刚体定轴转动的角动量：$L = J\omega$

刚体定轴转动的角动量定理

(微分式) $M = \frac{d}{dt}(J\omega)$

(积分式) $\int_{t_1}^{t_2} M dt = J\omega_2 - J\omega_1$

系统角动量守恒的条件:

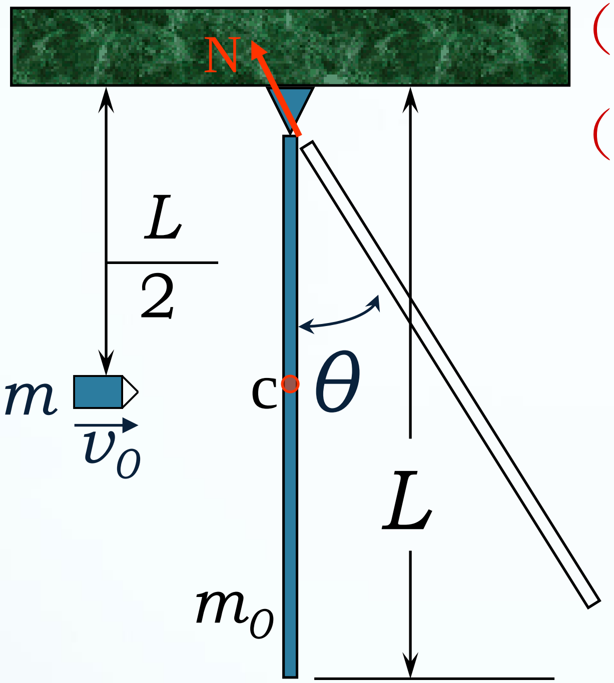
***a*).系统中各物体均绕同一转轴转动**

条件: $\sum M_{外力}=0$

***b*).系统中各物体均绕不同转轴转动**

条件: $\sum M_{外力}=0$, 且$\sum M_{内力}=0$

例：



求：三种不同情况下的v_c

(1) $e=1$(子弹碰后速度为v)　(2) $e=0$

(3)$0<e<1$(子弹穿出棒的速度为v,棒转过θ角)

分析:$\{m、m_0\}$.冲力是内力，

重力mg, m_0g及轴对棒的约束力N均为外力，

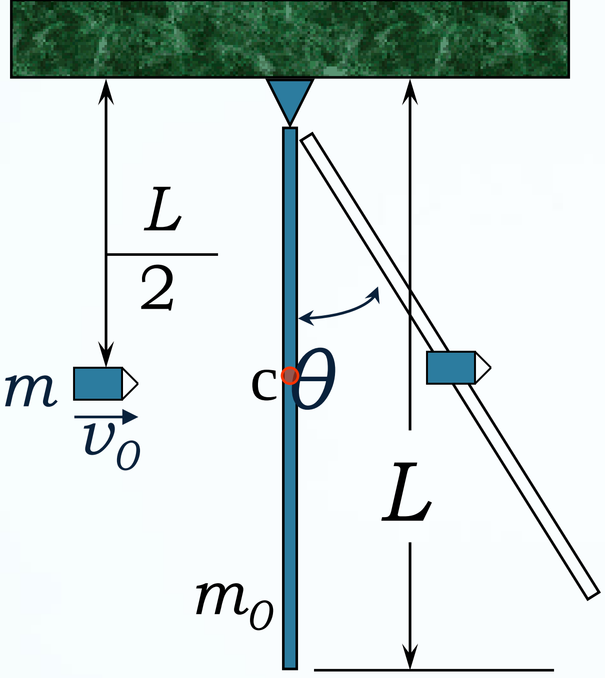
且$\vec{F}_{合}\neq 0$　　$\therefore$ 系统$\vec{P}$不守恒

但 $\vec{M}_{合}=0$　$\therefore$ 系统$\vec{L}$守恒

解：　(1)$\because e=1$　$\therefore E_k$守恒：$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_0l^2)\omega^2+\frac{1}{2}mv^2$　(1)

$\because M=0$　$\therefore L$守恒：$mv_0(\frac{l}{2})=\frac{1}{3}m_0l^2\omega+mv(\frac{l}{2})$　(2)

$\left.\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}\right\}\Rightarrow v_c$　　角量与线量的关系：$v_c=\frac{l}{2}\omega$　(3)



