目次

1 10 月 13 日発表分

方程式の線型性の分類と，2 階線型方程式の分類の問題は要確認.

問題 1.1． 次の 2 階線型偏微分方程式を分類せよ

(1) $u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}-u_x+2u_y-3u=0.$

(2) $u_{xx}+u_{yy}+2u_{zz}-2u_{xy}+u_x+u_y=0.$

[証明].

(1) 主要部は

$$u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}=(\partial_x\ \partial_y)\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\end{pmatrix}u$$

と表せるが，$\left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&1\end{smallmatrix}\right)$ の固有多項式は

$$\Phi(t)=(1-t)^2-4=(t-3)(t+1).$$

であるから，ただ一つだけ符号が違うため，双曲型.

(2) 主要部は

$$u_{xx}+u_{yy}+2u_{zz}-2u_{xy}=(\partial_x\ \partial_y\ \partial_z)\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}u.$$

と表せるが，この固有多項式は

$$\Phi(t)=(1-t)^2(2-t)-(2-t)=-(2-t)^2t$$

より，0 を固有値に持つから広義の放物型．さらに，ただ一つだけ固有値 0 を持ち，他の固有値の符号が等しい．加えて，

$$u_{xx}+u_{yy}+2u_{zz}-2u_{xy}=(\partial_x\ \partial_y\ \partial_z)\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\0&1&0\end{pmatrix}^{\top}\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}u$$

という変換に対して，残りの項は

$$u_x+u_y=\sqrt{2}u_Z,\qquad Z=(x\ y\ z)\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$$

と表せ，2 階の項が消えている変数 Z の 1 階の項は消えていないから，狭義の放物型である.

■

2　10 月 27 日発表分

Hopf の補題と Kelvin 変換の問題．もう一つが簡単な最大値原理の問題．ラストが次の，解公式の制限 $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ を $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ まで取り払う問題．ただし，有界領域 Ω 上で考えることとなる．

問題 2.1． $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域とする．

(1) $f \in L^\infty(\Omega)$ について，

$$u(x) := f * \Phi(x) = \int_\Omega \Phi(x-y)f(y)dy.$$

は $C^1(\Omega)$-級で，

$$D_i u(x) = \int_\Omega D_i\Phi(x-y)f(y)dy.$$

(2) さらに $f \in C^1(\Omega)$ のとき，$u \in C^2(\Omega)$ かつ $-\triangle u = f$ in Ω である．

3　11 月 24 日発表分

Laplace 方程式の Green 関数のよい練習問題．

問題 3.1 (Green 関数を求め方)． 次の領域 $\Omega \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ 上の Green 関数 G を求めよ：

(1) $n \geqslant 2$ について

$$\Omega := \mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}.$$

(2) $n = 2$ について，

$$\Omega := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 > 0\right\}.$$

[証明]． $x \in \mathbb{R}^n$ の反射を

$$x^* := (x_1, \cdots, x_{n-1}, -x_n).$$

と定める．

(1)

$$G(x,y) := \Phi(y-x) - \Phi(y-x^*).$$

(2)

$$x_* := (-x_1, x_2), \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

と表すと，

$$G(x,y) := \Phi(y-x) - \Phi(y-x^*) - \Phi(y-x_*) + \Phi(y-x_*^*).$$

■

問題 3.2 (上半平面上の Poisson 核)． $g(x) = |x|$ $(|x| \leqslant 1)$ を満たす $g \in L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ が定める境界値問題

$$\begin{cases} -\triangle u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n, \\ u = g & \text{on } \partial\mathbb{R}_+^n. \end{cases}$$

の解

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\omega_n}\int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dS(y).$$

の微分 Du は原点の近傍で非有界である．

[証明]. x_n に関する導関数

$$u_{x_n}(x) = \frac{2}{n\omega_n}\int_{\mathbb{R}^n_+}\frac{g(y)}{|x-y|^n}dy - \frac{2x_n^2}{n\omega_n}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\frac{g(y)}{|x-y|^{n+2}}dy.$$

