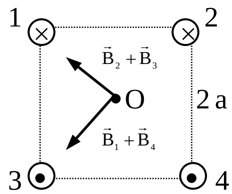
第十章 稳恒电流的磁场 习题参考解答



1、四条相互平行的无限长直载流导线，电流强度均为I，如图放置，若正方形每边长为2a，求正方形中心O点的磁感应强度的大小和方向。

解：$\vec{B}_0=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3+\vec{B}_4$

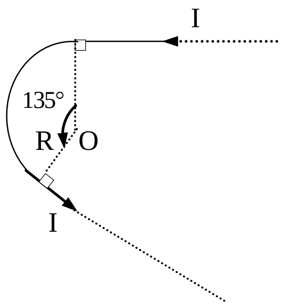
无限长载流直导线产生的磁感应强度　$B=\dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I}{r}$

由图中的矢量分析可得

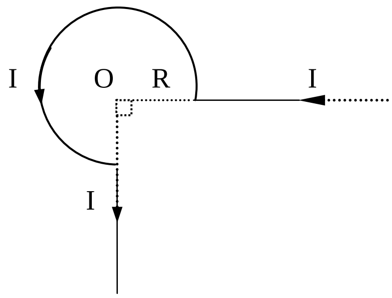
$$B_2+B_4=2\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\sqrt{2}a}=\frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{2}a}$$

$$B_0=2\frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{2}a}\cdot\cos 45^0=\frac{\mu_0}{\pi}\frac{I}{a}$$ 方向水平向左

2、把一根无限长直导线弯成图 (a)、(b) 所示形状，通以电流I，分别求出O点的磁感应强度**B**的大小和方向。



（a）



（b）

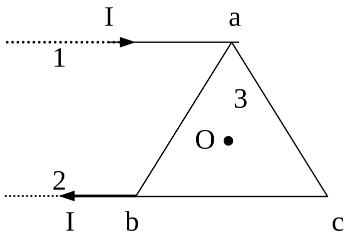
解：（a）（b）均可看成由两个半无限长载流直导线1、3和圆弧2组成，且磁感应强度在O点的方向相同

（a）$B_0=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}+\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}+\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}\cdot\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{\mu_0 I}{16\pi R}(8+3\pi)$　方向垂直纸面向外。

（b）由于O点在电流1、3的延长线上，所以$\vec{B}_1=\vec{B}_3=0$

$$B_0=B_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\cdot\frac{3\pi}{2}=\frac{3\mu_0 I}{8R}$$ 方向垂直纸面向外。

3、真空中有一边长为ℓ的正三角形导体框架，另有互相平行并与三角形的 bc 边平行的长直导线 1 和 2 分别在 a 点和 b 点与三角形导体框架相连 (如图) 。已知直导线中的电流为 I，求正三角形中心点 O 处的磁感应强度 **B**。



解：三角形高为 $h = l\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}l$

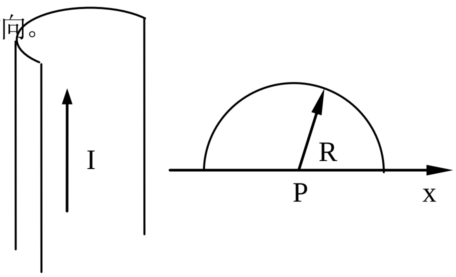
$$\vec{B}_3 = 0$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{2}{3}h} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}l} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi l}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{1}{3}h}(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 60^\circ) = \frac{\mu_0 I}{4\pi l}(2\sqrt{3}-3)$$

$$B_0 = B_1 + B_2 = \frac{3\mu_0 I}{4\pi l}(\sqrt{3}-1)$$

4、在半径为 R=1.0cm 的“无限长”半圆柱形金属片中，自下而上通以电流 I=5.0A，如图所示。试求圆柱轴线任一点 P 处磁感应强度 **B** 的大小和方向。

