⋆3.1 差分解的稳定性与收敛性

⋆3.1 差分解的稳定性与收敛性

⋆3.1.1极值原理与差分解的唯一性

Home Page

Title Page

Go Back

Full Screen

Close

Quit

⋆3.1 差分解的稳定性与收敛性

⋆3.1.1极值原理与差分解的唯一性

- 这里仅考虑Poisson方程第一边值问题(1)、(2)的差分方程组

⋆3.1 差分解的稳定性与收敛性
⋆3.1.1极值原理与差分解的唯一性

- 这里仅考虑Poisson方程第一边值问题(1)、(2)的差分方程组
- 假设Ω_h和Γ_h非空，并且$\bar{\Omega}_h$是连通的，即对$\bar{\Omega}_h$中任意两点P,Q在$\bar{\Omega}_h$中必存在一列点$P_1,P_2,\cdots,P_m$，使得点列$P,P_1,\cdots,P_m,Q$中任意两个相继的点是相邻的点

$\star$3.1 差分解的稳定性与收敛性
$\star$3.1.1极值原理与差分解的唯一性

- 这里仅考虑Poisson方程第一边值问题(1)、(2)的差分方程组
- 假设Ω_h和Γ_h非空，并且$\bar{\Omega}_h$是连通的，即对$\bar{\Omega}_h$中任意两点P, Q在$\bar{\Omega}_h$中必存在一列点$P_1, P_2, \cdots, P_m$，使得点列$P, P_1, \cdots, P_m, Q$中任意两个相继的点是相邻的点
- 对$\bar{\Omega}_h$中所有的点按一定的顺序编号，先对内点进行编号，再接着对边界点编号，

⋆3.1 差分解的稳定性与收敛性
⋆3.1.1极值原理与差分解的唯一性

- 这里仅考虑Poisson方程第一边值问题(1)、(2)的差分方程组
- 假设Ω_h和Γ_h非空，并且$\bar{\Omega}_h$是连通的，即对$\bar{\Omega}_h$中任意两点P, Q在$\bar{\Omega}_h$中必存在一列点$P_1, P_2, \cdots, P_m$，使得点列$P, P_1, \cdots, P_m, Q$中任意两个相继的点是相邻的点
- 对$\bar{\Omega}_h$中所有的点按一定的顺序编号，先对内点进行编号，再接着对边界点编号，
- 差分方程组中第i个节点的未知量记为u_i,则差分方程组可统一的写成

$$\begin{cases} L_h u_i = a_{ii} u_i - \sum\limits_{j \in U(i)} a_{ij} u_j = g_i, i \in \Omega_h, \\ u_i = \phi_i, i \in \Gamma_h \end{cases} \tag{35}$$

★3.1 差分解的稳定性与收敛性

★3.1.1极值原理与差分解的唯一性

- 这里仅考虑Poisson方程第一边值问题(1)、(2)的差分方程组
- 假设Ω_h和Γ_h非空，并且$\bar{\Omega}_h$是连通的，即对$\bar{\Omega}_h$中任意两点P, Q在$\bar{\Omega}_h$中必存在一列点$P_1, P_2, \cdots, P_m$，使得点列$P, P_1, \cdots, P_m, Q$中任意两个相继的点是相邻的点
- 对$\bar{\Omega}_h$中所有的点按一定的顺序编号，先对内点进行编号，再接着对边界点编号，
- 差分方程组中第i个节点的未知量记为u_i,则差分方程组可统一的写成

$$\begin{cases} L_h u_i = a_{ii}u_i - \sum\limits_{j \in U(i)} a_{ij}u_j = g_i, i \in \Omega_h, \\ u_i = \phi_i, i \in \Gamma_h \end{cases} \tag{35}$$

