《微分几何》课程电子课件

教师：杨勤民

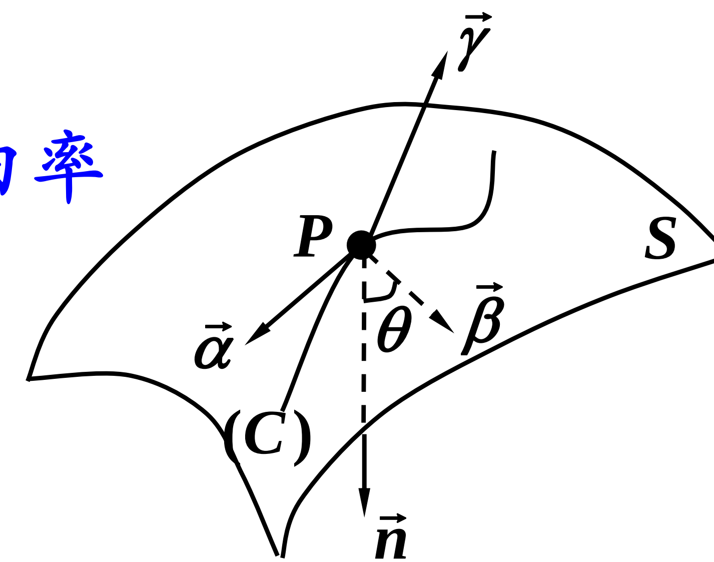
Tel: (021)64253147

Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程QQ群号：1045698545

二、曲面上曲线的曲率

1. 化曲面曲线的曲率为平面截线的曲率



曲面上的曲线$(C):\vec{r}=\vec{r}(u(s),v(s))$,

记θ为$\vec{\beta}$与$\vec{n}$的夹角,

则$\mathrm{II}=\vec{n}\cdot d^2\vec{r}=\vec{n}\cdot\ddot{\vec{r}}\,ds^2=\vec{n}\cdot\dot{\vec{\alpha}}\cdot\mathrm{I}=k\,\vec{n}\cdot\vec{\beta}\cdot\mathrm{I}=k\cos\theta\cdot\mathrm{I}$

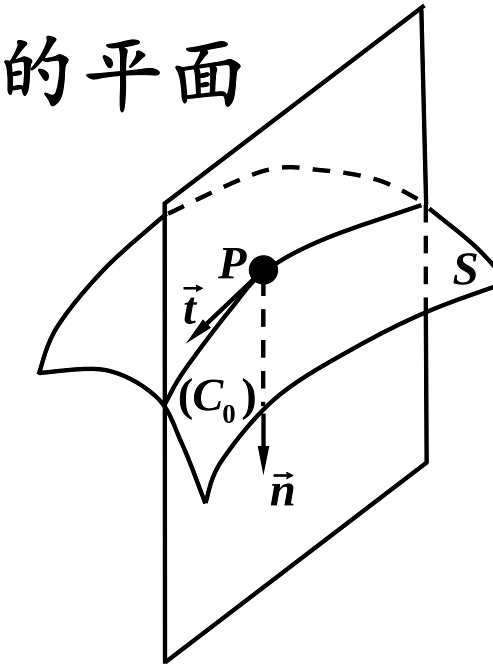
因此 $k\cos\theta=\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\dfrac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}$

(C)在P点的曲率由$(du:dv)$和$\vec{\beta}$的方向确定

$=$该点的密切平面与S的交线在该点的曲率

2. 法曲率(法截线的有向曲率)

法截面：切方向$\vec{t}$与曲面的法线$\vec{n}$所确定的平面



法截线：法截面与曲面的交线

设法截线的曲率为k_0,其主法向为$\vec{\beta}_0$

则$\vec{\beta}_0 \,//\, \vec{n}$

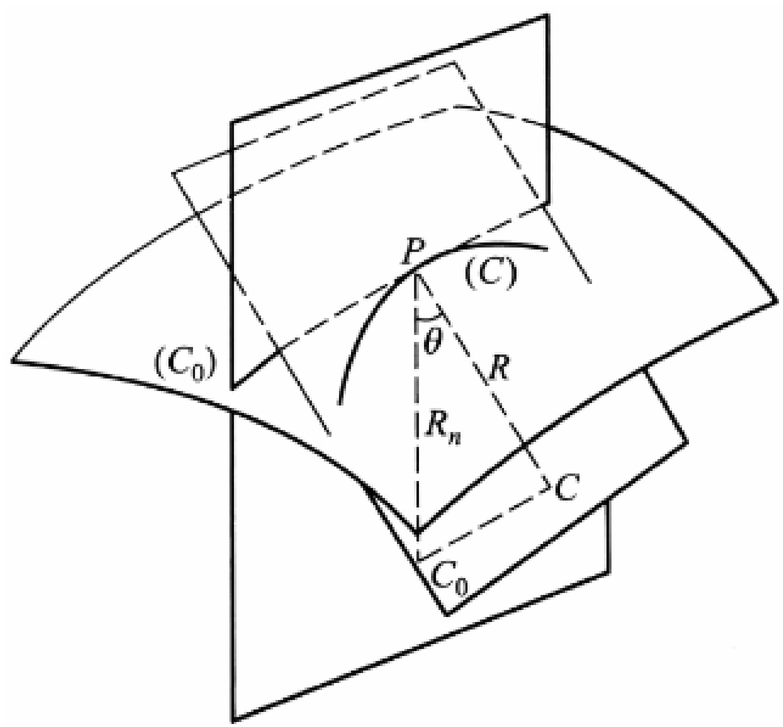
$\vec{\beta}_0$与$\vec{n}$同向时,法截线向$\vec{n}$的正侧弯曲, $k_0 = \dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$

