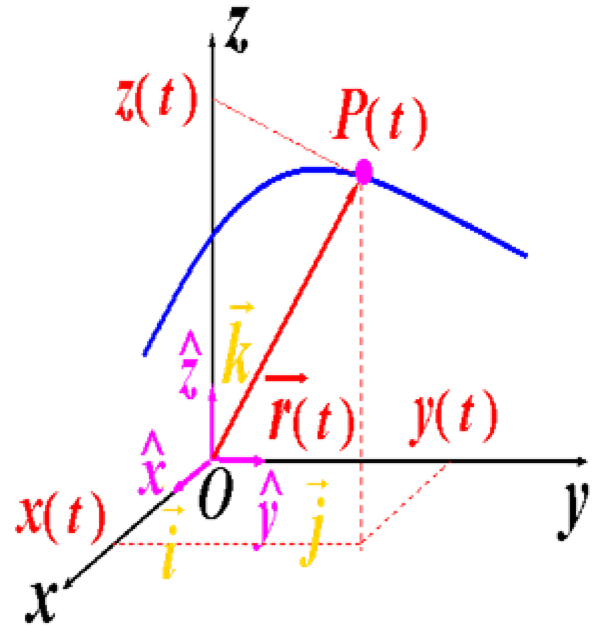
第二章 达朗贝尔原理

- §2.1 约束
- §2.2 自由度和广义坐标
- §2.3 虚功原理 达朗贝尔原理



机械运动的分类

- **自由运动**：坐标与速度完全取决于有明确形式的力和初始条件

质点i的自由运动微分方程 $$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \boxed{\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}}$$ 主动力

- **非自由运动（有约束运动）**：坐标与速度存在一些形式上不涉及任何力的限制关系

质点i的非自由运动微分方程 $$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)} + \boxed{\vec{R}_i}$$

约束力

注意：约束力不能事先就给出确切表达式，而是与质点运动状态有关

一、约束与约束方程

- 约　　束(constraint)：限制物体运动的条件
- 约束方程(constraint equation)：约束条件的数学表达式

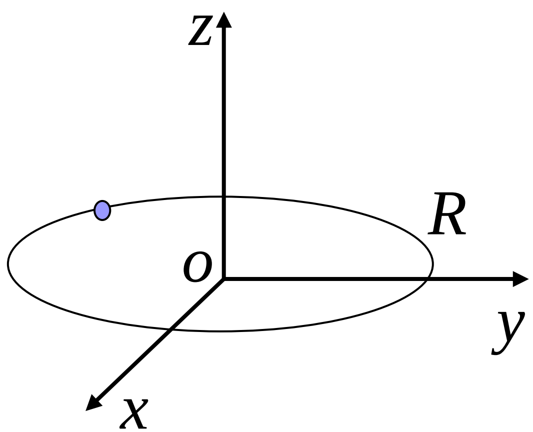
  - 几何约束（完整约束）
  - 运动约束（微分约束）
  - 定常约束（稳定约束）
  - 非定常约束（不稳定约束）
  - 双侧约束（不可解约束）
  - 单侧约束（可解约束）

2、几何约束与运动约束（限制系统位形变化？）

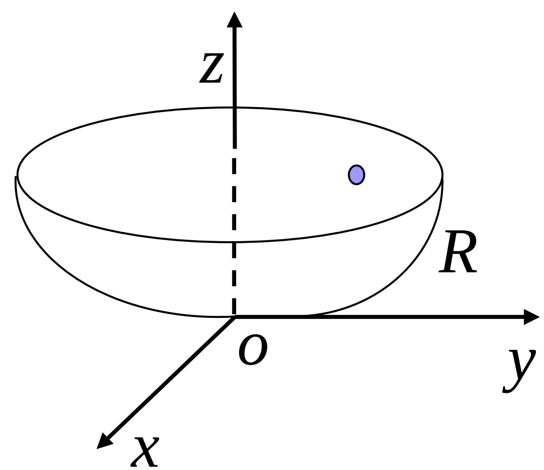
- 几何约束(geometric constraint)：

限制质点或质点系在空间几何位置的约束，方程中不含速度项

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_k; t) = 0$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}$$



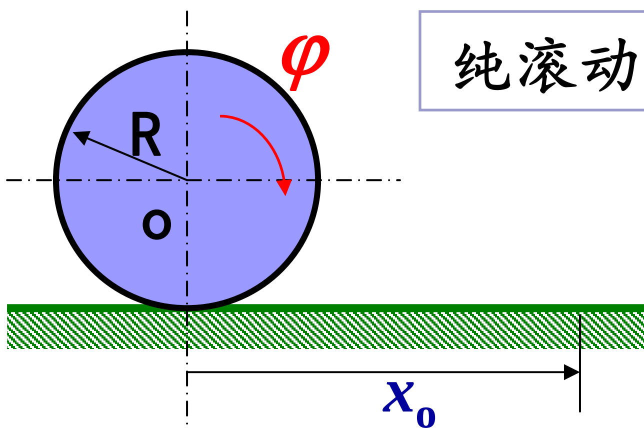
$$x^2 + y^2 = 2pz$$

2、几何约束与运动约束

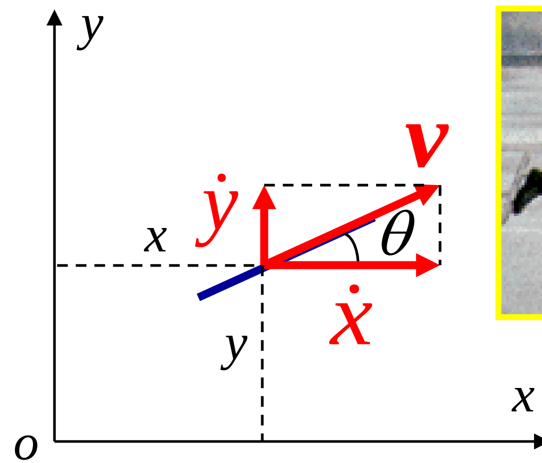
•运动约束(kinetic & differential constraint):

对质点或质点系的运动情况进行限制，约束方程中含有速度项的约束

$$f(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_k;\dot{\vec{r}}_1,\dot{\vec{r}}_2,\cdots,\dot{\vec{r}}_k;t)=0$$



纯滚动



约束方程：$\begin{cases} \dot{x}_o = \dot{\phi} R \\ \dot{y}_o = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_o = \phi R \\ y_o = R \end{cases}$

运动约束　几何约束

$$\tan\theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

•完整约束(holonomic constraint):

约束方程中不含速度项或含有速度项(可积)的约束

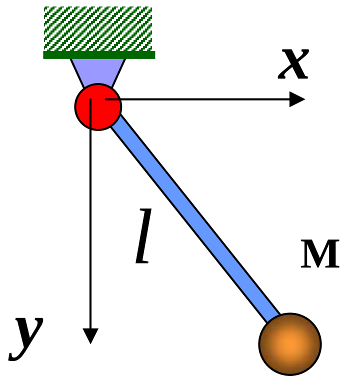
•非完整约束(nonholonomic constraint):

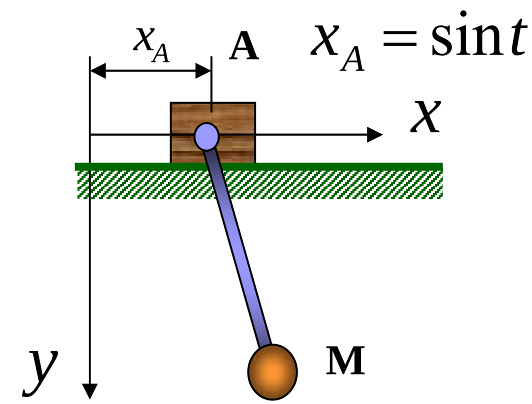
约束方程中含有速度项(不可积)的约束

- 几何约束必定是完整约束，但完整约束未必是几何约束。
- 非完整约束一定是运动约束，但运动约束未必是非完整约束。

例如：车轮沿直线轨道作纯滚动，$\dot{x}_o - r\dot{\phi} = 0$ 是微分方程，但经过积分可得到 $x_o - r\phi = 0$，该约束仍为完整约束。

3、定常约束与非定常约束（约束是否与时间有关？）





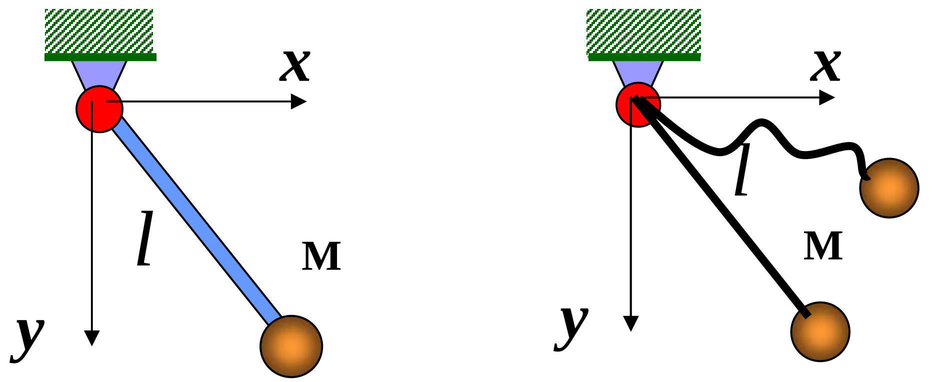
$$x^2 + y^2 = l^2$$

$$(x - \sin t)^2 + y^2 = l^2$$

•定常约束(steady constraint 稳定约束)：约束方程中不显含时间t的约束

•非定常约束(unsteady constraint不稳定约束)：约束方程中显含时间t的约束

4、双侧约束与单侧约束（约束的确定性？）



$$x^2+y^2=l^2 \qquad\qquad x^2+y^2\le l^2$$

•双侧约束(bilateral constraint)：约束方程为等式的约束

$$f(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_k;\dot{\vec{r}}_1,\dot{\vec{r}}_2,\cdots,\dot{\vec{r}}_k;t)=0$$

•单侧约束(unilateral constraint)：约束方程为不等式的约束

$$f(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_k;\dot{\vec{r}}_1,\dot{\vec{r}}_2,\cdots,\dot{\vec{r}}_k;t)\le 0$$

2.2 自由度和广义坐标

- 双侧约束（不可解约束）： 约束方程为等式的约束
- 单侧约束（可解约束）：约束方程为不等式的约束
- 定常约束（稳定约束）：约束方程中不显含时间t的约束
- 非定常约束（不稳定约束）： 约束方程中显含时间t的约束
- 几何约束（完整约束）：约束方程中不含速度项的约束
- 运动约束（微分约束）：约束方程中含速度项的约束

$$f(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t)=0 \xrightarrow{\text{可积}} \text{几何约束}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{不可积的运动约束}\\ \text{可解约束}\end{array}\right\}\text{不完整约束}\quad\text{完整约束}\quad\text{完整系}$$

