《微分几何》课程电子课件

教师：杨勤民

Tel: (021)64253147

Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程QQ群号：1045698545

第二章 曲面论

§2.1 曲面的概念

一、曲面的(向量)参数表示

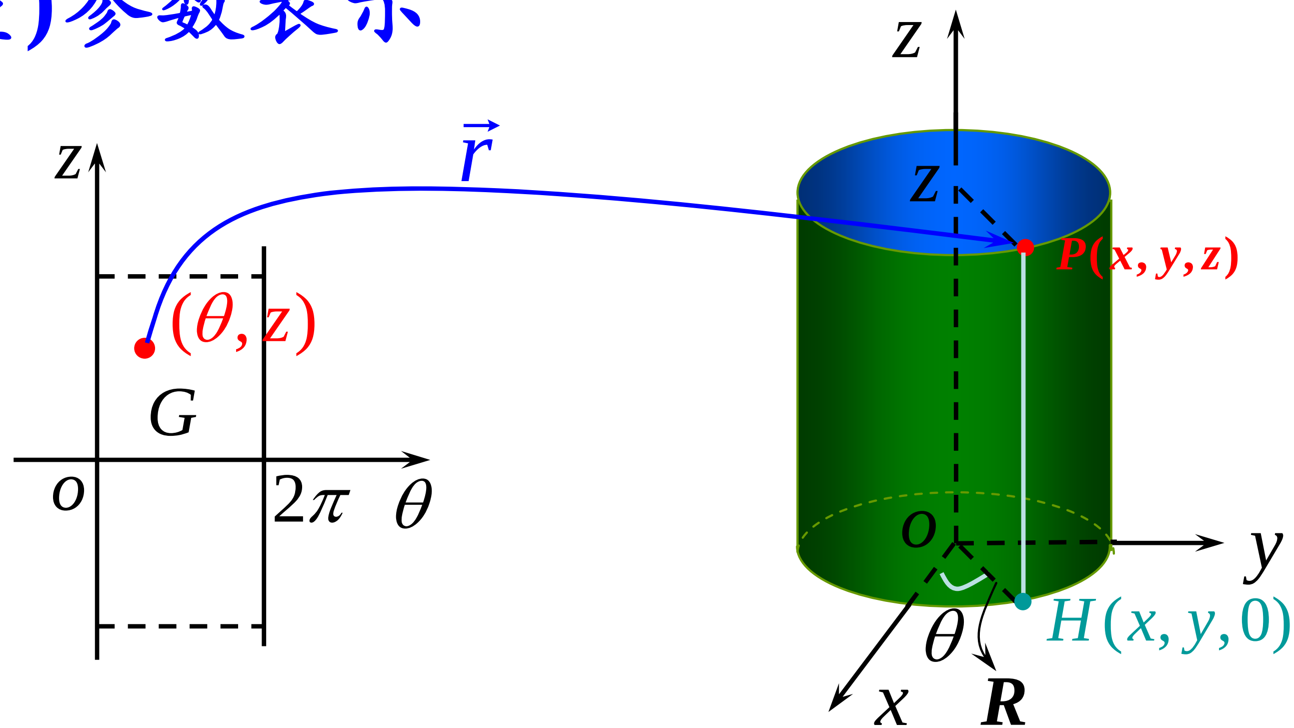
二、曲面的切平面和法线

三、曲面上的曲线族和曲线网

一、曲面的(向量)参数表示

圆柱面的参数方程

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$



参数 $\theta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}$.

写成向量函数形式

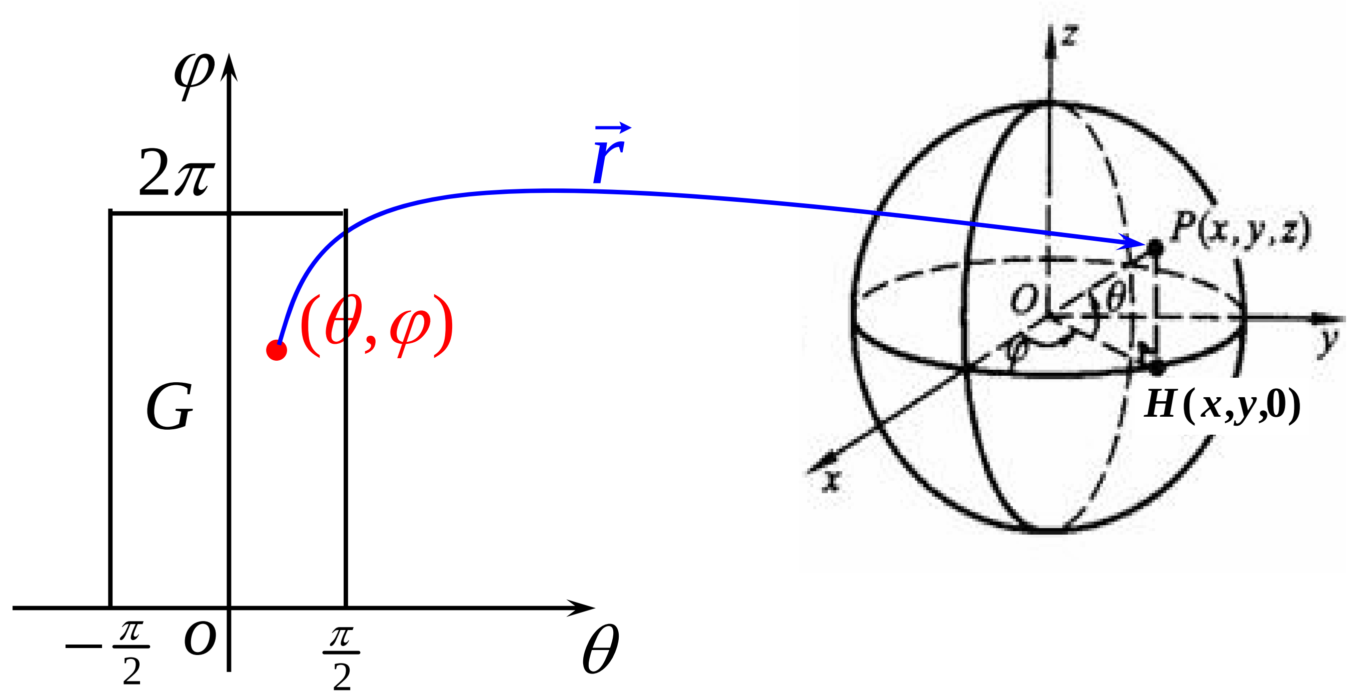
$$\vec{r}(\theta, z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$$

其中 $(\theta, z) \in G = \{(\theta, z) \mid 0 \le \theta < 2\pi\}$.

