第二十次作业

一. 选择题

1. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是正态总体 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\boldsymbol{\overline{X}}$ 和 S_{n-1}^2 分别为样本均值和样本方差,则有　　(C)

(A) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$　　(B) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_{n-1}} \sim t(n-1)$

(C) $n\left(\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$　　(D) $\dfrac{X_1^2}{X_2^2} \sim F(1,1)$

2．设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 ξ 的样本,总体的各阶矩存在，则错误的是（ D ）

(A） 样本均值 $\boldsymbol{\overline{X}}$ 是总体期望的无偏估计

(B） X_i $(\mathrm{i}=1,2,...,n)$ 均是总体期望的无偏估计

（C） 样本方差 S_{n-1}^2 是总体方差的无偏估计

（D） S_n^2 是总体方差的无偏估计，这里 $S_n^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

3. 设 $\xi \sim N(\mu,1)$, (X_1, X_2) 为 ξ 的样本。参数 μ 的无偏估计:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{X_1+X_2}{2}, \hat{\mu}_2 = \frac{X_1+2X_2}{3}, \hat{\mu}_3 = \frac{X_1+3X_2}{4}, \hat{\mu}_4 = \frac{X_1+4X_2}{5},$$

中最有效的是　　(A)

(A) $\hat{\mu}_1$　　(B) $\hat{\mu}_2$　　(C) $\hat{\mu}_3$　　(D) $\hat{\mu}_4$

二. 填空题：

1. 矩法估计的理论依据是 __大数定律__; 极大似然估计的依据是 __极大似然原理__.
2. 点估计的三个主要评价标准是指 ___无偏性___； ___有效性__; ____相合性/一致性____.
3. 设 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 为总体 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 则:

参数 μ 的矩法估计是 ___$\boldsymbol{\overline{X}}$__； σ^2 的矩法估计是 ____$S_n^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$____;

参数 μ 的极大似然估计是 __$\boldsymbol{\overline{X}}$___； σ^2 的极大似然估计是 _$S_n^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$_

三．计算题：

1．设总体 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\frac{1}{N},\ k=0,1,2,\cdots,N-1$，其中 N 未知，$X_1,\cdots,X_n$ 为来自该总体的样本，试分别求 N 的矩估计 $\hat{N}_M$ 和极大似然估计 $\hat{N}_L$

解：（1）矩估计

总体均值：$EX=0\cdot\frac{1}{N}+1\cdot\frac{1}{N}+\cdots+(N-1)\cdot\frac{1}{N}=\frac{1}{N}\cdot\frac{N(N-1)}{2}=\frac{N-1}{2}$，

样本平均值：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

令 $EX=\overline{X}$，即 $\frac{N-1}{2}=\overline{X}$，得 $N=2\overline{X}+1$，即 N 的矩估计为 $\hat{N}_M=2\overline{X}+1$。

（2）极大似然

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的一组观测值为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，

似然函数 $L(N)=\prod_{i=1}^{n}P(X=x_i)=\frac{1}{N^n}$，显然 N 越小，似然函数值越大。

由 $0\le x_{(1)}\le\cdots\le x_{(n)}\le N-1$，得 $N\ge x_{(n)}+1$，则 N 的极大似然估计值为 $\hat{N}_L=x_{(n)}+1$，即 N 的极大似然估计为 $\hat{N}_L=X_{(n)}+1$

2．设总体 X 服从几何分布：$P(X=x)=p(1-p)^{x-1}$，$x=1,2,\cdots$，其中 p 未知。设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 X 的样本，试求 p 的矩法估计和极大似然估计。

解：(1)由于 $\xi\sim Ge(p)$，因此 $E\xi=\frac{1}{p}$，由矩法原则可知 $E\xi=\bar{X}$，故 $\hat{p}=\frac{1}{\overline{X}}$。

(2)设样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的一组观测值为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，由于总体为离散型,

因此似然函数 $L(p)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)=p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}$，

取对数，得 $\ln L(p)=n\ln p+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\right)\ln(1-p)$，

上式两端关于 p 求导，令 $\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{n}{p}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}{1-p}=0$，

解上式，得 $\frac{1}{p}+\frac{\overline{X}-1}{1-p}=0\Rightarrow\hat{p}=\frac{1}{\overline{X}}$。

3．设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$， 其中 $\theta>-1$ 是未知参数，$(X_1,X_2,\cdots，X_n)$ 是来自总体的样本，分别用矩估计法和极大似然法求 θ 的估计量。

解：总体 X 的数学期望为 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$,

设 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 为样本均值，则应有：$\overline{X}=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$,

