

★4.1.2 初边值条件的处理



Home Page

Title Page



Page 1 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit

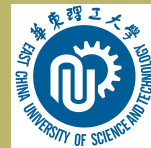
★4.1.2 初边值条件的处理

- 初值问题

- 对于初始条件 $u(x, 0) = \phi(x)$, 对 Ω 作两族平行线

$$x = x_j = jh, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$t = t_k = k\tau, k = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{T}{\tau}\right].$$



Home Page

Title Page



Page 1 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit

★4.1.2 初边值条件的处理

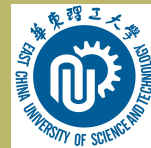
● 初值问题

- 对于初始条件 $u(x, 0) = \phi(x)$, 对 Ω 作两族平行线

$$x = x_j = jh, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$t = t_k = k\tau, k = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{T}{\tau}\right].$$

- 对方程的离散应取显格式，若取隐格式，将会遇到求解无限维方程组的问题。



Home Page

Title Page



Page 1 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit

★4.1.2 初边值条件的处理

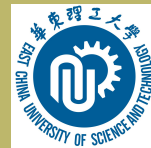
● 初值问题

- 对于初始条件 $u(x, 0) = \phi(x)$, 对 Ω 作两族平行线

$$x = x_j = jh, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$t = t_k = k\tau, k = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{T}{\tau}\right].$$

- 对方程的离散应取显格式, 若取隐格式, 将会遇到求解无限维方程组的问题。
- 初始条件离散 $u_j^0 = \phi(x_j), j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 1 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



★4.1.2 初边值条件的处理

● 初值问题

- 对于初始条件 $u(x, 0) = \phi(x)$, 对 Ω 作两族平行线

$$x = x_j = jh, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$t = t_k = k\tau, k = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{T}{\tau}\right].$$

- 对方程的离散应取显格式, 若取隐格式, 将会遇到求解无限维方程组的问题。
- 初始条件离散 $u_j^0 = \phi(x_j), j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- 若采取古典显格式, 计算的次序可以从下一层的中间位置 $x = 0$ 开始轮流向两边扩展

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit

★4.1.2 初边值条件的处理

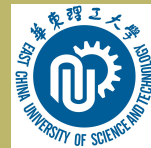
● 初值问题

- 对于初始条件 $u(x, 0) = \phi(x)$, 对 Ω 作两族平行线

$$x = x_j = jh, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$t = t_k = k\tau, k = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{T}{\tau}\right].$$

- 对方程的离散应取显格式, 若取隐格式, 将会遇到求解无限维方程组的问题。
- 初始条件离散 $u_j^0 = \phi(x_j), j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- 若采取古典显格式, 计算的次序可以从下一层的中间位置 $x = 0$ 开始轮流向两边扩展
- 如果希望得到第 M 层上 $|x| \leq x_l$ (l 为确定的某个正整数) 范围内的节点处的近似值, 那么在第1层至少要算出 $|x| \leq x_{l+M-1}$ 范围内的节点的近似值, 即至少要取 $2(l + M) + 1$ 个初值 $u_j^0 = \phi(x_j), j = 0, \pm 1, \dots, \pm l + M$ 进行计算



Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 1 of 12

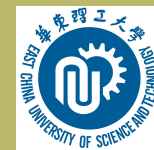
Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 初边值问题(混合问题)



Home Page

Title Page



Page 2 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 初边值问题(混合问题)

- 对于初始条件(3)和边界条件(6),格式为

$$\begin{aligned} u_j^0 &= \phi(x_j), j = 1, 2, \cdots, N-1, \\ u_0^k &= \alpha(t_k), u_N^k = \beta(t_k), k = 0, 1, \cdots, M. \end{aligned} \quad (30)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 初边值问题(混合问题)

- 对于初始条件(3)和边界条件(6),格式为

$$u_j^0 = \phi(x_j), j = 1, 2, \cdots, N - 1,$$

$$u_0^k = \alpha(t_k), u_N^k = \beta(t_k), k = 0, 1, \cdots, M. \quad (30)$$

- 对边界条件(4)和(5)可考虑下面两种方法:

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 初边值问题(混合问题)

- 对于初始条件(3)和边界条件(6),格式为

$$\begin{aligned} u_j^0 &= \phi(x_j), j = 1, 2, \cdots, N-1, \\ u_0^k &= \alpha(t_k), u_N^k = \beta(t_k), k = 0, 1, \cdots, M. \end{aligned} \quad (30)$$

