

2023 年：ノンパラメトリクス

司馬博文

1/10/2025

Cambridge Series in Statistical  
and Probabilistic Mathematics

# Mathematical Foundations of Infinite-Dimensional Statistical Models

Evarist Giné  
Richard Nickl

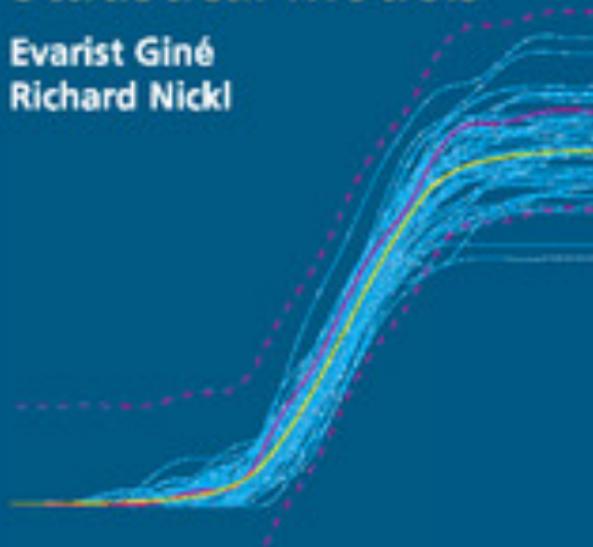


图 1-2020 年麻省理工学院出版社出版的《数学统计模型基础》一书第 2 版书封。

# 等周不等式

体積測度  $\mu$  が等しい可測集合のうち, 球が最小の測度を持つ.

- ▶ Borel 可測集合  $A \subset \mathbb{R}^n$  について,  $\epsilon$ -閉近傍 を次のように定める:

$$A_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) \leq \epsilon\}, \quad \epsilon > 0.$$

- ▶ 実は  $A_\epsilon$  は Borel 可測とは限らないが, Lebesgue 可測ではある.

## 古典的集中不等式 [@Schmidt48]-[@Levy51]

$n$ -次元球面  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  について,  $A \subset S^n$  を Borel 可測,  $C$  を同体積の (測地) 球とすると,

$$\mu(C_\epsilon) \leq \bar{\mu}(A_\epsilon), \quad \epsilon > 0.$$

# 正規分布に関する等周不等式

[@Gine-Nickl2021 p.31] 定理 2.2.3

$\gamma_n$  を  $\mathbb{R}^n$  上の標準正規分布とする.  $A \subset \mathbb{R}^n$  を Borel 可測,

$$H_a := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x|u) \leq a\}, \quad a \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

を同体積の **affine 半空間** とすると,

$$\gamma_n(H_a + \epsilon B^n) \leq \overline{\gamma_n}(A_\epsilon + \epsilon B^n), \quad \epsilon > 0.$$

$\mathbb{R}^n$  だけでなく  $\mathbb{R}^\infty$  上でも成り立つ. 半径  $\sqrt{m}$  の  $n+m$  次元球面  $S^{n+m}$  上の一様分布の, 最初の  $n$  次元周辺分布は,  $m \rightarrow \infty$  の極限で正規分布に収束する (Poincaré, 1912) :

$$(\text{pr}_{1:n})_* U \sqrt{m} S^{n+m} \Rightarrow N_n(0, I_n).$$

# 中央値周りへの集中不等式

[@Borell75-BrunnMinkowskiInGaussSpace]-[@Sudakov-Tsirelson74]

$\{X_t\}_{t \in T}$  を可分な中心 Gauss 過程で、ほとんど確実に上限  $\|X\|_\infty$  が有限であるとする。このとき、 $\|X\|_\infty$  の中央値  $M$  に関して,<sup>1</sup>

$$P\left[\left|\|X\|_\infty - M\right| > u\right] \leq \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right), \quad u > 0, \sigma^2 := \sup_{t \in T} V[X_t].$$

同様の命題を平均値の周りに関しても示せる。係数 2 が前につくものは (Gross, 1975) による正規分布に関する対数 Sobolev 不等式から導ける。

# Gibbs 分布の集中

[@Chatterjee2007]

Curie-Weiss 模型の Hamiltonian

$$H^n(x) := -\frac{1}{2n} \sum_{i,j=1}^n x_i x_j - h \sum_{i=1}^n x_i, \quad x \in \{\pm 1\}^n, h \in \mathbb{R},$$

が定める Boltzmann-Gibbs 分布

$$\pi^n(x) \propto e^{-\beta H^n(x)}, \quad \beta > 0,$$

と 磁化密度  $m^n(x) := \bar{x}$  に関して,

$$\pi^n \left[ \left| m^n - m^* \right| \leq \frac{\beta}{n} + \frac{t}{\sqrt{n}} \right] \leq 2 \exp \left( -\frac{t^2}{4(1+\beta)} \right).$$

証明は Stein の方法による.

