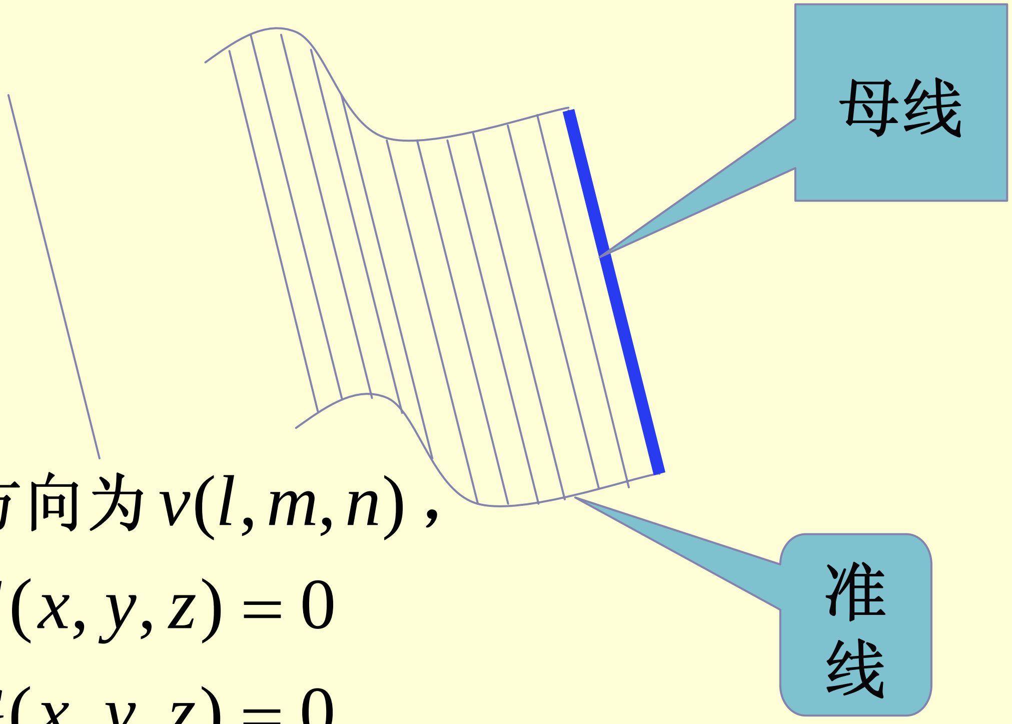
# §2柱面和锥面

## 1.柱面方程的建立

定义：一条直线$l$沿着一条空间曲线 C 平行移动时所形成的曲面称为柱面，$l$称为母线，C 称为准线。




设一个柱面的母线方向为$v(l,m,n)$，

准线 C 的方程为$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

点 $M(x,y,z)$ 在此柱面上 $\Leftrightarrow$ **M** 在某一条母线上。

设母线与 **C**（准线）交于 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，于是有

$$\begin{cases} F(x_0,y_0,z_0)=0 \\ G(x_0,y_0,z_0)=0 \\ \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}=u \end{cases}$$

消去 $x_0,y_0,z_0$，得

$$\begin{cases} F(x-lu,y-mu,z-nu)=0 \\ G(x-lu,y-mu,z-nu)=0 \end{cases}$$

消去 **u**，得柱面方程。

若所给的准线为 $\begin{cases} X = f(t) \\ Y = g(t) \\ Z = h(t) \end{cases} \quad a \le t \le b$，

柱面的参数方程为：

$$\begin{cases} x = f(t) + lu \\ y = g(t) + mu \\ z = h(t) + nu \end{cases} \quad a \le t \le b, \ -\infty < u < +\infty$$

## 2.圆柱面　点的柱面坐标

定义：有一条对称轴$l$，柱面上每一点到轴的距离都相等，称为圆柱面。这个距离称为圆柱面的半径。

在与对称轴的垂直方向做截面，与圆柱面的交线为圆，故准线可取成一个圆 **C**。

设圆柱面的半径 **r**，母线方向为$\vec{v}(l,m,n)$以及圆柱面的对称轴$l_0$经过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$

