

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>自由加群論</b>	<b>3</b>
1.1	歴史的背景と動機付け	3
1.1.1	歴史的背景	3
1.1.2	数学的対象として	4
1.1.3	環論からの動機	4
1.1.4	線型代数からの動機	4
1.1.5	表現論からの動機	5
1.1.6	幾何学からの動機	5
1.1.7	代数幾何からの動機	5
1.2	線型空間とその射	5
1.2.1	定義と例	5
1.2.2	部分空間の対応	6
1.2.3	直和と商	6
1.3	行列表示と基底変換	7
1.4	Jordan 標準形	7
1.5	双対空間	7
1.6	双線型形式	8
1.6.1	行列表示	8
1.6.2	付随する線形写像	9
1.6.3	右随伴写像の行列表示	9
1.7	対称双線型形式	10
1.7.1	直交性	10
1.7.2	随伴	11
1.7.3	自己共役性が示唆すること	11
1.7.4	対角化の理論	12
1.7.5	慣性律	12
1.8	テンソル積	13
<b>第 2 章</b>	<b>自己準同型環の研究</b>	<b>14</b>
2.1	最小多項式	14
<b>第 3 章</b>	<b>加群論</b>	<b>15</b>
3.1	定義と例	15
3.2	部分加群と生成	16
3.2.1	部分加群	16
3.2.2	生成された部分加群	16
3.2.3	商加群	16
3.2.4	ねじれ	16
3.3	加群の射	17

3.3.1	定義と可逆性	17
3.3.2	標準分解	17
3.3.3	射の集合	18
3.4	加群の圏	18
3.5	直和と自由加群	19
3.6	単因子論	19
3.6.1	整数行列	20
3.6.2	体係数多項式の行列	20
3.6.3	特性行列	21
3.7	Jordan 標準形と最小多項式	22
3.8	有限生成アーベル群の基本定理	22
第 4 章	ホモロジー代数	23
第 5 章	可換環論	24
第 6 章	体論	25
第 7 章	非可換環論	26
第 8 章	単純環論	27
第 9 章	代数解析	28
9.1	Weyl 代数	28
第 10 章	束論と量子論理	29
10.1	背景	29
第 11 章	参考文献	30
参考文献		31

## 第 1 章

# 自由加群論

受ける作用を環からにすると環上の加群論，さらに群からの作用を追加すると表現論となる．その中でも体作用を持つ加群が扱いやすい理由は，必ず自由加群になるため，すなわち，基礎体に同型な幾つかの部分加群の直和に分解されるためである．そこで，自由加群論を展開する．

### 1.1 歴史的背景と動機付け

homology 代数の手法を用いて環を調べる際には加群が本質的に活躍する．

- イデアルの商として自然に加群が考えられる．
- $F$ -線型空間の自己同型の問題を解決するには， $F[X]$ -加群の理論を構築すれば良い．最小多項式や固有多項式など．
- 群の表現とは，線型に作用する線型空間を指すが，これを調べるには群環  $k[G]$  上の加群の理論を構築すれば良い． $\mathbb{C}[G]$  は半単純環になる．また，有限次元表現の構造定理と特徴量としての指標とを得る．指標はある種の不変量で，異なる表現を区別できる．

#### 1.1.1 歴史的背景

環上の加群の理論を要請した数学的対象は3つあり，1つは整数（数論），もう1つは代数曲線（代数幾何学）で，最後は不変式である．不変式は環をなし，これを不変にする作用は群をなす．随伴作用素なども，対合に対する不変式だと思える．

**歴史 1.1.1.** 不変式という対象を最初に発見したのは Boole (1841) である．すべての代数方程式は判別式を持ち，変数の一次分数変換について定数倍しか変わらない．そう，判別式は不変式である．不変式が不変式たる所以は線形代数と関係が深い，現代では判別式は行列について定義されている．方程式の不変式環はすべて有限生成であるが，その計算は次数が上がるに連れてどんどん難しくなっていく．

#### 定義 1.1.2 .

(1)  $S \subset \mathrm{GL}_n(K)$  について，不変式のなす環を

$$K[x_1, \dots, x_n]^S := \{f \in K[x_1, \dots, x_n] \mid \forall \sigma \in S \ \sigma(f) = f\}$$

と表す．

**系 1.1.3.** 任意の対称式は，不変対称式によって表せる： $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^{S_n} = \mathbb{R}[s_1, \dots, s_n]$ ．ただし， $s_1, \dots, s_n$  は基本対称式とした．

**定理 1.1.4 (Hilbert 14).** 部分群  $G < \mathrm{GL}_n(K)$  に関して，条件  $\exists_{m \in \mathbb{N}} \exists_{h_1, \dots, h_m \in K[x_1, \dots, x_n]} K[x_1, \dots, x_n]^G = K[h_1, \dots, h_m]$  が成り立つかを考える．

(1)  $G$  が置換からなる群の場合，成り立つ．

- (2)  $G$  が有限群の場合、成り立つ (Hilbert). またこのとき、生成系  $h_1, \dots, h_m$  はいずれも次数を  $|G|$  以下に出来る (Noether の定理).
- (3) 一般の  $G$  については偽である (永田の反例).

### 1.1.2 数学的对象として

**要諦 1.1.5.** 環はスカラーを、加群はベクトルの概念を、それぞれの機能性を保ちつつ最大限に一般化し、集団として把握したものである. この意味で、環と加群の理論は線型代数の一般化であるが、同時に集約化という面も現れるであろう.

- (1) 可換環上には、素因数分解に始まる数論的な基礎事項と、局所化を武器とする代数幾何学への基礎事項との、2つの方面がある.
- (2) 非可換環、半単純環の構造論を第一の頂点とし、群の表現を加群そのものとして捉える.
- (3) テンソル積は単純環の理論を拓く強力な道具になり、Grothendieck もこれで函数解析学に切り込んだ.

### 1.1.3 環論からの動機

**命題 1.1.6 (イデアルの剰余が加群になる).** 一意分解整域  $A = \mathbb{C}[X, Y, Z]$  のイデアル  $I = (X, Y, Z)$  は2元では生成されない.

[証明].

- (1)  $I, I^2$  は  $A$  のイデアルなので、特に部分  $A$ -加群である. よって、商  $I/I^2$  はもはやイデアルではないが、 $A$ -加群ではある. (ここで離陸).
- (2)  $I$  の元は  $I/I^2$  に0で作用する ( $\forall a \in I, x \in I/I^2 \quad ax = 0 \in I/I^2$ ) ので、 $I/I^2$  は  $a + I$  ( $a \in A$ ) の作用を受ける  $A/I$ -加群でもある.  $A/I = \mathbb{C}$  より、これは  $I/I^2$  が  $\mathbb{C}$ -線型空間であることを意味する.  $I/I^2 = \mathbb{C}X + \mathbb{C}Y + \mathbb{C}Z$  は基底  $X, Y, Z$  を持つから、 $\dim_{\mathbb{C}} I/I^2 = 3$ .
- (3) 仮に  $f, g \in I$  がイデアル  $I$  を生成するならば、それらの像  $\bar{f}, \bar{g} \in I/I^2$  は  $I/I^2$  を生成する必要があるが、これは  $\dim_{\mathbb{C}} I/I^2 = 3$  に矛盾.

■

**要諦 1.1.7.**  $I/I^2 = \mathbb{C}X + \mathbb{C}Y + \mathbb{C}Z$  という間隙のような空間に注目することでこのようにスッキリ証明でき、そのための言葉を提供する程度には加群は抽象的な理論である.

### 1.1.4 線型代数からの動機

**命題 1.1.8 (線型空間の自己同型の問題を解決するにはその係数の多項式の加群の理論を構築すれば良い).**  $F$  を体とする. 次の対象は一対一に対応する.

- (1)  $F$ -線型空間  $V$  と自己同型  $\varphi \in \text{End}(V)$  の組.
- (2)  $F[X]$ -加群  $M$ .

**定理 1.1.9 (単項イデアル整域上の有限生成加群の構造定理).**  $A$  を単項イデアル整域とし、 $M$  を有限生成  $A$ -加群とする. このとき、 $A$  のイデアルの増大列  $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_r$  であって、

$$M \simeq A/I_1 \oplus \dots \oplus A/I_r$$

を満たすものがただ一つ存在する.

**要諦 1.1.10.** これは有限 Abel 群の構造定理 ( $A = \mathbb{Z}$  の場合) の一般化となっている. また、 $A = F[X]$  の場合のこの定理は、Jordan 標準形の存在と一意性を含意する.

### 1.1.5 表現論からの動機

#### 定義 1.1.11.

- (1) 群  $G$  の  $k$  上の表現とは,  $k$ -線型空間  $V$  と準同型  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)(= \mathrm{Aut}_k(V))$  の組  $(V, \rho)$  のことを指す.
- (2)  $G$  の表現  $(V, \rho)$  が既約であるとは,  $V \neq 0$  であり,  $0 \subsetneq W \subsetneq V$  を満たす  $V$  の部分空間  $W$  であって  $G$  の作用で閉じているものが存在しないことを指す.<sup>†1</sup>

例 1.1.12.  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  は  $S_n$  の  $\mathbb{C}$  上の表現となっている.

定理 1.1.13. 有限群  $G$  の任意の有限次元表現は, 既約表現の直和に一意的に分解する.  $G$  の有限次元表現は指標で特徴付けられる:  $\forall g \in G \quad \mathrm{Tr} \rho(g) = \mathrm{Tr} \rho'(g) \Leftrightarrow (V, \rho) \simeq (V', \rho')$ .

定理 1.1.14. 群  $G$  の表現と, 群環  $\mathbb{C}[G]$  上の加群は一对一に対応する.

### 1.1.6 幾何学からの動機

ホモロジー代数では, 加群とその圏論的な性質は欠かせない表現の場となる.

