习题三

3.1 设 ξ 的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}\theta(\theta+1)x^{\theta-1}(1-x) & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，其中，$\theta>0$ 是未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 ξ 的样本，求θ 的矩法估计。

解 $$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\theta(\theta+1)\,x^{\theta-1}(1-x)\mathrm{d}x=\theta(\theta+1)\int_0^1(x^{\theta}-x^{\theta+1})\mathrm{d}x$$

$$=\theta(\theta+1)\left(\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1}-\frac{x^{\theta+2}}{\theta+2}\right)\Bigg|_0^1=\theta(\theta+1)\frac{1}{(\theta+1)(\theta+2)}=\frac{\theta}{\theta+2}\ 。$$

解方程 $\dfrac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}+2}=\hat{E}\xi=\overline{X}$，得到矩法估计 $\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}}{1-\overline{X}}$ 。

3.2 设 ξ 的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}\theta\,x^{\theta-1} & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，其中，$\theta>0$ 是未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 ξ 的样本，求：

（1）θ 的矩法估计； （2）θ 的极大似然估计。

解 (1) $$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\theta\,x^{\theta-1}\mathrm{d}x=\frac{\theta}{\theta+1}\ 。$$

解方程 $\dfrac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}+1}=\hat{E}\xi=\overline{X}$，得到矩法估计 $\hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$ 。

(2) 先求似然函数：

$$L=\prod_{i=1}^{n}\varphi(x_i)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\theta\,x_i^{\theta-1}=\theta^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta-1} & 0<x_i<1\ (i=1,2,\cdots,n)\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

当 $L\neq 0$ 时，对 L 取对数，得到 $\ln L=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ 。

解方程 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，得到极大似然估计

$$\hat{\theta}=\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}=\frac{-1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}=\frac{-1}{\overline{\ln X}}\ 。$$

3.3　设总体 ξ 服从 Poisson 分布，概率分布为

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \cdots \quad ,$$

其中，$\lambda > 0$ 是未知参数，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 ξ 的样本，求：

（1）λ 的矩法估计；　（2）λ 的极大似然估计。

解　(1) 因为 $\xi \sim P(\lambda)$（Poisson 分布），$E\xi = \lambda$，所以矩法估计为 $\hat{\lambda} = \hat{E}\xi = \overline{X}$ 。

（2）似然函数　$$L = \prod_{i=1}^{n} P\{\xi = x_i\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\mathrm{e}^{-n\lambda} \quad ,$$

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\lambda - \ln\prod_{i=1}^{n} x_i! - n\lambda \quad 。$$

解方程 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\lambda} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} - n = 0$ ，得到极大似然估计 $\hat{\lambda} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$ 。

3.4　设总体 ξ 服从几何分布，概率分布为

$$P\{\xi = k\} = (1-p)^{k-1} p \, , \quad k = 1, 2, \cdots \quad ,$$

其中，$0 < p < 1$ 是未知参数，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 ξ 的样本，求 p 的极大似然估计。

解　似然函数　$$L = \prod_{i=1}^{n} P\{\xi = x_i\} = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{x_i - 1} p = (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n} p^n \quad 。$$

$$\ln L = (\sum_{i=1}^{n} x_i - n)\ln(1-p) + n\ln p \quad 。$$

解方程 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}p} = -\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}{1-p} + \dfrac{n}{p} = 0$ ，得到极大似然估计 $\hat{p} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \dfrac{1}{\overline{X}}$ 。

3.5 设总体 ξ 服从 $[a, b]$ 上的均匀分布，概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}1/(b-a) & a \le x \le b \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中，$a<b$ 是未知参数，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 ξ 的样本，求：

（1） a, b 的矩法估计；　（2） a, b 的极大似然估计。

解 （1）

$$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2},$$

$$E(\xi^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{a^2+ab+b^2}{3}。$$

解方程

$$\begin{cases}\dfrac{\hat{a}+\hat{b}}{2}=\hat{E}\xi=\overline{X} & (1) \\ \dfrac{\hat{a}^2+\hat{a}\hat{b}+\hat{b}^2}{3}=\hat{E}(\xi^2)=\overline{X^2} & (2)\end{cases},$$

$(2)-(1)^2$：

$$\frac{(\hat{a}-\hat{b})^2}{12}=\frac{\hat{a}^2+\hat{a}\hat{b}+\hat{b}^2}{3}-(\frac{\hat{a}+\hat{b}}{2})^2=\overline{X^2}-\overline{X}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2=S^2,$$

两边开方：

$$\frac{\hat{a}-\hat{b}}{2\sqrt{3}}=\pm\sqrt{S^2}=\pm S，\text{即}\ \frac{\hat{a}-\hat{b}}{2}=\pm\sqrt{3}S \quad (3),$$

