第八章 约束极值问题

- 本章讨论约束非线性规划问题**MP**

$$\begin{cases} \min & f(x) \\ s.t. & g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \cdots, p \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \cdots, q \end{cases}$$

其中,$x=(x_1,x_2,\ldots x_n)^T$，$f(x),g_i(x),h_j(x)$为x的实值函数

- 求解此类模型(**MP**)的方法称为约束最优化方法。

- 本节课内容：

约束问题的最优性条件

制约函数法

1、约束最优化问题的最优性条件

➢对于 MP问题：
$$\begin{cases} \min & f(x) \\ s.t. & g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \cdots, p \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \cdots, q \end{cases}$$

$$\text{设} x^* \in X = \left\{ x \in R^n \middle| \begin{array}{l} g_i(x) \geq 0, i = 1, \cdots, p \\ h_i(x) = 0, j = 1, \cdots, q \end{array} \right\}$$

则$g_i(x^*) \geq 0, i = 1, \cdots, p$，$h_j(x^*) = 0, j = 1, \cdots, q$

$g_i(x^*) \geq 0, i=1,\cdots,p$有两种情况:

1、$g_i(x^*)>0$ 若x^*有变化，则约束条件可能没有破坏

2、$g_i(x^*)=0$ 若x^*有变化，则约束条件一定被破坏

使$g_i(x^*)=0$的约束条件$g_i(x) \geq 0$称为x^*的积极约束

令J表示MP的全部等式约束的下标集合，即J={1,2…q},

I表示MP的全部不等式约束的下标集合，即I={1,2…p}

记$I(x^*)=\{i \mid g_i(x^*)=0, i \in I\}$

x^*的积极约束的下标集合

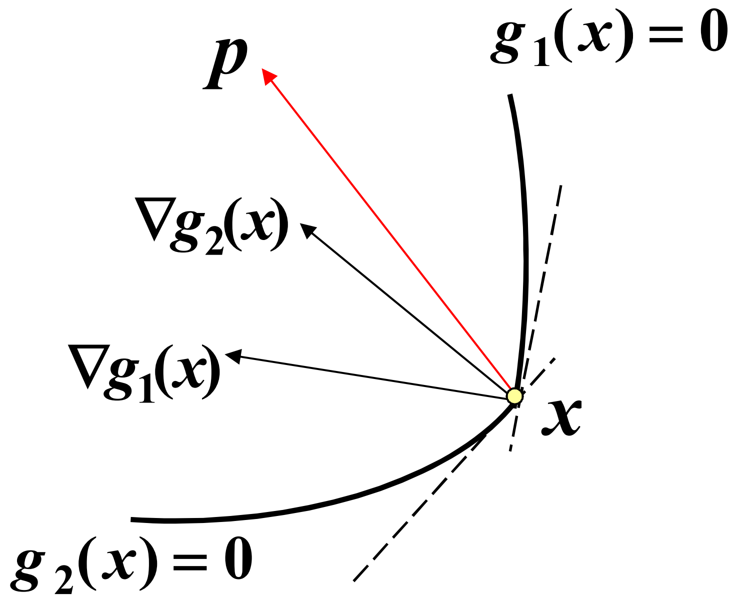
性质：若 p 为 x 处的可行方向，则 $\forall j \in I(x)$ 有

$$\nabla g_j(x)^T p \geq 0。$$

反之，对于方向 p，

若 $\forall j \in I(x)$ 有 $\nabla g_j(x)^T p > 0$，

则 p 必是 x 处的可行方向。



因为对于充分小的 $t > 0$，有

若 $j \notin I(x)$，即 $g_j(x) > 0$，

则 $g_j(x+tp) > 0$；

若 $j \in I(x)$，则
$$\begin{aligned} g_j(x+tp) &= g_j(x) + t\nabla g_j(x)^T p + o(t) \\ &= t\nabla g_j(x)^T p + o(t) \\ &> 0 . \end{aligned}$$

