二、质点运动的矢量描述

位置矢量： $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ——直角坐标

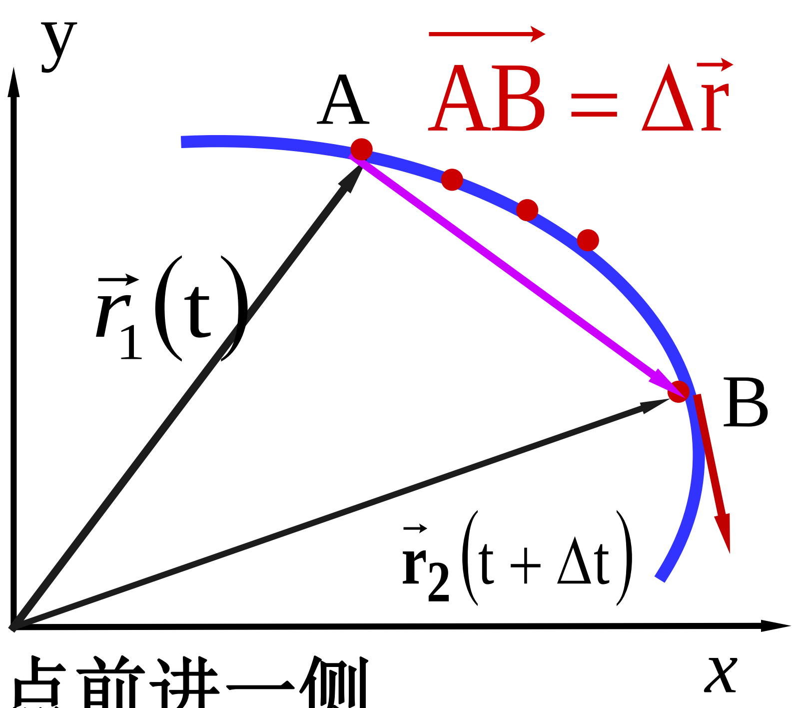
$\vec{r}(t)$ —运动方程 $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ 运动轨迹 $f(x,y)$

路程

位移： $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

平均速度： $\overline{\vec{v}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

瞬时速度： $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$



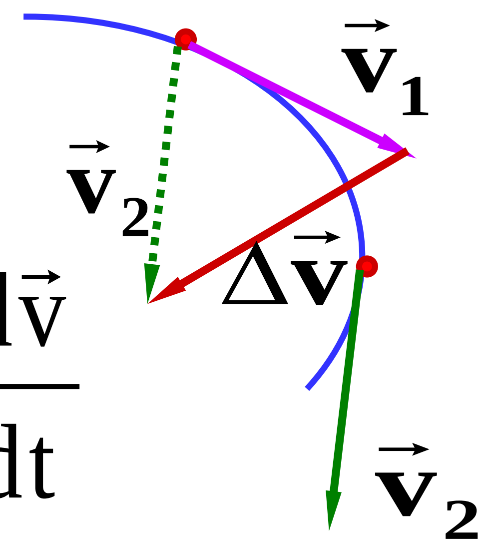
方向： 运动轨迹的切向并指向质点前进一侧

3 、加速度(acceleration)

速度的增量： $\Delta\vec{v}=\vec{v}_2-\vec{v}_1$

平均加速度： $$\bar{\vec{a}}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

瞬时加速度： $$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}$$



运动的分类：

1）运动中速度与加速度的特征

（匀速运动，匀加速运动）

2）质点运动轨迹的特征

（直线运动，圆周运动）

匀速率圆周运动

例1、已知质点的运动方程为 x=2t， y =4−t^2

式中时间以s计, 距离以m计。试求:

（1）任一时刻运动方程的矢量表式;

（2）求t=1到t=2时间内的平均速度;

（3）求初速度和初加速度;

（4）求运动的轨道方程。

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{2-1}$$

解: (1) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$= 2t\vec{i} + \left(4 - t^2\right)\vec{j}$$

$$\begin{cases} \vec{r}(1) = 2\vec{i} + 3\vec{j} \\ \vec{r}(2) = 4\vec{i} \end{cases}$$

解：(1) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = 2t\vec{i} + \left(4 - t^2\right)\vec{j}$

$$(2) \because \begin{cases} \vec{r}(1) = 2\vec{i} + 3\vec{j} \\ \vec{r}(2) = 4\vec{i} \end{cases}$$

$$\therefore \bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(2) - \vec{r}(1)}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{4\vec{i} - (2\vec{i} + 3\vec{j})}{2 - 1}$$

