第五章　　差分法

一、常微分方程边值问题

一、常微分方程边值问题

1. 边值问题的差分方程

二阶边值问题

$$\begin{cases} Lu \equiv -u'' + q(x)u = f(x) \quad a < x < b \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $q(x), f(x)$ 是连续函数， $q(x) \geq 0$ 。

将 $[a,b]$ 分成 N 等分，记分点（称为节点）

$$x_m = a + mh \quad m = 0,1,2,\cdots,N$$ 。

这里 $x_0 = a, x_N = b$ 。 $h = \dfrac{b-a}{N}$ 步长

利用 Taylor 公式

$$\frac{1}{h^2}\left[u(x_{m+1})-2u(x_m)+u(x_{m-1})\right]=u''(x_m)-R_m \quad (1.2)$$

其中 $R_m=-\dfrac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_m) \quad \xi_m\in(x_{m-1},x_{m+1})$。

把(1.2)代入方程(1.1)，得

$$L_h u(x_m)\equiv-\frac{1}{h^2}\left[u(x_{m+1})-2u(x_m)+u(x_{m-1})\right]$$

$$+q(x_m)u(x_m)$$

$$=f(x_m)+R_m$$

略去余项 R_m，记 $q_m=q(x_m), f_m=f(x_m)$.

边值问题的差分方程

$$
\begin{cases}
L_h u_m = -\dfrac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + q_m u_m = f_m \\
\qquad\qquad\qquad m = 1,2,\cdots,N-1 \\
u_0 = \alpha, u_N = \beta
\end{cases}
\tag{1.3}
$$

$$
\begin{bmatrix}
2+h^2q_1 & -1 & & & \\
-1 & 2+h^2q_2 & -1 & & \\
 & & \ddots & & \\
 & & & & -1 \\
 & & & -1 & 2+h^2q_{N-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
h^2 f_1 + \alpha \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{N-2} \\ h^2 f_{N-1} + \beta
\end{bmatrix}
$$

在节点 x_m 建立差分方程的关键是在该点用 $u(x)$ 的二阶中心差代替二阶导数，即：

$$\frac{u(x_{m+1})-2u(x_m)-u(x_{m-1})}{h^2}\approx u''(x_m)$$

其截断误差 $R_m(u)=Lu(x_m)-L_hu(x_m)$

先假定差分方程的形式，再用 Taylor 展开确定其中的系数，若设式(1.1)的差分方程为：

$$-\frac{1}{h^2}(u_{m+1}-2u_m+u_{m-1})+c_0(q_mu_m-f_m)$$

$$+c_1(q_{m+1}u_{m+1}-f_{m+1})+c_2(q_{m-1}u_{m-1}-f_{m-1})=0$$

其中 c_0,c_1,c_2 为待定常数且 $c_1+c_2+c_0=1$。

利用Taylor展开

$$-\frac{1}{h^2}\left[u(x+h)-2u(x)+u(x-h)\right]+c_0\left[q(x)u(x)-f(x)\right]$$

$$+c_1\left[q(x+h)u(x+h)-f(x+h)\right]+c_2\left[q(x-h)u(x-h)-f(x-h)\right]$$

$$=-\left[u''(x)+\frac{h^2}{12}u^{(4)}(x)+\frac{h^4}{360}u^{(6)}(x)\right]+(c_0+c_1+c_2)u''(x)$$

$$+(c_1-c_2)hu'''(x)+\frac{1}{2}(c_1+c_2)h^2u^{(4)}(x)+\frac{1}{6}(c_1-c_2)h^3u^{(5)}(x)$$

$$+\frac{1}{24}(c_1+c_2)h^4u^{(6)}(x)+\frac{1}{120}(c_1-c_2)h^5u^{(7)}(x)+O(h^6)$$

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = 0 \\ \dfrac{1}{2}(c_1 + c_2) = \dfrac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = \dfrac{5}{6} \\ c_1 = \dfrac{1}{12} \\ c_2 = \dfrac{1}{12} \end{cases}$$

差分方程

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m+1}) + \dfrac{1}{12}(q_{m+1}u_{m+1} + 10q_m u_m \\ + q_{m-1}u_{m-1}) = \dfrac{1}{12}(f_{m+1} + 10f_m + f_{m-1}) \\ \qquad m = 1,2,\ldots, N-1 \\ u_0 = \alpha, u_N = \beta \end{cases} \tag{1.4}$$

其截断误差为： $R_m = \dfrac{h^4}{240}u^{(6)}(x_m) + O(h^6)$。

对于更一般的二阶边值问题:

$$\begin{cases} -u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x) \\ \alpha_1 u'(a) + \alpha_2 u(a) = \alpha \\ \beta_1 u'(b) + \beta_2 u(b) = \beta \end{cases} \tag{1.5}$$

