

## 第二章 守恒定律 习题参考解答

1、质量为  $m$  的小球系于绳的一端，绳长为  $l$ ，上端 A 固定，（如图示）。今有水平变力  $\vec{F}$  作用在该小球上时，使小球极其缓慢地移动，即在所有位置上均处于近似力平衡状态，直到绳子与竖直方向成  $\theta$  角，

（1）试用变力做功方法计算  $\vec{F}$  力的功；（2）重力做功多大？

解：根据力的平衡可得：

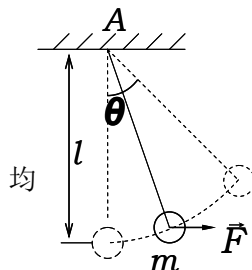
$$\begin{cases} F = T \sin \theta \\ mg = T \cos \theta \end{cases}$$

处于近似力平衡状态的水平变力：  $\therefore F = mg \tan \theta$

（1）该变力做功  $A_F = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int F ds \cos \theta = \int mg \tan \theta \cdot l d\theta \cos \theta$

$$= mg l \int_0^\theta \sin \theta d\theta = mg l (1 - \cos \theta)$$

（2）重力做功  $A_g = \int m\vec{g} \cdot d\vec{s} = \int mg ds \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = mg l \int_0^\theta (-\sin \theta) d\theta = -mg l (1 - \cos \theta)$

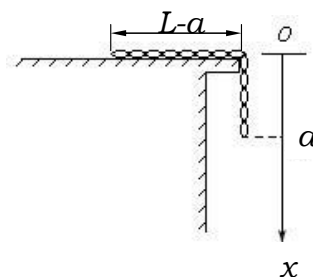


2、一根均匀链条的质量为  $m$ ，总长为  $l$ ，一部分放在光滑的桌面上，另一部分从桌面边缘下垂，下垂的长度为  $a$ ，开始时链条静止，求链条刚好全部离开桌面时的速率。

解：根据机械能守恒，设桌面为重力势能的零点

$$-\frac{m}{l} a g \frac{a}{2} = -mg \frac{l}{2} + \frac{1}{2} mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{l} (l^2 - a^2)}$$



3、地球质量 $M$ 、半径 $R$ ，一质量 $m$ 的质点处于距地心  $r=3R$ 处，求质点地球系统在此相对位置时的引力势能，

(1) 取无穷远处为零势能参考位置；

(2) 取地球表面为零势能参考位置。

解：(1) 取  $E_p(\infty)=0$  则

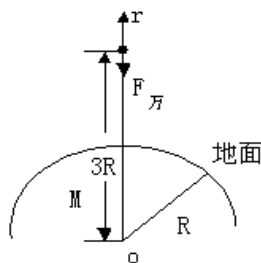
质点地球系统在此相对位置时的引力势能：

$$E_p = \int_{3R}^{\infty} \vec{F}_{\text{保}} \cdot d\vec{s} = \int_{3R}^{\infty} -G \frac{Mm}{r^2} dr = GMm \left. \frac{1}{r} \right|_{3R}^{\infty} = -\frac{GMm}{3R}$$

(2) 取  $E_p(R)=0$  则：

质点地球系统在此相对位置时的引力势能：

$$E_p = \int_{3R}^R \vec{F}_{\text{保}} \cdot d\vec{s} = \int_{3R}^R -G \frac{Mm}{r^2} dr = GMm \left. \frac{1}{r} \right|_{3R}^R = \frac{2GMm}{3R}$$



4、在地球表面上垂直向上以第二宇宙速度  $v_2 = \sqrt{2gR}$  发射一物体， $R$ 为地球半径， $g$ 为

重力加速度，试求此物体到达与地心相距为 $nR$ 时所需的时间。

解：设物体运动到距地心 $x$ 时其速度 $v$ ，此过程中机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM}{x} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G \frac{mM}{R}$$

$$\therefore v_2 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \frac{GM}{R}}$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv_2^2 - G \frac{mM}{R} = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM}{x} = 0 \Rightarrow v = \sqrt{2GM} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_0^t dt = \int_R^{nR} \sqrt{2GM} x^{-\frac{1}{2}} dx \Rightarrow t = \frac{2}{3} \frac{R}{v_2} (n^{\frac{3}{2}} - 1)$$

5、弹簧的弹性系数为 $k$ ，一端固定，另一端与质量为 $m$ 的物体相连，物体与桌面的摩擦系数为 $\mu$ ，若以不变的力 $F$ 拉物体由平衡位置 $O$ 自静止开始运动，求：

