常微分方程

2.1

1. $\frac{dy}{dx}=2xy$,并求满足初始条件：x=0,y=1 的特解.

解：对原式进行变量分离得

$\frac{1}{y}dy=2xdx,$两边同时积分得$:\ln|y|=x^2+c,$即$y=ce^{x^2}$把$x=0,y=1$代入得

$c=1,$故它的特解为$y=e^{x^2}$。

2. $y^2dx+(x+1)dy=0,$ 并求满足初始条件：x=0,y=1 的特解.

解：对原式进行变量分离得：

$-\frac{1}{x+1}dx=\frac{1}{y^2}dy,$当$y\neq 0$时，两边同时积分得$;\ln|x+1|=\frac{1}{y}+c,$即$y=\frac{1}{c+\ln|x+1|}$

当$y=0$时显然也是原方程的解。当$x=0,y=1$时，代入式子得$c=1,$故特解是

$y=\frac{1}{1+\ln|1+x|}$。

3 $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{xy+x^3y}$

解：原式可化为：

$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{y}\bullet\frac{1}{x+x^3}$显然$\frac{1+y^2}{y}\neq 0,$故分离变量得$\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{1}{x+x^3}dx$

两边积分得$\frac{1}{2}\ln|1+y^2|=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+\ln|c|(c\neq 0),$即$(1+y^2)(1+x^2)=cx^2$

故原方程的解为（$1+y^2)(1+x^2)=cx^2$

4:$(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$

解：由$y=0$或$x=0$是方程的解，当$xy\neq 0$时，变量分离$\frac{1+x}{x}dx=\frac{1-y}{y}dy=0$

两边积分$\ln|x|+x+\ln|y|-y=c,$即$\ln|xy|+x-y=c,$

故原方程的解为$\ln|xy|=x-y=c;y=0;x=0.$

$5:(y+x)dy+(y-x)dx=0$

解:$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x}{y+x}$,令$\dfrac{y}{x}=u, y=ux, \dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$

则$u+x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u+1}{u+1}$,变量分离，得:$-\dfrac{u+1}{u^2+1}du=\dfrac{1}{x}dx$

两边积分得：$arctgu+\dfrac{1}{2}\ln(1+u^2)=-\ln|x|+c$。

6: $x\dfrac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2-y^2}$

解：令$\dfrac{y}{x}=u, y=ux, \dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$,则原方程化为：

$\dfrac{du}{dx}=\dfrac{\sqrt{x^2(1-u^2)}}{x}$,分离变量得:$\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=\operatorname{sgn}x\bullet\dfrac{1}{x}dx$

两边积分得:$\arcsin u=\operatorname{sgn}x\bullet\ln|x|+\bar{c}$

代回原来变量，得$\arcsin\dfrac{y}{x}=\operatorname{sgn}x\bullet\ln|x|+\bar{c}$

另外,$y^2=x^2$也是方程的解。

7: $tgydx-ctgxdy=0$

解：变量分离，得：$ctgydy=tgxdx$

两边积分得:$\ln|\sin y|=-\ln|\cos x|+c.$

$8:\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^{y^2+3x}}{y}$

解：变量分离，得$\dfrac{y}{e^{y^2}}dy=-\dfrac{1}{3}e^{3x}+c$

$9:x(\ln x-\ln y)dy-ydx=0$

解：方程可变为:$-\ln\dfrac{y}{x}\bullet dy-\dfrac{y}{x}dx=0$

令$u=\dfrac{y}{x}$,则有:$\dfrac{1}{x}dx=-\dfrac{\ln u}{1+\ln u}d\ln u$

代回原变量得：$cy=1+\ln\dfrac{y}{x}$。

10:$\dfrac{dy}{dx}=e^{x-y}$

解：变量分离$e^y dy=e^x dx$

两边积分$e^y=e^x+c$

$\frac{dy}{dx}=e^{x-y}$

解：变量分离，$e^{y}dy=e^{x}dx$

两边积分得：$e^{y}=e^{x}+c$

11. $\frac{dy}{dx}=(x+y)^{2}$

解：令$x+y=t$，则$\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}+1$

原方程可变为：$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t^{2}}+1$

变量分离得：$\frac{1}{t^{2}+1}dt=dx$，两边积分$arctgt=x+c$

代回变量得：$arctg(x+y)=x+c$

12. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x+y)^{2}}$

解

令$x+y=t$，则$\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}-1$，原方程可变为$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t^{2}}+1$

变量分离$\frac{t^{2}}{t^{2}+1}dt=dx$，两边积分$t-arctgt=x+c$，代回变量

$x+y-arctg(x+y)=x+c$

13. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y-1}{x-2y+1}$

解：方程组$2x-y-1=0, x-2y+1=0$;的解为$x=-\frac{1}{3}, y=\frac{1}{3}$

令$x=X-\frac{1}{3}, y=Y+\frac{1}{3}$，则有$\frac{dY}{dX}=\frac{2X-Y}{X-2Y}$'

令$\frac{Y}{X}=U$，则方程可化为：$X\frac{dU}{dX}=\frac{2-2U+2U^{2}}{1-2U}$

变量分离

$14,\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+5}{x-y-2}$

解：令$x-y=5=t$,则$\dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{dt}{dx}$,

原方程化为:$1-\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{t}{t-7}$,变量分离$(t-7)dt-7dx$

两边积分$\dfrac{1}{2}t^2-7t=-7x+c$

代回变量$\dfrac{1}{2}(x-y+5)^2-7(x-y+5)=-7x+c.$

15． $\dfrac{dy}{dx}=(x+1)^2+(4y+1)^2+8xy+1$

解：方程化为$\dfrac{dy}{dx}=x^2+2x+1+16y^2+8y+1+8xy+1=(x+4y+1)^2+2$

令$1+x+4y=u$，则关于x求导得$1+4\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}$，所以$\dfrac{1}{4}\dfrac{du}{dx}=u^2+\dfrac{9}{4}$，

分离变量$\dfrac{1}{4u^2+9}du=dx$，两边积分得$arctg(\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}y)=6x+c$，是原方程的解。

16． $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^6-2x^2}{2xy^5+x^2y^2}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(y^3)^2-2x^2}{y^2(2xy^3+x^2)}=\dfrac{dy^3}{dx}=\dfrac{3[(y^3)^2-2x^2]}{2xy^3+x^2}$，，令$y^3=u$，则原方程化为

$\dfrac{du}{dx}=\dfrac{3u^2-6x^2}{2xu+x^2}=\dfrac{\dfrac{3u^2}{x^2}-6}{2\dfrac{u}{x}+1}$，这是齐次方程，令

$\dfrac{u}{x}=z$，则$\dfrac{du}{dx}=z+x\dfrac{dz}{dx}$，所以$\dfrac{3z^2-6}{2z+1}=z+x\dfrac{dz}{dx}$，，$x\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z^2-z-6}{2z+1}$,...........(1)

当$z^2-z-6=0$，得$z=3$或$z=-2$是（1）方程的解。即$y^3=3x$或$y^3=-2x$是方程的解。

当$z^2-z-6\neq0$时，变量分离$\dfrac{2z+1}{z^2-z-d}dz=\dfrac{1}{x}dx$，两边积分的（$z-3)^7(z+2)^3=x^5c$,

即（$y^3-3x)^7(y^3+2x)^3=x^5c$，又因为$y^3=3x$或$y^3=-2x$包含在通解中当$c=0$时。故原方程的解为$(y^3-3x)^7(y^3+2x)^3=x^{15}c$

17. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x^3+3xy+x}{3x^2y+2y^3-y}$

解：原方程化为$\frac{dy}{dx}=\frac{x(2x^2+3y^2+1)}{y(3x^2+2y^2-1)}$;;;;;$\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{2x^2+3y^2+1}{3x^2+2y^2-1}$

令 $y^2=u$,;;;;;$x^2=v$;;;;;;;则$\frac{du}{dv}=\frac{2v+3u+1}{3v+2u-1}$.......(1)

方程组$\begin{cases}2v+3u+1=0\\3v+2u-1=0\end{cases}$的解为（1,−1）；令$Z=v-1$，，$Y=u+1$,

则有$\begin{cases}2z+3y=0\\3z+2y=0\end{cases}$，，，，从而方程（1）化为$\frac{dy}{dz}=\frac{2+3\frac{y}{z}}{3+2\frac{y}{z}}$

令

$t=\frac{y}{z}$，，则有$\frac{dy}{dz}=t+z\frac{dt}{dz}$，，所以$t+z\frac{dt}{dz}=\frac{2+3t}{3+2t}$，，$z\frac{dt}{dz}=\frac{2-2t^2}{3+2t}$,..........(2)

当

$2-2t^2=0$时，，即$t=\pm1$，是方程(2)的解。得$y^2=x^2-2$或$y^2=-x^2$是原方程的解

当

$2-2t^2\neq0$时，，分离变量得$\frac{3+2t}{2-2t^2}dt=\frac{1}{z}dz$两边积分的$y^2+x^2=(y^2-x^2+2)^5c$

另外

$y^2=x^2-2$，或$y^2=-x^2$，包含在其通解中，故原方程的解为$y^2+x^2=(y^2-x^2+2)^5c$

18.证明方程$\frac{x}{y}=\frac{dy}{dx}=f(xy)$经变换$xy=u$可化为变量分离方程，并由此求解下列方程

(1).$y(1+x^2y^2)dx=xdy$

(2).$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{2+x^2y^2}{2-x^2y^2}$

证明：因为$xy=u$,关于x求导导得$y+x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}$,所以$x\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-y$

得:$\frac{1}{y}\frac{du}{dx}-1=f(u)$,$\frac{du}{dx=y(f(u)+1)}=\frac{u}{x}(f(u)+1)=\frac{1}{x}(uf(u)+u)$

故此方程为此方程为变程。

解(1):当$x=0$或$y=0$是原方程的解，当 $xy\neq 0$s时，方程化为$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=1+x^2y^2$

令$xy=u$,则方程化为$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}(2u+u^3)$,变量分离得：$\frac{du}{2u+u^3}=\frac{1}{x}dx$

两边同时积分得：$\frac{u^2}{u^2+2}=cx^4$,即$\frac{y^2}{x^2y^2+2}=cx^2$,$y=0$也包含在此通解中。

故原方程的解为原$\frac{y^2}{x^2y^2+2}=cx^2$,$x=0$.

解(2)令$xy=u$，则原方程化为$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}(u\frac{2+u^2}{2-u^2}+u)=\frac{1}{x}\frac{4u}{2-u^2}$

分离变量得$\frac{2-u^2}{4u}du=\frac{1}{x}dx$，两边积分得$\ln\left|\frac{y}{x}\right|=\frac{x^2y^2}{4}+c$，这也就是方程的解。

19. 已知 $f(x)\int_0^x f(x)dt=1, x\neq 0$,试求函数$f(x)$的一般表达式.

解：设 f(x)=y, 则原方程化为$\int_0^x f(x)dt=\frac{1}{y}$ 两边求导得$y=-\frac{1}{y^2}y'$

$-y^3=\frac{dy}{dx}$;;;;;;;;;;$dx=-\frac{1}{y^3dy}$;;;;;;;;;;;;两边积分得$x+\bar{c}=\frac{1}{2}\frac{1}{y^2}$;;;;;所以$y=\pm\frac{1}{\sqrt{2x+c}}$

把$y=\pm\frac{1}{\sqrt{2x+c}}$代入$\int_0^x f(x)dt=\frac{1}{y}$

$\pm\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2t+c}}dt=\pm\sqrt{2x+c}$;;;;;;;;;;$\pm(\sqrt{2x+c}-\sqrt{c})=\pm\sqrt{2x+c}$得$c=0$,所以$y=\pm\frac{1}{\sqrt{2x}}$

20.求具有性质 x(t+s)=$\frac{x(t)+x(s)}{1-x(t)x(s)}$的函数 x(t),已知 x'(0)存在。

解:令 t=s=0 x(0)=$\frac{x(0)+x(0)}{1-x(0)}=\frac{2x(0)}{1-x(0)x(0)}$ 若 x(0)$\neq$0 得 x^2=-1 矛盾。

所以 x(0)=0. x'(t)=$\lim\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\lim\frac{x(\Delta t)(1+x^2(t))}{\Delta t[1-x(t)x(\Delta t)}=x'(0)(1+x^2(t))$

$\frac{dx(t)}{dt}=x'(0)(1+x^2(t))$ $\frac{dx(t)}{1+x^2(t)}=x'(0)dt$ 两边积分得 arctg x(t)=x'(0)t+c 所以 x(t)=tg[x'(0)t+c] 当 t=0 时 x(0)=0 故 c=0 所以 x(t)=tg[x'(0)t]

习题 2.2

求下列方程的解

1．$\frac{dy}{dx}=y+\sin x$

解： $y=e^{\int dx}(\int \sin x\, e^{-\int dx}dx+c)$

$=e^{x}[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+c]$

$=c\,e^{x}-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$是原方程的解。

2．$\frac{dx}{dt}+3x=e^{2t}$

解：原方程可化为：$\frac{dx}{dt}=-3x+e^{2t}$

所以：$x=e^{\int -3dt}(\int e^{2t}\, e^{-\int -3dt}dt+c)$

$=e^{-3t}(\frac{1}{5}e^{5t}+c)$

$=c\,e^{-3t}+\frac{1}{5}e^{2t}$ 是原方程的解。

3．$\frac{ds}{dt}=-s\cos t+\frac{1}{2}\sin 2t$

解：$s=e^{\int -\cos t dt}(\int \frac{1}{2}\sin 2t\, e^{\int 3dt}dt+c)$

$=e^{-\sin t}(\int \sin t\cos t e^{\sin t}dt+c)$

$=e^{-\sin t}(\sin t e^{\sin t}-e^{\sin t}+c)$

$=ce^{-\sin t}+\sin t-1$ 是原方程的解。

4．$\frac{dy}{dx}-\frac{x}{n}y=e^{x}x^{n}$ ， n 为常数.

解：原方程可化为：$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{n}y+e^{x}x^{n}$

$y=e^{\int \frac{n}{x}dx}(\int e^{x}x^{n}e^{-\int \frac{n}{x}dx}dx+c)$

$=x^{n}(e^{x}+c)$ 是原方程的解.

5． $\frac{dy}{dx}+\frac{1-2x}{x^2}y-1=0$

解：原方程可化为：$\frac{dy}{dx}$=-$\frac{1-2x}{x^2}y+1$

$$y=e^{\int\frac{2x-1}{x^2}dx}(e^{\int\frac{1-2x}{x^2}dx}dx+c)$$

$$=e^{(\ln x^2+\frac{1}{2})}(\int e^{-\ln x^2-\frac{1}{x}}dx+c)$$

$$=x^2(1+ce^{\frac{1}{x}})$$ 是原方程的解.

6． $\frac{dy}{dx}=\frac{x^4+x^3}{xy^2}$

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{x^4+x^3}{xy^2}$

$$=\frac{x^3}{y^2}+\frac{y}{x}$$

令 $\frac{y}{x}=u$ 　则 $y=ux$ 　$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

因此：$u+x\frac{du}{dx}=\frac{x}{u^2}$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{u^2}$$

$$u^2du=dx$$

$$\frac{1}{3}u^3=x+c$$

$$u^3-3x=x+c \qquad (*)$$

将 $\frac{y}{x}=u$ 带入 （*）中 　得：$y^3-3x^4=cx^3$ 是原方程的解.

$7.\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x+1}+(x+1)^3$

$P(x)=\frac{2}{x+1},Q(x)=(x+1)^3$

$e^{\int P(x)dx}=e^{\int\frac{2}{x+1}dx}=(x+1)^2$

方程的通解为：

$$y=e^{\int P(x)dx}(\int e^{-\int P(x)dx}Q(x)dx+c)$$

$$=(x+1)^2(\int\frac{1}{(x+1)^2}*(x+1)^3dx+c)$$

$$=(x+1)^2(\int(x+1)dx+c)$$

$$=(x+1)^2(\frac{(x+1)^2}{2}+c)$$

即：$2y=c(x+1)^2+(x+1)^4$为方程的通解。

$8.\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^3}$

解：$\frac{dx}{dy}=\frac{x+y^3}{y}=\frac{1}{y}x+y^2$

则$P(y)=\frac{1}{y},Q(y)=y^2$

$$e^{\int P(y)dy}=e^{\int\frac{1}{y}dy}=y$$

方程的通解为：

$$x=e^{\int P(y)dy}(\int e^{-\int P(y)dy}Q(y)dy+c)$$

$$=y(\int\frac{1}{y}*y^2dy+c)$$

$$=\frac{y^3}{2}+cy$$

即 $x=\frac{y^3}{2}+cy$是方程的通解 ，且y=0也是方程的解。

$9.\frac{dy}{dx}=\frac{ay}{x}+\frac{x+1}{x}, a$为常数

解：$P(x)=\frac{a}{x}, Q(x)=\frac{x+1}{x}$

$e^{\int P(x)dx}=e^{\int \frac{a}{x}dx}=x^{a}$

方程的通解为： $y=e^{\int P(x)dx}(e^{-\int P(x)dx}Q(x)dx+c)$

$=x^{a}(\int \frac{1}{x^{a}}\frac{x+1}{x}dx+c)$

当 $a=0$时，方程的通解为

$y=x+\ln/x/+c$

当 $a=1$时，方程的通解为

$y=cx+x\ln/x/-1$

当 $a\neq 0,1$时，方程的通解为

$y=cx^{a}+\frac{x}{1-a}-\frac{1}{a}$

$10.x\frac{dy}{dx}+y=x^{3}$

解:$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x}y+x^{3}$

$P(x)=-\frac{1}{x}, Q(x)=x^{3}$

$e^{\int P(x)dx}=e^{-\int \frac{1}{x}dx}=\frac{1}{x}$

方程的通解为：

$y=e^{\int P(x)dx}(\int e^{-\int P(x)dx}Q(x)dx+c)$

$=\frac{1}{x}(\int x*x^{3}dx+c)$

$=\frac{x^{3}}{4}+\frac{c}{x}$

方程的通解为： $y=\frac{x^{3}}{4}+\frac{c}{x}$

$11.\dfrac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$

解：$\dfrac{\mathrm{dy}}{dx}=-xy+x^3y^3$

两边除以y^3

$\dfrac{\mathrm{dy}}{y^3dx}=-xy^{-2}+x^3$

$\dfrac{\mathrm{dy}^{-2}}{dx}=-2(-xy^{-2}+x^3)$

令$y^{-2}=z$

$\dfrac{dz}{dx}=-2(-xz+x^3)$

$P(x)=2x,Q(x)=-2x^3$

$e^{\int p(x)}dx=e^{\int 2xdx}=e^{x^2}$

方程的通解为：

$$\begin{aligned}
\mathrm{z}= & \ e^{\int p(x)}dx(\int e^{-\int p(x)}dxQ(x)dx+c)\\
&=\mathrm{e}^{x^2}(\int e^{-x^2}(-2x^3)dx+c)\\
&=\mathrm{x}^2+ce^{x^2}+1
\end{aligned}$$

故方程的通解为：$y^2(\mathrm{x}^2+ce^{x^2}+1)=1$，且$y=0$也是方程的解。

$12.(y\ln x-2)ydx=xdy\dfrac{c}{4}x^2+\dfrac{\ln x}{2}+\dfrac{1}{4}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\ln x}{x}y^2-\dfrac{2y}{x}$

两边除以y^2

$\dfrac{dy}{y^2dx}=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{2y^{-1}}{x}$

$\dfrac{dy^{-1}}{dx}=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{2y^{-1}}{x}$

令$y^{-1}=z$

$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2}{x}z-\dfrac{\ln x}{x}$

$P(x)=\dfrac{2}{x},Q(x)=-\dfrac{\ln x}{x}$

方程的通解为：

$z=e^{\int P(x)dx}(\int e^{-\int P(x)dx}Q(x)dx+c)$

$z=e^{\int\frac{2}{x}dx}(\int e^{-\int\frac{2}{x}dx}(-\dfrac{\ln x}{x})dx+c)=x^2(\int\dfrac{1}{x^2}(-\dfrac{\ln x}{x})dx+c)$

$=\dfrac{c}{4}x^2+\dfrac{\ln x}{2}+\dfrac{1}{4}$

方程的通解为：$y(\dfrac{c}{4}x^2+\dfrac{\ln x}{2}+\dfrac{1}{4})=1$，且y=0也是解。

13

$$2xydy=(2y^2-x)dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y^2-x}{2xy}=\frac{y}{x}-\frac{1}{2y}$$

