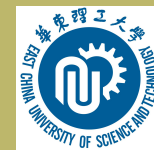


★2.3 特征值问题

对于两端固定的有界弦的自由振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, & (2.3.1) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, & (2.3.2) \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, & (2.3.4) \end{cases}$$



Home Page

Title Page



Page 1 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

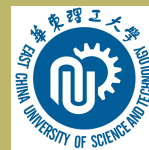
★2.3 特征值问题

对于两端固定的有界弦的自由振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, & (2.3.1) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, & (2.3.2) \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, & (2.3.4) \end{cases}$$

- 假设它的解可以按照某个函数系 $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 展开成

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) \quad (2.3.4)$$



Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 1 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

★2.3 特征值问题

对于两端固定的有界弦的自由振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, & (2.3.1) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, & (2.3.2) \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, & (2.3.4) \end{cases}$$

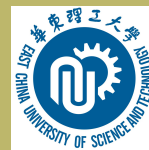
- 假设它的解可以按照某个函数系 $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 展开成

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) \quad (2.3.4)$$

- 利用初始条件(即函数 ϕ 和 ψ 都可以按函数系 $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 展开)

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) X_n(x), \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(0) X_n(x)$$

如果对任意的“好函数” ϕ 和 ψ ,问题(2.3.1)-(2.3.3)都有形如(2.3.4)的解,那么函数系 $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 应是完备的



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 将展开式代入方程

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t)X_n(x) - a^2 T_n(t)X_n''(x)] = 0$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 2 of 18](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

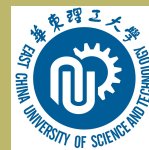
- 将展开式代入方程

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t)X_n(x) - a^2 T_n(t)X_n''(x)] = 0$$

- 如果 $X_n(x), T_n(t)$ 满足

$$T_n''(t)X_n(x) - a^2 T_n(t)X_n''(x) = 0, \quad (2.3.5)$$

$$X_n(0) = X_n(l) = 0$$



Home Page

Title Page



Page 2 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 将展开式代入方程

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t)X_n(x) - a^2 T_n(t)X_n''(x)] = 0$$

- 如果 $X_n(x), T_n(t)$ 满足

$$T_n''(t)X_n(x) - a^2 T_n(t)X_n''(x) = 0, \quad (2.3.5)$$

$$X_n(0) = X_n(l) = 0$$

- 那么(2.3.4)式给出的函数 $u(x, t)$ 满足(2.3.1)式和(2.3.2)式。



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 将展开式代入方程

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t)X_n(x) - a^2 T_n(t)X_n''(x)] = 0$$

- 如果 $X_n(x), T_n(t)$ 满足

$$T_n''(t)X_n(x) - a^2 T_n(t)X_n''(x) = 0, \quad (2.3.5)$$

$$X_n(0) = X_n(l) = 0$$

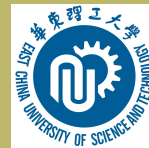
- 那么(2.3.4)式给出的函数 $u(x, t)$ 满足(2.3.1)式和(2.3.2)式。
- 式(2.3.5)可写成

$$\frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = \frac{T_n''(t)}{a^2 T_n(t)}$$

其中左边只依赖于 x ,右边只依赖于 t ,所以它应该是常数, 记为 $-\lambda_n$ (之所以常数记为 $-\lambda$,是为了(2.3.6)的表达形式和后面介绍的特征值问题的表达形式一致)

• 即

$$\frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = \frac{T_n''(t)}{a^2 T_n(t)} = -\lambda_n$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 3 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

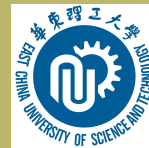
• 即

$$\frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = \frac{T_n''(t)}{a^2 T_n(t)} = -\lambda_n$$

• 因此 $X_n(x), T_n(t)$ 分别满足

$$\begin{cases} X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0 \\ X_n(0) = X_n(l) = 0 \end{cases} \quad (2.3.6)$$

$$T_n''(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = 0$$



Home Page

Title Page



Page 3 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 即

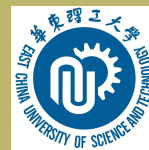
$$\frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = \frac{T_n''(t)}{a^2 T_n(t)} = -\lambda_n$$

