総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻 博士課程（５年一貫制）入学試験 (1/22/2019 実施) 問題と解答

あの *

2022 年 11 月 20 日

記法についての注意

次の記法は以後断りなく用いる．

(1) $n = 1, 2, \cdots$ について，

$$n := \{0, 1, 2, \cdots, n-1\},\ [n] := \{1, 2, \cdots, n\}.\ \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\},\ \mathbb{N}^+ = \mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, 3, \cdots\}.$$

(2) 同様にして，$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$，$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$，$\overline{\mathbb{R}_+} := [0, \infty]$．

(3) $M_{mn}(\mathbb{R})$ で (m, n)-実正方行列の全体，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ でそのうち可逆なものの全体を表す．

(4) $I_d \in M_d(\mathbb{R})$ を単位行列，$O_d \in M_d(\mathbb{R})$ を零行列とする．

(5) $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{C}$ で，行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ の固有値全体の集合を表す．

(6) $f(x) = O(x^n)\ (x \to 0)$ で $\displaystyle\limsup_{x \to 0} \left|\frac{f(x)}{x^n}\right| < \infty$ を表す．

(7) $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を m，距離空間 S 上の Borel σ-代数を $\mathcal{B}(S)$ で表す．

(8) 1_A で集合 A の指示関数を表す．

(9) 確率変数 X, Y に対して，期待値を $E[X]$，分散を $\mathrm{Var}[X]$，共分散を $\mathrm{Cov}[X, Y]$ で表す．

(10) $U(S)$ で集合 S 上の一様分布，$N(\mu, \sigma^2)$ で平均 μ 分散 σ^2 の正規分布を表す．

(11) $\mathrm{Exp}\,(\gamma)\ (\gamma > 0)$ で指数分布 $f(x) = \gamma e^{-\gamma x} 1_{\{x>0\}}$ を表す．

問題文の表現は筆者の都合で一部変えています．過去に実施された入学試験問題は統計数理研究所 HP から見れます．

第 1 問

(1) 次の行列 $A \in M_2(\mathbb{R})$ に対して，A^5 を求めよ：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) 次の関数を 2 次まで Maclaurin 展開せよ：$f(x) = \log(3 + 4x)$．

(3) 次の定積分の値を求めよ：

$$\int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx.$$

(4) V を線型空間，$v_1, v_2, v_3 \in V$ を基底とする．新たな基底を

$$u_1 = v_1 + v_2, \quad u_2 = v_1 - v_2 + v_3, \quad u_3 = -v_1 + v_2 + v_3$$

と定めたとき，次のベクトル $a \in V$ の u_1, u_2, u_3 による成分表示を求めよ：

$$a := 2v_1 + 4v_2 + 3v_3 \in V$$

* e-mail address : anomath57@gmail.com
URL : https://anomath.com/

[解答例].

(1) 明らかに固有ベクトルからなる基底 $(1,-2)^\top, (2,1)^\top$ を持つから,

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

と対角化できる．よって,

$$A^5 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3125 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = 625\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix} = 625A.$$

(2) f の 2 階までの導関数の $x=0$ での値を求めることにより,

$$\log(3+4x) = \log 3 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{9}x^2 + O(x^3) \quad (|x| \to 0)$$

$$\begin{aligned}\log(3+4x) &= \log 4 + \log\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)+1\right)\\ &= \left(x-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{4}\right)^3 + O()\end{aligned}$$

(3)

$$\int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = \left[\sqrt{3+2x-x^2}\right]_0^1 = 2-\sqrt{3}.$$

$x = 1+2\sin\theta$ と置換することにより,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{1}{2\cos\theta}2\cos\theta d\theta = \frac{\pi}{6}.$$

(4) 基底変換行列を

$$(u_1\ u_2\ u_3) = (v_1\ v_2\ v_3)\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{=:P}$$

と定めると,

$$a = (v_1\ v_2\ v_3)\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} = (u_1\ u_2\ u_3)P^{-1}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} = (u_1\ u_2\ u_3)\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} = (u_1\ u_2\ u_3)\begin{pmatrix}12\\4\\8\end{pmatrix}.$$

■

第 2 問

$N \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$ について,

$$A_N := \begin{pmatrix}1-a & -a & \cdots & -a\\ -a & 1-a & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & -a\\ -a & \cdots & -a & 1-a\end{pmatrix} \in M_N(\mathbb{R})$$

と定める．また,

$$T_5 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

と定める.

