《微分几何》课程电子课件

教师：杨勤民

Tel: (021)64253147

Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程QQ群号：1045698545

§1.3 空间曲线

一、空间曲线的密切平面

二、空间曲线的基本三棱形

三、曲率、挠率和Frenet公式

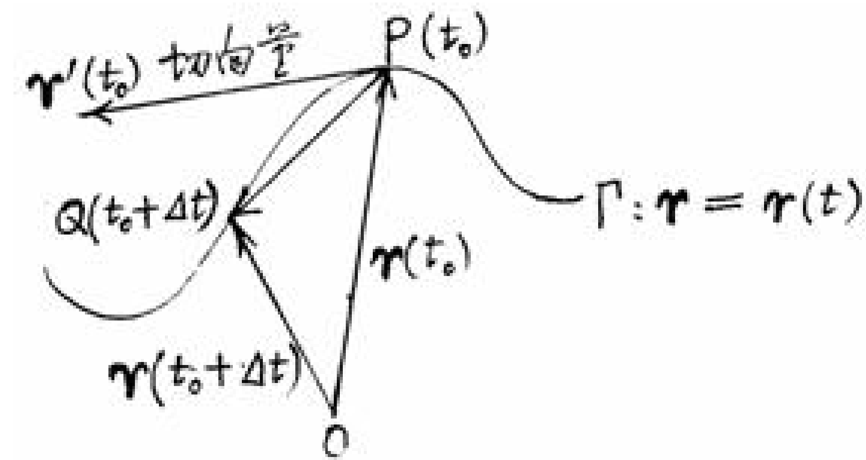
四、空间曲线在一点邻近的结构

五、空间曲线论的基本定理

六、一般螺线

一、空间曲线的密切平面(局部最贴近曲线的平面)

设曲线$\Gamma \in C^2$: $\vec{r}=\vec{r}(t)$,



切点P的向径为$\vec{r}(t_0)$.

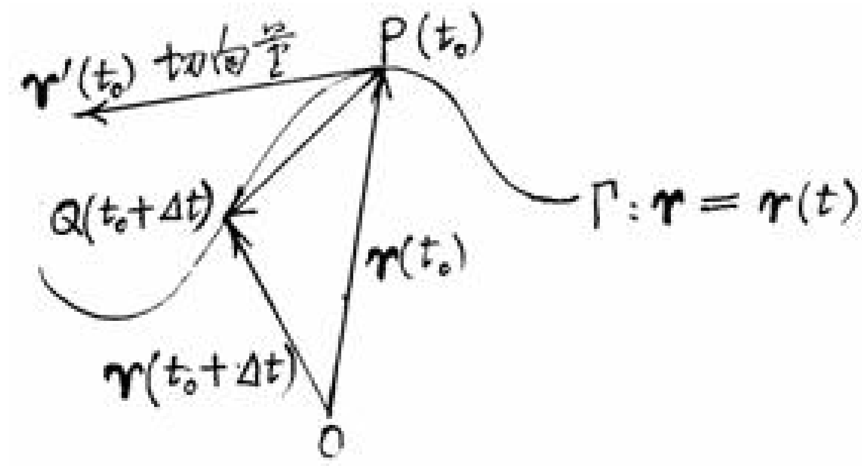
曲线上点P附近的一点Q, 设其向径为$\vec{r}(t_0+\Delta t)$.

$$\overrightarrow{PQ}=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)=\vec{r}'(t_0)\Delta t+\tfrac{1}{2}[\vec{r}''(t_0)+o(\vec{1})](\Delta t)^2$$

$$\Rightarrow \vec{r}''(t_0)+o(\vec{1})=\frac{2[\overrightarrow{PQ}-\vec{r}'(t_0)\Delta t]}{(\Delta t)^2}\subseteq \text{割平面}\,\sigma_Q$$

当$\Delta t\to 0$时, $Q\to P$, $\vec{r}''(t_0)+o(\vec{1})\to \vec{r}''(t_0)\subseteq$密切平面

密切平面的方程(向量形式)



当以 P 为起点时,

$\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0) \subseteq$ 密切平面.

假定 $\vec{r}'(t_0)$ 与 $\vec{r}''(t_0)$ 不平行 (注: 平行时称为逗留点).

设 $\vec{R}$ 是密切平面上的任意一点的向径,

则 $(\vec{R}-\vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)) = 0.$

它就是曲线在 P 点的密切平面的方程.

密切平面的方程(一般方程)

设 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\quad \vec{R}=(X,Y,Z)$

代入密切平面方程 $(\vec{R}-\vec{r}(t_0),\vec{r}'(t_0),\vec{r}''(t_0))=0$得到

$$\begin{vmatrix} X-x(t_0) & Y-y(t_0) & Z-z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}=0.$$

将上式展开化简就得到密切平面的一般方程.

注：$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

命题　一条C^2类曲线为平面曲线的充要条件是其所有点处的密切平面都为同一个平面.

证　**(⇒)** 设C^2类平面曲线$\vec{r}=\vec{r}(t)$所在平面为π,

点$P\in\pi$, 记π的法向量为$\vec{n}$.

