数学講究 XA
担当：会田茂樹先生

05-210520 司馬博文

2022 年 7 月 26 日

問題 1

補題. $\{Z_n\} \subset L^2(\Omega)$ を平均 0 の確率変数列で，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} E[Z_n^2] < \infty$ を満たすとする．これは概収束する．

補題. 実確率過程 $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ について，次の 2 条件は同値.

(1) B は次の 3 条件を満たす：
   (a) $B_0 = 0$ a.s.
   (b) $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$ $(0 \leqslant s < t)$.
   (c) $\forall_{n=2,3,\cdots} \forall_{0\leqslant t_1<\cdots<t_n}$ $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \cdots, B_{t_2} - B_{t_1}$ は独立.

(2) B は平均 0 共分散 $\Gamma(s,t) := \min(s,t)$ の Gauss 過程である.

[証明].

(1)⇒(2) Gauss 過程であることを示すには，任意の $0 < t_1 < \cdots < t_n \in \mathbb{R}_+$ を取り，$B := (B_{t_1}, \cdots, B_{t_n}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ が n 次元の正規分布に従うことを示せば良い．まず，仮定 (a),(c) より，$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ は独立であり，それぞれが正規分布に従う．したがって，積写像 $A := (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ は n 次元正規分布に従う．行列

$$J := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

が定める線形変換を $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ とおくと，これは明らかに可逆で，$B = f(A)$ が成り立つ．ここで，任意の線型汎関数 $q \in (\mathbb{R}^n)^*$ に関して，$q(B) = q(f(A))$ は，$q \circ A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が線型であることから，正規分布に従う．よって，B も正規分布に従う．

また，仮定 (b) より平均は $m(t) = E[B_t] = 0$ で，共分散は，$s \geqslant t$ のとき，増分の独立性 (c) に注意して

$$\Gamma(s,t) = \mathrm{Cov}[B_s, B_t] = E[B_s B_t] = E[B_s(B_t - B_s + B_s)] = E[B_s(B_t - B_s)] + E[B_s^2] = s.$$

Γ の対称性より，これは $\Gamma(s,t) = \min(s,t)$ を意味する．

(2)⇒(1)

(B1) 平均と分散を考えると，$m(0) = E[B_0] = 0$ かつ $\Gamma(0,0) = E[B_0^2] = 0$．よって，$E[|B_0|] = 0$ より，$B_0 = 0$ a.s.

(B2) Gauss 過程であることより，組 $A := (B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \cdots, B_{t_2} - B_{t_1})$ は n 次元正規分布に従う．これらが独立であることを示すには，補題より A の分散共分散行列 Σ_A の非対角成分がすべて 0 であることを示せば良い．平均が 0 で $\Gamma(s,t) = \min(s,t)$ であることより，任意の $1 < i < j \in [n]$ について，共分散の双線型性に注意して，

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}[B_{t_i} - B_{t_{i-1}}, B_{t_j} - B_{t_{j-1}}] &= E[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})] \\ &= E[B_{t_i} B_{t_j}] - E[B_{t_{i-1}} B_j] - E[B_{t_i} B_{t_{j-1}}] + E[B_{t_{i-1}} B_{t_{j-1}}] = i - (i-1) - i + (i-1) = 0. \end{aligned}$$

(B3) 平均が 0 で $\Gamma(s,t)=\min(s,t)$ であることより，

$$E[(B_t-B_s)^2]=E[B_t^2]+E[B_s^2]-2E[B_tB_s]=t+s-2s=t-s.$$

■

命題. $\{\xi_i\}\subset L^2(\Omega)$ を $N(0,1)$ に従う独立同分布列，$\{e_i\}$ を可分 Hilbert 空間 $L^2([0,1])$ の正規直交基底とする．

$$X_n(t,\omega):=\sum_{i=1}^n \xi_i(\omega)\int_0^t e_i(u)du$$

について，次が成り立つ．

(1) $\forall_{t\in[0,1]}\ \lim_{n\to\infty}X_n(t)$ は L^2 と概収束の意味で収束する．
(2) 極限過程 X は条件 (b),(c) を満たす．
(3) X_n は一様収束の位相についても，殆ど至る所収束する．とくに，X は Brown 運動である．

［証明］.