$(1)+(3)$ 得：

$$\hat{a}=\frac{\hat{a}+\hat{b}}{2}+\frac{\hat{a}-\hat{b}}{2}=\overline{X}\pm\sqrt{3}S,$$

$(1)-(3)$ 得：

$$\hat{b}=\frac{\hat{a}+\hat{b}}{2}-\frac{\hat{a}-\hat{b}}{2}=\overline{X}\mp\sqrt{3}S,$$

可得到两组解：$\begin{cases}\hat{a}=\overline{X}-\sqrt{3}S \\ \hat{b}=\overline{X}+\sqrt{3}S\end{cases}$ 和 $\begin{cases}\hat{a}=\overline{X}+\sqrt{3}S \\ \hat{b}=\overline{X}-\sqrt{3}S\end{cases}$。

因为 $a<b$，第二组解应该舍去，所以矩法估计为 $\begin{cases}\hat{a}=\overline{X}-\sqrt{3}S \\ \hat{b}=\overline{X}+\sqrt{3}S\end{cases}$。

(2) 似然函数

$$L=\prod_{i=1}^{n}\varphi(x_i)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{b-a} & a\le x_i\le b\ ,i=1,2,\cdots,n\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n} & a\le \min_i x_i\le \max_i x_i\le b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad 。$$

$L=\dfrac{1}{(b-a)^n}$ 要达到最大，a 要尽可能大，但它不能大于 $\min_i x_i$，b 要尽可能小，但它不能小于 $\max_i x_i$，所以极大似然估计为 $\begin{cases}\hat{a}=\min_i X_i\\ \hat{b}=\max_i X_i\end{cases}$ 。

3.6　已知总体 ξ 服从 Laplace 分布，概率密度为 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}$,其中，$\sigma>0$ 是未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 ξ 的样本，求 σ 的极大似然估计。

解　似然函数

$$L=\prod_{i=1}^{n}\varphi(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x_i|}{\sigma}}=\frac{1}{2^n\sigma^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}\quad 。$$

$$\ln L=-n\ln 2-n\ln\sigma-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|\quad 。$$

解方程 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\sigma}=-\dfrac{n}{\sigma}+\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$ ，得到极大似然估计 $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|=\overline{|X|}$ 。

3.7　已知总体 ξ 服从 Maxwell 分布，概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a^2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中，$a>0$ 是未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 ξ 的样本，求 a 的极大似然估计。

解　似然函数

$$L=\prod_{i=1}^{n}\varphi(x_i)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\dfrac{4x_i^2}{a^3\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x_i^2}{a^2}} & x_i>0\ \ (i=1,2,\cdots,n)\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4^n\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{a^{3n}\pi^{n/2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{a^2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2} & \min\limits_i x_i>0 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}\text{。}$$

当 $L\neq 0$ 时，对 L 取对数，得到

$$\ln L=n\ln 4+2\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-3n\ln a-\frac{n}{2}\ln\pi-\frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\text{。}$$

解方程 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}a}=-\dfrac{3n}{a}+\dfrac{2}{a^3}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=0$，得到 $a=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$，因为 $a>0$，负根舍去，得到极大似然估计 $\hat{a}=\sqrt{\dfrac{2}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}\overline{X^2}}$ 。

3.8　设总体 ξ 服从对数正态分布，概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x}\exp[-\dfrac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}] & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases},$$

其中，μ,σ^2 都未知，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 ξ 的样本，求 μ 和 σ^2 的极大似然估计。

解　似然函数

$$L=\prod_{i=1}^{n}\varphi(x_i)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x_i}\exp[-\dfrac{(\ln x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}] & x_i>0\ (i=1,2,\cdots,n) \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}\right)\exp[-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2] & \min\limits_i x_i>0 \\ 0 & \text{其他}\end{cases},$$

取对数　$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-n\ln\sigma-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2\ ,$$

求导，列方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\mu}=-\dfrac{-2}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)=\dfrac{1}{\sigma^2}(\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i-n\mu)=0 & (1) \\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\sigma}=-\dfrac{n}{\sigma}+\dfrac{1}{\sigma^3}\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2=0 & (2)\end{cases}$$

从（1）解得 $\mu=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i=\overline{\ln x}$，代入（2）可解得 $\sigma^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln x_i-\overline{\ln x})^2$ ，

所以，μ 和 σ^2 的极大似然估计为 $\hat{\mu}=\overline{\ln X}$ 和 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i-\overline{\ln X})^2$ 。

3.9 设总体 ξ 服从 $[\mu-1,\mu+1]$ 上的均匀分布，概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}1/2 & \mu-1\le x\le\mu+1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中，μ 是未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 ξ 的样本，求 μ 的极大似然估计。