- 因此 $X_n(x), T_n(t)$ 分别满足

$$\begin{cases} X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0 \\ X_n(0) = X_n(l) = 0 \end{cases} \quad (2.3.6)$$

$$T_n''(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = 0$$

- $X_n(x) \neq 0$, 这就需要确定什么样的 λ_n 问题(2.3.6)有非零解 $X_n(x)$, 这个问题就是下面要介绍的特征值问题

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 3 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 即

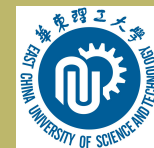
$$\frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = \frac{T_n''(t)}{a^2 T_n(t)} = -\lambda_n$$

- 因此 $X_n(x), T_n(t)$ 分别满足

$$\begin{cases} X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0 \\ X_n(0) = X_n(l) = 0 \end{cases} \quad (2.3.6)$$

$$T_n''(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = 0$$

- $X_n(x) \neq 0$, 这就需要确定什么样的 λ_n 问题(2.3.6)有非零解 $X_n(x)$, 这个问题就是下面要介绍的特征值问题
- 所以要确定形如(2.3.4)的解, 首要任务是确定问题(2.3.6)的所有可能的非零解 $X_n(x)$, 并保证其构成的函数系 $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是完备的

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 3 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



★2.3.1 Sturm-Liouville 问题

给定空间 (a, b) 上的二阶线性常微分方程

$$(p(x)u')' - q(x)u + \lambda r(x)u = 0, a < x < b, \quad (2.3.7)$$

其中 λ 是未知参数, $p(x) \in C^1[a, b]$, 在 (a, b) 内 $p(x) > 0$; $q(x) \in C[a, b]$, $q(x) \geq 0$; $r(x) \in C[a, b]$, 且在 (a, b) 内 $r(x) > 0$. 方程(2.2.1)称为**Sturm-Liouville方程**

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 4 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



★2.3.1 Sturm-Liouville 问题

给定空间 (a, b) 上的二阶线性常微分方程

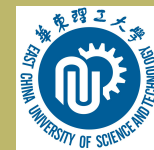
$$(p(x)u')' - q(x)u + \lambda r(x)u = 0, a < x < b, \quad (2.3.7)$$

其中 λ 是未知参数, $p(x) \in C^1[a, b]$, 在 (a, b) 内 $p(x) > 0$; $q(x) \in C[a, b]$, $q(x) \geq 0$; $r(x) \in C[a, b]$, 且在 (a, b) 内 $r(x) > 0$. 方程(2.2.1)称为**Sturm-Liouville方程**

当 $a < b$ 为有限数且在 $[a, b]$ 上 $p(x), r(x) > 0$ 时, 称方程(2.3.7)为**正则的**, 否则就称方程(2.3.7)为**奇异的**。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 4 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 根据 $p(x)$ 在端点 $x = a, b$ 处的不同取值，我们来确定问题(2.3.7)的边界条件：



Home Page

Title Page



Page 5 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 根据 $p(x)$ 在端点 $x = a, b$ 处的不同取值，我们来确定问题(2.3.7)的边界条件：
(1)当 $p(a)p(b) \neq 0$ 时，边界条件是

$$a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0, b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0$$

若还有 $p(a) = p(b)$,还可以提周期边界条件 $u(a) = u(b), u'(a) = u'(b)$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 5 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 根据 $p(x)$ 在端点 $x = a, b$ 处的不同取值，我们来确定问题(2.3.7)的边界条件：
(1)当 $p(a)p(b) \neq 0$ 时，边界条件是

$$a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0, b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0$$

若还有 $p(a) = p(b)$,还可以提周期边界条件 $u(a) = u(b), u'(a) = u'(b)$

- (2)当 $p(a) = 0, p(b) \neq 0$ 时，边界条件是

$$|u(a)| < \infty, b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0, b_1^2 + b_2^2 \neq 0$$

