2、动力学规律(常见的简谐振动的装置）：

（1）弹簧振子　（2）单摆　(3)复摆

(a) $F \propto -x \ (\theta)$

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

(b) $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + \underline{\omega^2} x = 0$

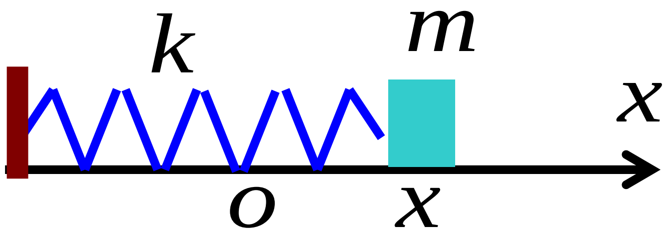
$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$

(c) $x = \underline{A} \cos\underline{(\omega t + \alpha)}$

ω（T）是由振动系统所决定的

上升的升降机里的单摆 $\omega = \sqrt{\dfrac{g+a}{l}}$

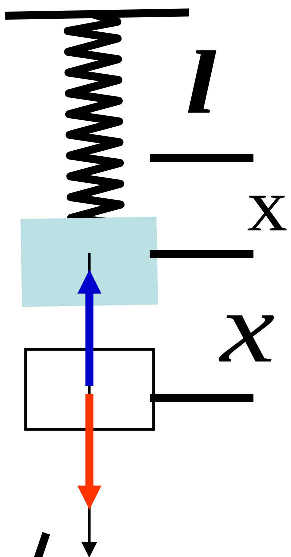
$A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}}$　$tg\alpha = -\dfrac{v_0}{x_0 \omega}$　由初始状态所决定的



——弹簧原长即坐标原点

$$-kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

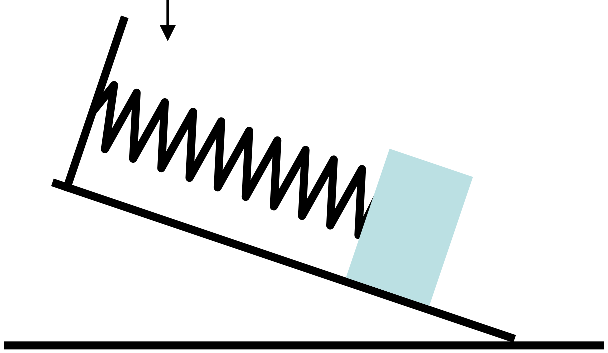
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$x_0 = \frac{mg}{k}$$

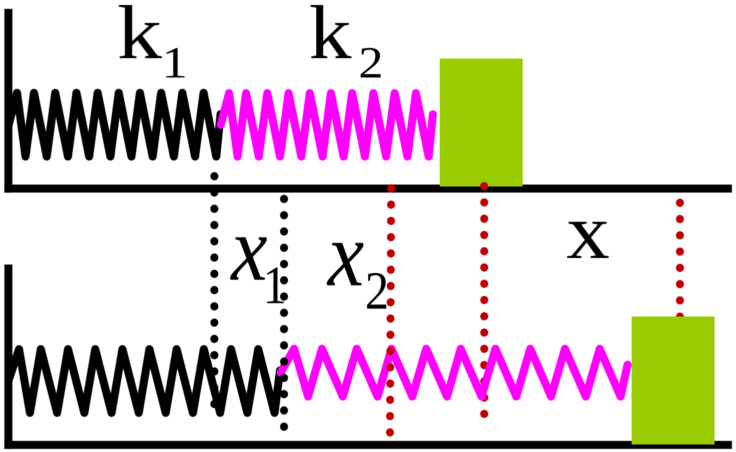
$$\begin{cases} mg - kx_0 = 0 \\ mg - k(x_0 + x) = ma \end{cases}$$

