第五章
微分中值定理及其应用

§1 中值定理

一、Fermat 定理

Newton 在研究物体运动和Leibniz 在研究曲线的几何性质过程中，分别独立地发现了微分和导数。事实上，微分的思想可追溯到Fermat 对函数的极值的研究。

定义：设$f(x)$ 在点x_0 的一个领域$O(x_0,\delta)$ 有定义，若对$\forall x\in O(x_0,\delta)$ 成立不等式$f(x)\le f(x_0)$，则称x_0 是$f(x)$ 的一个极大值点，$f(x_0)$ 称为相应的极大值。同理可定义极小值点/极小值。

注1：区别极值点与最值点。

注2："极大""极小"指在x_0附近的局部范围内函数的大小关系，因此是局部性质。

注3：在一个区间内，$f(x)$ 的极小值完全可能大于$f(x)$的某些极大值点。

注4：函数在一个区间内极值点可以为无穷多个。e.g.
- $f(x) = \sin 1/x$,
- Riemann 函数。

定理一(费马引理)：设x_0是函数$f(x)$的一个极值点，且$f(x)$在x_0处可导，则$f'(x_0)=0$。

注1：（Fermat 定理的几何意义）若$y=f(x)$在其极值点可导，则该点的切线平行于x轴。

注2：由费马定理，若x_0是$f(x)$的极值点，则只有两种情况（1）$f(x)$在x_0处不可导；（2）$f'(x_0)$存在等于0。

注3：当$f(x)$可导时，$f'(x_0)=0$是x_0为$f(x)$的极值点的必要非充分条件。e.g. $f(x)=x^3$在$x=0$处。

二、Rolle 定理

定理二(Rolle 定理)：设函数$f(x)$ 在闭区间$[a, b]$ 上连续，在开区间(a, b) 上可导，且$f(a) = f(b)$，则:
$\exists\, \xi \in (a, b)$, s.t. $f'(\xi) = 0$。

注1：Rolle 定理条件是充分的，三条件中任何一个不满足，结论有可能不成立。e.g. $f_1(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$，
$f_2(x) = |1 - 2x|, x \in [0, 1]$, $f_3(x) = x, x \in [0, 1]$。

注2：（Rolle 定理的几何意义）满足定理条件的函数一定在(a, b) 中某一点存在与x 轴平行的切线。

三、Lagrange 中值定理

定理三(Lagrange 中值定理)：设函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 上可导，则:

至少存在一点$\xi \in (a,b)$, s.t. $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

注1：（Lagrange 中值定理几何意义）若$f(x)$ 在(a,b) 上可导，则曲线$f(x)$ 上至少有一点的切线平行于两端点的连线。

注2：$f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 称为Lagrange 公式，可写成

- $f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$；又可写成
- $f(b)-f(a) = f'(a+\theta(b-a))\,(b-a)(0<\theta<1)$。

若令$a=x, b-a=\Delta x$，则$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) = f'(x+\theta\Delta x)\,\Delta x$。相比较有限增量公式，它给出了$\Delta y, \Delta x$ 与函数导数值之间的精确关系。

四、Cauchy 中值定理

定理四(Cauchy 中值定理)：设函数$f(x)$ 和$g(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b) 上可导，对$\forall x \in (a,b), g'(x) \neq 0$，则:

至少存在一点$\xi \in (a,b)$, s.t. $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。

注1：Lagrange 中值定理是Cauchy 中值定理的特例，令$g(x) = x$ 即可。

注2：Cauchy 中值定理可看成Lagrange 中值定理的参数表达形式。

作业： 课本P_{181} 1, 4, 5, 6, 22。

五、中值定理的应用

1. 一阶导函数与单调性的关系

定理：设$f(x)$在区间I上可导，则$f(x)$在I上单调增加（递减）$\Longleftrightarrow$ $\forall x \in I, f'(x) \geq 0 (f'(x) \leq 0)$。

注：若$f(x)$在区间I上可导，则$f(x)$在I上严格增加 $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$，且$f(x)$在任一长度为正的子区间上$f'(x) \not\equiv 0$。

$\not\Rightarrow \forall x \in I, f'(x) > 0$, e.g. $f(x) = x^3$ 满足$f'(0) = 0$。

事实上，若在I上除有限个点外，有$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$在$I$上严格单调递增。

例1：证明$x > 1$时 $3 - \dfrac{1}{x} < 2\sqrt{x}$.

例2: 证明 $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}\ (x > 0)$.