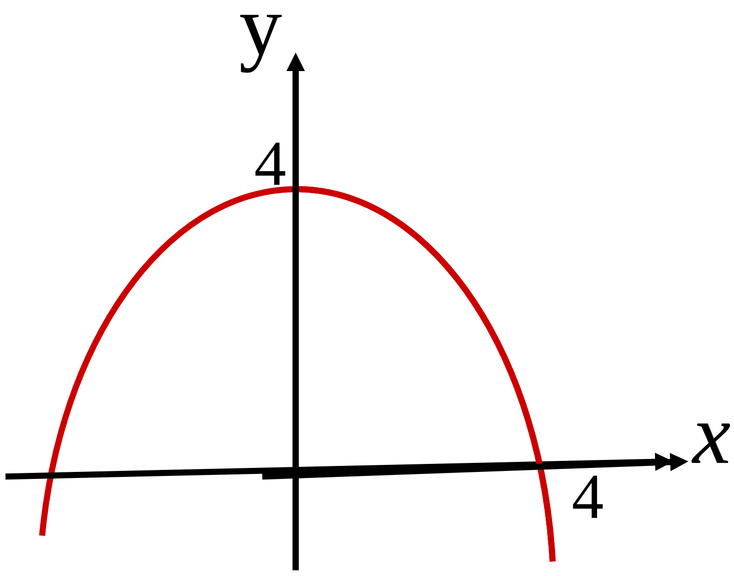
$$= 2\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$(3)\quad \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=2\vec{i}-2t\vec{j}\ \Rightarrow \vec{v}(0)=2\vec{i}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=-2\vec{j}\ \Rightarrow \vec{a}(0)=-2\vec{j}$$

$$(4)\quad \because \begin{cases} x=2t \\ y=4-t^{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=4-\left(\frac{x}{2}\right)^{2}$$



求路程和时间的关系式?

例2 (书P45 1-5)

解（1） $\because \quad a=-\pi^{2}\sin\frac{\pi}{2}t=\frac{dv}{dt}$

$\therefore \quad dv=-\pi^{2}\sin\frac{\pi}{2}tdt$

$$\int_{2\pi}^{v}dv=\int_{0}^{t}-\pi^{2}\sin\frac{\pi}{2}tdt$$

$$v-2\pi=2\pi\cos\frac{\pi}{2}t\Big|_{0}^{t}=2\pi\left(\cos\frac{\pi}{2}t-1\right)$$

$$\Rightarrow v=2\pi\cos\frac{\pi}{2}t$$

（2） $\because \quad v = 2\pi \cos\frac{\pi}{2}t = \frac{dx}{dt}$

$\therefore \quad dx = 2\pi \cos\frac{\pi}{2}t dt$

$$\int_0^x dx = \int_0^t 2\pi \cos\frac{\pi}{2}t dt$$

$\Rightarrow x = 4\sin\frac{\pi}{2}t$

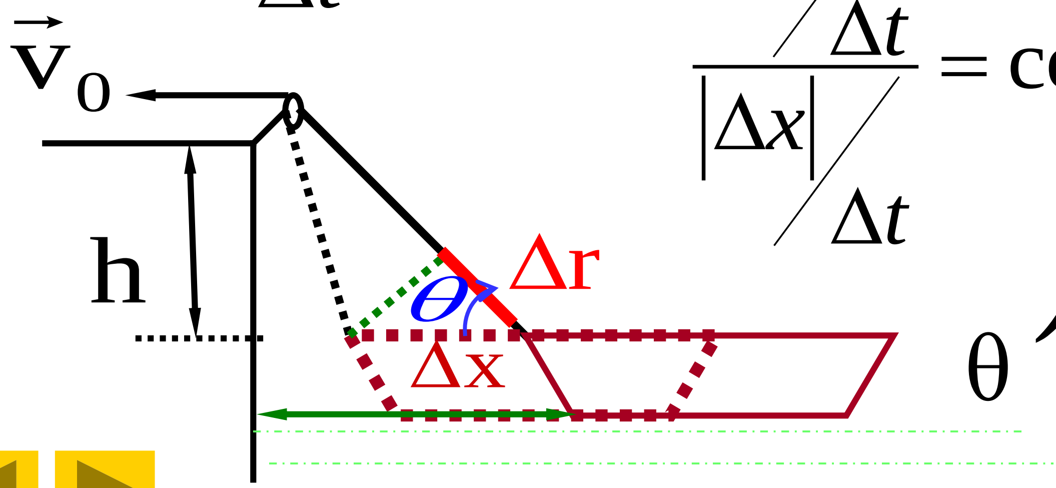
例3(书P44 1-2)、在离船的高度为h的岸边，绞车以恒定的速率v_0收拖缆绳，使船靠岸。当船头与岸的水平距离为x时，船的速度为多少？并讨论船体作什么运动？

——有约束的运动

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta r|}{\Delta t}=v_0 \qquad \frac{|\Delta r|}{|\Delta x|}=\cos\theta$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta t}=v$$

