第七次作业

一．填空题：

1. ξ 的分布列为:

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

则 $E\xi =$ __2.7__ 。

2. ξ 的分布列为:

ξ	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

则 $E\xi = \frac{1}{3}$， $E(-\xi+1) = \frac{2}{3}$， $E\xi^2 = \frac{35}{24}$ 。

3. 设 X_1, X_2, X_3 是 3 个独立同分布的随机变量，$E(X_i) = \mu$，$D(X_i) = 8$，对于 $\overline{X} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i$，则用切比雪夫不等式估计 $P\{|\overline{X} - \mu| < 4\} \geq$ ___$\frac{5}{6}$___.

二．填空题：

1. 若对任意的随机变量 ξ，$E\xi$ 存在，则 $E(E(E\xi))$ 等于　（ C ）。

(A)．0　　(B)．ξ　　(C)．$E\xi$　　(D)．$(E\xi)^2$

2. 现有 10 张奖券，其中 8 张为 2 元，2 张为 5 元，某人从中随机地无放回地抽取 3 张，则此人所得奖金的数学期望为　（ C ）

(A) 6.5　　(B) 12　　(C) 7.8　　(D) 9

3. 已知随机变量 X 满足 $E(X) = 2$，$D(X) = 4$，则 $E(4X^2 - 3) =$（ B ）

(A) 32　　(B) 29　　(C) 0　　(D) 13

三．计算题

1. 设随机变量 X 的概率密度为 $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta - 1} x^{\frac{2-\theta}{\theta-1}}, & 0 < x < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

其中$\theta>1$，求 EX 。

解 $EX=\int_0^1 x\frac{1}{\theta-1}x^{\frac{2-\theta}{\theta-1}}dx=\int_0^1\frac{1}{\theta-1}x^{\frac{1}{\theta-1}}dx=\frac{1}{\theta}x^{\frac{\theta}{\theta-1}}\Big|_0^1=\frac{1}{\theta}$。

2. 设随机变量ξ的概率密度函数

$$p(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

求$E\xi,\ E(2\xi+3),\ E(\xi+e^{-2\xi})$ 和 $E(\max\{\xi,2\})$。

解 $E\xi=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=1$；

$E(2\xi+3)=2E\xi+3=5$；

$E(\xi+e^{-2\xi})=E\xi+E(e^{-2\xi})=1+\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cdot e^{-x}dx=\frac{4}{3}$；

$$E(\max\{\xi,2\})=\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{x,2\}p(x)dx=\int_0^{+\infty}\max\{x,2\}e^{-x}dx$$

$$=\int_0^2 2e^{-x}dx+\int_2^{+\infty}xe^{-x}dx=2(1-e^{-2})+2e^{-2}+e^{-2}=2+e^{-2}$$ 。

3. 一台机器由三大部件组成，在运转中各部件需要调整的概率分别为 0.1，0.2 和 0.3。假设各部件的状态相互独立，用ξ表示同时需要调整的部件数，试求ξ的数学期望。

解 设 A_i={第 i 个部件需要调整}（i=1,2,3），则 P(A_1)=0.1，P(A_2)= 0.2，P(A_3)=0.3 。所以

$$P(\xi=0)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=0.9\times0.8\times0.7=0.504,$$

$$P(\xi=1)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=0.389,$$

$$P(\xi=2)=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)=0.092,$$

$$P(\xi=3)=P(A_1A_2A_3)=0.006.$$

从而

$$E\xi=0\times0.504+1\times0.389+2\times0.093+3\times0.006=0.6$$ 。

4. 设球的直径均匀分布在区间[a , b]内，求球的体积的平均值。

解 设球的直径长为ξ,且$\xi \sim U[a,b]$,球的体积为η,与直径ξ的关系为$\eta=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\xi}{2}\right)^3$,那么,$E\eta=\frac{4\pi}{3}\cdot E\left(\frac{\xi}{2}\right)^3=\frac{\pi}{6}\cdot E\xi^3=\frac{\pi}{6}\int_a^b\frac{x^3}{b-a}dx=\frac{\pi(a+b)(a^2+b^2)}{24}$。

5. 6个元件装在3台仪器上，每台仪器装两个，元件的可靠性为0.5。如果一台仪器中至少有一个元件正常工作，不需要更换，若两个元件都不工作，则要更换，每台仪器最多更换一次，记X为3台仪器需要更换元件的总次数，求EX

解 随机变量X的取值：k=0,1,2,3，每台仪器需要更换元件的概率:

$p=0.5\times0.5=0.25$，则

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{3-k},\quad k=0,1,2,3$$

X	0	1	2	3
P	27/64	27/64	9/64	1/64

故 $EX=0\times\frac{27}{64}+1\times\frac{27}{64}+2\times\frac{9}{64}+3\times\frac{1}{64}=\frac{3}{4}$。（或$EX=np=0.75$）

