qquad \theta_2 = 34^o27'$$

$$2\times(\frac{\pi}{2}-\theta_2) + \angle A = \pi\,,\qquad \therefore \angle A = 2\theta_2 = 68^o55'$$

大学物理下习题册七

1、一宇宙飞船相对地球以 0.8c（c 表示真空中光速）的速度飞行，一光脉冲从船尾传到船头。飞船上的观察者测得飞船长为 90m，地球上观察者测得光脉冲从船尾发出到达船头的空间间隔为多少 ？

解： $x_2 - x_1 = \dfrac{x_2{}' - x_1{}' + v(t_2{}' - t_1{}')}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{90 + 0.8c\times\dfrac{90}{c}}{\sqrt{1-0.8^2}} = 270m$

2、B 观察者以 0.8c 的速度相对于 A 观察者运动。B 带着一根 1m 长的细杆，杆的取向与运动方向相同，在杆的一端相继发出两次闪光，其时间间隔在他的计时标度上看是 10s，求：

（1）A 测得此杆的长度是多少？

（2）A 测得再次闪光的时间间隔有多长？

解：（1） $l = l_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = 1\times\sqrt{1-(\dfrac{0.8c}{c})^2} = 0.6m$

（2） $\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{10}{\sqrt{1-(\dfrac{0.8c}{c})^2}} = 16.7s$

3、一辆小车以速度 v 行驶，车上放一根米尺，并与水平方向成 30^0。在地面上观察者，测得米尺与水平方向成 45^0，求：

（1）小车的速度；

（2）地面上观察者测得米尺长度为多少？

解：（1）设原长 l' 则 $y' = x' tg30^0$， $y = xtg45^0$

$$y = y'$$

$$x' tg30^0 = xtg45^0 = x'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,tg45^0 \quad v = \sqrt{\frac{2}{3}}c$$

（2） $L = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x'^2(1-\dfrac{v^2}{c^2}) + (x' tg30^0)^2}$ （ $x' = \cos 30^0$ ）

$$= x'\sqrt{\frac{2}{3}} = 1\times\cos 30^0\times\sqrt{\frac{2}{3}} = 0.707m$$

4、在惯性系 S 中，有两事件发生于同一地点，且第二事件比第一事件晚发生$\Delta t=2$秒。而在另一惯性系 S'中，观测第二事件比第一事件晚发生$\Delta t'=3$秒。求：

（1）S'系相对于 S 系的运动速度为多少？

（2）在 S'系中发生两事件的地点之间的距离是多少？

解：（1） $\Delta t' = \dfrac{\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = \dfrac{\Delta t}{\Delta t'} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow v = \dfrac{\sqrt{5}}{3}c$

（2） $x_B' - x_A' = \dfrac{x_B - x_A - v(t_B - t_A)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{0-\dfrac{\sqrt{5}}{3}c\times 2}{\sqrt{1-(\dfrac{\sqrt{5}}{3})^2}} = -\sqrt{5}c = -6.7\times 10^8\,\mathrm{m}$

5、静止的μ 子的平均寿命均为2.2×10^{-6}s，今在 8km 高空的宇宙射线中产生了一个速度为 0.9c 的μ 子。问此μ 子能不能到达地面？

解：设 S 为与 u 子联系的坐标系，μ 子在 S 系中寿命 $\Delta t = 2.2\times10^{-6}\,\mathrm{s}$

则μ 子在 S' 系中（实验室）寿命为 $\Delta t'$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{2.2\times10^{-6}}{\sqrt{1-(\dfrac{0.9c}{c})^2}} \cong 5.0\times10^{-6}\,\mathrm{s}$$

实验室观察者看到μ 子能走过的距离 $\Delta l = v\cdot\Delta t' = 0.9c\times5.0\times10^{-6} = 1.35km < 8km$

