$x(t) \to y(t)$，线性式不变系统.

- $x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$，$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$ $\Rightarrow$ $C_1x_1 + C_2x_2 \longrightarrow C_1y_1 + C_2y_2$
- 微分：$\frac{dx}{dt} \longrightarrow \frac{dy}{dt}$.
- 积分 $\int_0^t x\,dt \longrightarrow \int_0^t y\,dt$
- 频率不变. x 频率为 ω，y 频率必为 ω.

描述 x, y 关系

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_0 y = b_m x^{(m)} + \cdots + b_0 x.$$

对 x, y 作 Laplace 变换. 得到 $X(s)$, $Y(s)$

$$\int_0^{+\infty} t e^{-st}\,dt$$
$$= \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt$$
$$= -\frac{1}{s^2} e^{-st}\Big|_0^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{s^2}$$

传递函数：$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0}$

频率响应函数. $H(j\omega)$ $\xrightarrow{s=j\omega 代入}$.

H. 是复数，可表示为 $H = A(\omega)\, e^{j\phi}$.

$A(\omega)$ 称为幅频特性.

$\phi = -\arctan \frac{H_I}{H_R}$，称为 H 的相角.

冲激响应函数. 和 频率响应函数一样.

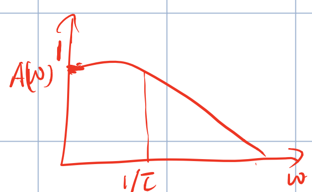
一阶传感器 频率响应.

$$a_1 y' + a_0 y = b_0 x$$

传递函数. $H(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} = \frac{b_0/a_0}{(a_1/a_0)\, s + 1}$

b_0/a_0 线性成分 称为灵敏度 S_n，

a_1/a_0 一阶项系数，时间常数，记为 τ，越小越好.



我们希望 $1/\tau$ 越大越好.
高频特性好.
$A(\omega)$ 越接近1 越好.

频率特性 $H(j\omega) = \frac{S_n}{\tau j\omega + 1}$

幅频特性. $|H(j\omega)| = \frac{S_n}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$

相频特性. $\phi(\omega) = -\arctan(\tau\omega)$

相位滞后.

已知 $X(s)$. $H(s)$. 求 $y(t)$

$$Y(s) = X(s)\, H(s)$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)]$$ Laplace 逆变换.

- $F(s) = \dfrac{F_1(s)}{F_2(s)}$　$F_2(s)$ 有 n 个单根 $p_1, p_2, \cdots, p_n$

  则 $k_i = \left(\dfrac{F_1(s)}{F_2(s) / (s-p_i)} \right) \Bigg|_{代入\ s=p_i}$

  $$f(t) = \mathcal{L}^{-1} F(s) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{p_i t}$$

- $F_2(s)$ 有重根.　p_1 是 $F_2(s)$ q 重根，$p_2, \cdots, p_n$ 是单根

  $$k_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \cdot \left[(s-p_1)^q F(s) \right]^{(i-1)} \Big|_{s=p_1} \qquad i = 1, 2, \cdots, q$$

  $$f(t) = \sum_{i=1}^{q} \frac{k_{1i} e^{p_1 t} t^{q-i}}{(q-i)!} + k_2 e^{p_2 t} \cdots$$

- 有共轭根.　$p_1 = \alpha + j\omega$,　$p_2 = \alpha - j\omega$.

  1. 先求 k_1、k_2
  2. 把 k_1、k_2 表示成 $k_1 = |k_1| e^{j\theta_1}$

     $k_2 = |k_1| e^{-j\theta_1}$
  3. $f(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t}$

     $= |k_1| \cdot e^{\alpha t} \left(e^{j(\omega t + \theta_1)} + e^{-j(\omega t + \theta_1)} \right)$

     $= 2 |k_1| e^{\alpha t} \cos(\omega t + \theta_1)$