这是 n=-1 时的伯努利方程。

两边同除以 $\frac{1}{y}$ ，

$$y\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x}-\frac{1}{2}$$

令 $y^2=z$　　$\frac{dz}{dx}=2y\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2y^2}{x}-1=\frac{2z}{x}-1$$

P(x)= $\frac{2}{x}$　　Q(x)=-1

由一阶线性方程的求解公式

$$z=e^{\int\frac{2}{x}dx}(\int -e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx+c)$$

$$=x+x^2c$$

$$y^2=x+x^2c$$

14　$\frac{dy}{dx}=\frac{e^y+3x}{x^2}$

两边同乘以 e^y　　$e^y\frac{dy}{dx}=\frac{(e^y)^2+3xe^y}{x^2}$

令 $e^y=z$　　$\frac{dz}{dx}=e^y\frac{dy}{dx}$

$\frac{dz}{dx}=\frac{z^2+3xz}{x^2}=\frac{3z}{x}+\frac{z^2}{x^2}$　　这是 n=2 时的伯努利方程。

两边同除以 z^2　　$\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=\frac{3}{xz}+\frac{1}{x^2}$　　令 $\frac{1}{z}=T$

$\frac{dT}{dx}=-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$　　$\frac{dT}{dx}=\frac{-3T}{x}+\frac{1}{x^2}$

P（x）= $\frac{-3}{x}$　　Q(x)= $\frac{-1}{x^2}$

由一阶线性方程的求解公式

$$T=e^{\int\frac{-3}{x}dx}(\int\frac{-1}{x^2}e^{\int\frac{3}{x}dx}dx+c)$$

$$=x^{-3}(-\frac{1}{2}x^2+c)$$

$$=-\frac{1}{2}x^{-1}+cx^{-3}$$

$$z(-\frac{1}{2}x^{-1}+cx^{-3})=1$$

$$e^y(-\frac{1}{2}x^{-1}+cx^{-3})=1$$

$$-\frac{1}{2}x^2e^y+ce^y=x^3$$

$$\frac{1}{2}x^2+x^3e^{-y}=c$$

15　$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy+x^3y^3}$

$$\frac{dx}{dy}=yx+y^3x^3$$

这是 n=3 时的伯努利方程。

两边同除以 x^3　　$\frac{1}{x^3}\frac{dx}{dy}=\frac{y}{x^2}+y^3$

令 $x^{-2}=z$　　$\frac{dz}{dy}=-2x^{-3}\frac{dx}{dy}$

$\frac{dz}{dy}=-\frac{2y}{x^2}-2y^3=-2yz-2y^3$　　P(y)=-2y　　Q(y)= $-2y^3$

由一阶线性方程的求解公式

$$z=e^{\int-2ydy}(\int-2y^3e^{-\int-2ydy}dy+c)$$

$$=e^{-y^2}(-\int2y^3e^{y^2}dy+c)$$

$$=-y^2+1+ce^{-y^2}$$

$x^2(-y^2+1+ce^{-y^2})=1$

$x^2e^{y^2}(-y^2+1+ce^{-y^2})=e^{y^2}$

$e^{y^2}(1-x^2+x^2y^2)=cx^2$

16 y= $e^x+\int_0^x y(t)dt$

$\frac{dy}{dx}=e^x+y(x)$

$\frac{dy}{dx}=y+e^x$

P(x)=1 Q(x)= e^x 由一阶线性方程的求解公式

$y=e^{\int 1dx}(\int e^x e^{-\int 1dx}dx+c)$

$=e^x(\int e^x e^{-x}dx+c)$

$=e^x(x+c)$

$e^x(x+c)=e^x+\int_0^x e^x(x+c)dx$

c=1

y= $e^x(x+c)$

17 设函数 φ (t)于 $-\infty$<t< $+\infty$ 上连续， φ' (0)存在且满足关系式 φ (t+s)= φ (t) φ (s)

试求此函数。

令 t=s=0 得 φ (0+0)= φ (0) φ (0) 即 φ (0)= $\varphi(0)^2$ 故 $\varphi(0)=0$ 或 $\varphi(0)=1$

（1） 当 $\varphi(0)=0$ 时 $\varphi(t)=\varphi(t+0)=\varphi(t)\varphi(0)$ 即 $\varphi(t)=0$

$\forall t\in(-\infty,+\infty)$

(2) 当 $\varphi(0)=1$ 时 $\varphi'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi(t)\varphi(\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}$

$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi(t)(\varphi(\Delta t)-1)}{\Delta t}=$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi(\Delta t+0)-\varphi(0)}{\Delta t}\varphi(t)$$

$$=\varphi^{'}(0)\varphi(t)$$

于是 $\frac{d\varphi}{dt}=\varphi^{'}(0)\varphi(t)$ 变量分离得 $\frac{d\varphi}{\varphi}=\varphi^{'}(0)dt$ 积分 $\varphi=ce^{\varphi^{'}(0t)}$

由于 $\varphi(0)=1$，即 t=0 时 $\varphi=1$ $1=ce^{0}\Rightarrow$ c=1

故 $\varphi(t)=e^{\varphi^{'}(0)t}$

20.试证：

（1）一阶非齐线性方程（2.28）的任两解之差必为相应的齐线性方程（2.3）之解；

（2）若 $y=y(x)$ 是（2.3）的非零解，而 $y=\bar{y}(x)$ 是（2.28）的解，则方程（2.28）的通解可表为 $y=cy(x)+\bar{y}(x)$，其中 c 为任意常数.

（3）方程（2.3）任一解的常数倍或任两解之和（或差）仍是方程（2.3）的解.

证明： $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$ （2.28）

$\frac{dy}{dx}=P(x)y$ （2.3）

（1） 设 y_1，y_2 是（2.28）的任意两个解

则 $\frac{dy_1}{dx}=P(x)y_1+Q(x)$ （1）

$\frac{dy_2}{dx}=P(x)y_2+Q(x)$ （2）

（1）-（2）得

$$\frac{d\left(y_1-y_2\right)}{dx}=P(x)(y_1-y_2)$$

即 $y=y_1-y_2$ 是满足方程（2.3）

所以，命题成立。

（2）　由题意得：

$$\frac{dy(x)}{dx}=P(x)y \qquad （3）$$

$$\frac{d\bar{y}(x)}{dx}=P(x)\bar{y}(x)+Q(x) \qquad （4）$$

1）先证 $y=cy+\bar{y}$ 是（2.28）的一个解。

于是　$c\times(3)+(4)$　得

$$\frac{cdy}{dx}+\frac{d\bar{y}}{dx}=cP(x)y+P(x)\bar{y}+Q(x)$$

$$\frac{d(cy+\bar{y})}{dx}=P(x)(cy+\bar{y})+Q(x)$$

故 $y=cy+\bar{y}$ 是（2.28）的一个解。

2）现证方程（4）的任一解都可写成 $cy+\bar{y}$ 的形式

设 y_1 是(2.28)的一个解

则　$$\frac{dy_1}{dx}=P(x)y_1+Q(x) \qquad （4'）$$

于是（4'）-（4）得

$$\frac{d(y_1-\bar{y})}{dx}=P(x)(y_1-\bar{y})$$

从而　$$y_1-\bar{y}=ce^{\int P(x)dx}=cy$$

即　$$y_1=\bar{y}+cy$$

所以，命题成立。

（3）　设 y_3，y_4 是（2.3）的任意两个解

则　$$\frac{dy_3}{dx}=P(x)y_3 \qquad （5）$$

$$\frac{dy_4}{dx}=P(x)y_4 \qquad （6）$$

于是（5）$\times c$ 得 $\frac{cdy_3}{dx}=cP(x)y_3$

即 $\frac{d(cy_3)}{dx}=P(x)(cy_3)$ 其中 c 为任意常数

也就是 $y=cy_3$ 满足方程（2.3）

（5）$\pm$（6）得

$$\frac{dy_3}{dx}\pm\frac{dy_4}{dx}=P(x)y_3\pm P(x)y_4$$

即 $\frac{d(y_3\pm y_4)}{dx}=P(x)(y_3\pm y_4)$

也就是 $y=y_3\pm y_4$ 满足方程（2.3）

所以命题成立。

21.试建立分别具有下列性质的曲线所满足的微分方程并求解。

（5） 曲线上任一点的切线的纵截距等于切点横坐标的平方；

（6） 曲线上任一点的切线的纵截距是切点横坐标和纵坐标的等差中项；

解：设 $p(x,y)$ 为曲线上的任一点，则过 p 点曲线的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x)$$

从而此切线与两坐标轴的交点坐标为 $(x-\frac{y}{y'},0),(0,y-xy')$

即 横截距为 $x-\frac{y}{y'}$，

纵截距为 $y-xy'$。

由题意得：

（5） $y-xy'=x^2$

方程变形为

$$x\frac{dy}{dx}=y-x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}y-x$$

于是　　$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}(\int(-x)e^{\int(-\frac{1}{x})dx}dx+c)$

$$=e^{\ln|x|}(\int(-x)e^{-\ln|x|}dx+c)$$

$$=|x|(\int(-x)|x|^{-1}dx+c)$$

$$=x(\int(-x\cdot\frac{1}{x})dx+c)$$

$$=x(-x+c)$$

$$=-x^2+cx$$

所以，方程的通解为 $y=-x^2+cx$。

（6）$y-xy'=\frac{x+y}{2}$

方程变形为

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2}-\frac{x}{2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x}y-\frac{1}{2}$$

于是　　$y=e^{\int\frac{1}{2x}dx}(\int(-\frac{1}{2})e^{\int(-\frac{1}{2x})dx}dx+c)$

$$=e^{\frac{1}{2}\ln|x|}(\int(-\frac{1}{2})e^{-\frac{1}{2}\ln|x|}dx+c)$$

$$=|x|^{\frac{1}{2}}(\int(-\frac{1}{2})|x|^{-\frac{1}{2}}dx+c)$$

$$=x^{\frac{1}{2}}(\int(-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}})dx+c)$$

$$=x^{\frac{1}{2}}(-x^{\frac{1}{2}}+c)$$

$$=-x+cx^{\frac{1}{2}}$$

所以，方程的通解为 $y=-x+cx^{\frac{1}{2}}$。

22．求解下列方程。

（1）$(x^2-1)y'-xy+=0$

解： $y'=\frac{xy-1}{x^2-1}y-\frac{1}{x^2-1}$

$$y=e^{\int\frac{x}{x^2-1}dx}(\int-\frac{1}{x^2-1}e^{\int-\frac{x}{x^2-1}dx}+c)$$

$$=/x^2-1/^{\frac{1}{2}}[\int-\frac{1}{x^2-1}\frac{1}{/x^2-1/^{\frac{1}{2}}}dx+c]$$

$$=/x^2-1/^{\frac{1}{2}}[\int-\frac{dx}{/x^2-1/^{\frac{3}{2}}}+c]$$

$$=c\sqrt{/1-x^2/}+x$$

（2） $y^{'}\sin x\cos x-y-\sin^3 x=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sin x\cos x}+\frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

P(x)= $\frac{1}{\sin x\cos x}$　　Q(x)= $\frac{\sin^2 x}{\cos x}$

由一阶线性方程的求解公式

$$y=e^{\int\frac{1}{\sin x\cos x}dx}(\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}e^{-\int\frac{1}{\sin x\cos x}dx}dx+c)$$

$$=\frac{\sin x}{\cos x}(\int\sin xdx+c)$$

$$=\frac{\sin x}{\cos x}(-\cos x+c)$$

$$=tgxc-\sin x$$

习题 2.3

1、验证下列方程是恰当方程，并求出方程的解。

1. $(x^2+y)dx+(x-2y)dy=0$

解： $\frac{\partial M}{\partial y}=1$， $\frac{\partial N}{\partial x}=1$.

则 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

所以此方程是恰当方程。

凑微分， $x^2dx-2ydy+(ydx+xdy)=0$

得 ： $\frac{1}{3}x^3+xy-y^2=C$

2. $(y-3x^2)dx-(4y-x)dy=0$

解： $\frac{\partial M}{\partial y}=1$， $\frac{\partial N}{\partial x}=1$.

则 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

所以此方程为恰当方程。

凑微分， $ydx+xdy-3x^2dx-4ydy=0$

得 $x^3-xy+2y^2=C$

3. $[\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x}]dx+[\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}]dy=0$

解： $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{2y(x-y)^2-2y^2(x-y)(-1)}{(x-y)^4}=\frac{2xy}{(x-y)^3}$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{2x(x-y)^2-2x^2(x-y)}{(x-y)^4}=\frac{2xy}{(x-y)^3}$$

则 $\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial y}$.

因此此方程是恰当方程。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2} \qquad (2)$$

对（1）做 x 的积分，则 $u=\int\frac{y^2}{(x-y)^2}dx-\int\frac{1}{x}dx+\varphi(y)$

$$=-\frac{y^2}{x-y}-\ln x+\varphi(y) \qquad (3)$$

对（3）做 y 的积分，则 $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{-(-1)y^2+(x-y)2y}{(x-y)^2}+\frac{d\varphi(y)}{dy}$

$$=\frac{-2xy+y^2}{(x-y)^2}+\frac{d\varphi(y)}{dy}$$

$$=\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}$$

则 $\frac{d\varphi(y)}{dy}=\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{y^2-2xy}{(x-y)^2}=\frac{1}{y}-\frac{x^2-2xy+y^2}{(x-y)^2}=\frac{1}{y}-1$

$$\varphi(y)=\int(\frac{1}{y}-1)dy=\ln y-y$$

$$u=-\frac{y^2}{x-y}-\ln x+\ln y-y=\ln\frac{y}{x}-\frac{y^2+xy-y^2}{x-y}=\ln\frac{y}{x}-\frac{xy}{x-y}$$

故此方程的通解为 $\ln\frac{y}{x}+\frac{xy}{x-y}=C$

4、 $2(3xy^2+2x^3)dx+3(2x^2y+y^2)dy=0$

解： $\frac{\partial M}{\partial y}=12xy$， $\frac{\partial N}{\partial x}=12xy$.

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

则此方程为恰当方程。

凑微分，$6xy^2dx+4x^3dx+6x^2ydy+3y^2dy=0$

$3d(x^2y^2)+d(x^4)+d(x^3)=0$

得 ： $x^4+3x^2y^2+y^3=C$

5.$(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1)dx+(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2})dy=0$

解： $M=\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1$ $N=\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}$

$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y}-\frac{x}{y^3}\cos\frac{x}{y}-\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^3}\sin\frac{y}{x}$

$\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y}-\frac{x}{y^3}\cos\frac{x}{y}-\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^3}\sin\frac{y}{x}$

所以，$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，故原方程为恰当方程

因为$\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}dx-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx+dx+\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}dy-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}dy+\frac{1}{y^2}dy=0$

$d(-\cos\frac{x}{y})+d(\sin\frac{y}{x})+dx+d(-\frac{1}{y})=0$

所以，$d(\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y})=0$

故所求的解为 $\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y}=C$

求下列方程的解：

6． $2x(ye^{x^2}-1)dx+e^{x^2}dy=0$

解：$\frac{\partial M}{\partial y}=2xe^{x^2}$，$\frac{\partial N}{\partial x}=2xe^{x^2}$

所以，$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，故原方程为恰当方程

又 $2xye^{x^2}dx-2xdx+e^{x^2}dy=0$

所以，$d(ye^{x^2}-x^2)=0$

故所求的解为 $ye^{x^2}-x^2=C$

7.$(e^x+3y^2)dx+2xydy=0$

解：$e^x dx+3y^2 dx+2xydy=0$

$e^x x^2 dx+3x^2 y^2 dx+2x^3 ydy=0$

所以，$d\,e^x(x^2-2x+2)+d(x^3y^2)=0$

即 $d[e^x(x^2-2x+2)+x^3y^2]=0$

故方程的解为 $e^x(x^2-2x+2)+x^3y^2=C$

8. $2xydx+(x^2+1)dy=0$

解：$2xydx+x^2dy+dy=0$

$d(x^2y)+dy=0$

即 $d(x^2y+y)=0$

故方程的解为 $x^2y+y=C$

9、$ydx-xdy=(x^2+y^2)dx$

解：两边同除以 x^2+y^2 得 $\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=dx$

即，$d\left(arctg\frac{x}{y}\right)=dx$

故方程的通解为 $\arg tg\left(\frac{x}{y}\right)=x+c$

10、 $ydx-\left(x+y^3\right)dy=0$

解：方程可化为：$\dfrac{ydx-xdy}{y^2}=ydy$

即， $d\left(\dfrac{x}{y}\right)=ydy$

故方程的通解为：$\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}y^2+c$ 即：$2x=y\left(y^2+c\right)$

同时，y=0 也是方程的解。

11、 $(y-1-xy)dx+xdy=0$

解：方程可化为：$ydx+xdy=(1+xy)dx$

$d(xy)=(1+xy)dx$ 即：$\dfrac{d(xy)}{1+xy}=dx$

故方程的通解为：$\ln|1+xy|=x+c$

12、 $\left(y-x^2\right)dx-xdy=0$

解：方程可化为：$\dfrac{ydx-xdy}{x^2}=dx$

$$-d\left(\frac{y}{x}\right)=dx$$

故方程的通解为 ：$\dfrac{y}{x}=c-x$ 即：$y=x(c-x)$

13、 $(x+2y)dx+xdy=0$

解：这里 $M=x+2y, N=x$ ，$\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$

$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\dfrac{1}{x}$ 方程有积分因子 $\mu=e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$

两边乘以 μ 得：方程 $x(x+2y)dx+x^2dy=0$ 是恰当方程

故方程的通解为：$\int\left(x^2+2xy\right)dx+\int\left[x^2-\dfrac{\partial}{\partial y}\int\left(x^2+2xy\right)dx\right]dy=c$

$$\frac{x^3}{3}+x^3y=c$$

即： $x^3+3x^2y=c$

14、 $[x\cos(x+y)+\sin(x+y)]dx+x\cos(x+y)dy=0$

解：这里 $M=x\cos(x+y)+\sin(x+y), N=x\cos(x+y)$

因为 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=\cos(x+y)-x\sin(x+y)$

故方程的通解为：

$$\int[x\cos(x+y)+\sin(x+y)]dx+\int\left[x\cos(x+y)-\frac{\partial}{\partial y}\int[x\cos(x+y)+\sin(x+y)]dx\right]dy=c$$

即： $x\sin(x+y)=c$

15、 $(y\cos x+x\sin x)dx+(y\sin x+x\cos x)dy=o$

解：这里 $M=y\cos x-x\sin x, N=y\sin x+x\cos x$ $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$

$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=1$ 方程有积分因子： $\mu=e^{\int dy}=e^y$ 两边乘以 μ 得：

方程 $e^y(y\cos x-x\sin x)dx+e^y(y\sin x+x\cos x)dy=0$ 为恰当方程

故通解为 ： $\int e^y(y\cos x-x\sin x)dx+\int\left(N-\frac{\partial}{\partial y}\int e^y(y\cos x-x\sin x)dx\right)dy=c$

即： $e^y\sin x(y-1)+e^y\cos x=c$

16、 $x(4ydx+2xdy)+y^3(3ydx+5xdy)=0$

解：两边同乘以 x^2y 得：

$$(4x^3y^2dx+2x^4ydy)+(3x^2y^5dx+5x^3ydy)=0$$

$$d(x^4y^2)+d(x^3y^5)=0$$

故方程的通解为： $x^4y^2+x^3y^5=c$

17、试导出方程$M(X,Y)dx+N(X,Y)dy=0$**具有形为**$\mu(xy)$**和**$\mu(x+y)$**的积分因子的充要条件。**

解：若方程具有$\mu(x+y)$为积分因子，

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$ （$\mu(x+y)$是连续可导）

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=N\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu(-\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial x})$$

(1) 令 $z=x+y$

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{d\mu}{dz}，\quad \frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{d\mu}{dz}\ .$$

$$M\frac{d\mu}{dz}-N\frac{d\mu}{dz}=\mu(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})，$$

$$(M-N)\frac{d\mu}{dz}=\mu(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})\ ，$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M-N}\ ，\qquad dz=\varphi(x+y)dz$$

方程有积分因子$\mu(x+y)$的充要条件是：$\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M-N}$是$x+y$的函数，

此时，积分因子为$\mu(x+y)=e^{\int\varphi(z)dz}$.

