习题二解答

1．利用导数定义推出：

1) $(z^n)'=nz^{n-1}$, (n是正整数)；　　2) $\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\dfrac{1}{z^2}$。

证　1）$(z^n)'=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}(nz^{n-1}+C_n^2z^{n-2}\Delta z+\cdots\Delta z^{n-1})=nz^{n-1}$

2）$\left(\dfrac{1}{z}\right)'=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{z+\Delta z}-\dfrac{1}{z}}{\Delta z}=-\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{1}{z(z+\Delta z)}=-\dfrac{1}{z^2}$

2．下列函数何处可导？何处解析？

（1）$f(z)=x^2-\mathrm{i}\,y$　　　　（2）$f(z)=2x^3+3y^3\mathrm{i}$

（3）$f(z)=xy^2+\mathrm{i}x^2y$　　　　（4）$f(z)=\sin x\operatorname{ch}y+\mathrm{i}\cos x\operatorname{sh}y$

解　（1）由于　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\dfrac{\partial v}{\partial y}=-1$

在 z 平面上处处连续，且当且仅当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，u,v 才满足 C-R 条件，故 $f(z)=u+\mathrm{i}\,v=x-\mathrm{i}\,y$ 仅在直线 $x=-\dfrac{1}{2}$ 上可导，在 z 平面上处处不解析。

（2）由于　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=6x^2$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=9y^2$

在 z 平面上处处连续，且当且仅当 $2x^2=3y^2$,即$\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$时，u,v 才满足 C-R 条件，故 $f(z)=u+\mathrm{i}\,v=2x^3+3y^3\mathrm{i}$ 仅在直线 $\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$ 上可导，在 z 平面上处处不解析。

（3）由于　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xy$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=2xy$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=x^2$

在 z 平面上处处连续，且当且仅当 z=0 时，u,v 才满足 C-R 条件，故 $f(z)=xy^2+\mathrm{i}\,x^2y$ 仅在点 $z=0$ 处可导，在 z 平面处处不解析。

（4）由于　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos x\operatorname{ch}y$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\sin x\operatorname{sh}y$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\sin x\operatorname{sh}y$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\cos x\operatorname{ch}y$

在 z 平面上处处连续，且在整个复平面 u,v 才满足 C-R 条件，故 $f(z)=\sin x\operatorname{ch}y+\mathrm{i}\cos x\operatorname{sh}y$ 在 z 平面处处可导，在 z 平面处处不解析。

3．指出下列函数 $f(z)$ 的解析性区域，并求出其导数。

1）$(z-1)^5$；　　　　（2）$z^3+2\mathrm{i}z$；

3）$\dfrac{1}{z^2-1}$；　　　　（4）$\dfrac{az+b}{cz+d}$(c,d中至少有一个不为0)

解　（1）由于 $f'(z)=5(z-1)^4$，故 $f(z)$ 在 z 平面上处处解析。

（2）由于 $f'(z)=3z^2+2\mathrm{i}$，知 $f(z)$ 在 z 平面上处处解析。

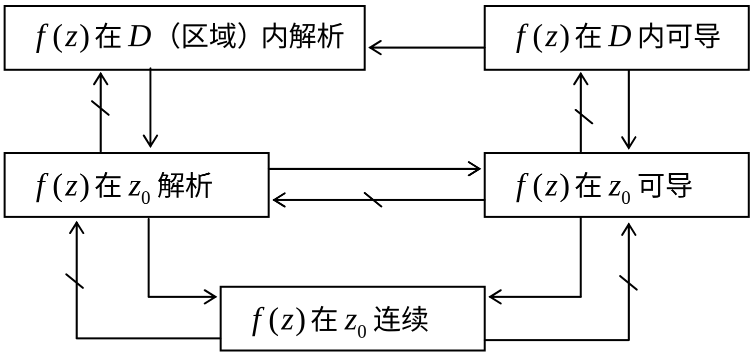
（3）由于 $f'(z)=\dfrac{-2z}{(z^2-1)^2}=-\dfrac{2z}{(z-1)^2(z+1)^2}$

知 $f(z)$ 在除去点 $z=\pm1$ 外的 z 平面上处处可导。处处解析，$z=\pm1$ 是 $f(z)$ 的奇点。

（4）由于 $f'(z)=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$，知 $f(z)$ 在除去 $z=-d/c(c\neq 0)$ 外在复平面上处处解析。

