第十六章

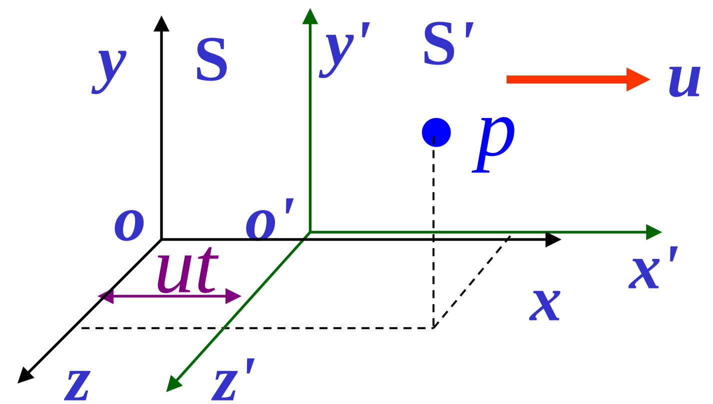
相对论

RELATIVITY

§16.1牛顿相对性原理和伽利略变换

一、伽利略变换

设惯性系S(O,x,y,z)和相对S以速度 $\vec{u}=u\vec{i}$ 运动的惯性系S'(O',x',y',z')



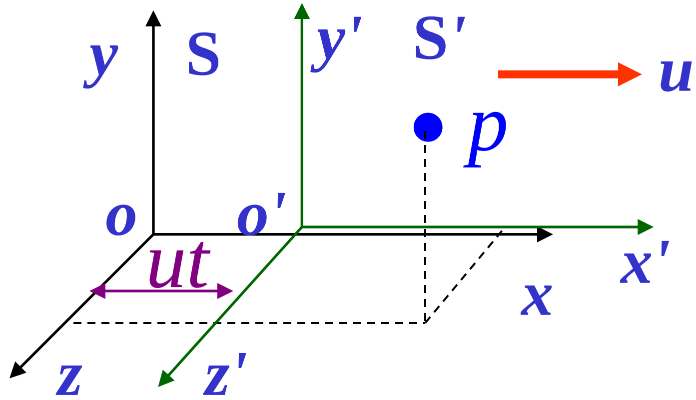
$t=t'=0$时, o与o'重合

某时刻在 p 点处发生一事件(如爆炸)：

参照系S：P(x,y,z,t)

参照系S': P'(x',y',z',t')

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' + ut \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$



伽利略变换：

正变换

$$x' = x - ut$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

逆变换

$$x = x' + ut'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t'$$

速度变换与加速度变换

正

$$v'_x = v_x - u$$
$$v'_y = v_y$$
$$v'_z = v_z$$

逆

$$v_x = v'_x + u$$
$$v_y = v'_y$$
$$v_z = v'_z$$

$$a'_x = a_x - \frac{du}{dt}$$
$$a'_y = a_y$$
$$a'_z = a_z$$

$$a_x = a'_x + \frac{du}{dt'}$$
$$a_y = a'_y$$
$$a_z = a'_z$$

u 是恒量

两个都是惯性系

$$a'_x = a_x$$
$$a'_y = a_y$$
$$a'_z = a_z$$

$$a_x = a'_x$$
$$a_y = a'_y$$
$$a_z = a'_z$$

在两个惯性系中 $\vec{a}' = \vec{a}$

二、牛顿的绝对时空观

(1)空间测量是绝对的;

(2)时间测量是绝对的;

(3)速度(包括光速)是相对的.