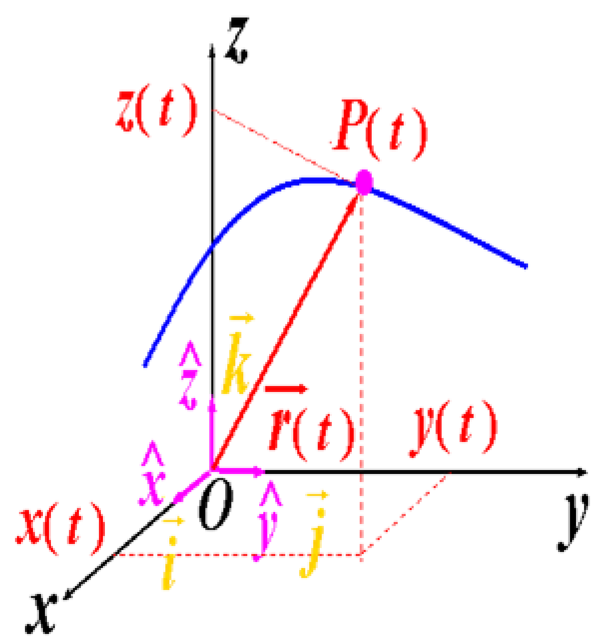
5、约束对运动的影响

- 牛顿力学
  - 将约束看作是有未知力作用在质点上，使其运动受限制。
  - 约束都可以用未知力代替。
  - 改变运动的原因都归结为力。
- 分析力学
  - 将约束看作是强制性的。
  - 先找到约束允许的可能运动，再按照一定的规则从所有可能的运动中得到真实的运动。
  - 约束与力都是改变运动的原因。

问题：

1. 用什么量描述质点(系)在空间的位置？

2. 描述其在空间位置的量有多少个？



2.2 自由度和广义坐标

- ✓ 一个自由质点在空间的位置：（ x, y, z ）　　3个
- ✓ 一个自由质点系在空间的位置：(x_i, y_i, z_i) (i=1,2…,n)　3n个
- ✓ 对一个非自由质点系，受s个完整约束，（3n-s)个独立坐标。

确定一个受完整约束的质点系的位置所需的独立坐标的数目，称为该质点系的**自由度数（degree of freedom)**，简称为**自由度**。

确定系统位置的参数数目：N

独立的约束方程数：s

自由度：k

$$\boxed{k = N - s}$$

2.2 自由度和广义坐标

用来确定质点系位置的独立参数，称为广义坐标。

由n个质点组成的质点系，受到s个完整约束，其n个位矢并不独立，具有$k=3n-s$个自由度。取k个独立变量q_1、q_2、……、q_k为其广义坐标，质点系内各质点的坐标及矢径可表为广义坐标的函数。

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \cdots, q_k; t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \cdots, q_k; t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \cdots, q_k; t) \end{aligned}\right\}$$

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_k; t)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

2.2 自由度和广义坐标

- 通常，n 与 s 很大而k 很小。为了确定质点系的位置，用适当选择的k 个参数（相互独立），要比用$3n$个直角坐标和s个约束方程方便得多。

- 广义坐标的选择不是唯一的。广义坐标可以取线位移（x, y, z, s 等）也可以取角位移（如α，β，γ，φ 等）。

- 在完整约束情况下，广义坐标的数目就等于自由度数目。

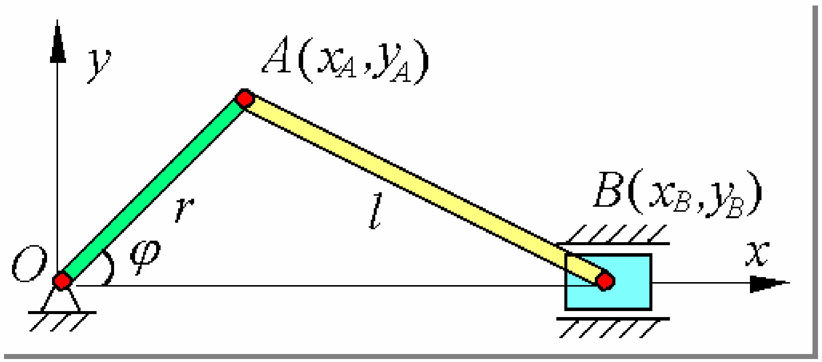
2.2 自由度和广义坐标

问题： 确定系统的自由度和广义坐标

例1：曲柄连杆机构中，可取曲柄*OA*的转角φ为广义坐标，则：

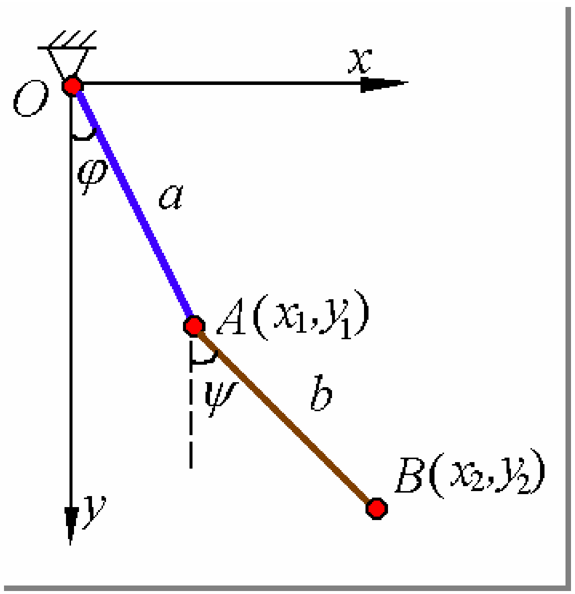
$$x_A = r\cos\varphi \ , \quad y_A = r\sin\varphi$$

$$x_B = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi} \ , \quad y_B = 0$$



广义坐标选定后，质点系中每一质点的直角坐标都可表示为广义坐标的函数。

例2：双锤摆。设只在铅直平面内摆动。



$$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$$

$$x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}=a^2$$

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=b^2$$

（稳定 不可解 几何约束）

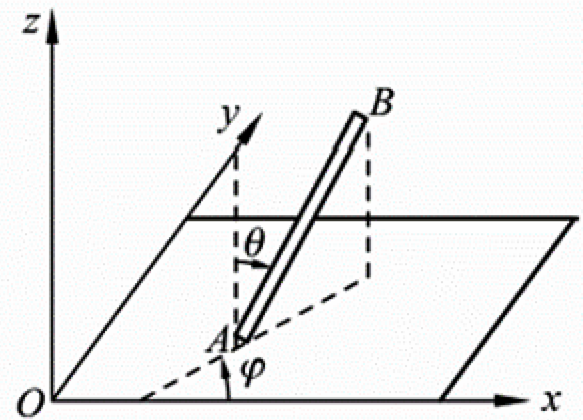
两个自由度

------取广义坐标φ，ψ

$$x_1=a\sin\varphi\ ,\ y_1=a\cos\varphi$$

$$x_2=a\sin\varphi+b\sin\psi\ ,\ y_2=a\cos\varphi+b\cos\psi$$

例3： 长为l的细杆AB的一端被约束在水平桌面上，确定其自由度.



解：细杆的位置由杆的两端的坐标(x_A, y_A, z_A)和(x_B, y_B, z_B)确定，因存在着2个约束方程：

$$\begin{cases} z_A = 0 \\ (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = l^2 \end{cases}$$

杆的自由度为 $s = 6 - 2 = 4$

如果选择 $x_A, y_A, \theta, \varphi$为广义坐标

$$\begin{cases} x_A = x_A \\ y_A = y_A \\ z_A = 0 \\ x_B = x_A + l\sin\theta\cos\varphi \\ y_B = y_A + l\sin\theta\sin\varphi \\ z_B = l\cos\theta \end{cases}$$

虚功原理

由 伯努利 （Bornoulli，1717)提出

由 拉格朗日（Lagrange，1764)完善

- 虚功原理是静力学的普遍原理，它给出了质点系平衡的充分和必要条件。

- 什么是虚位移
- 什么是虚功
- 什么是虚功原理的适用条件

一、实位移和虚位移

1. 实位移 （ real displacement ）

质系实际发生的位移。同时满足动力学方程、初始条件和约束条件。

$$f_\alpha(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n; t) = 0 \qquad \alpha = 1,2,\cdots,k$$

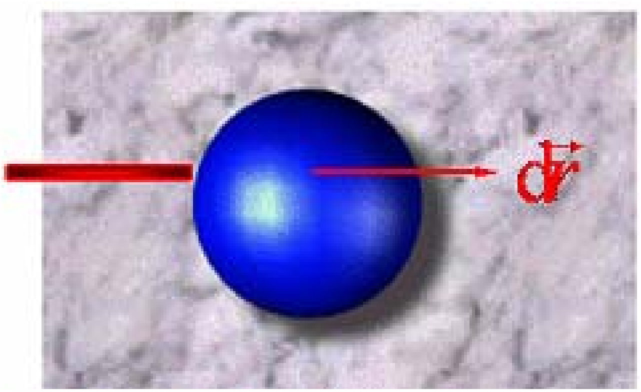
$$f_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots \vec{r}_n, t) = 0$$

$$f_i(\vec{r}_1 + \mathrm{d}\vec{r}_1, \cdots \vec{r}_n + \mathrm{d}\vec{r}_n, t + \mathrm{d}t) = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}f_i = \sum_j^N \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}_j} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_j + \frac{\partial f_i}{\partial t}\mathrm{d}t = 0$$

对稳定约束

$$\mathrm{d}f_i = \sum_j^N \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}_j} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_j = 0$$



真实位移必须满足运动微分方程（牛顿定律）

2、虚位移 （virtual displacement）

在给定瞬时，质系为约束所允许的、可能发生的无限小位移。用δr表示。

$$f_i(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots\vec{r}_n,t)=0$$

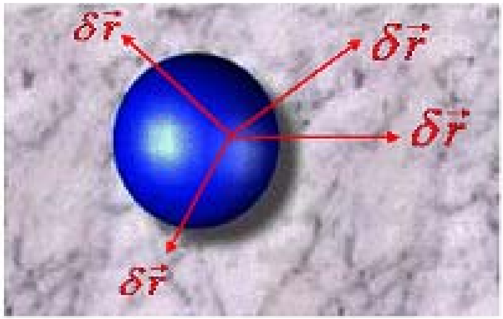
$$f_i(\vec{r}_1+\delta\vec{r}_1,\cdots\vec{r}_n+\delta\vec{r}_n,t)=0$$

$$\Rightarrow \quad \delta f_i=\sum_j^N\frac{\partial f_i}{\partial\vec{r}_j}\cdot\delta\vec{r}_j=0$$

$$\Downarrow$$

$$\delta f_i=\sum_j^N\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\cdot\delta x_j+\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\cdot\delta y_j+\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\cdot\delta z_j\right)=0$$

虚位移的发生不需要时间！



虚位移有无穷多个！

2.3 虚功原理 达朗贝尔原理

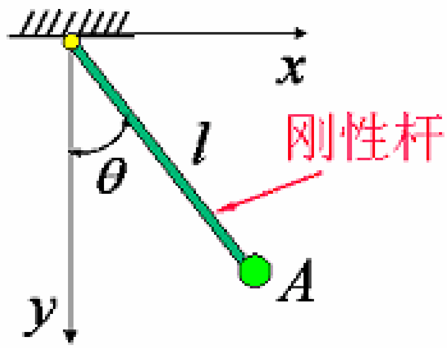
等时变分（补充）

$$f_i(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots\vec{r}_n,t)=0$$

微分 → $$\sum_j^N \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}_j}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_j+\frac{\partial f_i}{\partial t}\mathrm{d}t=0$$

等时变分 → $$\sum_j^N \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}_j}\cdot \delta\vec{r}_j=0$$