を考える．$x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0$ を代入し，$x_n = h > 0$ と表すと

$$u_{x_n}(he_n) = \frac{2}{n\omega_n}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\frac{g(y)}{(h^2+|y|^2)^{n/2}}dy = \frac{2}{n\omega_n}\left(\int_{\partial\mathbb{R}^n_+\cap\{|y|\leqslant 1\}}\frac{|y|}{(h^2+|y|^2)^{n/2}}dy + \int_{\partial\mathbb{R}^n_+\cap\{|y|>1\}}\frac{g(y)}{(h^2+|y|^2)^{n/2}}dy\right).$$

と分解できるが，第 1 項は $h \to 0$ の極限で非有界である．実際，第 1 項は Fubini の定理より

$$\frac{2}{n\omega_n}\int_0^1\int_{\partial B^{n-1}(0,r)}\frac{r}{(h^2+r^2)^{n/2}}dSdr = \frac{2(n-1)\omega_{n-1}}{n\omega_n}\int_0^1\frac{r^{n-1}}{(h^2+r^2)^{n/2}}dr.$$

と計算できるが，$h \to 0$ の極限でこの積分は発散する．■

問題 3.3 (熱方程式の上半空間上の解公式).

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ u = \phi & \text{on } \mathbb{R}^+ \times \{0\}, , \\ u = 0 & \text{on } \{0\} \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \qquad \phi \in C_b(\mathbb{R}_+), \phi(0) = 0.$$

の解は，奇関数拡張を $\tilde{\phi}$ として，

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}}\tilde{\phi}(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy.$$

で与えられる．

[証明]. 3 つ目の条件 $u(0,t) = 0$ を確認すればよいが，

$$u(0,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}}\tilde{\phi}(y)e^{-\frac{y^2}{4t}}dy$$

の被積分関数が y に関して奇関数であることに注意すればよい．■

問題 3.4 .

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ u = \phi & \text{on } \mathbb{R}^+ \times \{0\}, , \\ u_x + u = 0 & \text{on } \{0\} \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \qquad \phi \in C^1(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+), \phi_x(0) + \phi(0) = 0.$$

の解を与えよ．

[証明].

方針

$$v := u_x + u$$

の形が先に求まるから，v を所与として先にこの ODE を解いておく．これは，斉次化 $u_x + u = 0$ の解である Ce^{-x} と特解の和であるが，特解は定数変化法により，$u(x) = C(x)e^{-x}$ の形を予想すると

$$u_x + u = C'(x)e^{-x} = v$$

が必要．これを積分して

$$C(x) = \int_a^x e^y v(y)dy, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

は特解になる．以上より，u の表示は

$$u(x,t) = e^{-x}\left(\int_a^x e^y v(y)dy + C\right), \qquad a, C \in \mathbb{R}.$$

という形であることが必要．方程式は 1 階であったから，$C = 0$ としても一般性は失われない．

v の表示　v は

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ v = \phi_x + \phi & \text{on } \mathbb{R}^+ \times \{0\}, \\ v = 0 & \text{on } \{0\} \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

を満たすから，$\widetilde{\phi}', \widetilde{\phi}$ を $\mathbb{R}$ 上への奇関数拡張とすると，

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \left(\widetilde{\phi}'(y) + \widetilde{\psi}(y) \right) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy.$$

初期条件の確認　以上によれば，

$$u(x,t) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{4\pi t}} \int_a^x e^z \int_{\mathbb{R}} \left(\widetilde{\phi}'(y) + \widetilde{\psi}(y) \right) e^{-\frac{(z-y)^2}{4t}} dy dz.$$

という形が必要であることが解り，まだ確認していない条件は $u(x,0) = \phi(x)$ である．部分積分により

$$u(x,0) = \phi(x) - e^{a-x}\phi(a).$$

と計算できるから，$a = -\infty$ と取ればよい．

以上から，

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^x e^{y-x} v(y,t) dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^x e^{y-x} \int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{\phi}'(z) + \widetilde{\phi}(z)) e^{-\frac{(y-z)^2}{4t}} dz dy.$$

