Real Analysis

Hansong Huang

ECUST

At East China Normal University

2019.03

1. 外测度
2. Caratheodory 条件与Lebesgue可测集

外测度，
知道Lebesgue测度的构造
Caratheodory条件* p69, 知道环的概念，
实直线上Lebesgue可测集的等价定义*， σ-代数*p48,
测度* p48, 知道测度的一些具体例子*,

定义$\mathbb{R}$中开集U的“长度”，将U表示为不交的开区间之并，

$$U = \bigsqcup_i \Delta_i$$

定义$mU = \sum_i |\Delta_i|$, 这里$|\Delta_i|$为区间Δ_i的长度。

对于任何$\mathbb{R}$中的子集E, 定义
$m^* E = \inf\{mU : U \supseteq E, U \text{ 为开集}\}$.

定义$\mathbb{R}$中开集U的“长度”，将U表示为不交的开区间之并，

$$U = \bigsqcup_i \Delta_i$$

定义$mU = \sum_i |\Delta_i|$.

对于任何$\mathbb{R}$中的子集E, 定义$m^* E = \inf\{mU : U \supseteq E, U \text{ 为开集}\}$.

Question: 1. 对开集U, $m^*U = mU$?

2. 对于单点集E, $m^*E =$? 有限集，可数集？

m^*的性质：

1. 单调性. $\forall A, B \subseteq \mathbb{R}$,
$A \subseteq B \Rightarrow m^*A \leq m^*B$.

2. 次可加性. $\forall A_n \subseteq \mathbb{R}$,成立

$$m^*(\cup A_n) \leq \sum_n m^*A_n.$$

Question: 1. 证明？一般外测度的定义？
2. 次可加性的推论. 如果$m^*A_n = 0$.
3. $m^*A = 0$ ，则A称为m^*-零测集.

σ-代数$\mathcal{A}$ 的定义.(2.2.1, page 48)
X是全集，$\mathcal{A} \subseteq 2^X$ 满足下列性质：
P1.
P2.
P3.
则$\mathcal{A}$称为X上的一个σ-代数.

σ-代数$\mathcal{A}$ 的定义.(2.2.1, page 48)
X是全集，$\mathcal{A} \subseteq 2^X$ 满足下列性质：
P1.
P2. $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \cup A_n \in \mathcal{A}$.
P3. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.
则$\mathcal{A}$称为X上的一个σ-代数.

例1. 平凡的例子.
$X=\{1,2,3,4,5,6\},\quad \mathcal{A}=2^X\equiv\{B:B\subseteq X\}.$
例2. $X=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A_0=\phi$,
$A_1=\{1,2,5\}$, $A_2=\{3,4\}$, $A_3=\{6\}$, $\mathcal{A}=\{$可写成若干A_i之并的集合$\}$

例3. $X = \{0, 1, 2, \cdots\}$, $A_0 = \phi$, 且

$$\bigsqcup_{i \geq 1} A_i = X,$$

$\mathcal{A} = \{E\colon E$可写成若干$A_i$之并$\}$

例4. 可数补的构造. (思考题)

例5. 更多例子?

已知m^*是一个外测度.

给定$\mathbb{R}$的一个子集B, 如果对于任意$A \subseteq \mathbb{R}$都满足

$$m^*A = m^*(A \cap B) + m^*(A \backslash B),$$

那么称B满足Caratheodory 条件.

所有满足上述Caratheodory 条件的集合B组成一个σ-代数，记为$\mathcal{L}$.

且$m^*|_{\mathcal{L}}$具有良好的性质.

定理2.5.3 $m^*|_{\mathcal{L}}$是一个测度.