所以μ 子达不到地面就殒灭了。

6、静止长度为l_0的宇宙飞船，以速度 u 相对于地面作匀速直线航行。有个小球从飞船的尾部运动到头部，宇航员测得小球的速度恒为 V_0。求：

(1) 宇航员测得小球从飞船尾部到头部所需要的时间；

(2) 地面观察者测得小球从飞船尾部到头部所需要的时间。

解：（1）宇航员在自身的参照系测量 $t' = \dfrac{l_0}{V_0}$

（2）由洛仑兹变换，小球相对地面观察者所需时间

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1' + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{(\dfrac{l_0}{v_0} + \dfrac{u}{c^2}l_0)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{l_0(1+\dfrac{u}{c^2}v_0)}{v_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

（ 已知：$x_2' - x_1' = l_0$ ， $t_2' - t_1' = \dfrac{l_0}{v_0}$ ）

7、放射性物质的原子放射出两个沿相反方向运动的电子。在实验室中测出每个电子的速率为 0.60c，今以一个电子为参照系，求另一个电子的速率为多大？

解：设实验室为 S 系（地球），向右运动电子（1）为 S'系，（1）电子相对于实验室运动的速度为 v=0.6c，向左运动电子为运动物体，（2）电子相对于实验室运动速度为 $u_x = -0.6c$。取向右为正方向。则电子（2）相对于电子（1）即 S'系的运动速度为$u_x{}'$。

$$u_x{}' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v^2}{c^2} u_x} = \frac{-0.6c - 0.6c}{1 - \frac{0.6c}{c^2} \times (-0.6c)} \approx -0.88c$$

8、飞船 B 相对飞船 A 作匀速直线运动。飞船 A 中的宇航员测得两事件的时空坐标分别为 x_1=100m，$t_1=2\times10^{-7}$s 和 x_2=700m，$t_2=1\times10^{-6}$s，而飞船 B 中的宇航员测得这两事件同时发生。求：

（1）飞船 B 相对于飞船 A 的速度。

（2）如飞船 A 中的宇航员突然发现一火箭飞来。并测得其速度为 0.5c，则飞船 B 中的宇航员测得火箭的速度为多少？

解：（1） $t_B{}' - t_A{}' = \dfrac{t_B - t_A - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0$

$$v = \frac{t_B - t_A}{x_2 - x_1} c^2 = \frac{(10-2)\times10^{-7}}{700-100} \times 9\times10^{16} = 1.2\times10^8 \, m/s$$

（2）当迎面飞来时 $v_B = \dfrac{-v_A - v}{1 + \frac{v_A v}{c^2}} = -0.75c = -2.25\times10^8 \, m/s$

当背面飞来时 $v_B = \dfrac{-v_A + v}{1 - \frac{v_A v}{c^2}} = 0.125c = 3.75\times10^7 \, m/s$

9、观察者乙以$\frac{4}{5}c$的速度相对于静止的观察者甲运动，求：

（1）乙带质量为 1kg 的物体，甲测得此物体质量为多少？

（2）乙测得的物体总能量为多少？甲测得物体总能量为多少？

（3）乙带一长为l_0，质量为 m 的棒，这根棒安放在运动方向上，求甲、乙分别测得该棒的密度是多少？

解：（1） $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(\frac{4}{5}c)^2}{c^2}}}=1\dfrac{2}{3}$公斤

（2） 乙测得 $E_0=m_0c^2=1\times(3\times10^8)^2=9\times10^{16}J$

甲测得 $E=mc^2=\dfrac{5}{3}\times(3\times10^8)^2=1.5\times10^{17}J$

（3） 甲测得， $\rho=\dfrac{m}{l}=\dfrac{\frac{5}{3}\times m_0}{l_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\dfrac{\frac{5}{3}}{l_0\times\sqrt{1-\dfrac{(\frac{4}{5}c)^2}{c^2}}}=\dfrac{25}{9}\dfrac{m_0}{l_0}$

10、（1）当粒子动量等于非相对论动量的两倍时，则粒子速度为多少？

（2）当粒子动能等于它的静止能量时，则粒子速度又为多少？

解：（1）$mv=2m_0v$

$$\frac{m}{m_0}=2=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$v=\frac{\sqrt{3}}{2}c$$

