

# Langevin Dynamics の多項式エルゴード性

## Ergodic Lower Bounds

司馬博文

7/05/2024

### Abstract

目標分布の裾が重ければ重いほど、Langevin 拡散過程の収束は遅くなる。本記事ではその様子を、平衡分布との全変動距離について、定量的に評価する。

$\mathbb{R}^n$  上の Langevin 拡散を考える：

$$dX_t = -\nabla V(X_t) dt + \sqrt{2\beta^{-1}} dB_t, \quad X_0 = x. \quad (1)$$

ただし、

$$V(x) = O(|x|^{2k}) \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

の仮定をおく。  $k \geq 1/2$  の場合、指数エルゴード的であるが、  $k < 1/2$  の場合はそうではない。

$k \in (0, 1/2)$  の設定で、次の ergodic lower bound を示したい：

$$C_1 \exp\left(c_1 V(x) - c_2 t^{\frac{k}{1-k}}\right) \leq \|P_t(x, -) - \mu_*\|_{TV} \quad (2)$$

$$\mu_*(dx) \propto e^{-\beta V(x)} dx$$

この lower bound から、  $k \in (0, 1/2)$  の場合、Langevin 過程  $X$  が指数エルゴード的たり得ないことが従う。

式 (2) を示すためには、  $G(x) := e^{\kappa V(x)}$  ( $\kappa \in \mathbb{R}$ ) に対して、

$$\mathbb{E}_x[G(X_t)] \leq g(x, t)$$

を満たす関数  $g$  を見つける必要がある (Hairer, 2021, pp. 34–35).

これは次の 3 ステップを辿る

1. そもそも  $\mathbb{E}_x[G(X_t)] < \infty$  であることの証明 (第 1 節).
2.  $G$  に関するドリフト条件  $P_t \hat{L}G \leq C\varphi \circ G$  から、  $\mathbb{E}_x[G(X_t)]$  の  $t$  に関する微分不等式を導く (第 2 節).
3. 微分不等式から、Gronwall の補題より、結論を得る (第 3 節).

## 1 $G = e^{\kappa V}$ の可積分性について

次元  $n = 1$  で考えてみる。

$V(x) = \frac{x^2}{2}$  とした場合、 $X$  は OU 過程になり、

$$\mathbb{E}_x[G(X_t)] < \infty \quad \Leftrightarrow \quad t < -\frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{\beta}{\kappa}\right).$$

$V(x) = \log x$  とした場合、 $X$  は Bessel 過程になり、

$$\mathbb{E}_x[G(X_t)] < \infty \quad (\forall_{t>0}).$$

$k \in (0, 1/2)$  の場合、 $\nabla V$  が有界であることに注目すれば、Bessel 過程の場合と同様に

$$\mathbb{E}_x[G(X_t)] < \infty \quad (\forall_{t>0}).$$

## 1.1 はじめに

Markov 過程  $X$  に関するドリフト条件

$$\hat{L}V \leq -C\varphi \circ V \quad \text{on } \mathbb{R}^n \setminus K$$

からは  $V : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  の可積分性が出る：

$$E_x[V(X_t)] < \infty \quad t \geq 0.$$

### 証明

上のドリフト条件を, (Hairer, 2021) の最も弱い意味で解釈すると

$$M_t := V(X_t) + C \int_0^t \varphi \circ V(X_s) ds$$

が任意の  $x \in E$  に関して  $P_x$ -局所優マルチンゲールである, ということになる.

これだけの仮定でも,  $V$  が下に有界であるために  $M_t$  も下に有界であり, 下に有界な局所優マルチンゲールは (真の) 優マルチンゲールであることから,

$$E_x \left[ V(X_t) + C \int_0^t \varphi \circ V(X_s) ds \right] \leq V(x).$$

加えて左辺が下に有界であることから,  $E_x[V(X_t)] < \infty$  でないと矛盾が起こる.

しかし, lower bound を得たい場合,

$$\hat{L}V \leq C\varphi \circ G \quad \text{on } \mathbb{R}^n \quad (3)$$

という情報のみから,

$$E_x[G(X_t)] \leq g(x, t) (< \infty)$$

という評価を得る必要が出てくる. この場合,  $E_x[G(X_t)] < \infty$  は非自明で, ケースバイケースの議論がである.

