目次

第 1 章

確率過程の一般理論

確率的な方法を使って数学的対象を調べることも，現実的対象を調べることも出来る．統計推測への応用も，調和解析への応用も考えたい．

値の空間が等しい確率変数の族を確率過程といい，このときの値域である位相空間を状態空間という．[†1]確率変数族には独立性の概念が拡張できたが，これは応用上自然ではない．遥かに緩いクラスとして，マルチンゲールを定義する．1930 年代に，独立確率変数の和の理論を整備する過程で豊かに育った Kolmogorov のアイデアを一般化する試みの中で，Levy がマルチンゲールの概念を発明し，Doob が理論を立てた．Brown 運動も確率積分もマルチンゲールになる．

解析学に可測関数，連続関数，解析関数というようなクラスがあるように，確率論にもマルチンゲール，加法過程，Markov 過程，定常過程などのクラスがある．解析学に指数関数，Bessel 関数などの特殊関数があるように，確率論にも Weiner 過程，Poisson 過程というような特殊過程がある．ただし，分類の指導方針が全く違う．確率論の指導原理は独立性であってきた．

A stochastic process is the mathematical abstraction of an empirical processes whose development is governed by probabilistic laws. [Doob, 1990] Preface, 一文目.

記法 1.0.1 (空間の名前に関する記法)**.**

(1) 確率変数 $X \in L(\Omega)$ に対して，$\mathcal{F}[X] := \sigma[X] \vee 2$ で，X が生成する閉 σ-代数を表す．
(2) 確率過程 $X = (X_t)$ に対して，$\mathcal{F}[X] := (\mathcal{F}_t[X])_{t\in T}$ で，確率過程 $X = (X_t)$ が生成する自然な情報系を表す．
(3) Markov 時刻の全体を $\mathbb{T}(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P) = \mathbb{T}((\mathcal{F}_t))$ で表す．
   (a) そのうち可予測なものの全体を $\mathbb{T}_p$ で表す．
   (b) $\mathbb{T}^{<\infty}$ で停止時の全体を表す．
(4) 増大情報系 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ の記法をそのまま $(\mathcal{F}_t)$-適合的な過程の全体 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T} \subset \mathrm{Map}(T; L(\Omega))$ にも用いる．$\mathbb{F}(\mathcal{F}_t)$ とも表す．
(5) C-過程，D-過程の全体を $C, D \subset \mathrm{Map}(T; L(\Omega))$ で表す．
(6) $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上の関数の空間として，$L(\mathfrak{P}) \subset L(\mathcal{D}) \subset L(\mathcal{P}) \subset L(\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$．それぞれ，適合 C-過程，適合 D-過程，発展的可測過程である．
(7) 過程の空間 X に対して，
   (a) $X^2 := X \cap L^2(T; L^2(\Omega))$ で自乗可積分なものを表す．
   (b) ${}^0\mathrm{X}$ で 0 から始まるもののなす閉部分空間を表す．
   (c) 特に情報系 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$ に適合していることを強調するとき，$X \cap \mathbb{F} = X(\mathcal{F}_t)$ と表す．

記法 1.0.2 (過程の構成に関する記法)**.** 確率過程 $X \in D$ について，

(1) 左連続化を $X_- := (X_{t-})_{t\in\mathbb{R}_+}$ と表す．
(2) ジャンプの過程を $\Delta X_t := X_t - X_{t-}$ と表す．
(3) 時刻 t までの上限の過程を $X_t^* := \sup\limits_{s\leqslant t} |X_s|$ と表す．$(\Delta X)_t^* = \sup\limits_{s\leqslant t} |\Delta X_s|$ である．

[†1] 最も一般的には Banach 空間を取ることが流行らしい．

(4) 時刻 t までの二次変分の過程を $\sum(\Delta X_s)^2 := \left(\sum_{0\leqslant s\leqslant t}(\Delta X_s)^2\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ で表す.
(5) 確率時刻 τ に対しては $\Delta X_\tau := X_\tau 1_{\tau<\infty} - X_{\tau-}1_{\tau<\infty}$ と表す.
(6) 確率時刻 τ に対する停止過程を $X^\tau := X_{t\wedge\tau}$ で表す.

1.1 無限次元測度空間

関数解析の知識に，測度論を加える必要がある.

1.1.1 C, D-空間

$C(T) \subset D(T) \subset \mathcal{L}(T)$ に注意.

定理 1.1.1 (完備可分距離空間の Borel 集合族の特徴付け). (S, τ) を完備可分距離空間とする．$\tau_1 \subset \tau$ も位相で，(S, τ_1) が Hausdorff ならば，2 つが生成する Borel σ-代数は等しい：$\mathcal{B}(S, \tau) = \mathcal{B}(S, \tau_1)$.

定理 1.1.2 (C, D 上の Borel 集合族の特徴付け). $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(T)$ 上の Kolmogorov σ-代数 $\mathcal{B}_K(\mathcal{F})$ とは，評価写像の族 $(\pi_t : \mathcal{F} \to \mathbb{R})_{t\in T}$ を可測にする $\mathcal{F}$ 上の最小の σ-代数なのであった.

(1) $C(T)$ に広義一様収束位相を入れて考える．すると，これについての Borel 集合族 $\mathcal{B}(C(T))$ は，Kolmogorov の σ-代数 $\mathcal{B}_K(C(T)) = \vee_{t\in T}\pi_t^*(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ に等しい.
(2) $D(T)$ に Skorohod 位相を入れると，これは完備可分距離化可能空間である．すると，これについての Borel 集合族 $\mathcal{B}(D(T))$ は，Kolmogorov の σ-代数 $\mathcal{B}_K(D(T)) = \vee_{t\in T}\pi_t^*(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ に等しい.

要諦 1.1.3. 特に，（少なくとも $T = [0, 1]$ のときは）$D(T)$ の Skorohod 位相の $C(T)$ への相対化が広義一様収束位相である．要は 2 つは $\mathcal{L}(T)$ からみれば同じ位相である．では $\mathcal{L}(T)$ 上の位相としては何に当たるのだろうか？

歴史 1.1.4. Skorokhod 空間は 1956 年に導入された.

1.1.2 写像空間上の測度の存在と一意性

Kolmogorov の拡張定理は，Hopf の拡張定理の一般化である．そこから確率過程論についても，種々の対象が構成できる．$\mathbb{R}_+$ 上の確率過程も，有限次元周辺分布を指定することで構成できるが，$\mathbb{R}^\infty$ の場合と違って一意性は担保されない.

定理 1.1.5 (帰納極限の構成). 確率空間列 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 上の確率測度列 (μ_n) が次の一貫性条件をみたすとき，$(\mathbb{R}^\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathbb{N}))$ 上の確率測度 μ であって $\forall_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}\ \mu(A\times\mathbb{R}^\mathbb{N}) = \mu_n(\mathcal{A})$ を満たすものが一意的に存在する．ただし，$A\times\mathbb{R}^\mathbb{N} = \{(\omega_n)\in\mathbb{R}^\mathbb{N} \mid (\omega_1,\cdots,\omega_n)\in A\}$ とした．なお，$\mathbb{R}^\mathbb{N}$ には直積位相を考える.

$$\text{(consistency)}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}\ \mu_{n+1}(A\times\mathbb{R}) = \mu_n(A).$$

特に，この一貫性条件は $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ 上の測度に延長できるための必要十分条件である．これは $\mathbb{R}$ を一般の完備可分空間としても成り立つ.

1.1.3 C-空間上の測度の存在と Ascoli-Arzelà の定理

定理 1.1.6 . $C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)$-過程 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が次の 2 条件を満たすならば，ある部分列 $\{n_k\}$ と確率空間 $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{P})$ とその上の $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ と分布同等な確率変数列 $(\widehat{X}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して，$\widehat{X}$ に概広義一様収束する.

(1) 一様 (本質的) 有界: $\lim_{N\to\infty}(\sup_{n\in\mathbb{N}} P[|X_n(0)| > N]) = 0$.
(2) 同程度一様連続：$\forall_{\epsilon>0}\ \forall_{T>0}\ \lim_{h\searrow 0}(\sup_{n\in\mathbb{N}} P\left[\max_{|t-s|\leqslant h}|X_n(t) - X_n(s)| > \epsilon\right]) = 0$.

さらに，(X_n) の任意の有限次元周辺分布が収束するならば，$\{X_n\} = \{X_{n_k}\}$ と取れる．すなわち，部分列を取る必要はない．

命題 1.1.7 (Kolmogorov の連続性定理). $C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)$-過程 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が次の 2 条件を満たすならば，上の定理の 2 つの要件を満たす．

(1) $\exists_{M,\gamma>0}\ \forall_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n(0)|^\gamma] \leqslant M$.

(2) $\exists_{\alpha,\beta>0}\ \exists_{\{M_k\}\subset\mathbb{R}^+}\ \forall_{n,k\in\mathbb{N}}\ \forall_{t,s\in[0,k]}\ E[|X_n(t)-X_n(s)|^\alpha] \leqslant M_k|t-s|^{1+\beta}$.

系 1.1.8 (さらに一般の構成). 確率分布族 $\{P_{t_1,\cdots,t_n}\}_{n\in\mathbb{N}^+,t_1<\cdots<t_n\in\mathbb{R}_+}$ が次の条件を満たすとき，$\mathrm{Map}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)$ 上の確率測度 P が存在して，その有限次元周辺分布になる：

(C1) $P_{t_1,\cdots,t_n} \in P(\mathbb{R}^{n\times d})$ である．

(C2) 任意の部分集合 $\{t_{k_1} < \cdots < t_{k_m}\} \subset \{t_1 < \cdots < t_n\}$ について，$P_{t_{k_1}},\cdots,P_{t_{k_m}}$ は $P_{t_1,\cdots,t_n}$ の対応する周辺分布である．

さらに次を満たすとき，確率測度 P は $C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)$ 上の確率測度とも見れる：

$$\forall_{\alpha,\beta,T>0}\ \exists_{M_T>0}\ \forall_{0\leqslant t_1<t_2<T}\quad \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |x_{t_1}-x_{t_2}|^\alpha P_{t_1,t_2}(dx_{t_1}dx_{t_2}) \leqslant M_T(t_2-t_1)^{1+\beta}.$$

1.2　過程という枠組み

1.2.1　過程の定義

写像 $T \to \mathcal{L}(\Omega)$ を過程という．$C(\Omega) \subset D(\Omega) \subset \mathcal{L}(\Omega)$ に値が収まるとき，$\Omega\times T \to \mathbb{R}$ も可測で，$\Omega \to D(T)$ もその Skorohod 位相について可測になる．

定義 1.2.1 (stochastic process). $T \in \mathrm{Meas}$ を可測空間，$E \in \mathrm{Top}$ を位相空間とする．

(1) 写像 $X_- : T \to \mathcal{L}(\Omega;E)$ を**確率過程**という．その値域としての確率変数の族 $\{X_t\}_{t\in T} \subset \mathcal{L}(\Omega;E)$ も確率過程という．

(2) $L(T) = \mathcal{L}(T)/\mathcal{N}$ は確率収束の位相について完備可分距離空間 (特に Frechet 空間) となる．この位相について X が連続であるとき，これを**確率連続**であるという：

$$\forall_{s\in T}\ \forall_{\epsilon>0}\ \lim_{t\to s} P[|X_t - X_s| > \epsilon] = 0.$$

(3) 付随する 2 変数写像 $\Omega\times T \to \mathbb{R}; (\omega,t) \mapsto X_t(\omega)$ が積可測であるとき，過程 X は**可測過程**であるという．

(4) 逆に，可測写像 $\Omega\times T \to \mathbb{R}$ は可測過程を定める，すなわち，$\forall_{t\in T}\ X_t \in \mathcal{L}(\Omega)$ が成り立つことは Fubini の定理に含意されている．従って逆向きの転置に関して，$X_-(\omega) \in \mathcal{L}(T)$ も成り立つ．

定義 1.2.2 (continuous process, right-continuous process). 過程 (X_t) について，

(1) 付随する写像 $X_\bullet : \Omega \to \mathrm{Map}(T;E)$ を**転置**といい，その値 $(X_t(\omega))_{t\in T} : T \to E$ を**見本過程**という．

(2) その値域 $\mathrm{Im}\, X_\bullet$ が $D \subset \mathrm{Map}(T;E)$ に収まるとき D-**過程**といい，さらに C にも収まるとき C-**過程**という．

(3) 確率 1 で収まるとき，これらを広義の D-過程，C-過程という．

要諦 1.2.3. この見本道の空間への写像は，可測性についての問題が大きいために過程の定義としては採用し得ない．

定理 1.2.4 (D-過程について，2 つの見方は等価である).

(1) 過程 (X_t) が C-過程，または D-過程であるとき，対応 $X_\bullet : \Omega \to D(T;E)$ はたしかに可測で，たしかにこれは確率変数である．

(2) 逆に，確率変数 $X : \Omega \to C(T)$ が与えられたとき，各 $X_t : \Omega \to E$ はたしかに可測であり，したがってこれは C-過程である．

(3) C-過程と D-過程は可測過程である．

注 1.2.5 (確率過程とは何か).　(1) 添字集合 T を時間と見るとき，$T \subset \overline{\mathbb{R}}$ とする．統計力学では T は冪集合のなす有向集合，Gauss 過程の見本道の正則性理論では単に距離空間とすることもある．

1.2.2　過程の同値性

模型としての同値性は，法則同等によって定めるのが良いであろう．より強い同等性の概念は，

定義 1.2.6 (indistinguishable, modification, equivalent). $(X_t),(Y_t)$ を過程とする．

(1) $P[\forall_{t\in T}\, X_t=Y_t]=1$ のとき，**強同等**または**識別不可能**であるという．これは $\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+\mid X\ne Y\}$ が消えゆく運命であることに同値．
(2) $\forall_{t\in T}\, P[X_t=Y_t]=1$ のとき，**同等**であるという．また，Y_t を X_t の**修正**または**変形**という．
(3) $\forall_{n\in\mathbb{N}^+}\,\forall_{t_1,\cdots,t_n\in T}\, P^{(X_{t_1},\cdots,X_{t_n})}=P^{(Y_{t_1},\cdots,Y_{t_n})}$ が成り立つとき，**法則同等**または**同値**であるという．

要諦 1.2.7.

(1) 2 つが可測過程であるとき，左転置 $\Omega\to L(T)$ が全く同じ写像を定めることが強同等である．$C(T)\subset\mathcal{L}(T)$ に注意すると，C-過程を $\mathrm{Im}\,X\cap C(T)$ が充満集合であるという広義の意味で解釈すれば，C-過程と強同等な過程は C-過程である．
(2) 2 つが可測過程であるとき，右転置 $T\to L(\Omega)$ が全く同じ写像を定めることをいう．
(3) 2 つが可測過程であるとき，左転置 $\Omega\to L(T)$ が，$L(T)$ 上に同じ有限周辺分布を持つ分布を押し出すことをいう．

例 1.2.8.

(1) 標準確率空間 $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),l)$ 上の過程
$$X_t(\omega)=\begin{cases}0 & B_t(\omega)\ne 0,\\ 1 & B_t(\omega)=0.\end{cases}$$
は，$Y=0$ と比べると，任意の $t\in\mathbb{R}_+$ に対して $P[X_t=Y_t]=1$ である．分かりにくかったら B の代わりに δ としても良い．つまり同等になってしまう．これは強同等の概念を要請する所以である．
(2) D-過程 X,Y が, 任意の有理点 $t\in\mathbb{Q}_+$ において $X_t=Y_t$ a.s. であるならば, 強同等である．実際, $\cup_{t\in\mathbb{R}_+}\{X_t(\omega)\ne Y_t(\omega)\}=\cup_{t\in\mathbb{Q}_+}\{X_t(\omega)\ne Y_t(\omega)\}$ は零集合である．

□

定理 1.2.9 (D-過程の有限周辺分布が等しいなら分布全体は等しい). D 過程 $(X_t),(Y_t)$ について，

(1) 2 つは法則同等であるとする．このとき，左転置 $X_\bullet:\Omega\to D(T), Y_\bullet:\Omega\to D(T)$ が押し出す $D(T)$ 上の確率分布 $P^{X_\bullet},P^{Y_\bullet}$ は等しい．
(2) 2 つは同等であるとする．このとき，識別不可能である [Nualart, David, and Nualart, Eulalia, 2018].

[証明]. Dynkin 族定理から． ■

1.2.3　過程の可分修正

$T\subset\mathbb{R}$ のとき，本来ならば
$$A:=\{\omega\in\Omega\mid X_\bullet(\omega)\in C(T)\}$$
という集合は可測であるかどうかもわからない．この問題は，過程 (X_t) は適宜可分に取り直せることによって無視できる．この点を克服したのが Doob であった．今後，暗黙のうちに過程は可分な修正を取る．

定義 1.2.10 (separability). 過程 (X_t) が可分であるとは，ある加算部分集合 $S\subset T$ が存在して，次が成り立つことをいう：
$$P[\forall_{t\in T}\ \liminf_{S\ni s\to t}X_s\leqslant X_t\leqslant\limsup_{S\ni s\to t}X_s]=1.$$

補題 1.2.11 . 広義の C-過程は可分である．

定理 1.2.12 (**Th'm 8.2 (Doob,[Doob, 1990])**). 任意の過程 (X_t) に対して，可分な修正が存在する．すなわち，T を非可算集合，$\{X_t\}_{t\in T}\subset\mathcal{L}(\Omega)$ とする．

(1) 任意の $A\in\sigma[X_t,t\in T]$ に対して，ある可算部分集合 $S\subset T$ が存在して，$A\in\sigma[X_t,t\in S]$ が成り立つ．
(2) 任意の $Y\in L^1(\Omega)$ について，可算部分集合 $S\subset T$ が存在して，$E[Y|X_t,t\in T]=E[Y|X_t,t\in S]$ a.e.

1.2.4　L^2-過程と半正定値核

一様可積分なマルチンゲールは本質的には条件付き期待値だけである．同様にして，L^2-過程は半正定値核と対応する．$L^2(\Omega)\subset L(\Omega)$ の部分集合 $\xi:T\to L^2(\Omega)$ を L^2-過程という．このクラスの過程は共分散関数を持つ．

命題 1.2.13 (**半正定値核と一対一対応する**).

(1) 2 次の中心積率 $K_\xi(t,s):=E[(\xi(t)-E[\xi(t)])\overline{(\xi(s)-E[\xi(s)])}]$ は正の定符号核である．
(2) 逆に，正の定符号核は，ある 2 次過程の中心積率である．

これを**共分散関数**という．

補題 1.2.14 . 区間 $T\subset\mathbb{R}$ 上の 2 次過程 $\xi:T\to L^2(\Omega)$ について，

(1) L^2-連続であることは，$K_\xi:T^2\to\mathbb{R}$ が $\Delta\subset T^2$ 上連続であることに同値．
(2) L^2-導関数
$$\xi'(t):=\lim_{n\to\infty}\frac{\xi(t+h_n)-\xi(t)}{h_n}\quad((h_n)\text{ は 0 に収束する任意の数列 })$$
が存在することは，K_ξ が Δ 上で 2 階の偏導関数を持つことに同値．
(3) $(a,b)\subset T$ 上で 2 次変分を持つことは，$K_\xi\in L^1((a,b)^2)$ に同値．

1.2.5　L^2-過程の可分変形

マルチンゲールの可分変形は，第 1 種の不連続性しか持たない．同様にして L^2-過程の可分変形は C-過程になるための条件が核の言葉で表せる．

定理 1.2.15 (**2 次過程が C-過程である条件**). 2 次過程 $\xi:T\to L^2(\Omega)$ について，
$$\frac{K_\xi(t+h,t+h)-K_\epsilon(t,t+h)-K_\epsilon(t+h,t)+K_\epsilon(t,t)}{h^2}=O(1)$$
が成り立つならば，過程 ξ の可分な変形は C-過程である．

1.2.6　マルチンゲールの可分変形

Markov 性や martingale 性などは独立性の一般化であると了解しやすい．マルチンゲールの可分変形は第 1 種の不連続性しか持たないため，この不連続点での値を右連続に修正すれば D-過程になる．この事実は上渡回数に関する不等式による．さらに，平均 $s\mapsto E[X_s]$ が連続ならば，この D-過程は修正でもある（不連続点の全体は零集合）．

定義 1.2.16 (**Markov chain, martingale**). 確率変数列 (X_n) が定める試行の列 $(\mathfrak{A}^n)$ について，

(1) $\forall_{k\in[n]}\ \forall_{i\in[r_k]}\ P[A_i^k|\mathcal{A}^1\cdots\mathcal{A}^{k-1}]=P[A_i^k|\mathfrak{A}^{k-1}]$ が成り立つとき，これを **Markov 連鎖**という．
(2) $\forall_{k\in[n]}\ \forall_{i\in[r_k]}\ E[X_{n+1}|\mathcal{A}^1\cdots\mathcal{A}^n]=X_n$ a.s. が成り立つとき，これを **martingale** という．

要諦 1.2.17 (確率解析の精神). 複雑な相互作用のある系を，独立な確率変数の系で等価な表現をすることを reduction という．そのときに因果性（時間的前後関係）を保存する $\forall_{t\in T}\ \mathcal{F}_t=\mathcal{F}'_t$ とき，新たな過程を新生過程 (innovation) という．加法過程は線型

演算だけで新生過程が求められる．i.i.d. をそのまま連続化しようとし，可分性の仮定も満たすものは，加法過程の時間微分を持っていれば良い．それが Gauss 型でもあるとき，これを白色雑音という．

定理 1.2.18 (Doob).

(1) 任意の可分な $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲール $X\widetilde{X}$ は，第一種の不連続点しか持たない：

$$P[\forall_{t\in\mathbb{R}_+}\ \widetilde{X}_{t+0},\widetilde{X}_{t-0}\text{が存在する}\ ]=1.$$

なお，任意の劣マルチンゲールに可分変形 1.2.12 が取れることに注意.

(2) $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲール X が確率連続ならば，すなわち，

$$\forall_{s\in\mathbb{R}_+}\ \lim_{t\searrow s}E[|X_t-X_s|\wedge 1]=0$$

が成り立つならば (X がマルチンゲールならばこれを満たす)，Y は修正でもある：$\forall_{t\in\mathbb{R}_+}\ X_t=Y_t\ \text{ a.s.}$

[証明]. 与えられた劣マルチンゲールに対する可分変形 1.2.12$\widetilde{X}$ は，

$$P[\forall_{t\in\mathbb{R}_+}\ \widetilde{X}_{t+0},\widetilde{X}_{t-0}\text{が存在する}\ ]=1.$$

を満たすから，$\widehat{X}_t:=\widetilde{X}_{t+0}$ と定めれば良い. ■

要諦 1.2.19. この操作によって何個の点で値が変更されるかは不明であるから，これが修正であるとは限らない．が，確率連続性の過程を置くと，修正点は可算個で済み，修正となる．

定義 1.2.20 (D-modification). 同等な D-過程は識別不可能であるから，このような (Y_t) は識別不可能な違いを除いて一意に定まり，D-変形という．

1.2.7　もう一つのマルチンゲール正則性定理

定理 1.2.21 (regularity theorem). $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲールとする．このとき，

$$P\left[\forall_{t\in\mathbb{R}^+}\ \lim_{\mathbb{Q}\ni r\nearrow t}X_r<\infty\wedge\forall_{t\in\mathbb{R}_+}\ \lim_{\mathbb{Q}\ni r\searrow t}X_r<\infty\right]=1.$$

定義 1.2.22 . $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲールとする．

(1) $t\in\mathbb{R}_+$ について，$X_{t+}:=\limsup_{\mathbb{Q}\ni r\searrow t}X_r$.

(2) $t\in\mathbb{R}^+$ について，$X_{t-}:=\liminf_{\mathbb{Q}\ni r\nearrow t}X_r$.

命題 1.2.23 . 劣マルチンゲール (X_t) について，

(1) $\forall_{t\in\mathbb{R}_+}\ E[|X_{t+}|]<\infty$.

(2) $\forall_{t\in\mathbb{R}_+}\ X_t\leqslant E[X_{t+}|\mathcal{F}_t]\ \text{ a.s.}$

(3) $t\mapsto E[X_t]$ が右連続ならば，特に X がマルチンゲールならば，(2) は等式が成り立つ．

(4) (X_{t+}) は $(\mathcal{F}_{t+})$-劣マルチンゲールである．

右極限についても全く同様の事実が成り立つ．

定理 1.2.24 . X を右連続な $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲールとする．このとき，

(1) $(\mathcal{F}_{t+})$-劣マルチンゲールでもある．

(2) X は殆ど確実に D-過程である．

定理 1.2.25 . X を $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲール，$(\mathcal{F}_t)$ は完備で右連続とする．さらに $t\mapsto E[X_t]$ が右連続ならば（X がマルチンゲールならばこれを満たす)，$(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲールな D-変形を持つ．

1.3　条件付き期待値

$E_{\mathcal{G}}: L^1(\Omega) \to L^1_{\mathcal{G}}(\Omega)$ が定まる．$L^2(\Omega)$ 上に制限して見ると，任意の $X \in L^2(\Omega)$ に対して，$\mathcal{G} < \mathcal{F}$-可測関数のなす部分空間 $L^2_{\mathcal{G}}(\Omega) \subset L^2_{\mathcal{G}}(\Omega)$ への直交射影の値 (のバージョン) として得られる $L^1_{\mathcal{G}}(\Omega)$ の元を，条件付き期待値という．これは最小二乗の意味での最適推定値であるとも言える．

$\mathcal{G}$ の元 $B \in \mathcal{G}$ に対して，その立場の上での X の期待値 $E[X1_B]$ を返す符号付き測度を $Q: \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ と表そう．するとその $P|_{\mathcal{G}}$ に関する密度関数が $E[X|\mathcal{G}]$ である．$E[-|\mathcal{G}]: L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ は正な線型汎関数となっている．

1.3.1　定義と構成

定義 1.3.1 (conditional expectation, conditional probability, regular). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-代数とする．可積分確率変数 $X \in L^1(\Omega)$ について，

(1) 次の 2 条件を満たす，P-零集合を除いて一意な確率変数を**条件付き期待値**といい，$E[X|\mathcal{G}]$ で表す．
   (a) $\mathcal{G}$-可測でもある P-可積分確率変数である．
   (b) 任意の $\mathcal{G}$-可測集合 $B \in \mathcal{G}$ 上では X と期待値が同じ確率変数になる：$\forall_{B\in\mathcal{G}}\ E[X1_B] = E[E[X|\mathcal{G}]1_B]$.[†2]

(2) $P[A|\mathcal{G}] := E[1_A|\mathcal{G}]$ $(A \in \mathcal{F})$ を**条件付き確率**というが，確率測度を定めるとは限らない．これが確率測度を定めるとき，**正則**条件付き確率という．[†3]

注 1.3.2 (条件付き確率の正則性)**.**

(1) $E[X|\mathcal{G}]$ が可積分であるという条件は余分で，L^1-ノルム減少性から従う．

(2) 条件付き確率が存在しない場合は，次のような場合に起きる：任意の互いに素な可測集合列 $\{F_n\} \subset \mathcal{F}$ について，条件付き期待値の線形性と単調収束定理より，

$$P\left[\sum F_n \middle| \mathcal{G}\right] = E\left[\sum 1_{F_n} \middle| \mathcal{G}\right] = \sum E[1_{F_n}|\mathcal{G}] = \sum P[F_n|\mathcal{G}] \quad \text{a.s.}$$

が成り立つが，このときの零集合

$$\mathcal{N} := \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, P\left[\sum F_n \middle| \mathcal{G}\right] \neq \sum P[F_n|\mathcal{G}]\right\}$$

が，任意の (おそらく非可算無限個ある) 互いに素な可測集合列 $\{F_n\} \subset \mathcal{F}$ について，一様に零集合を取れるとは限らないが，「標準確率空間」については気にしなくてよい．特に，$\mathbb{R}^\infty$ における条件付き確率は必ず正則になるという結果は Doob による．

要諦 1.3.3 (「相互情報量」としての条件付き期待値)**.** X が $\mathcal{G}$ と独立なとき，$E[X|\mathcal{G}] = E[X]$ a.e. である．すなわち，情報 $\mathcal{G}$ を得ても，最良の推定は定数 $E[X]$ でしかない．X が $\mathcal{G}$-可測であるとき，$E[X|\mathcal{G}] = X$ a.e. である．すなわち，既に知っている施策 X によって完全に模倣・予測できる．

系 1.3.4 (存在と一意性). 任意の可積分確率変数 $X \in L^1(\Omega)$ に対して，条件付き期待値 $E[X|\mathcal{G}]$ は存在し，零集合での差を除いて一意である．

[証明]. 条件付き期待値は，$\mathcal{G}$ の元に対して，その立場の上での X の期待値を返す測度 $Q: \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ の，$(\Omega, \mathcal{G})$ 上の確率密度関数であると見れば，Radon-Nikodym の定理の簡単な系である．任意の事象 $B \in \mathcal{G}$ に対して，そのときの X の条件付き期待値を返す対応

$$Q(B) := E[1_B X] = \int_B x\,dP^X. \quad (B \in \mathcal{G})$$

は $(\Omega, \mathcal{G})$ 上の測度である．これが $P|_{\mathcal{G}}$ に対して絶対連続であることに注意すれば良い：$P[B] = 0 \Rightarrow Q[B] = 0$. ■

[†2] これは 2 段階に分けて積分していると見れる．
[†3] 完備で可分な距離空間上の Borel 確率空間上では存在と一意性が成り立つ．

1.3.2　条件付き確率の存在と特徴付け

定義 1.3.5 . $(X, \mathcal{B})$ を可測空間，ζ がその分割とする．

(1) $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i\in I} \subset P(X)$ が ζ の**基底**であるとは，$\tau(x)(i) = 1_{S_i}(x)$ と定めたときの写像 $\tau : X \to 2^I$ が X に定める同値類が ζ に等しいことをいう．

(2) 可算個の可測集合からなる基底 $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ を持つとき，ζ を**可測分割**という．

定義 1.3.6 ((regular) conditional distribution / probability kernel). $(X, \mathcal{B}, m)$ を Lebesgue 空間，ζ をその分割，(B_n) をその基底，(B_n) の生成する σ-加法族を $\mathcal{M}$ とする．確率測度の族 $\{m(-|C)\}_{C\in X/\zeta} \subset P(X)$ が次の条件を満たすとき，**ζ が定める条件付き測度**または**確率核**という．

(1) $\forall_{C\in X/\zeta}\ m(\pi^{-1}(C)|C) = 1.$

(2) 任意の $C \in X/\zeta$ について，$\mathcal{M} \cap \pi^{-1}(C)$ の $m(-|C)$ に関する完備化を $\mathcal{M}_C$ とすると，$(\pi^{-1}(C), \mathcal{M}_C, m(-|C))$ は Lebesgue 空間となる．

(3) 任意の $B \in \mathcal{B}$ について，次の 3 条件が成り立つ：
   (a) m_ζ-a.e. の C について，$B \cap \pi^{-1}(C) \in \mathcal{M}_C$.
   (b) $m(B|-) : X/\zeta \to [0, 1]$ は $\mathcal{B}_\zeta$-可測である．
   (c) $\forall_{Z\in\mathcal{B}_\zeta} \displaystyle\int_Z m(B|C)dm_\zeta(C) = m(B \cap \pi^{-1}(Z)).$

命題 1.3.7 (一意性). Lebesgue 空間の任意の分割に関する条件付き測度は，m_ζ-a.e. の違いを除いて一意的である．

命題 1.3.8 (存在). X を Lebesgue 空間とする．その分割 ζ について，次の 2 条件は同値.

(1) 条件付き測度が存在する．

(2) ζ は可測分割である．

命題 1.3.9 (特徴付け). $P[A|\mathcal{G}] \in L^1_{\mathcal{G}}(\Omega)$ は a.s. の違いを除いて，次の条件を満たす唯一の元である．

$$\forall_{B\in\mathcal{G}}\ E[P[A|\mathcal{G}]1_B] = P[A \cap B].$$

特に，

(1) $P[A|\mathcal{G}] = P[A]$　a.s. は $A \perp \mathcal{G}$ に同値.

(2) $P[A|\mathcal{G}] = 1_A$　a.s. は $A \in \overline{\mathcal{G}}$ に同値.

1.3.3　条件付き期待値の特徴付け

$L^2(\Omega)$ 上の射影としての性質を $L^1(\Omega)$ 上に連続延長したものと見れる．

系 1.3.10 (Jensen の不等式の系). 条件付き期待値 $E[-|\mathcal{B}] : L^p \to L^p$ は任意の $p \in [1, \infty]$ についてノルム減少的で，像は $E[L^p|\mathcal{B}] = L^p_{\mathcal{B}}(\Omega)$ とあらわせる．

[証明]. 凸関数 $f(x) = |x|^p$ について，$|E_{\mathcal{B}}[X]|^p \leqslant E_{\mathcal{B}}[|X|^p]$ より，

$$E[|E_{\mathcal{B}}[X]|^p] \leqslant E[E_{\mathcal{B}}[|X|^p]] = E[|X|^p] < \infty$$

だから，たしかに像は L^p に入り，$\|E_{\mathcal{B}}[X]\|_p \leqslant \|X\|_p$ である．全射性は，任意の $X \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{B}}$ について，$E_{\mathcal{B}}[X] = X$ より． ■

定理 1.3.11 (射影としての特徴付け). 任意の部分 σ-代数 $\mathcal{G}$ について，

(1) $E^{\mathcal{G}} : L^2 \to L^2$ は Hilbert 空間 L^2 からその閉部分空間 $L^2_{\mathcal{G}}$ への射影作用素と一致する．すなわち，$E_{\mathcal{G}}[X]$ は $\|X - \widetilde{X}\|_2$ を最小にする $\widetilde{X} \in L^2_{\mathcal{G}}$ として特徴付けられる．

(2) 唯一の線型作用素 $E_{\mathcal{G}} : L^1(\Omega) \to L^1_{\mathcal{G}}(\Omega)$ が存在して，$\forall_{X\in L^1}\ \forall_{A\in\mathcal{G}}\ E[E_{\mathcal{G}}[X]1_A] = E[X1_A]$ を満たす．

定理 1.3.12 (射影としての性質：自己共役性).

(1) $E[-|\mathcal{G}]:L^2(\Omega)\to L^2_{\mathcal{G}}(\Omega)$ は自己共役である：$E[XE[Y|\mathcal{G}]]=E[E[X|\mathcal{G}]Y]$.
(2) この性質は $L^1(\Omega)$ への連続延長でも保たれる.

1.3.4　作用素としての性質

命題 1.3.13 . $(\Omega,\mathcal{F},P)$ を確率空間，$X\in L^1(\Omega)$ を可積分確率変数，$\mathcal{G},\mathcal{H}$ を $\mathcal{F}$ の σ-部分代数とする.

(1) (一意性) Y も条件付き期待値の定義を満たすとする．このとき，$E[Y]=E[X]$.
(2) ($L_{\mathcal{G}}$ 上定値) X が $\mathcal{G}$-可測であったならば，$E[X|\mathcal{G}]=X$ a.s.
(3) (三角不等式) $|E[X|\mathcal{G}]|\leqslant E[|X||\mathcal{G}]$ a.s.
(4) (線型性) $E[-|\mathcal{G}]$ は $L^1(\Omega)$ 上の線型汎関数である：$E[a_1X_1+a_2X_2|\mathcal{G}]=a_1E[X_1|\mathcal{G}]+a_2E[X_2|\mathcal{G}]$ a.s.
(5) (正性) $X\geqslant 0\Rightarrow E[X|\mathcal{G}]\geqslant 0$.
(6) (単調収束定理) $0\leqslant X_n\nearrow X\Rightarrow E[X_n|\mathcal{G}]\nearrow E[X|\mathcal{G}]$; a.s.
(7) (Fatou の補題) $X_n\geqslant 0\Rightarrow E[\liminf X_n|\mathcal{G}]\leqslant\liminf E[X_n|\mathcal{G}]$ a.s.
(8) (強い優収束定理) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ |X_n|\in L^1(\Omega)$ かつ $X_n\xrightarrow{\text{a.s.}}X$ ならば，$E[X_n|\mathcal{G}]\xrightarrow{\text{a.s.}}E[X|\mathcal{G}]$ かつ L^1 でも収束する.
(9) (Jensen) 凸関数 $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して，$c(E[X|\mathcal{G}])\leqslant E[c(X)|\mathcal{G}]$ a.s. 特に，$\|-\|_p$ $(p\geqslant 1)$ は凸関数であるから $\|E[X|\mathcal{G}]\|_p\leqslant\|X\|_p$.
(10) (Tower property) $\mathcal{H}<\mathcal{G}\Rightarrow E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}]=E[E[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}]=E[X|\mathcal{H}]$ a.s.
(11) (可測関数) $Z\in L(\Omega,\mathcal{G}),ZX\in L^1(\Omega)$ のとき，$E[ZX|\mathcal{G}]=ZE[X|\mathcal{G}]$ a.s.

[証明].

(1) 条件付き期待値の一意性より，$Y=E[X|\mathcal{G}]$ a.s.. 任意の $G\in\mathcal{G}$ について，条件付き期待値 $E[X|\mathcal{G}]$ は G 上では X と平均が等しいから，$E[Y1_G]=E[E[X|\mathcal{G}]1_G]=E[X1_G]$ が成り立つ．$G=\Omega$ と取れば良い.
(2) X は自身の条件付き期待値としての要件を満たすから，一意性より.
(3) $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$ と正性より，$-E[|X||\mathcal{G}]\leqslant E[X|\mathcal{G}]\leqslant E[|X||\mathcal{G}]$.
(4) 右辺の $a_1E[X_1|\mathcal{G}]+a_2E[X_2|\mathcal{G}]$ も，$a_1X_1+a_2X_2$ の $B\in\mathcal{G}$ 上での期待値を与える測度 Q の確率密度関数となっている.

■

定理 1.3.14 (Th'm 8.4 [Doob, 1990]). $Y\in L^1(\Omega),\delta>0$ とすると，

$$X_\delta:=\sum_{j\in\mathbb{Z}}(j+1)\delta P[j\delta<Y\leqslant(j+1)\delta|\mathcal{G}]$$

は殆ど確実に絶対収束し，(δ_k) が 0 に収束するならば，$\lim_{k\to\infty}X_{\delta_k}=E[Y|\mathcal{G}]$ a.s.

1.3.5　独立性との関係

命題 1.3.15 . $(\Omega,\mathcal{F},P)$ を確率空間，$X\in L^1(\Omega)$ を可積分確率変数，$\mathcal{G},\mathcal{H}$ を $\mathcal{F}$ の σ-部分代数とする.

(1) $\mathcal{H}\perp\!\!\!\perp(\sigma[X]\vee\mathcal{G})$ ならば，$E[X|\mathcal{G}\vee\mathcal{H}]=E[X|\mathcal{G}]$ a.s. 特に，$X\perp\!\!\!\perp\mathcal{H}\Rightarrow E[X|\mathcal{H}]=E[X]$ a.s.
(2) $X\perp\!\!\!\perp(\sigma[Y]\vee\mathcal{G})$ ならば，$E[XY|\mathcal{G}]=E[X]E[Y|\mathcal{G}]$ a.e.
(3) $X\perp\!\!\!\perp\mathcal{G}$ かつ $X\perp\!\!\!\perp Y$ ならば，上は必ずしも成り立たない.

