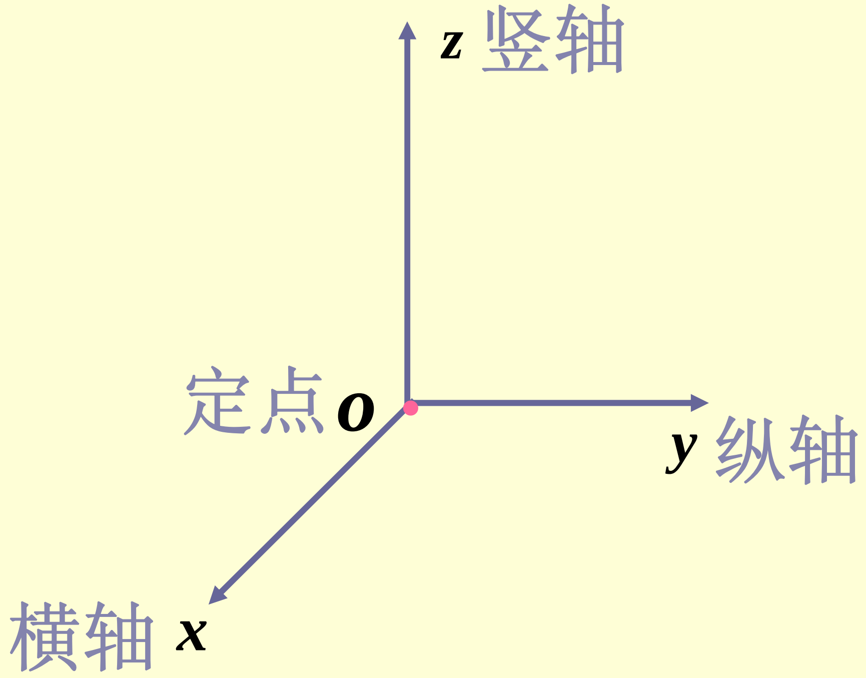
§2 仿射坐标系和直角坐标系

1.向量的和点的仿射坐标、直角坐标

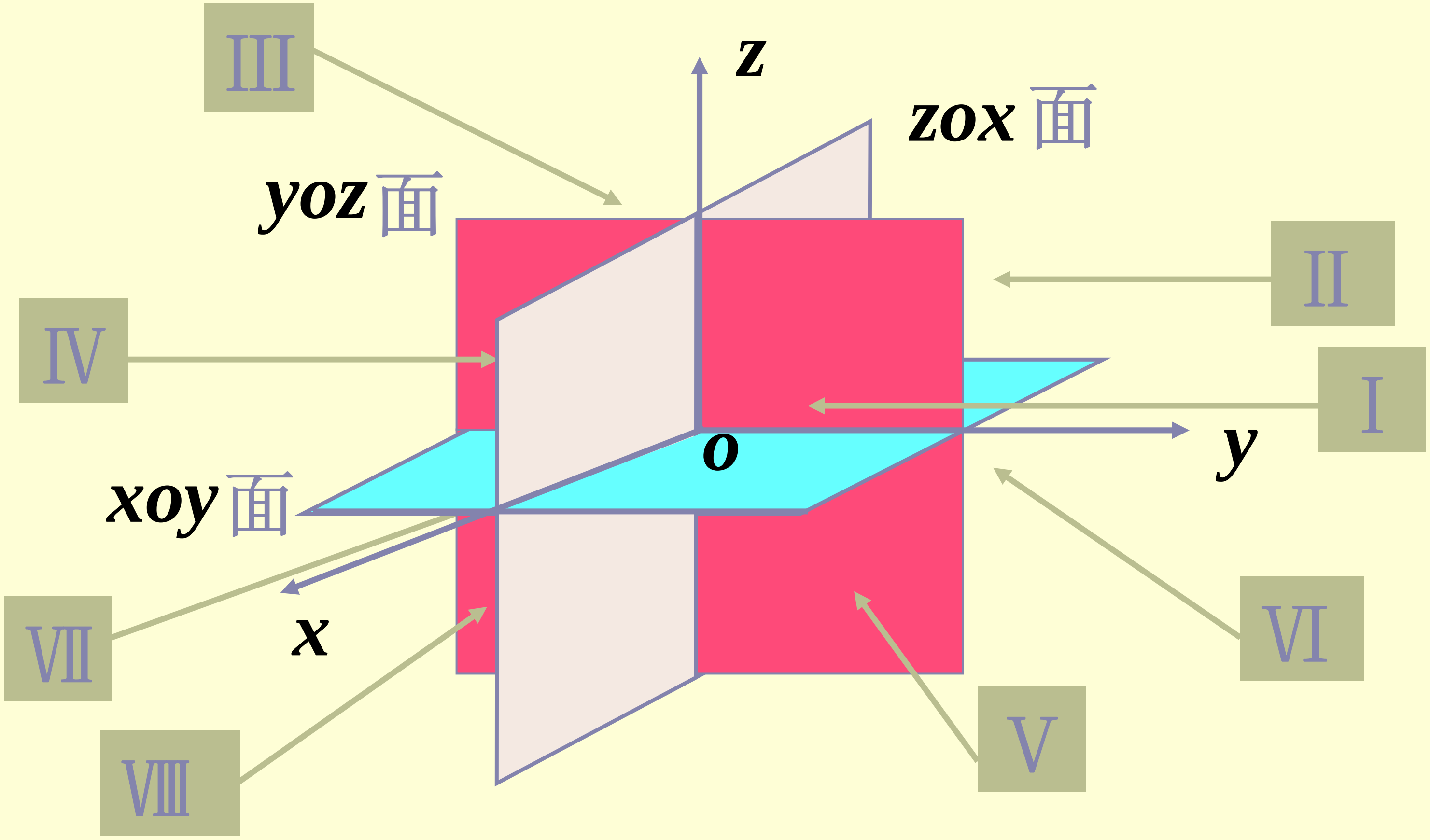
建立空间仿射坐标系

在空间任意取定三个不共面的有次序的向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$和一个点 **O**。向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$和点 **O** 构成一个空间仿射坐标系$\left[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right]$，点 **O** 叫做坐标原点或原点，向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$叫做（仿射）坐标系的基向量或基.

经过 **O** 分别和$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$同方向的$Ox, Oy, Oz$叫做坐标系的 **x** 轴，**y** 轴，**z** 轴，统称坐标轴. 含两个坐标轴的平面叫做坐标面;每个坐标面把空间分成两部分,三个坐标面把空间分成八部分,叫做八个卦限。



通常我们采用右手系.



