目次

モダンな解析学は Hilbert が初めて Bourbaki が完成させた公理化によって発展した．統一的な理解と数学内での相互作用が進み，代数幾何学を筆頭に荘厳な理論が完成した．が，偏微分方程式論や微分幾何学などでは，非線形的な対象など，公理化が難しい分野は発展しないという副作用もあった．そこで，今一度，個別具体的な対象に戻る機運が迫っている．このあとは，確率論による再統一が待っているのであろうか？

面積，体積，確率，スペクトル，フラクタル．これらはいずれも数学的形式としては全く等価で，σ-代数の射である．

積分とは有界線型汎函数である．この見地に到達する 1 つの構成法が Lebesgue のもので，L^p 空間やソボレフ空間を完備とする．例えば，可積分性や，微積分の基本公式は，$L^1(X)$ という空間上で与えられる，という描像がはっきりした．

このように，あまりに複雑なだけで，解析学に代数的なアプローチを可能にした基盤が，Lebesgue 積分論である．

次に読みたい本には，Jürgen Jost. (1995). *Riemannian Geometry and Geometric Analysis* などがある．

第 1 章

$\mathbb{R}^d$ 上の Lebesgue 測度論

集合代数 $P(X)$ は次のような構造を持つ．

(1) 包含射による $2 = \mathrm{TV}$ 上の豊穣圏である．

(2) 完備な Boole 代数である．

(3) 順序集合である (poset category).

(1),(2) により，集合という形式は論理を完全に内包する．集合演算についての命題は 2 上の豊穣圏に翻訳され，Boole 代数の議論に帰着する．(2),(3) の構造を $[0,\infty],\mathbb{R},\mathbb{C}$ などの構造に写す射が**測度**であり，殆どの人類の認知形態はこの形式に沿う．

このように，函数解析などの，解析学に代数的なアプローチを導入する下地を作ったのが Lebesgue 積分論であるが，集合に関係するレベルでは未だに基礎論的な困難が深い．そこで，まずこの章ではこの問題を扱う．

1.1　Lebesgue 測度論の歴史

関数の問題が，現在の函数解析の世界観を生んだ．Lebesgue 積分論または測度論は，そのための構成論にあたる，ごく 1 ピースに過ぎない．

歴史 1.1.1 (年表).

1854.　Riemann による定積分の定義「三角級数によって表現できる関数について」

1872.　Weierstrass による至ところ微分不可能な関数の構成.

1878.　Darboux の定理.

1881.　Jordan による有界変動関数の導入と，1887 年の長さ有限性との関連.

1883.　Cantor の 3 進集合.

1890.　Peano による空間を埋め尽くす曲線の構成.

1898.　Borel の可測集合.

1902.　Lebesgue による測度と積分の理論.

1905.　Vitali による非可測集合の構成.

1906.　Fatou による Lebesgue の理論の複素関数論への応用（博士論文，Poisson integral of an arbitrary measure on the unit circle について）．初の Lebesgue の理論の実用である．[†1]

[†1] Fatou は複素力学系の開拓者となった．足助先生と繋がる．

1.1.1　Riemann 積分の精緻化

Riemann 可積分性を特徴付けたのも Lebesgue の仕事であるが，それは du Bois-Reymond の定理を継承して，高度に位相論的な議論であった．

定義 1.1.2 (Riemann integrability). 上 Riemann 積分と下 Riemann 積分がいずれも有限で，値が一致するとき，Riemann 積分可能という．

系 1.1.3 (Darboux の定理 (1878) の系). 有界関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について，次の 2 条件は同値．

(1) f は Riemann 可積分である．

(2) $\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{n\in\mathbb{N}}\ \exists_{\Delta=\{a=x_0<\cdots<x_n=b\}\subset[a,b]}\ \sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)\leqslant\epsilon.$

定義 1.1.4 (oscillation). 関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ の点 $x_0\in[a,b]$ における**連続度**とは，

$$\omega_f(x_0)=\omega(x_0;f):=\lim_{n\to\infty}\omega(J_n;f),\qquad \omega(J_n;f)=\sup_{x\in J_n}f(x)-\inf_{x\in J_n}f(x)\quad (J_n:=[x_0-1/2n,x_0+1/2n]\cap[a,b]).$$

$\omega_f(x_0)=0$ は，f が x_0 にて連続であることに同値．

定理 1.1.5 (du Bois-Reymond (1882)). 有界関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について，次の 2 条件は同値．

(1) f は Riemann 可積分である．

(2) $\forall_{\eta>0}\ \forall_{\epsilon>0}\ E(\eta):=\{x_0\in[a,b]\mid\omega_f(x_0)\geqslant\eta\}$ は，Lebesgue 測度が ϵ より小さいような「有限個の一点でない閉区間の和」に含まれる，

定理 1.1.6 (Lebesgue (1902)). 有界関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について，次の 2 条件は同値．

(1) f は Riemann 可積分である．

(2) f の不連続点は Lebesgue 零集合である（長さの総和がいくらでも小さいような，高々可算個の開集合の和で被覆できる）．

こうすると，Dirichlet 関数は Riemann 可積分でないが，$L^1(\mathbb{R})$ の完備性のためには，これは可積分で積分 0 にしたい．

1.1.2　Riemann 積分の拡張としての Lebesgue 積分

すると，選択公理を認めないならば，全ての関数について Lebesgue 和 $\overline{S}\in[0,\infty]$ が定まる．Riemann 和のように，無限大に発散することに加えて「存在しない」ということがない．これが $E[|X|]<\infty$ などという書き方の真意である！

記法 1.1.7. $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ を**有界とは限らない**非負関数とする．

(1) $y_0=0,y_n\to\infty$ を満たす単調増加列 $\{y_n\}\subset\mathbb{R}_+$ を y 軸の分割 Δ という．

(2) これに対して，$E_n:=f^{-1}([y_n,y_{n+1}))$ とおくと，これは $[a,b]$ の分割である．

(3) $\underline{S}^\Delta:=\sum_{n\in\mathbb{N}}y_n\cdot m(E_n),\overline{S}^\Delta:=\sum_{n\in\mathbb{N}}y_{n+1}\cdot m(E_n)$ を，Lebesgue の和という．

定理 1.1.8 . 非負関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ について，$\{\overline{S}^\Delta\}_{\Delta\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}}\subset\mathbb{R}_+$ が有界ならば，$0\leqslant\underline{S}=\overline{S}$．

Lebesgue 和の場合は，$\overline{S}=\underline{S}$ が既に成り立っている．この点こそ，関数 f に即して $[a,b]$ を分割した Lebesgue の着想の適切性を示している．とは言っても，のちに判明するように，$\mathbb{R}$ 上には「点列」「分割」では迫れないものがあった，ということである．

1.1.3　Fourier 係数による関数の構成

確率過程も，関数も，適切な基底をとって係数から構成したい．Riemann 積分の至らない点は，$\mathcal{R}^1(\mathbb{R})$ が完備でないということであるが，これの対応物が見つからない点で現れる．実はこの問題の逆，Fourier 係数を求めたいということが，歴史上初めて積分の厳密な定義を要請した原動力であった．

問 1.1.9 (Fourier 係数を指定して得る関数はどのような関数か？)**.** Fourier による熱方程式の解法 (1810s) は，本質的に，初期温度分布 $u(0,x)=f(x)$ の Fourier 級数を求めよ，という問題に帰着する，という理論であった．Riemann 積分可能な関数全体からなる集合 $\mathcal{R}\subset\mathcal{L}^1([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ は Fourier 展開可能であるから，写像 $\mathcal{R}\to l^2(\mathbb{Z})$ が定まる．正確には，次の通り：

> f_1,f_2 を周期 2π を持つ $(-\pi,\pi)$ 上 Riemann 可積分な関数とする．いま，ある $x_0\in(-\pi,\pi)$ の近傍において $f_1=f_2$ が成り立つならば，x_0 における Fourier 級数の収束・発散のモード，そして極限値は一致する．[5]

しかし，この逆は定まらない．特に，$l^2(\mathbb{Z})$ は完備であるが，$\mathcal{R}$ はそうではない．そこで，任意の二乗総和可能な数列 $(a_n)\in l^2(\mathbb{Z})$ に対して，これを Fourier 係数とする関数はどのようなものか考えたくなる．

この解決は次である．

定理 1.1.10 (Carleson, L. (1966)). 任意の $f\in L^2((0,frm-epi))$ の Fourier 級数 $S[f]$ は，殆ど至る所 f に収束する．

1.1.4　関数の極限構成

問 1.1.11 (連続関数の極限はどんな関数か？)**.** 関数列 $(f_n:[0,1]\to\mathbb{C})$ に対して，$f(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ と定める．(f_n) が一様連続ならば f も連続である．

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$$

が自然に成立する積分の枠組みも欲しい．

問 1.1.12 (曲線の長さとフラクタル)**.** 曲線 Γ が長さ有限であるためには，$x(t),y(t)$ がどうあれば良いか．どのように測れば良いか？これは，有界変動という概念で明確に捉えられ，長さを測るのに適切なパラメータの付け方のクラスが特定できる．また，曲線の長さが面積的な意味を持ち得る．正方形を埋め尽くす平面上の連続曲線が存在する．

1.1.5　Littlewood の 3 原則

[Stein and Shakarchi, 2005] 1.4.3.

(1) 全ての可測集合は，殆ど開である：Lebesgue 可測集合の特徴付け 1.4.7.
(2) 全ての関数は，殆ど連続である：Luzin の定理 1.5.3.
(3) 全ての収束列は，殆ど一様連続である：Egorov の定理 2.3.18.

1.2　Lebesgue 非可測集合の存在と選択公理

Lebesgue 非可測集合を構成するには，選択公理が必要である．この意味で，我々の観念体系・知識の限界を表現するのが，Lebesgue 可測性とその射としての測度である．これは，$P(X)$ の構造よりも貧しい．我々の知識は，X 上の σ-代数のフィルトレーションとして表現するほかないのだ．このことは，認識論的な成果でもあると思う．そこで，統計的実験とは，数学的には組 $(\mathcal{X},\mathcal{A},\mathcal{P})$ を言うのである．

1.2.1　Riemann が辿り着けなかった集合

定理 1.2.1 (Lebesgue 非可測集合). 選択公理の下で，Lebesgue 非可測集合は存在する．

[証明]. $d=1$ の場合について示す．一般の場合はこれについて直積集合を作れば良い．

構成 $x,y\in(0,1]$ に対して，$x\sim y:\Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Q}$ とすると，これは同値関係を定める．その商集合を $(0,1]/\sim=:\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と表す．選択公理を認めると，$E:=\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\in\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ が取れる．

証明 この E が可測と仮定して，矛盾を導く．すると，0 より大きく 1 以下の有理数 $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}:=\mathbb{Q}\cap(0,1]$ に対して，

$$E_n:=((E+r_n)\cap(0,1])\cup((E+r_n)\cap(1,2]-1)$$

と定めると，この E_n も可測であり，かつ互いに素であり，$m(E)=m(E_n),(0,1]=\cup_{n=1}^\infty E_n$ を満たす（Lebesgue 測度の平行移動に対する不変性 1.4.11）．したがって，$1=\sum_{n=1}^\infty m(E_n)=\sum_{n=1}^\infty m(E)$ が必要だが，これを満たす $m(E)\in[0,\infty]$ は存在しない．よって矛盾．

■

要諦 1.2.2. Lebesgue 可測集合は，有理数などの可算部分集合に注目して，平行移動などの互いに素な集合を生む変換を考える．値を持つとするならば，この代数演算についても閉じている必要があるが，これを満たす実数 $[0,\infty]$ は存在しなくなる．

区間の有理数による同値類 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ を可測とすると，集合演算 $A+a$ について，未定義動作を起こしてしまう．r_n だけ平行移動した集合 $E+r_n$ は，mod $\mathbb{Q}$ の世界では E と同じなので測度が等しいが，各 $r_n\in\mathbb{Q}\cap(0,1]$ について別の集合を産んでしまう．この代数法則を満たして測度を 1 とするような測度の付値は存在しない．

この深度が Lebesgue 積分の成功の本質である．Riemann のアプローチは直感的であるが，全ての関数に対して「積分」と呼ぶべき値を定めるならば，ここまでの深度が必要で，これは Riemann のような，点列が定める分割を考えただけでは辿り着かない．開集合の生成する σ-代数まで考えなければいけない．

1.2.2　非可測集合は存在しないとしても無矛盾である

定理 1.2.3 (Solovay, R. (1970).). ZF 公理系に，$\mathrm{Map}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})=\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ なる主張を加えても無矛盾である．

1.2.3　Lebesgue 可測集合の全体

系 1.2.4 . $\mathbb{R}^1$ の Lebesgue 可測集合の全体 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^1)$ の濃度は連続体濃度である．

定理 1.2.5 . $\mathbb{R}$ 上の Borel 可測関数の全体は連続体濃度であるが，$\mathcal{L}(\mathbb{R})\simeq_{\mathrm{Set}}\mathrm{Map}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ である．

1.3　$\mathbb{R}^n$ の部分集合の研究

$\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue 測度の基本は，$\sigma(\mathcal{R}^d)=\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ という観察による．これより，Riemann 可積分関数の不連続点を捉えるにあたって直感的に閉集合を用いていた du Bois-Reymond (1882) を超克した．

1.3.1　区間塊の表現力

区間塊に「体積」の概念が極めて初等的に延長でき，実用上はこれで十分である．

定義 1.3.1 (extended real number). 拡張実数 $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ には，線型順序を入れ，算法は $(\pm\infty)+(\mp\infty), (\pm\infty)-(\pm\infty), 0\cdot(\pm\infty)$ 以外を定める．なお，後者は 0 に収束する非零な列 (a_n) を考えると，$(0a_n)$ は空な列 $\mathbb{N} \to 1$ であるから，$0(\pm\infty) = 0$ と約束することが多く，事実いくつかの議論が簡単になる．

定義 1.3.2 (interval / rectangle, figure).

(1) $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$ について，$(a, b] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x \leqslant b\}$ を**区間**という．ただし $b = \infty$ のときに限って，$(a, b] := (a, \infty)$ とする．空集合も区間とする．[†2] $(a, b), [a, b]$ は開区間，閉区間と呼び分ける．

(2) $R_d = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d$ を**矩形**または**区間**といい，$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d$ を閉矩形と呼び分ける．[†3] 区間全体の集合を $\mathcal{R}_N \subset \mathbb{R}^N$ で表す．

(3) $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \cdots = b_d - a_d$ を満たす矩形を立方体という．

(4) 矩形 R の体積を $|R| := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_d - a_d)$ で表す．

(5) 矩形の和集合が**ほとんど互いに素**であるとは，矩形の内部の和集合が互いに素であることをいう．

(6) 有限個の矩形の直和（あるいは内点を共有しない閉矩形の有限直和）で表される集合を**区間塊**と言い，その全体を $\mathcal{F}_N \subset \mathbb{R}^N$ で表す．[†4]

命題 1.3.3 ([Stein and Shakarchi, 2005] Th'm 1.3,1.4 開集合の区間塊としての理解).

(1) 任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}$ は，互いに素な開区間の可算個の和集合としてただ一通りに表せる．

(2) 任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^d$ は，内部同士が互いに交わらない可算個の閉矩形の和集合として表せる．

系 1.3.4 . $\sigma(\mathcal{R}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ である．

1.3.2　区間塊の Lebesgue 測度

例 1.3.5 (区間塊上の測度).

(1) $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^N$ 上での積分が絶対収束する連続関数とする．区間塊上での Riemann 積分が定める写像 $\Phi : \mathfrak{F}_N \to \mathbb{R}$ は $\mathfrak{F}_N$ 集合関数である．

(2) 矩形の体積の拡張 $\Psi : \mathfrak{I}_N \to \overline{\mathbb{R}}$ を定める．定数でない単調増加な関数 $f_1, \cdots, f_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，

$$\Psi(I) := \begin{cases} 0, & I = \varnothing, \\ \displaystyle\prod_{\nu=1}^{N} (f_\nu(b_\nu) - f_\nu(a_\nu)), & I \text{ は有界}, \\ \sup\{\Psi(J) \in \mathbb{R} \mid J \subset I \text{ は有界な区間}\}, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

と定めると，各 $f_1, \cdots, f_N$ が恒等関数であるとき，これは矩形の体積となる．$f_1, \cdots, f_N$ を有界な関数とすると，Ψ も有界となる．

(3) すると，Φ の自然な区間塊への延長 $\mu : \mathfrak{F}_N \to \overline{\mathbb{R}}$ が定まる．これが well-defined であることは，区間塊の区間への直和分割は任意に細分して結び（共通分割）を取れることから従う．

$\square$

定義 1.3.6 (区間塊の体積). 区間塊 $E = \sqcup_{i \in \mathbb{N}} R_i \in \mathcal{F}_d$ に対して，

$$l(E) := \sum_{i \in \mathbb{N}} l(R_i).$$

と定めると，命題より well-defined である．

[†2] $a > b$ のときも許す，みたいな定義は区間の長さを定義するときに齟齬を起こす．
[†3] Lebesgue-Stieltjes 積分の流儀による．
[†4] [Tao, 2011] では，区間の積は box，その有限直和を elementary set と呼んでいる．

1.3.3　区間塊の代数構造

伊藤記法

特に区間／矩形と呼ばれるクラスの集合に注目する．これは任意に細分できて下がないことを特徴にもち，これが矩形の体積 1.3.5 の well-definedness の基盤となる．矩形の言葉で，開集合の性質も特徴付けられる．数直線上の開集合の互いに素な開区間への分解は，高次元化に耐えない．$\mathbb{R}^d$ 上の開集合のほとんど互いに素な立方体への分解は，一意性が成り立たない．

伊藤 [1] では区間は $(a,b]$ とし，空集合も区間とする．N 次元区間も区間といい，区間の有限直和を区間塊と呼ぶ．区間の全体を $\mathfrak{I}_N$，区間塊の全体を $\mathfrak{F}_N$ とする．また，$+,\sum$ は直和を表すというのは兄弟で共通のようだ．

補題 1.3.7 (区間塊は δ-環である [Tao, 2011] Exercise 1.1.1). $E,F\in\mathcal{F}_d$ を区間塊とする．

(1) 有限共通部分 $E\cap F$ は区間塊である．
(2) 補集合 $E\backslash F$ は区間塊である．
(3) 有限合併 $E\cup F$ は区間塊である．
(4) 対称差 $E\triangle F$ は区間塊である．
(5) 平行移動 $E+x$ $(x\in\mathbb{R}^d)$ は区間塊である．

命題 1.3.8 (区間塊上の Lebesgue 測度の特徴付け). $m:\mathcal{F}_d\to\mathbb{R}_+$ を次を満たす関数とする：

(1) 有限加法性を持つ．
(2) 平行移動不変性を持つ：$m(E+x)=m(E)$ $(E\in\mathcal{F}_d)$.
(3) 規格化条件：$m([0,1)^d)=1$.

すると，$m=l$ が成り立つ．

1.3.4　Jordan 可測集合

有限加法族上の有限加法的測度

続いて測度の定義を区間塊から延長する．しかし定義から，非有界集合は非可測となっている．また，可算個の穴が空いていたり，フラクタルな境界を持っている集合は非可測になっている．ここからさらに可算加法性を持たせるためには，可算集合の測度は加法中立元である 0 になる必要がある．可算和は濃度について閉じていることがここで実数代数への射を取るときに効いてくるとは！

定義 1.3.9 (Jordan measure, outer measure, inner measure). $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ を有界集合とする．

(1) (Jordan 外測度) Ω を被覆する矩形からなる互いに素な有限族 $\mathbb{R}^*$ を用いて，$m^*(\Omega):=\inf_{\mathbb{R}^*}\sum_{R_l\in\mathbb{R}^*}|R_l|$ と定める．
(2) (Jordan 内測度) Ω に被覆される矩形からなる互いに素な有限族 $\mathbb{R}_*$ を用いて，$m_*(\Omega):=\sup_{\mathbb{R}_*}\sum_{R_l\in\mathbb{R}_*}|R_l|$ と定める．このような $\mathbb{R}_*$ が存在しないとき，$m_*(\Omega)=0$ とする．
(3) $m^*(\Omega)=m_*(\Omega)$ を満たすとき，集合 Ω を **Jordan 可測**という．

例 1.3.10.

(1) $\Omega:=\mathbb{Q}\cap(0,1)$ は $m^*(\Omega)=1,m^*(\Omega)=0$ となる．
(2) 点 $(n,0)$ を中心とする面積 $1/n$ の矩形の列も，Jordan 可測ではない．
(3) こういうものも可測にするには，すなわち σ-加法性の代数構造を持たせたいならば，可算集合の測度は 0 にする必要がある．そして $\mathbb{Q}\backslash[0,1]$ の測度が 1 になるべきである．そういう理論を作るべきである．

□

定理 1.3.11 (Jordan 可測性の特徴付け [Tao, 2011] Exercise 1.1.5). $E \subset \mathbb{R}^d$ を有界とする．次は同値：

(1) E は Jordan 可測．
(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある区間塊 $A, B \in \mathcal{F}_d$ が存在して，
$$A \subset E \subset B, \quad l(B \backslash A) \leqslant \epsilon.$$
(3) 任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある区間塊 $A \in \mathcal{F}_d$ が存在して，
$$l^*(A \triangle E) \leqslant \epsilon.$$
(4) [Tao, 2011] Exercise 1.1.14：E が包含する
$$\left[\frac{i_1}{2^n}, \frac{i_1+1}{2^n}\right) \times \cdots \times \left[\frac{i_d}{2^n}, \frac{i_d+1}{2^n}\right)$$
という形の矩形の数を $\mathcal{E}_*(E, 2^{-n})$，E と交わるものの数を $\mathcal{E}^*(E, 2^{-n})$ としたとき，
$$\lim_{n\to\infty} 2^{-dn}(\mathcal{E}^*(E, 2^{-n}) - \mathcal{E}_*(E, 2^{-n})) = 0.$$
(5) [Tao, 2011] Exercise 1.1.18：境界 ∂E は Jordan 外測度 0 を持つ．

定理 1.3.12 (Jordan 可測であるための十分条件). 有界集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ について，

(1) 区間塊 $\Omega \in \mathcal{F}_N$ ならば，Jordan 可測である．
(2) 矩形 $R \in \mathcal{R}_N$ 上の連続関数 $f \in C(R)$ のグラフは $\mathbb{R}^{N+1}$ の部分集合として可測な零集合である．またエピグラフ
$$\left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid x \in R, t \in [0, f(x)]\right\}.$$
も $\mathbb{R}^{N+1}$ の部分集合として可測である．

1.3.5　Jordan 測度の性質

命題 1.3.13 . $E, F \subset \mathbb{R}^d$ を Jordan 可測とする．

(1) Jordan 可測集合は集合体をなす．すなわち，$E \cup F, E \cap F, E \backslash F, E \triangle F$ はいずれも Jordan 可測．
(2) 平行移動不変：$m(E+x) = m(E)$．

命題 1.3.14 . $m : \left\{\Omega \subset \mathbb{R}^d \mid l^*(\Omega) = l_*(\Omega)\right\} \to \mathbb{R}_+$ を Jordan 測度とする．

(1) 有限加法性を持つ．
(2) 平行移動不変性を持つ．
(3) 正規化条件：$m([0,1)^d) = 1$．

を満たすならば，$m = l$ である．

1.3.6　Lebesgue 可測集合

開集合が矩形によって近似計算できるのと同様に，開集合によって近似計算可能な集合を**可測**とした．これはまさに，小学校式の「面積」の観念そのものである．
Lebesgue 可測集合は完備であることもあって，区間塊は任意合併について閉じている 4.2.13.

定義 1.3.15 .

(1) $N \in P(\mathbb{R}^n)$ が $N \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ であるとは，$\forall_{\epsilon>0} \exists_{G_\epsilon \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)}\ N \subset G_\epsilon \land |G_\epsilon| < \epsilon$ を満たすことをいう．
(2) $M \in P(\mathbb{R}^n)$ が $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ であるとは，$\forall_{\epsilon>0} \exists_{G, O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)}\ M \subset G \land G \backslash M \subset O \land |O| < \epsilon$．
(3) $l(M) := \inf\{|G| \in [0,\infty] \mid M \subset G \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)\}$ $(M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n))$ を **Lebesgue 測度**という．

(4) 体積確定集合の全体を $\mathscr{M}^1(\mathbb{R}^n)$ で表す．

定義 1.3.16 .　(1) 任意の $E \subset \mathbb{R}^d$ に対して，その **Lebesgue 外測度**を

$$l^*(E) := \inf\left\{ \sum_{n=1}^\infty l(R_n) \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \{R_n\} \subset \mathscr{R}_d \text{ は } E \subset \bigcup_{n=1}^\infty \text{ を満たす} \right\}.$$

と定める．

(2) $E \subset \mathbb{R}^d$ が **Lebesgue 可測**であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，開集合 $U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^d$ が存在して，

$$E \subset U, \quad l^*(U \backslash E) \leqslant \epsilon.$$

を満たすことをいう．

(3) Lebesgue 可測でかつその値が有限であるものの全体を $\mathscr{M}^1(\mathbb{R}^d)$ と表す．

1.3.7　Cantor 集合

連続体濃度の Lebesgue 零集合

可算回の操作の極限として，不思議な集合を定義できる．このような操作を議論する枠組みを作るのが測度論の真髄である．Cantor 集合は幾何学的に（位相空間論的に）議論出来るが，形式的には 3 進数展開に出現する数字に制限を定めているだけである．これは非可算な零集合の例となる．

定義 1.3.17 (Cantor space). 閉区間 $C_0 := [0,1]$ から，閉区間の列 $(J_{k,n})_k := \left(\left(\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right)\right)_{k=1,3,\cdots,3^n-1}$ を除いて行くことで定まる互いに素な閉区間の列 $C_n := C_{n-1} \backslash \cup_{k=1}^{3^n-1} J_{k,n}$ は，降下列 $[0,1] = C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_k \supset \cdots$ を定める．これら全体の共通部分 $C := \bigcap_{k=0}^\infty C_k = [0,1] \backslash \left(\cup_{n=1}^\infty \cup_{k=1}^{3^n-1} J_{n,k}\right)$ は有界な閉集合であるから可測で，**Cantor 集合**といい，P_C で表す．

補題 1.3.18 (三進数展開としての特徴付け). C は，実数 $x \in [0,1]$ の三進数展開 $x = \sum_{k=1}^\infty \frac{a_k}{3^k}$ $(a_k \in \{0,1,2\})$ について，$\forall_{k\in\mathbb{N}}\ a_k \neq 1$ を満たす点全体からなる集合と一致する．

命題 1.3.19 (Cantor 空間の位相). $2 := \{0,1\}$ を離散空間とすると，$C \simeq 2^{\mathbb{N}}$ である．特に，完全不連結であり，かつ，完全である（孤立点を持たない）．これが P_C の記法の所以である．

[証明]. 全単射

$$\begin{array}{ccc} 2^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & C \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^\infty \frac{2a_i}{3^i} \end{array}$$

は位相同型である．　■

命題 1.3.20 (サイズと長さとの概念の違い). Lebesgue 測度は 0 であるが連続体濃度である．

[証明].

Lebesgue 測度　C_n の構成で取り除いた区間 $\cup_{k=1}^{n-1} J_{k,n}$ の長さは $\frac{1}{3^k} \times 2^{k-1}$ であるから，$\sum_{k=1}^\infty \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1$.

連続体濃度　$b_k := \begin{cases} 0, & a_k = 0, \\ 1, & a_k = 2. \end{cases}$ として $C \ni x = \sum_{k=1}^\infty \frac{a_k}{3^k}$ $(a_k \in \{0,1,2\})$ を 2 進数展開 $\sum_{k=1}^\infty \frac{b_k}{2^k}$ へ対応させると，対応 $\varphi : C \to [0,1]$ は全単射となる．

■

1.4　Lebesgue 測度の構成と Lebesgue 可測集合の性質

Carathéodory の方法の $\mathbb{R}^n$ に関する各論が Lebesgue 測度論とみなせる．この方法で完備測度空間 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}^*, m_d)$ を得るが，基礎論的な弊を避けるために通常 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), m_d)$ を考えることになる．

1.4.1　Lebesgue 測度の構成と一意性

Lebesgue 可測集合とは，Borel 可測集合との対称差が零集合であるような集合である．

記法 1.4.1 (矩形／区間，矩形塊).

(1) 矩形を $\mathcal{I}_d := \{(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d] \in P(\mathbb{R}^d) \mid -\infty \leqslant a_i \leqslant b_i \leqslant \infty\}$ とおく．ただし，$(a, \infty] = (a, \infty), (a, a] = \varnothing$ とみなす．

(2) 矩形塊（＝矩形の有限直和）$\mathcal{F}_d := \left\{\sum_{i=1}^n I_i \in P(\mathbb{R}^d) \mid I_i \in \mathcal{I}_d\right\}$ とおくと，$\mathcal{F}_d$ は集合体である．

(3) 矩形の面積が定める集合関数 $m_d : \mathcal{I}_d \to \overline{\mathbb{R}}$ (1.3.5) は $\mathcal{R}_d$ 上に明らかな方法で延長し，有限加法的測度を定める．

(4) $P(\mathbb{R}^d)$ 上にも明らかな方法で延長し，これを Lebesgue 外測度 m_d^* という 2.6.2.

補題 1.4.2 (Lebesgue 測度の存在と一意性).

(1) 矩形の面積が定める集合関数 $m_d : \mathcal{I}_d \to \overline{\mathbb{R}}$ は矩形塊のなす代数 $\mathcal{F}_d$ 上に延長し，この上で σ-加法性を満たす．

(2) 測度空間 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{R}_d, m_d)$ は σ-有限である．

よって，Hahn-Kolmogorov の拡張定理 2.7.1 により，一意な延長が存在し，これについて $(\mathbb{R}^d, \sigma(\mathcal{R}_d), m_d)$ は測度空間となる．

[証明].

(1) **準備**　(a)　任意の $\alpha \geqslant 0$ について，$m(I) > \alpha$ を満たす矩形 $I \in \mathcal{I}_d$ に対して，有界な矩形 $J \in \mathcal{I}_d$ が存在して，$\overline{J} \subset I, m(I) > \alpha$ を満たす．実際，$I = [a, b)$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$ と表せるから，$m(I) - \alpha > 0$ に併せてこれを狭めた区間を J とすれば良い．

(b)　同様の事実が，矩形塊 $E \in \mathcal{R}_d$ についても成り立つ．$m(E) > \alpha$ ならば，有界な矩形塊 $F \in \mathcal{R}_d$ が存在して，$\overline{F} \subset E$ かつ $m(F) > \alpha$ が成り立つ．実際，$E = \sum_{i=1}^n I_i$ $(I_i \in \mathcal{I}_d)$ と表せるのであるから，各 I_i について $J_i \in \mathcal{I}_d$ を取り，$F := \cup_{i=1}^n J_i$ と定めれば良い．

補題：大雑把な σ-劣加法性　まず，区間塊 $E \in \mathcal{R}_d$ に対して，$E \subset \cup_{n=1}^\infty I_n \Rightarrow m(E) \leqslant \sum_{n=1}^\infty m(I_n)$ $\forall_{\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{I}_d}$ を示す．各 I_n は $I_n = (a_{n_1}, b_{n_1}] \times \cdots \times (a_{n_d}, b_{n_d}]$ と表せるので，$m : \mathcal{I}_d \to \overline{\mathbb{R}}$ の連続性より，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta_n > 0$ を上手く取れば，$J_n := (a_{n_1}, b_{n_1} + \delta_n) \times \cdots \times (a_{n_d}, b_{n_d} + \delta_n)$ が $m(J_n) \leqslant m(I_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$ を満たす．いま，$m(E) = 0$ ならば主張は自明に成り立つから，$m(E) > 0$ として良い．$m(E) > \alpha$ を満たす $\alpha \geqslant 0$ を任意に取る．すると，(b) より，有界な区間塊 $F \in \mathcal{R}_d$ が存在して，$\overline{F} \subset E, m(F) > \alpha$ を満たす．ここで，J_n に対して，$G_n := (a_{n_1}, b_{n_1} + \delta_n) \times \cdots \times (a_{n_d}, b_{n_d} + \delta_n)$ と定めると，$\overline{F} \subset E \subset \cup_{n=1}^\infty I_n \subset \cup_{n=1}^\infty G_n$ が成り立つから，有界閉集合 $\overline{F}$ のコンパクト性より，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$F \subset \overline{F} \subset \cup_{n=1}^{n_0} G_n \subset \cup_{n=1}^{n_0} J_n$ が成り立つ．よって，$m : \mathcal{I}_d \to \overline{\mathbb{R}}$ の単調性と有限劣加法性より，

$$
\begin{aligned}
\alpha < m(F) &\leqslant m(\cup_{n=1}^{n_0} J_n) \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{n_0} m(J_n) \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(m(I_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) + \epsilon.
\end{aligned}
$$

$\epsilon \searrow 0, \alpha \nearrow m(E)$ を考えると，$m(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n)$ が従う．

完全加法性 $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{R}_d$ を任意に取る．各 $E_n \in \mathcal{R}_d$ より，$E_n = \sum_{k=1}^{k_n} I_{n,k}$ と表せるから，$E = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_n} I_{n,k}$ となる．直前の議論より，$m(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_n} I_{n,k} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ を得る．逆は，任意の $k \in \mathbb{N}$ について $\sum_{n=1}^{k} E_n \subset E$ であるから，有限加法性と単調性より $m\left(\sum_{n=1}^{k} E_n\right) = \sum_{n=1}^{k} m(E_n) < m(E)$．$k \to \infty$ について，$\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \leqslant m(E)$ を得る．

■

要諦 1.4.3. 証明は簡潔だが，ギミックが多すぎてもつれた糸をほぐせない精緻な完成品のようだ．

命題 1.4.4 (Lebesgue 可測集合の例). Lebesgue 外測度 $m^* : P(X) \to [0, \infty]$ について，

(1) $\mathbb{R}^d$ の矩形 I_d は m^*-可測である．
(2) $\mathbb{R}^d$ の開集合の可算共通部分で表される集合 (G_δ **集合**) は m^*-可測である．
(3) $\mathbb{R}^d$ の閉集合の可算和で表される集合 (F_σ **集合**) は m^*-可測である．

このときの Caratheodory の意味での m^*-測度を，集合の **Lebesgue** 測度と呼ぶ．

注 1.4.5. 閉集合をフランス語で ensenble fermé，開集合をドイツ語で Gebiete といったため．

1.4.2　Lebesgue 測度の位相的特徴付け

G_δ, F_σ 集合は Lebesgue 可測であることがわかったが，Lebesgue 可測集合が $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^d)$ を満たすことを示すには，さらに位相との関係を考察する必要がある．これを通じて，壮麗な Radon 測度に関する一般論に到達する．

定理 1.4.6 (Lebesgue 測度の特徴付け：外部正則性). 任意の部分集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ に対して，

$$m^*(A) = \inf\left\{ m(G) \in \mathbb{R} \mid A \subset G \text{ かつ } G \text{ は開集合} \right\}.$$

[証明]. 任意に $\epsilon > 0$ を取り，$m(G) \leqslant m^*(A) + 2\epsilon$ を満たす開集合 $(A \subset)G$ を構成すれば良い．$m^*(A)$ は A の $\mathcal{I}_d$-可算被覆の測度の和の下限として定めたから，この ϵ に対して，矩形の族 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{I}_d$ が存在して，

$$A \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) \leqslant m^*(A) + \epsilon$$

を満たす．ここで，$I_n = (a_{n,1}, b_{n,1}] \times \cdots \times (a_{n,d}, b_{n,d}]$ に対して，$\delta_n > 0$ を十分小さく取ることで $J_n = (a_{n,1}, b_{n,1} + \delta_n) \times \cdots \times (a_{n,d}, b_{n,d} + \delta_n)$ であって，$m(J_n) \leqslant m(I_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$ を満たすように取れる（変数 δ_n に関する連続性）．このとき，$G := \cup_{n=1}^{\infty} J_n$ は開集合で，$A \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n \subset G$ を満たし，さらに

$$\begin{aligned} m(G) &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(J_n) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(m(I_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \right) \\ &\leqslant m^*(A) + 2\epsilon \end{aligned}$$

も満たす．■

定理 1.4.7 (Lebesgue 可測集合の特徴付け). m_d^*-可測集合の全体を $\mathcal{M}$ とすると，$M \in P(\mathbb{R}^d)$ について次の 4 条件は同値：

(1) $M \in \mathcal{M}$.
(2) $\forall_{\epsilon>0}$ 閉集合 $F \subset M$ と開集合 $M\backslash F \subset G$ とが存在して，$|G| < \epsilon$ を満たす．

(3) M に含まれる閉集合の列 (F_k) が存在して，$M\backslash\cup_{k\in\mathbb{N}}F_k$ は零集合である．

(4) M を含む開集合の列 (G_k) が存在して，$\cap_{k\in\mathbb{N}}G_k\backslash M$ は零集合である．

一般に，このような位相の言葉による特徴づけが成り立つことを**測度の正則性**という．

[証明].

(1)⇒(2)　(1)⇒(3),(1)⇒(4) より従う．

(2)⇒(1)　Lebesgue 可測集合全体は，Borel 可測集合 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ を完備化したものであるから，完備化の定理 2.5.8 にある条件：差集合が零集合である Borel 可測集合で上下から評価すれば良い．任意の $n\in\mathbb{N}_+$ に対して，$F_n\subset A\subset G_n$ かつ $m(G_n\backslash F_n)<\dfrac{1}{n}$ を満たす閉集合 F_n と開集合 G_n の列が取れる．それぞれは Lebesgue 可測だから，$\cup_{n=1}^\infty F_n,\cap_{n=1}^\infty G_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ で，$\cup_{n=1}^\infty F_n\subset A\subset\cap_{n=1}^\infty G_n$ を満たす．また，$m\left(\cap_{n=1}^\infty G_n\backslash\cup_{n=1}^\infty F_n\right)=m\left(\cap_{n=1}^\infty(G_n\backslash F_n)\right)=0$.

(1)⇒(3)　任意に $\epsilon>0$ を取る．A が有界であるかどうかで場合分けをする．

(a) A が有界ならば，Lebesgue 外測度の開集合による特徴付け 1.4.6 より，$m(G)<m(A)+\epsilon$ を満たす開集合 $A\subset G$ が存在するから，$m(A)<\infty$ のとき，この G に対して $m(G\backslash A)=m(G)-m(A)<\epsilon$ を満たす．

(b) A が有界でない場合は，σ-有限性と同様の処理をする．$A_n:=A\cap B(0,n)$ $(n=1,2,\cdots)$ と定めると，$A_n\in\mathcal{L}_d$ であり，A_n は有界であるから，(a) より $m(G_n\backslash A_n)<\dfrac{\epsilon}{2^n}$ を満たす開集合 $A_n\subset G_n$ が存在する．これに対して $G:=\cup_{n=1}^\infty G_n$ とおけば，$A\subset\cup_{n=1}^\infty A_n\subset G$ を満たし，

$$\begin{aligned}m(G\backslash A)&\leqslant m(\cup_{n=1}^\infty(G_n\backslash A_n))\\&\leqslant\sum_{n=1}^\infty m(G_n\backslash A_n)<\epsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．

(1)⇒(4)　任意に $\epsilon>0$ を取る．A が有界であるかどうかで場合分けをする．

(a) A が有界のとき，$\exists_{n\in\mathbb{N}}\ A\subset B(0,n)$ である．このとき，$B:=\overline{B(0,n)}\backslash A$ は閉集合だから可測．よって (1) より，ϵ に対して開集合 $B\subset G$ が存在して，$m(G\backslash B)<\epsilon$ を満たす．これに対して，$F:=\overline{B(0,n)}\backslash G$ と定めると，これは有界閉集合で，$B\subset G$ より

$$F=\overline{B(0,n)}\backslash G\subset\overline{B(0,n)}\backslash B=A$$

を満たす．さらに，$A=\overline{B(0,n)}\backslash B,F=\overline{B(0,n)}\backslash G$ より，

$$\begin{aligned}m(A\backslash F)&=m(A)-m(F)\\&\leqslant m(\overline{B(0,n)})-m(B)-m(\overline{B(0,n)})+m(G)\\&=m(G)-m(B)=m(G\backslash B)<\epsilon.\end{aligned}$$

(b) A が有界でないならば，列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $A_n:=\begin{cases}A\cap B(0,1), & n=1,\\ A\cap(B(0,n)\backslash B(0,n-1)), & n\geqslant 2.\end{cases}$ と定める．このとき，各 A_n は有界だから (a) より，有界閉集合 $F_n\subset A_n$ が存在して，$m(A_n\backslash F_n)<\dfrac{\epsilon}{2^n}$ を満たす．よって，$F:=\cup_{n=1}^\infty F_n$ とおくと，補題 1.4.9 よりこれは閉集合で，$F\subset\cup_{n=1}^\infty A_n=A$ を満たし，

$$\begin{aligned}m(A\backslash F)&\leqslant m\left(\cup_{n=1}^\infty(A_n\backslash F_n)\right)\\&\leqslant\sum_{n=1}^\infty m(A_n\backslash F_n)<\epsilon.\end{aligned}$$

(c) $m(A)<\epsilon$ と仮定して，この F が有界に取れることを示す．集合列 $(A\cap B(0,n))_{n\in\mathbb{N}}$ は A に収束する単調増大列だから，$\lim_{n\to\infty}m(A\backslash(A\cap B(0,n)))=0$（単調減少列の極限 2.4.6(5)，ここで仮定 $m(A)<\infty$ を使った）．よって，$\exists_{n\in\mathbb{N}}\ m(A\backslash(A\cap B(0,n)))<\dfrac{\epsilon}{2}$．このとき，$A\cap B(0,n)$ は有界だから，(a) より，$F\subset A\cap B(0,n)$ かつ $m(A\cap B(0,n)\backslash F)<\dfrac{\epsilon}{2}$ を満たす有界閉集合 F が取れる．この F が条件を満たす．

■

要諦 1.4.8 (Euclid 空間上の局所有限 Borel 測度は正則)**.** 実は同様の証明により，$\mathbb{R}^d$ 上の局所有限な Borel 測度は，一般に (2) によって可測性が特徴付けられるという意味で正則になる．そして，この正則 Radon 測度 μ の $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 上の完備化 $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}^{(\mu)}$ について，任意の $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}^{(\mu)}$-可測関数は，連続関数の列でこれに測度収束するものが存在することが示せる (一般化 Lusin の定理).

補題 1.4.9 (位相空間論の補足). 閉集合の族 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が，$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ F_n \subset B(0,n)^\complement$ を満たすならば，$\cup_{n=1}^\infty F_n$ は閉集合である．

[証明]. $\overline{F} \subset F$ を示せば良い．任意に $x \in \overline{F}$ を取ると，$\forall_{\epsilon>0}\ U(x,\epsilon) \cap F \neq \emptyset$ を満たす．$U(x,\epsilon)$ は有界より，$\exists_{m\in\mathbb{N}}\ U(x,\epsilon) \subset B(0,m)$ だから，$U(x,\epsilon) \cap B(0,m)^\complement = \emptyset$．したがって，$\forall_{\epsilon>0}\ U(x,\epsilon) \cap \left(\cup_{n=1}^{m-1} F_n\right) \neq \emptyset$ が必要．これは $x \in \overline{\cup_{n=1}^{m-1} F_n}$ を意味するが，$\overline{\cup_{n=1}^{m-1} F_n} = \cup_{n=1}^{m-1} F_n$．特に，$x \in F$． ■

要諦 1.4.10 (σ-有限性というクラスへの注目)**.** これが σ-有限性に似た現象に通底する消息となる．この構成によって，開集合と閉集合に拘らず，$m(A) < \infty$ の場合を考察の対象に限れば十分である．Lusin の定理 1.5.3 や Radon-Nykodym の定理 5.2.12 など．

1.4.3　Lebesgue 測度の平行移動不変性による特徴付け

> Haar 測度としての性質を備える．

補題 1.4.11 (Lebesgue 測度の線形性). 任意の Lebesgue 可測集合 $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ と $a \in \mathbb{R}^d, p \in \mathbb{R}_+$ について，

(1) $m_d(A+a) = m_d(A)$.
(2) $m_d(pM) = p \cdot m_d(M)$.

ただし，$A+a$ とは Abel 群 $\mathbb{R}^d$ の部分群 $A+a = \left\{a'+a \in \mathbb{R}^d \mid a' \in A\right\}$ とした．

[証明].

(1) $A+a \in \mathcal{L}_d$ は Lebesgue 可測性の特徴付け??からわかる．$\mathbb{R}^d$ の位相の様子はどの点でも等質である．
(2) $m(A+a) = m(A)$ は，矩形 $I \in \mathfrak{l}_d$ について $m(I+a) = m(I)$ であることと Lebesgue 外測度の定義 2.6.2 からわかる．

■

定理 1.4.12 . 次の 2 条件を満たす測度 $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ は，$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上で Lebesgue 測度と一致する：

(1) 平行移動不変性：$\forall_{E\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),x\in\mathbb{R}}\ \mu(E+x) = \mu(E)$.
(2) 規格化条件：$\mu((0,1]) = 1$.

定理 1.4.13 (Haar 測度としての性質). 任意の零でない可測集合 $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^1), m_1(M) > 0$ について，次の集合

$$M^* := MM^{-1} = \{x - y \in \mathbb{R} \mid x \in M, y \in M\}$$

は 0 の開近傍を含む．

1.4.4　Lebesgue 可測集合の定義と Borel 集合との関係

> 以上の議論では，Lebesgue 可測集合を Lebesgue 外測度に関する Caratheodory 可測集合として定義したが，この全体は「開集合で任意精度で近似できる集合」として特徴づけられることがわかった．よって $\sigma(\mathcal{R}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^d)$ であることから，Lebesgue 測度空間 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), m_d)$ が一意に定義できた．実は，$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^d)$ である．
> このような構成が一般化できる特徴を正則性と呼び，このときの測度を Radon 測度という．

定義 1.4.14 (Lebesgue measure).

(1) 有限加法的測度空間 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{R}_d, m_d)$ で，$m_d : \mathcal{R}_d \to [0,\infty]$ は σ-加法的だから，延長 $m : \sigma(\mathcal{R}_d) \to [0,\infty]$ が存在し，また σ-有限性より，この延長は一意的である（Hopf の拡張定理 2.7.1）．こうして有限加法的測度空間 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{R}_d, m_d)$ から，一意に測度空間 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), m_d)$ を得る (系 1.3.4).

(2) 測度空間 $(\mathbb{R}^d, \sigma(\mathcal{R}_d), m)$ の完備化も一意的で，Lebesgue 外測度 $m^*: P(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ と Lebesgue 可測集合 $\mathcal{M}^d$ について，$(\mathbb{R}^d, \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}, \overline{m}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{M}^d, m^*)$ が成り立つ（拡張と完備化との関係 2.7.8).[†5]

(3) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) = \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$ が成り立つ 1.3.4．実際，任意の $B \subset \mathbb{R}^d$ に対して，$A \in (\mathcal{R}_d)_{\sigma\delta} \subset \sigma(\mathcal{R}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ であって，$B \subset A$ かつ $m^*(B) = m(A)$ を満たすものが存在する．したがって，Lebesgue 可測集合とは，Borel 可測集合との対称差が零集合であるような集合である．

定理 1.4.15 .

(1) $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{M}(\mathbb{R})$ である．

(2) 任意の $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ に対して，$B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ が存在して，$B_1 \subset M \subset B_2$ かつ $m(M \backslash B_1) = m(B_2 \backslash M) = 0$ を満たす．

系 1.4.16 .

(1) 可測関数の合成は可測とは限らない．

(2) $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d) = \left\{B \cup Z \in P(\mathbb{R}^d) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), Z \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)\right\}$.

1.4.5　Radon 測度への一般化

定義 1.4.17 (regular measure, Borel measure, Radon measure).

(1) 一般の位相空間 $(X, \mathcal{O})$ とその上の測度空間 $(X, \sigma(\mathcal{O}), \mu)$ について，測度 μ が**正則**であるとは，

$$A \in \sigma(\mathcal{O}) \Rightarrow \forall_{\epsilon>0}\ \exists_{F:\text{closed}, G:\text{open}}\ F \subset A \subset G \land \mu(G \backslash F) < \epsilon$$

が成り立つことをいう．[†6]

(2) このような，位相が生成する σ-代数 $\sigma(\mathcal{O})$ 上の測度を一般に **Borel 測度**という．

(3) $\mathbb{R}^d$ 上の Borel 測度であって，コンパクト集合上では有限値を取るものを **Radon** 測度という．

例 1.4.18.