定理2.5.3 $m^*|_{\mathcal{L}}$是一个测度. 换句话说,如果记$m = m^*|_{\mathcal{L}}$, 那么有

1. $m\emptyset = 0$
2. 如果$A_n \in \mathcal{L} \quad (n = 1, 2, \cdots)$,且$A_n$互不相交, 那么

$$m(\cup A_n) = \sum mA_n$$

A) $\mathcal{L}$中有些什么？
B) 一般测度的定义? 更多的推广?
Part A) 1.零测集.
2. 开区间, 闭区间. (?如何证明)
3. 更复杂的集合如何“长出来”？(提示: 已经知道$\mathcal{L}$是σ-代数)
G_δ-集，F_σ-集

$\mathcal{L}$, Lebsesgue可测集的全体，是一个特殊的σ-代数。全集是$\mathbb{R}$,

$\mathcal{L}$由$\mathbb{R}$的一些子集组成。

零集，零测集的简称.

开区间的长度就是开区间的Lebesgue测度:$m(a,b)=b-a$,

非空开集的长度：即使没有定义Lebesgue测度，也可以这样定义开集O的长度

回顾：开集可以写成可数个不相交的区间之并，而其长度定义为这些开区间长度之和. (可以是有限或者$+\infty$)

Lebesgue零测集（Lebesgue零集）：对于任意$\varepsilon>0$,存在开集O包含E,且$mO<\varepsilon$，那么E 称为Lebesgue零测集.

性质*：对于任意$\varepsilon > 0$,存在开集O包含E,且$mO < \varepsilon$，那么我们（临时）称E具有性质*.

$\mathbb{R}$上Lebesgue可测集的等价描述：

E为Lebesgue可测集当且仅当下列条件之一成立：

•$E = A - N_1$,其中A为G_δ型集，N_1具有性质*.

•$E = A - N_1$,其中A为Borel集/Baire集，N_1具有性质*. （Borel集的定义，见后面）

- $E = B \cup N_2$,其中B为F_σ型集，N_2具有性质*.
- 对于任意$\varepsilon > 0$，存在闭集F和开集G使得$F \subseteq E \subseteq G$, $m(G - F) < \varepsilon$.

(注意$G - F$是开集，所以这里$m(G - F)$就是开集的长度)

如何理解Lebesgue可测集的测度？

在开集上，它就是长度;一般的集合E,就取包含E的开集的长度，但是要取下确界.

记$\mathcal{L}$为$\mathbb{R}$上Lebesgue可测集全体，

$E \in \mathcal{L}$,那么$E = \inf\{mO : O \supseteq E, O$ 是开集$\}$.

想想这里O为什么不能换成闭集？（eg. $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$）

定理2.1.1存在集族$\mathcal{L} \subseteq 2^{\mathbb{R}}$与集函数$m : \mathcal{L} \to [0, +\infty]$,满足:

P1. $\emptyset \in \mathcal{L}$

P2. $A_n \in \mathcal{L} \Rightarrow \cup A_n \in \mathcal{L}$.

P3. $A \in \mathcal{L} \Rightarrow A^c \in \mathcal{L}$.

(P1-P3表明$\mathcal{L}$为$\mathbb{R}$上的一个σ-代数.)

P4. 若U是$\mathbb{R}$中的开集，则$U \in \mathcal{L}$.

$[a, b)$是否属于$\mathcal{L}$?

Q1. $m\emptyset = 0$.

Q2. 若$A_n \in \mathcal{L}$ 且A_n互不相交, $m(\cup A_n) = \sum mA_n$.

Q1+ Q2表明m是$\mathcal{L}$上的测度.

Q3. 完备性: m-零测集的子集也是$\mathcal{L}$-可测集.
(一般可测集不具备完备性)

Q6. 逼近性质：$A \in \mathcal{L} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, 存在$\mathbb{R}$中的闭集$F$与开集$G$,使得$F \subseteq A \subseteq G$且$m(G - F) < \varepsilon$.

Q6 $\Leftarrow$??

$\forall n \geq 1$, 存在$\mathbb{R}$中的闭集F_n与开集G_n,使得$F_n \subseteq A \subseteq G_n$且$m(G_n - F_n) < 1/n$.

