《微分几何》课程电子课件

教师：杨勤民

Tel: (021)64253147

Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程QQ群号：1045698545

§2.5 曲面论的基本定理

一、曲面的基本方程和Christoffel符号

二、曲面的Riemann曲率张量和基本公式

三、曲面论的基本定理

张量记号系统

Gauss记号	u	v	$\vec{r}_u$	$\vec{r}_v$	E	F	G	L	M	N
张量记号	u^1	u^2	$\vec{r}_1$	$\vec{r}_2$	g_{11}	g_{12}	g_{22}	L_{11}	L_{12}	L_{22}

g_{21} $\quad L_{21}$

上标为 i 的符号表示第 i 个分量

下标 i 表示对第 i 个分量求偏微商

第一类基本量 $g_{ij}=\vec{r}_i\cdot\vec{r}_j$ 第二类基本量 $L_{ij}=\vec{r}_{ij}\cdot\vec{n}=-\vec{r}_i\cdot\vec{n}_j$

曲面的度量矩阵 $(g_{ij})_{2\times2}$ 正定，记 $g=\det(g_{ij})=EG-F^2$，

$$(g^{ij})_{2\times2}=(g_{ij})^{-1},\quad g^{11}=\frac{g_{22}}{g},\quad g^{12}=g^{21}=-\frac{g_{12}}{g},\quad g^{22}=\frac{g_{11}}{g}.$$

本书和式约定

$$\sum_{i} \triangleq \sum_{i=1}^{2}, \quad \sum_{i,j} \triangleq \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}, \quad \sum_{\alpha} a^{\alpha} b_{\alpha} = \sum_{\beta} a^{\beta} b_{\beta}, \quad \sum_{\alpha,\beta} a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma,\delta} a^{\gamma\delta} b_{\gamma\delta}$$

注意：(1)上、下指标使用哪个字母不影响求和；

(2)只对上、下标相同的指标求和.

Einstein的和式约定

如果在一个单项式中，同一个指标出现两次，

一次作为上指标，一次作为下指标，则该项是关于这

个指标在规定范围内的求和式，和号认为是省略的.

例如：$a^{\alpha} b_{\alpha} \triangleq \sum_{\alpha} a^{\alpha} b_{\alpha}$，$a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \triangleq \sum_{\alpha,\beta} a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}$

一、曲面的基本方程和Christoffel(克里斯托费尔)符号

在局部坐标系$[\vec{r};\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{n}]$中将基底的偏微商表示出来

得到曲面的基本方程:

$$\begin{cases} \vec{r}_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \vec{r}_k + L_{ij}\vec{n} & \text{——— Gauss方程} \\ \vec{n}_i = -\sum_{j,k} L_{ik} g^{kj} \vec{r}_j & \text{——— Weingarten方程} \end{cases}$$

其中 $\Gamma_{ij}^k \triangleq \sum_l g^{kl}[ij,l],$ —— 第二类Christoffel符号

$$[ij,l] \triangleq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right)$$ —— 第一类Christoffel符号

证 采用待定系数法

设 $$\begin{cases} \vec{r}_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \vec{r}_k + \lambda_{ij}\vec{n} & ① \\ \vec{n}_i = -\sum_j \mu_i^j \vec{r}_j & ② \end{cases}$$

将①式两端点乘$\vec{n}$，并注意到$\vec{r}_k \cdot \vec{n} = 0$得$\lambda_{ij} = L_{ij}$.

将$g_{ij} = \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j$两端关于变量$u^l$求偏导得$\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = \boxed{\vec{r}_{il} \cdot \vec{r}_j} + \boxed{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_{jl}}$

交换指标得$\dfrac{\partial g_{il}}{\partial u^j} = \vec{r}_{ij} \cdot \vec{r}_l + \boxed{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_{lj}}$, $\dfrac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} = \boxed{\vec{r}_{li} \cdot \vec{r}_j} + \vec{r}_l \cdot \vec{r}_{ji}$.

因此$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \dfrac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right) = \vec{r}_{ij} \cdot \vec{r}_l$. 即$[ij,l] = \sum_k \Gamma_{ij}^k g_{kl}$.

整理成关于Γ_{ij}^k的线性方程组$\begin{cases} g_{11}\Gamma_{ij}^1 + g_{21}\Gamma_{ij}^2 = [ij,1] \\ g_{12}\Gamma_{ij}^1 + g_{22}\Gamma_{ij}^2 = [ij,2] \end{cases}$.

解之得$\Gamma_{ij}^k = \sum_l g^{kl}[ij,l]$.

将第②式$\vec{n}_i = -\sum_j \mu_i^j \vec{r}_j$两边点乘$\vec{r}_k$得$\vec{n}_i \cdot \vec{r}_k = -\sum_j \mu_i^j \vec{r}_j \cdot \vec{r}_k$.