（2）$E_k=m_0c^2=mc^2-m_0c^2$

$$mc^2=2m_0c^2$$

$$\frac{m}{m_0}=2=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$v=\frac{\sqrt{3}}{2}c$$

11、某一宇宙射线中的介子的动能 $E_k=7M_0C^2$，其中 M_0 是介子的静止质量。试求实验室中观察者测得介子的寿命是它固有寿命的多少倍？

解： $E_K = E - E_0 = 7E_0$

$$E = 8E_0$$

$$\frac{E}{E_0} = \frac{m}{m_0} = 8 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 8$$

拓展题：

1、在折射率为 n 的静止连续介质中，光速 $u_o=\frac{c}{n}$。试问当水管中的水以速率 v 流动时，沿着水流方向通过水的光速 u 多大？1851 年，菲佐（A.H.L.Fizeau, 1819-1896）从实验上观察到这样的效应，光好像是被运动介质所拖动，但又不是完全地拖动，只是运动介质速率的一部分 $f=1-\frac{1}{n^2}$ 加到了光速 $u_o=\frac{c}{n}$ 中。直到相对论出现以后，该效应才得到满意的解释，试证明之。

解：在与水一起运动的 S' 系中观测，水中的光速为：$u'=\frac{c}{n}$

由相对论速度变换公式，在实验室 S 系中观测：

$$u=\frac{u'+v}{1+u'v/c^2}=\frac{c}{n}(\frac{1+nv/c}{1+v/nc})$$

按级数展开，并略去 $(\frac{v}{c})^2$ 项及更小的项，则

$$u=\frac{c}{n}(1+\frac{nv}{c}-\frac{v}{nc})=\frac{c}{n}+v(1-\frac{1}{n^2})$$

2、已知质子和中子的质量分别为 $m_P=1.00728u$，$m_n=1.00866u$，两个质子和两个中子组成一个氦核 ${}_2^4He$，实验测得它的质量为 $m_A=4.00150u$，试计算形成一个氦核时放出的能量（$1u=1.660\times10^{-27}kg$）。

解：两个质子和两个中子组成一个氦核之前，总质量为：$m=2m_P+2m_n=4.03188u$

组成一个 ${}_2^4He$ 氦核时：$\Delta m=m-m_A=0.03038u$

释放原子核结合能：

$$\Delta E=\Delta mc^2=0.03038\times1.660\times10^{-27}\times(3\times10^8)^2J=0.4539\times10^{-11}J$$

结合成 1mol 氦核时释放的能量为：$\Delta E'=6.022\times10^{23}\Delta E=2.733\times10^{12}J$

相当于燃烧 100 t 煤所产生的热量。

大学物理下习题册八

1、 某黑体在某一温度时，辐射本领为 $5.7W/cm^2$，试求这一辐射本领具有的峰值的波长λ m?

解：根据斯忒藩定律 $E(T)=\sigma T^4(\sigma=5.67\times10^{-8}\ J/s\cdot m^2\cdot K^3)$ 得 $T=\sqrt[4]{\frac{E(T)}{\sigma}}$

再由维恩位移定律 $T\lambda_m=b\ \ (b=2.898\times10^{-3}m\cdot K)$

$$\lambda_m=\frac{b}{T}=\frac{b}{\sqrt[4]{\frac{E(T)}{\sigma}}}=\frac{2.898\times10^{-3}}{\sqrt{\frac{5.7\times10^4}{5.67\times10^8}}}=2.89\times10^{-6}m$$

2、在天文学中，常用斯特藩—玻尔兹曼定律确定恒星半径。已知某恒星到达地球的每单位面积上的辐射能为 $1.2\times10^{-8}W/m^2$，恒星离地球距离为 $4.3\times10^{17}m$，表面温度为 5200 K。若恒星辐射与黑体相似，求恒星的半径。