- 根据 $p(x)$ 在端点 $x = a, b$ 处的不同取值，我们来确定问题(2.3.7)的边界条件：
(1)当 $p(a)p(b) \neq 0$ 时，边界条件是

$$a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0, b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0$$

若还有 $p(a) = p(b)$,还可以提周期边界条件 $u(a) = u(b), u'(a) = u'(b)$

- (2)当 $p(a) = 0, p(b) \neq 0$ 时，边界条件是

$$|u(a)| < \infty, b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0, b_1^2 + b_2^2 \neq 0$$

- (3)对于 $p(b) = 0, p(a) \neq 0$ 或 $p(a) = p(b) = 0$ 的情况，可类似的有边界条件



- Sturm-Liouville方程，若带上上述边界条件之一，就得到一个二阶线性常微分方程的两点边值问题，该问题为Sturm-Liouville 问题，简称S-L问题

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

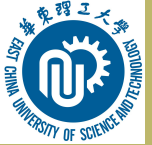
Page 6 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- Sturm-Liouville方程，若带上上述边界条件之一，就得到一个二阶线性常微分方程的两点边值问题，该问题为Sturm-Liouville 问题，简称S-L问题
 - 问题：是否存在参数 λ 的一些值，使得该两点边值问题有非零解？
- 这样一类问题称为特征值问题.

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 6 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- Sturm-Liouville方程，若带上上述边界条件之一，就得到一个二阶线性常微分方程的两点边值问题，该问题为Sturm-Liouville 问题，简称S-L问题
- 问题：是否存在参数 λ 的一些值，使得该两点边值问题有非零解？

这样一类问题称为特征值问题.

而使得S-L问题有非零解的参数 λ 的值称为此问题的特征值

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

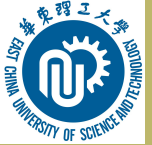
Page 6 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- Sturm-Liouville方程，若带上上述边界条件之一，就得到一个二阶线性常微分方程的两点边值问题，该问题为Sturm-Liouville 问题，简称S-L问题
- 问题：是否存在参数 λ 的一些值，使得该两点边值问题有非零解？

这样一类问题称为特征值问题.

而使得S-L问题有非零解的参数 λ 的值称为此问题的特征值

相应的非零解称为特征值 λ 相对应的特征函数。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[«](#) [»](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 6 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



基本结论（特征值问题是一个专门课题，下面只叙述相关结论）

- 对正则的S-L问题，对应于同一个特征值的特征函数必线性相关（周期边界条件除外）

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 7 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



基本结论（特征值问题是一个专门课题，下面只叙述相关结论）

- 对正则的S-L问题，对应于同一个特征值的特征函数必线性相关（周期边界条件除外）
- 对应于不同特征值的特征函数必定带权函数 $r(x)$ 正交（无论正则与否）

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 7 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



基本结论（特征值问题是一个专门课题，下面只叙述相关结论）

- 对正则的S-L问题，对应于同一个特征值的特征函数必线性相关（周期边界条件除外）
- 对应于不同特征值的特征函数必定带权函数 $r(x)$ 正交（无论正则与否）
- 若 $r(x) > 0$,则S-L问题的所有特征值都是实的，且相应的特征函数也可以取成实的；

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 7 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



基本结论（特征值问题是一个专门课题，下面只叙述相关结论）

- 对正则的S-L问题，对应于同一个特征值的特征函数必线性相关（周期边界条件除外）
- 对应于不同特征值的特征函数必定带权函数 $r(x)$ 正交（无论正则与否）
- 若 $r(x) > 0$,则S-L问题的所有特征值都是实的，且相应的特征函数也可以取成实的；
- S-L问题有可数多个特征值，且当 $r(x) > 0$ 时，可以排列成

$$-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

同时还有 $\lambda_n \rightarrow \infty$ 。特征函数的全体构成一个完备正交函数系

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



基本结论（特征值问题是一个专门课题，下面只叙述相关结论）

- 对正则的S-L问题，对应于同一个特征值的特征函数必线性相关（周期边界条件除外）
- 对应于不同特征值的特征函数必定带权函数 $r(x)$ 正交（无论正则与否）
- 若 $r(x) > 0$,则S-L问题的所有特征值都是实的，且相应的特征函数也可以取成实的；
- S-L问题有可数多个特征值，且当 $r(x) > 0$ 时，可以排列成

