ppt复习基础篇

2019年6月21日　11:37

基础篇

可数集*

证明可数集：

例子1. 证明：可数集A的有限子集全体可数.

证明：无妨设A是无限集，
写$A=\{a_1,a_2,\cdots\}$.

对$n\geq 1$，记$A_n=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$P_n$为$A_n$的所有子集全体. 则$P_n$为有限集.

所以$\cup_{n\geq 1}P_n$可数.

对A的任一有限子集B，

B可写成$B=\{a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_m}\}$，

记$N=\max\{k_j:1\leq j\leq m\}$.那么$B\in P_N$.

由此可见A的有限子集全体为$\cup_{n\geq 1}P_n$，所以是可数集.

- 知道可数集的具体例子：

有理数集，代数数集*

- 知道外测度

mA=inf{mG:G是开集且G⊃A}

- 知道Lebesgue测度的构造，有个直观的印象，集合B满足Caratheodory条件p69

- 可测函数的定义*理解函数可测的几种等价表达

$(X,\mathcal{A},\mu)$是给定的完备测度空间

（i）定义设f是X上的实函数.若∀a ∈ R，集X（f>a）恒可测，则称f为X上的可测函数.

（ii）∀a∈R：集X（f≤a）可测；

（iii）∀a∈R：集X（f<a）可测；

（iv）∀a∈R：集X（f≥a）可测；

（v）∀a,β∈R：集X（a<f<β）与X（f=∞）可测；

（vi）任给开集G⊂R：集f^{-1}（G）与X（f=∞）可测；

（vii）任给闭集F⊂R：集f^{-1}（F）与X（f=∞）可测.

- Lebesgue可测集的几种等价描述

-

命题 2.1.5 (i) 若 $A \in \mathscr{L}$，则

$$mA = \inf\{mG : G \text{ 是开集且 } G \supset A\}$$
$$= \sup\{mF : F \text{ 是闭集且 } F \subset A\}$$
$$= \sup\{mC : C \text{ 是紧集且 } C \subset A\}. \quad (1)$$

(ii) $A \in \mathscr{L} \Leftrightarrow$ 存在 F_σ 型集 $F \subset A$ 使 $m(A \setminus F) = 0 \Leftrightarrow$ 存在 G_δ 型集 $G \supset A$ 使 $m(G \setminus A) = 0 \Leftrightarrow$ 存在 F_σ 型集 F 与 G_δ 型集 G，使 $F \subset A \subset G$ 且 $m(G \setminus F) = 0$.

- Lebesgue可测函数的定义

定义设f是X上的实函数.若∀a ∈ R，集X（f>a）恒可测，则称f为X上的可测函数.

若$X \subset R^n$则称X上的可测函数为Lebesgue可测函数

- 实直线上Lebesgue可测集的等价定义*

性质*：对于任意$\varepsilon > 0$,存在开集O包含E,且$mO < \varepsilon$，那么我们（临时）称E具有性质*.

$\mathbb{R}$上Lebesgue可测集的等价描述：

E为Lebesgue可测集当且仅当下列条件之一成立：

•$E = A - N_1$,其中A为G_δ型集，N_1具有性质*.

•$E = A - N_1$,其中A为Borel集/Baire集，N_1具有性质*.

Real Analysis

• $E = B \cup N_2$,其中B为F_σ型集，N_2具有性质*.

•对于任意$\varepsilon > 0$，存在闭集F和开集G使得$F \subseteq E \subseteq G$, $m(G - F) < \varepsilon$.

(注意$G - F$是开集，所以这里$m(G - F)$就是开集的长度)

注解：

*：Lebesgue零测集

G_δ集：可数个开集之交

F_σ集：可数个闭集之并

- σ-代数*p48

(P_1) $\varnothing \in \mathscr{A}$；

(P_2) 若 $A_n \in \mathscr{A} (n = 1, 2, \cdots)$，则 $\bigcup A_n \in \mathscr{A}$；

(P_3) 若 $A \in \mathscr{A}$，则 $A^c \in \mathscr{A}$，

- 什么是（一般）测度*p48

则称 $\mathscr{A}$ 为 X 上的一个 σ-**代数**，称 $(X,\mathscr{A})$ 为一个**可测空间**，称每个 $A\in\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{A}$-可测集，或简称为可测集. 若 $\mathscr{A}$ 是 σ-代数，集函数 $\mu:\mathscr{A}\to[0,\infty]$ 具有以下性质：

(Q_1) $\mu\varnothing=0$;

(Q_2) σ-可加性：若 $A_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$ 互不相交，则

$$\mu(\bigcup_n A_n)=\sum_n \mu A_n.$$

则称 μ 为 X 或 $(X,\mathscr{A})$ 上的一个测度，称 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 或 X 为测度空间. 若进而假定 μ 满足条件

(Q_3) 若 $B\subset A\in\mathscr{A},\mu A=0$，则 $B\in\mathscr{A}$，

则称 μ 为**完备测度**.

