华东理工大学 2018 - 2019 学年第二学期

《微分几何》课程期中考试试卷　　2019. 4. 24

开课学院：理学院，　专业：数、信计，　考试形式：闭卷，　所需时间 120 分钟

考生姓名：__________　学号：__________　班级：__________　任课教师：杨勤民

题序	一	二	三	四	五	六	总　分
满分	24	11	20	32	8	5	100
得分							
评卷人	杨　勤　民						

(请在白纸上作答, 标明题号, 不用抄题目; 请在每张有答案的纸上都写上你的姓名和学号)

一、(共24分)已知曲线 $\vec{r}(s)=\left(a\cos\frac{s}{c},\ a\sin\frac{s}{c},\ b\frac{s}{c}\right)$, 其中 $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $a>0$

(1) 证明参数 s 是该曲线的弧长参数; (3分)

(2) 证明该曲线的切线与 z 轴的交角是不变的; (3分)

(3) 求该曲线的从切平面和密切平面; (6分)

(4) 求该曲线的曲率和挠率; (6分)

(5) 用该曲线验证伏雷内(Frenet)公式. (6分)

二、(共11分) 求曲线 $\vec{r}(t)=(3t-t^3, 3t^2, 3t+t^3)$的曲率和挠率(最后结果2分, 其他9分).

三、(共20分)已知曲面的第一基本形式为 $\mathrm{d}s^2=u^2\,\mathrm{d}u^2+v^2\,\mathrm{d}v^2$, 它上面的三条曲面曲线 $u+v=4$, $u=1$和 $v=1$围成一个曲边三角形, 求

(1) 该曲边三角形所围曲面域的面积; (4分)

(2) 该曲边三角形的三个内角; (7分)

(3) 该曲边三角形的三条曲边的长度. (9分)

四、(共32分)已知曲面 $\vec{r}(u,v)=\left(u-\frac{u^3}{3}+uv^2,\ v-\frac{v^3}{3}+u^2v,\ u^2-v^2\right)$,

(1) 求它的第一类基本量 E, F, G 和第一基本形式 I ; (6分)

(2) 求它的第二类基本量 L, M, N 和第二基本形式 II ; (8分)

(3) 求它的主曲率 k_1, k_2, 平均曲率 H 和高斯曲率 K ; (6分)

(4) 求它的第三基本形式 III ; (4分)

(5) 证明它的曲率线为坐标曲线; (4分)

(6) 证明它的渐近曲线为 $u+v=$ 常数和 $u-v=$ 常数. (4分)

五、(共8分) 请在球面$\vec{S}(\varphi,\theta)=(\cos\varphi\cos\theta,\ \cos\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi)$与圆柱面$\vec{C}(u,v)=(\cos u,\ \sin u,\ v)$之间设计一个保角变换(设计过程6分,变换公式2分).

六、(共5分) 请叙述空间曲线论的基本定理.

华东理工大学 2018 - 2019 学年第二学期

《微分几何》课程期中考试标准答案　2019. 4.24

一(共24分)解

(1)因为 $\vec{r}'(s)=\Big(-\dfrac{a}{c}\sin\dfrac{s}{c},\ \dfrac{a}{c}\cos\dfrac{s}{c},\ \dfrac{b}{c}\Big)$, （2分）

$|\vec{r}'(s)|=\sqrt{(-\dfrac{a}{c}\sin\dfrac{s}{c})^2+(\dfrac{a}{c}\cos\dfrac{s}{c})^2+(\dfrac{b}{c})^2}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{c^2}}=1$, （1分）

所以参数s是该曲线的弧长参数.

(2)设在参数s处, 切线与z 轴的交角为$\theta(s)$, 则$\cos\theta(s)=\dfrac{\vec{r}'(s)\cdot(0,0,1)}{|\vec{r}'(s)|}=\dfrac{b}{c}$, （2分）

可见$\theta(s)$ 与参数s无关, （1分）

故该曲线的切线与z 轴的交角是不变的.

(3) $\vec{\alpha}=\dot{\vec{r}}=\Big(-\dfrac{a}{c}\sin\dfrac{s}{c},\ \dfrac{a}{c}\cos\dfrac{s}{c},\ \dfrac{b}{c}\Big)$, $\quad\dot{\vec{\alpha}}=\ddot{\vec{r}}=\Big(-\dfrac{a}{c^2}\cos\dfrac{s}{c},\ -\dfrac{a}{c^2}\sin\dfrac{s}{c},\ 0\Big)$,

$|\dot{\vec{\alpha}}|=\sqrt{(-\dfrac{a}{c^2}\cos\dfrac{s}{c})^2+(-\dfrac{a}{c^2}\sin\dfrac{s}{c})^2+0^2}=\dfrac{a}{c^2}$, $\quad\vec{\beta}=\dot{\vec{\alpha}}/|\dot{\vec{\alpha}}|=\Big(-\cos\dfrac{s}{c},\ -\sin\dfrac{s}{c},\ 0\Big)$,

$\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\Big(\dfrac{b}{c}\sin\dfrac{s}{c},\ -\dfrac{b}{c}\cos\dfrac{s}{c},\ \dfrac{a}{c}\Big)$.