幾何学的な対象をその上の層を使って調べるように, 環とその上の加群とは切り離せない. [1]

加群は基本的にベクトル束の一般化と思える. というのも,  $R$ -加群は,  $R$  を空間  $X$  上の関数のなす環として,  $X$  上のベクトル束の切断がなす空間だと思える.  $X$  がコンパクトハウスドルフ空間として, これを  $C^*$ -代数  $C(X, \mathbb{C})$  に対応させる対応は, 関手  $\mathrm{Top} \rightarrow C^*\text{-Alg}^{\mathrm{op}}$  を定め, これを Gelfand 双対性という. この代数-幾何の双対性を最初から定義としたのが代数多様体の現代的な扱いである. この源霊性を Grothendieck に与えたのは作用素環の考え方であるかもしれない.

### 1.1.7 代数幾何からの動機

スキーム論では, 可換環  $A$  から定められる空間  $\mathrm{Spec} A$  を,  $\mathbb{R}^n$  の開集合に当たる一番基本的な対象とする.  $\mathrm{Spec} \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$  の極大イデアルと  $\mathbb{C}^n$  の元とは一対一対応している.  $\mathrm{Spec} \mathbb{C}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$  を  $\{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid a^2 + b^2 - 1 = 0\}$  に当てる空間とする. この空間で  $A$ -加群を考えることは,  $\mathrm{Spec} A$  上のベクトル束 (各点に生えた線型空間で連続に接続されているもの) を考えることに相当する. 代数幾何で微分形式などを考えるには, 加群の理論が必要となる.

## 1.2 線型空間とその射

全ての線型空間は自由加群になるという意味で, 環上の加群の理論が縮退する. 任意の加群は自由加群の準同型像となる.

### 1.2.1 定義と例

#### 定義 1.2.1.

- (1) 線型空間とは, 加群  $V$  とスカラー積による作用  $\cdot : K \times V \rightarrow V$  との組で, 加法についての可換性条件  $(a + b)x = ax + bx, a(x + y) = ax + ay$  を満たすもののことをいう.
- (2) 作用を保つような加群の射を線型写像という.

例 1.2.2 (free module). 基底を持つ加群を自由加群という. 標準的には次のように構成できる: 集合  $X$  上の自由加群とは

$$K^{(X)} := \{f \in \mathrm{Map}(X, K) \mid f(x) = 0 \text{ f.e.}\}$$

をいう. これは  $X$  の元を基底とする  $K$ -線型空間である.

<sup>†1</sup> 単純群や体に似ている概念である.

## 例 1.2.3 (複素化).

(1)  $V \in \text{Vect}_{\mathbb{R}}$  の複素化  $V_{\mathbb{C}}$  とは, 加群  $V \oplus V$  に対して, 作用  $*$ :  $\mathbb{C} \times (V \oplus V) \rightarrow V \oplus V$  を

$$(a + bi) * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}$$

と定めたものをいう. このとき,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つことに注意すると,  $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$  がわかる. すなわち,  $V$  のコピーを用意して, 第一成分を事実上の実部, 第二成分を事実上の虚部と扱い, 複素数による作用を甘受する.

(2)  $\mathbb{R}$ -線型写像  $f: V \rightarrow W$  に対して, 直和  $f \oplus f: V \oplus V \rightarrow W \oplus W$  は作用  $*$ :  $\mathbb{C} \times (V \oplus V) \rightarrow V \oplus V$  と  $*$ :  $\mathbb{C} \times (W \oplus W) \rightarrow W \oplus W$  とを保つ. すなわち,  $\mathbb{C}$ -線型写像である. これを複素化という. また, 複素化により行列表示は変わらない.

## 1.2.2 部分空間の対応

**命題 1.2.4.**  $S_V, S_W$  は部分空間の全体がなす束とし,  $f: V \rightarrow W$  を線形写像とする.

(1) 線形写像  $f$  は, 部分空間を保つ. すなわち,  $f^*(V') := f(V'), f_*(W') := f^{-1}(W')$  によって写像  $f_*: S_V \rightarrow S_W, f^*: S_W \rightarrow S_V$  が定まる.

(2)  $f^*, f_*$  をそれぞれ

$$S_{\text{Ker } f} := \{V' \in S_V \mid \text{Ker } f \subset V'\}, \quad S_{\text{Im } f} := \{W' \in S_W \mid W' \subset \text{Im } f\}$$

へ制限すると, 順序を保つ全単射となる.

**定義 1.2.5.**  $\text{Im } f := f^*(\top)$  を像といい,  $\text{Ker } f := f_*(\perp)$  を核という.

## 1.2.3 直和と商

一般次元の線形空間の任意の部分空間に対して補空間が存在するが, 一意とは限らない. 直交としての構成や, 商空間としての構成が考えられる.

**要諦 1.2.6** (直和について).  $W_1 + W_2$  は, ある線型空間  $V$  について  $W_1, W_2 \subset V$  を満たす場合にしか定義されないが,  $W_1 \oplus W_2$  は必ず定義される直和対象である. この 2 つが同型になるときは条件  $W_1 \cap W_2 = 0$  によって特徴付けられ, この場合の記法は  $W_1 \oplus W_2$  と混用 = 同一視してしまう. 次元に拘らず, 線型空間の部分空間はいつも直和因子である (= 補空間  $W'$  が存在して  $V = W \oplus W'$  と表せる). 無限次元 Hilbert においては任意の閉部分空間に対して直交としてこれが標準的に構成でき, これを直交補空間という. 射影加群は適当な自由加群の直和因子 (に同型) となるような加群として特徴づけられる.

**命題 1.2.7 (準同型定理).**  $f: V \twoheadrightarrow W$  ( $V, W \in \text{Vect}_K$ ) は全射とする. 部分空間  $V' \in S_V$  に対して, 次の 2 条件は同値.

(1) 核の補空間である:  $V = V' \oplus \text{Ker } f$ .

(2)  $f|_{V'}: V' \rightarrow W$  は同型である.

**要諦 1.2.8.** 核の補空間  $V'$  は実はいつでも  $V/\text{Ker } f$  と同型であるから,  $V' \simeq V/\text{Ker } f \xrightarrow{\sim} \text{Im } f$  と見るとこれは準同型定理から従う.

## 1.3 行列表示と基底変換

- (1) 基底  $(x_1, \dots, x_n)$  は左から (横ベクトルとして) 作用し, 係数ベクトル (反変ベクトル) は右から (縦ベクトルとして) 作用する. これが内積の標準的表記である (左から風が吹いても抵抗感は少ない).
- (2) 基底が変換される時, 基底変換行列  $P$  が縦ベクトルには左から作用し, 横ベクトルには右から作用する. これは, 基底変換行列を, 新たな基底から古い基底を取った空間への恒等写像  $\text{id}_V$  の行列表示として定めれば,  $y^\top = x^\top P$  とは定義である.
- (3) その結果,  $y^\top Ax = y^\top Q(Q^{-1}AP)x$  という表示が成り立つ.  $yQ$  が新しい基底で,  $Px$  が新しい基底による係数行列である.
- (1) ペアリング  $\langle -, - \rangle : V \times W \rightarrow K$  とは双線型形式である.  $V$  が横ベクトルの空間 ( $C^{\text{op}}$  にあたる) であり,  $W^*$  に当たる. 双対基底も, 元はといえば  $\langle e, - \rangle \in V^*$  の一般化である.
- (2) 双線型形式  $b : V \times W \rightarrow K$  の行列表示とは,  $b : W \rightarrow V^*$  の  $V$  の双対基底に関する行列表示ともみなせる.

**定義 1.3.1** (行列表示 (matrix representation), 基底変換行列 (transformation matrix)).

- (1)  $f : V \rightarrow W \in \text{FinVect}_K$  の基底  $B \subset V, B' \subset W$  に関する行列表示とは,  $x_i \in B$  の像  $f(x_i) \in W$  の  $B'$  による成分表示を第  $i$  列にもつ行列をいう.
- (2)  $V$  の基底  $B$  を基底  $B'$  に写す  $V$  の自己同型の  $B$  による行列表示を,  $B$  から  $B'$  への底の変換行列という.

**要諦 1.3.2.** これは  $y_i$  の行き先の基底  $x_1, \dots, x_n$  による成分表示を第  $i$  列にして行列を作ることに等しい. 基底に右から作用すると考えて

$$(y_1 \cdots y_n) = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (x_1 \cdots x_n) A$$

と捉えられる.

**命題 1.3.3** (底の変換行列の特徴づけ). 有限次元線型空間  $V$  について,  $P \in \text{GL}_n(K)$  を基底  $B$  から  $B'$  への底の変換行列とする.

- (1) 恒等写像  $\text{id}_V$  の基底  $B', B$  に関する行列表示は  $P$  である.
- (2) 有限次元線型空間  $W$  について,  $Q \in \text{GL}_m(K)$  を  $D$  から  $D'$  への底の変換行列とする. 線型写像  $f : V \rightarrow W$  の  $B, D$  に関する行列表示  $A$  と  $B', D'$  に関する行列表示  $A'$  との間に, 次の関係がある:

$$A' = Q^{-1}AP$$

## 1.4 Jordan 標準形

$K$  が代数的閉であるとき, 行列表示の共役類の中から上三角なものを代表系に選び出せる. 上三角とは  $V' \subset V, W' \subset W$  であって  $f(V') \subset W'$  を満たすような部分空間  $V', W'$  の増大列が取れるということである.

## 1.5 双対空間

標準的なペアリングによる随伴理論を見る.  $\text{Coker } f := W/\text{Im } f = \text{Ker } (A^\top)$  を解き明かす.