另外，若 $\nabla f(x)^T p < 0$，则 p 为 x 处的下降方向，因此有

定理：若 x^* 为极小点，则不存在方 向 p 使得

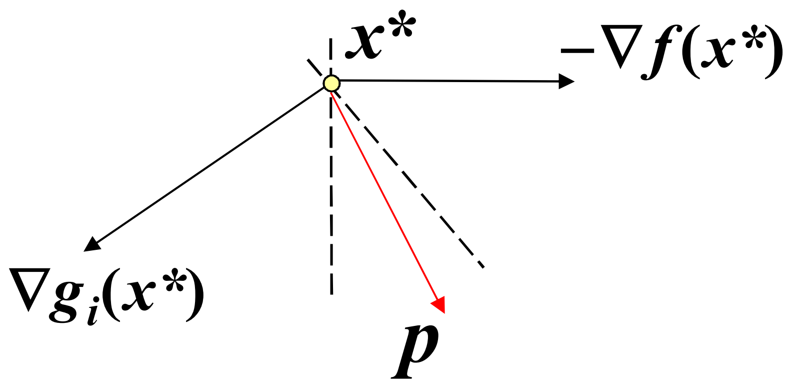
$$\nabla f(x^*)^T p < 0 \text{ 且 } \nabla g_j(x^*)^T p > 0,\ j \in I(x^*).$$

Kuhn-Tucker 条件（极值点的必要条件）

设 x^* 为一个局部极小点 .

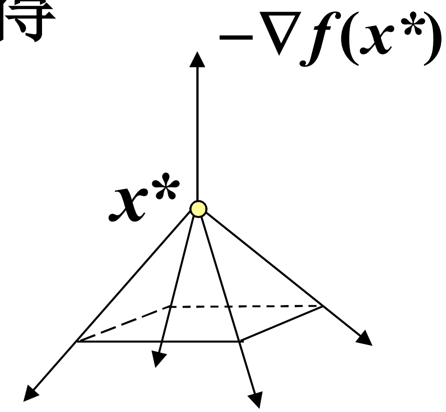
(1) 若 $I(x^*) = \{ i \}$，即只有一个积极约束 $g_i(x^*) \geq 0$.

则 $\nabla g_i(x^*)$ 与 $-\nabla f(x^*)$
共线且方向相反，
否则存在一个
可行下降方向 p .



(3) 一般地， 设 $\{\nabla g_j(x^*) \mid j \in I(x^*)\}$ 线性无关，则存在实数 $\lambda_j \geq 0$ $(j \in I(x^*))$ 使得

$$\nabla f(x^*) = \sum_{j \in I(x^*)} \lambda_j \nabla g_j(x^*)$$



即 $\nabla f(x^*)$ 在 $\nabla g_j(x^*)$ $(j \in I(x^*))$ 张成的凸锥内 .

对于 $\begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \geq 0 \end{cases}$，若 x^* 是其局部最优解，则

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) - \sum\limits_{i \in I(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0 \\ \lambda_i \geq 0, i \in I(x^*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min & f(x) \\ s.t. & g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \cdots, p \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \cdots, q \end{cases}$$

(4) 由于等式约束 $h_i(x) = 0$ 可用两个不等式约束 $h_i(x) \geq 0$ 和 $-h_i(x) \geq 0$ 代替，而且二者都是积 极约束，因此有正数 λ_j、μ_i^+、μ_i^- 使得

$$\nabla f(x^*) = \sum_{j \in I(x^*)} \lambda_j \nabla g_j(x^*) + \sum_{i=1}^{m} (\mu_i^+ \nabla h_i(x^*) - \mu_i^- \nabla h_i(x^*))$$

令 $\mu_i = \mu_i^+ - \mu_i^-$，则

$$\nabla f(x^*) = \sum_{j \in I(x^*)} \lambda_j \nabla g_j(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla h_i(x^*)$$

Kuhn–Tucker (K–T) 条件:

若 x^* 是局部极小点，$f(x)$、$h_i(x)$、$g_j(x)$ 在 x^* 可微，$\nabla h_i(x^*)$、$\nabla g_j(x^*)$ $(j \in I(x^*))$ 线性无关，则存在一组实数 μ_i、λ_j 满足