解：对应于半径为 $4.3\times10^{17}m$ 的球面恒星发出的总的能量 $W=E_1\cdot4\pi R^2$

则恒星表面单位面积上所发出能量 E_0 为

$$E_0=\frac{W}{4\pi r^2}=\frac{E_1 4\pi R^2}{4\pi r^2}=\frac{E_1R^2}{r^2} \qquad （1）$$

由斯忒藩定律 $E_0=\sigma T^4$ （2）

联立（1）、（2）式得

$$r=\sqrt{\frac{E_1}{\sigma}}\frac{R}{T^2}=\sqrt{\frac{1.2\times10^{-8}}{5.67\times10^{-8}}}\frac{4.3\times10^{17}}{5200^2}=7.3\times10^9m$$

3、绝对黑体的总发射本领为原来的 16 倍。求其发射的峰值波长λ m 为原来的几倍？

解：设原总发射本领为 E_0,温度 T_0,峰值波长 λ_0，则由斯忒藩-波耳兹曼定律可得

$$E=16E_0=\sigma T^4=16\sigma T_0{}^4$$

$$\therefore(\frac{T_0}{T})^4=\frac{1}{16} \qquad \frac{T_0}{T}=\frac{1}{2}$$

又 由位移定律 $\lambda_m T=b$ 可得

$$\therefore\frac{\lambda_m}{\lambda_0}=\frac{T_0}{T}=\frac{1}{2}$$

4、从铝中移出一个电子需要 4.2eV 的能量，今有波长为 200nm 的光投射到铝表面上，问：（1）由此发射出来的光电子的最大动能为多少？

（2）遏止电势差为多大？

（3）铝的截止波长有多大？

解：由爱因斯坦方程 $h\nu = E_k + A$

（1）$E_k = h\nu - A = \dfrac{hc}{\lambda} - A = \dfrac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{2.0\times10^{-7}\times1.6\times10^{-19}} - 4.2 = 2.01\,\text{eV}$

（2）由光电效应的实验规律得

$E_k = eU_0$ （U_0为遏止电势差）

$U_0 = \dfrac{E_K}{e} = \dfrac{2.01}{1} = 2.01\text{V}$

（3）$A = h\nu_0 = \dfrac{hc}{\lambda_0}$

$\therefore \lambda_0 = \dfrac{hc}{A} = \dfrac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{4.2\times1.6\times10^{-19}} = 2.958\times10^{-7}\,\text{m}$

5、 以波长为λ =410nm 的单色光照射某一光电池，产生的电子的最大动能 E_k=1.0eV，求能使该光电池产生电子的单色光的最大波长是多少？

解：爱因斯坦光电效应方程，$h\nu = E_K + A$ $\quad \nu = \dfrac{h}{\lambda}$

得 $\dfrac{hc}{\lambda} = E_K + A$ (1)

按题意最大波长时满足 $E_K = 0$

得 $\dfrac{hc}{\lambda} = A$ (2)

则（1)、（2）得 $\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda_0} = \dfrac{E_K}{hc}$

即 $\dfrac{1}{\lambda_0} = \dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{E_K}{hc} = \dfrac{1}{4.1\times10^{-7}} - \dfrac{1.6\times10^{-19}}{3\times10^{8}\times6.63\times10^{-34}} = 1.64\times10^{6}$

故最大波长 $\lambda_0 = 609.7\text{nm}$

6、一实验用光电管的阴极是铜的（铜的逸出功为 4.47eV）。现以波长 0. 2μm 的光照射此阴极，若要使其不再产生光电流，所需加的截止电压为多大？

解：由爱因斯坦方程 $\dfrac{hc}{\lambda} = E_K + A$ 及 $E_K = eU_0$ 得

$$U_0 = \frac{1}{e}\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right) = \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{0.2\times10^{-6}\times1.6\times10^{-19}} - 4.47 = 1.74\text{V}$$