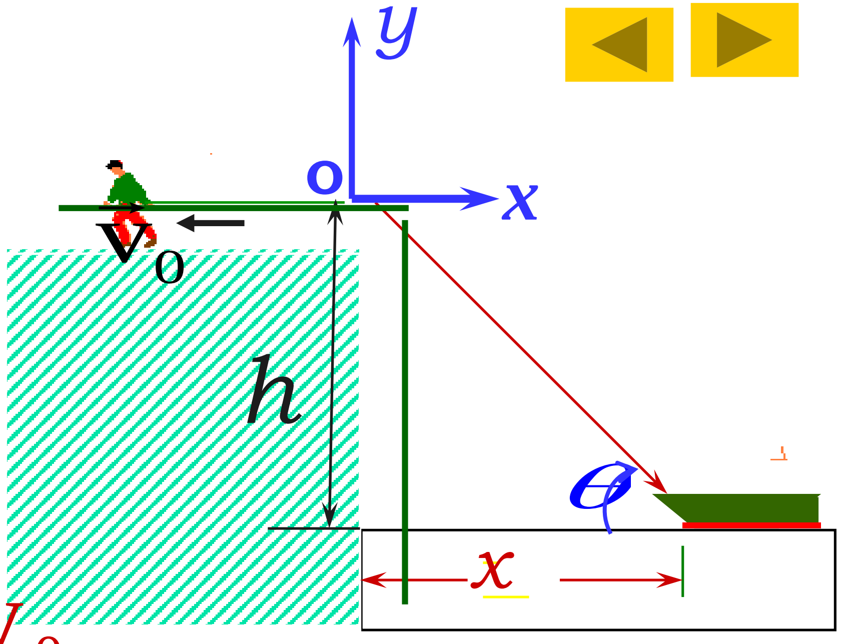
$$\frac{|\Delta r|/\Delta t}{|\Delta x|/\Delta t}=\cos\theta \Rightarrow v=\frac{v_0}{\cos\theta}$$



$\theta\uparrow \Rightarrow v\uparrow$ 加速运动

练习P44 1-3

法二：$\vec{r} = x\vec{i} - h\vec{j}$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i}$$

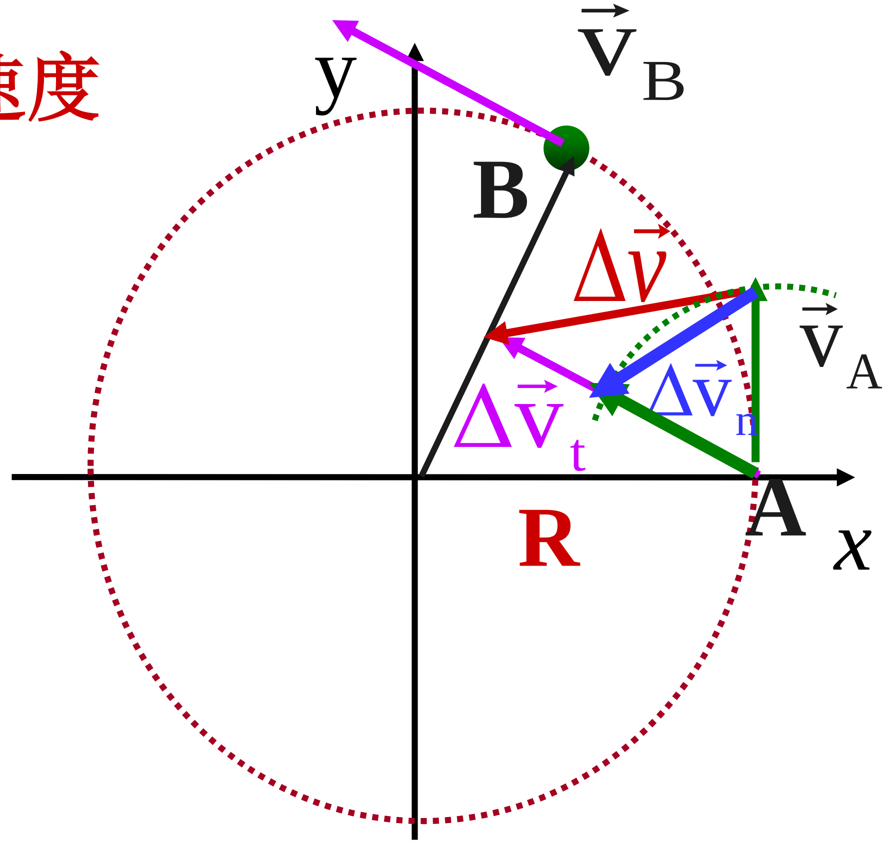
$$\frac{d|\vec{r}|}{dt} = \frac{d\left(\sqrt{x^2 + h^2}\right)}{dt} = -v_0$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}\frac{dx}{dt} = \cos\theta\frac{dx}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} = -v_0\frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x}\vec{i} \Rightarrow v = \frac{v_0}{\cos\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} = -\frac{v_0^2h^2}{x^3}\vec{i}$$ 加速运动