■

4　12 月 8 日発表分

熱方程式のよい練習問題．

問題 4.1． 対流付き拡散方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u_x & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u = \varphi & \text{on } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases} \qquad \varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$$

を考える．

(1) $v(x,t) := u(x+t,t)$ の満たすべき方程式を求めよ．
(2) 積分因子 $\psi(x,t) := e^{\frac{x}{2} - \frac{t}{4}}$ について $u := \psi w$ によって定めた w が熱方程式を満たすような $\psi(x,t)$ を見つけよ．

[解]．

(1)

$$\begin{cases} v_t(x,t) & = u_x(x+t,t) + u_t(x+t,t), \\ v_{xx}(x,t) & = u_{xx}(x+t,t) \end{cases}$$

より，$v_t - v_{xx} = 0$ が $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ 内で成り立ち，$t = 0$ の際の初期条件は変わらず $v(x,0) = u(x,0) = \varphi(x)$ を満たす．よって，

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy.$$

$$u(x,t) = v(x-t,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y-t)^2}{4t}} dy.$$

(2) ψ は

$$\psi_t = -\frac{1}{4}\psi, \quad \psi_x = \frac{1}{2}\psi.$$

を満たすから，

$$u_t = \psi_t w + \psi w_t = \left(w_t - \frac{1}{4} w \right) \psi,$$

$$u_{xx} - u_x = \left(w_{xx} - \frac{1}{4} w \right) \psi.$$

と計算できる．よって特に，$w_t = w_{xx}$ が必要で，初期条件は $w(x,0) = u(x,0)\psi^{-1}(x,0) = \varphi(x)e^{-\frac{x}{2}}$．よって，

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t} - \frac{y}{2}} \varphi(y) dy.$$

$$u(x,t) = \psi(x,t)w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t} + \frac{x-y}{2} - \frac{t}{4}} \varphi(y) dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y-t)^2}{4t}} dy.$$

■

問題 4.2 . 非斉次な熱方程式の初期値境界値問題

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,t) & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ u = h & \text{on } \{0\} \times \mathbb{R}^+, \\ u = \varphi & \text{on } \mathbb{R}^+ \times \{0\}. \end{cases} \qquad f \in C_b^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+), h \in C_b^1(\mathbb{R}_+), \varphi \in C_b(\mathbb{R}_+), h(0) = \varphi(0).$$

の解は

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{x}{\sqrt{4\pi(t-s)^3}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} h(s) ds + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} - e^{-\frac{|x+y|^2}{4t}} \right) \varphi(y) dy$$
$$+ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} - e^{-\frac{|x+y|^2}{4(t-s)}} \right) f(y,s) dy ds.$$

が与える．

【解】. $v := u - h$ と定めると，

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = f(x,t) - h'(t) & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ v = 0 & \text{on } \{0\} \times \mathbb{R}^+, \\ v = \varphi - h(0) & \text{on } \mathbb{R}^+ \times \{0\}. \end{cases}$$

を満たす．これは $\mathbb{R}_+$ 上の解公式**??**と Duhamel の原理を併せて，

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} - e^{-\frac{|x+y|^2}{4t}} \right) (\varphi(y) - h(0)) dy + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} - e^{-\frac{|x+y|^2}{4(t-s)}} \right) (f(y,s) - h'(s)) dy ds.$$

$u = v + h$ に代入すると式を得る． ■

問題 4.3 . 方程式 $u_t = x u_{xx}$ を考える．

(1) $u(x,t) = -2xt - x^2$ は $u_t = x u_{xx}$ を満たす．
(2) u の $R := [-2,2] \times [0,1]$ 上での最大値を求めよ．
(3) u は放物型境界 $([-2,2] \times \{0\}) \cup (\{-2,2\} \times [0,1])$ 上で最大値を達成するか？

【解】. ■

問題 4.4 . 退化放物型方程式

$$u_t = (x u_x)_x \quad \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

を考える．

(1) 任意の解 u と $\lambda > 0$ について，$v(x,t) := u(\lambda^\alpha x, \lambda t)$ も解になる．
(2) $u(x,t) := t^{-1} \varphi(t^{-\alpha} x)$ が解になるような関数 φ はどんな微分方程式を満たすか？
(3) $\varphi(0) = 1$ を満たす解により，自己相似解であって $u(0,t) = t^{-1}$ $(t > 0)$ を満たすものを得よ．

[解].