## 1.2 OU 過程の場合

An overdamped Langevin dynamics on  $\mathbb{R}$  is defined as the solution to the following SDE:

$$dX_t = -\nabla V(X_t) dt + \sqrt{2\beta^{-1}} dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

If  $V(x) = \frac{x^2}{2}$ ,  $X$  becomes an Ornstein-Uhlenbeck process. Transforming via  $f(t, x) = xe^t$  and using Itô's formula, we get

$$X_t = x_0 e^{-t} + \sqrt{2\beta^{-1}} \int_0^t e^{-(t-s)} dB_s.$$

Hence,  $X$  is a Gaussian process with  $X_t \sim N(x_0 e^{-t}, \beta^{-1}(1 - e^{-2t}))$ .

In this case, expectation with respect to  $G(y) = e^{\kappa V(y)} = e^{\frac{\kappa y^2}{2}}$  ( $\kappa \in \mathbb{R}$ ) is given by

$$\begin{aligned} E_x[G(X_t)] &= \int_{\mathbb{R}} G(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^{-1}(1 - e^{-2t})}} \exp\left(-\frac{(y - xe^{-t})^2}{2\beta^{-1}(1 - e^{-2t})}\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^{-1}(1 - e^{-2t})}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{\kappa\beta^{-1}(1 - e^{-2t})y^2 - (y - xe^{-t})^2}{2\beta^{-1}(1 - e^{-2t})}\right) dy. \end{aligned}$$

Taking a closer look at the numerator inside exp,

$$\begin{aligned} &\kappa\beta^{-1}(1 - e^{-2t})y^2 - (y - xe^{-t})^2 \\ &= y^2\left(\kappa\beta^{-1}(1 - e^{-2t}) - 1\right) - 2xe^{-t}y + x^2e^{-2t}. \end{aligned}$$

Therefore, we conclude

$$E_x[G(X_t)] < \infty \iff \kappa\beta^{-1}(1 - e^{-2t}) < 1.$$

In other words,  $P_t G(x)$  is finite as long as

$$t < -\frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{\beta}{\kappa}\right).$$

### 1.3 Bessel 過程の場合

$V = a \log x$  とすると,  $V'(x) = \frac{a}{x}$  であるから, これに関する Langevin 動力学は,  $\beta = 1$  のとき,

$$dX_t = -\frac{a}{X_t} dt + dB_t$$

と, 母数  $a$  を持つ Bessel 過程になる. ただし,  $0$  への到着時刻  $T_0$  で止めたもの  $X^{T_0}$  を考える.

[@Lawler2019 p.10 命題 2.5]

母数  $a$  を持つ Bessel 過程  $X^{T_0}$  の密度を  $q_t(x, y; a)$  で表す. このとき,

$$q_t(x, y; 1 - a) = \left(\frac{y}{x}\right)^{1-2a} q_t(x, y; a)$$

$$q_t(x, y; a) = q_t(y, x; a) \left(\frac{y}{x}\right)^{2a}$$

$$q_{r^2 t}(rx, ry; a) = \frac{1}{r} q_t(x, y; a)$$

加えて  $a \geq \frac{1}{2}$  でもあるとき,

$$q_1(x, y; a) = y^{2a} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) h_a(xy),$$

$$h_a(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-a} e^x \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

この結果は (Lawler, 2019, p. 59) をみる限り, 修正 Bessel 関数と, Bessel 過程の Fokker-Planck 方程式との考察によって証明されている.

$$G(y) = e^{\kappa V(y)} = e^{a\kappa \log(y)} = y^{a\kappa}$$

であるから, 密度  $q_t(x, y; a)$  に対してはどうやっても可積分である.

### 1.4 $k < 1/2$ の場合の尾部確率

$k < 1/2$  で最も大きく変わる点は,

$$\nabla V(x) = O(|x|^{2k-1}) \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

であるために,  $\nabla V$  が  $\mathbb{R}^n$  上で有界になることである.

このため, 一般に SDE

$$dZ_t = b(Z_t) dt + \sigma(Z_t) dB_t$$

の密度が, 任意の  $T > 0$  に対して, ある  $A_T, a_T > a$  と  $y \in \mathbb{R}$  が存在して

$$\frac{1}{A_T \sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{a_T |y-x|^2}{2t}} \leq p_t(x, y) \leq \frac{A_T}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|y-x|^2}{2a_T t}} \\ t \in (0, T]$$

が成り立つことが使える.<sup>1</sup>

これによれば,

$$G(x) = e^{\kappa V(x)} = O(e^{\kappa |x|^{2k}}) \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

に対して  $p_t$  の尾部が勝つため,  $P_t G(x) < \infty$  である.

<sup>1</sup>(Kohatsu-Higa et al., 2022) で最初に知った. 特に (Kohatsu-Higa, 2003) は詳しく扱っており, 上からの評価は Malliavin 解析から得られる (Taniguchi, 1985). 同様に熱方程式の基本解としても捉えられるが.