# Metropolis-Hastings 法のスケーリング

## 磁化密度のサンプリング

Hamiltonian  $H^n$  は磁化密度  $m^n$  の二次関数

$$H^n(m) = -n \left( \frac{1}{2}m^2 + hm \right),$$

$$\pi^n(m) \propto e^{-\beta H^n(m)}.$$

配置空間  $\Omega := \{\pm 1\}^n$  上の一様な醉歩が（中心化された）磁化の空間  $(\mathbb{R}, \bar{\pi}^n)$  上に定める MH 法は、高温領域では Gauss 分布に対する Langevin 拡散に  $n \rightarrow \infty$  で弱収束する：

$$dV = -2l(h, \beta)V dt + \sigma(h, \beta) dB$$

[@Bierkens-Roberts2017]

MH 法の収束は  $O(n)$  のスケーリングで動く。すなわち生成作用素

$$L^n f := n(P^n f - f),$$

が Langevin 拡散に収束する。

一方で Lifted MH 法は  $O(n^{1/2})$  のスケーリングで収束する：

$$L^n f := \sqrt{n}(P^n f - f),$$

# リフティング

[Lefted MH @Turitsyn+2011]

状態空間を 2 つに分け、目標分布を等分配する：

$$\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \times \{\pm 1\}, \quad \tilde{\pi} := \pi \otimes \frac{1}{2}.$$

$\mathbb{R}$  上の 1 つの遷移核  $Q$  から、 $\mathbb{R} \times \{+1\}$  上と  $\mathbb{R} \times \{-1\}$  上とで異なる遷移核  $\tilde{Q}^\pm$  を作る構成をリフティングという。

このとき 歪釣り合い条件 を満たすように作る：

$$\pi(x) \tilde{Q}^+(x, y) \propto \pi(y) \tilde{Q}^-(y, x).$$

[@Bierkens-Roberts2017]

$\tilde{Q}^+$  では磁化の増加方向、  
 $\tilde{Q}^-$  では減少方向にのみ提案するとする。

このとき Lifted MH 法は  $O(n^{1/2})$  のスケーリングで Zig-Zag 過程 に収束する：

$$Lf(m, \theta) := \alpha(h, \beta) \theta f'(m, \theta) + (\theta l(h, \beta)m)_+ \left( f(m, -\theta) - f(m, \theta) \right)$$

- ▶ スケーリングが落ちている
- ▶ 拡散項がない（定常状態からの逸脱）→ アルゴリズムの高効率化



拡散過程に対する粒子フィルターが、タイムステップ  $\Delta \rightarrow 0$  の極限でジャンプ付き過程になる様子を調べた (Chopin et al., 2022) について発表。同様の内容で学振申請し、不採択 A.

## A Recent Development of Particle Filter

Inquiry towards a Continuous Time Limit and Scalability

Hirofumi Shiba

Graduate University for Advanced Studies, SOKENDAI, Tokyo, Japan  
shiba.hf@is.mlit.go.jp



### What Is a Particle Filter?

- Particle Filter = Sequential Monte Carlo (SMC)
- An iterative algorithm which performs filtering even in non-Gaussian and non-linear state-space models.
  - overcoming the weakness of often-standard Kalman-based filtering methods (e.g. EKF).
- A filtering distribution is approximated by a cloud of weighted samples, hence giving rise to the term "particle filter".
- The samples are propagated to approximate the next distribution - leading to efficient sequential estimation in dynamic settings



### MCMC vs. SMC

- MCMC has evolved into PDMC: How about SMC?
- PDMC (Particle Deterministic Markov Process) have shown great potential for developing scalable sampling methods, notably in creating continuous-time versions of MCMCs.
  - In 2011, a PDMC was identified through the continuous limit of the MCMC, Metropolis-Hastings algorithm.
  - Empirical evidence suggests that continuous-time MCMCs are more efficient than their discrete-time counterparts.

