総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
博士課程（５年一貫制）入学試験 (1/21/2020 実施)
問題と解答

あの *

2022 年 11 月 5 日

記法についての注意

次の記法は以後断りなく用いる．

(1) $n = 1, 2, \cdots$ について，$n := \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$，$[n] := \{1, 2, \cdots, n\}$．$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$，$\mathbb{N}^+ = \mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, 3, \cdots\}$．
(2) 同様にして，$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$，$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$，$\overline{\mathbb{R}_+} := [0, \infty]$．
(3) $M_{mn}(\mathbb{R})$ で (m, n) の実正方行列の全体，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ でそのうち可逆なものの全体を表す．
(4) $I_d \in M_d(\mathbb{R})$ を単位行列，$O_d \in M_d(\mathbb{R})$ を零行列とする．
(5) $f(x) = O(x^n)$ $(x \to 0)$ で $\limsup_{x \to 0} \left|\frac{f(x)}{x^n}\right| < \infty$ を表す．
(6) $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を m，距離空間 S 上の Borel σ-代数を $\mathcal{B}(S)$ で表す．
(7) 1_A で集合 A の指示関数を表す．
(8) $U(S)$ で集合 S 上の一様分布，$N(\mu, \sigma^2)$ で平均 μ 分散 σ^2 の正規分布を表す．
(9) Exp (γ) $(\gamma > 0)$ で指数分布 $f(x) = \gamma e^{-\gamma x} 1_{\{x>0\}}$ を表す．

問題文の表現は筆者の都合で一部変えています．過去 3 年分の入学試験問題はこちらから見れます．

第 1 問

(1) 次の行列の逆行列を求めよ：
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
(2) 確率変数列 $\{X_n\} \subset L^2(\Omega)$ が $\lim_{n\to\infty} E[X_n^2] = 0$ を満たすならば $\forall_{\epsilon>0}\ P[|X_n| > \epsilon] = 0$ が成り立つことを示す．
(3) 確率変数列 $\{X_n\} \subset L^2(\Omega)$ であって，$\forall_{\epsilon>0}\ P[|X_n| > \epsilon] = 0$ であるが $\lim_{n\to\infty} E[X_n^2] \neq 0$ であるものの例を挙げよ．

[解答例]．

(1) 略．
(2) 任意の $\epsilon > 0$ を取る．$\epsilon < |X_n|$ ならば $\epsilon^2 < |X_n|^2$ であるから，事象集合について
$$\{\omega \in \Omega \mid \epsilon < |X_n(\omega)|\} \subset \left\{\omega \in \Omega \mid \epsilon^2 < |X_n^2(\omega)|\right\}$$
が成り立つ．よって，
$$(0 \leqslant) P[\epsilon < |X_n|] \leqslant P[\epsilon^2 < |X_n|^2] \leqslant \frac{E[|X_n|^2]}{\epsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

* e-mail address : anomath57@gmail.com
URL : https://anomath.com/

(3) 確率空間 $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$ 上の実確率変数 $Y_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$Y_n := \sqrt{n}1_{[0,1/n]} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

と定める．すると，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ より，$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N>0}\ \forall_{n\geqslant N}\ \frac{1}{n} < \epsilon$．よって，$\forall_{n\geqslant N}\ P[|Y_n| > \epsilon] = 0$ より当然 $\lim_{n\to\infty} P[|Y_n| > \epsilon] = 0$．一方で，$\forall_{n\in\mathbb{N}^+}\ E[Y_n^2] = 1$ である．

■

第 2 問

次の定積分を求めよ：

(1)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1}.$$

(2)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 1}.$$

[解答例].

(1) $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ によって変数変換を行うと，次のように計算できる：

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} &= \int_0^1 \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \\
&= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{4}{3} \frac{1}{\tan^2\theta + 1} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} d\theta = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

(2) 被積分関数の部分分数分解

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2 - x + 1}\right)$$

を考えることにより，次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 1} &= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2 - x + 1}\right) dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(x^2 - x + 1)'}{x^2 - x + 1} dx + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} \\
&= \frac{\log 2}{3} + \frac{4}{9\sqrt{3}}\pi.
\end{aligned}$$

■

第 3 問

この問題で登場する行列は全て $n \times n$ の可逆行列であるとする．ブロック行列

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_{11}, B_{21}, B_{22} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

を考える．

(1) 次を満たす行列 $Q_1 \in M_n(\mathbb{R})$ を $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ とその逆行列を用いて表せ：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & Q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & Q_2 \\ O & I_n \end{pmatrix}.$$

(2) 次を満たす行列 $Q_3 \in M_n(\mathbb{R})$ を B_{11}, B_{21}, B_{22} とその逆行列を用いて表せ：

$$\begin{pmatrix} B_{11} & O \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11}^{-1} & O \\ Q_3 & B_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

(3) 次の行列の成分 $A^{11}, A^{12}, A^{21}, A^{22}$ を $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ とその逆行列を用いて表せ：

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix}$$

(4) 次の等式を示せ：

$$(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} = A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}.$$

[解答例].