$$-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

同时还有 $\lambda_n \rightarrow \infty$ 。特征函数的全体构成一个完备正交函数系

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



• 特征值问题

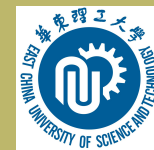
$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ -\alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) = 0, \alpha_2 u'(l) + \beta_2 u(l) = 0, \\ \alpha_i, \beta_i \geq 0, \alpha_i + \beta_i > 0, i = 1, 2 \end{cases}$$

的所有特征值都是非负的，且当 β_1, β_2 不同时为零时，所有特征值都是正的

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 8 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

例2.3.1, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases} \quad (2.3.8)$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 9 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

例2.3.1, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases} \quad (2.3.8)$$

解法一：当 $\lambda \leq 0$ 时，问题(2.3.8)的方程两边同乘 u ,再分部积分得

$$\begin{aligned} \int_0^l uu'' dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx &= 0 \Rightarrow \\ -uu'|_0^l - \int_0^l (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx &= 0 \text{ (由边界条件, 化简可得)} \\ \Rightarrow - \int_0^l (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

所以当 $\lambda < 0$ 时(上式中左边每项被积函数都是非负的，所以等号左边小于等于零，而右边是等于零， \Rightarrow 左边每项为零)， $u \equiv 0$;

例2.3.1, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases} \quad (2.3.8)$$

解法一：当 $\lambda \leq 0$ 时，问题(2.3.8)的方程两边同乘 u ,再分部积分得

$$\begin{aligned} \int_0^l uu'' dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx &= 0 \Rightarrow \\ -uu'|_0^l - \int_0^l (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx &= 0 \text{ (由边界条件, 化简可得)} \\ \Rightarrow - \int_0^l (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

所以当 $\lambda < 0$ 时(上式中左边每项被积函数都是非负的，所以等号左边小于等于零，而右边是等于零， \Rightarrow 左边每项为零)， $u \equiv 0$;当 $\lambda = 0$ 时， $u'(x) = 0$,再由 $u(0) = 0 \Rightarrow u(x) = 0$

例2.3.1, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases} \quad (2.3.8)$$

解法一：当 $\lambda \leq 0$ 时，问题(2.3.8)的方程两边同乘 u ,再分部积分得

$$\begin{aligned} & \int_0^l uu'' dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx = 0 \Rightarrow \\ & -uu'|_0^l - \int_0^l (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx = 0 \text{ (由边界条件, 化简可得)} \\ & \Rightarrow - \int_0^l (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx = 0 \end{aligned}$$

所以当 $\lambda < 0$ 时(上式中左边每项被积函数都是非负的，所以等号左边小于等于零，而右边是等于零， \Rightarrow 左边每项为零)， $u \equiv 0$;当 $\lambda = 0$ 时， $u'(x) = 0$,再由 $u(0) = 0 \Rightarrow u(x) = 0$ 因此，当 $\lambda \leq 0$ 时,问题无非零解，所以 $\lambda \leq 0$ 不是特征值。

例2.3.1, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases} \quad (2.3.8)$$

解法一：当 $\lambda \leq 0$ 时，问题(2.3.8)的方程两边同乘 u ,再分部积分得

$$\begin{aligned} \int_0^l uu'' dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx &= 0 \Rightarrow \\ -uu'|_0^l - \int_0^l (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx &= 0 \text{ (由边界条件, 化简可得)} \\ \Rightarrow - \int_0^l (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

所以当 $\lambda < 0$ 时(上式中左边每项被积函数都是非负的，所以等号左边小于等于零，而右边是等于零， \Rightarrow 左边每项为零)， $u \equiv 0$;当 $\lambda = 0$ 时， $u'(x) = 0$,再由 $u(0) = 0 \Rightarrow u(x) = 0$ 因此，当 $\lambda \leq 0$ 时,问题无非零解，所以 $\lambda \leq 0$ 不是特征值。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 9 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



