第二十二次作业

一. 选择题

1. 关于“参数μ的 95%的置信区间为(a,b)”的正确理解的是　　　（ A ）

   A. 至少有 95%的把握认为(a,b)包含参数真值μ；

   B. 恰好有 95%的把握认为(a,b)包含参数真值μ；

   C. 恰好有 95%的把握认为参数真值μ落在区间(a,b)内；

   D. 若进行 100 次抽样，必有 95 次参数真值μ落在区间(a,b)内

2. 设总体$\xi \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma_0^2)$，其中$\sigma_0$已知。在样本容量 n 和置信水平$1-\alpha$确定的情况下，

   对不同的样本观测值，若样本均值$\overline{X}$增大，则总体期望μ的置信区间的长度 （ C ）

   A. 变长　　　　B. 变短

   C. 不变　　　　D. 不能确定

3. 设从总体$\xi \sim N(\mu_1,{\sigma_1}^2)$和总体$\eta \sim N(\mu_2,{\sigma_2}^2)$中分别抽取容量为 9，16 的独立样本，以$\overline{x}$，$\overline{y}$，$S_x^2$，$S_y^2$分别表示两个独立样本的样本均值和样本方差，若已知$\sigma_1=\sigma_2$，则$\mu_1-\mu_2$的 95%的置信区间为　　（ D ）

   A. $(\overline{x}-\overline{y}-u_{0.975}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{9}+\frac{\sigma_2^2}{16}}，\ \overline{x}-\overline{y}+u_{0.975}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{9}+\frac{\sigma_2^2}{16}})$

   B. $(\overline{x}-\overline{y}-u_{0.975}\sqrt{\frac{S_x^2}{9}+\frac{S_y^2}{16}}，\ \overline{x}-\overline{y}+u_{0.975}\sqrt{\frac{S_x^2}{9}+\frac{S_y^2}{16}})$

   C. $(\overline{x}-\overline{y}-\frac{t_{0.975}(25)S_w}{5}，\ \overline{x}-\overline{y}+\frac{t_{0.975}(25)S_w}{5})$，其中$S_w=\sqrt{\frac{9S_x^2+16S_y^2}{25}}$

   D. $(\overline{x}-\overline{y}-t_{0.975}(23)S_w\frac{5}{12}，\ \overline{x}-\overline{y}+t_{0.975}(23)S_w\frac{5}{12})$，其中$S_w=\sqrt{\frac{8S_x^2+15S_y^2}{23}}$

二、填空题

1. 将合适的数字填入空格，其中：（1）置信水平α，（2）置信水平$1-\alpha$，（3）精确度，（4）准确度。

　置信区间的可信度由<u>（2）</u>控制，而样本容量可用来调整置信区间的<u>（3）</u>。

2．有一大批糖果，先从中随机地取 16 袋，称的重量（单位：g ）如下：

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量近似地服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则总体均值μ的置信水平为

95%的置信区间为<u> [500.4,507.1] </u>，总体标准差σ的置信水平为95%的置信区间为<u> [4.582,9.599]   </u>。

3. 设总体$\xi \sim N(\mu,4)$，样本均值$\overline{X}$，要使总体均值μ 的置信水平为 95% 的置信区间为[$\overline{X}$-0.56，$\overline{X}$+0.56]，样本容量（观测次数）n 至少为 <u>   49   </u>.

三、计算题

1．设某地旅游者日消费额服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，且标准差$\sigma=12$，今对该地旅游者的日平均消费额进行估计,为了能以95%的置信水平相信这种估计误差小于2（元)，问至少需要调查多少人？

解：由于总体为正态分布,且标准差$\sigma(=12)$已知,又由$1-\alpha=0.95$,即$\alpha=0.05$,

查表可得$U_{1-\frac{\alpha}{2}}=U_{0.975}=1.96$，

误差小于2即$U_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<2\Rightarrow 1.96\cdot\frac{12}{\sqrt{n}}<2\Rightarrow n>138.2976$，

故至少要调查139人。

2. 设某炼铁厂炼出的铁水含碳量（单位：%）服从于正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，根据长期积累的资料，已知其中$\sigma=0.108$。现测量5炉铁水，测得含碳量为：4.28，4.40，4.42，4.35，4.37. 求总体均值μ的水平为95%的置信区间.

解：据题意，要求μ的置信度为95%的置信区间，且方差已知:

则μ的置信度为95%的置信上下限为:

$$\overline{x}\pm u_{0.975}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=4.364\pm1.96\times\frac{0.108}{\sqrt{5}}=[4.2693,\quad 4.4587].$$

3．设某种清漆的干燥时间服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$。现有该清漆的9个样本，干燥时间分别为6.0，5.7，5.8，6.5，7.0，6.3，5.6，6.1，5.0。试求该种清漆平均干燥时间的置信度为95%的置信区间。

解：据题意，要求μ的置信度为95%的置信区间，且方差未知。

由样本得：$n=9$，$\overline{x}=6$，$s_{n-1}^2=0.33$，查t分布表得$t_{0.975}(8)=2.06$

则μ的置信度为95%的置信上下限为

$$\bar{x} \pm t_{0.975}(8) \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} = 6 \pm 2.06 \times \frac{\sqrt{0.33}}{\sqrt{9}} = 6 \pm 0.44$$

