《微分几何》课程电子课件

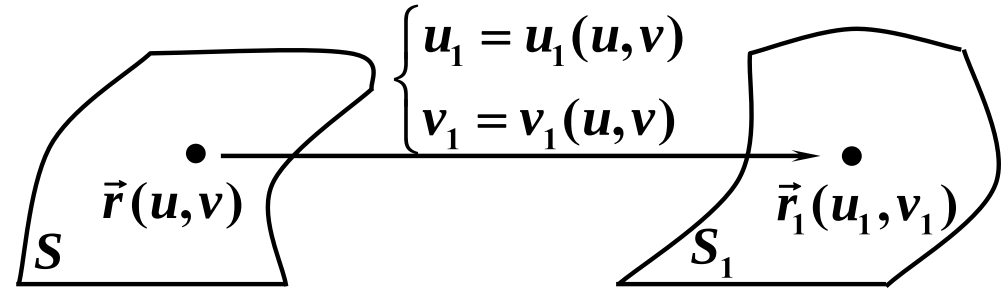
教师：杨勤民

Tel: (021)64253147

Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程QQ群号：1045698545

五、等距对应(保长对应)



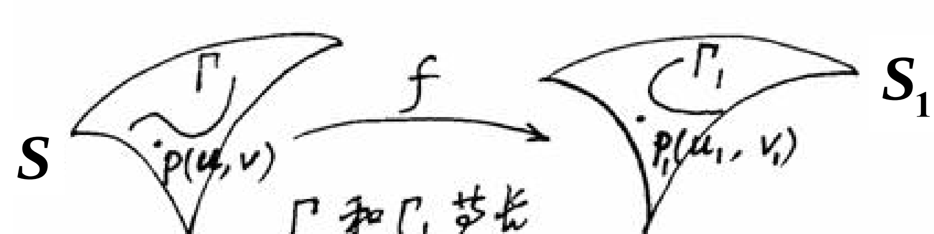
设曲面 S: $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ 和曲面 S_1: $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(u_1,v_1)$之间存在一个双射关系, 对应的点的参数之间有关系式:

$$\begin{cases} u_1 = u_1(u,v) \\ v_1 = v_1(u,v) \end{cases}$$

且$u_1(u,v), v_1(u,v)$有连续的偏导数, $\dfrac{\partial(u_1,v_1)}{\partial(u,v)} \neq 0.$

称这种双射为 S 到 S_1 的一个**对应**.

称曲面之间**保持**曲面上任意曲线的**长度不变**的对应为**等距对应(保长对应)**.



可将 S_1 用与 S 相同的参数 u 和 v 来表示：

$$\vec{r}_1=\vec{r}_1(u_1,v_1)=\vec{r}_1(u_1(u,v),v_1(u,v))\overset{\text{记为}}{=}\vec{r}_2(u,v)$$

则 S 上的点(u,v)映射到S_1：$\vec{r}_2=\vec{r}_2(u,v)$ 上相同参数的点.

S 上的曲线 $\begin{cases}u=u(t)\\v=v(t)\end{cases}(t\in I)$ 映射到S_1：$\vec{r}_2=\vec{r}_2(u,v)$ 上的

曲线 $\begin{cases}u=u(t)\\v=v(t)\end{cases}(t\in I)$.

这样会使得对应曲线在参数平面中具有相同的方程.

定理 两个曲面之间的一个对应是等距对应的充要条件是适当选择参数后它们具有相同的第一基本形式.

证 (充分性)

设选择参数后, 两个曲面S_1和S_2具有相同的第一基本形式, 作它们之间的一个对应, 使相同参数的点为映射的对应点.

设在该参数表示下, S_1和S_2的方程分别为$\vec{r}_1(u,v)$和$\vec{r}_2(u,v)$.

在参数域内任取一条曲线段l: $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \quad (t \in [a,b])$.

上述对应把S_1上的曲线$\vec{r}_1(l)$映射到S_2上的曲线$\vec{r}_2(l)$.

由曲面上曲线弧长的公式，

$$\vec{r}_1(l)\text{的长度为}\int_a^b\sqrt{E_1\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F_1\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G_1\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_a^b\sqrt{E_2\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F_2\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G_2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\vec{r}_2(l)\text{的长度}$$

由曲线 l 的任意性知，该对应为S_1与S_2之间的等距对应.

(必要性)

设两个曲面S_1和S_2之间存在一个等距对应，

选取参数使得映射的对应点具有相同的参数，

设在该参数表示下，S_1和S_2的方程分别为$\vec{r}_1(u,v)$和$\vec{r}_2(u,v)$.

在参数域内任取一条曲线段 l: $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \quad (t \in [a,b]).$

则 $\forall t \in [a,b]$, 曲线 $\vec{r}_1(l)$ 和 $\vec{r}_2(l)$ 上在 $[a,t]$ 这一段的弧长

$$\int_a^t \sqrt{E_1(\tfrac{du}{dt})^2 + 2F_1 \tfrac{du}{dt}\tfrac{dv}{dt} + G_1(\tfrac{dv}{dt})^2}\,dt$$

$$= \int_a^t \sqrt{E_2(\tfrac{du}{dt})^2 + 2F_2 \tfrac{du}{dt}\tfrac{dv}{dt} + G_2(\tfrac{dv}{dt})^2}\,dt,$$

两边对 t 求导得

$$\sqrt{E_1(\tfrac{du}{dt})^2 + 2F_1 \tfrac{du}{dt}\tfrac{dv}{dt} + G_1(\tfrac{dv}{dt})^2} = \sqrt{E_2(\tfrac{du}{dt})^2 + 2F_2 \tfrac{du}{dt}\tfrac{dv}{dt} + G_2(\tfrac{dv}{dt})^2}.$$

即 $E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2 = E_2 du^2 + 2F_2 du dv + G_2 dv^2$,

再由 l 的任意性知, 对任意的 u, v, du, dv 有 $\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2$.