曲纹坐标: 在参数平面中的坐标.

球面的参数方程

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\cos\varphi \\ y = R\cos\theta\sin\varphi \\ z = R\sin\theta \end{cases}$$



参数 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

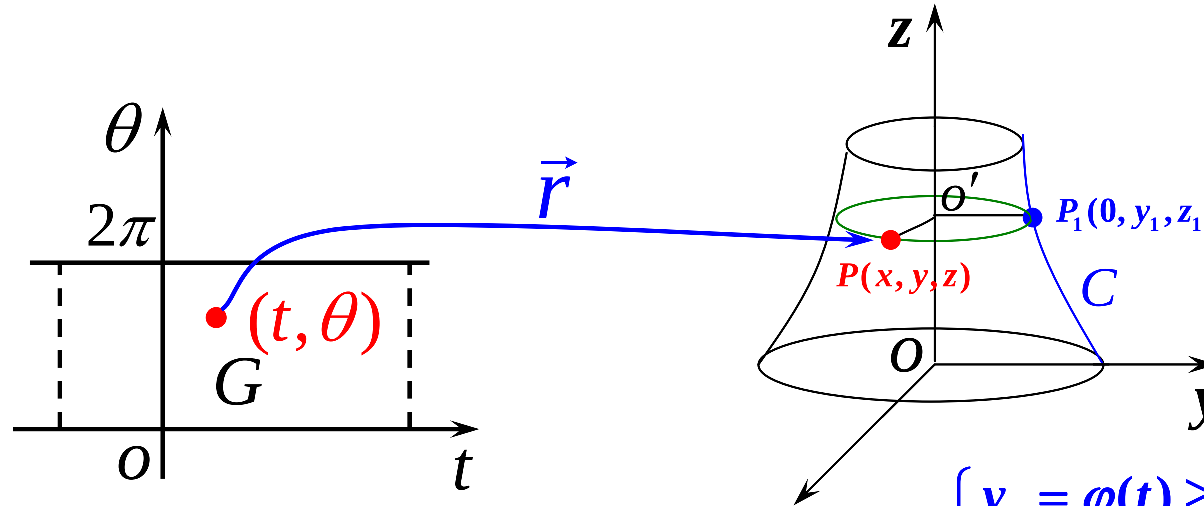
写成向量函数形式

$$\vec{r}(\theta,\varphi) = (R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta)$$

其中 $(\theta,\varphi) \in G = \{(\theta,\varphi) \mid \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, 2\pi)\}$.

旋转面的参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t)\cos\theta \\ y=\varphi(t)\sin\theta \\ z=\psi(t) \end{cases}$$



$C:\ \begin{cases} y_1=\varphi(t)\geq 0 \\ z_1=\psi(t) \end{cases}$

$t\in I$

参数 $t\in I,\theta\in[0,2\pi)$.

写成向量函数形式

$$\vec{r}(t,\theta)=(\varphi(t)\cos\theta,\varphi(t)\sin\theta,\psi(t))$$

其中 $(t,\theta)\in G=\{(\theta,\varphi)\mid t\in I,\ \theta\in[0,2\pi)\}$.

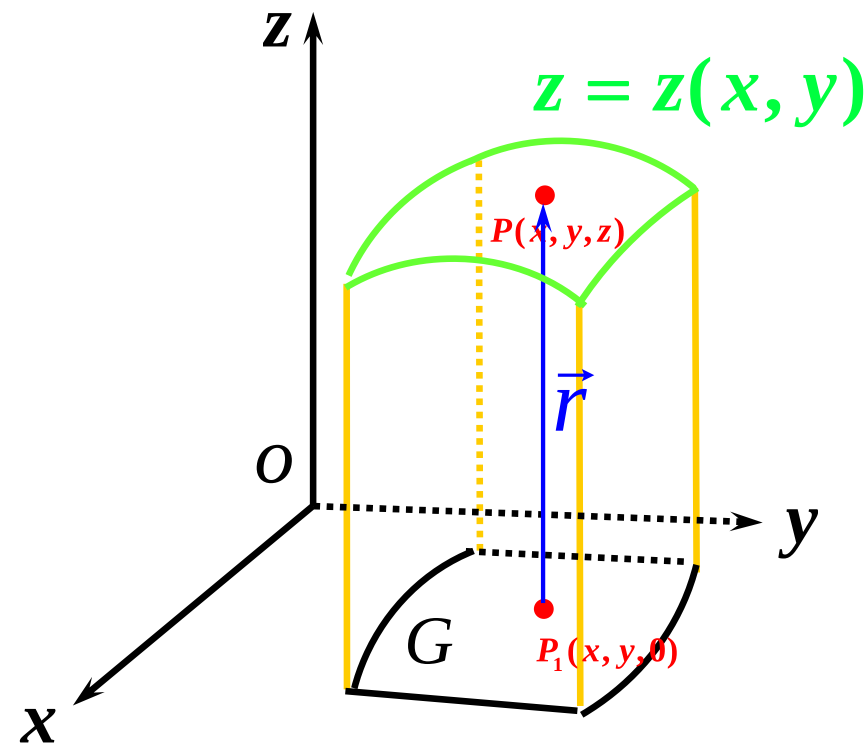
显式曲面

显式表示： $z = z(x, y)$

参数方程:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z(x, y) \end{cases}$$

其中参数 x, y 满足 $(x, y) \in G$.