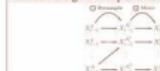


### Inquiry for Continuous-time SMC

SMC has now taken a step ahead; it is time for SMC to explore its continuous-time limit!

### A Generic Particle Filter: An Algorithmic Description

Procedure of a generic step of a Particle Filter at time  $t$



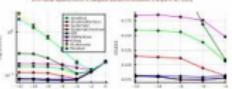
① Resampling Step  
Particles with high weights are **replicated**, and those with the lowest weights are **discarded**.

② Movement Step  
Subsequently, a **MCMC move** is executed from the resampled particles.

### A Necessary Condition: Resampling Stability

- In order to have a time-step  $\Delta \rightarrow 0$  limit, resampling events must occur with (at most linearly) decreasing frequency.
- Only the most efficient resampling schemes satisfy this property.

For more details, see the related publications in Chopin et al., 2022.



### The Continuous-time Limit Process

The continuous-time limit process, if it exists, is characterized by a Feller-Dynkin process, whose infinitesimal generator is given by:

$$\begin{aligned} Lf(x) := & \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^d b_i(x^a) \frac{\partial f}{\partial x_i^a}(x) \\ & + \sum_{a=1}^N \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} (\alpha^{a,i})_{ij} (x^a) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^a \partial x_j^a}(x) \\ & + \sum_{a \neq N} I\{X_t(x,a)\} (f(x^{a+1}) - f(x^a)) \end{aligned}$$

when the latent process  $(X_t)$  is an Ito process given by the generator:

$$Lf(x) = \sum_{a=1}^d b_a(x) \frac{\partial f}{\partial x_a}(x) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} (\alpha^{a,i})_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

### Conclusions

- SMC with efficient resampling schemes possess a continuous-time limit  $\Delta \rightarrow 0$ , which turns out to be a Feller-Dynkin process, a diffusion process with jumps, when  $(X_t)$  is a diffusion.

### Forthcoming Research

- What are the properties of this limit jump process, and how do they change with modifications to the underlying latent process?
- How does the timing of resampling affect overall efficiency? Can insights be gained from the perspective of continuous-time limits?
- Does the continuous-time limit process improve SMC efficiency when used for particle propagation?

### References

- (Chopin et al., 2022) Chopin, N., Singh, S. S., Sonn, T., and Vihola, M. A. Continuous-time resampling schemes for particle filters with weakly informative observations. *The Annals of Statistics*, 50(6):3197–3222.

### Acknowledgements

I would like to express my gratitude to my Ph.D. advisor, Prof. Kenji Kanazawa, and acknowledge the supports from the faculty at the Institute of Statistical Mathematics, making this presentation possible.

# 離散時間のエルゴード定理

## 指数エルゴード定理

Markov 連鎖  $X$  の確率核  $P : E \rightarrow E$  は次の 2 条件を満たすとする：

1. ドリフト条件：ある関数  $V : E \rightarrow [1, \infty)$  と定数  $\gamma \in (0, 1), K \geq 0$  が存在して

$$PV \leq \gamma V + K.$$

2. 局所 Dobrushin 条件：任意の  $c > 0$  に対して,

$$\sup_{(x,y) \in V^{-1}([1,c])^2} \|P(x, -) - P(y, -)\|_{\text{TV}} < 2.$$

このとき  $P$  は指数エルゴード的：ただ一つの確率分布  $\mu \in \mathcal{P}(E)$  が存在し

$$\|P^n(x, -) - \mu\|_{\text{TV}} \leq C_1 e^{-C_2 n} \left( V(x) + (\mu|V) \right), \quad x \in E, n \geq 1.$$

# 連続時間の劣指数エルゴード定理

## ステートメント

$E$  を Polish 距離空間,  $X$  を Feller-Dynkin 過程とする. 連続関数  $V : E \rightarrow [1, \infty)$  が存在して 後述の 2 条件 を満たすならば, 任意の  $T > 0$  に対して定数  $C > 0$  が存在して次が成り立つ:

$$\|P^t(x, -) - P^t(y, -)\|_{\text{TV}} \leq C \frac{V(x) + V(y)}{\lambda(t)}, \quad x, y \in E, t \geq T.$$

$$\lambda(t) := \Phi^{-1}(t), \Phi(u) := \int_1^u \frac{ds}{\phi(s)}.$$

この  $V$  は ドリフト関数ともいい, エルゴード性証明の鍵を握る.

