Машинное обучение, ФКН ВШЭ
Теоретическое домашнее задание №11

Задача 1. Как изменить ядро, чтобы оно соответствовало скалярному произведению нормированных векторов в спрямляющем пространстве?

Задача 2. Покажите, что гауссовское ядро

$$K(x, z) = \exp\left(-\frac{\|x - z\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

действительно является ядром.

Задача 3. Рассмотрим двойственное представление задачи гребневой регрессии:

$$Q(a) = \frac{1}{2}\|Ka - y\|^2 + \frac{\lambda}{2}a^T Ka \to \min_a.$$

Покажите, что решение этой задачи записывается как

$$a = (K + \lambda I)^{-1}y.$$

Задача 4. *Центром масс* выборки $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_\ell)$ называется точка

$$\varphi_S = \frac{1}{\ell}\sum_{i=1}^{\ell}\varphi(x_i).$$

Выразите норму центра масс $\|\varphi_S\|$ через ядро $K(x, z) = \langle\varphi(x), \varphi(z)\rangle$.

Задача 5. Покажите, что функция

$$K(x, z) = \cos(x - z)$$

является ядром.

Задача 6. Рассмотрим функцию, равную косинусу угла между двумя векторами:

$$K(x, z) = \cos(\widehat{x, z}).$$

Покажите, что она является ядром.

Задача 7. Рассмотрим ядро

$$K(x,z) = \prod_{i=1}^{d} (1 + x_i z_i).$$

Какому спрямляющему пространству оно соответствует?

Задача 8. Рассмотрим ядро на пространстве всех подмножеств конечного множества D:

$$K(A_1, A_2) = 2^{|A_1 \cap A_2|}.$$

Покажите, что оно соответствует отображению в $2^{|D|}$-мерное пространство

$$\big(\varphi(A)\big)_U = \begin{cases} 1, & U \subseteq A, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где U пробегает по всем подмножествам множества D.

Задача 9 (*). Рассмотрим следующую функцию на пространстве вещественных чисел:

$$K(x,z) = \frac{1}{1 + e^{-xz}}.$$

Покажите, что она не является ядром.

Задача 10 (*). Пусть $x_1, \dots, x_\ell$ — произвольная выборка с метками $y_1, \dots, y_\ell$, а $\varphi(x)$ — отображение в спрямляющее пространство, соответствующее гауссову ядру. Покажите, что в данном спрямляющем пространстве существует линейный классификатор, безошибочно разделяющий выборку $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_\ell)$.

Задача 11. Рассмотрим задачу поиска второй главной компоненты:

$$\begin{cases} \|Xu_2\|^2 \to \max_{u_2} \\ \|u_1\|^2 = 1 \\ \langle u_1, u_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

Покажите, что решением задачи является собственный вектор, соответствующий второму по величине собственному значению ковариационной матрицы.