即$-L_{ik} = -\sum_j \mu_i^j g_{jk}$，亦$\begin{cases} g_{11}\mu_i^1 + g_{21}\mu_i^2 = L_{i1} \\ g_{12}\mu_i^1 + g_{22}\mu_i^2 = L_{i2} \end{cases}$.

解之得$\mu_i^j = \sum_k g^{jk} L_{ik}$.

$$\Gamma_{ij}^{k}=\sum_{l}g^{kl}[ij,l]=\frac{1}{2}\sum_{l}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^{j}}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^{i}}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{l}}\right)$$

为曲面的内蕴量.

若采用过去的符号，则有

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{GE_u-F(2F_u-E_v)}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma_{11}^{2}=\frac{E(2F_u-E_v)-FE_u}{2(EG-F^2)},$$

$$\Gamma_{12}^{1}=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma_{12}^{2}=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)},$$

$$\Gamma_{22}^{1}=\frac{G(2F_v-G_u)-FG_v}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma_{22}^{2}=\frac{EG_v-F(2F_v-G_u)}{2(EG-F^2)}.$$

特别地，对于正交的曲纹坐标网有$F=0$，则

$$\Gamma_{11}^1=\frac{E_u}{2E},\qquad \Gamma_{11}^2=-\frac{E_v}{2G},\qquad \Gamma_{12}^1=\frac{E_v}{2E},$$

$$\Gamma_{12}^2=\frac{G_u}{2G},\qquad \Gamma_{22}^1=-\frac{G_u}{2E},\qquad \Gamma_{22}^2=\frac{G_v}{2G}.$$

二、Gauss公式和Codazzi-Mainardi公式

定义 **Riemann曲率张量**　设 $m, i, j, k \in \{1, 2\}$,

$$R_{mijk} \triangleq \sum_l g_{ml}\left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} + \sum_p \left(\Gamma_{ij}^p \Gamma_{pk}^l - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{pj}^l\right)\right]$$

则对于 C^3 类曲面有**Gauss公式**: $R_{mijk} = L_{ij} L_{mk} - L_{ik} L_{mj}$

(注:Gauss公式中只有一个独立: $R_{1212} = L_{21} L_{12} - L_{22} L_{11}$)

和 **Codazzi-Mainardi**(科达奇-迈因纳尔迪)**公式**:

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j} = \sum_l \left(\Gamma_{ik}^l L_{lj} - \Gamma_{ij}^l L_{lk}\right)$$

(注: Codazzi-Mainardi公式中只有二个独立)

证 由Gauss方程$\vec{r}_{ij}=\sum_l \Gamma_{ij}^l \vec{r}_l + L_{ij}\vec{n}$两边对$u^k$求偏导得

$$\vec{r}_{ijk}=\sum_l\left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k}\vec{r}_l+\Gamma_{ij}^l\vec{r}_{lk}\right)+\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k}\vec{n}+L_{ij}\vec{n}_k$$

将$\vec{r}_{lk}=\sum_m \Gamma_{lk}^m\vec{r}_m+L_{lk}\vec{n},\ \vec{n}_k=-\sum_{l,m}L_{km}g^{ml}\vec{r}_l$代入得

$$\vec{r}_{ijk}=\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k}\vec{n}+\sum_l\left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k}\vec{r}_l+\Gamma_{ij}^l L_{lk}\vec{n}\right)+\sum_{l,m}\left(\Gamma_{ij}^l\Gamma_{lk}^m\vec{r}_m-L_{ij}L_{km}g^{ml}\vec{r}_l\right)$$

互换指标j和k得

$$\vec{r}_{ikj}=\frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j}\vec{n}+\sum_l\left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j}\vec{r}_l+\Gamma_{ik}^l L_{lj}\vec{n}\right)+\sum_{l,m}\left(\Gamma_{ik}^l\Gamma_{lj}^m\vec{r}_m-L_{ik}L_{jm}g^{ml}\vec{r}_l\right)$$

$\vec{r} \in C^3 \Rightarrow$ 混合偏导 $\vec{r}_{ijk} = \vec{r}_{ikj}$.

