

## ★2.1.2极值原理和差分解的唯一性



Home Page

Title Page



Page 1 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

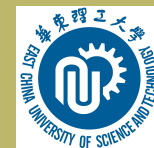
### ★2.1.2极值原理和差分解的唯一性

引理2.1(极值原理) 设 $u_0, u_1, \dots, u_N$ 是一组不全相等的数, 记 $S = \{u_0, u_1, \dots, u_N\}$ ,

$$L_h u_m = a_m u_{m-1} + b_m u_m + c_m u_{m+1}, m = 1, 2, \dots, N-1, \quad (22)$$

其中 $b_m > 0, a_m < 0, c_m < 0, b_m \geq |a_m| + |c_m|$ .

- (1)若 $L_h u_m \leq 0 (m = 1, 2, \dots, N-1)$ ,则不能在 $u_1, u_2, \dots, u_{N-1}$ 中取 $S$ 中正的最大值;
- (2)若 $L_h u_m \geq 0 (m = 1, 2, \dots, N-1)$ ,则不能在 $u_1, u_2, \dots, u_{N-1}$ 中取 $S$ 中负的最小值;



Home Page

Title Page



Page 1 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

### ★2.1.2极值原理和差分解的唯一性

引理2.1(极值原理) 设 $u_0, u_1, \dots, u_N$ 是一组不全相等的数, 记 $S = \{u_0, u_1, \dots, u_N\}$ ,

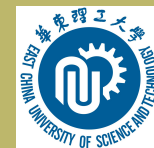
$$L_h u_m = a_m u_{m-1} + b_m u_m + c_m u_{m+1}, m = 1, 2, \dots, N-1, \quad (22)$$

其中 $b_m > 0, a_m < 0, c_m < 0, b_m \geq |a_m| + |c_m|$ .

- (1)若 $L_h u_m \leq 0 (m = 1, 2, \dots, N-1)$ ,则不能在 $u_1, u_2, \dots, u_{N-1}$ 中取 $S$ 中正的最大值;
- (2)若 $L_h u_m \geq 0 (m = 1, 2, \dots, N-1)$ ,则不能在 $u_1, u_2, \dots, u_{N-1}$ 中取 $S$ 中负的最小值;

证明: 用反证法证明(1),假设在 $u_1, u_2, \dots, u_{N-1}$ 中取到 $S$ 的最大值, 记

$$M = \max_{0 \leq m \leq N} |u_m| > 0$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 1 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

### ★2.1.2极值原理和差分解的唯一性

引理2.1(极值原理) 设 $u_0, u_1, \dots, u_N$ 是一组不全相等的数, 记 $S = \{u_0, u_1, \dots, u_N\}$ ,

$$L_h u_m = a_m u_{m-1} + b_m u_m + c_m u_{m+1}, m = 1, 2, \dots, N-1, \quad (22)$$

其中 $b_m > 0, a_m < 0, c_m < 0, b_m \geq |a_m| + |c_m|$ .

- (1)若 $L_h u_m \leq 0 (m = 1, 2, \dots, N-1)$ ,则不能在 $u_1, u_2, \dots, u_{N-1}$ 中取 $S$ 中正的最大值;
- (2)若 $L_h u_m \geq 0 (m = 1, 2, \dots, N-1)$ ,则不能在 $u_1, u_2, \dots, u_{N-1}$ 中取 $S$ 中负的最小值;

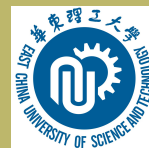
证明: 用反证法证明(1),假设在 $u_1, u_2, \dots, u_{N-1}$ 中取到 $S$ 的最大值, 记

$$M = \max_{0 \leq m \leq N} |u_m| > 0$$

由于 $S$ 中的数不全相等, 一定存在某个 $i (1 \leq i \leq N-1)$ 使得 $u_i = M$ , 并且 $u_{i-1}$ 与 $u_{i+1}$ 中至少有一个小于 $M$ , 于是

$$L_h u_i = a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = b_i M + a_i u_{i-1} + c_i u_{i+1} > b_i M + (a_i + c_i) M \geq 0$$

这与 $L_h u_i \leq 0$ 矛盾, 从而证明了(1).  
同理可证明(2).

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 1 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



定理2.1差分方程组(5)和(10)都有惟一解。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 2 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



定理2.1差分方程组(5)和(10)都有惟一解。  
证：考虑与方程组(5)对应的齐次方程

$$\begin{cases} L_h u_m = -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + q_m u_m = 0, & m = 1, 2, \dots, N-1 \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases} \quad (23)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 2 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



定理2.1差分方程组(5)和(10)都有惟一解。

证：考虑与方程组(5)对应的齐次方程

$$\begin{cases} L_h u_m = -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + q_m u_m = 0, & m = 1, 2, \dots, N-1 \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases} \quad (23)$$

由于 $L_h u_m$ 中的系数满足极值原理的条件，由极值原理可知不能在 $u_1, u_2, \dots, u_{N-1}$ 中取到正的最大值和负的最小值，从而齐次方程组(23)只有零解，方程组(5)有惟一解。

同理可证方程组(10)也有惟一解。

[Home Page](#)[Title Page](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)[Page 2 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



定理2.1差分方程组(5)和(10)都有惟一解。

证：考虑与方程组(5)对应的齐次方程

$$\begin{cases} L_h u_m = -\frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + q_m u_m = 0, & m = 1, 2, \dots, N-1 \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases} \quad (23)$$

