

総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
博士課程（５年一貫制）入学試験（1/19/2021 実施）
問題と解答

あの*

2022 年 12 月 24 日

記法についての注意

次の記法は以後断りなく用いる.

(1) $n = 1, 2, \dots$ について,

$$n := \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, [n] := \{1, 2, \dots, n\}. \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}, \mathbb{N}^+ = \mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

(2) 同様にして, $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}_+} := [0, \infty]$.

(3) $M_{mn}(\mathbb{R})$ で (m, n) -実正方形行列の全体, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ でそのうち可逆なものの全体を表す.

(4) $I_d \in M_d(\mathbb{R})$ を単位行列, $O_d \in M_d(\mathbb{R})$ を零行列とする.

(5) $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{C}$ で, 行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ の固有値全体の集合を表す.

(6) $f(x) = O(x^n)$ ($x \rightarrow 0$) で $\limsup_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x^n} \right| < \infty$ を表す.

(7) \mathbb{R} 上の Lebesgue 測度を m , 距離空間 S 上の Borel σ -代数を $\mathfrak{B}(S)$ で表す.

(8) 1_A で集合 A の指示関数を表す.

(9) 確率変数 X, Y に対して, 期待値を $E[X]$, 分散を $\mathrm{Var}[X]$, 共分散を $\mathrm{Cov}[X, Y]$ で表す.

(10) $U(S)$ で集合 S 上の一様分布, $N(\mu, \sigma^2)$ で平均 μ 分散 σ^2 の正規分布を表す.

(11) $\mathrm{Exp}(\gamma)$ ($\gamma > 0$) で指数分布 $f(x) = \gamma e^{-\gamma x} 1_{\{x>0\}}$ を表す.

問題文の表現は筆者の都合で一部変えています. 過去に実施された入学試験問題は[統計数理研究所 HP](https://anomath.com/) から見れます.

1 問題

1.1 第一問

第1問

問題 1.1 .

問 1 次の行列が可逆か判定し, 可逆ならば逆行列を, 非可逆ならば右零因子を 1 つ求めよ.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

問 2 次の関数の導関数を求めよ:

$$f(x) := 5^{x^2-3x+1}, \quad g(x) := \log \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad (|x| < 1).$$

* e-mail address : anomath57@gmail.com

URL : <https://anomath.com/>

問 3 $f(x) := (1+x)^{\frac{1}{x}}$ の 2 次までの Maclaurin 展開を求めよ.

問 4 次の 3 つのベクトルが生成する \mathbb{R}^4 の線型部分空間の正規直交基底を 1 組求めよ.

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

[解答例].

(1) $\det A = -2$ より可逆で, 逆行列は $\frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. $\det B = 0$ より特異で, $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ は右の零因子である.

(2) g' の計算は, $|x| < 1$ のとき $1-x, 1+x > 0$ に注意して,

$$f'(x) = (e^{\log 5(x^2-3x+1)})' = \log 5(2x-3)5^{x^2-3x+1}.$$

$$g'(x) = \left(\frac{1}{2} (\log(1-x) - \log(1+x)) \right)' = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+x}.$$

(3) $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. 両辺の対数を取って微分すると,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{\log(1+x)}{x^2} + \frac{1}{x(1+x)} = \frac{-(1+x)\log(1+x) + x}{x^2(1+x)}.$$

右辺の $x = 0$ における極限は l'Hospital の定理を繰り返し適用することより計算出来て, $f'(0) = f(0) \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{e}{2}$ を得る. 二次の微分係数も同様にして,

$$f(x) = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + O(x^3) \quad (|x| < 1).$$

(4)

$$e_1 := \frac{1}{\|a\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

次に, b の e_1 の直交成分は

$$b - \frac{a \cdot b}{\|a\|^2} a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: \frac{1}{6} b'$$

より,

$$e_2 := \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

最後に, c の e_1, e_2 直交成分は,

$$c - \frac{a \cdot c}{\|a\|^2} a - \frac{b' \cdot c}{\|b'\|^2} b' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{9}{66} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix}$$

より,

$$e_3 := \frac{1}{3\sqrt{43}} \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix}$$

以上より, e_1, e_2, e_3 は所与の空間の正規直交基底をなす.

1.2 第二問

第2問

問題 1.2 .

問 1 任意の実行列 B に対して, $B^T B$ の固有値は非負であることを示せ.

問 2 次の $B \in M_{23}(\mathbb{R})$ に対して, $B^T B$ の固有値と固有ベクトルを求めよ:

$$B := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

問 3 同様の $B \in M_{23}(\mathbb{R})$ に対して, $VB^T BV^{-1}$ が対角行列になるような直交行列 $V \in O_3(\mathbb{R})$ を1つ求めよ.

[解答例].

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して, $(B^T Bx|x) = (Bx|Bx) = \|Bx\|^2 \geq 0$ より, $B^T B$ は半正定値行列である. よって, $B^T B$ の固有値は非負である.

(2) まず,

$$B^T B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$$

と計算出来, 固有方程式 $\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0$ を考えることにより, 固有値は $0, 2, 6$. それぞれに属する固有ベクトルは, $(1, 0, 0)^T$, $(0, \sqrt{3}, -1)^T$, $(0, 1, \sqrt{3})^T$ が取れる.

(3) (2) の議論より,

$$V := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

と定めるよい.

