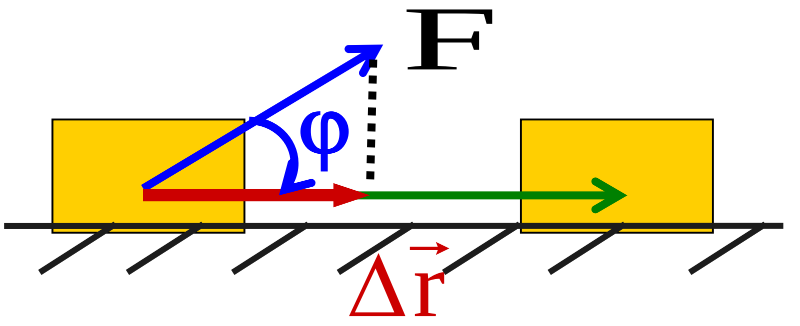
一、力对空间的积累效应

1、功(work)　　单位：J 焦耳

——力在质点位移方向的分量与位移大小的乘积。



恒力的功　$A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$

变力的功　$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$A = \int dA = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

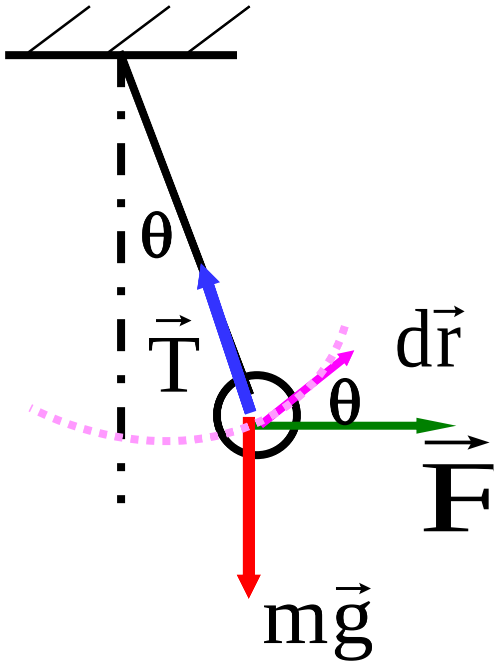
合力的功　$A = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_i A_i$

注意： 1、功是过程量，与路径有关。

2、功是标量，但有正负。

习题册2　1

（1）缓慢=平衡



$$\left.\begin{aligned} F &= T\sin\theta \\ mg &= T\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad F = mg\tan\theta$$

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left|\vec{F}\right|\cos\theta\left|d\vec{r}\right|$$

$$= \left|\vec{F}\right|\cos\theta\, ds$$

$$= mg\tan\theta\cos\theta\,\boxed{l\,d\theta}$$

（2）　$$dA = m\vec{g}\cdot d\vec{r} = mg\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)ds$$

$$= -mg\sin\theta\, l\, d\theta$$

例2、质点m，在xoy平面上运动，其位置矢量为：

$$\vec{r} = a\cos\omega t\,\vec{i} + b\sin\omega t\,\vec{j}$$

（a、b、ω为正值常数，a > b），求质点从A (a，0)点运动到B(0, b) 点的过程中力所做的功。

解：
$$\vec{F} = m\vec{a} = m(a_x\vec{i} + a_y\vec{j})$$

$$= -ma\omega^2\cos\omega t\,\vec{i} - mb\omega^2\sin\omega t\,\vec{j}$$

$$= -m\omega^2\vec{r} \quad (= F_x\vec{i} + F_y\vec{j})$$

$$A = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad (d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j})$$

$$A=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}=-m\omega^2\int_A^B (a\cos\omega t dx+b\sin\omega t dy)$$