由于 $L_h u_m$ 中的系数满足极值原理的条件，由极值原理可知不能在 $u_1, u_2, \dots, u_{N-1}$ 中取到正的最大值和负的最小值，从而齐次方程组(23)只有零解，方程组(5)有惟一解。

同理可证方程组(10)也有惟一解。

- 差分方程(5)和(10)的系数矩阵都是不可约对角占优矩阵，从而它们是非奇异的，方程组有惟一解。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[«](#) [»](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 2 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



### ★2.1.3 差分解的稳定性与收敛性



Home Page

Title Page



Page 3 of 18

Go Back

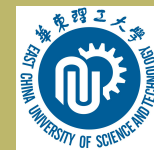
Full Screen

Close

Quit

★2.1.3 差分解的稳定性与收敛性  
定理2.2 差分方程组(5)的解 $u_m$ 满足

$$|u_m| \leq \max\{|\alpha|, |\beta|\} + \frac{1}{2}(x_m - a)(b - x_m) \max_{1 \leq m \leq N-1} |f_m|, m = 1, 2, \dots, N-1. \quad (24)$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

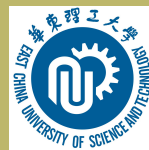
Page 3 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



### ★2.1.3 差分解的稳定性与收敛性

定理2.2 差分方程组(5)的解 $u_m$ 满足

$$|u_m| \leq \max\{|\alpha|, |\beta|\} + \frac{1}{2}(x_m - a)(b - x_m) \max_{1 \leq m \leq N-1} |f_m|, m = 1, 2, \dots, N-1. \quad (24)$$

证明：把方程组

$$\begin{cases} L_h u_m = 0, & m = 1, 2, \dots, N-1 \\ u_0 = \alpha, u_N = \beta \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} L_h u_m = f_m, & m = 1, 2, \dots, N-1 \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases}$$

的解分别记为 $u_m^{(1)}$ 和 $u_m^{(2)}$ ,其中差分算子 $L_h$ 由式(5)定义,则方程组(5)的解 $u_m$ 为

$$u_m = u_m^{(1)} + u_m^{(2)}. \quad (25)$$

由极值原理可知

$$|u_m^{(1)}| \leq \max\{|\alpha|, |\beta|\}, m = 1, 2, \dots, N-1. \quad (26)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 3 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

为了估计  $u_m^{(2)}$ ，考虑差分方程

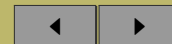
$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}(v_{m+1} - 2v_m + v_{m-1}) = M, & m = 1, 2, \dots, N-1 \\ v_0 = v_N = 0, \end{cases}$$

其中  $M = \max_{1 \leq m \leq N-1} |f_m|$ .



Home Page

Title Page



Page 4 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



为了估计 $u_m^{(2)}$ ，考虑差分方程

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}(v_{m+1} - 2v_m + v_{m-1}) = M, & m = 1, 2, \dots, N-1 \\ v_0 = v_N = 0, \end{cases}$$

其中 $M = \max_{1 \leq m \leq N-1} |f_m|$ . 该差分方程是从边值问题

$$\begin{cases} -v'' = M, \\ v(a) = v(b) = 0, \end{cases} \quad (28)$$

得到，而此边值问题的解是

$$v(x) = \frac{M}{2}(x-a)(x-b)$$

因为 $v(x)$ 是 $x$ 的二次函数，它的四阶导数为零，从式(2),(3)看到 $v(x)$ 在点 $x_m$ 的二阶中心差商与 $v''(x_m)$ 相等，因此差分方程(27)的解等于边值问题(28)的解，即

$$v_m = v(x_m) = \frac{M}{2}(x_m - a)(b - x_m) \geq 0$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 4 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

另一方面

$$L_h(v_m \pm u_m^{(2)}) = L_h v_m \pm L_h u_m^{(2)} = q_m v_m + M \pm f_m \geq 0,$$

$$v_0 \pm u_0^{(2)} = v_N \pm u_m^{(2)} = 0.$$

由极值原理可知

$$v_m \pm u_m^{(2)} \geq 0$$

即

$$|u_m^{(2)}| \leq v_m = \frac{M}{2}(x_m - a)(b - x_m), m = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (29)$$

综合式(25),(26),(29)就得到式(24).

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 5 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

另一方面

$$L_h(v_m \pm u_m^{(2)}) = L_h v_m \pm L_h u_m^{(2)} = q_m v_m + M \pm f_m \geq 0,$$

$$v_0 \pm u_0^{(2)} = v_N \pm u_m^{(2)} = 0.$$

由极值原理可知

$$v_m \pm u_m^{(2)} \geq 0$$

即

$$|u_m^{(2)}| \leq v_m = \frac{M}{2}(x_m - a)(b - x_m), m = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (29)$$

综合式(25),(26),(29)就得到式(24).

- 定理2.2 表明方程(5)的解关于边值问题(1)的右端和初值是稳定的, 即当 $f, \alpha, \beta$ 有一个小的改变时, 所引起的差分解的改变也是很小的。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 5 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

另一方面

$$L_h(v_m \pm u_m^{(2)}) = L_h v_m \pm L_h u_m^{(2)} = q_m v_m + M \pm f_m \geq 0,$$

$$v_0 \pm u_0^{(2)} = v_N \pm u_m^{(2)} = 0.$$

由极值原理可知

$$v_m \pm u_m^{(2)} \geq 0$$

即

$$|u_m^{(2)}| \leq v_m = \frac{M}{2}(x_m - a)(b - x_m), m = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (29)$$

综合式(25),(26),(29)就得到式(24).