从切平面与$\vec{\beta}$ 垂直, 方程为$-\cos\dfrac{s}{c}(x-a\cos\dfrac{s}{c})-\sin\dfrac{s}{c}(y-a\sin\dfrac{s}{c})+0\cdot(z-b\dfrac{s}{c})=0$,

即$x\cos\dfrac{s}{c}+y\sin\dfrac{s}{c}-a=0$. （3分）

密切平面与$\vec{\gamma}$ 垂直, 方程为$\dfrac{b}{c}\sin\dfrac{s}{c}(x-a\cos\dfrac{s}{c})-\dfrac{b}{c}\cos\dfrac{s}{c}(y-a\sin\dfrac{s}{c})+\dfrac{a}{c}(z-b\dfrac{s}{c})=0$,

即$bx\sin\dfrac{s}{c}-by\cos\dfrac{s}{c}+az-\dfrac{abs}{c}=0$. （3分）

(4)曲率$k=|\dot{\vec{\alpha}}|=\dfrac{a}{c^2}$. （3分）

$\dot{\gamma}=\Big(\dfrac{b}{c^2}\cos\dfrac{s}{c},\ \dfrac{b}{c^2}\sin\dfrac{s}{c},\ 0\Big)$, $\quad$ 挠率 $\tau=-\dot{\gamma}\cdot\beta=\dfrac{b}{c^2}$. （3分）

(5)Frenet公式为$\dot{\vec{\alpha}}=k\vec{\beta}$, $\quad\dot{\vec{\beta}}=-k\vec{\alpha}+\tau\vec{\gamma}$, $\quad\dot{\vec{\gamma}}=-\tau\vec{\beta}$. （3分）

由上面曲率k 和挠率τ 的计算过程知第一式和第三式显然成立,下面验证第二式.

$\dot{\vec{\beta}}=\dfrac{1}{c}\Big(\sin\dfrac{s}{c},\ -\cos\dfrac{s}{c},\ 0\Big)$,

而$-k\vec{\alpha}+\tau\vec{\gamma}=-\dfrac{a}{c^2}\Big(-\dfrac{a}{c}\sin\dfrac{s}{c},\ \dfrac{a}{c}\cos\dfrac{s}{c},\ \dfrac{b}{c}\Big)+\dfrac{b}{c^2}\Big(\dfrac{b}{c}\sin\dfrac{s}{c},\ -\dfrac{b}{c}\cos\dfrac{s}{c},\ \dfrac{a}{c}\Big)=\dfrac{1}{c}\Big(\sin\dfrac{s}{c},\ -\cos\dfrac{s}{c},\ 0\Big)$,

故第二式也成立. （3分）

二(共11分)解

$\vec{r}'(t)=(3-3t^2,6t,3+3t^2)$, （1分）　$\vec{r}''(t)=(-6t,6,6t)$, （1分）

$\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)=(18(t^2-1),-36t,18(t^2+1))$, （1分）　$|\vec{r}'(t)|=3\sqrt{2}(1+t^2)$, （1分）

$|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|=18\sqrt{2}(1+t^2)$, （1分）

曲率$k(t)=\dfrac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$ （1分） $=\dfrac{1}{3(1+t^2)^2}$. （1分）

$\vec{r}'''(t)=(-6,0,6)$, （1分）　$(\vec{r}'(t),\vec{r}''(t),\vec{r}'''(t))=216$, （1分）

挠率$\tau(t)=\dfrac{(\vec{r}'(t),\vec{r}''(t),\vec{r}'''(t))}{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|^2}$ （1分） $=\dfrac{1}{3(1+t^2)^2}$. （1分）

三(共20分)解

$E(u,v)=u^2,\quad F(u,v)=0,\quad G(u,v)=v^2,$

$u=1$与$v=1$相交于点$A=(1,1)$处，　$u+v=4$与$v=1$相交于点$B=(3,1)$处，

$u+v=4$与$u=1$相交于点$C=(1,3)$处.　（3分）

(1) 这三条曲线在参数平面中所围的区域D用不等式表示为$\begin{cases}1\le u\le 3\\ 1\le v\le 4-u\end{cases}$，　（2分）

