目次

第 1 章

圏

Grothendieck's relative point of view

> 現代の数学では，数学の対象を単独に扱うのではなく，それと似た対象全体のなす圏 (category 範疇) の一員として捉えることが多い．こうすることで，対象自体の構成よりも，圏の中の他の対象との関わりに焦点が当たる．圏の個々の対象ではなく，圏自体が興味の主な対象となることもある．圏の中の役割によってその対象が特定されることを示すのが，米田の補題と呼ばれている系である．[1]

この「個々の対象よりも，それらの間の射を基本的な研究対象とする」という一般化されたものの見方を，Grothendieck's relative point of view という．Grothendieck の relative scheme や over category，fibred category などが代表的である．

> A base change 'along' a given morphism $g : T \to S$ is typically given by the fiber product, producing an object over T from one over S. The 'fiber' terminology is significant: the underlying heuristic is that X over S is a family of fibers, one for each 'point' of S; the fiber product is then the family on T, which described by fibers is for each point of T the fiber at its image in S. This set-theoretic language is too naïve to fit the required context, certainly, from algebraic geometry. It combines, though, with the use of the Yoneda lemma to replace the 'point' idea with that of treating an object, such as S, as 'as good as' the representable functor it sets up.[a]

fiber とは，「関係」「対応」という概念を射で code する道具である．span と呼ばれる図式を度々見かけることになる．そこで，まずは，fiber という概念から圏論を（Set 上に）建設することは，意味があるだろう．続いて圏の同値の概念から高階圏の考え方を導入する．

[a] https://en.wikipedia.org/wiki/Grothendieck's_relative_point_of_view

Grothendieck construction

斎藤先生の構成の裏には，Grothendieck construction があると思う．[a] この流儀を研究しながら，まず圏という対象とその射を，Grothendieck の精神で定める．

[a] https://ncatlab.org/nlab/show/codomain+fibration

1.1　fiber 積

fiber 積とは，「関係」の概念の圏論化である

S 上の fiber の圏の積を，fiber 積という．結果的に，the fiber product is the product taken fiber-wise.[a] René Descartes 1596-1650 の代数的な幾何学がうまくいったのは，pullback 周りの性質の Set 的な表現である，座標と方程式の方法を発見したからである．これが現代数学の土台であるが，これを初めに，Grothendieck の fiber の言葉で捉える．fiber 積の言葉は Set 上で次のように，関係 $R \subset X \times Y$ として使える．

(1) pullback として，座標の言葉.
(2) 等化子として，algebraic variety を指定する言葉.
(3) 直積の部分集合．よって，種々の「関係」としての言葉．特に 2 の方程式や共通部分.

種々の概念の数理構造的な本質が，fiber 積周りの圏論的な代数法則に宿っている．

[a] https://ncatlab.org/nlab/show/pullback

定義 1.1.1 (fiber 積)**.** 終域が等しい 2 つの写像 $f : X \to S, g : Y \to S$ について，その X と Y の S 上の **fiber 積** $X_f \underset{S}{\times} {}_g Y \subset X \times Y$ を（$|S| = 1$ の時等号成立），

$$\begin{aligned} X_f \underset{S}{\times} {}_g Y &:= \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y) \in S\} \\ &= \coprod_{s \in S} f^{-1}(s) \times g^{-1}(s) \end{aligned}$$

と定義する．

例 1.1.2 (fiber 積の立ち位置を他の概念との連関の中で把握する)**.** 2 本の射 f, g を調整して，fiber 積の言葉で，様々な部分集合 $R \subset X \times Y$ を作ることができる．

1. **Set 上の pullback である**　fiber 積は，Set 上の pullback である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & S \\ X_f \underset{S}{\times} {}_g Y \arrow[u, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"'] & Y \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

図 1.1　図中の $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2$ はそれぞれ第一，第二射影の fiber 積への制限である

2. **写像のグラフの部分集合としての解釈**　ここでまず g を包含写像とする．すると，図中の射影の制限 $\mathrm{pr}_1 : X_f \underset{S}{\times} {}_g Y \to X$ は可逆写像 $X_f \underset{S}{\times} {}_g Y \to f^{-1}(Y)$ を定めている．換言すれば，この fiber 積は，$f : X \to S$ に対して $Y \subset S$ が与えられた時の「部分可逆写像」$(f^{-1}(Y), Y, X_f \underset{S}{\times} {}_g Y)$ を定める．つまり，g が包含写像の時，上の可換図式は**射の標準分解の図式**である．
3. **その解釈の特別な場合は「共通部分」である**　また f も包含写像とすると，写像 $\Delta : X \cap Y \to X_f \underset{S}{\times} {}_g Y$ は可逆である．これは，f, g の特別な場合について，$R = \{(a, a) \in X \times Y \mid a \in X \wedge a \in Y\}$ を作ることに成功した．
4. **同値関係のグラフとしての解釈**　$R \subset X \times X$ を X 上の同値関係とし，$p : X \to Y \subset P(X)$ をこれが定める商写像とする．同じ同値類 $x, y \in [x] \in Y$ に所属することが $(x, y) \in R$ と同値であるから，次が成り立つ．

$$R = X_p \underset{Y}{\times} {}_p X$$

要諦 1.1.3. 圧倒的表現力である．同様にして fiber 積は射の合成の選択写像 c の定義域 (composable な射の組の集合) を正確に捉える．2 つの写像 f, g によって表現される S 上の条件（＝方程式）を，$X \times Y$ の部分集合 R（解空間）として翻訳したものである．従って次のように言える．

A pullback is therefore the categorical semantics of an equation.[†1]

定義 1.1.4 (cartesian)**.**

(1) 次の図式が可換であるとは，$f \circ p = g \circ q$ が成立することとする．

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

(2) 図式 1.1 にて，写像 $(p, q) : T \to X \times Y$ は fiber 積への写像 $T \to X_f \underset{S}{\times}{}_g Y$ を定める．この写像も (p, q) で表す．何故なら，pullback の普遍性より，これは次の図式を可換にするただ一つの写像 $h : T \to X_f \underset{S}{\times}{}_g Y$ であるからである．

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, "h=(p,q)"] \arrow[drr, bend left, "p"] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\ & X_f \underset{S}{\times}{}_g Y \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "g"] & S \end{tikzcd}$$

(3) この時，$h = (p, q)$ が可逆になる時，即ち $T \simeq X \times_S Y$ の時の図式 1.1 を **cartesian** または pullback (diagram) であるという．[†2]

注 1.1.5. cartesian とはフランスの数学者 René Descartes の名前に由来するのであるが，その名前から冠詞の部分 des を省いたものである．

記法 1.1.6. 以下，

(1) 射影の制限もそれぞれ $\mathrm{pr}_1 : X \times_S Y \to X, \mathrm{pr}_2 : X \times_S Y \to Y$ で表す．
(2) 写像の可換図式

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "s"] \arrow[d, "p"'] & W \arrow[d, "r"] & V \arrow[l, "t"'] \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & S & Y \arrow[l, "q"'] \end{tikzcd}$$

に対して，積写像 $p \times q : U \times V \to X \times Y$ の制限 $U \times_W V \to X \times_S Y$ も $p \times q$ で表す．これは写像としては制限だが，一般の圏では，pullback の普遍性により誘導されるものである：

$$\begin{tikzcd} U \times_W V \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, dashed] & & V \arrow[dr, "t"] \arrow[dd, "q"' near start] & \\ & U \arrow[rr, "s" near start] \arrow[dd, "p"' near start] & & W \arrow[dd, "r"] \\ X \times_S Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dr, "g"'] & \\ & X \arrow[rr, "f"'] & & S \end{tikzcd}$$

(3) 射の合成の可換性より，$X \times_S Y \times_T Z$ と表して良い．

[†1] https://ncatlab.org/nlab/show/pullback
[†2] https://ncatlab.org/joyalscatlab/published/Cartesian+squares に"is said to be cartesian, or to be a pullback"とある．

1.2　圏化

Horizontal and Vertical categorification

horizontal categorification では，ある概念が，単一対象圏だとみなされる．続いて，対象の数を増やすことで，新たな圏が構成される．いわゆる"oidify"である．これを $\mathcal{B}A, \mathcal{B}G$ などと書く．
一方で vertical categorification とは，Riemann と Grothendieck の系譜を引き，集合論的概念を圏論的に外在化させ，さらには高階化することをいう．いわば，$k=0$ の時を集合概念として，k-圏の階数 k を上げていくことをいう．

定義 1.2.1 (posetal /thin, skeletal, poset (category), groupoid, monoid, computative monoid)**.**

(1) 圏 C について，写像 $(s,t):M\to C\times C$ が単射である時，これを**細い圏**という．
(2) 全ての可逆射が単位射であるような圏を **skeletal** であるという．即ち，$A\simeq B\Leftrightarrow A=B$ である．
(3) skeletal で細い圏を**順序集合**といい，$A\le B :\Leftrightarrow \mathrm{Hom}_C(A,B)\ne\emptyset$ と表す．
(4) 全ての射が可逆であるような圏を**亜群**という．
(5) 細い亜群 C について，$M\subset C\times C$ は C の同値関係のグラフであるという．
(6) 単一対象圏 C を**単系**と呼び M で表す．合成 $c:M\times M\to M$ を M の演算と呼ぶ．
(7) $M^{\mathrm{op}}=M$ が成り立つ時，単系 M を**可換**であるという．

定義 1.2.2 (decategorification)**.** 圏 C に対して，その同型類 $S\in\mathrm{Set}$ を対応させる関手 $\mathrm{Decat}:\mathrm{Cat}\to\mathrm{Set}$ を脱圏化という．集合 S と写像 $p:\mathrm{Decat}(C)\to S$ の組を考える．

例 1.2.3 (decategorification の section は vertical categorification の良い例となる)**.**

(1) Card $:\mathrm{Decat}(\mathrm{FinSet})\xrightarrow{\sim}\mathbb{N}$ について，FinSet は $\mathbb{N}$ の vertical categorification である．実際，自然数の研究は，FinSet の同型類の研究に他ならない．数えるという行為自体がこの抽象化に当たる．[†3]この意味で，圏化 $\mathbb{N}\to\mathrm{FinSet}$ について，加算は無縁和に圏化される．[†4]$\dim:\mathrm{Decat}(\mathrm{FinVect}_K)\xrightarrow{\sim}\mathbb{N}$ も同様である．
(2) Cat に内部化された group object は (strict) 2-group となる．これは群の概念の圏化だと思える．これは忘却関手 $\mathrm{Cat}\to\mathrm{Set}$ について decategorify されるから，vertical categorification の例として理解できる．
(3) 従って，概念の internalization，いわゆる diagramatic incarnation は鉛直圏化の例である．
(4) これは更なる高階化に繋がる．One speaks of this process of categorification using weak internalization of diagrammatic descriptions as categorification of structures up to coherent higher equivalences or up to coherent higher homotopies.[†5]

定義 1.2.4 (closed)**.** 次の構造を備えた C を**閉圏**という

(1) internal hom functor $[-,-]:C^{\mathrm{op}}\times C\to C$.
(2) 単位対象 $I\in C$.
(3) 自然同型 $i:\mathrm{id}_C\simeq[I,-]$.
(4) X 内で extranatural な変換 $j_X:I\to[X,X]$.
(5) Y,Z 内で自然，X 内で extranatural な変換 $L^X_{YZ}:[Y,Z]\to[[X,Y],[X,Z]]$.

