

# Langevin Dynamics の多項式エルゴード性

司馬 博文

7/05/2024

$\mathbb{R}^n$  上の Langevin 拡散を考える：

$$dX_t = -\nabla V(X_t) dt + \sqrt{2\beta^{-1}} dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

ただし,

$$V(x) = O(|x|^{2k}) \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

の仮定をおく.  $k \geq 1/2$  の場合, 指数エルゴード的であるが,  $k < 1/2$  の場合はそうではない.

$k \in (0, 1/2)$  の設定で, 次が示したい：

$$C_1 \exp\left(c_1 V(x) - c_2 t^{\frac{k}{1-k}}\right) \leq \|P_t(x, -) - \mu_*\|_{TV}$$
$$\mu_*(dx) \propto e^{-\beta V(x)} dx$$

## 1 $G = e^{\kappa V}$ の可積分性について

次元  $n = 1$  で考えてみる.

$V(x) = \frac{x^2}{2}$  とした場合,  $X$  は OU 過程になり,

$$E_x[G(X_t)] < \infty \quad \Leftrightarrow \quad t < -\frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{\beta}{\kappa}\right).$$

$V(x) = \log x$  とした場合,  $X$  は Bessel 過程になり,

$$E_x[G(X_t)] < \infty \quad (\forall t > 0).$$

### 1.1 導入

Markov 過程  $X$  に関するドリフト条件

$$\hat{L}V \leq -C\varphi \circ V \quad \text{on } \mathbb{R}^n \setminus K$$

からは  $V : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  の可積分性が出る.

#### 証明

上のドリフト条件を, (Hairer, 2021) の最も弱い意味で解釈すると

$$M_t := V(X_t) + C \int_0^t \varphi \circ V(X_s) ds$$

が任意の  $x \in E$  に関して  $P_x$ -局所優マルチンゲールである, ということになる.

これだけの仮定でも,  $V$  が下に有界であるために  $M_t$  も下に有界であり, 下に有界な局所優マルチンゲールは (真の) 優マルチンゲールであることから,

$$E_x\left[V(X_t) + C \int_0^t \varphi \circ V(X_s) ds\right] \leq V(x).$$

加えて左辺が下に有界であることから,  $E_x[V(X_t)] < \infty$  でないと矛盾が起こる.

しかし, lower bound を得たい場合,

$$\hat{L}V \leq C\varphi \circ G \quad \text{on } \mathbb{R}^n$$

という情報のみから,

$$E_x[G(X_t)] \leq g(x, t) (< \infty)$$

という評価を得る必要が出てくる. この場合,  $E_x[G(X_t)] < \infty$  は非自明で, ケースバイケースの議論がであるようである.

## 1.2 OU 過程の場合

An overdamped Langevin dynamics on  $\mathbb{R}$  is defined as the solution to the following SDE:

$$dX_t = -\nabla V(X_t) dt + \sqrt{2\beta^{-1}} dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

If  $V(x) = \frac{x^2}{2}$ ,  $X$  becomes an Ornstein-Uhlenbeck process. Transforming via  $f(t, x) = xe^t$  and using Itô's formula, we get

$$X_t = x_0 e^{-t} + \sqrt{2\beta^{-1}} \int_0^t e^{-(t-s)} dB_s.$$

Hence,  $X$  is a Gaussian process with  $X_t \sim N(x_0 e^{-t}, \beta^{-1}(1 - e^{-2t}))$ .

In this case, expectation with respect to  $G(y) = e^{\kappa V(y)} = e^{\frac{\kappa y^2}{2}}$  ( $\kappa \in \mathbb{R}$ ) is given by

$$\begin{aligned} E_x[G(X_t)] &= \int_{\mathbb{R}} G(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^{-1}(1 - e^{-2t})}} \exp\left(-\frac{(y - xe^{-t})^2}{2\beta^{-1}(1 - e^{-2t})}\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^{-1}(1 - e^{-2t})}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{\kappa\beta^{-1}(1 - e^{-2t})y^2 - (y - xe^{-t})^2}{2\beta^{-1}(1 - e^{-2t})}\right) dy. \end{aligned}$$