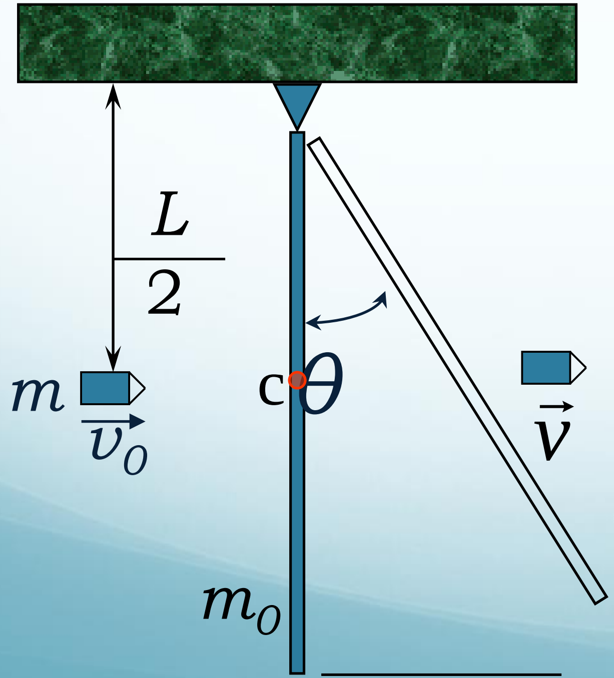
(2) $\because M=0 \quad \therefore L$守恒　且$e=0$

即：$mv_0(\frac{l}{2})=\frac{1}{3}m_0 l^2\omega+mv_c(\frac{l}{2})$

$$=\left[\frac{1}{3}m_0 l^2+m(\frac{l}{2})^2\right]\omega \qquad (1)$$

$$v_c=\frac{l}{2}\omega \qquad (2)$$

$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow v_c$

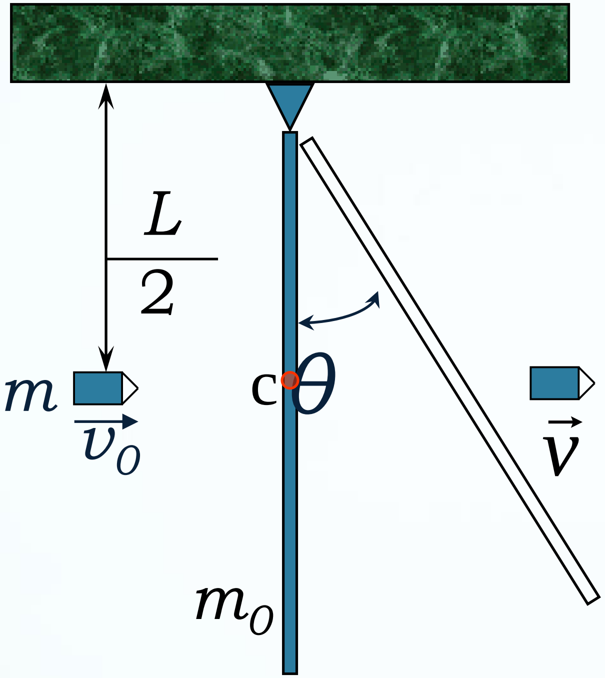


(3)$\{$地、棒$\}$：棒转动过程E守恒

即：$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_0 l^2)\omega^2=m_0 g\frac{l}{2}(1-\cos\theta) \qquad (1)$

$$v_c=\frac{l}{2}\omega \qquad (2)$$

$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow v_c$



若需求子弹穿出棒后的速度v

则由L守恒

即：$mv_0(\frac{l}{2}) = \frac{1}{3}m_0 l^2\omega + mv\ (\frac{l}{2})$ （1）

又：$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_0 l^2)\omega^2 = m_0 g\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$ （2）

$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{v}$

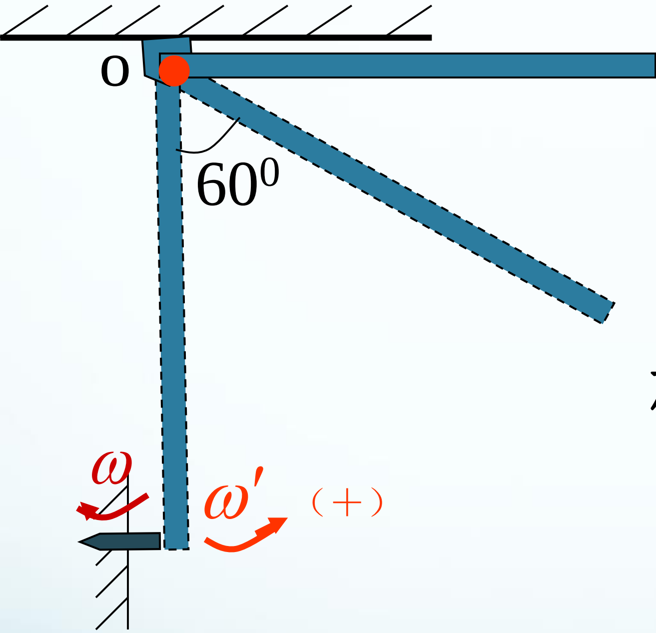
结论：质点与转动刚体碰撞，由于存在约束力，所以系统动量不守恒，但系统角动量守恒。

