⋆2.3 特征值问题

对于两端固定的有界弦的自由振动问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \quad (2.3.1) \\
u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \quad (2.3.2) \\
u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \quad (2.3.4)
\end{cases}
$$

⋆2.3 特征值问题

对于两端固定的有界弦的自由振动问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \quad (2.3.1) \\
u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \quad (2.3.2) \\
u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \quad (2.3.4)
\end{cases}
$$

- 假设它的解可以按照某个函数系$\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$展开成

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) \tag{2.3.4}
$$

⋆2.3 特征值问题

对于两端固定的有界弦的自由振动问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \quad (2.3.1) \\
u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \quad (2.3.2) \\
u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \quad (2.3.4)
\end{cases}
$$

- 假设它的解可以按照某个函数系$\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$展开成

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) \qquad (2.3.4)$$

- 利用初始条件(即函数ϕ和ψ都可以按函数系$\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$展开)

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) X_n(x), \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{'}(0) X_n(x)$$

如果对任意的“好函数”ϕ和ψ,问题(2.3.1)-(2.3.3)都有形如(2.3.4)的解，那么函数系$\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$应是完备的

- 将展开式代入方程

$$\sum_{n=1}^{\infty}[T_n''(t)X_n(x) - a^2T_n(t)X_n''(x)] = 0$$

- 将展开式代入方程

$$\sum_{n=1}^{\infty}[T_n^{''}(t)X_n(x)-a^2T_n(t)X_n^{''}(x)]=0$$

- 如果$X_n(x), T_n(t)$满足

$$T_n^{''}(t)X_n(x)-a^2T_n(t)X_n^{''}(x)=0, \qquad (2.3.5)$$

$$X_n(0)=X_n(l)=0$$

- 将展开式代入方程

$$\sum_{n=1}^{\infty}[T_n''(t)X_n(x) - a^2T_n(t)X_n''(x)] = 0$$

- 如果$X_n(x), T_n(t)$满足

$$T_n''(t)X_n(x) - a^2T_n(t)X_n''(x) = 0, \tag{2.3.5}$$
$$X_n(0) = X_n(l) = 0$$

- 那么(2.3.4)式给出的函数$u(x,t)$满足(2.3.1)式和(2.3.2)式。

- 将展开式代入方程

$$\sum_{n=1}^{\infty}[T_n^{''}(t)X_n(x)-a^2T_n(t)X_n^{''}(x)]=0$$

- 如果$X_n(x),T_n(t)$满足

$$T_n^{''}(t)X_n(x)-a^2T_n(t)X_n^{''}(x)=0, \tag{2.3.5}$$
$$X_n(0)=X_n(l)=0$$

- 那么(2.3.4)式给出的函数$u(x,t)$满足(2.3.1)式和(2.3.2)式。
- 式(2.3.5)可写成

$$\frac{X_n^{''}(x)}{X_n(x)}=\frac{T_n^{''}(t)}{a^2T_n(t)}$$

其中左边只依赖于x,右边只依赖于t,所以它应该是常数，记为$-\lambda_n$(之所以常数记为$-\lambda$,是为了（2.3.6）的表达形式和后面介绍的特征值问题的表达形式一致)

- 即

$$\frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = \frac{T_n''(t)}{a^2 T_n(t)} = -\lambda_n$$

- 即

$$\frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = \frac{T_n''(t)}{a^2 T_n(t)} = -\lambda_n$$

- 因此$X_n(x), T_n(t)$分别满足

$$\begin{cases} X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0 \\ X_n(0) = X_n(l) = 0 \end{cases} \tag{2.3.6}$$

$$T_n''(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = 0$$

- 即

$$\frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = \frac{T_n''(t)}{a^2T_n(t)} = -\lambda_n$$

- 因此$X_n(x), T_n(t)$分别满足

$$\begin{cases} X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0 \\ X_n(0) = X_n(l) = 0 \end{cases} \tag{2.3.6}$$

$$T_n''(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = 0$$

- $X_n(x) \neq 0$,这就需要确定什么样的λ_n问题(2.3.6)有非零解$X_n(x)$,这个问题就是下面要介绍的特征值问题

- 即

$$\frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = \frac{T_n''(t)}{a^2 T_n(t)} = -\lambda_n$$