可以要求$\{F_n\}$与$\{G_n\}$单调.

Why?

$$F_0 = \cup F_n \subseteq A \subseteq \cap_n G_n = G_0$$

$$G_0 - F_0 = \cap_n G_n - \cup_n F_n$$

是否可测？如果可测，测度=?

$$G_0 - F_0 \subseteq G_n - \cup_i F_i \subseteq G_n - F_n$$

练习：$m(G_0 - F_0) = 0.$

命题2.1.2若$A_n \in \mathcal{L}$, 则$\cap A_n \in \mathcal{L}$.

若$A, B \in \mathcal{L}$, 则$A - B \in \mathcal{L}$.

Question. 把上面的$\mathcal{L}$换成一般σ-代数，命题是否成立?

命题2.1.3 Lebesgue测度m有如下性质：

i)单调性：若$A, B \in \mathcal{L}$，$A \subseteq B$，则$mA \leq mB$.

ii)可减性：若$A, B \in \mathcal{L}$，$A \subseteq B$，$mA < \infty$ 则$m(B - A) = mB - mA$.

Question：去掉$mA < \infty$，是否成立？

iii)

iv)

v)

命题2.1.3 Lebesgue测度m有如下性质：

i)单调性：若$A, B \in \mathcal{L}$, $A \subseteq B$, 则$mA \leq mB$.

ii)可减性：若$A, B \in \mathcal{L}$, $A \subseteq B$, $mA < \infty$
则$m(B - A) = mB - mA$.

iii)次可加性：若$\{A_n\} \subseteq \mathcal{L}$, 则

$$m(\cup_n A_n) \leq \sum_n mA_n$$

提示：构造B_n,两两不交，且

$$\cup_{i=1}^n B_i = \cup_{i=1}^n A_i,\ n = 1, 2, \cdots$$

iv)

v)

命题2.1.3 Lebesgue测度m有如下性质：

i)单调性：若$A, B \in \mathcal{L}$，$A \subseteq B$，则$mA \leq mB$.

ii)可减性：若$A, B \in \mathcal{L}$，$A \subseteq B$，$mA < \infty$
则$m(B - A) = mB - mA$.

iii)次可加性：若$\{A_n\} \subseteq \mathcal{L}$，则

$$m(\cup_n A_n) \leq \sum_n mA_n$$

iv)下连续性：若$\{A_n\} \subseteq \mathcal{L}$，$A_n \uparrow A$，
则$mA_n \to mA$

v)

命题2.1.3Lebesgue测度m有如下性质：

i)

ii) iii)

iv)下连续性：若$\{A_n\} \subseteq \mathcal{L}$，$A_n \uparrow A$，则$mA_n \to mA$

v)上连续性：若$\{A_n\} \subseteq \mathcal{L}$，$A_n \downarrow A$，则$mA_n \to mA$

错！反例：

v)上连续性：若$\{A_n\} \subseteq \mathcal{L}$, $A_n \downarrow A$,$m(A_1) < \infty$. 则$mA_n \to mA$

命题2.1.3 Lebesgue测度m有如下性质：

i)单调性：若$A, B \in \mathcal{L}$, $A \subseteq B$, 则$mA \leq mB$.

ii)可减性：若$A, B \in \mathcal{L}$, $A \subseteq B$, $mA < \infty$ 则$m(B - A) = mB - mA$.

iii)次可加性：若$\{A_n\} \subseteq \mathcal{L}$, 则

$$m(\cup_n A_n) \leq \sum_n mA_n$$

iv)下连续性：若$\{A_n\} \subseteq \mathcal{L}$, $A_n \uparrow A$, 则$mA_n \to mA$

v)上连续性：若$\{A_n\} \subseteq \mathcal{L}$, $A_n \downarrow A$,$m(A_1) < \infty$. 则$mA_n \to mA$

单点集的Lebesgue测度是多少？可数集呢？标准Cantor集?

