総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
博士課程（５年一貫制）入学試験 (8/20/2019 実施)
問題と解答

あの *

2022 年 11 月 19 日

記法についての注意

次の記法は以後断りなく用いる．

(1) $n = 1, 2, \cdots$ について，$n := \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$，$[n] := \{1, 2, \cdots, n\}$．$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$，$\mathbb{N}^+ = \mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, 3, \cdots\}$．

(2) 同様にして，$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$，$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$，$\overline{\mathbb{R}_+} := [0, \infty]$．

(3) $M_{mn}(\mathbb{R})$ で (m, n) の実正方行列の全体，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ でそのうち可逆なものの全体を表す．

(4) $I_d \in M_d(\mathbb{R})$ を単位行列，$O_d \in M_d(\mathbb{R})$ を零行列とする．

(5) $f(x) = O(x^n)\ (x \to 0)$ で $\limsup_{x \to 0} \left| \frac{f(x)}{x^n} \right| < \infty$ を表す．

(6) $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を m，距離空間 S 上の Borel σ-代数を $\mathcal{B}(S)$ で表す．

(7) 1_A で集合 A の指示関数を表す．

(8) $U(S)$ で集合 S 上の一様分布，$N(\mu, \sigma^2)$ で平均 μ 分散 σ^2 の正規分布を表す．

(9) $\mathrm{Exp}\,(\gamma)\ (\gamma > 0)$ で指数分布 $f(x) = \gamma e^{-\gamma x} 1_{\{x>0\}}$ を表す．

問題文の表現は筆者の都合で一部変えています．過去 3 年分の入学試験問題はこちらから見れます．

第 1 問

(1) 次の行列 M の逆行列を求めよ：

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 次の定積分を求めよ：

$$\int_{-1}^{1} \frac{x-1}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

(3) $\lambda \in \mathbb{R}$ について，次の等式を示せ：

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (k - \lambda)^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda, \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} (k - \lambda)^3 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda.$$

(4)

[解答例]．

* e-mail address : anomath57@gmail.com
URL : https://anomath.com/

(1) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(2)

$$\int_{-1}^{1} \frac{x-1}{x^2+2x+5}dx = \int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx - 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}dx$$

と分解して，第一項は $\frac{1}{2}\frac{(x^2+2x+5)'}{x^2+2x+5}$ とみて，第二項は $x+1=2\tan\theta$ の置換により，$\frac{\log 2}{2}-\frac{\pi}{4}$.

(3) それぞれの式を Poisson 分布の 2 次と 3 次の中心積率を表していると見て，μ_2, μ_3 とおく．Poisson 分布の積率母関数は $M(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$ と表せるから，

$$M'(t) = \lambda e^t M(t), \quad M''(t) = (\lambda^2 e^{2t} + \lambda e^t)e^{\lambda(e^t-1)}.$$

$$M'''(t) = (\lambda^3 e^{3t} + 3\lambda^2 e^{2t} + \lambda e^t)e^{\lambda(e^t-1)}.$$

の $t=0$ での値を考えることで，積率は $\alpha_1 = \lambda, \alpha_2 = \lambda^2+\lambda, \alpha_3 = \lambda^3+3\lambda^2+\lambda$．よって，

$$\mu_2 = \alpha_2 - 2\lambda\alpha_1 + \lambda^2 = (\lambda^2+\lambda) - 2\lambda\lambda + \lambda^2 = \lambda.$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\lambda\alpha_2 + 3\lambda^2\alpha_1 - \lambda^3 = \lambda.$$

(4) $E[x^\top Ax] = \mathrm{Tr}(A)$.

■

第 2 問

$d \geqslant 3$ とする．

(1) 互いに直交する単位列ベクトル $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^d$ に対して，行列 $A \in M_d(\mathbb{R})$ を $A := I_d - a_1a_1^\top - a_2a_2^\top$ で定める．
 (a) $A^2 = A$ を示せ．
 (b) A の固有値を求めよ．

(2) $B \in M_d(\mathbb{R})$ について，$\mathrm{rank}(B) + \mathrm{rank}(I_d - B) = d$ ならば $B^2 = B$ であることを示せ．

[解答例].