点$M(x,y,z)$在此圆柱面上$\Leftrightarrow$ $M$ 到轴$l_0$的距离等于 **r**，

即$$\frac{\left|\overrightarrow{MM_0}\times\vec{v}\right|}{|\vec{v}|}=r$$。

半径为**r**对称轴为**z**的圆柱面

普通方程为 $x^2 + y^2 = r^2$

参数方程 $\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \\ z = u \end{cases}$ $\mathbf{0} \le \vartheta \le 2\pi$ ,—∞〈u〈+∞,

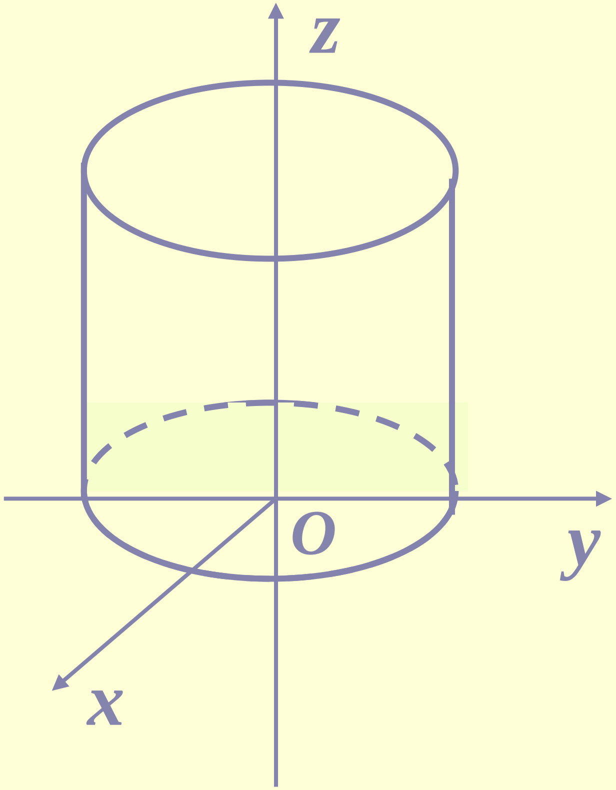
三 元 数 组 （ $r, \vartheta, u$ ） 称 为 点 **M** 的 柱 面 坐 标 。

## 3.柱面方程的特点

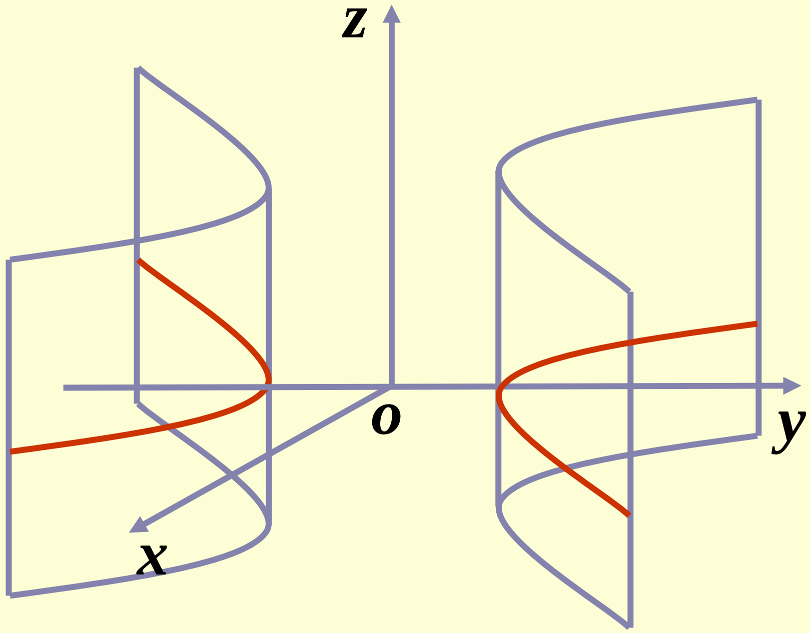
定理：若一个柱面的母线平行于 z 轴（或 x 轴，或 y 轴），则它的方程中不含 z（或 x，或 y），反之一个三元方程如果不含 z（或 x，或 y），则它一定表示一个母线平行于 z 轴（活 x 轴，或 y 轴）的柱面。

