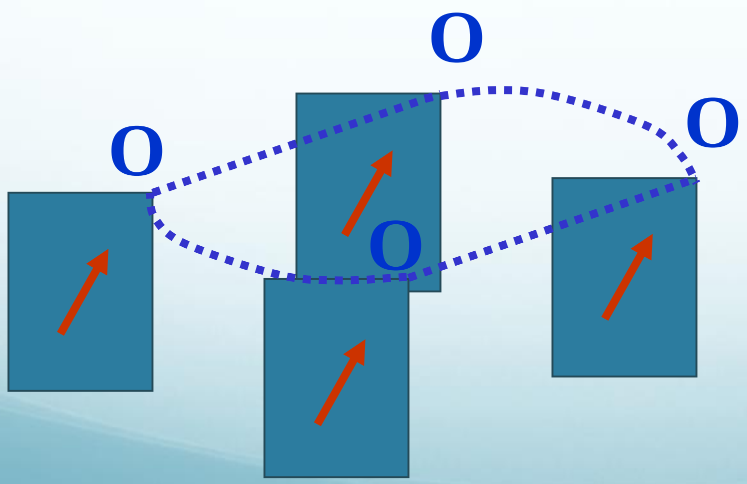
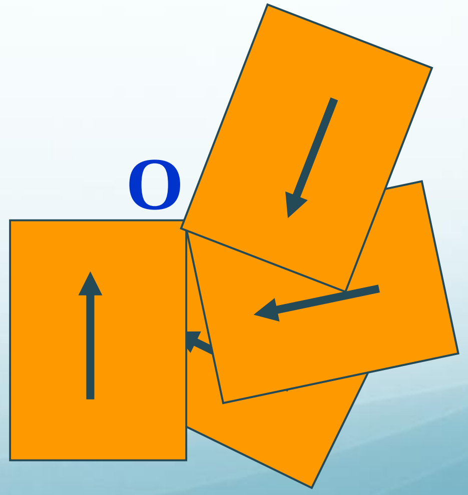
第三章 刚体的转动

两种基本形式

平动： 连结体内两点的直线在空间指向保持平行。通常用物体质心的运动来代表。

转动： 连结体内两点的直线方向在运动过程中改变。





刚体（理想化模型）：

形状和大小不可忽略；

运动中形状、大小不变。

彼此间距离保持不变的“质点系”

