入学試験 (1/19/2021 実施)

総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻博士課程（５年一貫制）

問題と解答

あの *

2022 年 10 月 30 日

記法についての注意

次の記法は以後断りなく用いる．

(1) $n = 1, 2, \cdots$ について，$\boldsymbol{n} := \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$，$[n] := \{1, 2, \cdots, n\}$．$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$，$\mathbb{N}^+ = \mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, 3, \cdots\}$．

(2) 同様にして，$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$，$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$，$\overline{\mathbb{R}_+} := [0, \infty]$．

(3) $M_{mn}(\mathbb{R})$ で (m, n) の実正方行列の全体，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ でそのうち可逆なものの全体を表す．

(4) $I_d \in M_d(\mathbb{R})$ を単位行列，$O_d \in M_d(\mathbb{R})$ を零行列とする．

(5) $f(x) = O(x^n)$ $(x \to 0)$ で $\limsup_{x \to 0} \left| \frac{f(x)}{x^n} \right| < \infty$ を表す．

(6) $U(S)$ で集合 S 上の一様分布，$N(\mu, \sigma^2)$ で平均 μ 分散 σ^2 の正規分布を表す．

(7) $\mathrm{Exp}\,(\gamma)$ $(\gamma > 0)$ で指数分布 $f(x) = \gamma e^{-\gamma x} 1_{\{x>0\}}$ を表す．

問題文の表現は筆者の都合で一部変えています．過去 3 年分の入学試験問題はこちらから見れます．

第１問

(1) 行列 A とベクトル b を次のように定めたとき，$\mathrm{rank}(b, Ab, A^2 b)$ を求めよ：

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 次の関数を x について微分せよ：

$$f(x) := \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2} + x}.$$

(3) $x \in \mathbb{R}^n$ に関する等式制約

$$Cx = d \in \mathbb{R}^m \quad (C \in M_{mn}(\mathbb{R}), m \leqslant n, \mathrm{rank} C = m)$$

の下で，$\|x\|^2$ を最小にする $x \in \mathbb{R}^n$ を求めよ．なお，ノルムは Euclid ノルム $\|x\|^2 = \sum_{i \in [n]} x_i^2$ とする．

[解答例]．

* e-mail address : anomath57@gmail.com
URL : https://anomath.com/

(1) Ab, A^2b を計算すると，

$$Ab = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^2b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$A^2b = -Ab$ と，Ab, b が線型独立であることに注意すると，$\mathrm{rank}(b, Ab, A^2b) = 2$.

(2) 商の微分則より，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(\sqrt{1+x^2}+x) - x^2\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1\right)}{(\sqrt{1+x^2}+x)^2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{2+2x^2+2x\sqrt{1+x^2}-x^2-x\sqrt{1+x^2}}{(\sqrt{1+x^2}+x)^2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{x^2+x\sqrt{1+x^2}+2}{(\sqrt{1+x^2}+x)^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{2\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x}. \end{aligned}$$

(3) 解空間は $\mathbb{R}^n$ の m 次元 affine 部分空間であり，任意の $Cx = d$ の解 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ を用いて $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx = d\} = x_0 + \mathrm{Ker}\ C$ と表せ，特に $x_0 \perp \mathrm{Ker}\ C$ を満たすときの x_0 が求める $x \in \mathbb{R}^n$ である．実際，任意の解 $x \in \mathbb{R}^n$ は $x_0 + x_1 \in x_0 + \mathrm{Ker}\ C$ と表せるから，Pythagoras の定理から $\|x\|^2 = \|x_0\|^2 + \|x_1\|^2 \geqslant \|x_0\|^2$ が成り立つ．$x_0 \in (\mathrm{Ker}\ C)^\perp = \mathrm{Im}\ C^*$ より，$\exists_{y_0 \in \mathbb{R}^m}\ x_0 = C^* y_0$．元の式に代入して $d = CC^* y_0$ であるから，$CC^* \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ に注意すると $y_0 = (CC^*)^{-1} d$．よって，$x_0 = C^* y_0 = C^*(CC^*)^{-1} d$.

■

要諦 (一般化逆行列)**.** (3) の答えに現れる $C^*(CC^*)^{-1} \in M_{nm}(\mathbb{R})$ とは，$C \in M_{mn}(\mathbb{R})$ の一般化逆行列 (の一つ) である．一般に，1 次方程式系 $Ax = b$ ($A \in M_{mn}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$) のノルムが最小の解は，$A$ の一般化逆行列 A^- によって A^-b で与えられる．

第 2 問

次の重積分を考える：

$$I := \iint_D e^{x+y} \sin^2(x-2y)\,dxdy, \quad D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi \leqslant x - 2y \leqslant 3\pi, 0 \leqslant x + y \leqslant \pi\right\}.$$

(1) 次の変数変換の Jacobian を求めよ：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(2) 上の変数変換によって対応する積分領域 D を，xy 平面上と uv 平面上でそれぞれ図示せよ．

(3) 積分 I を求めよ．

[解答例].

