

## ★3.2 Fourier变换的应用

### ★3.2.1 一维热传导方程的初值问题



Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 1 of 14

Go Back

Full Screen

Close

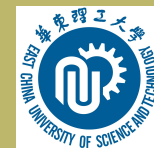
Quit

## ★3.2 Fourier变换的应用

### ★3.2.1 一维热传导方程的初值问题

#### (1) 齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \quad (3.2.1)$$



Home Page

Title Page



Page 1 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

## ★3.2 Fourier变换的应用

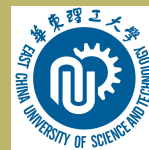
### ★3.2.1 一维热传导方程的初值问题

#### (1) 齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

有解

$$u(x, t) = \int_{R^1} G(x - \xi, t) \phi(\xi) d\xi,$$



Home Page

Title Page



Page 1 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

## ★3.2 Fourier变换的应用

### ★3.2.1 一维热传导方程的初值问题

#### (1) 齐次方程的初值问题

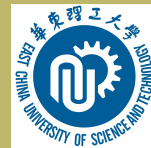
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

有解

$$u(x, t) = \int_{R^1} G(x - \xi, t) \phi(\xi) d\xi,$$

分析：无界区域的初值问题，选择Fourier积分变换

解：方程和初始条件关于 $x$ 施行Fourier变换，记 $\hat{u}(\lambda, t) = \mathcal{F}[u]$ ,  $\hat{\phi}(\lambda) = \mathcal{F}[\phi]$ ，利用微分性质，原定解问题可化为



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

## ★3.2 Fourier变换的应用

### ★3.2.1 一维热传导方程的初值问题

#### (1) 齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

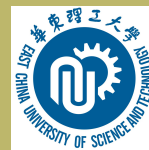
有解

$$u(x, t) = \int_{R^1} G(x - \xi, t) \phi(\xi) d\xi,$$

分析：无界区域的初值问题，选择Fourier积分变换

解：方程和初始条件关于 $x$ 施行Fourier变换，记 $\hat{u}(\lambda, t) = \mathcal{F}[u]$ ,  $\hat{\phi}(\lambda) = \mathcal{F}[\phi]$ ，利用微分性质，原定解问题可化为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{u}(\lambda, t) = (i\lambda)^2 a^2 \hat{u} = -(a\lambda)^2 \hat{u}, & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\phi}(\lambda) \end{cases}$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

## ★3.2 Fourier变换的应用

### ★3.2.1 一维热传导方程的初值问题

#### (1) 齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

有解

$$u(x, t) = \int_{R^1} G(x - \xi, t) \phi(\xi) d\xi,$$

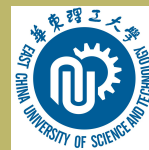
分析：无界区域的初值问题，选择Fourier积分变换

解：方程和初始条件关于 $x$ 施行Fourier变换，记 $\hat{u}(\lambda, t) = \mathcal{F}[u]$ ,  $\hat{\phi}(\lambda) = \mathcal{F}[\phi]$ ，利用微分性质，原定解问题可化为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{u}(\lambda, t) = (i\lambda)^2 a^2 \hat{u} = -(a\lambda)^2 \hat{u}, & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\phi}(\lambda) \end{cases}$$

把 $\lambda$ 看成参数(上面就是一阶齐次常微分方程的初值问题)，解初值问题

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\phi}(\lambda) e^{-(a\lambda)^2 t}$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

## ★3.2 Fourier变换的应用

### ★3.2.1 一维热传导方程的初值问题

#### (1) 齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

有解

$$u(x, t) = \int_{R^1} G(x - \xi, t) \phi(\xi) d\xi,$$

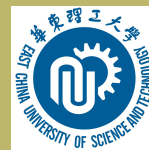
分析：无界区域的初值问题，选择Fourier积分变换

解：方程和初始条件关于 $x$ 施行Fourier变换，记 $\hat{u}(\lambda, t) = \mathcal{F}[u]$ ,  $\hat{\phi}(\lambda) = \mathcal{F}[\phi]$ ，利用微分性质，原定解问题可化为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{u}(\lambda, t) = (i\lambda)^2 a^2 \hat{u} = -(a\lambda)^2 \hat{u}, & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\phi}(\lambda) \end{cases}$$