(1) $L^2(\Omega)$**-収束**　任意に $t\in[0,1]$ を取る．このとき，$E[\xi_i\xi_j]=\delta_{ij}$ に注意すると，

$$\begin{aligned}\left\|\int_{i=N}^M \xi_i(\omega)\int_0^t e_i(u)du\right\|_{L^2(\Omega)}&=E\left[\left(\sum_{i=N}^M\xi_i\int_0^t e_i(u)du\right)^2\right]\\&=E\left[\sum_{i=N}^M\xi_i^2\left(\int_0^t e_i(u)du\right)^2\right]\\&=\sum_{i=N}^M\left(\int_0^t e_i(u)du\right)^2\\&=\sum_{i=N}^M(1_{[0,t]}|e_n)^2_{L^2([0,1])}\\&=\sum_{i=0}^M(1_{[0,t]}|e_n)^2_{L^2([0,1])}-\sum_{i=0}^N(1_{[0,t]}|e_n)^2_{L^2([0,1])}\xrightarrow{N,M\to\infty}0.\end{aligned}$$

となるから，(X_n) は $L^2(\Omega)$ 上の Cauchy 列である．$L^2(\Omega)$ の完備性より，これは収束する．

概収束　各 $Z_i:=\xi_i\int_0^t e_i(u)du$ は平均 0 の，独立確率変数で，

$$\sum_{i=1}^\infty E\left[\xi_i^2\left(\int_0^t e_i(u)du\right)^2\right]=\sum_{i=1}^\infty\left(\int_0^t e_i(u)du\right)^2=1$$

より，概収束する．

(2) 補題より，X の平均と共分散を確かめれば良い．

平均　$E:L^2(\Omega)\to\mathbb{R}$ の $L^2(\Omega)$-連続性より，

$$E[X]=E\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^n\xi_i\int_0^t e_i(u)du\right]=\lim_{n\to\infty}E\left[\sum_{i=0}^n\xi_i\int_0^t e_i(u)du\right]=0.$$

分散　任意の $s,t\in\mathbb{R}_+$ と $n\geqslant 1$ について，$E[\xi_i\xi_j]=\delta_{ij}$ と Parseval の等式より，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[X_s,X_t]&=E\left[\left(\sum_{i=1}^n\xi_i\int_0^s e_i(u)du\right)\left(\sum_{i=1}^n\xi_i\int_0^t e_i(u)du\right)\right]\\&=\sum_{i=1}^n\left(\int_0^s e_i(u)du\right)\left(\int_0^t e_i(u)du\right)\\&=\sum_{i=1}^n(1_{[0,s]}|e_i)_{L^2([0,1])}(1_{[0,t]}|e_i)_{L^2([0,1])}\xrightarrow{n\to\infty}(1_{[0,s]}|1_{[0,t]})_{L^2([0,1])}=\min(s,t).\end{aligned}$$

(3) (Ito and Nishio, 1968 [1]) より，殆ど至る所一様収束もする．よって，X は連続過程でもあり，従って Brown 運動である．

■

問題 2

補題. $X, Z \in L^2(\Omega)$ を独立で対称な確率変数とする：$X \overset{d}{=} -X, Z \overset{d}{=} -Z$. このとき,

$$E[(X+Z)^2|X^2+Z^2] = X^2+Z^2.$$

[証明]. $X+Z, X-Z$ は同じ分布を持つから,

$$E[(X+Z)^2|X^2+Z^2] = E[(X-Z)^2|X^2+Z^2] < \infty$$

よって，両辺の差を取って，$E[XZ|X^2+Z^2] = 0$ を得る． ■

定理 (Levy's downward theorem). $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を部分 σ-代数の単調減少列，$\mathcal{G}_\infty := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_k$ とする．このとき，可積分過程 $\{X_n\} \subset L^1(\Omega)$ が $(\mathcal{G}_n)$-逆マルチンゲールならば,

$$\lim_{n\to\infty} X_n = E[X_1|\mathcal{G}_\infty] \text{ a.s.}$$

命題. $(B_t^1, B_t^2)_{t\in[0,1]}$ を 2 次元 Brown 運動とし，$\mathcal{P}_m := \{\tau_k^m = k2^{-m}\}_{k=0}^{2^m}$ を $[0,1]$ の分割とする．

(1) $I_m := \sum_{k=0}^{2^m} B^1_{\tau^m_{k-1}}(B^1_{\tau^m_k} - B^1_{\tau^m_{k-1}})$ は $m\to\infty$ について L^2 及び概収束の意味で収束する．

(2) $J_m := \sum_{k=0}^{2^m} (B^1_{\tau^m_k} - B^1_{\tau^m_{k-1}})(B^2_{\tau^m_k} - B^2_{\tau^m_{k-1}})$ は $m\to\infty$ について L^2 及び概収束の意味で 0 に収束する．

[証明].