§16.2狭义相对论基本假设

一、产生狭义相对论的背景

迈克耳孙-莫雷实验否定了绝对参考系的存在

狭义相对论基本观点：

1.狭义相对论的相对性原理：在所有惯性系中，物理定律的表达形式都相同。

2.光速不变原理：在所有惯性系中，真空中的光速具有相同的量值c（$c=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$）。

二、洛仑兹变换

爱因斯坦相对性原理和光速不变原理

时间延缓： $\Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

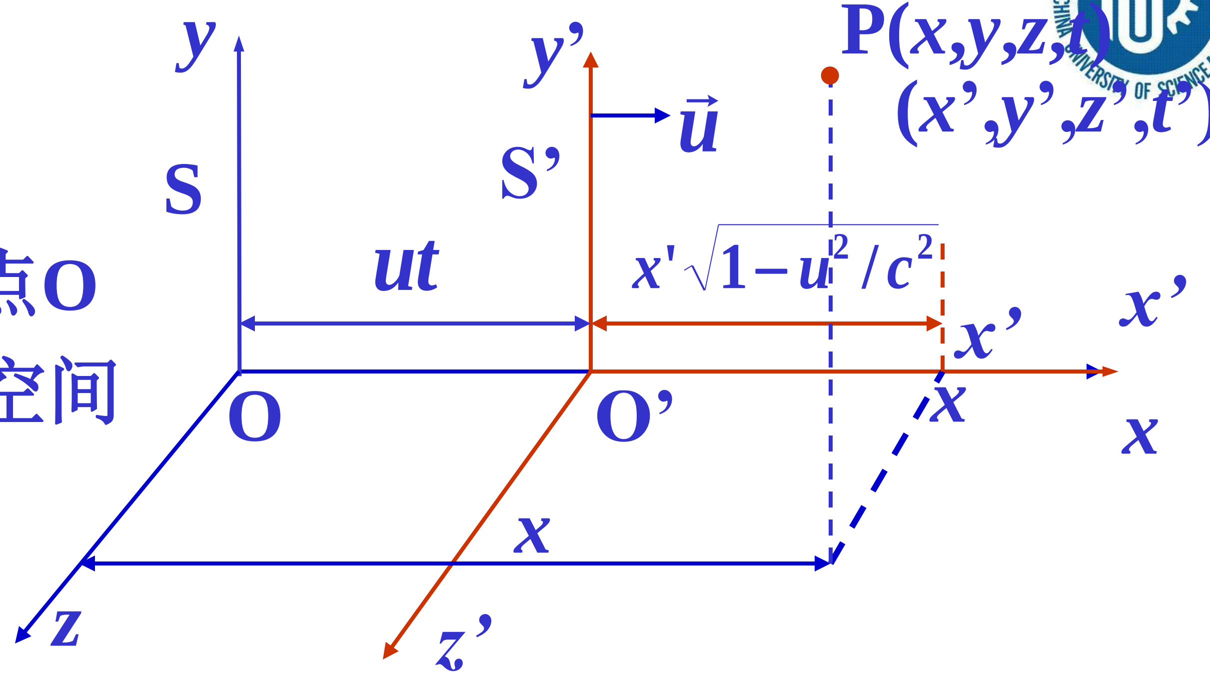
长度收缩： $l = l'\sqrt{1-u^2/c^2}$

在不同的惯性系中： $\left.\begin{aligned}\Delta t &= \Delta t' \\ \Delta x &= \Delta x'\end{aligned}\right\}$ 不再绝对成立

伽利略变换失去了成立的前提。

因此需要导出联系两个惯性系的时空坐标之间的普遍的变换关系式——洛仑兹变换。

公式推导



$t = t' = 0$ 时刻，原点O和O'重合。随后在空间点发生一个事件。

问题 两套坐标值(x,y,z,t)和(x',y',z',t')的关系?