## 1.6 双線型形式

双対空間の間の標準双線型形式  $(-|-): V^* \times V \rightarrow K$  を一般化し、随伴の理論を立てる。

### 1.6.1 行列表示

- (1) 双線型形式の行列表示とは、標準内積による双線型形式の表現への回収である。任意のベクトル  $a^\top x \in V, a^\top b \in W$  ( $a \in K^n, b \in K^m$ ) について、

$$b(a^\top x, b^\top y) = a^\top \begin{pmatrix} b(x_1, b^\top y) \\ \vdots \\ b(x_n, b^\top y) \end{pmatrix} = a^\top (b(x_i, y_j))_{(i,j) \in [n] \times [m]} b$$

- (2) 基底変換により受ける変換は、 $Bx = B'Px \in V$  を  $B'$  に関して表すと係数ベクトルが  $x \mapsto Px$  と変わるのだから、 $b(x, y) = (Px)^\top AQy = x^\top (P^\top AQ)y$ 。

**定義 1.6.1** (双線型形式の行列表示).

- (1) 双線型形式  $b: V \times W \rightarrow K$  の、基底  $x_1, \dots, x_m \in V$  と  $y_1, \dots, y_n \in W$  に関する**行列表示**とは、

$$(b(x_i, y_j))_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} b(x_1, y_1) & \cdots & b(x_1, y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b(x_m, y_1) & \cdots & b(x_m, y_n) \end{pmatrix} \in M_{mn}(K)$$

を指す。

- (2) 行列表示によれば、 $b_A: K^n \times K^m \rightarrow K$  との次の図式が可換になる：

$$\begin{array}{ccc} K^n \times K^m & \xrightarrow{b_A} & K \\ x \times y \downarrow & & \downarrow \text{id}_K \\ V \times W & \xrightarrow{b} & K \end{array}$$

すなわち、次が成り立つ：

$$\forall x \in K^n, y \in K^m \quad b(g(x), g'(y)) = b_A(x, y) = {}^t x A y.$$

そして、全ての双線型形式がこのようにして生じる。

- (3) 次の写像は可逆である：

$$\begin{array}{ccc} \{b \in K^{V \times W} \mid b: V \times W \rightarrow K \text{ は双線型形式}\} & \longrightarrow & M_{mn}(K) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ b_A & \longmapsto & A \end{array}$$

これは有界線形作用素と半双線型式が内積を通じて一対一対応（加えて等長同型でもある）することに対応する。

**命題 1.6.2** (双線型形式の行列表示の基底変換).  $b: V \times W \rightarrow K$  を双線型形式とする。  $V$  の基底  $B = (x_1, \dots, x_m)$  から  $B' = (x'_1, \dots, x'_m)$  への底の変換行列を  $P \in \text{GL}_m(K)$  とし、  $W$  の基底  $D = (y_1, \dots, y_n)$  から  $D' = (y'_1, \dots, y'_n)$  への底の変換行列を  $Q \in \text{GL}_n(K)$  とする。  $B, D$  に関する  $b$  の行列表示を  $A$  とし、  $B', D'$  に関する  $b$  の行列表示を  $A'$  とすると、  $A' = {}^t P A Q$  である。

**[証明]** 任意の  $x \in K^n$  に対して、ベクトル  $Bx \in V$  の基底  $B'$  による係数ベクトルは  $Px$  と表せる。 よって、任意の  $x \in K^n, y \in K^m$  について、  $x^\top A' y = (Px)^\top A (Qy) = x^\top (P^\top A Q) y$ . ■



## 1.6.2 付随する線形写像

$b : V \times W \rightarrow K$  は元々  $b : W^* \times W \rightarrow K$  である. 一般の  $b : W \times W \rightarrow K$  に対して  $r_b : W \rightarrow W^*$  を **mate** という.

**命題 1.6.3** (双線型形式の行列表示の特徴付け).  $b : V \times W \rightarrow K$  を双線型形式とする.  $y \in W$  に対し, 写像  $r_b(y) : V \rightarrow K$  を  $r_b(y) = b(-, y)$  と定める.

- (1) 写像  $r_b(y) : V \rightarrow K$  は線型形式である.
- (2)  $r_b : W \rightarrow V^*$  は線型写像である.
- (3)  $V, W \in \text{FinVect}_K$  とする.  $B = (x_1, \dots, x_m), B' = (y_1, \dots, y_n)$  をそれぞれ  $V, W$  の基底とし,  $B^* = (f_1, \dots, f_m)$  を双対基底とする.  $b$  の  $B, B'$  に関する行列表示は, 線型写像  $r_b : W \rightarrow V^*$  の基底  $B', B^*$  に関する行列表示に等しい.

[証明].

- (1)  $r_b(y) = b(-, y)$  は, 双線型形式は定義上第一引数に線形性が成り立つから, 線型写像である.

(2)

$$\begin{array}{ccc} r_b : W & \longrightarrow & V^* \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ x & \longmapsto & r_b(x) = b(-, x) \end{array}$$

$x, y \in W, a \in K$  とする. 双線型形式の第二引数線形性より,

$$\begin{aligned} r_b(x + y) &= b(-, x + y) = b(-, x) + b(-, y) = r_b(x) + r_b(y) \\ r_b(ax) &= b(-, ax) = ab(-, x) = ar_b(x) \end{aligned}$$

- (3) 線型写像  $r_b : W \rightarrow V^*$  の基底  $B', B^*$  に関する行列表示を  $A = (a_{ij})$  と置くと,  $r_b(y_j)$  とは  $A$  の  $j$  列目の縦ベクトルの成分を用いて  $r_b(y_j) = a_{1j}f_1 + \dots + a_{mj}f_m$  と表せるから,  $b(x_i, y_j)$  は,

$$\begin{aligned} b(x_i, y_j) &= r_b(y_j)(x_i) \\ &= (a_{1j}f_1 + \dots + a_{mj}f_m)(x_i) \\ &= a_{ij} \end{aligned}$$

となる.

■

## 1.6.3 右随伴写像の行列表示

$b : V \times W \rightarrow K$  は元々内積で, 内積は  $V$  と  $V^*$  の間の同型を定める. これは一般的に, 引き戻しによる  $r_b^* : \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(W)$  なる対応を定め, これを右随伴という. 定義域である  $W$  が  $b$  の右脚にあったためである. 代数的には,  $b(f(x), y) = b(x, g(y))$  という対応を意味する.

双対写像とは, 内積に関する随伴なのであった.

$A : V \rightarrow V$  の随伴は  $A^\top : V^* \rightarrow V^*$  で定まる. その後,  $V \rightarrow V^*$  に関する基底の変換行列を  $P$  とすれば, それは当然  $P^{-1}A^\top P$  となる.

**定義 1.6.4** (non-degenerate, right adjoint).  $V, W \in \text{Vect}_K$  とし,  $b : V \times W \rightarrow K$  を双線型形式とする.

- (1)  $b : V \times W \rightarrow K$  が  $W$  で**非退化**とは,  $r_b : W \rightarrow V^*$  が単射であることをいう.  $V$  で非退化とは,  $l_b : V \rightarrow W^*$  が単射であることをいう.
- (2)  $b$  が  $W$  で非退化とする.  $f \in \text{End}_K(V)$  に対して,  $g \in \text{End}_K(W)$  が次の図式を可換にする時,  $g$  は  $f$  の**右随伴写像**という.

$g$  のことも  $f^*$  で表す.

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{r_b} & V^* \\ g \downarrow & & \downarrow f^* \\ W & \xrightarrow{r_b} & V^* \end{array}$$

この図式は,  $y \in W$  を取って  $V^*$  上の方程式に換言すれば,

$$\begin{aligned} f^*(r_b(y)) &= r_b(g(y)) \\ b(-, y) \circ f &= b(f(-), y) = b(-, g(y)) \end{aligned}$$

となる.

(3)  $b$  が**非退化**とは,  $r_b : W \rightarrow V^*$  が同型であることをいう. 即ち,  $V, W$  が有限次元である場合は, 第一要素も第二要素も単射であることをいう.

(4)  $b$  の**階数**とは,  $r_b$  の階数をいう.

**命題 1.6.5** (随伴写像の行列表示は双対写像の行列表示の転置と共軛である).  $V, W \in \text{FinVect}$ ,  $b : V \times W \rightarrow K$  を非退化な双線型形式とする.  $f : V \rightarrow V$  を線型写像とし,  $f^* : W \rightarrow W$  をその右随伴写像とする.  $B, B'$  をそれぞれ  $V, W$  の基底とし,  $B, B'$  に関する  $b$  の行列表示を  $P \in \text{GL}_n(K)$  とする.  $f$  の  $B$  に関する行列表示が  $A \in M_n(K)$  ならば,  $B'$  に関する随伴写像  $f^*$  の行列表示は,  $P^{-1} {}^t A P \in M_n(K)$  である.

**[証明]**.  $f^*$  が  $f$  の随伴であるとは,  $f^*$  を双対写像  $V^* \rightarrow V^*$  を表す記号としても混用して,

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{r_b} & V^* \\ \text{随伴 } f^* \downarrow & & \downarrow f^* \text{ 双対写像} \\ W & \xrightarrow{r_b} & V^* \end{array}$$

が可換であることより,  $f$  の右随伴写像は  $f^* = r_b^{-1} \circ f^* \circ r_b$  と表せる.  $r_b$  の  $W, V^*$  の基底  $B', B^*$  に関する行列表示も  $P$  であるから,  $f^*$  の行列表示は  $P^{-1} {}^t A P$  である. ■

## 1.7 対称双線型形式

特に  $V = W$  の場合を考えると, 非退化な場合右随伴写像と左随伴写像とは一致する. 自己共役な双線型形式を実なら対称, 複素ならエルミートともいう. 対称形式は  $b(x, x) = 4q(x) - q(x) - q(x) = 2q(x)$  より,  $K$  の標数が2でなければ  $V$  の二次形式と一対一に対応し, 極化不等式で関連する.

### 1.7.1 直交性

内積はさらに非退化かつ半正定値のものをいうが, 一般に自己共役なものについて直交なる概念が定まる. (非退化な) 対称形式  $b : V \times V \rightarrow K$  に関して,  $K$  の標数が2でなければ直交基底が存在する (系 1.7.3).