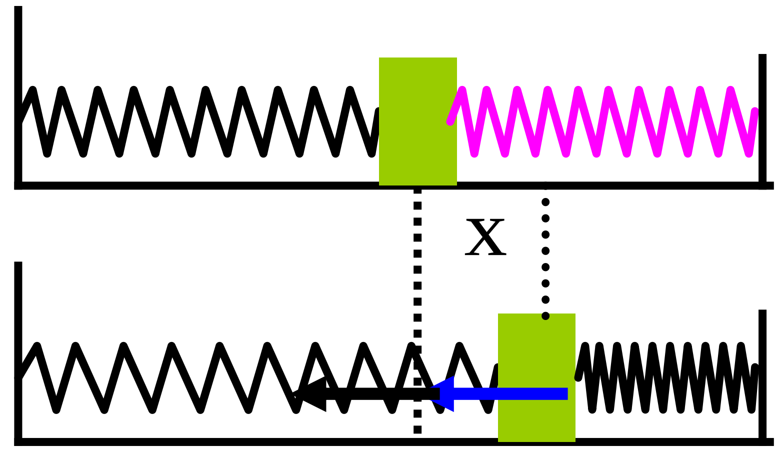
$$\Rightarrow -kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$



$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

弹簧的串联和并联：已知 k_1、k_2 求：k





$$F = k_1 x_1 = k_2 x_2$$

$$x = x_1 + x_2$$

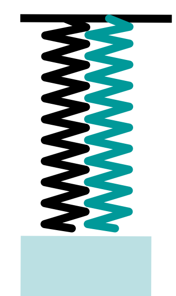
$$\frac{\cancel{F}}{k} = \frac{\cancel{F}}{k_1} + \frac{\cancel{F}}{k_2}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

$$F = -k_1 x - k_2 x$$

$$= -(k_1 + k_2)x$$

$$k = k_1 + k_2$$



3、简谐振动的三个基本物理量：

（1）振幅（Amplitude)

—— 振动中最大位移量 A

（2） 简谐振动的周期(period)和频率(frequency)

周期T ——完成一次振 动所需的时间

振动频率ν —— 单位时间内振动的次数。

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$$

$$A\cos(\omega t+\alpha) = A\cos(\omega(t+T)+\alpha)$$

$$= A\cos[\omega t+\omega T+\alpha] = A\cos[\omega t+\alpha+2\pi]$$

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

角频率（或圆频率）ω —单位时间内相位的变化值

（3）简谐振动的相位（phase)

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega t+\alpha) \\ v(t) = -\omega A\sin(\omega t+\boxed{\alpha}) \end{cases}$$

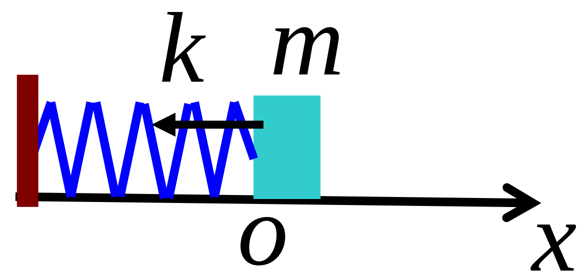
初相位

相位： $\varphi(t) = \omega t + \alpha$ ——决定物体的运动状态

例： 物体经过平衡位置

$$x(t) = 0 \Rightarrow \cos(\omega t+\alpha) = 0$$

$$\omega t + \alpha = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \Rightarrow\ v = -\omega A \\ \dfrac{3\pi}{2} & \Rightarrow\ v = \omega A \end{cases}$$



相位在 $0 \sim 2\pi$ 内变化，质点无相同的运动状态；

相差 $2n\pi$ (n为整数)质点运动状态全同.（周期性）

例1、一质点沿x轴作简谐振动，A=0.12m，T=2s。当t=0时，x_0=0.06m，$v_0>0$，求：

（1）此简谐振动的表达式；

（2）t=T/4时，质点的位置、速度、加速度；

（3）从初始时刻开始第一次通过平衡位置的时间。

解：(1) $\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$

$$x_0=A\cos\alpha \Rightarrow 0.06=0.12\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \alpha=\pm\frac{\pi}{3}$$

$$\because v_0=-A\omega\sin\alpha>0 \Rightarrow \sin\alpha<0 \Rightarrow \alpha=-\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore x=0.12\cos(\pi t-\frac{\pi}{3})\,(\mathrm{SI})$$