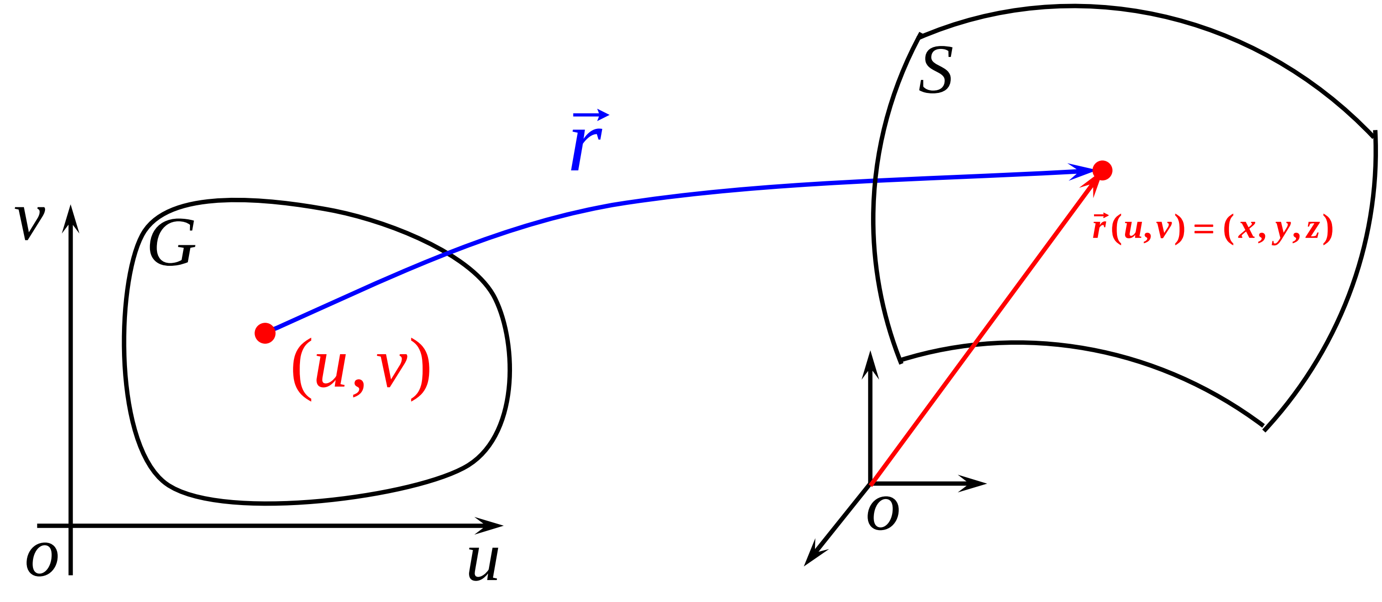
写成向量函数形式

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, z(x, y)),$$

其中 $(x, y) \in G$.

曲面的参数表示

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$



其中参数 u,v 满足 $(u,v)\in G$.

写成向量函数形式

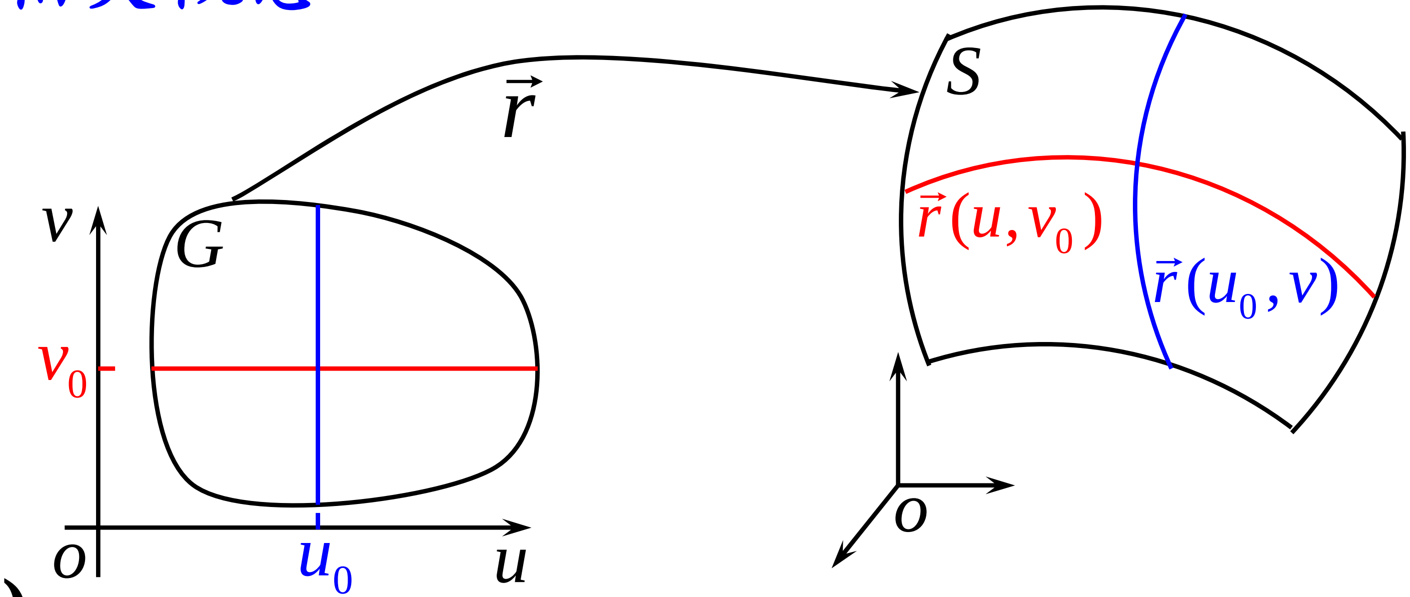
$\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$, 其中 $(u,v)\in G$.

称 u,v 为曲面的参数或曲纹坐标.

注：曲面 $\vec{r}(u,v)$ 上的点 (u_0,v_0) 是指曲纹坐标为 (u_0,v_0) 的点.

