§3直线的方程 直线、平面间的相关位置

1.直线的方程

在仿射坐标系 $\left[O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right]$ 下，已知点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，非零向量 $\vec{V}=(X,Y,Z)$，求过 M_0 且与 $\vec{V}$ 平行的直线.

$\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$， $\vec{r}=(x,y,z)$

$\vec{r}-\vec{r}_0=t\vec{V}$ 称为向量式参数方程（t 为参数）

$$\begin{cases} x = x_0 + tX \\ y = y_0 + tY \\ z = z_0 + tZ \end{cases}$$
,称为直线的参数方程.

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}$$
称为点向式方程（标准方程）,其中（X，Y，Z）称为直线 l 的方向系数.

已知直线上两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$， $M_2(x_2, y_2, z_2)$，

过 M_1, M_2 的直线 l：

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

设直线 l 是相交平面 π_1 和 π_2 的交线 π_{I}，***$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$, $i=1$，2***,它们的一次系数不成比例，则 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 称为直线的普通方程.

例 1：已给直线 g 经过点 $M_0(2,-1,0)$ 平行于向量

$$\vec{v}=\{-1,2,1\}.$$

例 **2**：求经过 $M_0(-5,2,-2)$ 平行于 **x** 轴的直线方程.

例 3：设直线 p 经过 $P_1(1,-2,4)$ 和 $P_2(4,1,6)$；直线 q

经过点 Q（1，-3，-1）并平行于向量 $\vec{a}=\left\{-1,-\frac{2}{3},1\right\}$

验证：p，q 相交并有交点 S（-2，-5，2）.

例4：证明：平行六面体的三个对角线交于一点而且互相平分。

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

直线的普通方程.

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}$$

标准方程.

由普通方程转化为标准方程:

(找一个点和直线的方向)

例5　用标准方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases}.$$

2.两条直线的相关位置

在仿射坐标系中，设直线l_i过点$M_i(x_i, y_i, z_i)$方向向量为$\vec{v}_i(X_i, Y_i, Z_i), i=1,2.$

①l_1与l_2平行$\Leftrightarrow$ $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$且$\overrightarrow{M_1M_2}$不平行$\vec{v}_1$;

②l_1与l_2重合$\Leftrightarrow$ $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$且$\overrightarrow{M_1M_2}$平行$\vec{v}_1$;

③l_1与l_2相交$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$共面且$\vec{v}_1$不平行$\vec{v}_2$,

即 $\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & X_1 & X_2 \\ y_2 - y_1 & Y_1 & Y_2 \\ z_2 - z_1 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$ 且对一切实数λ，都有$\vec{v}_i \neq \lambda \vec{v}_1$.

以上三种情况l_1与l_2共面

④l_1与l_2异面$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$不共面，即$\Delta \neq 0$.

3.直线和平面的相关位置

在仿射坐标系中，设直线l 过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$与向量 $\vec{v}=(X,Y,Z)$平行，平面π：，**$Ax+By+Cz+D=0$.**

①l与π平行$\Leftrightarrow$ $\vec{v}\ /\!/\ \pi$（$AX+BY+CZ=0$）且M_0不在π上（即 $\boldsymbol{Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0}$）；

②l在π上$\Leftrightarrow$ $\vec{v}\ /\!/\ \pi$（$AX+BY+CZ=0$）且M_0在π上（即 $\boldsymbol{Ax_0+By_0+Cz_0+D=0}$）；

③l与π相交一点$\Leftrightarrow$ $\vec{v}$不平行于π（$AX+BY+CZ\neq 0$）.

例 **1**：求经过点（**2**，**3**，**1**）且与两直线

$$l_1:\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z+4=0 \end{cases} \quad 和\ l_2:\begin{cases} x+3y-1=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$$

相交的直线

例 **2**：在仿射坐标系中，求过点 M_0（**0**，**0**，**-2**），

与平面 $\pi_1: 3x-y+2z-1=0$ 平行，且与直线 l_1：

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$$ 相交的直线 l 的方程.