- 对边界条件(4)和(5)可考虑下面两种方法:

- * 对 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 在 (x_0, t_k) 处用向前差商逼近, 在 (x_N, t_k) 处用向后差商逼近:

$$\begin{aligned} \alpha_1^k \frac{u_1^k - u_0^k}{h} + \alpha_0^k u_0^k &= \alpha_2^k, \\ \beta_1^k \frac{u_N^k - u_{N-1}^k}{h} + \beta_0^k u_N^k &= \beta_2^k, \end{aligned} \quad (31)$$

其中 $\alpha_i^k, \beta_i^k, (i = 0, 1, 2)$ 表示 $\alpha_i(t_k), \beta_i(t_k)$ 的值。

- 初边值问题(混合问题)

- 对于初始条件(3)和边界条件(6),格式为

$$\begin{aligned} u_j^0 &= \phi(x_j), j = 1, 2, \cdots, N-1, \\ u_0^k &= \alpha(t_k), u_N^k = \beta(t_k), k = 0, 1, \cdots, M. \end{aligned} \quad (30)$$

- 对边界条件(4)和(5)可考虑下面两种方法:

- * 对 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 在 (x_0, t_k) 处用向前差商逼近, 在 (x_N, t_k) 处用向后差商逼近:

$$\begin{aligned} \alpha_1^k \frac{u_1^k - u_0^k}{h} + \alpha_0^k u_0^k &= \alpha_2^k, \\ \beta_1^k \frac{u_N^k - u_{N-1}^k}{h} + \beta_0^k u_N^k &= \beta_2^k, \end{aligned} \quad (31)$$

其中 $\alpha_i^k, \beta_i^k, (i = 0, 1, 2)$ 表示 $\alpha_i(t_k), \beta_i(t_k)$ 的值。

- * 误差为 $O(h)$.



- 为提高精度，可用中心差商来逼近 $\frac{\partial u}{\partial x}$,

$$\begin{aligned}\alpha_1^k \frac{u_1^k - u_{-1}^k}{2h} + \alpha_0^k u_0^k &= \alpha_2^k, \\ \beta_1^k \frac{u_{N+1}^k - u_{N-1}^k}{2h} + \beta_0^k u_N^k &= \beta_2^k.\end{aligned}\tag{32}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 3 of 12](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 为提高精度，可用中心差商来逼近 $\frac{\partial u}{\partial x}$,

$$\begin{aligned}\alpha_1^k \frac{u_1^k - u_{-1}^k}{2h} + \alpha_0^k u_0^k &= \alpha_2^k, \\ \beta_1^k \frac{u_{N+1}^k - u_{N-1}^k}{2h} + \beta_0^k u_N^k &= \beta_2^k.\end{aligned}\tag{32}$$

- 误差为2阶的，但要设法消去 u_{-1}^k 和 u_{N+1}^k

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 3 of 12](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



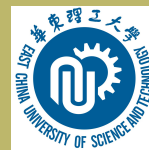
- 为提高精度，可用中心差商来逼近 $\frac{\partial u}{\partial x}$,

$$\begin{aligned}\alpha_1^k \frac{u_1^k - u_{-1}^k}{2h} + \alpha_0^k u_0^k &= \alpha_2^k, \\ \beta_1^k \frac{u_{N+1}^k - u_{N-1}^k}{2h} + \beta_0^k u_N^k &= \beta_2^k.\end{aligned}\tag{32}$$

- 误差为2阶的，但要设法消去 u_{-1}^k 和 u_{N+1}^k

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 3 of 12](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 假设方程 $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$ 在边界上也成立，可把内点的差分格式推广到边界上。



Home Page

Title Page



Page 4 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 假设方程 $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$ 在边界上也成立，可把内点的差分格式推广到边界上。
- 考虑古典显格式，在左边界 (x_0, t_k) 得

$$u_0^{k+1} = ru_1^k + (1 - 2r)u_0^k + ru_{-1}^k + \tau f_0^k.$$

消去 u_{-1}^k , 得

$$u_0^{k+1} = 2ru_1^k + \left(1 - 2r + \frac{2rh\alpha_0^k}{\alpha_1^k}\right)u_0^k - \frac{2rh\alpha_2^k}{\alpha_1^k} + \tau f_0^k. \quad (33)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 4 of 12](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 假设方程 $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$ 在边界上也成立，可把内点的差分格式推广到边界上。
- 考虑古典显格式，在左边界 (x_0, t_k) 得

$$u_0^{k+1} = ru_1^k + (1 - 2r)u_0^k + ru_{-1}^k + \tau f_0^k.$$

消去 u_{-1}^k , 得

$$u_0^{k+1} = 2ru_1^k + \left(1 - 2r + \frac{2rh\alpha_0^k}{\alpha_1^k}\right)u_0^k - \frac{2rh\alpha_2^k}{\alpha_1^k} + \tau f_0^k. \quad (33)$$