Borel集很多，所有Borel集全体成为Borel代数$\mathcal{B}$，按照定义，它是包含所有开集的最小σ代数.

所以$\mathcal{B}$包含了所有F_σ型集和G_δ型集. $\mathcal{L}$比$\mathcal{B}$“大”. 但是从测度的角度讲，你可以把Lebesgue可测集想象成Borel集去处理. “它们差一个零集”

一个可测集可以用开集或闭集合去逼近

Borel代数$\mathfrak{B}$

$\mathbb{R}$上的Borel代数$\mathfrak{B}$

由所有$\mathbb{R}$中开集生成的σ-代数：

$$\bigcap_{\mathfrak{A}\in\Lambda}\mathfrak{A}$$

$\Lambda=\{\mathcal{A}:\mathcal{A}$是$\mathbb{R}$上包含所有开集的$\sigma$-代数$\}$

练习：$\bigcap_{\mathfrak{A}\in\Lambda}\mathfrak{A}$是$\sigma$-代数.

因此$\mathfrak{B}$是包含所有$\mathbb{R}$中开集的最小σ-代数.

$\mathbb{R}$ 上最大σ-代数？

一个可测集可以用开集或闭集合去逼近，进一步在某些时候可以用有限个开区间去逼近，这样在测度意义上，可以将Lebesgue可测集用较为简单的集合去代替.

这个事情可以表达为：

$A \subseteq \mathbb{R}, A \in \mathcal{L}, mA < \infty$. $\forall \varepsilon > 0$,存在有限个开区间δ_i,使得$m(A \triangle \cup_i \delta_i) < \varepsilon$.

p. 81. ex73

$A \subseteq \mathbb{R}, A \in \mathcal{L}, mA < \infty$. $\forall \varepsilon > 0$,存在有限个开区间δ_i,使得$m(A \triangle \cup_i \delta_i) < \varepsilon$.

提示：1. 当A是开集的情形.

2. $A \in \mathcal{L} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, 存在$\mathbb{R}$中的闭集$F$与开集$G$,使得$F \subseteq A \subseteq G$且$m(G - F) < \varepsilon$.

ex 18. $\mathbb{R}^n$中有理中心与有理半径的球仅可数个.

ex21. 设$z, w \in \mathbb{R}^2$为非有理点， $z \neq w$则有连接z, w的折线Γ,使得Γ不含有理点.

ex23.不存在集合A,使得2^A为可数无限集.

ex 18. $\mathbb{R}^n$中有理中心与有理半径的球仅可数个.

ex21. 设$z, w \in \mathbb{R}^2$为非有理点, $z \neq w$则有连接z, w的折线Γ,使得Γ不含有理点.

ex23.不存在集合A,使得2^A为可数无限集.

ex 33. A是Cantor集P在$[0,1]$ 余区间的中点全体，求A'.

解：断言：$A' = P$.

首先证明$A' \subseteq P$. 为此注意$A' \subseteq [0,1]$. 任给A中一点q, 存在Cantor集P在$[0,1]$的一个余区间包含该点，且仅包含A中一点q.由此可知，该余区间不含A的聚点.由余区间的任意性，知$A' \subseteq P$.

ex 33. A是Cantor集P在$[0,1]$ 余区间的中点全体，求A'.

解：

下面证明$A' \supseteq P$.

将Cantor集P在$[0,1]$中长度为$\frac{1}{3^n}$的余区间全体记为Λ_n. 容易知道，任给一点$x \in P$, 存在Λ_n中一个区间I_n与x 的距离不大于$\frac{1}{3^n}$, 因此I_n的中点与x的距离不大于$\frac{2}{3^n}$,所以可以找到A中一个点列$\{x_n\}$趋于x $(x_n \neq x)$ 于是$x \in A'$. 以上论证表明$A' \supseteq P$.

综合以上，$A' = P$.

Thank you!