問題 1.1．

(1) 初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \\ u = g, \quad u_t = 0 & \text{on } \mathbb{R}\times\{0\}, \end{cases} \qquad g(x) := 1_{(-\pi/2,\pi/2)}\cos x \in C_c(\mathbb{R}).$$

の解 $u(x,t)$ を求めよ．

(2) $A,B,C \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ が定める PDE

$$Au_{xx} + 2Bu_{xt} + Cu_{tt} = 0$$

について，次は同値である：

(a) ある実数 $c_1 < c_2$ が存在して，任意の関数 $f,g \in C^2(\mathbb{R})$ に対して，

$$u(x,t) := f(x - c_1 t) + g(x - c_2 t)$$

は $Au_{xx} + 2Bu_{xt} + Cu_{tt} = 0$ の解になる．

(b) 方程式は双曲型である：$B^2 - AC > 0$ である．

[解].

(1) $g$ が偶関数，$g'$ が奇関数であることに注意すると，

$$u(x,t) := \frac{1}{2}\Big(g(x+ct) + g(ct-x)\Big)$$

は解を与えている．

(2) (1)⇒(2)　必要条件をまず考えると，各微分を計算することより，任意の $f,g \in C^2(\mathbb{R})$ に対して

$$Au_{xx} + 2B_{xt} + Cu_{tt} = (A - 2Bc_1 + Cc_1^2)f''(x - c_1 t) + (A - 2Bc_2 + Cc_2^2)g''(x - c_2 t) = 0$$

が必要である．このためには，例えば $f(x) = x^3 1_{(0,\infty)}, g(x) = x^3 1_{(-\infty,0)} \in C^2(\mathbb{R})$ を考えると，2 階微分はそれぞれ $(0,\infty),(-\infty,0)$ に台と持つから，

$$\begin{cases} A - 2Bc_1 + Cc_1^2 = 0 \\ A - 2Bc_2 + Cc_2^2 = 0 \end{cases}$$

が必要であるが，これは $B^2 - AC > 0$ と同値．

(2)⇒(1)　実際にこれで十分であることは，上の連立方程式を満たす $c_1 < c_2$ を取れば，任意の $f,g \in C^2(\mathbb{R})$ に対して構成した $u$ は常に方程式を満たすようになる．

■

問題 1.2．初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t) & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \\ u = u_t = 0 & \text{on } \mathbb{R}\times\{0\}. \end{cases} \qquad f(x,t) = F'''(x)t \ (F \in C^3(\mathbb{R})), c > 0$$

の解 $u(x,t)$ を求めよ．

[解].

$$v(x,t) := u(x,t/c) + F'(x)\frac{t}{c^3}$$

とおくと，これは

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \\ v = 0 \quad v_t = \dfrac{1}{c^3}F'(x) & \text{on } \mathbb{R}\times\{0\}. \end{cases}$$

を満たす．$F' \in C^2(\mathbb{R})$ に注意すれば，これは d'Alembert の公式を適用することができる．実際，

$$v_{xx} = u_{xx}(x,t/c) + F'''(x)\frac{t}{c^3}, \quad v_{tt} = c^{-2}u_{tt}(x,t/c)$$

であり，2つは

$$c^2u_{xx}(x,t/c)+F'''(x)\frac{t}{c}=c^2u_{xx}(x,t/c)+f(x,t/c)=u_{tt}(x,t/c)$$

と，確かに等号で結ばれている．よって，d'Alembert の公式より，

$$v(x,t)=\frac{1}{2c^3}\int_{x-t}^{x+t}F'(y)dy.$$

$$\therefore \qquad u(x,t)=\frac{1}{2c^3}\int_{x-tc}^{x+tc}F'(y)dy-F'(x)\frac{t}{c^2}.$$

■

**問題 1.3**．次のそれぞれについて，$E'=0$ in $\mathbb{R}^+$ を示せ．

(1) 境界値問題

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}+f(u)=0 & \text{in } \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ \\ u(0,t)=u_x(0,t)=0 & t\in\mathbb{R}^+. \end{cases}$$

を満たす古典解 $u\in C_c^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)$ について，

$$E(t):=\frac{1}{2}\int_0^\infty(u_t^2+c^2u_x^2+2F(u))dx, \qquad F(x):=\int_0^x f(y)dy$$

とする．

(2) 境界値問題

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0 & \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+, \\ u_x(0,t)+Au(0,t)=0 & t>0. \end{cases} \qquad c>0, A\in\mathbb{R}$$

を満たす古典解 $u\in C_c^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)$ について，

$$E(t):=\frac{1}{2}\int_0^\infty(u_t^2+c^2u_x^2)dx+\frac{1}{2}au(0,t)^2, \qquad a:=-c^2A$$

と定める．

[解].

(1) 無限遠での減衰条件と $x=0$ での境界条件から $u_x(\infty,t)u_t(\infty,t)-u_x(0,t)u_t(0,t)=0$ で，

$$\int_0^\infty u_xu_{tx}dx=\Big[u_xu_t\Big]_0^\infty-\int_0^\infty u_{xx}u_tdx=-\int_0^\infty u_{xx}u_tdx.$$

だから，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t)&=\int_0^\infty(u_tu_{tt}+c^2u_xu_{tx}+f(u)u_t)dx\\&=\int_0^\infty u_t(u_{tt}-c^2u_{xx}+f(u))dx=0.\end{aligned}$$

(2)

$$\int_0^\infty u_xu_{tx}dx=\Big[u_xu_t\Big]_0^\infty-\int_0^\infty u_{xx}u_tdx=-u_x(0,t)u_t(0,t)-\int_0^\infty u_{xx}u_tdx$$