当 $\lambda > 0$ 时,记 $\lambda = \beta^2, \beta > 0$,问题(2.3.8)方程(此时方程为 $u'' + \beta^2 u = 0$,利用齐次常微分方程的求解)的解是

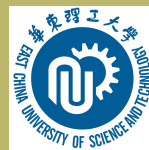
$$u(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$$

由 $u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.再由 $u(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sin \beta l = 0$,要使 $u(x)$ 是非零解,一定有

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 10 of 18

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



当 $\lambda > 0$ 时,记 $\lambda = \beta^2, \beta > 0$,问题(2.3.8)方程(此时方程为 $u'' + \beta^2 u = 0$,利用齐次常微分方程的求解)的解是

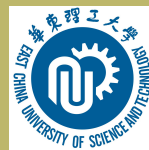
$$u(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$$

由 $u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.再由 $u(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sin \beta l = 0$,要使 $u(x)$ 是非零解,一定有 $\sin \beta l = 0$,即 $\beta = \frac{n\pi}{l}$,于是

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n = 1, 2, \dots$$

是特征值问题 (2.3.8) 的全部特征值, $u_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} (n = 1, 2, \dots)$ 是对应的特征函数.

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 10 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



当 $\lambda > 0$ 时,记 $\lambda = \beta^2, \beta > 0$,问题(2.3.8)方程(此时方程为 $u'' + \beta^2 u = 0$,利用齐次常微分方程的求解)的解是

$$u(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$$

由 $u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.再由 $u(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sin \beta l = 0$,要使 $u(x)$ 是非零解,一定有 $\sin \beta l = 0$,即 $\beta = \frac{n\pi}{l}$,于是

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n = 1, 2, \dots$$

是特征值问题 (2.3.8) 的全部特征值, $u_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} (n = 1, 2, \dots)$ 是对应的特征函数.

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 10 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



解法二：

1°当 $\lambda = 0$ 时，方程（2.3.8）为

$$u'' = 0 \Rightarrow u = c_1 x + c_2$$

由边界条件

$$u(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0, u(l) = 0 \Rightarrow c_2 = 0,$$

即此时 u 只有零解，所以 $\lambda = 0$ 不是特征值

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



解法二:

1°当 $\lambda = 0$ 时, 方程 (2.3.8) 为

$$u'' = 0 \Rightarrow u = c_1x + c_2$$

由边界条件

$$u(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0, u(l) = 0 \Rightarrow c_2 = 0,$$

即此时 u 只有零解, 所以 $\lambda = 0$ 不是特征值

2°当 $\lambda < 0$ 时, 令 $\lambda = -\gamma^2, \gamma > 0$, 方程的解为

$$u = c_1e^{\gamma x} + c_2e^{-\gamma x}$$

由边界条件

$$u(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0, u(l) = 0 \Rightarrow c_1e^{\gamma l} + c_2e^{-\gamma l} = 0,$$

即此时 u 只有零解, 所以 $\lambda < 0$ 也不是特征值

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



解法二:

1°当 $\lambda = 0$ 时, 方程 (2.3.8) 为

$$u'' = 0 \Rightarrow u = c_1x + c_2$$

由边界条件

$$u(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0, u(l) = 0 \Rightarrow c_2 = 0,$$

即此时 u 只有零解, 所以 $\lambda = 0$ 不是特征值

2°当 $\lambda < 0$ 时, 令 $\lambda = -\gamma^2, \gamma > 0$, 方程的解为

$$u = c_1e^{\gamma x} + c_2e^{-\gamma x}$$

由边界条件

$$u(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0, u(l) = 0 \Rightarrow c_1e^{\gamma l} + c_2e^{-\gamma l} = 0,$$

即此时 u 只有零解, 所以 $\lambda < 0$ 也不是特征值

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



3⁰当 $\lambda > 0$ 时,记 $\lambda = \beta^2, \beta > 0$,问题(2.3.8)方程的解是

$$u(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin x$$

由 $u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, u(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sin \beta l = 0$,要使 $u(x)$ 是非零解,一定有

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 12 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



3⁰当 $\lambda > 0$ 时,记 $\lambda = \beta^2, \beta > 0$,问题(2.3.8)方程的解是

$$u(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin x$$

由 $u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, u(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sin \beta l = 0$,要使 $u(x)$ 是非零解,一定有 $\sin \beta l = 0$,即 $\beta = \frac{n\pi}{l}$,于是

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n = 1, 2, \dots$$

是特征值问题 (2.3.8) 的全部特征值, $u_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} (n = 1, 2, \dots)$ 是对应的特征函数.