在S系中测量：

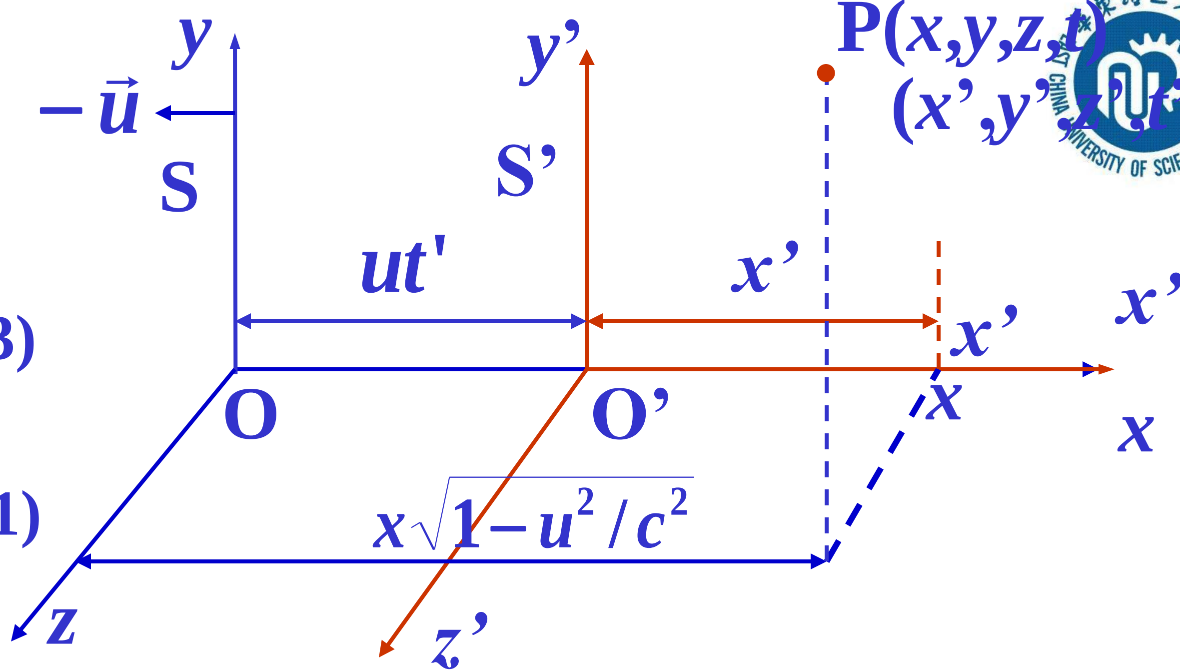
$$x = ut + x'\sqrt{1-u^2/c^2} \qquad (1)$$

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad (2)$$

S’系中测量：

$$x' = x\sqrt{1-u^2/c^2} - ut' \qquad (3)$$

$$x = ut + x'\sqrt{1-u^2/c^2} \qquad (1)$$



合并(1)、(3)并消去x’得：

$$t' = \frac{t - \dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad (4)$$

垂直于相对运动方向的长度测量与运动无关 →

$$y' = y, z' = z$$

洛仑兹变换式

参考系S'相对于S系沿X轴方向以速度u向右运动

正变换

$$
\left\{
\begin{aligned}
x' &= \frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \frac{t-\frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}
\end{aligned}
\right.
$$

逆变换

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{u}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

洛仑兹变换式

同一事件时空坐标变换：

$$x=\frac{x'+ut'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$y=y'$$

$$z=z'$$

$$t=\frac{t'+\frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$y'=y$$

$$z'=z$$

$$t'=\frac{t-\frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

不同事件发生的时间间隔、空间间隔坐标变换：

$$\Delta x=\frac{\Delta x'+u\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\Delta y=\Delta y'$$

$$\Delta z=\Delta z'$$

$$\Delta t=\frac{\Delta t'+\frac{u}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\Delta x'=\frac{\Delta x-u\Delta t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\Delta y'=\Delta y$$

$$\Delta z'=\Delta z$$

$$\Delta t'=\frac{\Delta t-\frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

例北京和上海直线相距1000km, 在某一时刻从两地同时各开出一列火车。现有一艘飞船沿从北京到上海的方向在高空掠过，速率恒为u=9km/s。求宇航员测得的两列火车开出时刻的间隔，哪一列先开出？

解：以地面为S系，坐标原点在北京，以北京到上海的方向为x轴正方向，飞船为S’系。

	S系	S’系
事件1	$(x_1,0,0,t_1)$	$(x'_1,0,0,t'_1)$
事件2	$(x_2,0,0,t_2)$	$(x'_2,0,0,t'_2)$