三、切向加速度和法向加速度



速度的增量:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

$$= \Delta\vec{v}_n + \Delta\vec{v}_t$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_t}{\Delta t} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

速度方向改变

速度大小改变

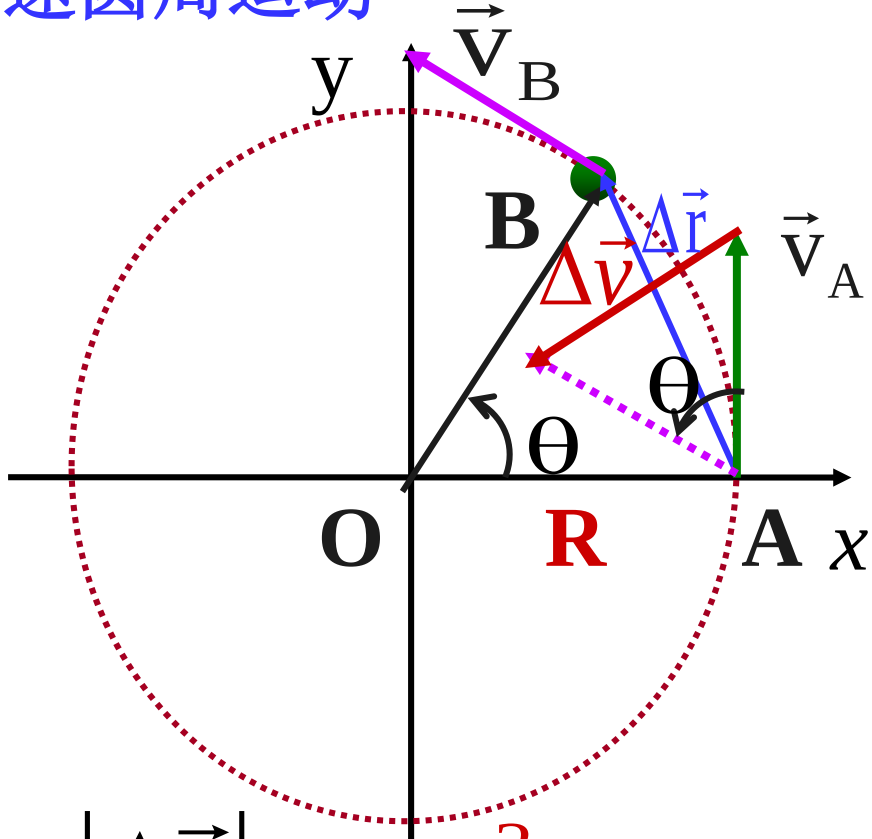
考虑方向的改变：设质点作匀速圆周运动

$$\therefore \ \Delta AOB \sim \Delta v_{A\Delta B}$$

$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{|\Delta \vec{r}|} = \frac{v}{R}$$

$$\Rightarrow |\Delta \vec{v}| = \frac{v}{R} |\Delta \vec{r}|$$

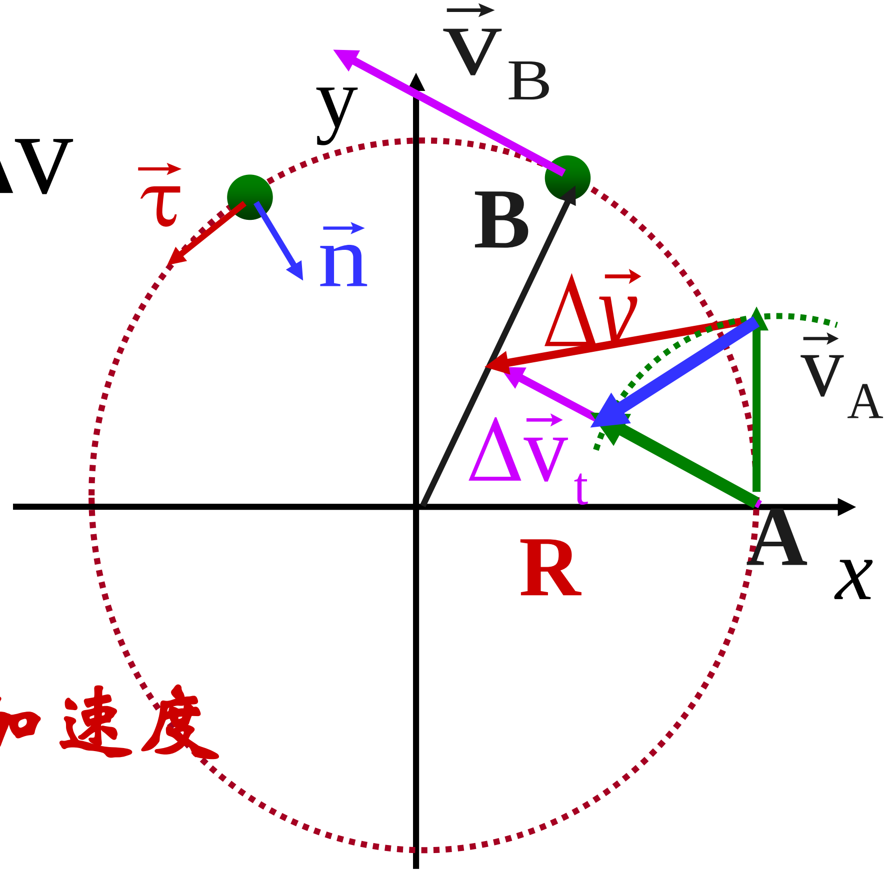
$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$