以下の図式を可換にする．

例 1.2.5. 従って，Set は閉圏である．

[†3] John Baez and James Dolan "Categorification" (98)
[†4] https://golem.ph.utexas.edu/category/2008/10/what_is_categorification.html
[†5] https://ncatlab.org/nlab/show/vertical+categorification

1.3　圏の構成

1.3.1　コンマ圏

コンマ圏とは，fiber 積の概念の関手への昇華であり，従って line graph 的概念である

commma object の概念は，pullback square の概念の 2-圏への一般化であり，2-極限の例である．が，loop space object 的な見方では，Im f から Im g に至る有向道の圏である．有向道の全体が圏をなす，という line path の発想は arrow category と呼ばれる．この捉え方は再帰的に高階圏論を想像させるが，ひとまずは，この発想がスライス圏とコンマ圏の応用を生むことを見る．

コンマ圏は，以前は，hom 集合に $C(x,y)$ などと書いたのと同様にして，コンマ圏を (f,g) と書いたために名前がついたが，現在では専ら (f/g) や $(f\downarrow g)$ と書く．少なくとも同値な 3 種の定義がある．特に，2-圏上の普遍性による定義が一番自然であるように感じる．

fiber 積と同様に重要な理由は，Grothendieck's relative point of view であろう．圏の様子と，特定の対象から見える圏の風景とを繋ぐ形式的道具となる．ここから高階圏論が始まる．

定義 1.3.1 (arrow category)**.**

(1) 圏 C に対して，その射を対象とし，2 つの C-射の間に存在する square diagram $(u,v):f\to g$ を射とすると，これは圏をなす．これを $\mathrm{Arr}(C)$ で表す．
(2) 圏 $\{0\to 1\}$ を interval category といい，I または 2 または $\Delta[1]$ で表す．
(3) 関手圏 $[2,C]$ を C 上の arrow category と同型になる．
(4) id_C を恒等関手とした時のコンマ圏 $(\mathrm{id}/\mathrm{id})$ が，矢印圏である．

注 1.3.2. arrow category の言葉を用いて，codomain functor $t:[2,C]\to C$ が定式化できる．これは Grothendieck construction の下で，スライス圏の構成関手 $C/(-):C\to\mathrm{Cat}$ に対応する．

定義 1.3.3 (slice category / over category / category over A)**.** 圏 $C=(C,M,s,t,c,e)$ とその対象 $A\in C$ に対して，A 上の圏またはスライス圏 $C_A:=(C_A,M_A,s_A,t_A,c_A,e_A)$ を，以下のように定める．

(1) $C_A=\{f\in M\mid t(f)=A\}$.
(2) $M_A=\{(g,k)\in M_s\underset{C}{\times}{}_tM\mid g\in C_A\}=C_{A\,s}\underset{C}{\times}{}_tM$．この時，第二成分である k のみをさして A 上の射と呼ぶことも多い．この射 (g,k) の源は下の図を可換にする $f=g\circ k$ であり，的は第一成分である g である．即ち，次のとおり．

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f"'] & & D \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

(3) $s_A:M_A\to C_A$ は合成 c の M_A への制限 $c\restriction_{M_A}:C_{A\,s}\underset{C}{\times}{}_tM\to C_A$.
(4) $t_A:M_A\to C_A$ は第一射影 pr_1．即ち，A 上の射 (g,k) は，$f=g\circ k\mapsto g$ と写す．
(5) c_A は $c_A((h,l),(g,k))=(h,l\circ k)$

$$\begin{tikzcd} M_{A\,s_A}\underset{C_A}{\times}{}_{s_A}M_A \arrow[r] & M_A \\ \Cup & \Cup \\ ((h,l),(g,k)) \arrow[r, mapsto] & (h,l\circ k) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "h"'] & C \arrow[l, "l"'] \arrow[d, "g"] & D \arrow[l, "k"'] \arrow[dl, dashed, "g\circ k"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

(6) $e_A(f) = (f, 1_{s(f)})$ で定める．即ち，$f: B \to A$ とすると，$(g, 1_B)$ であり，$g \circ 1_B = g$ を g に写す恒等射になっている．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "1_X"] \arrow[dr, "g"'] & & X \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

双対概念を余スライス圏または under category といい，$C^A, A\backslash C$ で表す．

注 1.3.4.

(1) 一般的に幾何的な対象のなす圏を考えているときは A 上の圏といえば，前層の概念同様，A を終域とするスライス圏 C_A であり，代数的な対象を考えているときは A 上の圏というと A を始域とする C^A になる．[†6]
(2) これは，対象を，終域を c とする射のみに限ったため，arrow category の充満部分圏である．
(3) スライス圏とは，$A: C \to C$ を定値関手として，コンマ圏 (id_C/A) である．余スライス圏はコンマ圏 (A/id_C) である．
(4) 従って，対象について，その codomain c を忘れ，射 $a: (x, c) \to (x', c)$ についても c を忘れれば，先ほどの cod に当たるものが，忘却関手 $C/c \to C$ となる．

定義 1.3.5 (comma category: 成分からの定義)**.** 関手 $f: C \to E, g: D \to E$ について，コンマ圏 (f/g) とは，

(1) 対象を E 上の射を定める 3-組 (c, d, α) s.t. $\alpha: f(c) \to g(d) \in E$ とし，
(2) 射を E 上の square diagram を定める 2-組 (β, γ) s.t. $\alpha_2 f(\beta) = g(\gamma)\alpha_1$ とし，
(3) 射の合成は，それぞれの成分である C-射，D-射の合成とする

圏である．この時，2 つの忘却関手 $H_C: (f/g) \to C, H_D: (f/g) \to D$ と，関手 $(f/g) \to E$ についての自然変換

$$\begin{array}{ccc} \theta: (f/g) & \longrightarrow & M(E) \\ \cup & & \cup \\ (c, d, \alpha) & \longmapsto & \alpha \end{array}$$

が存在する．

定義 1.3.6 (comma category: Cat 上の対象としての定義)**.** 関手 $f: C \to E, g: D \to E$ について，コンマ圏 (f/g) とは，圏 Cat 上の pullback

$$\begin{tikzcd} (f/g) \arrow[r] \arrow[d] & {[2, E]} \arrow[d, "(\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1)"] \\ C \times D \arrow[r, "f \times g"] & E \times E \end{tikzcd}$$

である．

定義 1.3.7 (comma category: 2-圏への pullback diagram の拡張として)**.** コンマ圏とは，span $C \xrightarrow{f} E \xleftarrow{g} D$ に対する comma object である．即ち，自然変換 θ について，次の図式を可換にする (strict) 2-極限である：

$$\begin{tikzcd} (f/g) \arrow[r, "H_C"] \arrow[d, "H_D"'] & C \arrow[d, "f"] \arrow[dl, Rightarrow, "\theta"] \\ D \arrow[r, "g"] & E \end{tikzcd}$$

この図式を comma square と呼ぶ．

要諦 1.3.8. 忘却関手が非常に射影っぽく，コンマ圏は fiber 積っぽいが，実際その通りであることが 2-圏上で定式化できる．

[†6] Michael Gromov によると，M 上の幾何＝別の空間 Σ から M への写像の研究．M 上の解析＝ M から別の空間への写像の研究．

1.4 span と lift

span とは「関係」の射への外在化・圏論化である．これに対する性質を lift という．

定義 1.4.1 (span / roof / correspondence).

(1) 次の形の図式を span と呼ぶ．射 f とは span の特別な場合 $(s = y, g = 1_y)$ である．

$$\begin{tikzcd} & s \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ x & & y \end{tikzcd}$$

(2) 双対概念を cospan という．

(3) pullback を備える圏 C において，連続する span から，span の合成を得ることができ，span の 2-圏 $\mathrm{Span}(C)$ を得る．$\mathrm{Corr}(C)$ とも書く．

定義 1.4.2 (lift, extension, lifting problem). (1) 次の cospan を可換にする $\tilde{f} : Y \to X$ を**持ち上げ**という．$Y = B, f = \mathrm{id}_B$ である時，section という．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "p"] & B \\ Y \arrow[u, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

(2) 次の span を可換にする $\tilde{f} : X \to Y$ を**延長**という．$Y = A, f = \mathrm{id}_A$ である時，retraction という．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, hook, "i"'] & Y \\ & X \arrow[u, dashed, "\tilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

(3) 矢印圏 $\mathrm{Arr}(K)$ について，射 (u, v)

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, "v"'] & d \end{tikzcd}$$

を f, g についての**持ち上げ問題**という．任意の (u, v) について，$\gamma : b \to c$ が存在する時，f は g に関して **left lifting property** を持つ，または g は f に関して **right lifting property** を持つ，という．それぞれの γ を，対応する (u, v) についての lift または solution という．このような γ が一意に取れる場合，f, g は直交するといい，$f \perp g$ と表す．

注 1.4.3. 多くの圏，特に Top にて，一般の lifting problem と extension problem は，pullback と pushout を通じて，section problem と retraction problem に帰着される．

1.4.1 グラフのデータ構造と自由圏

コンマ圏とは，fiber 積の概念の関手への昇華であり，従って line graph 的概念である

圏とはデータ構造としては multigraph で，このことを free category または quiver と，ほぼ同義語として使う．

定義 1.4.4 (quiver). 圏 C の quiver とは，次の形の図式

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, bend left, "s"] \arrow[r, bend right, "t"'] & V \end{tikzcd}$$

をいう．従って，忘却関手 $U : \mathrm{Cat} \to \mathrm{Quiv}$ が存在する．この左随伴を考えたい．

注 1.4.5.

