入学試験 (1/19/2021 実施)

総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻博士課程（5 年一貫制）

問題と解答

2022 年 12 月 18 日

記法についての注意

次の記法は以後断りなく用いる．

(1) $n = 1, 2, \cdots$ について，

$$n := \{0, 1, 2, \cdots, n-1\},\ [n] := \{1, 2, \cdots, n\}.\ \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\},\ \mathbb{N}^+ := \mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, 3, \cdots\}.$$

(2) 同様にして，$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$，$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$，$\overline{\mathbb{R}_+} := [0, \infty]$．

(3) $M_{mn}(\mathbb{R})$ で (m, n)-実正方行列の全体，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) := M_{nn}(\mathbb{R})$ で可逆な n 次正方行列の全体を表す．

(4) $I_d \in M_d(\mathbb{R})$ を d 次元単位行列，$O_d \in M_d(\mathbb{R})$ を d 次元零行列とする．

(5) $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{C}$ で，行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ の固有値全体の集合を表す．

(6) $f(x) = O(x^n)\ (x \to 0)$ で $\limsup_{x \to 0} \left| \frac{f(x)}{x^n} \right| < \infty$ を表す．

(7) $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を l，距離空間 S 上の Borel σ-代数を $\mathcal{B}(S)$ で表す．

(8) 1_A で集合 A の指示関数 $1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$ を表す．

(9) 確率変数 X, Y に対して，期待値を $E[X]$，分散を $\mathrm{Var}[X]$，共分散を $\mathrm{Cov}[X, Y]$ で表す．

(10) $\mathrm{U}(S)$ で集合 S 上の一様分布，$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ で平均 μ 分散 σ^2 の正規分布を表す．

(11) $\mathrm{Exp}\ (\gamma)\ (\gamma > 0)$ で指数 γ の指数分布を表す．確率密度関数は $f(x) = \gamma e^{-\gamma x} 1_{\{x>0\}}$ である．

問題文の表現は筆者の都合で一部変えています．過去に実施された入学試験問題は統計数理研究所 HP から見れます．

第 1 問

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

(2) 次の行列 $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ が $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ に対して $B = S^{-1}AS$ を満たすとき，$S = (s_{ij})_{i,j \in [3]}$ の必要条件を求めよ：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3) $a, b, c \sim U([0, 1])$ を独立確率変数とする．$ax^2 + bx + c = 0$ が実数解を持つ確率を求めよ．

[解答例].

(1) Taylor の定理より，$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + O(x^4)\ (x \to 0)$．よって，

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2} + O(x^2)\right) = \frac{1}{2}.$$

(2) 同値な等式 $SB = AS$ は成分毎に表すと

$$\begin{bmatrix} 0 & s_{12} & 2s_{13} \\ 0 & s_{22} & 2s_{23} \\ 0 & s_{32} & 2s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s_{31} & 2s_{32} & 2s_{33} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ 2s_{31} & 2s_{32} & 2s_{33} \end{bmatrix}.$$

これを解いて，

$$s_{12} = s_{21} = s_{23} = s_{31} = s_{32} = 0,\ s_{13} = s_{33}.$$

換言すれば，

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (a,b,c \in \mathbb{R})$$

と表せることが必要．

(3) $ax^2 + bx + c = 0$ が実解を持つことは，$a = 0 \wedge (b \neq 0 \vee c = 0)$ または $a \neq 0 \wedge (b^2 - 4ac \geqslant 0)$ に同値．$U([0,1]^3)$ は $[0,1]^3$ 上の Lebesgue 測度に等しいから，集合

$$\left\{(a,b,c) \in [0,1]^3 \mid a = 0 \wedge (b \neq 0 \vee c = 0)\right\} \cup \left\{(a,b,c) \in [0,1]^3 \mid a \neq 0 \wedge (b^2 - 4ac \geqslant 0)\right\} =: A \cup B$$

の体積を求めれば良い．前者の集合 $A = \left\{(a,b,c)^3 \in [0,1]^3 \mid a = 0 \wedge (b \neq 0 \vee c = 0)\right\}$ は体積 0 である．一方で，任意に固定した $a \in [0,1]$ に対して，

$$l\left(\left\{(b,c) \in [0,1]^2 \mid 4ac \leqslant b^2\right\}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{4a}\displaystyle\int_0^{2\sqrt{a}} b^2 db + (1 - 2\sqrt{a}) & \dfrac{1}{4a} \geqslant 1, \\ \dfrac{1}{4a}\displaystyle\int_0^1 b^2 db & \dfrac{1}{4a} \leqslant 1. \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{aligned} l(B) &= \int_0^{1/4} \left(1 - \frac{4}{3}\sqrt{a}\right) da + \int_{1/4}^1 \frac{1}{12a} da \\ &= \left[a - \frac{8}{9}a\right]_0^{1/4} + \frac{1}{12}\left[\log a\right]_{1/4}^1 = \frac{1}{36}(5 + 6\log 2) \approx 25\% \end{aligned}$$