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 12 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



3⁰当 $\lambda > 0$ 时,记 $\lambda = \beta^2, \beta > 0$,问题(2.3.8)方程的解是

$$u(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin x$$

由 $u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, u(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sin \beta l = 0$,要使 $u(x)$ 是非零解,一定有 $\sin \beta l = 0$,即 $\beta = \frac{n\pi}{l}$,于是

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n = 1, 2, \dots$$

是特征值问题 (2.3.8) 的全部特征值, $u_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} (n = 1, 2, \dots)$ 是对应的特征函数.

综上: $\lambda \leq 0$ 不是特征值

$\lambda > 0$ 时,特征值为 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n = 1, 2, \dots$, 对应的特征函数为 $u_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} (n = 1, 2, \dots)$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 12 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



例2.3.2, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u'(l) = 0 \end{cases} \quad (2.3.9)$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 13 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



例2.3.2, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u'(l) = 0 \end{cases} \quad (2.3.9)$$

解法一：当 $\lambda \leq 0$ 时(同例2.3.1)，可证 $\lambda \leq 0$ 不是特征值。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 13 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



例2.3.2, 求解特征值问题

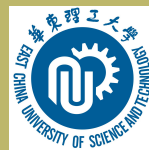
$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u'(l) = 0 \end{cases} \quad (2.3.9)$$

解法一：当 $\lambda \leq 0$ 时(同例2.3.1)，可证 $\lambda \leq 0$ 不是特征值。
当 $\lambda > 0$ 时,记 $\lambda = \beta^2, \beta > 0$,问题(2.3.8)方程的解是

$$u(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin x$$

由 $u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.再由 $u'(l) = 0 \Rightarrow C_2 \cos \beta l = 0$,要使 $u(x)$ 是非零解，一定有

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 13 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



例2.3.2, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u'(l) = 0 \end{cases} \quad (2.3.9)$$

解法一：当 $\lambda \leq 0$ 时(同例2.3.1)，可证 $\lambda \leq 0$ 不是特征值。
当 $\lambda > 0$ 时,记 $\lambda = \beta^2, \beta > 0$,问题(2.3.8)方程的解是

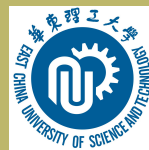
$$u(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin x$$

由 $u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.再由 $u'(l) = 0 \Rightarrow C_2 \cos \beta l = 0$,要使 $u(x)$ 是非零解，一定有 $\cos \beta l = 0$,即 $\beta = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$,于是

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2, n = 1, 2, \dots$$

是特征值问题 (2.3.9) 的全部特征值, $u_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l}x$ ($n = 1, 2, \dots$) 是对应的特征函数.

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 13 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



例2.3.2, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u'(l) = 0 \end{cases} \quad (2.3.9)$$

解法一：当 $\lambda \leq 0$ 时(同例2.3.1)，可证 $\lambda \leq 0$ 不是特征值。
当 $\lambda > 0$ 时,记 $\lambda = \beta^2, \beta > 0$,问题(2.3.8)方程的解是

$$u(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin x$$

由 $u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.再由 $u'(l) = 0 \Rightarrow C_2 \cos \beta l = 0$,要使 $u(x)$ 是非零解，一定有 $\cos \beta l = 0$,即 $\beta = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$,于是

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2, n = 1, 2, \dots$$

是特征值问题 (2.3.9) 的全部特征值, $u_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l}x$ ($n = 1, 2, \dots$) 是对应的特征函数.