5．复变函数的可导性与解析性有什么不同？判断函数的解析性有那些方法？

答：



判定函数解析主要有两种方法：1）利用解析的定义：要判断一个复变函数在 z_0 是否解析，只要判定它在 z_0 及其邻域内是否可导；要判断该函数在区域 D 内是否解析，只要判定它在 D 内是否可导；2）利用解析的充要条件，即本章§2 中的定理二。

6．判断下述命题的真假，并举例说明。

（1）如果 $f(z)$ 在 z_0 点连续，那么 $f'(z_0)$ 存在。

（2）如果 $f'(z_0)$ 存在，那么 $f(z)$ 在 z_0 点解析。

（3）如果 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，那么 $f(z)$ 在 z_0 不可导。

（4）如果 z_0 是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的一个奇点，那么 z_0 也是 $f(z)+g(z)$ 和 $f(z)/g(z)$ 的奇点。

（5）如果 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 可导（指偏导数存在），那么 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 亦可导。

（6）设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域内是解析的。如果 u 是实常数，那么 $f(z)$ 在整个 D 内是常数；如果 v 是实常数，那么 $f(z)$ 在整个 D 内是常数；

解

（1）命题假。如函数 $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$ 在 z 平面上处处连续，除了点 z=0 外处处不可导。

（2）命题假，如函数 $f(z)=|z|^2$ 在点 z=0 处可导，却在点 z=0 处不解析。

（3）命题假，如果 $f(z)$ 在 z_0 点不解析，则 z_0 称为 $f(z)$ 的奇点。如上例。

（4）命题假，如 $f(z)=\sin x\,\mathrm{ch}\,y, g(z)=\mathrm{i}\cos x\,\mathrm{sh}\,y$，$z=(\pi/2,0)$ 为它们的奇点，但不是 $f(z)+g(z)$ 的奇点。

（5）命题假。如函数 $f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z=x^2+\mathrm{i}\,xy$ 仅在点 z=0 处满足 C-R 条件，故 $f(z)$ 仅在点 z=0 处可导。

（6）命题真。由 u 是实常数，根据 C-R 方程知 v 也是实常数，故 $f(z)$ 在整个 D 内是常数；后面同理可得。

7．如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是 z 的解析函数，证明：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2=|f'(z)|^2$$

证　$|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$，于是

$$\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|=\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\sqrt{u^2+v^2}}，\quad \frac{\partial}{\partial y}|f(z)|=\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

由于 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 为解析函数，故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}，\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}，$$

从而

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2=\frac{1}{u^2+v^2}\left[u^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u^2\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right.$$

$$\left.+v^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2uv\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+2uv\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

$$=\frac{1}{u^2+v^2}\left\{u^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]+v^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{u^2+v^2}\left(u^2+v^2\right)|f'(z)|^2=|f'(z)|^2$$

9．证明：柯西-黎曼方程的极坐标形式是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}，\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

证　令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，利用复合函数求导法则和 u,v 满足 C-R 条件，得

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial v}{\partial y}r\cos\theta=\frac{\partial u}{\partial y}r\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial x}r\cos\theta=r\frac{\partial u}{\partial r}$$

即 $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}$。又

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta=-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta$$

$$=-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

总之，有 $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}$，$\dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$。

10．证明：如果函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，并满足下列条件之一，那么 $f(z)$ 是常数。

（1） $f(z)$ 恒取实值。

（2） $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析。

（3） $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数。

（4） $\arg f(z)$ 在 D 内是一个常数。

（5） $au+bv=c$，其中 a、b 与 c 为不全为零的实常数。

解　（1）若 $f(z)$ 恒取实值，则 $v=0$，又根据 $f(z)$ 在区域 D 内解析，知 C-R 条件成立，于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

故 u 在区域 D 内为一常数，记 $u=C$(实常数)，则 $f(z)=u+iv=C$ 为一常数。

（2）若 $\overline{f(z)}=\overline{u+iv}=u-iv$ 在区域 D 内解析，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(-v)}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(-v)}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1}$$

又 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

结合（1)、(2）两式，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{vy}=0,$$

故 u,v 在 D 内均为常数，分别记之为

$$u_1=C_1,u_2=C_2\left(C_1,C_2\text{为实常数}\right),$$

则

$$f(z)=u+iv=C_1+iC_2=C$$

为一复常数。

（3）若 $|f(z)|$ 在 D 内为一常数，记为 C_1，则 $u^2+v^2=C_1^2$，两边分别对于 x 和 y 求偏导，得

$$\begin{cases}2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\[2mm] 2u\dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$$