$e=1\left\{\begin{matrix}E_k\text{守恒}\\L\text{守恒}\end{matrix}\right\}\omega, v$

$e=0\left\{\begin{matrix}L\text{守恒} \Rightarrow \omega\\v = r\omega\end{matrix}\right\}v$

$0<e<1\left\{\begin{matrix}L\text{守恒}\\\text{刚体碰后机械能守恒（}E_K\text{转化为}E_P\text{)}\end{matrix}\right\}\omega, v$

例：一细杆质量为m,长为*l*,其一端绕o轴在竖直平面内转动。开始时杆从水平位置静止释放，当杆摆到竖直位置时，杆下端恰好与墙上的小钉子碰撞，碰后杆能弹至与竖直方向成60^0角的位置，求碰撞时钉子受到杆子作用的冲量。



解：以钉子为研究对象：

$$\int (F_{杆} - F_{墙})\,dt = m'v - m'v_0 = m'v$$

杆为研究对象：$\int M\cdot dt = J\omega' - (-J\omega)$

其中：$\int M\cdot dt = \int l\overline{F}dt = l\int \overline{F}dt = lI$

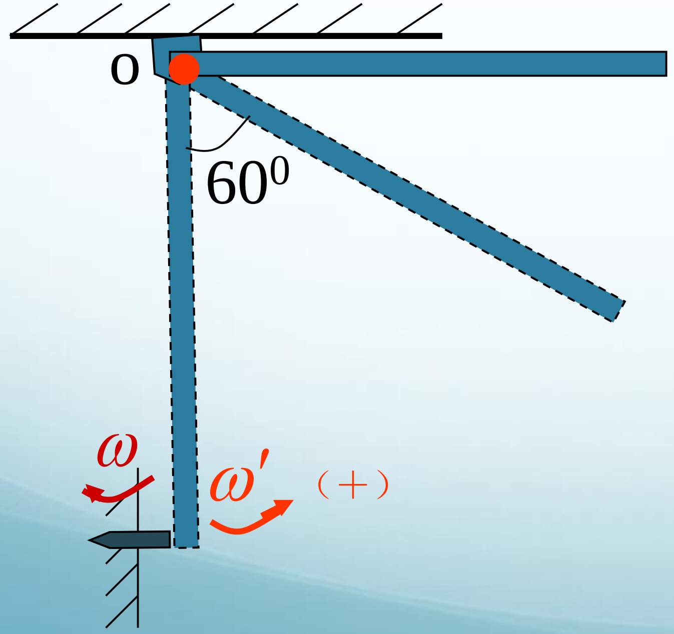
$$lI = J\omega' - (-J\omega) = J(\omega' + \omega)$$

即：$I = \dfrac{J(\omega + \omega')}{l}$

$$I=\frac{J(\omega+\omega')}{l}=\frac{1}{3}ml\left(\sqrt{\frac{3g}{l}}+\sqrt{\frac{3g}{2l}}\right)$$

碰前：$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}}$

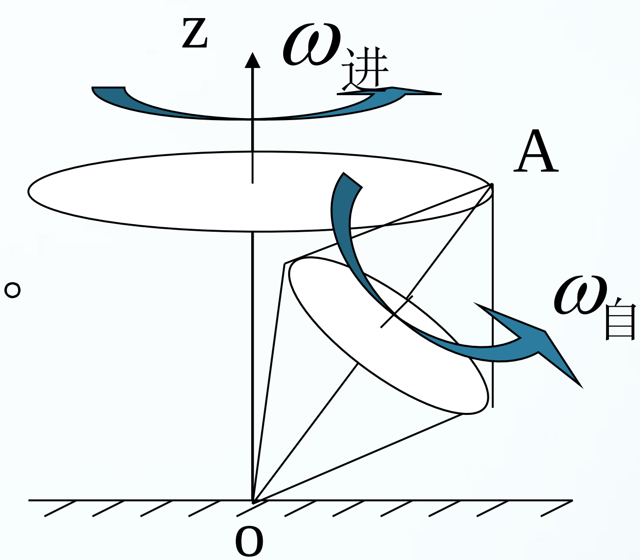
碰后：$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega'^2=mg\frac{l}{2}(1-\cos 60^0)\Rightarrow\omega'=\sqrt{\frac{3g}{2l}}$



