《微分几何》课程电子课件

教师：杨勤民

Tel: (021)64253147

Email: qmyang@ecust.edu.cn

课程**QQ**群号：**1045698545**

五、空间曲线论的基本定理

设有闭区间$[s_0,s_1]$上的两个连续函数$k(s)>0$和$\tau(s)$，则除了空间的位置差别外，唯一的存在一条空间曲线，使得参数s是该曲线的自然参数，并且$k(s)$和$\tau(s)$分别是该曲线在s点处的曲率和挠率.

由基本定理知：$\begin{cases} k=k(s) \\ \tau=\tau(s) \end{cases}$完全确定了曲线的形状，并且与曲线在空间中所处的位置和方向无关.

称$\begin{cases} k=k(s) \\ \tau=\tau(s) \end{cases}$为空间曲线的自然方程.

证明思路

Step1. 增加条件使曲线的位置和方向固定;

Step2. 由 $k(s)$, $\tau(s)$ 和增加的条件确定三个向量函数(后面会证明它们为曲线的三个基本向量);

Step3. 由增加的条件和第一个向量函数解出曲线的方程 $\vec{r}(s)$;

Step4. 证明 s 是该曲线的自然参数;

Step5. 证明该曲线的曲率是 $k(s)$, 挠率是 $\tau(s)$.

证 (增加条件使曲线的位置和方向固定)

任取空间中的一点P_0作为空间曲线$\vec{r}=\vec{r}(s)$在

$s=s_0$时的对应点, 记$\vec{r}_0=\overrightarrow{OP_0}$.

设$\vec{\alpha}_0,\vec{\beta}_0,\vec{\gamma}_0$为两两垂直且服从右手法则的单位向量.

(由$k(s),\tau(s)$和增加的条件确定三个向量函数)

设有三个光滑的向量函数$\vec{\alpha}(s),\vec{\beta}(s),\vec{\gamma}(s)$满足

$$\begin{cases}\vec{\alpha}'(s)=k(s)\vec{\beta}(s)\\ \vec{\beta}'(s)=-k(s)\vec{\alpha}(s)+\tau(s)\vec{\gamma}(s)\\ \vec{\gamma}'(s)=-\tau(s)\vec{\beta}(s)\end{cases}\tag{1}$$

和初值条件: $\vec{\alpha}(s_0)=\vec{\alpha}_0,\vec{\beta}(s_0)=\vec{\beta}_0,\vec{\gamma}(s_0)=\vec{\gamma}_0$.

由微分方程的理论知，该初值问题存在唯一一组解

$$\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(s),\ \vec{\beta}=\vec{\beta}(s),\ \vec{\gamma}=\vec{\gamma}(s).$$

(由增加的条件和第一个向量函数解出曲线方程 $\vec{r}(s)$)

令 $\begin{cases}\vec{r}'(s)=\vec{\alpha}(s)\\ \vec{r}(s_0)=\vec{r}_0\end{cases}$，则可积分得到 $\vec{r}(s)=\vec{r}_0+\int_{s_0}^{s}\vec{\alpha}(s)\mathrm{d}s.$

(证明 s 是该曲线的自然参数)

先证 $\vec{\alpha}(s),\vec{\beta}(s),\vec{\gamma}(s)$ 是两两垂直且服从右手法则的的单位向量.

记

$$\left.\begin{aligned}&\vec{\alpha}^*(s)=\vec{\beta}(s)\times\vec{\gamma}(s),\ \vec{\beta}^*(s)=\vec{\gamma}(s)\times\vec{\alpha}(s),\\ &\vec{\gamma}^*(s)=\vec{\alpha}(s)\times\vec{\beta}(s).\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$则\ \vec{\alpha}^{*\prime}(s)=\vec{\beta}'(s)\times\vec{\gamma}(s)+\vec{\beta}(s)\times\vec{\gamma}'(s)$$