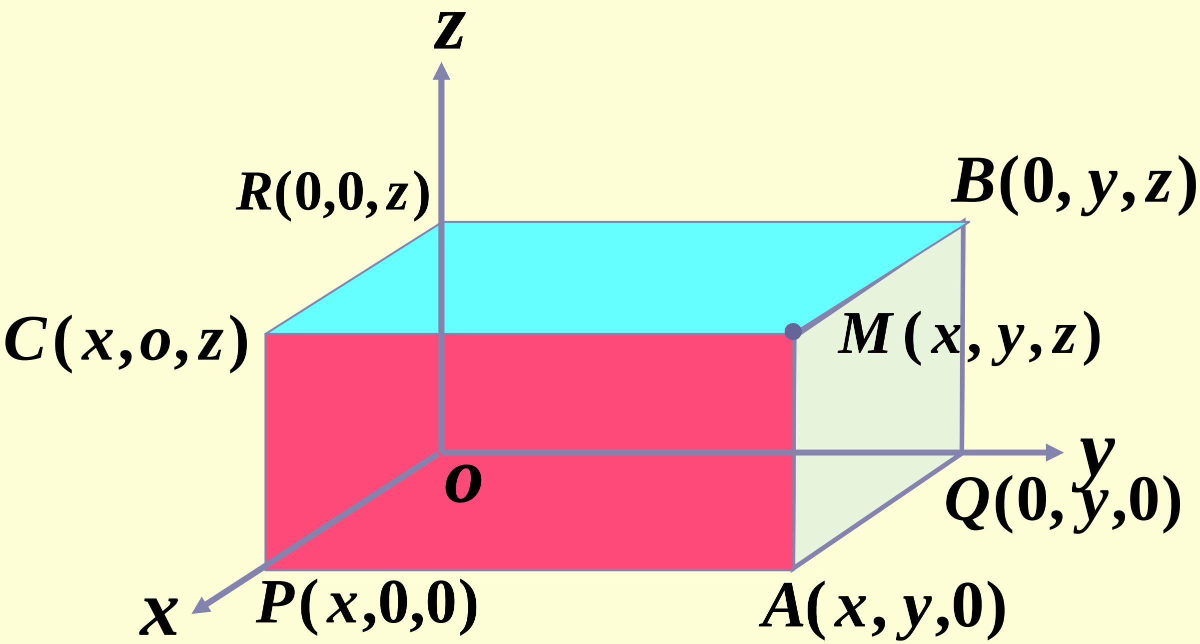
空间直角坐标系共有**八个卦限**

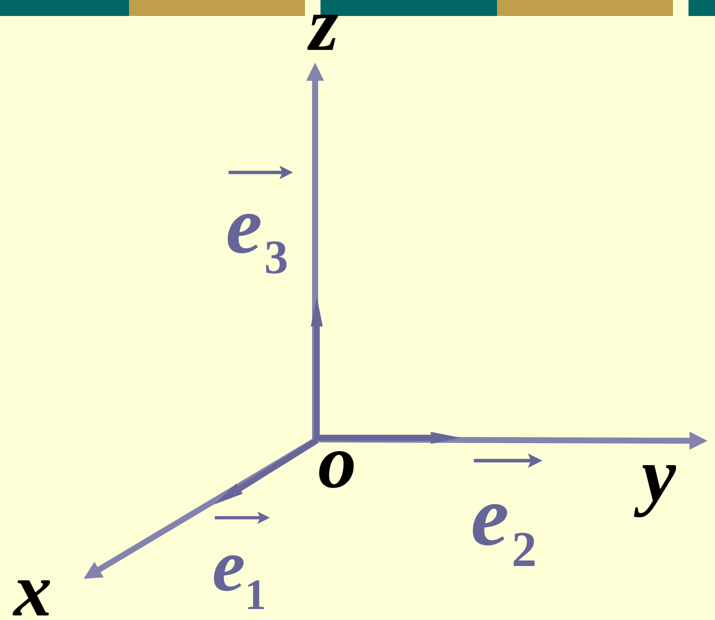
空间的点 $\xleftrightarrow{1--1}$ 有序数组(x,y,z)

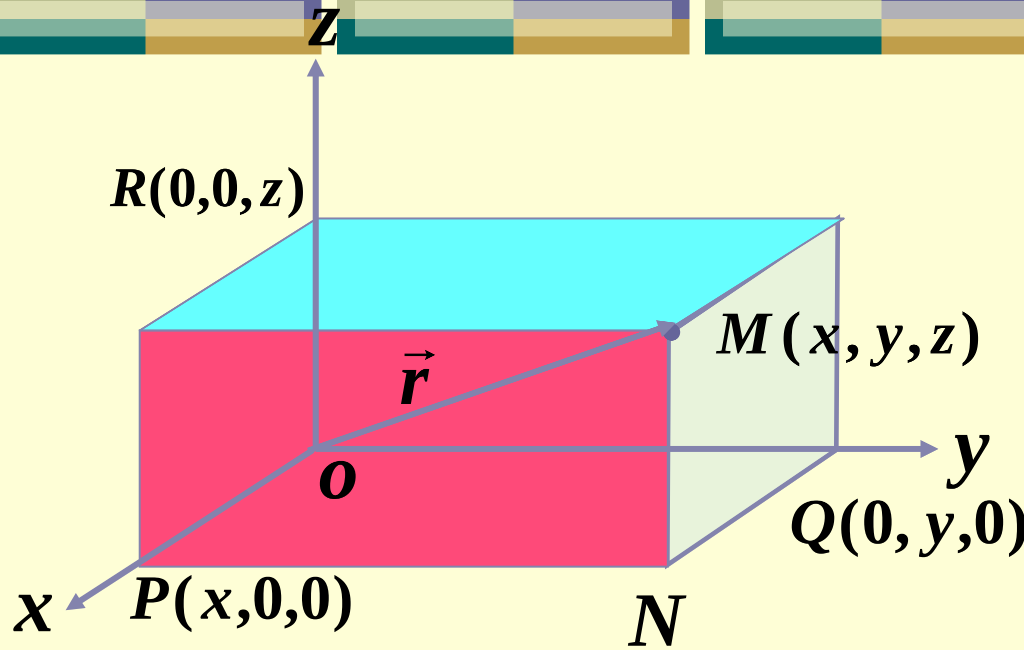
称为**点M的坐标**，x称为横坐标,y称为纵坐标，z称为竖坐标. 记为 $M(x,y,z)$

特殊点的表示：坐标轴上的点 $P, Q, R,$

坐标面上的点 $A, B, C,$ $O(0,0,0)$







以$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$分别表示沿$x, y, z$轴正向的基向量.