其中： $x_1=0$，$x_2=10^6\text{m}$，$t_1=t_2$

则

$$t'_2-t'_1=\frac{(t_2-t_1)-\frac{u}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\frac{-\frac{u}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$=\frac{-\frac{9\times10^3}{(3\times10^8)^2}\times10^6}{\sqrt{1-(9\times10^3/3\times10^8)^2}}\approx-10^{-7}(\mathrm{s})$$

这一负的结果表示：宇航员发现上海的火车先开出。

§ 16. 3相对论速度变换

定义

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

由洛仑兹

坐标变换

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{v_x - u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad \frac{dt'}{dt} = \frac{1-\frac{u}{c^2}v_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

上面两式之比

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1-\frac{u}{c^2}v_x}$$

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$t' = \frac{t-\frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

由洛仑兹变换知

$$\frac{dy'}{dt'}=\frac{dy}{dt'}=\frac{dy\big/dt}{dt'\big/dt}$$

$$\frac{dt'}{dt}=\frac{1-\frac{u}{c^2}v_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

由上两式得

$$v'_y=\frac{v_y}{1-\frac{u}{c^2}v_x}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

同样得

$$v'_z=\frac{v_z}{1-\frac{u}{c^2}v_x}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

洛仑兹速度变换式

正变换

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

逆变换

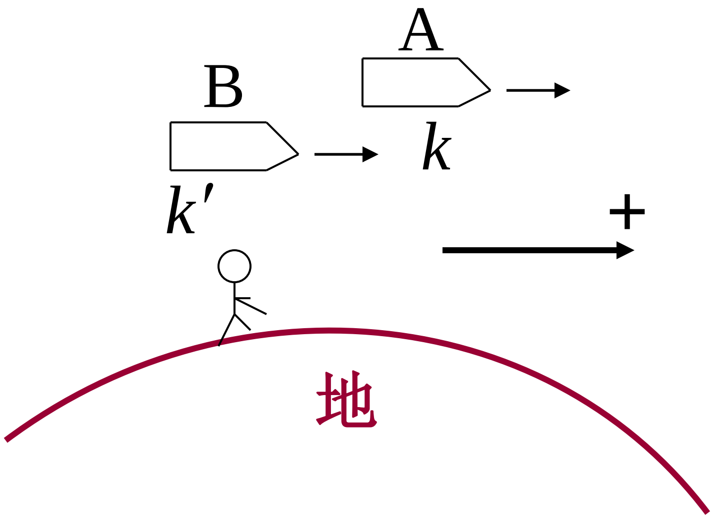
$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x}$$

$$v_y = \frac{v'_y}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$v_z = \frac{v'_z}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

例：地球上一观察者看到一飞船A以速度$2.5\times10^8\ {}^{m}\!/\!{}_{s}$从他身边飞过，另一飞船$B$以速度$2.0\times10^8\ {}^{m}\!/\!{}_{s}$跟随$A$飞行。