等时变分运算与微分运算类似，但$\delta t = 0$。



$$x^2+y^2-l^2=0$$

↓ 等时变分

$$2x\delta x+2y\delta y=0$$

将矢径进行等时变分就是虚位移，将几何约束方程进行等时变分就可以得到虚位移之间的关系。

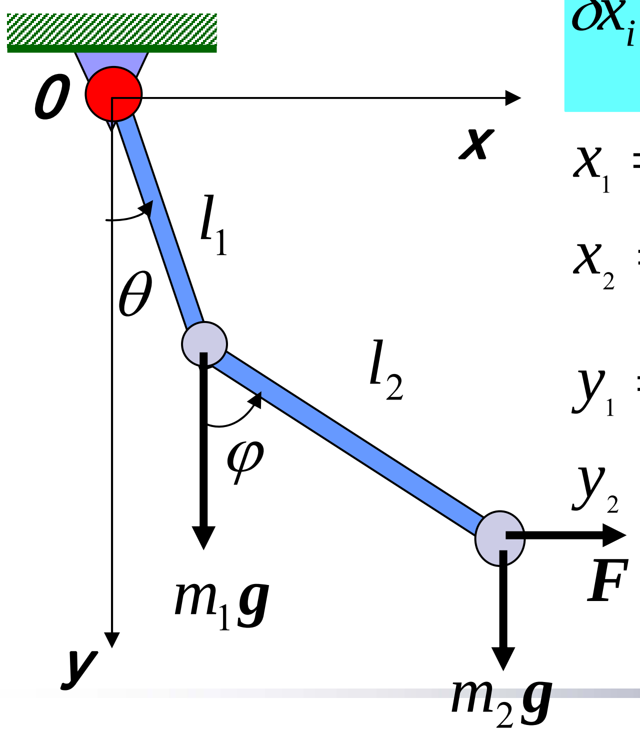
2.3 虚功原理 达朗贝尔原理

问题：若质点系有k个自由度，力的作用点的坐标可以表示为：

$$\begin{cases} x_i = x_i(q_1,\cdots,q_k) \\ y_i = y_i(q_1,\cdots,q_k) \\ z_i = z_i(q_1,\cdots,q_k) \end{cases}$$

如何求 δx_i　δy_i　δz_i

例如：



$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j \qquad \delta y_i = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\delta q_j \qquad \delta z_i = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

$$x_1 = l_1 \sin\theta \qquad \delta x_1 = l_1 \cos\theta\delta\theta$$

$$x_2 = l_1 \sin\theta + l_2 \sin\varphi \qquad \delta x_2 = l_1 \cos\theta\delta\theta + l_2 \cos\varphi\delta\varphi$$

$$y_1 = l_1 \cos\theta \qquad \delta y_1 = -l_1 \sin\theta\delta\theta$$

$$y_2 = l_1 \cos\theta + l_2 \cos\varphi \qquad \delta y_2 = -l_1 \sin\theta\delta\theta - l_2 \sin\varphi\delta\varphi$$

$\delta\theta$、$\delta\varphi$是独立的

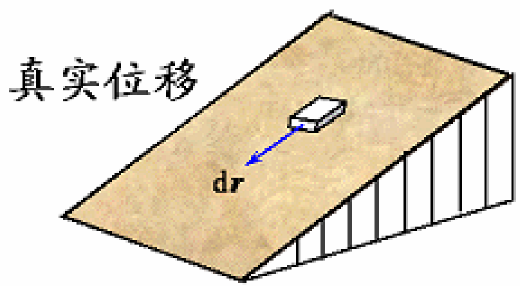
3. 实位移与虚位移的关系

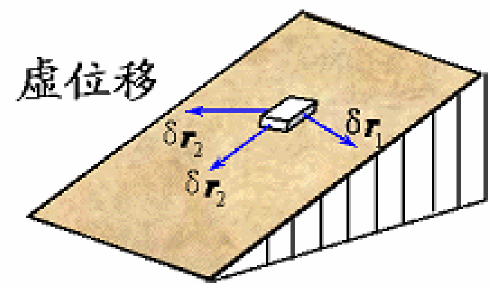
➢稳定约束情况

实位移 $$\sum_{j}^{N}\frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}_j}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_j=0$$

虚位移 $$\sum_{j}^{N}\frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}_j}\cdot \delta\vec{r}_j=0$$

在稳定约束情况下，实位移是无数虚位移之中的一个。





➢不稳定约束情况

实位移 $$\sum_{j}^{N}\frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}_j}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_j+\frac{\partial f_i}{\partial t}\mathrm{d}t=0$$

虚位移 $$\sum_{j}^{N}\frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}_j}\cdot \delta\vec{r}_j=0$$

在不稳定约束情况下，实位移不一定是无数虚位移中的一个。

实例分析

约束方程

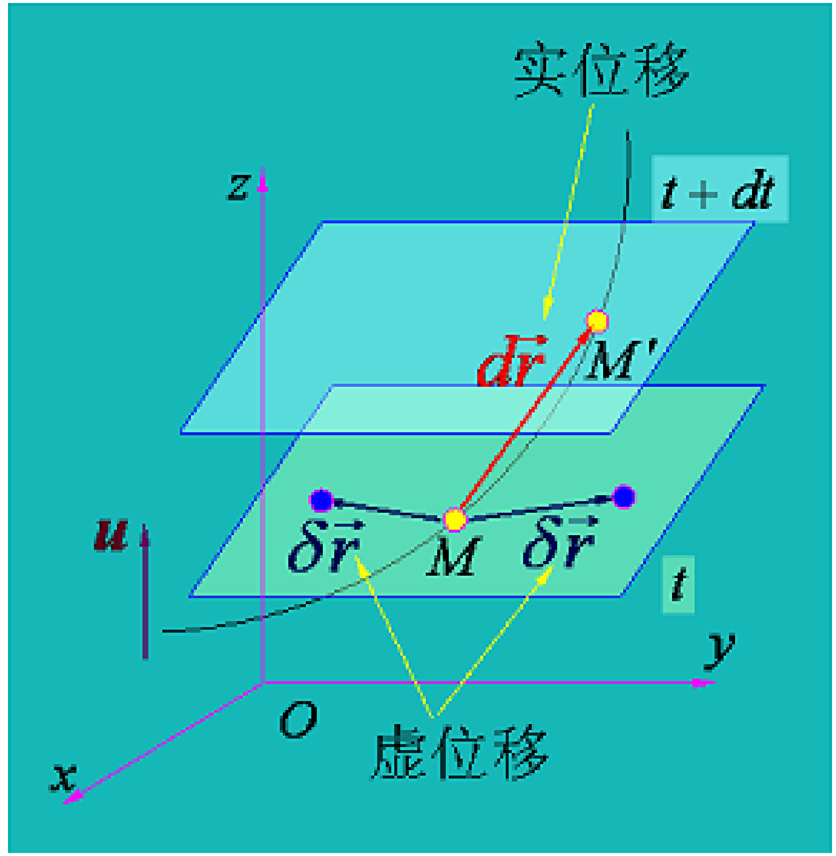
$$f = z - ut = 0$$

实位移

$$\mathrm{d}z - u\mathrm{d}t = 0$$

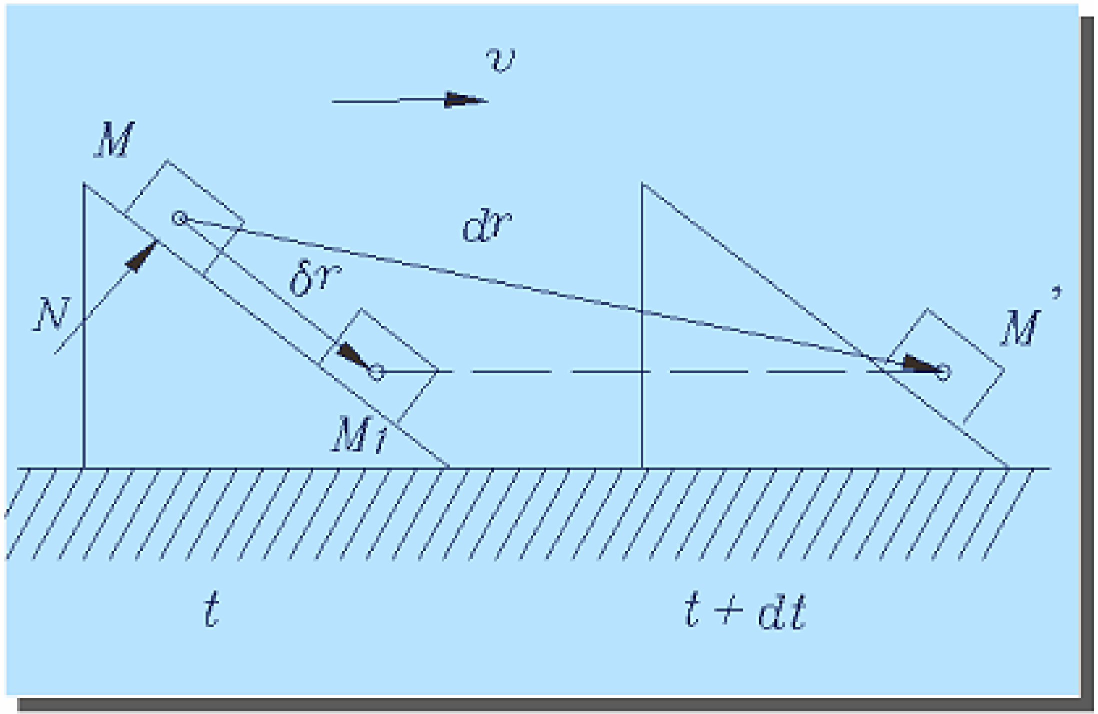
虚位移

$$\delta z = 0$$



质系虚位移的发生与时间 t 的变化无关（$\delta t = 0$），因此它就是约束被“冻结”后，质系在此瞬时为约束所允许的任意无限小位移。

2.3 虚功原理 达朗贝尔原理



$dr \neq \delta r$

真实位移不仅与约束有关，还与运动、受力有关

讨论：虚位移与真正运动时发生的实位移不同：

- 实位移：一定的力作用下和给定的初条件下运动实际发生的

  虚位移：在约束容许的条件下可能发生的

- 实位移：具有确定的方向，可能是微小值，也可能是有限值虚位移：微小位移，视约束情况可能有几种不同的方向

- 实位移：在一定的时间内发生的

  虚位移：只是纯几何的概念，完全与时间无关

4. 虚位移的方向

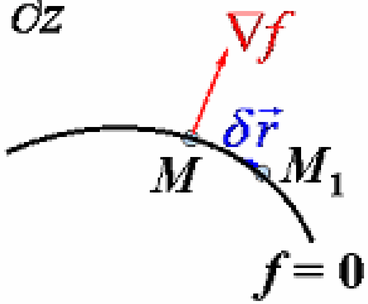
非自由质点的虚位移垂直于约束曲面在该点的法线，即虚位移总是位于约束曲面的切平面。

约束方程 $f(x,y,z)=0$　　虚位移 $\delta\vec{r}=\delta x\vec{i}+\delta y\vec{j}+\delta z\vec{k}$