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) - \sum\limits_{i \in I(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x^*) - \sum\limits_{j \in J} \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0 \\ \lambda_i \geq 0, i \in I(x^*) \end{cases}$$

KT条件的说明：

1、$\nabla g_i(x), i \in I(x^*), \nabla h_j(x), j \in J$线性无关,称为约束规范条件。

2、称下述表达式为MP的Kuhn-Tucker条件，简称K-T条件

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) - \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x^*) - \sum_{j \in J} \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0 \\ \lambda_i \geq 0, i \in I(x^*) \end{cases}$$

满足K-T条件的点称为MP的K-T点，定理说明MP的局部最优解一定是MP的K-T点。

为了求出MP的最优解，可以先找出MP的K-T点，再做进一步的判断。

3、特例1

对于$\begin{cases}\min f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \geq 0\end{cases}$，若$x^*$是其局部最优解，则

$\exists$实数$\lambda_i^*, i \in I(x^*)$使得 $\begin{cases}\nabla f(x^*) - \sum\limits_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0 \\ \lambda_i^* \geq 0, i \in I(x^*)\end{cases}$

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) \quad \lambda_i^* \geq 0$$

4、特例2

对于$\begin{cases}\min & f(x) \\ s.t. & h_j(x)=0\end{cases}$，若$x^*$是局部最优解，则

$\exists \mu_j^*, j\in J$使得：$\nabla f(x^*)-\sum_{j\in J}\mu_j^*\nabla h_j\left(x^*\right)=0$

$$\nabla f(x^*)=\sum_{j\in J}\mu_j^*\nabla h_j\left(x^*\right)$$

若x^*局部最优解,则$-\nabla f(x^*)$落在由向量$\nabla h_j(x^*), j\in J$生成的空间中。

5、实例说明

$$
\begin{cases}
\min \ f(x_1,x_2)=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2 \\
s.t. \ \ g_1(x)=x_1+x_2-2\le 0 \\
\qquad g_2(x)=-x_1\le 0 \\
\qquad g_3(x)=-x_2\le 0 \\
\qquad h_1(x)=-x_1+x_2-1=0
\end{cases}
$$

定理表明：若$(x_1,x_2)^T$是局部最优解，若g_1和g_2为积极约束，则：

$$
\begin{cases}
\nabla f(x^*)-\sum\limits_{i\in I(x^*)}\lambda_i\nabla g_i(x^*)-\sum\limits_{j\in J}\mu_j\nabla h_j(x^*)=0 \\
\lambda_i\ge 0, i\in I(x^*)
\end{cases}
$$

不知道哪些是积极约束怎么办？

$$
\begin{cases}
\begin{pmatrix} 2(x_1-1) \\ 2(x_2-1) \end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}+\mu_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=0 \\
\lambda_1,\lambda_2\ge 0
\end{cases}
$$

改进： 引入互补松紧条件

➢对于 MP问题：
$$\begin{cases} \min & f(x) \\ s.t. & g_i(x) \ge 0, \quad i=1,\cdots,p \\ & h_j(x)=0, \quad j=1,\cdots,q \end{cases}$$

记$I(x^*)=\{i|g_i(x^*)=0, i\in I\}$ x^*的积极约束的下标集合

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) - \sum_{i\in I(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x^*) - \sum_{j\in J} \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0 \\ \lambda_i \ge 0, i \in I(x^*) \end{cases}$$

$i \notin I(x^*)$怎么办？

$i \notin I(x^*)$，则$g_i(x)>0$ 此时引入$\lambda_i=0$，则也有$\lambda_i g_i(x)=0$

$i \in I(x^*)$，则$g_i(x)=0$,此时显然$\lambda_i g_i(x)=0$

从而$\forall i \in I$，都有$\lambda_i g_i(x)=0$ 互补松紧条件

Kuhn–Tucker (K–T) 条件:

若 x^* 是局部极小点，$f(x)$、$h_i(x)$、$g_j(x)$ 在 x^* 可微，$\nabla h_i(x^*)$、$\nabla g_j(x^*)$ $(j \in I(x^*))$ 线性无关，则存在一组实数 μ_i、λ_j 满足