把 $\lambda$ 看成参数(上面就是一阶齐次常微分方程的初值问题)，解初值问题

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\phi}(\lambda) e^{-(a\lambda)^2 t}$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 14

Go Back

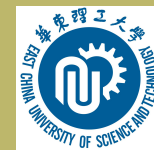
Full Screen

Close

Quit

作Fourier逆变换，利用卷积定理(性质10中的第三个关系式)可得

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)e^{-(a\lambda)^2 t}] = \phi(x) * \mathcal{F}^{-1}[e^{-(a\lambda)^2 t}]$$



Home Page

Title Page



Page 2 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



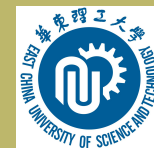
作Fourier逆变换，利用卷积定理(性质10中的第三个关系式)可得

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)e^{-(a\lambda)^2 t}] = \phi(x) * \mathcal{F}^{-1}[e^{-(a\lambda)^2 t}]$$

$$= \phi(x) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) \quad (\text{利用(3.1.3)的结论})$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_R \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) \phi(y) dy, \quad (\text{利用卷积的定义})$$

(3.2.2)



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

作Fourier逆变换, 利用卷积定理(性质10中的第三个关系式)可得

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)e^{-(a\lambda)^2 t}] = \phi(x) * \mathcal{F}^{-1}[e^{-(a\lambda)^2 t}]$$

$$= \phi(x) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) \quad (\text{利用(3.1.3)的结论})$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_R \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) \phi(y) dy, \quad (\text{利用卷积的定义})$$

(3.2.2)

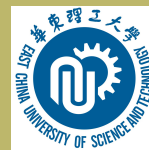
若记

$$G(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right).$$

则有

$$u(x, t) = \int_R G(x-y, t) \phi(y) dy$$

函数 $G(x, t)$ 称为热核,或问题(3.2.1)的解核,也称为一维热传导方程初值问题的基本解.



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

作Fourier逆变换, 利用卷积定理(性质10中的第三个关系式)可得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)e^{-(a\lambda)^2t}] = \phi(x) * \mathcal{F}^{-1}[e^{-(a\lambda)^2t}] \\ &= \phi(x) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right) \quad (\text{利用(3.1.3)的结论}) \\ u(x, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_R \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right) \phi(y) dy, \quad (\text{利用卷积的定义}) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

若记

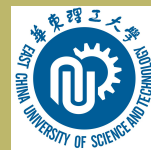
$$G(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right).$$

则有

$$u(x, t) = \int_R G(x - y, t) \phi(y) dy$$

函数 $G(x, t)$ 称为热核,或问题(3.2.1)的解核,也称为一维热传导方程初值问题的基本解.

**定理3.2.1** 如果初值函数 $\phi$ 连续且有界, 则由(3.2.2)式给出的 $u(x, t)$ 是问题(3.2.1)的古典解, 并且当 $t > 0$ 时,  $u(x, t)$ 关于 $x, t$ 无穷次连续可微.



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 14

Go Back

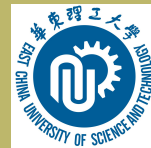
Full Screen

Close

Quit

## (2)非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x \in R^1, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \quad (3.2.3)$$



Home Page

Title Page



Page 3 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

## (2)非齐次方程的初值问题

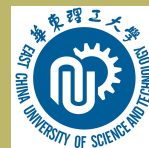
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x \in R^1, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

解法一：先分解定解问题，再利用Fourier变换和齐次化原理进行求解

定解问题(3.2.3)分解成

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ v(x, 0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = f(x, t), & x \in R^1, t > 0 \\ w(x, 0) = 0, & x \in R^1. \end{cases} \quad (3.2.5)$$



Home Page

Title Page

◀◀

▶▶

◀

▶

Page 3 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

## (2)非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x \in R^1, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