（2） $$x\left(\frac{T}{4}\right)=A\cos(\omega t+\varphi)=0.104\ (\mathrm{m})$$

$$v\left(\frac{T}{4}\right)=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)=-0.188\ (\mathrm{m/s})$$

$$a\left(\frac{T}{4}\right)=-\omega^2 x=-1.03\ (\mathrm{m/s^2})$$

（3） $$x=0\Rightarrow 0=0.12\cos(\pi t-\frac{\pi}{3})$$

$$\pi t-\frac{\pi}{3}=(2k-1)\frac{\pi}{2}\quad (k=1,2,3,\ldots)$$

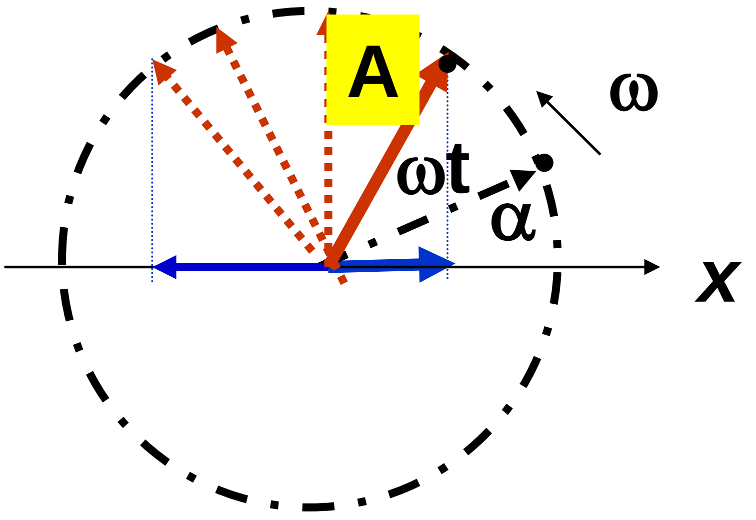
$$\Rightarrow t=k-\frac{1}{6}$$ 第一次通过 $$k=1\Rightarrow t=\frac{5}{6}\mathrm{s}$$