2. 导函数为零：

定理: 若$f(x)$在区间(a,b) 上可导，$f'(x)\equiv 0$，则: $f(x)$在区间(a,b) 上恒为常数。

推论（不定积分基本定理）：若I 为区间，$f,g\in C(I)$，且$f'(x)=g'(x)$，则:

存在常数C，s.t. 在区间I 上成立$f(x)=g(x)+C$。

例2：设$\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+a_n=0$，证明：方程$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 在$(0,1)$ 上至少有一个根。

3. 一些证明不等式的例子

例4：证明不等式$|\arctan a - \arctan b| \le |a-b|$

例5：证明恒等式

$$\arctan\frac{1+x}{1-x} - \arctan x = \begin{cases} \pi/4, & x<1 \\ -(3\pi)/4 & x>1 \end{cases}$$

例6：设$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续，在$(1,+\infty)$上可导，且$e^{-x^2}f'(x)$在$(1,+\infty)$上有界，证明函数$xe^{-x^2}f(x)$在$(1,+\infty)$上也有界。

作业：课本P_{182}: 7, 9, 10(2)(3),12(1)(5), 16-18, 20-21, 26, 27

§5.2 导数性质，函数凸性

一、导函数间断点必为第二类间断

定理：设函数$f(x)$ 在(a,b) 内 处处可导，证明(a,b) 中的点或者为$f'(x)$ 的连续点，或者为$f'(x)$ 的第二类间断点。

注1：导函数间断点为第二类间断是在导数处处存在的前提下，e.g. $f(x)=|x|$。

注2：若$f(x)$ 在(a,b) 可导，$f'(x)$ 在(a,b) 上单调，则$f'(x)$ 在(a,b) 上连续。

二、导数的介值性

(G. Darboux 定理)：若函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上处处可导，$f'(a) < f'(b)$，则$\forall c$ 满足$f'(a) < c < f'(b), \exists \xi \in (a,b)$, s.t. $f'(\xi) = c$。

推论：若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可导，且$f'(x) \neq 0$，则$f(x)$ 在$[a,b]$ 上严格单调。

三、单侧导数极限定理

定理：设f 在$[a,b]$ 上可微，在a 点右连续。若$f'(a+0) = A$，则$f'_+(a) = f'(a+0) = A$。

注1：该定理可推出“导数极限定理”：设f 在点a 的某领域$O(a)$ 内连续，在$O(a)\backslash\{a\}$ 内可导。若$\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ 存在，则f 在a 处可导，且$f'(x)$ 在a 点连续。

注2：该定理可应用于求分段函数在分段点的导数。

$$\text{e.g. } f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

四、函数凸性。

回忆函数$y=e^x, y=\ln x$。推广：若函数$f(x)$在区间I上的图像类似于$y=e^x$，则称$f(x)$在I上为下凸函数；若函数$f(x)$在区间I上的图像类似于$y=\ln x$，则称$f(x)$在I上为上凸函数。

严格定义：设$f(x)$在区间I上有定义，对$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2, \forall \lambda \in (0,1)$，有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

则称$f(x)$是I上的下凸函数。若不等号严格成立，则称$f(x)$在I上严格下凸。类似可定义上凸函数及严格上凸函数。

命题1：函数$f(x)$ 在区间I 上为下凸函数 $\Longleftrightarrow$ $\forall x_1 < x_2 < x_3, x_1, x_2, x_3 \in I$，成立不等式

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

（改$\le$ 为$<$，即为严格下凸定义的等价条件）

命题2：若f 为开区间I 上的下凸函数，则

(1)f 处处存在有限的单侧导数，且$\forall x \in I, f'_-(x) \le f'_+(x)$

(2)$\forall x, y \in I, x < y$, 有$f'_-(x) \le f'_+(x) \le f'_-(y) \le f'_+(y)$，故$f'_-, f'_+$ 均为单调增加函数。

推论：开区间上的下（上）凸函数必连续。

注：若凸函数的定义域不是开区间，则在端点处可不连续。

e.g. $f(x)=\begin{cases}1, & x=0,1\\ 0, & 0<x<1\end{cases}$ 在$[0,1]$ 上为下凸函数，但在端点处不连续。

命题3：设f 在I 上可微，则f 在I 上为下凸函数 $\Longleftrightarrow$ f' 在I 上$\uparrow$.