(1) 物体到达最远处离平衡位置的距离。

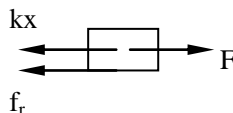
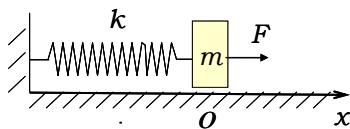
(2) 物体在什么位置速度最大？最大速度为多少？

解：(1) 物体、弹簧为系统，根据功能原理。

$$\text{不变的力 } F \text{ 拉物体得： } (F - \mu mg)x_{\max} = \frac{1}{2}kx^2$$

$$x_{\max} = \frac{2(F - \mu mg)}{k}$$

(2) 速度最大处为水平合力瞬时为 $0$ 处（即力的平衡位置） $f_r$



此时弹簧伸长为 $x_0$ ：

$$F - \mu mg - kx_0 = 0$$

$$x_0 = \frac{F - \mu mg}{k}$$

$$\text{由功能原理得： } (F - \mu mg)x_0 = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

$$\therefore v = \frac{F - \mu mg}{\sqrt{km}}$$

6、A、B两木块，质量分别为 $m_A$ 、 $m_B$ ，并排放置在光滑的水平面上。今有一子弹水平地穿过木块A、B，所用时间分别为 $\Delta t_1$ 和 $\Delta t_2$ ，若木块对子弹的阻力为恒力 $F$ ，求子弹穿过后两木块的速度？

解：未击穿A时， $m_A$ 、 $m_B$ 一起运动，根据动量定理

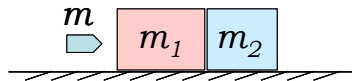
$$F\Delta t_1 = (m_A + m_B)v_A - 0$$

$$v_A = \frac{F\Delta t_1}{m_A + m_B}$$

子弹击穿A进入B后，A保持原速，B受力变速，则：

$$F\Delta t_2 = m_B v_B - m_B v_A$$

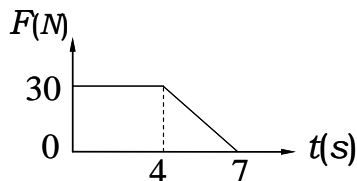
$$v_B = \frac{F\Delta t_2}{m_B} + \frac{F\Delta t_1}{m_A + m_B}$$



7、一质量 $m=10\text{kg}$  的木箱，在水平拉力 $F$ 的作用下由静止开始运动，若拉力 $F$ 随时间变化关系如图所示，已知木箱与地面间的摩擦系数 $\mu=0.2$  试从动量原理求 $t=4\text{s}$ ， $t=7\text{s}$ ， $t=6\text{s}$ 时的木箱的速度各为多大？

解：由图可知水平力的函数关系：

$$F = \begin{cases} 30 & 0 \leq t \leq 4 \\ 70 - 10t & 4 \leq t \leq 7 \end{cases}$$



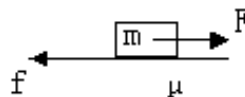
$$4\text{秒内得到的冲量: } I = \int_0^4 (F - \mu mg) dt = mv_4 - 0$$

$$\therefore v_4 = 4\text{m/s}$$

$$7\text{秒内得到的冲量: } I = I_F + I_f = 30 \times 4 + \frac{1}{2} \times 30 \times (7 - 4) - 0.2 \times 10 \times 10 \times 7 = mv_7 - 0$$

$$\therefore v_7 = 2.5\text{m/s}$$

$$4\text{秒到}6\text{秒得到的冲量: } I = \int_4^6 [70 - 10t - 0.2 \times 10 \times 10] dt =$$



$$\therefore v_6 = 4\text{m/s}$$

8、雨天，大量雨滴以速率 $v$ 落在表面积为 $S$ 的屋顶上，已知雨滴下落方向与屋顶平面的法线成 $\alpha$ 角，雨滴在单位体积内的雨滴数为 $n$ ，每一雨滴的质量为 $m$ 。设雨滴落到屋顶后速率变为零，求雨滴对屋顶产生的平均正压力。