(2) 令$z=x\cdot y$

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{d\mu}{dz}\ ，\quad \frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\frac{d\mu}{dz}$$

$$Mx\frac{d\mu}{dz}-Ny\frac{d\mu}{dz}=\mu(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})$$

$$(Mx-Ny)\frac{d\mu}{dz}=\mu(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}$$

此时的积分因子为 $\mu(xy)=e^{\int\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}dz}$

18. 设 $f(x,y)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 连续,试证方程 $dy-f(x,y)dx=0$ 为线性方程的充要条件是它有仅依赖于 x 的积分因子.

证:必要性　若该方程为线性方程,则有 $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$,

此方程有积分因子 $\mu(x)=e^{-\int P(x)dx}$, $\mu(x)$ 只与 x 有关 .

充分性　若该方程有只与 x 有关的积分因子 $\mu(x)$.

则 $\mu(x)dy-\mu(x)f(x,y)dx=0$ 为恰当方程 ,

从而 $\frac{\partial(-\mu(x)f(x,y))}{\partial y}=\frac{d\mu(x)}{dx}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$,

$$f=-\int\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}dy+Q(x)=-\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}y+Q(x)=P(x)y+Q(x)$$.

其中 $P(x)=-\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$.于是方程可化为 $dy-(P(x)y+Q(x))dx=0$

即方程为一阶线性方程.

20. 设函数 f(u)，g(u) 连续、可微且 f(u) ≠ g(u),\，试证方程 yf(xy)dx+xg(xy)dy=0

有积分因子 u=(xy[f(xy)-g(xy)])$^{-1}$

证：在方程 yf(xy)dx+xg(xy)dy=0 两边同乘以 u 得：

uyf(xy)dx+uxg(xy)dy=0

则 $\frac{\partial uyf}{\partial y}$ =uf+uy $\frac{\partial f}{\partial y}$ +yf $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{f}{xy(f-g)} + \frac{y\frac{\partial f}{\partial y}}{xy(f-g)}$ -yf $\frac{x(f-g)+xy\frac{\partial f}{\partial y}+xy\frac{\partial g}{\partial y}}{x^2y^2(f-g)^2}$

$$= \frac{yf\frac{\partial g}{\partial y} - gy\frac{\partial f}{\partial y}}{xy(f-g)^2} = \frac{f\frac{\partial g}{\partial xy}\frac{\partial xy}{\partial y} - g\frac{\partial f}{\partial xy}\frac{\partial xy}{\partial y}}{x(f-g)^2}$$

$$= \frac{f\frac{\partial g}{\partial xy} - g\frac{\partial f}{\partial xy}}{(f-g)^2}$$

而 $\frac{\partial uxg}{\partial x}$ =ug+ux $\frac{\partial g}{\partial x}$ +xg $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{g}{xy(f-g)} + \frac{x\frac{\partial g}{\partial x}}{xy(f-g)}$ - xg $\frac{y(f-g)+xy\frac{\partial f}{\partial x}-xy\frac{\partial g}{\partial x}}{x^2y^2(f-g)^2}$

$$= \frac{xf\frac{\partial g}{\partial xy}\frac{\partial xy}{\partial x} - xg\frac{\partial f}{\partial xy}\frac{\partial xy}{\partial x}}{xy(f-g)^2} = \frac{f\frac{\partial g}{\partial xy} - g\frac{\partial f}{\partial xy}}{(f-g)^2}$$

故 $\frac{\partial uyf}{\partial y} = \frac{\partial uxg}{\partial x}$，所以 u 是方程得一个积分因子

21．假设方程（2.43）中得函数 M（x,y）N(x,y)满足关系 $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} =$ Nf(x)-Mg(y),其中 f(x),g(y)分别为 x 和 y 得连续函数，试证方程（2.43）有积分因子 u=exp($\int f(x)dx + \int g(y)dy$)

证明：M(x,y)dx+N(x,y)dy=0

即证 $\frac{\partial (uM)}{\partial y} = \frac{\partial (uN)}{\partial x} \Leftrightarrow$ u $\frac{\partial M}{\partial y}$ +M $\frac{\partial u}{\partial y}$ =u $\frac{\partial N}{\partial x}$ +N $\frac{\partial u}{\partial x} \Leftrightarrow$

u($\frac{\partial M}{\partial y}$ - $\frac{\partial N}{\partial x}$)=N $\frac{\partial u}{\partial x}$ - M $\frac{\partial u}{\partial y} \Leftrightarrow$ u($\frac{\partial M}{\partial y}$ - $\frac{\partial N}{\partial x}$)=Ne $^{\int f(x)dx+\int g(y)dy}$ f(x)

-M e $^{\int f(x)dx+\int g(y)dy}$ g(y) $\Leftrightarrow$ u($\frac{\partial M}{\partial y}$ - $\frac{\partial N}{\partial x}$)=e $^{\int f(x)dx+\int g(y)dy}$ (Nf(x)-Mg(y))

由已知条件上式恒成立，故原命题得证。

22、求出伯努利方程的积分因子.

解：已知伯努利方程为：$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^{n},y\neq o;$

两边同乘以 y^{-n}，令 $z=y^{-n}$，

$\frac{dz}{dx}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x)$,线性方程有积分因子：

$\mu=e^{-\int(1-n)P(x)dx}=e^{(n-1)\int P(x)dx}$，故原方程的积分因子为：

$\mu=e^{-\int(1-n)P(x)dx}=e^{(n-1)\int P(x)dx}$，证毕！

23、设 $\mu(x,y)$ 是方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 的积分因子，从而求得可微函数 $U(x,y)$，

使得 $dU=\mu(Mdx+Ndy)$.试证 $\tilde{\mu}(x,y)$ 也是方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 的积分因子的充要条件是 $\tilde{\mu}(x,y)=\mu\varphi(U)$,其中 $\varphi(t)$ 是 t 的可微函数。

证明：若 $\tilde{\mu}=\mu\varphi(u)$，则 $$\begin{aligned}\frac{\partial(\tilde{\mu}M)}{\partial y}&=\frac{\partial(\mu\varphi(u)M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\varphi(u)+\mu M\varphi'(u)\frac{\partial\mu}{\partial y}\\&=\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\varphi(u)+\mu M\varphi'(u)\mu N\end{aligned}$$

又 $$\begin{aligned}\frac{\partial(\tilde{\mu}N)}{\partial x}&=\frac{\partial(\mu\varphi(u)N)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\varphi(u)+\mu N\varphi'(u)\mu M\\&=\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\varphi(u)+\mu N\varphi'(u)\mu M=\frac{\partial(\tilde{\mu}M)}{\partial y}\end{aligned}$$

即 $\tilde{\mu}$ 为 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 的一个积分因子。

24、设 $\mu_1(x,y),\mu_2(x,y)$ 是方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 的两个积分因子，且 $\mu_1/\mu_2\neq$ 常数，求证 $\mu_1/\mu_2=c$（任意常数）是方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 的通解。

证明：因为 μ_1,μ_2 是方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 的积分因子

所以 $\mu_iMdx+\mu_iNdy=o \quad (i=1,2)$ 为恰当方程

即 $N\frac{\partial\mu_i}{\partial x}-M\frac{\partial\mu_i}{\partial y}=\mu_i\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$， $i=1,2$

下面只需证$\frac{\mu_1}{\mu_2}$的全微分沿方程恒为零

事实上：

$$d\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)=\frac{\mu_2\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial x}dx+\frac{\partial\mu_1}{\partial y}dy\right)-\mu_1\left(\frac{\partial\mu_2}{\partial x}dx+\frac{\partial\mu_2}{\partial y}dy\right)}{\mu_2{}^2}$$

$$=\frac{\mu_2\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial x}dx-\frac{M}{N}\frac{\partial\mu_2}{\partial y}dx\right)-\mu_1\left(\frac{\partial\mu_2}{\partial x}dx-\frac{M}{N}\frac{\partial\mu_2}{\partial y}dx\right)}{\mu_2{}^2}$$

$$=\frac{dx}{N\mu_2{}^2}\left[\left(N\frac{\partial\mu_1}{\partial x}-M\frac{\partial\mu_1}{\partial y}\right)\mu_2-\left(N\frac{\partial\mu_2}{\partial x}-M\frac{\partial\mu_2}{\partial y}\right)\mu_1\right]$$

$$=\frac{dx}{N\mu_2{}^2}\left[\mu_1\mu_2\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)-\mu_1\mu_2\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\right]=0$$

即当$\frac{\mu_1}{\mu_2}\neq c$时，$\frac{\mu_1}{\mu_2}=c$是方程的解。证毕！

习题 2.4

求解下列方程

1、$xy'^3=1+y'$

解：令$\frac{dy}{dx}=y'=p=\frac{1}{t}$，则$x=\left(1+\frac{1}{t}\right)t^3=t^3+t^2$，

从而$y=\int pdx+c=\int\frac{1}{t}d\left(t^3+t^2\right)+c=\int(3t+2)dt+c=\frac{3}{2}t^2+2t+c$，

于是求得方程参数形式得通解为$\begin{cases}x=t^3+t^2\\ y=\frac{3}{2}t^2+2t+c\end{cases}$.

2、$y'^3-x^3(1-y')=0$

解：令$\frac{dy}{dx}=y'=p=tx$，则$(tx)^3-x^3(1-tx)=0$，即$x=\frac{t^3-1}{t}=t^2-\frac{1}{t}$，

从而 $y=\int pdx+c=\int t\left(t^2-\frac{1}{t}\right)d\left(t^2-\frac{1}{t}\right)+c$

$$=\int\left(t^3-1\right)\left(2t+\frac{1}{t^2}\right)dt+c$$

$$=\int\left(2t^4-t-\frac{1}{t^2}\right)dt+c$$

$$=\frac{2}{5}t^5-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{t}+c\text{，}$$

于是求得方程参数形式得通解为 $\begin{cases}x=t^2-\dfrac{1}{t}\\ y=\dfrac{2}{5}t^5-\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{t}+c\end{cases}$.

3、 $y=y'^2e^{y'}$

解：令 $\frac{dy}{dx}=y'=p$， 则 $y=p^2e^p$，

从而 $x=\int\frac{1}{p}d\left(p^2e^p\right)+c$

$$=\int\frac{1}{p}\left(2pe^p+p^2e^p\right)dp+c$$

$$=\int\left(2e^p+pe^p\right)dp+c$$

$$=(1+p)e^p+c\text{，}$$

于是求得方程参数形式的通解为 $\begin{cases}x=(1+p)e^p+c\\ y=y^2e^p\end{cases}$，

另外，y=0 也是方程的解.

4、 $y\left(1+y'^2\right)=2a$， a 为常数

解：令 $\frac{dy}{dx}=y'=tg\varphi$， 则 $y=\frac{2a}{1+tg^2\varphi}=\frac{2a}{\sec^2\varphi}=2a\cos^2\varphi$，

从而 $x=\int\frac{1}{p}dy+c=\int\frac{1}{tg\varphi}d\left(2a\cos^2\varphi\right)+c$

$$=-4a\int\cos^2\varphi d\varphi+c=-4a\int\frac{1+\cos 2\varphi}{2}+c$$

$$=-a(2\varphi+\sin 2\varphi)+c\text{，}$$

于是求得方程参数形式的通解为$\begin{cases}x=-a(2\varphi+\sin 2\varphi)+c\\ y=2a\cos^2\varphi\end{cases}$.

5、 $x^2+y'^2=1$

解：令 $\dfrac{dy}{dx}=y'=p=\cos t$， 则 $x=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sin t$，

从而 $y=\int\cos td(\sin t)+c$

$$=\int\cos^2 tdt+c=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt+c$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+c\text{，}$$

于是求得方程参数形式的通解为$\begin{cases}x=\sin t\\ y=\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{4}\sin 2t+c\end{cases}$.

6、 $y^2(y'-1)=(2-y')^2$

解：令 $2-y'=yt$， 则$1-y'=yt-1$， 得 $y=t+\dfrac{1}{t}$，

所以 $dx=\dfrac{dy}{y'}=\dfrac{dy}{2-yt}=\dfrac{d\left(t+\frac{1}{t}\right)}{2-t\left(t+\frac{1}{t}\right)}=\dfrac{\left(1-t^{-2}\right)dt}{1-t^2}=\dfrac{t^2-1}{t^2\left(1-t^2\right)}dt=-\dfrac{1}{t^2}dt$，

从而 $x=\int\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)dt+c=\dfrac{1}{t}+c$，

于是求得方程参数形式的通解为$\begin{cases}x=\dfrac{1}{t}+c\\ y=t+\dfrac{1}{t}\end{cases}$，

因此方程的通解为 $y=\dfrac{1}{x-c}+x-c$.

习题 2.5

2． $ydx-xdy=x^2ydy$

解：两边同除以x^2，得：

$$\frac{ydx-xdy}{x^2}=ydy$$

$$d\frac{y}{x}=-\frac{1}{2}y^2+c$$

即$\frac{y}{x}+\frac{1}{2}y^2=c$

4．$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x-\sqrt{xy}}$

解：两边同除以x，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}}{1-\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

令$\frac{y}{x}=u$

则$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

即$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-\sqrt{u}}$

得到$\frac{1}{u}=\left(c-\frac{1}{2}\ln|y|\right)^2$，

即$x=y\left(c-\frac{1}{2}\ln|y|\right)^2$

另外$y=0$也是方程的解。

6．$(xy+1)ydx-xdy=0$

解：$ydx-xdy+xydx=0$

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}=-xdx$$

得到$d\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{1}{2}x^2+c$

即$\frac{x}{y}+\frac{1}{2}x^2=c$

另外 $y=0$ 也是方程的解。

8. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}$

解：令 $\frac{y}{x}=u$

则：$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=u+\frac{1}{x}u^2$

即 $x\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}u^2$

得到 $\frac{du}{u^2}=\frac{dx}{x^2}$

故 $\frac{-1}{u}=\frac{-1}{x}+c$

即 $\frac{1}{y}=\frac{c}{x}+\frac{1}{x^2}$

另外 $y=0$ 也是方程的解。

10． $x\frac{dy}{dx}=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

解：令 $\frac{dy}{dx}=p$

即 $x=\frac{1+p^2}{p}$

而 $\frac{dy}{dx}=p$ 故两边积分得到

$y=\frac{1}{2}p^2-\ln|p|+c$

因此原方程的解为 $x=\frac{1+p^2}{p}$， $y=\frac{1}{2}p^2-\ln|p|+c$ 。

12. $e^{-y}\left(\frac{dy}{dx}+1\right)=xe^x$

解： $\frac{dy}{dx}+1=xe^{x+y}$

令 $x+y=u$

则 $1+\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1=xe^{u}-1$$

即 $\frac{du}{e^{u}}=xdx$

$$-e^{-u}=\frac{1}{2}x^{2}+c$$

故方程的解为

$$e^{x+y}+\frac{1}{2}x^{2}=c$$

14． $\frac{dy}{dx}=x+y+1$

解： 令 $x+y+1=u$

则 $1+\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$

那么 $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1=u$

$$\frac{du}{u+1}=dx$$

求得： $\ln(u+1)=x+c$

故方程的解为 $\ln(x+y+1)=x+c$

或可写 为 $x+y+1=ce^{x}$

16． $(x+1)\frac{dy}{dx}+1=2e^{-y}$

解：令 $e^{-y}=u$ 则 $y=-\ln u$

$$-(x+1)\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=2u-1$$

$$\frac{1}{u(2u-1)}du=-\frac{1}{x+1}dx$$

$$\frac{2u-1}{u}=\frac{1}{x+1`}+c$$

即方程的解为 $e^{y}(x+y)=2x+c$

18． $4x^{2}y^{2}dx+2(x^{3}y-1)dy=0$

解： 将方程变形后得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x^{2}y^{2}}{2x^{3}y-1}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2x^3y-1}{4x^2y^2}=\frac{x}{2y}-\frac{1}{4x^2y^2}$$

同除以 x^2 得：$x^2\frac{dx}{dy}=\frac{x^3}{2y}-\frac{1}{4y^2}$

令 $z=x^3$　则 $\frac{dz}{dy}=\frac{3z}{2y}-\frac{3}{4y^2}$

$$z=\frac{3}{2}y^2+cy^{\frac{3}{2}}$$

即原方程的解为 $x^3=\frac{3}{2}y^2+cy^{\frac{3}{2}}$

19.X$(\frac{dy}{dx})^2-2y(\frac{dy}{dx})+4x=0$

解：方程可化为 2y$(\frac{dy}{dx})=x(\frac{dy}{dx})^2+4x,y=\frac{x(\frac{dy}{dx})^2+4x}{2(\frac{dy}{dx})}$

令

$\frac{dy}{dx}=p$,则$y=\frac{xp^2-4x}{2p}=\frac{x}{2}p+\frac{2x}{p}$,两边对$x$求导得$p=\frac{p}{2}+\frac{x}{2}\frac{dp}{dx}+\frac{2}{p}-\frac{2x}{p^2}\frac{dp}{dx}$

$(\frac{p}{2}-\frac{2}{p})=(\frac{x}{2}-\frac{2x}{p^2})\frac{dp}{dx},(\frac{p}{2}-\frac{2}{p})dx+(\frac{x}{2}-\frac{2x}{p^2})dp=0,(p^3-4p)dx+(-xp^2+4x)dp=0$

$p(p^2-4)dx-x(p^2-4)dp=0 \therefore p^2=4$或$pdx-xdp=0$,当$p^2=4$时$y=\pm 2x$,当$pdx-xdp=0$时,

$p=\frac{x}{c},y=\frac{x\cdot\frac{x^2}{c^2}+4x}{\frac{2x}{c}}=\frac{\frac{x^2}{c^2}+4}{\frac{2}{c}}$,$2yc=c^2x^2+4.$

20.$y^2\left[1-(\frac{dy}{dx})^2\right]=1$

解：令$\frac{dy}{dx}=p=\sin\partial$,则$y^2\left[1-(\sin\partial)^2\right]=1$，$y=\frac{1}{\cos\partial}$,$dx=\frac{dy}{p}=\frac{dy}{\sin\partial}=\frac{1}{\sin\partial}\frac{\sin\partial}{\cos^2\partial}d\partial=\frac{d\partial}{\cos^2\partial}$

$x=\int\frac{d\partial}{\cos^2\partial}+c=\int\sec^2\partial d\partial+c=tg\partial+c$所以方程的解为$y^2=(x+c)^2+1$,另外由$p=0$得$y=\pm 1$也

21.$(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$

解：令$\frac{x}{y}=z$则$x=yz,\frac{dx}{dy}=z+y\frac{dz}{dy}$方程为$(1+e^z)dx=(z-1)e^zdy$,

$\frac{dx}{dy}=\frac{(z-1)e^z}{1+e^z}=\frac{ze^z+z-z-e^z}{1+e^z}=z-\frac{z+e^z}{1+e^z}=z+y\frac{dz}{dy},\frac{1+e^z}{z+e^z}dz=-\frac{dy}{y}$

$\ln\left|z+e^z\right|=-\ln|y|,y(z+e^z)=c,y(\frac{x}{y}+e^{\frac{x}{y}})=c$所以方程的解为$x+ye^{\frac{x}{y}}=c$

22.$\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$

解:$2xydx+(y^2-3x^2)dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=2x,\frac{\partial N}{\partial x}=-6x,\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-2xy}=\frac{8x}{-2xy}=-\frac{4}{y}$所以方程有积分因子$e^{\int-\frac{4}{y}dy}=y^{-4}$

$2xy^{-3}dx+(y^{-2}-\frac{3x^2}{y^4})dy=0,d\frac{x^2}{y^3}-d\frac{1}{y}=0$所以方程的解为$\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=c$即$x^2-y^2=cy^3$

23.$ydx-(1+x+y^2)dy=0$

解：$ydx-xdy=(1+y^2)dy$,两边同除以y^2得$\frac{ydx-xdy}{y^2}=\frac{1+y^2}{y^2}dy,d\frac{x}{y}=\frac{1+y^2}{y^2}dy$

所以方程的解为$\frac{x}{y}=-\frac{1}{y}+y+c$即（$x+1)=y(y+c)$,另外$y=0$也是解。

24.$\left[y-x(x^2+y^2)\right]-xdy=0$

解：方程可化为$\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=xdx,darctg\frac{x}{y}=xdx$所以方程的解为$arctg\frac{x}{y}=\frac{x^2}{2}+c.$

25.$\frac{dy}{dx}+e^{\frac{dy}{dx}}-x=0$

解：令$\frac{dy}{dx}=p=t,x=t+e^t$由$dy=pdx$得$y=\int t(1+e^t)dt+c=\frac{t^2}{2}+e^tt-e^t+c$

