例 0.1. $a, b \in \mathbb{R}^d$ に対して，$\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$. □

[証明]. コンパクト台を持つ超関数との畳み込みの定義から，

$$(\delta_a * \delta_b|\varphi) = (\delta_a|\widetilde{\delta_b} * \varphi).$$

ここで，$\widetilde{\delta_b} * \varphi$ を簡単にすることを考えると，

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta_b} * \varphi(x) &= (\widetilde{\delta_b}|\tau_x\widetilde{\varphi})\\ &= (\delta_b|\widetilde{\tau_x\widetilde{\varphi}})\\ &= (\delta_b|\varphi(x+\bullet)) = \varphi(x+b), \qquad (x \in \mathbb{R}^d).\end{aligned}$$

よって，

$$(\delta_a * \delta_b|\varphi) = (\delta_a|\varphi(\bullet + b)) = \varphi(a+b) = (\delta_{a+b}|\varphi) \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)).$$

■

命題 0.2 .

(1) $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ は $T' = T$ を満たすとする．このとき，$T \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ で，$\exists_{C\in\mathbb{R}}\ T(x) = Ce^x$.
(2) $g(x) = e^x$，$S \in \mathcal{D}'_c(\mathbb{R})$ とする．$g * S$ は e^x の定数倍である．

[証明]. $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対して，$(\varphi T|\psi) := (T|\varphi\psi)$ $(\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$ と定める．

(1) $e^{-x}T$ が定数関数であることを示せば良い．実際，$(e^{-x}\varphi)' = -e^{-x}\varphi + e^{-x}\varphi'$ $(\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$ であるから，任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して，

$$\begin{aligned}((e^{-x}T)'|\varphi) &= (e^{-x}T|\varphi') = (T|e^{-x}\varphi')\\ &= (T|(e^{-x}\varphi)' + e^{-x}\varphi)\\ &= -(T'|e^{-x}\varphi) + (T|e^{-x}\varphi) = (T - T'|e^{-x}\varphi) = 0.\end{aligned}$$

これより，$e^{-x}T \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ かつ定数である．

(2) $e^{-x}(g * S)$ が $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ の元でありかつ定数であることを示せば良い．実際，任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ について，

$$\begin{aligned}((e^{-x}(g * S))'|\varphi) &= (e^{-x}(g * S)|\varphi')\\ &= (g * S|e^{-x}\varphi') = (g * S|(e^{-x}\varphi)') + (g * S|e^{-x}\varphi)\\ &= -((g * S)'|e^{-x}\varphi) + (g * S|e^{-x}\varphi) = 0.\end{aligned}$$

ただし，$(g * S)' = g' * S = g * S$ を用いた．

■

例 0.3. P.V. $\left(\dfrac{1}{x}\right)$ の $\mathcal{S}$ 上での階数を与えよ． □

[証明]. 任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して，Taylor の定理を念頭に，

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi_1(x), \qquad \varphi_1(x) := \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}.$$

と変形すると，中間値の定理より，

$$\sup_{|x|\leqslant R}|\varphi_1(x)| = \sup_{|x|\leqslant R}\left|\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\right| \leqslant \sup_{|x|\leqslant R}|\varphi'(x)|.$$

これを踏まえて，

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{P.V.}\frac{1}{x}\middle|\varphi\right) &= \lim_{\epsilon\to0}\int_{|x|\geqslant\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx\\ &= \lim_{\epsilon\to0}\int_{\epsilon\leqslant|x|\leqslant1}\left(\frac{\varphi(0)}{x} + \varphi_1(x)\right)dx + \int_{|x|\geqslant1}\frac{\varphi(x)}{x}dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon\leqslant|x|\leqslant 1}\varphi_1(x)dx + \int_{|x|\geqslant 1}\frac{x\varphi(x)}{x^2}dx \\
&\leqslant 2\sup_{|x|\leqslant 1}|\varphi'(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}}|x\varphi(x)|\int_{|x|\geqslant 1}\frac{dx}{x^2} \\
&\leqslant 2\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi'(x)| + 2\sup_{x\in\mathbb{R}}|x\varphi(x)| \leqslant 2\|\varphi\|_1.
\end{aligned}
$$

第二項の評価は stackexchange，第一項の評価は [?] による．

全く同様の評価が行えて (第二項の評価は必要なくなるが)，$\mathcal{D}$ 上でも階数 1 である． ■

注 0.4. こうやって評価するのか．特異点 (0 での発散と無限大での発散) は分解して一つ一つ和として処理するために，$\mathcal{D}, \mathcal{S}$ のノルムの定義が一様ノルムと和で 2 つの流儀で与えていたのかもしれない．