第三章 刚体的转动
习题课

	质点运动	刚体定轴转动
规律：	$\vec{F}=m\vec{a}$	$M=J\alpha$
状态量：	$\vec{P}=m\vec{v}$	$L=J\omega$
	$E_k=\frac{1}{2}mv^2$	$E_k=\frac{1}{2}J\omega^2$
累积效应：		
	$\int\vec{F}\cdot dt=\vec{P}_2-\vec{P}_1$	$\int M\cdot dt=L_2-L_1$
	$\int\vec{F}\cdot d\vec{S}=E_{k2}-E_{k1}$	$\int M\cdot d\theta=E_{k2}-E_{k1}$

线动量和角动量相对应的变量和它们的关系

线动量	角动量
力 $\vec{F}$	力矩 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
线动量 $\vec{P}$	角动量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$
牛顿第二定律 $\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$	牛顿第二定律 $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
守恒定律 $\sum \vec{F}_{外} = 0 \quad \vec{P} = 常量$	守恒定律 $\sum \vec{M}_{外} = 0 \quad \vec{L} = 常量$

第三章作业4题：

一匀质圆盘，半径为R，质量为m，放在粗糙的水平桌面上，绕过其中心的竖直轴转动。如果圆盘与桌面的摩擦系数为μ，求：

（1）圆盘所受摩擦力矩的大小

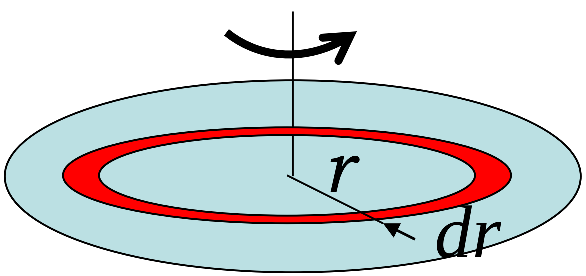
（2）若盘开始角速度为ω_0，经多长时间圆盘会停下？

（1）

$$dM_f = r\cdot\mu\cdot dm\cdot g = \ldots$$

$$M_f = \int dM_f = \int_0^R r\cdot\mu\cdot dm\cdot g$$

$$= \frac{2}{3}\mu mgR$$



$dm = \sigma 2\pi r dr$

$$\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$$

第三章作业4题:

（2） 法一：$-M_f = J\alpha = J\dfrac{d\omega}{dt}$

$$-\frac{2}{3}\mu mgR = \frac{1}{2}mR^2\frac{d\omega}{dt}$$

$$\int_0^t dt = \int_{\omega_0}^0 -\frac{3}{4}\frac{R}{\mu g}d\omega \rightarrow t = \ldots$$

法二：$-\int_0^t M dt = 0 - J\omega \rightarrow t = \ldots$

第三章作业10题：

一颗子弹质量为m，速度为v，击中能绕通过中心的水平轴转动的轮子（看做圆盘）边缘，并留在盘内，轮子质量为m_0，半径为R，求：击中后轮的角速度，角动量和转动动能？

解：子弹、轮对转轴的角动量守恒

$$mvR=(\frac{1}{2}m_0R^2+mR^2)\omega \longrightarrow \omega=\ldots$$

角动量：

$$L=J\omega=(\frac{1}{2}m_0R^2+mR^2)\omega=mvR$$

转动动能：

$$E_k=\frac{1}{2}J\omega^2=\ldots$$

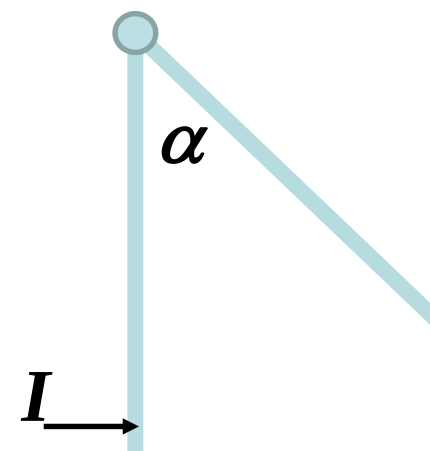
第三章 12题:

一质量为m，长为l的均匀直棒，能绕通过O点的水平轴在竖直平面内自由转动，此棒原来静止。现于A端作用与棒垂直的冲量I，使此棒获得角速度，然后从竖直位置摆到最大角度α，求此冲量的量值？

$$\int_0^t Fl dt = l\int_0^t F dt = Il = J\omega$$

$$mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega^2$$

$$\rightarrow I = \ldots$$



例：一轻绳扰过一定滑轮(M/4,均匀分布在其边缘上),质量M的人抓住绳的一端A,绳的另一端B系一质量为M/2的重物，问：当人相对绳以匀速向上爬时，B端重物上升的加速度.