所求曲面域的面积为

$\iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint\limits_D uv\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$　（1分）　$=\int_1^3 u\,\mathrm{d}u\int_1^{4-u} v\,\mathrm{d}v=\dfrac{16}{3}.$　（1分）

(2)在点$A(1,1)$处，$E(1,1)=1$，$G(1,1)=1$，由$v=1$得到沿着弧AB的切方向为

$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)=(1:0)$，由$u=1$得到沿着弧$AC$的切方向为$(\delta u:\delta v)=(0:1)$，　（1分）

$$\angle A=\arccos\left.\frac{E\,\mathrm{d}u\delta u+F(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G\,\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E\,\mathrm{d}u^2+2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+G\,\mathrm{d}v^2}\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}}\right|_{(1,1)}\quad（1分）$$

$$=\arccos\frac{0+0+0}{\sqrt{1\times 1^2}\sqrt{1\times 1^2}}=\arccos 0=\frac{\pi}{2}.\quad（1分）$$

在点$B(3,1)$处，$E(3,1)=9$，$G(3,1)=1$，由$v=1$得到沿着弧BA的切方向为

$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)=(-1:0)$，由$u+v=4$得到沿着弧$BC$的切方向为$(\delta u:\delta v)=(-1:1)$，　（1分）

$$\angle B=\arccos\left.\frac{E\,\mathrm{d}u\delta u+F(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G\,\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E\,\mathrm{d}u^2+2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+G\,\mathrm{d}v^2}\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}}\right|_{(3,1)}$$

$$=\arccos\frac{9\times(-1)\times(-1)}{\sqrt{9\times(-1)^2}\sqrt{9\times(-1)^2+1\times 1^2}}=\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}.\quad（1分）$$

在点$C(1,3)$处，$E(1,3)=1$，$G(1,1)=9$，由$u=1$得到沿着弧CA的切方向为

$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)=(0:-1)$，由$u+v=4$得到沿着弧$CB$的切方向为$(\delta u:\delta v)=(1:-1)$，　（1分）

$$\angle C=\arccos\left.\frac{E\,\mathrm{d}u\delta u+F(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G\,\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E\,\mathrm{d}u^2+2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+G\,\mathrm{d}v^2}\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}}\right|_{(1,3)}$$

$$=\arccos\frac{9\times(-1)\times(-1)}{\sqrt{9\times(-1)^2}\sqrt{1\times 1^2+9\times(-1)^2}}=\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}.\quad（1分）$$

(3)在曲边AB上，$v=1$，$u\in[1,3]$，$\mathrm{d}s^2=u^2\,\mathrm{d}u^2+1^2\,\mathrm{d}1^2=u^2\,\mathrm{d}u^2$，

曲边长度为$\int_1^3\sqrt{u^2\,\mathrm{d}u^2}=4.$　（2分）

在曲边AC上，$u=1$，$v\in[1,3]$，$\mathrm{d}s^2=1^2\,\mathrm{d}1^2+v^2\,\mathrm{d}v^2=v^2\,\mathrm{d}v^2$，

曲边长度为$\int_1^3\sqrt{v^2\,\mathrm{d}v^2}=4.$　（2分）

在曲边BC上，$u+v=4$，$v=4-u$，$u\in[1,3]$，$\mathrm{d}s^2=u^2\,\mathrm{d}u^2+(4-u)^2(\mathrm{d}(4-u))^2=2(u^2-4u+8)$，曲边长度为$\int_1^3\sqrt{2(u^2-4u+8)}\,\mathrm{d}u$（1分）$=\sqrt{10}+4\sqrt{2}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$　（1分）

四(共32分)解

(1) $\vec{r}_u=(1-u^2+v^2,\ 2uv,\ 2u)$，（1分）　$\vec{r}_v=(2uv,\ 1-v^2+u^2,\ -2v)$（1分）

$E=\vec{r}_u^{\,2}=(1+u^2+v^2)^2$，（1分）　$F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v=0$，（1分）　$G=\vec{r}_v^{\,2}=(1+u^2+v^2)^2$.（1分）

$\mathrm{I}=E\,\mathrm{d}u^2+2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+G\,\mathrm{d}v^2=(1+u^2+v^2)^2(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2).$　（1分）

(2) $\vec{r}_{uu}=(-2u,\ 2v,\ 2\ )$,（1分） $\vec{r}_{uv}=(2v,\ 2u,\ 0\ )$,（1分） $\vec{r}_{vv}=(2u,\ -2v,\ -2\ )$（1分）

$\vec{r}_u\times\vec{r}_v=(1+u^2+v^2)(-2u,\ 2v,\ 1-u^2-v^2)$, $\vec{n}=\dfrac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}=\dfrac{(-2u,\ 2v,\ 1-u^2-v^2)}{1+u^2+v^2}$（1分）