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla h_i(x^*) - \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \nabla g_j(x^*) = 0 \\ \lambda_j g_j(x^*) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, l) \\ \lambda_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, l) \end{cases}$$

上述为K–T条件，满足该条件的可行点称为K–T点。

7、实例说明改进后的KT条件：

$$\begin{cases} \min\ f(x_1,x_2)=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2 \\ s.t.\ \ g_1(x)=x_1+x_2-2\le 0 \\ \qquad g_2(x)=-x_1\le 0 \\ \qquad g_3(x)=-x_2\le 0 \\ \qquad h_1(x)=-x_1+x_2-1=0 \end{cases}$$

定理1改进后表明：若$(x_1, x_2)^T$是局部最优解，则：

$$\begin{cases} \nabla f(x^*)-\sum_{i\in I}\lambda_i^*\nabla g_i\left(x^*\right)-\sum_{j\in J}\mu_j^*\nabla h_j\left(x^*\right)=0 \\ \lambda_i^* g_i\left(x^*\right)=0, i\in I \\ \lambda_i^*\ge 0, i\in I \end{cases}$$

$$h_j\left(x^*\right)=0, j\in J$$

不要忘记这个

$$
\begin{cases}
\begin{pmatrix} 2(x_1-1) \\ 2(x_2-1) \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\
\lambda_1 (x_1 + x_2 - 2) = 0 \\
\lambda_2 (-x_1) = 0 \\
\lambda_3 (-x_2) = 0 \\
\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \\
h_1(x) = -x_1 + x_2 - 1 = 0
\end{cases}
$$

互补松紧条件

定理2 对于 $\begin{cases} \min & f(x) \\ s.t. & g_i(x) \ge 0, \quad i = 1, \cdots, p \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \cdots, q \end{cases}$

1、f, g_i, h_j在x^*处连续可微

2、可行点在 x^*处满足$K-T$条件，

3、$f, g_i, i \in I(x^*)$是凹函数，h_j是线性函数，

则x^*是MP问题的整体最优解

注：定理2表明，在凸性条件下，K-T点是整体最优解。

例：写出K-T条件；

求出相应的K-T点；

判断K-T点是不是问题的最优解

$$
\begin{cases}
\min \quad f(x_1,x_2)=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2 \\
s.t. \quad g_1(x)=x_1+x_2-2\le 0 \\
\qquad\quad g_2(x)=-x_1\le 0 \\
\qquad\quad g_3(x)=-x_2\le 0 \\
\qquad\quad h_1(x)=-x_1+x_2-1=0
\end{cases}
$$

解：由于全部函数都是连续可微的，所以应用以下**K-T**条件

$$
\begin{cases}
\nabla f(x^*)+\sum\limits_{i\in I}\lambda_i^*\nabla g_i\left(x^*\right)+\sum\limits_{j\in J}\mu_j^*\nabla h_j\left(x^*\right)=0 \\
\lambda_i^* g_i\left(x^*\right)=0, i\in I \\
\lambda_i^*\ge 0, i\in I
\end{cases}
$$

➤首先写出原MP问题的K-T条件：

$$\begin{cases} 2(x_1-1)+\lambda_1-\lambda_2-\mu_1=0 \\ 2(x_2-2)+\lambda_1-\lambda_3+\mu_1=0 \\ \left.\begin{array}{l} \lambda_1(x_1+x_2-2)=0 \\ \lambda_2 x_1=0 \\ \lambda_3 x_2=0 \end{array}\right\} \text{互补松紧条件} \\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\ge 0 \end{cases}$$

➤根据定理1,K-T点还应该满足原问题的约束条件

$$\begin{cases} x_1+x_2-2\le 0 \\ -x_1\le 0,-x_2\le 0 \\ -x_1+x_2-1=0 \end{cases}$$

➢利用互补松紧条件，可以求出**K-T**点：

$$x^* = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})^T$$

➢利用定理**2**，由于全部函数都连续可微，并且**f**和**g**都是凸函数，**h**是线性函数，所以**K-T**点就是整体最优解。

8.2 二次规划

$$\min \ \sum_{j=1}^{n} q_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} q_{jk} x_j x_k$$

$$s.t.\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\ , \qquad i = 1,2,\cdots,m \qquad \text{(i)}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1,2,\cdots,n \qquad \text{(ii)}$$

其中 $q_{jk} = q_{kj}$.