- $U(i)$表示在节点i建立的差分方程中出现的内点组成的集合(不包括节点i)。

⋆3.1 差分解的稳定性与收敛性

⋆3.1.1极值原理与差分解的唯一性

- 这里仅考虑Poisson方程第一边值问题(1)、(2)的差分方程组
- 假设Ω_h和Γ_h非空，并且$\bar{\Omega}_h$是连通的，即对$\bar{\Omega}_h$中任意两点P, Q在$\bar{\Omega}_h$中必存在一列点$P_1, P_2, \cdots, P_m$，使得点列$P, P_1, \cdots, P_m, Q$中任意两个相继的点是相邻的点
- 对$\bar{\Omega}_h$中所有的点按一定的顺序编号，先对内点进行编号，再接着对边界点编号，
- 差分方程组中第i个节点的未知量记为u_i,则差分方程组可统一的写成

$$\begin{cases} L_h u_i = a_{ii}u_i - \sum\limits_{j\in U(i)} a_{ij}u_j = g_i, i \in \Omega_h, \\ u_i = \phi_i, i \in \Gamma_h \end{cases} \tag{35}$$

- $U(i)$表示在节点i建立的差分方程中出现的内点组成的集合(不包括节点i)。
- 原差分方程中边界点的已知项都已移到等号的右边

⋆3.1 差分解的稳定性与收敛性
⋆3.1.1极值原理与差分解的唯一性

- 这里仅考虑Poisson方程第一边值问题(1)、(2)的差分方程组
- 假设Ω_h和Γ_h非空，并且$\bar{\Omega}_h$是连通的，即对$\bar{\Omega}_h$中任意两点P,Q在$\bar{\Omega}_h$中必存在一列点$P_1,P_2,\cdots,P_m$，使得点列$P,P_1,\cdots,P_m,Q$中任意两个相继的点是相邻的点
- 对$\bar{\Omega}_h$中所有的点按一定的顺序编号，先对内点进行编号，再接着对边界点编号，
- 差分方程组中第i个节点的未知量记为u_i,则差分方程组可统一的写成

$$\begin{cases} L_h u_i = a_{ii}u_i - \sum\limits_{j\in U(i)} a_{ij}u_j = g_i, i \in \Omega_h, \\ u_i = \phi_i, i \in \Gamma_h \end{cases} \tag{35}$$

- $U(i)$表示在节点i建立的差分方程中出现的内点组成的集合(不包括节点i)。
- 原差分方程中边界点的已知项都已移到等号的右边
- 方程组(35)中未知数的数目等于内点的数目。

- 假定方程组系数满足

$$a_{ii} > 0, a_{ij} > 0, i \in \Omega_h, j \in U(i),$$

$$d_{ii} = a_{ii} - \sum_{j \in U(i)} a_{ij} \begin{cases} \geq 0, \text{当} i \in \Omega_{h_1} \text{时}. \\ > 0, \text{当} i \in \Omega_{h_2} \text{时}. \end{cases} \quad (36)$$

- 假定方程组系数满足

$$a_{ii} > 0, a_{ij} > 0, i \in \Omega_h, j \in U(i),$$

$$d_{ii} = a_{ii} - \sum_{j \in U(i)} a_{ij} \begin{cases} \geq 0, \text{当} i \in \Omega_{h_1} \text{时}. \\ > 0, \text{当} i \in \Omega_{h_2} \text{时}. \end{cases} \tag{36}$$

- 方程(8),(13),(16),(17)中的系数都满足上面条件。

- 假定方程组系数满足

$$a_{ii} > 0, a_{ij} > 0, i \in \Omega_h, j \in U(i),$$

$$d_{ii} = a_{ii} - \sum_{j \in U(i)} a_{ij} \begin{cases} \geq 0, \text{当} i \in \Omega_{h_1} \text{时}. \\ > 0, \text{当} i \in \Omega_{h_2} \text{时}. \end{cases} \tag{36}$$