参数曲面的一些相关概念

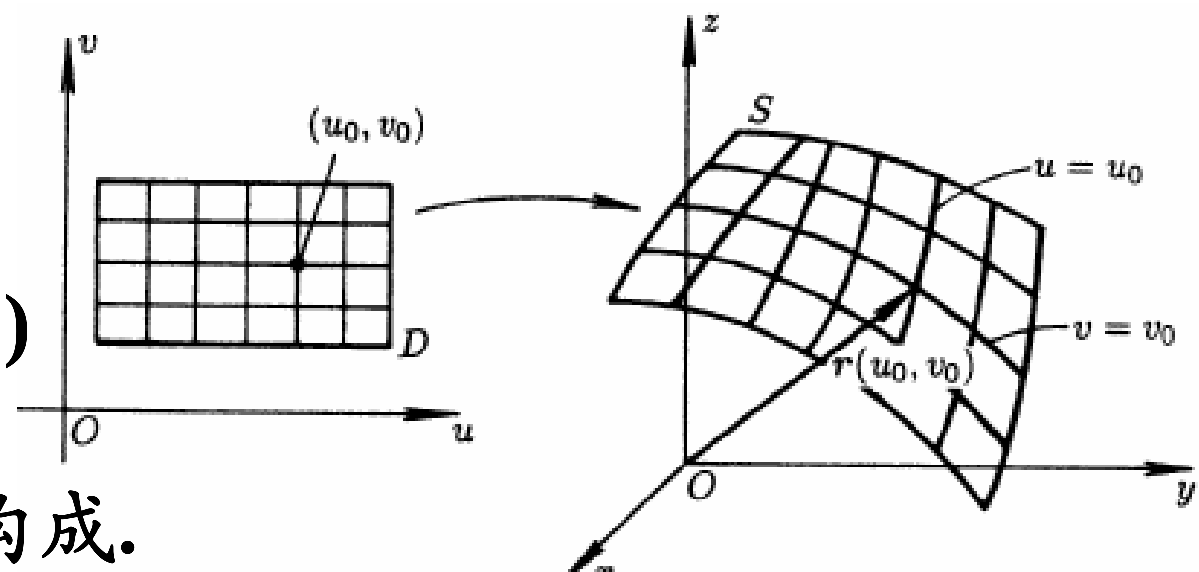
曲面 $\vec{r}(u,v)$



坐标曲线:

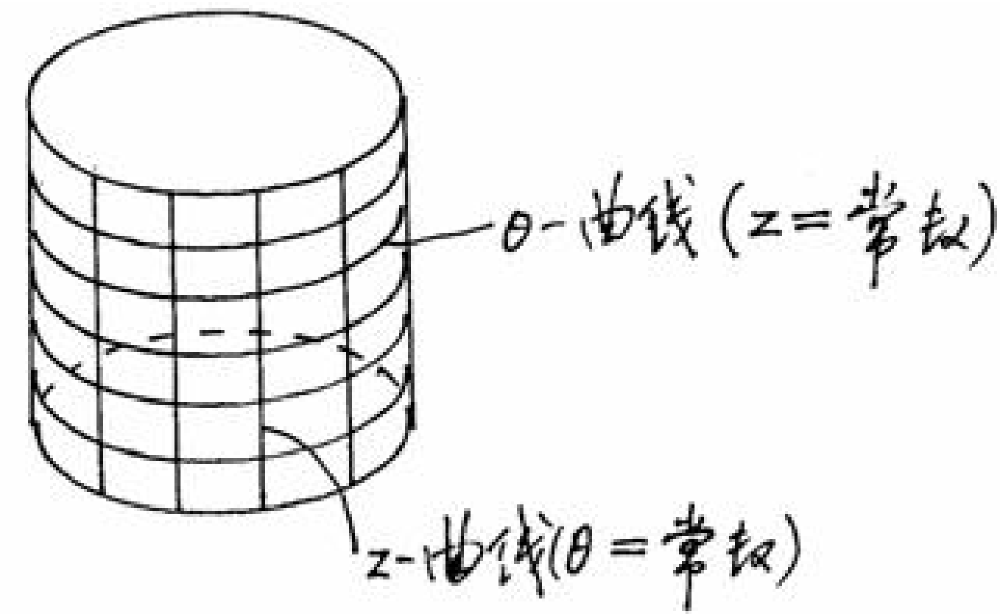
$\vec{r}(u,v_0)$ (u-曲线)

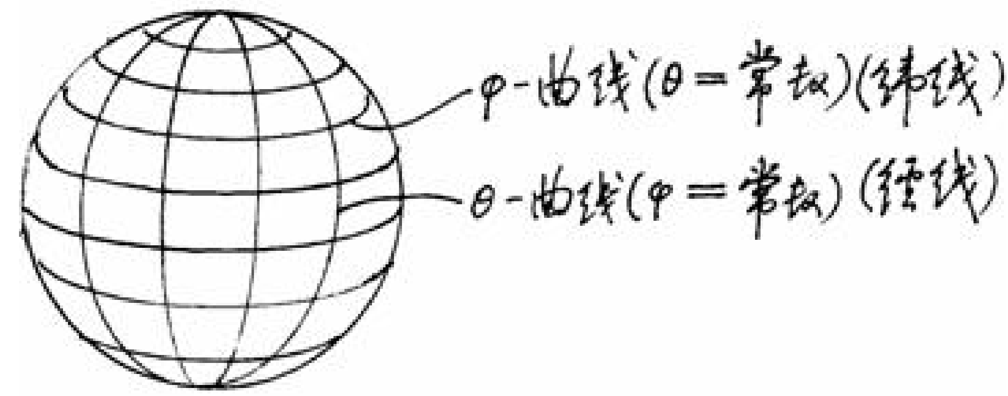
$\vec{r}(u_0,v)$ (v-曲线)