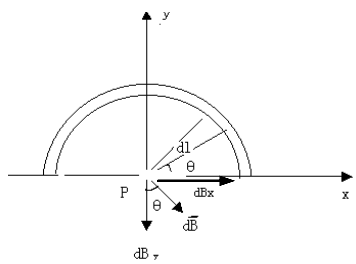


解：该金属薄片可看作由无数无限长直导线元叠加而成，对应于 dl 窄条的无限长直导线的电流为

$$dI = \frac{I}{\pi R}dl = \frac{I}{\pi R}Rd\theta = \frac{I}{\pi}d\theta$$

它在 P 点产生的磁感应强度 dB

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{R} = \frac{\mu_0}{2\pi R}\frac{I}{\pi}d\theta = \frac{\mu_0}{2\pi^2}\frac{I}{R}d\theta \quad \text{方向如图}$$



$$dB_x = dB\sin\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\sin\theta d\theta$$

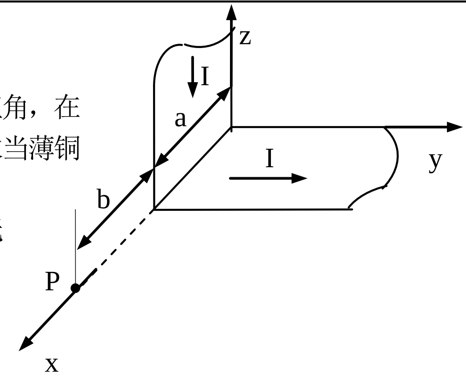
$$dB_y = -dB\cos\theta = -\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\cos\theta d\theta$$

$$B_x = \int dB_x = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

$$B_y = \int dB_y = \int_0^\pi -\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\cos\theta d\theta = 0$$

$$\therefore \quad B_P = B_x = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times5.0}{\pi^2\times1.0\times10^{-2}} = 6.37\times10^{-5}(\mathrm{T})$$

方向为x轴正方向。



5、如图所示，长直薄铜片的宽度 a ，弯成一直角，在角延长线上离铜片一条边距离 b 处有一 P 点。求当薄铜片均匀流过电流 I 时，P 处的磁感应强度。

解：两块半无限长通电薄铜片 1、2，可看成由无数半无限长直导线元叠加而成，导线元电流

$$dI=\frac{I}{a}dx$$

$$dB_1=\frac{\mu_0 dI}{4\pi(a+b-x)}=\frac{\mu_0 I dx}{4\pi a(a+b-x)}$$

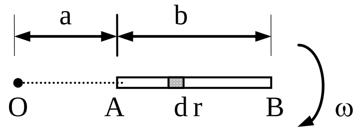
$$B_1=\int_0^a\frac{\mu_0 I dx}{4\pi a(a+b-x)}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\ln\frac{a+b}{a}$$ 方向$-y$

同理 $B_2=B_1$ 方向 $-z$

$$B_p=\sqrt{B_1^2+B_2^2}=\sqrt{2}B_1=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi a}\ln\frac{a+b}{a}$$

方向yz平面内与y方向成225^0角。

或 $$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\ln\frac{a+b}{a}(-\hat{j}-\hat{k})$$



6、如图所示，均匀带电刚性细杆 AB，电荷线密度为λ，绕通过 O 点垂直于纸平面的轴以ω角速度匀速转动，(O 点在细杆 AB 延长线上)，求 O 点的磁感应强度。

解：方法一：运动电荷的叠加，根据公式$\vec{B}=\dfrac{\mu_0 q\,\vec{v}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi r^2}$

$$dB_0=\frac{\mu_0 dq\,v}{4\pi r^2}=\frac{\mu_0\lambda dr\,r\omega}{4\pi r^2}$$

$$B_0=\int_a^{a+b}\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi r}dr=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

方法二：等效载流圆环在圆心的叠加，等效电流 $dI=\dfrac{\omega}{2\pi}\lambda dr$

$$dB_0=\frac{\mu_0 dI}{2r}=\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi r}dr$$

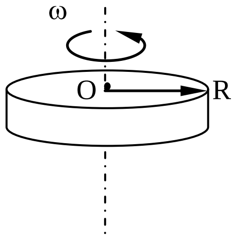
$$B_0=\int_a^{a+b}\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi r}dr=\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