比较 $\vec{r}_l$ 的系数得

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^{l}}{\partial u^k} + \sum_p \Gamma_{ij}^{p} \Gamma_{pk}^{l} - \sum_m L_{ij} L_{km} g^{ml}$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{ik}^{l}}{\partial u^j} + \sum_p \Gamma_{ik}^{p} \Gamma_{pj}^{l} - \sum_m L_{ik} L_{jm} g^{ml}$$

即 $\displaystyle\sum_m g^{ml}(L_{ij}L_{km} - L_{ik}L_{jm}) = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{l}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{l}}{\partial u^j} + \sum_p (\Gamma_{ij}^{p}\Gamma_{pk}^{l} - \Gamma_{ik}^{p}\Gamma_{pj}^{l})$

即

$$\sum_l g_{ml}\left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^{l}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{l}}{\partial u^j} + \sum_p \left(\Gamma_{ij}^{p}\Gamma_{pk}^{l} - \Gamma_{ik}^{p}\Gamma_{pj}^{l}\right)\right] = L_{ij}L_{mk} - L_{ik}L_{mj}$$

$\vec{r} \in C^3 \Rightarrow$ 混合偏导 $\vec{r}_{ijk} = \vec{r}_{ikj}$.

比较 $\vec{r}_l$ 的系数, 并解关于 $L_{ij}L_{mk} - L_{ik}L_{mj}$ 的线性方程组得到

$$\sum_l g_{ml}\left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} + \sum_p \left(\Gamma_{ij}^p \Gamma_{pk}^l - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{pj}^l\right)\right] = L_{ij}L_{mk} - L_{ik}L_{mj}$$

比较 $\vec{n}$ 的系数得到 $\dfrac{\partial L_{ij}}{\partial u^k} - \dfrac{\partial L_{ik}}{\partial u^j} = \sum\limits_l (\Gamma_{ik}^l L_{lj} - \Gamma_{ij}^l L_{lk})$

上述两式分别就是**Gauss**公式 和 **Codazzi-Mainardi**公式.

再谈Gauss曲率

由Gauss公式$R_{mijk}=L_{ij}L_{mk}-L_{ik}L_{mj}$得到Gauss曲率 $K=-\dfrac{R_{1212}}{g}$

$$\text{即 } K=-\frac{\sum_l g_{1l}\left[\dfrac{\partial\Gamma^l_{21}}{\partial u^2}-\dfrac{\partial\Gamma^l_{22}}{\partial u^1}+\sum_p\left(\Gamma^p_{21}\Gamma^l_{p2}-\Gamma^p_{22}\Gamma^l_{p1}\right)\right]}{g}$$

$\Gamma^k_{ij}, g_{ij}, g^{ij}, g$ 都是曲面的内蕴量,因此有

Gauss's Egregium Theorem

曲面的Gauss曲率是内蕴量.

Gauss绝妙定理是微分几何学发展过程中的里程碑

(1) 此定理说明曲面的度量本身蕴含着一定的弯曲性质, 并由此产生了曲面的内蕴几何学.
(以给定第一基本形式的抽象曲面作为研究对象)

(2) Riemann将其推广到高维内蕴几何学, 即**Riemann**几何.

qmyang@ecust.edu.cn

用原来的符号表示Gauss曲率

$$K=\frac{\begin{vmatrix} F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}}{(EG-F^2)^2}$$

当$F=0$时，$K=\dfrac{-1}{\sqrt{EG}}\left[\left(\dfrac{\left(\sqrt{G}\right)_u}{\sqrt{E}}\right)_u+\left(\dfrac{\left(\sqrt{E}\right)_v}{\sqrt{G}}\right)_v\right]$

证

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[(r_{uu},r_u,r_v)(r_{vv},r_u,r_v)-(r_{uv},r_u,r_v)^2\right]$$

$$\left|\begin{bmatrix}\vec{r}\,'_{uu}\\ \vec{r}\,'_{u}\\ \vec{r}\,'_{v}\end{bmatrix}\right|\left|[\vec{r}_{vv}\quad\vec{r}_{u}\quad\vec{r}_{v}]\right|$$

$$\|$$

$$\left|\begin{bmatrix}\vec{r}\,'_{uu}\\ \vec{r}\,'_{u}\\ \vec{r}\,'_{v}\end{bmatrix}[\vec{r}_{vv}\quad\vec{r}_{u}\quad\vec{r}_{v}]\right|$$

$$\|$$

$$\begin{vmatrix} r_{uu}\cdot r_{vv} & r_{uu}\cdot r_{u} & r_{uu}\cdot r_{v}\\ r_{u}\cdot r_{vv} & r_{u}\cdot r_{u} & r_{u}\cdot r_{v}\\ r_{v}\cdot r_{vv} & r_{v}\cdot r_{u} & r_{v}\cdot r_{v}\end{vmatrix}$$