方向：指向圆心——法向加速度

考虑大小的改变：设质点作变速圆周运动

$$\left|\Delta\vec{v}_t\right| = \left|\vec{v}_B\right| - \left|\vec{v}_A\right| = \Delta v$$



$$\therefore\ a_t = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|\overrightarrow{\Delta v_t}\right|}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

方向：沿着切向——切向加速度

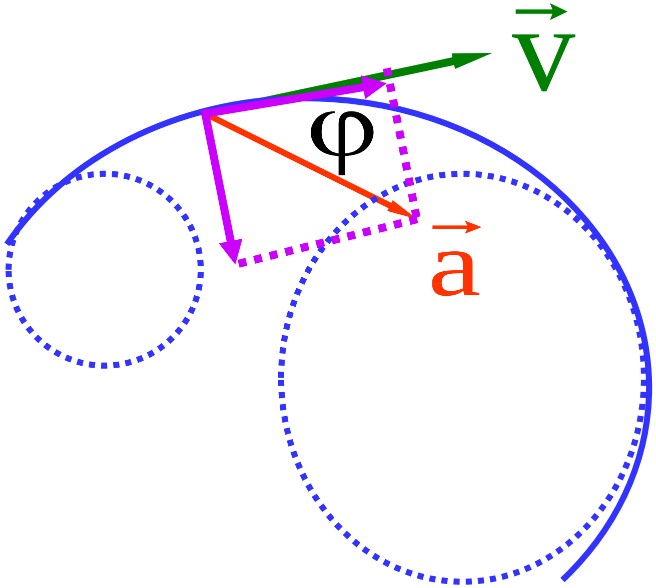
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = a_n\vec{n} + a_t\vec{\tau}$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

任意曲线运动 $y=f(x)$ 的曲率半径

$$\rho = \left| \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \right|$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$



根据速度和加速度的夹角，判断运动状态

$\varphi < \frac{\pi}{2}$ 速度大小方向均改变，且速率增大

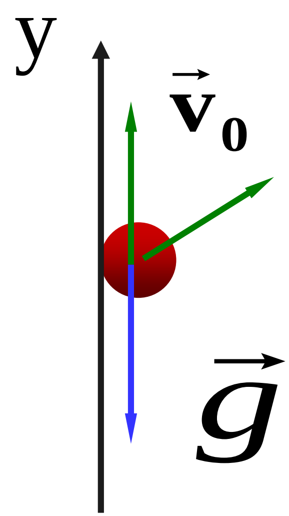
$\varphi = \frac{\pi}{2}$ 仅速度方向改变(匀速率)

$\pi > \varphi > \frac{\pi}{2}$ 速度大小方向均改变，且速率减少

$\varphi = 0 \ (\text{or} \ \pi)$ 仅速度大小改变(直线运动)