- 知道测度的一些具体例子*

※关于测度的具体例子：

$X=\{1,2,3,4,5,6\}$

$\mathscr{A}=\{\varnothing,\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\}\}$

$\mathscr{A}$上的集函数μ定义为集合中元素的个数

其中可测集为∅，{1，2，3}，{4，5，6}，{1，2，3，4，5，6}

具体证明关键在根据σ=代数定义证明$\mathscr{A}$是σ-代数

但是这个μ不是可测函数，可测函数可以取f=0的常值函数，则对于任意α>0

α≥0时 X(f>α)=∅∈$\mathscr{A}$

α<0时 X(f>α)={1，2，3，4，5，6}∈$\mathscr{A}$

- 理解开集的结构1.5.1p24.

1.5.1 定理 R 中任一非空开集 G 是可数个互不相交的开区间之并[1].

- 积分三大定理*：p.87 Levi引理（即书上的Levi定理*、Fatou定理*、控制收敛定理*）

$$\int_X f=\lim_n\int_X f_n, \tag{1}$$

3.3.1 Levi 定理 若 $0\leqslant f_n\uparrow f$，即 $0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\to f(x)(x\in X,n\to\infty)$，则式(1)成立.

3.3.3 Fatou 定理 若 $f_n\in M^+(X)(n=1,2,\cdots)$，则

$$\int_X \underline{\lim_n} f_n\leqslant\underline{\lim_n}\int_X f_n. \tag{4}$$

3.3.4 控制收敛定理 设 $f_n\to f$, a.e. 或 $f_n\xrightarrow{\mu} f(n\to\infty)$. 若存在 $g\in L^1$ 使 $|f_n|\leqslant g(n=1,2,\cdots)$，则 $f\in L^1$，

$$\lim_n\int_X|f_n-f|=0, \tag{5}$$

且式(1)成立.

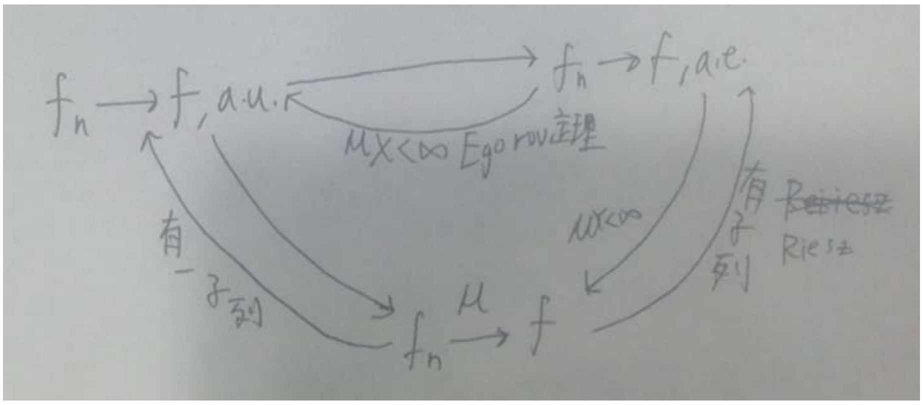
- 几种收敛性的定义2.4.1，p/52几乎一致收敛，依测度收敛

2.4.1 定义 (i) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \forall x \in X$，有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$，则说 $\{f_n\}$ 在 X 上一致收敛于 f，记作 $f_n \rightrightarrows f$.

(ii) 若 $\forall \delta > 0, \exists X_\delta \subset X$，使得 $\mu X_\delta^c < \delta$，在 X_δ 上 $f_n \rightrightarrows f$，则说 $\{f_n\}$ 在 X 上几乎一致收敛于 f，记作 $f_n \to f$, a.u..

