华东理工大学2016-2017学年第二学期

《数学物理方程》课程考试试卷 答案 B 2017. 6

开课学院：理学院 专业：数学、信计 考试形式：闭卷 所需时间：120分钟

考生姓名：________ 学号：________ 班级：________ 任课教师：邓淑芳

题序	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得分								
评卷人								

一、填空题(每空3分，共30分)

1.椭圆型

2.$p^2\tilde{f}(p)-pf(0)-f'(0), \int_0^t f(t-s)g(s)ds$

3.$\psi(x)=-a\phi'(x)$

4.$\int_\Omega v\Delta u dx=\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}dS-\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dx$

5. 初始条件、边界条件、定解条件

6. $\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2, y_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}$

二、(12分)

利用Fourier变换法求解Cauchy问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 0, & x \in R, t > 0 \\ u|_{t=0} = x^2, & x \in R \end{cases}$$

解：令$\phi(x) = x^2$,则

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 0, & x \in R, t > 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x), & x \in R \end{cases}$$

关于x做Fourier变换

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{u}(\lambda, t) + \lambda^2\hat{u}(\lambda, t) + \hat{u}(\lambda, t) = 0 \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\phi}(\lambda) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\phi}(\lambda)e^{-(\lambda^2+1)t}$$

做逆变换

$$u(x, t) = \phi(x) * e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{e^{-t}}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi$$

令$\eta = \frac{\xi - x}{2\sqrt{t}}$则

$$u(x, t) = \frac{e^{-t}}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}(x^2 + 4t\eta^2 + 4\sqrt{t}x\eta)e^{-\eta^2}2\sqrt{t}d\eta = e^{-t}(x^2 + 2t)$$

三、(12分)

利用特征线方法求解定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} + 3u_{xy} - 4u_{yy} = 0, & x \in R, y > 0 \\ u|_{y=0} = e^{4x}, u_y|_{y=0} = 1, & x \in R \end{cases}$$

解：特征方程为

$$(dy)^2 - 3dxdy - 4(dx)^2 = 0$$

令

$$\xi = 4x - y, \eta = y + x$$

原方程可化为

$$u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow u = f_1(\xi) + f_2(\eta) \Rightarrow u(x, y) = f_1(4x - y) + f_2(y + x)$$

由$y = 0, \Rightarrow$

$$\begin{cases} f_1(4x) + f_2(x) = e^{4x} \\ -f_1'(4x) + f_2'(x) = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(4x) + f_2(x) = e^{4x} \\ -\frac{1}{4}f_1(4x) + f_2(x) = x + c, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(4x) = \frac{4}{5}e^{4x} - \frac{4}{5}x - \frac{4}{5}c \\ f_2(x) = \frac{4}{5}e^{4x} + \frac{4}{5}x + \frac{4}{5}c, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(x) = \frac{4}{5}e^{x} - \frac{x}{5} - \frac{4}{5}c \\ f_2(x) = \frac{4}{5}e^{4x} + \frac{4}{5}x + \frac{4}{5}c, \end{cases}$$

所以

$$u(x, y) = f_1(4x - y) + f_2(y + x) = \frac{4}{5}e^{4x-y} + \frac{1}{5}e^{4x+4y} + y$$

四、(12分)

求解有界区域上的定解问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u|_{x=0} = -1, u|_{x=1} = 0, & t > 0 \\ u|_{t=0} = x^2, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

解：令$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$,则

$$\begin{cases} w''(x) = 2 \\ w(0) = -1, w(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow w(x) = x^2 - 1$$

$v(x,t)$满足

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = 0, & t > 0 \\ u|_{t=0} = x^2 - w(x), & 0 < x < 1 \end{cases}$$

利用分离变量法可求出，特征值$\lambda_n = (n\pi)^2, n = 1, 2, \cdots$，特征函数为$X_n(x) = \sin n\pi x, n = 1, 2, \cdots, T_n(t) = B_n e^{-n^2\pi^2 t}, n = 1, 2, \cdots$,所以

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$$

由初始条件$\Rightarrow B_n = \frac{2}{n\pi}[1 - (-1)^n]$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}[1 - (-1)^n] e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$$