基本研究方法：

质点运动规律

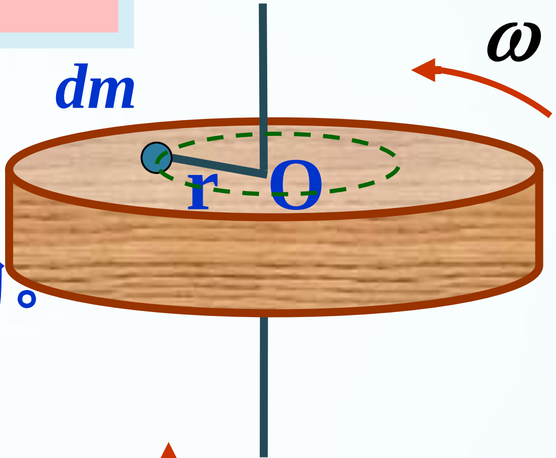
＋

微积分

$\Big\}\longrightarrow$ 刚体基本运动规律

（大量质点运动的总效应）

§3-1 刚体的定轴转动



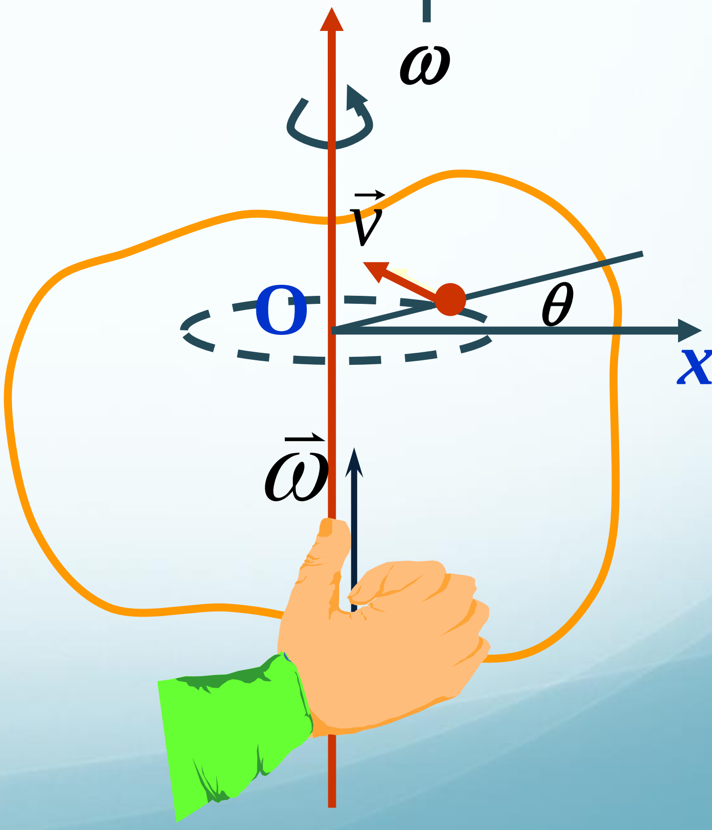
定轴转动:刚体上各质元均做圆周运动,各圆的圆心都在转轴上,是最简单的转动。

一、特征:

1.各点都有相同的$\Delta\theta$、ω、α

2. ω　　+：刚体逆时针转

　　　　−：刚体顺时针转



3.角量与线量

$$\Delta S = r\Delta\theta \quad v = r\omega$$

$$a_t = r\alpha \quad a_n = r\omega^2$$

二、匀变速转动 (α为常量)

质点做匀变速直线运动

- $v = v_0 + at$
- $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
- $v^2 = v_0{}^2 + 2a(x - x_0)$

刚体绕定轴做匀变速转动

- $\omega = \omega_0 + \alpha t$
- $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
- $\omega^2 = \omega_0{}^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