補題 1.3.16 . $\mathcal{G},\mathcal{H}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-代数，$X,Y\in L^1(\Omega),A\in\mathcal{G}\cap\mathcal{H}$ とする．このとき，

$$A\cap\mathcal{G}=A\cap\mathcal{F}\wedge X=Y\ \text{a.s. on }A\quad\Rightarrow\quad E[X|\mathcal{G}]=E[Y|\mathcal{H}]\ \text{a.s. on }A.$$

命題 1.3.17 (Doob). $X\perp\!\!\!\perp Y|Z$ とする．このとき，$P[X\in B|Y,Z]=P[X\in B|Z]$.

定理 1.3.18 (条件付き独立). 任意の部分 σ-代数 $\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}$ について，次の 2 条件は同値：

(1) $\mathcal{F}\underset{\mathcal{G}}{\perp\!\!\!\perp}\mathcal{H}$.

(2) $P^{\mathcal{F}\vee\mathcal{G}} = P^{\mathcal{G}}$ a.s. on $\mathcal{H}$.

ただし，$P^{\mathcal{F}}[A] := E^{\mathcal{F}}[1_A]$ とした．

要諦 1.3.19.

1.3.6　条件付き独立性

条件付き独立性が難しい理由は，射影作用素 $E_{\mathcal{G}} : L^1(\Omega) \to L^1_{\mathcal{G}}(\Omega)$ が，X の定める σ-代数 $\sigma[X]$ をどのように変えて $\sigma[E[X|\mathcal{G}]]$ とするかが見えにくいことに起因する．

定義 1.3.20 . $\mathcal{B}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}_2 | \mathcal{A}$ とは，

$$\forall_{B_1\in\mathcal{B}_1, B_2\in\mathcal{B}_2}\ P[B_1 \cap B_2|\mathcal{A}] = P[B_1|\mathcal{A}]P[B_2|\mathcal{A}]$$

と定める．

定理 1.3.21 . 次の 2 条件は同値．

(1) $\mathcal{B}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}_2 | \mathcal{A}$.
(2) $\forall_{B_1\in\mathcal{B}_1}\ P[B_1|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}_2] = P[B_1|\mathcal{A}]$.

1.3.7　束上の関数としての性質

第二引数についてマルチンゲールをなす．

補題 1.3.22 . 部分 σ-代数 $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ について，次の 2 条件は同値：

(1) $\forall_{X\in L^1(\Omega)}\ E[X|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{H}]$.
(2) $\overline{\mathcal{G}} = \overline{\mathcal{H}}$.

定理 1.3.23 (条件付き期待値の束の一様可積分性 (Doob)). Λ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族の全体とする．任意の $X \in L^1(\Omega)$ に対して，$\{E[X|\mathcal{G}]\}_{\mathcal{G}\in\Lambda} \subset L^1(\Omega)$ は一様可積分である．

[証明]. 一様可積分性の特徴付けより，ある単調増加凸関数 $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^+$ であって $\lim_{t\to\infty} \frac{G(t)}{t} = \infty$ を満たすものについて，$\sup_{\mathcal{G}} E[g \circ E[Y|\mathcal{G}]] < \infty$ を示せば良い．X は非負としても一般性を失わず，Jensen の不等式から $g \circ E[Y|\mathcal{G}] \leqslant E[g \circ Y|\mathcal{G}]$ が従う．■

要諦 1.3.24. この事実により，一様可積分なマルチンゲール M が $L^1(\Omega)$ に同型であることが，時間 T の順序構造に依らないことが判る (Meyer[Meyer, 1966])．一方で，概収束 $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ a.s. は T が全順序でないならば失敗し得る．

系 1.3.25 (連続性). 部分 σ-代数の列 $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が，単調増大で $\mathcal{G}$ に至るか，単調減少で $\mathcal{G}$ に至るならば，$\forall_{f\in L^1(\Omega)}\ E[f|\mathcal{G}_n] \to E[f|\mathcal{G}]$ が a.s. の意味と L^1 の意味で成り立つ．特に，$P[A|\mathcal{G}_n] \to P[A|\mathcal{G}]$.

定理 1.3.26 (最大不等式). $X \in L^1(\Omega), \{\mathcal{G}_n\}$ を増大列とする．

$$\forall_{\lambda>0}\ P\left[\sup_{n\geqslant 1} E[|X||\mathcal{G}_n] > \lambda\right] \leqslant \frac{E[|X|]}{\lambda}.$$

1.4　情報系と確率過程

情報は σ-部分代数で，データは確率変数で表すとしたら，2 つの構造が何らかの意味で整合して居る必要がある．これを適合的という．さらに空間 Ω だけでなく時空間 $\Omega \times \mathbb{R}_+$ に目を向け，この空間の部分集合を運命という．

1.4.1　閉 σ-代数と情報理論

任意の閉 σ-代数 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ はある実確率変数が生成する．すなわち，観測の結果得られる情報を表すのが閉 σ-代数の概念だと考えられる．

定義 1.4.1 .

(1) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の部分 σ-代数であって，すべての P-零集合を含むものを**閉 σ-代数**または**情報**という．

(2) その全体を $\Phi = \Phi(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{\mathcal{B} \vee 2 \subset \mathcal{F} \mid \mathcal{B} < \mathcal{F}\} \subset \mathcal{F}$ で表す．

(3) 確率変数 X に対して，これが Ω 上に定める分割が生成する最小の閉 σ-代数を **X で生成される閉 σ-代数**といい，$\sigma[X] \vee 2 =: \mathcal{F}[X] < \mathcal{F}$ で表すこととしよう．

(4) 確率変数の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ については，$\mathcal{F}[X_\lambda, \lambda \in \Lambda] := \bigvee_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}[X_\lambda]$ と表す．

定理 1.4.2 . $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．任意の閉 σ-代数 $\mathcal{G} \in \Phi$ は，ある実確率変数 $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ によって生成される：$\mathcal{G} = \mathcal{F}[X]$.

命題 1.4.3 . $X, Y \in \mathcal{L}(\Omega)$ について，$X \prec Y \;\text{ a.s.} :\Leftrightarrow [\exists_{\varphi\in\mathrm{Map}(\Omega,\Omega)}\; X = \varphi \circ Y \;\text{ a.s.}]$ と表すと，これは同値類 $\sim$ とその上の順序を定め，

(1) $Y \prec X \;\text{ a.s.} \Leftrightarrow \mathcal{F}[Y] \subset \mathcal{F}[X]$.

(2) $Y \sim X \;\text{ a.s.} \Leftrightarrow \mathcal{F}[Y] = \mathcal{F}[X]$.

要諦 1.4.4. $Y \prec X$ とは，Y の与える情報が X よりも少ないこと，X の値がわかれば確率 1 で Y の値がわかることを意味する．

1.4.2　増大情報系

情報系 $(\mathcal{F}[X_t])_{t\in T}$ について，過去の記憶を取り $(\mathcal{F}[X_s; s \leqslant t])_{t\in T}$ とすれば単調増大になり，さらに $\left(\mathcal{F}_t := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}[X_u; u \leqslant s]\right)_{t\in T}$ とすれば右連続にもなるから，特に意識せず情報系 (filtration) と呼ぶこととする．また，任意の情報系は，ある実過程が生成することに注意．

定義 1.4.5 (filtration).

(1) T に関する **(σ-代数の) 増大系**と言ったときは，単なる部分 σ-代数の増大列とする：$\forall_{s,t\in T}\; s \leqslant t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

(2) T に関する**増大情報系** $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T} \subset \Phi(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とは，
   (a) 各 $\mathcal{F}_t$ は閉じている：$\mathbb{N} \subset \mathcal{F}_t$.
   (b) 右連続性：$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigvee_{s>t} \mathcal{F}_s$.

   を満たす閉 σ-代数の族をいう．

(3) 任意の単調増大性を満たす系 $\{\mathcal{F}_t\} \subset \Phi$ に対して，$(\mathcal{F}_{t+})_{t\in T}$ は情報系である．これを**右連続化**という．

(4) 確率過程 (X_t) に対して，$\left(\mathcal{F}_t := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}[X_u; u \leqslant s]\right)$ を **X が生成する情報系**または**自然な情報系**といい，$\mathcal{F}[X] := (\mathcal{F}_t[X])_{t\in T}$ で表す．

(5) 任意の過程はその自然な情報系に適合している．

定義 1.4.6 (stochastic basis).

(1) 完備な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と増大情報系 $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ の組を**確率基底**という [Liptser, Robert S., and Shiryaev, A. N., 2001].
(2) 確率基底 $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ が**完備**とは，$\mathcal{F}, \mathcal{F}_t$ が全て $\mathcal{N}$ を含むこと (条件 (a)) をいう．情報系の完備性 (a) と右連続性 (b) と確率空間の完備性とを併せて **usual condition** といい，確率論による過程論の基礎となる．が，usual condition を満たさない状況も肝要になる場面もある．

命題 1.4.7 (D-過程が生成する情報系の特徴付け). D-過程 $(X_t)_{t\in T}$ について，これが確率変数の族として生成する情報系 $\mathcal{F}[X_t, t \in T] = \bigvee_{t\in T} \mathcal{F}[X_t]$ と，D-値確率変数 $X_\bullet : \Omega \to D(T)$ として生成する情報系とは等しい：$\mathcal{F}[X_t, t \in T] = \mathcal{F}[X_\bullet] =: \mathcal{F}_\infty$.

注 1.4.8 (増大情報系の哲学). 情報系を定値に取ると，19 世紀の決定論的世界観になる (Dellacherie[?] は決定論的情報系と呼んでいる)．微分系を積分することで，遥か未来の情報も現在の情報に含まれているのだ．

1.4.3　適合過程

命題 1.4.9 . $(\mathcal{F}_t)$ は完備とする．

(1) 適合過程の任意の意味での極限は適合的である．
(2) 適合過程と識別不可能な過程は適合的である．

1.4.4　発展的可測性

可測過程の概念を適合過程の概念を参考にして強めると，発展的可測性 $L(\mathcal{P}) \subset L(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ に辿り着く．この概念は，可測過程 X がその可測性を達成する過程についても口出ししている点で強い概念であることがわかる．この上に確率積分が定義できる．また，ほとんど $L(\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)) \cap \mathbb{F} \subset L(\mathcal{P})$ である．より詳しく見ると，w^*-可測過程と p^*-可測過程がある．

定義 1.4.10 (adapted, predictable, progressively measurable).

(1) $\forall_{t\in T}\ X_t \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_t)$ のとき，X は F に**適合**するという．これは $\forall_{t\in T}\ \mathcal{F}[X_t] \subset \mathcal{F}_t$ に同値．
(2) $\forall_{t\in T}\ X_t \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_{t-1})$ のとき，X は F で**可予測**であるという．$X_t = E[X|\mathcal{F}_{t-1}]$ より，右辺から計算可能になる．
(3) 適合過程 $X \in (\mathcal{F}_t)$ が**発展的可測**であるとは，$\forall_{t\in\mathbb{R}_+}\ X|_{\Omega\times[0,t]} \in L(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t]))$ が成り立つことをいう．

命題 1.4.11 (発展的可測性の必要条件). 発展的可測過程は適合的である．

[証明]. 任意の $t \in \mathbb{R}_+$ について，$X|_{\Omega\times[0,t]} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t])$-可測である．Fubini の定理から，二変数の可測関数の片方を止めた関数は可測であるから，$X_t(-) \in L_{\mathcal{F}_t}(\Omega)$. ■

補題 1.4.12 (発展的可測性の十分条件).

(1) 適合過程 $X \in \mathbb{F}$ が任意の $\epsilon > 0$ に対して，情報系 $(\mathcal{F}_{t+\epsilon})_{t\in\mathbb{R}_+}$ について発展的可測ならば，元の $\mathbb{F}$ についても発展的可測である．
(2) 一般の過程 X が任意の $\epsilon > 0$ に対して，情報系 $(\mathcal{F}_{t+\epsilon})_{t\in\mathbb{R}_+}$ について発展的可測ならば，元の $\mathbb{F}$ の右連続化 $(\mathcal{F}_{t+})_{t\in\mathbb{R}_+}$ についても発展的可測である．

[証明].

$$X_s = \lim_{\epsilon\to0} X_s 1_{[0,t-\epsilon)}(s) + X_t 1_{\{t\}}(s) \quad (s \leqslant t)$$

と見ると，$X_s 1_{[0,t-\epsilon)}$ は明らかに $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}([0, t])$-可測で，$X$ の適合性より $X_t 1_{\{t\}}(s)$ も $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}([0, t])$-可測．$X$ が適合でないとしても，上式の右辺は $\mathcal{F}_{t+}$ について同様のことが言える． ■

系 1.4.13 (発展的可測過程の例). 状態空間 E は距離化可能とする．

(1) $D \cap \mathbb{F}$ に属する過程は発展的可測である．[†4]

[†4] Liptser and Shiryayev[Liptser, Robert S., and Shiryaev, A. N., 2001] Problem1

(2) 全く同様にして，左連続な過程は発展的可測である．
(3) 適合的な可測過程には，発展的可測な修正が存在する．[†5]

[証明].

(1) 任意の $n\in\mathbb{N}$ について

$$X_t^{(n)} := X_{\frac{k+1}{2^n}} \quad t\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)$$

と定めると，任意の $\epsilon>2^{-n}$ について $(\mathcal{F}_{t+\epsilon})$-発展的可測である．右連続性の仮定より，$X=\lim_{n\to\infty}X^{(n)}$ は任意の $\epsilon>0$ について $(\mathcal{F}_{t+\epsilon})$-発展的可測．よって，$X$ は $\mathbb{F}$-発展的可測である．

(2) 同様.

■

定理 1.4.14 (発展的可測性の σ-代数による特徴付け).

$$\mathcal{P} := \left\{A\in P(\Omega\times\mathbb{R}_+) \mid \forall_{t\in\mathbb{R}_+} A\cap(\Omega\times[0,t])\in\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}([0,t])\right\}$$

はたしかに $\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ の部分 σ-代数で，可測過程 $u:\Omega\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ について，次の 2 条件は同値.

(1) $\mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測：$u\in\mathcal{L}(\mathcal{P})$.
(2) u は発展的可測.

[証明].

$\mathcal{P}$ の well-definedness　明らかに，$\forall_{t\in\mathbb{R}_+}A\cap(\Omega\times[0,t])\in\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}([0,t])$ という条件は，$A=\emptyset,\Omega\times\mathbb{R}_+$ はこれを満たし，これを満たす (A_n) が存在したとき，合併も満たす．また，補集合については，$\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}([0,t])$ が $\Omega\times[0,t]$ 上の σ-代数をなすことに注意すると，$A\cap(\Omega\times[0,t])\in\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}([0,t])$ のとき，$\overline{A}\cap(\Omega\times[0,t])=(\Omega\times[0,t])\backslash(A\cap(\Omega\times[0,t]))\in\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}([0,t])$ による．

$\mathcal{P}\subset\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$　任意の $A\in\mathcal{P}$ を取ると，特に $n\in\mathbb{N}$ について，$A_n:=A\cap(\Omega\times[0,n])\in\mathcal{F}_n\times\mathcal{B}([0,t])\subset\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. $A=\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

(1)⇔(2)　$\mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測過程 $u:\Omega\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ を取る．任意の $t\in\mathbb{R}_+$ について，$u|_{\Omega\times[0,t]}$ による Borel 可測集合 $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の逆像は $u^{-1}(B)\cap(\Omega\times[0,t])$ であるが，$u^{-1}(B)\in\mathcal{P}$ より，これは $\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}([0,t])$ の元である．

■

1.4.5　w^*-可測過程

運命の空間 $\Omega\times\mathbb{R}_+$ の中で，特殊な σ-代数に注目する必要がある，それは適合的な C,D-過程が生成するものである．このとき，

$$\mathcal{P}\subset\mathcal{W}\subset\mathcal{P}\subset\mathcal{F}_\infty\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$$

が成り立つ．

定義 1.4.15 (optional / well measurable process, predictable process). $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathbb{F})$ を確率基底とする．特に，$\mathbb{F}$ は右連続で完備とする．

(1) $\mathcal{W}:=\sigma[[0,\tau),\tau\in\mathbb{T}]$ を**随意 σ-代数**，その元を**随意集合**という．
(2) $\mathcal{P}:=\sigma[(0,\tau],\tau\in\mathbb{T}]$ を**可予測 σ-代数**，その元を**可予測集合**という．
(3) $\mathcal{W}$-可測な過程 $X:\Omega\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ を**随意過程**または**任意停止過程**，$\mathcal{P}$-可測な過程を**可予測過程**という．

明らかに，w-可測過程も p-可測過程も，適合的な可測過程である．

[†5] Meyer 1984, Th'm 4.6

定理 1.4.16 (**σ-代数の特徴付け**). $(\mathcal{F}_t)$ を増大情報系とする.

(1) $\mathcal{W}$ は, $\mathbb{F}\cap D$ が生成する σ-代数に等しい. 特に, 任意の $D\cap\mathbb{F}$ 過程は随意過程である.
(2) また, $[a,b)\times C$ $(a<b, C\in\mathcal{F}_a)$ という形の集合が生成する σ-代数も $\mathcal{W}$ に一致する.
(3) $\mathcal{P}$ は, $\mathbb{F}\cap C$ が生成する σ-代数に等しい.
(4) また, 左連続な適合過程の全体が生成する σ-代数も $\mathcal{P}$ であり, 単過程の全体が生成する σ-代数も $\mathcal{P}$ であり, $[b,c)\times C$ $(a<b<c, C\in\mathcal{F}_a)$ と表せる集合の生成する σ-代数も $\mathcal{P}$ である.

系 1.4.17 . 可予測過程について,

(1) $\mathcal{P}\subset\mathcal{W}$ が成りたち, 可予測ならば w-可測である.
(2) 可予測ならば $(\mathcal{F}_{t-})$-適合的である. 特に適合過程である.
(3) 可予測過程は X_0 の値を変えても可予測である. すなわち, $(0,\infty)$ 上で定まっているとみなせる.

[証明]. 任意の適合的な左連続過程 X を取る. これに対して,

$$X^{(n)}_t := X_{\frac{k}{2^n}},\quad t\in\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)$$

と取ると, $(X^{(n)})$ は右連続な適合的過程の列で, $\forall_{t\in\mathbb{R}_+}\ X^{(n)}_t\to X_t$ を満たす. よって, X は $\mathcal{W}$-可測である. ■

系 1.4.18 . w^*-可測過程について,

(1) w-可測過程 $X\in L(\mathcal{W})$ は発展的可測である.
(2) $X\in D\cap(\mathcal{F}_t)$ のとき, X_- は可予測過程である.
(3) $\forall_{\tau\in\mathbb{T}}\ [[\tau]]\in\mathcal{D}$ であるが, $\mathfrak{P}$ ではそうとは限らない.
(4) 任意の Markov 時刻 $T\in\mathbb{T}$ について, $X_T 1_{\{T<\infty\}}$ は $\mathcal{F}_T$-可測である.
(5) 停止過程 X^T は再び随意過程である.

1.5　停止時

「微分」の定義に解析の芽が詰まっており, この定義に辿り着くのに多くの天才を要したのと同様, 停止時の概念も確率論の芽が詰まっている (Dellacherie[Dellacherie and Meyer, 1978]).

1.5.1　定義と特徴付け

情報系は右連続としているために, 停止時に数々の特徴付けが存在する.

定義 1.5.1 (**random time, Markov time, stopping time**). $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathbb{F})$ を確率基底とする.

(1) 確率変数 $\tau\in L(\Omega;\overline{\mathbb{R}}_+)$ を**確率時刻**という.
(2) $\forall_{t\in\mathbb{R}_+}\ \{\tau\leqslant t\}\in\mathcal{F}_t$ を満たす確率時刻を, **$\mathbb{F}$-Markov 時刻**という. Markov 時刻の全体を $\mathbb{T}(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P)=\mathbb{T}((\mathcal{F}_t))$ で表す.
(3) さらに $P[\tau<\infty]=1$ を満たすとき, **$\mathbb{F}$-停止時**という.

補題 1.5.2 (**停止時の特徴付け**). 情報系 $\mathbb{F}$ について, $\mathbb{F}$- Markov 時刻 $\tau\in\mathbb{T}(\mathbb{F})$ について, 次は同値：

(1) τ は Markov 時刻である.
(2) $\forall_{t\geqslant 0}\ \{\tau<t\}\in\mathcal{F}_t$.

さらに, τ が離散である場合, 次も同値になる.

(7) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n$ である.

注 1.5.3.

(1) 一般の増大系 $(\mathcal{F}^0_t)$ に関して，$\{T < t\} \in \mathcal{F}^0_t$ は $\{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}^0_{t+}$ に同値であり，これが Markov 時刻の特徴付けになるのは増大系 $(\mathcal{F}^0_t)$ が右連続な場合で，その場合に限る．
(2) 離散の場合と連続の場合で異なる点は，$\forall_{t\geqslant 0}\ \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ だけでは，$\{\tau \geqslant t\}$ という形の事象を加算和で表現できるとは限らない点である．

補題 1.5.4 . $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ を確率基底とする．次は同値：

(1) $\tau \in \mathbb{T}$.
(2) $1_{(0,\tau]}$ は可予測過程である．
(3) $1_{[0,\tau)}$ は w-可測過程である．

1.5.2　停止時の例とデビューによる特徴付け

Markov 時刻 $\Omega \to [0,\infty]$ は $[0,t]$ の逆像が $\mathcal{F}_t$-可測，という発展的条件で定義された．これは $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上の「発展的可測な集合のデビュー」として特徴付けられる．すなわち，あらゆる Markov 時刻は「運命との初邂逅」と理解できる．

定義 1.5.5 (random set, evanescent / P-negligible, thin set, exhausting, debut).

(1) 部分集合 $A \subset \Omega \times \mathbb{R}_+$ であって，任意の切片 $A_t = \{\omega \in \Omega \mid (\omega, t) \in A\}$ $(t \in \mathbb{R}_+)$ が $\mathcal{F}$-可測であるものを**確率集合**または**運命過程**という．
(2) すなわち，ある部分集合 $A \subset \Omega \times \mathbb{R}_+$ を用いて $(1_A(t,\omega))_{t\in\mathbb{R}_+}$ と表せるような，2 を状態空間とする過程を確率集合という．
(3) 確率集合 $A \subset \Omega \times \mathbb{R}_+$ の Ω への射影 $\pi_1(A)$(第一成分の値域) が零集合ならば，**消えゆく運命**という．
(4) すなわち，過程 $(1_A(t,\omega))_{t\in\mathbb{R}_+}$ が 0 と識別不可能であるとき，消えゆく運命であるという．
(5) ある確率時刻の列 $\{\tau_n\} \subset L(\Omega; [0,\infty])$ によって $A = \cup_{n\in\mathbb{N}}[[\tau_n]]$ と与えられる運命を**薄い集合**という．このとき $\forall_{i\neq j}\ [[\tau_i]] \cap [[\tau_j]] = \varnothing$ ならば，A を**埋め尽くす**という．
(6) ランダム集合 $A \subset \Omega \times \mathbb{R}_+$ に対して $D_A := \inf_{(\omega,t)\in A} \mathrm{pr}_2((\omega,t))$ を A **のデビュー**という．

定理 1.5.6 (デビューによる Markov 時刻の特徴付け). $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ を確率基底とする．すなわち，$\mathbb{F}$ は右連続で完備であるとする．

(1) 集合 $A \subset \Omega \times \mathbb{R}_+$ を発展的可測とする．A のデビュー D_A は Markov 時刻である．
(2) 任意の Markov 時刻 $\tau \in \mathbb{T}$ について，$A := [\tau, \infty)$ とすれば，$\tau = D_A$ である．A としてグラフをとってもよい：$\tau = D_{[\tau]}$ でもある．

[証明]. Dellacherie and Meyer 1978 [?]. ■

系 1.5.7 (entry time, hitting time). S を可分距離空間，X を S-値の w-可測過程，$B \in \mathcal{B}(S)$ とする．このとき，次は停止時である：

(1) B への侵入時刻 $U_B := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid X_t \in B\}$ は停止時である．
(2) B への到達時刻 $T_B := \inf\left\{t \in \mathbb{R}^+ \mid X_t \in B\right\}$ は停止時である．

例 1.5.8 (停止時の例).

(1) $X \in \mathbb{F} \cap C$ の集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ への**到達時刻**は

$$\tau_A(\omega) := \inf\{t > 0 \mid X_t(\omega) \in A\}$$

で定める．A が開または閉であるとき，τ_A は $\mathbb{F}$-Markov 時になる．
(2) 一方で，$X \in \mathbb{F} \cap D$ の場合，A が開集合でも，到達時刻 τ_A は $(\mathcal{F}_{t+})$ についてしか Markov 時にならない．

(3) **最終脱出時刻** (last exit time) とは，$(\mathcal{F}_n)$-適合確率過程 (X_n) 対して，任意の事象 $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し，

$$\sigma_A(\omega):=\max\left\{n\in\overline{\mathbb{N}}\mid X_n(\omega)\in A\right\}+1$$

とすると，これは確率変数ではあるが，Markov 時刻にはならない.「これが最後か？」を判定するには，さらに先の情報が必要だからである.

□

1.5.3 停止時の構成

補題 1.5.9 (Markov 時刻の任意停止). $\tau\in\mathbb{T},A\in\mathcal{F}_\tau$ について，$\tau_A:=1_A\tau+1_{A^c}\infty$ は再び Markov 時刻である.

命題 1.5.10 (停止時の構成). $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{F}$-Markov 時の可算列とする.

(1) $\sup_{n\in\mathbb{N}}\tau_n$ も Markov 時である.
(2) $\mathbb{F}$ が右連続ならば，$\inf_{n\in\mathbb{N}}\tau_n,\limsup_{n\in\mathbb{N}}\tau_n,\liminf_{n\in\mathbb{N}}\tau_n$ も Markov 時である.

定理 1.5.11 (停止時の離散近似). 任意の $\mathbb{F}$-Markov 時に対して，有限個の値しか取らない $\mathbb{F}$-Markov 時の減少列が存在して，その極限に等しい.

[証明]. 任意の Markov 時刻 $T\in\mathbb{T}$ に対して，

$$T_k=\begin{cases}\infty & T\geqslant k,\\ q2^{-k} & (q-1)2^{-k}\leqslant T<q2^{-k},q<2^kk,\end{cases}$$

とすれば良い. ■

1.5.4 停止過程と情報量

過程を事前に決めた規則でランダムに止める過程も，再びたしかに確率過程となる．この過程が生成する σ-代数 $\mathcal{F}_\infty$ を，時点 τ までの情報量という．これはフィルトレーション $\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\cdots$ のランダム化の意味で一般化である.

定義 1.5.12 (stopped process / optional stopping, information). τ を $(\mathcal{F}_t)$-停止時，$(X_t)_{t\in T}$ を $(\mathcal{F}_t)$-適合過程とする.

(1) $X^\tau:=(X_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega))_{t\in T}$ はを，**τ-停止過程**という．これはたしかに確率過程になる.
(2) $F^\tau:=\{\mathcal{F}^\tau_n\}$ を F の **τ-停止情報系**という.
(3) 次によって定まる閉 σ-代数を，**時点 τ までの情報**という.

$$\mathcal{F}_\tau:=\{A\in\mathcal{F}\mid\forall_{t\in T}\;A\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathcal{F}_t\}=\mathcal{F}[X_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega);t\in T]$$

命題 1.5.13 (停止時までの情報の性質). $\tau,\tau_n,\sigma\in\mathbb{T}$ とする.

(1) $\mathcal{F}_\tau$ は確かに完備な σ-代数となる.
(2) τ は $\mathcal{F}_\tau$-可測である.

命題 1.5.14 (発展的可測性の保存). X を発展的可測，T を Markov 時とする.

(1) 確率変数 $1_{\{T<\infty\}}X_T$ は $\mathcal{F}_T$-可測である.
(2) 停止過程 X^T は $(\mathcal{F}_{t\wedge T})$-発展的可測である.

1.6　停止時と運命

停止時は「ランダムな時刻」として成功を収めた．さらに，時区間もランダム化することを考える．

1.6.1　停止時のグラフ

例 1.6.1 (停止時のグラフ)**.** 停止時 σ,τ について，

$$[[\sigma,\tau]] := \{(\omega,\tau)\in\Omega\times\mathbb{R}_+ \mid \sigma(\omega)\leqslant t\leqslant\tau(\omega)\}.$$

と表す．$[[\tau]]$ をグラフという． □

1.6.2　D-過程の定めるジャンプ過程

例 1.6.2 (D-過程の局所化)**.** $X\in D$ について，

(1) $X_{t-}:=\lim_{s\to t}X_s\;(t>0), X_{0-}=X_0$ として，$X_-=(X_{t-})_{t\in\mathbb{R}_+}$ が定まる．
(2) $\Delta X_t:=X_t-X_{t-}$ として，$\Delta X=(\Delta X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ が定まる．
(3) $X^*_t:=\sup_{s\leqslant t}|X_s|$ として $X^*=(X^*_t)_{t\geqslant 0}$ が定まる．
(4) $(\Delta X)^*_t:=\sup_{s\leqslant t}|\Delta X_s|$ として $(\Delta X)^*:=((\Delta X)_t)^*_{t\in\mathbb{R}_+}$ が定まる．
(5) $\sum_s(\Delta X_s)^2:=\left(\sum_{s\leqslant t}(\Delta X_s)^2\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ が定まる．

最後に，確率時刻 $\tau:\Omega\to[0,\infty]$ に対して，

$$\Delta X_\tau := X_\tau 1_{\{\tau<\infty\}} - X_{\tau-}1_{\{\tau<\infty\}}$$

と定める．ただし，$\{\tau<\infty\}\subset\Omega\times\mathbb{R}_+$ の指示関数とした． □

定理 1.6.3 (**D-過程のジャンプには Markov 時刻を当てることが出来る**)**.** $X\in D\cap(\mathcal{F}_t)$ について，運命 $\{\Delta X\neq 0\}$ は薄い．すなわち，ある Markov 時刻の列 $\{\tau_k\}\subset\mathbb{T}$ について，$\{\Delta X\neq 0\}=\cup_{k\in\mathbb{N}}[[\tau_k]]$.

1.6.3　過程の剪断

定理 1.6.4 (**発展的可測過程のランダムな停止**)**.** X を発展的可測，$\tau\in\mathbb{T}$ を Markov 時刻とする．ランダムな瞬間 $1_{\{\tau<\infty\}}X_\tau$ は $\mathcal{F}_\tau$ 可測な確率変数である．

定理 1.6.5 . $\tau\in\mathbb{T}$，X を発展的可測 (で随意) な過程とする．このとき，剪断過程 X^τ も発展的可測 (で随意な) である．

1.6.4　停止時による過程の局所化

τ で止める確率過程を $X^\tau_t:=X_{\min(t,\tau)}$ と表すと，これは過程 X をランダムに裁断したもののようであり，これを用いて種々の性質を局所化出来る．

定義 1.6.6 (**locally martingale, locally integrable**)**.** $\mathcal{K}$ を過程のクラスとする．このとき，$X\in\mathcal{K}_{\mathrm{loc}}$ とは，Markov 時刻の ∞ に発散する増大列 $\{\tau_n\}\subset\mathbb{T}$ が存在して，$\forall_{n\in\mathbb{N}}\,X^{\tau_n}\in\mathcal{K}$ を満たすことをいう．

(1) 随意過程 $X\in D\cap(\mathcal{F}_t)$ が**局所 martingale** であるとは，∞ に収束する Markov 時の増大列 (τ_n) が存在して，任意の $n\in\mathbb{N}$ について $1_{\tau_n>0}X^{\tau_n}$ が一様可積分な martingale になることをいう．なお，この一様可積分性は取り払っても同じクラスを定める．

(2) 非負な増大過程が**局所可積分**であるとは，∞ に収束する停止時の増大列 (τ_n) が存在して，$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ 1_{\tau_n>0}X^{\tau_n}\in L^1(\Omega)$ を満たすことをいう．

1.7　Markov 時刻の定める分解

$\mathbb{T}\subset L(\Omega;[0,\infty])$ は，直交分解 $\mathbb{T}=\mathbb{T}_p\oplus\mathbb{T}_p^\perp$ を許す．

定義 1.7.1 (predictable / announcable, accessible, totally inaccessible). 確率時刻 $\tau:\Omega\to[0,\infty]$ について，

(1) **可予測**であるとは，そのグラフが可予測であることをいう：$[\tau]\in\mathfrak{P}$．可予測な Markov 時刻を $\mathbb{T}_p$ で表す．
(2) **事前通告可能**であるとは，ある $\forall_{\tau>0}\ \tau_n<\tau$ を満たす Markov 時の増大列 (τ_n) の極限であることをいう．この列 $\{\tau_n\}\subset\mathbb{T}$ を**事前通告**という．
(3) **到達可能**であるとは，ある可予測な時刻の列 $\{\tau_n\}\subset\mathbb{T}_p$ が存在して，$[\tau]\subset\cup_{n\in\mathbb{N}}[\tau_n]$ が成り立つことをいう．すなわち，ある停止時の列 (τ_n) が存在して，殆ど確実に $\exists_{n\in\mathbb{N}}\ \tau_n=\tau$ が成り立つことをいう．
(4) **到達不可能**であるとは，任意の可予測な時刻 σ に対して，$P[\tau=\sigma<\infty]=0$ が成り立つことをいう．

例 1.7.2. 到達可能かつ到達不可能ならば，$\tau=\infty$ (P-a.e.) である．□

1.7.1　停止時の分解

定理 1.7.3 (停止時の分解).

1.7.2　可予測時刻の性質

確率時刻 τ が可予測であることと，事前通告可能であることは同値.

命題 1.7.4 (可予測時刻の特徴付け).

(1) 可予測時刻は Markov 時刻である：$\mathbb{T}_p\subset\mathbb{T}$.
(2) 確率時刻 $\tau:\Omega\to[0,\infty]$ について，次は同値：
  (a) $\tau\in\mathbb{T}_p$.
  (b) 確率区間 $(0,\tau),[0,\tau),[\tau,\infty)$ のうち，可予測なものが存在する．

定理 1.7.5 (可予測時刻の性質). $\tau,\tau_n,\sigma\in\mathbb{T}_p$ とする．

(1) $\sigma\wedge\tau,\sigma\vee\tau\in\mathbb{T}_p$.
(2) $\sup_{n\in\mathbb{N}}\tau_n\in\mathbb{T}_p$.
(3) $\cup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\inf_{n\in\mathbb{N}}\tau_n=\tau_n\right\}=\Omega$ ならば，$\inf_{n\in\mathbb{N}}\tau_n\in\mathbb{T}_p$.
(4) 任意の Markov 時 $\tau\in\mathbb{T}$ は，可予測時刻の減少列 (τ_n) の極限である：$\tau_n\searrow\tau$.
(5) $A\in\mathcal{F}_{t-}$ ならば，$\tau_A\in\mathbb{T}_p$.
(6) $A\in\mathfrak{P}$ ならば，$D_A\in\mathbb{T}_p$ は $[D_A]\cup A\in\mathfrak{P}$ に同値.
(7) $A\in\mathcal{F}_{\sigma-},t\in\mathbb{T}$ ならば，$A\cap\{\sigma\leqslant\tau\}\in\mathcal{F}_{t-}$.

定理 1.7.6 (事前通告可能時刻と可予測時刻は同値).

(1) τ を事前通告可能時刻とする．このとき，τ は可予測で，$\mathcal{F}_{\tau-}=\vee_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_{\tau_n}$.
(2) τ が可予測ならば，可予測な時刻の列 $\{\tau_n\}$ による事前通告が存在する：$\tau_n\nearrow\tau$.

特に，確率時刻 τ が可予測であることと，事前通告可能であることは同値.

1.7.3　D-過程の定めるジャンプ過程は可予測

定理 1.7.7 .

(1) $A \subset \Omega \times \mathbb{R}_+$ は薄くて可予測な運命であるとする．このとき，可予測な時刻の列 (τ_n) であって，A を埋め尽くすものが存在する．

(2) $X \in D \cap (\mathcal{F}_t)$ を可予測とする．このとき，ΔX も可予測で，薄い集合 $\{\Delta X \neq 0\}$ を埋め尽くす可予測時刻の列が存在する．

1.7.4　到達可能時刻の性質

命題 1.7.8 . $\tau \in \mathbb{T}, A \in \mathcal{F}_\tau$ とする．τ が到達可能／到達不可能ならば，τ_A もそうである．

定理 1.7.9 (Markov 時刻の直交分解). 任意の Markov 時刻 $T \in \mathbb{T}$ に対して，識別不可能な違いを除いて一意的な Markov 時刻の組 (τ, σ) が存在して，次を満たす：

(1) τ は到達可能時刻である．

(2) σ は到達不可能である．

(3) $[T] = [\tau] + [\sigma]$ と非交和で表せる．

1.7.5　随意過程の分解

定理 1.7.10 (随意過程の軌跡). 任意の随意過程 $X \in D \cap (\mathcal{F}_t)$ について，次が存在する：

(1) ある左連続な過程 Y,

(2) 到達不可能時刻の列 (σ_n)

(3) 可予測時刻の列 (τ_m)

$$X = Y + \sum_{n \in \mathbb{N}} \Delta X_{\sigma_n} 1_{[\sigma_n]} + \sum_{m \in \mathbb{N}} \Delta X_{\tau_m} 1_{[\tau_m]}.$$

さらに，X が可予測ならば，ΔX_{σ_n} は 0 と識別不可能である．

1.7.6　随意過程の可予測性

定義 1.7.11 (left quasicontinuous). $X \in D \cap (\mathcal{F}_t)$ が $\forall_{\tau \in \mathbb{T}_p}\ \Delta X_\tau 1_{\{\tau < \infty\}} \overset{P}{=} 0$ を満たすとき，**左擬連続**であるという．

定理 1.7.12 . $X \in D \cap (\mathcal{F}_t)$ について，次は同値：

(1) X は左擬連続である．

(2) X のジャンプ時刻は，到達不可能な Markov 時刻によって埋め尽くされている．

(3) τ に収束する Markov 時刻の増大列 $\{\tau_n\} \subset \mathbb{T}$ について，$\lim_{n \to \infty} X_{\tau_n} \overset{P}{=} X_\tau$ on $\{\tau < \infty\}$.

