物理量

位置矢量(位矢)： $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

位移： $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

二个方程

运动方程： $\vec{r} = \vec{r}(t) \Longrightarrow \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

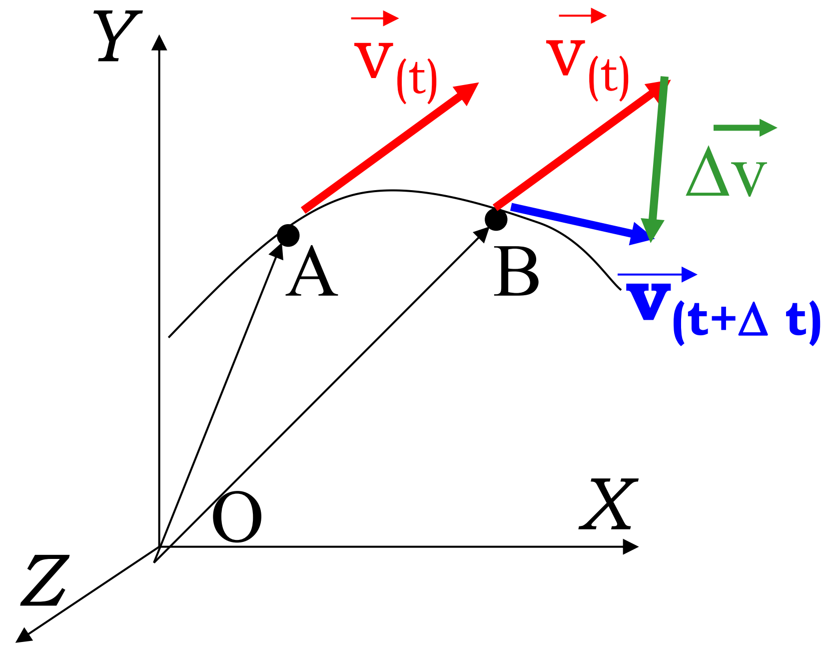
轨道方程： $f(x,y,z)=0$ （轨迹方程）

3. 加速度

平均加速度 $\overline{\vec{a}} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

瞬时加速度

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

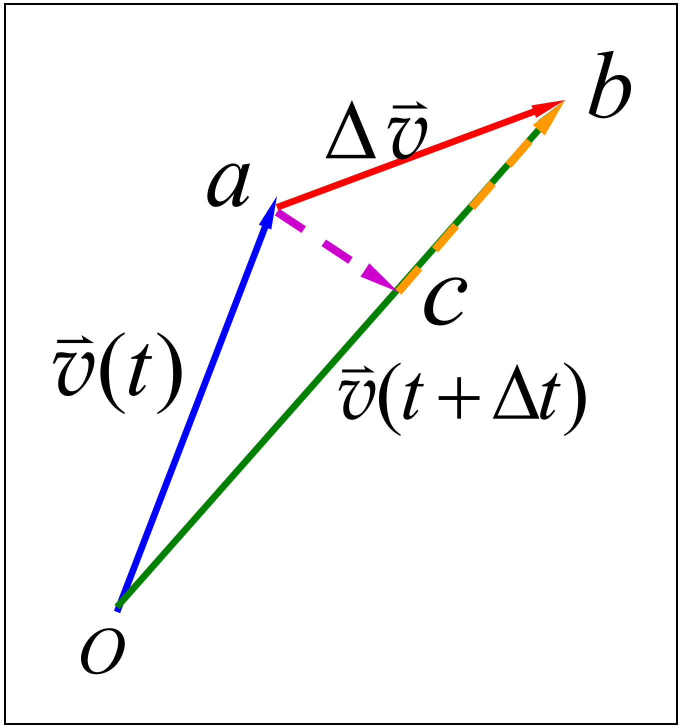


$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

$$= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\left(\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \right)$$

讨论 $\left|\Delta\vec{v}\right| \neq \Delta v$ 吗?



