第二章 运动的守恒量和守恒定律

2.1 质点系的内力和外力 质心 质心运动定理

一、质点系的内力与外力

- **内力:** 质点系内各个质点间的相 互作用。

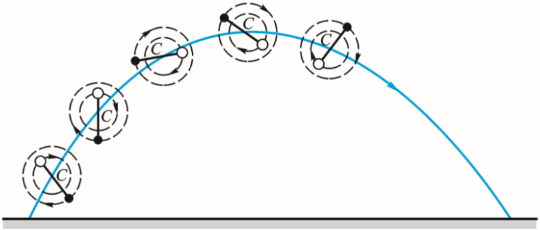
  系统内的内力是成对出现的， 系统的内力之和为零，对整体运动不发生影响。

- **外力:** 质点系外物体对系统内质点所施加的力。

2.1 质点系的内力和外力 质心 质心运动定理

二、质心

考虑由刚性轻杆连接的两个小球系统 将它斜向抛出，轻杆中心某点C作抛物线运动



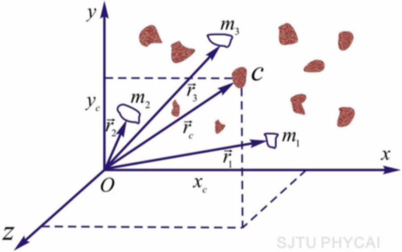
质心是与质量分布有关的一个代表点，它的位置在平均意义上代表着质量分布的中心。

2.1 质点系的内力和外力 质心 质心运动定理

对于N个质点组成的质点系：

$$m_1, m_2, \cdots, m_i, \cdots, m_N;$$

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_i, \cdots, \vec{r}_N.$$



质心的位矢：

$$\vec{r}_C = \sum \frac{m_i \vec{r}_i}{m}, \quad m = \sum m_i$$

直角坐标系中的分量式：

$$x_C = \sum \frac{m_i x_i}{m}, \quad y_C = \sum \frac{m_i y_i}{m}, \quad z_C = \sum \frac{m_i z_i}{m}$$

2.1 质点系的内力和外力 质心 质心运动定理

对于质量连续分布的物体:

质心的位矢:

$$\vec{r}_C = \int \frac{\vec{r}dm}{m}, \quad (m = \int dm)$$

直角坐标系中的分量式:

$$x_C = \int \frac{xdm}{m}, \quad y_C = \int \frac{ydm}{m}, \quad z_C = \int \frac{zdm}{m}$$

线分布: $dm = \lambda dl$, 面分布: $dm = \sigma ds$, 体分布: $dm = \rho dV$.

注意: 质心与重心是两个不同的 概念，重心是地球对物体各部分引力的合力(即重力)的作用点，质心与重心的位置不一定重合。

2.1 质点系的内力和外力 质心 质心运动定理

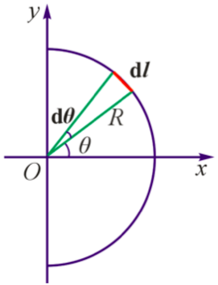
例2.1-1 一般均匀铁丝弯成半圆形，其半径为R，质量为m，求此半圆形铁丝的质心.

解：在铁丝上取一小段，长度dl，质量dm

$$x_C = \frac{\int x dm}{m} = \frac{\int x\lambda dl}{m}$$

$$= \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R\cos\theta\lambda R d\theta}{m} = \frac{2\lambda R^2}{m}$$

$$\lambda = \frac{m}{\pi R}, \quad x_C = \frac{2}{\pi}R$$



根据对称性分析可知：$y_C = 0$

2.1 质点系的内力和外力 质心 质心运动定理

三、质心运动定理

质心的位矢为:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

质心的速度为:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$$

质心的加速度为:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{\sum m_i}$$

2.1 质点系的内力和外力 质心 质心运动定理

根据牛顿第二定律:

$$\begin{aligned} m_1\vec{a}_1 &= \vec{F}_1+\vec{F}_{12}+\vec{F}_{13}+\cdots+\vec{F}_{1n} \\ m_2\vec{a}_2 &= \vec{F}_2+\vec{F}_{21}+\vec{F}_{23}+\cdots+\vec{F}_{2n} \\ \cdots & \quad \cdots\cdots \\ m_n\vec{a}_n &= \vec{F}_n+\vec{F}_{n1}+\vec{F}_{n2}+\cdots+\vec{F}_{nn-1} \end{aligned}$$