二、简谐振动的矢量图表示法

简谐振动与匀速圆周运动关系

$$x = R\cos(\omega t + \alpha)$$

匀速圆周运动	简谐振动
角速度ω	角频率ω
半径R	振幅 A
初时夹角α	初相位α



旋转矢量图

借助质点的匀速圆周运动来表示简谐运动的位置变化

任一时刻的速度

$$v_m = \omega A$$

$$v_x = -\omega A\cos[\frac{\pi}{2} - (\omega t + \alpha)]$$

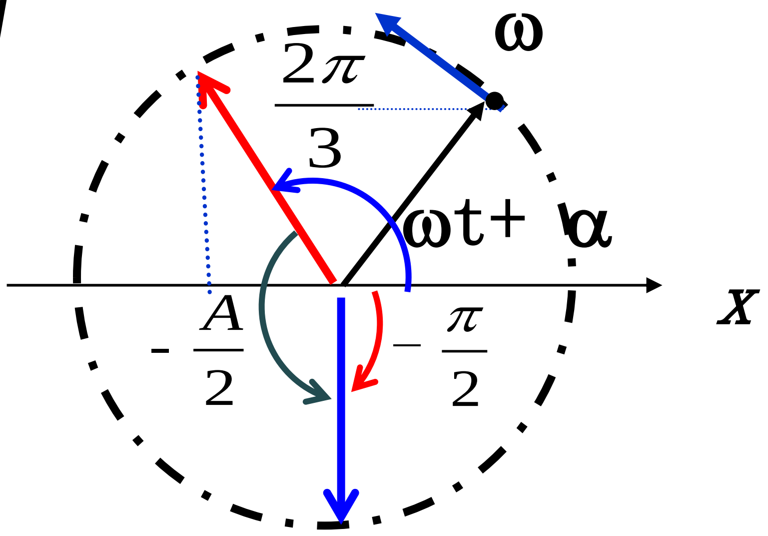
$$= -\omega A\sin(\omega t + \alpha)$$

上半圆　　v < 0

下半圆　　v > 0

$$x = -\frac{A}{2}, \quad v < 0$$

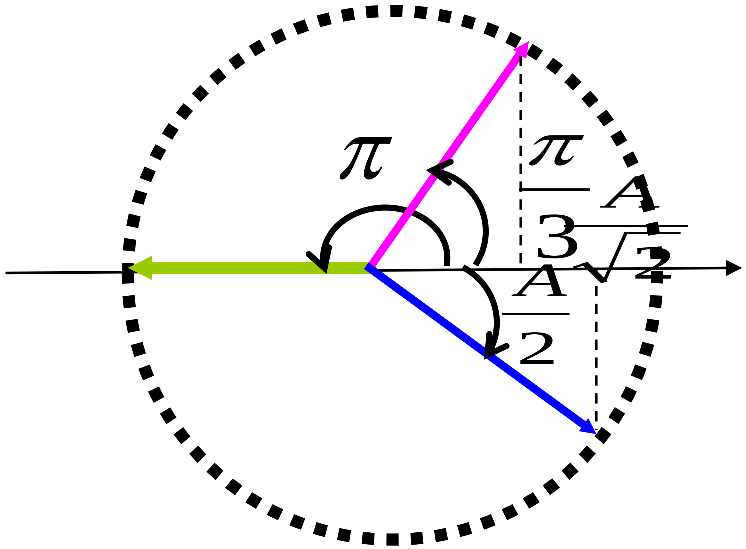
$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$$



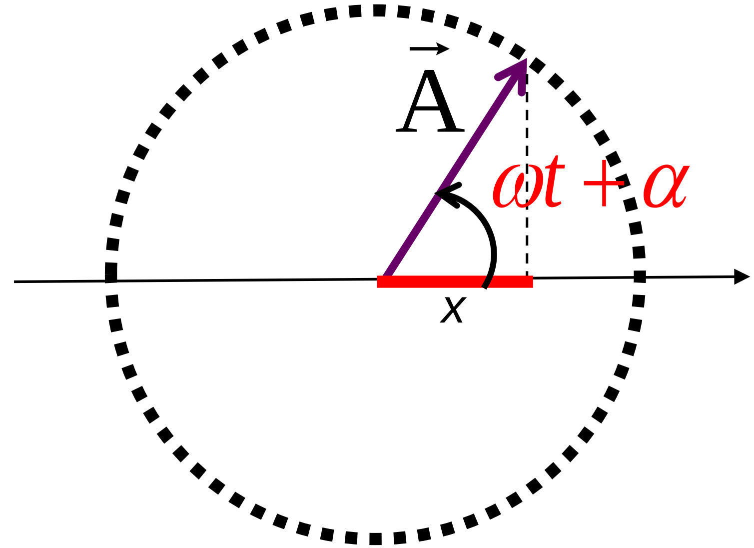
旋转矢量图

旋转矢量图中的相位具有直观的几何意义

P161 4-3



旋转矢量法



$$x_1 = A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\pi)$$

$$\cos(\omega t+\alpha) = \frac{x}{A}$$

上半圆v< 0

下半圆v > 0

$$x_2 = A\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{2})$$

$$x_3 = A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{3})$$

$$x_4 = A\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{4})$$

例1、一质点沿x轴作简谐振动，A=0.12m，T=2s。当t=0时 ，x_0=0.06m，$v_0>0$，求：

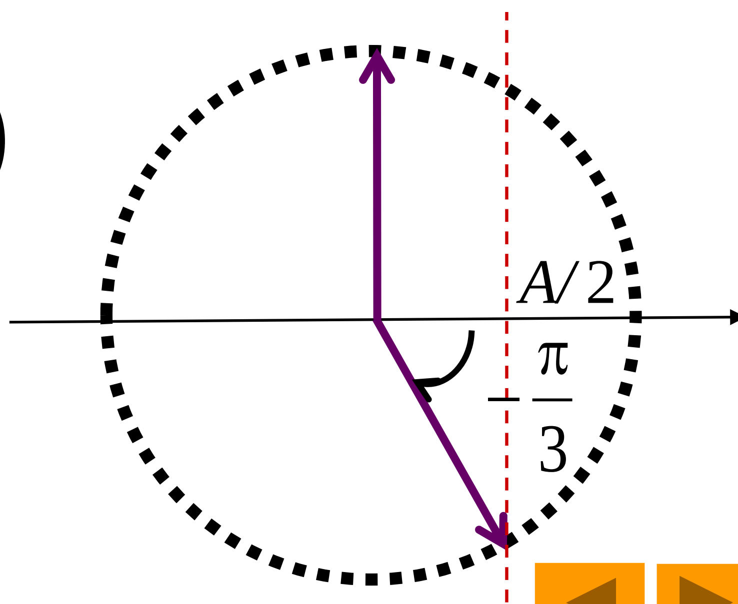
（1）此简谐振动的表达式；

（2）t=T/4时，质点的位置、速度、加速度；

（3）从初始时刻开始第一次通过平衡位置的时间。

解：(1) $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\pi$

$$\therefore x=0.12\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{3}\right)(\mathrm{SI})$$