- 方程(8),(13),(16),(17)中的系数都满足上面条件。
- 在图3.3中，设P是非正则内点，Q, S是内点，R, T是边界点。如果用差分方程(13),则把有关u_R, u_T的项移到等号右边

$$U(P) = \{Q, S\}, d_{PP} = \frac{1}{hh_2} + \frac{1}{\tau\tau_2}, \tag{37}$$

- 假定方程组系数满足

$$a_{ii}>0, a_{ij}>0, i\in\Omega_h, j\in U(i),$$

$$d_{ii}=a_{ii}-\sum_{j\in U(i)} a_{ij}\begin{cases}\geq 0, \text{当} i\in\Omega_{h_1}\text{时}.\\ >0, \text{当} i\in\Omega_{h_2}\text{时}.\end{cases} \tag{36}$$

- 方程(8),(13),(16),(17)中的系数都满足上面条件。
- 在图3.3中，设P是非正则内点，Q, S是内点，R, T是边界点。如果用差分方程(13),则把有关u_R, u_T的项移到等号右边

$$U(P)=\{Q,S\}, d_{PP}=\frac{1}{hh_2}+\frac{1}{\tau\tau_2}, \tag{37}$$

- 如果用差分方程(16),则把有关u_R的项移到等号右边

$$U(P)=\{Q\}, d_{PP}=\frac{1}{hh_2}, \tag{38}$$

- 假定方程组系数满足

$$a_{ii} > 0, a_{ij} > 0, i \in \Omega_h, j \in U(i),$$

$$d_{ii} = a_{ii} - \sum_{j \in U(i)} a_{ij} \begin{cases} \geq 0, \text{当} i \in \Omega_{h_1} \text{时}. \\ > 0, \text{当} i \in \Omega_{h_2} \text{时}. \end{cases} \tag{36}$$

- 方程(8),(13),(16),(17)中的系数都满足上面条件。
- 在图3.3中，设P是非正则内点，Q, S是内点，R, T是边界点。如果用差分方程(13),则把有关u_R, u_T的项移到等号右边

$$U(P) = \{Q, S\}, d_{PP} = \frac{1}{hh_2} + \frac{1}{\tau\tau_2}, \tag{37}$$

- 如果用差分方程(16),则把有关u_R的项移到等号右边

$$U(P) = \{Q\}, d_{PP} = \frac{1}{hh_2}, \tag{38}$$

- 如果用差分方程(17),则把有关u_T的项移到等号右边

$$U(P) = \{S\}, d_{PP} = \frac{1}{\tau\tau_2}, \tag{39}$$

- 引理(3.1) (极值原理) 设$u_i(i \in \bar{\Omega}_h)$是定义在节点上的一组不全相等的数，并且式(35)中的差分算子L_h满足条件(36),若对每一个$i \in \Omega_h$成立$L_h u_i \leq 0(L_h u_i \geq 0)$, 则不能在内点取到这组数的正的最大值(负的最小值).

- 引理(3.1) (极值原理) 设$u_i(i \in \bar{\Omega}_h)$是定义在节点上的一组不全相等的数，并且式(35)中的差分算子L_h满足条件(36),若对每一个$i \in \Omega_h$成立$L_h u_i \le 0 (L_h u_i \ge 0)$, 则不能在内点取到这组数的正的最大值(负的最小值).
证明：用反证法，假设在某个内点i, u_i取到这组数的正的最大值M,这里

$$M = \max_{x \in \bar{\Omega}_h} |u_i| > 0$$

由于$\bar{\Omega}_h$是连通的，并且这组数不全相等，则一定存在某个内点k使得$u_k = M$,并且在点k建立的差分方程中至少有一点m成立$u_m < M$,从而

$$L_h u_k = a_{kk} u_k - \sum_{j \in U(k)} a_{kj} u_j \begin{cases} > d_{kk} M \ge 0 & \text{当} k \in \Omega_{h_1} \text{时} \\ \ge d_{kk} M > 0, & \text{当} k \in \Omega_{h_2} \text{时} \end{cases}$$