(1) T_5A_5 を求めよ.

(2) $\det(A_5)$ を求めよ．また，一般の $\det(A_N)$ を求めよ.

(3) $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ とする．このときの $a \in \mathbb{R}$ と，固有値 0 に属する単位固有ベクトル z を求めよ．
(4) $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ とする．$x := A_N(I_N + A_N^2)^{-1}z$ を求めよ．

[解答例].

(1)
$$T_5A_5 = \begin{pmatrix} 1-a & -a & -a & -a & -a \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 行列式は，列ベクトルに関する多重交代線型形式であることに注意すると，第一列の分解 $e_1 + (-a, \cdots, -a)^\top$ について，$\det(A_N) = \det(A_{N-1}) + \det(B_N)$ となる，ただし，B_N は行列 A_N の第一列を $(-a, \cdots, -a)^\top$ に変えたものとした．ここで同様の手続きを B_N の第二列に施すと，これは B_{N-1} と同じ行列式を持つことが判る．これを繰り返して，
$$\det(A_N) = \det(A_{N-1}) + \det(B_2) = \det(A_{N-1}) - a.$$
$|A_1| = 1-a, |A_2| = 1-2a$ と繰り返し計算して，$|A_5| = 1-5a$．一般には $|A_N| = 1 - Na$．

(3) $0 \in \mathrm{Sp}(A_N)$ のとき $\det(A_N) = 0$ より，$a = \dfrac{1}{N}$．このとき，A_N は
$$A_N = I_N - \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
という形の射影行列になるから，0 に属する単位固有ベクトルの 1 つは
$$z := \frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$
と見つかる．

(4) 射影行列 A_N は半正定値であるから，$I_N + A_N^2 = I_N + A_N$ はたしかに可逆である．また，$P_N := I_N - A_N$ とおくと，これも射影行列で，
$$(I_N + P_N)(I_N + A_N) = (I_N + A_N)(I_N + P_N) = 2I_N$$
であるから，$(I_N + A_N)^{-1} = \dfrac{1}{2}(I_N + P_N)$ とわかる．以上より，
$$x = A_N\frac{1}{2}(I_N + P_N)z = A_Nz = 0.$$

■

要諦 0.1. 表に出ては来ないが，Fisher-Cochran の定理の話題に非常に近い．

第 3 問

問 1 関数
$$f(x) = \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$
について，
(a) $\forall_{x \in (0,\pi/2)}\ f(x) + f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \mathrm{const.}$ を示せ．
(b) $f(x)$ の $(0, \pi/2)$ 上での定積分の値を求めよ．

問 2 (a) $\log(1+x)$ の Maclaurin 展開を考えることより，$\dfrac{\log(1+x)}{x}$ の 2 次近似式を求めよ．

(b) 次の極限が存在するための $a, b \in \mathbb{R}$ の値と，そのときの極限値を求めよ：

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e(a+bx)}{x^2}.$$

[解答例].

問 1 任意の $x \in (0, \pi/2)$ について，$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$ より，

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} + \frac{1}{1 + (\tan x)^{-\sqrt{2}}} = \frac{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} = 1.$$

これを用いて，定積分の値を I とすると，

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \int_0^{\pi/2} \left(f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right) dx \\ &= I + \int_0^{\pi/2} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx \\ &= I - \int_{\pi/2}^{0} f(y) dy = 2I. \end{aligned}$$

以上より，

$$I = \frac{\pi}{4}.$$

問 2 (a) $\log(1+x)$ の 3 階までの $x = 0$ での微分係数を計算することにより，

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4) \quad (|x| \to 0)$$

を得る．よって，$|x| < 1$ の範囲で，

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + O(x^3) \quad (|x| \to 0).$$

(b) $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\log(1+x)}$ の Maclaurin 展開を考えると，