解 似然函数

$$L=\prod_{i=1}^{n}\varphi(x_i)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2} & \mu-1\le x_i\le\mu+1,\ i=1,2,\cdots,n\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & \mu-1\le\min_i x_i\le\max_i x_i\le\mu+1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n} & \max_i x_i-1\le\mu\le\min_i x_i+1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\ 。$$

可以看出，当且仅当 $\mu\in[\max_i x_i-1,\min_i x_i+1]$ 时，似然函数 L 取到最大值 $\dfrac{1}{2^n}$，其他情况下 $L=0$ 。所以，根据极大似然估计的定义，区间 $[\max_i X_i-1,\min_i X_i+1]$ 中的任何一个值都是 μ 的极大似然估计，也就是有 $\hat{\mu}\in[\max_i X_i-1,\min_i X_i+1]$ 。

3.10 设总体 ξ 的概率分布为

ξ	0	1	2
$P\{\xi=k\}$	$1-3\theta$	θ	2θ

其中，θ（$0<\theta<\dfrac{1}{3}$） 是未知参数，利用总体 ξ 的如下样本观测值

1，0，1，2，1，

求 θ 的矩法估计值和极大似然估计值。

解 （1） $E\xi=\sum_{k=0}^{2}kP\{\xi=k\}=0\times(1-3\theta)+1\times\theta+2\times2\theta=5\theta$ ，

$$\bar{x}=\frac{1+0+1+2+1}{5}=\frac{5}{5}=1\ 。$$

解方程 $5\hat{\theta}=\hat{E\xi}=\bar{x}=1$ ，得到 θ 的矩法估计值 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{5}$ 。

（2）　似然函数

$$L=\prod_{i=1}^{n}P\{\xi=x_i\}=(1-3\theta)^1\times\theta^3\times(2\theta)^1=2(1-3\theta)\theta^4 \quad 。$$

$$\ln L=\ln 2+\ln(1-3\theta)+4\ln\theta \quad ,$$

解方程 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{3}{1-3\theta}+\dfrac{4}{\theta}=\dfrac{-3\theta+4-12\theta}{(1-3\theta)\theta}=\dfrac{4-15\theta}{(1-3\theta)\theta}=0$ 得到 θ 的极大似然估计值 $\hat{\theta}=\dfrac{4}{15}$ 。

3.11　已知总体 ξ 的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^3}{\theta^4} & 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ ，其中，$\theta>0$ 是未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 ξ 的样本。（1）求 θ 的矩法估计 $\hat{\theta}$ 。问：这个矩法估计 $\hat{\theta}$ 是不是 θ 的无偏估计？（2）求 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L$ 。

解　（1）
$$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}\frac{4x^4}{\theta^4}\mathrm{d}x=\left.\frac{4x^5}{5\theta^4}\right|_0^{\theta}=\frac{4\theta}{5} \quad 。$$

解方程 $\dfrac{4\hat{\theta}}{5}=\widehat{E\xi}=\overline{X}$，得到 θ 的矩法估计 $\hat{\theta}=\dfrac{5\overline{X}}{4}$ 。

因为 $E(\hat{\theta})=E\left(\dfrac{5\overline{X}}{4}\right)=\dfrac{5}{4}E(\overline{X})=\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{4\theta}{5}=\theta$ ，所以 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计。

（2）似然函数

$$L=\prod_{i=1}^{n}\varphi(x_i)=\begin{cases}\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\frac{4x_i^3}{\theta^4}=\frac{4^n\prod_{i=1}^{n}x_i^3}{\theta^{4n}} & 0\le\min_i x_i\le\max_i x_i\le\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \quad ,$$

当 $L\ne 0$ 时，对 L 取对数，得到 $\ln L=n\ln 4+3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-4n\ln\theta$ 。

求导，列方程 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{4n}{\theta}=0$，无解。但从 $L=\dfrac{4^n\prod_{i=1}^{n}x_i^3}{\theta^{4n}}$ 可以看出 θ 越小，L 越大，但此式仅当 $\theta\ge\max_i x_i$ 才成立，所以 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L=\max_i X_i$。

3.12　设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是总体$\xi\sim N(0,\sigma^2)$的样本，其中σ^2未知，求常数c，使$c\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 σ^2 的无偏估计。

解　因为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是$\xi\sim N(0,\sigma^2)$ 的样本，所以 $X_i\sim N(0,\sigma^2)$，有$E(X_i)=0$，$D(X_i)=\sigma^2$，$E(X_i^2)=D(X_i)+[E(X_i)]^2=\sigma^2+0^2=\sigma^2$，$i=1,2,\cdots,n$ 。

$$E\left(c\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=c\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=c\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=cn\sigma^2 \quad 。$$

