

# Машинное обучение, ФКН ВШЭ

## Теоретическое домашнее задание №14

**Задача 1.** Разберите вывод двойственной задачи к SVM. Убедитесь, что можете ответить на следующие вопросы:

1. Почему про двойственную функцию можно сказать, что в ней стоит  $L_1$ -норма штрафов, хотя там стоит сумма без модулей  $(\sum_i \xi_i)$ ?
2. Почему про линейный классификатор, настроенный методом опорных векторов, можно сказать, что он разрежен по объектам?
3. Какую интерпретацию имеют двойственные переменные  $\lambda_i$ ?
4. Как, решив двойственную задачу, восстановить решение прямой  $(w, b, \xi)$ ?

**Задача 2.** На рисунке 1 изображена выборка из четырех объектов и двух классов. Величина  $0 \leq h \leq 3$  — параметр. Будем строить разделяющую гиперплоскость методом опорных векторов:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\|w\|^2 \rightarrow \min; \\ y_i(\langle w, x_i \rangle + b) \geq 1, \quad i = 1, \dots, 4. \end{cases} \quad (0.1)$$

1. При каких значениях параметра  $h$  оптимизационная задача (0.1) будет разрешима?
2. Будет ли меняться наклон оптимальной разделяющей гиперплоскости при изменении параметра  $h$ ?
3. Как ширина разделяющей полосы, соответствующей оптимальной разделяющей гиперплоскости, выражается через параметр  $h$ ?

**Задача 3.** Пусть мы решили двойственную задачу SVM и получили оптимальные значения  $(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ , где  $\lambda_5 = C/3$ ,  $\lambda_2 = 0$ . Выразите оптимальное значение порога  $b$  для прямой задачи через найденное решение  $(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$  двойственной задачи.

**Задача 4.** Рассмотрим задачу SVM, в которой сумма штрафов  $\xi_i$  заменена на сумму их квадратов:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\|w\|^2 + C \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i^2 \rightarrow \min_{w, b, \xi} \\ y_i(\langle w, x_i \rangle + b) \geq 1 - \xi_i, \quad i = 1, \dots, \ell, \\ \xi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, \ell. \end{cases}$$

Постройте двойственную к ней.

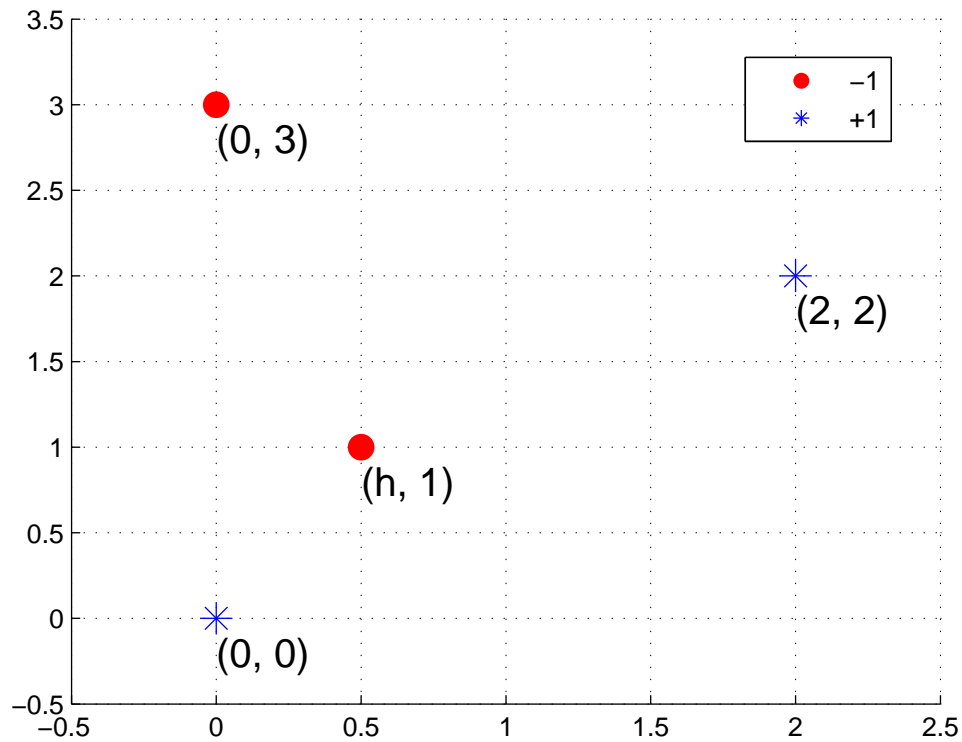


Рис. 1. К задаче 2.

**Задача 5.** Пусть в выборке объекты имеют разную важность — иными словами, каждый объект описывается тройкой  $(x_i, y_i, p_i)$ , где  $x_i$  — признаковое описание,  $y_i$  — ответ, а  $p_i \in [0; 1]$  — важность этого объекта. Модифицируйте задачу SVM для линейно неразделимой выборки так, чтобы штраф за ошибку на объекте  $x_i$  входил с весом  $p_i$ . Выведите двойственную к этой задаче и объясните, как вхождение весов  $p_i$  в неё позволяет учитывать важности объектов.