§4点、直线和平面之间的度量关系

本节均在右手直角坐标系中讨论

1.点到直线的距离

直线 l ：过点 M_0，方向向量 $\vec{v}$，M 为 l 外任一点

M 到 l 的距离 d（平行四边形，以 $\vec{v}$ 为底边的高）

$$\therefore d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{v}\right|}{|\vec{v}|}。$$

例1　求点(5,4,2)到直线 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$ 的距离d.

2.两条直线之间的距离

定义：两条直线上的点之间的最短距离，称为这两条直线间的距离。

设直线 l_1 和 l_2 异面

定义：分别与两条异面直线 l_1 、l_2 垂直相交（即正交）的直线 l ，称为 l_1 与 l_2 的公垂线。两垂足的连线段称为公垂线段。

命题：两条异面直线 l_1 与 l_2 的公垂线存在且唯一。

命题：两条异面直线l_1与l_2的公垂线段的长就是l_1与l_2之间的距离。

设l_1，l_2的公垂线为P_1P_2，公垂线的方向向量为$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$

$$\boldsymbol{d} = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2}\right| = \left|(\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{M}_1} + \overrightarrow{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2} + \overrightarrow{\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{P}_2}) \cdot (\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \vec{\boldsymbol{v}}_2)^0\right|$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right|}{\left|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right|},$$

例：求直线 $g_1: x-2=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$，

$g_2: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{-2}$ 间的距离。

3.两条直线的夹角，直线和平面的夹角

两条直线的夹角为它们的方向向量的夹角或它的补角。

直线 l 与平面 π（l 不垂直于 π）的夹角规定为 l 与它在 π 上的垂直投影所夹的锐角 ϑ，当 $l \perp \pi$ 时，l 与 π 的夹角规定为 $\dfrac{\pi}{2}$。

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - <\vec{n}, \vec{v}> \qquad \therefore \sin\vartheta = |\cos <\vec{n}, \vec{v}>|。$$

例 1 设直线 $L: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$，平面 $\Pi: x - y + 2z = 3$，求直线与平面的夹角.