**定義 1.7.1** (orthogonal set, orthonormal basis).  $b$  を  $V$  上の対称形式とする.

- (1) 部分空間  $W \subset V$  に対し,  $W^\perp = \{x \in V \mid \forall y \in W, b(x, y) = 0\}$  を,  $W$  の  $b$  に関する**直交 (集合)** と言う.  $V^\perp$  を  $b$  の核と言う.
- (2)  $W \subset V$  を部分空間とする.  $b : V \times V \rightarrow K$  の制限  $W \times W \rightarrow K$  が定める  $W$  の双線型形式を  $b$  の  $W$  への**制限**と呼び,  $b_W$  で表す.
- (3)  $V$  の基底  $x_1, \dots, x_n$  に関する  $b$  の行列表示が対角行列であるとき,  $x_1, \dots, x_n$  は  $b$  に関する**直交基底**であると言う.  $b$  の行列表示が単位行列であるとき,  $x_1, \dots, x_n$  は  $b$  の**正規直交基底**であると言う.

**命題 1.7.2 (空間の直交に沿った分解).**  $V \in \text{FinVect}$  とし,  $b$  をその上の対称形式とする.  $W \subset V$  を部分空間とし,  $b_W : W \times W \rightarrow K$  をそこへの制限とする.

(1) 次の3条件は同値.

(1)  $b_W$  は非退化である.

(2)  $V = W \oplus W^\perp$ .

(3)  $W \cap W^\perp = 0$ .

特に,  $b$  が非退化であることは,  $V^\perp = 0$  によって特徴付けられる.

(2)  $b$  が非退化ならば,  $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$ .

**系 1.7.3.**  $V \in \text{FinVect}$  とし,  $b$  をその上の対称形式とする.

(1)  $W$  を  $V$  の部分空間とし,  $W^\perp$  をその直交とする.  $b, b_W$  がいずれも非退化ならば,  $b_{W^\perp}$  も非退化である.

(2)  $K$  の標数が2でなければ,  $b$  の直交基底が存在する.

(3)  $V = W \oplus W'$  かつ  $W' \subset V^\perp$  とすると, 次の2条件は同値である.

(1)  $b_W$  が非退化.

(2)  $W' = V^\perp$ .

**補題 1.7.4.**  $K$  の標数が2でないとする.  $b \neq 0$  ならば,  $\exists x \in V, b(x, x) \neq 0$ .

## 1.7.2 随伴

**定義 1.7.5 (adjoint mapping).**  $V \in \text{Vect}$  とし,  $b$  をその上の非退化対象形式とする.  $f \in \text{End}(V)$  に対して,  $r_b = l_b$  であるから, 右随伴写像  $f_r^*$  と左随伴写像  $f_l^*$  が一致する. これを**随伴写像**という.

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{r_b} & V^* & \xleftarrow{l_b} & V \\ f_r^* \downarrow & & \downarrow f^* & & \downarrow f_l^* \\ V & \xrightarrow{r_b} & V^* & \xleftarrow{l_b} & V \end{array}$$

今回は  $V = W$  としているためである.

**定義 1.7.6 (symmetric transformation, orthogonal transformation).**  $V \in \text{Vect}$  とし,  $b$  をその上の非退化対称形式とする.

(1)  $f \in \text{End}(V)$  が随伴写像  $f^*$  と等しい時,  $f$  は  $b$  に関して**対称変換**であるという:  $\forall x, y \in V, b(f(x), y) = b(x, f(y))$ .

(2)  $f \in \text{End}(V)$  が随伴写像  $f^*$  の逆写像である時,  $f$  は  $b$  に関して**直交変換**であるという:  $\forall x, y \in V, b(f(x), f(y)) = b(x, y)$ . ただしこの特徴付けは, 対称変換の場合と違って有限次元の場合に限る.

**注 1.7.7 (随伴写像の行列表示).** 非退化 Hermite 形式  $h$  の行列表示が  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  で, 自己準同型  $f$  の行列表示を  $C \in M_n(\mathbb{C})$  とする. この時, 随伴写像  $f^*$  の行列表示は  $\bar{A}^{-1} C^* \bar{A} \in M_n(\mathbb{C})$  である.

## 1.7.3 自己共役性が示唆すること

**要諦 1.7.8.** 半双線型形式は内積の一般化で, 特に (正規化すれば) 「類似度」を測っているともみれる. 対称の場合はさらに踏み込んで (正規化すれば) 「向き」のようなものを測っているともみれる. それが対称であるとは, 任意のベクトルの組  $(x, y)$  に対して, 引かれあうなら引かれ合う, 離れあうなら離れあうと, 対称な変換を施すことになる. したがって固有ベクトルの存在はある種の不動点定理の帰結のように理解できる.

実固有ベクトルの存在を示したい.  $\partial B$  上の点に注目すれば, 有限次元のときこれはコンパクトだから, どこかで最大値  $\|A\| =: \alpha \in \mathbb{R}_+$  を取る. この点  $x \in \partial B$  について,  $\alpha^2 = (Ax|Ax) = (x|AAx)$  となるから,  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  が固有値であるか,  $A$  が向きに関して対合であるだけで真の固有ベクトルは  $\alpha x + Ax$  であるかである:  $\alpha Ax + AAx = \alpha(Ax + \alpha x)$ .

また, 対称形式は直交性を保存するので, 固有ベクトルの中から直交基底を選び出せる.  $x \in \partial B$  を固有ベクトルとすると, その直交補空間の元  $u \in (\mathbb{R}x)^\perp$  について  $(Ax|u) = (x|Au)$  より,  $(\mathbb{R}x)^\perp$  は  $A$ -不変部分空間である. よって対称形式  $b$  は  $(\mathbb{R}x)^\perp$  に制限できて, 再びここには固有ベクトルが存在する.

直交変換の随伴が逆写像になることは、

### 1.7.4 対角化の理論

正規行列の可換系は一斉対角化可能である。

**命題 1.7.9** (正規行列の可換系は一斉対角化可能).  $V \in \text{FinVect}_{\mathbb{C}}, h: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  を正定値 hermite 形式とする.  $S \subset \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$  が次の2条件を満たすならば,  $V$  の  $h$ -正規直交基底であって,  $S$  の元を一斉に対角化するものが存在する.

- (1) 可換系である:  $\forall f, g \in S, f \circ g = g \circ f$ .
- (2) 正規である:  $\forall f \in S, f \circ f^* = f^* \circ f$ .

**補題 1.7.10** (随伴は多項式変換である).  $V \in \text{FinVect}_{\mathbb{C}}, f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$  を正規変換とする. このとき,  $\exists p \in \mathbb{C}[X] P(f) = f^*$  が成り立つ.

### 1.7.5 慣性律

対称行列は対角化可能で, 固有値が  $n$  個定まる. この符号の組は不変である. 言い換えれば,  $\text{FinVect}_{\mathbb{R}}$  上の対称形式  $= \mathbb{R}$  の二次形式には, 符号数が定まる.

**命題 1.7.11** (直交基底と law of inertia).  $V \in \text{FinVect}_{\mathbb{R}}$  とし,  $b$  をその上の対称形式とする.

- (1)  $b$  に関する直交基底  $x_1, \dots, x_n$  であって,  $b(x_i, x_i) \in \{0, \pm 1\}$  ( $i \in [n]$ ) を満たすものが存在する.
- (2) (慣性律)  $x_1, \dots, x_n$  と  $y_1, \dots, y_n$  を  $b$  に関する直交基底であって,

$$b(x_i, x_i) = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq r \text{ のとき,} \\ -1 & r < i \leq r+s \text{ のとき,} \\ 0 & r+s < i \leq n \text{ のとき,} \end{cases}$$

$$b(y_i, y_i) = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq r' \text{ のとき,} \\ -1 & r' < i \leq r'+s' \text{ のとき,} \\ 0 & r'+s' < i \leq n \text{ のとき,} \end{cases}$$

を満たすものとする. このとき,  $r = r', s = s'$  である.

[証明].

- (1) 系 1.7.3.2 より, 直交基底  $x_1, \dots, x_n \in V$  が存在する.  $b(x_i, x_i) \neq 0$  なる  $i \in [n]$  に対して,  $x_i$  を  $\frac{x_i}{\sqrt{|b(x_i, x_i)|}}$  で置き換えれば良い.
- (2)  $V$  の部分空間を次のように定める.

$$\begin{aligned} V_+ &= \langle x_1, \dots, x_n \rangle, & V_- &= \langle x_{r+1}, \dots, x_{r+s} \rangle, & V_0 &= \langle x_{r+s+1}, \dots, x_n \rangle \\ V'_+ &= \langle y_1, \dots, y_n \rangle, & V'_- &= \langle y_{r'+1}, \dots, y_{r'+s'} \rangle, & V'_0 &= \langle y_{r'+s'+1}, \dots, y_n \rangle \end{aligned}$$

系 1.7.3.3 より,  $V_+ \oplus V_-$  と  $V'_+, V'_-$  上で  $b$  は非退化だから,  $V_0 = V'_0 = V^\perp$ . 従って,  $\dim V_+ + \dim V_- = \dim V'_+ + \dim V'_- = \dim V - \dim V^\perp$ .

