《微分几何》课程电子课件

教师：杨勤民

Tel: (021)64253147

Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程QQ群号：1045698545

§6 曲面上的测地线

一、曲面曲线的测地曲率

二、曲面上的测地线

三、曲面上的半测地坐标网

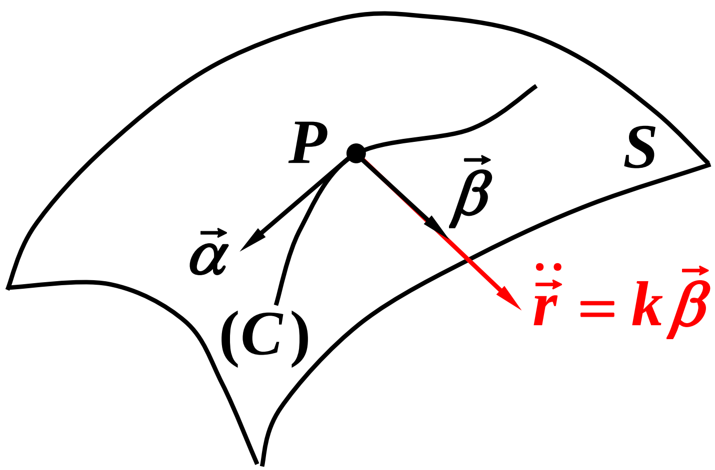
四、曲面上测地线的短程性

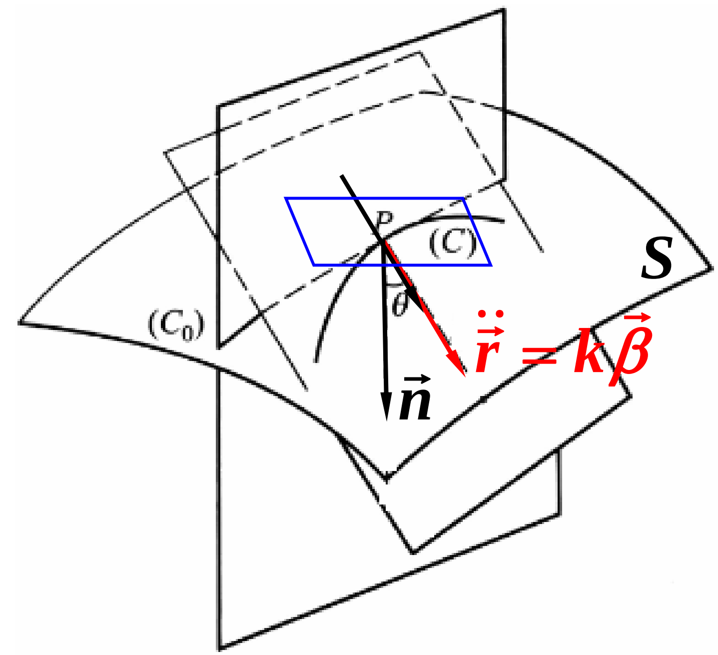
五、Gauss(高斯)-Bonnet(波涅)公式

六、曲面上向量的平行移动

七、极小曲面(了解一下即可)

回忆曲线的曲率和曲面曲线的曲率

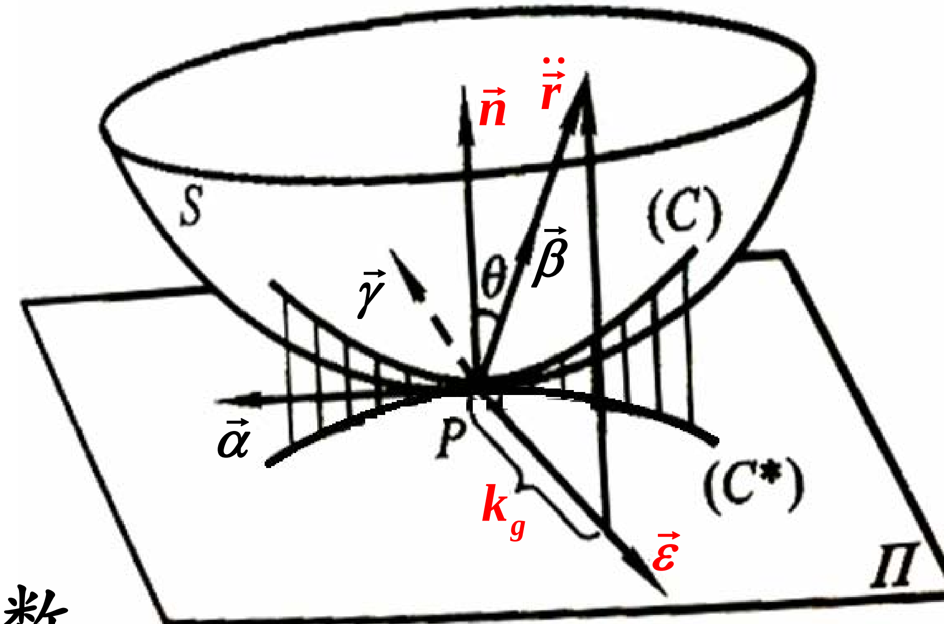




法曲率 $k_n = k\cos\theta$

测地曲率 $k_g = \pm k\sin\theta$

一、曲面曲线的测地曲率



曲面 S：$\vec{r}=\vec{r}(u^1,u^2)$

S上的曲线(C): $u^\alpha=u^\alpha(s)$

其中$\alpha=1,2$; s为(C)的自然参数.

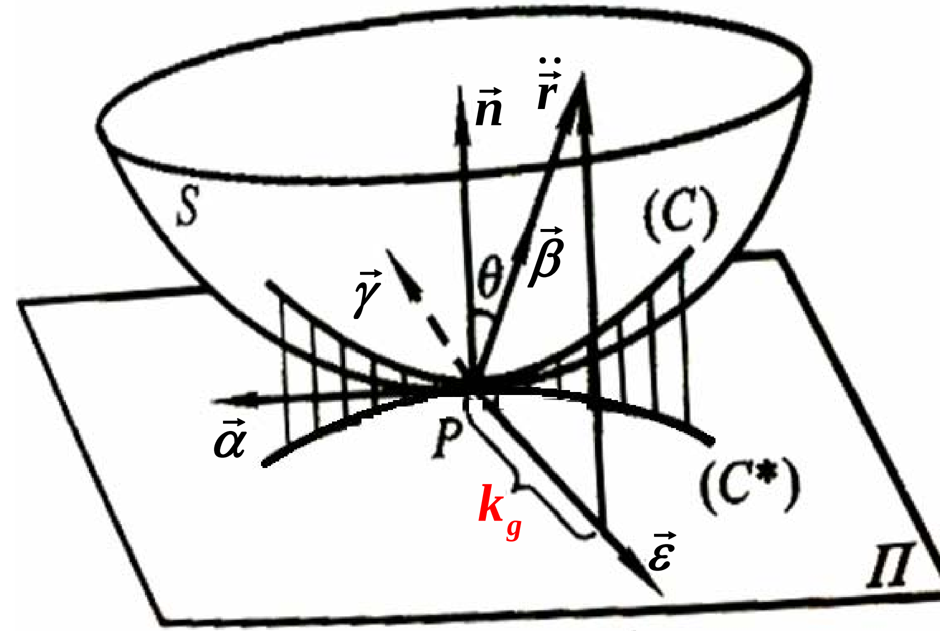
设点P对应参数值s, (C)在点P处的基本向量为$\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$.

$\vec{n}$为S在点P的单位法向量, θ为$\vec{\beta}$与$\vec{n}$之间的夹角.

称$\ddot{\vec{r}}=\dot{\vec{\alpha}}=k\vec{\beta}$为$(C)$在点$P$的曲率向量. 记$\vec{\varepsilon}=\vec{n}\times\vec{\alpha}$.

称曲率向量在$\vec{\varepsilon}$上的投影k_g为(C)在P点的测地曲率.