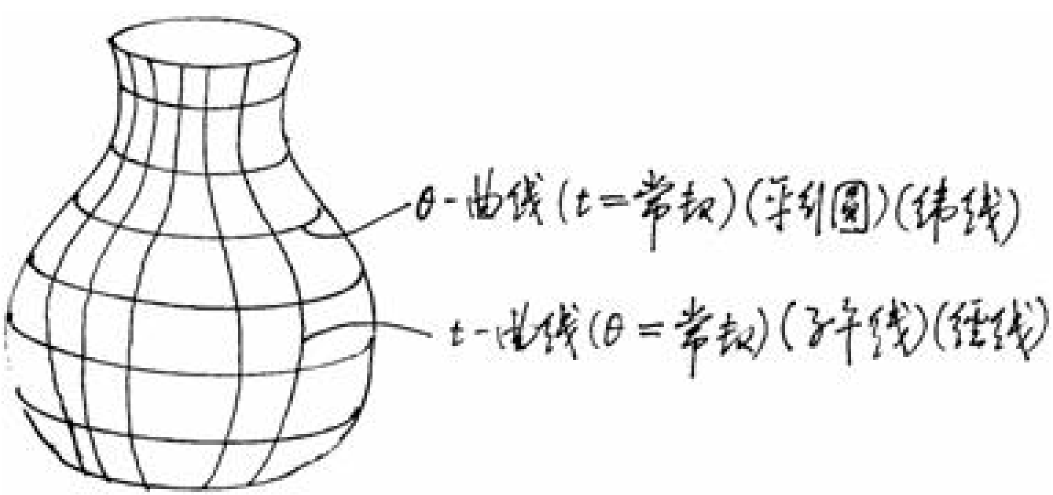


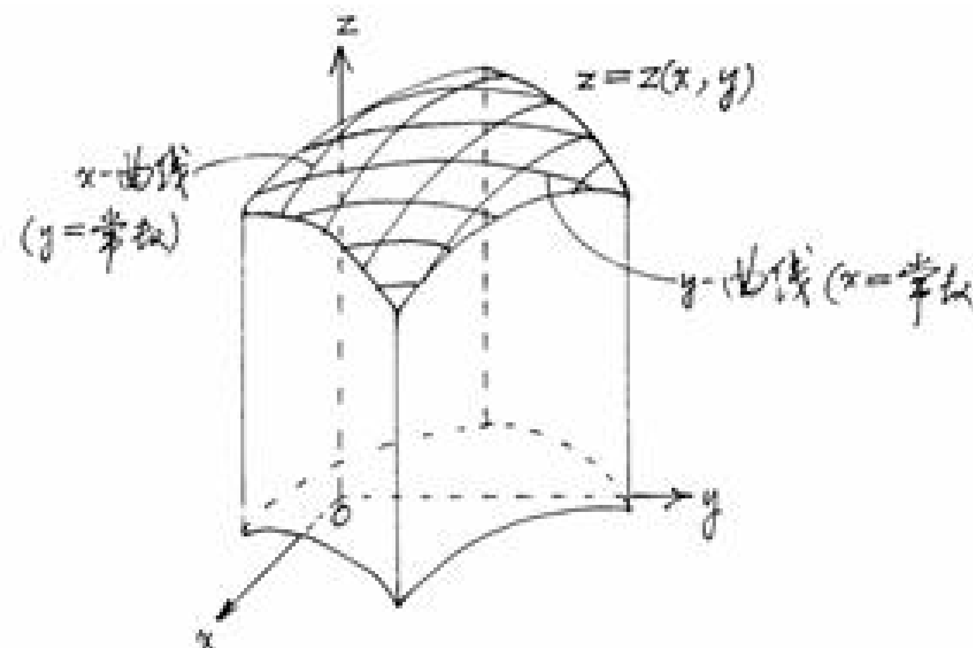
曲纹坐标网(坐标曲线网)

由u-曲线族和v-曲线族构成.


θ-曲线(z=常数)
z-曲线(θ=常数)


φ-曲线(θ=常数)(纬线)
θ-曲线(φ=常数)(经线)


θ-曲线(t=常数)(平行圆)(纬线)
t-曲线(θ=常数)(子午线)(经线)


z
z=z(x,y)
x-曲线
(y=常数)
y-曲线(x=常数)
O
y
x

二、曲面的切平面和法线

1. 一些概念

C^k类曲面$(k \in \mathbb{N})$

若 $\vec{r}(u,v)$ 为 G 上的 C^k 类函数,

则称这样的曲面为 C^k 类曲面.

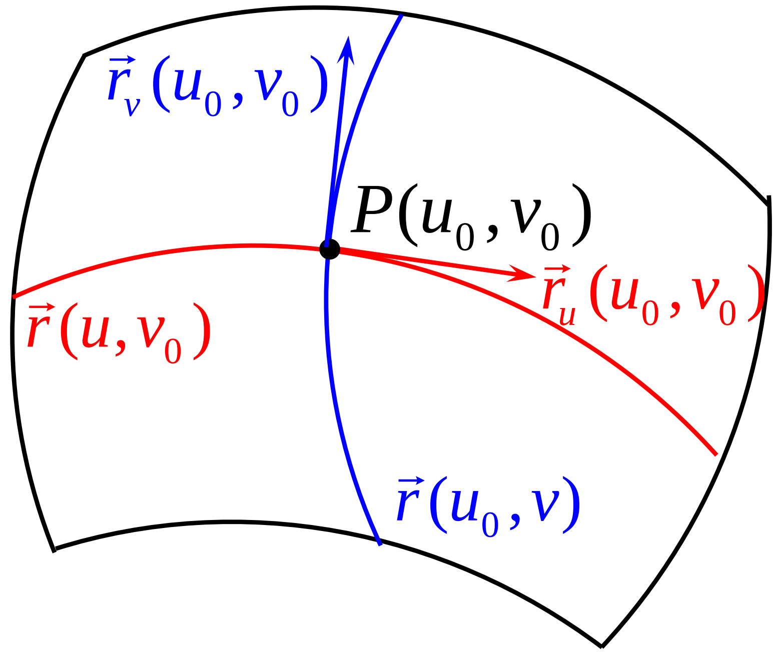
光滑曲面(C^1类曲面)($\vec{r}_u(u,v)$和$\vec{r}_v(u,v)$都连续的曲面)

特点:曲面上每一点都存在切平面,并且切平面连续变化

本课程以后只讨论光滑曲面.