(1) 方程式の (x,t) に $(\lambda^\alpha x, \lambda t)$ を代入すれば，$u_t(\lambda^\alpha x, \lambda t) = u_x(\lambda^\alpha x, \lambda t) + \lambda^\alpha x u_{xx}(\lambda^\alpha x, \lambda t)$ をみたす．また，

$$v_t(\lambda^\alpha x, \lambda t) = \lambda u_t(\lambda^\alpha x, \lambda t) = \lambda u_x + \lambda^{\alpha+1} u_{xx} = \lambda^{1-\alpha} v_x + \lambda^{1-\alpha} x v_{xx}.$$

より，$\alpha = 1$ が必要．

(2) $u(x,t)=\frac{1}{t}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$ を微分すると，$u_t=u_x+xu_{xx}$ は

$$-\frac{1}{t^2}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)-\frac{x}{t^3}\varphi'\left(\frac{x}{t}\right)=\frac{1}{t^2}\varphi'\left(\frac{x}{t}\right)+\frac{x}{t^3}\varphi''\left(\frac{x}{t}\right)$$

となる．$s:=x/t$ とすると，

$$s\varphi''+(1+s)\varphi'+\varphi=0.$$

(3) 特性関数 $st^2+(1+s)t+1=0$ からの類推から，$\varphi(x)=e^{-x}$ が解の 1 つだと予想でき，実際その通りである．よって，$u(x,t):=\frac{1}{t}e^{-\frac{x}{t}}$ は 1 つの自己相似解である．

■

注意 (途中で出現した Kummer の微分方程式について)．途中の変数係数 ODE

$$s\varphi''+(1+s)\varphi'+\varphi=0.$$

は $s=0,\infty$ に特異点を持っている．この解空間は 1 次元と決まっているのであろうか？実は特異点が 2 つしかないように，Kummer の方程式

$$tx''+(b-t)x'-ax=0\qquad(a,b\in\mathbb{C})$$

と関係が深く，一般解は e^{-s} と $e^{-s}\mathrm{Ei}(s)$ で張られるらしい．Ei は指数積分というが，$0,\infty$ に分岐点を持つ（したがって問題文の中の条件 $\varphi(0)=1$ は解を一意に定めている）．Ei を複素関数とみるときは適切な分枝を取って E_1 と表され，$-E_1(x)=\mathrm{Ei}(x)\ (x>0)$ の関係を持つ．$b=1,a=0$ とした Kummer の微分方程式も通常は合流型超幾何関数 M と U で張られる 2 次元の解空間を持つが，$E_1(-z)$ も解にもつ．合流型超幾何関数と

$$E_1(z)=e^{-z}U(1,1;z)$$

の関係にある．

5　12 月 22 日発表分

波動方程式について無双した問題．

問題 5.1．

(1) 初期値問題

$$\begin{cases}u_{tt}=c^2u_{xx} & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+,\\ u=g,\quad u_t=0 & \text{on } \mathbb{R}\times\{0\},\end{cases}\qquad g(x):=1_{(-\pi/2,\pi/2)}\cos x\in C_c(\mathbb{R}).$$

の解 $u(x,t)$ を求めよ．

(2) $A,B,C\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ が定める PDE

$$Au_{xx}+2Bu_{xt}+Cu_{tt}=0$$

について，次は同値である：

(a) ある実数 $c_1<c_2$ が存在して，任意の関数 $f,g\in C^2(\mathbb{R})$ に対して，

$$u(x,t):=f(x-c_1t)+g(x-c_2t)$$

は $Au_{xx}+2Bu_{xt}+Cu_{tt}=0$ の解になる．

(b) 方程式は双曲型である：$B^2-AC>0$ である．

[解]．

(1) g が偶関数，g' が奇関数であることに注意すると，

$$u(x,t):=\frac{1}{2}\Big(g(x+ct)+g(x-ct)\Big)$$

は解を与えている．

(2) (1)⇒(2)　必要条件をまず考えると，各微分を計算することより，任意の $f,g \in C^2(\mathbb{R})$ に対して

$$Au_{xx} + 2B_{xt} + Cu_{tt} = (A - 2Bc_1 + Cc_1^2)f''(x - c_1 t) + (A - 2Bc_2 + Cc_2^2)g''(x - c_2 t) = 0$$