求：A上的观察者看到B的相对速度。



解法一：

设A — k系，　B — k'系，

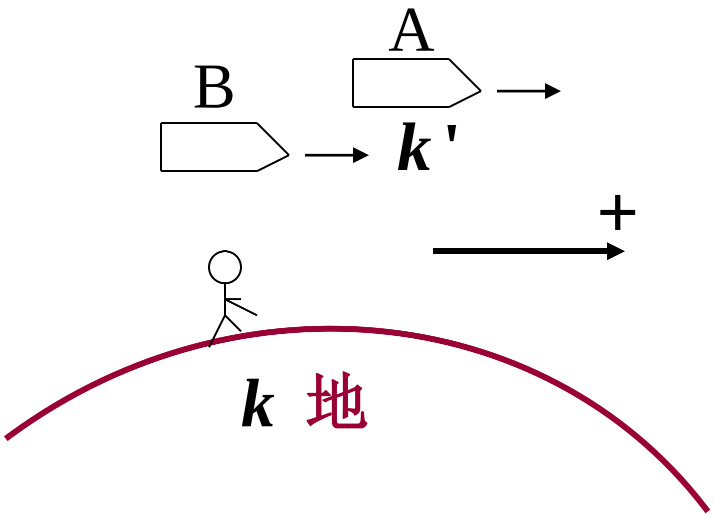
地球 — 运动物体

即已知：$v_x = -2.5\times10^8\ {}^{m}\!/\!{}_{s}$

$$v'_x = -2.0\times10^8\ {}^{m}\!/\!{}_{s}$$

求：$u_{k'\to k} = ?$

由：$v_x = \dfrac{v'_x + u}{1 + \dfrac{v'_x u}{c^2}}$ $\longrightarrow$ $u_{k'\to k} = -1.125\times10^8\ {}^{m}\!/\!{}_{s}$