要求 $c\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 成为 σ^2 的无偏估计，即要有

$$cn\sigma^2=E\left(c\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\sigma^2 \quad ,$$

解这个方程，得到 $c=\dfrac{1}{n}$ 。

3.13　设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是总体$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，其中μ,σ^2未知，求常数c，使$c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计。

解　因为

$$E\left[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right]=c\sum_{i=1}^{n-1}E[(X_{i+1}-X_i)^2]$$

$$=c\sum_{i=1}^{n-1}\left\{D(X_{i+1}-X_i)+[E(X_{i+1}-X_i)]^2\right\}=c\sum_{i=1}^{n-1}\left\{D(X_{i+1})+D(X_i)+[E(X_{i+1})-E(X_i)]^2\right\}$$

$$=c\sum_{i=1}^{n-1}\left[D\xi+D\xi+(E\xi-E\xi)^2\right]=c\sum_{i=1}^{n-1}(\sigma^2+\sigma^2+0)=2c(n-1)\sigma^2 \quad 。$$

要求 $c\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 成为 σ^2 的无偏估计，即要有

$$2c(n-1)\sigma^2=E\left[c\sum_{i=1}^{n}(X_{i+1}-X_i)^2\right]=\sigma^2 \quad ,$$

解这个方程，得到 $c=\dfrac{1}{2(n-1)}$ 。

3.14　设总体$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，（X_1, X_2, X_3）是ξ的样本，证明下列统计量都是μ的无偏估计，并比较哪一个估计最有效：

$$\hat{\mu}_1=\frac{2}{5}X_1+\frac{1}{5}X_2+\frac{2}{5}X_3 \ ，$$

$$\hat{\mu}_2=\frac{1}{6}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{2}X_3 \ ，$$

$$\hat{\mu}_2=\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{12}X_3 \ 。$$

解　（1）因为

$$E(\hat{\mu}_1)=\frac{2}{5}EX_1+\frac{1}{5}EX_2+\frac{2}{5}EX_3=\frac{2}{5}E\xi+\frac{1}{5}E\xi+\frac{2}{5}E\xi=E\xi=\mu \ ，$$

$$E(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{6}EX_1+\frac{1}{3}EX_2+\frac{1}{2}EX_3=\frac{1}{6}E\xi+\frac{1}{3}E\xi+\frac{1}{2}E\xi=E\xi=\mu \ ，$$

$$E(\hat{\mu}_3)=\frac{2}{3}EX_1+\frac{1}{4}EX_2+\frac{1}{12}EX_3=\frac{2}{3}E\xi+\frac{1}{4}E\xi+\frac{1}{12}E\xi=E\xi=\mu \ ，$$

所以它们都是 μ 的无偏估计；

（2）因为

$$D(\hat{\mu}_1)=\frac{4}{25}DX_1+\frac{1}{25}DX_2+\frac{4}{25}DX_3=\frac{4}{25}D\xi+\frac{1}{25}D\xi+\frac{4}{25}D\xi=\frac{9}{25}D\xi=\frac{9}{25}\sigma^2 \ ，$$

$$D(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{36}DX_1+\frac{1}{9}DX_2+\frac{1}{4}DX_3=\frac{1}{36}D\xi+\frac{1}{9}D\xi+\frac{1}{4}D\xi=\frac{7}{18}D\xi=\frac{7}{18}\sigma^2 \ ，$$

$$D(\hat{\mu}_3)=\frac{4}{9}DX_1+\frac{1}{16}DX_2+\frac{1}{144}DX_3=\frac{4}{9}D\xi+\frac{1}{16}D\xi+\frac{1}{144}D\xi=\frac{37}{72}D\xi=\frac{37}{72}\sigma^2 \ ，$$

由于 $\frac{9}{25}<\frac{7}{18}<\frac{37}{72}$ ，即 $D(\hat{\mu}_1)<D(\hat{\mu}_2)<D(\hat{\mu}_3)$ ，所以 $\hat{\mu}_1$ 最有效。

3.15　设 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是参数θ的两个相互独立的无偏估计，且已知$D(\hat{\theta}_1)=2D(\hat{\theta}_2)$。试求常数$a,b$，使得$a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2$是$\theta$的无偏估计，且在一切这样的线性估计类中方差最小。

解　因为 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是 θ 的无偏估计，所以有

$$E(\hat{\theta}_1)=E(\hat{\theta}_2)=\theta \ ，\ E(a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2)=aE(\hat{\theta}_1)+bE(\hat{\theta}_2)=(a+b)\theta \ 。$$

要求 $a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2$ 是 θ 的无偏估计，即要有

$$(a+b)\theta=E(a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2)=\theta \ ，\ a+b=1 \ ，\ b=1-a \ 。$$