解得 θ 的矩法估计量为: $\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-X}$ ；

设 $(x_1,x_2,\cdots，x_n)$ 是样本 $(X_1,X_2,\cdots，X_n)$ 的观察值，则似然函数为：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i{}^{\theta}=\begin{cases}(\theta+1)^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta}, & 0<x_i<1, i=1,2,\cdots,n\\ 0, & 其他\end{cases},$$

当 $0<x_i<1$ ($i=1,2,\cdots,n$) 时，$L(\theta)>0$,

$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$， 令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$ ，

解得 θ 的极大似然估计值：

$\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$. 故 θ 的极大似然估计量为：$\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

4．设总体 X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 θ $(0<\theta<\dfrac{1}{2})$ 是未知参数。现有一样本：3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3。求 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}_M$ 和极大似然估计值 $\hat{\theta}_L$ 。

解：(1) 由矩法原则可知：$EX=0\cdot\theta^2+1\cdot2\theta(1-\theta)+2\cdot\theta^2+3\cdot(1-2\theta)=3-4\theta=\bar{X}$ ，

由样本得：$\bar{X}=\dfrac{3+1+3+0+3+1+2+3}{8}=2$ ，故 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}_M=\dfrac{1}{4}$ 。

(2) 注意该总体为离散型，且分布律不能由解析式表示。似然函数:

$L(\theta)=P\{X_1=3\}P\{X_2=3\}P\{X_3=3\}P\{X_4=0\}P\{X_5=3\}P\{X_6=1\}P\{X_7=2\}P\{X_8=3\}$

$=(\theta^2)^2(\cdot 2\theta(1-\theta))^2\cdot(1-2\theta)^4=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$，

取对数，得 $\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$，

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{6}{\theta}-\dfrac{2}{1-\theta}-\dfrac{8}{1-2\theta}=\dfrac{24\theta^2-28\theta+6}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}=0$，

解得 $\theta=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{12}$，由于 $\theta=\dfrac{7+\sqrt{13}}{12}>\dfrac{1}{2}$ 不合题意，故舍去。

因此，θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}_L=\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$。

5. 设 $(X_1,...,X_n)$ 是取自总体 ξ 的一个简单随机样本 ξ 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x\ge\theta \\ 0, & x<\theta \end{cases}$$ 其中 $\theta>0$ 为未知参数，

1) 试求 θ 的矩估计；　　2) 试求 θ 的极大似然估计;

解：1) 先计算 $E\xi=\int_\theta^{+\infty}xe^{-(x-\theta)}dx=(-xe^{-(x-\theta)})\Big|_\theta^{+\infty}+\int_\theta^{+\infty}e^{-(x-\theta)}dx=\theta+1$

由于 $E\xi=\overline{X}$，得到 $\hat{\theta}=\overline{X}-1$

2) 对于一组观测值 $(x_1,x_2,\cdots x_n)$，设 $x_1,\cdots,x_n\ge\theta$，此时似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i)=\prod_{i=1}^{n}(e^{-(x_i-\theta)})$$

两边取对数，得对数似然函数 $\ln L(\theta)=-\sum_{i=1}^{n}x_i+n\vartheta$

分别关于 θ 求导，可得 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=n>0$

$\ln L(\theta)$ 关于 θ 严格单调递增，所以 $\ln L(\theta)$ 的极大值应在 θ 取值的右面的边界点上取到，故 θ 的极大似然估计值为 $\min\limits_{1\le i\le n}x_i$，而 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=\min\limits_{1\le i\le n}X_i$

第二十一次作业

一．选择题：

1．设($X_1, X_2,..., X_n$)为总体ξ的样本，$\overline{X}$为样本均值，S^2为样本方差, 则　　(B)

A. $\overline{X} = E\xi$　　　　B. $E\overline{X} = E\xi$

C. $D\overline{X} = D\xi$　　　　D. $\lim_{n\to\infty} \overline{X} = E\xi$

2. 设总体X的数学期望为μ，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体的样本，则下列命题中正确的是　　(A)

A. X_1是μ的无偏估计量；　　B. X_1是μ的极大似然估计量；

C. X_1是μ的一致(相合)估计量；　　D. X_1不是μ估计量。

3．设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$(μ已知)的一个样本，$\overline{X}$为样本均值，则总体方差σ^2的下列估计量中, 为无偏估计量的是　　(C)

A. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$;　　B. $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(X_i - \overline{X})^2$;

C. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$;　　D. $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$

二.填空题

1．在一批垫圈中随机抽取 10 个，测得它们的厚度(单位: mm)如下:
1.23，1.24，1.26，1.29，1.20，1.32，1.23，1.23，1.29，1.28