其　中　$p(x), q(x), f(x) \in C[a,b]$　$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$　，$\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$

一阶导数用差商代替

$$\frac{1}{2h}\left[u(x_{m+1}) - u(x_{m-1})\right] = u'(x_m) + \frac{h^2}{b}u'''(\eta_m)$$

$$\eta_m \in (x_{m-1}, x_{m+1})。$$

上页　下页　返回

$$-u''(x_m)+p(x_m)u'(x_m)=-\frac{1}{h^2}(u(x_{m+1})-2u(x_m)$$

$$+u(x_{m-1}))+\frac{p(x_m)}{2h}(u(x_{m+1})-u(x_{m-1}))+O(h^2)$$

差分方程：

$$-\frac{1}{h^2}(u_{m+1}-2u_m+u_{m-1})+\frac{p_m}{2h}(u_{m+1}-u_{m-1})+q_m u_m=f_m$$

其中 $p_m=p(x_m), q_m=q(x_m), f_m=f(x_m)$

边值条件

b 点： $$u'(b)\approx\frac{1}{h}\left[u(x_N)-u(x_{N-1})\right]+\frac{h}{2}u''(\eta)$$

$$\eta\in(x_{N-1},x_N)$$

得到差分方程 $\dfrac{\beta_1}{h}(u_N-u_{N-1})+\beta_2 u_N=\beta$

同样 a 点： $\dfrac{\alpha_1}{h}(u_1 - u_0) + \alpha_2 u_0 = \alpha$

$$
\begin{cases}
-(1+\dfrac{h}{2}p_m)u_{m-1} + (2+h^2 q_m)u_m - \dfrac{h}{2}p_m u_{m+1} = h^2 f_m \\
(-\alpha_1 + h\alpha_2)u_0 + \alpha_1 u_1 = h\alpha \\
-\beta_1 u_{N-1} + (\beta_1 + h\beta_2)u_N = h\beta
\end{cases}
$$

$$m = 1,2,\cdots,N-1$$

（1.6）

上页 下页 返回

对于非线性边值问题

$$\begin{cases} u'' = f(x,u,u') & a < x < b \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta \end{cases}$$

差分方程为:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + f(x_m, u_m, \dfrac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2h}) = 0 \\ \qquad m = 1,2,\cdots N-1 \\ u_0 = \alpha, u_N = \beta \end{cases}$$

（1.7）

上页 下页 返回

例：取步长$h=\frac{1}{2}$，用差分法解边值问题

$$\begin{cases} -u'' + \dfrac{2}{(x+2)^2}u = 0 & -1 < x < 1 \\ u(-1) = 1, u(1) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

上页 下页 返回

解：

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{h^2}(u_2-2u_1+u_0)+\dfrac{2}{(-\frac{1}{2}+2)^2}u_1=0 \\ -\dfrac{1}{h^2}(u_3-2u_2+u_1)+\dfrac{2}{(0+2)^2}u_2=0 \\ -\dfrac{1}{h^2}(u_4-2u_3+u_2)+\dfrac{2}{(\frac{1}{2}+2)^2}u_3=0 \\ u_0=1, u_4=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

整理后得:

$$\begin{cases} \frac{20}{9}u_1 - u_2 = 1 \\ -u_1 + \frac{17}{8}u_2 - u_3 = 0 \\ -u_2 + \frac{52}{25}u_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\therefore u_1 = \frac{9}{20}(1 + u_2),$$

$$u_3 = \frac{25}{52}(\frac{1}{3} + u_3)$$

$$\therefore \begin{cases} u_1 = \frac{563}{828} \approx 0.679952 \\ u_2 = \frac{952}{1863} \approx 0.511004 \\ u_3 = \frac{3025}{7452} \approx 0.405931 \end{cases}$$

2. 极值原理和差分解的唯一性

定理 1：差分方程组（1.3）和（1.4）都有唯一的解。

3. 差分解的稳定性与收敛性

定理 2：差分方程（1.3）的解 u_m 满足：

$$|u_m| < \max\{|\alpha|, |\beta|\} + \frac{1}{2}(x_m - a)(b - x_m)\max|f_m|$$

$$1 \le m \le N \quad m = 1,2,\cdots,N-1$$

定理 3：设 u_m 是差分方程（1.3）的解，$u(x)$ 是它的原边值问题的精确解，则

$$|u(x_m) - u_m| \le \frac{(b-a)^2}{96}h^2 \max_{a\le x\le b}|u^{(4)}(x)|。$$