Lagrange 函数

$$L(x,\mu,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} q_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} q_{jk} x_j x_k - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$$

K–T 条件

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}=q_j+\sum_{k=1}^{n} q_{jk}x_k-\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mu_i-\lambda_j=0,\quad j=1,\cdots,n \qquad \text{(iii)}$$

$$\lambda_j x_j = 0,\quad j=1,\cdots,n, \qquad (*)$$

$$\lambda_j \geq 0,\quad j=1,\cdots,n, \qquad \text{(iv)}$$

求二次规划的K–T点等价于求线性等式及不等式组 (i)、(ii)、(iii)、(iv) 的一个可行点，并且满足互补条件 (*) 。

设 x^0 是一个满足条件 (i)、(ii) 的基本可行解，则求 (i) - (iv) 的可行点可转化为线性规划问题:

$$\min \ \sum_{j=1}^{n} z_j$$

$$\sum_{k=1}^{n} q_{jk}x_k - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}(\mu_i^+ - \mu_i^-) - \lambda_j + \delta_j z_j = -q_j, \quad j = 1, \cdots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, \cdots, m$$

$$x_j, \lambda_j, \mu_i^+, \mu_i^-, z_j \ge 0,$$

其中 $\delta_j = \begin{cases} 1, & \sum_{k=1}^{n} q_{jk}x_k^0 \le -q_j, \\ -1, & \sum_{k=1}^{n} q_{jk}x_k^0 > -q_j. \end{cases}$

上述线性规划有初始基本可行解：

$$x_j = x_j^0, \ \lambda_j = 0, \ \mu_i^+ = \mu_i^- = 0, \quad z_j = \left| -q_j - \sum_{k=1}^{n} q_{jk}x_k^0 \right|$$

基变量包括 x^0 中的基变量和所有 z_j。

注：为了满足互补条件 (*)，在用单纯形算法求解上 述线性规划时，不能让 x_j 和 λ_j 同时成为基变量。

收敛性：若二次规划可 行且 $(q_{jk})_{n\times n}$ 正定，则

$$\min\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$$，即算法能获得整体最 优解。

若 $(q_{jk})_{n\times n}$ 半正定，上述结论不一 定成立，但可适当增大主对角元后化为正 定阵处理。

可行方向法

$$\min\ f(x) \quad s.t.\quad g_i(x) \ge 0,\quad i = 1,\cdots,m$$

在迭代点 x^k，选择一个可行下降方向 p^k 为搜索方向，则 p^k 应满足

$$\nabla f(x^k)^T p^k < 0$$

$$\nabla g_i(x^k)^T p^k > 0,\quad i \in I(x^k)$$

p^k 可以通过解下述线性规划获得：

$$\begin{aligned} \min\quad & \eta \\ s.t.\quad & \nabla f(x^k)^T p \le \eta \\ & \nabla g_i(x^k)^T p \ge -\eta,\quad i \in I(x^k) \\ & -1 \le p_j \le 1,\quad j = 1,2,\cdots,n \end{aligned} \qquad \text{其中 } p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

$\eta = 0$，$p = (0,\cdots,0)^T$ 是上述线性规划的一个 可行解。

性质：若 $\eta^* = 0$,则 x^k 处不存在可行下降方向 ，x^k 已是 $K-T$ 点（若 $\nabla g_i(x^k)\,(i \in I(x^k))$ 线性无关）；

若 $\eta^* < 0$,则得到 x^k 处的一个可行下降方向 p^*。

有例子表明上述方法不 一定收敛到 $K-T$ 点，即总有 $\eta^* < 0$。

改进方法：在找可行下降方向时考虑所有约束，即

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \eta \\
s.t. \quad & \nabla f(x^k)^T p \le \eta \\
& g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T p \ge -\eta, \quad i = 1,2,\cdots,m \\
& -1 \le p_j \le 1, \quad j = 1,2,\cdots,n
\end{aligned}
$$