这与条件$L_h u_k \le 0$矛盾，于是引理的第一个结论成立。若用$-u_i$代替u_i重复上述讨论，则可得引理的第二结论。

- 引理(3.1) (极值原理) 设$u_i(i \in \bar{\Omega}_h)$是定义在节点上的一组不全相等的数，并且式(35)中的差分算子L_h满足条件(36),若对每一个$i \in \Omega_h$成立$L_h u_i \le 0(L_h u_i \ge 0)$, 则不能在内点取到这组数的正的最大值(负的最小值).
证明：用反证法，假设在某个内点i, u_i取到这组数的正的最大值M,这里

$$M = \max_{x \in \bar{\Omega}_h} |u_i| > 0$$

由于$\bar{\Omega}_h$是连通的，并且这组数不全相等，则一定存在某个内点k使得$u_k = M$,并且在点k建立的差分方程中至少有一点m成立$u_m < M$,从而

$$L_h u_k = a_{kk} u_k - \sum_{j \in U(k)} a_{kj} u_j \begin{cases} > d_{kk} M \ge 0 & \text{当} k \in \Omega_{h_1} \text{时} \\ \ge d_{kk} M > 0, & \text{当} k \in \Omega_{h_2} \text{时} \end{cases}$$

这与条件$L_h u_k \le 0$矛盾，于是引理的第一个结论成立。若用$-u_i$代替u_i重复上述讨论，则可得引理的第二结论。

- 定理3.1 差分方程(35)有惟一解。
证：考虑方程组(35)相对应的齐次方程组，由极值原理可知它只有零解，从而方程组有唯一解

⋆3.3.2 差分解的稳定性与收敛性

- 定理3.2(比较定理) 设V_i和v_i满足

$$\begin{cases} L_hV_i \geq |L_hv_i|, & \text{当}i \in \Omega_h\text{时}; \\ V_i \geq |v_i|, & \text{当}i \in \Gamma_h\text{时} \end{cases} \tag{41}$$

则

$$V_i \geq |v_i|, i \in \bar{\Omega}_h. \tag{42}$$

Home Page

Title Page

Page 4 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

⋆3.3.2 差分解的稳定性与收敛性

- 定理3.2(比较定理) 设V_i和v_i满足

$$\begin{cases} L_hV_i \geq |L_hv_i|, & \text{当} i \in \Omega_h \text{时}; \\ V_i \geq |v_i|, & \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases} \tag{41}$$

则

$$V_i \geq |v_i|, i \in \bar{\Omega}_h. \tag{42}$$

证明：式(41)等价于

$$\begin{cases} L_h(V_i \pm v_i) \geq 0, & \text{当} i \in \Omega_h \text{时} \\ V_i \pm v_i \geq 0, & \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases}$$

由极值原理有

$$V_i \pm v_i \geq 0, i \in \bar{\Omega}_h,$$

亦即式(42)成立

⋆3.3.2 差分解的稳定性与收敛性

- 定理3.2(比较定理) 设V_i和v_i满足

$$\begin{cases} L_hV_i \geq |L_hv_i|, & \text{当} i \in \Omega_h \text{时}; \\ V_i \geq |v_i|, & \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases} \tag{41}$$

则

$$V_i \geq |v_i|, i \in \bar{\Omega}_h. \tag{42}$$

证明：式(41)等价于

$$\begin{cases} L_h(V_i \pm v_i) \geq 0, & \text{当} i \in \Omega_h \text{时} \\ V_i \pm v_i \geq 0, & \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases}$$

由极值原理有

$$V_i \pm v_i \geq 0, i \in \bar{\Omega}_h,$$

亦即式(42)成立

- 在定理3.2中，若取$v_i \equiv 0$,则得到下面推论

⋆3.3.2 差分解的稳定性与收敛性

- 定理3.2(比较定理) 设V_i和v_i满足

$$\begin{cases} L_hV_i \ge |L_hv_i|, & \text{当}i \in \Omega_h\text{时}; \\ V_i \ge |v_i|, & \text{当}i \in \Gamma_h\text{时} \end{cases} \tag{41}$$

