华东理工大学 2013－2014 学年第二学期

《高等数学（下）11 学分》课程期中考试试卷评分标准　2014.4

一．填空题（本大题共 11 小题，每小题 4 分，共 44 分）：

1、微分方程 $y'=\dfrac{x}{2y}e^{2x-y^2}$ 的通解为____________________。

答：$e^{y^2}=\dfrac{1}{2}xe^{2x}-\dfrac{1}{4}e^{2x}+C$

2、微分方程 $y^{(4)}+9y''=0$ 的通解为____________________。

答：$y=C_1+C_2x+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$

3、函数 $u=(\dfrac{y}{x})^z$ 对变量 x 的偏导数 $u_x=$ ____________________。

答：$u_x=-\dfrac{yz}{x^2}(\dfrac{y}{x})^{z-1}$

4、设 $u=f(xze^y, y+e^z, \arctan(xyz))$，其中 f 关于所有变量有一阶连续偏导数，

则 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=$ ____________________。

答：$\dfrac{\partial u}{\partial y}=xze^y f_1+f_2+\dfrac{xz}{1+x^2y^2z^2}f_3$

5、设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=f(xz,\dfrac{z}{y})$ 所确定，其中 f 关于所有变量有一阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ = ____________________。

答：$\dfrac{-zf_2}{y^2-xy^2f_1-yf_2}$

6、设 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-1$，则 $\vec{b}\cdot[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]=$ ________________。

答： 1

7、函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $(1,0,1)$ 处最大的方向导数等于 __________。

答：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

8、微分方程 $xy''+2y'=0$ 的通解 $y=$ ________________________________。

答： $y=-\frac{C_1}{x}+C_2$

9、设平面 π 过直线 $L:\begin{cases}x+5y+z=0,\\ x-z+4=0\end{cases}$ 则原点到平面 π 距离 d 的范围是 ________。

答： $[0,2\sqrt{2}]$

10、设 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^z=xyz^2$ 所确定，则 $dz=$ ________________。

答： $dz=\frac{yz^2}{e^z-2xyz}dx+\frac{xz^2}{e^z-2xyz}dy$

11、求一个最低阶的常系数线性齐次微分方程，使得 x 和 $\sin x+\cos x$ 都是它的特解，则该常系数线性齐次微分方程为________________________________。

答： $y^{(4)}+y''=0$

二．选择题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）：

1、若连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\int_0^{2x}f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$，则 $f(x)=$ （　　）

（A） $e^x\ln 2$；　　（B） $e^{2x}\ln 2$；

（C） $e^x+\ln 2$；　　（D） $e^{2x}+\ln 2$。

答：(B)

2、设有直线 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=6\\ 2y+z=3\end{cases}$，则 L_1 与 L_2 的夹角为（　　）

（A） $\frac{\pi}{6}$；　（B） $\frac{\pi}{4}$；　（C） $\frac{\pi}{3}$；　（D） $\frac{\pi}{2}$。

答：(C)

3、设线性无关的函数 y_1,y_2,y_3 都是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的特解，则下列函数中哪一个一定是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的特解 （　　）

(A) $y_1-y_2+y_3$；　　(B) $y_1+y_2+y_3$；

(C) $\frac{1}{2}(y_1+y_2+y_3)$；　　(D) $y_1-y_2-y_3$。

答：（A）

4、下列哪个函数的在原点处的二重极限为0？ （　　）

(A) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$；(B) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$；

(C) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}, & x+y\neq 0\\ 0, & x+y=0\end{cases}$；(D) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$。

答： (D)

5、函数 $f(x,y)=\sqrt[4]{x^2+y^4}$ 在 $(0,0)$ 点处 （　　）

（A） $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都存在； （B） $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都不存在；