测地曲率的性质



$$k_g = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{\varepsilon} = k\vec{\beta} \cdot \vec{\varepsilon}$$

$$= k\vec{\beta} \cdot (\vec{n} \times \vec{\alpha}) = k(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{n})$$

$$= k(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{n} \ = k\, \vec{\gamma} \cdot \vec{n}$$

$$= \pm k \sin\theta.$$

注意到法曲率$k_n = k\cos\theta$,因此

P96命题1 $k^2 = k_g^2 + k_n^2.$

P96命题2 曲面S上的曲线(C)在点P的测地曲率的绝对值等于(C)在点P的切平面π上的正投影曲线(C^*)的曲率.

测地曲率的计算

它也可作为k_g的定义

$$k_g = k(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{n}) = (\vec{\alpha},k\vec{\beta},\vec{n}) = \boxed{(\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}},\vec{n})}.$$

$$\vec{r} = \vec{r}(u^1(s),u^2(s)), \qquad \dot{\vec{r}} = \sum_i \dot{u}^i\vec{r}_i,$$

$$\ddot{\vec{r}} = \sum_i [\ddot{u}^i\vec{r}_i + \dot{u}^i(\sum_j \vec{r}_{ij}\dot{u}^j)] = \sum_{i,j}\dot{u}^i\dot{u}^j\vec{r}_{ij} + \sum_i \ddot{u}^i\vec{r}_i$$

$$= \sum_{i,j}\dot{u}^i\dot{u}^j(\sum_k \Gamma_{ij}^k\vec{r}_k + L_{ij}\vec{n}) + \sum_i \ddot{u}^i\vec{r}_i$$

$$= \sum_{i,j,k}\Gamma_{ij}^k\dot{u}^i\dot{u}^j\vec{r}_k + \sum_{i,j}L_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\vec{n} + \sum_k \ddot{u}^k\vec{r}_k$$

$$= \sum_k(\ddot{u}^k + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\dot{u}^i\dot{u}^j)\vec{r}_k + \sum_{i,j}L_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\vec{n}.$$

测地曲率的计算

$$k_g = k(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{n}) = (\vec{\alpha},k\vec{\beta},\vec{n}) = (\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}},\vec{n}).$$

$$= (\sum_i \dot{u}^i\vec{r}_i,\ \sum_k(\ddot{u}^k + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\dot{u}^i\dot{u}^j)\vec{r}_k + \sum_{i,j}L_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\vec{n},\ \vec{n})$$

$$= (\dot{u}^1\vec{r}_1,\ (\ddot{u}^2 + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^2\dot{u}^i\dot{u}^j)\vec{r}_2,\ \vec{n})$$

$$+ (\dot{u}^2\vec{r}_2,\ (\ddot{u}^1 + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^1\dot{u}^i\dot{u}^j)\vec{r}_1,\ \vec{n})$$

$$= \dot{u}^1(\ddot{u}^2 + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^2\dot{u}^i\dot{u}^j)(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{n}) - \dot{u}^2(\ddot{u}^1 + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^1\dot{u}^i\dot{u}^j)(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{n})$$

$$= \sqrt{g}[\dot{u}^1(\ddot{u}^2 + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^2\dot{u}^i\dot{u}^j) - \dot{u}^2(\ddot{u}^1 + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^1\dot{u}^i\dot{u}^j)]$$

测地曲率的计算

$$k_g = \sqrt{g}\begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s} & \dfrac{\mathrm{d}^2u^1}{\mathrm{d}s^2} + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^1 \dfrac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s} \\ \dfrac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s} & \dfrac{\mathrm{d}^2u^2}{\mathrm{d}s^2} + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^2 \dfrac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s} \end{vmatrix} \quad (为曲面的内蕴量)$$

当曲纹坐标网为正交网,即$F \equiv 0$时,

$$k_g = \sqrt{g}[\dot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\dot{v} + \frac{G_u}{2E}(\dot{v})^3 - \frac{E_v}{2G}(\dot{u})^3$$

$$+ (\frac{G_u}{G} - \frac{E_u}{2E})(\dot{u})^2\dot{v} + (\frac{G_v}{2G} - \frac{E_v}{E})\dot{u}(\dot{v})^2]$$

Liouville(刘维尔)公式

设曲面S的曲纹坐标网为正交网，因而曲面的的第一基本形式是$I = E\,\mathrm{d}u^2 + G\,\mathrm{d}v^2$．设$(C)$：$u = u(s), v = v(s)$是曲面$S$上的一条曲线，其中$s$是弧长参数．假定$(C)$与$u$-曲线的交角是$\theta(s)$，则曲线$(C)$的测地曲率是

$$k_g = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \boxed{-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}} \cos\theta + \boxed{\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u}} \sin\theta$$

还可写为$k_g = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + k_{g_u}\cos\theta + k_{g_v}\sin\theta$

其中k_{g_u}和k_{g_v}分别为u-曲线和v-曲线的测地曲率.

证 $\left.\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \frac{\vec{r}_u}{\sqrt{E}}\cos\theta + \frac{\vec{r}_v}{\sqrt{G}}\sin\theta \\ \dot{\vec{r}} &= \vec{r}_u\dot{u} + \vec{r}_v\dot{v} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{E}} \\ \dot{v} = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{G}} \end{cases}$

$$\ddot{u} = \frac{-\sin\theta}{\sqrt{E}}\dot{\theta} - \frac{\sqrt{E}\cos\theta}{E^2}\left(E_u\frac{\cos\theta}{\sqrt{E}} + E_v\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}\right)$$

$$\ddot{v} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{G}} - \frac{\sqrt{G}\sin\theta}{G^2}\left(G_u\frac{\cos\theta}{\sqrt{E}} + G_v\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}\right)$$

$$k_g = \sqrt{g}[\dot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\dot{v} + \frac{G_u}{2E}(\dot{v})^3 - \frac{E_v}{2G}(\dot{u})^3$$

$$+ (\frac{G_u}{G} - \frac{E_u}{2E})(\dot{u})^2\dot{v} + (\frac{G_v}{2G} - \frac{E_v}{E})\dot{u}(\dot{v})^2]$$

$$= \dot{\theta} - \frac{E_v}{2E\sqrt{G}}\cos\theta + \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}\sin\theta$$

$$= \dot{\theta} - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u}\sin\theta.$$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.29 求半径为 R 的球面上半径为 a 的圆的测地曲率.

2.30 求位于正螺面 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=av$ 上的圆柱螺线 $x=u_0\cos v, y=u_0\sin v, z=av$ (u_0为常数)的测地曲率.

2.31 设曲面S上的曲率线(C)上的点P不是S的抛物点.
证明:(C)在点P的测地曲率的绝对值等于在S的球面映射下(C)的像在对应点的测地曲率与S在点P沿(C)的切向的法曲率之积的绝对值.

二、曲面上的测地线

平面上的直线 ⟶ 曲面上的测地线

平面上的直线:①任一点的切向量平行; ②曲率为零;