由于 $f(z)$ 在 D 内解析，满足 C-R 条件 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 代入上式又可写得

$$\begin{cases}u\dfrac{\partial u}{\partial x}-v\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\\[2mm] v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$$

解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$。同理，可解得 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{vy}=0$ 故 u,v 均为常数，分别记为 $u=C_1,v=C_2$，则 $f(z)=u+iv=C_1+iC_2=C$ 为一复常数。

（4）若 $\arg z$ 在 D 内是一个常数 C_1，则 $f(z)\neq 0$，从而 $f(z)=u+iv\neq 0$，且

$$\arg f(z)=\begin{cases}\arctan\dfrac{v}{u}, & u>0\\[2mm] \arctan\dfrac{v}{u}+\pi, & u<0,v>0\\[2mm] \arctan\dfrac{v}{u}-\pi, & u<0,v<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}C_1 & u>1\\ C_1+\pi & u<0,v>0\\ C_1-\pi & u<0,v<0\end{cases}$$

总之对 $\arg f(z)$ 分别关于 x 和 y 求偏导，得

$$\frac{\frac{1}{u^2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2}=\frac{u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}}{u^2+v^2}=0$$

$$\frac{\frac{1}{u^2}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2}=\frac{u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}}{u^2+v^2}=0$$

化简上式并利用 $f(z)$ 解析，其实、虚部满足 C-R 条件，得

$$\begin{cases}-v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial u}{\partial y}=0\\ u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$$

解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，同理也可求得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$，即 u 和 v 均为实常数，分别记为 C_2 和 C_3，从而 $f(z)=u+iv=C_2+iC_3=C$ 为一复常数。

（5）若 $au+bv=c$，其中 a、b 和 c 为不全为零的实常数，这里 a 和 b 不全为 0，即 $a^2+b^2\neq 0$，否则此时 a、b 和 c 全为零。对方程 $au+bv=c$ 分别对于 x 和 y 求偏导，得

$$\begin{cases}a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial x}=0\\ a\frac{\partial u}{\partial y}+b\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$$

再利用解析函数 $f(z)=u+iv$ 的实、虚部 u 和 v 满足 C-R 条件，得

$$\begin{cases}a\frac{\partial u}{\partial x}-b\frac{\partial u}{\partial y}=0\\ b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$$

解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，同理也可求得 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$，知函数 $f(z)$ 为一常数。

11.下列关系是否正确？

（1） $\overline{e^z}=e^{\bar z}$ ；　　（2） $\overline{\cos z}=\cos\bar z$ ；　　（3） $\overline{\sin z}=\sin\bar z$

解（1） $e^{\bar z}=e^x\overline{(\cos y+\mathrm{i}\sin y)}=e^x(\cos y-\mathrm{i}\sin y)=e^{x-\mathrm{i}y}=e^{\bar z}$

（2） $\overline{\cos z}=\left(\overline{\frac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\overline{\mathrm{i}z}}+e^{\overline{-\mathrm{i}z}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{-\mathrm{i}\bar z}+e^{\mathrm{i}\bar z}\right)=\cos\bar z$ 。

（3） $\overline{\sin z}=\overline{\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}\right)}=\frac{1}{\overline{2\mathrm{i}}}\left(e^{\overline{\mathrm{i}z}}-e^{\overline{-\mathrm{i}z}}\right)=\frac{1}{-2\mathrm{i}}(e^{-\mathrm{i}\bar z}-e^{\mathrm{i}\bar z})$

$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}\bar z}-e^{-\mathrm{i}\bar z}\right)=\sin\bar z$ 。

12．找出下列方程的全部解。

（3） $1+e^z=0$ ；　　（4） $\sin z+\cos z=0$ ；

解（3）原方程等价于 $e^z=-1$，于是它的解为：

$$z=\mathrm{Ln}(-1)=\ln|-1|+\mathrm{i}[\arg(-1)+2k\pi]=\mathrm{i}\,\pi(1+2k) \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

（4）由于 $\sin z=-\cos z,\quad \dfrac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}=-\dfrac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}\right)$，故

$$e^{2\mathrm{i}z}-1=-\mathrm{i}\left(e^{2\mathrm{i}z}+1\right)$$

$$e^{2\mathrm{i}z}=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$$

$$z=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{Ln}\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{Ln}(-\mathrm{i})=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\ln|-\mathrm{i}|+\mathrm{i}(\arg(-\mathrm{i})+2k\pi)]$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\left(k-\frac{1}{4}\right)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