(1) directed pseudograph ともいう．quiver は small category から e, c の構造を落としたもので，2 つの頂点の間の辺の濃度は問わないため，graph とは言わないのが安全である．実際，自由圏 C からの関手 $F : C \to D$ を quiver representation というが，この分野の発明者は

> For such a 4-tuple (V, E, s, t) we propose the term quiver, and not graph, since there are already too many notions attached to the latter word.[†7]

(2) $U : \mathrm{Cat} \to \mathrm{Quiv}$ は忠実だが充満ではない．即ち，グラフ準同型にならないような関手が存在する．しかし，$F : \mathrm{Quiv} \to \mathrm{Cat}$ は埋め込みだから，quiver と free category は大体同義で使う．

1.5　関手

ネットワークの間の対応を考えたい．

> 多項式環や自由加群と言った標準的な構成も，表現可能関手や随伴艦主として統一的に捉えることができる．[1]

また，集合から圏の考え方に拡張した瞬間，関手の圏を考えるとそこには 2-射が存在する．ここで突如にして 2-圏の例 Cat を得たことになる．するとさらにその「関手圏」を考えることが出来る．これが高階圏論である．4 次元の特異性は高階圏論で説明がつくかもしれない．生態系の数理は最終的に高階圏論の枠組みで解決がつくかもしれない．[a]

[a] この階層的ダイナミズムを生物学から説き起こしている．数理物理学者はどこで対称性が破れるのか，の興味を圏論に持ち得るのか！ https://math.ucr.edu/home/baez/week73.html

例 1.5.1.

(1) 写像 $f : X \to Y$ をその逆像写像 $f^* : P(Y) \to P(X)$ に写す反変関手 $P^* : \mathrm{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$.

(2) 線型写像 $f : V \to W$ をその postcomposition による 2-射 $f_* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(Z, V) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(Z, W)$ に写す共変関手 $h^V := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, -) : \mathrm{FinVect}_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Set}$．これは表現可能関手の例である．

(3) 集合 S に対して，次の共変関手 F^S を postcomposition で定める．

$$\begin{array}{ccc} F^S : \mathrm{FinVect}_R & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ W & \longmapsto & F^S(W) = \mathrm{Map}(S, W) \\ f : U \to W & \longmapsto & f_* : \mathrm{Map}(S, U) \to \mathrm{Map}(S, W) \end{array}$$

S には特に FinSet の同型類 $[n] := \{1, \cdots, n\}$ を入れることを考える．$n = 1$ の場合は $\mathrm{Map}([1], W) = W$ なので，忘却関手である．

(4) 線型写像の双対を取る反変関手 $^\vee : \mathrm{FinVect}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{FinVect}$ は圏の同値の例である．

1.5.1　Hom 関手

定義 1.5.2 (hom-functor, internal hom, closed category, hom-object).

(1) 関手 $\mathrm{Hom} : C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathrm{Set}$ を Hom 関手という．

(2) 関手 $[-, -] : C^{\mathrm{op}} \times C \to C$ を内部 Hom 関手という．このように，$\mathrm{Hom}_C(c, c) \in \mathrm{Ob}C$ とみなせる圏 C を閉圏という．

(3) 圏 C を閉モノイダル圏 V 上の豊穣圏とする．$C(x, y) \in \mathrm{Ob}V$ を hom 対象という．

定義 1.5.3 (representable functor / presheave). hom 関手 $\mathrm{Hom}_C : C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathrm{Set}$ に対して，

(1) $h^c := \mathrm{Hom}_C(c, -) : C \to \mathrm{Set}$ を $C \xrightarrow{\sim} 1 \times C \xrightarrow{(c, \mathrm{id}_C)} C^{\mathrm{op}} \times C \xrightarrow{\mathrm{Hom}} \mathrm{Set}$ と定めることで，標準的な余前層が定まる．

[†7] Peter Gabriel, Unzerlegbare Darstellungen. I, Manuscripta Mathematica 6: 71 - 103, (1972) (doi:10.1007/BF01298413, MR332887 doi)

(2) $h_c := \mathrm{Hom}_C(-,c) : C^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ を $C \xrightarrow{\sim} C^{\mathrm{op}} \times 1 \xrightarrow{(\mathrm{id}_C,c)} C^{\mathrm{op}} \times C \xrightarrow{\mathrm{Hom}} \mathrm{Set}$ と定めることで，標準的な前層が定まる．

(3) h_c と自然同型な関手を，**表現可能関手（前層）**という．

命題 1.5.4 (hom 関手は極限を保存する)**.** hom 関手 $\mathrm{Hom}_C : C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathrm{Set}$ は，いずれの引数についても極限を保存する．（即ち，第一引数については C の余極限を保存する）．

［証明］．2 つ目の引数については，1 つ目の引数についての証明の形式的双対である．■

1.5.2　関手の一般化

関手にも，span の見方が適応でき，圏論的に拡張できる．これが hom 関手のような「双線型写像」の概念である．

定義 1.5.5 (profunctor, anafunctor)**.**

(1) 関手 $H_F : D^{\mathrm{op}} \times C \to \mathrm{Set}$ を，C から D への **profunctor** といい，$F : C \nrightarrow D$ で表す．集合 $H_F(d,c)$ は違う圏に生息する対象間の射と言うべき対象であり，これを heteromorphism という．

(2) identity profunctor $1_C : C \nrightarrow C$ とは，hom 関手 $\mathrm{Hom}_C : C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathrm{Set}$ である．

(3) 次の span であって，$\sigma : \overline{F} \to C$ が忠実で全射な関手（σ_C, σ_M のいずれも全射）である時，これを anafunctor $F : C \to D$ という：[†8]

$$\begin{tikzcd} C & & D \\ & \overline{F} \arrow[ul, "\sigma"] \arrow[ur, "\tau"'] & \end{tikzcd}$$

注 1.5.6. A profunctor is also sometimes called a (bi)module or a distributor or a correspondence, though the latter word is also used for a span.

1.5.3　数学的対象としての関手

定義 1.5.7. 関手 $F : C \to D$ について，

(1) $D = \mathrm{Vect}_k$ の時，F を k-線型表現という．

(2) $C = \mathcal{B}G$ の時，F を群 G の表現という．$[\mathcal{B}G, \mathrm{Vect}] = \mathrm{Rep}(G)$.

(3) C を quiver 上の自由圏とした時，F を quiver representation という．

定義 1.5.8 (action of a group, commutative)**.** 群 G が定める圏 $\mathcal{B}G$ のただ一つの対象を I とする．

(1) C を圏，$F : \mathcal{B}G \to C$ を関手とし，$X := F(I)$ とおくと，$F_M : G = \mathrm{End}_{\mathcal{B}G}(I) \to \mathrm{End}_C(X)$ は群の射 $G \to \mathrm{Aut}_C(X)$ を定める．これを（C の対象）X への G の作用という．

(2) $F, H : \mathcal{B}G \to C$ をそれぞれ，$X, Y \in C$ への作用とする．関手の射 $\varphi : F \to H$ が存在する時，$f := \varphi(I)$ とすれば，任意の $g \in G$ に対して次の図式は可換になる：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F(g)"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "H(g)"] & Y \end{tikzcd}$$

この時，射 $f := \varphi(I)$ は群 G の作用と可換であるという．

---

†8 https://ncatlab.org/nlab/show/anafunctor

1.5.4　stuff, structure, property

モデル理論で「集合」とそれに付加された「数学的構造」の区別ははっきりした．しかし一口に「数学的構造」と言っても，数学的「性質」と数学的「構造」と数学的「対象」は，関手の言葉で分類できる．性質とは圏を制限するような言及である．構造とは hom 集合を脱落させる要素である．対象 (stuff) とは，hom 集合の元の同等性を変化させる要素である（実際，まともな数学理論を考えている範囲ではほぼあり得ない現象と言っていい）．

定義 1.5.9 (stuff, structure, property)**.** 環の可換性は性質と言える．位相は付加構造と言える．環上の加群は環に追加された構造と言える．関手 $F : C \to D$ について，

(1) F が圏の同値である時，**forget nothing** という．
(2) F が充満忠実である時，**forget only properties** という．
(3) F が忠実である時，**forget at most structure** という．
(4) 関手 F は **forget at most stuff** という．
(5) F が本質的に全射な忠実関手である時，**forget purely structure** という．
(6) F が本質的に全射な充満関手である時，**forget purely stuff** という．

例 1.5.10.

(1) 具体圏 Grp, Vect, Top からの忘却関手 Grp → Set は忠実であるが充満ではない．射として違えば写像としても違うが，全ての写像が射になるわけではない．そこで，群，線型空間，位相空間とは集合に付加的な「構造」を考えたものだと言える．しかし hom 集合は忠実に移すから，「対象」（ここでは台集合）は保つ．
(2) $F : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Grp}$ は充満忠実である．群構造も集合という対象も保ち，可換性という性質のみを脱落させる．系列

$$\mathrm{Ab} \to \mathrm{Grp} \to \mathrm{Set} \to 1$$

は，順に「可換性という性質」「群構造」「集合という対象」を脱落させ，Cat の終対象 1 に至る．
(3)

1.6　双対

定義 1.6.1 (formal duality / abstract duality)**.** ある理論 T の指標 Σ が，モデルの間に非自明な involution $\mathrm{Mod}(T) \to \mathrm{Mod}(T)$ を定めることを許し，これについて T のモデル M から新たなモデル M^{op} が生成される時，M^{op} の対応する定理を双対定理と呼ぶ．

例 1.6.2 (formal duality)**.**

(1) projective duality とは，Hilbert 的な，点と線，meet と join との入れ替えの involution について保たれる．
(2) 圏論での，指標 Σ のうち dom ,cod と結合の順番の解釈を変えることによる involution $\mathrm{Mod}(T) \to \mathrm{Mod}(T)$ は $C \mapsto C^{\mathrm{op}}$ を定める．なお，1-圏 Cat の自己同型は $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Cat}}(C) = \{\mathrm{id}_C, {}^{\mathrm{op}}\}$ に尽きる．

duality in lattice theory, and duality in category theory.