定理 1.7.13 . 随意過程 $X \in D \cap (\mathcal{F}_t)$ について，次は同値：

(1) X は可予測である．

(2) 次の 2 条件を満たす：

  (a) $\forall_{\tau \in \mathbb{T}_p}\ X_\tau 1_{\{\tau < \infty\}}$ は可測過程である．

  (b) 任意の到達不可能時刻 σ について，$\{\Delta X \neq 0\} \cap [\sigma]$ は P-零集合である．

1.7.7　随意過程の識別不可能性

定理 1.7.14 (section theorem). $A \in \mathcal{D}$ を随意集合とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して Markov 時刻 $\tau_\epsilon \in \mathbb{T}$ が存在して，$[\tau_\epsilon] \subset A$ かつ

$$P[\tau_\epsilon < \infty] \geqslant P[\pi(A)] - \epsilon$$

が成り立つ．同様の結論が，$\mathscr{D}$ を $\mathfrak{P}$ に，$\mathbb{T}$ を $\mathbb{T}_p$ に変えても成り立つ．

系 1.7.15 (2 つの随意過程が識別不可能であるための条件). X, Y を随意過程とする．任意の Markov 時刻 τ について，$X_\tau = Y_\tau$ on $\{\tau < \infty\}$ ならば，X, Y は識別不可能である：$X = Y$.

1.7.8　一般の過程の分解

定理 1.7.16 . X を可測過程で，$X \geqslant 0 \vee |X| < c$ を満たすとする．このとき，識別不可能な違いを除いて一意的に随意過程と可予測過程の組 $({}^0X, {}^pX)$ が存在して，次を満たす：

(1) $\forall_{\tau\in\mathbb{T}}\ E[X_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}|\mathcal{F}_\tau] = {}^0X_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}$.
(2) $\forall_{\tau\in\mathbb{T}_p}\ E[X_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}|\mathcal{F}_{\tau-}] = {}^pX_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}$.

それぞれを随意・可予測な射影という．

要諦 1.7.17. 上の条件 (1),(2) は次と同値である：

(1) $\forall_{\tau\in\mathbb{T}}\ E[X_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}] = E[{}^0X_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}]$.
(2) $\forall_{\tau\in\mathbb{T}_p}\ E[X_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}] = E[{}^pX_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}]$.

例 1.7.18. W を Wiener 過程とする．${}^pW = W$ である．　□

定理 1.7.19 . X を可測過程とし，$X \in D \wedge {}^0X \in D$ を満たすとする．このとき，${}^p(X_-) = {}^0(X)_-$.

第 2 章

マルチンゲール過程

Markov 過程の多くの主定理は既にマルチンゲールの構造に含まれている．また，ポテンシャル論への多くの応用も持つ (Meyer, [Meyer, 1966])．

劣マルチンゲールは「単調増加関数」，マルチンゲールは「定数関数」に当たる概念である．任意の再標本化について保たれる性質であり，また，「有界な単調増加列は収束する」に当たる結果が得られる．

記法 2.0.1. 次のような記法体系を提案する．

(1) martingale 過程の全体を $\mathscr{M}\subset\mathbb{F}$ で表す．
  (a) 右連続な martingale の全体を $\mathscr{M}\cap D$ で表す．
  (b) 一様可積分な右連続 martingale の全体を $M\subsetneq\mathscr{M}\cap D$ で表す．$M\simeq_{\mathrm{Vect}}L^1(\Omega,\mathcal{F}_\infty)$ が成り立つ．
  (c) 局所マルチンゲールの全体を M_{loc} で表す：

$$M\subset M_{\mathrm{loc}}:=\left\{X\in D\cap\mathbb{F}\mid\exists_{\{\tau_n\}\subset\mathbb{T}}\;P[\tau_n\leqslant\tau_{n+1}]=1\land P[\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\infty]=1\land\forall_{n\in\mathbb{N}}X^{\tau_n}\in M\right\}$$

  $\mathscr{M}\cap D\subset M_{\mathrm{loc}}$ であるが，$\mathscr{M}\not\subset M_{\mathrm{loc}}$ である．
  (d) $(\mathscr{D})$ で Dirichlet 類の全体を表す．$M\cap D=(\mathscr{D})\cap M_{\mathrm{loc}}$ が成立する．
  (e) 一般の Banach 空間 $\mathbb{H}^p$ を

$$\mathbb{H}^p:=\left\{X\in\mathscr{M}\cap D\mid\|X\|_{\mathscr{H}^p}:=\|X^*\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F}_\infty)}<\infty\right\},\quad 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

  と定める．$H^p:=\mathbb{H}^p\cap C$ は閉部分空間になる 2.2.8．$\mathbb{H}^1\subsetneq M$ であるが，$p>1$ については L^p-有界なマルチンゲールは $\mathbb{H}^p$ の元である．
  (f) $L^2(\Omega)$-有界なマルチンゲールの全体について，$\mathbb{H}^2\simeq_{\mathrm{Hilb}}L^2(\Omega,\mathcal{F}_\infty)$ が成り立つ．その部分空間を $H^2:=\mathbb{H}^2\cap C$ とし，$H^{2,d}$ を純不連続な $\mathbb{H}^2$ の元とすると，$\mathbb{H}^2={}^0H^2\oplus H^{2,d}$ と直交分解される．

(2) 見本道が殆ど確実に有限な全変動を持つ D-過程の全体を

$$\mathcal{A}:=\left\{A\in\mathbb{F}\cap D\mid\forall_{\omega\in\Omega\text{ a.s.}}\;A(\omega)|_{[0,t]}\in\mathrm{BV}([0,t])\right\}$$

で表す．
  (a) 見本道が殆ど確実に単調増加する D-過程の全体を

$$\mathcal{A}^+:=\left\{A\in\mathbb{F}\mid\forall_{\omega\in\Omega\text{ a.s.}}\;A_t(\omega)\text{ は単調増加}\right\}$$

  と表す．
  (b) 任意の $A\in\mathcal{A}$ は，$A^+,A^-\in\mathcal{A}^+$ を用いて $A_t=A^+-A^-$ と表せる．

2.1 マルチンゲールの定義と構成

この節の内容は $T=\mathbb{N}$ の場合について述べるが，$\mathbb{R}$ でも可分変形を通じて通用する結果である．位相の議論が必要がない点のみが相違点であり，その意味で純粋な理論が見れる．マルチンゲールの強力な点は再標本化によって保たれることであり，これが豊穣なマルチンゲール不等式を生み，これがマルチンゲール収束定理を導く．

2.1.1 定義と基本性質

定義 2.1.1 (martingale, submartingale).

(1) 確率過程 (X_n) が情報系 $(\mathcal{F}_n)$ について $(\mathcal{F}_n)$-**マルチンゲール**であるとは，次の 3 条件が成り立つことをいう：
 (M1) $(\mathcal{F}_n)$-適合的である：$\forall_{n\in\mathbb{N}}\;X_n\in\mathcal{L}_{\mathcal{F}_n}(\Omega)$.
 (M2) 可積分列である：$\forall_{n\in\mathbb{N}}\;X_n\in L^1(\Omega)$.
 (M3) martingale 性：$\forall_{n\in\mathbb{N}}\;E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]=X_n$ a.s.
 $\mathbb{F}$-マルチンゲールの全体を $\mathcal{M}(\mathbb{F})$ で表す．

(2) (3) の代わりに $\forall_{n\in\mathbb{N}}\;E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\geqslant X_n$ a.s. が成り立つとき，F-**劣マルチンゲール**であるといい，$\forall_{n\in\mathbb{N}}\;E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\leqslant X_n$ a.s. が成り立つとき，F-**優マルチンゲール**であるという．

(3) 単に**マルチンゲール**とは，F が過程 (X_n) が定める自然な増大系である場合をいう．

要諦 2.1.2 (定義の特徴付け)**.** 次の条件は (M3) に同値．

(1) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\;\forall_{A\in\mathcal{F}_n}\;E[X_{n+1},A]=E[X_n,A]$. これはつまり，

$$\forall_{s<t}\;\forall_{A\in\mathcal{F}_s}\quad\int_A X_s dP=\int_A X_t dP.$$

(2) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\;\forall_{Y\in L^\infty_{\mathcal{F}_n}(\Omega)}\;E[X_{n+1}Y]=E[X_nY]$.

補題 2.1.3 (マルチンゲールの基本性質). (X_n) を $(\mathcal{F}_n)$-マルチンゲールとする．

(1) $\forall_{m\geqslant n\geqslant 1}\;E[X_m|\mathcal{F}_n]=X_n$ a.s.
(2) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\;E[X_n]=\text{const.}$
(3) (X_n) は (その自然な情報系について) マルチンゲールである．

これより，マルチンゲールとは，「ある情報系 $\mathbb{F}$ が存在して $\mathbb{F}$-マルチンゲールになる」という性質と同等であるため，$\mathbb{F}$ は省略できる．

[証明].

(1) 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，$\forall_{k\in\mathbb{N}}\;E[X_{n+k}|\mathcal{F}_n]=X_n$ をいう．$k=0$ のとき，これは X_n の $\mathcal{F}_n$-可測性からわかる．$k>0$ のとき，繰り返し期待値の法則と帰納法の仮定から，

$$E[X_{n+k}|\mathcal{F}_n]=E[E[X_{n+k}|\mathcal{F}_{n+k-1}]|\mathcal{F}_n]=E[X_{n+k-1}|\mathcal{F}_n]=X_n.$$

(2) (1) の両辺の期待値を取れば良い．

(3) (X_n) は $(\mathcal{F}_n)$-マルチンゲールだから，$\forall_{n\in\mathbb{N}}\;\sigma[X_1,\cdots,X_n]\subset\mathcal{F}_n$ より，繰り返し期待値の法則から，

$$E[X_{n+1}|\sigma[X_1,\cdots,X_n]]=E[E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]|\sigma[X_1,\cdots,X_n]]=E[X_n|\sigma[X_1,\cdots,X_n]]=X_n.$$

■

補題 2.1.4 (劣マルチンゲールの基本性質). (X_n) を $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲールとする．

(1) $\forall_{m\geqslant n\geqslant 1}\;E[X_m|\mathcal{F}_n]\geqslant X_n$ a.s.
(2) $(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ は実数の単調増加列である．

(3) (X_n) は (その自然な情報系について) 劣マルチンゲールである．
(4) X がマルチンゲールでもあることと，$t\mapsto E[X_t]$ が定値であることは同値．

[証明]. $=$ を $\geqslant$ に証明置換すれば良い．(4) は，(1) からすぐに判る，任意の $m\geqslant n\in T$ について $E[X_m|\mathcal{F}_n]=X_n$ であることは，両辺に E を作用させて $E[X_m]=E[X_n]$ であることとは同値． ■

2.1.2　マルチンゲールの例と構成

例 2.1.5 (中心化された i.i.d. 列の部分和の列，条件付き期待値の列)**.**

(1) $\{X_n\}\subset L^1(\Omega)$ を独立同分布列とする．このとき，部分和の列 $\left(S_n:=\sum_{i=1}^n X_i\right)$ は明らかに $\forall_{n\in\mathbb{N}}\;S_n\in L^1(\Omega)$ であるから，条件付き期待値の a.s. 線形性と，自然な情報系 $\mathcal{F}_n:=\mathcal{F}[X_1,\cdots,X_n]$ について，$X_{n+1}\perp\!\!\!\perp\mathcal{F}_n$ より，

$$E[S_{n+1}|\mathcal{F}_n]\overset{\text{a.s.}}{=}E[S_n|\mathcal{F}_n]+E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\overset{\text{a.s.}}{=}S_n+E[X_{n+1}].$$

よって，X_n が中心化されていたならば，これはマルチンゲールを定める．

(2) よって，原点から出発する $\mathbb{Z}$ 上の対称で単純な酔歩はマルチンゲールである

(3) $(\mathcal{F}_n)$ を情報系とし，$X\in\mathcal{L}^1(\Omega)$ を可積分確率変数とする．この情報系が定める条件付き期待値の列を $X_n:=E[X|\mathcal{F}_n]$ とおけば，(X_n) はマルチンゲールである．
実際，$\forall_{n\in\mathbb{N}}\;X_n\in L^1_{\mathcal{F}_n}(\Omega)$ は条件付き期待値の定義から明らかであり，$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]=E[E[X|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n]\overset{\text{a.s.}}{=}E[X|\mathcal{F}_n]=X_n$．

(1) の状況は「中心化された公平な賭け」などの意味論を持つ．コイントスをして，表なら $+x$ 円，裏なら $-x$ 円の賭けで，所持金を X_n とすると，これはマルチンゲールである． □

補題 2.1.6 (マルチンゲールの線型束演算に関する保存). $(X_n),(Y_n)$ を $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲールとする．

(1) (aX_n+bY_n+c) は $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲールである．特に X,Y が $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールでも同様で，$\mathcal{M}(\mathbb{F})$ は線型空間をなす．
(2) $X_n\vee Y_n$ は $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲールである．優マルチンゲールは同様に $\wedge$ に関して保存する．
(3) $\{A_n\}\subset L^1(\Omega)$ を単調増加な適合過程とすると，X_n+A_n は再び $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲールになる．実は，任意の劣マルチンゲールはこうして得られる．

ただし，2 つのマルチンゲール X,Y がそれぞれ対応する情報系が違うとき，X_n+Y_n が適合的とは限らず，線型演算によって保存されるとは限らないことに注意．

補題 2.1.7 (劣マルチンゲールの構成). $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を凸関数，(X_n) を $(\mathcal{F}_n)$-マルチンゲールとし，$\{\psi(X_n)\}\subset L^1(\Omega,\mathcal{F})$ は可積分過程になるとする．

(1) $(\psi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲールである．
(2) ψ が広義単調増加に取れるならば，(X_n) が $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲールに過ぎなくとも，$(\psi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲールとなる．

[証明]. 条件 $\{\psi(X_n)\}\subset L^1(\Omega,\mathcal{F})$ より，任意の $\psi(X_n)$ と $\mathcal{F}_m$ について条件付き期待値 $E[\psi(X_n)|\mathcal{F}_m]$ が存在する．

(1) 条件付き期待値の Jensen の不等式と，(X_n) が $(\mathcal{F}_n)$-マルチンゲールであることより，

$$E[\psi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n]\geqslant\psi(E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n])=\psi(X_n)\;\;\text{a.s.}$$

(2) 条件付き期待値の Jensen の不等式と，$X_n\leqslant E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\Rightarrow\psi(X_n)\leqslant\psi(E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n])$ a.s. より，

$$E[\psi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n]\geqslant\psi(E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n])\geqslant\psi(X_n)\;\;\text{a.s.}$$

■

例 2.1.8 (マルチンゲールに付属する劣マルチンゲール)**.**

(1) F-マルチンゲール (X_n) に対して，$(X_n^2),(|X_n|)$，一般に $|X_t|^\lambda$ $(\lambda \geqslant 1)$ は，$\forall_{t\in T}\ E[|X_t|^\lambda] < \infty$ さえ満たせば，全て F-劣マルチンゲールである．
(2) F-劣マルチンゲール (X_n) に対して，$(X_n^+ := X_n \vee 0)$ も F-劣マルチンゲールである．

□

2.1.3　劣マルチンゲールの Doob 分解

劣マルチンゲールは，初期状態 X_0 から始まるマルチンゲールと，可予測な単調増大成分とに一意的に分解できる．

定理 2.1.9 (Doob-Meyer decomposition theorem). 任意の $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲール (X_n) は，$(\mathcal{F}_n)$-マルチンゲール (M_n) と $(\mathcal{F}_n)$-可予測な広義増加列 $(A_n), A_0 = 0$ とが一意的に存在して，これらの和に分解される：$X_n = M_n + A_n$ a.s..

[証明].

一意性　任意の $n \in \mathbb{N}$ について，(A_n) の階差列は $\mathcal{F}_n$-可測で可積分 $A_{n+1} - A_n \in L^1(\mathcal{F}_n)$ であるから，

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n &= E[A_{n+1} - A_n|\mathcal{F}_n] \\ &= E[X_{n+1} - E_n|\mathcal{F}_n] - E[M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n] = E[X_{n+1} - E_n|\mathcal{F}_n] \end{aligned}$$

が必要．すなわち，$A_0 = 0$ と併せると，

$$A_n := \sum_{k=0}^{n-1} E[X_{k+1} - X_k|\mathcal{F}_k], \quad M_n := X_n - A_n$$

と一意的に表示されることが必要．

存在　上の構成について，(A_n) は $\mathcal{F}_{n-1}$-可測な確率変数の和だから可予測性で，(X_n) の劣マルチンゲール性より増大性も明らかだから，あとは (M_n) のマルチンゲール性を示せば良い．

$$\begin{aligned} E[M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n] &= E[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] - E[A_{n+1} - A_n|\mathcal{F}_n] \\ &= E[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] - E\left[E[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_n\right] = 0. \end{aligned}$$

■

観察 2.1.10. 独立な非負確率変数列 $\{Y_n\} \subset L^1(\Omega)_+$ に対して，$X_n := \sum_{k\in[n]} Y_k$ と定めると，これは自然な情報系 $(\mathcal{F}_n)$ について

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n + E[Y_{n+1}] \geqslant X_n$$

を満たすから劣マルチンゲールである．これは二通り

$$X_n = 0 + X_n, \quad X_n = (X_n - E[X_n]) + E[X_n]$$

にマルチンゲール成分と単調増大成分とに分けられるが，後者のみが Doob 分解である． □

2.1.4　マルチンゲール変換

(X_n) のマルチンゲール変換 $(H \cdot X)_n$ とは，確率積分 $\int_0^t HdX$ に相当する．

定理 2.1.11 .

(1) $\{X_n\} \subset L^1(\Omega)$ を $(\mathcal{F}_n)$-マルチンゲール，$\{Y_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ を $(\mathcal{F}_n)$-適合過程とする．このとき，

$$S_n := \sum_{k=0}^{n-1} Y_k(X_{k+1} - X_k), \quad S_0 = 0,$$

は再び $(\mathcal{F}_n)$-マルチンゲールである．

(2) $\{X_n\} \subset L^1(\Omega)$ を $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲール，$\{H_n\} \subset L^\infty(\Omega)_+$ を正な可予測過程とする．このとき，

$$H \cdot X := \sum_{n\in\mathbb{N}} H_n(X_n - X_{n-1}), \quad S_0 = X_0,$$

は再び $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲールである．

系 2.1.12． 特に，Markov 時刻 $T \in \mathbb{T}$ に対して，X^T は再び劣マルチンゲールである．

[証明]． $H_n := 1_{\{n\leqslant T\}} = 1 - 1_{\{T\leqslant n-1\}}$ とすると，$\mathcal{F}_{n-1}$-可測である． ■

2.1.5　離散時に関する Doob の任意抽出定理

劣マルチンゲールは任意の $n \leqslant m$ に対して $E[X_m|\mathcal{F}_n] \geqslant X_n$ a.s. を満たすのであった 2.1.4．マルチンゲールから「ランダムな部分列を抽出」しても，取り出した部分列はマルチンゲールである．

2.1.5.1　任意抽出に対するマルチンゲール性の保存

Doob の任意抽出定理にはいくつかの要件のバージョンがある．

定理 2.1.13 (有界停止時刻に於ける任意抽出). $\exists_{N\in\mathbb{N}}\ \sigma \leqslant \tau \leqslant N$ a.s. を有界な停止時とする．

(1) (X_n) が $(\mathcal{F}_n)$-マルチンゲールならば，$E[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma$ a.s.
(2) (X_n) が $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲールならば，$E[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma] \geqslant X_\sigma$ a.s.

[証明].

(1) (a) $X_\tau \in L^1(\Omega)$ であることは次のように確認できる：

$$E[|X_\tau|] = \sum_{k=0}^N E[|X_\tau|, \{\tau = k\}] \leqslant \sum_{k=0}^N E[|X_k|] < \infty.$$

(b) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{a\in\mathbb{R}}\ \{X_\sigma < a\} \cap \{\sigma = n\} = \{X_n < a\} \cap \{\sigma = n\} \in \mathcal{F}_n$ より，X_σ は $\mathcal{F}_\sigma$-可測．
(c) 任意の $A \in \mathcal{F}_\sigma$ をとって，$E[X_\tau, A] = E[X_\sigma, A]$ を示せば良い．

■

注 2.1.14 (有界でない場合は極めて簡単な反例が存在する). 停止時が有界でない場合は反例が存在する．原点から出発する $\mathbb{Z}$ 上の対称で単純な酔歩はマルチンゲールであり，$-k$ への到達時刻 $\tau_{-k} := \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = -k\}$ も停止時を定めるが，これは有限ではあっても有界ではなく，$\tau_{-1} < \tau_{-2}$ かつ $X_{\tau_{-1}} \equiv -1 > X_{\tau_{-2}} \equiv -2$ a.s. が成り立つ．

系 2.1.15 (マルチンゲールの特徴付け). $X \in \mathbb{F}$ を可積分な適合過程とする．次は同値：

(1) X は $\mathbb{F}$-マルチンゲールである．
(2) $\forall_{S,T\in\mathbb{T}(\mathbb{F})}\ E[X_S] = E[X_T]$.

2.1.5.2　任意標本化定理

マルチンゲールから，ある規則に則って，時点 (τ_n) を抽出して観察する．これは統計的実験のようなもので，停止過程を一般化する．

定義 2.1.16 (optional sampling). $\mathbb{F}$-停止時の増大列 $\Sigma := \{\sigma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ に対して，

(1) $X^\Sigma := (X_{\sigma_n})_{n\in\mathbb{N}}$ を **Σ-標本化過程**という．

(2) $\mathcal{F}^\Sigma := \{\mathcal{F}_{\sigma_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ を **Σ-抽出情報系**という．

例 2.1.17 (停止過程は抽出過程である)**.** 任意の停止時 σ は停止時の増大列 $(\sigma_n := \sigma \wedge n)$ を定めるから，これについて σ-停止過程と (σ_n)-抽出過程とは同じ． □

系 2.1.18 .

任意標本化定理

(X_n) を $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲール，$\{\tau_k\} \subset \mathbb{T}^{<\infty}(\mathbb{F})$ を有界な停止時の広義単調増加列とする：$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \exists_{N_n\in\mathbb{N}}\ \tau_n \leqslant N_n$．このとき，標本化過程 $X^\Sigma = (X_{\tau_k})_{k\in\mathbb{N}}$ は $(\mathcal{F}_{\tau_k})$-劣マルチンゲールである．

任意停止定理

$\mathbb{F}$-劣マルチンゲールの有界な停止時 $\sigma \in \mathbb{T}^{<\infty}(\mathbb{F})$ に関する停止過程 X^σ は再び $(\mathcal{F}_{\sigma\wedge n})$-劣マルチンゲールである．

2.2　マルチンゲール不等式

2.2.1　Doob の最大不等式

劣マルチンゲールに対しては，$\max_{1\leqslant k\leqslant n} X_K$ に関する評価を，X_n のみを用いて与えられる．一般の確率過程では決して成り立たないが，Kolmogorov の不等式を一般化する形で，マルチンゲールについては成り立つ．このときも，「劣マルチンゲールであるから，最後の時点 S_n にだけ注目すれば良い」という構造が引き起こす不等式関係なのであった．

定理 2.2.1 (**Doob inequality**)**.** (X_n) を $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲールとする．このとき，$X_n^+ := X \vee 0$ とすると，

(1) $X_N^* := \max_{1\leqslant k\leqslant N} X_k$ とすると，任意の $a > 0$ と $N \in \mathbb{N}$ について，

$$P\left[X_N^* \geqslant a\right] \leqslant \frac{1}{a}E[X_N 1_{\{X_N^*\geqslant a\}}] \leqslant \frac{1}{a}E[X_N^+].$$

(2) 双対的に，任意の $a > 0$ と $N \in \mathbb{N}$ について，

$$P\left[\min_{1\leqslant k\leqslant N} X_k \leqslant -a\right] \leqslant \frac{1}{a}E[X_N^+] - \frac{1}{a}E[X_1].$$

[証明]. (X_n^+) は再び劣マルチンゲールだから，初めから非負な劣マルチンゲール (X_n) をとっても，一般性を失わない．

(1) **タイマーの設定**　(X_n^*) は $(\mathcal{F}_n)$-適合的な過程である．これを用いて，(X_n) の値を順次監視し，a 以上の値が出たら停止するためのタイマーを

$$\sigma := \begin{cases} \inf\{k \in N+1 \mid X_k \geqslant a\}, & X_N^* \geqslant a, \\ N, & X_N^* < a. \end{cases}$$

とすると，これは有界な $(\mathcal{F}_n)$-停止時で，$\{Y_N \geqslant a\}$ 上では $X_\sigma \geqslant a$ を満たす．実際，任意の $k \in \mathbb{N}$ について，$k < N$ のときは，(Y_n) が $(\mathcal{F}_n)$-適合的であることより $\{\sigma \leqslant k\} = \{\exists_{m\in k+1}\ X_m \geqslant a\} = \{Y_k \geqslant a\} \in \mathcal{F}_k$ であり，$k \geqslant N$ のときは σ は必ず N 以下であることから $\{\sigma \leqslant k\} = \Omega \in \mathcal{F}_k$．

タイマーに関する任意停止　よって，停止時 $\sigma \leqslant N$ に関する劣マルチンゲール性 2.1.13 より，

$$E[X_N] \geqslant E[X_\sigma] \geqslant aP[Y_N \geqslant a].$$

これと Markov 不等式を併せて，

$$\forall_{a>0}\ \forall_{N\in\mathbb{N}}\quad P\left(X_N^* \geqslant a\right) \leqslant \frac{1}{a}E\left[X_N, \max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k \geqslant a\right] \leqslant \frac{1}{a}E[X_N^+].$$

■

系 2.2.2 (**Kolmogorov**)**.** 実確率変数列 $\{X_n\} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は独立で，$E[X_n] = 0, V_n := \mathrm{Var}[X_n] < \infty$ を満たすとする．このとき，$S_k := \sum_{i=1}^k X_k$ とおくと，

$$\forall_{a>0}\quad P[S_n^* \geqslant a] \leqslant \frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^n V_i.$$

[証明]. 列 (X_n) は中心化されているから，(S_k) はマルチンゲールであり，従って (S_k^2) は劣マルチンゲールである．よって Doob の最大不等式を (S_k^2) と a^2 に対して用いると，任意の $a>0$ について，

$$P[\max_{1\leqslant k\leqslant N} S_k^2 \geqslant a^2] = P[\max_{1\leqslant k\leqslant N} |S_k| \geqslant a] \leqslant \frac{E[S_N^2]}{a^2}.$$

■

2.2.2　Doob の最大不等式の系

Doob の不等式とその系は，$\mathbb{F}$ の右連続性と完備性に依らず成立し，また連続時間についても成り立つ．

系 2.2.3 . (X_n) を $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲール，$a>0$ とする．

(1)
$$P[X_N^* \geqslant a] \leqslant \frac{E[|X_N|]}{a}, \quad P\left[\min_{0\leqslant k\leqslant N} X_k \leqslant -a\right] \leqslant \frac{1}{a}(E[|X_N|] - E[X_0]).$$

(2) よって，
$$E\left[\max_{0\leqslant k\leqslant N} |X_k| \geqslant a\right] \leqslant \frac{E[2|X_N| + |X_0|]}{a}.$$

系 2.2.4 . $\{X_n\} \subset L^1(\Omega)$ をマルチンゲール，または正な劣マルチンゲールとする．このとき，

(1) 任意の $a>0$ と $p\geqslant 1$ に対して，
$$P\left[\max_{1\leqslant k\leqslant N} |X_N| \geqslant a\right] \leqslant \frac{1}{a^p} E[|X_N|^p].$$

(2) $p>1$ でもあるとき，
$$E[|X_N|^p] \leqslant E\left[\max_{1\leqslant k\leqslant N} |X_N|^p\right] \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_N|^p].$$

[証明]. $X_N \in L^p(\Omega)$ ならば，$\psi(x) = x^p$ は凸関数になるため，$(|X_n|^p)$ は劣マルチンゲールである．■

2.2.3　Doob の L^p-不等式

Doob の不等式は区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上でも成立する．このときは L^p-ノルムの言葉で表せる．

定理 2.2.5 (Doob). $I \subset \mathbb{R}_+$ を区間，$(X_t)_{t\in I}$ を非負の劣マルチンゲール，または，D-マルチンゲールであるとする．このとき，

(1) 任意の $p\geqslant 1$ について，$\lambda^p P[X^* \geqslant \lambda] \leqslant \sup_{t\in I} E[|X_t|^p]$.

(2) 任意の $p>1$ について，$\|X^*\|_p \leqslant \dfrac{p}{p-1} \sup_{t\in I} \|X_t\|_p$.

[証明]. まず有理点 $D := \mathbb{Q} \cap I$ に注目する．D には有限集合の増大列 (D_n) で $D = \cup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ を満たすものが存在するため，D_n 上の Doob の不等式に対して $n\to\infty$ とすれば良い．これは，劣マルチンゲールの平均 $E[|X_t|^p]$ は $t\in\mathbb{R}_+$ について増大することによる．あとは，過程 X^* が D-過程であることによる．■

要諦 2.2.6.

(1) 区間 I が右の端点 T を含む場合，$\sup_{t\in I} \|X_t\|_p = \|X_T\|_p$ に注意．

(2) 連続な局所マルチンゲールについても，任意の有界区間 I について成り立つことが解る．

系 2.2.7 .

(1) $p=2$ のとき，$\|X^*\|_{L^2(\Omega)} \leqslant 2 \sup_{t\in I} \|X_t\|_{L^2(\Omega)}$.

(2) 一方で $\|X_t\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|X^*\|_{L^2(\Omega)}$ でもあるから，$X^* \in L^2(\Omega)$ と $\sup_{t\in I}\|X_t\|^2 < \infty$，すなわち，$X$ が L^2-有界であることとは同値．このとき，特に X は一様可積分である．

(3) ただし，$L^1(\Omega)$-有界なマルチンゲールが一様可積分でない，すなわち，X^* が可積分でないことがあり得る．

系 2.2.8 (可積分なマルチンゲールのなす Banach 空間).

$$H^p := \left\{X \in \mathscr{M} \cap C \mid X^* := \sup_{t\in\mathbb{R}_+}|X_t| \in L^p(\Omega)\right\} \quad (p \geqslant 1)$$

はノルム $\|X\|_{H^p} := \|X^*\|_p$ について，Banach 空間をなす．特に，$p > 1$ のとき，$H^p, \mathbb{H}^p$ は M の閉部分空間である．

2.2.4 上渡回数定理

ここで「上渡回数」なる特殊な確率変数に興味を集中することにする．劣マルチンゲールの挙動は上昇トレンドがあるので，上渡回数が評価でき，これが収束性について深い示唆をもたらす．というのも，いつまでも区間 $[a,b]$ 付近には留まらず先に行くか，$[a,b]$ 内で概収束をすることが予想される．

定義 2.2.9 (upcrossing number).

(1) 実数 $a < b$ について，確率変数列 $\{\sigma_1, \tau_1, \sigma_2, \tau_2, \cdots\} \subset \mathscr{L}(\Omega)$ を次のように定めると，停止時の狭義単調増加列となる：

$$\sigma_1 := \min\{n \geqslant 1 \mid X_n \leqslant a\}, \qquad \tau_1 := \min\{n > \sigma_1 \mid X_n \geqslant b\},$$
$$\sigma_k := \min\{n > \tau_{k-1} \mid X_n \leqslant a\}, \qquad \tau_k := \min\{n > \sigma_k \mid X_n \geqslant b\}.$$

(2) 停止時の狭義単調増加列 $\sigma_1, \tau_1, \sigma_2, \tau_2, \cdots$ に対して，$\beta_n := \max\{k \in \mathbb{N} \mid \tau_k \leqslant n\}$ と定めると，$\mathbb{N}$-値確率変数の列となる．各成分 β_n を，**時刻 n までの $[a,b]$ 間の上向き横断回数**という．

定理 2.2.10 . (X_n) が $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲールならば，

$$\forall_{N\in\mathbb{N}} \quad E[\beta_N] \leqslant \frac{1}{b-a}E[(X_N-a)^+].$$

[証明]. $k := \beta_N$ とし，確率変数を $Z_N := \sum_{i=1}^{k}(X_{\sigma_{i+1}\wedge N} - X_{\tau_i\wedge N})$ とおく．これは，a を 2 回目以降に初めて a を下回った時の点 $X_{\sigma_{i+1}}$ と，その前に初めて b を上回った点 X_{τ_i} との距離を (その後は次に b を越すまで計測は休憩)，時刻 N が過ぎるまで足し合わせたものである．なお，マルチンゲールは D-過程としたことに注意すると，$X_{\sigma_i} \leqslant a, b \leqslant X_{\tau_i}$ が成り立つ．Z_N をこのように定義することで，$X_{\sigma_{i+1}} - X_{\tau_i} \leqslant a - b < 0$ という形での評価が可能になる．

Z_N の評価　$Z_N \leqslant \beta_N(a-b) + (X_N - a)^+$ が成り立つことを示す．

(a) 最後に超えたのが b であるとき，

$$\begin{aligned} Z_N &= \sum_{i=1}^{k-1}(X_{\sigma_{i+1}} - X_{\tau_i}) + (a - X_{\tau_k}) + (X_N - a) \\ &\leqslant (k-1)(a-b) + (a-b) + (X_N - a) \leqslant k(a-b) + (X_N-a)^+. \end{aligned}$$

(b) 最後に超えたのが a であるとき，

$$Z_N = \sum_{i=1}^{k}(X_{\sigma_{i+1}} - X_{\tau_i}) \leqslant k(a-b) \leqslant k(a-b) + (X_N-a)^+.$$

証明　両辺の平均値を取ると，$E[Z_N] \leqslant -(b-a)E[\beta_N] + E[(X_N-a)^+]$ となるから，$E[Z_N] \geqslant 0$ を言えば良い．変な話だが $E[X_{\sigma_{i+1}\wedge N}] \geqslant E[X_{\tau_i\wedge N}]$ を示せばこれは従うから，すなわち σ_i, τ_i が F-停止時であることを示せば結論が従う．

■

2.3 マルチンゲール収束定理

独立確率変数の和に関する収束定理は Kolmogorov の不等式などにより示された．マルチンゲールに対する Doob の不等式はさらに強力である．

2.3.1 劣マルチンゲールの収束定理

劣マルチンゲールの正部分の列が L^1-有界ならば X_n は概収束極限を持つ．その証明では，劣マルチンゲールの上向き横断回数の評価が肝要になる．

定理 2.3.1 ([Meyer, 1966] **Th'm 17**). $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲール (X_n) は L^1-有界であるとする：$\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^+] < \infty$[†1]．このとき，

(1) ある可積分確率変数 $X_\infty \in L^1(\Omega)$ に概収束する：$\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ a.s.

(2) この極限 X_∞ は $\mathcal{F}_\infty := \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ について可測である．

(3) さらに (X_n) が一様可積分ならば，$X_n \to X$ は L^1-収束もし，さらに $(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ も劣マルチンゲールになる：$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ E[X_\infty|\mathcal{F}_n] \geqslant X_n$．

[証明].

(1) **極限の存在**

$$A := \left\{\liminf_{n\to\infty} X_n < \limsup_{n\to\infty} X_n\right\} = \bigcup_{a<b\in\mathbb{Q}} \left\{\liminf_{n\to\infty} X_n < a < b < \limsup_{n\to\infty} X_n\right\} =: A_{a,b}.$$

とおいて，$P[A]=0$ を示せば良い．
まず，区間 $[a,b]$ に対する時点 N までの X の上渡回数 β_N は

$$E[\beta_N] \leqslant \frac{E[|X_N|]+|a|}{b-a}$$

を満たし，$(\beta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ の単調増大性と併せて，単調収束定理より，

$$E\left[\lim_{N\to\infty} \beta_N\right] = \lim_{N\to\infty} E[\beta_N] \leqslant \frac{\sup_{N\in\mathbb{N}} E[|X_N|]+|a|}{b-a} < \infty.$$

したがって，$P\left[\lim_{N\to\infty} \beta_N\right] = 0$ を得たが，これはどういう意味か．
いま，$\liminf_{n\to\infty} X_n < a < b < \limsup_{n\to\infty} X_n$ ということは，X_n が $[a,b]$ を無限回横切るということであるから，

$$P[A_{a,b}] \leqslant P\left[\lim_{n\to\infty} \beta_N = \infty\right] = 0.$$

以上より，$P[A]=0$．

極限の可積分性　$X_\infty = \pm\infty$ の可能性を排除する．Fatou の定理より，

$$E[|X_\infty|] = E[\lim_{n\to\infty} |X_n|] \leqslant \liminf_{n\to\infty} E[|X_n|] < \infty.$$

(2) $\mathcal{F}_\infty$-可測関数 X_n の極限であるため．

(3) **L^1-収束性**　任意の $\lambda > 0$ に対して

$$E[|X_n - X|] = E[|X_n - X|1_{\{|X_n-X|<\lambda\}}] + E[|X_n - X|1_{\{X_n-X\}\geqslant\lambda}]$$

と分解できる．一様可積分性より，第 2 項は十分小さくとれ，第 1 項は Lebesgue の優収束定理が成り立つ．

[†1] 一様可積分ならば成り立つ．

条件付き期待値の列として表せること　任意の $n\in\mathbb{N}$ について，$\forall_{m\geqslant n}\ E[X_m|\mathcal{F}_n]\geqslant X_n$ である．条件付き期待値は L^1-ノルム減少的であるから，$E[X_m|\mathcal{F}_n]\to E[X_\infty|\mathcal{F}_n]$ が $L^1(\Omega)$-収束の意味で成り立つ．特に，適当な部分列が存在して，$E[X_{m_p}|\mathcal{F}_n]\to E[X_\infty|\mathcal{F}_n]$ a.s. よって，$X_n\leqslant E[X_\infty|\mathcal{F}_n]$ a.s. である．

■

要諦 2.3.2.