(1) Lebesgue 測度は正則測度である．Lebesgue 可測性の特徴付け??の (1)⇒(2) を正則性定理 (regularity theorem) という．

(2) 任意の距離空間上の任意の Borel 確率測度は正則である．

(3) Lebesgue 測度は，コンパクト集合上では有限値を取る Borel 測度だから，Radon 正則測度の例である．

□

定義 1.4.19 (Borel meaesure, inner regular, Radon measure, outer regular, essential measure).

(1) Borel 測度とは，Borel σ-代数 $\mathcal{B}$ を含む σ-代数上に定まる測度をいう．

(2) Borel 測度が $\mu(A) = \sup\left\{\mu(K) \in [0,\infty] \;\middle|\; K \overset{\text{cpt}}{\subset} A\right\}$ を満たすとき，**内部正則**または**緊密**であるという．

(3) 内部正則な Borel 測度で，**局所有限**性 $\forall_{K \overset{\text{cpt}}{\subset} X}\ \mu(K) < \infty$ を満たすものを，**Radon 測度**という??.

(4) Borel 測度が**外部正則**であるとは，$\forall_{A \in \mathcal{B}}\ \mu(A) = \inf\left\{\mu(B) \in [0,\infty] \mid A \subset B \overset{\text{open}}{\subset} X\right\}$ を満たすことをいう．

(5) Borel 測度 m が M に付随する**本質的測度**であるとは，M によって近似された測度が m であるという関係が成り立つことをいう：

$$m(B) = \sup\left\{M(B') \in [0,\infty] \mid B' \subset B, B' \in \mathcal{B}(X), M(B') < \infty\right\}.$$

例 1.4.20. $\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue 測度は，Radon 測度 (=内部正則かつ局所有限) である．実際，外部正則でもあるが，これは余計である．　□

定理 1.4.21 (Radon 測度の特徴付け). Borel 測度 $\mu: \mathcal{B} \to \mathbb{F}$ について，次の 2 条件は同値．

(1) μ は Radon 測度である．

[†5] 特に，Lebesgue 可測集合と $\sigma(\mathcal{R}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ の元との差は零集合になる．

[†6] 「全ての可測集合は近似的に開かつ近似的に閉」と言える測度空間のことを正則という．

(2) μ は，X の任意の開集合上において，内部正則かつ局所有限である上に，外部正則でもある．
(3) μ は，次を満たす 2 つの Borel 測度 m, M が $\mathcal{M}^1$ の元上に取る同一の値を取る：m は M に付随する本質的測度であり，M は局所有限かつ $\mathcal{B}$ 上外部正則かつ内部正則で，B が開集合または体積確定 $B \in \mathcal{M}^1$ ならば $m(B) = M(B)$ である．

台空間 X が局所コンパクトハウスドルフ空間であるとき，次も同値．

(4) μ は $C_c(X, \mathbb{R})$ 上の正な線型汎関数である．

注 1.4.22. (3) の方法が，Lebesgue が $\mathbb{R}^n$ について行った議論の直接の抽象化になっている．

1.4.6 Lebesgue 可測性の遺伝

定理 1.4.23 . $U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^d$ を開集合，$\varphi : U \to \mathbb{R}^d$ を Lipschitz 連続とする．

(1) φ は Lebesgue 零集合を Lebesgue 零集合に写す．
(2) Lebesgue 可測集合を Lebesgue 可測集合に写す．
(3) $A \subset U$ が Lebesgue 可測ならば，$m(\varphi(A)) \leqslant (\mathrm{Lip}(\varphi))^d m(A)$.

系 1.4.24 . Lebesgue 測度は，Euclid 空間の等長変換 (すなわち affine 変換) によって保たれる．

1.4.7 Lebesgue 空間の直積

Lebesgue 空間は σ-有限であり，直積の Lebesgue 完備化は再び Lebesgue 空間であるから，結局直積を自由に取れる．

補題 1.4.25 . $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^q) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q})$ である．

定理 1.4.26 (Lebesgue 空間の直積は Lebesgue 空間). $(\mathbb{R}^{p+q}, \overline{\mathcal{M}_p \otimes \mathcal{M}_q}, \overline{m_p \otimes m_q}) = (\mathbb{R}p + q, \mathcal{M}_{p+q}, m_{p+q})$.

1.5 Lebesgue 可測関数

Borel 測度の完備化である Lebesgue 測度という具体的対象に対して，これまで議論してきた測度論の結果を特殊化してまとめ直す．

1.5.1 連続関数は Lebesgue 可測

Borel σ-代数に関して，$C(\mathbb{R}) \subset L(\mathbb{R})$ となる．一方で，$C_c(\mathbb{R})$ が全て可測関数になるような最小の σ-代数を **Baire 集合族**という．

命題 1.5.1 (Lebesgue 可測関数と位相).

(1) Lebesgue 可測集合 $E \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$ 上の連続関数は，Lebesgue 可測である．
(2) $\mathbb{R}$ 上の右連続な関数は Borel 可測，したがって Lebesgue 可測である．

[証明].

(1) $E \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$ 上の連続関数 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ について，逆像 $f^{-1}((-\infty, \alpha))$ は E の開集合で，$E \subset \mathbb{R}^d$ には $\mathbb{R}^d$ の相対位相を考えるから，$\forall_{\alpha \in \mathbb{R}}\ \exists_{G_\alpha \in \mathrm{Op}(\mathbb{R}^d)}\ E(f < \alpha) = E \cap G_\alpha$ が成り立つ．$E \cap G_\alpha \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$ と併せると，f は Lebesgue 可測である．
(2)

■

1.5.2　連続関数の確率収束極限である

Lebesgue 可測集合 A 上の連続関数は可測である (任意の逆像が A と開集合の共通部分で表せるため 1.5.1) が，逆に Lebesgue 可測関数は，「ほとんど至る所」連続である．正確に言えば，任意の Lebesgue 可測関数は，連続関数の測度収束極限である．

定理 1.5.2．Borel 集合 $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 上の Lebesgue 可測関数 $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ について，E 上殆ど至る所一致する Borel 可測関数 $g, h: E \to \overline{\mathbb{R}}$ で，$\forall_{x \in E}\ |g(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant |h(x)|$ を満たすものが存在する．

[証明]．Lebesgue 測度は Borel 測度の完備化であるから，完備化された測度空間上の関数の可測性の特徴付け 2.5.9 より従う．■

定理 1.5.3 (Lusin (1912))．体積確定な Lebesgue 可測集合 $A \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^d)$ 上の実関数 $f: A \to \mathbb{R}$ について，次の 2 条件は同値．

(1) f は Lebesgue 可測である．
(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して，$m(A \backslash F) < \epsilon$ を満たすような閉集合 $F \subset A$ が存在し，$f|_F$ は連続である．

(1)⇒(2) を Lusin の定理という．

[証明]．$f \geqslant 0$ の場合について証明すれば，一般の関数は $f = f^+ - |f^-|$ と捉えられ，連続関数の和は連続であるから従う．$m(A)$ が有限かどうかで場合分けをする．

(1) $m(A) < \infty$ のときを考える．

f が非負値単関数の場合　$f = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{E_j}$ $(a_j \in [0, \infty), \sum_{j=1}^\infty E_j = E)$ とおく．任意に $\epsilon > 0$ を取る．各 E_j に対して，閉集合 $F_j \subset E_j$ であって，$m(E_j \backslash F_j) < \dfrac{\epsilon}{N}$ を満たすものが取れる（補題 1.4.2）．これに対して $F := \cup_{j=1}^N F_j$ とすればこれは閉集合であり，f は各 F_j 上定数であるから連続[†7]，したがって F 上連続で，

$$\begin{aligned} m(A \backslash F) &\leqslant m\left(\cup_{j=1}^N (E_j \backslash F_j)\right) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^N m(E_j \backslash F_j)^{\dagger 8} < \epsilon. \end{aligned}$$

一般の非負値可測関数の場合　非負値単関数の列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ であって，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ を満たすものが存在する 2.3.16.

(a) 上の議論より，各単関数 f_n について，閉集合 $F_n \subset A$ であって，$m(A \backslash F_n) < \dfrac{\epsilon}{2^n}$ を満たし，f_n が各 F_n 上連続になるものが取れるから，これに対して $F_0 := \cap_{n=1}^\infty F_n$ と定めれば，任意の $n \in \mathbb{N}$ について f_n は F_0 上連続で，劣加法性より

$$m(A \backslash F_0) \leqslant m\left(\cup_{n=1}^\infty A \backslash F_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^\infty m(A \backslash F_n) < \epsilon$$

が成り立つ．あとは，各点収束先極限である f も連続であるように F_0 を持っていけば良い．

(b) 仮定 $m(A) < \infty$ より $m(F_0) \leqslant m(A) < \infty$ で，(f_n) は F_0 上 f に各点収束するから，Egoroff の定理 2.3.18 より，ある集合 $F \subset F_0$ が存在して，(f_n) は F 上 f に一様収束し，$m(F_0 \backslash F) < \epsilon$ を満たす．特に Lebesgue 測度の位相的正則性??より，F は閉集合に取れる．よって，f は閉集合 F 上で連続であり，

$$m(A \backslash F) \leqslant m(A \backslash F_0) + m(F_0 \backslash F) < 2\epsilon$$

が従う．

(2) $m(A) = \infty$ のとき，$A_n := E \cap (B(0,n) \backslash B(0, n-1))$ $(n = 1, 2, \cdots)$ と定めると，$\forall_{n \in \mathbb{N}}\ m(A_n) < \infty$ で，各 $n \in \mathbb{N}$ について，閉集合 F_n であって $m(E_n \backslash F_n) < \dfrac{\epsilon}{2^n}$ かつ f は各 F_n 上で連続になるものが存在する．すると $F := \cup_{n=1}^\infty F_n$ は閉集合で（補題 1.4.9），f は F 上連続であり，$\mu(E \backslash F) < \epsilon$ を満たす．

■

[†7] F_j 上連続という定義は，$U(x, \epsilon) \cap F_j$ を考えるから，F_j の境界点に $\mathbb{R}^d \backslash F_j$ から近づく場合などは考えない．

要諦 1.5.4 (測度論の議論の仕方の特徴がよく出ている). 非負値単関数は有限性 $|\mathrm{Im}\, f| < \infty$ があるので問題ないが，一般の可測関数は単関数の列の極限として定義できるからこの列の附番について $\frac{\epsilon}{2^n}$ を考え，そもそも証明の全体的な構造として，列 $A_n := E \cap (B(0,n)\backslash B(0,n-1))$ $(n = 1,2,\cdots)$ を考えれば全体 A に至るので $m(A) < \infty$ と仮定して良いことになる.

系 1.5.5 (一般化された Lusin の定理 (Rudin 2.24[3])). X を局所コンパクトハウスドルフ，μ をその上の局所有限な Borel 測度，$A \subset X$ を体積確定集合で，$f \in L(X;\mathbb{C})$ は $\mathrm{supp}\, f \subset A$ を満たすとする．このとき部分測度空間 $(A, \mathcal{B}(X) \cap P(A), \mu|_A)$ 上で μ は正則であることに注意．このとき，

$$\forall_{\epsilon>0}\, \exists_{g \in C_c(X)}\, \mu(\{x \in X \mid f \leqslant g\}) < \epsilon \wedge \|g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$

要諦 1.5.6. $L(X)$ の確率収束の位相について，$C_c(X)$ は稠密である事を言っている．特に単関数のときと同様，一様ノルムについて下から取ることが出来る.

系 1.5.7 . 任意の $f \in L(X)$ について，$|f| \leqslant 1$ ならば，一様ノルムが 1 以下の関数列 $\{g_n\} \subset B \overset{\text{closed}}{\subset} C_c(X)$ が存在して，f に概収束する.

1.5.3　位相的正則性の関数版

定理 1.5.8 (Vitali-Caratheodory). $f \in L^1(X;\mathbb{R})$ について，任意の $\epsilon > 0$ に対して，上半連続かつ上に有界な関数 u と下半連続かつ下に有界な関数 v とが存在して，

$$\int_X (v-u)d\mu < \epsilon.$$

1.5.4　可測関数と連続関数の積写像は可測

命題 1.5.9 (Lebesgue 可測関数の平行移動).

(1) $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を Borel 可測関数とする．$f(x+y), f(x-y) : \mathbb{R}^{2d} \to \overline{\mathbb{R}}$ も Borel 可測である.

(2) $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を Lebesgue 可測関数とする．$f(x+y), f(x-y) : \mathbb{R}^{2d} \to \overline{\mathbb{R}}$ も Lebesgue 可測である.

[証明].

(1) まず和 $+$ と差 $-$ は積可測である．続いて，可測関数の Borel な押し出しは可測である 2.3.13.

(2) **方針**　$f \geqslant 0$ の場合に証明すれば，可測関数の和は可測である 2.3.9 ことより $f = f^+ - f^-$ も Lebesgue 可測だとわかる．このとき，Lebesgue 測度は Borel 測度の完備化だから，$(0 \leqslant) g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ かつ $g(x) = f(x) = h(x)$ a.e. を満たす Borel 可測関数 $g, h : E \to \overline{\mathbb{R}}$ が存在する 1.5.2.

変数を増やす　よって (1) より，変数を増やした関数についても $\mathbb{R}^{2d}$ 上で $g(x+y) \leqslant f(x+y) \leqslant h(x+y)$ が成り立ち，g, h はいずれも Borel 可測．また，Fubini の定理 3.4.1 より一変数ずつ考えると，Lebesgue 積分は平行移動について不変 3.5.1 であるから，

$$\iint_{\mathbb{R}^{2d}} |h(x+y) - g(x+y)| dxdy = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |h(x+y) - g(x+y)| dx \right) dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |h(x) - g(x)| dx \right) dy = 0$$

が従う．よって，$h(x+y) = f(x+y) = g(x+y)$ a.e. $(x,y) \in \mathbb{R}^{2d}$ を得るから，完備空間上の関数の可測性の特徴付け 2.5.9 より，$f(x+y) : \mathbb{R}^{2d} \to \overline{\mathbb{R}}$ も Lebesgue 可測である.

■

要諦 1.5.10 (2 つの関数は定義域が違う). (1) の積関数の定義域 $\mathbb{R}^{2d}$ はただの直積空間であるが，(2) の定義域 $\mathbb{R}^{2d}$ は直積の完備化をとっているために，全く違う議論になる．(1) から (2) を導くには Fubini の定理 2.8.11 が必要であるのが面白い.

定理 1.5.11 (直積の普遍性の破れ). $(X, \mathcal{B}_X)$ を任意の可測空間とし，$Z := X \times \mathbb{R}^d$ において直積 σ-加法族 $\mathcal{B}_Z := \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ を考える．関数 $f : Z \to \overline{\mathbb{R}}$ が次を満たすとき，$\mathcal{B}_Z$-可測である.

(1) $f(-,y): X \to \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{B}_X$-可測.
(2) $f(x,-): \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ は連続.

1.5.5　合成積

合成積は解析では $\mathbb{R}^d$ の加法群の上に定められるが，一般的には群上の環値関数について定義される．半直積のようなものである．微分はこの積について Leibniz 則を満たし，Fourier 解析はこの積について関手性を持つ．圏論化が Day 合成積というものになる．

定義 1.5.12 (convolution). Lebesgue 可積分関数 $f,g,h:\mathbb{R}^d \to [-\infty,\infty]$ に対して，

(1) $f(x-\cdot)g(\cdot):\mathbb{R}^d \to [-\infty,\infty]$ は殆ど至る所 Lebesgue 可積分である．
(2) $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dm(y)$ で定まる関数 $f*g:\mathbb{R}^d \to [-\infty,\infty]$ は殆ど至る所 Lebesgue 可積分であり，$\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$ が成り立つ．すなわち：
$$\int_{\mathbb{R}^d} |f*g(x)|dm \leqslant \int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|dm \int_{\mathbb{R}^d}|g(x)|dm.$$
(3) (可換) 殆ど至る所で $f*g = g*f$ が成り立つ．すなわち：
$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)f(y)dy.$$
(4) (結合的) 殆ど至る所で $f*(g*h) = (f*g)*h$ が成り立つ．

[証明].

(1) **$f(x-y)g(y):\mathbb{R}^{2d} \to \overline{\mathbb{R}}$ の Lebesgue 可測性**　定理 1.5.9 より従う．すると，$|f(x-y)g(y)|$ も可測である（$h = h^+ - h^-$ に対して $|h| = h^+ + h^-$ であるため）．

$f(x-y)g(y):\mathbb{R}^{2d} \to \overline{\mathbb{R}}$ の Lebesgue 可積分性　完備空間についての Fubini の定理??より，非負値 Lebesgue 可測関数 $|f(x-y)g(y)|$ について，一変数化 $|f(x-\cdot)g(\cdot)|:\mathbb{R}^d \to [0,\infty]; y \mapsto |f(x-y)||g(y)|$ は殆ど至る所 Lebesgue 可測であり，$\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y)|dm(y)$ が定まり，$x \in \mathbb{R}^d$ 上殆ど至る所 Lebesgue 可測である．さらに，
$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{2d}} |f(x-y)||g(y)|dm(z) &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y)|dm(y)\right)dm(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y)|dm(x)\right)dm(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|dm(x)\right)dm(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|dm(y)\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|dm(x) < \infty \qquad \because \text{平行移動不変性 1.5.9}
\end{aligned}$$
より，$f(x-y)g(y)$ は $\mathbb{R}^{2d}$ 上可積分である．したがって，可積分関数についての Fubini の定理 3.4.5 より，一変数化 $y \mapsto f(x-y)g(y)$ も殆ど至る所の $x \in \mathbb{R}^d$ について可積分である．$|f(x-y)|g(y)||:\mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ は y の関数として Lebesgue 可積分である．

(2) $f(x-y)g(y)$ は $\mathbb{R}^{2d}$ 上可積分であるから，可積分関数についての Fubini の定理 3.4.5 より，一変数化 $y \mapsto f(x-y)g(y)$ も殆ど至る所の $x \in \mathbb{R}^d$ について可積分である上に，その積分は殆ど至る所の $x \in \mathbb{R}^d$ について可積分である．

(3) $t := x-y$ とおく変数変換より，
$$\begin{aligned}
(f*g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)dt \\
&= (g*f)(x)
\end{aligned}$$
■

定理 1.5.13 (近似的単位元の存在). $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ は $\int_{\mathbb{R}} \phi dx = 1$ を満たす任意の可積分関数とする．$\phi_\epsilon(x) := \epsilon^{-1}\phi(x/\epsilon)$ とおくと，任意の $x = a$ で連続な有界関数 $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ について，

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} \phi_\epsilon(x-a)f(x)dx = f(a).$$

要諦 1.5.14. $(\phi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ とすると，これは $C_b(\mathbb{R})$ の近似的単位元である．

(1) ϕ を $N(0,1)$ の確率密度関数とすると，ϕ_ϵ を**熱核**または **Gauss 核**という．
(2) ϕ を $C(0,1)$ の確率密度関数 $\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$ とすると，ϕ_ϵ を **Poisson 核**という．

1.5.6　C^1-級ならば前合成も可測

Lebesgue 可測関数 X に Borel 可測関数を後からかぶせた $f(X)$ は Lebesgue 可測であるが，前合成は一般に Lebesgue 可測とは限らない．特に，Borel 関数同士の合成は Borel であるが，Lebesgue 関数同士の合成は Lebesgue とは限らない．

命題 1.5.15 (Borel 後合成の可測性). $g \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}(\mathbb{R}^d;\overline{\mathbb{R}})$ を Borel 可測，$f_1, \cdots, f_d \in \mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ を Lebesgue 可測とする．このとき，$g(f_1,\cdots,f_d) : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ は Lebesgue 可測．

命題 1.5.16 (Borel 前合成が可測になる十分条件). $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ の導関数が消えないならば，前合成 $\phi^* : \mathcal{L}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}); f \mapsto f \circ \phi$ が定まる．

1.6　Boole 代数

Boole 代数だけでなく，σ-代数も，集合上に表現されたもののみを考えれば十分である．しかし，量子確率のように，非可換な測度論は，抽象的な代数構造への顧慮を抜きに議論は出来ない [Tao, 2010] 2.3.

1.6.1　具体 Boole 代数

定義 1.6.1 (concrete Boolean algebra [Tao, 2010] 2.3). 集合 X とその上の集合体 $\mathcal{B}$ との組 $(X,\mathcal{B})$ を**具体 Boole 代数**という．すなわち，$A, B \in \mathcal{B}$ について，

(1) $\varnothing \in \mathcal{B}$.
(2) $A \cup B \in \mathcal{B}$.
(3) $A \cap B \in \mathcal{B}$.
(4) $A^\complement \in \mathcal{B}$.

命題 1.6.2 ([Tao, 2010] 2.3). $\mathcal{B}$ は包含関係 $\subset$ について，分配的で，有界で，可補的である：

(1) 任意の $A, B \in \mathcal{B}$ について，結びと交わりを持つ．
(2) 分配法則を満たす：
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = A \cup (B \cap C).$$
(3) 最大元 $\varnothing^\complement$ と最小元 $\varnothing$ を持つ．
(4) 可補性：$A \cap A^\complement = \varnothing$ かつ $A \cup A^\complement = \varnothing^\complement$.

要諦 1.6.3. これらの性質を持つ代数構造（分配的で可補的な有界束）を Boole 代数という．

1.6.2　束の定義と例

定義 1.6.4 (lattice, complete lattice).

(1) 基本的に $P(X)$ は順序に関して束の構造を持つ．束とは，有限の交わりと有限の結び[†9]を持つ半順序集合であるが，順序も代数として見ることができ，したがって純代数的には次を満たす代数系 $(L, \wedge, \vee, \top, \bot)$ をいう．
   (a) $\wedge, \vee : L \times L \to L$ は冪等で，結合的で，交換的である．
   (b) 吸収律 $a \vee (a \wedge b) = a, a \wedge (a \vee b) = a$ が成り立つ．[†10]
   (c) $\top, \bot$ は $\wedge, \vee$ の中立元である．
   2 つの表現は $a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a$, $b \leqslant a \Leftrightarrow a \vee b = a$ で対応する．[†11][†12]
(2) 束が任意の交わりと結びについて閉じているとき，これを**完備**という．[†13]圏 CompLat をなす．結びのみについて閉じている場合を frame という．[†14]
(3) 束の射は，$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ という 2 つの semi-lattice 構造を保つものをいう．特に f は単調写像である必要があるが，十分ではない．この圏を Lat などと表す．

例 1.6.5 (束と束準同型の例)**.**

(1) 部分群の束を定め，結びは NH，交わりは $N \cap H$ となる．
(2) 位相 $\mathcal{O}$ は完備束をなすが，無限共通部分は $\cap$ 演算とは一致しないことに注意．あくまで順序構造が完備束をなす．
(3) $\mathbb{R}$ は束であるが完備ではない．局所コンパクト空間 $\mathbb{R}$ の端点コンパクト化 $\overline{\mathbb{R}}$ は top と bottom を備え，完備束となる．$[0, \infty]$ も同様．積分 $\mathcal{B} \to [0, \infty]$ は束準同型ともみれる．

□

例 1.6.6 (set operation)**.** $P(X)$ について，

(1) （任意個数の）共通部分と合併 $\cap, \cup : P(X) \times P(X) \to P(X)$ がある種の極限に思える．すると，$(P(X), \cap, \cup, \emptyset, X)$ は完備束となる．また任意濃度の分配則が成り立ち，これを de Morgan 則という．
(2) 写像 f は一般に $f(\cup_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} f(A_i)$．$f$ が単射ならば，空でない族 $(A_i)_{i \in I}$ $I \neq \emptyset$ について，$f(\cap_{i \in I} A_i) = \cap_{i \in I} f(A_i)$．すなわち，単射 f が引き起こす全射 f_* は完備束の射である (σ-加法性も保つ)．
(3) 一般の写像 f が定める反変関手 f^* は完備束の射である．
(4) $f(A) \subset B \;\Leftrightarrow\; A \subset f^{-1}(B)$ は，包含射 $i : X \hookrightarrow Y$ が存在するという 2 上の豊穣圏での「内積」を $\langle -, - \rangle : P(X) \times P(X) \to 2$ と表すならば，写像 f が冪集合上に定める関手を用いて，$\langle f_*(A), B \rangle = \langle A, f^*(B) \rangle$ となるから，これらは互いに随伴である．

□

1.6.3 Heyting 代数と Boole 代数の抽象的定義

解析学で最も大事な構造：Boole 代数

$P(X)$ の結び半束としての対称な構造，特に $\neg$ の果たす役割は関数解析まで通底して重要である．値域としては $[0, \infty]$ を考えれば良いこと，$\mathrm{BV}[a, b]$ としては単調増加関数を考えれば良いこと，単調収束定理，σ-代数は Boole 代数の単調閉包を考えれば良いこと，全ては，$\mathrm{BV}[a, b]_+$ を 2 つ，上下逆に組み合わせることで全体を復元できることに因る．

定義 1.6.7 (Heyting algebra, Boolean algebra). 束は明らかに，双対的な 2 つの代数系（半束）を組み合わせたものである．[†15]ここに bicategory 的な消息があるのは自然なことである（Heyting 代数は bicartesian closed category のことに他ならない[†16]）．bicategory に特徴的なものは随伴・内積・currying・exponent である．f_*, f^* の互いに逆な関手が 2 つ生まれることはこの消息

[†9] poset as a $(0, 1)$-category としては，それぞれ直積と直和 (coproduct) と見れる．
[†10] それぞれ，結び，交わりという「直近の交差点」を通じてアクセス可能だという順序構造を代数的に表しているとみれる．
[†11] この 2 つの対応は，順序表現が鳥瞰図，代数表現がその Hesse 図の上を動くパックマンの気持ちのようである．
[†12] この対応は同値な条件を 2 つ述べている．これは，束とは，「同じ順序関係を定める 2 つの半束を備えた代数系が束である」という特徴づけの消息が映り込んでいる．
[†13] 圏が完備であることは任意の極限を保つことを言う．ここら辺が本質である．
[†14] が，adjoint functor theorem から示せる基本的な事実として，双対的に任意の結びももち，したがって結局完備である！
[†15] 2 つのフィルター／イデアルをひっくり返してくっつけて，全体として束（のあの特徴的な Hesse 図）になる，という感じ．
[†16] bicartesian closed category とは，有限 coproduct も有限 product も（モノイド構造として）備えた closed category であり，2 つの構造 $\wedge$ と internal hom$\Rightarrow$ の間に随伴関係$=$ currying がある poset category のことをという．

である．

(1) 次の普遍性（$\wedge$ との右随伴性，$\vee$ との左随伴性）を満たす bicunctor (実は internal hom) $\Rightarrow: L^{\mathrm{op}} \times L \to L$ を備える束 L を **Heyting 代数**という：$(x \wedge a) \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant (a \Rightarrow b)$.[†17]

(2) Heyting 代数には，２つの半束を行き来する $\neg : L^{\mathrm{op}} \to L$ が，$\neg x := (x \Rightarrow 0)$ として自然に定義できる．これが involution である時，**Boole 代数**といい，命題論理のモデルとなる．これがなす圏を BoolAlg と表す．[†18]

(3) ブール代数は環として理解できる．単位的な環が Boolean であるとは，任意の元 $x \in R$ について $x^2 = x$ を満たすことを言う．これは通常の環準同型について圏 BooRng をなす．これは Boole 代数の圏と圏同値になり，１つの集合 R に入る Boole 代数の構造と Boole 環の構造とは標準的な全単射が存在する．

注 1.6.8. Boole 代数と Boole 環とは $0 = \bot, 1 = \top$ という対応であり，その違いは，σ-代数と σ-体の違いに等しい．環とは Ab 内の idempotent semigroup を意味し，体または代数とは Ab 内の idempotent monoid を意味する．[†19]これは現代的な環・体・代数の定義とは異なる．σ-環 $\mathcal{B} \subset P(X)$ と言ったとき，$P(X) \in \mathcal{B}$ とは限らないことに対応する（定義 2.1.3）．いずれの場合も，和の Abel 群 $(P(X), \cap, \varnothing)$ の方が大事で（群とはいいにくい，自然には可逆でないので），その上に $\cap$ の構造がどう乗るかを考え，σ-と言った時は加法に注目する．この観点からは「集合体」という表現にも一理ある．

注 1.6.9. Boole 代数 2 は，２つの semilattice が結合した代数系として一番退化した形である．そもそも忘却しても $P(X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, 2)$ なのであった．Boole 代数としてはウルトラフィルターが表現される：$\mathrm{Ult}(X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{BoolAlg}}(X, 2)$.

例 1.6.10 (完備 Heyting 代数と Boole 代数の例)**.**

(1) 完備 Heyting 代数のことを frame という．が，frame と言った時，射は suplattice の射を採用し，完備 Heyting 代数の射は採用しない．

(2) 位相は完備束である 1.6.5 ことに加え，位相は完備 Heyting 代数である．と言っても，順序については $\bot = \varnothing$ が存在するのでそうであるが，$\wedge = \cap$ ではないので，普段の位相の議論の文脈では違うと言いたい．

(3) $P(X)$ は完備 Heyting 代数である上に，$\complement : P(X) \to P(X)$ は involution なので，**完備 Boole 代数**である．実は，$P(X)$ は atomic 性によって同型を除いて一意に定まる．[†20]したがって，関手 $P : \mathrm{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CompBoolAlg}$ は充満忠実である．この本質的な像は CABA (complete atomic Boolean algebra) と表す．まず Boole 代数の元 $a \in A$ が atom であるとは，a が $A \backslash \{\bot\}$ の極小元であることを言う．Boole 代数 A が atomic であるとは，任意の $b \in A$ に対して，atom a_i のみからなる合併 $b = \bigvee_{i \in I} a_i$ を持つことを言う．このような構造を持つ Boole 代数は，必ず何かしらの集合の冪集合である．

測度論と積分論では，位相の frame には対称性を加え Boole 代数にまで上げ，しかし完備 Boole 代数よりは条件を弱めて，可算個の結びと交わりについてのみの閉性を要求する σ-代数 2.1.3 というクラスに注目する．　□

keywords

2 上の豊穣圏，束準同型としての積分の代数的定義が Lebesgue 積分であること，作用素的な世界観，mathematics based on human cognition は「射的なもの」へと漸近していく．集合の共通部分も合併も，束の交わりも結びも，下限・上限として極限的な存在である．だから最大と最小よりも普遍的な存在なのである．これを代数化したのが束（さらに双璧的な消息を捉えると Heyting 代数）だと思える．ただ完全にこの言葉で書かないのは，集合の言葉の方が構造は豊かで，また直感的だからであるが，frame による位相空間論の使いやすさを見ると，ここは新たな研究領域としても良いだろう．すると集合列の極限も圏は違えど全く同様に議論できて，上限 lim sup と下限 lim inf が見つかる．

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathrm{CompBoolAlg} & \subset & \sigma-\mathrm{Alg} & \subset & \mathrm{BoolRng} & \sim & \mathrm{BoolAlg} & \subset & \mathrm{HeytAlg} & \subset & \mathrm{Lat} & \subset & \mathrm{Pos} \\
\uparrow{\scriptstyle P} & & & & & & & & \cup & & \cup & & \\
\mathrm{Set}^{\mathrm{op}} & & & & & & \mathrm{Frm} & \not\sim & \mathrm{CompHeytAlg} & & \mathrm{CompLat} & &
\end{array}
$$

[†17] そうか，必要十分条件がわからないというけど，これは $\wedge, \vee$ との随伴の中に生きているのか．$- \wedge a$ と $a \Rightarrow -$ が随伴ね．この随伴は，一般的にはモノイダル圏で捉えられるモノイド構造と指数対象＝ cartesian monoidal category に関する internal hom との随伴性の例になっている．

[†18] 任意の束の射は $\neg : L \to L^{\mathrm{op}}$ を保つ．

[†19] 半束も idempotent monoid のことであると理解できる．

[†20] 排中律を認めた場合

1.6.4　分配則について

> 分配性は極めて美しい圏論的特徴づけがある．したがって，self-duality も成り立つ．

定義 1.6.11 .

(1) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ かつ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ を満たす束を**分配則**という．実は 2 つの条件は同値で，片方を満たせば十分であるが，このようなことは無限分配束については起こらない．これは束の半束からの self-dual な構成が背景にある．

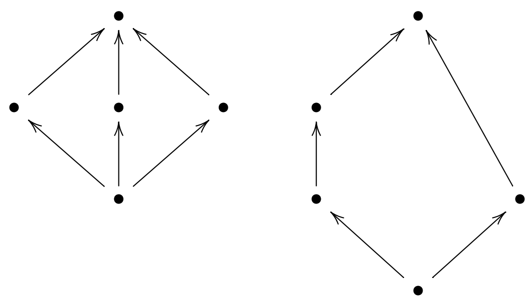
(2) 分配則は圏 DistLat をなす．

定理 1.6.12 (分配則の特徴付け：Birkhoff). 束 L について，次の 2 条件は同値．

(1) L は分配的である．

(2) 埋め込み $N_3 \hookrightarrow L, M_5 \hookrightarrow L$ はいずれも存在しない．

M_3　　　　N_5



例 1.6.13.

(1) 任意の Heyting 代数（したがって Boole 代数）は分配的である．

(2) 任意の線型順序は分配的である．

よって，$P(X) \to [0, \infty]$ は分配則の準同型と見れる．　□

1.6.5　可補性について

定義 1.6.14 . 束 $\mathcal{B}$ が**可補的**であるとは，任意の $a \in \mathcal{B}$ に対して $b \in \mathcal{B}$ が存在して，次を満たす有界束をいう：

$$a \vee b = 1, \quad a \wedge b = 0.$$

この束がさらに分配的ならば，この b は一意的で，$\neg a$ と表し，$\mathcal{B}$ を Boole 代数という．

1.6.6　完備性

> 完備束上で，単調列は収束する部分列を持つか？完備 Boole 代数 $P(X)$ 上では，補題 1.7.3 のように，収束の上下極限による特徴づけからも議論できる．

1.6.7　半束

σ-代数 $\mathcal{B}$ の基底にある束の構造に注目すれば，これは半束＝木の組み合わせであり，加法的集合関数 $\mathcal{B} \to \mathbb{R}$ はこれを保つ．その消息が Jordan 分解 5.1.10 であり，Hahn 分解 5.1.12 である．半束という模様を抽出した時点で，ただの冪等な可換モノイドであるが，極めて豊かな構造を持つ．

定義 1.6.15 (join-semilattice, lattice). 結び半束には，次の 4 つの同値な定義がある．

(1) 任意の有限集合に上限が存在するような半順序集合である．
(2) 任意の 2 元に上限が存在するような，最小元 $\perp$ をもつ半順序集合である．
(3) 任意の有限極限を持つ poset category である．
(4) 任意の有限余積を持つ poset category である．
(5) 可換で冪等なモノイド $(A, \vee, \perp)$ である．ただし，二項関係を $a \leqslant b :\Leftrightarrow a \vee b = b$ とする．

交わり半束とはその反対圏である．したがって，純代数的には，構造に違いはなく，いずれも可換冪等モノイドである．違いは形式的には記号のみである．可換冪等モノイドの射を半束の射という[†21]．これらがなす圏を SemiLat と表す．すると，SemiLat は可換冪等モノイドの圏として一つだが，埋め込み方 $i : \mathrm{SemiLat} \hookrightarrow \mathrm{Pos}$ が二通りある．

poset が結び半束であり，かつ交わり半束であるとき，これを束という．

注 1.6.16. 伝統的には，可換冪等半群を半束とよび，中立元／最小元を持つとき有界であると言ったが，これでは poset に使う有界性の概念と齟齬が生じる．

定義 1.6.17 (suplattice). 任意の部分集合に上限が存在するような半順序集合を上限束という．

補題 1.6.18 . 上限束は下限束でもある．したがって，完備束であることに同値.

1.6.8　Stone 表現定理

[Tao, 2010] に詳述がある．任意の抽象的な Boole 代数は，ある集合上の集合体 $\mathcal{B}$ として表現される．

議論 1.6.19 (algebra). algebra という用語法はおそらく field から離陸したのだろう．今回，Boole 代数と σ-代数が繋がったことと，何かしらの準同型 $P(X) \to \mathbb{R}$ が大事であることから，スッキリ理解できた．[Tao, 2011] でも集合体／有限加法族は Boole 代数として導入されている．となると，函数解析学でも代数は極めて重要であり，位相という形でも，線形代数という形でも，極限構成という形でも，種々の代数が入り乱れる場となる．$\mathcal{B}$ は束＝ 2 つの半束の合体である．束とは木である．この 2 つの木を分離するのが完全加法集合関数 $\mathcal{B} \to \mathbb{R}$ である．根は根に対応させ，そこから世界を 2 つの世界樹に分け，$P(X)$ をどちらかが取る．

議論 1.6.20 (Stone representation theorem, Loomis-Sikorski representation). 全ての具体的な Boole 代数＝有限加法的測度空間 $(X, \mathcal{B})$ は，抽象的な意味でも Boole 代数である．この逆を保証するのが Stone の表現定理で，"So, up to (abstract) isomorphism, there is really no difference between a concrete Boolean algebra and an abstract one."[Tao, 2011] そして具体的な σ-代数を測度空間と呼ぶ．この場合は抽象的な σ-代数が具体的な Boole 代数として表現されるとは限らない．しかし失敗する場合は特定されていて，null set のなすイデアルで商を取れば良い．

定義 1.6.21 (morphism of Boolean algebra, Stone space).

(1) 抽象 Boole 代数の射とは，$\emptyset, \cup, \cap, \complement, \subset$ を保つ写像とする．可測関数 $f : X \to Y$ は，逆向きの Boole 代数の射 $\mathcal{B}_X \to \mathcal{B}_Y$ を定めるのは，frame と locale の関係に似てる．
(2) 完全不連結なコンパクトハウスドルフ空間 (X, F) を**ストーン空間**という．Stone 空間の位相 F は，clopen set の具体 Boole 代数 $\mathrm{Cl}(X)$ を定め，これは F の開基となっている．

[†21] モノイドの射が自然に群の者になるように，モノイドの射は自然に冪等性と可換性を保つ．

補題 1.6.22 .

(1) Stone 空間 X の位相 F は，$\mathrm{Cl}(X)$ によって生成される．すなわち，$\mathrm{Cl}(X)$ は F の開基である．
(2) 2 つの Stone 空間 X, Y について，$X \simeq Y \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Cl}(X) \simeq \mathrm{Cl}(Y)$ である．

定理 1.6.23 (Stone 表現定理). 任意の Boole 代数 A に対して，ある Stone 空間 X が存在して，$A \simeq \mathrm{Cl}(X)$ を満たす．

要諦 1.6.24. この対応

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BoolAlg} & \longrightarrow & \mathrm{Stone}^{\mathrm{op}} \\ \Psi & & \Psi \\ \mathcal{B} & \longmapsto & \mathrm{Hom}(\mathcal{B}, 2) \\ X & \longmapsto & \mathrm{Cl}(X) \end{array}$$

は圏同値を与える．Frame と Locale の関係に極めて似ている．

> It is the model example of the more general Stone duality between cer- tain partially ordered sets and certain topological spaces. The idea of dualising a space X by considering the space of its morphisms to a fundamental space (in this case, $\{0, 1\}$) is a common one in mathematics; for instance, Pontryagin duality in the context of Fourier analysis on locally compact abelian groups provides another example (with the fundamental space in this case being the unit circle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$); see Section 1.12. Other examples include the Gelfand representation of C^* algebras (here the fundamental space is the complex numbers $\mathbb{C}$; see Section 1.10.4) and the ideal-variety correspondence that provides the duality between algebraic geometry and commutative algebra (here the fundamental space is the base field k). In fact there are various connections between all of the dualities mentioned above.

補題 1.6.25 (Birkhoff 表現定理). 任意の有限 Boole 代数 B に対して，ある集合 X が存在して，$B \simeq_{\mathrm{BoolAlg}} P(X)$ が成り立つ．

議論 1.6.26 (sequence and its limit)**.** 測度論とは基本的に $[0, \infty]$ と同じ構造を集合代数の中に作る理論である．$\cup_{n=1}^{\infty}$ について閉じていることを要請するために，この閉性を議論するときによく $[0, \infty]$ 上の数列に写して考える．これで初項 $\frac{1}{2}$ 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列がよく登場することとなる．このときに附番を使う．可算和と可算濃度というのが測度の概念としての本質になってくる．これは，ϵ に抑え続けることができることに相当して，ϵ-δ 論法の中で使われる．ここまで戻らなきゃいけないのは少し鈍臭いというか，もう少し代数学の霊性を使えないのか．

- 可測関数は単関数列で各点収束させられる．これについて定理を持ち上げる（Lusin の定理 1.5.3 など）．
- σ-有限性が満たされるとき，$\mu(A) < \infty$ の場合のみを考えれば良い（Radon-Nykodim の定理 5.2.12 など）．
- 有界な集合の列で全体に至ることが出来るとき，$A_n := E \cap (B(0, n) \backslash B(0, n-1))$ $(n = 1, 2, \cdots)$ というように開球で階段を作って補題 1.4.9 を使う（Lebesgue 非可測集合の構成 1.2.1 や Lebesgue 可測集合の正則性についての補題 1.4.2 など）．

議論 1.6.27 (ϵ-δ)**.** ϵ-δ 論法で定理のステートメントが記述され，$\inf, \sum$ もその土俵にまで解体して議論する．しかしその証明は高度にアルゴリズム的で，集合論の複雑さが大いに発揮されている．これを自動化できないものか．少し馬鹿馬鹿しく感じる．逆に言えば測度論の証明は全てこれである．あまりに代数的な分野なのにそう見えないのは本来的ではないではないか．

1.7　順序構造

積分論とは，集合の列による極限構成を基本言語とする理論である

測度が定まるものによる近似を考えるとするなら，一番基本的な道具はなんだろうか．宇宙 $P(X)$ の構造を考えると，これは poset category であり，特に完備で bicartesian closed である．[a]**つまり，好きに極限を扱える．これを hack するのが新たな積分論である．** この上での filtration を考えたり，数の集合への Pos-射を考える理論が測度論であり，$P(X)$ から出る Pos の関手の関手性を劣加法性という．つまり包含射＝ 2 上の射が不等号 $\leqslant$ の本質である．この関手性の極限的な理想形（演算 $\cup$ が $\sqcup$ または $+$ となるとき）を σ-加法性という．単に additivity と言ったらこれを指す．
そこで圏 $P(X)$ の列の極限を考える．これによって種々の集合の構成を行う理論である．これは X の列＝点列の拡張と

なっており，ニューラルネットワークっぽい．点列では集積点の集合が定まり，$\sup, \inf$ によりその集合の上限と下限が取り出せるが，集合列では「集積集合」なる束が定まり，その順序関係は包含射としたものとなり，sup を極大集合，inf を極小な集合と読める．すると単調列が収束することが極めて自然に理解できる．

[a] 完備とは任意の極限を持つこと，bicartesian closed poset とは Heyting 代数のことで，直積と直和が備わり，指数対象＝ cartesian closed category における internal hom も備わり，これらが currying と呼ばれる随伴関係を持つこと．

記法 1.7.1 (symmetric difference).

(1) 直和という極限構成を $A+B :\Leftrightarrow A \cup B \; (A \cap B = \emptyset)$ で表す．これは $\mathbb{R}$ などでの直和が Abel 群の標準的な演算子 $+$ で表されるためである．

(2) 対称差を $A \dot{-} B := (A \backslash B) + (B \backslash A)$ と表す．

定義 1.7.2．$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を集合の列とする．

(1) $\limsup_{n\to\infty} A_n := \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{\nu=n}^{\infty} A_\nu$ を**最大極限集合**または**上極限集合**といい，列 (A_n) の元のうち，十分遠くでは必ず現れる＝無限回現れる (i.o.) 元からなる集合を表す．

(2) $\liminf_{n\to\infty} A_n := \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{\nu=n}^{\infty} A_\nu$ を**最小極限集合**または**下極限集合**といい，列 (A_n) の元のうち，手前の有限個を除いて全ての A_n で現れる (f.e.) 元からなる集合を表す．

(3) $a \in A_n \; (n \geqslant {}^{\exists}N)$ である元は，任意の $n \in \mathbb{N}$ について $a \in \cup_{\nu=n}^{\infty} A_\nu$ であるから，一般に $\liminf A_n \subset \limsup A_n$ である．この逆も成り立って 2 つの集合が一致するとき，集合列 (A_n) は**収束する**といい，$\lim_{n\to\infty} A_n$ を**極限集合**という．

補題 1.7.3 (有界な単調列は収束する)． $P(X)$ とは有界な束である．そこでの単調列 (A_n) は収束する．

[証明]． $\liminf_{n\to\infty} A_n \supset \limsup_{n\to\infty} A_n$ を示せば良い．単調増加列では $\exists_{N\in\mathbb{N}}\; a \in A_N$ ならば，$\forall_{n\geqslant N}\; a \in A_n$ より，無限回登場するものは，初登場以降登場し続ける．単調減少列では $a \in A_n \Rightarrow a \in A_1$ より，無限回登場するものは，実は初回から登場し続けている． ■

補題 1.7.4 (極限集合の特性関数)． 列 (A_n) について，

(1) $\chi_{\limsup_{n\to\infty} A_n}(x) = \limsup_{n\to\infty}(\chi_{A_n})$.

(2) $\chi_{\liminf_{n\to\infty} A_n}(x) = \liminf_{n\to\infty}(\chi_{A_n})$.

要諦 1.7.5. interval category $2 = \{0 \to 1\} \in \mathrm{Pos}$ への関手が，極限を保つことを言っている．あまりに綺麗に圏論の言葉で特徴付けられるので笑ってしまった．

$P(X)$ 上での極限

単調列は収束することを，上下極限の特徴付け (Darboux の方法みたい) で示せる．これは暗黙に位相を考えているはずで，非常に気持ちが悪い．

第 2 章

測度空間論

測度論は Lebesgue 積分と Kolmogorov の確率論の成功から端を発した集合を用いた形式科学である．Measure theory is very much having a central role in studying so called ergodic theory of dynamical system.

ここでは理論の枠組みで，実際の構成はしない．つまり，「集合の族」という対象の代数的構造を抽出して公理を立て，そこでの圏論的構成などの代数的議論を展開する．実際にその例を構成して個別論を展開する前に先行する一般論を展開する．

集合代数に仮託して喋るので，極限構成に極めて強く，理論的な強度が桁違いになる．こうして圧倒的な応用性を獲得するのである．完備空間の理論も，零集合はあくまで代数法則によって抽出する．

単関数近似も，極限構成の職人である．almost sure の議論も，条件と集合が交差し，その代数構造も交差し，議論は構成的で技巧的で職人的であり，そこに乗る意味論は莫大．なんだか，凸解析などの応用分野の数学と似た感触を感じる．これが解析学であろうか．

2.1 σ-代数の定義と構成

集合代数の構造のうち，真に注目すべき代数的構造が σ-代数

σ-代数には 2 つの重要な特徴付けがある．まず，単調族でもある代数は σ-代数である．つまり，可算演算は単調収束極限として捉えられるものに限る．
次に，乗法族かつ Dynkin 族ならば σ-代数である．乗法 $\cap$ についての単位的半群 $(\mathcal{A}, \cap, X)$ を乗法族という．乗法族には，Dynkin 生成と σ-生成が等価になる (Dynkin 族定理) ことと，一致の定理とが成り立つため，重要なクラスになる．
このように，σ-代数とそれ以外の観点は密接に関連するが，極めて混沌とした世界が広がっている．

2.1.1 集合環

集合代数 $P(X)$ を考察すると，まず和 $\cup$，積 $\cap$ と，和の中立元＝零元 $\emptyset$ による環の構造が見つかる．これに加えて，可算和ができる環を σ-環 (Summe)，可算積ができる環を δ-環 (Durchschnitt) という．任意濃度の演算ができることを**完備**といい，$P(X)$ は完備 Boole 代数である．積の中立元も加えた構造を，体または代数という．代数の語は，$\neg$ の演算にも注目して言う（2 つの半束が $\neg$ で結びついている感じ）．

定義 2.1.1 (ring, δ-ring, σ-ring). X を集合とする．$\mathcal{M} \subset P(X)$ が

(1) 次の 3 条件を満たすとき，これを X 上の**環**という．[†1]
   1 $\emptyset \in \mathcal{M}$.
   2 $\forall_{S,T\in\mathcal{M}} S \cup T \in \mathcal{M}$.
   3 $\forall_{S,T\in M} S \backslash T \in \mathcal{M}$.

