运动学的两类问题

第一类问题： 已知： $\vec{r}=\vec{r}(t)$

（求导问题） 求： $\vec{v}=\vec{v}(t),\ \vec{a}=\vec{a}(t)$

第二类问题： 已知： $\vec{a}=\vec{a}(t)$

（积分问题）

初始条件： $t=0$ $\begin{cases} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{cases}$ $\begin{cases} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{cases}$

求： $\vec{v}=\vec{v}(t),\ \vec{r}=\vec{r}(t)$

$\vec{r}(t) \underset{积分}{\overset{求导}{\rightleftarrows}} \vec{v}(t) \underset{积分}{\overset{求导}{\rightleftarrows}} \vec{a}(t)$

匀变速运动

$\vec{a}$为常矢量

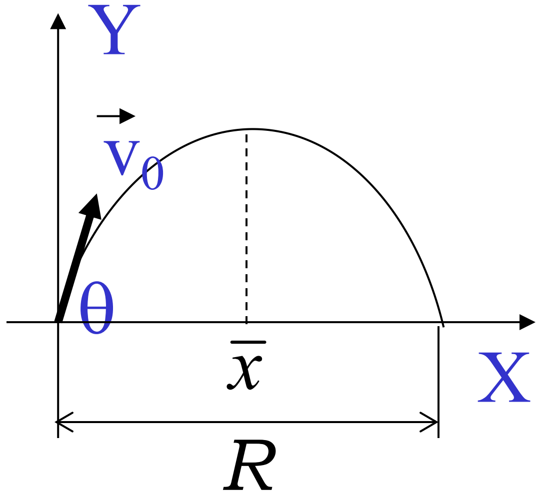
得：$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}t$

得：$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

$$R = \frac{v_0^{\ 2}}{g}\sin 2\theta$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

➢抛体运动：



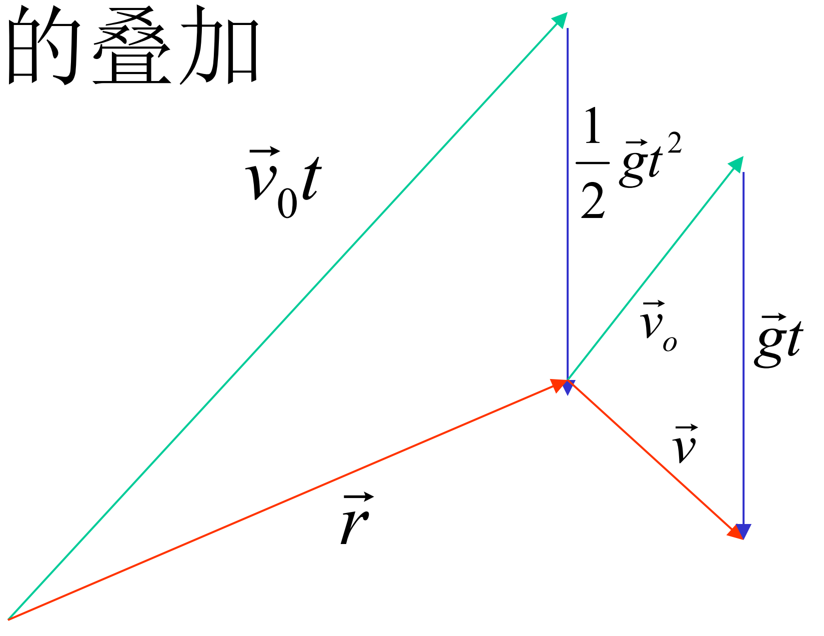
$$\vec{v} = v_0 \cos\theta \vec{i} + (v_0 \sin\theta - gt)\vec{j}$$

$$\vec{r} = (v_0 \cos\theta \cdot t)\vec{i} + \left(v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2\right)\vec{j}$$

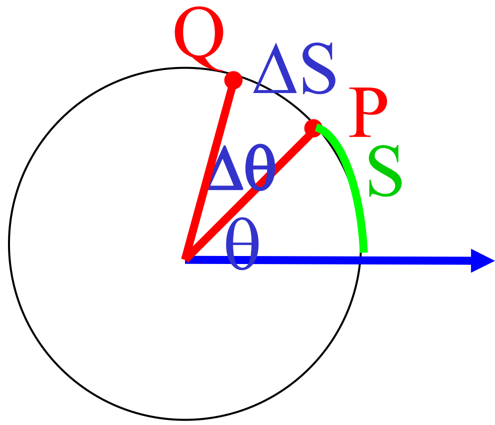
抛体运动：初速$\vec{v}_0$方向的匀速直线运动与竖直方向上自由落体运动的叠加