で，境界条件より $-u_x(0,t)=Au(0,t)$ であるから，

$$\begin{aligned}\frac{dE(t)}{dt}&=\int_0^\infty(u_tu_{tt}+c^2u_xu_{tx})dx+au(0,t)u_t(0,t)\\&=\int_0^\infty u_t(u_{tt}-c^2u_{xx})dx+Au(0,t)u_t(0,t)+au(0,t)u_t(0,t)=0.\end{aligned}$$

■

**問題 1.4 .**

$$\begin{cases} u_{tt} = \triangle u & \text{in } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \\ u(x,y,0) = g(x,y) & \text{in } \mathbb{R}^2, \\ u_t(x,y,0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2. \end{cases} \qquad g(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}.$$

の解 $u(x,y,t)$ の $\{0\}\times\{0\}\times\mathbb{R}$ 上での具体的な表示を求めよ．

**[解].** ■

**考察.** まず，$\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+$ 上での解 $u$ を考えたのちに，これを偶関数に延長 $u(x,t) := u(x,-t)$ $(t<0)$ すれば，元の方程式を満たす．$\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+$ 上での解は，Poisson の公式より，

$$\begin{aligned} u(z,t) &= \frac{1}{2}⨍_{B(z,t)} \frac{tg(\zeta)+tDg(\zeta)\cdot(\zeta-z)}{\sqrt{t^2-|\zeta-z|^2}}d\zeta \\ &= \frac{1}{2}\frac{t}{|B(z,t)|}\int_{B(z,t)} \frac{1}{\sqrt{t^2-|\zeta-z|^2}}\frac{1-|\zeta|^2}{(1+|\zeta|^2)^2}d\zeta, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

さらに $z=0$ とすれば，被積分関数は動径 $|\zeta|$ のみに依存することになる．

**問題 1.5 .** 次の境界値問題の十分速く減衰する古典解 $u$ について，$E'=0$ in $\mathbb{R}^+$ を示せ．

(1)

$$\begin{cases} u_{tt}+Ku_{xxxx}=0, & x,t>0, \\ u(0,t)=u_t(0,t)=0, & t>0. \end{cases} \qquad K>0,$$

に対して，

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^\infty (u_t^2+Ku_{xx}^2)dx.$$

(2)

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0, & \text{in } (0,L)\times(0,\infty), \\ u_x(0,t)+Au(0,t)=0, & t>0, \\ u_x(L,t)+Bu(L,t)=0, & t>0. \end{cases} \qquad c>0,\ a,b\in\mathbb{R},$$

に対して，

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L (u_t^2+c^2u_x^2)dx + \frac{1}{2}au(0,t)^2 + \frac{1}{2}bu(L,t)^2, \qquad a,b\in\mathbb{R}.$$

**[解].**

(1) $u$ とその 4 階までの微分が十分速く減衰するとき，微分と積分の記号を交換することで

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{2}\int_0^\infty (2u_tu_{tt}+2Ku_{xx}u_{xxt})dx = \int_0^\infty (u_tu_{tt}+Ku_{xx}u_{txx})dx$$

と計算できる．$u$ は古典解と仮定しており，十分滑らかだとするから，$u_{xxt}=u_{txx}$ が成り立つことを用いた．するとこの最右辺の第二項は，部分積分により，

$$\int_0^\infty u_{xx}u_{txx}dx = \Big[u_{xx}u_{tx}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty u_{xxx}u_{tx}dx = -\int_0^\infty u_{xxx}u_{tx}dx$$

と計算できる．なお，減衰条件より $u_{xx}(\infty,t)u_{tx}(\infty,t)=0$ で，さらに境界条件 $u_x(0,t)=0$ から $u_{xt}(0,t)=0$ より，$u_{xx}(0,t)u_{tx}(0,t)=0$ であることを用いた．よって，再び部分積分を用いれば，

$$-\int_0^\infty u_{xxx}u_{tx}dx = -\Big[u_{xxx}u_t\Big]_0^\infty + \int_0^\infty u_{xxxx}u_tdx = \int_0^\infty u_{xxxx}u_tdx$$

を得る．ただし，$u(0,t)=0$ より $u_t(0,t)=0$ が従うことを用いた．以上より，

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^\infty u_t(u_{tt}+Ku_{xxxx})dx = 0.$$

(2) $a=-A, b=B$ と定めれば良い．まず，(1) と同様にして微分は

$$\frac{dE(t)}{dt}=\int_0^L (u_t u_{tt}+c^2 u_x u_{xt})dx + au(0,t)u_t(0,t)+bu(L,t)u_t(L,t)$$

と計算できる．$u_{xt}=u_{tx}$ に注意すれば，第一項は部分積分より，

$$\begin{aligned}\int_0^L u_x u_{xt} dx &= \Big[u_x u_t\Big]_0^L - \int_0^L u_{xx} u_t dx \\ &= u_x(L,t)u_t(L,t)-u_x(0,t)u_t(0,t)-\int_0^L u_{xx}u_t dx \\ &= -Bu(L,t)u_t(L,t)+Au(0,t)u_t(0,t)-\int_0^L u_{xx}u_t dx.\end{aligned}$$

ただし，最後の等号では，2 つの境界条件を用いた．以上の考察より，

$$\begin{aligned}\frac{dE(t)}{dt} &= \int_0^L u_t(u_{tt}-c^2u_{xx})dx - Bu(L,t)u_t(L,t)+Au(0,t)u_t(0,t)+au(0,t)u_t(0,t)+bu(L,t)u_t(L,t) \\ &= (b-B)u(L,t)u_t(L,t)+(A+a)u(0,t)u_t(0,t)\end{aligned}$$

であるが，$b=B, a=-A$ としたから，これは $=0$ である．

■