(2) X 上の環であって，さらに可算個の共通部分についても閉じている時，これを X 上の δ-**環**という．[†2]

[†1] The term ‘ring’ dates from the days when a ring in algebra was not assumed to be unital; so a ring on X is simply a subring (in this sense) of the Boolean ring $\mathcal{P}X$.

[†2] The symbol ‘δ’ here is from German ‘Durchschnitt’, meaning intersection; it may be used in many contexts to refer to intersections of

(3) X 上の環であって，さらに可算個の合併についても閉じている時，これを X 上の **σ-環**という．[†3] これは δ-環である．

例 2.1.2.

(1) 可測空間 $(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$ の体積確定集合の全体 $\mathcal{M}^1 := \{A\in\mathcal{A}\mid\mu(A)<\infty\}$ は δ-環をなす．
(2) 可測空間 $(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$ の σ-有限な可測集合の全体 $\mathcal{M}^2 := \left\{A\in\mathcal{A}\;\middle|\;\exists_{\{A_n\}\subset\mathcal{M}^1}\ A=\lim_{n\to\infty}A_n\right\}$ は σ-環をなす．

□

2.1.2　σ-代数と例

定義 2.1.3 ((Boolean) algebra / field, σ-algebra / σ-field). X を集合とする．$\mathcal{M}\subset P(X)$ が

(1) 次の 3 条件を満たすとき，これを X 上の **(Boole) 代数／体**または有限加法族という．[†4] これは，「全体集合 X を含む環」として特徴付けられる．
1 $\emptyset, X\in\mathcal{M}$.
2 $\forall_{S,T\in\mathcal{M}}S\cup T\in\mathcal{M}$.
3 $\forall_{S,T\in M}S\backslash T\in\mathcal{M}$.
この時条件 2 は $X\in\mathcal{M}$ の参加により，3 から導かれる．$X\in\mathcal{M}$ の参加と条件 3 より，（絶対）補集合について閉じる．[†5]
(2) X 上の σ-環であって Boole 代数でもあるとき，これを X 上の **σ-代数**という．δ-代数は σ-代数である．これを別の同値な公理化をすると
1 $\emptyset\in\mathcal{M}$.
2 $\forall_{S\in\mathcal{M}}\neg S\in\mathcal{M}$.
3 $\forall_{S_1,S_2,\cdots\in\mathcal{M}}\cup_{i\in\mathbb{N}}S_i\in\mathcal{M}$.

$\mathcal{M}$ の元を $\mathcal{M}$-可測集合という．

注 2.1.4. δ,σ はそれぞれ積と和の可算演算への閉性（完備性への漸近）を表し，何も付かない場合は通常の有限項演算を表す．環とは $1,\top,P(X)$ を必ずしも満たさないもの，体／代数とはこの積中立元も含むものを指す．現代的には環と言ったら積構造は単位的である代数系を指すが，この違いは集合の代数的性質が調べられた時代において，Boole 環と Boole 代数の使い分けに対応する．
ベクトル値の測度を使いたい場合は，ring を使ったほうがうまくいくことも多い．σ-や δ-をつけると，位相空間論や一様空間論のように基底と準基の理論が建てられなくなる．Kolmogorov used algebras (at least at first), and Halmos used σ-rings.
環と代数の混用は作用素環論に至るまでずっと本質的である．代数的場の量子論は作用素環論による基礎付けである．

例 2.1.5 (Borel class)**.**

(1) 任意の集合 X について $P(X)$ は，任意の集合演算に閉じているので，もちろん σ-代数である．$(X,P(X))$ を離散可測集合という．
(2) 集合族の代数といえば開集合系である．位相空間 $(X,\mathcal{O})$ に対して，開集合系 $\mathcal{O}$ から生成される σ-集合体を，**ボレル σ-集合体**または**ボレルクラス**といい，$\mathcal{B}(X,\mathcal{O})$ で表す．
(3) 特に $X=\mathbb{R}^d$ で Euclid 位相を考えるとき，これを $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ で表し，その元を **d 次元ボレル可測集合**という．
(4) 閉集合系が生成する σ-代数は，Borel class に一致する．

□

例 2.1.6 (trivial algebra, discrete algebra)**.**

(1) 自明な代数 $\{\emptyset,X\}$ は σ-代数である．

---

countable families.
[†3] The symbol ‘σ’ here is from German ‘Summe’, meaning union; it may be used in many contexts to refer to unions of countable families.
[†4] [Tao, 2011] では (concrete) Boolean algebra と呼んでいる
[†5] The term ‘field’ here is even more archaic than the term ‘ring’ above; indeed the only field in this sense which is a field (in the usual sense) under symmetric difference and intersection is the field $\{,X\}$ (for an inhabited set X).

(2) 離散代数 2^X も σ-代数であり，完備 Boole 代数である．
(3) 区間塊と余区間塊からなる集合は Boole 代数である．
(4) null set と full set の集合は (完備？)Boole 代数である．

□

2.1.3　代数の素直な性質

代数ならば，積空間の定義は簡単であった．σ-代数の場合は，位相空間の場合と同様，「生成」を考える必要があり，σ-代数の場合は「単調族」の言葉で特徴づける事もできる（位相空間の基と準基に当たる議論）．

命題 2.1.7． $Z := X \times Y$ において，X, Y の有限加法族 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ について，$\exists_{E\in\mathcal{X}} \exists_{F\in\mathcal{Y}} K = E \times F \Rightarrow K \in \mathcal{Z}$ として $\mathcal{Z} \subset P(Z)$ を定めると，これは集合体をなす．

2.1.4　σ-代数の生成

The question of how to generate a σ-algebra is the beginning of an entire field of mathematics, descriptive set theory. 結果は General nonsense しか容易には得られない．[a] ϵ が $\mathcal{A}(\epsilon)$ の「準基」になるかというとそんな簡単に理論を作らせてくれない．この生成の抽象論は Moore 閉包と monad につながる．[b]

[a] https://ncatlab.org/nlab/show/sigma-algebra
[b] https://ncatlab.org/nlab/show/Moore+closure

定理 2.1.8 (generate: general nonsense)． 集合 X に対して，$\epsilon \subset P(X)$ を任意の部分集合族とする．

(1) ϵ を含む最小の集合体 $\mathcal{A}(\epsilon)$ が存在する．
(2) ϵ を含む最小の σ-集合体 $\sigma(\epsilon)$ が存在する．

[証明]．

(1) $\mathcal{U} := \{A \subset P(X) \mid A$ はϵを部分代数としてもつ集合体$\}$ と定めると，$P(X) \in \mathcal{U} \neq \emptyset$ である．このとき，$\mathcal{A}(\epsilon) := \cap_{\mathcal{A}\in\mathcal{U}} \mathcal{A}$ と定めれば良い．最小性はわかるから，これが集合体であることを示す．$A, B \in \cap_{\mathcal{A}\in\mathcal{U}} \mathcal{A}$ や族 $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Map}(\mathbb{N}, \cap_{\mathcal{A}\in\mathcal{U}} \mathcal{A})$ を取ると，任意の集合体 $\mathcal{A} \in \mathcal{U}$ に対して $A, B \in \mathcal{A}$ や族 $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Map}(\mathbb{N}, \mathcal{A})$ となるから，$\mathcal{A}$ の代数法則より従う．
(2) 同様．

■

2.2　集合上の σ-代数の部分構造

位相と最も違う点は，生成される代数を明示的に表示する命題が立たない点である．「位相の基底」に当たる概念は直接は考えられないが，次のような Dynkin 族定理が成り立つ．乗法族とは，$X \in \mathcal{A}$ を満たす「基底」をいう．すなわち，有限積について閉じている．これが，残りの 2 つの演算，すなわち，差 $A \subset B \Rightarrow B \backslash A \in \mathcal{A}$ と，単調増大列の極限とについて閉じているとき，これは σ-代数である．

2.2.1　単調族

単調族でもある代数は σ-代数である

σ-代数となる条件を考える際には，集合列をうまくとってそれについての条件を調べるだけで十分になる．そこでまず，単調列というクラスが自然に浮かび上がる．例えば有限加法的測度の σ-加法性を特徴付ける 2.4.4．これについての道具を整備する．生成の言葉が使えない今，直積測度などの難しい構成を行う際の足掛かりになる．**生成元が集合体である時，単調族についての生成を行えば σ-代数を得る．**

定理 2.2.1 (σ-加法性の特徴付け). 集合体 $\mathcal{A}$ について，次の 3 条件は同値である．

(1) $\mathcal{A}$ は σ-集合体である．
(2) $\mathcal{A}$ の任意の単調増加列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\cup_{n=1}^{\infty}A_n \in \mathcal{A}$.
(3) 互いに素な $\mathcal{A}$ の元からなる任意の $\mathcal{A}$-列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\cup_{n=1}^{\infty}A_n \in \mathcal{A}$.

[証明]. (2)⇒(1) と (3)⇒(1) を示せば良い．

(2)⇒(1)　任意の列 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取る．これに対して，$A_n := \cup_{k=1}^{n}B_k$ と取ると，$\forall_{i\in\mathbb{N}}\ A_i \subset A_{i+1} = A_i \cup B_{i+1}$ が成り立つから，これは単調増加列である．よって，$\cup_{i\in\mathbb{N}}A_i \in \mathcal{A}$. $\exists_{n\in\mathbb{N}}\ a \in A_n \Leftrightarrow \exists_{n\in\mathbb{N}}\ a \in B_n$ となるように定めたから，$\cup_{i\in\mathbb{N}}A_i = \cup_{i\in\mathbb{N}}B_i$ と併せて，$\cup_{i\in\mathbb{N}}B_i \in \mathcal{A}$.

(3)⇒(1)　任意の列 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取る．これに対して，$A_n := B_n \backslash \cup_{k=1}^{n-1} B_k$ と取ると，$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は互いに素である．実際，ある $i < j$ について $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ だった場合，$\exists_{a\in X}\ a \in B_i \backslash \cup_{k=1}^{i-1} B_k \wedge a \in B_j \backslash \cup_{k=1}^{j-1} B_k$ であるが，これは $a \in \cup_{k=1}^{j-1}B_k$ に矛盾．そこで，$\exists_{n\in\mathbb{N}}\ a \in A_n \Leftrightarrow \exists_{n\in\mathbb{N}}\ a \in B_n$ となるように定めたから $\cup_{n=1}^{\infty}A_n = \cup_{n=1}^{\infty}B_n$ より，$\cup_{n=1}^{\infty}B_n = \cup_{n=1}^{\infty}A_n \in \mathcal{A}$.

■

定義 2.2.2 (monotone class). 集合族 $\mathcal{M} \subset P(X)$ が次の 2 条件を満たすとき，これを単調族という．

(1) $\mathcal{M}$ の任意の単調増加列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\cup_{n=1}^{\infty}A_n \in \mathcal{M}$.
(2) $\mathcal{M}$ の任意の単調減少列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\cap_{n=1}^{\infty}A_n \in \mathcal{M}$.

要諦 2.2.3. σ-代数の定義に併せて，complement についての双対性が映り込んでいるのが見える．これが単調族定理を導く．

命題 2.2.4 . 集合族 $\epsilon \subset P(X)$ に対して，これを含む最小の単調族 $\mathcal{M}(\epsilon)$ が存在する．

観察 2.2.5. σ-集合体は単調族であり，単調族が体の構造を持つならば σ-加法性も満たす（σ-加法性の特徴付け定理 2.2.1）ことは見た．つまり $\mathcal{M}(\epsilon) \subset \sigma(\epsilon)$ である．この逆も成り立ち，いかなる時に単調族で完全に代用可能であるかを考えたい．□

定理 2.2.6 (monotone class theorem). $\mathcal{A}$ を集合体とする．$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$ である．

[証明].

方針　$\mathcal{M}(\mathcal{A})$ が集合体と示せば良い．$\mathcal{M}(\mathcal{A})$ が集合体であるならば，σ-加法性の特徴付け定理 2.2.1 より σ-集合体でもあり，$\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ が成り立つ．一方で全ての σ-加法族は単調族だから $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$ でもある．よって，$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$ を得る．

(I) $\emptyset \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$　$\mathcal{A}$ は集合体だから $\emptyset \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

(II) $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow A^{\complement} \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$　$\mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ のうち補集合演算について閉じている部分集合体を $\overline{\mathcal{M}} := \{A \in \mathcal{M} \mid A^{\complement} \in \mathcal{M}\}$ とすると，$\overline{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$ である．これが $\mathcal{A}$ を含む単調族であることを証明し，$\mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}$ を導けば良い．

$\mathcal{A}$ を含む　任意の $\mathcal{A}$ の元 $A \in \mathcal{A}$ について $A^{\complement} \in \mathcal{A}$ であるから，$\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ である．

単調族の公理 (I)　任意に $\overline{\mathcal{M}}$ の単調増加列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取ると，$\cup_{n=1}^{\infty}A_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ である．実はこの時，双対な列 $(A_n^{\complement})_{n\in\mathbb{N}}$ は単調減少列であるから，$(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)^{\complement} = \cap_{n=1}^{\infty}A_n^{\complement} \in \mathcal{M}$ でもある．よって，$\cup_{n=1}^{\infty}A_n \in \overline{\mathcal{M}}$.

単調族の公理 (II)　全く双対的な証明が成り立つ．

(III) $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$　2 段階に分けて，任意の元 $B \in \mathcal{M}$ について，これと和について閉じている部分集合 $\mathcal{M}_B$

は全体に一致すること：$\mathcal{M}_B = \mathcal{M}(A)$ を示す．

$\mathcal{A}$ の元と和について閉じるなら σ-代数である　任意に $B\in\mathcal{A}$ をとった時，この B との合併について閉じる部分集合 $\mathcal{M}_B := \{A\in\mathcal{M}\mid A\cup B\in\mathcal{M}\}$ は $\mathcal{A}$ を含む単調族になるから，$\mathcal{M}_B=\mathcal{M}$ を得る．実際，

(1) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathcal{M}_B$ の単調列とすると，$\cup_{i=1}^\infty A_n\in\mathcal{M}$ であり，また $B\cup\cup_{i=1}^\infty A_n=\cup_{i=1}^\infty B\cup A_n\in\mathcal{M}$ でもある．よって，$\cup_{i=1}^\infty A_n\in\mathcal{M}_B$ である．

(2) 任意の $A\in\mathcal{A}$ は，$B\in\mathcal{A}$ に対して $A\cup B\in\mathcal{A}$ を満たす（$\mathcal{A}$ は集合体）から，$A\subset\mathcal{M}_B$ である．

任意の元と和について閉じるなら σ-代数である　任意に $B\in\mathcal{M}(\mathcal{A})$ を取ると，(1) と同様の議論が成り立ち，(2) については，任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して，$B\in\mathcal{M}(\mathcal{A})=\mathcal{M}_A$ であるから，$A\cup B\in\mathcal{M}_B$ である．よって，$\mathcal{A}\subset\mathcal{M}_B$．

■

要諦 2.2.7. 追加の条件を満たす部分代数を考え，これの単調性を示すことで，全体集合 $\mathcal{M}=\mathcal{M}(\mathcal{A})$ の最小性に帰する証明手法．(II) では補集合性は単項関係であるが，(III) は二項関係であるから，currying によって示す．しかしこれは 2 段階になる．$\cap:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to$ を考えたのちに，$\cap:\mathcal{M}(\mathcal{A})\times\mathcal{M}(\mathcal{A})\to$ を考えると，良い．

2.2.2　Dynkin 族

σ-代数を，2 つの要素に分解する．
続いては，特殊な演算である可算直和と固有差についての族を考える．極めて確率論と相性が良い．確率の概念が自然に定義できるのが Dynkin 族で，ここからの生成が焦点となる．

定義 2.2.8 (Dynkin family / λ-system). 集合族 $\mathcal{D}\subset P(X)$ が **Dynkin 族**または **λ-系**であるとは，[†6]次の 3 条件を満たすことをいう．

(1) $X\in\mathcal{D}$.
(2) $\forall_{A,B\in\mathcal{D}}\ A\subset B\Rightarrow B\backslash A\in\mathcal{D}$.
(3) $\forall_{(A_i)_{i\in\mathbb{N}}:\mathbb{N}\to\mathcal{D}}\ [\forall_{i\ne j\in\mathbb{N}}\ A_i\cap A_j=\varnothing]\Rightarrow\sum_{i\in\mathbb{N}}A_i\in\mathcal{D}$．この条件は，(2) の下で $\mathcal{D}\supset\{A_n\}\nearrow A\Rightarrow A\in\mathcal{D}$ と同値．

補題 2.2.9 (生成).

(1) 任意の集合 X 上の Dynkin 族の族 $(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について，$\cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda$ も Dynkin 族である．
(2) 任意の集合族 $\mathcal{A}\subset P(X)$ について，これを含む最小の Dynkin 族 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ が存在する．

[証明].

(1) 任意の $\lambda\in\Lambda$ について $X\in\mathcal{A}_\lambda$ より，$X\in\cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda$．$A\subset B$ を満たす $A,B\in\cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda$ と $\cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda$ の族 $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を任意に取ると，任意の $\lambda\in\Lambda$ について $B\backslash A\in\mathcal{A}_\lambda$ かつ $\sum_{i\in\mathbb{N}}A_i\in\mathcal{A}_\lambda$．よって，$B\backslash A,\sum_{i\in\mathbb{N}}A_i\in\cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda$．
(2) $\overline{\mathcal{A}}:=\left\{\mathcal{B}\subset P(X)\mid A\subset\mathcal{B},\mathcal{B}\text{ は Dynkin 族}\right\}$ とすると，$P(X)\in\overline{\mathcal{A}}$ である．$\mathcal{D}(\mathcal{A}):=\cap_{\mathcal{B}\in\overline{\mathcal{A}}}\mathcal{B}$ とすると，これは (1) より Dynkin 族である．最小であることを示す．$\mathcal{A}\subset\mathcal{C}$ を任意の Dynkin 族とすると，$\mathcal{C}\in\overline{\mathcal{A}}$ である．よって，$\mathcal{D}(\mathcal{A})=\cap_{\mathcal{B}\in\overline{\mathcal{A}}}\mathcal{B}\subset\mathcal{C}$.

■

[†6] Dynkin 自身は λ-系と呼んだ

2.2.3 乗法族

乗法族には，Dynkin 生成と σ-生成が等価になる (Dynkin 族定理) ことと，確率測度の一致の定理とが成り立つため，重要なクラスになる．

定義 2.2.10 (multiplicative class / π-system). 集合族 $\mathcal{A}$ が $X \in \mathcal{A}$ かつ有限共通部分について閉じているとき，これを**乗法族**または **π-系**という．

定理 2.2.11 (Dynkin 族定理). $\mathcal{A}$ を乗法族とする．$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$ である．

定理 2.2.12 (一致の定理). $\mathcal{P}$ を π-系とする．このとき，$\sigma(\mathcal{P})$ 上の 2 つの確率測度 μ_1, μ_2 が $\mathcal{P}$ 上で一致するならば，$\sigma(\mathcal{P})$ 上でも一致する．

2.2.4 イデアル

$P(X)$ にはフィルターの構造も考え得る．これに可算演算への閉性を加えて，**σ-イデアル**と呼ぼう．零集合は σ-代数 $\mathcal{B}$ の中で σ-イデアルをなし，その双対概念は full set で，δ-フィルターをなす．"small"と"large"という概念の代数的形式化に当たる．null set の構成を一般化すると，任意の σ-イデアルに対して，それを null set の定義としてその上の完備化を考えることができる．局所化可能測度空間．

定義 2.2.13 (σ-ideal). $\mathcal{N} \subset P(X)$ が **σ-イデアル**であるとは，次の 3 条件を満たすことをいう．

(1) $\emptyset \in \mathcal{N}$.
(2) $\forall_{A \in P(X), B \in \mathcal{N}}\ A \subset B \Rightarrow A \in \mathcal{N}$.
(3) $\forall_{\{A_n\} \subset \mathcal{N}}\ \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{N}$.

定義 2.2.14 (σ-ideal, δ-filter).

(1) $\mathcal{I} \subset P(X)$ が **σ-イデアル**であるとは，次の 3 条件を満たすことをいう．
  (i) (downwardly closed) $\forall_{B \in \mathcal{I}}\ A \subset B \Rightarrow A \in \mathcal{I}$.
  (ii) (σ-closed) $\forall_{\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{I}}\ \exists_{B \in \mathcal{I}}\ \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subset B$.[†7]
  (iii) (empty set) $\mathcal{I} \neq \emptyset$.[†8]
  (ii),(iii) を満たす $\mathcal{I}' \subset P(X)$ を**基**といい，任意の X の部分集合を**準基**という．
(2) $\mathcal{F} \subset P(X)$ が **δ-フィルター**であるとは，次の 3 条件を満たすことをいう．
  (i) $\forall_{A \in \mathcal{F}}\ A \subset B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$.
  (ii) $\forall_{\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}}\ \exists_{B \in \mathcal{F}}\ B \subset \cap_{i \in \mathbb{N}} A_i$.[†9]
  (iii) $\mathcal{F} \neq \emptyset$.[†10]
(3) de-Morgan の双対性の下で，$\mathcal{I} = \neg\mathcal{F}$ の関係がある．

例 2.2.15. 測度 μ について，μ-零集合の全体は σ-イデアルをなす． □

定義 2.2.16 (quotient σ-algebra). σ-代数 $\mathcal{B}$ の商 σ-代数とは，σ-イデアル $\mathcal{N}$ の定める同値関係 $A \sim B :\Leftrightarrow A \triangle B \in N$ についての商集合 $\mathcal{B}/\mathcal{N}$ をいう．これは抽象的には σ-代数になるが，集合の上に具体的に表現できるとは限らない．

例 2.2.17. $\mathcal{B}$ を $[0,1]$ 上の Borel σ-代数，$\mathcal{N}$ を Lebesgue 零集合とする．σ-代数 $\mathcal{B}/\mathcal{N}$ は，どの具体的な σ-代数とも同型ではない． □

定理 2.2.18 (Loomis-Sikorski representation theorem). $\mathcal{B}$ を抽象 σ-代数とする．このとき，集合 A とその上の σ-代数 $\mathcal{A}$

[†7] (i) と併せると，$\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{I}$ が必要．これが σ-性である．
[†8] (i) と併せると $\emptyset \in \mathcal{I}$ が必要．
[†9] (i) と併せると，$\cap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$ が必要．これが δ-性である．
[†10] (i) と併せると $X \in \mathcal{F}$ が必要．

と σ-イデアル $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ が存在して，$\mathcal{B} \simeq \mathcal{A}/\mathcal{N}$ を満たす．

系 2.2.19 . 任意の抽象的な測度空間（σ-代数）は，完備化した後の具体的な測度空間に同型である．

2.2.5　代数の完備性

σ-代数の完備化とは，完備 Boole 代数に近づけるように，可能な演算の濃度を上げる行為であることは間違いない．

full set の代数法則である吸収律 $\forall_{S\in\mathcal{B}}\ \mu(S) = \mu(S\cap F)$ は束に似ていて，「完備化」の意味も測度空間と束では似ている．冪等律がある種の completeness を表している，なぜなら完備測度空間の完備化はそのままであるから．忘却関手が充満忠実であるとき，忘却するのは性質で，本質的に全射で忠実であるとき，忘却するのは構造であるという．距離空間の完備性は位相からは定義されない「性質である」から完備化と呼ぶが，そうでない場合は「自由」という．いずれも忘却関手の随伴として捉えられる．これは「チャートが定める微分構造」みたいな概念だ．

2.3　可測関数

Lebesgue 積分を定義可能な関数とは，y 軸を分割したときに出てくる E_x が Lebesgue 可測であるものである．これが，可測関数の定義を誘導する．
可測関数は σ-代数の射となる．σ-代数が完備であるとき，$\mathbb{R},\mathbb{R}_+$ も Boole 代数の意味で完備であるように，$\overline{\mathbb{R}} := [-\infty,\infty],[0,\infty]$ を考える．すると，任意の上限・下限が存在する完備束となる．

記法 2.3.1.

(1) 可測空間 $(E,\mathcal{B})$ の部分集合を $E(f>c) = \{f>c\} := f^{-1}((c,\infty]) = \{x\in E \mid f(x)>c\}$ などと表す．E を左作用と見ると，集合 $\{f>c\}$ に作用する集合関数 $\mathcal{B}\to -$ に思えるからである．$(\cdot)$ 内部は可測関数によって記述された条件式・事象と思える．
(2) $(\pm\infty)0 = 0$ とする．すると，零関数の積分は常に零である．これ以外の非自明な演算は定義しない．

2.3.1　定義と特徴付け

Borel class $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の基底と呼べるものが，区間 $((c,\infty])_{c\in\mathbb{R}}$ となっている．おそらく補集合演算が生成において許されているので，開集合の場合よりも，より少ない集合族で基底になる．

定義 2.3.2 (measurable function). $\overline{\mathbb{R}}$-値関数 $f: X\to[-\infty,\infty]$ が $\mathcal{B}$-可測であるとは，次を満たすことをいう：

$$\forall_{c\in\mathbb{R}}\ \{f>c\} := f^{-1}((c,\infty]) \in \mathcal{B}.$$

要諦 2.3.3. コンパクト化 $\overline{\mathbb{R}}$ はその上の集合代数がよくなるが，代数法則が整合的に定まらず，不定形が発生するが，これは積分論で部分的な解消を見る．非有界関数を扱えるのは，端的に集合代数という形式の祈りの高さによる．

補題 2.3.4 (拡張実可測関数の特徴付け). $\overline{\mathbb{R}}$-値関数 $f: X\to[-\infty,\infty]$ について，以下の 4 条件は同値である．

(1) f は $\mathcal{B}$-可測.
(2) $\forall_{c\in\mathbb{R}}\ \{f\geqslant c\}\in\mathcal{B}$.
(3) $\forall_{c\in\mathbb{R}}\ \{f<c\}\in\mathcal{B}$.
(4) $\forall_{c\in\mathbb{R}}\ \{f\leqslant c\}\in\mathcal{B}$.

[証明].

(1)⇒(2)　任意の $c\in\mathbb{R}$ について，$\{x\in X \mid f(x)\geqslant c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\in X \mid f(x) > c-\frac{1}{n}\right\}\in\mathcal{B}$.

(2)⇒(3)　任意の $c \in \mathbb{R}$ について，$\{x \in X \mid f(x) < c\} = \{x \in X \mid f(x) \geqslant c\}^{\complement} \in \mathcal{B}$.
(3)⇒(4)　(1)⇒(2) の議論で不等号の向きを逆にして，$-\dfrac{1}{n}$ を $\dfrac{1}{n}$ に変えた議論により従う．
(4)⇒(1)　(2)⇒(3) の不等号を逆にした議論が成り立つ．

■

定理 2.3.5 (像代数が拡張 Borel class に含まれることと同値). $\overline{\mathbb{R}}$-値関数 $f : X \to [-\infty, \infty]$ について，以下の 2 条件は同値である．

(1) f は $\mathcal{B}$-可測．
(2) (a) $f^{-1}(\infty), f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{B}$.
　(b) $\forall_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}\ f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$.

[証明].

(2)⇒(1)　任意の区間 $(c, \infty] = (c, \infty) \cup \{\infty\}$ は，(c, ∞) を表す開集合の可算和と $\{\infty\}$ との合併で表せるから，$f^{-1}((c, \infty]) \in \mathcal{B}$ が従う．
(1)⇒(2)　(a)　f は可測だから，

$$\{x \in X \mid f(x) = \infty\} = \cap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X \mid f(x) > n\} \in \mathcal{B}$$
$$\{x \in X \mid f(x) = -\infty\} = \cap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X \mid f(x) < -n\} \in \mathcal{B}$$

(b)　まず，任意の開区間 (a, b) $(-\infty < a < b < \infty)$ について，$f^{-1}((a, b)) = \{x \in X \mid f(x) > a\} \cap \{x \in X \mid f(x) < b\} \in \mathcal{B}$ であるから，任意の開集合 $I \subset \mathbb{R}$ について，$I \cap \mathbb{Q} = \{r_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ とし，$\delta_j := d(r, \partial I)$ と定めると，$I = \cup_{j \in \mathbb{N}} U_{\delta_j}(r_j) \in \mathcal{B}$. これより，$\epsilon := (f^*)^{-1}\mathcal{B} = \{B \in P(\mathbb{R}) \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{B}\}$ と置くと，$\mathrm{Op}(\mathbb{R}) \subset \epsilon$ であるから，$\sigma(\mathrm{Op}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \epsilon$ が従う．

■

要諦 2.3.6. 可測実関数の定義は，Lebesgue 積分という特殊化された目標の下でもはっきり理解できた．しかしこれが Borel class への測度の射として一般化の道が開けるとは，どういうことだろう．

2.3.2　可測関数に許された構成

$\mathcal{L}(X)$ は代数をなし，可算な束演算についても閉じている．証明の技法としては，可測関数の縦線集合の逆像も，集合の有理数についての σ-加法に還元して議論する．なお，合成による構成は許されない 1.4.16.

命題 2.3.7 ($\mathcal{L}(X)$ は関数束をなす). $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ を $\mathcal{B}$-可測とする．$\max_{x \in X}\{f(x), g(x)\}, \min_{x \in X}\{f(x), g(x)\}$ も可測である．

[証明]. 任意の $c \in \mathbb{R}$ について，

$$\{x \in X \mid \max_{x \in X}\{f(x), g(x)\} > c\} = \{x \in X \mid f(x) > c\} \cup \{x \in X \mid g(x) > c\}$$
$$\{x \in X \mid \min_{x \in X}\{f(x), g(x)\} > c\} = \{x \in X \mid f(x) > c\} \cap \{x \in X \mid g(x) > c\}.$$

■

命題 2.3.8 (斉次性). $f : X \to [-\infty, \infty]$ を $\mathcal{B}$-可測，$a, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0$ とする[†11]．$af, |f|^\gamma$ は $\mathcal{B}$-可測である．ただし，$a = 0$ のとき f の値に依らず $af = 0$，$\gamma < 0 \wedge f(x) = 0$ のとき $|f(x)|^\gamma = +\infty$ とした．

[証明].

af　　任意の $c \in \mathbb{R}$ について，

[†11] $|f|^0$ の場合は，f が $\{\pm\infty\}$ に値を取るとき，定義できなくなる．

(1) $a=0$ のとき，$af=0$ は可測．
(2) $a>0$ のとき，$\{x\in X\mid af(x)>c\}=\left\{x\in X\mid f(x)>\dfrac{c}{a}\right\}\in\mathcal{B}$.
(3) $a<0$ のとき，$\{x\in X\mid af(x)>c\}=\left\{x\in X\mid f(x)<\dfrac{c}{a}\right\}\in\mathcal{B}$（補題 2.3.4）.

$(f)^\gamma$　$c<0$ のとき，$\{x\in X\mid |f(x)|^\gamma>c\}=X\in\mathcal{B}$．以降，$c\geqslant 0$ とする．

$\gamma>0$ のとき　$\{x\in X\mid |f(x)|^\gamma>c\}=\{x\in X\mid |f(x)|>c^{1/\gamma}\}=\{x\in X\mid f(x)>c^{1/\gamma}\}\cup\{x\in X\mid f(x)<-c^{1/\gamma}\}\in\mathcal{B}$.

$\gamma<0$ のとき　$c=0$ のとき，$f(x)=0$ のとき $|f(x)|^\gamma>0$ $(\gamma<0)$ であるから，$\{x\in X\mid |f(x)|^\gamma>c\}=X\in\mathcal{B}$．$c>0$ のとき，

$$\left\{x\in X\mid |f(x)|^{-\gamma}<\frac{1}{c}\right\}=\left\{x\in X\mid |f(x)|<\left(\frac{1}{c}\right)^{-1/\gamma}\right\}$$
$$=\left\{x\in X\mid f(x)<\left(\frac{1}{c}\right)^{-1/\gamma}\right\}\cap\left\{x\in X\mid f(x)>-\left(\frac{1}{c}\right)^{-1/\gamma}\right\}\in\mathcal{B}$$

■

命題 2.3.9 (和と積). $f,g:X\to(-\infty,\infty)$ を有界な $\mathcal{B}$-可測とする．$f+g,fg$ は $\mathcal{B}$-可測である．ただし，$\infty-\infty,0\times\infty$ がない場合は，有界性の仮定を外しても成り立つ．[†12]

[証明].

$f+g$ について　$\{x\in X\mid f(x)+g(x)>c\}=\{x\in X\mid f(x)>c-g(x)\}$ と見ると，有理数の稠密性より，任意の $x\in X$, $f(x)>c-g(x)$ について $f(x)>\sigma>c-g(x)$ を満たす σ が存在し，これが存在するとき元の不等式も成り立つから，$\{x\in X\mid f(x)>c-g(x)\}=\cup_{\sigma\in\mathbb{Q}}(\{x\in X\mid f(x)>\sigma\}\cap\{x\in X\mid \sigma>c-g(x)\})\in\mathcal{B}$.

fg について　$fg=\dfrac{1}{4}((f+g)^2-(f-g)^2)$ より，(1) と命題 2.3.8(2) と (1) とをこの順番で適用することで従う．

■

要諦 2.3.10 (可測関数で挟んだ領域の逆像も可算)**.** $f+g$ の証明は，$g:=c-g$ と見れば，$E(f>g)$ が可測であることの証明に一致する．しかしまず，暗黙のうちにその結果を使ったことは多いが，集合の等式 $\{x\in X\mid f(x)>c-g(x)\}=\cup_{\sigma\in\mathbb{Q}}(\{x\in X\mid f(x)>\sigma\}\cap\{x\in X\mid\sigma>c-g(x)\})$ を初めて見た．それにしても，加算を一体どこに帰着させているのか．

命題 2.3.11 (極限構成). (f_n) を $\mathcal{B}$-可測関数 $X\to[-\infty,\infty]$ の列とする．

(1) $\sup_{n\in\mathbb{N}}f_n(x),\inf_{n\in\mathbb{N}}f_n(x)$ は $\mathcal{B}$-可測である．
(2) $\limsup_{n\to\infty}f_n(x),\liminf_{n\to\infty}f_n(x)$ は $\mathcal{B}$-可測である．特に，集積点がただ一つである場合，すなわち $\forall_{x\in X}\ \lim_{n\to\infty}f_n(x)\in[-\infty,\infty]$ のとき，$\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ は $\mathcal{B}$-可測である．

[証明].

(1) 任意の $x\in X$ について，$\sup_{n\in\mathbb{N}}f_n(x)>c\Leftrightarrow\exists_{n\in\mathbb{N}}\ f_n(x)>c$ であるから，

$$\left\{x\in X\mid\sup_{n\in\mathbb{N}}f_n(x)>c\right\}=\cup_{n\in\mathbb{N}}\{x\in X\mid f_n(x)>c\}\in\mathcal{B}.$$

これと命題 2.3.8 より，$\inf_{n\in\mathbb{N}}f_n(x)=-\sup_{n\in\mathbb{N}}(-f_n(x))$ も $\mathcal{B}$-可測．

(2) $\limsup_{n\to\infty}f_n(x)=\inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{\nu\geqslant n}f_\nu(x)$ は可測関数の（単調減少）列 $(\sup_{\nu\geqslant n}f_\nu(x))_{n\in\mathbb{N}}$ の下限より，$\mathcal{B}$-可測である．$\liminf_{n\to\infty}f_n(x)=-\limsup_{n\to\infty}(-f_n(x))$ も同様．

■

要諦 2.3.12 (この結果には，値域をコンパクトしたことがどれくらい効いているのだろうか？)**.** 点列コンパクトであるから，収束する部分列は必ず存在するため，上極限と下極限は必ず定まり，そこに可測性は遺伝する．集積点がただ一つであるのは特別な点列の場合である．

[†12] これらの仮定が，可積分関数についての理論では，null set の議論から，外すことができる．

命題 2.3.13 (Borel 可測関数との合成). $\Phi:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ を Borel 可測，$f:X\to\mathbb{R}$ を可測とすると，$\Phi\circ f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ も可測.

2.3.3　単関数近似

単関数の集合 $\mathcal{E}(X)$ は $\mathcal{L}(X)$ 上各点収束の意味で稠密である．
A_i が可測であることと χ_{A_i} が可測であることとは同値である．

定義 2.3.14 (simple function). 可測関数 f が単関数であるとは，$|\mathrm{Im}\, f|<\infty$ であることをいう．

補題 2.3.15 .

(1) f が単関数であることと，$\exists_{\{a_i\}_{i\in n}\subset\mathbb{R}\backslash\{0\}}\ \exists_{\{A_i\}_{i\in n}\subset\mathcal{B}}$ with $A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j)$ s.t. $f=\sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}$ が成り立つことは同値.

(2) f,g が単関数であるとき，$af+bg,|f|,fg,\max\{f,g\}$ も単関数である．

[証明].

(1) 有限族 $(A_i)_{i\in n}$ としては，$(f^{-1}(a))_{a\in\mathrm{Im}\, f}$ を取ればこれは互いに素で，$f=\sum_{i=1}^n f(a_i)\chi_{f^{-1}(a_i)}$ と表せる．逆は自明．

(2) いずれの関数も像が有限集合である．

■

定理 2.3.16 (単関数近似). $f:X\to[0,\infty]$ を可測関数とする．このとき，非負単関数の単調増加列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して，任意の点で f に各点収束する：$\forall_{x\in X}\ f_n(x)\nearrow f(x)$．$f$ が有界であるとき，一様収束するように取れる．

[証明]. 区間 $[0,n]$ を $n2^n$ 等分すると，各 $[0,n)=\coprod_{k=0}^{n2^n-1}\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)$ について，$A_k:=f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)\right)$ は可測である（補題 2.3.4）．よって，$A_{n2^n}:=f^{-1}([n,\infty])$ とすると，

$$f_n:=\sum_{k=0}^{n2^n}\frac{k}{2^n}\chi_{A_k}$$

とおけば，これは単関数で，区間 $[0,n+1]$ の $(n+1)2^{n+1}$ 等分は区間 $[0,n]$ の $n2^n$ 等分の細分だから，各 $x\in X$ について $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加である．また，$f(x)=\infty$ なる $x\in X$ については，$f_n(x)=n$ だから $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\infty$ であり，$f(x)\in\mathbb{R}$ なる $x\in X$ については，$f(x)<n$ を満たす全ての n について $|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{2^n}$ を満たすから，$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ である．■

要諦 2.3.17. 値域 $[0,\infty]$ へ至る階段を，閉区間の列 $([0,n])_{n\in\mathbb{N}}$ で作る．2^n 分割することによって，$n+1$ の場合は n の場合の細分となっているから，確かに (f_n) は単調増加である．

2.3.4　可測関数の収束

概収束するならば，任意に測度の小さい集合を除いて一様収束する．

定理 2.3.18 (Egorov (1911)). $(X,\mathcal{B},\mu)$ を有限な測度空間とする：$\mu(X)<\infty$．実可測関数列 (f_n) が実可測関数 $f:X\to\mathbb{R}$ に概収束するならば，$\forall_{\delta>0}\ \exists_{A\in\mathcal{B}}\ \mu(A)<\delta$ かつ (f_n) は $X\backslash A$ 上 f に一様収束する．

[証明].

$$Z:=\bigcap_{p=1}^\infty\bigcup_{q=1}^\infty\bigcap_{n=q}^\infty\{z\in X\mid|f_n(z)-f(z)|\}<\frac{1}{p}$$

と定めると，$x\in X$ について

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\quad\Leftrightarrow\quad\forall_{p\in\mathbb{N}}\ \exists_{q\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant q}\ |f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{p}\quad\Leftrightarrow\quad x\in Z$$

より，(f_n) が概収束するという仮定は $\mu(Z^\complement)=0$ に同値．

ここで，

$$Z^\complement=\bigcup_{p=1}^{\infty}\bigcap_{q=1}^{\infty}\underbrace{\bigcup_{n=q}^{\infty}\{z\in X\mid|f_n(z)-f(z)|\}\geqslant\frac{1}{p}}_{=:B_{p,q}}$$

と定めると，$(B_{p,q})_{q\in\mathbb{N}}$ は単調減少列で，$\mu(X)<\infty$ より，$q\to\infty$ のとき $\mu(B_{p,q})\searrow\mu(\cap_{q=1}^{\infty}B_{p,q})$ で（補題 2.4.6(5)），$\mu(\cap_{q=1}^{\infty}B_{p,q})\leqslant\mu(Z^\complement)=0$．

よって，列 $(B_{p,q})_{q\in\mathbb{N}}$ は測度 0 の集合に収束するから，任意の $\delta>0$ に対して，$\mu(B_{p,q_p})<\dfrac{\delta}{2^p}$ を満たす列 $(q_p)_{p\in\mathbb{N}}$ が取れる．これは番号 q を p に依って一斉にとっている．こうして構成した $B:=\cup_{p=1}^{\infty}B_{p,q_p}$ は条件を満たす．

(1) $\mu(B)=\sum_{p=1}^{\infty}\mu(B_{p,q_p})<\sum_{p=1}^{\infty}\dfrac{\delta}{2^p}=\delta$.
(2) $B^\complement=\cap_{p=1}^{\infty}B_{p,q_p}^\complement=\cap_{p=1}^{\infty}\cap_{n=q_p}^{\infty}\left\{z\in X\mid|f_n(x)-f(x)|<\dfrac{1}{p}\right\}$. となるが，これは任意の $p\in\mathbb{N}_+$ に対して q_p が一様に取れていることを意味する．

■

要諦 2.3.19. いとも簡単に論理の糸を辿って見せた……．まず，$B_{p,q}$ を「q 番目以降にも，$1/p$ 以上外れる $n\in\mathbb{N}$ をもつ点 $x\in X$ からなる集合」と定めると，概収束するとは，この測度を任意に小さくできるということである．この小さくする際に，B を定める際に q_p を定めるアルゴリズムをあらかじめ決めておくことができるから，一様に収束するような場 $B^\complement$ が作れる．

2.4　測度

測度の公理はただ１つ

測度とは，可算集合直和を可算実数和に移すモノイドの射である．モノイドや圏論同様，あまりに単純であるため，多くの応用先を持つ．
これは一般の集合和は対称性が敗れた形で保存し，包含による順序構造も保存し，固有差も保存する．後ろ 2 つが，単調列への注目の根拠である．すると，単調列の極限も保存する．これらは再帰的だが，積分の性質の系としても理解できる．また実は確率の法則でもある．

2.4.1　種々の集合関数

定義 2.4.1 ((positive) measure, complex measure, signed measure / real measure). $\mathcal{A}$ を σ-代数とする．

(1) σ-代数 $\mathcal{M}$ の上で定義された σ-加法的関数 $\mu:\mathcal{M}\to[0,\infty]$ を **（正）測度**という．
(2) σ-代数 $\mathcal{M}$ の上で定義された σ-加法的関数 $\mu:\mathcal{M}\to\mathbb{C}$ を**複素測度**という．
(3) 値域が $\mathbb{R}$ に含まれる複素測度を**符号付測度**または**実測度**という．

定義 2.4.2 (finitely additive measure / Jordan measure). 有限加法的測度とは，代数 $\mathcal{A}\subset P(X)$ 上の関数 $\mu:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ で，有限加法性を持つものをいう：

(1) (null set) $\mu(\varnothing)=0$.
(2) (finite additivity) $\forall_{A,B\in\mathcal{A}}\;A\cap B=\varnothing\Rightarrow\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$.

要諦 2.4.3 (単に結び半束の射ではなさそう．極限を保つ束の関手と言った方が良いか). 結び半束 $(L,\vee,1)$ とは，任意の 2 元 $a,b\in L$ について $\{a,b\}$ が L 上に上限を持つ順序集合をいう．集合代数（有限加法族）$\mathcal{B}$ の結び半束の構造に注目して，これを $[0,\infty]$ に埋め込むことを考える．[†13] これが面積や確率などの観念のモデルとなり得る．

[†13] coproduct を保つ関手と言ってもいい．極限を極限に移すから，$\mu(A+B)=\mu(A)+\mu(B)$ であり，$A\cup B\hookrightarrow A+B$ は $\mu(A\cup B)\hookrightarrow\mu(A\sqcup B)$ に写され

可測空間 $(X,\mathcal{B})$ 上の集合関数 $\mu:\mathcal{B}\to\overline{\mathbb{R}}$ のうち，結び半束の射 $\mathcal{B}\to[0,\infty]$ となるものを有限加法的測度，σ-完備な結び半束の射となるものを測度という．[†14]frame は分配的な suplattice[†15]なのであった．

補題 2.4.4 (有限加法的測度の σ-加法性の単調族による特徴付け). 有限加法的測度 $\mu_0:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ について，次の 2 条件は同値．

(1) μ_0 は $\mathcal{A}$ 上 σ-加法的である．

(2) (A_n) を $A\in\mathcal{A}$ に収束する $\mathcal{A}$ の単調増加列とすると，$\lim_{n\to\infty}\mu_0(A_n)=\mu_0(A)$.

[証明].

(1)⇒(2)　単調増加列 (A_n) が定める互いに素な列 $(B_n := A_n\backslash(\cup_{i=1}^{n-1}A_i))$ について，σ-加法性より，$\lim_{n\to\infty}\mu_0(A_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\mu_0(B_i)=\mu_0(\sum_{i=1}^\infty B_i)=\mu_0(A)$.

(2)⇒(1)　任意の互いに素な集合列 (B_n) に対して，これが定める単調増加列 $(A_n := \cup_{i=1}^n B_i)$ も収束先は同じだから，$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\mu_0(B_i) = \lim_{n\to\infty}\mu_0(A_n) = \mu_0(A) = \mu_0(\sum_{i=1}^\infty B_i)$（1 つ目の等号で $A_n=\sum_{k=1}^n B_k$ についての μ の有限加法性を用いた）．

■

2.4.2　測度の定義と性質

測度は加法的な関数 $\mathcal{B}\to[0,\infty]$ である．これはある種の極限（ω-余積）についての条件で，すると加法中立元を保ち，極限も保つことが従う．もっと一般的な関手性は劣加法性とその極限として理解される．
単調な場合とそうでない場合の差は，束のうち線型順序な部分に対する poset の関手だと μ を見る場合と，そうでない場合は結びとして上限を取るとして束を見て，極限を保つ関手だと μ を見る場合とに対応すると思える．測度の性質 2.4.6 の上下極限集合に対する劣加法性 (6),(7) は，$\mu\left(\liminf_{n\to\infty}A_n\right)$ こそが真の始対象で，$\mu\left(\liminf_{n\to\infty}A_n\right)$ こそが真の終対象であることを言っているように思える．

定義 2.4.5 (measure space). 組 $(X,\mathcal{B},\mu)$ が**測度空間**であるとは，次の 2 条件を満たすことをいう：

(1) (null set) $\mu(\emptyset)=0$. [†16]

(2) (additivity) 互いに素な $\mathcal{B}$ の列 $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ について，$\mu\left(\sum_{i\in\mathbb{N}}A_i\right)=\sum_{i\in\mathbb{N}}\mu(A_i)$.

補題 2.4.6 (測度の性質). 組 $(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間とする．

(1) (単調性) $\forall_{A,B\in\mathcal{B}}\ A\subset B\Rightarrow\mu(A)\leqslant\mu(B)$.

(2) (固有差) $\forall_{A,B\in\mathcal{B}}\ [(A\subset B)\land(\mu(A)<\infty)\Rightarrow\mu(B\backslash A)=\mu(B)-\mu(A)]$.

(3) (劣加法性) $\forall_{\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{B}}\ \mu\left(\cup_{i\in\mathbb{N}}A_i\right)\leqslant\sum_{i\in\mathbb{N}}\mu(A_i)$.

(4) (単調増加列の極限) $\forall_{\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{B}}\ A_i\nearrow A\Rightarrow\mu(A_i)\nearrow\mu(A)$.

(5) (単調減少列の極限) $\forall_{\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{B}}\ (A_i\searrow A)\land(A_1<\infty)\Rightarrow\mu(A_i)\searrow\mu(A)$.

(6) (劣加法性) $\forall_{\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{B}}\ \mu\left(\liminf_{i\to\infty}A_i\right)\leqslant\liminf_{i\to\infty}\mu(A_i)$.

(7) (劣加法性) $\forall_{\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{B}}\ \mu\left(\cup_{i\in\mathbb{N}}A_i\right)<\infty\Rightarrow\mu\left(\limsup_{i\to\infty}A_i\right)\geqslant\limsup_{i\to\infty}\mu(A_i)$.

[証明].

る．これが劣加法性である．

[†14] 一般に単調で，上限は上限に写す：$\mu(A+B)=\mu(A)+\mu(B)$．最小元も対応させる $\mu(\emptyset)=0$.