定義 1.6.3 (concrete duality)**.** 圏 C 内に dualizing object $V \in C$ が存在して，反変関手 $\mathrm{Hom}_C(-, V)$ により新たな圏 D の対象とすると，圏の同値 $C^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\sim} D$ が誘導されることをいう．より弱い結果も concrete duality というが，圏が同値である時，perfect duality という．

例 1.6.4 (concrete duality)**.** linear duality, Stone duality, Pontryagin duality, and projective inversions with respect to a conic hypersurface

(1) 線型空間の双対とは，$(-)^* = (-)^\vee := \mathrm{Hom}_k(-, k)$ と定めた，

$$\begin{array}{ccc} (-)^* : \mathrm{Vect}_k & \longrightarrow & \mathrm{Vect}_k \\ \Psi & & \Psi \\ W & \longmapsto & W^* \end{array}$$

であり，これは自己随伴 (adjoint to itself) である．埋め込み $\delta_W : W \to W^{**}$ が存在する．この関手 $(-)^\vee$ を $\mathrm{FinVect}_k$ に制限すると，圏の同値となり，perfect duality となる．

1.7　関手の射

ネットワークの間の対応を考えた．その間の射を考えたい．この構成は何度でも繰り返せる．

例 1.7.1 (基底とは可逆な関手の射のことである)**.** $V \in \mathrm{FinVect}_\mathbb{R}$ に対し，元の n-族 $(x_i)_{i\in[n]}$ を $x : [n] \to V$ とする．自然変換 $x^* : \mathrm{FinVect}_\mathbb{R} \to \mathrm{Set}$ を precomposition で定めると，これは関手の射 $h^V \to F^{[n]}$ を定める：

$$\begin{tikzcd} h^V(U) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "x^*(U)"'] & h^V(W) \arrow[d, "x^*(W)"] \\ U^n \arrow[r, "f_*"] & W^n \end{tikzcd}$$

自然変換 x^* が可逆であることと，x が V の基底であることは同値である．即ち，任意の $g : V \to U$ の延長 $f \circ g : V \to W$ から，U の n-組から W の n-組への対応の情報を抽出でき，これをうまく取ると可逆となる．即ち，U の n-組から W の n-組への対応の情報だけから，f_* の情報が一意に定まる．$V = 1$ とすれば，$h^V(U) = U$ に他ならないから，線型写像 $f : U \to W$ も特に n-組の動きだけを見れば定まる．

要諦 1.7.2. 自由モノイドなどといった構成と同じ状況である．テンソルの構成の時もそうであったが，基底とは自由構成に近い．

第 2 章

圏同値と高階圏

射を用いて定義を緩める系統的な手法があり，これらが圏論の表現力を支えている．その系列を見る．

相等の概念も射の言葉で取り込む．これが equivalence の概念である．高階圏の世界観が広がる．

同型 (principle of equivalence) が圏論の自由度であるから，圏の同値と同型の違いの分だけ，strict と weak (general) の語を使い分ける．また，strictification が考えられる．[a] これは延々と繰り返すことが出来る構成で（k-射が同値であるとは，自然同型にあたる $k+1$-射が存在することとする），高階圏論からの考察が自然である．退化した同値の概念が，集合論的な相等関係 $=$ である．

[a] https://ncatlab.org/nlab/show/coherence+theorem+for+monoidal+categories

モノイド圏とは，テンソル積のように，緩められた結合性と coherence 条件を満たす双線型写像を備えた圏をいう．

2.1 モノイド対象

どうしてテンソル積ような標準的な構成＝自己双関手を備えた圏を考えるのか？この構造が代数幾何・関数解析で現れるためである．

2.2 モノイド圏の定義

定義 2.2.1 (monoidal category, tensor product, unit object / tensor unit, associator, left unitor, right unitor)**.** モノイド圏またはテンソル圏とは，

(1) テンソル積と呼ばれる双関手 $\otimes : C \times C \to C$,
(2) 単位対象／テンソル単位と呼ばれる対象 $1 \to C$,
(3) 結合子と呼ばれる自然変換 $\alpha : (- \otimes -) \otimes - \xrightarrow{\sim} - \otimes (- \otimes -)$,
(4) 左単位と呼ばれる自然変換 $\lambda : 1 \otimes - \xrightarrow{\sim} -$,
(5) 右単位と呼ばれる自然変換 $\rho : - \otimes 1 \xrightarrow{\sim} -$

からなる 6-組 $(C, \otimes, 1, \alpha, \lambda, \rho)$ で，次の 2 つの図式 (triangle identity, pentagon identity) を可換にするものである．

$$\begin{tikzcd}
(x \otimes 1) \otimes y \arrow[rr, "\alpha_{x,1,y}"] \arrow[dr, "\rho_x \otimes \mathrm{id}_y"'] & & x \otimes (1 \otimes y) \arrow[dl, "\mathrm{id}_x \otimes \lambda_y"] \\
& x \otimes y &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& (w \otimes x) \otimes (y \otimes z) \arrow[drr, "\alpha_{w,x,y\otimes z}"] & & \\
((w \otimes x) \otimes y) \otimes z \arrow[ur, "\alpha_{w\otimes x,y,z}"] \arrow[d, "\alpha_{w,x,y} \otimes \mathrm{id}_z"'] & & & w \otimes (x \otimes (y \otimes z)) \\
(w \otimes (x \otimes y)) \otimes z \arrow[r, "\alpha_{w,x\otimes y,z}"'] & w \otimes ((x \otimes y) \otimes z) \arrow[urr, "\mathrm{id}_w \otimes \alpha_{x,y,z}"'] & &
\end{tikzcd}$$

要諦 2.2.2. 対象の間に $\otimes$ によるモノイド構造を備え，公理は自然変換により記述されている．等号 $(xy)z = x(yz)$ ではなく，同型 $(x \otimes y) \otimes z \simeq x \otimes (y \otimes z)$ となる．しかし図式の選び方は自然に思えない．

定義 2.2.3 (cartesian, closed)**.**

(1) cartesian (monoidal) category とは，特に圏論的な積による monoidal structure を備えた monoidal category のことをいう．
(2) closed category とは，自身の上の豊穣圏とみなせる圏のことを言う．この対象を hom 対象または internal hom といい，$\mathrm{hom}(a, b), [a, b]$ などと表す．
(3) closed monoidal category とは，closed category でもある monoidal category をいう．この時，モノイド構造 $\otimes$ は internal hom hom の左随伴となり，この関係を currying と言う．
(4) cartesian closed category とは，直積によって与えられるモノイド構造と，internal hom とを備え，互いに随伴となっている圏をさす．CCC において，internal hom は exponential object とも呼ばれ，currying の関係は $\mathrm{hom}_C(Z, X^Y) \simeq \mathrm{hom}_C(Z \times Y, X)$ と表される．

2.3　高階圏

圏同値とは，「2-射の同型の分の遊びを許して同型」ということである．この概念により Cat は (2, 1)-圏とみなせる．Lurie の理論で構築されるのは $(\infty, 1)$-圏の理論である．この理論を，どのようなモデルとして実現するか？通常の圏とは構造 $\mathrm{Hom} : C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathrm{Set}$ をもった Set enriched category であったとして相対化するのが豊穣圏の考え方である．Lurie は 3 つの，互いにある意味で同値なモデルを導入する．

(1) topological category：（コンパクト生成ハウスドルフな）[a]位相空間の圏 Top 上の豊穣圏のことである．通常の圏は離散位相により topological category の退化した形であるとする．逆に topological category の Hom「空間」をとって，Ω^0 を考えると Hom 集合と見れる．こうして，圏はグラフでもあるが，高階圏にはトポロジーの知見を使って空間としてみると良いのである．
(2) simplical category：本質的に言っていることは変わらないが，simplicial set の圏に関する enriched category であるとする．The simplex category Δ encodes one of the main geometric shapes for higher structures.[b]simplical set とは，位相空間の基本群・ホモトピー群と同値な理論を構成することができる対学物である．[c]
(3) quasi category：こうして新たな無限圏概念に辿り着く．つまり，「通常の圏の延長」ではなく，「特別な simplcical set である」とする．全ての inner horn inclusion $\{\Lambda^n_k \to \Delta^n \mid 0 < k < n\}$ に対して（一意とは限らない）Extension property を持つ simplicial set を quasi category という．[d]

[a] Top の性質の欠点，Cartesian Closed でないところなどを補うための Steenrod "A convenient category of topological space"での解決策がコンパクト生成である．一方で，今回の前層の圏としての構成は，必ず Grothendieck topos となるし，完備かつ余完備で，Cartesian Closed であるので良い性質を持つ．
[b] https://ncatlab.org/nlab/show/simplex+category
[c] 位相空間の特異コホモロジーは Dold-Kan 対応により simplical set のコホモロジー論の一部と見ることができる．特異単体を取る関手と幾何学的実現関手により同地に写り合う．
[d] Kan 拡張から

定義 2.3.1 (2-category, ∞-category)**.**

(1) cartesian (monoidal) category Cat 上の豊穣圏を，**strict 2-category** という．[†1]
(2) "one would like to allow composition of morphisms to be associative and unital only up to coherent invertible 2-morphisms." そこで，weak 2-圏の特に代数的なバージョンを bicategory という．[†2]

[†1] 豊穣圏のアイデアを用いた，古典的な定式化である．射の間にも射があるとは，Hom 集合が Cat の構造を持つことに他ならない，という発想である．0-圏を Set として，再帰的に n-圏を $(n-1)$-圏上の豊穣圏として定義する．すると自然変換が極めて自然な文脈で理解できる．
[†2] the earliest to be formulated, and still the one in most common use

(3) $(2,2)$-圏を general 2-圏と呼ぶ．
(4) 普段，上の 3 段階の強弱を気にせず，必要に応じて定義を定め直すことで 2-category と言ってしまう．特に，bicategory を想定すれば十分であることも多いが，暗黙に strict の意味で使う文献も多い．
(5) $(\infty,0)$-圏，または ∞-groupoid とは，任意の k-射が同値であるような ∞-圏である．∞-groupoid は圏（$(\infty,1)$-圏）をなし，∞Grpd と表す．
(6) $(\infty,1)$-圏とは，任意の k-射を考えることができ，$k\ge 2$ について k-射は同値である．これは $(\infty,2)$-圏 $(\infty,1)$Cat をなす．
(7) $(n,0)$-圏とは，n-truncated な ∞-groupoid，即ち n-groupoid という．

定義 2.3.2 ((n,r)-category, truncated)**.** $n\ge -2, n+1\le r\ge 0$ について，(n,r)-圏とは，

(1) $k>n$ についての k-射は退化していて，$k>r$ について k-射は可逆であることをいう．
(2) 即ち，hom 圏の列 $C_0,C_1,\cdots,C_n=\mathrm{Hom}(A,B)$（ただし A,B は $n-1$-cell）について，任意の深さ r の Hom 圏は全て groupoid で，任意の深さ $n+2$ の Hom 圏は 1 であるようなものをいう．
(3) 従って，$k>\max n,r$ については，k-射とは id で，単に相等関係 $=$ である．
(4) ∞-圏であって，$k>r$ について k-射は equivalence で，$k>n$ について平行な射は等しいものである．
(5) (n,r)-圏 C について，対象 $x\in C$ が (k,m)-**truncated**（切頭対象）であるとは，任意の対象 $a\in C$ について $(n-1,r-1)$-圏 $C(a,x)$ が実際は (k,m)-圏であることをいう．