6.* 某种产品上的缺陷数ξ服从分布律

$$P(\xi=k)=\frac{1}{2^{k+1}},\quad k=0,1,2,\cdots$$

求此种产品上的平均缺陷数。（* 高等数学8学分的学生可以不做）

解 $E\xi=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$,

令 $x=\frac{1}{2}$， 则

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot x^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(x^k\right)'=\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^k\right)'=\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},$$

所以 $E\xi=1$。

第八次作业

一. 填空题

1. 设随机变量ξ的分布律为

ξ	-1	0	1
P	a	$\frac{1}{2}$	b

已知 $D\xi=0.5$，则 a=____1/4____，b=____1/4_____。

2. 若随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\frac{e^{-1}}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$，则

$E(X)=$__1___；　$D(X)=$___1___。

3. 事件在一次试验中发生次数 ξ 的方差一定不超过__1/4_____。

二、选择题

1. 设 X 是一随机变量，$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，(μ, σ>0 为常数)，则对任意常数 C，必有（　D　）成立

A　$E(X-C)^2=E(X^2)-C^2$　　B. $E(X-C)^2=E(X-\mu)^2$

C. $E(X-C)^2<E(X-\mu)^2$　　D. $E(X-C)^2\geqslant E(X-\mu)^2$

2. 抛一枚均匀硬币 100 次，根据切比雪夫不等式可知，出现正面的次数在 40~60 之间的概率 p 为(A)

A. ≥ 0.75　B. ≥ 0.95　C. ≤ 0.75　D. ≤ 0.25

3. 设 X 与 Y 是两个相互独立的随机变量，a,b 为实数，则下列等式不成立的是（ D　）.

A. $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$

B. $E(XY)=E(X)E(Y)$

C.

D.

三、计算题

1. 对第七次作业第三大题第 2 小题的 ξ，求 $D\xi$ 和 $D(1-3\xi)$。

解 $D\xi = E(\xi^2)-(E\xi)^2 = \dfrac{35}{24}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{97}{72}$，$D(1-3\xi)=9D\xi=\dfrac{97}{8}$。

2. 对第七次作业第三大题第 3 小题中的ξ，求$D\xi$。

解 $D\xi = E(\xi^2)-(E\xi)^2 = 0\times 0.504+1\times 0.389+4\times 0.093+9\times 0.006-0.6^2=0.46.$

3. 设随机变量ξ具有概率密度 $p(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1<x\le 2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$，计算 $D\xi$。

解 $E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx=\int_0^1 x\cdot xdx+\int_1^2 x\cdot(2-x)dx=\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.(x^2-\dfrac{x^3}{3})\right|_1^2=1$，

$E(\xi^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2p(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot xdx+\int_1^2 x^2\cdot(2-x)dx=\left.\dfrac{x^4}{4}\right|_0^1+\left.(\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4})\right|_1^2=\dfrac{7}{6}$，

$D(\xi)=E(\xi^2)-[E(\xi)]^2=\dfrac{1}{6}$。

4. 设随机变量ξ仅在$[a\,,b]$取值，试证

$$a\le E\xi\le b,\quad D\xi\le\left(\frac{b-a}{2}\right)^2。$$

证 因为$a\le\xi\le b$，所以$a\le E\xi\le b$.

又因为

$$\frac{a-b}{2}=a-\frac{a+b}{2}\le\xi-\frac{a+b}{2}\le b-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}$$

$$\Rightarrow\left|\xi-\frac{a+b}{2}\right|\le\frac{|b-a|}{2}，\ \Rightarrow D\xi\le E\left(\xi-\frac{a+b}{2}\right)\le\left(\frac{b-a}{2}\right)^2。$$

5. 已知某种股票的价格是随机变量ξ，其平均值是 1 元，标准差是 0.1 元。求常数 a，使得股价超过 1+a 元或低于 1-a 元的概率小于 10%。(提示: 应用切比雪夫不等式)。

解 已知 $E\xi=1,\ \sqrt{D\xi}=0.1$，

由切比雪夫不等式 $P\{|\xi-1|\ge a\}\le\dfrac{0.01}{a^2}$，

令 $\dfrac{0.01}{a^2} \le 0.1$， 得 $a \ge 0.32$。

6. 设随机变量ξ的概率分布为

$$P(\xi = x) = \left(\frac{a}{2}\right)^{|x|}(1-a)^{1-|x|}, \quad x = -1,0,1$$

其中 0<a<1。试求： $D\xi$， $D|\xi|$。

解 $E\xi = (-1)\cdot\dfrac{a}{2} + 0\cdot(1-a) + 1\cdot\dfrac{a}{2} = 0,\qquad E\xi^2 = (-1)^2\cdot\dfrac{a}{2} + 0^2\cdot(1-a) + 1^2\cdot\dfrac{a}{2} = a,$

所以 $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = a$。

又 $E|\xi| = a,\quad E|\xi|^2 = E\xi^2 = a$， 故 $D|\xi| = E|\xi|^2 - (E|\xi|)^2 = a(1-a)$。