- 因此$X_n(x), T_n(t)$分别满足

$$\begin{cases} X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0 \\ X_n(0) = X_n(l) = 0 \end{cases} \tag{2.3.6}$$

$$T_n''(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = 0$$

- $X_n(x) \neq 0$,这就需要确定什么样的λ_n问题(2.3.6)有非零解$X_n(x)$,这个问题就是下面要介绍的特征值问题
- 所以要确定形如(2.3.4)的解，首要任务是确定问题(2.3.6)的所有可能的非零解$X_n(x)$,并保证其构成的函数系$\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$是完备的

$\star$2.3.1 Sturm-Liouville 问题

给定空间(a, b)上的二阶线性常微分方程

$$(p(x)u')' - q(x)u + \lambda r(x)u = 0, a < x < b, \qquad (2.3.7)$$

其中λ是未知参数,$p(x) \in C^1[a, b]$,在(a, b)内$p(x) > 0; q(x) \in C[a, b], q(x) \geq 0; r(x) \in C[a, b]$,且在$(a, b)$内$r(x) > 0$.方程(2.2.1)称为**Sturm-Liouville方程**

★2.3.1 Sturm-Liouville 问题

给定空间(a,b)上的二阶线性常微分方程

$$(p(x)u')' - q(x)u + \lambda r(x)u = 0, a < x < b, \qquad (2.3.7)$$

其中λ是未知参数,$p(x) \in C^1[a,b]$,在(a,b)内$p(x) > 0; q(x) \in C[a,b], q(x) \geq 0; r(x) \in C[a,b]$,且在$(a,b)$内$r(x) > 0$.方程(2.2.1)称为**Sturm-Liouville方程**

当$a < b$为有限数且在$[a,b]$上$p(x), r(x) > 0$时，称方程(2.3.7)为**正则的**，否则就称方程(2.3.7)为奇异的。

- 根据$p(x)$在端点$x = a, b$处的不同取值，我们来确定问题(2.3.7)的边界条件：

- 根据$p(x)$在端点$x = a, b$处的不同取值，我们来确定问题(2.3.7)的边界条件：
(1)当$p(a)p(b) \neq 0$时，边界条件是

$$a_1 u(a) + a_2 u^{'}(a) = 0, b_1 u(b) + b_2 u^{'}(b) = 0$$

若还有$p(a) = p(b)$,还可以提周期边界条件$u(a) = u(b), u^{'}(a) = u^{'}(b)$

- 根据$p(x)$在端点$x = a, b$处的不同取值，我们来确定问题(2.3.7)的边界条件：
(1)当$p(a)p(b) \neq 0$时，边界条件是

$$a_1u(a) + a_2u^{'}(a) = 0, b_1u(b) + b_2u^{'}(b) = 0$$

若还有$p(a) = p(b)$,还可以提周期边界条件$u(a) = u(b), u^{'}(a) = u^{'}(b)$
(2)当$p(a) = 0, p(b) \neq 0$时，边界条件是

$$|u(a)| < \infty, b_1u(b) + b_2u^{'}(b) = 0,\ \ b_1^2 + b_2^2 \neq 0$$

- 根据$p(x)$在端点$x = a, b$处的不同取值，我们来确定问题(2.3.7)的边界条件：
(1)当$p(a)p(b) \neq 0$时，边界条件是

$$a_1 u(a) + a_2 u^{'}(a) = 0, b_1 u(b) + b_2 u^{'}(b) = 0$$

若还有$p(a) = p(b)$,还可以提周期边界条件$u(a) = u(b), u^{'}(a) = u^{'}(b)$
(2)当$p(a) = 0, p(b) \neq 0$时，边界条件是

$$|u(a)| < \infty, b_1 u(b) + b_2 u^{'}(b) = 0, \quad b_1^2 + b_2^2 \neq 0$$

(3)对于$p(b) = 0, p(a) \neq 0$或$p(a) = p(b) = 0$的情况，可类似的有边界条件

- Sturm-Liouville方程，若带上上述边界条件之一，就得到一个二阶线性常微分方程的**两点边值问题**，该问题为**Sturm-Liouville 问题**，简称**S-L问题**

- Sturm-Liouville方程，若带上上述边界条件之一，就得到一个二阶线性常微分方程的**两点边值问题**，该问题为**Sturm-Liouville 问题**，简称**S-L问题**
- 问题：是否存在参数λ的一些值，使得该两点边值问题有非零解？

  这样一类问题称为**特征值问题**.