証明法は ([Kulik, 2018](#)) が扱う skelton 連鎖

$X_n := X_{hn}$  ( $h > 0, n = 1, 2, \dots$ ) に帰着する方法と, 再起過程 (regeneration process) を用いた ([Hairer, 2021](#)) による直接的方法がある.

# 成立条件

## ▶ 条件1：ドリフト条件

ある  $K \in \mathbb{R}$  と全射かつ単調増加な狭義凹関数  
 $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  が存在して

$$V(X_t) - Kt + \int_0^t \phi(V(X_s)) ds$$

は任意の  $x \in E$  に関して  $P_x$ -優マルチングールである。

## ▶ 条件2：局所 Dobrushin 条件

任意の  $c \geq 1$  に関して下部集合  $V^{-1}([1, c])$  はコンパクトで、ある  $h > 0$  が存在して  $P^h$  は  $V^{-1}([1, c])$  上局所 Dobrushin である：

$$\sup_{(x,y) \in B_c} \|P^h(x, -) - P^h(y, -)\|_{\text{TV}} < 2,$$

$$B_c := \{(x, y) \in E^2 \mid V(x) + V(y) \leq c\}.$$

# 多項式収束域での比較

[@Hairer2021-Convergence]

ポテンシャル  $U \in C_p^\infty(\mathbb{R}^d)$  が定める **Langevin** 拡散過程

$$dX_t = -\nabla U(X_t) dt + \sqrt{2\beta^{-1}} dB_t$$

次が  $\kappa \geq 0$  について成り立つならば指数エルゴード的<sup>2</sup>:

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \left( \nabla U(x) \left| \frac{x}{|x|^{\kappa+1}} \right. \right) < 0.$$

$\kappa \in (-1, 0)$  で劣指數エルゴード的:

$$\|P_t(x, -) - \mu\|_{\text{TV}} \leq Ce^{\alpha U(x)} e^{-ct^{\frac{k}{1-k}}}$$

[@Vasdekis-Roberts2022]

リフレッシュなしの **Zig-Zag** サンプラー は目標分布の負の対数尤度  $U$  があるコンパクト集合の外で

$$|\nabla U(x)| \geq \frac{1+\nu}{|x|}, \quad \nu > 0,$$

を満たすならば多項式エルゴード的.  
 $t$ -分布もこれを満たす:

$$\pi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + |x|^2}$$

この際のレートは Langevin アルゴードム

# 最適輸送写像の見つけ方

[@Monge1781] の最適輸送問題

2つの確率分布  $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  の間の輸送  $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$T_*\mu = \nu$$

のうち、総じた輸送「コスト」

$$\min_{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |x - T(x)|^2 d\mu \right)^{1/2}$$

を最小にする  $T$  を **最適輸送** という。

この  $T$  の総輸送コストを

[@Brenier1987] の定理

最適輸送  $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  は次の2条件を満たせば、ただ一つ存在する：

- ▶  $\mu, \nu$  は2次の絶対積率を持つ
- ▶ スタートの分布  $\mu$  は絶対連続

<sup>1/2</sup>加えて、ある真凸関数  
 $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  に関する勾配として表せる：

$$T = \nabla \varphi.$$

さらにある  $\varphi$  についてこの条件を満たす輸送  $T$   $\mu = \nu$  は最適

# Wasserstein 勾配流へ

実はポテンシャル  $U$  に関する Langevin 拡散は、KL 乖離度

$$\text{KL}(\rho, e^{-V}) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) \log \frac{\rho(x)}{e^{-U(x)}} dx$$

に関する「最適輸送の繰り返し」と見れる。

→ 数学的には Wasserstein 距離空間  $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d), W_2)$  上の勾配流として定式化することができる。

## Sampling as Optimization

([Dalalyan, 2017](#)), ([Wibisono, 2018](#)), ([Korba and Salim, 2022](#)) により自覚された、サンプリング法一般を、 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  上の様々な幾何構造に関する最適化手法として捉え、これを通じて比較することができるのではないか？という考え方。

→ Markov 過程のエルゴード性に対する新たな視点になり得る。

# Sampling as Optimization

エルゴード性の様子を  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  上の幾何で調べることは、実用的な含意も多い。