则

$$V_i \ge |v_i|, i \in \bar{\Omega}_h. \tag{42}$$

证明：式(41)等价于

$$\begin{cases} L_h(V_i \pm v_i) \ge 0, & \text{当}i \in \Omega_h\text{时} \\ V_i \pm v_i \ge 0, & \text{当}i \in \Gamma_h\text{时} \end{cases}$$

由极值原理有

$$V_i \pm v_i \ge 0, i \in \bar{\Omega}_h,$$

亦即式(42)成立

- 在定理3.2中，若取$v_i \equiv 0$,则得到下面推论
- 推论3.1 设

$$\begin{cases} L_hV_i \ge 0, & \text{当}i \in \Omega_h\text{时} \\ V_i \ge 0, \text{当}i \in \Gamma_h\text{时} \end{cases}$$

则

$$V_i \ge 0, i \in \bar{\Omega}_h$$

对于差分方程组(35)的解进行估计，分别考虑下面三个方程组

$$\begin{cases} L_h u_i = 0, \text{当} i \in \Omega_h \text{时} \\ u_i = \phi_i, \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases} \tag{43}$$

$$\begin{cases} L_h u_i = \begin{cases} g_i, & \text{当} i \in \Omega_{h_1} \text{时} \\ 0, & \text{当} i \in \Omega_{h_2} \text{时} \end{cases} \\ u_i = 0, \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases} \tag{44}$$

$$\begin{cases} L_h u_i = \begin{cases} 0, & \text{当} i \in \Omega_{h_1} \text{时} \\ g_i, & \text{当} i \in \Omega_{h_2} \text{时} \end{cases} \\ u_i = 0, \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases} \tag{45}$$

由 定 理3.1,它 们 都 有 唯 一 解 。

对于差分方程组(35)的解进行估计，分别考虑下面三个方程组

$$\begin{cases} L_h u_i = 0, \text{当} i \in \Omega_h \text{时} \\ u_i = \phi_i, \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases} \tag{43}$$

$$\begin{cases} L_h u_i = \begin{cases} g_i, & \text{当} i \in \Omega_{h_1} \text{时} \\ 0, & \text{当} i \in \Omega_{h_2} \text{时} \end{cases} \\ u_i = 0, \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases} \tag{44}$$

$$\begin{cases} L_h u_i = \begin{cases} 0, & \text{当} i \in \Omega_{h_1} \text{时} \\ g_i, & \text{当} i \in \Omega_{h_2} \text{时} \end{cases} \\ u_i = 0, \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases} \tag{45}$$

由定理3.1,它们都有唯一解。如果把它们的解分别记为$u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, u_i^{(3)}$,则差分方程组(35)的解$u_i$可表示为

$$u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)} + u_i^{(3)}. \tag{46}$$

Home Page

Title Page

Page 5 of 10

Go Back

Full Screen

Close

Quit

对于差分方程组(35)的解进行估计，分别考虑下面三个方程组

$$\begin{cases} L_h u_i = 0, \text{当} i \in \Omega_h \text{时} \\ u_i = \phi_i, \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases} \tag{43}$$

$$\begin{cases} L_h u_i = \begin{cases} g_i, & \text{当} i \in \Omega_{h_1} \text{时} \\ 0, & \text{当} i \in \Omega_{h_2} \text{时} \end{cases} \\ u_i = 0, \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases} \tag{44}$$

$$\begin{cases} L_h u_i = \begin{cases} 0, & \text{当} i \in \Omega_{h_1} \text{时} \\ g_i, & \text{当} i \in \Omega_{h_2} \text{时} \end{cases} \\ u_i = 0, \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases} \tag{45}$$

由 定 理3.1,它 们 都 有 唯 一 解 。如 果 把 它 们 的 解 分 别 记为$u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, u_i^{(3)}$,则差分方程组(35)的解$u_i$可表示为

$$u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)} + u_i^{(3)}. \tag{46}$$

由于方程组(43)是齐次的，从而

$$u_i^{(i)} = \begin{cases} 0, & \text{当} i \in \Omega_h \text{时} \\ \phi_i, & \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases} \tag{47}$$