- Sturm-Liouville方程，若带上上述边界条件之一，就得到一个二阶线性常微分方程的**两点边值问题**，该问题为**Sturm-Liouville 问题**，简称**S-L问题**
- 问题：是否存在参数λ的一些值，使得该两点边值问题有非零解？

  这样一类问题称为**特征值问题**.

  而使得S-L问题有非零解的参数λ的值称为此问题的**特征值**

- Sturm-Liouville方程，若带上上述边界条件之一，就得到一个二阶线性常微分方程的**两点边值问题**，该问题为**Sturm-Liouville 问题**，简称**S-L问题**
- 问题：是否存在参数λ的一些值，使得该两点边值问题有非零解？

  这样一类问题称为**特征值问题**.

  而使得S-L问题有非零解的参数λ的值称为此问题的**特征值**

  相应的非零解称为特征值λ相对应的**特征函数**。

基本结论（特征值问题是一个专门课题，下面只叙述相关结论）

- 对正则的S-L问题，对应于同一个特征值的特征函数必线性相关（周期边界条件除外）

基本结论（特征值问题是一个专门课题，下面只叙述相关结论）

- 对正则的S-L问题，对应于同一个特征值的特征函数必线性相关（周期边界条件除外）
- 对应于不同特征值的特征函数必定带权函数$r(x)$正交（无论正则与否）

基本结论（特征值问题是一个专门课题，下面只叙述相关结论）

- 对正则的S-L问题，对应于同一个特征值的特征函数必线性相关（周期边界条件除外）
- 对应于不同特征值的特征函数必定带权函数$r(x)$正交（无论正则与否）
- 若$r(x) > 0$,则S-L问题的所有特征值都是实的，且相应的特征函数也可以取成实的；

基本结论（特征值问题是一个专门课题，下面只叙述相关结论）

- 对正则的S-L问题，对应于同一个特征值的特征函数必线性相关（周期边界条件除外）
- 对应于不同特征值的特征函数必定带权函数$r(x)$正交（无论正则与否）
- 若$r(x) > 0$,则S-L问题的所有特征值都是实的，且相应的特征函数也可以取成实的；
- S-L问题有可数多个特征值，且当$r(x) > 0$时，可以排列成

$$-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

同时还有$\lambda_n \to \infty$。特征函数的全体构成一个完备正交函数系

基本结论（特征值问题是一个专门课题，下面只叙述相关结论）

- 对正则的S-L问题，对应于同一个特征值的特征函数必线性相关（周期边界条件除外）
- 对应于不同特征值的特征函数必定带权函数$r(x)$正交（无论正则与否）
- 若$r(x) > 0$,则S-L问题的所有特征值都是实的，且相应的特征函数也可以取成实的；
- S-L问题有可数多个特征值，且当$r(x) > 0$时，可以排列成

$$-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

同时还有$\lambda_n \to \infty$。特征函数的全体构成一个完备正交函数系

- 特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ -\alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) = 0, \alpha_2 u'(l) + \beta_2 u(l) = 0, \\ \alpha_i, \beta_i \geq 0, \alpha_i + \beta_i > 0, i = 1, 2 \end{cases}$$

的所有特征值都是非负的，且当β_1, β_2不同时为零时，所有特征值都是正的

例2.3.1, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases} \tag{2.3.8}$$

例2.3.1, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases} \qquad (2.3.8)$$

解法一：当$\lambda \leq 0$时，问题(2.3.8)的方程两边同乘u,再分部积分得

$$\int_0^l uu'' dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx = 0 \Rightarrow$$

$$-uu'|_0^l - \int_0^l (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx = 0\text{(由边界条件，化简可得)}$$

$$\Rightarrow -\int_0^l (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx = 0$$

所以当$\lambda < 0$时(上式中左边每项被积函数都是非负的，所以等号左边小于等于零，而右边是等于零，$\Rightarrow$左边每项为零)，$u \equiv 0$;

