本试卷共八大题，可能要用到的数据：

$\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$，$\chi^2_{0.025}(4)=0.484$， $\chi^2_{0.025}(5)=0.831$，

$\chi^2_{0.975}(4)=11.143$， $\chi^2_{0.975}(5)=12.833$， $t_{0.975}(4)=2.7764$， $t_{0.975}(5)=2.5706$.

一、（6 分）甲、乙、丙三人相互独立地向同一飞机射击，设每个人击中飞机的概率都是 0.4。如果只有一人击中，则飞机被击落的概率为 0.2；如果有两人击中，则飞机被击落的概率为 0.6；如果三人都击中，则飞机一定被击落。求飞机被击落的概率。

解： 记 $A_i=\{$恰有 i 人同时击中飞机$\}$（$i=0,1,2,3$），各人击中飞机的事件是相互独立的，这可以看作是一个 $p=0.4$ 的独立试验序列。记 $B=\{$飞机被击落$\}$。

$$P(A_i)=P\{3\text{ 人中恰有 } i \text{ 人击中飞机}\}=C_3^i\times0.4^i\times0.6^{3-i}，（i=0,1,2,3）。$$

即有 $P(A_0)=C_3^0\times0.4^0\times0.6^3=0.216$， $P(A_1)=C_3^1\times0.4^1\times0.6^2=0.432$，

$P(A_2)=C_3^2\times0.4^2\times0.6^1=0.288$， $P(A_3)=C_3^3\times0.4^3\times0.6^0=0.064$。-----4

据题意， $P(B|A_0)=0$， $P(B|A_1)=0.2$， $P(B|A_2)=0.6$， $P(B|A_3)=1$。

由全概率公式，可得到所求飞机被击落的概率为：

$P(B)=P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$-----1

$=0.216\times0+0.432\times0.2+0.288\times0.6+0.064\times1=0.3232$。---------1

二、（共 8 分）已知随机变量 ξ 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}Ax & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，求:

(1) A; （本小题 2 分） (2) 分布函数 $F(x)$；（本小题 2 分）

(3) 概率 $P\{-\frac{1}{2}<\xi<\frac{1}{2}\}$；（本小题 2 分） (4) $E\xi$，$D\xi$.（本小题 2 分）

解:（1）由规范性 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$ 得 A=2; ----------2

（2） $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\le x\le1\\ 1 & x>1\end{cases}$; ----------2

（3） $P\left\{-\frac{1}{2}<\xi<\frac{1}{2}\right\}=F(\frac{1}{2})-F(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$; ----------2

（4） $E\xi=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{2}{3}$, $D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\frac{1}{18}$。 ----------2

三、（共 14 分）口袋中有 5 个球，分别标有号码 1，2，3，4，5。现从这袋中任取 3 个球，ξ,η 分别表示取出的球的最大标号和最小标号，求: 1) 二维随机变量 (ξ,η) 的联合概率分布;（本小题 3 分） 2) 边缘概率分布律;（本小题 4 分） 3) ξ,η 的相关系数 $\rho_{\xi,\eta}$ （本小题 5 分）4) ξ,η 是否相互独立？为什么？。（本小题 2 分）

解:1) (ξ,η) 的联合概率分布

$\xi \backslash \eta$	1	2	3
3	1/10	0	0
4	2/10	1/10	0
5	3/10	2/10	1/10

----------------------3

2) 边缘概率分布律

ξ	3	4	5
P	1/10	3/10	6/10
η	1	2	3
P	6/10	3/10	1/10

---------------------4

3) $E\xi$=4.5, $E\eta$=1.5， $D\xi$=0.45, $D\eta$=0.45，---------------------4

$\rho_{\xi,\eta}$=1/3； ---------------------1

4)由 $\rho_{\xi,\eta}\neq 0$，得到不独立。--------------------2

四、（共 12 分）给定二维随机变量 (ξ,η) 的概率密度为:

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda y} & 0<x\le y\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad,\ \lambda>0\ 。$$

