

# Лекция 14

## Ядра в машинном обучении

Е. А. Соколов  
ФКН ВШЭ

12 января 2017 г.

Ядра позволяют превращать линейные методы машинного обучения в нелинейные за счёт подмены признакового пространства. При этом, поскольку подмена производится через скалярное произведение, сложность методов не повышается. Мы уже знаем, как конструируются ядра, а также изучили несколько их распространённых примеров — например, полиномиальные и гауссовы ядра. Теперь мы перейдём к теоретическим вопросам и выясним, как выглядит оптимальный алгоритм в спрямляющем пространстве в общем виде. Далее мы обсудим вычислительные трудности, связанные с ядровыми методами, и разберём методы их устранения с помощью рандомизации. Наконец, мы разберём ещё одно применение ядер — а именно, в методе главных компонент.

## 1 Гильбертовы пространства и теорема о представлении

Рассмотрим гильбертово пространство (т.е. линейное векторное пространство со скалярным произведением, которое является полным) функций над объектами  $H \subset \{f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}\}$ . Нас будут интересовать *гильбертовы пространства с воспроизводящими ядрами* (reproducing kernel Hilbert space, RKHS) — грубо говоря, это такие пространства функций, в которых результат применения функции  $f \in H$  к объекту  $x \in \mathbb{X}$  представим как скалярное произведение  $f$  на некоторый элемент пространства  $\varphi(x) \in H$ :

$$f(x) = \langle f, \varphi(x) \rangle$$

Заметим, что  $\varphi(x)$  — это тоже функция из  $H$ ; значит, она представима в виде

$$\varphi(x)(z) = \langle \varphi(x), \varphi(z) \rangle$$

Данная функция  $K : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  называется *воспроизводящим ядром* и является симметричной и положительно определённой. Из функционального анализа известно, что любому симметричному положительно определённому ядру соответствует некоторое гильбертово пространство с воспроизводящим ядром — а значит, при использовании ядер мы переводим объекты в некоторые функциональные гильбертовы пространства.

При использовании ядер мы строим линейную модель в спрямляющем пространстве — то есть модель вида  $a(x) = \langle w, \varphi(x) \rangle$ . Поскольку спрямляющее пространство может быть очень сложным (и даже бесконечномерным), есть риск, что мы не сможем найти  $w$  и, как следствие,  $a(x)$  в явном виде. Тем не менее, до сих пор в линейной регрессии и в SVM оказывалось, что оптимальная модель имеет вид

$$a(x) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i K(x, x_i)$$

Оказывается, это правило является достаточно общим, и в большинстве случаев решение задачи машинного обучения будет иметь такой вид. Данный результат называется *теоремой о представлении* (representer theorem). Сформулируем и докажем её.

**Теорема 1.1.** Пусть  $K(x, z)$  — симметричное положительно определённое ядро, соответствующее гильбертову пространству  $H$ . Пусть заданы функция потерь  $L((x_1, y_1, a(x_1)), \dots, (x_\ell, y_\ell, a(x_\ell)))$  и регуляризатор  $g(\|a\|)$ , где  $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  — монотонно возрастающая функция. Тогда решение задачи

$$a_* = \arg \min_{a \in H} \{L((x_1, y_1, a(x_1)), \dots, (x_\ell, y_\ell, a(x_\ell))) + g(\|a\|)\} \quad (1.1)$$

имеет вид

$$a_*(x) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i K(x, x_i).$$

**Доказательство.**

Рассмотрим базис, состоящий из элементов  $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_\ell)$ . Любой элемент гильбертова пространства  $a \in H$  можно представить в виде суммы двух компонент: одна будет принадлежать линейной оболочке элементов  $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_\ell)$ , другая — ортогональному дополнению:

$$a = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \varphi(x_i) + v,$$

где  $\langle v, \varphi(x_i) \rangle = 0$  для всех  $i = 1, \dots, \ell$ .

Как мы выяснили выше, применение функции  $a$  к объекту  $x$  равносильно вычислению скалярного произведения  $a$  на  $\varphi(x)$ . Тогда для объектов обучающей выборки будет выполнено

$$a(x_k) = \left\langle \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \varphi(x_i) + v, \varphi(x_j) \right\rangle = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \langle \varphi(x_j), \varphi(x_i) \rangle.$$

Мы получили, что ответ модели на объектах обучающей выборки не зависит от  $v$  — значит, и значение функции потерь не зависит от  $v$ .

Теперь выясним, как элемент  $v$  влияет на регуляризатор. Воспользуемся его монотонностью и запишем неравенство:

$$\begin{aligned} g(\|a\|) &= g\left(\left\|\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \varphi(x_i) + v\right\|\right) \\ &= g\left(\sqrt{\left\|\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \varphi(x_i)\right\|^2 + \|v\|^2}\right) \\ &\geq g\left(\left\|\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \varphi(x_i)\right\|\right) \end{aligned}$$

Мы получили, что зануление  $v$  приводит к уменьшению значения регуляризатора и никак не влияет на значение функции потерь. Значит, в решении задачи (1.1) компонента  $v$  всегда будет равна нулю. Отсюда получаем, что это решение имеет вид

$$a_*(x) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i K(x, x_i).$$

■

## 2 Аппроксимация спрямляющего пространства

Все ядровые методы используют матрицу Грама  $G = XX^T$  вместо матрицы «объекты-признаки»  $X$ . Это позволяет сохранять сложность методов при сколь угодно большой размерности спрямляющего пространства, но работа с матрицей Грама для больших выборок может стать затруднительной. Так, уже при выборках размером в сотни тысяч объектов хранение этой матрицы потребует большого количества памяти, а обращение станет трудоёмкой задачей, поскольку требует  $O(\ell^3)$  операций.

Решением данной проблемы может быть построение в явном виде такого преобразования  $\tilde{\varphi}(x)$ , которое переводит объекты в пространство не очень большой размерности, но которое при этом приближает ядро:

$$\langle \tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(z) \rangle \approx K(x, z).$$

Мы разберём два метода построения такого приближения: метод Нистрома (Nyström method) и метод случайных признаков Фурье (иногда также называется Random Kitchen Sinks).

### §2.1 Метод Нистрома

Данный метод [1] сводится к выбору случайного подмножества объектов обучающей выборки  $x_1, \dots, x_n$ . На их основе строится преобразование

$$\tilde{\varphi}(x) = (K(x, x_1), \dots, K(x, x_n)).$$

Также с помощью сэмплированных объектов можно аппроксимировать полную матрицу Грама  $G$  — это делается по формуле

$$G \approx \tilde{G} = CW^+C^T,$$

где матрицы  $C$  и  $W$  задаются как

$$C = (K(x_i, x_j))_{i=1, j=1}^{\ell, n} \in \mathbb{R}^{\ell \times n},$$

$$W = (K(x_i, x_j))_{i=1, j=1}^{n, n} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

а через  $W^+ = W^T(WW^T)^{-1}$  обозначена псевдообратная матрица для  $W$ .

Преимущество данной аппроксимации состоит в том, что обращение матрицы вида  $G + \lambda I$  (которая часто возникает в ядровых методах) можно свести к обращению матрицы размера  $n \times n$  вместо  $\ell \times \ell$ :

$$(G + \lambda I)^{-1} \approx (\tilde{G} + \lambda I)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\lambda} (I - C(W^+C^T C + \lambda I)^{-1} W^+C^T).$$

## §2.2 Метод случайных признаков Фурье

Данный метод [2] предлагает альтернативный способ построения аппроксимации спрямляющего пространства. Вычисление признаков в нём гораздо проще, но при этом поиск их параметров несколько сложнее, чем в предыдущем методе.

Из комплексного анализа известно, что любое непрерывное ядро вида  $K(x, z) = K(x - z)$  является преобразованием Фурье некоторого вероятностного распределения (теорема Бохнера):

$$K(x - z) = \int_{\mathbb{R}^d} p(w) e^{iw^T(x-z)} dw.$$

Поскольку значение ядра  $K(x - z)$  всегда вещественное, то и в правой части мнимая часть равна нулю — а значит, экспонента  $e^{iw^T(x-z)}$  равна косинусу  $\cos w^T(x - z)$ . Мы можем приблизить данный интеграл методом Монте-Карло:

$$\int_{\mathbb{R}^d} p(w) \cos w^T(x - z) dw \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos w_j^T(x - z),$$

где векторы  $w_1, \dots, w_n$  генерируются из распределения  $p(w)$ . Используя эти векторы, мы можем сформировать аппроксимацию преобразования  $\phi(x)$ :

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} (\cos(w_1^T x), \dots, \cos(w_n^T x), \sin(w_1^T x), \dots, \sin(w_n^T x)).$$

Действительно, в этом случае скалярное произведение новых признаков будет иметь вид

$$\tilde{K}(x, z) = \langle \tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(z) \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\cos(w_j^T x) \cos(w_j^T z) + \sin(w_j^T x) \sin(w_j^T z))$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos w_j^T(x - z).$$

Данная оценка является несмещённой для  $K(x, z)$  в силу свойств метода Монте-Карло. Более того, с помощью неравенств концентрации меры можно показать, что дисперсия данной оценки достаточно низкая. Например, для гауссова ядра будет иметь место неравенство

$$\mathbb{P} \left[ \sup_{x, z} |\tilde{K}(x, z) - K(x, z)| \geq \varepsilon \right] \leq 2^8 (2d\sigma^2/\varepsilon)^2 \exp(-d\varepsilon^2/4(d+2)).$$

Разумеется, найти распределение  $p(w)$  можно не для всех ядер  $K(x - z)$ . Как правило, данный метод используется для гауссовых ядер  $\exp(\|x - z\|^2/2\sigma^2)$  — для них распределение  $p(w)$  будет нормальным с нулевым матожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ .

## Список литературы

- [1] *Drineas, Petros and Mahoney, Michael W.* On the Nyström Method for Approximating a Gram Matrix for Improved Kernel-Based Learning. // Journal of Machine Learning Research, 2005.
- [2] *Rahimi, Ali and Recht, Benjamin* Random Features for Large-scale Kernel Machines. // Proceedings of the 20th International Conference on Neural Information Processing Systems, 2007.