曲面的正则点

曲面S: $\vec{r}(u,v)$



即曲面上使得$\vec{r}_u \times \vec{r}_v\big|_{(u_0,v_0)} \neq \vec{0}$的点$(u_0,v_0)$.

经过该点的两条坐标曲线的切向量不平行.

本课程以后只讨论曲面上的正则点.

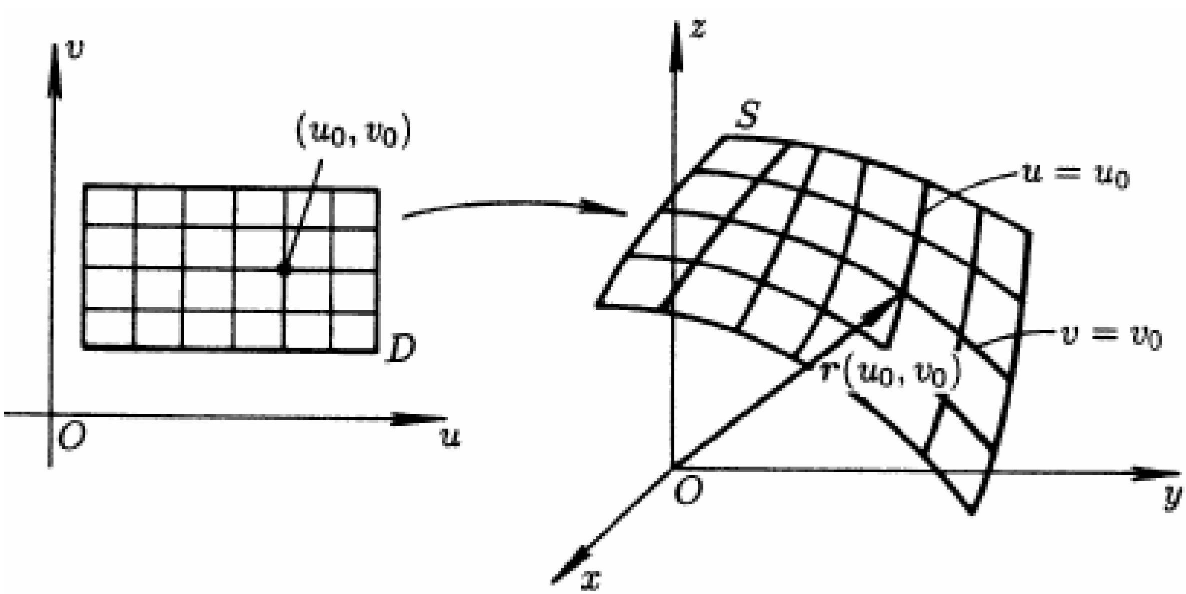
若曲面上的点都是正则点,则称该曲面为正则的.

特点　经过正则曲面上的每一点有唯一一条 u-曲线

和唯一一条v-曲线,这两族曲线彼此不相切.

交点处的切向量不平行

两族曲线形成网状结构



称正则曲面的曲纹坐标网为正规坐标网.

P40命题1 光滑曲面在正则点的某个邻域内总可以有

$z=z(x,y)$或$y=y(z,x)$或$x=x(y,z)$形式的参数表示.

证 设$P(u_0,v_0)$为光滑曲面$\boxed{\vec{r}(u,v)}$上的一个正则点,

$\boxed{(x(u,v),y(u,v),z(u,v))}$

即$\vec{r}_u\times\vec{r}_v\big|_P\neq\vec{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{pmatrix}\Bigg|_P$ 的秩为2.

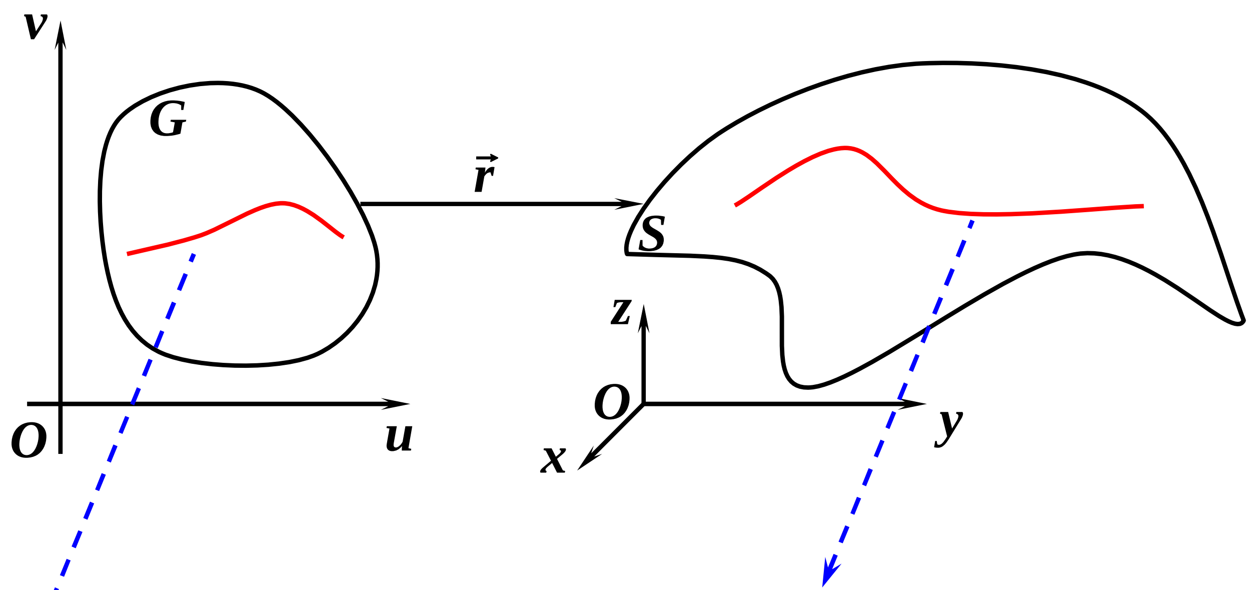
$\therefore$它至少有一个二阶子式不为零,不妨设$\begin{vmatrix}x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix}_P\neq 0.$

由隐函数存在定理,函数组$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$在$P$的某个邻域

U内存在唯一一组隐函数$\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$.