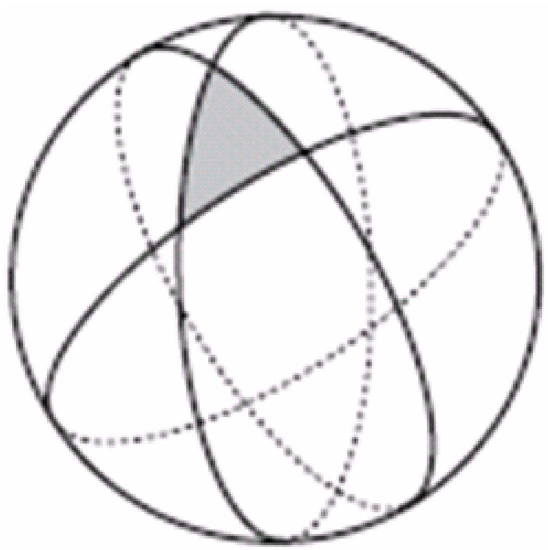
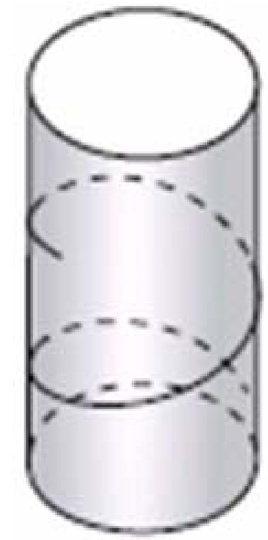
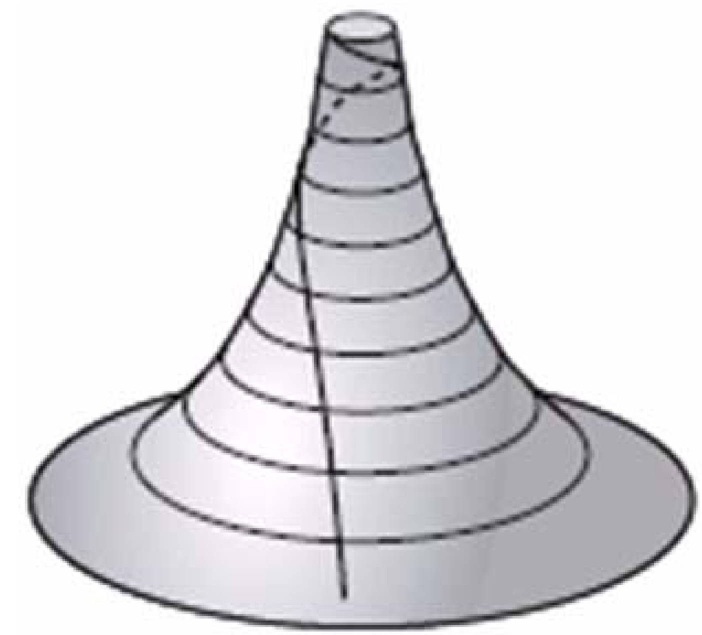
③直线段是连接点与点之间的最短线段.

曲面上测地曲率恒等于零的曲线称为该曲面的**测地线**.

例 曲面上的直线一定是该曲面的测地线.

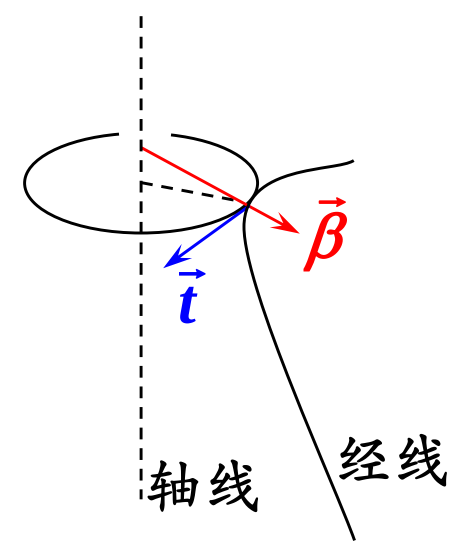
P98命题3 曲面上非直线的曲线是测地线的充要条件是除了曲率为零的点外, **曲线的主法线重合于曲面的法线**.

P98推论 如果两曲面沿一条曲线相切,并且此曲线是其中一个曲面的测地线,那么它也是另一个曲面的测地线.

例 旋转曲面S上的经线(子午线)是该曲面S的测地线.

证 设经线,轴线,主法线共面于平面π.



$$\left.\begin{array}{r} \text{则平行圆的切向量}\ \vec{t}\perp\pi \\ \vec{\beta}\perp\text{经线的切向} \end{array}\right\}\Rightarrow \vec{\beta}\,//\,\vec{n}$$

$\Rightarrow$ 经线的主法线重合于曲面的法线,

因此经线是旋转面上的测地线.

例 如果在曲面S上运动的质点P只受到将它约束在S上的力的作用，则点P的轨迹(C)是S上的测地线.

证 设P的轨迹(C)的方程为$\vec{r}(t)$，约束力为$\vec{F}(t)$.

由牛顿第二运动定律，$\vec{F}(t)=m\vec{r}''(t)$ (m为质点的质量).

由题目条件，$\vec{F}(t)\perp\vec{r}'(t)$.

于是
$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}''(t)\perp\vec{r}'(t) \Rightarrow \vec{r}''(t)\,//\,\vec{\beta}(t)\\ \vec{r}''(t)\,//\,\vec{F}(t)\,//\,\vec{n}(t)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{\beta}(t)\,//\,\vec{n}(t).$$

(C)的主法线重合于曲面的法线，因此(C)是S上的测地线.

测地线的微分方程

测地线$\vec{r}=\vec{r}(u^1(s),u^2(s))$上的点满足$\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{r}_l=0\ (l=1,2)$

$$\ddot{\vec{r}}=\sum_k\left(\frac{\mathrm{d}^2u^k}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\right)\vec{r}_k+\sum_{i,j}L_{ij}\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\vec{n}$$

从而$\displaystyle\sum_k g_{kl}\left(\frac{\mathrm{d}^2u^k}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\right)=0\quad(l=1,2)$

又$\because g\neq 0,\therefore$得到测地线的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2u^k}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}=0\quad(k=1,2)$$

P99定理 过曲面上任一点,给定曲面的一个切方向,则**存在唯一**一条测地线切于此方向.

证明 满足方程
$$\frac{\mathrm{d}^2u^k}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}=0\quad(k=1,2)$$
的曲线都是测地线(各点的测地曲率为零).

给出曲面上的一个点和该点处的一个切方向,

相当于给出了初始条件: $u^k(s_0)=u_0^k,\ \frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}s}(s_0)=t_0^k$.

由常微分方程的理论知该初值问题有且仅有唯一解,

即有且仅有一条过给定点且切于给定切方向的测地线.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.32 求正螺面$\vec{r}(u,v)=\{u\cos v, u\sin v, av\}$上的测地线.

2.33 利用刘维尔公式证明:

(1)平面上的测地线为直线;

(2)圆柱面上的测地线为圆柱螺线.

2.34 证明: 若曲面上非直线的所有测地线均为平面曲线, 则这样的测地线必为曲率线.

三、曲面上的半测地坐标网

如果曲面上的曲纹坐标网是正交网，且其中一族曲线是测地线，则称这个坐标网为**半测地坐标网**.

P100命题4 给出曲面上一条曲线，则总存在一个半测地坐标网，使得它的非测地坐标曲线族中包含给定的这条曲线.