用矩估计法得到这批垫圈的数学期望μ的估计值$\hat{\mu}$=$\underline{\bar{x} = 1.257}$，

标准差σ的估计值$\hat{\sigma}$=$\underline{s_{n-1} = 0.037}$。

2．将合适的数字填入空格，其中：（1）总体矩，（2）样本矩，（3）中心极限定理，（4）大数定律。
矩估计的做法是用<u>（2）</u>，代替<u>（1）</u>，其依据是<u>（4）</u>。

3．已知总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中未知参数μ和σ的极大似然估计分别为

$\overline{X}$和S_{n-1}，则概率$P\{X < 2\}$的极大似然估计为$\underline{\Phi\left(\frac{2-\overline{X}}{S_{n-1}}\right)}$。

三．计算及证明题：

1．设总体$\xi \sim N(\mu, 1)$，(X_1, X_2, X_3)是ξ的样本，且:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3;\ \hat{\mu}_2 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3;\ \hat{\mu}_3 = \frac{2}{5}X_1 + \frac{2}{5}X_2 + \frac{1}{5}X_3$$

证明 $\hat{\mu}_1$，$\hat{\mu}_2$，$\hat{\mu}_3$ 都是 μ 的无偏估计, 并说明这三个估计中，哪一个估计最有效？

证明：

$$E\hat{\mu}_1 = E\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3\right) = \frac{1}{2}EX_1 + \frac{1}{4}EX_2 + \frac{1}{4}EX_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)\mu = \mu,$$

同理可得: $E\hat{\mu}_2 = \mu$; $E\hat{\mu}_3 = \mu$. 所以, $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$ 都是 μ 的无偏估计.

此外,由于样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布,故有:

$$D\hat{\mu}_1 = D\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3\right) = \frac{1}{4}DX_1 + \frac{1}{16}DX_2 + \frac{1}{16}DX_3 = \frac{3}{8},$$

同理可得: $D\hat{\mu}_2 = \frac{1}{3}$; $D\hat{\mu}_3 = \frac{9}{25}$. 可知 $D\hat{\mu}_1 > D\hat{\mu}_3 > D\hat{\mu}_2$,故 $\hat{\mu}_2$ 最有效.

2．设从均值为 μ，方差为 $\sigma^2 > 0$ 的总体中，分别抽取容量为 n_1 和 n_2 的两个独立样本，$\overline{X}_1$ 和 $\overline{X}_2$ 分布是这两个样本的均值。试证：对于任意常数 a, b $(a+b=1)$，$Y = a\overline{X}_1 + b\overline{X}_2$ 是 μ 的无偏估计，并确定常数 a, b，使得 DY 达到最小。

证明：因为 $EY = E(a\overline{X}_1 + b\overline{X}_2) = aE\overline{X}_1 + bE\overline{X}_2 = (a+b)\mu = \mu$,

故对于任意常数 $a, b(a+b=1)$, $Y = a\overline{X}_1 + b\overline{X}_2$ 都是 μ 的无偏估计.

由于两个样本独立, 因此 $\overline{X}_1, \overline{X}_2$ 相互独立, 于是:

$DY = E(a\overline{X}_1 + b\overline{X}_2)^2 = \frac{a^2\sigma^2}{n_1} + \frac{(1-a)^2\sigma^2}{n_2} = \frac{(n_1+n_2)a^2 - 2n_1 a + n_1}{n_1 n_2}\sigma^2$, 求其最小值,

$$\left[\frac{(n_1+n_2)a^2 - 2n_1 a + n_1}{n_1 n_2}\sigma^2\right]' = \frac{2(n_1+n_2)a - 2n_1}{n_1 n_2}\sigma^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{n_1}{n_1 + n_2},$$

$b = 1 - a = \frac{n_2}{n_1 + n_2}$, 即当 $a = \frac{n_1}{n_1+n_2}, b = \frac{n_2}{n_1+n_2}$ 时, DY 最小。

3．设随机变量 X 服从区间 $(\theta, \theta+1)$ 上的均匀分布，其中 θ 为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自于 X 的一个样本，$\overline{X}$ 是样本均值，$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$.

证明: $\hat{\theta}_1 = \overline{X} - \frac{1}{2}$ 和 $\hat{\theta}_2 = X_{(1)} - \frac{1}{n+1}$ 都是 θ 无偏估计量($n>1$).

证明：因为 X 服从区间 $(\theta,\theta+1)$ 上的均匀分布, 所以 $EX_i = EX = \frac{2\theta+1}{2}$，

$E\hat{\theta}_1 = E(\overline{X}-\frac{1}{2}) = E(\overline{X}) - \frac{1}{2} = E(X) - \frac{1}{2} = \frac{2\theta+1}{2} - \frac{1}{2} = \theta$，所以 $\hat{\theta}_1$ 是 θ 无偏估计量.

