偏微分方程式論 レポート
12 月 8 日発表分

05-210520 司馬博文

2023 年 1 月 30 日

概要

12 月 8 日発表分の問題に付属されたレポート問題を 4 題とも解きました．全体を通じて [Evans, 2010] を参考にしました．

問題 1.5 (熱方程式の球面平均定理). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域，$Q_T := Q \times (0,T]$ $(T>0)$ とし，$u \in C^{2,1}(Q_T)$ は $u_t - \triangle u = 0$ in Q_T を満たすとする．このとき，任意の熱球 $E(x,t;r) \Subset Q_T$ に対して，次が成り立つ：

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x,t;r)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dyds.$$

[証明]. 熱球 $E(x,t;r) \Subset Q_T$ を任意にとる．すると，平行移動した関数 $v(y,s) := u(y+x, s+t)$ を考えると，

$$(y+x, s+t) \in E(x,t;r) \quad \Leftrightarrow \quad (y,s) \in E(0,0;r)$$

に注意すれば，

$$v(x,t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(0,0;r)} v(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dyds$$

を示せばよい．以降，v を u と書き，$E(0,0;r)$ を $E(r)$ と書く．

Step1 関数

$$\phi(r) := \frac{1}{r^n} \iint_{E(r)} u(y,s) \frac{|y|^2}{s^2} dyds$$

の微分を考える．まず，

$$r^n \Phi(y,s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(s/r^2)}^n} e^{-\frac{|y/r|^2}{s/r^2}} = \Phi(y/r, s/r^2)$$

に注意すれば，変数変換 $x := y/r, t := s/r^2$ により

$$\phi(r) = \frac{1}{r^n} \iint_{E(1)} u(rx, r^2t) \frac{r^2|x|^2}{r^4t^2} r^n dx r^2 dt = \iint_{E(1)} u(rx, r^2t) \frac{|x|^2}{t^2} dxdt.$$

と書き直せる．するとこの微分は

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= \iint_{E(1)} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i} x_i \frac{|x|^2}{t^2} + 2ru_t \frac{|x|^2}{t} \right) dxdt \\
&= \frac{1}{r^{n+2}} \iint_{E(r)} \left(\sum_{i=1}^n u_{y_i} \frac{y_i}{r} \frac{r^2|y|^2}{s^2} + 2ru_s \frac{|y|^2}{s} \right) dyds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(\sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2u_s \frac{|y|^2}{s} \right) dyds =: A + B.
\end{aligned}$$

と計算できる．

Step2 まず B を評価することを考える．いま，

$$\partial E(r) = \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; s \leqslant 0, \Phi(-y,-s) = \frac{1}{r^n} \right\}$$

上では

$$\Phi(-y,-s) = \frac{1}{(-4\pi s)^{n/2}} e^{\frac{|y|^2}{4s}} = \frac{1}{r^n}$$

より，特に

$$\psi(y,s) := \log \Phi(-y,-s) - \log r^{-n} = -\frac{n}{2}\log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n\log r = 0, \qquad (y,s) \in \partial E(r)$$

に注目する．以降，

$$\psi_s(y,s) = -\frac{n}{2}\frac{1}{s} - \frac{|y|^2}{4s^2}, \quad \psi_{y_i}(y,s) = \frac{y_i}{2s}.$$

を用いる．y_i に関する部分積分により，B は

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(\sum_{i=1}^{n} 2u_s \frac{y_i^2}{s} \right) dyds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(4\sum_{i=1}^{n} u_s y_i \psi_{y_i} \right) dyds \\
&= -\frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 4\sum_{i=1}^{n} (u_{sy_i} y_i \psi +_s \psi)\, dyds \\
&= -\frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(4nu_s\psi + 4\sum_{i=1}^{n} u_{sy_i} y_i \psi \right) dyds.
\end{aligned}$$

と変形できる．引き続き第二項に，s に関する部分積分を考えることで，

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(-4nu_s\psi + 4\sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i \psi_s \right) dyds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(-4nu_s\psi + 4\sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i \left(-\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2} \right) \right) dyds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(-4nu_s\psi - \frac{2n}{s}\sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i \right) dyds - \underbrace{\frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \frac{|y|^2}{s^2} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i dyds}_{=A}
\end{aligned}$$

