2022 年度数学講究 XB
（担当：小池祐太先生）

05-210520 司馬博文

2022 年 7 月 16 日

(1) M の累積分布関数 $F(x) := P[M \leqslant x]$ が絶対連続であることを示せば良い．いま Σ は正定値行列としたから，$\det\Sigma > 0$ より，$\zeta \sim N_d(0,\Sigma)$ の確率密度関数は

$$\phi(x;0,\Sigma) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}(\det\Sigma)^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^\top\Sigma^{-1}x\right)$$

と表せる．このとき，M の累積分布関数は，

$$F(x) = P[M \leqslant x] = P\left[\forall_{j\in[d]}\ \frac{\zeta_j}{\sigma_j} \leqslant x\right] = \int_{(-\infty,x]^d}\phi(\xi;0,\Sigma')d\xi$$

と定積分の形で表せる．ただし，$\Sigma' := A^{-1}\Sigma A^{-1}$ $(A := \mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_d))$ とした．定積分 $\Psi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,1]; E \mapsto \int_E \phi(\xi)d\xi$ は集合関数として絶対連続であるから，$F(x) := \Psi((-\infty,x]^d)$ も絶対連続である．[†1]

(2) $\left\{M > \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{d}\right)\right\} \subset \bigcup_{i=1}^d \left\{\frac{\zeta_i}{\sigma_i} > \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{d}\right)\right\}$ より，

$$P\left[M > \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{d}\right)\right] \leqslant d\cdot P\left[\frac{\zeta_i}{\sigma_i} > \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{d}\right)\right] \leqslant \alpha.$$

(3) Σ が対角行列のとき，$\frac{\zeta_i}{\sigma_i}$ は互いに独立である．よって，

$$P[M > C_\alpha] = 1 - \prod_{i=1}^d P\left[\frac{\zeta_i}{\sigma_i} \leqslant c_\alpha\right] = 1 - (\Phi(c_\alpha))^d.$$

これが α に等しいとき，$c_\alpha = \Phi^{-1}((1-\alpha)^{1/d})$ が成り立つ．

---

†1 実際，任意の $x < y$ について，

$$E_i := \left\{(x_1,\cdots,x_d)^\top \in \mathbb{R}^d \mid x_i \in [x,y],\ \forall_{j\neq i}\ x_j \in (-\infty,y]\right\}$$

とすると，$(-\infty,y]^d \backslash (-\infty,x]^d \subset \cup_{i=1}^d E_i$ であるから，

$$|F(x)-F(y)| = \Psi((-\infty,y]^d\backslash(-\infty,x]^d) \leqslant d\Phi(y)^{d-1}|\Phi(x)-\Phi(y)| \leqslant dM|x-y| \quad (\exists_{M\in\mathbb{R}})$$

より Lipschitz 連続である．なお，M の存在は，$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp -\frac{1}{2}x^2$ が有界であることと平均値の定理による．よって，絶対連続でもある．