解：设 $M$ 为 $\Delta t$ 时间内落到屋顶的总质量

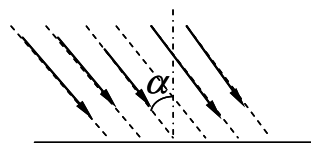
根据动量定理屋顶对其的冲量为动量的变化：

$$\begin{aligned} \bar{f}_n \Delta t &= 0 - Mv \cos \alpha = -(nv \Delta t \cos \alpha S)mv \cos \alpha \\ &= -nv^2 m \cos^2 \alpha S \Delta t \end{aligned}$$

$$\therefore \bar{f}_n = -nmv^2 \cos^2 \alpha S$$

屋顶受到的压力大小与 $\bar{f}_n$ 相同，方向相反

$$\therefore \text{平均压力 } P = \frac{\bar{f}_n'}{S} = nmv^2 \cos^2 \alpha$$



9、如图所示，质量为  $M$  的滑块正沿着光滑水平地面向右滑动。一质量为  $m$  的小球水平向右飞行，以速度  $v_1$ （对地）与滑块斜面相碰，碰后竖直向上弹起，速率为  $v_2$ （对地）。若碰撞时间为  $\Delta t$ ，试计算此过程中滑块对地的平均作用力和滑块速度增量的大小。

解：(1) 碰撞中小球  $m$  给  $M$  的竖直方向冲力在数值上应等于  $M$  对小球的竖直冲力。根

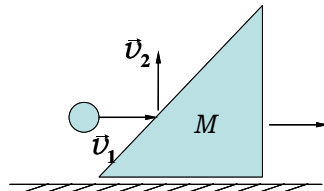
据动量定理得 
$$\bar{f} = \frac{mv_2}{\Delta t}$$

对  $M$ ，由牛顿第二定律，在竖直方向上

$$\bar{N} - Mg - \bar{f} = 0, \quad \bar{N} = Mg + \bar{f}$$

又由牛顿第三定律， $M$  给地面的平均作用力也为

$$\bar{F} = \bar{f} + Mg = \frac{mv_2}{\Delta t} + Mg \quad \text{方向竖直向下.}$$



(2) 解法 1  $M$  受小球的水平方向冲力为  $\bar{f}' = \frac{mv_1}{\Delta t}$ ，方向与  $m$  原运动方向一致

对  $M$  用动量定理 
$$\bar{f}' = M \frac{\Delta v}{\Delta t}, \Rightarrow \Delta v = m v_1 / M$$

解法 2：小球和木块碰撞过程中，在水平方向动量守恒，设木块碰撞前的速度为  $v_0$ ，有方程

$$M(v_0 + \Delta v) = Mv_0 + mv_1,$$

利用上式的  $\bar{f}'$ ，即可得

$$\Delta v = m v_1 / M$$

10、A、B 两条船，质量都为  $m$ ，静止在平静的湖面上，A 船上有一质量为  $m/2$  的人，以水平速度  $u$  相对 A 船从 A 船跳到 B 船上。如果忽略水对船的阻力，求人跳到 B 船后，A 船和 B 船的速度。

解：设  $v_A$  为 A 船对地的速度， $v_B$  为 B 船对地速度，在人跳出 A 船的过程中，水平方向无外力作用——人、A 船系统动量守恒定理，即

A 船：  $0 = m v_A + \frac{m}{2}(u + v_A)$

得 
$$v_A = -\frac{1}{3}u \quad \text{方向与人跳出速度方向相反}$$

同理人跳入 B 船过程，人、B 船系统水平方向动量守恒

B 船：  $\frac{m}{2} v_{\text{人地}} = \frac{m}{2}(u - \frac{u}{3}) = (\frac{m}{2} + m)v_B$

得 
$$v_B = \frac{2u}{9} \quad \text{方向与人跳入速度方向相同}$$

11、水平桌面上铺一张纸纸上放一个均匀球，球的质量为0.5kg，将纸向右拉时会有  $f = 0.1N$  摩擦力作用在球上。求该球的球心加速度  $a_c$  以及在从静止开始的2.0秒内，

球心相对桌面移动的距离。

解：匀质球球心为质心

$$\text{水平方向的合力: } f = ma_c \Rightarrow a_c = \frac{f}{m} = 0.2m/s^2$$

$$\text{匀加速运动: } s = \frac{1}{2}a_c t^2 = 0.4m$$

12、滑块A和B的质量分别为  $m_A$ 、 $m_B$ ，用弹性系数为  $k$  的弹簧相连，并置于光滑的水平面上，最初弹簧处于自由长度。质量为  $m_0$  的子弹以速度  $v_0$  沿水平方向射入滑块A内，试求弹簧的最大压缩量。