因为$\hat{\theta}_1$,$\hat{\theta}_2$相互独立，$D(\hat{\theta}_1)=2D(\hat{\theta}_2)$，所以

$$D(a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2)=a^2D(\hat{\theta}_1)+b^2D(\hat{\theta}_2)=a^2\cdot 2D(\hat{\theta}_2)+(1-a)^2D(\hat{\theta}_2)$$

$$=(1-2a+3a^2)D(\hat{\theta}_2)=3(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a+a^2)D(\hat{\theta}_2)$$

$$=3(\frac{1}{9}-\frac{2}{3}a+a^2+\frac{2}{9})D(\hat{\theta}_2)=3\left[(\frac{1}{3}-a)^2+\frac{2}{9}\right]D(\hat{\theta}_2)\quad 。$$

由这个表达式可以看出，当且仅当 $a=\frac{1}{3}$ 时，$k_1\hat{\theta}_1+k_2\hat{\theta}_2$ 的方差 $D(a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2)$ 达到最小，这时 $b=1-a=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ 。

3.16　设总体 ξ 的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{\theta}{x^2} & x\ge\theta\\ 0 & x<\theta\end{cases}$ ，其中，$\theta>0$ 是未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 ξ 的容量为 n（$n>2$）的样本 。

（1）求 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}$ ；

（2）求总体 ξ 的分布函数 $F(x)$ ；

（3）求 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$ ；

（4）$\hat{\theta}$ 是不是 θ 的无偏估计 ？

（5）求 $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$ 。

解　（1）似然函数

$$L=\prod_{i=1}^{n}\varphi(x_i)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta}{x_i^2} & x_i\ge\theta\ (i=1,2,\cdots,n)\\ 0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\frac{\theta^n}{\prod_{i=1}^{n}x_i^2} & \min_i x_i\ge\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad 。$$

当 $L\ne 0$ 时，对 L 取对数，得到 $\ln L=n\ln\theta-2\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ 。

求导，列方程 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta}=0$ ，这一方程无解，说明不能通过解方程求出θ的极大似然估计。

从似然函数的表达式 $L=\frac{\theta^n}{\prod_{i=1}^{n}x_i^2}$ 可以看出，θ越大，L就越大，但此式成立的条件是 $\theta\le\min_i x_i$，在其它情况下有$L=0$，所以，只有当 $\theta=\min_i x_i$ 时，似然函数L才能

取到最大值。因此，根据极大似然估计的定义，θ 的极大似然估计是 $\hat{\theta}=\min\limits_i X_i$。

（2）ξ 的分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\theta}0\mathrm{d}t+\int_{\theta}^{x}\frac{\theta}{t^2}\mathrm{d}t=1-\frac{\theta}{x} & x\geq\theta\\ \int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}t=0 & x<\theta\end{cases}。$$

（3）因为样本中每一个 X_i 都与总体 ξ 同分布，它们的分布函数都是 $F(x)$，所以，$\hat{\theta}=\min\limits_i X_i$ 的分布函数

$$F_{\hat{\theta}}(x)=P\{\min_i X_{\mathrm{i}}\leq x\}=1-P\{\min_{\mathrm{i}} X_{\mathrm{i}}>x\}=1-P\{X_1>x,\,X_2>x,\cdots,X_n>x\}$$

$$=1-P\{X_1>x\}P\{X_2>x\}\cdots P\{X_n>x\}=1-P\{\xi>x\}P\{\xi>x\}\cdots P\{\xi>x\}$$

$$=1-[1-P\{\xi\leq x\}][1-P\{\xi\leq x\}]\cdots[1-P\{\xi\leq x\}]$$

$$=1-[1-F(x)]^n=\begin{cases}1-\left[1-\left(1-\frac{\theta}{x}\right)\right]^n=1-\frac{\theta^n}{x^n} & x\geq\theta\\ 1-(1-0)^n=0 & x<\theta\end{cases}。$$

（4）$\hat{\theta}=\min\limits_i X_i$ 的概率密度

$$\varphi_{\hat{\theta}}(x)=\frac{\mathrm{d}F_{\hat{\theta}}(x)}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}\left(1-\frac{\theta^n}{x^n}\right)'=\frac{n\theta^n}{x^{n+1}} & x\geq\theta\\ 0'=0 & x<\theta\end{cases},$$

$\hat{\theta}$ 的数学期望

$$E(\hat{\theta})=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi_{\hat{\theta}}(x)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{+\infty}x\frac{n\theta^n}{x^{n+1}}\mathrm{d}x=n\theta^n\int_{\theta}^{+\infty}\frac{1}{x^n}\mathrm{d}x=\frac{n}{n-1}\theta\neq\theta\ ,$$