■

第 2 問

$f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ に対して，

$$F(s) := \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad (s > 0)$$

を Laplace 変換といい，$\mathcal{L}[f] := F$ とも表す．

(1) $a \geqslant 0$ について，$\mathcal{L}[e^{-at}]$ を求めよ．

(2) $\forall_{a\geqslant 0}\ \forall_{s>0}\ \mathcal{L}[e^{-at} f(t)](s) = F(s+a)$ を示せ．

(3) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{s>0}\ \mathcal{L}[t^n](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ を示せ．

[解答例]．

(1) 計算過程は次のようになる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-at}](s) &= \int_0^\infty e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(a+s)t} dt \\ &= \left[-\frac{e^{-(a+s)t}}{a+s}\right]_0^\infty = \frac{1}{a+s}. \end{aligned}$$

(2) 任意の $a>0, s>0$ について，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-at}f(t)](s) &= \int_0^\infty e^{-at}f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-(a+s)t}dt = F(s+a) = \mathcal{L}[f](s+a).\end{aligned}$$

(3) $n=0$ のとき，

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}.$$

$n>0$ のとき，

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \int_0^\infty t^n e^{-st}dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}t^n\right]_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt = \frac{n}{s}\mathcal{L}[t^{n-1}](s).$$

であるが，帰納法の仮定より右辺は $\dfrac{n}{s}\dfrac{(n-1)!}{s^n} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ に等しい．

■

第 3 問

$X_1,\cdots,X_n \sim N(\mu,\sigma^2)$ を独立同分布列とする．$x := (X_1,\cdots,X_n)^\top$ とする．

(1) $B \in M_{mn}(\mathbb{R}), A \in M_n(\mathbb{R})$ を対称行列とする．$BA = O$ のとき，2 つの確率変数 Bx と $x^\top Ax$ とは独立になることを示せ．

(2) 標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ と標本分散 $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - X)^2$ が独立であることを示せ．

[解答例].

(1)

■

要諦. (1) は Fisher-Cochran の定理を既知とすればすぐに従う．この独立な標本の標本平均と標本分散が独立であるという事実は，標本が正規分布に従っているという事実を特徴付ける (Kawata,Sakamoto 1949).

第 4 問

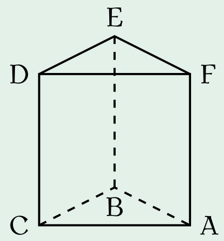
(1) $I_d - R \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ を満たす $R, L \in M_d(\mathbb{R})$ を用いて，

$$M = \begin{pmatrix} I_d & O_d \\ L & R \end{pmatrix} \quad L,R \in M_d(\mathbb{R})$$

と表せるとする．このとき，次を示せ：

$$\forall_{n\in\mathbb{N}^+} \quad M^n = \begin{pmatrix} I_d & O_d \\ (I_d - R^n)(I_d - R)^{-1}L & R^n \end{pmatrix}.$$

(2) 次図の三角柱の頂点を移動する一匹の蟻を考える．頂点 DEF のいずれかから等確率でスタートし，三角柱の頂点を移動し，頂点 A,B,C のいずれかに達したら，そこから他の頂点には動かないものとする．蟻が頂点 D にいるときに，次の時刻に頂点 A,B,C,D,E,F に移動する確率はそれぞれ $\left(\frac{2}{5},0,0,\frac{2}{5},0,\frac{1}{5}\right)$，蟻が頂点 E にいるときに，次の時刻に頂点 A,B,C,D,E,F に移動する確率はそれぞれ $\left(0,\frac{2}{5},0,0,\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$，蟻が頂点 F にいるときに，次の時刻に頂点 A,B,C,D,E,F に移動する確率はそれぞれ $\left(0,0,\frac{3}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},0\right)$ であるとする．



移動開始からの経過時刻を n として，$n \to \infty$ の極限において，頂点 A にいる蟻が頂点 D からスタートした確率を求めよ．必要ならば，次を使って良い：

実対称行列に対するゲルシュゴリンの定理

n 次実対称行列 $M = (M_{ij})_{i,j \in [n]}$ の i 行目の対角要素 M_{ii} 以外の絶対値の和を M_i とする．

$$M_i := \sum_{k=1, k \neq i}^{n} |M_{ik}|, \quad D_i := \{z \in \mathbb{R} \mid |z - M_{ii}| \leqslant M_i\}$$

に対して，M の任意の固有値は D_i $(i = 1, \cdots, n)$ のいずれかの内に存在する．

[解答例].

(1)

■