13．证明：

（1） $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$；

$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2-\cos z_1\sin z_2$；

（2） $\sin^2 z+\cos^2 z=1$ ；（3） $\sin 2z=2\sin z\cos z$ ；（4） $\tan 2z=\dfrac{2\tan z}{1-\tan^2 z}$ ；

（5） $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)=\cos z$ ， $\cos(z+\pi)=-\cos z$ ；

（6） $|\cos z|^2=\cos^2 x+\mathrm{sh}^2\, y,|\sin z|^2=\sin^2 x+\mathrm{sh}^2\, y$

证 （1）左 $=\cos(z_1+z_2)=\dfrac{1}{2}\left[e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}\right]$

右 $=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$

$$=\frac{e^{\mathrm{i}z_1}+e^{-\mathrm{i}z_1}}{2}\frac{e^{\mathrm{i}z_2}+e^{-\mathrm{i}z_2}}{2}-\frac{e^{\mathrm{i}z_1}-e^{-\mathrm{i}z_1}}{2\mathrm{i}}\frac{e^{\mathrm{i}z_2}-e^{-\mathrm{i}z_2}}{2\mathrm{i}}$$

$$=\frac{e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}+e^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1-z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}+e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-e^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1-z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}}{4}$$

$$=\frac{e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}}{2}$$

可见左=右，即 $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$ ；

左= $\sin(z_1+z_2)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]$

右 $=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z_1}-e^{-\mathrm{i}z_1}\right)\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z_2}-e^{-\mathrm{i}z_2}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z_1}+e^{-\mathrm{i}z_1}\right)\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z_2}-e^{-\mathrm{i}z_2}\right)$$

$$=\frac{1}{4\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}+e^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1-z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]+\frac{1}{4\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-e^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1-z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]$$

$$=\frac{1}{4\mathrm{i}}\left[2e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-2e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]$$

可见左=右，即 $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$

（2） $\sin^2 z+\cos^2 z=\left(\dfrac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right)^2+\left(\dfrac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right)^2$

$$=-\frac{1}{4}\left(e^{2\mathrm{i}z}-2+e^{-2\mathrm{i}z}\right)+\frac{1}{4}\left(e^{2\mathrm{i}z}+2+e^{-2\mathrm{i}z}\right)=1$$

（3）左$=\sin 2z=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}2z}-e^{-\mathrm{i}2z}\right)$

右$=2\sin z\cos z=2\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}\right)\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}\right)$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}2z}+1-1-e^{-\mathrm{i}2z}\right)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}2z}-e^{-\mathrm{i}2z}\right)$$

可见左=右，即 $\sin 2z=2\cos z\sin z$。

（4） $\tan 2z=\frac{\sin 2z}{\cos 2z}=\frac{2\sin z\cos z}{\cos^2 z-\sin^2 z}=2\frac{\sin z}{\cos z}\Big/\left[1-\left(\frac{\sin z}{\cos z}\right)^2\right]=\frac{2\tan z}{1-\tan^2 z}$

（5）由（1）知

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+(-z)\right]=\sin\frac{\pi}{2}\cos(-z)+\cos\frac{\pi}{2}\sin(-z)$$

$$=\cos(-z)=\frac{1}{2}\left(e^{i(-z)}+e^{-i(-z)}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$$

$$=\cos z$$

由（1）得 $\cos(z+\pi)=\cos z\cos\pi-\sin z\sin\pi=-\cos z$

（6）左＝$|\cos z|^2=|\cos x\,\mathrm{ch}\,y-\mathrm{i}\sin x\,\mathrm{sh}\,y|^2=\cos^2 x\,\mathrm{ch}^2 y+\sin^2 x\,\mathrm{sh}^2 y$

$$=\cos^2 x(1+\mathrm{sh}^2 y)+\sin^2 x\,\mathrm{sh}^2 y=\cos^2 x+\mathrm{sh}^2 y$$

左＝$|\sin z|^2=|\sin x\,\mathrm{ch}\,y+\mathrm{i}\cos x\,\mathrm{sh}\,y|^2=\sin^2 x\,\mathrm{ch}^2 y+\cos^2 x\,\mathrm{sh}^2 y$

$$=\sin^2 x(1+\mathrm{sh}^2 y)+\cos^2 x\,\mathrm{sh}^2 y=\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y$$。