(1) 変数変換は

$$\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + y \end{cases}$$

と表せるから，Jacobi 行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

この行列の行列式は 3 である．

(2) 省略する．

(3) 次のように計算できる：

$$I = \iint_D e^{x+y} \sin^2(x-2y)\,dxdy$$

$$
\begin{aligned}
&= 3\int_0^{\pi} e^v dv \int_{\pi}^{3\pi} \sin^2 u du \\
&= \frac{3}{2}(e^{\pi}-1)\left[u - \frac{\sin 2u}{2}\right]_{\pi}^{3\pi} = 3\pi(e^{\pi}-1).
\end{aligned}
$$

■

第３問

次を満たす時間について一様な Markov 連鎖 $X=(X_n):\Omega\times\mathbb{N}\to[2]$

$$P[X_{n+1}=i|X_n=i]=p,\quad p\in(0,1)\backslash\{1/2\}\,,n\in\mathbb{N},i\in[2],$$

を考える．X_n の $[2]$ 上の確率分布を $\mathbf{x}_n:=(x_n,1-x_n)^\top$ で表す．

(1) この Markov 連鎖の遷移行列 $P\in M_2([0,1])$ を求めよ．

(2) $\mathbf{x}_\infty:=\lim_{n\to\infty}\mathbf{x}_n\in[0,1]^2$ を求めよ．

(3) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\;\|\mathbf{x}_n-\mathbf{x}_\infty\|^2\leqslant\dfrac{1}{2}|2p-1|^{2n}$ を示せ．

[解答例].

(1) $p_{ij}:=P[X_{n+1}=i|X_n=j]$ $(i,j\in[2])$ とおくと，

$$P=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{21}&p_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&1-p\\1-p&p\end{pmatrix}.$$

(2) まず P の対角化 Q を求める．すると，直交行列 $U\in O_2([0,1])$ を用いた表示 $P=UQU^{-1}$ を用いて，$P^n=UQ^nU^{-1}$ と表せるため，$\mathbf{x}_n=UQ^nU^{-1}\mathbf{x}_0$ によって $\mathbf{x}_n$ が計算できることが期待できる．その後，$n\to\infty$ の極限を取ることで答えに至るであろう．

(a) 固有方程式 $\det(P-I\lambda)=0$ を解いて固有値を求めると次のようになる．固有方程式は

$$\begin{vmatrix}p-\lambda&1-p\\1-p&p-\lambda\end{vmatrix}=(p-\lambda)^2-(1-p)^2=(2p-1-\lambda)(1-\lambda)=0$$

と表せるから，$\lambda=1,2p-1$ が解である．

(b) 対応する固有ベクトルを求めると，

(i) $P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ の解空間は $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ と表せる．

(ii) $P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(2p-1)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ の解空間は $\mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ と表せる．

(c) 以上により，基底変換行列を $U:=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ とおくことが考えられる．実際，$Q:=\mathrm{diag}(1,2p-1)=UPU^{-1}$ が成り立っている：

$$\begin{aligned}U^{-1}PU&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&1-p\\1-p&p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1-2p&2p-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&2p-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(d) 故に，

$$P^n=UQ^nU^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&(2p-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+(2p-1)^n&1-(2p-1)^n\\1-(2p-1)^n&1+(2p-1)^n\end{pmatrix},$$

であるから，$-1<2p-1<1$ より，

$$\lim_{n\to\infty}P^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=:P^\infty.$$

行列積の連続性より，

$$\mathbf{x}_\infty=\lim_{n\to\infty}P^n\mathbf{x}_0=P^\infty\mathbf{x}_0=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\1-x_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

(3) (2) の議論を踏まえて，

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_\infty\|^2 &= \|P^n\mathbf{x}_0 - P^\infty\mathbf{x}_0\|^2 \\
&\leqslant \|(P^n - P^\infty)\mathbf{x}_0\|^2 \\
&\leqslant \left\| \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (2p-1)^n & -(2p-1)^n \\ -(2p-1)^n & (2p-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ 1-x_0 \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&= \frac{(2p-1)^{2n}}{4}\left\| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ 1-x_0 \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&= \frac{(2p-1)^{2n}}{4}\left(\sqrt{(2x_0-1)^2+(1-2x_0)^2}\right)^2 = \frac{(2p-1)^{2n}}{4}2(2x_0-1)^2 \leqslant \frac{(2p-1)^{2n}}{2}.
\end{aligned}$$

と評価出来る．

■

注意. (3) の不等式は, 確率ベクトル $\mathbf{x}_n \geqslant 0$ についてのみ成り立つ不等式である．実際, 一般のベクトル $\mathbf{x}_n = (x_n, 1-x_n)^\top \in [0,1]^2$ について，作用素ノルムを用いて