[@Wibisono2018]

Langevin Monte Carlo は KL 乖離度の Wasserstein 勾配に関する最急降下法と見える。

[@Chehab+2024]

正規化定数を計算する重点サンプリング法において、最適なテンパリング道は

$$(1-\alpha)\pi_0 + \alpha\pi, \quad \alpha \in (0, 1)$$

[@Chopin+2023]

Tempering SMC は、逆向き KL 乖離度に対する鏡像降下法と見える。

の  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$  のスケジュールを、Wasserstein 距離について等幅になるようにしたものである。

全変動距離は一番強い位相でカップリングとの相性が良い。しかし Wasserstein 距離を知りたい他のカップリング距離に関する

# 興味3分野

	学んだ順番	研究に取り掛かる順番 (予定)
ノンパラメトリクス	Section ??	2
Monte Carlo 法	Section ??	1
Sampling as Optimization	Section ??	3

- ▶ 現状：1つ目に取り掛かり、2つ目を勉強中。
- ▶ 1つ目の研究を始める初手として、パッケージ `PDMPFlux.jl` を作成。
- ▶ できれば学生のうちに3つ目のテーマの勉強までやりたい。

[README](#) [MIT license](#)



## PDMPFlux

Documentation	Workflows	Code Coverage	Quality Assurance
<a href="#">docs stable</a> <a href="#">docs dev</a>	CI passing	codecov 54%	tested with Aqua.jl

# Zig-Zag 過程のシミュレーション

## PDMP のシミュレーション

1. 方向転換イベントがいつ起こるかをシミュレート
2. イベント発生地点の列を出力<sup>3</sup>
3. イベント間は決定論的に補間

このため物理学では Event-chain Monte Carlo (Bernard et al., 2009) と呼ばれる。

## 難点

方向転換イベントのシミュレーション = 非一様な Poisson 過程の到着時刻のシミュレーション。  
サンプラーのレート関数

$$\lambda(x, \theta) = (\theta | \nabla U(x))_+, \quad i \in [d],$$

から次の生存関数を持つ乱数  $T_{n+1}$  を発生させる必要がある：

$$P[T_{n+1} \geq t] = \exp \left( - \int_0^t \lambda(\phi_s(Z_{S_n}))_+ ds \right)$$

右辺の逆関数が必要だが、積分を数値誤差なく実行する

# 剪定の自動化 (Andral and Kamatani, 2024)

サンプラーの強度関数

[Poisson Thinning  
@Lewis-Shedler1979]

Poisson 過程に対する棄却法.

$$m(t) \leq M(t), \quad t \geq 0,$$

を満たす 2 つの強度関数  $m, M$  に対して,  $M$  から得られた Poisson イベントを確率

$$\frac{m(t)}{M(t)}$$

で採択したものは  $m$  から得られた Poisson イベントと同分布である.

$$m(t) := \int_0^t \lambda(\phi_s(Z_{S_n})) ds$$

の上界  $M(t)$  を, 前回のイベント位置  $Z_{S_n}$  に応じて自動的に見つける戦略が必要.

**[@Andral-Kamatani2024] のアルゴリズム**

1.  $m$  を自動微分し,  $[0, t_{\max}]$  のグリッド上で勾配を計算
2. 各グリッド上では両端点と, 両端点の接線の交点との 3 点でバウンド
3.  $t_{\max} \rightarrow 0$  の極限で正確な上界における  $m$  を

## PDMPFlux.jl パッケージ

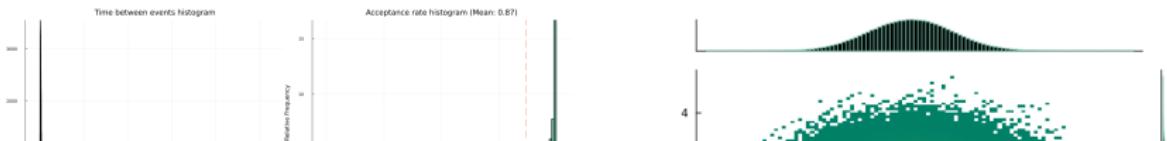
```
using PDMPFlux
```

```
function U_Gauss(x::Vector) # ポテンシャルを与えるだけで良い
    return sum(x.^2) / 2
end

dim = 10 # 次元は与える必要あり
N_sk, N, xinit, vinit = 100_000, 100_000, zeros(dim), ones(dim)

sampler = ZigZagAD(dim, U_Gauss) # サンプラーのインスタンス化
output = sample_skeleton(sampler, N_sk, xinit, vinit) # PDMP
samples = sample_from_skeleton(sampler, N, output) # サンプルの生成

diagnostic(output) # サンプラーの診断
jointplot(samples) # サンプルの可視化
```



