3.6、(1) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = 1 + x + x^2, & x \in R \end{cases}$

解：令$\phi(x) = 1 + x + x^2$, 方程和初始条件关于x施行Fourier变换，记$\hat{u}(\lambda, t) = \mathscr{F}[u], \hat{\phi}(\lambda) = \mathscr{F}[\phi]$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{u}(\lambda, t) = (i\lambda)^2 a^2 \hat{u} = -(a\lambda)^2 \hat{u}, & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\phi}(\lambda) \end{cases}$$

解初值问题

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\phi}(\lambda) e^{-(a\lambda)^2 t}$$

作Fourier逆变换，利用卷积定理可得

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_R \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right)(1 + y + y^2)dy$$

令$\frac{x-y}{2\sqrt{t}} = \eta$,则有

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [(1+x+x^2)e^{-\eta^2} + (-2a\sqrt{t} - 4a\sqrt{t}x)\eta e^{-\eta^2} + 4a^2 t\eta^2 e^{-\eta^2}] d\eta$$

$$= 1 + x + x^2 + 2a^2 t$$

3.7、(1)$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} - bu_x - cu = f(x,t), & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in R \end{cases}$

其中a, b, c是常数（这道题考察的知识点(1)Fourier变换的一阶、二阶微分性质的应用，(2)一阶非齐次常微分方程的求解,(3)逆变换求原函数的技巧)

解：方程和初始条件关于x施行Fourier变换

$$\begin{cases} \hat{u}_t(\lambda,t) + (a^2\lambda^2 - ib\lambda - c)\hat{u}(\lambda,t) = \hat{f}(\lambda,\tau) \\ \hat{u}(\lambda,0) = \hat{\phi}(\lambda) \end{cases}$$

解初值问题

$$\hat{u}(\lambda,t) = \hat{\phi}(\lambda,t)e^{-(a^2\lambda^2-ib\lambda-c)t} + \int_0^t \hat{f}(\lambda,t)e^{-(a^2\lambda^2-ib\lambda-c)(t-\tau)}d\tau$$

作Fourier逆变换

$$\mathscr{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda,t)e^{-(a^2\lambda^2-ib\lambda-c)t}] = \phi(x) * \mathscr{F}^{-1}[e^{-(a^2\lambda^2-ib\lambda-c)t}]$$

$$= \phi(x) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{ct}e^{-\frac{(x+bt)^2}{4a^2t}} = \frac{e^{ct}}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)e^{-\frac{(x+bt-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\int_0^t \hat{f}(\lambda,\tau)e^{-(a^2\lambda^2-ib\lambda-c)(t-\tau)}d\tau] = \int_0^\tau f(x,\tau)*\mathscr{F}^{-1}[e^{-(a^2\lambda^2-ib\lambda-c)(t-\tau)}]d\tau$$

$$= \int_0^\tau f(x,\tau) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{c(t-\tau)}e^{-\frac{(x+b(t-\tau))^2}{4a^2t}}d\tau$$

（有些同学作业的时候就写到这一步结束了，要注意还没有做完整，要将卷积写出来就可以，即）

$$= \int_0^\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau)\frac{e^{c(t-\tau)}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x+b(t-\tau)-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau$$

所以原定解问题的解为

$$u(x,t) = \frac{e^{ct}}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)e^{-\frac{(x+bt-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$+\int_0^\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau)\frac{e^{c(t-\tau)}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x+b(t-\tau)-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau$$

作业

- 作业3.6(1)中，要注意：(1)最后的积分要算出来，其中的技巧在例题3.2.1中讲过，在4月14号思考题中也做过类似的练习；(2)做题目时不能直接写由公式，由定理可得.....
- 作业3.7(1),要注意(1)有部分同学是做的齐次方程的情况，非齐次的情况也要掌握，特别是一阶常系数非齐次常微分方程的解的表达形式还有些同学没有掌握，希望这些同学再看看掌握一下前面这一方向的知识，（2）利用Fourier变换求解时，最后一步的卷积要按照定义将积分的表达形式写出来