例2.3.1, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases} \tag{2.3.8}$$

解法一：当$\lambda \le 0$时，问题(2.3.8)的方程两边同乘u,再分部积分得

$$\int_0^l uu'' dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx = 0 \Rightarrow$$

$$-uu'|_0^l - \int_0^l (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx = 0\text{(由边界条件，化简可得)}$$

$$\Rightarrow -\int_0^l (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx = 0$$

所以当$\lambda < 0$时(上式中左边每项被积函数都是非负的，所以等号左边小于等于零，而右边是等于零，$\Rightarrow$左边每项为零)，$u \equiv 0$;当$\lambda = 0$时，$u'(x) = 0$,再由$u(0) = 0 \Rightarrow u(x) = 0$

例2.3.1, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases} \tag{2.3.8}$$

解法一：当$\lambda \le 0$时，问题(2.3.8)的方程两边同乘u,再分部积分得

$$\int_0^l uu'' dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx = 0 \Rightarrow$$

$$-uu'|_0^l - \int_0^l (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx = 0\text{(由边界条件，化简可得)}$$

$$\Rightarrow -\int_0^l (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx = 0$$

所以当$\lambda < 0$时(上式中左边每项被积函数都是非负的，所以等号左边小于等于零，而右边是等于零，$\Rightarrow$左边每项为零)，$u \equiv 0$;当$\lambda = 0$时，$u'(x) = 0$,再由$u(0) = 0 \Rightarrow u(x) = 0$因此，当$\lambda \le$0时,问题无非零解，所以$\lambda \le 0$不是特征值。

例2.3.1, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases} \quad (2.3.8)$$

解法一：当$\lambda \leq 0$时，问题(2.3.8)的方程两边同乘u,再分部积分得

$$\int_0^l uu'' dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx = 0 \Rightarrow$$

$$-uu'|_0^l - \int_0^l (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx = 0(\text{由边界条件，化简可得})$$

$$\Rightarrow -\int_0^l (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^l u^2(x) dx = 0$$

所以当$\lambda < 0$时(上式中左边每项被积函数都是非负的，所以等号左边小于等于零，而右边是等于零，$\Rightarrow$左边每项为零)，$u \equiv 0$;当$\lambda = 0$时，$u'(x) = 0$,再由$u(0) = 0 \Rightarrow u(x) = 0$因此，当$\lambda \leq 0$时,问题无非零解，所以$\lambda \leq 0$不是特征值。

当$\lambda > 0$时,记$\lambda = \beta^2, \beta > 0$,问题(2.3.8)方程(此时方程为$u'' + \beta^2 u = 0$,利用齐次常微分方程的求解)的解是

$$u(x) = C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x$$

由$u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.再由$u(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sin\beta l = 0$,要使$u(x)$是非零解，一定有

当$\lambda > 0$时,记$\lambda = \beta^2, \beta > 0$,问题(2.3.8)方程(此时方程为$u'' + \beta^2 u = 0$,利用齐次常微分方程的求解)的解是

$$u(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$$

由$u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.再由$u(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sin \beta l = 0$,要使$u(x)$是非零解，一定有$\sin \beta l = 0$,即$\beta = \frac{n\pi}{l}$,于是

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, n = 1, 2, \cdots$$

是特征值问题（2.3.8）的全部特征值，$u_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} (n = 1, 2, \cdots)$是对应的特征函数.

当$\lambda > 0$时,记$\lambda = \beta^2, \beta > 0$,问题(2.3.8)方程(此时方程为$u'' + \beta^2 u = 0$,利用齐次常微分方程的求解)的解是

$$u(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$$

由$u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.再由$u(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sin \beta l = 0$,要使$u(x)$是非零解，一定有$\sin \beta l = 0$,即$\beta = \frac{n\pi}{l}$,于是

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, n = 1, 2, \cdots$$

是特征值问题（2.3.8）的全部特征值，$u_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}(n = 1, 2, \cdots)$是对应的特征函数.