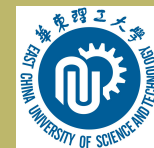
- 同理在右边界 (x_N, t_k) 得

$$u_N^{k+1} = 2ru_{N-1}^k + \left(1 - 2r - \frac{2rh\beta_0^k}{\beta_1^k}\right)u_N^k + \frac{2rh\beta_2^k}{\beta_1^k} + \tau f_N^k. \quad (34)$$

★3.数值计算例子

例1.考虑扩散方程的第一边值问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{当 } 0 < x < 1, t > 0 \text{ 时} \\ u(x, 0) = \sin \pi x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \text{当 } t \geq 0 \text{ 时} \end{cases}$$



Home Page

Title Page



Page 5 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit

★3.数值计算例子

例1.考虑扩散方程的第一边值问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{当 } 0 < x < 1, t > 0 \text{ 时} \\ u(x, 0) = \sin \pi x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \text{当 } t \geq 0 \text{ 时} \end{cases}$$

- 用分离变量法可得其解析解 $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 5 of 12](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

★3.数值计算例子

例1.考虑扩散方程的第一边值问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{当 } 0 < x < 1, t > 0 \text{ 时} \\ u(x, 0) = \sin \pi x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \text{当 } t \geq 0 \text{ 时} \end{cases}$$

- 用分离变量法可得其解析解 $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$
- 取 $h = 0.1, r = \frac{\tau}{h^2}$ 分别取为 0.05 和 1，即 τ 分别取为 0.0005 和 0.01. 用古典格式的矩阵形式(11)计算得到 $t = 0.5$ 时的数值解如表 4.1 所示

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 5 of 12](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

★3.数值计算例子

例1.考虑扩散方程的第一边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{当 } 0 < x < 1, t > 0 \text{ 时} \\ u(x, 0) = \sin \pi x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \text{当 } t \geq 0 \text{ 时} \end{cases}$$

- 用分离变量法可得其解析解 $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$
- 取 $h = 0.1, r = \frac{\tau}{h^2}$ 分别取为0.05和1, 即 τ 分别取为0.0005和0.01.用古典格式的矩阵形式(11)计算得到 $t = 0.5$ 时的数值解如表4.1所示
- 其中 $u(x_j, 0.5)$ 为精确解的值, $\epsilon_j^{1000} = |u(x_j, 0.5) - u_j^{1000}|$, 可以看出, 当 $r = 1$ 时, 数值解完全不正确, 这是由于算法的不稳定性引起的

★3.数值计算例子

例1.考虑扩散方程的第一边值问题:

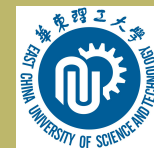
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{当 } 0 < x < 1, t > 0 \text{ 时} \\ u(x, 0) = \sin \pi x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \text{当 } t \geq 0 \text{ 时} \end{cases}$$

- 用分离变量法可得其解析解 $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$
- 取 $h = 0.1, r = \frac{\tau}{h^2}$ 分别取为0.05和1, 即 τ 分别取为0.0005和0.01.用古典格式的矩阵形式(11)计算得到 $t = 0.5$ 时的数值解如表4.1所示
- 其中 $u(x_j, 0.5)$ 为精确解的值, $\epsilon_j^{1000} = |u(x_j, 0.5) - u_j^{1000}|$, 可以看出, 当 $r = 1$ 时, 数值解完全不正确, 这是由于算法的不稳定性引起的
- 利用古典隐格式(14)和Crank-Nicolson格式(18)进行计算, 显然Crank-Nicolson格式的结果较好, 这是因为它的截断误差阶比前者高

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 5 of 12](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