$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$$

$$\left|\Delta\vec{v}\right| = \left|\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)\right|$$

在0b上截取 $\overline{oc} = \overline{oa}$

有 $\Delta v = \overline{cb}$

$$\Delta\vec{v} = \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cb} = \Delta\vec{v}_{\mathrm{n}} + \Delta\vec{v}_{\mathrm{t}}$$

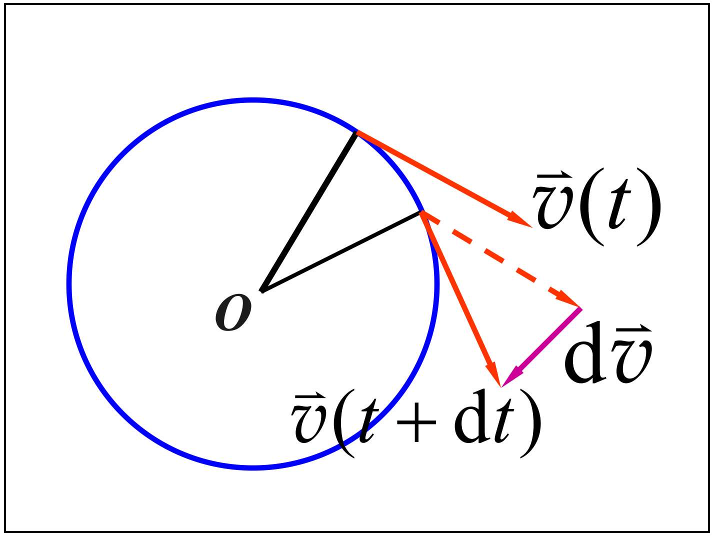
$\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}} = \overrightarrow{ac}$ 速度方向变化

$\Delta\vec{v}_{\mathrm{t}} = \overrightarrow{cb}$ 速度大小变化

讨论

问 $\left|\vec{a}\right| \cancel{=} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 吗?

例 匀速率圆周运动



因为 $v(t) = v(t+\mathrm{d}t)$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \equiv 0$

而 $\left|\vec{a}\right| = a \neq 0$

所以 $a \neq \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

三、运动学的两类问题

第一类问题： 已知： $\vec{r} = \vec{r}(t)$

（求导问题） 求： $\vec{v} = \vec{v}(t), \vec{a} = \vec{a}(t)$

第二类问题： 已知： $\vec{a} = \vec{a}(t)$

（积分问题）

初始条件： $t = 0$ $\begin{cases} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{cases}$ $\begin{cases} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{cases}$

求： $\vec{v} = \vec{v}(t), \vec{r} = \vec{r}(t)$

$$\boxed{\vec{r}(t)} \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \boxed{\vec{v}(t)} \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \boxed{\vec{a}(t)}$$

[例1] $\vec{r} = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\vec{i} + 3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\vec{j}$

试求： 1. 轨迹方程；

2. 瞬时速度；

3. 瞬时加速度。

解： 1. 运动方程为

$$x = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \qquad y = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

从运动方程中消去 t 得轨迹方程： $x^2 + y^2 = 3^2$

2. 瞬时速度：$\vec{r} = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\vec{i} + 3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\vec{j}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -3\times\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\vec{i} + 3\times\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\vec{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{\pi}{2}$$

3. 瞬时加速度：

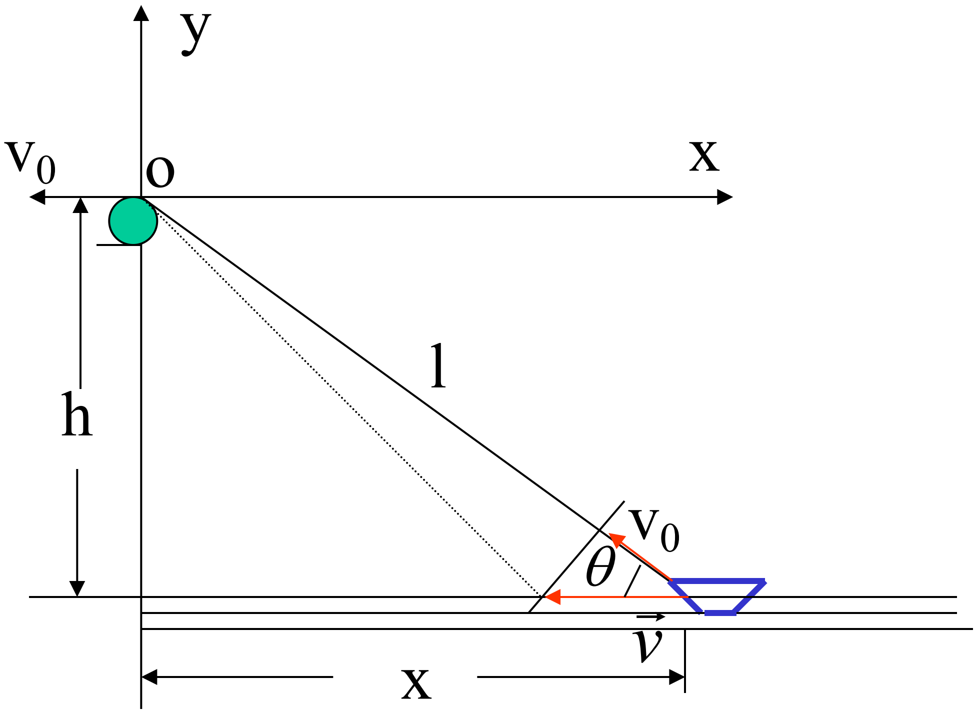
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -3\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\vec{i} - 3\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\vec{j}$$