所以，$\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计。

（5）因为 $\hat{\theta}^2$ 的数学期望

$$E(\hat{\theta}^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi_{\ddot{\theta}}(x)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{+\infty}x^2\frac{n\theta^n}{x^{n+1}}\mathrm{d}x=n\theta^n\int_{\theta}^{+\infty}\frac{1}{x^{n-1}}\mathrm{d}x=\frac{n}{n-2}\theta^2\ ,$$

所以，$\hat{\theta}$ 的方差

$$D(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}^2)-[E(\hat{\theta})]^2=\frac{n}{n-2}\theta^2-\left(\frac{n}{n-1}\theta\right)^2=\frac{n\theta^2}{(n-2)(n-1)^2}\ 。$$

3.17　设随机地从一批钉子中抽取 8 枚，测得它们的长度（单位：cm）为

2.14，2.10，2.13，2.15，2.12，2.16，2.13，2.11。

设钉子的长度 $\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$ ，求长度的平均值 μ 的置信水平为 95% 的置信区间。

考虑两种情况：（1）已知 $\sigma = 0.01$ cm ；　（2）σ 未知。

解　$n = 8$， $\overline{X} = 2.13$ ， $S^* = 0.02$ 。

（1）已知 $\sigma = 0.01$。对 $1-\alpha = 0.95$，$1-\alpha/2 = 0.975$，查 $N(0,1)$ 分布的分位数表，可得 $u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.9600$ 。

$$u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = 1.9600 \times \frac{0.01}{\sqrt{8}} = 0.0069 \ ,$$

$$\underline{\theta} = \overline{X} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.13 - 0.0069 = 2.1231 \ ,$$

$$\overline{\theta} = \overline{X} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.13 + 0.0069 = 2.1369 \ 。$$

$\sigma = 0.01$ 时，μ 的置信水平为 95% 的置信区间为 $[2.1231, 2.1369]$。

（2）σ 未知。对 $1-\alpha = 0.95$，$1-\alpha/2 = 0.975$，$n-1 = 8-1 = 7$，查 t 分布的分位数表可得 $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(7) = 2.3646$ 。

$$t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}} = 2.3646 \times \frac{0.02}{\sqrt{8}} = 0.0167 \ ,$$

$$\underline{\theta} = \overline{X} - t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}} = 2.13 - 0.0167 = 2.1133 \ ,$$

$$\overline{\theta} = \overline{X} + t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}} = 2.13 + 0.0167 = 2.1467 \ 。$$

σ 未知时，μ 的置信水平为 95% 的置信区间为 $[\ 2.1133, 2.1467\ ]$ 。

3.18　对铝的比重（单位：g/cm^3）进行 16 次测量，测得样本均值 $\overline{X} = 2.705$，样本标准差 $S = 0.029$ 。设样本来自正态总体 $\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$ ，求：

（1）总体均值 μ 的置信水平为 95% 的置信区间 ；

（2）总体标准差 σ 的置信水平为 95% 的置信区间。

解 $n=16$，$\overline{X}=2.705$，$S=0.029$，$S^*=\sqrt{\frac{n}{n-1}}S=\sqrt{\frac{16}{15}}\times 0.029=0.029951$。

（1） 对$1-\alpha=0.95$，查 t 分布表可得 $t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.975}(15)=2.1314$。

$$t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}=2.1314\times\frac{0.029951}{\sqrt{16}}=0.016 \quad ,$$

$$\underline{\theta}=\overline{X}-t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}=2.705-0.016=2.689 \quad ,$$

$$\overline{\theta}=\overline{X}+t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}=2.705+0.016=2.721 \quad 。$$

μ 的水平为 95% 的置信区间为$[2.689, 2.721]$ 。

（2）$(n-1)S^{*2}=(16-1)\times 0.029951^2=0.013456$ 。

对$1-\alpha=0.95$，查χ^2 分布表，可得

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(15)=6.262 \quad , \quad \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(15)=27.488 \quad 。$$

$$\underline{\theta}=\frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}=\frac{0.013456}{27.488}=0.0004895 \quad ,$$

$$\overline{\theta}=\frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}=\frac{0.013456}{6.262}=0.0021488 \quad 。$$

$$\sqrt{\underline{\theta}}=\sqrt{0.0004895}=0.0221 \quad , \quad \sqrt{\overline{\theta}}=\sqrt{0.0021488}=0.0464 \quad 。$$