Step3 以上の計算と，u が熱方程式の解であることを併せれば，部分積分から

$$\begin{aligned}
\psi'(r) = A + B &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(-4nu_s\psi - \frac{2n}{s}\sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i \right) dyds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(-4n \underbrace{\triangle u \psi}_{=\sum_{i=1}^{n} u_{y_i y_i}\psi} - \frac{2n}{s}\sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i \right) dyds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \sum_{i=1}^{n} \left(4nu_{y_i}\psi_{y_i} - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i \right) dyds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \iint_{E(r)} u_{y_i} \left(4n\psi_{y_i} - \frac{2n}{s} y_i \right) dyds = 0.
\end{aligned}$$

が解る．よって関数 ψ は定数であるから，次の補題より，

$$\phi(r) = \lim_{r\to 0} \phi(r) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n} \iint_{E(r)} u(y,s) \frac{|y|^2}{s^2} dyds$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{r\to 0} \iint_{E(1)} u(rx, r^2 t) \frac{|x|^2}{t^2} dx dt \\
&= u(0,0) \iint_{E(1)} \frac{|x|^2}{t^2} dx dt = 4u(0,0).
\end{aligned}
$$

を得る．途中の収束は，$E(1)$ がコンパクトであることに注意すれば，$\{u(rx, r^2 t)\}_{0\leqslant r\leqslant 1}$ がすべて可積分であるため，Lebesgue の優収束定理による．

■

補題.

$$
\iint_{E(1)} \frac{|x|^2}{t^2} dx dt = 4.
$$

[証明].

$$
E(1) = \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; s \leqslant 0, \Phi(-y,-s) \geqslant 1 \right\}
$$

であるが，

$$
\begin{aligned}
\Phi(-y,-s) = (-4\pi s)^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{\frac{|y|^2}{4s}} &\geqslant 1 \\
\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{|y|^2}{4s}} &\geqslant (-4\pi s)^{\frac{n}{2}} \\
\Leftrightarrow \frac{|y|^2}{4s} &\geqslant \frac{n}{2} \log(-4\pi s) \\
\Leftrightarrow |y|^2 &\leqslant 2ns \log(-4\pi s).
\end{aligned}
$$

と同値変形できる．$\mathrm{e}^{\frac{|y|^2}{4s}} \leqslant 1$ に注意すれば，$s \in \left[-\frac{1}{4\pi}, 0 \right]$ が必要であるため，特に $E(1)$ はコンパクトで，次のように表せる：

$$
E(1) = \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; -\frac{1}{4\pi} \leqslant s \leqslant 0, |y|^2 \leqslant 2ns \log(-4\pi s) \right\}.
$$

$R := \sqrt{2ns \log(-4\pi s)}$ とおく．よって，積分は次のように計算できる：

$$
\begin{aligned}
\iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds &= \int_{-1/4\pi}^{0} \int_0^R \int_{\partial B(0,r)} \frac{r^2}{s^2} dS dr ds \\
&= \int_{-1/4\pi}^{0} \int_0^R \frac{n\omega_n r^{n+1}}{s^2} dr ds && \because |\partial B(0,r)| = r^{n-1} n\omega_n \\
&= \int_{-1/4\pi}^{0} \frac{n\omega_n}{s^2} \frac{R^{n+2}}{n+2} ds \\
&= \frac{2n}{n+2} (2n)^{n/2} n\omega_n \int_{-1/4\pi}^{0} s^{\frac{n-2}{2}} (\log(-4\pi s))^{\frac{n+2}{2}} ds.
\end{aligned}
$$

ここで，変数変換 $z := -\log(-4\pi s)$ より，

$$
\begin{aligned}
\int_{-1/4\pi}^{0} s^{\frac{n-2}{2}} (\log(-4\pi s))^{\frac{n+2}{2}} ds &= \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-z}}{4\pi} \right)^{\frac{n}{2}} z^{\frac{n+2}{2}} dz \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-w} w^{\frac{n}{2}+2-1} \left(\frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{2}+2} dw \\
&= \frac{1}{(2n\pi)^{n/2}} \frac{4}{n^2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 2 \right).
\end{aligned}
$$

と計算できるから，n 次元単位球の表面積の関係

$$
n\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}
$$

に注意すれば，総じて，

$$
\iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = \frac{2n}{n+2} (2n)^{n/2} n\omega_n \frac{1}{(2n\pi)^{n/2}} \frac{4}{n^2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 2 \right)
$$

$$= \frac{2n}{n+2}2\frac{4}{n^2}\frac{n+2}{2}\frac{n}{2} = 4.$$

■

問題 1.6 (強最大値原理). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域，$Q_T := Q \times (0,T]$ $(T>0)$ とし，$u \in C^{2,1}(Q_T)$ は $u_t - \triangle u = 0$ in Q_T を満たすとする．このとき，ある点 $(x_0,t_0) \in Q_T$ において $u(x_0,t_0) = \max_{\overline{Q_T}} u$ を満たすならば，u は $\overline{Q_{t_0}}$ 上定数であることを示せ．