例 2.3.3 (periodic table)**.**

(1) $(-1,0)$-圏（または (-1)-圏，(-1)-groupoid）とは真理値であり，この圏は $(-1)\mathrm{Cat}=\{\mathrm{True},\mathrm{False}\}\simeq 2$ となる．
(2) $(-2,0)$-圏（または (-2)-圏，(-2)-groupoid，(-1)-poset）とは点であり，1 であり，この圏は $(-2)\mathrm{Cat}=\mathrm{True}$ となる．[†3]
(3) $(0,0)$-圏とは集合である．
(4) $(0,1)$-圏が poset である（negative thinking では 1-poset という）．$n=0$ より，射は高々 1 つの細い圏で，2-射は可逆で，以降は射が等しいという $=$ 概念に縮退する．つまり 1-射しか考えない．
(5) $(2,2)$-圏を 2-圏という．[†4]

確かに $n=-2,-1,0$ については，単体っぽい．ここで Type theory も関係してくる．

定義 2.3.4 (abstract simplicial complex, face, p-simplex)**.** 抽象単体複体 K とは，頂点 $V(K)$ と単体 (simplices) $S(K)\subset\cup_{n\in\mathbb{N}}[V(K)]^n$ の組 $(V(K),S(K))$ で，次を満たすものである．

(1) $\sigma\subset V(K)$ が単体で，$\emptyset\subsetneq\tau\subset\sigma$ ならば，τ も単体である．この時，τ は σ の面であるという．σ の濃度が $p+1$ の時，これを p-単体という．$K(S)$ のうち p-単体の集合を K_p で表す．$K_p\ne\emptyset$ を満たす最大の p を K の次元という．[†5]
(2) 一点集合 $\{v\}$ $(v\in V(K))$ は単体である．

要諦 2.3.5. 射の言葉からのデータの復元が肝となる．この幾何学的実現という概念も圏論化することを考える．An abstract simplicial complex is a combinatorial gadget that models certain aspects of a spatial configuration. Sometimes it is useful, perhaps even necessary, to produce a topological space from that data in a simplicial complex.[†6]

定義 2.3.6 (simplex category, simplicial object)**.**

(1) augmented simplex category Δ_a とは，有限な線形有向グラフのなす Cat の充満部分圏をいう．[†7]即ち，有限順序数と短調写像の圏である．従って，Pos の充満な 2-Pos である．これは無縁和 $\oplus$ について，strict monoidal category $(\Delta_a,\oplus,0=[-1])$ をなす．
(2) simplex category Δ とは，inhabited な有限順序数と短調写像のなす，Δ_a の，従って Cat の充満部分圏である．[†8]

---

†3 (-1)(-1)-categories and (-2)(-2)-categories were discovered (or invented) by James Dolan and Toby Bartels.`https://ncatlab.org/nlab/show/(-1)-category`

†4 It follows that, up to equivalence, there is no point in mentioning anything beyond 22-morphisms, except whether two given parallel 22-morphisms are equivalent.`https://ncatlab.org/nlab/show/2-category`

†5 こういうのも fibration か？

†6 `https://ncatlab.org/nlab/show/simplicial+complex`

†7 グラフ準同型は関手より少ないのでは？？

†8 齋藤先生の $n=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$ と $[n]=\{1,2,\cdots,n\}$ の表記と相容れなくて悔しいが，Poset category の概念を学んだ時から感じた「これをもっと

(3)「有向線型グラフ」といっても，ほとんどは暗黙のうちに skelton Δ を取る．即ち濃度 $[n] = \{0 \to 1 \to 2 \to \cdots \to n\}$ を考える．

(4) simplicial set とは，simplex category 上の前層，即ち，関手 $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ をいう．[†9]これは自然変換を射として圏 sSet をなす．[†10]

(5) 関手 $\Delta^{\mathrm{op}} \to C$ を C の simplicial object という．

(6) 標準的な simplicial n-simplex $\Delta[n]$ または Δ^n とは，対象 $[n] \in \Delta$ で表現される simplical set のことである．即ち $\Delta(-, [n]) =: \Delta[n]$ と表す．

(7) この simplicial n-simplex の幾何学的実装を cellular (simplicial) simplex という．

要諦 2.3.7 (face map, degeneracy). simplicial set S とは，n-simplices の集合 S_n の族 (S_n) で，次の 2 条件を満たすもののこととなる．

(1) S_n に対して，面となる S_{n-1} の元を定める規則（射）の族 (face map) $d_i : S_n \to S_{n-1}$ が，全射 $\delta_i : [n-1] \to [n]$ 定まっており，

(2) 単射 $\sigma_i : [n] \to [n+1]$ に対して，degeneracy map $s_i : X_n \to X_{n+1}$ が定まっている．

なお，Δ_a にあって Δ にない対象は $[-1] = \emptyset$ と書くこともある．$n = [n-1] = \{0 \to 1 \to \cdots \to n-1\}$ と書く．

定義 2.3.8 (geometical realization, nerve and realization).

(1) 圏 C に対して $N(C)[n] = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}([n], C)$ で定まる Δ 上の前層は，simplical set である．この対応は関手 $N : \mathrm{Cat} \to \mathrm{sSet}$ を与え，これを圏の**神経**という．これは充満忠実である．

(2) 神経関手 $N : \mathrm{Cat} \to \mathrm{sSet}$ の左随伴関手 $h : \mathrm{sSet} \to \mathrm{Cat}$ の像となるような圏を**ホモトピー圏**という．

命題 2.3.9 (HTT, prop 1.2.2.2). simplicial set S が，ある圏 C の神経と同型であることと，全ての inner horn inclusion $\{\Lambda^n_k \to \Delta^n \mid 0 < k < n\}$ に対して一意な Extension property を持つことは同値である．[†11]

定義 2.3.10 (category of finite intervals).

(1) ∇ を top と bottom の異なる有限区間の圏とし，∇_a をこれに終対象を付け加えた圏とする．

2.4 Factorization system

The "prototypical" example of a weak factorization system is (mono, epi) on Set.[a]

(1) (completed mono, split epi) は任意の extensive category で WFS である．

(2) 排中律を認め，any subset is complemented となる古典論理を備える Set では，(mono, eplit epi) は WFS である．

(3) さらに AC は全ての mono が split であることに同値であるから，(mono, epi) は WFS である．

(4) 特に，lifting problem への解は一意だから，(epi, mono) はは Set の OFS である．こちらは任意のトポスに拡張される準同型定理の一般化である．

Set の写像の属性はこの標準分解から定まる言葉である．[b]同様にして Cat にも Facorization system がある．これを元にして，関手の属性が定まり，これが圏同値の概念を特徴付ける．全ては調和している．

[a] https://ncatlab.org/nlab/show/weak+factorization+system+on+Set

[b] ずっと集合論の教科書で違和感を感じていたことだった．もうどこへでも行ける．

主軸に据えても良いのに」という感覚をみたしてくれる．$[n]$ という形の圏が一番"simplicial"なのである．これが圏の nerve につながる．

[†9] この作った圏 Δ とは，集合の「単体」みたいなものか．

[†10] Set_Δ とも書く．

[†11] これは，通常の圏を，ある特定の性質を満たす simplicial set であるとして特徴付けられることを述べている．

定義 2.4.1 (WFS: weak factorization system)**.** 次を満たす射のクラス $L, R \subset M$ の組 (L, R) を，WFS という．

(1) 任意の射 $f : X \to Y$ が $X \xrightarrow{\in L} Z \xrightarrow{\in R} Y$ に分解される．
(2) L の元であることと，R の任意の元に対して left lifting property を持つこととは同値である．
(3) R の元であることと，L の任意の元に対して right lifting property を持つこととは同値である．
(4) WFS (E, M) であって，lifting problem への解が一意である時，これを orthogonal factorization system という．
(5) $c : [\Delta[2], C] \to [\Delta[1], C]$ の section fact : $[\Delta[1], C] \to [\Delta[2], C]$ を，functorial factorization という．OFS は funcotrial である．

命題 2.4.2. (L, R) を圏 C の WFS とする．

(1) いずれのクラスも C の同型射からなるクラスを含む．
(2) いずれのクラスも合成について閉じている．

定義 2.4.3 (balanced)**.** 全ての monic epic morphism が isomorphic である時，その圏は **balanced** であるという．Monic epics are sometimes called bimorphisms.

注 2.4.4. Grp は balanced である．よって準同型定理が成り立つ．Top はそうではない．従って，準同型定理のようなものが成り立つためには，更なる分離公理を必要とする．

例 2.4.5. (1) (epi,mono) factorization system は直交で，任意のトポスの factorization system である．この FS が存在するためには，圏が balanced である必要がある．
(2) L を本質的に全射な充満関手とし，R を忠実関手とすると，(L, R) は 2-トポスの圏 Cat の 2-factorization system となる．
(3) または，2-圏 Cat では，every functor is factored into parts which forget ‘purely’ stuff, structure, and properties. Conversely, this ternary factorization suffices to determine the notions of faithful, full, and essentially surjective functors.[†12]

2.5　圏の同値の例

命題 2.5.1. CABool を complete atomic Boolean 代数とする．冪集合関手 P : Set $\to$ $\mathrm{CABool}^{\mathrm{op}}$ は忠実関手で，(eso+full,faithful) factorization について圏の同値 $\mathrm{CABool}^{\mathrm{op}} \to$ Set を引き起こす．

2.6　表現可能関手

圏 C は前層のなす圏 $C^\vee$ の充満部分圏と実質的に同じものと考えることができる．

命題 2.6.1 (米田の補題)**.** C を圏とする．A を C の対象とし，$F \in \mathrm{Fun}(C^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set})$ を C 上の前層とする．

(1) $a \in F_C(A)$ とする．C の対象 X に対し射 $f \in h_A(X) = \mathrm{Hom}_C(X, A)$ を $f^*a = F_M(f)(a) \in F_C(X)$ に写す写像 $\alpha_X : h_A(X) \to F_C(X)$ は，これを X 成分として C 上の前層の射 $\varphi_a : h_A \to F$ を定める．
(2) $a \in F_C(A)$ を $\varphi_a : h_A \to F$ に写す写像 $F_C(A) \to \mathrm{Hom}_{C^\vee}(h_A, F)$ は可逆である．逆写像は，$\varphi \in \mathrm{Hom}_{C^\vee}(h_A, F)$ に対して $\varphi(A)(1_A) \in F(A)$ を対応させる写像である．