(1) 劣マルチンゲールの平均は単調増加であるから，特に下に有界である．従って，有界性条件 $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^+]<\infty$ は，平均の一様有界性 $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|]<\infty$ に同値．
(2) この結果は全く同様に連続な場合に拡張されるのは，$(\mathcal{F}_t)$ が完備かつ右連続なときのみであり，このとき D-変形が存在することによる．

系 2.3.3. 正な優マルチンゲールは，概収束極限 $\lim_{t\to\infty} X_t$ を持つ．

2.3.2　一様可積分なマルチンゲールの特徴付け

Doob の収束定理から明らかに従うが，これは Doob の一般論の前から Levy によって知られていた．

系 2.3.4 (Levy). $(X_n)\in\mathbb{F}$ を適合過程とする．次は同値：

(1) X_n は一様可積分なマルチンゲールである．
(2) ある $Y\in L^1(\Omega)$ が存在して，$X_n=E[Y|\mathcal{F}_n]$ a.s. と表せる．

定理 2.3.5. (X_t) をマルチンゲールとする．次の 3 条件は同値：

(1) $L^1(\Omega)$-極限 $\lim_{t\to\infty} X_t$ が存在する．
(2) ある $X_\infty\in L^1(\Omega)$ が存在して，$(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}_+}}$ もマルチンゲールである：$\forall_{t\in\mathbb{R}_+}\ E[X_\infty|\mathcal{F}_t]$ を満たす．
(3) $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は一様可積分である．

上の条件を満たすとき，X_∞ は概収束極限でもある．

2.3.3　L^p-収束について

命題 2.3.6. $(\mathcal{F}_n)$-劣マルチンゲール (X_n) はさらに $p>1$ について $L^p(\Omega)$-有界でもあるとする：$\sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|^p]<\infty$．このとき，

(1) ある $X_\infty\in L^p(\Omega)$ が存在して，$L^p(\Omega)$ の意味で $\lim_{n\to\infty} X_n=X_\infty$．
(2) $X_\infty\in L^p(\mathcal{F}_\infty)$．
(3) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ X_n\leqslant E[X_\infty|\mathcal{F}_n]$．

要諦 2.3.7. L^p-有界なマルチンゲール X は，$X^*\in L^p(\Omega)$ も満たすから，自動的に $X\in\mathbb{H}^p$ である．しかし，L^1-有界性だけだと，一様可積分性も保証されず，$X\in\mathbb{H}^1$ も保証されない．

2.3.4　逆向き収束定理

定義 2.3.8. 可積分な過程 $(X_n)_{n\in-\mathbb{N}}=(\cdots,X_2,X_1,X_0)$ が $(\mathcal{F}_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$-**マルチンゲール**であるとは，

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ E[X_{-n}|\mathcal{F}_{-n-1}]=X_{-n-1}$$

を満たすことをいう．これを減少する情報系 $(\mathcal{F}_n)$ に関する $(\mathcal{F}_n)$-**逆マルチンゲール**ともいう．

定理 2.3.9 (Levy's downward theorem). $(\mathcal{F}_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ を部分 σ-代数の単調減少列とし，この減少情報系に関する $(\mathcal{G}_n)$-逆マルチンゲール $\{X_n\}\subset L^1(\Omega)$ を考える．

(1) (X_n) は一様可積分である．
(2) ある $X_{-\infty} \in L^1(\Omega)$ が存在して，概収束と L^1-収束の意味で次が成り立つ：$\lim_{n\to\infty} X_n = X_{-\infty}$ a.s.
(3) 極限 $X_{-\infty}$ は $\mathcal{F}_{-\infty} := \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{-n}$ について可測で，$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ X_{-\infty} = E[X_{-n}|\mathcal{F}_{-\infty}]$ が成り立つ．

命題 2.3.10 (劣マルチンゲールに対する逆向き収束定理). $(X_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ が $(\mathcal{F}_{-n})$-劣マルチンゲールで $L^1(\Omega)$-有界ならば，次を満たす：

(1) (X_n) は一様可積分である．
(2) ある $X_{-\infty} \in L^1(\Omega)$ が存在して，概収束と L^1-収束の意味で次が成り立つ：$\lim_{n\to\infty} X_n = X_{-\infty}$ a.s.
(3) 極限 $X_{-\infty}$ は $\mathcal{F}_{-\infty} := \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{-n}$ について可測で，$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ X_{-\infty} \leqslant E[X_{-n}|\mathcal{F}_{-\infty}]$ が成り立つ．

2.4　連続劣マルチンゲールの Doob-Meyer 理論

マルチンゲール $\mathscr{M} \subset \mathbb{F}$ は，代表元として D-変形を取り直せる．こうして，$\mathscr{M} \cap D$ は位相線型空間になる（はず）．

2.4.1　連続時間マルチンゲールの性質

定義 2.4.1 . 一般の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の増大系 $(\mathcal{F}_t)$ について，過程 (X_t) が $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールであるとは，次の 3 条件を満たすことをいう．

(M1) $(\mathcal{F}_t)$-適合である：$\forall_{t\geqslant 0}\ X_t$ は $\mathcal{F}_t$-可測．
(M2) 可積分である：$\forall_{t\geqslant 0}\ X_t \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathcal{F})$.
(M3) $\forall_{0\leqslant s\leqslant t}\ E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ a.s.

条件 (3) の代わりに $\forall_{0\leqslant s\leqslant t}\ E[X_t|\mathcal{F}_s] \geqslant X_s$ a.s. をみたすとき，$(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲールという．

注 2.4.2 (Jacod-Shiryaev[Jacod and Shiryaev, 2003]). 確率基底は完備とはしなかった．これは次の成立による．X を完備化 $(\Omega, \mathcal{F}^P, P, \mathbb{F}^P)$ 上の劣マルチンゲールとすると，X と識別不可能な $\mathbb{F}$-適合過程 X' が存在して，ある $\mathbb{F}$-停止時 $T \in \mathbb{T}^{<\infty}(\mathbb{F})$ について，任意の見本道 $X_\bullet(\omega)$ は右連続で，$T(\omega)$ を除いて左極限を持つ．

命題 2.4.3 . (X_t) を劣マルチンゲールとする．$t \mapsto E[X_t]$ は単調増加である．

2.4.2　連続マルチンゲールと一様可積分性

命題 2.4.4 (非負な劣マルチンゲールの一様可積分性). $\{X_t\} \subset L^1(\Omega)_+$ を (殆ど確実に) 非負な $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲールとする．

(1) 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，$(X_t)_{t\in[0,N]}$ は一様可積分である．
(2) $[0, N]$ 上に値を取る離散な $(\mathcal{F}_t)$-停止時の全体を Σ_N とすると，$(X_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_N}$ も一様可積分である．
(3) (X_t) は D-過程でもあるならば，任意の有界な $(\mathcal{F}_t)$-停止時 $\sigma \leqslant \tau \leqslant N$ に対して，$E[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma] \geqslant X_\sigma$.
(4) $[0, N]$ 上に値を取る一般の有界な停止時の全体を $\mathbb{T}^{<N}$ とする．$(X_\sigma)_{\sigma\in\mathbb{T}^{<N}}$ も一様可積分である．

系 2.4.5 . 任意の $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールは，上の命題の性質を全て満たす．

[証明]. $\{|X_t|\}$ が非負な $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲールであるため． ■

2.4.3　Doob の任意停止定理

命題 2.4.6 (Doob's stopping theorem). $X \in \mathbb{F} \cap D$ について，次は同値：

(1) X は $\mathbb{F}$-マルチンゲールである．
(2) 任意の有界な停止時 $T \in \mathbb{T}(\mathbb{F})$ について，$X_T \in L^1(\Omega)$ かつ $E[X_T] = E[X_0]$.

要諦 2.4.7. $X \in \mathbb{F} \cap D$ は局所有界とすれば，$X_T \in L^1(\Omega)$ を満たすような有界な停止時 $T \in \mathbb{T}(\mathbb{F})$ についてのみ $E[X_T] = E[X_0]$ を満たすことが特徴付けになる．

系 2.4.8 . M をマルチンゲール，T を停止時とする．M^T は再び $(\mathcal{F}_{T\wedge t})$-マルチンゲールであり，また $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールでもある．

[証明]. $M^T \in \mathbb{F} \cap D$ は明らか．任意の有界な停止時 S について，$S \wedge T$ も有界だから，任意停止より，

$$E[M_S^T] = E[M_{S\wedge T}] = E[M_0] = E[M_0^T].$$

■

2.4.4　Doob の任意抽出定理

定理 2.4.9 (任意抽出定理). X を一様可積分なマルチンゲールとする (D-変形を取れるので，D-過程であると仮定してもよい).

(1) $(X_S)_{S\in\mathbb{T}}$ は一様可積分である．
(2) 任意の停止時 $S \leqslant T \in \mathbb{T}$ について，$X_S = E[X_T|\mathcal{F}_S] = E[X_\infty|\mathcal{F}_S]$ a.s.

要諦 2.4.10 (有界な停止時の場合)**.** 上の結果は全てこの定理の系である．有界な停止時 $S \leqslant T$ の場合は，マルチンゲールも $(X_t)_{t\in[0,N]}$ を取ってよく，右に閉じている実区間上のマルチンゲールは一様可積分である．

例 2.4.11 (一様可積分でないマルチンゲールは任意停止に違反する)**.** $X_t = e^{B_t - t/2}$ は一様可積分でない．

$$T := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid X_t \leqslant \alpha\} \quad (\alpha < 1)$$

とすると，$E[X_T] = \alpha$ であるが，$E[X_0] = 1$ である．□

系 2.4.12 . X を劣マルチンゲール，$S \leqslant T \in \mathbb{T}^{<\infty}(\mathbb{F})$ を有界な停止時とする．

(1) $E[X_T|\mathcal{F}_S] \geqslant X_S$.
(2) 停止過程 $X^T := X_{t\wedge T}$ は $(\mathcal{F}_{t\wedge T})$-劣マルチンゲールでも，$(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲールでもある．

2.4.5　Doob-Meyer の分解

これは確率過程の一般理論から到達される消息である．

定理 2.4.13 . $Z \in {}^0\mathcal{M} \cap (\mathcal{D})$ を劣マルチンゲールとする．一意的に $M \in {}^0M \cap D$ と可予測な $A \in {}^0\mathcal{A}^+$ が存在して，一意的に $Z = M + A$ と分解できる．

2.4.6　Doob のマルチンゲール収束定理

定理 2.4.14 . X を優マルチンゲールで，ある $Y \in L^1(\Omega)$ について $\forall_{t\in\mathbb{R}_+}\ X_t \geqslant E[Y|\mathcal{F}_t]$ を満たすとする．このとき，ある実確率変数 X_∞ が存在して，$X_t \xrightarrow{\text{a.s.}} X_\infty$.

2.5　二次変動と Doob-Meyer の分解

2.5.1　全変動と二次変動

記法 2.5.1. $X : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ を関数，$t \in \mathbb{R}_+$ とする．

(1) 分割 $\pi_n \subset [0,t]$ について，

$$S_t^{\pi_n} := \sum_{i\in[n]} |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|.$$

S_t^- は，分割の細分に関する順序を保つ：$\pi' \subset \pi \Rightarrow S_t^{\pi'} \geqslant S_t^{\pi}$.

(2) 一方で，

$$T_t^{\pi_n} := \sum_{i\in[n]} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2.$$

は特に順序を保存するわけではない．

定義 2.5.2 (total variation, quadratic variation). 実過程 X について，

(1) 任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して $S_t := \sup_\pi S_t^\pi < \infty$ が成り立つこと，すなわちネットの極限として関数 $S : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が定まることを，(有限な) **全変動**を持つという．
(2) $S : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ は単調増加であるが，これがさらに有界関数でもあるとき，関数 X は**有界変動**であるという．
(3) 実過程 X が**二次変分**を持つとは，ある過程 $[X] := \langle X, X\rangle$ が存在して，任意の $t \in \mathbb{R}_+$ と $[0, t]$ の分割の列 $(\pi_n), |\pi_n| \to 0$ について，

$$T_t^{\pi_n} \xrightarrow[n\to\infty]{p} \langle X, X\rangle_t$$

を満たすことをいう．

注 2.5.3. ある過程が二次変分を持っても，$\forall_{t>0} \sup_\pi T_t^\pi = \infty$ を満たし得る．例えば Brown 運動がそうである．

命題 2.5.4 .

(1) 任意の有限な全変動を持つ関数は，２つの単調増加関数の差で表せる．
(2) 特に，任意の有限変動関数は左極限 A_{t-} を持つ．

[証明]. 関数 A は全変動 S を持つとすると，

$$\frac{S+A}{2}, \quad \frac{S-A}{2}$$

はいずれも単調増加関数である． ■

2.5.2　有限変動関数の積分の復習

定理 2.5.5 . Radon 測度 $\mu \in \mathrm{RM}(\mathbb{R}_+)$ と右連続な有限変動関数 A とは次の形で一対一対応する：$\forall_{t\in\mathbb{R}_+}\ A_t = \mu([0, t])$．

定義 2.5.6 . $f \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ を局所有界な Borel 関数とする．この A に対する **Stieltjes 積分**を $\int_0^t f_s dA_s$ または $(f \cdot A)_t$ で表す．

定理 2.5.7 (絶対連続関数の特徴付け). 有限な変動を持つ関数 A について，

(1) A は殆ど至る所微分可能である．
(2) ある有限な変動を持つ関数 B であって $B' = 0$ a.e. を満たすものが存在して，

$$A_t = B_t + \int_0^t A'_s ds.$$

$B = 0$ であるとき，有限変動関数 A は**絶対連続**であるといい，この場合は $\mu \ll l$ である．

命題 2.5.8 . A, B を有限変動関数とすると，

$$\forall_{t\in\mathbb{R}_+} \quad A_t B_t = A_0 B_0 + \int_0^t A_s dB_s + \int_0^t B_{s-} dA_s.$$

2.5.3　増加過程とマルチンゲール

増加過程に関する積分はパス毎に Stieltjes 積分として定義できる．一般のマルチンゲールへの一般化が肝要である．その際に，全変動がないので，二次変動が肝要になる．

定義 2.5.9 . 適合過程 $A \in \mathbb{F}$ が

(1) 増加過程であるとは，見本道が殆ど確実に右連続で単調増加であることをいう．

(2) 有界変動であるとは，見本道が殆ど確実に右連続で有界変動であることをいう．

命題 2.5.10 . $(\mathcal{M} \cap C) \cap \mathcal{A}$ の元は定数のみである．

2.5.4 マルチンゲールの二次変動の存在と特徴付け

定理 2.5.11 .

(1) 連続なマルチンゲール $M \in C \cap \mathbb{F}$ を有界とすると，これは有限な二次変動 $\langle M, M \rangle$ を持つ．
(2) 過程 $\langle M, M \rangle \in C \cap {}^0\mathcal{A}^+$ は，次の性質を持つ唯一の $\langle M, M \rangle_0 = 0$ から始まる連続な増加過程として特徴付けられる：$M^2 - \langle M, M \rangle \in \mathcal{M}$.

補題 2.5.12 . 任意の停止時 $T \in \mathbb{T}(\mathbb{F})$ について，$\langle M^T, M^T \rangle = \langle M, M \rangle^T$.

2.6 局所マルチンゲールと二次共変動

任意の連続な局所マルチンゲール $M \in M_{\mathrm{loc}} \cap C$ に伴う M^2 は，$(M|M)_0 = 0$ から始まる単調増加成分 $(M|M) \in {}^0\mathcal{A}^+ \cap C$ と局所マルチンゲール成分とに一意に分解できる．この消息と極化を通じて，任意の連続な局所マルチンゲール $M, N \in M_{\mathrm{loc}} \cap C$ に対して，一意な有限変動成分 $(M|N) \in {}^0\mathcal{A}$ が取り出せる：$MN - (M|N) \in M_{\mathrm{loc}}$.

2.6.1 局所マルチンゲールの定義と構成

定義 2.6.1 (local martingale). $X \in \mathbb{F} \cap D$ が $(\mathcal{F}_t), P$-**局所マルチンゲール**であるとは，次を満たす停止時の増大列 $\{T_n\} \subset \mathbb{T}(\mathbb{F})$ が存在することをいう：

(1) $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ a.s.
(2) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ X^{T_n} 1_{\{T_n>0\}} \in M(\mathbb{F})$.

要諦 2.6.2.

(1) (2) の $X^{T_n} 1_{\{T_n>0\}}$ が一様可積分であるという仮定は省ける．というのも，(T_n) を $(T_n \wedge n)$ に取り替えれば，全ての $X^{T_n\wedge n} 1_{\{T_n\wedge n>0\}}$ は有界区間 $[0, n]$ 上で定義されていると見れて，これがマルチンゲールならば自動的に一様可積分である．
(2) さらに言えば，$S_n := \{t \in \mathbb{R}_+ \mid |X_t| = n\}$ として，T_n を $(T_n \wedge S_n)$ に取り替えると，各 $X^{T_n\wedge S_n} 1_{\{T_n\wedge S_n>0\}}$ は有界でもある．
(3) $\mathcal{M} \cap D \subset M_{\mathrm{loc}}$ であるが，$\mathcal{M} \not\subset M_{\mathrm{loc}}$ である．$T_n = n$ と取れば良い．

命題 2.6.3 (マルチンゲールに還元する停止時について). X を局所マルチンゲールとする．

(1) $X^T 1_{\{T>0\}} \in M$.
(2) $X_0 1_{\{T>0\}}$ は可積分であり，$Y_t := X_t - X_0$ について $Y^T \in M$.

系 2.6.4 (局所マルチンゲールの構成). $X \in M_{\mathrm{loc}}$ を局所マルチンゲールとする．

(1) T が X を還元するならば，任意の $S \leqslant T$ も還元する．
(2) 2 つの局所マルチンゲールの和は局所マルチンゲールである．
(3) $Z \in L(\mathcal{F}_0)$ ならば，$ZX \in M_{\mathrm{loc}}$．特に，M_{loc} は線型空間である．
(4) 局所マルチンゲールの停止過程は局所マルチンゲールである．

命題 2.6.5 . 非負な局所マルチンゲールは優マルチンゲールである．

2.6.2 マルチンゲールになるための条件

$(\mathscr{D}) \subset M$ であり，$M_{\mathrm{loc}} \cap (\mathscr{D}) = M$.

定義 2.6.6 (Dirichlet class). 過程 $X \in \mathbb{F}$ が

(1) **Dirichlet クラス**であるとは，族 $(X_T)_{T \in \mathbb{T}^{<\infty}}$ が一様可積分であることをいう．これを $X \in (\mathscr{D})$ で表す．
(2) **DL クラス**であるとは，任意の $a > 0$ に対して，族 $(X_T)_{T \in \mathbb{T}^{\leqslant a}}$ が一様可積分であるという．これを $X \in (\mathscr{DL})$ で表す．

定理 2.6.7 . $X \in M_{\mathrm{loc}}$ を局所マルチンゲールとする．

(1) X は一様可積分なマルチンゲールである：$X \in M$.
(2) X は DL 類である．

2.6.3 二次変動と二次共変動の定義

定理 2.6.8 . $M \in M_{\mathrm{loc}} \cap C$ を連続な局所マルチンゲールとする．

(1) 唯一の $\langle M, M\rangle_0 = 0$ から始まる連続な増加過程 $\langle M, M\rangle \in {}^0\mathscr{A}^+ \cap C$ が存在して，$M^2 - \langle M, M\rangle \in M_{\mathrm{loc}} \cap C$ を満たす．
(2) 任意の $t \in \mathbb{R}_+$ と分割の列 $\pi_n \subset [0, t], |\pi_n| \to 0$ について，$\sup_{s \in [0,t]} |T_s^{\pi_n}(M) - \langle M, M\rangle_s| \xrightarrow{P} 0$.

系 2.6.9 . M がマルチンゲールならば，収束 $\lim_{n\to\infty} T^{\pi_n} \to (X|X)$ は $L^1(\Omega)$-収束の意味でも成り立つ．

定理 2.6.10 . $M, N \in M_{\mathrm{loc}} \cap C$ を連続な局所マルチンゲールとする．

(1) 唯一の有限変動過程 $\langle M, N\rangle \in {}^0\mathscr{A}$ が存在して，$MN - \langle M, N\rangle \in M_{\mathrm{loc}}$ を満たす．
(2) 任意の $t \in \mathbb{R}_+$ と分割の列 $\pi_n \subset [0, t], |\pi_n| \to 0$ について，$\sup_{s \in [0,t]} |\widetilde{T}_s^{\pi_n}(M) - \langle M, N\rangle_s| \xrightarrow{P} 0$.

ただし，

$$\widetilde{T}_s^{\pi_n} := \sum_{i \in [n]} (M_{t_{i+1}}^s - M_{t_i}^s)(N_{t_{i+1}}^s - N_{t_i}^s).$$

[証明]. 極化恒等式から，

$$\langle M, N\rangle := \frac{1}{4}\left((M + N|M + N) - (M - N|M - N)\right)$$

と定めれば良い．一意性は，適当な停止と有界なマルチンゲールに対する二次変動の一意性 2.5.11 による． ■

2.6.4 二次共変動の性質

命題 2.6.11 . $T \in \mathbb{T}$ を Markov 時とすると，$(M^T|N^T) = (M|N^T) = (M|N)^T$.

命題 2.6.12 (内積を定める).

(1) $(-|-) : (M_{\mathrm{loc}} \cap C)^2 \to {}^0\mathscr{A}$ は対称な双線型で，$(M|M) \geqslant 0$ を満たす．
(2) さらに，非退化である．すなわち，$(M|M) = 0 \Leftrightarrow \forall_{t \in \mathbb{R}_+}\ M_t = M_0$ a.s..

命題 2.6.13 (強い非退化性). $M \in M_{\mathrm{loc}}$ について，次は同値：

(1) $[a, b]$ 上で $\forall_{t \in [a,b]}\ M_t = M_a$ a.s.
(2) $(M|M)_b(\omega) = (M|M)_a(\omega)$.

命題 2.6.14 (独立性と二次共変動). $M, N \in M_{\mathrm{loc}} \cap C$ が互いに独立ならば，

(1) $(M|N) = 0$.
(2) MN は局所マルチンゲールである．

2.6.5　二次共変動の不等式

Schwartz の不等式も，Holder の不等式も，類似が成り立つ．

命題 2.6.15． $M,N\in\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}\cap C$ と，可測過程 H,K について，任意の $t\in[0,\infty]$ について，

$$\int_0^t |H_s||K_s||d(M|N)|_s\leqslant\left(\int_0^t H_s^2d(M|M)_s\right)^{1/2}\left(\int_0^t K_s^2d(N|N)_s\right)^{1/2}\quad\text{a.s.}$$

系 2.6.16 (Kunita-Watanabe). 任意の $p\geqslant 1$ について，

$$E\left[\int_0^\infty |H_s||K_s||d(M|N)|_s\right]\leqslant\left\|\left(\int_0^\infty H_s^2d(M|M)_s\right)^{1/2}\right\|_p\left\|\left(\int_0^\infty K_s^2d(N|N)_s\right)^{1/2}\right\|_{p*}.$$

2.6.6　積率不等式

Doob の不等式 2.2.1 を，マルチンゲールの p 次のモーメントに関する評価式に書き直せる．

記法 2.6.17. $\{M_n\}\subset\mathcal{L}^2(\Omega)$ を，$M_0=0$ から始まる 2 乗可積分なマルチンゲールとする．このとき，$\forall_{n\in\mathbb{N}}\;E[M_n]=0$ に注意．

定義 2.6.18． $p\geqslant 1$ について，マルチンゲール (M_n) の p **次変分**または p **次変動**とは，次で定まる実数列 $([M]_n)$ をいう：

$$[M]_n:=\sum_{k=1}^n |M_k-M_{k-1}|^p.$$

特に $p=1$ のとき，**変分**あるいは**全変動**という．この記法は特に $p=2$ のときに用いる．

命題 2.6.19． 2 次変分 $[M]_n$ は，次の 2 条件をみたす：

(1) $(M_n^2-[M]_n)$ はマルチンゲールである．
(2) $([M]_n)$ は増加過程である：$0=[M]_0\leqslant[M]_1\leqslant\cdots$.

注 2.6.20. (M_n^2) は劣マルチンゲールだから，Doob 分解 $M_n^2=N_n+A_n$ を持つ．このとき，$(M_n^2-A_n)$ はマルチンゲールであるが，(A_n) も命題の 2 条件を満たす．(A_n) も (M_n) の 2 次変分と呼び，$(\langle M\rangle_n)$ で表す．$(\langle M\rangle_n)$ は可予測でもあるが，一般に $([M]_n)$ はそうではない．明確な区別が必要である．一方で，連続マルチンゲールにおいては，2 つの概念は 1 つに退化する．

定理 2.6.21 (Burkholder-Davis-Gundy). (M_n) を $M_0=0$ を満たす p 乗可積分なマルチンゲールとする．このとき，次が成り立つ：

$$\forall_{p\geqslant 1}\;\exists_{c_p,C_p>0}\quad c_pE\left[[M]_n^{p/2}\right]\leqslant E\left[\max_{1\leqslant k\leqslant n}|M_k|^p\right]\leqslant C_pE\left[[M]_n^{p/2}\right].$$

要諦 2.6.22. 右辺は，Doob の不等式の $E[|M_n|^p]$ を $E[[M]_n^{p/2}]$ で置き換えたものになっている．$p=2$ のとき両者は一致するが，応用上は 2 次変分の方が計算しやすいことが多い．

2.7　L^2-有界なマルチンゲール

2.7.1　L^2-有界なマルチンゲールのなす Hilbert 空間

観察 2.7.1. 有界なマルチンゲールは $\mathbb{H}^2$ に入る．Doob の L^2-不等式より，$M\in\mathbb{H}^2$ ならば $M_\infty^*\in L^2(\Omega)$ である．特に，M は一様可積分で，ある $M_\infty\in L^2(\mathcal{F}_\infty)$ について $M_t=E[M_\infty|\mathcal{F}_t]$ と表せる． □

定理 2.7.2． $\mathbb{H}^2$ はノルム $\|M\|_{\mathbb{H}^2}:=E[M_\infty^2]^{1/2}=\lim_{t\to\infty}E[M_t^2]^{1/2}$ について Hilbert 空間をなし，H^2 はその閉部分空間をなす．

注 2.7.3. $\|M^*_\infty\|_2 = E\left[\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|M_t|\right)^2\right]^{1/2}$ は，Doob の不等式より $\|M^*_\infty\|_2 \leqslant 2\|M\|_{H^2}$ でもあるから，上のノルムに同値である．が，これは Hilbert 空間を定めない．

2.7.2　二次変動

命題 2.7.4 . $M \in M_{\mathrm{loc}} \cap C$ について，次は同値：

(1) $M \in H^2$ でもある．
(2) $M_0 \in L^2(\Omega)$ かつ $(M|M)_\infty \in L^1(\Omega)$.

このとき，$M^2 - (M|M) \in M$ は一様可積分なマルチンゲールで，任意の $S \leqslant T \in \mathbb{T}$ について，

$$E[M_T^2 - M_S^2|\mathcal{F}_S] = E[(M_T - M_S)^2|\mathcal{F}_S] = E[(M|M)_S^T|\mathcal{F}_S].$$

系 2.7.5 . $M \in {}^0H^2$ のとき，

$$\|M\|_{\mathbb{H}^2} = \|(M|M)_\infty^{1/2}\|_2 \equiv E[(M|M)_\infty]^{1/2}.$$

命題 2.7.6 . $M \in M_{\mathrm{loc}} \cap C$ と $t \in \mathbb{R}_+$ について，次は同値：

(1) $(M_s)_{s\in[0,t]}$ は L^2-有界なマルチンゲールである．
(2) $M_0 \in L^2(\Omega)$ かつ $(M|M)_t \in L^1(\Omega)$.

2.7.3　収束定理

命題 2.7.7 . $M \in M_{\mathrm{loc}} \cap C$ について，$1_{(M|M)_\infty<\infty}M$ は概収束する．

2.8　L^p-有界なマルチンゲールと積率不等式

$\mathbb{H}^2$ のノルム $\|M\|_{\mathbb{H}^2} = E[M_\infty^2]^{1/2}$ は，部分空間 ${}^0H^2$ では $\|M\|_{\mathbb{H}^2} = \|(M|M)_\infty^{1/2}\|_2 = E[(M|M)_\infty]^{1/2}$ と特徴付けられる．これは $\|M^*_\infty\|_2$ と同値になる．

2.8.1　BDG-不等式の主張

定理 2.8.1 (Burkholder-Davis-Gundy (72)). 任意の $p \in (0,\infty)$ について，ある定数 c_p, C_p が存在して，任意の $M \in {}^0M_{\mathrm{loc}} \cap C$ に対して，

$$c_pE[(M|M)_\infty^{p/2}] \leqslant E[(M^*_\infty)^p] \leqslant C_pE[(M|M)_\infty^{p/2}].$$

要諦 2.8.2. この定理は，$M^*_\infty \in L^p(\Omega)$ を満たす連続マルチンゲールの Banach 空間 H^p 上のノルム $\|M\|_{H^p}^p = E[(M^*_\infty)^p]$ と同値なノルム $E[(M|M)_\infty^{p/2}]$ を与えている，と見れる．$p \geqslant 1$ について $H^p \subset \mathcal{M}$ で，$p > 1$ のとき H^p の元は L^p-有界な連続マルチンゲールと解せる．H^1 の元は L^1-有界連続マルチンゲールの空間よりも，M よりも真に小さい．

歴史 2.8.3. $p \in (1,\infty)$ の場合について Burkholder (1966) が示す．続いて Burkholder and Gundy (1970) で $0 < p \leqslant 1$ の場合を部分的に解決し，Davis (1970) が $p = 1$ の場合を全てのマルチンゲールについて示した．最後に，Burkholder, Davis, Gundy (1972) が上の形にまとめた．

系 2.8.4 . 任意の停止時 $T \in \mathbb{T}$ に対して，

$$c_pE[(M|M)_T^{p/2}] \leqslant E[(M^*_T)^p] \leqslant C_pE[(M|M)_T^{p/2}].$$

2.8.2 Hilbert 空間値の局所マルチンゲールについて

定義 2.8.5. $(M_t)_{t\in[0,T]}$ を可分 Hilbert 空間 H に値を取る連続な局所マルチンゲールとする．この二次変分過程は，正規直交基底 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ についての成分毎に

$$[M]_t := \sum_{n\in\mathbb{N}}[(M|e_n)]_t, \quad t\in\mathbb{R}_+$$

と定める．ただし，$(M|e_n)$ は H の内積である．

定理 2.8.6. $(M_t)_{t\in[0,T]}$ を可分 Hilbert 空間 H に値を取る連続な局所マルチンゲールとする．このとき，任意の $p>0$ に対して，$c_p>0$ が存在して，

$$E[\|M_t\|_H^p] \leqslant c_p E[(M|M)_T^{p/2}].$$

2.9 一様可積分なマルチンゲール：L^1 空間

$\mathcal{F}$-可測な可積分な確率変数を情報系 $(\mathcal{F}_t)$ で条件づけたものは一様可積分なマルチンゲールを定める．実は $\mathcal{M}$ は全てこのようにして定まり，$\mathcal{D}$ 変形を取れば一意性を得る：$\mathcal{M}^D \simeq_{\mathrm{Set}} L^1(\Omega,\mathcal{F}_\infty)$.

2.9.1 一様可積分なマルチンゲールの構造

定理 2.9.1 (マルチンゲールが一様可積分であることの特徴付け). $X\in\overline{\mathcal{M}}$ について，次は同値：

(1) 一様可積分である：$X\in\mathcal{M}$.
(2) ある $X_\infty\in L^1(\Omega,\mathcal{F}_\infty)$ が存在して，$\lim_{t\to\infty}E[|X_t-X_\infty|]=0$.
(3) ある $X_\infty\in L^1(\Omega,\mathcal{F}_\infty)$ が存在して，$\forall_{t\in\mathbb{R}_+}\ X_t=E[X_\infty|\mathcal{F}_t]$ a.s.

なおこのとき，さらに $X\in\mathcal{M}^D$ でもあるなら，次も成り立つ：

(a) $X_t\to X_\infty$ a.s.
(b) $\forall_{\sigma,\tau\in\mathbb{T}}\ X_{\tau\wedge\sigma}=E[X_\sigma|\mathcal{F}_\tau]$ a.s.

定理 2.9.2. $Y\in L^1(\Omega)$ について，識別不可能な違いを除いて唯一のマルチンゲール $X\in\mathcal{M}^D$ が存在して，$X_t=E[Y|\mathcal{F}_t]$ を満たす．

定理 2.9.3. $\{\tau_n\}\subset\mathbb{T}$ を Markov 時刻の増大列とする．このとき，$\lim_{n\to\infty}X_{\tau_n}=E[X_{\lim_{n\to\infty}\tau_n}|\vee_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_{\tau_n}]$ a.s. 特に，τ が可予測ならば，$X_{\tau-}=E[X_\tau|\mathcal{F}_{\tau-}]$.

2.9.2 二次変動過程

中心化された連続な局所マルチンゲールは，連続な増加過程と局所マルチンゲールとに分解できる：$\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^{0,C}=\mathcal{A}^{+,0,C}+\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$. これを擬似的なノルム (の二乗) として，極化を通じて共分散に当たる量を定義できる．

定理 2.9.4 (Nualart[Nualart, David, and Nualart, Eulalia, 2018]). 中心化された連続な局所マルチンゲール $M\in\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^{0,C}$ について，次の条件を満たすただ一つの中心化された連続な増加過程 $\langle M\rangle\in\mathcal{A}^{+,0,C}$ が存在して，

$$\forall_{t\in\mathbb{R}_+}\ \forall_{\pi_n:=\{0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t\}}\ \sum_{j\in n}(M_{t_{j+1}}-M_{t_j})^2 \xrightarrow[|\pi_n|\to 0]{p} \langle M\rangle_t.$$

ただし，$M_t^2-\langle M\rangle_t\in\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$.

定義 2.9.5 (quadratic covariation). $M,N\in\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^{0,C}$ について，**二次共変分**とは，次の極化恒等式によって定まる過程

$$\langle M,N\rangle_t := \frac{1}{4}(\langle M+N\rangle_t-\langle M-N\rangle_t)$$

をいう．

[証明]. この極限 $\langle X, Y\rangle$ が存在するならば，その線形性より，

$$\langle X|Y\rangle = \langle M^X|M^Y\rangle + \langle M^X|A^Y\rangle + \langle A^X|M^Y\rangle + \langle A^X|A^Y\rangle$$

である．後ろの 3 項が零であることを示す．

(1) A^X, A^Y は $t \in \mathbb{R}_+$ について絶対連続であるから特に $[0,t]$ 上一様連続であり，それと三角不等式より，

$$\begin{aligned}\sum_{j\in n}(A^X_{t_{j+1}} - A^X_{t_j})(A^Y_{t_{j+1}} - A^Y_{t_j}) &\leqslant \sup_{|s-u|\leqslant|\pi_n|,s,u\in[0,t]} |A^X_u - A^X_s| \sum_{j\in n}|A^Y_{t_{j+1}} - A^Y_{t_j}| \\ &\leqslant \sup_{|s-u|\leqslant|\pi_n|,s,u\in[0,t]} |A^X_u - A^X_s| \int^t_0 |v^Y_s|ds.\end{aligned}$$

$v^Y_s \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathscr{P})$ より，右辺は任意の $t \in \mathbb{R}_+$ について有限．よって，$|\pi_n| \to 0$ の極限で，

$$\sum_{j\in n}(A^X_{t_{j+1}} - A^X_{t_j})(A^Y_{t_{j+1}} - A^Y_{t_j}) \xrightarrow{P} 0.$$

よって $\langle A^X|A^Y\rangle$ は存在し，$= 0$.

(2) M^X は $t \in \mathbb{R}_+$ について連続であるから，特に $[0,t]$ 上一様連続であるから，同様にして

$$\begin{aligned}\sum_{j\in n}(M^X_{t_{j+1}} - M^X_{t_j})(A^Y_{t_{j+1}} - A^Y_{t_j}) &\leqslant \sup_{|s-u|\leqslant|\pi_n|,s,u\in[0,t]} |M^X_u - M^X_s| \sum_{j\in n}|A^Y_{t_{j+1}} - A^Y_{t_j}| \\ &\leqslant \sup_{|s-u|\leqslant|\pi_n|,s,u\in[0,t]} |M^X_u - M^X_s| \int^t_0 |v^Y_s|ds.\end{aligned}$$

同様にして，$\langle M^X|A^Y\rangle = \langle A^X|M^Y\rangle = 0$.

以上より， ■

2.10 連続なマルチンゲール

2.10.1 任意停止定理

次の定理はマルチンゲールにも，列マルチンゲールにも成り立つ．

定理 2.10.1 (Optional stopping theorem). $M \in \mathscr{M}^C$ を連続マルチンゲール，$S \leqslant T \in \mathbb{T}$ を有界な停止時とする．このとき，$E[M_T|\mathscr{F}_S] = M_S$．特に，$E[M_T] = E[M_S]$.

系 2.10.2 . $M \in \mathscr{M}$ をマルチンゲール，$T \in \mathbb{T}$ を有界な停止時とする．このとき，M^T は再びマルチンゲールである．

2.10.2 最大不等式

定理 2.10.3 (Doob). $M \in \mathscr{M}^C_{\mathrm{loc}}$ を $T \in \mathbb{R}_+$ において $p \geqslant 1$ 乗可積分とする：$E[|M_T|^p] < \infty$．このとき，

(1) $\forall_{\lambda>0}\; P\left[\sup_{t\in[0,T]} |M_t| > \lambda\right] \leqslant \dfrac{1}{\lambda^p} E[|M_T|^p]$.

(2) $p > 1$ ならば，次も成り立つ：$E\left[\sup_{t\in[0,T]} |M_t|^p\right] \leqslant \left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p E[|M_T|^p]$.

2.10.3　BDG-不等式

Burkholder-David-Gundy 不等式

最大不等式の (2) を精緻化して，二次過程の値を用いて抑えると，背後の Hilbert 空間的な構造が見えてくる．

定理 2.10.4． $M \in \mathcal{M}^C_{\mathrm{loc}}$ を $T \in \mathbb{R}_+$ において $p > 0$ 乗可積分とする：$E[|M_T|^p] < \infty$．このとき，

$$\exists_{c<C\in\mathbb{R}}\; cE[\langle M\rangle_T^{p/2}] \leqslant E\left[\sup_{t\in[0,T]} |M_t|^p\right] \leqslant CE[\langle M\rangle_T^{p/2}].$$

定理 2.10.5． この $M \in \mathcal{M}^C_{\mathrm{loc}}$ が一般の可分 Hilbert 空間 H に値を取るとする．このとき，二次変分過程は H の正規直交基底 $\{e_i\}$ を用いて

$$\langle M\rangle_T = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle\langle M, e_i\rangle_H\rangle_T$$

と表せる．

2.10.4　連続局所マルチンゲールの Brown 運動による表示

定理 2.10.6 (Dambis-Dubins-Schwarz ([Hiroyuki and Taniguchi, 2016]))． $M \in \mathcal{M}^C_{\mathrm{loc}}$ は $\lim_{t\to\infty}\langle M\rangle_t = \infty$ a.s. を満たすとする．このとき，

(1) $\sigma(s) := \inf\{t > 0 \mid \langle M\rangle_t > s\}$ について，$B_s := M_{\sigma(s)}$ は $(\mathcal{F}_{\sigma(s)})$-Brown 運動である．
(2) $M_t = B_{\langle M\rangle_t}$．

2.11　自乗可積分なマルチンゲール

定義 2.11.1．

(1) 随意過程 $X \in (\mathcal{F}_t) \cap D$ が**自乗可積分**であるとは，二次過程 $\mathbb{R}_+ \to L^2(\Omega)$ であって，像が $L^2(\Omega)$-有界であることをいう．
(2) $\overline{\mathcal{M}}^2 := \overline{\mathcal{M}} \cap \mathrm{Map}(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$ とする：$\forall_{t\in\mathbb{R}_+} E[X_t^2] < \infty$．

2.11.1　Hilbert 空間としての構造

$\mathcal{M}^2 \simeq_{\mathrm{Hilb}} L^2(\Omega; \mathcal{F}_\infty)$．

定理 2.11.2．

(1) $\mathcal{M}^2 \subset \mathcal{M}$ である．
(2) $\forall_{X_\infty\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_\infty)}\; X_t := E[X_\infty|\mathcal{F}_t] \in \mathcal{M}^2$．

定義 2.11.3．

(1) $(X|Y) := E[X_\infty Y_\infty]$ とすると，$\mathcal{M}^2$ はこれを内積として Hilbert 空間をなす．
(2) $X, Y \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$ が**強く直交する** $X \perp\!\!\!\perp Y$ とは，$XY \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$ かつ $X_0Y_0 = 0$ を満たすことをいう．
(3) $p \geqslant 1$ について，

$$\mathcal{H}^p := \left\{X \in \mathcal{M} \mid \|X\|_{\mathcal{H}^p} := \|X^*_\infty\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F}_\infty)} < \infty\right\}$$

を Banach 空間とする．

定理 2.11.4． $X, Y \in \mathcal{M}^2$ について，次は同値：

(1) $X \perp\!\!\!\perp Y$．

(2) $X_0Y_0 = 0$ かつ $\forall_{\tau\in\mathbb{T}}\ X_\tau \perp Y_\tau$.