解：（1）子弹击中木块 A 到他们取得共同速度  $v_1$  为止。此时弹簧还未被压缩（冲力），子弹、A 系统动量守恒，即

$$m_0 v_0 = (m_0 + m_A) v_1 \quad (1)$$

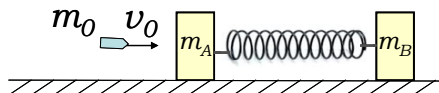
（2）子弹与木块 A 取得同速度  $v_1$  到弹簧达到最大压缩为止，这时 A、B 具有共同速度  $v_2$ ，子弹、弹簧、A 和 B 系统动量守恒和机械能守恒：

$$(m_A + m_0) v_1 = (m_A + m_B + m_0) v_2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}(m_A + m_0) v_1^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B + m_0) v_2^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad (3)$$

由（1）、（2）、（3）解得

$$x = \sqrt{\frac{m_B m_0^2 v_0^2}{k(m_A + m_0)(m_A + m_B + m_0)}}$$



13、有两个质量分别为 $m_1$ 、 $m_2$ 的行星，开始相距为无限远处，可看作静止，由于万有引力作用，它们彼此接近，当它们接近相距为 $d$ 时，它们接近的相对速度为多大？

解： $m_1$ 、 $m_2$ 为系统，仅有内力为保守力，所以系统动量守恒，机械能守恒

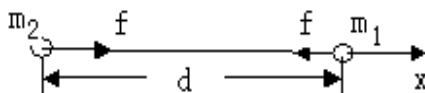
$$m_2 v_2 - m_1 v_1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - G \frac{m_1 m_2}{d} = 0 \quad (2)$$

由(1)、(2)解得

$$v_1 = m_2 \sqrt{\frac{2G}{(m_1 + m_2)d}}$$

$$v_2 = m_1 \sqrt{\frac{2G}{(m_1 + m_2)d}}$$



两粒子的相对速度  $v_r$  ( $\vec{v}_{21} = \vec{v}_{2地} + \vec{v}_{地1} = \vec{v}_{2地} - \vec{v}_{1地}$ )

$$\therefore v_r = v_2 - (-v_1) = v_2 + v_1 = \sqrt{\frac{2G(m_1 + m_2)}{d}}$$

14、质量为  $7.2 \times 10^{-23} \text{ Kg}$ 、速率为  $6 \times 10^7 \text{ m/s}$  的粒子A与另一个质量为其一半而静止的粒子B发生二维完全弹性碰撞，碰撞后粒子A的速率为  $5 \times 10^7 \text{ m/s}$ ，求：

碰撞后粒子A的速率及相对粒子A 原来速度方向的偏角；

(1) 粒子B的速率及相对粒子A 原来速度方向的偏角；

(2) 粒子A的偏转角。

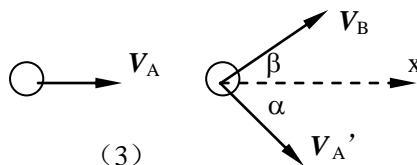
解：动量的水平分量守恒： $mV_A = \frac{m}{2} V_B \cos \beta + mV'_A \cos \alpha$  (1)

动量的竖直分量守恒： $0 = \frac{m}{2} V_B \sin \beta - mV'_A \sin \alpha$  (2)

弹性碰撞能量守恒： $\frac{1}{2} mV_A^2 = \frac{1}{2} (\frac{m}{2}) V_B^2 + \frac{1}{2} mV'^2_A$  (3)

由(1)、(2)、(3)式得

$$V_B = 4.69 \times 10^7 (\text{m/s}) \quad \alpha = 22^\circ 20' \quad \beta = 54^\circ 6'$$



15、已知两根长为  $l$  的绳子，一端固定于  $O$  点，质量分别  $m_1$  和  $m_2$  的小球系于它们的另一端。如把  $m_1$  拉至水平位置放下，使  $m_1$ 、 $m_2$  发生对心碰撞（完全弹性碰撞），设  $m_1=3m_2$ 。求碰后  $m_2$  沿圆周上升的高度。

解：  $m_1$  小球下落机械能守恒：

$$m_1 gl = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2; v_{10} = \sqrt{2gl}$$