解法二：
1^o当$\lambda=0$时，方程（2.3.8）为

$$u^{''}=0\Rightarrow u=c_1x+c_2$$

由边界条件

$$u(0)=0\Rightarrow c_1=0,u(l)=0\Rightarrow c_2=0,$$

即此时u只有零解，所以$\lambda=0$不是特征值

解法二：
1^o当$\lambda=0$时，方程（2.3.8）为

$$u''=0 \Rightarrow u=c_1x+c_2$$

由边界条件

$$u(0)=0 \Rightarrow c_1=0, u(l)=0 \Rightarrow c_2=0,$$

即此时u只有零解，所以$\lambda=0$不是特征值
2^0当$\lambda<0$时,令$\lambda=-\gamma^2, \gamma>0$,方程的解为

$$u=c_1e^{\gamma x}+c_2e^{-\gamma x}$$

由边界条件

$$u(0)=0 \Rightarrow c_1+c_2=0, u(l)=0 \Rightarrow c_1e^{\gamma l}+c_2e^{-\gamma l}=0,$$

即此时u只有零解，所以$\lambda<0$也不是特征值

解法二：
1^o当$\lambda = 0$时，方程（2.3.8）为

$$u'' = 0 \Rightarrow u = c_1 x + c_2$$

由边界条件

$$u(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0, u(l) = 0 \Rightarrow c_2 = 0,$$

即此时u只有零解，所以$\lambda = 0$不是特征值
2^0当$\lambda < 0$时,令$\lambda = -\gamma^2, \gamma > 0$,方程的解为

$$u = c_1 e^{\gamma x} + c_2 e^{-\gamma x}$$

由边界条件

$$u(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0, u(l) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\gamma l} + c_2 e^{-\gamma l} = 0,$$

即此时u只有零解，所以$\lambda < 0$也不是特征值

3^0当$\lambda > 0$时,记$\lambda = \beta^2, \beta > 0$,问题(2.3.8)方程的解是

$$u(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin x$$

由$u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.u(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sin \beta l = 0$,要使$u(x)$是非零解,一定有

3^0当$\lambda > 0$时,记$\lambda = \beta^2, \beta > 0$,问题(2.3.8)方程的解是

$$u(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin x$$

由$u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.u(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sin \beta l = 0$,要使$u(x)$是非零解,一定有$\sin \beta l = 0$,即$\beta = \frac{n\pi}{l}$,于是

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, n = 1, 2, \cdots$$

是特征值问题(2.3.8)的全部特征值,$u_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}(n = 1, 2, \cdots)$是对应的特征函数.

3^0当$\lambda > 0$时,记$\lambda = \beta^2, \beta > 0$,问题(2.3.8)方程的解是

$$u(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin x$$

由$u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.u(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sin \beta l = 0$,要使$u(x)$是非零解，一定有$\sin \beta l = 0$,即$\beta = \frac{n\pi}{l}$,于是

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, n = 1, 2, \cdots$$

是特征值问题（2.3.8）的全部特征值，$u_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}(n = 1, 2, \cdots)$是对应的特征函数.

综上：$\lambda \leq 0$不是特征值

$\lambda > 0$时,特征值为$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, n = 1, 2, \cdots$，对应的特征函数为$u_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}(n = 1, 2, \cdots)$

例2.3.2, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u'(l) = 0 \end{cases} \tag{2.3.9}$$

例2.3.2, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u'(l) = 0 \end{cases} \tag{2.3.9}$$

解法一：当$\lambda \leq 0$时(同例2.3.1），可证$\lambda \leq 0$不是特征值。

例2.3.2, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u'(l) = 0 \end{cases} \tag{2.3.9}$$

解法一：当$\lambda \le 0$时(同例2.3.1），可证$\lambda \le 0$不是特征值。
当$\lambda > 0$时,记$\lambda = \beta^2, \beta > 0$,问题(2.3.8)方程的解是

$$u(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin x$$

由$u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.再由$u'(l) = 0 \Rightarrow C_2 \cos \beta l = 0$,要使$u(x)$是非零解，一定有

例2.3.2, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u'(l) = 0 \end{cases} \tag{2.3.9}$$

解法一：当$\lambda \leq 0$时(同例2.3.1），可证$\lambda \leq 0$不是特征值。
当$\lambda > 0$时,记$\lambda = \beta^2, \beta > 0$,问题(2.3.8)方程的解是

$$u(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin x$$

由$u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.再由$u'(l) = 0 \Rightarrow C_2 \cos \beta l = 0$,要使$u(x)$是非零解，一定有$\cos \beta l = 0$,即$\beta = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$,于是

$$\lambda_n = (\frac{(2n-1)\pi}{2l})^2, n = 1, 2, \cdots$$

是特征值问题（2.3.9）的全部特征值，$u_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l}(n = 1, 2, \cdots)$是对应的特征函数.