[†15] 任意の結びについて閉じた半束を suplattice（上限束）という．なお frame が分配的と言っても有限交わりが任意の結びに分配することのみが公理で，多分逆は成り立たず，また frame の射と言った時は任意合併と有限共通部分を保つことを言う．

[†16] (2) の $\mu(\emptyset+\emptyset)=\mu(\emptyset)+\mu(\emptyset)$ より，$\emptyset$ は加法中立元に対応させる必要があることが従う．

(1) $B = A \cup (B\backslash A)$ と見ると，$A \cap (B\backslash A) = \emptyset$ であるから，測度 μ の加法性 (2) より，$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B\backslash A) \geqslant \mu(A)$．最後で (1) を用いた．

(2) (1) の途中式から，$\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$ である．

(3) $B_j := A_j \backslash \left(\cup_{i=1}^{j} A_i\right)$ という階差列 $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ を定めると，$\cup_{j=1}^{\infty} A_j = \cup_{j=1}^{\infty} B_j$ で，任意の $j \in \mathbb{N}$ について $B_j \subset A_j$ かつ，(B_j) は互いに素．よって，σ-加法性 (2) より，

$$\mu\left(\cup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\cup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

(4) $B_j := A_j \backslash \left(\cup_{i=1}^{j} A_j\right)$ という階差列 $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ を考える．ただし，$A_0 = \emptyset$ とした．これは収束先が一致し $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j = \cup_{j=1}^{\infty} B_j$，$\cup_{j=1}^{k} A_k = \cup_{j=1}^{k} B_k$ でもある．よって，

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

(5) 双対命題だが，有界性の扱いに注意．$B_j := A_1 \backslash A_j$ とおくと，(B_j) は単調増大列で，$B_j \nearrow A_1\backslash A$．よって，(4) より，$\mu(A\backslash A_j) = \mu(B_j) \nearrow \mu(A_1\backslash A)$．$A_1 < \infty$ より (2) から $\mu(A_1\backslash A_j) = \mu(A_1) - \mu(A_j), \mu(A_1\backslash A) = \mu(A_1) - \mu(A)$ であるから，これと併せて，$\mu(A_j) \searrow \mu(A)$ を得る．

(6) 列 $\left(\cap_{j=1}^{\infty} A_i\right)_{j\in\mathbb{N}}$ は単調増大列であるから，(4) より

$$\mu\left(\liminf_{i\to\infty} A_i\right) = \mu\left(\cup_{j=1}^{\infty} \cap_{i=j}^{\infty} A_i\right) = \liminf_{j\to\infty} \mu\left(\cap_{i=j}^{\infty} A_i\right) \leqslant \liminf_{j\to\infty} \mu(A_j)$$

最後の不等式は，$\cap_{i=j}^{\infty} A_i \subset A_j$ による．

■

要諦 2.4.7.

(4),(5)　単調列は階差列に注目すると互いに素な列を得るので，加法性が使える．

(6),(7)　μ は集合の極限を保つということだろう．これは適切な位相構造を入れれば，μ は連続ということだろうか．まあ Pos の関手と考えているので十分だろうが．

2.4.3　前測度

Boole 代数 $\mathcal{B}_0$ 上の前測度は，測度 $\mathcal{B} \to [0, \infty]$ に拡張できる．

定義 2.4.8 (pre-measure). Boole 代数 $\mathcal{B}_0$ 上の**前測度** $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \to [0, \infty]$ とは，測度のことである．すなわち，

(1) (null set) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) (additivity) 互いに素な $\mathcal{B}_0$ の列 $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ について，$\mu_0\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_0(A_i)$.

2.5　測度空間の完備性

σ-代数 $\mathcal{M}$ の完備化とは，null set と full set のなす完備 Boole 代数 $\mathcal{N}$ とを含むような拡張 $\mathcal{M} \cup \mathcal{N} \subset \overline{\mathcal{M}}$ をいう．Lebesgue 可測集合 $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$ は完備であるが，区間塊は任意合併について閉じている 4.2.13.

距離空間には完備化があるべき，測度空間にも完備化が標準的に取れるべき．これをあくまでも代数構造から抽出する．

null set の双対概念（補集合）は full set となり，$\forall_{S\in\mathcal{B}}\ \mu(S) = \mu(S \cap F)$ という代数法則を満たす．吸収律的で，ここでも束の構造が出現するために，full set も好まれる．a.e. とは真理集合が full set であることをいう．完備とは全ての full set が可測であることをいう（全ての null set が 0 とわかるなら，その補集合も値が定まる）．測度が同値とは等化子が full set であることをいう．そこで気づいたが，測度空間が完備であるとは，束・代数が完備であるということである．

2.5.1　零集合

この「だいたい」「概」の言葉の使い方は，代数構造に支えられた数学的強度を持つ概念である上に，豊富な意味論を持つ．この概念の数学的安定性は，$\mathcal{L}^p(X)$ のこれに関する同値類として得る空間 $L^p(X)$ の良い性質を見れば明らかである．

定義 2.5.1 (null set, μ-a.e.). 測度空間 $(X,\mathcal{B},\mu)$ について，

(1) $N\in\mathcal{B}$ が $\mu(N)=0$ を満たすとき，N を μ-零集合という．
(2) 命題 $P(x)$ が $\mu(X\backslash P(x))=0$ を満たすとき，**μ に関してほとんど全ての x について命題 $P(x)$ が成り立つ**という．

歴史 2.5.2. 「殆ど至る所」は，Riemann 可積分関数を特徴づけるために Lebesgue が発明した表現であり，初出は 1904 年 [10].

補題 2.5.3 (零集合は δ-環をなす). 測度空間 $(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$ について，$\mathcal{N}:=\{N\in\mathcal{A}\mid\mu(N)=0\}$ とする．このとき，次の 2 条件を満たす：

(1) $\forall_{A\in P(X),B\in\mathcal{N}}\ A\backslash B\in\mathcal{N}, A\cap B\in\mathcal{N}$.
(2) $\forall_{\{A_n\}\subset\mathcal{N}}\ \cup_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\mathcal{N}$.

定義 2.2.13 と見比べれば，完備測度空間の $\mathcal{N}$ は σ-イデアルをなすことがわかる．

補題 2.5.4 . 集合 $A\subset\mathbb{R}^n$ について，

(1) Lebesgue 零集合は，内点を持ち得ない．特に，Lebesgue 零集合は開集合になりえない．
(2) 一方で，疎集合であるが正な Lebesgue 測度を持つ集合が存在する．

[証明].

(1) A が内点を持つとすると特に開球を含むから，正の測度を持ってしまう．
(2)

■

例 2.5.5. $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\mathbb{Q}$ を有理数の附番とする．任意の $\epsilon>0$ について，$A\subset[0,1]$ を

$$A:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(q_n-\frac{\epsilon}{2^n},q_n+\frac{\epsilon}{2^n}\right).$$

と定めると，測度が ϵ 以下の開集合であり，$[0,1]$ 上稠密である．□

2.5.2　Lebesgue 式拡張による完備化

Borel 集合族と Lebesgue 可測集合の違いは，零集合（の部分集合）の分の差である．つまり，σ-集合体 $\mathcal{B}$ の完備化とは，$\mathcal{B}$ を含む σ-集合体で，測度が 0 の集合が σ-イデアルをなすような最小の σ-集合体のことを指す．これを克服すれば良い．「上下から同じ測度で挟める」ということは，対称差の代数法則で回収して議論するのが良い．この算譜を Lebesgue 式拡張による完備化という．

定義 2.5.6 (complete). 測度空間 $(X,\mathcal{B},\mu)$ は，

$$\forall_{A\in\mathcal{B}}\,\forall_{B\in P(X)}\ [(\mu(A)=0\wedge B\subset A)\Rightarrow(B\in\mathcal{B}\wedge\mu(B)=0)]$$

を満たすとき**完備**であるという．

補題 2.5.7 (目標の対称差による特徴付け). $B \subset X$ を一般の部分集合とする．このとき，次の 2 条件は同値．

(1) $\exists_{A \in \mathcal{B}} \exists_{N \in \mathcal{B}} A \triangle B \subset N \land \mu(N) = 0$.

(2) $\exists_{A_1, A_2 \in \mathcal{B}} A_1 \subset B \subset A_2 \land \mu(A_2 \backslash A_1) = 0$.

[証明].

(1)⇒(2)　$A_1 := A \backslash N, A_2 := A \cup N$ とすると，$A_1 \subset B \subset A_2$ を満たし，$A_2 \backslash A_1 = N$ より，$\mu(A_2 \backslash A_1) = 0$.

(2)⇒(1)　$A := A_1, N := A_2 \backslash A_1$ とすると，$A \triangle B = B \backslash A_1 \subset A_2 \backslash A_1 = N$ より $\mu(B \backslash A_1) = 0$ である．

■

定理 2.5.8 (completion by Lebesgue extension). 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ に対して，

$$\overline{\mathcal{B}} := \{B \in P(X) \mid \exists_{A,N \in \mathcal{B}} \text{ s.t. } A \triangle B \subset N, \mu(N) = 0\}$$

とし，$B \in \overline{\mathcal{B}}$ に対して $\overline{\mu}(B) := \mu(A)$ で $\overline{\mu} : \overline{B} \to \mathbb{R}$ を定める．

(1) $\overline{\mathcal{B}}$ も σ-集合体になる．

(2) $\overline{\mu}$ は A に依らずに一意に定まり，$\overline{\mathcal{B}}$ 上の完備測度となる．

測度空間 $(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu})$ を完備化という．

2.5.3　完備化空間上の可測関数

命題 2.5.9 (完備化可測性の特徴付け). 次の 3 条件は同値である．

(1) f は $\overline{\mathcal{B}}$ 可測である．

(2) $\mathcal{B}$ 可測関数 $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ が存在して，$f(x) = g(x)$ $\overline{\mu}$-a.e. x.

(3) $\mathcal{B}$ 可測関数 $g_1, g_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ が存在して，$\forall_{x \in X}\, g_1(x) \leqslant f(x) \leqslant g_2(x)$ かつ $g_1(x) = g_2(x)$ $\overline{\mu}$-a.e. x.

[証明].

(2)⇒(1)　任意の $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ をとる．条件より，零集合 $N \in \overline{\mathcal{B}}$ が存在して $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ を用いて $f^{-1}(B) \triangle g^{-1}(B) \subset N$ を満たすから，$f^{-1}(B) \in \overline{\mathcal{B}}$ である．

(3)⇔(2)　任意の $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ について，g_1, g_2 の逆像が可測であることと g の逆像が可測であることは同値（補題 2.5.7）．

(1)⇒(3)　(1)　$\exists_{B \in \overline{\mathcal{B}}} f = \chi_B$ の場合を考える．$B \in \overline{\mathcal{B}}$ と補題 2.5.7 より，$A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ が存在して $A_1 \subset B \subset A_2, \mu(A_2 \backslash A_1) = 0$ を満たす．よって，$g_1 := \chi_{A_1}, g_2 := \chi_{A_2}$ とおけば良い．

(2)　f が非負の単関数である場合，すなわち，有限集合 $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ と互いに素な有限族 $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \overline{\mathcal{B}}$ が存在して $f = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{B_k}$ と表せる場合を考える．それぞれの $k \in [N]$ について，$A_{1,k}, A_{2,k} \in \mathcal{B}$ が存在して，$A_{1,k} \subset B_k \subset A_{2,k}, \mu(A_{2,k} \backslash A_{1,k}) = 0$ を満たすものが存在する．ここで，$g_1(x) := \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{A_{1,k}}, g_2(x) := \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{A_{2,k}}$ とおくと，各 a_k は非負なので $\forall_{x \in \mathcal{X}}\ g_1(x) \leqslant g_2(x)$ を満たす．さらに，$\{x \in X \mid g_1(x) \neq g_2(x)\} \subset \cup_{k=1}^{N} (A_{2,k} \backslash A_{1,k})$ より，$\mu(\{x \in X \mid g_1(x) \neq g_2(x)\}) = 0$.

(3)　f が一般の非負可測関数である場合，単関数の列 (f_n) が存在して $f_n \nearrow f$ を満たす（単関数近似 2.3.16）．(2) より，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $g_{n,1}, g_{n,2}$ という $\mathcal{B}$-可測関数が存在して，

(a)　$\forall_{x \in X}\, g_{n,1}(x) \leqslant f_n(x) \leqslant g_{n,2}(x)$.

(b)　$g_{n,1}(x) = g_{n,2}$ $\mu -$ a.e. x.

これに対して，$g_1(x) := \liminf_{n \to \infty} g_{n,1}(x), g_2(x) := \liminf_{n \to \infty} g_{n,2}(x)$ とおくと，

(a)　$\forall_{x \in X}\, g_1(x) \leqslant f_n(x) \leqslant g_2(x)$.

(b)　$g_1(x) = g_2$ $\mu -$ a.e. x.

を満たすことを示せば良い．(1) は極限が不等号を保つことより，(2) は $\{x \in X \mid g_1(x) \neq g_2(x)\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X \mid g_{n,1}(x) \neq g_{n,2}(x)\}$ より従う．

(4) 一般の $\overline{\mathcal{B}}$-可測関数 $f: X \to [-\infty, \infty]$ については，$f^{\pm} := \max \pm f, 0$ と定めると，2 つの非負可測関数 $f^{\pm}: X \to [0, \infty]$ を用いて $f = f^{+} - f^{-}$ と表せる．

■

2.6　外測度による完備測度の構成

Carathéodory (1918) [8] による測度論が，Lebesgue による $\mathbb{R}^n$ 上の理論を，一般の集合上に拡張した．「矩形から開集合を挟んで任意の集合の面積を近似し，完備な測度空間を得る」という手続きは，数学的には外測度の構成という発想にほかならない．[a]

[a] Lebesgue 1902 は Lebesgue 可測集合を確定させるに当たって位相を利用した議論をしているが，その部分を抜いたのである．

2.6.1　定義とその例

外測度：測度の面積への応用の王道＝被覆による面積近似

目標である σ-加法性は $P(X)$ 全域では定義できないが，関連する代数法則である σ-加法性と単調性は容易に構成できる．例えば，小学校で習う面積の定義である，上下からの矩形での近似である．このように，測度とは違うが，外測度と呼ばれる集合関数のクラスはより直感的である．そこで，ここから測度を構成する標準的方法を整備する．
＊双対概念は内測度で，これは $\mu^*(\overline{-})$ と補集合を噛ませれば良い．

定義 2.6.1 ((Carathéodory) outer / exterior measure (1918)). 関数 $\mu^*: P(X) \to [0, \infty]$ が次の 3 条件を満たすとき，(Carathéodory の) **外測度**という．[†17]

(1) (非負性) $\mathrm{Im}\,\mu \subset [0, \infty]$ かつ $\mu(\varnothing) = 0$. [†18]
(2) (単調性) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$.
(3) (σ-劣加法性) $\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

例 2.6.2 (Lebesgue outer measure). 矩形の面積が定める集合関数 $m_d: \mathcal{I}_d \to \overline{R}$(1.3.5) について，区間塊への延長ではなく，一般の集合への延長 $m^*: P(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ を

$$m^*(A) := \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} m(R_k) \in \overline{\mathbb{R}} \mid A \subset \cup_{k=1}^{\infty} R_k, \{R_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{I}_d\right\}$$

と定めると，これは外測度となる．これは Jordan 外測度の発想の可算化に当たる．[†19] □

例 2.6.3 (Lebesgue-Stieltjes 外測度). この構成は，一般の単調増加関数 $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について，$F((a, b]) := F(b) - F(a)$ として構成しても外測度となる．Lebesgue 測度は $F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ の場合に当たる． □

2.6.2　外測度による測度の構成

外測度 $\mu^*: P(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ が得られれば，μ^*-可測集合 $\mathcal{M}^*$ に定義域を制限することで，完備な測度空間 $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*|_{\mathcal{M}^*})$ を得る．

[†17] 非可測集合の上にも定義される．可測集合のクラスに限定すれば，σ-加法族をえる．
[†18] 測度の公理のままだと，$[-\infty, 0]$ で理論展開することがあり得るのか．
[†19] 曲線の長さの定義に似ている．やはり極限ばかりだ．

定義 2.6.4 (外測度による可測性 (Carathéodory measurability)). 外測度 $\mu^*: P(X) \to [0,\infty]$ に対して，$B \in P(X)$ が μ^*-可測であるとは，次と満たすことをいう：

$$\forall_{A\in P(X)}\ \mu^*(A) = \mu^*(A\cap B) + \mu^*(A\cap B^\complement).$$

†20

記法 2.6.5.

(1) μ^*-可測集合全体の集合を

$$\mathcal{B}^* := \left\{B \in P(X) \mid \forall_{A\in P(X)}\ \mu^*(A) = \mu^*(A\cap B) + \mu^*(A\cap B^\complement)\right\}$$

と表す．

(2) $\mu^*: P(X) \to [0,\infty]$ の $\mathcal{B}^*$ 上への制限を μ と表す：$\mu := \mu^*|_{\mathcal{B}^*}$.

定理 2.6.6 (μ^*-可測集合の性質：Carathéodory の基本定理). μ^*-可測集合全体の集合 $\mathcal{B}^*$ について，次が成り立つ：

(1) $\varnothing \in \mathcal{B}^*$.
(2) $A \in \mathcal{B}^* \Leftrightarrow A^\complement \in \mathcal{B}^*$.
(3) $\forall_{A,B\in\mathcal{B}^*}\ A\cap B \in \mathcal{B}^*$.
(4) $\forall_{\{A_n\}\subset\mathcal{B}^*}\ \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}^* \land \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}^*$.
(5) 互いに素な $\mathcal{B}^*$ の列 (A_n) に対して，$A := \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}^*$ かつ $\mu(A) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

特に，$\mathcal{B}^*$ は σ-代数であり，μ はその上に測度を定める．

[証明].

(1) **$\mathcal{B}^*$ は集合体である**　まず，$\mathcal{B}^*$ が集合体をなすことを示す．

(i) $\varnothing \in \mathcal{B}^*$ を示す．外測度の性質 (1)$\mu^*(\varnothing) = 0$ より，$\forall_{A\in P(X)}\ \mu^*(A) = \mu^*(A\cap\varnothing) + \mu^*(A\cap\varnothing^\complement)$ は成り立つ．

(ii) $B \in \mathcal{B}^*$ のとき，$B^\complement \in \mathcal{B}^*$ である．μ^*-可測性の条件をそもそも対称的に定義したためである．

(iii) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^*$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A\cap B_1) + \mu^*(A\cap B_1^\complement) && \because B_1 \in \mathcal{B}^* \\ &= \mu^*(A\cap B_1\cap B_2) + \mu^*(A\cap B_1\cap B_2^\complement) \\ &\quad + \mu^*(A\cap B_1^\complement\cap B_2) + \mu^*(A\cap B_1^\complement\cap B_2^\complement) && \because B_2 \in \mathcal{B}^* \\ &\geqslant \mu^*(A\cap(B_1\cup B_2)) + \mu^*(A\cap(B_1\cup B_2)^\complement) && \because \text{外測度の劣加法性 (3)}\end{aligned}$$

より，外測度の劣加法性 (3) による逆向きの不等号と併せて，$B_1\cup B_2 \in \mathcal{B}^*$.

議論の一般化　同様の，少し変形した等式を，一般の自然数 $N\in\mathbb{N}$ について示す：互いに素な $\mathcal{B}^*$ の族 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，$\forall_{A\in P(X)}\ \forall_{N\in\mathbb{N}}\ \mu^*(A) = \displaystyle\sum_{n=1}^N \mu^*(A\cap B_n) + \mu^*(A\cap(\cup_{n=1}^N B_n)^\complement)$．$N=1$ のときは $B_1 \in \mathcal{B}^*$ の定義．$N+1>1$ について，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N+1}\mu^*(A\cap B_n) + \mu^*(A\cap(\cup_{n=1}^{N+1}B_n)^\complement) &= \sum_{n=1}^N \mu^*(A\cap B_n) + \mu^*(\underbrace{A\cap B_{n+1}}_{A\cap(\cup_{n=1}^N B_n)^\complement\cap B_{n+1}}) \\ &\quad + \mu^*(A\cap(\cup_{n=1}^N B_n)^\complement\cap B_{n+1}^\complement) && \because B_{n+1}\subset(\cup_{n=1}^N B_n)^\complement \\ &= \sum_{n=1}^N \mu^*(A\cap B_n) + \mu^*(A\cap(\cup_{n=1}^N B_b)^\complement) && \because B_{n+1}\in\mathcal{B}^* = \mu^*(A).\end{aligned}$$

σ-性の証明　互いに素な $\mathcal{B}^*$ の族 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取る．$(\cup_{n=1}^\infty B_n)^\complement \subset (\cup_{n=1}^N B_n)^\complement$ に注意して，任意の $N\in\mathbb{N}$ について，

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^N \mu^*(A\cap B_n) + \mu^*(A\cap(\cup_{n=1}^N B_n)^\complement)$$

†20 劣加法性から，$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(A\cap B) + \mu^*(A\cap B^\complement)$ 方向は自明．

$$\geqslant \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A \cap B_n) + \mu^*(A \cap (\cup_{n=1}^{\infty} B_n)^{\complement}) \qquad \because \text{外測度の単調性 (2)}$$

より，$N \to \infty$ を考えて，

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap B_n) + \mu^*(A \cap (\cup_{n=1}^{\infty} B_n)^{\complement}) \\ &\geqslant \mu^*(A \cap \cup_{n=1}^{\infty} B_n) + \mu^*(A \cap (\cup_{n=1}^{\infty} B_n)^{\complement}) && \because \text{外測度の劣加法性 (3)} \\ &\geqslant \mu^*(A) && \because \text{外測度の劣加法性 (3)}\end{aligned}$$

より，$\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}^*$．一般の $\mathcal{B}^*$ の族 (B_n) についても，分割を取り直せば良い．

(2) **μ^* は測度である**　直前の議論の等式 $\forall_{A \in P(X)} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap B_n) + \mu^*(A \cap (\cup_{n=1}^{\infty} B_n)^{\complement})$ の，$A = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ の場合として，μ^* の σ-加法性は従うから，確かに $\mu^* : \mathcal{B}^* \to [0, \infty]$ は測度である．

■

定理 2.6.7 (完備性). 外測度 $\mu^* : P(X) \to [0, \infty]$ に対して，

(1) $(X, \mathcal{B}^*, \mu)$ は完備な測度空間となる．
(2) $\mathcal{B}^*$ の増大列 (A_n) について，$\mu(A_\infty) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$．
(3) $\mathcal{B}^*$ の非自明な減少列 (A_n) について，$\mu(A_\infty) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$．

[証明]. 任意に $\mu^*(N) = 0$ を満たす $N \in P(X)$ について，$N \in \mathcal{B}^*$ を示せば良い．任意の $A \subset P(X)$ に対して，外測度の劣加法性と単調性より，$\mu^*(A) \leqslant \underbrace{\mu^*(A \cap N)}_{=0} + \mu^*(A \cap N^{\complement}) \leqslant \mu^*(A)$ が従う．■

2.6.3　計量的外測度

距離と両立する外測度を計量外測度という．このような外測度の構成は，Hausdorff 測度の構成に応用がある．

2.7　Hopf 拡張による測度の構成

Carathéodory の理論は外測度は所与のものとして完備測度空間を構成したが，有限加法的測度から実際に完備測度を構成するまでを定理としてまとめる．有限加法的測度には標準的な構成法があり，例えば累積分布関数と呼ばれるが，これが定める測度を Lebesgue-Stieltjes 測度という．

2.7.1　Hahn-Kolmogorov の拡張定理

Hahn-Kolmogorov の拡張定理

前節では外測度から完備測度を構成する方法を与えた．さらにそこへの道として，有限加法的測度から外測度を通じて完備測度空間を構成する標準的な方法を考える．まず，有限加法的測度 μ_0 は可算被覆の測度の下限として外測度 μ^* を定める．このとき，μ_0 が $\mathcal{A}$ 上 σ-加法的である場合に限って，制限 $\mu^* : \sigma(\mathcal{A}) \to [0, \infty]$ は測度である．さらに，$(X, \mathcal{A}, \mu_0)$ が σ-有限である場合に限って，$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}^*$ で，延長 $(X, \sigma(A), \mu^*)$ は完備である．

補題 2.7.1 . 有限加法的測度空間 $(X, \mathcal{A}, \mu_0)$ について，集合関数 $\mu^* : P(X) \to [0, \infty]$ を

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k) \in [0, \infty] \;\middle|\; \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, A \subset \cup_{k=1}^{\infty} A_k \right\}$$

と定めると，次が成り立つ．

(1) $\mu^* : P(X) \to [0,\infty]$ は外測度である．
(2) μ^*-可測な集合全体の集合 $\mathcal{B}^*$ に対して，$\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}^*$ が成り立つ（したがって，$\mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$ は測度を定める 2.6.6）．
(3) μ_0 が $\mathcal{A}$ 上 σ-加法的ならば，$\forall_{A\in\mathcal{A}}\ \mu^*(A) = \mu_0(A)$ が成り立つ．すなわち，μ^* は μ_0 の $\sigma(\mathcal{A})$ への延長である．
(4) さらに $(X, \mathcal{A}, \mu_0)$ は σ-有限：$\exists_{\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{A}}\ \mu_0(A_n) < \infty \land X = \cup_{n=1}^\infty A_n$ であるとき，μ_0 の $\sigma(\mathcal{A})$ 上への延長は一意的である．

[証明].

(1) $\mu^* : P(X) \to [0,\infty]$ が外測度の公理を満たすことを確認する．
 (i) $\mu^*(\infty) = 0$ かつ $\mathrm{Im}\,\mu^* \subset [0,\infty]$.
 (ii) 単調になる．
 (iii) 任意の $P(X)$ の族 (A_n) に対し，$\mu^*(\cup_{n=1}^\infty A_n) \leqslant \sum_{n=1}^\infty A_n$ を示す．任意の $\epsilon > 0$ について，$A_n \subset \cup_{k=1}^\infty A_{n,k}$, $\sum_{k=1}^\infty \mu_0(A_{n,k}) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$ を満たす族 $(A_{n,k})$ が各 $n\in\mathbb{N}$ に対して存在する．これを用いて，

$$\begin{aligned}\mu^*(\cup_{n=1}^\infty A_n) &\leqslant \sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty \mu_0(A_{n,k})\\ &\leqslant \sum_{n=1}^\infty\left(\mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2}\right)\\ &\sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n) + \epsilon.\end{aligned}$$

 したがって，$\mu^*(\cup_{n=1}^\infty A_n) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n)$.

(2) 任意の $B \in \mathcal{A}$ に対して $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A\cap B) + \mu^*(A\cap B^{\complement})$ を示せば良い．任意の $\epsilon > 0$ に対して，$A \subset \cup_{k=1}^\infty A_k, \mu_0(\cup_{k=1}^\infty A_k) \leqslant \mu^*(A) + \epsilon$ を満たす $\mathcal{A}$ の族 (A_k) が存在するから，これを用いて，

$$\begin{aligned}\mu^*(A) + \epsilon &\geqslant \mu_0(\cup_{k=1}^\infty A_k)\\ &= \sum_{k=1}^\infty\left(\mu_0(A_k\cap B) + \mu_0(A_k\cap B^{\complement})\right) && \mu_0\text{の有限加法性}\\ &\geqslant \mu^*(A\cap B) + \mu^*(A\cap B^{\complement}) && \mu^*\text{の劣加法性と単調性.}\end{aligned}$$

(3) 任意の $A \in \mathcal{A}$ について，$\mu^*(A) \geqslant \mu_0(A)$ を示せば良い．任意の $\epsilon > 0$ に対して $\mu^*(A) + \epsilon \geqslant \sum_{k=1}^\infty \mu_0(A_k), A \subset \cup_{k=1}^\infty A_k$ を満たす $\mathcal{A}$ の族 (A_k) が存在する．A に収束する単調増加列 $(\cup_{k=1}^n (A\cap A_k))_{n\in\mathbb{N}}$ に注目して，有限加法的測度の σ-加法性の特徴付け 2.4.4 より，

$$\begin{aligned}\mu^*(A) + \epsilon &\geqslant \sum_{k=1}^\infty \mu_0(A_k)\\ &\geqslant \sum_{k=1}^\infty \mu_0(A\cap A_k)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \mu_0(A\cap A_k)\\ &\geqslant \lim_{n\to\infty}\mu_0(\cup_{k=1}^n (A\cap A_k)) = \mu_0(A).\end{aligned}$$

(4) σ-有限性より，$\cup_{k=1}^\infty A_k = X$ を満たす測度有限な集合の列 (A_k) が存在する．特に，$\cup_{i=1}^k A_i =: A_k$ と定め直すことで，(A_k) は単調増大列として良い．$\mu : \sigma(\mathcal{A}) \to [0,\infty]$ を μ_0 の $\sigma(\mathcal{A})$ 上への任意の延長となる測度とし，

$$\mathcal{M}_k := \{B \in \sigma(\mathcal{A}) \mid \mu(B\cap A_k) = \mu^*(B\cap A_k)\}$$

と定めると，$\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_k \subset \sigma(\mathcal{A})$ である．あとは，任意の $k\in\mathbb{N}$ について，$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_k$ を示せば良い（単調族定理 2.2.6）．
そこで，$\mathcal{M}_k$ が単調族であることを示す．また，測度 μ, μ^* が定める集合関数 $\mu(-\cap A_k), \mu^*(-\cap A_k) : \sigma(\mathcal{A}) \to [0,\infty]$ は有限な測度となるから，任意の $\mathcal{M}_k$ の B に収束する単調列 (B_n) に対して，$\mu^*(B\cap A_k) = \lim_{n\to\infty}\mu(B_n\cap A_k) = \mu(B\cap A_k)$（測度の性質 2.4.6(4),(5)）．ただし，単調減少列について，$\mu(B_1\cap A_k) \leqslant \mu(A_k) < \infty$ の仮定を用いた．

$k\to\infty$ を考えることより，$\mu_0=\mu^*$ on $\mathcal{A}$ を満たす $\sigma(\mathcal{A})$ 上の測度は一意であることがわかる．

■

要諦 2.7.2. μ^* を inf として定義するから，この定義から抽出しやすい主張が $\epsilon>0$ を使うものであるため，不等式 $\mu^*(A)\geqslant\mu_0(A)$ を $\forall_{\epsilon>0}\;\mu^*(A)+\epsilon\geqslant\mu_0(A)$ に読み替えて示す．

定理 2.7.3 (Hopf (1937) [9]). 集合体 $\mathcal{A}$ 上の有限加法的測度 $\mu_0:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ について，次の 2 条件は同値．

(1) $\sigma(\mathcal{A})$ 上の測度に延長できる．
(2) μ_0 は $\mathcal{A}$ 上 σ-加法的である．

特に，$(X,\mathcal{A},\mu_0)$ が σ-有限であるとき，拡張は一意である．

例 2.7.4 (Lebesgue-Stieltjes 測度)**.** 任意の広義単調増加関数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は左連続であるとする．このとき，

$$\lambda_g\left(\sum_{i=1}^n(a_i,b_i]\right):=\sum_{i=1}^n(g(b_i)-g(a_i))$$

と定めると，λ_g は $\mathbb{R}$ 上の区間のなす集合代数上で σ-加法的である．これが $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上にもつ一意な延長を，**Lebesgue-Stieltjes 測度**という．□

2.7.2　Lebesgue 式完備化との算譜合成

Hahn-Kolmogorov 流の inf による有限測度からの拡張の完備化と，有限測度が定める外測度の μ^*-可測集合への制限で得る完備測度とが，一致する．

記法 2.7.5. 集合族 $\mathcal{E}\subset P(X)$ に対して，$\mathcal{E}_\delta$ を可算積についての閉包，$\mathcal{E}_\sigma$ を可算和についての閉包とする．集合体 $\mathcal{A}$ に対して，$\mathcal{A}\subset\mathcal{A}_{\delta\sigma}\subset\sigma(\mathcal{A})$ というクラスに注目する．σ-代数は δ-代数でもあることに注意．

補題 2.7.6 . $(X,\mathcal{A},\mu_0)$ を σ-有限な有限加法的測度空間で，μ_0 は $\mathcal{A}$ 上 σ-加法的であるとすると，一意的な延長 $\mu:\sigma(\mathcal{A})\to[0,\infty]$ が存在する．また，μ_0 が定める外測度を $(X,\mathcal{B}^*,\mu^*)$ とする．

(1) $\forall_{B\in P(X)}\;\exists_{A\in\mathcal{A}_{\sigma\delta}}\;B\subset A\wedge\mu^*(B)=\mu(A)$.
(2) 任意の部分集合 $B\in P(X)$ について，B が μ^*-可測であることと次は同値：$\exists_{A\in\mathcal{A}_{\sigma\delta}}\;\exists_{N:\mu^*-\mathrm{null}}\;B\subset A\wedge A\backslash B\subset N$.[†21]

[証明].

(1) **構成**　任意の $B\in P(X)$ を取る．これに対して，外測度 μ^* の定め方から，任意の $n\in\mathbb{N}_+$ に対して，

$$B\subset\cup_{k=1}^\infty B_{n,k},\mu^*(B)+\frac{1}{n}\geqslant\sum_{k=1}^\infty\mu(B_{n,k})\,(\geqslant\mu(\cup_{k=1}^\infty B_{n,k}))\qquad(\because\text{ 測度}\mu\text{の劣加法性 })$$

を満たす $\mathcal{A}$ の列 $(B_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する．これを用いて，

$$A:=\bigcap_{n=1}^\infty\bigcup_{k=1}^\infty B_{n,k}\in\mathcal{A}_{\delta\sigma}\subset\sigma(\mathcal{A})$$

と定めれば良い．σ-代数は δ-代数でもあることに注意．

証明　この $A\in\mathcal{A}_{\delta\sigma}$ が条件を満たすことを確認する．まず $B\subset A$ を満たし，$\mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}=\mu$ と外測度 μ^* の劣加法性より，$\mu^*(B)\leqslant\mu^*(A)=\mu(A)$ である．続いて，構成より，$\mu^*(B)+\dfrac{1}{n}\geqslant\mu(\cup_{k=1}^\infty B_{n,k})\geqslant\mu(A)\;(\forall_{n\in\mathbb{N}_+})$ である．

[†21] ちょっと N がイデアルっぽいかもしれない．これに「完備化」を行うと，$\overline{\sigma(\mathcal{A})}=\mathcal{B}^*$ というわけだ．いや，これは対称差が外測度・内測度双対に関して対称性が破れた形か（補題 2.5.7）．

(2) $\Leftarrow$　$\mathcal{B}^*$ が完備より $A\backslash B \in \mathcal{B}^*$，$A \in \mathcal{A}_{\delta\sigma} \subset \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}^*$ の時，$B \in \mathcal{B}^*$ は従う．実際，

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\leqslant \mu^*(A\cap B) + \mu^*(A\cap B^\complement) & \because \mu^*\text{の劣加法性} \\ &= \mu^*(B) + \mu^*(A\backslash B) & \because B \subset A \\ &\leqslant \mu^*(A) + \mu^*(N) = \mu^*(A) & \because \mu^*\text{の単調性} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$　$B \in \mathcal{B}^*$ を任意に取る．まずは，B と μ^*-零集合分しか大きくない $A \in \mathcal{A}_{\delta\sigma}$ を構成する．

(a)　σ-有限性を用いて，B に収束する測度有限な $\mathcal{A}$-単調増大列 (A_k) を取る．これは，$X_k \nearrow X$ を満たす測度有限な $\mathcal{A}$-単調増大列 (X_k) に対して，$(A_k := B \cap X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ と定めれば良い，

(b)　各 A_k は測度有限だから，$\mathcal{A}$-列で任意精度近似ができる．$\mu^*(A_k) \leqslant \mu^*(X_k) = \mu_0(X_k) < \infty$ より，μ^* の定義から，任意の $q \in \mathbb{N}_+$ に対して，

$$A_k \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_{k,q,n},\quad \mu^*(A_k) + \frac{1}{2^k q} \geqslant \sum_{n=1}^\infty \mu_0(A_{k,q,n})\,(\geqslant \mu^*(\cup_{n=1}^\infty A_{k,q,n}))$$

を満たす $\mathcal{A}$ の族 $(A_{k,q,n})_{n\in\mathbb{N}}$ が取れる．

(c)　これについて合併を取ることで $A \in \mathcal{A}_{\delta\sigma}$ を構成する．いま，

$$B = \bigcup_{k=1}^\infty A_k \subset \bigcup_{k=1}^\infty \bigcup_{n=1}^\infty A_{k,q,n} \in \mathcal{A}_\sigma \qquad (\forall_{q\in\mathbb{N}_+})$$

より，

$$A := \bigcap_{q=1}^\infty \bigcup_{k=1}^\infty \bigcup_{n=1}^\infty A_{k,q,n} \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$$

と定めれば良い．

すると，$B \subset A$ を満たし，

$$\begin{aligned} \mu^*(A\backslash B) &\leqslant \mu^*(\cup_{k=1}^\infty \cup_{n=1}^\infty A_{k,q,n}\backslash B) \\ &= \mu^*(\cup_{k=1}^\infty \cup_{n=1}^\infty A_{k,q,n}\backslash \cup_{k=1}^\infty A_k) \\ &\leqslant \mu^*(\cup_{k=1}^\infty \cup_{n=1}^\infty (A_{k,q,n}\backslash A_k)) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^\infty \mu^*(\cup_{n=1}^\infty (A_{k,q,n}\backslash A_k)) \\ &= \sum_{k=1}^\infty \mu^*(\cup_{n=1}^\infty A_{k,q,n}\backslash A_k) \\ &= \sum_{k=1}^\infty (\mu^*(\cup_{n=1}^\infty A_{k,q,n}) - \mu^*(A_k)) & \because \mu^*\text{の}\sigma(\mathcal{A})\text{ 上での完全加法性} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k q} = \frac{1}{q} \end{aligned}$$

と任意の $q \in \mathbb{N}_+$ について評価できるから，$\mu^*(A\backslash B) = 0$.

■

要諦 2.7.7.

(1) $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})} = \mu$ であるが，μ は「十分に多くの集合を測れる」ことを言っている．これは任意の $B \in P(X)$ に対して，任意精度 ($1/n$ 以下) で被覆する列 $(B_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ が取れることをいう．

(2) $\mathcal{A}_{\delta\sigma}$ の元は μ^*-可測であるが，それと零集合の分しか違わない集合は μ^*-可測である．

定理 2.7.8 (完備化). $(X, \mathcal{A}, \mu_0)$ を σ-有限な有限加法的測度空間で，μ_0 は $\mathcal{A}$ 上 σ-加法的であるとすると，一意的な延長 $\mu : \sigma(\mathcal{A}) \to [0,\infty]$ が存在する．また，μ_0 が定める外測度を $(X, \mathcal{B}^*, \mu^*)$ とする．このとき，$(X, \overline{\sigma(\mathcal{A})}, \overline{\mu}) = (X, \mathcal{B}^*, \mu^*)$.

[証明].

$\overline{\sigma(\mathcal{A})} \subset \mathcal{B}^*$　$\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}^*$ で，$\mathcal{B}^*$ は μ^*-完備であるから，$\overline{\sigma(\mathcal{A})} \subset \mathcal{B}^*$ が従う．$\overline{\sigma(\mathcal{A})}$ は $\sigma(\mathcal{A})$ を含む μ-完備な σ-集合体のうち最小のものであるため．

$\overline{\sigma(\mathcal{A})} \supset \mathcal{B}^*$　任意に $B \in \mathcal{B}^*$ を取り，これが $\sigma(\mathcal{A})$ の元との対称差が μ-零集合であることを示せば良い．補題 (2) より，$\exists_{A\in\mathcal{A}_{\sigma\delta}}\ B \subset A \land \mu^*(A\backslash B) = 0$．よって，$A\backslash B \in \mathcal{B}^*$ について補題 (1) より，$\exists_{N\in\mathcal{A}_{\sigma\delta}}\ A\backslash B \subset N \land \mu(N) = \mu^*(A\backslash B) = 0$．ゆえに，$A \triangle B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = A\backslash B \subset N$.

$\mathcal{B}^*$ 上の完備測度の一意性 2.5.8 より，$(X, \overline{\sigma(\mathcal{A})}, \overline{\mu}) = (X, \mathcal{B}^*, \mu^*)$ が従う． ■

2.8　直積測度の構成

直積測度を積分形で捉える

直積測度の構成は，σ-有限性の過程の下では極めて自然なものが一意的に存在する．σ-有限性がないと存在はするが一意性は崩れる．

証明においては，各 $x \in X$ についての切り口という妙義（x, y の $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2$ についてのファイバーの Y, X での像）を用いて，底空間 $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X), (Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ という足場を上手に使うことが肝要になる．すると，

$$\mu_Z(E) = \int_X \mu_Y(E_x)d\mu_X = \int_Y \mu_X(E_y)d\mu_Y$$

と表現できる（$x \in X$ で切っても $y \in Y$ で切っても当然同じになるべき）から，積分論の結果（収束定理）が流用できる．

2.8.1　直積 σ-代数の定義と特徴付け

定義 2.8.1 (rectable / cylinder set, 直積 σ-加法族). 2 つの測度空間 $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X), (Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ に対して，直積空間 $Z := X \times Y$ を考える．

(1) $K = E \times F$ $(E \in \mathcal{B}_X, F \in \mathcal{B}_Y)$ の形で表される集合を**筒状集合**または**可測長方形**という．矩形集合全体からなる集合を

$$\mathcal{C} := \{A \times B \subset Z \mid A \in \mathcal{B}_X, B \in \mathcal{B}_Y\}$$

で表す．

(2) 可測長方形の全体 $\mathcal{C}$ の生成する σ-代数 $\sigma(\mathcal{C})$ を $\mathcal{B}_Z$ または $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$ と表し，**直積 σ-集合体**という．[†22]

補題 2.8.2 (直積 σ-代数の単調族としての特徴付け elementary set). 可測長方形全体の集合 $\mathcal{C}$ の生成する集合代数 $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ は，互いに素な長方形の有限直和 (このような集合を**基本集合**ともいう [4])

$$\left\{ \sum_{i=1}^n C_i \subset Z \,\middle|\, C_i \in \mathcal{C}, n \in \mathbb{N} \right\} = \mathcal{A}(\mathcal{C})$$

に等しい．従って，$\mathcal{A}(\mathcal{C})$ が生成する単調族が $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$ に他ならない：$\mathcal{M}(\mathcal{A}(\mathcal{C})) = \sigma(\mathcal{C})$.

[証明].

(1) **方針**　(i)　$E, F \in C \Rightarrow E \cap F \in \mathcal{C}$.

(ii)　$E \in \mathcal{C} \Rightarrow E^{\complement} (= Z\backslash E) \in \mathfrak{K}$.

の 2 つを証明すれば，任意の $A := \sum_{i=1}^n C_i \mathfrak{K}$ について，$A^{\complement} = \cap_{i=1}^n C_i^{\complement}$ より (i),(ii) から $A^{\complement} \in \mathfrak{K}$，$A, B \in \mathfrak{K}$ ならば $A \cup B = A + (B \cap A^{\complement}) \in \mathfrak{K}$ が (i),(ii) より従い，$\mathfrak{K}$ は $\mathcal{C}$ を含んだ最小の集合体であることが分かる．

証明　(i)　$E, F \in \mathcal{C}$ より，$A, C \in \mathcal{B}_X, B, D \in \mathcal{B}_Y$ が存在して，$E = A \times B, F = C \times D$ と表せるから，$E \cap F = (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \in \mathcal{C}$.

[†22] 逆像 σ-集合代数 (pullback σ-algebra) の合併 $\mathrm{pr}_1^*(\mathcal{B}_X) \cup \mathrm{pr}_2^*(\mathcal{B}_Y)$ が生成する σ-集合代数と考えても良い．

(ii)　$E \in \mathcal{G}$ より，$A \in \mathcal{B}_X, B \in \mathcal{B}_Y$ が存在して，$E = A \times B$ と表せる．$(x,y) \in E^\complement \Leftrightarrow x \notin A \vee b \notin B$ なので，

$$\begin{aligned} E^\complement &= (A \times B)^\complement \\ &= (A^\complement \times Y) \cup (X \times B^\complement) \\ &= (A^\complement \times (B \cup B^\complement)) \cup ((A \cup A^\complement) \times B^\complement) \\ &= (A^\complement \times B) \sqcup (A^\complement \times B^\complement) \sqcup (A \times B^\complement) \in \mathfrak{K}. \end{aligned}$$

(2) **方針**

$$\mathcal{D} := \{E \in \mathcal{B}_Z \mid \forall_{x \in X, y \in Y}\ E_x \in \mathcal{B}_Y, E_y \in \mathcal{B}_X\}$$

と定めて，$\mathcal{D} = \mathcal{B}_Z = \sigma(\mathcal{G})$ を導く．$\mathcal{D}$ が $\mathcal{G}$ を含む σ-集合体であることが示せれば，$\mathcal{B}_Z = \sigma(\mathcal{G}) \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{B}_Z$ より，$\mathcal{D} = \mathcal{B}_Z$ が従う．

$\mathcal{G} \subset \mathcal{D}$　任意の $A \times B \in \mathcal{G}$ に対して，

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B, & x \in A, \\ \emptyset, & x \notin A \end{cases}, \qquad (A \times B)_y = \begin{cases} A, & y \in B, \\ \emptyset, & y \notin B \end{cases},$$

であるから，$\emptyset \in \mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y, B \in \mathcal{B}_Y, A \in \mathcal{B}_X$ より，$A \times B \in \mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ は σ-集合体である

(i)　任意に $E \in \mathcal{D}$ を取る．$(X \times Y \backslash E)_x = Y \backslash E_x \in \mathcal{B}_Y$ ($\because E \in \mathcal{D}$ より $E_x \in \mathcal{B}_Y$) かつ $(X \times Y \backslash E)_y = X \backslash E_y \in \mathcal{B}_X$ より，$E^\complement \in \mathcal{D}$.

(ii)　任意の互いに素な列 $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ について，$\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y$ が σ-集合体であることより，

$$\left(\sum_{n=1}^\infty E_n\right)_x = \sum_{n=1}^\infty (E_n)_x \in \mathcal{B}_Y, \qquad \left(\sum_{n=1}^\infty E_n\right)_y = \sum_{n=1}^\infty (E_n)_y \in \mathcal{B}_X,$$

が成り立つから，$\sum_{n=1}^\infty E_n \in \mathcal{D}$.

■

補題 2.8.3 (section of set / function). 部分集合 $E \subset X \times Y$ と，可測関数 $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ について，

(1) $E \in \mathcal{B}_Z$ ならば，その x-切断も可測：$\forall_{x \in X}\ E_x := \{y \in Y \mid (x,y) \in E\} = \mathrm{pr}_2(\mathrm{pr}_1^{-1}(x)) \in \mathcal{B}_Y$.
(2) $E \in \mathcal{B}_Z$ ならば，その y-切断も可測：$\forall_{y \in Y}\ E^y := \{x \in X \mid (x,y) \in E\} = \mathrm{pr}_1(\mathrm{pr}_2^{-1}(y)) \in \mathcal{B}_X$.
(3) したがって，各変数を止めた関数 $f_x := f(x,-) : Y \to \overline{\mathbb{R}}, f^y := f(-,y) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ はいずれも可測関数である．

要諦 2.8.4. 積位相について，射影が全射開写像になることに通じる消息である．

系 2.8.5 . 長方形 $E \times F \subset X \times Y$ について，次の 2 条件は同値：

(1) $E \times F$ は $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$-可測でない：$E \times F \notin \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$.
(2) $E \notin \mathcal{B}_X$ かつ $F \neq \emptyset$ であるか，または，$F \notin \mathcal{B}_Y$ かつ $E \neq \emptyset$ である．

2.8.2　直積測度の定義

直積測度は，測度のテンソル積 (の延長) として well-defined に定義出来るが，一意性は σ-有限な場合にしか保証されない．

定義 2.8.6 (product measure). 補題 2.8.2 より，有限加法族 $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ の任意の元は長方形の有限直和 $\sum_{k=1}^N A_k \times B_k$ $(A_k \in \mathcal{B}_X, B_k \in \mathcal{B}_Y)$ の形で表せるから，$\mathcal{A}(\mathcal{G})$ 上の関数 $\mu_Z : \mathcal{A}(\mathcal{G}) \to [0,\infty]$ を

$$\mu_Z(E) := \sum_{k=1}^N \mu_X(A_k)\mu_Y(B_k) \quad (E = \cup_{k=1}^N A_k \times B_k \in \mathcal{A}(\mathcal{G}))$$

で定めると，$\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$ 上に延長が存在し，X, Y がいずれも σ-有限であるときにこの延長は一意である．

補題 2.8.7 (well-defined 性). 対応 $\mu_Z : \mathcal{A}(\mathcal{C}) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ について，

(1) μ_Z の値は直和の取り方に依らず一意的に定まり，有限加法的測度を定める．
(2) (特性関数に関する Fubini の定理) 任意の $E \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$ について，これが定める各切片の測度 $\mu_Y(E_-) : X \to [0,\infty]; x \mapsto \mu_Y(E_x)$ は $\mathcal{B}_X$-可測関数，$\mu_X(E_-) : Y \to [0,\infty]; y \mapsto \mu_X(E_y)$ は $\mathcal{B}_Y$-可測関数で，

$$\mu_Z(E) = \int_X \mu_Y(E_x)d\mu_X = \int_Y \mu_X(E_y)d\mu_Y.$$

[証明].

