問題 1.1 .

(1) 初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \\ u = g, \quad u_t = 0 & \text{on } \mathbb{R}\times\{0\}, \end{cases} \qquad g(x) := 1_{(-\pi/2,\pi/2)}\cos x \in C_c(\mathbb{R}).$$

の解 $u(x,t)$ を求めよ．

(2) $A,B,C\in\mathbb{C}$ について，次は同値である：

(a) ある実数 $c_1<c_2$ が存在して，任意の関数 $f,g\in C^2(\mathbb{R})$ に対して，

$$u(x,t) := f(x-c_1t) + g(x-c_2t)$$

は $Au_{xx}+2Bu_{xt}+Cu_{tt}=0$ の解になる．

(b) $B^2-AC>0$ である．

[解].

(1) g が偶関数，g' が奇関数であることに注意すると，

$$u(x,t) := \frac{1}{2}\Big(g(x+ct)+g(ct-x)\Big)$$

は解を与えている．

(2) (1)⇒(2)　必要条件をまず考えると，各微分を計算することより，任意の $f,g\in C^2(\mathbb{R})$ に対して

$$Au_{xx}+2B_{xt}+Cu_{tt} = (A-2Bc_1+Cc_1^2)f''(x-c_1t)+(A-2Bc_2+Cc_2^2)g''(x-c_2t)=0$$

が必要である．このためには，例えば $f(x)=x^3 1_{(0,\infty)}, g(x)=x^3 1_{(-\infty,0)}\in C^2(\mathbb{R})$ を考えると，2 階微分はそれぞれ $(0,\infty),(-\infty,0)$ に台と持つから，

$$\begin{cases} A-2Bc_1+Cc_1^2=0 \\ A-2Bc_2+Cc_2^2=0 \end{cases}$$

が必要であるが，これは $B^2-AC>0$ と同値．

(2)⇒(1)　実際にこれで十分であることは，上の連立方程式を満たす $c_1<c_2$ を取れば，任意の $f,g\in C^2(\mathbb{R})$ に対して構成した u は常に方程式を満たすようになる．

■

問題 1.2 . 初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2u_{xx}+f(x,t) & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \\ u=u_t=0 & \text{on } \mathbb{R}\times\{0\}. \end{cases} \qquad f(x,t)=F'''(x)t\ (F\in C^3(\mathbb{R})), c>0$$

の解 $u(x,t)$ を求めよ．

[解].

$$v(x,t) := u(x,t/c)+F'(x)\frac{t}{c^3}$$

とおくと，これは

$$\begin{cases} v_{tt}=v_{xx} & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \\ v=0 \quad v_t=\dfrac{1}{c^3}F'(x) & \text{on } \mathbb{R}\times\{0\}. \end{cases}$$

を満たす．$F'\in C^2(\mathbb{R})$ に注意すれば，これは d'Alembert の公式を適用することができる．実際，

$$v_{xx}=u_{xx}(x,t/c)+F'''(x)\frac{t}{c^3}, \quad v_{tt}=c^{-2}u_{tt}(x,t/c)$$

であり，2 つは

$$c^2u_{xx}(x,t/c)+F'''(x)\frac{t}{c} = c^2u_{xx}(x,t/c)+f(x,t/c)=u_{tt}(x,t/c)$$

と，確かに等号で結ばれている．よって，d'Alembert の公式より，

$$v(x,t)=\frac{1}{2c^3}\int_{x-t}^{x+t}F'(y)dy.$$

$$\therefore\qquad u(x,t)=\frac{1}{2c^3}\int_{x-tc}^{x+tc}F'(y)dy-F'(x)\frac{t}{c^2}.$$

■

問題 1.3 . 次のそれぞれについて，$E'=0$ in $\mathbb{R}^+$ を示せ．

(1) 境界値問題

$$\begin{cases}u_{tt}-c^2u_{xx}+f(u)=0 & \text{in } \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\\ u(0,t)=u_x(0,t)=0 & t\in\mathbb{R}^+.\end{cases}$$

を満たす古典解 $u\in C_c^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)$ について，

$$E(t):=\frac{1}{2}\int_0^\infty(u_t^2+c^2u_x^2+2F(u))dx,\qquad F(x):=\int_0^x f(y)dy$$

とする．

(2) 境界値問題

$$\begin{cases}u_{tt}-c^2u_{xx}=0 & \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,\\ u_x(0,t)+Au(0,t)=0 & t>0.\end{cases}\qquad c>0, A\in\mathbb{R}$$

を満たす古典解 $u\in C_c^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)$ について，

$$E(t):=\frac{1}{2}\int_0^\infty(u_t^2+c^2u_x^2)dx+\frac{1}{2}au(0,t)^2,\qquad a:=-A$$

と定める．

[解].

(1) 無限遠での減衰条件と $x=0$ での境界条件から $u_x(\infty,t)u_t(\infty,t)-u_x(0,t)u_t(0,t)=0$ で，

$$\int_0^\infty u_xu_{tx}dx=\Big[u_xu_t\Big]_0^\infty-\int_0^\infty u_{xx}u_tdx=-\int_0^\infty u_{xx}u_tdx.$$

だから，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t)&=\int_0^\infty(u_tu_{tt}+c^2u_xu_{tx}+f(u)u_t)dx\\&=\int_0^\infty u_t(u_{tt}-c^2u_{xx}+f(u))dx=0.\end{aligned}$$

(2)

$$\int_0^\infty u_xu_{tx}dx=\Big[u_xu_t\Big]_0^\infty-\int_0^\infty u_{xx}u_tdx=-u_x(0,t)u_t(0,t)-\int_0^\infty u_{xx}u_tdx$$