则$z=z(u,v)=z(u(x,y),v(x,y))$,它是以$x,y$为参数的曲面.

曲面上的曲线



$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

曲面上的曲线 $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$

$\vec{r}$ 将参数平面内的平面曲线映射成曲面上的空间曲线.

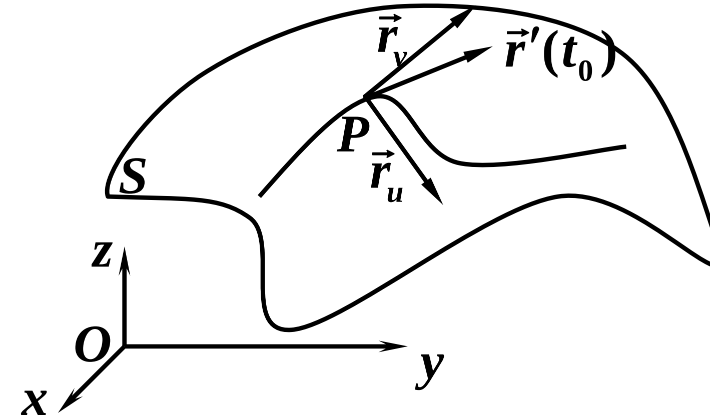
我们经常会说曲面 $\vec{r}(u,v)$ 上的曲线 $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$,

实际上是指以 $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$ 为曲纹坐标的曲线 $\vec{r}(u(t), v(t))$.

2. 切向量(切方向)和切平面

曲面上的曲线 $\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))$

切向量 $\vec{r}'(t_0)=\vec{r}'(u(t_0),v(t_0))$



$$=\left(\vec{r}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\vec{r}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\Bigg|_{t=t_0}$$

三个向量 $\vec{r}'(t_0)$ 与 $\vec{r}_u\big|_{t=t_0}$, $\vec{r}_v\big|_{t=t_0}$ 共面.

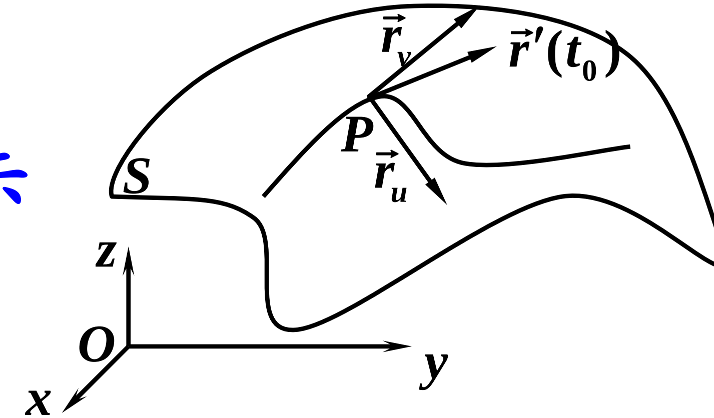
P40命题2 若P为曲面的正则点, 则该曲面上过点P的任意曲线在点P处的切向量都在过该点的两条坐标曲线的切向量 $\vec{r}_u$ 和 $\vec{r}_v$ 所决定的平面上.

称此平面为曲面在这一点(切点P)的切平面.

曲面的切向量：与切平面平行的向量.

切方向：切向量的方向.

曲面$\vec{r}(u,v)$上某点处的切方向的表示



对于曲面上的曲线 $\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))$

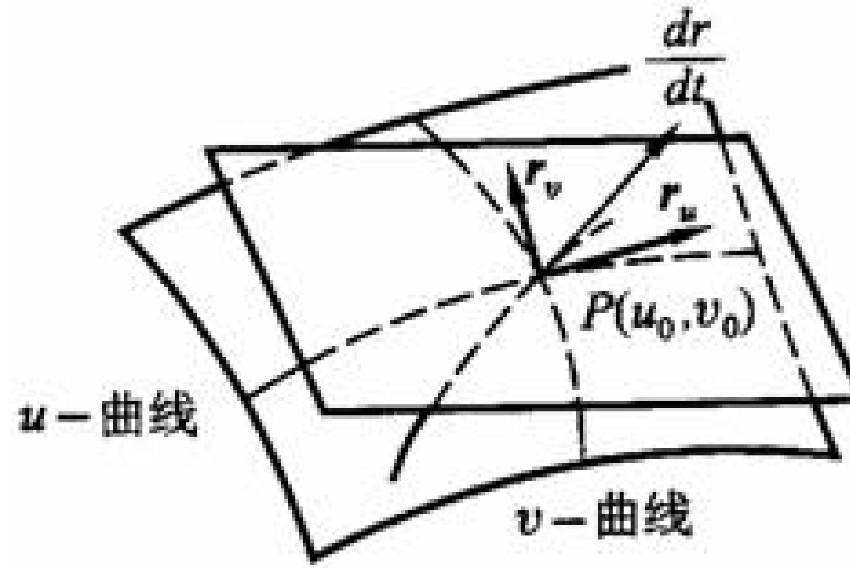
有 $\vec{r}'(t_0)=\left(\vec{r}_u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\vec{r}_v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{t=t_0}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}_u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}+\vec{r}_v\right)\Big|_{t=t_0}$

$\Rightarrow \vec{r}'(t_0)$所决定的曲面的切方向完全依赖于$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$

因此$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$(或$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$)给出了曲面上某点处的一个切方向.

切方向的表示方法：① $\vec{r}'(t)$, ② $(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$, ③ $\mathrm{d}\vec{r}(t)$, $\cdots$

切平面的方程(向量表示)



曲面 $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, 切点 (u_0,v_0),

$\vec{R}$ 为切平面上任一点的向径.

则 $\vec{R}-\vec{r}(u_0,v_0)$为一个切方向,

因此, 三个向量 $\vec{R}-\vec{r}(u_0,v_0),\vec{r}_u(u_0,v_0),\vec{r}_v(u_0,v_0)$ 共面.