$$= -\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\left[3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\vec{i} + 3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\vec{j}\right] = -\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\vec{r}$$

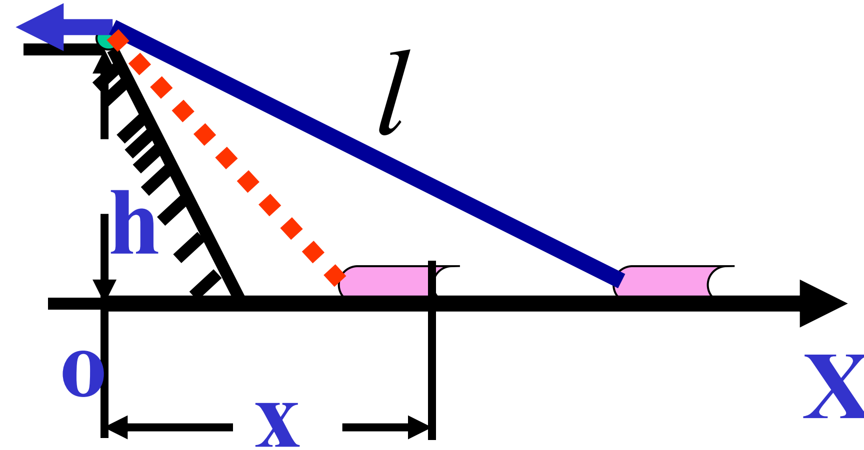
$\vec{a}$ 与 $\vec{r}$ 方向相反，可见加速度指向圆心。

［例2］ 人以恒定速率 υ_o 收绳，船之初速为 0

求： 任一位置船之速度、加速度。



解一： $l^2 = h^2 + x^2$



两边对时间求导

$$2l\frac{dl}{dt} = 2h\frac{dh}{dt} + 2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dl}{dt} = v_0 \qquad \frac{dh}{dt} = 0 \qquad -\frac{dx}{dt} = v_{船}$$

$$v_{船} = -\frac{l}{x}v_0 = -\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v_0 = -\frac{v_0}{\cos\theta}$$

