《信息论》随堂测试及答案

2019 年 11 月 9 日

1、设二元对称信道的传递矩阵为$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ 。若输入概率为 $p(0)=\frac{3}{4}, p(1)=\frac{1}{4}$ ，

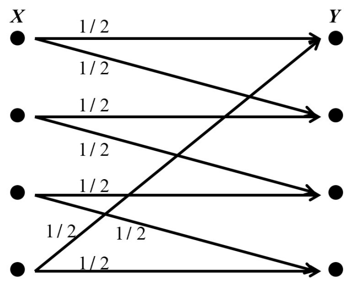
求 $H(X), H(Y), H(Y|X), H(X|Y), I(X;Y)$.

解：$P(X)=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ ，$P(Y)=\begin{bmatrix} \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}$，$P(Y|X)=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$，$P(XY)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

$H(X)=0.811$ 比特/符号，$H(Y)=0.98$ 比特/符号，$H(Y|X)=0.918$ 比特/符号，

$H(X|Y)=0.749$ 比特/符号，$I(X;Y)=0.06$ 比特/符号。

2、信道的传输情况如图所示。试求该信道的信道容量，并给出最佳输入分布。



解：信道矩阵为 $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，这是一个对称信道。

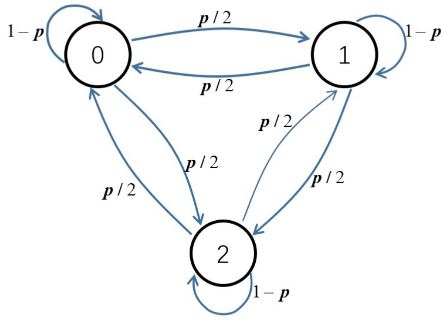
所以 $C=\log 4-H(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0)=\log 4-H(\frac{1}{2})=1$ 比特/符号。

3、一个三元一阶马尔可夫信源的状态转移图如图所示，信源 X 的符号集为 $\{0,1,2\}$ 。

（1）求信源平稳后的概率分布 $p(0), p(1), p(2)$.

（2）求此信源的熵 H_∞。

（3） $p=0, p=1$ 时 H_∞ 取值多少。求 p 取何值时， H_∞ 取最大值。



解：（1）一阶马尔可夫信源一共有 3 个状态。设状态的平稳分布为 $W=(W_0, W_1, W_2)$,

根据 $$\begin{cases} W_0=(1-p)W_0+\frac{p}{2}W_1+\frac{p}{2}W_2 \\ W_1=\frac{p}{2}W_0+(1-p)W_1+\frac{p}{2}W_2 \\ W_2=\frac{p}{2}W_0+\frac{p}{2}W_1+(1-p)W_2 \\ W_0+W_1+W_2=1 \end{cases}$$

可得 $W=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ 。则 $p(0)=\frac{1}{3}, p(1)=\frac{1}{3}, p(2)=\frac{1}{3}$.

（2）根据一阶马尔可夫信源熵的表达式可得

$$H_\infty=H_2=\sum_{i=1}^{3}p(s_i)H(X\mid s_i)$$
$$=H(1-p,\frac{p}{2},\frac{p}{2})=-(1-p)\log(1-p)-p\log p+p$$

（3）当 $p=0$ 时， $H_\infty=0$。当 $p=1$ 时， $H_\infty=1$。

求最大值： H_∞ 对 p 的一阶导数是 $\frac{\partial H_\infty}{\partial p}=\log\frac{2(1-p)}{p}$ 。

令 $\frac{\partial H_\infty}{\partial p}=0$. 可得 $\frac{2(1-p)}{p}=1$, 即 $p=\frac{2}{3}$ 时， H_∞ 取得最大值。