切平面方程为 $(\vec{R}-\vec{r}(u_0,v_0),\vec{r}_u(u_0,v_0),\vec{r}_v(u_0,v_0))=0.$

切平面的方程(一般方程)

设曲面$\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$, 切点$(u_0,v_0)$,

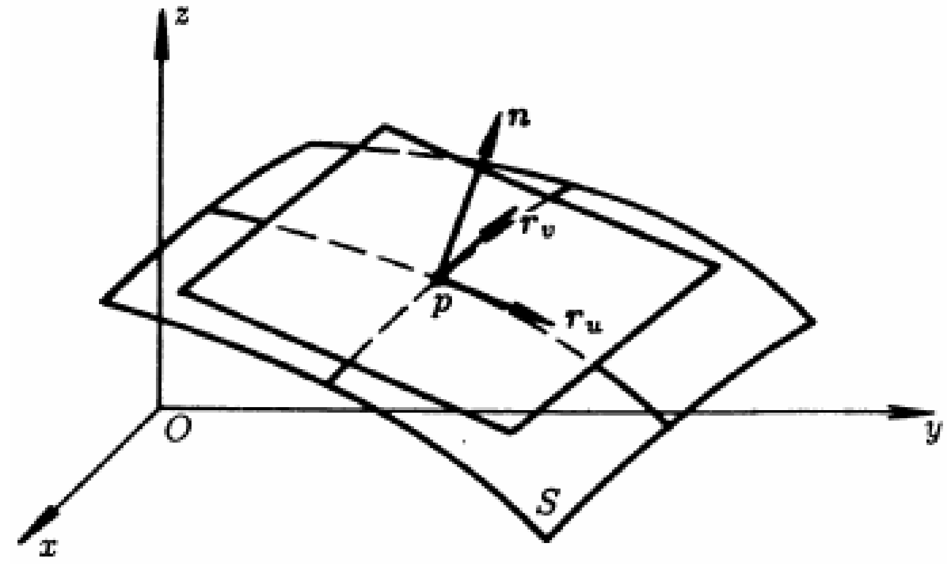
$\vec{R}=(X,Y,Z)$为切平面上任一点的向径,

代入方程$(\vec{R}-\vec{r}(u_0,v_0),\vec{r}_u(u_0,v_0),\vec{r}_v(u_0,v_0))=0$得

$$\begin{vmatrix} X-x(u_0,v_0) & Y-y(u_0,v_0) & Z-z(u_0,v_0) \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}=0.$$

3. 法向量(法方向)和法线

曲面$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$，切点(u_0,v_0),



$\vec{R}$为法线上任一点的向径.

则$\vec{R}-\vec{r}(u_0,v_0)$与法线平行, 而法向量为$(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\big|_{(u_0,v_0)}$,

所以$\vec{R}-\vec{r}(u_0,v_0)=\lambda(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\big|_{(u_0,v_0)}$,

即$\vec{R}=\vec{r}(u_0,v_0)+\lambda(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\big|_{(u_0,v_0)}$.

此即为法线的向量式参数方程, 其中λ为参数.

法线的参数方程与点向式方程

设 $\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),\quad \vec{R}=(X,Y,Z)$

代入法线方程 $\vec{R}=\vec{r}(u_0,v_0)+\lambda(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\big|_{(u_0,v_0)}$ 得到

$$\begin{cases} X=[x+\lambda(y_u z_v-z_u y_v)]\big|_{(u_0,v_0)} \\ Y=[y+\lambda(z_u x_v-x_u z_v)]\big|_{(u_0,v_0)} \\ Z=[z+\lambda(x_u y_v-y_u x_v)]\big|_{(u_0,v_0)} \end{cases}$$

消去参数 λ 得到法线的点向式方程:

$$\frac{X-x(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}}=\frac{Y-y(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}}=\frac{Z-z(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}}.$$

三、曲面上的曲线族和曲线网

一族曲线(一个曲线族):

满足一定关系的一类曲线, 其表达式中只含一个独立参数.

例如曲面$\vec{r}(u,v)$上所有的u-曲线构成一族曲线.

曲面上的曲线的表达形式

曲面$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$上的曲线有如下常见的表达形式:

(1) $\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))$

(2) $u=u(t),\ v=v(t)$

(3) $u=\varphi(v)$ 或 $v=\varphi(u)$

(4) $f(u,v)=0$

线性微分方程 $A(u,v)\mathrm{d}u+B(u,v)\mathrm{d}v=0\ (A^2+B^2\neq 0)$ 表示曲面上的一族曲线.

(1) 当 $A=0$ 时

代入微分方程得 $B(u,v)\mathrm{d}v=0\Rightarrow \mathrm{d}v=0\Rightarrow v=c$ 为常数.

它表示曲线族 $v=c$, 即 u-曲线族.

(2) 当 $A\neq 0$ 时

由所给微分方程得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=-\dfrac{B(u,v)}{A(u,v)}\Rightarrow u=\varphi(v,c)$.

它表示曲线族 $u=\varphi(v,c)$.

二阶微分方程

$$A(u,v)\mathrm{d}u^2 + 2B(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + C\mathrm{d}v^2 = 0\ (B^2 - AC > 0)$$

表示曲面上的两族曲线.

证①当 $\begin{cases} A = 0 \\ C = 0 \end{cases}$ 时, 方程变为 $\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 0 \Rightarrow \mathrm{d}u = 0$ 或 $\mathrm{d}v = 0$.

它表示曲线族 $u = c_1$ 和 $v = c_2$, 即曲纹坐标网;

②当 $\begin{cases} A = 0 \\ C \neq 0 \end{cases}$ 时, 原方程变为 $\mathrm{d}v(2B\mathrm{d}u + C\mathrm{d}v) = 0$.

它表示曲线族 $\mathrm{d}v = 0$ 和 $2B\mathrm{d}u + C\mathrm{d}v = 0$;

③当 $A \neq 0$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$.

也表示两族曲线.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.1 求椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在任意点的切平面方程,并证明沿每一条直母线,此曲面只有一个切平面.

2.2 证明：一个正则参数曲面是球面的一部分的充分必要条件是它的所有法线都经过一个固定点.