で，境界条件より $-u_x(0,t)=Au(0,t)$ であるから，

$$\begin{aligned}\frac{dE(t)}{dt}&=\int_0^\infty(u_tu_{tt}+c^2u_xu_{tx})dx+au(0,t)u_t(0,t)\\&=\int_0^\infty u_t(u_{tt}-c^2u_{xx})dx+Au(0,t)u_t(0,t)+au(0,t)u_t(0,t)=0.\end{aligned}$$

■

問題 1.4 .

$$\begin{cases}u_{tt}=\triangle u & \text{in } \mathbb{R}^2\times\mathbb{R},\\ u(x,y,0)=g(x,y) & \text{in } \mathbb{R}^2,\\ u_t(x,y,0)=0 & \text{in } \mathbb{R}^2.\end{cases}\qquad g(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}.$$

の解 $u(x,y,t)$ の $\{0\}\times\{0\}\times\mathbb{R}$ 上での具体的な表示を求めよ．

[解]. ■

考察. まず，$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ 上での解 u を考えたのちに，これを偶関数に延長 $u(x,t) := u(x,-t)$ $(t<0)$ すれば，元の方程式を満たす．$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ 上での解は，Poisson の公式より，

$$\begin{aligned} u(z,t) &= \frac{1}{2}\fint_{B(z,t)} \frac{tg(\zeta) + tDg(\zeta)\cdot(\zeta - z)}{\sqrt{t^2 - |\zeta - z|^2}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2}\frac{t}{|B(z,t)|}\int_{B(z,t)} \frac{1}{\sqrt{t^2-|\zeta-z|^2}}\frac{1-|\zeta|^2}{(1+|\zeta|^2)^2}d\zeta, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

さらに $z=0$ とすれば，被積分関数は動径 $|\zeta|$ のみに依存することになる．

問題 1.5 . 次の境界値問題の十分速く減衰する古典解 u について，$E' = 0$ in $\mathbb{R}^+$ を示せ．

(1)

$$\begin{cases} u_{tt} + Ku_{xxxx} = 0, & x,t>0, \\ u(0,t) = u_t(0,t) = 0, & t>0. \end{cases} \qquad K>0,$$

に対して，

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^\infty (u_t^2 + Ku_{xx}^2)dx.$$

(2)

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & \text{in } (0,L)\times(0,\infty), \\ u_x(0,t) + Au(0,t) = 0, & t>0, \\ u_x(L,t) + Bu(L,t) = 0, & t>0. \end{cases} \qquad c>0,\ a,b\in\mathbb{R},$$

に対して，

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L (u_t^2 + c^2 u_x^2)dx + \frac{1}{2}au(0,t)^2 + \frac{1}{2}bu(L,t)^2, \qquad a,b\in\mathbb{R}.$$

[解].

(1) u とその 4 階までの微分が十分速く減衰するとき，微分と積分の記号を交換することで

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{2}\int_0^\infty (2u_t u_{tt} + 2Ku_{xx}u_{xxt})dx = \int_0^\infty (u_t u_{tt} + Ku_{xx}u_{txx})dx$$

と計算できる．u は古典解と仮定しており，十分滑らかだとするから，$u_{xxt} = u_{txx}$ が成り立つことを用いた．するとこの最右辺の第二項は，部分積分により，

$$\int_0^\infty u_{xx}u_{txx}dx = \Big[u_{xx}u_{tx}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty u_{xxx}u_{tx}dx = -\int_0^\infty u_{xxx}u_{tx}dx$$

と計算できる．なお，減衰条件より $u_{xx}(\infty,t)u_{tx}(\infty,t) = 0$ で，さらに境界条件 $u_x(0,t)=0$ から $u_{xt}(0,t)=0$ より，$u_{xx}(0,t)u_{tx}(0,t)=0$ であることを用いた．よって，再び部分積分を用いれば，

$$-\int_0^\infty u_{xxx}u_{tx}dx = -\Big[u_{xxx}u_t\Big]_0^\infty + \int_0^\infty u_{xxxx}u_t dx = \int_0^\infty u_{xxxx}u_t dx$$

を得る．ただし，$u(0,t)=0$ より $u_t(0,t)=0$ が従うことを用いた．以上より，

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^\infty u_t(u_{tt} + Ku_{xxxx})dx = 0.$$

(2) $a=-A, b=B$ と定めれば良い．まず，(1) と同様にして微分は

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^L (u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt})dx + au(0,t)u_t(0,t) + bu(L,t)u_t(L,t)$$

と計算できる．$u_{xt} = u_{tx}$ に注意すれば，第一項は部分積分より，

$$\int_0^L u_x u_{xt}dx = \Big[u_x u_t\Big]_0^L - \int_0^L u_{xx}u_t dx$$

$$
\begin{aligned}
&= u_x(L,t)u_t(L,t) - u_x(0,t)u_t(0,t) - \int_0^L u_{xx}u_t dx \\
&= -Bu(L,t)u_t(L,t) + Au(0,t)u_t(0,t) - \int_0^L u_{xx}u_t dx.
\end{aligned}
$$

ただし，最後の等号では，2 つの境界条件を用いた．以上の考察より，

$$
\begin{aligned}
\frac{dE(t)}{dt} &= \int_0^L u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx})dx - Bu(L,t)u_t(L,t) + Au(0,t)u_t(0,t) + au(0,t)u_t(0,t) + bu(L,t)u_t(L,t) \\
&= (b-B)u(L,t)u_t(L,t) + (A+a)u(0,t)u_t(0,t)
\end{aligned}
$$

であるが，$b = B, a = -A$ としたから，これは $= 0$ である．

■