解法一：先分解定解问题，再利用Fourier变换和齐次化原理进行求解

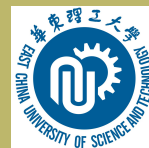
定解问题(3.2.3)分解成

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ v(x, 0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = f(x, t), & x \in R^1, t > 0 \\ w(x, 0) = 0, & x \in R^1. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

利用Fourier变换可得(3.2.4)的解为

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_R \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) \phi(y) dy$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 3 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

## (2)非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x \in R^1, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

解法一：先分解定解问题，再利用Fourier变换和齐次化原理进行求解

定解问题(3.2.3)分解成

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, & x \in R^1, t > 0 \\ v(x, 0) = \phi(x), & x \in R^1. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

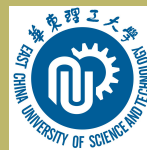
$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = f(x, t), & x \in R^1, t > 0 \\ w(x, 0) = 0, & x \in R^1. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

利用Fourier变换可得(3.2.4)的解为

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_R \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) \phi(y) dy$$

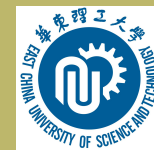
利用Fourier变换和齐次化原理(3.2.5)的解为

$$\int_0^t \int_{R^1} \frac{f(y, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy d\tau$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 3 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

再利用叠加原理可得初值问题(3.2.3)的解

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{R^1} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) \phi(y) dy + \int_0^t \int_{R^1} \frac{f(y, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy d\tau. \quad (3.2.6)$$



Home Page

Title Page



Page 4 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit





再利用叠加原理可得初值问题(3.2.3)的解

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{R^1} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) \phi(y) dy + \int_0^t \int_{R^1} \frac{f(y, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy d\tau. \quad (3.2.6)$$

解法二：先实行Fourier变换，转换为常微分方程，再进行求解。  
对定解问题（3.2.3）关于 $x$ 实行Fourier变换

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{u}(\lambda, t) + (a\lambda)^2 \hat{u} = \hat{f}(\lambda, t), & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\phi}(\lambda) \end{cases}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 4 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



再利用叠加原理可得初值问题(3.2.3)的解

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{R^1} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) \phi(y) dy + \int_0^t \int_{R^1} \frac{f(y, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy d\tau. \quad (3.2.6)$$

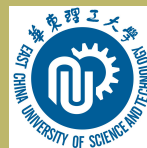
解法二：先实行Fourier变换，转换为常微分方程，再进行求解。  
对定解问题（3.2.3）关于 $x$ 实行Fourier变换

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{u}(\lambda, t) + (a\lambda)^2 \hat{u} = \hat{f}(\lambda, t), & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\phi}(\lambda) \end{cases}$$

把 $\lambda$ 看成参数(上面就是一阶非齐次常微分方程的初值问题)，解初值问题（利用3月17号中的结论）

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\phi}(\lambda) e^{-(a\lambda)^2 t} + \int_0^t \hat{f}(\lambda, \tau) e^{-(a\lambda)^2(t-\tau)} d\tau$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 4 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



再利用叠加原理可得初值问题(3.2.3)的解

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{R^1} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) \phi(y) dy + \int_0^t \int_{R^1} \frac{f(y, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy d\tau. \quad (3.2.6)$$

解法二：先实行Fourier变换，转换为常微分方程，再进行求解。  
对定解问题（3.2.3）关于 $x$ 实行Fourier变换

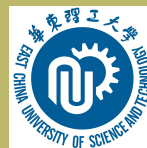
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{u}(\lambda, t) + (a\lambda)^2 \hat{u} = \hat{f}(\lambda, t), & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\phi}(\lambda) \end{cases}$$

把 $\lambda$ 看成参数(上面就是一阶非齐次常微分方程的初值问题)，解初值问题（利用3月17号中的结论）

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\phi}(\lambda) e^{-(a\lambda)^2 t} + \int_0^t \hat{f}(\lambda, \tau) e^{-(a\lambda)^2(t-\tau)} d\tau$$

实行Fourier逆变换，右边第一项的结果就是（3.2.2),下面处理右边第二项

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 4 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