系 2.6.2. C を圏とする．

(1) $f : A \to B$ を C の射とする．C の対象 X に対し写像 $f_* : h_A(X) = \mathrm{Hom}_C(X, A) \to h_B(X) = \mathrm{Hom}_C(X, B)$ を $f_*(g) = f \circ g$ で定めることで，C 上の前層の射 $f_* : h_A \to h_B$ が定まる．
(2) C の対象 A を前層 h_A に写し，射 $f : A \to B$ を前層の射 $f_* : h_A \to h_B$ に写すことで，関手 $h_C : C \to C^\vee$ が定まる．歴史的には Yoneda embedding という．

[†12] https://ncatlab.org/nlab/show/stuff,+structure,+property

(3) 関手 $h_C : C \to C^\vee$ は充満忠実である．

(4) C の射 $f : A \to B$ が同型であることと，$C^\vee$ の射 $f_* : h_A \to h_B$ が同型であることは同値である．[†13]

定義 2.6.3. C を圏とし，$F : C^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ を C 上の前層とする．

(1) C の対象 A と関手の同型 $\varphi : h_A \to F$ が存在する時，F を**表現可能**であるという．

(2) 関手の同型 $\varphi : H_A \to F$ が $\alpha := \varphi(A)(1_A) \in F(A)$ によって定まるとき，F は α によって A で表現されるといい，α を F の**普遍元**という．

(3) 関手の同型 $\varphi : H_A \to F$ を A の**普遍性**ということがある．C の任意の対象 X に対し，X から A の射は $F(X)$ と $\varphi(X)$ によって完全に記述されるためである．

[†13] $f \circ g$ が連続である時，f か g が連続な同型なら，もう片方も連続だと言えるが，そうでない場合は反例がある．

第 3 章

随伴

圏の同値をさらに射の言葉で「$\mathrm{Hom}: C^{op} \times C \to \mathsf{Set}$ を挟んで関手は同型」というように弱めることで，圏論の最大射程を作る．

It embodies the concept of representable functors and has as special cases universal constructions such as Kan extensions and hence of limits/colimits. Essentially everything that makes category theory nontrivial and interesting beyond groupoid theory can be derived from the concept of adjoint functors. The notion of adjunction may usefully be thought of as a weakened version of the notion of equivalence in a 2-category: a morphism in an adjunction need not be invertible, but it has in some sense a left inverse from below and a right inverse from above.[a]

(1) 随伴関手を Hom 関手の言葉で定義し，
(2) より少ない情報量による特徴付けを 2 つ得る．単位と余単位は標準分解を与え，普遍射を定める．表現可能関手としての解釈は，相対随伴関手の概念を誘導する．
(3) そのうち特に単位と余単位による普遍性を用いて，一般の 2-圏で adjunction の定義に拡張する．

[a] https://ncatlab.org/nlab/show/adjunction

3.1 随伴関手の定義

adjoint functor

関手同士の対応を adjoint functor といい，adjunction の例である．実際に対応がつく個々の射を adjunct という．

(1) 2 つの圏の Hom 集合の消息を，Set 上で比べる見方が最初の定義である．

記法 3.1.1. $F: C \to C', G: C' \to C$ を互いに逆向きの関手とする．F が逆転圏に定める関手 $C^{op} \to C'^{op}$ も F と書く．次の可換図式で，右上周りの合成関手を $\mathrm{Hom}_{C'}(F(-), -) := \mathrm{Hom}_{C'} \circ (F \times 1_{C'})$ と書き，左下周りの合成関手を $\mathrm{Hom}_C(-, G(-)) := \mathrm{Hom}_C \circ (1_C \times G)$ と書く．

$$\begin{tikzcd} C^{op} \times C' \arrow[r, "F \times 1_{C'}"] \arrow[d, "1_{C^{op}} \times G"'] & C'^{op} \times C' \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{C'}"] \\ C^{op} \times C \arrow[r, "\mathrm{Hom}_C"] & \mathsf{Set} \end{tikzcd}$$

定義 3.1.2 (adjoint: Hom 集合の同型)**.** 関手 $C^{op} \times C' \to \mathsf{Set}$ としての同型

$$\varphi: \mathrm{Hom}_{C'}(F(-), -) \to \mathrm{Hom}_C(-, G(-))$$

が存在するとき，F は G の**左随伴関手**であるといい，G は F の**右随伴関手**であるといい，$F \dashv G$ と表す．

注 3.1.3 (adjunction,adjunct)**.**

(1) 次のようにも書く．

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & C \arrow[l, bend right, "F"'] \end{tikzcd}$$

(2) 記号 $F \dashv G$ については，$F \to G$ という射の方向の変形と見ると使用感が良い．

(3) ２つの圏 C, C' の間の関手 $F : C' \leftarrow C, G : C \to D'$ は**随伴 (adjunction)** をなす (form an adjunction)，という．これは一般の 2-圏の概念である．

(4) このとき，Hom 集合間の対応を見ると，各 $c \in C, d \in D$ について，次のような集合の同型が存在する．

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_D(d, G(c)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_C(F(d), c) \\ \cup & & \cup \\ f : d \to G(c) & \longmapsto & \overline{f} : F(d) \to c \end{array}$$

この Hom 集合間の集合の同型 (bijection) を **adjunction isomorphism** $\widetilde{(-)}$ という．

(5) また，$X \in C, Y \in D$ として $f \in \mathrm{hom}_C(FY, X)$ に対して，対応する D の射 $G(f) =: \overline{f} : Y \to GX$ を右**随伴 (adjunct)** という．これを $g = f^\sharp$ または $f = g^\flat$ などと表す．

例 3.1.4 (currying). The process of currying is an instance of passage to adjuncts, specialized to the tensor-hom adjunction of a closed monoidal category.

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathrm{Map}(A \times -, -) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(-, \mathrm{Map}(A, -)) \\ \cup & & \cup \\ f : A \times X \to Y & \longmapsto & x \mapsto f(-, x) \end{array}$$

は集合の同型を定める（関手 $C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathrm{Set}$ の同型でもある）ので，関手 $A \times - : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ は，A が表現する関手 $\mathrm{Hom}(A, -) = h^A : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ の左随伴関手である．

3.2　単位と余単位への標準分解による特徴付け

adjoint functors is an example of adjunction

$f : L(c) \to d$ の随伴 $\widetilde{f} : c \to R(d)$ は，$R(f) : R(L(c)) \to R(d)$ に $\eta_c : c \to R(L(c))$ を precomposition したものである．逆にこれを定義とすると，Hom 集合の間に自然同型 $\mathrm{Hom}_D(L(-), -) \simeq \mathrm{Hom}_C(-, R(-))$ が誘導されることを見る．従って，随伴とは，単位と余単位と呼ばれる 2-射を備えた 1-射の組であり，「単位と余単位の差を除いて圏同値」と呼ぶべき概念となる．圏同値は同型類を潰してみれば同型であったが，随伴は射の延長 (composition) について目を瞑れば同型である．

定義 3.2.1 (adjunction unit and adjunction counit). 随伴 $D_R \leftrightarrows^L C$ について，各対象 $c \in C$ に対して，その単位射 $\mathrm{id}_{L(c)} \in D$ に対応する adjunction η_c が存在する：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_D(L(c), L(c)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_C(c, R(L(c))) \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{id}_{L(c)} & \longmapsto & \eta_c := \widetilde{\mathrm{id}_{L(c)}} \end{array}$$

これを adjunction unit と呼ぶ．同様にして，各 $\mathrm{id}_{R(d)} \in \mathrm{Hom}_C(R(d), R(d))$ に対して，adjunction counit $\epsilon_d := \widetilde{\mathrm{id}_{R(d)}} : L(R(d)) \to d$ が定まる．これらの対応は関手の同型 $\eta : 1_C \to RL, \epsilon : LR \to 1_D$ を定める．

命題 3.2.2 (general adjunct in terms of unit / counit). 随伴 $D_R \leftrightarrows^L C$ について，

(1) 射 $f : L(c) \to d$ の adjunct $\widetilde{f} : c \to R(d)$ は，$\widetilde{f} : c \xrightarrow{\eta_c} R(L(c)) \xrightarrow{R(f)} R(d)$ である．双対的に，$f : L(c) \xrightarrow{L(\widetilde{f})} L(R(d)) \xrightarrow{\epsilon_d} d$．

(2) η_c, ϵ_d は，自然変換 $\eta : \mathrm{id}_C \Rightarrow R \circ L, \epsilon : L \circ R \Rightarrow \mathrm{id}_D$ の成分である．

(3) これらの自然変換は triangle identities を満たす：

$$\mathrm{id}_{L(c)} : L(c) \xrightarrow{L(\eta_c)} L(R(L(c))) \xrightarrow{\epsilon_{L(c)}} L(c)$$
$$\mathrm{id}_{R(d)} : R(d) \xrightarrow[\eta_{R(d)}]{} R(L(R(d))) \xrightarrow[R(\epsilon_d)]{} R(d)$$

［証明］．

1. 自然同型 $\mathrm{Hom}_D(L(-),-) \simeq \mathrm{Hom}_C(-,R(-))$ の左に c を，右に $f : L(c) \to d$ を代入して得る naturality square は

$$\begin{tikzcd} \mathrm{id}_{L(c)} \in \mathrm{Hom}_D(L(c),L(c)) \arrow[r, "\simeq", "\widetilde{(-)}"'] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_D(L(\mathrm{id}_c),f)"'] & \mathrm{Hom}_C(c,R(L(c))) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_C(\mathrm{id}_c,R(f))"] \\ \mathrm{Hom}_D(L(c),d) \arrow[r, "\simeq", "\widetilde{(-)}"'] & \mathrm{Hom}_C(c,R(d)) \end{tikzcd}$$

となり，左下を通る経路での合成は $\widetilde{f} : c \to R(d)$，右上を通る経路での合成は $R(f) \circ \eta_c : c \to R(d)$ である．逆も同様．

3. $\widetilde{f} : c \xrightarrow{\eta_c} R(L(c)) \xrightarrow{R(f)} R(d)$ に対して再び adjunct isomorphism を適用すると，$\varphi : \mathrm{Hom}_D(L(-),-) \to \mathrm{Hom}_C(-,R(-))$ は可逆だから，これは $\mathrm{id}_{L(c)}$ に戻るはずである：$f : L(c) \xrightarrow{L(\eta_c)} L(R(L(c))) \xrightarrow{\epsilon_{L(c)}} L(c)$.