2.11.2　$\mathscr{M}^2$ の直交分解

定義 2.11.5. $\mathscr{K} \subset \mathscr{H}^2$ が**安定部分空間**であるとは，次を満たすことをいう：

(1) $\mathscr{K}$ はノルム閉部分空間である．
(2) $\forall_{X\in\mathscr{K}}\ \forall_{\tau\in\mathbb{T}}\ X^\tau \in \mathscr{K}$.
(3) $\forall_{X\in\mathscr{K}}\ \forall_{A\in\mathscr{F}_0}\ 1_A X \in \mathscr{K}$.

$\mathscr{K}$ を安定部分空間として，$Y \in \mathscr{K}^\perp :\Leftrightarrow \forall_{X\in\mathscr{K}}\ E[X_\infty Y_\infty] = 0$ と定める．

定理 2.11.6. $\mathscr{K}^\perp$ も安定部分空間であり，$\forall_{X\in\mathscr{K}}\ \forall_{Y\in\mathscr{K}^\perp}\ X \perp\!\!\!\perp Y$.

2.11.3　自乗可積分マルチンゲールの直交分解

定理 2.11.7. $\mathscr{K} = \mathscr{H}^{2,c}$ は安定部分空間である．すなわち，任意の $M \in \mathscr{M}^2$ に対して，一意的な分解 $M = M^c + M^d$ で，M^c は連続な軌道を持ち $M^c_0 = 0$ を満たし，M^d は純不連続なマルチンゲールであり，$M^d \perp\!\!\!\perp M^c$ を満たす．

2.12　増大過程

定義 2.12.1. $A \in (\mathscr{F}_t) \cap D$ について，

(1) 増大過程であるとは，$A_0 = 0$ かつ A_t は単調増加であることをいう．その全体を $\mathscr{A}^+$ で表す．
(2) $\mathscr{A}$ で，$\forall_{\omega\in\Omega}\ \forall_{t\in\mathbb{R}_+}\ A|_{[0,t]}(\omega) \in \mathrm{BV}[0,t]$ を表す．

第 3 章

Gauss 過程

Gauss 測度は一般の可分 Hilbert 空間上に定義できる．その空間の上での変分学を Malliavin 解析という．

まず Gauss 確率変数の族の $L^2(\Omega)$ 内での振る舞いを見る．するとこの転置は Hilbert 空間値確率変数で，$\Omega \to H$ の部分空間上に Gauss 測度を押し出しているものと見れる．

3.1 L^2 の Gauss 部分空間

$L^2(\Omega)$ の部分集合として Gauss 系を定義すると，Gauss 部分空間を取る過程が Gauss 過程ということになる．

3.1.1 定義と特徴付け

定義 3.1.1 (Gaussian subset, Gaussian space). 部分集合 $X = \{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset L^2(\Omega)$ が

(1) **Gauss 系**であるとは，任意の有限個の線型結合が正規分布に従うことをいう．
(2) **Gauss 部分空間**であるとは，**中心化された Gauss 確率変数のみ**によって生成された $L^2(\Omega)$-部分空間をいう．

定理 3.1.2 (有限次元周辺分布による特徴付け). 確率変数族 $\{X_\lambda\} \subset \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ について，

(1) Gauss 系である．
(2) 有限次元周辺分布が多変量正規分布に従う．

3.1.2 Gauss 系の構成

定理 3.1.3 (平均と共分散による構成). $m : \Lambda \to \mathbb{R}$ と半正定値関数 $V : \Lambda^2 \to \mathbb{R}$ について，これらを平均と共分散とする Gauss 系 $X = (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が法則同等を除いて一意的に存在する．

要諦 3.1.4. これが，Gauss 系が弱定常であるならば強定常でもある由縁である．

定理 3.1.5 (極限による構成 [Le Gall, 2016](Prop. 1.1)). $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を Gauss 系とする：$X_n \sim N(m_n, \sigma_n^2)$．このとき，

(1) (X_n) が法則収束するならば，その極限は $N(m, \sigma^2)$ $(m := \lim_{n\to\infty} m_n, \sigma^2 := \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2)$ である．
(2) X_n の確率収束と任意の L^p $(1 \leqslant p < \infty)$-収束とは同等である．

,

系 3.1.6 (線型演算による構成). $\mathcal{S} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を Gauss 系とする．

(1) $\mathcal{S}$ が生成する線型部分空間 $\mathcal{L}[\mathcal{S}]$ も Gauss 系である．
(2) $\mathcal{S}$ が生成するノルム閉部分空間 $\overline{\overline{\mathcal{L}}}[\mathcal{S}]$ も Gauss 系である．

3.1.3　Gauss 系の独立性

Gauss 系の中では独立性と共分散が 0 であることと (従って対独立であること) は同値になる．Gauss 系の間でも同様で，さらに中心化された Gauss 系に考察を限れば，これは純粋に Hilbert 空間の性質に翻訳出来る．

定理 3.1.7 (系が独立であることの共分散による特徴付け). $\{X_\lambda\} \subset L^2(\Omega)$ を Gauss 系とする．このとき，次の 2 条件は同値：

(1) X_λ は独立.
(2) 共分散関数が対角集合を除いた集合 $\Lambda^2\backslash\Delta$ 上零である

定理 3.1.8 (部分空間が独立であることの直交性による特徴付け). $H \subset L^2(\Omega)$ を Gauss 部分空間，$\{H_i\} \subset H$ をその部分空間の族とする．このとき，次は同値；

(1) (H_i) は独立.
(2) (H_i) は互いに直交する.

注 3.1.9. H_1, H_2 が共通の Gauss 部分空間 H に属さない場合は成り立たない．というのも，(X_1, X_2) が Gauss ベクトルにならないならば，互いに直交して $E[X_1X_2] = 0$ も独立とは限らない.

3.1.4　Gauss 系の条件付き期待値

中心化された Gauss 系 $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ について，$\mathcal{S}$ の $\mathcal{F}[\mathcal{T}]$ による条件付き期待値は，$L^2_{\mathcal{F}[\mathcal{T}]}(\Omega)$ への射影であるだけでなく，さらに小さい空間 $\overline{\overline{\mathcal{L}}}[\mathcal{T}]$ への正射影となる．すなわち，Gauss 系の Gauss 系による条件付けは再び Gauss 系である．

系 3.1.10 . $H \subset L^2(\Omega)$ を Gauss 部分空間，$K \subset H$ を閉部分空間，$p_K : L^2(\Omega) \to K$ をその直交射影とする．

(1) $\forall_{X\in H}\ E[X|\sigma[K]] = p_K(X)$.
(2) 条件付き確率 $P[X \in A|\sigma[K]](\omega)$ は，$Q(\omega, -) := N(p_K(X)(\omega), \sigma^2), \sigma^2 := E[(X - p_K(X))^2]$ を用いて
$$P[X \in A|\sigma[K]](\omega) = Q(\omega, A)$$
で表せる確率変数である．

要諦 3.1.11.

(1) 一般に $\forall_{X\in L^2(\Omega)}\ E[X|\sigma[K]] = p_{L^2_{\sigma[K]}(\Omega)}(X)$ が成り立つが，Gauss ベクトルの場合は「$\sigma[K]$-可測確率変数の空間への直交射影」に限らず，「K への直交射影」という極めて小さい部分空間で記述出来ている．これは線型回帰問題に対する強い道具である．データ (X_1, X_2) から X_3 を予測するとき，ベストな予測は線型な予測子 $\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2$ に絞ることが可能で，さらに $X_3 - (\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2)$ が $\langle X_1, X_2\rangle$ に直交するように選べば良い．
(2) 情報 $\sigma[K]$ を知った場合の確率分布は，$X \sim N(p_K(X), \sigma^2)$ に更新される，と読める．

3.1.5　再生核 Hilbert 空間としての見方

定義 3.1.12 (RKHS: reproductive kernel Hilbert space). X を集合，$H \subset \mathrm{Map}(X;\mathbb{R})$ を Hilbert 空間とする．評価関数 $\mathrm{ev}_x : H \to \mathbb{R}$ が任意の $x \in X$ について有界線型汎関数である $\forall_{x\in X}\ \mathrm{ev}_x \in B(H)$ とき，H を**再生核 Hilbert 空間**という．すなわち，Riesz の表現定理よりある $K_x \in H$ が存在して $\mathrm{ev}_x(-) = (-|K_x)$ と表せる．この対応 $X \to H; x \mapsto K_x$ が導く双線型形式 $K : X \times X \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto K(x, y) := (K_x|K_y)$ を**再生核**という．再生核は対称で半正定値である．

定理 3.1.13 . 関数 $K : X \times X \to \mathbb{R}$ は対称かつ半正定値であるとする．このとき，ただ一つの Hilbert 空間 $H(K)$ が $\mathrm{Map}(X;\mathbb{R})$ 内に存在して，K を再生核として持つ．

定理 3.1.14 . (E, μ) を測度空間，μ-体積確定な集合の全体を $\mathcal{M}^1$ とする．

(1) $v_{\alpha\beta} := \mu(\alpha \cap \beta)$ $(\alpha, \beta \in \mathscr{M}^1)$ とすると，対称な半正定値関数である．
(2) これが定める Hilbert 空間 $H(v)$ は $L^2(E, \mu)$ と同型である．

3.1.6　Gauss 系の平均と分散

可分な空間上には，平均と共分散を指定すれば Gauss 系が存在する．

定理 3.1.15 .

(1) $\mathcal{S} = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$ を Gauss 系とし，m, v を平均と共分散とする．v が定める再生核 Hilbert 空間 $H(v)$ は可分である．
(2) 任意の写像 $m : A \to \mathbb{R}$ と対称半正定値関数 v について，再生核 Hilbert 空間 $H(v)$ は可分であるとする．このとき，ある確率空間 (Ω, P) とその上の Gauss 系 $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ が法則同党を除いて一意的に存在して，m, v はそれぞれ平均と共分散である．

3.2　Gauss-martingale 過程

命題 3.2.1 . $M \in C \cap \mathscr{M}$ を連続なマルチンゲールで Gauss 過程でもあるとする．このとき，$(M|M)$ は決定論的である．

3.3　多変量 Gauss 分布

一般の可分 Hilbert 空間上に定義する前に，$E = \mathbb{R}^d$ の場合を考える．

3.3.1　定義

定義 3.3.1 . $X : \Omega \to E$ を Gauss 確率変数とする．

(1) $\exists_{m_X \in E}\ \forall_{u \in E}\ E[(u|X)] = (u|m_X)$．この m_X を平均という．
(2) ある非負二次形式 $q_X : E \to \mathbb{R}$ が存在して，$\forall_{u \in E}\ \mathrm{Var}[(u|X)] = q_X(u)$ を満たす．この q_X を分散という．
(3) E の正規直交基底 $(e_1, \cdots, e_d)$ について，u の成分を $u = \sum_{j \in [d]} u_j e_j$ とすると，次の表示をもつ：
$$q_X(u) = \sum_{j,k \in [d]} u_j u_k \mathrm{Cov}[X_j, X_k].$$
(4) 平均 q_X は，対称で半正定値な自己同型 $\gamma_X \in B(E)$ を，内積を通じて
$$q_X(u) = (u|\gamma_X(u))$$
によって定める．γ_X の $(e_1, \cdots, e_d)$ に関する行列表示は $(\mathrm{Cov}[X_j, X_k])_{j,k \in [d]}$ が与える．

3.3.2　独立性

命題 3.3.2 . Gauss ベクトル $X = \sum_{j \in [d]} X_j e_j$ について，次の 3 条件は同値：

(1) $X_1, \cdots, X_d$ は独立．
(2) $(\mathrm{Cov}[X_j, X_k])_{j,k \in [d]}$ は対角行列である．
(3) q_X は基底 $(e_1, \cdots, e_d)$ について対角表示される．

系 3.3.3 . X を中心化された Gauss ベクトル，γ_X を対角化する基底を $\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_d\} \subset E$，対応する固有値を $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_d$ とする．このとき，

(1) $Y_j \sim N(0,\lambda_j)$ として，
$$X = \sum_{j\in[r]} Y_j\epsilon_j$$
と表せる．

(2) X の押し出す分布の台は $\operatorname{supp}(P^X) = \langle \epsilon_1,\cdots,\epsilon_r\rangle$.

(3) P_X は E 上の Lebesgue 測度に関して絶対連続であることと，$r=d$ は同値.

3.4　可分 Hilbert 空間上の Gauss 測度

これから (可分な) 無限次元 Hilbert 空間上の Gauss 測度に関する積分論を展開することになるから，Gauss 測度も無限次元に通用する言葉で定義する．$\mathbb{R}^n$ 上の正規分布の一般化であると同時に，確率過程の平均と共分散との一般化でもある．[Prato, 2014] による．実は，これで一般の Banach 空間上の Gauss 測度を定義したこととなる??.

記法 3.4.1. H を可分 Hilbert 空間，$(H,\mathcal{B}(H))$ を Borel 可測空間，$P(H)$ をその上の Borel 確率測度全体の集合とする．

3.4.1　無限次元有限測度の平均と分散

今まで確率空間 $(\Omega,\mathcal{F})$ に言及して平均と分散を定義することはなかったが，可分 Hilbert 空間 H を確率空間として，その分布の扱い方を定める．H 上の有限次元分布は有界線型汎関数を通じて定まるが，それはすべて内積で表現できることから，内積を用いた定義になるが，これは成分 X_i の拡張に過ぎない．

定義 3.4.2 (mean, covariance operator). $\mu\in P(H)$ について，

(1) $E[|x|]<\infty$ のとき，任意の $x\in H$ に対して，その内積の平均 $E[\langle x|Y\rangle]$ $(Y\sim\mu)$ を対応させる線型形式 $F:H\to\mathbb{R};x\mapsto \int_H\langle x|y\rangle\mu(dy)$ は有界である (Cauchy-Schwarz による).
この Riesz 表現 $\exists!_{m\in H}\;F(x)=\langle x|m\rangle$ を定める元 $m\in H$ を μ の**平均**という．

(2) $E[|x|]\leqslant E[|x|^2]<\infty$ のとき，双線型形式 $G:H\times H\to\mathbb{R};(x,y)\mapsto\int_H\langle x|z-m\rangle\langle y|z-m\rangle\mu(dz)$ は有界かつ対称（自己共役）である．
この Riesz 表現を定める自己有界作用素 $\exists!_{Q\in B(H)}\;\langle Qx|y\rangle=\langle x|Qy\rangle=G(x,y)$ を**共分散**という．

要諦 3.4.3.

(1) 平均は，$E[\langle x|Y\rangle]=\langle x|m\rangle$ という可換性を満たす元 m,

(2) 共分散には 2 つの見方があり，対称な (半) 双線型形式 $G(x,y)=E[\langle x|Z-m\rangle\langle y|Z-m\rangle]=E[(\langle x|Z\rangle-E[\langle x|Z\rangle])(\langle y|Z\rangle-E[\langle y|Z\rangle])]$ とも ($\langle x|Z\rangle,\langle y|Z\rangle$ を改めて $X,Y:H\to\mathbb{R}$ と定めれば見慣れた共分散の定義 $\mathrm{Cov}[X,Y]$ となる)，それを表現する有界線型作用素 $Q\in B(H)$ とも理解できる．

(3) 内積はベクトル $(X_1,\cdots,X_n)$ からの成分の抽出の一般化と見ると，$\langle x|Z\rangle$ とは成分 Z_x と思える．つまり，$x,y\in H$ は添字集合と見る．

補題 3.4.4 (共分散作用素の性質). $E[|x|^2]<\infty$ とする．

(1) Q は正作用素であり，かつ自己共役である．

(2) H の任意の正規直交基底 (e_k) について，$\mathrm{Tr}Q:=\sum_{k\in\mathbb{N}}\langle Qe_k,e_k\rangle=\int_H|x-m|^2\mu(dx)<\infty$.

(3) Q はコンパクト作用素である．(2) と併せると特に，Q は跡類作用素である：$Q\in B^1(H)$.

(4) 分散共分散公式：$E[|x|^2]=\mathrm{Tr}Q+|m|^2$.

[証明].

(1) Q を定める双線型形式 G は対称であったから，Q も対称である：$G(x,y)=G(y,x)\Rightarrow\langle Qx|y\rangle=\langle Q^*x|y\rangle$. また，

$\forall_{x,x\geqslant 0}\ \langle Qx|x\rangle = G(x,x) \geqslant 0$ より正である．

(2) 単調収束定理と Parseval 恒等式より，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}Q &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle Qe_k|e_k\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_H |\langle x-m|e_k\rangle|^2 \mu(dx) \\ &= \int_H \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle x-m|e_k\rangle|^2 \mu(dx) = \int_H |x-m|^2 \mu(dx) < \infty.\end{aligned}$$

(3) 正作用素 T が $\exists_{p>0}\ \mathrm{Tr}(|T|^p) < \infty$ を満たすならば，コンパクト作用素である．

■

記法 3.4.5. 正作用素の空間を $B^+(H)$ とし，有限な跡を持つ作用素の空間を $B_1^+(H) \subset B^+(H)$ で表す．

3.4.2　Gauss 測度の定義と性質

H 上の Gauss 分布を特性関数の言葉を用いて定義する．このように定義することで，Wiener 測度などの無限次元空間上の Gauss 測度を扱える．そこでの積分が確率解析の主な戦場である．

定義 3.4.6 (Gaussian measure). $\mu \in P(H)$ が **Gauss 測度** $N(m,Q)$ であるとは，ある $m \in H, Q \in L_1^+(H)$ を用いて，

$$\widehat{\mu}(h) = e^{i(m|h)} e^{-\frac{1}{2}(Qh|h)}$$

と表せるものをいう．Q が単射 $\mathrm{Ker}\ Q = 0$ であるとき，μ は非退化であるという．

なお，自己共役作用素 $Q = Q^*$ が単射であることは，$\mathrm{Im}\ Q$ がノルム閉ならば $Q = Q^*$ が可逆であることに同値であるが，実は $\mathrm{Im}\ Q$ がノルム閉であることは必ずしも成り立たない．$\mu = N_{m,Q}$ と表す．

要諦 3.4.7. これは一般の Banach 空間とそのペアリングについても成り立つ．

定理 3.4.8 . $\mathrm{supp}\ \mu$ は，平均ベクトル $m \in H$ を含むある affine 部分空間になる．

定理 3.4.9 (Fernique). $\nu \sim N(m,Q)$ のとき，ある定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$\int_B e^{\alpha\|x\|^2} \mu(dx) < \infty.$$

注 3.4.10. 大偏差原理によることで，最善の $\alpha \in \mathbb{R}$ を特徴づけることができる．

3.4.3　ホワイトノイズ

Banach 空間上の Gauss 測度には特徴があり，ペアリングによって位相が移り合うように，測度も移り合う．双対空間上の Gauss 測度をノイズと呼ぶ．なお，ペアリングによって微分演算を移すのが超関数微分，積分演算を移すのが Pettis 積分であった．
こうして，正規分布に従う独立同分布列 (族) の存在定理が，ホワイトノイズ関数という一般的な形で得られる．これが H を可分にしていた理由である．するとこのホワイトノイズを標準的な対象として，任意の測度空間 $(A, \mathcal{A}, \mu)$ に Gauss 測度を $(L^2(A))^*$ の元という形で構成することも出来る．

または次のように定義することも出来る [Revuz and Yor, 1999]

命題 3.4.11 (一般化された独立同分布列の存在定理：ホワイトノイズ). H を可分実 Hilbert 空間とする．ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とその上の確率変数の族 $X = (X_h)_{h\in H}$ が存在して，次の 2 条件を満たす：

(1) 写像 $X : H \to \mathrm{Meas}(\Omega, \mathbb{R}); h \mapsto X_h$ は線型である．

(2) 任意の $h \in H$ について，確率変数 X_h は中心化された Gauss 変数で，線型写像 $X : H \to L^2(\Omega)$ は等長である：$E[X_h^2] = \|h\|_H^2$.

(3) 埋め込み $\{X_h\}_{h\in H} \hookrightarrow L^2(\Omega)$ は $L^2(\Omega)$ の Gauss 部分空間である．

注 3.4.12. この同一視により，独立性 $X_h \perp\!\!\!\perp X_{h'}$ は添字空間 H における直交性として理解できる．

定義 3.4.13 (Gaussian measure / white noise). $(A,\mathcal{A},\mu)$ を可分な σ-有限測度空間とする．$H := L^2(A,\mathcal{A},\mu)$ として，中心化された Gauss 変数の族 $X = (X_h)_{h\in H}$ を取る．この写像 $X : L^2(A,\mu) \to \mathcal{L}(\Omega)$ を $(A,\mathcal{A})$ 上の**強度 μ の Gauss 測度／白色雑音**という．測度確定な可測集合 $F \in \mathcal{A}, \mu(F) < \infty$ の Gauss 測度 $X(F)$ は $X(1_F)$ とも表す．

3.5 可分 Hilbert 空間値の Gauss 確率変数

3.5.1 Hilbert 空間上の Gauss 変数

特に Gauss 測度の押し出しによって構成される Gauss 変数を考える．一般の有界線型汎関数，特に回転変換は Gauss 測度を保つ．

命題 3.5.1 (有界線型汎関数は Gauss 測度を保つ). (H,μ) を可分な正規 Hilbert 空間とする：$\mu \sim N(a,Q)$．このとき，任意の可分 Hilbert 空間 K への affine 変換 $T : H \to K; x \mapsto Ax + b$ $(A \in B(H,K), b \in K)$ とすると，$T_*\mu \sim N_{Aa+b,AQA^*}$．

[証明]. 特性関数を計算すると，任意の $k \in K$ について，

$$\begin{aligned}
\widehat{T_*\mu}(k) &= \int_K e^{i(k|y)}(T_*\mu)(dy) \\
&= \int_H e^{i(k|T(x))}\mu(dx) \\
&= \int_H e^{i(k|Ax+b)}\mu(dx) \\
&= e^{i(k|b)}\int_H e^{i(A^*k|x)}\mu(dx) = e^{i(k|Aa+b)}e^{-\frac{1}{2}(AQA^*k,k)}.
\end{aligned}$$

■

系 3.5.2 . (H,μ) を可分な正規 Hilbert 空間とする：$\mu \sim N(0,Q)$．任意の点 $z_1,\cdots,z_n \in H$ について，$A : H \to \mathbb{R}^n$ を $Ax := ((x|z_1),\cdots,(x|z_n))$ $(x \in H)$ と定めると，$Q_A := (Qz_i,z_j)_{i,j\in[n]}$ について $A \sim N(0,Q_A)$．

系 3.5.3 (Gauss 測度の回転不変性). 線型写像 $R : H \times H \to H \times H$ を

$$R(x,y) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と定めると，$(H \times H, \mu \times \mu)$ $(\mu \sim N(0,Q))$ 上の 2 つの測度 $\mu \times \mu$ と $R_*\mu \times \mu$ とは等しい：

$$\forall_{F\in\mathcal{L}_b(H\times H;H\times H)} \int_{H\times H} F(x,y)\mu(dx)\mu(dy) = \int_{H\times H} F(R(x,y))\mu(dx)\mu(dy).$$

3.5.2 Gauss 過程の特徴付け

$C(T,\mathbb{R})$ 上の Gauss 変数を特に Gauss 過程ともいう．

定義 3.5.4 (Gaussian process, centered). $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の実確率過程 $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ について，

(1) **Gauss 過程**であるとは，任意の有限部分集合 $\{t_1,\cdots,t_n\} \subset \mathbb{R}_+$ について，確率ベクトル $(X_{t_1},\cdots,X_{t_n}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ は n 次元正規分布に従うことをいう．

(2) Gauss 過程 B の**共分散**とは，関数 $\Gamma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}; (s,t) \mapsto \mathrm{Cov}[X_s,X_t] = E[(X_s - E[X_s])(X_t - E[X_t])]$ をいう．

(3) **中心化されている**とは，$\forall_{t\in\mathbb{R}_+}\ E[X_t] = 0$ を満たすことをいう．

定義 3.5.5 (semi-definite positive function). 関数 $\Gamma : T \times T \to \mathbb{R}$ が**半正定値**であるとは，T の任意の有限部分集合 $\{t_1,\cdots,t_d\} \subset T$ $(d \in \mathbb{N})$ に対して，行列 $(\Gamma(t_i,t_j))_{i,j\in[d]}$ は半正定値であることをいう．

命題 3.5.6 (Gauss 過程の共分散の特徴付け). T を任意の集合とする．関数 $\Gamma : T \times T \to \mathbb{R}$ と任意の関数 $m : T \to \mathbb{R}$ について，次の 2 条件は同値．

(1) ある平均 m の Gauss 過程が存在して，その共分散である．

(2) 対称な半正定値関数である．

[証明]. Kolmogorov の拡張定理??による．ここでは $a = 0$ として証明する．

(1)⇒(2)　T の対称性は積の可換性より明らか．任意の有限部分集合 $\{t_i\}_{i\in[n]} \subset T$ と任意のベクトル $a = (a_i)_{i\in[n]} \in \mathbb{C}^n$ を取る．これについて，2 次形式 $a^*(\Sigma(i,j))a$ が非負であることを示せば良い．

$$\begin{aligned}\sum_{i,j\in[n]} &= \Gamma(t_i,t_j)a_i\overline{a_j} \\ &= E\left[\sum_{i\in[n]} a_i(X_{t_i} - E[X_{t_i}]) \sum_{j\in[n]} \overline{a_j}(X_{t_j} - E[X_{t_j}])\right] \\ &= E\left[\left|\sum_{i\in[n]} a_i(X_{t_i} - E[X_{t_i}])\right|^2\right] \geqslant 0.\end{aligned}$$

(2)⇒(1)　確率分布族 $(P_{t_1,\cdots,t_n})_{n\in\mathbb{N}_{\geqslant 1},\{t_i\}\subset T}$ を，$\mathbb{R}^n$ 上の平均 0，分散共分散行列を $\Sigma_{t_1,\cdots,t_n} := (\Gamma(t_i,t_j))_{i,j\in[n]}$ とする正規分布とする．Γ は対称は半正定値関数としたので，$\Sigma_{t_1,\cdots,t_n}$ も対称な半正定値行列であり，これに対応する正規分布はたしかに存在する．また定義より，一貫性条件を満たす．よって，$(P_{t_1,\cdots,t_n})_{n\in\mathbb{N}_{\geqslant 1},\{t_i\}\subset T}$ を有限次元周辺分布とする確率過程 $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ が存在するが，これは平均 0 で分散 Γ の Gauss 過程である．

■

補題 3.5.7 (共分散公式). X, Y を Gauss 確率変数とする．$X_t := tX + Y$ $(t \in \mathbb{R}_+)$ によって定まる確率過程 $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は Gauss 過程であって，平均 $m_X(t) = tE[X] + E[Y]$ と分散

$$\Gamma_X(s,t) = st\mathrm{Var}[X] + (s+t)\mathrm{Cov}[X,Y] + \mathrm{Var}[Y]$$

を持つ．

[証明]. 平均は期待値の線形性より明らか．分散については, 次のように計算が進む．ただし, 見やすくするため $\mu_X := E[X], \mu_Y := E[Y] \in \mathbb{R}$ とする．

$$\begin{aligned}\Gamma(s,t) &= E[(X_s - E[X_s])(X_t - E[X_t])] \\ &= E[X_sX_t] - (s\mu_X + \mu_Y)E[X_t] - (t\mu_X + \mu_Y)E[X_s] + (s\mu_X + \mu_Y)(t\mu_X + \mu_Y) \\ &= stE[X^2] + (s+t)E[XY] + E[Y^2] + (s\mu_X + \mu_Y)(t\mu_X + \mu_Y) = st\mathrm{Var}[X] + (s+t)\mathrm{Cov}[X,Y] + \mathrm{Var}[Y].\end{aligned}$$

■

3.5.3　Gauss 変数の独立性

ある Gauss 確率変数の成分 (一般化して，有界線型汎関数との合成) の間の独立性は，直交性で捉えられる．

命題 3.5.8 (一般の確率変数の独立性の特徴付け). $X_1, \cdots, X_n : \Omega \to H$ を確率変数，$X := (X_1, \cdots, X_n)$ を積写像とする．

(1) $X_1, \cdots, X_n$ は独立である．

(2) 特性関数が分解する：$\forall_{h=(h_1,\cdots,h_n)\in H^n}\ \widehat{X}(h) = \prod_{i=1}^n \widehat{X_i}(h_j)$.

(3) 任意の期待値が分解する：$\forall_{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\in\mathcal{L}_b(\Omega;\mathbb{R})}\ E[\varphi_1(X_1)\cdots\varphi_n(X_n)] = E[\varphi_1(X_1)]\cdots E[\varphi_n(X_n)]$.

記法 3.5.9 (正規 Hilbert 空間上の線型な実確率変数). H 上の実確率変数のうち，特に有界線型汎関数によって定まるもの：$F_v(x) = (x,v)$ $(v \in H)$ を考える．これは Gauss 確率変数である：$F_v \sim N_{\langle Qv,v\rangle}$.

命題 3.5.10 (Gauss 変数の独立性の特徴付け). $v_1,\cdots,v_n\in H$ とする．

(1) 線型確率変数 $F_{v_1},\cdots,F_{v_n}$ が独立である．
(2) $(Q_{v_1,\cdots,v_n})$ は対角行列である．

(2) は，各 F_{v_i},F_{v_j} $(i\ne j)$ が $L^2(H)$ 上で直交することに同値．

3.5.4　Gauss 空間

> X が d 次元 Gauss 変数であるとは，任意の線型汎関数 $\alpha:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ について $\alpha(X)$ が Gauss 確率変数であることと同値．この他にも，Gauss 変数の独立性は Gauss 空間で幾何学的に捉えられる．

記法 3.5.11. $X\sim N(0,0)$ として，定数関数は Gauss 確率変数とする．

命題 3.5.12 (Gauss 確率変数全体の空間は閉部分空間をなす). (X_n) を $X\in\mathrm{Meas}(\Omega,\mathbb{R})$ に確率収束する Gauss 確率変数の列とする．このとき，X も Gauss で，族 $\{|X_n|^p\}$ は一様可積分で，$X_n\to X$ は任意の $p\geqslant 1$ について L^p-収束もする．また，X の平均と共分散はそれぞれの各点収束極限である．

定義 3.5.13 (Gaussian subspace). Hilbert 空間 $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ の閉部分空間であって，中心化された Gauss 確率変数のみからなるものを **Gauss 空間**という．

命題 3.5.14 (独立性の特徴付け). $(G_i)_{i\in I}$ をある Gauss 空間の閉部分空間の族とする．次の 2 条件は同値：

(1) σ-代数 $\sigma(G_i)$ の族は独立である．
(2) 各 G_i は組ごとに直交する：$\forall_{i,j\in I}\;G_i\perp G_j$.

3.5.5　ホワイトノイズ関数

> Q がコンパクト作用素であること，正作用素であること，すべてが交錯している．white noise とは中心化された有限な分散を持つ独立確率変数の組として得られる確率ベクトルをいう．

記法 3.5.15. $\mu=N_Q$ を中心化された非退化な Gauss 分布とする．二乗根作用素 $Q^{1/2}$ の像 $\mathrm{Im}\;Q^{1/2}$ を Cameron-Martin 部分空間という．これは H の真の部分空間であるが, 実は H 上稠密である．この部分空間上に定まる線型作用素 $W_-(-):\mathrm{Im}\;Q^{1/2}\times H\to\mathbb{R}$ を

$$W_f(x):=\left\langle Q^{-1/2}f,x\right\rangle\quad(f\in Q^{1/2}(H),x\in H)$$

とおく．

なお，Q が単射 (=像の上で可逆) であることより $Q^{1/2}:H\to\mathrm{Im}\;Q^{1/2}$ も単射で，よって $\mathrm{Im}\;Q^{1/2}$ 上で可逆だから，$Q^{-1/2}:\mathrm{Im}\;Q^{1/2}\to H$ はひとまず定まっている．次に W_- は有界線型であるから，一意な延長 $\overline{W}:H\hookrightarrow L^2(H,\mu)$ が存在する．この $L^2(H,\mu)$ の部分空間は有界線型汎関数のみからなり，特に Gauss 空間である．すると，独立性の特徴付けより，$W_{f_1},\cdots,W_{f_n}$ が独立であることと，$f_1,\cdots,f_n$ が直交であることは同値．

定義 3.5.16 .

$$Q^{1/2}x:=\sum_{k=1}^\infty\sqrt{\lambda_k}(x|e_k)e_k\quad(x\in H)$$

を二乗根作用素という．この像を **Gauss 測度 $N(0,Q)$ に関する Cameron-Martin 部分空間**という．

補題 3.5.17 .

(1) $Q\in B^1(H)$ は可逆でない．特に，Q^{-1} は非有界作用素である．
(2) $Q(H)\subsetneq H$ である．
(3) $Q(H)$ は H 上稠密である．

(4) $Q^{1/2}(H)$ も H 上稠密である.

(5) $W : Q^{1/2}(H) \to L^2(H,\mu)$ は H 上に一意に延長し，Hilbert 空間の埋め込みを定める.

(6) $\mathrm{Im}\, W = \overline{H^*}$.

定義 3.5.18 (white noise). Hilbert 空間の埋め込み $W : H \hookrightarrow L^2(H,\mu); f \mapsto \langle Q^{-1/2}x, f\rangle = \sum_{h=1}^\infty \lambda_h^{-1/2}\langle x, e_h\rangle\langle f, e_h\rangle$ を**ホワイトノイズ**という.

命題 3.5.19 (white noise は Gauss 系である).

(1) $z \in H$ に対して，値 W_z は $N(0, |z|^2)$ に従う実 Gauss 変数である.

(2) $z_1, \cdots, z_n \in H$ $(n \in \mathbb{N})$ に対して，$(W_{z_1}, \cdots, W_{z_n})$ は $N_n(0, (\langle z_h, z_k\rangle)_{h,k\in[n]})$ に従う Gauss 変数である.

(3) $W_{z_1}, \cdots, W_{z_n}$ が独立であることと $z_1, \cdots, z_n$ が直交することは同値.

命題 3.5.20 (Cameron-Martin 部分空間は零集合). $\mu(Q^{1/2}(H)) = 0$.

この記法を使うと，D を勾配として，$M\varphi := Q^{1/2}D\varphi$ が Malliavin 微分となる．M は可閉作用素になり，その閉包は Malliavin-Sobolev 空間 $D^{1,2}(H,\mu)$ 上の作用素となる．随伴 M^* は Skorohod 積分または Gauss 発散作用素という.

3.6 離散時 Gauss 過程

[19] が予測の理論に基づいて確立した世界観を，離散の場合で見る.

記法 3.6.1. 中心化された Gauss 系 $X : \mathbb{N}^+ \to L^2_0(\Omega)$ を考える．Schmidt の直交化より，正規直交系 $\{\xi_n\} \subset L^2_0(\Omega)$ が存在して，$X_n = \sum_{j\leqslant n} a_{n,j}\xi_j$ と表せる．$\{\xi_n\}$ は再び中心化された標準 Gauss 系で，独立でもある.

命題 3.6.2 . $\forall_{k<n\in\mathbb{N}^+}\ E[X_n|X_1, \cdots, X_k] = \sum_{j\in[k]} a_{n,j}\xi_j$.

定義 3.6.3 . $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ を Gauss 過程とする.

(1) 組 $(a_{n,j}, \xi_n)$ が，$\sum_{j\leqslant n} a_{n,j}\xi_j \overset{d}{=} X_n$ を満たすとき，X の**表現**という.

(2) $X_n = \sum_{j\leqslant n} a_{n,j}\xi_j$ と命題の条件を満足するとき，**標準表現**という．このとき，(ξ_n) を**新生変数列**，$(a_{n,j})$ を**核**という.

第 4 章

半マルチンゲール過程

確率積分によって表現できる過程として，局所マルチンゲールと有界変動過程という 2 つの過程を手に入れた．これらの和として表せる過程は，数学的に閉じている重要な対象と考えられる．

Levy 過程は半マルチンゲールである．martingale 性の要諦は局所 martingale が十分に表現していて，これを二次過程に限定しては見失うものがある．そして，X を半マルチンゲールとして，真に確率積分 $H \cdot X = \int HdX$ が定義されるのである [Liptser, Robert S., and Shiryaev, A. N., 2001].

半マルチンゲール過程は，離散過程，点過程，Markov 過程と拡散過程を含む実用上も十分な広さを持つクラスである上に，この範囲の過程について確率積分の方法を用いることができるという大きな美点がある [Jacod and Shiryaev, 2003].

4.1 連続な場合の定義と性質

定義 4.1.1 . $X \in C$ が**連続な** $(\mathcal{F}_t, P)$-**セミマルチンゲール**であるとは，ある $M \in M_{\mathrm{loc}} \cap C$ と $A \in C \cap \mathbb{F} \cap \mathcal{A}$ を用いて $X = M + A$ と表せることをいう．

命題 4.1.2 . X を連続なセミマルチンゲールとする．

(1) X は有限な二次変動を持つ．
(2) $(X|X) = (M|M)$.