证 过曲面上给定的曲线(C)的每一点，沿着(C)，

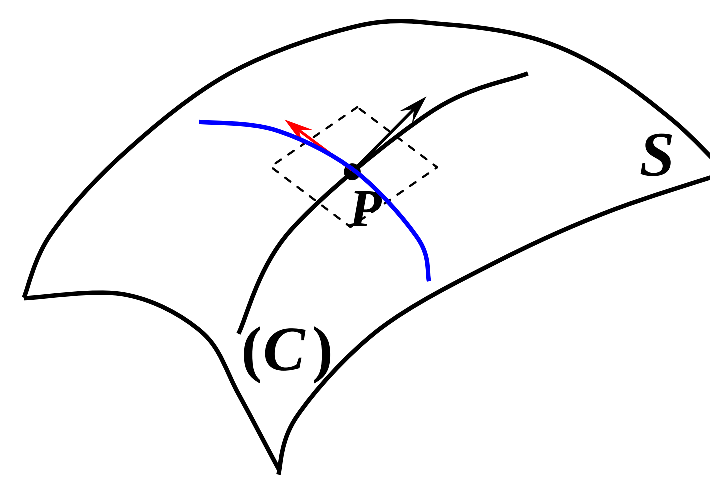
在切平面上对于垂直于(C)的切线方向，

存在曲面的唯一一条测地线，

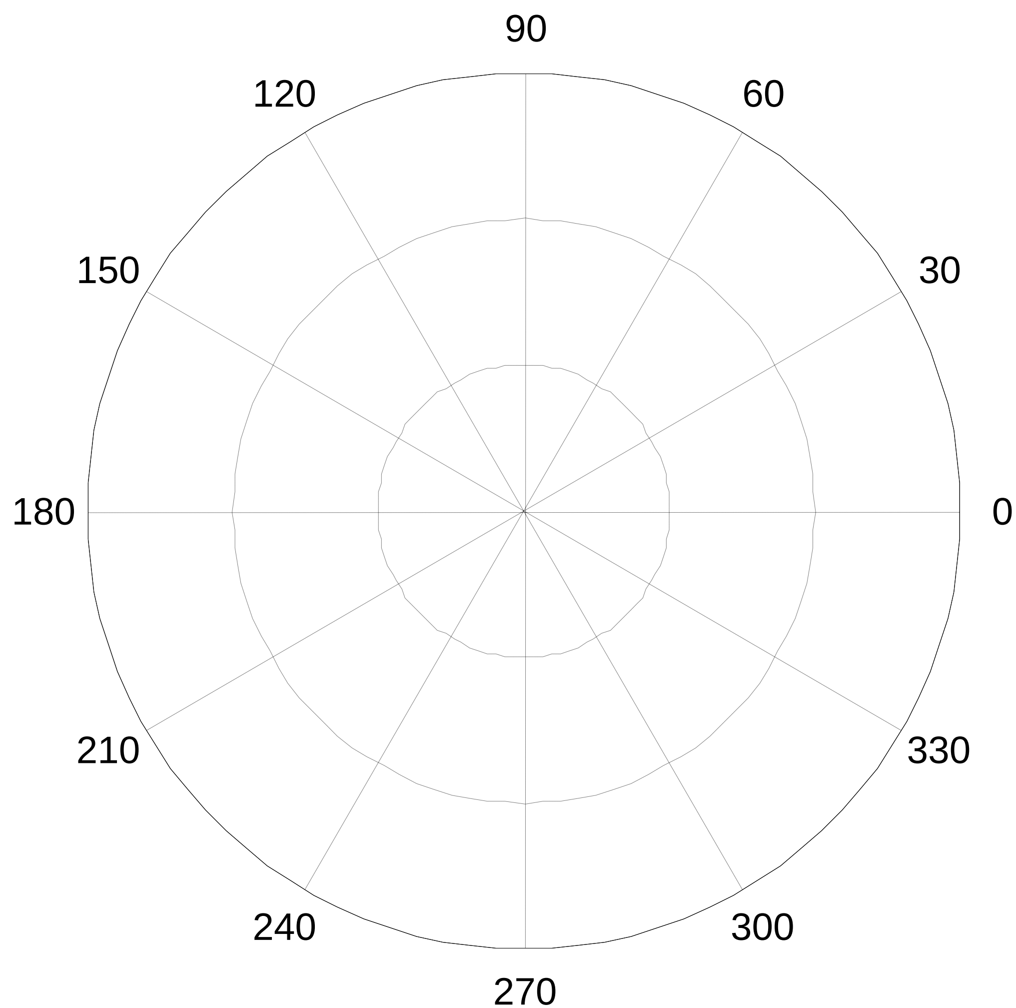
于是得到与(C)正交的测地线族.

再作这一族测地线的正交轨线，

它必定包含了给定的曲线(C).



半测地坐标网是平面上的极坐标网在曲面上的推广.



半测地坐标网条件下的曲面第一基本形式

取曲面上的一条测地线(C)为v-曲线：$u=u_0$，再取与(C)正交的测地线族为u-曲线族，另取该测地线族的正交轨线族为v-曲线族，则得一半测地坐标网．对于这个坐标网而言，曲面的第一基本形式可以简化为$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2$，其中$G(u,v)$满足条件$G(u_0,v)=1, G_u(u_0,v)=0$.

并且这里的参数u,v具有如下几何意义：

u-曲线上介于$u=c_1$和$u=c_2$之间的弧长为$|c_2-c_1|$;

在曲线$u=u_0$上介于$v=d_1$和$v=d_2$之间的弧长为$|d_2-d_1|$.

证 设u-曲线是测地线，则$u^2=c$应满足测地线的微分方程

$$\ddot{u}^2+\sum_{j,k}\Gamma^2_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k=0.$$

$$-\frac{E_v}{2G}$$

将$\dot{u}^2=0,\ \ddot{u}^2=0$代入得$\Gamma^2_{11}\dot{u}^1\dot{u}^1=0$, 即$\boxed{\Gamma^2_{11}}=0\Rightarrow E_v=0.$

则可设 $E=\varphi(u)$. 引入新参数$\bar{u}$使得$\mathrm{d}\bar{u}=\sqrt{\varphi(u)}\,\mathrm{d}u$,

则第一基本形式$\mathrm{d}s^2=E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2=\mathrm{d}\bar{u}^2+\bar{G}(\bar{u},v)\mathrm{d}v^2.$

参数$\bar{u}$的几何意义：在测地线$v=$常数上，两条正交轨线

$\bar{u}=c_1$和$\bar{u}=c_2$之间测地线的长度为$\left|\int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}\bar{u}\right|=|c_2-c_1|.$

设确定半测地坐标网的曲线(C)的参数表示为$\bar{u}=u_0$,

引入新参数$\bar{v}$使得$\mathrm{d}\bar{v}=\sqrt{\bar{G}(u_0,v)}\,\mathrm{d}v$.

则 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\bar{u}^2+\bar{G}(\bar{u},v)\mathrm{d}v^2=\mathrm{d}\bar{u}^2+\bar{\bar{G}}(\bar{u},\bar{v})\mathrm{d}\bar{v}^2$.

参数$\bar{v}$的几何意义: 在曲线$(C)(\bar{u}=u_0)$上, $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\bar{v}^2$,

(C)上介于$\bar{v}=d_1$和$\bar{v}=d_2$之间的弧长为$\left|\int_{d_1}^{d_2}\mathrm{d}\bar{v}\right|=|d_2-d_1|$.

进一步选(C)是一条测地线$\bar{u}=u_0$,

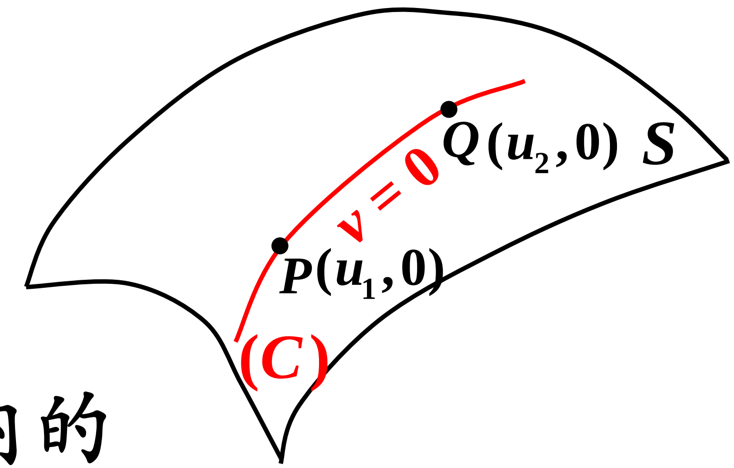
$-\dfrac{G_u}{2E}$

代入测地线的微分方程$\ddot{u}^1+\sum\limits_{j,k}\Gamma^1_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k=0$ 得$\left.\boxed{\Gamma^1_{22}}\right|_{u=u_0}=0$.

因此 $\bar{\bar{G}}_u(u_0,\bar{v})=0$.

四、曲面上测地线的短程性

P101定理 若给出曲面上充分小邻域内的两点P和Q，则过P, Q两点在小邻域内的测地线段是连接P, Q两点的曲面上的曲线中弧长最短的曲线.



证 如右图所示，设(C)是曲面上小邻内连接P, Q两点的测地线.

选取半测地坐标网，使得包含(C)在内的一族测地线为u-曲线族，它的正交轨线族为v-曲线族.

则曲面的第一基本形式可以为$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + G(u,v)\mathrm{d}v^2$.