Taking a closer look at the numerator inside exp,

$$\begin{aligned} &\kappa\beta^{-1}(1 - e^{-2t})y^2 - (y - xe^{-t})^2 \\ &= y^2\left(\kappa\beta^{-1}(1 - e^{-2t}) - 1\right) - 2xe^{-t}y + x^2e^{-2t}. \end{aligned}$$

Therefore, we conclude

$$E_x[G(X_t)] < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \kappa\beta^{-1}(1 - e^{-2t}) < 1.$$

In other words,  $P_t G(x)$  is finite as long as

$$t < -\frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{\beta}{\kappa}\right).$$

## 1.3 Bessel 過程の場合

$V = a \log x$  ととると,  $V'(x) = \frac{a}{x}$  であるから, これに関する Langevin 動力学は,  $\beta = 1$  のとき,

$$dX_t = -\frac{a}{X_t} dt + dB_t$$

と, 母数  $a$  を持つ Bessel 過程になる. ただし,  $0$  への到着時刻  $T_0$  で止めたもの  $X^{T_0}$  を考える.

[@Lawler2019 p.10 命題 2.5]

母数  $a$  を持つ Bessel 過程  $X^{T_0}$  の密度を  $q_t(x, y; a)$  で表す. このとき,

$$q_t(x, y; 1 - a) = \left(\frac{y}{x}\right)^{1-2a} q_t(x, y; a)$$

$$q_t(x, y; a) = q_t(y, x; a) \left( \frac{y}{x} \right)^{2a}$$

$$q_{r^2 t}(rx, ry; a) = \frac{1}{r} q_t(x, y; a)$$

加えて  $a \geq \frac{1}{2}$  でもあるとき,

$$q_1(x, y; a) = y^{2a} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) h_a(xy),$$

$$h_a(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-a} e^x \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

この結果は (Lawler, 2019, p. 59) をみる限り, 修正 Bessel 関数と, Bessel 過程の Fokker-Planck 方程式との考察によって証明されている.

$$G(y) = e^{\kappa V(y)} = e^{a\kappa \log(y)} = y^{a\kappa}$$

であるから, 密度  $q_t(x, y; a)$  に対してはどうやっても可積分である.

#### 1.4 $k < 1/2$ の場合の尾部確率

$k < 1/2$  で最も大きく変わる点は,

$$\nabla V(x) = O(|x|^{2k-1}) \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

であるために,  $\nabla V$  が  $\mathbb{R}^n$  上で有界になることである.

このため, 一般に SDE

$$dZ_t = b(Z_t) dt + \sigma(X_t) dB_t$$

の密度が, 任意の  $T > 0$  に対して, ある  $A_T, a_T > a$  と  $y \in \mathbb{R}$  が存在して

$$\frac{1}{A_T \sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{a_T |y-x|^2}{2t}} \leq p_t(x, y) \leq \frac{A_T}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|y-x|^2}{2a_T t}} \\ t \in (0, T]$$

が成り立つことが使える.<sup>1</sup>

これによれば,

$$G(x) = e^{\kappa V(x)} = O(e^{\kappa |x|^{2k}}) \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

に対して  $p_t$  の尾部が勝つため,  $P_t G(x) < \infty$  である.

## 2 微分と拡張生成作用素の関係

次の連続性は?

$$t \mapsto \mathbb{E}_x \left[ 1_{[0, \tau_n]}(t) \hat{L} G(X_t) \right].$$

これさえ言えば,  $\frac{\partial}{\partial t} P_t G = P_t(\hat{L} G)$  を得る.

$(X_t)$  を  $E = \mathbb{R}^n$  上の Feller-Dynkin 過程,  $(P_t)$  をその遷移半群,  $\hat{L}$  をその拡張生成作用素とする.

<sup>1</sup>(Kohatsu-Higa et al., 2022) で最初に知った. 特に (Kohatsu-Higa, 2003) は詳しく扱っており, 上からの評価は Malliavin 解析から得られる (Taniguchi, 1985). 同様にして熱方程式の基本解としても捉えられるが.

## 命題

$G \in D(\hat{L})$  とする. すなわち,

$$t \mapsto M_t := G(X_t) - \int_0^t \hat{L}G(X_s) ds$$

は任意の  $x \in E$  について  $P_x$ -局所マルチンゲールである.