が必要である．このためには，例えば $f(x) = x^3 1_{(0,\infty)}, g(x) = x^3 1_{(-\infty,0)} \in C^2(\mathbb{R})$ を考えると，2 階微分はそれぞれ $(0,\infty),(-\infty,0)$ に台と持つから，

$$\begin{cases} A - 2Bc_1 + Cc_1^2 = 0 \\ A - 2Bc_2 + Cc_2^2 = 0 \end{cases}$$

が必要であるが，これは $B^2 - AC > 0$ と同値.

(2)⇒(1)　実際にこれで十分であることは，上の連立方程式を満たす $c_1 < c_2$ を取れば，任意の $f,g \in C^2(\mathbb{R})$ に対して構成した u は常に方程式を満たすようになる.

■

要諦. g は C^1-級でさえなく，したがって古典解ではない．殆ど至る所の解と考えても，超関数解と考えても良い.

<u>問題 5.2</u> **.** 初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t) & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u = u_t = 0 & \text{on } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases} \qquad f(x,t) = F'''(x)t \ (F \in C^3(\mathbb{R})), c > 0$$

の解 $u(x,t)$ を求めよ.

<u>[解]</u>**.**

$$v(x,t) := u(x,t/c) + F'(x)\frac{t}{c^3}$$

とおくと，これは

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ v = 0 \quad v_t = \dfrac{1}{c^3}F'(x) & \text{on } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases}$$

を満たす．$F' \in C^2(\mathbb{R})$ に注意すれば，これは d'Alembert の公式を適用することができる．実際,

$$v_{xx} = u_{xx}(x,t/c) + F'''(x)\frac{t}{c^3}, \quad v_{tt} = c^{-2}u_{tt}(x,t/c)$$

であり，2 つは

$$c^2 u_{xx}(x,t/c) + F'''(x)\frac{t}{c} = c^2 u_{xx}(x,t/c) + f(x,t/c) = u_{tt}(x,t/c)$$

と，確かに等号で結ばれている．よって，d'Alembert の公式より,

$$v(x,t) = \frac{1}{2c^3}\int_{x-t}^{x+t} F'(y)dy.$$

$$\therefore \qquad u(x,t) = \frac{1}{2c^3}\int_{x-tc}^{x+tc} F'(y)dy - F'(x)\frac{t}{c^2}.$$

■

要諦. 外力項はいくらでも滑らかだと思って良いという.

<u>問題 5.3</u> **.** 次のそれぞれについて，$E' = 0$ in $\mathbb{R}^+$ を示せ.

(1) 境界値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} + f(u) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = u_x(0,t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

を満たす古典解 $u \in C_c^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ について,

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^\infty (u_t^2 + c^2 u_x^2 + 2F(u))dx, \qquad F(x) := \int_0^x f(y)dy$$

とする.

(2) 境界値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ u_x(0,t) + Au(0,t) = 0 & t > 0. \end{cases} \qquad c > 0, A \in \mathbb{R}$$

を満たす古典解 $u \in C_c^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ について,

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^\infty (u_t^2 + c^2 u_x^2)dx + \frac{1}{2}au(0,t)^2, \qquad a := -c^2 A$$

と定める.

[解].