## 交换积分和逆F-变换的顺序

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left[\int_0^t \hat{f}(\lambda, \tau) e^{-(a\lambda)^2(t-\tau)} d\tau\right] &= \int_0^t \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\lambda, \tau) e^{-(a\lambda)^2(t-\tau)}] d\tau \\ &= \int_0^t [f(x, \tau) * \mathcal{F}^{-1}(e^{-(a\lambda)^2(t-\tau)})] d\tau \text{ (性质10中的第三个关系式)} \\ &= \int_0^t [f(x, \tau) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}] d\tau \text{ (利用 (3.1.3) 的结论)} \\ &= \int_0^t \int_{R^1} \frac{f(y, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy d\tau \text{ (卷积的定义)} \end{aligned}$$

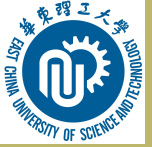
将右边两项相加即为(3.2.6)

**定理3.2.1** 如果初值函数 $\phi$ 连续且有界,  $f$ 在 $R \times R_+$ 上连续有界, 则由(3.2.6)式给出的 $u(x, t)$ 是问题(3.2.3)的古典解。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 5 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

### 例3.2.1求初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in R, t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ c & x \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad c \text{是常数}$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 6 of 14

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

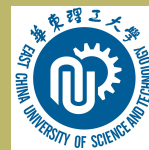
[Quit](#)

### 例3.2.1求初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in R, t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ c & x \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad c \text{是常数}$$

解：直接利用公式(3.2.2)可得

$$u(x, t) = \frac{c}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) dy$$



Home Page

Title Page



Page 6 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

### 例3.2.1求初值问题

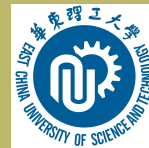
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in R, t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ c & x \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad c \text{是常数}$$

解：直接利用公式(3.2.2)可得

$$u(x, t) = \frac{c}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) dy$$

令  $\frac{y-x}{2\sqrt{t}} = \eta$ , 则有

$$u(x, t) = \frac{c}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty 2\sqrt{t} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^0 e^{-\eta^2} d\eta + \int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta \right)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 6 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

### 例3.2.1求初值问题

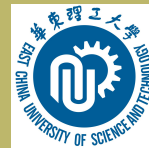
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in R, t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ c & x \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad c \text{是常数}$$

解：直接利用公式(3.2.2)可得

$$u(x, t) = \frac{c}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) dy$$

令  $\frac{y-x}{2\sqrt{t}} = \eta$ , 则有

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{c}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty 2\sqrt{t} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^0 e^{-\eta^2} d\eta + \int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta \right) \\ &= \frac{c}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^0 e^{-\eta^2} d\eta + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \left( \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \end{aligned}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 6 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### 例3.2.1求初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in R, t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ c & x \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad c \text{是常数}$$

解：直接利用公式(3.2.2)可得

$$u(x, t) = \frac{c}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) dy$$

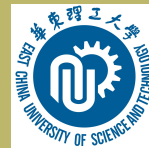
令  $\frac{y-x}{2\sqrt{t}} = \eta$ , 则有

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{c}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty 2\sqrt{t} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^0 e^{-\eta^2} d\eta + \int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta \right) \\ &= \frac{c}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^0 e^{-\eta^2} d\eta + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \left( \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \end{aligned}$$

已知误差函数  $\operatorname{erf}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-\eta^2} d\eta$ , 故

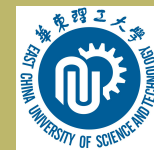
$$u(x, t) = \frac{c}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right]$$

(此例题，积分中变量代换的技巧要掌握)

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 6 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

### 例3.2.2求初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - tu = 0, & x \in R, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in R \end{cases}$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 7 of 14

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



### 例3.2.2求初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - tu = 0, & x \in R, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in R \end{cases}$$

解：对方程和初始条件关于 $x$ 施行Fourier变换，有

$$\begin{cases} \hat{u}_t = -\lambda^2 \hat{u} + t\hat{u}, & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\phi}(\lambda) \end{cases}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 7 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### 例3.2.2求初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - tu = 0, & x \in R, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in R \end{cases}$$