特に，分解 $X = M + A$ は一意である．

定義 4.1.3 . X, Y を連続な半マルチンゲールとする．

$$(X|Y) := (M|N) = \frac{1}{4}((X+Y|X+Y) - (X-Y|X-Y))$$

と定める．

4.2 一般の場合の定義

二乗可積分マルチンゲールと，増大過程の差で表せる過程との，和で表せる過程を半マルチンゲールという．半マルチンゲールが C-過程でもあるとき，前述の定義と合致する．

定義 4.2.1 (semimartingale). 確率基底 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ において，$X \in (\mathcal{F}_t) \cap D$ が次の表示を持つとき，$(\mathcal{F}_t)$-**半マルチンゲール**という：

$$\exists_{X_0 \in L(\Omega, \mathcal{F}_0)} \exists_{M_t \in \mathcal{M}^{2,0}_{\mathrm{loc}}} \exists_{V \in \mathcal{A}^0} \quad X_t = X_0 + M_t + V_t.$$

なお，M は一意的には定まらないが，その連続部分 M^c は一意に定まり，これを**半マルチンゲール X の連続マルチンゲール部分**という．

要諦 4.2.2. M_t, A_t を $C \cap \mathbb{F}$ で取ればこれは一意に定まる．

例 4.2.3. 拡散過程 (Markov C-過程)，伊藤過程，種々のジャンプ過程（特に計数過程）を含む．こうして C-過程の範囲を脱出す

るので，可測性の問題がより複雑な形で出現する．また，Gauss 過程，非整数 Brown 運動はセミマルチンゲールではなく，このような確率過程を Brown 運動などのマルチンゲールから考察するにはラフパスの理論が必要になる． □

4.3　汎関数解析

厚地 [?] が近い研究をしている．

種々の多様体とその上の特徴的な関数族を訪ね歩きたいのだが，このように調べたい関数にその土地固有の確率過程を放り込んで展開すれば，何かしら見えてくると思われる．

4.4　確率過程の統計推測への応用

歴史 4.4.1 (filtering problem)**.** 確率過程としてモデル化できる現象を，雑音が加わって汚染された観測データをもとにして，各時点毎に逐次推定する問題を**フィルター問題**という．40s に Kolmogorov と Wiener によって始められ，60s の Kalman と Bucy により算譜化されたために工学にも応用される．

例 4.4.2. 回帰モデル $X_i = f(X_{i-1},\cdots,X_{i-p}) + \epsilon_i$ において，サンプリングが均等でないときなど，ϵ_i は何か連続的な確率過程を積分して定まる，と考えると数理モデルとして非常に自然である．連続関数 f について，

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f(Y_s)ds + W_t$$

とし，$W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \sim \mathbb{N}(0.t_i - t_{i-1})$ を標準 Weiner 過程とする．

このようなモデルのうち，特に株価の対数を Y_t とおいたときに使われるパラメトリックモデルに，**Vasicek 過程**

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t \alpha_1(Y_s - \alpha_2)ds + \beta W_t$$

などがあり，離散的観測 $\{Yt_0,\cdots,Y_{t_n}\}$ に基づいて未知パラメータ α_1,α_2,β の推定を考える．このときにマルチンゲール理論が使える．

その理由は，martingale というクラスの形式的定義が，自然に統計モデルの「ノイズの直交性」の拡張となっていると考えられるためである．これは独立性の仮定による代数規則 $E[\epsilon_i\epsilon_j] = 0$ の抽出となっているのである．

大きな応用分野として生存解析における censored data[†1] の解析がある．このとき，N_t を死亡数，Y_t を censor されずに残っている観測対象数，癌の再発時刻の分布関数を F，密度関数を f とすると，

$$N_t - \int_0^t \alpha(s)Y_s ds \qquad \alpha(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$$

はマルチンゲールになる．α はハザード関数といい，患者が時刻 t で生存しているという条件の下，その時間に死亡する条件付き確率となる．このマルチンゲールの期待値は常に 0 だから，N_t の不偏推定量が見つかったことになる．なお，

$$\int_0^t \frac{1}{Y_s}(dM_s - \alpha(s)Y_s ds)$$

もマルチンゲールとなることがわかる． □

[†1] 消息不明になる瞬間があること．癌の再発データにおいて，他の原因による死亡など．

第 5 章

加法過程

Brown 運動の独立増分性を抽出して加法過程といい，時間一様性も加えたものを Levy 過程という．Brown 運動は連続であるが，Levy 過程・加法過程は D-過程とする．Poisson 過程は高さ 1 の跳躍でのみ増加する，跳躍のみで増加する過程の代表である．

Levy 過程の特性量は 3 つの成分からなり，ドリフト，Brown 運動，跳躍過程である．任意の Levy 過程は半マルチンゲールである．

記法 5.0.1.

(1) 時間 $[s,t]$ の間のすべての増分が定める σ-加法族を $\sigma_{s,t}[dX] := \sigma[X_v - X_u; u \leqslant v \in [s,t]]$ と表す．

(2) $\sigma_{s+,t}[dX] := \sigma[X_v - X_u; u \leqslant v \in (s,t]]$.

(3) 閉 σ-代数についても，$\mathcal{F}_{s,t}[dX] := \cap_{\epsilon>0}\sigma_{s-\epsilon,t+\epsilon}[dX] \vee 2$.

5.1 定義と特徴付け

見本道が殆ど至る所 cadlag である過程を D-過程という．見本過程 $\mathbb{R}_+ \to \mathrm{Meas}(\Omega,\mathbb{R}); s \mapsto X_s$ が確率連続な加法過程で D-過程でもあるものを，Levy 過程という．任意の確率連続な加法過程は Levy 過程に同等であり，Levy 過程の構造は解明済みである．

大雑把にいえば，連続な加法過程は Gauss 型，すなわちブラウン運動に限り，非連続的な加法過程は Poisson 型に限る．任意の Levy 過程は，ドリフト付きの Brown 運動と Levy のジャンプ過程との和に分解できる．

5.1.1 定義

定義 5.1.1 (additive process, Levy process). $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は,，(1),(2) のみを満たすとき**加法過程**または**独立増分過程**といい，(3),(4) も満たすとき **Levy 過程**といい，(5) も満たすとき**一様 Levy 過程**という．

(1) 加法性：$\forall_{n=2,3,\cdots}\ \forall_{0\leqslant t_1<\cdots<t_n}\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \cdots, X_{t_2} - X_{t_1}$ は独立．

(2) 中心性：$X_0 = 0$ a.s.

(3) D-過程である．

(4) 確率連続である．

(5) 定常性：$\forall_{s\in\mathbb{R}_+}\ X_{t+s} - X_t$ は t に依存しない．

定理 5.1.2 (確率連続な加法過程には Levy 過程である修正が存在する). (1),(2),(4) を満たすならば，その修正であって (3) も満たす修正が存在し，識別不可能な違いを除いて一意的である．すなわち，確率連続な加法過程には Levy 過程である修正が存在する．

5.1.2 例

例 5.1.3. 離散時間の加法過程は，遷移確率が空間的に一様な Markov 連鎖と見れる．さらに時間的にも一様なものが Levy 過程となる．

(1) $\mathbb{Z}^d$-酔歩は加法過程である：任意の長さ $k \geqslant 2$ の部分列 $(n_j)_{j\in[k]}$ について，**増分**の過程 $(X_{n_j} - X_{n_{j-1}})_{j\in[k]}$ は独立.

(2) 一般に独立な実確率変数列 $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分和の過程 $X_t := \sum_{k\leqslant t} Y_k(\omega) \quad {}_{t\in\mathbb{R}_+}$ は加法過程である.

(3) $\mathbb{R}_+$ 上の Lebesgue 測度を平均に持つ Poisson 配置 $\{Y(A,\omega)\}_{A\in\mathcal{B}^1\cap\mathbb{R}_+}$ に対して $X_t(\omega) := Y([0,t],\omega)$ とおくと，これは加法過程である．これを **Poisson 過程**という．これは「Poisson 点過程の積分」という意味で，(2) の例の一般化になっている.

(4) Poisson 過程は次のようにも定義できる．$(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$ を Exp (λ) $(\lambda > 0)$ に従う独立同分布列とし，$T_n := \sum_{i\in[n]} \tau_i$ とする．このとき，過程 $N_t := \sum_{n\geqslant 1} 1_{\{t\geqslant T_n\}}$ を**強度 λ の Poisson 過程**という．$N_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$ が成り立つ．Poisson 過程は特徴量 $(0,0,\nu)$ $(\nu = \lambda\delta_1)$ を持つ Levy 過程である.

(5) **強度 λ サイズ分布 μ の複合 Poisson 過程**とは，N を Poisson 過程，$(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$ を μ の独立同分布で N と独立なものとして，

$$X_t := \sum_{i\in[N_t]} Y_i$$

で定まる確率過程をいう．すなわち，ジャンプ時刻が Poisson 過程で与えられ，ジャンプのサイズは与えられた法則に従う．これは特徴量 $(0,0,\nu)$ $(\nu = \lambda\mu)$ を持つ Levy 過程である.

(6) ドリフト β を持つ Brown 運動 $X_t = \alpha B_t + \beta t$ は $(\beta, \alpha^2, 0)$ が定める Levy 過程である．逆に，C-過程でもある Levy 過程はドリフトを持つ Brown 運動である.

□

注 5.1.4. このとき，S の原点を 0 とするとその転移確率は一様に $p(s,-) := p(s,0,-)$ と表わせ，Chapman-Kolmogorov の等式も

$$\forall_{s,t\in\mathbb{R}_+}\ \forall_{x,z\in S}\ \int_S p(s,dy-x)p(t,dz-y) = p(s+t,dz-x)$$

と表せる.

5.1.3　特性関数による特徴付け

定理 5.1.5 (特性関数 Lévy-Khintchine formula). Levy 過程 X の特性関数は，$\beta\in\mathbb{R}, \alpha^2\in\mathbb{R}^+, \nu$ を $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上の $\nu(\{0\}) = 0, \int_{\mathbb{R}}(1\wedge|z|^2)\nu(dz) < \infty$ を満たす σ-有限測度として，

$$\varphi(u) = E[e^{iuX_t}] = e^{t\psi(u)},\quad \psi(u) := i\beta u - \frac{\alpha^2u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}}(e^{iuz} - 1 - iuz1_{\{|z|\leqslant 1\}})\nu(dz).$$

と表せる．(β,α^2,ν) を**特性量**といい，β をドリフト，α^2 を拡散係数，ν を Levy 測度という.

5.1.4　Poisson 空間

5.2　付属するマルチンゲール

定理 5.2.1 . X が確率連続な加法過程ならば，

(1) $\mathcal{F}_{s,t} = \sigma_{s,t} \vee 2$.

(2) $s_0 < s_1 < \cdots < s_n$ ならば，$(\mathcal{F}_{s_{i-1}s_i})_{i\in[n]}$ は独立.

要諦 5.2.2. これより，$s<t \Rightarrow X_t - X_s$ は $\mathcal{F}_s[X]$ と独立と分かる.

命題 5.2.3 .

$$Y_t^a := \frac{e^{iaX_t}}{E[e^{iaX_t}]}$$

は $(\mathcal{F}_t[X])$-マルチンゲールである．なお，複素過程がマルチンゲールとは，実部と虚部がいずれもマルチンゲールであることをいう.

5.3 Gauss 型と Poisson 型の Levy 過程

ドリフトを持った Brown 運動を除いて，他のすべての決定的でない Levy 過程は不連続な見本過程を持つことは驚愕の事実である．

定義 5.3.1 . Levy 過程の中で，

(1) 見本過程が殆ど確実に連続であるとき，**Gauss 型**であるという．
(2) 見本過程が殆ど確実に飛躍 1 で増加する階段関数となるとき，**Poisson 型**であるという．

定理 5.3.2 (Gauss 型と Poisson 型 Levy 過程). X を Levy 過程とする．

(1) X がさらに (概) 連続過程であれば，増分 $X_b - X_a$ $(b > a)$ は Gauss 分布に従う．
(2) X がさらに殆ど至る所飛躍 1 で増加する階段関数を見本過程に持つならば，増分 $X_b - X_a$ $(b > a)$ は Poisson 分布に従う．

5.4 ジャンプの描像

任意の正数 $a > 0$ に対してこれより大きいジャンプ $X_\alpha(\omega) - X_{\alpha-}(\omega) > a$ は有限個しかないが，$a \to 0$ を調べるには慎重な議論が居る．

定義 5.4.1 . $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ について，

(1) $\mathcal{F}$ の部分集合 $\{\mathcal{B}_{s,t}\}_{s<t\in\mathbb{R}_+}$ が**加法系**であるとは，次の 2 条件が成り立つことをいう：
   (a) $s < t < u \Rightarrow \mathcal{B}_{s,t} = \mathcal{B}_{s,t} \vee \mathcal{B}_{t,u}$.
   (b) $([s_i, t_i))_{i\in[n]}$ が互いに素であるならば，$\{\mathcal{B}_{s_i,t_i}\}_{i\in[n]}$ は独立．
(2) 確率過程 X が $X_0 = 0$ を満たし，ある加法系 $\{\mathcal{B}_{s,t}\}$ について $\forall_{s<t\in\mathbb{R}_+}\ \sigma[X_t - X_s] \subset \mathcal{B}_{s,t}$ ならば，X は $\sigma_{s,t}[dX] \subset \mathcal{B}_{s,t}$ を満たす加法過程である．これを $\{\mathcal{B}_{s,t}\}$ **に従属する加法過程**という．

例 5.4.2. $\sigma_{s,t}[dX]$ は加法系であり，これを X **が生成する加法系**という． □

補題 5.4.3 (well-definedness). $X = (X_t)$ は加法系 $\{\mathcal{B}_{s,t}\}$ に従属するとする．このとき，$E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ に対して，歩幅の条件 $X_\alpha(\omega) - X_{\alpha-}(\omega) \in E$ を満たす時刻 $\alpha \in (s,t]$ の数 $N((s,t] \times E, \omega)$ は $\mathcal{B}_{s,t}$-可測である．

補題 5.4.4 (独立性の十分条件). $X = (X_t)$ は Levy 過程，$Y = (Y_t)$ は Poisson 型の Levy 過程で，共に加法系 $\{\mathcal{B}_{s,t}\}$ に従属するとする．この 2 つが，任意の ω に対して，互いの見本過程が共通の飛躍時刻を持たないならば，X, Y は独立である．

補題 5.4.5 . 任意の $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash(-a,a))$ $(a > 0)$ に対して，その歩幅に含まれる跳躍の回数の過程 $N_E(t) := N((0,t] \times E, \omega)$ は，$\{\mathcal{B}_{s,t}\}$ に従属する Poisson 型 Levy 過程である．

記法 5.4.6. $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash(-a,a))$ $(a > 0)$ に対して，

(1) $S_E(t) := \sum_{s\leqslant t}(X(s) - X(s-))1_E(X(s) - X(s-))$ とおくと，歩幅が E に属する跳躍のみを加えていくことにより得られる過程である．これは補題より $\{\mathcal{B}_{s,t}\}$ に従属する過程である．また確率連続であり，Levy 過程である．
(2) $X_E(t) := X(t) - S_E(t)$ とおいても同様の性質を満たす．

補題 5.4.7 . 任意の互いに素な集合族 $E_1, \cdots, E_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash(-a,a))$ $(a > 0)$，$E := \sum_{k=1}^n E_k$ に対して，

(1) $N_{E_1}, \cdots, N_{E_n}, X_E$ は独立である．
(2) $S_{E_1}, \cdots, S_{E_n}, X_E$ も独立である．

記法 5.4.8.

(1) 飛躍の全体を

$$J(\omega) := \{(t, X(t,\omega) - X(t-,\omega)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid X(t,\omega) - X(t-,\omega) \neq 0\}$$

とおく．これは $\Gamma := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\backslash\{0\}$ の可算な部分集合となる．これは集合値確率変数であることに注意．

(2) $N(B,\omega) := |J(\omega) \cap B|$ $(B \in \mathcal{B}(\Gamma))$ を，B の中に入る飛躍の数とする．これは，$\mathcal{B}(\Gamma)$ 上の $\overline{\mathbb{N}}$-値測度に値を取る確率変数となっている．特に，$N := (N(B,\omega))_{B\in\mathcal{B}(\Gamma)}$ は固有偶然配置である．この平均 (測度) を $n(B) := E[N(B)]$ とする．

補題 5.4.9 . $N = (N(B,\omega))$ は強度 n の Poisson 固有配置である．

補題 5.4.10 .

(1) $S_E(t,\omega) = \int_{(0,t]}\int_E uN(dsdu)$ $(E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash(-a,a)))$.

(2) この確率変数の特性関数は $\exp\left(\int_{[0,t]}\int_E (e^{izu} - 1)n(dsdu)\right)$ で表せる．

(3) $\forall_{t\in\mathbb{R}_+}$ $\int_{[0,t]}\int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} (u^2 \wedge 1)n(dsdu) < \infty$.

記法 5.4.11. 自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して，歩幅 u が $[1/n, 1]$ に入る跳躍を加え合わせると

$$S_n(t,\omega) := \int_{s\leqslant t}\int_{1/n\leqslant|u|<1} uN(dsdu,\omega) = S_E(t,\omega) \quad E := \{u \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \mid 1/n \leqslant |u| < 1\}.$$

となり，これは Levy 過程になる．これを用いて，

$$T_n(t,\omega) := S_n(t,\omega) - E[S_n(t,\omega)]$$

は平均 0 の Levy 過程である．

補題 5.4.12 . $m > n$ について，

$$P\left[\sup_{s\leqslant t}|T_m(s,\omega) - T_n(s,\omega)| > \epsilon\right] \leqslant \frac{1}{\epsilon^2}\int_{1/m\leqslant|u|<1/n} u^2 n_t(du).$$

ただし，$n_t(E) := n((0,t] \times E)$ とした．

要諦 5.4.13. これは，$D[0,t]$-値確率変数 $T_n(\omega) := (T_n(s,\omega))_{0\leqslant s\leqslant t}$ が，D の一様ノルムについて確率収束することが分かった．$(D[0,t], \|-\|_\infty)$ は $l^\infty([0,t])$ の非可分な閉部分空間であることに注意．

補題 5.4.14 (Banach 空間値確率変数の概収束性). 任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に関して，殆ど確実に，$(T_n(s,\omega))_{s\in[0,t]}$ は $n \to \infty$ のとき一様ノルムについて収束する．

記法 5.4.15.

$$\phi(u) := \begin{cases} u \wedge 1, & u > 0, \\ u \vee (-1), & u < 0. \end{cases}$$

補題 5.4.16 .

$$\int_{s\leqslant t}\int_{|u|\geqslant 1/n} \phi(u)n(dsdu) = \int_{|u|\geqslant 1/n} \phi(u)n_t(du)$$

は t について連続である．

5.5 Levy-Ito 分解

Gauss 過程が平均と共分散で特徴付けられたように，Levy 過程は特性量 (n, m, v) で特徴付けられる．β をドリフト，$\alpha^2 \geqslant 0$ を拡散係数，v を Levy 測度という．

定理 5.5.1 (Levy 過程の分解定理 (Levy-Ito decomposition)). X を Levy 過程とする．$\Gamma = \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}\backslash\{0\})$ 上の固有な Poisson 配置 N と，これと独立な Gauss 型 Levy 過程 G が存在して，

$$X(t,\omega) = G(t,\omega) + \lim_{n\to\infty}\left[\int_{s\leqslant t}\int_{|u|>1/n} (uN(dsdu,\omega) - \phi(u)n(dsdu))\right]$$

と表せる．ただし，n は Poisson 配置 N の平均測度で，

$$\int_{s\leqslant t}\int_{|u|\geqslant 0}(u^2\wedge 1)n(dsdu)<\infty\ (t\in\mathbb{R}_+)\quad n(\{t\}\times\mathbb{R}\backslash\{0\})=0$$

を満たす．

定義 5.5.2 (Levy-Khintchine triplet).

(1) Levy 過程 X の連続部分 G を用いて，**平均**と**分散** $m(t):=E[G(t)],v(t):=\mathrm{Var}[G(t)]$ は有限確定する．

(2) n を Poisson 配置 $N=N_X$ の平均測度という．

(3) 組 (n,m,v) を，Levy 過程 X の**特性量**または **Levy-Khintchine 組**という．

補題 5.5.3 .

(1) m は連続関数で $m(0)=0$.

(2) v は連続な単調増加関数で $v(0)=0$.

(3) n は Γ 上の測度 (Poisson 点過程) で，次を満たす：

$$\forall_{t\in\mathbb{R}_+}\quad n(\{t\}\times(\mathbb{R}\backslash\{0\}))=0,\quad \int_{s\leqslant t}\int_{|u|>0}(u^2\wedge 1)n(dsdu)<\infty.$$

定理 5.5.4 . 補題の条件を満たす (n,m,v) に対して，これを特性量として持つ Levy 過程が存在して，法則同等を除いて一意的である．

系 5.5.5 (時間的に一様な場合). X_t-X_s $(t>s)$ の確率法則が $t-s$ の値のみに関係するような Levy 過程を，**時間的に一様な Levy 過程**という．このとき，特性値は次のように表せる．

$$m_X(t)=mt,\quad v_X(t)=vt,\quad n_X(dtdu)=dt\cdot n(du).$$

系 5.5.6 (構成定理). 確率分布族 $\{\mu_{s,t}\}_{s\leqslant t\in\mathbb{R}_+}\subset P(\mathbb{R})$ は，一貫性条件 $\mu_{s,t}*\mu_{t,u}=\mu_{s,u}$ を満たし，$(s,t)\mapsto P(\mathbb{R})$ は弱位相について連続とする．このとき，$\forall_{t>s}\ X_t-X_s\sim\mu_{s,t}$ を満たす Levy 過程 X が存在し，法則同等を除いて一意的である．

定理 5.5.7 (特性関数 Lévy-Khintchine formula). Levy 過程 X の特性量を (n,m,v) とする．

$$E[\exp(iz(X(t)-X(s)))]=\exp\left\{i(m(t)-m(s))z-\frac{1}{2}(v(t)-v(s))z^2+\int_{|u|>0}(e^{izu}-1-i\phi(u)z)n((s,t]\times du)\right\}.$$

5.6 Brown 運動

連続な加法過程は，必然的に Gauss 型である．これを Brown 運動という．ドリフトはないものをまずは見る．

5.6.1 定義

熱方程式 $u_t(x,t)=u_{xx}(x,t),u(x,0)=0$ の基本解

$$H(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

は熱核または熱方程式の初期値問題の Green 関数と呼ばれ，初期条件 $u(x,0)=f(x)$ に関する解は

$$u(x,t)=H*f=\int_{\mathbb{R}}H(x-y,t)f(y)dy$$

と表される．熱の拡散と確率の拡散，エントロピーの概念は深いどこかでつながっているのであろうか．

定義 5.6.1 . 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の実数値確率過程 $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ が **Brown 運動**であるとは，次の 3 条件をみたすことをいう：

(1) $B_0=0$ a.s.

(2) 任意の見本道 $B_t(\omega):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ は連続：$B_t\in W$.
(3) 任意の長さ $n\in\mathbb{N}_{>0}$ の $\mathbb{R}_+$ の狭義増加列 $(t_j)_{j\in[n]}, t_j=0$ が定める増分の組 $(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})_{j\in[n]}$ は互いに独立に Gauss 分布 $N(0,t_j-t_{j-1})$ に従う．

要諦 5.6.2. 実は (3) のうち増分の正規性はなくても従うことは，Levy 過程の理論による．

定理 5.6.3 (Brown 運動の存在). ある確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ が存在して，その上に Brown 運動が存在する．

5.6.2　Wiener 測度

古典的 Wiener 空間 W_0 は 0 から始まる連続な見本過程 $R_+\to\mathbb{R}$ 全体の空間で，Banach 空間となる．Brown 運動はここに確率測度を押し出し (見本道のばらつき)，Brown 運動は，関数解析的には W_0 上の確率測度の 1 つと同一視出来る．

記法 5.6.4 (classical Wiener space)**.** 次の言葉を使えば，Brown 運動とは Wiener 空間に値を持つ確率変数 $\Omega\to W_0$ であって，カリー化 $\mathbb{R}_+\to\mathrm{Meas}(\Omega,\mathbb{R})$ は任意の有限成分について独立な Gauss 分布を定めるものをいう．

(1) $W=W^1:=C(\mathbb{R}_+)$ を連続な見本道の空間とする．
(2) $W_0:=\{w\in W\mid w_0=0\}$ とする．これを**古典的 Wiener 空間**という．

それぞれの空間には一様ノルムは入れられないので，広義一様収束位相を考え，Borel 集合族によって可測空間とみなす．$\mathbb{R}_+$ なので Banach 空間ではない．

定義 5.6.5 (Wiener measure (23)). $(W_0,\mathcal{B}(W_0))$ 上の射影の族 $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, B_t(\omega):=\mathrm{pr}_t(\omega)=\omega_t$ が Brown 運動になるような確率測度 P を **Wiener 測度**という．

補題 5.6.6 . Wiener 測度は一意的に存在する．

[証明].

存在　Brown 運動の存在 5.6.3 による．ある空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の Brown 運動 $B:\Omega\to W$ を取る．これによる像測度 P^B は $P^B(W_0)=1$ を満たすから，W_0 への制限を取れば，これが Wiener 測度である．

一意性　W_0 の柱状集合全体 $\mathcal{C}$**??**上では一意的である．$\mathcal{C}$ は π-系・情報族であり，$\mathcal{B}(W_0)=\sigma(\mathcal{C})$ を満たすため，一意に延長される．

■

5.6.3　特性値

補題 5.6.7 (積率). B_t の奇数次の積率は消えてきて，偶数次の積率は

$$E[B_t^2]=t,\quad E[B_t^4]=3t^2,\quad E[B_t^6]=15t^3,\quad ,E[B_t^{2n+1}]=(2n+1)(2n-1)\cdots3\cdot1t^{2n+1}.$$

補題 5.6.8 (共分散). $\forall_{t,s\in\mathbb{R}_+}\ E[B_tB_s]=t\wedge s$.

5.6.4　独立増分性

加法過程としての独立増分性は，martingale 問題に繋がる．

記法 5.6.9. ブラウン運動 $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ の自然な情報系を $\mathcal{F}_t^B:=\sigma[B_s;s\leqslant t]$ と表す．

命題 5.6.10 . $0\leqslant s<t$ に関して，B_t-B_s は $\mathcal{F}_s^B$ と独立．

系 5.6.11 . Brown 運動 $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は $(\mathcal{F}_t^B)$ に関して martingale である．その 2 次変分は $\langle B\rangle_t=t$ で与えられる．

5.6.5　可微分性

定理 5.6.12 (Paley-Wiener-Zygmond). $B_t(\omega)$ は ω-a.e. に対して，t について至る所微分不可能である．

定理 5.6.13 (modulus of continuity). 1/2-Holder 連続性よりやや悪い連続度を持つ．

$$\limsup_{t_2-t_1=\epsilon\searrow 0, 0\leqslant t_1<t_2\leqslant 1} \frac{|B_{t_2}-B_{t_1}|}{\sqrt{2\epsilon\log(1/\epsilon)}} = 1 \quad \text{a.s.}$$

定理 5.6.14 (重複対数の法則).

$$\limsup_{t\searrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log(1/t)}} = 1 \quad \text{a.s.}$$

5.7　Poisson 過程

D-過程であるが連続過程ではなく，見本過程が至る所ジャンプしているとき，これは Poisson 型 Levy 過程である．ここまでいかずとも，少しドリフト 0 分散 0 の Brown 運動を混ぜて，ジャンプを持つ加法過程で特に基本的な Poisson 過程を見る．

5.7.1　定義

$\mathbb{R}_+$ 上に強さ λ の Poisson 点過程を考える．その総数を整数で切ったものを Poisson 過程と呼ぼう．

定義 5.7.1 (Poisson process). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の $\mathbb{Z}_+$-値確率過程 $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ が**パラメータ $\lambda>0$ を持つ Poisson 過程**であるとは，次の条件を満たすことをいう：

(1) $N_0=0$ a.s.
(2) 任意の見本道 $N_t(\omega)$ は右連続かつ単調増加である．
(3) 任意の長さ $n\in\mathbb{N}_{>0}$ の $\mathbb{R}_+$ の狭義増加列 $(t_j)_{j\in[n]}, t_0=0$ が定める増分の組 $(N_{t_j}-N_{t_{j-1}})_{j\in[n]}$ は独立で，それぞれパラメータ $\lambda(t_j-t_{j-1})$ を持つ Poisson 分布に従う．

議論 5.7.2 (Poisson 過程の構成). Kolmogorov の拡張定理により存在は保証されるが，次のように構成できる．独立にパラメータ λ の指数分布**??**に従う $\mathbb{R}_+$-値確率変数列 (S_j) を取る：$P[S_j\geqslant t]=e^{-\lambda t}$．なお，パラメータ $\lambda>0$ の指数分布密度関数は

$$p(x)=\lambda e^{-\lambda x}1_{[0,\infty)}(x)$$

と表せる．このとき

$$Z_0=0,\quad Z_k=\sum_{j=1}^k S_j$$

とするとこれは強さ λ の Poisson 点過程であり，$t\in\mathbb{R}_+$ を超えた Z_k の数の過程

$$N_t:=\max\{k\in\mathbb{N}\mid Z_k\leqslant t\}\in\overline{\mathbb{Z}}_+$$

は Poisson 過程となり，$P[N_t\in\mathbb{Z}_+]=1$．

定理 5.7.3 . (U_n) を $\mathbb{R}$ 上の増加酔歩で，$T_n:=U_n-U_{n-1}\sim\mathrm{Exp}\,(c)\;(c>0)$ とする．これに対して，$X_t(\omega):=n$ s.t. $U_n(\omega)\leqslant t<U_{n+1}(\omega)$ と定めると，$X_t\sim\mathrm{Pois}(ct)$ で，$(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は Levy 過程である．これをパラメータ $c>0$ の Poisson 過程という．

要諦 5.7.4. X_t は t までに起こった跳躍の回数で，U_n は n 回目の跳躍が起こる時刻である．

5.7.2　複合 Poisson 過程

定理 5.7.5 (compound Poisson process). $\sigma \in P(\mathbb{R}^d)$ は $\sigma(\{0\}) = 0$ を満たすとする．パラメータ $c > 0$ の Poisson 過程 $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ と $\mathbb{R}^d$ 上の酔歩 $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}, S_1 \sim \sigma$ は独立であるとする．このとき，$X_t(\omega) := S_{N_t(\omega)}(\omega)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の Levy 過程である．これを σ, c **が定める複合 Poisson 過程**という．

定義 5.7.6 . $m = 0, v = 0$ のときの $\psi(z) = \int_{|u>0|} (e^{izu} - 1)n(du)$ と表せる μ のクラスを，**複合 Poisson 分布**という．これに対応する過程を**複合 Poisson 過程**という．

5.7.3　独立増分性

命題 5.7.7 . $0 \leqslant s < t$ について，$N_t - N_s$ は $\mathcal{F}_s^N = \sigma[N_u; u \leqslant s]$ と独立である．

系 5.7.8 . $(N_t - \lambda t)_{t\geqslant 0}$ は $(\mathcal{F}_t^N)$ に関してマルチンゲールである．

5.8　無限分解可能分布

Levy 過程の特性関数は，一般の無限分解可能分布に敷衍できる．これは Levy 過程の構成に必要だった一貫性条件 5.5.6 からも予見できたかもしれない．
一様な Levy 過程は，ある 1-パラメータ連続変換半群 $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ で定まる．このとき μ_1 は無限可解分布である．

5.8.1　定義と特徴付け

確率変数 X が，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，ある分布 μ_n が存在してそれに従う独立同分布変数 n 個の和で表せるとき，これを無限可解であるという．この連続化は半群の構造に注目する，本質的に 1-パラメータ化に同じ．これは半群 $(P(\mathbb{R}), *, \delta_0)$ の言葉を用いて定義できる：連続半群の準同型 $\mathbb{R}_+ \to P(\mathbb{R})$ であって，$\mu_1 = \mu$ を満たすものが存在すること．しかも δ_0 は極点なので，ここからループを投げるみたいな，$P(\mathbb{R})$ の幾何的な知識と繋がることを表す！

定義 5.8.1 (infinitely decomposable distribution). 1 次元の分布 $\mu \in P(\mathbb{R})$ が**無限可解**であるとは，分布族 $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ が存在して，μ を乗法単位元として $\mathbb{R}_+$ と同型な連続半群となることをいう：

(1) $\mathbb{R}_+ \to P(\mathbb{R}); t \mapsto \mu_t$ は弱位相に関して連続．
(2) $\forall_{t,s\in\mathbb{R}_+}\ \mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$.
(3) $\mu_0 = \delta_0$.
(4) $\mu_1 = \mu$.

すなわち，連続半群の準同型 $\mathbb{R}_+ \to P(\mathbb{R})$ であって，$\mu_1 = \mu$ を満たすものが存在することをいう．なお，パラメータの連続変換により，このとき任意の μ_t も無限可解になることに注意．

補題 5.8.2 (無限可解性の特徴付け). 次の 4 条件は同値．

(1) μ は無限可解である．
(2) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \mu = \mu_n * \mu_n * \cdots * \mu_n$ と表せる．
(3) 任意の $\epsilon > 0$ に対し，分解 $\mu = \mu_1 * \cdots * \mu_n$ であって，Levy 距離に関して $d_L(\mu_i, \delta) < \epsilon$ を満たすものが存在する．
(4) $\mu_n = \mu_{n1} * \cdots * \mu_{nm(n)}$, $\max_{k\in[m(n)]} d_L(\mu_{nk}, \delta) \to 0$ を満たす列 (μ_n) が存在して，$\mu_n \to \mu$.

例 5.8.3 (reproducing property). 畳み込みの演算について閉じている (そして何らかの関手性を持つ) 分布族を**再生性**というのであった．この分布族の元は，δ_0 を含む場合，その分布族の中で完結して取れる．たとえば $\mu = N(m, v)$ については $\mu_t := N(tm, vm)$ と取れば良い．　□

例 5.8.4 (時間的に一様な Levy 過程). 時間的に一様な Levy 過程 X は，$\{\mu_t \sim X_t - X_0\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ がちょうど 1-パラメータ連続半群となり，よっておのずと無限可解である．また逆に，連続半群 (μ_t) に対して，これが定める一様な Levy 過程が存在するのは構成定理 5.5.6 による． □

例 5.8.5. 安定分布（正規分布，Cauchy 分布，片側 Levy 分布），複合 Poisson 分布，F 分布，対数正規分布，t 分布など正規分散平均混合 [増田弘毅, 2002]．(Steutel and van Harn, 2004). □

5.8.2　Levy 分解

無限可解分布，連続半群 $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$，時間的に一様な Levy 過程（の法則同値類）X の間に，次の全単射対応がある：

$$\mu \xrightarrow{\mu=\mu_1} \{\mu_t\} \xrightarrow{\mu_t=P^{X(t)}} X$$

定理 5.8.6 (無限可解分布の Levy 分解定理). 任意の無限可解分布 μ は，特性関数 $\mathcal{F}\mu(z)$ が $\mathcal{F}\mu(z) = e^{\psi(z)}$ なる形になる．ただし，

$$\psi(z) = imz - \frac{v}{2}z^2 + \int_{|u|>0}(e^{izu} - 1 - i\phi(u)z)n(du), \quad m \in \mathbb{R}, v \geqslant 0, \int_{|u|>0}(u^2 \wedge 1)n(du) < \infty.$$

系 5.8.7 . 無限可解分布，連続半群 $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$，時間的に一様な Levy 過程（の法則同値類）X の間に，次の全単射対応がある：

$$\mu \xrightarrow{\mu=\mu_1} \{\mu_t\} \xrightarrow{\mu_t=P^{X(t)}} X$$

例 5.8.8. Poisson 分布，Cauchy 分布も Levy 分解を定め，これらに対応する一様 Levy 過程を Poisson 過程，Cauchy 過程という． □

5.8.3　複合 Poisson 過程

議論 5.8.9. μ を無限分解可能分布とする．

$$\int_{|u|\in(0,1)} |u|n(du) < \infty$$

が成り立つとき，$\phi(u) = 0$ と取ってよい．このとき μ に対応する特性値 (n, m, v) がただ一つ存在し，特性関数は

$$\psi(z) = imz - \frac{v}{2}z^2 + \int_{|u|>0}(e^{izu} - 1)n(du)$$

によって定まる．

定義 5.8.10 . 特に n が $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上で有界で $m = v = 0$ とする．このとき対応する特性関数は

$$\psi(z) = \int_{|u|>0}(e^{izu} - 1)n(du)$$

によって定まり，このときの無限可解分布 μ を**複合 Poisson 分布**といい，対応する時間的に一様な Levy 過程を**複合 Poisson 過程**という．

補題 5.8.11 (複合 Poisson 分布の特徴付け). $\lambda := n(\mathbb{R}\backslash\{0\}) < \infty$ とする．複合 Poisson 分布 μ は，ν^{*n} を Poisson 分布 $\mathrm{Pois}(\lambda)$ によって加重平均を取ったものである：

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\nu^{*n}.$$

命題 5.8.12 . $N \sim \mathrm{Pois}(\lambda), (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \nu$ で互いに独立とする．

$$Y := X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

は複合 Poisson 分布 $p_{\lambda,\nu}$ に従う．

要諦 5.8.13. dt 間に λdt の確率で事故が起こり，そのときの損害額は分布 ν に従うとする．独立性の仮定の下で，時刻 t までの被害総額 $X(t,\omega)$ は複合 Poisson 分布 $p_{\lambda,\nu}$ に対応する時間的に一様な Levy 過程となる．

第 6 章

Markov 過程

独立性は一切の過去の履歴に依らないが，Markov 性は，現在の状態のみに依存する性質を指す．加法過程は Markov 過程である．

Brown 運動は状態空間，時間パラメータのいずれも連続な場合であり，Poisson 過程は状態空間は離散的である例である．状態空間が離散的な場合，**Markov 連鎖**ともいう．またここで偏微分方程式との関係から，確率過程の一般化も自然に出現する．添字集合を多様体 M とした確率過程 $\Omega \times M \to \mathbb{R}^n$ を**確率場**という．このとき，時間概念が空間に置き換わっている．

x_{n+1} の x_n への依存の仕方は経時変化しないという，時間的一様性の仮定をおいて議論する．すると，Markov 過程は推移作用素を定めることで分布が決まる．これは大数の法則を一般化する．また，推移作用素になり得る作用素は放物型偏微分方程式によって特徴付けられる．

記法 6.0.1.

(1) I を可算集合とし，これを離散値の場合の**状態空間**とする．見本過程は列 $\mathbb{N} \to I$ となり，経時的に I 上を動き回ることになる．

(2) $\mathbf{1}$ はすべての成分が 1 であるような縦ベクトルも表す．

(3) δ_i で，i 成分のみが 1 でそれ以外が 0 であるようなベクトルを表す．

6.1 Markov 過程の定義と核

Markov 過程は初期分布と転移確率 (が存在するならば) の 2 つによって，法則同等を除いて一意に定まる．これを連続の場合も含めて議論するには，「転移確率」の定義を考える必要がある．

6.1.1 Markov 連鎖の定義と特徴付け

定義 6.1.1 (Markov chain). 確率過程 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，

(1) **Markov 過程**であるとは，Markov 性を持つことをいう：

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{E\in\mathcal{B}^1}\ P[X_{n+1}\in E|\sigma[X_1,\cdots,X_n]] = P[X_{n+1}\in E|\sigma[X_n]] \ \text{ a.s.}$$

(2) I **上の Markov 連鎖**であるとは，Markov 性を持つことをいう．この場合の Markov 性は次に同値：

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{a_0,\cdots,a_{n+1}\in I}\ P[X_{n+1}=a_{n+1}|X_0=a_0,\cdots,X_n=a_n] = P[X_{n+1}=a_{n+1}|X_n=a_n] \ \text{ a.s.}$$

(3) さらに，I が可算集合であるとき，**可算 Markov 過程**ともいう [Popov, 2021]．

定理 6.1.2 (Markov 性の特徴付け). (X_n) について，次は同値：

(1) Markov 性を持つ．

(2) (連続時への一般化の道) $\forall_{n,m\in\mathbb{N}}\ \forall_{E\in\mathcal{B}^1}\ P[X_{n+m}\in E|\sigma[X_1,\cdots,X_n]] = P[X_{n+m}\in E|\sigma[X_n]]$ a.s.