则$\forall t$有$\vec{n}\perp[\vec{r}(t)-\overrightarrow{OP}]$, 即$\vec{n}\cdot\vec{r}(t)-\vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}=0.$

两边分别求一阶, 二阶导数得$\vec{n}\cdot\vec{r}'(t)=0, \vec{n}\cdot\vec{r}''(t)=0.$

即$\vec{n}\perp\vec{r}'(t), \vec{n}\perp\vec{r}''(t).$　设$\vec{r}(t)$处的密切平面为σ_t, 则$\vec{n}\perp\sigma_t$.

又因为$\vec{n}\perp\pi$且σ_t经过π上的点($\vec{r}(t)$的终点), 所以$\sigma_t=\pi$.

(⇐) 设C^2类曲线$\vec{r}=\vec{r}(t)$所有点处的密切平面为同一个平面π,

则$\forall t, \vec{r}(t)$的终点都在该点处的密切平面π上, 故为平面曲线.

例1 求圆柱螺线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt \ (a \neq 0)$ 在任意点处的密切平面方程.

解 记 $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$.

则 $\vec{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$, $\vec{r}''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$.

记 $\vec{R} = (X, Y, Z)$ 为点 t 处密切平面上任意一点的向径,

则 $(\vec{R} - \vec{r}(t), \vec{r}'(t), \vec{r}''(t)) = 0$,

即
$$\begin{vmatrix} X - a\cos t & Y - a\sin t & Z - bt \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

展开整理得到所求密切平面为 $X\sin t - Y\cos t + \frac{a}{b}Z - at = 0$.

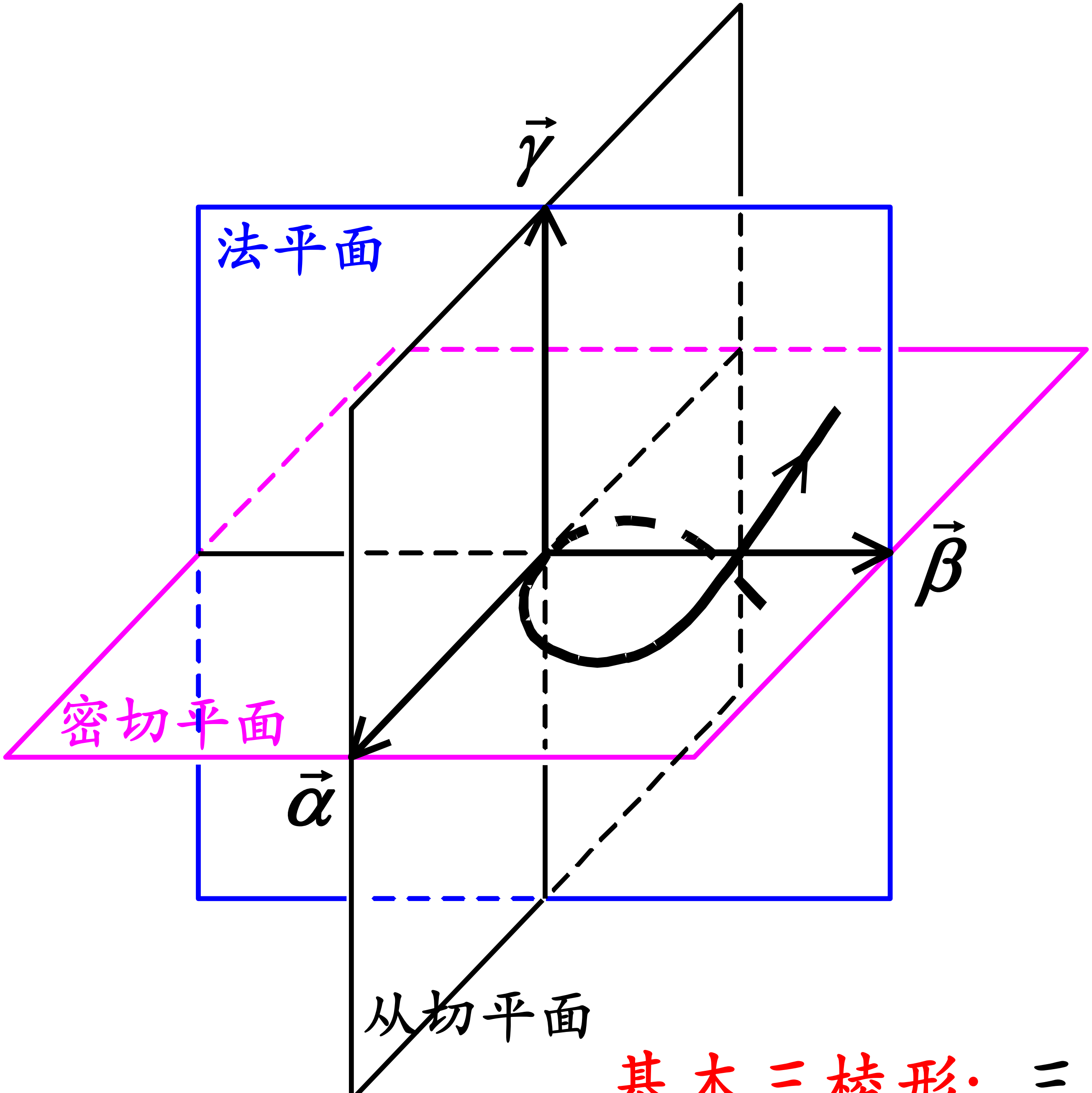
请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

1.8 证明球面曲线的法平面通过球的中心.