$$=-m\omega^2\int_A^B (x dx+y dy)$$

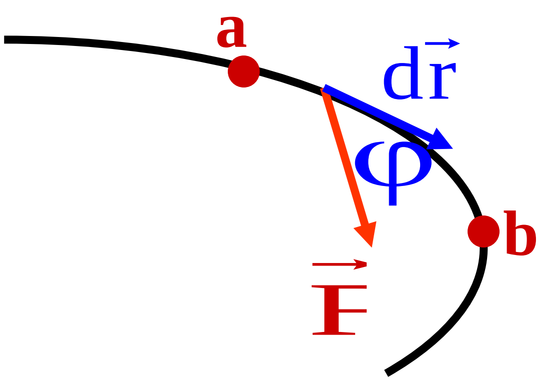
$$A_x=-\int_a^0 m\omega^2 x dx=\frac{1}{2}ma^2\omega^2$$

$$A_y=-\int_0^b m\omega^2 y dy=-\frac{1}{2}mb^2\omega^2$$

$$A=A_x+A_y=\frac{1}{2}ma^2\omega^2-\frac{1}{2}mb^2\omega^2$$

2、动能定理

——合外力对质点所作的功等于质点动能的增量。



$$A_{ab}=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b |\vec{F}|\cos\varphi|d\vec{r}|$$

$$a_t=\frac{dv}{dt}$$

$$=\int_a^b F_r|d\vec{r}|=\int_a^b ma_t|d\vec{r}|$$

$$|d\vec{r}|=vdt$$

$$A_{ab}=m\int_{v_a}^{v_b}\frac{dv}{dt}vdt=m\int_a^b vdv$$

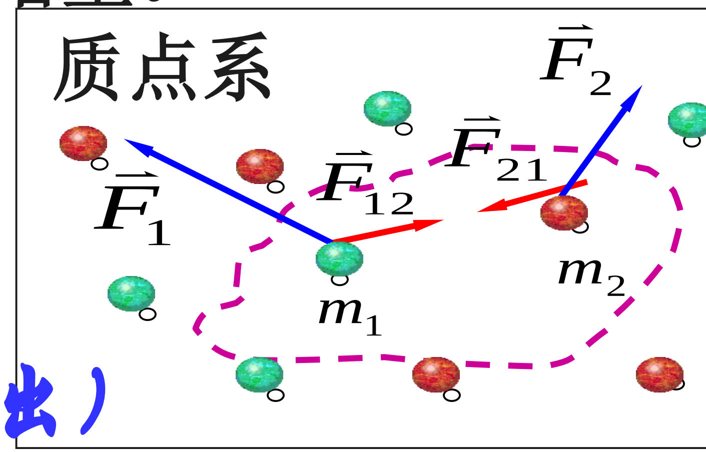
$$=\frac{1}{2}mv_b^2-\frac{1}{2}mv_a^2$$

动能

3、质点系的动能定理

——所有外力对质点系做的功和内力对质点系做的功之和等于质点系总动能的增量。

$$A_{外}+A_{内}=\sum E_{kib}-\sum E_{kia}$$



(1) 适用惯性系（牛顿定律导出）

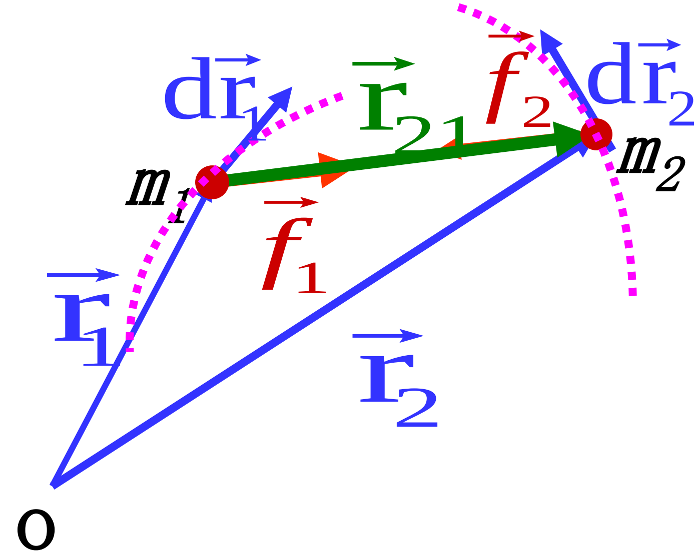
$(\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21})$

