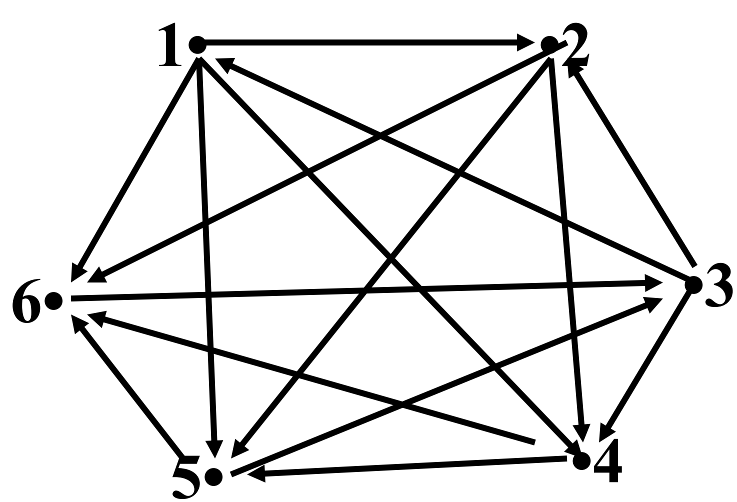
循环赛名次

主讲人： 窦本年

若干支球队参加单循环比赛,他们两两互相交锋,假设每场比赛只计胜负,且不允许平局.在循环比赛结束后怎样根据他们的比赛成绩排列名次?

考虑用点表示球队,胜负用带箭头的弧表示,如1队胜2队,表示为:



如图:1胜4场,2,3各胜3场,4,5各胜2场,6队胜1场.

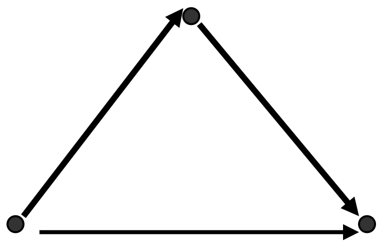
2,3名难产,4,5名难产.

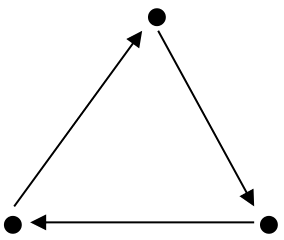
有向图:在每条边上都标出方向的图.

竞赛图:每对顶点之间都有一条边相连的有向图.

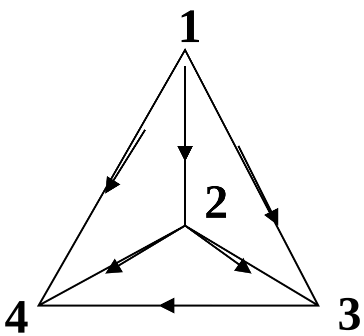
两个顶点的竞赛图的排名不成问题.

三个顶点的竞赛图只有两种形式:

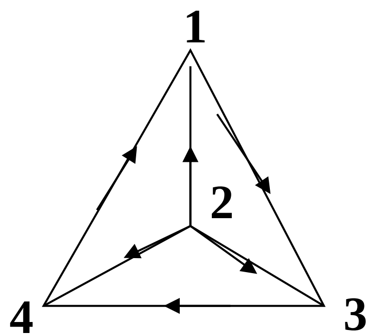




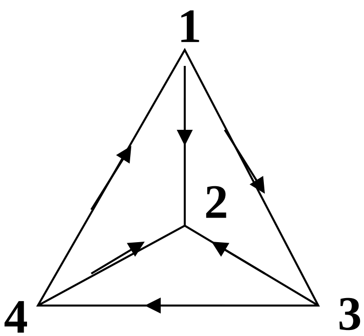
四个顶点的竞赛图只有四种形式:



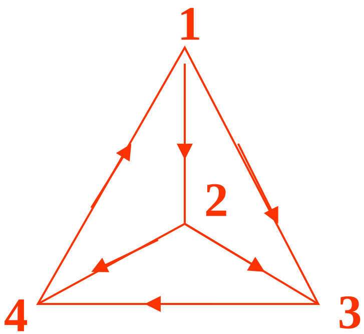
(1)



(2)



(3)