(1) a_1, a_2 は互いに直交する単位ベクトルであるから，

$$(a_1a_1^\top)^2 = a_1(a_1^\top a_1)a_1^\top = a_1a_1^\top, \quad (a_1a_1^\top)(a_2a_2^\top) = 0$$

で，a_1, a_2 を逆にしても同様であることから，

$$\begin{aligned} A^2 &= (I_d - a_1a_1^\top - a_2a_2^\top)(I_d - a_1a_1^\top - a_2a_2^\top) \\ &= I_d + (a_1a_1^\top)^2 + (a_2a_2^\top)^2 - 2a_1a_1^\top - 2a_2a_2^\top + (a_1a_1^\top)(a_2a_2^\top) + (a_2a_2^\top)(a_1a_1^\top) \\ &= I_d - a_1a_1^\top - a_2a_2^\top = A. \end{aligned}$$

A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ とし，$D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$ とすると，$A = U^{-1}DU$ を満たす正則行列 $U \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ が存在するから，$A^2 = U^{-1}D^2U = U^{-1}DU = A$ が必要．すなわち，$\lambda_i^2 = \lambda_i$ $(i = 1, \cdots, d)$ が必要．よって，$\lambda_1, \cdots, \lambda_d \in \{0, 1\}$ が必要．もし全て 0 であったら，$\mathrm{rank}A = 0, \mathrm{rank}(a_1a_1^\top) = \mathrm{rank}(a_2a_2^\top) = 1$ より，$d \geqslant 3$ に矛盾．もし全て 1 であったら，

$$Aa_1 = (I_d - a_1a_1^\top - a_2a_2^\top)a_1 = a_1 - a_1 1 - a_2 0 = 0$$

より $\mathrm{rank}A < d$ に矛盾．よって，$\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\}$.

(2) $B(I_d - B) = O$ を示せば良い．任意の $x \in \mathrm{Im}\,(B(I_d - B))$ を取ると，$B(I_d - B) = (I_d - B)B$ より $x \in \mathrm{Im}\,(B) \cap \mathrm{Im}\,(I_d - B)$ であるが，次の議論より $\mathrm{Im}\,(B) \cap \mathrm{Im}\,(I_d - B) = 0$ である．
一般に，

$$\mathrm{Ker}\,(I_d - B) \subset \mathrm{Im}\,B, \mathrm{Ker}\,(B) \subset \mathrm{Im}\,(I_d - B)$$

である．$\mathrm{rank}B + \mathrm{rank}(I_d - B) = d$ のとき，$\mathrm{Ker}\,B, \mathrm{Ker}\,(I_d - B)$ の次元の和も d であるから，上式の包含関係 $\subset$ は実は $=$ である．ここで，明らかに $\mathrm{Ker}\,(I_d - B) \cap \mathrm{Ker}\,(B) = 0$ であるから，$\mathrm{Im}\,(B) \cap \mathrm{Im}\,(I_d - B) = 0$ である．

■

第 3 問

(1) 微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$ の解 x について，

$$\hat{x}(t_0 + \Delta t) := x(t_0) + w_1 \Delta t f(t_0, x_0) + w_2 \Delta t f(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x), \quad \Delta x = \Delta t f(t_0, x_0)$$

が $x(t_0 + \Delta t)$ に対する 2 次近似になるように $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ を定めよ．
(2) 次の微分方程式の解で $x = \alpha t + \beta$ の形を持つものを求めよ：

$$\frac{dx}{dt} = -2(t + 1)x - 2t^2 + 1.$$

(3) (2) の微分方程式の一般解を求めよ．
(4) $t = 0$ のとき $x(0) = 0$ を満たす特殊解の $t = 0.1$ のときの x の値を (1) の近似を用いて小数第 2 位まで求めよ．

[解答例]．

(1) x の t_0 での 3 次についての Taylor 定理を考えると，

$$\begin{aligned} x(t_0 + \Delta t) &= x(t_0) + \frac{dx}{dt}(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}(t_0)(\Delta t)^2 + o(|\Delta t|^3) \\ &= x(t_0) + f(t_0, x_0)\Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_0, x_0)f(t_0, x_0)\right)(\Delta t)^2 + o(|\Delta t|^3) \end{aligned}$$

より，$w_1 = 1, w_2 = 1/2$.
(2)

■

第 4 問

$X, Y \sim \mathrm{Exp}\,(1)$ を独立同分布とする．

(1) $Z := \sqrt{\dfrac{Y}{X}}$ の確率密度関数を求めよ．
(2) $E[Z]$ を求めよ．

[解答例]．

(1)

■