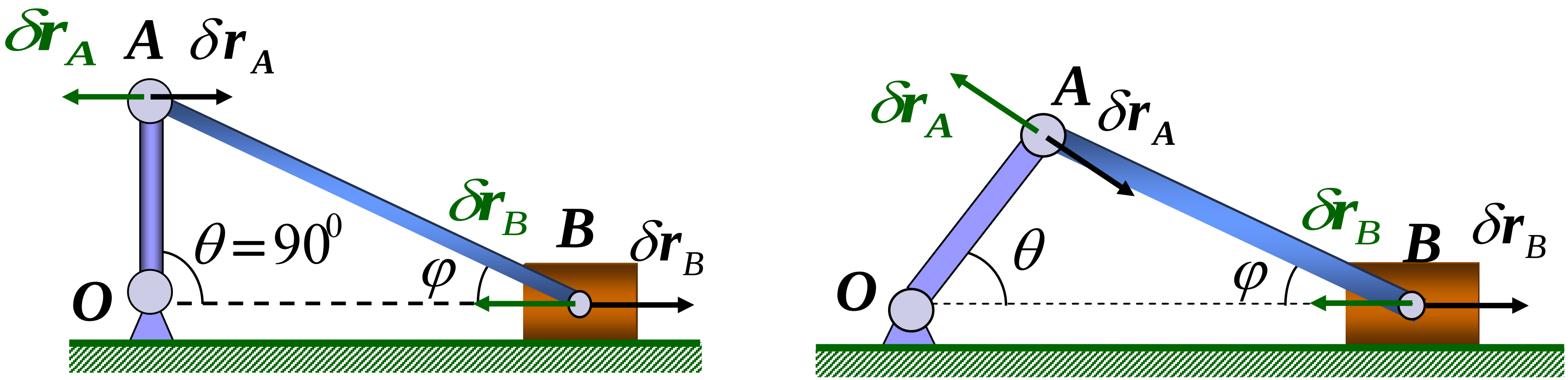
在M_1点　$f(x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z)=0$

$$f(x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z)$$
$$=f(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z$$
$$=0$$

$$\therefore \nabla f\cdot\delta\vec{r}=0$$



讨论：虚位移的特点



1、不同瞬时或位置，虚位移不同

2、必须满足约束条件 $[\delta \boldsymbol{r}_A]_{AB} = [\delta \boldsymbol{r}_B]_{AB}$

3、是无限小的，不是有限位移

4、虚位移不只有一个或一组 $\{\delta \boldsymbol{r}_A, \delta \boldsymbol{r}_B\}$ $\{\delta \boldsymbol{r}_A, \delta \boldsymbol{r}_B\}$

二、虚功

- 虚功（virtual work): $\delta W = \vec{\mathbf{F}} \bullet \delta \vec{\mathbf{r}}$

  作用于质点(系)上的力在虚位移上所作的假想功。

质点

$$\vec{\mathbf{F}} = F_x \vec{\mathbf{i}} + F_y \vec{\mathbf{j}} + F_z \vec{\mathbf{k}}$$

$$\delta \vec{\mathbf{r}} = \delta x \vec{\mathbf{i}} + \delta y \vec{\mathbf{j}} + \delta z \vec{\mathbf{k}}$$

$$\delta W = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z$$

质点系

主动力 $\vec{F}_i$　　约束力 $\vec{R}_i$

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \bullet \delta \vec{\mathbf{r}}_i$$

三、理想约束

- 理想约束(ideal constraint)： 质点系中所有约束力在任何虚位移上所作虚功之和为零的约束。

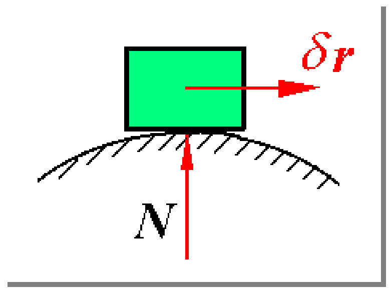
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \bullet \delta \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}} = 0$$

讨论： 哪些约束是理想约束?

理想约束的例子：光滑面、光滑曲线、光滑铰链、刚性杆、不可伸长的绳、纯滚动。

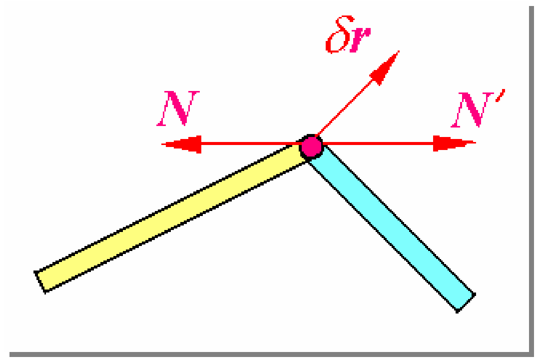
理想约束的典型例子：

1、光滑支承面

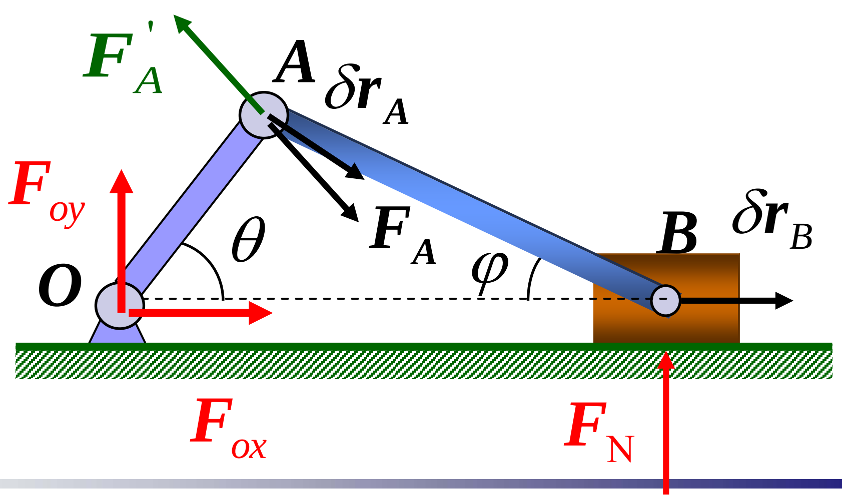


$$\delta W_N = \overline{N} \cdot \delta \overline{r} = 0$$

2、光滑铰链



$$\sum \delta W_N = \overline{N} \cdot \delta \overline{r} + \overline{N}' \cdot \delta \overline{r} = 0$$

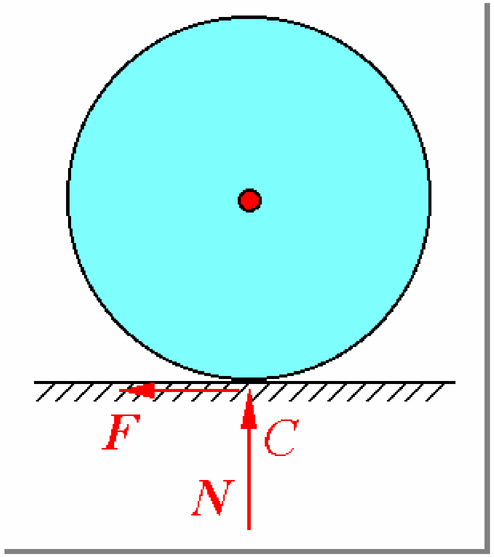


理想约束的典型例子：

3、无重刚杆

4、不可伸长的柔索

5、刚体在粗糙面上的纯滚动



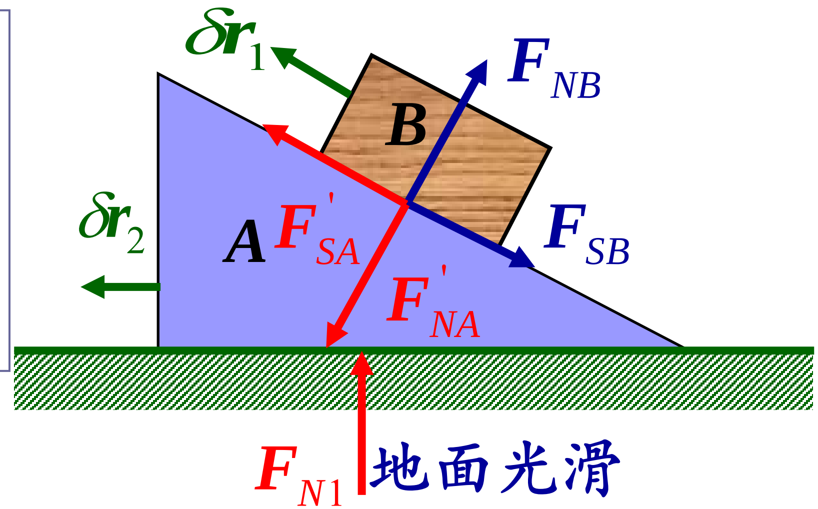
$$\sum \delta W_N = (\overline{N} + \overline{F}) \cdot \delta r_C = 0$$

例题： 若斜块A和滑块B之间

（1）：有摩擦；

（2）：无摩擦。

则该系统是否是理想约束



（1）：有摩擦　是非理想约束

$$(\boldsymbol{F}_{NB}+\boldsymbol{F}_{SB})\bullet(\delta\boldsymbol{r}_1+\delta\boldsymbol{r}_2)+(\boldsymbol{F}'_{NA}+\boldsymbol{F}'_{SA})\bullet\delta\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{F}_{N1}\bullet\delta\boldsymbol{r}_2$$

$$=(\boldsymbol{F}_{NB}+\boldsymbol{F}_{SB})\bullet\delta\boldsymbol{r}_1+\underline{(\boldsymbol{F}_{NB}+\boldsymbol{F}_{SB})\bullet\delta\boldsymbol{r}_2+(\boldsymbol{F}'_{NA}+\boldsymbol{F}'_{SA})\bullet\delta\boldsymbol{r}_2}+\underline{\boldsymbol{F}_{N1}\bullet\delta\boldsymbol{r}_2}$$

$$=(\boldsymbol{F}_{NB}+\boldsymbol{F}_{SB})\bullet\delta\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{F}_{SB}\bullet\delta\boldsymbol{r}_1<0$$

（2）：无摩擦　是理想约束　$\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i\bullet\delta\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}}=0$

稳定约束 $f\left(x,y,z\right)=0$

不稳定约束 $f\left(x,y,z,t\right)=0$

不可解约束

几何约束（完整约束）

运动约束（微分约束） $f\left(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t\right)=0$

可积

不可积

$f\left(x,y,z\right)\leq 0$

$f\left(x,y,z,t\right)\leq 0$

可解约束

非完整约束

实位移 $d\vec{r}$ 虚位移 $\delta\vec{r}$

虚功 $\delta W=\vec{F}\cdot\delta\vec{r}$ 理想约束 $\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i\bullet\delta\vec{r}=0$

四、虚功原理(virtual work principle)

具有双面、完整、 定常、理想约束的静止的质点系， 在给定位置保持平衡的充要条件是：该质点系所有主动力在系统的任何虚位移上所作的虚功之和等于零。

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{i}} \bullet \delta \vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{i}} = 0$$

证明：(1) 必要性：质点系处于平衡 $\Longrightarrow$ $\sum \overline{F}_i \cdot \delta \overline{r}_i = 0$

∵质点系处于平衡 ∴选取任一质点*i*也平衡。

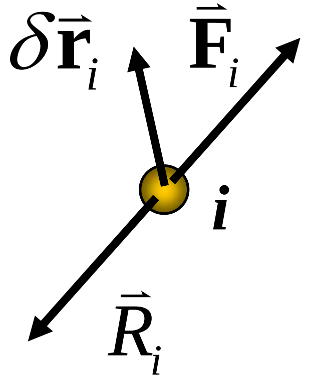
$$\overline{F}_i + \overline{R}_i = 0$$

对质点*i*的任一虚位移 $\delta \overline{r}_i$，有 $(\overline{F}_i + \overline{R}_i) \cdot \delta \overline{r}_i = 0$

对整个质点系：

$$\sum (\overline{F}_i + \overline{R}_i) \cdot \delta \overline{r}_i = 0$$

$$\sum \overline{F}_i \cdot \delta \overline{r}_i + \sum \overline{R}_i \cdot \delta \overline{r}_i = 0$$