25. $\frac{dy}{dx}+e^{\frac{dy}{dx}}-x=0$

解：令$\frac{dy}{dx}=p=t$则$x=t+e^{t}$由$dy=pdx$得$y=\int t(1+e^{t})dt+c=\frac{t^{2}}{2}+e^{t}t-e^{t}+c$

所以方程的解为：$x=t+e^{t}$，$y=\int t(1+e^{t})dt+c=\frac{t^{2}}{2}+e^{t}t-e^{t}+c$

26. $(2xy+x^{2}y+\frac{y^{3}}{3})dx+(x^{2}+y^{2})dy=0$

解：$\frac{\partial M}{\partial y}=2x+x^{2}+y^{2},\frac{\partial N}{\partial x}=2x,\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{x^{2}+y^{2}}=1$所以方程有积分因子$e^{x}$方程两边同乘$e^{x}$得

$d3e^{x}x^{2}y+de^{x}y^{3}=0$所以方程的解为：$3e^{x}x^{2}y+e^{x}y^{3}=c$

27. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3y+4}{4x+6y+5}$

解： 令$u=2x+3y$，$\frac{du}{dx}=2+3\frac{dy}{dx}=2+3\frac{u+4}{2u+5}$，则

$$\frac{du}{dx}=\frac{7u+22}{2u+5},$$

$$\frac{2u+5}{7u+22}du=dx,$$

$$1-\frac{9}{14}\frac{1}{u+\frac{22}{7}}=\frac{7}{2}dx,$$

两边积分得 $$9\ln\left|2x+3y+\frac{22}{7}\right|=14(3y-\frac{3}{2}x)+c$$

即为方程的通解。

另外，$7u+22=0$，即$2x+3y+\frac{22}{7}=0$也是方程的解。

28. $x\frac{dy}{dx}-y=2x^{2}y(y^{2}-x^{2})$

解： 两边同除以x，方程可化为：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+2xy(y^{2}-x^{2})$$

令$\frac{y}{x}=u$，则

$$x\frac{du}{dx}+u=u+2ux^{2}(u^{2}x^{2}-x^{2})$$

即 $$\frac{du}{dx}=2x^3(u^3-u),$$

$$\frac{du}{u^3-u}=2x^3dx$$

$$\left(\frac{1}{2(u+1)}+\frac{1}{2(u-1)}-\frac{1}{u}\right)du=2x^3dx$$

两边积分得 $$1-\frac{1}{u^2}ce^{x^4}$$

即 $$x^2-y^2=cy^2e^{x^4}$$

为方程的解。

29. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=e^{xy}$

解： 令 $e^{xy}=u$，则 $y=\dfrac{\ln u}{x}$，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x}{u}\frac{du}{dx}-\ln u}{x^2},$$

那么 $$\frac{1}{ux}\frac{du}{dx}-\frac{\ln u}{x^2}+\frac{\ln u}{x^2}=u$$

即 $$\frac{du}{u^2}=xdx$$

两边积分得 $$\frac{1}{2}x^2+e^{-xy}=c$$

即为方程的解。

30. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x^3-2xy^3+2x}{3x^2y^2-6y^5+3y^2}$

解： 方程可化为 $(4x^3-2xy^3+2x)dx-(3x^2y^2-6y^5+3y^2)dy=0$

$$d(x^4+x^2)-(y^3dx^2+x^2dy^3)+d(y^6-y^3)=0$$

两边积分得 $$x^4+x^2+y^6-y^3-x^2y^3=c$$

即 $$x^4+x^6+c=(x^2+1)(y^3-1)$$

为方程的解。

31. $y^2(xdx+ydy)+x(ydx-xdy)=0$

解： 方程可化为 $$y^2xdx+y^3dy+xydx-x^2dy=0$$

两边同除以 y^2，得 $$xdx+ydx+\frac{x(ydx-xdy)}{y^2}=0$$

即 $$\frac{1}{2}d(x^2+y^2)+x\frac{dx}{dy}=0$$

令 $x=\rho\cos\theta$， $y=\rho\sin\theta$，则

$$\rho d\rho+\rho\cos\theta dctg\theta=0$$

即 $$\rho d\rho-\frac{d\sin\theta}{\sin^2\theta}=0$$

两边积分得 $$\rho=-\frac{1}{\sin\theta}+c$$

将 $\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\rho}{y}$ 代入得， $$\rho=-\frac{\rho}{y}+c$$

即 $$\rho^2(y+1)^2=c^2y^2$$

故 $$(x^2+y^2)(y^2+1)^2=c^2y^2$$

32. $\frac{dy}{dx}+\frac{1+xy^3}{1+x^3y}=0$

解： 方程可化为 $$\frac{dy}{dx}=\frac{-1-xy^3}{1+x^3y}$$

两边同加上1，得 $$\frac{d(x+y)}{dx}=\frac{xy(x^2-y^2)}{1+x^3y} \qquad (*)$$

再由 $d(xy)=xdy+ydx$，可知

$$\frac{d(xy)}{dx}=x\frac{dy}{dx}+y=\frac{(x-y)(x^2y^2-1)}{1+x^3y} \qquad (**)$$

将（*）/（**）得 $$\frac{d(x+y)}{d(xy)}=\frac{xy(x+y)}{x^2y^2-1}$$

即 $$\frac{du}{dv}=\frac{uv}{v^2-1}$$

整理得 $$\frac{du}{u}=\frac{v}{v^2-1}dv$$

两边积分得 $$\sqrt{v^2-1}=cu$$

即 $$c(x+y)=\sqrt{x^2y^2-1}$$

另外， $x+y=0$ 也是方程的解。

33. 求一曲线，使其切线在纵轴上之截距等于切点的横坐标。

解： 设 $p(x,y)$ 为所求曲线上的任一点，则在 p 点的切线 l 在 y 轴上的截距为：

$$y - x\frac{dy}{dx}$$

由题意得 $$y - x\frac{dy}{dx} = x$$

即 $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y - 1$$

也即 $$-ydx + xdy = -dx$$

两边同除以 x^2，得 $$\frac{-ydx + xdy}{x^2} = -\frac{dx}{x}$$

即 $$d(\frac{y}{x}) = -d\ln|x|$$

即 $$y = cx + x\ln|x|$$

为方程的解。

34. 摩托艇以 5 米/秒的速度在静水运动，全速时停止了发动机，过了 20 秒钟后，艇的速度减至 $v_1 = 3$ 米/秒。确定发动机停止 2 分钟后艇的速度。假定水的阻力与艇的运动速度成正比例。

解：$F = ma = m\frac{dv}{dt}$，又 $F = k_1 v$，由此

$$m\frac{dv}{dt} = k_1 v$$

即 $$\frac{dv}{dt} = kv$$

其中 $k = \frac{k_1}{m}$，解之得

$$\ln|v| = kt + c$$

又 $t = 0$ 时，$v = 5$；$t = 2$ 时，$v = 3$。

故得 $$k = \frac{1}{20}\ln\frac{3}{5}，\ c = \ln 5$$

从而方程可化为 $$v = 5(\frac{3}{5})^{\frac{t}{20}}$$

当 $t = 2\times 60 = 120$ 时，有 $$v(20) = 5\times(\frac{3}{5})^{\frac{120}{20}} = 0.23328 \text{ 米/秒}$$

即为所求的确定发动机停止 2 分钟后艇的速度。

35. 一质量为 m 的质点作直线运动，从速度等于零的时刻起，有一个和时间成正比（比例系数为 k_1）的力作用在它上面，此质点又受到介质的阻力，这阻力和速

度成正比（比例系数为 k_2）。试求此质点的速度与时间的关系。

解：由物理知识得：$a=\dfrac{F_{合}}{m}$(其中a为质点的加速度，$F_{合}$为质点受到的合外力)

根据题意：$F_{合}=k_1t-k_2v$

故：$m\dfrac{dv}{dt}=k_1t-k_2v(k_2>0)$

即：$\dfrac{dv}{dt}=(\dfrac{-k_2}{m})v+\dfrac{k_1}{m}t \qquad (*)$

(*)式为一阶非齐线性方程，根据其求解公式有

$$V=e^{\int -\frac{k_2}{m}dt}(\int \frac{k_1}{m}t\cdot e^{\int \frac{k_2}{m}dt}dt+c)$$

$$=e^{-\frac{k_2}{m}t}(\frac{k_1}{k_2}t\cdot e^{\frac{k_2}{m}t}-\frac{mk_1}{k_2^2}e^{\frac{k_2}{m}t}+c)$$

又当 t=0 时，V=0，故 $c=\dfrac{mk_1}{k_2^2}$

因此，此质点的速度与时间的关系为：$V=\dfrac{mk_1}{k_2^2}e^{-\frac{k_2}{m}t}+\dfrac{k_1}{k_2}(t-\dfrac{m}{k_2})$

36. 解下列的黎卡提方程

（1）$y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$

解：原方程可转化为：$y'=-e^xy^2+2e^{2x}y+e^x-e^{3x}, \qquad (*)$

观察得到它的一个特解为：$y=e^x$，设它的任意一个解为$y=e^x+z$，

代入（*）式得到：$\dfrac{d(e^x+z)}{dx}=-e^x(e^x+z)^2+2e^{2x}(e^x+z)+e^x-e^{3x} \qquad (**)$

由（**）-（*）得：$\dfrac{dz}{dx}=-e^xz^2$

变量分离得：$\dfrac{dz}{z^2}=-e^xdx$

两边同时积分：$-\dfrac{1}{z}=-e^x+c$

即：$z=\dfrac{1}{e^x+c}$

故原方程的解为 $y=e^x+\dfrac{1}{c+e^x}$

（2） $y'+y^2-2y\sin x=\cos x-\sin^2 x$

解：原方程可化为： $y'=-y^2+2y\sin x+\cos x-\sin^2 x$

由观察得，它的一个特解为 $\bar{y}=\sin x$，设它的任意一个解为 $y=\sin x+z$，故

$$\frac{dz}{dx}=(-2\sin x+2\sin x)z-z^2=-z^2$$

变量分离再两边同时积分得： $\frac{1}{z}=x+c$ 即 $z=\frac{1}{x+c}$

故原方程的解为 $y=\sin x+\frac{1}{x+c}$

（3） $x^2y'=x^2y^2+xy+1$

解：原方程可化为： $y'=y^2+\frac{1}{x}y+\frac{1}{x^2}$

由观察得到，它的一个特解为 $\bar{y}=-\frac{1}{x}$，设它的任一个解为 $y=-\frac{1}{x}+z$，故

$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{x}z+z^2$，该式是一个 $n=2$ 的伯努利方程

两边同除以 z^2 得到： $\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{z}+1$

即： $\frac{d\frac{1}{z}}{dx}=\frac{1}{x}\frac{1}{z}-1$，令 $\frac{1}{z}=u$，

则： $\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}u-1$，根据一阶非齐线性方程的求解公式得：

$$u=e^{\int\frac{1}{x}dx}(\int -e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx+c)=x(c-en\,|\,x\,|)$$

故： $z=\frac{1}{x(c-en\,|\,x\,|)}$

因此：原方程的解为： $xy=\frac{1}{c-en\,|\,x\,|}-1$

（4） $4x^2(y'-y^2)=1$

解：原方程可化为： $y'=y^2+\frac{1}{4x^2}$

由观察得到，它的一个特解为 $\bar{y}=-\frac{1}{2x}$，设它的任一个解为 $y=-\frac{1}{2x}+z$，于是

$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{x}z+z^2$，这是 $n=2$ 的伯努利方程

两边同除以 z^2 得到：$\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{z}+1$

即：$\frac{d\frac{1}{z}}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{z}-1$

则：$\frac{1}{z}=e^{\int\frac{1}{x}dx}(\int -e^{\int -\frac{1}{x}dx}+c)=x(c-en|x|)$

即：$z=\frac{1}{x(c-en|x|)}$

故：原方程的解为：$2xy=\frac{2}{c-en|x|}-1$

（5）$x^2(y'+y^2)=2$

解：原方程可化为：$y'=-y^2+\frac{2}{x^2}$

由观察得，它的一个特解为 $\bar{y}=-\frac{1}{x}$，故设它的任一个解为 $y=-\frac{1}{x}+z$，于是

$\frac{dz}{dx}=\frac{2}{x}z-z^2$，这是 $n=2$ 的伯努利方程

两边同除以 z^2 得到：$\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{z}-1$

即：$\frac{d\frac{1}{z}}{dx}=-\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{z}+1$

则：$\frac{1}{z}=e^{\int -\frac{2}{x}dx}(\int e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+c)=\frac{1}{x^2}(\frac{x^3}{3}+c)$

故：原方程的解为：$y=\frac{3x^2}{x^3+c}-\frac{1}{x}$，即 $xy=\frac{2x^3-c}{c+x^3}$.

（6）$x^2y'+(xy-2)^2=0$

解：原方程可化为：$y'=-y^2+\frac{4}{x}y-\frac{4}{x^2}$

由观察得到它的一个特解为 $\bar{y}=\frac{1}{x}$，设它的任一个解为 $y=\frac{1}{x}+z$，于是

$\frac{dz}{dx}=\frac{2}{x}z-z^2$，这是 $n=2$ 的伯努利方程

两边同除以 z^2 得到：$\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{z}-1$

即：$\dfrac{d\frac{1}{z}}{dx}=-\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{1}{z}+1$

则：$\dfrac{1}{z}=e^{\int-\frac{2}{x}dx}(\int e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+c)=\dfrac{1}{x^2}(\dfrac{x^3}{3}+c)$

从而：$\dfrac{1}{z}=e^{\int-\frac{2}{x}dx}(\int e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+c)=\dfrac{1}{x^2}(\dfrac{x^3}{3}+c)$

故原方程的解为：$y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{3x^2}{x^3+c}=\dfrac{4x^3+c}{x(x^3+c)}$

即：$xy=\dfrac{4x^3+c}{x(x^3+c)}$

（7）$y'=(x-1)y^2+(1-2x)y+x$

解：由观察得到它的一个特解为$\overline{y}=1$，故设它的任一个解为$y=1+z$，于是

$\dfrac{dz}{dx}=-z+(x-1)z^2$，这是 n=2 的伯努利方程，

两边同除以z^2得：$\dfrac{1}{z^2}\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{1}{z}+(x-1)$

即：$\dfrac{d\frac{1}{z}}{dx}=\dfrac{1}{z}+(1-x)$

从而：$\dfrac{1}{z}=e^{\int dx}(\int(1-x)e^{\int-dx}dx+c)$

$=e^{x}(xe^{-x}+c)=x+ce^{x}$

故原方程的解为：$y=1+z=1+\dfrac{1}{x+ce^{x}}$

习题 3.1

1　求方程$\dfrac{dy}{dx}$=x+y^{2}通过点(0,0)的第三次近似解；

解：　取$\varphi_0(x)=0$

$$\varphi_1(x)=y_0+\int_0^x(x+{y_0}^2)dx=\int_0^x x\,dx=\frac{1}{2}x^2$$

$$\varphi_2(x)=y_0+\int_0^x[x+\varphi_1^{\ 2}(x)]dx=\int_0^x[x+(\frac{1}{2}x^2)^2]dx=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{20}x^5$$

$$\varphi_3(x)=y_0+\int_0^x[x+(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{20}x^5)^2]dx$$

$$=\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{160}x^8+\frac{1}{4400}x^{11}$$

2　求方程 $\frac{dy}{dx}$ =x-y^2 通过点(1,0)的第三次近似解；

解：　令 $\varphi_0(x)=0$

则　$\varphi_1(x)=y_0+\int_0^x(x-y_0^{\ 2})dx=\int_0^x x\,dx=\frac{1}{2}x^2$

$$\varphi_2(x)=y_0+\int_0^x[x-\varphi_1^{\ 2}(x)]dx=\int_0^x[x-(\frac{1}{2}x^2)^2]dx=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{20}x^5$$

$$\varphi_3(x)=y_0+\int_0^x[x-(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{20}x^5)^2]dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{160}x^8-\frac{1}{4400}x^{11}$$

3 题　求初值问题：

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=x^2\\ y(-1)=0\end{cases}\qquad \mathbf{R}：|x+1|\le\mathbf{1}，\ |y|\le\mathbf{1}$$

的解的存在区间，并求解第二次近似解，给出在解的存在空间的误差估计；

解：　因为　M=max{$\left|x^2-y^2\right|$}=4　则 h=min(a,$\frac{b}{M}$)=$\frac{1}{4}$

则解的存在区间为$|x-x_0|$=$|x-(-1)|$=$|x+1|\le\frac{1}{4}$

令　$\Psi_0(X)$=0　；

$\Psi_1(x)$=y$_0$+$\int_{x_0}^{x}(x^2-0)$dx=$\frac{1}{3}$x^3+$\frac{1}{3}$；

$\Psi_2(x)$　　=y$_0$+$\int_{-1}^{x}[x^2-(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3})^2]$dx=$\frac{1}{3}x^3-\frac{x}{9}$-$\frac{x^4}{18}$-$\frac{x^7}{63}$+$\frac{11}{42}$

又 $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\le 2$=L

则：误差估计为：$\left|\Psi_2(x)-\Psi(x)\right| \leq \dfrac{M*L^2}{(2+1)^2}h^3=\dfrac{11}{24}$

4 题　讨论方程：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$在怎样的区域中满足解的存在唯一性定理的条件，

并求通过点（0，0）的一切解；

解：因为$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\dfrac{1}{2}y^{\frac{-2}{3}}$在 $y\neq 0$上存在且连续；

而$\dfrac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$在$|y|\geq\sigma \phi 0$上连续

由 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$有：$|y|$=（x+c）$^{\frac{3}{2}}$

又 因为 y(0)=0　　所以：$|y|$=x$^{\frac{3}{2}}$

另外 y=0 也是方程的解；

故　方程的解为：$|y|=\begin{cases} x^{\frac{3}{2}} & x\geq 0 \\ 0 & x \pi 0 \end{cases}$

或　y=0;

6 题 证明格朗瓦耳不等式：

设 **K** 为非负整数，**f(t)**和 **g(t)**为区间$\alpha \le t \le \beta$上的连续非负函数，且满足不等式：

$$\mathbf{f(t)} \le \mathbf{k} + \int_{\alpha}^{t} f(s)g(s)ds\ \mathbf{,}\ \alpha \le t \le \beta$$

则有：$\mathbf{f(t)} \le \mathbf{k\exp(}\int_{\alpha}^{t} g(s)ds\ \mathbf{)},\ \alpha \le t \le \beta$

证明：令 R（t）$=\int_{\alpha}^{t} f(s)g(s)ds$,则R'(T) =f(t)g(t)

R'(T)-R(t)g(t)= f(t)g(t)- R(t)g(t)

$\le$kg(t) R'(T)- R(t)g(t)$\le$kg(t);

两边同乘以 $\exp(-\int_{\alpha}^{t} g(s)ds)$ 则有：

$$R'(T)\exp(-\int_{\alpha}^{t} g(s)ds)-R(t)g(t)\exp(-\int_{\alpha}^{t} g(s)ds)$$

$$\le\ kg(t)\exp(-\int_{\alpha}^{t} g(s)ds)$$

两边从α到 t 积分：

$$R(t)\exp(-\int_{\alpha}^{t} g(s)ds) \le -\int_{\alpha}^{t} kg(s)ds\exp(-\int_{\alpha}^{t} g(r)dr)ds$$

即 $R(t) \le \int_{\alpha}^{t} kg(s)ds\ \ \exp(-\int_{s}^{t} g(r)dr)ds$

又 $f(t) \le 1 \le k+R(t) \le k+k\int_{\alpha}^{t} g(s)\exp(-\int_{s}^{t} g(r)dr)ds$

$$\le k(1-1+\exp(-\int_{s}^{t} g(r)dr)=k\exp(\int_{t}^{s} g(r)dr)$$

即 $f(t) \le k\int_{\alpha}^{t} g(r)dr$；

7 题　假设函数 f(x,y)于（x_0, y_0）的领域内是 y 的 不增函数，试证方程 $\frac{dy}{dx}$ = f(x,y)满足条件 $y(x_0)=y_0$的解于 $x \ge x_0$一侧最多只有一个解；