(1) 右辺を計算すると $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{11}Q_2 \\ A_{21} & A_{21}Q_2 + Q_1 \end{pmatrix}$ となるから，

$$\begin{cases} A_{12} = A_{11}Q_2 & \Leftrightarrow \quad Q_2 = A_{11}^{-1}A_{12} \\ A_{22} = A_{21}Q_2 + Q_1 \end{cases}$$

が必要．よって，$Q_1 = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$.

(2)

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ B_{21}B_{11}^{-1} + B_{22}Q_3 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11}^{-1} & O \\ Q_3 & B_{22}^{-1} \end{pmatrix} = I_{2n}$$

が必要．よって，$Q_3 = -B_{22}^{-1}B_{21}B_{11}^{-1}$.

(3) まず，$\begin{pmatrix} I_n & Q_2 \\ O & I_n \end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix} I_n & -Q_2 \\ O & I_n \end{pmatrix}$ である．実際，

$$\begin{pmatrix} I_n & Q_2 \\ O & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -Q_2 \\ O & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}, \quad \begin{pmatrix} I_n & -Q_2 \\ O & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & Q_2 \\ O & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} I_n & Q_2 \\ O & I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & Q_1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} I_n & -Q_2 \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ -Q_1^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & Q_1^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_n & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ -(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ -(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(4) A^{-1} をもう一通りで表す．元の行列の UL 分解を考えると，

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & R_2 \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_1 & O \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2A_{21} & R_2A_{22} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

より，

$$R_2 = A_{12}A_{22}^{-1}, \quad R_1 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}.$$

続いて，この L 部分の逆行列は

$$\begin{pmatrix} R_1^{-1} & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21}R_1^{-1} & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

と表せるから，

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{pmatrix} I & R_2 \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_1 & O \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\right)^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} R_1^{-1} & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21}R_1^{-1} & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -R_2 \\ O & I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} R_1^{-1} & -R_1^{-1}R_2 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}R_1^{-1} & A_{22}^{-1}A_{21}R_1^{-1}R_2 + A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & -(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{12}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

以上より，A^{-1} の成分 A^{22} を比べることで，

$$(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} = A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}$$

■

第 4 問

X_1, X_2, X_3 を独立同分布確率変数とし，その分布関数を F で表す．F は狭義単調増加かつ連続で，従って逆関数 F^{-1} を持つとする．E_1, E_2, E_3 を標準指数分布 Exp (1) に従う独立同分布確率変数とする．それぞれ 3 つの中で，昇順の並び替えを $X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant X_{(3)}, E_{(1)} \leqslant E_{(2)} \leqslant E_{(3)}$ とする．

(1) $(F^{-1}(\mathrm{e}^{-E_{(1)}}), F^{-1}(\mathrm{e}^{-E_{(2)}}), F^{-1}(\mathrm{e}^{-E_{(3)}}))$ と $(X_{(3)}, X_{(2)}, X_{(1)})$ は同分布であることを示せ．

(2)

[解答例].

(1) 一般に，$E_1 \sim \mathrm{Exp}\,(1)$ のとき，$\mathrm{e}^{-E_1} \sim U([0,1])$ であるから，

$$P[F^{-1}(\mathrm{e}^{-E_1}) \leqslant a] = P[\mathrm{e}^{-E_1} \leqslant F(a)] = F(a)$$

より，$F^{-1}(\mathrm{e}^{-E_1})$ は X_1 に分布が等しい．後は順序を考えると，$\mathrm{e}^{-E_{(1)}} \geqslant \mathrm{e}^{-E_{(2)}} \geqslant \mathrm{e}^{-E_{(3)}}$ で，F^{-1} も順序を保存するから，分布は X_1, X_2, X_3 を降順に並び替えた確率ベクトル，すなわち $(X_{(3)}, X_{(2)}, X_{(1)})$ に等しい．

(2)

■