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_\infty\|^2 &\leqslant \|P^n - P^\infty\|^2\|\mathbf{x}_0\|^2 \\
&\leqslant \left\| \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (2p-1)^n & -(2p-1)^n \\ -(2p-1)^n & (2p-1)^n \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&= \frac{(2p-1)^{2n}}{4}\left\| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\|^2, \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{とする}
\end{aligned}$$

と評価出来るが，肝心の A の作用素ノルムは $\|A\|^2 = 4$ となってしまう．行列 A の固有値は $0, 2$ で，2 に属する固有空間は $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と表され，これは確率ベクトルではない．すなわち，A の作用素ノルムを達成するベクトルは確率ベクトルではない．実際，(3) の答案中で評価したように，

$$\sup\left\{\|Ax\| \in \mathbb{R}_+ \mid x \in [0,1]^2 \text{は確率ベクトル}\right\} = \sqrt{2}$$

である！

第 4 問

(1) 次の $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に関する微分方程式の一般解を求めよ：

$$\frac{dg(t)}{dt} = a(1 - g(t)), \quad a > 0.$$

(2) $\mathbb{R}_+$ 上に台を持つ連続分布に従う確率変数 X について，次を満たすならば，X は指数分布 $\mathrm{Exp}\,(a)$ $(a > 0)$ に従うことを示せ：

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \quad P[X > x + y | X > x] = P[X > y].$$

(3) $X_1, X_2, X_3 \sim \mathrm{Exp}\,(a)$ $(a > 0)$ を独立同分布とする．このとき，次の U, V は分布同等であることを示せ：

$$U := X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{3}X_3, \quad V := \max\{X_1, X_2, X_3\}.$$

[解答例].

(1) まず $1 - g(t) = Ae^{-\alpha t}$ $(A, \alpha \in \mathbb{R})$ という形の解を決定することを考える．両辺を微分すると $g'(t) = A\alpha e^{-\alpha t}$ より，所与の微分方程式は

$$Ae^{-\alpha t}(a - \alpha) = 0$$

に同値．$t \in \mathbb{R}$ は任意だから，$a = \alpha$ が必要．よって，$g(t) = 1 - Ae^{-at}$ $(A \in \mathbb{R})$ は解であるが，1 階線型常微分方程式の解空間は 1 次元だから，これがすべてである．

(2) 分布関数を $F(x) := \int_0^x f(t)dt$ と定めると，与えられた条件は

$$\frac{1-F(x+y)}{1-F(x)} = 1-F(y) \quad \Leftrightarrow \quad 1-F(x+y) = 1-F(x)-F(y)+F(x)F(y)$$

に同値．両辺の $y=0$ での微分係数を考えると，

$$f(x) = f(0)(1-F(x))$$

が必要だから，(1) から

$$\int_0^x f(t)dt = F(x) = 1 - Ae^{-f(0)x}$$

すなわち $f(x) = Af(0)e^{-f(0)x}$ が必要．ここで，f は確率密度関数であることを考えると，$\int_0^\infty f(t)dt = 1$ より $A=1$ が必要．よって，$X \sim \mathrm{Exp}\,(f(0))$.

(3) U, V の特性関数 φ, ψ が等しいことを証明する．

(a) U の特性関数は,

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \int_{\mathbb{R}_+^3} e^{iu\left(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{3}x_3\right)} f(x_1)f(x_2)f(x_3)dx_1dx_2dx_3 \\
&= a^3 \int_{\mathbb{R}_+} e^{(iu-a)x_1}dx_1 \int_{\mathbb{R}_+} e^{\left(\frac{iu}{2}-a\right)x_2}dx_2 \int_{\mathbb{R}_+} e^{\left(\frac{iu}{3}-a\right)x_3}dx_3 \\
&= -a^3 \frac{1}{iu-a}\frac{2}{iu-2a}\frac{3}{iu-3a}.
\end{aligned}$$

(b) V の特性関数は，V の確率密度関数 f_V が,

$$f_V(x) = 3f(x)F(x)^2 = 3f(x)\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 = 3a(1-e^{-ax})^2e^{-ax} = 3ae^{-ax}(1-2e^{-ax}+e^{-2ax})$$

であることに注意すれば,

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{iux} f_V(x)dx \\
&= 3a \int_{\mathbb{R}_+} \left(e^{(iu-a)x} - 2e^{(iu-2a)x} + e^{(iu-3a)x}\right)dx \\
&= 3a\left(-\frac{1}{iu-a} + \frac{2}{iu-2a} - \frac{1}{iu-3a}\right) \\
&= 3a\frac{-(-u^3-5aui+6a^2)+2(-u^2-4aui+3a^2)-(-u^2-3aui+2a^2)}{(iu-a)(iu-2a)(iu-3)} \\
&= 3a\frac{-2a^2}{(iu-a)(iu-2a)(iu-3)}.
\end{aligned}$$

■

要諦 (無記憶性による指数分布の特徴付け)**.** (2) の条件を無記憶性といい，これを持つ連続分布は指数分布に限る．分布関数 F に対して $S := 1-F$ を生存関数という．