由于是理想约束 $\sum \overline{R}_i \cdot \delta \overline{r}_i = 0$

所以 $\sum \overline{F}_i \cdot \delta \overline{r}_i = 0$

(2) 充分性：质点系满足$\sum \overline{F}_i \cdot \delta \overline{r}_i = 0$ ⟹ 质点系一定平衡。

若 $\sum \overline{F}_i \cdot \delta \overline{r}_i = 0$，而质点系不平衡，则至少有第*i*个质点不平衡。

$$\overline{F}_i + \overline{R}_i = \overline{N}_i \neq 0$$

在$\overline{N}_i$方向上产生实位移$d\overline{r}_i$ ，取 $\delta \overline{r}_i = d\overline{r}_i$ ，则

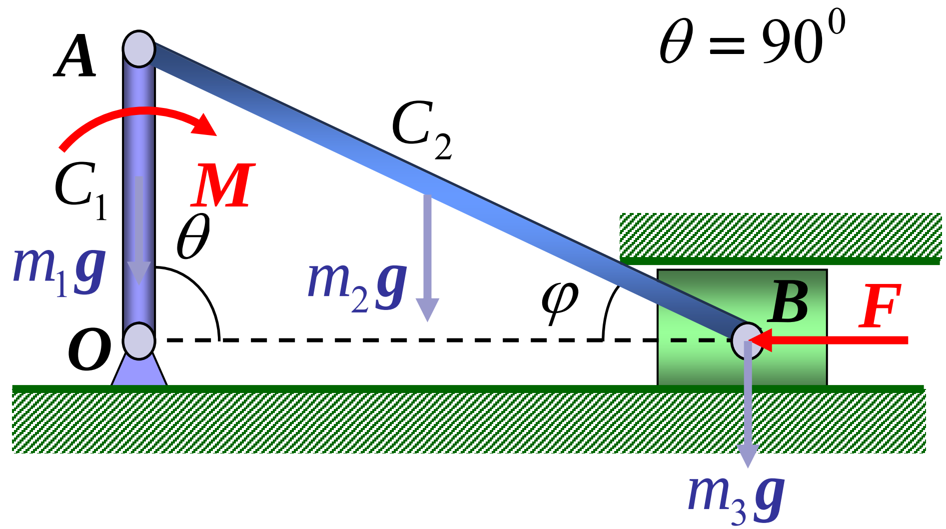
$$(\overline{F}_i + \overline{R}_i) \cdot \delta \overline{r}_i = \overline{N}_i \cdot \delta \overline{r}_i > 0$$

对质点系：$\sum (\overline{F}_i + \overline{R}_i) \cdot \delta \overline{r}_i > 0$ (理想约束下，$\sum \overline{R}_i \cdot \delta \overline{r}_i = 0$)

$\therefore \ \sum \overline{F}_i \cdot \delta \overline{r}_i > 0$ 与前题条件矛盾

故 $\sum \overline{F}_i \cdot \delta \overline{r}_i = 0$时质点系必处于平衡。

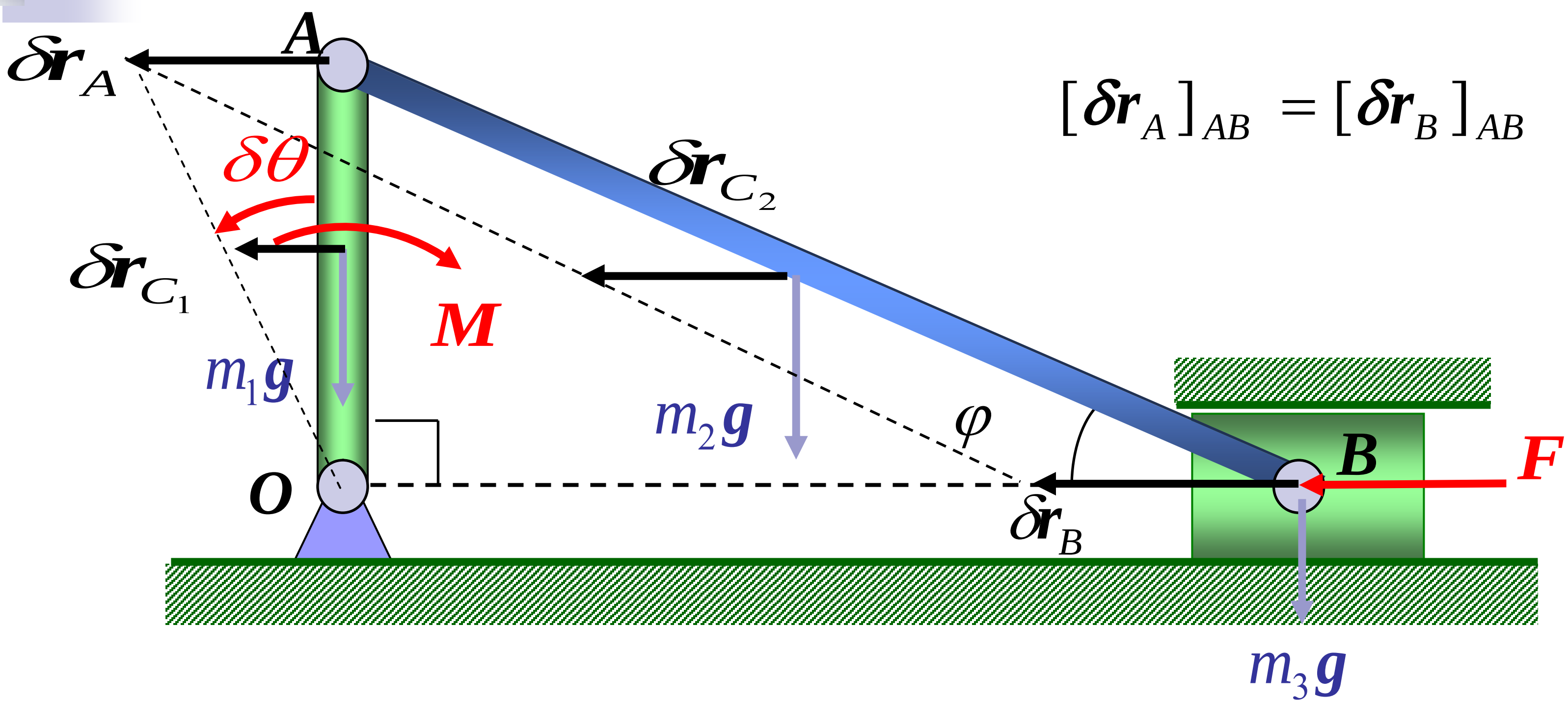
例4：已知 $OA=L$，求系统在图示位置平衡时，力偶矩M与力F的关系（不计摩擦）



基本步骤：

1. 确定系统是否满足原理的应用条件
2. 分析主动力作用点的虚位移
3. 求主动力的虚功之和

$$\sum \overline{F_i} \cdot \delta \overline{r_i} = 0$$



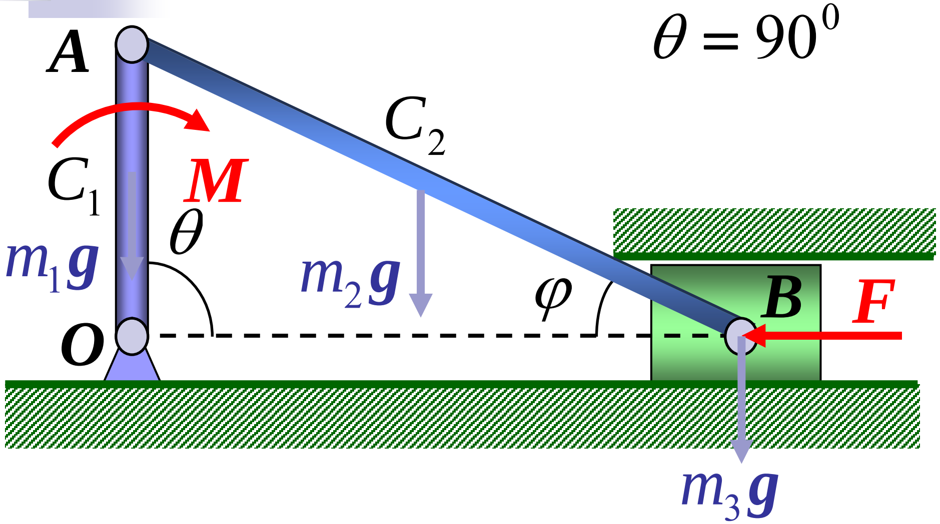
$$[\delta\boldsymbol{r}_A]_{AB} = [\delta\boldsymbol{r}_B]_{AB}$$

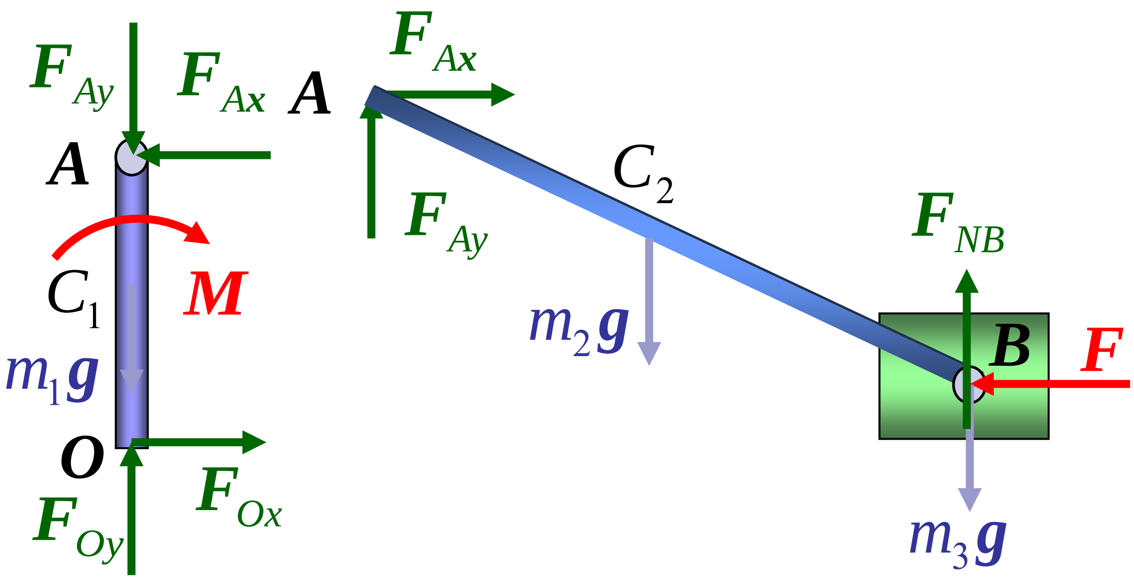
$$\because \delta\boldsymbol{r}_A = \delta\boldsymbol{r}_B \quad \delta r_A = \delta r_B = L\delta\theta \qquad \sum \delta W = 0 \quad F\delta r_B - M\delta\theta = 0$$