■

注意. 固有ベクトルからなる正規直交基底を列ベクトルとする直交行列を U とすると, $U^{-1}B^T BU$ は対角行列になる. しかし, 第3問の問題分では $VB^T BV^{-1}$ となっている. その点, V は U^{-1} と取る必要がある.

1.3 第三問

第3問

問題 1.3 .

問 1 数直線 \mathbb{R} 上の点 P の x 座標 X は $N(0, 1)$ に従うとする. P の原点からの距離の自乗の確率密度関数が

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}, \quad (x > 0)$$

であることを示せ.

問 2 Euclid 空間 \mathbb{R}^n 内の点 Q の座標 (X_1, \dots, X_n) は $N_n(0, I_n)$ に従うとする. Q の原点からの距離の自乗の確率密度関数が

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad (x > 0)$$

であることを示せ.

問 3 (2) の確率密度関数を持つ分布を $\chi^2(n)$ という. 確率変数 X, Y は独立で $X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(m)$ であるとする. この

とき,

$$X + Y \sim \chi^2(n + m), \quad \frac{X}{X + Y} \sim \text{Beta}(n/2, m/2)$$

であり, 互いに独立であることを示せ.

[解答例].

(1) X^2 の分布関数 F は

$$F(x) = P[X^2 \leq x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

よって,

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\sqrt{x}} 2e^{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}.$$

(2) Q の原点からの距離の自乗は $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ と表せ, X_1, \dots, X_n は互いに独立であることに注意すると,

$$\varphi_n(x) := \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

の積率母関数が $\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}$ の積率母関数

$$g(u) := \int_0^\infty e^{-ux} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + u\right)^{1/2}}$$

の n 乗であることを示せば良い.

(3)

■

1.4 第四問

第4問

問題 1.4. $x \in \mathbb{R}^p$ の関数 f

$$f(x) := \sum_{i=1}^m g(x, a_i, b_i), \quad g(x, a, b) := e^{-(a - b^\top x)^2}, \quad a_i \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}^n.$$

の最大化を考える. ただし, $\text{rank}(b_1, \dots, b_m) = p \leq m$ とする. 関数 F は

$$F(x, y) := \sum_{i \in [m]} g(y, a_i, b_i) (a_i - b_i^\top x)^2$$

と定め, $x_1 \in \mathbb{R}^p$ から順に $x_{t+1} := \arg \min_{x \in \mathbb{R}^p} F(x, x_t)$ とする.

問 1 x_{t+1} を x_t の関数として表せ.

問 2 任意のスカラー A, A_0 に対して $e^A - e^{A_0} \geq (A - A_0)e^{A_0}$ を示せ.

問 3 任意の $x, y \in \mathbb{R}^p$ に対して, $f(x) - f(y) \geq F(y, y) - F(x, y)$ を示せ.

問 4 $\forall t \in \mathbb{N}^+ \quad f(x_{t+1}) \geq f(x_t)$ を示せ.

[解答例].

(1)

$$B := (b_1, \dots, b_m) \in M_{pm}(\mathbb{R}), \quad G := (g(y, a_1, b_1)b_m, \dots, g(y, a_m, b_m)b_m) \in M_{pm}(\mathbb{R})$$

と定めると,

$$D_x F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow G \begin{pmatrix} a_1 - \mathbf{b}_1^\top \mathbf{x} \\ \vdots \\ a_m - \mathbf{b}_m^\top \mathbf{x} \end{pmatrix} = 0$$

となる. ただし, $D_x F$ とは, F の第一引数 \mathbf{x} に関する勾配とした. よって,

$$G \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = GB\mathbf{x}_p.$$

$GB \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$ に注意すれば,

$$\mathbf{x} = (GB)^{-1}G \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

すなわち, $\mathbf{y} := \mathbf{x}_t$ を代入すれば,

$$\mathbf{x}_{t+1} = \left((g(\mathbf{x}_t, a_1, \mathbf{b}_1)\mathbf{b}_m, \dots, g(\mathbf{x}_t, a_m, \mathbf{b}_m)\mathbf{b}_m)(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m) \right)^{-1} (g(\mathbf{x}_t, a_1, \mathbf{b}_1)\mathbf{b}_m, \dots, g(\mathbf{x}_t, a_m, \mathbf{b}_m)\mathbf{b}_m) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

(2) $A > A_0$ のとき, 平均値の定理より, ある $c \in (A_0, A)$ が存在して,

$$\frac{e^A - e^{A_0}}{A - A_0} = e^c \geq e^{A_0}.$$

$A < A_0$ の場合も同様. $A = A_0$ の場合は $e^A - e^{A_0} = 0 = (A - A_0)e^{A_0}$ である.

(3) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ を取り, $A^i := -(a_i - \mathbf{b}_i^\top \mathbf{x})^2, A_0^i := -(a_i - \mathbf{b}_i^\top \mathbf{y})^2$ と定める. すると, 問 2 より,

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \sum_{i \in [m]} (e^{A^i} - e^{A_0^i}) \geq \sum_{i \in [m]} (A^i - A_0^i) e^{A_0^i} = F(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - F(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

(4) 問 3 の不等式と列 $\{\mathbf{x}_t\}$ の取り方より,

$$f(\mathbf{x}_{t+1}) - f(\mathbf{x}_t) \geq F(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t) - F(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) \geq 0.$$

■

要諦 1.5. 幾何学的に言えば, affine 超平面 $a_i - \mathbf{b}_i^\top \mathbf{x} = 0$ との距離の何らかの意味の和を最小化する問題を考えている.