$$=[-k(s)\vec{\alpha}(s)+\tau(s)\vec{\gamma}(s)]\times\vec{\gamma}(s)+\vec{\beta}(s)\times[-\tau(s)\vec{\beta}(s)]$$

$$=-k(s)\vec{\alpha}(s)\times\vec{\gamma}(s)=k(s)\vec{\beta}^{*}(s),$$

$$\vec{\beta}^{*\prime}(s)=\vec{\gamma}'(s)\times\vec{\alpha}(s)+\vec{\gamma}(s)\times\vec{\alpha}'(s)$$

$$=[-\tau(s)\vec{\beta}(s)]\times\vec{\alpha}(s)+\vec{\gamma}(s)\times[k(s)\vec{\beta}(s)]$$

$$=-\tau(s)(-\vec{\gamma}^{*}(s))-k(s)\vec{\alpha}^{*}(s)=-k(s)\vec{\alpha}^{*}(s)+\tau(s)\vec{\gamma}^{*}(s),$$

$$\vec{\gamma}^{*\prime}(s)=\vec{\alpha}'(s)\times\vec{\beta}(s)+\vec{\alpha}(s)\times\vec{\beta}'(s)$$

$$=[k(s)\vec{\beta}(s)]\times\vec{\beta}(s)+\vec{\alpha}(s)\times[-k\vec{\alpha}(s)+\tau(s)\vec{\gamma}(s)]$$

$$=\tau(s)\vec{\alpha}(s)\times\vec{\gamma}(s)=-\tau(s)\vec{\beta}^{*}(s).$$

由此可见$\vec{\alpha}^*(s),\vec{\beta}^*(s),\vec{\gamma}^*(s)$满足方程组(1),

且满足$\vec{\alpha}^*(s_0)=\vec{\beta}_0\times\vec{\gamma}_0=\vec{\alpha}_0,\vec{\beta}^*(s_0)=\vec{\beta}_0,\vec{\gamma}^*(s_0)=\vec{\gamma}_0$.

所以$\vec{\alpha}^*(s),\vec{\beta}^*(s),\vec{\gamma}^*(s)$也是上述初值问题的解,

这个初值问题的解是唯一的,故

$$\vec{\alpha}^*(s)=\vec{\alpha}(s),\ \vec{\beta}^*(s)=\vec{\beta}(s),\ \vec{\gamma}^*(s)=\vec{\gamma}(s).$$

代入(2)得$\vec{\alpha}(s)=\vec{\beta}(s)\times\vec{\gamma}(s),\vec{\beta}(s)=\vec{\gamma}(s)\times\vec{\alpha}(s)$,

$$\vec{\gamma}(s)=\vec{\alpha}(s)\times\vec{\beta}(s).$$

于是$\vec{\alpha}(s),\vec{\beta}(s),\vec{\gamma}(s)$要么全为零向量,要么是两两垂直且服从右手法则的单位向量.

而当$s=s_0$时，它们都是单位向量，故由连续性知它们只能是两两垂直且服从右手法则的单位向量.

由$\left|\vec{r}'(s)\right|=\left|\vec{\alpha}(s)\right|=1$知$s$是弧长参数.

(证明该曲线的曲率是$k(s)$，挠率是$\tau(s)$)

由$\dot{\vec{r}}(s)=\vec{\alpha}(s)$知$\vec{\alpha}(s)$是曲线$\vec{r}=\vec{r}(s)$的单位切向量. (3)

由$\left|\dot{\vec{\alpha}}(s)\right|=\left|k(s)\vec{\beta}(s)\right|=k(s)$知$k(s)$是该曲线的曲率. (4)

由(3)和(4)及(1)的第一式知$\vec{\beta}(s)$是该曲线的主法向量.(5)

而$\vec{\gamma}(s)=\vec{\alpha}(s)\times\vec{\beta}(s)$，故$\vec{\gamma}(s)$是该曲线的副法向量. (6)

由(5)和(6)及(1)的第三式知$\tau(s)$是该曲线的挠率.