今,  $V_+ \supset V_+ \cap (V'_- \oplus V^\perp) = 0$  である. 何故なら, この元  $x \in V_+ \cap (V'_- \oplus V^\perp)$  は  $x \in V_+$  より  $b(x, x) \geq 0$  で,  $x \in V'_- \oplus V^\perp$  より  $b(x, x) \leq 0$  なので,  $b(x, x) = 0$  よって  $x \in \text{Ker } b = 0$  である. 同様に  $V_- \supset V_- \cap (V'_+ \oplus V^\perp) = 0$  であるから,

$$\dim V_+ + \dim V'_- \leq \dim V - \dim V^\perp, \quad \dim V'_+ + \dim V_- \leq \dim V - \dim V^\perp$$

2式の左辺の和は  $2(\dim V - \dim V^\perp)$  であるから, これは等号が成り立つ. 以上より,  $\dim V_+ = \dim V'_+, \dim V_- = \dim V'_-$

**定義 1.7.12 (positive definite, negative definite, signature).**  $V \in \text{Vect}_{\mathbb{R}}$  とし,  $b$  をその上の対称形式とする.

- (1) 次が成り立つとき,  $b$  を**正定値**という:  $\forall x \in V \setminus \{0\}, b(x, x) > 0$ .  $-b$  が正定値であることを, **負定値**であるという.
- (2) 命題の条件を満たす  $b$  に関する直交基底  $B = (x_1, \dots, x_n)$  について, 自然数の対  $(r, s) \in \mathbb{N}^2$  のことを,  $b$  の**符号数**という.
- (3)  $b$  の符号数が  $(r, s)$  であるとは,  $b$  を次のように表現する  $V$  の基底が存在するということである:

$$\begin{pmatrix} 1_r & 0 & 0 \\ 0 & 1_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (4) 従って,  $b$  が正定値とは, 符号数が  $(\dim V, 0)$  であり,  $b$  を単位行列に表現する  $V$  の基底が存在するような非退化対称形式をいう.

**補題 1.7.13.**  $V \in \text{FinVect}_{\mathbb{R}}$  について,

- (1)  $V$  上の正定値対称双線型形式は非退化である. これを**内積**という.
- (2)  $b$  が正定値ならば,  $V$  には正規直交基底が存在する.

## 1.8 テンソル積

双線型写像  $V \times W \rightarrow V'$  を分解するという普遍性を満たす対象  $V \otimes W$  が, 商空間として構成出来る. さらにその商として外積の空間が定まる.

## 第 2 章

# 自己準同型環の研究

自己準同型環  $\text{End}_K(V)$  は線形空間でもある，すなわち，代数をなす． $V$  が位相線形空間のときの Banach 代数  $B(V)$  に当たる．

さらに，環  $K[X]$  上の加群として見れる．

## 2.1 最小多項式

環準同型  $\rho : K[X] \rightarrow \text{End}(\text{End}_K(V))$  の核はイデアルになるが，その生成元  $\varphi$  を最小多項式という．固有多項式の知見と併せると  $\deg(\varphi) \leq \dim V$  がわかる．

記法 2.1.1.

$$\begin{array}{ccc} e : K[X] \times \text{End}_K(V) & \longrightarrow & \text{End}_K(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (F, f) & \longmapsto & F(f) \end{array}$$

を， $f^0 = \text{id}_V, f^2 := f \circ f$  で定める．

**命題 2.1.2 (環の作用).**  $e$  は環の作用である．すなわち， $\rho : K[X] \rightarrow \text{End}(\text{End}_K(V))$  は環準同型を定める：

- (1)  $\forall_{f \in \text{End}_K(V)} \forall_{F, G \in K[X]} (F + G)(f) = F(f) + G(f).$
- (2)  $\forall_{f \in \text{End}_K(V)} \forall_{F, G \in K[X]} (FG)(f) = F(f) \circ G(f).$

**命題 2.1.3 (最小多項式の well-definedness).**  $V \in \text{FinVect}_K, f \in \text{End}_K(V)$  とする．

$$I_f := \{F \in K[X] \mid F(f) = 0\}$$

は，0 を省けば， $K$  倍の違いを除いて  $\deg$  に関する最小元を持つ．そのうちモニックなものを**最小多項式**という．

[証明].

$I_f$  はイデアルである  $0 \in I_f$  である． $\forall_{F, G \in I_f} (F + G)(f) = F(f) + G(f) = 0$ ． $\forall_{F \in I_f, G \in K[X]} (FG)(f) = F(f) \circ G(f) = 0$ ．

**生成元が最小元である**  $K[X]$  は Euclid 整域，特に単項イデアル整域であるから，ある  $F \in I_f$  によって単項生成される．任意の  $f \in K[X]$  に対して， $g \in (f) \Leftrightarrow f|g$  であるから，Euclid 関数の性質より  $I_f$  の生成元が，求める最小元である．

■

**例 2.1.4 (スカラー倍の最小多項式).**

- (1)  $f$  がスカラー倍であることと，最小多項式の次数が 1 であることは同値．

## 第 3 章

# 加群論

線型空間とアーベル群とを含んださらに一般的な代数系「環の作用を受けるアーベル群」を、イデアルの考え方を基に定義する。すると、環自体が自身の上の加群と見做せ、イデアルはその部分加群である。

基本的に、ある代数的対象に対して、モノイドからの作用の付加を **module** という。本質的に群作用との関連が深い。

**記法.** 環を、単位的で可環とする。

### 3.1 定義と例

環の作用を受けるアーベル群を加群という。加群はベクトル束の一般化とみなせる。こうして、Geometry-Algebra duality と関係が深い。

**定義 3.1.1 (module on a ring, ring of scalars).** 零でない環  $A$  に対して左  $A$ -加群  $M$  とは、アーベル群  $M$  とそれへの左作用を定める環準同型  $\varphi: A \rightarrow \text{End}(M)$  の組  $(M, \varphi)$  をいう。  $a, b \in A, x, y \in M$  として公理を書き下せば次の通り。

- (1)  $\varphi(a) \in \text{End}(M): a(x + y) = ax + ay$ .
- (2) 和を保つ:  $(a + b)x = ax + bx$ .
- (3) 積を保つ:  $a(bx) = (ab)x$ .
- (4) 単位元を保つ:  $1x = x$ .

環  $A$  を**係数環**といい、その元をスカラーという。

**例 3.1.2.**

- (1)  $A = F$  が体のとき、 $F$ -加群とは  $F$ -線型空間をいう。これは一点上のベクトル束  $F \rightarrow 1$  とみなせる。
- (2)  $A = \mathbb{Z}$  のとき、 $\mathbb{Z}$ -加群とはアーベル群をいう。
- (3) アーベル群が自明群  $M = 1$  のとき、零  $A$ -加群という。これが  $R\text{Mod}$  の零対象である ( $R\text{Mod}$  もアーベル圏になる)。
- (4) 環  $R$  自体も、乗法を  $R$  の  $R$  自身への作用とみれば、 $R$ -加群である。より一般的に、環準同型  $\varphi: A \rightarrow B$  について、 $a \cdot b = \varphi(a)b$  ( $a \in A, b \in B$ ) によって  $B$  は  $A$ -加群とみなせる。
- (5)  $A$  の左イデアルとは、 $A$  の部分  $A$ -加群をいう。
- (6)  $X$  を位相空間とし、 $R := C(X, \mathbb{C})$  を連続関数環とする。複素ベクトル束  $E \rightarrow X$  の切断全体の空間  $\Gamma(E)$  は、各点で積を取る作用によって  $C(X, \mathbb{C})$ -加群となる。

**要諦 3.1.3 (interpretation of modules as generalized vector bundles).** こうして、最も一般的な例として、ベクトル束を考えられることを確認した。実際、加群はベクトル束の一般化だと考えられる。<sup>†1</sup>

<sup>†1</sup> In many contexts one regard modules as the canonical generalization of the notion of vector bundles, with better formal properties.

## 3.2 部分加群と生成

生成された部分加群には2つの同値な定義がある。構成する際には、写像の空間として  $R^{(S)}$  などとすれば良いが、これはたしかにベクトル束（の切断）の一般化になっているともみなせる。

### 3.2.1 部分加群

**定義 3.2.1 (submodule).**  $R$ -加群の部分集合  $N \subset M$  について、 $M$  の加法  $+: M \times M \rightarrow M$  と  $R$  作用  $R \times M \rightarrow M$  の  $N$  への制限の像が  $N$  に収まるとき、 $N$  を  $M$  の  $R$ -部分加群という。

**補題 3.2.2 (部分加群の特徴付け).**  $M$  を  $R$ -加群とし、 $N \subset M$  を部分集合とする。次の2条件は同値。

- (1)  $N$  は  $R$ -部分加群である。
- (2)  $\forall y, z \in N \ y - z \in N$  かつ  $\forall r \in R \ \forall y \in N \ ry \in N$ 。

**補題 3.2.3 (intersection, sum).**  $M$  を  $R$ -加群とする。

- (1)  $R$ -部分加群の族  $(N_i)_{i \in I}$  について、共通部分  $\bigcap_{i \in I} N_i$  も  $M$  の  $R$ -部分加群である。
- (2)  $R$ -部分加群の有限族  $(N_i)_{i \in [n]}$  について、和  $\sum_{i=1}^n N_i = \{y_1 + \cdots + y_n \in M \mid y_i \in N_i\}$  も  $R$ -部分加群である。

### 3.2.2 生成された部分加群

**定義 3.2.4 (generated submodule, system of generators, finitely generated).**  $S \subset M$  を部分集合とする。

- (1)  $[S]_R := \bigcap \{N \hookrightarrow M \mid N \text{ は } M \text{ の部分加群で } S \text{ を含む}\}$  を  $S$  で生成された  $R$ -部分加群という。
- (2)  $M = [S]_R$  を満たすとき、 $S$  を  $M$  の生成系という。
- (3)  $|S| < \infty$  を満たす生成系を持つとき、 $M$  を有限生成という。

**補題 3.2.5 (生成された部分加群の元の表示).**

$$[S]_R = \{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \in M \mid a_i \in R, x_i \in S, n \in \mathbb{N}\} \simeq_{\text{Set}} R^{(S)} = \{f \in R^S \mid \forall s \in S \ f(s) = 0 \text{ f.e.}\}.$$

[証明].