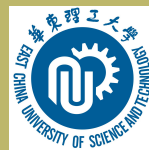
解：对方程和初始条件关于 $x$ 施行Fourier变换，有

$$\begin{cases} \hat{u}_t = -\lambda^2 \hat{u} + t\hat{u}, & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\phi}(\lambda) \end{cases}$$

解出

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\phi}(\lambda)e^{-\lambda^2 t + t^2/2}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 7 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



### 例3.2.2求初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - tu = 0, & x \in R, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in R \end{cases}$$

解：对方程和初始条件关于 $x$ 施行Fourier变换，有

$$\begin{cases} \hat{u}_t = -\lambda^2 \hat{u} + t\hat{u}, & t > 0 \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\phi}(\lambda) \end{cases}$$

解出

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\phi}(\lambda)e^{-\lambda^2 t + t^2/2}$$

两边施行Fourier逆变换，根据卷积定理可得

$$u(x, t) = e^{t^2/2} \mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)] * \mathcal{F}^{-1}[e^{-\lambda^2 t}] = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{t^2/2} \int_R \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4t}\right) \phi(y) dy$$

（此例题，在积分的过程中，将与积分变量无关的函数提到积分外，然后再化简，在以后的习题中要用到此技巧）

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

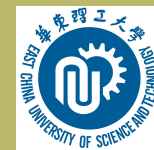


## 利用Fourier变换求解无界区域上的初始问题

- 首先观察定解问题中自变量的范围，选择合适的变量进行Fourier变换。（例如问题(3.2.1),  $x$ 是无界区域,  $t$ 是半无界区域, 所以选择关于 $x$ 作Fourier变换）
- 将方程和初始条件实行Fourier变换, 原偏微分定界问题就转换为常微分方程的初值问题（把 $\lambda$ 看成参数, 此过程主要利用Fourier的微分性质）
- 利用第二章预备知识中介绍的常微分方程的求解方法, 求出其解
- 最后作Fourier逆变换
- 最后一步中, 以往很多同学感觉有点复杂, 这一步主要会利用性质10中的第三个关系式, 热传导方程会用到(3.1.3)的表达式。
- 在Fourier逆变换求原函数时, 如果不能判断出原函数的表达式, 建议先利用定义将Fourier逆变换写出来, 再将积分进行化简。

[Home Page](#)[Title Page](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

利用公式(3.2.6)求解，需要计算复杂的积分，如果函数 $f(x)$ 和 $\phi(x)$ 关于 $x$ 都是实解析函数，我们可以给出一种求解初值问题(3.2.3)的简单方法



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 9 of 14

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

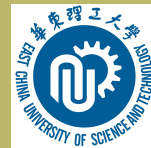
[Quit](#)

利用公式(3.2.6)求解，需要计算复杂的积分，如果函数 $f(x)$ 和 $\phi(x)$ 关于 $x$ 都是实解析函数，我们可以给出一种求解初值问题(3.2.3)的简单方法

**定理3.2.3** 假设 $f(x, t), \phi(x)$ 关于 $x$ 都是实解析函数，则问题(3.2.3)的解可以写成

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n)}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{[a^2(t-s)]^n}{n!} f_x^{(2n)}(x, s) ds, \quad (3.2.7)$$

其中 $\phi^{(2n)}(x)$ 和 $f_x^{(2n)}(x, \tau)$ 分别是 $\phi(x)$ 和 $f(x, \tau)$ 关于 $x$ 的 $2n$ 阶导数.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 9 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



利用公式(3.2.6)求解，需要计算复杂的积分，如果函数 $f(x)$ 和 $\phi(x)$ 关于 $x$ 都是实解析函数，我们可以给出一种求解初值问题(3.2.3)的简单方法

**定理3.2.3** 假设 $f(x, t), \phi(x)$ 关于 $x$ 都是实解析函数，则问题(3.2.3)的解可以写成

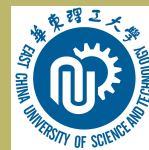
$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n)}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{[a^2(t-s)]^n}{n!} f_x^{(2n)}(x, s) ds, \quad (3.2.7)$$

其中 $\phi^{(2n)}(x)$ 和 $f_x^{(2n)}(x, \tau)$ 分别是 $\phi(x)$ 和 $f(x, \tau)$ 关于 $x$ 的 $2n$ 阶导数.