(1) I_m の各項は

$$B^1_{\tau^m_{k-1}}(B^1_{\tau^m_k} - B^1_{\tau^m_{k-1}}) = \frac{1}{2}\left(((B^1_{\tau^m_k})^2 - (B^1_{\tau^m_{k-1}})^2) - \underbrace{(B^1_{\tau^m_k} - B^1_{\tau^m_{k-1}})^2}_{=:I_n^k}\right)$$

と表せるから,

$$I_m = \frac{1}{2}(B_1^1)^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2^m} I_m^k$$

と表せる．

概収束　$I'_m := \sum_{k=1}^{2^m} I_m^k$ とき，これがある I' に概収束することを示せば，$I = I'/2 + (B_1^1)^2/2$ も概収束することが分かる．

$\mathcal{G}_n := \sigma[I'_m | m \geqslant n]$ とすると，$(\mathcal{G}_n)$ は部分 σ-代数の減少列である．

このとき，$\forall_{m\geqslant 2}\ I'_m = E[I'_{m-1}|\mathcal{G}_m]$ を示す．まず，各 $1 \leqslant k \leqslant 2^m$ について，$\mathcal{G} := \sigma[(B^1_{\tau^m_k} - B^1_{\tau^{m+1}_{2k-1}})^2 + (B^1_{\tau^{m+1}_{2k-1}} - B^1_{\tau^m_{k-1}})^2]$ とおくと，補題より,

$$E[I_m^k|\mathcal{G}] = (B^1_{\tau^m_k} - B^1_{\tau^{m+1}_{2k+1}})^2 + (B^1_{\tau^{m+1}_{2k-1}} - B^1_{\tau^m_{k-1}})^2 = I^{2k}_{m+1} + I^{2k-1}_{m+1}$$

が成り立つから，たしかに $\forall_{m\geqslant 2}\ I'_m = E[I'_{m-1}|\mathcal{G}_m]$ が成り立つ．

よって，(I_m) は逆マルチンゲールだから，Levy の定理より，$\lim_{m\to\infty} I'_m = E[I'_1|\mathcal{G}_\infty]$ a.s.

L^2-収束　I'_m が 1 に L^2-収束することを示す．一般の $[0,1]$ の分割 $\pi := \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ について収束を示せば良い．確率変数列を $\xi_j := (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1} - t_j)$ $(j \in n)$ とおくと，これらは中心化された独立な確率変数列になる．

$$\begin{aligned} E\left[\left(\sum_{j=0}^{n-1}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - t\right)^2\right] &= E\left[\left(\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j\right)^2\right] = \sum_{j=0}^{n-1} E[\xi_j^2] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\left(3(t_{j+1}-t_j)^2 - 2(t_{j+1}-t_j)^2 + (t_{j+1}-t_j)^2\right) \\ &= 2\sum_{j=0}^{n-1}(t_{j+1}-t_j)^2 \leqslant 2t|\pi| \xrightarrow{|\pi|\to 0} 0. \end{aligned}$$

(2) 多次元 Brown 運動のそれぞれの成分は互いに独立であることに注意する．

L^2-収束　次のように計算出来る．

$$
\begin{aligned}
E[(J_m - 0)^2] &= E\left[\sum_{k=0}^{2^m}(B^1_{\tau^m_k} - B^1_{\tau^m_{k-1}})^2(B^2_{\tau^m_k} - B^2_{\tau^m_{k-1}})^2\right] \\
&= \sum_{k=0}^{2^m} E[((B^1_{\tau^m_k} - B^1_{\tau^m_{k-1}})^2)]E[(B^2_{\tau^m_k} - B^2_{\tau^m_{k-1}})^2] \\
&= \sum_{k=0}^{2^m}(\tau^m_k - \tau^m_{k-1})^2 = \sum_{k=0}^{2^m}\frac{1}{2^{2m}} \xrightarrow{m\to\infty} 0.
\end{aligned}
$$

概収束　よって，L^1-収束 $E[|J_m|] \to 0$ も従うから，$J_m \to 0$ a.s.

■

参考文献

[1] Ito, Kiyoshi., and Nishio, Makiko. (1968). On the Convergence of Sums of Independent Banach Space Valued Random Variables. *Okasa Journal of Mathematics*. 5(1): 35-48.

[2] Morters, Peter., and Peres, Yuval. (2012). *Brownian Motion*. Cambridge Univ. Press.