证明：假设满足条件 $y(x_0)=y_0$的解于 $x \ge x_0$一侧有两个$\psi(x)$,$\varphi(x)$ 则满足：

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))\,dx$$

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\psi(x))\,dx$$

不妨假设$\varphi(x) \succ \psi(x)$，则$\varphi(x)-\psi(x)\ge 0$

而$\varphi(x)-\psi(x)=\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))\,dx-\int_{x_0}^{x} f(x,\psi(x))\,dx$

$$=\int_{x_0}^{x}[f(x,\varphi(x))-f(x,\psi(x))\,dx$$

又因为 f(x,y)在（x_0, y_0）的领域内是 y 的 增函数，则：

$f(x,\varphi(x))-f(x,\psi(x))\le 0$

则$\varphi(x)-\psi(x)=\int_{x_0}^{x}[f(x,\varphi(x))-f(x,\psi(x))\,dx \le 0$

则$\varphi(x)-\psi(x)\le 0$

所以　$\varphi(x)-\psi(x)=0$，　即　$\varphi(x)=\psi(x)$

则原命题方程满足条件 $y(x_0)=y_0$的解于 $x \ge x_0$一侧最多只有一个解；

习题 3. 3

1．Proof 若（1）成立则$\forall\varepsilon>0$及$\bar{x}_0>x_0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon,\bar{x}_0)$，使当

$$|\bar{y}_0|=|y(\bar{x},x_0,y_0)|\le\delta$$

时，初值问题 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(\bar{x}_0)=\bar{y}_0=y(\bar{x},x_0,y_0)\end{cases}$

的解 $y=\bar{y}(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ 满足对一切 $x\geq\bar{x}_0$ 有 $|\bar{y}(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)|<\varepsilon$，

由解关于初值的对称性，（3，1）的两个解 $y=y(x,x_0,y_0)$ 及 $y=\bar{y}(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ 都过点 (x_0,y_0)，由解的存在唯一性

$$y(x,x_0,y_0)=\bar{y}(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)\text{，当 } x\geq\bar{x}_0 \text{ 时}$$

故 $|y(x,x_0,y_0)|<\varepsilon,\ x\geq\bar{x}_0$

若（2）成立，取定 $\bar{x}_0>x_0$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1=\delta(\varepsilon,\bar{x}_0)=\delta(\varepsilon)$，使当

$$|y(\bar{x},x_0,y_0)|\leq\delta_1$$

时, 对一切 $x\geq\bar{x}_0$ 有

$$|y(x,x_0,y_0)|<\varepsilon$$

因初值问题 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=0\end{cases}$

的解为 $y=0$，由解对初值的连续依赖性，

对以上 $\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon,x_0,\bar{x}_0)=\delta(\varepsilon,x_0)$，使当

$$|y_0|\leq\delta \text{ 时}$$

对一切 $x\in(x_0,\bar{x}_0]$ 有

$$|y(x,x_0,y_0)|<\min\{\varepsilon,\delta_1\}<\varepsilon$$

而当 $x\geq\bar{x}_0$ 时，因

$$|y(\bar{x},x_0,y_0)|\leq\min\{\varepsilon,\delta_1\}<\delta_1$$

故 $|y(x,x_0,y_0)|<\varepsilon$

这样证明了对一切 $x\geq x_0$ 有

$$|y(x,x_0,y_0)|<\varepsilon$$

2．Proof：因 $f(x,y)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 都在 G 内连续，从而 $f(x,y)$ 在 G 内关于 y 满足局部 Lipschitz 条件，因此解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 在它的存在范围内关于 x,x_0,y_0 是连续的。

设由初值 (x_0,y_0) 和 $(x_0,y_0+\Delta y_0)$ $(|\Delta y_0|\le\alpha,\alpha$ 足够小）所确定的方程解分别为

$y=\varphi(x,x_0,y_0)\equiv\varphi$， $y=\psi(x,x_0,y_0+\Delta y_0)\equiv\psi$

即 $\varphi\equiv y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi)dx$， $\psi\equiv y_0+\Delta y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\psi)dx$

于是

$$\psi-\varphi\equiv\Delta y_0+\int_{x_0}^{x}(f(x,\varphi)-f(x,\psi))dx$$

$$=\Delta y_0+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}(\psi-\varphi)dx \quad 0<\theta<1$$

因 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 及 φ 、ψ 连续，因此

$$\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}=\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1$$

这里 r_1 具有性质：当 $\Delta y_0\to 0$ 时，； $r_1\to 0$ 且当 $\Delta y_0=0$ 时 $r_1=0$ ，因此对 $\Delta y_0\neq 0$ 有

$$\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}\equiv 1+\int_{x_0}^{x}(\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1)\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}dx$$

即 $z=\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}$

是初值问题

$$\begin{cases}\frac{dz}{dy}=[\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1]z\\ z(x_0)=1=z_0\end{cases}$$

的解，在这里 $\Delta y_0\neq 0$ 看成参数 0 显然，当 $\Delta y_0=0$ 时，上述初值问题仍然有解。

根据解对初值和参数的连续性定理，知 $\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}$ 是 $x,x_0,z_0,\Delta y_0$ 的连续函数，从而存在

$$\lim_{\Delta y_0 \to 0} \frac{\psi - \varphi}{\Delta y_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$$

而 $\dfrac{\partial f}{\partial y_0}$ 是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} z \\ z(x_0) = 1 \end{cases}$$

的解，不难求解

$$\frac{\partial f}{\partial y_0} = \exp \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} dx$$

它显然是 x, x_0, y_0 的连续函数。

3．解：这里 $f(x,y) = p(x)y + \psi(x)$ 满足解对初值的可微性定理条件

故：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0) \exp \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} dx$$

$$= -(p(x_0)y_0 + Q(x_0)) \exp \int_{x_0}^{x} p(x)dx$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = \exp \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} dx = \exp \int_{x_0}^{x} p(x)dx$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(x, \varphi(x, x_0, y_0)) = p(x)\varphi(x, x_0, y_0) + Q(x)$$

$\dfrac{dy}{dx} = p(x)y + Q(x)$ 满足 $y(x_0) = y_0$ 的解为

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} p(x)dx} \left(\int_{x_0}^{x} Q(x) e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx} dx + y_0 \right)$$

故 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_0} = \exp \int_{x_0}^{x} p(x)dx$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = -p(x_0) \exp \int_{x_0}^{x} p(x)dx \left(\int_{x_0}^{x} Q(x)(\exp(-\int_{x_0}^{x} p(x)dx))dx + y_0 \right)$$

$$+ \exp \int_{x_0}^{x} p(x)dx \left(-Q(x_0) + p(x_0) \int_{x_0}^{x} Q(x) \, [\exp(-\int_{x_0}^{x} p(x)dx)] dx \right)$$

$$= -(p(x_0)y_0 + Q(x_0)) \exp \int_{x_0}^{x} p(x)dx$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=p(x)\exp\int_{x_0}^{x}p(x)dx(\int_{x_0}^{x}Q(x)(\exp(-\int_{x_0}^{x}p(x)dx))dx+y_0)$$

$$+\exp\int_{x_0}^{x}p(x)dx(Q(x)\exp(-\int_{x_0}^{x}p(x)dx))$$

$$=p(x)\varphi(x,x_0,y_0)+Q(x)$$

4．解：这是 $f(x,y)=\sin(\frac{y}{x})$ 在（1，0）某领域内满足解对初值可微性定理条件，由公式

$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}\Big|_{(1,0)}=-f(x_0,y_0)\exp(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx)\Big|_{(1,0)}=0$$

$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}\Big|_{(1,0)}=\exp(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx)\Big|_{(1,0)}=\exp\int_{x_0}^{x}\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}dx\Big|_{(1,0)}$$

$$=\exp\int_{1}^{x}\frac{1}{x}\cos\frac{y(x,1,0)}{x}dx$$

易见 $y=0$ 是原方程满足初始条件 $y(1)=0$ 的解

$\because y(x,1,0)=0 \qquad \therefore \cos\frac{y(x,1,0)}{x}=\cos 0=1$

故 $\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}\Big|_{\substack{x_0=1\\ y=0}}=\exp\int_{1}^{x}\frac{1}{x}dx=|x|$

习题 3.4

(一)、解下列方程，并求奇解（如果存在的话）：

1、 $y=2x\frac{dy}{dx}+x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4$

解：令 $\frac{dy}{dx}=p$， 则 $y=2xp+x^2p^4$，

两边对 x 求导，得 $p=2p+2x\frac{dp}{dx}+2xp^4+4x^2p^3\frac{dp}{dx}$

$$\left(1+2xp^3\right)\left(2x\frac{dp}{dx}+p\right)=0$$

从 $1+2xp^3=0$ 得 $\quad p\neq 0$ 时， $x=-\frac{1}{2p^3},y=-\frac{3}{4p^2}$；

从 $2x\frac{dp}{dx}+p=0$ 得 $\quad x=\frac{c}{p^2},y=\frac{2c}{p}+c^2$，

$p\neq 0$ 为参数，$c\neq 0$为任意常数.

经检验得$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2p^3} \\ y=-\dfrac{3}{4p^3} \end{cases}$，是方程奇解.

2、$x=y-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

解：令$\dfrac{dy}{dx}=p$，则$y=x+p^2$，

两边对 x 求导，得 $p=1+2p\dfrac{dp}{dx}$

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p-1}{2p},$$

解之得 $x=2p+\ln(p-1)^2+c$，

所以$y=2p+p^2+\ln(p-1)^2+c$，

且 y=x+1 也是方程的解，但不是奇解.

3、$y=x\dfrac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

解：这是克莱洛方程，因此它的通解为 $y=cx+\sqrt{1+c^2}$，

从$\begin{cases} y=cx+\sqrt{1+c^2} \\ x-\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}=0 \end{cases}$ 中消去 c,

得到奇解$y=\sqrt{1-x^2}$.

4、$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+x\dfrac{dy}{dx}-y=0$

解：这是克莱洛方程，因此它的通解为 $y=cx+c^2$，

从$\begin{cases} y=cx+c^2 \\ x+2c=0 \end{cases}$ 中消去 c,

得到奇解 $4y+x^2=0$.

5、$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}-y=0$

解：令 $\frac{dy}{dx}=p$，则 $y=2xp+p^2$，

两边对 x 求导，得 $p=2p+2x\frac{dp}{dx}+2p\frac{dp}{dx}$

$$\frac{dx}{dp}=-\frac{2}{p}x-2，$$

解之得 $x=-\frac{2}{3}p+cp^{-2}$，

所以 $y=-\frac{1}{3}p^2+cp^{-1}$，

可知此方程没有奇解.

6、$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1=0$

解： 原方程可化为 $y=x\frac{dy}{dx}-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$，

这是克莱罗方程，因此其通解为 $y=cx-\frac{1}{c^2}$，

从 $\begin{cases} y=cx-\frac{1}{c^2} \\ x+2c^{-3}=0 \end{cases}$ 中消去 c，得奇解 $27x^2+4y^3=0$.

7、$y=x\left(1+\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

解：令 $\frac{dy}{dx}=p$，则 $y=x(1+p)=p^2$，

两边对 x 求导，得 $x=ce^{-p}-2p+2$，

所以 $y=c(p+1)e^{-p}-p^2+2$，

可知此方程没有奇解.

8、$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(x-a)^2=0$

解：$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{(x-a)^2}{x}$

$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{x-a}{\sqrt{x}}$

$dy=\pm\left(\sqrt{x}-\frac{a}{\sqrt{x}}\right)dx$

$y=\pm\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2ax^{\frac{1}{2}}\right)$

$9(y+c)^2=4x(x-3a)^2$

可知此方程没有奇解.

9、$y=2x+\frac{dy}{dx}-\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$

解：令 $\frac{dy}{dx}=p$，则 $y=2x+p-\frac{1}{3}p^3$，

两边对 x 求导，得 $p=2+\frac{dp}{dx}-p^2\frac{dp}{dx}$

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p-2}{1-p^2}$$

解之得 $x=-\frac{(p+2)^2}{2}-3\ln|p-2|+c$，

所以 $y=-\frac{1}{3}p^3-p^2-3p-4-6\ln|p-2|+c$，

且 $y=2x-\frac{2}{3}$ 也是方程的解，但不是方程的奇解.

10、$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x+1)\frac{dy}{dx}-y=0$

解：$y=x\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

这是克莱罗方程，因此方程的通解为 $y=cx+c+c^2$，

从 $\begin{cases} y=cx+c+c^2 \\ x+1+2c \end{cases}$ 中消去 c,

得方程的奇解$(x+1)^2+4y=0$.

（二）求下列曲线族的包络.

1、 $y=cx+c^2$

解:对 c 求导，得 x+2c=0, $c=-\frac{x}{2}$,

代入原方程得，$y=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{4}=-\frac{x^2}{4}$，

经检验得，$y=-\frac{x^2}{4}$是原方程的包络.

2、 $c^2y+cx^2-1=0$

解：对 c 求导，得 $2yc+x^2=0, c=-\frac{x^2}{2y}$，

代入原方程得 $\frac{x^4}{4y^2}y-\frac{x^4}{2y}-1=0$，即$x^4+4y=0$，

经检验得$x^4+4y=0$是原方程的包络.

3、$(x-c)^2+(y-c)^2=4$

解：对 c 求导，得 –2(x-c)-2(y-c)=0, $c=\frac{x+y}{2}$,

代入原方程得$(x-y)^2=8$.

经检验,得 $(x-y)^2=8$是原方程的包络.

4、$(x-c)^2+y^2=4c$

解：对 c 求导，得 -2(x-c)=4, c=x+2,

代入原方程得$4+y^2=4(x+2)$ ，$y^2=4(x+1)$,

经检验，得$y^2=4(x+1)$是原方程的包络.

(三) 求一曲线,使它上面的每一点的切线截割坐标轴使两截距之和等于常数 c.

解：设所求曲线方程为 y=y(x),以 X、Y 表坐标系，则曲线上任一点（x,y(x)）的切线方程为$(Y-y(x))=y'(x)(X-x)$，

它与 X 轴、Y 轴的截距分别为$X=x-\frac{y}{y'}$，$Y=y-xy'$，

按条件有 $x-\frac{y}{y'}+y-xy'=a$，化简得$y=xy'-\frac{ay'}{1-y'}$，

这是克莱洛方程，它的通解为一族直线$y=cx-\frac{ac}{1-c}$，

它的包络是$\begin{cases} y=cx-\dfrac{ac}{1-c} \\ 0=x-\dfrac{a}{1-c}-\dfrac{ac}{(1-c)^2} \end{cases}$，

消去 c 后得我们所求的曲线$4ax=(x-y+a)^2$.

(四) 试证：就克莱洛方程来说，p-判别曲线和方程通解的 c-判别曲线同样是方程通解的包络，从而为方程的奇解.

证：克莱洛方程 y=xp+f(p)的 p-判别曲线就是用 p-消去法，

从$\begin{cases} y=cx+f(c) \\ 0=x+f'(c) \end{cases}$ 中消去 p 后而得的曲线；

c-判别曲线就是用 c-消去法，从通解及它对求导的所得的方程

$\begin{cases} y=cx+f(c) \\ 0=x+f'(c) \end{cases}$中消去 c 而得的曲线，

显然它们的结果是一致的，是一单因式，

因此 p-判别曲线是通解的包络，也是方程的通解.

习题 4.1

1. 设$x(t)$和$y(t)$是区间$a\le t\le b$上的连续函数，证明：如果在区间$a\le t\le b$上有$\frac{x(t)}{y(t)}\ne$常数或$\frac{y(t)}{x(t)}$常数，则$x(t)$和$y(t)$在区间$a\le t\le b$上线形无关。

证明：假设在$x(t)$，$y(t)$在区间$a\le t\le b$上线形相关

则存在不全为零的常数α，β，使得$\alpha x(t)+\beta y(t)=0$

那么不妨设$x(t)$不为零，则有$\frac{y(t)}{x(t)}=-\frac{\alpha}{\beta}$

显然$-\frac{\alpha}{\beta}$为常数，与题矛盾，即假设不成立$x(t)$，$y(t)$在区间$a\le t\le b$上线形无关

2. 证明非齐线形方程的叠加原理：设$x_1(t)$，$x_2(t)$分别是非齐线形方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\Lambda+a_n(t)x=f_1(t) \qquad (1)$$

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\Lambda+a_n(t)x=f_2(t) \qquad (2)$$

的解，则$x_1(t)+x_2(t)$是方程 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\Lambda+a_n(t)x=f_1(t)+f_2(t)$的解。

证明：由题可知$x_1(t)$，$x_2(t)$分别是方程（1），（2）的解

则：$$\frac{d^n x_1(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x_1(t)}{dt^{n-1}}+\Lambda+a_n(t)x_1(t)=f_1(t) \qquad (3)$$

$$\frac{d^n x_2(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x_2(t)}{dt^{n-1}}+\Lambda+a_n(t)x_2(t)=f_2(t) \qquad (4)$$

那么由（3）+（4）得：

$$\frac{d^n(x_1(t)+x_2(t))}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}(x_1(t)+x_2(t))}{dt^{n-1}}+\Lambda+a_n(t)(x_1(t)+x_2(t))=f_1(t)+f_2(t)$$

即$x_1(t)+x_2(t)$是方程是$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\Lambda+a_n(t)x=f_1(t)+f_2(t)$的解。

3. 试验证$\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$的基本解组为e^t,e^{-t}，并求方程$\frac{d^2x}{dt^2}-x=\cos t$的通解。

证明：由题将e^t代入方程$\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$得：e^t-e^t=0,即e^t是该方程的解，

同理求得e^{-t}也是该方程的解

又显然e^t,e^{-t}线形无关，故e^t,e^{-t}是$\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$的基本解组。

由题可设所求通解为：$x(t)=c_1(t)e^t+c_2(t)e^{-t}$，则有：

$$\begin{cases} c_1'(t)e^t+c_2'(t)e^{-t}=0 \\ c_1'(t)e^t-c_2'(t)e^{-t}=\cos t \end{cases}$$

解之得：$c_1(t)=-\frac{1}{4}e^{-t}(\cos t-\sin t)+c_1;c_2(t)=-\frac{1}{4}e^t(\cos t+\sin t)+c_2$

故所求通解为：$x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t$

4. 试验证$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{t}{1-t}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{1-t}x=0$有基本解组 t，$e^t$，并求方程

$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{t}{1-t}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{1-t}x=$t-1 的通解。

解：由题将 t 代入方程$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{t}{1-t}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{1-t}x=$0 得：

$\frac{d^2t}{dt^2}+\frac{t}{1-t}\frac{dt}{dt}-\frac{1}{1-t}t=\frac{t}{1-t}+\frac{t}{1-t}=0$，即 t 为该方程的解

同理e^t也是该方程的解，又显然 t，e^t线形无关，

故 t，e^t是方程$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{t}{1-t}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{1-t}x=0$的基本解组

由题可设所求通解为$x(t)=c_1(t)t+c_2(t)e^t$，则有：

$$\begin{cases} c_1'(t)t+c_2'(t)e^t=0 \\ c_1'(t)+c_2'(t)e^t=t-1 \end{cases}$$

解之得：$c_1(t)=-t+c_1,c_2(t)=-(te^{-t}+e^{-t})+c_2$

故所求通解为 $x(t)=c_1t+c_2e^t-(t+1)^2$

5. 以知方程 $\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$ 的基本解组为 e^t,e^{-t}，求此方程适合初始条件 $x(0)=1,x'(0)=0$及$x(0)=0,x'(0)=1$的基本解组（称为标准基本解组，即有 $w(0)=1$）并求出方程的适合初始条件 $x(0)=x_0,x'(0)=x_0{}'$ 的解。

解：e^t,e^{-t} 时间方程 $\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$ 的基本解组，故存在常数 c_1,c_2 使得：$x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}$

于是：$x'(t)=c_1e^t-c_2e^{-t}$

令 t=0,则有方程适合初始条件 $x(0)=1,x'(0)=0$，于是有：

$\begin{cases}c_1e^0+c_2e^0=1\\c_1e^0-c_2e^0=0\end{cases}$ 解得：$c_1=\frac{1}{2},c_2=\frac{1}{2}$ 　故 $x(t)=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}$

又该方程适合初始条件 $x(0)=0,x'(0)=1$，于是：

$\begin{cases}c_1e^0+c_2e^0=0\\c_1e^0-c_2e^0=1\end{cases}$ 解得：$c_1=\frac{1}{2},c_2=-\frac{1}{2}$ 　故 $x(t)=\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}$

显然 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 线形无关，所以此方程适合初始条件的基本解组为：

$x(t)=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}$，　　$x(t)=\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}$

而此方程同时满足初始条件 $x(0)=x_0,x'(0)=x_0{}'$，于是：

$\begin{cases}c_1e^0+c_2e^0=x_0\\c_1e^0-c_2e^0=x_0\end{cases}$，解得：$c_1=\frac{x_0+x_0{}'}{2},c_2=\frac{x_0-x_0{}'}{2}$