证

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[(r_{uu},r_u,r_v)(r_{vv},r_u,r_v)-(r_{uv},r_u,r_v)^2\right]$$

$$=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[\begin{vmatrix} r_{uu}\cdot r_{vv} & r_{uu}\cdot r_u & r_{uu}\cdot r_v\\ r_u\cdot r_{vv} & r_u\cdot r_u & r_u\cdot r_v\\ r_v\cdot r_{vv} & r_v\cdot r_u & r_v\cdot r_v\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} r_{uv}\cdot r_{uv} & r_{uv}\cdot r_u & r_{uv}\cdot r_v\\ r_u\cdot r_{uv} & r_u\cdot r_u & r_u\cdot r_v\\ r_v\cdot r_{uv} & r_v\cdot r_u & r_v\cdot r_v\end{vmatrix}\right]$$

$$\begin{vmatrix} \vec r_{uu}\cdot\vec r_{vv}-\vec r_{uv}\cdot\vec r_{uv} & \vec r_{uu}\cdot\vec r_u & \vec r_{uu}\cdot\vec r_v\\ \vec r_u\cdot\vec r_{vv} & E & F\\ \vec r_v\cdot\vec r_{vv} & F & G\end{vmatrix}+\boxed{\begin{vmatrix} \vec r_{uv}\cdot\vec r_{uv} & \vec r_{uu}\cdot\vec r_u & \vec r_{uu}\cdot\vec r_v\\ 0 & E & F\\ 0 & F & G\end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \vec r_{uv}\cdot\vec r_u & \vec r_{uv}\cdot\vec r_v\\ \vec r_u\cdot\vec r_{uv} & E & F\\ \vec r_v\cdot\vec r_{uv} & F & G\end{vmatrix}+\boxed{\begin{vmatrix} \vec r_{uv}\cdot\vec r_{uv} & \vec r_{uv}\cdot\vec r_u & \vec r_{uv}\cdot\vec r_v\\ 0 & E & F\\ 0 & F & G\end{vmatrix}}$$

(The two boxed determinants are joined by "||" on the page.)

证

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[(\boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)-(\boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)^2\right]$$

$$=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_v\\ \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v\\ \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_v\\ \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v\\ \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v\end{vmatrix}\right]$$

$$E=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u\Rightarrow E_u=2\vec{r}_u\cdot\vec{r}_{uu}$$

$$=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[\begin{vmatrix}\boxed{\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}-\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}} & \boxed{\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_u} & \boxed{\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_v}\\ \boxed{\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{vv}} & E & F\\ \boxed{\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{vv}} & F & G\end{vmatrix}\right.$$

$$\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_v=F_u-\tfrac{1}{2}E_v$$

$$\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{vv}=F_v-\tfrac{1}{2}G_u$$

$$\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{vv}=\tfrac{1}{2}G_v$$

$$F_{uv}-\tfrac{1}{2}E_{vv}-\tfrac{1}{2}G_{uu}$$

$$\left.-\begin{vmatrix}0 & \boxed{\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_u} & \boxed{\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_v}\\ \boxed{\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uv}} & E & F\\ \boxed{\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{uv}} & F & G\end{vmatrix}\right]$$

$$\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uv}=\tfrac{1}{2}E_v$$

$$\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{uv}=\tfrac{1}{2}G_u$$

三、曲面论的基本定理

设 $\mathrm{I} = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$,

$$\mathrm{II} = L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2 = \sum_{i,j} L_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$$

是给定的两个二次型, 其中 I 是正定的,

g_{ij}, L_{ij} 都是关于 u 和 v 的 C^2 类函数,

且满足Gauss公式和Codazzi-Mainardi公式,

则除了空间中的位置差别外, 唯一地存在一个曲面,

使得 I 和 II 分别为此曲面的第一和第二基本形式.

证明思路

Step1. 增加条件固定曲面的空间位置;

Step2. 将系数 g_{ij}, L_{ij}代入曲面的基本方程, 得到一个关于$\vec{r}(u^1, u^2)$的偏微分方程组, 它的可积条件正好是Gauss公式和Codazzi-Mainardi公式, 在第一步给出的条件下存在唯一一组解$\vec{r}(u^1, u^2)$;

Step3. 证明在曲面$\vec{r}(u^1, u^2)$上任一点, $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}$构成一个右手标架, 且$g_{ij} = \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j$, $\vec{n} \cdot \vec{r}_i = 0$, $\vec{n}^2 = 1$;

Step4. 证明给定的 Ⅰ 和 Ⅱ 分别是此曲面的第一、二基本形式.

请理解课本内容后及时独立地完成如下作业!

2.27 如果曲面的第一基本形式是$\mathrm{d}s^2 = \dfrac{\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2}{(u^2 + v^2 + C)^2}$,

试计算该曲面的第二类克里斯托费尔符号.

2.28 证明不存在曲面, 使得

$$E = G = 1,\quad F = 0,\quad L = 1,\quad M = 0,\quad N = -1.$$