- 定理2.2 表明方程(5)的解关于边值问题(1)的右端和初值是稳定的, 即当 $f, \alpha, \beta$ 有一个小的改变时, 所引起的差分解的改变也是很小的。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 5 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)





定理2.3 设 $u(x)$ 是边值问题(1)的解,  $u_m$ 是差分方程(5)的解, 则

$$|u(x_m) - u_m| \leq \frac{(b-a)^2}{96} h^2 \max_{a \leq x \leq b} |u^{(4)}(x)|, m = 1, 2, \dots, N-1.$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 6 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



定理2.3 设 $u(x)$ 是边值问题(1)的解,  $u_m$ 是差分方程(5)的解, 则

$$|u(x_m)| - u_m| \leq \frac{(b-a)^2}{96} h^2 \max_{a \leq x \leq b} |u^{(4)}(x)|, m = 1, 2, \dots, N-1.$$

证: 记

$$\epsilon_m = u(x_m) - u_m$$

再由(3)-(5)可知

$$\begin{cases} L_h \epsilon_m = R_m, & m = 1, 2, \dots, N-1 \\ \epsilon_0 = \epsilon_N = 0 \end{cases}$$

其中 $R_m$ 是由式(3)定义, 从定理2.2得

$$\begin{aligned} |\epsilon_m| &\leq \frac{1}{2}(x_m - a)(b - x_m) \max_{1 \leq m \leq N-1} |R_m| \\ &\leq \frac{(b-a)^2}{96} h^2 \max_{1 \leq m \leq N-1} |u^{(4)}(x)|. \end{aligned}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 6 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 由于差分方程(8)的系数也满足极值原理条件，类似定理2.2的证明，定理2.2的结论对差分方程(8)也是成立。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 7 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

- 由于差分方程(8)的系数也满足极值原理条件，类似定理2.2的证明，定理2.2的结论对差分方程(8)也是成立。
- 类似定理2.3的证明，差分方程(8)的解 $u_m$ 满足

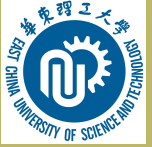
$$\begin{aligned} |u(x_m) - u_m| &\leq \frac{1}{2}(x_m - a)(b - x_m) \max_{1 \leq m \leq N-1} |R_m| \\ &\leq \frac{(b - a)^2}{8} \max_{1 \leq m \leq N-1} |R_m|, \end{aligned} \quad (31)$$

- 由于差分方程(8)的系数也满足极值原理条件，类似定理2.2的证明，定理2.2的结论对差分方程(8)也是成立。
- 类似定理2.3的证明，差分方程(8)的解 $u_m$ 满足

$$\begin{aligned} |u(x_m) - u_m| &\leq \frac{1}{2}(x_m - a)(b - x_m) \max_{1 \leq m \leq N-1} |R_m| \\ &\leq \frac{(b - a)^2}{8} \max_{1 \leq m \leq N-1} |R_m|, \end{aligned} \quad (31)$$

- 式(30)和式(31)不仅给出看差分方程(5)和(8)的解的误差估计，而且表明当 $h \rightarrow 0$ 时差分解收敛到原边值问题的解，收敛速度分别为 $h^2$ 和 $h^4$ 。

- ★2.2 打靶法
- ★2.2.1 打靶法的基本思想



Home Page

Title Page



Page 8 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

## ★2.2 打靶法

### ★2.2.1 打靶法的基本思想

把求二阶边值问题

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u'), a < x < b, \\ \alpha_1 u'(a) + \alpha_2 u(a) = \alpha, \\ \beta_1 u'(b) + \beta_2 u(b) = \beta, \end{cases} \quad (32)$$

的解转化为求初值问题

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u'), \\ u(a) = \alpha_1 s + \alpha d_1, u'(a) = -\alpha_2 s + \alpha d_2, \\ \alpha_1 d_2 + \alpha_2 d_1 = 1, \end{cases} \quad (33)$$

的解和求函数方程

$$\beta_1 \omega_x(b, s) + \beta_2 \omega(b, s) = \beta,$$

的根，这就是打靶法，又称为简单打靶法。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 对任意的 $s$ ,初值问题(33)解 $u(x)$ 都满足边值问题(32)中的微分方程和点 $a$ 的边界条件, 如果我们能找到 $s$ ,使得 $u(x)$ 也满足式(32)中在点 $b$  的边界条件, 则 $u(x)$ 就是边值问题(32)的解,  $u(x)$ 显然是 $s$ 的函数, 记

$$u(x) = \omega(x, s)$$

. 如果 $s$ 满足

$$\beta_1 \omega_x(b, s) + \beta_2 \omega(b, s) = \beta, \quad (35)$$

则 $u(x) = \omega(x, s)$ 就是边值问题(32)的解。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 9 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 对任意的 $s$ ,初值问题(33)解 $u(x)$ 都满足边值问题(32)中的微分方程和点 $a$ 的边界条件, 如果我们能找到 $s$ ,使得 $u(x)$ 也满足式(32)中在点 $b$  的边界条件, 则 $u(x)$ 就是边值问题(32)的解,  $u(x)$ 显然是 $s$ 的函数, 记