推论：设$f(x)$ 在区间I 上二阶可微，则f 在I 上为下凸函数 $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in I, f''(x)\geq 0$。

若$f(x)$ 在区间I 上二阶可微，则f 在I 上严格下凸 $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in I, f''(x)\geq 0$ 且在任一正长度的子区间上$f''(x)\not\equiv 0$。

例1：证明不等式
$a\ln a + b\ln b \ge (a+b)[\ln(a+b) - \ln 2](a, b > 0)$。

例2：设$a, b > 0, p, q$ 为满足$1/p + 1/q = 1$ 的正数，证明$ab \le a^p/p + b^q/q$。

定理(Jensen 不等式)：若$f(x)$ 为区间I 上的下凸（上凸）函数，则对$\forall x_i \in I$ 和满足$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ 的$\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 成立

$$f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \le \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \ \left(f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \ge \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \right).$$

注：Jensen 不等式可证明几何平均数$\le$ 算术平均数。

作业：课本P_{184} $23, 25$

§5.3 L'Hospital 法则

考虑$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ $\left(\dfrac{0}{0}\text{ 型}\right)$；$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\sin mx}{\ln\sin nx}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{ 型}\right)$。

待定型极限除了以上两类型外，还有$0\cdot\infty$ 型、$\infty\pm\infty$ 型、∞^0 型、1^∞ 型、0^0 型几种，均可转化为$\frac{0}{0}$ 或$\frac{*}{\infty}$ 型。

一、$\frac{0}{0}$ 和$\frac{*}{\infty}$ 型极限

定理：（L'Hospital 法则）设函数$f(x)$ 和$g(x)$ 在$(a, a+\delta)(\delta>0)$ 上可导，$g'(x)\neq 0$。若(1) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0$ $\left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right)$ 或 $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\infty$ $\left(\frac{*}{\infty}\text{ 型}\right)$；(2) $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)/g'(x)$ 存在（可以为有限或∞）

则 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)/g(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)/g'(x)$。

注1：该定理的结果可推广至$x \to a^-, x \to a, x \to \infty$ 情况。

注2：L'Hospital 法则确实是计算极限的强有力工具，但要学会将L'Hospital 法则与其它工具相结合，如等价量代换，变量代换，有限增量公式等。

例1：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

例2：$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln \sin mx}{\ln \sin nx}$

例3：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \tan x}{x^3}$

例4：求$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^a}{e^{bx}}$, 其中$a > 0, b > 0$。

二、其它待定型

$0\cdot\infty, \infty\pm\infty, \infty^0, 1^\infty, 0^0$

方法：通过恒等变形转化为$\frac{0}{0}$ 或$\frac{*}{\infty}$ 型，然后采用L'Hospital 法则

例5：$\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x - \dfrac{1}{x})$

例6：$\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^x$

注1：当 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不是$\dfrac{0}{0}$ 或$\dfrac{*}{\infty}$ 型，不能用L'Hospital 法则。

注2：L'Hospital 法则，对于$\dfrac{0}{0}$ 或$\dfrac{*}{\infty}$ 型，若 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$；若 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 仍可能存在。

作业：课本P_{191} 1, 2(2)(3)(16)(19), 3(1)(3) , 4, 5, 7

§5.4 Taylor 公式

在近似计算中，我们希望用简单的函数或是性质比较好的函数来局部近似表示一个比较复杂的函数。

例如：$f(x)$ 在x_0 连续时，

$$f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) = f(x_0) + o(1) \approx f(x_0).$$

$f(x)$ 在x_0 处可导时，

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

目标：用多项式逼近一个函数。

对于有限增量公式，其精确度对$x - x_0$只有一阶。为提高精确度，必须考虑用更高次数的多项式逼近。

唯一性定理：设f在x_0的某领域$O(x_0)$有定义，且有

$$f(x) = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_n)^n+o((x-x_0)^n)$$

$(x \to x_0)$，则$a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), \cdots, a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$。

对一般的函数$f(x)$，我们以$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$为系数构造多项式：

$$P_n(x) = f(x_0)+f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n。$$

考察余项$r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ 的性质。

一、带Peano 余项的Taylor 公式

若函数$f(x)$ 在x_0 处存在n 阶导数$f^{(n)}(x_0)$，则存在x_0 的一个领域，对该领域任意一点x，有

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x)$$

$(x \to x_0)$，其中$r_n(x) = o((x - x_0)^n)$。

理解条件：$f(x)$ 在x_0 处存在n 阶导数，指f 在x_0 的某领域内存在所有的$k(< n)$ 阶导数，但$f^{(n)}(x)$ 只要求在x_0 点存在。

注：该Taylor 公式是有限增量公式的推广。

二、带Lagrange 余项的Taylor 公式

若f 在x_0 的某领域$O(x_0)$ 中$n+1$ 阶可微，则对$\forall x \in O(x_0)$，在x 与x_0 之间存在ξ（$x = x_0$ 时，ξ 可任取），s.t.