- ⊃  $[S]_R$  は演算について閉じている必要があるから、⊃ である必要がある。  
 ⊂ 右辺は  $S$  を含む  $M$  の  $R$ -加群となっている。  $[S]_R$  の最小性から。

■

### 3.2.3 商加群

**定義 3.2.6 (factor module / quotient module).**  $N$  を  $M$  の  $R$ -部分加群とする。加法群としての剰余群  $\overline{M} = M/N$  に対して、スカラー倍  $R \times \overline{M} \rightarrow \overline{M}$  を  $r\overline{x} = \overline{rx}$  で定めると、これは  $R$ -加群になる。これを剰余  $R$ -加群または商  $R$ -加群という。

### 3.2.4 ねじれ

加群において、ねじれと直交性が交差する。群におけるねじれとは位数有限な元であった。これは群に対する標準的な  $\mathbb{Z}$  の作用によって加群とみたときのねじれ元とみなせる。Hilbert 空間における直交補空間とは、2つ加群上に定義された双線型写像  $F: M \times N \rightarrow P$  に関する零化イデアルであった。

**定義 3.2.7 (annihilator, torsion element, torsion part).**  $M$  を  $R$ -加群とする。



- (1) 部分集合  $S \subset M$  に対して,  $\text{Ann}_R(S) := \{a \in R \mid \forall_{x \in S} ax = 0\}$  を零化イデアルという.
- (2)  $\text{Ann}(x) \neq 0$  を満たす元  $x$  をねじれ元という.
- (3) ねじれ元の全体  $M_0 := \{x \in M \mid \text{Ann}(x) \neq 0\}$  は部分  $R$ -加群をなす. これをねじれ部分という.
- (4)  $M_0 = 0$  のとき  $M$  をねじれなしといい,  $M_0 = M$  のとき  $M$  をねじれ  $R$ -加群という.

**例 3.2.8.**  $M = \mathbb{Z}/(m)$  ( $m \geq 2$ ) はねじれ加群である. 任意の元  $\bar{x} \in \mathbb{Z}/(m)$  に対して,  $m\bar{x} = 0$  である.

**議論 3.2.9** (annihilator and Galois connection). 加群の双線型写像  $M \times N \rightarrow P$  を介して定まる零化イデアルは,  $M$  と  $N$  の部分集合の間に Galois 対応を与え, これに伴う閉包演算子は  $\text{span}$  より強い:  $\text{Span}(S) \leq \text{Ann}(\text{Ann}(S))$ . Banach 空間においては, ノルム閉部分空間の生成の特徴付けにも使われた. Galois 接続とは, 部分群と部分体の間の対応の一般化で, 一般の順序集合の間の随伴関係  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$  s.t.  $\forall_{a \in A, b \in B} a \leq g(f(a)), b \leq f(g(b))$  をいう. 射  $\leq$  を同型 = としても成り立つとき, これを特に Galois 対応という.

**定義 3.2.10** (Galois connection induced from a relation). 一般の関係  $E \subset X \times Y$  について, これが定まる Galois 接続とは, 次の写像の組  $(V_E, I_E)$  を言う:

- (1)  $V_E: P(X) \rightarrow P(Y); S \mapsto P_E(S) := \{y \in Y \mid \forall_{x \in X} x \in S \Rightarrow E(x, y)\}$
- (2)  $I_E: P(Y) \rightarrow P(X); T \mapsto I_E(T) := \{x \in X \mid \forall_{y \in Y} y \in T \Rightarrow E(x, y)\}$

**命題 3.2.11** (closure operator from Galois connection).  $I_E \circ V_E, V_E \circ I_E$  は閉包演算子 (= 冪等モナド) である. すなわち, それぞれについて次の3条件が成り立つ:

- (1)  $\forall_{S \in P(X)} S \subset I_E \circ V_E(S)$ .
- (2)  $\forall_{S \in P(X)} V_E \circ I_E \circ V_E(S) = V_E(S)$ .
- (3)  $I_E \circ V_E$  は冪等で共変である.

## 3.3 加群の射

### 3.3.1 定義と可逆性

**定義 3.3.1** (homomorphism of modules).  $R$  加群の間の写像  $f: M \rightarrow M'$  が次の2条件を満たすとき,  $f$  を  $R$ -準同型という:

- (1)  $\forall_{x, y \in M} f(x + y) = f(x) + f(y)$ .
- (2)  $\forall_{r \in R} f(rx) = rf(x)$ .

**補題 3.3.2.**  $R$ -準同型  $f: M \rightarrow M'$  について, 次の2条件は同値.

- (1)  $f$  は可逆である.
- (2)  $f$  は全単射である.

### 3.3.2 標準分解

**定義 3.3.3** (image, kernel, cokernel, coimage).  $R$ -準同型  $f: M \rightarrow M'$  について,

- (1)  $\text{Im } f := \{f(x) \in M' \mid x \in M\}$  を像と呼ぶ.
- (2)  $\text{Ker } f := \{x \in M \mid f(x) = 0\}$  を核と呼ぶ.
- (3)  $\text{Coker } f := M'/\text{Im } f$  を余核と呼ぶ.
- (4)  $\text{Coim } f := M/\text{Ker } f$  を余像と呼ぶ.

**補題 3.3.4.**  $R$ -準同型  $f: M \rightarrow M'$  について,

- (1)  $\text{Im } f$  は  $M'$  の  $R$ -部分加群である.
- (2)  $\text{Ker } f$  は  $M$  の  $R$ -部分加群である.

**命題 3.3.5 (準同型定理).** 任意の  $R$ -準同型  $f: M \rightarrow M'$  は、自然な同型

$$\begin{array}{ccc} \bar{f}: M/\text{Ker } f & \xrightarrow{\sim} & \text{Im } f \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ x + \text{Ker } f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

を引き起こす。

### 3.3.3 射の集合

**定義 3.3.6 (dual module).**  $R$ -加群  $M$  について、 $M^* := \text{Hom}_R(M, R)$  は再び加群をなす。これを **双対加群** という。

## 3.4 加群の圏

### モノイド圏におけるモノイド対象上の加群

アーベル群から、環上の加群を作る構成は、一般のモノイド圏で定義できる。基本的にモノイド圏からの **stuff** の付加を **module** という。特に、 $R$  が体である場合を考えて  $\text{Vect}$  についての言及だと思つと、感慨深い。

**定義 3.4.1 (module over a monoid in a monoidal category).** モノイド圏  $(C, \otimes)$  におけるモノイド対象  $R \in C$  について、 $R$ -加群のなす圏を  $R\text{Mod}$  で表す。

**例 3.4.2.**  $C = \text{Ab}$  で  $\otimes$  がテンソル積であるとき、モノイド対象  $R$  とは環である。

**定義 3.4.3 (cokernel, kernel, zero morphism).**

- (1) 終対象  $1$  を持つ圏  $C$  において、射  $f: A \rightarrow B$  の **余核** とは、次の押し出し  $\text{Coker}(f) := 1 \sqcup_A B$  または  $\text{coker } f: B \rightarrow \text{Coker } f$  のことをいう：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \text{Coker}(f) \end{array}$$

- (2) 始対象  $0$  を持つ圏  $C$  において、射  $f: A \rightarrow B$  の **核** とは、次の引き戻し  $\text{Ker}(f) := 1 \sqcup_A B$  または  $\text{ker } f: \text{Ker } f \rightarrow A$  のことをいう：

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker}(f) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow p & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

- (3) 零対象  $0$  を持つ圏  $C$  において、標準的な射  $A \rightarrow 0, 0 \rightarrow B$  を合成して得られる射  $A \rightarrow B$  を、**零射**  $0_{AB}$  という。  
 (4) 零対象  $0$  を持つ圏において、射  $f$  の核とは零射  $0$  との等化子で、余核とは零射  $0$  との余等化子となる。

**例 3.4.4.**

- (1) 圏  $C = \text{Ab}$ ,  $R\text{Mod}$  では、 $\text{Coker}(f) = B/\text{Im } f$  である。  
 (2) 圏  $C = \text{Grp}$  では、 $\text{Coker}(f) = B/\langle \text{Im } f \rangle_{\text{nor}}$  である。

**定義 3.4.5 (additive category, pre-abelian, abelian).**

- (1) 零対象  $0$  をもち、有限積と有限和を備え、標準的な同型  $X \coprod Y \xrightarrow{\sim} X \coprod Y$  を備える圏を **加法圏** という<sup>†2</sup>。  
 (2) 任意の射が核と余核を持つような加法圏  $C$  を **プレ・アーベル圏** という。<sup>†3</sup>  
 (3) プレ・アーベル圏では、任意の射  $f: A \rightarrow B$  が標準分解  $A \xrightarrow{p} \text{Coker}(\text{ker } f) \xrightarrow{\bar{f}} \text{Ker}(\text{coker } f) \xrightarrow{i} B$  を持つ。

<sup>†2</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Additive\\_category](https://en.wikipedia.org/wiki/Additive_category)

<sup>†3</sup> 任意の極限とよ極限を持つ  $\text{Ab}$  上の豊穠圏、と定義しても良い。

(4) プレ・アーベル圏であって、次の同値な条件を満たす圏を**アーベル圏**という。

- (a) 任意の射  $f: A \rightarrow B$  が定める射  $\bar{f}: \text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$  が可逆である。したがって、標準分解が完全列  $A \rightarrow \text{Im } f \rightarrow B$  を与える。
- (b) 任意のモノ射が核で、任意のエピ射が余核である。

**注 3.4.6.** 加法圏は同値な定義があり、普通は  $\text{Ab}$  上の豊穡圏と導入される。

**命題 3.4.7.**  $R$  が可換環であるとき、 $R\text{Mod}$  はアーベル圏になる。

**命題 3.4.8.**  $R\text{Mod}$  の射がモノ／エピであることと、 $U: R\text{Mod} \rightarrow \text{Set}$  の像がモノ／エピ（したがって単射・全射）であることは同値。<sup>†4</sup>