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}t$$

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$



§1.4 圆周运动---运动轨迹为圆的质点运动



角位置θ: 质点, 圆心连线同参考线夹角

约定：逆(顺)时针为正(负)

角位移Δθ:Δt内质点转过的角度.

$$[\Delta S = R\Delta\theta]$$

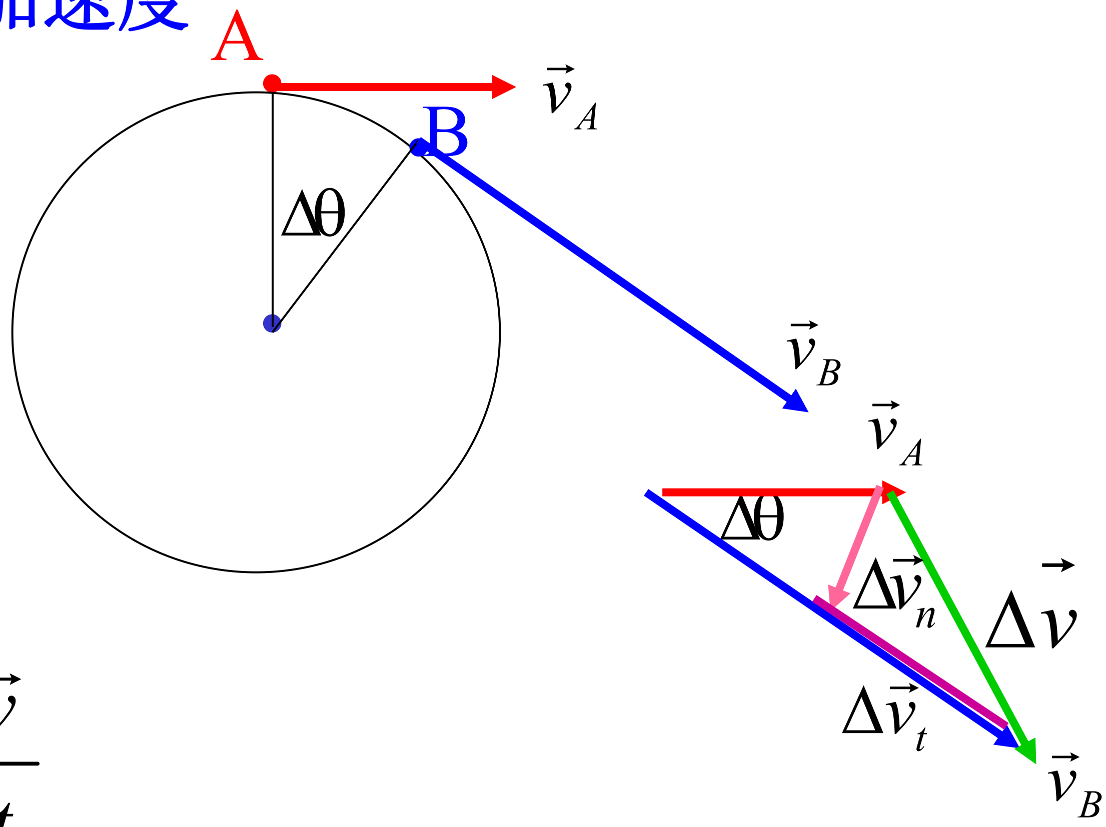
角速度ω: $$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\left[\ v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega\ \right]$$

角加速度α: $$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

α 与ω同号，角加速；α与ω异号，角减速

一、切向加速度和法向加速度



令$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_n + \Delta\vec{v}_t$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$= \lim \frac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{\Delta t}$$

则：$\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} + \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}_t}{\Delta t} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$

法向加速度： $$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\vec{v}|\Delta\theta}{\Delta t}$$

方向指向圆心

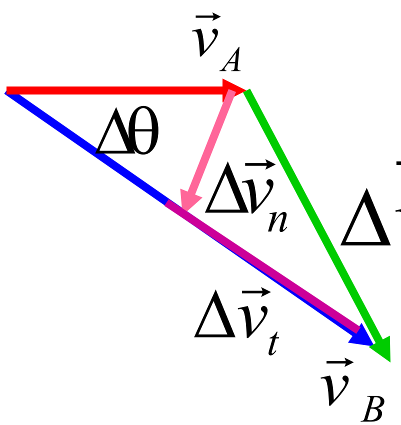
物理意义：速度方向改变的反映。 $$= v\omega = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

切向加速度：

$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta \overrightarrow{v_t}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