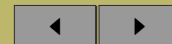
例2.考虑扩散方程的第三初边值问题：

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{当 } 0 < x < 1, t < 0 \text{ 时} \\ u(x, 0) = 1, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} - u \right) \Big|_{x=0} = 0, & \text{当 } t \geq 0 \text{ 时} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} - u \right) \Big|_{x=1} = 0, & \text{当 } t \geq 0 \text{ 时} \end{array} \right.$$



Home Page

Title Page



Page 6 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit

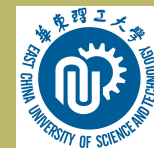
例2.考虑扩散方程的第三初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{当 } 0 < x < 1, t < 0 \text{ 时} \\ u(x, 0) = 1, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时} \\ (\frac{\partial u}{\partial x} - u)|_{x=0} = 0, & \text{当 } t \geq 0 \text{ 时} \\ (\frac{\partial u}{\partial x} - u)|_{x=1} = 0, & \text{当 } t \geq 0 \text{ 时} \end{cases}$$

• 它的解析解为

$$u(x, t) = 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sec \alpha_i}{3 + 4\alpha_i^2} e^{-4\alpha_i^2 t} \cos 2\alpha_i(x - \frac{1}{2}), 0 < x < 1$$

其中 α_i 为方程 $\alpha \tan \alpha = \frac{1}{2}$ 的正根

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 6 of 12](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

例2.考虑扩散方程的第三初边值问题:

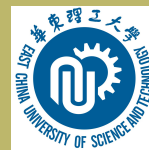
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{当 } 0 < x < 1, t < 0 \text{ 时} \\ u(x, 0) = 1, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时} \\ (\frac{\partial u}{\partial x} - u)|_{x=0} = 0, & \text{当 } t \geq 0 \text{ 时} \\ (\frac{\partial u}{\partial x} - u)|_{x=1} = 0, & \text{当 } t \geq 0 \text{ 时} \end{cases}$$

- 它的解析解为

$$u(x, t) = 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sec \alpha_i}{3 + 4\alpha_i^2} e^{-4\alpha_i^2} \cos 2\alpha_i(x - \frac{1}{2}), 0 < x < 1$$

其中 α_i 为方程 $\alpha \tan \alpha = \frac{1}{2}$ 的正根

- 取 $h = 0.1$,用古典显格式计算内点的值, 取 $r = \frac{1}{4}$ 即 $\tau = 0.0025$.用两种方法处理边界条件

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 6 of 12](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

例2.考虑扩散方程的第三初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{当 } 0 < x < 1, t < 0 \text{ 时} \\ u(x, 0) = 1, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时} \\ (\frac{\partial u}{\partial x} - u)|_{x=0} = 0, & \text{当 } t \geq 0 \text{ 时} \\ (\frac{\partial u}{\partial x} - u)|_{x=1} = 0, & \text{当 } t \geq 0 \text{ 时} \end{cases}$$

• 它的解析解为

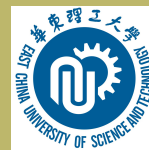
$$u(x, t) = 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sec \alpha_i}{3 + 4\alpha_i^2} e^{-4\alpha_i^2} \cos 2\alpha_i(x - \frac{1}{2}), 0 < x < 1$$

其中 α_i 为方程 $\alpha \tan \alpha = \frac{1}{2}$ 的正根

- 取 $h = 0.1$,用古典显格式计算内点的值, 取 $r = \frac{1}{4}$ 即 $\tau = 0.0025$.用两种方法处理边界条件
- 用(31), 得

$$\begin{cases} \frac{u_1^k - u_0^k}{h} - u_0^k = 0 \\ \frac{u_{10}^k - u_9^k}{h} - u_{10}^k = 0 \end{cases}$$

即 $u_0^k = \frac{10}{11}u_1^k, u_{10}^k = \frac{10}{9}u_9^k$.由此算出的数值解记为 $u_j^{k(1)}$.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 6 of 12](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 用式(33)和(34)得

$$u_0^{k+1} = \frac{1}{2}(u_1^k + \frac{9}{10}u_0^k), u_{10}^{k+1} = \frac{1}{2}(u_9^k + \frac{11}{10}u_{10}^k)$$

由此算出的数值解记为 $u_j^{k(2)}$.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 7 of 12](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



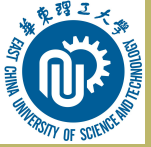
- 用式(33)和(34)得

$$u_0^{k+1} = \frac{1}{2}(u_1^k + \frac{9}{10}u_0^k), u_{10}^{k+1} = \frac{1}{2}(u_9^k + \frac{11}{10}u_{10}^k)$$

由此算出的数值解记为 $u_j^{k(2)}$.