(3) (関数による表現) $\forall_{f\in L^\infty(\Omega)}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ E[f(X_{n+1})|(X_1,\cdots,X_n)] = E[f(X_{n+1})|X_n]$ a.s.

6.1.2　連続時間の場合の定義

定義 6.1.3 (Markov process). $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ が **Markov 過程**であるとは，Markov 性を持つことをいう：

$$\forall_{u>t\in\mathbb{R}_+}\ \forall_{E\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}\ P[X_u\in E|X_s,s\leqslant t]=P[X_u\in E|X_s]\ \text{ a.s.}$$

定理 6.1.4 (Markov 性の特徴付け). (X_t) について，次は同値：

(1) Markov 性を持つ．
(2) (関数による表現) $\forall_{f\in L^\infty(\Omega)}\ \forall_{u>t\in\mathbb{R}_+}\ E[f(X_u)|X_s,s\leqslant t]=E[f(X_u)|X_t]$ a.s.
(3) (稠密部分集合) $\forall_{f\in C_c^\infty(\mathbb{R})}\ \forall_{u>t\in\mathbb{R}_+}\ E[f(X_u)|X_s,s\leqslant t]=E[f(X_u)|X_t]$ a.s.
(4) (可算な表現) 任意の $0\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_n<t$ に対して，

$$P[X_t\in E\mid X_{s_1},\cdots,X_{s_n}]=P[X_t\in E\mid X_{s_n}].$$

6.1.3　Markov 連鎖の例

例 6.1.5 (Wright-Fisher model). N 個の白黒二種類の球を壺 A に入れる．壺 A から球を復元抽出して色を確認し，同じ色の球を B に追加し，$|B|=N$ になったら停止して，B の中の黒石の和を X_1 とする．A,B の役割を入れ替えて同じことを繰り返す．

$$X_0=x_0,\quad X_{n+1}|X_n\sim \mathrm{B}(N,X_n/N),\qquad x_0\in[N]$$

は Markov 連鎖となり，これを **Weight-Fisher 模型**という．Feller 1951 で数学的に扱われた，集団遺伝学の模型である．この Markov 連鎖は次を満たす：

$$\lim_{n\to\infty}P[X_m\in\partial[0,M]]=1.$$

□

定義 6.1.6 (branching process). Galton が苗字の消滅のモデルとして開発した，絶滅のモデル．$\mathbb{N}$-値確率変数の独立同分布な二重列 $\{\xi_j^{(n)}\}_{n,j\in\mathbb{N}}$ について，

$$X_0=1,\quad X_{n+1}=\sum_{j=i}^{X_n}\xi_j^{(n)}.$$

と定めて得られる Markov 過程を**分岐過程**という．事実，子孫の数は現在の個体数のみに依存する．$\lim_{n\to\infty}P[X_n=0]$ を**絶滅確率**という．

例 6.1.7 (autoregressive process).

$$X_0=x_0,\quad X_{n+1}=\mu+\alpha(X_n-\mu)+B_{n+1},\qquad \mu,\alpha,x_0\in\mathbb{R},\sigma>0,B_n\sim\mathrm{N}(0,\sigma^2)\text{ i.i.d.}$$

で定まる過程を **Gauss 型自己回帰過程**という．$\alpha=1$ の場合を酔歩という．このとき，

$$X_n\sim\mathrm{N}(\mu_n,\sigma_n^2),\quad \mu_n:=\mu+\alpha^n(x_0-\mu),\sigma_n^2:=\sum_{i\in n}\alpha^{2i}\sigma^2.$$

特に，(X_n) は $\mathrm{N}(\mu,\dfrac{\sigma^2}{1-\sigma^2})$ に分布収束する．さらに，次の 2 条件を満たすものを**定常な自己回帰過程**という：

(1) $|\alpha|<1$.
(2) 初期値 x_0 は次のように確率的に当たる：$X_0\sim\mathcal{N}\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\right)$.

□

6.1.4　転移核の定義：可測性の問題

Markov 過程は t,x,u に依存する条件付き確率

$$P(t,x,u;A):=P[X_u\in A|X_t=x]$$

と初期分布とが，法則同等を除いて一意に特徴付ける．これは確率測度とは限らず，密度を持つとも限らない．この，$(t,x,u)\in\mathbb{R}_+\times E\times\mathbb{R}_+$ 上の測度値関数を **Markov 核**という．

定義 6.1.8 (translation / Markov kernel, translation probability). X を Markov 過程とする．

(1) $\mathbb{R}$ 上の条件付き測度の $t\leqslant u\in\mathbb{R}$ による族

$$p(t,x,u;E):=P[X_u\in E|X_t=x],\qquad E\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$$

を**広義の転移確率**または **Markov 核**という．これは転移作用素からみて積分核になるためである．

(2) 条件付き測度に関する知識から，$p(t,-,u;E)$ は $x\in\mathbb{R}$ に関する可測関数になるように取れることが解る．

(3) Markov 核が例外点なしに Chapman-Kolmogorov 方程式を満たす (命題 6.1.11 を $(P^{X(s)})$-a.e.x の制約なしに満たす) 場合，特に**転移確率**と呼ぶ．したがって，条件付き確率測度が存在するとは限らないのと同様，一般の Markov 過程に転移確率は存在するとは限らない．

補題 6.1.9 (Markov 核の一意性). 転移確率 $x\mapsto p(t,x,u;E)$ は一意とは限らないが，零集合の差を除いて定まる．すなわち，任意の 2 つの転移確率 p,q は，

$$p(t,x,u,E)=q(t,x,u,E)\ P^{X_t}\text{-a.e.}x$$

を満たす．また，例外集合は E に無関係に取れるが，t,u には依存する．

観察 6.1.10 (Markov 半群のなす半群の連続化)**.** 離散集合 I 上の遷移行列 $\mathbb{P}$ が満たす規則は次のようにかける．

(1) $\forall_{i\in I}\ \sum_{j\in I}p_{ij}^{(n)}=1$.

(2) $\forall_{i,j\in I}\ \forall_{n,m\in\mathbb{N}}\ \sum_{k\in I}p_{ik}^{(n)}p_{kj}^{(m)}=p_{ij}^{(n+m)}$.

I を一般のポーランド空間，$\mathbb{N}$ を $\mathbb{R}_+$ へ，遷移行列を遷移作用素へ一般化したい．

(1) $\forall_{s\in\mathbb{R}_+}\ \forall_{x\in S}\ p(s,x,-)\in P(S)$．時刻 0 に x から出発する Markov 過程の，時刻 s での位置の分布．

(2) $\forall_{s,t\in\mathbb{R}_+}\ \forall_{x,z\in S}\ \int_S p(s,x,dy)p(t,y,dz)=p(s+t,x,dz)$．または，$\forall_{A\in\mathcal{B}(S)}\ \int_S p(s,x,dy)p(t,y,A)=p(s+t,x,A)$.

こうして，行列積は積分に一般化される．(2) を時間一様な Chapman-Kolmogorov の等式という．これは，時刻 0 に x から初めて，$s+t$ に A に至るまでの時刻 s での経由地 $y\in S$ について積分しても等しくなる，という意味を持つ． □

命題 6.1.11 (Chapman-Kolmogorov). Markov 核 p は，任意の $s<t<u$ について，次を満たす：

$$p(s,x,u,E)=\int_{\mathbb{R}}p(s,x,t,dy)p(t,y,u,E)\quad (P^{X(s)})\text{-a.e.}x.$$

また，例外集合は E に無関係に取れるが，s,t,u には依存する．

6.1.5　転移確率の定義

Markov 過程の発展がある密度関数のなす半群によって記述できるための条件を表す放物型偏微分方程式を Chapman-Kolmogorov 方程式という．これを解いて推移確率とし，Kolmogorov の拡張定理に基づけば拡散過程が構成できる．Kolmogorov は初期から物理学への応用を見据えて，多様体の言葉で論じていた．

定義 6.1.12 (transition probability). X を Markov 過程とする．

(1) 次の 3 条件を満たす関数 $p:(s,x,t,E):\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\mathcal{B}(\mathbb{R})\to[0,1]$ $(s<t)$ を (狭義の) **転移確率**という：

(a) $p(s,-,t,E):\mathbb{R}\to[0,1]$ は Borel 可測.

(b) $p(s,x,t,-):\mathcal{B}(\mathbb{R})\to[0,1]$ は確率測度.

(c) $\forall_{0\leqslant s<t<u\in\mathbb{R}_+}\ \forall_{x\in\mathbb{R}}\ \forall_{E\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}\ p(s,x,u,E)=\int_{\mathbb{R}}p(s,x,t,dy)p(t,y,u,E)$.

(2) 転移確率 p が Markov 過程 (X_t) を定めるとは,

$$\forall_{s,t,E}\ p(s,X(s),t,E)=P[X_t\in E|X_s]\ P\text{-a.e.}$$

が成り立つことをいう.

(3) 転移確率 p が**時間的に一様**であるとは，$p(s,x,t,E)=p(0,x,t-s,E)$ が成り立つことをいう.

要諦 6.1.13. 条件 (c) は $(P_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ が半群をなすことに同値.

補題 6.1.14 (転移確率が定める Markov 過程). p を転移確率とする Markov 過程 (X_t) について, 任意の $n\in\mathbb{N},0\leqslant s_1<\cdots<s_n$ と任意の有界 Borel 可測関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ について

$$E[f(X_{s_1},\cdots,X_{s_n})]=\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}p_{s_1}(dx_1)p(s_1,x_1,s_2,dx_2)\cdots p(s_{n-1},x_{n-1},s_n,dx_n)f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad p_{s_1}(E):=P[X_{s_1}\in E].$$

系 6.1.15 . Markov 過程は，初期分布 $p_0(E):=P[X_0\in E]$ と転移確率の 2 つによって，法則同等を除いて一意に定まる.

注 6.1.16. Levy 過程のときのような構成定理をいうには，Kolmogorov の拡張定理を $\mathbb{R}^\infty$ 上から $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ 上へと一般化する必要がある.

6.1.6　加法過程は Markov 過程である

定理 6.1.17 . (X_t) を加法過程とする.

$$\mu_{s,t}(E):=P[X_t-X_s\in E]\ (s<t)$$

とおくと，X は $p(s,x,t,E):=\mu_{s,t}(E-x)$ を転移確率とする Markov 過程である.

6.1.7　Markov 過程の構成

命題 6.1.18 (初期分布と転移確率による構成). 適当な確率空間の上に，初期分布 ν と遷移行列 $\mathbb{P}$ をもち，殆ど至る所 I 値な Markov 連鎖が存在する.

[証明]. I は可算だから単射 $I\hookrightarrow\mathbb{N}$ が存在する．以降，$I\hookrightarrow\mathbb{N}\hookrightarrow\mathbb{R}$ として，$\mathbb{R}$ の部分集合と同一視する.

構成　各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，$(\mathbb{R}^{n+1},\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}))$ 上の測度 P_{n+1} を

$$P_{n+1}(A):=\sum_{(i_0,\cdots,i_n)\in I^{n+1}\cap A}\nu_{i_0}p_{i_0i_1}\cdots p_{i_{n-1}i_n}\quad(A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}))$$

とすると，これはたしかに確率測度である.

一貫性　任意の $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$ について,

$$P_{n+2}(A\times\mathbb{R})=\sum_{(i_0,\cdots,i_n)\in I^{n+1}\cap A}\nu_{i_0}p_{i_0i_1}\cdots p_{i_{n-1}i_n}\left(\sum_{i_{n+1}\in I}p_{i_ni_{n+1}}\right)=P_{n+1}(A).$$

検証　Kolmogorov の拡張定理**??**より，$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ 上の確率測度 P であって，$P(A\times\mathbb{R}^{\mathbb{N}})=P_{n+1}(A)$ を満たすものがただ一つ存在する．この空間上の実数値確率変数列 (X_n) を，$X_n(\omega)=\omega_n\ (\omega=(\omega_0,\cdots)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ と定めれば，これは殆ど至る所 I-値の，求める Markov 過程である.

■

命題 6.1.19 (単射による保存). 単射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ について，Markov 過程 (X_t) の像 $(f(X_t))$ は Markov 過程である.

命題 6.1.20 . Brown 運動 (B_t) に対して，(B_t^2) は Markov 過程である.

6.2 生成作用素

Banach 空間上の線型作用素の 1 径数半群に関する Hille-Yoshida 理論は，Markov 過程の作用素論的な解析を可能にする．

6.2.1 生成作用素の定義

生成作用素により，偏微分方程式論とマルチンゲール論が交差する．

定義 6.2.1 (transition operator). X を Markov 過程とする．

(1) 時刻 0 からの**遷移作用素** $\{P_{s,t}\}_{s,t\in\mathbb{R}_+}\subset B(L^\infty(\mathbb{R}))$ とは，遷移確率との積分を取る対応

$$P_{s,t}[f](x):=E[f(X_t)|X_s=x]=\int_{\mathbb{R}}p(s,x,t;dy)f(y)$$

をいう．遷移確率の定義から，遷移作用素は半群をなす．

(2) 生成作用素 (A_s) とは，$L^\infty(\mathbb{R})$ 上の一様ノルムに関する極限によって定まる対応

$$A_s[f]:=\lim_{h\searrow 0}\frac{P_{s+h}[f]-P_s[f]}{h}$$

をいう．

要諦 6.2.2. 遷移作用素 $(P_{s,t})$ の言葉を使えば，Markov 性は

$$\forall_{f\in L^\infty(\mathbb{R})}\quad E[f(X_t)|\mathcal{F}_s]=P_{s,t}f(X_s)\quad Q\text{-a.s.}$$

と表せる．さらに $P_{s,t}$ が $P_{|t-s|}$ で表せるとき，時間的に一様であるという．

命題 6.2.3 . X を時間的に一様な Markov 過程，A をその生成作用素とする．

(1) $\dfrac{d}{dt}P_t[f](x)=AP_t[f](x)$.

(2) $u(t,x):=P_t[f](x)$ とおくと，次の偏微分方程式を満たす：

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=Au(t,x),\quad u(0,x)=f(x).$$

(3) 過程 M^f を

$$M^f_t:=f(X_t)-f(X_0)-\int_0^t A[f](X_s)dx,\quad t\geqslant 0$$

と定めると，これはマルチンゲールになる．

6.2.2 Kolmogorov の定理

定理 6.2.4 . 転移確率 $p(s,x,t;E)$ は次を満たすとする：

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}p(s,x,s+h;dy)(y-x)=a(s,x)h+o(h)$.

(2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}p(s,x,s+h;dy)(y-x)^2=b(s,x)h+o(h)$.

(3) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}p(s,x,s+h;dy)(y-x)^3=o(h)$.

このとき，生成作用素は次のように表せる：

$$A_s=a(s,x)\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}b(s,x)\frac{d^2}{dx^2}.$$

6.3　可算 Markov 連鎖

Markov 過程には，拡散過程として到達確率を見る解析と，その極限分布を見る解析との 2 つがある．これを状態空間と時間とのいずれも離散の場合に見る．

6.3.1　定義と存在

定義 6.3.1 (time homogeneous countable Markov chain). $\{X_n\} \subset L(\Omega;\Sigma)$ が**均一発展する可算 Markov 連鎖**であるとは，次を満たすことをいう：

[A1] Markov 性：$\forall_{y\in\Sigma}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{m\in\mathbb{N}^+}\ P[X_{n+m}=y|X_0,\cdots,X_n]=P[X_{n+m}=y|X_n]$ a.s.
[A2] 時間一様性：$P[X_{n+m}=y|\mathcal{F}_n]$ は次の意味で n に依らない：

$$P[X_{n+m}=y|\mathcal{F}_n]=:p_m(X_n,y)\ \text{ a.s.}$$

[A3] 可算性：状態空間 Σ は可算集合である．

定理 6.3.2 . 任意の可算集合 Σ，その上の確率分布 $\nu\in P(\Sigma)$，遷移行列 $P=\{p_1(x,y)\}_{x,y\in\Sigma}$ について，これに対応する可算 Markov 連鎖が存在する．

6.3.2　Chapman-Kolmogorov 方程式

命題 6.3.3 . (X_n) を可算 Markov 連鎖とする．可算状態空間 Σ 上の遷移確率 $(p_m(X_n,y):=P[X_{n+m}=y|\mathcal{F}_n])_{X_n,y\in\Sigma}$ は次の意味で半群性を持つ：

$$p_{n+m}(x,y)=\sum_{z\in\Sigma}p_n(x,z)p_m(z,y),\qquad (x,y\in\Sigma).$$

6.3.3　可算 Markov 連鎖の到達確率

差分は前進 $\Delta f(x):=f(x+1)-f(x)$ と後退 $\nabla f(x):=f(x)-f(x-1)$ の 2 つが考えられる．これが連続になると確率微分方程式となるのだ．到達確率は差分作用素に関する偏微分方程式の解として特徴付けられる．

定義 6.3.4 (hitting / absorption probability). (X_n) を可算 Markov 連鎖とする．

(1) 集合 $A\subset I$ に対して，A への到達時刻とは，$\tau_A:=\min\{n\in\mathbb{N}\mid X_n\in A\}$ として定まる Markov 時 $\Omega\to\overline{\mathbb{N}}$ であった 1.5.8.
(2) 到達時刻が有限になる確率を**到達確率**または**吸収確率**といい，次のように表す：

$$a_i:=P_i[\tau_A<\infty]:=P[\tau_A<\infty|X_0=i].$$

(3) **差分作用素** $\mathcal{L}:L^\infty(\Sigma)\to L(\Sigma)$ を，

$$\mathcal{L}[f](i):=\sum_{j\in I}p_{ij}f(j)-f(i),\qquad (i\in I,f\in L^\infty(\Sigma)).$$

と定める．

定理 6.3.5 (到達確率の特徴付け). 到達確率 $(a_i)_{i\in I}$ は，方程式系

$$\begin{cases}\mathcal{L}[a](i)=0 & i\notin A,\\ a_i=1 & i\in A.\end{cases}$$

の最小の非負解である．後者は前者の**境界条件**という．

要諦 6.3.6. 差分方程式を書き直すと，$i\in I\backslash A$ に関して $a_i=\sum_{j\in I}p_{ij}a_j$ となり，i からの遷移確率に関する，到達確率の平均になる．

定理 6.3.7 (差分作用素の定めるマルチンゲール). (X_n) を可算 Markov 連鎖，$f \in L^\infty(I)$ を有界関数とする．

$$Y_n := f(X_n) - f(X_0) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}f(X_k)$$

によって定まる過程 (Y_n) は $(\mathcal{F}_n)$-マルチンゲールである．

要諦 6.3.8 (martingale problem)**.** 一般に，線型作用素 $\mathcal{L}$ に対して，$\mathcal{L}$ を差分作用素とする Markov 過程 (X_n) を見つける問題を **martingale 問題**という [Stroock and Varadhan, 2006].

6.3.4 可算 Markov 連鎖のエルゴード性

確率行列 $\mathbb{P}$ の，確率分布の空間 $P(I)$ への作用を考えると，不動点が存在する．

定義 6.3.9 (primitive / ergodic, irreduciable, aperiodic). Markov 連鎖 $((X_n), I, \mathbb{P})$ あるいはその確率行列 $\mathbb{P} = (p_{ij})$ について，$\mathbb{P}^n =: (p_{ij}^{(m)})$ と表す．

(1) $\mathbb{P}$ が**原始的**または**エルゴード的**であるとは，$\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \mathbb{P}^{n_0} > 0$ が成り立つことをいう．
(2) $\mathbb{P}$ が**既約**であるとは，$\forall_{i,j\in I}\ \exists_{n_1\in\mathbb{N}}\ p_{ij}^{(n_1)} > 0$ を満たすことをいう．
(3) 既約行列 $\mathbb{P}$ の**周期**とは，$\gcd\left\{n \geqslant 1 \mid p^{(n)}(x,x) > 0\right\}$ をいう．この値は $x \in \Sigma$ の取り方に依らない．
(4) 既約行列が**非周期的**であるとは，周期が 1 であることをいう．

補題 6.3.10 (エルゴード性の特徴付け). Markov 連鎖 $((X_n), I, \mathbb{P})$ が $|I| < \infty$ を満たすとき，次の 3 条件は同値．

(1) $\mathbb{P}$ は原始的である．
(2) $\mathbb{P}$ は既約で非周期的である．すなわち，すべての状態 $i \in I$ について，$\exists_{n_2\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant n_2}\ p_{ii}^{(n)} > 0$.
(3) $\mathbb{P}$ は既約で，ある状態 $i \in I$ について，$\exists_{n_2\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant n_2}\ p_{ii}^{(n)} > 0$.

例 6.3.11.

(1) 円周の N 等分点上のランダムウォークは，N が奇数ならばエルゴード的であるが，偶数ならば既約であっても非周期的にはならない．
(2) $p_{ii} = 1$ を満たす $i \in I$ を trap という．これがある Markov 過程はエルゴード的でない．

□

定理 6.3.12 (有限状態 Markov 過程のエルゴード定理). Markov 連鎖 $((X_n), I, \mathbb{P})$ が $|I| < \infty$ を満たし，$\mathbb{P}$ はエルゴード的であるとする．このとき，(1) を満たす I 上の確率分布 π が一意的に存在する．この π は (2),(3) も満たす．

(1) 定常性：$\pi\mathbb{P} = \pi$.
(2) 極限分布：$\forall_{i,j\in I}\ \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$.
(3) 混合性：(2) の収束は指数関数的である：$\exists_{C>0}\ \exists_{0<\lambda<1}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{i,j\in I}\ |p_{ij}^{(n)} - \pi_j| \leqslant C\lambda^n$.

定義 6.3.13 (invariant measure). 定理の性質を満たす分布 $\pi \in P(\Sigma)$ を**不変分布**または**定常分布**という：

$$\sum_{x\in\Sigma} \pi(x)p(x,y) = \pi(y).$$

6.3.5 可算 Markov 連鎖の再帰性

定義 6.3.14 (recurrent, transient). $\{X_n\} \subset L(\Omega;\Sigma)$ を可算 Markov 連鎖，$\tau_x^+ := \min\left\{n \in \mathbb{N}^+ \mid X_n = x\right\}$ を到達時刻とする．

(1) 状態 $x \in \Sigma$ が**再帰的**とは，$P_x[\tau_x^+ < \infty] = 1$ を満たすことをいう．
(2) 状態 $x \in \Sigma$ が**非再帰的**とは，$P_x[\tau_x^+ < \infty] < 1$ を満たすことをいう．
(3) 状態 $x \in \Sigma$ が**正再帰的**とは，$E_x[\tau_x^+] < \infty$ を満たすことをいう．

(4) 状態 $x \in \Sigma$ が**零再帰的**とは，$E_x[\tau_x^+] = \infty$ を満たすことをいう．

命題 6.3.15 . 既約な Markov 連鎖について，次は同値：

(1) ある状態 $x \in \Sigma$ は再帰的である．
(2) 任意の状態 $x \in \Sigma$ は再帰的である．

「再帰的」を「非再帰的」「正再帰的」「零再帰的」に変えても成り立つ．

命題 6.3.16 . 既約な Markov 連鎖について，

(1) $x \in \Sigma$ について再帰的であるとする．このとき，初期状態に依らずに，殆ど確実に x を無限回訪れる．
(2) $x \in \Sigma$ について非再帰的とする．このとき，初期状態に依らずに，殆ど確実に x は有限回しか訪れない．

命題 6.3.17 (再帰性・非再帰性の十分条件). 既約な可算 Markov 連鎖について，

(1) ある $x \in \Sigma$ と非空集合 $A \subset \Sigma$ について，$P_x[\tau_A < \infty] < 1$ を満たすならば，(X_n) は非再帰的である．
(2) ある非空な有限集合 $A \subset \Sigma$ と任意の $x \in \Sigma \backslash A$ について $P_x[\tau_A < \infty] = 1$ を満たすならば，(X_n) は再帰的である．

6.3.6　Markov 過程に対する大数の弱法則

Markov 連鎖がエルゴード的ならば，独立性の代わりになり，大数の法則が成り立つ．

定理 6.3.18 (大数の弱法則). Markov 連鎖 $((X_n), I, \mathbb{P})$ が $|I| < \infty$ を満たし，$\mathbb{P}$ はエルゴード的であるとする．π を不変分布とすると，関数 $f : I \to \mathbb{R}$ について，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow{p} E^\pi[f].$$

定義 6.3.19 (number of visit). $i \in I$ に関して，$f(j) := 1_{\{j=i\}}$ と定めると，$\sum_{k=1}^{n} f(X_k)$ とは時刻 n までの i への訪問回数 $\tau_i^{(n)}$ を表す．滞在時間ともいう．

系 6.3.20 . $\dfrac{\tau_i^{(n)}}{n} \xrightarrow{p} \pi_i$.

定義 6.3.21 (stationarity).

(1) Markov 連鎖 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が**定常的**であるとは，$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と $(X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ との分布が等しいことをいう．
(2) 初期分布を π とするエルゴード的な Markov 連鎖を**定常 Markov 連鎖**という．

定理 6.3.22 (高次元化). Markov 連鎖 $((X_n), I, \mathbb{P})$ が $|I| < \infty$ を満たし，$\mathbb{P}$ はエルゴード的であるとする．π を不変分布とすると，関数 $f : I^l \to \mathbb{R}$ $(l \geqslant 1)$ について，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k, \cdots, X_{k+l-1}) \xrightarrow{p} E^\pi[f]$$

ただし，E^π は定常 Markov 連鎖 $(\overline{X}_n)_{n\in[l]}$ に関する期待値である．

6.3.7　Markov 連鎖の極限定理 2：Doob の定理

定義 6.3.23 . 時間的に一様な Markov 過程 (X_n) の Markov 核 $P(x;A)$ について，確率分布 $\Pi \in P(\mathbb{R})$ が**不変確率分布**であるとは，$X_0 \sim \Pi \Rightarrow X_1 \sim \Pi$ を満たすことをいう．

定理 6.3.24 (Doob). 次の 2 条件を仮定する．

(A1) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ P(x;-), P(y;-)$ は互いに特異でない．
(A2) 不変確率分布 Π が存在する．

このとき，次が成り立つ：

(1) 任意の A に関して，A 上一様に $P^m(x,A) \to \Pi(A)$ (Π-a.s. $x \in \mathbb{R}$)．すなわち，全変動ノルムに関して収束する．
(2) 次の収束が，積分 $I := \Pi f$ が存在する限り成り立つ：

$$\frac{1}{M}\sum_{n\in M} f(X_m) \xrightarrow{M\to\infty} I$$

要諦 6.3.25 (MCMC)**.** Π-不変な Markov 連鎖を疑似乱数で生成し，積分 $I = \Pi f$ を Doob の定理の収束によって近似する手法を **Markov 連鎖 Monte Carlo 法**という．

6.4　可算 Markov 連鎖の例：酔歩

極めて直感的かつ，最先端の道具の動機が詰まった例である [Popov, 2021]．この例について，原点への到達確率の解析を試みる．

6.4.1　正方格子上の酔歩の定義

定義 6.4.1 **(SRW: simple random walk).** Markov 過程 $\{X_n\} \subset L(\Omega;\mathbb{Z}^d)$ について，

(1) 初期分布 $\nu \in P(\mathbb{Z}^d)$ と時空間に一様な遷移確率 $(p_z)_{z\in\mathbb{Z}^d}$ によって定まるとき，これを**酔歩**という．これを，$Z_1, Z_2, \cdots \sim p_z$ i.i.d. として，$X_n = \sum_{i\in[n]} Z_i$ と表す．
(2) さらに遷移確率が $p_z = \frac{1}{2d}1_{|z|=1}$ を満たすとき，**単純酔歩**という．

要諦 6.4.2 (単純酔歩という対象)**.** パリから出発した 1 歩 1m の 2 次元の酔歩は，銀河系を脱出するまでに 30 回ほど戻ってくる．それ故，シミュレーションによる酔歩の性質の解析は困難な部分も多い．$d = 2,3$ で大きく振る舞いが違う数学的な背景の一つに，無限級数

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^{d/2}}$$

の収束性が関与する．

6.4.2　再帰性とその十分条件

酔歩 $X_n := \sum_{i\in[n]} Z_i$ の平均的な一歩 $E[Z_1]$ が零ベクトルでない場合，酔歩は非再帰的である．また，再帰的であることと各段階で 0 を踏む確率の和が発散することは同値である．

記法 6.4.3. $\nu = \delta_0$ を初期分布として持つ酔歩を考える．

(1) 時刻 $n \in \mathbb{N}$ で初めて原点に戻るという事象を A_n，その確率を q_n とする：

$$A_n := \{X_n = 0, \forall_{1\leqslant k\leqslant n-1}\ X_k \neq 0\}, \qquad q_n := P[A_n].$$

(2) ある時刻 $n \in \mathbb{N}$ が存在して原点に戻る確率を $0 \leqslant q \leqslant 1$ とする：

$$q := \sum_{n\in\mathbb{N}^+} q_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^+} P[A_n] = P[\{\exists_{n\in\mathbb{N}}\ X_n = 0\}].$$

(3) 一般に，時刻 $n \in \mathbb{N}$ で原点に居る確率を

$$p_n := P[X_n = 0]$$

で表す．

定義 6.4.4 **(recurrent, transient).** 酔歩が

(1) $q = 1$ を満たすとき**再帰的**であるという．
(2) $q < 1$ のとき**非再帰的**であるという．

定理 6.4.5 (再帰性の特徴付け). 初期分布 $\nu = \delta_0$ を持つ酔歩について，次の 2 条件は同値．

(1) 再帰的である．
(2) 各時点において原点に戻る確率の和が発散する：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P[X_n = 0] = \infty$.

[証明].

準備 1：母関数の定義　母関数
$$q(\xi) := \sum_{n=1}^{\infty} q_n \xi^n, \qquad p(\xi) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n \xi^n, \qquad (|\xi| < 1)$$
を考える．係数列 $(q_n), (p_n) : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}_+$ は非負で，$\xi \nearrow 1$ について単調増加であるから，単調収束定理より，$\xi \nearrow 1$ の極限を持ち，
$$q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n, \qquad q = \sum_{n=0}^{\infty} q_n.$$
が成り立つ．

準備 2：母関数の間の関係　時刻 n で原点に居る事象は，時点 $n-k$ で原点に居る確率と時点 k で初めて原点に至る確率との積の $k \in \mathbb{N}$ に関する畳み込みで表せる：
$$p_n = \sum_{k=1}^{n} q_k p_{n-k} \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$
これより，母関数の関係
$$\begin{aligned} p(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \xi^n &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} q_k p_{n-k} \right) \xi^n \\ &= 1 + p(\xi) q(\xi). \end{aligned}$$
を得て，いずれも連続関数であるから，特に $\xi = 1$ でも一致する：
$$q = 1 - \frac{1}{p}.$$

(1)⇒(2)　$p < \infty$ ならば $q < 1$ より非再帰的である．
(2)⇒(1)　$p = \infty$ ならば $q = 1$ より再帰的である．

■

系 6.4.6 (非再帰性の十分条件). 次の 2 条件が成り立つとき，酔歩 (X_n) は非再帰的である：

[A1] 歩幅は有限：$R := \max\left\{ |z| \in \mathbb{R} \mid z \in \mathbb{Z}^d, p_{0z} > 0 \right\} < \infty$.
[A2] 平均的な一歩が偏っている：$\displaystyle m := \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} p_{0z} z = E[Z_1] \neq 0 \in \mathbb{R}^d$.

[証明].

Step1　$E[X_n] = nE[Z_1]$ より，Chebyshev の不等式から，
$$P[X_n = 0] \leqslant P\left[|X_n - nE[Z_1]| \geqslant \frac{n|E[Z_1]|}{2} \right] \leqslant \frac{16}{n^4 |E[Z_1]|^4} E[|X_n - nE[Z_1]|^4].$$

Step2　右辺を Z_i で表すと，
$$\begin{aligned} |X_n - nE[Z_1]|^4 &= \left(\sum_{k_1, k_2 = 1}^{n} (Z_{k_1} - E[Z_1] | Z_{k_2} - E[Z_1]) \right)^2 \\ &= \sum_{k_1, k_2, l_1, l_2}^{n} (Z_{k_1} - E[Z_1] | Z_{k_2} - E[Z_1])(Z_{l_1} - E[Z_1] | Z_{l_2} - E[Z_1]). \end{aligned}$$

Step3　この右辺の評価を通じて，

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[X_n = 0] \leqslant \frac{16C}{|E[Z_1]|^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

■

6.4.3　単純ランダムウォークの再帰性と非再帰性

単純酔歩において，

(1) $d = 1, 2$ のとき，$p_{2n} \sim \dfrac{1}{(\pi n)^{d/2}}$.

(2) $d = 3$ のとき，$p_{2n} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{\pi n}\right)^{3/2}$.

の評価を得ることが出来る.

定理 6.4.7 (Polya 1921). d 次元の単純酔歩は，$d = 1, 2$ のとき再帰的であり，$d \geqslant 3$ のとき再帰的でない.

第 7 章

拡散過程

C-過程でもある強 Markov 過程を拡散過程という．確率微分方程式は，真に確率論的な方法で拡散過程を構成することを可能にする．

元々 Markov 過程論から純粋に数学的に生じた問題意識の解決のために確率微分方程式が開発された．しかし，確率論的な現象は自然界にありふれている．常微分方程式の定める流れに沿って輸送された物理量は，移流方程式と呼ばれる 1 階の偏微分方程式を満たす．Brown 運動に沿って輸送された物理量（熱など）は，熱伝導方程式・拡散方程式と呼ばれる 2 階の偏微分方程式を満たす．この対応関係は確率微分方程式を導入することでさらに一般化され，2 階の放物型・楕円形の偏微分方程式の解を確率的に表示することが出来るようになる．こうして，確率微分方程式は，ポテンシャル論・偏微分方程式論や微分幾何学との架け橋になる．

Brown 運動は，空間的に一様な確率場での積分曲線だと思えば，さらに一般に空間的な一様性の仮定を取った場合が確率微分方程式であり，これは Brown 運動の変形として得られるというのが伊藤清のアイデアである．

7.1 確率微分方程式の概観

7.1.1 最適輸送理論

定義 7.1.1 .

7.1.2 移流方程式

Brown 運動は，位置を忘れて粒子の視点から見た，確率ベクトル場から受ける「流れ」だと理解できる．したがってその背景には確率ベクトル場がある．

定義 7.1.2 (advection, 時間的に一様なベクトル場による輸送方程式).

(1) 物理量のスカラー場や物質がベクトル場によって輸送されること・経時変化することを，**移流**という．

(2) 定ベクトル $b=(b^1,b^2)\in\mathbb{R}^2$ が定める空間一様な移流に関する初期値問題 $u=u(t,x)$ は，

$$\frac{\partial u}{\partial t}+b\cdot\nabla u=0,\quad (t>0,x=(x^1,x^2)\in\mathbb{R}^2),$$
$$u(0,x)=f(x)\in C^1(\mathbb{R}^2)$$

と表される．このとき，$X_t(x):=x-bt$ は，時刻 t に x に居る粒子が，時刻 0 にどこにいたかを表す．よって，初期状態として与えられた物理量 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を用いて，時刻 t に位置 $x\in\mathbb{R}^2$ で観測される物理量は $f(X_t(x))$ で表される．これは大数の法則に物理的な意味論を与える 6.3.18.

議論 7.1.3 (変数係数の移流問題)**.** ベクトル場 $b=b(t,x):\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ に対して，方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+b(t,x)\cdot\nabla u=0\quad (t>0,x\in\mathbb{R}^2)$$

を考える．$y\in\mathbb{R}^2$ から出発した粒子の位置を表す変数 $Y_t\in\mathbb{R}^2$ を固定して，そこでの時間変化を表す常微分方程式に関する初期値

問題 $\dot{Y}_t = b(t, Y_t)$ $(t \in \mathbb{R}_+)$; $Y_0 = y \in \mathbb{R}^2$ を考える．すると，解 $u(t,x)$ は次を満たす必要がある：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left(u(t, Y_t(y))\right) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, Y_t(y)) + \dot{Y}_t(y) \cdot \nabla u(t, Y_t(y)) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + b \cdot \nabla u\right)(t, Y_t(y)) = 0.\end{aligned}$$

よって，$u(t, Y_t(y)) = u(0, Y_0(y)) = f(y)$ なる第一積分が見つかったことになる．

こうして元の偏微分方程式は，$y \in \mathbb{R}^2$ に居た粒子が受けることになる流れ Y_t に沿った輸送を記述する方程式であったと理解できる．または，ベクトル場による移流方程式とは，ある移流 Y_t の第一積分が満たすべき方程式とも見れる．[†1]

注 7.1.4 (2 つの関連)**.** いま，$Y_t : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$ は，各 $y \in \mathbb{R}^2$ に対して，これが受けることになる力の時系列 $Y_t(y)$ を与えている．これが可逆であるとする：$X_t := Y_t^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$．すると，出発点 y が t 時刻にいる位置 x について，$y = X_t(x)$ と辿る確率過程になる．これは解について $u(t,x) = f(X_t(x))$ なる表示を与える．

ベクトル場が時間に依存しないとき，Y_t は可逆であり，逆 X_t は常微分方程式 $\dot{X}_t = -b(X_t), X_0 = x$ を満たす．定数係数の場合は，これを解いたものと見れるから，たしかに一般化となっている．

7.1.3　Brown 運動が定める確率ベクトル場

移流方程式は，時間変化するベクトル場 $\mathbb{R}_+ \to \mathrm{Map}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ による物理量の輸送を考えた．もし，ベクトル場が確率的であったら？前節の例はひとつの見本道に過ぎないとしたら？すなわち，前節ではスタート地点 $y \in \mathbb{R}^2$ を根源事象とみて，時間変化するベクトル場を確率過程と見たが，ここに新たにランダム性の発生源を加えるのである．

7.1.4　確率微分方程式

例 7.1.5 (空間的に一様な場合)**.** $b \in \mathbb{R}^2, \alpha = (\alpha^i_k)_{i,k\in[2]}$ が定める確率過程 $X_t(x) := x - \alpha B_t - bt$ $(t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}^2)$ を考える．X_t は，定数係数ベクトル場による輸送と，Brown 運動とを合成した運動に他ならない．実際，仮に B_t が t について微分可能であるならば，$\dot{X}_t = -\alpha\dot{B}_t - b$ となるから，時間発展するベクトル場 $-\alpha\dot{B}_t - b$ による移流であると考えられる．α が Brown 運動の強さと歪みの情報を含んでいる．ただし，Brown 運動の時刻 t における $y \in \mathbb{R}^2$ に関する分布は

$$P[B_t \in dy] = p(t,y)dy := \frac{1}{2\pi t} e^{-|y|^2/2t} dy$$

と表せる．

すると，X_t による輸送の平均値を

$$u(t,x) := E[f(X_t(x))]$$

とおけば，これは

$$q(t,x,z) := \frac{1}{2\pi t |\det \alpha|} \exp\left(-\frac{|\alpha^{-1}(z - x + bt)|^2}{2t}\right)$$

とおくことで

$$\begin{aligned}u(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x - al - bt) p(t,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(z) q(t,x,z) dz.\end{aligned}$$

と整理出来る．これは熱伝導方程式と呼ばれる放物型方程式の一般解であり，$q(t,x,z)$ が一般解と呼ばれるものである：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - b \cdot \nabla u, \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^2).$$

□

[†1] これが Kolmogorov が発見したものだった？

例 7.1.6 (変数係数の場合). α, b が共に $x \in \mathbb{R}^2$ に依存する場合，任意の $t > 0$ について，常微分方程式

$$\dot{X}_t = \alpha(X_t)\dot{B}_t + b(X_t) \quad (X_0 = x \in \mathbb{R}^2)$$

を考えたい．しかし B_t は微分可能でないから，積分形で代わりに表現することを考える．すなわち，$\dot{B}_s ds = \frac{dB_s}{ds}ds = dB_s$ とし，この右辺を定義することを考える．

$$X_t = x + \int_0 t\alpha(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds.$$

すると次の問題は，右辺第 2 項が Stieltjes の意味での積分として定義することは出来ない．B_t は有界変動でないので，線積分の発想はお門違いである．これは確率論的な考察で乗り越えることが出来る．

この確率微分方程式の解 X_t を求めれば，平均値 $u(t,x)$ は放物型偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^2 a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + b(x)\cdot\nabla u \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^2, a(x) := \alpha(x)^t\alpha(x))$$

を満たすことになる．これはいわば，確率過程 X_t から得られる平均処置効果のような統計量の 1 つが，偏微分方程式で記述される物理法則を満たすということに過ぎない．X_t は非常に豊かな情報を湛えていて，偏微分方程式はその 1 断面に過ぎないと言えるだろう． □

7.1.5 無限次元確率微分方程式

無限次元確率微分方程式

確率微分方程式はランダムなゆらぎを持つ常微分方程式であるから，同様にランダムなゆらぎを持つ偏微分方程式に当たる概念も自然に現れるはずである．

7.2 1 次元拡散過程

与えられた領域 U をほとんど確実に出ていく強 Markov 過程を拡散過程という．

記法 7.2.1. $W := C(\mathbb{R}_+)$ 上に確率測度の族 $(P_x)_{x\in\mathbb{R}}$ を考える．射影を $X_t := \mathrm{pr}_t : W \to \mathbb{R}; \omega \mapsto \omega(t)$ $(t \in \mathbb{R}_+)$ と表すと，この見本過程 $\mathbb{R}_+ \to \mathrm{Map}(W,\mathbb{R})$ は任意の $x \in \mathbb{R}$ について (W, P_x) 上連続．$\mathcal{B}_t := \sigma[X_s; s \leqslant t]$ とする．

定義 7.2.2 (diffusion process). 確率過程 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ が $P_x[X_0 = x] = 1$ と次の条件を満たすとき，$\mathcal{M} := (\mathcal{M}_x)_{x\in\mathbb{R}}, \mathcal{M}_x := \{X_t(\omega) \in \mathbb{R} \mid t \in \mathbb{R}_+, \omega \in (W, P_x)\}$ を，x から始まる**一様な連続強 Markov 過程**または**拡散過程**という．

(強 Markov 性) $x \in \mathbb{R}$ と有限な (B_t)-Markov 時刻 $\tau : W \to \mathbb{R}_+$，$E \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^1)$ について，$P_x[X_{\tau+t} \in E \mid \mathcal{B}_\tau] = P_x[X_t \in E]|_{x=X_\tau}$.