(1) (2) の表現より，積分 $\int_X \mu_Y(E_x)d\mu_X = \sum_{k=1}^N \mu_Y(B_k)\mu_X(A_k), \int_Y \mu_X(E_y)d\mu_Y$ は E の直和分割の取り方に依らないことから well-definedness は従う．有限加法性は (3) に含意される．
(2) 任意の $E \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$ について，$A_k \in \mathcal{B}_X, B_k \in \mathcal{B}_Y$ が存在して $E = \sum_{k=1}^N A_k \times B_k$ と表せる．このとき，任意の $x \in X$ について，

$$E_x = \sum_{k=1}^N (A_k \times B_k)_x = \bigcup_{k\in[N],x\in A_k} B_k$$

が成り立つから，$\mu_Y(E_x) = \sum_{k=1}^N \mu_Y(B_k)\chi_{A_k}(x)$ と表せる（E_x の μ_Z-測度は，$x \in A_k$ を満たす度に $\mu_Y(B_k)$ であり，$x \notin A_k$ が起こらないなら 0 である）．この x についての関数は明らかに可測である．
これを積分すると，

$$\int_X \mu_Y(E_x)d\mu_X = \sum_{k=1}^N \mu_Y(B_k)\mu_X(A_k) = \sum_{k=1}^N \mu_Y(B_k)\mu_X(A_k)$$

を得る．$\int_Y \mu_X(E_y)d\mu_Y = \sum_{k=1}^N \mu_X(A_k)\mu_Y(B_k)$ も同様にして従う．
(3) 有限加法的測度についての σ-加法性の特徴付け 2.4.4 より，$\mathcal{A}(\mathcal{C})$ の E に収束する任意の単調増大列 (E_n) について，$\lim_{n\to\infty} \mu_Z(E_n) = \mu(E)$ を示せば良い．
切り口も空間 X において単調増大列 $(E_n)_x \nearrow E_x$ を定めるから，測度 μ_Y の性質 2.4.6(4) より，$\mu_Y((E_n)_x) \nearrow \mu_Y(E_x)$．ここで，$(\mu_Y((E_n)_-))_{n\in\mathbb{N}}$ は非負値な $\mathcal{B}_x$-可測関数の単調増加列であるから，単調収束定理 3.3.1 と (2) より，

$$\lim_{n\to\infty} \mu_Z(E_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X \mu_Y((E_n)_x)d\mu_X = \int_X \mu_Y(E_x)d\mu_X = \mu_Z(E).$$

(4)

$$X = \cup_{n=1}^\infty A_n, A_n \in \mathcal{B}_X, \mu_X(A_n) < \infty, \qquad Y = \cup_{n=1}^\infty B_n, B_n \in \mathcal{B}_Y, \mu_Y(B_n) < \infty,$$

を満たす単調増加列 $(A_n), (B_n)$ を取る．これに対して，$E_n := A_n \times B_n$ とおけば，

$$Z = \cup_{n=1}^\infty E_n \quad \mu_Z(E_n) = \mu_X(A_n)\mu_Y(B_n) < \infty$$

を満たす．

■

要諦 2.8.8. こうして，対応 $\mu_Z : \mathcal{A}(\mathcal{C}) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ はたしかに定まり，これによって $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ の元の測度も well-defined に確定する．この仕組みが $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$ 上にも通用することを示すには，μ_Z の $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ 上での σ-加法性を示せば良い．

補題 2.8.9 (直積測度の存在と一意性). 対応 $\mu_Z : \mathcal{A}(\mathcal{C}) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ について，

(1) μ_Z は $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ 上 σ-加法的でもある．従って，Hopf-Kolmogorov の定理より，測度 $\mu_Z : \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y \to \overline{\mathbb{R}_+}$ が存在する．
(2) $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X), (Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ が σ-有限ならば，$(Z, \mathcal{A}(\mathcal{C}), \mu_Z)$ も σ-有限である．したがって，直積測度は一意に定まる

注 2.8.10. 完備測度空間の直積は完備とは限らない．

こうして実は，次の定理が示せたことになる．

定理 2.8.11 (Fubini I：単関数). $(X,\mathcal{B}_X,\mu_X),(Y,\mathcal{B}_Y,\mu_Y)$ を σ-有限な測度空間とする．このとき，任意の $E\in\mathcal{B}_X\times\mathcal{B}_Y$ に対して，

(1) $\mu_Y(E_-):X\to[0,\infty];x\mapsto\mu_Y(E_x)$ は $\mathcal{B}_X$-可測関数である．
(2) $\mu_X(E_-):Y\to[0,\infty];y\mapsto\mu_X(E_y)$ は $\mathcal{B}_Y$-可測関数である．
(3) μ_X,μ_Y の直積測度 μ_Z に対して，次が成り立つ：

$$\mu_Z(E)=\int_X\mu_Y(E_x)d\mu_X=\int_Y\mu_X(E_y)d\mu_Y.$$

したがって特に，$\mu(E)<\infty$ ならば $\mu_Y(E_x)<\infty$ μ_X-a.e. x，かつ μ_Y-a.e. y に対して $\mu_X(E_y)<\infty$ である．[†23]また双対的に，$\mu(E)>0$ ならば，零でない $E_X\in\mathcal{B}_X$ が存在して $\mu_Y(E_x)>0$ $(\forall_{x\in E_x})$，かつ，零でない $E_Y\in\mathcal{B}_Y$ が存在して $\mu_X(E_y)>0$ $(\forall_{y\in E_y})$ が成り立つ．

[証明].

方針　σ-有限性より，列

$$\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{B}_X,A_k\nearrow X\ \forall_{k\in\mathbb{N}}\ \mu_X(A_k)<\infty,\qquad \{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{B}_Y,B_k\nearrow Y\ \forall_{k\in\mathbb{N}}\ \mu_Y(B_k)<\infty,$$

が取れる．ここで，$F_k:=A_k\times B_k$ とおき，任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して

$$\mathcal{D}_k:=\left\{E\in\mathcal{B}_X\times\mathcal{B}_Y\mid E\cap F_k\text{が }(1),(2),(3)\text{ を満たす}\right\}$$

とおいて，単調族定理 2.2.6 により $\mathcal{D}_k=\mathcal{B}_X\times\mathcal{B}_Y$ を示す．というのも，補題 2.8.7 より $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ の元は (1),(2),(3) をすでに満たすから $\mathcal{A}(\mathcal{C})\subset\mathcal{D}_k$ であることより，$\mathcal{D}_k$ が単調族であることを示せば，

$$\mathcal{B}_X\times\mathcal{B}_Y=\sigma(\mathcal{A}(\mathcal{C}))\overset{\text{単調族定理}}{=}\mathcal{M}(\mathcal{A}(\mathcal{C}))\subset\mathcal{M}(\mathcal{D}_k)=\mathcal{D}_k\subset\mathcal{B}_X\times\mathcal{B}_Y$$

より，$\mathcal{D}_k=\mathcal{B}_X\times\mathcal{B}_Y$ が従う．

すると，$F_k\nearrow Z$ より，任意の $E\in\mathcal{B}_X\times\mathcal{B}_Y$ に対して $\exists_{k\in\mathbb{N}}\ E\subset F_k$ だから，$E\in\mathcal{B}_X\times\mathcal{B}_Y=\mathcal{D}_k$ は E が (1),(2),(3) を満たすことを含意する．

単調増加列についての閉性　任意の単調増加列 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{D}_k,E_n\nearrow E$ について，$E\cap F_k\in\mathcal{D}_k$ を示す．このとき，任意の $x\in X,y\in Y$ に対して，$n\to\infty$ のとき

$$(E_n\cap F_k)_x\nearrow(E\cap F_k)_x,\qquad (E_n\cap F_k)_y\nearrow(E\cap F_k)_y,$$

より，測度の性質 2.4.6(4) より，可測関数の単調増加列 $(\mu_Y((E_n\cap F_k)_x))_{n\in\mathbb{N}}$ も，任意の $x\in X$ について，

$$\mu_Y((E_n\cap F_k)_x)\nearrow\mu_Y((E\cap F_k)_x),\qquad \mu_X((E_n\cap F_k)_y)\nearrow\mu_X((E\cap F_k)_y),$$

を満たす．すると，可測関数の性質 2.3.11 より $\mu_Y((E\cap F_k)_-):X\to[0,\infty]$ も可測で，$\mu_X((E\cap F_k)_-):Y\to[0,\infty]$ も可測だから，$E\cap F_k$ も (1),(2) を満たす．また単調収束定理 3.3.1 より，

$$\mu_Z(E\cap F)\overset{\text{可測関数の性質 2.3.11}}{=}\lim_{n\to\infty}\mu_Z(E_n\cap F)=\lim_{n\to\infty}\int_X\mu_Y((E_n\cap F)_x)d\mu_X\overset{\text{単調収束定理}}{=}\int_X\mu_Y((E\cap F_k)_x)d\mu_X.$$

よって，$E\cap F_k$ は (3) も満たすから，$E\cap F_k\in\mathcal{D}_k$.

単調減少列についての閉性　単調減少列 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{D}_k,E_n\searrow E$ についても，$E\cap F_k$ は $\mu_Y(B_k),\mu_X(A_k)<\infty$ より，測度の性質 2.4.6(5) から，各 $x\in X$ について $\infty>\mu_Y(B_k)\geqslant\mu_Y((E_n\cap F_k)_x)\searrow\mu_Y((E\cap F_k)_x)$ $(n\to\infty)$ より，(1),(2) を満たす．また Lebesgue の優収束定理 3.3.7 より，全く同じ等式が成り立ち，(3) も満たす．

■

2.8.3　完備性伝播の失敗

[†23] さらに特別な場合として，$\mu_Z(Z)<\infty$ ならば $\mu_X(X)<\infty,\mu_Y(Y)<\infty$ も含む．

例え σ-有限であろうと，$(X, \mathcal{M}, \mu)$ が完備だからといって，直積空間 $(X^2, \mathcal{M}\otimes\mathcal{M}, \mu\otimes\mu)$ はそのままでは完備ではなく，Lebesgue 式拡張を考える必要がある．また，一般の完備空間の直積空間について，完備化を再びとれば，Fubini の定理も引き続き成り立つ．

記法 2.8.12. $(X\times Y, \overline{\mathcal{B}_X\otimes\mathcal{B}_Y}, \overline{\mu_X\otimes\mu_Y})$ を完備化とする．

定理 2.8.13 (零集合の違いを除いて同様の消息が成り立つ). X, Y を σ-有限な完備測度空間とする．このとき，任意の $\mu_X\otimes\mu_Y$-零集合 N の任意の部分集合 $Z\subset N$ について，次が成り立つ．

(1) 殆ど至る所の $y\in Y$ に関して，切片は零集合：$\mu_X(Z^y)=0$.
(2) 殆ど至る所の $x\in X$ に関して，切片は零集合：$\mu_Y(Z_x)=0$.

定理 2.8.14 (Lebesgue 測度の直積の完備化は Lebesgue 測度である). $(\mathbb{R}^{p+q}, \overline{\mathcal{M}_p\times\mathcal{M}_q}^{(m_p\otimes m_q)}, \overline{m_p\otimes m_q}) = (\mathbb{R}^{p+q}, \mathcal{M}_{p+q}, m_{p+q})$.

例 2.8.15. $(\mathbb{R}^{p+q}, \mathcal{M}_p\times\mathcal{M}_q, m_p\otimes m_q)$ は完備ではない．Lebesgue 非可測集合 $E\subset\mathbb{R}^p$ と零集合 $N\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^q)$ について，$E\times N$ は測度零であるが，完備化しないと $E\times N\notin\mathcal{M}_p\times\mathcal{M}_q$ である．これは，$\mathbb{R}^p$ の切片が可測でないため．□

第 3 章

積分論

測度空間の 2-射の理論を構築する．

3.1 積分の定義

任意の非負可測関数に対して，Lebesgue 積分が定義できる：$\mu : \mathcal{L}(X)_+ \to [0,\infty]$.

3.1.1 可積分性の特徴付け

任意の Radon 測度は積分 $\mu : \mathcal{L}(X)_+ \to [0,\infty]$ を定める．可積分関数 $\mathcal{L}^1(X)$ は完備なセミノルム空間をなし，$L^1(X) := \mathcal{L}^1(X)/\mathcal{N}(X)$ は Banach 空間をなす．

記法 3.1.1. $\displaystyle\int_E f(x)d\mu(x)$ または $\displaystyle\int_E f(x)\mu(dx)$ と表す．(x) は省略し得る．

定義 3.1.2 (integrable). 測度空間 $(X,\mathcal{B},\mu)$ について．積分 $\mathcal{L}(X) \to [-\infty,\infty]$ を次のように定義する．[†1]

(1) f が非負値単関数の場合，自明な方法で定義する．これはたしかに $[0,\infty]$ に値を定め，また単関数 f の表し方に依らない．

(2) f が非負値可測関数の場合，f に収束する非負値単関数の単調増加列 (f_n) の積分の極限とする．これはたしかに $[0,\infty]$ に値を定め，また非負値単関数の単調列 (f_n) の取り方に依らない．

(3) f が可測関数の場合，$f^\pm := \max\{\pm f, 0\}$ について，$\displaystyle\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$ と定める．

(4) この値が定義されるとき，f は**定積分を持つ**といい，値が実数である時に，f を **μ-可積分**という．

[証明].

(1) $f = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} b_k \chi_{B_k}$ とも表せるとする．すると，X の 2 つの分割 $(A_j),(B_k)$ の共通細分を考えることで，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_j\mu(A_j) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{m} a_j\mu(A_j\cap B_k) && \text{各 } A_j \text{を } (A_j\cap B_k)_{k\in m+1} \text{に細分}\\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_k\mu(A_j\cap B_k) && A_j\cap B_0=\varnothing\ (j\geqslant 1), A_0\cap B_k=\varnothing\ (k\geqslant 1)\\ &= \sum_{k=1}^{m} b_k\mu(B_k)\end{aligned}$$

より well-definedness がわかる．

[†1] $\displaystyle\int_E f(x)d\mu(x)$ とも，$\displaystyle\int_E f(x)\mu(dx)$ とも書く．

(2) (g_k) を非負値単関数の増大列で f に収束するとする．すると任意の $k\in\mathbb{N}$ について，これが定める積分の増大列について

$$\int_X fd\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_nd\mu\geqslant\int_X g_kd\mu$$

が成り立つから，補題 3.1.4 の (3) より，

$$\int_X fd\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_nd\mu\geqslant\lim_{k\to\infty}\int_X g_kd\mu$$

が従う．まったく逆の結果も同様に成り立つ．よって，well-definedness がわかる．

■

歴史 3.1.3. Riemann 積分に対する Darboux の理論のように，これは Lebesgue 積分に対する Saks の方法である [11]．Lebesgue 自身は，Riemann に似たやり方を採用していた．

補題 3.1.4 (非負値単関数の紡ぐ論理：極限への不等式関係の持ち上げ). $f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}_{\geqslant 0}$ を非負値単関数とする．

(1) $\displaystyle\int_X(f+g)d\mu=\int_X fd\mu+\int_X gd\mu.$

(2) $\displaystyle\forall_{x\in X}\ f(x)\leqslant g(x)\Rightarrow\int_X fd\mu\leqslant\int_X gd\mu.$

(3) 非負値単関数の単調増加列[†2](f_n) が，非負値単関数 $g:X\to\mathbb{R}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x)\geqslant g(x)$ を満たすとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_X f_nd\mu\geqslant\int_X gd\mu.$

[証明].

(1) 仮定より，$\displaystyle f+g=\sum_{j,k}(a_j+b_k)\chi_{A_j\cap B_k}$ と表せる．A_j,B_k に測度が有限でないものがあるとき，関係は $\infty=\infty$ となり成り立つ．測度が有限のとき，

$$\begin{aligned}\sum_{j,k}(a_j+b_k)\chi_{A_j\cap B_k}&=\sum_j a_j\sum_k\chi_{A_j\cap B_k}+\sum_k b_k\sum_j\chi_{A_j\cap B_k}\\&=\sum_j a_j\sum_k\chi_{A_j}+\sum_k b_k\sum_j\chi_{B_k}.\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\sum_{j=1}^n a_j\chi_{A_j}\leqslant\sum_{k=1}^m b_k\chi_{B_k}$ のとき，細分 $(A_j\cap B_k)_{(j,k)\in n+1\times m+1}$ 上で考えて，$a_{j,k}=a_j,b_{j,k}=b_k$ と定めると，

$$\int_X fd\mu=\sum_{k,j}a_j\chi_{A_j\cap B_j}\leqslant\sum_{k,j}b_k\chi_{A_j\cap B_j}=\int_X gd\mu$$

を得る．

(3) 単関数 g の台を $A:=\{x\in X\mid g(x)>0\}$ とする．(f_n) は非負値だから，$A=\varnothing$ なら結論は従う．$A\neq\varnothing$ とすると，非負値 $\displaystyle\alpha:=\min_{x\in A}g(x),\beta:=\max_{x\in A}g(x)$ が定まる．よって，

$$A_n(k):=\left\{x\in X\mid f_n(x)\geqslant g(x)-\frac{1}{k}\right\}$$

と定めると，各 $(A_n(k))_{k=1,2,\dots}$ は単調増大列で A に収束する．ここで，A の測度によって評価の仕方が変わる．

$\mu(A)=\infty$ **のとき**　任意の n,k について，

$$\begin{aligned}\int_X f_nd\mu&\geqslant\int_X f_n\chi_{A\cap A_n(k)}d\mu && 1\geqslant\chi_{A\cap A_n(k)}\text{と (2) より}\\&\geqslant\left(\alpha-\frac{1}{k}\right)\mu(A\cap A_n(k)) && A_n(k)\text{ 上では }f_n\text{は下から抑えられる}\end{aligned}$$

n は十分大きくできるから，$\displaystyle\int_X f_nd\mu=\infty$ を得る．

[†2] (2) より，有界な単調列の各項積分も有界な単調列となり，極限は $[0,\infty]$ 上各点収束する．

$\mu(A)<\infty$ のとき　任意の n,k について，

$$\begin{aligned}\int_X f_n d\mu &\geqslant \int_X f_n\chi_{A\cap A_n(k)}d\mu && 1\geqslant\chi_{A\cap A_n(k)}\text{と (2) より}\\ &\geqslant \int_X\left(g-\frac{1}{k}\right)\chi_{A\cap A_n(k)}d\mu+\left(\int_X g\chi_{A\backslash A_n(k)}d\mu-\int_X g\chi_{A\backslash A_n(k)}d\mu\right)\\ &\geqslant \int_X g\mu-\frac{1}{k}\mu(A\cap A_n(k))-\beta\mu(A\backslash A_n(k))\end{aligned}$$

と下から抑えられる．まず n を十分大きく取ると 3 項目が消え，第 2 項は $-\frac{1}{k}\mu(A)$ となり，k も十分大きく取れるから，$\int_X fd\mu\geqslant\int_X gd\mu$ がわかる．

■

要諦 3.1.5. (3) の消息は極めて技巧的である．天才的な不等式評価.

補題 3.1.6 (非負値可測関数の紡ぐ論理). f,g を非負値可測関数とする.

(1) $\int_X(f+g)d\mu=\int_X fd\mu+\int_X gd\mu$.

(2) $\forall_{x\in X}\ f(x)\leqslant g(x)\Rightarrow\int_X fd\mu\leqslant\int_X gd\mu$.

定理 3.1.7 (可積分性の特徴付け). $(X,\mathcal{B},\mu)$ 上の可測関数 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ または $f:X\to\mathbb{C}$ について，次の 3 条件は同値.

(1) f は可積分.
(2) f^+,f^- が可積分.
(3) $|f|$ が可積分.

3.1.2　不定積分の性質

積分 $\int\cdot d\mu:\mathcal{B}\times\mathrm{Meas}(X,\overline{\mathbb{R}})\to\overline{\mathbb{R}}$ は，$\mathcal{B}$ 上の集合の直和と $\mathrm{Meas}(X,\overline{\mathbb{R}})$ 上の関数の和とそれぞれのスカラー倍について，$\mathbb{R}$-双線型写像である．これは積分を $g(x)$ と $d\mu(x)$ との掛け算（ただし掛け算はあくまでも，無限に細分可能かもしれないが，可測集合の上で行われる）として作ったことが成功したことを意味する．名実ともに，積分は局所的データの足し上げとなり，微分形式の積分としてコホモロジーへと受け継がれる.[a] こうして，加法的集合関数の例が構成できた.

[a] The integration of differential forms induces a more general notion of integration, namely integration in differential cohomology and hence integration in generalized cohomology. Here the choice of a measure is replaced by a choice of orientation in generalized cohomology.https://ncatlab.org/nlab/show/integral

定理 3.1.8 . $f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ を可測関数とする.

(1) 絶対連続：$\mu(A)=0\Rightarrow\int_A fd\mu=0$.

(2) ノルム減少的：f が可積分であるならば，$\left|\int_X fd\mu\right|\leqslant\int_X|f|d\mu$.

(3) Chebyshev の不等式：任意の $a,p>0$ について，$\mu(\{|f|\geqslant a\})\leqslant\frac{1}{a^p}\int_X|f|^pd\mu$.

(4) 正作用素：f,g は可積分とする．$f\leqslant g$ a.e. $\Rightarrow\int_X fd\mu\leqslant\int_X gd\mu$．特に，$f=g$ a.e. $\Rightarrow\int_X fd\mu=\int_X gd\mu$.

(5) $\forall_{A\in\mathcal{B}}\int_A fd\mu=0\quad\Leftrightarrow\quad f=0$ a.e.

(6) $\int_X|f|d\mu=0\quad\Leftrightarrow\quad f=0$ a.e.

(7) $|f|\leqslant g$ a.e. かつ g が可積分ならば，f も可積分である.

(8) f が可積分ならば，$|f|<\infty$ a.e.

(9) f が可積分ならば，台 $\{f\neq 0\}$ は σ-有限である.

(10) 線形性：$a \in \mathbb{R}$ とする．f, g が可積分ならば，$af, f+g$ も可積分であり，

$$\int_X af d\mu = a\int_X fd\mu, \qquad \int_X (f+g)d\mu = \int_X fd\mu + \int_X gd\mu.$$

[証明].

(1) 単関数 $f = \sum_{j=1}^n a_j\chi_{A_j}$ の場合について $\int_A fd\mu$ を示せば，単調単関数列の収束先である非負値可測関数も，その差である可測関数も，積分が零であるとわかる．$\int_A fd\mu = \sum_{j=1}^n a_j\chi_{A\cap A_j} = 0$.

(2) 拡張実数 $\overline{\mathbb{R}}$ 上の三角不等式より，

$$\left|\int_X fd\mu\right| \leqslant \left|\int_X f^+d\mu\right| + \left|\int_X f^-d\mu\right| = \int_X |f|d\mu.$$

(3) 意味は明確である．ある値 $y = a$ で切って，そこで短冊形に下方集合を取ると，その面積は f^p の定める面積よりも小さい．式で表すと，

$$\int_X |f|^p d\mu \geqslant \int_X a^p\chi_{\{|f|\geqslant a\}}d\mu = a^p\mu\left(\{|f|\geqslant a\}\right)$$

(4) f, g が非負値の場合について示せば良い．

$$\begin{aligned} f &= f\chi_{\{f\leqslant g\}} + f\chi_{\{f>g\}} \\ &\leqslant g\chi_{\{f\leqslant g\}} + f\chi_{\{f>g\}} \end{aligned}$$

より，(1) から測度 0 の集合上での積分は 0 だから，

$$\int_X fd\mu \leqslant \int_X g\chi_{\{f\leqslant g\}}d\mu + \int_X f\chi_{\{f>g\}}d\mu \leqslant \int_X gd\mu.$$

(5) $\Leftarrow$ は，

$$\begin{aligned} \int_A fd\mu &= \int_A f\chi_{\{f\neq 0\}}d\mu + \int_A f\chi_{\{f=0\}}d\mu \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

と，第 1 項は集合の測度が 0，第 2 項は関数の値が 0 であるという，2 つの 0 の和に分解できる．$\Rightarrow$ を示す．分解 $\{|f|>0\} = \cup_{n=1}^\infty \left\{|f| \geqslant \frac{1}{n}\right\}$ を用いる．Chebyshev の不等式より，それぞれの測度は

$$\mu\left(\{|f|>0\}\right) \leqslant n\int_X |f|d\mu$$

と評価できる．この右辺は，可測集合上の積分に分解して仮定を使うと，

$$\begin{aligned} \int_X |f|d\mu &= \int_X f^+d\mu + \int_X f^-d\mu \\ &= \int_{\{f>0\}} fd\mu - \int_{\{f<0\}} fd\mu = 0 \end{aligned}$$

より，測度が 0 とわかる．測度 0 の集合の可算和は，測度の劣加法性より 0 である．

(6) $\Leftarrow$ は $f = 0$a.e. のとき，$|f| = 0$a.e. であるから，(5) の $\Leftarrow$ の $A = X$ の場合である．$\Rightarrow$ は，$\forall_{A\in\mathcal{B}} \int_A fd\mu = 0$ が従うことからわかる．実際，任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して，(2) も使って，

$$\left|\iint_A fd\mu\right| \leqslant \int_A |f|d\mu \leqslant \int_X |f|d\mu = 0.$$

(7)

$$\begin{aligned} \int_X |f|d\mu &= \int_X |f|\chi_{\{|f|\leqslant g\}}d\mu \\ &\leqslant \int_X g\chi_{\{|f|\leqslant g\}}d\mu = \int_X gd\mu \end{aligned}$$

であるから，可積分性の特徴付け 3.1.7 より．

(8) 任意の $n \in \mathbb{N}_+$ に対して，Chebyshev の不等式の精緻化より次の議論が成り立つ．

$$\begin{aligned}\mu(\{|f| = \pm\infty\}) &\leqslant \mu(\{|f| \geqslant n\}) \\ &\leqslant \frac{1}{n}\int_{\{|f|\geqslant n\}} |f| d\mu \leqslant \frac{1}{n}\int_X |f| d\mu\end{aligned}$$

n は任意に大きく取れるから，$\{\pm\infty\}$ を取る点は測度 0.

(9) $f+g, af$ は

$$\int_X |f+g| d\mu \leqslant \int_X (|f|+|g|)\, d\mu < \infty$$

より可積分．また，$f+g$ は $(f+g)^+ - (f+g)^-$ と $(f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$ との 2 通りで，非負値可測関数の和に分解できるから，積分の線形性 3.1.6 より，

$$\int_X (f+g)^+ d\mu - \int_X (f+g)^- d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

■

要諦 3.1.9. (2) の積分についての三角不等式が，測度論に議論を外在化したために，単なる三角不等式に本当に帰着している．

3.1.3　定積分の性質

$\Phi(-) := \mu[1_-|f|]$ を定積分とすると，$\mathscr{M} \to [0,\infty]$ は完全加法的集合関数となる．これは絶対連続である（微積分学の基本定理の前夜）．

定理 3.1.10 (定積分の σ-加法性). f を可測関数，(M_n) を互いに素な可測集合の列とする．

$$\int_{\sum_{n\in\mathbb{N}} M_n} f\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{M_n} f\mu.$$

定理 3.1.11 (不定積分は絶対連続な加法的集合関数である). f を可積分とし，完全加法的集合関数 $\Phi(-) := \int_- |f| d\mu : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$ を不定積分とする．$\mu(A) \to 0$ のとき，不定積分の値も（$A \in \mathfrak{B}$ の取り方に依らず）一様に 0 に収束する：

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{A\in\mathfrak{B}}\ \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \epsilon.$$

[証明]. $\mu(\{f>0\}) = 0$ とすると不定積分は零関数で，絶対連続性を自明に満たす．よって $\mu(\{f>0\}) = 0$，すなわち $\int_X |f| d\mu = 0 \quad\Leftrightarrow\quad f = 0$ a.e. と併せて（積分の性質 3.1.8），$0 < \int_X |f| d\mu$ とする．

$\epsilon > 0$ と，$|f|$ に収束する非負値単関数の増加列 (f_n) を任意に取ると，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$\int_X f_{n_0} d\mu > 0$ かつ $\int_X (|f| - f_{n_0}) d\mu < \frac{\epsilon}{2}$ を満たす．あとはこれに対して $\delta > 0$ をうまく取れば良い．これには，非負値単関数 $f_{n_0} = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{A_k}$ について，$\delta < \frac{\epsilon}{2}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant N} a_k\right)^{-1}$ を満たすように取る．すると，$\mu(A) < \delta$ を満たす $A \in \mathfrak{B}$ について，

$$\begin{aligned}\int_A |f| d\mu &= \int_A (()\,|f| - f_{n_0}) d\mu + \int_A f_{n_0} d\mu \\ &\leqslant \frac{\epsilon}{2} + \int_A \max_{1\leqslant k\leqslant N} a_k d\mu \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \max_{1\leqslant k\leqslant N} a_k \cdot \mu(A) < \epsilon\end{aligned}$$

と評価できる． ■

要諦 3.1.12. 不定積分の絶対連続性とは，積分域 $A \in \mathfrak{B}$ を十分小さくすればいくらでも絶対値を 0 に近づけられることをいう．この性質を持つ関数のみが，可逆に微分可能である．

3.2　変数変換

測度論の観点から，変数変換とは測度の押し出しで簡明に理解できる．Lebesgue 測度の可測関数による押し出しは，Jacobian によって記述される．

3.2.1　一般の変数変換

定義 3.2.1 . $(X,\mathcal{B}),(Y,\mathcal{C})$ を可測空間とする．可測空間の射 $\varphi:X\to Y$ を $\forall_{C\in\mathcal{C}}\ \varphi^{-1}(C)\in\mathcal{B}$ を満たす写像として定める．これを $\mathcal{B}/\mathbb{C}$-可測ともいう．

定理 3.2.2 (変数変換). 測度空間 $(X,\mathcal{B},\mu)$ と測度空間の射 $\varphi:X\to Y$ について，像測度 $\nu:=\varphi_*\mu$ を $\nu(C):=\mu(\varphi^{-1}(C))$ $(C\in\mathcal{C})$ で定める．このとき，次が成り立つ．

(1) $f\circ\varphi$ が μ-可積分であることと，f が ν-可積分であることは同値．
(2) $\displaystyle\int_X f(\varphi(x))d\mu(x)=\int_Y f(y)d\nu(y).$

3.2.2　Jacobian の特徴付け

定理 3.2.3 (Lebesgue 測度の性質). 任意の線形変換 $T\in B(\mathbb{R}^k)$ に対して，$\forall_{E\in\mathcal{M}}\ m(T(E))=\det(T)m(E)$ が成り立つ．

定理 3.2.4 (Jacobian の特徴付け). $V\overset{\text{open}}{\subset}\mathbb{R}^k$ 上の関数 $T:V\to\mathbb{R}^k$ は連続で，ある $x\in V$ 上で可微分とする．このとき，

$$\lim_{r\to0}\frac{m(T(B(x,r)))}{m(B(x,r))}=|(J_T(x))|.$$

3.2.3　Lebesgue 測度の変数変換公式

可微分単射 $T(x)=y$ について，$dy=\det(J_T)dx$ と変換される．

定理 3.2.5 . $T:V\to\mathbb{R}^k$ が次の条件を満たすとき，

$$\forall_{f\in L(\mathbb{R}^k;\overline{\mathbb{R}_+})}\ \int_{T(X)}fdm=\int_X(f\circ T)|J_T|dm.$$

(1) $T:V\to\mathbb{R}^k$ は積分領域 X の開近傍 $V\overset{\text{open}}{\subset}\mathbb{R}^k$ 上の連続写像．
(2) X は Lebesgue 可測で $T|_X$ は単射かつ微分可能．
(3) $m(T(V\backslash X))=0$.

系 3.2.6 . $\varphi:[a,b]\to[\alpha,\beta]$ は絶対連続で全射な単調写像，$f\in L(\mathbb{R})_+$ を Lebesgue 可測とする．このとき，

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt=\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

3.3　収束定理

積分 $\mu:\mathcal{L}(X)_+\to[0,\infty]$ は，$\mathcal{L}(X)_+$ の各点収束の位相について，単調列については連続である．これは Fatou の補題を経て，Lebesgue の優収束定理につながる．

3.3.1　単調収束定理

> 積分を非負値単関数単調列の極限として定めたが，これは一般の非負値関数の単調列の極限を保つ．

定理 3.3.1 (monotone convergence theorem). 非負値の a.e.-単調増加列 $\{f_n\} \subset \mathcal{L}(X;\mathbb{R}_+)$[†3]，すなわち，$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ 0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$ a.e.　$\wedge\ f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ a.e. を満たすならば，

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

$$\begin{tikzcd}
(f_n) \arrow[r, "\int_X \cdot d\mu"] \arrow[d, "\lim_{n\to\infty}"'] & \left(\int_X f_n d\mu\right) \arrow[d, "\lim_{n\to\infty}"] \\
f \arrow[r, "\int_X \cdot d\mu"] & \int_X f d\mu
\end{tikzcd}$$

[証明].

有限化算譜　$\mu(f_n^{-1}(\infty)) > 0$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在するとき，等式は $\infty = \infty$ として成立する．よって，任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\mu(f_n^{-1}(\infty)) = 0$ と仮定すると，$\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(\infty)\right) = 0$ であるから，初めから X 上で f_n は有限と仮定して良い．

零集合算譜　単調性，収束性が失敗する集合を

$$N_n := \{x \in X \mid f_n > f_{n+1}\}, \qquad N_\infty := \left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}$$

と定めると，いずれも測度は 0 より，$N := N_\infty \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$ の測度も 0．これについて，

$$\widetilde{f}_n(x) := \begin{cases} f_n(x), & x \notin N, \\ 0, & x \in N. \end{cases}, \qquad \widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \notin N, \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

と定めると，$(\widetilde{f}_n)$ は $\widetilde{f}$ に収束する単調増加列で，

$$\int_X f_n d\mu = \int_X \widetilde{f}_n d\mu, \qquad \int_X f d\mu = \int_X \widetilde{f} d\mu,$$

が成り立つから，初めから a.e. の条件は除いて考えて良い．

対角線構成　各 f_n に収束する非負値単関数の単調列を $(f_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ とし，$g_k := \max_{1\leqslant n\leqslant k} f_{n,k}$ とおくと，$\lim_{k\to\infty} g_k = f$ である．実際，$\forall_{k\in\mathbb{N}}\forall_{n=1,\cdots,k}\ f_{n,k} \leqslant g_k$ であるが，これの $k\to\infty$ の極限を考えると，任意の $n \in \mathbb{N}$ について $f_n = \lim_{k\to\infty} f_{n,k} \leqslant \lim_{k\to\infty} g_k \leqslant f$．次に $n \to \infty$ を考えて，$\lim_{k\to\infty} g_k = f$．

結論　よって，非負値単関数の増加列 (g_k) を用いて $\int_X f d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X g_k d\mu$ と表せるが，$g_k = \max_{1\leqslant n\leqslant k} f_{n,k} \leqslant \max_{1\leqslant n\leqslant k} f_n = f_k$ より，$\int_X g_k d\mu \leqslant \int_X f_k d\mu$ と併せて，$\int_X f d\mu \leqslant \lim_{k\to\infty}\int_X f_k d\mu$ を得る．逆向きの不等号は $f_k \leqslant f$ より $\int_X f_k d\mu \leqslant \int_X f d\mu$ であり 3.1.8(4)，この左辺の $k \to \infty$ の極限を取ることで解る．

■

注 3.3.2. X が一点集合で μ がその上で有限のとき，これは単調列 (f_n) が上界 $f \in \mathbb{R}$ を持つならば収束することを含意している．

系 3.3.3 . ほとんど至るところ非負な可測関数列 (f_n) について，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X \sum_{n=1}^{k} f_n d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu.$$

[†3] 可測関数列の極限は可測である 2.3.11．関数の単調増加列は収束する，各点について考えれば良い．

[証明]. 単調増加列 $\left(\sum_{n=1}^{k} f_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ についての単調収束定理より. ■

注 3.3.4. [1] ではこちらを先に証明している．確かに，単関数近似定理 2.3.16 を，任意の非負可測関数 f について，$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E g_n d\mu$ を満たす単関数表示 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ が存在する，と書き直すと，

定理 3.3.5 (Levi の項別積分定理 (Levy)). $M \in \mathcal{M}$ 上広義単調増加な可測関数列 $\{f_n\} \subset \mathcal{L}(X)$ について，$\mu[1_M f_1] > -\infty$ ならば，

$$\int_M (\lim_{n\to\infty} f_n)\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n \mu.$$

3.3.2　Fatou の補題

測度の劣加法性 $\forall_{\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{B}}\ \mu\left(\liminf_{i\to\infty} A_i\right) \leqslant \liminf_{i\to\infty} \mu(A_i)$ と同様，極限の像が，$\mathbb{R}$ 内の真の始対象となる．下極限が必ず存在する理由は単調列になるからであるから，証明は単調収束定理を自然に経由する．

定理 3.3.6 (Fatou (1906)). 殆ど至る所非負な可測関数の列 $\{f_n\}$ について，

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geqslant \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

[証明]. $\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\geqslant1} \left(\inf_{k\geqslant n} f_k\right) =: \sup_{n\geqslant1} g_n$ とおくと，

(1) $f_n \geqslant g_n$ a.e. と言える．よって，$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} g_n d\mu$（積分の性質 3.1.8(4)）．単調増加列 $\left(\int_X g_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ には $[0,\infty]$ 上極限が存在することに注意．
(2) (g_n) は $\liminf_{n\to\infty} f_n$ に収束する単調増加列であるから，$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n$.

■

3.3.3　Lebesgue の優収束定理

可積分な優関数（殆ど至る所で十分）が取れる場合，概収束と積分は交換する．積分についての反例は調和級数の閾値である $a = -1$ のとき，すなわち $\dfrac{1}{x}$ を考えるとたくさん作れる．

定理 3.3.7 (Lebesgue convergence theorem). 可測関数列 (f_n) について，(1)⇒(2) が成り立つ．

(1) 非負値の可積分関数 h が存在して，各 f_n が殆ど至る所で抑えられる：$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ |f_n| \leqslant h$ a.e.
(2) $\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geqslant \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu$ かつ $\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leqslant \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$.

特に，(f_n) が f に概収束するとき，

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

[証明]. 条件 (1) は次のように (1)⇒(2) となる．

(1) $|f_n| \leqslant h$ a.e. とは，殆ど至る所 $h + f_n \geqslant 0 \vee h - f_n \geqslant 0$ が成り立つことに同値．
(2) このとき，Fatou の補題より，殆ど至る所で

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X (h + f_n) d\mu \geqslant \int_X (h + f) d\mu$$

$$\Leftrightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geqslant \int_X f d\mu.$$

が成り立ち，かつ，

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X (h - f_n) d\mu \geqslant \int_X (h - f) d\mu$$
$$\Leftrightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leqslant \int_X f d\mu.$$

が成り立つ．$\liminf_{n\to\infty}(-f_n) = -\limsup_{n\to\infty} f_n$ に注意．

■

注 3.3.8 (優関数が取れない場合は定理が成立することもしないこともある)**.** $X = (0,1]$ とし，Lebesgue 測度を考える．

成り立たない例

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とすると，$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ |f_n| \leqslant h$ を満たす h は $\forall_{x\in X}\ \frac{1}{x} < h(x)$ が必要だから，可積分ではない：$\int_X h dx = \infty$．しかし，$X \cap \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \xrightarrow{n\to\infty} \varnothing$ より，$\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ となるから，$\int_X f dx = 0$ だが，$\int_X f_n dx = \log 2$．

成り立つ例

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とすると，同様に優関数は存在しない．しかし，$\int_X f_n d\mu = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 = \int_X f dx$．

注 3.3.9 (微分と積分との交換に向けて)**.** Lebesgue の優収束定理は連続な族 $(f_t)_{t>t_0}$ に拡張できる．

系 3.3.10 (一様収束する可積分関数列の積分は収束する). μ を有限とする：$\mu(X) < \infty$．可積分関数の列 (f_n) が一様に f に概収束するならば，f も可積分で，

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

[証明]. 一様に概収束することより，$\exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N}\ \forall_{x\in X}\ |f_n(x) - f_N(x)| < 1$ a.e. よって，特に，殆ど至る所で $|f_n(x)| < |f_N(x)| + 1$ が成り立つ．[†4] よって，$h := |f_N(x)| + 1$ と定数関数を優関数に取れば，これは $\mu(X) < \infty$ より可積分である． ■

注 3.3.11 (測度が有限でない場合の反例)**.** $\mu(X) = \infty$ のときの反例は，例えば $X = (0,\infty)$ で $\frac{1}{x}$ を考えれば良い．

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [n, 2n], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とすると，これは $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ |f_n(x)| \leqslant 1$ が成り立つから有界であり，また $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ に一様収束するが，$\int_X f_n dx = \log 2$．

3.3.4　Beppo-Levi の定理

> $L^1(X)$ は回帰的だから，有界列は弱収束する部分列を含む．そして増大列である場合には，元々の数列自体が弱収束するから，特に積分が定める線型汎関数 $L^1(X) \to \mathbb{R}$ に関して連続になる．

定理 3.3.12 . $\{f_n\} \subset L^1(X)$ は一様有界とする：$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu < \infty$．このとき，ある可積分関数 $f \in L^1(X)$ に対して $f_n \nearrow f$ ならば，

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

[†4] 三角不等式より，$|f_n(x)| = |f_N(x) + (f_n(x) - f_N(x))| \leqslant |f_N(x)| + |f_n(x) - f_N(x)| < |f_N(x)| + 1$

3.3.5　定積分の近似

必ずしも単関数を用いずとも，定積分の値は計算できる．x 軸，y 軸のどちらをカットオフしても良い．

定理 3.3.13． σ-有限な測度空間 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 上の可積分関数 $f\in\mathcal{L}^1(X;\mathbb{R})$ について，任意の $\epsilon>0$ に対して，体積確定集合 $M_\epsilon\in\mathcal{M}^1$ と自然数 $n_\epsilon\in\mathbb{N}$ とが存在して，$1_{M_\epsilon}f$ の値域を $[-n_\epsilon,n_\epsilon]$ でカットオフした関数を f_{n_ϵ} とすれば，

$$\forall_{M\in\mathcal{M}}\quad\left|\int_M fd\mu-\int_M f_{n_\epsilon}d\mu\right|\leqslant\int_X|f-f_{n_\epsilon}|d\mu<\epsilon$$

が成り立つ．

3.3.6　Vitali の収束定理

Lebesgue の優収束定理の描像と精緻化

(f_n) が f に概収束するとき，Egorov の定理 2.3.18 より，一様収束でない部分 A の測度は任意に小さく取れる．すなわち，殆どの部分 $A^\complement$ 上では一様収束するから積分と極限が交換可能で，A 上で生じる剰余項が飼い慣らせれば良い．そのための十分条件が，至る所で抑えられる可積分な優関数の存在であり，あるいはもっと緩めると Vitali の収束定理を得る．

議論 3.3.14 (Lebesgue の優収束定理の再検討)**.** 測度の有界性 $\mu(X)<\infty$ を仮定すると，Lebesgue の優収束定理は次のようにも証明できる．このとき，優関数 h の存在は条件としては強く，これを緩めることを考えることができる (Vitali の収束定理)．まず，積分の性質 3.1.8(7) より優関数の存在する f_n,f は可積分であるから，$N:=\cup_{n=1}^\infty\{|f_n|=\infty\}\cup\{|f|=\infty\}$ は零集合であり，f_n,f はこの上で零であると仮定して良い．この設定の下で，h で至る所抑えることができる列 (f_n) が f に概収束するとき，$\forall_{\epsilon>0}\;\exists_{N>0}\;\forall_{n\geqslant N}\;\left|\int_X(f-f_n)d\mu\right|<\epsilon$ を示せば良い．

任意に $\epsilon>0$ を取ると，積分の絶対連続性 3.1.11 より，$\delta>0$ が存在して，$\forall_{A\in\mathcal{B}}\;\mu(A)<\delta\Rightarrow\int_A hd\mu<\epsilon$．また Egorov の定理 2.3.18 より，$\mu(A)<\delta$ を満たす $A\in\mathcal{B}$ であって，(f_n) が $A^\complement$ 上一様収束するものが取れる：$\exists_{N>0}\;\forall_{n\geqslant N}\;\sup_{x\in A^\complement}|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$．よって，これらの事実より，

$$\begin{aligned}\left|\int_X(f-f_n)d\mu\right|&\leqslant\left|\int_{A^\complement}(f-f_n)d\mu\right|+\left|\int_A(f-f_n)d\mu\right|\\&\leqslant\int_{A^\complement}|f-f_n|d\mu+\int_A|f-f_n|d\mu\\&\leqslant\epsilon\mu(A^\complement)+2\epsilon.&&\because\int_A|f-f_n|d\mu\leqslant\int_A(|h|+|h|)d\mu.\end{aligned}$$

と評価できるから，$\mu(A^\complement)\leqslant\mu(X)<\infty$ ならば，$\int_X fd\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_nd\mu$ が従う．第二項の評価は，わざわざ優関数 h を経由する必要はない．

定義 3.3.15 (uniformly integrable, have uniformly absolutely continuous integrals). 可積分関数の族 $\mathcal{F}\subset L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ について，[†5]

(1) $\mathcal{F}$ が**一様可積分**であるとは，$\lim_{M\to\infty}\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_{\{|f|>M\}}|f|d\mu=0$ が成り立つことをいう．

(2) $\mathcal{F}$ が**一様に絶対連続積分を持つ**とは，$\lim_{\mu(A)\to0}\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_A|f|d\mu=0$ が成り立つことをいう．

定理 3.3.16 (Vitali). 有限測度空間 $(X,\mathcal{B},\mu),\mu(X)<\infty$ 上の (f_n) が一様可積分かつ $f_n\to f$ a.e. かつ $|f(x)|<\infty$ a.e. ならば，$\lim_{n\to\infty}\int_X|f_n-f|d\mu=0$.

[†5] https://en.wikipedia.org/wiki/Vitali_convergence_theorem

3.3.7　微分と積分の可換性

可測関数 f の微分とは，$\lim_{h\to\infty}\frac{f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)}{h}$ と可測関数の（連続）極限として定義されているので，結局可測関数の極限と積分の交換の問題である．なお，積分も極限として定義されているから，極限構成の可換性に他ならない．

定理 3.3.17 . 関数 $f:X\times(a,b)\to\mathbb{R}$ がそれぞれの引数について次の条件を満たすとする．

(1) f は X 上可積分である：$\forall_{\alpha\in(a,b)}\ \int_X f(x,\alpha)d\mu(x)\in\mathbb{R}$.

(2) f は (a,b) 上可微分であり，その偏導関数について可積分な優関数 $\varphi:X\to\mathbb{R}$ が存在する：$\forall_{(x,\alpha)\in X\times(a,b)}\ \left|\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)\right|\leqslant\varphi(x)$.

このとき，積分 $\int_X f(x,\alpha)d\mu(x)$ も α-可微分で，

$$\frac{d}{d\alpha}\int_X f(x,\alpha)d\mu(x)=\int_X\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)d\mu(x).$$

[証明].