- 对于 $x = 0.2$,表4.3给出了对不同的 k 得到的数值解, $u(0.2, t_k)$ 表示精确解

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 7 of 12](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 用式(33)和(34)得

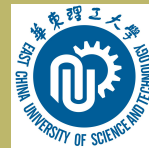
$$u_0^{k+1} = \frac{1}{2}(u_1^k + \frac{9}{10}u_0^k), u_{10}^{k+1} = \frac{1}{2}(u_9^k + \frac{11}{10}u_{10}^k)$$

由此算出的数值解记为 $u_j^{k(2)}$.

- 对于 $x = 0.2$,表4.3给出了对不同的 k 得到的数值解, $u(0.2, t_k)$ 表示精确解
- 显然具有2阶精度的对边界的第二种处理方法得到的结果较好

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 7 of 12](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

★4.1.3 变系数方程的差分格式



Home Page

Title Page



Page 8 of 12

Go Back

Full Screen

Close

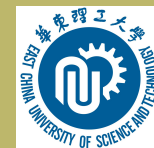
Quit

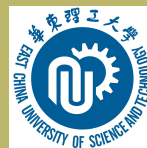
★4.1.3 变系数方程的差分格式

利用积分插值法构造方程(1)在定界条件(3)和(6)下的差分格式。
对区域的离散与1.1节相同

- 记 $W = -a \frac{\partial u}{\partial x}$, 在矩形域 $\{x_{j-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{j+\frac{1}{2}}, t_k \leq t \leq t_{k+1}\}$ 上对方程(1)积分得

$$\begin{aligned} & \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} [u(x, t_{k+1}) - u(x, t_k)] dx + \int_{t_k}^{t_{k+1}} [W(x_{j+\frac{1}{2}}, t) - W(x_{j-\frac{1}{2}}, t)] dt \\ & + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} d(x, t) u(x, t) dx dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(x, t) dx dt \quad (35) \end{aligned}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 8 of 12](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



★4.1.3 变系数方程的差分格式

利用积分插值法构造方程(1)在定界条件(3)和(6)下的差分格式。
对区域的离散与1.1节相同

- 记 $W = -a \frac{\partial u}{\partial x}$, 在矩形域 $\{x_{j-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{j+\frac{1}{2}}, t_k \leq t \leq t_{k+1}\}$ 上对方程(1)积分得

$$\begin{aligned} & \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} [u(x, t_{k+1}) - u(x, t_k)] dx + \int_{t_k}^{t_{k+1}} [W(x_{j+\frac{1}{2}}, t) - W(x_{j-\frac{1}{2}}, t)] dt \\ & + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} d(x, t) u(x, t) dx dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(x, t) dx dt \quad (35) \end{aligned}$$

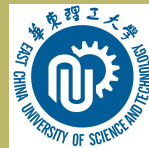
- 利用 W 的表达形式及中矩形积分公式和积分中值定理, 得

$$\begin{aligned} W(x_{j-\frac{1}{2}}, t)h & \approx \int_{x_{j-1}}^{x_j} W(x, t) dx = - \int_{x_{j-1}}^{x_j} a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ & \approx - \frac{\partial u}{\partial x}(x_{j-\frac{1}{2}}, t) \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_j} a(x, t) dx \end{aligned}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 12](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- 记 $A_j(t) = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} a(x, t) dx$, 并用中心差商代替 $\frac{\partial u}{\partial x}(x_{j-\frac{1}{2}}, t)$, 上式为

$$W(x_{j-\frac{1}{2}}, t) \approx -A_j(t) \frac{u(x_j, t) - u(x_{j-1}, t)}{h}$$



Home Page

Title Page



Page 9 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- 记 $A_j(t) = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} a(x, t) dx$, 并用中心差商代替 $\frac{\partial u}{\partial x}(x_{j-\frac{1}{2}}, t)$, 上式为

$$W(x_{j-\frac{1}{2}}, t) \approx -A_j(t) \frac{u(x_j, t) - u(x_{j-1}, t)}{h}$$

- 于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} W(x_{j-\frac{1}{2}}, t) dt &\approx \theta W(x_{j-\frac{1}{2}}, t_{k+1}) + (1 - \theta) W(x_{j-\frac{1}{2}}, t_k) \\ &\approx -\theta A_j^{k+1} \frac{u(x_j, t_{k+1}) - u(x_{j-1}, t_{k+1})}{h} - (1 - \theta) A_j^k \frac{u(x_j, t_k) - u(x_{j-1}, t_k)}{h}, \end{aligned} \quad (36)$$