例 1: 求 $\Gamma_1$: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ 为

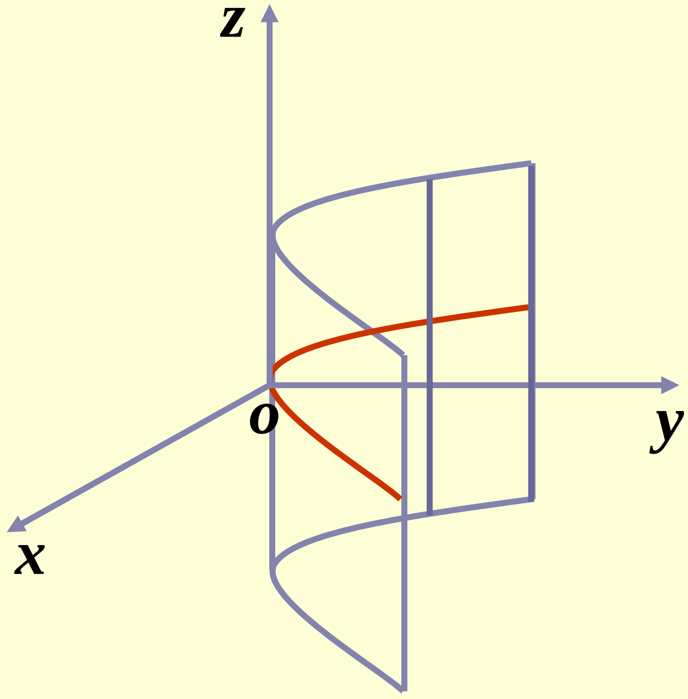
准线，母线于 z 轴平行的柱面



例 2：求 $\Gamma_2$：$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ 为准线，母线于 z 轴平行的柱面