方向沿x轴负向

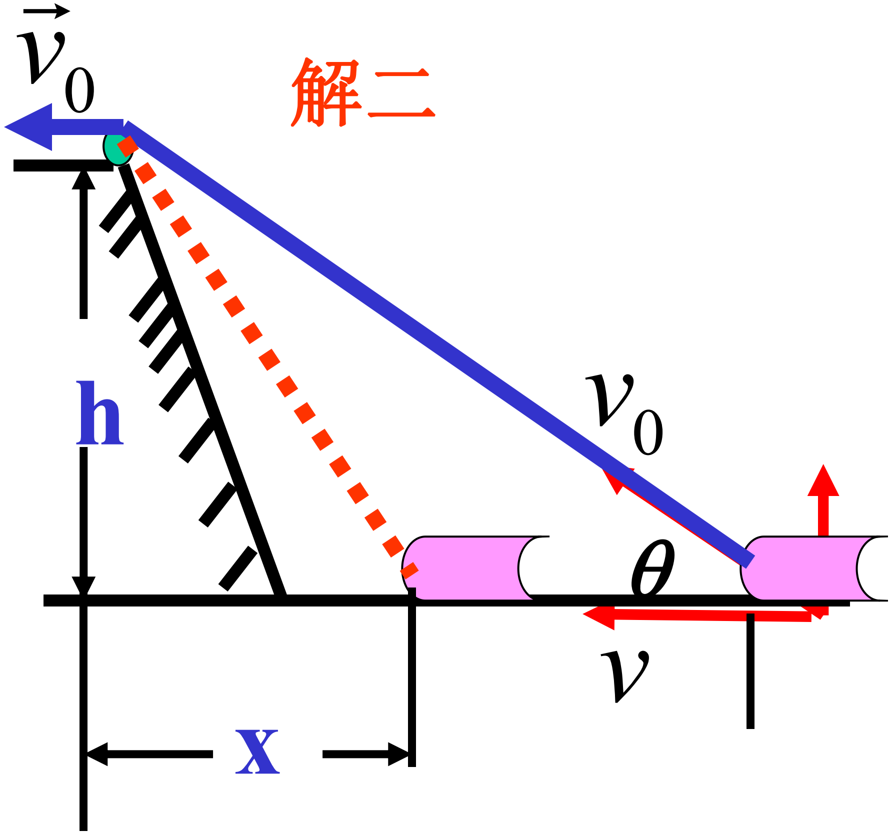
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{v_0{}^2 h^2}{x^3}\vec{i}$$

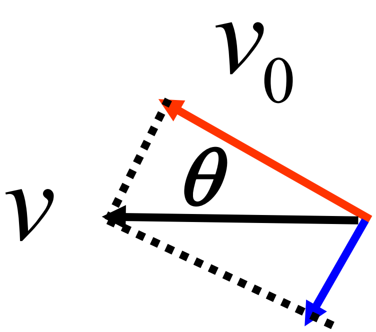
$\vec{a}(x)$

$\vec{a}$与$\vec{v}$同方向

变加速运动

解二





$$v_0 = v\cos\theta$$

§1.3 匀变速运动

$\vec{a}$为常矢量　　初始条件：$t=o:\vec{r}=\vec{r}_o,\vec{v}=\vec{v}_o$

速度方程：$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}\Rightarrow d\vec{v}=\vec{a}dt\Rightarrow\int_{\vec{v}_o}^{\vec{v}}d\vec{v}=\int_o^t\vec{a}dt$

得：$\vec{v}=\vec{v}_o+\vec{a}t$

运动方程：

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}\Rightarrow d\vec{r}=\vec{v}dt=(\vec{v}_o+\vec{a}t)dt\Rightarrow\int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}}d\vec{r}=\int_o^t(\vec{v}_o+\vec{a}t)dt$$

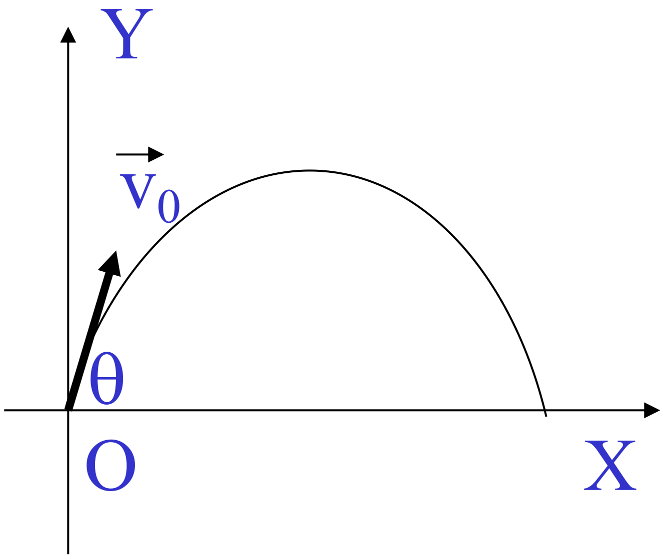
得：$\vec{r}=\vec{r}_o+\vec{v}_o t+\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2$

一、匀变速直线运动：

$$a = 常量，\quad t = 0: v = v_0, \quad x = x_0$$

$$v = v_0 + at, \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

二、抛体运动(两种分解方式)