（C） $f'_x(0,0)$ 存在，但 $f'_y(0,0)$ 不存在； （D） $f'_x(0,0)$ 不存在，但 $f'_y(0,0)$ 存在。

答：（B）

三、**（本题 10 分）**求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^x$ 的通解。

解：（1）先求 $y''-3y'+2y=0$ 的通解

事实上，其特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，$\lambda=1,2$

故齐次方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$。

（2）再求原方程的一个特解

可令 $y=x(ax+b)e^x$，则

代入原方程可得 $-2ax+2a-b=x$

得到 $a=-\dfrac{1}{2},b=-1$，所以一个特解为 $y=-(\dfrac{x^2}{2}+x)e^x$

（3）最后求原方程的通解

由方程的解结构定理知原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-(\dfrac{x^2}{2}+x)e^x$ 。

四、（本题 10 分）设曲线 L 位于 xoy 平面的第一象限内，L 上任意一点 M 处的切线与 y 轴相交，交点记为 A。已知 $|MA|=|OA|$，且 L 过点 $(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2})$，求 L 的方程。

解：设 M 的坐标为 (x,y)，则切线 MA 的方程为 $Y-y=y'(X-x)$，

令 $X=0$，得到 A 点坐标为 $(0,y-xy')$。

由于 $|MA|=|OA|$，则 $|y-xy'|=\sqrt{x^2+(xy')^2}$，

即 $2xyy'-y^2=-x^2$ 或者 $y'-\dfrac{y}{2x}=-\dfrac{x}{2y}$

这是一个伯努利方程，换元 $z=y^2$，得到 $\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{z}{x}=-x$

因此，有 $y^2=-x^2+Cx$，由于曲线 L 位于 xoy 平面的第一象限内，

故 $y=\sqrt{-x^2+Cx}$，又 L 过点 $(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2})$，得到 $C=3$，

所以所求曲线为 $y=\sqrt{3x-x^2}\,(0<x<3)$（或者 $y^2=3x-x^2$）。

五、（本题 8 分）设有两条直线 $L_1:\begin{cases}3x+2y+z=6\\x-3y+z=-1\end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases}x+3y-z=1\\2x-y+z=3\end{cases}$，求过点 $P(0,1,3)$ 且与 L_1、L_2 都相交的直线方程。

解：我们求直线的一般式方程，该直线由 P 与 L_1 决定的平面与 P 与 L_2 决定的平面相交得到。

设过 L_1 的平面束为 $(3x+2y+z-6)+\lambda(x-3y+z+1)=0$，将 $P(0,1,3)$ 代入得到 $\lambda=1$，因此由 P 与 L_1 决定的平面方程为 $4x-y+2z-5=0$。

设过 L_2 的平面束为 $(x+3y-z-1)+\mu(2x-y+z-3)=0$，将 $P(0,1,3)$ 代入得到 $\mu=-1$，因此由 P 与 L_1 决定的平面方程为 $x-4y+2z-2=0$。

因此，所求直线方程为 $\begin{cases}4x-y+2z-5=0\\x-4y+2z-2=0\end{cases}$。

注：所求直线的点向式方程为：$\dfrac{x}{6}=\dfrac{y-1}{-6}=\dfrac{z-3}{-15}$。

六、（本题 8 分）

设函数 $f(x,y)=|xy|^{\frac{2}{3}}$，（1）求 $f_x(0,0),f_y(0,0)$；（2）讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可

微性。

解：（1） $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x}=0$，

类似地，$f_y(0,0)=0$。

（2）根据可微的定义，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可微，当且仅当以下二重极限极限成立：

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0\text{。}$$

而 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta z-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{|\Delta x\Delta y|^{\frac{2}{3}}-0\cdot\Delta x-0\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{|\Delta x\Delta y|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

考虑到，$0\le\dfrac{|\Delta x\Delta y|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\le\dfrac{\left|\dfrac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{2}\right|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\le\dfrac{|(\Delta x)^2+(\Delta y)^2|^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{2}{3}}}$，

由夹逼定理知 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{|\Delta x\Delta y|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$，

因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可微。