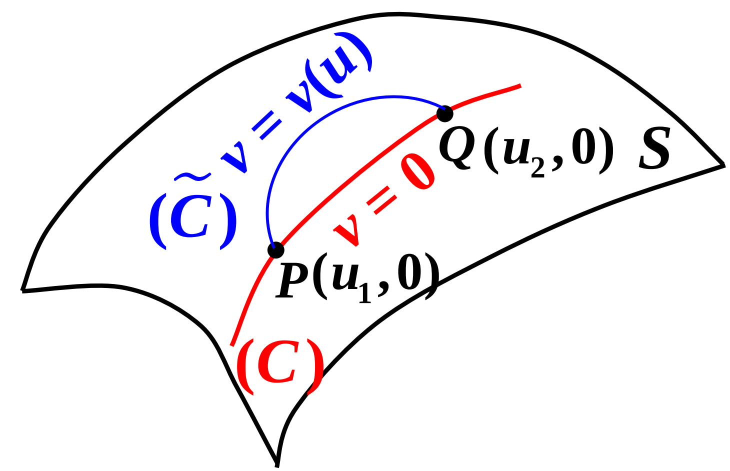
不妨设(C)的曲纹坐标方程为$v=0$，

P和Q的曲纹坐标为$(u_1, 0)$和$(u_2, 0)$，且$u_1 < u_2$.

则测地线(C)在P,Q之间的这一段弧长为$s_0=u_2-u_1$.

设$(\widetilde{C})$为该曲面上连接P,Q两点的任意一条曲线,

它的曲纹坐标方程为$v=v(u)$.



则$(\widetilde{C})$在P,Q之间的这一段弧长为

$$s=\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{1+G(u,v(u))v'^2(u)}\mathrm{d}u$$

$$\geq\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{1+0}\mathrm{d}u=s_0$$

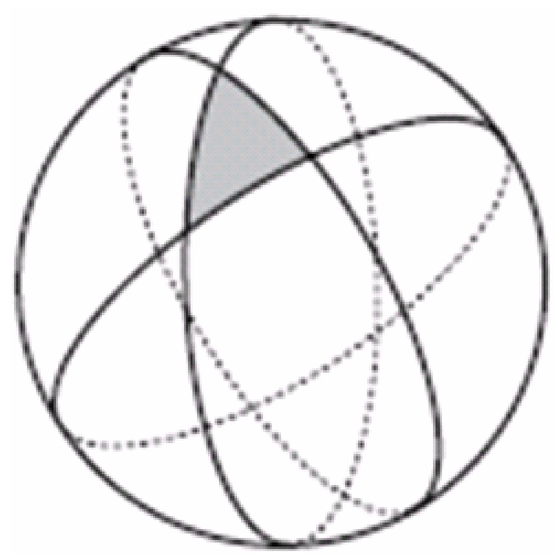
只有当$v'(u)\equiv 0$时等号成立,此时$(\widetilde{C})$与(C)重合.

因此(C)是在这个小邻域内连接P,Q两点的最短曲面曲线.

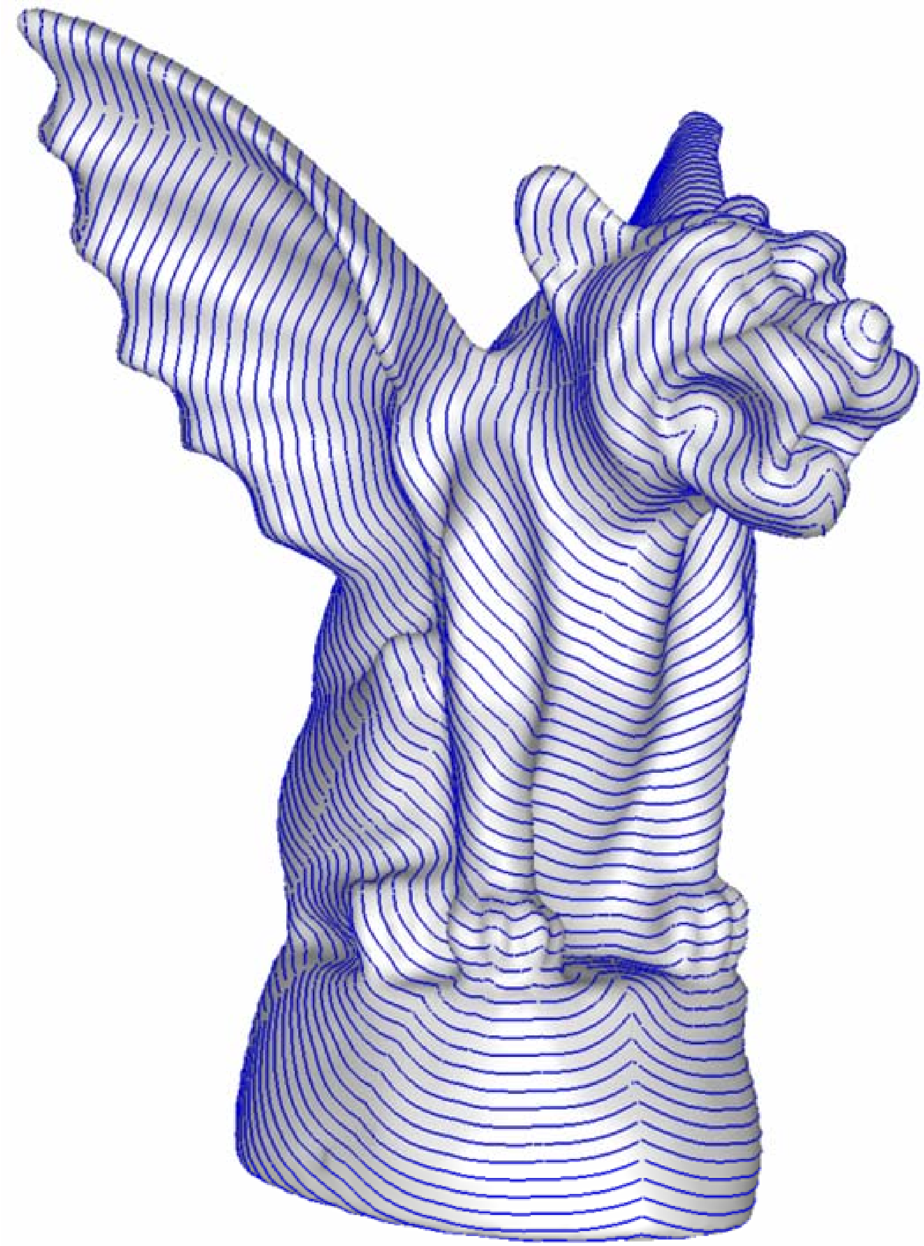
注

在不是充分小的邻域内, 该定理不一定成立.

例如球面上的大圆是测地线, 所以球面上不是直径两端的两点, 连结它们的大圆弧有两段, 显然长的不是连结它们两点的最短线, 而短的是.

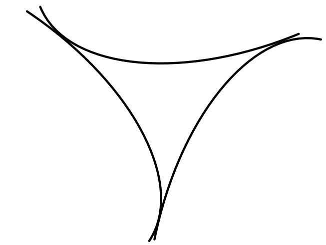


测地线族与它的正交轨线族示例

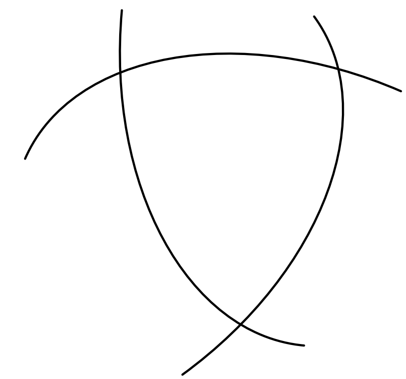


Ref: Fast Exact and Approximate Geodesics on Meshes

五、Gauss-Bonnet(高斯-波涅)公式



在平面上，三角形的内角和等于π，但在曲面上的情形可能不大一样，如图．这一节就是把平面上的结果推广到曲面上去．



在曲面S上给出一个由l条光滑曲线段所围成的曲边多边形∂G，它围成了一个单连通曲面域G．设S的高斯曲率和∂G的测地曲率分别为K和k_g，曲面的面积元素和弧长元素分别为$\mathrm{d}\sigma$和$\mathrm{d}s$，则有

$$\iint_G K\mathrm{d}\sigma+\oint_{\partial G}k_g\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{l}(\pi-\alpha_i)=2\pi \qquad \text{(Gauss-Bonnet公式)}$$

其中α_i是∂G的第i个内角的弧度数．

P111习题13 若$ds^2 = du^2 + G dv^2$，则

$$k_g ds = d\left[\arctan\left(\sqrt{G}\frac{dv}{du}\right)\right] + (\sqrt{G})_u dv$$

证明: 由于坐标网正交，$F = 0$，由Liouville公式

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u}\sin\theta,$$

和$E = 1$知 $k_g ds = d\theta + \frac{G_u}{2G}\sin\theta ds = d\theta + (\sqrt{G})_u \frac{\sin\theta}{\sqrt{G}} ds$

由$\frac{du}{ds} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{E}} = \cos\theta$ 和 $\frac{dv}{ds} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}$ (P97)

知$\theta = \arctan\left(\sqrt{G}\frac{dv}{du}\right)$. 代入即得结论.