$$u(x) = \omega(x, s)$$

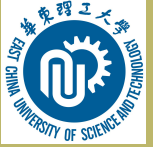
. 如果 $s$ 满足

$$\beta_1 \omega_x(b, s) + \beta_2 \omega(b, s) = \beta, \quad (35)$$

则 $u(x) = \omega(x, s)$ 就是边值问题(32)的解。

- 把求边值问题(32)的解转化为求初值问题(33)的解和求解函数方程(35)的根, 这就是打靶法, 又称为简单打靶法

## ★2.2.2 线性边值问题的打靶法



Home Page

Title Page



Page 10 of 18

Go Back

Full Screen

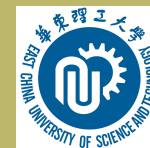
Close

Quit

### ★2.2.2 线性边值问题的打靶法

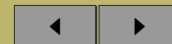
考虑线性边值问题

$$\begin{cases} Lu = u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), a < x < b, \\ \alpha_1 u'(a) + \alpha_2 u(a) = \alpha, \\ \beta_1 u'(b) + \beta_2 u(b) = \beta. \end{cases} \quad (36)$$



Home Page

Title Page



Page 10 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

### ★2.2.2 线性边值问题的打靶法

考虑线性边值问题

$$\begin{cases} Lu = u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), a < x < b, \\ \alpha_1 u'(a) + \alpha_2 u(a) = \alpha, \\ \beta_1 u'(b) + \beta_2 u(b) = \beta. \end{cases} \quad (36)$$

将初值问题

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ u(a) = 1, u'(a) = 0 \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ u(a) = 0, u'(a) = 1 \end{cases} \quad (38)$$

和

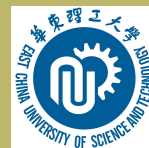
$$\begin{cases} Lu = f(x), \\ u(a) = u'(a) = 0 \end{cases} \quad (39)$$

的解分别记为 $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$ 和 $u_0(x)$ ,则边值问题

$$\begin{cases} Lu = f(x), \\ u(a) = s_1, u'(a) = s_2, \end{cases} \quad (40)$$

的解可表示为

$$u(x) = s_1 u_1(x) + s_2 u_2(x) + u_0(x), \quad (41)$$



Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 10 of 18

Go Back

Full Screen

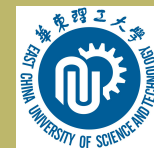
Close

Quit

把式(36)中的边界条件代入式(41),得

$$\begin{cases} \alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2 = \alpha, \\ (\beta_1 u'_1(b) + \beta_2 u_1(b))s_1 + (\beta_1 u'_2(b) + \beta_2 u_2(b))s_2 = \beta - \beta_1 u'_0(b) - \beta_2 u_0(b). \end{cases} \quad (42)$$

上式是关于 $s_1, s_2$ 的二阶线性方程组,如果能从中解出 $s_1, s_2$ ,将它们代入式(41)便得到线性边值问题(36)的解。



Home Page

Title Page



Page 11 of 18

Go Back

Full Screen

Close

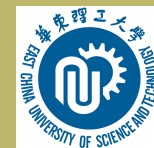
Quit

把式(36)中的边界条件代入式(41),得

$$\begin{cases} \alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2 = \alpha, \\ (\beta_1 u'_1(b) + \beta_2 u_1(b))s_1 + (\beta_1 u'_2(b) + \beta_2 u_2(b))s_2 = \beta - \beta_1 u'_0(b) - \beta_2 u_0(b). \end{cases} \quad (42)$$

上式是关于 $s_1, s_2$ 的二阶线性方程组,如果能从中解出 $s_1, s_2$ ,将它们代入式(41)便得到线性边值问题(36)的解。

解线性边值问题(36)的打靶法分两步:



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

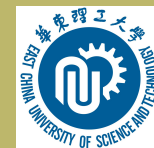
把式(36)中的边界条件代入式(41),得

$$\begin{cases} \alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2 = \alpha, \\ (\beta_1 u'_1(b) + \beta_2 u_1(b))s_1 + (\beta_1 u'_2(b) + \beta_2 u_2(b))s_2 = \beta - \beta_1 u'_0(b) - \beta_2 u_0(b). \end{cases} \quad (42)$$

上式是关于 $s_1, s_2$ 的二阶线性方程组,如果能从中解出 $s_1, s_2$ ,将它们代入式(41)便得到线性边值问题(36)的解。

解线性边值问题(36)的打靶法分两步:

- 求边值问题(37)~(39)的解 $u_1(x), u_2(x), u_0(x)$ ;



Home Page

Title Page



Page 11 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

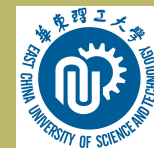
把式(36)中的边界条件代入式(41),得

$$\begin{cases} \alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2 = \alpha, \\ (\beta_1 u'_1(b) + \beta_2 u_1(b))s_1 + (\beta_1 u'_2(b) + \beta_2 u_2(b))s_2 = \beta - \beta_1 u'_0(b) - \beta_2 u_0(b). \end{cases} \quad (42)$$

上式是关于 $s_1, s_2$ 的二阶线性方程组,如果能从中解出 $s_1, s_2$ ,将它们代入式(41)便得到线性边值问题(36)的解。

解线性边值问题(36)的打靶法分两步:

- 求边值问题(37)~(39)的解 $u_1(x), u_2(x), u_0(x)$ ;
- 解线性方程组(42),并把解 $s_1, s_2$ 代入式(41)便得边值问题(36)的解 $u(x)$



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 11 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



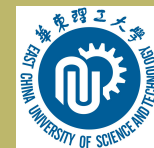
把式(36)中的边界条件代入式(41),得

$$\begin{cases} \alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2 = \alpha, \\ (\beta_1 u'_1(b) + \beta_2 u_1(b))s_1 + (\beta_1 u'_2(b) + \beta_2 u_2(b))s_2 = \beta - \beta_1 u'_0(b) - \beta_2 u_0(b). \end{cases} \quad (42)$$

上式是关于 $s_1, s_2$ 的二阶线性方程组,如果能从中解出 $s_1, s_2$ ,将它们代入式(41)便得到线性边值问题(36)的解。

解线性边值问题(36)的打靶法分两步:

- 求边值问题(37)~(39)的解 $u_1(x), u_2(x), u_0(x)$ ;
- 解线性方程组(42),并把解 $s_1, s_2$ 代入式(41)便得边值问题(36)的解 $u(x)$
- 如果用数值方法解初值问题(37) ~ (39), 则式(42)中 $u'_i(b)$ 用数值微分计算, 从而得到边值问题(36)的数值解。



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[«](#) [»](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 11 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

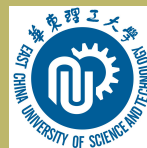
把式(36)中的边界条件代入式(41),得

$$\begin{cases} \alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2 = \alpha, \\ (\beta_1 u'_1(b) + \beta_2 u_1(b))s_1 + (\beta_1 u'_2(b) + \beta_2 u_2(b))s_2 = \beta - \beta_1 u'_0(b) - \beta_2 u_0(b). \end{cases} \quad (42)$$

上式是关于 $s_1, s_2$ 的二阶线性方程组,如果能从中解出 $s_1, s_2$ ,将它们代入式(41)便得到线性边值问题(36)的解。

解线性边值问题(36)的打靶法分两步:

- 求边值问题(37)~(39)的解 $u_1(x), u_2(x), u_0(x)$ ;
- 解线性方程组(42),并把解 $s_1, s_2$ 代入式(41)便得边值问题(36)的解 $u(x)$
- 如果用数值方法解初值问题(37) ~ (39), 则式(42)中 $u'_i(b)$ 用数值微分计算, 从而得到边值问题(36)的数值解。
- 为了提高数值精度, 通常步长都比较小, 因此从点 $a$ 计算到 $b$ 的步数就很多, 由于误差积累, 结果可能较差。为了解决这一问题



把式(36)中的边界条件代入式(41),得

$$\begin{cases} \alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2 = \alpha, \\ (\beta_1 u'_1(b) + \beta_2 u_1(b))s_1 + (\beta_1 u'_2(b) + \beta_2 u_2(b))s_2 = \beta - \beta_1 u'_0(b) - \beta_2 u_0(b). \end{cases} \quad (42)$$

上式是关于 $s_1, s_2$ 的二阶线性方程组,如果能从中解出 $s_1, s_2$ ,将它们代入式(41)便得到线性边值问题(36)的解。

解线性边值问题(36)的打靶法分两步:

- 求边值问题(37)~(39)的解 $u_1(x), u_2(x), u_0(x)$ ;
- 解线性方程组(42),并把解 $s_1, s_2$ 代入式(41)便得边值问题(36)的解 $u(x)$
- 如果用数值方法解初值问题(37) ~ (39), 则式(42)中 $u'_i(b)$ 用数值微分计算, 从而得到边值问题(36)的数值解。
- 为了提高数值精度, 通常步长都比较小, 因此从点 $a$ 计算到 $b$ 的步数就很多, 由于误差积累, 结果可能较差。为了解决这一问题
- 把区间 $[a, b]$ 分成若干个小区间, 然后在每个小区间上解初值问题, 再利用解在分点处满足一定的光滑性建立线性方程组, 求出方程组的解便获得边值问题的解。这就是多重打靶法

[Home Page](#)[Title Page](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)[Page 11 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

考虑线性边值问题(36),假设把求解区间 $[a, b]$ 分成 $m$ 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ),这里 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ .把初值问题

$$\begin{cases} Lu = 0, x \in [x_{i-1}, x_i], \\ u(x_{i-1}) = 1, u'(x_{i-1}) = 0, \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} Lu = 0, x \in [x_{i-1}, x_i], \\ u(x_{i-1}) = 0, u'(x_{i-1}) = 1, \end{cases} \quad (44)$$

和

$$\begin{cases} Lu = f(x), x \in [x_{i-1}, x_i], \\ u(x_{i-1}) = u'(x_{i-1}) = 0, \end{cases} \quad (45)$$

的解分别记为 $u_{i1}(x)$ ,  $u_{i2}(x)$ 和 $u_{i0}(x)$ ,则初值问题

$$\begin{cases} Lu = f(x), x \in [x_{i-1}, x_i], \\ u(x_{i-1}) = s_{i1}, u'(x_{i-1}) = s_{i2}, \end{cases} \quad (46)$$

的解是

$$u_i(x) = s_{i1}u_{i1}(x) + s_{i2}u_{i2}(x) + u_{i0}(x), x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (47)$$

[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀](#) [▶](#)
[◀](#) [▶](#)