称仅由曲面的第一基本形式出发所能建立的几何性质为曲面的内在性质(内蕴性质).

称仅用曲面的第一类基本量表示出来的几何量为曲面的内蕴量.

曲面曲线的弧长, 曲面上两方向的交角, 曲面区域的面积都是曲面的内蕴量.

内蕴性质和内蕴量在等距对应下保持不变.

六、保角对应(保形对应, 共形对应)

曲面之间**保持**曲面曲线的**交角**不变的对应.

定理

两个曲面之间的一个对应是保角对应的充要条件是

适当选择**参数**后它们的**第一基本形式成比例**, 即

即 $\mathrm{I}_1(u,v,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)=\lambda^2(u,v)\mathrm{I}_2(u,v,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\ (\lambda\neq 0)$ 或写为

$$E_1(u,v):E_2(u,v)=F_1(u,v):F_2(u,v)=G_1(u,v):G_2(u,v).$$

每一个等距对应都是保角对应,

但保角对应一般不是等距对应.

(**保角对应的条件比保长对应的条件弱**)

证 (充分性)

设选择参数后，两个曲面S_1和S_2的第一基本形式成比例，

作它们之间的一个对应，使相同参数的点为映射的对应点.

任选两个切方向$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$和$(\delta u:\delta v)$，

则它们在S_1上的交角θ_1

$$=\arccos\frac{E_1\mathrm{d}u\delta u+F_1(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G_1\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E_1\mathrm{d}u^2+2F_1\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G_1\mathrm{d}v^2}\sqrt{E_1\delta u^2+2F_1\delta u\delta v+G_1\delta v^2}}$$

$$=\arccos\frac{\lambda^2E_2\mathrm{d}u\delta u+\lambda^2F_2(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+\lambda^2G_2\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{\lambda^2E_2\mathrm{d}u^2+\cdots}\sqrt{\lambda^2E_2\delta u^2+\cdots}}$$

$$= \arccos \frac{E_2 \mathrm{d}u\delta u + F_2(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + G_2 \mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E_2 \mathrm{d}u^2 + 2F_2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v + G_2 \mathrm{d}v^2}\sqrt{E_2 \delta u^2 + 2F_2 \delta u\delta v + G_2 \delta v^2}}$$

$=$ 它们在S_2上的交角θ_2

由所选切向的任意性知, 该对应为S_1与S_2之间的保角对应.

(必要性)

设两个曲面S_1和S_2之间存在一个保角对应,

选取参数使得映射的对应点具有相同的参数,

任选S_1上两个正交的切方向$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$和$(\delta u:\delta v)$,

由保角的定义知它们在S_2上也正交.

因此 $\begin{cases} E_1\mathrm{d}u\delta u + F_1(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + G_1\mathrm{d}v\delta v = 0 \\ E_2\mathrm{d}u\delta u + F_2(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + G_2\mathrm{d}v\delta v = 0 \end{cases}$.

即 $\begin{cases} (E_1\mathrm{d}u + F_1\mathrm{d}v)\delta u + (F_1\mathrm{d}u + G_1\mathrm{d}v)\delta v = 0 \\ (E_2\mathrm{d}u + F_2\mathrm{d}v)\delta u + (F_2\mathrm{d}u + G_2\mathrm{d}v)\delta v = 0 \end{cases}$.

δu与δv不同时为零,因此 $\dfrac{E_1\mathrm{d}u + F_1\mathrm{d}v}{E_2\mathrm{d}u + F_2\mathrm{d}v} = \dfrac{F_1\mathrm{d}u + G_1\mathrm{d}v}{F_2\mathrm{d}u + G_2\mathrm{d}v}$.

取$\begin{cases} \mathrm{d}u = 1 \\ \mathrm{d}v = 0 \end{cases}$代入得 $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{F_1}{F_2}$, 取$\begin{cases} \mathrm{d}u = 0 \\ \mathrm{d}v = 1 \end{cases}$代入得 $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{G_1}{G_2}$.

故有 $\dfrac{E_1(u,v)}{E_2(u,v)} = \dfrac{F_1(u,v)}{F_2(u,v)} = \dfrac{G_1(u,v)}{G_2(u,v)}$.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.7 证明螺面$\vec{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,u+v)$与旋转面$\vec{R}(t,\theta)=(t\cos\theta,t\sin\theta,\sqrt{t^2-1})$之间的一个等距对应为$\begin{cases} t=\sqrt{u^2+1}, \\ \theta=\arctan u+v. \end{cases}$

2.8 请在球面$\vec{S}(\varphi,\theta)=(\cos\varphi\cos\theta,\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi)$与圆柱面$\vec{C}(u,v)=(\cos u,\sin u,v)$之间设计一个保角对应.