四、抛体运动和圆周运动

1、抛体运动的特点 $\vec{a} = \vec{g}$



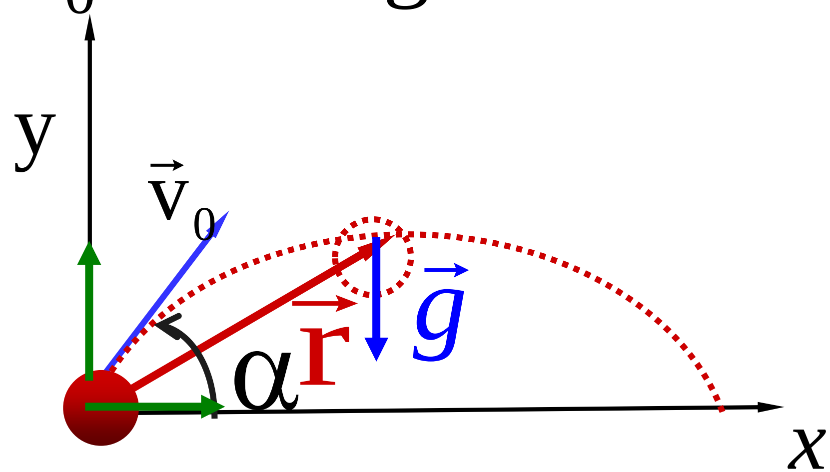
上抛、下抛、自由落体运动（v_0=0）

平抛、斜上抛、斜下抛

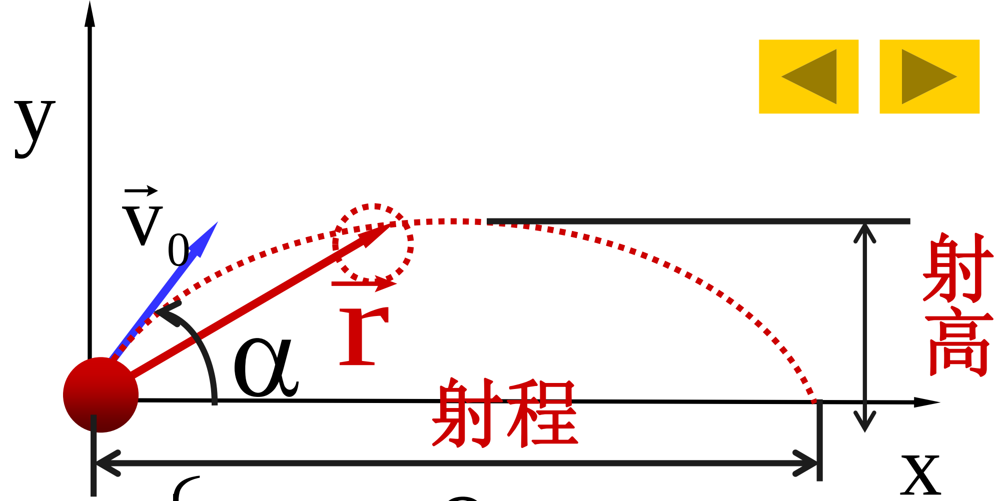
斜抛：二维运动（平面运动 ）

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_0 \sin\alpha - gt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos\alpha t \\ y = v_0 \sin\alpha t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$



射高 射程



物理 $v_y = 0$

$$\Rightarrow t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$\Rightarrow y_{max}$$

数学 $y'(x) = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow y_{max}$$

$$y = 0$$

$$\Rightarrow t_x$$

$$\Rightarrow x$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_0 \sin\alpha - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha t \\ y = v_0 \sin\alpha t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$y=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}\qquad R=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$$

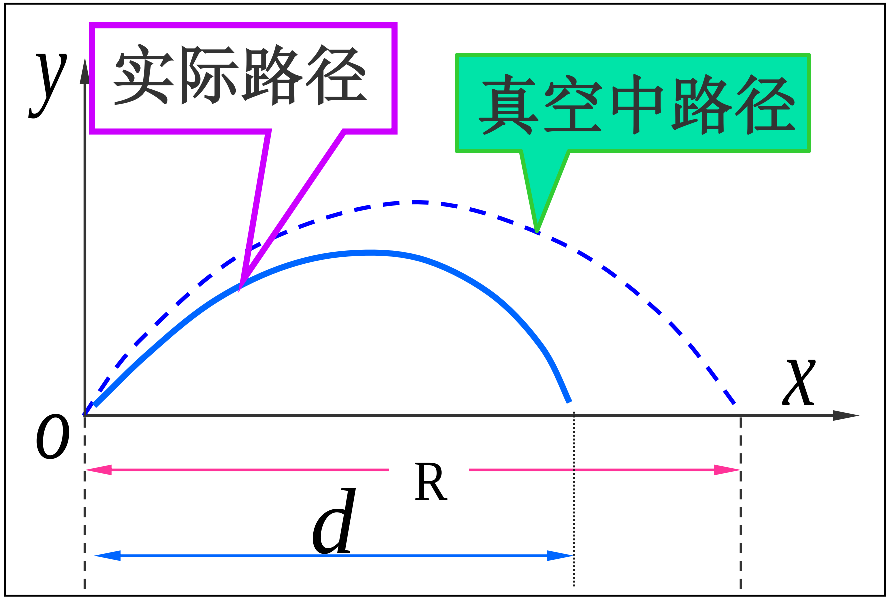
如何跳得高，投得远？

$$\frac{dy_{max}}{d\alpha}=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}=0$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dR}{d\alpha}=\frac{2v_0^2}{g}\cos 2\alpha=0$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}$$