Gauss-Bonnet公式的证明

在曲面上引进半测地坐标网，使得 $ds^2 = du^2 + G dv^2$，

由刚证的结论知 $k_g ds = d\left[\arctan\left(\sqrt{G}\frac{dv}{du}\right)\right] + (\sqrt{G})_u dv$

两边沿边缘 ∂G 积分得到

$$\oint_{\partial G} k_g ds + \oint_{\partial G} -(\sqrt{G})_u dv = \oint_{\partial G} d\left[\arctan(\sqrt{G}\frac{dv}{du})\right] \qquad (*)$$

对第二个积分应用Green公式得到

$$\oint_{\partial G} -(\sqrt{G})_u dv = \iint_G -(\sqrt{G})_{uu} du dv$$

由P91中Gauss曲率的表达式知 $K = -\dfrac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}$

$$\Rightarrow -(\sqrt{G})_{uu} = K\sqrt{G} \qquad 而 d\sigma = \sqrt{g} du dv,\ g = G$$

因此$\oint_{\partial G} -(\sqrt{G})_u \mathrm{d}v = \iint_G -(\sqrt{G})_{uu} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_G K\mathrm{d}\sigma$

设∂G的$\vec{\alpha}$和u-曲线所成的角为θ

由$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{E}} = \cos\theta$知$\cos\theta = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}$ (P97)

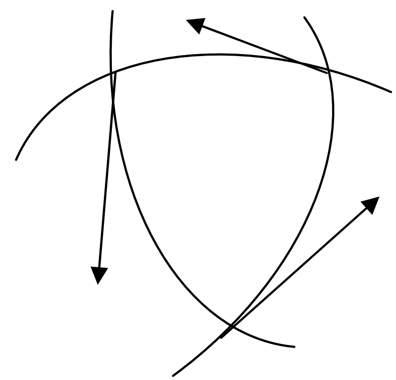
由$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{G}}$知$\sin\theta = \sqrt{G}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$

因此$\tan\theta = \sqrt{G}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\sqrt{G}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)$

(*)式中的第三个积分$\oint_{\partial G} \mathrm{d}\left[\arctan(\sqrt{G}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u})\right] = \oint_{\partial G} \mathrm{d}\theta$

(*)式变为 $\oint_{\partial G} k_g \mathrm{d}s + \iint_G K \mathrm{d}\sigma = \oint_{\partial G} \mathrm{d}\theta$

绕∂G一周,θ的增量是2π,即边界曲线的切向量转了2π,



这个2π等于分段曲线所转过的角度之和加上所有外角

即 $\oint_{\partial G} \mathrm{d}\theta + (\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + \cdots + (\pi - \alpha_l) = 2\pi$

故(*)式变成 $\oint_{\partial G} k_g \mathrm{d}s + \iint_G K \mathrm{d}\sigma + \sum_{i=1}^{l} (\pi - \alpha_i) = 2\pi.$

推论1 如果∂G为一条**光滑曲线**，则外角为零，有

$$\oint_{\partial G} k_g \mathrm{d}s + \iint_G K \mathrm{d}\sigma = 2\pi$$

推论2 如果∂G为一个测地三角形，即它的三条边由三条**测地线**组成，则有

$$\iint_G K \mathrm{d}\sigma = 2\pi - (\pi - \alpha_1) - (\pi - \alpha_2) - (\pi - \alpha_3)$$

$$= 2\pi - 3\pi + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = S(\Delta) - \pi,$$

其中 $S(\Delta)$ 表示测地三角形的内角和.

可见 $K > 0 \Rightarrow S(\Delta) > \pi$

$K = 0 \Rightarrow S(\Delta) = \pi$

$K < 0 \Rightarrow S(\Delta) < \pi$

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.35 求半径为R的曲面上测地三角形三内角之和.

2.36 利用高斯-波涅公式证明: 若曲面上存在两族夹角为定角的测地线, 则它的高斯曲率处处为零.

2.37 若曲面的高斯曲率处处小于零, 则该曲面上不存在围成单连通区域的光滑的闭测地线.

六、曲面上向量的平行移动

曲面上的测地线相当于平面上的直线，简单对比：

平面直线	曲面上的测地线
①曲率为零;	①测地曲率为零;
②两点间最短距离是直线段的长度;	②两点间(小范围)最短距离是测地线的长度;
③给定一个方向和一点决定一条直线.	③给定一个方向和一点决定一条测地线.

直线上任一点处的切向量都是平行的，该性质是否也可以推广到曲面的测地线上？另一个问题是：平面中的向量平移具有两条基本的性质：保持线性关系和保持内积. 曲面上的平移至少要保持这两个性质.

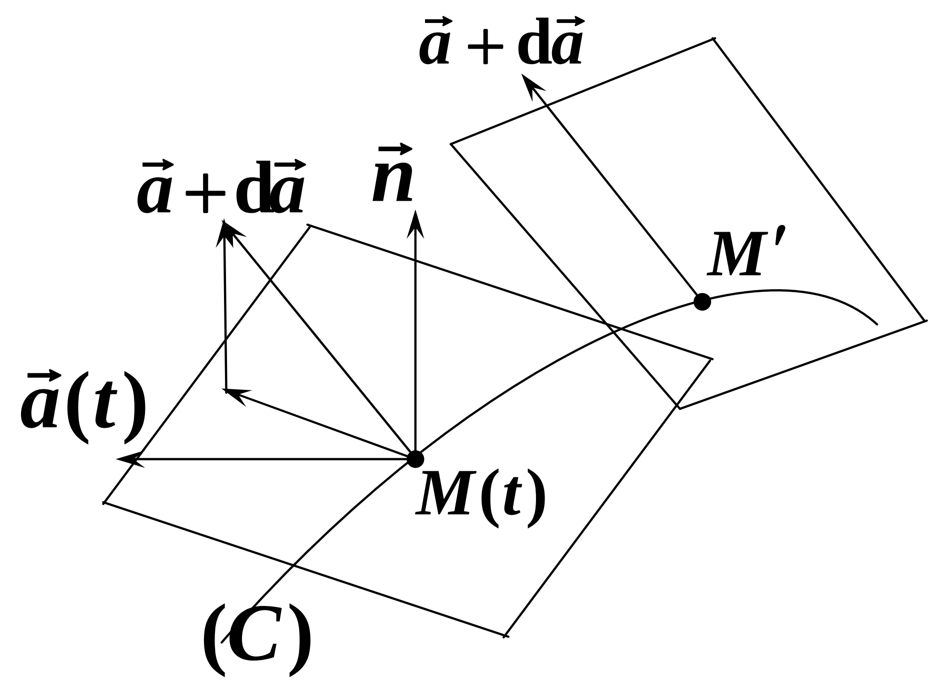
1. 曲面上切向量的平行移动

A. 绝对微分与 Levi-Civita (列维-奇维塔)平移

曲面S上的曲线$(C): u^i = u^i(t), (i=1,2)$

$\forall t$, 给出曲面在(C)上的点$M(t)$处的一个切向量$\vec{a}(t)$.