故 $x(t)=\frac{x_0+x_0{}'}{2}e^t+\frac{x_0-x_0{}'}{2}e^{-t}$ 满足要求的解。

6. 设 $x_i(t)\ (i=1,2,\Lambda\ ,n)$ 是齐线形方程（4.2）的任意 n 个解。它们所构成的伏朗斯行列式记为 $w(t)$，试证明 $w(t)$ 满足一阶线形方程 $w'+a_1(t)w=0$，因而有：

$$w(t)=w(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds}\qquad t\in(a,b)$$

解：$\Theta\ w'(t)=\begin{vmatrix} x_1' & \Lambda & x_n' \\ x_1' & \Lambda & x_n' \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ x_1^{(n-1)} & \Lambda & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}+\Lambda+\begin{vmatrix} x_1' & \Lambda & x_n' \\ x_1' & \Lambda & x_n' \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ x_1^{(n)} & \Lambda & x_n^{(n)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & \Lambda & x_n \\ x_1' & \Lambda & x_n' \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ x_1^{(n-2)} & \Lambda & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n)} & \Lambda & x_n^{(n)} \end{vmatrix}$

又 $x_i(t)\ (i=1,2,\Lambda\ ,n)$ 满足 $\dfrac{d^n x_i}{dt^n}+a_1(t)\dfrac{d^{n-1}x_i}{dt^{n-1}}+\Lambda\ +a_n(t)x_i=0$

即 $\dfrac{d^n x_i}{dt^n}=-\left(a_1(t)\dfrac{d^{n-1}x_i}{dt^{n-1}}+\Lambda\ +a_n(t)x\right)$

$w'(t)$中第k行都乘以$a_k(t)$，加到最后一行(k为1,2,Λ，$n-1$)

则：$w'(t)=\begin{vmatrix} x_1 & \Lambda & x_n \\ x_1' & \Lambda & x_n' \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ x_1^{(n-2)} & \Lambda & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n-1)} & \Lambda & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}(-a_1(t))=-a_1(t)w(t)$

即 $w'+a_1(t)w=0$　　　　则有：$\dfrac{w'(t)}{w(t)}=-a_1(t)dt$

两边从t_0到t积分：$\ln|w(t)|\Big|_{t_0}^{t}=-a_1(s)ds$，则

$\ln|w(t)|-n|w(t_0)|=-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds$

即：$w(t)=w(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds}$　　　　$t\in(a,b)$

7. 假设 $x_1(t)\neq 0$ 是二阶齐线形方程 $x''+a_1(t)x'+a_2(t)x=0$（*）的解，这里 $a_1(t)$和$a_2(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，试证：（1）$x_2(t)$ 是方程的解的充要条件为：$w'[x_1,x_2]+a_1w[x_1,x_2]=0$；（2）方程的通解可以表示为：

$$x=x_1\left[c_1\int\frac{1}{x_1^{\ 2}}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds\right)dt+c_2\right]$$

，其中 c_1,c_2 为常数，

$t_0, t \in [a,b]$

证：（1） $w'[x_1,x_2]+a_1 w[x_1,x_2]=0$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2'' - x_1'' x_2' + a_1 x_1 x_2' - a_1 x_1' x_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1 x_2'' + a_1 x_1' x_2 + a_1 x_1 x_2 + a_1 x_1 x_2' - a_1 x_1' x_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1\left(x_2'' + a_1 x_2' + a_1 x_2\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x_2'' + a_1 x_2' + a_1 x_2 = 0, (x_1 \neq 0)$$

即x_2为(*)的解。

（2）因为x_1, x_2为方程的解，则由刘维尔公式

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = w(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s) ds}, \text{即：}$$

$$x_1 x_2' - x_1' x_2 = w(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s) ds}$$

两边都乘以$\frac{1}{x_1^2}$则有： $\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{dt} = \frac{w(t_0)}{x_1^2} e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s) ds}$ ，于是：

$$\frac{x_2}{x_1} = c_1 \int \frac{1}{x_1^2} e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s) ds} dt + c_2$$

即：$x_2 = \left(c_1 \int \frac{1}{x_1^2} e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s) ds} dt + c_2\right) x_1$

取$c_1 = 1, c_2 = 0$，得：$x_2 = x_1 \int \frac{1}{x_1^2} e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s) ds} dt,$

又：$w(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s) ds} \neq 0$

从而方程的通解可表示为：

$$x = x_1\left[c_1\int\frac{1}{{x_1}^2}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds\right)dt + c_2\right]$$，其中 c_1, c_2 为常数，

$t_0, t \in [a,b]$。

8. 试证 n 阶非齐线形微分方程（4.1）存在且最多存在 n+1 个线形无关解。

证：设 $x_1(t), x_2(t), \Lambda, x_n(t)$ 为（4.1）对应的齐线形方程的一个基本解组，$\bar{x}(t)$ 是（4.1）的一个解，则：$x_1(t)+\bar{x}(t), x_2(t)+\bar{x}(t), \Lambda, x_n(t)+\bar{x}(t), \bar{x}(t),$ （1），均为（4.1）的解。同时（1）是线形无关的。

事实上：假设存在常数 $c_1, c_2, \Lambda, c_{n+1}$，使得：

$$c_1(x_1(t)+\bar{x}(t)) + c_2(x_2(t)+\bar{x}(t)) + \Lambda + c_n(x_n(t)+\bar{x}(t)) + c_{n+1}(\bar{x}(t)) = 0$$

即：$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t) + \bar{x}(t)\sum_{i=1}^{n+1} c_i = 0$

我们说：$\sum_{i=1}^{n+1} c_i = 0$

否则，若 $\sum_{i=1}^{n+1} c_i \neq 0$，则有：$\bar{x}(t) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{\sum_{i=1}^{n+1} c_i}x_i(t)$

（*）的左端为非齐线形方程的解，而右端为齐线形方程的解，矛盾！

从而有 $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t) = 0$

又 $x_1(t), x_2(t), \Lambda, x_n(t)$ 为（4.1）对应的齐线形方程的一个基本解组，

故有：$c_1 = c_2 = \Lambda = c_n = 0$，进而有：$c_{n+1} = 0$

即（1）是线形无关的。

习题 4.2

1. 解下列方程

（1） $x^{(4)} - 5x'' + 4x = 0$

解：特征方程 $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$ 有根 $\lambda_1 = 2$，$\lambda_2 = -2$，$\lambda_3 = 1$，$\lambda_4 = -1$

故通解为 x=$c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}+c_3e^{t}+c_4e^{-t}$

(2) $x'''-3ax''+3a^2x'-a^3x=0$

解：特征方程$\lambda^3-3a\lambda^2+3a^2\lambda-a^3=0$

有三重根$\lambda=a$

故通解为 x=$c_1e^{at}+c_2te^{at}+c_3t^2e^{at}$

（3） $x^{(5)}-4x'''=0$

解：特征方程$\lambda^5-4\lambda^3=0$

有三重根$\lambda=0$， λ_4=2， λ_5=-2

故通解为$x=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}+c_3t^2+c_4t+c_5$

（4） $x''+2x'+10x=0$

解：特征方程$\lambda^2+2\lambda+10=0$有复数根λ_1=-1+3i,λ_2=-1-3i

故通解为$x=c_1e^{-t}\cos 3t+c_2e^{-t}\sin 3t$

(5) $x''+x'+x=0$

解：特征方程$\lambda^2+\lambda+1=0$有复数根$\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\lambda_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$,

故通解为$x=c_1e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$

(6) $s''-a^2s=t+1$

解：特征方程$\lambda^2-a^2=0$有根 λ_1=a,λ_2=-a

当$a\neq 0$时，齐线性方程的通解为 s=$c_1e^{at}+c_2e^{-at}$

$\tilde{s}=A+Bt$代入原方程解得$A=B=-\frac{1}{a^2}$

故通解为 s=$c_1e^{at}+c_2e^{-at}$-$\frac{1}{a^2}(t-1)$

当 a=0 时,$\tilde{s}=t^2(\gamma_1 t+\gamma_2)$代入原方程解得$\gamma_1=\frac{1}{6},\gamma_2=\frac{1}{2}$

故通解为 s=c_1+c_2t-$\frac{1}{6}t^2(t+3)$

(7) $x'''-4x''+5x'-2x=2t+3$

解：特征方程$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0$有根$\lambda_1=2$,两重根$\lambda=1$

齐线性方程的通解为 x=$c_1e^{2t}+c_2e^t+c_3te^t$

又因为$\lambda=0$ 不是特征根，故可以取特解行如$\tilde{x}=A+Bt$代入原方程解得 A=-4，B=-1

故通解为 x=$c_1e^{2t}+c_2e^t+c_3te^t$-4-t

(8) $x^{(4)}-2x''+x=t^2-3$

解：特征方程$\lambda^4-2\lambda^2+1=0$有2重根$\lambda=1$,2重根$\lambda=-1$

故齐线性方程的通解为 x=$c_1e^t+c_2te^t+c_3e^{-t}+c_4te^{-t}$

取特解行如$\tilde{x}=At^2+Bt+c$代入原方程解得 A=1，B=0,C=1

故通解为 x=$c_1e^t+c_2te^t+c_3e^{-t}+c_4te^{-t}+t^2+1$

(9) $x'''-x=\cos t$

解：特征方程$\lambda^3-1=0$有复数根$\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\lambda_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\lambda_3=1$

故齐线性方程的通解为$x=c_1e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^t$

取特解行如$\tilde{x}=A\cos t+B\sin t$代入原方程解得 A=$\frac{1}{2},B=-\frac{1}{2}$

故通解为$x=c_1e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^t-\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$

(10) $x''+x'-2x=8\sin 2t$

解：特征方程$\lambda^2+\lambda-2=0$有根$\lambda_1=-2,\lambda_2=1$

故齐线性方程的通解为 x=$c_1e^t+c_2e^{-2t}$

因为+-2i 不是特征根

取特解行如$\tilde{x}=A\cos 2t+B\sin 2t$代入原方程解得 A=$-\frac{2}{5},B=-\frac{6}{5}$

故通解为 x=$c_1e^t+c_2e^{-2t}-\frac{2}{5}\cos 2t-\frac{6}{5}\sin 2t$

（11） $x'''-x=e^t$

解：特征方程$\lambda^3-1=0$有复数根$\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\lambda_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\lambda_3=1$

故齐线性方程的通解为$x=c_1e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^t$ $\lambda=$1 是特征方程的根，故$\tilde{x}=Ate^t$代入原方程解得 A=$\frac{1}{3}$

故通解为$x=c_1e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^t+\frac{1}{3}te^t$

（12） $s''+2as'+a^2s=e^t$

解：特征方程$\lambda^2+2a\lambda+a^2=0$有 2 重根$\lambda=$-a

当 a=-1 时，齐线性方程的通解为 s=$c_1e^t+c_2te^t$，

$\lambda=$1 是特征方程的 2 重根，故$\tilde{x}=At^2e^t$代入原方程解得 A=$\frac{1}{2}$

通解为 s=$c_1e^t+c_2te^t+\frac{1}{2}t^2$，

当 a$\neq$-1 时，齐线性方程的通解为 s=$c_1e^{-at}+c_2te^{-at}$，

$\lambda=$1 不是特征方程的根，故$\tilde{x}=Ae^t$代入原方程解得 A=$\frac{1}{(a+1)^2}$

故通解为 s=$c_1e^{-at}+c_2te^{-at}+\frac{1}{(a+1)^2}e^t$

（13） $x''+6x'+5x=e^{2t}$

解：特征方程$\lambda^2+6\lambda+5=0$有根$\lambda_1=$-1,$\lambda_2=$-5

故齐线性方程的通解为 x=$c_1e^{-t}+c_2e^{-5t}$

$\lambda=2$ 不是特征方程的根，故 $\tilde{x}=Ae^{2t}$ 代入原方程解得 A=$\frac{1}{21}$

故通解为 x=$c_1e^{-t}+c_2e^{-5t}+\frac{1}{21}e^{2t}$

（14） $x''-2x'+3x=e^{-t}\cos t$

解：特征方程 $\lambda^2-2\lambda+3=0$ 有根 λ_1=-1+$\sqrt{2}$ i, λ_2=-1-$\sqrt{2}$ i

故齐线性方程的通解为 $x=c_1e^t\cos\sqrt{2}t+c_2e^t\sin\sqrt{2}t$

$-1\pm i$ 不是特征方程的根，取特解行如 $\tilde{x}=(A\cos t+B\sin t)e^{-t}$ 代入原方程解得 A=$\frac{5}{41}, B=-\frac{4}{41}$

故通解为 $x=c_1e^t\cos\sqrt{2}t+c_2e^t\sin\sqrt{2}t+(\frac{5}{41}\cos t-\frac{4}{41}\sin t)e^{-t}$

(15) $x''+x=\sin t-\cos 2t$

解：特征方程 $\lambda^2+1=0$ 有根 λ_1=i, λ_2=- i

故齐线性方程的通解为 $x=c_1\cos t+c_2\sin t$

$x''+x=\sin t$, λ_1=i,是方程的解 $\tilde{x}=t(A\cos t+B\sin t)$ 代入原方程解得

A=$-\frac{1}{2}$ B=0 故 $\tilde{x}=-\frac{1}{2}t\cos t$

$x''+x=-\cos 2t$ $\tilde{x}=A\cos 2t+B\sin 2t$ 代入原方程解得

A=$\frac{1}{3}$ B=0 故 $\tilde{x}=\frac{1}{3}\cos 2t$

故通解为 $x=c_1\cos t+c_2\sin t-\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{3}\cos 2t$

习题 5.1

1.给定方程组

$$x'=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}x \qquad x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \qquad (*)$$

a)试验证 u(t)=$\begin{bmatrix}\cos t\\-\sin t\end{bmatrix}$,v(t)=$\begin{bmatrix}\sin t\\\cos t\end{bmatrix}$分别是方程组（*）的满足初始条件 u(0)=$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, v(0)=$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$的解.

b)试验证 w(t)＝c$_1$ u(t)+c$_2$ v(t)是方程组(*)的满足初始条件 w(0)=$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$的解，其中$c_1$,$c_2$是任意常数.

解：a)

$$u(0)=\begin{bmatrix}\cos 0\\-\sin 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$u'(t)=\begin{bmatrix}-\sin t\\-\cos t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos t\\-\sin t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}u(t)$$

又 $$v(0)=\begin{bmatrix}\sin o\\\cos 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$v'(t)=\begin{bmatrix}\cos t\\-\sin t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin t\\\cos t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}v(t)$$

因此 u(t),v(t)分别是给定初值问题的解.

b) $$w(0)=c_1u(0)+c_2u(0)=c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$$

$$w'(t)=c_1\ u'(t)+\ c_2\ v'(t)$$

$$=c_1\begin{bmatrix}-\sin t\\-\cos t\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}\cos t\\-\sin t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-c_1\mathrm{sint}+c_2\cos t\\-c_1\cos t-c_2\sin t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\cos t+c_2\sin t\\-c_1\sin t+c_2\cos t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}w(t)$$

因此 w(t)是给定方程初值问题的解.

2. 将下面的初值问题化为与之等价的一阶方程组的初值问题：

a) $x'' + 2x' + 7tx = e^{-t}$, $x(1)=7$, $x'(1)=-2$

b) $x^{(4)} + x = te^{t}$, $x(0)=1$, $x'(0)=-1$, $x''(0)=2$, $x'''(0)=0$

c) $\begin{cases} x'' + 5y' - 7x + 6y = e^{t} \\ y'' - 2y + 13y' - 15x = \cos t \end{cases}$

$x(0)=1$, $x'(0)=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

解：a）令 $x_1 = x$, $x_2 = x'$，得

$$\begin{cases} x_1' = x' = x_2 \\ x_2' = x'' = -7tx_1 - 2x_2 + e^{-t} \end{cases}$$

即 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7t & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$

又 $x_1 = x(1)=7$　$x_2(1) = x'(1)=-2$

于是把原初值问题化成了与之等价的一阶方程的初值问题：

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}, \qquad x(1) = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

其中 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

b) 令 $x_1 = x$　$x_2 = x'$　$x_3 = x''$　$x_4 = x'''$　则得：

$$\begin{cases} x_1' = x' = x_2 \\ x_2' = x'' = x_3 \\ x_3' = x''' = x_4 \\ x_4' = -x + te^{t} = -x_1 + te^{t} \end{cases}$$

且 $x_1(0)=x(0)=1$, $x_2 = x'(0)=-1$, $x_3(0)= x''(0)=2$,

$x_4(0)= x'''(0)=0$

于是把原初值问题化成了与之等价的一阶方程的初值问题：

$$x^{'}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\te^{t}\end{bmatrix}\qquad x(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix},\ 其中\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}.$$

c) 令 w_1＝x， w_2＝$x^{'}$，w_3＝y，w_4＝$y^{'}$，则原初值问题可化为：

$$\begin{cases}w_1^{'}=x^{'}=w_2\\ w_2^{'}=x^{''}=-5w_4+7w_1-6w_3+e^{t}\\ w_3^{'}=y^{'}=w_4\\ w_4^{'}=y^{''}=2w_3-13w_4+15w_1+\cos t\end{cases}\qquad 且\begin{cases}w_1(0)=x(0)=1\\ w_2(0)=x^{'}(0)=0\\ w_3(0)=y(0)=0\\ w_4(0)=y^{'}(0)=1\end{cases}$$

即 $$w^{'}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\7&0&-6&-5\\0&0&0&1\\15&0&2&-13\end{bmatrix}w+\begin{bmatrix}0\\e^{t}\\0\\\cos t\end{bmatrix}$$

$$w(0)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\qquad 其中\ w=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\\w_4\end{bmatrix}$$

3. 试用逐步逼近法求方程组

$$x^{'}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}x\qquad x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

满足初始条件

$$x(0)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

的第三次近似解.

解：$\psi_0(t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$$\psi_1(t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}ds=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\1\end{bmatrix}$$

$$\psi_2(t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\1\end{bmatrix}ds=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t\\-\frac{t^2}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\1-\frac{t^2}{2}\end{bmatrix}$$

$$\psi_3(t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\1-\frac{s^2}{2}\end{bmatrix}ds=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t-\frac{t^3}{6}\\1-\frac{t^2}{2}\end{bmatrix}$$

习题 5.2

1.试验证$\Phi(t)=\begin{bmatrix}t^2&t\\2t&1\end{bmatrix}$是方程组 $x'=\begin{bmatrix}0&1\\-\frac{2}{t^2}&\frac{2}{t}\end{bmatrix}$x,x=$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ ，在任何不包含原点的区间 a$\le t\le b$上的基解矩阵。

解：令$\Phi(t)$的第一列为φ_1(t)=$\begin{pmatrix}t^2\\2t\end{pmatrix}$,这时φ_1'(t)=$\begin{pmatrix}2t\\2\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}0&1\\-\frac{2}{t^2}&\frac{2}{t}\end{pmatrix}$ φ_1(t)故φ_1(t)是一个解。同样如果以φ_2(t)表示$\Phi(t)$第二列，我们有φ_2(t)=$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}0&1\\-\frac{2}{t^2}&\frac{2}{t}\end{pmatrix}$$\varphi_2$(t)这样$\varphi_2$(t)也是一个解。因此$\Phi(t)$是解矩阵。又因为 det $\Phi(t)$=-t^2 故$\Phi(t)$是基解矩阵。

2.考虑方程组 x$'$=A(t)x (5.15)其中 A(t)是区间 a$\le t\le b$上的连续 n$\times$n 矩阵，它的元素为 a$_{ij}$(t),i ,j=1,2,…,n

a) 如果 x$_1$(t),x$_2$(t),…,x$_n$(t)是(5.15)的任意 n 个解，那么它们的伏朗斯基行列式 W[x$_1$(t),x$_2$(t),…,x$_n$(t)]$\equiv$W(t)满足下面的一阶线性微分方程 W$'$=[a$_{11}$(t)+a$_{22}$(t)+…+a$_{nn}$(t)]W

b) 解上面的一阶线性微分方程，证明下面公式：W(t)=W(t$_0$)e$^{\int_{t_0}^t[a_{11}(s)+a_{22}(s)+\dots a_{nn}(s)]ds}$ t$_0$,t$\in$[a,b]

解：w$'$(t)=$\begin{vmatrix} x_{11}' & x_{12}' & \dots & x_{1n}' \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$+$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21}' & x_{22}' & \dots & x_{2n}' \\ . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$+…+$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ x_{n1}' & x_{n2}' & \dots & x_{nn}' \end{vmatrix}$

=

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}+..a_{1n}x_{n1} & a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}+\dots+a_{1n}x_{n2} & \dots & a_{11}x_{1n}+a_{12}x_{2n}+\dots+a_{1n}x_{nn} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

+…+ $\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1}x_{11}+\dots+a_{nn}x_{n1} & a_{n1}x_{21}+..+a_{nn}x_{n2} & \dots & a_{n1}x_{nn}+\dots+a_{nn}x_{nn} \end{vmatrix}$ =

$\begin{vmatrix} a_{11}x_{11} & a_{11}x_{12} & \dots & a_{11}x1n \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$+…+$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{nn}x_{n1} & a_{nn}x_{n2} & \dots & a_{nn}x_{nn} \end{vmatrix}$整理后原式变为

（a_{11}+…+a_{nn}）$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$=（$a_{11}$+…+$a_{nn}$）w(t)

=（a_{11}(t)+…+a_{nn}(t)）w(t)

b)由于 w$'$(t)=[a_{11}(t)+…+a_{nn}(t)] w(t),即 $\frac{dw(t)}{w(t)}$=[a_{11}(t)+…+a_{nn}(t)]dt

两边从 t_0 到 t 积分 $\ln|w(t)|-\ln|w(t_0)|=\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+\dots+a_{nn}(s)]ds$ 即 w(t)=w(t_0)e$^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+\dots+a_{nn}(s)]ds}$,t$\in$[a,b]

3.设 A(t)为区间 $a\le t\le b$上的连续 n$\times$n 实矩阵，$\Phi(t)$为方程 x$'$=A(t)x 的基解矩阵，而 x=φ(t)为其一解，试证：

a) 对于方程 y$'$=-A^T(t)y 的任一解 y=Ψ(t)必有Ψ^T(t) φ(t)=常数；

b)Ψ(t)为方程 y$'$=-A^T(t)y 的基解矩阵的充要条件是存在非奇异的常数

矩阵 C，使$\Psi^{T}(t)\ \varphi(t)=C$.