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= 1 + \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + O(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + O(x^3)\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + O(x^3)\right)^2 + \cdots \\ &= \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots\right) - \frac{x}{2}\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots\right) + \frac{x^2}{3}\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots\right) + O(x^3) \\ &= e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + O(x^3) \qquad (|x| \to 0) \end{aligned}$$

を得る．よって，$a = 1, b = -\frac{1}{2}$ とおけば，極限値 $\frac{1}{3}e$ を得る．

■

第 4 問

$X_1, X_2 \sim N(0,1)$ を独立同分布，

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad a \in (0,1).$$

と定める．この問題では，正規分布に関する性質は，次の公式を除いて証明なしで用いてはならない：

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

(1) 次を計算せよ：$E[X_1], \mathrm{Var}[X_1]$.

(2) $\mathrm{Cov}[Y_1, Y_2]$ を計算せよ．

(3) (Y_1, Y_2) の同時確率密度関数が次で与えられることを示せ：

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi(1-a^2)} \exp\left(-\frac{1}{2(1-a^2)^2}\left((1+a^2)y_1^2 - 4ay_1y_2 + (1+a^2)y_2^2\right)\right) \quad (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

(4) 確率変数 $\dfrac{Y_1}{Y_2}$ の確率密度関数を求めよ．

[解答例].

(1) 部分積分より，

$$E[X_1] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(-\frac{x^2}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0.$$

$$\mathrm{Var}[X_1] = E[X_1^2] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x\left(-\frac{x^2}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}dx = -0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1.$$

(2) まず，$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ より $\mathrm{Cov}[X_1, X_2] = 0$ である．実際，Fubini の定理より，

$$\mathrm{Cov}[X_1, X_2] = E[X_1X_2] = \iint_{\mathbb{R}^2} x_1x_2e^{-\frac{x_1^2}{2}-\frac{x_2^2}{2}}dx_1dx_2 = \int_{\mathbb{R}} x_1e^{-\frac{x_1^2}{2}}dx_1\int_{\mathbb{R}} x_2e^{-\frac{x_2^2}{2}}dx_2 = 0.$$

よって，共分散の双線型性より，

$$\mathrm{Cov}[Y_1, Y_2] = \mathrm{Cov}[X_1 + aX_2, aX_1 + X_2] = a\mathrm{Var}[X_1] + a\mathrm{Var}[X_2] = 2a.$$

(3)

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + aX_2 = y_1 \\ Y_2 = aX_1 + X_2 = y_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{y_1 - ay_2}{1-a^2} \\ X_2 = \dfrac{y_2 - ay_1}{1-a^2} \end{cases}$$

より，$N(0,1)$ の確率密度関数を ϕ で表すと，変換 $(y_1, y_2) \mapsto (X_1, X_2)$ の Jacobian は $\dfrac{1}{1-a^2}$ であるから，

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2) &= \frac{1}{1-a^2}\phi\left(\frac{y_1 - ay_2}{1-a^2}\right)\phi\left(\frac{y_2 - ay_1}{1-a^2}\right) \\ &= \frac{1}{1-a^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\left(\frac{y_1 - ay_2}{1-a^2}\right)^2\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\left(\frac{y_2 - ay_1}{1-a^2}\right)^2\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi(1-a^2)}\exp\left(-\frac{1}{2(1-a^2)^2}((1+a^2)y_1^2 - 4ay_1y_2 + (1+a^2)y_2^2)\right). \end{aligned}$$

(4) ここで，変数変換

$$\begin{cases} \dfrac{Y_1}{Y_2} = y \\ Y_2 = y_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Y_1 = yY_2 = yy_2 \\ Y_2 = y_2 \end{cases}$$

を考えると，(3) の結果に代入することで，$\dfrac{Y_1}{Y_2}, Y_2$ の結合分布密度関数は

$$f(y, y_2) = \frac{1}{2\pi(1-a^2)}\exp\left(-\frac{1}{2(1-a^2)^2}y_2^2((1+a^2)y^2 - 4ay + (1+a^2))\right).$$

これを y_2 について積分することで，

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-a^2)}\exp\left(-\frac{1}{2(1-a^2)^2}((1+a^2)y^2 - 4ay + 1 + a^2)\right).$$

■