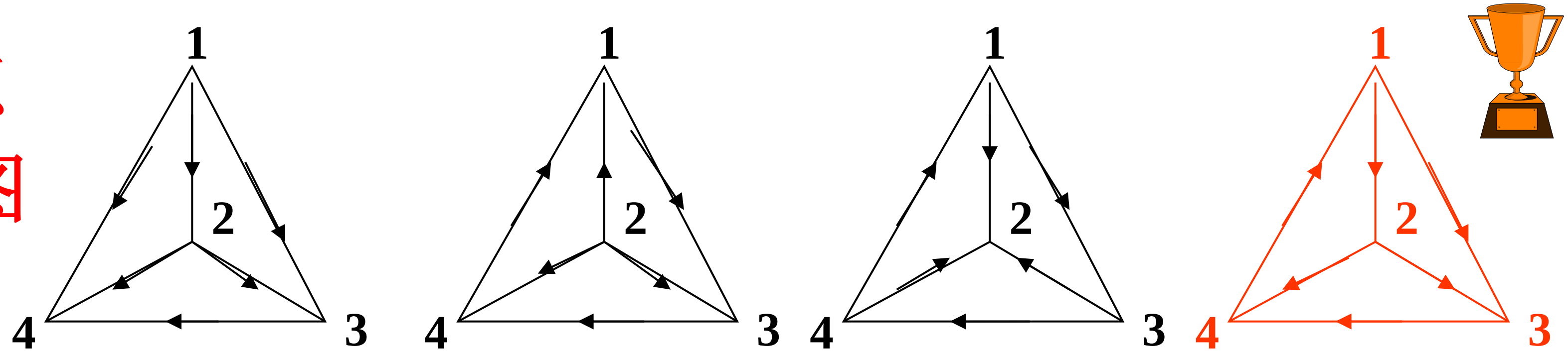


(4)

名次	{1, 2, 3, 4}	{2,(1,3,4)}	{(1,3,4), 2}	{(1,2),(3,4)}

{1, 2, 3, 4}?

4个顶点的竞赛图



(1)　(2)　(3)　(4)

竞赛图的3种形式

- 具有唯一的完全路径，如(1)；
- 双向连通图——任一对顶点存在两条有向路径相互连通，如(4)；
- 其他，如(2)，(3) .

竞赛图的性质

- 必存在完全路径；

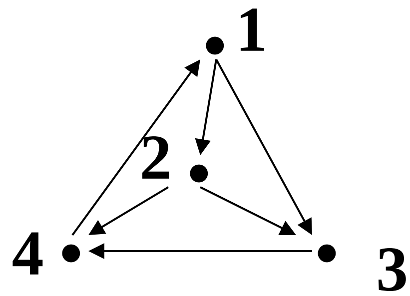
有唯一完全路径的竞赛图,此完全路径确定的顶点的顺序与按得分多少排列的顺序是一致的.

双向连通竞赛图的名次排序:

竞赛图的邻接矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$定义为

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{存在从顶点}i\text{到}j\text{的有向边}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}.$$

如对图



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

若顶点的得分向量为 $s = (s_1, s_2, \dots s_n)^T$,其中 s_i 是顶点 i 的得分.

则 $\quad s = Ae, \quad e = (1,1,\dots 1)^T$

对上图, $s = (2, 2, 1, 1)^T$

记$s = s^{(1)}, s^{(k)} = As^{(k-1)} = A^k e (k = 1,2,\ldots)$

k 级得分向量

这种得分向量体现的什么样的排名原理?

$s^{(2)} = (3,2,1,2)^T$, $s^{(3)} = (3,3,2,3)^T$,

$s^{(4)} = (5,5,3,3)^T$, $s^{(5)} = (8,6,3,5)^T$,

$s^{(6)} = (9,8,5,8)^T$, $s^{(7)} = (13,13,8,9)^T, \ldots$

当$k \to \infty$时, $s^{(k)} \to ?$. s

把s作为排名的得分向量.

若存在正整数r,使得A满足$A^r>0$,称A为素阵.
而且n>3时,双向连通竞赛图的邻接矩阵一定为素阵.

Perron-Frobenius定理

素阵A的最大特征根为正单根λ,λ对应正特征向量s,

且有
$$\lim_{k\to\infty}\frac{A^k e}{\lambda^k}=s.$$

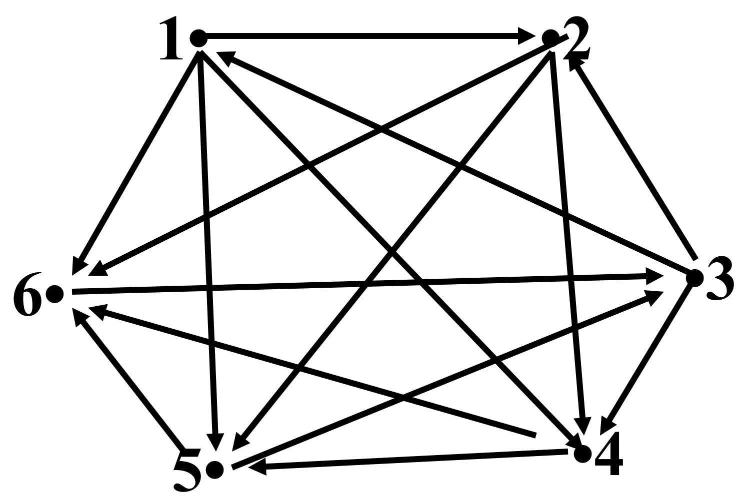
上例: $\lambda=1.4,\ s=(0.323,0.280,0.167,0.230)$

从而确定名次排列为1,2,4,3.

由于4胜了强队1,虽然输给了3,我们还是认为4队更强些.

对我们开始提到的六各队的单循环比赛结果,可以看出这个竞赛图是双向连通的,其邻接矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\1&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$



可以算出,其最大正特征值为2.232,相应的特征向量为

$s=(0.238,0.164,0.231,0.113,0.150,0.104)^T$,因此排名为1,3,2,5,4,6.