2. 任意の射 $f : c_1 \to c_2$ に対して，次の図式が可換になることを示せば良い：

$$\begin{tikzcd} c_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_{c_1}"'] & c_2 \arrow[d, "\eta_{c_2}"] \\ R(L(c_1)) \arrow[r, "R(L(f))"] & R(L(c_2)) \end{tikzcd}$$

これは，自然同型 $\mathrm{Hom}_D(L(-),-) \simeq \mathrm{Hom}_C(-,R(-))$ の左に $f : c_1 \to c_2$ を，右に $L(C_2)$ を代入して得る naturality square

$$\begin{tikzcd} \mathrm{id}_{L(c_2)} \in \mathrm{Hom}_D(L(c_2),L(c_2)) \arrow[r, "\widetilde{(-)}", "\simeq"'] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_D(L(f),\mathrm{id}_{L(c_2)})"'] & \mathrm{Hom}_C(c_2,R(L(c_2))) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_C(f,R(\mathrm{id}_{L(c_2)}))"] \\ \mathrm{Hom}_D(L(c_1),L(c_2)) \arrow[r, "\widetilde{(-)}", "\simeq"'] & \mathrm{Hom}_C(c_1,R(L(c_2))) \end{tikzcd}$$

から，1. より，右上周りの $\eta_{c_2} \circ f$ と左下周りの $\widetilde{L(f)} = R(L(f)) \circ \eta_{c_1}$ との等式を得る．

■

命題 3.2.3 (特徴付け：adjointness in terms of hom-isomorphism equivalent to adjunction in CatCat). $D_R \leftrightarrows^L C$ が定義 3.1.2 の意味で随伴であることと，2-圏 Cat での adjunction に参加していることは同値．即ち，次の 2 条件と同値．

(1) 自然変換 $\eta : \mathrm{id}_C \Rightarrow R \circ L, \epsilon : L \circ R \Rightarrow \mathrm{id}_D$ が存在する．
(2) これらの自然変換は triangle identities を満たす：

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{L(c)} :& L(c) \xrightarrow{L(\eta_c)} L(R(L(c))) \xrightarrow{\epsilon_{L(c)}} L(c) \\ \mathrm{id}_{R(d)} :& R(d) \xrightarrow[\eta_{R(d)}]{} R(L(R(d))) \xrightarrow[R(\epsilon_d)]{} R(d) \end{aligned}$$

［証明］．命題 3.2.2 より，$\Rightarrow$ は成立する．よって，任意の $f : L(c) \to d$ について，$\varphi : \mathrm{Hom}_D(L(-),-) \simeq \mathrm{Hom}_C(-,R(-))$ を $f \mapsto \widetilde{f} = R(f) \circ \eta_c$ と構成した時，２条件 (1),(2) から Hom 集合間の自然同型が成り立つことが従うことを良い．

Hom 集合間の同型であること　φ が可逆であることを示す．

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{f}} &= \widetilde{R(f) \circ \eta_c} \\ &= \underbrace{\epsilon_d \circ L(R(f))}_{=f \circ \epsilon_{L(c)}} \circ L(\eta_c) && \text{自然変換}\eta\text{の naturality} \\ &= f \circ \underbrace{\epsilon_{L(c)} \circ L(\eta_c)}_{=\mathrm{id}_{L(c)}} && \text{triangle identity} \\ &= f \end{aligned}$$

より，$\widetilde{(-)}$ は involution である．

naturality　任意の $g : c_1 \to c_2, h : d_1 \to d_2$ について，η の naturality と R の functority より，

$$
\begin{tikzcd}
c_2 \arrow[r, "\eta_{c_2}"] \arrow[d, "g"'] & R(L(c_2)) \arrow[d, "R(L(g))"'] \arrow[dr, "R(L(g)\circ f)"] & \\
c_1 \arrow[r, "\eta_{c_1}"] & R(L(c_1)) \arrow[r, "R(f)"] \arrow[dr, "R(h\circ f)"'] & R(d_1) \arrow[d, "R(h)"] \\
& & R(d_2)
\end{tikzcd}
$$

が成り立つから，次の naturality square は可換になる，即ち，$h \circ \widetilde{f \circ L(g)} = R(h) \circ \tilde{f} \circ g$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_D(L(c_1), d_1) \arrow[r, "\simeq", "\widetilde{(-)}"'] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_D(L(g),h)"'] & \mathrm{Hom}_C(c_1, R(d_1)) \\
\mathrm{Hom}_D(L(c_2), d_2) \arrow[r, "\simeq", "\widetilde{(-)}"'] & \mathrm{Hom}_C(c_2, R(d_2))
\end{tikzcd}
$$

■

要諦 3.2.4. 命題 3.2.2 より，単位と余単位に triangle identities が成り立つ．逆に，この情報が随伴の核心で，これだけで Hom 集合間の自然同型を復元できる．こういうところが圏論の形式科学的な側面である．$\overline{h \circ f \circ L(g)} = R(h) \circ \overline{f} \circ g$ を見ると，確かに随伴の現象を集合論的に観測しているなあとわかる．

3.3　随伴関手の存在条件

随伴関手の存在条件を考えると，ある種の currying が成り立つことの拡張のような形になっている．

命題 3.3.1. $L : C \to D, R : D \to C$ を関手とする．関手の図式

$$
\begin{tikzcd}
C^{\mathrm{op}} \arrow[r, "L"] \arrow[d, "h_{C^{\mathrm{op}}}"'] & D^{\mathrm{op}} \arrow[d, "h_{D^{\mathrm{op}}}"] \\
C^{\mathrm{op}\vee} \arrow[r, "R^*"] & D^{\mathrm{op}\vee}
\end{tikzcd}
$$

が定める対応

$$
\begin{array}{ccc}
\Phi : \{\text{関手の射 } h_{D^{\mathrm{op}}} \circ L \to R^* \circ h_{C^{\mathrm{op}}}\} & \longrightarrow & \{\text{関手の射 } \mathrm{Mor}_D(L(-), -) \to \mathrm{Mor}_C(-, R(-))\} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\psi & \longmapsto & \psi
\end{array}
$$

を考える．

(1) Φ は集合の同型である．

(2) 関手の射 $\psi : h_{D^{\mathrm{op}}} \circ L \to R^* \circ h_{C^{\mathrm{op}}}$ が同型であることと，対応する射 $\varphi : \mathrm{Mor}_D(-, R(-)) \to \mathrm{Mor}_C(L(-), -)$ が同型であることは同値である．

命題 3.3.2. $G : C' \to C$ を関手とする．次の 3 条件は同値である．

(1) G の左随伴関手 $F : C \to C'$ が存在する．

(2) 関手 $F : C \to C'$ と関手の同型射 $\psi : h_{C'^{\mathrm{op}}} \circ F \to G^* \circ h_{C^{\mathrm{op}}}$ が存在する．

(3) 写像 $F : C \to C'$ と圏 C の射の集合 M への写像 $\alpha : C \to M$ で，C の任意の対象 A に対して次の条件を満たすものが存在する：

　(a) $\alpha(A)$ は射 $A \to GF(A)$ である．

　(b) 合成関手 $h^A \circ G : C' \to \mathbf{Set}$ は，$\alpha(A) \in \mathrm{Hom}_C(A, GF(A)) = (h^A \circ G)(F(A))$ を普遍元として $F(A) \in C'$ で表現される．

3.4　普遍射

adjoint functors is an example of adjunctig

命題 3.2.2 を見ると，単位と余単位は標準分解を与えている．普遍射という概念を定義すれば，これも特徴付けとなる．

定義 3.4.1 (universal arrow)**.** 関手 $R : D \to C$ と対象 $c \in C$ について，c から R **への普遍射**とは，コンマ圏 (c/R) の始対象をいう．普遍射の終域の R についての fiber を $L(c) \in D$ とすると，これを $\eta_c : c \to R(L(c))$ とすると，任意の f は単位 η_c について分解することとなり，R についての fiber を $\widetilde{f}$ とすれば，R の随伴関手 L が復元できる．

補題 3.4.2. $R : D \to C$ を関手，$c \in C$ を対象とする．次の条件は同値である．

(1) $\eta_c : c \to R(L(c))$ は $R(L(c))$ に入射する普遍射である．
(2) 組 (c, η_c) はコンマ圏 c/R の始対象である．

命題 3.4.3 (普遍射の族は随伴関手を定める)**.**

3.5　表現可能性の観点からの特徴付け

adjoint functor

$\mathrm{Hom}_D(L(-), -) \simeq \mathrm{Hom}_C(-, R(-))$ とは，いずれの Hom 関手も互いに表現可能であることを主張する．特に，任意の $d \in D$ について，$\mathrm{Hom}_D(L(-), d) \simeq \mathrm{Hom}_C(-, R(d))$ より，$\mathrm{Hom}_D(L(-), d)$ は representing object $R(d) \in D$ による表現可能関手である．「各 $d \in D$ について representing object が見つかること」，より正確には

> precomposition である前層の圏の射 $L^* : [D^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}] \to [C^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$ の米田埋め込みに沿った制限 $\overline{L} := L^* \circ y : D \to [C^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$ について，各 $d \in D$ に対して前層 $\overline{L}(d)$ が表現可能であるならば，これは関手的に表現可能であり，関手 $R : D \to C$ が存在して $\mathrm{Hom}_D(L(-), -) = \overline{L} \simeq y \circ R = \mathrm{Hom}_D(-, R(-))$ となる．

も，随伴関手を復元するのに十分な情報量となる．従って，随伴関手は，存在するならば同型を除いて一意である．この特徴付けは，R が圏 D の全域では定まらない場合にも意味を持つ．この場合を，相対位相にならって，R の定義域が定める D の充満部分圏上の相対右随伴関手という．この大域と局所の対は，極限と Kan 拡張にも持ち越される．

命題 3.5.1 ((adjoint functor from objectwise representing object)**.** 任意の対象 $d \in D$ に対して，$\mathrm{Hom}_D(L(-), d) \simeq \mathrm{Hom}_C(-, R(d))$ を満たす対象 $R(d) \in C$ が存在するならば，$L \dashv R$ である．また，このような対応 $D \to C$ から関手 R を得る延長は一意的である．

3.6　随伴の定義

adjunction

随伴の概念は 2-圏について一般的に定められていて，随伴関手は Cat における例である．

定義 3.6.1 (adjunction, unit of adjunction, counit of adjunction)**.** 2-圏において，2 つの 0-射 C, D と 1-射 $L : C \to D, R : D \to C$ と 2-射 $\eta : \mathrm{id}_C \Rightarrow R \circ L, \epsilon : L \circ R \Rightarrow \mathrm{id}_D$ の組が随伴であるとは，次の triangle identities / zigzag identities を満たすことをいう．

$$R\epsilon \circ \eta R = 1_R, \qquad \epsilon L \circ L\eta = 1_L$$

ただし，並記 (juxtapositiion) は whiskerinig[†1] で，2-射 $\eta \circ R : \mathrm{id}_R \circ R \Rightarrow (R \circ L) \circ R$ を表す．自然変換 $\eta : \mathrm{id}_C \Rightarrow R \circ L$ を単位，