(2) 符合相对性原理

—在不同的惯性系中具有相同的形式

(3) 内力能改变系统的总动能（爆炸物的飞溅）

一对内力的功



$$dA = \vec{f}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{f}_2 \cdot d\vec{r}_2$$

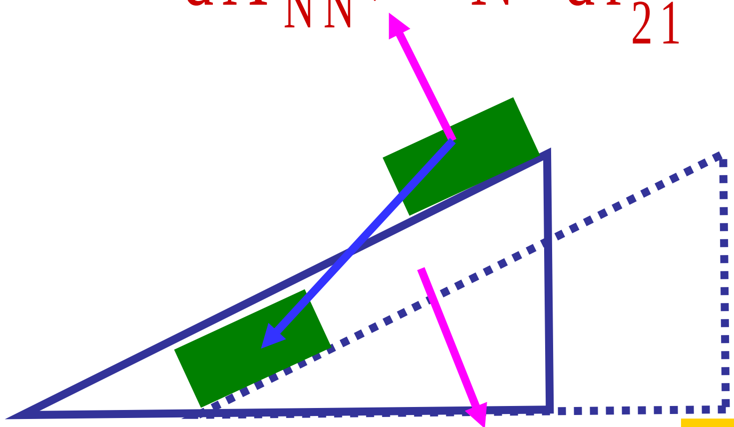
$$\because \quad \vec{f}_1 = -\vec{f}_2$$

$$\therefore \quad dA = \vec{f}_2 \cdot (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = \vec{f}_2 \cdot d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$\because \quad \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{21}$$

$$dA_{NN'} = \vec{N} \cdot d\vec{r}_{21} = 0$$

$$\therefore \quad dA = \vec{f}_2 \cdot d\vec{r}_{21}$$

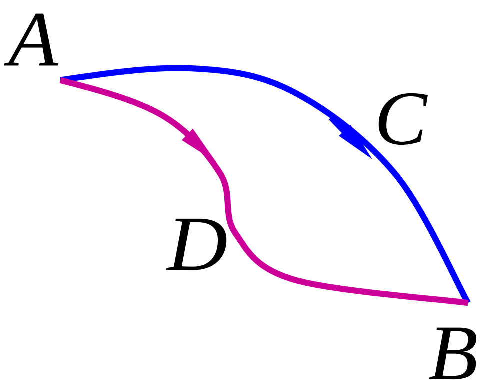


摩擦力的功？ $dA = fl$

4 、保守力的功和势能

1) 保守力 ——某些力对质点做功的大小仅与质点的始末位置有关，而与路径无关。

$$\int_{ACB} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{ADB} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$



$$\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

2) 势能 ——在具有保守力相互作用的系统内，由质点间的相对位置决定的能量称为势能

令 势能函数 $E_p=E(r)$

规定： $A_{ab}=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=E_{pa}-E_{pb}$

$$=-(E_{pb}-E_{pa})\quad (-\Delta E_p)$$

保守内力的功等于系统势能的减少(或势能增量的负值)