当把点M在(C)上的邻近点M'处的切向量$\vec{a}(t)+\mathrm{d}\vec{a}(t)$平移至点$M$处时，这个向量一般来说不在点$M$的切平面上. 现将$\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a}$分解为在切平面上的和沿曲面法向$\vec{n}$方向的两个分量.



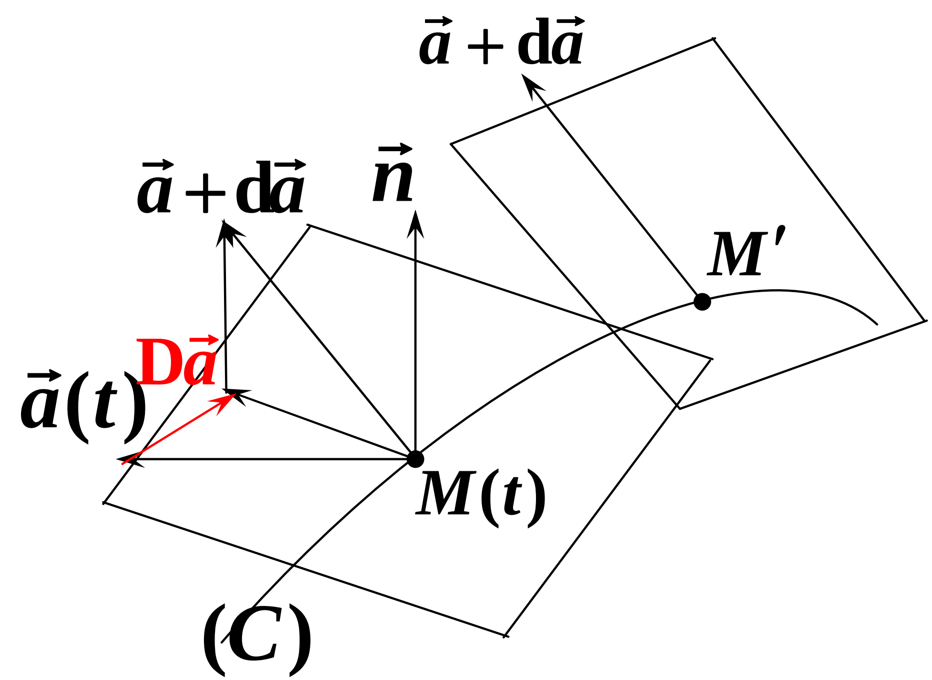
沿法线方向的分量为$[(\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a})\cdot\vec{n}]\vec{n}=(\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{a})\vec{n}$

沿切平面的分量为$(\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a})_t=\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a}-(\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{a})\vec{n}$

定义$\vec{a}(t)$从点M沿曲线(C)移动到点M'的绝对微分为

$$\mathrm{D}\vec{a}\triangleq(\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a})_t-\vec{a}=\mathrm{d}\vec{a}-(\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{a})\vec{n}.$$

当$\mathrm{D}\vec{a}=\vec{0}$时，把向量$\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a}$投影到点$M$的切平面上时得到向量$\vec{a}$. 这时称向量$\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a}$是向量$\vec{a}$从点$M$沿$(C)$的方向到邻近点$M'$经过平行移动而得到的向量. 此时称$\vec{a}$与$\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a}$为沿$(C)$在Levi-Civita意义下的平行向量.



B. 绝对微分与平行移动的分析表达式

设 $\vec{a}(t)=a^1(t)\vec{r}_1(t)+a^2(t)\vec{r}_2(t)=\sum_i a^i\vec{r}_i$

则 $\mathrm{d}\vec{a}=\sum_i(\mathrm{d}a^i\vec{r}_i+a^i\mathrm{d}\vec{r}_i)=\sum_i(\mathrm{d}a^i\vec{r}_i+a^i\sum_j\vec{r}_{ij}\mathrm{d}u^j)$

$$=\sum_i\left[\mathrm{d}a^i\vec{r}_i+a^i\sum_j\left(\sum_k\Gamma_{ij}^k\vec{r}_k+L_{ij}\vec{n}\right)\mathrm{d}u^j\right]$$

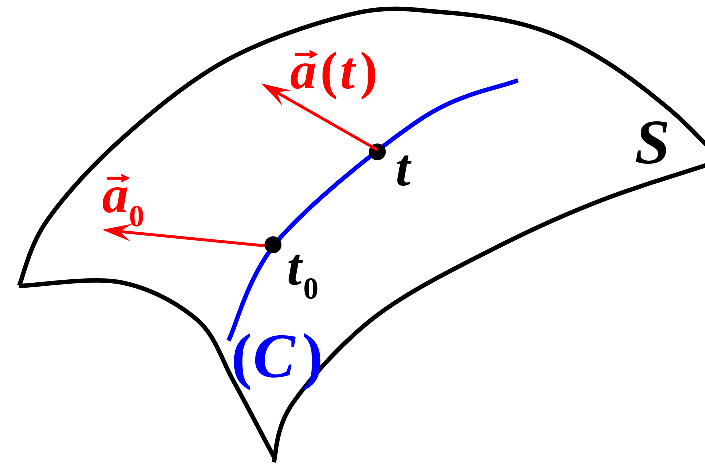
$$=\sum_i\left(\mathrm{d}a^i+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^i a^\alpha\mathrm{d}u^\beta\right)\vec{r}_i+(\cdots\cdots)\vec{n}$$

$$\therefore\ \mathrm{D}\vec{a}=\sum_i\left(\mathrm{d}a^i+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^i a^\alpha\mathrm{d}u^\beta\right)\vec{r}_i.$$

当 $\mathrm{D}\vec{a}=\vec{0}$ 时, $\mathrm{d}a^i=-\sum_{\alpha,\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^i a^\alpha\mathrm{d}u^\beta\quad(i=1,2)$

沿着已知的曲面曲线(C)的平行移动总可以唯一地实现

曲面S上的曲线(C): $u^i = u^i(t)$.



在$t=t_0$处, 给定曲面的一切向量$\vec{a}_0$,

初值问题$\begin{cases} \mathrm{d}a^i = -\sum\limits_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}a^\alpha \mathrm{d}u^\beta \quad (i=1,2) \\ \vec{a}(t_0) = \vec{a}_0 \end{cases}$存在唯一解$\vec{a}(t)$.

即存在(C)上唯一的向量场$\vec{a}(t)$,

在(C)上的每点处都满足平行移动的条件.

C. 绝对微分的运算性质

P112习题19 设$\vec{a}(t),\vec{b}(t)$是定义在曲面上某曲线(C)上的切于曲面的向量场, $f(t)$是定义在(C)上的数量场, 则

(1) $\mathrm{D}(\vec{a}+\vec{b})=\mathrm{D}\vec{a}+\mathrm{D}\vec{b}$

(2) $\mathrm{D}(f\vec{a})=(\mathrm{d}f)\vec{a}+f\,\mathrm{D}\vec{a}$

(3) $\mathrm{d}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\mathrm{D}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\mathrm{D}\vec{b}$

由公式 $\mathrm{D}\vec{a}=\sum_i\left(\mathrm{d}a^i+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}a^\alpha\mathrm{d}u^\beta\right)\vec{r}_i$ 可直接验证上述运算, 下面只证(3).

