第 4 章 随机变量序列的极限分布

内容提要

（一）泊松定理

设ξ_n服从二项分布$B(n,p),\xi$服从泊松分布$P(\lambda)$，若$n\to+\infty$时，$np_n\to\lambda,$则

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

（二）中心极限定理

中心极限定理的基本思想是：一系列相互独立的随机变量叠加的总和会逼近于正态分布。

1. 林德贝格-列维中心极限定理（独立同分布中心极限定理）

设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$是相互独立的服从同一分布的随机变量序列，它们的数学期望和方差都存在，分别为 $E\xi_i=\mu$ 和 $D\xi_i=\sigma^2>0$（$i=1,2,\cdots$），则对任何x，当$n\to\infty$时，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\le x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\Phi(x)\quad。$$

当n充分大时，近似有

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\sim N(0,1)\quad。$$

$$P\left\{a\le\sum_{i=1}^{n}\xi_i\le b\right\}\approx\Phi(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}})-\Phi(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}})\quad。$$

2. 德莫哇佛-拉普拉斯极限定理（二项分布中心极限定理）

若μ_n是n次独立重复试验（n重贝努里试验）中事件A发生的次数，$0<p<1$是事件A在每次试验中发生的概率，$q=1-p$，$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，则

（1）对任意的有限区间 $[a,b]$，当 $a \le \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \le b$ 及 $n \to \infty$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P\{\mu_n = k\}}{\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(\frac{k-np}{\sqrt{npq}})} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \mathrm{e}^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}} = 1 \quad ;$$

（2）对任何 x，当 $n \to \infty$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \Phi(x) \quad 。$$

$$\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0,1) \quad 。$$

德莫哇佛-拉普拉斯极限定理的一些应用

用正态分布近似计算二项分布的概率：

$$P\{\xi \le x\} \approx \Phi(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}) \quad , \quad P\{a \le \xi \le b\} \approx \Phi(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}) \quad 。$$

（三）　大数定律

大数定理的基本思想是：一系列随机变量的算术平均在一定条件下稳定在某一常数值附近。

1. 贝努里大数定律

设 μ_n 是在 n 次独立重复试验（n 重贝努里试验）中事件 A 发生的次数，$p = P(A)$ 是每次试验时事件 A 发生的概率，则对任何 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1 \quad 。$$

贝努里大数定律表明，频率作为概率的近似。

2. 切比雪夫大数定律

设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$ 是两两不相关的随机变量序列，方差存在且有共同的上界，即 $D\xi_n \le C \ (n = 1, 2, \cdots)$，则对任何 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right| < \varepsilon\} = 1 \quad 。$$

3. 马尔可夫大数定律

设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$ 是一随机变量序列，方差存在且满足马尔可夫条件

$$\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)\to 0(n\to\infty),$$

则对任何$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right|<\varepsilon\}=1 \quad 。$$

4.辛钦大数定律

设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$是相互独立同分布的随机变量序列，其数学期望是一个有限值$E\xi_i=\mu$（$i=1,2,\cdots$），则对任何$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right|<\varepsilon\}=1 \quad 。$$

5. 泊松大数定律

设有一独立试验序列，事件A在第 k 次试验中发生的概率为p_k，记μ_n为前 n 次试验中事件A发生的次数，则对任何$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{\left|\frac{\mu_n}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i}{n}\right|<\varepsilon\}=1$$