$$FL\,\delta\theta - M\,\delta\theta = (FL - M)\delta\theta = 0$$

$$LF - M = 0 \qquad M = LF$$

$\theta = 90^0$





平衡方程的求解方法

研究*OA*杆

$$\sum M_O = 0$$

$$F_{Ax} L - M = 0 \quad (1)$$

研究*AB* 杆和滑块*B*

$$\sum F_x = 0$$

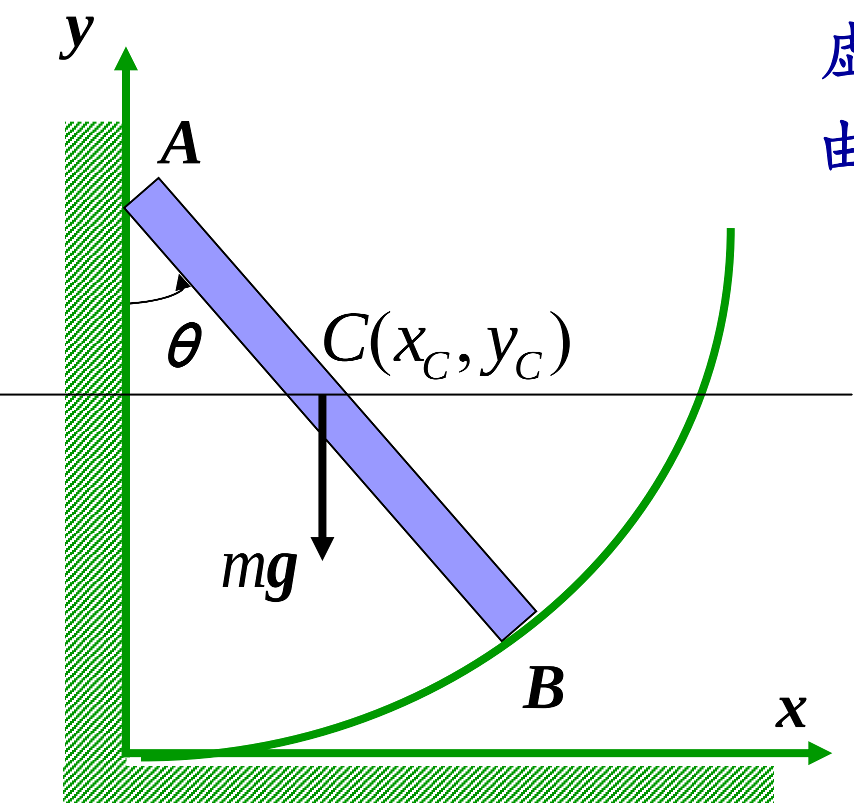
$$F_{Ax} - F = 0 \quad (2)$$

$$(2)\times(-L)+(1)$$

$$\Downarrow$$

$$FL - M = 0$$

例5：长为L的均质杆，A端靠在铅垂的墙壁上，B端放在$y=f(x)$的曲线上，若杆可以在$0<\theta<\pi/2$内平衡，求曲线的形状。



解：主动力 $\vec{F}=-mg\vec{j}$

虚位移 $\delta\vec{r}=\delta x_C\vec{i}+\delta y_C\vec{j}$

由虚功原理：$-mg\delta y_C=0$

$$\Rightarrow y_C=const\equiv L/2$$

质心始终在同一水平线上

$$x_B=L\sin\theta$$

$$y_B=y_C-\frac{L}{2}\cos\theta=\frac{L}{2}(1-\cos\theta)$$

$$\left(\frac{x_B}{L}\right)^2+\left(\frac{y_B-L/2}{L/2}\right)^2=1$$

$$0<x_B<L,\quad 0<y_B<\frac{L}{2}$$

四、广义坐标下的虚功原理

广义坐标: $q_1, q_2, \cdots, q_s$ $\qquad \vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t)$

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha$$

$\delta q_\alpha \ (\alpha = 1, 2, \cdots, s)$ 广义虚位移

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0$$

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right)$$

Q_α称为对应广义坐标q_α的广义力

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha \delta q_\alpha = 0$$

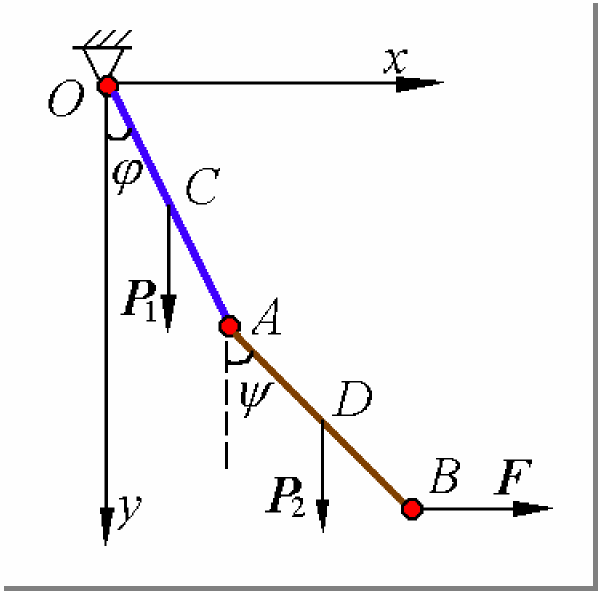
$$\boxed{\delta W = \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha \delta q_\alpha = 0}$$

$$\boxed{Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_s = 0}$$

完整理想约束的质点系，平衡的充要条件是:
所有的广义力都等于零

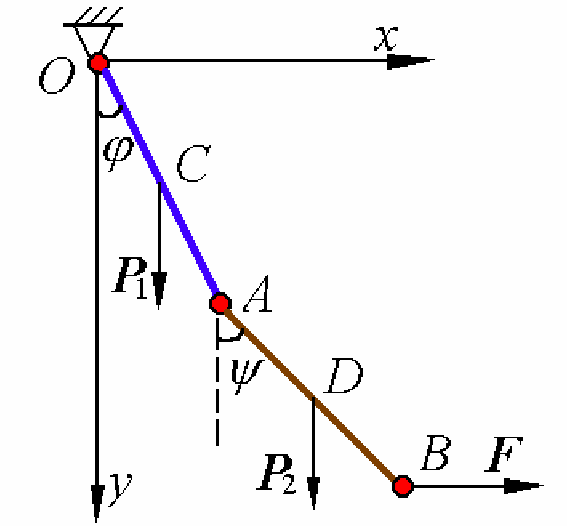
例6： 均质杆OA及AB在A点用铰连接，并在O点用铰支承，如图所示。两杆各长$2a$和$2b$，各重P_1及P_2，设在B点加水平力$\overline{F}$以维持平衡，求两杆与铅直线所成的角φ及ψ。

解：这是一个具有两个自由度的系统，取角φ及ψ为广义坐标，用两种方法求解。



解法一：

应用虚位移原理，



$$P_1\delta y_C + P_2\delta y_D + F\delta x_B = 0 \qquad (a)$$

而 $y_C = a\cos\varphi$ ， $\delta y_C = -a\sin\varphi\delta\varphi$

$y_D = 2a\cos\varphi + b\cos\psi$ ，

$\delta y_D = -2a\sin\varphi\delta\varphi - b\sin\psi\delta\psi$

$x_B = 2a\sin\varphi + 2b\sin\psi$ ， $\delta x_B = 2a\cos\varphi\delta\varphi + 2b\cos\psi\delta\psi$

代入(a)式，得：

$$(-P_1 a\sin\varphi - P_2 2a\sin\varphi + F2a\cos\varphi)\delta\varphi + (-P_2 b\sin\psi + F2b\cos\psi)\delta\psi = 0$$

$$(-P_1 a\sin\varphi - P_2 2a\sin\varphi + F2a\cos\varphi)\delta\varphi + (-P_2 b\sin\psi + F2b\cos\psi)\delta\psi = 0$$

由于$\delta\varphi$, $\delta\psi$ 是彼此独立的，所以：

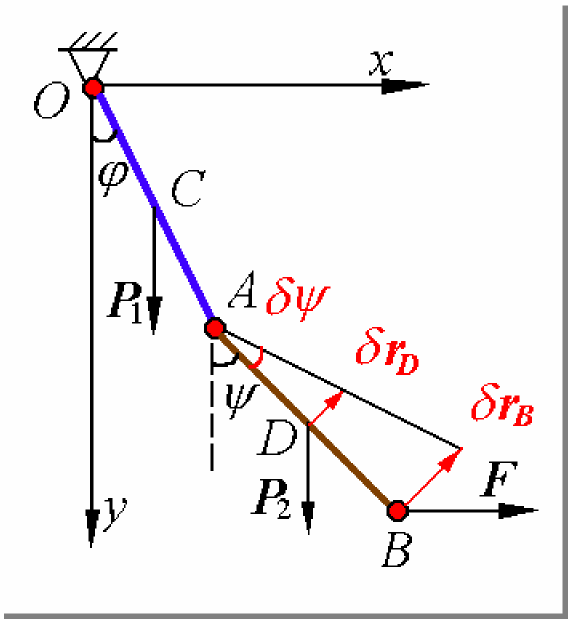
$$-P_1\cdot a\sin\varphi - P_2\cdot 2a\sin\varphi + F\cdot 2a\cos\varphi = 0$$
$$-P_2\cdot b\sin\psi + F\cdot 2b\cos\psi = 0$$

由此解得：

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2F}{P_1+2P_2} \quad , \quad \mathrm{tg}\psi = \frac{2F}{P_2}$$

解法二：

先使φ保持不变，而使ψ获得变分$\delta\psi$，得到系统的一组虚位移，如图所示。



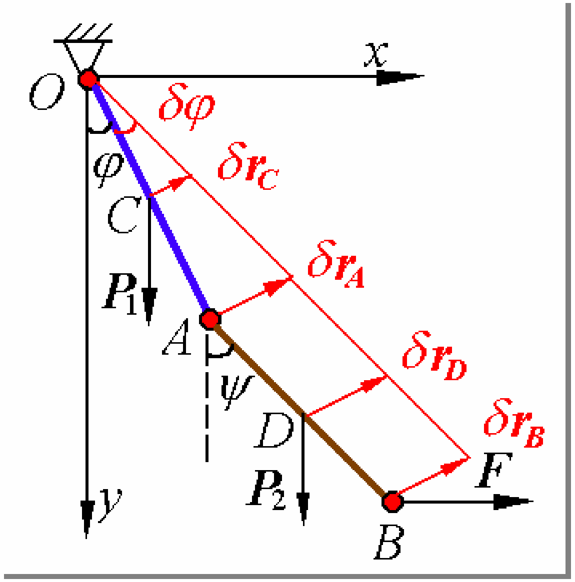
$$F\delta r_B\cos\psi - P_2\delta r_D\sin\psi = 0$$

而 $\delta r_B = 2b\,\delta\psi$ ， $\delta r_D = b\,\delta\psi$

代入上式，得

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{F\cdot 2b\delta\psi}{P_2\cdot b\delta\psi} = \frac{2F}{P_2}$$

再使ψ保持不变，而使φ获得变分$\delta\varphi$，得到系统的另一组虚位移，如图所示。



图示中：

$$\delta \bar{r}_A = \delta \bar{r}_D = \delta \bar{r}_B$$

$$F\delta r_B \cos\varphi - P_1 \delta r_C \sin\varphi - P_2 \delta r_D \sin\varphi = 0$$

而 $\delta r_C = a\,\delta\varphi$ ，

$$\delta r_B = \delta r_D = \delta r_A = 2a\,\delta\varphi$$

代入上式后，得：

$$(F\cos\varphi \cdot 2a - P_1 \cdot a\sin\varphi - P_2 \cdot 2a\sin\varphi)\delta\varphi = 0$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2F}{P_1 + 2P_2}$$