$\eta = 0$, $p = (0,\cdots,0)^T$ 也是上述线性规划的可 行解。

性质：若 $\eta^* = 0$,则 x^k 是 $K-T$ 点；

若 $\eta^* < 0$,则 p^* 是 x^k 处的可行下降方向。

$\because$ $i \in I(x^k)$ 时，$g_i(x^k) = 0$，

$\therefore$ $\nabla g_i(x^k)^T p^* \ge -\eta^* > 0$,

又$\because$ $\nabla f(x^k)^T p^* \le \eta^* < 0$，　$\therefore$ p^*是可行方向。

可证：改进方法具有全局收敛性。

制约函数法

将约束非线性规划问题转化为一系列无约束问题求解。（**SUMT：Sequential Unconstrained Minimization Technique**）

（1）外点法

$$\min\ f(x) \quad s.t.\quad h_i(x)=0,\quad i=1,\cdots,m$$
$$g_j(x)\ge 0,\quad j=1,\cdots,l$$

记可行域为 D

出发点：构造一个无约 束问题，使得 $x\in D$ 时，对应的目标函数值为 $f(x)$；$x\notin D$ 时，对应的目标函数值很大，因而不可能 成为极小点。

构造罚函数 $p(x)=\begin{cases}0, & x\in D\\ c, & x\notin D\end{cases}$

其中 c 是充分大的正数。

考虑无约束问题 $\min\ F(x)=f(x)+p(x)$

$F(x)$ 称为增广目标函数，它的极小点也是原问题的极小点，但 $F(x)$ 不能保持原目标函数 $f(x)$ 可能具有的良好性态（如连续、光滑），因为 $F(x)$ 在可行域 D 的边界上发生跳跃。

另构造罚函数

$$p_c(x)=c\sum_{i=1}^{m}h_i(x)^2+c\sum_{j=1}^{l}(\min\{0,\ g_j(x)\})^2$$

性质：如果 $h_i(x)\,(i=1,\cdots,m)$ 和 $g_j(x)\,(j=1,\cdots,l)$ 连续（可导），则 $p_c(x)$ 连续（可导）。