7、在与波长为 0.01nm 的入射伦琴射线束成某个角度θ 的方向上，康普顿效应引起的波长改变为 0.0024nm，试求：

（1）散射角θ ；

（2）这时传递给反冲电子的能量。

解：（1）由康普顿散射公式 $\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0 c}\sin^2\frac{\Phi}{2}$

$$\sin^2\frac{\Phi}{2} = \frac{\Delta\lambda}{\frac{2h}{m_0 c}} = \frac{0.024}{2\frac{6.62\times10^{-34}}{9.1\times10^{-31}\times3\times10^{8}}} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{\Phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} ? \quad \frac{F}{2} \quad 45^0 \qquad F = 90^0$$

（2）碰撞时可以看作完全弹性碰撞，所以能量守恒

$$h\nu_0 = h\nu + E_e$$

$$E_e = h\nu_0 - h\nu = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} = hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= 6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}\left(\frac{1}{0.024\times10^{-10}} - \frac{1}{0.124\times10^{-10}}\right)$$

$$= 5.856\times10^{-19} = 2.41\times10^{4}(\text{eV})$$

8、在康普顿散射实验中，已知初始波长为 0.005nm 而光子是在 90^0 角下散射的。试求：

（1）散射后光子的波长；

（2）反冲电子的动量。

解：（1）由康普顿散射公式 $\lambda - \lambda_0 = \frac{2h}{m_0 c}\sin^2\frac{\Phi}{2}$

$$l = \frac{2h}{m_0 c}\sin^2\frac{F}{2} + l_0 = 0.05 + \frac{2创6.63 \quad 10^{-34}}{9.11创10^{-34} \quad 3? 10^{8}}\sin^2\frac{90}{2} = 0.00742nm$$

（2）由于光子散射角为 $\frac{\pi}{2}$， 由动量守恒： $\vec{P}_0 = \vec{P} + \vec{P}_e$ $\qquad \vec{P}_e = \vec{P}_0 - \vec{P}$

$$\left|\vec{P}_e\right| = \sqrt{\vec{P}_0^{\,2} + \vec{P}^{2}} = \sqrt{\left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2} = h\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2}$$

$$= 6.62\times10^{-34}\sqrt{\left(\frac{1}{0.05\times10^{-10}}\right)^2 + \left(\frac{1}{0.07456\times10^{-10}}\right)^2} = 1.59\times10^{-22}(\text{kg}\cdot\text{m/s})$$

9、氢原子从 n=3 能级跃迁到 n=2 能级时，发出光子能量为多大？此光的波长是多少？
解：由波尔氢原子假设，发射光子能量$h\nu$为

$$h\nu = E_3 - E_2$$

$$\because E_n = -\frac{13.6}{n^2}(eV)$$

由第三级迁移到第二级

$$h\nu = \frac{13.6}{3^2} - (\frac{-13.6}{2^2}) = -1.51 + 3.4 = 1.89(eV)$$

又$\because E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$

$$\therefore \lambda = \frac{hc}{E} = \frac{6.62\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{1.89\times1.6\times10^{-19}} = 6.560\times10^{-9}\,m = 656nm$$

10、处于第一激发态的氢原子被外来单色光激发后，发射光谱中仅观察到三条巴耳末系的光谱线，试求：
（1）这三条光谱线中波长最长的那条谱线的波长；
（2）外来光的频率。
解：（1）巴耳末系是 m=2 的谱线系，所以发射谱线波长为

$$h\nu = h\frac{c}{\lambda} = E_n - E_2 \qquad E_n - E_2 \uparrow \rightarrow \lambda \downarrow$$

$$\therefore \lambda = \frac{hc}{E_3 - E_2} = \frac{6.63\times10^{-34}3\times10^{8}}{(3.4-1.51)\times1.6\times10^{-19}} = 6.577\times10^{-7}\,m$$

$$(2) \quad \nu = \frac{E_5 - E_2}{h} = \frac{(-0.54+3.4)\times1.6\times10^{-19}}{6.63\times10-34} = 6.91\times10^{14}\,Hz$$