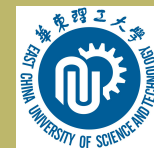
Page 12 of 18

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

设

$$u(x) = u_i(x), x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (48)$$

是边值问题(36)的解,



Home Page

Title Page



Page 13 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

设

$$u(x) = u_i(x), x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (48)$$

是边值问题(36)的解, 则 $u(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有一阶连续导数, 从而

$$u_i(x_i) = u_{i+1}(x_i), u'_i(x_i) = u'_{i+1}(x_i), i = 1, 2, \dots, m-1,$$

于是得

$$\begin{cases} s_{i1}u_{i1}(x_i) + s_{i2}u_{i2}(x_i) - s_{i+1,1} = -u_{i0}(x_i), i = 1, 2, \dots, m-1, \\ s_{i1}u'_{i1}(x_i) + s_{i2}u'_{i2}(x_i) - s_{i+1,2} = -u'_{i0}(x_i), \\ \alpha_2 s_{11} + \alpha_1 s_{12} = \alpha, \\ (\beta_1 u'_{m1}(b) + \beta_2 u_{m1}(b))s_{m1} + (\beta_1 u'_{m2}(b) + \beta_2 u_{m2}(b))s_{m2} \\ = \beta - \beta_1 u'_{m0}(b) - \beta_2 u_{m0}(b). \end{cases} \quad (49)$$

[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Page 13 of 18

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

设

$$u(x) = u_i(x), x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (48)$$

是边值问题(36)的解, 则 $u(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有一阶连续导数, 从而

$$u_i(x_i) = u_{i+1}(x_i), u'_i(x_i) = u'_{i+1}(x_i), i = 1, 2, \dots, m-1,$$

于是得

$$\begin{cases} s_{i1}u_{i1}(x_i) + s_{i2}u_{i2}(x_i) - s_{i+1,1} = -u_{i0}(x_i), i = 1, 2, \dots, m-1, \\ s_{i1}u'_{i1}(x_i) + s_{i2}u'_{i2}(x_i) - s_{i+1,2} = -u'_{i0}(x_i), \\ \alpha_2 s_{11} + \alpha_1 s_{12} = \alpha, \\ (\beta_1 u'_{m1}(b) + \beta_2 u_{m1}(b))s_{m1} + (\beta_1 u'_{m2}(b) + \beta_2 u_{m2}(b))s_{m2} \\ = \beta - \beta_1 u'_{m0}(b) - \beta_2 u_{m0}(b). \end{cases} \quad (49)$$

式(49)是以 $s_{i1}, s_{i2} (i = 1, 2, \dots, m)$ 为未知数的 $2m$ 阶线性方程组, 解出 $s_{i1}, s_{i2}$ , 并将它们代入式(47)便从式(48)得到边值问题(36)的解。

[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀◀](#) [▶▶](#)
[◀](#) [▶](#)

Page 13 of 18

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

设

$$u(x) = u_i(x), x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (48)$$

是边值问题(36)的解, 则 $u(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有一阶连续导数, 从而

$$u_i(x_i) = u_{i+1}(x_i), u'_i(x_i) = u'_{i+1}(x_i), i = 1, 2, \dots, m-1,$$

于是得

$$\begin{cases} s_{i1}u_{i1}(x_i) + s_{i2}u_{i2}(x_i) - s_{i+1,1} = -u_{i0}(x_i), i = 1, 2, \dots, m-1, \\ s_{i1}u'_{i1}(x_i) + s_{i2}u'_{i2}(x_i) - s_{i+1,2} = -u'_{i0}(x_i), \\ \alpha_2 s_{11} + \alpha_1 s_{12} = \alpha, \\ (\beta_1 u'_{m1}(b) + \beta_2 u_{m1}(b))s_{m1} + (\beta_1 u'_{m2}(b) + \beta_2 u_{m2}(b))s_{m2} \\ = \beta - \beta_1 u'_{m0}(b) - \beta_2 u_{m0}(b). \end{cases} \quad (49)$$

式(49)是以 $s_{i1}, s_{i2} (i = 1, 2, \dots, m)$ 为未知数的 $2m$ 阶线性方程组, 解出 $s_{i1}, s_{i2}$ , 并将它们代入式(47)便从式(48)得到边值问题(36)的解。

[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀◀](#) [▶▶](#)
[◀](#) [▶](#)

Page 13 of 18

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)





解二阶线性边值问题(36)的多重打靶法分两步:

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 14 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



解二阶线性边值问题(36)的多重打靶法分两步:

- (1)在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上解初值问题(43)  $\sim$  (45);

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 14 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



解二阶线性边值问题(36)的多重打靶法分两步:

- (1)在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上解初值问题(43) ~ (45);
- (2)解线性方程组(49)并把解代入式(47),从式(48)得到边值问题(36)的解。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 14 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



解二阶线性边值问题(36)的多重打靶法分两步:

- (1)在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上解初值问题(43) ~ (45);
- (2)解线性方程组(49)并把解代入式(47),从式(48)得到边值问题(36)的解。

由于在小区间上求初值问题的数值解所需要计算的步数不太多,与简单打靶法比较,多重打靶法的数值稳定性较好,是解边值问题的一个有效的方法。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 14 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

## ★2.2.2 非线性边值问题的打靶法



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 15 of 18

Go Back

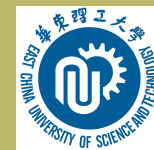
Full Screen

Close

Quit

★2.2.2 非线性边值问题的打靶法  
考虑二阶非线性边值问题

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u'), a < x < b, \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta, \end{cases} \quad (50)$$