增广目标函数 $\min\ F_c(x)=f(x)+p_c(x)$

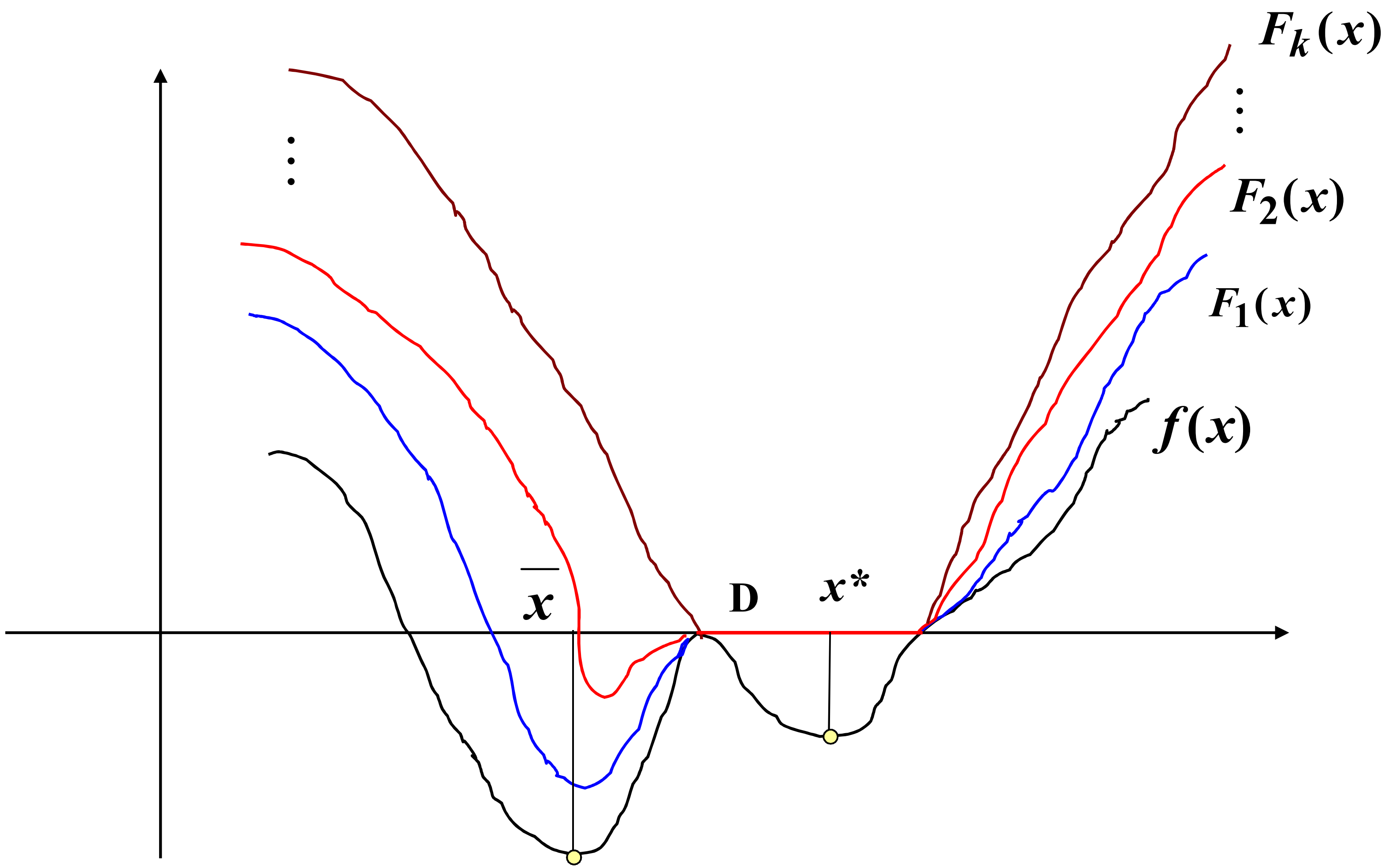
c 称为罚因子。

性质：设 $x^*(c)$ 是 $\min F_c(x)$ 的最优解，且 $x^*(c)\in D$，则 $x^*(c)$ 也是 $\min\limits_{x\in D} f(x)$ 的最优解。

一般说来，$x^*(c)\in D$ 仅在 c 足够大时才成立，但在实际计算中，过大的 c 会造成无约束问题 $\min F_c(x)$ 求解困难，因此常取一 列递增的数 $\{c_k\}$（趋于 $+\infty$），然后解一系列无约束问 题 $\min F_{c_k}(x)$。

设 $f(x)$、$h_i(x)\ (i=1,\cdots,m)$ 和 $g_j(x)\ (j=1,\cdots,l)$ 连续，则 $x^*(c_k)$ 从可行域 D 的外部趋向 x^*，因此称为外点法。

几何解释



例． $\min \ (x_1)^2 + 2(x_2)^2 \quad s.t. \quad x_1 + x_2 - 1 \ge 0$

解． $F_c(x) = (x_1)^2 + 2(x_2)^2 + c(\min\{0,\ x_1 + x_2 - 1\})^2$

$$= \begin{cases} (x_1)^2 + 2(x_2)^2 & x_1 + x_2 \ge 1 \\ (x_1)^2 + 2(x_2)^2 + c(x_1 + x_2 - 1)^2 & x_1 + x_2 < 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial F_c(x)}{\partial x_1} = \begin{cases} 2x_1 & x_1 + x_2 \ge 1 \\ 2x_1 + 2c(x_1 + x_2 - 1) & x_1 + x_2 < 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial F_c(x)}{\partial x_2} = \begin{cases} 4x_2 & x_1 + x_2 \ge 1 \\ 4x_2 + 2c(x_1 + x_2 - 1) & x_1 + x_2 < 1 \end{cases}$$

$x_1 + x_2 \geq 1$ 时， $\dfrac{\partial F_c(x)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial F_c(x)}{\partial x_1} = 0$ 无解；