1.9 证明如果曲线的所有切线都经过一个定点,
则此曲线是直线.

1.10 证明如果曲线的所有密切平面都经过一个定点,
则此曲线是平面曲线.

二、空间曲线的基本三棱形



三个基本向量

单位切向量 $\vec{\alpha}=\dot{\vec{r}}$

$(\ |\vec{\alpha}|\equiv 1 \Rightarrow \dot{\vec{\alpha}}\perp\vec{\alpha}\ )$

主法向量 $\vec{\beta}=\dfrac{\dot{\vec{\alpha}}}{|\dot{\vec{\alpha}}|}=\dfrac{\ddot{\vec{r}}}{|\ddot{\vec{r}}|}$

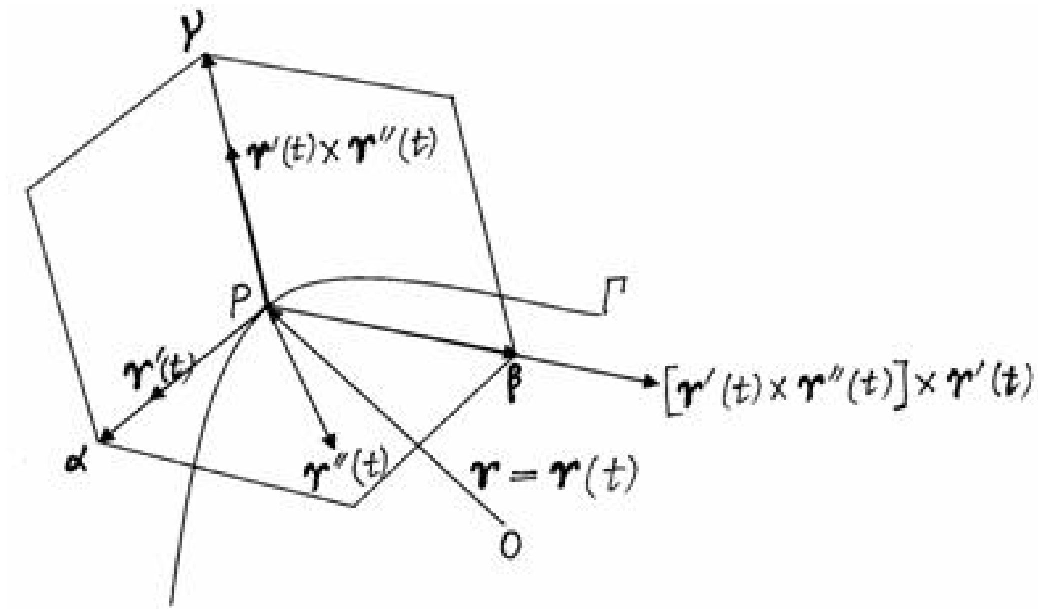
副法向量 $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$

Frenet标架 $\begin{cases}\vec{\alpha}\\ \vec{\beta}\\ \vec{\gamma}\end{cases}$

基本三棱形：三个基本向量+坐标面

基本向量的一般参数表示

单位切向量$\vec{\alpha}=\dfrac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$



副法向量$\vec{\gamma}=\dfrac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}$

主法向量$\vec{\beta}=\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}=\dfrac{[\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)]\times\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)||\vec{r}'(t)|}$

特别注意：一般而言 $\vec{r}'(t)$与$\vec{r}''(t)$不垂直

思考

$\vec{r}'(t)$与$\vec{\alpha}$有何异同?

$\vec{r}''(t)$与$\vec{\beta}$有何异同?

三个向量$\vec{r}'(t)$, $\vec{r}''(t)$, $\vec{\beta}$之间有什么联系?

$\ddot{\vec{r}}(s)$与$\vec{\beta}$有何异同?

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

1.11 求曲线 $x = t\sin t,\ y = t\cos t,\ z = te^t$ 在原点的密切平面, 法平面, 从切平面, 切线, 主法线和副法线方程.

1.12 证明圆柱螺线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt\,(a > 0)$ 的主法线和 z 轴垂直相交.

1.13 在曲线 $x = \cos\alpha\cos t, y = \cos\alpha\sin t, z = t\sin\alpha$ (α 为锐角)的副法线的正向取单位长,求其端点组成的新曲线的密切平面.

1.14 证明过原点平行于圆柱螺线 $\vec{r} = (a\cos t, a\sin t, bt)$ $(a > 0)$的副法线的直线轨迹是锥面 $a^2(x^2 + y^2) = b^2 z^2$.