解 a)$[\Psi^{T}(t)\ \varphi(t)]'=\Psi^{T'}\varphi(t)+\Psi^{T}\varphi'(t)=\Psi'^{T}\varphi(t)+\Psi^{T}(t)A(t)\varphi$

又因为$\Psi'=-A^{T}(t)\ \Psi(t)$，所以$\Psi'^{T}=-\Psi^{T}(t)\,A(t)$

$[\Psi^{T}(t)\ \varphi(t)]'=-\Psi^{T}(t)\ \varphi(t)A(t)+\Psi^{T}(t)\,A(t)\ \varphi(t)=0$,

所以对于方程 $y'=-A^{T}(t)y$ 的任一解 $y=\Psi(t)$必有$\Psi^{T}(t)\ \varphi(t)=$常数

b) “$\Leftarrow$”假设为方程 $y'=-A^{T}(t)y$ 的基解矩阵，则

$[\Psi^{T}(t)\ \varphi(t)]'=[\Psi^{T}(t)]'\ \Phi(t)+\Psi^{T}(t)\ \Phi'(t)=[-A^{T}(t)\ \Psi(t)]\Phi(t)+\Psi^{T}(t)\ A^{T}(t)\ )\Phi(t)+\Psi^{T}(t)[A(t)\ \varphi(t)]=-\Psi^{T}(t)\ A^{T}(t)\ \Phi(t)+\Psi^{T}(t)\ A^{T}(t)\ \Phi(t)=0$,故$\Psi^{T}(t)\ \varphi(t)=C$

“$\Rightarrow$”若存在非奇异常数矩阵 C，$\det c\neq 0$,使$\Psi^{T}(t)\ \varphi(t)=C$，

则$[\Psi^{T}(t)\ \varphi(t)]'=\Psi^{T'}\varphi(t)+\Psi^{T}\varphi'(t)=0$，故$\Psi^{T'}(t)\varphi(t)=-\Psi^{T}(t)\ \varphi(t)A(t)\ \ \Psi^{T'}(t)=-\Psi^{T}(t)\,A(t)$ 所以$\Psi'^{T}(t)=-\Psi^{T}(t)\,A(t)$, $\Psi'(t)=-\Psi^{T}(t)\ A^{T}(t)$即$\Psi(t)$为方程 $y'=-A^{T}(t)y$ 的基解矩阵

4.设$\Phi(t)$为方程 $x'=Ax$（A 为 $n\times n$ 常数矩阵）的标准基解矩阵（即Φ（0）=E），证明:

$\Phi(t)\,\Phi^{-1}(t_0)=\Phi(t-t_0)$其中 t_0为某一值.

证明：（1）$\Phi(t),\Phi(t-t_0)$是基解矩阵。

（2）由于$\Phi(t)$为方程 $x'=Ax$ 的解矩阵，所以$\Phi(t)\,\Phi^{-1}(t_0)$也是 $x'=Ax$ 的解矩阵，而当 $t=t_0$时，$\Phi(t_0)\Phi^{-1}(t_0)=E$, $\Phi(t-t_0)=\Phi$（0）=E. 故由解的存在唯一性定理，得$\Phi(t)\,\Phi^{-1}(t_0)=\Phi(t-t_0)$

5.设 A(t),f(t)分别为在区间$a\le t\le b$上连续的 $n\times n$ 矩阵和 n 维列向量，证明方程组 $x'=A(t)x+f(t)$存在且最多存在 n+1 个线性无关解。

证明：设 $x_1, x_2, \ldots x_n$ 是 $x'=A(t)x$ 的 n 个线性无关解，$\bar{x}$ 是 $x'=A(t)x+f(t)$ 的一个解，则 $x_1+\bar{x}$, $x_2+\bar{x}$, …, $x_n+\bar{x}$, $\bar{x}$ 都是非齐线性方程的解，下面来证明它们线性无关，假设存在不全为零的常数 C_i, (I=1,2,…,n)使得 $\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i+\bar{x})+c_{n-1}\bar{x}=0$，从而 $x_1+\bar{x}$, $x_2+\bar{x}$, …, $x_n+\bar{x}$, $\bar{x}$ 在 $a \le t \le b$ 上线性相关，此与已知矛盾，因此 $x_1+\bar{x}$, $x_2+\bar{x}$, …, $x_n+\bar{x}$, $\bar{x}$ 线性无关，所以方程组 $x'=A(t)x+f(t)$ 存在且最多存在 n+1 个线性无关解。

6、试证非齐线性微分方程组的叠加原理：

$$x' = A(t)x + f_1(t)$$

$$x' = A(t)x + f_2(t)$$

的解，则 $x_1(t)+x_2(t)$ 是方程组

$$x' = A(t)x + f_1(t) + f_2(t)$$

的解。

证明：$x' = A(t)x + f_1(t)$ （1） $x' = A(t)x + f_2(t)$ （2）

分别将 $x_1(t), x_2(t)$ 代入（1）和（2）

则 $x_1' = A(t)x_1 + f_1(t)$ $x_2' = A(t)x + f_2(t)$

则 $x_1' + x_2' = A(t)[x_1(t)+x_2(t)] + f_1(t) + f_2(t)$

$[x_1(t)+x_2(t)]' = A(t)[x_1(t)+x_2(t)] + f_1(t) + f_2(t)$

令 $x = x_1(t) + x_2(t)$

即证 $x' = A(t)x + f_1(t) + f_2(t)$

7．考虑方程组 $x' = Ax + f(t)$，其中

$A=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$　　　$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$　　　　$f(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\\cos t\end{bmatrix}$

a)试验证　$\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^{2t}&te^{2t}\\0&e^{2t}\end{bmatrix}$是$x^{'}=Ax$的基解矩阵；

b)试求$x^{'}=Ax+f(t)$的满足初始条件$\varphi(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$的解$\varphi(t)$。

证明：a)首先验证它是基解矩阵

以$\varphi_1(t)$表示$\phi(t)$的第一列　　$\varphi_1(t)=\begin{pmatrix}e^{2t}\\0\end{pmatrix}$

则$\varphi_1^{'}(t)=\begin{pmatrix}2e^{2t}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2t}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\varphi_1(t)$

故$\varphi_1(t)$是方程的解

如果以$\varphi_2(t)$表示$\phi(t)$的第二列　$\varphi_2(t)=\begin{pmatrix}te^{2t}\\e^{2t}\end{pmatrix}$

我们有$\varphi_2^{'}(t)=\begin{pmatrix}e^{2t}+2te^{2t}\\2e^{2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}te^{2t}\\e^{2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\varphi_2(t)$

故$\varphi_2(t)$也是方程的解

从而$\phi(t)$是方程的解矩阵

又$\det\phi(t)=\begin{vmatrix}e^{2t}&te^{2t}\\0&e^{2t}\end{vmatrix}=e^{4t}\neq 0$

故$\phi(t)$是$x^{'}=Ax$的基解矩阵；

b)由常数变易公式可知，方程满足初始条件$\varphi(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$的解

$$\varphi(t)=\phi(t)\phi^{-1`}(0)\eta+\phi(t)\int_0^t\phi^{-1}f(s)ds$$

而 $\phi^{-1}(t)=\dfrac{\begin{pmatrix} e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}}{e^{4t}}=\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}e^{-2t}$

$$\therefore \varphi(t)=\begin{pmatrix} (1-t)e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2s} & -se^{-2s} \\ 0 & e^{-2s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin s \\ \cos s \end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix} \frac{1}{25}(-15t+27)e^{2t}-\frac{1}{25}\cos t-\frac{1}{25}\sin t \\ -\frac{3}{5}e^{2t}-\frac{2}{5}\cos t+\frac{1}{5}\sin t \end{pmatrix}$$

8、试求 $x^{'}=Ax+f(t)$，其中

$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\quad f(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$

满足初始条件

$\varphi(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

的解 $\phi(t)$。

解：由第 7 题可知 $x^{'}=Ax$ 的基解矩阵 $\quad \Phi(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

则 $\phi^{-1}(s)=\dfrac{\begin{pmatrix} e^{2s} & -se^{2s} \\ 0 & e^{2s} \end{pmatrix}}{e^{4s}}=\begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}e^{-2s}$

若方程满足初始条件 $\varphi(0)=0$

则有 $\varphi(t)=\varphi(t)\int_0^t \phi^{-1}(s)f(s)ds=\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-2s}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{2s} \end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}$

若 $\varphi(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

则有

$$\varphi(t)=\phi(t)\phi^{-1}(0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+\phi(t)\int_0^t \phi^{-1}(s)f(s)ds=\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1-t+\frac{1}{2}t^2)e^{2t} \\ (t-1)e^{2t} \end{pmatrix}$$

9、试求下列方程的通解：

a) $x'' + x = \sec t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

解：易知对应的齐线性方程 $x'' + x = 0$ 的基本解组为

$x_1(t) = \cos t, x_2(t) = \sin t$

这时 $W[x_1(t), x_2(t0] = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1$

由公式得

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{\sin t \cos s - \cos t \sin s}{1} \sec s ds = \int_0^t (\sin t - \cos t \tan s) ds = t \sin t + \cos t \ln \cos t$$

$\therefore$ 通解为 $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t \sin t + \cos t \ln t$

b) $x''' - 8x = e^{2t}$

解：易知对应的齐线性方程 $x''' - 8x = 0$ 的基本解组为 $x_1(t) = e^{2t}$.

$x_2(t) = e^{-t} \cos \sqrt{3} t, x_3(t) = e^{-t} \sin \sqrt{3} t$

$\Theta\ \lambda = 2$ 是方程的特征根

故方程有形如 $x = Ate^{2t}$ 的根

代入得 $A = \frac{1}{12}$

故方程有通解 $x = (c_1 \cos \sqrt{3} t + c_2 \sin \sqrt{3} t) e^{-t} + c_3 e^{2t} + \frac{1}{12} te^{2t}$

c) $x'' - 6x' + 9x = e^t$

解：易知对应的齐线性方程 $x'' - 6x' + 9x = 0$ 对应的特征方程为

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0, . \lambda_{1,2} = 3$ 故方程的一个基本解组为 $x_1(t) = e^{3t}, x_2(t) = te^{3t}$

$W[x_1(t), x_2(t)] = \begin{vmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & e^{3t} + 3te^{3t} \end{vmatrix} = e^{6t}$

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{te^{3t} e^{3s} - e^{3t} \cdot se^{3s}}{e^{6s}} \cdot e^s ds = \frac{1}{4} e^t + \frac{1}{2} te^{3t} - \frac{1}{4} e^{3t}$$

因为te^{3t},e^{3t}是对应的齐线性方程的解

故$\varphi_1(t)=\dfrac{1}{4}e^t$也是原方程的一个解

故方程的通解为$x=c_1e^{3t}+c_2te^{3t}+\dfrac{1}{4}e^t$

10、给定方程$x''+8x'+7x=f(t)$其中 f(t)在$0\le t<+\infty$上连续，试利用常数变易公式，证明：

a)如果 f(t)在$0\le t<+\infty$上有界，则上面方程的每一个解在$0\le t<+\infty$上有界；

b)如果当$t\to\infty$时，$f(t)\to 0$，则上面方程的每一个解$\varphi(t)\to\infty$（当$t\to\infty$时）。

证明：a)$\Theta\ f(t)\quad 0\le t<+\infty$上有界

$\therefore$ 存在 M>0,使得$|f(t)|\le M,\forall t\in[0,+\infty)$

又$\Theta\ x=e^{-t},x=e^{-7t}$是齐线性方程组的基本解组

$\therefore$非齐线性方程组的解

$$\therefore\ \varphi(t)=\int_0^t\frac{e^{-7t}e^{-s}-e^{-t}e^{-7s}}{\begin{vmatrix}e^{-s} & e^{-7s}\\ -e^{-s} & -7e^{-7s}\end{vmatrix}}f(s)ds=\int_0^t\frac{e^{-7s}e^{-s}-e^{-t}e^{-7s}}{-6e^{-8s}}f(s)ds$$

$$\therefore\ |\varphi(t)|\le\frac{M}{6}\int_0^t\left|e^{-7t}e^{7s}-e^{-t}e^{s}\right|ds\le\frac{M}{6}\left(\frac{8}{7}-\frac{1}{7}e^{-7t}-e^{-t}\right)\le\frac{4}{21}M$$

又对于非齐线性方程组的满足初始条件的解 x(t)，都存在固定的常数c_1,c_2

使得$x(t)=c_1e^{-7t}+c_2e^{-t}+\varphi(t)$

从而$|x(t)|\le\left|c_1e^{-7t}\right|+\left|c_2e^{-t}\right|+|\varphi(t)|\le|c_1|+|c_2|+\dfrac{4}{21}M$

故上面方程的每一个解在$0\le t<+\infty$上有界

b) $\Theta\ t\to\infty$时，$f(t)\to 0$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N$ 当 t>N 时 $|f(t)| < \varepsilon$

由 a)的结论

$$|x(t)| \le |c_1 e^{-7t}| + |c_2 e^{-t}| + |\varphi(t)| \le |c_1| + |c_2| + \frac{4}{21}M \le \frac{4}{21}, (t \to \infty)$$

故 $t \to \infty$ 时，原命题成立

11、给定方程组 $x^{'} = A(t)x$ （5.15）

这里 A(t)是区间 $a \le x \le b$ 上的连续 $n \times n$ 矩阵，设 $\phi(t)$ 是（5.15）的一个基解矩阵，n 维向量函数 F(t,x)在 $a \le x \le b$，$\|x\| < \infty$ 上连续，$t_0 \in [a,b]$ 试证明初值问题：$\begin{cases} x^{'} = A(t)x + F(t,x) \\ \quad \varphi(t_0) = \eta \end{cases}$ （*）

的唯一解 $\varphi(t)$ 是积分方程组

$$x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)\eta + \int_{t_0}^{t} \phi(t)\phi^{-1}(s0F(s, x(s))ds \qquad (**)$$

的连续解。反之，（**）的连续解也是初值问题（8）的解。

证明：若 $\varphi(t)$ 是（*）的唯一解

则由非齐线性方程组的求解公式

$$\varphi(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)\eta + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)F(s,\varphi(s))ds$$

即（*）的解满足（**）

反之，若 $\varphi(t)$ 是（**）的解，则有

$$\varphi(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)\eta + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)F(s,\varphi(s))ds$$

两边对 t 求导：

$$\varphi^{'}(t) = \phi^{'}(t)\phi^{-1}(t_0)\eta + \phi^{'}(t)\int_{0}^{t} \phi^{-1}(s)F(s,\varphi(s))ds + \phi(t)\phi^{-1}(t)F(t,\varphi(t))$$
$$= \phi^{'}(t)[\phi^{-1}(t_0)\eta + \int_{0}^{t} \phi^{-1}(s)F(s,\varphi(s))ds] + F(t,\varphi(t))$$
$$= A(t)\phi(t)[\phi^{-1}(t_0)\eta + \int_{0}^{t} \phi^{-1}(s)F(s,\varphi(s))ds] + F(t,\varphi(t))$$
$$= A(t)\varphi(t) + F(t,\varphi(t))$$

即（**）的解是（*）的解

习题 5.3

1、 假设 **A** 是 n×n 矩阵，试证：

a) 对任意常数 c_1、c_2 都有

$$\exp(c_1\mathbf{A}+c_2\mathbf{A})=\exp c_1\mathbf{A}\cdot\exp c_2\mathbf{A}$$

b) 对任意整数 k,都有

$$(\exp\mathbf{A})^k=\exp k\mathbf{A}$$

(当 k 是负整数时，规定$(\exp\mathbf{A})^k=[(\exp\mathbf{A})^{-1}]^{-k}$)

证明：a) ∵（$c_1\mathbf{A}$）•（$c_2\mathbf{A}$）＝（$c_2\mathbf{A}$）•（$c_1\mathbf{A}$）

∴ $\exp(c_1\mathbf{A}+c_2\mathbf{A})=\exp c_1\mathbf{A}\cdot\exp c_2\mathbf{A}$

b) k>0 时，$(\exp\mathbf{A})^k=\exp\mathbf{A}\cdot\exp\mathbf{A}\cdots\cdots\exp\mathbf{A}$

$=\exp(\mathbf{A}+\mathbf{A}+\cdots\cdots+\mathbf{A})$

$=\exp k\mathbf{A}$

k<0 时，-k>0

$(\exp\mathbf{A})^k=[(\exp\mathbf{A})^{-1}]^{-k}=[\exp(-\mathbf{A})]^{-k}=\exp(-\mathbf{A})\cdot\exp(-\mathbf{A})\cdots\cdots\exp(-\mathbf{A})$

$=\exp[(-A)(-k)]$

$=\exp k\mathbf{A}$

故∀k，都有$(\exp\mathbf{A})^k=\exp k\mathbf{A}$

2、 试证：如果$\varphi(t)$是 $x'=\mathbf{A}x$ 满足初始条件$\varphi(t_0)=\eta$的解，那么

$$\varphi(t)=[\exp\mathbf{A}(t-t_0)]\eta$$

证明：由定理 8 可知$\varphi(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\ \eta+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)f(s)ds$

又因为$\Phi(t)=\exp\mathbf{A}t$，$\Phi^{-1}(t_0)=(\exp\mathbf{A}t_0)^{-1}=\exp(-\mathbf{A}t_0)$， $f(s)=0$,

又因为矩阵 （$\mathbf{A}t$）•（$-\mathbf{A}t_0$）=（$-\mathbf{A}t_0$）•（$\mathbf{A}t$）

所以 $\varphi(t)=[\exp\mathbf{A}(t-t_0)]\eta$

3、 试计算下面矩阵的特征值及对应的特征向量

a）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$　　　b）$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

c）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　　d）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}$

解：a）det（λE－A）= $\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -4 & \lambda-3 \end{vmatrix}$ =(λ－5)(λ+1)=0

∴ λ_1=5,　λ_2=－1

对应于 λ_1=5 的特征向量 u=$\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$，（$\alpha \neq 0$）

对应于 λ_2=－1 的特征向量 v=$\begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$,（$\beta \neq 0$）

b)　det（λE－A）=(λ+1)(λ+2)(λ－2)＝0

∴ λ_1＝－1，λ_2＝2，λ_3＝－2

对应于 λ_1＝－1 的特征向量 u_1＝$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，　（ $\alpha \neq 0$ ）

对应于 λ_2＝2 的特征向量 u_2＝$\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，　（ $\beta \neq 0$ ）

对应于 λ_3＝－2 的特征向量 u_3＝$\gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，　（ $\gamma \neq 0$ ）

c）det（λE－A）= $\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$ ＝(λ+1)^2(λ－3)＝0