证明: $\mathrm{D}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\mathrm{D}\vec{b}$

$$=\sum_i(\mathrm{d}a^i+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}a^\alpha\mathrm{d}u^\beta)\vec{r}_i\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\sum_i(\mathrm{d}b^i+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}b^\alpha\mathrm{d}u^\beta)\vec{r}_i$$

$$=\sum_i(\mathrm{d}a^i+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}a^\alpha\mathrm{d}u^\beta)\vec{r}_i\cdot\sum_j b^j\vec{r}_j$$

$$+\sum_i a^i\vec{r}_i\cdot\sum_j(\mathrm{d}b^j+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^j_{\alpha\beta}b^\alpha\mathrm{d}u^\beta)\vec{r}_j$$

$$=\sum_{i,j}\mathrm{d}a^i\cdot b^j g_{ij}+\sum_{i,j}a^i\mathrm{d}b^j g_{ij}+\sum_{i,j}\sum_{\alpha,\beta}a^\alpha b^j g_{ij}\Gamma^i_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\beta$$

$$+\sum_{i,j}\sum_{\alpha,\beta}a^i b^\alpha g_{ij}\Gamma^j_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\beta$$

$$=\sum_{i,j}g_{ij}\mathrm{d}a^i\cdot b^j+\sum_{i,j}g_{ij}a^i\cdot\mathrm{d}b^j+\sum_{i,j,\alpha,\beta}(\Gamma^\alpha_{i\beta}g_{\alpha j}+\Gamma^\alpha_{j\beta}g_{\alpha i})a^i b^j\mathrm{d}u^\beta$$

$$(i\leftrightarrow\alpha)\quad(\alpha\leftrightarrow j)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j} g_{ij} \mathrm{d}a^i \cdot b^j + \sum_{i,j} g_{ij} a^i \cdot \mathrm{d}b^j \\
&\quad + \sum_{i,j,\beta} ([i\beta, j] + [j\beta, i]) a^i b^j \mathrm{d}u^\beta
\end{aligned}
$$

$$
= \sum_{i,j} g_{ij} \mathrm{d}a^i \cdot b^j + \sum_{i,j} g_{ij} a^i \cdot \mathrm{d}b^j + \sum_{i,j,\beta} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\beta} \mathrm{d}u^\beta a^i b^j
$$

$$
= \sum_{i,j} g_{ij} \mathrm{d}a^i \cdot b^j + \sum_{i,j} g_{ij} a^i \cdot \mathrm{d}b^j + \sum_{i,j} \mathrm{d}g_{ij} a^i b^j
$$

$$
= \mathrm{d}\Big(\sum_{i,j} g_{ij} a^i b^j\Big) = \mathrm{d}\Big(\sum_i a^i \vec{r}_i \cdot \sum_j b^j \vec{r}_j\Big) = \mathrm{d}(\vec{a} \cdot \vec{b})
$$

2. 平行移动的性质

对于平面上的平行移动, 它

①保持向量的长度和角度不变;

②直线上的切向量都是平行的.

曲面上的平移也具有这两个性质:

若在曲面曲线(C)上一点处给出曲面的多个切向量,

然后让这些向量都沿着曲线(C)平行移动,

则这些向量的长度及其它们之间的夹角始终保持不变.

P112习题20 Levi-Civita平移保持两个向量的内积不变, 因而保持向量的长度和夹角不变.

证 设$\vec{a}(t),\vec{b}(t)$是曲面S上沿曲线(C)的Levi-Civita

意义下的两个平行向量场, 则$\mathrm{D}\vec{a}\equiv\vec{0}$, $\mathrm{D}\vec{b}\equiv\vec{0}$.

$$\mathrm{d}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\mathrm{D}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\mathrm{D}\vec{b}=0\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\text{常数}$$

这说明Levi-Civita平移保持内积不变.

由于向量的长度与夹角都是由内积所定义的,

故也保持向量的长度和夹角不变.

定理 曲面曲线(C)为曲面的测地线的充要条件是它的切向量 在Levi-Civita平行移动的意义下沿(C)是相互平行的.

证 设(C)为$u^i=u^i(s), i=1,2, s$为自然参数, 它的切向量沿(C)作平行移动.

以$\dfrac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}=a^i$代入平移表达式$\mathrm{d}a^i=-\sum\limits_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}a^\alpha\mathrm{d}u^\beta$

并除以ds得到$\dfrac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}}{\mathrm{d}s}=-\sum\limits_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}\dfrac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}$

即 $\dfrac{\mathrm{d}^2u^i}{\mathrm{d}s^2}+\sum\limits_{\alpha,\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta}\dfrac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}=0.$

这刚好是测地线的微分方程, 因此证明了充分性.

反之逆推可知必要性成立.

平行移动的作图法

沿曲面S上的曲线(C)作出S的切平面, 形成一切平面族,

则其包络为一个可展曲面S_1.

若在(C)上各个点作S的切向量$\vec{a}(t)$,

则$\vec{a}(t)$也是S_1沿着(C)上的点处的切向量.

向量沿着曲面曲线的平行移动仅与沿着该曲线上的点处

曲面的切平面有关, S与S_1沿着(C)具有相同的切平面,

因此, 若$\vec{a}(t)$是S上沿着(C)的平行移动,

则$\vec{a}(t)$也是S_1上沿着(C)的平行移动.

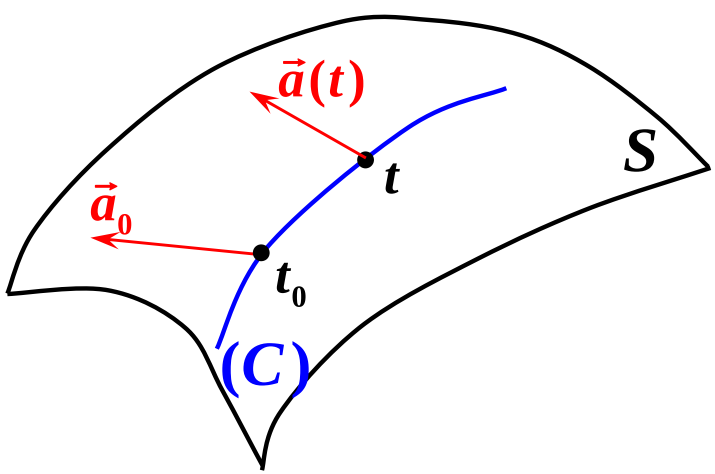
把S_1展开为平面时, (C)变为平面曲线(C_0),

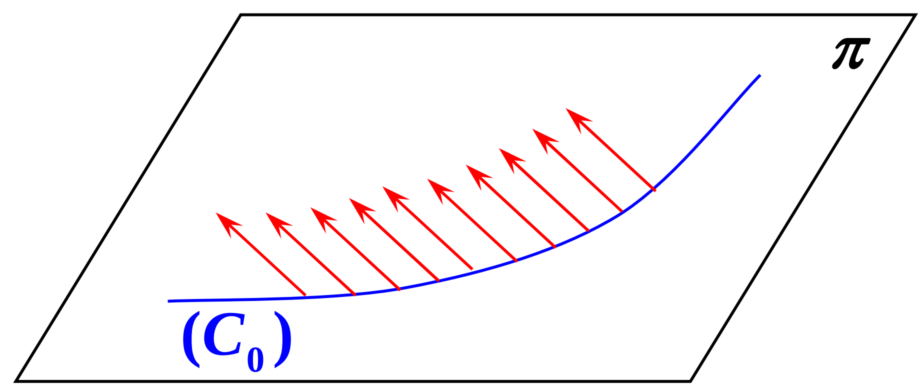
$\vec{a}(t)$变为该平面上的向量$\vec{a}_0(t)$.

$\vec{a}(t)$为S_1(或S)上的平行移动$\Leftrightarrow$ $\vec{a}_0(t)$为平面上的平行移动.

定理 向量沿曲面上一条已知曲线作平行移动的充要条件是沿此曲线所作的切平面的包络所得可展曲面展开在平面上时, 所得的向量在平面上为平行移动.

由这个定理可得沿曲线平行移动的向量的作图法:





*七、极小曲面

对于过空间光滑闭曲线(C)的曲面S来说，

如果(C)所包围的曲面面积最小,

则曲面S的平均曲率恒等于零.

即,极小曲面的平均曲率恒为零.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.38 证明在曲面 S 上存在一个非零的、与路径无关的平行切向量场的充要条件是曲面 S 为可展曲面.

2.39 设S是一个单位球面, 曲线(C)是S上的一个半径为r的圆$(0 < r < 1)$, 求 S上的一个切向量$\vec{t}$沿圆(C)平行移动一周后回到原处时, 与原来的切向量$\vec{t}$所夹的角度.