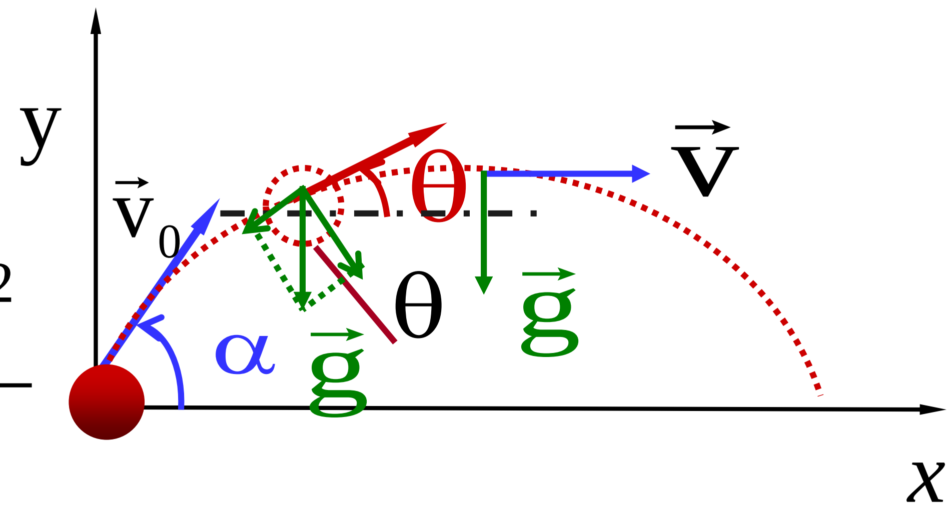


由于空气阻力，实际射程小于最大射程.

若已知以v_0, α出, 当速度与水平方向成θ 角时, a_n和a_t 各为多少？ 此时的曲率半径为多少？

$$a_t = -g\sin\theta$$

$$a_n = g\cos\theta = \frac{v^2}{\rho}$$



$$\because v_0\cos\alpha = v\cos\theta$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g\cos^3\theta}$$

问最高点时的曲率半径?

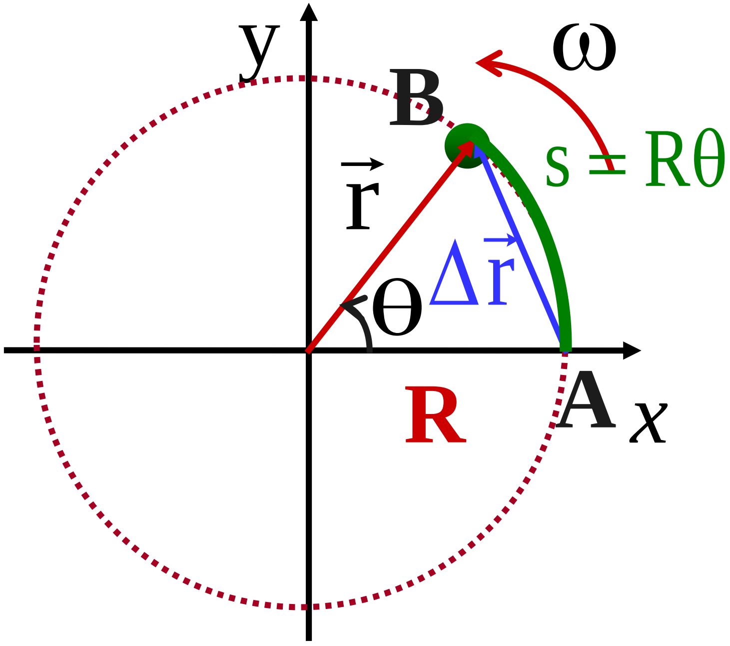
$$a_n = g,\ a_t = 0$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$$

2、圆周运动的角量表示

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{R}\theta)}{\mathrm{dt}}$$

$$= \mathrm{R}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}$$



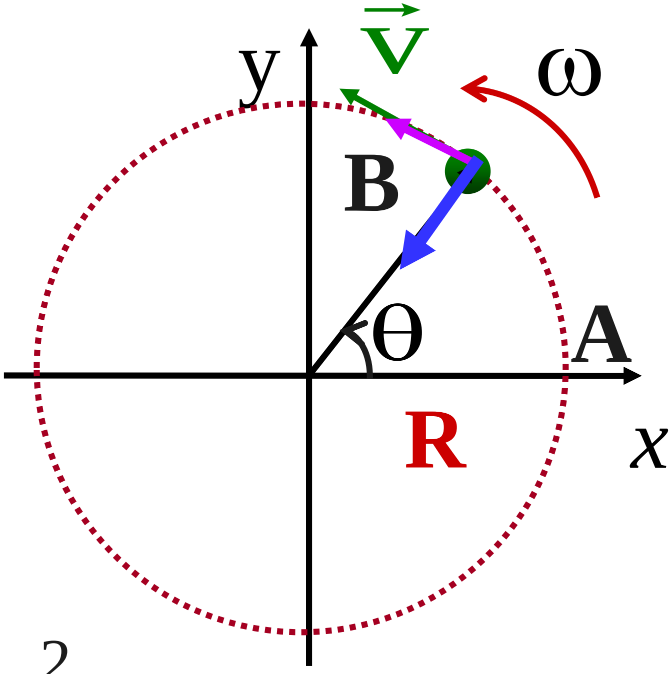
1)角速度 $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}$