对心碰撞水平方向动量守恒  $m_1 v_{10} = m_1 v_1 + m_2 v_2$

对心碰撞能量守恒

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

解得：  $v_1 = \frac{1}{2} v_{10}, v_2 = \frac{3}{2} v_{10}$ ，  $m_2$  将跃过  $O$  点！

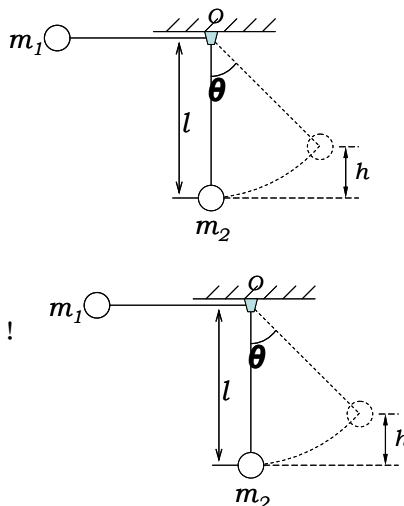
$m_2$  小球上升机械能守恒：

$$m_2 gl(1 + \cos \theta) + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2$$

$$m_2 \text{ 小球法向力: } T + m_2 g \cos \theta = m_2 \frac{v_2^2}{l}$$

$m_2$  跃过  $O$  点重力法向分力与拉力组成法向合力：

$$T = 0; m_2 g \cos \theta = m_2 \frac{v_2^2}{l}; \cos \theta = \frac{5}{6}; \text{ 得到: } h = \frac{11}{6} l$$



16、一质量为  $m$  的质点沿空间曲线运动，该曲线在直角坐标下的位置矢量为

$$\vec{r} = a \cos \omega t \vec{i} + b \sin \omega t \vec{j} \quad (a, b, \omega \text{ 均为常数})$$

求：相对于坐标原点，质点所受力矩及质点的角动量。

解：  $m$  质点的速度：

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a\omega \sin \omega t \vec{i} + b\omega \cos \omega t \vec{j}$$

$m$  质点的加速度：

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -a\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - b\omega^2 \sin \omega t \vec{j} = -\omega^2 \vec{r}$$

$$\text{相对于坐标原点, 质点所受力矩: } \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{a} \quad \therefore \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$$

相对于坐标原点，质点的角动量：

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times m\vec{v} = mab\omega \cos^2 \omega t \vec{k} - mab\omega \sin^2 \omega t (-\vec{k}) \\ &= mab\omega \vec{k} \end{aligned}$$



17、火箭以第二宇宙速度  $v_2 = \sqrt{2Rg}$  沿地面表面切向飞出，在飞离地球过程中，火箭发动机停止工作，不计空气阻力，则火箭在距地心  $4R$  的 A 处速度的大小和方向？

解：火箭在万有引力的作用下运动，对地心的角动量守恒

$$mv_2 R = m4Rv \sin \theta \quad (1)$$

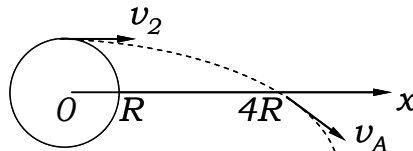
火箭、地球系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{4R} \quad (2)$$

$$mg = G\frac{mM}{R^2} \quad (3)$$

由 (1)、(2)、(3) 联立解得

$$v = \sqrt{\frac{gR}{2}} \quad \theta = 30^\circ$$



18、质量为  $m_1 = 0.2\text{kg}$  的框子，用一弹簧悬挂起来，弹簧伸长  $0.1\text{m}$ ，今有质量为  $m_2 = 0.2\text{kg}$  的油灰由距离框底  $0.3\text{m}$  高处的位置自由落到框上（如图）。求：油灰冲撞框子而使框向下移动的最大距离？

解：(1)  $m_2$  自由落体 (2)  $m_1$ 、 $m_2$  完全非弹性碰撞 (3)  $m_1$ 、 $m_2$ 、弹簧、地球系统机械能守恒（设  $E_{\text{P弹}}(\text{原长}) = 0$ ， $E_{\text{P重}}(D) = 0$ ）

$$m_1 g = kx_1 \rightarrow k = \frac{m_1 g}{x_1} = 20\text{N/m}$$

$$v = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

$$m_2 v = (m_1 + m_2)V \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + (m_1 + m_2)g(x_2 + x_m) + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}k(x_1 + x_2 + x_m)^2 \quad (3)$$

$$\text{又 } x_1 = \frac{m_1 g}{k} \quad (4)$$

$$x_1 + x_2 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \quad (5)$$

由 (1) —— (5) 联立解得

$$x_m = \sqrt{\frac{m_2^2 g^2}{k^2} + \frac{2m_2^2 gh}{k(m_1 + m_2)}} = 0.2\text{m}$$

$$\therefore x = x_2 + x_m = \frac{m_2 g}{k} + x_m = \frac{0.2 \times 10}{20} + 0.2 = 0.3\text{m}$$