σ 的水平为 95% 的置信区间为$[0.0221, 0.0464]$ 。

3.19 从自动车床生产的螺丝钉中抽取9只，测得质量（单位：g）如下：

5.42, 5.29, 5.40, 5.24, 5.58, 5.21, 5.44, 5.49, 5.53 。

设螺丝钉的质量$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$ ，求：

（1）μ 的置信水平为 95% 的置信区间 ；

（2）σ 的置信水平为 95% 的置信区间。

解 $n=9$，$\overline{X}=5.4$，$S^*=0.12903$。

（1） 对$1-\alpha=0.95$，查 t 分布表可得 $t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.975}(8)=2.3060$。

$$t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}} = 2.3060 \times \frac{0.12903}{\sqrt{9}} = 0.099 \quad ,$$

$$\underline{\theta} = \overline{X} - t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}} = 5.4 - 0.099 = 5.301 \quad ,$$

$$\overline{\theta} = \overline{X} + t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}} = 5.4 + 0.099 = 5.499 \quad 。$$

μ 的水平为 95% 的置信区间为$[5.301, 5.499]$ 。

（2）$(n-1)S^{*2} = (9-1)\times 0.12903^2 = 0.1332$ 。

对$1-\alpha = 0.95$，查χ^2 分布表，可得

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(8) = 2.180 \quad , \quad \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(8) = 17.535 \quad 。$$

$$\underline{\theta} = \frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} = \frac{0.1332}{17.535} = 0.007596 \quad , \quad \overline{\theta} = \frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} = \frac{0.1332}{2.180} = 0.06110 \quad 。$$

$$\sqrt{\underline{\theta}} = \sqrt{0.007596} = 0.08716 \quad , \quad \sqrt{\overline{\theta}} = \sqrt{0.06110} = 0.2472 \quad 。$$

σ 的水平为 95% 的置信区间为$[0.08716, 0.2472]$ 。

3.20 某种炮弹的炮口速度服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，随机地取 9 发炮弹作试验，测得炮口速度的修正样本标准差 $S^* = 11$（m/s），求 σ^2 和 σ 的置信水平为 95% 的置信区间。

解 $n = 9$，$(n-1)S^{*2} = (9-1)\times 11^2 = 968$。

对$1-\alpha = 0.95$，查χ^2 分布表，可得

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(8) = 2.180 \quad , \quad \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(8) = 17.535 \quad 。$$

$$\underline{\theta} = \frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} = \frac{968}{17.535} = 55.2 \quad ,$$

$$\overline{\theta} = \frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} = \frac{968}{2.180} = 444 \quad 。$$

$$\sqrt{\underline{\theta}} = \sqrt{55.2} = 7.43 \quad , \quad \sqrt{\overline{\theta}} = \sqrt{444} = 21.1 \quad 。$$

σ^2 的置信区间为 $[55.2, 444]$ ；σ 的置信区间为 $[7.43, 21.1]$ 。

3.21　设总体$\xi \sim N(\mu, 4)$，样本均值为$\overline{X}$，要使得总体均值μ的置信水平为0.95的置信区间为 $[\overline{X}-0.560, \overline{X}+0.560]$，样本容量（样本观测次数）$n$ 必须是多少？

解　**因为**在已知 $\sigma=\sigma_0$ 的情况下，μ 的水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$[\overline{X}-u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \overline{X}+u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}],$$

已知有 $\sigma_0=\sqrt{4}=2$。对$1-\alpha=0.95$，查$N(0,1)$分布表，可得 $u_{1-\alpha/2}=u_{0.975}=1.9600$。

现在，要有 $u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}=0.560$，即要有

$$n=\left(u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{0.560}\right)^2=\left(1.9600\times\frac{2}{0.560}\right)^2=7^2=49。$$

3.22　设用原料 A 和原料 B 生产的两种电子管的使用寿命（单位：h）分别为 $\xi \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $\eta \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，其中 σ_1，σ_2 都未知，但已知$\sigma_1=\sigma_2$。现对这两种电子管的使用寿命进行测试，测得结果如下：

原料A	1460，1550，1640，1600，1620，1660，1740，1820
原料B	1580，1640，1750，1640，1700

求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

解　$m=8$，$\overline{X}=1636.25$，$S_x{*}^2=12169.6$，$n=5$，$\overline{Y}=1662$，$S_y{*}^2=4220.0$。

$$S_w=\sqrt{\frac{(m-1)S_x{*}^2+(n-1)S_y{*}^2}{m+n-2}}=\sqrt{\frac{7\times12169.6+4\times4220.0}{8+5-2}}=96.3267\quad。$$

对$\alpha=0.05$，查 t 分布表，可得 $t_{1-\alpha/2}(m+n-2)=t_{0.975}(11)=2.2010$。

$$t_{1-\alpha/2}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=2.2010\times96.3267\times\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{5}}=120.87,$$

$$\underline{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}-t_{1-\alpha/2}S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=1636.25-1662-120.87=-146.62,$$

$$\overline{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}+t_{1-\alpha/2}S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=1636.25-1662+120.87=95.12。$$