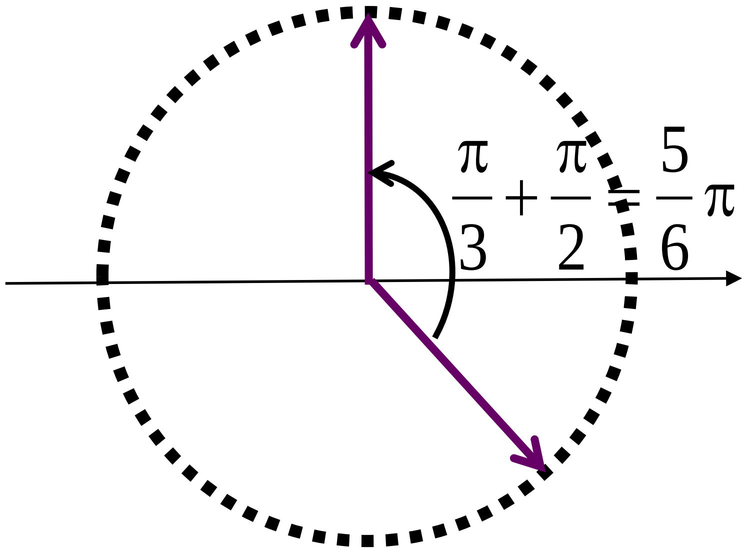
（3）从初始时刻开始第一次通过平衡位置的时间。

$$\therefore x = 0.12\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)(\mathrm{SI})$$

$$\Delta\varphi = \omega t_2 + \alpha - (\omega t_1 + \alpha) = \omega(t_2 - t_1) = \frac{2\pi}{T}\Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$$

$$\frac{\Delta t}{2} = \frac{\frac{5}{6}\pi}{2\pi} \Rightarrow \Delta t = \frac{5}{6}$$



三、简谐振动的能量

• 以弹簧振子为例
$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \alpha) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \alpha) \\ E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \alpha) \end{cases}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_k + \mathrm{E}_p = \frac{1}{2}\mathrm{k}\mathrm{A}^2$$