7、一塑料圆盘，半径为 R，可通过中心垂直于盘面的轴转动，设角速度为ω，

(1) 当有电量为+q 的电荷均匀分布于圆盘表面时，求圆盘中心 O 点的磁感应强度 **B**;

(2) 此时圆盘的磁距；

(3) 若圆盘表面一半带电+q/2，另一半带电-q/2，求此时 O 点的磁感应强度 **B**。



解：（1）盘的电荷密度为 $\sigma=\dfrac{q}{\pi R^2}$，取半径为 r、宽度为 dr 的圆环元，带电量为 $dq=\sigma 2\pi r dr$，等效电流为

$$dI=\frac{\omega}{2\pi}dq=\sigma\omega\, r\, dr$$

在圆心处产生的磁感应强度为

$$dB=\frac{\mu_0 dI}{2r}=\frac{\mu_0}{2r}\sigma\omega\, r dr=\frac{1}{2}\mu_0\omega\sigma dr$$

$$B_0=\int dB=\int_0^R\frac{1}{2}\mu_0\omega\sigma dr=\frac{1}{2}\mu_0\omega\sigma R=\frac{\mu_0\omega q}{2\pi R}$$ 方向垂直圆盘向上

（2）上述细环的磁矩 $dP_m=SdI=\pi r^2 dI=\dfrac{\omega q}{R^2}r^3 dr$

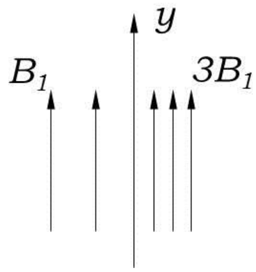
则圆盘的总磁矩 $P_m=\int dP_m=\int_0^R\dfrac{\omega q}{R^2}r^3dr=\dfrac{1}{4}q\omega R^2$

（3）由于盘一半带正电，一半带负电，当圆盘旋转时，相当于两个方向相反的电流，所以在盘心处合磁场为零。

8、一无限大均匀载流平面置于外场中，左侧磁感应强度量值为 B_1，右侧磁感应强度量值为 $3B_1$，方向如图所示。试求:

(1) 载流平面上的面电流密度$\vec{i}$；

(2) 外场的磁感应强度 B。



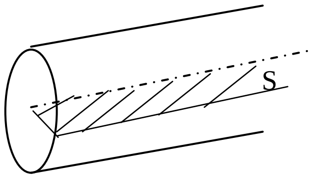
解：

$$B_1=B_0-\frac{1}{2}\mu_0 i$$

$$3B_1=B_0+\frac{i}{2}\mu_0$$

$$2B_1=\mu_0 i\Rightarrow i=\frac{2B_1}{\mu_0}$$

$$B_1=B_0-\frac{1}{2}\mu_0 i=B_0-B_1\Rightarrow B_0=2B_1$$



9、一根很长的铜线均匀通以电流 I = 10A，在导线内部作一平面，如图所示。求通过平面 S 单位长度上的磁通量。

解： 由安培环路定律可求得圆柱内任意一点的 B

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

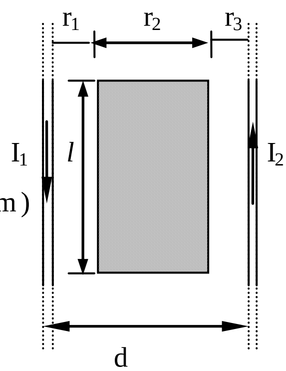
$$B2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2}\cdot \pi r^2$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I r}{R^2}$$

在距圆柱轴线为 r 与 r+dr 处取一面积元 dS，通量为

$$d\Phi = \vec{B}\cdot d\vec{S} = B\,dS$$

$$\Phi = \int B dS = \int_0^R \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Ir}{R^2}dr = \frac{\mu_0 I}{4\pi} = 10^{-6}(Wb)$$



10、两平行长直导线相距 d = 40cm，每根导线载有电流 $I_1 = I_2$=20A，如图所示。求:

(1) 两导线所在平面内任意一点的磁感应强度 **B** ；

(2) 通过图中斜线所示面积的磁通量（$r_1 = r_3$=10cm ，l=25cm）

解（1）两导线产生的磁场在 P 点的方向相同, 设 P 点离 I_1 为 x

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-x)}$$

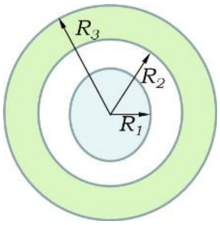
（2）取面积元 $dS = l dx$

$$d\Phi = \vec{B}\cdot d\vec{S} = BdS = [\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-x)}]\,l dx$$

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{r_1}^{r_1+r_2}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}l dx + \int_{r_1}^{r_1+r_2}\frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-x)}l dx = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi}\ln\frac{r_1+r_2}{r_1} + \frac{\mu_0 I_2 l}{2\pi}\ln\frac{d-r_1}{d-r_1-r_2}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 l}{\pi}\ln\frac{d-r_1}{r_1} = 2.2\times 10^{-6} \text{韦伯}$$

11、一根很长的同轴电缆，由一导体圆柱（半径为 R_1）和同一轴的导体圆管（内、外半径分别为 R_2 和 R_3）构成，使用时使电流 I 从导体圆柱流出，从导体圆管流回。设电流都是均匀地分布在导体的横截面上，求磁感应强度的分布。



解：由于电流分布具有轴对称性，可用安培环路定律求解

$$r < R_1 \qquad B\cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{I\pi r^2}{\pi R_1^2} = \frac{\mu_0 I r^2}{R_1^2} \qquad \therefore B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

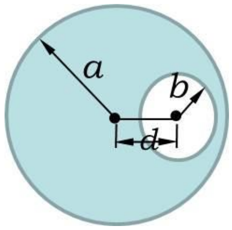
$$R_1 < r < R_2 \qquad B 2\pi r = \mu_0 I \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$R_2 < r < R_3 \qquad B\cdot 2\pi r = \mu_0 (I - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} I) \quad B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2})$$

$$r > R_3 \qquad \oint_{(4)} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I = \mu_0 (I - I) = 0 \qquad B_4 = 0$$

12、如图所示，在半径为 a 的圆柱形长直导线中挖有一半径为 b 的圆柱形空管（a.>2b）,空管轴线与柱体轴线平行，相距为 d ，当电流仍均匀分布在横截面上且电流为 I 时，求空管内磁感应强度 B 的分布。

解：空管的存在使电流分布失去对称性，采用“填补法”将空管部分等效为同时存在电流密度为 j 和-j 的电流，其中 $j = \dfrac{I}{\pi(a^2 - b^2)}$ 这样，空间任一点的磁场 B 可以看成由半径为 a、电流密度为 j 的长圆柱形导体产生的磁场 B_1 和半径为 b、电流密度为 -j 的长圆柱形导体产生的磁场 B_2 的矢量和，



设 P 点到大圆柱和小圆柱轴线的距离分别为 R 和 r，由安培环路定理得

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2} R j \qquad B_2 = \frac{\mu_0}{2} r j$$

其中 $\vec{B}_1$ 与 $\vec{R}$ 垂直，$\vec{B}_2$ 与 $\vec{r}$ 垂直，由余弦定理得

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2 - 2B_1 B_2 \cos\alpha = \frac{\mu_0^2 R^2 j^2}{4} + \frac{\mu_0^2 r^2 j^2}{4} - \frac{2\mu_0^2 j^2 R r}{4} \cdot \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr}$$

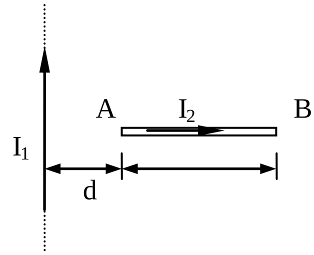
由此得空管内 P 点的磁感应强度为 $B = \dfrac{\mu_0 d j}{2} = \dfrac{\mu_0 d}{2} \cdot \dfrac{I}{\pi(a^2 - b^2)}$

方向与两轴线连线相垂直。

13、无限长直导线通过电流 I_1，在其旁边放一导线 AB，长为 l，与 I_1 共面并相互垂直，通以电流 I_2，试求:

(1) AB 导线受到的力的大小与方向;

(2) 当棒 A 端固定，则导线 AB 对 A 点的磁力距等于多少?