$\therefore \lambda_1=-1$（二重），$\lambda_2=3$

对应于$\lambda_1=-1$（二重）的特征向量 u＝$\alpha\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$，（$\alpha\neq 0$）

对应于$\lambda_2=3$ 的特征向量 v＝$\beta\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$，（$\beta\neq 0$）

d) det（λ E－A）=$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 6 & 11 & \lambda+6\end{vmatrix}$=($\lambda$ +3)(λ +1)(λ +2)=0

$\therefore \lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=-3$

对应于$\lambda_1=-1$ 的特征向量 u_1＝$\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，（$\alpha\neq 0$）

对应于$\lambda_2=-2$ 的特征向量 u_2＝$\beta\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$，（$\beta\neq 0$）

对应于$\lambda_3=-3$ 的特征向量 u_3＝$\gamma\begin{pmatrix}1\\-3\\9\end{pmatrix}$，（$\gamma\neq 0$）

4、 试求方程组 x' =**A**x 的一个基解矩阵，并计算 exp**A**t，其中 **A** 为：

a）$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$　　b）$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$

c）$\begin{pmatrix}2 & -3 & 3\\ 4 & -5 & 3\\ 4 & -4 & 2\end{pmatrix}$　　d）$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 8 & 1 & -1\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix}$

解：a）det（λ E－A）=0 得$\lambda_1=\sqrt{3}$，$\lambda_2=-\sqrt{3}$

对应于λ_1的特征向量为 u＝$\begin{pmatrix}1\\2+\sqrt{3}\end{pmatrix}\alpha$，（$\alpha\neq 0$）

对应于λ_2的特征向量为 v=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}\beta$，　（ $\beta \neq 0$ ）

∴u=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$，v=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$是对应于$\lambda_1$，$\lambda_2$的两个线性无关的特征向量

Φ（t）=$\begin{pmatrix} e^{\sqrt{3}t} & e^{-\sqrt{3}t} \\ (2+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}t} & (2-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t} \end{pmatrix}$是一个基解矩阵

Exp**A**t=$\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -(2-\sqrt{3})e^{\sqrt{3}t}+(2+\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t} & e^{\sqrt{3}t}-e^{-\sqrt{3}t} \\ -e^{\sqrt{3}t}+e^{-\sqrt{3}t} & (2+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}t}-(2-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t} \end{pmatrix}$

b)　由 det（λE－A）=0 得λ_1＝5，λ_2＝－1

解得 u=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，v=$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$是对应于$\lambda_1$，$\lambda_2$的两个线性无关的特征向量

则基解矩阵为Φ（t）=$\begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$

Φ$(0)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$　　　Φ$^{-1}(0)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

则 exp**A**t=Φ（t）Φ$^{-1}(0)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{5t}+2e^{-t} & e^{5t}-e^{-t} \\ 2e^{5t}-2e^{-t} & 2e^{5t}+e^{-t} \end{pmatrix}$

c）　由 det（λE－A）=0 得λ_1＝2，λ_2＝－2，λ_3＝－1

解得基解矩阵Φ（t）=$\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-2t} & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-2t} & 0 \end{pmatrix}$

$$\Phi^{-1}(0)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

则 exp**A**t=Φ（t）Φ$^{-1}(0)=\begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t}+e^{-t} & e^{2t}-e^{-t} \\ e^{2t}-e^{-2t} & -e^{2t}+e^{-2t}+e^{-t} & e^{2t}-e^{-t} \\ e^{2t}-e^{-2t} & -e^{2t}+e^{-2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$

d）由 det（λE－A）=0 得 λ_1＝－3，λ_2＝2＋$\sqrt{7}$，λ_3＝2－$\sqrt{7}$

$$\text{解得基解矩阵}\Phi(t)=\begin{pmatrix} -3e^{-3t} & e^{(2+\sqrt{7})t} & e^{(2-\sqrt{7})t} \\ 7e^{-3t} & \frac{4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \frac{-4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} \\ 4e^{-3t} & \frac{1+\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \frac{1-\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} \end{pmatrix}$$

则 exp**A**t＝Φ（t） $\Phi^{-1}(0)$＝

$$\frac{1}{4\sqrt{7}}\begin{pmatrix} \frac{-8\sqrt{7}}{3}e^{-3t}+\frac{-2+4\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{2+4\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{56\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\frac{122-28\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{-122-28\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{32\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\frac{26+2\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{-26+2\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{pmatrix}$$

5、试求方程组 x'=**A**x 的基解矩阵，并求满足初始条件 $\varphi(0)=\eta$的解$\varphi(t)$

$$a)A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \eta=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b)A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \eta=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$c)A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \eta=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解：a）由第 4 题（b）知，基解矩阵为$\begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$

$$\eta=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

所以$\alpha=2, \quad \beta=1$

$$\varphi(t)=\begin{pmatrix} 2e^{5t}+e^{-t} \\ 4e^{5t}-e^{-t} \end{pmatrix}$$

b）由第 4 题（d）知，基解矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix} -3e^{-3t} & e^{(2+\sqrt{7})t} & e^{(2-\sqrt{7})t} \\ 7e^{-3t} & \dfrac{4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \dfrac{-4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} \\ 4e^{-3t} & \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \dfrac{1-\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} \end{pmatrix}$$

所以

$$\varphi(t)=\frac{1}{4\sqrt{7}}\begin{pmatrix} \dfrac{52\sqrt{7}}{3}e^{-3t}+\dfrac{4-26\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t}+\dfrac{-4-26\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \dfrac{-364\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\dfrac{-748+146\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}+\dfrac{748+146\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \dfrac{-208\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\dfrac{-178-22\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}+\dfrac{178-22\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{pmatrix}$$

c)　由 3（c）可知，矩阵 A 的特征值为λ_1＝3，λ_2＝－1（二重）

λ_1对应的特征向量为 u_1＝$\begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$，$u_2$＝$\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ -\dfrac{4\beta+2\gamma}{3} \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ -\dfrac{4\beta+2\gamma}{3} \end{pmatrix}$$

解得$\begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{4} \\ \beta=\dfrac{1}{2} \\ \gamma=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$　　$\therefore v_1=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$　　$v_2=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\varphi(t)=e^{3t}Ev_1+e^{-t}[E+t(A+E)]v_2$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}e^{3t}+\dfrac{1}{2}e^{-t} \\ \dfrac{1}{4}e^{3t}-\dfrac{1}{4}e^{-t} \\ \dfrac{1}{2}e^{3t}-\dfrac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

6、求方程组 x'=**A**x＋f（t）的解 $\varphi(t)$：

$$a)\qquad \varphi(0)=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}, f(t)=\begin{pmatrix}e^t\\1\end{pmatrix}$$

$$b)\qquad \varphi(0)=0, A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{pmatrix}, f(t)=\begin{pmatrix}0\\0\\e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$c)\qquad \varphi(0)=\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}4&-3\\2&-1\end{pmatrix}, f(t)=\begin{pmatrix}\sin t\\-2\cos t\end{pmatrix}$$

解：a）令 x'=**A**x 的基解矩阵为Φ（t）

$$p(\lambda)=\det(\lambda E-A)=(\lambda-5)(\lambda+1)=0$$

所以λ_1=5，λ_2＝−1

解得Φ（t）＝$\begin{pmatrix}e^{5t}&e^{-t}\\2e^{5t}&-e^{-t}\end{pmatrix}$， 则$\Phi^{-1}$（t）＝$\dfrac{1}{-3e^{4t}}\begin{pmatrix}-e^{-t}&-e^{-t}\\-2e^{5t}&e^{5t}\end{pmatrix}$

$\Phi^{-1}(0)=-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-1\\-2&1\end{pmatrix}$

求得 $\varphi(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{20}e^{5t}-e^{-t}-\dfrac{1}{4}e^{t}-\dfrac{2}{5}\\ \dfrac{3}{10}e^{5t}+e^{-t}-\dfrac{1}{2}e^{t}+\dfrac{1}{5}\end{pmatrix}$

b）由 det（λE−A）=0 得 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=-3$

设 λ_1 对应的特征向量为 v_1，则

（λ_1E−A）v_1=0，得 $v_1=\begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha\\-\alpha\end{pmatrix}$ $\qquad \alpha\neq 0$

取 $v_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$，同理可得 $v_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-2\end{pmatrix}$，$v_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\\-3\end{pmatrix}$

则Φ（t）＝$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

从而解得 $\varphi(t)=\begin{pmatrix} e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-3t}-\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t} \\ -2e^{-2t}+\frac{3}{4}e^{-3t}+\frac{5}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}te^{-t} \\ 4e^{-2t}-\frac{9}{4}e^{-3t}-\frac{7}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t} \end{pmatrix}$

c）令 x'=**A**x 的基解矩阵为Φ（t）

由 det（λE－A）=0 得 λ_1＝1，λ_2＝2

解得对应的基解矩阵为Φ（t）＝$\begin{pmatrix} e^{t} & \frac{3}{2}e^{2t} \\ e^{t} & e^{2t} \end{pmatrix}$

∴Φ $^{-1}$(t)＝$-2\begin{pmatrix} e^{-t} & -\frac{3}{2}e^{-t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$ 从而Φ $^{-1}$(0)＝$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\varphi(t)=\phi(t)\phi^{-1}(0)\varphi(0)+\phi(t)\int_0^t\phi^{-1}(s)f(s)ds$$

∴

$$=\begin{pmatrix} \cos t-2\sin t+e^{t}(-4-2\eta_1+3\eta_2)+3e^{2t}(1+\eta_1-\eta_2) \\ 2\cos t-2\sin t+e^{t}(-4-2\eta_1+3\eta_2)+2e^{2t}(1+\eta_1-\eta_2) \end{pmatrix}$$

7、 假设 m 不是矩阵 **A** 的特征值。试证非齐线性方程组

$$x'=Ax+ce^{mt}$$

有一解形如

$$\varphi(t)=pe^{mt}$$

其中 **c**，**p** 是常数向量。

证：要证 $\varphi(t)=pe^{mt}$ 是否为解，就是能否确定常数向量 p

$$pme^{mt}=Ape^{mt}+ce^{mt}$$

则 p（mE－A）＝c

由于 m 不是 A 的特征值

故$\left|mE-A\right|=0$

mE－A 存在逆矩阵

那么 p＝c（mE－A）$^{-1}$　　这样方程就有形如$\varphi(t)=pe^{mt}$的解

8、 给定方程组

$$\begin{cases} x_1''-3x_1'+2x_1+x_2'-x_2=0 \\ x_1'-2x_1+x_2'+x_2=0 \end{cases}$$

a） 试证上面方程组等价于方程组 **u'=Au**,其中

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \\ x_2 \end{bmatrix}，\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

b） 试求 a）中的方程组的基解矩阵

c） 试求原方程组满足初始条件

$x_1(0)=0$,　$x_1'(0)=1$,　$x_2(0)=0$

的解。

证：a）令$u_1=x_1,u_2=x_1',u_3=x_2$　　则方程组①化为

$$\begin{cases} u_1' = x_1' = u_2 \\ u_2' = x_1'' = 3u_2-2u_1-u_3'+u_3 \\ u_3' = x_2' = -u_2+2u_1-u_3 \end{cases}$$

即 u'＝$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}u$　　　u'=Au　 ①

反之，设 $x_1=u_1,x_1'=u_2,x_2=u_3$　 则方程组②化为

$$\begin{cases} x_1''=-4x_1+4x_1'+2x_2 \\ x_2'=2x_1-x_1'-x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1''=2x_1'-2x_1-x_2'+x_2 \\ x_2'=2x_1-x_1'-x_2 \end{cases}$$

b）由 det（λE－A）=0 得λ_1＝0，λ_2＝1，λ_3＝2

$$由\begin{cases} -u_2=0 \\ 4u_1-4u_2-2u_3=0 \\ -2u_1+u_2+u_3=0 \end{cases}　得u_1=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}　\alpha\neq 0$$

同理可求得 u_2 和 u_3

取 $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

则 $\phi(t)=\begin{pmatrix}1 & e^t & e^{2t}\\0 & e^t & 2e^{2t}\\2 & \frac{1}{2}e^t & 0\end{pmatrix}$ 是一个基解矩阵

c）令 $u_1=x_1,u_2=x_1',u_3=x_2$，则①化为等价的方程组①且初始条件变为

$u_1(0)=0,u_2(0)=1,u_3(0)=0.$ 而②满足此初始条件的解为：

$$e^{At}\eta=e^{At}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-2e^t+\frac{3}{2}e^{2t}\\-2e^t+3e^{2t}\\1-e^t\end{pmatrix} \qquad ③$$

于是根据等价性，①满足初始条件的解为③式

9、 试用拉普拉斯变换法解第 5 题和第 6 题。
证明：略。

10、　　求下列初值问题的解：

$a)\begin{cases}x_1'+x_2'=0\\x_1'-x_2'=1\end{cases} \qquad \varphi_1(0)=1,\varphi_2(0)=0$

$b)\begin{cases}x_1''+3x_1'+2x_1+x_2'+x_2=0\\x_1'+2x_1+x_2'-x_2=0\end{cases}$

$\varphi_1(0)=1,\varphi_1'(0)=-1,\varphi_2(0)=0$

$c)\begin{cases}x_1''-m^2x_2=0\\x_2''+m^2x_1=0\end{cases}$

$x_1(0)=\eta_1,x_1'(0)=\eta_2,x_2(0)=\eta_3,x_2'(0)=\eta_4$

解：a)根据方程解得 $x_1'=\frac{1}{2}$ ，　$x_2'=-\frac{1}{2}$

$\therefore x_1=\frac{1}{2}t+c_1$，$x_2=-\frac{1}{2}t+c_2$

$\because \varphi_1(0)=1$

$\therefore \frac{1}{2}\times 0+c_1=1 \quad \therefore c_1=1 \quad \therefore x_1=\frac{1}{2}\mathrm{t}+1$

$\because \varphi_2(0)=0$

$\therefore -\frac{1}{2}\times 0+c_2=0 \quad \therefore c_2=0 \quad \therefore x_2=-\frac{1}{2}\mathrm{t}$

综上：$x_1=\frac{1}{2}\mathrm{t}+1$

$x_2=-\frac{1}{2}\mathrm{t}$

b）对方程两边取拉普拉斯变换，得

$$\begin{cases} s^2X_1(s) - s+1 + 3(sX_1(s)-1) + 2X_1(s) + sX_2(s) + X_2(s) = 0 \\ sX_1(s) -1+2X_1(s) + sX_2(s) - X_2(s) = 0 \end{cases}$$

解得

$$X_1(s)=\frac{s^2-3}{(s+1)(s+2)(s-2)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{s-2}$$

$$X_2(s)=\frac{-s-2}{(s+1)(s+2)(s-2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s-2}$$

$$\therefore \begin{matrix} \varphi_1(t)=\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{12}e^{2t} \\ \varphi_2(t)=\frac{1}{3}(e^{-t}-e^{2t}) \end{matrix}$$

c）对方程两边取拉普拉斯变换，得

$$\begin{cases} s^2X_1(s) - s\eta_1 - \eta_2 - m^2X_2(s) = 0 \\ s^2X_2(s) - s\eta_3 - \eta_4 + m^2X_2(s) = 0 \end{cases}$$

即$\begin{cases} s^2X_1(s) - m^2X_2(s) = s\eta_1 + \eta_2 \\ m^2X_1(s) + s^2X_2(s) = s\eta_3 + \eta_4 \end{cases}$

解得$X_1(s)=\frac{\eta_1\mathrm{s}^3+\eta_2s^2+m^2s\eta_3+\eta_4m^2}{s^4+m^4}$

$$X_2(s)=\frac{\eta_3\mathrm{s}^3+\eta_4s^2-m^2\eta_1\mathrm{s}-m^2\eta_2}{s^4+m^4}$$

$$\varphi_1(t)=[(\frac{1}{2}\eta_1-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2-\frac{1}{2}\eta_3+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t]\cdot e^{-\frac{m}{2}t}$$

$$+[(\frac{1}{2}\eta_1+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t]\cdot e^{\frac{m}{2}t}$$

$$\varphi_2(t)=[(-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+(\frac{1}{2}\eta_1-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t]\cdot e^{-\frac{m}{2}t}$$

$$+[(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+(-\frac{1}{2}\eta_1-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t]\cdot e^{\frac{m}{2}t}$$

11、　假设 y＝$\varphi(x)$ 是二阶常系数线性微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''+ay'+by=0 \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$$

的解，试证 $y=\int_0^x \varphi(x-t)f(t)dt$ 是方程

$$y''+ay'+by=f(x)$$

的解，这里 f（x）为已知连续函数。

证明：y＝$\int_0^x \varphi(x-t)f(t)dt$

$\because$ y’＝$\varphi(0)f(x)+\int_0^x \varphi'(x-t)f(t)dt=\int_0^x \varphi'(x-t)f(t)dt$

$y''=\int_0^x \varphi^n(x-t)f(t)dt+\varphi'(0)f(x)=\int_0^x \varphi^n(x-t)f(t)dt+f(x)$

$\therefore$

$$y''+ay'+by=\int_0^x \varphi''(x-t)f(t)dt+f(x)+a\int_0^x \varphi'(x-t)f(t)dt+b\int_0^x \varphi(x-t)f(t)dt$$

$$=\int_0^x [\varphi''(x-t)+a\varphi'(x-t)+b\varphi'(x-t)+b\varphi(x-t)]f(t)dt+f(x)$$

$$=f(x)$$

习题 6.3

1.　试求出下列方程的所有奇点,并讨论相应的驻定解的稳定性态

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(1-x-y) \\ \dfrac{dy}{dt} = 1/4y(2-3x-y) \end{cases}$

解: 由 $\begin{cases} x(1-x-y)=0 \\ 1/4y(2-3x-y)=0 \end{cases}$ 得奇点(0,0),(0,2),(1,0),(1/2,1/2)

对于奇点(0,0), A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ 由 $|\lambda E - A|$ =0 得 λ_1 =1>0, λ_2 =1/2>0

所以不稳定

对于奇点(0,2),令 X=x,Y=y-2, 则 A= $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ 得 λ_1 =-1, λ_2 =-1/2

所以渐进稳定

同理可知,对于奇点(1,0),驻定解渐进稳定

对于奇点(1/2,1/2),驻定解渐进不稳定

(2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 9x-6y+4xy-5x^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x-6y-5xy+4y^2 \end{cases}$

解: 由 $\begin{cases} 9x-6y+4xy-5x^2=0 \\ 6x-6y-5xy+4y^2=0 \end{cases}$ 得奇点(0,0),(1,2),(2,1)

对于奇点(0,0)可知不稳定

对于奇点(1,2)可知不稳定

对于奇点(2,1)可知渐进稳定

(3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x+\mu(y-x^2), \mu>0 \end{cases}$

解:由 $\begin{cases} y=0 \\ -x+\mu(y-x^2)=0, \mu>0 \end{cases}$ 得奇点(0,0),(-1/ μ ,0)

对于奇点(0,0) 驻定解不稳定

对于奇点(-1/ μ ,0) 得驻定解不稳定

(4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y-x \\ \dfrac{dy}{dt} = y-x^2-(x-y)(y^2-2xy+2/3x^3) \end{cases}$

解: 由$\begin{cases} y-x=0 \\ y-x^2-(x-y)(y^2-2xy+2/3x^3)=0 \end{cases}$得奇点(0,0),(1,1)

对于奇点(0,0)得驻定解不稳定

对于奇点(1,1)得驻定渐进稳定

2. 研究下列纺车零解的稳定性

(1) $\dfrac{d^3x}{dt^3}+5\dfrac{d^2x}{dt^2}+6\dfrac{dx}{dt}+x=0$

解: a_0 =1>0, a_1 =5>0, a_2 =6>0

$\Delta_2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$ >0 　　a_3 =1>0 　　所以零解渐进稳定

(2) $\dfrac{dx}{dt}=\mu x-y,\dfrac{dy}{dt}=\mu y-z,\dfrac{dz}{dt}=\mu z-x(\mu\text{为常数})$

解:A=$\begin{pmatrix} \mu & -1 & 0 \\ 0 & \mu & -1 \\ -1 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ 　由$|\lambda E-A|$=0 得$\lambda^3-3\mu\lambda^2+3\mu^2\lambda-\mu^3+1=0$

得$\lambda_1=\mu-1$，$\lambda_2=\mu+\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

i) μ +1/2<0 即μ <-1/2,渐进稳定

ii) μ +1/2>0 即μ >-1/2 不稳定

iii) μ +1/2=0 即μ =-1/2 稳定