中国科学院大学

2016 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等代数

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 (20 分) 设 $a_i + b_j \neq 0$, 求以下矩阵的行列式值:

$$A = \begin{pmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \cdots & (a_1+b_n)^{-1} \\ (a_2+b_1)^{-1} & (a_2+b_2)^{-1} & \cdots & (a_2+b_n)^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_1)^{-1} & \cdots & (a_n+b_n)^{-1} \end{pmatrix}.$$

二、 (20 分) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + \beta x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求 β 的值;

(2) 求一实正交变换, 将上述二次型化为标准型, 并求出标准型.

三、 (12 分) 矩阵 A 的 $n-1$ 阶子式不全为零, 给出齐次方程组 $Ax=0$ 的一组解, 并求方程所有的解, 其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

四、 (12 分) V 是 n 维线性空间，V_1, V_2 是 V 的子空间, 且

$$\dim(V_1+V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1.$$

求证: $V_1+V_2 = V_1, V_1 \cap V_2 = V_2$ 或 $V_1+V_2 = V_2, V_1 \cap V_2 = V_1$.

五、 (15 分) 设 A 是两个 n 阶复矩阵, 定义 $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换 $\mathcal{T}(x) := AX - XA$. A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$(不考虑重根). 证明 $\mathcal{T}$ 的特征值必可写成 $\lambda_i - \lambda_j (1 \leq i,j \leq n)$ 的形式.

六、 (16 分) 证明与 n 阶若当块 $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ 可交换的矩阵必为 J 的多项式.

七、 (12 分) n 阶方阵 A 的每行每列恰有一个元素为 1 或 -1, 其余元素均为零. 证明存在正整数 m 使得 $A^k = E$, 其中 E 为单位矩阵.

八、 (15 分) 设 A, B 是两个 n 阶复矩阵, 如果 $AB - BA = 2B$. 证明:

(1) 存在 n 维列向量 u 和常数 μ, 使得 $Au = \mu u$ 和 $Bu = 0$;

(2) A, B 同时可上三角化.

九、 (15 分) 设多项式 $g(x)=p^k(x)g(x)(k\geq 1)$, 多项式 $p(x)$ 与 $g_(x)$ 互素. 证明: 对任意多项式 $f(x)$ 有

$$\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\frac{r\left(x\right)}{p^k\left(x\right)}+\frac{f_1\left(x\right)}{p^{k-1}\left(x\right)g_1\left(x\right)},$$

其中 $r(x), f_1(x)$ 都是多项式, $r(x)=0$ 或 $r(x)$ 的次数小于 $p(x)$.