定義 7.2.3 (regular point, regular diffusion process). 拡散過程 $(\mathcal{M}_x)_{x\in\mathbb{R}}$ について，

(1) x は $\mathcal{M}$ の**正則点**であるとは，$P_x[\exists_{t\in\mathbb{R}_+}\ X_t > x] > 0, P_x[\exists_{t\in\mathbb{R}_+}\ X_t < x] > 0$ が成り立つことをいう．

(2) 任意の $x \in \mathbb{R}$ が正則点であるとき，$\mathcal{M}$ は**正則**であるという．

第 8 章

定常過程と時系列解析

8.1 定常過程

定常過程については，スペクトル分解とエルゴード定理が証明できる．弱定常過程は決定的な成分と純非決定的な成分とに分解出来る (Wold 分解).

定義 8.1.1 (weak / strong stationary stochastic process). 確率過程 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ について，

(1) (X_t) は $L^2(\Omega)$-過程で，$\forall_{t,s,h\in\mathbb{R}}\ m(t+h)=m(t), \Gamma(t+h,s+h)=\Gamma(t,s)$ が成り立つとき，すなわち m が定数で $\Gamma(s,t)$ は $|t-s|$ の関数であるとき，**弱定常過程**という．$\mathbb{R}\to L^2(\Omega)$ の連続性を仮定することもある．
(2) 自身の任意の平行移動 $(X_{t+h})_{t\in\mathbb{R}}$ $(h\in\mathbb{R})$ に分布同等であるとき，**強定常過程**という．
(3) $\mathcal{M}_t(X)$ を $\{X_s\}_{s\in[0,t]}\subset L^2(\Omega)$ の閉部分空間とする．これが $t\in\mathbb{R}$ に依らないとき，**決定的**であるといい，$\bigcap_{t\in\mathbb{R}} M_t(X)=\mathbb{R}$ のとき純非決定的であるという．

補題 8.1.2 . 過程 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ について，

(1) 強定常かつ $X_0\in L^2(\Omega)$ のとき，弱定常である．
(2) $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ が Gauss であるとき，弱定常性と強定常性とは同値.

8.2 信号処理の用語

The problem of optimal non-linear filtering (even for the non-stationary case) was solved by Ruslan L. Stratonovich (1959,[1] 1960[2]).[a]

[a] https://en.wikipedia.org/wiki/Filtering_problem_(stochastic_processes)

定義 8.2.1 (filtering problem).

定義 8.2.2 (innovation). 時系列 $(X_t)_{t\in T}$ について，X_t の観測値と，$\mathcal{F}_s$ $(s<t)$ による予測の値との差が定める過程を**新生過程**という．この過程が白色雑音になることは，予測可能な成分をすべて除去しきったとみなせるため，予測として理想的であると考えられる．

第 9 章

ミキシング過程

非可逆な熱力学的現象のモデルとして，物理学から最初にモデル化された．

第 10 章

超過程

時間パラメータ $\mathbb{R}_+$ を高次元化して，確率場を得た．さらに，これを無限次元空間，特に試験関数の空間とすると，これは見本道を超関数とする確率過程と見れる．そこでこれを**確率超過程**といい，超関数の空間上に測度を押し出す！

10.1 定義と構成

定義 10.1.1 . 写像 $X:\Omega\times\mathcal{D}(T)\to\mathbb{R}$ について，

(1) 次の 2 条件を満たす X を**狭義の超過程**という：
  (a) $\forall_{\phi\in\mathcal{D}(T)}\;X(-,\phi)\in\mathcal{L}(\Omega)$.
  (b) $X(\omega,-)\in\mathcal{D}'\;$ a.s. $\omega\in\Omega$
(2) 次の 2 条件を満たす X を**広義の超過程**という：
  (a) $\forall_{\phi\in\mathcal{D}(T)}\;X(-,\phi)\in L^2(\Omega)$.
  (b) 対応 $\phi\mapsto X(-,\phi)$ が殆ど確実に超関数 $\mathcal{D}\to L^2(\Omega)$ を定める．

定義 10.1.2 . 超過程 X の**特性汎関数**とは，次で定まる $C_X:E\to\mathbb{R}$ をいう：

$$C_X(\xi):=\int e^{iX_\xi(\omega)}dP(\omega),\quad \xi\in E.$$

10.1.1 Bochner-Minlos の定理

記法 10.1.3. E を加算な Hilbert 空間で，核型であり，$T\subset\mathbb{R}_+$ について $E\subset L^2(T)=:H\subset E^*$ を満たすとする．

定理 10.1.4 . 汎関数 $C:E\to\mathbb{R}$ は次の 3 条件を満たし，ある $n>p$ について埋め込み $T^n_p:E_n\to E_p$ が Hilbert-Schmidt 作用素になるとき，m の拡張である $(E^*,\mathcal{B})$ 上の測度 μ が一意に存在して，その台は E^*_n に含まれる．

(1) ある p について，$L^p(\Omega)$-連続である．
(2) 正定値．
(3) $C(0)=1$.

系 10.1.5 . E 上に 3 条件を満たす汎関数 $C:E\to\mathbb{R}$ が与えられたとき，$(E^*,\mathcal{B})$ 上に

$$C(\xi)=\int_{E^*}e^{i\langle x,\xi\rangle}d\mu(x)$$

を満たす確率測度 μ が唯一つ定まる．

定義 10.1.6 . C が定める超過程 $X:\Omega\to E^*$ に対して，系が定める測度 $\mu\in P(E^*)$ を**分布**という．

10.1.2 例

例 10.1.7. $C_{\sigma^2}(\xi)=e^{-\frac{\sigma^2}{2}\|\xi\|^2}$ $(\xi\in\mathcal{S})$ は特性汎関数である．よって $\mathcal{S}'$ 上に確率測度 μ_σ を定めるが，これを**分散 σ^2 のホワイトノイズ**という．

(1) L^2-連続な弱定常過程 X_t について，dM をランダム測度として

$$X_t = \int e^{it\lambda} dM(\lambda)$$

とスペクトル分解され，これが定める定常超過程のスペクトル分解は

$$\langle x, \xi \rangle = \int \widehat{\xi}(\lambda) dM(\lambda)$$

となる．この定常超過程がホワイトノイズであるとき，$E[|dM(\lambda)|^2] = d\lambda$ であり，したがってあらゆるスペクトルが一様に出てくる．この性質を**白色**といい，通信工学での雑音のモデルとなる．

(2) 特に，白色雑音は Gauss 型とは限らず，例えば Poisson 型などもある．

□

10.1.3　定常超過程

定義 10.1.8 . $(S_t\xi)(u) := \xi(u-t)$ を E 上の平行移動作用素とする．任意の t について S_t は E の自己同型であり，$C(S_t\xi) = C(\xi)$ を満たすとき，C の定める超過程は**定常超過程**であるという．

命題 10.1.9 . ホワイトノイズは定常超過程である．

10.2　ノイズ

一般に，物理的な干渉過程のモデルをノイズ過程という．そして工学系はノイズ過程の合成にさらされており，ここから真の予測可能成分を分離することが普遍的な目標となる (エアバッグの作動など)．また通信理論は，ノイズに対して頑健な符号化法の開発が重要な問題となる．

> The better the probabilistic model of a noise process, the better the chance to avoid unpredictable consequences of noise. Therefore, it is indispensable that mathematicians provide effective noise models. On the other hand, it is indispensable that engineers are familiar with the mathematical background of noise modelling in order to handle noise models in an optimal way.[25]

10.3　点過程

確率過程の概念を一般化し，空間にランダムに点を打ちたいとする．それも一点ではなく多粒子系を考えたい．そこで，測度をランダム化することを考える．任意の見本過程が可算な定義域を持つとき，点過程という．すなわち，$\mathbb{P}(T, U)$-値過程をいう．

歴史 10.3.1. 一般の可測空間上の点過程 (discrete chaos) を考察したのは [Wiener and Wintner, 1943] で，点測度を用いた現代的な定式化を与えたのは [Moyal, 1962] である．

10.3.1　点関数の定義と性質

粒子系を $\mathbb{R}^n$ で考えるのではなく，$\mathbb{R}$ に点を打って考えるというモデルの転換がある．そこで可算粒子系を考えて見ると，これは $\overline{\mathbb{N}}$-値の完備 σ-有限測度とも，有限の台を持つ関数ともみなせる．

補題 10.3.2 . $(S, \mathcal{B}(S), \mu)$ を完備可分距離空間上の完備な σ-有限測度空間とする．次が成り立つ：

(1) $\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{E'\subset E}\ 0 < \mu(E') < \epsilon$.

(2) $\forall_{\alpha\in[0,1]}\ \exists_{E'\subset E}\ \mu(E') = \alpha\mu(E)$.

(3) $\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\{E_i\}\subset\mathcal{S}}\ E=\sum_{k\in[n]}E_k, \mu(E_k)<\epsilon.$

定義 10.3.3 (configuration, proper, configuration space, point function). 完備可分距離空間上の可測空間 $(S,\mathcal{B}(S))$ について，

(1) この上の $\overline{\mathbb{N}}$-値の完備 σ-有限測度を**配置**という．[†1]
(2) 配置が $\forall_{x\in S}\ m(\{x\})\in\{0,1\}$ を満たすとき，**固有**であるという．
(3) 配置の全体を $\mathcal{M}(S)$ で表し，漠位相を入れたものを**配置空間**という．
(4) $p:S\to\overline{\mathbb{N}}$ が**点関数**であるとは，可算な台 $D_p:=\{x\in S\mid p(x)>0\}\subset S$ を持つことをいう．

補題 10.3.4 .

(1) 任意の配置 m は，可算個の点 (重複を許す)$\{s_i\}\subset S$ を用いて $m=\sum_{i\in\mathbb{N}}\delta_{s_i}$ と表せる．
(2) S 上の配置と点関数とは 1 対 1 対応する．

記法 10.3.5.

(1) $T_1,T_2,\cdots$ を $[l,r]$ $(-\infty<l<r\leqslant\infty)$ という形の区間とし，Borel σ-代数 $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2,\cdots$ によって可測空間とみなす．
(2) $U_1,U_2,\cdots$ を $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2,\cdots$ を σ-代数とする可測空間とし，**状態空間**または**相空間**という．

定義 10.3.6 (point function, trivial, discrete, graph, restriction).

(1) $p:T\to U$ が**点関数**であるとは，可算な部分集合 $D_p\subset T$ 上で定義された部分関数をいう．
(2) $D_p=\varnothing$ のとき**自明**であるといい，D_p が集積点を持たないとき**離散**であるという．
(3) 点関数の**グラフ**とは $G(p):=\{(t,p(t))\in T\times U\mid t\in D_p\}$ をいう．これは可算集合である．
(4) 集合 $E\subset T\times U$ 内にある $G(p)$ の点の数を $N(p;E):=|G(p)\cap E|\in\overline{\mathbb{N}}$ $(E\subset T\times U)$ と表す．これは p の**制限** $p|_E$ の定義域の濃度に等しい．
(5) 点関数の全体を $\mathbb{P}(T,U)$ で表す．$\{p\in\mathbb{P}\mid N(p,E)=k\}_{E\in\mathcal{T}\times\mathcal{U},k\in\overline{\mathbb{N}}}$ が生成する σ-代数によって可測空間とみなす．

10.3.2　点過程の定義と例と性質

測度値の過程を点過程というのである．したがって，点過程は測度空間上の確率測度となる．白色雑音も $(\mathcal{S}',\mathcal{B}(\mathcal{S}'))$ 上の確率測度である．

定義 10.3.7 .

(1) 確率変数 $X:\Omega\to\mathcal{M}(S)$ を，S 上の**偶然配置**または**ランダム点測度**または**点過程**または**確率点場**という．
(2) $\mu(E):=E[X(E)]$ $(E\in\mathcal{S})$ は $(S,\mathcal{S})$ 上の測度を定め，これを点過程 X の**平均 (測度)** という．

例 10.3.8 (多項偶然測度)**.** 点過程 $X:\Omega\to\mathcal{M}(S)$ が**多項配置**であるとは，任意の分割 $S=\sum_{r=1}^{d}E_r$ $\{E_r\}\subset\mathcal{S}$ に対して，結合分布 $(X(E_1),\cdots,X(E_d)):\Omega\to\overline{\mathbb{N}}^d$ が d 次元の多項分布に従うことをいう．　□

補題 10.3.9 .

(1) 平均 μ に対して，対応する多項配置が法則同等を除いて一意に定まる．
(2) 任意の σ-有限完備測度 μ に対して，これを平均に持つ多項配置が存在する．

定義 10.3.10 (point process / random point function, sample point function). 可測関数 $X:\Omega\to\mathbb{P}(T,U)$ を**点過程**または**ランダム点関数**という．X_ω を**見本点関数**という．

補題 10.3.11 . 2 つの点過程 $X_1,X_2:T\to U$ について，次の 2 条件は同値．

[†1] Radon 測度に制限することもある．

(1) 法則同等である：$P^{X_1}=P^{X_2}$.
(2) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{\{k_i\}\subset\mathbb{N}}\ \forall_{\{E_i\}\subset T\times U}\ P[\forall_{i\in[n]}\ N(X_1,E_i)=k_i]=P[\forall_{i\in[n]}\ N(X_2,E_i)=k_i]$.

定義 10.3.12 (discrete, differential, stationary). 点過程 $X:T\to U$ について，

(1) 離散であるとは，X_ω は殆ど確実に離散であることをいう．
(2) σ-離散であるとは，増大列 $\{U_n\}\subset\mathcal{U}$ が存在して，$X|_{U_n}$ が離散で，$X=X|_{\cup_n U_n}$ a.s. が成り立つことをいう．
(3) 微分であるとは，任意の互いに素な集合 $\{T_i\}\subset\mathcal{T}$ について，$(X|_{T_i})_{i\in[n]}$ が独立であることをいう．
(4) 定常であるとは，平行移動に関して確率分布が不変であることをいう．

10.3.3 Poisson 点過程

定義 10.3.13 (Poisson 偶然測度). 完備可分距離空間上の原子を持たない σ-有限測度空間 $(S,\mathcal{B}(S),m)$ について，**強度 m の Poisson ランダム測度**とは，体積確定集合に添字付けられた確率過程 $\{M(A)\}_{A\in\mathcal{M}^1}\subset L^2(\Omega)$ であって，次を満たすものをいう：

(1) $\forall_{A\in\mathcal{M}^1}\ M(A)\sim\mathrm{Pois}(m(A))$.
(2) $\forall_{A_1,\cdots,A_n\in\mathcal{M}^1}$ が互いに素ならば，$M(A_1),\cdots,M(A_n)$ は独立である．

定理 10.3.14 (Poisson 測度の構成と表示). 完備可分距離空間上の原子を持たない σ-有限測度空間 $(S,\mathcal{B}(S),m)$ について，

(1) m を強度とする Poisson 偶然測度が存在する．
(2) 次のように表せる：

$$M(A)=\sum_{j\in[N]}\delta_{X_j}(A)\quad(A\in\mathcal{M}^1,X_j\in L(\Omega;S),N\in L(\Omega;[0,\infty]),\forall_{j\geqslant k}\ X_j\neq X_k\ \text{ a.s.}).$$

例 10.3.15.

(1) 強度 $dt\otimes\mu$ で与えられる $(\mathbb{R}_+\times S,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{B}(S))$ 上の Poisson 点測度を，U 上の**定常 Poisson 点過程**という．
(2) $S=\mathbb{R}^d$ で μ が Lebesgue 測度のとき, 付随する Poisson 点過程はさまざまな不変性を持ち, 配置空間 $\mathcal{M}(S)$ 上の Lebesgue 測度の役割を果たす．

□

補題 10.3.16 (Poisson point process (点関数からみた Poisson 点過程)). $X:\mathbb{R}_+\to U$ が Poisson 点過程とは，σ-離散的かつ微分的かつ定常的な点過程に同値．

10.3.4 Gauss 点過程

$S\subset\mathbb{R}^2$ 上の Gauss 点測度を白色雑音という．換言すれば，試験関数の空間 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 上の測度の空間 (したがって双対空間) 上の Gauss 確率測度を白色雑音という．実はこれは，(定常増分過程たる)Brown 運動の超関数微分 (測度のようなもの) として得られる可分な定常過程とみなせる．ホワイトノイズとは花粉にとっての水中の微粒子である．

10.4 確率超過程

点過程の概念を一般化して，ランダム測度の過程を考える．これは逆に体積確定測度で添字付けられた確率場ともみなせる．この 2 つの見方を併せてノイズと呼ぶ．

10.4.1　確率超過程

試験関数の空間 $\mathscr{D}$ の双対空間 $\mathscr{D}'$ に値を取る過程を**確率超過程**という．これは，いくつかの条件を満たす，$\mathscr{D}$ で添字付けられた実過程とも見れる．

補題 10.4.1．次の 2 条件を満たす過程 $(X_\varphi)_{\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})}$ が定める $\Omega\to\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ は可測になる：

(1) 線形性：$X_{a\varphi+b\psi}=aX_\varphi+bX_\psi$ a.s.
(2) 連続性：$\mathscr{D}$ での収束列 (φ_i) は，法則収束する確率変数列 (X_{φ_i}) を定める．

10.4.2　ノイズ

測度確定集合で添字付けられた中心化された Gauss 過程であって，互いに相関を持たない性質の良いものとしてノイズを定義する．すると Ω 上の測度値確率変数とも見れる．超関数は測度の一般化なのであった．

定義 10.4.2．$(\Omega,\mathcal{S},P)$ を確率空間，$(H,\mathscr{H},\mu)$ を測度空間，その測度確定な集合を $\mathscr{H}_\mu:=\{M\in\mathscr{H}\mid\mu(M)<\infty\}$ で表す．

(1) 体積確定集合で添字付けられた確率過程 $\{X_M\}_{M\in\mathscr{H}_\mu}\subset\mathcal{L}(\Omega;\mathbb{R})$，または，測度値確率変数 $\Omega\to\mathscr{M}(H,\mathscr{H})$ が次の条件をみたすとき，**μ-ノイズ**という：
  (a) 中心化：$\forall_{M\in\mathscr{H}_\mu}\ E[X_M]=0$.
  (b) 分散：$\forall_{M\in\mathscr{H}_\mu}\ E[(X_M)^2]=\mu(M)$.
  (c) $\forall_{M_1,M_2\in\mathscr{H}_\mu}\ M_1\cap M_2=\emptyset\Rightarrow X_{M_1\sqcup M_2}=X_{M_1}+X_{M_2}$ a.s..
  (d) $\forall_{M_1,M_2\in\mathscr{H}_\mu}\ M_1\cap M_2=\emptyset\Rightarrow E[X_{M_1}X_{M_2}]=0$ a.s..

10.4.3　ホワイトノイズ

一般の 2 階の確率超過程はホワイトノイズの線形変換とみなせる．

10.5　ホワイトノイズ解析

時系列として独立同分布の確率変数列で絵あり，定常時系列として持つスペクトルはフラットすなわち無色である．このような偶然量はノイズと呼ぶのにふさわしい．それ絵はノイズとして見ると厄介なものかもしれないが，最大の情報量をもつので通信の理論には大いに活躍の場がある．そして，一般のガウス過程の中でも元素的なもののとして特徴付けられる．それは「揺らぎ」の典型であり，基本となる．

An innovative approach to random fields: Applications of white noise theory.

第 11 章

参考文献

参考文献

[Dellacherie and Meyer, 1978] Dellacherie, C. and Meyer, P. A. (1978). Probabilities and potential. Amsterdam ; New York : North-Holland Pub. Co.

[Doob, 1990] Doob, J. L. (1990). Stochastic Processes. New York: Wiley, 2 edition.

[Hiroyuki and Taniguchi, 2016] Hiroyuki, M. and Taniguchi, S. (2016). Stochastic Analysis: Ito and Malliavin Calculus in Tandem. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press.

[Jacod and Shiryaev, 2003] Jacod, J. and Shiryaev, A. N. (2003). Limit Theorems for Stochastic Processes. Grundlehren der mathematischen Wissenschften. Springer Berlin, Heidelberg, 2 edition.

[Le Gall, 2016] Le Gall, J.-F. (2016). Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus. Graduate Texts in Mathematics. Springer Cham.

[Liptser, Robert S., and Shiryaev, A. N., 2001] Liptser, Robert S., and Shiryaev, A. N. (2001). Statistics of Random Processes I: General Theory. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer Berlin, Heidelberg, 2 edition.

[Meyer, 1966] Meyer, P. A. (1966). Probability and Potentials. Waltham, Mass. : Blaisdell Pub. Co.

[Moyal, 1962] Moyal, J. E. (1962). The general theory of stochastic population processes. Acta Mathematica, 108:1–31.

[Nualart, David, and Nualart, Eulalia, 2018] Nualart, David, and Nualart, Eulalia (2018). Introduction to Malliavin Calculus, volume 8 of Institute of Mathematical Statistics Textbooks. Cambridge University Press.

[Popov, 2021] Popov, S. (2021). Two-Dimensional Random Walk: From Path Counting to Random Interlacements. Institute of Mathematical Statistics Textbooks. Cambridge University Press.

[Prato, 2014] Prato, G. (2014). Introduction to Stochastic Analysis and Malliavin Calculus. Publications of the Scuola Normale Superiore. Edizioni della Normale Pisa.

[Revuz and Yor, 1999] Revuz, D. and Yor, M. (1999). Continuous Martingales and Brownian Motion. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin, Heidelberg, 3 edition.

[Stroock and Varadhan, 2006] Stroock, D. W. and Varadhan, S. R. S. (2006). Multidimensional diffusion processes. Springer Berlin, Heidelberg, 1 edition.

[Wiener and Wintner, 1943] Wiener, N. and Wintner, A. (1943). The discrete chaos. American Journal of Mathematics, 65(2):279–298.

参考文献

[1] David Nualart and Eulalia Nualart (2018). *Introduction to Malliavin Calculus*. Cambridge University Press.
[2] 伊藤清 (1991) 『確率論』(岩波基礎数学選書).
[3] Olav Kallenberg. (2021). *Foundations of Modern Probability*. 3rd. Springer.
[4] Lipster, R. S. and Shiryayev, A. N. (1989). *Theory of Martingale*. Kluwer Academic Publishers.
[5] Jean Jacod, and Albert N. Shiryaev. (2003). *Limit Theorems for Stochastic Processes.*
[6] Liptser, R. S. and, Shiryaev, A. N. (1974). *Ststistics of Random Processes, I.* General Theory. Springer. (Second Revised and Expanded Edition 2001).
[7] Michael Scheutzo. (2018). *Stochastic Processes*. Lecture Notes, Technische Universitat Berlin.
[8] Pierre Brémaud. (2020). *Probability Theory And Stochastic Processes*. Springer.
1．マルチンゲール
[9] Jean-Francois Le Gall. (2013). *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus.* Springer.
[10] Daniel Revuz, and Marc Yor. (1999). *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3rd. Springer.
[11] Schilling, R. L. (2005). *Measures, Integrals and Martingales.* Cambridge Univ. Press.
[12] Schilling, R. L., and Partzsch, L. (2012). *Brownian Motion: An Introduction to Stochastic Processes.* De Gruyter.
[13] Chow, Y. S., and Teicher, H. (2003). *Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales.* Springer Texts in Statistics.
[14] Meyer, P. A. (1966). *Probability and Potentials.* Blaisdell Publishing Company.
[15] Dellacherie, C., and Meyer, P. A. (1978). *Probabilities and Potential.* North Holland.
[16] Dellacherie, C. (1972). *Capacités et processus stochastiques.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.
[17] Doob, J. L. (1953). *Stochastic Processes.* John Wiley & Sons.
3．確率過程の応用を扱った書籍は以下.
[18] Karlin, S. (1966). *A First Course in Stochastic Processes.* Academic Press.
4．Gauss 過程
[19] 飛田武幸，櫃田倍之. (1976). 『ガウス過程 表現と応用』. (紀伊國屋数学叢書 9).
[20] 飛田武幸. (1975). 『ブラウン運動』. (岩波書店).
5．ブラウン運動と確率解析について.
[21] Peter Mörters (Univ. of Bath), and Yuval Peres (Microsoft Research). (2010). *Brownian Motion.*
[22] 松本裕行, 谷口説男 (2016). *Stochastic Analysis: Itô and Malliavin Calculus in Tandem.* (Cambridge Studies in Advanced Mathematics).
確率過程の逆問題
[23] 国田寛 (1976) 『確率過程の推定』(数理解析とその周辺 14，産業図書).
その他
[24] Williams - Probability with Martingales
[25] Schaffler - Generalized Stochastic Processes
[26] Durrett - Probability: Theory and Examples

歴史 11.0.1 (Russia 学派). Kolmogorov の居た Moscow 州立大学と，Steklov 数学研究所が中心.

(1) Kolmogorov 03-87：Moscow 州立大学を卒業後もそこで教えて，Arnold, Dynkin, Gelfand, Martin-Lof, Sinai, Prokhorov, Shiryaev らを教える.

(a) Luzin が指導教官であったが，大粛清にあい，Luzin に対して盗用・身内贔屓などの証言をして職を奪った．これが事実なのか，なにかの力が働いたのかは不明で，関与者は一切この話をしたがらなかった．
(b) Moscow 大学卒業後，2 年ゲッティンゲンやミュンヘン，パリを旅行して，すぐにそこの教授に.

(2) Robert Liptser 36-19：確率過程とその逆問題.
  (a) Ukraine 生まれで，モスクワ航空大学 (Moscow Aviation Institute) で電気工学を学ぶが，6 年後に Moscow 州立大学で数学で 2 つ目の学士を取る．MIPT(Moscow Institute of Physics and Technology)[†1] で Ph.D. を取ってそのまま研究するが，58 歳のときにロシアを出てイスラエルのテルアビブ大学へ.
  (b) 主な応用先は確率制御などの工学とフィルター問題などの統計学で，マルチンゲールと条件付き Gauss 過程とに貢献がある.
(3) Albert Shiryaev 34-：
  (a) Moscow 州立大学を卒業してからずっと Steklov 数学研究所[†2].
(4) Ildar A. Ibragimov 32-：
  (a) Leningrad 州立大学で Yuri Linnik に学ぶ.
  (b) Linnik をついで Steklov の統計手法ラボの所長に.
(5) Vladimir I. Bogachev 61-：Moscow 州立大学を卒業後，そこの教授に．最も論文が引用されているロシアの数学者の一人.
(6) Alexei Borodin 75-：現在 MIT.
  (a) ウクライナのドネツィク州立大学の数学教授の息子に生まれ，数学オリンピックで銀メダル.
  (b) その後モスクワ州立大学へ．学部を出たら米国の Pennsylvania 大学へ.

歴史 11.0.2 (France 学派)**.** Malliavin が教えていたパリ第六大学 (Paris 6, UPMC, Pierre and Marie Curie University) が中心.

(1) Paul Malliavin 25-10：調和解析と確率解析.
  (a) Strook が指摘している通り，調和解析から確率論に入ったのは Wiener に似ている.
(2) Jacques Neveu 32-16 パリ第六大学で教えていた，戦後のパリ学派の復興者の一人.
(3) Jean Jacod 44-：Neveu に学ぶ．パリ第六大学で教える.
(4) **Marc Yor** 49-14：パリ第六大学で学び，その後もそこで教え続ける．Brown 運動とその数理ファイナンスへの応用の大家.
(5) **Jean-François Le Gall** 59-：Yor に学ぶ.
(6) Fabrice Baudoin：Yor に学び，現在 Connecticut 大学教授.

エコール・ノルマルもいる.

(1) Maurice Frechet 78-73：高等師範学校.
(2) Levy 86-71：高等師範学校．Hadamard と Volterra に学ぶ.
(3) Lucien Le Cam 24-：Berkeley で漸近理論を打ち立てる．接触性，漸近正規性は彼による.
  (a) 農家の出身で学ぶのに極めて苦労したが Paris 大学へ．学士を取ると hydroelectric utility として働きながら Prais 大学の統計セミナーに 5 年出続ける.
  (b) 26 で UC Berkeley に呼ばれる．もともと 1 年居たら utility として戻って働く予定であったが，Ph.D. まで取る.
(4) Paul-Andre Meyer 34-03：Strasbourg(パリ大学の別名) 派の創始者.
  (a) Ecole Normale で学び，Levy の弟子である Michel Loeve に学ぶ.
  (b) 博士が終わると渡米し Doob と研究.
  (c) フランスに返って Strasbourg でセミナーをし，確率過程論の中心地とした.
(5) Daniel Revuz 36-：Jacques Neveu と Meyer に学ぶ．Yor との局所マルチンゲールの研究で有名.
(6) Claude Dellacherie 43-
  (a) Strasbourg 大学で Meyer の下で学ぶ.
  (b) IAS と CNRS で働き，現在は Rouen 大学.
(7) Pierre Brémaud 45-(?)：通信学者

[†1] Landau
[†2] Arnold, Perelman

(a) ポリテクニーク出身で，72 年に UC Berkeley で電気工学と CS の Ph.D！
(b) エコール・ポリテクニック応用数学科講師なども経験したが，現在はスイスの PEFL(連邦工科大学 Lausanne 校) の通信システム分野の 3 つのコアコースのうちの 1 つを教えている．

歴史 11.0.3 (U.S. 学派)**.** Birkhoff, Bochner らが居た Harvard 大学で，調和解析が盛んであった．そこ中心．Illinois 大学には Doob と Ranga Rao ら．Chicago 大学には Billingsley ら，Princeton に Feller で，MIT に Wiener．NY 大学には Courant 数理科学研究所があり，そこには Varadhan, Donsker, McKean ら．Lehmann, Bickel, Le Cam ら統計学者は Neyman が統計学部を作った UC Berkeley から．

(H1) Joseph L. Doob 10-04：Wiener, Malliavin 同様，調和解析出身．
  (a) Harvard で Joseph L. Walsh の指導を受ける．
  (b) その後は Princeton で 3 年ポスドクをしたのみで，Illinois 大学で定年まで教える．
  (c) しかしその後 1929 の大恐慌の影響で仕事が見つからず，Koopman の助言で統計学者の Harold Hotelling の予算で彼と働くことになる．そこで，Doob は確率論の分野に入ることとなった．
  (d) その後 33 年に Kolmogorov の公理が発表されるのは，伊藤清と同じ道を辿る．
(H2) William Gemmell Cochran 09-80：英国出身で，Cambridge で Wishart に学び (Karl Pearson の弟子)，Rothamsted という Fisher な路線を辿った後に渡米し，主に Harvard で教える．この Cochran に学んだのが Rubin である．
(H3) Donald Rubin 43-：Harvard 出身でそこで教える．
  (a) Harvard で Ph.D. プログラムに 2 回参加している．初めは心理学で，その後統計で入り直す．
(H4) 他にも，James Robins と Andrea Rotnitzky は Harvard の公衆衛生部門と生物統計部門にいる．

なお，Rubin との共著が多い Paul R. Rosenbaum は Pennsylvania 大学に勤めていた．

(NY1) Henry P. McKean, Jr. 30-：NY 大学で教える．
  (a) Willian Feller の下で Princeton で Ph.D. を得る．Daniel Stroock も教える．
(NY2) Daniel W. Stroock 40-：楠岡重雄と Malliavin 解析を，Varadhan と拡散過程を研究．
  (a) Harvard から Mark Kac の居た Rockefeller 大学へ．
  (b) NY 大学から現在 MIT へ．
(NY3) Donsker, M. D. 24-91：NY 大学．
  (a) Varadhan との共著が増えてから，NY 大学へ移動．

次は Stroock もいる MIT.

(MIT1) Daniel W. Stroock 40-：
  (a) 博士 (Rockefeller 大学) は Mark Kac に教わる．Courant 数学研究所，Colorado 大学で教えたのち，MIT にて教授．伊藤清の確率解析にいち早く反応し，楠岡茂雄と Malliavin 解析に基本的な貢献をした先駆者で，その後は Varadhan との拡散過程の研究で有名．
(MIT2) Whitney K. Newey 54-：計量経済学．
(MIT3) Victor Chenozhukov 74-
  (a) Illinois 大学で統計を，Stanford で経済学を学ぶ．

統計は西海岸を中心に．UC Berkeley には Jerzy Neyman が居た．

(UCB1) Erich Leo Lehmann 17-09：UC Berkeley で Jerzy Neymann の下で学ぶ．
(UCB2) Peter J. Bickel 40-：UC Berkeley
(UCB3) Mark van der Laan 67-：Utrecht 大学出身だが，UC Berkeley で教えている．

歴史 11.0.4 (米へ移った学派)**.** (1) Rabi Bhattacharya 37- ：バングラデシュ出身．
  (a) Chicago 大学の Billingsley の下で Ph.D. 多次元 CLT の収束速度の問題を解く．
  (b) Arizona 大学を中心に教えていた．78 年に Ghosh, J. K. と共に形式的 Edgeworth 展開の正当性の問題を解く．
(2) Olav Kallenberg 39-：Sweden 出身．交換可能な確率過程．
  (a) Auburn 大学へ渡米する．

   (b) ところで Lars Hormander も Sweden．卒業も教員も
(3) David Nualart 51- スペイン
   (a) Barcelona 大学を卒業してそこで教えてから，Kansas 大学へ渡米.
(4) Judea Pearl 36-：計算機科学者，哲学者.
(5) Yuval Peres 63-：イスラエル出身.
   (a) Hebrew 大学で Hillel Furstenberg に学ぶ.
   (b) その後ポスドクで米国に渡り，31 歳で UC Berkeley で教授に.
   (c) 06 年に Microsoft Research の理論グループに加入し，principal researcher に.

歴史 11.0.5 (インド学派)**.** Rao の教えていた ISI (Indian Statistical Institute) 中心．Rao の弟子である (2)〜(5) は"famous four" と呼ばれる.

(1) C. R. Rao 20-：Cambridge 大学で Ronald Fisher 90-29 に学ぶ.
(2) S. R. S. Varadhan 40-：Strook と拡散過程，Donsker と大偏差原理の研究.
   (a) Rao の下で博士号を取るが，その degence のときに Rao が Kolmogorov も呼んだ.
(3) Parthasarathy, K. R. 36-：Steklov などで Kolmogorov と働く.
(4) Varadarajan V. S. 37-19：確率論から表現論へ移り，そこで活躍.
(5) Ramaswamy Ranga Rao -21：Illinois 大学教授，Lie 群・Lie 代数と統計.

歴史 11.0.6 (ドイツ語圏)**.**

(1) Peter J. Huber 34-：ETH Zurich 大学で Echmann という純粋数学者に指導を受ける.
(2) Pierre Bremaud：スイス連邦工科大学ローザンヌ校 EPFL(Ecole polytechnique federale de Lausanne)
(3) Michael Scheutzow 54- ：ドイツ Berlin 工科大学 (TU Berlin)
(4) René Schilling：ドイツ Dresden 大学 (TUD).

歴史 11.0.7 (イタリア学派)**.**

(1) Giuseppe Da Prato ：Roma Sapienza 大学（ローマにある国立大学３つのうちの最も古いもの，他２つは戦後）.
(2) Stefano M. Iacus：Milan 大学教授.
(3) Paolo Baldi：Roma "Tor Vergata"大学

歴史 11.0.8 (オランダ学派)**.** (1) Richard D. Gill 51-：Utrecht 大学．計数過程と生存改正.
(2) Aad van der Vaart 59-：アムステルダム自由大学 (Vrije Universiteit Amsterdam) → Leiden 大学→ 21 年に Delft 大学.
(3) Mark van der Laan 67-：Utrecht 大学出身だが，UC Berkeley で教えている．Gill と，Bickel にも学ぶ．博士論文からセミパラメトリックモデルの研究をしている.