对于系统内成对的内力:

$$\because \quad \vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0,\cdots,\vec{F}_{ij}+\vec{F}_{ji}=0,\cdots$$

$$\therefore \quad \sum m_i\vec{a}_i=\sum \vec{F}_i$$

$$\because \quad \vec{a}_C=\frac{\sum m_i\vec{a}_i}{\sum m_i}, \quad \therefore \sum \vec{F}_i = m\vec{a}_C$$ (质心运动定理)

2.1 质点系的内力和外力 质心 质心运动定理

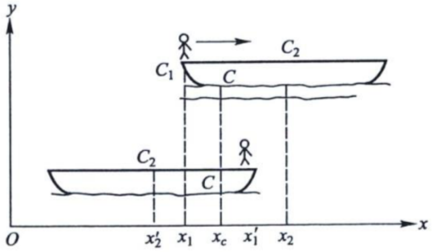
例2.1-2 质量为m_1、长为L的木船浮在静止的河面上。今有一质量为m_2的小孩以时快时慢不规则速率从船 尾走到船头。假设船和水之间摩擦不计，求船相对于岸移动了多少距离。

解: 初始时的质心坐标:

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

小孩走到船头时，质心坐标

$$x'_C = \frac{m_1 x'_1 + m_2 x'_2}{m_1 + m_2}$$

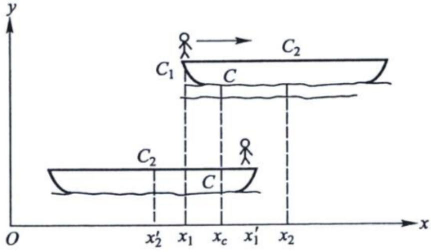


2.1 质点系的内力和外力 质心 质心运动定理

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

$$x'_C = \frac{m_1x'_1 + m_2x'_2}{m_1 + m_2}$$

由于系统不受外力作用，质心水平方向位置保持不变。



$$m_1x_1+m_2x_2 = m_1x'_1+m_2x'_2,\quad m_2(x_2-x'_2) = m_1(x'_1-x_1)$$

小船向后移动的距离: $d = x_2 - x'_2$

小孩相对岸行走的距离: $L - d = x'_1 - x_1$

$$m_2d = m_1(L-d) \;\Rightarrow\; d = \frac{m_2}{m_1+m_2}L$$

2.2 动量定理 动量守恒定律

一、质点的动量定理

由牛顿运动定律:

$$\vec{F}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}=\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$d\vec{p}=\vec{F}\cdot dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2}d\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1$$

冲量: $\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$表示力对时间的累积量。

2.2 动量定理 动量守恒定律

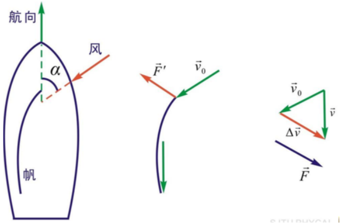
$$\vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

动量定理: 质点在运动过程中，所受合外力的冲量等于质点动量的增量。

讨论:

(1) 冲量$\vec{I}$的方向和大小是由所有微分冲量$\vec{F}dt$的合矢量来决定。动量定理反映了力在时间上的累积作用对质点产生的效果。

逆风行舟的分析:



2.2 动量定理 动量守恒定律

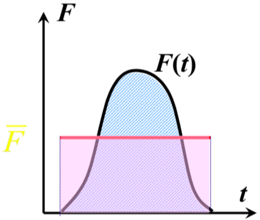
(2) 动量定理是矢量方程，可以写成分量形式

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{t_0}^{t} F_x dt = mv_x - mv_{0x} \\ I_y &= \int_{t_0}^{t} F_y dt = mv_y - mv_{0y} \\ I_z &= \int_{t_0}^{t} F_z dt = mv_z - mv_{0z} \end{aligned}$$