其中 θ 为参数, $0 \leq \theta \leq 1$, $A_j^k = A_j(t_k)$

- 记 $A_j(t) = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} a(x, t) dx$, 并用中心差商代替 $\frac{\partial u}{\partial x}(x_{j-\frac{1}{2}}, t)$, 上式为

$$W(x_{j-\frac{1}{2}}, t) \approx -A_j(t) \frac{u(x_j, t) - u(x_{j-1}, t)}{h}$$

- 于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} W(x_{j-\frac{1}{2}}, t) dt &\approx \theta W(x_{j-\frac{1}{2}}, t_{k+1}) + (1 - \theta) W(x_{j-\frac{1}{2}}, t_k) \\ &\approx -\theta A_j^{k+1} \frac{u(x_j, t_{k+1}) - u(x_{j-1}, t_{k+1})}{h} - (1 - \theta) A_j^k \frac{u(x_j, t_k) - u(x_{j-1}, t_k)}{h}, \end{aligned} \quad (36)$$

其中 θ 为参数, $0 \leq \theta \leq 1$, $A_j^k = A_j(t_k)$

- 此外, 有

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t_k) dx \approx hu(x_j, t_k), \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} d(x, t) u(x, t) dx dt &\approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(x_j, t) \left[\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x+\frac{1}{2}} d(x, t) dx \right] dt \\ &\approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x+\frac{1}{2}} d(x, t) dx dt [\theta u(x_j, t_{k+1}) + (1 - \theta) u(x_j, t_k)] \end{aligned}$$


[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

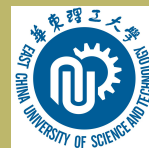
Page 10 of 12

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} d(x, t) u(x, t) dx dt &\approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(x_j, t) \left[\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x+\frac{1}{2}} d(x, t) dx \right] dt \\ &\approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x+\frac{1}{2}} d(x, t) dx dt [\theta u(x_j, t_{k+1}) + (1 - \theta) u(x_j, t_k)] \end{aligned}$$

• 记 $D_j^k = \frac{1}{\tau h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x+\frac{1}{2}} d(x, t) dx dt$, 则上式化为

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x+\frac{1}{2}} d(x, t) u(x, t) dx dt \approx D_j^k [\theta u(x_j, t_{k+1}) + (1 - \theta) u(x_j, t_k)] \tau h. \quad (38)$$


[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀](#)
[▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Page 10 of 12

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

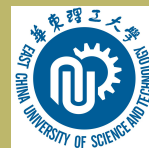
$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} d(x, t) u(x, t) dx dt &\approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(x_j, t) \left[\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x+\frac{1}{2}} d(x, t) dx \right] dt \\ &\approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x+\frac{1}{2}} d(x, t) dx dt [\theta u(x_j, t_{k+1}) + (1 - \theta) u(x_j, t_k)] \end{aligned}$$

• 记 $D_j^k = \frac{1}{\tau h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x+\frac{1}{2}} d(x, t) dx dt$, 则上式化为

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x+\frac{1}{2}} d(x, t) u(x, t) dx dt \approx D_j^k [\theta u(x_j, t_{k+1}) + (1 - \theta) u(x_j, t_k)] \tau h. \quad (38)$$

• 再记

$$F_j^k = \frac{1}{\tau h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x+\frac{1}{2}} f(x, t) dx dt. \quad (39)$$



Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 10 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} d(x, t) u(x, t) dx dt &\approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(x_j, t) \left[\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x+\frac{1}{2}} d(x, t) dx \right] dt \\ &\approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x+\frac{1}{2}} d(x, t) dx dt [\theta u(x_j, t_{k+1}) + (1 - \theta) u(x_j, t_k)] \end{aligned}$$

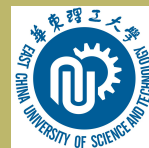
• 记 $D_j^k = \frac{1}{\tau h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x+\frac{1}{2}} d(x, t) dx dt$, 则上式化为