再证 $\hat{\theta}_2$ 是 θ 无偏估计量, 因均匀分布 X 的分布函数和密度函数分别为:

$$F(x) = P\{X \le x\} = \begin{cases} 0, & x \le \theta \\ x-\vartheta, & \theta < x < \theta+1 \\ 1, & x \ge \theta+1 \end{cases}, \qquad p(x) = F'(x) = \begin{cases} 1, & \theta < x < \theta+1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 与 X 独立且同分布, 故 $X_{(1)}$ 的分布函数为：

$F_{(1)}(x) = P\{X_{(1)} \le x\} = 1-[1-F(x)]^n$，

$$f_{(1)}(x) = F'_{(1)}(x) = n[1-F(x)]^{n-1} p(x) = \begin{cases} n(1+\theta-x)^{n-1}, & \theta < x < \theta+1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

于是，$EX_{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{(1)}(x) dx = \int_{\theta}^{\theta+1} nx(1+\theta-x)^{n-1} dx$

$= -n\int_{\theta}^{\theta+1}(1+\theta-x)(1+\theta-x)^{n-1}dx + n(1+\theta)\int_{\theta}^{\theta+1}(1+\theta-x)^{n-1}dx = \frac{1}{n+1} + \theta$，

$E\hat{\theta}_2 = E(X_{(1)} - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1} + \theta - \frac{1}{n+1} = \theta$，所以 $\hat{\theta}_2$ 也是 θ 无偏估计量。

4.设总体 X 服从参数为 $\frac{1}{\theta}$ 的指数分布，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 X 的一个样本，证明：（1）$\overline{X}$ 和 $n\min\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$ 都是 θ 的无偏估计；（2）问 $\overline{X}$，$n\min\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$ 中哪个更有效？

证明：（1）由 X 服从参数为 $\frac{1}{\theta}$ 的指数分布，X 的分布函数为：$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$. 于是有 $\min\limits_{1\le i\le n} X_i$ 的分布函数和密度函数分别为:

$$F_{\min\limits_{1\le i\le n} X_i}(x) = 1-[1-F(x)]^n = \begin{cases} 1-e^{-\frac{n}{\theta}x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad p_{\min\limits_{1\le i\le n} X_i}(x) = \begin{cases} \frac{n}{\theta} e^{-\frac{n}{\theta}x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

于是 $E(n\min\limits_{1\le i\le n} X_i) = n\int_0^{+\infty} x \cdot \frac{n}{\theta} e^{-\frac{n}{\theta}x} dx = n \cdot \frac{\theta}{n} = \theta$. 而 $E\overline{X} = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \theta$.

故$\overline{X}$和$n\min\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$都是$\theta$的无偏估计.

（2）同样由于X服从参数为$\frac{1}{\theta}$的指数分布，得到$DX_i=\theta^2, i=1,2,...,n$，于是有$D\overline{X}=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i=\frac{\theta^2}{n}$；为了计算$D\{n\min\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}\}$，需要先计算:

$$E(n\min_{1\le i\le n}X_i)^2=n^2\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{n}{\theta}e^{-\frac{n}{\theta}x}dx=n^2\{-xe^{-\frac{n}{\theta}x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{n}{\theta}x}dx\}=2n\,\theta\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{n}{\theta}e^{-\frac{n}{\theta}x}dx=2\,\theta^2$$

于是得到: $D\{n\min\limits_{1\le i\le n}X_i\}=E(n\min\limits_{1\le i\le n}X_i)^2-(En\min\limits_{1\le i\le n}X_i)^2=\theta^2$.

故当$n=1$时，$n\min\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$和$\overline{X}$一样有效；当$n>1$时，$\overline{X}$比$n\min\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$更有效。

5. 试讨论参数的矩法估计和极大似然估计是否一定存在,如果存在又是否唯一?

解: 参数的矩法估计和极大似然估计都未必存在,即便存在也未必唯一.
因为矩法估计是以总体的矩存在为前提,如果总体矩不存在，那么参数的矩法估计量也就自然无从谈起了. 至于矩法估计的非唯一性,比如,总体ξ只有一个未知参数θ, 且总体的各阶原点矩存在. 那么, 由$E\xi^k=\overline{X^k}$ $(k\ge 1)$解得的$\hat{\theta}$都是θ的矩法估计量, 因此参数的矩法估计量可能不存在, 也可能存在但不唯一.
参数的极大似然估计可能不存在, 或存在不唯一的例子如下: $\xi\sim U(\theta-0.5,\ \theta+0.5)$, 则$\theta$的极大似然估计为$\hat{\theta}\in[\max X_i-0.5,\ \ \min X_i+0.5]$

当$\max X_i-0.5 < \min X_i+0.5$时,参数$\theta$的极大似然估计不唯一.

而当$\max X_i-0.5 > \min X_i+0.5$时, 参数$\theta$的极大似然估计不存在.