1、 $a_x = 0, a_y = -g$

$$t = 0: x_0 = 0, \quad y_0 = 0;$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta, \quad v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

$$\vec{v} = v_0 \cos\theta \vec{i} + (v_0 \sin\theta - gt)\vec{j}$$

$$\vec{r} = (v_0 \cos\theta \cdot t)\vec{i} + \left(v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}$$

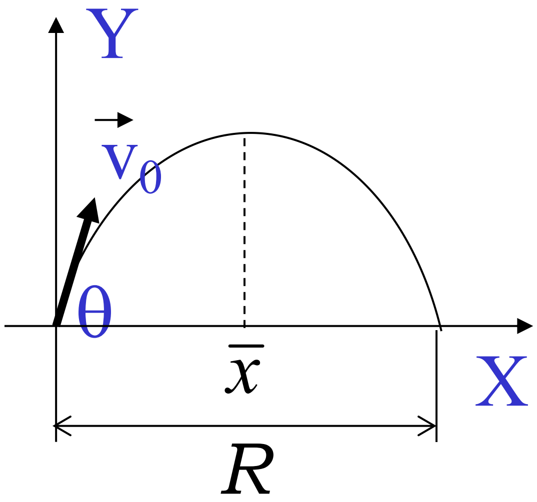
抛体运动：x方向匀速直线运动与y方向上竖直上抛运动的叠加

$$\left.\begin{aligned} x &= v_o \cos\theta \cdot t \\ y &= v_o \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \quad y = tg\theta \cdot x - \frac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\theta} \cdot x^2$$