$L=\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}=2$,（1分） $M=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}=0$,（1分） $N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}=-2$,（1分）

$\mathrm{II}=L\,\mathrm{d}u^2+2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+N\,\mathrm{d}v^2=2(\mathrm{d}u^2-\mathrm{d}v^2)$.（1分）

(3)主曲率方程为 $(EG-F^2)k_N^2-(LG-2MF+NE)k_N+LN-M^2=0$,（2分）

即$(1+u^2+v^2)^4k_N^2-4=0$, 所以$k_1=\dfrac{2}{(1+u^2+v^2)^2}$,（1分）$k_2=\dfrac{-2}{(1+u^2+v^2)^2}$.（1分）

$H=(k_1+k_2)/2=0$,（1分） $K=k_1k_2=\dfrac{-4}{(1+u^2+v^2)^4}$.（1分）

(4)由曲面的第一、二、三基本形式之间的关系知$\mathrm{III}-2H\,\mathrm{II}+K\,\mathrm{I}=0$,（2分）

所以$\mathrm{III}=2H\,\mathrm{II}-K\,\mathrm{I}=-\dfrac{-4}{(1+u^2+v^2)^4}(1+u^2+v^2)^2(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)=\dfrac{4(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)}{(1+u^2+v^2)^2}$.（2分）

(5)曲率线的微分方程为$(EM-FL)\,\mathrm{d}u^2+(EN-GL)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+(FN-GM)\,\mathrm{d}v^2=0$,（2分）

即$-4(1+u^2+v^2)^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=0$, 亦 $\mathrm{d}u=0$ 或 $\mathrm{d}v=0$,

故曲率线为曲面的坐标曲线$u=$常数 和$v=$常数.（2分）

(另证: 因$F=M\equiv 0$, 所以曲率线为坐标曲线)

(6)渐近线的微分方程为$L\,\mathrm{d}u^2+2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+N\,\mathrm{d}v^2=0$,（2分）

即$2\,\mathrm{d}u^2-2\,\mathrm{d}v^2=0$, 亦 $\mathrm{d}(u+v)=0$ 或 $\mathrm{d}(u-v)=0$,

故渐近线为曲线$u+v=$常数 和$u-v=$常数.（2分）

五(共8分)解

$\vec{S}_\varphi=(-\sin\varphi\cos\theta,-\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi)$, $\vec{S}_\theta=(-\cos\varphi\sin\theta,\cos\varphi\cos\theta,0)$.

$E_{\vec{S}}=\vec{S}_\varphi^{\,2}=1$, $F_{\vec{S}}=\vec{S}_\varphi\vec{S}_\theta=0$, $G_{\vec{S}}=\vec{S}_\theta^{\,2}=\cos^2\varphi$,

$\mathrm{I}_{\vec{S}}=E_{\vec{S}}\,\mathrm{d}\varphi^2+2F_{\vec{S}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta+G_{\vec{S}}\,\mathrm{d}\theta^2=\mathrm{d}\varphi^2+\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\theta^2$.（2分）

$\vec{C}_u=(-\sin u,\cos u,0)$, $\vec{C}_v=(0,0,1)$.

$E_{\vec{C}}=\vec{C}_u^{\,2}=1$, $F_{\vec{C}}=\vec{C}_u\vec{C}_v=0$, $G_{\vec{C}}=\vec{C}_v^{\,2}=1$,

$\mathrm{I}_{\vec{C}}=E_{\vec{C}}\,\mathrm{d}u^2+2F_{\vec{C}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+G_{\vec{C}}\,\mathrm{d}v^2=\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2$.（2分）

要使$u=u(\varphi,\theta)$, $v=v(\varphi,\theta)$成为球面$\vec{S}$和圆柱面$\vec{C}$之间的一个保角变换, 只需要第一基本形式成比例, 即$\dfrac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}v^2}=\dfrac{\mathrm{d}\varphi^2}{\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\theta^2}$. 这只需要$\dfrac{\mathrm{d}u}{\sec\varphi\,\mathrm{d}\varphi}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}=1$即可.（2分）

不妨令$\begin{cases}u=\int_0^\varphi\sec\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\ln\frac{1+\sin\varphi}{|\cos\varphi|}=\ln|\tan(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4})|\\ v=\theta\end{cases}$,

则此变换为球面$\vec{S}$和圆柱面$\vec{C}$之间的一个保角变换.（2分）

六(共5分)解

给出闭区间$[a,b]$上的两个连续函数$\varphi(s)>0$和$\psi(s)$,（1分）

则除了空间的位置差别外, 唯一地存在一条空间曲线,（1分）

使得参数s是曲线的自然参数,（1分）

并且$\varphi(s)$和$\psi(s)$分别为曲线的曲率和挠率.（2分）