华东理工大学 2017–2018 学年第二学期

《高等数学(下)》(11 学分) 课程期末考试试卷答案 (B)　2018.7

开课学院：理学院，　专业：大面积，　考试形式：闭卷，　所需时间 120 分钟

一、解下列各题（每小题 6 分，共 12 分）：

1. 设曲线 L 的方程为 $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ 0\le t\le \frac{\pi}{2}$，计算 $\int_L \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}s$.

解: 弧长微元 $\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t=3\cos t\sin t\,\mathrm{d}t$　(2 分)

$\int_L \sqrt[3]{|x|}\,\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[3]{\cos^3 t}\cdot 3\cos t\sin t\,\mathrm{d}t$　(2 分)

$=1$.　(2 分)

2. 计算 $I=\oint_\Gamma (z-y)\,\mathrm{d}x+(x-z)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z$，其中 Γ 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$，从 z 轴正向往负方向看，Γ 取顺时针方向.

解: Γ 的参数方程可取为:

$$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta,\ z=2-\cos\theta+\sin\theta,\ \theta \text{ 从 } 2\pi \text{ 变到 } 0 .\qquad (2\text{ 分})$$

$\mathrm{d}x=-\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$，$\mathrm{d}y=\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$，$\mathrm{d}z=(\sin\theta+\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

$I=\int_{2\pi}^{0}(3\cos^2\theta-\sin^2\theta-2\sin\theta-2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$　(2 分)

$=-2\pi$.　(2 分)

二、解下列各题（每小题 6 分，共 18 分）：

1. 求微分方程 $y''-2y'+y=1$ 的通解.

解法一:

所给微分方程对应的齐次微分方程的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+1=0$,

特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=1$,

对应的齐次微分方程的通解为 $y_h=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x$.　(2 分)

设原方程的一个特解形式为 $y_p=A$,

代入原方程, 解得 $A=1$. 故 $y_p=1$.　(3 分)

故原方程的通解为 $y=y_h+y_p=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x+1$.　(1 分)

解法二：

令 $Y=y-1$，则原方程化为 $Y''-2Y'+Y=0$，

特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+1=0$，特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x$$

故所求通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x+1$

2. 求经过点 $(0,2,-3)$ 且与两个平面 $x+z=1$ 及 $x+y+z=1$ 同时平行的直线方程.

解: 所求直线的方向向量为 $\{1,0,1\}\times\{1,1,1\}=\{-1,0,1\}$， (3 分)

由直线的点向式方程知所求直线为 $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z+3}{1}$. (3 分)

3. 求曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2,5)$ 处的切平面方程.

解: 法向量 $\vec{n}=\{z_x,z_y,-1\}=\{2x,2y,-1\}$.

在点 $(1,2,5)$ 处，$\vec{n}\big|_{(1,2,5)}=\{2,4,-1\}$. (3 分)

所求切平面为 $2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0$，

即 $2x+4y-z-5=0$. (3 分)

三、解下列各题（每小题 6 分，共 18 分）:

1. 设函数 f 具有一阶连续偏导数，$u=f(y\sin^2x,\ x\mathrm{e}^y)$，求 $\mathrm{d}u,\ \dfrac{\partial u}{\partial x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解法一: 微分法

在 $u=f(y\sin^2x,\ x\mathrm{e}^y)$ 两边微分得

$$\mathrm{d}u=f_1'\cdot\mathrm{d}(y\sin^2x)+f_2'\cdot\mathrm{d}(x\mathrm{e}^y)$$

$$=f_1'\cdot[\sin^2x\,\mathrm{d}y+y\sin(2x)\,\mathrm{d}x]+f_2'\cdot(\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^y\mathrm{d}y) \quad (3\text{ 分})$$

$$=[f_1'\cdot y\sin(2x)+f_2'\cdot\mathrm{e}^y]\mathrm{d}x+(f_1'\cdot\sin^2x+f_2'\cdot x\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y.$$

因此 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot y\sin(2x)+f_2'\cdot\mathrm{e}^y$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=f_1'\cdot\sin^2x+f_2'\cdot x\mathrm{e}^y$. (3 分)

解法二: 直接法

在 $u=f(y\sin^2 x,\, x\mathrm{e}^y)$ 两边对 x 求偏导得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial(y\sin^2 x)}{\partial x}+f_2'\cdot\frac{\partial(x\mathrm{e}^y)}{\partial x}=f_1'\cdot y\sin(2x)+f_2'\cdot\mathrm{e}^y. \qquad (2\text{ 分})$$

在 $u=f(y\sin^2 x,\, x\mathrm{e}^y)$ 两边对 x 求偏导得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{\partial(y\sin^2 x)}{\partial y}+f_2'\cdot\frac{\partial(x\mathrm{e}^y)}{\partial y}=f_1'\cdot\sin^2 x+f_2'\cdot x\mathrm{e}^y. \qquad (2\text{ 分})$$

因此 $\mathrm{d}u=[f_1'\cdot y\sin(2x)+f_2'\cdot\mathrm{e}^y]\mathrm{d}x+(f_1'\cdot\sin^2 x+f_2'\cdot x\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$. (2 分)

2. 求函数 $z=\sqrt{y+\cos x}$ 在点 $P=(0,1)$ 处沿方向 $\vec{l}=\{3,4\}$ 的方向导数.