解： 选地面参照系

$$J_{轮} = \frac{M}{4}R^2$$

$$B: T_1 - \frac{M}{2}g = \frac{M}{2}a_B \ldots(1)$$

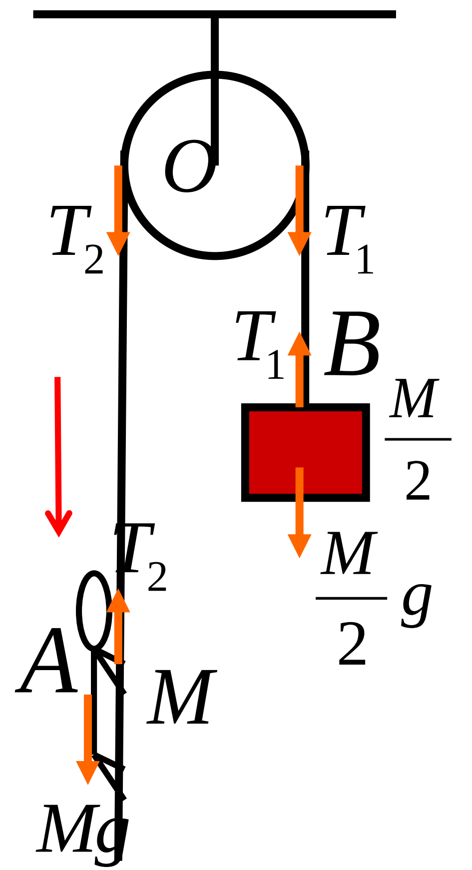
$$轮: T_2 R - T_1 R = \frac{M}{4}R^2\alpha \cdots(2)$$

$$人: Mg - T_2 = Ma_{人} \ldots(3)$$

$$a_B = R\alpha \ldots(4)$$

$$a_{人} = a_{人绳} + a_{绳地} = a_B \ldots(5)$$

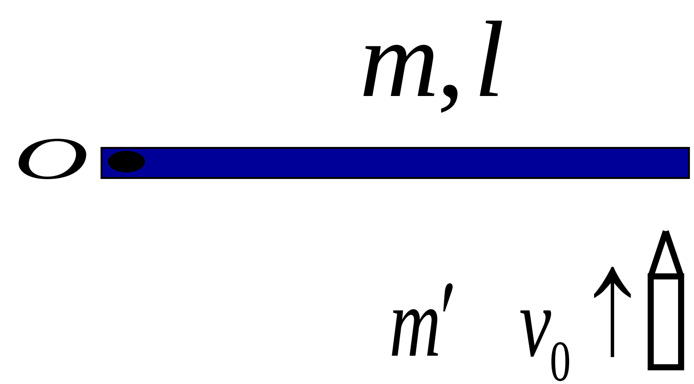
由上五个方程可得： $a_B = \frac{2}{7}g$



例：放在水平桌面上的匀质棒，可绕通过其一端的竖直固定光滑轴转动，棒的 $m=1.5kg$ ，长度 $l=1.0m$，初始棒静止，今有一水平运动的子弹质量 $m'=0.020kg$，速率 $v=400m\cdot s^{-1}$ 从棒的一端射入棒内