## 1.5 $k < 1/2$ の場合の $G$ の可積分性

$k < 1/2$  の場合、式 (1) のドリフト係数が有界になる。このことから、 $G$  の可積分性が、 $X_t$  の密度の考察に依らず次のように導ける。

$$M := \max_{x \in \mathbb{R}^n} \nabla V(x)$$

と定める。  $V(x) = O(|x|^{2k})$  ( $|x| \rightarrow \infty$ ) より、ある  $C > 0$  が存在して、

$$V(x) \leq C|x|^{2k} \quad \text{on } \mathbb{R}^n.$$

$$\begin{aligned} |X_t| &\leq \int_0^t |\nabla V(X_s)| ds + \sqrt{2\beta^{-1}}|B_t| \\ &\leq Mt + \sqrt{2\beta^{-1}}|B_t| \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[|G(X_t)|] &\leq \mathbb{E}_x[e^{\kappa V(|X_t|)}] \\ &\leq \mathbb{E}_x\left[\exp\left(\kappa V(Mt + \sqrt{2\beta^{-1}}|B_t|)\right)\right] \\ &\leq e^{\kappa Mt^{2k}} \mathbb{E}_x[e^{\kappa 2^k \beta^{-k} |B_t|^{2k}}] < \infty. \end{aligned}$$

## 2 微分と拡張生成作用素の関係

$(X_t)$  を  $E = \mathbb{R}^n$  上の Feller-Dynkin 過程、 $(P_t)$  をその遷移半群、 $\hat{L}$  をその拡張生成作用素とする。

### 命題 2

$G \in \mathcal{D}(\hat{L})$  とする。すなわち、

$$t \mapsto M_t := G(X_t) - \int_0^t \hat{L}G(X_s) ds$$

は任意の  $x \in E$  について  $P_x$ -局所マルチンゲールである。

このとき、さらに  $G$  について次の条件を仮定する：

1.  $\mathbb{E}_x[|G(X_t)|] < \infty$  ( $x \in E, t \in \mathbb{R}_+$ ). すなわち、 $P_t G : E \rightarrow \mathbb{R}$  が定まる。
  2. 同様に  $\mathbb{E}_x[|\hat{L}G(X_t)|] < \infty$  ( $x \in E, t \in \mathbb{R}_+$ ). すなわち、 $\hat{L}P_t G : E \rightarrow \mathbb{R}$  も定まる。<sup>2</sup>
  3.  $t \mapsto P_t \hat{L}G(x)$  は局所有界。
- このとき、 $P_t G(x)$  は  $t$  で微分可能であり、次が導ける：

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}_x[G(X_t)] = \mathbb{E}_x[\hat{L}G(X_t)].$$

これは、通常の意味での生成作用素  $L$  の性質

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t G = P_t(LG)$$

が、可積分性の条件の下で、拡張生成作用素  $\hat{L}$  にも引き継がれると理解できる。

### 証明

仮定より、停止時の列  $\tau_n \nearrow \infty$  a.s. が存在し、任意の  $n \in \mathbb{N}$  について、 $M^{\tau_n}$  はマルチンゲールで、

$$\mathbb{E}_x\left[G(X_{t \wedge \tau_n}) - \int_0^{t \wedge \tau_n} \hat{L}G(X_s) ds\right] = G(x), \quad t \geq 0, x \in E. \quad (4)$$

仮定 1 より  $\mathbb{E}_x[|G(X_{t \wedge \tau_n})|] < \infty$  であるから、

$$\mathbb{E}_x\left[\left|\int_0^{t \wedge \tau_n} \hat{L}G(X_s) ds\right|\right] < \infty.$$

<sup>2</sup>元々はある正の定数  $C > 0$  が存在して、 $\hat{L}G \leq CG$ 。ある凹関数  $\varphi$  について  $\hat{L}G \leq \varphi \circ G$  が成り立つならばこの仮定は満たされることに注意、としていた。

でもある．従って Fubini-Tonelli の定理から

$$\mathbb{E}_x \left[ \left| \int_0^{t \wedge \tau_n} \widehat{L}G(X_s) ds \right| \right] = \int_0^t \mathbb{E}_x \left[ 1_{[0, \tau_n]}(s) \widehat{L}G(X_s) \right] ds$$

と書き換えられる．  
よって，式 (4) は

$$\mathbb{E}_x \left[ G(X_{t \wedge \tau_n}) \right] = G(x) + \int_0^t \mathbb{E}_x \left[ 1_{[0, \tau_n]}(s) \widehat{L}G(X_s) \right] ds$$