§3-6 进　　动

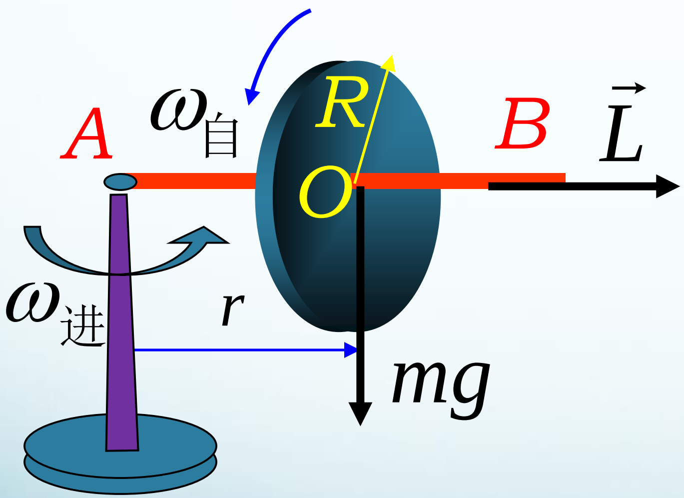
§3-6 进　　动

一、进动的概念



刚体在绕自身对称轴转动同时，对称轴还绕某轴回转的现象称为进动。

二、动力学解释

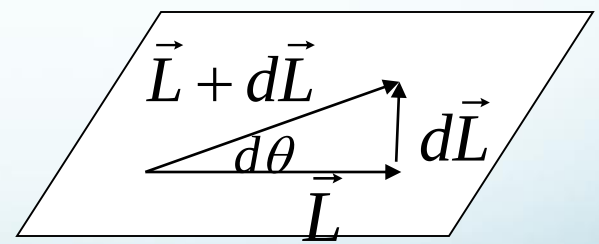


回转仪

$$\vec{M} = \vec{r} \times m\vec{g} \otimes$$

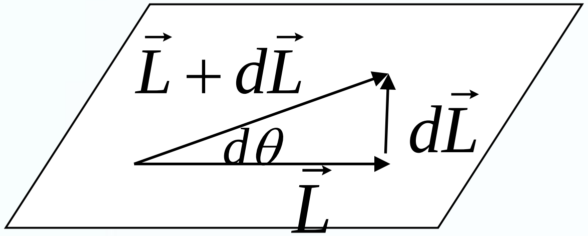
$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\Rightarrow d\vec{L} = \vec{M}dt \otimes$$



三、进动角速度

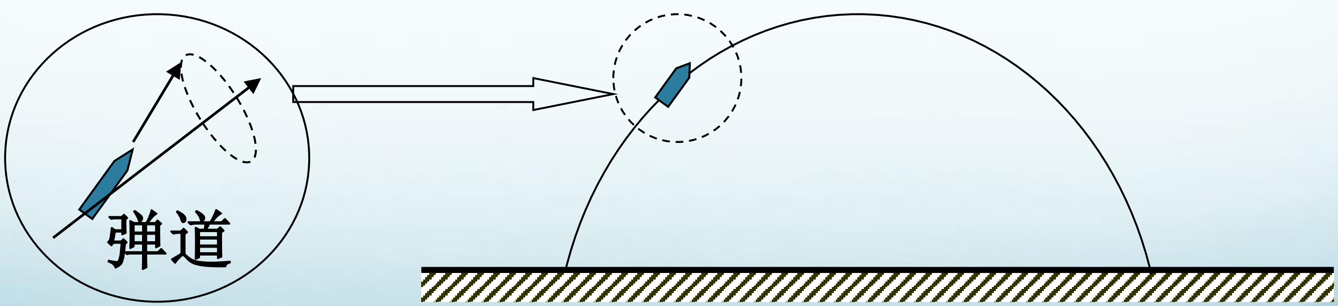
$$\omega_{进} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{dL/L}{dt} = \frac{Mdt/L}{dt} = \frac{M}{L} = \frac{M}{J\omega_{自}}$$



回转仪一定，$\omega_{进}$ 与 $\omega_{自}$ 成反比。

四、进动原理的应用举例

枪炮膛中的来复线




陀螺进动仪