即该种清漆平均干燥时间的置信度为95%的置信区间为[5.56, 6.44]。

4．某厂生产一批圆形药片，已知药片直径$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，随机抽取16粒药片，测得样本均值$\bar{x} = 4.87$ mm，样本标准差$s = 0.32$ mm，求总体的方差σ^2在置信水平为0.95下的置信区间。

解：由样本值得$s = 0.32$, $n = 16$，$\alpha = 0.05$，自由度为$n - 1 = 15$。

查表得$\chi^2_{0.025}(15) = 6.262$，$\chi^2_{0.975}(15) = 27.488$。所以，

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(15)} = \frac{15 \times 0.32^2}{27.488} = 0.0559,$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(15)} = \frac{15 \times 0.32^2}{6.262} = 0.2453.$$

即σ^2的置信水平为0.95的置信区间为：$\left[0.0559, \quad 0.2453\right]$。

5. 为了测试某药物的疗效，随机抽取10人测量其服用药物前后某指标的数据：

服用前 X:	41	60.3	23.9	36.2	52.7	22.5	67.5	50.3	50.9	24.6
服用后 Y:	49.6	64.5	33.3	36	43.5	56.8	60.7	57.3	65.4	41.9

假设服用前后该指标测量值分别都服从正态分布：$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

根据上述数据经计算得服用前的样本均值为: $\bar{X} = 42.99$, 样本**标准**差$S_X = 15.93$

服用后的样本均值为: $\bar{Y} = 50.90$, 样本**标准**差$S_Y = 11.72$

令$Z = Y - X$, 根据服药前后的样本数据算得: $\bar{Z} = 7.91$, 样本**标准**差$S_Z = 12.56$.

1) 证明若服药前后的样本容量均为n, 则有 $\dfrac{\bar{Z} - (\mu_2 - \mu_1)}{S_z}\sqrt{n} \sim t(n-1)$

2) 求$\mu_2 - \mu_1$的置信水平为95%的置信区间

证明: 1) $Z = Y - X \sim N(\mu_2 - \mu_1, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

$$\overline{Z} \sim N(\mu_2-\mu_1, \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}), \qquad A =: \frac{\overline{Z}-(\mu_2-\mu_1)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

$B =: \dfrac{(n-1)S_Z^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \sim \chi^2(n-1)$，且 S_Z 与 $\overline{Z}$ 相互独立.

$$\frac{A}{\sqrt{B/(n-1)}} = \frac{\overline{Z}-(\mu_2-\mu_1)}{S_z^*}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

2) $[\overline{Z}-t_{1-\alpha/2}(n-1)\dfrac{S_Z}{\sqrt{n}}, \overline{Z}+t_{1-\alpha/2}(n-1)\dfrac{S_Z}{\sqrt{n}}] =$

$= [7.91\text{-}t_{0.975}(9)\dfrac{12.56}{\sqrt{10}},\quad 7.91+t_{0.975}(9)\dfrac{12.56}{\sqrt{10}}] = [-1.074,\quad 16.894]$.

第二十三次作业

一．选择题

1. 假设检验中分别用 $\boldsymbol{H_0}$ 和 $\boldsymbol{H_1}$ 表示原假设和备择假设，则犯第一类错误的概率是指 (C)

   A. $\boldsymbol{P}$**{接受**$\boldsymbol{H_0}$ **|** $\boldsymbol{H_0}$**为真}** B. $P\{接受H_0 \mid H_0不真\}$

C. $\boldsymbol{P}$**{拒绝**$\boldsymbol{H_0}$ **|** $\boldsymbol{H_0}$**为真}**　　　　D. P{拒绝$H_0 \mid H_0$不真}

2. 一个显著性的假设检验问题，检验的结果是拒绝原假设还是接受原假设,与之有关的选项中, 正确的　　(D)
   A. 与显著性水平有关　　　　B. 与检验统计量的分布有关
   C. 与样本数据有关　　　　D. 与上述三项全有关

3. 一个显著性水平为α的假设检验问题，如果原假设 $\boldsymbol{H_0}$ 被拒绝,则 (B)

   A. 原假设 $\boldsymbol{H_0}$ 一定不真　　　　B. 这个检验犯第一类错误的概率不超过α

   C. 这个检验也可能会犯第二类错误　　　　D. 这个检验两类错误都可能会犯

二. 填空题：

1．假设检验的基本思想是基于 <u>小概率反例否定法(或 小概率事件原理)</u>

2. 选择原假设最重要的准则是 <u>含有等号</u>

3. 假设检验中可能犯的两类错误的关系为, 一定条件下若降低了犯第一类错误的概率,会<u>增加犯第二类错误的概率,(反之亦然).</u>

三. 计算题：

1．已知在正常生产情况下某厂生产的汽车零件的直径服从正态分布 $N(54, 0.75^2)$，在某日生产的零件中随机抽取 10 件，测得直径（cm）如下：

54.0 ，55.1 ，53.8，54.2 ，52.1 ，54.2，55.0 ，55.8，55.1，55.3

如果标准差不变，在显著水平 $\alpha = 0.05$ 情况下,能否认为该日生产零件直径的均值与标准值 54cm 无显著差异？ 并问这个检验可能犯的错误是哪一类?