为了估计$u_i^{(2)}$,以坐标原点为中心做一个包围区域Ω的圆，设圆的半径为R,记

$$V_i = \frac{K}{4}(R^2 - x_i^2 - y_i^2), i \in \bar{\Omega}_h, \tag{48}$$

这里(x_i, y_i)是节点i的坐标，K是待定的正常数。

为了估计$u_i^{(2)}$,以坐标原点为中心做一个包围区域Ω的圆，设圆的半径为R,记

$$V_i = \frac{K}{4}(R^2 - x_i^2 - y_i^2), i \in \bar{\Omega}_h, \tag{48}$$

这里(x_i, y_i)是节点i的坐标，K是待定的正常数。
对于五点差分格式，当$i \in \Omega_{h_1}$时

$$L_h V_i = \frac{K}{4}(\frac{(x_i+h)^2 - 2x_i^2 + (x_i-h)^2}{h^2} + \frac{(y_i+\tau)^2 - 2y_i^2 + (y_i-\tau)^2}{\tau^2}) = K, \tag{49}$$

当$i \in \Omega_{h_2}$时，仍以图3.3为例，设$i = P, Q, S$为内点，R, T为边界点，对格式(13)

$$\begin{aligned} L_h V_i \geq & \frac{K}{4}[\frac{1}{h}(\frac{(x_i+h_2)^2 - x_i^2}{h_2} - \frac{x_i^2 - (x_i-h)^2}{h}) \\ & + \frac{1}{\tau}(\frac{(y_i+\tau_2)^2 - y_i^2}{\tau_2} - \frac{y_i^2 - (y_i-\tau)^2}{\tau}) \\ & = \frac{K}{4}(2 + \frac{h_2}{h} + \frac{\tau_2}{\tau}), \end{aligned} \tag{50}$$

类似地，对格式(16)

$$L_h V_i \geq \frac{K}{4}(1 + \frac{h_2}{h}), \tag{51}$$

对格式(17)

$$L_h V_i \geq \frac{K}{4}(1 + \frac{\tau_2}{\tau}). \tag{52}$$

式(50)~(52)可以统一地写成

$$L_h V_i = a_i K, a_i \geq \frac{1}{4}, i \in \Omega_{h_2}, \tag{53}$$

类似地，对格式(16)

$$L_h V_i \geq \frac{K}{4}(1+\frac{h_2}{h}), \tag{51}$$

对格式(17)

$$L_h V_i \geq \frac{K}{4}(1+\frac{\tau_2}{\tau}). \tag{52}$$

式(50)～(52)可以统一地写成

$$L_h V_i = a_i K, a_i \geq \frac{1}{4}, i \in \Omega_{h_2}, \tag{53}$$

于是由式(48)定义的V_i满足

$$\begin{cases} L_h V_i = \begin{cases} K, & \text{当} i \in \Omega_{h_1}\text{时}; \\ a_i K, & \text{当} i \in \Omega_{h_2}\text{时} \end{cases} \\ V_i \geq 0, \text{当} i \in \Gamma_h \text{时} \end{cases}$$

将上式同式(44)相比较，取$K = \max_{j\in\Omega_{h_1}} |g_j|$,并利用比较定理，得

$$|u_i^{(2)}| \leq V_i \leq \frac{R^2}{4} \max_{j\in\Omega_{h_1}} |g_j|, i \in \Omega_h, \tag{54}$$

最后估计$u_i^{(3)}$,设U_i满足

$$\begin{cases} L_hU_i = \begin{cases} 0, & \text{当} i \in \Omega_{h_1}\text{时}; \\ |g_i|, & \text{当} i \in \Omega_{h_2}\text{时} \end{cases} \\ U_i = 0, \text{当} i \in \Gamma_h\text{时} \end{cases}$$