解: $\nabla z(P)=\left\{\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right\}\Big|_P=\left\{\frac{-\sin x}{2\sqrt{y+\cos x}},\frac{1}{2\sqrt{y+\cos x}}\right\}\Big|_P=\left\{0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$. (3 分)

所求方向导数 $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}=\nabla z(P)\cdot\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=\left\{0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}\cdot\frac{\{3,4\}}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{\sqrt{2}}{5}$. (3 分)

3. 用拉格朗日乘数法求函数 $u=xyz$ 在约束条件 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\,(x>0,\ y>0, z>0)$ 下的最小值.

解: 作拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1\right)$. (2 分)

令 $\nabla L=\vec{0}$ 得 $\begin{cases} yz-\frac{\lambda}{x^2}=0 \\ zx-\frac{\lambda}{y^2}=0 \\ xy-\frac{\lambda}{z^2}=0 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1=0 \end{cases}$, 解之得 $x=y=z=3$. (2 分)

从而根据 $x>0,\ y>0, z>0$ 知 u 有最小值为 $u_{\min}=u(3,3,3)=27$. (2 分)

(注: 本题若不用拉格朗日乘数法求解, 给零分)

四、解下列各题（每小题 6 分，共 18 分）:

1. 计算二次积分 $\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^2 \mathrm{e}^{x^2-2x}\mathrm{d}x$.

解：原式$=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_1^x \mathrm{e}^{x^2-2x}\mathrm{d}y$ (3 分)

$$=\int_1^2 (x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$ (3 分)

2. 计算$\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$D$是由不等式$1\le x^2+y^2\le 16$，$x\ge 0$，$y\ge 0$所表示的区域.

解：原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^4 \rho\sin\theta\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$ (3 分)

$$=21\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=21.$$ (3 分)

3. 计算二重极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho\cos\theta(\rho\sin\theta)^2}{\rho^2}$$ (3 分)

$$=\lim_{\rho\to 0}\rho\cos\theta\sin^2\theta=0$$ (3 分)

五、选择题(在每小题中选出唯一正确的选项，每小题 4 分，共 16 分)

1. 设$u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,u)=$ (　　)

(A) $\dfrac{2}{x^2+y^2+z^2}$　　(B) $\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

(C) $\vec{0}$　　(D) $\dfrac{-2\{yz,zx,xy\}}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

解：选(C)

2. 设连续函数$z=f(x,y)$满足$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则$\mathrm{d}z|_{(0,1)}=$ (　　)

(A) $2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$　(B) $-2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$　(C) $2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$　(D) $-2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

解：选(A)

3. 设 $\sum$ 是曲面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}=1-z$ 与平面 $z=0$ 所围立体表面的外侧，则 $\oiint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的值为 (　　)

(A) 9π (B) 6π (C) 3π (D) 0

解: 选(B)

4. 设以10为周期的函数 $f(x)$ 在 $[-5,5)$ 内的表达式为 $f(x)=\begin{cases}2,-5\le x<0,\\0,0\le x<5\end{cases}$，则其傅里叶级数在 $x=-5$ 处收敛到 (　　)

(A) 2 (B) 0 (C) -1 (D) 1

解: 选(D)

六、(本题 6 分) 计算曲线积分 $I=\int_L (y\mathrm{e}^{-x}+2x)\,\mathrm{d}x+(4y-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}y$，其中 L 是从点 $A(1,0)$，过点 $B(0,1)$ 到点 $C(-1,1)$ 的有向圆弧.

解: 令 $P=ye^{-x}+2x$，$Q=4y-e^{-x}$， $\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^{-x}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=e^{-x}$，

因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在全平面上成立,从而所给积分与路径无关. (3 分)

$$I=\int_{(1,0)}^{(-1,1)}(y\mathrm{e}^{-x}+2x)\,\mathrm{d}x+(4y-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{(1,0)}^{(-1,0)}(y\mathrm{e}^{-x}+2x)\,\mathrm{d}x+(4y-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}y+\int_{(-1,0)}^{(-1,1)}(y\mathrm{e}^{-x}+2x)\,\mathrm{d}x+(4y-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^{-1}2x\,\mathrm{d}x+\int_0^1(4y-\mathrm{e})\,\mathrm{d}y=2-\mathrm{e}.$$ (3 分)

七、(本题 6 分) 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=5$ 围成.

解法一: Ω 在 z 轴上的投影为区间 $[0,5]$.

$\forall z\in[0,5]$, 竖坐标为 z 的平面截 Ω 产生的截面区域为 $D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le z^2\}$.

原式 $=\int_0^5\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (3 分)

$$=\int_0^5 z^2\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^5 z^2\cdot\pi z^2\,\mathrm{d}z=625\pi.$$ (3 分)

解法二: Ω 在 xOy 面上的投影为区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 5^2\}$.

对于Ω内的任意一点(x, y, z)有$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 5$.

原式$= \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{5} z^2\,\mathrm{d}z$ (3 分)

$$= \frac{1}{3}\iint\limits_{D_{xy}} [125-(x^2+y^2)^{3/2}]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^5 (125-\rho^3)\rho\,\mathrm{d}\rho = 625\pi.$$ (3 分)

八、(本题 6 分) 计算二次积分$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta}\rho^2\sqrt{1-\rho^2\cos 2\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\rho$.

解: 该二次积分对应的二重积分的积分区域为$D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, 0 \le \rho \le \sec\theta\}$.

在直角坐标下表示为$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$.

$$I = \iint\limits_{D} \rho\sin\theta \cdot \sqrt{1-(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \iint\limits_{D} y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$ (3 分)

$$= \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}(1-x^2+y^2)$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x^2+y^2)^{3/2}\Big|_{y=0}^{y=x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 [1-(1-x^2)^{3/2}]\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}.$$ (3 分)