$x_1 + x_2 < 1$ 时， 由 $\dfrac{\partial F_c(x)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial F_c(x)}{\partial x_1} = 0$，得

$$\begin{cases} 2x_1 + 2c(x_1 + x_2 - 1) = 0 \\ 4x_2 + 2c(x_1 + x_2 - 1) = 0 \end{cases}$$

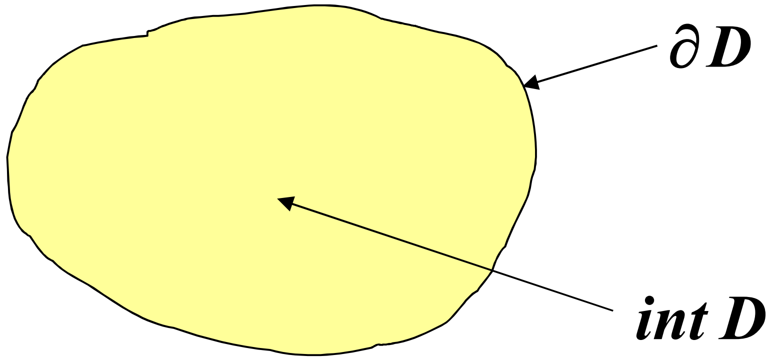
$\therefore \quad x_1 = \dfrac{2c}{2+3c}, \quad x_2 = \dfrac{c}{2+3c}$

$c \to +\infty$ 时， $x_1 \to \dfrac{2}{3}$， $x_2 \to \dfrac{1}{3}$

$$x^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

（2）内点法

可行域 $D = int\ D \cup \partial D$



内部

$int\ D = \{ x \mid g_j(x) < 0, \ \forall\ j \}$

边界 $\partial D = \{ x \mid$ 至少有一个 j 使得 $g_j(x) = 0 \}$

内点法的迭代点列在可行域的内部移动，并对接近可行域边界的点施加越来越大的惩罚，对可行域边界上的点施加无限大的惩罚，这好比在边界上筑一道墙阻止迭代点穿越边界。

内点法要求可行域的内点集合非空，并且要求初始点必须是内点，因此内点法只能处理不等式约束。

$$\min f(x) \quad s.t. \quad g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \cdots, m$$

设 $B_c(x) = c\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(x)}$ 或 $B_c(x) = -c\sum_{i=1}^{m}\ln g_i(x)$

考虑无约束问题 $\min F_c(x) = f(x) + B_c(x)$

当 x 从可行域的内部趋向边 界时，$B_c(x)$ 无限增大，因此 $F_c(x)$ 的极小点将落在原问题 可行域的内部。

另一方面，由于原问题 的目标是 $\min f(x)$，因此必须尽可能减弱 $B_c(x)$ 的影响，为此设置一列 单调递减趋于零的罚参数 $\{c_k\}$，然后解一系列无约束问 题 $\min F_{c_k}(x) = f(x) + B_{c_k}(x)$。

收敛性：若 $f(x)$、$g_i(x)\ (i = 1, \cdots, m)$ 连续，则内点法产生的点列 $x^*(c_k)$ 收敛于 x^*。

例． $\min \quad 2x_1 + 3x_2 \quad s.t. \quad 1 - 2(x_1)^2 - (x_2)^2 \ge 0$

解． $F_c(x) = 2x_1 + 3x_2 - c\ln\left(1 - 2(x_1)^2 - (x_2)^2\right)$

由 $\dfrac{\partial F_c(x)}{\partial x_1} = 2 + \dfrac{4cx_1}{1 - 2(x_1)^2 - (x_2)^2} = 0$，

$\dfrac{\partial F_c(x)}{\partial x_2} = 3 + \dfrac{2cx_2}{1 - 2(x_1)^2 - (x_2)^2} = 0$，得

$x_1 = \dfrac{c - \sqrt{c^2 + 11}}{11}$， $x_2 = \dfrac{3c - 3\sqrt{c^2 + 11}}{11}$

$c \to 0$ 时， $x_1 \to -\dfrac{1}{\sqrt{11}}$， $x_2 \to -\dfrac{3}{\sqrt{11}}$

$x^* = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{11}},\ -\dfrac{3}{\sqrt{11}}\right)$.