将上式同(45)相比较，利用比较原理，得

$$|u_i^{(3)}| \le U_i, i \in \Omega_h.$$

现在估计U_i.由于$U_i \ge 0$,而当$i \in \Gamma_h$时$U_i = 0$,所以U_i的最大值一定在Ω_h内取到。如果只考虑内点集Ω_h,则非正则内点相对于正则内点来说就是边界点，显然Ω_{h_2}非空，又$L_hU = 0(i \in \Omega_{h_1})$,在$\Omega_h$上应用极值原理，得

$$\max_{i\in\Omega_{h_1}} U_i \le \max_{i\in\Omega_{h_2}} U_i.$$

设U_i在非正则内点k取到最大值，即$U_k = \max_{i\in\Omega_{h_2}} U_i$,于是

$$|g_k| = L_hU_k = a_{kk}U_k - \sum_{j\in U(k)} a_{kj}U_i \ge d_{kk}U_k$$

即

$$U_k \le \frac{|g_k|}{d_{kk}} \le \max_{j\in\Omega_{h_2}} \frac{|g_j|}{d_{jj}}.$$

从而

$$|u_i^{(3)}| \leq \max_{j\in\Omega_{h_2}} \frac{|g_j|}{d_{jj}}, i \in \Omega_h, \tag{55}$$

从式(46),(47),(54),(55)得到下面定理

- 定理3.3 差分方程组(35)的解满足

$$|u_i| \leq \frac{R^2}{4} \max_{j\in\Omega_{h_1}} |g_j| + \max_{j\in\Omega_{h_2}} \frac{|g_j|}{d_{jj}}, i \in \Omega_h,$$

$$u_i = \phi_i, i \in \Gamma_h.$$

从而

$$|u_i^{(3)}| \leq \max_{j\in\Omega_{h_2}} \frac{|g_j|}{d_{jj}}, i \in \Omega_h, \tag{55}$$

从式(46),(47),(54),(55)得到下面定理

- 定理3.3 差分方程组(35)的解满足

$$|u_i| \leq \frac{R^2}{4} \max_{j\in\Omega_{h_1}} |g_j| + \max_{j\in\Omega_{h_2}} \frac{|g_j|}{d_{jj}}, i \in \Omega_h,$$

$$u_i = \phi_i, i \in \Gamma_h.$$

- 对五点差分格式，有

$$\max_{i\in\Omega_{h_1}} |g_i| = \max_{i\in\Omega_{h_1}} |f_i|.$$

- 对于我们所考虑的非正则内点的几点情况((37)-(39)),有

$$\frac{1}{d_{ii}} \leq h_0^2$$

$$\frac{|g_i|}{d_{ii}} \leq \max_{j\in\Gamma_h} |\phi_j| + h_0^2 \max_{j\in\Omega_{h_2}} |f_j|, i \in \Omega_{h_2}. \tag{56}$$

- 定理3.3表明边值问题(1)、(2)的右端和边值是稳定的，亦即当f和ϕ有一个小的改变时，所引起的差分解的改变也是很小的。

- 定理3.3表明边值问题(1)、(2)的右端和边值是稳定的，亦即当f和ϕ有一个小的改变时，所引起的差分解的改变也是很小的。
- 定理3.4 设Poisson方程第一边值问题(1)、(2)的解$u(x,y) \in C^4(\bar{\Omega}), u_i$是五点差分方程组(35)的解，则存在常数$c$,使得

$$|u(i) - u_i| \leq ch_0^2, i \in \Omega_h,$$

- 定理3.3表明边值问题(1)、(2)的右端和边值是稳定的，亦即当f和ϕ有一个小的改变时，所引起的差分解的改变也是很小的。
- 定理3.4 设Poisson方程第一边值问题(1)、(2)的解$u(x,y) \in C^4(\bar{\Omega}), u_i$是五点差分方程组(35)的解，则存在常数$c$,使得

$$|u(i) - u_i| \leq ch_0^2, i \in \Omega_h,$$

- 定理3.4说明当$h_0 = \sqrt{h^2 + \tau^2} \to 0$时，五点差分格式的解收敛到原边值问题的解，并且收敛速度与h_0^2同阶。