[証明]. 点 $(x_0,t_0) \in Q_T$ にて $u(x_0,t_0) = \max_{\overline{Q_T}} u =: M$ を達成するとする．

Step1 任意の $E(x_0,t_0;r) \subset Q_T$ について，平均値の定理から

$$M = u(x_0,t_0) = \frac{1}{4r^n}\iint_{E(x_0,t_0;r)} u(y,s)\frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}dyds$$

が成り立つが，補題より，

$$\frac{1}{4r^n}\iint_{E(x_0,t_0;r)} \frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}dyds = 1$$

であることから，

$$\iint_{E(x_0,t_0;r)} \Big(u(y,s) - M\Big)\frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}dyds = 0.$$

u が連続であることと併せれば，$u \equiv M$ on $E(x_0,t_0;r)$ を得る．

Step2 $(y_0,s_0) \in Q_T$ で $s_0 < t_0$ を満たす点と (x_0,t_0) とを結ぶ線分 L は Q_T に含まれるとすると，$u \equiv M$ on L である．
実際,

$$r_0 := \min\left\{s \geqslant s_0 \mid \forall_{(x,t)\in L}\ s \leqslant t \leqslant t_0 \Rightarrow u(x,t) = M\right\}.$$

が $r_0 > s_0$ を満たすとすると矛盾が導ける．u は連続であるから，r_0 の定義で min を取っている所の集合は閉集合である．特に，r_0 について，$(z_0,r_0) \in L$ を満たす任意の $z_0 \in Q$ について，$u(z_0,r_0) = M$ を満たす．よって Step1 から，任意の $E(z_0,r_0;r) \subset Q_T$ について，$u(z_0,r_0) \equiv M$ on $E(z_0,r_0;r)$ を満たす．このとき，$E(z_0,r_0;r)$ はある $\epsilon > 0$ について $L \cap \{r_0 - \epsilon \leqslant t \leqslant r_0\}$ という形の集合を含むから，r_0 の最小性に矛盾する．

Step3 あとは，任意の点 $(x,t) \in Q \times [0,T)$ が (x_0,t_0) と線分の有限個のつなぎ合わせによって結べることを示せばよい．
まず，Q が連結であるために，ある有限個の点 $x_0, x_1, \cdots, x_m = x$ であって，これらを結ぶ折れ線は Q 内に存在するように出来る．これは，この性質を持つ Q の点 $x \in Q$ の全体 $V \subset Q$ は，非空の，Q の開かつ閉集合であるためである．V が開集合であることは明らか．閉集合であることも，V の任意の収束列 $\{x_n\} \subset V$ に対して，Q 内の開球 $B \overset{\text{open}}{\subset} Q$ であって x_n を無限個含むものが取れるから，$n_0 := \min\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B\}$ とすれば，$[x_0, x_{n_0}], [x_{n_0}, x_\infty]$ は x_0 と $x_\infty := \lim_{n\to\infty} x_n$ を結ぶから，$x_\infty \in V$ である．
これに対して，対応するだけの $t_0 > t_1 > \cdots > t_m = t$ を任意に取れば，$(x_0,t_0), (x_1,t_1), \cdots, (x_m,t_m)$ を結ぶ折れ線は Q_T に含まれる．

■

問題 1.7 (時間後方一意性). $Q \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域，$Q_T := Q \times (0,T]$ $(T > 0)$ とし，$u, v \in C^{2,1}(Q_T)$ はいずれも熱方程式 $u_t - \triangle u = 0$ in Q_T を満たすとする．このとき，$u = v$ on $\partial Q \times (0,T]$ ならば，次が成り立つ：

(1) $w := u - v, E(t) := \int_\Omega w^2 dx$ とおくと，$\forall_{t\in(0,T)}\ (E'(t))^2 \leqslant E(t)E''(t)$.

(2) $u(-,T) = v(-,T)$ on $\overline{Q}$ ならば，$u = v$ on $\overline{Q_T}$.

[証明].