# 現状の PDMC アルゴリズム

基本的には拡張された空間上で動き、新たな変数  $\theta$  を **速度**や **momentum** という：

$$(x, \theta) \in \mathbb{R}^d \times \Theta, \quad \Theta \subset \mathbb{R}^d.$$

[Bouncy Particle Sampler  
@Bouchard-Cote+2018-  
BPS]

$\Theta = S^{d-1}$  と単位球面上に取る。

- ▶ イベントが起こったら、速度をサンプリングし直す：

$$\Theta_{S_{n+1}} \sim U(S^{d-1}).$$

- ▶ エルゴード性を保つため、初期値を  $x_0$  とする。

[Zig-Zag Sampler  
@Bierkens+2019]

$\Theta = \{\pm 1\}^d$  と「向きの空間」上に取る。

- ▶ イベントが起こったら、イベントを起こした座標の向きを反転させる：

$$\Theta_{S_{n+1}}^i \leftarrow (-1) \times \Theta_{S_n}^i.$$

- ▶ 移動方向を  $2^d$  通りに

# PDMC アルゴリズムへの基礎的貢献

## PDMC の悲願

$U$  の構造のみを尊重したアルゴリズムを作る

＝ 詳細釣り合い条件、歪釣り合い条件などの人工的な対称性を導入しない。

### ▶ すると速くなるはず

対称な MCMC で最速は HMC. 本質的に非可逆であり、遠くまで行くメカニズムを持つが、最後に採択-棄却のステップが必要で、backtracking を導入しがち.

### ▶ 棄却をしない枠組みはどこまで出来るか？

PDMC も状態空間を拡張する点は HMC に似ているが、Poisson 過程をシミュレーションするために採択-棄却のステップを使うことで、人工的な対称性の導入を回避している。

いわばスプーンでかき混ぜるギミックの再現。しかしこの枠組みでどこまで人工的な対称性を排除したダイナミクスを作れるかは不明。

# 離散空間上の MCMC

PDMC のパッケージもあるので、応用していきたい。

Zig-Zag within Gibbs  
[@Sachs+2023]

モデルパラメータ  $\beta \in \mathbb{R}^p$  に加えて離散パラメータ  $\gamma \in \Gamma$  が存在する場合、

$$\beta|\gamma, \quad \gamma|\beta$$

の前者を PDMP でサンプリングし、後者の離散更新はある強度  $\eta > 0$  を持った Poisson 点過程に従って混ぜる。

クラスタリングの問題では

適応的確率近傍 + informed MCMC [@Liang+2023]

回帰における変数選択の場合、潜在指示変数とすれば

$$\Gamma := 2^p = \{0, 1\}^p$$

上のサンプリングを考えることになる。

- ▶ 適応的かつランダム的に「近傍」を決定
  - ▶ 近傍の中から採択率の高いものを提案
- の 2 段階 MH 法が SOTA.

## ノンパラメトリクスへ

### ▶ より現実的な尤度へ

複雑な尤度に対するサンプラーを考えるのが一番面白い。階層化も面白いが、Gauss 過程やカーネル法などのノンパラメトリクスは特に面白いモデリングが可能。計算の部分で貢献できることがあるのでは？

### ▶ ベイズ逆問題

OT を逆に解く問題も (Stuart and Wolfram, 2020), (Chiu et al., 2022) で出てきた。

$$\Phi : T \mapsto \{(x_i, T(x_i))\}_{i=1}^n$$

逆像を推定する、というのはフローマッチングと同じ定式化になる (Lipman et al., 2023), (Tong et al., 2024)。その学習は  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)^{[0,1]}$  上の Dirichlet 積分の最適化と等価になる (Isobe et al., 2024)。サンプラーにより  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  上の最適化をする方法もある？

確率過程 + 関数解析が自分の強みと好みを最も活かせる？