このとき, さらに  $G$  について次の条件を仮定する:

1.  $E_x[|G(X_t)|] < \infty$  ( $x \in E, t \in \mathbb{R}_+$ ). すなわち,  $P_t G : E \rightarrow \mathbb{R}$  が定まる.
2. 同様に  $E_x[|\hat{L}G(X_t)|] < \infty$  ( $x \in E, t \in \mathbb{R}_+$ ). すなわち,  $\hat{L}P_t G : E \rightarrow \mathbb{R}$  も定まる.<sup>2</sup>
3. 任意の  $x \in E$  について,  $t \mapsto P_t \hat{L}G(x)$  は連続.

このとき,  $P_t G(x)$  は  $t$  で連続微分可能であり, 次が導ける:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_x[G(X_t)] = E_x[\hat{L}G(X_t)].$$

これは, 通常の意味での生成作用素  $L$  の性質

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t G = P_t (LG)$$

が, 可積分性の条件の下で, 拡張生成作用素  $\hat{L}$  にも引き継がれると理解できる.

## 証明

局所マルチンゲール性の仮定から, 還元する停止時の列  $\{\tau'_n\}$  が存在する:  $\tau'_n \nearrow \infty$  a.s. かつ  $M^{\tau'_n}$  はマルチンゲール. これに対して,

$$\tau_n := \inf \{t \geq 0 \mid |G(X_t)| \geq n\} \wedge \tau'_n$$

と定めると, これもやはり還元する停止時の列である. 特に, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  について,  $M^{\tau_n}$  はマルチンゲールで,

$$E_x \left[ G(X_{t \wedge \tau_n}) - \int_0^{t \wedge \tau_n} \hat{L}G(X_s) ds \right] = G(x), \quad t \geq 0, x \in E. \quad (1)$$

いま,  $|G(X_{t \wedge \tau_n})| \leq n$  であるから,<sup>3</sup>  $E_x[|G(X_{t \wedge \tau_n})|] < \infty$  かつ

$$E_x \left[ \left| \int_0^{t \wedge \tau_n} \hat{L}G(X_s) ds \right| \right] \leq \int_0^t E_x[|\hat{L}G(X_s)|] ds \leq t \max_{s \in [0, t]} E_x[|\hat{L}G(X_s)|] < \infty.$$

である. 仮定 2 より  $E_x[\hat{L}G(X_s)] < \infty$  であり, 仮定 3 より  $s \mapsto E_x[\hat{L}G(X_s)]$  は連続であることを用いた. よって, 式 (1) は

$$E_x \left[ G(X_{t \wedge \tau_n}) \right] = G(x) + E_x \left[ \int_0^{t \wedge \tau_n} \hat{L}G(X_s) ds \right]$$

とも表せる. ここで, 両辺を  $t$  に関して微分するが,

$$\Omega \times (0, \infty) \ni (\omega, t) \mapsto \int_0^{t \wedge \tau_n} \hat{L}G(X_s) ds$$

が任意の  $t \in (0, \infty)$  について

1.  $P_x$  について可積分で,
2. 変数  $t$  に関する偏微分係数も  $P_x$  について可積分

であるから, 右辺は  $t$  で微分可能であり, さらに  $E_x$  と  $\frac{\partial}{\partial t}$  とが交換できる:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_x \left[ G(X_{t \wedge \tau_n}) \right] = E_x \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t \wedge \tau_n} \hat{L}G(X_s) ds \right] = E_x \left[ 1_{[0, \tau_n]}(t) \hat{L}G(X_t) \right], \quad n \in \mathbb{N}, x \in E, t \in (0, \infty).$$

これより, 左辺の  $E_x[G(X_{t \wedge \tau_n})]$  も  $t \in (0, \infty)$  に関して微分可能だったことがわかる.

両辺の  $n \rightarrow \infty$  に関する極限を取ると, 右辺は  $|\hat{L}G(X_t)|$  が  $P_x$ -可積分であるから (仮定 2), Lebesgue の優収束定理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} E_x[G(X_{t \wedge \tau_n})] = E_x \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} 1_{[0, \tau_n]}(t) \hat{L}G(X_t) \right] = E_x[\hat{L}G(X_t)], \quad x \in E, t \in (0, \infty).$$

<sup>2</sup>元々はある正の定数  $C > 0$  が存在して,  $\hat{L}G \leq CG$ . ある凹関数  $\varphi$  について  $\hat{L}G \leq \varphi \circ G$  が成り立つならばこの仮定は満たされることに注意, としていた.