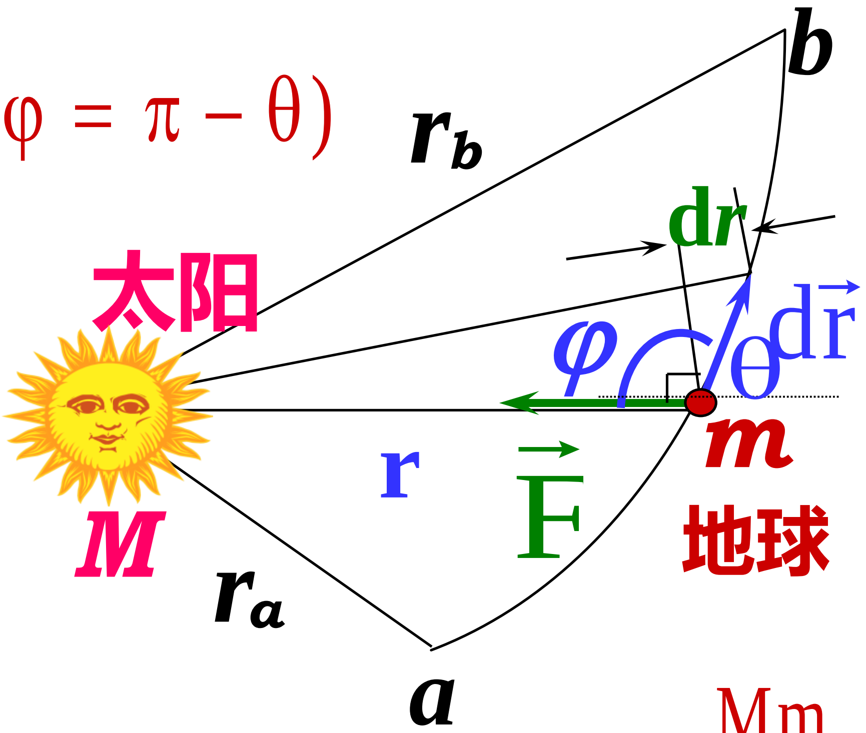
若令$E_{pb}=0$

$$E_{pa}=E_{pa}-0=\int_a^{(\text{参考零点})}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

3）几种常见保守力的势能

1、万有引力的势能：

$(\varphi = \pi - \theta)$



$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\cos\varphi |d\vec{r}|$$

$$= -G\frac{Mm}{r^2}\cos\theta |d\vec{r}|$$

$$= -G\frac{Mm}{r^2}dr$$

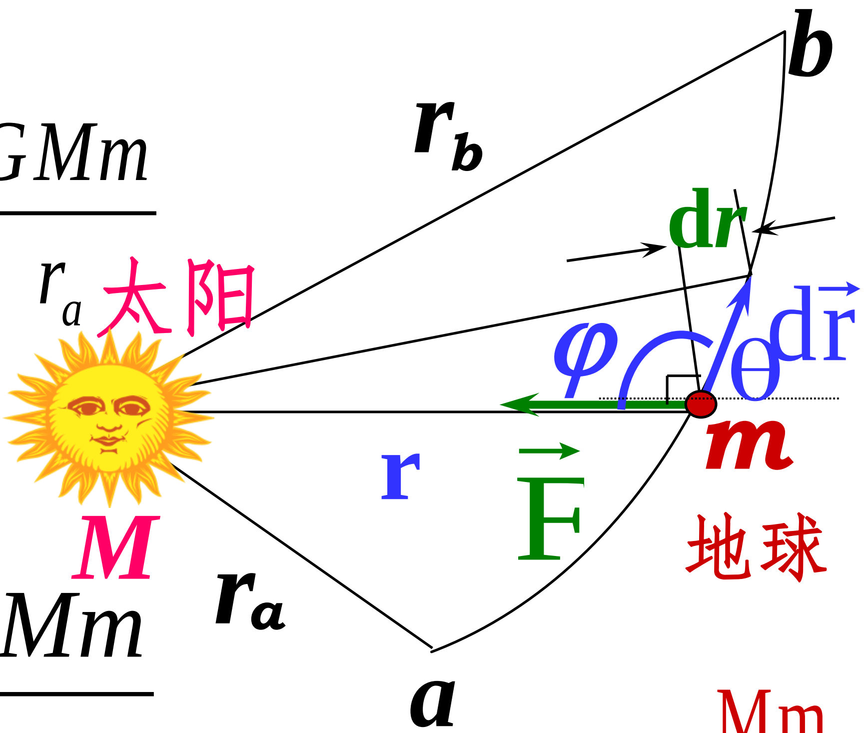
$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

令 $E_P(r_b) = 0$

$$E_{Pa} = \int_{r_a}^{r_b} -G\frac{Mm}{r^2}dr = \frac{GMm}{r_b} - \frac{GMm}{r_a}$$