**注 3.4.9.** 任意のアーベル圏は **balanced** であることと合わせると、補題 3.3.2 の主張を得る。

**命題 3.4.10.**  $R\text{Mod}$  は任意の積と余積を持つ。ただし積とは、集合の直積上に各点毎の演算を定義したもので、余積は、集合の直積の有限個の成分のみが零でない元からなる部分加群である。したがって、有限の場合は積と余積は同型。

## 3.5 直和と自由加群

加群の直和とは、台となるアーベル群の直和の上に作用を（各点積として）延長したものとする。するとこれは、ベクトル束の直和（Whitney 和ともいう）の「双対」とも捉えられる。

**命題 3.5.1.** 和  $N = N_1 + \cdots + N_n$  に対して、次の3条件は同値。

- (1) 直和である： $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$ 。すなわち、和の表し方は一意的である。
- (2) 線型独立： $\forall y_1 \in N_1, \dots, y_n \in N_n \quad y_1 + \cdots + y_n = 0 \Rightarrow y_1 = \cdots = y_n = 0$ 。
- (3)  $\forall i=1, \dots, n-1 \quad (N_1 + \cdots + N_i) \cap N_{i+1} = 0$ 。

**定義 3.5.2.** 部分集合  $B \subset M$  であって、 $R$  上線型独立かつ  $M$  の生成元であるものが存在するとき、 $M$  は**自由  $R$ -加群**であるといい、 $B$  を**基底**であるという。

**補題 3.5.3.** 集合  $S$  上に生成される自由加群  $R^{(S)}$  は、次のような直和で表せる： $R^{(S)} \simeq \bigoplus_{s \in S} R$ 。

**定理 3.5.4.**  $M$  を有限生成自由  $R$ -加群とする。 $M$  の任意の基底は有限個の元からなり、その濃度は一定である。

**定義 3.5.5 (rank of a ring).**  $M$  の**階数**とは、 $M$  の基底の元の数とし、 $\text{rank } M$  と表す。

## 3.6 単因子論

一般の単項イデアル整域について、標準形の理論が成り立つ。これは、有限生成単項イデアル整域係数加群について、構造定理が成り立つことによる。単因子の計算法は、行列式因子が与える（定理の証明抽出）。

**記法 3.6.1 (fundamental matrix).** 次の基本行列の定める左作用を考える（行基本変形）。これらの基本行列はユニモジュラーである。

- (1)  $P_n(i, j)$  を、単位行列の  $i$  行と  $j$  行を入れ替えたもので、行の入れ替え変換に対応する行列とする。
- (2)  $Q_n(i; -1)$  を、単位行列の  $a_{ii}$  成分の符号を反転させたもので、行の  $-1$  倍変換に対応する行列とする。
- (3)  $R_n(i, j; c)$  を、単位行列に  $a_{ij}$  成分だけ  $c$  である行列を足したもので、行の定数倍を加える変換に対応する行列とする。

同様の行列の右作用を考えると、同種の列基本変形に対応する。

**定義 3.6.2 (unimodular).** 環  $M_n(\mathbb{Z})$  の可逆元を**単模行列**といい、これがなす群を  $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$  で表す。一般の単項イデアル整域  $R$

<sup>†4</sup> <https://ncatlab.org/nlab/show/Mod>

について、環  $M_n(R)$  の元で行列式が単元になる行列を単模行列という。  $R$  が体のとき、行列が単模であることと正則であることは同値。

### 3.6.1 整数行列

**定理 3.6.3 ((Smith) normal form).** 任意の  $A \in M_{mn}(\mathbb{Z})$  は、  $\forall 1 \leq i \leq r-1 \ e_i | e_{i+1}$  を満たす自然数の組  $(e_1, \dots, e_r)$  が一意的に存在して、標準形  $\text{diag}(e_1, \dots, e_r, 0, \dots, 0)$  と相似である。

**注 3.6.4.** 一般の単項イデアル整域  $R$  については、  $\forall 1 \leq i \leq r-1 \ (e_i) \supset (e_{i+1})$  という条件になり、一意性は単元倍を除いて定まる。

**定義 3.6.5.** 任意の  $A \in M_{mn}(\mathbb{Z})$  について、  $(e_1, \dots, e_r)$  を単因子といい、  $r$  を階数という。

**例 3.6.6.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

**系 3.6.7 (ユニモジュラー行列の特徴付け).**  $A \in M_n(\mathbb{Z})$  がユニモジュラー行列であるとき、  $A$  は基本行列の積として表せる（し、逆もなりたつ）。

**[証明].** ユニモジュラー行列について、その  $n$  次の行列式因子は  $d_n = |\det A| = e_1 \cdots e_n = 1$  となる（行列式因子は最大公約数なので正の値である）。ゆえに、  $e_i$  の間の整除関係より、  $\forall i \in [n] \ e_i = 1$  を得る。すなわち、基本行列の積  $P, Q$  が存在して、  $PAQ = E \Leftrightarrow A = P^{-1}Q^{-1}$  と基本行列の積で表せる。 ■

### 3.6.2 係数多項式の行列

$M_n(K[x])$  の元を、  $x$ -行列と呼ぶこととすると、これは  $M_n(K)$  の一般化である。また、これは行列係数の多項式環  $M_n(K)[x]$  と自然に同一視できる。

**定義 3.6.8.**  $n$  次の  $x$ -行列  $A(x)$  のすべての  $k$  次小行列式の（モニックな）最大公約数を、  $A(x)$  の  $k$  次行列式因子といい、  $d_k(x)$  で表す。  $d_k(x) = 0$  とは、  $k$  次小行列式がすべて 0 であることとする。

**補題 3.6.9 (行列式因子は行列の相似類を特徴付ける).** 相似な行列の間で、  $n$  個の行列式因子は一致する。

**[証明].** 基本変形によって、行列式因子は変わらないことを示せば良い。

基本変形のうち、行の交換・他の行に  $K^*$ -倍を加える変換は、  $A(x)$  の小行列全体の集合を、各元の単元倍しか変えないため、行列式因子を変えない。 ■

**定理 3.6.10.** 任意の  $n$  次  $x$ -行列  $A(x)$  は、一意的な標準形  $\text{diag}(e_1, \dots, e_r, 0, \dots, 0)$  に対等である。ただし、  $e_i(x)$  はモニックな多項式で、  $e_i(x)$  は  $e_{i-1}(x)$  で割り切れるとする。

**[証明].**

**存在**  $n > 1$  についての数学的帰納法により証明する。

- (1)  $A(x) = O$  のとき、これはすでに標準形である。  $A(x) \neq O$  のとき、基本変形によって、  $A(x)$  と対等な行列であって、  $(1, 1)$ -成分が 0 でないものが存在する。そのようなものの中で、  $(1, 1)$ -成分の次数が最小であるものを一つ取る。基本変形により、特に  $(1, 1)$ -成分がモニックであるもの

$$B(x) = \begin{pmatrix} e_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

が取れる。

- (2) この  $B(x)$  の第 1 行・第 1 列の成分は、すべて  $e_1$  で割り切れる。

実際,  $e_1 \mid b_{1j}$  と仮定すると,  $K[x]$  は  $\deg : K[x] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$  を Euclid 関数とする Euclid 整域だから, ある  $r, q \in K[x]$  が存在して,  $\deg(r) < \deg(e_1)$  かつ  $b_{1j} = e_1 q + r$  を満たす. すると,  $b_{1,j}$  を  $(1, 1)$ -成分へ移動し,  $e_1$  の  $q$  倍を引くと,  $B(x)$  の取り方に矛盾する. こうして,  $B(x)$  と対等な行列

$$C(x) = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & \ddots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

を得る.

- (3) 帰納法の仮定より,  $(c_{ij})_{2 \leq i, j \leq n}$  と対等な行列  $\text{diag}(e_2, \dots, e_r, 0, \dots, 0)$  が存在する. これについて,  $e_1 \mid e_2$  を示せば良い.  $e_2 = e_1 q + r$  かつ  $r = 0 \vee \deg(r) \leq \deg(e_1)$  である.  $r \neq 0$  ならば, 基本変形により,  $C(x)$  に対等な行列で  $(1, 1)$ -成分が  $r$  であるものが作れる. これは  $e_1$  の選び方に矛盾するから,  $r = 0$  である.

すなわち,  $C(x)$  は  $D(x) = \text{diag}(e_1, \dots, e_r, 0, \dots, 0)$  に対等である.

**一意性**  $D(x)$  の  $n$  個の行列式因子は明らかに

$$d_k(x) = \begin{cases} e_1(x) \cdots e_k(x), & k \leq r, \\ 0, & k > r, \end{cases}$$

である. これより,  $\forall k \in [r] \ e_k = \frac{d_k}{d_{k-1}}$  と表せるから,  $(d_k)$  が一意であるのと同様に,  $(e_k)$  も一意である. ■

**要諦 3.6.11.** なるほど, 環上の加群論はたしかに環論の応用である.

**系 3.6.12 (行列の相似性の特徴付け).**  $x$ -行列  $A(x), B(x)$  について, 次の2条件は同値.

- (1)  $A, B$  は対等である.
- (2)  $A, B$  の階数  $r$  と単因子  $e_1, \dots, e_r$  が一致する.
- (3)  $B = PAQ$  となるような2つの可逆行列  $P, Q \in \text{GL}_n(K[x])$  が存在する.

**系 3.6.13.**

- (1)  $x$ -行列が可逆であることと, 単位行列に対等であることは同値.
- (2) 任意の可逆行列は基本行列の積として表せる.
- (3) 可逆行列は, 左または右基本変形のどちらか一方のみで単位行列に変換される.

### 3.6.3 特性行列

$x$ -行列に対して単因子論が必要であったが,  $M_n(K)$  の標準形の理論にどうつながるかといえば, 特性行列としてつながる.