この収束は、 $t \in (0, \infty)$  に関して広義一様に起こっている。<sup>4</sup>  
 よって、あとは

$$t \mapsto E_x \left[ 1_{[0, \tau_n]}(t) \hat{L}G(X_t) \right]$$

が連続であることを示せば良い。

### 3 下界の導出

元来の目的である下界の導出のためには、

$$E_x[G(X_t)] \leq C G(x) \exp \left( c t^{\frac{k}{1-k}} \right)$$

という評価を得る必要がある。Gronwall の不等式を用いれば、導関数に関する不等式

$$\frac{\partial}{\partial t} E_x[G(X_t)] \leq E_x[\hat{L}G(X_t)] \leq C E_x[\varphi \circ G(X_t)]$$

があれば十分である。

しかし、これを得るためにも、前節で考えたような議論、特に

$$\frac{\partial}{\partial t} E_x[G(X_{t \wedge \tau_n})] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} E_x[G(X_t)]$$

の広義一様収束が必要になる。

[@Rudin-Principles p.152 定理 7.17]<sup>a</sup>

<sup>a</sup>[@杉浦光夫 1980 p.311] 定理 13.7 系では、 $f_n$  に  $C^1$ -級の仮定を置いている。

$f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  を可微分な関数列とし、ある関数  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  に各点収束するものとする。  
 仮に、導関数列  $\{f'_n\}$  が一様位相に関して Cauchy 列ならば、 $f_n \rightarrow f$  も一様収束し、加えて  $f$  も可微分で、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x)$$

が成り立つ。

いま、 $E_x[G(X_t)] < \infty$  の仮定から、Lebesgue の優収束定理より、

$$E_x[G(X_{t \wedge \tau_n})] \rightarrow E_x[G(X_t)]$$

である。加えて、導関数もある関数に一様収束する：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} E_x[G(X_{t \wedge \tau_n})] = E_x[\hat{L}G(X_t)].$$

これより、 $E_x[G(X_t)]$  も可微分で、

$$\frac{\partial}{\partial t} E_x[G(X_t)] = E_x[\hat{L}G(X_t)]$$

が成り立つ。

<sup>4</sup>ここで、Markov 過程  $(X_t)$  の見本道が càdlàg であることを使っている。

<sup>4</sup> $E_x \left[ 1_{[0, \tau_n]}(t) \hat{L}G(X_t) \right] \rightarrow E_x[\hat{L}G(X_t)]$  の収束が広義一様に起こるためである。

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial}{\partial t} E_x[G(X_{t \wedge \tau_n})] - E_x[\hat{L}G(X_t)] \right| \\ &= \sup_{t \in [0, T]} \left| E_x[1_{[0, \tau_n]}(t) \hat{L}G(X_t)] - E_x[\hat{L}G(X_t)] \right| \\ &= \sup_{t \in [0, T]} \left| E_x[(1_{[0, \tau_n]}(t) - 1) \hat{L}G(X_t)] \right| \\ &\leq E_x \left[ \sup_{t \in [0, T]} (1_{[0, \tau_n]}(t) - 1) \hat{L}G(X_t) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

ここで  $t \mapsto \hat{L}G(X_t)$  の連続性を使った可能性がある。すなわち、拡散過程と  $G \in C^2(E)$  に対する拡張生成作用素  $\hat{L}$  の形の知識まで使った可能性がある。

Hairer, M. (2021). *Convergence of markov processes*.

Kohatsu-Higa, A. (2003). Lower bounds for densities of uniformly elliptic non-homogeneous diffusions. In E. Giné, C. Houdré, and D. Nualart, editors, *Stochastic inequalities and applications*, pages 323–338. Basel: Birkhäuser Basel.

Kohatsu-Higa, A., Nualart, E., and Tran, N. K. (2022). *Density estimates for jump diffusion processes*. *Applied Mathematics and Computation*, 420, 126814.

Lawler, G. F. (2019). *Notes on the besse process*.

Taniguchi, S. (1985). *Applications of Malliavin’s calculus to time-dependent systems of heat equations*. *Osaka Journal of Mathematics*, 22(2), 307–320.