证明：令

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n)}(x) = \phi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n)}(x)$$

$$\begin{aligned} B &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{[a^2(t-s)]^n}{n!} f_x^{(2n)}(x, s) ds \\ &= \int_0^t f(x, s) ds + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{[a^2(t-s)]^n}{n!} f_x^{(2n)}(x, s) ds \end{aligned}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 9 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

利用公式(3.2.6)求解，需要计算复杂的积分，如果函数 $f(x)$ 和 $\phi(x)$ 关于 $x$ 都是实解析函数，我们可以给出一种求解初值问题(3.2.3)的简单方法

**定理3.2.3** 假设 $f(x, t), \phi(x)$ 关于 $x$ 都是实解析函数，则问题(3.2.3)的解可以写成

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n)}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{[a^2(t-s)]^n}{n!} f_x^{(2n)}(x, s) ds, \quad (3.2.7)$$

其中 $\phi^{(2n)}(x)$ 和 $f_x^{(2n)}(x, \tau)$ 分别是 $\phi(x)$ 和 $f(x, \tau)$ 关于 $x$ 的 $2n$ 阶导数.

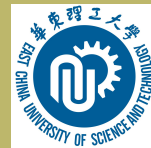
证明：令

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n)}(x) = \phi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n)}(x)$$

$$\begin{aligned} B &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{[a^2(t-s)]^n}{n!} f_x^{(2n)}(x, s) ds \\ &= \int_0^t f(x, s) ds + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{[a^2(t-s)]^n}{n!} f_x^{(2n)}(x, s) ds \end{aligned}$$

则

$$u(x, 0) = \phi(x)$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 14

Go Back

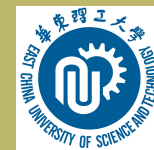
Full Screen

Close

Quit

直接计算可得

$$A_t = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a^2 t)^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(2n)}(x) = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n+2)}(x)$$



Home Page

Title Page



Page 10 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

直接计算可得

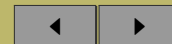
$$A_t = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a^2 t)^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(2n)}(x) = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n+2)}(x)$$

$$A_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n+2)}(x)$$



Home Page

Title Page



Page 10 of 14

Go Back

Full Screen

Close

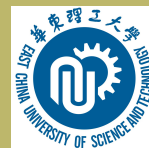
Quit

直接计算可得

$$A_t = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a^2 t)^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(2n)}(x) = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n+2)}(x)$$

$$A_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n+2)}(x)$$

$$B_t = f(x, t) + a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{[a^2(t-s)]^n}{n!} f_x^{(2n+2)}(x, s) ds$$



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 10 of 14

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

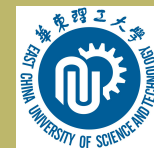
直接计算可得

$$A_t = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a^2 t)^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(2n)}(x) = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n+2)}(x)$$

$$A_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n+2)}(x)$$

$$B_t = f(x, t) + a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{[a^2(t-s)]^n}{n!} f_x^{(2n+2)}(x, s) ds$$

$$B_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{[a^2(t-s)]^n}{n!} f_x^{(2n+2)}(x, s) ds$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 10 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



直接计算可得

$$A_t = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a^2 t)^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(2n)}(x) = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n+2)}(x)$$

$$A_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \phi^{(2n+2)}(x)$$

$$B_t = f(x, t) + a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{[a^2(t-s)]^n}{n!} f_x^{(2n+2)}(x, s) ds$$

$$B_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{[a^2(t-s)]^n}{n!} f_x^{(2n+2)}(x, s) ds$$

于是

$$A_t = a^2 A_{xx}, B_t = a^2 B_{xx} + f(x, t), x \in R, t > 0$$

从而  $u(x, t)$  满足定解问题(3.2.3).