方向沿切向

物理意义：速度大小改变的反映。



例1

对于作曲线运动的物体，以下几种说法中哪一种是正确的：

（A）切向加速度必不为零；

（B）法向加速度必不为零（拐点处除外）；

（C）由于速度沿切线方向，法向分速度必为零，因此法向加速度必为零；

（D）若物体作匀速率运动，其总加速度必为零；

（E）若物体的加速度 $\vec{a}$ 为恒矢量，它一定作匀变速率运动．

例2. 一质点作半径为0.1m的圆周运动，已知运动学方程为 $\theta = 2 + t^3$

求 (1) 当 t =2s时，质点运动的 a, a_n, a_t

(2) 当 θ =?时，质点的加速度与半径成45°角？

解 (1) 运动学方程得 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = 3t^2 \qquad \alpha = \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = 6t$

得 $a_n = \omega^2 r, a_t = \alpha r, a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$

(2) 设 t' 时刻，质点的加速度与半径成45°角，则

$$a_n = a_t, \quad \omega^2 r = \alpha r$$

二. 角量表示的（匀角加速）运动方程

$t=0$ 时， $\theta=\theta_0, \omega=\omega_0$

$$\frac{d\omega}{dt}=\alpha \Rightarrow d\omega=\alpha dt \quad \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega=\int_0^t \alpha dt \Rightarrow \underline{\underline{\omega-\omega_0=\alpha t}}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\omega \Rightarrow d\theta=(\omega_0+\alpha t)dt$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta=\int_0^t (\omega_0+\alpha t)dt \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\theta-\theta_0=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2}}$$

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\omega \Rightarrow \omega d\omega=\alpha d\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega=\int_{\theta_0}^{\theta} \alpha d\theta \Rightarrow \underline{\underline{\omega^2-\omega_0^2=2\alpha(\theta-\theta_0)}}$$

三. 常见的三种运动

1、一般曲线运动（自然坐标）

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}} \qquad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}+\frac{v^{2}}{\rho}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

其中 $\rho=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$ 是曲率半径 .

2、匀速率圆周运动：速率 v 和角速度 ω 都为常量.

$$a_{\mathrm{t}}=0 \qquad \vec{a}=a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}}=r\omega^{2}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

3、匀变速率圆周运动

$$\alpha=\text{常量}$$

【例3】已知质点在XOY平面内运动， $\vec{r}=6t\vec{i}+\left(4t^2-8\right)\vec{j}$

试求：1、质点作何运动？

2、t=1秒时质点的a_n和a_t为多少？该处的ρ为多少？

解：1、

$$\left.\begin{aligned}\vec{v}&=\frac{d\vec{r}}{dt}=6\vec{i}+8t\vec{j}\\ \vec{a}&=\frac{d\vec{v}}{dt}=8\vec{j}\end{aligned}\right\}$$ 匀变速曲线运动

2、 $$a_{n1}=\frac{v_1^{\ 2}}{\rho}=\sqrt{a^2-a_{t1}^{\ 2}}$$

$$\left.\begin{aligned}a_{t1}&=\frac{dv}{dt}\bigg|_{t=1}\\ v&=\sqrt{36+64t^2}\end{aligned}\right\}\quad a_{t1}=?$$

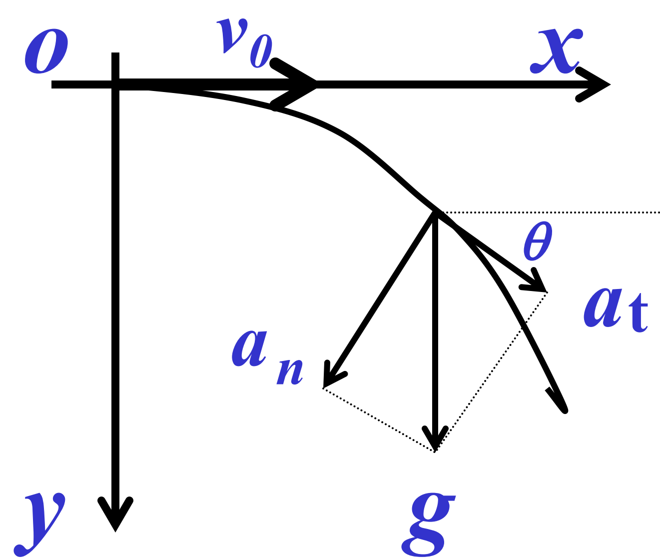
例4、由楼窗口以水平初速度 v_0 射出一发子弹，取枪口为原点，沿 v_0 为 x 轴，竖直向下为 y 轴，并取发射时 $t=0$.
试求：