解法二：

设A—k系， B—运动物体，

地球—k系

即已知：$u_{k'\to k} = 2.5\times 10^{8}\ m/s$

$$v_x = 2.0\times 10^{8}\ m/s$$

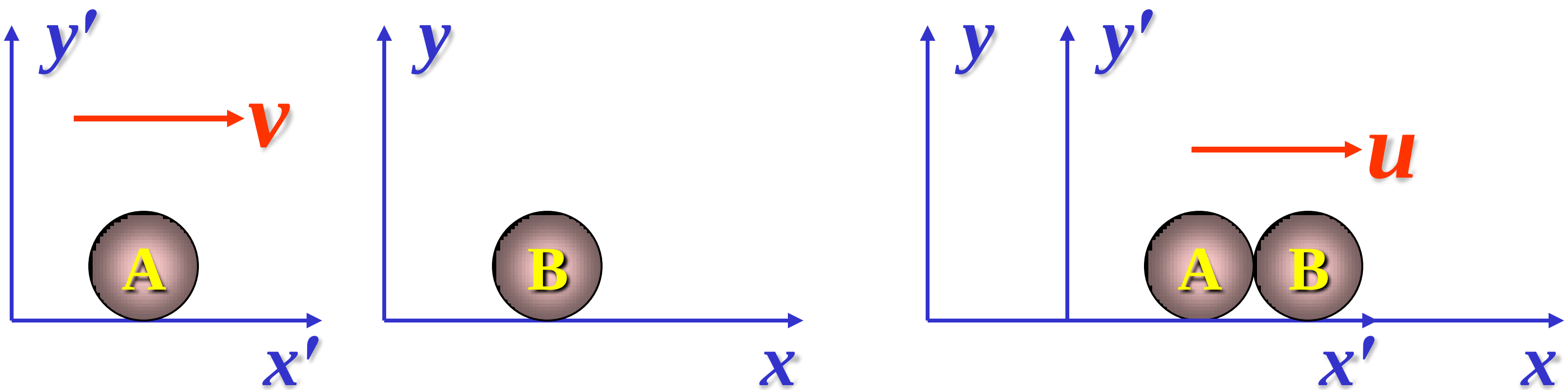
求：$v_x' = ?$

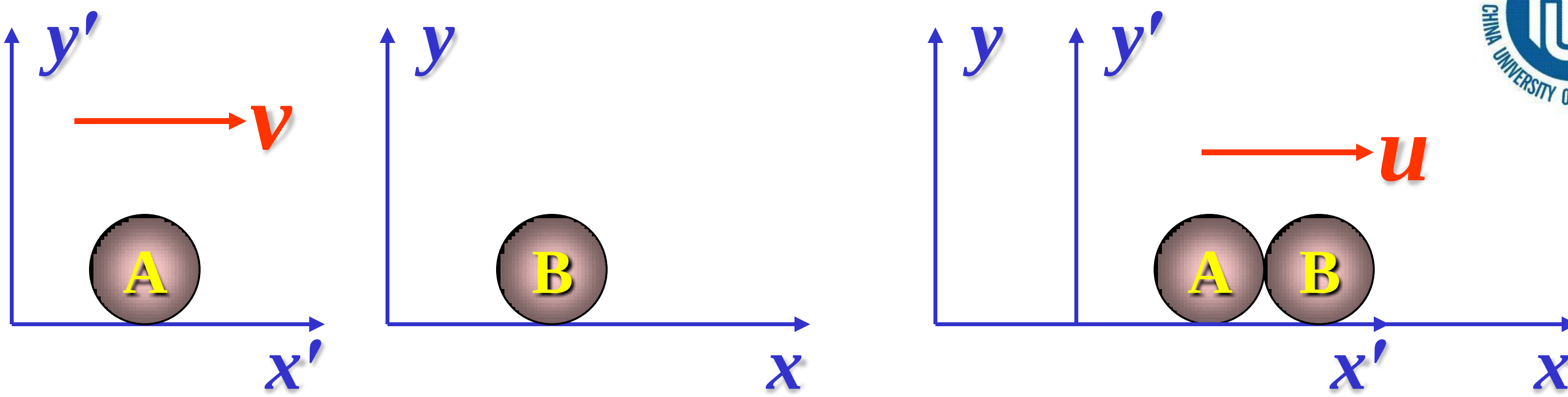
由：$v_x' = \dfrac{v_x - u}{1-\dfrac{v_x u}{c^2}} = -1.125\times 10^{8}\ m/s$

§16.4 相对论质量和动量

一、相对论的质量

设：两完全相同的小球A和B，静止质量均为m_0。A静止于S′系，B静止于S系。





S系动量守恒： $$mv + m_0 \cdot 0 = (m + m_0)u$$

$$\frac{v}{u} = \frac{m + m_0}{m}$$

S′系动量守恒： $$m_0 \cdot 0 - mv = (m + m_0)u'$$

$$\frac{v}{u'} = -\frac{m + m_0}{m} \qquad u = -u'$$

由速度变换式： $$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}$$

代入 $u = -u'$ $$u = \frac{v - u}{1 - uv/c^2}$$

两边除以***u*** $$1 = \frac{\frac{v}{u} - 1}{1 - uv/c^2}$$

$$1 - \frac{u}{v}\frac{v^2}{c^2} = \frac{v}{u} - 1$$

代入 $$\frac{v}{u} = \frac{m + m_0}{m}$$

$$1-\frac{m}{m+m_0}\frac{v^2}{c^2}=\frac{m+m_0}{m}-1$$

得质速关系：

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

m_0为静止质量（v=0）

质速关系反映了物质与运动的不可分割性

二、相对论基本方程

动量：

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\vec{v}$$

相对论基本方程：

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

当$v << c$时 $\quad v/c \to 0 \quad m = m_0$

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \to \vec{F} = m_0\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

§ 16. 5　相对论能量　质能关系

一、相对论动能

$$\mathrm{d}E_k = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \vec{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{m} = \frac{p\mathrm{d}p}{m}$$

$$\because \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad \therefore m^2 - \frac{p^2}{c^2} = m_0{}^2$$

$$m^2c^2 - p^2 = m_0{}^2c^2$$

两边微分: $$mc^2\mathrm{d}m = p\mathrm{d}p$$

$$\mathrm{d}E_k = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \frac{p\mathrm{d}p}{m} = \frac{mc^2\mathrm{d}m}{m} \qquad \mathrm{d}E_k = \mathrm{d}(mc^2)$$

当 $v=0$时，$m=m_0$，$E_k=0$

$$\int_0^{E_k}\mathrm{d}E_k = \int_{m_0}^{m} c^2\mathrm{d}m = c^2(m-m_0)$$

相对论动能： $$\boxed{E_k = mc^2 - m_0c^2}$$

相对论总能量： $$\boxed{E = mc^2}$$

相对论静能： $$\boxed{E_0 = m_0c^2}$$

讨论动能：

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$$

$$\because \quad \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots$$

$$\therefore \quad E_k = \frac{1}{2}m_0v^2 - \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^4} + \cdots$$