五、主动力全是保守力的系统的平衡方程

若作用在质点系上的主动力均为有势力，即

$$\vec{F}_i = -\nabla_i V_i \qquad F_{xi} = -\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \quad F_{yi} = -\frac{\partial V_i}{\partial y_i} \quad F_{zi} = -\frac{\partial V_i}{\partial z_i}$$

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right) = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V_i}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V_i}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha}\right) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_i}{\partial q_\alpha}$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i$$ 体系总的势能

$$\boxed{Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}}$$

对应于某一广义坐标的广义力，等于总势能对该广义坐标的偏导数冠以负号。

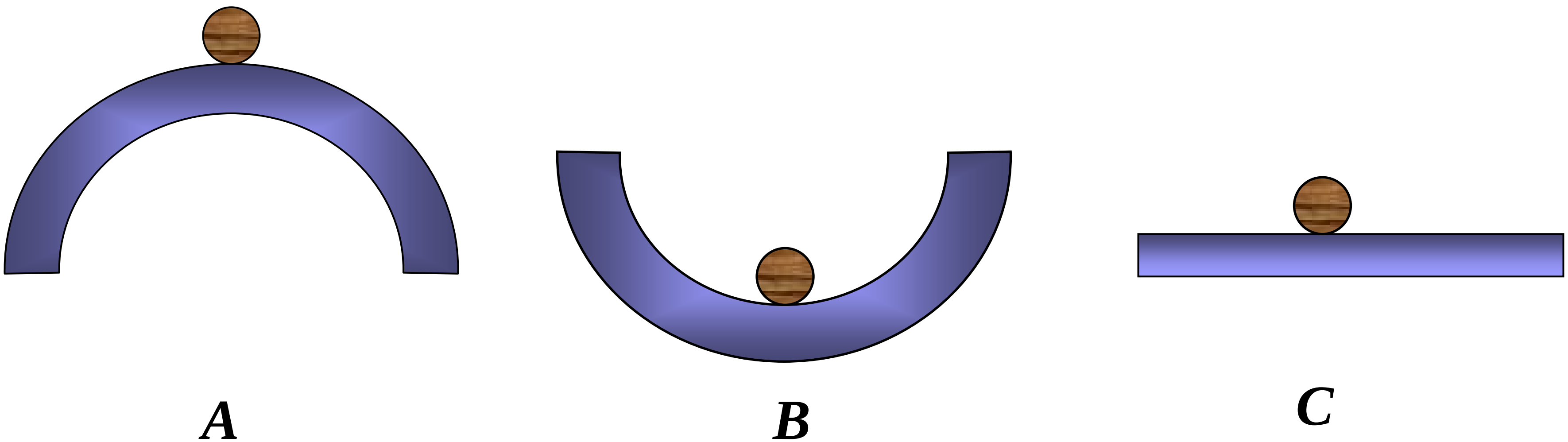
保守系统的平衡条件

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0} \qquad \boxed{(\alpha = 1, 2, \cdots, s)}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha = 0 \qquad \delta V = 0$$

静平衡的系统的势能取极值

2.3 虚功原理 达朗贝尔原理



- 平衡的稳定性(stability of equilibrium)：质点系处于某一平衡位置，若受到微小干扰偏离平衡位置后总不超出平衡位置邻近的某个微小区域，则称质点系在该位置的平衡是稳定的(stable)，否则是不稳定的(unstable)。

虚功原理主要用于求解:

(1) 系统的静平衡位置;

(2) 维持系统平衡时作用于系统上的主动力之间的关系.

(3) 求约束反力: 解除约束，将约束力视为主动力, 自由度增加.

解题步骤:

1. 明确系统的约束类型, 看是否满足虚功原理所要求的条件;
2. 正确判断系统的自由度, 选择合适的广义坐标;
3. 分析并图示系统受到的主动力;
4. 通过坐标变换方程, 将虚功原理化成 $\sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha \delta q_\alpha = 0$

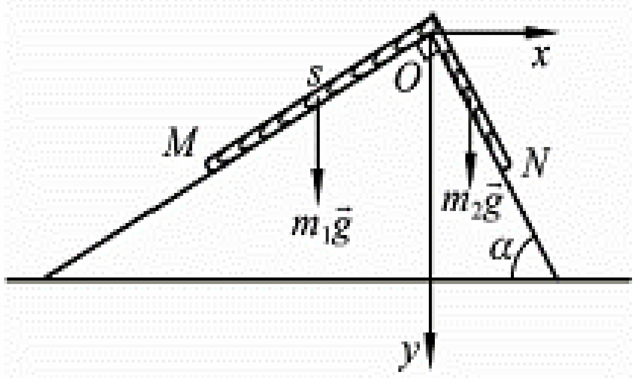
   的形式, 进而得出广义平衡方程 $Q_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, s)$

   对有势系, 求出系统的势能V后, 可通过 $\partial V / \partial q_\alpha = 0$

   得广义平衡方程;

5. 求解广义平衡方程。

例7: 有一固定的直角三棱柱，其斜边是水平的. 现有一条匀质的绳索跨在棱的两边，如图所示. 不计摩擦，试证明绳索平衡时，它的两端点必在同一水平面上.



证明 系统所受约束符合虚功原理的适用条件.

自由度为1　广义坐标：s　右边绳长为 $l-s$

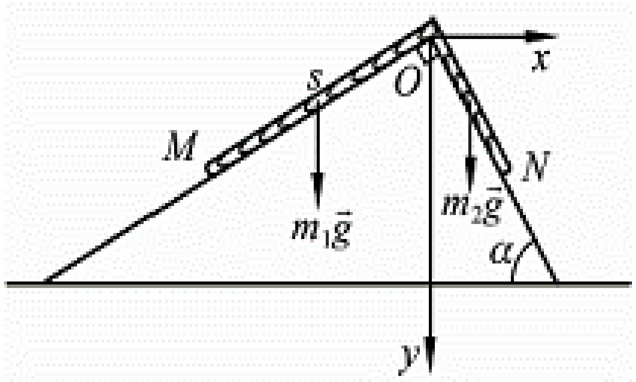
设绳的线密度为 ρ　$m_1=\rho s$　$m_2=\rho(l-s)$

根据虚功原理，$m_1 g\delta y_1 + m_2 g\delta y_2 = 0$

$$y_1=\frac{1}{2}s\cos\alpha, \quad y_2=\frac{1}{2}(l-s)\sin\alpha$$

$$\delta y_1=\frac{1}{2}\cos\alpha\delta s, \quad \delta y_2=-\frac{1}{2}\sin\alpha\delta s$$

2.3 虚功原理 达朗贝尔原理



$$\left[\frac{1}{2}\rho s g\cos\alpha-\frac{1}{2}\rho(l-s)g\sin\alpha\right]\delta s=0$$

$$\left[\frac{1}{2}\rho s g\cos\alpha-\frac{1}{2}\rho(l-s)g\sin\alpha\right]=0$$

$$s\cos\alpha=(l-s)\sin\alpha$$

$y_M=y_N$ 即绳的两端点在同一水平面上

另一种计算方法是先计算绳索的势能

$$V=-\frac{1}{2}\rho g s^2\cos\alpha-\frac{1}{2}\rho g(l-s)^2\sin\alpha$$

$Q_s=\mathrm{d}V/\mathrm{d}s=0$，便可得到广义平衡方程.

例8： 半径为R的半球形碗内搁一均匀的筷子AB。筷子长$2l$，设 $2R > l > \frac{\sqrt{6}}{3}R$，且为光滑接触。求筷子平衡时的倾角 α。

解：

$$V = -W\left|CD\right|\sin\alpha \Leftarrow \left|CD\right| = 2R\cos\alpha - l$$

$$= -W\left(2R\cos\alpha\sin\alpha - l\sin\alpha\right)$$

$$= W\left(l\sin\alpha - R\sin 2\alpha\right)$$

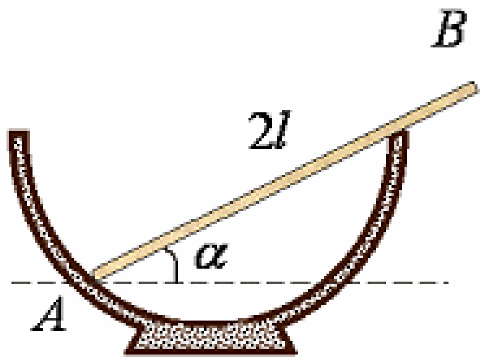
$$\frac{\partial V}{\partial\alpha} = W\left(l\cos\alpha - 2R\cos 2\alpha\right) = 0$$

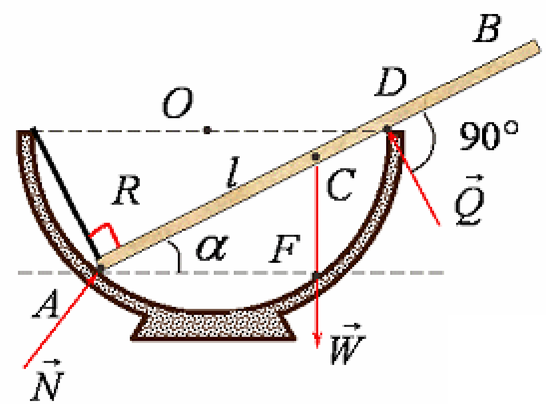
$$\Downarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{l}{8R} \pm \sqrt{\left(\frac{l}{8R}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

$$\Downarrow \cos\alpha > 0$$

$$\cos\alpha = \frac{l}{8R} + \sqrt{\left(\frac{l}{8R}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$





达朗贝尔原理

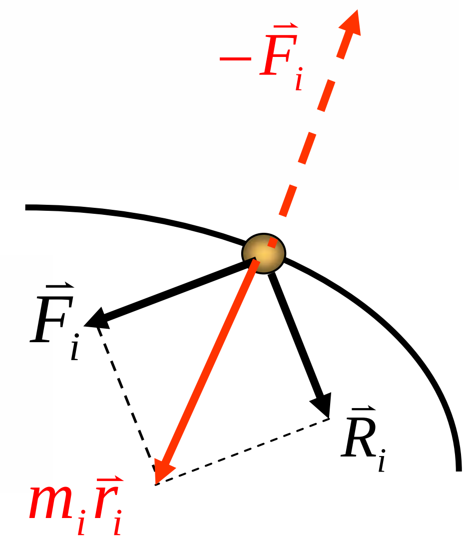
d’Alembert principle

- ✓ 法国数学家达朗贝尔于1743年提出，因而得名。
- ✓ 提供了研究**有约束质点系动力学**问题的一个新的普遍方法：用静力学中研究**平衡问题**的方法来研究动力学问题。

达朗贝尔原理 动力学普遍方程

设受完整约束的力学体系有n个质点，设第i个质点受主动力$\vec{F}_i$，受约束反力$\vec{R}_i$，则

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, i = 1, 2, \cdots, n$$



$$-m_i\ddot{\vec{r}}_i + \vec{F}_i + \vec{R}_i = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$$

$-m_i\ddot{\vec{r}}_i$ ：称为达朗伯惯性力或称有效力

注意：这个达朗伯惯性力与力学中定义过的惯性力不是一个概念，那里的惯性力是对某一非惯性系而言的，而上式中各质点的$\ddot{\vec{r}}_i$并不相等，所以这里并不存在一个统一的非惯性系。

2.3 虚功原理 达朗贝尔原理

$$-m_i\ddot{\vec{r}}_i+\vec{F}_i+\vec{R}_i=0,\ i=1,2,\cdots,n$$

以 $\delta\vec{r}_i$点乘上式后，再对 i 取和，得

$$\sum_{i=1}^{n}(-m_i\ddot{\vec{r}}_i+\vec{F}_i+\vec{R}_i)\cdot\delta\vec{r}_i=0$$