(1) 子弹在任一时刻 t 的位置坐标及轨道方程；

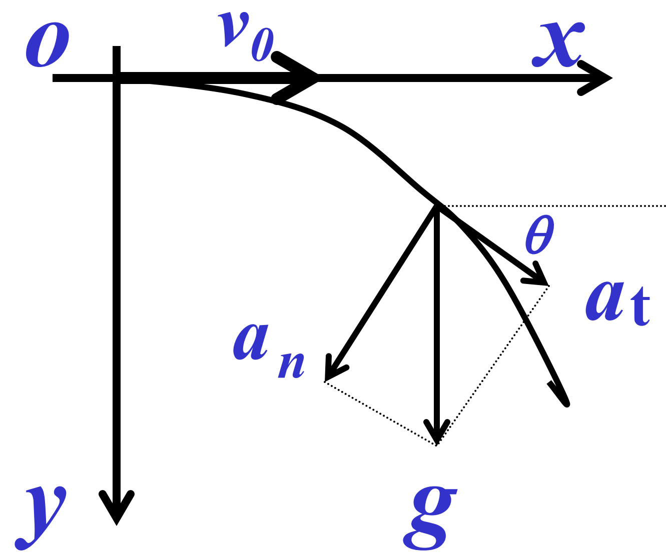
(2) 子弹在 t 时刻的速度，切向加速度和法向加速度。

解：(1)

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t \\ y &= \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = \frac{x^2 g}{2 v_0^2} \quad (x \geq 0)$$



(2) 子弹在 t时刻的速度，
切向加速度和法向加速度。



$$v_x = v_{0,}\, v_y = gt$$

$$\vec{v} = v_0 \overleftarrow{i} + gt\vec{j}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

$$\theta = arctg \frac{gt}{v_0}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$ 与速度同向

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_t^2} = \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$ 与切向加速度垂直

抛体运动和自由落体运动，加速度为g

§1.5 相对运动

物体运动的轨迹依赖于观察者所处的参考系

1、基本参照系S：相对地球静止的参照系. S系中的位移、速度、加速度分别称为 绝对位移、绝对速度、绝对加速度；

$$\vec{r}_{po}, \vec{v}_{po}, \vec{a}_{po}$$

2、运动参照系S’：相对基本参照系运动的参照系。S’系中位移、速度、加速度分别称为相对位移、相对速度、相对加速度；

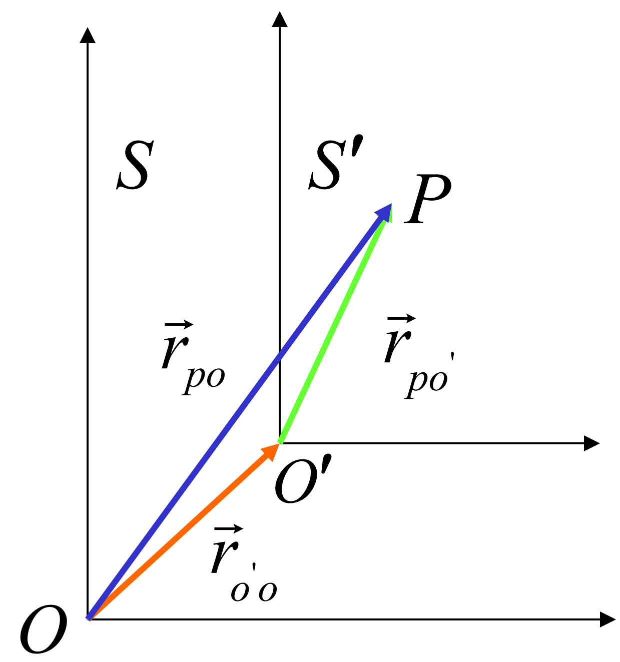
$$\vec{r}_{po'}, \vec{v}_{po'}, \vec{a}_{po'}$$

3、基本关系式

设：S'系坐标原点在S系中的位矢为$\overrightarrow{r_{O'O}}$，

S'系对S系的相对速度(牵连速度)为$\overrightarrow{v_{O'O}}$

S'系坐标原点在S系中的加速度为$\overrightarrow{a_{O'O}}$



则 有 ：
$$\begin{cases} \overrightarrow{r_{po}} = \overrightarrow{r_{po'}} + \overrightarrow{r_{o'o}} \\ \overrightarrow{v_{po}} = \overrightarrow{v_{po'}} + \overrightarrow{v_{o'o}} \\ \overrightarrow{a_{po}} = \overrightarrow{a_{po'}} + \overrightarrow{a_{o'o}} \end{cases}$$

一般关系式： $\vec{M}_{po} = \vec{M}_{po'} + \vec{M}_{o'o}$

注意：(1).速度及加速度关系式只适用于$v_{oo'} << c$的场合

(2).若 $a_{oo'} = 0$，则 $a_{po} = a_{po'}$ ——伽利略相对性原理