2.2 动量定理 动量守恒定律

(3) 在 冲击、 碰撞问题中估算平均冲力

$$\overline{\vec{F}} = \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} \vec{F} dt$$
$$= \frac{\vec{p} - \vec{p}_0}{t - t_0}$$



(4) 当物体质量改变时，使用动量定理处理很方便。

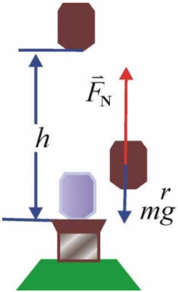
(5) 动量定理是牛顿第二定律的积分形式，只适用于惯性系。

2.2 动量定理 动量守恒定律

例2.2-1 质量$m=0.3\mathrm{t}$的重锤，从高度$h=1.5\mathrm{m}$处自由落 到受锻压的工件上，工件发生形变．如果作用的时间(1)$\tau=0.1\mathrm{s}$, (2)$\tau=0.01\mathrm{s}$, 试求锤对工件的平均冲力。

解：以重锤为研究对象，分析受力， 作受力图。

解法一：研究锤对工件的作用过程，在竖 直方向利用动量定理，取竖直向上为正.



$$(\overline{F}_N-mg)\tau=0-(-mv_0)=m\sqrt{2gh}$$

$$\overline{F}_N=mg+m\sqrt{2gh}/\tau$$

$$(1)\tau=0.1\ \mathrm{s},\ \overline{F}_N=1.92\times10^5\ \mathrm{N}$$

$$(2)\tau=0.01\ \mathrm{s},\ \overline{F}_N=1.9\times10^6\ \mathrm{N}$$

$$\overline{F}_N\gg mg$$

2.2 动量定理 动量守恒定律

解法二: 研究锤从自由下落到静止的整个过程, 其动量变化为零.

重力作用时间为 $\tau+\sqrt{2h/g}$, 支持力的作用时间为τ

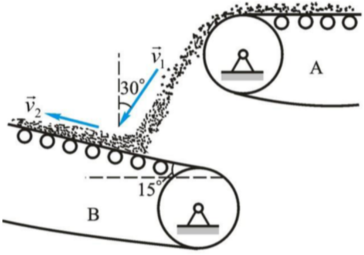
由动量定理:

$$\overline{F}_{\mathrm{N}}\tau-mg(\tau+\sqrt{2h/g})=0$$

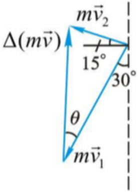
$$\overline{F}_{\mathrm{N}}=mg+m\sqrt{2gh}/\tau$$

2.2 动量定理 动量守恒定律

例2.2-2 矿砂从传送带A落到另一传送带B，其速度$v_1 = 4\ \mathrm{m/s}$，方向与竖直方向成30°角，而传送带B与水平成15°角，其速度$v_2 = 2\mathrm{m/s}$。如传送带的运送量恒定，设为$k = 20\ \mathrm{kg/s}$，求落到传送带B上的矿砂在落上时所受到 的力。



(a)



(b)

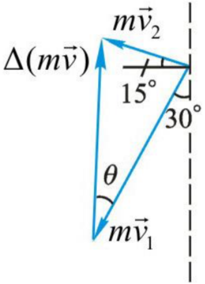
解：设在某极短的时间Δt内落在传送带上矿砂的质量为m，即$m = k\Delta t$，这些矿砂动量的增量为

$$\Delta(m\vec{v}) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

2.2 动量定理 动量守恒定律

其大小为

$$
\begin{aligned}
|\Delta(m\vec{v})| &= m\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos 75^\circ} \\
&= 3.98m = 3.98k\Delta t
\end{aligned}
$$