(1) **2 階微分の計算**

$$E(t) := \int_Q w^2(x,t)dx, \qquad t \in [0,T].$$

の微分は，部分積分より

$$\dot{E}(t) = 2\int_Q w w_t dx$$

$$= 2\int_Q w\triangle w dx = -2\int_Q |Dw|^2 dx.$$

さらにもう一度微分すると，

$$\begin{aligned}\ddot{E}(t) &= -4\int_Q (Dw|Dw_t)dx \\ &= 4\int_Q \triangle w w_t dx = 4\int_Q (\triangle w)^2 dx.\end{aligned}$$

2 階微分の評価　任意の $t \in [0,T]$ について $w(-,t) = 0$ on ∂Q より，部分積分と Cauchy-Schwarz 不等式から

$$\begin{aligned}(\dot{E}(t))^2 &= 4\left(\int_Q |Dw|^2 dx\right)^2 = 4\left(\int_Q w\triangle w dx\right)^2 \\ &\leqslant \left(\int_Q w^2 dx\right)\left(4\int_Q (\triangle w)^2 dx\right) = E(t)\ddot{E}(t).\end{aligned}$$

(2) $E \equiv 0$ を示せば良いから，ある $[t_1,t_2] \subset [0,T]$ $(t_1 < t_2)$ が存在して $\forall_{t\in[t_1,t_2)}\ E(t) > 0$ かつ $E(t_2) = 0$ を満たすと仮定して矛盾を導く．

$$f(t) := \log E(t), \qquad t \in [t_1,t_2).$$

を考えると，(1) での議論より，

$$f''(t) = \frac{\ddot{E}(t)}{E(t)} - \frac{\dot{E}(t)^2}{E(t)^2} \geqslant 0.$$

よって，f は (t_1,t_2) 上凸である：

$$f((1-\tau)t_1 + \tau t) \leqslant (1-\tau)f(t_1) + \tau f(t), \qquad t \in (t_1,t_2), \tau \in (0,1).$$

すなわち，

$$E((1-\tau)t_1 + \tau t) \leqslant E(t_1)^{1-\tau}E(t)^{\tau}, \qquad t \in (t_1,t_2), \tau \in (0,1).$$

であるが，$t = t_2$ と取ると，特に

$$(0 \leqslant) E((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \leqslant E(t_1)^{1-\tau}E(t_2)^{\tau} = 0, \qquad \tau \in (0,1).$$

より，$E = 0$ on $[t_1,t_2]$.

■

問題 1.8 (正則性). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域，$Q_T := Q \times (0,T]$ $(T > 0)$ とし，$u \in C^{2,1}(Q_T)$ は $u_t - \triangle u = 0$ in Q_T を満たすとする．このとき，次が成り立つ：

(1) $u \in C^\infty(Q_T)$.

(2) 任意の

$$C(x,t;r) := \left\{(y,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid |x-y| \leqslant r, t - r^2 \leqslant s \leqslant t\right\} \subset Q_T$$

と $k,l \in \mathbb{N}$ に対して，ある定数 $C \geqslant 0$ が存在して，

$$\max_{(y,s)\in C\left(x,t;\frac{r}{2}\right)} \left|D_x^k D_t^l u(y,s)\right| \leqslant \frac{C}{r^{k+2l+n+2}}\|u\|_{L^1(C(x,t;r))}.$$

[証明].

(1) 任意の $(x_0,t_0) \in Q_T$ と $C := C(x_0,t_0;r) \subset Q_T$ をとる．$(\eta_\epsilon)_{\epsilon>0}$ を $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 上の軟化子とし，$u^\epsilon := \eta_\epsilon * u$ と表す．n 次元閉球を $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y-x| \leqslant r\}$ と表す．$C' := C(x_0,t_0;3r/4)$ 上で 1 で，C の放物境界 $\partial B(x_0,r) \times [t_0 - r^2, t_0] \cup B(x_0,r) \times \{t_0 - r^2\}$ の近傍で 0 な，C 上に台を持つ可微分関数 ζ を取り，これを用いてカットオフをかけたものを

$$v^\epsilon(x,t) := \zeta(x,t)u^\epsilon(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,t_0]$$

と表す．

Step1 いま，

$$v_t^\epsilon = \zeta u_t^\epsilon + \zeta_t u^\epsilon, \quad \triangle v^\epsilon = \zeta \triangle u^\epsilon + 2(D\zeta|Du^\epsilon) + u^\epsilon \triangle \zeta$$

であるから，

$$\begin{cases} v_t^\epsilon - \triangle v^\epsilon = \zeta_t u^\epsilon - 2(D\zeta|Du^\epsilon) - u^\epsilon \triangle \zeta =: \widetilde{f} & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, t_0), \\ v^\epsilon = 0 & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases}$$