解:（1）在 I_2 上取 I_2dx，其受力方向垂直 AB 向上

$$dF = I_2 dx B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx,$$

$$F = \int dF = \int_d^{d+l} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\frac{d+l}{d}$$

（2）I_2dx 受到的磁力矩为

$$dM = (x-d)\, dF = (x-d)\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx$$

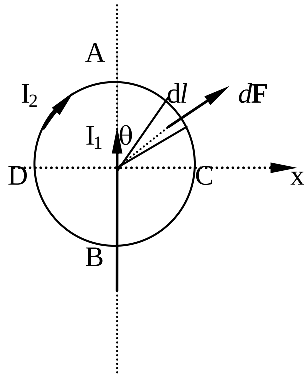
$$M = \int dM = \int_d^{l+d} (x-d)\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left(1 - d\ln\frac{d+l}{d}\right)$$

14、有一无限长载流直导线，通以电流 I_1。另有一半径为 R 的圆形电流 I_2，其直径 AB 与电流 I_1 重合，在相交处绝缘，求:

(1) 半圆 ACB 受力大小和方向

(2) 整个圆形电流 I_2 所受合力大小和方向

(3) 线圈所受磁力矩。



解:（1）在半圆上取一圆弧 dl，受力为

$$dF = I_2 dl B_1 \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} I_2 dl$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R\sin\theta}\cdot R d\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \sin\theta} d\theta$$

$$dF_x = dF\sin\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\sin\theta} d\theta \sin\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\theta} d\theta$$

$dF_y = dF\cos\theta$　　由于对称性分析 $\int dF_y = 0$

所以 $F_{ACB} = \int dF_x = \int_0^{\pi}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} d\theta = \frac{1}{2}\mu_0 I_1 I_2$　　方向沿x轴的正方向。

（2）同理可求 BDA 半圆受力

$F_{BDA} = \frac{1}{2}\mu_0 I_1 I_2$　　方向沿x正方向。

$$F = F_{ACB} + F_{BDA} = 2F_x = \mu_0 I_1 I_2$$

(3) $dM_m = x\, dF_y$　　由对称性分析可知　M=0

15 设电视显像管射出的电子束沿水平方向由南向北运动，电子能量为 12 000eV，地球磁场的垂直分量向下，大小为 $B=5.5\times10^{-5}Wb/m^2$，问:

(1) 电子束将偏向什么方向?

(2) 电子的加速度为多少?

(3) 电子束在显象管内在南北方向上通过 20cm 时将偏转多远?

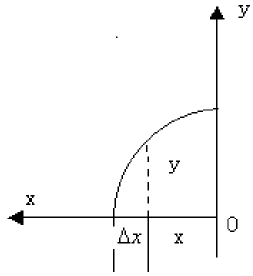


图11-12

解：(1) 由洛仑兹力的方向判断电子束向东偏转

（2）由电子的动能可求其速度

$$V=\sqrt{\frac{2E}{m}}=\sqrt{\frac{2\times12000\times1.6\times10^{-19}}{9.11\times10^{-31}}}=6.48\times10^{7}\ m/s$$

电子在磁场中受洛仑兹力的作用而作圆周运动，向心加速度为

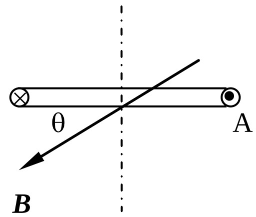
$$a_n=\frac{F}{m}=\frac{BeV}{m}=\frac{5.5\times10^{-5}\times1.6\times10^{-19}\times6.48\times10^{7}}{9.11\times10^{-31}}=6.2\times10^{14}\ m/s^2$$

（3）电子运动的轨迹为圆，半径为 R

$$\boldsymbol{R=\frac{mV}{eB}=\frac{9.11\times10^{-31}\times6.48\times10^{7}}{1.6\times10^{-19}\times5.5\times10^{-5}}=6.4(m)}$$

由图可知当电子在南北方向前进 y 时，它将偏转Δx

$$\Delta x=R-\sqrt{R^2-y^2}=6.4-\sqrt{(6.4)^2-(0.2)^2}=2.98mm$$



16、水平桌面上放置一个绕有 N 匝的圆线圈，其半径为 R，质量为 m，通有电流 I，由上往下看，电流为顺时针方向。若已知该处地磁场的磁感应强度为 B，其方向为向北且偏向下，与水平方向成一倾角θ （如图所示）。问当电流 I 超过多大时，线圈可从桌面上翘起？翘起的是哪一侧?