§3-2　刚体的转动定律

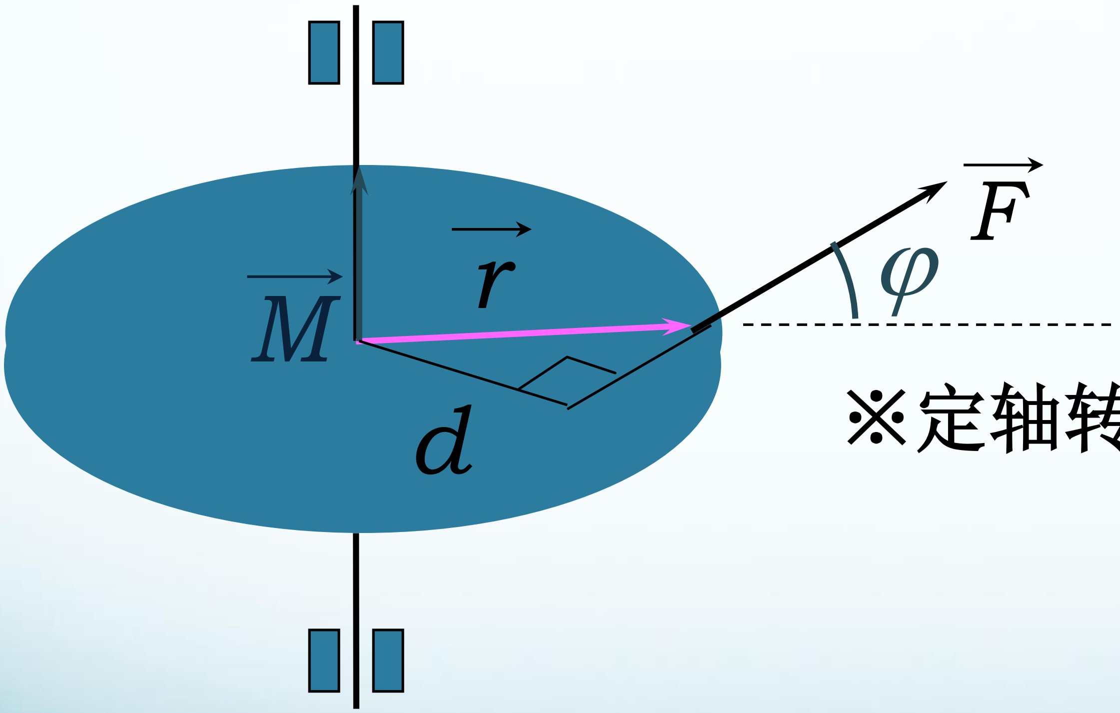
一、力矩

力矩是改变刚体转动状态的原因

1. 力在转动平面内

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$M=Fr\sin\varphi=Fd$$



※定轴转动：M

＋：刚体逆时针转

－：刚体顺时针转

当$\vec{M}=0$时，刚体匀速转动或静止

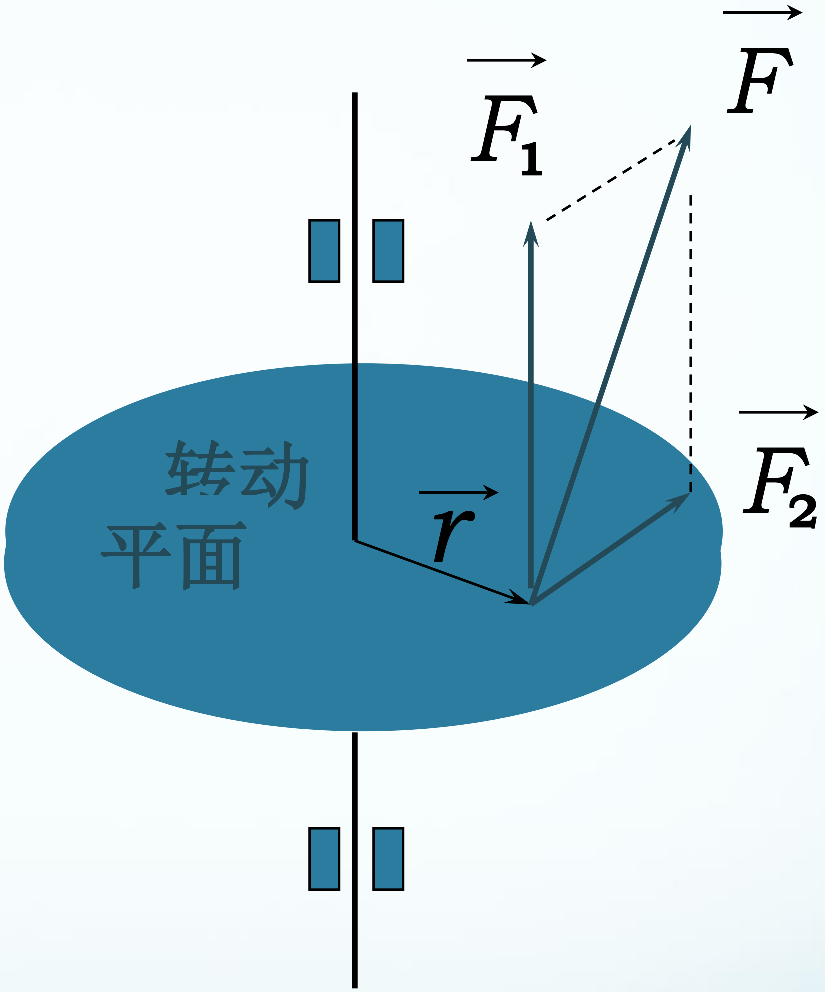
2. 力不在转动平面内

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

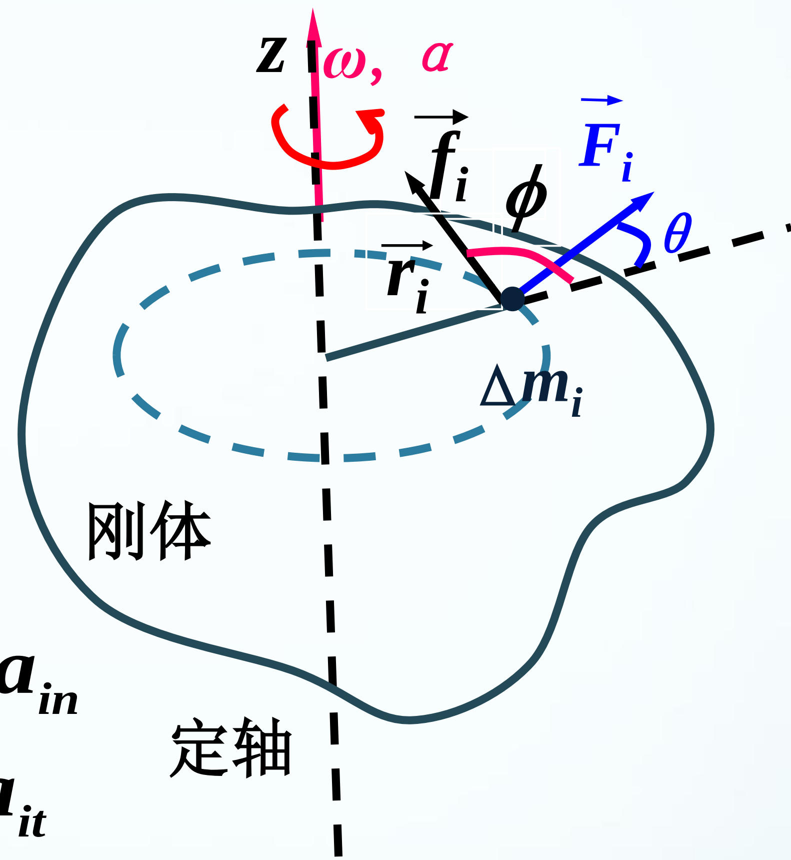
$$= \boxed{\vec{r} \times \vec{F}_1} + \vec{r} \times \vec{F}_2$$