(1) 無限遠での減衰条件と $x = 0$ での境界条件から $u_x(\infty,t)u_t(\infty,t) - u_x(0,t)u_t(0,t) = 0$ で,

$$\int_0^\infty u_x u_{tx} dx = \Big[u_x u_t\Big]_0^\infty - \int_0^\infty u_{xx}u_t dx = -\int_0^\infty u_{xx}u_t dx.$$

だから,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= \int_0^\infty (u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{tx} + f(u)u_t)dx \\ &= \int_0^\infty u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx} + f(u))dx = 0. \end{aligned}$$

(2)

$$\int_0^\infty u_x u_{tx} dx = \Big[u_x u_t\Big]_0^\infty - \int_0^\infty u_{xx}u_t dx = -u_x(0,t)u_t(0,t) - \int_0^\infty u_{xx}u_t dx$$

で，境界条件より $-u_x(0,t) = Au(0,t)$ であるから,

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \int_0^\infty (u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{tx})dx + au(0,t)u_t(0,t) \\ &= \int_0^\infty u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx})dx + Ac^2 u(0,t)u_t(0,t) + au(0,t)u_t(0,t) = 0. \end{aligned}$$

■

問題 5.4 .

$$\begin{cases} u_{tt} = \triangle u & \text{in } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \\ u(x,y,0) = g(x,y) & \text{in } \mathbb{R}^2, \\ u_t(x,y,0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2. \end{cases} \qquad g(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}.$$

の解 $u(x,y,t)$ の $\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ 上での具体的な表示を求めよ.

[解]. ■

考察. まず，$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ 上での解 u を考えたのちに，これを偶関数に延長 $u(x,t) := u(x,-t)$ $(t < 0)$ すれば，元の方程式を満たす．$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ 上での解は，Poisson の公式より,

$$\begin{aligned} u(z,t) &= \frac{1}{2}⨍_{B(z,t)} \frac{tg(\zeta) + tDg(\zeta)\cdot(\zeta - z)}{\sqrt{t^2 - |\zeta - z|^2}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2}\frac{t}{|B(z,t)|}\int_{B(z,t)} \frac{1}{\sqrt{t^2 - |\zeta - z|^2}} \frac{1 - |\zeta|^2}{(1+|\zeta|^2)^2} d\zeta, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

さらに $z = 0$ とすれば，被積分関数は動径 $|\zeta|$ のみに依存することになる.

問題 5.5 . 次の境界値問題の十分速く減衰する古典解 u について，$E' = 0$ in $\mathbb{R}^+$ を示せ.

(1)

$$\begin{cases} u_{tt} + Ku_{xxxx} = 0, & x, t > 0, \\ u(0,t) = u_t(0,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \qquad K > 0,$$

に対して,

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^\infty (u_t^2 + Ku_{xx}^2)dx.$$

(2)

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & \text{in } (0,L)\times(0,\infty), \\ u_x(0,t) + Au(0,t) = 0, & t>0, \\ u_x(L,t) + Bu(L,t) = 0, & t>0. \end{cases} \qquad c>0,\ a,b\in\mathbb{R},$$

に対して,

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L (u_t^2 + c^2 u_x^2)dx + \frac{1}{2}au(0,t)^2 + \frac{1}{2}bu(L,t)^2, \qquad a,b\in\mathbb{R}.$$

[解].

(1) u とその 4 階までの微分が十分速く減衰するとき，微分と積分の記号を交換することで

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{2}\int_0^\infty (2u_tu_{tt} + 2Ku_{xx}u_{xxt})dx = \int_0^\infty (u_tu_{tt} + Ku_{xx}u_{txx})dx$$

と計算できる．u は古典解と仮定しており，十分滑らかだとするから，$u_{xxt} = u_{txx}$ が成り立つことを用いた．するとこの最右辺の第二項は，部分積分により，

$$\int_0^\infty u_{xx}u_{txx}dx = \Big[u_{xx}u_{tx}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty u_{xxx}u_{tx}dx = -\int_0^\infty u_{xxx}u_{tx}dx$$

と計算できる．なお，減衰条件より $u_{xx}(\infty,t)u_{tx}(\infty,t) = 0$ で，さらに境界条件 $u_x(0,t) = 0$ から $u_{xt}(0,t) = 0$ より，$u_{xx}(0,t)u_{tx}(0,t) = 0$ であることを用いた．よって，再び部分積分を用いれば，

$$-\int_0^\infty u_{xxx}u_{tx}dx = -\Big[u_{xxx}u_t\Big]_0^\infty + \int_0^\infty u_{xxxx}u_tdx = \int_0^\infty u_{xxxx}u_tdx$$