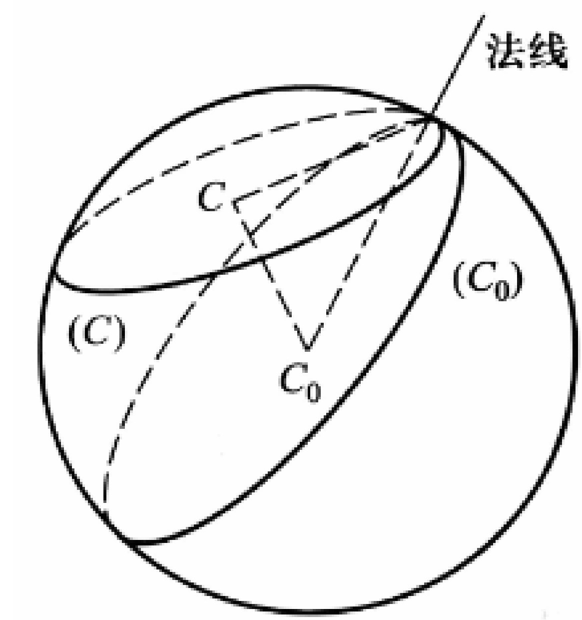
$\vec{\beta}_0$与$\vec{n}$反向时,法截线向$\vec{n}$的反侧弯曲, $k_0 = -\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$

曲面在点(u,v)处沿方向$(du:dv)$的法曲率k_n定义为$k_n = \dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$

3. Meusnier(梅尼埃)定理

曲面曲线(C)在给定点P的曲率中心C就是与曲线(C)具有共同切线的法截线(C_0)上同一个点P的曲率中心C_0在曲线(C)的密切平面上的投影.





Meusnier定理揭示了平面截线与法截线之间的联系.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业！

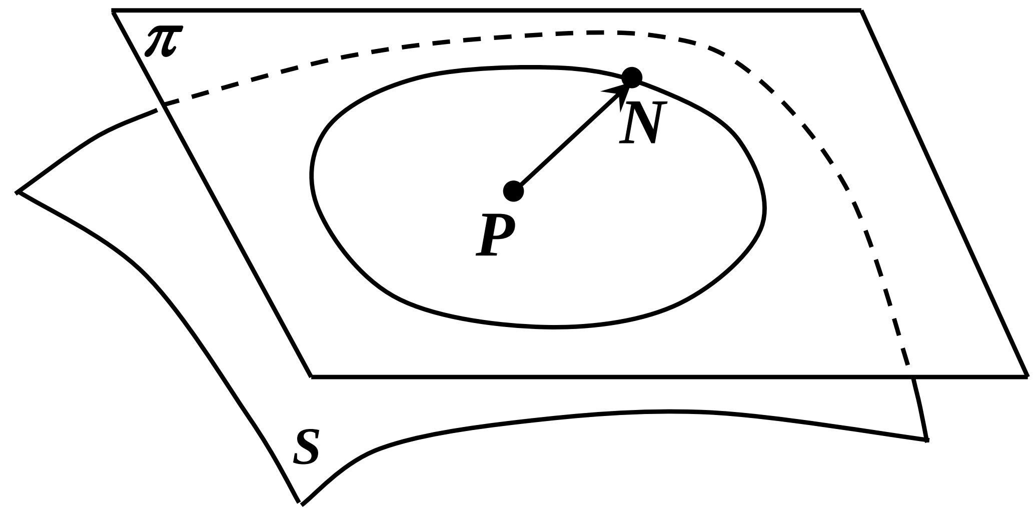
2.11 求抛物面$z=\frac{1}{2}(ax^2+by^2)$在点$(0,0)$处沿方向$(\mathrm{d}x:\mathrm{d}y)$的法曲率

2.12 求C^3类曲线$\vec{r}(u)$的切线面$\vec{R}(u,v)=\vec{r}(u)+v\vec{r}'(u)$上的点$(u,v)(v>0)$处沿曲线$u+v=c$ (c为常数)的的切方向的法曲率.