只能引起轴的变形，
对转动无贡献。



在定轴转动问题中，若不讨论轴上受力，则所考虑的力矩是指力在转动平面内的分力对转轴的力矩。

二、转动定律



对$\Delta\, m_i$ 质点

F_i ⟶ 外力　　f_i ⟶ 内力

应用牛顿第二定律：

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i \vec{a}_i \quad \begin{cases} F_{in} + f_{in} = m_i a_{in} \\ F_{it} + f_{it} = m_i a_{it} \end{cases}$$

F_{in}与 f_{in}对转轴的力矩为零

$$\left.\begin{aligned} (F_{it} + f_{it}) r_i &= m_i a_{it} r_i \\ a_{it} &= r_i \alpha \end{aligned}\right\} \quad F_i \sin\theta_i r_i + f_i \sin\phi_i r_i = m_i \alpha r_i^2$$

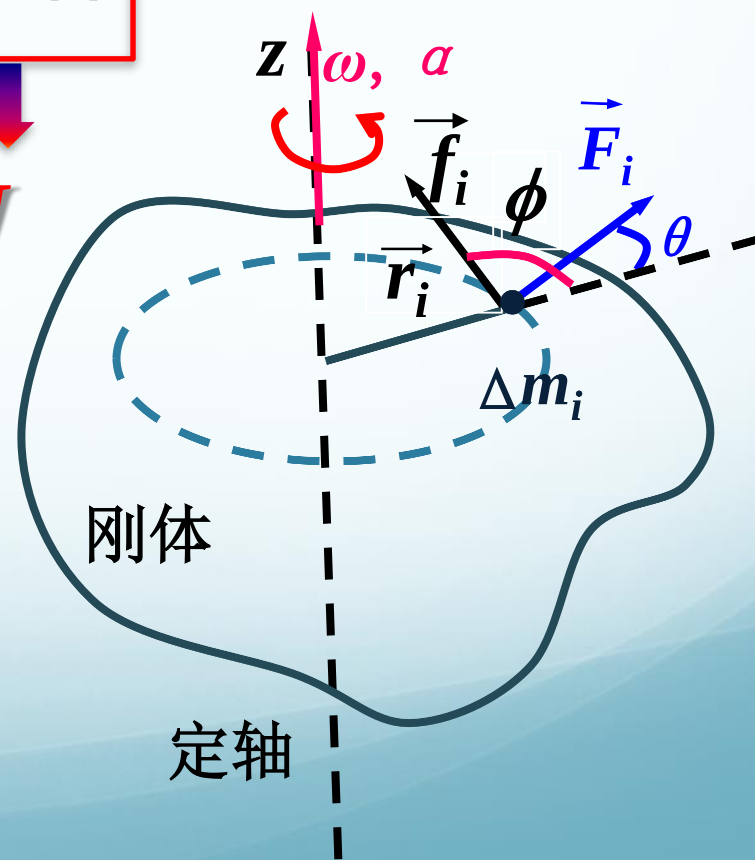
对所有质点列出此式，并求和 $F_i \sin\theta_i \, r_i + f_i \sin\phi_i r_i = m_i \alpha r_i^2$

$$\underbrace{\sum_i F_i \sin\theta_i \, r_i}_{M_{外}} + \underbrace{\sum_i f_i \sin\phi_i \; r_i}_{0} = \underbrace{\sum_i m_i \alpha \, r_i^2}_{\parallel}$$

$$\alpha \boxed{\sum_i m_i r_i^2}$$

$$\Downarrow$$

$$J$$



转动定律：$M_{外} = J\alpha$

三、转动惯量（J）

平动： $F = ma$

转动： $M = J\alpha$ **J:转动惯性大小的量度**

1.定义式:

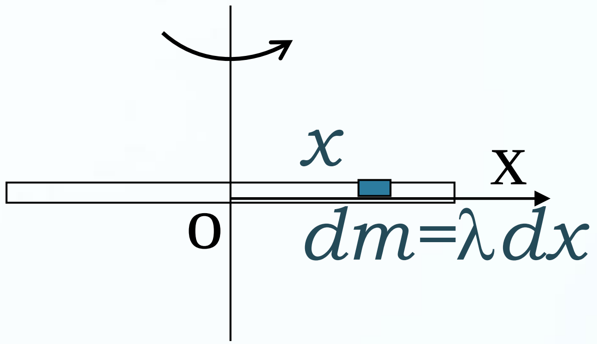
$$J \overset{def}{=} \begin{cases} \sum_i r_i^2 \Delta m_i & \text{质量非连续分布} \\ \int_m r^2 dm & \text{质量连续分布} \end{cases}$$

r为质元到转轴距离

质量元dm
- 线分布：$dm = \lambda dx$
- 面分布：$dm = \sigma ds$
- 体分布：$dm = \rho dV$

2. 转动惯量的计算示例

1.均匀细棒m,l



(1).绕过中心与棒⊥轴的转动惯量

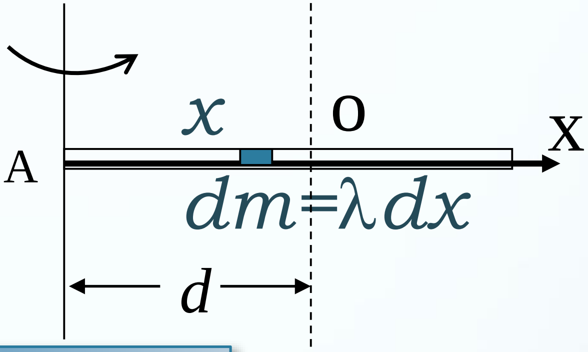
解： $$dJ_0 = x^2 dm = x^2 \lambda dx$$

$$J_O = \int dJ_0 = \int_{-l/2}^{l/2} \lambda x^2 dx = \frac{1}{3}\lambda x^3 \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{12}\lambda l^3 = \frac{1}{12} m l^2$$

$$J_O = \frac{1}{12} ml^2$$

(2).绕过棒端与棒⊥轴的转动惯量

$$J_A = \int_0^l \lambda x^2 dx = \frac{1}{3}\lambda x^3\Big|_0^l = \frac{1}{3}\lambda l^3 = \frac{1}{3} ml^2$$



讨论转动惯量，必须说明是绕哪个轴转动！

O轴与A轴间距$d = \frac{l}{2}$，且二轴平行

$$J_A - J_O = \frac{1}{3} ml^2 - \frac{1}{12} ml^2 = m(\frac{l}{2})^2 = md^2$$

平行轴定理： $J_{O'} = J_O + md^2$

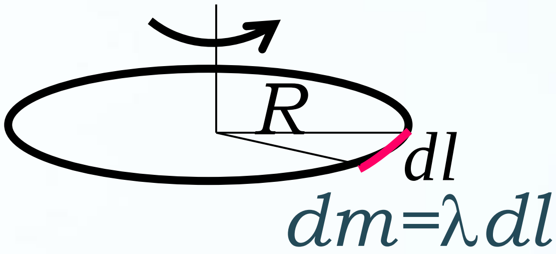
其中：

J_O:刚体对过质心轴的转动惯量

$J_{O'}$:刚体对平行于过质心轴的轴的转动惯量

d:两平行轴间的距离

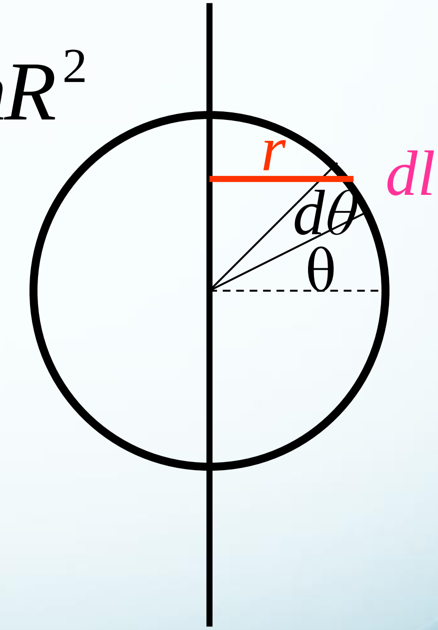
2.均匀圆环*m*,*R*



(1)绕过中心与环面⊥轴的转动惯量

解：$dJ = R^2 dm = R^2 \lambda dl$

$$\Rightarrow J = \int_0^{2\pi R} R^2 \lambda dl = R^2 \frac{m}{2\pi R} \cdot 2\pi R = mR^2$$



(2)绕沿直径轴的转动惯量

$$dJ = r^2 dm = R^2 \cos^2\theta \lambda dl = R^2 \cos^2\theta \lambda R d\theta$$

$$\Rightarrow J = \int_0^{2\pi} R^3 \lambda \cos^2\theta d\theta = \frac{mR^2}{2}$$