线性代数考试重点总结

一、行列式的计算

1、利用行列式的性质化成三角行列式

行列式的性质可概括为五条性质、四条推论，即七种变形手段（转置、交换、倍乘、提取、拆分、合并、倍加）；三个为 **0**【两行（列）相同、成比例、一行（列）全为 **0**】

2、行列式按行（列）展开定理降阶

行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即 $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$

$$D = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \ldots + a_{ni}A_{ni} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

例 1、计算行列式 $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

二、解矩阵方程

矩阵方程的标准形式：$AX = B \quad XA = B \quad AXB = C$

若系数矩阵可逆，则 $X = A^{-1}B \quad X = BA^{-1} \quad X = A^{-1}CB^{-1}$

切记不能写成 $X = A^{-1}B^{-1}C$ 或 $X = \dfrac{C}{AB}$

求逆矩阵的方法：

1、待定系数法 $AB = E(\text{或}BA = E)$

2、伴随矩阵法 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$

其中 A^* 叫做 A 的伴随矩阵，它是 $|A|$ 的每一行的元素的代数余子式排在相同序数的列上的矩阵。

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

3、初等变换法 $\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} E & A^{-1} \end{pmatrix}$

例 2、解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

例 3、解矩阵方程 $X = AX + B$ ，其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

三、解齐次或非齐次线性方程组

设 $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$， n **元齐次线性方程组** $AX = 0$ **有非零解** $\Leftrightarrow r(A) < n$

n **元齐次线性方程组** $AX = 0$ **只有零解** $\Leftrightarrow r(A) = n$。

当 $m = n$ **时，** n **元齐次线性方程组** $AX = 0$ **只有零解** $\Leftrightarrow |A| \neq 0$。

当 $m = n$ **时，** n **元齐次线性方程组** $AX = 0$ **有非零解** $\Leftrightarrow |A| = 0$。

当 $m < n$ **时，齐次线性方程组一定有非零解。**

定义：设齐次线性方程组 $AX = 0$ **的解** $\xi_1, \dots, \xi_t$ **满足：**

（1） $\xi_1, \dots, \xi_t$ **线性无关，**

（2） $AX = 0$ **的每一个解都可以由** $\xi_1, \dots, \xi_t$ **线性表示。**

则 $\xi_1, \dots, \xi_t$ **叫做** $AX = 0$ **的基础解系。**

定理 1、设 $A_{m \times n}$**，齐次线性方程组** $AX = 0$**，若** $r(A) = r < n$**，则该方程组的基础解系一定存在，且每一个基础解系中所含解向量的个数都等于** $n - r$ **。**

齐次线性方程组的通解 $x = k_1 \xi_1 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r} \qquad k_1, \dots, k_{n-r} \in R$

设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$n$ **元非齐次线性方程组** $AX=B$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})$。

唯一解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})=n$。

无数解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})<n$。

无解 $\Leftrightarrow r(A)\neq r(\overline{A})$。

非齐次线性方程组的通解 $x=k_1\xi_1+\ldots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta$，　$k_1,\ldots,k_{n-r}\in R$

例 4、求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases}$ 的通解

例 5、求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4 \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0 \end{cases}$ 的通解。

四、含参数的齐次或非齐次线性方程组的解的讨论

例 6、当 λ 为何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x+y+z=0 \\ x+\lambda y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ 有非零解，并求解。

例 7、已知线性方程组 $\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=-2 \\ x_1-2x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2-2x_3=\lambda^2 \end{cases}$，问当 λ 为何值时，它有唯一解，无解，无穷多解，并在有无穷多解时求解。

五、向量组的线性相关性

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ **线性相关** $\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s(s\geq 2)$ **中至少存在一个向量能由其余向量线性表示。**

$\Leftrightarrow$ **存在不全为 0 的数** $k_1,k_2,\ldots,k_s$ **使得** $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+..+k_s\alpha_s=0$。

$\overset{列}{\Leftrightarrow}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \ldots \\ k_s \end{pmatrix}=0$ **有非零解**　　$\overset{行}{\Leftrightarrow}(k_1,k_2,\ldots,k_s)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_s \end{pmatrix}=0$ **有非零解**

$$\Leftrightarrow\left(\alpha_1',\alpha_2',...,\alpha_s'\right)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\...\\k_s\end{pmatrix}=0\text{ 有非零解}$$

$\Leftrightarrow r\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s\right)<s$ $\qquad\qquad$ $\Leftrightarrow r\left(\alpha_1',\alpha_2',...,\alpha_s'\right)<s$

$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ **线性无关** $\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s (s\ge 2)$ **中任意一个向量都不能由其余向量线性表示。**