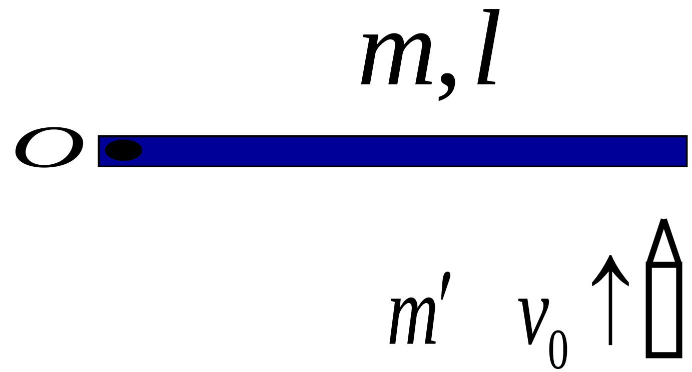
问：**1**）棒和子弹一起转动时的角速度 $\omega=?$

2）若棒转动时受到大小为 $M_f=4.0N\cdot m$ 的恒定阻力矩作用，棒能转过多大的角度



解：1) $m'vl=(\frac{1}{3}ml^2+m'l^2)\omega$

$\rightarrow \omega=15.4rad/s$



2) $\left.\begin{array}{l} -M_f=(\frac{1}{3}ml^2+m'l^2)\alpha \\ 0-\omega^2=2\alpha\theta \end{array}\right\}$

$\rightarrow \theta=15.4rad$

或：$M_f\theta=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2+m'l^2)\omega^2-0$

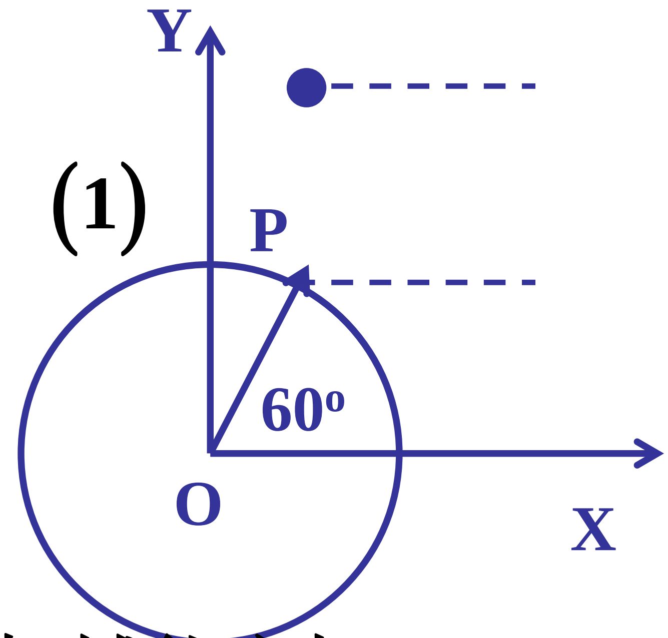
$\rightarrow \theta=15.4rad$

例：一质量为m的质点位于质量为2m半径为R的匀质圆盘边缘P点正上方高度h处，今质点自由下落与静止的圆盘在P点相碰并粘住，设圆盘可以绕垂直XOY平面中心轴转动，求：P到X轴时盘的角速度ω和角加速度α

碰撞过程：$\{m,2m\}$角动量守恒

（设碰撞后瞬间角速度为ω_0）

$$J_{m,2m}\omega_0 = mvR\sin\theta = mvR\cos 60^o \qquad (1)$$



下落过程：$\{m,地球\}$机械能守恒

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (2)$$

碰撞之后转动过程：$\{m,2m,地球\}$机械能守恒

$$\frac{1}{2}J_{m,2m}\omega_0^{\ 2} + mgR\sin 60^o = \frac{1}{2}J_{m,2m}\omega^2 \qquad (3)$$

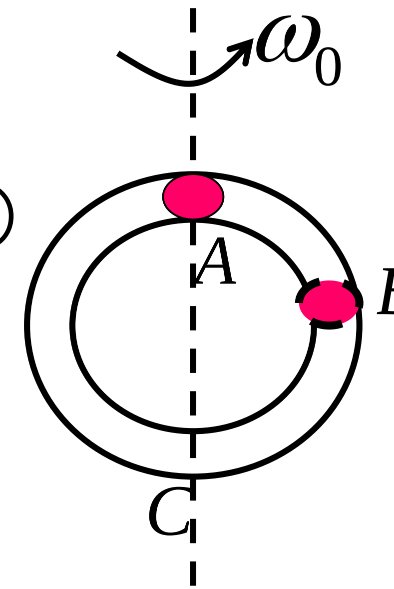
$$J_{m,2m}=\frac{1}{2}2mR^2+mR^2 \qquad (4)$$