三、Dupin(迪潘)指标线

1. 定义

取 $|PN| = \sqrt{\dfrac{1}{|k_n|}}$



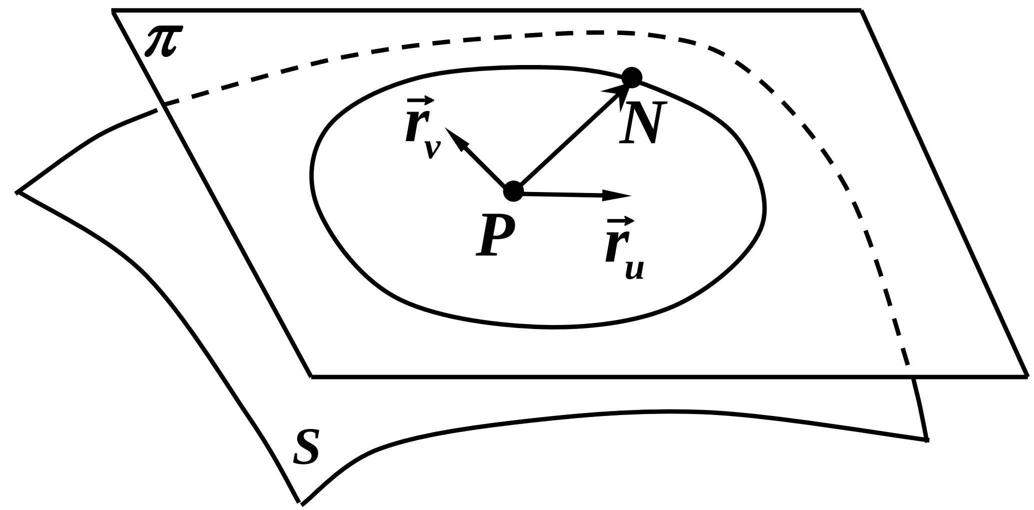
2. 几何意义

$|PN|$越短，沿 $\overrightarrow{PN}$ 方向的法截线的弯曲程度越大；

当$|PN| \to +\infty$时，沿 $\overrightarrow{PN}$ 方向的法曲率趋于零.

3. 方程

设$N=(x,y)$,



则 $\overrightarrow{PN}=x\vec{r}_u+y\vec{r}_v$,

由$\left|\overrightarrow{PN}\right|=\sqrt{\dfrac{\mathrm{I}}{|\mathrm{II}|}}$得

$$Ex^2+2Fxy+Gy^2=\frac{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}{\left|L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2\right|}$$

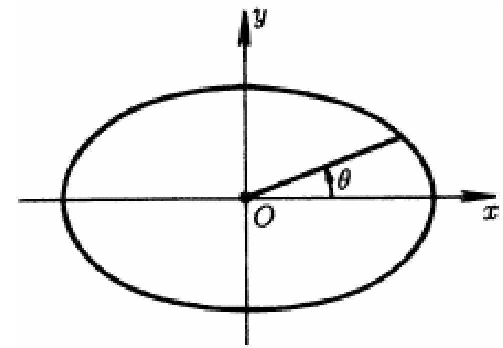
将切方向 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v=x:y$ 代入上式得到指标线方程:

$$Lx^2+2Mxy+Ny^2=\pm1.$$

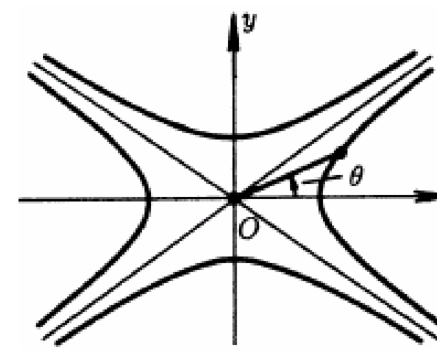
4. 根据Dupin指标线的形状对切点进行分类

$$\left(x+\frac{M}{L}y\right)^2+\frac{LN-M^2}{L^2}y^2=\pm 1$$

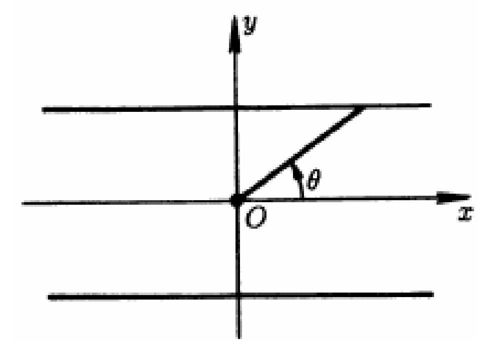
(1) 椭圆点 $LN-M^2>0$



(2) 双曲点 $LN-M^2<0$



(3) 抛物点 $\begin{cases} LN-M^2=0 \\ L, M, N\text{不同时为}0 \end{cases}$



(4) 平点 $L=M=N=0$ Dupin指标线不存在

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.13 在xOz平面上取圆周

$$y=0,(x-b)^2+z^2=a^2(b>a>0),$$

并令其绕z轴旋转得圆环面.圆环面的参数方程是

$$\vec{r}(\varphi,\theta)=((b+a\cos\varphi)\cos\theta,(b+a\cos\varphi)\sin\theta,a\sin\varphi)$$

$(0\le\varphi<2\pi,0\le\theta<2\pi)$,求圆环面上的椭圆点、双曲点和抛物点.

2.14 求曲面$\vec{r}(u,v)=(u,v,u^2+v^3)$上的抛物点、椭圆点和双曲点的集合.