所以

$$u(x,t) = x^2 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}[1 - (-1)^n] e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$$

五、(10分)

判断以下方程的类型、化简成标准形式并求出通解

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = e^y$$

解：$\Delta = (-2)^2 - 4 = 0$所以方程属于抛物型

特征方程

$$(dy)^2 + 4dxdy + 4(dx)^2 = 0$$

积分曲线$y + 2x = c$,令$\xi = y + 2x, \eta = y$ 原方程可化为

$$4u_{\eta\eta} = e^\eta$$

通解

$$u = \frac{1}{4}e^\eta + \eta F(\xi) + G(\xi) = \frac{1}{4}e^y + yF(y + 2x) + G(y + 2x)$$

其中$F(y + 2x), G(y + 2x)$是关于$y + 2x$的任意的二次连续可微函数

六、(12分)

1.证明$\frac{\partial}{\partial x}[(1-\frac{x}{h})^2\frac{\partial u}{\partial x}]=a^2(1-\frac{x}{h})^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$的解可以写成

$$u(x,t)=\frac{1}{h-x}[f_1(x+at)+f_2(x-at)]$$

2.由此，求解该方程满足Cauchy条件$\begin{cases} u|_{t=0}=\phi_0(x) \\ u_t|_{t=0}=\phi_1(x) \end{cases}$的解.

证明：(1).令

$$v=(h-x)u\Rightarrow u=\frac{v}{h-x}$$

则v满足

$$v_{tt}=a^2v_{xx}\Rightarrow v(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)$$

故

$$u(x,t)=\frac{1}{h-x}[f_1(x+at)+f_2(x-at)]$$

(2)$v(x,t)$满足

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx} \\ v|_{t=0}=(h-x)\phi_0(x)=\phi(x) \\ v_t|_{t=0}=(h-x)\psi_1(x)=\psi(x) \end{cases}$$

利用达朗贝尔公式：

$$v(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)]=\frac{1}{2at}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{2}[(h-(x-at))\phi_0(x+at)+(h-(x+at))\phi_0(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}(h-\xi)\phi_1(\xi)d\xi$$

所以

$$u(x,t)=\frac{1}{h-x}v(x,t)=\frac{1}{(h-x)}\{\frac{1}{2}[(h-(x-at))\phi_0(x+at)+(h-(x+at))\phi_0(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}(h-\xi)\phi_1(\xi)d\xi\}$$

七、(12分)

推导半圆$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < R^2, x_2 > 0\}$内的调和方程的Dirichlet边值问题的Green函数

解：半圆内任取一点x,反演点$x^* = \frac{R^2}{|x|^2}x$,已知圆域上的Green函数

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi}(\ln \frac{1}{|y - x|} - \ln \frac{1}{(|x|/R)|y - x^*|})$$

x关于$y = 0$对称点为x_-,其反演点为$x_-^* = \frac{R^2}{|x_-|^2}x_- = \frac{R^2}{|x|^2}x_-$,对于$x_-$在圆上的Green函数

$$G(x_-, y) = \frac{1}{2\pi}(\ln \frac{1}{|y - x_-|} - \ln \frac{1}{(|x_-|/R)|y - x_-^*|})$$

$$= \frac{1}{2\pi}(\ln \frac{1}{|y - x_-|} - \ln \frac{1}{(|x|/R)|y - x_-^*|})$$

而

$$G(x, y)_{y_2=0} = \frac{1}{2\pi}(\ln \frac{1}{[(y_1 - x_1)^2 + x_2^2]^{\frac{1}{2}}} - \ln \frac{R|x|}{[(|x|y_1 - R^2x_1)^2 + (R^2x_2)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$G(x_-, y)_{y_2=0} = \frac{1}{2\pi}(\ln \frac{1}{[(y_1 - x_1)^2 + x_2^2]^{\frac{1}{2}}} - \ln \frac{R|x|}{[(|x|y_1 - R^2x_1)^2 + (R^2x_2)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

所以

$$G_1(x, y) = G(x.y) - G(x_-, y)$$

为半圆域上的Green函数