偏微分方程式論レポート
12 月 22 日発表分

05-210520 司馬博文

2022 年 12 月 20 日

問題 1.5 . 次の境界値問題の十分速く減衰する古典解 u について，$E'=0$ in $\mathbb{R}^+$ を示せ.

(1)

$$\begin{cases} u_{tt}+Ku_{xxxx}=0, & x,t>0, \\ u(0,t)=u_t(0,t)=0, & t>0. \end{cases} \qquad K>0,$$

に対して，

$$E(t):=\frac{1}{2}\int_0^\infty (u_t^2+Ku_{xx}^2)dx.$$

(2)

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0, & \text{in } (0,L)\times(0,\infty), \\ u_x(0,t)+Au(0,t)=0, & t>0, \\ u_x(L,t)+Bu(L,t)=0, & t>0. \end{cases} \qquad c>0,\ a,b\in\mathbb{R},$$

に対して，

$$E(t):=\frac{1}{2}\int_0^L (u_t^2+c^2u_x^2)dx+\frac{1}{2}au(0,t)^2+\frac{1}{2}bu(L,t)^2, \qquad a,b\in\mathbb{R}.$$

[解].

(1) u とその 4 階までの微分が十分速く減衰するとき，微分と積分の記号を交換することで

$$\frac{dE(t)}{dt}=\frac{1}{2}\int_0^\infty (2u_tu_{tt}+2Ku_{xx}u_{xxt})dx=\int_0^\infty (u_tu_{tt}+Ku_{xx}u_{txx})dx$$

と計算できる．u は古典解と仮定しており，十分滑らかだとするから，$u_{xxt}=u_{txx}$ が成り立つことを用いた．するとこの最右辺の第二項は，部分積分により，

$$\int_0^\infty u_{xx}u_{txx}dx=\Big[u_{xx}u_{tx}\Big]_0^\infty-\int_0^\infty u_{xxx}u_{tx}dx=-\int_0^\infty u_{xxx}u_{tx}dx$$

と計算できる．なお，減衰条件より $u_{xx}(\infty,t)u_{tx}(\infty,t)=0$ で，さらに境界条件 $u_x(0,t)=0$ から $u_{xt}(0,t)=0$ より，$u_{xx}(0,t)u_{tx}(0,t)=0$ であることを用いた．よって，再び部分積分を用いれば，

$$-\int_0^\infty u_{xxx}u_{tx}dx=-\Big[u_{xxx}u_t\Big]_0^\infty+\int_0^\infty u_{xxxx}u_tdx=\int_0^\infty u_{xxxx}u_tdx$$

を得る．ただし，$u(0,t)=0$ より $u_t(0,t)=0$ が従うことを用いた．以上より，

$$\frac{dE(t)}{dt}=\int_0^\infty u_t(u_{tt}+Ku_{xxxx})dx=0.$$

(2) $a=-A, b=B$ と定めれば良い．まず，(1) と同様にして微分は

$$\frac{dE(t)}{dt}=\int_0^L (u_tu_{tt}+c^2u_xu_{xt})dx+au(0,t)u_t(0,t)+bu(L,t)u_t(L,t)$$

と計算できる．$u_{xt}=u_{tx}$ に注意すれば，第一項は部分積分より，

$$\int_0^L u_xu_{xt}dx=\Big[u_xu_t\Big]_0^L-\int_0^L u_{xx}u_tdx$$

$$
\begin{aligned}
&= u_x(L,t)u_t(L,t) - u_x(0,t)u_t(0,t) - \int_0^L u_{xx}u_t dx \\
&= -Bu(L,t)u_t(L,t) + Au(0,t)u_t(0,t) - \int_0^L u_{xx}u_t dx.
\end{aligned}
$$

ただし，最後の等号では，2 つの境界条件を用いた．以上の考察より，

$$
\begin{aligned}
\frac{dE(t)}{dt} &= \int_0^L u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx})dx - Bu(L,t)u_t(L,t) + Au(0,t)u_t(0,t) + au(0,t)u_t(0,t) + bu(L,t)u_t(L,t) \\
&= (b-B)u(L,t)u_t(L,t) + (A+a)u(0,t)u_t(0,t)
\end{aligned}
$$

であるが，$b = B, a = -A$ としたから，これは $= 0$ である．

■