

Машинное обучение, ФКН ВШЭ

Теоретическое домашнее задание №12

(и немножко №11)

Задача 1. Как изменить ядро, чтобы оно соответствовало скалярному произведению нормированных векторов в спрямляющем пространстве?

Задача 2. Покажите, что гауссовское ядро

$$K(x, z) = \exp\left(-\frac{\|x - z\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

действительно является ядром.

Задача 3. Рассмотрим двойственное представление задачи гребневой регрессии:

$$Q(a) = \frac{1}{2}\|Ka - y\|^2 + \frac{\lambda}{2}a^T Ka \rightarrow \min_a.$$

Покажите, что решение этой задачи записывается как

$$a = (K + \lambda I)^{-1}y.$$

Задача 4. Центром масс выборки $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_\ell)$ называется точка

$$\varphi_S = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \varphi(x_i).$$

Выразите норму центра масс $\|\varphi_S\|$ через ядро $K(x, z) = \langle \varphi(x), \varphi(z) \rangle$.

Задача 5. Покажите, что функция

$$K(x, z) = \cos(x - z)$$

является ядром.

Задача 6. Рассмотрим функцию, равную косинусу угла между двумя векторами:

$$K(x, z) = \cos(\widehat{x, z}).$$

Покажите, что она является ядром.

Задача 7 (*). Рассмотрим следующую функцию на пространстве вещественных чисел:

$$K(x, z) = \frac{1}{1 + e^{-xz}}.$$

Покажите, что она не является ядром.

Задача 8. Рассмотрим задачу поиска второй главной компоненты:

$$\begin{cases} \|Xu_2\|^2 \rightarrow \max_{u_2} \\ \|u_2\|^2 = 1 \\ \langle u_1, u_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

Покажите, что решением задачи является собственный вектор, соответствующий второму по величине собственному значению ковариационной матрицы.

Задача 9. На семинаре было рассмотрено all-subsequences kernel. Рассмотрим его модификацию fixed length subsequences kernel, которая учитывает лишь подпоследовательности фиксированной длины p :

$$(\varphi^p(s))_u = |\{\mathbf{i} : s(\mathbf{i}) = u\}|, \quad u \in \Sigma^p,$$

$$K_p(s, t) = \langle \varphi^p(s), \varphi^p(t) \rangle = \sum_{u \in \Sigma^p} (\varphi^p(s))_u (\varphi^p(t))_u.$$

Выведите рекуррентные формулы для вычисления $K_p(s, t)$ аналогично выведенным на семинаре.