国际单位制（SI制） $\mathrm{rad/s}\ \ (1/\mathrm{s})$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} \Rightarrow d\theta = \omega dt \Rightarrow \Delta\theta = \int_0^t \omega dt$$

2) 角加速度

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$



切向加速度

$$a_t = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

法向加速度 $a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$

匀速圆周运动

$$v = R\omega \qquad T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\alpha = 0$$

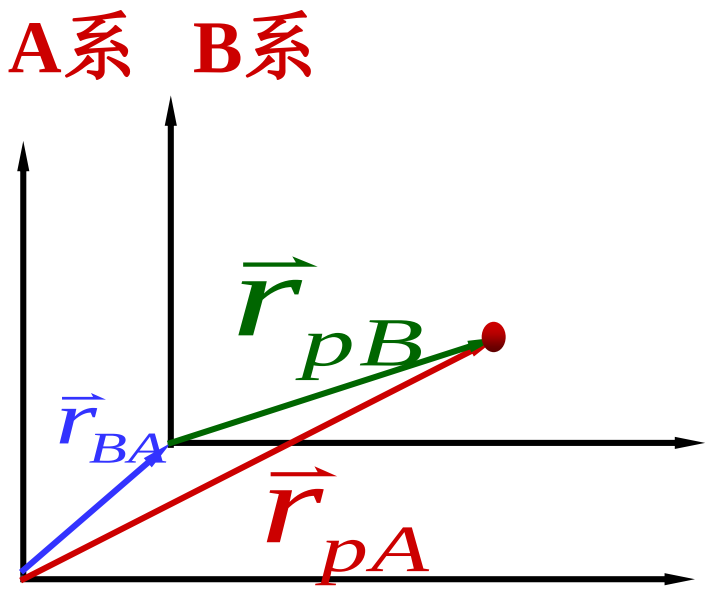
$$a_n = R\omega^2$$

五、相对运动 ——伽利略的速度变换原理

$$\vec{r}_{pA} = \vec{r}_{pB} + \vec{r}_{BA}$$

$$\vec{v}_{pA} = \vec{v}_{pB} + \vec{v}_{BA}$$

$\vec{v}_{BA}$—相对速度（牵连速度）



A系、B系相对作匀速直线运动

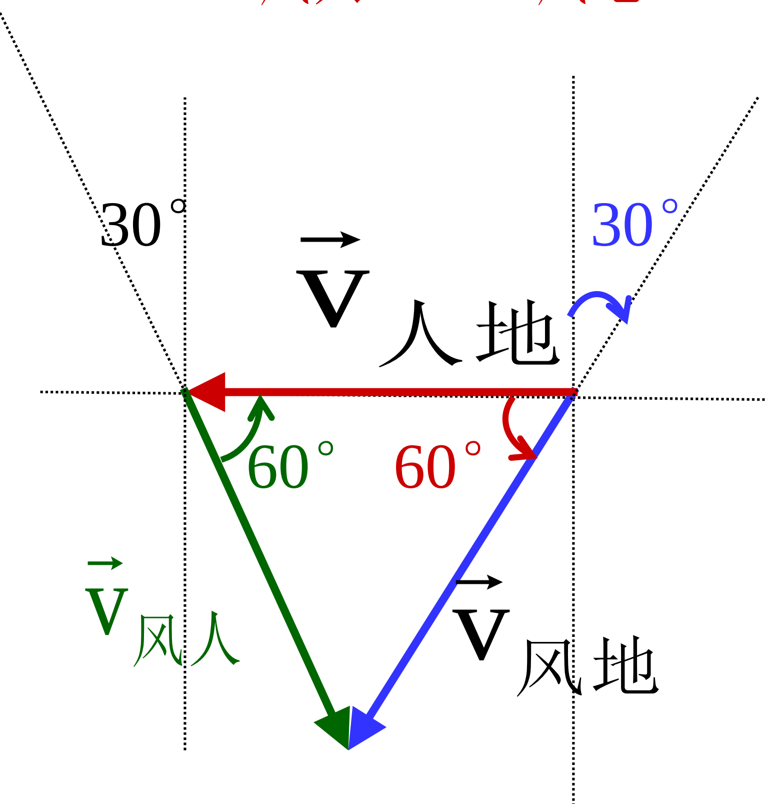
（1）绝对的时空观

（2）是速度变换而不是速度合成

（3）现代理论证明仅在低速条件下成立

例1、某人骑自行车以速率v向西行驶，风以相同的速率从北偏东30°方向吹来。人感到风吹来的方向是何处？

$$\vec{v}_{风人}=\vec{v}_{风地}+\vec{v}_{地人}=\vec{v}_{风地}-\vec{v}_{人地}$$



$$\left|\vec{v}_{人地}\right|=\left|\vec{v}_{风地}\right|=v$$

人感到风从北偏西30°的方向吹来