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\alpha}\int_X f(x,\alpha)d\mu(x)&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\int_X f(x,\alpha+h)d\mu-\int_X f(x,\alpha)d\mu\right)\\&=\lim_{h\to0}\int_X\frac{1}{h}\left(f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)\right)d\mu\\&=\lim_{h\to0}\int_X\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha+\theta h)d\mu&&\exists_{\theta\in(0,1)}\end{aligned}$$

より，結局 $\lim_{h\to0}$ と積分の交換の問題である．Lebesgue の優収束定理と仮定 (2) より結論が従う．■

要諦 3.3.18 (計算できたら OK である)**.** 結局，積分と微分の交換

$$\frac{d}{d\alpha}\int_X f(x,\alpha)d\mu(x)=\int_X\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)d\mu(x).$$

を実行してみて，右辺の被積分関数が α に依らずに近傍 $\alpha\in(a,b)$ で可積分ならば通っている・

3.4　Fubini の定理

積分の可換性

Fubini の定理とは，「直積空間での積分は，$x\in X$ から切って考えても $y\in Y$ から切って考えても同じ」ことを表す定理である．補題 2.8.7 より，長方形の有限直和で表される元 $\mathcal{A}(\mathcal{C})\subset\mathcal{B}_Z$ については成立を確認したが，これが生成する σ-加法族上でも成り立つことを確認する必要がある．これは単調族定理 2.2.6 などを上手に活用する．

(1) Fubini の定理の根本は，$E\in\mathcal{B}_Z$ の測度は $x\in X$ から切って足し上げても，$y\in Y$ から切って足し上げても変わらない well-defined 性を意味する．
(2) 積分論の議論と平行で，可測関数 $f:Z\to[0,\infty]$ をその上で足し上げても可測．したがって，（無限大の場合も含めて）積分の値も well-defined.
(3) Z 上の可積分関数 $f:Z\to[-\infty,\infty]$ は，各 $x\in X,y\in Y$ で見ると殆ど至る所可積分であるから，零集合上の値の違いを無視すれば，この積分の値もやはり well-defined である．

3.4.1　Fubini の定理

- 非負値可測関数については，可積分性に関係なく積分の交換ができる（値が発散する場合も含めて）．しかし一般に符号が変わる場合は，可積分性を仮定しない限りは可換でないことがある．
- 命題 E の真理集合が零でないならば，ある零でない集合 $E_X \in \mathcal{B}_X$ 上で，その切り口 E_x $(x \in E_X)$ の μ_Y 測度が常に正である．

定理 3.4.1 (Fubini II：非負値可測関数). X, Y を σ-有限な測度空間，$f : X \times Y \to [0,\infty]$ を非負値可測関数とする．

(1) $f(x,-) : Y \to [0,\infty]$ は $\mathcal{B}_Y$-可測で，$\displaystyle\int_Y f(-,y)d\mu_Y : X \to [0,\infty]$ は $\mathcal{B}_X$-可測．

(2) $f(-,y) : X \to [0,\infty]$ は $\mathcal{B}_X$-可測で，$\displaystyle\int_X f(x,-)d\mu_X : Y \to [0,\infty]$ は $\mathcal{B}_Y$-可測．

(3) 2 つの関数の間に次の関係がある：

$$\int_Z f(z)d\mu_Z = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\mu_Y\right) d\mu_X = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu_X\right) d\mu_Y.$$

各項は ∞ を取り得ることに注意．

[証明].

f が非負値単関数の場合　$\exists_{E\in\mathcal{B}_Z}\ f = \chi_E$ のとき，$\chi_E(x,-) : Y \to [0,\infty]$ は $\mathcal{B}_Y$-可測で，$\displaystyle\int_Y \chi_E(-,y)d\mu_Y = \mu_Y(E_-) : X \to [0,\infty]$ は $\mathcal{B}_X$-可測（切り口についての Fubini の定理 2.8.11）．また，切り口についての Fubini の定理 2.8.11(3) より，

$$\begin{aligned}\int_Z f d\mu_Z = \mu_Z(E) &= \int_X \mu_Y(E_x)d\mu_X = \int_Y \mu_X(E_y)d\mu_Y \\ &= \int_X \left(\int_Y \chi_E(-,y)d\mu_X\right) d\mu_Y = \int_Y \left(\int_X \chi_E(x,-)d\mu_Y\right) d\mu_X.\end{aligned}$$

f が非負値可測関数の場合　非負値単関数の増加列 (f_n) が存在して，$f_n \nearrow f$ が成り立つので，(1),(2) は可測関数の極限は可測 2.3.11 であることより，(3) は単調収束定理 3.3.1 より従う．

■

定理 3.4.2 (Fubini III：一般の可積分関数 (1907)). X, Y を σ-有限な測度空間，$f \in L^1(z;\overline{\mathbb{R}})$ を μ_Z-可積分関数とする．

(1) $f(x,-) : Y \to [-\infty,\infty]$ は $\mathcal{B}_Y$-可測で，かつ，X 上殆ど至る所 μ_Y-可積分である．

(2) $f(-,y) : X \to [-\infty,\infty]$ は $\mathcal{B}_X$-可測で，かつ，Y 上殆ど至る所 μ_X-可積分である．

(3) $f(x,-), f(-,y)$ が可積分性を失う零集合上で，値を 0 と変更することにより，次が成り立つ：

$$\int_Z f d\mu_Z = \int_X g d\mu_X = \int_Y h d\mu_Y.$$

[証明].

方針　(1) について示す．$f =: f^+ - f^-$ $(f^+, f^- : Z \to [0,\infty])$ と定めれば，Fubini の定理 II3.4.1 より，$f(x,-)$ は可測関数の和なので可測．よって，可積分性について議論する．可積分性が崩れる集合を

$$E := \left\{ x \in X \;\middle|\; \int_Y f^+(x,y)d\mu_Y = +\infty \text{ または } \int_Y f^-(x,y)d\mu_Y = -\infty \right\}$$

と定めて，$\mu_X(E) = 0$ と示せば良い．

可積分性　任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$E \subset \left\{ x \in X \;\middle|\; \int_Y |f(x,y)|d\mu_Y \geqslant n \right\}$$

が成り立つ．Fubini の定理 II3.4.1 より，非負値関数 $|f(x,-)|$ の積分 $\displaystyle\int_Y f(-,y)d\mu_Y$ は可測だから，積分が ∞ に発散する場合も含めて次のように評価できる：

$$\mu_X(E) \leqslant \mu_X\left(\left\{ x \in X \;\middle|\; \int_Y |f(x,y)|d\mu_Y \geqslant n \right\}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{n}\int_X\left(\int_Y |f(x,y)|d\mu_Y\right)d\mu_X \\
&= \frac{1}{n}\int_X |f(z)|d\mu_Z
\end{aligned}
$$

f は可積分としたから積分 $\int_X |f(z)|d\mu_Z$ は有限である．したがって，$n=1,2,\cdots$ は任意としたから，$\mu_X(E)=0$ を得る．よって，$f(x,-):Y\to[-\infty,\infty]$ は殆ど至る所可積分．

g は定め方から，$\int_X |g(x)|d\mu_X<\infty$ より（$\mu_X(X)<\infty$ は f の可積分性に含意されている），可積分である（可積分性の特徴付け 3.1.7）．

積分の交換

$$
\begin{aligned}
\int_Z f d\mu_Z &\overset{\text{def}}{=} \int_Z f^+ d\mu_Z - \int_Z f^- d\mu_Z \\
&\overset{\text{FubiniII}}{=} \int_X\left(\int_Y f^+ f d\mu_Y\right)d\mu_X - \int_X\left(\int_Y f^- d\mu_Y\right)d\mu_X \\
&= \int_{X\setminus E}\left(\int_Y f^+ f d\mu_Y\right)d\mu_X - \int_{X\setminus E}\left(\int_Y f^- d\mu_Y\right)d\mu_X \\
&= \int_{X\setminus E}\left(\int_Y f d\mu_Y\right)d\mu_X = \int_X g d\mu_X.
\end{aligned}
$$

■

系 3.4.3 (Fubini の定理の論理的解釈). $E\in\mathcal{B}_Z$ を Z 上の命題とする．

(1) $\mu_Z(E)>0$ ならば，$\exists_{E_X\in\mathcal{B}_X}\ \mu_X(E_X)>0\wedge[\forall_{x\in E_X}\ \mu_Y(E_x)>0]$.

(2) $[\exists_{A\in\mathcal{B}_X,B\in\mathcal{B}_Y}\ \mu_X(A)>0\wedge\mu_Y(B)>0\wedge(\forall_{\mu_X\text{-a.e. }x\in A}\ \mu_Y(E_x)=\mu_Y(Y))]\Rightarrow[\forall_{\mu_Y\text{-a.e. }y\in B}\ \mu_X(E_y)=\mu_X(X)]$.

直積の普遍性についての考察

- 直積空間上の可測（可積分）関数は，成分毎に見ても可測（可積分）である（そして値が一致する）とは，Fubini の定理の主張である．
- f が各成分毎に可測でも，$Z=X\times Y$ 上の関数として可測であるとは限らない．実際，可測性どころか 2 段階の可積分性が満たされて，$\int_X d\mu_X\int_Y f d\mu_Y$ も $\int_Y d\mu_Y\iint_X f d\mu_X$ も存在する場合でも，Z 上 (Lebesgue) 可測でない f の例が，超限帰納法によって構成できる．

3.4.2　Fubini-Tonelli の定理

どれか 1 つでも計算できたなら，全ての値が一致する．

定理 3.4.4 (Fubini-Tonelli (1909)). $f:X\times Y\to\overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}_X\otimes\mathcal{B}_Y$-可測とする．次の 3 つの積分値のいずれか 1 つでも有限であれば，他の 2 つも有限で値が一致する．特に，f は $X\times Y$ 上可積分である．

$$
\int_{X\times Y}|f(x,y)|(\mu\times\nu)(dxdy),\quad \int_X\int_Y |f(x,y)|\nu(dy)\mu(dx),\quad \int_Y\int_X |f(x,y)|\mu(dx)\mu(dy).
$$

[証明]. 非負値可測関数に関する Fubini の定理から，∞ の場合も含めて 3 つの積分値は必ず一致する．そのうち 1 つが有限であるときも同様．したがってこのとき，特に f は $X\times Y$ 上可積分になる．■

3.4.3　完備測度の場合

形式的には結果に a.e. が新たに挿入され，証明が 1 段階複雑になるだけで内容は全く同じ．したがって，完備化の 1 段階が挿入されても，Fubini-Tonelli と同様な結果が成り立つ．

定理 3.4.5 (Fubini III：完備測度空間上の可積分関数). $(X,\mathcal{B}_X,\mu_X),(Y,\mathcal{B}_Y,\mu_Y)$ を σ-有限な完備測度空間とし，$(Z,\mathcal{B}_Z,\mu_Z)$ をこれらの直積測度空間の完備化とする．μ_Z-可積分関数 $f:Z\to[-\infty,\infty]$ について，次が成り立つ：

(1) 殆ど至る所の $x\in X$ について，$f(x,-):Y\to[-\infty,\infty]$ は $\mathcal{B}_Y$-可測であり，μ_Y-可積分である．ここで，

$$g(x):=\begin{cases}\displaystyle\int_Y f(x,y)d\mu_Y, & f(x,-)\text{ が }\mathcal{B}_Y\text{可測のとき},\\ 0, & \text{otherwise}.\end{cases}$$

と定めると，g は $\mathcal{B}_X$-可測かつ μ_X-可積分．

(2) 殆ど至る所の $y\in Y$ について，$f(-,y):X\to[-\infty,\infty]$ は $\mathcal{B}_X$-可測であり，μ_X-可積分である．ここで，

$$h(y):=\begin{cases}\displaystyle\int_X f(x,y)d\mu_X, & f(-,y)\text{ が }\mathcal{B}_X\text{可測のとき},\\ 0, & \text{otherwise}.\end{cases}$$

と定めると，h は $\mathcal{B}_Y$-可測かつ μ_Y-可積分．

(3)

$$\int_Z f(z)d\overline{\mu_Z}=\int_X g(x)d\mu_X=\int_Y h(y)d\mu_Y.$$

3.5　Lebesgue 積分の性質

定理 3.5.1 (平行移動不変性). Lebesgue 可測関数 $f:\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ が，定積分 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}fdx$ を持つならば，これが任意の $y\in\mathbb{R}^d$ に対して定める関数 $f(x+y):\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ と $f(-x):\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ も定積分をもち，

$$\int_{\mathbb{R}^d}f(x+y)dx=\int_{\mathbb{R}^d}f(-x)dx=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)dx.$$

定理 3.5.2 . $f:\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ が Lebesgue 積分可能な関数ならば，

$$\lim_{|y|\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x+y)-f(x)|dx=0.$$

3.6　Lebesgue 積分と Riemann 積分

狭義 Riemann 積分可能ならば Lebesgue 積分可能である．値が一致するためには，狭義 Riemann 積分可能であるか，開区間 (a,b) 上の任意閉区間上で狭義 Riemann 積分可能で，$|f|$ も Riemann 積分可能である必要がある 3.6.7.

3.6.1　コンパクト集合上の Riemann 積分は Lebesgue 積分

コンパクト集合上の Riemann 可積分関数は必ず Lebesgue 可積分で，値が一致する．

定理 3.6.1 (コンパクト集合上の Riemann 積分). d 次元有界閉矩形 $R=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]$ $(-\infty<a_i<b_i<\infty)$ 上の有界関数 $f:R\to\mathbb{R}$ について，次の 2 条件は同値．

(1) f は R 上 Riemann 可積分である．

(2) f は R 上殆ど至る所連続である．

特に，殆ど至る所連続ならば，有界閉矩形上 Lebesgue 可積分であること 1.5.1，そして値が一致すること 3.6.5 に注意．

[証明]．補題 (3) より，殆ど至る所の $x \in R$ で $\lim_{n\to\infty} M_{\Delta_n}(x) = U(x)$, $\lim_{n\to\infty} m_{\Delta_n}(x) = L(x)$ である．$M_{\Delta_n}, m_{\Delta_n}$ には Borel 可測で有界な関数（すなわち Lebesgue 可積分な関数）

$$|M_{\Delta_n}(x)|, |m_{\Delta_n}(x)| \leqslant 2\sup_{x\in I}|f(x)|$$

が存在するから，Lebesgue の優収束定理 3.3.7 より，

$$S[f] \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}[f] = \lim_{n\to\infty}\int_I M_n(x)dm = \int_I U(x)dm.$$

同様にして，$s[f] = \int_I L(x)dm$．したがって，

$$\begin{aligned} f \text{ が } I \text{ 上 Riemann 可積分} &\Leftrightarrow S[f] = s[f] \\ &\Leftrightarrow \int_I (U-L)dm = 0 \\ &\Leftrightarrow U - L = 0 \ m\text{-a.e. } x & \because U - L \geqslant 0 \text{ より } 3.1.8(6) \text{ から} \end{aligned}$$

■

注 3.6.2. (1) と (2) の同値性自体は，（無限でも良い）開区間上の広義 Riemann 積分についても成り立つ．

3.6.2　Lebesgue 積分の Riemann 積分による近似

一般の集合上の Lebesgue 積分は Riemann 積分で近似可能である．

定理 3.6.3．一般の区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の Lebesgue 可積分関数 $f \in \mathcal{L}^1(I)$ と正定数 $\epsilon > 0$ とに対して，任意のコンパクト台を持つ連続関数 $f_\epsilon \in C_c(I)$ が存在して，

$$\left|\int_I f(x)dm - \int_a^b f_\epsilon dx\right| \leqslant \int_I |f - f_\epsilon|dm < \epsilon$$

が成り立つ．ただしここでは dm を Lebesgue 積分，dx を Riemann 積分とした．

系 3.6.4．

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t) - f(x)|dx = 0.$$

3.6.3　一般の連続関数の場合

広義 Riemann 積分可能な符号変化する開区間上の関数は，Lebesgue 積分可能でない可能性がある：$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}; x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ など．

定理 3.6.5 (連続関数の積分)．

(1) コンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ 上の連続関数 $f : K \to \mathbb{R}$ について，Lebesgue 積分と Riemann 積分とは等しい．

(2) 開矩形（無限でも良い区間の積）$J \subset \mathbb{R}^d$ 上の非負値連続関数 $f : J \to [0,\infty]$ について，Lebesgue 積分は，値が発散する場合も含め，広義 Riemann 積分に等しい．

[証明]．

(1) **方針**　コンパクト集合上の連続関数は有界なので，(2) と違って，$f \geqslant 0$ の場合について示して，$f = f^+ - f^-$ を考えると，一般の場合についても結論を得る．

Riemann 積分と Lebesgue 積分との関係　区間 K を全ての n 方向に 2^n 等分して，そのマス目による分割 $K = K_{n1} + \cdots + K_{nk_n}$ $(k_n = 2^{nN})$ を考える．各ブロック K_{nj} の中の任意の一点 $x_{nj} \in K_{nj}$ をとって $\alpha_{nj} := f(x_{nj})$，$\beta_{nj} := \inf\{f(x) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \mid x \in K_{nj}\}$ と定める．すると，Riemann 積分の意味での各小区間 K_{nj} の体積は，Lebesgue 測度 $\mu(K_{nj})$ だから，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n}\alpha_{nj}\mu(K_{nj}) =: \int f dx$$

と定まる．一方で，$f_n(x) := \sum_{j=1}^{k_n}\beta_{nj}\chi_{K_{nj}}(x), \delta_n := \max_{1\leqslant j\leqslant k_n}|\alpha_{nj} - \beta_{nj}|$ とおくと，(f_n) は単調増加な単関数列で，f の単関数近似になっているから，f の Lebesgue 積分は

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu =: \int f d\mu$$

と定まる．

両者の一致　ここで，(f_n) は単調増加であり，f の K 上の一様連続性 (Heine-Cantor の定理) より，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ は一様収束で，$\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$ だから，

$$\left|\sum_{j=1}^{k_n}\alpha_{nj}\mu(K_{nj}) - \int f_n d\mu\right| \leqslant \sum_{j=1}^{k_n}|\alpha_{nj} - \beta_{nj}|\mu(K_{nj}) \leqslant \delta_n\mu(K) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

よって，両者は一致する．

(2) **方針**　σ-有限性と同じ発想で，J に収束するコンパクト集合の単調増加列 (K_n) をとって考える．

積分の定義　広義 Riemann 積分は $\lim_{n\to\infty}\int_{K_n} f dx = \int_J f dx$ と定義されるのであった．一方で，各コンパクト集合 K_n に対して，この上に台を持つ非負値単関数の単調増加列 (f_n) を $f_n := \sum_{j=1}^{k_n}\alpha_{nj}\chi_{kj}(x)$ $\left(\text{ただし}\sum_{j=1}^{k_n}K_{nj} = K_n\right)$ と作れるから，Lebesgue 積分の定義は $\lim_{n\to\infty}\int_J f_n d\mu = \int_J f d\mu$ と表せる．

結論　(1) より，コンパクト集合上で Riemann 積分と Lebesgue 積分とは一致するから，

$$\int_J f_n d\mu = \int_{K_n} f_n dx \leqslant \int_{K_n} f dx = \int_{K_n} f d\mu \leqslant \int_J f d\mu.$$

$n \to \infty$ を考えると，結論を得る．

■

要諦 3.6.6. Riemann 積分では分割区間をいじり，広義 Riemann 積分では区間で極限を取る．一方で Lebesgue 積分は単関数列をいじり，関数列の極限を考える．

3.6.4　2 つが一致しない場合

> これは絶対収束しない交代級数の，関数版の議論とみれる．

注 3.6.7 (Lebesgue 可積分性と広義 Riemann 積分). Riemann 積分は，有界区間上の有界関数についてしか定義されず，$L^\infty([a,b])$ は明らかにこれより大きい．しかし，広義 Riemann 積分は，ある種主値積分のような形で，絶対積分可能でない積分を，相殺の方法によって収束させることがあり得る．

(1) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は $(0,\infty)$ 広義 Riemann 積分可能だが，$\int_0^\infty |f(x)|dx$ は調和級数を含み Lebesgue 可積分ではない．
なお，$\sin x/x$ の共役調和関数とが定める正則関数 e^x/x の積分は留数定理により求まり，虚部の比較によりその値は $\pi/2$ であることがわかる．これは Riemann 積分をもとにしている．

(2) $\int_0^1\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dxdy$ は広義 Riemann の意味でも Lebesgue の意味でも積分可能でないが，累次積分は可能である．

Lebesgue 積分は，必ずしも定義域が極大な積分作用素を定めるわけではない (Gauge/Henstock – Kurzweil integral など)．というのも，Riemann「絶対積分」の延長とみた方が筋が良い．しかし，一般の局所コンパクトハウスドルフ空間 X 上に積分を定義でき，その上の函数空間の解析の道を開いたことが主な利点となっている．

第 4 章

$\mathbb{R}$ 上の微分論

適切な関数クラス　積分の定義域と微分の定義域を次のように一般化する：

(1) 被積分関数：有界領域上の連続関数から，有限な全変動を持つ関数へ.

(2) 被微分関数：各点微分可能な関数から，殆ど至る所で微分可能な関数へ.

微積分学の基本定理の一般化　有限変動関数は，2 つの単調増加関数の差として表せる関数のクラスである．殆ど至る所微分可能であり，その導関数は零集合上で不定性があり，

$$f(t) = f_0(t) + \int_0^t f'(s)ds, \quad f_0' = 0 \text{ a.e.}$$

しかし微分の逆操作を考えると，不定積分は必ず絶対連続になるため，この同値類から $f_0 = 0$ を満たすものを選び出すこととする．こうして，微積分学の基本定理も一般化される．

可積分性の特徴付け　上述の通り，絶対連続でない関数は，たとえ有限変動である上に各点で微分可能でも，Lebesgue 積分によって返ってくることは出来ない．定理として，関数 f が可積分である $f \in L^1(\mathbb{R})$ とは，ある絶対連続関数 F が存在して，$F' = f$ a.e. が成り立つことと同値で，さらに F は定数分の差を除いて一意に取れることが導かれる．

定理 4.0.1 (微積分の基本定理). 原始関数であることと不定積分になることとが同値になる

$$\forall_{x\in[a,b]} \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

という条件が成立する関数クラスとその間の微積分演算の組み合わせは，次のようなものがある：

(1) Riemann 積分と各点微分に関しては，$f \in C_b([a,b]), F \in C^1([a,b])$ について成り立つ.

(2) Lebesgue 積分と殆ど至る所の微分に関しては，$f \in L^1([a,b]), F \in \mathrm{AC}([a,b])$ について成り立つ.

要諦 4.0.2. $f \in L^1([a,b]) \Rightarrow F(x)$ は殆ど至る所可微分で，f に同値だが，任意の可微分な F に関して逆が成り立つ訳では無い．ここで「可微分関数」なる概念の見直しも必要になる．これが**絶対連続性** 3.1.11 である．

4.1 $\mathbb{R}$ 上の関数と測度の Riesz 対応

微積分学の基本定理の最終到達形

まず，絶対連続性や有界変動性など，測度と関数の概念は繋がっているのは，この横超的な対応による．さらにその先へ一般化するアイデアが超関数である．一般に Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ 上の有限な Borel 測度は，局所有限ならば正則であることに注意．そして $\mathbb{R}$ 上の Radon 測度は Lebesgue-Stieltjes 測度として特徴づけられる．

4.1.1 正測度の Riesz 対応

定理 4.1.1 ($\mathbb{R}$ 上の Radon 積分に関する Riesz 対応). 次の 2 つの集合の間に全単射が存在する：

(1) 単調増加関数 $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ であって，$(a,b]$ 上で右連続である．なお，定数倍の差は同一視する.

(2) $[a,b]$ 上の Radon 測度 $\mu \in M([a,b])$.

全単射は，対応

$$\mu((\alpha,\beta]) = F(\beta) - F(\alpha), \quad \mu(\{a\}) = F(a+) - F(a)$$

が与える．

定義 4.1.2 .

(1) 対応 (1)→(2) を Riesz 表現 Ψ と呼ぼう．
(2) Radon 測度 $\Psi(F) := dF$ を **Lebesgue-Stieltjes 測度**という．

4.1.2　有界変動関数

前小節の対応を，符号付測度に一般化したい．そこで，2 つの単調増加関数の差で表される関数のクラスを考える．

定理 4.1.3 (有界変動関数のなす Banach 空間). $f \in \mathrm{BV}([a,b])$ について，

(1) $\|f\| = |f(a)| + V(f)$ はノルムを定め，これについて Banach 空間となる．
(2) $\mathrm{AC}([a,b]) \subset \mathrm{BV}([a,b])$ は閉部分空間をなす．

注 4.1.4.

(1) $\mathrm{AC}([a,b]) \subsetneq \mathrm{BV}([a,b]) \cap C([a,b])$ であることに注意．反例は Cantor 関数で，連続かつ単調増加であるが，絶対連続ではない．
(2) また $C([a,b]) \backslash \mathrm{BV}([a,b]) \neq \emptyset$ である．例は $f(x) = 1_{\{x\neq 0\}} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
(3) 部分空間 $\mathrm{AC}([a,b])$ は，ある $L^1([a,b])$ の元の不定積分であるということで特徴づけられる．

定理 4.1.5 (有界変動関数の Jordan 分解). 任意の $f \in \mathrm{BV}([a,b])$ に対して，$\mathrm{BV}([a,b])$ 上の等式

$$f - f(a) = P_f - N_f, \quad V_f = P_f + N_f$$

が成り立つ．

4.1.3　有界変動関数の Lebesgue 分解

一般に不定積分は定数分の不定性がある．定数とは，絶対連続かつ特異な関数である．この性質を，Lebesgue 積分の観点で見ると「絶対連続部分と特異部分への Lebesgue 分解は，定数分の不定性を除いて一意」という．

定義 4.1.6 (singular function). 有界変動関数 $s \in \mathrm{BV}[a,b]$ が (a,b) 上殆ど至る所で $s'(x) = 0$ を満たすとき，**特異関数**であるいう．$[a,b]$ 上で絶対連続かつ特異な関数は恒等的に定数である．

例 4.1.7 (特異関数の例 Lebesgue (1928)). □

系 4.1.8 (Lebesgue decomposition). $F \in \mathrm{BV}[a,b]$ に対して，特異関数 $s \in \mathrm{BV}[a,b]$ が存在して，

$$F(x) = \int_a^x F'(t)dt + s(x)$$

が成り立つ．

要諦 4.1.9. これは定理 4.5.6 の一般化である．

4.1.4 有界変動関数の Radon 電荷としての表現

Stieltjes 積分の理論の一般化と捉えられる．右連続な単調増加関数は Radon 積分を定める．右連続で規格化された有界変動関数は Radon 電荷を定める．

定理 4.1.10 (実数上の Radon 電荷の有界変動分布関数に関する積分としての表現 [6] 定理 6.5).

$$\Psi : \mathrm{RM}([a,b];\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \{F \in \mathrm{BV}([a,b]) \mid F(a) = 0, F \text{ は右連続}\}$$

を $\Psi(\mu)(x) := \mu([a,x])$ で定めると，これは全単射であり，次を満たす．

(1) Ψ は絶対連続測度を絶対連続関数に写し，$D\Psi(\mu)(x) = \frac{d\mu}{dm}(x)$ a.e. の関係を保つ．
(2) 絶対値を変動に写す：$\Psi(|\mu|) = V_{\psi(\mu)}$ が成り立つ．

4.2 ℝ 上の微分と単調増加関数

まず，導関数も $\overline{\mathbb{R}}$ 値に拡張する．すると，単調増加関数のクラスが本質的に微分可能な関数として適切な関数クラスとして見えてくる．こうして C^1 から脱却される．なお，この物語は，ℝ 上の Radon 積分は単調増加関数の定める Lebesgue-Stieltjes 積分として特徴づけられることから見えている．

4.2.1 Dini の導来数

Darboux から Lebesgue に継承された方法は，微分にも適用可能である．

定義 4.2.1 (Dini derivates). 関数 $f : [a-\delta, a+\delta] \to \mathbb{R}$ について，4 つの拡張実数

$$D^+f(a) = \limsup_{h\searrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \qquad D_+f(a) = \liminf_{h\searrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

$$D^-f(a) = \limsup_{h\nearrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \qquad D_-f(a) = \liminf_{h\nearrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

を **Dini の導来数**と呼ぶ．

(1) $D^+f(a) = D_+f(a)$ のとき，**右導来数を持つ**といい，$f'_+(a)$ で表す．
(2) $D^-f(a) = D_-f(a)$ のとき，**左導来数を持つ**といい，$f'_-(a)$ で表す．
(3) $f'_+(a) = f'_-(a)$ のとき，**可微分である**といい，$f'(a)$ で表す．

例 4.2.2. $f(x) = x^{1/3}$ は $x = 0$ にて微分可能で微分係数 $f'(0) = +\infty$ を持つ． □

4.2.2 単調増加関数の特徴付け

補題 4.2.3 . $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ が連続関数，または，単調関数であるならば，4 つの Dini 微分は全て Borel 可測関数である．

定理 4.2.4 (Dini, U.). 連続関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ の導来数の少なくとも 1 つが $[a,b)$ の殆ど至る所で非負ならば，$f(b) \geqslant f(a)$ である．

4.2.3 病的な連続関数

命題 4.2.5 (Weierstrass, K. (1875)).

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b^n \cos(a^n \pi x) \qquad \left(0 < b < 1, a = \text{正奇数}, ab > 1 + \frac{3}{2}\pi\right)$$

は ℝ 上連続で，すべての点で有限な微分係数 $f'(x)$ を持たない．

命題 4.2.6 (Takagi, T. (1903)).

(1) $f_n(x) := \min_{n=0,1,\cdots,2^n} \left|x - \frac{m}{2^n}\right|$ によって定まる $f_n : [0,1] \to [0, 2^{-n-1}]$ は連続関数である．

(2) $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は一様収束極限だから $[0,1]$ 上連続である．任意の $x \in (0,1)$ 上で有限な微分係数を持たない．

定理 4.2.7 . 任意の零集合 $N \subset [0,1]$ と $\epsilon > 0$ に対して，非負可積分関数 φ_N が存在し，不定積分 $\Phi_N(x) := \int_0^x \varphi_N(t)dt$ が $0 \leqslant \Phi_N(1) - \Phi_N(0) \leqslant \epsilon$ であり，かつ，任意の点 $x \in N$ で $\Phi_{N'}(x) = \infty$ となるようにできる．

系 4.2.8 (一般化された Dini の定理). 連続関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ の導来数 $D^+ f$ が $[a,b)$ の殆ど至る所で非負であり，かつ，$[a,b)$ でいたるところ $D^+ f \neq -\infty$ ならば，f は広義単調増加である．

4.2.4　Vitali の被覆定理

有界変動関数の微分を論ずる鍵となる事実が，区間塊の任意合併も実は Lebesgue 可測であることである．

定義 4.2.9 (Vitali covering).

(1) $C = \prod_{i\in[n]} [a_i, b_i]$ $(a_i < b_i)$ を非自明な閉矩形という．

(2) 閉矩形族 $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ が $A \in P(\mathbb{R}^n)$ を **Vitali の意味で被覆する**とは，

$$\forall_{x\in A}\ \forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\alpha\in\Lambda}\ \mathrm{diam}(C_\alpha) < \epsilon.$$

要諦 4.2.10. ℝ 上の区間の集合 $\mathcal{I}$ が Vitali 被覆であるとは，任意の $x \in E$ について，これを含むいくらでも短い区間 $I \in \mathcal{I}$ が取れることをいう．

定理 4.2.11 (Vitali (1907)). (C_α) は A を Vitali の意味で被覆しているとする．このとき，(C_α) から互いに素な非自明な閉立方体を高々可算子選んで，

$$m^*\left(A \cap \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} C_i\right)^{\complement}\right) = m_n^*\left(A \cap \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} C_i\right)^{\complement}\right) = 0.$$

要諦 4.2.12. 1 次元の場合は次のようになる．$E \subset \mathbb{R}$ を外測度が有限，$\mathcal{I}$ をその区間からなる Vitali 被覆とする．このとき，次が成り立つ：

(1) $\mathcal{I}$ の互いに素な区間列 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{I}$ が存在して，$m^*(E \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n) = 0$.

(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して，互いに素な区間 $I_1, \cdots, I_N \in \mathcal{I}$ が存在して，$m^*(E \setminus \cup_{i\in[N]} I_i) < \epsilon$ を満たす．

系 4.2.13 (閉矩形の任意合併は Lebesgue 可測). $\mathbb{R}^n$ における非自明な閉矩形の任意合併は Lebesgue 可測である．

系 4.2.14 (定数関数の微分による特徴付け). $f \in \mathrm{AC}([a,b])$ が $Df = 0$ a.e. を満たしているならば f は定数関数である．

4.2.5　単調増加関数の微分

定理 4.2.15 (Lebesgue). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が広義単調増加ならば，f は (a,b) で殆ど至る所有限な微分係数を持ち，これが定める導関数は $Df \in L^1([a,b])$ であって次を満たす：

$$f(b) - f(a) \leqslant \int_a^b Df(x)m(dx).$$

歴史 4.2.16. Lebesgue 1904 [10] に，f が連続な場合の議論が記載されており，現代では Vitali の被覆定理を用いる方法が標準．

4.2.6　Helly の選出定理

Helly は Riesz の表現定理に先駆けて (?)，分布関数についてその内容を精緻化していた．

定理 4.2.17 (Helly's selection theorem). $\{f_n\} \subset \mathrm{Map}(\mathbb{R};[0,1])$ を単調増加関数の列とする．

(1) ある関数 f と部分列 $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ が存在して，$f_{n_k} \to f$ は各点収束する．
(2) f が連続ならば，この収束は広義一様になる．

[証明].

(1) (a) 部分列 (f_{n_i}) を，$\mathbb{Q}$ 上である f に各点収束するように取れる．
  (b) $f(x) := \sup_{\mathbb{Q}\ni r\leqslant x} f(r)$ とすると，任意の f の連続点 $x \in \mathrm{Cont}(f)$ において f に各点収束する．
  (c) f の不連続点は高々可算個なので，(f_{n_i}) の部分列で $\mathbb{R}$ 上任意の点で収束するものが取れる．

■

系 4.2.18 (Helly の第二定理). $\{f_n\} \subset \mathrm{Map}(\mathbb{R};[0,1])$ を単調増加数列の F への弱収束列とする．$a, b \in \mathrm{Cont}(F)$ のとき，

$$\forall_{g\in C([a,b])} \lim_{n\to\infty} \int_a^b g(x)dF_n(x) = \int_a^b g(x)dF(x).$$

[証明]. portmanteau 定理を支持する消息である． ■

定理 4.2.19 (Helly-Bray). 次のいずれかが成り立てば，任意の $g \in C(\mathbb{R})$ についても，上の系の結果が成り立つ．

(1) 弱収束の言葉：$g \in C_0(\mathbb{R})$.
(2) 漠収束の言葉：$g \in C_b(\mathbb{R})$ かつ $\lim_{n\to\infty} F_n(\pm\infty) = F(\pm\infty)$.

4.2.7　単調増加関数の級数の項別微分定理

単調増加関数の無限級数の微分については，項別微分が可能である．

定理 4.2.20 (Fubini の項別微分定理 (1915)). $[a,b]$ 上の単調非減少関数列 $\{f_n\}$ が定める級数 $s := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ は収束するとする．このとき，(a,b) 上の殆ど至る所で，

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f'_n = s'.$$

定理 4.2.21 (Lebesgue の密度定理 (1904)). 有界集合 $E \subset \mathbb{R}$ について，ある $a < \inf E$ を用いて，$f(x) := m^*(E \cap (a,x))$ と定める．このとき，次の 2 条件が成り立つ：

(1) E 上殆ど至る所で $f'(x) = 1$．このような点を**密度点** (density point) という．
(2) $E \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ ならば，$E^\complement$ 上殆ど至る所で $f'(x) = 0$.

4.3　測度の微分

測度は関数の一般化である

測度の微分は，Riesz 表現を通じて随伴的に考えることで，自然に「単調増加関数の微分」の概念を誘導する．そこで，絶対連続測度が Radon-Nikodym 微分を a.e. の違いを除いて持つように，絶対連続関数は殆ど至る所微分可能であることが，Lebesgue 点の理論からわかる．

定理 4.3.1 (複素測度の微分可能性の特徴付け). $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ を複素測度とし，$f(x) := \mu((-\infty, x))$ を対応する単調増加関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ とする．次の 2 条件は同値である：

(1) f は $x \in \mathbb{R}$ で微分可能で，$f'(x) = A \in \mathbb{C}$ を満たす．
(2) $\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x \in I \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}}\ |I| < \delta \Rightarrow \left| \dfrac{\mu(I)}{m(I)} - A \right| < \epsilon.$

4.3.1　極大関数

定義 4.3.2 (symmetric derivative, Hardy – Littlewood maximal function).

(1) $(Q_r\mu)(x) := \dfrac{\mu(B^\circ(x,r))}{m(B^\circ(x,r))}$ とし，$(D\mu)(x) := \lim_{r\to 0}(Q_r\mu)(x)$ とする．これを**対称微分**という．
(2) 測度 $\mu \geqslant 0$ について，$(M\mu)(x) := \sup_{0<r<\infty}(Q_r\mu)(x)$ を **(Hardy – Littlewood の) 極大関数**という．これは下半連続であるから，可測である．
(3) 複素測度の極大関数とは，全変動 $|\mu|$ をいう．

要諦 4.3.3. $\mu \ll m$ である場合は，$Q_r\mu = \dfrac{1}{m(B^\circ(x,r))}\displaystyle\int_{B^\circ(x,r)} |f(y)|dy$ となる．この方法によって M は $L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ 上に定まる非線形作用素になる．

補題 4.3.4 . $W := \cup_{i\in[N]}B^\circ(x_i, r_i)$ とする．このとき，ある集合 $S \subset [N]$ が存在して，

(1) $(B^\circ(x_i, r_i))_{i\in[S]}$ は互いに素．
(2) $W \subset \cup_{i\in S}B(x_i, 3r_i)$．
(3) $m(W) \leqslant 3^k \sum_{i\in S} m(B(x_i, r_i))$．

4.3.2　極大不等式

M は $L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ 上に定まるが，この値域は不明瞭である．不等式を用いることでこれを抑える．実は，$L^p(\mathbb{R}^d)$ $(p > 1)$ 上の劣線型な自己作用素として有界であることが示されている．

系 4.3.5 (極大不等式).

$$f^*(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |f(y)|dy \quad (x \in \mathbb{R}, f \in L^1(\mathbb{R}))$$

について，f^* は可測で，

$$\lambda_{f^*}(t) = m(\{f^* > t\}) \leqslant \frac{5}{t}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx.$$

要諦 4.3.6. f^* を f の**極大関数**という．

定理 4.3.7 (極大不等式). $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \to \mathbb{C}$ を複素測度，$\lambda > 0$ とする．このとき，$m\{M\mu > \lambda\} \leqslant 3^k\lambda^{-1}\|\mu\|$．

要諦 4.3.8. 一般にこの係数は次元 k に依存して C_k と取れる．さらに，次のように強めた結果が得られる．$k \geqslant 1, 1 < p \leqslant \infty$ について，ある $C_{p,k} > 0$ が存在して，

$$\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^k)} \leqslant C_{p,k}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^k)}.$$

また，Elias Stein (82) によれば，$C_{p,k}$ は k に依らずに取れる．

定理 4.3.9 (対称微分の性質). $M(\mathbb{R}^k) \ni \mu \ll m$ を絶対連続な複素測度とする．このとき，f を Radon-Nikodym 微分とすると，$D\mu = f$ a.e. $[m]$ で，

$$\forall_{E\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)}\ \mu(E) = \int_E (D\mu)dm.$$

4.3.3　L^1 関数の Lebesgue 点

Lebesgue 点の理論により，任意の不定積分が殆ど至る所微分可能であることがわかる．

定義 4.3.10 .

(1) $f \in L(\mathbb{R}^k)$ について，$\lambda \mapsto \lambda \cdot m\{|f| > \lambda\}$ が $(0,\infty)$ 上の有界関数を定めるならば，弱 L^1 であるという．L^1 関数は弱 L^1 である．$1/x \notin L^1((0,1))$ は弱 L^1 である．

(2) $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$ の極大関数 $Mf : \mathbb{R}^k \to [0,\infty]$ とは，$(Mf)(x) := \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{m(B_r^\circ)} \int_{B(x,r)} |f| dm$ をいう．これは測度 $d\mu := fdm$ の極大関数である．

(3) $x \in \mathbb{R}^k$ が $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$ の **Lebesgue 点**であるとは，

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B_r)} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dm(y) = 0$$

を満たすことをいう．連続点は Lebesgue 点である．

定理 4.3.11 . 任意の可積分関数 $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$ について，$\mathbb{R}^k$ 上の殆ど至る所の点は f の Lebesgue 点である．

定理 4.3.12 . $f \in L^1(\mathbb{R})$ の不定積分を $F(x) := \int_{-\infty}^x fdm$ とする．f の Lebesgue 点において，$F'(x) = f(x)$．特に，F は殆ど至る所微分可能である．

4.3.4　特異測度の微分

定義 4.3.13 (shrink nicely). $\{E_i\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ が x に**うまく縮小する**とは，ある $\alpha > 0$ と半径が 0 に縮小する開球の列 $B(x, r_i)$ で $E_i \subset B(x, r_i)$ を満たすものとが存在して，$m(E_i) \geqslant \alpha m(B(x, r_i))$ を満たすことをいう．

定理 4.3.14 . 任意の $x \in \mathbb{R}^k$ に対して，うまく縮小する列 $\{E_i(x)\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ を取る．任意の $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$ に対して，f の任意の Lebesgue 点において，

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{m(E_i(x))} \int_{E_i(x)} fdm.$$

定理 4.3.15 . 任意の $x \in \mathbb{R}^k$ に対して，うまく縮小する列 $\{E_i(x)\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ を取る．複素 Borel 測度 μ が $\mu \perp m$ を満たすならば，

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mu(E_i(x))}{m(E_i(x))} = 0 \text{ a.e. } [m].$$

定理 4.3.16 (複素測度の場合のまとめ). 任意の $x \in \mathbb{R}^k$ に対して，うまく縮小する列 $\{E_i(x)\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ を取る．複素 Borel 測度 μ の Lebesgue 分解を $d\mu = fdm + d\mu_s$ とすると，

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mu(E_i(x))}{m(E_i(x))} = f(x) \text{ a.e. } [m].$$

特に，$\mu \perp m$ であることと，$(D\mu)(x) = 0$ a.e. であることとは同値.

定理 4.3.17 (測度の場合). μ を $\mathbb{R}^k$ 上の Borel 測度で $\mu \perp m$ とする．このとき，$(D\mu)(x) = \infty$ a.e. $[m]$.

4.4　有界変動関数の微分

正錐上の議論を一般化するときが来た

微分は，一般に有界変動関数に定義出来る (これは有界変動関数が 2 つの単調増加関数の差で表せることによる)．この事実は，任意の符号付測度は 2 つの (有界な) 変動の差 (Jordan 分解) として表せることに対応する．が，有界変動関数の微分で，積分として返って来れるのは，絶対連続なクラス $\mathrm{AC}[a,b] \subset \mathrm{BV}[a,b]$ のみである．（これは微分の方が広く定義できていることになる！？）

要諦 4.4.1 (非積分関数の有界変動性について). 定積分は符号付測度を定め，符号付測度は有界変動である．したがって，非積分関数は有界変動である必要がある．

4.4.1　有界変動関数の単調関数の差としての特徴付け

連続とは限らない関数が，トータルでどれくらい上に動いたか，下に動いたかを追跡して，関数を研究することを考える．すると Lebesgue 可積分関数同様，$\mathrm{BV}[a,b]_+$ すなわち単調関数のみに注目すれば良い．

定義 4.4.2 (**function of bounded variation**). 関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について，

(1) $P_f[a,b]:=\sup_{\Delta\subset[a,b],|\Delta|<\infty}\sum_{x_i\in\Delta}(f(x_i)-f(x_{i-1}))^+$ を**正変動**という．
(2) $N_f[a,b]:=\sup_{\Delta\subset[a,b],|\Delta|<\infty}\sum_{x_i\in\Delta}(f(x_i)-f(x_{i-1}))^-$ を**負変動**という．
(3) $T_f[a,b]:=\sup_{\Delta\subset[a,b],|\Delta|<\infty}\sum_{x_i\in\Delta}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ を**全変動**という．
(4) 全変動が有限な関数を，**有界変動**であるといい，その全体を $\mathrm{BV}[a,b]$ で表す．

命題 4.4.3 . $f\in\mathrm{BV}[a,b]$ について，

(1) $f(b)-f(a)=P_f[a,b]-N_f[a,b]$.
(2) $T_f[a,b]=P_f[a,b]+N_f[a,b]$.

命題 4.4.4 . 実数 $a<c<b$ について，

(1) $P_f[a,b]=P_f[a,c]+P_f[c,b]$.
(2) $N_f[a,b]=N_f[a,c]+N_f[c,b]$.
(3) $T_f[a,b]=T_f[a,c]+T_f[c,b]$.

系 4.4.5 (**有界変動関数の特徴付け**). $f\in\mathrm{Map}([a,b];\mathbb{R})$ について，次の 2 条件は同値．

(1) $f\in\mathrm{BV}[a,b]$.
(2) f は有界な広義単調増加関数の差として表せる．

系 4.4.6 . $f\in\mathrm{BV}[a,b]$ は，単調増加関数 g,h を用いて $f=g-h$ と表せるとする．このとき，

$$T_g[a,x]\geqslant P_f[a,x],\quad T_h[a,x]\geqslant N_f[a,b].$$

4.4.2　有界変動関数の微分

まず，$D:\mathrm{BV}[a,b]\to L^1([a,b])$ を示す．

定理 (Lebesgue (再掲 4.2.15)). 単調増加関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ については，至る所可微分であり，

$$f(b)-f(a)\leqslant\int_a^b Df(x)m(dx).$$

が成り立つ．

要諦 4.4.7. 単調増加関数の不連続点は高々可算個で，特に零集合であることの一般化された消息であると思える．

例 4.4.8 (真の不等号が成り立つとき (Lebesgue 1904)). Cantor 集合 P_C 上だけで増加する関数を構成すると，等号は不成立．□

系 4.4.9 . $f\in\mathrm{BV}[a,b]$ の導関数 f' は可積分で，

$$f(b)-f(a)\leqslant\int_a^b Df(x)m(dx).$$

定理 4.4.10 (Lebesgue). $f \in \mathrm{BV}[a,b]$ ならば，f は (a,b) 上殆ど至る所で有限な微分係数を持つ．

定義 4.4.11 (saltus). $\delta f(x) := \inf_{h>0} f(x+h) - \sup_{h>0} f(x-h)$ を，$x \in (a,b)$ における**跳躍量**という，

系 4.4.12 . $f \in \mathrm{BV}[a,b]$ ならば，$[a,b]$ 上の不連続点は零集合であることはわかるが，特に高々可算個である．

4.4.3　変動関数の連続性

定理 4.4.13 . $f \in \mathrm{BV}[a,b]$ が連続ならば，$P_f[a,x], N_f[a,x], T_f[a,x]$ も連続.

4.5　微積分学の基本定理と絶対連続関数

微分の定義域として有界変動関数を得た．その値域は $D : \mathrm{BV}[a,b] \to L^1([a,b])$ となる．この逆である積分は，$\int :$ $L^1([a,b]) \to \mathrm{AC}[a,b] \subset \mathrm{BV}[a,b]$ を定め，$\mathrm{BV}[a,b]$ までは返ってこない．こうして，$\mathrm{BV}([a,b])$ の部分空間として $\mathrm{AC}([a,b])$ が発見され，「$L^1([a,b])$ の元の不定積分である関数」として特徴付けられる．

注 4.5.1. 実数上の関数の絶対連続性には，

$$C^1([a,b]) \subset \mathrm{Lip}[a,b] \subset \mathrm{Lip}^\alpha[a,b] \subset UC([a,b]) \subset C([a,b])$$

なる関係と

$$\mathrm{Lip}[a,b] \subset \mathrm{AC}[a,b] \subset \mathrm{BV}[a,b] \subset \{f \text{ は殆ど至る所微分可能 }\}$$

なる関係がある．

4.5.1　原始関数と不定積分

Lebesgue の学位論文の用語法に従うと，微積分学の基本定理とは「原始関数は不定積分である」という形の主張である．

定義 4.5.2 (anti-derivative, indefinite integral).

(1) $f \in \mathrm{Map}((a,b))$ に対して，$D : \mathrm{Map}((a,b)) \to \mathrm{Map}((a,b))$ の逆像の元を**原始関数**という．

(2) $f \in L^1([a,b])$ に対して，

$$\forall_{\alpha,\beta\in[a,b]}\ F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

を満たす関数 $F \in \mathrm{Map}([a,b])$ を**不定積分**という．このとき，F は f の原始関数でもあり，$F \in \mathrm{AC}([a,b])$ でもある．

4.5.2　不定積分の微分

L^1 関数 f の定める不定積分は有界変動だから，当然任意の f の Lebesgue 点の上で微分可能である．しかし，不定積分の絶対連続性にも目を向けないと返ってこれない．

定理 4.5.3 (Lebesgue (1904)：不定積分が原始関数になる条件). 可積分関数 $f \in \mathcal{L}^1([a,b];\overline{\mathbb{R}})$ とその不定積分

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt + F(a)$$

について，

(1) f が連続ならば原始関数である：f が連続であれば，F は原始関数である：$\forall_{x\in(a,b)}\ F'(x) = f(x)$.