とも表せる．右辺が  $t$  について微分可能であるから，左辺も微分可能である：

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}_x \left[ G(X_{t \wedge \tau_n}) \right] = \mathbb{E}_x \left[ 1_{[0, \tau_n]}(t) \widehat{L}G(X_t) \right].$$

両辺の  $n \rightarrow \infty$  に関する極限を取ると，右辺は  $|\widehat{L}G(X_t)|$  が  $P_x$ -可積分であるから（仮定 2），Lebesgue の優収束定理より，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}_x [G(X_{t \wedge \tau_n})] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x \left[ 1_{[0, \tau_n]}(t) \widehat{L}G(X_t) \right] = \mathbb{E}_x [\widehat{L}G(X_t)], \quad x \in E, t \in (0, \infty).$$

加えてこの収束は， $t \in (0, \infty)$  に関して広義一様に起こる．実際，Hölder の不等式より，<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}_x [G(X_{t \wedge \tau_n})] - \mathbb{E}_x [\widehat{L}G(X_t)] \right| \\ &= \sup_{t \in [0, T]} \left| \mathbb{E}_x [1_{[0, \tau_n]}(t) \widehat{L}G(X_t)] - \mathbb{E}_x [\widehat{L}G(X_t)] \right| \\ &= \sup_{t \in [0, T]} \left| \mathbb{E}_x \left[ (1 - 1_{[0, \tau_n]}(t)) \widehat{L}G(X_t) \right] \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}_x \left[ (1 - 1_{[0, \tau_n]}(T)) |\widehat{L}G(X_t)| \right] \\ &\leq \|1 - 1_{[0, \tau_n]}(T)\|_{L^\infty(\Omega)} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}_x [|\widehat{L}G(X_t)|] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

最後の不等式にて，仮定 3 による局所有界性

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}_x [|\widehat{L}G(X_t)|] < \infty$$

を用いた．

この導関数の一様収束と，Lebesgue の優収束定理による各点収束

$$\mathbb{E}_x [G(X_{t \wedge \tau_n})] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [G(X_t)]$$

を併せると， $\mathbb{E}_x [G(X_t)]$  も可微分で，その導関数は極限

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}_x [G(X_t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}_x [G(X_{t \wedge \tau_n})] = \mathbb{E}_x [\widehat{L}G(X_t)]$$

として得られることが結論づけられる．

[@Rudin-Principles p.152 定理 7.17]<sup>a</sup>

<sup>a</sup>[@杉浦光夫 1980 p.311] 定理 13.7 系では， $f_n$  に  $C^1$ -級の仮定を置いて，この場合は  $f$  が  $C^1$ -級になることを導いている．

$f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  を可微分な関数列とし，ある関数  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  に各点収束するものとする．  
仮に，導関数列  $\{f'_n\}$  が一様位相に関して Cauchy 列ならば， $f_n \rightarrow f$  も一様収束し，加えて  $f$  も可微分で，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x)$$

<sup>3</sup> $\sup_{t \in [0, T]} \widehat{L}G(X_t)$  は可積分とは限らないため， $\sup$  を期待値の中に入れることはできない．Hölder の不等式により，これを迂回できる．

が成り立つ.

### 3 下界の導出

元来の目的である下界の導出のためには,

$$\mathbb{E}_x[G(X_t)] \leq C G(x) \exp\left(ct^{\frac{k}{1-k}}\right)$$

という評価を得る必要がある. Gronwall の不等式を用いれば, 導関数に関する不等式

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}_x[G(X_t)] \leq \mathbb{E}_x[\widehat{L}G(X_t)] \leq C \mathbb{E}_x[\varphi \circ G(X_t)]$$

があれば十分である. この導関数に関する不等式は, 命題 2 とドリフト条件 (3)

$$\widehat{L}G \leq C\varphi \circ G$$

を併せることで,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}_x[G(X_t)] = \mathbb{E}_x[\widehat{L}G(X_t)] \leq C \mathbb{E}_x[\varphi \circ G(X_t)]$$

より得る.

### 参考文献

Hairer, M. (2021). *Convergence of markov processes*.

Kohatsu-Higa, A. (2003). *Lower bounds for densities of uniformly elliptic non-homogeneous diffusions*. In E. Giné, C. Houdré, and D. Nualart, editors, *Stochastic inequalities and applications*, pages 323–338. Basel: Birkhäuser Basel.

Kohatsu-Higa, A., Nualart, E., and Tran, N. K. (2022). *Density estimates for jump diffusion processes*. *Applied Mathematics and Computation*, 420, 126814.

Lawler, G. F. (2019). *Notes on the besell process*.

Taniguchi, S. (1985). *Applications of Malliavin's calculus to time-dependent systems of heat equations*. *Osaka Journal of Mathematics*, 22(2), 307–320.