——抛物线

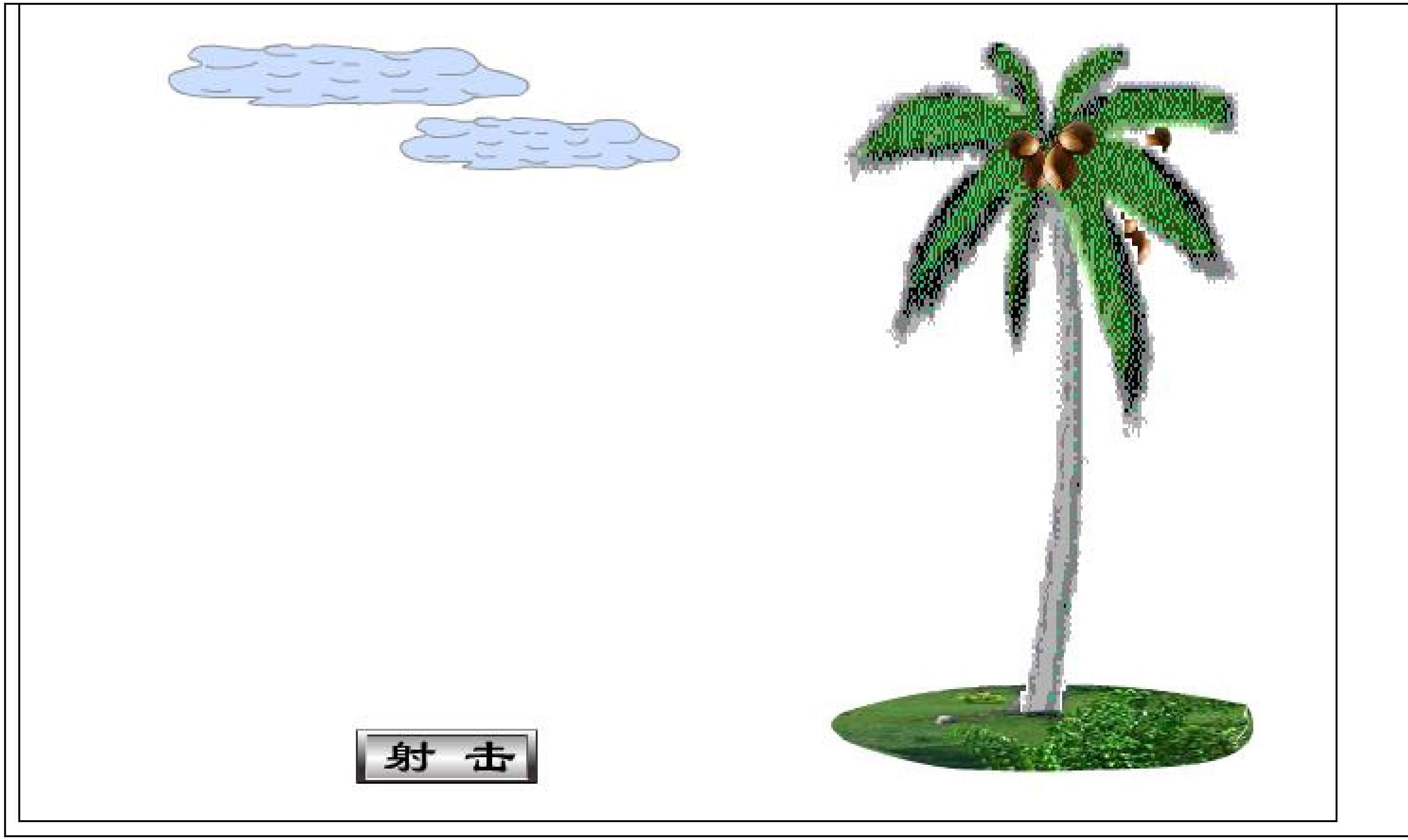
水平射程R：

$$\left.\begin{aligned} R &= 2\bar{x} \\ \bar{x} &= v_0 \cos\theta \cdot \bar{t} \\ v_0 \sin\theta - g\bar{t} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{R = \frac{{v_0}^2}{g} \sin 2\theta}$$



射高： $\boxed{H = \dfrac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}}$

2、



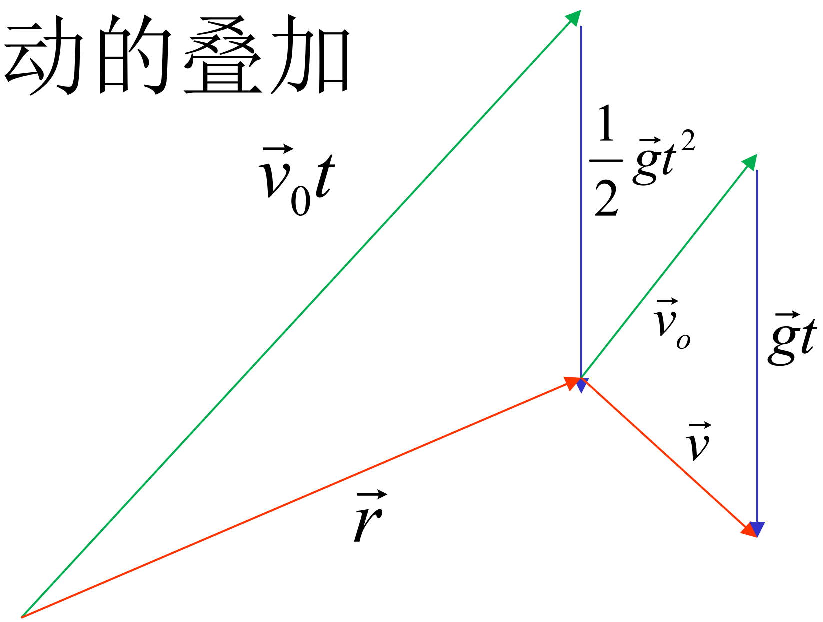
2

当子弹从枪口射出时，椰子刚好从树上由静止自由下落. 试说明为什么子弹总可以射中椰子 ？

$$\vec{r} = (v_0 \cos\theta \cdot t)\vec{i} + \left(v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}$$
$$= [(v_0 \cos\theta \cdot t)\vec{i} + (v_0 \sin\theta \cdot t)\vec{j}] + (-\frac{1}{2}gt^2)\vec{j}$$
$$= \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

抛体运动：初速$\vec{v}_0$方向的匀速直线运动与竖直方向上自由落体运动的叠加

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}t$$
$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$



[例]一人在平地上以$\vec{v}_0$抛出一个铅球，抛射角为θ

试问：经过多少时间后，铅球的速度方向与$\vec{v}_0$相垂直，

此时铅球的速度大小为多少？

解：由抛体运动的速度矢量图可知，

当$v_t \perp v_0$时，有：

$$gt\sin\theta = v_0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{g\sin\theta},$$

$$\frac{v_0}{v_t} = tg\theta \Rightarrow v_t = \frac{v_0}{tg\theta}$$