设这些矿砂在时间Δt内所受的平均作用力为$\overline{F}$,由动量定理

$$\overline{F}\Delta t = |\Delta(m\vec{v})|$$

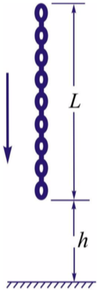
$$\overline{F} = \frac{|\Delta(m\vec{v})|}{\Delta t} = 79.6\ \mathrm{N}$$

方向: $\dfrac{|\Delta(m\vec{v})|}{\sin 75^\circ} = \dfrac{|m\vec{v}_2|}{\sin\theta}$, $\theta = 29^\circ$

2.2 动量定理 动量守恒定律

例2.2-3 质量为m的均质链条，全长为L，手持其上端，使下端离地面的高度为h．然后放手让它自由下落到上．求链条落到地上的长度为l时，地面所受链条作用力的大小．

解：设t时刻长x的链条已落到地面dt时间内将有$dm=(m/L)dx$的链条落到地面对dm应用动量定理，取向下为正：



$$\begin{aligned} Fdt &= 0-(-\frac{m}{L}dx\cdot v) \\ F &= \frac{m}{L}v^2 \end{aligned}$$

地面受到的冲力：$F'=-F=-\frac{m}{L}v^2$，方向向下。

2.2 动量定理 动量守恒定律

自由下落速度: $v^2 = 2g(x+h)$

$$F' = -\frac{m}{L}2g(x+h)$$

考虑到已落地部分链条的重力

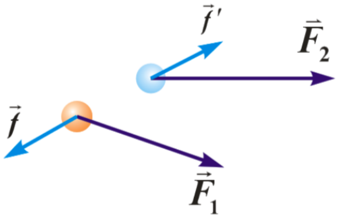
地面所受链条作用力大小为

$$\left|F'\right| + \frac{m}{L}xg = \frac{m}{L}(3l+2h)g$$

2.2 动量定理 动量守恒定律

二、质点系的动量定理

考虑两个质点的系统:



$$(\vec{F}_1+\vec{f})dt=d\vec{p}_1$$
$$(\vec{F}_2+\vec{f}')dt=d\vec{p}_2$$

两式相加

$$(\vec{F}_1+\vec{f}+\vec{F}_2+\vec{f}')dt=d\vec{p}_1+d\vec{p}_2$$

$\vec{f}, \vec{f}'$是一对作用力和反作用力

$$(\vec{F}_1+\vec{F}_2)dt=d(\vec{p}_1+\vec{p}_2)$$

2.2 动量定理 动量守恒定律

扩展到有i个质点的系统

$$(\sum_i \vec{F}_i)dt = d(\sum_i \vec{p}_i)$$

对从t_1到t_2时间内积分

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i dt = \sum_i \vec{p}_{i2} - \vec{p}_{i1} = \sum_i m_i \vec{v}_{i2} - \sum_i m_i \vec{v}_{i1}$$

质点系总动量的增量，等于作用在质点上所有外力在同一时间内的冲量的矢量和。

2.2 动量定理 动量守恒定律

三、动量守恒定律

根据质心运动定律: $\sum \vec{F}_i = m\vec{a}_C$

$$\text{若} \quad \sum \vec{F}_i = 0 \qquad \text{则} \ \vec{a}_C = 0$$

$$\text{即} \ \vec{v}_C = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m} = \text{常矢量}$$

$$\Rightarrow \ \vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_C = \text{常矢量}$$

如果系统所受的外力之和为零,则系统的总动量保持不变,这个结论叫做动量守恒定律.