**定義 3.6.14 (characteristic matrix).** 行列  $A \in M_n(K)$  に対し,  $x$ -行列  $xE - A$  を,  $A$  の**特性  $x$ -行列**という.

**定義 3.6.15 (degree).**

$$A(x) = A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots + A_{k-1} x + A_k, \quad A_0 \neq 0$$

によって, 自然な同一視  $M_n(K[x]) \simeq M_n(K)[x]$  が導かれる. このとき  $k$  を,  $A(x)$  の**冪次数**という.

**定理 3.6.16.**  $A, B \in M_n(K)$  について, 次の2条件は同値.

- (1)  $A, B$  は相似である:  $A \sim B$ . すなわち,  $\exists P \in \text{GL}_n(K) \ B = P^{-1}AP$ .
- (2) 特性  $x$ -行列  $xE - A, xE - B$  は対等である.

**系 3.6.17.**  $A \in M_n(K)$  は,  ${}^t A$  に相似である.

**命題 3.6.18.**

(1) 冪次数  $k$  の  $x$ -行列  $P(x) \in M_n(K[x])$  が

$$\begin{aligned} P(x) &= P_0x^k + P_1x^{k-1} + \cdots + P_{k-1}x + P_k, \quad P_0 \neq O, \\ P(x) &= P_1(x)(xE - B) + P \end{aligned}$$

と表されるとき、このとき、

$$P = P_0B^k + P_1B^{k-1} + \cdots + P_{k-1}B + P_k$$

となる。

(2) 冪次数  $k$  の  $x$ -行列  $Q(x) \in M_n(K[x])$  が

$$\begin{aligned} Q(x) &= Q_0x^l + Q_1x^{l-1} + \cdots + Q_{l-1}x + Q_l, \quad Q_0 \neq O, \\ Q(x) &= (xE - A)Q_1(x) + Q \end{aligned}$$

と表されるとき、このとき、

$$Q = A^lQ_0 + A^{l-1}Q_1 + \cdots + AQ_{l-1} + Q_l$$

となる。

### 3.7 Jordan 標準形と最小多項式

### 3.8 有限生成アーベル群の基本定理

有限次元線型空間論における定理  $V \simeq K^n$  の、一般の単項イデアル整域  $R$  上の  $R$ -有限生成加群への一般化である。可逆性の特徴付けは、行列式が  $R^\times$  であることとなる。ここでは、 $R = \mathbb{Z}$  の場合について示す。

**定理 3.8.1.**  $R$  を単項イデアル整域、 $M$  を自由  $R$ -加群で  $\text{rank}M = m$  とする。このとき、 $M$  の任意の  $R$ -部分加群  $N$  も自由  $R$ -加群で、 $\text{rank}N \leq m$  が成り立つ。

**例 3.8.2** (線形空間論との違い).  $M = \mathbb{Z}, N = 2\mathbb{Z}$  とすると、 $N \subset M$  であるが、 $\text{rank}M = \text{rank}N$  である。

**定理 3.8.3.**  $M$  を有限生成自由  $\mathbb{Z}$ -加群、 $N$  を  $M$  の  $\mathbb{Z}$ -部分加群とする。このとき、 $N$  も自由  $\mathbb{Z}$ -加群で  $\text{rank}N \leq \text{rank}M$  となり、また、 $e_1|e_2|\cdots|e_s$  を満たす一意的な  $e_1, \dots, e_s \in \mathbb{N}$  が存在し、 $M$  のある基底  $\{u_1, \dots, u_r\}$  について、 $\{e_1u_1, \dots, e_su_s\}$  ( $s \leq r$ ) が  $N$  の基底になるように出来る。

**系 3.8.4.** 有限生成アーベル群  $M$  は、次の巡回群の直積と同型になる： $\mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/\langle e_1 \rangle \times \cdots \times \mathbb{Z}/\langle e_s \rangle$ 。ただし、 $e_i$  は 2 以上の自然数で、 $e_1|\cdots|e_s$  を満たし、 $r$  と  $e_1, \dots, e_s$  は  $M$  に対して一意的に定まる。

## 第 4 章

# ホモロジー代数

Cartan Eilenberg (1956 [9]) が最初の書物である.

## 第 5 章

# 可換環論



## 第 6 章

# 体論

## 第 7 章

# 非可換環論

## 第 8 章

# 単純環論

## 第 9 章

# 代数解析

$\mathfrak{b}$  関数の創始者は佐藤幹夫であるが、多項式関数に関する  $\mathfrak{b}$  関数に限っては初等的に証明できることを Bernstein (1972) が示した。柏原正樹と Björk はこの理論を代数解析を用いて正則関数に拡張した [5]。

### 9.1 Weyl 代数

**歴史 9.1.1.** 多項式係数の偏微分作用素のなす環を Weyl 代数と呼んだのは Dixmier である。量子力学の出発点として有名なのが Heisenberg の交換関係式  $[q_i, p_i] = \sqrt{-1}\hbar\delta_{ij}$  によって定まる Lie 環を Heisenberg 環と呼ぶが、特殊化  $\hbar \mapsto \sqrt{1}$ ,  $q_i \mapsto X_i$ ,  $p_j \mapsto \partial_j$  を考えると、この展開環の原始剰余環が Weyl 環である。量子力学の運動方程式は Heisenberg 環のユニタリ表現を考えるが、Weyl 代数上の加群を考えることはその代数的形式化である。なお、Weil の 60 年代の研究は、Heisenberg 環を一般に  $p$ -進体上で考え、その表現論を展開することにより整数論の 2 次形式の理論、2 次剰余の相互法則などの整数論的世界との深い結びつきを発見したような研究であった。

**記法 9.1.2.**  $R$  を可換環、 $R[X] := R[X_1, \dots, X_n]$  と略記し、 $\text{End}_R R[X]$  を  $R$ -加群とみる。

**定義 9.1.3.**

(1)  $\theta \in \text{End}_R R[X]$  が  $R$  上の導分であるとは、

$$\forall f, g \in R[X] \quad \theta(fg) = \theta(f)g + f\theta(g)$$

を満たすことをいう。

(2)  $R$  上の導分全体の集合を  $\text{Der}_R R[X] = \bigoplus_{i=1}^n R[X]\partial_i$  と表すと、これは階数  $n$  の自由加群である。

(3) 多項式乗法による作用による単射  $R[X] \hookrightarrow \text{End}_R R[X]$  で同一視し、 $R[X], \text{Der}_R R[X]$  で生成される  $\text{End}_R R[X]$  の部分環を  $R$  上  $n$  次の **Weyl 代数**といい、 $A_{n,R}$  または  $W_n(R)$  で表す。

## 第 10 章

# 束論と量子論理

### 10.1 背景

歴史 10.1.1 (基礎論・代数・幾何・解析に跨る束論).

- (1) Boole は不変式論の創始から、論理代数の研究 (1847<sup>†1</sup>) から Boole 束にも名前を残しており、これは集合論・論理学と関わりの深い基礎論的な話題である。現在でも Boole 束は集合体と関係が深い。後の Birkhoff, Stone の貢献も大きい。 $\sigma$ -完備 Boole 束の表現は Loomis (1947) からである。
- (2) その後、代数系として、そして幾何学的にはマトロイド束 (初めは幾何束と呼ばれた) とモジュラー可補束が研究された。モジュラー束の定義は Dedekind (1900) による。1930s に Birkhoff, von Neumann の手によって束論が急激に発展した。モジュラー可補束は von Neumann が定義した。 $\wedge, \vee$  の記法も Birkhoff の教科書の第 3 版からである。
- (3) そしてここから、Hilbert 空間論と量子力学に関係の深い、解析的な束論、オーソモジュラー束 (初めは弱モジュラー直交可補束と呼んでいた) の理論が再燃した。
- (4) 現代では量子論理学に応用される (Birkhoff and Neumann 1936<sup>†2</sup> からだが、その次は Mackey 1957<sup>†3</sup>)。というのも、von Neumann 環の射影元は束を作り、von Neumann 環の分類理論の道具になる。Hilbert 空間の閉部分空間はオーソモジュラー束をなし、量子力学の関連からも注目されている。Holland によると、作用素環論の産んだ長男が連続幾何学とするならば、次男はオーソモジュラー束の理論であるという。Loomis (1955) が産んだ。

---

<sup>†1</sup> *The Mathematical Analysis of Logic*

<sup>†2</sup> *The logic of Quantum Mechanics*

<sup>†3</sup> *Quantum Mechanics and Hilbert Spaces*

## 第 11 章

## 参考文献

## 参考文献

- [1] 斎藤毅『数学原論』
- [2] 山崎圭次郎『群と加群』（岩波基礎数学選書）.
- [3] 桂利行『環上の加群』（東京大学出版会，大学数学の入門，代数学 2）.
- [4] 清水勇二『圏と加群』（朝倉書店，現代基礎数学 16）.
- [5] 堀田良之 (1987) 『代数入門』（数学シリーズ，裳華房）.
- [6] 柏原正樹，河合隆裕，木村達雄 (1980) 『代数解析学の基礎』（紀伊國屋書店）.
- [7] 草場公邦 (1979) 『行列特論』（裳華房）.
- [8] 彌永昌吉，有馬哲，浅枝陽 (1990) 『詳説 代数入門』（東京図書株式会社）.
- [9] Cartan, H., and, Eilenberg, S. (1956). *Homological Algebra*. Princeton Univ. Press.
- [10] MacLane, S. S. (1967). *Homology*. Springer-Verlag.
- [11] Jans, J. P. (1964). *Rings and homology*. Athena Series, Holt, Reinehart and Winston.  $\text{Tor}_d(V, W)$  や  $\text{Ext}^d(V, W)$  と可換環との関わりについて手軽に学べる本.
- [12] 前田周一郎 (1980) 『束論と量子論理』（数学選書，槇書店）