(2) F は殆ど至る所の原始関数でもある：F は殆ど至る所微分可能で，$\forall_{x\in(a,b)}\ F'(x) = f(x)$.

定理 4.5.4 (微積分学の基本定理：原始関数は不定積分である). 可積分関数 $f \in \mathcal{L}^1([a,b];\overline{\mathbb{R}})$ の原始関数 $\forall_{x\in(a,b)}\ G'(x) = f(x)$ は，不定積分である：

$$\forall_{\alpha,\beta\in[a,b]}\ G(\beta) - G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

ただし，$G(a) := G(a+), G(b) := G(b-)$ と連続延長を考えた.

例 4.5.5 (原始関数 G が可積分な導関数をもつとは限らない). $G : [-1,1] \to \mathbb{R}$ を

$$G(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

とすると，導関数

$$f(x) = \begin{cases} 2\left(x \sin \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

は可積分でない. □

4.5.3 連続関数の観点から見るとヒントが見えてくる

問題点はすなわち，原始関数 G は可積分な導関数をもつとは限らない．G が連続で有界変動であるならば，導関数は可積分である，という十分条件が 1 つ見つかる.

定理 4.5.6 (Lebesgue (1902)：至る所可微分な連続関数が有界変動であるための必要十分条件は不定積分であること). 連続関数 $f \in C([a,b])$ は，(a,b) 上殆ど至る所で有限な微分係数を持つとする．このとき，次の 2 条件は同値.

(1) $f' \in L^1([a,b])$.
(2) $f \in \mathrm{BV}[a,b]$.

このとき，次が成り立つ：

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

要諦 4.5.7. 微分 $\mathrm{BV}[a,b] \to L^1([a,b])$ は，始域と終域を $C([a,b])$ 上に限れば全単射である.

4.5.4 不定積分の絶対連続性

絶対連続性：積分で戻ってくることが出来る微分の真の定義域を特徴付ける性質

ここでの絶対連続性は Lebesgue 測度に対する絶対連続性である．σ-加法的集合関数の間の 2 項関係に一般化されたものを広義と呼び分ける．元々の Lebesgue (1904) の仕事は，$F(x) := \Phi((-\infty,x])$ の絶対連続性を定義したことになる.

定義 4.5.8 (集合関数の絶対連続性). $(X,\mathcal{M},\mu)$ 上の実数値集合関数 $F : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ が **μ-絶対連続**であるとは，次が成り立つことをいう：

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{E\in\mathcal{M}}\ \mu(E) < \delta \Rightarrow |F(E)| < \epsilon.$$

定理 4.5.9 (不定積分は絶対連続). $f \in L^1(X,\mathcal{M},\mu;\overline{\mathbb{R}})$ の不定積分 $F : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}; E \mapsto F(E) := \displaystyle\int_E f d\mu\ (E \in \mathcal{M})$ は，μ-絶対連続である.

4.5.5　$\mathbb{R}$ 上の不定積分の特徴付け

不定積分であるとは絶対連続であるということである

$\mathbb{R}$ 上では逆に「絶対連続ならば殆ど至る所微分可能」が言える．一般に，任意の σ-有限な測度空間では逆が成り立ち，これを Radon-Nikodym の定理という．

定義 4.5.10 (実数上の関数の絶対連続性). 関数 $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ が**絶対連続**であるとは，次を満たすことをいう：

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset[a,b]}\ \sum_{i=1}^{\infty}(x_{i+1}-x_i)<\delta\Rightarrow\sum_{i=1}^{\infty}|F(x_{i+1})-F(x_i)|<\epsilon.$$

定理 4.5.11 ($\mathbb{R}$ 上の不定積分の特徴付け Lebesgue (1904)). 関数 $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ について，次の 2 条件は同値：

(1) ある $f\in L^1([a,b])$ が存在して，$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ が成り立つ．
(2) $F\in\mathrm{AC}[a,b]$.

このとき，次が成り立つ：

$$F(x)=F(a)+\int_a^x F'(t)dt.$$

歴史 4.5.12. 不定積分の x の関数としての絶対連続性は，Lebesgue (1904) の脚注に述べられているが，同じ概念を独立に発見して「絶対連続性」という名称と共に導入したのが Vitali (1904) であることが，Lebesgue の第二版 (1928) に述べられている．

系 4.5.13 (変動の積分表現). $f\in\mathrm{AC}([a,b])$ のとき，V_f,P_f,N_f も測度として絶対連続なのであった．このとき，

$$V_f(x)=\int_a^x|Df|(t)dt,\quad P_f(x)=\int_a^x(Df)^+(t)dt,\quad N_f(x)=\int_a^x(Df)^-(t)dt.$$

4.6　部分積分と置換積分

部分積分・置換積分公式は，一般の絶対連続関数に対して与えられることとなる．

定理 4.6.1 (部分積分). $f,g\in L^1([a,b];\overline{\mathbb{R}})$ について，その不定積分を $F(x),G(x)\in\mathrm{AC}[a,b]$ とする．このとき，次が成り立つ：

$$\int_a^b F(x)g(x)dx=[F(x)G(x)]_{x=a}^{x=b}-\int_a^b f(x)G(x)dx.$$

定理 4.6.2 (置換積分). $f,g\in L^1([a,b];\overline{\mathbb{R}})$ は $g\geqslant 0$a.e. を満たすとする．このとき，g の不定積分 $G\in\mathrm{AC}[a,b]$ が $G(\alpha)=a,G(\beta)=b$ を満たすならば：

$$\int_a^b f(t)dt=\int_\alpha^\beta f(G(x))g(x)dx.$$

4.7　曲線の長さ

$\mathbb{R}^n$ の曲線が長さ確定であることは，各成分が実数値関数として有界変動であることに同値 (Jordan).

4.8　Denjoy 積分

Lebesgue 可積分関数は，「絶対連続関数が存在して $F' = f$ を満たす」ことと同値であることを見てきた．この「絶対」連続性の語源は積分の「絶対」収束である．したがって，一般の関数に対して $\exists_{F\in C([a,b])}\;F' = f$，ただし $F' = f$ とは導来数の 1 つが f の値と一致することとした，として可積分関数の範囲を拡大することが出来る．これが Denjoy (1916) のアイデアである．

第 5 章

完全加法的集合関数

一般の測度空間上の微分論を展開することを考える．そのために，不定積分の σ-加法的な集合関数としての側面に注目して理論を開始する．すると，不定積分とは，有限な σ-加法的な集合関数のうち，絶対連続なものとして特徴付けられる．

5.1 加法的集合関数とその変動

定義 5.1.1 (**(positive) measure, complex measure, signed measure / real measure**). $\mathcal{A}$ を σ-代数とする．

(1) σ-代数 $\mathcal{M}$ の上で定義された σ-加法的関数 $\mu:\mathcal{M}\to[0,\infty]$ を**（正）測度**という．値域が $\mathbb{R}_+$ に含まれるとき**有限**であるという．[a]

(2) σ-代数 $\mathcal{M}$ の上で定義された σ-加法的関数 $\mu:\mathcal{M}\to\mathbb{C}$ を**複素測度**という．

(3) 値域が $\mathbb{R}$ に含まれる複素測度を**符号付測度**または**実測度**という．

[a] σ-有限の語に併せるためにこうしたが，有界と言っても良いだろう．しかしおそらく，有界の語は変動について使う．そしてこの 2 つは基本的には同値である．

5.1.1 完全加法性の必要条件

加法的集合関数の終域を $\overline{\mathbb{R}}$ とし，公理に $\exists_{B\in\mathcal{B}}\ \Phi(B)<\infty$ を加えて定義することもある [4].

定義 5.1.2 (σ-**additive set function / (finite) signed measure / charge**). 可測空間 $(X,\mathcal{B})$ 上の実集合関数 $\Phi:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ が，

(1) 完全加法性 $\Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(E_n)$ を満たす時，これを**加法的集合関数**または**符号付き測度**という．

(2) $\mathrm{Im}\,\Phi\subset\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ のとき**単調増加**といい，$\mathrm{Im}\,\Phi\subset\mathbb{R}_{\leqslant 0}$ である時を単調減少という．

例 5.1.3 (加法的集合関数の表現).

(1) 有界な測度 $\mu:\mathcal{B}\to[0,\infty)$ について，ある直和分解 $X=X_1+X_2, a,b\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ に対して，$\Phi(-)=a\mu(-\cap X_1)-b\mu(-\cap X_2)$ とおくと，これは再び完全加法性を満たす．これは $a=0$ または X_1 が零集合である時単調減少となり，$b=0$ または X_2 が零集合である時単調増加となる．次の補題より，$\mu(\varnothing)=0$ であるから，

(2) (集合関数と見たときの積分) 測度空間 $(X,\mathcal{B},\mu)$ と X 上の μ-可積分な関数 $f:X\to\mathbb{R}$ について，$\Phi(-)=\int_{-}f(x)d\mu(x)$ は加法的集合関数である．

(3) (Dirac 測度) $\delta(E)=\begin{cases}1, & 0\in E,\\ 0, & 0\notin E.\end{cases}$.

□

補題 5.1.4 .

(1) (単位元の保存) 加法的な集合関数は $\Phi(\varnothing)=0$ を満たす.
(2) (well-definedness) 単調増加な加法的集合関数は $\forall_{E_1,E_2\in\mathcal{B}}\ E_1\subset E_2\Rightarrow\Phi(E_1)\leqslant\Phi(E_2)$.

[証明].

(1) $\varnothing+\varnothing=\varnothing$[†1]であるから，加法性より $\Phi(\varnothing)=\Phi(\varnothing)+\Phi(\varnothing)$.
(2) $\mathrm{Im}\,\Phi\subset\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ のとき，任意の $E_1\subset E_2$ について，$\Phi(E_2)=\Phi(E_1)+\Phi(E_2\backslash E_1)\geqslant\Phi(E_1)$ を満たし，単調減少であるときも同様である.

■

命題 5.1.5 (極限の保存). $\Phi:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ を加法的集合関数，(A_n) を $\mathcal{B}$-列とする.

(1) (A_n) が単調であるとき，$\Phi(\lim_{n\to\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}\Phi(A_n)$.
(2) Φ が単調増加ならば，$\Phi(\liminf_{n\to\infty}A_n)\leqslant\liminf_{n\to\infty}\Phi(A_n)$，$\Phi(\limsup_{n\to\infty}A_n)\geqslant\limsup_{n\to\infty}\Phi(A_n)$．したがって特に，$(A_n)$ が収束するならば $\Phi(\lim_{n\to\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}\Phi(A_n)$ である.
(3) しかし実は一般に，(A_n) が収束するとき，$\Phi(\lim_{n\to\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}\Phi(A_n)$ である.

[証明].

(1) 単調増加列 (A_n) の定める互いに素な集合の列 $(A_n\backslash A_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}=:(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と単調減少列の定める互いに素な列 $(A_{n-1}\backslash A_n)_{n\in\mathbb{N}}=:(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ にそれぞれ注目して加法性を用いる.

単調増加列　$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}B_i$ より，

$$\Phi\left(\lim_{n\to\infty}A_n\right)=\Phi\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}B_i\right)=\lim_{n\to\infty}\Phi\left(\sum_{i=1}^{n}B_i\right)=\lim_{n\to\infty}\Phi(A_n)$$

が成り立つ．最右辺は実数上の有界な単調列であるから確かに収束する．最左辺は集合の単調列は極限集合と持つこと 1.7.3 より.

単調減少列　補集合が定める単調増加列 $(A_1\backslash A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に注目すれば良い：

$$\Phi(A_1)-\Phi\left(\lim_{n\to\infty}A_n\right)=\Phi\left(\lim_{n\to\infty}(A_1\backslash A_n)\right)=\lim_{n\to\infty}\Phi(A_1\backslash A_n)=\Phi(A_1)-\lim_{n\to\infty}\Phi(A_n).$$

(2) 単調増加な加法的集合関数とは，有限な測度のことに他ならない．したがって，測度の性質 2.4.6(6),(7) より.
(3) Jordan 分解 $\Phi=\overline{V}-|\underline{V}|$ を考えると，それぞれは測度であるから，極限を保存する．したがって任意の加法的集合関数は極限を保存する.

■

要諦 5.1.6 (この極限を保つという性質，ある種の連続性なのでは？). (1) は測度の性質 2.4.6(4),(5) の結果と同値である．この証明には，符号付測度にはない測度特有の性質である $\Phi\geqslant 0$ を使っていないため，そのまま拡張できる．違いは，符号付測度は有界だから (5) の単調減少列に必要だった有界性条件 $\mu(A_1)<\infty$ は自明に満たす．(2) で (1) を特別な場合として含んでいることに注意.

[†1] $\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$ かつ $\varnothing\cap\varnothing=\varnothing$ という主張.

5.1.2　変動と測度の Jordan 分解

集合関数の上限は任意の集合で定まり，変動という．これは測度になり，加法的集合関数は 2 つの測度の差として表現される．

Φ が定める集合関数 $V:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ が考えられる．この対応 $V_{-}:\mathrm{Map}(\mathcal{B},\mathbb{R})\twoheadrightarrow\mathrm{Map}(\mathcal{B},\mathbb{R})$ は完備化というか，単調化というか，そういう操作である．これは，極限構成 $\overline{V}:=\sup\Phi,\underline{V}:=\inf\Phi$ と，0 を挟んで双対を結合 $V:=\overline{V}-\underline{V}$ することで定める．すると，これも有界な符号付測度となる．これは変分・変動という意味も持つ．これは一様ノルムに他ならない？これが，積分論における長さ積分や，コンパクト集合上の最大値などと同じ使い方ができる．だが裏を返すと，Φ の式を適切なタイミングで V を用いて抑える工程が証明の難所となるし，この不等式評価は本質的に極限が定める射なのであるから，その背後の圏論的構造が見えにくくなる．非常に不思議である，任意に取った $\Phi\in\sigma\text{-}\mathrm{Map}(\mathcal{B},\mathbb{R})$ が，標準的に取れる同じ空間の元 $V_\Phi\in\sigma\text{-}\mathrm{Map}(\mathcal{B},\mathbb{R})$ によって評価が進むのである．これは $\mathcal{B}$ に入っている豊かな構造から由来しているはずだが，他で見たことのない奇妙な数理構造である．Jordan 分解の証明の，普遍性を用いた証明で思いついたのだが，これはおそらく圏 $\sigma\text{-}\mathrm{Map}(\mathcal{B},\mathbb{R})$ の中で直和対象 $\overline{V}+\underline{V}$ か Φ かは知らないが，同型を除いて一意ということの証明である．全く同じような消息が表現定理・分解定理と呼ばれるものなのかもしれない．いや，そもそも Jordan 分解は表現である（例 5.1.3）．

定義 5.1.7 (upper variation, lower variation, total variation).

(1) $\overline{V}(\Phi,E)=\overline{V}_\Phi(E):=\sup\{\Phi(A)\in\mathbb{R}\mid A\subset E$ かつ $A\in\mathcal{B}\}$ を**上変動**という．
(2) $\underline{V}(\Phi,E)=\underline{V}_\Phi(E):=\inf\{\Phi(A)\in\mathbb{R}\mid A\subset E$ かつ $A\in\mathcal{B}\}$ を**下変動**という．
(3) このとき $\Phi(\varnothing)=0$ より，$\underline{V}_\Phi(E)\leqslant 0\leqslant\overline{V}_\Phi(E)$ である．$V(\Phi,E)=V_\Phi(E):=|\overline{V}(\Phi,E)|+|\underline{V}(\Phi,E)|$ を**全変動**または**絶対変動**という．

補題 5.1.8 (変動は有界である). 加法的集合関数 $\Phi:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ の変動 Φ を考える．

(1) $V(X)=\infty$ ならば，次を満たす集合列 (X_n) が存在する：$X_{n+1}\subset X_n,V(X_n)=\infty,|\Phi(X_n)|\geqslant n$.
(2) $\underline{V},\overline{V},V:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ が定まる（値が全て有限である）.[†2]
(3) $\Phi:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ は（有限であるだけでなく）有界である．
(4) したがって V も有界である．

[証明].

(1) $n=0$ のときは $X_0:=X$ と定めれば良い．仮定より，この上での変動は $V(X_0)=V(X)=\infty$ で，$\Phi(X)$ の値は知らないが $|\Phi(X_0)|\geqslant 0$ ではある．$n>0$ として，$V(X_n)=\infty,|\Phi(X_n)|\geqslant n$ とする．このとき，$\overline{V}_\Phi(X_n)=\infty$ または $\underline{V}_\Phi(X_n)=-\infty$ である．つまり，$\sup_{A\subset X_n}|\Phi(A)|=\infty$.
ここで単に $|\Phi(E)|\geqslant n+1$ を満たす $E\subset X_n$ をとっても，$V(E)=\infty$ の性質が引き継がれない．そこで，$|\Phi(E)|\geqslant|\Phi(X_n)|+(n+1)$ を満たす $E\subset X_n$ を取る．一般に，任意の $A,E\subset X_n$ について，加法性より
$$\Phi(A)=\Phi(A\cap E)+\Phi(A\cap(X_n\backslash E))$$
だから，$|\Phi(A)|$ の値は
$$|\Phi(A)|\leqslant|\Phi(A\cap E)|+|\Phi(A\cap(X_n\backslash E))|\leqslant|V(E)|+|V(X_n\backslash E)|$$
と評価できる．$A\in\mathcal{B}\cap P(X_n)$ を変数とみたとき，最左辺の上限は ∞ であるから，最右辺の上限も ∞ である．したがって，$V(E)=\infty$ または $V(X_n\backslash E)=\infty$.
ここまで一般論であり，以降 $E\subset X_n$ の構成がうまくいっていることをみる．前者の時は，$X_{n+1}:=E$ と定めると，$|\Phi(E)|\geqslant|\Phi(X_n)|+(n+1)\geqslant 2n+1\geqslant n+1$．後者の時は，$X_{n+1}:=X_n\backslash E$ と定めると，E での値を十分大きく取っているので，$|\Phi(X_{n+1})|=|\Phi(X_n)-\Phi(E)|=|\Phi(E)|-|\Phi(X_n)|\geqslant n+1$.

[†2] 構成 $V_{-}:\mathrm{Map}(\mathcal{B},\mathbb{R})\twoheadrightarrow\mathrm{Map}(\mathcal{B},\mathbb{R})$ が全射であることをいう．

(2) $V : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ が有界と示せば，$\overline{V}, \underline{V}$ が有界であることが必要．仮に有界でないとすると，(1) を満たす単調減少列 (X_n) が取れる．これは収束するから，この極限集合 $E := \lim_{n\to\infty} X_n$ について，$\Phi(E) = \infty$ である．よって，$\Phi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ が有界であることに矛盾．

(3) 関数 $|\Phi| : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ の像は半径 $|V(X)| \in \mathbb{R}$ の閉円板に収まる．

(4) (3) より $\overline{V}, \underline{V}$ も有界．したがって V も有界．

■

要諦 5.1.9 (有界な符号付測度の全変動は有界である)**.** (1) が一番の消息を洗い出している，ここら辺で Hahn の分解定理の音が聞こえてくる．X_n 上の変分 $V(X_n)$ が無限大だと，うまく選べばその無限の泉を含んだままの降下列 $X_{n+1} \subset X_n$ を作る算譜が存在する．しかしその算譜がまさに深淵で，まさにどこから拾ってきたのか分からない不等式評価を集合関数で展開している．

定理 5.1.10 (変動も加法的である：Jordan decomposition)**.**

(1) 符号付測度 $\Phi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ の定める変動 $\overline{V}, \underline{V}, V : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ も再び符号付測度である．

(2) $\Phi = \overline{V} + \underline{V}$ を満たす．

[証明].

(1) $\overline{V}$ の加法性を導く．$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ を任意にとる．

$\overline{V}\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \overline{V}(E_n)$　任意の $A \subset E$ について，A に (E_n) が定める分割を入れると，各 $\overline{V}(E_n)$ はそこでの $\Phi(A \cap E_n)$ の値の上限であるから，$\Phi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(A \cap E_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \overline{V}(E_n)$．最左辺の値の上限が $\overline{V}\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ である．

$\overline{V}\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \overline{V}(E_n)$　(E_n) の部分集合列 (A_n) を，$\Phi(A_n) > \overline{V}(E_n) - \frac{\epsilon}{2^n}$ を満たすようにとる（このような A が存在する）．すると，Φ の加法性より，$\overline{V}(E) \geqslant \Phi(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(A_n) > \lim_{n\to\infty} \overline{V}(E_n) - \epsilon$.

(2) Jordan 分解を導く．任意の $E \in \mathcal{B}$ をとる．任意の $A \subset E$ に対して，$\Phi(E) = \Phi(A) + \Phi(E \backslash A)$ である．[†3] これに対して，

$$\Phi(A) = \Phi(E) - \Phi(E \backslash A) \begin{cases} \geqslant \Phi(E) - \overline{V}(E) \\ \leqslant \Phi(E) - \underline{V}(E) \end{cases}$$

と評価できる．最左辺の上限を考えると $\overline{V}(E) + \underline{E} \leqslant \Phi(E)$ を得て，下限を考えると $\overline{V}(E) + \underline{V}(E) \geqslant \Phi(E)$ を得る．[†4]

(3) $\underline{V} := \Phi - \overline{V}$ の完全加法性は，右辺から従う．

■

要諦 5.1.11 (普遍性を用いた証明？)**.** この (1) と各変動の値域を考え合わせると，$\overline{V}, |\underline{V}|, V$ は有限な測度 $\mathcal{B} \to [0, \infty)$ となる．すると，性質 2.4.6 にあるような，単調性，劣加法性などが一気に出てくる．すると，(2) は，符号付測度 Φ は上下変動と呼ばれる測度 $\overline{V}, |\underline{V}|$ を（ある種の極限構成で）定め，それらの和で表せる：$\Phi = \overline{V} - |\underline{V}|$．上に単調なやつと下に単調なやつの 2 独立成分があったから，全体では単調とは限らないのである．直感的には Jordan 分解とは，$\Phi(E)$ の値は，Φ の制限の上限値と下限値を探索してきて，足し合わせれば良い．それにしても (2) の証明はどこから思いつくんだと思うのだが，これが普遍性を利用した証明に似ていないか？片方ずつ射を構築して同型であることを導いているのである．

[†3] 私の自然な方針としては，A が Φ の上限を出すときの $A \subset E$ であるとき，$E \backslash A$ は Φ の下限を取ることを示す方針である．すると簡単な論理パズルとなる．

[†4] までこんな証明どこから思いつくんだと思うのだが，これが普遍性を利用した証明に似ていないか？片方ずつ射を構築して同型であることを導いているのである．

Jordan 分解の風景

加法的集合関数 $\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ とは，$\mathcal{B}$ は可算和については完備な Boole 代数（多分，少なくとも束）であり，$\mathbb{R}$ は線型順序であるが，加法性の要求として $\mathcal{B}$ の root は原点 0 に対応する．すると $\mathcal{B}$ の一層目の歩み出しは完全に 2 つの方向に別れるはずであり，片方は $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ へ，片方は $\mathbb{R}_{\leqslant 0}$ へ写される．するとそのあとの葉は，加法性により写される値は決定する．[a] これが完全に加法的集合関数 $\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ の振る舞いを定めるだろう．では，それぞれの世界では測度の消息（単調・劣加法）を持つか？ということが自然な疑問となる．Jordan 分解はこの疑問への肯定的な答えである．

[a] CABA としての $P(X)$ の特徴付けが思い出される．complete atomic でないとこの議論はできない．

5.1.3　Hahn の分解定理：符号付測度の定める分解

軌道分解みたいな．というか本当に軌道分解の双対じゃないのか．いや，「定める同値関係」の類か？
Φ は束 $\mathcal{B}$ を 2 つの半束に分ける．まさか完全加法性だけからこんな大樹が咲くとは思わなかった．まず根が対応する．
この事実にかまけて，複素数値加法的集合関数 $\Phi:\mathcal{B}\to\mathbb{C}$ については，全変動を $V_\Phi(E):=\sup\sum_{j=1}^n|\Phi(E_j)|$ と定め，ここから完全加法性を証明する．

定理 5.1.12 (Hahn decomposition theorem (1921)). X の加法的集合関数 $\Phi:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ に対して，X の直和分割 $A+(X\backslash A)$ であって，$\underline{V}(A)=\overline{V}(X\backslash A)=0$ を満たすものが存在する．

[証明].

方針　この A は，$A:=\arg\max\overline{V}(X)$ と定めれば良い．が，直接ではなく，列 (A_n) の極限として構成する．

(A_n) の準備　$\overline{V}(X)=\sup_{A\subset X}\Phi(A)$ であったから，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，$(\overline{V}(A_n)+\underline{V}(A_n)=)\Phi(A_n)\geqslant\overline{V}(X)-\frac{1}{2^n}$ なる $A_n\in\mathcal{B}$ が取れる．すると $(0\leqslant)\overline{V}(X\backslash A_n)\leqslant\frac{1}{2^n}$ かつ $(0\geqslant)\underline{V}(A_n)\geqslant-\frac{1}{2^n}$ であることを示す．

(a) $\overline{V}(A_n)\geqslant\Phi(A_n)\geqslant\overline{V}-\frac{1}{2^n}=\overline{V}(A_n)+\overline{V}(X\backslash A_n)-\frac{1}{2^n}$ より，$\frac{1}{2^n}\geqslant\overline{V}(X\backslash A_n)$.

(b) $\underline{V}(A_n)=\overline{V}(X)-\overline{V}(A_n)-\frac{1}{2^n}\geqslant-\frac{1}{2^n}$.

構成の成功　ここで，$A:=\liminf_{n\to\infty}A_n$ とおけば，これが定理の条件を満たす．実際，

(a) $X\backslash A=\limsup_{\nu\to\infty}=\cap_{n=1}^\infty\cup_{\nu=n}^\infty(X\backslash A_\nu)\subset\cup_{\nu=n}^\infty(X\backslash A_\nu)$ より，有限な測度 $\overline{V}$ の劣加法性から，$\overline{V}(X\backslash A)\leqslant\sum_{\nu=n}^\infty\overline{V}(X\backslash A_\nu)=\frac{1}{2^{n-1}}$．$n$ は任意より，$\overline{X\backslash A}=0$.

(b) $|\underline{V}|$ も有限な測度だから，$|\underline{V}(A)|\leqslant\liminf_{n\to\infty}|\underline{V}(A_n)|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

■

要諦 5.1.13 (Hahn 分解とは，X の Φ が最大値を取る点と最小値を取る点とへの分解になっている)**.** 構成の方針は $A:=\arg\max\overline{V}(X)$ である．$\Phi:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ は，束 $\mathcal{B}$ を下から辿ると，1 歩目で正か負かに踏み出す（踏み出さない場合，すなわち $\Phi(\{a\})=0$ なる $a\in A$ が存在する場合は A の取り方の一意性が崩れるが，いずれにしろ本質的に一意である）．このような $\{a\}$ の全体 A は，完全加法性より，$A:=\arg\max\overline{V}(X)$ となる部分集合 $A\in\mathcal{B}$ を探せば良い．これは $\forall_{E\in\mathcal{M}}\ \Phi(E\cap A)\geqslant 0$ を満たし，このような集合を**正値集合**という．

例 5.1.14. Φ が関数 $f:X\to\mathbb{R}$ が定める定積分とする．このとき，Hahn 分解は $P=\{f\geqslant 0\}$ によって与えられる．　□

定理 5.1.15 (Hahn 分解の一意性). $X=P_1+P_1^\complement=P_2+P_2^\complement$ を，X の Φ に関する 2 つの Hahn 分解とする．このとき，$P_1\triangle P_2,P_1^\complement\triangle P_2^\complement$ は Φ に関して正値かつ負値である．

$$\forall_{E\in\mathcal{M}}\ \Phi(E\cap(P_1\triangle P_2))=0\wedge\Phi(E\cap(P_1^\complement\triangle P_2^\complement))=0.$$

5.1.4　全変動の特徴付け

集合関数ではなく，一般の関数にも使える表現となる．集合関数には Hahn の分解定理が成り立ち，全変動とは，最大値を取る集合 P での値と $P^\complement$ での値との差として特徴付けられてしまうので，冗長な表現に見える．

系 5.1.16 (全変動の特徴付け). $\Phi:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ を加法的集合関数とする．集合 $E\subset X$ のあらゆる有限分割 $E=\sum_{i=1}^n E_i$ を考えるとき，$V(E)=\sup\sum_{j=1}^n|\Phi(E_j)|$ と表現できる．

[証明].

方針　一般に $V(E_j)\geqslant|\Phi(E_j)|$ より，$V(E)=\sum_{j=1}^n V(E_j)\geqslant\sum_{j=1}^n|\Phi(E_j)|$ である．あとは，ある分割が存在して，等号が成立することを示せば良い．

正しい分解　等号を成立させる分解は，Hahn の分解 5.1.12 による $X=A+B$ である：$\underline{V}(A)=0,\overline{V}(B)=0$．$E_1:=E\cap A,E_2:=E\cap B$ とすれば，

$$\begin{aligned}V(E)&=V(E_1)+V(E_2)=\overline{V}(E_1)+|\underline{V}(E_1)|+\overline{V}(E_2)+|\underline{V}(E_2)|\\&=\overline{V}(E_1)+|\underline{V}(E_2)|=\Phi(E_1)+|\Phi(E_2)|.\end{aligned}$$

■

要諦 5.1.17. このような，集合の分割の構造に仮託した表現が測度論・積分論の本質だろう．これを暴き出すのが加法的集合関数論．だがこの定理はどうも気に入らない，任意の有限分割というよりも，本質は Hahn の分解である．

5.1.5　有界変動関数について

符号付き測度は必ず有界変動であった．よって，定積分を定める密度関数は有界変動である必要がある．そして完全加法的集合関数が 2 つの単調関数の和で表せることから，その密度関数についても同様の結果が成り立つ．これが有界変動関数の理論である．

5.2　絶対連続集合関数と特異集合関数

加法的集合関数は 2 つの有限測度の差 (Jordan 分解) で表現されること，Hanh の分離を定めることを見た．このような加法的集合関数のうち，絶対連続なクラスに注目すると必ず積分の形で表現され，全ての加法的集合関数は絶対連続な部分と特異な部分の和として理解できる (Radon-Nikodym の定理)．

5.2.1　定義と特徴付け

不定積分は加法的集合関数 5.1.3 の中でも特に，絶対連続なクラスに一致する．絶対連続とは，μ-零集合での値は 0 であること．対偶を取れば，0 でない値を取るならばその集合の測度は 0 でない．特異とは，台が μ-零集合であること．

定義 5.2.1 (absolutely continuous). 測度空間 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 上の加法的集合関数 $\Phi:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ について，

(1) Φ が一般の加法的集合関数 Ψ について**絶対連続**とは，$\forall_{E\in\mathcal{B}}\ |\mu|(E)\Rightarrow\nu(E)=0$ が成り立つことをいう．
(2) Φ が μ に関して**絶対連続**とは，$\forall_{E\in\mathcal{B}}\ \mu(E)=0\Rightarrow\Phi(E)=0$ が成り立つことをいう．
(3) Φ が一般の加法的集合関数 Ψ について**特異**とは，$\exists_{N_0\in\mathcal{M}}\ |\Phi|(N_0)=|\Psi|(N_0^\complement)=0$ がなりたつことをいう．

(4) Φ が μ に関して**特異**とは，$\exists_{E_0\in\mathcal{B}}\ \mu(E_0)=0\land[\forall_{E\subset X\backslash E_0}\ \Phi(E)=0]$ が成り立つことをいう．すなわち，$\exists_{E_0\in\mathcal{B}}\ \forall_{E\in\mathcal{B}}\ \Phi(E)=\Phi(E\cap E_0)$ である．

(5) Φ が**連続**であるとは，$X=\mathbb{R}^d$ の一点集合（したがって高々可算な集合）E について $\Phi(E)=0$ を満たすことをいう．一方で，高々可算な集合 $A\in\mathcal{B}$ が存在して $\Phi(\mathbb{R}^d\backslash A)=0$ を満たすものを**純粋不連続**であるという．

絶対連続かつ特異な集合関数は零関数 $\Phi=0$ に限る．

例 5.2.2. 加法的集合関数 Φ について，正変動と負変動とは互いに特異である：$\Phi^+\perp\Phi^-$．□

定理 5.2.3 (絶対連続性・特異性の変動による特徴付け).

(1) Φ が絶対連続であることと，$\overline{V}_\Phi,\underline{V}_\Phi$ がいずれも絶対連続であることとは同値．

(2) Φ が特異であることと，$\overline{V}_\Phi,\underline{V}_\Phi$ がいずれも特異であることとは同値．

[証明].

(1) $\Rightarrow$　Φ を絶対連続とする．任意に μ-零集合を取った時に，$\overline{E}=\underline{E}=0$ を示せば良い．いま，$\forall_{A\subset E}\ \mu(A)=0$ だから $\Phi(A)=0$ で，$\overline{V}(E)\overset{def}{=}\sup_{A\subset E}\Phi(A)=0$．

$\Leftarrow$　任意に μ-零集合を取った時に $\overline{E}=\underline{E}=0$ を仮定すると，Jordan 分解 5.1.10 より，$\Phi(E)=\overline{V}-|\underline{V}|=0-0=0$．

(2) $\Rightarrow$　Φ を特異とすると，μ-零集合 $E_0\in\mathcal{B}$ が存在して，$\forall_{E\subset E_0^\complement}\ \Phi(E)=0$．この時，任意の $E\subset E_0^\complement$ について，$(0\leqslant)\overline{V}(E)\leqslant\overline{V}(E^\complement)=\sup_{E\subset E_0^\complement}\Phi(E)=0$．

$\Leftarrow$　$\overline{V},\underline{V}$ を特異とすると，μ-零集合 $E_1,E_2\in\mathcal{B}$ が存在して，$\forall_{E\subset E_1^\complement}\ \overline{V}(E)=0$ かつ $\forall_{E\subset E_2^\complement}\ \underline{V}(E)=0$．$E_0:=E_1\cup E_2\in\mathcal{B}$ と定めると，任意の $E\subset E_0^\complement=E_1^\complement\cap E_2^\complement$ について，$\Phi(E)=\overline{V}(E)-|\underline{V}(E)|=0-0=0$．

■

系 5.2.4 (絶対連続性・特異性の線型伝播). Φ,Ψ をともに絶対連続とし，$a,b\in\mathbb{R}$ とする．$F:=a\Phi+b\Psi$ も絶対連続である．

定理 5.2.5 (絶対連続性の ϵ-δ 論法による特徴付け). 任意の広義実数値加法的集合関数 $\Phi:\mathcal{B}\to\overline{\mathbb{R}}$ について，(2)⇒(1) が成り立つ．Φ が有限であるとき，(1)⇒(2) も成り立つ．

(1) Φ は絶対連続である．

(2) $\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{E\in\mathcal{B}}\ \mu(E)<\delta_\epsilon\Rightarrow|\Phi(E)|<\epsilon$．

(2) の条件を，狭義に絶対連続ともいう [4]．

[証明].

(2)⇒(1)　任意の μ-零集合 N について，$\Phi(N)=0$ を示せば良い．すると，任意の $\delta>0$ について $\mu(N)<\delta$ であるから，任意の $\epsilon>0$ について $|\Phi(N)|<\delta$ が必要．したがって，$\Phi(N)=0$ が従う．[†5]

(1)⇒(2)　Φ は絶対連続であるが，$\exists_{\epsilon>0}\ \forall_{\delta>0}\ \exists_{E\in\mathcal{B}}\ \mu(E)<\delta\land|\Phi(E)|\geqslant\epsilon$ と仮定し矛盾を導く．この $\epsilon>0$ と $\dfrac{1}{n}>0$ に対して，$\mu(E_n)<\dfrac{1}{2^n},\Phi(E_n)\geqslant\epsilon$ を満たす $\mathcal{B}$ の列 (E_n) が取れる．これに対して，$E_0:=\limsup_{n\to\infty}\overset{def}{=}\cap_{n=1}^\infty\cup_{\nu=n}^\infty E_\nu$ とおくと $E_0\in\mathcal{B}$ で，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $\mu(E_0)\leqslant\sum_{\nu=n}^\infty\mu(E_\nu)\leqslant\sum_{\nu=n}^\infty\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$ を満たすから $\mu(E_0)=0$ である．しかし，いま単調増加集合関数＝有限測度 $\overline{V}$ について $\overline{V}(E_0)\geqslant\limsup_{n\to\infty}\overline{V}(E_n)\geqslant\limsup_{n\to\infty}\Phi(E_n)\geqslant\epsilon$ より 5.1.5，矛盾．

■

要諦 5.2.6. 確かに絶対連続性は，連続性 (Lebesgue 測度に関する絶対連続性) の一般化となっている．が，この連続性が，零集合上の Lebesgue 積分の値が 0 になることと同値であるとは驚いた．この証明の (1)⇒(2) で E_0 を $\limsup_{n\to\infty}E_n$ として構成しているのは，絶対連続性の変動による特徴付けにおいて $E_0:=E_1\cup E_2$ とした議論の可算個への拡張になっている．

[†5] 対偶を考えれば明らか．実際，$[\exists_{N\in\mathcal{B}}\ \mu(N)=0\land\Phi(N)\neq0]\Rightarrow[\exists_{\epsilon>0}\ \forall_{\delta>0}\ \mu(E)<\delta\land|\Phi(E)|>\epsilon]$ は，$E=N$ とすれば従う．

定理 5.2.7 (特異性の ϵ-δ 論法による特徴付け). 次の 2 条件は同値である．

(1) Φ は μ-特異である．
(2) $\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{E\in\mathcal{B}}\ \mu(E)<\epsilon \wedge V_\Phi(X\backslash E)<\epsilon$.
(3) Jordan 分解について，$\Phi^+\perp\mu^+$ かつ $\Phi^+\perp\mu^-$ かつ $\Phi^-\perp\mu^+$ かつ $\Phi^-\perp\mu^-$.

5.2.2 Lebesgue の分解

定理 5.2.8 . 可測空間 $(S,\mathcal{M})$ 上の 2 つの広義実数値の完全加法的集合関数 $\mu,\nu:\mathcal{M}\to\overline{\mathbb{R}}$ について，ν が有限ならば，次のような分解が一意的に存在する：

$$\nu=\nu_1+\nu_2\quad(\nu_1\ll\mu\wedge\nu_2\perp\mu).$$

5.2.3 不定積分の特徴付けとしての Radon-Nikodym の定理

加法的集合関数は測度 μ に対して絶対連続部分と特異部分に分解でき，絶対連続な部分は何かしらの関数の不定積分??としての表現を持つ．すなわち，不定積分 $L^1\twoheadrightarrow\sigma\text{-Map}(X,\mathbb{R})$ は全射である．しかしこれが成り立つ前提には，空間 X にある種の有限性が必要になる．これは測度が有限であることを少し緩めた，σ-有限性である．

定義 5.2.9 (σ-finite). 測度空間 $(X,\mathcal{B},\mu)$ について，

(1) μ が有限な測度であるとは，$\mathrm{Im}\,\mu\subset\mathbb{R}$ であることをいう．$A\in\mathcal{B}$ が有限測度であるとは，$\mu(A)<\infty$ であることをいう．
(2) 測度 μ が **σ-有限**であるとは，$X=\cup_{n=1}^\infty X_n,\mu(X_n)<\infty$ を満たす列 (X_n) が存在することをいう．
(3) $A\in\mathcal{B}$ が σ-有限な測度を持つとは，$A=\cup_{n=1}^\infty X_n,\mu(X_n)<\infty$ を満たす列 (X_n) が存在することをいう．

補題 5.2.10 (σ-有限性の特徴). $(X,\mathcal{B},\mu)$ は σ-有限とする：$X=\cup_{n=1}^\infty X_n,\mu(X_n)<\infty$ を満たす列 (X_n) が存在する．

(1) Φ が任意の X_n 上で絶対連続／特異ならば，X 上で絶対連続／特異である．
(2) 特に μ は有限で，Φ は零関数ではなく，単調増加とする：$\mathrm{Im}\ \Phi\ \subset\ \mathbb{R}_{\geqslant0}$. この Φ が特異でないならば，$\exists_{n\in\mathbb{N}}\ \exists_{E_n\in\mathcal{B}}\ (\mu(E_n)>0)\wedge\left(\forall_{E\subset E_n}\ \Phi(E)\geqslant\dfrac{1}{n}\mu(E)\right)$.

[証明].

(1) $X_n:=X_n\backslash(\cup_{\nu=1}^{n-1}X_\nu)$ と定め直すことで，列 (X_n) は互いに素に取れる．N を任意の μ-零集合とし，$N_n:=N\cap X_n$ と定めると，(N_n) も互いに素で，$\mu(N_n)\leqslant\mu(N)=0$ より $\mu(N_n)=0$. 各 $(N_n\subset)X_n$ 上で Φ は絶対連続だから，$\Phi(N_n)=0$ である．よって，σ-加法性より，$\Phi(N)=\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\Phi(N_n)=0$.
(2) **方針** $\mu(X)<\infty$ だから，$\Phi_n(E):=\Phi(E)-\dfrac{1}{n}\nu(E)$ は各 $n\in\mathbb{N}$ について加法的集合関数を定める．これについて Hahn の分解定理 5.1.12 より，集合 $E_n\in\mathcal{B}$ が存在して，

$$\forall_{E\subset E_n}\ \Phi(E)\geqslant\frac{1}{n}\mu(E),\qquad\qquad \forall_{E\subset E_n^c}\ \Phi(E)\leqslant\frac{1}{n}\mu(E),$$

が成り立つ．この列 (E_n) について，$\exists_{n\in\mathbb{N}}\ \mu(E_n)>0$ を示せば良い．

成功 $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \mu(E_n)=0$ と仮定して矛盾を導く．$E_0:=\cup_{n=1}^\infty E_n$ も零集合となり，また $\forall_{E\subset E_0^c}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ (0\leqslant)\Phi(E)\leqslant\dfrac{1}{n}\mu(E)\leqslant\dfrac{1}{n}\mu(X)$ より，$\forall_{E\subset E_0^c}\ \Phi(E)=0$ である．すなわち，Φ は特異であることが従うが，これは条件に矛盾．

■

要諦 5.2.11. (3) のステートメントは証明しやすいように書かれているために状況が理解しにくいが，Φ が 3 つの仮定を満たす時（特に特異でない時），ある零でない集合 $B\in\mathcal{B}$ と $n\in\mathbb{N}_+$ が存在して，Φ を測度 μ を用いて B 上で下から抑えることが出来る：$\forall_{E\subset B}\ \Phi(E)\geqslant\dfrac{1}{n}\mu(E)$. $\dfrac{1}{n}$ ではなく，一般の $\epsilon>0$ で評価しようとすると，列が作れないので最初の議論が失敗する．

定理 5.2.12 (Radon-Nikodym, Lebesgue decomposition, density function / Radon-Nikodym derivative). σ-有限な測度空間 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 上の任意の有限な加法的集合関数 $\Phi:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ について，

(1) 絶対連続で加法的集合関数 $F:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ と特異な加法的集合関数 $\Psi:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ が存在して，$\Phi=F+\Psi$ と表せる．
(2) この分解は一意的である．
(3) この加法的集合関数 F について，X 上の μ-a.e. で一意的に定義された可積分関数 $f:X\to\mathbb{R}$ が存在して，$F(-)=\int_- f(x)d\mu(x)$ と表せる．この f を**密度関数**という．[†6]

[証明]. Hahn 分解 5.1.12 より，ある分割 $X=A+B$ について，Φ は A 上 $\overline{V}+0$，B 上 $0+\underline{V}$ に等しいから，集合関数 0 は絶対連続かつ特異であることに注意して，Φ が単調増加（＝有限測度）であるときについて示せば十分である 5.2.4 : $\Phi\geqslant 0$.[†7] また，σ-有限性の仮定と補題 5.2.10(1) より，$\mu(X)<\infty$ の仮定の下で証明すれば十分である．

(1) **証明の方針**　非負値可測関数からなる集合 $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F}:=\left\{\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{Meas}}(X,[0,\infty])\;\middle|\;\begin{array}{l}\varphi\text{ は}\mu\text{-可積分で，その不定積分 }F_\varphi\text{が}\\ \forall_{E\in\mathcal{B}}\;F_\varphi(E)=\displaystyle\int_E\varphi d\mu\leqslant\Phi(E)\text{ を満たす}\end{array}\right\}$$

と定めると，$0\in\mathcal{F}$ より $\mathcal{F}\neq\emptyset$．基本的な構成としては，$\mathcal{F}$ の元である関数 $\varphi:X\to[0,\infty]$ が定める絶対連続な加法的集合関数 F_φ が X で取る値＝最大値の上限を $(0\leqslant)\alpha:=\sup_{\varphi\in\mathcal{F}}F_\varphi(X)\leqslant\Phi(X)<\infty$ とし，これを実現する密度関数 $f:X\to[0,\infty]\in\mathcal{F}$ を 1 つ上手く構成し，$F:=F_f$ とする．これは $\forall_{E\in\mathcal{B}}\;F(E)\leqslant\Phi(E)$ を満たし，実は $F_f(X)=\alpha$ も満たす．こうして構成した F に対して $\Psi:=\Phi-F(\geqslant 0)$ と定めると，これは特異になることを証明する．

絶対連続部分 F と密度関数 f の構成　ある $\mathcal{F}$ の列 (φ_n) が存在して，$\lim_{n\to\infty}F_{\varphi_n}(X)=\alpha$ を満たすものが取れる．ここで，$f(x):=\sup_{n\geqslant 1}\varphi_n(x)$ と定めるとこれは $f\in\mathcal{F}$ を満たす非負値可測関数である（可測関数の極限は可測 2.3.11）こと，すなわち $\forall_{E\in\mathcal{B}}\;F_f(E)\leqslant\Phi(E)$ を示す．これは $F_f(X)=\alpha$ を含意することを示す．

(a) $f_n:=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\varphi_i(x)$ と置くと，任意の $E\in\mathcal{B}$ に対して $E=\cup_{\nu=1}^n E(f_n=\varphi_\nu)$ が成り立つ．$E_\nu\subset E(f_n=\varphi_n)$ を満たす細分 (E_ν) であって，$E=\sum_{\nu=1}^n E_\nu$ を満たすものが取れる．[†8] これについて，

$$\begin{aligned}\int_E f_n(x)d\mu(x)&=\sum_{\nu=1}^n\int_{E_\nu}f_n(x)d\mu(x)\\&=\sum_{\nu=1}^n\int_{E_\nu}\varphi_n(x)d\mu(x)\\&=\sum_{\nu=1}^n F_{\varphi_\nu}(E_\nu)\leqslant\sum_{\nu=1}^n\Phi(E_\nu)=\Phi(E).\end{aligned}$$

列 $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加で，$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\sup_{n\geqslant 1}\varphi_n(x)=f(x)$ であるから，単調収束定理 3.3.1 と積分の性質 3.1.8(4)$f_n\geqslant f_{n+1}\Rightarrow\int_E f_n d\mu\leqslant\int_E f_{n+1}d\mu$ より，

$$F_f(E)=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)d\mu(x)\leqslant\Phi(E).$$

よって，$f\in\mathcal{F}$ である．

(b) また，同様に単調収束定理 3.3.1 と積分の性質 3.1.8(4)$f_n\geqslant\varphi_n\Rightarrow\int_E f_n d\mu\geqslant\int_E\varphi_n d\mu$ より，

$$\alpha\geqslant F_f(X)=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)d\mu(x)\geqslant\lim_{n\to\infty}\int_X\varphi_n(x)d\mu(x)=\alpha.$$

特異部分 Ψ の構成　次に $\Psi:=\Phi-F_f$ と定めると，F_f は不定積分で特に加法的集合関数だから，Ψ も単調増加な加法的集合関数（＝有限な測度）である．$\Psi=0$ のときは特異で，$\Phi=F_f$ が Jordan 分解を定めるから，$\Psi\neq 0$ と仮定し，Ψ が

[†6] 特に確率論の文脈では**確率密度関数**という．
[†7] 実際，Lebesgue 分解 $\overline{V}=\overline{F}+\overline{\Phi},\underline{V}=\underline{F}+\underline{\Phi}$ について，$\Phi=(\overline{F}-\underline{F})+(\overline{\Phi}-\underline{\Phi})$ としても良い．はず．
[†8] $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ が $x\in E$ で同じ値を取るかもしれない．これを適当に配分して互いに交わらないようにする．

特異であることを示せば良い．特異でないと仮定して矛盾を導く．$\mu(X) < \infty$ で Ψ は特異で $\Psi \neq 0$ としたから，ある自然数 $n \geqslant 1$ と測度が正な集合 $E_n \in \mathcal{B}$ が存在して，$\forall_{E \subset E_n}\ \Psi(E) \geqslant \frac{1}{n}\nu(E)$ が成り立つ 5.2.10(2)．よって，これに対して単関数を $g := \frac{1}{n}\chi_{E_n}$ と定めると，$f+g$ はやはり X 上非負値の可積分関数で（可積分関数の和は可積 3.1.8(9)），任意の $E \in \mathcal{B}$ に対して，

$$\begin{aligned}
F_{f+g}(E) &= \int_E f(x)d\mu(x) + \int_E g(x)d\mu(x) \\
&= F_f + \frac{1}{n}\mu(E \cap E_n) \\
&\leqslant F_f(E) + \Psi(E \cap E_n) \\
&\leqslant F_f(E) + \Psi(E \cap E_n) + \Psi(E \cap E_n^{\complement}) && \Psi \geqslant 0 \\
&\leqslant F_f(E) + \Psi(E) = \Phi(E)
\end{aligned}$$

より，$f + g \in \mathcal{F}$ である．しかし，同様の評価で $\mu(E_n) > 0$ より

$$F_{f+g}(X) = F_f(X) + \frac{1}{n}\mu(E_n) > F_f(X) = \alpha$$

が従ってしまい，これは α の定義に矛盾する．

(2) 絶対連続な加法的集合関数 F_1, F_2 と特異な加法的集合関数 Ψ_1, Ψ_2 について，$\Phi = F_1 + \Psi_1 = F_2 + \Psi_2$ と表せたとする．すると $F_1 - F_2 = \Psi_2 - \Psi_1$ であるが，この両辺は絶対連続かつ特異だから，恒等的に 0 である．従って，$F_1 = F_2, \Psi_1 = \Psi_2$．

(3) 積分の性質 $f_1 = f_2$ a.e. $\Rightarrow \int_E f_1 d\mu \int_E f_2 d\mu$3.1.8(4) より，$f$ は μ-a.e. x に対して確定する．

■

要諦 5.2.13 (列を巧みに用いた構成)**.**
任意の可測集合 $E \subset X$ 上での積分 $\int_E f d\mu$ が $\Phi(E)$ を超えない中で，最大にする密度関数 f が，Radon-Nykodym の密度関数（Φ との差がたかだか特異な加法的集合関数）である．$F_\varphi(X)$ を最小上界にする $\varphi \in \mathcal{F}$ に収束する点列 (φ_n) が取れるから，これに対して $f(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(x)$ とすると，これは単調増加列 $(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ の極限でもあるから，単調収束定理により積分と極限が交換するし，その極限でも $F_f(E) \leqslant \Phi(E)$ の性質は保たれる．この f について $F_f(X)$ が最小上界を取る元であること，すなわち結局最大値 $\max_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi(X)$ であったことにより，Ψ は特異になる．

反例 5.2.14. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ が σ-有限でない場合は，次の反例がある．

歴史 5.2.15. 有限閉区間上の実数値関数が不定積分で与えられる必要十分条件が絶対連続性であることを定立したのが Lebesgue であったが，一般の $\mathbb{R}^n$ 上に拡張したのが Radon (1913) で，さらに一般の測度空間として，絶対連続性の定義を集合関数に対して付与しなおしたのが Nikodym (1930) である．

5.3　完全加法的集合関数の各点収束極限

定理 5.3.1 (Saks (1933)). $(S, \mathcal{M}, \mu)$ を σ-有限な測度空間，$\{f_n\} \subset L^1(S)$ を可積分関数列とする．不定積分の列 $\{F_n(E) := \mu[1_E f_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $\mathcal{M}$ 上で各点収束するならば，次の 2 条件が成り立つ．

(1) $\{F_n\}$ は n に関して一様に狭義絶対連続である：$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \mu(E) < \delta \Rightarrow |F_n(E)| < \epsilon$.
(2) 極限関数 $F : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ は絶対連続で，μ に関するある可積分関数 f の不定積分である．

系 5.3.2 . $(S, \mathcal{M})$ を可測空間，$\{\Phi_n\} \subset \mathrm{Map}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ を加法的集合関数の列とする．これが $\mathcal{M}$ 上で各点収束するならば，極限関数 $\Phi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ も完全加法的集合関数である．

5.4　有限加法的集合関数の分解

定義 5.4.1 (purely finitely additive). $\mathcal{F}$ を代数，$\lambda : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ を有限加法的集合関数，$M_f(S)$ をその全体とする．$0 \leqslant \lambda \in M_f(S)$ が**純有限加法的**であるとは，任意の $\mu \in [0, \lambda]$ が $\mathcal{F}$ 上 σ-加法的ならば $\mu = 0$ であることをいう．

定理 5.4.2 . $0 \leqslant \lambda \in M_f(S)$ に対して，集合体 $\mathcal{F}$ 上 σ-加法的な λ_σ と，$\mathcal{F}$ 上純有限加法的な λ_p とが存在して，ただ一通りに分解される：$\lambda = \lambda_\sigma + \lambda_p$.