解：通电线圈受到的磁力矩

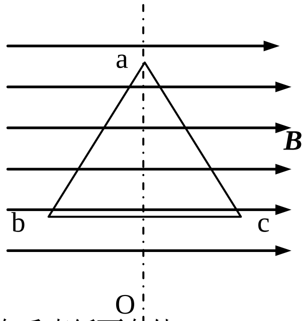
$$M=P_mB\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=NI\pi R^2\cos\theta B$$

此力矩使线圈绕 A 点转动

线圈对 A 点的重力矩 $M'=mgR$

线圈能翘起，应满足 $M\ge M'$

所以 $I_{min}=\dfrac{mg}{BN\pi R\cos\theta}$



17、边长为 ℓ=0.1m 的正三角形线圈放在磁感应强度 B=1T 的均匀磁场中，如图所示。使线圈通以电流 I=10A，求:

(1) 每边所受的力　　(2) 磁力矩大小

(3) 从所在位置转到线圈平面与磁场垂直时磁力所作的功。

解:（1）根据安培力公式 $d\vec{F}=Id\vec{l}\times\vec{B}$

$$ac: F_{ac}=IlB\sin 60^0=10\times 0.1\times 1\times 0.866=0.866(N)$$ 方向垂直纸面向外

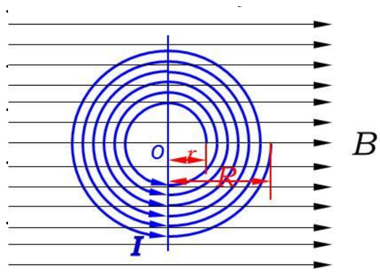
$$ba: F_{ba}=IlB\sin 60^0=0.866(N)$$ 方向垂直纸面向里

$$cb: F_{cb}=IlB\sin\pi=0$$

(2) $\vec{M}=\vec{P}\times\vec{B}$　　$M=ISB\sin(\vec{n},\vec{B})=10\times\frac{1}{2}\times 0.1\times 0.1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin 90^0=4.33\times 10^{-2}$(牛·米)

（3）$A=I\Delta\Phi=I(\Phi-\Phi_0)=I(BS\cos 0^0-BS\cos\frac{\pi}{2})=IB\frac{1}{2}l\cdot l\sin 60^0$

$$=10\times 1\times\frac{1}{2}\times 0.1\times 0.1\times 0.866=4.33\times 10^{-2}(J)$$



18、总匝数为 N 的均匀密绕平面螺旋线圈，半径由 r 绕至 R，通有电流 I，放在磁感应强度为 B 的均匀磁场中，磁场方向与线圈平面平行，如图所示。试求:

（1）平面线圈的磁矩;

（2）线圈在该位置所受到的磁力矩;

（3）线圈在磁力矩作用下转到平衡位置过程中，磁力矩所做的功。

解:（1）在距中心距离 ρ 处，取宽度为 $d\rho$ 的细圆环线圈的匝数　$dN=\frac{N}{R-r}d\rho$

其磁矩为　$dP_m=IdN\pi\rho^2=\frac{N}{R-r}I\pi\rho^2 d\rho$

整个线圈的磁矩　$P_m=\int dP_m=\int_r^R\frac{N}{R-r}I\pi\rho^2 d\rho=\frac{1}{3}NI\pi(R^2+Rr+r^2)$

（2）磁力矩　$M=P_m B\sin 90^0=\frac{1}{3}NI\pi B(R^2+Rr+r^2)$

（3）任何位置的磁力矩　$M=P_m B\sin\varphi$

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}M\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}P_m B\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)d\theta=\frac{1}{3}\pi NIB\left(R^2+Rr+r^2\right)$$