解：由样本观测值计算,得 $\bar{X} = 54.46$，本问题相当于要检验

$$H_0 : \mu = 54.46, H_1 : \mu \neq 54.46，$$

考虑到总体服从正态分布 $N(54, 0.75^2)$,故采用双侧 U 检验法，

取检验统计量的测试值为 $\hat{U} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = \dfrac{54.46 - 54}{0.75 / \sqrt{10}} = 1.9395$，

由水平 $\alpha = 0.05$,查表得 $U_{1-\frac{\alpha}{2}} = U_{0.975} = 1.96$,由于 $\left|\hat{U}\right| < U_{0.975}$，

故接受 H_0，即该日生产得零件直径的均值与标准值没有显著差异。

因原假设被接受,故这个检验可能犯的错误是第二类.

2．从一批矿砂中，抽取 5 个样品，测得它们的镍含量（单位：%）如下：

3.25　　3.24　　3.26　　3.27　　3.24

设镍含量服从正态分布，问：能否认为这批矿砂中镍含量的平均值为 3.25（显著水平 $\alpha = 0.05$）。

解:由样本观测值计算,得 $\bar{X} = 3.252, S_{n-1} = 0.013$，本问题相当于要检验

$$H_0: \mu = 3.25, \quad H_1: \mu \neq 3.25$$

考虑到总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,其中方差 σ^2 未知,故采用双侧 t 检验法，

取检验统计量的测试值为 $\hat{T} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S_{n-1}/\sqrt{n}} = \dfrac{3.252 - 3.25}{0.013/\sqrt{5}} = 0.3440$，

由水平 $\alpha = 0.05$，查表得 $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.975}(4) = 2.776$，

由于 $\left|\hat{T}\right| < t_{0.975}(4)$，故接受 H_0，

即可以认为这批矿砂中的镍含量得平均值为 3.25。

3．用热敏电阻测温仪间接测量地热勘探井底温度 7 次。测得温度（$^{\circ}C$）：

112.0，　113.4，　111.2，112.0，114.5，112.9，113.6

而用某精确办法测得温度为 112.6（可看作温度真值），试问热敏电阻测温仪的间接测量有无系统偏差？　（显著水平 $\alpha = 0.05$）。

解：由样本观测值计算，得 $\bar{X} = 112.8, S_{n-1} = 1.1358$，

本问题相当于要检验 $H_0: \mu = 112.6, H_1: \mu \neq 112.6$，

考虑到方差 σ^2 未知，故采用双侧 t 检验法。

计算检验统计量的值为 $\hat{T} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S_{n-1}/\sqrt{n}} = \dfrac{112.8 - 112.6}{1.1358/\sqrt{7}} = 0.4659$，

由水平 $\alpha = 0.05$，查表得 $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.975}(6) = 2.4469$，

由于 $\left|\hat{T}\right| < t_{0.975}(6)$，故接受 H_0，

即可以认为热敏电阻测温仪间接测温无系统偏差.

4. 某工厂生产的铜丝的折断力（N）服从标注差为 40 的正态分布，某日抽取 10 根铜丝进行折断力试验，测得结果如下：

2830，2800，2795，2820，2850，2830，2890，2860，2875, 2785

在显著性水平 $\alpha=0.05$ 情况下,能否认为该日生产的铜丝折断力的标准差无显著性改变？

解：由样本观测值计算，得 $\bar{X}=2833.5, S_{n-1}^{2}=1228.0556$ ，

本问题相当于要检验 $H_0:\sigma=40,\quad H_1:\sigma\neq 40$ ，

考虑到均值 μ 未知，故采用双侧 χ^2 检验法，

取检验统计量的测试值为 $\hat{\chi}^2=\dfrac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{9\times 1228.0556}{40^2}=6.9078$

由水平 $\alpha=0.05$，查表得

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.975}(9)=19.023,\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.025}(9)=2.700\ ,$$

由于 $\chi^2_{0.025}(9)<\hat{\chi}^2<\chi^2_{0.975}(9)$，故接受 H_0，

即可以认为该日生产的铜丝折断力的标准差无显著性改变。

5. 设总体 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$,其中 μ和σ^2 均未知, 抽取一个容量为 n 的样本,

对总体期望 μ 的检验原假设为 $H_0:\mu=\mu_0$. 证明: 在显著性水平 α 下接受 H_0 的充要条件是 μ 的置信水平为 1-α 的置信区间包含 μ_0

证明: 设 $\bar{X}$和S 分别表示样本均值和样本标准差

显著性水平 α 下对原假设 H_0 的检验, 检验统计量为 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$,

接受 H_0 ,即统计量观测值落入接受域

$\Leftrightarrow\quad |T|\leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu_0 \le \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \quad ,$$

即 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间$[\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}]$包含 μ_0