Home Page

Title Page



Page 15 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

### ★2.2.2 非线性边值问题的打靶法

考虑二阶非线性边值问题

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u'), & a < x < b, \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta, \end{cases} \quad (50)$$

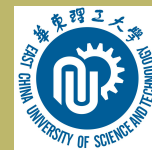
#### ● 把初值问题

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u'), \\ u(a) = \alpha, u'(a) = s, \end{cases} \quad (51)$$

的解记为

$$u(x) = \omega(x, s). \quad (52)$$

如果 $s$ 满足 $\omega(b, s) = \beta$ , 则 $u(x) = \omega(x, s)$ 就是边值问题(50)的解。



Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 15 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

### ★2.2.2 非线性边值问题的打靶法

考虑二阶非线性边值问题

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u'), & a < x < b, \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta, \end{cases} \quad (50)$$

- 把初值问题

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u'), \\ u(a) = \alpha, u'(a) = s, \end{cases} \quad (51)$$

的解记为

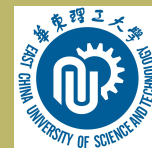
$$u(x) = \omega(x, s). \quad (52)$$

如果 $s$ 满足 $\omega(b, s) = \beta$ , 则 $u(x) = \omega(x, s)$ 就是边值问题(50)的解。

- 记

$$F(s) = \omega(b, s) - \beta, \quad (53)$$

则解非线性边值问题(50)的打靶法实际上就是用某种迭代求函数方程 $F(s) = 0$ 的根 $s^*$ , 在迭代过程中不断调整 $s$ , 使得初值问题(51)的解满足边值问题(50)在点 $b$ 的边界条件

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 15 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)





## 介绍两种求函数方程根的迭代法

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 16 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



## 介绍两种求函数方程根的迭代法 弦截法：

- 设  $s_0, s_1$  是两个迭代初值，弦截法的迭代公式是

$$s_{m+1} = s_m - \frac{F(s_m)}{F(s_m) - F(s_{m-1})}(s_m - s_{m-1})$$
$$s_m - \frac{\omega(b, s_m) - \beta}{\omega(b, s_m) - \omega(b, s_{m-1})}(s_m - s_{m-1}), m = 1, 2, \dots \quad (54)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 16 of 18

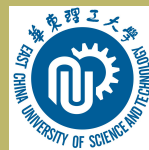
[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

## 介绍两种求函数方程根的迭代法 弦截法：

- 设  $s_0, s_1$  是两个迭代初值，弦截法的迭代公式是

$$s_{m+1} = s_m - \frac{F(s_m)}{F(s_m) - F(s_{m-1})}(s_m - s_{m-1})$$
$$s_m - \frac{\omega(b, s_m) - \beta}{\omega(b, s_m) - \omega(b, s_{m-1})}(s_m - s_{m-1}), m = 1, 2, \dots \quad (54)$$

- 当迭代到  $|F(s_m)|$  与  $|s_m - s_{m-1}|$  都适当小时， $s_m$  就作为  $s^*$  的近似值， $u(x) = \omega(x, s_m)$  作为初值问题(50)的近似解。



## 介绍两种求函数方程根的迭代法

### 弦截法:

- 设  $s_0, s_1$  是两个迭代初值, 弦截法的迭代公式是

$$s_{m+1} = s_m - \frac{F(s_m)}{F(s_m) - F(s_{m-1})}(s_m - s_{m-1})$$
$$s_m - \frac{\omega(b, s_m) - \beta}{\omega(b, s_m) - \omega(b, s_{m-1})}(s_m - s_{m-1}), m = 1, 2, \dots \quad (54)$$

- 当迭代到  $|F(s_m)|$  与  $|s_m - s_{m-1}|$  都适当小时,  $s_m$  就作为  $s^*$  的近似值,  $u(x) = \omega(x, s_m)$  作为初值问题(50)的近似解。
- 弦截法每迭代一次需要计算一次  $\omega(b, s)$  的值, 即解一次初值问题(51).

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

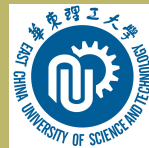
Page 16 of 18

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

## Newton法

- 设 $s_0$ 是迭代初值, Newton法的迭代公式是

$$s_{m+1} = s_m - \frac{F(s_m)}{F'(s_m)} = s_m - \frac{\omega(b, s_m) - \beta}{\omega_s(b, s_m)}, m = 0, 1, \dots$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 17 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

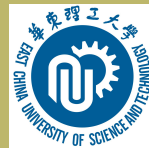
[Quit](#)

## Newton法

- 设 $s_0$ 是迭代初值, Newton法的迭代公式是

$$s_{m+1} = s_m - \frac{F(s_m)}{F'(s_m)} = s_m - \frac{\omega(b, s_m) - \beta}{\omega_s(b, s_m)}, m = 0, 1, \dots$$

- 在上式中, 每迭代一次除了计算 $\omega(b, s_m)$ 外, 还要计算 $\omega_s(b, s_m)$ .