11、将氢原子从 n=1 激发到 n=4 的能级时，求：

（1）氢原子所吸收的能量为多少？

（2）若一群已处于 n=4 激发态的氢原子回到基态，在这过程中发出的光波波长最短为多少？

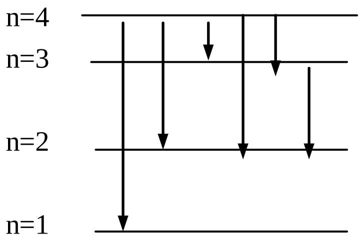
（3）最多可观察到几条光谱线？

解：（1） $\Delta E = E_4 - E_1 = -0.85 + 13.6 = 12.75\text{eV}$

（2）最短波长为 n=4 跃迁 n=1

$$\therefore \lambda = \frac{hc}{E_4 - E_1} = \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{12.75\times1.6\times10^{-19}} = 9.75\times10^{-8}\,\text{m}$$

（3）共 6 条



12、求下列粒子相应的德布罗意波长

（1）一质量为 4×10^{-2}kg 以 10^{3} m/s 的速率飞行的子弹；

（2）动能为 0.025eV 的中子；

解：（1）实物粒子波长与动量关系为

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{mv} = \frac{6.63\times10^{-34}}{4\times10^{-2}\times10^{3}} = 1.65\times10^{-35}\text{m}$$

（2）对 $E_K = 0.025\text{eV}$ 的中子， $m_\Phi = 1.68\times10^{-27}$

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{2mE_K} = \frac{6.63\times10^{-34}}{\sqrt{2\times1.68\times10^{-27}\times0.025\times1.6\times10^{-19}}} = 1.81\times10^{-10}\text{m}$$

13、能量为 15eV 的光子，被氢原子中处于第一玻尔轨道的电子所吸收而形成一光电子求：（1）当此光电子远离质子时的速度为多大？

（2）它的德布罗意波长是多少？

解：（1）处于基态的电子电离所需的能量为 13.6eV，因此该电子远离质子时的动能

$$E_K = \frac{1}{2}mV^2 = E_{光} + E_{基} = 15 - 13.6 = 1.4eV$$

其速度为

$$V = \sqrt{\frac{2E_K}{m}} = \sqrt{\frac{2\times1.4\times1.6\times10^{-19}}{9.11\times10^{-31}}} = 7.0\times10^5\,m/s$$

（2）德波罗意波长

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63\times10^{-34}}{9.11\times10^{-31}\times7.0\times10^5} = 1.04\times10^{-9}\,m = 1.04nm$$

14、一束带电粒子经 206V 的电势差加速后，测得其德布罗意波长为 0.002nm，已知这带电粒子所带电量与电子电量相等，求这粒子的质量。

解：因为这粒子的电量与电子电量 e 相同，从加速电场获得动能为 eU

$$\therefore \frac{1}{2}mV^2 = eU \qquad V = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

又德波罗意波长 $\lambda = \frac{h}{mv}$

$$\therefore \lambda = \frac{h}{\sqrt{2e\,m\,U}}$$

得 $$m = \frac{h^2}{2eU\lambda^2} = \frac{\left(6.63\times10^{-34}\right)^2}{2\times1.6\times10^{-19}\times206\times(0.02\times10^{-10})^2} = 1.67\times10^{-27}kg$$

15、电子和光子各具有波长 0.20 nm，它们的动量和总能量各是多少？

解：电子和光子的动量相等 $P = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63\times10^{-34}}{0.2\times10^{-9}} = 3.32\times10^{-24}kg\cdot m/s$

光子的总能量 $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{0.2\times10^{-9}} = 6.19\times10^3\,eV$

电子的总能量 $E = \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2} = 5.12\times10^5\,eV$

16、若电子运动速度与光速可比拟，则当电子动能等于它的静止能量的 2 倍时。求其德布罗意波长为多少？

解：由题意可得 $E_K = 2m_eC^2$

又根据相对论的能量关系可得

$$E^2 = (E_K + m_ec^2)^2$$

$$= (m_ec^2)^2 + p^2c^2 = (3m_ec^2)^2$$

$$\therefore \quad p^2 = 8m_e^{\ 2}c^2$$

$$p = 2\sqrt{2}m_ec$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{2\sqrt{2}m_ec} = \frac{6.63\times10^{-34}}{2\sqrt{2}\times9.1\times10^{-32}\times3\times10^8} = 8.58\times10^{-13}\mathrm{m}$$