由$(1)(2)(3)(4)\Rightarrow \omega$

$$M=mgR=J_{m,2m}\alpha \qquad (5)$$

由$(4)(5)\Rightarrow \alpha$

例：空心圆环绕AC轴自由转动，转动惯量J_0，环半径R，初始角速度ω_0，质量为m的小球静止于环内A点，由于微小干扰，小球向下滑到B点，环的角速度与小球相对于环的速度各为多大？（环内壁光滑）



解：小球、圆环对AC轴角动量守恒

$$J_0\omega_0=(J_0+mR^2)\omega_B \rightarrow \omega_B=\dots \quad ①$$

小球、圆环、地球、系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}J_0\omega_0^2+mgR=\frac{1}{2}J_0\omega_B^2+\frac{1}{2}mv_{m地}^2 \quad ②$$

$$\vec{v}_{m地}=\vec{v}_{m环}+\vec{v}_{环地} \quad \otimes$$

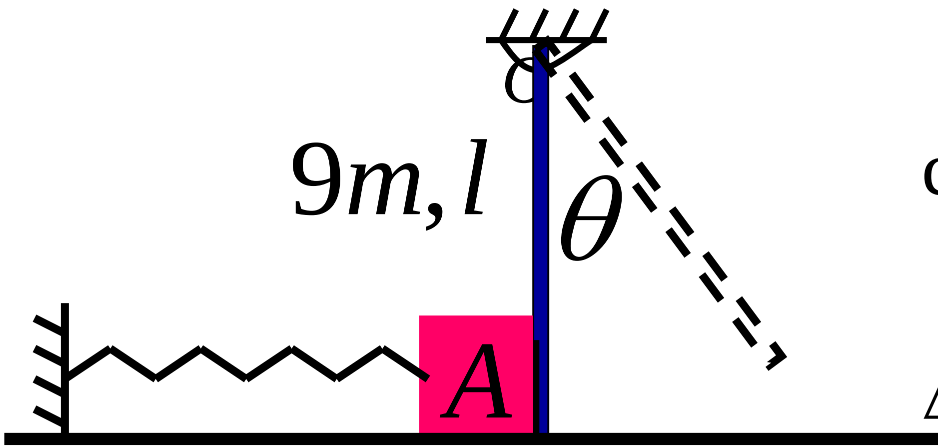
$$\left|\vec{v}_{m地}\right|^2=\left|\vec{v}_{m环}\right|^2+\left|\vec{v}_{环地^2}\right|^2=v_{m环}^2+\left(R\omega_B\right)^2 \quad ③$$

由 ①②③ $\rightarrow v_{m环}=\dots$

例：细杆（ $9m,l$ ），可绕水平轴O自由转动，物体A(m)与弹簧(k)相连．已知水平面光滑，当弹簧为原长时，物体A恰与垂直悬挂的杆相靠，今将物体A向左移过 X_1 后释放，A与杆相碰后，向左返回移过的最大距离为 X_2

求：(1) 杆偏离竖直位置的最大角度 θ

(2) A与杆碰撞过程中的机械能损失



$$\cos\theta = 1 - \frac{k(x_1 + x_2)^2}{27mgl}$$

$$\Delta E = \frac{1}{3}kx_1^{\ 2} - \frac{2}{3}kx_2^{\ 2} - \frac{1}{3}kx_1x_2$$

A被释放后，$\{$A，弹簧$\}$机械能守恒

$$\frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (1)$$

碰撞后，$\{$A，弹簧$\}$机械能守恒

$$\frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \quad (2)$$

碰撞，$\{$A，杆$\}$对转轴角动量守恒

$$mv_1 l = m(-v_2)l + J\omega \quad (3) \qquad J = \frac{1}{3}(9m)l^2 \quad (5)$$

碰撞后，$\{$杆，地$\}$机械能守恒

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = 9mg\Delta h_c = 9mg\left(\frac{1}{2}l\right)(1-\cos\theta) \quad (4)$$

由$(1)(2)(3)(4)(5)\Rightarrow \cos\theta$

机械能损失$\Delta E=\frac{1}{2}mv_1^2-\left(\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}J\omega^2\right)$

结合$(1)(2)(3)(4)(5)\Rightarrow \Delta E$