[†1] 1-射と 2-射の horizontal composition のことをいう．vertical composition とは，弓の振動モードのように，弓の支え（1-射）に鉛直に合成されていく．

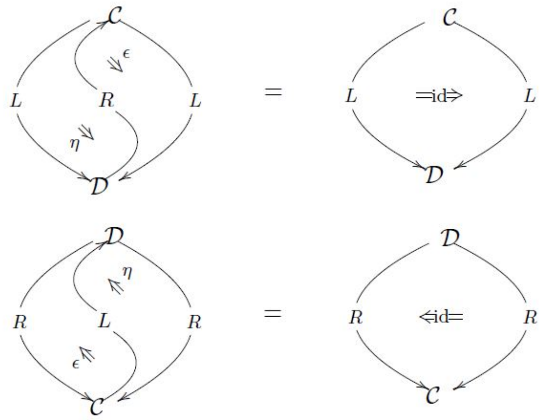
$\epsilon : L \circ R \Rightarrow \mathrm{id}_D$ を余単位という．1-射 L, R を adjoint morphism という．

注 3.6.2 (triangle identities)**.** は他に等価な表現を 2 つ持つ．

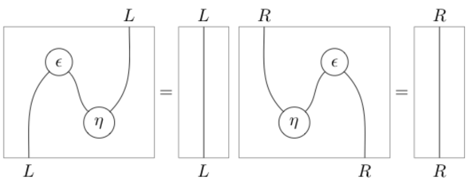
diagram in the functor category (triangle)

$$\begin{tikzcd} & RLR \arrow[dr, Rightarrow, "R\epsilon"] \arrow[d, equal] & \\ R \arrow[ur, Rightarrow, "\eta R"] \arrow[rr, Rightarrow, "\mathrm{id}_R"'] & {} & R \end{tikzcd}$$

diagram in the 2-category (zigzag)　2-単位射を書かないことにすると，次の zigzag 図式を得る．



string diagram　"pulling the zigzag straight"の動きに対応する．



注 3.6.3 (unit, counit)**.** 歴史的には unit は front adjunction と呼ばれていた．unit の由来は，任意の随伴に対して定まる $T := R \circ L$ は monad であり，即ち monoid object の例であり，η がその単位射となっている．identity natural transformation の synonym である unit を取った．

要諦 3.6.4. 根底には群論や双線型形式を感じる．$A^*Q = PA$ とは共軛 $Q = {}^tAPA$ のことである．diagram での表記が後者で，hom-set に注目すると全射が見える．結局，一番下層で観測される事象は，An adjunct is given by precomposition with a unit or postcomposition with a counit.[†2]

例 3.6.5 (adjunction)**.**

(1) Cat の関手の組 (L, R) が adjunct ならば，それぞれを adjoint functor と呼ぶ．
(2) モノイド圏 A に対して，単一対象な 2-圏 $\mathcal{B}A$ の 1-射は A の対象に対応する．この時，$\mathcal{B}A$ の adjoint morphism の概念は，A における dualizing object の概念に一致する．

これに対して水平合成は，1-射の向きに進んでいく．弓の幅が長くなり，2-射から見れば定義域の延長に思える．

†2 https://ncatlab.org/nlab/show/unit+of+an+adjunction

3.7　完備化

距離空間，測度空間，環に完備化が考えられるが，その名前は構成されるモノ射の性質による．後二者は代数的にも同じである．

定義 3.7.1 (reflective, reflector / reflection, completion)**.**

(1) 充満忠実な部分圏 $i: C \hookrightarrow D$ が**反射的**であるとは，この包含関手 i が左随伴 T を持つことをいう．この左随伴 T を**反射（子）**という．
(2) 反射子 T が忠実である時，**完備化**ともいう．
(3) 射 $d \hookrightarrow T(d) \in C$ は冪等であり：$\forall_{c \in C}\ Tc \simeq c$（特徴付け 3.7.3 より），この $T(d) \in C$ を $d \in D$ の**完備化**という．

例 3.7.2.

(1) $i: \mathrm{Ab} \to \mathrm{Grp}$ は反射的である．この左随伴 $T: \mathrm{Grp} \to \mathrm{Ab}$ を**アーベル化**という：$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(T(-), -) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(-, i(-))$．ただしアーベル化は商群による構成であるように，いくつかの群準同型を同一化してしまうから，反射子 T は充満であるが忠実でない．よってアーベル化は群に性質を付与する行為ではあるが，群の完備化とは言わない．
(2) 一方で距離空間を完備化しても，射（等長写像）は落ちない（忠実であるが充満ではない）．

補題 3.7.3 (反射子の特徴付け)**.** 次の条件は同値．

(1) $T: D \to C$ は反射子である：充満忠実な右随伴関手 $i: C \hookrightarrow D$ を持つ．
(2) 余単位 $\epsilon: Ti \to \mathrm{id}_D$ は関手の射である．
(3) モナド $(iT, T\epsilon i, \eta)$ は冪等であり，$i: C \hookrightarrow D$ は保守的であり，T は本質的に全射である．

第 4 章

極限

Internalization と enrichment を考えたい．圏が持ち得る構成の型を考える．あり得る理論が出て来る．例えば群論は有限積を備える圏で展開できる．圏論は引き戻しを備える圏で展開できる．Lawvere の代数的理論を学びたい．特に，有限な極限を持つ圏は，ほとんどの代数学を展開できる．ただ測度論のように $P(X)$ に迫るには σ-性や δ-性が欲しい．

> One of the most important observations of category theory is that large parts of mathematics can be internalized in any category with sufficient structure.[†1]

これをさらに進めれば internal logic の考え方に至る．この先が真に数学が生息する母なる大地だと感じる．基本的には，certain algebraic structures can be defined in any category equipped with a categorified version of the same structure, as with monoid objects in a monoidal category.[†2]

> We name this principle the microcosm principle, after the theory, common in pre-modern correlative cosmologies, that every feature of the microcosm (e.g. the human soul) corresponds to some feature of the macrocosm.[2]

Grothendieck が limit exists を limit is representable と表現したことは気になる．

4.1 limit

錐を可換に補完するもののなす圏の中の終対象＝最大のものが極限である．圏論的に極限とは，the “most optimized solution” to the problem of finding such an object という営みである．[a] ホモトピー論と並行に考えられるという．In practice, it is possibly best thought of in the context of representable functors as a classifying space for maps into a diagram.
表現可能関手による定義と universal cone による定義がある．

[a] https://ncatlab.org/nlab/show/limit

定義 4.1.1 (inverse system, inverse limit / projective limit)**.** C を圏とし，順序集合 I を圏と考える．

(1) 関手 $I \to C$ を I 上の C の**逆系**という．
(2) 逆系 $A : I \to C$ に対して，対象 $B \in C$ と射の族 $(p_i : B \to A_i)_{i \in I}$ であって，$i, j \in I, i \le j$ に対して射 $f_{ij} : A_i \to A_j$ と $\forall_{i \le j}\ f_{ij} \circ p_i = p_j$ の関係を満たすものを，B から A への**射の逆系**とよび，$B \to A$ で表す．[†3] B から A への C の射の逆系全体のなす集合を $\mathrm{Mor}_{C,I}(B, A)$ で表す．
(3) 逆系 $A : I \to C$ について，対象 $B \in C^{\mathrm{op}}$ を射の逆系の集合に写す前層 $\mathrm{Mor}_{C,I}(-, A) : C^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ が表現可能であるとき，関手 $\mathrm{Mor}_{C,I}(-, A)$ を表現する C の対象を A の**逆極限**とよび，$\varprojlim_{i \in I} A_i$ で表す．
(4) 極限 $\varprojlim$ を**射影極限**または**逆極限**という．余極限 $\varinjlim$ を**帰納極限**または**順極限**という．

[†1] https://ncatlab.org/nlab/show/internal+logic
[†2] https://golem.ph.utexas.edu/category/2008/12/the_microcosm_principle.html
[†3] 錐とも呼ぶ．

注 4.1.2. 極限とは違う用語を使うことは，図式の始域 I を有向集合や順序集合に制限する代数学の流れを汲んでいる．むしろこちらの方が圏論的な定義が与えられる前の定義であった．

定義 4.1.3 (constant inverse system)**.**

(1) $A_i := A\ (i \in I), f_{ij} := 1_A\ (i \le j)$ として定まる C の逆系を**定数逆系**といい，A_I で表す．

4.2　pullback

pullback is limit over a cospan

引き戻しと座標変換．

定義 4.2.1.

(1) 図式

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, "f"'] & & b \arrow[dl, "g"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

を pullback diagram または cospan という．

(2) pullback とは，cospan のの極限である．

(3) 出来上がる四角形の図式を pullback square と呼ぶ．

(4) 反対圏 C^{op} での pullback を pushout と呼ぶ．

命題 4.2.2 (等化子としての特徴付け)**.** C は積を備えるとする．引き戻し

$$\begin{tikzcd} a \times_c b \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[d, "f"] \\ b \arrow[r, "g"'] & c \end{tikzcd}$$

は，f, g が積 $a \times b$ に沿って定める射についての等化子

$$\begin{tikzcd} a \times_c b \arrow[r] & a \times b \arrow[r, shift left, bend left, "f\mathrm{pr}_1"] \arrow[r, shift right, bend right, "g\mathrm{pr}_2"'] & c \end{tikzcd}$$

命題 4.2.3 (引き戻しは mono, iso を保存する)**.**

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d, "f^*g"'] & b \arrow[d, "g"] \\ c \arrow[r, "f"'] & d \end{tikzcd}$$

を pullback square とする．

(1) g が monic ならば，f^*g も monic である．

(2) g が同型ならば，f^*g も同型である．

逆はいずれも成り立たない．

命題 4.2.4 (pasting law for pullbacks)**.** 次の可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d] \\ d \arrow[r] & e \arrow[r] & f \end{tikzcd}$$

right-hand inner square が pullback であるとする．left-hand inner square が pullback であることと，outer square が pullback であることは同値．

注 4.2.5. left-hand inner square と outer square が pullback であるのに，right-hand inner square は pullback ではない例が存在する．

定義 4.2.6 (base change morphism / pullback functor)**.** 引き戻しを備える圏 C について，$f : X \to Y$ を射とする．これは，over category 上に，引き戻し関手 $f^* : C/Y \to C/X$ を引き起こす．これを**基底変換射**という．

4.3　Kan 拡張

参考文献

[1] 斎藤毅『数学原論』(2020)

[2] John C. Baez, James Dolan, Higher-Dimensional Algebra III: n-Categories and the Algebra of Opetopes (1997)

[3] Sanders Mac Lane "Category for the Working Mathematicians" (98)