17、用一台利用光子的显微镜来确定电子在原子中的位置达到 0.050nm 以内，问用这种方法确定电子的位置时，电子的速度不确定量是多少？

解：由测不准关系式 $\Delta x\cdot\Delta p \ge h$

$$\therefore \quad \Delta x\cdot m\Delta v \ge h$$

$$\Delta v = \frac{h}{\Delta x\cdot m} = \frac{6.63\times10^{-34}}{0.5\times10^{-10}\times9.11\times10^{-31}} = 1.5\times10^7\,\mathrm{m/s}$$

18、已知粒子在一维矩形无限深势阱中运动。其波函数为：

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{3\pi x}{2a} \qquad (-a \le x \le a)$$

求当粒子在 x=$\frac{5}{6}$a 处出现的几率大小？

解：几率密度为 $|\Psi^2(x)|$

$$\therefore \omega = \left|\Psi^2(\frac{5}{6}a)\right| = \left|(\frac{1}{\sqrt{a}})^2\cos^2\frac{3\pi x}{2a}\right| = \frac{1}{2a}$$

拓展题：

1、 半径 r=1cm 的铜球具有绝对黑体的表面，将铜球放在抽真空的容器内，使容器的壁保持接近绝对零度的温度。若铜球的初始温度为 T_o=300K，试问经过多长时间它的温度降到 $T=\dfrac{2T_o}{3}$ ？（已知铜的比热为 $C=3.8\times10^2 J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}$，密度为 $\rho=8.9\times10^3 kg\cdot m^{-3}$）

解：设时间从 $t\to t+dt$，铜球温度从 $T\to T+dT$，并且在 dt 时间内铜球的辐射本领近似不变，即 $E(T+dT)\approx E(T)$，则 dt 时间内铜球辐射的总能量为

$$W=E4\pi r^2dt=\sigma T^4 4\pi r^2dt$$

由热力学定律，铜球因温度降低而辐射的能量为

$$W'=-CmdT=-C\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\rho\cdot dT$$

$$W=W' \Rightarrow \sigma T^4 4\pi r^2dt=-C\frac{4}{3}\pi r^3\rho\, dT,$$

$$\int_0^t dt=\int_{T_o}^{\frac{2T_o}{3}}-\frac{C\rho r}{3\sigma}\frac{dT}{T^4} \Rightarrow t=\frac{C\rho r}{3\sigma}[(\frac{3}{2T_o})^3-(\frac{1}{T_o})^3]\ t=5829.7s\approx1.6h$$

2、讨论由一个μ⁻子和氦核组成的类氢离子，μ⁻子的质量为电子质量的 207 倍，电量与电子电量相同，对此种离子，玻尔的轨道量子化理论同样适用。若已知氢原子的半径 $R_1=5.3\times10^{-2}nm$，电离能 $E_{离}=13.6\mathrm{eV}$，试求这种类氢离子的玻尔半径和基态电离能（计算时不考虑氦核的运动）。

解：将μ⁻子质量记为 m'，对这一类氢离子基态有

$$\frac{m'u'^2_1}{R_1^2}=\frac{(2e)e}{4\pi\varepsilon_0R'^2_1},\qquad m'u'R'_1=\frac{h}{2\pi}\Rightarrow R'_1=\frac{h^2\varepsilon_0}{2\pi m'e^2}$$

由氢原子的基态 $R_1=\dfrac{h^2\varepsilon_0}{\pi me^2}$ 得 $R'_1=\dfrac{m}{2m'}R_1=\dfrac{m}{2\times207m}R_1=1.28\times10^{-4}nm$

类氢离子基态的能量 $E'_1=-\dfrac{2e^2}{8\pi\varepsilon_0R'_1}=828E_1$

电离能 $E'_{离}=E'_{\infty}-E'_1=-E'_1=828E_{离}=1.13\times10^4\mathrm{eV}$