(iii) 若 $\forall \sigma > 0$，有 $\mu X(|f_n - f| \geq \sigma) \to 0 (n \to \infty)$，则说 $\{f_n\}$ 在 X 上依测度 μ 收敛（或就说测度收敛）于 f，记作 $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

- Egorov定理*、Riesz定理*，Luzin定理2.4.4的压缩版本应用。
- Egorov Riesz



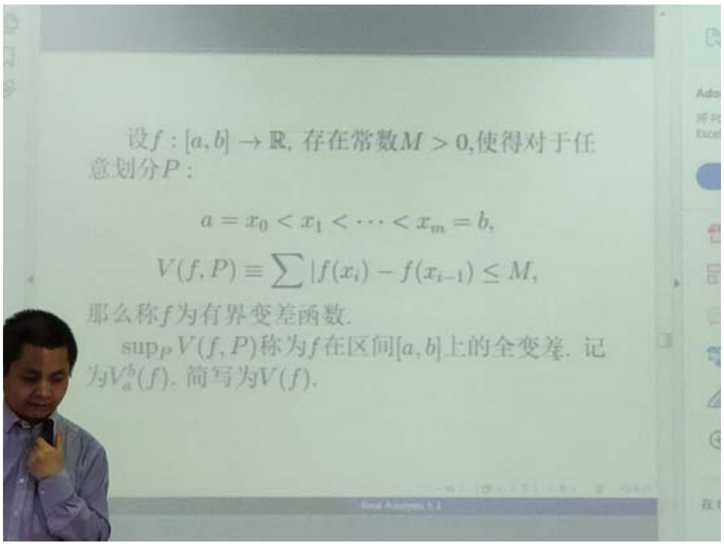
- 有界变差函数定义*

设 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$，如果存在常数 $M > 0$，对于任意划分：

- $$a = x_0 < x_1 < \cdots x_n = b,$$

$\sum_i |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M < \infty$，那么称 f 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数.

- M不依赖于划分P



- 绝对连续函数定义*

AC 的定义: (Absolutely continuous)

$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, 若$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta$, 当(a_k,b_k)为$[a,b]$中有限个互不相交的区间且$\sum(b_k-a_k)<\delta$, 恒有$\sum_k|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$

则f在$[a,b]$上绝对连续

- 会证明一个函数是绝对连续函数.*

15:56 6月22日 周六 92%

$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt \quad x\in[a,b]\Rightarrow f\in AC$

ex: $a>1$, $f(x)=x^a\sin\frac{1}{x}$, $x\in[0,1]$, prove: $f\in AC$

1. $f'(x)=ax^{a-1}\sin\frac{1}{x}+x^a(\sin\frac{1}{x})'$, $0<x<1$

2. $f'\in L^1$, ……

3. $\forall\delta>0$. $f'\in C[\delta,1]$

$f(1)-f(\delta)=\int_\delta^1 f'(t)\,dt$

改写 $\delta=x$. $f(1)-f(x)=\int_x^1 f'(t)\,dt \quad 1\geq x>0 \quad (+)$

$x=\frac{1}{n} \quad f(1)-f(\frac{1}{n})=\int_{\frac{1}{n}}^1 f'dt=\int_0^1 f'\chi_{[\frac{1}{n},1]}\,dt$

令$n\to\infty$, $f(\frac{1}{n})=(\frac{1}{n})^a\sin n=0=f(0)$

$\because f'\in L^1$, $\therefore|f'|\in L^1$; $|f'\chi_{[\frac{1}{n},1]}|\le|f'|$ 由控制收敛定理

$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f'\chi_{[\frac{1}{n},1]}\,dt=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f'\chi_{[\frac{1}{n},1]}\,dt=\int_0^1 f'dt$

$\therefore f(1)-f(0)=\int_0^1 f'dt$

即$(+)$对$0\le x\le1$成立

$f(x)=f(1)-\int_x^1 f'dt\in AC$

$\quad=f(1)-\int_0^1 f'dt+\int_0^x f'dt$

$$f(x) = f(1) - \int_x^1 f' dt \in AC$$
$$= f(1) - \int_0^1 f' dt + \int_0^x f' dt$$

- 会证明一个函数不是有界变差函数.*

计算知$F'(t) = \dfrac{\cos\frac{1}{t}}{t^2}, t \in (0,1]$.

- $\int_0^1 |F'(t)|dt = \int_0^1 \dfrac{|\cos\frac{1}{t}|}{t^2}dt = \int_1^\infty |\cos t|dt = \infty$. 所以$F'$在$[0,1]$上不可积，所以$F$不是有界变差函数.
只写$\int_0^1 |F'(t)|dt = \infty$不写计算过程是要扣分的(考试中).