例2.3.2, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u'(l) = 0 \end{cases} \qquad (2.3.9)$$

解法一：当$\lambda \leq 0$时(同例2.3.1)，可证$\lambda \leq 0$不是特征值。
当$\lambda > 0$时,记$\lambda = \beta^2, \beta > 0$,问题(2.3.8)方程的解是

$$u(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin x$$

由$u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.再由$u'(l) = 0 \Rightarrow C_2 \cos \beta l = 0$,要使$u(x)$是非零解，一定有$\cos \beta l = 0$,即$\beta = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$,于是

$$\lambda_n = (\frac{(2n-1)\pi}{2l})^2, n = 1, 2, \cdots$$

是特征值问题（2.3.9）的全部特征值，$u_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l} (n = 1, 2, \cdots)$是对应的特征函数.

例2.3.2, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = 0, u'(l) + \sigma u(l) = 0 \end{cases} \tag{2.3.10}$$

其中常数$\sigma > 0$

例2.3.2, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = 0, u'(l) + \sigma u(l) = 0 \end{cases} \tag{2.3.10}$$

其中常数$\sigma > 0$
解：同上可证，$\lambda \leq 0$不是特征值。

例2.3.2, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = 0, u'(l) + \sigma u(l) = 0 \end{cases} \tag{2.3.10}$$

其中常数$\sigma > 0$
解：同上可证，$\lambda \leq 0$不是特征值。记$\lambda = \beta^2, \beta \neq 0$.方程(2.3.10)的通解为

$$u(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$$

例2.3.2, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = 0, u'(l) + \sigma u(l) = 0 \end{cases} \tag{2.3.10}$$

其中常数$\sigma > 0$
解：同上可证，$\lambda \leq 0$不是特征值。记$\lambda = \beta^2, \beta \neq 0$.方程(2.3.10)的通解为

$$u(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$$

由边界条件$u(0) = 0 \Rightarrow A = 0$,由$u'(l) + \sigma u(l) = 0$可知若使$u(x)$是非零解，必有

$$\beta\cos\beta l + \sigma\sin\beta l = 0$$

解出$\tan\beta l = -\beta/\sigma$.

例2.3.2, 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = 0, u'(l) + \sigma u(l) = 0 \end{cases} \tag{2.3.10}$$

其中常数$\sigma > 0$
解：同上可证，$\lambda \leq 0$不是特征值。记$\lambda = \beta^2, \beta \neq 0$.方程(2.3.10)的通解为

$$u(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$$

由边界条件$u(0) = 0 \Rightarrow A = 0$,由$u'(l) + \sigma u(l) = 0$可知若使$u(x)$是非零解，必有

$$\beta\cos\beta l + \sigma\sin\beta l = 0$$

解出$\tan\beta l = -\beta/\sigma$.记$\gamma = \beta l$,则有

$$\tan\gamma = -\frac{1}{\sigma l}\gamma$$

该方程的根就是曲线$y_1 = \tan\gamma$与直线$y_2 = -\frac{1}{\sigma l}\gamma$交点的横坐标。

它们有无穷多交点，即方程$\tan \beta l = -\beta/\sigma$有无穷多个根，其中正根与负跟对称，因此可以只考虑正根，记它的所有正根依次为

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n, \cdots$$

问题（2.3.10）的全部特征值为

$$\lambda_n = \beta_n^2 = \frac{\gamma_n^2}{l^2}, n = 1, 2, \cdots$$

对应的特征函数为

$$u_n(x) = \sin \beta_n x = \sin \sqrt{\lambda_n} x, n = 1, 2, \cdots$$

对于二阶方程的特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u\text{在}x = 0\text{及}x = l\text{处的边界条件} \end{cases} \tag{2.3.11}$$

下面列出各种边界条件下的全部特征值和对应的特征函数

对于二阶方程的特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u\text{在}x = 0\text{及}x = l\text{处的边界条件} \end{cases} \tag{2.3.11}$$