2.2 动量定理 动量守恒定律

讨论:

(1) 动量守恒是指系统动量总和不变,但系统内各个 质点的动量可以变化, 通过内力进行传递和交换。

(2) 当外力作用远小于内力作用时,可近似认为系统 的总动量守恒。(如:碰撞、打击过程等)

(3) 分量式

$$p_x = \sum m_i v_{ix} = 常量 \quad (当 \sum F_{ix} = 0 时)$$

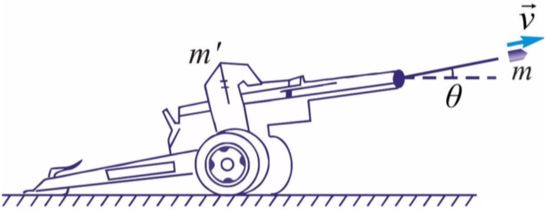
$$p_y = \sum m_i v_{iy} = 常量 \quad (当 \sum F_{iy} = 0 时)$$

$$p_z = \sum m_i v_{iz} = 常量 \quad (当 \sum F_{iz} = 0 时)$$

(4) 定律不仅适合宏观物体,同样也适合微观领域。

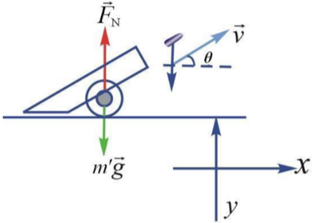
2.2 动量定理 动量守恒定律

例2.2-4 如图所示,设炮车以仰角θ发射一炮弹,炮车和 炮弹的质量分别为m'和m, 炮弹的出口速度为v, 求 炮车的反冲速度v'。炮车与地面间的摩擦力不计。



解:选取炮车和炮弹组成系统

内、外力分析。 炮车与地面间的摩擦力不计,系统水平方向动量守恒。



2.2 动量定理 动量守恒定律

系统水平方向动量守恒:

$$-m'v' + m(v\cos\theta - v') = 0$$

得炮车的反冲速度为

$$v' = \frac{m}{m+m'} v\cos\theta$$

思考: 竖直方向动量守恒吗?

2.2 动量定理 动量守恒定律

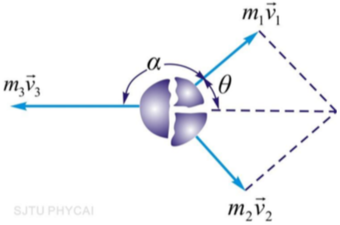
例2.2-5 一个静止物体炸成三块,其中两块质量相等,且以相同速度30m/s沿相互垂直的方向飞开,第三块的质量恰好等于这两块质量的总和。试求第三块的速度(大小和方向)。

解: 炸裂时爆炸力是物体内力,它远大于重力,故 在爆炸中,可认为动量守恒.

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 = 0$$

$$-m_3\vec{v}_3 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$(m_3v_3)^2 = (m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2$$



2.2 动量定理 动量守恒定律

$$(m_3v_3)^2 = (m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2$$

$$\because m_1 = m_2 = m, \quad m_3 = 2m$$

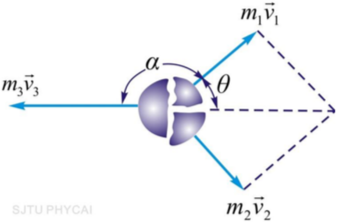
$$\therefore v_3 = \frac{1}{2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{30^2 + 30^2} = 21.2(\mathrm{m/s})$$

$$\tan\theta = \frac{v_2}{v_1} = 1, \ \theta = 45^\circ,$$

$$\alpha = 180^\circ - \theta = 135^\circ$$

即$\vec{v}_1$和$\vec{v}_3$及$\vec{v}_2$都成135°,

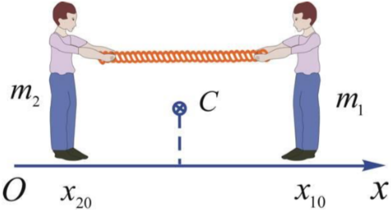
且三者都在同一平面内.



2.2 动量定理 动量守恒定律

例2.2-6 质量为m_1和m_2的两个小孩，在光滑水平冰面上用绳彼此拉对方．开始时静止，相距为l．问他们将在何处相遇？

解：把两个小孩和绳看作一个系统，水平方向动量守恒．任取两个小孩连线上一点为原点，向右为x轴为正向．



设开始时小孩的坐标分别为x_{10}、x_{20}，在任意时刻的速度分别v_1为v_2，坐标为x_1和x_2.