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 13 of 18

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



例2.3.2, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = 0, u'(l) + \sigma u(l) = 0 \end{cases} \quad (2.3.10)$$

其中常数 $\sigma > 0$

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 14 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



例2.3.2, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = 0, u'(l) + \sigma u(l) = 0 \end{cases} \quad (2.3.10)$$

其中常数 $\sigma > 0$

解：同上可证， $\lambda \leq 0$ 不是特征值。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 14 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



例2.3.2, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = 0, u'(l) + \sigma u(l) = 0 \end{cases} \quad (2.3.10)$$

其中常数 $\sigma > 0$

解：同上可证， $\lambda \leq 0$ 不是特征值。记 $\lambda = \beta^2, \beta \neq 0$ 。方程(2.3.10)的通解为

$$u(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 14 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



例2.3.2, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = 0, u'(l) + \sigma u(l) = 0 \end{cases} \quad (2.3.10)$$

其中常数 $\sigma > 0$

解：同上可证， $\lambda \leq 0$ 不是特征值。记 $\lambda = \beta^2, \beta \neq 0$ 。方程(2.3.10)的通解为

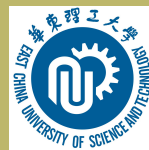
$$u(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x$$

由边界条件 $u(0) = 0 \Rightarrow A = 0$, 由 $u'(l) + \sigma u(l) = 0$ 可知若使 $u(x)$ 是非零解，必有

$$\beta \cos \beta l + \sigma \sin \beta l = 0$$

解出 $\tan \beta l = -\beta/\sigma$ 。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 14 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



例2.3.2, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = 0, u'(l) + \sigma u(l) = 0 \end{cases} \quad (2.3.10)$$

其中常数 $\sigma > 0$

解：同上可证， $\lambda \leq 0$ 不是特征值。记 $\lambda = \beta^2, \beta \neq 0$ 。方程(2.3.10)的通解为

$$u(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x$$

由边界条件 $u(0) = 0 \Rightarrow A = 0$, 由 $u'(l) + \sigma u(l) = 0$ 可知若使 $u(x)$ 是非零解，必有

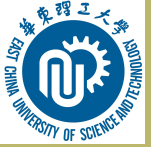
$$\beta \cos \beta l + \sigma \sin \beta l = 0$$

解出 $\tan \beta l = -\beta/\sigma$ 。记 $\gamma = \beta l$, 则有

$$\tan \gamma = -\frac{1}{\sigma l} \gamma$$

该方程的根就是曲线 $y_1 = \tan \gamma$ 与直线 $y_2 = -\frac{1}{\sigma l} \gamma$ 交点的横坐标。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 14 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



它们有无穷多交点，即方程 $\tan \beta l = -\beta/\sigma$ 有无穷多个根，其中正根与负根对称，因此可以只考虑正根，记它的所有正根依次为

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$$

问题（2.3.10）的全部特征值为

$$\lambda_n = \beta_n^2 = \frac{\gamma_n^2}{l^2}, n = 1, 2, \dots$$

对应的特征函数为

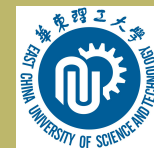
$$u_n(x) = \sin \beta_n x = \sin \sqrt{\lambda_n} x, n = 1, 2, \dots$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 15 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

对于二阶方程的特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u \text{ 在 } x = 0 \text{ 及 } x = l \text{ 处的边界条件} \end{cases} \quad (2.3.11)$$

下面列出各种边界条件下的全部特征值和对应的特征函数



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 16 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

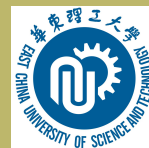
[Quit](#)

对于二阶方程的特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u \text{ 在 } x = 0 \text{ 及 } x = l \text{ 处的边界条件} \end{cases} \quad (2.3.11)$$