求：（1）ξ 的边缘概率密度；（本小题 2 分）

（2）求 $\gamma=\xi^2$ 的概率密度；（本小题 4 分）

（3）$\varsigma=\xi+\eta$ 的概率密度。（本小题 6 分）

解： （1）ξ 的边缘概率密度为：

$\varphi_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_x^{+\infty}\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ ，ξ 的边缘分布是指数分布；

-----------2

（2）$\gamma=\xi^2\Rightarrow y=x^2(x>0)\uparrow\Rightarrow x=\sqrt{y}$,

$\varphi_\gamma(y)=\varphi_\xi(x)\left|\dfrac{dx}{dy}\right|=\begin{cases}\dfrac{\lambda\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} & y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$；---------2

---------2

（3）$\varsigma=\xi+\eta$

$$F_\varsigma(z)=P(\xi+\eta\le z)=\begin{cases}1-2\mathrm{e}^{-\frac{\lambda z}{2}}+\mathrm{e}^{-\lambda z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}\text{------------4}$$

$$f_\varsigma(z)=F'_\varsigma(z)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\frac{\lambda z}{2}}(1-\mathrm{e}^{-\frac{\lambda z}{2}}) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}\text{------2}$$

五、（共 9 分）已知 ξ 服从指数分布，其概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$,

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 ξ 的样本，求：（1）θ 的矩估计，（本小题 3 分）

（2）θ 的极大似然估计，θ 的极大似然估计是否是无偏估计，为什么？（本小题 6 分）

解：（1）θ 的矩估计：$\overline{X}=E\xi=\theta$，取 $\hat{\theta}=\overline{X}$ 即可；--------3

（2）θ的极大似然估计：$L=\prod_{i-1}^{n}\varphi(x_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}} & \min x_i>0\text{，}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$\ln L=\text{-n}\ln\theta-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta},\dfrac{d\ln L}{d\theta}=-\dfrac{n}{\theta}+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}=0\Rightarrow\theta=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x}$，取$\hat{\theta}=\overline{X}$即可；---4

θ的极大似然估计是无偏估计。因为$E\hat{\theta}=E\overline{X}=E\xi=\theta$。------2

六、(共 8 分）某化工产品的含硫量 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中μ、$\sigma>0$ 都未知，取 5 个样品，测得含硫量为：4.28，4.40，4.42，4.35，4.37，经过 Excel 中“描述统计”的计算后得到：

列 1	
平均	4.364
标准误差	0.024207
中值	4.37
标准偏差	0.054129
样本方差	0.00293
峰值	0.931519
偏斜度	-0.97983
区域	0.14
最小值	4.28
最大值	4.42
求和	21.82
计数	5

0

（1）检验假设 H_0：$\sigma=0.04$，H_1：$\sigma\neq0.04$ （显著水平 $\alpha=0.05$）；（本小题 4 分）

（2）在σ未知的条件下求μ的置信度为 95%的置信区间. （本小题 4 分）

解 $n=5$，$\overline{X}=4.364$，$S=0.054129$ 。

（1）H_0：$\sigma=0.04$ ，H_1：$\sigma\neq0.04$ ------1

$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{(5-1)\times0.054129^2}{0.04^2}=7.325$ 。-------1

对$\alpha=0.05$，查χ^2分布表可得

$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(4)=0.484$， $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(4)=11.143$，-----1

因为 $0.484<\chi^2=7.325<11.143$ ，所以接受 H_0： $\sigma=0.04$ 。------1

（2）对$\alpha=0.05$，查t分布表可得 $t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.975}(4)=2.7764$ 。 -----1

μ的 95%的置信区间$(\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}})$--------2

$=(4.364-2.7764\times\frac{0.054129}{\sqrt{5}},4.364+2.7764\times\frac{0.054129}{\sqrt{5}})$ =(4.29679.4.43121)。

------1

七、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1．设$P(A+B)=P(A)+P(B)$，则下列结论正确的是（ D ）。

（A）事件A与B互不相容； （B）$A\subset B$；

（C）事件A与B互相独立； （D）$P(ABC)=0$.

2. 设随机变量ξ~N（μ,σ^2），则随σ增大，$P\{|\xi-\mu|<1\}$ (C)。

（A） 保持不变；（B）单调增加；（C）单调减少；（D）增减不定.