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 17 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

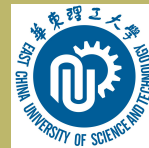
[Quit](#)

## Newton法

- 设 $s_0$ 是迭代初值, Newton法的迭代公式是

$$s_{m+1} = s_m - \frac{F(s_m)}{F'(s_m)} = s_m - \frac{\omega(b, s_m) - \beta}{\omega_s(b, s_m)}, m = 0, 1, \dots$$

- 在上式中, 每迭代一次除了计算 $\omega(b, s_m)$ 外, 还要计算 $\omega_s(b, s_m)$ .
- 对于给定的 $s$ , 计算 $\omega(b, s)$ 和 $\omega_s(b, s)$ 的步骤如下:



Home Page

Title Page



Page 17 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

## Newton法

- 设 $s_0$ 是迭代初值, Newton法的迭代公式是

$$s_{m+1} = s_m - \frac{F(s_m)}{F'(s_m)} = s_m - \frac{\omega(b, s_m) - \beta}{\omega_s(b, s_m)}, m = 0, 1, \dots$$

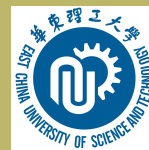
- 在上式中, 每迭代一次除了计算 $\omega(b, s_m)$ 外, 还要计算 $\omega_s(b, s_m)$ .
- 对于给定的 $s$ , 计算 $\omega(b, s)$ 和 $\omega_s(b, s)$ 的步骤如下:
  - (1)解初值问题(51), 得到 $\omega(x, s)$ 和 $\omega(b, s)$
  - 计算 $\omega_x(x, s)$ 需要求二阶线性初值问题(57)的解 $v(x, s)$ 。 $\omega(x, s)$ 满足方程

$$\begin{cases} \omega_{xx} = f(x, \omega, \omega_x), \\ \omega(a, s) = \alpha, \omega_x(a, s) = s. \end{cases}$$

上式对 $s$ 求导, 并记 $v(x, s) = \omega_s(x, s)$ , 则 $v(x, s)$ 满足

$$\begin{cases} v_{xx} = f_3(x, \omega, \omega_x)v_x + f_2(x, \omega, \omega_x)v, \\ v(a, s) = 0, v_x(a, s) = 1. \end{cases} \quad (57)$$

其中 $v(x, s) = \omega_s(x, s)$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 17 of 18

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



## Newton法

- 设 $s_0$ 是迭代初值, Newton法的迭代公式是

$$s_{m+1} = s_m - \frac{F(s_m)}{F'(s_m)} = s_m - \frac{\omega(b, s_m) - \beta}{\omega_s(b, s_m)}, m = 0, 1, \dots$$

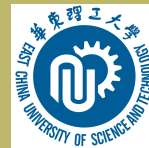
- 在上式中, 每迭代一次除了计算 $\omega(b, s_m)$ 外, 还要计算 $\omega_s(b, s_m)$ .
- 对于给定的 $s$ , 计算 $\omega(b, s)$ 和 $\omega_s(b, s)$ 的步骤如下:
  - (1)解初值问题(51), 得到 $\omega(x, s)$ 和 $\omega(b, s)$
  - 计算 $\omega_x(x, s)$ 需要求二阶线性初值问题(57)的解 $v(x, s)$ 。 $\omega(x, s)$ 满足方程

$$\begin{cases} \omega_{xx} = f(x, \omega, \omega_x), \\ \omega(a, s) = \alpha, \omega_x(a, s) = s. \end{cases}$$

上式对 $s$ 求导, 并记 $v(x, s) = \omega_s(x, s)$ , 则 $v(x, s)$ 满足

$$\begin{cases} v_{xx} = f_3(x, \omega, \omega_x)v_x + f_2(x, \omega, \omega_x)v, \\ v(a, s) = 0, v_x(a, s) = 1. \end{cases} \quad (57)$$

其中 $v(x, s) = \omega_s(x, s)$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 17 of 18

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



对于给定的 $s$ ,计算 $w(b, s)$ 和 $w_s(b, s)$ 的步骤如下:

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 18 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



对于给定的 $s$ ,计算 $w(b, s)$ 和 $w_s(b, s)$ 的步骤如下:

- 解初值问题(51),得到 $w(x, s)$ 和 $w(b, s)$ ;

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 18 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



对于给定的 $s$ ,计算 $w(b, s)$ 和 $w_s(b, s)$ 的步骤如下:

- 解初值问题(51),得到 $w(x, s)$ 和 $w(b, s)$ ;
- 计算 $w_x(x, s)$ 并求二阶线性初值问题(57)的解 $v(x, s)$ ,则 $w_s(b, s) = v(b, s)$ .

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 18 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



对于给定的 $s$ ,计算 $w(b, s)$ 和 $w_s(b, s)$ 的步骤如下:

- 解初值问题(51),得到 $w(x, s)$ 和 $w(b, s)$ ;
- 计算 $w_x(x, s)$ 并求二阶线性初值问题(57)的解 $v(x, s)$ ,则 $w_s(b, s) = v(b, s)$ .
- 用Newton法时, 每迭代一次要解两个初值问题(51)和(57), 工作量比弦截法大。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 18 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



对于给定的 $s$ ,计算 $w(b, s)$ 和 $w_s(b, s)$ 的步骤如下:

- 解初值问题(51),得到 $w(x, s)$ 和 $w(b, s)$ ;
- 计算 $w_x(x, s)$ 并求二阶线性初值问题(57)的解 $v(x, s)$ ,则 $w_s(b, s) = v(b, s)$ .
- 用Newton法时, 每迭代一次要解两个初值问题(51)和(57), 工作量比弦截法大。
- 也可用多重打靶法解二阶非线性边值问题。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 18 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)