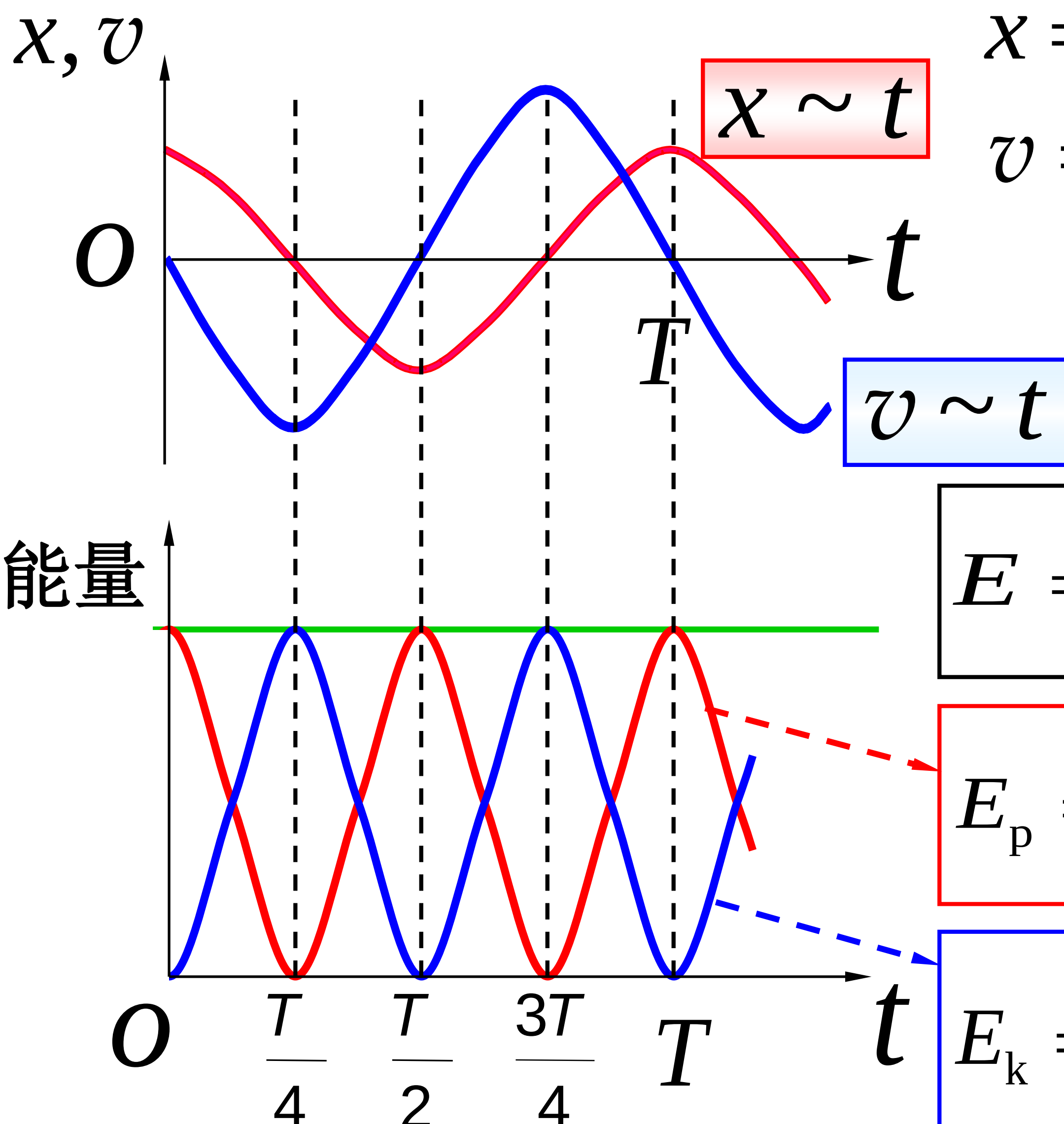
线性回复力是保守力，作简谐运动的系统机械能守恒

简谐运动能量图

$$\alpha = 0$$

$$x = A\cos\omega t$$

$$v = -A\omega\sin\omega t$$



$$\boxed{E = \frac{1}{2}kA^2}$$

$$\boxed{E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t}$$

$$\boxed{E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t}$$

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 \propto A^2$$

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = x_0^2 + \frac{mv_0^2}{k}$$

$$= \frac{2}{k}\left(\frac{k}{2}x_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2\right) = \frac{2}{k}E_0$$

若初始E_0 $A = \sqrt{\frac{2E_0}{k}}$

简谐振动的振幅决定于振动的初始能量

例2 质量为 0.10kg的物体，以 $A=1.0\times10^{-2}m$ 作简谐运动，$a_m=4.0m/s^2$；求：

（1）振动的周期（2）通过平衡位置的动能

（3）总能量

（4）物体在何处其动能和势能相等？

解（1）$a_{max}=A\omega^2 \quad \Rightarrow \omega=\sqrt{\dfrac{a_{max}}{A}}=20(s^{-1})$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=0.314s$$

（2） $E_{\mathrm{k,max}} = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{max}}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = 2.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}$

（3） $\mathrm{E} = \mathrm{E}_{k,\mathrm{max}} = 2.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}$

（4） $E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{p}}$ 时， $\mathrm{E}_p = \frac{1}{2}\mathrm{E} = 1.0 \times 10^{-3} J$