令 $E_P(r_b)=0$

$$E_{Pa}=\int_{r_a}^{r_b}-G\frac{Mm}{r^2}dr=\frac{GMm}{r_b}-\frac{GMm}{r_a}$$



$$F=G\frac{Mm}{r^2}$$

令 $E_P(\infty)=0$

$$E_{Pa}=\int_{r_a}^{\infty}-G\frac{Mm}{r^2}dr=-\frac{GMm}{r_a}$$

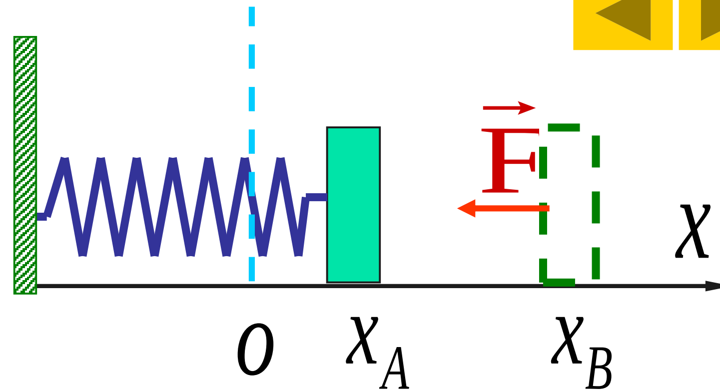
$$A_{ab}(\infty)=E_{Pa}-E_{Pb}=-G\frac{Mm}{r_a}-(-G\frac{Mm}{r_b})$$

$$=G\frac{Mm}{r_b}-G\frac{Mm}{r_a}=A_{ab}(r_b)$$

弹性力的势能

$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

$$\mathrm{d}\vec{x} = dx\vec{i}$$



$$A_{ab} = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{x_A}^{x_B} -\mathrm{k}x\mathrm{d}x$$

$$= -(\frac{1}{2}\mathrm{k}x_B^2 - \frac{1}{2}\mathrm{k}x_A^2)$$

令弹簧原长为零势能点：

$$E_P = \int_x^0 -\mathrm{k}x\mathrm{d}x = -(0 - \frac{1}{2}\mathrm{k}x^2) = \frac{1}{2}\mathrm{k}x^2$$

重力的势能

$$E_P = mgh$$ （**h**为物体离所设零势能的距离）

小结：1）只要是保守力，就可引入相应的势能

2）势能是状态函数 $E_p = E_p(x,y,z)$

3）势能具有相对性，势能大小与势能零点的选取有关.

4） 势能是属于系统的.（一对内力的功）

5）势能计算

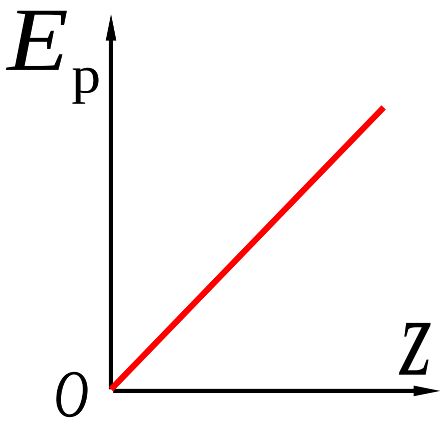
若令$E_{P0}=0$ $E_p(x,y,z)=\int_{(x,y,z)}^{E_{p0}=0} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