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit



### 例3.2.3求解定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = Ax, & x \in R, t > 0 \\ u(x, 0) = \sin \theta x, & x \in R \end{cases}$$

其中 $A, \theta$ 都是常数

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit





### 例3.2.3求解定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = Ax, & x \in R, t > 0 \\ u(x, 0) = \sin \theta x, & x \in R \end{cases}$$

其中 $A, \theta$ 都是常数  
解:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sin \theta x + Axt$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 11 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

### 例3.2.3求解定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = Ax, & x \in R, t > 0 \\ u(x, 0) = \sin \theta x, & x \in R \end{cases}$$

其中 $A, \theta$ 都是常数

解:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sin \theta x + Axt$$

其中

$$\frac{d^2}{dx^2} \sin \theta x = -\theta^2 \sin \theta x, \dots, \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sin \theta x = (-\theta^2)^n \sin \theta x$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 11 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

### 例3.2.3求解定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = Ax, & x \in R, t > 0 \\ u(x, 0) = \sin \theta x, & x \in R \end{cases}$$

其中 $A, \theta$ 都是常数  
解：

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sin \theta x + Axt$$

其中

$$\frac{d^2}{dx^2} \sin \theta x = -\theta^2 \sin \theta x, \dots, \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sin \theta x = (-\theta^2)^n \sin \theta x$$

于是

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^n}{n!} (-\theta^2)^n \sin \theta x = e^{-(a\theta)^2 t} \sin \theta x + Axt$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 11 of 14

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

## ★3.2.2高阶热传导方程的初值问题



Home Page

Title Page



Page 12 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

### ★3.2.2高阶热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = 0, & \mathbf{x} \in R^n, t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in R^n, \end{cases} \quad (3.2.6)$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ ,  $\Delta u = (u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n})$ . 有解

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{R^n} \phi(\xi) G(\mathbf{x} - \xi, t) d\xi.$$

$$G(\mathbf{x} - \xi, t) = \left( \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \right)^n \exp\left( -\frac{|\mathbf{x} - \xi|^2}{4a^2 t} \right).$$

函数 $G(\mathbf{x}, t)$ 称为高维热传导方程的Green函数, 也称为高维热传导方程初值问题的基本解.

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 12 of 14

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



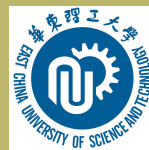
利用齐次化原理，可以求出高维非齐次热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in R^n, t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in R^n \end{cases} \quad (3.2.8)$$

的解

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{R^n} \phi(\xi) G(\mathbf{x} - \xi, t) d\xi + \int_0^t \int_{R^n} f(\xi, \tau) G(\mathbf{x} - \xi, t - \tau) d\xi d\tau$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 13 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



利用齐次化原理，可以求出高维非齐次热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = f(\mathbf{x}, t), & x \in R^n, t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in R^n \end{cases} \quad (3.2.8)$$

的解

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{R^n} \phi(\xi) G(\mathbf{x} - \xi, t) d\xi + \int_0^t \int_{R^n} f(\xi, \tau) G(\mathbf{x} - \xi, t - \tau) d\xi d\tau$$

如果 $\phi(x)$ ,  $f(x, t)$ 关于 $x$ 都是实解析函数，则(3.2.8)的解可以写成

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^k}{k!} \Delta^k \phi(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \Delta_x^k f(x, \tau) d\tau, \quad (3.2.9)$$

这里的 $\Delta, \Delta_x$ 都是关于 $x$ 求导， $\Delta^k \phi = \underbrace{\Delta(\Delta(\cdots(\Delta \phi)))}_k$ .

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 13 of 14](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



回家作业:

$$3.6、(1) \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in R, t > 0 \\ u(x, 0) = 1 + x + x^2, & x \in R \end{cases}$$

$$3.7、(1) \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} - bu_x - cu = f(x, t), & x \in R, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in R \end{cases}$$

其中 $a, b, c$ 是常数

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 14 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit