

# Машинное обучение, ФКН ВШЭ

## Теоретическое домашнее задание №15

**Задача 1.** Допустим, мы решили задать правдоподобие выборки через нормальное распределение для размеченных объектов и через смесь гауссиан для неразмеченных:

$$\sum_{i=1}^{\ell} \log \pi_{y_i} p(x_i | y_i, \theta) + \sum_{i=\ell+1}^{\ell+k} \log \sum_{y \in \mathbb{Y}} \pi_y p(x_i | y, \theta) \rightarrow \max_{\theta},$$

где  $p(x | y, \theta) = \mathcal{N}(x | \mu_y, \Sigma_y)$ . Введите скрытые переменные и запишите формулы для Е- и М-шагов ЕМ-алгоритма.

**Задача 2.** Рассмотрим нормированный лапласиан — разновидность лапласиана, часто возникающую в литературе:

$$L_n = I - D^{-1/2} W D^{-1/2}.$$

Покажите, что для любого вектора  $f \in \mathbb{R}^{\ell}$  выполнено

$$f^T L_n f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} w_{ij} \left( \frac{f_i}{\sqrt{d_i}} - \frac{f_j}{\sqrt{d_j}} \right)^2.$$