由运动学关系：

$$x_1 = x_{10} + \int_0^t v_1 dt, \quad x_2 = x_{20} + \int_0^t v_2 dt$$

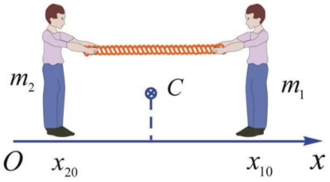
2.2 动量定理 动量守恒定律

$$x_1 = x_{10} + \int_0^t v_1 dt, \quad x_2 = x_{20} + \int_0^t v_2 dt \quad (1)$$

相遇时:$x_1 = x_2$

$$x_{10} + \int_0^t v_1 dt = x_{20} + \int_0^t v_2 dt$$

由动量守恒: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$



$$x_{10} - x_{20} = \int_0^t -\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) v_1 dt = -\frac{m_1 + m_2}{m_2} \int_0^t v_1 dt$$

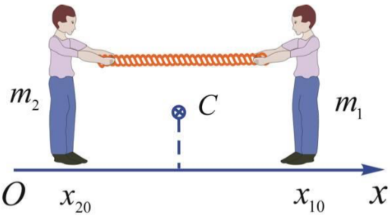
$$\int_0^t v_1 dt = \frac{m_2 x_{20} - m_2 x_{10}}{m_1 + m_2}$$ 代入式(??)得

2.2 动量定理 动量守恒定律

$$x_1 = x_{10} + \frac{m_2 x_{20} - m_2 x_{10}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 x_{20} + m_1 x_{10}}{m_1 + m_2}$$

相遇时有

$$x_1 = x_2 = x_C$$



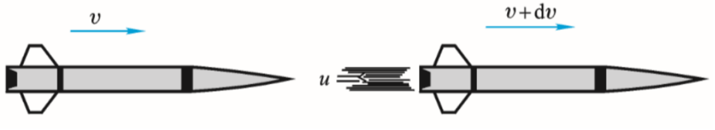
结果表明，两小孩在纯内力作用下，将在他们共同的质心相遇. 上述结果也可直接由质心运动定律求出.

2.2 动量定理 动量守恒定律

*四、火箭飞行

(1) 火箭的速度

设t时刻，火箭质量为m，速度为v(向前)，在dt内，喷出气体$dm(<0)$，喷气相对火箭的速度(称喷气速度)为u(向后)，使火箭的速度增加了dv。



若不计重力和其他外力，由动量守恒定律可得

$$mv = (m+dm)(v+dv) + (-dm)(v+dv-u)$$

略去二阶无穷小量：$dv = -u\dfrac{dm}{m}$

2.2 动量定理 动量守恒定律

$$dv = -u\frac{dm}{m}$$

设u是一常量，

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{m_1}^{m_2} -u\frac{dm}{m}, \quad v_2 - v_1 = u\ln\frac{m_1}{m_2}$$

设火箭开始飞行的速度为零，质量为m_0，燃料烧尽时，火箭剩下的质量为m，此时火箭能达到的速度是

$$v = \int_{m_0}^{m} -u\frac{dm}{m} = u\ln\frac{m_0}{m}$$

2.2 动量定理 动量守恒定律

多级火箭:

$$v_1 = u_1 \ln N_1,$$
$$v_2 - v_1 = u_2 \ln N_2,$$
$$v_3 - v_2 = u_3 \ln N_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

最终速度:

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \ln N_i$$

u_i— 第i级火箭喷气速率

N_i—第i级火箭质量比

2.2 动量定理 动量守恒定律

(2) 火箭的推力

取t时刻喷出的燃气$-dm$为研究对象，其速度v，$t+dt$时刻速度为$v+dv-u$

由动量定理

$$f_{\text{gas}}dt=(-dm)(v+dv-u)-(-dm)v$$

略去二阶无穷小量：$f_{\text{gas}}=u\dfrac{dm}{dt}$

$f_{\text{gas}}<0$: 燃气受力向后

火箭的推力 $f_{\text{gas}}=-u\dfrac{dm}{dt}$， 向前