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

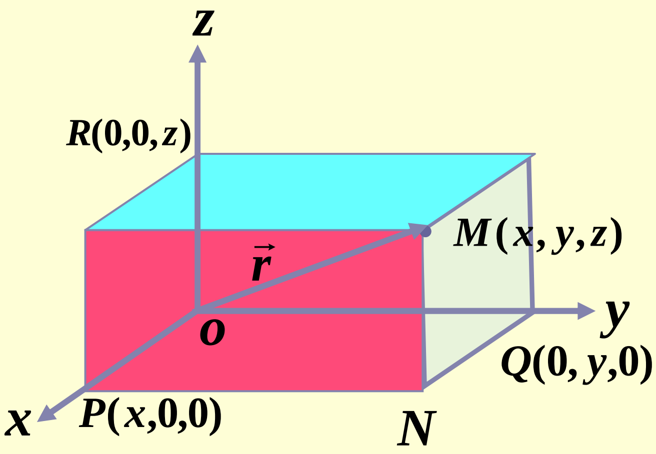
设 $\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1,\ \overrightarrow{OQ} = y\vec{e}_2,\ \overrightarrow{OR} = z\vec{e}_3.$

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

称为向量 $\vec{r}$ 的坐标分解式.

$\vec{r}$ 在三个坐标轴上的**分向量**：

$x\vec{e_1}$， $y\vec{e_2}$， $z\vec{e_3}$.



显然，

$$M \rightleftarrows \vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} \rightleftarrows (x, y, z)$$

向量的坐标： x， y， z， 记为 $\vec{r} = (x, y, z)$

向径： $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ (点M关于原点O)

(x, y, z)既表示点M，又表示向量$\overrightarrow{OM}$.

如果$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$两两垂直，并且它们都是单位向量，则$[0;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$称为一个直角标架或直角坐标系.

点（或向量）在直角坐标系中的坐标称为它的直角坐标，在仿射坐标系中的坐标称它为仿射坐标.

例1 证明四面体对边中点的连线交于一点，且互相平分.

2.用坐标作向量的线性运算

设向量 $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ 或 $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$

$$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 \text{ 或 } \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$$

两个向量和:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3$$
$$= \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}$$

两个向量和的坐标等于两个对应坐标（分量）之和

设 λ 为任意常数，则向量的数量积

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_1\vec{e}_1 + \lambda a_2\vec{e}_2 + \lambda a_3\vec{e}_3 = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}$$

数量乘以向量之积的各坐标（分量）等于这数量乘以向量相应的分量（坐标）

两个向量的减法

$$\vec{a} - \vec{b} = \{a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3\}$$

两个向量差的坐标等于两个对应坐标（分量）之差.

点坐标与向量坐标的关系

定理4：空间上任一向量的坐标等于其终点的坐标减去其始点坐标。

3.向量共线与向量共面的坐标表示

在空间仿射坐标系 $[0;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ 中，给出两个向量 $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$.

定理 5：$\therefore\ \vec{a},\vec{b}$ 共线 $\Leftrightarrow$ 它们的分量成比例

定理 6: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

在平面仿射坐标系$[o,\vec{e}_1,\vec{e}_2]$下，设有三点 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），C（x_3，y_3）

定理 7：A、B、C 共线$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

4.线段的定比分点

对于线段AB（A≠B），如果点C满足$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$，则称点C分线段AB成定比λ. 当λ>0时，C在AB的内部称C为内分点；当λ<0时，C在AB的外部称C为外分点，当λ=0时，C与A重合，当λ=-1时，$\overrightarrow{AB}$=0，故一般设λ$\neq-1$

定理 8：设 A、B 的坐标分别是 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$，则分线段 AB 成定比 $\lambda(\lambda \neq -1)$ 的分点 C 的坐标 (x, y, z) 为：

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

特别：当 λ=1 时，为 AB 的中点.

例 1: 在 Δ ABC 中, 设 P, Q, R 分别为三条边 AB, BC, CA 上的点并且 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{BQ}=\mu\overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{CR}=\nu\overrightarrow{RA}$, 证明: P, Q, R 共线的充分必要条件是 $\lambda\mu\nu=-1$.