14．说明：1）当 $y\to\infty$ 时，$|\sin(x+\mathrm{i}y)|$和$|\cos(x+\mathrm{i}y)|$趋于无穷大；

2）当 t 为复数时，$|\sin t|\le 1$和$|\cos t|\le 1$不成立。

解 1）$|\sin z|=\left|\frac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right|\ge\frac{|e^{-y}-e^{y}|}{2}$；$|\cos z|$同理。

2）设$t=\mathrm{i}y, y\in R$，则$|\sin t|=\frac{|e^{-y}-e^{y}|}{2}$，则当 $y\to\infty$ 时显然题设不成立。

15．求$\mathrm{Ln}(-\mathrm{i})$，$\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i})$和它们的主值。

解 $\mathrm{Ln}(-\mathrm{i})=\mathrm{Ln}\,|-\mathrm{i}|+\mathrm{i}(\arg(-\mathrm{i})+2k\pi)=\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$

$$=\mathrm{i}\,\pi\left(2k-\frac{1}{2}\right), k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\ln(-\mathrm{i})=\ln|-\mathrm{i}|+\mathrm{i}\arg(-\mathrm{i})=-\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2}$$

$$\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i})=\ln|-3+4\mathrm{i}|+\mathrm{i}[\arg(-3+4\mathrm{i})+2k\pi]$$

$$=\ln 5+\mathrm{i}\left[\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}\right)+2k\pi\right]$$

$$=\ln 5-\mathrm{i}\left[\left(\arctan\frac{4}{3}-(2k+1)\pi\right)\right], k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\ln(-3+4\mathrm{i})=\ln|-3+4\mathrm{i}|+\mathrm{i}\arg(-3+4\mathrm{i})=\ln 5+\mathrm{i}\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}\right)。$$

16．证明对数的下列性质：1） $\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2$ ；2） $\mathrm{Ln}(z_1/z_2)=\mathrm{Ln}\,z_1-\mathrm{Ln}\,z_2$。

证明 1） $\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\ln(|z_1z_2|)+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_1z_2=\ln z_1+\ln z_2+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_2=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2$ ；

2） $\mathrm{Ln}(z_1/z_2)=\ln(|z_1/z_2|)+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_1/z_2=\ln z_1-\ln z_2+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_1\text{-}\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_2=\mathrm{Ln}\,z_1-\mathrm{Ln}\,z_2$。

17．说明下列等式是否正确：1） $\mathrm{Ln}\,z^2=2\,\mathrm{Ln}\,z$ ；2） $\mathrm{Ln}\sqrt{z}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,z$。

解：两式均不正确。1） $\mathrm{Ln}\,z^2=2\ln|z|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(2z)$,而$2\,\mathrm{Ln}\,z=2\ln|z|+2\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)$ ；

2） $\mathrm{Ln}\sqrt{z}=\frac{1}{2}\ln|z|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(\sqrt{z})$,而$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,z=\frac{1}{2}\ln|z|+\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Arg}(z)$。

18．求$e^{1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$，$\exp\left(\frac{1+\mathrm{i}\pi}{4}\right)$，$3^{\mathrm{i}}$和$(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$的值。

解：

$$e^{1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=ee^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=e\left(\cos\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)=-\mathrm{i}\,e$$

$$\exp\left(\frac{1+\mathrm{i}\pi}{4}\right)=e^{\frac{1}{4}}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=e^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{4}}(1+\mathrm{i})$$

$$3^{\mathrm{i}}=e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\,3}=e^{\mathrm{i}\left[\ln 3+\mathrm{i}(\arg 3+2k\pi)\right]}=e^{-2k\pi}e^{\mathrm{i}\ln 3}=e^{-2k\pi}(\cos\ln 3+\mathrm{i}\sin\ln 3),\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}=e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})}=e^{\mathrm{i}\left[\ln|1+\mathrm{i}|\right]+\mathrm{i}(\arg(1+\mathrm{i})+2k\pi)}$$

$$=e^{\mathrm{i}\frac{\ln 2}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}=e^{-\pi\left(\frac{1}{4}+2k\right)}\left(\cos\frac{\ln 2}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\ln 2}{2}\right),\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

19．证明$(z^a)'=az^{a-1}$，其中a为实数。

证明 $\quad (z^a)'=(e^{a\ln z+2k\pi i})'=a(\ln z)'e^{a\ln z+2k\pi i}=a\frac{1}{z}z^a=az^{a-1}$。

20．证明 1） $\mathrm{ch}^2 z-\mathrm{sh}^2 z=1$；2） $\mathrm{sh}^2 z+\mathrm{ch}^2 z=\mathrm{ch}\,2z$ ；