理想约束条件下：$\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0$

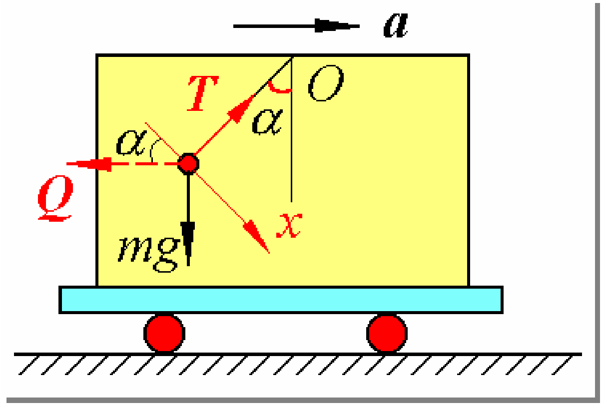
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i-m_i\ddot{\vec{r}}_i)\cdot\delta\vec{r}_i=0}$$

动力学普遍方程：由于存在约束，各 $\delta\vec{r}_i$ 并不彼此独立，因此不能令上式中 $\delta\vec{r}_i$ 前面的所有乘式都等于零，否则就成为自由质点的运动微分方程了。

[例1] 列车在水平轨道上行驶，车厢内悬挂一单摆，当车厢向右作匀加速运动时，单摆左偏角度α，相对于车厢静止。求车厢的加速度$\bar{a}$。

解：　选单摆的摆锤为研究对象

虚加惯性力 $\bar{Q}=-m\bar{a}$　$(Q=ma)$



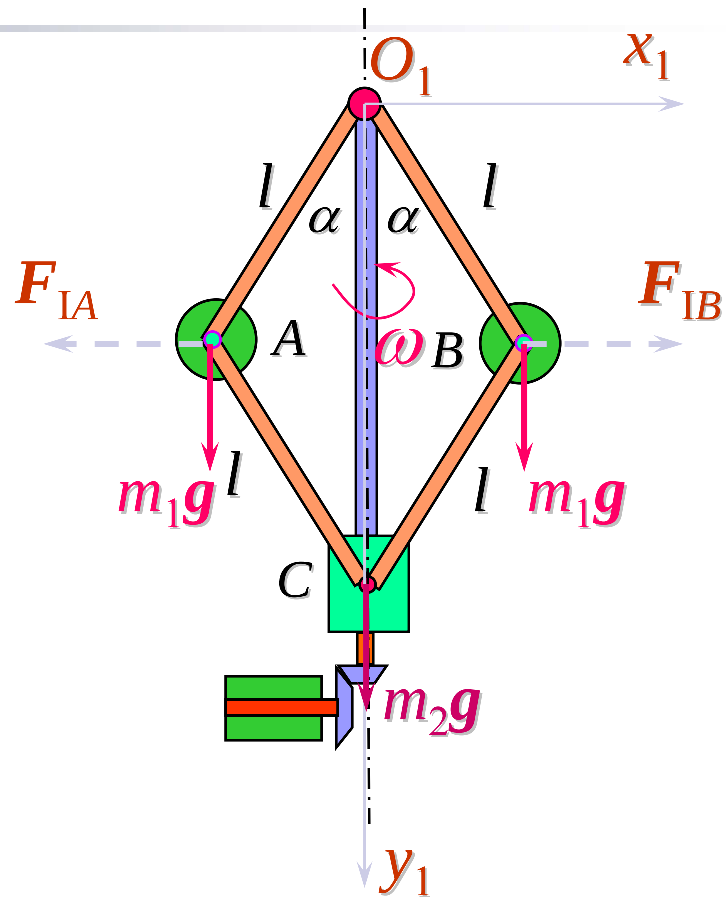
由达朗贝尔原理，有

$$mg\cdot\sin\alpha-Q\cos\alpha=0$$

解得　$a=g\cdot\mathrm{tg}\alpha$

α角随着加速度$\bar{a}$的变化而变化，当$\bar{a}$不变时，α角也不变。只要测出α角，就能知道列车的加速度$\bar{a}$。摆式加速计的原理。

例题 离心调速器



已知：m_1—球A、B的质量；

m_2—重锤C的质量；

l—杆件的长度；

ω—O_1y_1轴的旋转角速度。

求：ω—α的关系。

解：不考虑摩擦力，这一系统的约束为理想约束；系统具有一个自由度。取广义坐标 $q=\alpha$

1、分析运动、确定惯性力

球A、B绕 y轴等速转动；重锤静止不动。

球A、B的惯性力为 $F_{IA}=F_{IB}=ml\sin\alpha\omega^2$

2、令系统有一虚位移$\delta\alpha$。A、B、C三处的虚位移分别为$\delta \boldsymbol{r}_A$、$\delta \boldsymbol{r}_B$、$\delta \boldsymbol{r}_C$。

3、应用动力学普遍方程

$$-F_{IA}\cdot\delta x_A + F_{IB}\cdot\delta x_B + m_1 g\cdot\delta y_A + m_1 g\cdot\delta y_B + m_2 g\cdot\delta y_C = 0$$

根据几何关系，有

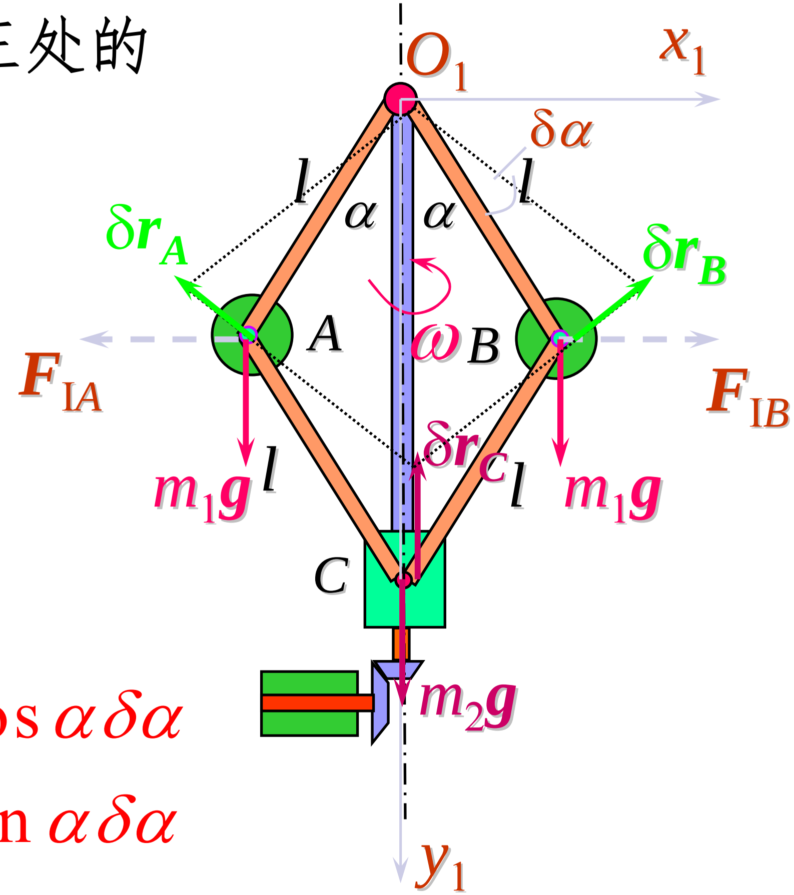
$$x_A = -l\sin\alpha \qquad \delta x_A = -l\cos\alpha\,\delta\alpha$$

$$y_A = l\cos\alpha \qquad \delta y_A = -l\sin\alpha\,\delta\alpha$$

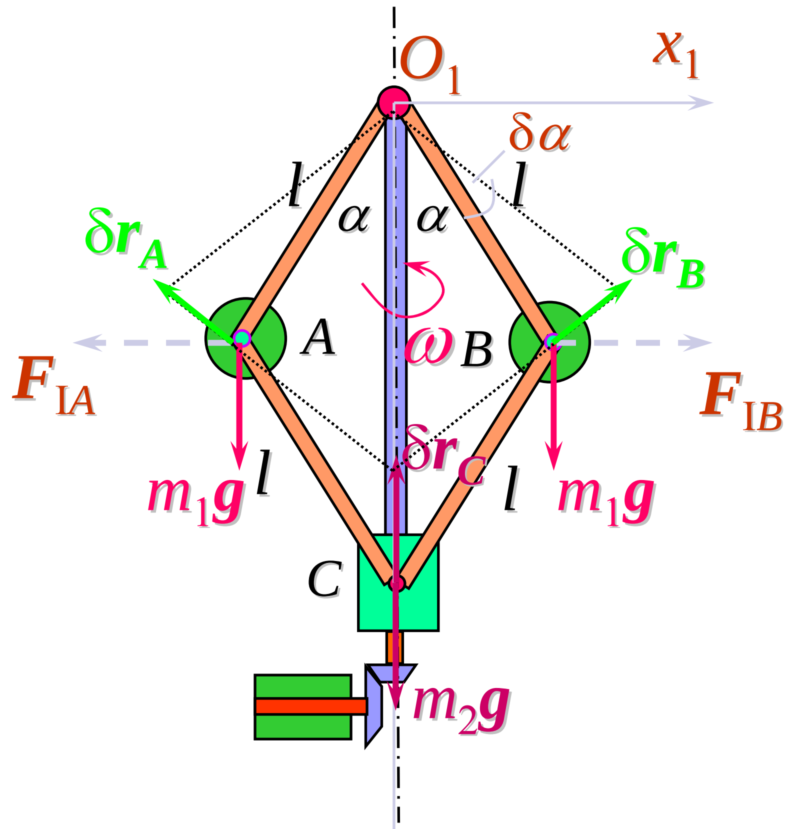
$$x_B = l\sin\alpha \qquad \delta x_B = l\cos\alpha\,\delta\alpha$$

$$y_B = l\cos\alpha \qquad \delta y_B = -l\sin\alpha\,\delta\alpha$$

$$y_C = 2l\cos\alpha \qquad \delta y_C = -2l\sin\alpha\,\delta\alpha$$



3、应用动力学普遍方程



$$-F_{IA}\cdot\delta x_A+F_{IB}\cdot\delta x_B+m_1g\cdot\delta y_A$$

$$+m_1g\cdot\delta y_B+m_2g\cdot\delta y_C=0$$

$$\delta x_A=-l\cos\alpha\,\delta\alpha$$

$$\delta y_A=-l\sin\alpha\,\delta\alpha$$

$$\delta x_B=l\cos\alpha\,\delta\alpha$$

$$\delta y_B=-l\sin\alpha\,\delta\alpha$$

$$\delta y_C=-2l\sin\alpha\,\delta\alpha$$

$$2m_1l\sin\alpha\,\omega^2l\cos\alpha\,\delta\alpha-2m_1gl\sin\alpha\,\delta\alpha-2m_2gl\sin\alpha\,\delta\alpha=0$$

$$\Rightarrow\quad \omega^2=\frac{(m_1+m_2)g}{m_1l\cos\alpha}$$

回顾：本章基本内容

- 基本概念
  - 约束及其分类、自由度、广义坐标、虚位移、虚功、理想约束、广义力、广义虚位移、势能、平衡
- 基本原理和定理
  - 虚功原理、达朗贝尔原理
- 基本方法
  - 原理的基本形式、广义坐标形式
  - 当质点系在势力场中时虚功原理的形式