を得る．ただし，$u(0,t) = 0$ より $u_t(0,t) = 0$ が従うことを用いた．以上より，

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^\infty u_t(u_{tt} + Ku_{xxxx})dx = 0.$$

(2) $a = -A, b = B$ と定めれば良い．まず，(1) と同様にして微分は

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^L (u_tu_{tt} + c^2u_xu_{xt})dx + au(0,t)u_t(0,t) + bu(L,t)u_t(L,t)$$

と計算できる．$u_{xt} = u_{tx}$ に注意すれば，第一項は部分積分より，

$$\begin{aligned} \int_0^L u_xu_{xt}dx &= \Big[u_xu_t\Big]_0^L - \int_0^L u_{xx}u_tdx \\ &= u_x(L,t)u_t(L,t) - u_x(0,t)u_t(0,t) - \int_0^L u_{xx}u_tdx \\ &= -Bu(L,t)u_t(L,t) + Au(0,t)u_t(0,t) - \int_0^L u_{xx}u_tdx. \end{aligned}$$

ただし，最後の等号では，2 つの境界条件を用いた．以上の考察より，

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \int_0^L u_t(u_{tt} - c^2u_{xx})dx - Bu(L,t)u_t(L,t) + Au(0,t)u_t(0,t) + au(0,t)u_t(0,t) + bu(L,t)u_t(L,t) \\ &= (b-B)u(L,t)u_t(L,t) + (A+a)u(0,t)u_t(0,t) \end{aligned}$$

であるが，$b = B, a = -A$ としたから，これは $= 0$ である．

■

6　1 月 12 日発表分

最後，特性曲線法と Cauchy-Kowalevski の定理に向けた調整.

問題 6.1．1 階偏微分方程式

$$u_t + (x^2+1)u_x = 0$$

を考える．

(1) 特性曲線の方法によって一般解を求めよ．
(2) 初期値問題

$$\begin{cases} u_t + (x^2+1)u_x = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2, \\ u = f & \text{on } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases}$$

はどのような $f \in C^1(\mathbb{R})$ に対して古典解 $u \in C^1(\mathbb{R})$ を持つか？
(3) (2) の解が一意的になるような領域 $D \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^2$ のうち最大のものを求めよ．

[証明]．この方程式は

$$F(p,z,x) := \begin{pmatrix} (x^1)^2+1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \end{pmatrix}$$

が与えており，$F_p(p,z,x) = \begin{pmatrix} (x^1)^2+1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから，簡略化された特性方程式は

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = F_p(p,z,x) = \begin{pmatrix} (x^1)^2+1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \dot{z}(s) = F_p(p,z,x) \cdot p = 0 \end{cases}$$

特性方程式を初期値 $\begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(x^0 \in \mathbb{R})$ と $z^0 := u(x^0, 0)$ の下で解くと，

$$\begin{cases} x^1 = \tan(s+C) & C := \arctan x^0 \in (-\pi, \pi) \\ x^2 = s, \\ z = z^0 = u(x^0,0) = f(x^0) \end{cases}$$

を得る．任意の $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ について，

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ s \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \tan(\arctan(x) - t) \\ t \end{pmatrix}$$

と取れば $\boldsymbol{x}(s) = (x,t)$ を満たす．

(1) よって，任意の関数 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，

$$u(x,t) = \varphi(\tan(\arctan(x) - t))$$

は解を与える．
(2) 任意の $f \in C^1(\mathbb{R})$ に対して，

$$u(x,t) = f(\tan(\arctan(x) - t))$$

は区分的 C^1-級の解である．

■

問題 6.2．2 つの 1 階偏微分方程式

(a) $xu_x + yu_y = 0$.
(b) $xu_x - yu_y = 0$.

を考える．

(1) (a) の $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ 上の一般解を求めよ．
(2) どのようなときに $(0,0)$ 上で連続になるか？

(3) (b) の $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ 上の一般解を求めよ．

(4) どのようなときに $(0,0)$ 上で連続になるか？

[証明].