由 $E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

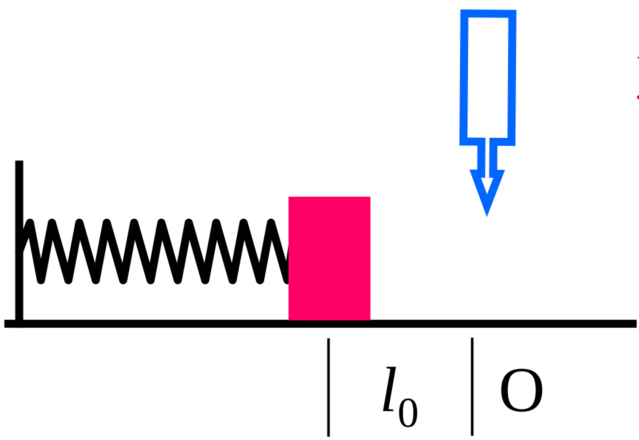
$x = \pm 0.707\, cm$

例3、已知：M、k，容器在光滑水平面上从l_0静止开始运动，平衡点O上有一滴管，每经过一次滴入m。求：

（1）滴入n滴后，容器运动到距O点的最远距离；

（2）第n+1滴与n滴的时间间隔。

解：（1）$$\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}kl_0^2$$



水平方向动量守恒

$$\mathrm{Mv}=(\mathrm{M}+\mathrm{nm})\mathrm{v}'$$

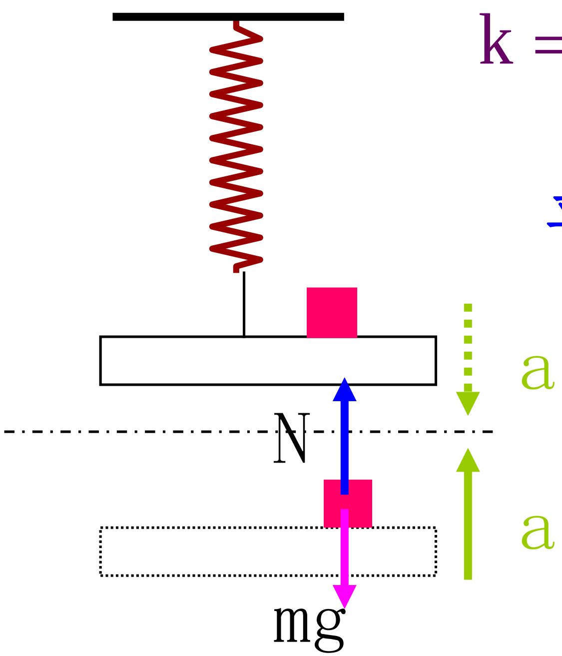
每次滴入前机械能守恒

$$\frac{1}{2}(\mathrm{M}+\mathrm{nm})\mathrm{v}'^2=\frac{1}{2}\mathrm{kx}_{\mathrm{max}}^2$$

$$\mathrm{T_n}=2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{M}+\mathrm{nm}}{\mathrm{k}}}$$

（2）时间间隔 $$\Delta \mathrm{t}=\mathrm{t}_{\mathrm{n}+1}-\mathrm{t}_{\mathrm{n}}=\frac{1}{2}\mathrm{T_n}$$

例4、一个轻弹簧在拉力60牛顿下可伸长30cm。将一物体悬挂在弹簧的下端并在它上面放一物体，它们的总质量为4kg，待其静止后再把物体向下拉10cm后释放。问
（1）此小物体是停在振动物体上面还是离开它？
（2）如果使放在振动物体上的小物体与振动物体分离，则振幅A需满足何条件？二者在何位置开始分离？



$$k=\frac{F}{x}=200\,N/m \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{50}(1/s)$$

平衡位置下方

$$N-mg=ma$$

$$\Rightarrow N=mg+ma\neq 0$$

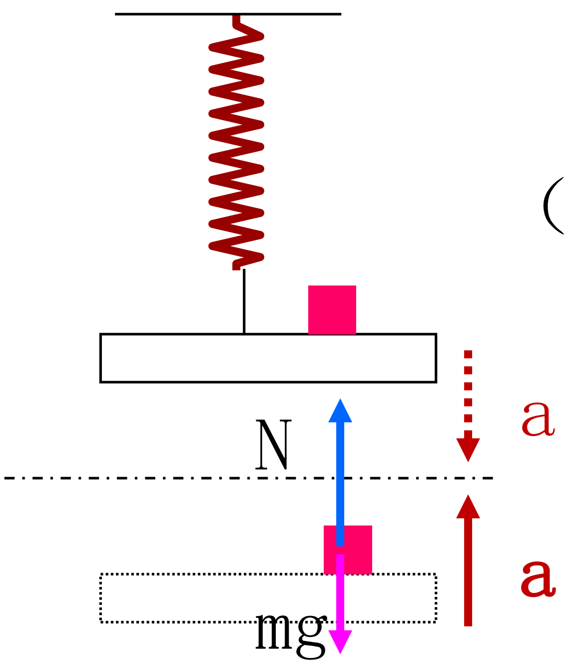
平衡位置上方 $\quad mg - N = ma$

$$\Rightarrow N = mg - ma$$

取最大加速度 $\quad \Rightarrow N = mg - ma_m$

$$= mg - m\omega^2 A = 19.8\text{N}$$

不会分离



（2）$N = mg - ma = 0$

$$g = a \le a_m(\omega^2 A)$$

$$\Rightarrow A \ge \frac{g}{\omega^2} \approx 19.6\text{cm}$$