3. 设随机变量序列$X_1,X_2,\ldots.$相互独立，且$X_i(i=1,2,\ldots n,\ldots)$均服从参数为$\frac{1}{2}$的泊松分布，利用中心极限定理，当$n$充分大时，随机变量$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$近似服从（ C ）分布。

（A）$N(2,4)$； (B) $N(2,\frac{4}{n})$； (C) $N(\frac{1}{2},\frac{1}{2n})$； (D) $N(2n,4n)$.

4. 设$\xi\sim N(\mu,1),(X_1,X_2,X_3)$为$\xi$的样本。均为无偏估计的

$$\hat{\mu}_1=\frac{X_1+X_2}{2},\hat{\mu}_2=\frac{X_1+X_2+X_3}{3},\hat{\mu}_3=\frac{X_1+3X_2}{4},\hat{\mu}_4=\frac{X_1+2X_2+2X_3}{5},$$

中（ B ）最有效。

(A) $\hat{\mu}_1$； (B) $\hat{\mu}_2$； (C) $\hat{\mu}_3$； (D) $\hat{\mu}_4$.

5．设总体$\xi\sim N(\mu,4)$，样本均值$\overline{\boldsymbol{X}}$，要使总体均值$\mu$ 的水平为 95% 的置信区间为[$\overline{\boldsymbol{X}}$-0.56， $\overline{\boldsymbol{X}}$+0.56]，样本容量（观测次数）n 必须等于(A)。

(A) 49; (B) 64; (C) 81; (D) 100.

八、填空题（每题 4 分，共 28 分）

1．8 张奖券中有 2 张是有奖的，现有 4 个人购买，每人一张，其中至少有一个人中奖的概率为 <u>11/14</u> 。

2．已知 $P(A)=0.6, P(A+B)=0.84, P(\bar{B}|A)=0.4$ 则 $P(B)=$ <u>0.6</u> 。

3. 离散型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0.2 & 0\le x<1 \\ 0.5 & 1\le x<2 \\ 1 & 2\le x \end{cases}$，则 $P\{X=1\}=$ <u>0.3</u> 。

4. 设随机变量 $X \sim N(2,1)$，则 $E(Xe^X)=$ <u>$3e^{\frac{5}{2}}$</u> 。

5．若 $X \sim U(a,b)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是X的样本,记样本均值为 $\bar{X}$，样本方差为 S^2，

则 $D\overline{X}=$ <u>$\dfrac{(b-a)^2}{12n}$</u>，$ES^2=$ <u>$\dfrac{(b-a)^2}{12}$</u>。

6. 设 (X_1,X_2,X_3,X_4) 是总体 $X \sim N(0,1)$ 的样本。使得 $\dfrac{cX_1^2}{(X_2+X_3+X_4)^2}$ 服从 F 分布，则 $c=$ <u>3</u> 。

7. 对 5 块小麦试验田的施肥量 X 和亩产量 Y 分别进行测量，得到数据如下：

施肥量 x_i	7.7	8.0	8.4	8.8	9.6
亩产量 y_i	128	131	134	146	158

用 EXCEL 的统计分析工具作回归分析，结果如下：

SUMMARY OUTPUT								
回归统计								
Multiple	0.983512							
R Square	0.967297							
Adjusted	0.956395							
标准误差	2.598076							
观测值	5							
方差分析								
	df	SS	MS	F	gnificance F			
回归分析	1	598.95	598.95	88.73333	0.002535			
残差	3	20.25	6.75					
总计	4	619.2						
	Coefficien	标准误差	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	下限 95.0%	上限 95.0%
Intercept	-0.85	14.93406	-0.05692	0.95819	-48.3769	46.67689	-48.3769	46.67689
X Variabl	16.5	1.751623	9.419837	0.002535	10.92555	22.07445	10.92555	22.07445

Y 与施肥量 X 的判定系数（可决系数）为<u> 0.967297   </u>，在显著性水平 0.01 下，Y 与 X 显著线性相关，Y 关于 X 的回归方程为<u> $\hat{Y} = -0.85 + 16X$.   </u>