$v << c$ 时 $\qquad \therefore \quad E_k \approx \dfrac{1}{2}m_0v^2$

计算核聚变中释放出的能量：

氘核 = 质子 + 中子

氘核质量： $m_D = 3.34365\times10^{-27}\,\mathbf{kg}$

质子质量： $m_p = 1.67265\times10^{-27}\,\mathbf{kg}$

中子质量： $m_n = 1.67496\times10^{-27}\,\mathbf{kg}$

$$\Delta m = \left(m_p + m_n\right) - m_D = 3.96\times10^{-30}\,\mathbf{kg}$$

$$\Delta E = \Delta mc^2 = 3.96\times10^{-30}\times(3\times10^8)^2 = 3.564\times10^{-13}(\mathbf{J})$$

$$\Delta E = \frac{3.564\times10^{-13}}{1.602\times10^{-19}} = 2.23\,\mathbf{MeV}$$

2克氘核（1摩尔）：　　6.022×10^{23}个氘核

释放能量：

$$\Delta E = 3.564\times10^{-13}\times6.022\times10^{23} = 2.146\times10^{11}(\mathrm{J})$$

二、动量和能量的关系

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad \frac{E}{c} = \frac{m_0c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = \frac{m_0^2c^2}{1-v^2/c^2} - p^2 = \frac{m_0^2c^2}{1-v^2/c^2} - m^2v^2$$

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = \frac{m_0^2 c^2}{1-v^2/c^2} - \frac{m_0^2 v^2}{1-v^2/c^2}$$

$$= m_0^2 \frac{c^2 - v^2}{1-v^2/c^2} = m_0^2 c^2 \cdot \frac{1-v^2/c^2}{1-v^2/c^2} = m_0^2 c^2$$

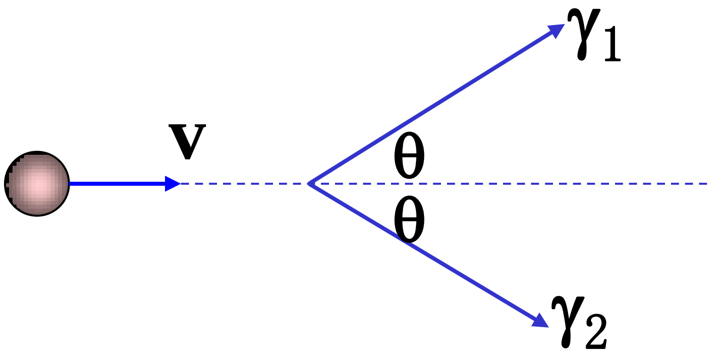
动量和能量关系式：

$$\boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

光子：m_0=0

光子能量： $\boxed{E = pc}$ **光子动量：** $\boxed{p = \frac{E}{c}}$

例一个中性介子相对于观察者以速度$v = kc$运动，以后衰变为两个光子，两光子的运动轨迹与π介子原来的方向成相等的角度 θ。试证明（1）两光子有相等的能量。（2）$\cos\theta = k$。



证：　　动量守恒：

$$\frac{E_1}{c}\sin\theta - \frac{E_2}{c}\sin\theta = 0$$

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{E_1}{c}\cos\theta + \frac{E_2}{c}\cos\theta$$

能量守恒：

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-k^2}} = E_1 + E_2$$

由（1）式：$$E_1 = E_2 = E$$

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-k^2}} = 2E$$

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{2E}{c}\cos\theta$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{2E}{c^2}$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{2E}{cv}\cos\theta$$

$$\frac{2E}{c^2} = \frac{2E}{cv}\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{v}{c} = k$$

例一个电子被电压为10^6V的电场加速后，其质量为多少？速率为多大？

解：

$$E_k = eU = 1.6\times10^{-19}\times10^{6} = 1.6\times10^{-13}(\mathrm{J})$$

$$E_k = mc^2 - m_0c^2$$

$$m = \frac{E_k}{c^2} + m_0 = \frac{1.6\times10^{-13}}{(3\times10^{8})^2} + 9.1\times10^{-31} = 2.69\times10^{-30}(\mathrm{kg})$$

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$v = \sqrt{1 - m_0^2/m^2}\,c = 2.82\times10^{8}(m\cdot s^{-1}) \approx 0.94c$$