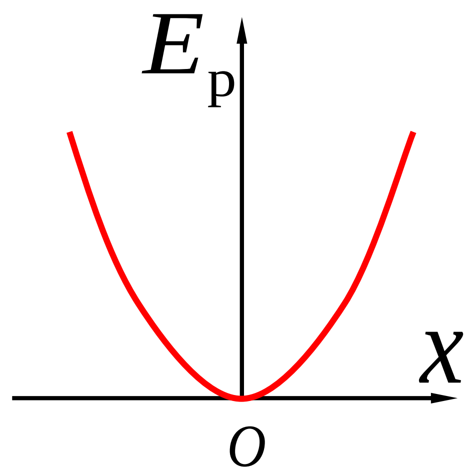
保守力的功（A→B）

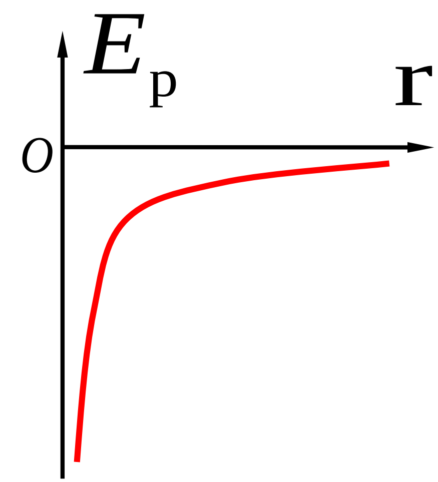
$$A_{AB} = -(E_{pB} - E_{pA}) = -\Delta E_p$$

4） 势能曲线 （自学P54 2.1.3）

$$E_p = mgz \qquad E_p = \frac{1}{2}kx^2 \qquad E_p = -G\frac{m'm}{r}$$







重力势能曲线　　弹性势能曲线　　引力势能曲线

$z = 0,\quad E_p = 0$ 　　 $x = 0,\quad E_p = 0$ 　　 $r \to \infty,\quad E_p = 0$

5、功能原理　机械能守恒定律

质点系动能定理

$$A_{外力}+A_{内力}=E_k-E_{k0}$$

$$A_{内力}=A_{保内}+A_{非保内}$$

$$A_{保内}=-(E_p-E_{p0})$$

$$\Rightarrow A_{外力}+A_{非保内}-(E_p-E_{p0})=E_k-E_{k0}$$

$$\Rightarrow A_{外力}+A_{非保内}=E_k+E_p-(E_{k0}+E_{p0})$$

若令 $E = E_k + E_p$为机械能

$$\Rightarrow A_{外力} + A_{非保内} = E - E_0$$

质点系的功能原理——质点系机械能的增量等于外力和非保守内力作功之和.

当质点系 $A_{外力} + A_{非保内} = 0$ 时，有 $E = E_0$

机械能守恒定律—— 只有保守内力作功的情况下，质点系的机械能保持不变.

守恒定律的意义:不追究过程细节而能对系统的状态下结论, 这是各个守恒定律的特点和优点 .

研究力学问题的途径

1）牛顿运动定律　　受力清晰，过程明确

2）动能定理　　系统做功明了，
　　功能原理　　状态确定
　　机械能守恒

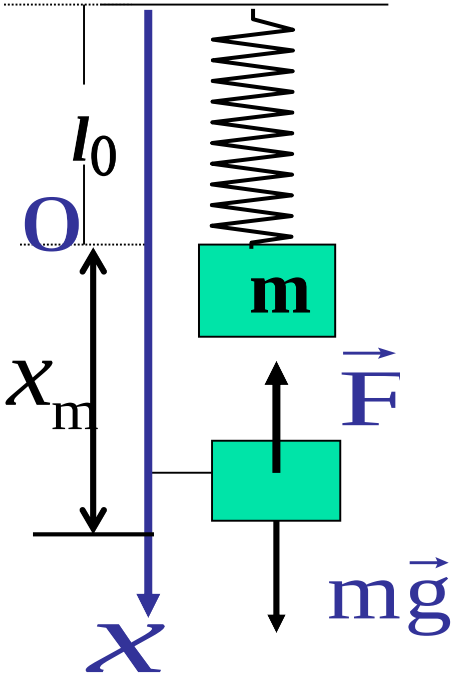
解题原则：

选择合适的系统尽可能用守恒定律

例1、一根弹簧原长l_0，倔强系数为k，下端悬挂一质量为m的物体。问当物体从弹簧原长静止开始运动，弹簧的最大伸长量为多大?