$\Leftrightarrow$ **若** $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+..+k_s\alpha_s=0$**，则** $k_1=k_2=...=k_s=0$ **。**

$$\overset{\text{列}}{\Leftrightarrow}\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s\right)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\...\\k_s\end{pmatrix}=0\text{ 只有零解}\qquad \overset{\text{行}}{\Leftrightarrow}\left(k_1,k_2,...,k_s\right)\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\...\\\alpha_s\end{pmatrix}=0\text{ 只有零解}$$

$$\Leftrightarrow r\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s\right)=s \qquad \Leftrightarrow\left(\alpha_1',\alpha_2',...,\alpha_s'\right)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\...\\k_s\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow r\left(\alpha_1',\alpha_2',...,\alpha_s'\right)=s$$

特殊的， n **个** n **维向量** $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ **线性相关** $\Leftrightarrow \left|\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right|=0$ **或** $\begin{vmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\...\\\alpha_n\end{vmatrix}=0$ 。

n **个** n **维向量** $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ **线性无关** $\Leftrightarrow \left|\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right|\ne 0$ **或** $\begin{vmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\...\\\alpha_n\end{vmatrix}\ne 0$ 。

例 8、已知向量组 $\alpha_1=\left(t,2,1\right)$ ， $\alpha_2=\left(2,t,0\right)$， $\alpha_3=\left(1,-1,1\right)$，

讨论 t 使该向量组 （1）线性相关 （2）线性无关

六、求向量组的秩，极大无关组，并将其余向量用极大无关组线性表示

设向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$，若从$A$中选出$r$个向量构成向量组

$A_0:\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_r}$满足：

（1）A_0线性无关

（2）A中的每一个向量都能由A_0线性表示，

条件（2）换一句话说A的任意$r+1$个向量（若有的话）都线性相关，或者说从A中向A_0任意添加一个向量（若有的话），所得的向量组都线性相关。

则A_0叫做A的极大线性无关向量组，简称极大无关组。

向量组的极大无关组所含向量的个数叫做向量组的秩，

记作$r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)=r$

求向量组的秩的方法：

（1）扩充法

（2）子式法 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\cdots\\\alpha_m\end{pmatrix}_{m\times n}$ $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)_{n\times m}$

最高阶非 0 子式的阶数就是矩阵的秩，也就是这个向量组的秩，并且这个子式的行（列）对应的原向量组的向量就是这个向量组的一个极大无关组。

（3）**初等变换法** 同法二构成矩阵，对矩阵进行初等变换。

例 9、设向量组

$$\alpha_1=(1,2,1,3)',\alpha_2=(4,-1,-5,-6)',\alpha_3=(-1,-3,-4,-7)',\alpha_4=(2,1,2,3)'$$

求（1）向量组的秩；

（2）向量组的一个极大线性无关组，并把其余向量用这个极大

线性无关组线性表示。

七、相似矩阵的性质与矩阵可相似对角化问题

$$P^{-1}AP=B$$

相似矩阵的性质:

1、相似矩阵有相同的特征多项式，从而有相同的特征值，行列式，迹。特征值相同是两个矩阵相似的必要而非充分条件。

2、 相似矩阵有相同的秩。秩相等是方阵相似的必要而非充分条件。

3、 相似矩阵有相同的可逆性，当它们可逆时，它们的逆矩阵也相似。

4、若 A 与 B 相似，则 A^k 与 B^k 相似， $k\in N$ ，则 $\varphi(A)$ 与 $\varphi(B)$ 相似。

$$B^k=(P^{-1}AP)^k=P^{-1}APP^{-1}AP...P^{-1}AP=P^{-1}A^kP$$

A_n 与 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 相似

$\Leftrightarrow$ A_n 有 n 个线性无关的特征向量 $p_1,p_2,...,p_n$ ，且以它们为列向量组的矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda$ ， $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ 分别为与 $p_1,p_2,...,p_n$ 对应的 A_n 的特征值。

若 A_n 有 n 个互不相等的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ ，则 A_n 一定与

$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 相似。

A_n 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ 对应于 A_n 的每个特征值的线性无关的特征向量的个数等于该特征值的重数。

$\Leftrightarrow n-r(\lambda E-A)=k$ 其中 k 为 λ 的重数

例 10、设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ 相似

（1） 求 x 与 y;

（2）求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$。

例 11、设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，问 a 为何值时，矩阵 A 能相似对角化。

例 12、设三阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$，对应的特征向量依次为 $\eta_1=(1,1,1)'$，$\eta_2=(1,2,4)'$，$\eta_3=(1,3,9)'$，求矩阵 A。

例 13、设三阶实对称矩阵 A 的特征向值 $-1,1,1$ ，与特征值 -1 对应的特征向量为 $\alpha_1=(-1,1,1)'$，求 A。

八、化二次型为标准型，并求所用线性变换的矩阵

例 14、化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+6x_3^2-4x_1x_2-6x_1x_3-10x_2x_3$ 为标准型，并求所用可逆线性变换的矩阵。

例 15、化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 为标准形，并求所用可逆线性变换的矩阵。

自动化 181 程凯