下面列出各种边界条件下的全部特征值和对应的特征函数

- (1).边界条件是$u(0) = u(l) = 0$时,特征值$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$,特征函数$u_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$;
- (2).边界条件是$u(0) = u'(l) = 0$时,特征值$\lambda_n = (\frac{(2n-1)\pi}{2l})^2$,特征函数$u_n(x) = \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$;
- (3).边界条件是$u'(0) = u(l) = 0$时,特征值$\lambda_n = (\frac{(2n-1)\pi}{2l})^2$,特征函数$u_n(x) = \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$;
- (4).边界条件是$u'(0)(0) = u'(0)(l) = 0$时,特征值$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$,特征函数$u_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}$;
- (5).边界条件是$u(0) = u(l), u'(0)(0) = u'(0)(l)$时,特征值$\lambda_n = (\frac{2n\pi}{l})^2$,特征函数$u_n(x) = \{\sin\frac{2n\pi x}{l}, \cos\frac{2n\pi x}{l}\}$;
- (6).边界条件是$u(0) = u'(l) + \sigma u(l) = 0$时,特征值$\lambda_n = (\frac{\gamma_n}{l})^2$,特征函数$u_n(x) = \sin\frac{\gamma_n x}{l}$,其中$\gamma_n$是方程$\tan\gamma = -\frac{\gamma}{\sigma l}$的第$n$个正根，$\sigma > 0$;

- (7).边界条件是$u^{'}(0)=u^{'}(l)+\sigma u(l)=0$时,特征值$\lambda_n=(\frac{\gamma_n}{l})^2$,特征函数$u_n(x)=\cos\frac{\gamma_n x}{l}$,其中$\gamma_n$是方程$\cot\gamma=-\frac{\gamma}{\sigma l}$的第$n$个正根，$\sigma>0$;
- (8).边界条件是$u^{'}(0)-\sigma u(0)=u(l)=0$时,特征值$\lambda_n=(\frac{\gamma_n}{l})^2$,特征函数$u_n(x)=\frac{\gamma_n}{\sigma l}\cos\frac{\gamma_n x}{l}+\sin\frac{\gamma_n x}{l}$,其中$\gamma_n$是方程$\tan\gamma=-\frac{\gamma}{\sigma l}$的第$n$个正根，$\sigma>0$;
- (9).边界条件是$u^{'}(0)-\sigma u(0)=u^{'}(l)=0$时,特征值$\lambda_n=(\frac{\gamma_n}{l})^2$,特征函数$u_n(x)=\frac{\gamma_n}{\sigma l}\cos\frac{\gamma_n x}{l}+\sin\frac{\gamma_n x}{l}$,其中$\gamma_n$是方程$\cot\gamma=\frac{\gamma}{\sigma l}$的第$n$个正根，$\sigma>0$;
- (10).边界条件是$u^{'}(0)-\sigma_1 u(0)=u^{'}(l)+\sigma_2 u(l)=0$时,特征值$\lambda_n=(\frac{\gamma_n}{l})^2$,特征函数$u_n(x)=\frac{\gamma_n}{\sigma_1 l}\cos\frac{\gamma_n x}{l}+\sin\frac{\gamma_n x}{l}$,其中$\gamma_n$是方程$\tan\gamma=\frac{1}{(\sigma_1+\sigma_2)l}(\gamma-\frac{\sigma_1\sigma_2 l^2}{\gamma}$的第$n$个正根，$\sigma_1,\sigma_2>0$;
- 注意，第4,5两种情况，即$u^{'}(0)=u^{'}(l)=0$和周期边界条件，$\lambda_0=0$才是特征值，n从0开始，其他情况n都是从1开始计数，但对于周期边界条件，当$n=0$时，$\sin\frac{n\pi x}{l}=0$,它不是特征函数
- 由2.3.1节的结论知，特征值问题(2.3.11)的全部特征函数所构成的函数系，是一个完备的正交函数系，因此，$L^2([0,l])$中的每一个函数都可以按照这个特征函数系展开

作业：

2.3、求解下列特征值问题

$$(1)\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, & 0 < x < l \\ u(0) = u(l), u'(0) = u'(l) \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, & 0 < x < l \\ u'(0) = u'(l) + \sigma u(l) = 0 \end{cases}$$

其中$\sigma > 0$是常数