分析： $v_0=0$， $x_{max} \Rightarrow v=0$

解：1）m为系统 —动能定理



$$A = A_{mg} + A_F = 0 - 0$$

$$A_{mg} = m\vec{g} \cdot x_m \vec{i} = mgx_m$$

$$A_F = \int_0^{x_m} -kx\,dx = -\frac{1}{2}kx_m^2$$

$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

$$mgx_m - \frac{1}{2}kx_m^2 = 0 \Rightarrow x_m = \frac{2mg}{k}$$

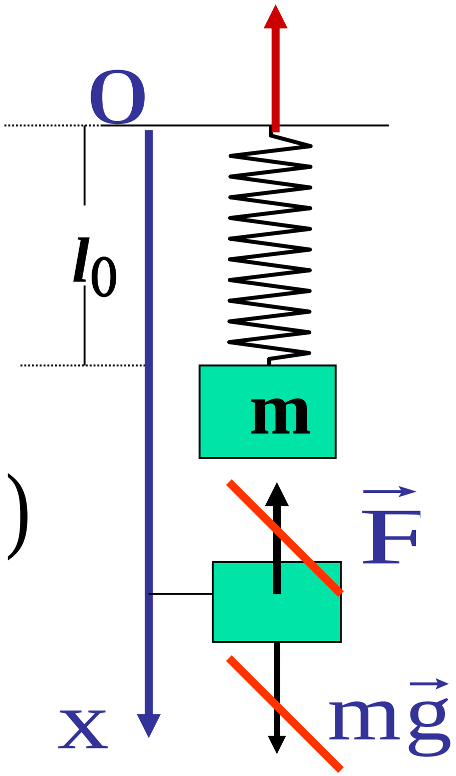
2）m、地球为系统 （选0点为势能零点）

——功能原理

$$A_F = -\frac{1}{2}kx_m^{\ 2} = E - E_0$$

$$= -mg(x_m + l_0) - (-mg\,l_0)$$

$$= -mg\,x_m$$



3）m、弹簧、地球为系统 有外力但不作功

——机械能守恒（选原长为势能零点）

$$0 + 0 + 0 = -mg\,x_m + \frac{1}{2}kx_m^2 + 0$$

习题册2　4 在地球表面上垂直向上以第二宇宙速度 $v_2=\sqrt{2gR}$ 发射一物体，**R**为地球半径，g为重力加速度试求此物体到达与地心相距为 nR 时所需的时间。

解：地球、物体为系统，有保守内力—万有引力

$\Rightarrow$机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_2^2-G\frac{mM}{R}=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{mM}{r}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_2=\sqrt{2gR} \\ mg=G\dfrac{mM}{R^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2-G\frac{mM}{r}=0$$

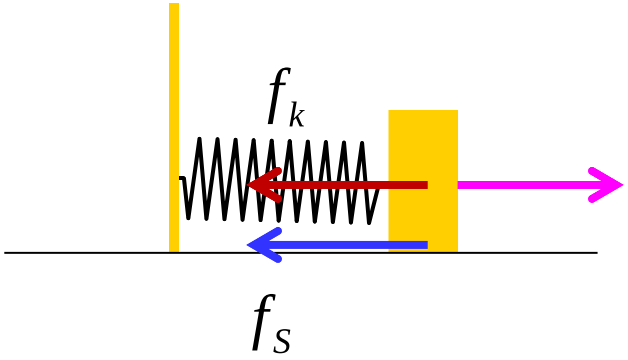
$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \frac{dr}{dt}$$

$$\mathrm{dt} = \sqrt{\frac{r}{2GM}}dr$$

$$\int_0^t dt = \int_R^{nR} \sqrt{\frac{r}{2GM}}dr$$

书P95 2-6

解：（1）物体、弹簧为系统，



根据功能原理得

$$f_s = \mu N = \mu mg$$

$$(F - \mu mg)x_{\max} = 0 + \frac{1}{2}kx_{\max}^2 - (0+0) \Rightarrow x_{\max} = \frac{2(F - \mu mg)}{k}$$

（2）速度最大处为平衡位置，此时弹簧伸长为

$$F - \mu mg - kx_0 = 0$$

由功能原理得：

$$(\mathrm{F} - \mu \mathrm{mg})\mathrm{x}_0 = \frac{1}{2}\mathrm{kx}_0^2 + \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2 - 0 \Rightarrow v = \frac{F - \mu mg}{\sqrt{km}}$$