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x)$$

$(x \to x_0)$，其中$r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$。

注1：该Taylor 公式是Lagrange 中值定理的推广。

注2：带lagrange 余项的Taylor 公式条件强于带Peano 余项的Taylor 公式，但结论也更强。

作业：课本P_{201} $1, 2$

三、函数在$x=0$处Taylor 公式

我们考虑函数$f(x)$在$x=0$处的Taylor 公式，即

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x)(x\to 0)$$

其中$r_n(x)=o(x^n)$或者$r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\theta\in(0,1)$.

$f(x)$在$x=0$处的Taylor 公式又被称为Maclaurin 公式。

1直接法

例1：求$f(x) = e^x$ 的Maclaurin 公式。

例2：求$f(x) = \sin x$ 的Maclaurin 公式。

例3：求$f(x) = (1+x)^\alpha$ (α 为任意实数)的Maclaurin 公式。

2间接法

例4：求$f(x) = 2^x$ 的Maclaurin 公式。

例5：求$f(x) = \sqrt[3]{2-\cos x}$ 的Maclaurin 公式（展开至4次）。

注：在例5中为何不能利用$f(x) = \sqrt[3]{2}\left(1-\frac{\cos x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$?

例6：求$f(x) = \sqrt{2+\sin x}$ 的Maclaurin 公式（展开至3次）。

例7：求$f(x) = \ln(1+x)$ 的Maclaurin 公式。

函数$f(x)$ 在$x = x_0$ 处的Taylor 公式可以通过它在$x = 0$ 处的Taylor 公式作适当变换后直接得到，而无须用定义计算。

例8：求$f(x) = \sqrt{x}$ 在$x = 1$ 处的Taylor 公式。

作业： 课本P_{216} 1(2)(6)(7) ,2(4)(5)

四、Taylor 公式的应用

1近似计算

例9：用e^x 的10 次Taylor 多项式求e 的近似值，并估计误差。

注：Taylor 公式只是一种局部性质，在进行近似计算时，不能远离x_0，否则效果较差。例

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \theta \in (0,1).$$

取$x = 1, n = 10$，则

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = 0.64563492\cdots$$

与$\ln 2$ 的精确值0.69314718 误差较大。

误差$d_n' = \left|\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\right|_{x=1} \geq \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$。

若改用其它的Taylor 公式，如

$$
\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) \\
&= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi_1)^{2n+1}}\right] \\
&- \left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{2n}}{2n} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-\xi_2)^{2n+1}}\right] \\
&= 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right] + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi_1)^{2n+1}} \\
&+ \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-\xi_2)^{2n+1}}.
\end{aligned}
$$

令$x=\dfrac{1}{3}$，取前两项$\ln 2\approx 2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]=0.6913\cdots$，比前面近似效果好很多。误差

$$
\begin{aligned}
d_n'' &= \left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi_1)^{2n+1}}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-\xi_2)^{2n+1}}\right|_{x=\frac{1}{3}} \\
&\le \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}\left[1+\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^{2n+1}}\right]<\frac{1}{(2n+1)2^{2n}}.
\end{aligned}
$$

作业： 课本P_{216} 4

2求极限

例10：求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$。

因为Peano 余项本身就是对于无穷小量的一个刻画，因此带Peano 余项的Taylor 公式在求极限中应用广泛。

例11：求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$。

例12：设$0<x_1<\frac{\pi}{2}, x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$。证明：(i) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ (ii) $x_n^2\sim\frac{3}{n}(n\to\infty)$。

作业： 课本P_{217} 6(2)(5)(8)，9(2)

3证明不等式

前面介绍过不等式证明的多种方法：利用Lagrange 中值定理；利用函数的凸性；讨论导数的符号来得到函数的单调性。Taylor 公式也可用于不等式证明。

例13：设$\alpha > 1$，证明：当$x > -1$ 时成立$(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$ 且等号当且仅当$x = 0$ 时成立。

例14：设函数$f(x)$ 在$[0,1]$ 上二阶可导，且满足$|f''(x)| \leq 1$，$f(x)$ 在区间$(0,1)$ 达到最大值$\dfrac{1}{4}$。证明：$|f(0)| + |f(1)| \leq 1$。

作业： 课本P_{217} 7(2)，11, 13

§5.5 应用举例（极值/最值问题，函数作图）

作业： P_{230} 2(5)(11)，7, 8(1)(9)，9(2), 11 – 13