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x+\frac{1}{2}} d(x, t) u(x, t) dx dt \approx D_j^k [\theta u(x_j, t_{k+1}) + (1 - \theta) u(x_j, t_k)] \tau h. \quad (38)$$

• 再记

$$F_j^k = \frac{1}{\tau h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x+\frac{1}{2}} f(x, t) dx dt. \quad (39)$$

• 将式(36)~ (39)代入式(35)并整理, 得



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit

•

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_j, t_{k+1}) - u(x_j, t_k)}{\tau} - \frac{1}{h^2} [\theta A_{j+1}^{k+1} (u(x_{j+1}, t_{k+1}) - u(x_j, t_{k+1})) \\ & - \theta A_j^{k+1} (u(x_j, t_{k+1}) - u(x_{j-1}, t_{k+1})) + (1 - \theta) A_{j+1}^k (u(x_{j+1}, t_k) - u(x_j, t_k)) \\ & - (1 - \theta) A_j^k (u(x_j, t_k) - u(x_{j-1}, t_k))] + D_j^k [\theta u(x_j, t_{k+1}) + (1 - \theta) u(x_j, t_k)] \\ & = F_j^k + R_j^k \end{aligned}$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



$$\frac{u(x_j, t_{k+1}) - u(x_j, t_k)}{\tau} - \frac{1}{h^2} [\theta A_{j+1}^{k+1} (u(x_{j+1}, t_{k+1}) - u(x_j, t_{k+1}))$$

$$- \theta A_j^{k+1} (u(x_j, t_{k+1}) - u(x_{j-1}, t_{k+1})) + (1 - \theta) A_{j+1}^k (u(x_{j+1}, t_k) - u(x_j, t_k)) \\ - (1 - \theta) A_j^k (u(x_j, t_k) - u(x_{j-1}, t_k))] + D_j^k [\theta u(x_j, t_{k+1}) + (1 - \theta) u(x_j, t_k)] \\ = F_j^k + R_j^k$$

- R_j^k 为局部截断误差。可以证明当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时, $R_j^k = O(\tau^2 + h^2)$. 当 $\theta \neq \frac{1}{2}$ 时, $R_j^k = O(\tau + h^2)$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 11 of 12](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

•

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_j, t_{k+1}) - u(x_j, t_k)}{\tau} - \frac{1}{h^2} [\theta A_{j+1}^{k+1} (u(x_{j+1}, t_{k+1}) - u(x_j, t_{k+1})) \\ & - \theta A_j^{k+1} (u(x_j, t_{k+1}) - u(x_{j-1}, t_{k+1})) + (1-\theta) A_{j+1}^k (u(x_{j+1}, t_k) - u(x_j, t_k)) \\ & - (1-\theta) A_j^k (u(x_j, t_k) - u(x_{j-1}, t_k))] + D_j^k [\theta u(x_j, t_{k+1}) + (1-\theta) u(x_j, t_k)] \\ & = F_j^k + R_j^k \end{aligned}$$

- R_j^k 为局部截断误差。可以证明当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时, $R_j^k = O(\tau^2 + h^2)$. 当 $\theta \neq \frac{1}{2}$ 时, $R_j^k = O(\tau + h^2)$
- 舍去截断误差, 则有逼近方程(1)的差分格式

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - \frac{\theta}{h^2} [A_{j+1}^{k+1} (u_{j+1}^{k+1} - u_j^{k+1}) - A_j^{k+1} (u_j^{k+1} - u_{j-1}^{k+1})] \\ & - \frac{1-\theta}{h^2} [A_{j+1}^k (u_{j+1}^k - u_j^k) - A_j^k (u_j^k - u_{j-1}^k)] + D_j^k [\theta u_j^{k+1} + (1-\theta) u_j^k] = F_j^k, \\ & j = 1, 2, \dots, N-1, k = 0, 1, \dots, M-1. \end{aligned}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 在实际计算时，需要具体算出 A_j^k, D_j^k, F_j^k 一般可用数值积分公式，选取的数值积分公式的误差不要低于 R_j^k 的阶，否则会降低解的精确度。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 12 of 12

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 在实际计算时，需要具体算出 A_j^k, D_j^k, F_j^k 一般可用数值积分公式，选取的数值积分公式的误差不要低于 R_j^k 的阶，否则会降低解的精确度。
- 上述用积分插值法构造差分格式的方法可推广到空间变量是高维的情形，也可推广到非均匀网格，推导过程与上面的推导完全类似。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 12 of 12](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)