3） $\mathrm{sh}(z_1+z_2)=\mathrm{sh}\,z_1\,\mathrm{ch}\,z_2+\mathrm{ch}\,z_1\,\mathrm{sh}\,z_2$ ；$\mathrm{ch}(z_1+z_2)=\mathrm{ch}\,z_1\,\mathrm{ch}\,z_2+\mathrm{sh}\,z_1\,\mathrm{sh}\,z_2$。

证明 1） $\mathrm{ch}^2 z-\mathrm{sh}^2 z=(\frac{e^z+e^{-z}}{2})^2-(\frac{e^z-e^{-z}}{2})^2=1$ ；

2） $\mathrm{sh}^2 z+\mathrm{ch}^2 z=(\frac{e^z-e^{-z}}{2})^2+(\frac{e^z+e^{-z}}{2})^2=\frac{e^{2z}+e^{-2z}}{2}=1$ ；

3） $\mathrm{sh}\,z_1\,\mathrm{ch}\,z_2+\mathrm{ch}\,z_1\,\mathrm{sh}\,z_2=\frac{(e^{z_1}-e^{-z_1})(e^{z_2}+e^{-z_2})}{4}+\frac{(e^{z_1}+e^{-z_1})(e^{z_2}-e^{-z_2})}{4}=\frac{e^{z_1+z_2}-e^{-z_1-z_2}}{2}$

$$=\mathrm{sh}(z_1+z_2)。$$

21．解下列方程：1） $\operatorname{sh} z=0$ ；2） $\operatorname{ch} z=0$ ；3） $\operatorname{sh} z=\mathrm{i}$ 。

解　1）由 $\operatorname{sh} z=0$ 得 $e^{2z}=1$ ， $z=\dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}1=\mathrm{i}\,k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 。

2）由 $\operatorname{ch} z=0$ 得 $e^{2z}=-1$ ， $z=\dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}(-1)=\dfrac{(2k+1)}{2}\mathrm{i}\,\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 。

3）由 $\operatorname{sh} z=\mathrm{i}$ 得 $e^{z}=\mathrm{i}$ ， $z=\operatorname{Ln}\mathrm{i}=\mathrm{i}(2k+\dfrac{1}{2})\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 。

23．证明: $\operatorname{sh} z$ 的反函数 $\operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$ 。

证　设 $\operatorname{sh} w=z$ ，即 $\dfrac{e^{w}-e^{-w}}{2}=z\Rightarrow e^{2w}-2ze^{w}-1=0$ 解得 $e^{w}=z+\sqrt{z^2+1}$,

故 $w=\operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$ 。

24．已知平面流速场的复势 $f(z)$ 为

（1） $(z+\mathrm{i})^2$ ；　　（2） z^3 ；　　（3） $\dfrac{1}{z^2+1}$ ；

求流动的速度以及流线和等势线的方程。

解（1） $V(z)=\overline{f'(z)}=\overline{2(z+\mathrm{i})}=2(\bar z-\mathrm{i})$ 为流速，又

$$f(z)=(z+\mathrm{i})^2=[x+\mathrm{i}(y+1)]^2=x^2-(y+1)^2+\mathrm{i}\,2x(y+1)$$

知流线和等势线方程分别为 $x(y+1)=C_1$ 和 $x^2-(y+1)^2=C_2$ 。

（2）流速 $V(z)=\overline{f'(z)}=\overline{3z^2}=3\bar z^2$ ，又 $f(z)=z^3=x(x^2-3y^2)+\mathrm{i}\,y(3x^2-y^2)$,

流线方程： $(3x^2-y^2)y=C_1$ ，　　等势线方程： $x(x^2-3y^2)=C_2$ 。

（3）流速　$V(z)=\overline{f'(z)}=\overline{\left(\dfrac{1}{z^2+1}\right)'}=\overline{\left(\dfrac{-2z}{z^2+1}\right)'}=\dfrac{-2\bar z}{(\bar z^2+1)^2}$

又 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}=\dfrac{1}{x^2-y^2+1+\mathrm{i}\,2xy}=\dfrac{x^2-y^2+1-\mathrm{i}\,2xy}{(x^2-y^2+1)+4x^2y^2}$,

流线方程为　$\dfrac{xy}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}=C_1$,

等势线方程为　$\dfrac{x^2-y^2+1}{(x^2-y^2+1)+4x^2y^2}=C_2$ 。