例 3：求 $\Gamma_3$：$\begin{cases} x^2 = 2py \\ z = 0 \end{cases}$ 为准线，母线于 z 轴平行的柱面




**通称为二阶柱面**

例 **4：** 方程$(x-1)^2+4(z+2)^2=9$代表什么曲面？

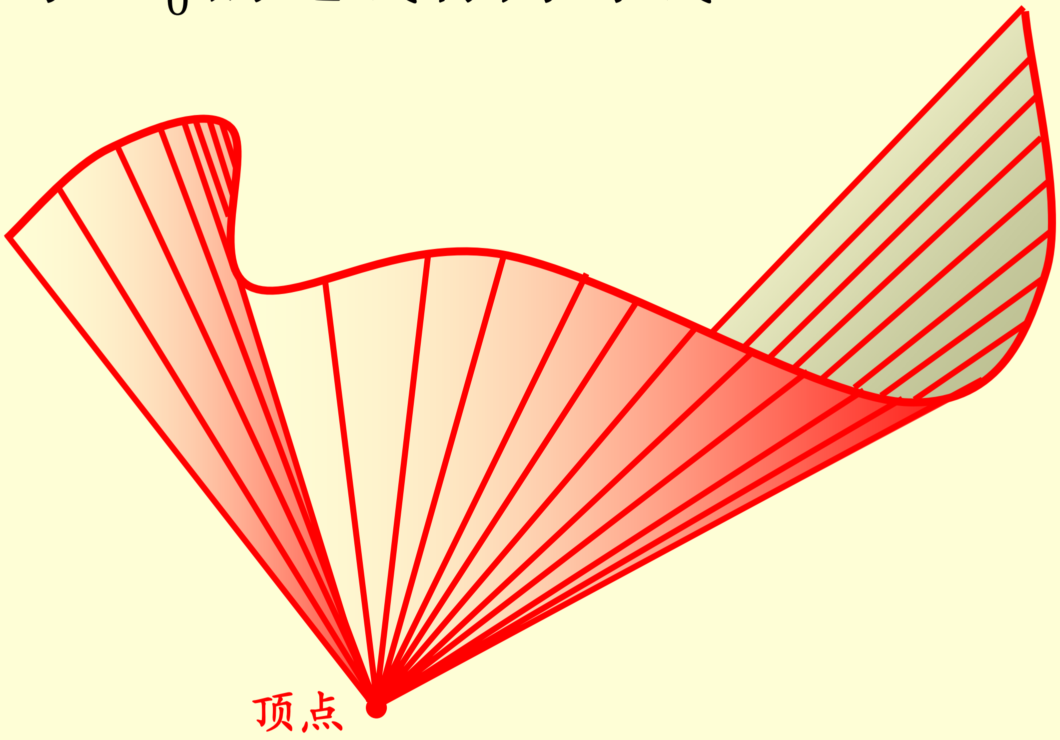
例 **5：** 方程$x^2-y^2=0$代表什么曲面？

# 4.锥面方程的建立

定义：在空间中，由曲线 C 上的点与不在 C 上的一个定点 $M_0$ 连线组成的曲面称为锥面。$M_0$ 称为顶点，C 称为准线，C 上的点与 $M_0$ 的连线称为母线。

设一个锥面的顶点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，准线 C 的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}。$$



点 **M**（**x**，**y**，**z**）在此锥面上$\Leftrightarrow$**M** 在一条母线上。

设准线上有一点$M_1(x_1, y_1, z_1)$使得$M_1$在直线$M_0M$上。

于是有
$$\begin{cases} F(x_1, y_1, z_1) = 0 \\ G(x_1, y_1, z_1) = 0 \\ x_1 = x_0 + (x - x_0)u \\ y_1 = y_0 + (y - y_0)u \\ z_1 = z_0 + (z - z_0)u \end{cases}$$

消去$x_1, y_1, z_1$得

$$F(x_0 + (x - x_0)u, y_0 + (y - y_0)u, z_0 + (z - z_0)u) = 0$$

$$G(x_0 + (x - x_0)u, y_0 + (y - y_0)u, z_0 + (z - z_0)u) = 0$$

再消去$u$得到 ***x***，***y***，***z*** 的方程，即锥面的方程。

例：求顶点为 $P_0(-3,0,1)$，准线为 $\Gamma$：$\begin{cases} x^2-2y^2-6z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ 的锥面方程。

## 5.圆锥面

定义：如果锥面的每一条母线与轴 $l$ 夹的锐角都相等，称为圆锥面。这个锐角称为圆锥面的半顶角。

已知顶点的坐标和轴 $l$ 的方向向量 $\vec{v}$ 以及半顶角 $\alpha$

点 $\boldsymbol{M}(x, y, z)$ 在圆锥面上 $\Leftrightarrow < \overrightarrow{M_0M}, \vec{v} > = \alpha$ 或 $\pi - \alpha$

$$\left|\cos < \overrightarrow{M_0M}, \vec{v} >\right| = \cos\alpha$$

例：求直线 $l_1$： $x = 1 + t, y = 2t, z = 2t$ 绕直线 $l_2$： $x = y = z$ 旋转而成的曲面。

## 6.锥面方程的特点

定义：如果 $F(tx, ty, tz) = t^n F(x, y, z)$ 对于任意的 $x, y, z$ 属于 D 及 $t(\neq 0)$ 成立，则称 $F(x, y, z)=0$ 为 $x, y, z$ 的 $n$ 次齐次方程。

定理：以原点为顶点的锥面方程是关于 $x, y, z$ 的齐次方程。反之 $x, y, z$ 的齐次方程表示的曲面（添上原点）一定是以原点为顶点的锥面。

推论：以 $(x_0, y_0, z_0)$ 为顶点的锥面方程是 $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ 的齐次方程。