5.5　完全加法的集合関数の微分についての Lebesgue の定理

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上の単調増加関数は殆ど至る所微分可能である．類似の事実が $\mathbb{R}^n$ 上でも成り立つ．

5.6　直線上の絶対連続関数

5.6.1　絶対連続性

定義 5.6.1 (absolutely continuous, functions of bounded variation). $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ を有界な関数とする．

(1) F が絶対連続であるとは，次が成り立つことをいう：$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{\{(a_i,b_i]\}_{i=1}^n:\text{ 互いに素な }[a,b]\text{ 内の有限区間列}}\ \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| < \epsilon$.[†9]

(2) F が有界変動であるとは，次が成り立つことをいう：$\exists_{M>0}\ \forall_{\Delta:[a,b]\text{ の有限分割}}\ \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leqslant M$.

[†9] 特に，絶対連続ならば連続．

第 6 章

関数の代数

6.1 L^p の基礎構造

6.1.1 Hölder の不等式

命題 6.1.1 .

(1) (Young) $\forall_{x,y\geqslant 0}\ \forall_{\lambda\in[0,1]}\ x^\lambda y^{1-\lambda} \leqslant \lambda x + (1-\lambda)y$．$\lambda \in (0,1)$ のとき，等号成立条件は $x = y$.

(2) $|(f|g)| \leqslant \|f\|_p \|f\|_q$.

系 6.1.2 . $\forall_{p\in[1,\infty]}\ L^p(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

6.1.2 稠密部分空間

定理 6.1.3 (単関数). $L^p(X)$ $p \in [1,\infty]$ において，

(1) 単関数は L^p-稠密である．

(2) 任意の $f \in L^p(X)$ について，$|\phi_n| \leqslant |f|$ を満たすように取れる．

(3) $p < \infty$ ならば，さらに台が測度有限になるように取れる．

定理 6.1.4 (コンパクト台を持つ可微分関数). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を Lebesgue 可測とし，$1 \leqslant p < \infty$ とする．

(1) $C_c(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$-稠密.

(2) $C_c^\infty(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$-稠密.

6.1.3 双対空間

注 6.1.5. $L^2(X;\mathbb{C})$ には，Riesz による同一視 $\varphi : L^2(X;\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} (L^2(X;\mathbb{C}))^*; u \mapsto (u|-)$ があるが，これは半線型な作用素である．そこで，応用上はペアリング $\langle u|v\rangle = \int_X uvdx$ を考え，これについて同一視 $u \mapsto \langle u|-\rangle$ をする．

例 6.1.6 (重み付き L^2-空間). $\langle x\rangle := (1+|x|^2)^{1/2}$ とおき，

$$L^2_s(\mathbb{R}^n) := L^2(\mathbb{R}^n; \langle x\rangle^{2s}dx)$$

と定めると，内積は $L^2_s \simeq (L^2_s)^*$ を引き起こし，ペアリングは $(L^2_s)^* \simeq L^2_{-s}$ を引き起こす． □

6.2 L^1-空間

合成積について Banach 代数をなし，近似的単位元を持つ．$(L^1)^* = L^\infty$ の稠密部分集合は多い．

6.2.1　積分変換

補題 6.2.1 (Schur). $K \in L^1(X \times Y)$ について，

$$M_1 := \sup_{x\in X}\int_Y |K(x,y)|dx < \infty, \quad M_2 := \sup_{y\in Y}\int_X |K(x,y)|dy < \infty$$

とする．このとき，任意の $p \in [1,\infty]$ について，核 K は有界線型な積分変換 $L^p(Y) \to L^p(X)$ を定める：

(1) 任意の $u \in L^p(Y)$ について，$K(x,y)u(y) \in L^1(Y)$ a.e. $x \in X$.
(2) 積分の結果は $Ku \in L^p(X)$ で，さらに $\|Ku\|_p \leqslant M_1^{1-1/p}M_2^{1/p}\|u\|_p$ を満たす．

6.2.2　合成積

合成積は解析では $\mathbb{R}^d$ の加法群の上に定められるが，一般的には群上の環値関数について定義される．半直積のようなものである．微分はこの積について Leibniz 則を満たし，Fourier 解析はこの積について関手性を持つ．圏論化が Day 合成積というものになる．

定義 6.2.2 (convolution). Lebesgue 可積分関数 $f,g,h : \mathbb{R}^d \to [-\infty,\infty]$ に対して，

(1) $f(x-\cdot)g(\cdot) : \mathbb{R}^d \to [-\infty,\infty]$ は殆ど至る所 Lebesgue 可積分である．
(2) $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dm(y)$ で定まる関数 $f * g : \mathbb{R}^d \to [-\infty,\infty]$ は殆ど至る所 Lebesgue 可積分であり，$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$ が成り立つ．すなわち：

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f * g(x)|dm \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dm \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|dm.$$

(3) (可換) 殆ど至る所で $f * g = g * f$ が成り立つ．すなわち：

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)f(y)dy.$$

(4) (結合的) 殆ど至る所で $f * (g * h) = (f * g) * h$ が成り立つ．

[証明].

(1) **$f(x-y)g(y) : \mathbb{R}^{2d} \to \overline{\mathbb{R}}$ の Lebesgue 可測性**　定理 1.5.9 より $f(x-y)$ は $\mathbb{R}^{2d}$ 上 Lebesgue 可測であることが従う．すると，$|f(x-y)g(y)|$ も可測である（$h = h^+ - h^-$ に対して $|h| = h^+ + h^-$ であるため）．
$f(x-y)g(y) : \mathbb{R}^{2d} \to \overline{\mathbb{R}}$ の Lebesgue 可積分性　完備空間についての Fubini の定理??より，非負値 Lebesgue 可測関数 $|f(x-y)g(y)|$ について，一変数化 $|f(x-\cdot)g(\cdot)| : \mathbb{R}^d \to [0,\infty]; y \mapsto |f(x-y)||g(y)|$ は殆ど至る所 Lebesgue 可測であり，$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|dm(y)$ が定まり，$x \in \mathbb{R}^d$ 上殆ど至る所 Lebesgue 可測である．さらに，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2d}} |f(x-y)||g(y)|dm(z) &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y)|dm(y)\right)dm(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y)|dm(x)\right)dm(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|dm(x)\right)dm(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|dm(y)\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|dm(x) < \infty \qquad \because \text{平行移動不変性 } 1.5.9\end{aligned}$$

より，$f(x-y)g(y)$ は $\mathbb{R}^{2d}$ 上可積分である．したがって，可積分関数についての Fubini の定理 3.4.5 より，一変数化 $y \mapsto f(x-y)g(y)$ も殆ど至る所の $x \in \mathbb{R}^d$ について可積分である．$|f(x-y)|g(y)|| : \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ は y の関数として Lebesgue 可積分である．

(2) $f(x-y)g(y)$ は $\mathbb{R}^{2d}$ 上可積分であるから，可積分関数についての Fubini の定理 3.4.5 より，一変数化 $y \mapsto f(x-y)g(y)$ も殆ど至る所の $x \in \mathbb{R}^d$ について可積分である上に，その積分は殆ど至る所の $x \in \mathbb{R}^d$ について可積分である．

(3) $t := x - y$ とおく変数変換より，

$$\begin{aligned}(f \star g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)dt \\ &= (g \star f)(x)\end{aligned}$$

■

定理 6.2.3 . $f \in L(\mathbb{R}^n)$ について，$Tu := f * u$ とし，$1 \leqslant p \leqslant \infty$ とする．

(1) $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ならば，$T \in B(L^p)$ であり，$\|Tu\|_p \leqslant \|f\|_1 \|u\|_p$．
(2) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ならば，$T \in B(L^1, L^p)$ であり，$\|Tu\|_p \leqslant \|f\|_p \|u\|_1$．
(3) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ならば，$T \in B(L^q, L^\infty)$ でもあり，$\|Tu\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|u\|_q$．またこのとき，$\mathrm{Im}\ T \subset C_0(\mathbb{R}^n)$ でもある．

定理 6.2.4 (合成積の変種). 合成積と全く同じ定義により，

(1) $\star : L^1(\mathbb{R}) \times L^\infty(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ が定まる．
(2) $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ がさらに微分可能で g' が有界ならば，値域は $C^1(\mathbb{R})$ に入り，次が成り立つ：

$$h'(x) = \int_{\mathbb{R}} g'(y)f(x-y)dy.$$

定理 6.2.5 . $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ は $1/p + 1/q = 1 + 1/r$ を満たすとする．

$$\forall_{f \in L^p(\mathbb{R}^n)}\ \forall_{g \in L^q(\mathbb{R}^n)} \quad \|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

6.2.3　近似的単位元

定理 6.2.6 (近似的単位元の存在). $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ は $\int_{\mathbb{R}} \phi dx = 1$ を満たす任意の可積分関数とする．$\phi_\epsilon(x) := \epsilon^{-1}\phi(x/\epsilon)$ とおくと，任意の $x = a$ で連続な有界関数 $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ について，

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} \phi_\epsilon(x-a)f(x)dx = f(a).$$

要諦 6.2.7. $(\phi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ とすると，これは $C_b(\mathbb{R})$ の近似的単位元である．

(1) ϕ を $N(0,1)$ の確率密度関数とすると，ϕ_ϵ を**熱核**または **Gauss 核**という．
(2) ϕ を $C(0,1)$ の確率密度関数 $\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$ とすると，ϕ_ϵ を **Poisson 核**という．

6.2.4　軟化子

近似的単位元は，さらに $C_c^\infty(\Omega)$ の中にとれて，値域を $C^\infty(\Omega)$ とできる．

定理 6.2.8 . $1 \leqslant p < \infty$ とする．

(1) $\rho \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^n))_+$ かつ $\mathrm{supp}\ \rho \subset [-1,1]^n$ を満たす確率空間が存在する．
(2) これについての畳み込みは対応 $J_m : L^p(\Omega) \to C^\infty(\Omega); f \mapsto \rho_m * f$ を定める．この近似的単位元を **Friedrichs の軟化子**という．
(3) J_m は $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ と見ると有界作用素で，$\|J_m\| \leqslant 1$ を満たす．
(4) $L^p(\mathbb{R}^n)$ の近似的単位元である：$\|\rho_m * f - f\|_p \to 0$．

6.2.5　L^1 の双対空間

補題 6.2.9 . $f \in L^1([a,b])$ に対して，$1_{[a,x]} \in L^\infty([a,b])$ $(x \in [a,b])$ は $L^\infty([a,b])$ 上 w^*-稠密である：

$$\forall_{x\in[a,b]} \int_a^x f dt = 0 \Rightarrow f(t) = 0 \text{ a.e.}$$

6.2.6　Fourier 変換

定義 6.2.10 . $f \in L^1(\mathbb{R})$ の指標 $e_t = e^{ixt}$ との合成積の $x = 0$ での値を $\widehat{f}(t) := (e_t * f)(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(x)dx$ と定める．

命題 6.2.11 .

(1) 値域は $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ となる．
(2) さらに $(1 + |x|)f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ も満たすとき，$\widehat{f} \in C_0^1(\mathbb{R})$ で，

$$(\widehat{f})'(t) = -i \int e^{ixt} x f(x) dx.$$

6.3　Fourier 変換

$e_t = e^{ixt}$ は，微分作用素の組 $D_j = -i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ $(j \in [n])$ の同時固有関数である：

$$D_j e^{-ixt} = t_j e^{ixt}.$$

ここから Fourier 変換は微分作用素を乗算作用素に変換する性質を持つ．

6.3.1　定義

$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to UC_0(\mathbb{R}^n)$ が定まる．

定義 6.3.1 . $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ の指標 $e_\xi = e^{i(x|\xi)}$ との合成積の $x = 0$ での値を

$$\widehat{f}(\xi) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}(e_\xi * f)(0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|\xi)} f(x)dx.$$

と定める．

定理 6.3.2 (Riemann-Lebesgue). $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ について，$\hat{u} \in UC_0(\mathbb{R}^n)$.

6.3.2　関手性

定理 6.3.3 .

(1) $\tau_a u(x) = u(x - a)$ を平行移動との合成とする．$\mathcal{F}(\tau_a u)(\xi) = e^{-ia\xi}\mathcal{F}u(\xi)$.
(2) $u_A(x) = u(Ax)$ $(A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ を線形変換との合成とする．

$$(\mathcal{F}u_A)(\xi) = |\det A|^{-1}(\mathcal{F}u)({}^tA^{-1}\xi).$$

定理 6.3.4 (Gauss 関数は Fourier 変換の固有関数). $\phi(x; 0, a) = \dfrac{1}{(\sqrt{2\pi a})^n} e^{-|x|^2/2a}$ $(a > 0)$ について，

$$\widehat{\phi}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-a|\xi|^2/2}.$$

定理 6.3.5 . $u, v \in L^1(\mathbb{R})$ について，$\mathcal{F}(u * v)(\xi) = (2\pi)^{n/2}\hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi)$.

6.3.3　補間定理

定理 6.3.6 (Riesz-Thorin). $X,Y\in\mathrm{Meas}$，$1\leqslant p_0,p_1,q_0,q_1\leqslant\infty$ とする．$T:L^{p_0}(X)\cap L^{p_1}(X)\to L^{q_0}(Y)\cap L^{q_1}(Y)$ は線型写像で

$$\exists_{M_0,M_1\in\mathbb{R}}\ \forall_{u\in L^{p_0}(X)\cap L^{p_1}(X)}\ \|Tu\|_{L^{q_0}}\leqslant M_0\|u\|_{L^{p_0}}\wedge\|Tu\|_{L^{q_1}}\leqslant M_1\|u\|_{L^{p_1}}$$

を満たすとする．このとき，

$$\frac{1}{p_t}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1},\quad\frac{1}{q_t}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1},\quad t\in(0,1)$$

を満たすならば，

(1) $u\in L^{p_0}(X)\cap L^{p_1}(X)$ について $Tu\in L^{q_t}(Y)$.
(2) $\forall_{t\in[0,1]}\ \|Tu\|_{L^{q_t}}\leqslant M_0^{1-t}M_1^t\|u\|_{L^{p_t}}$.
(3) 特に，T は有界線型作用素 $L^{p_t}(X)\to L^{q_t}(Y)$ に一意に延長される．

歴史 6.3.7. この Riesz による実解析の方法，Thorin による複素解析の方法による証明が，補間空間理論の端緒となった．補間空間論とは，線型作用素 T に対して $\|Tx\|\leqslant C\|x\|$ の形の不等式を組織的に作り出す方法論である．この理論の発展の原動力は，分数回微分可能な関数の定義であった．Aronszajn もいる．

6.3.4　急減少関数の空間への制限

$\langle x\rangle=\sqrt{1+|x|^2}$ とおく．$|x|\to\infty$ の極限で $\langle x\rangle\sim(1+|x|)$ であるが，$1+|x|$ とは違って滑らかである．

定義 6.3.8 . 滑らかな関数 $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ について，

(1) $\forall_{N>0}\ \forall_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\ \langle x\rangle^N|\partial^\alpha u(x)|\in C_b(\mathbb{R})$ を満たすとき，**急減少**であるという．その全体を $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ と表す．$\mathcal{D}\subset\mathcal{S}$ に注意．
(2) $p_l:\mathcal{S}\to\mathbb{R}\ (l\in\mathbb{N})$ を $p_l(u):=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\langle x\rangle^l\sum_{|\alpha|\leqslant l}|\partial^l u(x)|$ で定める．
(3) この半ノルムの族が $\mathcal{S}$ に定める位相は距離

$$d(u,v)=\sum 2^{-l}\frac{p_l(u-v)}{1+p_l(u-v)}.$$

が生成し，完備な距離空間になる．

命題 6.3.9 .

(1) $\mathcal{S}$ は線型空間である．
(2) $\langle x\rangle^m\partial^\alpha:\mathcal{S}\to\mathcal{S}\ (\alpha\in\mathbb{N}^n,m\in\mathbb{Z})$ は連続になる．
(3) 特に $m>0$ のとき，$\forall_{p\in[1,\infty]}\ \langle x\rangle^m\partial^\alpha u\in L^p(\mathbb{R}^n)$.
(4) $\mathcal{S}$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$)$(1\leqslant p<\infty)$ の稠密部分集合である．
(5) 畳み込みについて閉じている：$\star:\mathcal{S}\times\mathcal{S}\to\mathcal{S}$.

定理 6.3.10 .

(1) $\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S},\mathcal{F}^*:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ は互いに逆な同型写像である．ただし，

$$\mathcal{F}^*u(\xi):=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\xi}u(x)dx.$$

(2) $\mathcal{F}$ は微分と乗算を交換する：

$$(\partial_\xi^\alpha\widehat{u})(\xi)=\mathcal{F}((-ix)^\alpha u)(\xi),\quad(i\xi)^\alpha\widehat{u}(\xi)=(\mathcal{F}\partial^\alpha u)(\xi).$$

6.3.5 試験関数の空間への制限

定理 6.3.11 (Paley-Wiener). $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$ とする．

(1) $\widehat{\phi}(\xi)$ は整関数に解析接続出来る．
(2) さらに $\operatorname{supp}\phi \subset [-R, R]$ を満たすならば，$\forall_{N\in\mathbb{N}}\ \exists_{C_N\in\mathbb{R}}\ |\phi(\zeta)| \leqslant C_N\langle\zeta\rangle^{-N}e^{|\operatorname{Im}\zeta|}$.

6.3.6 L^2 への延長

定理 6.3.12 . $\mathcal{F}, \mathcal{F}^* : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ はいずれも Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上のユニタリ作用素に延長され，$L^2(\mathbb{R}^n)$ 上で $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ が成り立つ．

定理 6.3.13 (Hausdorff-Young の不等式). $p \in [1, 2]$ とする．このとき，

(1) $\forall_{u\in\mathcal{S}}\ \|\mathcal{F}u\|_p \leqslant (2\pi)^{-n(1/p-1/2)}\|u\|_p$ が成り立つ．
(2) $\mathcal{F}$ は有界作用素 $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ に延長される．

6.3.7 Sobolev 空間の特徴付け

定理 6.3.14 . $s \in \mathbb{N}, u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ について，

(1) $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ であることは，$\hat{u} \in L^2_s(\mathbb{R}^n)$ かつ $C^{-1}\|u\|_{H^s} \leqslant \|\mathcal{F}u\|_{L^2_s} \leqslant C\|u\|_{H^s}$ に同値．
(2) $u \in L^2_s(\mathbb{R}^n)$ であることは，$\hat{u} \in H^s(\mathbb{R}^n)$ かつ $C^{-1}\|u\|_{L^2_s} \leqslant \|\mathcal{F}u\|_{H^s} \leqslant C\|u\|_{L^2_s}$ に同値．
(3) $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ ならば，$\partial^\alpha u(x) = \mathcal{F}^*((i\xi)^\alpha\hat{u})$.

6.3.8 Sobolev の埋蔵定理

定義 6.3.15 . 任意の $s \in \mathbb{R}_+$ について，
$$H^s(\mathbb{R}^n) := \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \hat{u} \in L^2_s(\mathbb{R}^n)\right\}$$
と定める．内積は $(u|v) := (\mathcal{F}u|\mathcal{F}v)_{L^2_s(\mathbb{R}^n)}$ と定めると，これは Hilbert 空間になる．

定理 6.3.16 . $k \in \mathbb{N}, s > n/2 + k$ とする．$f \in H^s(\mathbb{R}^n) \cap C^k(\mathbb{R}^n)$ について，f に依存しない定数 M_s, C_s が存在して次が成り立つ：

(1) $\displaystyle\sum_{|\alpha|=k}\sup|\partial^\alpha f(x)| \leqslant M_s\|f\|_{H^s}$.
(2) Holder 連続性：$\displaystyle\sum_{|\alpha|=k}|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)| \leqslant C_s|x-y|^{1\wedge(s-(n/2)-k)}\|f\|_{H^s}$.

6.3.9 緩増加関数上への随伴

ペアリング $\langle -, - \rangle : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ を多義で使う．$\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ であるから，その積分を通じたペアリングとみても良いし，$\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ 間の標準的なペアリングとも見る．

定義 6.3.17 . $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ について，

(1) $\exists_{N\in\mathbb{N}^+}\ \langle x\rangle^{-N}u(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ が成り立つとき，**緩増加**であるという．
(2) $\mathcal{S}$ の双対空間 $\mathcal{S}'$ の元を **Schwartz 超関数**という．$\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ より，$\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ である．
(3) $T \in \mathcal{S}'$ の微分 $\partial^\alpha T$ を $\mathcal{S} \ni \phi \mapsto (-1)^{|\alpha|}T(\partial^\alpha\phi)$ で定めると，これは超関数としての微分に一致する．
(4) 緩増加関数 u は，次のように Schwartz 超関数と同一視出来る：
$$T_u : \mathcal{S} \ni \phi \mapsto \langle T_u, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\phi(x)dx.$$

命題 6.3.18 .

(1) $\partial^\alpha : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ は点列の収束を保つ.
(2) $k \in \mathbb{N}$ について，$H^{-k}(\mathbb{R}^n) := (H^k_c(\mathbb{R}^n))^* \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
(3) $\|u_n - u\|_{H^{-k}} \to 0$ ならば，$u_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} u$.

定義 6.3.19 . $\mathcal{S}$ 上のペアリングについて，$\langle \mathcal{F}u, v\rangle = \langle u, \mathcal{F}v\rangle$ なのであった．そこで，$T \in \mathcal{S}'$ 上の Fourier 変換 $\mathcal{F}T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ を，

$$\mathcal{F}T : \mathcal{S} \ni \phi \mapsto \langle T, \mathcal{F}\phi\rangle$$

と定めると，$\langle \mathcal{F}T, \phi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\phi\rangle$ を満たす．同様にして，$\langle \mathcal{F}^*T, \phi\rangle = \langle T, \mathcal{F}^*\phi\rangle\ (\phi \in \mathcal{S})$ と定める.

定理 6.3.20 . $\mathcal{F}, \mathcal{F}^* : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ は連続な同型写像で，$\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ を満たす.

命題 6.3.21 . $s \in \mathbb{R}^+$ とする．次は同値：

(1) $T \in (H^s)^*$.
(2) $\widehat{T} \in L^2_{-s}(\mathbb{R}^n)$.

6.4　Sobolev 空間

$C_c^\infty(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ 上稠密であったが，$C^\infty(\Omega)$ の部分空間として作った $W^{k,p}(\Omega)$ は再び $L^p(\Omega)$ 上完備である.

6.4.1　定義

補題 6.4.1 . $\Omega \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n, 1 \leqslant p < \infty, k \in \mathbb{N}$ について，k-階 L^p-微分可能な関数の全体を

$$V^{k,p}(\Omega) := \left\{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \mid \forall_{|\alpha| \leqslant k}\ \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\right\}$$

とすると，各 k 階までの導関数の空間 $L^p(\Omega)$ の 1-ノルム

$$\|u\|_{k,p} := \left(\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant k} \|\partial^\alpha u\|_p^p\right)^{1/p}$$

についてノルム空間になるが，完備でない.

定義 6.4.2 .

(1) $(V^{k,p}, \| - \|_{k,p})$ の完備化 $W^{k,p}(\Omega)$ を **Sobolev 空間**という.
(2) $C_c^\infty \subset V^{k,p}$ の $C_0^\infty \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega)$ における閉包を $W_0^{k,p}(\Omega)$ と表す.

注 6.4.3. $\partial^\alpha u$ が存在するからといって，より低次の弱微分が存在するとは限らない．このような厄介な性質を取り去るには，超関数微分として特徴付けしなおすことが良い．実際，$u(x_1, x_2) = x_1 \log|x_2|$ は，$\partial_1^2\partial_2$-弱微分可能だが，∂_2-弱微分可能ではない.

命題 6.4.4 (関数の代数としての構造). 関数の積は $W^{k,p}(\Omega) \times C_b^k(\overline{\Omega}) \to W^{k,p}(\Omega)$ を定める.

命題 6.4.5 (Hilbert 空間になるとき). $W^{m,2}(\Omega), W_c^{m,2}(\Omega)$ は次の内積によって Hilbert 空間となる：

$$(u|v) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega \partial^\alpha u(x)\overline{\partial^\alpha v(x)}dx.$$

6.4.2　弱微分可能な関数のなす部分空間としての特徴付け

$W^{k,p}(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ のうち，k 階弱微分可能な関数のなす閉部分空間と同一視できる.

補題 6.4.6 (変分法の基本補題). $C_c^\infty(\Omega)$ は $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ を分離する：

$$\forall_{\phi\in C_c^\infty(\Omega)}\ \int_\Omega f\phi dx = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ a.e.}$$

定義 6.4.7 (弱微分). $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ と $\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| =: k$ について，

$$\forall_{\phi\in C_c^\infty(\Omega)}\ \int_\Omega u_\alpha(x)\phi(x)dx = (-1)^k \int_\Omega u(x)\partial^\alpha\phi(x)dx$$

を満たす $u_\alpha \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ が存在するとき，u は ∂^α-**弱微分可能**であるという．弱微分は存在すればただ一つであり，$u_\alpha(x) := \partial^\alpha u(x)$ とかく．

要諦 6.4.8. $u \in W^{k,p}(\Omega)$ の場合は，k 階までの弱微分 $\{u_\alpha\}_{|\alpha|\leqslant k}$ は存在し，全て u_0 の弱微分 $u_\alpha = \partial^\alpha u_0 \in L^p(\Omega)$ となる．この対応 $W^{k,p}(\Omega) \ni u \mapsto u_0 \in L^p(\Omega)$ によって $W^{k,p} \subset L^p(\Omega)$ と自然に同一視する．

定理 6.4.9 (Sobolev 空間の L^p-部分空間としての特徴付け). $\Omega \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n, 1 \leqslant p < \infty, k \in \mathbb{N}$ について，次が成り立つ：

$$W^{k,p}(\Omega) \simeq_{\mathrm{Ban}} \left\{u \in L^p(\Omega) \mid \forall_{|\alpha|\leqslant k}\ \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\right\}.$$

6.4.3　弱微分と超関数

$\mathcal{D}'(\Omega)$ には w^*-位相を入れ，これについての収束を**超関数の意味での収束**という．$\mathcal{D}'(\Omega)$ は点列完備である：任意の $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ について各点収束するならば，w^*-収束する．

命題 6.4.10 . $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ とする．

(1) u, v が ∂^α-弱微分可能とする．$\mathbb{C}u + \mathbb{C}v$ の任意の元も ∂^α-弱微分可能で，∂^α はこの上の線型作用素である．
(2) u が ∂^α-弱微分可能，$\partial^\alpha u$ が ∂^β-弱微分可能とする．すると u は $\partial^{\alpha+\beta}$-弱微分可能で，$\partial^\beta(\partial^\alpha u) = \partial^{\alpha+\beta}u$.
(3) $f \in C_b^k(\Omega), u \in W^{k,p}(\Omega)$ について，$fu \in W^{k,p}(\Omega)$ であり，次の積の微分法則が成り立つ：

$$\partial^\alpha(fu) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \cdot \partial^\gamma u.$$

定義 6.4.11 (超関数). $\{\phi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$ について，

(1) $\phi_n \xrightarrow{d} \phi$ とは，次の 2 条件を満たすことをいう：
  (a) $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{supp}\ \phi_n$ は有界.
  (b) $\forall_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\ \partial^\alpha\phi_n \to \partial^n\phi$ が一様収束位相について成り立つ.
(2) $\mathcal{D}(\Omega)$ のこの位相についての双対空間 $\mathcal{D}'(\Omega) := (\mathcal{D}(\Omega))^*$ の元を Ω 上の**超関数**という．
(3) 超関数 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ について，次を満たす $\partial^\alpha T$ を ∂^α-**微分**という：

$$\int_\Omega (\partial^\alpha T)\phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega T(\partial^\alpha\phi)dx.$$

これは常に存在する．

例 6.4.12. $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ は超関数であり，さらに変分法の基本補題より包含 $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ が定まる．以後，これによって同一視する．すると，$u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ が弱微分可能であれば，その弱微分は超関数微分に一致する．弱微分不可能というのは，その超関数微分が $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ の値域に収まらない，ということと同値である．なお，超関数微分が $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に収まるとき，これを局所可積分という． □

命題 6.4.13 .

(1) $\partial^\alpha, \partial^\beta : \mathcal{D}'(\Omega) \to D'(\Omega)$ は可換かつ結合的な線型作用素である．
(2) $C^\infty(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ が (f, T) に対して前合成 $(fT)(\phi) := T(f\phi)$ によって定まる．
(3) Leibniz 則が成り立つ：

$$\partial^\alpha(fT) = \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} T.$$

6.4.4　Sobolev 空間の双対空間

$\mathcal{D}(\Omega)=C_c^\infty(\Omega)\subset H_c^k(\Omega)$ だから，その双対空間は $\mathcal{D}'(\Omega)$ の部分空間である．

定義 6.4.14．Hilbert 空間 $H_c^k(\Omega)$ の双対空間を $H^{-k}(\Omega)$ で表すと，内積を通じた Riesz 表現は $H^{-k}(\Omega)\simeq_{\mathrm{Ban}} H_c^k(\Omega)$ を引き起こす．

命題 6.4.15．

$$H^{-k}(\Omega)\simeq_{\mathrm{Ban}}\left\{\sum_{\alpha\leqslant k}(-1)^{|\alpha|}\partial^{2\alpha}u\in\mathcal{D}'(\Omega)\;\middle|\;u\in H_c^k(\Omega)\right\}.$$

系 6.4.16．

(1) $u\in L^2(\Omega)$ ならば，$\partial^\alpha u\in H^{-k}(\Omega)$ $(k:=|\alpha|)$ が成り立つ．

(2) 任意の $w\in H^{-k}(\Omega)$ に対して，$\{u_\alpha\}_{|\alpha|\leqslant k}\subset L^2(\Omega)$ が存在して，

$$w=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\partial^\alpha u_\alpha(x).$$

6.4.5　コンパクト性定理

定理 6.4.17 (Rellich)．$1\leqslant p<\infty,\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を有界領域，$0\leqslant s<k\in\mathbb{N}$ とする．埋め込み $J:W_c^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow W_c^{s,p}(\Omega)$ はコンパクトである．

系 6.4.18．$1\leqslant p<\infty,\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を領域，$0\leqslant s<k\in\mathbb{N},\{u_n\}\subset W^{k,p}(\Omega)$ を有界列とする．$\overline{\Omega'}\subset\Omega$ をコンパクトとするとき，$W^{s,p}(\Omega')$ において収束する $\{u_n\}$ の部分列が存在する．

6.5　偏微分方程式論

6.5.1　定義

定義 6.5.1．$\Omega\overset{\text{open}}{\subset}\mathbb{R}^n,a_\alpha:\Omega\to\mathbb{R}$ について，$P:=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)\partial^\alpha$ で定まる線型作用素を**偏微分作用素**という．

(1) 次の形の二階偏微分作用素を**一様楕円型**という．

$$L(x;\partial)u(x)=-\sum_{i,k\in[n]}\partial_j(a_{jk}(x)\partial_k u(x))+c(x)u(x)$$

ただし，

$$a_{jk}=a_{kj},\exists_{\lambda\leqslant\Lambda\in\mathbb{R}^+}\ \forall_{x\in\Omega}\ \forall_{\xi\in\mathbb{R}^n}\ \lambda|\xi|^2\leqslant\sum_{j,k\in[n]}a_{jk}(x)\xi_j\xi_k\leqslant\Lambda|\xi|^2,c\geqslant 0.$$

とする．$D(L):=\left\{u\in H_c^1(\Omega)\mid Lu\in L^2(\Omega)\right\}$ と表す．

(2) Ω が**なめらかな境界を持つ**とは，任意の $a\in\partial\Omega$ について，近傍 $U\in\mathcal{O}(a)$ と $\nabla\phi(x)\neq 0$ を満たす $\phi\in C^\infty(U)$ が存在して，$U\cap\partial\Omega=\phi^{-1}(0)$ と表せることをいう．

6.5.2　trace 定理

$W^{1,p}(\Omega)$ の元について，「$\partial\Omega$ への制限」が考えられる．その仕組は，$u\in W^{1,p}(\Omega)$ の修正を取り直すことによる．

記法 6.5.2. $1\leqslant p<\infty,a_{jk}\in C^1(\overline{\Omega}),c\in C^1(\overline{\Omega})$ とする．

$$(\mathbb{R}^n)^+:=\left\{x=(x_1,x')\in\mathbb{R}^n\mid x_1>0\right\}$$

定理 6.5.3 . $u \in W^{1,p}((a,b))$ は，任意の有界区間上絶対連続で，超関数微分 u' は通常の微分に等しい．

定理 6.5.4 (連続変形定理). $u \in W^{1,p}((\mathbb{R}^n)^+)$ には，次を満たす修正が存在する：

(1) $\forall_{t\in\mathbb{R}_+}\ u(t,-) \in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$，かつ，$u$ に依らない定数 $C > 0$ について，$\|u(t,-)\| \leqslant C\|u\|_{1,p}$.
(2) $\forall_{t,s\in\mathbb{R}_+}\ \|u(t,-) - u(s,-)\| \leqslant \|u\|_{1,p}|t-s|^{(p-1)/p}$.

そして，次の意味で一意的である：$\forall_{t\in\mathbb{R}_+}\ u_1(t,x') = u_2(t,x')$ a.e. $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$．特に，$u(t,-) \in L^p(\mathbb{R}^{n-1}) \cap C(\mathbb{R}^{n-1})$ でもあり，超平面 $x_1 = t$ への制限が考えられる．これを $x_1 = t$ **へのトレース**という．

定理 6.5.5 (座標変換不変性). $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ を領域，$\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ を C^∞-級微分同相写像で Φ, Φ^{-1} の k 階までの導関数が有界とする．このとき，前合成 $(\Phi^*u)(x) = u(\Phi(x))$ で定まる対応 $\Phi^* : W^{k,p}(\Omega_2) \to W^{k,p}(\Omega_1)$ は Ban の同型写像である．

定理 6.5.6 . Ω を滑らかな領域を持つ領域とする．次の 2 条件は同値：

(1) $u \in W^{1,p}_c(\Omega)$.
(2) u の $\partial\Omega$ へのトレースは 0 である．

6.5.3　Lax-Milgram 定理

定理 6.5.7 . H を Hilbert 空間，$B : H \otimes H \to \mathbb{C}$ は有界な半双線型形式で，強圧的であるとする：$\exists_{\delta>0}\ \forall_{u\in H}\ B(u,u) \geqslant \delta\|u\|^2$. このとき：

(1) $\exists!_{T\in B(H)}\ \forall_{u,v\in H}\ B(u,v) = (u|Tv)$.
(2) T は可逆で，$\|T^{-1}\| \leqslant \delta^{-1}$.

6.5.4　弱解

問題 6.5.8 . 滑らかな境界を持つ有界領域 Ω 上の，一様楕円型方程式の境界値問題

$$-\sum_{j,k\in[n]} \partial_j(a_{jk}(x)\partial_k u(x)) + c(x)u(x) = f \text{ on } \Omega, \quad u(x) = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

を考える．

(1) $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ がこれを満たすとき，**古典解**という．
(2) $u \in H^1_c(\Omega)$ が

$$\forall_{\phi\in H^1_c(\Omega)}\ \int_\Omega \left(\sum_{j,k\in[n]} a_{jk}\partial_k u \partial_j \phi + cu\phi\right) dx = \int_\Omega f\phi dx$$

を満たすとき，**弱解**という．実は，任意の $\phi \in \mathscr{D}(\Omega) = C^\infty_c(\Omega)$ について確認すれば十分である．これは u が超関数の意味で方程式を満たすことを意味している．

補題 6.5.9 (Poincare). Ω を有界な領域とする．Ω に依存する定数 C が存在して，$\forall_{u\in C^1_c(\Omega)}\ \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \geqslant C\|u\|_{L^2(\Omega)}$.

定理 6.5.10 . $c \geqslant 0$ とする．任意の $f \in H^{-1}(\Omega)$ に対して，境界値問題の弱解 $u \in H^1_c(\Omega)$ は一意的に存在する．

6.5.5　楕円型作用素のスペクトル

定義 6.5.11 .

(1) 弱解への対応 $H^{-1}(\Omega) \to H^1_c(\Omega)$ は同型写像を与える．これを T で表す．
(2) T の $L^2(\Omega)$ への制限を S で表す．

命題 6.5.12 .

(1) S は $L^2(\Omega)$ 上コンパクトかつ自己共役で，固有値は正である．

(2) $L = S^{-1}$ である．

要諦 6.5.13. これに Hilbert-Schmidt の定理を適用すれば，S の固有関数からなる $L^2(\Omega)$-正規直交基底 $\{\phi_n\}$ が存在して，固有値 $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \cdots \to 0$ とすれば，それぞれ多重度有限で，

$$\forall_{u \in L^2(\Omega)}\ u = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n (u|\phi_n)\phi_n$$

が成り立つ．そして L は S の逆だから，$D(L) = R(S)$ で，L の固有値は $\{\lambda_n\} = \{s_n^{-1}\}$．これより，

$$Lu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n (u|\phi_n)\phi_n, \quad D(L) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \;\middle|\; \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^2 |(u|\phi_n)| < \infty \right\}.$$

ここから，L に関連した放物型方程式，波動方程式，Schrodinger 方程式に対する初期値問題の解を固有関数・固有値を用いて書き表して調べることが出来る．

6.5.6　熱伝導方程式

問題 6.5.14 . $u(t,x) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ についての問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \triangle u \text{ on } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$$

を**熱方程式**という．初期条件 $u(0,x) = \phi(x)$ を考える．

定理 6.5.15 . 初期条件 $\phi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ について，作用素の強連続半群 $\{T_t\} \subset B(L^p)$ を

$$T_0 = \mathrm{id}_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad T_t\phi(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} \phi(y) dy = \ (t > 0)$$

と定める．

(1) $\forall_{t \in \mathbb{R}_+}\ T_t \in B \subset B(L^p)$.
(2) $T_-(\phi) : \mathbb{R}_+ \to L^p(\mathbb{R}^n)$ は連続である．
(3) $\forall_{s,t \in \mathbb{R}_+}\ T_t T_s = T_s T_t = T_{t+s}$.
(4) $u(t,x) := T_t\phi(x)$ とすると，$u \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ で，これは熱方程式の解である．

6.5.7　Schrodinger 方程式

問題 6.5.16 . $u(t,x) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ についての問題

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2} \triangle u \text{ on } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

を**自由 Schrodinger 方程式**という．初期条件 $u(0,x) = \phi(x)$ に関する解は，

定理 6.5.17 . 初期条件 $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ について，強連続ユニタリ群を

$$U_0 = \mathrm{id}_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad U_t\phi(x) = \mathcal{F}^*[e^{-it\xi^2/2}\widehat{\phi}](x) = \frac{e^{\mp in\pi/4}}{(2\pi|t|)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)^2/2t} \phi(y) dy \ (t \neq 0)$$

と定める．このとき，

(1) U_t $(t \in \mathbb{R})$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ のユニタリ作用素である．
(2) $U_-\phi : \mathbb{R} \to L^2(\mathbb{R}^n)$ は連続である．
(3) $\forall_{s,t \in \mathbb{R}}\ U_s U_t = U_t U_s = U_{s+t}$.
(4) さらに $\phi \in H^2(\mathbb{R}^n)$ のとき，$u(t,x) := U_t\phi(x)$ とすると，$u(t,-) \in H^2(\mathbb{R}^n)$ かつ $\mathbb{R} \to L^2(\mathbb{R}^n); t \mapsto u(t,-)$ は強微分可能で，

$$i\frac{d}{dt}u(t,-) = -\frac{1}{2} \triangle u_x(t,-).$$

6.6　測度の拡張定理

$\mathbb{R}^\infty$ をはじめとして，無限次元空間上への測度の拡張は，

(1) Kolmogorov は σ-コンパクトな距離空間について，
(2) Bochner は直積の代わりに一般の射影極限について，
(3) Parthasarathy は一般の完備可分距離空間について，

測度の拡張定理を一般化した．さらには緩増加超関数の空間 S' や道の空間 C 上にも測度を考えたい．

6.6.1　Kolmogorov

$\mathbb{R}^\infty$ に対する結果が初めに示された．Meas の帰納極限である．

6.6.2　Kolmogorov による拡張

第 7 章

Hausdorff 測度と fracktal

7.1 面積公式

定理 7.1.1 . $U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^d$ 上の変数変換 $\varphi \in C^1(U;\mathbb{R})$ と Lebesgue 可測集合 $A \subset U$ とを考える．

$$\Phi(A)(y) := \#(A \cap \varphi^{-1}(y))$$

によって可測関数への対応 $\Phi : \mathcal{M}(U) \to \mathcal{L}(\mathrm{Im}\,\varphi)$ が定まり，次の 2 条件は同値：

(1) $f|\det J_\varphi|$ の積分が A 上で確定する．
(2) $\Phi(f)$ の積分が $\varphi(U)$ 上で確定する．

このとき，次が成り立つ：

$$\int_A |\det J_f(x)| m(dx) = \int_{\varphi(U)} \Phi(A)(y) m(dy).$$

定理 7.1.2 . $U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^d$ 上の変数変換 $\varphi \in C^1(U;\mathbb{R})$ と Lebesgue 可測関数 $f : U \to \mathbb{R}_+$ を考える．

$$\Phi(f)(y) = \sum_{x \in \varphi^{-1}(y)} f(x)$$

によって可測関数への対応 $\Phi : \mathcal{L}(U;\mathbb{R}_+) \to \mathcal{L}(\mathrm{Im}\,\varphi)$ が定まり，次が成り立つ：

$$\int_U f(x)|\det J_\varphi(x)| m(dx) = \int_{\mathrm{Im}\,\varphi} \Phi(f)(y) m(dy).$$

要諦 7.1.3. この定理は (従って系としての変数変換公式も)φ が Lipschitz 連続ならば成立する．そして面積公式は，φ の定義域の次元と値域の次元が異なる場合にも拡張できる．これは Hausdorff 測度に関する知見によって実現される．

第 8 章

参考文献

参考文献

[Stein and Shakarchi, 2005] Stein, E. M. and Shakarchi, R. (2005). Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces, volume 3 of Princeton Lectures in Analysis. Princeton University Press.

[Tao, 2010] Tao, T. (2010). An Epsilon of Room, I: Real Analysis: pages from year three of a mathematical blog, volume 117 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society.

[Tao, 2011] Tao, T. (2011). An Introduction to Measure Theory, volume 126 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society.

参考文献

[1] 伊藤清三『ルベーグ積分入門』

[2] 谷島賢二 (2002) 『ルベーグ積分と関数解析』(朝倉書店，数学の考え方 13).

[3] Rudin, W. *Real and Complex Analysis.*

[4] 吉田耕作「測度と積分」(『現代解析入門』)

[5] 藤田宏「現代解析入門」(『現代解析入門』)

[6] 盛田健彦 (2004) 『実解析と測度論の基礎』(数学レクチャーノート，培風館).

[7] Jürgen Jost. (1997). *Postmodern Analysis*. Springer.

[8] Carathéodory, C. (1918). *Vorlesungen über reelle Funktionen, Teubner*

[9] Hopf, E. (1937). *Ergodentheorie*. Springer.

[10] Lebesgue, H. (1904). Leçns sur l'inté gration et la recherche des fonctions primitives. Gauthier-Villarts.

[11] Saks, S. (1937). *Theory of the Integral*. Warszawa.