を満たす．u^ϵ は Q_T の近傍で可微分であるために，解公式を用いるための f の可微分性の条件はみたされており，また ζ の存在よりコンパクトな台を持つ．さらに v^ϵ はこの有界な解であるから，一意性から

$$v^\epsilon(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t-s)\widetilde{f}(y,s)dyds$$

を結論付けられる．

Step2 任意の $(x,t) \in C'' := C(x_0, t_0; r/2)$ について，十分小さい $\epsilon > 0$ についてこの上で $u^\epsilon = v^\epsilon$ であるから，

$$\begin{aligned} u^\epsilon(x,t) &= \iint_C \Phi(x-y, t-s)\widetilde{f}(y,s)dyds \\ &= \iint_C \Phi(x-y,t-s)\Big((\zeta_s(y,s) - \triangle\zeta(y,s))u^\epsilon(y,s) - 2(D\zeta(y,s)|Du^\epsilon(y,s))\Big)dyds. \end{aligned}$$

$\Phi(x-y, t-s)$ は $(y,s) = (x,t)$ で特異性を持つが，$(x,t) \in C''$ の近傍で $\widehat{f} = v_t^\epsilon - \triangle v^\epsilon = Q_T^\epsilon - \triangle u^\epsilon = 0$ より，部分積分によって次のように計算を進めることができる：

$$\begin{aligned} u^\epsilon(x,t) &= \iint_C \Phi(x-y,t-s)(\zeta_s - \triangle\zeta)u^\epsilon dyds \\ &\qquad + 2\iint_C \Big((D_y\Phi(x-y,t-s)|D\zeta)u^\epsilon + \Phi(x-y,t-s)u^\epsilon \triangle\zeta\Big)dyds \\ &= \iint_C \Big(\Phi(x-y,t-s)(\zeta_s + \triangle\zeta) + 2(D_y\Phi(x-y,t-s)|D\zeta)\Big)u^\epsilon dyds. \end{aligned}$$

$\epsilon \to 0$ の極限を取ることで，

$$u(x,t) = \iint_C \Big(\Phi(x-y,t-s)(\zeta_s + \triangle\zeta) + 2(D_y\Phi(x-y,t-s)|D\zeta)\Big)udyds.$$

を得る．

Step3 Step2 で得た C'' 上での u の表示の積分核

$$K(x,t,y,s) := \Phi(x-y,t-s)(\zeta_s + \triangle\zeta) + 2(D_y\Phi(x-y,t-s)|D\zeta)$$

は C' 上で 0 で，C 上で可微分である．よって，u は C'' 上で可微分である．

(2) $(x,t) = (0,0)$ と仮定して議論する．一般の $(x,t) \in Q_T$ については，$v(y,s) := u(y+x, s+t)$ についての議論の帰着させることが出来る．

Step1 $C(1) := C(0,0,1) \subset Q_T$ が成り立つとする．このとき，(1) と同様にして

$$u(x,t) = \iint_{C(1)} K(x,t,y,s)u(y,s)dyds \qquad (x,t) \in C(1/2).$$

という表示を得る．$K \in C_c^\infty$ より，この微分は $C(1/2)$ 上で

$$|D_x^k D_t^l u(x,t)| \leqslant \iint_{C(1)} |D_x^k D_t^l K(x,t,y,s)||u(y,s)|dyds \leqslant C\|u\|_{L^1(C(1))}.$$

と評価できる．

Step2 任意の $C(r) \subset Q_T$ を取ると，

$$v(x,t) := u(rx, r^2 t)$$

は $C(1)$ の近傍で定義されており，$C(1)$ 上の熱方程式を満たす．よって，Step1 での議論から，

$$|D_x^k D_t^l v(x,t)| \leqslant C\|v\|_{L^1(C(1))}, \qquad (x,t) \in C(1/2).$$

という評価を得る．関係

$$D_x^k D_t^l v(x,t) = r^{2l+k} D_x^k D_t^l u(rx, r^2 t).$$

$$\|v\|_{L^1(C(1))} = \iint_{C(1)} |u(rx, r^2 t)| dx dt = \frac{1}{r^{n+2}} \iint_{C(r)} |u(y,s)| dy ds = \frac{1}{r^{n+2}} \|u\|_{L^1(C(r))}.$$

に注意して，結論を得る．

■

参考文献

[Evans, 2010] Evans, L. C. (2010). Partial differential equations, volume 19 of Graduate Series in Mathematics. American Mathematical Society, 2 edition.