(1) この方程式は

$$F(p,z,x) := \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \end{pmatrix} = 0$$

が与える方程式であり，$F_p(p,z,x) = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$．よって，特性方程式は

$$\begin{cases} \dot{x^1} = x^1 \\ \dot{x^2} = x^2 \\ \dot{z} = 0. \end{cases}$$

これを $(x^0, 1)$ を初期値にして解くと，$x^0 \in \mathbb{R}$ で,

$$\begin{cases} x^1 = x^0 \mathrm{e}^s, \\ x^2 = \mathrm{e}^s, \\ z = z^0 = u(x^0, 1) \end{cases}$$

を得る．任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ に対して,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \mathrm{e}^s \\ \mathrm{e}^s \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x^0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{y} \\ \log y \end{pmatrix}$$

より，一般解は

$$u(x,y) = u\left(\frac{x}{y}, 1\right) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right), \qquad \varphi : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \overline{\mathbb{R}}.$$

(2) ?

(3) この方程式は

$$F_p(p,z,x) := \begin{pmatrix} x^1 \\ -x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \end{pmatrix} = 0$$

が与える方程式であり，$F_p(p,z,x) = \begin{pmatrix} x^1 \\ -x^2 \end{pmatrix}$．よって，特性方程式は

$$\begin{cases} \dot{x^1} = x^1, \\ \dot{x^2} = -x^2, \\ \dot{z} = 0. \end{cases}$$

これを $(x^0, 1)$ について解くと,

$$\begin{cases} x^1 = x^0 \mathrm{e}^s, \\ x^2 = \mathrm{e}^{-s} \\ z = u(x^0, 1) \end{cases}$$

任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ に対して,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \mathrm{e}^s \\ \mathrm{e}^{-s} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x^0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ -\log y \end{pmatrix}$$

より，一般解は

$$u(x,y) = \varphi(xy), \qquad \varphi : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$$

■

注意. ものの本では，特性方程式を解く際に便宜的な初期値 $(x^0, 1)$ や $(x^0, 0)$ をおくことを回避するために，

$$P(x, y, u)p + Q(x, y, u)q = R(x, y, u)$$

の形の式を Lagrange の偏微分方程式といい (1 階の準線型 PDE のこと)，これに対する特性微分方程式は

$$\frac{dx}{dP(x, y, u)} = \frac{dy}{dQ(x, y, u)} = \frac{dz}{dR(x, y, u)} (= ds)$$

である，という導入をする．

<u>**問題 6.3**</u> **.** Burgers 方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2, \\ u = f & \text{on } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases}$$

を考える．次の初期値について，解が一意に定まる領域 $D \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^2$ のうち最大のものを求めよ：

(1) $f(x) = \tanh(x)$.

(2) $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1, \\ x & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & 1 < x. \end{cases}$

<u>**問題 6.4**</u> **.** $\Omega \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^N$ を開集合とし，$f \in C^\infty(\Omega)$ とする．

(1) 次の多変数の Taylor の定理を示せ：任意の線分 $[x, y] \subset \Omega$ と $K \in \mathbb{N}^+$ について，

$$f(y) = \sum_{|\alpha| \leqslant K} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(y)(y - x)^\alpha + \int_0^1 \sum_{|\alpha| = K+1} \frac{K+1}{\alpha!} D^\alpha f((1 - t)x + ty)(y - x)^\alpha (1 - t)^K dt.$$

(2) f が $x \in \Omega$ において解析的であるとする．このとき，x の近傍点 y について，

$$f(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(y)(y - x)^\alpha.$$

(3) 点 $x \in \Omega$ について，次の 2 条件は同値：

  (a) f は x において解析的である．

  (b) ある $\delta, r, C > 0$ が存在して，任意の $y \in B(x, \delta), \alpha \in \mathbb{N}^N$ について，$|D^\alpha f(y)| \leqslant C\alpha! r^{-|\alpha|}$.

(4) $\{x \in \Omega \mid f$ は x に於て解析的$\}$ は開集合である．