下面列出各种边界条件下的全部特征值和对应的特征函数

- (1).边界条件是 $u(0) = u(l) = 0$ 时,特征值 $\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$,特征函数 $u_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$;
- (2).边界条件是 $u(0) = u'(l) = 0$ 时,特征值 $\lambda_n = (\frac{(2n-1)\pi}{2l})^2$,特征函数 $u_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}$;
- (3).边界条件是 $u'(0) = u(l) = 0$ 时,特征值 $\lambda_n = (\frac{(2n-1)\pi}{2l})^2$,特征函数 $u_n(x) = \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l}$;
- (4).边界条件是 $u'(0)(0) = u'(0)(l) = 0$ 时,特征值 $\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$,特征函数 $u_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}$;
- (5).边界条件是 $u(0) = u(l), u'(0)(0) = u'(0)(l)$ 时,特征值 $\lambda_n = (\frac{2n\pi}{l})^2$,特征函数 $u_n(x) = \{\sin \frac{2n\pi x}{l}, \cos \frac{2n\pi x}{l}\}$;
- (6).边界条件是 $u(0) = u'(l) + \sigma u(l) = 0$ 时,特征值 $\lambda_n = (\frac{\gamma_n}{l})^2$,特征函数 $u_n(x) = \sin \frac{\gamma_n x}{l}$,其中 γ_n 是方程 $\tan \gamma = -\frac{\gamma}{\sigma l}$ 的第 n 个正根, $\sigma > 0$;

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 16 of 18

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- (7).边界条件是 $u'(0) = u'(l) + \sigma u(l) = 0$ 时,特征值 $\lambda_n = (\frac{\gamma_n}{l})^2$,特征函数 $u_n(x) = \cos \frac{\gamma_n x}{l}$,其中 γ_n 是方程 $\cot \gamma = -\frac{\gamma}{\sigma l}$ 的第 n 个正根, $\sigma > 0$;
- (8).边界条件是 $u'(0) - \sigma u(0) = u(l) = 0$ 时,特征值 $\lambda_n = (\frac{\gamma_n}{l})^2$,特征函数 $u_n(x) = \frac{\gamma_n}{\sigma l} \cos \frac{\gamma_n x}{l} + \sin \frac{\gamma_n x}{l}$,其中 γ_n 是方程 $\tan \gamma = -\frac{\gamma}{\sigma l}$ 的第 n 个正根, $\sigma > 0$;
- (9).边界条件是 $u'(0) - \sigma u(0) = u'(l) = 0$ 时,特征值 $\lambda_n = (\frac{\gamma_n}{l})^2$,特征函数 $u_n(x) = \frac{\gamma_n}{\sigma l} \cos \frac{\gamma_n x}{l} + \sin \frac{\gamma_n x}{l}$,其中 γ_n 是方程 $\cot \gamma = \frac{\gamma}{\sigma l}$ 的第 n 个正根, $\sigma > 0$;
- (10).边界条件是 $u'(0) - \sigma_1 u(0) = u'(l) + \sigma_2 u(l) = 0$ 时,特征值 $\lambda_n = (\frac{\gamma_n}{l})^2$,特征函数 $u_n(x) = \frac{\gamma_n}{\sigma_1 l} \cos \frac{\gamma_n x}{l} + \sin \frac{\gamma_n x}{l}$,其中 γ_n 是方程 $\tan \gamma = \frac{1}{(\sigma_1 + \sigma_2)l}(\gamma - \frac{\sigma_1 \sigma_2 l^2}{\gamma})$ 的第 n 个正根, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$;
- 注意, 第4,5两种情况, 即 $u'(0) = u'(l) = 0$ 和周期边界条件, $\lambda_0 = 0$ 才是特征值, n 从0开始, 其他情况 n 都是从1开始计数, 但对于周期边界条件, 当 $n = 0$ 时, $\sin \frac{n\pi x}{l} = 0$, 它不是特征函数
- 由2.3.1节的结论知, 特征值问题(2.3.11)的全部特征函数所构成的函数系, 是一个完备的正交函数系, 因此, $L^2([0, l])$ 中的每一个函数都可以按照这个特征函数系展开

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 17 of 18

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



作业:

2.3、求解下列特征值问题

$$(1) \begin{cases} u'' + \lambda u = 0, & 0 < x < l \\ u(0) = u(l), u'(0) = u'(l) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u'' + \lambda u = 0, & 0 < x < l \\ u'(0) = u'(l) + \sigma u(l) = 0 \end{cases} \quad \text{其中 } \sigma > 0 \text{ 是}$$

常数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[«](#) [»](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 18 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)