$\mu_1-\mu_2$的水平为 95% 的置信区间为$[-146.62, 95.12]$ 。

3.23 甲、乙两人相互独立地对一种聚合物的含氯量用相同的方法各作 10 次测定，测定值的样本方差分别为 $S_x^2=0.5419$ 和 $S_y^2=0.6050$，设测定值服从正态分布，求他们测定值的方差之比的置信水平为 95% 的置信区间。

解 $m=10$，$S_x^2=0.5419$，$S_x{*}^2=\dfrac{m}{m-1}S_x^2=0.602111$；

$n=10$，$S_y^2=0.6050$，$S_y{*}^2=\dfrac{n}{n-1}S_y^2=0.672222$。

$$S_x{*}^2\big/S_y{*}^2=\frac{0.602111}{0.672222}=0.8957\text{。}$$

对$\alpha=0.05$，查F 分布表，可得

$$F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)=F_{0.975}(9,9)=4.03\ ,$$

$$F_{\alpha/2}(m-1,n-1)=\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n-1,m-1)}=\frac{1}{F_{0.975}(9,9)}=\frac{1}{4.03}=0.248\ \text{。}$$

$$\underline{\theta}=\frac{S_x{*}^2\big/S_y{*}^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}=\frac{0.8957}{4.03}=0.222\text{，}$$

$$\bar{\theta}=\frac{S_x{*}^2\big/S_y{*}^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}=\frac{0.8957}{0.248}=3.61\ \text{。}$$

$\sigma_1^2\big/\sigma_2^2$ 的水平为 95% 的置信区间为 $[0.222,3.61]$。

3.24 设甲、乙两种灯泡的使用寿命(单位：小时)分别为$\xi\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$\eta\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$。从甲种灯泡中任取 5 只，测得样本均值$\overline{X}=1000$，修正样本标准差$S_x{*}=20$；从乙种灯泡中任取 7 只，测得样本均值$\overline{Y}=980$，修正样本标准差$S_y{*}=21$。

（1）假定已知$\sigma_1=\sigma_2$，求$\mu_1-\mu_2$的置信水平为 95% 的置信区间；

（2）求 σ_1/σ_2 的置信水平为 95% 的置信区间。

解 (1) $S_w=\sqrt{\dfrac{(m-1)S_x{*}^2+(n-1)S_y{*}^2}{m+n-2}}=\sqrt{\dfrac{(5-1)\times20^2+(7-1)\times21^2}{5+7-2}}=20.606$。

对$\alpha=0.05$，查 t 分布表，可得 $t_{1-\alpha/2}(m+n-2)=t_{0.975}(10)=2.2281$。

$$t_{1-\alpha/2}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=2.2281\times20.606\times\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}=26.88\text{，}$$

$$\underline{\theta} = \overline{X} - \overline{Y} - t_{1-\alpha/2} S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = 1000 - 980 - 26.88 = -6.88,$$

$$\overline{\theta} = \overline{X} - \overline{Y} + t_{1-\alpha/2} S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = 1000 - 980 + 26.88 = 46.88。$$

$\mu_1 - \mu_2$ 的水平为 95% 的置信区间为$[-6.88, 46.88]$ 。

(2) $$S_x^{*2} \Big/ S_y^{*2} = \frac{20^2}{21^2} = 0.9070。$$

对$\alpha = 0.05$，查F 分布表，可得

$$F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1) = F_{0.975}(4,6) = 6.23 ,$$

$$F_{\alpha/2}(m-1, n-1) = \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)} = \frac{1}{F_{0.975}(6,4)} = \frac{1}{9.20} = 0.1087 。$$

$$\underline{\theta} = \frac{S_x^{*2} \Big/ S_y^{*2}}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)} = \frac{0.9070}{6.23} = 0.146,$$

$$\overline{\theta} = \frac{S_x^{*2} \Big/ S_y^{*2}}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)} = \frac{0.9070}{0.1087} = 8.34 。$$

$$\sqrt{\underline{\theta}} = \sqrt{0.146} = 0.382 ,\quad \sqrt{\overline{\theta}} = \sqrt{8.34} = 2.89 。$$

σ_1/σ_2 的水平为 95% 的置信区间为 $[0.382, 2.89]$ 。

3.25 某汽车租赁公司欲估计顾客租赁汽车后的平均行驶里程，随机抽查了 200 名顾客根据行驶记录计算得平均行驶里程$\overline{X} = 325$公里，修正标准差$S^* = 60$公里，求平均行驶里程置信水平为 0.9 的置信区间（提示：中心极限定理）.

解 由题意知

$\xi \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), n = 200, \overline{X} = 325, S^* = 60.$

μ的90%的置信区间为

$$\left[\overline{x} - t_{0.95}\left(199\right)\frac{S^*}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{0.95}\left(199\right)\frac{S^*}{\sqrt{n}}\right] = \left[318.02, 331.98\right].$$